

Elemente
der
Graphischen Statik
der
Bauconstructionen
für
Architekten und Ingenieure

von

Heinrich F. B. Müller-Breslau,

Civil-Ingenieur in Berlin,

Lehrer der Ingenieurwissenschaften und Mitarbeiter von „Ingenieurs Taschenbuch (Hütte)“.

Hierzu ein Atlas mit 18 Tafeln.



Berlin, 1881.

Polytechnische Buchhandlung
A. Seydel.

624.041



Hofmann

Gesellschafts- und Spezial-

Informationen

III.

Aeroplano in der Judenzeit

III.

Heinrich E. B. Müller-Plessow

Ein Beitrag zur Geschichte des jüdischen Fliegens im 19. Jahrhundert

aus dem Nachlass Heinrich E. B. Müller-Plessow

19

Berlin 1981

Verlag für Wissenschaft und Politik

ISBN 3-87533-009-X

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit behandelt denjenigen Theil der Statik der Bauconstructionen, in welchem die graphischen Methoden eine besonders vortheilhafte Verwendung finden.

Nach Ableitung der wichtigsten Sätze über das Kräftepolygon und das Seilpolygon (im Abschnitt I) wurden im Abschnitte II die Momente und Verticalkräfte für den einfachen Balken und im Abschnitte III die inneren Kräfte des einfachen Fachwerks bestimmt.

Abschnitt IV lehrt die Statik der Futtermauern mit Rücksicht auf die ältere und die neuere Erddrucktheorie. Beide Theorien unterscheiden sich nur durch die Annahmen bezüglich der Richtung des Erddruckes auf die stützende Wand, und sind desshalb die Constructionen der älteren Theorie — wenn sie nur in der nöthigen Allgemeinheit durchgeführt werden — auch auf die Ermittelung des Erddruckes nach den neueren durch Rankine in den *Philosophical Transactions* (1857) begründeten Principien anwendbar. Es erschien dem Verfasser sogar besonders vortheilhaft, beide Theorien im Zusammenhange vorzutragen. Das Verständniss der neueren Theorie dürfte hierdurch nur gefördert werden.

Abschnitt V ist der Theorie der Tonnengewölbe gewidmet. Neben der älteren, auf ziemlich willkürlichen Annahmen beruhenden, für gewisse Fälle aber ausreichenden Methode wurde in den §§ 27 bis 29 die Elasticitätstheorie, und zwar unter Zuhilfenahme der Analysis, entwickelt. Die betreffenden Untersuchungen, welche sich vorzugsweise auf symmetrische Gewölbe beziehen, bilden einen Auszug aus des Verfassers allgemeiner geschriebenen Abhandlung: „Die Elasticitätstheorie der Tonnengewölbe“ in der Zeitschrift für Bauwesen, 1881, Heft VII.*)

Den Hauptwerth legte der Verfasser auf möglichst einfache Lösung der verschiedenen hier vorgeführten Aufgaben unter steter Hervorhebung des zweifelhaften Werthes, den allzusubtile Untersuchungen in vielen Fällen besitzen. Die Geometrie der Lage, welche dem ausführlichen, nach höheren Zielen gerichteten Studium der graphischen Statik zweck-

*). Diese Abhandlung erscheint auch als Separatabdruck im Verlage von Ernst u. Korn in Berlin.

mässig zu Grunde gelegt wird, wurde nicht angewendet, weil das Werk hauptsächlich dem Praktiker gewidmet ist, und kein Grund vorliegt, diesem eine mit einfachen Hilfsmitteln lösbare Aufgabe, in ein gelehrtes Gewand gekleidet, vorzuführen.

Nur die Elasticitätstheorie der Tonnengewölbe dürfte eine etwas grössere geistige Anstrengung Seitens des Lesers erfordern. Dem Verfasser erschien es hier vortheilhaft, die Analysis, welche auch an anderen Stellen des Buches vereinzelt Anwendung findet, bei Bestimmung der Formänderungen und der hieraus abzuleitenden Bedingungen zu verwerthen, und verweist er diejenigen Leser, welche sich für eine geometrische Behandlung dieses Gegenstandes interessiren, auf Culmann's „Graphische Statik“. Allerdings ist die Lösung Culmann's — obwohl höchst elegant — insofern sehr unvollkommen, als nur der Einfluss der Momente auf die Formänderungen berücksichtigt wird, und desshalb bei der Anwendung auf Gewölbe Resultate erzielt werden, welche in vielen Fällen keinen grösseren Werth beanspruchen dürfen als die der älteren Gewölbetheorie.*)

Berlin, im Juni 1881.

Der Verfasser.

*) Wenn man in den auf Seite 107 des vorliegenden Buches abgeleiteten Elasticitätsgleichungen (8) die von N abhängigen Glieder vernachlässigen, also nur die von den Momenten herrührenden Formänderungen beachten will (wie dies Culmann thut), so hält man sich am besten an den von Winkler aus den vereinfachten Gleichungen abgeleiteten Satz, dass — im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate gesprochen — diejenige Drucklinie eines Gewölbes die wirkliche ist, welche sich am meisten der Mittellinie nähert. Ist eine mit der Mittellinie zusammenfallende Drucklinie möglich, so ist diese Drucklinie die wirkliche, während man in anderen Fällen nahezu dieselben Resultate wie nach der Elasticitätslehre erhält, wenn man die günstigste Drucklinie als wirkliche auffasst.

Nun ist aber der Einfluss der mit N behafteten Glieder — namentlich bei flachen Gewölben — ein so bedeutender, dass eine mit Rücksichtnahme auf diese Glieder construirte Drucklinie selbst in solchen Fällen aus dem mittleren Drittel des Gewölbes treten kann, in denen eine mit der Mittellinie zusammenfallende Drucklinie möglich ist. Eine Vernachlässigung dieser Glieder ist um so weniger statthaft, als durch Deformationen des Lehrgerüstes, durch Nachgeben der Widerlager und Erniedrigung der Temperatur eine noch ungünstigere Lage der Drucklinie bewirkt werden kann.

Inhalts-Verzeichniss.

	Seite
Literatur	VII
I. Abschnitt. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene.	
§ 1. Zusammensetzung der Kräfte	1
§ 2. Zerlegung der Kräfte	5
§ 3. Das statische Moment der Kräfte	6
II. Abschnitt. Graphische Bestimmung der am einfachen Balken angreifenden Kräfte.	
§ 4. Definitionen	8
§ 5. Permanente direkte Belastung	10
§ 6. Permanente indirekte Belastung	13
§ 7. Gleichförmige permanente und veränderliche Belastung	15
§ 8. Die veränderliche Belastung besteht aus einem Systeme concentrirter Lasten	19
III. Abschnitt. Der einfache Fachwerkbalken.	
§ 9. Definitionen	24
§ 10. Allgemeine Theorie	25
§ 11. Kräftepläne für permanente Belastung (nach Cremona)	28
§ 12. Fachwerkbalken mit gleichförmiger Belastung	35
§ 13. Fachwerkbalken für Eisenbahnbrücken	38
§ 14. Schärfere Bestimmung der Spannkräfte in den Gitterstäben bei gleich- mässiger Belastung	42
§ 15. Fachwerkträger mit Gegendiagonalen	44
§ 16. Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke)	55
§ 17. Kräfteplan für einen Halbparabelträger (Eisenbahnbrücke)	59
§ 18. Kräfteplan für einen parabolischen Dachbinder	64
IV. Abschnitt. Theorie des Erddrucks. Berechnung der Futtermauern.	
§ 19. Einleitung	66
§ 20. Lage der Gleitfläche (Grösse des Erddruckes)	68
§ 21. Erddruck auf eine ebene Wand bei ebener Terrainfläche	71
§ 22. Druck eines überhöhten Erdkörpers auf eine Futtermauer	76
§ 23. Erddrucktheorie von Rankine	77
§ 24. Bemerkungen über die Richtung des Erddruckes auf eine feste Wand	84
§ 25. Beispiele für die Berechnung der Futtermauern	85

	Seite
V. Abschnitt. Theorie der Tonnengewölbe.	
§ 26. Stützlinie und Drucklinie (ältere Gewölbetheorie)	98
§ 27. Bestimmung der wirklichen Drucklinie (neuere Theorie)	104
§ 28. Das symmetrische Tonnengewölbe	109
§ 29. Berechnung einer gewölbten Strassenbrücke von 16 ^m Stützweite und 3 ^m Pfeilhöhe	117
§ 30. Die Minimaldrucklinie	130
Anhang	135

L i t e r a t u r .

Graphische Statik.

- C. Culmann, Die graphische Statik. Zürich, erste Auflage 1866, zweite Auflage 1875. Von der zweiten Auflage ist erst die Hälfte erschienen. Culmann ist der Begründer der graphischen Statik.
J. Bauschinger, Elemente der graphischen Statik. München.
Levy, *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris 1874.

Theorie der einfachen stabförmigen und Fachwerk-Träger.

- E. Winkler, Theorie der Brücken. Heft I: Aeussere Kräfte gerader Träger, und Heft II: Innere Kräfte gerader Träger. Wien 1873—1875. Winkler hat zuerst die Darstellung der Verticalkräfte als Ordinaten eines Seilpolygons (Curve A auf Tafel 3 unseres Werkes) gezeigt.
W. Wittmann, Die graphische Bestimmung der Maximalmomente. München 1877.
C. Stelzel, Theorie einfacher, statisch bestimmter Brückenträger. Wien 1880.
J. Clark Maxwell, *On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces.* Engineer, Vol. 24, Seite 402. Hier wird zum ersten Male die Construction reciproker Kräftepläne für Fachwerke mit konstanter Belastung gezeigt. Allgemeinere Untersuchungen hat Maxwell niedergelegt in der Abhandlung: *On reciprocal figures and diagrams of forces.* Philosophical Magazine, April 1864, Seite 250.
L. Cremona, *Le figure reciproche nella Statica Grafica.* Milano, J. Giugno, 1872. Die Untersuchungen von Cremona sind viel allgemeiner gehalten als die von Maxwell.
Mohr, Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger. Zeitschr. des Arch. u. Ing.-Vereines zu Hannover, 1874, Seite 223. Enthält in Form einer Anmerkung eine sehr interessante Methode der graphischen Berechnung des Fachwerk-balkens.
L. Tetmajer, Die äusseren und inneren Kräfte an statisch bestimmten Brücken- und Dachstuhl-Constructionen. Zürich 1875.

Erddrucktheorie.

a. Ältere Theorie.

- Rebhann, Theorie des Erddruckes und der Futtermauern. Wien 1871. Die in No. 59 und 60 des vorliegenden Werkes enthaltenen Sätze hat zuerst (allerdings unter Annahme unbelasteter Oberfläche) Rebhann aufgestellt; doch röhrt die hier gegebene Beweisführung von Winkler her.

b. Neuere Theorie.

- J. Macquorn Rankine, *On the stability of loose earth.* Philosophical Transactions, Vol. 147 (1857), Part I, Seite 9—28. In dieser Arbeit begründet Rankine (auf analytischem Wege) die neuere Erddrucktheorie.
- E. Winkler, Neue Theorie des Erddrucks, (1860 u. 1871). In dieser Arbeit werden (unabhängig von Rankine) nach einer Reihe allgemeinerer Untersuchungen die Drücke im Inneren einer unendlichen, oben durch eine Ebene begrenzten Erdmasse bestimmt. Die Resultate stimmen mit denen von Rankine überein. Für die Berechnung der Futtermauern empfiehlt Winkler die ältere Theorie.
- Mohr, Beitrag zur Theorie des Erdrückes. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1871, Seite 344. Es wird die Rankine'sche Theorie geometrisch entwickelt. Mohr empfiehlt die Anwendung der neueren Theorie auf die Berechnung der Futtermauern, sobald Hauptfläche I (vergl. Seite 81 u. f. des vorliegenden Werkes) innerhalb des gestützten Erdkörpers liegt.
- Weyrauch, Theorie des Erddrucks. Wien 1881. Es werden hier verschiedene neue Constructionen des Erddrucks mitgetheilt. Die Resultate stimmen mit denen von Rankine überein. Man vergl. auch Seite 82 des vorliegenden Werkes.
- Gewölbetheorie.
- E. Winkler, Elasticitätslehre. Prag 1866. Auf Seite 357 findet man die Berechnung eines Gewölbes nach der Elasticitätstheorie.
- C. Clericetti, Das Princip der Bruchfuge bei den Gewölben. Civil-Ingenieur, 1874, Seite 349.
- F. Heinzerling, Die Brücken der Gegenwart, 2^{te} Abtheil.: Steinerne Brücken. Aachen 1875.
- C. Clericetti, *La cerniera ed il principio dei punti di egual pressione nelle volte.* Il Politecnico, 1876, Seite 100.
- M. de Perrodil, *Théorie de la stabilité des voutes.* Annales des ponts et chaussées, 1876, Tome XI, Seite 178.
- G. Tolkmitt, Die Berechnung der Gewölbestärke und Bogenform massiver Brücken. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1878, Seite 451.
- Gros de Perrodil, *Resistance des voutes et arcs métalliques employés dans la construction des ponts.* Paris 1879.
- E. Winkler, Ueber die Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauzeitung 1879, Seite 611, und 1880, Seite 58.
- W. Wittmann, Statik der Hochbauconstructionen. Berlin 1879.
- A. Foepli, Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.
- H. F. B. Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Theil 1, die stabförmigen elastischen Bögen. Berlin 1880. (Die für den Bogen ohne Gelenke mitgetheilten Methoden sind auch bei Berechnung flacher Gewölbe anwendbar.)
- H. F. B. Müller-Breslau, Elasticitätstheorie der Tonnengewölbe. Zeitschrift für Bauwesen 1881, Heft VII. (Erscheint auch als Separatabzug.)

Die Graphische Statik entwickelt auf rein geometrischem Wege die Bedingungen, unter welchen sich ein System von Kräften im Gleichgewichte befindet. Sie stellt die Intensität und Lage einer Kraft durch die Länge und Lage einer geraden Linie dar.

Die Lage einer Kraft ist bekannt, sobald die Richtung der Kraft und ein Punkt, durch welchen diese Richtung geht, gegeben ist; ihre unzweideutige Bestimmung erfordert ferner Hervorhebung des Sinnes, in welchem die Kraft in der angegebenen Richtung wirkt. Dies geschieht am übersichtlichsten durch einen Pfeil, ferner durch die Art der Benennung der die Kraft vorstellenden Strecke. So wird in Fig. 1^a die Kraft P durch die Gerade ab dargestellt, weil sie von a nach b wirkt, hingegen in Fig. 1^b durch die Gerade ba , weil sie von b nach a wirkt.

Die graphische Darstellung eines Kräftesystems nennt man einen Kräfteplan. Die Aufzeichnung eines solchen setzt die Bildung eines Kräftemaassstabes voraus. Dieser soll in allen Fällen praktischer Anwendung so construirt werden, dass einer geraden Linie von 1^{cm} Länge eine Kraft von m Kilogrammen = $\frac{m}{1000}$ Tonnen äquivalent ist, so dass z. B. in einem im Maassstabe 1^{cm} = 2000^k = 2^{tons} gezeichneten Kräfteplane durch eine Linie von 6,2^{cm} Länge eine Kraft von 12,4^{tons} dargestellt wird.

I. Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene.

§ 1. Zusammensetzung der Kräfte. (Tafel 1.)

- 1) Greifen an einem Punkte a (Fig. 2^a) zwei Kräfte P_1 und P_2 an, deren Richtungen und Intensitäten beziehungsweise durch die Richtungen und die Längen der Linien ba und da dargestellt sind, so lassen sich dieselben nach dem Satze vom Parallelogramme der Kräfte zu der Resultirenden $ca = R$ vereinigen. Die Hälfte des Kräfteparallelogramms, nämlich das Dreieck cba in Fig. 2^b heisst Kräfteecke. Die 3 Seiten ba , cb und ca desselben stellen die Kräfte P_1 , P_2 und R dar.

Umgekehrt lässt sich eine Kraft R mit Hilfe des Kräfteparallelogramms (bez. des Kräftedreiecks) in 2 Seitenkräfte (Componenten) P_1 und P_2 , deren Richtungen gegeben sind und welche R in demselben Punkte a schneiden, zerlegen.

2) Sollen die an demselben Punkte p (Fig. 3^a) angreifenden Kräfte P_1 , P_2 , P_3 und P_4 zu einer Resultirenden R vereinigt werden, so setzt man P_1 und P_2 mittelst des Kräftedreiecks cba (Fig. 3^b) zu der Resultirenden R_{1-2} zusammen, hierauf R_{1-2} mit P_3 zur R_{1-3} und diese schliesslich mit P_4 zur $R_{1-4} = R$.

3) Entspricht den Kräften P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , welche an demselben Punkte p (Fig. 4^a) angreifen, ein geschlossenes Kräftepolygon (Fig. 4^b), so wird die Resultirende $R = 0$. Es sind dann die Kräfte P miteinander im Gleichgewicht. Dies schnell zu übersehen, projicire man das Kräftepolygon auf irgend eine gerade Linie LL und denke jede der Kräfte P in eine Seitenkraft parallel zu LL und eine normal zu LL zerlegt; Die Summe der nach der Richtung LL gebildeten Seitenkräfte, d. i. die Summe der Projectionen der Kräfte P auf die Gerade LL ist Null.

Besonders zu betonen bleibt, dass ein Kräftepolygon nur dann geschlossen heisst, wenn sich in demselben nie zwei Pfeile begegnen, d. h. wenn man das Polygon, den Pfeilspitzen folgend, ohne Unterbrechung umfahren kann.

Man sagt auch: das Kräftepolygon in Fig. 4^b hat einen continuirlichen Umfahrungssinn, während das Polygon $edcba$ in Fig. 3^b durch den Pfeil der Kraft R zu einem discontinuirlichen wird.

Aendert man in einem geschlossenen Kräftepolygone den Pfeil irgend einer Kraft, so wird diese Kraft zur Resultirenden aus allen übrigen.

4) Gehen die Kräfte P_1 , P_2 , P_3 , P_4 (Fig. 5^a) nicht durch denselben Punkt, so findet man die Grösse und Richtung derjenigen Kraft R , welche zur Herstellung des Gleichgewichtes hinzugefügt werden muss, indem man den aus P_1 , P_2 , P_3 und P_4 gebildeten Kräftezug $abcde$ (Fig. 5^b) durch die Linie ea schliesst. Es ist $\overline{ea} = R$. Den Angriffspunkt von R zu ermitteln, wird die Kraft P_1 durch 2 beliebig gerichtete Kräfte I und II, deren Angriffspunkt A in der Richtung von P_1 willkührlich gewählt wurde, aufgehoben. Die Grösse von I und II wird im Kräfteplane Fig. 5^b durch Ziehen der Parallelen aO und bO zu den angenommenen Richtungen von I und II erhalten.

Im Schnittpunkte B der Kräfte II und P_2 wird erstere durch eine entgegengesetzt gerichtete gleich grosse Kraft aufgehoben, worauf durch Hinzufügen der durch die Linie cO des Kräfteplanes gegebenen Kraft III am Punkte B Gleichgewicht hergestellt wird. Ebenso wird am Punkte C nach Aufheben von III durch Hinzufügen von IV = \overline{dO} und am Punkte D nach Aufheben von IV durch Hinzufügen von V = eO Gleichgewicht erzielt.

Nachdem schliesslich noch im Schnittpunkte E von I und V diese Kräfte durch gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete getilgt worden sind, wird durch die Kraft $R = \overline{ea}$ das Gleichgewicht an dem Punkte E hergestellt. Da nun an jedem der Punkte A, B, C, D, E drei im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen und die Kräfte I, II, III, IV und V sich paarweise aufheben, ist R mit den Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 im Gleichgewichte.

Das Polygon $ABCDEA$ kann man als Mittellinie eines Seiles auffassen, an welchem die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und R angreifen und in dessen Seiten die Spannungen I, II, III, IV, V entstehen. Dessenhalb nennt man $ABCDEA$ ein Seilpolygon oder auch ein Gelenk polygon. Die erste gebräuchlichere Bezeichnung ist allerdings weniger zutreffend, da, falls die in Fig. 5^a angenommenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und R sämmtlich umgekehrt werden, in den Polygonseiten Druckspannungen entstehen, und an Stelle des Seiles ein aus druckwiderstandsfähigen Stäben bestehendes Polygon zu denken ist. Die Linien $Oa, Ob\dots$ im Kräfteplane Fig. 5^b heissen Seilstrahlen. Den Punkt O nennt man den Pol und das Lot vom Pol auf irgend eine Kraft die Poldistanz dieser Kraft.

Im Anschluss an diese Bezeichnungen ergiebt sich für die Bestimmung der Kraft R die Regel:

Nach Construction des Kräftepoygons $abcdea$, welches die Grösse und die Richtung der Kraft R liefert, wähle man einen beliebigen Pol O , ziehe die Seilstrahlen $I, II, III\dots$ und zeichne durch einen beliebigen Punkt (z. B. den Punkt A der Kraft P_1) ein Seilpolygon. Die Seiten desselben sind parallel den Seilstrahlen, und zwar müssen sich zwei Seilpolygonseiten stets mit derjenigen Kraft P in einem Punkte schneiden, welche mit den zugeordneten Seilstrahlen ein Dreieck bildet. Durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Polygonseite geht die Kraft R .

Die erste und letzte Seilpolygonseite nennen wir in der Folge die äussersten Seiten für das fragliche Kräftesystem. So sind z. B. II und IV die beiden äussersten Seiten für das System P_2, P_3 .

Ist die Aufgabe gestellt, die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 zu einer Resultirenden zu vereinigen, so hat man nur nöthig, die das Gleichgewicht herstellende Kraft R durch eine gleich grosse entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

5) Entspricht den Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 (Fig. 6) ein geschlossenes Kräftepolygon, so ist die Resultirende gleich Null. Das mit dem Pole O gezeichnete Seilpolygon $ABCD$ (Fig. 6^a) wird sich im Allgemeinen nicht schliessen. Denkt man dann in den Punkten A, B, C, D die Seilspannungen thätig, so wird Gleichgewicht herrschen, da an jedem

dieser Punkte drei mit einander im Gleichgewichte befindliche Kräfte angreifen. Nun heben sich aber von den Seilspannungen nur die II, III und IV paarweise auf, so dass die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 nicht miteinander im Gleichgewichte sind, vielmehr Gleichgewicht erst durch Hinzufügen des durch die beiden Kräfte I gebildeten Paars, dessen Moment (bei der Armlänge h)

$$\mathfrak{M} = I \cdot h$$

ist, entsteht. Durch Umkehrung der Kräfte I gelangt man zu dem aus P_1, P_2, P_3 und P_4 resultirenden Kräftepaare. Das Moment dieses Paars wird Null, sobald $h = 0$ ist, d. h. sobald das Seilpolygon sich schliesst. Hieraus folgt:

Ein System in derselben Ebene wirkender Kräfte befindet sich im Gleichgewichte, wenn demselben ein geschlossenes Kräftepolygon und ein geschlossenes Seilpolygon entspricht.

- 6) Die Anwendung des Seilpolygons erweist sich namentlich als vortheilhaft, wenn aus einem Systeme paralleler Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 7^b) die Resultirende ermittelt werden soll. Der Kräftezug ist hier eine Gerade (Fig. 7^a); O ist der beliebig gewählte Pol. Durch den Schnittpunkt der beiden äussersten Seilpolygonseiten d. s. I und V geht R .

Es kann diese Construction für die graphische Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche, welche sich in einzelne Theile mit gegebenen Schwerpunkten zerlegen lässt, verwerthet werden.

Soll z. B. der Schwerpunkt der in Figur 8 dargestellten Fläche (welche etwa den Querschnitt eines gusseisernen Trägers bedeuten möge) ermittelt werden, so fasse man die Inhalte f_1, f_2, f_3 der 3 Rechtecke, aus denen die Fläche besteht, als parallele Kräfte*) auf, welche einmal in der Richtung AB , dann in der Richtung $A'B'$ wirken. Hierauf bestimme man für diese beiden Fälle die Lage der Mittelkraft Σf . Man findet so zwei Schwerachsen S , deren Schnittpunkt der gesuchte Schwerpunkt ist. Die Richtungen AB und $A'B'$ sind willkührlich.

- 7) Es bleibt noch auf eine interessante Beziehung zwischen zwei Seilpolygone hinzuweisen, welche zu demselben Kräftesysteme mit den beiden Polen O und O' construirt sind. Dieselbe liefert ein Mittel, die Schärfe einer Zeichnung zu prüfen.

Sind (Fig. 9^b) I, II, ... die vom Pole O aus gezogenen Seilstrahlen, I', II', \dots die dem Pole O' entsprechenden, und bringt man (Fig. 9^a) die correspondirenden Seilpolygonseiten, nämlich I und I' , ferner II und II' u. s. w. mit einander zum Schnitt, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, welche der Verbindungsline OO' der beiden Pole parallel ist.

*) Man multiplieire die beispielsweise in Quadratcentimeter ausgedrückten Flächeninhalte f mit $\frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ qcm}}$.

Der Beweis lässt sich wie folgt führen. In den beiden Vierecken $ABOO'$ und $abcd$ sind 5 entsprechende Seiten einander parallel, nämlich $ad \parallel AO'$, $bc \parallel BO$, $dc \parallel AB$, $ac \parallel AO$ und $db \parallel O'B$. Es muss mithin auch $ab \parallel O'O$ sein. Ebenso folgt, dass $be \parallel O'O$ und $ia \parallel O'O$ ist, dass also die Punkte $iabe$ auf einer zur $O'O$ parallelen Geraden liegen.*)

§ 2. Zerlegung der Kräfte. (Tafel 1.)

8) Die Zerlegung einer Kraft $R = ca$ (Fig. 2^a) in zwei Seitenkräfte, deren gegebene Richtungen die R in demselben Punkte a schneiden, erfolgt mit Hilfe des Parallelogramms der Kräfte. Vergl. No. 1.

Die eindeutige Zerlegung von R in mehr als zwei durch denselben Punkt in der Richtung von R gehende Seitenkräfte ist nicht möglich, vielmehr lässt diese Aufgabe unendlich viele Lösungen zu.

9) Um P in zwei ihm parallele Seitenkräfte A und B (Fig. 10^b) zu zerlegen, verbinde man die drei Kräfte durch ein beliebiges Seilpolygon, dessen Seiten I, II und III sein mögen. Hierauf ziehe man durch die Endpunkte der Kraft P (Fig. 10^a) Parallelen zu I und II, um im Schnittpunkte O dieser Parallelen den Pol zu finden. Eine durch O zur Seilpolygonseite III gezogene Parallelle zerlegt P in A und B . Den Beweis zu führen, vereinige man A und B mit Hilfe des dem Pole O entsprechenden Seilpolygons zu einer Resultirenden. Man findet dann, dass diese Resultirende $= A + B = P$ ist und durch den Schnittpunkt der beiden äussersten Seilpolygonseiten I und II geht. Vergl. No. 6.

10) Im Anschluss an die in Figur 10 dargestellte Construction lässt sich jetzt die für die Folge wichtige Aufgabe lösen, zwei der Lage nach gegebene parallele Kräfte A und B (Fig. 11) zu finden, welche den ihnen parallelen Kräften P_1 , P_2 , P_3 und P_4 das Gleichgewicht halten.

Die Kräfte P werden in Figur 11^a addirt, dann wird der Pol O gewählt und ein Seilpolygon gezeichnet, dessen äusserste Seiten I und V (durch deren Schnittpunkt die Resultirende $R = \Sigma P$ geht) die Richtungen von A und B beziehungsweise in a und b schneiden. Nachdem das Seilpolygon durch die Verbindungsline s der Punkte a und b geschlossen worden ist, wird durch den Pol O zu s eine Parallelle gezogen. Diese zerlegt die Kraft $R = \Sigma P$ in zwei Theile, deren Grössen beziehungsweise die Intensitäten von A und B darstellen. Der obere Theil ist gleich A , denn diese Kraft (entgegengesetzt gerichtet wie ΣP) ist im Punkte a mit den Seilspannungen I und s im Gleichgewichte, muss also mit den Seilstrahlen I und s ein Dreieck bilden. Ebenso folgt, dass B mit den Strahlen s und V ein Dreieck bildet.

11) Sollen (Fig. 12) drei nicht durch denselben Punkt gehende der Lage nach bekannte Kräfte X , Y und Z gefunden werden, welche einer

* Man vergl. Bauschinger, Graphische Statik.

gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten, so bringe man nach Belieben je zwei der vier Kräfte R , X , Y und Z miteinander zum Schnitt, z. B. R und Z , ferner X und Y , und addire, mit der Verbindungsline der beiden Schnittpunkte zusammenfallend, zwei sich aufhebende Kräfte L . Nun bestimme man L und Z aus der Bedingung, dass sich die Kräfte R , L und Z am Schnittpunkte $[RZ]$ das Gleichgewicht halten, dass ihnen also ein geschlossenes Polygon Fig. 12^b entsprechen muss und hierauf X und Y aus der Bedingung, dass diese beiden Kräfte am Punkte (XY) mit der nunmehr gegebenen L im Gleichgewichte sind.

Ist die Aufgabe gestellt, eine gegebene Kraft R in drei der Lage nach bekannte Kräfte X , Y und Z , welche nicht durch denselben Punkt gehen, zu zerlegen, so hat man nur nöthig, die vorhin (Fig. 12^b) gefundenen Kräfte X , Y , Z durch gleich grosse aber entgegengesetzt wirkende zu ersetzen.

Die eindeutige Zerlegung einer Kraft nach mehr als drei nicht durch denselben Punkt gehenden Richtungen ist unmöglich. Es besitzt diese Aufgabe unendlich viele Lösungen.

§ 3. Das statische Moment der Kräfte. (Tafel 2.)

12) Unter dem statischen Moment einer Kraft R (Fig. 13^a) in Bezug auf den Drehpunkt C versteht man das aus R und seinem Abstande r von C gebildete Produkt; es ist also

$$\mathfrak{M} = Rr.$$

Soll das Moment des Kräftesystems P_1 , P_2 , P_3 und P_4 in Bezug auf C ermittelt werden, so wird man (Fig. 13^b) zunächst die Resultirende R aufsuchen, indem man den aus P_1 , P_2 , P_3 und P_4 gebildeten Kräftezug durch die Linie $\overline{LN} = R$ unterspannt und diese Linie mit einem Pfeile versieht, welcher den Umfahrungssinn des Kräftepolygons discontinuirlich macht. Nun wählt man den beliebigen Pol O , zeichnet das Seilpolygon und findet in dem Schnittpunkte E der beiden äussersten Seilpolygonseiten einen Punkt der Kraft R . Jetzt kann man $\mathfrak{M} = Rr$ berechnen oder auch construiren. Dazu schreibt man $\mathfrak{M} = \frac{Rr}{1}$ und fasst \mathfrak{M} als vierte Proportionale zu den Grössen R , r und 1 auf.

Der Werth \mathfrak{M} lässt sich noch in einer anderen für die Folge sehr vortheilhaften Form darstellen. Zieht man durch den Drehpunkt C zu R eine Parallel, welche die Seilpolygonseiten I und V in J und F schneidet, und setzt $\overline{FJ} = y$, so folgt aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke EFJ und OLN (deren Seiten beziehungsweise parallel sind):

$$r:y = H:R,$$

wobei H die Poldistanz der Kraft R bedeutet. Es ist also $Hy = Rr$, mithin

$$\mathfrak{M} = Hy,$$

und es folgt der Satz:

Zieht man durch den gegebenen Drehpunkt eine Parallele zur Resultirenden eines Kräftesystems und multiplicirt die Strecke y , welche auf dieser Parallelen durch die äussersten Seilpolygonseiten abgeschnitten wird, mit der Poldistanz H der Resultirenden, so erhält man das statische Moment des Kräftesystems.

Bislang wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass, wie dies in der Mechanik wol allgemein üblich ist, das Moment \mathfrak{M} positiv gesetzt wird, sobald die Kraft R um den Punkt C in demselben Sinne dreht, wie der Uhrzeiger. Man nennt diese Drehung auch Rechtsdrehung. Linksdrehende Momente sind negativ. Bei der in Figur 13 gewählten Lage des Drehpunktes C ist \mathfrak{M} positiv. Je näher C an R rückt, desto kleiner wird y , also desto kleiner \mathfrak{M} . Fällt C mit R zusammen, so wird $y = 0$. Liegt C oberhalb R , so ist y negativ zu setzen; man erhält also \mathfrak{M} negativ.

Wählt man den beliebigen Pol O im Abstand 1 von der Resultirenden, so folgt

$$\mathfrak{M} = y.$$

In dem Produkte Rr ist die Grösse R in Kräfteeinheiten (z. B. in Kilogrammen) und r in Längeneinheiten (z. B. in Metern) auszudrücken. Hingegen ist es bei Berechnung von Hy gleichgültig, ob H mit dem Kräftemaassstabe und y mit dem Längemaassstabe gemessen wird, oder umgekehrt.

Wir werden in der Folge unter H (falls nicht das Gegentheil besonders hervorgehoben wird) eine Kraft verstehen.

18) Der vorhin ausgesprochene Satz findet namentlich Anwendung, wenn es sich um die Bestimmung des Momentes paralleler und zwar speciell verticaler Kräfte in Bezug auf irgend welchen Drehpunkt handelt.

Es sei z. B. das Moment der verticalen Kräfte A , P_1 und P_2 (Fig. 14^a) für den Drehpunkt C gesucht. In Figur 14^b wurden die Kräfte in der Reihenfolge A , P_1 , P_2 aneinander gesetzt und von dem beliebig gewählten Pol aus die Strahlen s , I, II, III gezogen. Der Strahl s geht nach dem Anfangspunkte und der Strahl III nach dem Endpunkte des Kräftezuges; mithin sind in Figur 14^a, in welcher das Seilpolygon dargestellt ist, die Seiten s und III die äussersten; dieselben schneiden auf der durch C zur Resultirenden $A - P_1 - P_2$ parallel gezogenen Geraden die Strecke y ab, welche mit der Poldistanz der Resultirenden, d. i. mit dem vom Pol auf den Kräftezug gefällten Lotthe H multiplicirt das Moment liefert.

Das Moment $\mathfrak{M} = Hy$ ist positiv, denn es wirkt, wegen $A > P_1 + P_2$, die Resultirende $R = A - P_1 - P_2$ in demselben Sinne wie A , also auf-

wärts, und es liegt ausserdem R links vom Drehpunkt C , weil diese Kraft durch den Schnittpunkt der links convergirenden Seilpolygonseiten III und s geht. Daraus folgt aber, dass das Moment von R ein rechtsdrehendes ist.

14) Eine andere für die Folge sehr wichtige Aufgabe lautet: Gegeben ein System verticaler Kräfte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, gesucht das Moment \mathfrak{M} dieser Kräfte für den Drehpunkt C , ferner das Moment \mathfrak{M}' der Kräfte P_1, P_2, P_3 für den Drehpunkt C' .

Die Kräfte wurden in der Reihenfolge $P_6, P_5 \dots P_1$ in Figur 15^b aneinandergesetzt. Der Pol O ist in beliebiger Distanz H vom Kräftezug so gewählt worden, dass der Seilstrahl I horizontal ist. Hierauf wurde in Figur 15^a das Seilpolygon gezeichnet und die Seite I desselben verlängert. Zieht man jetzt durch C eine Parallele zur Resultirenden $\sum P$, d. i. eine Verticale und misst die Strecke y , welche auf dieser Verticalen durch die äussersten Polygonseiten, nämlich durch I und VII abgeschnitten wird, so erhält man $\mathfrak{M}_c = -Hy$. Dieses Moment ist negativ, weil alle Kräfte links um C drehen. Ebenso findet man für den Drehpunkt C' das Moment der Kräfte P_1, P_2, P_3 :

$$\mathfrak{M}_{c'} = -Hy'$$

denn I und IV sind die äussersten Seilpolygonseiten in Bezug auf das System P_1, P_2, P_3 . Man kann hiernach den Satz aussprechen:

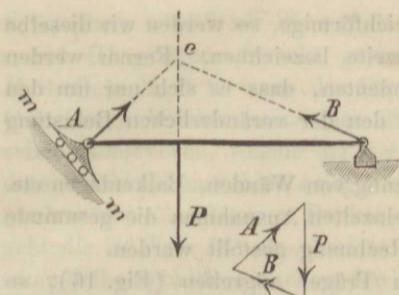
Irgend eine Ordinate des Seilpolygons (Fig. 15^a), bezogen auf Polygonseite I als Abscissenaxe ist dem Moment proportional, welches die links von der Ordinate gelegenen Kräfte in Bezug auf einen in der Ordinate gelegenen Drehpunkt ausüben.

II. Abschnitt.

Graphische Bestimmung der am einfachen Balken angreifenden Kräfte.

§ 4. Definitionen.

15) Auf einen Stab, welcher an den Enden unterstützt ist, wirke eine beliebig gerichtete Kraft P . Die Drücke der Stützen gegen den Träger, d. h. die Auflagerreactionen seien A und B . Sie halten der Kraft P das Gleichgewicht, müssen also P in demselben Punkte C schneiden; denn 3 Kräfte sind nur dann im Gleichgewichte, wenn sie sich in einem Punkte treffen.



Ist die Richtung der einen Reaction gegeben, so lässt sich auch die der anderen bestimmen. Ordnet man nun bei A ein bewegliches Lager (Rollen- oder Pendellager) an, so kann, wenn von dem Reibungswiderstände abgesehen wird, die Stütze A nur einem normal zur Lagerfläche gerichteten Drucke widerstehen, und muss dann auch die Reaction A normal zu mm sein. Es ist somit der Punkt C und die Richtung von B bestimmt, und lassen sich A und B mittelst eines Kräftedreiecks construiren.

Wenn die Gerade mm horizontal gewählt wird, so liegt bei verticaler Last P der Punkt C im Unendlichen, und es sind A und B vertical. Der Stab heisst dann ein Balken und zwar speciell ein einfacher Balken, im Gegensatz zu dem auf mehr als zwei Stützen ruhenden continuirlichen Balken. Die graphische Ermittelung der parallelen Auflager-reactionen A und B erfordert die Construction eines Seilpolygons.

16) Die Belastung eines Balkens heisst eine permanente oder eine veränderliche, je nachdem sie stets oder nur zeitweise vorhanden ist.

So bildet bei einem Brückenträger das Eigengewicht des Trägers, sowie das Gewicht der Fahrbahn und der Querversteifung die permanente Last, während ein Eisenbahnzug oder eine Schaar von Lastwagen (bei Strassenbrücken) etc. als veränderliche Belastung aufzufassen ist. Bei Dachstühlen besteht die veränderliche Belastung aus dem Schneen- und Winddrucke.

Die permanente oder Constructionslast darf man bei Brückenträgern und Dachbindern stets mit hinlänglicher Genauigkeit als eine gleichförmig über den Träger vertheilte ansehen. Sie sei mit p für die Längeneinheit der Stützweite bezeichnet.

Die veränderliche Last ist im Allgemeinen nur bei Dachbindern als gleichmässig vertheilte einzuführen. Die zu den grössten Anstrengungen eines Brückenträgers führende Belastung besteht in der Regel aus einem Systeme concentrirter Lasten, den Raddrücken der Fahrzeuge. Bei Strassenbrücken kann es allerdings vorkommen, dass Menschengedränge gefährlichere Anstrengungen erzeugt, und darf dann diese Belastung als gleichförmige in Rechnung gestellt werden. Weiter kann die Belastung dieser Brücken theilweise aus gleichförmigen, theilweise aus concentrirten Belastungen bestehen.

Eine kurze Zusammenstellung der in die statische Berechnung von Brücken- und Hochbauconstructionen einzuführenden Belastungen findet sich am Ende dieses Buches.

Ist die veränderliche Last eine gleichförmige, so werden wir dieselbe mit v für die Längeneinheit der Stützweite bezeichnen. Ferner werden wir stets durch den Index p oder v andeuten, dass es sich nur um den Einfluss der permanenten oder nur um den der veränderlichen Belastung handelt.

Bei den im Hochbau zur Unterstützung von Wänden, Balkenlagen etc. verwendeten Trägern darf mit nur vereinzelten Ausnahmen die gesamme Belastung als permanent wirkende in Rechnung gestellt werden.

Wenn die Lasten unmittelbar am Träger angreifen (Fig. 16), so nennen wir dieselbe direkt wirkend. In der Regel wird aber die Belastung durch eine Zwischenconstruction auf den Träger übertragen (Fig. 20), und sprechen wir dann von indirekter Belastung.

So wirken z. B. bei Brückenträgern (Fig. 27, Tafel 3) die Lasten P zunächst auf Träger kleinerer Spannweite, welche durch die auf den Hauptträgern ruhenden Querträger gestützt werden. Bei derartigen Constructionen ist nur das Eigengewicht der Hauptträger als direkt wirkende Belastung aufzufassen.

§ 5. Permanente direkte Belastung. (Tafel 2.)

a. Concentrirtre Lasten.

17) Auf einen an den Enden gestützten horizontalen Balken AB (Fig. 16^b) wirken die verticalen Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 . Die Auflagerreactionen A und B sind vertical gerichtet. Um dieselben zu bestimmen, reihe man die Lasten P aneinander (Fig. 16^a), ziehe von einem beliebigen Pole O aus die Seilstrahlen I, II, III, IV, V und zeichne nach den bekannten Regeln das Seilpolygon. Dasselbe schneidet die Auflagerverticalen in den Punkten a und b , welche durch die Schlusslinie s verbunden werden. Eine vom Pole zu der Linie s gezogene Parallele zerlegt die die Summe: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ in die aufwärtsgerichteten Reactionen A und B . Der Beweis ist No. 10 nachzusehen.

18) Der Balken werde durch einen bei C geführten Verticalschnitt in zwei Theile (Fragmente) zerlegt. Aus den am linken Fragmente angreifenden Kräften A, P_1 und P_2 resultirt, wenn die Richtung von A positiv angenommen wird, die Kraft

$$\mathfrak{B} = A - P_1 - P_2.$$

Dieselbe heisst Verticalkraft für den Querschnitt C ; sie sucht das linke Balkenfragment gegen das festgehalten gedachte rechte in verticalem Sinne zu verschieben, welche Bewegung durch die in dem Querschnitte C auftretenden Schubspannungen gehindert werden muss. Die Berechnung der Schubspannungen aus der Verticalkraft (welche man auch Scheerkraft nennt) ist Gegenstand der Festigkeitslehre. Die Bestimmung von \mathfrak{B} bildet eine Aufgabe der Statik. In dem in Figur 16^a dargestellten

Kräfteplane wird \mathfrak{B} als die auf dem Kräftezuge zwischen den Seilstrahlen s und III gelegene Strecke gewonnen, und zwar ist \mathfrak{B} negativ, wenn $P_1 + P_2 > A$, d. h. wenn der Strahl III unterhalb s liegt. Zur schnellen Orientirung beachte man, dass die Strahlen s und III den Seilpolygonseiten entsprechen, welche der bei C geführte Verticalschnitt trifft, ferner dass Strahl III unterhalb s liegt, wenn die Seilpolygonseiten sich in einem rechts von C gelegenen Punkte schneiden. Durch diesen Schnittpunkt geht die in Figur 16^a als abwärts wirkend gefundene Kraft \mathfrak{B} . Dass für sämmtliche Schnitte zwischen den Lasten P_2 und P_3 die nämliche Verticalkraft gefunden wird, ist ohne Weiteres einzusehen, daher der Satz:

Wirken auf einen Balken nur concentrirte Lasten, so ist zwischen zwei solchen Lasten die Verticalkraft constant.

Für die Schnitte zwischen P_1 und P_2 ist die Verticalkraft = $\mathfrak{B}' = A - P_1$. Dieselbe ist positiv, weil sich die Seilpolygonseiten s und II links von C schneiden.

Denkt man das Seilpolygon auf die Auflagerverticale A und die Schlusslinie s als schiefwinklige Coordinatenachsen bezogen und nennt die Ordinaten y , so kann man den Satz aussprechen:

Die Verticalkräfte sind positiv, so lange die Ordinaten y wachsen, dagegen negativ bei abnehmenden y .

Hinzuzufügen bleibt, dass man \mathfrak{B} auch als Summe der auf das rechte Balkenfragment wirkenden Kräfte auffassen kann. Dann hat man aber Folgendes zu beachten:

Da vorhin \mathfrak{B} für den Querschnitt C durch die Gleichung

$$a) \dots \dots \quad \mathfrak{B} = A - P_1 - P_2$$

definiert wurde, und sich aus der Beziehung

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

die Beziehung $A - P_1 - P_2 = -B + P_3 + P_4$

ergiebt, so muss, wenn \mathfrak{B} als Resultirende der rechts von C wirkenden Kräfte dargestellt wird, geschrieben werden:

$$b) \dots \dots \quad \mathfrak{B} = -B + P_3 + P_4,$$

d. h. es muss die Richtung „abwärts“ positiv angenommen werden.

Jenachdem wir nun in der Folge von der Gleichung a) oder b) ausgehen, nennen wir \mathfrak{B} „am linken Fragment“ oder „am rechten Fragment“ gebildet.

19) Das Moment der am Fragment AC wirkenden Kräfte A , P_1 , P_2 in Bezug auf den Schwerpunkt des Querschnitts C nennt man das „Angriffsmoment für den Querschnitt C “. Dasselbe wird positiv angenommen, sobald es im Sinne des Uhrzeigers dreht. Es ist (vergl. No. 13 und Fig. 14) gleich dem Produkte aus der Poldistanz H und der

Ordinate y^*) des Seilpolygons und ergiebt sich für sämmtliche Querschnitte positiv. Sobald nämlich die Resultirende \mathfrak{B} aus A , P_1 und P_2 rechts von C liegt, ist sie nach den früheren Ausführungen abwärts gerichtet, also rechts um C drehend. Liegt sie links von C , so ist sie aufwärts gerichtet und dreht dann ebenfalls rechts um C .

Man sagt auch: das Angriffsmoment \mathfrak{M} ist positiv, sobald die elastische Linie des Balkens, d. i. die Curve, welche die Axe des Balkens in Folge der Belastung bildet, nach oben concav ist. Bei einem an den Enden unterstützten, durch abwärts gerichtete Lasten, d. h. durch positive Lasten, beanspruchten Balken ist die elastische Linie an allen Stellen nach oben concav; mithin sind die Momente \mathfrak{M} durchweg positiv. Es ist also

$$\mathfrak{M} = + Hy.$$

Man kann auch \mathfrak{M} als Moment der am rechten Fragmente angreifenden Kräfte in Bezug auf C darstellen, muss dann aber die Drehung im Sinne des Uhrzeigers negativ setzen. Es wird dies ersichtlich, wenn man erwägt, dass die Resultirende aus den am Theile BC angreifenden Kräften das entgegengesetzte Vorzeichen hat, als die Resultirende aus den Kräften links von C . Allgemein lässt sich also sagen:

Bei Bildung des Momentes \mathfrak{M} werden stets die Auflager-reactionen A und B als in positivem Sinne drehend eingeführt.

Abwärts gerichtete Reactionen und aufwärts gerichtete Lasten sind hierbei negativ zu setzen.

Die Ermittelung der im Balken auftretenden grössten Zug- und Druckspannungen aus den Verticalkräften und Angriffsmomenten ist Gegenstand der Festigkeitslehre.

Die Construction der Momente \mathfrak{M} mit Hilfe des Seilpolygons hat zuerst Culmann gezeigt. Daher nennt man die von Seilpolygon und Schlusslinie begrenzte (in Fig. 16^b schraffirte) Fläche die Culmannsche Momentenfläche.

Der Querschnitt, welchem y_{\max} entspricht, heisst der gefährliche Querschnitt; er liegt in Figur 16^b unter der Last P_2 , also dort, wo die Verticalkraft das Vorzeichen wechselt. Soll der Balken constanten Querschnitt erhalten, so genügt es, $\mathfrak{M}_{\max} = Hy_{\max}$ zu ermitteln.

b. Stetige Belastung.

20) Wenn die Lasten P in unendlich kleinen Abständen von einander wirken, so geht das Seilpolygon in eine Curve über. Es ist dies der Fall bei einer stetigen Belastung (Fig. 17); denn eine solche besteht aus unendlich vielen unendlich kleinen concentrirten Lasten, die einander unendlich nahe sind. Um nun die Seilcurve zu ermitteln, ersetze man

^{*)} Wir erinnern, dass H im Kräftemaassstabe und y im Längenmaassstabe gemessen wird, oder umgekehrt. Vergl. No. 12.

die stetige Belastung durch eine Reihe von in endlichen Entfernungen wirkenden Einzellasten, construire zu diesen ein Seilpolygon und beschreibe in dieses eine Curve.

So wurde in Figur 17^b die gleichförmig vertheilte Last P durch die drei concentrirten Lasten $\frac{1}{3}P$ ersetzt, indem die „Belastungsfläche“ durch verticale Schnitte in drei „Lamellen“ zerlegt wurde. Für einen an der Grenze zweier Lamellen befindlichen Querschnitt liefert das Seilpolygon die genaue Momentenordinate $cd = y$, denn, wenn man das Moment der links von C wirkenden Kräfte in Bezug auf C bildet, darf man die stetige Belastung $\frac{1}{3}P$ vorerst im Schwerpunkte concentriren. Es folgt hieraus:

Die verticalen Schnitte, welche die Belastungsfläche in Lamellen zerlegen, treffen das Seilpolygon in den Berührungs punkten der in das Seilpolygon einzubeschreibenden Curve.

Indem man die Breite der Lamellen entsprechend klein wählt, kann man jeden beliebigen Grad von Genauigkeit erreichen.

§ 6. Permanente indirekte Belastung. (Tafel 2.)

21) Die Last P (Fig. 18) wirke nicht unmittelbar auf den Balken, sondern werde durch die Querträger E_1 und E_2 auf denselben übertragen; sie wird dann in zwei bei E_1 und E_2 angreifende Lasten P_1 und P_2 zerlegt. Die Reactionen A und B , welche durch P_1 und P_2 hervorgerufen werden, sind gleich denen, welche eine direkt auf den Balken wirkende Last P erzeugen würde. Es sind desshalb auch die Momente für alle Querschnitte links von E_1 und rechts von E_2 ebensogross wie bei direkter Belastung, denn das Moment für einen Querschnitt C zwischen A und E_1 wird $= Ax$ und das für einen rechts von E_2 liegenden Querschnitt $= Bx'$. Ist also $a cb$ das mit dem Pole O construirte Seilpolygon für die direkte Belastung, so ist $a e_1 e_2 b$ das der indirekten Belastung entsprechende.

Ein von O aus zu der Seilpolygonseite III gezogene Parallele zerlegt $ad = P$ in P_1 und P_2 , während die zu s von O gezogene Parallele wie früher die aufwärts gerichteten Reactionen A und B liefert.

Aus der Bedingung, dass für die an den Angriffsstellen E_1 und E_2 gelegenen Querschnitte die Momente für direkte und indirekte Belastung übereinstimmen müssen, kann man die Momentenfläche für jede beliebige durch Querträger übertragene Belastung (Fig. 20) construiren. Man zeichne das Seilpolygon für direkte Belastung und beschreibe in dieses das der indirekten Belastung entsprechende Polygon in der Weise, dass die Eckpunkte des letzteren auf den durch die Querträgerangriffspunkte gezogenen Verticalen liegen. Die Construction ist aus Figur 20 klar zu ersehen.

22) Man nennt das zwischen den beiden Querträgern E_1 und E_2 gelegene Balkenstück ein Feld des Balkens und den Abstand $E_1 E_2$ die Feldlänge. Fig. 18.

Irgend ein durch das Feld $E_1 E_2$ geführter verticaler Schnitt trifft die Seilpolygonseiten s und III , mithin ist die Verticalkraft \mathfrak{B} für diesen Schnitt gleich der Strecke, welche auf dem Kräftezeuge zwischen den Seilstrahlen s und III liegt. Sie ist positiv und negativ, je nachdem die Polygonseiten s und III nach links oder rechts convergiren. Sind s und III einander parallel, so ist $\mathfrak{B} = 0$.

Diejenige Verticale, mit welcher P zusammenfallen muss, um im Felde $E_1 E_2$ die Scheerkraft $\mathfrak{B} = 0$ zu erzeugen, nennt man die Belastungsscheide. Ihre Lage zu finden, zieht man Bc (Fig. 19) beliebig, bestimmt auf Bc den Punkt e_2 vertical unter E_2 , zieht $e_2 e_1 \parallel AB$ bis zur Verticalen $E_1 e_1$ und hierauf Ae durch den Punkt e_1 . Die Verticale durch c ist die Belastungsscheide; sie schneide den Balken in J . Allen Lasten rechts vom J entspricht für das Feld $E_1 E_2$ ein positives \mathfrak{B} , allen Lasten links ein negatives \mathfrak{B} . Deshalb nennt man auch die Strecken BJ und AJ beziehungsweise die positive und negative Beitragsstrecke bezüglich der Kraft \mathfrak{B} .

Zieht man durch den Punkt J die Gerade $e_2 d_1$ bis zum Schnittpunkte mit der Verticalen $E_1 d_1$, so findet man leicht, dass Ad_1 parallel Bc ist; denn:

$$E_1 J : E_2 J = E_1 d_1 : E_2 e_2 \quad \text{und}$$

$$E_1 J : E_2 J = e_1 i : e_2 i = AJ : BJ,$$

mithin

$$E_1 d_1 : E_2 e_2 = AJ : BJ,$$

d. h. $Ad_1 \parallel Be_2$. Man kann also, um J zu finden, auch die beliebigen Parallelen Bc und Ad_1 ziehen und die Gerade $d_1 e_2$ eintragen. Diese letztere Construction zeigte Stelzel*).

Bei direkter Belastung des Balkens würde sich in Bezug auf irgend einen Querschnitt ergeben:

1) für eine Last P rechts vom Querschnitt

$$\mathfrak{B} = +A,$$

2) für eine Last P links vom Querschnitt (am rechten Fragmente gebildet)

$$\mathfrak{B} = -B,$$

so dass Lasten rechts vom Querschnitte eine positive und Lasten links vom Querschnitte eine negative Verticalkraft erzeugen.

23) Es soll noch die für Folge wichtige Aufgabe gelöst werden, die durch eine gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte Last (p für die Längeneinheit) erzeugten Verticalkräfte zu bestimmen, Fig. 21.

* Stelzel, Theorie der einfachen Fachwerkträger, Wien 1880.

Die Angriffspunkte der Querträger seien mit 0, 1, 2 . . . ($m - 1$), $m \dots$ bezeichnet. x_m und x'_m seien die Abstände des Punktes m von den Auflagern A und B , λ_m die Länge des m ten Feldes, x''_m der Abstand der Mitte des Feldes von der Mitte des Balkens. Um die Verticalkraft für einen durch das m te Feld geführten Schnitt zu finden, beachte man, dass die Belastung $p\lambda_m$ dieses Feldes zur Hälfte auf den Punkt $(m - 1)$ und zur Hälfte auf den Punkt m übertragen wird, dass also am linken Fragment $A = \frac{1}{2}pl$ nach aufwärts und px_{m-1} , sowie $\frac{1}{2}p\lambda_m$ nach abwärts wirken. Daher ist

$$1) \quad \mathfrak{B} = \frac{pl}{2} - px_{m-1} - \frac{p\lambda_m}{2} = px''_m,$$

und zwar gilt dieser Werth für jeden durch das m te Feld geführten Schnitt. Zieht man eine Gerade, deren Ordinaten für $x = 0$ und $x = l$ beziehungsweise $(+\frac{1}{2}pl)$ und $(-\frac{1}{2}pl)$ sind, so erhält man \mathfrak{B} als die unter der Feldmitte gemessene Ordinate dieser Geraden. Für die rechte Balkenhälfte wird \mathfrak{B} negativ. Innerhalb eines Feldes ist \mathfrak{B} constant.

§ 7. Gleichförmige permanente und veränderliche Belastung.

a) Direkte Belastung. (Tafel 2.)

24) Angriffsmomente. Auf einen Balken wirken

1) die permanente Belastung p pro Längeneinheit

2) die veränderliche v - - -

und es werde die totale Belastung $p + v = q$ gesetzt.

In No. 19 wurde nachgewiesen, dass für sämmtliche Querschnitte eines an den Enden unterstützten Balkens nur positive Momente entstehen können, dass also alle Lasten zu dem Momente \mathfrak{M} in demselben Sinne beitragen. Es entsteht somit \mathfrak{M}_{\max} bei voller Belastung des Balkens durch $p + v = q$ für die Längeneinheit (Fig. 22^a). Hierfür wird $A = B = \frac{1}{2}ql$ und für den Querschnitt C

$$2) \quad \mathfrak{M}_{\max} = \frac{1}{2}ql \cdot x - qx \frac{x}{2} = \frac{qxx'}{2}.$$

Macht man $\overline{CJ} = \mathfrak{M}_{\max}$, so ist der geometrische Ort des Punktes J eine Parabel. Für $x = \frac{1}{2}l$ folgt $\overline{NS} = \frac{1}{8}ql^2$. Zieht man nach Auftragen von NS die Gerade SA , welche die Verticale durch C in E schneidet, hierauf EF horizontal bis zur Auflagerverticalen und verbindet F mit S , so erhält man den Parabelpunkt J ; denn es ist

$$\overline{EC} : \overline{SN} = x : \frac{1}{2}l, \quad \text{also } \overline{CE} = \frac{qlx}{4}, \quad \text{ferner}$$

$$\overline{JC} = \overline{AF} + (\overline{SN} - \overline{FA}) \frac{x}{\frac{1}{2}l} = \frac{qlx}{4} + \left(\frac{q l^2}{8} - \frac{qlx}{4} \right) \frac{2x}{l}$$

$$\overline{JC} = \frac{qx(l-x)}{2}.$$

25) **Verticalkräfte.** (Fig. 22^b). Da jede Last rechts von C ein positives, und jede Last links von C ein negatives \mathfrak{V} erzeugt, erhält man die grösste positive Verticalkraft, d. i. $\max \mathfrak{V}$, wenn man nur die Strecke x' belastet und die grösste negative Verticalkraft, d. h. $\min \mathfrak{V}$, in Folge ausschliesslicher Belastung der Strecke x . Selbstverständlich bezieht sich dieses partielle Belasten nur auf die veränderliche Last. Die permanente Belastung muss auf der ganzen Länge des Balkens angenommen werden.

Um zunächst $\max V$ zu bestimmen, nehmen wir die veränderliche Last von B aus bis zum Querschnitt C fortgeschritten an, und ermitteln getrennt den Einfluss

$\max V_v$ der veränderlichen Last,

V_p - permanenten - .

Denkt man letztere beseitigt, so greift links von C nur A an, und zwar bestimmt sich dieses aus der Momentengleichung für Stützpunkt B

$$Al - vx' \cdot \frac{x'}{2} = 0.$$

Man erhält also

$$\max V_v = A = \frac{vx'^2}{2l},$$

und kann diesen Werth durch eine Parabel darstellen, welche für $x' = 0$ und $x' = l$ beziehungsweise die Ordinaten o und $\frac{1}{2}vl$ besitzt. Man mache auf den Auflagerverticalen $A'D' = \frac{1}{2}vl$, ziehe $B'D'$, ferner durch den Schnittpunkt E' dieser Geraden mit der Verticalen durch C die Horizontalen $E'F'$ und verbinde B' mit F' . Es ist dann J' ein Punkt der Parabel, denn

$$\overline{C'E'} = \overline{A'D'} \frac{x'}{l}; \quad \overline{C'J'} = \overline{A'F'} \frac{x'}{l} = \overline{A'D'} \frac{x'^2}{l^2} = \frac{vx'^2}{2l}.$$

Beseitigt man die mobile Belastung, so findet man $A = \frac{1}{2}pl$ und

$$\mathfrak{B}_p = \frac{pl}{2} - px.$$

Dieser Werth wird durch die Ordinate einer Geraden $A''B''$ dargestellt, welche für $x = 0$ und $x = l$ die Ordinaten $(+\frac{1}{2}pl)$ und $(-\frac{1}{2}pl)$ besitzt. Die positiven Ordinaten dieser Geraden wurden in Fig. 22^b unterhalb der $A'B'$ aufgetragen, damit die Werthe V_v und V_p sofort addirt werden konnten. Es sind bei dieser Anlage der Zeichnung die Verticalabstände der Geraden $A''B''$ und der Parabel $D'J'B'$ gleich den Kräften $\max V$. Für den Balkenquerschnitt vertical über O ist $\max V = o$; für die Querschnitte rechts hiervon ist $\max V$ negativ.

Betrachtet man jetzt das Spiegelbild der Fig. 22^b, so wird der Balken nur links vom Querschnitte C eine veränderliche Belastung aufweisen. Da nun diesem Belastungszustande die Scheerkraft $\min \mathfrak{V}$ entspricht, folgt, dass die Curve der Kräfte $\min \mathfrak{V}$ das Spiegelbild der Curve der

max \mathfrak{B} ist. Man muss jedoch das Vorzeichen ändern, da vorhin \mathfrak{B} als Resultirende der am unbelasteten linken Fragmenten wirkenden Kräfte dargestellt worden ist, und jetzt dieses unbelastete Fragment zum rechten wird *).

Will man also für den Querschnitt C in Fig. 22^b die Scheerkraft min \mathfrak{B} haben, so messe man im Abstande x von B' den Verticalabstand der Parabel $B'J'D'$ und der Geraden $A''B''$ und ändere das Zeichen. Es folgt daraus, dass min \mathfrak{B} positiv ist für $x < \xi$ und negativ für $x > \xi$.

b) Indirekte Belastung. (Figur 23, Tafel 4.)

26) Angriffsmomente. Um die Momente für den auf der ganzen Länge mit $v + p = q$ pro Einheit belasteten Balken unter der Annahme zu construiren, dass die Belastung durch ein System von Querträgern übertragen wird, zeichne man (wie in Figur 22a) die der direkten Belastung entsprechende Parabel mit dem Pfeil $\frac{1}{8}q l^2$ (Fig. 23a) und beschreibe in diese ein Polygon, dessen Eckpunkte in den durch die Querträgerangriffspunkte gezogenen Verticalen liegen.

Allerdings wird hierbei vernachlässigt, dass ein Theil der permanenten Belastung, nämlich das Eigengewicht des Trägers, direkt wirkend ist. Es darf aber der begangene Fehler in allen Fällen praktischer Anwendung zugelassen werden, und erwäge man stets, dass man in die statische Berechnung zu projektirender Träger das Eigengewicht dieser nur annähernd richtig einführen kann, dass ferner die Angabe der variablen Belastung stets an eine Schätzung gebunden ist, und dass schliesslich die Auflagerreactionen, wegen der Reibungswiderstände am beweglichen Lager, im Allgemeinen nicht genau vertical wirken. Da also die Vorbedingungen der Theorie nie streng erfüllt werden, ist auch eine ganz strenge Berechnung unnötig.

27) Verticalkräfte. Um zunächst die Belastungsscheiden zu ermitteln, zieht man (Fig. 23^b) die Gerade BL beliebig und hierauf $AM \parallel BL$. Errichtet man nun in den Querträgerangriffspunkten a und b auf der AB Lothe, welche die AM und BL beziehungsweise in d_1 und e_2 schneiden, so bestimmt der Schnittpunkt der Geraden $d_1 e_2$ und AB die Belastungsscheide J des ersten Feldes. Die von B aus vorrückende variabole Belastung muss bis zur Verticalen durch J reichen, um max \mathfrak{B}_v zu erzeugen. Mit den aus Figur 22^b ersichtlichen Bezeichnungen ergiebt sich (vergl. No. 25) die linksseitige Auflagerreaction

$$A = \frac{v \xi'^2}{2l}$$

und die Belastung des Querträgers a (bei der Feldweite λ)

$$P = \frac{v \xi''^2}{2\lambda}$$

* Man vergleiche No. 18 auf Seite 11.

so dass man

$$\max \mathfrak{B}_v = \frac{v \xi'^2}{2l} - \frac{v \xi''^2}{2\lambda}$$

erhält. Die beiden Glieder dieses Ausdrückes werden ebenso construirt, wie der Ausdruck $\frac{vx'^2}{2l}$ in No. 25.

Man macht $\overline{A'D'} = \frac{1}{2}vl$, $\overline{ad} = \frac{1}{2}v\lambda$, verbindet B' mit D' , ferner b mit d durch Gerade, bringt die Verticale durch J mit der $B'D'$ in E' und mit der bd in e zum Schnitt, zieht $E'F'$ und ef horizontal, schliesslich die Geraden $B'F'$ und bf . Diese schneiden auf der Verticalen durch J die Strecken

$$\overline{C'J'} = \frac{v \xi'^2}{2l} \quad \text{und} \quad \overline{Ji} = \frac{v \xi''^2}{2\lambda}$$

ab, so dass, wenn $\overline{J''J'} = \overline{Ji}$ gemacht wird, sich $\max \mathfrak{B}_v = \overline{C'J''}$ ergiebt.

Zu dem Werthe $\max V_v$ ist noch die der permanenten Last entsprechende Verticalkraft V_p zu addiren. Dazu macht man (vergl. No. 23 und Fig. 21) $\overline{A'A''} = \overline{B'B''} = \frac{1}{2}pl$, zieht die $A''B''$, welche Gerade die Verticalen durch die Querträgerangriffspunkte a und b in a' und b' schneidet. Die Ordinate des Halbirungspunktes c' der Strecke $a'b'$ ist gleich \mathfrak{B}_p . Nun findet man

$$\max \mathfrak{B} = \max \mathfrak{B}_v + \mathfrak{B}_p.$$

In derselben Weise werden die $\max \mathfrak{B}$ für sämmtliche Felder construirt. Auf der rechten Hälfte ist \mathfrak{B}_p negativ. Ist es dann grösser als \mathfrak{B}_v (wie im Felde $a''b''$ der Figur 23) so wird $\max \mathfrak{B}$ negativ. Aus den $\max \mathfrak{B}$ findet man die $\min \mathfrak{B}$ in derselben Weise, wie dies bei Behandlung der direkten Belastung erörtert wurde.

28) Zahlenbeispiel. Für den in Figur 23 gezeichneten Träger wurde $l = 18^{\text{m}}$, $\lambda = 3^{\text{m}}$, $p = 1,2^{\text{tons}}$ pro meter, $v = 4,8^{\text{tons}}$, also $q = 1,2 + 4,8 = 6^{\text{tons}}$ angenommen. Dann ist

$$\overline{NS} = \frac{ql^2}{8} = \frac{6 \cdot 18 \cdot 18}{8} = 243^{\text{tm}}.$$

Dieser Werth wurde im Maassstabe: $1^{\text{cm}} = 200^{\text{tm}}$ aufgetragen, worauf gemessen wurden:

$$\max \mathfrak{M}_1 = \max \mathfrak{M}_5 = 135^{\text{tm}}; \quad \max \mathfrak{M}_2 = \max \mathfrak{M}_4 = 216^{\text{tm}}.$$

Nun wurden $\overline{AD'} = \frac{v l}{2} = 43,2^{\text{tons}}$, $\overline{A'A''} = \frac{pl}{2} = 10,8^{\text{tons}}$ und $\overline{ad} = \frac{v \lambda}{2}$

$= 7,2^{\text{tons}}$ berechnet und im Maassstabe $1^{\text{cm}} = 20^{\text{tons}}$ aufgetragen. Nach Durchführung der beschriebenen Constructionen findet man für das 1^{te} bis 6^{te} Feld:

$\max \mathfrak{B}_1 = + 45,00^{\text{tons}}$	$\max \mathfrak{B}_3 = + 14,76^{\text{tons}}$	$\max \mathfrak{B}_5 = - 3,96^{\text{tons}}$
$\max \mathfrak{B}_2 = + 28,44^{\text{tons}}$	$\max \mathfrak{B}_4 = + 3,96^{\text{tons}}$	$\max \mathfrak{B}_6 = - 9,00^{\text{tons}}$

und hierauf

$$\begin{array}{l|l|l} \min \mathfrak{V}_1 = + 9,00^{\text{tons}} & \min \mathfrak{V}_3 = - 3,96^{\text{tons}} & \min \mathfrak{V}_1 = - 28,44^{\text{tons}} \\ \min \mathfrak{V}_2 = + 3,96^{\text{tons}} & \min \mathfrak{V}_4 = - 14,76^{\text{tons}} & \min \mathfrak{V}_5 = - 45,00^{\text{tons}} \end{array}$$

Es sind also im 1^{ten} und 2^{ten} Felde die Verticalkräfte nur positiv, im 5^{ten} und 6^{ten} nur negativ; während sich für die beiden Mittelfelder je nach dem Belastungszustande positive oder negative Werthe \mathfrak{V} ergeben.

§ 8. Die veränderliche Belastung besteht aus einem Systeme concentrirter Lasten. (Tafel 3.)

29) Angriffsmomente. Eine der wichtigsten der in diesem Buche zu lösenden Aufgaben ist die Bestimmung der Momente und Verticalkräfte, welche für die Querschnitte eines Balkens entstehen, über den sich ein System concentrirter Lasten, z. B. ein Eisenbahnzug, bewegt. Die Aufgabe ist auf Tafel 3 für einen Balken von 40^m Stützweite unter der Voraussetzung gelöst worden, dass die Belastung durch Querträger, welche von einander den Abstand 4^m haben, übertragen wird.

Die Belastung ist für jede Locomotivaxe = 1^{3 tons}, für jede Tenderaxe = 8^{tons} und für die Axe eines Güterwagens = 9^{tons} gewählt. Die Radstände wurden = 1,5^m und 3,0^m angenommen. Der Zug ist aus 3 Maschinen und Güterwagen zusammengesetzt gedacht; zwei Maschinen wurden Kamin an Kamin gestellt (Fig. 24^a).

Um zunächst die Momente $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \dots$ für die den Querträgerangriffspunkten 1, 2, 3 ... entsprechenden Querschnitte zu ermitteln, wurde für einen Zug, der länger als die Stützweite 40^m ist, ein Seilpolygon gezeichnet. Die von links nach rechts nummerirten 24 Lasten wurden in der Reihenfolge 24, 23, 22, ... 1 auf der Verticalen LL aneinandergesetzt und zwar im Maassstabe 5^{mm} = 10^{tons}; die Poldistanz wurde = 6,4^{cm} gewählt, so dass also, da der Längenmaassstab: 4^{mm} = 1^m lautet, die Strecke $H = 16^m$ oder = 128^{tons} ist, je nachdem sie im Längenmaassstabe oder im Kräftemaassstabe gemessen wird.*)

Um das für den Querschnitt 1 durch die veränderliche Belastung entstehende Moment \mathfrak{M}_{v1} zu erhalten, wurde der Balken AB so unter den Zug gestellt, dass eine schwere Last (hier die 7^{te}) über dem fraglichen Querschnitt steht. Dann wurden die Auflagerverticalen in a und b mit dem Seilpolygone zum Schnitt gebracht und die Punkte a und b durch die Schlusslinie s_1 verbunden. Die auf der Verticalen durch 1 bis zur s_1 gemessene Ordinate y_{v1} des Seilpolygons gibt mit H multiplicirt das Moment \mathfrak{M}_{v1} . Man überzeugt sich leicht, dass dieses Moment verkleinert wird, sobald man den Träger nach links oder rechts verschiebt,

*) Im Allgemeinem empfiehlt es sich, für H eine bequeme Zahl zu wählen. Im vorliegenden Falle wurde mit Rücksicht auf spätere Anwendung H gleich einem Vielfachen der Feldweite gewählt.

dass also das gewonnene Moment das grösste ist.*). Wenn man nämlich (Fig. 25) die Lasten links von irgend einem Querschnitt C zur Resultirenden P_a vereinigt und die Lasten rechts von C zur P_b , während man mit P' die in C angreifende Last bezeichnet, so erzeugt P_a in der rechten Stütze die Reaction $P_a \frac{a}{l}$ und daher für C das Moment $P_a \frac{a}{l} x'$, analog P_b das Moment $P_b \frac{b}{l} x$ und P' das Moment $P' \frac{x x'}{l}$, so dass

$$\mathfrak{M} = \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{x x'}{l} P'$$

wird. Verschiebt man nun den Zug um die unendlich kleine Strecke ξ nach links, so geht \mathfrak{M} über in

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} + \Delta \mathfrak{M} &= \frac{x}{l} P_b (b + \xi) + \frac{x'}{l} P_a (a - \xi) + \frac{x'}{l} P' (x - \xi) \\ &= \frac{x}{l} P_b b + \frac{x'}{l} P_a a + \frac{x x'}{l} P' + \frac{\xi x}{l} P_b - \frac{\xi x'}{l} (P_a + P') \\ &= \mathfrak{M} + \frac{\xi}{l} \left[x P_b - x' (P_a + P') \right]\end{aligned}$$

und es muss, wenn der Zuwachs $\Delta \mathfrak{M}$ des Momentes negativ sein soll,

$$x P_b < x' (P_a + P')$$

werden, d. h.

$$\frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x}.$$

Ebenso folgt, dass einer Verschiebung nach rechts

$$\frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x}$$

entsprechen muss. Ist nun (Fig. 24^b) \overline{EE}' gleich der Summe der auf dem Träger \overline{AB} befindlichen Lasten (d. i. hier gleich der Summe der Lasten 6 bis 23) und zieht man $\overline{EF} = l = 40^m$, macht auf dieser Geraden $\overline{EJ} = x' = 36^m$ (**), verbindet F mit E' und zieht $JN \parallel FE'$, so muss JN die über dem fraglichen Querschnitte liegende Last P' treffen. Es ist nämlich dann $\overline{EG} = P_b$, $\overline{GK} = P'$, $\overline{KE}' = P_a$ und es folgt:

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{NE'}} = \frac{x'}{x} \text{ also } \frac{\overline{EG}}{\overline{GE'}} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{\overline{EK}}{\overline{KE'}} > \frac{x'}{x}$$

d. h.
$$\frac{P_b}{P_a + P'} < \frac{x'}{x} \text{ und } \frac{P_b + P'}{P_a} > \frac{x'}{x},$$

*) Am einfachsten verfährt man, statt die nachfolgende Betrachtung anzu stellen, dem Träger verschiedene Lagen unter dem Zuge zuzuweisen, für diese Lagen y_{v1} zu ermitteln und die Resultate zu vergleichen.

**) Auf der Zeichnung wurde $\overline{EF} = \frac{1}{2}l$ und $\overline{EJ} = \frac{1}{2}x'$ gemacht.

In derselben Weise überzeugt man sich, dass das grösste Moment entsteht

für Querschnitt 2, wenn Last No. 7 über 2 steht,

$$\begin{array}{ccccccc} " & " & 3, & " & 8 & " & 3 \\ " & " & 4, & " & 10 & " & 4 \\ " & " & 5, & " & 10 & " & 5 \end{array}$$

In Figur 24^a wurden, um die Figur nicht undeutlich zu machen, nur die Schlusslinien s_1 , s_2 und s_5 , sowie die Ordinaten y_{v1} , y_{v2} und y_{v5} eingetragen. Die anderen y_v wurden analog ermittelt und in Figur 26 als Ordinaten der Momentencurve aufgetragen.

Zu den Werthen y_v sind die der permanenten Belastung (p für die Längeneinheit) entsprechenden Ordinaten y_p zu addiren. Ist $p = 1,85^{\text{tons}}$, so sind die Momente $\mathfrak{M}_p = Hy_p$ die Ordinaten einer Parabel mit dem Pfeile $NS = \frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{8} \cdot 1,85 \cdot 40 \cdot 40 = 370^{\text{tm}}$. Wird $H = 128^{\text{tons}}$ gesetzt, so folgt $\frac{1}{8} \frac{pl^2}{H} = 2,89^{\text{m}}$ als Pfeil der die y_p liefernden Parabel.

Diese ist in Figur 26 dargestellt, worauf die Bestimmung der

$$y = y_p + y_v$$

erfolgt. Man findet

$$y_1 = 4,22^{\text{m}} \quad \mathfrak{M}_1 = 128 \cdot 4,22 = 540^{\text{tm}}$$

$$y_2 = 7,49^{\text{m}} \quad \mathfrak{M}_2 = 959^{\text{tm}}$$

$$y_3 = 9,77^{\text{m}} \quad \mathfrak{M}_3 = 1251^{\text{tm}}$$

$$y_4 = 11,13^{\text{m}} \quad \mathfrak{M}_4 = 1425^{\text{tm}}$$

$$y_5 = 11,53^{\text{m}} \quad \mathfrak{M}_5 = 1476^{\text{tm}}.$$

Verbindet man die Endpunkte der Ordinaten y durch Gerade und sieht davon ab, dass ein Theil der permanenten Last, nämlich das Eigengewicht des Trägers, direkt wirkend ist, so erhält man für alle zwischen den Querträgerangriffspunkten gelegenen Querschnitte etwas zu grosse Momente. Für den Querschnitt C (Fig. 26) zwischen 3 und 4 ist z. B.

$$y = y_3 + \frac{y_4 - y_3}{\lambda} \xi = y_3 \frac{\xi'}{\lambda} + y_4 \frac{\xi}{\lambda}.$$

Da nun im Allgemeinen y_3 und y_4 bei verschiedenen Laststellungen Maxima werden, wird durch gleichzeitiges Einführen von $\max y_3$ und $\max y_4$ in die vorstehende Gleichung der Werth y zu gross gefunden. Der Fehler ist aber unbedeutend, wird auch durch den aus Vernachlässigung der direkten Wirkung des Eigengewichtes des Trägers resultirenden Fehler theilweise oder ganz aufgehoben.

Eine besonders peinliche Ermittlung der \mathfrak{M} hat schon desshalb keinen Werth, weil die in Rechnung gestellten Lasten der ruhenden Lokomotive entsprechen. Bewegt sich die Lokomotive, so sind die Axenbelastungen einer fortwährenden Aenderung unterworfen, und zwar können einzelne Axen ganz beträchtliche Mehr- oder Minderbelastungen erfahren.

Es ist daher auch sehr überflüssig, die Axenbelastungen und Radstände besonders genau anzugeben und empfiehlt es sich stets, der statischen Berechnung der Brückenträger einen Normalzug zu Grunde zu legen, dessen Lasten und Radstände möglichst einfach gewählt sind.

30) **Verticalkräfte.** In No. 22 auf Seite 14 (vergl. auch Fig. 19) wurde nachgewiesen, dass in einem Trägerfelde die Verticalkraft $\max \mathfrak{B}$ entsteht, sobald nur Lasten rechts von der in dem fraglichen Felde gelegenen Belastungsscheide wirken. Besteht die veränderliche Belastung aus einem Systeme concentrirter Lasten, so erhält man in den meisten Fällen $\max \mathfrak{B}$, wenn die erste Last des von B aus vorrückenden Systems über dem das Feld rechts begrenzenden Querträger liegt. Diese Laststellung nennen wir in der Folge **Normalstellung**.

Um für den vorhin betrachteten, durch einen Eisenbahnzug beanspruchten Träger (vergl. Fig. 27) die der veränderlichen Last entsprechende Verticalkraft $\max \mathfrak{B}_v$ zu finden und zwar beispielsweise für das 5^{te} Trägerfeld, nehmen wir an, dass ein von drei vorwärts gehenden Lokomotiven geführter Güterzug von B aus bis zum Querschnitte No. 5 vorrückt. Links von dem durch das 5^{te} Feld geführten Schnitte ss greift nur Reaction A an, so dass $V_{.5} = A$ wird, und zwar liefert (mit der aus Fig. 27 ersichtlichen Bezeichnungsweise, und da rechts von ss sich 11 Lasten auf dem Träger befinden) die Momentengleichung für den Stützpunkt B :

$$Al - \sum_1^{11} Pb = o; \quad A = \frac{\sum_1^{11} Pb}{l},$$

wo b den Abstand einer Last P von B bedeutet. Trägt man jetzt den von 3 vorwärts gehenden Maschinen geführten Güterzug in der Richtung AB fahrend, mit dem ersten Rade unter B auf und bezeichnet die Abstände der rechts von der Verticalen durch Querträger 5 gelegenen Lasten von dieser Verticalen mit $b'_1, b'_2 \dots b'_{11}$, so ist offenbar $\sum_1^{11} Pb' = \sum_1^{11} Pb$, also $Al = \sum_1^{11} Pb'$, und lässt sich nun A im Anschluss an die in No. 14 (Fig. 15) gelöste Aufgabe construiren.

Auf der Verticalen durch den Stützpunkt A werden die Lasten 1, 2, 3, 4 ... 20 (im Maassstabe $5\text{mm} = 10\text{tons}$) aufgetragen; dann wird in der Distanz $H = l$ der Pol O so gewählt, dass der Seilstrahl I horizontal liegt und das Seilpolygon so gezeichnet, dass die Seiten I und II mit den Seilstrahlen I und II zusammenfallen.

Die unter dem Querträger 5 gemessene Ordinate ab der Seilcurve liefert, mit $H = l$ multipliziert, das Moment $\sum_1^{11} Pb'$, d. h. es ist:

$$l \cdot ab = \sum_1^{11} Pb', \text{ also } ab = \frac{\sum_1^{11} Pb'}{l} = \frac{\sum_1^{11} Pb}{l} = A_5,$$

Wir werden in der Folge stets mit A_m diejenige Reaction A bezeichnen, welche durch einen von B bis zum m^{ten} Querträger vorgerückten Zug erzeugt wird. Ist also die Normalstellung die gefährlichste, so ist:

$$\max \mathfrak{B}_{v5} = A_5$$

und für das m^{te} Feld

$$\max \mathfrak{B}_{vm} = A_m.$$

Stellt man die zweite Axe des Zuges über den Querträger 5, und bezeichnet mit e_1 den ersten Radstand, so übt die erste Last P_1 auf den Querträger 4 den Druck $\frac{P_1 e_1}{\lambda}$ aus, und es wird die Verticalkraft

$$\mathfrak{B}' = A - \frac{P_1 e_1}{\lambda}.$$

Dabei ist A gleich der unter der Last P_1 gemessenen Ordinate $a' b'$ der Seilcurve; von derselben ist die Strecke $P' = \frac{P_1 e_1}{\lambda}$, deren Construction aus der Fig. 27 ohne Weiteres klar ist, abzuziehen. Ist $\mathfrak{B}' > A_5$, dann ist $\max \mathfrak{B}_{v5} = \mathfrak{B}'$. So ergiebt sich z. B. im ersten Felde $\max \mathfrak{B}$, sobald das zweite Rad über Querträger 1 steht.

In ähnlicher Weise liesse sich auch der Fall untersuchen, in welchem das 3^{te} Rad über dem Querträger m liegt, doch genügt es stets, die beiden hier behandelten Belastungsfälle bezüglich ihrer Wirkung zu vergleichen.*)

Zu den Kräften \mathfrak{B}_v sind noch die der permanenten Last entsprechenden \mathfrak{B}_p zu addiren.

(Es wurde, um Fig. 27 nicht undeutlich zu machen, von der vollständigen Darstellung der Verticalkräfte abgesehen. Man findet eine solche auf Tafel 9, wo sie zur Ermittelung der Spannungen in den Diagonalen und VerticaLEN eines Parallelträgers dient. Dafür sind dort die Hilfslinien für die Construction des Seilpolygons fortgelassen worden.)

*) Analytisch findet man: Die Normalstellung ist die gefährlichste, sobald $\frac{\Sigma P}{P_1} < \frac{l}{\lambda}$ ist. Im Gegenfalle stellt man Rad 2 über m und sieht nach ob $\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} < \frac{l}{\lambda}$ ist; wird auch diese Ungleichung nicht erfüllt, so stellt man Rad 3 über m u. s. w. Für das 5^{te} Feld ist bei der Normalstellung $\Sigma P = 118^t$, mithin $\frac{\Sigma P}{P_1} = \frac{118}{13} = 9,08 < \frac{l}{\lambda} = 10$, mithin diese Stellung die gefährlichste.

III. Abschnitt.

Der einfache Fachwerk balken.

§ 9. Definitionen. (Tafel 4.)

31) Unter einem Fachwerkträger versteht man ein System von gelenkartig mit einander verbundenen Stäben (Fig. 28), welches bestimmt ist, gewisse Lasten P auf feste Stützen zu übertragen. Leisten die Stützen, vermöge der Construction der Auflager, bei verticaler Belastung nur vertical gerichtete Widerstände, so nennt man den Träger einen Fachwerk balken und zwar speciell einen einfachen Fachwerk balken, wenn derselbe nur in zwei Punkten unterstützt ist. Das eine Auflager muss fest sein, das andere beweglich mit horizontaler Bahn (vergl. Seite 9).

Die Theorie des einfachen Fachwerk balkens soll hier unter folgenden Voraussetzungen entwickelt werden.

- 1) Die Axen sämmtlicher Stäbe, sowie alle auf das System wirkenden Lasten liegen in einer und derselben Ebene.
- 2) Alle Lasten werden durch besondere Zwischenträger auf die Knotenpunkte (d. h. die Punkte, in denen zwei oder mehrere Stäbe zusammentreffen) übertragen.
- 3) In den Knotenpunkten werden die daselbst zusammentreffenden Stäbe durch einen Gelenkbolzen mit einander verbunden.
- 4) Durch jeden Stab des Systems lässt sich ein Schnitt führen, der außerdem höchstens noch 2 Stäbe trifft.*) (Ein solches System heisst ein „einfaches Dreiecksystem“.)

Zerlegt man ein System, welches den sub 2 und 3 angeführten Bedingungen entspricht, durch einen Schnitt in 2 Theile (Fig. 28) und bringt, damit der eine der beiden Theile, z. B. der linke, für sich im Gleichgewichte bleibt, an den Schnittstellen Kräfte an, welche der Wirkung des weggenommenen rechten Theiles gleichwerthig sind, so müssen diese Kräfte mit den Stabaxen zusammenfallen, da sie sonst die Stäbe um die Gelenke drehen würden. Somit werden die Stäbe nur durch Axialkräfte (Zug- oder Druckspannungen erzeugende Kräfte) angestrengt. Man nennt diese Kräfte Spannkräfte oder auch Spannungen. Der letztere Ausdruck ist gebräuchlich aber wenig empfehlenswerth, da man unter Spannung allgemein die auf die Einheit des Querschnittes entfallende Belastung versteht.

Im Gegensatz zu den äusseren Kräften, nämlich den Lasten und Auflagerreactionen, nennt man die Spannkräfte auch innere Kräfte.

*) Bei den Systemen Figur 46 und 49 auf Tafel 7 ist diese Bedingung allerdings nicht erfüllt, doch lassen sich diese Systeme in einfache Dreiecksysteme zerlegen.

Die den Fachwerk balken nach oben und nach unten begrenzenden Stabreihen heissen die Gurtungen; ihre Spannkräfte sollen mit O oder U (Fig. 28) bezeichnet werden. Die Stäbe, welche die Gurtungen mit einander verbinden, werden Gitterstäbe genannt, auch Diagonalen oder Verticalen, je nachdem sie schräg oder vertical gerichtet sind; ihre Spannkräfte bezeichnen wir mit D beziehungsweise V .

§ 10. Allgemeine Theorie. (Tafel 4.)

32) Bestimmung der Spannkräfte. Fig. 28^a. Nach Führung des Schnittes ss , welcher nur 3 Stäbe trifft, lassen sich die 3 Spannkräfte O , D und U aus der Bedingung bestimmen:

Es müssen die inneren Kräfte O , D und U mit den links vom Schnitt ss angreifenden äusseren Kräften im Gleichgewichte sein.

Die äusseren Kräfte des Systems bestehen aus den gegebenen, vertical angenommenen Lasten P und den Auflagerreactionen A und B . Letztere werden mit Hilfe eines Seilpolygons gewonnen. Nachdem die Lasten P_1 , P_2 , $P_3 \dots P_7$ auf der Verticalen EF aneinandergereiht worden sind, werden von einem beliebigen Pole aus die Seilstrahlen I, II, . . . VIII gezogen. Hierauf wird das Seilpolygon gezeichnet und die Schlusslinie s , d. i. die Verbindungs linie der Schnittpunkte a und b des Seilpolygons mit den Auflagerverticalen eingetragen. Eine durch den Pol zur Schlusslinie s parallele Gerade ab zerlegt EF in die aufwärtsgerichteten Kräfte A und B .

Die Resultirende aus den links vom Schnitte ss wirkenden Kräften ist

$$\mathfrak{B} = A - P_1 - P_2;$$

sie geht durch den Schnittpunkt der Seilpolygonseiten ab und III, wirkt aufwärts, so bald diese Polygonseiten nach links convergiren und wird der Grösse nach aus Fig. 28^b erhalten. Um O , D und U zu finden, hat man jetzt nur noch die in No. 11 auf Seite 5 (vergl. auch Fig. 12 auf Tafel 1) behandelte Aufgabe zu lösen:

Drei der Lage nach gegebene Kräfte O , D und U zu finden, welche einer gegebenen Kraft \mathfrak{B} das Gleichgewicht halten.

Dazu bringt man — nach Belieben — je zwei der Kräfte mit einander zum Schnitt, z. B. U mit \mathfrak{B} , ferner D mit O , verbindet die Schnittpunkte durch die Gerade L , zerlegt \mathfrak{B} nach den Richtungen von L und U , hierauf Hilfskraft L nach den Richtungen von D und O und versieht schliesslich die Seiten des aus den Kräften \mathfrak{B} , O , D und U gebildeten Polygons so mit Pfeilen, dass der Umfahrungssinn ein continuirlicher ist (vergl. No. 3, Seite 2). Indem man nun O , D und U an den durchschnittenen Stäben des linken Balkenfragments in dem durch den Pfeil des Kräftepolygons gegebenen Sinne anbringt, erfährt man, dass im vor-

liegenden Falle die Kräfte O und D Druckspannungen erzeugen, während Kraft U Zugspannungen hervorruft.

Somit ist gezeigt, wie man für jeden Belastungszustand die Spannkraft zu ermitteln vermag und bleibt nur noch nachzuweisen, welchen Belastungszuständen die grössten und die kleinsten Spannkräfte entsprechen.*)

Wir werden in den folgenden Untersuchungen eine Spannkraft positiv oder negativ setzen, je nachdem sie Zug- oder Druckspannungen erzeugt.

33) **Die gefährlichste Belastung.** Durch eine linkssteigende Diagonale wird ein Schnitt ss geführt, Fig. 29^a, und angenommen, dass nur am Trägertheil rechts von ss Lasten P angreifen. Auf den linken Theil wirkt dann nur eine äussere Kraft, nämlich A . Nachdem — genau wie vorhin — die Gerade L gezogen worden ist, lassen sich die Kräfte O , D und U (Fig. 29^b) construiren.

Fallen die Richtungen von O und L zusammen, d. h. schneiden sich O und U auf der Auflagerverticalen A , so wird $D = 0$.

Ist der Neigungswinkel von O gegen die Horizontale kleiner als L , wie dies in Fig. 29^a der Fall ist, so wird die Diagonale durch die Kraft D gezogen; es ist also D positiv.

Ist dagegen der Neigungswinkel von O grösser als der von L (wie in dem Falle Fig. 30), so ist D negativ, denn die fragliche Diagonale wird gedrückt. Der Schnittpunkt (OU) von O und U liegt hier rechts von A .

Indem wir nun voraussetzen, O und U convergiren nach links, können wir sagen:

Durch Lasten rechts von ss wird die linkssteigende Diagonale gezogen oder gedrückt, je nachdem der Schnittpunkt (OU) von O und U ausserhalb oder innerhalb der Stützweite liegt.

Eine rechtssteigende Diagonale**) verhält sich entgegengesetzt.

[Convergiren die Gurtstäbe O und U nach rechts, so betrachte man das Spiegelbild. In der Regel werden aber die Träger in Bezug auf die Verticale durch die Mitte symmetrisch sein, und genügt es dann, die Untersuchung für die linke Hälfte anzustellen.]

Der Untergurt wird im Falle Fig. 29 sowie im Falle Fig. 38 gezogen. Der Obergurt wird in beiden Fällen gedrückt.

Jetzt werde angenommen, dass nur links vom Schnitte ss Lasten P auf den Träger wirken (Fig. 31^a). Am rechten Trägertheil greift dann

*) Die neuere Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlconstructionen verlangt bekanntlich die Kenntniss nicht nur der grössten, sondern auch der kleinsten Inanspruchnahme.

**) Z. B. die in Fig. 28 durch ss geschnittene.

nur eine äussere Kraft an, nämlich B . Nach Ziehen der Linie L werden U , D und O analog wie vorhin construirt (Fig. 31^b), und findet man bei nach links convergirenden O und U stets:

Obergurt gedrückt, Untergurt gezogen, Diagonale gezogen.

Dabei ist es gleichgiltig, ob sich O oder U links oder rechts von der Reaction A , d. h. ausserhalb oder innerhalb der Stützweite schneiden.

Die Resultate der vorstehenden, nur für den Fachwerkbalken mit verticalen, abwärts wirkenden Lasten angestellten Untersuchungen lassen sich zu folgenden Sätzen zusammenfassen.

- 1) Die obere Gurtung wird nur gedrückt, die untere Gurtung nur gezogen. Die grössten Gurtkräfte ergeben sich bei voller Belastung.
- 2) Die Gitterstäbe werden, falls die Schnittpunkte der durch denselben Schnitt getroffenen Gurte innerhalb der Stützweite liegen, stets in demselben Sinne beansprucht. Linkssteigende Diagonalen der linken Trägerhälfte (vergl. Fig. 32) werden nur gedrückt, rechtssteigende nur gezogen. Die grössten Spannkkräfte werden bei voller Belastung erhalten.
- 3) Wenn die Gitterstäbe, welche der durch die linkssteigende Diagonale geführte Schnitt I (vergl. Fig. 33 bis 36) trifft, sich ausserhalb der Stützweite schneiden, so entsteht in dieser Diagonale der grösste Zug, d. h. $\max D$, wenn ausschliesslich die Knotenpunkte rechts von dem Schnitte belastet sind, und die grösste Druckspannung, d. h. $\min D$, wenn nur die Knotenpunkte links von I belastet sind.

(Selbstverständlich darf man die permanenten Belastungen der Knotenpunkte nicht entfernen, so dass die in den Figuren 33 bis 36 dargestellten Belastungsweisen nur die veränderliche Belastung berücksichtigen; die permanenten Belastungen hat man hinzugefügt zu denken. Die Figuren 33 und 34 resp. 35 und 36 setzen voraus, dass beziehungsweise nur die Knotenpunkte des Obergurtes oder nur die des Untergurtes belastet werden.)

- 4) Trifft der durch eine rechtssteigende Diagonale geführte Schnitt II Gurtstäbe, die sich ausserhalb der Stützweite schneiden, so wird in der Diagonale die Spannkraft $\min D$ beziehungsweise $\max D$ erzeugt, je nachdem nur die Knotenpunkte rechts oder links von Schnitt II belastet werden.

Sind die Gitterstäbe eines Trägers abwechselnd Diagonalen und Verticalen (Fig. 37), so sind bei linkssteigenden Diagonalen die Verticalen als rechtssteigend (mit dem Neigungswinkel 90°) aufzufassen und umgekehrt.

Die Werthe $\max D$ und $\min D$ nennt man die Grenzwerthe der Spannkräfte.

Ein Blick auf die Figuren 33 bis 36 lehrt, dass jedem der gezeichneten Belastungszustände gleichzeitig zwei Grenzwerthe D entsprechen, nämlich ein *Maximum* und ein *Minimum*. Das Dreieck, welchem die beiden Diagonalen angehören, deren Spannkräfte bei demselben Belastungszustande Grenzwerthe annehmen, ist durch Schraffirung hervorgehoben. Die dritte Seite dieses Dreiecks ist bei belastetem Obergurt stets ein Stab des Obergurtes und bei belastetem Untergurt stets ein Stab des Untergurtes.

Wenn sowol in den Knotenpunkten des Obergurtes als auch in denen des Untergurtes veränderliche Lasten angreifen, so ermitte man für alle Spannkräfte in den Gitterstäben getrennt:

die Grenzwerthe in Folge der oben angreifenden veränderlichen Belastungen und

die Grenzwerthe in Folge der unten angreifenden veränderlichen Belastungen,

weil man sich im Gegenfalle des grossen Vortheils begiebt, der in der gleichzeitigen Bestimmung zweier Grenzspannungen besteht.

Auch die Spannkräfte, welche der permanenten Belastung entsprechen, bestimme man getrennt und addire schliesslich die verschiedenen für denselben Stab gewonnenen Spannkräfte mit Berücksichtigung der Vorzeichen + (für Zugkräfte) und — (für Druckkräfte).

§ 11. Kräftepläne für permanente Belastung (nach Cremona). (Tafel 4 und 5.)

34) **Princip.** An jedem Knotenpunkte eines Fachwerks muss zwischen den daselbst angreifenden inneren und äusseren Kräften Gleichgewicht bestehen; es müssen sich also diese Kräfte zu einem geschlossenen Polygone mit continuirlichem Umfahrungssinne zusammensetzen lassen.

Soll das einem Knotenpunkte entsprechende Kräftepolygon gezeichnet werden können, so dürfen nicht mehr als zwei der an diesem Punkte angreifenden Kräfte unbekannt sein. Die gegebenen Kräfte werden zu einem Polygonzuge zusammengesetzt, worauf dieser durch Ziehen von Parallelen zu den Richtungen der beiden unbekannten Kräfte geschlossen wird. Dabei muss mit Construction des Kräftepolygons für einen Knotenpunkt begonnen werden, an welchem nur zwei Stäbe angreifen.

Wir werden (nach Cremona) die einzelnen Kräftepolygone so aneinanderreihen, dass jede Kraft nur einmal in dem Plane vorkommt.

35) **Träger mit horizontalem Obergurt.** *Last am Obergurt.* (Fig. 37^a.) Der Träger habe 8 gleichlange Felder. Jedes Feld sei gleichmässig mit $2P$ belastet. Dann kommt auf jeden Knotenpunkt die Last $2P$, mit Ausnahme der mit den Stützpunkten zusammenfallenden

Knotenpunkte, diese werden mit P belastet. Jede Auflagerreaction ist $8P$, so dass an jedem Stützpunkte die Kraft $7P$, nach oben gerichtet, angreift.

In einem beliebigen, abgerundeten Kräftemaassstabe wird (Fig. 37^b) $\overline{ib'} = 7P$ gemacht, worauf, um das Kräftepolygon für den Knotenpunkt I zu erhalten, $\overline{ba} \parallel O_1$ und $\overline{ia} \parallel U_1$ gezogen wird. Der Umfahrungssinn des Polygones ist (weil $7P$ im Sinne $\overline{ib'}$ wirkt): $\overline{ib'} - \overline{ba} - \overline{ai}$. Dessenhalb wirkt O_1 von rechts nach links auf den Knotenpunkt I, erzeugt also Druckspannung. U_1 erzeugt Zugspannung.

An dem Knotenpunkte II wirkt U_1 in entgegengesetztem Sinne wie am Knotenpunkte I, desgl. O_1 an III in entgegengesetztem Sinne wie an I.

Dass die Kräfte O Druckspannungen und U Zugspannungen in den betreffenden Stabquerschnitten erzeugen, wurde vorhin allgemein nachgewiesen, und sind desshalb in dem Beispiele Fig. 37 die den Sinn von O und U hervorhebenden Pfeile nur im ersten Felde eingetragen worden.

Uebergehend zur Construction des Kräftepolygons für Knotenpunkt II, bestimmen wir aus der gegebenen Kraft $U_1 = \overline{ia}$ (von unten nach oben wirkend) die Kräfte $\overline{ab} = V_1$ und $\overline{bi} = U_2$, indem wir von a und i aus Parallelen zu V_1 und U_2 ziehen. Umfahrungssinn: $\overline{ia} - \overline{ab} - \overline{bi}$. Es wirkt also V_1 am Knotenpunkt II von oben nach unten und am Knotenpunkte III von unten nach oben.

Im Kräfteplane werden wir stets die Spannkräfte V und D mit Pfeilen versehen, welche andeuten, in welchem Sinne diese Kräfte an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Will man also erfahren, in welchem Sinne diese Kräfte an den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreifen, so muss man die im Kräfteplane gezeichneten Pfeile umkehren.

Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte an einem Knotenpunkte bei Bildung des Kräftepolygons aneinandergesetzt werden, ist nicht willkührlich, so bald man die Forderung stellt, dass jede Kraft in dem Plane nur einmal vorkommen soll. Wollte man z. B. nach Bestimmung von O_1 und U_1 die Gerade \overline{ab} (Fig. 37^c) parallel U_2 ziehen, so würde sich $\overline{ab} = U_2$ und $\overline{bi} = V_1$ ergeben, und man müsste bei Zeichnen des Polygons für den Knotenpunkt III die Kraft V_1 an die Kraft O_1 setzen, da hier die gegebenen Kräfte V_1 , O_1 und $2P$ aneinander gereiht werden müssen.

Dagegen sind bei der Anordnung Fig. 37^b die drei Kräfte $\overline{ba} = V_1$ (nach oben wirkend), $\overline{ab'} = O_1$ (nach rechts wirkend) und $\overline{b'b''} = 2P$

^{*)} Fig. 37^c ist in kleinerem Maassstabe gezeichnet.

(abwärts gerichtet) bereits aneinandergereiht, und hat man nur nöthig, durch Ziehen von $bc \parallel D_2$ und $b''c \parallel O_2$ die Kräfte $\overline{b''c} = O_2$ und $\overline{cb} = D_2$ *) zu erhalten. Das Polygon für Knotenpunkt III ist hell schraffirt worden.

Um die Kräfte stets in der richtigen Reihenfolge aneinander zu setzen, beachte man die Regel:

Die Spannkräfte der in Figur 37^a ein Dreieck bildenden Stäbe müssen in Fig. 37^b durch denselben Punkt gehen.

Durch den Punkt a in Fig. 37^b gehen z. B. die Kräfte O_1 , U_1 und V_1 ; die entsprechenden Stäbe bilden in Figur 37^a das Dreieck I II III.

Ebenso müssen in Fig. 37^b die Kräfte V_1 , U_2 und D_2 durch ein und denselben Punkt b gehen; denn, um das Polygon für den Knotenpunkt IV zu construiren, müssen die bereits bekannten Kräfte U_2 und D_2 aneinandergereiht werden, worauf sich durch Ziehen von $\overline{cd} \parallel V_2$ und $\overline{id} \parallel U_3$ die Kräfte V_1 und U_3 bestimmen lassen. [Die Parallelen zu V_1 wurde durch Punkt c und nicht durch Punkt i gezogen, weil O_2 , V_2 und D_2 durch denselben Punkt gehen sollen. Um nämlich das Polygon für V zeichnen zu können, muss V_2 an O_2 liegen.] Der Umfahrungssinn des (dunkelschraffirten) Polygons für Knotenpunkt IV ist $ib - bc - cd - di$, also wirkt V_2 von oben nach unten.

In der hier beschriebenen Weise fortfahren kann man, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt gehend, alle Spannkräfte construiren. Dabei genügt es, den Kräfteplan für die linke Hälfte des symmetrisch gedachten Trägers zu zeichnen.**)

Der Kräfteplan, Fig. 37^b, wurde in 3 Farben ausgeführt. Die Kräfte O und U sind durch blaue und rothe Linien, die Kräfte V und D durch schwarze Linien dargestellt. Man übersieht dann leicht Folgendes:

Die Spannkräfte O_1 , O_2 , $O_3 \dots$ des durch die Kräfte $2P$ belasteten Gurtes schneiden auf dem Zuge der äusseren Kräfte die Strecken $2P$ ab.

Die Spannkräfte U des unbelasteten Gurtes gehen sämmtlich durch den Punkt i .

Die Kräfte V und D bilden einen zusammenhängenden Polygonzug $a, b, c, d, e \dots$, dessen Eckpunkte wechselweise auf einer blauen und einer rothen Linie liegen. [Eine Ausnahme bildet Eckpunkt h ; denn die Kraft V_4 geht von O_4 nach O_4' , da sie mit O_4 , O_4' und $2P$ ein Polygon bilden muss.]

*) Der Umfahrungssinn des Polygons für Knotenpunkt III ist: $ba - ab' - b'b'' - b''c - cb$, also wirkt D von c nach b . Am Knotenpunkt IV des Untergurtes wirkt es von b nach c ; dies deutet der in den Kräfteplan eingetragene Pfeil an.

**) Sämmtliche V erweisen sich im Falle: Fig. 37 negativ, sämmtliche D positiv, denn es werden die Verticalen gedrückt und die Diagonalen gezogen.

Versieht man, vom Anfangspunkte a ausgehend, den Polygonzug $a, b, c, d \dots$ mit Pfeilen und zwar ohne Unterbrechung des Umfahrungssinnes $ab - bc - cd - \dots$, so geben diese Pfeile an, in welchem Sinne die Kräfte V und D an den Knotenpunkten des Untergurtes wirken.

Danach lässt sich der Kräfteplan stets sehr schnell zeichnen, und unterliegt auch die Bestimmung der Vorzeichen der Spannkräfte keinerlei Schwierigkeit.

36) Auf Tafel 4 und 5 ist eine Reihe von Aufgaben in dieser Weise behandelt worden. Die Construction der Kräftepläne ist mit Beachtung des Vorstehenden leicht zu übersehen; doch empfehlen wir dem Anfänger:

- 1) sämmtliche Kräftepläne, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehend, nachzuconstruiren,
- 2) nach Fertigstellung eines Kräfteplanes zu irgend einem Knotenpunkte das zugehörige Kräftepolygon aufzusuchen und den Umfahrungssinn desselben festzustellen.

37) **Träger mit horizontalem Untergurt.** Last am Untergurt (Fig. 38). Belastung pro Knotenpunkt $2P$. An den Stützpunkten greifen Kräfte $7P$ an. Man macht $\overline{b'i} = 7P$, zieht $i\alpha \parallel O_1$ und $b'a \parallel U_1$ und zeichnet dann für den ersten Knotenpunkt des Untergurtes das aus $2P = \overline{b''b'}$, $U_1 = \overline{b'a}$, $V_1 = \overline{ab}$ und $U_2 = \overline{b'b''}$ bestehende Kräftepolygon. Nun werden die Parallelen zu den Richtungen U_2 , U_3 und U_4 der Stäbe des belasteten Gurtes so gezogen, dass diese Parallelen auf der Vertikalen ib' die Kräfte $2P$ abschneiden, ferner durch den Punkt i parallelen zu den Richtungen O_2 , O_3 , O_4 und O'_4 der Stäbe des unbelasteten Gurtes. Der aus den Spannkräften V_1 , D_2 , V_2 , D_3 , V_3 , D_4 bestehende Polygonzug $abcd\dots g$ wird nun so eingetragen, dass die Eckpunkte $b, c, d \dots$ wechselweise auf den rothen Linien U und den blauen Linien O liegen und schliesslich $gh \parallel V_4$ gemacht. Von a ausgehend werden die Seiten des Polygonzuges $abcd\dots$ mit Pfeilen versehen. Diese Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte V und D an den Knotenpunkten des Untergurtes angreifen. Man findet, dass V_1 und V_4 positiv sind, weil Zugspannungen erzeugend, dagegen V_2 und V_3 negativ. Die Spannkräfte D sind durchweg positiv. Die obere Gurtung wird gedrückt, die untere gezogen.

38) **Englischer Dachstuhl mit gezogenen Diagonalen** (Fig. 39). **Last am Obergurt (Zahlenbeispiel).** Die einzelnen Dachbinder sind einander parallel und in $5,1^m$ Abstand angenommen. Stützweite 24^m , Feldweite $3,0^m$. Die vertical wirkende Belastung besteht für den Quadratmeter der Horizontalprojektion der Dachfläche aus:

54^k Eigengewicht (Deckung: Schiefer auf Winkeleisen).

75^k Schneelast.

120 $\sin^2(\beta + 10)$ ^{kg} Winddruck (vergl. den Anhang).

β = Neigungswinkel der oberen Gurtung. $\operatorname{tg} \beta = \frac{4,8}{12} = 0,4$, also $\beta = 22^\circ$

und $\sin(\beta + 10) = 0,53$. Daher Windbelastung:

$$120 \cdot 0,53^2 = 34^k$$

und Gesammtbelastung $54 + 75 + 34 = 163^k = 0,163^{\text{tons}}$. Somit kommen auf jeden Knotenpunkt

$$0,163 \cdot 5,1 \cdot 3,0 = 2,5^{\text{tons}}.$$

Die Horizontalekomponente des Winddruckes darf hier vernachlässigt werden, weil der grösste Winddruck und die grösste Schneelast kaum gleichzeitig auftreten werden.

An jedem Stützpunkte greift die Kraft $A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2,5^{\text{tons}}$ (nach oben gerichtet) an.

Sämmtliche Stäbe werden bei voller Belastung am stärksten beansprucht (vergl. Seite 27); es liefert desshalb der in Figur 39^b im Maassstabe 1^{cm} = 4^{tons} gezeichnete Kräfteplan die grössten Spannkräfte.

Die Spannkräfte in der oberen Gurtung wurden mit blauen, die in der unteren mit rothen, die in den Diagonalen und Verticalen mit schwarzen Ziffern bezeichnet.

Die Parallelen zu den Spannkräften in der oberen, belasteten Gurtung schneiden auf dem Kräftezeuge die Knotenpunktlasten ab. Die Parallelen zu den Spannkräften in der unteren, unbefestigten Gurtung gehen durch denselben Punkt, decken sich also, da sie einerlei Richtung haben. Die Parallelen zu den Spannkräften in den Gitterstäben bilden einen bei a beginnenden zusammenhängenden Polygonzug.

Nach Messen der Spannkräfte wurden die Resultate in die rechte Hälfte der Figur 39^a eingetragen.

39) Binder eines Pultdaches (Fig. 40). Der einer gleichförmigen totalen Belastung entsprechende Kräfteplan (Fig. 40^b) wurde analog wie vorhin construirt. Die Gitterstäbe: 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13 werden bei den hier gewählten Verhältnissen gedrückt, die Gitterstäbe: 2, 4, 6, 11 gezogen. Obere Gurtung gedrückt, untere Gurtung gezogen.

40) Kräfteplan für ein Perrondach (Fig. 41). Der in Fig. 41^a dargestellte Dachbinder hat bei b ein festes Auflager und wird bei a durch eine Strebe gestützt. Ist bei D ein Gelenk angeordnet, so wirkt Reaction A in der Richtung der Strebe, und muss dann Reaction B durch den Schnittpunkt C der Strebe mit der Resultirenden ΣP aus den Belastungen gehen. Nach Construction von A und B (Fig. 41^b) wird A

mit der im Knotenpunkte a (Fig. 41^a) angreifenden Last P zu der Resultierenden A' zusammengesetzt, worauf die Spannkräfte für die ersten Stäbe von Obergurt und Untergurt bestimmt werden können. Die Spannkräfte für die unbelastete, untere Gurtung gehen durch ein und denselben Punkt, die für die belastete, obere Gurtung schneiden auf dem Zuge der Kräfte P die Strecken $2P$ ab. Die Parallelen zu den Spannkräften in den Verticalen und in den Diagonalen bilden einen zusammenhängenden Polygonzug, dessen Anfangspunkt a ist. Die eingetragenen Pfeile geben an, in welchem Sinne die Kräfte an den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen. Man findet, dass die Verticalen gedrückt und die Diagonalen gezogen werden. Der Obergurt ist gedrückt, der Untergurt gezogen.

41. Kräfteplan für einen belgischen Dachstuhl (Fig. 42 bis 44). Unter der Voraussetzung, dass jedes Feld der oberen Gurtung mit $2P_o$ belastet wird, während in 3 Knotenpunkten des Untergurtes Lasten $2P_u$ angreifen, zeigt Figur 42^b den Kräfteplan für die vertical wirkende Belastung. Derselbe ist nur für die linke Hälfte gezeichnet. Die Spannkräfte der Stäbe der rechten Hälfte sind gleich denen der correspondirenden Stäbe der linken Hälfte. Der Obergurt, sowie die Gitterstäbe normal zum Obergurt werden gedrückt. Die übrigen Gitterstäbe und der Untergurt werden gezogen.

Weiter soll angenommen werden, dass auf den Dachbinder ein starker Winddruck wirkt. Der Einfallswinkel des Windes sei β (Fig. 43^a), und der Neigungswinkel des Obergurtes gegen die Verticale = α . Dann bildet die Normale zur Dachfläche mit der Windrichtung den Winkel ($\alpha - \beta$), so dass die Geschwindigkeit des Windes normal zur Dachfläche gleich $c \cos(\alpha - \beta)$ wird, wo c die Geschwindigkeit des Windes überhaupt bedeutet. Der Normaldruck auf die Dachfläche F ist erfahrungsgemäß

$$\Sigma W = 0,12248 c^2 \cos^2(\alpha - \beta) F$$

nämlich direkt proportional der getroffenen Fläche und dem Quadrate der Geschwindigkeit des Windes normal zur Fläche. Man kann etwa $c = 31^m$ und $\beta = 10^o$ setzen.*.) F ist in Quadratmetern auszudrücken. Die Belastung pro Knotenpunkt ist in Fig. 43^a

$$2W = \frac{1}{16} \Sigma W \text{ bezieh. } W = \frac{1}{16} \Sigma W.$$

Das bewegliche Lager sei auf der linken Seite angeordnet, und von dieser Seite möge auch der Wind kommen. Bei dieser Belastung sind die Gitterstäbe der rechten Hälfte spannungslos. Denn führt man durch irgend ein Feld der rechten Hälfte einen Schnitt (Fig. 45) und stellt die Momentengleichung für den rechtsseitigen Stützpunkt auf, so erhält man, da B die einzige auf das rechte Fragment wirkende äussere Kraft ist,

$$DA = 0,$$

*.) Man findet dann $\Sigma W = 120 F \cos^2(\alpha - \beta)$.

$\mu F \cos^2(\alpha - \beta)$

wo A den Hebelarm von D bedeutet. Es sind aus diesem Grunde in Fig. 43^a die Gitterstäbe der rechten Hälfte fortgelassen worden.

Reaction A ist vertical und schneidet ΣW in C . Durch Punkt C muss Reaction B gehen. In Fig. 43^b wurden aus dem gegebenen ΣW die Kräfte A und B construirt; hierauf wurde A mit der Belastung W des ersten Knotenpunktes zu A' zusammengesetzt. Die weitere Construction des Planes ist aus der Fig. 43^b zu ersehen. Der Obergurt wird durchweg gedrückt, der Untergurt auf der linken Trägerhälfte gezogen, auf der rechten gedrückt. Die Gitterstäbe 1, 3, 5, 7 werden gedrückt, die Gitterstäbe 2, 4, 6, 8 gezogen.

Fig. 44^a und 44^b zeigen die Ermittelung der Spannkräfte für den Fall, dass der Wind von der rechten Seite kommt. Es wird wieder ΣW mit der verticalen Reaction A im Punkte C zum Schnitt gebracht und die Richtung der ebenfalls durch C gehenden Reaction B festgestellt. Die Gitterstäbe auf der linken Hälfte werden spannungslos; sie sind in dem Kräfteplane fortgelassen worden. Man findet, dass der Obergurt gedrückt, der Untergurt gezogen wird. Die Gitterstäbe normal zum Obergurte werden gedrückt, die anderen gezogen.

Nachdem für jeden einzelnen Stab des Fachwerks durch Vergleich der Pläne Fig. 43^b und 44^b festgestellt worden ist, ob durch den von der linken Seite oder durch den von der rechten Seite wirkenden Winddruck eine grössere Spannkraft erzeugt wird, muss die grössere Spannkraft zu der aus dem Plane Fig. 42^b sich ergebenden addirt werden. In den meisten Fällen genügt es aber, die statische Berechnung eines Dachstuhles in der durch das Zahlenbeispiel in No. 38 erläuterten Weise durchzuführen und nur die Verticalkomponente des Winddruckes zu berücksichtigen. Nur bei sehr hohen Dachstühlen zeichne man die Pläne für den schräg wirkenden Winddruck, stelle jedoch eine geringere Belastung durch Schnee in Rechnung, da es höchst unwahrscheinlich ist, dass bedeutende Winddrücke und grosse Schneelasten gleichzeitig wirken.

42) **Dachstuhl System Polonceau mit polygonalen Zwischenträgern** (Fig. 46). Die gesammte Belastung des Dachbinders sei = P . Dann kommt auf jeden Knotenpunkt die Last $\frac{1}{16}P$. Der Träger kann aufgefasst werden als einfacher Polonceau-Dachbinder, Fig. 47^a, dessen Obergurtstäbe durch Fachwerkssysteme ersetzt werden. Hat man — unter Einführung der Knotenpunktlasten $\frac{1}{4}P$ — für das System Fig. 47^a den Kräfteplan Fig. 47^b gezeichnet, so muss man den Fachwerk-Sparren für die in Fig. 48^a veranschaulichte Beanspruchung berechnen. Ausser den verticalen Lasten $\frac{1}{16}P$ und den entsprechenden Stützenkräften $\frac{3}{2}P$ wirkt auf das System noch in der Richtung der oberen Gurtung der in dem Plane Fig. 47^b gegebene Druck O' . Fig. 48^b zeigt den Kräfteplan für die verticale Belastung. Die Kraft O' erzeugt nur in der oberen

Gurtung des Fachwerksparrens eine Beanspruchung, und hat man zu den für die obere Gurtung in dem Plane Fig. 48^b enthaltenen Spannkräften (Drücken) noch den Werth O' (Druck) zu addiren, während die in Fig. 48^b für die untere Gurtung und die Gitterstäbe gegebenen Kräfte ungeändert bleiben.

Der Fachwerksparen im 2^{ten} Felde wird ebenso behandelt. Zu den Drücken, welche der Plan Fig. 48^b für die obere Gurtung liefert, ist der Druck O'' zu addiren.

Die Vorzeichen der Spannkräfte sind in die Figuren eingetragen.

43) Zweites System Polonceau (Fig. 49). Dieser sehr gebräuchliche und rationelle Träger kann in analoger Weise behandelt werden, wie der vorhin besprochene.

Bedeutet wieder P die Belastung des Dachbinders, so ist die Knotenpunktsbelastung $= \frac{1}{8}P$.

Nachdem nun für das System Fig. 47^a (Knotenpunktslast $\frac{1}{4}P$) der Kräfteplan Fig. 47^b gezeichnet worden ist, construirt man für den Zwischenträger Fig. 50^a den Plan Fig. 50^b und erhält dann für den Träger Fig. 49 die Spannkräfte:

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = O' + o_1 \\ O_2 = O' + o_2 \\ O_3 = O'' + o_1 \\ O_4 = O'' + o_2 \end{array} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{array}{l} U_1 = U' + u_1 \\ U_2 = U' \\ U_3 = U''' \\ U_4 = U'' \end{array} \right\} \text{Zug} \quad \left. \begin{array}{l} U_5 = U'' + u_2 \\ D = u_1 = u_2 \end{array} \right\} \text{Zug}$$

Die Drücke N_1 und N liefern beziehungsweise die Pläne Fig. 50^b und Fig. 47^b.

§ 12. Fachwerkbalken mit gleichförmiger Belastung.

(Anwendung auf Dachconstructionen. Tafel 6.)

44) Spannkräfte in den Gurtungen. Die Gurtungen werden, wie in § 10 nachgewiesen wurde, bei totaler Belastung des Fachwerks am stärksten beansprucht. Ihre Spannkräfte ermittele man mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes. Handelt es sich z. B. um den in Fig. 38 (Tafel 4) dargestellten Träger und bezeichnet man mit

p die permanente Belastung für die Längeneinheit,

v " veränderliche " " " " "

so hat man, wenn die Feldweite $= \lambda$ ist, die Knotenpunktslast $2P = (p+v)\lambda = q\lambda$ zu machen und den in Fig. 38^b gezeichneten Kräfteplan zu entwerfen. Derselbe liefert die grössten Gurtspannungen O und U .

45) Spannkräfte in den Gitterstäben (Diagonalen und Verticalen). Wenn (wie z. B. in dem in Fig. 32 auf Tafel 4 dargestellten Systeme) die Gurtungen, welche der durch einen Gitterstab geführte Schnitt trifft, sich innerhalb der Stützweite schneiden (vergl. auch Fig. 30^a), so wird der

Gitterstab bei voller Belastung am stärksten beansprucht. Die Spannkraft für diesen Stab liefert dann derselbe Cremona'sche Kräfteplan, welchem die grössten Kräfte O und U entnommen werden. So enthält beispielsweise der für den englischen Dachbinder Fig. 39 (Tafel 5) gezeichnete Kräfteplan die grössten Spannkräfte in sämmtlichen Stäben. Schneiden sich dagegen (Fig. 29^a) O und U ausserhalb der Stützweite, so erfolgt die grösste Beanspruchung des Stabes bei einseitiger Belastung, und es muss getrennt der Einfluss der permanenten und der veränderlichen Belastung untersucht werden.

Die Spannkraft in Folge der permanenten Belastung, welche wir stets durch den Index p kennzeichnen, wird am schnellsten mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes ermittelt. Bei dem System Fig. 38 (Tafel 4) würde z. B. $2P = p\lambda$ zu setzen sein; doch wird man auch den zur Bestimmung der Gurtspannkräfte mit $2P = q\lambda$ gezeichneten Plan verwerthen können, indem man die demselben entnommenen Kräfte V und D mit $\frac{p}{q}$ multiplizirt.

Es erübrigt also nur noch, die Bestimmung der durch die mobile Belastung in den Gitterstäben erzeugten Grenzspannungen zu zeigen. Eine sehr leicht zu über sehende Methode erklären wir an dem in Fig. 51 (Tafel 6) dargestellten Sichelträger.

Die Belastung greife in den Knotenpunkten des Obergurtes an. Dann entsteht in der Diagonale D_3 der grösste Zug — und gleichzeitig in der Diagonale D_4 der grösste Druck — wenn nur die Knotenpunkte III, IV und V belastet sind. Am linken Auflager wirkt eine Reaction, welche wir A_{III} nennen und vorläufig gegeben annehmen. Sie sei unter III von der horizontalen $A'B'$ aus als Ordinate NJ aufgetragen. Zeichnen wir nun, unter der Annahme

$$A = 1^{\text{tons}},$$

einen Cremona'schen Kräfteplan Fig. 51^c für das sonst unbelastet gedachte Fachwerk *) und nennen D'_3 und D'_4 die für die Diagonalen No. 3 und No. 4 erhaltenen Spannkräfte, so sind offenbar die gesuchten Grenzwerthe:

$$\max D_{v3} = A_{III} \cdot D'_3 \text{ (positiv)},$$
$$\min D_{v4} = A_{III} \cdot D'_4 \text{ (negativ)};$$

man hat also nur nöthig, die Kräfte D'_3 und D'_4 im Verhältniss $A_{III} : 1^{\text{tons}}$ zu vergrössern. Dazu wird (Fig. 51^b) $\overline{NS} = 1^{\text{tons}}$ gemacht, ferner (in beliebiger Richtung) $\overline{NG} = D'_4$, $\overline{GH} = D'_3$; hierauf wird H mit S verbunden, $JL \parallel HS$ bis zum Schnittpunkte L mit NH gezogen und schliesslich $LK \parallel HG$. Man findet $\overline{NK} = \min D_{v4}$, $\overline{LK} = \max D_{v3}$.

*) Man kann sich auch $A = 1^{\text{tons}}$ am linken Auflager durch eine entsprechende Belastung des Knotenpunktes V entstanden denken.

Die Grenzwerte $\max D_{v4}$ und $\min D_{v3}$ entstehen bei ausschliesslicher Belastung der Knotenpunkte I und II; sie können analog construirt werden. In der Regel ist aber der Träger symmetrisch in Bezug auf die Verticale durch die Mitte und folgt dann:

$$\begin{aligned}\max D_{v4} &= \max D_{v5} \\ \min D_{v3} &= \min D_{v6}.\end{aligned}$$

Man denkt, um diese Werthe zu bestimmen, nur die Knotenpunkte IV und V belastet, ermittelt $A_{IV} = N'J'$ und multiplicirt die aus dem Plane Fig. 51^c entnommenen Kräfte D_5' und D_6' mit A_{IV} .

In derselben Weise erhält man $\max D_{v1}$ und $\min D_{v2}$ durch Multipliciren der Kräfte D_1' und D_2' mit A_{II} , ferner $\min D_{v1} = \min D_{v8}$ und $\max D_{v2} = \max D_{v7}$ durch Multipliciren von D_8' und D_7' mit $A_{V}.$ ^{*)}

Addirt man dann zu den Spannkräften D_v die der permanenten Last entsprechenden D_p — unter Berücksichtigung der Vorzeichen^{**)} — so erhält man die Gesammtspannkräfte D .

46) Construction der Reactionen $A_I A_{II} \dots$ Wir bezeichnen die Abstände der Knotenpunkte I, II ... von der Auflagerverticalen B mit $b_I b_{II} \dots$ und nehmen, um beispielsweise A_{III} zu ermitteln, an, es sei die Strecke b_{III} gleichmässig mit v pro Längeneinheit belastet, während ausserdem im Punkte III die Last $\frac{v\lambda}{2}$ wirkt. Dies setzt dann allerdings voraus, dass das Feld links von III belastet ist, und die auf den Knotenpunkt II entfallende Last $\frac{v\lambda}{2}$, welche die Spannkräfte $\max D_{v3}$ und $\min D_{v4}$ mindert, vernachlässigt wird. Es liefert also der gewählte Belastungszustand etwas zu grosse Spannkräfte, doch sind die Resultate für die Praxis genügend genau.^{***}) Aus

$$A_{III}l - vb_{III} \frac{b_{III}}{2} - \frac{v\lambda}{2} b_{III} = 0$$

^{*)} Noch zweckmässiger erscheint es uns, die Produkte $A \cdot D'$ nicht zu construiren, sondern zu rechnen. Denn die erste Anforderung, welche an eine statische Berechnung gestellt werden muss, ist — schon im Interesse der Möglichkeit einer schnellen Revision — Klarheit und Uebersichtlichkeit. Ob dann das gewählte Verfahren auch das am schnellsten zum Ziele führende ist, kommt weniger in Betracht. Man darf es einzelnen, mit der Revision von solchen Berechnungen beauftragten Behörden gewiss nicht verübeln, wenn sie mit Linien überladene und womöglich noch unvollständig erläuterte Kräftepläne zurückweisen.

^{**) Man beachte ja, dass die $\min D_v$ negativ sind.}

^{***}) Eine genauere — aber viel umständlichere — Ermittlung der Grenzwerte D_v ist in § 14 in Form eines Nachtrages gegeben. Wir betonen aber wiederholt, dass die Constructionen der Praxis die Vorbedingungen der Theorie nur annähernd erfüllen und desshalb die genaueren Methoden sehr an Werth einbüßen.

folgt $A_{III} = \frac{vb_m(b_m + \lambda)}{2l}$ d. i.
 $A_{III} = \frac{vb_n b_m}{2l}.$

Macht man (Fig. 51^b) $A'C = \frac{vl}{2}$, verbindet B' mit C , und zieht durch den Punkt E , in dem sich $B'C$ mit der Verticalen durch den Knotenpunkt II schneidet, die Horizontale EF , so ist

$$A'F = \frac{v l b_n}{2 l} = \frac{v b_n}{2};$$

es trennt also die Gerade $B'F$ auf der Verticalen durch den Knotenpunkt III die Strecke ab:

$$\overline{NJ} = \overline{AF} \frac{b_m}{l} = \frac{v b_n b_m}{2l} = A_{III}.$$

Analog findet man A_{II} , A_{IV} und A_V .

Bei konstanter Feldweite werden die Kräfte A schneller berechnet. Vergl. das Zahlenbeispiel in § 18.

§ 13. Fachwerkbalken für Eisenbahnbrücken. (Tafel 6 u. 7.)

47) Spannkräfte in den Gurtungen. Es sei der in Fig. 52 dargestellte Träger irgendwie belastet. Die Knotenpunkte sind mit 0, 1, 2 ... nummerirt. Jede Gurtspannkraft erhält die Nummer des gegenüberliegenden Knotenpunktes zum Index. Durch die Diagonale 3—4 sei ein Schnitt gelegt, der im Ganzen 3 Stäbe trifft; dann möge am linken Fragment durch Anbringen der Kräfte O_4 , U_3 und D_3 Gleichgewicht hergestellt werden.

Wählt man den unteren Knotenpunkt 4 zum Drehpunkt und bezeichnet mit \mathfrak{M}_4 das Moment der äusseren Kräfte (d. i. das Angriffsmoment) für diesen Punkt, ferner mit h'_4 den Hebelarm von O_4 , so folgt

$$O_4 h'_4 + \mathfrak{M}_4 = 0 \quad \text{also}$$

$$O_4 = -\frac{\mathfrak{M}_4}{h'_4}.$$

Ist nun \mathfrak{M}_4 mit Hilfe eines Seilpolygons gewonnen, dessen Polldistanz H und dessen Ordinate y_4 ist, so wird $\mathfrak{M}_4 = Hy_4$ und

$$O_4 = -H \frac{y_4}{h'_4}.$$

Analog folgt

$$U_3 = +H \frac{y_3}{h'_3}.$$

Die Werthe O_4 und U_3 lassen sich jetzt leicht construiren. Vergl. Fig. 52^b.

Die Ermittelung der grössten Werthe y ist in § 8 Seite 19 erörtert worden. Man vergleiche auch Fig. 26 auf Tafel 3. In Fig. 52^a ist angenommen, dass die Belastung in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreift. Man wird dann nach den in § 8 abgeleiteten Regeln die Werthe $y_1, y_3, y_5 \dots$ construiren, von einer Horizontalen aus als Ordinaten auftragen, die Endpunkte dieser Ordinaten durch gerade Linien verbinden und dann die $y_2, y_4, y_6 \dots$ messen.

Greift die Belastung in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an, so trage man die $y_2, y_4, y_6 \dots$ als Ordinaten auf, verbinde die Endpunkte derselben durch Gerade und messe dann $y_1, y_3, y_5 \dots$.

Sind die Gitterstäbe abwechselnd Verticalen und Diagonalen (Fig. 53^a), so geben wir zwei übereinander gelegenen Knotenpunkten dieselbe Nummer, bezeichnen mit h_m die Länge der m^{ten} Verticalen, mit β_m und γ_m die Neigungswinkel der Gurte und erhalten das Loth vom unteren Knotenpunkte m auf O_m

$$O_m = -\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m \cos \beta_m} \quad \text{und analog} \quad U_{m+1} = -\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m \cos \gamma_{m+1}} \quad = h_m \cos \beta_m, \quad \text{so dass}$$

woraus

$$O_m \cos \beta_m = -\frac{Hy_m}{h_m} \quad \text{und} \quad U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = +\frac{Hy_m}{h_m}.$$

Wird nun (Fig. 53^b) $\overline{CG} = y_m$, $\overline{CD} = h_m$ und die Horizontale $\overline{DE} = H$ gemacht, E mit C verbunden und $GF \parallel DE$ gezogen, so folgt $\overline{GF} = H \frac{y_m}{h_m}$.

Zieht man also $FJ \parallel O_m$ und $FL \parallel U_{m+1}$, so erhält man die Spannkräfte

$$\overline{FJ} = O_m \quad \text{und} \quad \overline{FL} = U_{m+1}.$$

Für die Angriffsmomente \mathfrak{M}_m ergeben sich im Falle Fig. 53^a gleiche Werthe, wenn die Lasten einmal in den Knotenpunkten der oberen Gurtung, dann in denen der unteren Gurtung angreifen. Denn in beiden Fällen sind die Hebelarme dieser Lasten dieselben.

48) Spannkräfte in den Gitterstäben. Nachdem man die in den Gitterstäben durch die permanente Belastung erzeugten Beanspruchungen mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes festgestellt hat, kann man die der veränderlichen Belastung entsprechenden Spannkräfte nach der im § 12 unter No. 45 entwickelten Methode ermitteln. Man nehme am linken Stützpunkte die aufwärts gerichtete Kraft $A = 1^{\text{ton}}$ an (welche man wieder durch Belastung des zunächst an B gelegenen Knotenpunktes erzielt denken kann) und zeichne einen Kräfteplan. Dann multipliziere man die diesem Plane entnommenen Spannkräfte mit den durch die entsprechenden einseitigen Belastungen verursachten Reactionen A .

Zuerst wird man, an der Hand der im § 8 unter No. 30 aufgestellten Gesetze (vergl. auch Fig. 27 Tafel 3), die Curve A für einen von B nach A vorrückenden Eisenbahnzug construiren. Die unter der ersten Last gemessene Ordinate dieser Curve giebt die der jeweiligen Zugstellung entsprechende Reaction A an. Steht das erste Rad des Zuges über dem das fragliche Feld rechts begrenzenden Querträger, so nennen wir die Zugstellung die „Normalstellung für das fragliche Feld“.

Fall 1. Die Belastung greift in den Knotenpunkten der oberen Gurtung an (Fig. 54, Tafel 7).

Für den in Fig. 54 dargestellten Träger seien die Grenzwerte $\max D_{3v}$ und $\min D_{3v}$ gesucht. Der von B vorrückende Zug sei mit dem 2^{ten} Rade über Knotenpunkt 4 gestellt. Diese Belastungsweise kann grössere Anstrengungen zur Folge haben als die Normalstellung und möge als die allgemeinere zuerst untersucht werden. Die Last P_1 übt auf den Knotenpunkt 2 den Druck

$$P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda}$$

aus. Es greifen also links von dem durch die Diagonale D_3 geführten Schnitte zwei Kräfte an, nämlich A und P' , deren Einfluss zweckmässig getrennt bestimmt wird. Die Kraft A wird als Ordinate der Curve A über der Last P_1 gemessen; dann werden die aus dem Kräfteplane Fig. 54^a entnommenen Spannkkräfte D_3' und D_4' mit A multiplizirt. Das Resultat dieser Operation seien die Werthe

$$D_3 = A \cdot D_3' \text{ und } D_4 = A \cdot D_4':$$

der erste ist positiv, der andere negativ.

Der Einfluss von P' ist in Fig. 54^b ermittelt. Es handelt sich hier nach Führung des Schnittes ss um Lösung der Aufgabe:

Drei Kräfte O_3 , D_4 und U_4 zu bestimmen, welche der Kraft P' das Gleichgewicht halten (vergl. No. 11, Seite 6).

Da nun D_3 den Schnittpunkt von O_3 und P' mit dem von U_4 und D_4 verbindet, hat man nur P' nach den Richtungen O_3 und D_3 zu zerlegen, dann D_3 nach den Richtungen D_4 und U_4 . Die Pfeile der so gewonnenen Kräfte sind aber umzukehren, denn es handelt sich nicht um eine Zerlegung, sondern um Aufsuchung von Gleichgewicht herstellenden Kräften.

Indem wir nun die durch P' erzeugten Spannkkräfte mit D_3'' (Druck) und D_4'' (Zug) bezeichnen und von den vorhin construirten durch A hervorgerufenen, entgegengesetzt wirkenden Spannkräften in Abzug bringen, erhalten wir

$$\max D_{3v} = A \cdot D_3' - D_3'' \text{ (Zug)*})$$

$$\min D_{4v} = A \cdot D_4' - D_4'' \text{ (Druck).}$$

* Man vergl. die erste Fussnote auf Seite 37.

Wenn die Normalstellung vorausgesetzt, also angenommen wird, dass das erste Rad des von B vorrückenden Zuges über Knotenpunkt 4 steht, dann greift links von dem durch D_4 geführten Schnitte nur die Reaction A_4 an; es wird $D_3'' = 0$, $D_4'' = 0$, und man erhält

$$\max D_{3v} = A_4 D_3' \text{ (Zug)}$$

$$\min D_{4v} = A_4 D_4' \text{ (Druck).}$$

Unter der Voraussetzung, dass der Träger in Bezug auf die Verticale durch die Mitte symmetrisch ist, findet man die anderen Grenzwerthe:

$$\min D_{3v} = \min D_{10v}$$

$$\max D_{4v} = \max D_{9v}.$$

(Die Ermittlung von D_{10}'' und D_9'' zeigt für den Fall, dass nicht die Normalstellung die gefährlichste ist, Fig. 54^c.)

Fall 2. Die Belastung greift in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an.

Es seien die Grenzwerthe $\max D_{3v}$ und $\min D_{4v}$ für den in Fig. 55 dargestellten Träger gesucht. Das zweite Rad des von B vorrückenden Zuges stehe über Knotenpunkt 4, so dass A im Abstande e_1 von 4 zu messen ist. e_1 ist der erste Radstand. Fig. 55^a zeigt den Kräfteplan für Beanspruchung durch $A = 1^{\text{tons}}$. Demselben sind die Spannkräfte D_3' und D_4' zu entnehmen; während in Fig. 55^b die durch $P' = P_1 \frac{e_1}{\lambda}$ erzeugten Kräfte D_3'' und D_4'' dargestellt sind. Man erhält

$$\min D_{3v} = A D_3' - D_3'' \text{ (Druck)}$$

$$\max D_{4v} = A D_4' - D_4'' \text{ (Zug),}$$

ferner bei symmetrischem Träger

$$\max D_{3v} = \max D_{10v}$$

$$\min D_{4v} = \min D_{9v}.$$

In Fig. 56 sind die Constructionen der Grenzspannungen für einen Träger mit Diagonalen und Verticalen dargestellt. Die Stellung des Zuges ist dieselbe wie vorhin. Man erhält

$$\max D_3 = A D_3' - D_3'' \text{ (Zug)}$$

$$\min V_2 = A V_2' - V_2'' \text{ (Druck),}$$

und zwar ist hierbei $V_2'' = P'$. [Dies zu übersehen, drehe man die Diagonalspannung D_3'' in Fig. 55^b in die verticale Lage. Es wird dann $U_3 = 0$ und $D_3'' = P'$.] Weiter wird

$$\min D_3 = \min D_6$$

$$\max V_2 = \max V_6.$$

Alle diese Constructionen sind durchzuführen:

- 1) unter der Annahme, dass das zweite Rad des Zuges über dem fraglichen Querträger steht;
- 2) unter Voraussetzung der Normalstellung.

In den meisten Fällen liefert die Normalstellung die grössten Spannkräfte, weshalb auch viele Constructeure nur diese untersuchen. Bedeutende Fehler können dadurch nie entstehen.

Eine andere Methode (Fig. 57). Es möge noch für den Träger mit horizontalem Untergurt ein Verfahren abgeleitet werden, welches als eine sehr zweckmässige Controlle zu bezeichnen ist.

Das 2^{te} Rad des von B vorrückenden Zuges steht über Knotenpunkt 3.

Gesucht sei $\max D_3$. Den Einfluss von A zu ermitteln, ziehe man (vergl. S. 26, ferner Fig. 29 auf Taf. 4) L , zerlege A nach den Richtungen L und U_3 , hierauf Hilfskraft L nach den Richtungen O_3 und D_3 . Stellt man Reaction A durch die Länge der zweiten Verticalen dar, so stellt die Linie L auch die Kraft L nach Grösse dar. zieht man also von A aus die Gerade 3 parallel zu O_3 , so schneidet diese auf der Diagonalen $\overline{23}$ die Kraft $\overline{23'} = D_3$ ab, und hat man nur noch nöthig, hiervon D'' in Abzug zu bringen, falls, wie hier, das zweite Rad des von A vorrückenden Zuges über Knotenpunkt 3 liegt. zieht man weiter die Gerade $\overline{A2'} \parallel O_2$, so schneidet diese auf der Verticalen die Spannkraft $\overline{22'} = V_2$ ab; denn es ist dann $A 2' 2 3' A$ das dem oberen Knotenpunkte No. 2 entsprechende Kräftepolygon. Die Richtigkeit der folgenden Construction ist jetzt leicht einzusehen.

Man ziehe von A aus parallel zu O_3 und O_2 die mit 3 und 2 bezeichneten Geraden, welche die Diagonale No. 3 und die Verticale No. 2 in $3'$ bzw. $2'$ schneiden und trage die Hilfslinien L' und L'' ein. Nun zerlege man A (welches im Abstande e_1 vom Knotenpunkte 3 gemessen wird) nach den Richtungen L' und D und ziehe durch den Schnittpunkt ($L'D$) eine Parallel zu L'' . Dann zerlege man noch (vergl. Fig. 56^b) $P' = \frac{P_1 e_1}{\lambda}$ nach den Richtungen D und O , um so D_3'' zu erhalten. Da nun in der Verticalen No. 2 durch P' die Spannkraft P' erzeugt wird, sind die in Fig. 57^a gewonnenen Spannkräfte D_3 und V_2 die gesuchten Grenzwerte

$$\max D_{3v} \text{ und } \min V_{2v}.$$

Analog findet man $\min D_{5v} = \min D_{3v}$ und $\max V_{5v} = \max V_{2v}$. Der Einfluss von P' wurde hier zuerst in der aus Fig. 56^c abgeleiteten Fig. 57^b dargestellt.

§ 14. Schärfere Bestimmung der Spannkräfte in den Gitterstäben bei gleichmässiger Belastung.

49) Es sollen diejenigen Stellungen der mobilen Belastung angegeben werden, welche in der Diagonale D_5 des in Fig. 58^a dargestellten Trägers die grösste positive, beziehungsweise negative Spannkraft erzeugen. Die mobile Belastung greife in den Knotenpunkten des Untergurtes an.

Nach den früher entwickelten Gesetzen (§ 10) wird durch Belastung des Knotenpunktes 6 die Diagonale D_5 gedrückt und durch Belastung des Knotenpunktes 4 gezogen. Eine zwischen 4 und 6 aufgebrachte Last zerfällt in 2 Componenten, welche in den Punkten 4 und 6 angreifen und in der Diagonale D_5 entgegengesetzte Beanspruchungen erzeugen; bei einer bestimmten Lage dieser Last wird $D_5 = 0$ werden. Lasten rechts von dieser Grenzlage entspricht ein Druck D_5 , Lasten links davon ein Zug D_5 .

Bringt man den Gurtstab O_4 mit den Auflagerverticalen in A' und B' zum Schnitt und zieht von A' und B' aus durch die Knotenpunkte 4 und 6 Gerade, welche sich in E schneiden, so entspricht einer durch E gehenden Last P der Werth $D_5 = 0$; denn:

Fasst man das Polygon $A' 4 6 B'$ als das zu den in den Punkten 4 und 6 angreifenden Componenten der Last P construirte Momentenpolygon*) (mit der Schlusslinie $A' B'$) auf, so ersieht man, dass die Resultirende aus den am Trägertheil links vom Schnitte ss angreifenden Lasten durch den Schnittpunkt der vom Schnitte ss getroffenen Seilpolygonseiten, d. h. durch den Schnittpunkt von O_4 und U_5 , geht.

Nun lehrt aber ein Blick auf die in Fig. 28 auf Tafel 4 dargestellte Construction der Spannkräfte, dass sich $D = 0$ ergiebt, sobald die Resultirende \mathfrak{B} aus den am linken Trägerfragmenten angreifenden Kräften durch den Schnittpunkt der Gurtkräfte O und U geht, da in diesem Falle die Gurtkraft O mit der Hilfskraft L zusammenfällt.

Es ist also in Fig. 58^a die Verticale durch E Belastungsscheide. Die ausschliessliche Belastung des Trägertheiles rechts beziehungsweise links von E erzeugt $\min D_5 v$, beziehungsweise $\max D_5 v$.

Bei der Stellung der mobilen Last, welcher $\min D_5 v$ entspricht, greift am linken Trägerfragment ausser

$$A = \frac{v \xi'^2}{2l}$$

noch — und zwar im Knotenpunkte 4 —

$$P' = \frac{v \xi''^2}{2\lambda}$$

an, wo λ den Horizontalabstand der Knotenpunkte 4 und 6 bedeutet. Die Construction dieser Kräfte ist in No. 27 (vergl. auch Fig. 23 auf Tafel 4) gezeigt worden, während die getrennte Darstellung der durch die Kräfte A und P' verursachten Spannkräfte D im vorigen Paragraphen erörtert wurde.

Um $\max D_5$ zu finden, betrachte man das Spiegelbild des Trägers Fig. 58^a.

*) Man vergl. die Construction der Culmann'schen Momentenfläche für indirekte Belastung, Tafel 2, Fig. 18 (Text 1, Seite 13).

Die Construction der Belastungsscheide E für den Fall, dass die mobile Belastung in den Knotenpunkten der oberen Gurtung angreift, ist in Fig. 58^b für die Diagonale D_6 gezeigt worden.

Es werde schliesslich nochmals auf die Fussnote Seite 37 verwiesen, und wiederholt, dass der Werth der schärferen Bestimmung der Kräfte D ein zweifelhafter ist.

§ 15. Fachwerkträger mit Gegendiagonalen (Taf. 7 u. 8).

50) Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen. Ein Fachwerkträger, dessen Gitterstäbe wechselweise Verticalen und linkssteigende Diagonalen sind, Fig. 62 (Taf. 8), werde durch einen Schnitt in zwei Fragmente zerlegt. O_m , U_m und D_m sind die Spannkräfte der Stäbe des m^{ten} Feldes, β_m , γ_m und φ_m deren Neigungswinkel gegen die Horizontale. γ_m und φ_m werden nach unten positiv gezählt, β_m nach oben. Wirken auf den Träger nur verticale Kräfte, so muss sein:

$$O_m \cos \beta_m + D_m \cos \varphi_m + U_m \cos \gamma_m = 0, \quad \text{also}$$

$$D_m \cos \varphi_m = -O_m \cos \beta_m - U_m \cos \gamma_m,$$

und da (vergl. S. 39): $O_m \cos \beta_m = -\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m}$ und $U_m \cos \gamma_m = +\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}}$ ist,

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} - \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Analog folgt für eine rechtssteigende Diagonale (Fig. 63)

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} = -\left[\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} - \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}}\right],$$

so dass sich also — dieselbe Belastung, d. h. dieselben Momente vorausgesetzt — die Horizontalcomponenten der beiden Spannkräfte D nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Es bestehe nun die Belastung des Trägers aus einer permanenten und einer veränderlichen. Erstere sei gleichmässig über die Stützweite vertheilt und $= p$ für die Längeneinheit; ihr entsprechen die Momente

$$\mathfrak{M}_{mp} = \frac{px_m x'_m}{2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_{(m-1)p} = \frac{px_{m-1} x'_{m-1}}{2},$$

wo (Fig. 59 auf Taf. 7) x_m und x'_{m-1} die Abstände des Knotenpunktes m von den Auflagerverticalen A und B sind.

Wird zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{x_m x'_m}{2h_m} = \eta_m,$$

so erhält man für die Spannkraft einer links steigenden Diagonale in Folge des Eigengewichtes die Formel

$$D_{mp} \cos \varphi_m = p(\eta_m - \eta_{m-1}).$$

Es sei nun $\eta_m > \eta_{m-1}$, also D_{mp} eine positive (Zug-) Kraft. Wird dann der Träger durch eine von B aus bis m vorrückende Belastung (Fig. 59) beansprucht, so erzeugt die mobile Belastung einen Zug, die permanente ebenfalls einen Zug, so dass also $\max D_m$ positiv wird. Wenn dagegen (Fig. 60) die mobile Last von A aus bis $(m-1)$ vorrückt, so erzeugt sie in der Diagonale einen Druck. Ist dieser grösser als der Zug in Folge der permanenten Last, so ist D_m ein Druck, im Gegenfalle ein Zug.

Wird nun angenommen, dass $\min D_m$ ein Druck ist, dass jedoch die linkssteigende Diagonale aus einem Seile besteht, welches in Folge dieses Druckes schlaff wird, so muss offenbar, soll der Träger stabil sein, in dem betreffenden Felde noch eine rechtssteigende — ebenfalls aus einem Seile bestehende — Diagonale angeordnet werden. Denn bei jedem Belastungszustande, für welchen in der linkssteigenden Diagonalen ein Druck entsteht, wird die rechtssteigende Diagonale gezogen.

In Wirklichkeit construirt man nun die schlaffen Diagonalen aus Flacheisen, welche immerhin gewisse Drücke aufnehmen können, so dass die vorstehenden Betrachtungen nur annähernd richtig sind. Die bei voller Belastung des Trägers gespannte Diagonale nennt man Hauptdiagonale, die andere Gegendiagonale. Bei gewissen Trägersystemen werden in allen Feldern Gegendiagonalen nöthig, bei vielen nur in einzelnen und zwar dann in den mittelsten Feldern.

In ähnlicher Weise liesse sich auch der Fall $\eta_m < \eta_{m-1}$ discutiren. Hier wird $\min D$ stets ein Druck, während $\max D$ ein Zug oder Druck wird, jenachdem der Einfluss der veränderlichen oder der permanenten Last der grössere ist. Da aber für alle in der Hochbau- und Brückenbaupraxis üblichen Systeme mit Gegendiagonalen $\eta_m > \eta_{m-1}$ ist, so halten wir es für ausreichend, nur diesen Fall zu untersuchen.

Es habe sich nun für den Träger Fig. 59 und 60 das Resultat ergeben, dass im 3^{ten} Felde eine Gegendiagonale nöthig wird, im 2^{ten} Felde aber nicht. Dann setze man bei Ermittelung der Spannkräfte D und V voraus, es bewege sich die mobile Belastung in der Richtung von B nach A über den Träger und nehme successive die Stellungen VI, V, IV, III, II an. Da die Last am Untergurte gedacht wurde, so entspricht:

der Stellung II: $\max D_2$ und $\min V_1$

” ” III: $\max D_3$ ” $\min V_2$

” ” IV: $\max D_4$ ” $\min V_3$

” ” V: $\max D_5$ ” $\min V_4$

” ” VI: $\min D_6 = \min D_2$ (kleinster Zug).

Die rechtssteigende Diagonale des 3^{ten} Feldes wird ebenso beansprucht wie die linkssteigende Diagonale des 5^{ten} Feldes. Im Felde 4

sind im vorliegenden Falle die linkssteigende und die rechtssteigende Diagonale gleichgespannt.

Bezüglich der Spannkräfte $\min V$ ist zu beachten, dass sich für alle Verticalen zwischen C_1 und C_1 zwei Werthe $\min V$ ergeben. Im vorliegenden Falle muss man $\min V_3$ (für Stellung IV) und $\min V_4$ (für Stellung V) vergleichen und den grösseren Werth der Querschnittsberechnung beider Verticalen zu Grunde legen. Denn, bewegt sich die mobile Last von A nach B statt von B nach A , so entsteht $\min V_3$ in der Verticalen 4 und $\min V_4$ in der Verticalen 3.

Ein in § 17 durchgeföhrtes Zahlenbeispiel wird die hier gemachten Ausführungen genügend klar legen.

51) Criterium für das Nöthigwerden einer Gegendiagonale.
System Schwedler. Zunächst möge ein Criterium gesucht werden, welches gestattet, schnell zu entscheiden, ob in einem Felde eines Fachwerkträgers eine Gegendiagonale erforderlich ist oder nicht.

Es handele sich um das 2^{te} Feld des in Fig. 64 (Taf. 8) dargestellten Trägers einer Eisenbahnbrücke, und möge der allgemeinere Fall vorausgesetzt werden, dass das 2^{te} Rad des von A aus vorrückenden Zuges über dem Querträger 1 steht. Ist dann B die durch die Axenbelastungen erzeugte Reaction der rechten Stütze (welche analog graphisch dargestellt wird, wie früher die Reaction A)^{*)}, so sind die Angriffsmomente für die Knotenpunkte 1 und 2

$$\mathfrak{M}_1 = Bx'_1 + \mathfrak{M}_{p1} - P_1 e_1$$

$$\mathfrak{M}_2 = Bx'_2 + \mathfrak{M}_{p2},$$

Die Momente \mathfrak{M}_p für die permanente Last seien mit Hilfe eines Seilpolygons $A'SB'$ gewonnen. H = Poldistanz. y_p = Ordinate des Seilpolygons, mithin $\mathfrak{M}_{p1} = Hy_{p1}$ und $\mathfrak{M}_{p2} = Hy_{p2}$. Dann folgt

$$\mathfrak{M}_1 = Bx'_1 + Hy_{p1} - P_1 e_1 = Hy_1 \text{ gesetzt,}$$

$$\mathfrak{M}_2 = Bx'_2 + Hy_{p2} = Hy_2 \text{ „}$$

also

$$y_1 = B \frac{x'_1}{H} + y_{p1} - P_1 \frac{e_1}{H}$$

$$y_2 = B \frac{x'_2}{H} + y_{p2}.$$

Macht man nun $\overline{B'C} = H$, hierauf $\overline{CC'} = B$ senkrecht zu $A'B'$ und zieht die Gerade $B'C'D_2D'_1$, dann ist

$$\overline{D_2 D'_2} = \frac{Bx'_2}{H} \text{ und } \overline{D_1 D'_1} = \frac{Bx'_1}{H},$$

so dass, wenn $D'_1 D''_1 = \frac{P_1 e_1}{H}$ (welcher Werth sich leicht construiren lässt) gemacht wird, sich ergiebt:

$$\overline{F_2 D'_2} = y_2 \text{ und } \overline{F_1 D''_1} = y_1,$$

^{*)} Curve B ist das Spiegelbild von Curve A . Vergl. Fig. 27 auf Tafel 3.

Soll nun bei der gewählten Laststellung die linkssteigende Diagonale des 2^{ten} Feldes gezogen werden, so muss sein:

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{h_1} < \frac{\mathfrak{M}_2}{h_2} \quad \text{d. i.} \quad \frac{h_2}{h_1} < \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}$$

also $\frac{h_2}{h_1} < \frac{y_2}{y_1}$.

Verlängert man nun die Geraden $D'_2 D''_2$ und $F_2 F_1$ bis zu ihrem Schnittpunkte J' , ferner die Gurtstäbe O_2 und U_2 bis zu ihrem Schnittpunkte J , so folgt:

Liegen J und J' in derselben Verticalen, dann ist $\frac{h_2}{h_1} = \frac{y_2}{y_1}$;

liegt J links oder rechts von J' , dann ist beziehungsweise

$$\frac{h_2}{h_1} < \frac{y_2}{y_1} \quad \text{und} \quad \frac{h_2}{h_1} > \frac{y_2}{y_1}.$$

Liegt also J rechts von J' , so wird die linkssteigende Diagonale bei der skizzirten Laststellung gedrückt, es wird also eine Gegendiagonale nöthig.

Steht die erste Last über Knotenpunkt 1 (Normalstellung), so wird:

$$y_1 = \frac{Bx'_1}{H} + y_{p1}$$

$$y_2 = \frac{Bx'_2}{H} + y_{p2}$$

und es ist dann B unter Knotenpunkt 1 zu messen. Von beiden Stellungen ist diejenige zu wählen, welche den am weitesten nach links liegenden Punkt J' liefert.

Ist die veränderliche Belastung eine gleichförmige ($= v$ für die Längeneinheit), so wird $B = \frac{vx_1 x_2}{2l}$, wo x_1 und x_2 die Abstände der Knotenpunkte 1 und 2 von der Verticalen durch Stützpunkt A sind. Dieser Werth B wird analog construiert, wie der Werth A auf Seite 37 (vergl. Fig. 51 auf Tafel 6).

Da sich nun Punkt J' nicht immer bequem erreichen lässt, bringen wir das Criterium für das Nöthigwerden einer Gegendiagonale auf die Form

$$\frac{h_2 \lambda}{h_1} > \frac{y_2 \lambda}{y_1},$$

verlängern Diagonale D_2 bis die Horizontale durch den oberen Knotenpunkt 2 in K_2 geschnitten wird und erhalten den Horizontalabstand des Punktes K_2 von der Ordinate h_2

$$= \frac{h_2 \lambda}{h_1}.$$

Weiter ziehen wir $D'_2 K'_2 \parallel F_2 F_1$ bis zum Schnittpunkte K'_2 mit der Geraden $F_2 D''_1$. Der Horizontalabstand des Punktes K'_2 von der VerticaLEN durch den Knotenpunkt 2 ist

$$= \frac{y_2 \lambda}{y_1}.$$

Liegt nun K_2 links von K'_2 , so ist $\frac{h_2 \lambda}{h_1} > \frac{y_2 \lambda}{y_1}$ und es wird eine Gegendiagonale erforderlich.

Convergiren die Linien $F_1 F_2$ und $D'_1 D''_2$ nach rechts, so hat man erst nicht nötig, die Punkte K_2 und K'_2 zu construire; denn es wird dann $y_1 > y_2$ und könnte also nur bei $h_1 > h_2$ die linkssteigende Diagonale gezogen werden. Die ganze Untersuchung erstreckt sich selbstverständlich nur über die linke Hälfte des Trägers.

52) Zahlenbeispiel. Figur 65^b zeigt einen Halbparabelträger von 40^m Stützweite mit 10 gleichlangen Feldern. Höhe in der Mitte 4,5^m. Höhe der Endverticalen 2,5^m. Die Knotenpunkte der oberen Gurtung liegen auf einer Parabel. Die Curve B ist das Spiegelbild der auf Taf. 3 construirten Curve A ; sie wurde nur für die linke Trägerhälfte und zwar im doppelten Maassstabe aufgetragen. Die Parabel $A'S$, deren Ordinaten, mit H multiplizirt, die Momente für die permanente Belastung liefern, ist dieselbe wie in Figur 26 auf Tafel 3 (es ist also $p = 1,85^{\text{tons}}$ für den Meter der Stützweite angenommen); sie wurde ebenfalls im doppelten Maassstabe aufgetragen. Pfeilhöhe = 2,89^m. $H = 128^{\text{tons}} = 16^{\text{m}} = 4\lambda$, so dass $B'C = H$.

Bei Construction der Punkte K' ist überall die Normalstellung angenommen worden.*). Es wurde also für das 2^{te} Feld B unter Knotenpunkt 1 gemessen, dann $CC' = B$ gemacht, $B'C'D'_2 D'_1$ gezogen und schliesslich $D'_2 K'_2 \parallel F_2 F_1$ bis zur Geraden $F_2 D'_1 K'_2$. Analog wurde K'_3 bestimmt. Im 4^{ten} Felde convergiren bereits die Linien $D'_4 D'_3$ und $F_4 F_3$ nach rechts,**) so dass hier und im 5^{ten} Felde Gegendiagonalen nötig sind. Im 3^{ten} Felde liegt K_3 links von K'_3 , daher ist auch hier eine Gegendiagonale erforderlich.

Dagegen genügt im 2^{ten} Felde eine linkssteigende Diagonale, weil hier K_2 rechts von K'_2 liegt.

In gleicher Weise findet man, dass für den elliptischen Träger in Figur 65^c im 2^{ten} Felde eine linkssteigende Diagonale genügt.

*) Im Felde 2 erhält man gleiche Resultate, wenn man Rad 1 oder 2 über den Knotenpunkt 1 setzt. In den übrigen Feldern erweist sich die Normalstellung als die gefährlichste.

**) $D'_4 D'_3$ und $F_4 F_3$ sind nahezu parallel. Die Rechnung liefert $y_1 = 1,01 y_2$.

Der Parallelträger Fig. 65^e enthält nur in den Feldern Gegendiagonalen, in denen die Linien $D'_{m-1}D'_m$ und $F_{m-1}F_m$ nach rechts convergiren, also im 4^{ten} und 5^{ten} Felde. *)

Wird der Träger so geformt, dass die zusammengehörigen Punkte K und K' in derselben Verticalen liegen, so sind in keinem Felde Gegendiagonalen nötig. Da aber im Allgemeinen in den Mittelfeldern die Gurte — ebenso wie die Geraden $D'_{m-1}D'_m$ und $F_{m-1}F_m$ — nach rechts convergiren müssten, so construirt man den mittleren Theil als Parallelträger und versieht ihn mit Gegendiagonalen. Fig. 64^d.

Desshalb wird man im vorliegenden Falle $h_3 = h_4 = h_5$ machen, durch den oberen Knotenpunkt 3 eine Horizontale ziehen, bis die Verticale durch K'_3 in K_3 geschnitten wird, darauf K_3 mit dem unteren Knotenpunkte 3 verbinden und so den oberen Knotenpunkt 2 erhalten. Analog findet man den oberen Knotenpunkt 1. Zur Controlle sehe man noch nach, ob die Gurtstäbe $\overline{1 \ 2}$ sich in J auf der Verticalen durch J' schneiden.

In Figur 64^d wurde $h_5 = 4,5^m$ gewählt und erhalten: $h_2 = 4,1^m$, $h_1 = 2,9^m$. (Die Werthe h_2 und h_1 runde man nach oben ab.)

Die in Figur 64^d abgeleitete Trägerform heisst nach ihrem Erfinder: System Schwedler.

Aus dem Criterium $\frac{h_2}{h_1} > \frac{y_2}{y_1}$ geht hervor, dass eine Gegendiagonale nötig wird, sobald das Verhältniss zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinaten h einen bestimmten Werth überschreitet. Die vorhin gewonnenen Resultate bleiben also dieselben, wenn man, unter Beibehaltung der Werthe h , die Trägergestalt ändert. Man kann also z. B. den in Figur 64^d abgeleiteten Schwedlerträger auch als Träger mit polygonaler unterer und oberer Gurtung ausführen; die 6 Mittelfelder erhalten wie vorhin Gegendiagonalen.

53) Spannkräfte in den Gurten der Träger mit Gegendiagonalen. Die Spannkräfte in den Gurtungen werden am grössten bei voller Belastung des Trägers. Ist im m^{ten} Felde bei voller Belastung die linkssteigende Diagonale gespannt, so folgt (vergl. S. 39)

$$O_m \cos \beta_m = - \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} \text{ und } U_m \cos \gamma_m = + \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}};$$

ist aber die rechtssteigende Diagonale gespannt, so wird

$$O_m \cos \beta_m = - \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} \text{ und } U_m \cos \gamma_m = + \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m}.$$

Sobald nun die veränderliche Belastung eine gleichförmig vertheilte ist, werden für den Fall $\eta_m > \eta_{m-1}$ (vergl. Seite 45) auf der linken Träger-

*) Für den Parallelträger wird in § 16 ein einfacheres Criterium abgeleitet.
Müller, Graphische Statik.

hälften die linkssteigenden Diagonalen Hauptdiagonalen; die rechtssteigenden sind weg zu denken, worauf die Construction des der vollen Belastung entsprechenden Cremona'schen Kräfteplanes erfolgen kann.

Besteht hingegen die veränderliche Belastung aus einem Systeme concentrirter Lasten, so muss beachtet werden, dass im Allgemeinen die Maximalmomente bei verschiedenen Laststellungen entstehen.

Ist dann

$$\frac{\max \mathfrak{M}_m}{h_m} > \frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}},$$

so ist auch

$$\frac{\max \mathfrak{M}_m}{h_m} > \frac{\mathfrak{M}'_{m-1}}{h_{m-1}},$$

wo \mathfrak{M}'_{m-1} dasjenige für den $(m-1)^{ten}$ Knotenpunkt gebildete Moment ist, welches bei der das Moment $\max \mathfrak{M}_m$ erzeugenden Laststellung entsteht. Es ist also bei dieser Laststellung im m^{ten} Felde die linkssteigende Diagonale gespannt und

$$O_m = -\frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} \sec \beta_m.$$

Dagegen kann es vorkommen, dass

$$\frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} > \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m}$$

ist, wo \mathfrak{M}_m das gleichzeitig mit $\max \mathfrak{M}_{m-1}$ entstehende Moment bedeutet. Da nun in diesem Falle die rechtssteigende Diagonale gespannt wird, so darf nicht

I) $U_m = \frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m,$

sondern es muss $U_m < \frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} \sec \gamma_m$ gesetzt werden.

Der Fehler, der durch Anwendung von Formel I entsteht, ist sehr gering. Er darf um so mehr zugelassen werden, als sich U_m etwas zu gross ergiebt, und der Werth einer allzupeinlichen Rechnung — wie nicht oft genug betont werden kann — höchst zweifelhaft ist.

Deshalb setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} O_m \cos \beta_m &= -\frac{\max \mathfrak{M}_m}{h_m} \\ U_m \cos \gamma_m &= +\frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} \end{aligned} \right\} \text{sobald } \frac{\max \mathfrak{M}_m}{h_m} > \frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}}$$

und analog

$$\left. \begin{aligned} O_m \cos \beta_m &= -\frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} \\ U_m \cos \gamma_m &= +\frac{\max \mathfrak{M}_m}{h_m} \end{aligned} \right\} \text{sobald } \frac{\max \mathfrak{M}_{m-1}}{h_{m-1}} > \frac{\max \mathfrak{M}_m}{h_m}$$

ist. Wie die Quotienten $\frac{\max \mathfrak{M}}{h}$ construirt werden, ist auf Seite 38 (vergl. auch Figur 53 auf Tafel 6) erörtert worden.

54) Spannkräfte $\max V$ für Träger mit Gegendiagonalen. Last am Untergurt. Während die Spannkräfte $\min V$ für die Verticalen der Träger mit Gegendiagonalen genau wie früher gezeigt ermittelt werden können, nur mit dem Unterschiede, dass es nicht mehr genügt, die Constructionen für die Verticalen der linken Trägerhälfte durchzuführen (vergl. Seite 45), sind die bis jetzt abgeleiteten Gesetze nicht mehr ausreichend, um die Kräfte $\max V$ nachzuweisen.

Unter der Voraussetzung, dass die Belastung nur in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreift, wird, wenn keine Gegendiagonalen angeordnet sind (Fig. 66 Taf. 8), die Spannkraft V in der m^{ten} Verticalen (welche auf der linken Trägerhälfte liegen möge) ein Maximum, sobald die veränderliche Belastung von A aus bis m vorrückt. Sind aber Gegendiagonalen vorhanden, so wird bei der Laststellung Fig. 66 die rechtssteigende Diagonale des $(m+1)^{\text{ten}}$ Feldes das Maximum ihrer Inanspruchnahme erleiden. Vielleicht wird auch im m^{ten} Felde eine dort etwa vorhandene Gegendiagonale gespannt. Auf jeden Fall lassen die bis jetzt abgeleiteten Gesetze im Stich.

Wir denken nun den Träger voll belastet. Auf der linken Hälfte sind dann die linkssteigenden Diagonalen gespannt und lässt sich behaupten:

- 1) Alle Lasten rechts von $(m+1)$ tragen zu der Spannung V_m in negativem Sinne bei, alle Lasten links von m in positivem Sinne. Durch Entlastung des Trägers in der Nähe von B wird also V_m vergrössert. Es nähert sich V_m dem Werthe $\max V_m$.
- 2) Alle Lasten rechts von $(m+1)$ tragen zu der Spannung D_{m+1} der linkssteigenden Diagonale in positivem Sinne bei, so dass Entlastung des Trägers in der Nähe von B die Kraft D_{m+1} verkleinert.

Jetzt entlasten wir den Träger rechts von $(m+1)$, vergrössern dadurch V_m und verkleinern D_{m+1} und setzen diese Entlastung so lange fort,

$$\begin{aligned} \text{bis } D_{m+1} &= 0, \\ \text{bis also } \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} &= \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{h_{m+1}} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Sobald dies erreicht ist, Fig. 67, greift am oberen Knotenpunkte m keine Diagonale an, und das Kräftepolygon für diesen Knotenpunkt ist das in Fig. 67^a dargestellte. Es besteht aus V_m , O_m und O_{m+1} . Je grösser O_m und O_{m+1} sind, desto grösser wird V_m . Da nun durch weitere Entlastung die Spannkräfte O_m und O_{m+1} verkleinert werden, wird auch V_m wieder verkleinert. Daraus folgt der Satz:

Entlastet man, von dem Zustande voller Belastung ausgehend, den Träger rechts von $(m+1)$ derart, dass die Quotienten $\frac{\mathfrak{M}}{h}$,

berechnet für m und $(m+1)$, einander gleich werden, so wird die Spannkraft V in der m^{ten} Verticalen, an welcher eine Gegendiagonale angreift, ein Maximum.*)

Wir bezeichnen mit \mathfrak{M}_m und \mathfrak{M}_{m+1} die Momente für volle Belastung, mit \mathfrak{M}'_m und \mathfrak{M}'_{m+1} die Momente nach Entlastung und nehmen an, die zu entlastende Strecke sei kleiner als x'_{m+1} .**) Bedeutet dann ΔA die Abnahme der Reaction A in Folge der Entlastung, so ist

$$\mathfrak{M}'_m = \mathfrak{M}_m - \Delta A x_m$$

$$\mathfrak{M}'_{m+1} = \mathfrak{M}_{m+1} - \Delta A x_{m+1}.$$

Werden diese Werthe in die Bedingung

$$\frac{\mathfrak{M}'_m}{h_m} = \frac{\mathfrak{M}'_{m+1}}{h_{m+1}}$$

eingesetzt, so folgt

$$\Delta A = \frac{\mathfrak{M}_{m+1} h_m - \mathfrak{M}_m h_{m+1}}{x_{m+1} h_m - x_m h_{m+1}}.$$

Jetzt erhält man die Horizontalcomponente von O_m und O_{m+1} (Fig. 67a)

$$\frac{\mathfrak{M}'_m}{h_m} = \frac{\mathfrak{M}_m}{h_m} - \Delta A \frac{x_m}{h_m} = \frac{\mathfrak{M}_m x_{m+1} - \mathfrak{M}_{m+1} x_m}{h_m x_{m+1} - h_{m+1} x_m}$$

und, wenn die Momente mit Hilfe von Seilpolygonen dargestellt, also in der Form

$$\mathfrak{M}_m = Hy_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_{m+1} = Hy_{m+1}$$

gegeben sind,

$$\frac{\mathfrak{M}'_m}{h_m} = H \frac{y_m - y_{m+1} \frac{x_m}{x_{m+1}}}{h_m - h_{m+1} \frac{x_m}{x_{m+1}}}.$$

Darin bedeutet H die Poldistanz, y die Ordinate des Seilpolygons.

Der vorstehende Werth ist in Fig. 65a für die Verticale 2 des Halbparabelträgers zunächst unter der Voraussetzung construit worden, dass bei derjenigen Laststellung, welcher $\max y_2$ entspricht, auch $\max y_3$ entsteht.

*) Dieser Satz wurde zuerst vom Verfasser aufgestellt und 1877 in „Ingenieurs Taschenbuch“ (Hütte), Auflage XI, Seite 281, veröffentlicht, unter gleichzeitiger Mittheilung von Formeln für gleichförmige Belastung. In allen früher erschienenen Arbeiten wurden die $\max V_m$ für Träger mit Gegendiagonalen unrichtig bestimmt. Es wird dies hier betont, da neuerdings von anderer Seite Prioritätsansprüche gemacht worden sind.

**) Es kann nöthig werden, den Träger noch links von $m+1$ etwas zu entlasten, doch ist dieser Fall selten, und darf dann ohne Bedenken die hier abgeleitete Formel um so eher angewendet werden, als dieselbe etwas zu grosse Werthe V_m liefert. Man erinnere sich wieder daran, dass die Vorbedingung einer exacten Theorie in Wirklichkeit nur sehr annähernd erfüllt wird.

Verbindet man B mit dem oberen Knotenpunkte 3 durch eine Gerade, so schneidet diese auf der 2^{ten} Verticalen das Stück

$$c = h_2 - h_3 \frac{x_2}{x_3} \quad (= h_m - h_{m+1} \frac{x_m}{x_{m+1}})$$

ab. Ebenso wird nach Auftragen der früher (auf Tafel 3, Fig. 26) gewonnenen Momentencurve*) die Strecke

$$c' = y_2 - y_3 \frac{x_2}{x_3}$$

construiert. Nun wird LN horizontal und $= \frac{1}{2}H^{**}) = 2\lambda$ gemacht, R mit N verbunden, dann $L'N' \parallel LN$ und $R'N' \parallel RN$ gezogen und so

$$\overline{N'L'} = \frac{1}{2}H \frac{c'}{c} = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}'_2}{h_2}$$

erhalten. Macht man jetzt $N'T \parallel O_3$ und $N'W \parallel O_2$, so ist

$$\overline{TW} = \frac{1}{2} \max V_2.$$

Der Kräftemaassstab ist $1^{\text{mm}} = 1^{\text{tons}}$. Die Strecke \overline{TW} ist $2,5^{\text{mm}}$, also ist

$$\max V_2 = 5^{\text{tons}}.$$

Durch Rechnung findet man, wenn man in die Formel

$$\frac{\mathfrak{M}'_2}{h_2} = \frac{\mathfrak{M}_2 x_3 - \mathfrak{M}_3 x_2}{h_2 x_3 - h_3 x_2}$$

gleichzeitig die Maximalmomente einsetzt,***)

$$\frac{\mathfrak{M}'_2}{h_2} = \frac{959 \cdot 12 - 1251 \cdot 8}{3,78 \cdot 12 - 4,18 \cdot 8} = 125,8$$

und daraus findet man leicht (wenn β = Neigungswinkel von O)

$$\begin{aligned} \max V_2 &= \frac{\mathfrak{M}'_2}{h_2} (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_3) = 125,8 \frac{3,78 - 3,22 - (4,18 - 3,78)}{4} \\ &= 125,8 \cdot 0,04 = 5,03^{\text{tons}}. \end{aligned}$$

Nun entsteht aber bei der Laststellung, welche $\max \mathfrak{M}_2$ erzeugt, das Moment $\mathfrak{M}_3 = 1243 \dagger$ so, dass genauer zu setzen wäre

$$\frac{\mathfrak{M}'_2}{h_2} = \frac{959 \cdot 12 - 1243 \cdot 8}{3,78 \cdot 12 - 4,18 \cdot 8} = 130,2$$

$$\max V_2 = 130,2 \cdot 0,04 = 5,21^{\text{tons}}.$$

*) Der Maassstab ist derselbe wie in Fig. 26.

**) Hierfür kann man auch setzen $\frac{1}{n} H$; man erhält dann $\frac{1}{n} V_m$.

***) Man vergl. die für die Momente auf Seite 21 angegebenen Werthe.

†) Mit Hilfe von Fig. 24^a, Tafel 3, findet man für die mobile Last $\mathfrak{M}_{sv} = 932$; der permanenten Last entspricht $\mathfrak{M}_{sp} = 311$.

Dieser Werth weicht aber von dem vorigen nur wenig ab. Wenn wir desshalb empfehlen, stets ohne Weiteres die in Fig. 65^a dargestellte Construction anzuwenden, so sprechen dafür noch folgende Gründe:

- 1) Die Spannkraft V_m zu ermitteln ist an und für sich eine Aufgabe von untergeordneter Bedeutung, weil die Dimensionen der Verticalen sich in erster Linie nach dem grössten Drucke V_m richten, und die Kenntniss der Spannkraft $\max V_m$ nur nöthig ist, um die zulässige Inanspruchnahme festzustellen. (Vergl. die Anmerkung auf Seite 26.)
- 2) Es wurde bei Ableitung der Formel für $\frac{\mathfrak{M}'_m}{h_m}$ angenommen, dass, von der Stellung ausgehend, welche $\max \mathfrak{M}_m$ erzeugt, der Träger rechts von $(m+1)$ derart entlastet werden soll, dass $\frac{\mathfrak{M}'_m}{h_m} = \frac{\mathfrak{M}'_{m+1}}{h_{m+1}}$ wird. Da man aber ein Eisenbahnfahrzeug nicht theilweise, sondern nur ganz entfernen kann, so wird sich der Bedingung nur ausnahmsweise genügen lassen, wenn man auch den geforderten Belastungszustand annähernd dadurch erreichen kann, dass man schwere Maschinen durch leichtere ersetzt denkt, beladene Güterwagen durch theilweise beladene oder unbeladene.
- 3) Namentlich aber machen die festen Nietverbindungen in den Knotenpunkten und die Reibungswiderstände bei Gelenkbolzen eine zu genaue Berechnung überflüssig.

In derselben Weise wie $\max V_2$ wurden desshalb auch $\max V_3$ und $\max V_4$ construit und erhalten:

$$\max V_3 = + 8,5^{\text{tons}}, \quad \max V_4 = + 12^{\text{tons}}.$$

(Die Construction wurde in Fig. 65 nicht dargestellt, um die Figur nicht unübersichtlich zu machen.)

Die grösste Zugspannung in der mittelsten Verticalen ergibt sich bei der Stellung, welche $\max \mathfrak{M}_5$ erzeugt; es ist hier $\frac{\mathfrak{M}'_5}{h_5} = \frac{\max \mathfrak{M}_5}{h_5}$, und kann V_m direkt aus der grössten Spannkraft O_5 bestimmt werden. Wir verweisen auf § 15; dort ist der vollständige Kräfteplan dieses Halbparabelträgers entwickelt worden.

Hinzugefügt sei noch, dass bei einem durch ein System concentrirter Lasten beanspruchten Parabelträger in das Kräftepolygon Fig. 67^a stets die grössten Spannkräfte O_m und O_{m+1} eingeführt werden dürfen. In vielen Fällen erhält man dann $\max V_m$ genau, nämlich immer dann, wenn bei derjenigen Laststellung, welche $\max \mathfrak{M}_m$ erzeugt, im m^{ten} Felde die linkssteigende und im $(m+1)^{\text{ten}}$ Felde die rechtssteigende Diagonale gespannt wird. In allen anderen Fällen findet man $\max V_m$ etwas zu gross.

Berücksichtigt man, dass die permanente Last p theilweise auf die Knotenpunkte des Obergurtes und des Untergurtes vertheilt werden muss und bezeichnet mit $p_o \lambda$ die am oberen Knotenpunkte angreifende Last, so muss man die vorhin berechneten Spannkräfte $\max V_m$ um $p_o \lambda$ verkleinern.

Greift die Belastung in den Knotenpunkten des Obergurtes an, so ist die Bestimmung der $\max V$ sehr umständlich; es genügt aber, die Kräfte $\min V$ zu ermitteln und bei Berechnung der zulässigen Inanspruchnahme die zweite Grenzspannung Null zu setzen. Da die $\max V$ hier kleine Drücke sind, so erhält man die Querschnitte etwas zu gross. Eine Ausnahme bilden die Sichelträger. Diese werden aber zweckmässig als Parabelträger construirt, und nehmen dann die Kräfte V bei voller Belastung des Trägers ihre Maximalwerthe an.

§ 16. Kräfteplan für einen Parallelträger (Eisenbahnbrücke).

Zahlenbeispiel. — Tafel 9.

Eine zweigeleisige Bahn soll mit Hilfe von Parallelträgern (nach dem Systeme Fig. 68) überführt werden. Stützweite: $l = 40^m$, Trägerhöhe: $h = 4^m$, Zahl der Felder = 10, also Feldweite: $\lambda = 4^m$. Es sind zwei Hauptträger angeordnet, so dass jeder Träger die Belastung eines Geleises aufzunehmen hat.

Die mobile Belastung besteht aus einem von 3 Locomotiven geführten Güterzuge, und sind die Radstände und Axenbelastungen aus Fig. 69 ersichtlich. Das Eigengewicht der Brücke ist auf $p = 1,85^{tons}$ abgeschätzt worden.

Spannkräfte in den Gurten. Für das m^{te} Feld erhält man beziehungsweise in der oberen und unteren Gurtung die Kräfte:

$$O_m = -\frac{\mathfrak{M}_m}{h}, \quad U_m = +\frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{h} = -O_{m-1}.$$

Die Momente sind für die hier gewählte Belastung in Fig. 26 auf Tafel 3 (vergl. d. Text auf Seite 19 u. f.) als Ordinaten eines mit der Poldistanz $H = 128^{tons} = 16^m$ construirten Seilpolygons dargestellt worden. Wird $H = 16^m$ angenommen, so sind die Ordinaten y im Kräftemaassstabe zu messen. Es ist dies beim Parallelträger empfehlenswerth, und zwar wird zweckmässig H als Vielfaches von h gewählt. Im vorliegenden Falle ist $H = 4h$, mithin:

$$\mathfrak{M}_m = Hy_m = 4hy_m$$

$$\text{und } \frac{\mathfrak{M}_m}{h} = 4y_m.$$

Der Pfeil der Parabel, welche die Momente für die permanente Last liefert, ist:

$$\frac{\mathfrak{M}_{5p}}{H} = \frac{p l^2}{8H} = \frac{1,85 \cdot 40^2}{8 \cdot 16} = 23,13^{tons}.$$

Die Ordinaten dieser Parabel sind die y_p . Die y_v wurden in Figur 24^a auf Tafel 3 construirt. Man erhält:

$$\begin{array}{lll} y_5 = y_{v5} + y_{p5} = 91 \text{ tons} & O_5 = -4 \cdot 91 = -364 \text{ tons} & U_5 = 356 \text{ tons} \\ y_4 = 89 & O_4 = -4 \cdot 89 = -356 & U_4 = 312 \\ y_3 = 78 & O_3 = -4 \cdot 78 = -312 & U_3 = 240 \\ y_2 = 60 & O_2 = -4 \cdot 60 = -240 & U_2 = 136 \\ y_1 = 34 & O_1 = -4 \cdot 34 = -136 & U_1 = 0 \end{array}$$

Es ist hierbei gleichgültig, ob die Fahrbahn am Untergurt oder am Obergurt liegt. (Fig. 75 u. Fig. 76.)

Den aus rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzten Parallelträger nennt man: Das System Mohnié. Das in Fig. 77 und 78 dargestellte System des gleichschenkligen Dreiecks heisst: System Néville. Die Spannkräfte in den Gurten eines Néville'schen Trägers sind ebenfalls gleich den Quotienten $\frac{\mathfrak{M}}{h}$, wo \mathfrak{M} das Moment für den dem fraglichen Gurtstäbe gegenüber liegenden Knotenpunkt ist. Man erhält die in den Fig. 77 und 78 eingeschriebenen Kräfte.

Spannkräfte in den Diagonalen. Führt man durch das m^{te} Feld einen Schnitt ss (Fig. 71) und bezeichnet mit \mathfrak{V}_m die nach oben positive Resultirende aus den am linken Fragmenten angreifenden äusseren Kräften, so muss sein:

$$\mathfrak{V}_m - D_m \sin \varphi = 0 \quad , \quad \text{woraus } D_m = \mathfrak{V}_m \operatorname{cosec} \varphi .$$

Die Verticalkräfte \mathfrak{V}_m und mithin auch die D_m sind unabhängig von der Höhenlage der Fahrbahn; es ist bei Bildung der Resultirenden

$$\mathfrak{V}_m = A - P_1 - P_2 \dots$$

gleichgültig, ob die Kräfte P in den Knotenpunkten des Obergurtes oder in denen des Untergurtes oder zwischen beiden angreifen. Man hat also auch nicht nötig, die permanente Belastung p in die Theile p_o und p_u , welche in den oberen beziehungsweise unteren Knotenpunkten wirken, zu zerlegen.

Die graphische Bestimmung der Verticalkräfte \mathfrak{V} ist in § 8 No. 30 beschrieben worden.

$$\text{Man macht (Fig. 74)} \overline{A'A''} = \frac{pl}{2} = 1,85 \frac{40}{2} = 37^{\text{tons}}, \overline{B'B''} = -37^{\text{tons}},$$

zieht die Gerade $A''B''$ und durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Verticalen durch die Feldmitten Horizontalen. Die Ordinaten dieser Horizontalen (blaue Linien) liefern die Verticalkräfte \mathfrak{V}_p für die einzelnen Felder. Die \mathfrak{V}_p sind für die linke Hälfte des Trägers positiv, für die rechte Hälfte negativ.

Nun zeichnet man für einen von B nach A sich bewegenden, von 3 vorwärtsgehenden Lokomotiven geführten Güterzug die Curve A . Die

Construction dieser Curve wurde in § 8 No. 30 beschrieben. In Fig. 27 auf Tafel 3 ist die Curve für einen Träger von 40^m Spannweite und für die hier gewählte Belastung dargestellt. Diese Curve liefert die Kräfte $\max \mathfrak{B}_v$.

Für das 5^{te} Feld erhält man z. B. unter Voraussetzung der „Normalstellung“, d. h. unter der Annahme, dass die erste Last des von B nach A fahrenden Zuges über Knotenpunkt 5 steht, die Verticalkraft \mathfrak{B}_{v5} gleich der unter Knotenpunkt 5 gemessenen Ordinate der Curve A. Addirt man hierzu \mathfrak{B}_{p5} , so erhält man $\max \mathfrak{B}_5$.

Die Verticalkraft \mathfrak{B}_4 für das 4^{te} Feld wird ein Maximum, wenn die zweite Axe des von B kommenden Zuges über Knotenpunkt 4 steht. Man hat also, um $\max V_4$ zu erhalten, die Ordinate der Curve A im Abstande $e_1 = 1,5^m$ *) vom Knotenpunkte 4 zu bestimmen, zu V_{p4} zu addiren und dann die im Knotenpunkte 3 angreifende Last $P' = \frac{Pe_1}{\lambda}$ zu subtrahiren. Ebenso findet man, dass im 1^{ten}, 2^{ten} und 3^{ten} Felde die Normalstellung nicht die gefährlichste ist.

Die Verticalkräfte ergeben sich in den Feldern 1 bis 7 positiv, in den Feldern 8 bis 10 negativ. Da nun eine linkssteigende Diagonale (wie die Formel $D_m = \mathfrak{B}_m \operatorname{cosec} \varphi$ lehrt) gedrückt wird, sobald \mathfrak{B}_m negativ ist, so müssen, wenn die Diagonalen stets gezogen sein sollen, in den Feldern 8, 9 und 10 rechtssteigende Diagonalen angeordnet werden. Bewegt sich der Zug in der Richtung von A nach B über die Brücke, so sind in den Feldern 1 bis 3 linkssteigende und in den Feldern 4 bis 10 rechtssteigende Diagonalen nöthig. Daraus folgt, dass die 4 mittelsten Felder Gegendiagonalen erhalten müssen. (Vergl. auch § 15 und Fig. 65 auf Tafel 8.)

Aus den Kräften \mathfrak{B}_m lassen sich jetzt die D_m mit Hilfe der Bedingung finden, dass die verticale Componente von D_m gleich \mathfrak{B}_m sein muss.**) Die Construction (Fig. 74) liefert:

$$\max D_1 = 185^{\text{tons}}$$

$$\max D_4 = 80^{\text{tons}}$$

$$\min D_1 = \min D_{10} = 47^{\text{tons}}$$

$$\max D'_4 = \max D_7 = 3^{\text{tons}}$$

$$\max D_2 = 148^{\text{tons}}$$

$$\max D_5 = 51^{\text{tons}}$$

$$\min D_2 = \min D_9 = 33^{\text{tons}}$$

$$\max D'_5 = \max D_6 = 25^{\text{tons}}$$

$$\max D_3 = 112^{\text{tons}}$$

$$\min D_3 = \min D_8 = 16^{\text{tons}}$$

Die Resultate sind in Fig. 75 und 76 zusammengestellt. Fig. 77 und 78 liefern die für den Néville'schen Träger abgeleiteten Werthe D .

*) Es bedeutet e_1 den Radstand. Man vergl. § 8 No. 30, ferner Fig. 27 auf Tafel 3.

**) Die Kraft $\max D_7$ ist, weil sehr klein, in Fig. 74 fortgelassen worden.

Spannkräfte in den Verticalen. Legt man Fig. 72 durch die m^{te} Verticale einen Schnitt S , welcher außerdem nur 2 Stäbe trifft, und setzt die Summe der auf den linken Trägertheil wirkenden Kräfte gleich Null, so erhält man

$$V_m + \mathfrak{B} = 0 \quad , \quad \text{also } V_m = -\mathfrak{B}.$$

Je nachdem nun bei den linkssteigenden Diagonalen sämmtliche Lasten (auch das Eigengewicht) in den Knotenpunkten der unteren oder oberen Gurtung angreifen, erhält man

$$V_m = -\mathfrak{B}_{m+1}$$

oder

$$V_m = -\mathfrak{B}_m ;$$

denn im ersten Falle gehört die m^{te} Knotenpunktlast zum linken Trägertheile, im zweiten Falle zum rechten.

Analog erhält man bei rechtssteigenden Diagonalen (Fig. 73):

$$V_m = +\mathfrak{B}_{m+1} \quad (\text{Last oben})$$

bez. $V_m = +\mathfrak{B}_m \quad (\text{Last unten}).$

Die Verticalkräfte sind nun für den vorliegenden Träger:

$$\mathfrak{B}_1 = 131 \text{ tons} \quad \mathfrak{B}_6 = 18 \text{ tons}$$

$$\mathfrak{B}_2 = 105 \text{ "} \quad \mathfrak{B}_7 = 1,8 \text{ "}$$

$$\mathfrak{B}_3 = 80 \text{ "} \quad \mathfrak{B}_8 = -12 \text{ "}$$

$$\mathfrak{B}_4 = 56 \text{ "} \quad \mathfrak{B}_9 = -24 \text{ "}$$

$$\mathfrak{B}_5 = 36 \text{ "} \quad \mathfrak{B}_{10} = -33 \text{ "}$$

Mithin folgt, wenn die Fahrbahn am Untergurte liegt:

$$\min V_0 = -131 \text{ tons} \quad \max V_0 = \max V_{10} = -33 \text{ tons}$$

$$\min V_1 = -105 \text{ "} \quad \max V_1 = \max V_9 = -24 \text{ "}$$

$$\min V_2 = -80 \text{ "} \quad \max V_2 = \max V_8 = -12 \text{ "}$$

$$\min V_3 = -56 \text{ "}$$

$$\min V_4 = -36 \text{ "}$$

$$\min V_5 = -18 \text{ "}$$

Liegt die Fahrbahn am Untergurte, so findet man:

$$\min V_1 = -131 \text{ tons} \quad \max V_1 = \max V_9 = -33 \text{ tons}$$

$$\min V_2 = -105 \text{ "} \quad \max V_2 = \max V_8 = -24 \text{ "}$$

$$\min V_3 = -80 \text{ "}$$

$$\min V_4 = -56 \text{ "}$$

$$\min V_5 = -36 \text{ "}$$

Die Endverticalen erfährt bei belastetem Obergurte einen Druck, der gleich der Reaction A ist ($= \overline{CA''}$ in Fig. 74); es wird also:

$$\min V_o = -153^{\text{tons}} \quad \text{bei vollbelasteter Brücke}$$

$$\max V_o = -37^{\text{tons}} \quad \text{" unbelasteter "}$$

Die vorstehend berechneten Spannkräfte sind noch zu corrigiren, da die permanente Last p nicht ausschliesslich in den Knotenpunkten angreift, welche zur Aufnahme der Verkehrslast dienen. Man kann etwa

annehmen, dass bei unten liegender Fahrbahn der Theil $p_o = 0,55^{\text{tons}}$) des Eigengewichtes p in den oberen Knotenpunkten angreift, so dass die Verticalen gewissermaassen den Nebenzweck haben, die vorhin ebenfalls in den unteren Knotenpunkten wirkend gedachten Lasten $0,55 \cdot 4 = 2,2^{\text{tons}} = \text{rot. } 2^{\text{tons}}$ von den oberen Knotenpunkten auf die unteren zu übertragen. Dadurch entsteht in jeder Verticalen ein Druck von 2^{tons} (in den Endverticalen ein solcher von 1^{tons}), welcher zu dem vorhin ermittelten Drucke zu addiren ist, so dass sich jetzt die in Fig. 75 eingeschriebenen Spannkkräfte ergeben.

Bei oben liegender Fahrbahn ist von den vorhin berechneten Drücken V ein Zug von 2^{tons} (für die Endverticalen von 1^{tons}) in Abzug zu bringen. Man erhält die in Fig. 78 zusammengestellten Werthe.

Die Verticalen des unten belasteten Systems Néville (Fig. 77) werden nur gezogen. Ihre grösste Anstrengung erfolgt, wenn die mittelste Axe einer Lokomotive bei der fraglichen Verticalen liegt. Die permanente Belastung des unteren Knotenpunktes ist Fig. 79

$$4,0 (1,85 - 0,55) = 5,2^{\text{tons}}$$

weshalb

$$\max V = 5,2 + 13 + \frac{13 \cdot 2,5}{4} \cdot 2 = \infty 25^{\text{tons}}$$

während die kleinste Beanspruchung (durch permanente Belastung)

$$\min V = \infty 5^{\text{tons}}$$

beträgt. Bei oben liegender Fahrbahn (Fig. 78) werden die Verticalen gedrückt.

§ 17. Kräfteplan für einen Halbparabelträger. Eisenbahnbrücke.

Zahlenbeispiel. — Tafel 10.

Die Brücke ist zweigleisig. Stützweite und Belastung des Trägers sind dieselben, wie in dem in § 16 durchgeführten Beispiele. Der Träger hat die Belastung eines Geleises aufzunehmen. Permanente Belastung $p = 1,85^{\text{tons}}$ für den Meter Geleis. Die mobile Belastung zeigt Fig. 85.

Höhe der Endverticalen $2,5^{\text{m}}$, der Mittelverticalen $4,5^{\text{m}}$. Die Knotenpunkte der oberen Gurtung liegen auf einer Parabel mit dem Pfeile $4,5 - 2,5 = 2,0^{\text{m}}$. (Vergl. auch Fig. 65^b auf Tafel 8.) Feldweite $\lambda = 4^{\text{m}}$.

Spannkkräfte in den Gurtungen. Man beginnt mit Ermittelung der grössten Momente M_m für die Knotenpunkte 1, 2, . . . 5. Diese Construction wurde auf Tafel 3 in Fig. 24 und Fig. 26 für einen Träger

*) Wir nehmen das Gewicht der Fahrbahn $= 0,75^{\text{tons}}$ pro Meter Geleis an und vertheilen den Rest $1,85 - 0,75 = 1,1$ zu gleichen Theilen auf Obergurt und Untergurt.

von 40^m Stützweite mit der hier gewählten Belastung durchgeführt. Die Poldistanz ist $H = 16^m = 4\lambda^*$; mithin sind die Momente:

$$\mathfrak{M}_1 = 4\lambda y_1, \quad \mathfrak{M}_2 = 4\lambda y_2 \dots \dots,$$

wo $y_1, y_2 \dots$ die Ordinaten der Momentencurve (Fig. 26).

Die Horizontalcomponenten der Spannkräfte im Obergurt sind nach § 13 No. 47:

$$-O_1 \cos \beta_1^{**}) = \frac{\mathfrak{M}_1}{h_1} = \frac{4\lambda y_1}{h_1}, \quad -O_2 \cos \beta_2 = \frac{4\lambda y_2}{h_2} \dots \dots,$$

während sich für den Untergurt ergibt:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{4\lambda y_1}{h_1}, \quad U_3 = \frac{4\lambda y_2}{h_2} \dots \dots$$

Macht man nun (Fig. 81^a) $\overline{a_1 b_1} = y_1$, zieht durch b_1 eine Horizontale bis zum Schnittpunkte c_1 mit der Diagonale des zweiten Feldes, so ist

$$\overline{b_1 c_1} = \frac{\lambda y_1}{h_1} = \frac{1}{4} U_2. \quad \text{Wird jetzt } b_1 e_1 \parallel O_2 \text{ und } c_1 e_1 \text{ vertical gezogen, so ist}$$

ist $\overline{b_1 e_1} = -\frac{1}{4} O_1$. Anstatt die Strecken $b_1 e_1$ und $b_1 e_1$ mit 4 zu multiplizieren, um U_2 und O_1 zu erhalten, kann man auch den Kräftemaaßstab ändern. Den Constructionen auf Tafel 3 lag der Maassstab $1^{\text{cm}} = 20^{\text{tons}}$ zu Grunde. Ersetzt man diesen durch $1^{\text{cm}} = 80^{\text{tons}}$, so ist in Fig. 81^a:

$$b_1 c_1 = U_2 \quad \text{und} \quad b_1 e_1 = O_1.$$

Analog wurden die Kräfte $U_3, U_4, U_5, O_2, O_3, O_4, O_5$ construirt. Die Resultate sind:

$O_1 = -170$ tons	$U_1 = 0$
$O_2 = -256$ "	$U_2 = +168$ tons
$O_3 = -301$ "	$U_3 = +254$ "
$O_4 = -323$ "	$U_4 = +299$ "
$O_5 = -328$ "	$U_5 = +322$ "

Spannkräfte in den Diagonalen. Der Träger soll schlaffe Diagonalen erhalten, und ist daher zuerst nachzuweisen, in welchen Feldern Gegendiagonalen nötig werden. Nun wurde bereits in § 15 Seite 48 (vergl. auch Fig. 65^b auf Tafel 8) gezeigt, dass jedes der 6 mittelsten Felder zwei sich kreuzende Zugdiagonalen erhalten muss; doch soll die bezügliche Untersuchung hier noch einmal in anderer Weise durchgeführt werden.

Man zeichne den der permanenten Belastung entsprechenden Cremona'schen Kräfteplan Fig. 86 zunächst nur für die linke Hälfte. Dabei

*^a) Bei Fachwerkträgern mit polygonaler Gurtung und constanter Feldweite wähle man H gleich einem Vielfachen der Feldweite.

**) β bedeutet den Neigungswinkel eines Stabes der oberen Gurtung. Fig. 62.

nehme man die gesammte permanente Belastung in den Knotenpunkten des Untergurtes an^{*)}). Knotenpunktlast

$$p\lambda = 1,85 \cdot 4 = 7,4^{\text{tons}}.$$

Nun zeichne man für den von B nach A hin fahrenden Zug (Güterzug mit 3 vorwärts fahrenden Maschinen an der Spitze) die Curve A (vergl. Tafel 3, Fig. 27, ferner Seite 22) und construire $\min D_9$. Der Zug avancirt von B bis Knotenpunkt 9 und erzeugt Reaction A_9 . Diese wird (Fig. 82) nach den Richtungen L_9 und U_9 zerlegt, worauf Hilfskraft L_9 in O_9 und D_9 zerlegt wird. Man erhält so

$$\min D_{v9} = -8,5^{\text{tons}}$$

und addirt hierzu für die permanente Last $D_{p9} = D_{p2} = 27,3^{\text{tons}}$, welche Kraft aus Fig. 86**) zu entnehmen ist. Es wird mithin

$$\min D_9 = -8,5 + 27,3 = +18,8^{\text{tons}}$$
 also ein Zug,

so dass im 9^{ten} Felde nur eine Diagonale nöthig ist. Denkt man jetzt im 8^{ten} Felde eine rechtssteigende Diagonale, construirt analog wie vorhin (Fig. 83) den Druck $\min D_{v8}$ und addirt hierzu den Zug D_{v3} aus Fig. 86, so erhält man einen Druck. Es ist also im 8^{ten} Felde bereits eine Gegendiagonale erforderlich. Dieselbe wird gespannt, wenn der Eisenbahnzug von B aus bis Knotenpunkt 8 vorrückt.

Es sollen nun die Spannkräfte $\max D_{v2}$ bis $\max D_{v8}$ ermittelt werden.

Um z. B. $\max D_{v3}$ für die Normalstellung, d. h. für den Fall, dass die erste Axe des von B aus vorrückenden Eisenbahnzuges bei Knotenpunkt 3 liegt, zu finden, wird die Reaction A_3 Fig. 84 nach den Richtungen 2 und U_3 zerlegt, worauf Hilfskraft 2 in $\max D_{v3}$ und O_3 zerfällt wird. So gelangt man zu der in Fig. 80 dargestellten Construction.

Man zieht durch die Endpunkte der Ordinaten $A_3, A_4, A_5 \dots$ Horizontalen, welche die über den Auflagerpunkt A hinaus verlängerten Hilfslinien 2, 3, 4 ... in den Punkten $a_3, a_4, a_5 \dots$ schneiden, hierauf von Auflagerpunkt A aus Parallelen zu den Gurtstäben $O_1, O_2, O_3 \dots$ und schliesslich von a_3 aus eine Parallelle zu D_3 bis zum Schnittpunkte b_3 mit O_3 , von a_4 aus eine Parallelle zu D_4 bis zum Schnittpunkte b_4 mit O_4 u. s. w. Es ist dann $\overline{a_3 b_3}^{***}) = \max D_{3v}$, $\overline{a_4 b_4} = \max D_{4v} \dots$ u. s. w.

Die Diagonale D_2 erfährt eine etwas grössere Anstrengung, wenn die 2^{te} Axe des von B kommenden Zuges bei Knotenpunkt 2 liegt. Es wird, da der erste Radstand = 1,5^m ist, die Reaction A_2 durch die im

^{*)} Es wurde in § 13 nachgewiesen, dass es für die Bestimmung der M , also auch der O , U und D gleichgültig ist, ob die Last am Obergurte oder am Untergurte angreift.

^{**) In Fig. 86 ist der Index p fortgeblieben.}

^{***)} In dem Kräfteplane Fig. 80 ist der Index v fortgeblieben.

Radstände $e_1 = 1,5\text{m}$ von A_2 gemessene A' ersetzt und dann, wie vorhin, die Strecke $\overline{a_2 b_2}$ construiert. Hierauf wird $\overline{a_2 c} = \frac{P_1 e_1}{\lambda} = 13\text{tons} \cdot \frac{1,5}{4,0} = 4,9\text{tons}$ gemacht und $c d \parallel O_2$ gezogen, worauf sich

$$\max D_{v2} = \overline{b_2 d}$$

ergibt. (Man vergl. Fig. 56^b auf Tafel 7.)

Zu den aus Fig. 80 zu entnehmenden Kräften $\max D_v$ sind die in Fig. 86 dargestellten D_p zu addiren. Man erhält:

$$\max D_2^*) = 87,4 + 27,3 = + 114,7\text{ tons} \quad \min D_2 = \min D_9 = 18,8\text{ tons.}$$

$$\max D_3 = 62,0 + 16,0 = + 78,0 \quad "$$

$$\max D_4 = 48,5 + 8,7 = + 57,2 \quad "$$

$$\max D_5 = 42,2 + 2,8 = + 45,0 \quad "$$

$$\max D_6 = 30,5 - 2,8 = + 27,7 \quad "$$

$$\max D_7 = 24,0 - 9,0 = + 15,0 \quad "$$

$$\max D_8 = 17,5 - 17,0 = + 0,5 \quad "$$

Die Beanspruchungen $\max D_8$, $\max D_7$, $\max D_6$ entstehen auch in den Gegendiagonalen der Felder 3, 4 und 5. Vergl. Fig. 87.

Die Kraft D_1 erhält man aus dem Kräftepolygon für den oberen Knotenpunkt 0 (Fig. 81^b). Dieses lässt sich zeichnen, da O_1 gegeben ist. Man findet

$$\max D_1 = + 198\text{tons}.$$

Der kleinste Zug D_1 , bei unbelasteter Brücke, ist (Fig. 86)

$$\min D_1 = D_{p1} = + 49\text{tons}.$$

Spannkräfte $\min V$ in den Verticalen. Die Spannkraft $\min V_{v2}$ entsteht, gleichzeitig mit $\max D_{v3}$, sobald der von B aus kommende Eisenbahnzug mit dem ersten Rade bei Verticale 3 steht. Nach der in Fig. 84^b dargestellten Construction von D_{v3} hat man, um $\min V_{v2}$ zu bestimmen, nur nötig, das Kräftepolygon für den oberen Knotenpunkt 2 zu zeichnen. Gegeben sind D_3 und O_3 , gesucht V_2 und O_2 . Man über sieht hieraus sofort die Richtigkeit der in Fig. 80 durchgeföhrten Construction. Von den Punkten a_2 , $a_3 \dots$ sind Verticalen bis zu den Schnittpunkten c_2 , $c_3 \dots$ mit den Spannkräften O_1 , $O_2 \dots$ gezogen worden, und ergaben sich dann die Werthe:

$$-\overline{c_2 c_1} = \min V_{v1}, \quad -\overline{a_3 c_3} = \min V_{v2}.$$

Es entstehen $\min V_{v2}$, $\min V_{v3} \dots$ bei der Normalstellung, dagegen $\min V_{v1}$, sobald die zweite Axe des von B kommenden Zuges bei Knotenpunkt 2 liegt.

Zu den der Verkehrslast entsprechenden Werthen V_v sind die durch die permanente Last erzeugten, aus dem Kräfteplane Fig. 86 sich ergebenden Kräfte V_p zu addiren.

^{*)} Die erste der beiden Zahlen giebt die Spannkraft D_v , die zweite die Kraft D_p an.

Da nun von der permanenten Last $p = 1,85^{\text{tons}}$ ein Theil, etwa $\frac{1}{3} p$, in den Knotenpunkten des Obergurtes angreift, während der Plan, Fig. 86, unter der Annahme gezeichnet wurde, dass die gesammte permanente Last am Untergurte wirkt, so sind die aus Fig. 86 entnommenen Kräfte V noch durch Hinzufügen des Gliedes

$$- p_0 \lambda = - \frac{1}{3} 1,85 \cdot 4 = - 2,5^{\text{tons}}$$

zu corrigiren.

Man erhält daher:

$$\min V_1^*) = - 60,1 - 18,4 - 2,5 = - 81,0 \text{ tons}$$

$$\min V_2 = - 42,1 - 9,9 - 2,5 = - 54,5 \text{ "}$$

$$\min V_3 = - 31,9 - 3,6 - 2,5 = - 38,0 \text{ "}$$

$$\min V_4 = - 24,3 + 1,1 - 2,5 = - 25,7 \text{ "}$$

$$\min V_5 = - 20,0 + 5,5 - 2,5 = - 17,0 \text{ "}$$

$$\min V_6 < \min V_4.$$

Spannkräfte $\max V$ in den Verticalen. Die Spannkräfte $\max V$ in den Verticalen 2, 3 und 4 wurden in § 15 Seite 53 u. 54 (vergl. auch Fig. 65, Tafel 8) bestimmt und ergeben sich nach Correction:

$$\max V_2 = 5,0 - 2,5 = + 2,5 \text{ tons}$$

$$\max V_3 = 8,5 - 2,5 = + 6,0 \text{ "}$$

$$\max V_4 = 12,0 - 2,5 = + 9,5 \text{ "}.$$

Der Zug in der Mittelverticalen wird bei der Laststellung gefunden, bei welcher das grösste Moment M_5 entsteht. Bei dieser Laststellung wird im 5^{ten} Felde die linkssteigende, im 6^{ten} die rechtssteigende Diagonale gespannt. Aus den einander gleichen Gurtkräften O_5 und O_6 kann man (Fig. 81^c) $\max V_5$ finden. Es folgt (nach Correction):

$$\max V_5 = 13 - 2,5 = + 10,5^{\text{tons}}.$$

Die Spannkraft $\max V_9 (= \max V_2)$ entsteht gleichzeitig mit $\min D_9$ und ist in Fig. 82 dargestellt. Dort wurde nach Ermittelung von D_9 das Kräftepolygon für den oberen Knotenpunkt 9 gezeichnet. Man erhält:

$$\max V_2 = \max V_9 = + 7,3 - 18,4 - 2,5 = - 13,6^{\text{tons}}.$$

Endverticale. Aus dem Kräftepoygone (Fig. 81^b) für den oberen Knotenpunkt 0 findet man bei voller Belastung $V_0 = - 135^{\text{tons}}$. Für die entlastete Brücke folgt aus dem Plane Fig. 86 der kleinste Druck $V_0 = - 33,3^{\text{tons}}$, so dass nach Correction dieser Werthe:

$$\min V_0 = - 135,0 - \frac{2,5}{2} = - 136,3^{\text{tons}}$$

$$\max V_0 = + 33,3 - \frac{2,5}{2} = + 34,6^{\text{tons}}$$

sich ergeben. Die ermittelten Spannkräfte wurden in Fig. 87 zusammengestellt.

*^o Die erste Zahl ist V_v , die zweite V_p , die dritte das Correctionsglied.

§ 18. Kräfteplan für einen parabolischen Dachbinder.

Zahlenbeispiel. — Tafel 11.

Ein parabolischer Dachbinder, Fig. 89, hat am Untergurte das Gewicht einer horizontalen Kassettendecke, welches = 43^{kg} für den Quadratmeter abgeschätzt ist, aufzunehmen. Eigengewicht der Dachconstruction = 80^{kg} für den Quadratmeter der Horizontalprojection, Schnee- und Winddruck = 100^{kg}. Abstand der Dachbinder = 5,4^m, Stützweite = 29,7^m, Feldweite $\lambda = 3,3^m$. Mithin beträgt die Belastung eines Knotenpunktes der oberen Gurtung:

in Folge der mobilen Last: $P_v = 5,4 \cdot 100 \cdot 3,3 = 1782^{\text{kg}} = \infty 1,8^{\text{tons}}$
" " permanenten " $P_o = 5,4 \cdot 80 \cdot 3,3 = 1426^{\text{kg}} = \infty 1,4^{\text{tons}}$
und die permanente Belastung eines Knotenpunktes der unteren Gurtung:
 $P_u = 5,4 \cdot 43 \cdot 3,3 = 766^{\text{kg}} = \infty 0,8^{\text{tons}}$.

Die Gesammtbelastung ist pro Feld:

$$P = P_o + P_u + P_v = 4,0^{\text{tons}}$$

Form des Trägers. Die Gleichung der Parabel ist mit Bezugnahme auf Fig. 88:

$$h_m = \frac{4fx_m x'_m}{l^2}.$$

Der Pfeil f ist = 4,05^m gewählt, und findet man dann nach vorstehender Formel (oder auch durch Construction) die Längen der Verticalen V_1 , V_2 , V_3 und V_4 :

$$h_1 = 1,6^m, \quad h_2 = 2,8^m, \quad h_3 = 3,6^m, \quad h_4 = 4,0^m.$$

Spannkräfte in den Gurtungen. Die Gurte werden bei voller Belastung am stärksten beansprucht, und ist es hierbei gleichgültig, ob die Lasten in den Knotenpunkten des Obergurtes oder in denen des Untergurtes angreifen. Es wurde desshalb bei Construction des Cremona'schen Kräfteplanes in Fig. 90 angenommen, dass die gesammte Belastung in den Knotenpunkten des Untergurtes wirkt. Die Diagonalen sind bei voller Belastung des Trägers spannungslos; desshalb erzeugt auch die permanente Belastung in den Diagonalen keine Beanspruchung.

Der Kräfteplan, Fig. 90, liefert für die Gurtungen:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = + 33^{\text{tons}}$$

$$O_1 = - 36,7^{\text{tons}}, \quad O_3 = - 34,0^{\text{tons}}, \quad O_5 = - 33^{\text{tons}}.$$

$$O_2 = - 35,1^{\text{tons}}, \quad O_4 = - 33,2^{\text{tons}},$$

Spannkräfte in den Diagonalen. Es handelt sich nach Vorstehendem nur um den Einfluss der mobilen Belastung. In jedem Felde sind 2 sich kreuzende schlaffe Diagonalen angeordnet.

Wir nehmen nur Knotenpunkt 8 und zwar mit P_v belastet an. Am linken Auflager entsteht die Reaction $A_8 = \frac{1}{2}P_v = \frac{1}{2} \cdot 1,8 = 0,2^{\text{tons}}$, und

die Diagonale D_8 erleidet das Maximum ihrer Inanspruchnahme. Für diesen Belastungszustand ist der Cremona'sche Kräfteplan, Fig. 92, gezeichnet. Die demselben entnommene Kraft $D'_8 = 2,2^{\text{tons}}$ ist gleich $\max D_8$.

Um nun $\max D_7$ zu finden, belasten wir jeden der Knotenpunkte 7 und 8 mit P_v , erhalten am linken Auflager die Reaction:

$$A_7 = A_8 + \frac{2}{3} P_v = 3 \cdot (\frac{1}{3} P_v)$$

und multipliciren die aus Plan Fig. 92 entnommene $D'_7 = 0,8^{\text{tons}}$ mit 3. Es ist also

$$\max D_7 = 3 \cdot 0,8 = 2,4^{\text{tons}}.$$

So fortlaufend bilden wir:

$$A_6 = A_7 + \frac{3}{9} P_v = 6 (\frac{1}{3} P_v); \quad \max D_6 = 6 D'_6 = 2,6 \text{ tons}$$

$$A_5 = A_6 + \frac{4}{9} P_v = 10 (\frac{1}{3} P_v); \quad \max D_5 = 10 D'_5 = 2,6 \text{ "}$$

$$A_4 = A_5 + \frac{5}{9} P_v = 15 (\frac{1}{3} P_v); \quad \max D_4 = 15 D'_4 = 2,4 \text{ "}$$

$$A_3 = A_4 + \frac{6}{9} P_v = 21 (\frac{1}{3} P_v); \quad \max D_3 = 21 D'_3 = 2,2 \text{ "}$$

$$A_2 = A_3 + \frac{7}{9} P_v = 28 (\frac{1}{3} P_v); \quad \max D_2 = 28 D'_2 = 1,8 \text{ "}.$$

Spannkräfte in den Verticalen. Die Beanspruchungen $\min V_8$ und $\max D_8$, ferner $\min V_7$ und $\max D_7$ etc. entstehen gleichzeitig, weshalb:

$$\min V_{8v} = 1 \cdot V'_8 = -1,4 \text{ tons} \quad \min V_{4v} = 15 \cdot V'_4 < \min V_{5v}$$

$$\min V_{7v} = 3 \cdot V'_7 = -1,8 \text{ "} \quad \min V_{3v} = 21 \cdot V'_3 < \min V_{6v}$$

$$\min V_{6v} = 6 \cdot V'_6 = -2,0 \text{ "} \quad \min V_{2v} = 28 \cdot V'_2 < \min V_{7v}$$

$$\min V_{5v} = 10 \cdot V'_5 = -2,0 \text{ "} \quad \min V_{1v} = 0.$$

(Man beachte, dass der Druck $\min V_{8v}$ die Verticale 1 beansprucht, sobald man nur Knotenpunkt 1 belastet, und dass man weiter $\min V_{2v}$ mit $\min V_{7v}$ etc. vergleichen muss. Siehe Seite 46.)

Durch die permanente Belastung entsteht, da die Diagonalen bei voller Belastung des Trägers spannungslos sind, in jeder Verticalen ein Zug V_p gleich der Knotenpunktlast $P_u = 0,8^{\text{tons}}$, so dass man die Werthe erhält:

$$\min V_1 = \min V_8 = -1,4 + 0,8 = -0,6 \text{ tons}$$

$$\min V_2 = \min V_7 = -1,8 + 0,8 = -1,0 \text{ "}$$

$$\min V_3 = \min V_6 = -2,0 + 0,8 = -1,2 \text{ "}$$

$$\min V_4 = \min V_5 = -2,0 + 0,8 = -1,2 \text{ "}.$$

Die Kräfte $\max V$ erhält man bei totaler Belastung, und zwar wird:

$$\max V = +0,8^{\text{tons}}.$$

Die ermittelten Spannkräfte sind in Fig. 94 zusammengestellt worden.

Bemerkungen zu dem Kräfteplane, Fig. 92. Es soll hier noch auf ein interessantes Gesetz aufmerksam gemacht werden, welches gestattet, den Plan scharf zu zeichnen, und welches Mohr im Jahrgang 1874 der Hannöver'schen Zeitschrift auf Seite 227 u. f. entwickelt hat.

Zunächst soll Fig. 93^a die Kraft D_m unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass am linken Trägertheile nur die Reaction A angreift.

Man kann A durch zwei Kräfte P_1 und P_2 ersetzen, welche durch die Schnittpunkte von O_m und D_m beziehungsweise D_m und U_m gehen und an die Bedingungen gebunden sind:

$$P_1 - P_2 = A$$

$$P_1 \lambda = Ax_m.$$

Ist die Feldweite λ constant, so folgt $x_m = m\lambda$, also:

$$P_1 = mA, \quad P_2 = (m-1)A.$$

Zerlegt man nun P_1 nach den Richtungen von O_m und D_m , P_2 nach den Richtungen von D_m und U_m , so erhält man in Fig. 93^b das aus A , O_m , D_m und U_m gebildete Kräftepolygon und findet so, dass die Verlängerung von D_m auf der Verlängerung von A die Kraft $(m-1)A$ abschneidet. Wenn man also in Fig. 92 die Strecken D'_2 , D'_3 , D'_4 . . . verlängert und mit der Verticalen ba in den Punkten b_2 , b_3 , b_4 . . . zum Schnitt bringt, so ist $\overline{ab_2} = \overline{b_2 b_3} = \overline{b_3 b_4} = \dots = \frac{1}{3}P_v$.

IV. Abschnitt.

Theorie des Erddrucks. Berechnung der Futtermauern.

§ 19. Einleitung. (Figuren auf Tafel 12.)

55) Jede Erdmasse darf unter einem bestimmten Winkel angeschnitten werden, ohne dass ihr Gleichgewicht gestört wird. Der zulässige grösste Böschungswinkel hängt von der Reibung und der Cohäsion zwischen den aufeinander gelagerten Erdmassen ab.

Ist die Erde cohäsionslos, so nennt man den grösstzulässigen Böschungswinkel den natürlichen; derselbe soll mit φ bezeichnet werden. Ein auf die natürliche Böschung AN (Fig. 95) gelegtes Erdkörperchen wird nur durch die Reibung am Herabgleiten gehindert. Zerlegt man sein Gewicht G in die Componenten $G \sin \varphi$ und $G \cos \varphi$ parallel und normal zur schiefen Ebene AN und setzt den Reibungswiderstand (erfahrungsgemäss) direct proportional dem Normaldrucke also $= \mu G \cos \varphi$ (unter μ den Reibungscoefficienten verstanden), so ist im Grenzfalle des Gleichgewichtes:

$$G \sin \varphi = \mu G \cos \varphi \text{ also } \operatorname{tg} \varphi = \mu.$$

Man nennt φ auch den Reibungswinkel. Mittelwerthe für φ liefert die nachstehende Tabelle. Dieselbe gibt auch das Gewicht γ_e^*) für den Cubikmeter Erde an.

*) Wir bezeichnen mit γ_e das Gewicht für den Cubikmeter Erde,

" " " " " " " " " " Mauerwerk.

Erdart	$\gamma_e \text{ kg}$	ϱ
Trockener Lehm Boden . .	1500	40°—46°
Nasser " . .	1900	20°—25°
Trockene Thonerde	1600	40°—50°
Nasse "	1980	20°—25°
Nasse Dammerde	1600—1700	30°—35°
Nasser Kies	1860	25°
Nasser Steinschotter . . .	1600	35°—40°

56) Ist der Böschungswinkel cohäsionsloser Erde grösser als ϱ , so ist der Erdkörper durch eine Futtermauer zu stützen (Fig. 96). Der Druck, welchem die Mauer zu widerstehen hat, soll hier für den Fall bestimmt werden, dass der Erdkörper oben durch eine Cylinderfläche mit der Leitcurve BCD begrenzt wird, deren Erzeugende normal zur Ebene der Zeichnung ist. Dabei wird ein Mauerstreifen von der Tiefe*) 1 betrachtet und die Hypothese gemacht:

dass die Drücke auf sämmtliche Elemente einer beliebigen, durch den Fuss A der Wand AB gelegten Ebene AD mit der Normalen zu AD ein und denselben (mit der Lage der AD sich ändernden) Winkel δ einschliessen.

Diesen Winkel bildet dann auch die Resultirende Q aus allen den Elementardräcken mit der Normalen zu AD .

Wird die Kraft Q in die Componenten N , normal zu AD , und S , in der Richtung AD , zerlegt, und unter Q speciell der Druck der unterhalb AD liegenden Erdmasse auf das Erdprisma ABD verstanden, so muss S von A nach B hin wirken, weil das Prisma ABD bei mangelnder Widerstandsfähigkeit der Mauer abwärts gleitet. Weiter muss:

$$S < \mu N \quad \text{d. h.} \quad \frac{S}{N} < \mu \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg} \delta < \mu = \operatorname{tg} \varrho \quad \text{also} \quad \delta < \varrho$$

sein. Für den Grenzzustand des Gleichgewichtes, d. h. für den Fall, dass der Widerstand der Mauer gerade ausreicht, dem Erddrucke das Gleichgewicht zu halten, ergiebt sich für eine bestimmte Fläche AC :

$$\delta = \varrho.$$

Diese Fläche heisst Gleitfläche. Längs derselben erfolgt Gleiten, sobald der Widerstand der Mauer um ein Geringes gemindert wird. Für alle anderen Flächen ist $\delta < \varrho$, so dass:

$$\varrho = \delta_{\max}$$

ist. Das durch die Gleitfläche losgetrennte Erdprisma ABC heisst das Druckprisma.

*) Tiefe nennen wir die Abmessung normal zur Bildfläche.

57) Ist die Erde nicht cohäsionslos, und wird die Annahme gemacht, dass Cohäsion und Reibung gleichzeitig wirken, so tritt zu dem Reibungswiderstande μN der Cohäsionswiderstand, welcher erfahrungsmässig nahezu unabhängig vom Normaldrucke N und direct proportional der Grösse der Trennungsfläche ist, mithin $= cl$ gesetzt werden darf, wo $l =$ Länge der AC und c ein Erfahrungscoefficient. Für die Gleitfläche folgt dann

$$S = \mu N + cl;$$

für jede andere Fläche ist $S < \mu N + cl$, mithin wird $\frac{\mu N + cl}{S}$ für die Gleitfläche ein Maximum.

In der Folge soll die Cohäsion nicht berücksichtigt werden, weil es sehr unwahrscheinlich ist, dass Cohäsion und Reibung gleichzeitig wirken. Die Beanspruchung der Futtermauer wird dann etwas zu gross gefunden.

58) Der Erddruck, dem eine Futtermauer zu widerstehen hat, heisst auch der active Erddruck im Gegensatze zu dem passiven Erddrucke, nämlich dem Widerstande, welchen die Erde leistet, wenn die Futtermauer durch irgend eine Kraft (z. B. den Horizontalschub eines Gewölbes Fig. 97) gegen den Erdwall gepresst wird. Hier hindert im Grenzzustande des Gleichgewichtes eine abwärts wirkende Schubkraft $S = \mu N$ das Aufwärtsgleiten des Erdprismas ABC .

Die Erörterung des passiven Erddruckes ist für die Praxis weniger wichtig. So darf man z. B. bei Berechnung eines Gewölbewiderlagers nicht den passiven Erddruck als das Widerlager entlastend in Rechnung stellen, denn es kommt dieser erst zur Wirkung, wenn die Erde etwas zusammengedrückt worden ist, d. h. also nach einer — wenn auch nur kleinen — Verschiebung des Widerlagers. Derartige Bewegungen der Widerlager sind aber für das Gewölbe höchst nachtheilig.

In der Folge soll, wenn nicht das Gegentheil besonders hervorgehoben wird, stets vom activen Erddrucke die Rede sein.

§ 20. Lage der Gleitfläche. Grösse des Erddruckes.

(Figuren auf Tafel 12.)

59) **Lage der Gleitfläche.** Der durch die Wand AB (Fig. 98a) gestützte Erdkörper trage eine Belastung, welche sich gleichförmig über die Horizontalprojektion der Terrainfläche vertheilt und durch eine gleichschwere Erdschicht von der Höhe h_r ersetzt werden möge. h_r nennt man die auf Erde reducire Belastungshöhe.

AC sei die unter α geneigte Gleitfläche. Der Inhalt des Querschnittes $ABDKCA$ des Druckprismas (einschliesslich Belastung) sei F , also das Gewicht des Druckprismas

$$G = \gamma_e F.$$

Der Widerstand E der Mauer (welcher dem Erddrucke gleich aber entgegengesetzt ist), sei der Richtung nach gegeben und bilde mit der Verticalen den Winkel φ . Der Druck Q , den die unterhalb der AC gelegene Erdmasse auf die Fläche AC ausübt, bildet mit der Normalen zu AC den Winkel $\delta_{\max} = \varphi$ und mit der Verticalen den Winkel $\alpha - \varphi$.

Sollen die 3 auf das Druckprisma wirkenden Kräfte E , G und Q mit einander im Gleichgewichte sein, so müssen sie sich zu einem geschlossenen Polygone $MOSM$ (Fig. 98^b) zusammensetzen lassen; in diesem bilden E und Q mit G beziehungsweise die Winkel φ und $\alpha - \varphi$.

Die Gleitfläche AC werde jetzt um den Winkel $d\alpha$ nach links gedreht. Das Gewicht des Querschnittselementes $ACKK'C'A$ sei dG . Macht man in Fig. 98^b $M'M = dG$, so ist $M'O$ der Druck Q' auf die Fläche AC' . Da nun der Winkel, welchen Q mit der Normalen zu AC einschliesst, ein Maximum sein soll, so muss seine Änderung Null sein, d. h. es muss Q' mit der Normalen zu AC' ebenfalls den Winkel φ bilden. Daraus folgt aber, dass Q und Q' den Winkel $d\alpha$ einschliessen.

Nun ist $\triangle MOM' = \frac{1}{2} Q^2 d\alpha$
 $\triangleCAC' = \frac{1}{2} AC^2 d\alpha$.

Wählt man also den Kräftemaassstab so, dass die Kraft Q durch eine Strecke von der Länge der AC dargestellt wird, so ist

$$\triangle MOM' = \triangleCAC'.$$

Ist ε der Neigungswinkel von CC' gegen die Horizontale, so folgt das Gewicht des Lastelementes $CC'K'K$ gleich $\gamma_e h_r \overline{CC'} \cos \varepsilon$, und man hat

$$dG = \gamma_e \triangle AC'C + \gamma_e h_r \overline{CC'} \cos \varepsilon$$

$$dG = \gamma_e \triangle AC'C \left(1 + h_r \frac{\overline{CC'} \cos \varepsilon}{\triangle AC'C} \right)$$

$$dG = \gamma_e \triangle MOM' \left(1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right),$$

wo h' das Loth von A auf die CC' d. h. auf die in C an die Begrenzung des Erdkörpers construirte Tangente bedeutet. Jetzt folgt

$$\frac{G}{dG} = \frac{\gamma_e F}{\gamma_e \triangle MOM' \left\{ 1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right\}}$$

und aus Fig. 98^b

$$\frac{G}{dG} = \frac{\overline{SM}}{M'M} = \frac{\triangle MOS}{\triangle MOM'},$$

mithin ist

$$F = \triangle MOS \left\{ 1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right\}.$$

Zieht man unter φ (Fig. 98a) die natürliche Böschung AN und hierauf CJ so, dass $\angle CJA = \varphi$ ist, so wird

$$\triangle ACJ \cong \triangle MOS,$$

weil $\overline{AC} = Q = \overline{OM}$, $\angle CJA = \angle OSM = \varphi$ und $\angle CAN = \angle OMS = \alpha - \varphi$ ist. Daher folgt auch

$$F = \triangle ACJ \left\{ 1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right\}.$$

Hiernach lässt sich die Lage der Gleitfläche durch Probiren ermitteln. Man wird AC versuchsweise annehmen, den Inhalt von $\triangle ACJ$ berechnen, mit $\left(1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right)$ multipliciren und nachsehen, ob dieser Werth gleich F ist.

Bei unbelasteter Hinterfüllungserde ($h_r = 0$) ist AC so zu ziehen, dass Fläche $ABC = \triangle ACJ$ ist.

Wir werden eine von B aus unter φ gegen die natürliche Böschung gezogene Gerade BL die Orientirungslinie nennen. Weiter werden wir $\overline{CJ} = y$ setzen und das Loth von C auf die natürliche Böschung mit η bezeichnen.

60) Grösse des Erddruckes. Da $\triangle ACJ$ dem Kräftedreieck OSM congruent ist, stellt in dem hier gewählten Kräftemaassstabe

CJ den Erddruck E

JA das Gewicht G

AC die Kraft Q

dar. Somit ist

$$\frac{E}{G} = \frac{\overline{CJ}}{\overline{JA}} \quad \text{d. h. } E = \frac{Gy}{\overline{JA}} = \frac{\gamma_e F y}{\overline{JA}}.$$

Da nun einerseits $\triangle ACJ = \frac{\overline{JA} \cdot \eta}{2}$

$$\text{und andererseits } \triangle ACJ = \frac{F}{1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon}$$

ist, so folgt

$$\overline{JA} = \frac{2F}{\eta \left\{ 1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right\}}$$

und man erhält

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e \left\{ 1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right\} y \eta.$$

Hiernach kann man (unter Annahme einer ebenen Gleitfläche und Vernachlässigung der Cohäsion) den Erddruck bestimmen, sobald man

seine Richtung kennt. Die Bestimmung der Richtung von E ist aber im Allgemeinen ohne eine weitere Annahme nicht möglich; sie ist namentlich schwierig bei krummer Wand. Deshalb soll auch zunächst der einfachste und für die Praxis wichtigste Specialfall einer ebenen Wand und ebenen Terrainfläche behandelt werden. Hieran möge sich dann die Betrachtung der übrigen wichtigen Fälle schliessen*).

§ 21. Erddruck auf eine ebene Wand bei ebener Terrainfläche.

(Figuren auf Tafel 12.)

61) Lage der Gleitfläche. Die Terrainfläche sei mit p für die Einheit belastet und habe den Neigungswinkel ε (Fig. 99). Dann ist die Belastung der Flächeneinheit der Horizontalprojection $= \frac{p}{\cos \varepsilon}$, und ergiebt sich die reducire Belastungshöhe aus

$$\gamma_e h_r = \frac{p}{\cos \varepsilon}, \text{ so dass also } h_r = \frac{p}{\gamma_e \cos \varepsilon}.$$

Ist AC die Gleitfläche, AN die natürliche Böschung, BL die Orientirungsline und $CJ \parallel BL$, so muss sein, vergl. No. 59

$$F = \triangle ACJ \left(1 + \frac{2h_r}{h'} \cos \varepsilon \right) = \triangle ACJ \left(1 + \frac{2p}{\gamma_e h'} \right),$$

wo h' das Loth von A auf die Terrainfläche BC bedeutet. Weiter ist

$$F = \triangle ABC + h_r \overline{BC} \cos \varepsilon = \triangle ABC \left\{ 1 + \frac{p \overline{BC}}{\gamma_e \triangle ABC} \right\}$$

d. h. $F = \triangle ABC \left(1 + \frac{2p}{\gamma_e h'} \right),$

und man erhält die Bedingung

$$\triangle ACJ = \triangle ABC.$$

Daraus folgt der wichtige Satz:

Ist die Rückwand, sowie die Terrainfläche eben und letztere gleichmässig belastet, so ist die Lage der Gleitfläche unabhängig von der Belastung p .

62) Grösse des Erddruckes. Wird $CJ = y$ (Fig. 99) gesetzt und das Loth von C auf die AN mit η bezeichnet, so ist nach No. 60

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e \left(1 + \frac{2p}{\gamma_e h'} \right) y \eta.$$

Bei unbelasteter Terrainfläche ($p = 0$) ist

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta.$$

*.) Bezuglich des Erddruckes auf eine krumme Wand vergl. man § 25 No. 82 und die Fussnote auf Seite 90.

63) Vereinfachung der Construction des Erddruckes. Bezeichnet man mit δ den Winkel, welchen der Erddruck E mit der Normalen zur Wand AB bildet und mit β den Neigungswinkel der Wand, so folgt Fig. 99

$$\varphi + \beta + \delta = 2R$$
$$\varphi = 2R - \beta - \delta$$

mithin $\angle LBA = 2R - \varphi - (\beta - \delta) = \varphi + \delta$. Hierdurch ist die Orientirungslinie BL stets in einfacher Weise bestimmt.

Zieht man $JR \parallel AC$, so ist $\triangle ACR = \triangle ACJ = \triangle ABC$ also $BC = CR$. Setzt man nun $\overline{BC} = \overline{CR} = d$, $\overline{CN} = e$, $\overline{AL} = a$, $\overline{AJ} = x$, $\overline{AN} = b$, so folgt

$$\frac{x}{b} = \frac{d}{e} \quad \text{ferner} \quad \frac{x-a}{b-x} = \frac{d}{e}$$

mithin

$$\frac{x}{b} = \frac{x-a}{b-x}$$

$$bx - x^2 = bx - ab, \text{ also}$$

$$x = \sqrt{ab}$$

d. h. es ist $x = \overline{AJ}$ die mittlere Proportionale zu $a = \overline{AL}$ und $b = \overline{AN}$.

Errichtet man (Fig. 100) über AN einen Halbkreis, und macht $LF \perp AN$, so ist AF die mittlere Proportionale zu AL und AN . Macht man also $AJ = AF$ und zieht $JC \parallel LB$, so ist AC die Gleitfläche, und es ergiebt sich nach Messen von η und y

$$E = \frac{1}{2} \left(\gamma_e + \frac{2p}{h} \right) y\eta.$$

Schneiden sich AN und BC in grösserer Entfernung von der AB , so ist die gezeigte Construction unpraktisch. Man beachte dann Folgendes.

Zieht man (Fig. 99) $AO \parallel LB$ bis zum Schnitte mit BC , so ist

$$OB : OC : ON = AL : AJ : AN,$$

mithin OC die mittlere Proportionale zu OB und ON . Weiter wird jede zu der ON parallele Gerade $O'N'$ durch das aus Orientirungslinie AO , Spur AB der Wand, Gleitlinie AC und natürlicher Böschung AN bestehende Strahlenbüschel so getheilt, dass $O'C'$ die mittlere Proportionale zu $O'B'$ und $O'N'$ ist.

Zieht man also $O'N'$ beliebig, aber parallel der Terrainlinie, errichtet über $O'N'$ einen Halbkreis, macht $B'D \perp O'N'$ und $O'C' = O'D$, so ist $C'AC$ die Gleitfläche, und man kann jetzt nach Eintragen von y und η den Erddruck E wie vorhin berechnen.

Ist die Terrainfläche unter dem natürlichen Böschungswinkel geneigt (Fig. 101), so schneiden sich BC und AN im Unendlichen, und es fällt desshalb die Gleitfläche mit der AN zusammen; ihre Lage braucht man

aber nicht zu kennen, denn alle von beliebigen Punkten C aus eingetragenen Strecken y und η sind gleich gross und können zur Berechnung von

$$E = \frac{1}{2} \left(\gamma_e + \frac{2p}{h'} \right) y \eta$$

benutzt werden.

64) Erddruckänderungskurven. Gegeben sei der Erddruck E auf AB (Fig. 102), gesucht der Druck E_x auf $A'B$.

h und x seien die Verticalprojectionen von AB und $A'B$.

Hat man mit Hilfe der vorhin beschriebenen Constructionen die Werthe y und η für die „Druckhöhe“ h construirt, und führt dieselbe Construction für eine Mauer von der Höhe x durch, so erhält man offenbar die Werthe $y \frac{x}{h}$ und $\eta \frac{x}{h}$.

Während also

$$E = \frac{1}{2} \left(\gamma_e + \frac{2p}{h'} \right) y \eta = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta + \frac{py\eta}{h'}$$

ist, wird

$$E_x = \frac{1}{2} \left(\gamma_e + \frac{2p}{h'} \frac{x}{h} \right) y \eta \frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta \frac{x^2}{h^2} + \frac{py\eta}{h'} \frac{x}{h}.$$

Trägt man (Fig. 102^a) von der Verticalen NM aus die Kräfte $\overline{MD} = \frac{py\eta}{h'}$ und $\overline{MH} = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta$ als horizontale Ordinaten auf, so ist $\overline{DH} = E$.

Zieht man die Gerade ND und durch A' eine Horizontale, so erhält man auf dieser

$$\overline{D'M'} = \overline{DM} \frac{x}{h} = \frac{py\eta}{h'} \frac{x}{h}.$$

Zieht man weiter durch den Schnittpunkt J der Geraden NH mit der Horizontalen durch A' die Verticale JS und dann die Gerade SN , welche die Horizontale durch A' in H' schneidet, so ist

$$\overline{M'H'} = \overline{MS} \frac{x}{h} = \overline{M'J} \frac{x}{h} = \left(\overline{MH} \frac{x}{h} \right) \frac{x}{h} = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta \frac{x^2}{h^2},$$

und man erhält

$$\overline{D'H'} = E_x.$$

Die Punkte H' liegen auf einer Parabel, deren Scheitel der Punkt N und deren Axe horizontal ist. Diese Parabel und die Gerade ND nennt man Erddruckänderungskurven.

65) Belastungsfläche. Drucktrapez. Angriffspunkt von E. Nach Vorstehendem ist für die Druckhöhe x :

$$E_x = Cx^2 + C'x,$$

$$\text{wo } C = \frac{1}{2} \frac{\gamma_e y \eta}{h^2} \text{ und } C' = \frac{py\eta}{h'h}.$$

Die Belastung eines Elementes der Wand AB ist hiernach

$$dE_x = (2Cx + C')dx,$$

welches Druckelement durch den Inhalt zdx eines Flächenstreifens (Fig. 102^b) dargestellt werden möge. Es heisst dann

$$z = 2Cx + C' \text{ die Belastungsordinate.}$$

Der Werth z ist linear, und zwar wird

$$z = C' \quad \text{für } x = o$$

$$z = C' + 2Ch \quad \text{für } x = h.$$

Desshalb ist die Belastungsfläche ein Trapez $A'B'L'R$ mit den Abmessungen $\overline{B'L} = C'$ und $\overline{A'R} = 2Ch + C'$. Dieses Trapez heisst das Drucktrapez; der Flächeninhalt desselben giebt den Erddruck E auf die Wand AB an, während die Horizontale durch seinen Schwerpunkt S (Fig. 103) die Wand AB in dem Angriffspunkte a des Erddruckes E schneidet.

In der Folge werden wir nicht

$$\overline{A'R} = 2Ch + C' = \frac{\gamma_e y \eta}{h} + \frac{py\eta}{h'h}$$

und

$$\overline{B'L} = C' = \frac{py\eta}{h'h}$$

machen, sondern

$$\overline{A'B} = \frac{1}{\gamma_e} (2Ch + C') = \frac{y\eta}{h} + \frac{py\eta}{\gamma_e h h'},$$

$$\overline{B'L} = \frac{C'}{\gamma_e} = \frac{py\eta}{\gamma_e h h'}.$$

Es muss dann, um den Erddruck E auf AB zu liefern, der Inhalt des Drucktrapezes noch mit γ_e multipliziert werden, mit anderen Worten:

Der Erddruck wird durch das Gewicht eines Erdprismas dargestellt, dessen Tiefe = 1 und dessen Querschnitt das Drucktrapez ist.

Nach Ermittlung von η und y lässt sich nun das Drucktrapez wie folgt zeichnen.

Man verwandelt das Dreieck TUV (Fig. 102^c), dessen Basis $\overline{TV} = y$ und dessen Höhe $\overline{TU} = \eta$ ist, in ein Dreieck LTR mit der Höhe h , indem man die Gerade LV und darauf $UR \parallel LV$ zieht. Das Dreieck

TLR hat die Basis $\eta \frac{y}{h}$. Fügt man zu diesem Dreiecke noch ein Rechteck von der Breite $\overline{B'L} = \frac{p}{\gamma_e h'} \cdot \overline{TR} = \frac{py\eta}{\gamma_e h' h}$, so erhält man das Drucktrapez $A'B'LR$.

Will man das Drucktrapez (Fig. 103) nur zur Ermittlung des Angriffspunktes a des Erddruckes verwerthen, so gebe man ihm die Abmessungen

$$\overline{AR} = B \left(1 + \frac{p}{\gamma_e h'} \right) \text{ und } \overline{BL} = B \frac{p}{\gamma_e h'},$$

wo B eine Strecke von beliebiger Grösse. Den Schwerpunkt des Trapezes $A'B'LR$ zu finden, verbinde man die Halbirungspunkte der Seiten $B'L$ und $A'R$ durch die Schwerlinie s_1 , verlängere $B'L$ um $LJ = A'R$, hierauf RA' um $A'K = B'L$ und ziehe JK . Diese Gerade ist ebenfalls Schwerlinie; ihr Schnittpunkt S mit der Geraden s_1 ist der gesuchte Schwerpunkt.

Ist die Terrainfläche unbelastet, so wird $p = o$ und $\overline{BL} = \frac{py\eta}{h'h} = o$

(Fig. 102^c). Aus dem Drucktrapeze wird ein Dreieck. Der Erddruck greift in $\frac{1}{3}$ der Höhe der Mauer an.

Bemerkt sei noch, dass man den Erddruck

$$E = \frac{1}{2} \left(\gamma_e + \frac{2p}{h'} \right) y\eta$$

bei gleichmässig belasteter Terrainfläche stets zerlegen darf in

$$E_u = \frac{1}{2} \gamma y \eta = \text{Druck der unbelasteten Erde und}$$

$$E_p = \frac{p y \eta}{h'} = \text{Zuwachs in Folge der Belastung } p;$$

E_u greift in der Höhe $\frac{1}{3}h$ an (Schwerpunktshöhe von Dreieck TLR),

E_p " " " $\frac{1}{2}h$ " (Schwerpunktshöhe von Rechteck $A'B'LT$).

66) Richtung von E . In den bisherigen Ermittlungen von E wurde der Winkel δ , welchen der Erddruck mit der Normalen zur Wand AB bildet (Fig. 100), unbestimmt gelassen. Es ist auch im Allgemeinen unmöglich, diesen Winkel ohne eine weitere Hypothese zu bestimmen. Am häufigsten wird die Annahme gemacht, dass bei einem Ausweichen der Futtermauer die Erde an der Wand AB gleitet und diesem Gleiten der Reibungswiderstand entgegenwirkt, d. h. es wird $\delta = \varrho_1$ gesetzt, wo ϱ_1 den Reibungswinkel für Bewegung von Erde auf Mauerwerk bedeutet. Ist aber $\varrho_1 > \varrho$, so muss $\delta = \varrho$ gesetzt werden, weil dann eine der Wand unendlich nahe im Erdkörper gelegenen Fläche die Gleitfläche bilden wird. Eine andere Annahme werden wir in § 23 kennen lernen. Man vergl. auch Seite 84.

§ 22. Druck eines überhöhten Erdkörpers auf eine Futtermauer.

(Tafel 12 und 13.)

67) Die Terrainfläche besteht aus zwei Ebenen BD und DK (Fig. 104). Um den Erddruck für diesen wichtigen Specialfall zu bestimmen, zieht man die natürliche Böschung AN , die Orientirungslinie BL , hierauf $DJ' \parallel BL$, verbindet J' mit B und bestimmt den Schnittpunkt M der Geraden BJ' und AD . Findet man $BM = MJ'$, so ist $\triangle ADB = \triangle ADJ'$, und es ist AD die Gleitfläche.

Ist $BM > MJ'$, so ist $\triangle ADB > \triangle ADJ'$, und die Gleitfläche liegt oberhalb der AD . Man findet ihre Lage, indem man annimmt, der Erdkörper sei durch die Ebene BDK' begrenzt, wendet also die in No. 63 angegebene Construction an.

Ist $BM < MJ'$, also $\triangle ADB < \triangle ADJ'$, so liegt die Gleitfläche AC unterhalb AD und ist so zu bestimmen, dass, wenn $CJ \parallel BL$ ist,

$$\triangle ACJ = \text{Fläche } ABDA$$

wird. Zieht man nun $BB' \parallel AD$ bis zum Schnitte mit der KD , so ist

$$\triangle AB'D = \triangle ABD, \text{ also } \triangle AB'C = \text{Fläche } ABDA$$

$$\text{und } \triangle AB'C = \triangle ACJ,$$

und folgt hieraus, dass man, um die Lage von AC zu bestimmen, nur anzunehmen hat, es sei AB' die Wand und $B'K$ die Terrainfläche. Man wird also über der AN einen Halbkreis errichten, $B'L' \parallel BL$ ziehen, $L'F \perp AN$, ferner $AJ = AF$ machen und $JC \parallel L'B'$ ziehen. AC ist Gleitfläche.

Der Erddruck wird

$$E = \frac{1}{2} \gamma \cdot y \cdot \eta.$$

Um nun den Angriffspunkt von E zu ermitteln, bestimme man den Erddruck E_x (Fig. 105) auf einen beliebigen Theil $A'B$ der Wand analog wie vorhin den Druck E auf AB , trage E_x von der Verticalen $A''B''$ aus als horizontale Ordinate auf, wiederhole diese Operation unter Annahme verschiedener Punkte A' und zeichne die Erddruckänderungskurve.

Auf das Wandelement bei A' wirkt dE_x am Hebelarme $\frac{h-x}{\sin \beta} \cos \sigma$

in Bezug auf den Fußpunkt A und erzeugt das Moment $\frac{(h-x) \cos \sigma}{\sin \beta} dE_x$.

Das Moment des gesamten Erddruckes für den Drehpunkt A ist nun

$$M = \frac{\cos \sigma}{\sin \beta} \int (h-x) dE_x$$

und andererseits, wenn E in der Höhe ξ angreift,

$$M = \frac{\cos \sigma}{\sin \beta} E \cdot \xi.$$

Es folgt also

$$\xi \cdot E = \int (h - x) dE_x.$$

Nun bedeutet $\int (h - x) dE_x$ den Inhalt der von der Erddruckänderungscurve, der $A''B''$ und der $A''C$ eingeschlossenen Fläche, und hat man also nur nötig, diese Fläche in ein gleichgrosses Rechteck von der Basis $E = A''C$ zu verwandeln, um in der Höhe dieses Rechteckes die Strecke ξ zu erhalten.

Man verfährt aber genügend genau, wenn man (Fig. 104) den Schwerpunkt S der Fläche $ABDCA$ aufsucht, die Gerade $Sa \parallel AC$ zieht und a als Angriffspunkt von E annimmt.

68) Um den Schwerpunkt eines Vierecks $ABDC$ (Fig. 106) zu finden, ziehe man die Diagonalen AD und BC und beachte, dass sich die Flächeninhalte f_1 und f_2 der Dreiecke ABD und ADC wie die Strecken BF und FC verhalten. Ist nun $AM = MD$ und $\overline{MS_1} = \frac{1}{3} MB$, $\overline{MS_2} = \frac{1}{3} \overline{MC}$, dann sind S_1 und S_2 die Schwerpunkte der Dreiecke f_1 und f_2 . Bestimmt man auf der $S_1 S_2$ den Punkt S so, dass

$$\frac{\overline{S_1 S}}{\overline{S_2 S}} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}},$$

so ist S der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks. Man hat hierzu nur nötig, $BL = CF$ zu machen und LM mit $S_1 S_1$ in S zum Schnitte zu bringen. Daraus ergiebt sich folgende Construction:

Man macht $AM = MD$, $BL = FC$, zieht LM und macht $MS = \frac{1}{3} ML$. Der Punkt S ist der gesuchte Schwerpunkt.

69) Der Erdkörper bedeckt die Krone der Mauer. (Fig. 107.) Man verlängere die Wand AR bis zum Schnittpunkte B der Terrainfläche und bestimme nach den vorhin abgeleiteten Regeln den Erddruck auf AB . Die Construction ist aus Fig. 107 zu ersehen. S ist der Schwerpunkt des Vierecks $ABDCA$. Zieht man $Sa \parallel AC$, so findet man in a genügend genau den Angriffspunkt von E .

§ 23. Erddrucktheorie von Rankine.

(Tafel 13.)

70) Princip. Es wird zunächst eine cohäsionslose, oben durch eine Ebene begrenzte, sonst aber unendliche Erdmasse betrachtet. Der Druck auf irgend eine Fläche im Inneren der Erdmasse lässt sich, sobald die Reibung direkt proportional dem Normaldrucke gesetzt wird, ohne weitere Annahmen bestimmen. Von den auf diese Weise erhaltenen Gesetzen werden Schlüsse auf den Erddruck gegen eine feste Wand gemacht.

71) Hauptsätze. Aus dem unendlich grossen, oben durch die Ebene LL (Fig. 108) begrenzten Erdkörper wird ein Theil ABB_1A_1 so herausgetrennt, dass AB und A_1B_1 vertical sind, während $AA_1 \parallel LL$ ist. Auf AB und A_1B_1 wirken Drücke, welche bei entgegengesetzter Richtung gleiche Grösse haben und in Componenten E und V zerlegt werden, die beziehungsweise parallel zu LL und vertical sind. Der Druck auf AA_1 sei ebenfalls in S (parallel LL) und in P (vertical) zerlegt. Das Gewicht des Körpers BAA_1B_1 werde mit G bezeichnet.

Setzt man

- 1) die Summe der parallel LL wirkenden Kräfte gleich Null,
- 2) die Summe der verticalen Kräfte gleich Null,

so erhält man

$$S = o \quad \text{und} \quad P = G,$$

während sich aus der Bedingung für das Gleichgewicht gegen Drehen

$$V = o$$

ergibt. Daraus folgen die Sätze:

- 1) *Der Druck auf eine verticale Fläche ist parallel der Oberfläche.*
- 2) *Der Druck auf eine der Oberfläche parallele Fläche ist vertical.*

72) Lage der Gleitfläche für den activen Erddruck. An irgend einer Stelle im Inneren des unendlichen Erdkörpers werde ein unendlich kleines dreiseitiges Prisma ABC (Fig. 109) so herausgeschnitten, dass AB vertical und BC parallel der Oberfläche ist. Der Druck E auf AB wirkt parallel BC . Der Druck Q auf AC bildet mit der Normalen zu AC einen ganz bestimmten von der Lage der Fläche AC abhängigen Winkel δ . Sinkt E unter eine bestimmte Grenze, so findet längs derjenigen Fläche AC , für welche δ den Maximalwerth ϱ annimmt, Gleiten statt, und muss hierbei die in der Ebene AC wirkende Componente S von Q in der Richtung von A nach C wirken. (Man vergl. § 19 No. 56.) Da nun der Druck auf BC vertical wirkt und sich gleichmässig über BC vertheilt, so kann die in § 21 unter No. 61 entwickelte Construction der Lage der Gleitfläche angewendet werden.

Man zieht AN unter ϱ gegen die Horizontale, hierauf die Orientirungslinie BL unter $\varrho + \varepsilon$ gegen die AB (wo ε den Neigungswinkel der Terrainfläche bedeutet) und bestimmt die Lage von AC so, dass nach Ziehen von CJ parallel BL die Dreiecke ABC und ACJ gleich gross sind. Oder aber man wendet die in No. 63 gezeigte Construction an.

Es ist hiernach die Lage der Gleitfläche ganz unabhängig von der Grösse des Druckes E und der Grösse der Belastung der Fläche BC d. h. unabhängig von der Lage des Punktes A im Inneren des Erd-

körpers. Sie hängt nur von den Winkeln ϱ und ε ab. Daraus folgt der Satz:

Im unendlich grossen, oben durch eine Ebene begrenzten cohäsionslosen Erdkörper sind die Gleitflächen Ebenen.

73) Grösse des activen Erddruckes. Die in § 21 angegebene Construction des Erddruckes E auf die Wandfläche AB (Fig. 100, Tafel 12) basirte auf der Annahme einer ebenen Gleitfläche. Sie liefert exacte Resultate, sobald AB eine Fläche ist, die durch den Punkt A (Fig. 110) in einer unendlichen, oben durch eine Ebene begrenzten, cohäsionslosen Erdmasse geht; denn hier ist die Gleitfläche eine Ebene. Der früher willkürlich angenommene Winkel δ , welchen E mit der Normalen zu AB bildet, ist aber jetzt nach einem ganz bestimmten Gesetze von der Lage der AB abhängig. Bei verticaler Lage von AB wird $\delta = \varepsilon$.

Um nun zunächst den Druck E auf die verticale Fläche AB zu finden, wird AN unter ϱ gegen die Horizontale gezogen, BL unter $\varepsilon + \varrho$ gegen die AB und im übrigen wie früher verfahren (vergl. § 21, No. 63). Man erhält

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta$$

und kann jetzt das Druckdreieck DKH zeichnen, indem man das Dreieck DMR mit den Abmessungen η und y in ein Dreieck mit der Höhe h verwandelt. Der Angriffspunkt a von E ist durch $\overline{Aa} = \frac{1}{3} h$ gegeben.

Will man jetzt den Druck E_1 auf die Fläche AB_1 haben, so hat man nur nöthig, E und das Gewicht G des Erdkörpers AB_1B zu der Resultirenden E_1 zusammenzusetzen.

Bezeichnet man mit

e das Loth von B_1 auf AB ,

b die Basis des Druckdreiecks DKH ,

so ist $G = \frac{1}{2} \gamma_e e h$ und $E = \frac{1}{2} \gamma_e b h$, und darf man hiernach die Kräfte G und E durch Strecken e und b darstellen. Macht man also $\overline{BS} = b$, $\overline{BU} = e$, so giebt SU die Richtung des Druckes E_1 auf Fläche AB_1 an. Ferner wird, wenn man $\overline{SU} = b_1$ setzt,

$$E_1 = \frac{1}{2} \gamma_e b_1 h.$$

Der Angriffspunkt a_1 von E_1 ist durch $\overline{Aa_1} = \frac{1}{3} \overline{AB_1}$ gegeben.

74) Der passive Erddruck. Es sei ABC (Fig. 111) ein unendlich kleines, aus dem Erdkörper herausgetrenntes Prisma. AB sei vertical, BC sei parallel der Terrainfläche. Dann wirkt E parallel BC . Ueberschreitet E einen bestimmten Werth, so wird längs derjenigen Fläche AC Gleiten eintreten, auf welche ein Druck Q wirkt, der mit der Normalen zur AC den Winkel $\delta_{\max} = \varrho$ bildet und dessen in der Ebene AC

wirkende Componente S von C nach A gerichtet ist. Der obere Grenzwerth von E heisst der passive Erddruck (vergl. § 19). Um ihn zu finden, kann man die für den activen Erddruck entwickelte Construction anwenden; man hat nur den Winkel $+\varrho$ durch $-\varrho$ zu ersetzen. Zieht man also AN unter ϱ unterhalb der Horizontalen durch A und die Orientirungslinie BL unter dem Winkel $\varrho - \varepsilon$ gegen die AB , so zwar dass BL links von AB liegt, dann ist AC Gleitfläche, wenn nach Ziehen von $CJ \parallel BL$ die Dreiecke ABC und ACJ gleich gross sind.

Um den Druck E_{passiv} auf eine verticale Fläche AB (Fig. 112) von endlicher Länge zu erhalten, wird man nach Ziehen von AN und BL über AN einen Halbkreis errichten, $LF \perp AN$ und $AJ = AF$ machen. Ist dann $JC \parallel BL$ und gleich y , so findet man

$$E_{\text{passiv}} = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta,$$

wo η das Loth von C auf AN bedeutet. Aus dem Drucke auf eine verticale Fläche AB kann man wie vorhin den Druck auf jede beliebige schräge Fläche finden.

Fig. 113. 75) **Activer Erddruck auf eine verticale Fläche bei horizontaler Terrainfläche.** Der Erddruck E auf eine verticale Fläche ist horizontal. Deshalb ist die Orientirungslinie normal zur natürlichen Böschung AN . Der über AN errichtete Halbkreis geht durch den Punkt B . Macht man also $AJ = AB$ und zieht JC parallel LB , so ist AC Gleitfläche. Die Dreiecke ABC und ACJ sind congruent; mithin ist $BC = CJ$ und $\angle BAC = \angle CAJ = \frac{1}{2}(90^\circ - \varrho) = 45^\circ - \frac{1}{2}\varrho$. Nun wird, da $y = \eta = CJ$ ist,

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e \overline{CJ}^2 = \frac{1}{2} \gamma_e \left\{ \overline{AJ} \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varrho) \right\}^2$$

$$\text{d. i. } E = \frac{1}{2} \gamma_e h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varrho).$$

Wird die Terrainfläche gleichmässig belastet (mit p für die Einheit), so folgt

$$E = \frac{1}{2} \left(\gamma_e + \frac{2p}{h} \right) y \eta$$

$$\text{d. i. } E = \frac{1}{2} \left(\gamma_e + \frac{2p}{h} \right) h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varrho).$$

Diesen Druck kann man trennen in
 $E_u = \frac{1}{2} \gamma_e h^2 \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varrho) =$ Druck der unbelasteten Erde
 und in
 $E_p = p h \operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varrho) =$ Zuwachs von E_u in Folge der Belastung p .
 E_u greift im Abstande $\frac{1}{3}h$ von A an, E_p im Abstande $\frac{1}{2}h$. (Vergl. No. 65.)

Setzt man für Dammerde oder Kies den Mittelwerth $\varrho = 37^0$, so folgt

$$E_u = \frac{1}{8} \gamma_e h^2, \quad E_p = \frac{1}{4} p h.$$

Bei Berechnung von Schleusenmauern setze man, da hier die Erde stark mit Wasser durchzogen ist, $\varrho = 20^0$ und

$$E_u = \frac{1}{4} \gamma_e h^2, \quad E_p = \frac{1}{2} p h.$$

76) Hauptdrücke, Hauptflächen. Schneidet man aus dem Inneren des Erdkörpers ein unendlich kleines, rechtwinkliges Parallelepipedon $ABCD$ (Fig. 114) so heraus, dass auf die Seitenflächen AB und CD normale Drücke E_b wirken, und zerlegt man die Drücke auf die Flächen BC und AD in die Componenten E_a und S , welche beziehungsweise normal und parallel zu diesen Flächen sind, so folgt aus der Bedingung für Gleichgewicht gegen Drehen

$$S = 0,$$

denn die Kräfte S bilden ein Paar mit dem Momente $S \cdot \overline{CD}$.

Man nennt E_a und E_b Hauptdrücke. Die durch E_a und E_b affirierten Flächen sollen Hauptflächen heißen.

Es sei nun ABC (Fig. 115) ein unendlich kleines, dreiseitiges Prisma im Inneren des Erdkörpers. AB und BC seien die Hauptflächen, AC sei die Gleitfläche. Da die in No. 75 (Fig. 113) abgeleitete Construction der Gleitfläche AC nach Früherem (§ 21) auch geltig bleibt, wenn die Terrainfläche gleichmässig belastet wird, und da weiter der Hauptdruck E_a sich gleichmässig über die Fläche BC in Fig. 115 vertheilt, so folgt, dass die Hauptfläche AB mit der Gleitfläche AC den Winkel $45^0 - \frac{1}{2}\varrho$ bildet.

Wir werden in der Folge die aufeinander senkrechten Hauptflächen mit I und II bezeichnen.

Bei horizontaler Terrainfläche Fig. 113 ist die eine Hauptfläche vertical, die andere horizontal.

Ist in Fig. 116 AC die nach dem in No. 72 und 73 entwickelten Verfahren construirte Gleitfläche, und zieht man I unter $45^0 - \frac{1}{2}\varrho$ gegen die AC , ferner II \perp I, so sind die Flächen I und II die Hauptflächen.

77) Ueber die Giltigkeit der Rankine'schen Theorie bei Begrenzung der Erdmasse durch eine feste Wand. Durch irgend einen Punkt A im Inneren der Erdmasse (Fig. 117) seien die zu einander senkrechten Hauptflächen I und II construirt. G sei das Gewicht des von den Hauptflächen und der Terrainfläche begrenzten Prismas. Die Hauptdrücke E_a und E_b sind normal zu II beziehungsweise I. Zerlegt man G in Componenten parallel zu E_a und E_b , so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht der auf das Prisma $B_1 A B_2$ wirkenden Kräfte:

$$E_b = G \cos \alpha$$

$$E_a = G \sin \alpha.$$

E_b und E_a kann man also durch das Gewicht des Prismas $B_1 A B_2$ erzeugt denken.

Ersetzt man nun den Erdkörper links von AB_2 durch eine feste Wand, so wird an den Drücken E_b und E_a nichts geändert, vorausgesetzt, dass die Wand dem Drucke E_a zu widerstehen vermag. Ebenso darf man der Wand jede beliebige Lage AB' links von AB_2 geben, ohne dass die Drücke E_a und E_b eine Änderung erleiden. Dagegen wird bei der Lage AB'' das Gewicht G gemindert und lässt sich nicht mehr nachweisen, dass E_b ungeändert bleibt. Die vielfach gemachte Annahme, dass auch hier E_b den Werth $G \cos \alpha$ behält, ist vorläufig Hypothese.

Hat nun die Wand die Lage AB_2 , so darf sie vollkommen glatt sein, da der Druck E_a normal zu AB_2 ist. Giebt man dagegen der Wand die Lage AB' , so bildet der Druck E auf AB' mit der Normalen zu AB' einen ganz bestimmten Winkel δ , und es muss die Wand so rauh sein, dass der Reibungswinkel ϱ_1 für die Bewegung der Erde längs der Wand gleich oder kleiner als δ ist. Wenn, was in der Regel angenommen wird, $\varrho_1 \geq \varrho$ ist, so darf die Wand jede beliebige Lage links von AB_2 und ebenso rechts von AB_1 haben, ohne dass die Hauptdrücke E_a und E_b eine Änderung erleiden.

Bleibt nun nach Einziehen der Wand AB' der Hauptdruck E_b auf die Fläche AB_1 ungeändert, so darf auch der Druck auf die Wand AB' nach der Rankine'schen Theorie bestimmt werden, denn es ist dieser Druck die Resultirende aus E_b und dem Gewichte des Erdprismas $AB_1 B'$.

Es folgt also der zuerst von Weyrauch aufgestellte Satz:

Die Rankine'sche Erddrucktheorie ist bei Begrenzung des Erdkörpers durch eine feste Wand gültig, wenn

- 1) die beiden Hauptflächen die Terrainfläche innerhalb des Erdkörpers treffen,
- 2) wenn der Winkel δ , welchen der nach Rankine konstruirte Erddruck mit der Normalen zur Wand bildet, den Reibungswinkel ϱ_1 nicht überschreitet.

Dabei bleibt die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die Theorie auch bei einer anderen Lage der Wand anwendbar ist.

Wenn man $\varrho = \varrho_1$ annimmt, so ist der zweite Theil des vorstehenden Satzes stets erfüllt. Dies vorausgesetzt, gilt bei horizontaler Oberfläche die für den oben durch eine Ebene begrenzten, unendlichen Erdkörper abgeleitete Theorie, sobald die Wand nach vorn überhängt (Fig. 118). Denn es ist hier die eine Hauptfläche vertical, die andere horizontal.

Dreht man die horizontale Oberfläche rechts (Fig. 121), so drehen sich die Hauptflächen I und II links, und es muss β um ein Bestimmtes grösser als 90° sein, wenn I die Oberfläche noch innerhalb des Erdkörpers treffen soll.

Wird dagegen die horizontale Oberfläche links gedreht, wie in Fig. 116, so drehen sich die Hauptflächen rechts, und es wird bei der Wandlage AB' die Fläche II die Oberfläche ausserhalb des Erdkörpers schneiden. Die Giltigkeit der Theorie von Rankine lässt sich hier vorläufig nicht nachweisen.

78) Beispiel. In Fig. 121 ist die Construction des Erddruckes E auf die Wand AB nach der Theorie von Rankine durchgeführt worden. AN ist die natürliche Böschung, B_1L die unter dem Winkel $\varrho - \varepsilon$ gegen die Verticale AB_1 gezogene Orientirungslinie. Ueber AN ist ein Halbkreis errichtet, dann $LF \perp AN$ gezogen und $AJ = AF$ gemacht. JC ist parallel LB_1 . AC ist Gleitfläche. Durch Antragen des Winkels $IAC = 45^\circ - \frac{1}{2}\varrho$ wird die Hauptfläche I erhalten. Hauptfläche II ist senkrecht zu I. Beide Hauptflächen schneiden die Terrainfläche BN innerhalb des Erdkörpers, weshalb die Theorie von Rankine gültig ist.

Der Druck auf die verticale Fläche AB_1 wird jetzt:

$$E_1 = \frac{1}{2} \gamma_e y \eta.$$

Construiert man ein Dreieck mit der Basis y und der Höhe η und verwandelt es in ein solches mit der Höhe h , so ist, wenn c die Basis dieses Dreiecks bedeutet,

$$E_1 = \frac{1}{2} \gamma_e h c.$$

Da nun das Erdprisma ABB_1 das Gewicht

$$G' = \frac{1}{2} \gamma_e c' h$$

hat, wo c' den Horizontalabstand des Punktes B_1 von der Wand AB bedeutet, so folgt

$$E_1 : G' = c : c'.$$

E_1 wirkt parallel der Oberfläche BN . Macht man also $\overline{MO} = c$ parallel zu BN und $\overline{MP} = c'$ vertical, so ist der Druck E (auf die Wand AB) parallel zu OP , ferner ist

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e s h,$$

wobei $s = \overline{OP}$. Macht man $\overline{AT} = \frac{1}{3} \overline{AB}$, so erhält man den Angriffspunkt T von E .

Ist die Terrainfläche gleichmässig belastet, so konstruiert man für die Wand AB das Druckdreieck mit der Basis s und der Höhe h und kann dann nach dem in No. 65 abgeleiteten Verfahren das Drucktrapez finden. Oder aber man fügt zu dem vorhin ermittelten in T angreifenden Drucke E den Druck

$$E_p = \frac{p}{h'} s h,$$

unter h' das Loth von A auf die BN verstanden. E_p greift im Mittelpunkte der Wand AB an und ist parallel zu E . (Vergl. No. 65.)

§ 24. Bemerkungen über die Richtung des Erddruckes auf eine
feste Wand. (Tafel 13.)

79) Bei Bestimmung des Erddruckes E auf eine feste Wand AB (Fig. 120) wurde die Annahme einer ebenen Gleitfläche gemacht. Die Lage derselben war bei ebener Terrainfläche ausser vom Reibungswinkel ϱ nur noch von der Richtung des Druckes E und von der Neigung der Terrainfläche BC abhängig. Ist nun $A'B'$ eine im Innern des Erdkörpers gedachte, der AB parallele Fläche, so muss, da $A'C$ ein Theil der Gleitfläche AC ist, der Druck E_x auf $A'B'$ dieselbe Richtung haben wie E ; denn, wäre E_x nicht parallel zu E , so würde die durch den Punkt A' construirte Gleitfläche nicht mit der AC zusammenfallen, und es würde mithin der Annahme einer ebenen Gleitfläche widersprochen werden.

Bedeutet Q_z den Druck auf $A'C$, Q den Druck auf AC und setzt man $A'C = z$, $AC = l$, so findet man bei unbelasteter Terrainfläche:

$$Q_z : Q = z^2 : l^2 \text{ *)}$$

d. h. $Q_z = \frac{Qz^2}{l^2}$, ferner $\frac{dQ_z}{dz} = \frac{2Qz}{l^2}$ und kann dann folgern, dass der

Angriffspunkt F (Fig. 119) von Q durch $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ gegeben ist. Bringt man die nunmehr der Lage nach bestimmte Kraft Q mit dem Gewichte G des Druckprismas in J zum Schnitte, macht $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ und verbindet D mit J , so erhält man die Richtung der Kraft E . Diese wird nach einem ganz bestimmten Gesetze von der Lage der Wand AB abhängen. Ist z. B. AB vertical, so fällt J mit F zusammen, und findet man $JD \parallel BC$, also E parallel der Terrainfläche. Damit ist nachgewiesen:

Die Annahme, der Erddruck E bildet mit der Normalen zur Wand den Winkel $\delta = \varrho_1$ (vergl. Seite 75), steht mit der Annahme einer ebenen Gleitfläche im Widerspruch.

Ist $\delta = \varrho_1$, so kann die Gleitfläche im Allgemeinen keine Ebene sein.

Ist die Gleitfläche eine Ebene, so kann nur bei bestimmter Lage der Wand AB der Winkel $\delta = \varrho_1$ sein.

Die Anwendung der Rankine'schen Theorie zur Bestimmung des Druckes auf eine feste Wand birgt diesen Widerspruch nicht. Man kann also sagen:

*) Aus den Seite 73 u. f. für die den Druckhöhen x und h entsprechenden Erddrücken E_x und E abgeleiteten Formeln folgt bei unbelasteter Terrainfläche $E_x : E = x^2 : h^2$. Aus diesem Aenderungsgesetze wurde dann gefunden, dass der Erddruck in der Höhe $\frac{1}{3}h$ angreift. Ganz analog ist das Verfahren bei Bestimmung des Angriffspunktes von Q . Es wurden deshalb hier sofort die Resultate mitgetheilt.

Will man bei Bestimmung des Druckes cohäsionsloser oben durch eine Ebene begrenzten Erde auf eine feste Wand nur eine Annahme, nämlich die einer ebenen Gleitfläche*) machen, so muss man die Rankine'sche Theorie auch dann anwenden, wenn nicht beide Hauptflächen die Terrainfläche innerhalb des gestützten Erdkörpers schneiden.

Andererseits ist aber zu betonen, dass die Annahme $\delta = \varrho_1$ in Verbindung mit der hiermit im Widerspruch stehenden Hypothese einer ebenen Gleitfläche zu Resultaten führt, die mit den zur Bestimmung der Grösse und der Richtung des Erddruckes angestellten Versuchen besser übereinstimmen. Es wird desshalb die Annahme $\delta = \varrho_1$ auch nach Aufstellung der Rankine'schen Theorie am häufigsten gemacht. Entschliesst man sich für dieselbe — und praktische Bedenken gegen diese Entschliessung lassen sich nicht vorbringen —, so ist es durchaus nöthig, den Reibungswinkel ϱ_1 durch specielle Versuche unter Berücksichtigung der denkbar ungünstigsten Verhältnisse bezüglich des Feuchtigkeitsgrades der Erde zu ermitteln.**) Die Voraussetzung $\varrho_1 \geq \varrho$ ***) ist im Allgemeinen nicht zutreffend; es kann vorkommen, dass $\varrho_1 < \varrho$ ist, und würde dann die Einführung von $\delta = \varrho$ eine zu schwache Mauer liefern.

§ 25. Beispiele für die Berechnung der Futtermauern. (Tafel 14.)

80) **Ermittlung der in einer Fuge auftretenden grössten Pressung.** Es sei AD (Fig. 122) irgend eine Fuge einer Futtermauer, G das Gewicht des Mauertheiles oberhalb AD , E der Erddruck auf AB . Aus E und G resultire R . Dann ist R der Druck auf die Fuge AD . Er schneide die Fuge im Punkte s und werde in die Componenten S und N , welche beziehungsweise in der Ebene der Fuge und normal hierzu wirken, zerlegt.

Wird gefordert, dass selbst dann ein Gleiten des Mauerkörpers längs der Fuge AD nicht eintritt, wenn der Mörtel beseitigt gedacht wird, so darf der von den Kräften R und N gebildete Winkel höchstens gleich dem Reibungswinkel sein. Diesen kann man im Mittel = 35° annehmen.

Addirt man im Schwerpunkte m der Fuge zwei sich aufhebende Kräfte N (Fig. 123) und bezeichnet mit e den Abstand der Punkte s und m , so wirkt auf die Fuge ein Kräftepaar mit dem Momente $M = Ne$

*) Diese Annahme ist mit der auf Seite 67 ausgesprochenen Hypothese identisch.

**) Stets $\delta = 0$ zu setzen, wie dies zur Vereinfachung der Rechnungen frühere Theoretiker thaten, halten wir für unrationell.

***) Wir erinnern, dass $\delta = \varrho$ zu setzen ist, sobald $\varrho_1 > \varrho$ wird.

und ein durch m gehender Normaldruck N , und es entstehen bei D und A für die Flächeneinheit beziehungsweise die Pressungen:

$$k = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} \text{ *)}$$

$$k_1 = \frac{N}{F} - \frac{M}{W},$$

wo F den Flächeninhalt und W das Widerstandsmoment der Fuge bedeuten. Bei der Mauertiefe 1 und der Fugenlänge d wird

$$F = d \cdot 1 \quad \text{und} \quad W = \frac{1 \cdot d^2}{6},$$

mithin

$$1) \quad k = \frac{N}{d} \left(1 + \frac{6e}{d} \right) \quad \text{und} \quad k_1 = \frac{N}{d} \left(1 - \frac{6e}{d} \right).$$

Liegt s rechts von m , so ist e negativ zu setzen. Wird k oder k_1 negativ, so bedeutet es eine Zugspannung; eine solche entsteht bei A , sobald $e > \frac{d}{6}$ ist.

Man nennt s den Stützpunkt der Fuge, seinen geometrischen Ort die Stützlinie der Mauer. Die beiden Punkte L und R im Abstande $\frac{d}{6}$ von m heissen die Kernpunkte der Fuge. Ihre geometrischen Orte nennt man die Kernlinien und die Fläche zwischen diesen den Kern. Sollen k und k_1 Pressungen sein, so muss s im Kerne d. i. im mittleren Drittel der Fuge liegen.

Ist $e = \frac{d}{6}$, so entsteht bei A die Pressung $k_1 = 0$. Bei D erhält man

$$2) \quad k = \frac{2N}{d}.$$

Vernachlässigt man die Zugfestigkeit des Mörtels, nimmt also an, dass die Steine lose aufeinander liegen, so wird sich, sobald $e > \frac{d}{6}$ ist, der Normaldruck N nicht mehr über die ganze Fuge vertheilen (Fig. 124). Diejenigen bei D gelegenen Elemente der Fuge, welche bei genügend festem Mörtel durch Zugspannungen beansprucht würden, sind jetzt spannungslos. Die Fugenlänge $DA = d$ ist durch eine kleinere $A'A = 3\xi$ zu ersetzen. Der Stützpunkt s muss, da bei A' die Pressung gerade gleich

*) Diese Formeln ergeben sich bekanntlich aus der Navier'schen Hypothese, dass die Fugen auch nach der Deformation Ebenen sind.

Null ist, an der Grenze des Kerns der Fuge $A'A$, d. h. also im Abstande ξ von A liegen. Die grösste, bei A auftretende Pressung ist

$$k = \frac{2N}{3\xi},$$

und folgt hieraus

$$\xi = \frac{2N}{3k}$$

als derjenige Abstand, welchen der Stützpunkt s von der stärkst gepressten Kante A mindestens haben muss, wenn die zulässige Pressung k nicht überschritten werden soll.

Es ist statthaft für

gewöhnliches Bruchsteinmauerwerk $k = 50$ tons pro Quadratmeter*)

Backsteinmauerwerk in Kalkmörtel $k = 70$ " "

" in Cementmörtel $k = 100$ " "

gewachsenen Boden (Baugrund) $k = 25$ bis 45 tons pro "

81) Construction der Stützlinie für eine Futtermauer. In Fig. 125 auf Tafel 14 ist eine Futtermauer von 7^m Höhe (einschliesslich 1^m Fundirungstiefe) dargestellt. Das Gewicht von Mauerwerk und Erde betrage $\gamma_m = \gamma_e = 1,6$ tons für den Cubikmeter. Die Oberfläche der Erde sei mit $p = 1,1$ tons pro Quadratmeter belastet.

Ist der natürliche Böschungswinkel $\varrho = 37^\circ$, so ist (nach der Rankine'schen Theorie) der Erddruck E auf die verticale Fläche AB bei unbelasteter Erdoberfläche $E = \frac{1}{8} \gamma_e h^2$.

Das Druckdreieck SFR hat daher die Basis $\overline{FR} = \frac{1}{4} h$. Der Druck auf DC ist die Resultirende aus dem Drucke auf DB und dem Gewichte des Erdprismas CBD . Macht man $LJ = BC$, zieht KJ , macht $LT = KJ$ und verbindet T mit S , so ist STL das Druckdreieck für die Fläche DC , während KJ die Richtung des Druckes auf DC angiebt.**) Soll nun die Belastung p berücksichtigt werden, so ist zu dem Dreiecke SLT ein

Rechteck von der Breite $b' = \frac{p}{\gamma_e h} \overline{LT} = \frac{1,1}{1,6 \cdot 4} \cdot \overline{LT} = 0,17 \overline{LT}$ zu fügen und zu dem Trapeze $LKRF$ ein Rechteck von der Breite $b = \frac{p}{\gamma_e h} \overline{FR} = \frac{1,1}{1,6 \cdot 7} \cdot \overline{FR} = 0,10 \overline{FR}$.

Die Futtermauer, deren Lagerfugen horizontal sind, ist in „Lamellen“ von 1^m Höhe zerlegt worden; desgleichen die Belastungsfläche. Die Horizontalen durch die Schwerpunkte der Lamellen der Belastungsfläche schneiden die Wand in den Angriffspunkten der Drücke $E_1, E_2 \dots$.

*) Ausführlichere Angaben in „Mittheilungen von Bauschinger in der Zeitschrift des bayr. Arch.- u. Ing.-Ver. 1874“.

**) Vergl. No. 73 auf Seite 79.

Da Erde und Mauerwerk gleichschwer sind, verhält sich das Gewicht der Mauer zu dem Erddruck wie der Inhalt des Mauerprofils zum Inhalte der Belastungsfläche.

Das Gewicht einer Lamelle der Mauer wird durch die Hälfte der mittleren Lamellenbreite dargestellt, also z. B. das Gewicht G_1 durch die Strecke $\frac{1}{2}c$ (Fig. 125). Das Analoge gilt von den Erddräcken $E_1, E_2 \dots$. Z. B. ist E_1 durch die Strecke $\frac{1}{2}c'$ repräsentirt.

Nun ist $G_1 = c\lambda\gamma_m^{\text{tons}}$, wo c und λ in Metern auszudrücken sind. Der Kräftemaassstab lautet desshalb:

$$\text{I)} \quad \frac{1}{2}c^{\text{centim.}} = c\lambda\gamma_m^{\text{tons}}.$$

Beim Längenmaassstabe 1 Centim. = n Meter ist in Gleichung I das c auf der linken Seite eine n mal so grosse Zahl wie das auf der rechten Seite, so dass der Kräftemaassstab sich ergiebt:

$$\text{II)} \quad 1^{\text{cm}} = \frac{2\lambda\gamma_m^{\text{tons}}}{n}.$$

Beim Längenmaassstabe 1 : 100 ist $n = 1$, also

$$1^{\text{cm}} = 2\lambda\gamma_m = 2 \cdot 1 \cdot 1,6 = 3,2^{\text{tons}} \text{ (Fig. 125^a)}$$

In Fig. 125^a wurden die auf die Mauer wirkenden Kräfte aneinander gesetzt. Dann wurde E_1 und G_1 zu R_1 vereinigt, E_2 und G_2 zu R_2 u. s. w. und hierauf zu den Kräften R mit beliebig gewähltem Pole O ein Seilpolygon gezeichnet, welches gestattet, aus irgend einer Gruppe aufeinanderfolgender Kräfte R die Resultirende zu finden.

So wirken z. B. oberhalb der Fuge (5) die Kräfte R_1 bis R_5 , deren Resultirende D_5 in Fig. 125^a mit den Seilstrahlen I und VI ein Dreieck bildet und desshalb in Fig. 125 durch den Schnittpunkt der Seilpolygoneiten I und VI gehen muss. Bringt man D_5 im Punkte s_5 mit der Fuge (5) zum Schnitt, so ist s_5 der gesuchte Stützpunkt dieser Fuge. In derselben Weise sind in Fig. 125 die Stützpunkte der Figuren (1) bis (7) ermittelt worden. Aus der Lage dieser Stützpunkte und der Grösse der aus Fig. 125^a sich ergebenden Normaldrücke kann man jetzt die Pressungen in den Fugen berechnen.

Der Normaldruck auf Fuge (6) ist $N_6 = 24,8^{\text{tons}}$. Dessenhalb darf sich (bei $k = 50^{\text{tons}}$ pro \square^{m}) der Stützpunkt der stärkst gedrückten Kante bis auf

$$\xi = \frac{2N}{3k} = \frac{2 \cdot 24,8}{3 \cdot 50} = 0,33^{\text{m}}$$

nähern. Da sich nun $\xi = 0,50^{\text{m}}$ herausstellt, könnte die Mauer um $0,50 - 0,33 = 0,17^{\text{m}}$ schwächer gemacht werden.

Die Fugen (5) (4) ... werden geringer beansprucht.

Der Normaldruck auf die Fundamentsohle ist $N = G_7 + N_6 = 29,6^{\text{tons}}$, so dass bei einer für den Baugrund zulässigen Belastung von 30^{tons} pro \square^{m}

gestattet ist; $\xi' = \frac{2 \cdot 29,6}{3 \cdot 30} = 0,66^m$. Der durch die Construction sich ergebende Abstand ξ' ist nur wenig grösser, weshalb sich Beibehaltung der Fundamentstärke empfiehlt.

Bei Futtermauern von der hier betrachteten Form, desgleichen bei solchen mit Trapezprofil genügt es, die Pressung in der untersten Fuge sowie die Beanspruchung des Baugrundes festzustellen.

Man zeichnet Fig. 125^b für die Fläche AB das Druckdreieck mit der Basis $\frac{1}{4}h$ und addirt zu demselben ein Rechteck mit der vorhin berechneten Breite $b = 0,10 (\frac{1}{4}h)$. Stellt man nun den Druck E_o auf B_1B durch die Strecke $2c_o$ dar, wo c_o die mittlere Breite des zu B_1B gehörigen Drucktrapezes ist, so muss die Summe G_o der Gewichte von Mauerkörper B_1DCKR und Erdprisma DCB durch eine Linie von der Länge $2 \cdot B_1R$ repräsentirt werden. Ferner wird, da $\overline{AB_1} = \frac{1}{6}\overline{B_1B}$ ist, das Gewicht G_u des Fundamentes durch eine Strecke von der Länge $\frac{1}{6} \cdot 2AM = \frac{1}{3}\overline{AM}$ und der Erddruck E_u auf AB_1 durch $\frac{1}{3}c_u$ dargestellt. Der Kräftemaassstab lautet, da $G_u = 3 \cdot 1,0 \cdot 1,6 = 4,8^{tons}$ ist,

$$\frac{1}{3} 3^em = 4,8^{tons} \quad \text{d. i. } 1^em = 4,8^{tons}.$$

Aus G_o und E_o resultirt (Fig. 125^c) der Druck D_o auf Fuge RB_1 . Setzt man D_o mit G_u zu R zusammen, ferner R mit E_u zu D_u , so ist D_u der Druck auf die Fundamentsohle. Die Lage der Stützpunkte weicht nur wenig von der in Fig. 125 ab. Die geringe Differenz röhrt daher, dass in Fig. 125^b die Strecke CB der Terrainfläche unbelastet angenommen wird; dadurch gestaltet sich die Beanspruchung der Mauer noch etwas ungünstiger. ξ und ξ' werden etwas kleiner.

82) Berechnung einer unterschnittenen Futtermauer, welche das Widerlager einer Balkenbrücke bildet. Fig. 126. (Tafel 14.) Der Erddruck ist nach der älteren Theorie unter der Annahme konstruit worden, dass er mit der Normalen zur Wand den Reibungswinkel $\varrho_1 = \varrho$ bildet. $\varrho = \varrho_1 = 30^\circ$. $\gamma_e = 1,8^{tons}$ für den Cubikmeter Erde, $\gamma_m = 1,6^{tons}$ für Mauerwerk. Die Mauer ist vorn unter 1:5 geböscht, hinten zur Hälfte vertical, zur Hälfte unter 1:5 geböscht. Die Gewichte G_o und G_u der beiden Theile der Mauer sind durch die Strecken c_o und c_u dargestellt. Längenmaassstab 1:100, d. h. $1^em = 1^m$, mithin (vergl. Formel II, Seite 88) der Kräftemaassstab:

$$1^em = \frac{\lambda \gamma_m}{1} = 3 \cdot 1,6 = 4,8^{tons} \quad (\text{Fig. 126}^c).$$

Die Erddrücke E_o und E_u sind durch die Abmessungen c'_o und c'_u der Belastungsfläche, deren Construction sogleich erörtert werden soll, dargestellt worden.

Die zu unterstützende Brücke überführe eine Strasse und habe bei $9,6^m$ Stützweite und 8^m Breite ein Gewicht von $4,0^{tons}$ für den Meter der Stützweite. Die mobile Belastung betrage $3,2^{tons}$ pro Meter. Dann kommt auf einen Mauerstreifen von 1^m Tiefe der Druck:

$$A_p = \frac{9,6 \cdot 4}{2 \cdot 8} = 2,40^{tons} \text{ in Folge der permanenten Last,}$$

$$A_v = \frac{9,6 \cdot 3,2}{2 \cdot 8} = 1,92^{tons} \quad " \quad " \quad \text{variablen } "$$

Diese Kräfte sind in Fig. 126^e durch Strecken von den Längen $\frac{2,4}{4,8} = 0,5^{cm}$ und $\frac{1,92}{4,8} = 0,4^{cm}$ dargestellt worden.

Der Erddruck wurde für die Druckhöhe 3^m construirt und zwar einmal für die verticale Fläche AB_1 , dann für die dem unteren Theile der Wand parallele Fläche AB_2 . Die Construction erfolgte nach den in No. 62 entwickelten Regeln; es wurde $\varrho + \delta = 2\varrho = 60^\circ$ gemacht.

Bei unbelasteter Terrainfläche folgt

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \gamma_e y_1 \eta_1 \text{ für die Fläche } AB_1, \\ E_2 &= \frac{1}{2} \gamma_e y_2 \eta_2 \quad " \quad " \quad AB_2. \end{aligned}$$

Die Werthe E für die Druckhöhe 6^m sind viermal so gross; denn es ist sowol η als y zu verdoppeln.

Das Druckdreieck ABC_1 für die verticale Wandlage ist so construirt worden, dass der Erddruck durch das Gewicht eines Mauerwerkprismas von der Tiefe 1 und dem Querschnitte ABC_1 dargestellt wird. Nach Verwandlung des Dreiecks DR_1K_1 (Fig. 126^b) mit der Basis $DK_1 = y_1$ und der Höhe $DR_1 = \eta_1$ in ein gleich grosses Dreieck DJM_1 mit der Höhe $\frac{1}{2}h$ wurde desshalb die Basis DM_1 mit

$$\frac{2 \gamma_e^*)}{\gamma_m} = \frac{2 \cdot 1,8}{1,6} = \frac{0,9}{0,4}$$

multiplicirt. Dazu wurde $\overline{DF} = 0,4^{cm}$, $DH = 0,9^{cm}$ gemacht und $HS_1 \parallel FM_1$ gezogen. Es ist jetzt $DS_1 = AC_1$ die gesuchte Basis des Druckdreiecks ABC_1 . Ebenso ist $AC_2 = DS_2$ construirt worden.**)

*) Es ist $2 \gamma_e$ zu setzen, weil die Werthe y_1 und η_1 nur der Druckhöhe $\frac{1}{2}h$ entsprechen.

**) Streng genommen ist noch eine Correction nöthig, denn die beschriebene Construction des Erddruckes involvirt die Annahme von 2 Gleitflächen. Bildet man die Resultirende aus E_o und E_u , so erhält man genügend genau Richtung und Angriffspunkt von E und kann jetzt nach § 20, vergl. Fig. 98^a, die Lage der Gleitfläche und die Grösse des Erddruckes bestimmen. Man überzeugt sich aber, dass hierdurch an den oben gewonnenen Resultaten nicht wesentlich geändert wird.

Analog verfährt man, wenn die Wand aus mehreren Ebenen besteht. Eine krumme Wand wird man durch eine Reihe von ebenen Wänden ersetzen.

Da nun die Terrainfläche durch das Gewicht der Pflasterung, ferner durch Menschengedränge und Wagen belastet wird, und diese Belastung etwa $= p = 1,0 \text{ tons}$ für den Quadratmeter abzuschätzen ist, wurden zu den Dreiecken $A B C_1$ und $A B C_2$ Rechtecke mit den Breiten $b_o = \frac{p}{\gamma_e h} \cdot \overline{AC_1} = \frac{1,0}{1,8 \cdot 6} \overline{AC_1} = 0,09 \overline{AC_1}$ und $b_u = 0,09 \overline{AC_2}$ addirt.

Nach Aufsuchung der Schwerpunkte S_o und S_u der beiden Belastungsflächen wurden die Angriffspunkte a_o und a_u der Erddrücke E_o und E_u festgestellt. Diese Drücke wirken unter $\varrho = 30^\circ$ gegen die Normalen zu den Wandflächen und werden mit G_o und G_u zu den Resultirenden R_o und R_u zusammengesetzt. Fig. 126^e zeigt den Kräfteplan.

Zu den Kräften A_v , A_p , R_o und R_u wurde nun mit dem beliebigen Pole O ein Seilpolygon gezeichnet und dann unter Annahme vollbelasteter Brücke aus sämmtlichen Kräften die Resultirende D ermittelt. Dieselbe geht durch den Schnittpunkt der Seipolygonseiten I und IV und schneidet die Sohle der Mauer im Punkte s .

Entfernt man von der Brücke die mobile Belastung, setzt also $A_v = o$, so resultirt Druck D' auf die Sohle, während vor Aufstellung der Brücke die Sohle dem Drucke D'' widerstehen muss.

Dieser letzte Fall erweist sich als der gefährlichste. Der Stützpunkt s'' hat von Kante L den Abstand $\xi \approx 0,5 \text{ m}$; der Normaldruck wird $N'' = 17 \text{ tons}$, mithin die Pressung auf den Baugrund $k = \frac{2N}{3\xi} = \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 0,5} = 23 \text{ tons}$ pro Quadratmeter. Bei theilweise oder vollbelasteter Brücke wächst zwar N , doch hat die Vergrösserung von ξ trotzdem eine Minde rung von k zur Folge.

Da der zu gestattende Werth k bei dem hier vorausgesetzten mittelguten Baugrunde etwa 30 tons pro Quadratmeter beträgt, ist die Mauer stärke ausreichend.

83) Berechnung einer im Rücken abgetreppten Mauer. Man hat beobachtet, dass der Bruch einer hohen und zu schwachen Mauer in der Weise erfolgen kann, dass ein Theil der Mauer (z. B. der in Fig. 127 schraffirte) stehen bleibt, während der obere Theil durch den auf die Fläche CD wirkenden Erddruck gekantet wird. Die Bruchfläche FD nehmen wir als Ebene an und vernachlässigen die in derselben der Drehung des oberen Theiles der Mauer entgegenwirkenden, von der Cohäsion herrührenden Widerstände. Die Stärke der Mauer im Abstande x von der Krone sei y . Die Hinterfüllungserde wird vorläufig unbelastet gedacht und der Erddruck im Anschluss an Rankine's Theorie horizontal angenommen.

Bei A sei die Pressung des Mauerwerkes gleich k für die Flächen einheit; bei F ist sie Null. Dessenhalb liegt der Stützpunkt s im Abstande

$\xi = \frac{2N}{3k}$ von A und ist $AF = 3\xi$. N ist der Normaldruck auf AF .

Die auf den Absätzen des Rückens der Mauer lagernde Erde wird bei Aufstellung der Momentengleichung für den Punkt s ebenso schwer wie Mauerwerk angenommen. Im Uebrigen aber sollen die Gewichte

γ_e pro Cubikmeter Erde und

γ_m „ „ „ Mauerwerk

verschieden gross vorausgesetzt werden.

Das Moment des Mauerkörpers $ABCDF$ in Bezug auf den Punkt s ist

$$M = \gamma_m y h \left(\frac{y}{2} - \xi \right) - \gamma_m \frac{(y - 3\xi)(h - x)}{2} \left[\frac{2}{3}(y - 3\xi) + 2\xi \right]$$

$$= \gamma_m \frac{y^2 h}{6} + \gamma_m y^2 \frac{x}{3} - \gamma_m \xi xy.$$

Da der Erddruck E horizontal ist, ergibt sich der Normaldruck N auf AF gleich dem Gewichte des Mauerkörpers $ABCDF$, so dass

$$3k\xi = 2N = 2 \left\{ \gamma_m y h - \gamma_m \frac{(y - 3\xi)(h - x)}{2} \right\}$$

und hieraus

$$\xi = \frac{1}{3} y \gamma_m \frac{h + x}{k - h \gamma_m + x \gamma_m}$$

folgt. Es wird desshalb

$$M = \gamma_m \frac{y^2}{6} \frac{k(h + 2x) - \gamma_m h(3x + h)}{k + \gamma_m x - \gamma_m h}.$$

Der Erddruck ist nach No. 75

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e x^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right);$$

sein Angriffsmoment wird

$$M' = E(h - \frac{2}{3}x)$$

und folgt jetzt aus der Gleichung $M = M'$

die Formel

$$I) \quad y = x \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right) \sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_e} \frac{(3h - 2x)(k + \gamma_m x - \gamma_m h)}{k(h + 2x) - \gamma_m h(3x + h)}},$$

aus welcher die an der Stelle x erforderliche Mauerstärke gefunden werden kann.

Ist die Terrainfläche mit p für die Einheit belastet, so ersetze man diese Belastung durch eine Erdschüttung von gleicher Schwere und verstehe dann unter h die Höhe der Mauer, vermehrt um die Höhe dieser Aufschüttung.

Damit die Mauer auf der Fuge AL nicht gleitet, muss bei der Maximalstärke b mindestens

$$\mu b h \gamma_m = \frac{1}{2} \gamma_e h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right)$$

sein, woraus

$$\text{II)} \quad b = \frac{\gamma_e h}{2 \gamma_m \mu} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right)$$

folgt. Hierin setze man $\mu = 0,7$.

Steht die Mauer auf gewachsenem Boden, und ist für diesen eine Pressung von k' für die Flächeneinheit zulässig, so findet man den Vorsprung c des Fundamentmauerwerkes genügend genau aus der Gleichung

$$\gamma_m b H \left(\frac{b}{2} + c - \xi' \right) = \frac{1}{2} \gamma_e H^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right) \frac{H}{3}.$$

Dabei ist das Gewicht des Fundamentvorsprungs vernachlässigt worden. In vorstehende Gleichung ist

$$\xi' = \frac{2 N'}{3 k'} = \frac{2 \gamma_m b H}{3 k'}$$

zu setzen und folgt dann

$$\text{III)} \quad c = \frac{1}{6} \frac{\gamma_e}{\gamma_m} \frac{H^2}{b} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right) + \frac{2 \gamma_m b H}{3 k'} - \frac{b}{2}.$$

Zahlenbeispiel. Es ist (Fig. 128) die Höhe der Mauer = 9 m, ferner $\gamma_m = \gamma_e = 1,6$ tons pro Cubikmeter. Die Belastung der Terrainfläche sei durch eine Erdschüttung von 1 m ersetzt. Dann folgt $h = 10$ m. Gestattet man also für Backsteinmauerwerk in Kalkmörtel $k = 70$ tons für den Quadratmeter und nimmt den Reibungswinkel der Erde $\varrho = 37^\circ$ an, so folgt $\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\varrho) = \frac{1}{2}$ und nach Formel I

$$y = \frac{1}{2} x \sqrt{\frac{405 - 15x - 0,8x^2}{135 + 23x}}.$$

Man erhält für

$x = 1$ m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m
$y = 0,78$ m	$1,43$ m*	$1,97$ m	$2,42$ m	$2,79$ m	$3,07$ m	$3,28$ m	$3,42$ m	$3,49$ m	$3,46$ m

Nach Auftragen des theoretischen Profils kann man die in Fig. 128 dargestellte Form der Mauer bestimmen. Man könnte auch die Mauer ähnlich der in Fig. 125 gezeichneten construiren.

Die Maximalstärke ist abgerundet $b = 3,5$ m. Die Formel II würde liefern:

$$b = \frac{10}{2 \cdot 0,7} \cdot \frac{1}{4} = 1,8 \text{ m} < 3,5 \text{ m}.$$

* Auf Tafel 14 Fig. 128 ist das Maass 1,56 durch 1,43 zu ersetzen.

Bei 1^m Fundirungstiefe wird $H = 11^m$, mithin, wenn für guten Baugrund $k' = 45 \text{ tons}$ pro Quadratmeter gestattet wird, nach Formel III

$$c = \frac{1}{6} \cdot \frac{11^2}{3,5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 3,5 \cdot 11}{3 \cdot 45} - \frac{3,5}{2} = 0,60 \text{ m.}$$

Es bleibt noch zu prüfen, ob die Gefahr des Gleitens auf der Fundamentsohle ausgeschlossen ist.

Der gesammte Erddruck ist

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e H^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 11^2 \cdot \frac{1}{4} = 24,2 \text{ tons.}$$

Das Gewicht der Mauer (ausschliesslich der Belastung der Krone)

$$G = 1,6 \cdot (3,5 \cdot 10 + 0,6 \cdot 1,0) = 56,96 \text{ tons}$$

und der Reibungswiderstand in der Sohle

$$0,60^*) G = 0,60 \cdot 56,96 = 34,18 \text{ tons.}$$

Der passive Erddruck auf das Fundament ist

$$E_{\text{passiv}} = \frac{1}{2} \gamma_e h'^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2} \right),$$

wo h' = Fundirungstiefe. Es ergiebt sich E_{passiv} aus dem auf Seite 80 abgeleiteten Werthe E durch Aenderung des Vorzeichens von ϱ . Mit $\varrho = 37^\circ$ wird $\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\varrho) = 2$, also

$$E_{\text{passiv}} = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 1,0^2 \cdot 2 = 1,6 \text{ tons;}$$

daher der Gesamtwiderstand gegen Gleiten:

$$34,18 + 1,6 = 35,78 \text{ tons.}$$

und der Sicherheitscoefficient:

$$\Delta = \frac{35,78}{24,2} = 1,5.$$

Derselbe genügt. [Es wird sich empfehlen, mindestens $\Delta = 1,25$ zu erzielen.]

84) Methode von Schwedler.

Schwedler nimmt bei Berechnung von y [in Uebereinstimmung mit Navier **)] die Bruchfläche von D nach A (Fig. 129) gehend an, setzt also zunächst $k = \infty$ und findet

$$\text{IV}) \quad y = x \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right) \sqrt{\frac{\gamma_e}{\gamma_m} \frac{3h - 2x}{h + 2x}}.$$

*) Mittelwerthe für den Reibungscoefficienten sind:

0,60 wenn die Mauer auf natürlichem Boden steht

0,78 " " " " " Felsen "

0,70 " " " " " Beton "

**) Navier, Mechanik der Baukunst, deutsch von Westphal, Hannover, 1878, Seite 128.

Die hiernach construirte Mauer muss nun allerdings durch Vorsetzen eines Streifens von der Breite ξ verstärkt werden, und zwar ist $\xi = \frac{2N}{3k}^*)$ zu wählen, wo N den Normaldruck auf Fuge AL bedeutet.

Ist b' die aus Gleichung IV gefundene grösste Abmessung y , so folgt genügend genau:

$$\xi = \frac{2N}{3k} = \frac{2(b' + \xi) \gamma_m h}{3k} \quad \text{und hieraus}$$
$$\xi = \frac{2b' \gamma_m h}{3k - 2\gamma_m h}.$$

Ist $\gamma_m = \gamma_e$, so wird der Werth y aus Formel IV ein Maximum für $x = \frac{1}{2}h\sqrt{3} = 0,866h$, und zwar erhält man

$$b' = y_{\max} = 0,59h \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right),$$

so dass also die grösste Mauerstärke

$$b = b' + \xi = \frac{3b'k}{3k - 2\gamma_m h} \quad \text{d. i.}$$

$$\text{V)} \quad b = \frac{1,77kh}{3k - 2\gamma_m h} \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right)$$

wird. Für die vorhin berechnete Mauer (Fig. 128) liefert diese Formel (mit $\operatorname{tg}[45^\circ - \frac{1}{2}\varrho] = \frac{1}{2}$)

$$b = \frac{1,77 \cdot 70 \cdot 10}{3 \cdot 70 - 2 \cdot 1,6 \cdot 10} \cdot \frac{1}{2} = 3,48^m = \text{rot. } 3,5^m,$$

d. i. dasselbe Resultat wie vorhin.

85) **Aufgabe.** Es sollen nach der in No. 84 entwickelten Methode die Dimensionen des Landwiderlagers (Fig. 130) einer Balkenbrücke bestimmt werden. Die Vorderfläche sei geböscht. Böschung $\frac{a}{h} = n$.

Unter h sei die Höhe der Mauer + Höhe der die Belastung der Terrainfläche ersetzenden Erdschüttung verstanden. P bedeute den Auflagerdruck. Das für den Punkt A gebildete Moment des oberhalb der Bruchebene AD gelegenen Theiles der Mauer, einschliesslich der auf diesen Theil wirkenden Belastung ist — genügend genau —

$$M = \gamma_m \left\{ yh \frac{y}{2} - \frac{(h-x)y}{2} \cdot \frac{2y}{3} - \frac{ah}{2} \cdot \frac{a}{3} \right\} + Pa_1.$$

Das Moment des Erddruckes ist

$$M' = \frac{1}{2} \gamma_e x^2 \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) \left(h - \frac{2x}{3}\right).$$

*) Die Verlegung des Stützpunktes durch das Gewicht des vorgesetzten Streifens wird vernachlässigt.

Aus $M = M'$ folgt

$$y = \sqrt{\frac{\gamma_e}{\gamma_m} x^2 (3h - 2x) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) + n^2 h^3 - 6 \frac{P a_1}{\gamma_m}} \cdot \frac{h + 2x}{h + 2x}$$

Vor Aufstellen der Brücke folgt der grössere Werth

$$\text{VI)} \quad y = \sqrt{\frac{\gamma_e}{\gamma_m} x^2 (3h - 2x) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) + n^2 h^3} \cdot \frac{h + 2x}{h + 2x}$$

Bislang ist $k = \infty$ angenommen worden, und soll desshalb das in Fig. 129 schraffirte Stück vorgesetzt werden. Der Normaldruck ist, wenn b den Maximalwerth von y bedeutet,

$$N = \gamma_m \left(b h - \frac{ah}{2}\right) + P + \gamma_m \frac{\xi h_1}{2}$$

und folgt jetzt aus $\xi = \frac{2N}{3k}$ der Werth

$$\text{VII)} \quad \xi = \frac{\gamma_m h (2b - nh) + 2P}{3k - \gamma_m h_1}$$

Der Normaldruck auf die Sohle ist, genügend genau,

$$N' = \gamma_m \left(b H - \frac{ah}{2} + \xi \frac{h_1}{2}\right) + P,$$

und muss daher der Stützpunkt s' von Kante L den Abstand $\xi' = \frac{2N'}{3k'}$, d.i.

$$\text{VIII)} \quad \xi' = \frac{\gamma_m (2bH - nh^2 + \xi h_1) + 2P}{3k'}$$

haben, wo k' die zulässige Beanspruchung des Baugrundes bedeutet. Jetzt bestimmt sich die Abmessung c aus der (genäherten) Momentengleichung

$$\begin{aligned} \gamma_m b H \left(\frac{b}{2} + c - \xi'\right) - \gamma_m \frac{ah}{2} \left(\frac{a}{3} + c - \xi'\right) + P(a_1 + c - \xi') \\ = \frac{1}{2} \gamma_e H^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) \cdot \frac{H}{3}. \end{aligned}$$

Man findet

$$\text{IX)} \quad c = \frac{1}{\gamma_m (bH - 0,5nh^2) + P} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_e H^3 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2}\right) - \gamma_m bH \left(\frac{b}{2} - \xi'\right) \right. \\ \left. + \gamma_m \frac{nh^2}{2} \left(\frac{a}{3} - \xi'\right) - P(a_1 - \xi') \right\}.$$

Zahlenbeispiel. Fig. 131 stellt das Landwiderlager einer eingleisigen Eisenbahnbrücke dar. Die Belastung der Terrainfläche wird 1,6 tons für den Quadratmeter gerechnet. Beträgt also das Gewicht pro Cubikmeter Erde $\gamma_e = 1,6$ tons, so ist die Belastungshöhe = 1,0m. Höhe

der Mauer = 9^m, mithin $h = 10^m$. Böschung der Vorderwand $n = 0,1$. Gewicht des Cubikmeters Mauerwerk (Backstein) $\gamma_m = 1,6^{\text{tons}}$. Reibungswinkel der Erde $\varrho = 37^\circ$, also $\operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{1}{2}\varrho) = \frac{1}{4}$. Aus Formel VI folgt nun

$$y = \sqrt{\frac{0,25 x^2 (30 - 2x) + 10}{10 + 2x}}$$

und ergiebt sich für

$x = 2^m$	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m	8^m	9^m	10^m
$y = 1,60^m$	$2,00^m$	$2,33^m$	$2,60^m$	$2,80^m$	$2,93^m$	$3,00^m$	$3,01^m$	$2,94^m$

so dass $y_{\max} = \infty 3,0^m$.

Der Auflagerdruck sei $P' = 30^{\text{tons}}$, die Breite der Brücke = 4^m, so dass auf einen Mauerstreifen von 1^m Tiefe der Druck $P = 7,5^{\text{tons}}$ entfällt. Formel VII liefert, wenn die zulässige Pressung $k = 70^{\text{tons}}$ für den Quadratmeter beträgt und $h_1 = 3^m$ angenommen wird,

$$\xi = \frac{1,6 \cdot 10 (2 \cdot 3,0 - 0,1 \cdot 10) + 2 \cdot 7,5}{3 \cdot 70 - 1,6 \cdot 3} = 0,46^m, \text{ wofür } 0,5^m.$$

Bei 1,5^m Fundirungstiefe ist $H = 11,5^m$ und, aus Formel VIII, mit $k' = 45^{\text{tons}}$ pro Quadratmeter

$$\xi' = \frac{1,6 [2 \cdot 3 \cdot 11,5 - 0,1 \cdot 10^2 + 0,5 \cdot 3] + 2 \cdot 7,5}{3 \cdot 45} = 0,83^m.$$

Jetzt liefert Formel IX mit $a_1 = 1,1^m$

$$c = \frac{1}{1,6(3,0 \cdot 11,5 - 0,5 \cdot 0,1 \cdot 10^2) + 7,5} \left\{ \frac{1}{6} \cdot 1,6 \cdot 11,5^3 \cdot \frac{1}{4} - 1,6 \cdot 3,0 \cdot 11,5(1,5 - 0,83) \right. \\ \left. + 1,6 \cdot \frac{0,1 \cdot 10^2}{2} \left(\frac{0,1 \cdot 10}{3} - 0,83 \right) - 7,5(1,1 - 0,83) \right\} = 1,1^m.$$

Das Gewicht der so dimensionirten Futtermauer einschliesslich ihrer Belastung durch Erde ist:

$$G = 1,6 \left[3,0 \cdot 10,5 + 1,1 \cdot 1,5 - \frac{9 \cdot 0,9}{2} \right] = 46,56^{\text{tons}},$$

also der Reibungswiderstand in der Sohle

$$0,6 \cdot 46,56 = 27,94^{\text{tons}}.$$

Der passive Erddruck wird (vergl. Seite 94, ferner Fig. 130):

$$E_{\text{passiv}} = \frac{1}{2} \gamma_e h_2^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 1,5^2 \cdot 2 = 3,6^{\text{tons}}.$$

Da nun der active Erddruck

$$E = \frac{1}{2} \gamma_e H^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 11,5^2 \cdot \frac{1}{4} = 26,45 \text{ tons}$$

beträgt, ist der Sicherheitscoefficient gegen Gleiten:

$$\alpha = \frac{27,94 + 3,6}{26,45} = 1,19.$$

Besser ist es, die Mauer (wie in Fig. 130 angedeutet ist) um $\delta = 0,3^m$ zu verstärken. Es nimmt dann G um $0,3 \cdot 10,5 \cdot 1,6 = 5,04 \text{ tons}$ und der Reibungswiderstand um $0,6 \cdot 5,04 = 3,02 \text{ tons}$ zu, so dass

$$\alpha = \frac{27,94 + 3,6 + 3,02}{26,45} = 1,31$$

wird.

V. Abschnitt.

Theorie der Tonnengewölbe.

§ 26. Stützlinie und Drucklinie. Ältere Gewölbetheorie.

Tafel 15.

86) **Einleitung.** Auf das Tonnengewölbe $AA'B'B$ (Fig. 132) wirke eine verticale, stetige Belastung, welche durch Mauerwerk von gleicher Schwere ersetzt werden möge. Wird diese „auf Mauerwerk reducire Belastung“ durch die Curve CDE (Belastungscurve) begrenzt, so nennt man die Fläche $AA'CDEB'B$ die Belastungsfläche. Bedeutet F deren Inhalt, γ_m das Gewicht des Cubikmeters Mauerwerk, und wird die Tiefe des Gewölbes gleich 1 angenommen, so ist die gesamte Belastung des Gewölbes (einschliesslich des Eigengewichtes) $= \gamma_m F$. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Belastung oben durch eine Cylinderfläche mit der Leitcurve CDE und einer zur Stirnfläche normalen Erzeugenden begrenzt wird.

Die Widerlagerreactionen K_1 und K_2 heissen Kämpferdrücke; sie halten der Belastung $\gamma_m F$ des Gewölbes das Gleichgewicht. Die statischen Bedingungen hierfür lauten:

- 1) Die Summe der verticalen Componenten der beiden Kämpferdrücke muss gleich der Belastung $\gamma_m F$ sein.
- 2) Die horizontalen Componenten der Kräfte K_1 und K_2 müssen gleich gross sein.
- 3) Die Summe der Momente der drei Kräfte $\gamma_m F$, K_1 und K_2 in Bezug auf irgend einen Drehpunkt muss Null sein.

Diesen 3 Bedingungen stehen aber 6 Unbekannte gegenüber, denn von jeder der beiden Kräfte K sind Grösse, Richtung und Angriffs-

punkt anzugeben. Dessen sind die 3 fehlenden Bedingungen aus der Forderung abzuleiten:

Es muss das Gewölbe auch nach der Deformation durch die Kräfte K_1 , K_2 und $\gamma_m F$ zwischen die Widerlager passen.

Die hieraus sich ergebenden Gleichungen heissen die Elasticitäts-gleichungen des Gewölbes. Hat man mit deren Hilfe die Grösse und die Lage einer der beiden Kräfte K_1 und K_2 bestimmt, so findet man Grösse und Lage der anderen mittelst der Gleichgewichtsbedingungen 1, 2 und 3.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie man die Stabilität des Gewölbes untersucht, wenn die Kraft K_1 nach Grösse und Lage bekannt ist.

87) Stützlinie. Pressungen in den Fugen. Durch den Schnitt $DJ'J$ (Fig. 132), welcher von D bis J' vertical und von hier ab in der Richtung der Fuge geführt ist, wird ein Gewölbestück losgetrennt, dessen Gewicht = G sei. Das Gleichgewicht wird durch Anbringen des auf die Fuge $J'J$ wirkenden Druckes R hergestellt. Die Kräfte K_1 , G und R müssen sich in einem Punkte schneiden und zu einem Dreiecke Fig. 132^a mit continuirlichem Umfahrungssinne zusammensetzen lassen. Durch diese Bedingungen ist — da die Kraft K_1 bekannt vorausgesetzt wird — der Druck R nach Lage und Grösse gegeben. Den Punkt s , in welchem er die Fuge schneidet, nennt man den Stützpunkt der Fuge, den geometrischen Ort der Punkte s die Stützlinie des Gewölbes.

Soll die Gefahr des Gleitens längs der Fuge auch dann ausgeschlossen sein, wenn kein Mörtel angewendet ist, so darf der Druck R mit der Normalen zur Fuge höchstens einen Winkel gleich dem Reibungswinkel ϱ einschliessen. Im Mittel ist $\varrho = 33^\circ$ zu setzen.

Zerlegt man R in die Componenten N und S (Fig. 133) normal zur Fuge beziehungsweise in der Richtung der Fuge, bezeichnet mit

e den Abstand des Punktes s vom Fugenmittelpunkte m ,

δ die Länge der Fuge,

k_o die Pressung (d. i. die Belastung der Flächeneinheit) bei J' ,

k_u " " im Punkte J der Fuge,

und nimmt e positiv an, sobald s oberhalb m liegt, so folgt (vergl. No. 80 Seite 86)

$$1) \quad k_o = \frac{N}{\delta} \left(1 + \frac{6e}{\delta} \right) \text{ und } k_u = \frac{N}{\delta} \left(1 - \frac{6e}{\delta} \right).$$

Die Pressung an der Stelle m ist

$$2) \quad k = \frac{N}{\delta}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass der Stützpunkt s im Kerne, d. h. im mittleren Drittel der Fuge liege. Im Gegenfalle hat man die grösste

Pressung nach Formel 2 Seite 86 zu bestimmen. Ist $e > \frac{d}{6}$ und bezeichnet ξ den Abstand des Punktes s von J' , so ist $k_o = \frac{2N}{3\xi}$.

Die Formeln 1 lassen sich auf die Form bringen:

$$3) \quad k_o = \frac{6N}{\delta^2} \left(\frac{\delta}{6} + e \right), \quad k_u = \frac{6N}{\delta^2} \left(\frac{\delta}{6} - e \right).$$

Sind nun o und u (Fig. 133) die Kernpunkte der Fuge, ferner e_o und e_u die Abstände des Punktes s von den Kernpunkten, und setzt man

$$N \left(\frac{d}{6} + e \right) = Ne_u = M_u = \text{Angriffsmoment für Kernpunkt } u,$$

$$N \left(\frac{d}{6} - e \right) = Ne_o = M_o = \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad o,$$

so folgt:

$$4) \quad k_o = \frac{6M_u}{\delta^2} \text{ und } k_u = \frac{6M_o}{\delta^2}.$$

Diese Formeln sind für den praktischen Gebrauch besonders bequem.

88) Drucklinie. Es ist bei Bestimmung der Drücke D auf die Fugen zweckmässig, das Gewölbe zuerst durch verticale Schnitte in Lamellen mit den Gewichten $G_1, G_2, G_3 \dots$ (Fig. 134) zu zerlegen und nur den Theil zu betrachten, welchen die Verticalen durch die Endpunkte A und B der Kämpferfugen begrenzen. K' und K'' seien die Drücke auf die verticalen Fugen AA'' und BB'' . Ist der Druck K' nach Lage und Grösse bekannt, so lassen sich die Drücke auf sämmtliche verticalen Querschnitte des Gewölbes ermitteln.

Man reihe die Kräfte $K', G_1, G_2, G_3 \dots$ aneinander (Fig. 134^a), wähle den Anfangspunkt O des Kräftezuges zum Pole, ziehe die Seilstrahlen I, II, III ... und zeichne ein Seilpolygon, dessen erste Seite die Kraft K' ist. Die Seilstrahlen I, II, III ... stellen nach Grösse und Richtung die Drücke auf die verticalen Fugen (1), (2), (3) ... dar; die Lagen dieser Kräfte sind durch die Seilpolygonseiten bestimmt. Die Schnittpunkte $s_1, s_2 \dots$ der Polygonseiten mit den Fugen sind die Stützpunkte der verticalen Fugen.*)

Das gezeichnete Seilpolygon heisst das Mittelkraftspolygon des Gewölbes; es geht bei unendlich kleiner Lamellenbreite λ in eine Curve über, welche man die Drucklinie nennt. Die Gerade S , welche die Angriffspunkte der Drücke K' und K'' verbindet, heisst die Schlusslinie. Die Punkte $s_1, s_2 \dots$ sind die Berührungs punkte der in das Mittelkraftspolygon einzubeschreibenden Drucklinie. Denn es ist z. B die Lage

*.) Wir werden in der Folge die vertical durch das Gewölbe geführten Schnitte „verticale Fugen“ nennen.

der Resultirenden II aus den links von Fuge (2) angreifenden Kräften K' , und $G_1 + G_2$ ganz unabhängig von der Zahl der Lamellen, in welche das Gewicht $G_1 + G_2$ zerlegt wird, und wird desshalb auch die Lage von s_2 dieselbe sein, gleichwie ob man $G_1 + G_2$ in zwei oder in unendlich viele Lamellen theilt.

Nach Zeichnung des Mittelkraftspolygons kann man die Drücke auf die radialen Fugen angeben. Beispielsweise ist der Druck Π' auf die Fuge $J'J$ die Resultirende aus dem Drucke Π auf die verticale Fuge (2) und dem Gewichte G' des Prismas LJJ' . Die Kräfte Π' , Π und G' müssen sich also (Fig. 134^b) in einem Punkte schneiden und zu einem Dreiecke mit continuirlichem Umfahrungssinne zusammensetzen lassen. Durch diese Bedingungen ist Π' gegeben. Aus der Drucklinie lässt sich somit auf die Stützlinie schliessen. In Fig. 134^b ist s_2 ein Punkt der Drucklinie und s'_2 ein Punkt der Stützlinie. Beide Curven weichen von einander so wenig ab, dass es für die Praxis genügt, die Drucklinie zu zeichnen.

Um nun nach Construction der Drucklinie die Pressungen k_o und k_u ermitteln zu können, zerlege man den Druck auf die verticale Fuge $J'L$ (Fig. 135) in die horizontale Componente H und die verticale Componente V und bilde die Momente

$$M_o = He_o \text{ und } M_u = He_u \text{ (absolut genommen),}$$

wo e_o und e_u die Abstände des Punktes s von den Kernpunkten der verticalen Fuge sind. Dann folgt (vergl. die Formeln 4)

$$5) \quad k_o = \frac{6He_u}{\delta^2} \text{ und } k_u = \frac{6He_o}{\delta^2},$$

wo δ die Länge der durch den Mittelpunkt m der verticalen Fuge gelegten radialen Fuge (Fig. 135^a). Dieses Verfahren ist genügend genau und führt überdies sehr schnell zum Ziele.

H heisst der Horizontalschub; er ist für alle Fugen derselbe, nämlich gleich der Poldistanz in Fig. 134^a.

Für die Folge sei noch besonders hervorgehoben, dass das Angriffsmoment für den Mittelpunkt m der Fuge LJ' (Fig. 135)

$$M = He$$

ist, d. h. gleich dem Horizontalschube, multiplizirt mit dem verticalen Abstande der Axe des Gewölbebogens*) von der Drucklinie. Es ist M positiv oder negativ, jenachdem die Drucklinie oberhalb oder unterhalb der Bogenaxe liegt.

*) Mit Axe des Gewölbebogens oder kurz Bogenaxe bezeichnen wir fortan den geometrischen Ort der Mittelpunkte m der Fugen. Die Orte der Mittelpunkte der verticalen, beziehungsweise radialen Fugen sind im Allgemeinen zwei verschiedene Curven, die sich aber beinahe decken. Wenigstens ist es in der Folge nicht nöthig, einen Unterschied zwischen beiden zu machen.

89) Construction der Drucklinie, wenn ausser der Schlusslinie entweder die Kraft H oder ein Punkt der Drucklinie gegeben ist. Es sei (Fig. 134^c) ab ein horizontaler an den Enden frei aufliegender Balken, dessen Stützweite gleich der des Gewölbes in Fig. 134 ist und auf welchen Lasten $G_1, G_2, G_3 \dots$ wirken, die gleich den Gewichten der Gewölbelamellen sind und in den nämlichen Verticalen wirken wie diese.

Construirt man zu den Kräften $G_1, G_2, G_3 \dots$ mit beliebigem Pole O' (Fig. 134^e) ein Seilpolygon 134^d, welches die Verticalen durch a und b in E und C schneidet und verbindet E und C durch die Schlusslinie S' , so erhält man nach No. 19., Seite 11 die Angriffsmomente für die Querschnitte (1), (2) ... des Balkens, wenn man die verticalen Ordinaten $\eta'_1, \eta'_2 \dots$ des Seilpolygons mit der Poldistanz H' multipliziert. Es wird

$$M_1 = H' \eta'_1, \quad M_2 = H' \eta'_2 \dots$$

Bezeichnet man nun mit $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ die bis zur Schlusslinie S gemessenen verticalen Ordinaten der Drucklinie, so folgt ebenfalls

$$M_1 = H \eta_1, \quad M_2 = H \eta_2 \dots$$

und ist mithin:

$$H' \eta'_1 = H \eta_1 \quad \eta_1 = \frac{H'}{H} \eta'_1$$

$$H' \eta'_2 = H \eta_2 \quad \eta_2 = \frac{H'}{H} \eta'_2$$

Ist also die Lage der Schlusslinie gegeben und H bekannt, so kann man die Ordinaten η der wirklichen Drucklinie aus den Ordinaten η' einer beliebigen Drucklinie construiren. Man mache $\overline{CD} = H$ (Fig. 134^d), ziehe durch D eine Parallele zur Schlusslinie S' , trage auf dieser die Strecke $\overline{DR} = H'$ ab und verbinde R mit C durch eine Gerade. Zieht man nun durch den Endpunkt a_4 der Ordinate η'_4 eine Parallele zur Geraden S' , so schneiden die Linien CD und CR auf dieser Parallelen die Strecke $\eta_4 = \eta'_4 \frac{H'}{H}$ ab. In gleicher Weise lassen sich die Strecken $\eta_1, \eta_2 \dots$ darstellen.

Ist H nicht bekannt, dafür aber ein Punkt der Drucklinie, z. B. der Punkt s_4 , gegeben, so bestimmt man die Gerade CR , indem man auf der Horizontalen durch a_4 die Strecke $\overline{D_4 R_4} = \eta_4$ abträgt und R_4 mit C verbindet. Verlängert man dann die Schlusslinie S' um die Strecke $\overline{CR} = H'$ und zieht $R'R$ vertical, so findet man $\overline{R'R} = H$.

90) Die ältere Gewölbetheorie. Nach der älteren, fast ausschliesslich gebräuchlichen Gewölbetheorie ist ein Gewölbe stabil, sobald sich in den Kern desselben (d. i. in das mittlere Dritt) eine Drucklinie zeichnen lässt und die auf Grund dieser Drucklinie berechneten Pressungen k_o und k_u nirgends grösser werden als zulässig ist.

Die Schlusslinie S und ein dritter Punkt der Drucklinie, z. B. der Punkt s_4 sind hiernach willkürlich anzunehmen; worauf die Construction der Drucklinie nach der vorhin beschriebenen Methode und die Berechnung der Pressungen nach den Formeln 4 zu erfolgen hat. Verlässt diese Drucklinie den Kern, oder werden die Pressungen k_o und k_u grösser als zulässig, so ist zu versuchen, ob sich eine günstigere Drucklinie zeichnen lässt.

Zuerst wird man — nach der älteren Theorie — stets nachzusehen haben, ob eine mit der Bogenaxe zusammenfallende Drucklinie möglich ist, denn diese Drucklinie ist die günstigste, da sie die kleinsten Pressungen liefert. Man wird die Schlusslinie durch die Mittelpunkte der Fugen AA'' und BB'' legen und ebenfalls als dritten Punkt der Drucklinie einen Fugenmittelpunkt wählen.

Durch die Annahme, dass die günstigste Drucklinie die wirkliche ist, wird allerdings die Untersuchung der Stabilität eines Gewölbes zu einer sehr einfachen Aufgabe. Den Beweis aber für die Richtigkeit dieser Annahme sind alle der älteren Theorie huldigenden Autoren schuldig geblieben. Im Gegentheile lehrt die Erfahrung in Uebereinstimmung mit der neueren Theorie, dass die wirkliche Drucklinie meistens eine andere Lage hat, und dass sie in vielen Fällen an einzelnen Stellen den Kern verlässt.

Trotzdem wird man häufig ohne Bedenken nach der älteren Theorie verfahren können.*.) Immer nämlich dann, wenn die Vorbedingungen der exakteren Theorie nicht erfüllt* werden. So lässt sich z. B. bei einem Gewölbe mit hoher Uebermauerung nicht angeben, nach welchem Gesetze die Belastung durch die Uebermauerung auf das Gewölbe übertragen wird, und welchen Einfluss die Uebermauerung auf die Formänderungen des Gewölbes hat. Da nun gerade die Betrachtung der Formenänderungen zu den fehlenden Gleichungen führen soll, wird, falls diese sich nicht hinlänglich scharf feststellen lassen, der Werth der neueren Theorie ein sehr zweifelhafter sein. Bei Berechnung vieler Gewölbeconstructionen im Hochbau wird die ältere Theorie genügen, dagegen halten wir bei Brückengewölben die neuere Theorie — trotzdem sie ebenfalls noch mit verschiedenen in Wirklichkeit nicht erfüllten Annahmen operirt — für angezeigt.

*.) Wir verweisen namentlich auf die in § 30 mitgetheilten Methoden.

Am besten wird es aber sein, den Unvollkommenheiten der Theorie durch die Construction zu begegnen, und verweisen wir daher hier auf die von verschiedenen Constructeuren empfohlenen Methoden.*). Besonders beachtenswerth ist der Vorschlag, das Gewölbe mit drei Gelenken (zwei Kämpfergelenken und einem Scheitelgelenke) zu versehen; da man dann die Drucklinie zwingt, durch 3 vorgeschriebene Punkte zu gehen.

§ 27. Bestimmung der wirklichen Drucklinie. Neuere Theorie.

(Tafel 15.)

91) **Gleichung der Drucklinie.** Die Horizontale durch den unteren Endpunkt A der linken Kämpferfuge (Fig. 136) sei x Axe, und es bezeichne:

η die Ordinate der Drucklinie,

y " " Bogenaxe,

η' " " mit beliebigem Pole und der Poldistanz H' gezeichneten Drucklinie,

H den Horizontalschub des Gewölbes,

l die Stützweite des Gewölbes.

Die Schlusslinie S sei durch die Ordinaten z' und z'' ihrer Endpunkte gegeben.

Nach No. 89 ist der Theil DC der Ordinate η :

$$\overline{CD} = \eta' \frac{H'}{H},$$

während:

$$\frac{\overline{DE} - z'}{x} = \frac{z'' - z'}{l} \quad \text{also} \quad \overline{DE} = z' + (z'' - z') \frac{x}{l}$$

ist, so dass sich:

$$1) \qquad \eta = z' + (z'' - z') \frac{x}{l} + \frac{H'}{H} \eta'$$

ergibt. Zur Bestimmung von z' , z'' und H müssen drei Elasticitätsgleichungen abgeleitet werden.

92) **Die drei Elasticitätsgleichungen.** Es sei φ (Fig. 137) der Neigungswinkel der im Punkte xy an die Bogenaxe construirten Tangente. φ_0 und φ'_0 seien die Werthe, welche φ mit $x = 0$, beziehungsweise $x = l$ annimmt.

Durch die angreifenden Kräfte wird das Gewölbe deformirt, und werden sich φ , y und x um $\Delta\varphi$, Δy und Δx ändern.

*.) Intze, Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover, Jahrg. 1876, S. 378.
Housselle, Deutsche Bauzeitung 1878, S. 509.

An der Stelle x wird:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \int_0^x d\Delta\varphi ,$$

und, wenn das Widerlager vollkommen fest, also $\Delta\varphi_0 = 0$ angenommen wird:

$$2) \quad \Delta\varphi = \int_0^x d\Delta\varphi ,$$

und analog:

$$\Delta y = \int_0^x d\Delta y , \quad \Delta x = \int_0^x d\Delta x .$$

Bedeutet ds das Element der Bogenaxe, so folgt vor, beziehungsweise nach der Deformation:

$$\begin{aligned} dy &= ds \sin \varphi \\ d(y + \Delta y) &= d(s - \Delta s) \sin(\varphi + \Delta\varphi) . \end{aligned} \quad *)$$

Setzt man, da $\Delta\varphi$ ein sehr kleiner Winkel ist, $\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi$ und $\cos \Delta\varphi = 1$, so wird:

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin \varphi + \cos \varphi \Delta\varphi ,$$

und man erhält (nach Streichen der kleinen Grösse 2^{ter} Ordnung: $d\Delta s \Delta\varphi$):

$$\begin{aligned} dy + d\Delta y &= ds \sin \varphi + ds \cos \varphi \Delta\varphi - d\Delta s \sin \varphi \\ &= dy + dx \Delta\varphi - \frac{d\Delta s}{ds} dy \end{aligned}$$

$$d\Delta y = \Delta\varphi dx - \frac{d\Delta s}{ds} dy$$

$$\Delta y = \int_0^x \Delta\varphi dx - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} dy$$

$$\Delta y = (\Delta\varphi x) - \int_0^x x d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} dy ,$$

oder, da der Ausdruck $\Delta\varphi x$ für die untere Grenze verschwindet,

$$3) \quad \Delta y = \Delta\varphi x - \int_0^x x d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} dy .$$

Ganz analog folgt aus

$$dx = ds \cos \varphi \quad \text{und} \quad d(x + \Delta x) = d(s - \Delta s) \cos(\varphi + \Delta\varphi)$$

die Formel:

$$4) \quad \Delta x = -\Delta\varphi y + \int_0^x y d\Delta\varphi - \int_0^x \frac{d\Delta s}{ds} dx .$$

*) In Folge der Pressungen wird s in $s - \Delta s$ übergehen.

Setzt man in die Formeln 2, 3 und 4 unter Voraussetzung starrer Widerlager die zusammengehörigen Werthe:

$x = l$, $\Delta \varphi = \Delta \varphi'_0 = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta x = 0$,
so erhält man die drei Elasticitätsgleichungen:

$$5) \quad \begin{cases} 0 = \int_0^l d \Delta \varphi \\ 0 = - \int_0^l x d \Delta \varphi - \int_0^l \frac{d \Delta s}{ds} dy \\ 0 = + \int_0^l y d \Delta \varphi - \int_0^l \frac{d \Delta s}{ds} dx . \end{cases}$$

Es bleibt noch $d \Delta \varphi$ und $\frac{d \Delta s}{ds}$ anzugeben.

Zwei unendlich nahe Fugen (Fig. 138) bilden miteinander den Winkel ($-d\varphi$)*), und es sind, wenn ϱ den Krümmungsradius der Bogenaxe bedeutet, die Elemente der Bogenaxe und der Laibungen:

$$ds = \varrho(-d\varphi), \quad ds_o = \frac{ds(\varrho + 0,5\delta)}{\varrho}, \quad ds_u = \frac{ds(\varrho - 0,5\delta)}{\varrho}$$

oder auch $ds_o = (\varrho + \frac{1}{2}\delta)(-d\varphi)$, $ds_u = (\varrho - \frac{1}{2}\delta)(-d\varphi)$.

Wird der Stützpunkt im Kern liegend angenommen, so sind k_o und k_u Druckspannungen, und es verkürzt sich, wenn E den Elasticitätsmodul des Gewölbematerials bezeichnet, ds_o um $\Delta ds_o = \frac{k_o ds_o}{E}$, ferner ds_u um $\Delta ds_u = \frac{k_u ds_u}{E}$, so dass

vor der Deformation: $ds_u - ds_o = d\varphi \delta$ und

nach „ „ „ $ds_u - \Delta ds_u - (ds_o - \Delta ds_o) = (d\varphi + \Delta d\varphi) \delta$

ist. Subtrahirt man die obere dieser beiden Gleichungen von der unteren, so folgt:

$$\Delta ds_o - \Delta ds_u = \delta \Delta d\varphi \quad \text{also}$$

$$\Delta d\varphi = d\varphi^{**} = \frac{k_o ds_o - k_u ds_u}{E \delta} \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = \frac{ds}{E} \left[\frac{k_o - k_u}{\delta} + \frac{k_o + k_u}{2\varrho} \right].$$

*) Aendert sich x in $x + dx$, so ändert sich φ in $\varphi - d\varphi$.

**) Nach einem bekannten Satze der Variationsrechnung dürfen die Zeichen d und Δ miteinander vertauscht werden.

Setzt man nach Formel 1 Seite 99 (vergl. auch Fig. 133):

$$k_o = \frac{N}{\delta} \left(1 + 6 \frac{e}{\delta} \right) = \frac{N}{\delta} + \frac{6M}{\delta^2}$$

$$k_u = \frac{N}{\delta} - \frac{6M}{\delta^2}$$

und ferner $\frac{1}{12}\delta^3 = J$, so folgt:

$$k_o - k_u = \frac{M\delta}{J} \quad \text{und} \quad k_o + k_u = \frac{2N}{\delta},$$

und man erhält:

$$6) \quad dA\varphi = \frac{Mds}{EJ} + \frac{Nds}{\varrho\delta E}.$$

Die Verkürzung dAs des Elementes der Bogenaxe wird, da die Druckspannung im Querschnittsmittelpunkte $= \frac{N}{\delta}$ ist:

$$7) \quad dAs = ds \frac{N}{\delta E}.$$

Führt man die so bestimmten Werthe $dA\varphi$ und dAs in die Gleichungen 5 ein, setzt

$$J \frac{dx}{ds} = J \cos \varphi = J'$$

und nimmt J' constant *) an, so erhält man:

$$8) \quad \begin{cases} 0 = \int_0^l M dx + \int_0^l \frac{J' N ds}{\varrho \delta} \\ 0 = - \int_0^l Mx dx - \int_0^l \frac{J' N}{\delta} \left(x \frac{ds}{\varrho} + dy \right) \\ 0 = \int_0^l My dx + \int_0^l \frac{J' N}{\delta} \left(y \frac{ds}{\varrho} - dx \right). \end{cases}$$

Für den Normaldruck N führen wir den Werth:

$$N = \frac{H}{\cos \varphi}$$

ein; derselbe ist genau, sobald die Drucklinie mit der Bogenaxe zusammenfällt, sonst nur angenähert richtig. Der in letzterem Falle begangene Fehler ist ganz unwesentlich.

*) Vielfach wird die Annahme $J = \text{Const.}$ gemacht. Die Einführung eines constanten Mittelwerthes J' aus den veränderlichen Werthen $J \cos \varphi$ führt aber zu einfacheren und dabei auch correcteren Gleichungen. Die Behandlung der Gewölbe mit stark veränderlichem Querschnitte sehe man in: H. Müller-Breslau, Elastizitätstheorie der Tonnengewölbe, Zeitschrift für Bauwesen, 1881, Heft VII.

Der Ausdruck $\frac{J'N}{\delta}$ nimmt jetzt den constanten Werth:

$$\frac{J \cos \varphi}{\delta} \frac{H}{\cos \varphi} = \frac{J H}{\delta} = \frac{H \delta^2}{12}$$

an, und man erhält, da ausserdem (vergl. Seite 110)

$$M = H(\eta - y)$$

gesetzt werden darf, die drei Elasticitätsgleichungen in der wesentlich einfacheren Form:

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\delta^2}{12} A + \int_0^l y \, dx = \int_0^l \eta \, dx \\ -\frac{\delta^2}{12} B + \int_0^l yx \, dx = \int_0^l \eta x \, dx \\ +\frac{\delta^2}{12} C + \int_0^l y^2 \, dx = \int_0^l y \eta \, dx \end{array} \right.$$

wo

$$10) \quad A = \int_0^l \frac{ds}{\varrho}, \quad B = \int_0^l \left(dy + x \frac{ds}{\varrho} \right), \quad C = \int_0^l \left(dx - y \frac{ds}{\varrho} \right).$$

Die Auswerthung der Integrale A , B und C ist möglich, sobald die Gestalt der Bogenaxe gegeben ist.

Man zerlegt die Bogenaxe in Segmente von den Längen $s_1, s_2 \dots$, bestimmt die Coordinaten $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots$ der Mitten der Segmente, ferner die diesen entsprechenden Krümmungsradien $\varrho_1, \varrho_2 \dots$ und erhält genügend genau:

$$A = \frac{s_1}{\varrho_1} + \frac{s_2}{\varrho_1} + \dots$$

$$B = t + \frac{x_1 s_1}{\varrho_1} + \frac{x_2 s_2}{\varrho_2} + \dots$$

$$C = l - \frac{y_1 s_1}{\varrho_1} - \frac{y_2 s_2}{\varrho_2} + \dots$$

Dabei bedeutet t die Differenz der Ordinaten der Kämpfermittelpunkte (Fig. 137).

Für einen symmetrischen Kreisbogen ist mit den Bezeichnungen in Fig. 139 (Tafel 16):

$$y = y_0 + \varrho \cos \varphi - \varrho \cos \varphi_0, \quad dy = -\varrho \sin \varphi \, d\varphi$$

$$x = \varrho \sin \varphi_0 - \varrho \sin \varphi, \quad dx = -\varrho \cos \varphi \, d\varphi$$

$$ds = -\varrho \, d\varphi, \quad \text{also:}$$

$$A = \int_0^l \frac{ds}{\varrho} = - \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} d\varphi = 2\varphi_0$$

$$B = \int_0^l (dy - xd\varphi) = - \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} \varrho \sin \varphi_0 d\varphi = + \varrho \sin \varphi_0 2\varphi_0 = l\varphi_0$$

$$C = \int_0^l (dx + yd\varphi) = - \int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (\varrho \cos \varphi_0 - y_0) d\varphi = (\varrho \cos \varphi_0 - y_0) 2\varphi_0 = 2h'\varphi_0.$$

11) $A = 2\varphi_0, \quad B = l\varphi_0, \quad C = 2h'\varphi_0.$

Nach Berechnung der Integrale A , B und C wird in die Gleichungen 9 der Werth:

$$\eta = z' + (z'' - z') \frac{x}{l} + \frac{H'}{H} \eta'$$

eingeführt, worauf sich z' , z'' und H bestimmen lassen.

Für die weitere Behandlung setzen wir ein in Bezug auf die Verticale durch die Mitte symmetrisches Gewölbe voraus.

§ 28. Das symmetrische Tonnengewölbe.

93) Symmetrische Belastung. Ist die Belastungsfläche eines Gewölbes symmetrisch in Bezug auf die Verticale durch die Mitte, so ist $z' = z'' = z$ (Fig. 140). Die Schlusslinie liegt horizontal. Die 2^{te} der drei Elasticitätsgleichungen erweist sich überflüssig.*). Setzt man den Werth (vergl. Formel 1, Seite 104):

$$\eta = z + \frac{H'}{H} \eta'$$

in die 1^{te} und 3^{te} der Gleichungen 9, so erhält man:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\delta^2}{12} A + \int_0^l y dx = zl + \frac{H'}{H} \int_0^l \eta' dx \\ + \frac{\delta^2}{12} C + \int_0^l y^2 dx = z \int_0^l y dx + \frac{H'}{H} \int_0^l y \eta' dx. \end{array} \right.$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Integrale lassen sich zwar construiren, doch ziehen wir es vor, dieselben mittelst der Simpson-Näherungsformeln zu berechnen. Wir setzen:

*) Diese 2^{te} Gleichung drückt die Bedingung aus, dass (Fig. 137) der Punkt b sich nicht in verticalem Sinne gegen Punkt a verschiebt; eine Bedingung, welche stets erfüllt wird, sobald die Belastungsfläche symmetrisch ist.

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l y dx = fl, \quad \int_0^l \eta' dx = f'l, \\ \int_0^l y^2 dx = ufl, \quad \int_0^l y \eta' dx = u'fl, \end{array} \right.$$

zerlegen das Gewölbe in eine gerade Anzahl von Lamellen (Fig. 140) mit der constanten Breite λ , messen für $x = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \dots$ die Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \dots$ der Bogenaxe und $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 \dots$ der Hilfsdrucklinie, und erhalten:

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{2\lambda}{3l} \{ y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots) \} \\ f' = \frac{2\lambda}{3l} \{ \eta'_n + 4(\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_5 + \dots) + 2(\eta'_2 + \eta'_4 + \eta'_6 + \dots) \} \\ u = \frac{2\lambda}{3fl} \{ y_0^2 + y_n^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + \dots) + 2(y_2^2 + y_4^2 \dots) \} \\ u' = \frac{2\lambda}{3fl} \{ y_n \eta'_n + 4(y_1 \eta'_1 + y_3 \eta'_3 + \dots) + 2(y_2 \eta'_2 + y_4 \eta'_4 \dots) \} \end{array} \right.$$

Die Gleichungen 1 gehen jetzt über in:

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta^2}{12} \frac{A}{l} + f = z + \frac{H'}{H} f' \\ & + \frac{\delta^2}{12} \frac{C}{fl} + u = z + \frac{H'}{H} u' \end{aligned}$$

und liefern die Werthe:

$$4) \quad H = H' \frac{u' - f'}{u_0 - f_0}$$

$$5) \quad z = f_0 - \frac{H'}{H} f'$$

wo

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0 = f - \frac{\delta^2}{12} \frac{A}{l} \\ u_0 = u + \frac{\delta^2}{12} \frac{C}{fl} \end{array} \right.$$

Bei kreisförmiger Axe erhält man (nach der Formel 11, Seite 109):

$$7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0 = f - \frac{\delta^2 \varphi_0}{6l} \\ u_0 = u + \frac{\delta^2 \varphi_0}{6l} \frac{h'}{f} \end{array} \right.$$

Besteht die Belastungskurve aus zwei Geraden und ist die untere Laibung ein Kreisbogen vom Radius r , so kann man mit den aus Fig. 141 ersichtlichen Bezeichnungen auch setzen:

$$8) \quad H'f' = \frac{\gamma_m}{96} \left\{ 2l^2 \left(4h''' + \frac{5}{2}s \right) - 12\varphi_1 \frac{r^2}{l} (l^2 - r^2) - c(6r^2 - 5l^2) \right\},$$

wo γ_m das Gewicht des Cubikmeters Gewölbemauerwerk bedeutet. Ferner ist annähernd:

$$9) \quad H = \frac{\gamma_m l^2}{8h} [h''' - 0,86h'' + 0,69s] \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{\delta^2}{h^2} \frac{\varphi_0}{l} \left(h' + y_0 + \frac{2h}{3} \right)} \quad *)$$

so dass man H und hierauf $z = f_0 - \frac{H'f'}{H}$ berechnen kann, ohne die Hilfsdrucklinie zu zeichnen.

Der Inhalt der von der kreisbogenförmigen Axe des Gewölbes, der Horizontalen AB und den Verticalen durch A und B begrenzten Fläche ist:

$$\int_0^l y dx = fl = \pi \varrho^2 \frac{2\varphi_0}{2\pi} - \frac{h' + y_0}{2} l + y_0 l,$$

weshalb:

$$10) \quad f = \frac{\varrho^2 \varphi_0}{l} - \frac{h'}{2} + \frac{y_0}{2}.$$

Ableitung von Formel 8 (Fig. 142). Sind CC und C_1C_1 zwei durch ein Gewölbe geführte verticale Schnitte, und ist der Schnitt CC an die Stelle gelegt, an welcher die Drucklinie eine horizontale Tangente hat, so ist der Druck auf Fuge CC horizontal. Druck D auf Fuge C_1C_1 ist tangential an die Drucklinie und habe den Neigungswinkel α . Mit ζ sei der Verticalabstand von unterer Laibung und Belastungskurve bezeichnet. ζ heisst Belastungsordinate. Das Gewicht des Gewölbetheiles zwischen den Schnitten CC und C_1C_1 ist $= \int \gamma_m \zeta dx$, und folgen die Bedingungen:

$$D \sin \alpha = \gamma_m \int \zeta dx, \quad D \cos \alpha = H \text{ also } \frac{H}{\gamma_m} \operatorname{tg} \alpha = \int \zeta dx.$$

Sind η und x die Coordinaten der Drucklinie, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\eta}{dx}$ und, da $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ negativ ist, weil die Curve concav gegen die x = Axe liegt:

$$-\frac{H}{\gamma_m} \frac{d^2\eta}{dx^2} = \zeta.$$

Bedeutet im Falle Fig. 141 y' die Ordinate der unteren Laibung, so ist die Belastungsordinate $= h''' + 2s \frac{x}{l} - y'$ und $y' = r \cos \varphi - r \cos \varphi_1$, $x = r \sin \varphi_1 - r \sin \varphi$, $dx = -r \cos \varphi d\varphi$.

*) Wenn die Belastungskurve nach der Mitte hin fällt, ist s negativ zu setzen.

Die Differentialgleichung einer Drucklinie mit dem beliebigen Horizontal-schube H' wird:

$$\begin{aligned} \frac{H'}{\gamma_m} \frac{d^2 \eta'}{dx^2} &= -h''' - 2s \frac{x}{l} + y' \\ \frac{H'}{\gamma_m} \frac{d\eta'}{dx} &= -h'''x - \frac{sx^2}{l} + \int y' dx + C \\ &= -h'''x - \frac{sx^2}{l} - r^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right) + r^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi + C, \end{aligned}$$

Bedingung: $x = \frac{1}{2}l$ und $\varphi = 0$ müssen, wegen der Symmetrie, $\frac{d\eta'}{dx} = 0$ liefern, also:

$$0 = -\frac{1}{2}h'''l - \frac{1}{4}sl + C \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{2}h'''l + \frac{1}{4}sl,$$

weshalb:

$$\begin{aligned} \frac{H'}{\gamma_m} \frac{d\eta'}{dx} &= \frac{h'''l}{2} - h'''x + \frac{sl}{4} - \frac{sx^2}{l} - r^2 \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi_1 \sin \varphi \right) \\ \frac{H'}{\gamma_m} \eta' &= \frac{1}{2}h'''lx - \frac{1}{2}h'''x^2 + \frac{1}{4}slx - \frac{1}{3}s \frac{x^3}{l} + r^3 \left\{ \frac{1}{2}\varphi \sin \varphi + \frac{1}{2}\cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}\cos^3 \varphi - \frac{1}{2}\cos \varphi_1 \sin^2 \varphi \right\} + C_1. \end{aligned}$$

$x = 0$ und $\varphi = \varphi_1$ müssen liefern $\eta' = 0$; d. h.:

$$0 = \frac{r^3}{2} \left\{ \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 - \frac{1}{3}\cos^3 \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \right\} + C_1,$$

woraus:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\varphi_1 \sin \varphi_1 - \frac{1}{3}\cos^3 \varphi_1,$$

so dass die Gleichung der Drucklinie lautet:

$$\begin{aligned} \frac{H'}{\gamma_m} \eta' &= \frac{1}{2}h'''lx - \frac{1}{2}h'''x^2 + \frac{1}{4}slx - \frac{1}{3}s \frac{x^3}{l} - \frac{1}{2}r^3 \left[\varphi_1 \sin \varphi_1 + \frac{2}{3}\cos^3 \varphi_1 \right. \\ &\quad \left. - \varphi \sin \varphi - \cos \varphi + \frac{1}{3}\cos^3 \varphi + \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{H'}{\gamma_m} \frac{f' l}{2} &= \frac{H'}{\gamma_m} \int_0^{\frac{1}{2}l} \eta' dx = \frac{1}{24}h'''l^3 + \frac{5}{16}s l^3 - \frac{1}{16}r^4 \left\{ \varphi_1 (4 \sin^2 \varphi_1 - 1) \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 (1 - \frac{1}{3}\sin^2 \varphi_1) \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man (Fig. 141) $\sin \varphi_1 = \frac{l}{2r}$ und $\cos \varphi_1 = \frac{c}{r}$, so erhält man:

$$H' f' = \frac{\gamma_m}{96} \left\{ 2l^2 (4h''' + \frac{3}{2}s) - 12\varphi_1 \frac{r^2}{l} (l^2 - r^2) - c (6r^2 - 5l^2) \right\}.$$

Ableitung von Formel 9. Wenn man die Bogenaxe und die untere Laibung annähernd als Parabeln auffasst, so folgt (Fig. 141):

$$\text{Ordinate der unteren Laibung } y' = \frac{4h''x(l-x)}{l^2}$$

$$\text{und Belastungsordinate } \zeta = h''' + \frac{2sx}{l} - \frac{4h''x(l-x)}{l^2}$$

Nun wird:

$$\frac{H'}{\gamma_m} \frac{d\eta'}{dx^2} = -\zeta = -h''' + \frac{4h''x}{l} - \frac{4h''x^2}{l^2} - \frac{2sx}{l}$$

$$\frac{H'}{\gamma_m} \frac{d\eta'}{dx} = -h''x + \frac{2h''x^2}{l} - \frac{4h''x^3}{3l^2} - \frac{sx^2}{l} + C$$

$$\frac{H'}{\gamma_m} \eta' = -\frac{h'''x^2}{2} + \frac{2h''x^3}{3l} - \frac{h''x^4}{3l^2} - \frac{sx^3}{3l} + Cx + C_1.$$

Bestimmt man die Constanten C und C_1 aus den Bedingungen, dass $x = \frac{1}{2}l$ und $x = 0$ beziehungsweise $\frac{d\eta'}{dx} = 0$ und $\eta' = 0$ liefern müssen, so folgt:

$$\frac{H'}{\gamma_m} \eta' = \frac{h'''lx}{2} - \frac{h'''x^2}{2} - \frac{h''lx}{3} + \frac{2h''x^3}{3l} - \frac{h''x^4}{3l^2} + \frac{slx}{4} - \frac{sx^3}{3l}$$

$$\frac{H'}{\gamma_m} f'l = 2 \frac{H'}{\gamma_m} \int_0^{\frac{1}{2}l} \eta' dx = \frac{l^3}{12} (h''' - \frac{4}{3}h'' + \frac{5}{8}s).$$

Ordinate der Bogenaxe: $y = y_0 + \frac{4hx(l-x)}{l^2} = y_0 + \frac{4hx}{l} - \frac{4hx^2}{l^2}$

$$\begin{aligned} u'fl &= \int_0^l y \eta' dx = y_0 \int_0^l \eta' dx + \frac{4h}{l} \int_0^l \eta' x dx - \frac{4h}{l^2} \int_0^l \eta' x^2 dx \\ &= y_0 f'l + \frac{4h}{l} f'l \frac{l}{2} - \frac{4h}{l^2} \int_0^l \eta' x^2 dx \\ u' &= (y_0 + 2h) \frac{f'}{f} - \frac{4h\gamma_m}{f^3 H'} \int_0^l \frac{H'}{\gamma_m} \eta' x^2 dx. \end{aligned}$$

Der von s unabhängige Theil des für η' gefundenen Ausdrückes gilt für $x = 0$ bis $x = l$. Der von s abhängige Ausdruck hat für $x > \frac{1}{2}l$ eine andere Form wie für $x < \frac{1}{2}l$, ist aber in Bezug auf die Verticale durch die Gewölbemitte symmetrisch. Daher kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{H'}{\gamma_m} \eta' x^2 dx &= \frac{h'''}{2} \int_0^l (lx^3 - x^4) dx - \frac{h''}{3} \int_0^l \left(lx^3 - 2 \frac{x^5}{l} + \frac{x^6}{l^2} \right) dx \\ &\quad + s \int_0^{\frac{1}{2}l} \left(\frac{lx}{4} - \frac{x^3}{3l} \right) x^2 dx + s \int_0^{\frac{1}{2}l} \left(\frac{lx}{4} - \frac{x^3}{3l} \right) (l-x)^2 dx, \end{aligned}$$

und man erhält dann:

$$u' = (y_0 + 2h) \frac{f'}{f} - \frac{hl^2\gamma_m}{10fH'} (h''' - \frac{5}{6}\frac{9}{8}h'' + \frac{17}{8}\frac{8}{8}s)$$

und wegen $f = y_0 + \frac{2h}{3}$

$$u' - f' = \frac{4h}{3} \frac{f'}{f} - \frac{hl^2\gamma_m}{10H'f} (h''' - \frac{5}{6}\frac{9}{8}h'' + \frac{17}{8}\frac{8}{8}s).$$

Jetzt wird weiter $ufl = \int_0^l y^2 dx$ und $y = y_0 + \frac{4hx}{l} - \frac{4hx^2}{l^2}$ also $ufl = l(y_0^2 + \frac{8}{15}h^2 + \frac{4}{3}y_0 h)$, und hieraus:

$$u - f = \frac{4h^2}{45f}.$$

Mit Hilfe dieser Werthe ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \frac{u' - f'}{u - f} H' &= \frac{45}{4h^2} (u' - f') f H' \\ &= \frac{\gamma_m l^2}{8h} (h''' - 0,86 h'' + 0,69 s) \end{aligned}$$

und mit Beachtung der Formeln 6:

$$H = H' \frac{u' - f'}{u_0 - f_0} = H' \frac{u' - f'}{u - f} \frac{1}{1 + \frac{q_0 \delta^2}{6l(u - f)} (f + h')}$$

$$H = \frac{\gamma_m l^2}{8h} (h''' - 0,86 h'' + 0,69 s) \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{\delta^2}{h^2} \frac{q_0}{l} \left(h' + y_0 + \frac{2h}{3} \right)}.$$

Diese Formel wird desto genauer, je flacher das Gewölbe ist. Der Verfasser hat noch bei $h = \frac{1}{3}l$ sehr befriedigende Resultate erhalten.

94) Das unsymmetrische Gewölbe. Wenn man bei beliebiger Gestalt der Belastungsfläche in die drei Gleichungen No. 9 (§ 27) den Werth:

$$\eta = z' + (z'' - z') \frac{x}{l} + \frac{H'}{H} \eta'$$

einsetzt, findet man die Bedingungen:

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\delta^2}{12} A + fl = \frac{1}{2}(z' + z'')l + \frac{H'}{H} f'l \\ -\frac{\delta^2}{12} B + fl\xi = \frac{1}{6}(z' + 2z'')l^2 + \frac{H'}{H} f'l\xi \\ +\frac{\delta^2}{12} C + flu = \left[z' + (z'' - z') \frac{\xi}{l} \right] fl + \frac{H'}{H} flu' \end{array} \right.$$

Dabei ist $\int_0^l y x dx = fl\xi$ und $\int_0^l \eta' x dx = f'l\xi'$ gesetzt worden, so

dass ξ und ξ' die Abstände der Schwerpunkte der Flächen $\int_0^l y dx$ resp. $\int_0^l \eta' dx$

von der Verticalen durch A bedeuten. Diese Schwerpunktslagen lassen sich graphisch schnell finden, während die Werthe f , f' , u und u' zweckmässiger mittelst der Simpson'schen Formeln berechnet werden. Die Bestimmung von z' , z'' und H aus vorstehenden 3 Gleichungen unterliegt dann keinerlei Schwierigkeit. Der Verfasser verweist auf seine Abhandlung „die Elasticitätstheorie der

Tonnengewölbe“, Zeitschrift für Bauwesen 1881 (auch als Separatabdruck zu beziehen), in welcher der Fall eines unsymmetrischen Gewölbes ausführlicher discutirt worden ist.

95) Das einseitig belastete Tonnengewölbe. Ist die Belastung eines Tonnengewölbes theilweise permanent und theilweise veränderlich, so bleibt noch die Frage nach der gefährlichsten Stellung der veränderlichen Belastung zu beantworten. Dabei begnügt man sich aus zwei Gründen mit einer angenäherten Lösung. Einmal ist nämlich die veränderliche Belastung im Vergleich zur permanenten so gering, dass das Bedürfniss nach einer strengen Entwicklung der sehr umständlichen Theorie der gefährlichsten Belastung nicht in dem Grade vorliegt, wie bei den eisernen Bogenbrücken, und zweitens werden die Vorbedingungen der strengen Theorie Seitens des zu berechnenden Gewölbes in so geringem Maasse erfüllt, dass der Werth einer solchen strengen Berechnung kein sonderlich grosser ist. Deshalb hält man es für ausreichend, den Fall zu untersuchen, in welchem nur die eine Gewölbehälfte belastet ist (Fig. 143); derselbe liefert nahezu die grössten Anstrengungen.

Wir bezeichnen die Höhe der auf Mauerwerk reducierten Verkehrslast mit v und zerlegen nach Schwedler den Belastungsfall Fig. 143 in die Fälle Fig. 144 und Fig. 145. Das heisst, wir setzen zunächst voraus, das Gewölbe sei total aber nur mit $\frac{1}{2}v$ belastet und untersuchen dann, wie die diesem Zustande (Fig. 144) entsprechende Drucklinie modifiziert wird, wenn auf der linken Hälfte des Gewölbes die Belastung $\frac{1}{2}v$ hinzugefügt und auf der rechten Hälfte die Belastung $\frac{1}{2}v$ weggemommen wird.

Für den Belastungsfall Fig. 144 lässt sich die Drucklinie nach den in No. 93 entwickelten Regeln construiren und erübrigts es nur noch, den Einfluss des Kräftepaars in Fig. 145 zu erörtern.

Beachtet man, dass eine Last P im Abstande ξ links vom Scheitel (Fig. 146) denselben Horizontalschub H erzeugt, wie eine gleich grosse Last P in demselben Abstande ξ rechts vom Scheitel (Fig. 147), dass also (Fig. 148) zwei entgegengesetzte, vom Scheitel gleich weit entfernte und gleich grosse Lasten zwei sich aufhebende H erzeugen, so ersieht man, dass der in Fig. 145 dargestellten Belastung*) der Werth:

$$H = 0$$

entspricht. Es entstehen zwei verticale Reactionen A von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung.

Bezeichnet man mit e den Abstand der Kraft A von der Auflagerverticalen und addirt in letzterer zwei sich aufhebende Kräfte A , so entsteht ein Kräftepaar mit dem Momente:

$$Ae = M_A$$

*) Das Gewölbe ist hierbei gewichtslos zu denken.

und für den Querschnitt bei x das Moment:

$$M = A(e + x) - \gamma_m \frac{v}{2} x \frac{x}{2} = Ax - \gamma_m \frac{vx^2}{4} + M_A .$$

Ebenso lässt sich die Wirkung der rechtsseitigen Auflagerreaction ersetzen durch eine in der Auflagerverticalen wirkende Kraft A und ein Kräftepaar mit dem Momente ($-M_A$), und erhält man für den Querschnitt bei x' :

$$M' = -Ax' + \gamma_m \frac{vx'^2}{4} - M_A .$$

Für $x = l_1$ und $x' = l_1$ müssen die Werthe M und M' übereinstimmen, d. h. es muss sein:

$$Al_1 - \gamma_m \frac{vl_1^2}{4} + M_A = -Al_1 + \gamma_m \frac{vl_1^2}{4} - M_A , \quad \text{d. h.:}$$

$$1) \quad A = \gamma_m \frac{vl_1}{4} - \frac{M_A}{l_1} ,$$

so dass für den Querschnitt bei x :

$$2) \quad M = \gamma_m \frac{vx(l_1 - x)}{4} + M_A \frac{l_1 - x}{l_1} .$$

Das erste Glied dieses Ausdrückes kann als Ordinate einer Parabel CDE (Fig. 145^a) angesehen werden, welche über der halben Stützweite l_1 mit dem Pfeile:

$$d = \gamma_m \frac{vl_1^2}{16} = \gamma_m \frac{vl^2}{64}$$

construiert ist. Das zweite Glied des Ausdrückes für M ist die Ordinate einer Geraden JE , welche durch $\overline{CJ} = M_A$ gegeben ist. Für die correspondirenden Querschnitte der rechten Gewölbehälften erhält man gleiche, aber entgegengesetzte Werthe M .

Zur Berechnung der Unbekannten M_A dient die Elasticitätsgleichung:

$$\int_0^l M x dx + \int_0^l \frac{J' N}{\delta} \left(x \frac{ds}{\varrho} + dy \right) = 0 ,$$

d. h. (vergl. Seite 108):

$$\int_0^l M x dx + \frac{\delta^2 B}{12} H = 0$$

und, wegen $H = 0$:

$$\int_0^l M x dx = 0 .$$

Diese Gleichung drückt aus, dass das statische Moment der Momentenfläche (Fig. 145^a) in Bezug auf die Verticale durch C gleich Null sein muss. Daraus folgt, da der Inhalt der Parabelfläche $= \frac{2}{3} d l_1$ ist:

$$\frac{M_A l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} - \frac{M_A l_1}{2} \left(l_1 + \frac{2 l_1}{3} \right) + \frac{2}{3} d l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - \frac{2}{3} d l_1 \left(l_1 + \frac{l_1}{2} \right) = 0,$$

und hieraus:

$$M_A = -d.$$

Es hat also, da das Moment M_A negativ ist, die Momentenfläche die in Fig. 145^b angegebene Gestalt.

Bedeutet nun $\Delta\eta$ die Aenderung, welche die Ordinaté η der für den Belastungsfall Fig. 144 construirten Drucklinie in Folge des Kräftepaars in Fig. 145 erleidet, und H den Horizontalschub für die Belastungsfälle Fig. 143 und Fig. 144, so folgt:

$$H \Delta\eta = M \quad \text{und}$$

$$\Delta\eta = \frac{M}{H}.$$

Construiert man also in Fig. 145^c über der halben Stützweite l_1 eine Parabel mit dem Pfeile:

$$3) \qquad d' = \frac{\gamma_m v l^2}{64 H},$$

macht $CJ = d'$ und zieht EJ , so erhält man die $\Delta\eta$ durch Subtraction der Ordinaten der Geraden JE von denen der Parabel, und zwar gilt dies für die belastete linke Gewölbehälften. Der rechten Hälften entsprechen gleich grosse aber entgegengesetzte Ordinaten $\Delta\eta$.

Aus den Werthen η in Fig. 144 und $\Delta\eta$ in Fig. 145^c lassen sich die Ordinaten $\eta + \Delta\eta$ der Drucklinie für einseitige Belastung (Fig. 143) finden. Speciell für die verticalen Kämpferfugen erhält man die Ordinaten:

$$\text{links } z' = z - d' \quad \text{und} \quad \text{rechts } z'' = z + d'.$$

Die Reaction A in Fig. 145 wird nach Formel 1:

$$4) \qquad \begin{cases} A = +\frac{5}{32} \gamma_m v l \text{ auf der linken Seite} \\ A = -\frac{5}{32} \gamma_m v l \text{ " " rechten " } \end{cases}$$

§ 29. Berechnung einer gewölbten Straßenbrücke von 16^m Stützweite und 3^m Pfeilhöhe. (Tafel 17.)

I. Disposition. Belastung. Das Gewölbe ist aus bestem Backsteinmauerwerk in Cementmörtel hergestellt, und beträgt die zulässige Inanspruchnahme $k = 140$ tons pro Quadratmeter. Das Gewicht des Cubikmeters Mauerwerk ist $\gamma_m = 1,6$ tons.

Die Stärke im Scheitel wurde $0,77^m$ *) die am Kämpfer $1,03^m$ gewählt; es ist dann die Verticalprojection der Kämpferfuge gleich der Scheitelfuge.**)

Stärke der Uebermauerung im Scheitel = $0,15^m$. Höhe der Kiesbettung $0,28^m$, der Pflasterung $0,17^m$. Beträgt dann das Gewicht des Cubikmeters Kies $1,86 \text{ tons}$ und das des Cubikmeters Pflasterung $2,4 \text{ tons}$, so ist die permanente Belastungshöhe im Scheitel:

$$0,77 + 0,15 + 0,28 \cdot \frac{1,86}{1,6} + 0,17 \cdot \frac{2,4}{1,6} = 1,50^m.$$

Erhält das Kiesbett die constante Höhe $0,28^m$, und erfolgt im Uebrigen die Auffüllung mittelst gewöhnlicher Erde, deren Gewicht gleich dem des Mauerwerks gesetzt werden darf, so ist die Belastungskurve eine horizontale Gerade XX . Permanente Belastungshöhe am Kämpfer: $4,5^m$.

Die mobile Belastung (Menschengedränge) wird 400^k pro Quadratmeter angenommen. Die auf Mauerwerk reducire veränderliche Belastungshöhe ist dann

$$v = \frac{0,4}{1,6} = 0,25^m.$$

II. Analytisch-graphische Ermittelung der Beanspruchung des Gewölbes für den Fall, dass nur die linke Hälfte desselben belastet ist. Es wird zunächst angenommen, dass das Gewölbe total, jedoch nur mit der Hälfte der mobilen Belastung beansprucht ist. Die Belastungslinie XX ist durch die um $\frac{1}{2}v = 0,125^m$ höher gelegene $X'X'$ zu ersetzen.

Nach Zerlegen der Gewölbehälften in 8 Lamellen von 1^m Breite wurde mit dem beliebigen Horizontalschube $H' = 16 \text{ tons}$ (Pol O) eine

*) Zur Bestimmung der Scheitelstärke eines Gewölbes wird vielfach die empirische Formel von v. Kaven angewendet. Dieselbe lautet (vergl. die Bezeichnungen in Fig. 141) für Quadergewölbe $\delta_q = 0,25 + l \left(0,025 + 0,0034 \frac{l}{h^n} \right)$ und liefert $\delta_q = 0,25 + 16 \left(0,025 + 0,0034 \frac{l^6}{3} \right) = 0,94^m$. Für bestes Backstein gewölbe ist $\delta_k = \delta_q + \delta_q \left(\frac{1 - \delta_q}{2} \right) = 0,94 + 0,94 \frac{1 - 0,94}{2} = 0,97^m$. Nach v. Kaven gelten die Formeln für Eisenbahn- und Strassenbrücken. Letztere macht man aber zweckmäßig 20 pCt. schwächer; desshalb wurde die Scheitelstärke $0,80 \cdot 0,97 = 0,78^m$ und hierfür $0,77^m$ (3 Stein) gewählt. Bei hoher Erd schüttung im Scheitel mache man δ für Eisenbahn- und Strassenbrücken gleich gross. Es werde hier noch auf die Formeln von Tolkmitt, Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-V. zu Hannover, 1878, Seite 451, hingewiesen.

**) Der Querschnitt eines Backsteingewölbes ändert sich zwar vom Scheitel nach dem Kämpfer sprunghweise, doch empfiehlt es sich, wie hier geschehen, eine continuirliche obere Laibung in die statische Berechnung einzuführen.

Drucklinie gezeichnet, deren Ordinaten (entsprechend den Fugen 1, 2, 3, ...) $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 \dots$ sind. Dazu mussten zunächst die Gewichte $G_1, G_2, G_3 \dots$ der Gewölbelamellen, welche mit hinlänglicher Genauigkeit als Trapeze aufgefasst werden dürfen, ermittelt werden.

Bezeichnet man mit ζ die mittlere Höhe und mit λ die Breite einer Lamelle und verwandelt diese in ein Rechteck mit den Abmessungen B und y , so folgt

$$By = \lambda \zeta \text{ also } y = \frac{\lambda \zeta}{B}.$$

B soll für alle Lamellen constant gewählt und Reductionsbasis genannt werden. Das Lamellengewicht sei durch y^{cm} dargestellt, und folgt dann der Kräftemaassstab

$$y^{\text{cm}} = \gamma_m y B^{\text{tons}}.$$

In die rechte Seite dieser Gleichung sind y und B in Metern einzuführen. Lautet also der Längenmaassstab

$$n^{\text{cm}} = 1^{\text{m}},$$

so ist das y links eine n mal so grosse Zahl wie das y rechts, und es wird der Kräftemaassstab

$$1^{\text{cm}} = \frac{\gamma_m B^{\text{tons}}}{n}.$$

Im vorliegenden Falle ist $\gamma_m = 1,6$, ferner der Längenmaassstab $\frac{3}{4}^{\text{cm}} = 1^{\text{m}}$, also $n = \frac{3}{4}$ und der Kräftemaassstab

$$1^{\text{cm}} = \frac{4}{3} \cdot 1,6 B^{\text{tons}}.$$

Wählt man $B = 3,75^{\text{m}}$, so folgt

$$1^{\text{cm}} = 8^{\text{tons}}.$$

Macht man nun

$$\overline{X'F} = B = 3,75^{\text{m}}, \quad FJ \parallel X'X, \quad \overline{FJ} = \lambda = 1^{\text{m}},$$

zieht die Gerade $X'J$ und beispielsweise durch den unteren Endpunkt der mittleren Höhe der 2^{ten} Lamelle eine Parallele zur $X'X'$, so schneiden die Geraden $X'F$ und $X'J$ auf dieser Parallelen das Gewicht $\overline{F_2 J_2} = G_2$ der 2^{ten} Lamelle ab. Analog sind $G_1, G_3 \dots$ bestimmt worden, worauf die Construction der Hilfsdrucklinie nach den bekannten Gesetzen erfolgte.*)

Den Fugen 0, 1, 2 ... entsprechend misst man die Drucklinienordinaten:

Fuge	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\eta' =$	0	1,83	3,29	4,42	5,28	5,91	6,34	6,59	6,67 ^m

* Man gehe vom Scheitel aus, ziehe also Seilpolygonseite H' beliebig, dann I, II ... bis VIII. Durch den Schnittpunkt der VIII mit der Auflagerverticalen wird die horizontale Schlusslinie S' gezogen, worauf auf den verlängerten verticalen Fugen die $\eta'_1, \eta'_2 \dots$ gemessen werden.

Die Ordinaten der Bogenaxe sind:

Fuge	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y =$	0,635	1,34	1,92	2,39	2,76	3,04	3,23	3,35	3,385 ^m

Nun findet man nach den Formeln 3 auf Seite 110

$$f = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 16} \left\{ 0,635 + 3,385 + 4(1,34 + 2,39 + 3,04 + 3,35) + 2(1,92 + 2,76 + 3,23) \right\} = 2,513^m$$

$$f' = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 16} \left\{ 6,67 + 4(1,83 + 4,42 + 5,91 + 6,59) + 2(3,29 + 5,28 + 6,34) \right\} = 4,645^m$$

$$u = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2,513 \cdot 16} \left\{ 0,635^2 + 3,385^2 + 4(1,34^2 + 2,39^2 + 3,04^2 + 3,35^2) + 2(1,92^2 + 2,76^2 + 3,23^2) \right\} = 2,773^m$$

$$u' = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2,513 \cdot 16} \left\{ 3,385 \cdot 6,67 + 4(1,34 \cdot 1,83 + 2,39 \cdot 4,42 + 3,04 \cdot 5,91 + 3,35 \cdot 6,59) + 2(1,92 \cdot 3,29 + 2,76 \cdot 5,28 + 3,23 \cdot 6,34) \right\} = 5,265^m;$$

ferner nach den Formeln 7, Seite 110,

$$f_0 = f - \frac{\varphi_0 \delta^2}{6l} = 2,513 - 0,6622 \cdot \frac{0,90^2}{6 \cdot 16} = 2,507^*$$

$$u_0 = u + \frac{\varphi_0 \delta^2}{6l} \frac{h'}{f} = 2,773 + 0,6622 \cdot \frac{0,90^2}{6 \cdot 16} \cdot \frac{9,626}{2,513} = 2,794.$$

Der Horizontalschub ist jetzt nach Formel 4, Seite 110,

$$H = H' \frac{u' - f'}{u_0 - f_0} = 16 \cdot \frac{0,620}{0,287} = 34,56^{\text{tons}}$$

$$\text{und } z = f_0 - \frac{H'}{H} f' = 2,507 - \frac{4,645 \cdot 16}{34,56} = 0,356^m.$$

Die Ordinaten der wirklichen Drucklinie sind

$$\eta = z + \frac{H'}{H} \eta'.$$

Macht man also

$$\overline{DE} = z = 0,356^m, \quad \overline{EL} = H', \quad \overline{LT} \perp \overline{EL} \quad \text{und} \quad \overline{LT} = H = 34,56^{\text{tons}},$$

und zieht man beispielsweise durch den oberen Endpunkt der Ordinate η'_4 eine Horizontale, so ist die Strecke $D_4 E_4$, welche auf dieser Horizontalen durch die Gerade ET und die Verticale DM abgeschnitten wird, gleich der Ordinate η_4 der wirklichen Drucklinie.

*) Die Berechnung von φ_0 und h' sehe man unter III auf Seite 123. Die mittlere Gewölbestärke ist $\delta = 0,90^m$.

Die Werthe η entsprechen dem Falle, in welchem das ganze Gewölbe mit $\frac{1}{2}v$ pro Längeneinheit belastet ist. Nun handelt es sich aber um den annähernd gefährlichsten Fall der Belastung nur der einen (linken) Gewölbehälften. Die Werthe η gehen dann (nach § 28) in $\eta_e = \eta + A\eta$ über und zwar erhält man die $A\eta$ wie folgt (vergl. Seite 117).

Man construirt über der halben Stützweite $A'D'$ eine Parabel mit dem Pfeile

$$d' = \frac{\gamma_m v l^2}{64 H} = \frac{1,6 \cdot 0,25 \cdot 16^2}{64 \cdot 34,56} = 0,046 \text{ m } *)$$

macht $\overline{A'C'} = d'$ und zieht die Gerade $C'D'$. Die Differenzen der Parabelordinaten und der Ordinaten der Geraden $C'D'$ sind die $A\eta$. Auf der rechten Gewölbehälften erhält man dieselben aber entgegengesetzten Werthe.

Jetzt kann man die Ordinaten η_e der Drucklinie für die einseitige Belastung ermitteln. Für Fuge 4 ist z. B. (auf 2 Decimalen abgerundet)

$$\eta_4 = 2,80 \text{ m} \quad A\eta_4 = +0,02 \text{ auf der linken Gewölbehälften}$$

also $A\eta_4 = -0,02 \text{ " " rechten " " ,}$

so dass man erhält:

$$\begin{aligned} \eta_{e4} &= 2,80 + 0,02 = 2,82 \text{ m auf der linken Hälfte} \\ \eta_{e4} &= 2,80 - 0,02 = 2,78 \text{ m " " rechten " " .} \end{aligned}$$

In Fig. 149 ist die Drucklinie für einseitige Belastung dargestellt worden.**)

Für die Fuge 0 erhält man (vergl. auch Fig. 143 auf Tafel 16) auf der belasteten Seite

$$\eta_{e0} = z' = z - d' = 0,356 - 0,046 = 0,31 \text{ m}$$

und auf der unbelasteten (rechten) Seite

$$z'' = z + d' = 0,356 + 0,046 = 0,40 \text{ m.}$$

Die Drucklinie verlässt hier den Kern. Zieht man durch den Punkt s eine radiale Fuge, so misst man auf dieser zwischen Drucklinie und unterer Laibung den Abstand $\xi = 0,23 \text{ m}$. Bedeutet A die verticale linksseitige Auflagerreaction, so ist der Normaldruck auf die radiale Fuge genügend genau:

$$N = A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = \frac{Al + 2Hc}{2r},$$

*) Die Werthe $A\eta$ sind in grösserem Maassstabe aufgetragen worden.

**) Die Drucklinienordinaten sind für die Gewölbehälften

Fuge	0	1	2	3	4	5	6	7	8
links: $\eta_e =$	0,31	1,18	1,88	2,42	2,82	3,12	3,31	3,42	3,44 m
rechts: $\eta_e =$	0,40	1,23	1,88	1,37	2,78	3,07	3,27	3,39	3,44 m

$$\begin{aligned} \text{wo } A &= G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_8 + \frac{5 \gamma_m v l}{32} \\ &= 32,90^{\text{tons}} + \frac{5 \cdot 1,6 \cdot 0,25 \cdot 16}{32} = 33,90^{\text{tons}}, \end{aligned}$$

$$\text{so dass } N = \frac{33,90 \cdot 16 + 2 \cdot 34,56 \cdot 9,17}{2 \cdot 12,17} = 48^{\text{tons}}.$$

Die Beanspruchung des Mauerwerkes beträgt:

$$k = \frac{2N}{3\xi} = \frac{2 \cdot 48}{3 \cdot 0,23} = 140^{\text{tons}} \text{ für den Quadratmeter.}$$

Der zulässige Werth k wird hiernach erreicht. Im Scheitel liegt der Stützpunkt zwischen den Kernpunkten o und u im Abstande $0,18^{\text{m}}$ vom Kernpunkte u . Die Pressung in der obersten Kante der Fuge ist

$$k_0 = \frac{6He_u}{\delta^2} = \frac{6 \cdot 34,56 \cdot 0,18}{0,77^2} = 63^{\text{tons}} \text{ für den Quadratmeter.}$$

III. Analytische Berechnung der Beanspruchung bei einseitiger Belastung, sowie der äusseren Kräfte für das vollbelastete und entlastete Gewölbe. Der Horizontalschub wird nach Formel 9, Seite 111:

$$H = \frac{\gamma_m l^2}{8h} \left\{ h''' - 0,86 h'' \right\} \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{\delta^2}{l} \frac{q_0}{h^2} (h' + y_0 + \frac{2}{3}h)} \quad *)$$

$$\gamma_m = 1,6^{\text{t}}, \quad l = 16^{\text{m}}, \quad h'' = 3,0^{\text{m}}$$

$$r = \frac{(\frac{1}{2}l)^2 + h''^2}{2h''} = \frac{8^2 + 3^2}{2 \cdot 3} = \frac{73}{6} = 12,17^{\text{m}}$$

$$c = r - h'' = \frac{73}{6} - 3 = \frac{55}{6} = 9,17^{\text{m}}$$

$$\cos q_1 = \frac{c}{r} = \frac{55}{73}.$$

Schlusssteinstärke $\delta_0 = 0,77^{\text{m}}$.

$$\text{Kämpferstärke } \delta_1 = \delta_0 \frac{1}{\cos q_1} = 0,77 \cdot \frac{73}{55} = 1,022^{\text{m}}, \text{ wofür } 1,03^{\text{m}}.$$

$$\text{Horizontalprojection der Kämpferfuge } 1,03 \cdot \frac{l}{2r} = 0,677^{\text{m}}.$$

*) Man kann auch schreiben $H = \frac{\gamma_m l^2}{8h} (h''' - 0,86 h'') \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{\delta^2}{h^2}}$, denn es

ist stets sehr nahe $q_0 (h' + y_0 + \frac{2}{3}h) = \frac{1}{2}l$. Im vorliegenden Fall ist z. B. $q_0 (h' + y_0 + \frac{2}{3}h) = 0,6622 (9,626 + 0,635 + \frac{2}{3} \cdot 2,750) = 8,0086$ und $\frac{1}{2}l = 8,000$.

$$\text{Radius der oberen Laibung: } R = \frac{8,677^2 + 3,0^2}{2 \cdot 3,0} = 14,049^{\text{m}}.$$

$$\begin{aligned} 2y_0 &= \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}l)^2} - [R - h'' - \delta_0] \\ &= \sqrt{14,049^2 - 8^2} - [14,049 - 3,0 - 0,77] = 1,270^{\text{m}}, \\ y_0 &= 0,635^{\text{m}}, \quad h = h'' + \frac{1}{2}\delta_0 - \frac{1}{2}y_0 = 2,75^{\text{m}}. \end{aligned}$$

$$\text{Radius der Bogenaxe: } \varrho = \frac{(\frac{1}{2}l)^2 + h^2}{2h} = \frac{8^2 + 2,75^2}{2 \cdot 2,75^{\text{m}}} = 13,011^{\text{m}},$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{l}{2\varrho} = \frac{16}{2 \cdot 13,011} = 0,6148, \quad \varphi_0 = 37^{\circ} 56' 27''.$$

$$\text{Bogenlänge: } \varphi_0 = 0,6622,$$

$$h' = \varrho - h - y_0 = 13,011 - 2,750 - 0,635 = 9,626^{\text{m}},$$

so dass sich bei der mittleren Gewölbestärke $\delta = 0,90^{\text{m}}$ ergiebt:

$$H = \frac{1,6 \cdot 16^2}{8 \cdot 2,75} \left\{ h''' - 0,86 \cdot 3,0 \right\} \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{0,90^2}{16} \cdot \frac{0,6622}{2,75^2} \left\{ 9,626 + 0,635 + \frac{2}{3} \cdot 2,750 \right\}} \\ H = 16,918 h''' - 43,65^{\text{tons}}.$$

Ist das Gewölbe:

$$\begin{array}{lll} \text{unbelastet} & \text{so folgt } h''' = 4,5^{\text{m}} & u. \quad H_u = 32,48^{\text{t}}, \\ \text{total mit } \frac{1}{2}v \text{ belastet} & " & h''' = 4,5 + 0,125^{\text{m}} \quad u. \quad H = 34,59^{\text{t}}, \\ \text{total mit } v \text{ belastet} & " & h''' = 4,5 + 0,25^{\text{m}} \quad u. \quad H_v = 36,71^{\text{t}}. \end{array}$$

Der Werth $H = 34,59^{\text{t}}$ entspricht auch der Belastung der einen Gewölbehälfte mit v bei unbelasteter zweiter Hälfte (Fig. 143).

Nun ist weiter (Formel 8, Seite 111):

$$H'f' = \frac{\gamma_m}{96} \left\{ 2l^2 4h''' - 12\varphi_1 \frac{r^2}{l} (l^2 - r^2) - c(6r^2 - 5l^2) \right\},$$

worein zu setzen: $r = \frac{7}{6}^3$, $c = \frac{5}{6}^5$, $l = 16$, $\gamma_m = 1,6$

$$\sin \varphi_1 = \frac{l}{2r} = 0,6575, \quad \varphi_1 = 41^{\circ} 6' 44''.$$

Bogenlänge: $\varphi_1 = 0,7175$, mithin:

$$H'f' = \frac{102,4}{3} h''' - 83,47.$$

Ist das Gewölbe:

$$\begin{array}{lll} \text{unbelastet} & \text{so folgt } (H'f')_u = 70,13^{\text{t}}, \\ \text{total mit } \frac{1}{2}v \text{ belastet} & " & H'f' = 74,39^{\text{t}}, \\ \text{total mit } v \text{ belastet} & " & (H'f')_v = 78,66^{\text{t}}. \end{array}$$

Nach Formel 10, Seite 111, ist

$$f = \frac{\varrho^2 \varphi_0}{l} - \frac{h'}{2} + \frac{y_0}{2}$$

und nach Formel 7, Seite 110:

$$\begin{aligned} f_0 &= f - \frac{\varphi_0 \delta^2}{6l} = \frac{\varphi_0}{l} \left(\varrho^2 - \frac{\delta^2}{6} \right) - \frac{h'}{2} + \frac{y_0}{2} \\ &= \frac{0,6622}{16} \left(13,011^2 - \frac{0,9^2}{6} \right) - \frac{9,626}{2} + \frac{0,635}{2} = 2,504^m, \end{aligned}$$

und ergeben sich jetzt nach der Formel:

$$z = f_0 - \frac{H'f'}{H} \quad \text{die Werthe:}$$

bei unbelastetem Gewölbe

$$z_u = 2,504 - \frac{70,13}{32,48} = 0,338^m,$$

bei total mit $\frac{1}{2}v$ belastetem Gewölbe

$$z = 2,504 - \frac{74,39}{34,59} = 0,356^m,$$

bei total mit v belastetem Gewölbe

$$z_v = 2,504 - \frac{78,66}{36,71} = 0,355^m.$$

Die Werthe z sind (Fig. 144) die Ordinaten der Stützpunkte der verticalen Kämpferfugen; durch dieselben ist die horizontale Schlusslinie der wirklichen Drucklinie gegeben.

Ist die linke Hälfte des Gewölbes mit v belastet, die rechte dagegen unbelastet, so sind (Fig. 149) die Ordinaten der Stützpunkte in den verticalen Kämpferfugen (vergl. auch Seite 117 und Fig. 143)

$$\text{links: } z' = z - d' = z - \frac{\gamma_m v l^2}{64 H},$$

$$\text{rechts: } z'' = z + d' = z + \frac{\gamma_m v l^2}{64 H}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{\gamma_m v l^2}{64 H} = \frac{1,6 \cdot 0,25 \cdot 16^2}{64 \cdot 34,59} = 0,046^m, \quad \text{mithin:}$$

$$z' = 0,356 - 0,046 = 0,31^m,$$

$$z'' = 0,356 + 0,046 = 0,40^m.$$

Den Abstand ξ in Fig. 149 kann man setzen:

$$\xi = z' \frac{c}{r} = 0,31 \cdot \frac{5\frac{5}{8}}{7\frac{3}{8}} = 0,23^m.$$

Das Gewicht der unbelasteten Gewölbehälften ist:

$$G_u = \frac{\gamma_m l}{2} \left\{ h''' - \frac{r^2 \varphi_1}{l} + \frac{c}{2} \right\} = 1,6 \cdot 8 \left\{ 4,5 - \frac{12,17^2 \cdot 0,7175}{16} + \frac{9,17}{2} \right\},$$

$$G_u = 31,3^{\text{tons}}.$$

Die halbe mobile Belastung wiegt:

$$\gamma_m v \frac{l}{2} = 1,6 \cdot 0,25 \cdot 8 = 3,2^{\text{tons}}.$$

Mithin sind die verticalen Auflagerreactionen:

bei unbelastetem	Gewölbe	$A_u = 31,30,$
„ total mit $\frac{1}{2} v$ belastetem	„	$A = 31,30 + 1,60 = 32,90,$
„ „ „ v	„	$A_v = 31,30 + 3,20 = 34,50.$

Ist die linke Gewölbehälfte mit v belastet, die rechte unbelastet, so folgt die linksseitige Reaction:

$$A_e = 32,90 + \frac{5 \gamma_m v l}{32} = 32,90 + \frac{5 \cdot 1,6 \cdot 0,25 \cdot 16}{32}$$

$$= 32,90 + 1,0 = 33,90^{\text{tons}}$$

und die rechtsseitige (auf der unbelasteten Seite)

$$B_e = 32,90 - 1,0 = 31,90^{\text{tons}}.$$

Jetzt berechnet man wie vorhin (sub II, Seite 121) für die linke Kämpferfuge:

$$N = A \sin \varphi_0 + H \cos \varphi_0 = 48^{\text{tons}} \quad \text{und}$$

$$k = \frac{2N}{3\xi} = \frac{2 \cdot 48}{3 \cdot 0,23} = 140^{\text{tons}} \quad \text{für den Quadratmeter.}$$

Hinzugefügt sei noch, dass bei Stichbögen die grösste Beanspruchung stets für die Kämpferfuge erhalten wird, und dass desshalb das Zeichnen der Drucklinie überflüssig ist. Es genügen hier stets die sub III durchgeführten Rechnungen.

Wollte man das vorliegende Gewölbe nach der älteren Theorie berechnen, so würde man sich schnell überzeugen, dass eine Reihe von Drucklinien im Kern möglich sind, und es würde sich die Beanspruchung etwa halb so gross ($k = 70^t$ für den Quadratmeter) ergeben. Man erwäge aber, dass sehr wohl eine noch grössere Beanspruchung als $k = 140$ auftreten kann, denn die hier abgeleiteten Elasticitätsgleichungen basirten auf der Annahme starrer Widerlager, während in Wirklichkeit die Widerlager Verschiebungen erfahren werden, die — weil der Grösse nach unbekannt — sich rechnungsmässig nicht berücksichtigen lassen. Ferner kann durch das Setzen des Lehrgerüstes sowie durch Erniedrigung der

Temperatur die Beanspruchung vergrössert werden; denn alle diese Störungen wirken — wie zuerst Winkler betont hat — auf die Pressung k in demselben Sinne. Andererseits ist aber hervorzuheben, dass der zur Zeit rechnerisch uncontrollirbare Einfluss der Uebermauerung jedenfalls günstig wirkt, so dass die vorhin erwähnten Störungen zum Theile paralysirt werden.

So viel dürfte aber feststehen, dass die Theorie der günstigsten Drucklinie bei schwer belasteten Brückengewölben zweckmässig verlassen wird.

IV. Berechnung des Landwiderlagers. Es sollen die Dimensionen des Widerlagers auf analytischem Wege festgestellt werden. Die Bezeichnungen sind aus Figur 150 Tafel 18 zu ersehen. Es bedeutet

V die verticale Componente des Kämpferdruckes des Gewölbes,

H den Horizontalschub des Gewölbes,

E den nach Rankine bestimmten Erddruck,

M das für den Mittelpunkt m der Fuge AB gebildete Moment der horizontalen Kräfte E und H , wobei H positiv drehend angenommen ist.

Der Stützpunkt s habe vom Mittelpunkte m der Fuge AB den Abstand e . Ferner sei N die normal zu AB gerichtete Componente des Druckes auf Fuge AB , und zwar sei speciell unter N die Reaction des Fundamentes gegen Fuge AB verstanden.

Ist dann M_m das Angriffsmoment für den Punkt m , so folgt $Ne = M_m$, also:

$$e = \frac{M_m}{N};$$

ferner die Beanspruchung des Mauerwerkes bei B ,

1) wenn s im Kerne liegt,

$$k = \frac{N}{b} + \frac{6M_m}{b^2}$$

2) wenn s ausserhalb des Kernes liegt,

$$k = \frac{2N}{3\xi} = \frac{2N}{3(0,5b - e)} = \frac{2N}{3\left(0,5b - \frac{M_m}{N}\right)}$$

Setzt man in diese Gleichungen

$$M_m = M - V \frac{b}{2}$$

$$N = \gamma_m b h_o + V,$$

und entwickelt dann b , so erhält man beziehungsweise

$$1) \quad b = \frac{-V + \sqrt{6M(k - \gamma_m h_o) + V^2}}{k - \gamma_m h_o} \text{ und}$$

$$2) \quad b = \frac{-V}{\gamma_m h_o} + \sqrt{\frac{6Mk + 4V^2}{\gamma_m h_o (3k - 4h_o \gamma_m)} + \frac{V^2}{\gamma_m^2 h_o^2}}.$$

Die Sicherheit gegen Gleiten auf Fuge $A'B'$ verlangt bei nicht hinterfülltem Widerlager $\mu(\gamma_m b h'' + V) \geq H$ (wo μ = Reibungscoefficient), so dass mindestens

$$3) \quad b = \frac{H - \mu V}{\mu \gamma_m h''}$$

sein muss.

Der grösste der berechneten Werthe b ist zu wählen.

Wir setzen das Widerlager unbelastet, das Gewölbe voll belastet voraus. Dann ist $V = 34,5^{\text{tons}}$, $H = 36,71^{\text{tons}}$. Den Erddruck pflegt man bei Berechnung nicht zu hoher Widerlager gewölbter Brücken zu vernachlässigen, gestattet aber dafür eine erheblich grössere Inanspruchnahme des Materials. Das Moment der Horizontalkräfte wird dann $M = H_v (h' + z_v) = 36,71 (6 + 0,36) = 233,48^{\text{tm}}$ und man erhält, wenn man die zulässige Inanspruchnahme des Widerlagermauerwerks von dem unter normalen Verhältnissen einzuführenden Werthe $k = 70$ auf $k = 100^{\text{tons}}$ pro Quadratmeter erhöht, mit $h_o = 6 + 4,5 = 10,5^{\text{m}}$, nach Formel 2

$$b = -\frac{34,5}{1,6 \cdot 10,5} + \sqrt{\frac{6 \cdot 100 \cdot 233,48 + 4 \cdot 34,5^2}{1,6 \cdot 10,5 (3 \cdot 100 - 4 \cdot 10,5 \cdot 1,6)}} + \frac{34,5^2}{1,6^2 \cdot 10,5^2} \\ = \infty 4,4^{\text{m}}).$$

Die Formeln 2 und 3 liefern kleinere Werthe b **)

Um die Abmessung c (Fig. 150) zu bestimmen, bezeichnen wir mit M' das Moment der horizontalen Kräfte für einen Punkt der Fundamentsohle und erhalten für den Stützpunkt s' der Sohle die (genäherte) Momentengleichung:

$$M' = V(b + c - \xi') + \gamma_m b h (0,5 b + c - \xi') .$$

*) Mit Rücksichtnahme auf E wird

$$M = 233,48 - \frac{1}{3} \gamma_e h_o^2 \frac{h_o}{3} = 233,48 - \frac{1}{24} \cdot 10,5^3 \cdot 1,6 = 156,31^{\text{tm}}$$

und man erhält mit $k = 70$ den Werth $b = \infty 3,7^{\text{m}}$.

Wird das Gewölbe auf der rechten Hälfte belastet, auf der linken unbelastet angenommen, so ist $H = 34,59^{\text{tons}}$ zu setzen und $M = 34,59 (6,0 + z'') = 34,59 \cdot 6,4 = 221,376$, ferner $V = 31,9$. Man erhält dann $b = 4,3 < 4,4^{\text{m}}$.

Sehr hohe Widerlager müssen noch unter der Voraussetzung berechnet werden, dass das Gewölbe zerstört ist (beispielsweise durch Sprengung) und die das Widerlager hinterfüllende Erde belastet wird. Es werden dann die für Futtermauern abgeleiteten Regeln anwendbar.

**) Man berechne b zuerst aus Formel 2. Ist dann $\frac{M_m}{V + \gamma_m b h_o} > \frac{b}{6}$, so liefert Formel 1 ein kleineres Resultat. Im vorliegenden Falle ist

$$\frac{M_m}{V + \gamma_m b h_o} = \frac{233,48 - 34,5 \cdot \frac{4,4}{2}}{34,5 + 1,6 \cdot 4,4 \cdot 10,5} = 1,4 > \frac{4,4}{6} = 0,73,$$

also das Resultat aus Formel 2 beizubehalten.

Aus dieser folgt:

$$4) \quad c = \frac{M' - V(b - \xi') - \gamma_m b h (0,5 b - \xi')}{V + \gamma_m b h}.$$

Darein ist zu setzen

$$5) \quad \xi' = \frac{2(V + \gamma_m b h)}{3 k'},$$

wo k' die zulässige Pressung des Baugrundes bedeutet.

Nun ist $h = 10,5 + 1,5 = 12 \text{ m}$, $M' = 36,71(6,36 + 1,5)^*$) = 288,54tm und $k' = 45 \text{ tons}$ pro Quadratmeter, wofür aber — da der hier gewählte Belastungsfall nie eintreten wird — $k' = 55$ gesetzt werden soll. Dessenhalb folgt

$$\xi' = \frac{2(34,5 + 1,6 \cdot 4,4 \cdot 12)}{3 \cdot 55} = \frac{2 \cdot 118,98}{3 \cdot 55} = 1,44$$

$$c = \frac{288,54 - 34,5(4,4 - 1,44) - 1,6 \cdot 4,4 \cdot 12(0,5 \cdot 4,4 - 1,44)}{118,98} = 1,03 \text{ m}.$$

V. Berechnung des Mittelpfeilers. Es bedeuten (Fig. 151) V' und V'' die verticalen Componenten der Kämpferdrücke der durch den H' „ H'' „ horizontalen „ Pfeiler gestützten Gewölbe, M_m das Angriffsmoment in Bezug auf den Mittelpunkt der Fuge AB . Dann folgt die Pressung bei B

$$k = \frac{N}{b} + \frac{6 M_m}{b^2}.$$

Setzt man $N = b \gamma_m h_0 + V$, wo

$$V = V' + V''$$

und löst die Gleichung nach b auf, so erhält man:

$$6) \quad b = \frac{V + \sqrt{24 M_m (k - \gamma_m h_0) + V^2}}{2(k - \gamma_m h_0)}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass der Stützpunkt s im Kerne liegt. An dieser Bedingung empfiehlt es sich bei Mittelpfeilern festzuhalten; man gestatte höchstens $e = \frac{1}{6} b$; d. h.

$$\frac{M_m}{N} = \frac{b}{6} \quad \text{d. i.} \quad \frac{M_m}{b \gamma_m h_0 + V} = \frac{b}{6}.$$

Dann muss mindestens sein:

$$7) \quad b = \frac{-V + \sqrt{24 M_m \gamma_m h_0 + V^2}}{2 \gamma_m h_0}.$$

* Der Erddruck ist wieder vernachlässigt worden.

Man berechne b zuerst aus Formel 6. Stellt sich dann

$$\frac{M_m}{b \gamma_m h_0 + V} > \frac{b}{6}$$

heraus, so bestimme man b aus Formel 7.

Wird nun das rechts an den Pfeiler schliessende Gewölbe vollbelastet, das links gelegene Gewölbe unbelastet angenommen, so ist

$$H' = H_v = 36,71^{\text{tons}} \text{ in der Höhe } 6,36^{\text{m}} \quad \text{angreifend und}$$

$$H'' = H_u = 32,48^{\text{tons}} \quad " \quad " \quad 6,0 + z_u = 6,34^{\text{m}} \quad "$$

Ferner ist $V' = 34,50^{\text{tons}}$ und $V'' = 31,30^{\text{tons}}$, also $V = V' + V'' = 65,80^{\text{tons}}$, mithin genügend genau*):

$$M_m = 36,71 \cdot 6,36 - 32,48 \cdot 6,34 = 27,55^{\text{tm}}$$

und, wegen $h_0 = 10,5^{\text{m}}$, nach Formel 6

$$b = \frac{65,80 + \sqrt{24 \cdot 27,55 (70 - 1,6 \cdot 10,5) + 65,8^2}}{2 (70 - 1,6 \cdot 10,5)} = \approx 2,2^{\text{m}}.$$

Der Werth b ist brauchbar, weil

$$\frac{M_m}{\gamma_m b h_0 + V} = \frac{27,55}{1,6 \cdot 2,2 \cdot 10,5 + 65,8} = 0,27 < \frac{b}{6} = 0,37.$$

Im Gegenfalle wäre Formel 7 anzuwenden.

Um die Abmessung b' des Fundaments (Fig. 151) zu berechnen, bezeichnen wir mit M'_m das Angriffsmoment für den Mittelpunkt der Sohle $A'B'$, mit N' den Normaldruck auf $A'B'$ und setzen in die Formel

$$k' = \frac{N'}{b'} + \frac{6 M'_m}{b'^2}$$

genügend genau:

$$N' = \gamma_m b h + V' + V''.$$

Die Formel liefert

$$8) \qquad b' = \frac{N' + \sqrt{24 M'_m k' + N'^2}}{2 k'}.$$

Die Bedingung $e' = \frac{M'_m}{N'} = \frac{b'}{6}$ führt zu

$$9) \qquad b' = \frac{6 M'_m}{N'}.$$

*) Das Moment $-V' \cdot 0,5 b + V'' \cdot 0,5 b = -0,5 b (V' - V'')$ darf man bei Brückengewölben stets vernachlässigen.

Im vorliegenden Falle ist $h = 10,5 + 1,5 = 12^{\text{m}}$

$$N' = 1,6 \cdot 2,2 \cdot 12 + 65,8 = 108,04^{\text{tons}}$$

$$M'_m = 36,71(6,36+1,5) - 32,48(6,34+1,5) - 34,50 \cdot \frac{2,2}{2} + 31,30 \cdot \frac{2,2}{2} = 30,38^{\text{tm}}$$

$k' = 45^{\text{tons}}$ für den Quadratmeter, also

$$b' = \frac{108 + \sqrt{24 \cdot 30,38 \cdot 45 + 108^2}}{2 \cdot 45} = \infty 3,5^{\text{m}}.$$

Formel 9 liefert ein kleineres b .

§ 30. Die Minimaldrucklinie.

96) **Construction der Minimaldrucklinie.** Durch den Scheitel eines symmetrisch construirten und symmetrisch belasteten Tonnengewölbes (Fig. 152) werde ein Schnitt geführt und nach Entfernung der rechten Gewölbehälften deren Wirkung durch den Scheiteldruck H ersetzt. Es soll nun untersucht werden, ob sich in den Kern des Gewölbes eine Drucklinie zeichnen lässt, und zwar möge von den verschiedenen, im Allgemeinen möglichen Drucklinien diejenige bestimmt werden, welche den kleinsten Horizontalschub erfordert. Dieselbe soll Minimaldrucklinie genannt werden.

Da die Kraft H offenbar um so kleiner zu sein braucht, je höher ihr Angriffspunkt liegt, soll zunächst der obere Kernpunkt o der Scheitelfuge zum Angriffspunkte von H gewählt werden.

Bedeutet nun u den unteren Kernpunkt irgend einer [mit (n) bezeichneten] verticalen Fuge, G das Gewicht des Gewölbetheiles zwischen dieser Fuge und der Scheitelfuge und verbindet man u mit dem Schnittpunkte C der Kräfte G und H , so erhält man durch Zerlegen von G nach den Richtungen oC und uC denjenigen Werth, welchen der Horizontalschub annehmen muss, wenn der Punkt u Angriffspunkt des auf die Fuge (n) wirkenden Druckes D werden soll. Der so gefundene Horizontalschub sei H_n genannt. Verkleinert man H_n um ΔH_n , so resultirt aus G und $H_n - \Delta H_n$ ein Druck D' auf Fuge (n) , welcher die Fuge unterhalb u schneidet, und es wird mithin die mit $H_n - \Delta H_n$ gezeichnete Drucklinie den Kern verlassen. Einen kleineren Werth als H_n darf der Horizontalschub hiernach nicht annehmen.

Je nach der Lage der Fuge (n) wird H_n verschieden ausfallen. Denkt man H_n für sämmtliche Fugen des Gewölbes construirt, so findet man in dem grössten der Werthe H_n denjenigen Werth, welchen H mindestens haben muss. Es ist also

$$\min H = \max H_n.$$

Um nun $\max H_n$ für das in Figur 153 dargestellte Gewölbe zu bestimmen, wurde das Gewölbe in Lamellen zerlegt und zu den Lamellen gewichteten $G_1, G_2, G_3 \dots$ mit beliebiger Poldistanz H' ein Seilpolygon (blaue Linien) gezeichnet, dessen erste Seite horizontal liegt. Dasselbe dient zur Bestimmung der Lage der Resultirenden aus einer Reihe von Kräften G . Soll jetzt beispielsweise H_6 für die Fuge (6) gefunden werden, so ermittelt man die Lage der Resultirenden $R_6 = G_1 + G_2 + \dots + G_6$ aus den Gewichten G rechts von Fuge (6), bringt H mit R_6 in C_6 zum Schnitte, verbindet C_6 mit u_6 und zerlegt R_6 nach den Richtungen $C_6 o$ und $C_6 u_6$ in D_6 und H_6 . Da nun R_6 im Kräfteplane zwischen den Seilstrahlen H' und VI' liegt, geht R_6 durch den Schnittpunkt C_6 der Seilpolygonseiten H' und VI' . Hiernach ist die Construction von H_6 schnell durchzuführen. Ganz analog kann man die Werthe H_n für die übrigen Fugen finden und überzeugt sich dann, dass alle diese Werthe kleiner als H_6 ^{*)} sind, dass also

$$\min H = H_6$$

ist. Construirt man jetzt mit dem Horizontalschube H_6 eine Drucklinie und findet, wie dies hier der Fall ist, dass die Linie vollständig innerhalb des Kernes liegt, so ist das Gewölbe nach der älteren Theorie stabil, vorausgesetzt, dass die Pressungen an keiner Stelle die zulässigen Werthe überschreiten. Diese Pressungen berechne man nach den früher entwickelten Regeln für diejenigen Fugen, in denen sich die Drucklinie den Kernlinien am meisten nähert. Erweisen sich diese Pressungen grösser als zulässig, so könnte man — nach den Grundsätzen der älteren Gewölbetheorie — allerdings versuchen, eine näher der Bogenaxe liegende günstigere Drucklinie zu zeichnen; besser aber wird es sein, Form oder Stärke des Gewölbes zu ändern oder sich für ein widerstandsfähigeres Material zu entscheiden. Denn der vielfach ausgesprochene Satz, dass die günstigste Drucklinie auch die wirkliche ist, ist nichts als eine ungewisse und zudem höchst unwahrscheinliche Behauptung. Der Verfasser hat in einer grösseren Reihe von ihm behandelten Fällen gefunden, dass bei hohen Bögen die unter Zugrundelegung der Minimaldrucklinie berechneten Pressungen von den nach der Elasticitätstheorie ermittelten nur wenig abweichen und glaubt daher die Anwendung der soeben vorgetragenen Methode für die Berechnung hoher Gewölbe empfehlen zu können.

Zu betonen bleibt noch, dass die Minimaldrucklinie nicht immer durch den Kerpunkt o der Scheitelfuge geht.

Zeichnet man nämlich (Fig. 154) durch den Punkt o der Scheitelfuge eine Drucklinie, welche die untere Kernlinie berührt, so kann es vorkommen, dass diese Drucklinie (namentlich bei geringer Belastung des Scheitels, bei

^{*)} H_5 ist fast gleich H_6 .

schweren Lasten nahe den Widerlagern und bei Spitzbogenform) unmittelbar hinter der Scheitelfuge den Kern verlässt. Man muss dann einen Punkt a (Fig. 155) unterhalb o zum Angriffspunkte von H machen und seine Lage (wol am besten durch Probiren) so bestimmen, dass die von a aus tangential an die untere Kernlinie gezeichnete Drucklinie auch die obere Kernlinie berührt. Es kann vorkommen, dass Punkt a mit dem unteren Kernpunkte u der Scheitelfuge zusammenfallen muss.

97) Minimalstützlinie eines Gewölbes, welches durch den Druck cohäsionsloser Erde beansprucht wird. Das in Fig. 156 auf Tafel 18 dargestellte symmetrische Gewölbe sei durch oben horizontal abgeglichenen, cohäsionslos angenommene Erde mit dem natürlichen Böschungswinkel $\varrho = 37^\circ$ belastet. Die mobile Belastung der Einheit der Terrainfläche sei p und möge durch eine Erdschicht von gleicher Schwere und der Höhe $h_r = \frac{p}{\gamma_e}$ ersetzt werden. Der Erddruck für die Druckhöhe h ist dann (nach der Rankine'schen Theorie, Seite 81) genügend genau:

$$E = \frac{1}{8} \gamma_e h^2 ,$$

und wurde desshalb dem Druckdreiecke ABF die Basis $\frac{1}{4}h$ gegeben. Erde und Mauerwerk sind gleich schwer angenommen. $\gamma_m = \gamma_e = \gamma$.

Um den Erddruck auf irgend einen Theil JJ' der äusseren Laibung zu bestimmen, wurden durch J und J' verticale Schnitte geführt, ferner durch J und J' Horizontalen gezogen. Es repräsentirt dann $\triangle L BK$ den parallel der Terrainfläche, also horizontal wirkenden Erddruck auf die verticale Fläche JN , und $\triangle L' BK'$ den Erddruck auf die verticale Fläche $J' N'$. Die Differenz E'_4 dieser Drücke ist durch das Trapez $LL'K'K$ dargestellt. Setzt man diese Druckdifferenz mit dem Gewichte G_4 des Erdprismas $JNN'J'$ zu einer Resultirenden zusammen, so erhält man in dieser den Druck E_4 auf Fläche $J'J$.

Um E_4 graphisch darzustellen, verlängern wir die Sehne JJ' bis zu ihrem Schnittpunkte M' mit der Terrainfläche, halbiren NN' in M und bezeichnen mit η_4 den Verticalabstand des Punktes M von der Sehne JJ' ferner mit:

λ_4 die Länge der Strecke NN' ,

η'_4 " " " " " MM' ,

λ'_4 " " " " " LL' ,

c_4 " mittlere Breite $L''K''$ des Trapezes $L'LKK'$.

Es ist dann:

$$G_4 = \gamma \lambda_4 \eta_4$$

$$E'_4 = \gamma \lambda'_4 c_4$$

mithin:

$$\frac{G_4}{E'_4} = \frac{\lambda_4 \eta_4}{\lambda'_4 c_4} .$$

Da nun $\frac{\eta_4}{\eta'_4} = \frac{\lambda'_4}{\lambda_4}$ also $\eta_4 = \eta'_4 \frac{\lambda'_4}{\lambda_4}$ ist, so folgt:

$$\frac{G_4}{E'_4} = \frac{\eta'_4}{c_4}.$$

Macht man also $\overline{L''T} = \eta'_4$ und verbindet K'' mit T , so giebt die Richtung dieser Verbindungslinie die Richtung von E_4 an, und es ist:

$$\frac{E_4}{E'_4} = \frac{K'' T}{c_4}, \quad \text{mithin} \quad E_4 = \gamma \lambda'_4 \overline{K'' T}.$$

Die Kraft E_4 geht durch den Schnittpunkt von E'_4 und G_4 . E'_4 geht durch den Schwerpunkt S_4 des Trapezes $L' L K K'$.

Es soll nun E_4 mit dem Gewichte G'_4 des zwischen den Fugen (3) und (4) gelegenen Gewölbetheiles zu der Resultirenden R_4 vereinigt werden. Dazu verwandeln wir das zwischen den Fugen (3) und (4) liegende Stück der Stirnfläche in ein Rechteck, dessen eine Seite $= \lambda'_4$ ist. Die andere Seite sei d_4 . Macht man dann $\overline{TU} = d_4$, so liefert die Gerade $K'' U$ die Richtung von R_4 , und es wird:

$$R_4 = \gamma \lambda'_4 \overline{K'' U}.$$

Wird jetzt \overline{VW} gleich der beliebig zu wählenden Strecke $B^*)$ gemacht, ferner $\overline{VP} = \overline{K'' U}$, dann $\overline{WW'} \perp \overline{VW}$ und $= \lambda'_4$ gemacht, und in P ein Loth errichtet, welches die Gerade VW' in P' schneidet, so ist:

$$R_4 = \gamma B \cdot \overline{PP'}.$$

Wir stellen die Kraft R_4 durch die Strecke PP' dar, müssen also, wenn wir B in Metern ausdrücken, alle dem Kräfteplane zu entnehmenden Kräfte in Metern messen und mit γB multipliciren. B muss so gewählt werden, dass der Multiplikator γB eine bequeme Zahl wird.

Ganz analog werden die Kräfte $R_1, R_2, R_3 \dots$ construirt.

Nachdem zu den Kräften $R_1, R_2, R_3 \dots$ mit dem beliebigen Pole O' ein Seilpolygon gezeichnet worden ist, wird der Horizontalschub des Gewölbes durch den oberen Kernpunkt der Scheitelfuge gehend angenommen und zur Bestimmung von $\min H = \max H_n$ geschritten.

Um nun beispielsweise den der Fuge 3 entsprechenden Horizontalschub H_3 zu finden, wird die Resultirende D_3 aus den Kräften R_1, R_2 und R_3 construirt. Sie geht durch den Schnittpunkt C'_3 der Seilpolygonseiten S' und III' und trifft H im Punkte C_3 . Verbindet man C_3 mit dem unteren Kernpunkte u_3 von Fuge (3) und zerlegt hierauf D_3 nach den Richtungen $C_3 o$ und $C_3 u_3$, so erhält man den Horizontalschub H_3 .

^{*)} Diese Strecke B ist der Construction sämmtlicher Kräfte R zu Grunde zu legen; sie ist also die Reductionsbasis.

Durch analoge Construction der Werthe H_n für die übrigen Fugen überzeugt man sich, dass $H_3 = \max H_n$ ist. Es wurde desshalb die Minimalstützlinie mit der Poldistanz H_3 gezeichnet*); dieselbe geht durch den äusseren Kernpunkt der Fuge 7, ist also die einzige, innerhalb des Kernes mögliche Stützlinie.

Jetzt ist die Lage sämmtlicher Stützpunkte gegeben. Die Seilstrahlen H_3, I, II, \dots stellen die Drücke auf die Fugen (0), (1), (2), ... dar; sie werden parallel und normal zu den Fugen in Componenten zerlegt, worauf mittelst Einführung der normalen Componenten N in die Formeln 1 auf Seite 99 die Pressungen k zu bestimmen sind.

*) Man beachte, dass Seilpolygonseite III die Kraft R_4 unterhalb Fuge (4) schneidet. Da nun Seilpolygonseite IV den Druck auf Fuge (4) darstellt, muss IV nach oben verlängert und mit Fuge (4) zum Schnitte gebracht werden. Das Analoge gilt von Polygonseite V.



Anhang.

Einige Angaben über die Belastung der Bauconstructionen.*)

1) Brückenträger.

a. Permanente Belastung. Bei Strassenbrücken von $7,5^m$ Totalbreite ist, wenn l die Stützweite im Metern bedeutet:

bei Anwendung einer $0,2^m$ dicken Beschotterung:

$$p = 3600 + 42l \text{ Kilogramm pro Meter,}$$

bei Anwendung von doppelter eichener Bedielung:

$$p = 1300 + 28l \text{ Kilogramm pro Meter.}$$

Bei Eisenbahnbrücken ist $p = 700 + 25l$ bis $p = 800 + 30l$.

b. Veränderliche Belastung. Bei Strassenbrücken rechnet man in der Regel als Verkehrslast ein Menschengedränge von 400^k pro Quadratmeter. Der Maximaldruck des Rades eines sehr schweren Wagens beträgt 5000^k , der Radstand $4,5^m$. Diese Belastung kommt aber nur ausnahmsweise vor.

Bei Eisenbahnbrücken bilde man einen „Normalzug“, und empfiehlt der Verfasser die aus Figur 24^a, Tafel 3, ersichtlichen Radstände und Axenbelastungen.

2) Dachconstructionen.

a. Eigengewichte in Kgr. pro Q.-M der Horizontalprojection der Dachfläche.
 h = Höhe des Daches; l = Spannweite.

Art der Eindeckung	$\frac{h}{l} =$									
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	
Holzspalten	Einfache Ziegellage	141	120	112	—	—	—	—	—	
	Doppelte	176	150	140	—	—	—	—	—	
	Schiefer	106	90	84	81	—	—	—	—	
	Asphalt mit Lehmunterlage	106	90	84	81	79	78	77	77	77
	“ Fliessunterlage	141	120	112	108	105	104	103	102	102
	Theerpappe	42	36	34	32	32	31	31	31	31
	Zink- oder Eisenblech	56	48	45	43	42	42	41	41	41
Metall-sparren	Ebenes Eisenblech	35	30	28	27	26	26	26	26	26
	Zinkwellenblech	34	29	27	26	25	25	25	25	24
	Eisenwellenblech	31	26	25	24	23	23	23	23	22
	Schiefer auf Winkeleisen	71	60	56	54	53	52	52	51	51

b. Schneelast 75^k pro Quadratmeter Horizontalprojection.

c. Belastung durch Wind $120 \sin^2(\beta + 10)$ Kilogramm pro Quadratmeter Horizontalprojection (wo β = Neigungswinkel der Dachfläche gegen die Horizontale).

J. J. Löw 1895. J. 481.

*) Ausführliche Angaben u. A. in Heinzerling: „Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken und Hochbauconstructionen.“

3) Totalbelastung von Zwischendecken.

Art der Decke	Kgr. pro Q.-M.
Balkenlage mit einfacher Dielung oder Stakung	280
Desgl. gestreckter Windelboden mit Lehmstrich	430
Desgl. ausgestakt und verschalt in Wohnhäusern	500
Desgl. bei Tanzsälen	710
Desgl. in Werkstätten	760
Desgl. mit ganzem Windelboden	580
Balkenlage in Kornspeichern	850
Dachbalkenlage in Wohngebäuden	735
Gewölbte Decken zwischen eisernen Trägern, $\frac{1}{2}$ Stein stark, mit Hintermauerung, Fussbodenlage und Dielung	750
Dieselbe Decke ohne Fussboden	700
Desgl., $\frac{1}{4}$ Stein stark, mit Fussboden	525
Desgl. ohne Fussboden	485
Decke in Salzspeichern, wenn 3 Tonnenreihen über einander liegen	800
Balkenlage in Wollspeichern	750
Dachflächen in der Horizontalprojection gemessen, incl. Schnee- und Winddruck	250

4) Gewölbte Brücken.

Die Verkehrslast beträgt:

400—600^k pro Quadratmeter bei Strassenbrücken,
1200—1600^k " " " Eisenbahnbrücken.

B e r i c h t i g u n g e n.

Seite 67 Zeile 14 v. u. lies: von A nach D statt von A nach B.

Seite 96 Zeile 5 v. o. lies: Fig. 130 statt Fig. 129.

Tafel 13 Fig. 118 ist 90° der Winkel zwischen den Linien I u. II und nicht, wie auf einigen Exemplaren, der Winkel zwischen II und der Wand.

Tafel 13 Fig. 115: Das schraffirte Dreieck ist mit A, B und C zu bezeichnen. Der Buchstabe B fehlt auf einigen Exemplaren.