

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

Tomasz Wróblewski

**Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych
do oceny charakterystyk dynamicznych płytowo-belkowych
układów konstrukcyjnych**

Szczecin 2019

Recenzenci

Dr hab. inż. PIOTR PAWEŁKO, prof. ZUT

Dr hab. inż. MACIEJ SZUMIGAŁA, prof. PP

Korekta

WOJCIECH MARKOWSKI

Wydano za zgodą

REKTORA ZACHODNIOPOMORSKIEGO UNIwersYTETU TECHNOLOGICZNEGO W SZCZECINIE

ISBN 978-83-7663-284-1

Wydawnictwo Uczelniane Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie

Al. Piastów 48, 70-311 Szczecin, tel. +48 91 449 4760, e-mail: wydawnictwo@zut.edu.pl

Druk PPH „ZAPOL” Sobczyk Sp.j., al. Piastów 42, 71-062 Szczecin

SPIS TREŚCI

1. Wprowadzenie	5
2. Analiza stanu zagadnienia.....	7
2.1. Płytkowo-belkowe układy konstrukcyjne w budownictwie	7
2.1.1. Konstrukcje jednomateriałowe	7
2.1.2. Zespólone konstrukcje wielomateriałowe	9
2.2. Drgania płyt usztywnionych	14
2.3. Metoda sztywnych elementów skończonych	18
3. Cel i zakres pracy	21
4. Modelowanie układów płytowo-belkowych w konwencji metody SES.....	23
4.1. Informacje podstawowe	23
4.2. Modelowanie elementów belkowych.....	25
4.3. Modelowanie płyt izotropowych umiarkowanie grubych	28
4.4. Modelowanie płyt usztywnionych belkami	33
4.4.1. Informacje ogólne.....	33
4.4.2. Układ płyta-belka z zespoleniem sztywnym	34
4.4.3. Układ płyta-belka z zespoleniem podatnym.....	36
4.5. Zastosowanie systemu MATLAB do modelowania w konwencji metody SES.....	38
4.6. Współczynniki ścinania	43
4.6.1. Belki o przekroju prostokątnym	44
4.6.2. Belki o przekroju dwuteowym	46
4.6.3. Płyty o średniej grubości.....	51
5. Weryfikacja modeli metody SES.....	53
5.1. Weryfikacja modelu belki.....	53
5.1.1. Referencyjny model MES.....	53
5.1.2. Badania doświadczalne belki	57
5.1.3. Model SES belki.....	58
5.1.4. Porównanie wyników	60
5.2. Weryfikacja modelu płyty prostokątnej.....	61
5.2.1. Model referencyjny – rozwiązanie wg teorii Reissnera-Mindlina	61
5.2.2. Model SES płyty	62
5.2.3. Wpływ zmiany stosunku grubości do szerokości płyty.....	66
5.2.4. Wpływ zmiany proporcji wymiarów sztywnego elementu skończonego	70
5.2.5. Wpływ zmiany proporcji wymiarów płyty	72
5.2.6. Wpływ zmiany warunków brzegowych	73

5.2.7. Badania doświadczalne płyty prostokątnej	85
5.2.8. Identyfikacja parametrów modelu płyty	86
5.2.9. Porównanie wyników badań i modelu SES.....	89
5.2.10. Podsumowanie	91
5.3. Weryfikacja modelu płyty usztywnionej belkami z zespoleniem niepodatnym.....	91
5.3.1. Referencyjne wyniki badań doświadczalnych i analiz numerycznych.....	91
5.3.2. Model SES płyty usztywnionej belkami	94
5.3.3. Porównanie wyników referencyjnych z wynikami modelu SES	94
5.4. Weryfikacja modelu belki zespolonej z zespoleniem podatnym.....	103
5.4.1. Model referencyjny wg teorii belek Timoshenki	103
5.4.2. Model referencyjny MES	112
5.4.3. Model SES belki zespolonej	114
5.4.4. Badania doświadczalne belki zespolonej.....	115
5.4.5. Identyfikacja parametrów modeli	119
5.4.6. Porównanie wyników	121
6. Przykłady zastosowania	125
6.1. Stalowo-betonowy strop zespolony	125
6.1.1. Geometria stropu	125
6.1.2. Model SES stropu.....	126
6.1.3. Wyniki analiz	127
6.2. Model jednotorowego mostu kolejowego	131
6.2.1. Geometria obiektu.....	131
6.2.2. Badania doświadczalne.....	133
6.2.3. Model SES mostu	135
6.2.4. Referencyjny model MES.....	137
6.2.5. Porównanie wyników badań i analiz numerycznych.....	139
7. Podsumowanie.....	141
8. Bibliografia.....	143
8.1. Książki i artykuły	143
8.2. Normy.....	149
8.3. Strony internetowe	150
Summary	151
Zusammenfassung	152

1. Wprowadzenie

Płytowo-belkowe układy konstrukcyjne są powszechnie stosowane w przypadku, gdy kluczowym czynnikiem decydującym o ostatecznej formie ustroju jest jego ciężar. Takie rozwiązania konstrukcyjne znajdują zastosowanie w branży budowlanej, przemyśle okrętowym, lotniczym czy w sektorze kosmicznym.

W kubaturowych obiektach budownictwa przemysłowego, mieszkaniowego oraz użyteczności publicznej płyty usztywnione belkami pełnią rolę stropów pomiędzy kondygnacjami budynków. W budownictwie mostowym płyty usztywnione wykorzystywane są jako płyty jezdne pomostu lub środniki blachownicowe dźwigarów mostowych usztywnionych pionowymi i poziomymi żebrami.

Nowe rozwiązania technologiczno-materiałowe umożliwiają konstruowanie coraz lżejszych obiektów. Do rozwiązań takich należą między innymi kolejne generacje stalowo-betonowych konstrukcji zespolonych, szczególnie jeśli do wykonania płyty wykorzystano betony bazujące na lekkim kruszywie. Konstrukcje o zredukowanej masie są bardziej narażone na wpływy oddziaływań o charakterze dynamicznym, w związku z czym o ostatecznym kształcie projektowanych obiektów decydują coraz częściej nie względy wytrzymałościowe, lecz warunki określone stanem granicznym użyteczności. Przekroczenie warunków tego stanu w odniesieniu do konstrukcji stropów w budynkach lub obiektów mostowych, w tym kładek dla pieszych, ujawnia się w postaci np. nadmiernych ugięć lub nadmiernej wrażliwości układu na drgania.

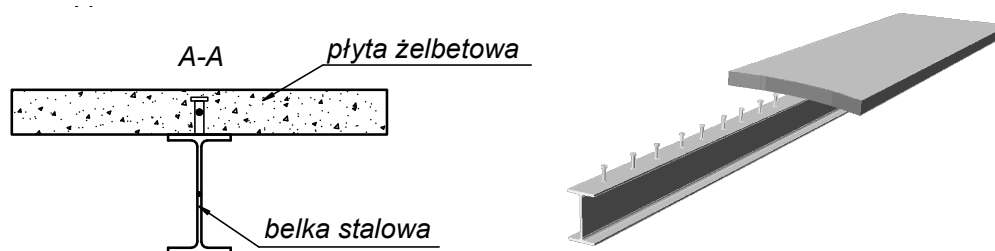
Od kilku lat zagadnienie drgań jest coraz częściej uwzględniane w analizach i projektach obiektów budowlanych. Jest to efekt większej świadomości właścicieli obiektów, którzy obawiają się, że występujące w otoczeniu budynków źródła drgań mogą doprowadzić do uszkodzeń budowli, jej przyspieszonego zużycia. Rosną również wymagania użytkowników obiektów, dla których nadmierny poziom drgań narusza warunki komfortu w pomieszczeniach przeznaczonych do stałego pobytu.

Źródła drgań w otoczeniu istniejących oraz projektowanych budowli mają różne pochodzenie i często zaliczane są do tzw. oddziaływań parasejsmicznych. Spośród nich wyróżnia się tzw. drgania komunikacyjne, które generowane są przejazdami różnego rodzaju pojazdów, jak również powstają podczas robót drogowych, jeśli stosowane są maszyny będące źródłem drgań, np. walce wibracyjne, wibromoty itp. W wielu sytuacjach projektowych i diagnostycznych wpływ drgań na ludzi miewa decydujące znaczenie w ocenie poprawności przyjętych rozwiązań. Poziom progu odczuwalności drgań przez ludzi jest na ogół znacznie niżej usytuowany niż granica odczuwalności drgań przez konstrukcję budynku. Drgania mogą być również wzbudzane zarówno przez ruch osób, tj. pieszych lub użytkowników pomieszczeń,

jak i przez wiatr. Nadmierny poziom drgań oprócz wyraźnego dyskomfortu użytkowników może również zakłócać pracę precyzyjnych maszyn umieszczanych na stropach (szpitale, laboratoria). Korzystanie z obiektu staje się tym samym niemożliwe lub niekomfortowe dla użytkowników.

Rozwiązanie zagadnienia drgań usztywnionych konstrukcji płytowych ma również duże znaczenie w kontekście diagnostyki oraz bieżącego monitoringu stanu technicznego istniejących konstrukcji (ang. *structural health monitoring*, SHM). Idea systemów SHM zakłada obserwację zmian właściwości dynamicznych obiektu w czasie, co pozwala w porę wykryć oraz zlokalizować uszkodzenie. Usunięcie uszkodzenia w jego początkowej fazie gwarantuje bezpieczną eksploatację obiektu bez konieczności wyłączenia go z użytkowania na długi czas. Szacuje się, że około 20–30% obiektów mostowych w Polsce znajduje się w złym lub bardzo złym stanie technicznym i wymaga modernizacji, remontu lub wzmocnienia. Dla porównania w Stanach Zjednoczonych Ameryki takich obiektów jest około 30–40%. Konieczność modernizacji infrastruktury transportowej stanowi wyzwanie dla inżynierii materiałowej w aspekcie opracowania nowych materiałów i technologii. Z uwagi na stale zwiększający się ruch drogowy z rosnącym udziałem ciężkich pojazdów, wzrastające wymagania użytkowników dróg oraz oczekiwania zarządców związane z trwałością stosowanych rozwiązań infrastrukturalnych istotne są badania, których wdrożenie umożliwi przebudowę i wzmocnienie wyeksploatowanej infrastruktury drogowej.

Jak wspomniano wcześniej, płytowo-belkowe stropy budynków oraz płyty jezdne obiektów mostowych wykonane są często jako konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Płyta betonowa o stałej lub zmiennej grubości usztywniana jest od spodu stalowymi belkami dwuteowymi (ryc. 1.1). Popularność tego typu konstrukcji wynika z bardzo dobrego wykorzystania właściwości dwóch tak różnych od siebie materiałów: betonu cechującego się dużą wytrzymałością na ściskanie i stali odpornej na rozciąganie. Współpracę obydwu materiałów uzyskuje się dzięki użyciu odpowiedniego zespolenia. Jednym z najczęściej stosowanych rodzajów zespolenia są łączniki spawane do pasa górnego belek stalowych. Po wykonaniu płyty betonowej łączniki uniemożliwiają poślizg na styku stal-beton, zapewniając tym samym pełną lub częściową współpracę obydwu elementów, tj. betonowej płyty i stalowej belki usztywniającej.



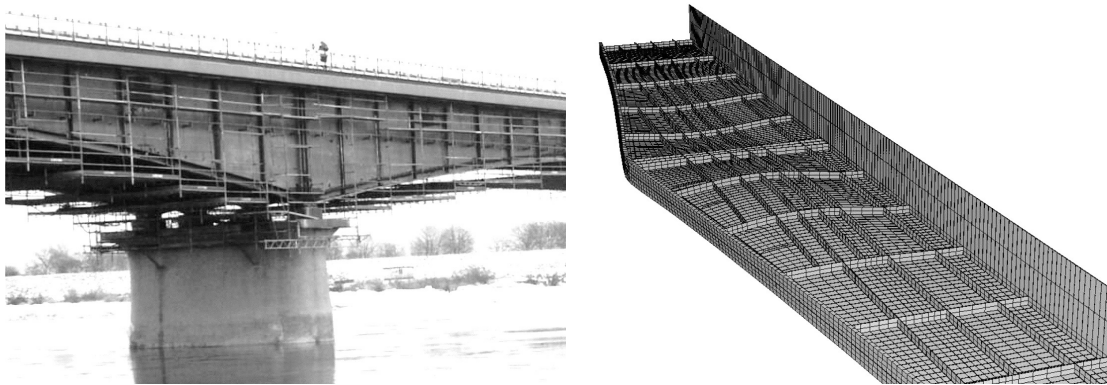
Ryc. 1.1. Stalowo-betonowa belka zespolona

2. Analiza stanu zagadnienia

2.1. Płytkowo-belkowe układy konstrukcyjne w budownictwie

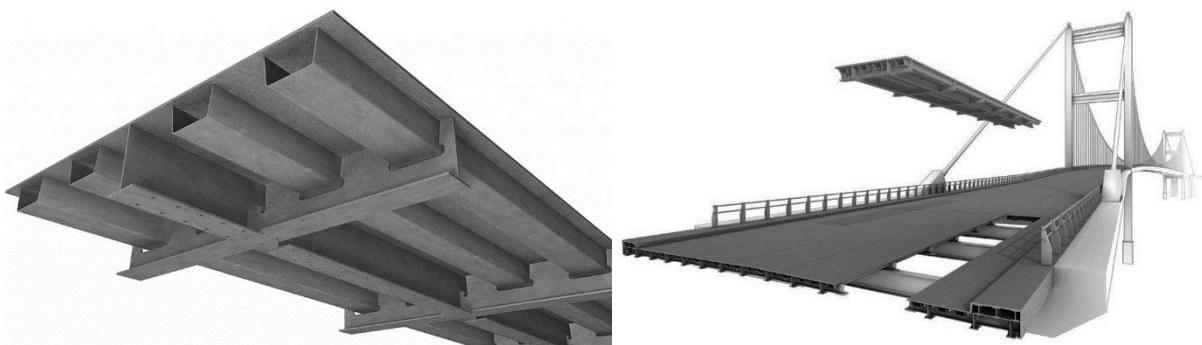
2.1.1. Konstrukcje jednomateriałowe

Stosowane w budownictwie układy płytkowo-belkowe mogą być wykonane z jednego lub wielu materiałów, często o skrajnie różnych właściwościach. Przykładem jednomateriałowych konstrukcji stalowych są np. uźbrowane środniki dźwigarów blachownicowych, powszechnie wykorzystywanych w obiektach infrastruktury drogowej. Rolą żeber jest usztywnienie panelu środnika i jego zabezpieczenie przed miejscową utratą stateczności (ryc. 2.1).



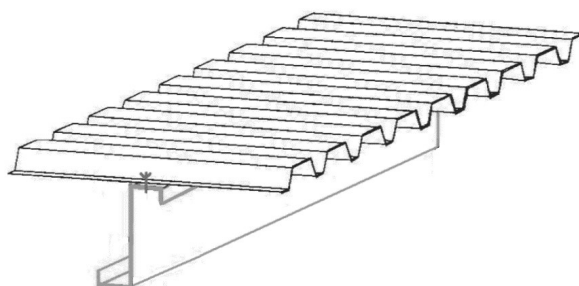
Ryc. 2.1. Most w Kiezmarku – panel środnika usztywniony żebrami [154]

W tych samych obiektach spotkać można ortotropowe stalowe płyty pomostowe z żebrami usztywniającymi spawanymi od spodu do płyty. Same żebra charakteryzują się przekrojem otwartym lub zamkniętym, skrzynkowym. Przykład żeber zamkniętych pokazano na ryc. 2.2. Zaletami stalowych płyt ortotropowych są: ścisła kontrola jakości wytwarzania, szybkość montażu, możliwość wymiany pojedynczych paneli w trakcie eksploatacji obiektu bez konieczności zamykania wszystkich pasów jezdnych.



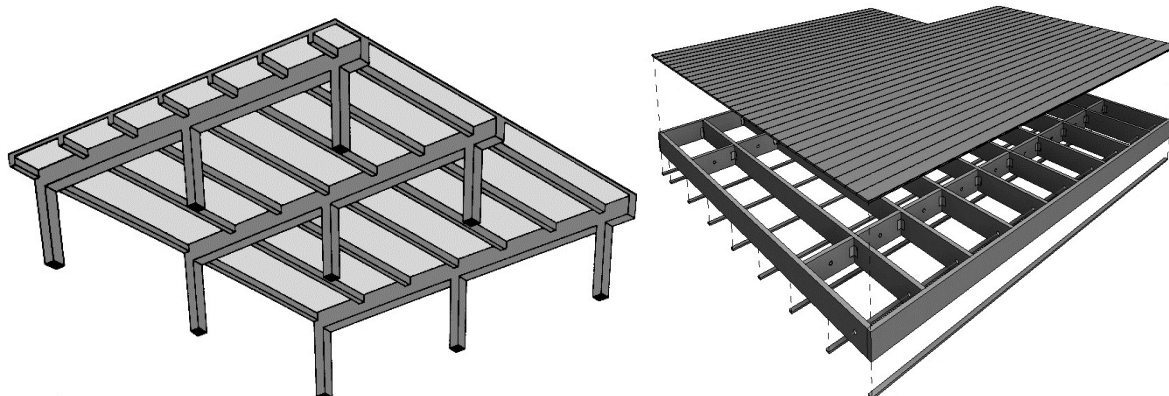
Ryc. 2.2. Ortotropowe stalowe płyty pomostowe [159]

Kolejnym przykładem stalowej jednomateriałowej konstrukcji płytowo-belkowej jest obudowa budynku wykonana z wykorzystaniem blach trapezowych mocowanych do stalowych płatwi dachowych lub rygli ściennych wykonanych ze stalowych profili gorącowalcowanych lub zimnogiętych. Tym, co odróżnia taki układ od dwóch poprzednich, jest podatność połączenia na styku płyta-belka. Połączenie to wykonane jest w postaci dyskretnie rozmieszczonych łączników rozlokowanych w fałdach blachy trapezowej (ryc. 2.3). Należy również zwrócić uwagę na fakt, że właściwości samej płyty wykonanej z blachy profilowanej zależą od kierunku jej obciążenia.



Ryc. 2.3. Płytowo-belkowa konstrukcja obudowy budynku: blacha trapezowa i belka zimnogięta [22]

Do jednomateriałowych konstrukcji płytowo-belkowych zaliczyć można również żelbetowe oraz drewniane konstrukcje stropów w budynkach. Przykład monolitycznego stropu żelbetowego oraz stropu o konstrukcji drewnianej przedstawiono na ryc. 2.4.



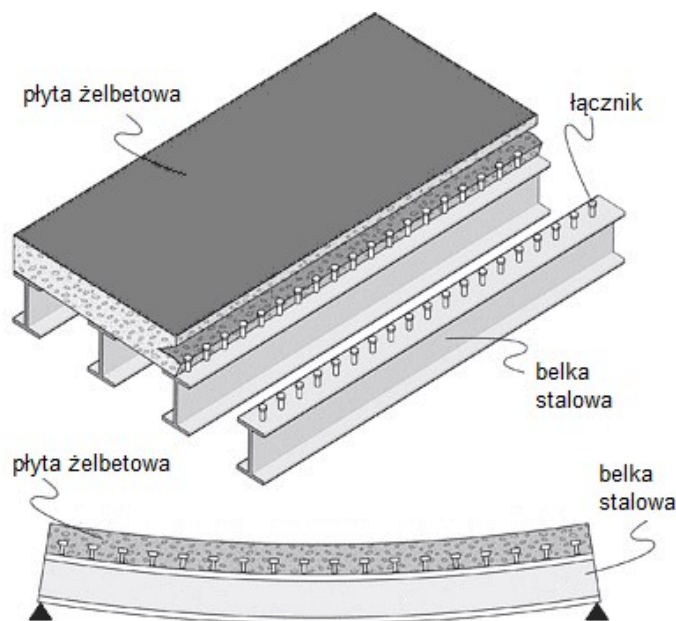
Ryc. 2.4. Konstrukcja stropów płytowo-belkowych: a) strop żelbetowy [115]; b) strop drewniany [160]

Przedstawiona na rysunku konstrukcja monolitycznego stropu żelbetowego jest oczywiście jedną z wielu możliwych konfiguracji. Ze względów ekonomicznych i technologicznych korzystne jest stosowanie prefabrykacji konstrukcji żelbetowych. Powstające konstrukcje mogą być prefabrykowane w całości, jednak korzystne jest również zastosowanie przekrojów żelbetowych zespolonych, w których prefabrykat łączony jest z uzupełniającą warstwą betonu nanoszonego bezpośrednio na budowie. Prefabrykat może być elementem żelbetowym, wstępnie sprężonym lub stalowym.

2.1.2. Zespólone konstrukcje wielomateriałowe

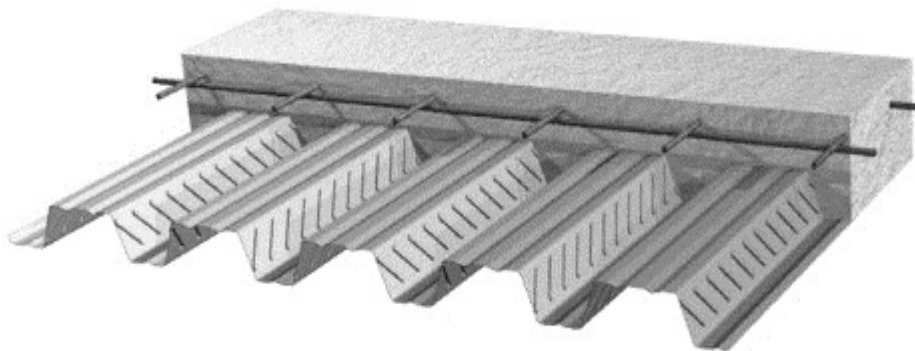
Konstrukcje, do których wykonania użyto dwóch lub więcej materiałów trwale ze sobą połączonych, nazywamy konstrukcjami zespolonymi. Ideą stosowania zespolonych konstrukcji wielomateriałowych jest jak najlepsze wykorzystanie właściwości materiałów. Stal charakteryzuje się dużą wytrzymałością na rozciąganie, jednak ze względu na dużą smukłość elementów stalowych problemem jest możliwość utraty stateczności pod wpływem działania naprężeń ściskających. Ponadto stal charakteryzuje się niskim tłumieniem wewnętrznym. Inaczej jest w przypadku betonu, który cechuje się dużą wytrzymałością na ściskanie, jest materiałem tańszym, odporniejszym na działanie wysokich temperatur oraz znacznie lepiej tłumiącym drgania.

Przykładem zespolonych konstrukcji płytowo-belkowych są stropy lub wielobelkowe mosty zespolone, w których żelbetowa płyta współpracuje ze stalowymi belkami, z którymi jest trwale połączona za pomocą łączników mocowanych do pasa górnego dwuteowej belki stalowej.



Ryc. 2.5. Schemat konstrukcji stalowo-betonowego zespolonego stropu/mostu [161]

Wykonanie konstrukcji przedstawionej na ryc. 2.5 wymaga stosowania szalunków w trakcie wykonywania płyty żelbetowej. Rozwiązanie takie sprawdza się w przypadku obiektów mostowych, jednak w przypadku stropów w budynkach wielokondygnacyjnych konieczność stosowania szalunków znacznie opóźniałoby proces wznoszenia budynku ze względu na konieczność stosowania przerw technologicznych związanych z procesem dojrzewania betonu. W związku z powyższym w przypadku stropów w budynkach znacznie częściej zamiast izotropowych płyt żelbetowych o stałej grubości stosuje się ortotropowe płyty zespolone wykonywane z wykorzystaniem profilowanych blach stalowych (ryc. 2.6).



Ryc. 2.6. Konstrukcja ortotropowej płyty zespolonej [162]

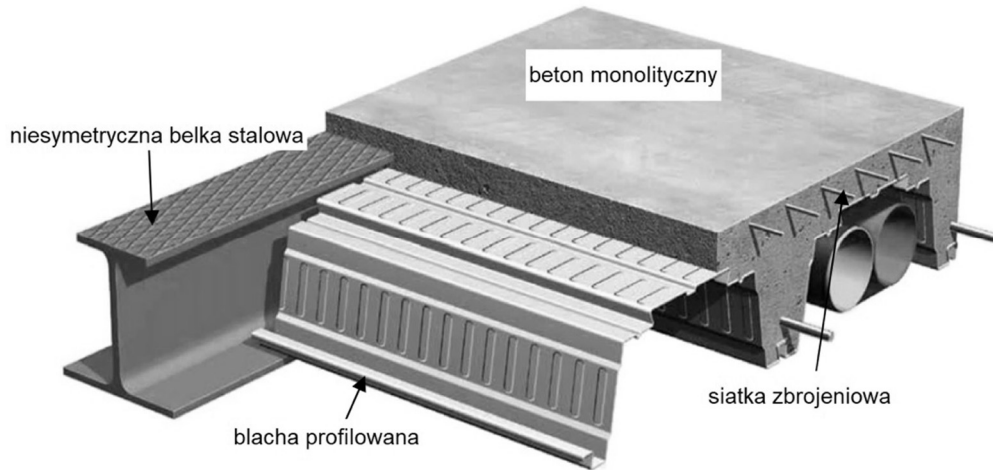
Blachy pełnią rolę szalunku na etapie montażu, a po okresie dojrzewania betonu stanowią dolne zbrojenie płyty. Współpraca pomiędzy blachą i betonem zapewniona jest dzięki lokalnym przetłoczeniu na powierzchni blachy, które uniemożliwiają poślizg na styku stal-beton. Zapewnienie współpracy pomiędzy płytą zespoloną a belkami stalowymi, na których płyta spoczywa, odbywa się w ten sam sposób co w przypadku klasycznej płyty żelbetowej, tj. z wykorzystaniem łączników spawanych do pasa górnego dwuteowników stalowych.



Ryc. 2.7. Montaż stropu zespolonego z wykorzystaniem blach profilowanych

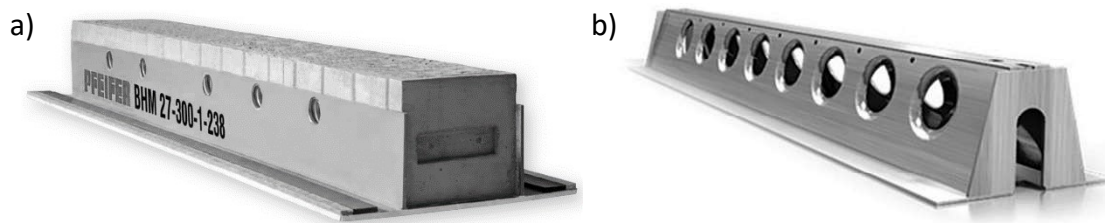
Na ryc. 2.7 przedstawiono konstrukcję stropu w fazie montażu – widoczne są sworznie stalowe z łbami spawane do belek stalowych, będących częścią stalowego szkieletu budynku. Gęstość rozmieszczenia sworzni jest dostosowana do rozstawu fałd w blasze. Zastosowano blachy z przygotowanymi wcześniej otworami w miejscu występowania sworzni, co umożliwiło spawanie sworzni do belek na etapie wykonywania prac warsztatowych. Wadą przedstawionego powyżej rozwiązania technicznego stropu jest znaczna wysokość konstrukcyjna. W przypadku obiektów o kilku kondygnacjach nie stanowi to problemu, jednak

w wysokich budynkach o kilkunastu lub kilkudziesięciu kondygnacjach zmniejszenie wysokości konstrukcyjnej stropu umożliwia redukcję wysokości budynku lub przy ustalonej z góry wysokości budynku pozwala na wykonanie dodatkowych kondygnacji zwiększających powierzchnię użytkową.



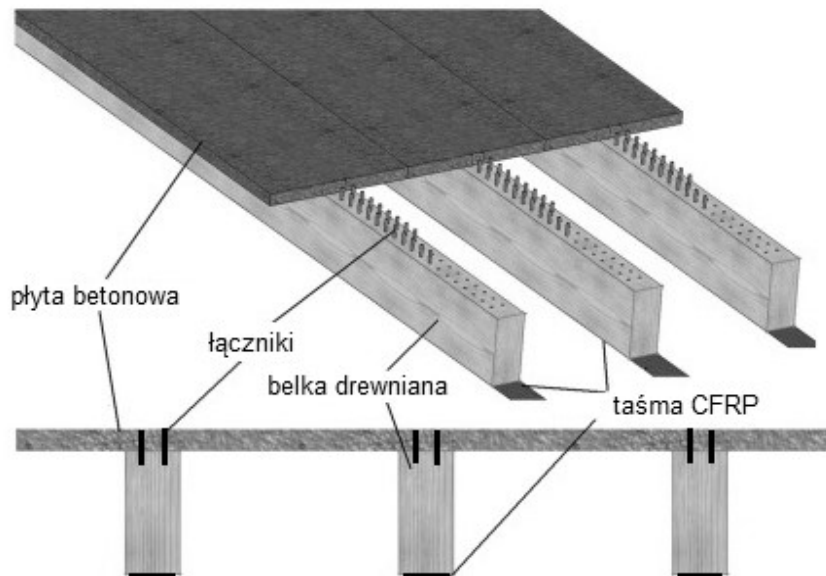
Ryc. 2.8. Konstrukcja stropu zespolonego typu *slim floor* [61]

Wykonanie stropu o zredukowanej wysokości konstrukcyjnej wymaga, aby płyta stropowa umieszczona była na tej samej wysokości co wspierający ją podciąg. Przykład zespolonego stropu typu *slim floor* przedstawiono na ryc. 2.8. Płyta zespolona wykonana na bazie blach profilowanych oparta została na poszerzonym pasie dolnym dwuteowego kształtownika stalowego. Beton wylewany monolitycznie na placu budowy zapewnia pełną współpracę wszystkich elementów. Inne rozwiązania stropów o zredukowanej wysokości zakładają zastąpienie stalowo-betonowej płyty zespolonej elementami prefabrykowanymi, np. sprężonymi płytami kanałowymi czy żelbetowymi płytami zespolonymi typu *filigran*. Możliwe jest również zastąpienie niesymetrycznego dwuteowego podciągu stalowego innymi elementami, np. prefabrykowanym podciągami o konstrukcji zespolonej lub podciągami stalowym skrzynkowym z perforowanymi środnikami (ryc. 2.9).



Ryc. 2.9. Podciągi stropów o zredukowanej wysokości: a) Pfeifer-Hybridbeam [163]; b) Peikko-Deltabeam [164]

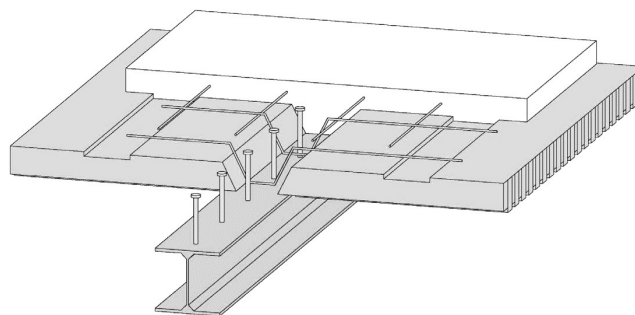
Przedstawione powyżej stalowo-betonowe przykłady konstrukcji zespolonych należą do najczęściej spotykanych w budownictwie. Należy jednak pamiętać również o wykorzystaniu innych materiałów, np. drewna czy tworzyw sztucznych.



Ryc. 2.10. Konstrukcja stropu zespolonego drewniano-betonowego [95]

Przykładem mogą być pokazane na ryc. 2.10 prefabrykowane belki drewniano-betonowe wzmocnione od spodu taśmami CFRP (ang. *carbon fibre-reinforced polymer*), stosowane do rekonstrukcji stropów w budynkach mieszkalnych [95]. Konstrukcje zespolone drewniano-betonowe mogą być wykonywane nie tylko jako prefabrykaty, ale również z wykorzystaniem betonu monolitycznego. Znajdują one zastosowanie zarówno przy rekonstrukcji stropów w obiektach istniejących, jak i w nowo projektowanych budynkach wielokondygnacyjnych [70].

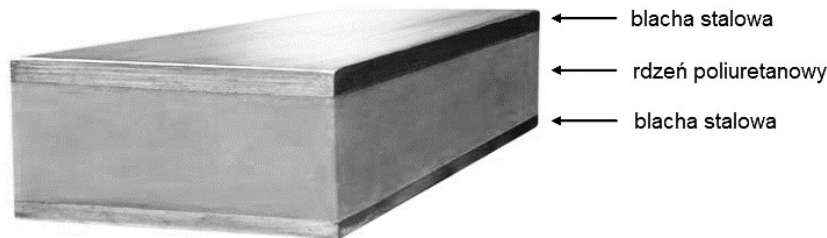
Konstrukcje zespolone nie muszą ograniczać się do łączenia wyłącznie dwóch materiałów. W budynku administracyjnym zlokalizowanym w Biel w Szwajcarii zastosowano stropy o konstrukcji zespolonej stalowo-drewniano-betonowej (ryc. 2.11) [33].



Ryc. 2.11. Konstrukcja stropu zespolonego w budynku administracyjnym w Biel, Szwajcaria [33]

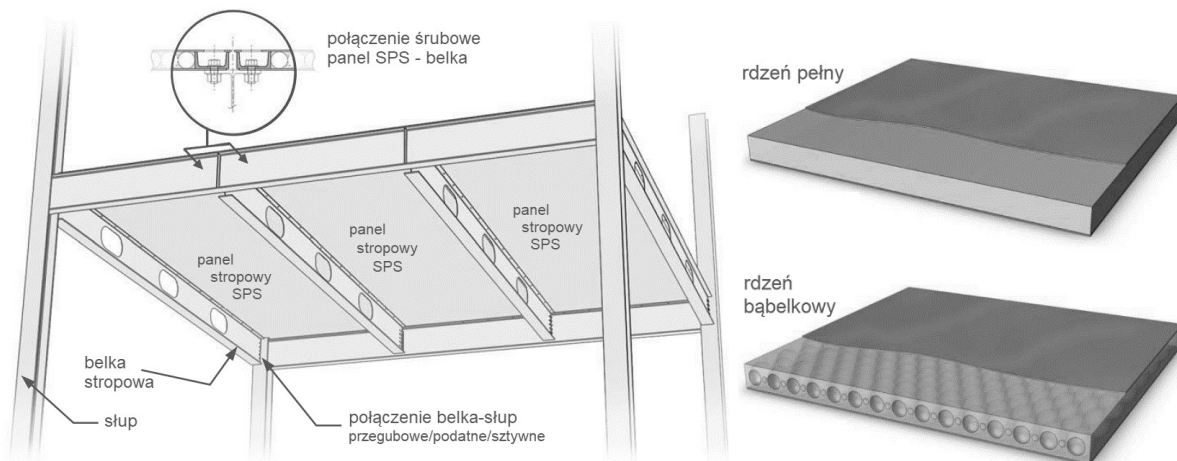
Kompozytową płytę drewniano-betonową o grubości 240 mm uzyskano dzięki połączeniu betonu monolitycznego z drewnianymi panelami nośnymi. Płyta wspierała się na podciągach stalowych z łącznikami sworzniowymi mocowanymi do pasa górnego. Po osiągnięciu przez beton pełnej wytrzymałości łączniki zapewniały współpracę podciągu stalowego z płytą betonową.

Jednym z najnowszych rozwiązań konstrukcyjnych stosowanych w budownictwie są konstrukcje płytowo-belkowe projektowane z wykorzystaniem stalowo-polimerowych płyt warstwowych typu SPS (ang. *sandwich plate system*). Składają się one z dwóch stalowych blach połączonych sztywnym rdzeniem poliuretanowym (ryc. 2.12).



Ryc. 2.12. Płyta warstwowa typu SPS [165]

Płyty SPS charakteryzują się dużą sztywnością, niską masą oraz wysokim współczynnikiem tłumienia drgań. W budownictwie znajdują zastosowanie między innymi w konstrukcji stropów w budynkach (ryc. 2.13). Zaletą płyt SPS jest możliwość wykonania prefabrykowanych paneli stropowych ułatwiających montaż na placu budowy.



Ryc. 2.13. Konstrukcja stropu z wykorzystaniem prefabrykowanych paneli stropowych SPS [165]

Połączenie paneli ze stalowym szkieletem nośnym budynku projektuje się jako ścinane połączenie śrubowe, uwzględniając siły rozwarstwiająca na styku belka-panel wynikające ze współpracy obydwu elementów. Poliuretanowy rdzeń panelu można wykonać jako pełny lub bąbelkowy. W tym drugim przypadku w przestrzeni pomiędzy blachami stalowymi umieszczane są dodatkowo polipropylenowe kule wypełnione powietrzem. Kule rozmieszcza się w układzie heksagonalnym. Uzyskany panel przy niezmienionej masie w stosunku do pełnego rdzenia charakteryzuje się większą wysokością, a co za tym idzie – większą sztywnością, co pozwala na uzyskanie większych rozpiętości przęseł płyty stropowej.

Na podobnej zasadzie jak w panelach stropowych możliwe jest zastosowanie płyt SPS w budownictwie mostowym. Przykładem może być most Shenley w Quebecu w Kanadzie

zbudowany w listopadzie 2003 roku (ryc. 2.14). Rozpiętość przęsła mostu wynosi 22,5 m, a jego szerokość to 7,10 m. Panele SPS łączone były z układem trzech stalowych dźwigarów połączonych układem stężeń. Płyta pomostu wykonana została z dziesięciu paneli SPS – dwa skrajne o szerokości 1,65 m oraz osiem pośrednich o szerokości 2,40 m.



Ryc. 2.14. Wykorzystanie paneli SPS w konstrukcji mostu Shenley, Quebec, Kanada [26]

Omówione w niniejszym rozdziale przykłady konstrukcji płytowo-belkowych dotyczyły głównie konstrukcji stropów w budynkach oraz płyt pomostu w obiektach mostowych. W obydwu przypadkach istotną rolę na etapie projektowania odgrywiają oddziaływania o charakterze dynamicznym. Rozwój technik produkcji, nowych materiałów oraz metod obliczeniowych przyczynia się do poszukiwania nowych wielomateriałowych konstrukcji zespolonych charakteryzujących się lepszym wykorzystaniem właściwości stosowanych materiałów. Nowe konstrukcje o dużych rozpiętościach przęseł są często znacznie lżejsze od tych wykonywanych metodami tradycyjnymi, przez co są bardziej narażone na oddziaływania o charakterze dynamicznym.

2.2. Drgania płyt usztywnionych

Płyty usztywnione belkami są powszechnie stosowane w konstrukcjach inżynierskich nie tylko w budownictwie, ale również w przemyśle okrętowym, lotniczym, samochodowym i innych branżach. Usztywnianie płyt belkami zapewnia znaczne zwiększenie wytrzymałości oraz sztywności konstrukcji przy niewielkim wzroście masy konstrukcji. W trakcie eksploatacji konstrukcje tego typu często są poddawane oddziaływaniom o charakterze dynamicznym, co może prowadzić do niepożądanego zjawiska rezonansu, mogącego doprowadzić do ich uszkodzenia. Nadmierny poziom drgań spowodowany zbyt dużą podatnością konstrukcji może również być powodem niespełnienia wymagań określanych stanem granicznym użyteczności, co ma szczególne znaczenie np. w przypadku stropów w budynkach. Możliwość precyzyjnej oceny podatności układu na oddziaływania o charakterze

dynamicznym warunkowana jest dokładnością, z jaką wyznaczone zostaną podstawowe charakterystyki dynamiczne konstrukcji, tj. częstotliwości oraz postaci drgań własnych. Zastosowanie w tym zakresie rozwiązań analitycznych możliwe jest wyłącznie dla prostych struktur o nieskomplikowanej geometrii. Rozwiązaniem skuteczniejszym dla bardziej złożonych struktur są metody numeryczne, które wymagają jednak od projektanta dużego doświadczenia oraz specjalistycznego oprogramowania. Rozwiązaniem optymalnym dla projektanta byłoby opracowanie prostych zależności lub wytycznych pozwalających na wyznaczenie charakterystyk dynamicznych dla płyt o różnych proporcjach wymiarów głównych, różnego rozmieszczenia belek, różnej proporcji sztywności płyta/belka itp. Opracowanie takich zależności, najlepiej w postaci graficznej lub tabelarycznej, wymaga rozwiązania dziesiątek przykładów, do czego potrzebna jest metoda pozwalająca na parametryczne modelowanie i szybkie obliczenia w pętli parametrycznej.

W przypadku płyt z gęsto rozmieszczonymi belkami usztywniającymi rozwiązanie problemu drgań możliwe jest dzięki zastosowaniu teorii płyt ortotropowych. Podejście takie wykorzystał Kirk [55] do wyznaczenia charakterystyk dynamicznych wolnopodpartych płyt prostokątnych usztywnionych belkami. Rozwiązanie uzyskano metodą Rayleigha-Ritza. Jeżeli odległość między belkami usztywniającymi jest duża w stosunku do grubości płyty, konieczne jest wykorzystanie metod przybliżonych. Metodę różnic skończonych do analizy drgań płyty usztywnionej pojedynczą belką stosowali z powodzeniem Aksu i Ali [13]. Balendra i Shanmugam [14] użyli metody numerycznej analogii rusztowej do analizy drgań płyt oraz płyt usztywnionych belkami. Z kolei metoda pasm skończonych została zastosowana przez Filiatrault i in. [34] podczas analizy charakterystyk dynamicznych lekkich stropów drewnianych usztywnianych belkami. Przegląd wcześniejszych metod stosowanych do analizy drgań płyt usztywnionych znaleźć można w pracach Mukherjee i Mukhopadhyay [77, 79].

W analizie drgań płyt usztywnionych dyskretnie rozmieszczonymi belkami najczęściej wykorzystywana jest obecnie metoda elementów skończonych. Przyczyniło się do tego wiele czynników, między innymi swoboda modelowania skomplikowanych geometrii, łatwość implementacji, jak również dokładność uzyskiwanych rezultatów. W ostatnich latach opublikowano wiele prac poświęconych temu zagadnieniu. Olson i Hazell [85] analizie poddali drgania utwierdzonych płyt kwadratowych usztywnionych jedną lub dwiema belkami rozmieszczonymi w regularnych odstępach. Łącznie przebadano cztery płyty różniące się wymiarami oraz rozmieszczeniem belek usztywniających. Wyniki analiz numerycznych przeprowadzonych z wykorzystaniem MES porównano z wynikami przeprowadzonych badań doświadczalnych, wykazując ich wysoką zgodność. W kolejnych latach wielu autorów wykorzystujących metodę elementów skończonych odnosiło wyniki swoich analiz do wyników badań doświadczalnych oraz analiz numerycznych zamieszczonych w powyższej pracy [23, 40, 42, 43, 57, 78, 88].

Również Barrette i in. [17] stosowali metodę elementów skończonych, wykorzystując przy tym hierarchiczne elementy skończone. Barik i Mukhopadhyay [16] przedstawili nowy usztywniony czterowęzłowy element skończony wyższego rzędu, pozwalający na analizę płyt o dowolnej konfiguracji geometrycznej. Zaletą opracowanego elementu był brak występowania zjawiska blokowania ścinania (ang. *shear locking*). Srivastava i in. [110] analizie poddali wpływ krawędziowego obciążenia płyt usztywnionych na zmianę charakterystyk dynamicznych oraz sprężystej siły krytycznej. Analizowali zarówno płyty utwierdzone na krawędzi, jak i płyty z krawędziami swobodnie podpartymi. W kolejnej pracy [111] ten sam zespół badał zjawisko stateczności dynamicznej płyt usztywnionych poddanych harmonicznemu obciążeniu krawędziowemu, wykazując, że rozmiar i położenie usztywnień płyty odgrywają znaczącą rolę przy określeniu granic jej niestatecznych obszarów. Akl i in. [12] przeprowadzili analizę optymalizacyjną statycznych i dynamicznych charakterystyk płyt z usztywnieniami rozmieszczonymi na planie siatki izometrycznej. Jako zmienne decyzyjne przyjęli kąt określający orientację usztywnień. Vörös [133] zaproponował nowy element usztywniający o siedmiu stopniach swobody na węzeł, traktując płytę oraz element usztywniający jako oddzielne elementy. Analizie poddał zjawisko wybożenia, jak również drgań własnych płyt. Szczególną uwagę poświęcił na uwzględnienie sztywności skrętnej belki usztywniającej oraz na prawidłowe odzwierciedlenie charakteru współpracy płyty z usztywnieniem, a także uwzględnienie mimośrodowego charakteru współpracy obydwu komponentów. Analizę drgań płyt usztywnionych z zastosowaniem superelementów przeprowadzili również Hamedani i in. [41]. Definiując superelement, bazowali na teorii belek Timoshenki w odniesieniu do elementów usztywniających oraz na teorii płyt Mindlina w odniesieniu do usztywnianej płyty. Położenie mimośrodowo zlokalizowanych usztywnień przyjęli jako niezależne w stosunku do położenia węzłów modelujących płytę. Srivastava i in. [112, 113, 114] oraz Srivastava [109] badali charakterystyki dynamiczne oraz stateczność dynamiczną płyt usztywnionych z wyciętymi otworami. Analizowane płyty poddawane były jednolitemu lub wycinkowemu obciążeniu w ich płaszczyźnie. Badania wykazały, że proporcje wymiarów płyty, jak również położenie i liczba usztywnień oraz wielkość wyciętych otworów mają wyraźny wpływ na charakterystyki dynamiczne płyty oraz granice jej niestatecznych obszarów.

Nguyen-Thoi i in. [82] opracowali metodę CS-FEM-DSG3 (ang. *cell-based smoothed discrete shear gap method*), wykorzystującą elementy trójkątne do badania drgań swobodnych i zjawiska wybożenia płyt usztywnionych mimośrodowo. Jako obiekt testów numerycznych wybrali płyty analizowane w pracy [85]. Rezultaty przeprowadzonych analiz w zakresie częstotliwości drgań własnych porównali z wynikami wzorcowymi oraz z rezultatami uzyskanymi przez innych badaczy [78, 91]. Rezultaty analiz wybożeniowych porównali z wynikami, które otrzymali Timoshenko i Gere [128] oraz Peng i in. [91].

Opracowana metoda wykazała wysoką zgodność z rezultatami analiz innych badaczy. Huang i in. [45] opracowali model metody elementów skończonych do analizy wyboczeniowej usztywnionych, laminowanych płyt warstwowych z wykorzystaniem sześciowzłowego trójkątnego zakrzywionego elementu powłokowego oraz trójwzłowego zakrzywionego elementu belkowego. Analizy parametryczne prowadzili dla siatek usztywniających o różnej geometrii. Cho i in. [25] zastosowali metodę założonych postaci (ang. *assumed mode method*) do analizy drgań własnych usztywnionych paneli z dowolnie podpartymi krawędziami. Metoda zakładała określenie częstotliwości i postaci drgań własnych przez rozwiązanie zagadnienia własnego równania macierzowego opisującego układ o wielu stopniach swobody uzyskanego za pomocą równań ruchu Lagrange'a. Opracowaną metodę poddali weryfikacji, porównując uzyskane na jej podstawie wyniki z rezultatami otrzymanymi z wykorzystaniem komercyjnego systemu metody elementów skończonych. Analizowano płytę o proporcjach boków 2:1 z belkami usztywniającymi umieszczonymi podłużnie, poprzecznie i krzyżowo. Podczas analiz różnicowano również schemat podparcia krawędzi płyty. Shi i in. [106] bazując na metodzie elementów skończonych, zaproponowali metodę analizy płyt usztywnionych elementami krzywoliniowymi. Uwzględniali przy tym obecność rozciągającego lub ściskającego obciążenia płyty w jej płaszczyźnie. Teoria ścinania pierwszego rzędu stosowana była zarówno w odniesieniu do płyty, jak i belek usztywniających. W opracowanej metodzie położenie belek jest niezależne od sposobu dyskretyzacji płyty, co należy uznać za dużą zaletę. Wykorzystując opracowaną metodę, autorzy przeprowadzili szereg analiz parametrycznych dla różnych warunków brzegowych, położenia oraz stopnia zakrzywienia usztywnień, obciążenia w płaszczyźnie płyty, proporcji sztywności płyta/żebro i innych.

Cechą wspólną omówionych powyżej wyników badań jest nieuwzględnienie podczas analiz podatności połączenia na styku płyta-belka usztywniająca. Inne podejście w tym zakresie zaproponował Sapountzakis [101]. Stosując technikę uwzględniania sił na styku płyta-belka, pierwotnie opracowaną w celu rozwiązania zagadnienia statyki [102], Sapountzakis poddał analizie drgania żelbetowej płyty usztywnionej stalowymi belkami (belki zespolonej), uwzględniając przy tym nie tylko odkształcalność zespolenia na styku stal-beton, ale również skurcz i pęczanie betonu. Rozwiązanie zagadnienia umożliwiło zastosowanie metody AEM (ang. *analog equation method*), która opracowana została na bazie metody elementów brzegowych [54]. W trakcie analiz uwzględniono odkształcalność zespolenia na kierunku równoległym do osi belki usztywniającej płytę. W kolejnej pracy Sapountzakis i Mocos [105] zastosowali klasyczną metodę elementów brzegowych do rozwiązania zagadnienia drgań belki zespolonej z uwzględnieniem deplanacji przekroju oraz odkształceń postaciowych przy ścinaniu. Tym razem nie uwzględniano odkształcalności zespolenia. Następnym krokiem było opracowanie udoskonalonego modelu służącego analizie drgań płyt usztywnionych [103], w którym uwzględniono zarówno podatność połączenia, jak i możliwość deplanacji przekroju

belki. Zmieniono również sposób modelowania warstwy stykowej płyta-belka, uwzględniając dwie linie interakcji zamiast jednej oraz umożliwiając deformację zespolenia na obydwu kierunkach płaszczyzny styku. Rozwiązanie uzyskano, stosując metodę AEM w zakresie zarówno drgań swobodnych, jak i wymuszonych. Weryfikację wyników przeprowadzono, porównując uzyskane rezultaty z rozwiązaniem metody elementów skończonych. Na potrzeby porównania opracowano trzy modele MES, tj. powłokowo-belkowy, powłokowy oraz objętościowy. W pracy [104] ten sam zespół autorów analizował wpływ odkształceń postaciowych przy ścinaniu na wyniki analizy dynamicznej płyt usztywnionych. Z kolei Dourakopoulos i Sapountzakis [30] analizowali nieliniowe dynamiczne zachowanie się płyt usztywnionych z zespoleniem podatnym.

Zagadnienie oceny właściwości płyt usztywnionych podejmowane było przez wielu badaczy. Analizy dotyczyły nie tylko oceny ich właściwości dynamicznych, ale również nośności statycznej, jak również podatności na zjawisko wyboczenia. Do analiz wykorzystywane przy tym były różne metody, nie tylko metoda elementów skończonych, ale również cały szereg metod autorskich będących modyfikacjami MES lub innych klasycznych metod analizy. Należy jednak zwrócić uwagę, że większość analiz dotyczyła zagadnienia drgań układów z nieodkształcalnym połączeniem na styku płyta-belka. Z kolei w pracach, które poruszały to zagadnienie, uwzględniano jedynie podatność połączenia na kierunku stycznym do osi belek usztywniających, pomijając podatność na kierunku normalnym. W dostępnej literaturze brakuje również prostych wytycznych dostępnych dla inżynierów, pozwalających na szybkie określenie cech dynamicznych bez konieczności tworzenia własnych modeli obliczeniowych. Opracowanie takich zależności, najlepiej w tabelarycznej lub graficznej formie, wymaga wielokrotnych obliczeń przy zmieniających się parametrach. Metoda zastosowana do takich obliczeń powinna cechować się elastycznością w kształtowaniu geometrii układu i stosunkowo krótkim czasem obliczeń. Warunki takie spełnia między innymi metoda sztywnych elementów skończonych.

2.3. Metoda sztywnych elementów skończonych

Metoda sztywnych elementów skończonych (SES) to oryginalna polska metoda stosowana do modelowania dynamiki złożonych układów konstrukcyjnych z więzami podatnymi. Początki metody SES, podobnie jak klasycznej metody elementów skończonych (MES), sięgają lat 60. ubiegłego wieku [18, 153]. Podstawy metody SES sformułował prof. Jan Kruszewski, który wraz z zespołem w 1975 roku opublikował pierwszą monografię [59] podsumowującą prace prowadzone w Instytucie Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Gdańskiej.

Metoda zakłada podział konstrukcji na skończoną liczbę nieodkształcalnych, tj. sztywnych elementów skończonych odzwierciedlających masę/bezwładność konstrukcji, które łączone są za pomocą nieważkich elementów sprężysto-tłumiących (EST) odzwierciedlających sztywność oraz właściwości tłumiące. Konstrukcje modelowane z wykorzystaniem metody SES podzielić można na dwa główne rodzaje. Do pierwszego z nich zalicza się układy, w których wyodrębnić można elementy o zwartej i sztywnej konstrukcji, łączone za pomocą elementów o stosunkowo małej sztywności. Podział na sztywne elementy skończone wynika w tym przypadku z rzeczywistego sposobu podziału konstrukcji – każdy rzeczywisty sztywny element konstrukcji odzwierciedlany jest w modelu oddzielnym sztywnym elementem skończonym. Przykładem tego typu konstrukcji może być układ maszyna-fundament, połączonych ze sobą za pomocą wibroizolatorów. Do drugiego rodzaju konstrukcji należą elementy odkształcalne o ciągłym rozkładzie masy takie jak belki czy płyty. W tym przypadku podział, tj. dyskretyzacja modelowanego elementu na SES oraz EST, odbywa się w sposób myślowy. Możliwe jest oczywiście również modelowanie konstrukcji łączących cechy obydwu rodzajów.

W początkowym okresie metoda wykorzystywana była do modelowania układów o niezmienniej konfiguracji w czasie. Wojciech [145] zaproponował modyfikację metody pozwalającą na analizę płaskich układów o zmiennej konfiguracji, tj. złożonych z odkształcalnych podukładów, których wzajemne położenie ulega zmianie w czasie. Poszczególne podukłady cały czas pozostają ze sobą w kontakcie. Odkształcenia podukładów wynikające z ich ruchu są małe, jednak ich przemieszczenia mogą być duże. Modyfikacja polegała na opisanie ruchu kolejnych SES za pomocą jednej współrzędnej uogólnionej, tj. kąta obrotu. Pominięto przy tym uwzględnianie odkształceń pochodzących od działania sił stycznych i normalnych na styku sąsiadujących SES. W kolejnych latach metodę rozwijano, co pozwoliło na analizę nie tylko układów płaskich, ale również przestrzennych. Metodę stosowano z powodzeniem w wielu ośrodkach w kraju do modelowania szeregu konstrukcji mechanicznych, w tym: maszyn roboczych [137, 139], manipulatorów robotów [4, 5, 6, 10, 93, 142, 143], maszyn przemysłu włókienniczego [92, 144], pojazdów [123, 138], pił taśmowych [146, 147], anten satelitarnych [141] czy obrabiarek [52, 72, 73]. Podsumowaniem tego etapu rozwoju metody jest monografia opublikowana w 2006 roku przez Wittbrodta i in. [136].

Metoda znalazła również zastosowanie przy analizie zachowania się stalowych konstrukcji pełnomorskich *offshore*, do których należą różnego rodzaju platformy służące do wykonywania odwiertów, wydobywania, przeróbki i magazynowania ropy i gazu spod dna morskiego oraz statki wiertnicze, pływające magazyny i przetwórnice. Oprócz zmieniającej się w czasie konfiguracji oraz dużych przemieszczeń konieczne przy tym było uwzględnienie również nieliniowych relacji fizycznych wynikających z trwałych odkształceń modelowanych elementów. Osiński i in. [86, 87] z powodzeniem zastosowali metodę SES do analizy dynamiki

dźwigów montowanych na jednostkach pływających i platformach wiertniczych. Z kolei Szczotka [119, 120, 121] oraz Szczotka i in. [122] wykorzystali metodę do modelowania procesu układania rur służących do transportu gazu i ropy naftowej z dna morskiego. Najważniejsze zastosowania metody SES w zakresie modelowania konstrukcji *offshore* zawiera monografia opublikowana w 2013 roku przez Wittbrodta i in. [140].

Adamiec-Wójcik [7], Adamiec-Wójcik i in. [8], Adamiec-Wójcik i Wojciech [11] zastosowali metodę SES podczas modelowania drgań powłokowej konstrukcji elektrofiltrów. Cechą charakterystyczną powłoki stanowiącej konstrukcję elektrofiltra jest jej stosunkowo skomplikowany kształt. Do analizy wykorzystano nie tylko metodę SES, ale również metodę hybrydową, która łączy zalety metody sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych, metodę funkcji sklepanych i klasyczną metodę elementów skończonych. Model opracowany w konwencji klasycznej metody SES cechował się zmodyfikowanym położeniem elementów sprężysto-tłumiących w stosunku do koncepcji modelowania płyt przedstawionej w pracy [59]. Modyfikację zastosowano ze względu na konieczność uwzględnienia sześciu stopni swobody dla SES modelujących powłokę elektrofiltra. Ostatecznie wykazano wysoką zgodność i efektywność metody SES, walidując opracowany model z wynikami innych metod i wynikami badań doświadczalnych. Tym samym wykazano, że metoda SES może być z powodzeniem wykorzystywana nie tylko do modelowania konstrukcji bryłowych czy prętowych, ale również konstrukcji płytowych czy powłokowych, w tym również konstrukcji stosowanych w budownictwie.

3. Cel i zakres pracy

Wiarygodny model obliczeniowy konstrukcji potrzebny jest na każdym etapie jej istnienia. Przedstawić to można na przykładzie zespolonej konstrukcji mostowej. Pierwszy etap to proces projektowania obiektu. Na tym etapie model obliczeniowy niezbędny jest do przeprowadzenia analiz pozwalających przewidzieć odpowiedź układu na działanie obciążeń komunikacyjnych o charakterze statycznym oraz dynamicznym. Na tym etapie model obliczeniowy niemal zawsze jest opracowywany. Drugi etap to budowa oraz przekazanie obiektu do eksploatacji. Model wymagany jest w celu przeprowadzenia dodatkowych analiz niezbędnych na etapie montażu oraz do wykonania projektu próbnych obciążeń. Pozytywny wynik próbnych obciążeń pozwoli na oddanie obiektu do eksploatacji. Model obliczeniowy wykonany na etapie projektowania może zostać zmodyfikowany przez uwzględnienie zmian w konstrukcji, do których doszło w trakcie realizacji obiektu. Parametry modelu mogą zostać uaktualnione po przeprowadzeniu badań na próbkach materiałowych pobranych w trakcie budowy obiektu. Ostatnim etapem jest faza eksploatacji. Model obliczeniowy opracowany w fazie projektu ze zmianami wprowadzonymi w trakcie budowy może być dalej skutecznie wykorzystywany do prowadzenia monitoringu stanu technicznego obiektu. Jest to niezmiernie ważny aspekt w przypadku nowatorskich, dużych, odpowiedzialnych konstrukcji. Model obliczeniowy, który ma zostać wykorzystany do budowy systemu monitoringu, musi dokładnie odwzorowywać rzeczywiste zachowanie się konstrukcji, szczególnie w zakresie oddziaływań dynamicznych. Wynika to z faktu, że systemy monitorujące stan techniczny często bazują na pomiarach właściwości dynamicznych takich jak częstotliwości drgań własnych, postaci drgań, parametry tłumienia itp. Model obliczeniowy musi być odpowiednio uaktualniony na podstawie wyników badań przeprowadzonych na obiekcie rzeczywistym [76]. Przedstawiony sposób podziału na etapy oraz wskazane zapotrzebowanie na model obliczeniowy można przełożyć również na konstrukcję innych obiektów, np. stropów zespolonych w budynkach przemysłowych i użyteczności publicznej.

Celem pracy była ocena możliwości zastosowania zmodyfikowanej metody sztywnych elementów skończonych do analizy właściwości dynamicznych płytowo-belkowych ustrojów konstrukcyjnych z uwzględnieniem specyfiki konstrukcji używanych w budownictwie. Szczególną uwagę poświęcono analizie właściwości stalowo-betonowych konstrukcji zespolonych. Konstrukcje tego typu stosowane są podczas wykonywania stropów budynków oraz w budownictwie mostowym. W tym drugim przypadku analiza zagadnienia drgań była szczególnie uzasadniona ze względu na specyfikę obciążeń komunikacyjnych.

W zakres prowadzonych analiz wchodziło opracowanie techniki modelowania podstawowych komponentów konstrukcji, tj. elementów belkowych oraz płyt o zmiennych warunkach brzegowych. W kolejnym kroku modele komponentów połączono w układy płytowo-belkowe z uwzględnieniem sztywnego lub podatnego zespolenia zapewniającego ich współpracę. Zakres prowadzonych analiz uwzględniał nie tylko podstawowe formy drgań giętych, które mają największy udział w ocenie odpowiedzi układu na oddziaływania o charakterze dynamicznym, ale również inne formy drgań, w tym drgania skrętne, dystorsyjne oraz gięte poziome. Uwzględnienie dodatkowych form drgań, które zazwyczaj są pomijane podczas analiz, miało szczególne znaczenie w kontekście możliwości zastosowania opracowywanych modeli do diagnostyki stanu technicznego konstrukcji.

Opracowane modele obliczeniowe w konwencji metody SES poddane zostały ocenie zgodności wyników, do czego wykorzystano referencyjne analityczne modele ciągłe opracowane z uwzględnieniem teorii belek Timoshenki w przypadku belek i teorii Reissnera-Mindlina w przypadku płyt. Uwzględnienie teorii wyższego rzędu zarówno w przypadku belek, jak i płyt było ważne ze względu na zakres prowadzonych analiz. Wpływ odkształceń postaciowych powodowanych nieprężeniami stycznymi oraz sił bezwładności w ruchu obrotowym ma duże znaczenie w przypadku analizy postaci drgań o wyższych częstotliwościach. Model poprawnie odzwierciedlający zachowanie się konstrukcji w szerokim zakresie częstotliwości może być z powodzeniem stosowany w układach monitorujących stan techniczny konstrukcji.

Dodatkową weryfikację przeprowadzono z wykorzystaniem wyników badań doświadczalnych oraz modeli obliczeniowych stworzonych w konwencji klasycznej metody odkształcalnych elementów skończonych. Część wykorzystanych w pracy wyników badań doświadczalnych uzyskano podczas realizacji dwóch projektów badawczych realizowanych przez autora monografii [21, 149]. Tematyka projektów dotyczyła analizy właściwości dynamicznych oraz identyfikacji parametrów dyskretnych modeli numerycznych stalowo-betonowych belek zespolonych, będących klasycznym przykładem konstrukcji płytowo-belkowych stosowanych w budownictwie.

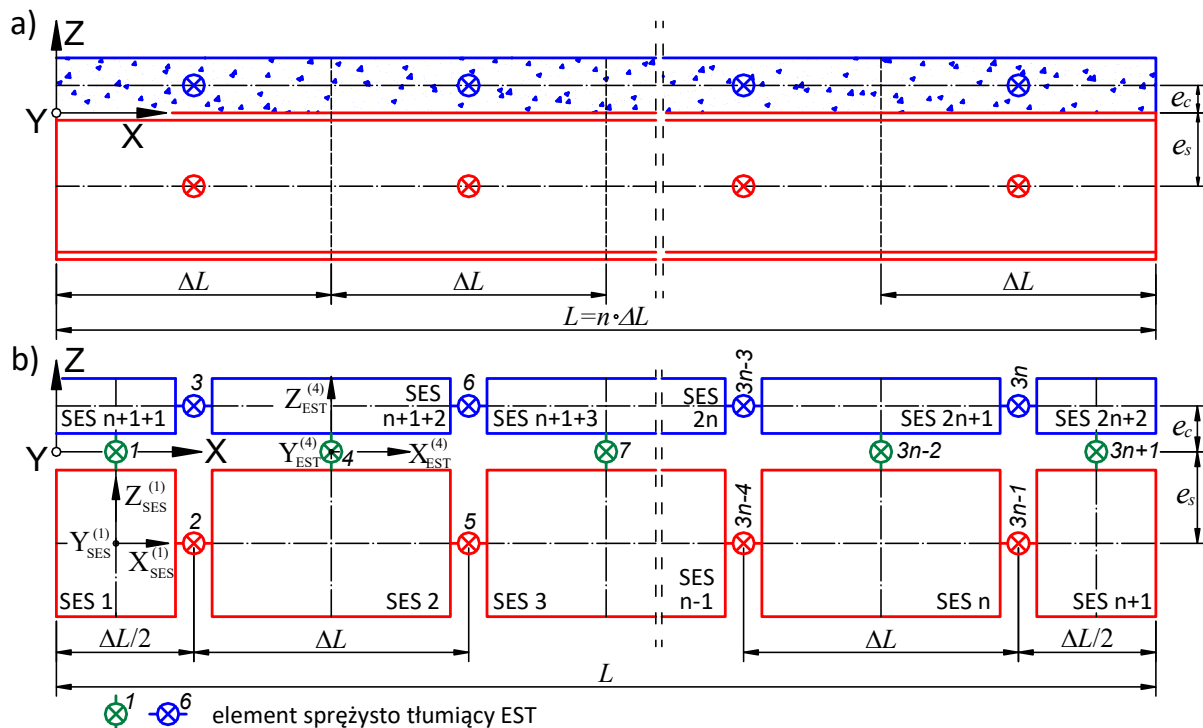
Kończącym etapem było zastosowanie metody SES do analizy przykładowych konstrukcji płytowo-belkowych spotykanych w budownictwie. Opracowane modele zapewniały możliwość uwzględnienia w trakcie analiz zmiennej sztywności elementów zapewniających współpracę płyty z belkami, możliwość swobodnego kształtowania sztywności połączeń innych elementów (np. belek ze słupami w przypadku szkieletowej konstrukcji stropu budynku) oraz swobodę w określaniu warunków brzegowych na krawędziach płyty oraz końcach elementów belkowych.

4. Modelowanie układów płytowo-belkowych w konwencji metody SES

4.1. Informacje podstawowe

Ideą metody sztywnych elementów skończonych jest podział rzeczywistego układu na nieodkształcalne bryły nazywane sztywnymi elementami skończonymi (SES), które następnie łączy się za pomocą elementów sprężysto-tłumiących (EST). W przypadku ciągłych fragmentów konstrukcji budowę modelu rozpoczyna się od podziału modelowanego obiektu na odcinki o równej bądź zbliżonej długości. Podział ten nazywany jest podziałem pierwotnym. W środku ciężkości każdego odcinka umieszcza się EST, który skupia właściwości sprężyste i tłumiące danego odcinka. Kolejnym krokiem jest połączenie EST powstałych w wyniku pierwotnego podziału za pomocą SES. Jest to tzw. podział wtórny.

Przyjęto założenie, że podczas modelowania układu płytowo-belkowego płyta i belki ją usztywniające modelowane będą oddzielnie. Podejście takie umożliwiło uwzględnienie w trakcie analiz podatności zespolenia, które łączy obydwie elementy. Szczegóły procesu modelowania pokazano na przykładzie stalowo-betonowej belki zespolonej.



Ryc. 4.1. Modelowanie belki zespolonej: a) podział pierwotny; b) podział wtórny – układ SES i EST

Na ryc. 4.1a pokazano w widoku z boku schemat belki zespolonej o długości L podzielonej na n odcinków o równych długościach ΔL – jest to podział pierwotny. Na każdym odcinku belki powstałym w wyniku podziału pierwotnego umieszczono dwa EST: jeden skupiający właściwości sprężysto-tłumiące dwuteownika stalowego \otimes (kolor czerwony) oraz

jeden skupiający właściwości odcinka płyty żelbetowej \otimes (kolor niebieski) współpracującej z belką. Pomiedzy poszczególne EST wstawiono sztywne elementy skończone SES o długościach wynikających z podziału wtórnego – skrajne SES są krótsze o połowę. Ostatnim elementem uzupełniającym model są EST modelujące zespolenie \otimes (kolor zielony). Łączą one krawędzie SES modelujących część stalową i betonową belki. W modelu przedstawionym na ryc. 4.1 płyta żelbetowa dzielona jest na odcinki wyłącznie na kierunku osi X. Jest to uproszczenie poczynione celem poprawy czytelności prezentacji założeń. Docelowo model zakładał będzie podział również na kierunku osi Y.

Każdy SES o numerze i ma własny niezależny układ odniesienia $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$. Układ ten dobierany jest tak, aby pokrywał się z głównym centralnym układem bezwładności danego SES. Przy takim założeniu parametrami wystarczającymi do opisanie SES są jego masa oraz masowe momenty bezwładności. Wielkości te zestawia się w diagonalnej macierzy o postaci:

$$\mathbf{M}^{(i)} = \text{diag}[m^{(i)}, m^{(i)}, m^{(i)}, J_x^{(i)}, J_y^{(i)}, J_z^{(i)}] \quad (1)$$

Pierwsze trzy wyrazy macierzy równe są masie SES, pozostałe trzy są masowymi momentami bezwładności SES względem odpowiednich osi. W przypadku modelu opisującego ruch w przestrzeni dwuwymiarowej macierz \mathbf{M} upraszcza się do macierzy o wymiarach 3 x 3. Na diagonalu pozostają dwie masy oraz masowy moment bezwładności określony względem osi prostopadłej do rozpatrywanej płaszczyzny ruchu.

Każdy EST o numerze k ma własny niezależny układ osi głównych $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$. Główne osie EST charakteryzują się tym, że siły działające na EST na kierunku zgodnym z tymi osiami powodują jego odkształcenia translacyjne wyłącznie na kierunku działania tych sił. Podstawowymi parametrami opisującymi EST o numerze k są współczynniki opisujące jego właściwości sprężyste i tłumiące. Właściwości tłumiące mogą zostać pominięte w przypadku rozwiązywania zagadnienia drgań własnych konstrukcji. Właściwości sprężyste opisywane są za pomocą dwóch macierzy: macierzy współczynników sztywności translacyjnej $\mathbf{K}_T^{(k)}$ oraz macierzy współczynników sztywności rotacyjnej $\mathbf{K}_R^{(k)}$. Dla układu przestrzennego obydwie macierze są diagonalne o wymiarach 3 x 3.

$$\mathbf{K}_T^{(k)} = \text{diag}[k_{T,x}^{(k)}, k_{T,y}^{(k)}, k_{T,z}^{(k)}]; \quad \mathbf{K}_R^{(k)} = \text{diag}[k_{R,x}^{(k)}, k_{R,y}^{(k)}, k_{R,z}^{(k)}] \quad (2)$$

Macierze te, podobnie jak macierz mas \mathbf{M} , upraszczają się w przypadku analizowania układów, których ruch odbywa się w przestrzeni dwuwymiarowej. Macierz współczynników sztywności translacyjnej $\mathbf{K}_T^{(k)}$ upraszcza się do macierzy o wymiarach 2 x 2, natomiast w macierzy $\mathbf{K}_R^{(k)}$ pozostaje jeden współczynnik sztywności rotacyjnej określony względem osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu.

Praktyczne sposoby tworzenia globalnej macierzy sztywności \mathbf{K} na podstawie macierzy współczynników sztywności translacyjnej $\mathbf{K}_T^{(k)}$ oraz rotacyjnej $\mathbf{K}_R^{(k)}$, jak również sposoby tworzenia globalnej macierzy bezwładności \mathbf{M} na podstawie poszczególnych macierzy mas $\mathbf{M}^{(i)}$ szczegółowo omówione są w literaturze [59, 60, 136].

Równanie różniczkowe drgań swobodnych, uzyskane na podstawie ogólnego równania różniczkowego ruchu przy pominięciu oddziaływań zewnętrznych działających na belkę oraz przy pominięciu wpływu tłumienia, można zapisać jako:

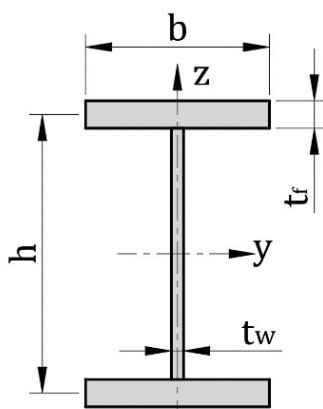
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

gdzie \mathbf{q} jest wektorem współrzędnych uogólnionych. Sposoby rozwiązania powyższego równania w celu wyznaczenia częstotliwości drgań własnych oraz odpowiadających im postaci drgań są szczegółowo opisane w dostępnej literaturze przedmiotu [60].

W kolejnych podrozdziałach podano dodatkowe informacje dotyczące zastosowanych technik modelowania poszczególnych komponentów układów płytowo-belkowych oraz elementów zespalających płytę z belkami.

4.2. Modelowanie elementów belkowych

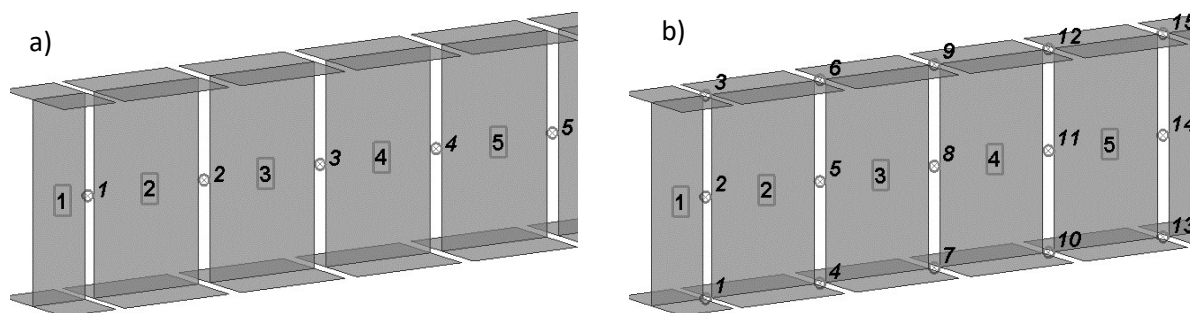
W układach płytowo-belkowych stosowanych w konstrukcjach budowlanych rolę elementów belkowych usztywniających płytę pełnią najczęściej monolitycznie połączone z nią belki żelbetowe o przekroju prostokątnym lub stalowe profile dwuteowe (ryc. 4.2). Dwuteowniki mogą być profilami gorąco walcowanymi lub spawanymi blachownicami. Rzadziej spotkać można rozwiązania, gdzie żelbetowa lub zespolona płyta współpracuje z belkami drewnianymi [125]. Sposób modelowania samego elementu belkowego w metodzie SES nie zmienia się znacząco w zależności od materiału, z jakiego wykonana jest belka. Proces modelowania opisano na przykładzie stalowej bisymetrycznej belki dwuteowej.



Ryc. 4.2. Przekrój dwuteowy – układ osi, definicja oznaczeń

Na początku rozdziału przedstawiono ogólną ideę tworzenia modelu SES dla liniowych elementów belkowych o stałym przekroju. Budowę modelu rozpoczyna podział pierwotny belki na odcinki o równej lub zbliżonej długości, skupienie właściwości sprężysto-tłumiących poszczególnych odcinków w ich środkach ciężkości w postaci jednego EST, a następnie połączenie powstałych EST za pomocą SES charakteryzujących się odpowiednią masą oraz masowymi momentami bezwładności. Podczas rozwiązywania zagadnień drgań przestrzennych wszystkie SES powinny charakteryzować się sześcioma stopniami swobody. Opisane podejście jest dobrze opisane w literaturze [59, 60, 136].

Możliwe jest wprowadzenie pewnych modyfikacji podczas modelowania stalowej belki dwuteowej. Pierwszy krok, tj. wykonanie podziału pierwotnego, pozostaje bez zmian. Jednak właściwości sprężysto-tłumiące poszczególnych odcinków można skupiać nie w pojedynczym EST usytuowanym w środku ciężkości danego odcinka, ale w trzech niezależnych EST umieszczanych odpowiednio w miejscu położenia osi pasa górnego i dolnego dwuteownika oraz w osi środknika. Podejście takie znajduje zastosowanie oczywiście wyłącznie w przypadku modelowania dwuteowników stalowych. Porównanie obydwu sposobów modelowania belkowego elementu dwuteowego przedstawiono na ryc. 4.3. Symbolem \otimes oznaczono położenie EST. Na ryc. 4.3a przedstawiono klasyczny sposób modelowania dwuteownika, gdzie poszczególne SES modelujące belkę łączone są pojedynczym EST umieszczonym w osi belki. Na ryc. 4.3b przedstawiono model, gdzie pojedynczy EST został zastąpiony trzema niezależnymi EST.



Ryc. 4.3. Model SES belki o przekroju dwuteowym: a) pojedynczy EST; b) trzy niezależne EST

Główną zaletą przedstawionego podejścia jest ułatwiony proces modelowania elementów o zmiennym przekroju realizowanym przez zmianę grubości pasów. Niezależne EST w osi pasów pozwalają również na łatwe modelowanie ewentualnych uszkodzeń, jakie mogą się pojawić w pasach dwuteownika, np. w miejscu zmiany grubości (spoina czołowa).

W klasycznym podejściu pokazanym na ryc. 4.3a wartości współczynników sztywności dla poszczególnych pojedynczych EST ustalane są następująco:

$$\mathbf{K}_T^{(k)} = \mathbf{K}_{T,beam} = \text{diag}\left[k_{T,x}^{(k)}, k_{T,y}^{(k)}, k_{T,z}^{(k)}\right] = \text{diag}\left[\frac{E_b A_b}{\Delta L}; \frac{\kappa_y G_b A_b}{\Delta L}; \frac{\kappa_z G_b A_b}{\Delta L}\right] \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_R^{(k)} = \mathbf{K}_{R,beam} = \text{diag}\left[k_{R,x}^{(k)}, k_{R,y}^{(k)}, k_{R,z}^{(k)}\right] = \text{diag}\left[\frac{G_b J_{Tb}}{\Delta L}; \frac{E_b J_{yb}}{\Delta L}; \frac{E_b J_{zb}}{\Delta L}\right] \quad (5)$$

gdzie:

E_b – moduł sprężystości podłużnej materiału belki,

G_b – moduł sprężystości poprzecznej materiału belki,

A_b – pole powierzchni belki,

J_{Tb} – wskaźnik sztywności przekroju na skręcanie,

J_{yb} – moment bezwładności przy zginaniu względem osi y ,

J_{zb} – moment bezwładności przy zginaniu względem osi z ,

ΔL – długość odcinka z podziału pierwotnego (por. ryc. 4.1),

κ_y, κ_z – współczynniki ścinania.

Rozdzielenia sztywności na trzy niezależne EST umieszczone odpowiednio w osiach pasów i w osi środka dokonano tak, aby wyniki uzyskiwane przed wprowadzeniem i po wprowadzeniu modyfikacji nie różniły się od siebie. Bloki współczynników sztywności dla EST umieszczanych w osi środka wyznaczyć można następująco:

$$\mathbf{K}_{T,web} = \text{diag}\left[\frac{E_b A_{b,w}}{\Delta L}; \frac{\kappa_y G_b A_b}{\Delta L}; \frac{\kappa_z G_b A_b}{\Delta L}\right] \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{R,web} = \text{diag}\left[\frac{G_b J_{Tb}}{\Delta L}; \frac{E_s J_{yb,w}}{\Delta L}; \frac{E_s J_{zb,w}}{\Delta L}\right] \quad (7)$$

gdzie:

$A_{b,w}$ – pole powierzchni środka,

$J_{yb,w}$ – moment bezwładności środka przy zginaniu względem osi y ,

$J_{zb,w}$ – moment bezwładności środka przy zginaniu względem osi z .

Jak wynika z powyższych równań, EST umieszczony w osi środka pozostał odpowiedzialny za sztywność całego przekroju na skręcanie oraz ścinanie. Jedynie współczynniki sztywności na zginanie w dwóch kierunkach oraz sztywności translacyjnej wzdłuż osi X uległy redukcji. Bloki współczynników sztywności dla EST umieszczanych w osi pasa wyznaczyć można następująco:

$$\mathbf{K}_{T,flange} = \text{diag}\left[\frac{E_b A_{b,f}}{\Delta L}; 0; 0\right] \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_{R,flange} = \text{diag}\left[0; \frac{E_b J_{yb,f}}{\Delta L}; \frac{E_s J_{zb,f}}{\Delta L}\right] \quad (9)$$

gdzie:

$$A_{b,f} = b_f t_f \quad - \text{pole powierzchni pasa,}$$

$$J_{yb,f} = b_f t_f^3 / 12 \quad - \text{moment bezwładności pasa przy zginaniu względem osi } y,$$

$$J_{zb,f} = b_f^3 t_f / 12 \quad - \text{moment bezwładności pasa przy zginaniu względem osi } z.$$

Ustalając parametry bezwładnościowe dla SES modelujących kształtownik, ich układy odniesienia $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$ można przyjmować tak, aby ich kierunki pokrywały się z globalnym układem współrzędnych X, Y, Z. Wartości współczynników bezwładności diagonalnej macierzy $\mathbf{M}^{(i)}$ wyznacza się wg następujących zależności:

$$m^{(i)} = A_b \cdot \Delta L \cdot \rho_b \quad (10)$$

$$J_x^{(i)} = J_{0b} \frac{m^{(i)}}{A_b} \quad (11)$$

$$J_y^{(i)} = J_{yb} \frac{m^{(i)}}{A_b} + m^{(i)} \frac{\Delta L^2}{12} \quad (12)$$

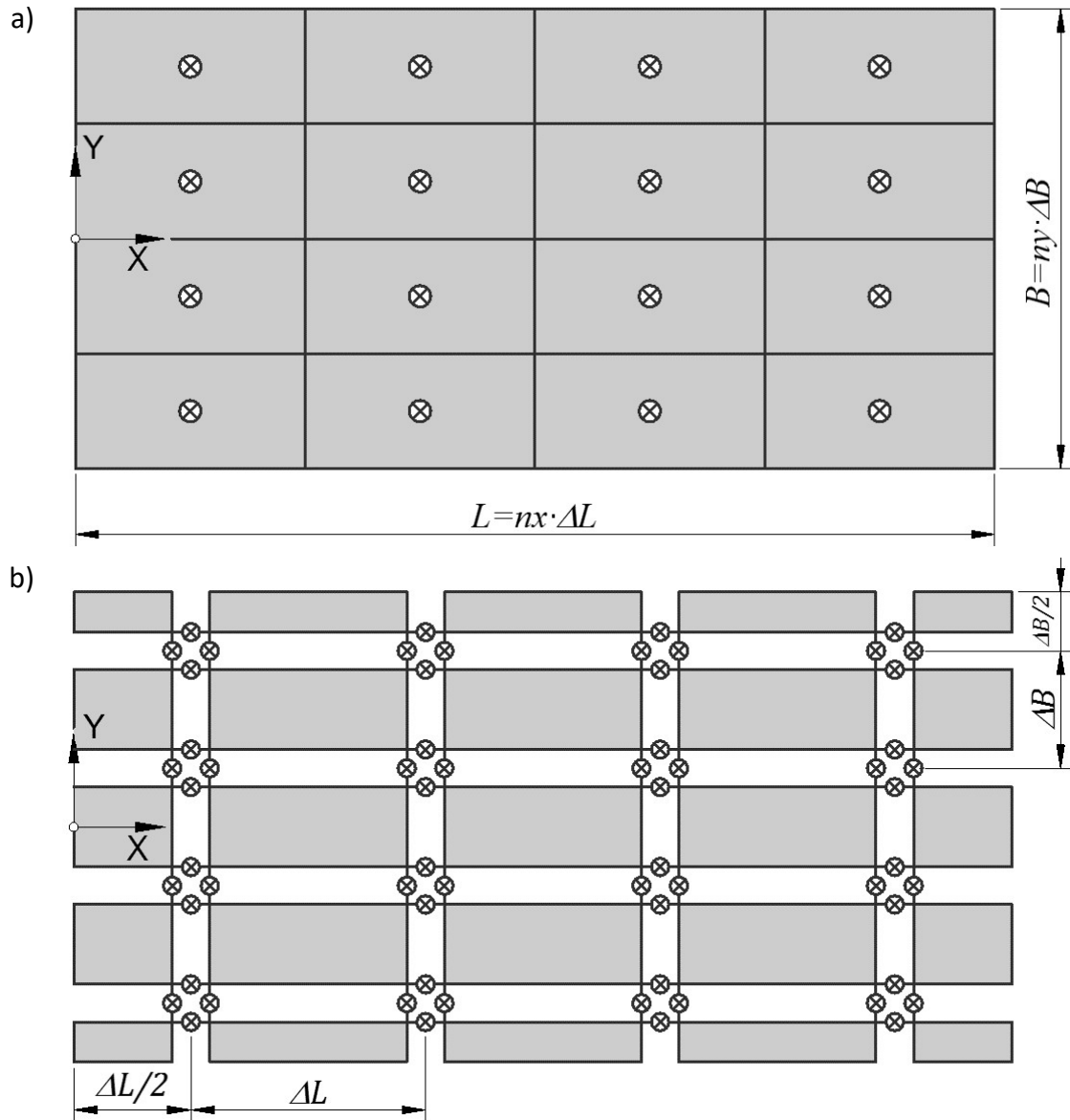
$$J_z^{(i)} = J_{zb} \frac{m^{(i)}}{A_b} + m^{(i)} \frac{\Delta L^2}{12} \quad (13)$$

gdzie: $J_{0b} = J_{yb} + J_{zb}$ – biegunowy moment bezwładności przekroju belki.

4.3. Modelowanie płyt izotropowych umiarkowanie grubych

Modelowanie elementów płytowych o ciągłym rozkładzie masy zaczyna się tak samo jak w przypadku elementów belkowych, czyli od wykonania podziału pierwotnego. Zgodnie z wytycznymi, jakie podaje literatura [60], w przypadku płyt podział należy przeprowadzić w dwóch kierunkach. W niniejszym opracowaniu stosowany będzie następujący podział: na kierunku równoległym do osi X na n_x odcinków oraz na kierunku równoległym do osi Y na n_y odcinków. Uzyskany przy tych założeniach podział pierwotny przedstawiono na ryc. 4.4a. W środku ciężkości każdego elementu ulokowany zostanie EST skupiający właściwości sprężysto-tłumiące danego fragmentu płyty.

Na ryc. 4.4b przedstawiono podział wtórny dokonany zgodnie z wytycznymi, jakie znaleźć można w literaturze. Jak widać, każdy EST rozbity został na zestaw czterech mniejszych EST tak, aby połączyć narożniki czterech sąsiadujących ze sobą sztywnych elementów skończonych SES. W każdym zestawie czterech EST dwa są równoległe do globalnej osi X, a dwa są równoległe do osi Y. Można założyć, że lokalne układy współrzędnych wszystkich EST przyjmowane będą tak, że oś $X_{EST}^{(k)}$ ustawiana będzie wzdłuż EST, tj. na kierunku wyznaczonym przez położenie łączonych SES, natomiast oś główna $Y_{EST}^{(k)}$ przyjmowana będzie jako prostopadła do poprzedniej i leżąca w płaszczyźnie płyty.



Ryc. 4.4. Model SES: a) pierwotny podział płyty na odcinki; b) podział wtórny płyty

Przy założeniu, że modelowana płyta wykonana jest z materiału izotropowego, a jej grubość pozostaje niezmienna, wartości współczynników sztywności translacyjnej oraz rotacyjnej można ustalić wg następujących zależności:

a) dla EST równoległych do globalnej osi X

$$\mathbf{K}_T^{(k)} = \text{diag}[k_{T,x}^{(k)}, k_{T,y}^{(k)}, k_{T,z}^{(k)}] = \text{diag}\left[\frac{E_p h_p \Delta B}{2\Delta L}; \frac{\kappa G_p h_p \Delta B}{2\Delta L}; \frac{\kappa G_p h_p \Delta B}{2\Delta L}\right] \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_R^{(k)} = \text{diag}[k_{R,x}^{(k)}, k_{R,y}^{(k)}, k_{R,z}^{(k)}] = \text{diag}\left[\frac{G_p h_p^3 \Delta B}{12\Delta L}; \frac{E_p h_p^3 \Delta B}{24(1 - \nu_p^2)\Delta L}; \frac{E_p h_p \Delta B^3}{24\Delta L}\right] \quad (15)$$

b) dla EST równoległych do globalnej osi Y

$$\mathbf{K}_T^{(k)} = \text{diag} \left[\frac{E_p \cdot h_p \cdot \Delta L}{2 \cdot \Delta B}; \frac{\kappa G_p h_p \Delta L}{2 \cdot \Delta B}; \frac{\kappa G_p h_p \Delta L}{2 \cdot \Delta B} \right] \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_R^{(k)} = \text{diag} \left[\frac{G_p h_p^3 \Delta L}{12 \Delta B}; \frac{E_p h_p^3 \Delta L}{24(1 - \nu_p^2) \Delta B}; \frac{E_p h_p \Delta L^3}{24 \Delta B} \right] \quad (17)$$

gdzie:

E_p – moduł sprężystości podłużnej materiału płyty,

G_p – moduł sprężystości poprzecznej materiału płyty,

h_p – grubość płyty,

ν_p – liczba Poissona,

κ – współczynnik ścinania.

Przedstawione zależności (14–17) zmodyfikowano w stosunku do tych zawartych w pracy [60]. Współczynniki sztywności translacyjnej $k_{T,y}^{(k)}$ oraz $k_{T,z}^{(k)}$ odpowiadające za uwzględnienie odkształceń postaciowych spowodowanych ścinaniem pomnożono przez korygujący współczynnik ścinania κ uwzględniający nierównomierny rozkład naprężeń ścinających. Zabieg ten pozwolił na uwzględnienie zjawisk opisanych teorią płyt Reissnera-Mindlina, tj. płyt umiarkowanie grubych. Zależności przedstawione w pracy [60] nie uwzględniały współczynnika ścinania.

Kolejną wprowadzoną zmianą w stosunku do równań przedstawionych w [60] jest wprowadzenie współczynnika sztywności rotacyjnej EST na kierunku osi Z prostopadłej do płaszczyzny środkowej płyty. Przypadek płyt opisywany w pracy [60] zakładał, że SES modelujące płytę miały trzy stopnie swobody: translacyjny na kierunku osi Z oraz rotacyjne na kierunkach osi X i Y. W opracowanym modelu ustroju płytowo-belkowego elementy modelujące płytę miały możliwość translacji nie tylko na kierunku osi Z, ale również na kierunku pozostałych dwóch osi. Zdecydowano, że SES modelujące płytę będą miały sześć stopni swobody. Konieczne zatem było wprowadzenie współczynnika sztywności rotacyjnej $k_{R,z}^{(k)}$ na kierunku osi Z. Sztywność określono, traktując poszczególne pasma płyty na kierunkach wzdłuż osi X i Y jako belki pryzmatyczne o przekroju prostokątnym. Bez uwzględnienia tej sztywności SES znajdujące się w narożnikach płyty (ryc. 4.4a) doznawałyby niekontrolowanych obrotów względem osi Z. Wynika to z faktu, że przy schemacie rozmieszczenia elementów sprężysto-tłumiących (ryc. 4.4b) narożne SES łączone są z pozostałą częścią modelu wyłącznie jednym narożnikiem.

Kolejnym krokiem budowy modelu SES było określenie parametrów bezwładnościowych SES, traktując je jak elementy o sześciu stopniach swobody. Niezależne układy odniesienia $X_{SES}^{(i)}, Y_{SES}^{(i)}, Z_{SES}^{(i)}$ poszczególnych SES modelujących płytę można przyjąć tak, aby były ich

kierunki pokrywały się z globalnym układem współrzędnych X, Y, Z. Wartości współczynników bezwładności diagonalnej macierzy $\mathbf{M}^{(i)}$ dla typowych powtarzalnych SES modelujących wewnętrzną część płyty wyznaczyć można wg zależności (18–21).

$$m^{(i)} = h_p \cdot \Delta L \cdot \Delta B \cdot \rho_p \quad (18)$$

$$J_x^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{12} (\Delta B^2 + h_p^2) \quad (19)$$

$$J_y^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{12} (\Delta L^2 + h_p^2) \quad (20)$$

$$J_z^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{12} (\Delta L^2 + \Delta B^2) \quad (21)$$

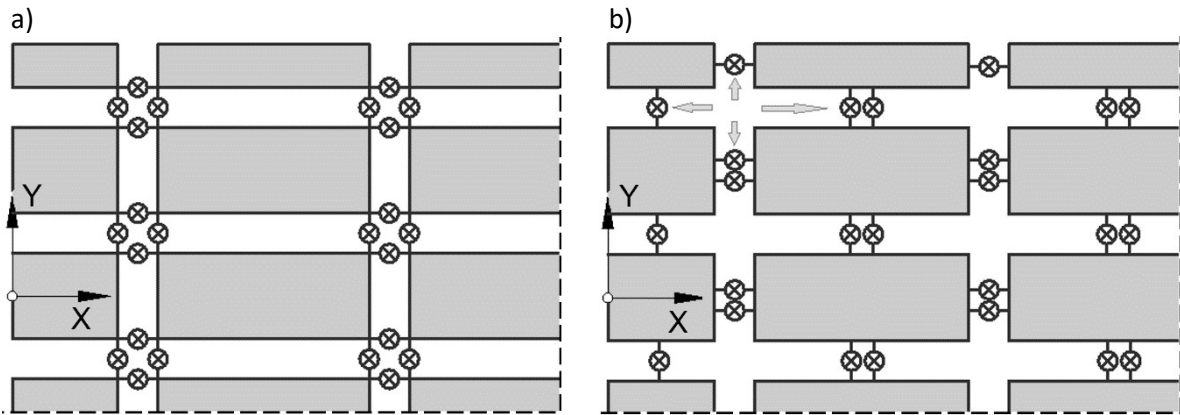
Z powyższych zależności wynika, że podczas rozwiązywania zagadnienia drgań płyty z wykorzystaniem modelu SES uwzględniane będą nie tylko siły bezwładności w ruchu posuwistym na kierunku osi Z, tak jak to zazwyczaj ma miejsce w trakcie rozwiązywania zagadnienia drgań płyt, ale również siły bezwładności przy ruchu posuwistym na kierunku pozostałych dwóch osi, a także siły bezwładności powstające w trakcie ruchu obrotowego na kierunku wszystkich trzech osi. Uwzględnienie sił bezwładności w ruchu obrotowym podczas analizy drgań płyty jest kolejnym zjawiskiem przewidzianym teorią drgań płyt średnio grubych Reissnera-Mindlina.

Przy wyznaczaniu parametrów bezwładnościowych SES umieszczonych na krawędziach płyty równania (18–21) muszą zostać odpowiednio zmodyfikowane. Wynika to z faktu, że elementy te charakteryzują się mniejszymi wymiarami, co pokazano na ryc. 4.4b. Elementy wzdłuż krawędzi równoległych do osi X oraz Y mają dwukrotnie mniejszą masę niż elementy wewnętrzne, natomiast elementy narożne charakteryzują się czterokrotnie mniejszą masą.

Przedstawiony powyżej sposób modelowania płyt w konwencji metody sztywnych elementów skończonych może zostać zmodyfikowany poprzez zmianę położenia EST łączących sztywne elementy skończone. Analizy mające na celu ocenę wpływu zmiany położenia EST na uzyskiwane rezultaty rozpoczęto w trakcie realizacji dwóch projektów badawczych, w których autor niniejszej monografii był głównym wykonawcą [21, 149]. Projekty dotyczyły analizy drgań oraz modelowania stalowo-betonowych belek zespolonych. Modyfikację położenia EST proponowali również autorzy prac [9, 11], w których modelowano drgania elektrofiltrów.

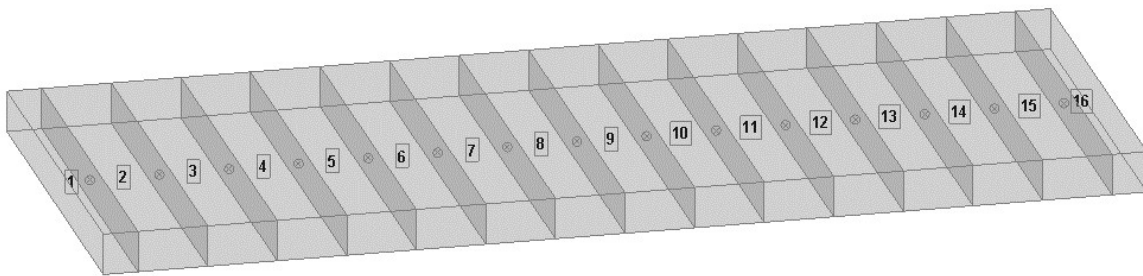
Modyfikacja polega na przesunięciu EST z narożników do środków krawędzi SES, tak jak to pokazano na ryc. 4.5b. Jak widać, w przypadku typowych SES modelujących wewnętrzną część płyty ich krawędzie łączone są dwoma EST umieszczonymi na środku boku każdego SES. Na rysunku pokazano je delikatnie rozsunięte dla poprawy czytelności, jednak

w rzeczywistości położenie obydwu EST pokrywa się ze sobą. Zmodyfikowane położenie EST umożliwi uwzględnienie w trakcie analiz wszystkich sześciu stopni swobody SES, tj. trzech translacyjnych i trzech rotacyjnych. W dalszej części pracy przedstawiono porównanie wyników uzyskiwanych dla modeli z różnym położeniem EST.



Ryc. 4.5. Modelowanie płyty w konwencji metody SES. Położenie EST łączących SES: a) podejście klasyczne; b) zmodyfikowane położenie EST

W pewnych przypadkach możliwe jest stosowanie podziału płyty wyłącznie na jednym kierunku. Sytuacja taka może mieć miejsce np. podczas modelowania obiektów mostowych, gdzie stosunek długości do szerokości płyty pomostu jest duży. Model taki przedstawiono na ryc. 4.6. W modelu płyta traktowana jest jako pryzmatyczna belka, poszczególne SES łączone są ze sobą za pomocą pojedynczego EST umieszczanych w osi płyty.



Ryc. 4.6. Model SES płyty – podział wyłącznie na jednym kierunku

Ze względu na jednokierunkowy podział zmodyfikować należy współczynnik sztywności rotacyjnej $k_{R,x}^{(k)}$. Do jego ponownej definicji użyto korygującego współczynnika K_1 .

$$k_{R,x}^{(k)} = \frac{G_c K_1 h_p^3 B}{2 \cdot \Delta L} \quad (22)$$

$$K_1 = \frac{1}{3 + 2 \left(\frac{h_p}{B} + \frac{h_p^2}{B^2} \right)} \quad (23)$$

Współczynnik ten pozwala wyznaczyć moment bezwładności na skręcanie w przypadku swobodnego pręta o przekroju prostokątnym [19]. Tabela 4.1 zawiera porównanie wartości współczynnika K_1 wyznaczonych wg zależności (23) z wartościami przedstawionymi przez Timoszenkę w pracy [129]. Jak widać, różnice są niewielkie i nie przekraczają 3%.

Tabela 4.1. Porównanie wartości współczynnika K_1 wyznaczonego w zależności od stosunku B/h_p

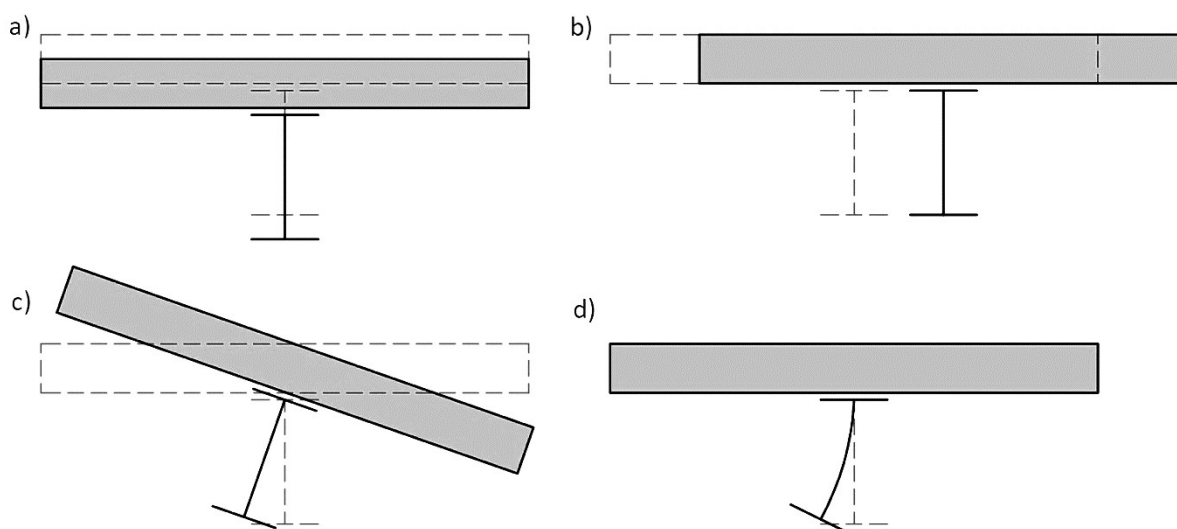
B/h_p	K_1 wg [129]	K_1 wg [19]	Różnica
1,0	0,141	0,143	1,3%
1,2	0,166	0,165	-0,5%
1,5	0,196	0,191	-2,3%
2,0	0,229	0,222	-3,0%
2,5	0,249	0,243	-2,5%
3,0	0,263	0,257	-2,2%
4,0	0,281	0,276	-1,8%
5,0	0,291	0,287	-1,3%
10,0	0,312	0,311	-0,5%
1000,0	0,333	0,333	0,0%

4.4. Modelowanie płyt usztywnionych belkami

4.4.1. Informacje ogólne

Model płyty usztywnionej belką opracować można dzięki złożeniu dwóch niezależnych modeli płyty i belki, których definicję przedstawiono w poprzednich rozdziałach. Opracowując model, należy zwrócić uwagę na położenie belki względem płyty. Najczęstszym przypadkiem jest sytuacja, gdy płyta spoczywa bezpośrednio na belkach ją podpierających. Jednak w przypadku stropów o konstrukcji *slim floor* stosowane są belki stalowe z rozbudowaną półką dolną, na której oparta jest płyta żelbetowa. Pozwala to na całkowite zintegrowanie dźwigara stalowego z płytą żelbetową, co eliminuje dźwigary ze strefy podstropowej, a tym samym zmniejsza wysokość konstrukcyjną stropu. Konstrukcje takie są jednak stosowane znacznie rzadziej niż klasyczne układy płytowo-belkowe z belkami umieszczonymi od spodu płyty.

Drugim ważnym aspektem, o którym należy pamiętać, jest sposób połączenia płyty z belkami. Połączenie może być sztywne lub podatne. Przykładem sztywnego połączenia płyty i belki może być konstrukcja monolitycznego stropu żelbetowego pokazanego na ryc. 2.4. Inaczej jest w przypadku zespolonych konstrukcji wielomateriałowych, np. stalowo-betonowego stropu zespolonego lub stropów, gdzie zastosowano belki drewniane. W tym przypadku sztywność połączenia zależy od rodzaju zastosowanych łączników.

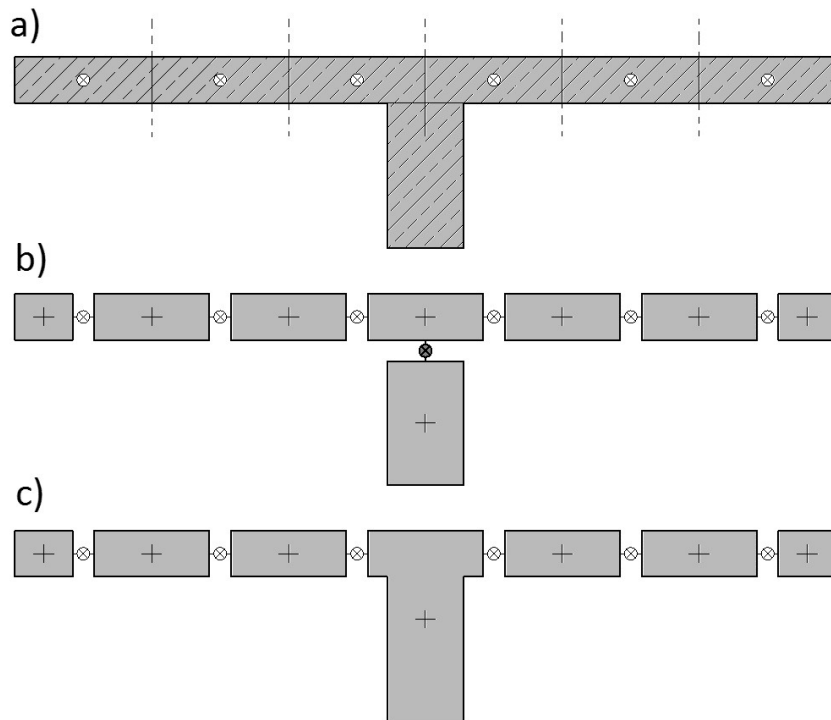


Ryc. 4.7. Formy drgań fragmentu płyty z dwuteową belką usztywniającą

W ogólnym przypadku możliwe formy drgań układu płyta-belka pokazano w sposób schematyczny na ryc. 4.7. Wyróżnić można: a) drgania giętne pionowe; b) drgania giętne poziome; c) drgania skrętne; d) drgania dystorsyjne. Podstawową i najczęściej analizowaną formą drgań są drgania giętne pionowe. Pozostałe formy drgań nie są obserwowane w każdym przypadku. Drgania giętne poziome możliwe są do obserwowania jedynie w przypadku, gdy długość płyty jest znacznie większa niż jej szerokość. Z sytuacją taką mamy do czynienia np. w przypadku mostowych obiektów inżynierskich o dużej rozpiętości w stosunku do szerokości. W tej samej klasie obiektów obserwować można również skrętne formy drgań. Z kolei formy drgań dystorsyjnych są cechą charakterystyczną występującą w przypadku elementów cienkościennych. Należy zauważyć, że w tym przypadku kształt przekroju poprzecznego ulega zmianie, co nie jest obserwowane przy pozostałych formach drgań. W sytuacji, gdy belka usztywniająca płytę wykonana jest np. z dwuteowego kształtownika stalowego, duża różnica pomiędzy sztywnością płyty i sztywnością panelu środkowego belki powoduje, że tego typu formy drgań mogą być obserwowane.

4.4.2. Układ płyta-belka z zespoleniem sztywnym

Modelowanie jednomateriałowych konstrukcji płytowo-belkowych można przeprowadzić na dwa sposoby. Zagadnienie omówiono na przykładzie monolitycznego stropu żelbetowego. Na ryc. 4.8a przedstawiono przekrój poprzeczny przez modelowany strop z zaznaczonym poprzecznym podziałem pierwotnym stosowanym w odniesieniu do płyty. Na rysunku zaznaczono również położenie EST skupiających właściwości sprężysto-tłumiące płyty. Zastosowano podział pierwotny zapewniający, że nad osią belki zlokalizowany zostanie SES modelujący płytę.



Ryc. 4.8. Model SES monolitycznego stropu żelbetowego: a) przekrój stropu; b) niezależne SES modelujące płytę i belkę; c) wspólny SES modelujący belkę i fragment płyty

Podział belki na SES stosowany będzie wyłącznie na kierunku wzdłuż osi belki, tj. na kierunku osi X (na potrzeby czytelności opisu założono, że globalna oś X jest równoległa do osi belek usztywniających płytę). Podział na kierunku osi X wykonuje się o takiej samej gęstości zarówno dla płyty, jak i belki usztywniającej. Na ryc. 4.8b przedstawiono podział wtórny, a zarazem model SES wykonany przy założeniu, że płyta i belka modelowane są oddzielnie. Aby zapewnić współpracę obydwu elementów, konieczne jest zdefiniowanie w modelu dodatkowych EST, które odzwierciedlały będą właściwości sprężysto-tłumiące warstwy stykowej pomiędzy płytą i belką (por. ryc. 4.1). Elementom tym należy nadać odpowiednią sztywność tak, aby nie dochodziło do poślizgu na styku belka-płyta. Zakładając grubość płyty równą h_p , szerokość belki wynoszącą b oraz długość wynikającą z podziału pierwotnego równą ΔL , współczynniki sztywności można wyznaczyć z następujących zależności:

$$\mathbf{K}_T = \text{diag} \left[\frac{\kappa G b \Delta L}{2 h_p}; \frac{\kappa G b \Delta L}{2 h_p}; \frac{E b \Delta L}{2 h_p} \right] \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_R = \text{diag} \left[\frac{E b^3 \Delta L}{24 h_p}; \frac{E b \Delta L^3}{24 h_p}; \frac{G K_1 b \Delta L^3}{2 h_p} \right] \quad (25)$$

Na ryc. 4.8c przedstawiono drugi sposób modelowania zakładający, że belkę wraz ze współpracującym z nią fragmentem płyty modeluje się jako pojedynczy SES. Pierwszy sposób modelowania jest bardziej uniwersalny, gdyż w razie konieczności można łatwo uwzględnić ewentualną odkształcalność zespolenia. Technika ta umożliwi również korektę położenia belki bez konieczności zmiany sposobu dyskretyzacji płyty.

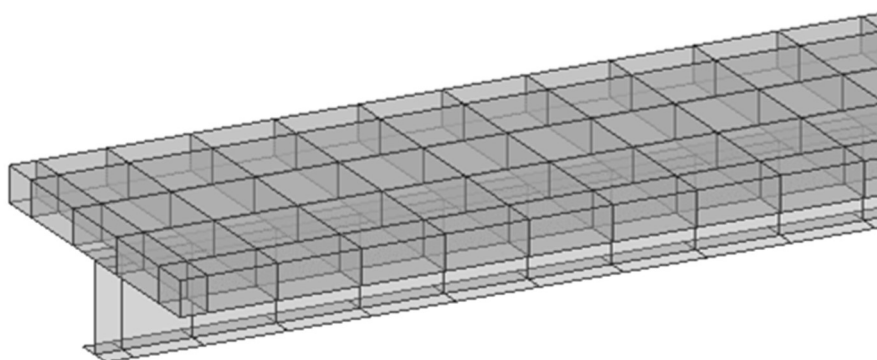
W przypadku, gdyby stosunek wysokości do szerokości belki usztywniającej był większy od pięciu, można zastosować podział belki na wysokości, tj. na kierunku osi Z. W tej sytuacji należy wykorzystać technikę modelowania analogiczną jak w przypadku płyty.

4.4.3. Układ płyta-belka z zespoleniem podatnym

W przypadku zespolonych konstrukcji wielomateriałowych, np. stalowo-betonowych, połączenie płyty z belkami prawie zawsze charakteryzuje się pewną podatnością. Jest ona często pomijana w trakcie analiz prowadzonych przez innych badaczy. Tymczasem podatność zespolenia ma znaczący wpływ na charakterystyki dynamiczne takich konstrukcji.

Rzeczywiste elementy zapewniające współpracę płyty z belkami mogą być rozmieszczone w sposób ciągły lub w sposób dyskretny. W tym drugim przypadku przy opracowywaniu modelu konstrukcji w konwencji metody SES dobrze jest tak dobrać gęstość podziału pierwotnego, aby rozmieszczenie EST skupiających właściwości łączników odpowiadało rzeczywistemu ich położeniu w modelowanej belce. Nie jest to oczywiście warunek konieczny do zapewniania odpowiedniej dokładności uzyskiwanych rezultatów analiz, jednak ułatwi to proces modelowania oraz interpretację uzyskiwanych wyników.

Na ryc. 4.9 przedstawiono złożenie dwóch modeli, tj. modelu fragmentu płyty oraz modelu dwuteowej belki stalowej, która ją usztywnia. Dobrze jest, jeśli pierwotny podział płyty na kierunku poprzecznym dokonany zostanie na parzystą liczbę odcinków. Przy tym założeniu podział wtórny zawierał będzie nieparzystą liczbę SES, czyli środkowy SES płyty zlokalizowany będzie bezpośrednio nad belką. Zabieg taki ułatwi późniejsze modelowanie zespolenia. Przy innym podziale płyty wykonanie modelu zespolenia jest również możliwe, z tym że bezpośrednio nad belką mogą znaleźć się dwa SES modelujące płytę, co należy uwzględnić w modelu zespolenia.



Ryc. 4.9. Widok modelu SES fragmentu płyty z dwuteową belką usztywniającą

Na ryc. 4.9 pokazano model z podziałem pierwotnym na cztery odcinki w poprzek płyty, co dało pięć sztywnych elementów skończonych na szerokości płyty. Podział na kierunku podłużnym zarówno płyty, jak i elementu belkowego jest taki sam. Można uzależnić go od

gęstości rozmieszczenia rzeczywistych elementów zespalających, uwzględniając przy tym minimalną wymaganą gęstość dyskretyzacji, która zapewnia zakładaną dokładność obliczeń.

Jak wspomniano wcześniej, właściwości dynamiczne płyty usztywnionej belkami zależą między innymi od sztywności elementów zespalających na ścinanie K_h . Łączniki o odpowiednio dobranej sztywności zapobiegają poślizgom na styku płyta-belka. Jest to sztywność na kierunku stycznym do płaszczyzny zespolenia. Sztywność ta ma znaczący wpływ na dynamiczne właściwości konstrukcji w zakresie drgań giętych niskoczęstotliwościowych. Wraz ze wzrostem częstotliwości drgań rosną jednak siły bezwładności w ruchu postępowym na kierunku pionowej osi Z. W związku z tym coraz większą rolę zaczyna odgrywać sztywność zespolenia na kierunku pionowym, tj. normalnym do płaszczyzny styku płyty i belki. Przyjęto, że sztywność ta nazywana będzie sztywnością normalną oraz oznaczana będzie jako K_v . Wartości sztywności K_h oraz K_v wyznaczyć można albo na podstawie empirycznych zależności dostępnych w literaturze, albo na podstawie wyników badań doświadczalnych. Należy przy tym pamiętać, że obydwie sztywności uwzględniają nie tylko sztywność zastosowanych łączników, ale również sztywność materiału, który je otacza, oraz sztywność sąsiadującej z łącznikiem warstwy stykowej pomiędzy płytą i belką.

Niezależnie od rodzaju zastosowanych elementów łączących płytę z belką można przyjąć, że EST modelujące zespolenie będą umieszczane bezpośrednio nad osią belki, na górnej krawędzi SES opisującego jej geometrię. Jeśli zespolenie w rzeczywistej belce stanowią np. sworznie rozmieszczone parami, w modelu należy stosować pojedynczy EST skupiający właściwości sprężyste obydwu sworzni.

Układy osi głównych $X_{EST}^{(k)}, Y_{EST}^{(k)}, Z_{EST}^{(k)}$ dla EST modelujących zespolenie przyjmować można jako równoległe do globalnego układu osi. Przy tym założeniu oraz przy założeniu, że oś belki jest równoległa do globalnej osi X, bloki współczynników sztywności translacyjnej dla EST modelujących zespolenie ustalić można następująco:

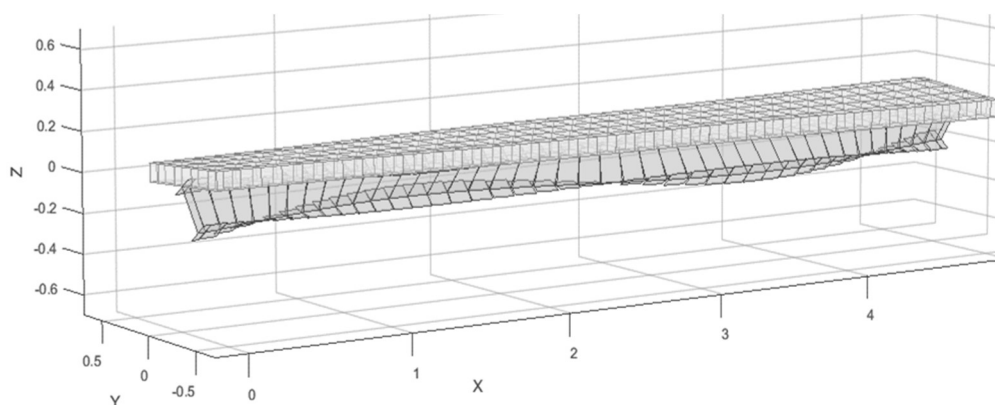
$$\mathbf{K}_{T,ZESP} = \text{diag}[K_{hx}; K_{hy}; K_v] \quad (26)$$

Ze względu na charakter współpracy płyta-belka największy wpływ na zachowanie się konstrukcji ma sztywność na kierunku osi X. Sztywność na kierunku osi Y (oś poprzeczna do osi belki) nie ma decydującego wpływu na właściwości konstrukcji. W celu uproszczenia modelu można na obydwu kierunkach równoległych do płaszczyzny styku zespolenia przyjmować taką samą sztywność K_h .

Oprócz bloku współczynników translacyjnych konieczne jest jeszcze wyznaczenie elementów bloku współczynników rotacyjnych $\mathbf{K}_{R,ZESP}$. Można go przyjąć w postaci:

$$\mathbf{K}_{R,ZESP} = \text{diag}[K_{RX}; K_{RY}; K_{RZ}] \quad (27)$$

Wartości elementów bloku współczynników rotacyjnych podobnie jak i translacyjnych ustalić można na podstawie wyników badań doświadczalnych lub niezależnych analiz numerycznych. Możliwe jest pewne uproszczenie polegające na przyjęciu zerowej wartości współczynników odpowiedzialnych za sztywność obrotową na kierunku osi Y oraz Z. Sztywności te nie odgrywają kluczowej roli przy ocenie właściwości dynamicznych całej konstrukcji. Inaczej jest w przypadku parametru K_{RX} , który określa sztywność na obrót względem osi X (oś równoległa do osi belki), przez co będzie zapewniał współpracę płyty i belki przy formach drgań, w których dochodzi do znacznych obrotów wokół osi X, tj. drganiach skrętnych i dystorsyjnych (por. ryc. 4.7c, d oraz 4.10).



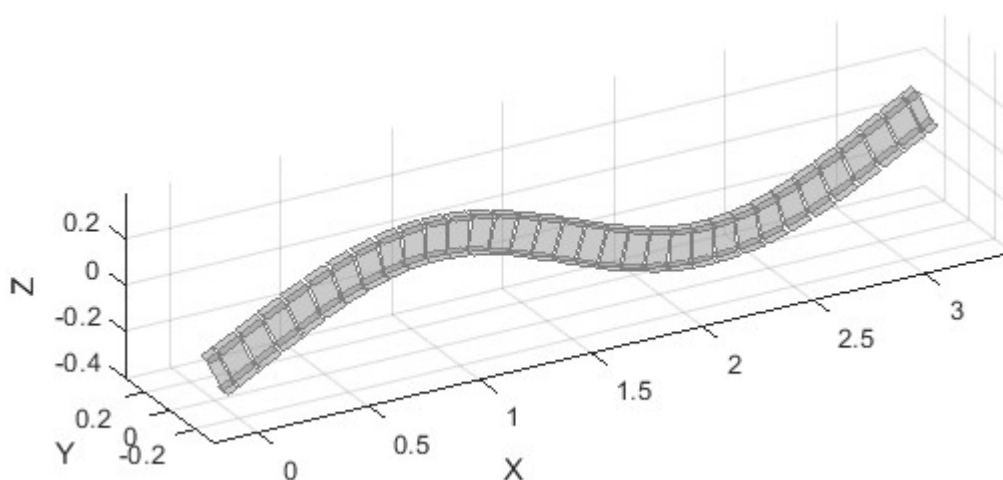
Ryc. 4.10. Przykładowa postać drgań dystorsyjnych

W przypadku zastosowania zerowej wartości współczynnika belka doznawałaby niekontrolowanych obrotów względem płyty. Należy również zauważyć, że poprawnie dobrana wartość współczynnika K_{RX} umożliwia również analizę dystorsyjnych form drgań konstrukcji. Jak zauważono wcześniej, formy te wynikają z odkształceń przekroju poprzecznego belki. W stosowanej metodzie, przy założeniu, że dyskretyzacja belki wykonywana jest wyłącznie na kierunku wzdłuż osi belki, analiza takich form nie jest możliwa w sposób bezpośredni. Wartości współczynnika K_{RX} można ustalić tak, aby model zapewniał odpowiednią zgodność wyników również w zakresie drgań o charakterze dystorsyjnym.

4.5. Zastosowanie systemu MATLAB do modelowania w konwencji metody SES

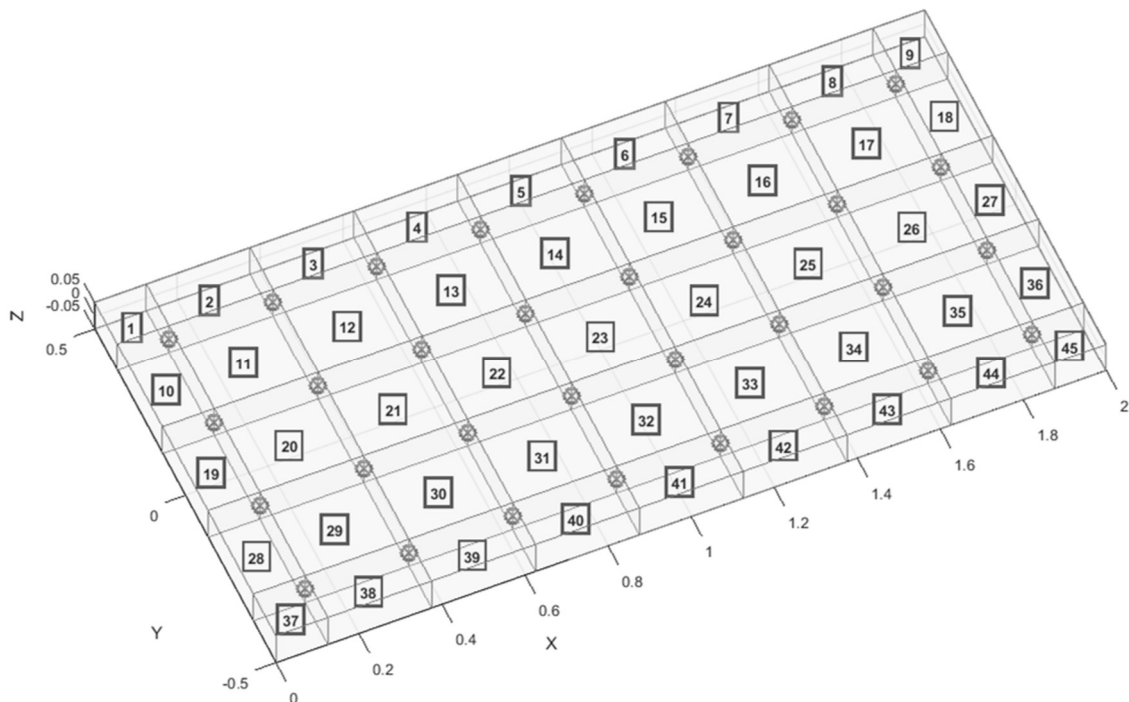
Ze względu na brak komercyjnych systemów wykorzystujących metodę sztywnych elementów skończonych zdecydowano się na opracowanie wielomodułowego oprogramowania, wykorzystując do tego system MATLAB, który zapewnia interaktywne środowisko do wykonywania obliczeń naukowych i inżynierskich. Program umożliwia analizy zarówno w zakresie drgań własnych, jak i swobodnych oraz wymuszonych. Opracowując kod źródłowy programu, wykorzystano wytyczne zawarte w dostępnej literaturze [59, 60, 136]. Program wyposażony został w moduł pozwalający na graficzną prezentację opracowanego modelu oraz wyników analiz.

Pierwszy moduł umożliwia wykonanie modelu elementu belkowego. Możliwe jest dowolne sterowanie gęstością podziału belki na sztywne elementy skończone. Domyślnie stosowany jest podział na odcinki o równej długości. Dwa podstawowe kształty przekroju poprzecznego to przekrój prostokątny oraz dwuteowy. Możliwe jest wprowadzenie danych dowolnego przekroju poprzecznego belki. W przypadku przekroju prostokątnego oraz dwuteowego złożonego z trzech prostokątów program automatycznie wyznacza charakterystyki przekroju. Jeśli przekrój belki jest dwuteownikiem stalowym gorącowalcowanym, program pobiera dane o charakterystykach geometrycznych przekroju z zaimplementowanej bazy danych. Przykład modelu belki dwuteowej o długości 3,2 m wykonanej z profilu IPE 160 pokazano na ryc. 4.11.

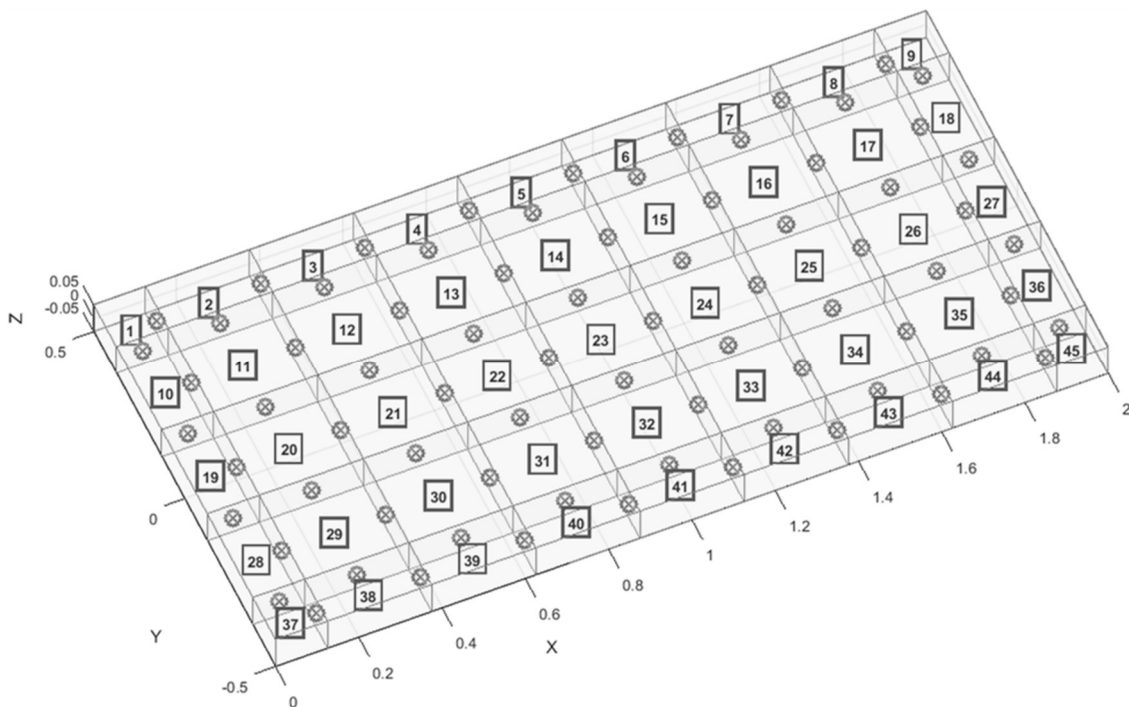


Ryc. 4.11. Widok modelu belki o przekroju dwuteowym – druga postać drgań giętych pionowych

Drugi z modułów umożliwia opracowanie modelu płyty prostokątnej o dowolnych proporcjach boków i grubości. Gęstość podziału pierwotnego na obydwu głównych kierunkach ustawiana jest niezależnie. Automatycznie stosowany jest podział na odcinki o równej długości, istnieje jednak możliwość dostosowania gęstości podziału do wymagań użytkownika. Możliwe jest zastosowanie podziału wyłącznie na jednym kierunku i traktowanie płyty jako elementu belkowego (por. ryc. 4.6). Jak wspomniano w rozdziale omawiającym proces modelowania płyt, rozmieszczając EST skupiające właściwości sprężysto-tłumiące płyty, można wykorzystać podejście klasyczne, polegające na lokalizowaniu EST w narożnikach sztywnych elementów skończonych, lub podejście zmodyfikowane – na środkach boków SES. Model przykładowej płyty o długości 2,0 m, szerokości 1,0 m i grubości 0,1 m przedstawiono na ryc. 4.12 i 4.13. Zastosowano podział pierwotny odpowiednio na osiem i cztery odcinki wzdłuż i w poprzek płyty, co w rezultacie dało model zbudowany z $9 \times 5 = 45$ SES.



Ryc. 4.12. Widok modelu płyty prostokątnej. Klasyczne położenie EST. Liczba SES = 45

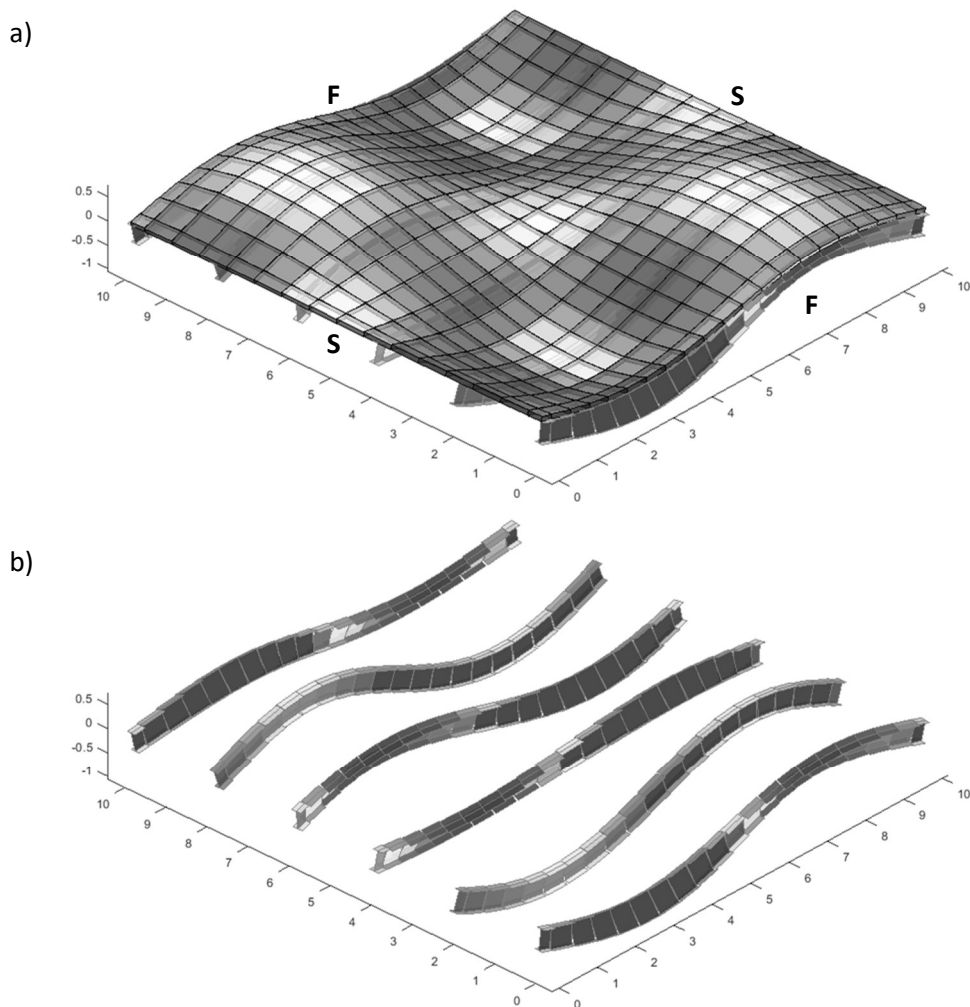


Ryc. 4.13. Widok modelu płyty prostokątnej. Zmodyfikowane położenie EST

Na rysunkach pokazano kolejno klasyczne i zmodyfikowane położenie EST, które oznaczono symbolem \otimes . Należy pamiętać, że na ryc. 4.12 każdy symbol \otimes reprezentuje cztery niezależne EST. Z kolei na ryc. 4.13 wewnętrzne symbole \otimes przedstawiają dwa niezależne EST, natomiast EST łączące krawędziowe SES są pojedyncze (por. ryc. 4.5). Program daje możliwość dowolnego przesuwania EST wzdłuż krawędzi SES, za co odpowiada odpowiedni współczynnik,

którego wartość można zmieniać w przedziale od 0 do 1. Przy wartości 0 elementy sprężysto-tłumiące umieszczone są w narożnikach, a przy wartości 1 na środkach SES. Symbole reprezentujące położenie EST oraz numerację SES i EST można w dowolnym momencie wyłączyć, co wpływa na płynność działania modułu graficznego.

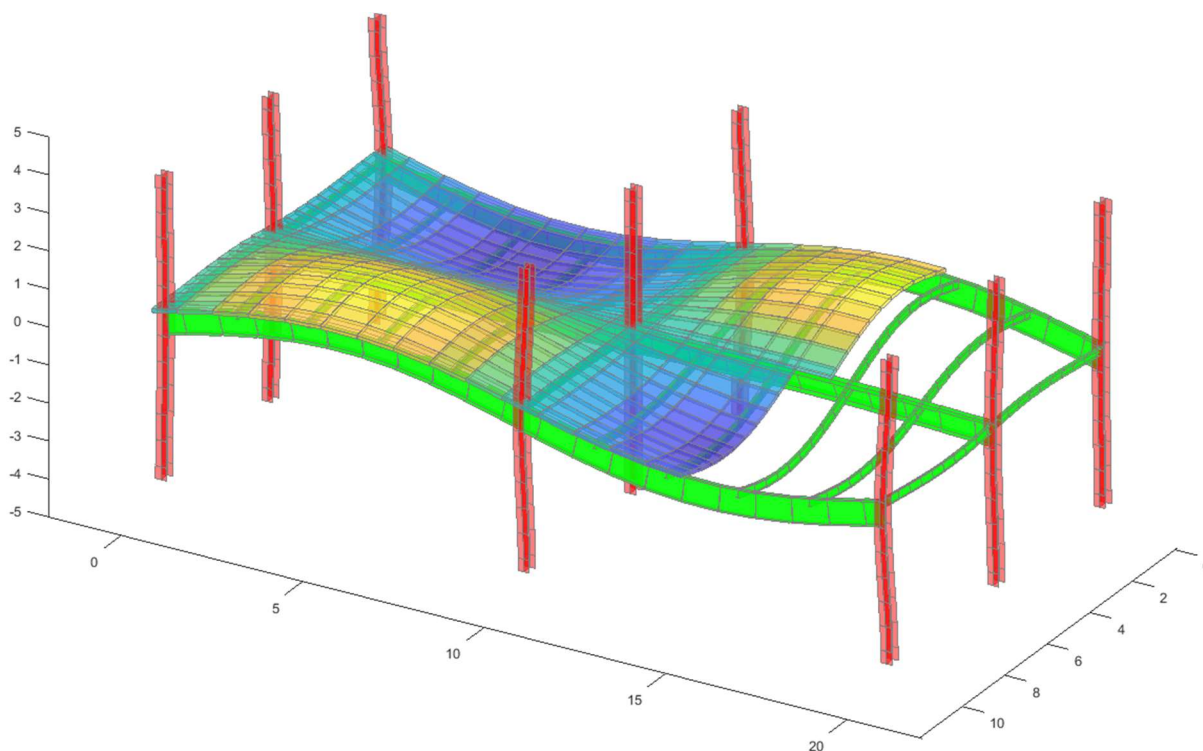
Opracowane modele belki lub płyty można analizować niezależnie. Wcześniej konieczne jest ustalenie warunków brzegowych oraz wybór opcji analizy. W dalszym kroku możliwe jest połączenie przygotowanych modeli płyty i belki. Na ryc. 4.14 przedstawiono model płyty kwadratowej o wymiarach 10 x 10 m i grubości 10 cm, usztywnionej belkami stalowymi IPE 400. Na rysunku pokazano jedną z form drgań konstrukcji, prezentując jednocześnie możliwości modułu graficznego programu. Kolory poszczególnych SES mogą być zmieniane w zależności od wartości składowych wektora postaci drgań konstrukcji. Program umożliwia również wyłączenie widoczności wybranych elementów, co ułatwia wizualną ocenę rezultatów.



Ryc. 4.14. Model płyty 10 x 10 m grubości 10 cm usztywnionej belkami IPE400 w rozstawie 2,0 m:
a) pełny widok; b) wyłączona widoczność płyty

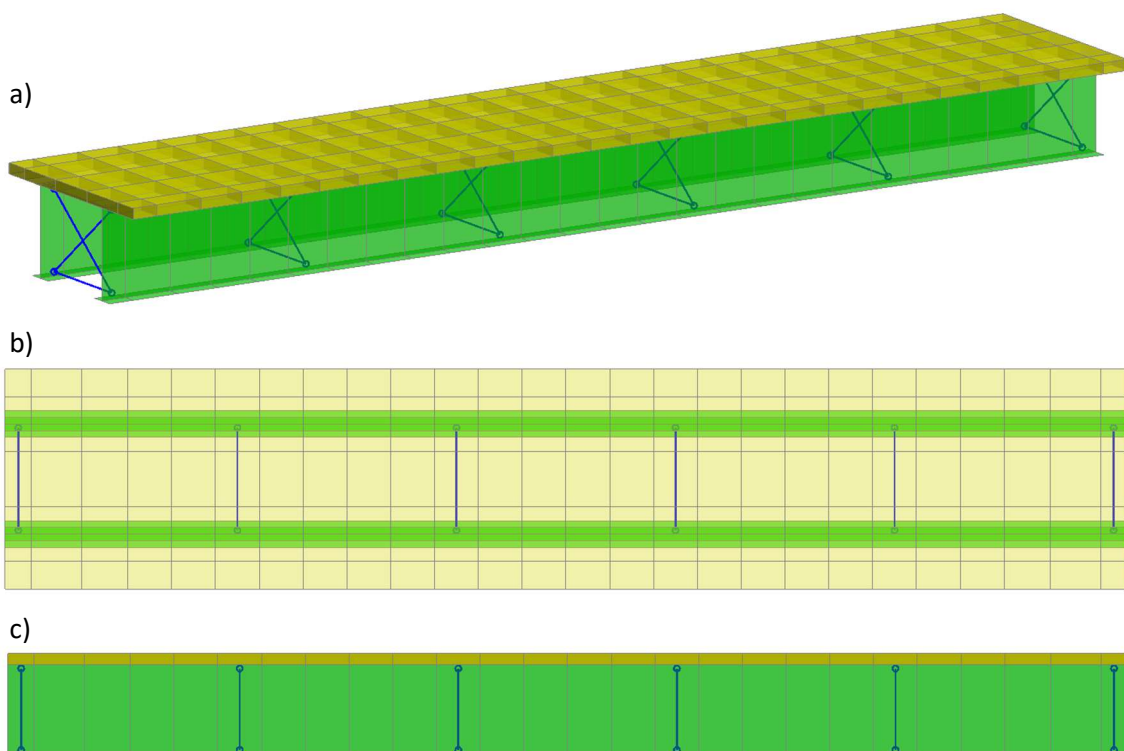
Opracowując model konstrukcji płytowo-belkowej, należy szczególną uwagę zwrócić na właściwe określenie warunków brzegowych. W przedstawionym przykładzie zastosowano oddzielne podparcie płyty oraz belek ją usztywniających. Krawędzie płyty podparto wg schematu SFSF, co oznacza, że krawędzie płyty, wzdłuż których umieszczono belki, pozostały swobodne (ang. *free, F*), a pozostałe krawędzie są wolno podparte (ang. *simply supported, S*). Na krawędziach wolno podpartych odebrano wszystkie translacyjne stopnie swobody. Dodatkowo wprowadzono również podparcia na końcach belek, pozostawiając im swobodę przemieszczeń jedynie na kierunku osi belki. Program umożliwia dowolne kształtowanie warunków brzegowych zarówno płyty, jak i belki.

Najbardziej zaawansowanym modułem oprogramowania jest ten pozwalający na opracowanie modelu fragmentu lub całego stropu o konstrukcji płytowo-belkowej. Przykład modelu takiej konstrukcji pokazano na ryc. 4.15. Dla poprawy czytelności wyłączono widoczność fragmentu płyty. Program uwzględnia obecność wszystkich kluczowych elementów konstrukcji, tj. słupów, podciągów, belek drugorzędnych oraz płyty stropowej. Sztywność połączeń pomiędzy wszystkimi elementami prętowymi, tj. słupami, podciągami i belkami, może być dowolnie kształtowana. Możliwe jest uwzględnienie połączeń przegubowych, sztywnych, jak również o określonej podatności na obrót. Połączenie płyty z elementami belkowymi, które ją podpierają, również może być traktowane jako sztywne lub podatne. Dodatkowo możliwe jest uwzględnianie niepełnej sztywności płyty w miejscach występowania przerw dylatacyjnych zlokalizowanych np. nad osiami podciągów.



Ryc. 4.15. Widok modelu stropu o konstrukcji zespolonej

Oprócz modułu pozwalającego na modelowanie płyt usztywnionych oraz stropów przygotowano również dodatkowy moduł, który pozwala na modelowanie obiektów mostowych. Przykład modelu jednotorowego dwudźwigarowego zespolonego mostu kolejowego przedstawiono na ryc. 4.16. Model żelbetowej płyty pomostu oraz monosymetrycznych dźwigarów stalowych przygotowano wg procedur opisanych wcześniej. Uwzględniono podatne połączenie na styku stal-beton. Model uzupełniono o stężenia poprzeczne łączące dźwigary stalowe. Stężenia modelowano jako nieważkie, a do ich definicji wykorzystano elementy sprężysto-tłumiące, których lokalne układy współrzędnych dostosowano do geometrii stężeń. Sztywność EST wyznaczono na podstawie geometrii rzeczywistego stężenia.



Ryc. 4.16. Widok modelu zespolonego mostu kolejowego jednotorowego swobodnie podpartego:
a) widok aksonometryczny; b) widok z góry; c) widok z boku

4.6. Współczynniki ścinania

Teoria belek Timoshenki podobnie jak teoria płyt średnio grubych Reissnera-Mindlina uwzględnia oprócz sił bezwładności w ruchu obrotowym również wpływ naprężeń ścinających na odkształcenia analizowanej belki. Wpływ sił bezwładności w ruchu obrotowym uwzględniany jest oczywiście wyłącznie podczas rozwiązywania zagadnienia drgań własnych lub wymuszonych układu. Współczynnik ścinania κ stosowany jest w obydwu teoriach celem uwzględnienia nierównomiernego rozkładu naprężeń ścinających w przekroju elementu.

Teoria znajduje zastosowanie podczas analizy bardzo szerokiego spektrum zagadnień. Początkowe wykorzystanie wyłącznie do analizy typowych budowlanych układów konstrukcyjnych, tj. belek czy słupów, rozszerzone zostało do analizy wielu nietypowych konstrukcji w innych gałęziach przemysłu. Analizy obejmują zarówno zagadnienia statyki liniowej, nieliniowej, jak i analizy dynamiczne, podczas których z kolei rozpatrywane są różne zakresy częstotliwości drgań. W związku z powyższym ustalenie jednej w pełni uniwersalnej wartości współczynnika ścinania lub jednego sposobu jego wyznaczania jest niemożliwe. W literaturze znaleźć można wiele metod wyznaczania współczynnika κ , które można podzielić na dwie główne grupy. Pierwsza grupa zakłada zastosowanie współczynnika κ celem redukcji różnic pomiędzy średnimi wartościami odkształceń przy ścinaniu a rzeczywistymi odkształceniami wyznaczonymi z użyciem ścisłych rozwiązań teorii sprężystości. Druga grupa metod zakłada zastosowanie współczynnika ścinania celem dopasowania częstotliwości drgań belki do częstotliwości drgań uzyskanych w wyniku rozwiązania zagadnienia ścisłego wg metod teorii sprężystości.

4.6.1. Belki o przekroju prostokątnym

Autorem koncepcji zastosowania współczynnika κ jest Timoshenko [126], który zaproponował dla przekroju prostokątnego $\kappa = 2/3$, co wynikało z przebiegu odkształceń postaciowych o maksymalnej wartości występującej na poziomie osi obojętnej przekroju. W kolejnej pracy Timoshenko [127], bazując na wynikach badań doświadczalnych przedstawionych w pracy [35], zaproponował wartość $\kappa = 8/9$ w celu przybliżenia wyników jego równania opisującego drgania belki wolnopodparłej do wyników uzyskanych na podstawie teorii płaskiego stanu naprężeń. Goens w pracy [39] z 1931 roku zaproponował wartość $\kappa = 5/6$, którą już wcześniej sugerował Föppl [36], wyznaczając ją przy wykorzystaniu metod energetycznych. Taką samą wartość dla zagadnień statycznych przedstawili Roark i Raymond [99] w 1954 roku, bazując na wynikach zaprezentowanych przez Newlina i Trayera [81]. Do dzisiaj wartość $\kappa = 5/6$ (lub jej odwrotność w zależności od definicji równań opisujących zagadnienie) jest często przytaczana w literaturze przedmiotu [24, 37, 60, 62] niezależnie od tego, czy praca dotyczy zagadnień statyki czy dynamiki konstrukcji. Mindlin i Deresiewicz [75] w wyniku analiz przeprowadzonych z uwzględnieniem drgań wysokoczęstotliwościowych zaproponowali, aby współczynnik κ wyznaczać z zależności $\pi^2/12$. Należy zauważyć, że wszystkie powyżej wymienione wartości współczynnika κ były niezależne od wartości liczby Poissona ν .

Pierwszym autorem, który zdecydował się wyznaczyć wartość współczynnika ścinania κ uwzględniając wpływ liczby Poissona, był Olsson [84]. Zależność pozwalającą na wyznaczenie współczynnika κ ustalił z uwzględnieniem dodatkowych odkształceń przy ścinaniu wyznaczonych przez von Kármána i Seewalda [131]. Dla przekroju prostokątnego zależność przyjęła postać:

$$\kappa = 20(1 + \nu)/(24 + 15\nu) \quad (28)$$

Cowper [27] w 1966 roku wyprowadził równanie ruchu belki Timoshenki, wykorzystując równania trójwymiarowej teorii sprężystości, w wyniku czego uzyskał ogólne zależności na wyznaczenie współczynników sztywności κ przy ścinaniu względem odpowiednio osi y oraz osi z w postaci:

$$\kappa_y = \frac{2(1 + \nu)J_z}{\frac{\nu(J_y - J_z)}{2} - \frac{A}{J_z} \iint y(\chi + yz^2) dydz} \quad (29)$$

$$\kappa_z = \frac{2(1 + \nu)J_y}{\frac{\nu(J_z - J_y)}{2} - \frac{A}{J_y} \iint z(\chi + zy^2) dydz} \quad (30)$$

gdzie J_y oraz J_z są momentami bezwładności przekroju względem odpowiednich osi, natomiast χ nazywana funkcją zginania [83] jest funkcją harmoniczną, która spełnia warunki brzegowe Neumanna, której rozwiązanie zależy od kształtu przekroju i jest dostępne w literaturze [68]. Opracowane zależności zakładały poprawność rozwiązania w zakresie analiz statycznych oraz drgań niskoczęstotliwościowych o dużej długości fali. Uwzględniając powyższe równania, zależność pozwalająca wyznaczyć współczynnik ścinania dla przekroju prostokątnego przyjmuje postać:

$$\kappa = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu) \quad (31)$$

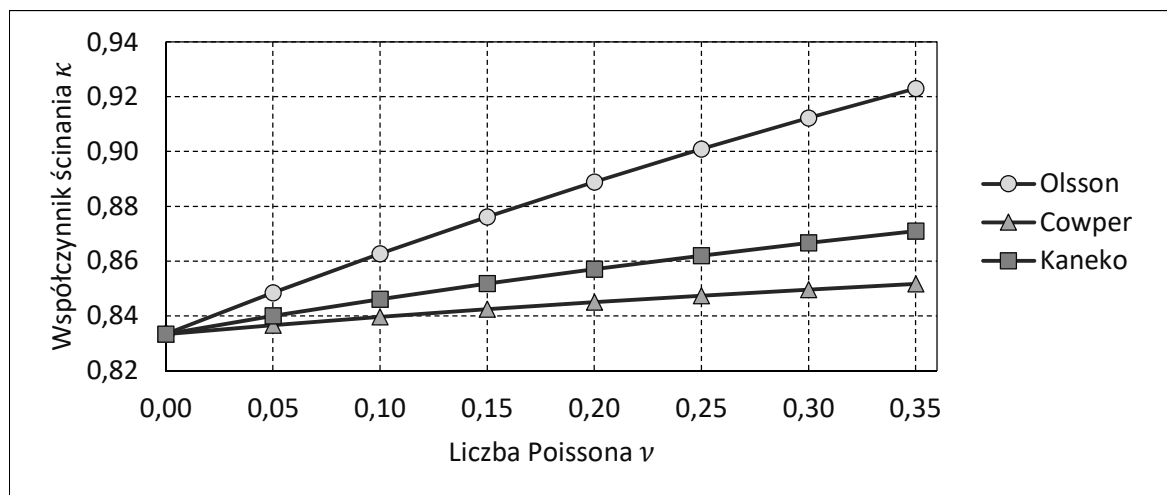
Kaneko [53] w pracy z 1975 roku dokonał obszernego porównania metod wyznaczania współczynnika ścinania wraz ze wskazaniem formuły, która zapewnia najlepszą zgodność z wynikami badań doświadczalnych. Przedstawioną formułę dla przekroju prostokątnego opracował na podstawie założeń wskazanych przez Timoshenkę w pracy [127].

$$\kappa = 5(1 + \nu)/(6 + 5\nu) \quad (32)$$

Jak łatwo zauważyć, równania przedstawione przez Olssona (28), Cowpera (31) oraz Kaneko (32) można zapisać w postaci ogólnej:

$$\kappa = (5/6)(1 + \nu)/(1 + a\nu) \quad (33)$$

gdzie a równe jest 5/8, 11/12 lub 5/6 w zależności od autora. Charakter zmian współczynnika ścinania w zależności od wartości liczby Poissona pokazano na ryc. 4.17.



Ryc. 4.17. Przekrój prostokątny – zmiana współczynnika ścinania w zależności od liczby Poissona

Jak widać, według każdej zależności wartość współczynnika κ rośnie wraz ze wzrostem liczby Poissona. Wartość początkowa dla $\nu = 0$ dla każdej z metod jest taka sama i wynosi $5/6$. Największy wzrost zaobserwować można dla zależności proponowanej przez Olssona. Pozostałe dwie metody proponowane przez Cowpera i Kaneko generują wzrost wynoszący odpowiednio 2% i 4% dla liczby Poissona $\nu = 0,3$.

W kolejnych latach inni autorzy proponowali kolejne, bardziej złożone zależności uwzględniające nie tylko wpływ liczby Poissona, ale również wpływ proporcji boków prostokąta, proporcji długości belki do jej wysokości czy też wpływ częstotliwości analizowanej formy drgań [29, 46, 47, 49, 116, 118].

4.6.2. Belki o przekroju dwuteowym

Wyznaczenie wartości współczynnika ścinania dla przekroju dwuteowego, tak samo jak dla przekroju prostokątnego, można przeprowadzić, stosując podejście energetyczne. Polega ono na porównaniu energii odkształcenia sprężystego belki o rzeczywistym rozkładzie naprężeń stycznych z energią odkształcenia elementu zastępczego o tak dobranym naprężeniu stycznym o stałej wartości, aby zapewnić zgodność kąta odkształcenia postaciowego w środku ciężkości belki [31]. Powyższe można przedstawić w postaci następującego równania:

$$\frac{1}{2} \int_A (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA = \frac{1}{2} T \frac{T}{\kappa GA} \quad (34)$$

Na tej podstawie dla przekrojów symetrycznych współczynnik ścinania można wyznaczyć, stosując wyrażenie:

$$\kappa = \frac{T^2}{A \cdot \int_A (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) dA} \quad (35)$$

Zależności pozwalające na określenie rozkładu naprężeń stycznych τ_{xy} oraz τ_{xz} w przekroju dwuteowym są powszechnie dostępne w literaturze [51]. Na potrzeby wyznaczenia wartości współczynnika κ z powyższej zależności opracowano program komputerowy w środowisku MATLAB, który umożliwiał wyznaczenie współczynnika ścinania dla bisymetrycznych profili dwuteowych. Program pozwalał na analizę profili z uwzględnieniem promieni wyokrąglenia, które występują w przypadku stalowych elementów gorącocalcowanych.

Papachristidis i in. [89] w pracy poświęconej opracowaniu słupowo-belkowego elementu skończonego do nieliniowych analiz elementów poddanych dużemu ścinaniu przedstawili zależność (36), która pozwala na wyznaczenie wartości współczynnika ścinania bisymetrycznego przekroju dwuteowego przedstawionego na ryc. 4.2. Przekrój został sprowadzony do trzech prostokątów. Założono, że siłą tnącą działa wzdłuż osi z przekroju. Zależność wyprowadzono, stosując omówione powyżej podejście energetyczne, uwzględniając przy tym częściowo uproszczony przebieg naprężeń stycznych w elemencie.

$$\kappa_z = \frac{120t_w J_y^2}{h^2(5t_w t_f b^3 + 30t_f^2 h b^2 + 10t_w t_f h^2 b + t_w^2 h^3)(t_w h + 2t_f b)} \quad (36)$$

Cowper w omówionej wcześniej pracy [27] oprócz rozwiązania dla przekroju prostokątnego przedstawił również wyprowadzoną na podstawie równania (30) zależność pozwalającą na wyznaczenie współczynnika ścinania przekroju dwuteowego, bisymetrycznego przy ścinaniu na kierunku osi z (por. ryc. 4.2). Podobnie jak w przypadku przekroju prostokątnego wyprowadzona zależność uwzględnia wpływ liczby Poissona.

$$\kappa_z = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3)+\nu(11+66m+135m^2+90m^3)+30n^2(m+m^2)+5\nu n^2(8m+9m^2)} \quad (37)$$

$$\text{gdzie:} \quad m = 2bt_f/ht_w \quad n = b/h$$

Bank i Bednarczyk [15] przedstawili rozwiązanie bazujące na rozstrzygnięciu zaproponowanym przez Cowpera, przy czym dokonali uogólnienia pozwalającego na analizę dwuteowych elementów zespolonych, w których pasy oraz środek elementu wykonane są z dwóch różnych materiałów.

$$\kappa_z = \frac{20(\alpha+3m)^2}{\frac{E_1}{G_1}(60m^2n^2+60\alpha mn^2)+\frac{E_1}{G_2}(180m^3+300\alpha m^2+144\alpha^2m+24\alpha^3)+\nu_1(60m^2n^2+40\alpha mn^2)+\nu_2(30m^2+6\alpha m-4\alpha^2)} \quad (38)$$

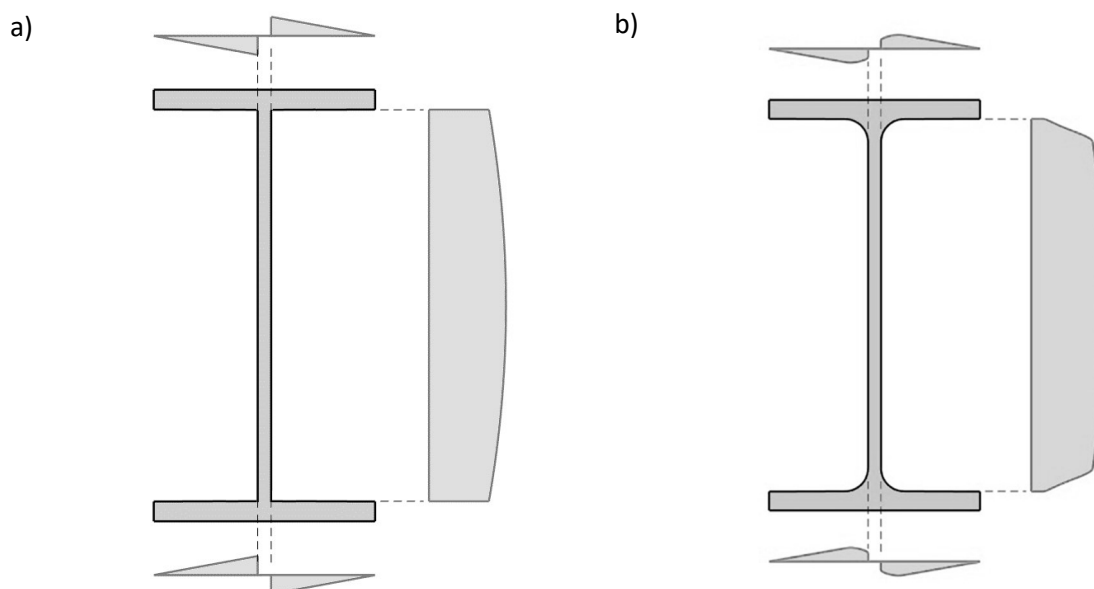
$$\text{gdzie: } 1 - \text{pasy, } 2 - \text{środek, } n = \frac{b}{h}, m = \frac{2bt_f}{ht_w}, \alpha = \frac{E_2}{E_1}$$

Należy przy tym zauważyć, że ze względu na zastosowanie dwóch różnych materiałów wartość współczynnika κ należy ostatecznie odnieść do moduły sprężystości jednego z nich. Oprócz tego autorzy zaproponowali odnosić go nie do moduły sprężystości poprzecznej G , ale do moduły sprężystości podłużnej E . Ostatecznie przy założeniu, że powyższa zależność miałaby zostać wykorzystana do wyznaczenia współczynnika ścinania przekroju jednorodnego materiałowo, wartość wyznaczonego współczynnika należy pomnożyć przez stosunek E/G .

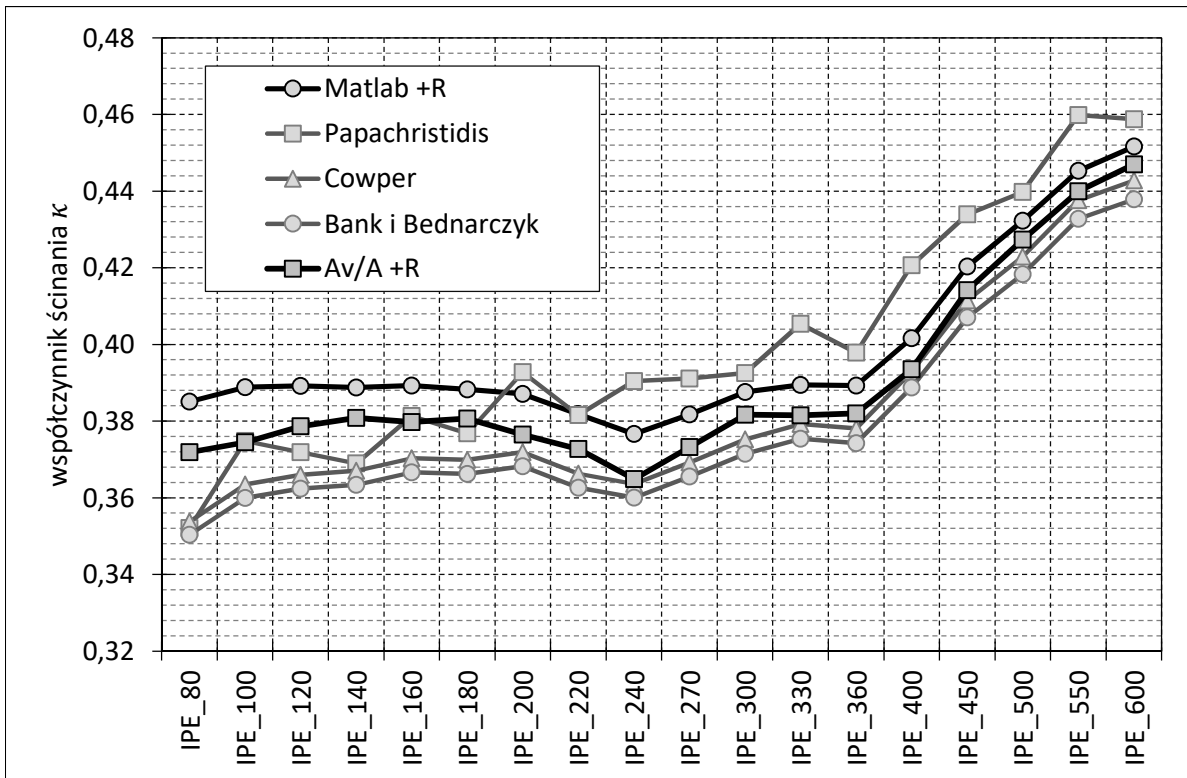
Współczynnik ścinania przekroju dwuteowego na kierunku osi z (ściananie wzdłuż środka) można też wyznaczyć w sposób uproszczony, zakładając pole środka jako pole czynne przy ścinaniu, a następnie dzieląc je przez pole całego przekroju. Wysokość środka potrzebną do wyliczenia jego pola przekroju można przyjmować jako całkowitą wysokość profilu, odległość w osiach lub w świetle pasów. Zdecydowano się przyjmować wysokość równą h zgodnie z ryc. 4.2, tj. odległość w osiach pasów.

$$\kappa_z = \frac{A_{vz}}{A} \quad (39)$$

Zdecydowano się porównać wyniki uzyskane na podstawie przedstawionych powyżej pięciu zależności i wyznaczyć wartości współczynnika κ_z dla równoległościennych stalowych profili dwuteowych z typoszeregu IPE. Wyznaczając współczynnik z wykorzystaniem zależności (35), uwzględniano wpływ promieni wyokrąglenia na przebieg naprężeń ścinających, co jak zostało pokazane na ryc. 4.18, nie pozostaje bez wpływu.

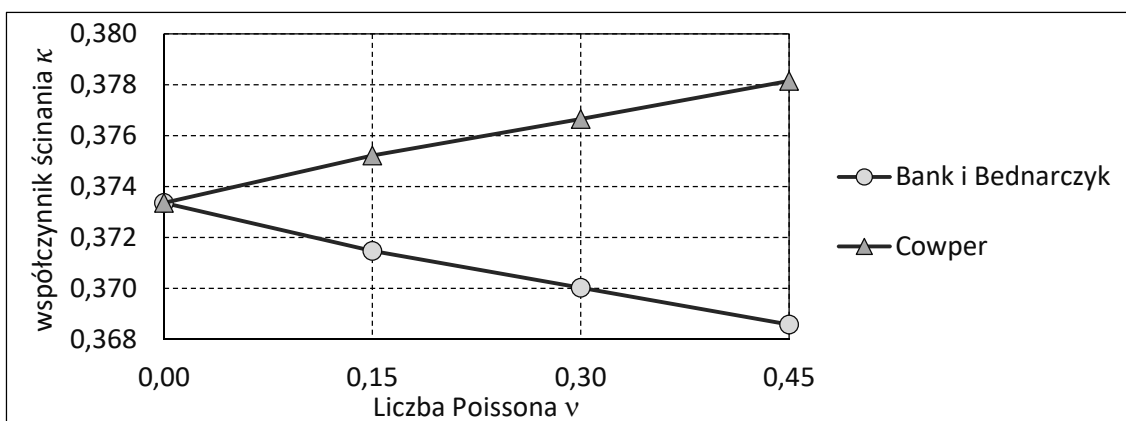


Ryc. 4.18. Rozkład naprężeń ścinających w przekroju dwuteowym: a) bez uwzględnienia promieni wyokrąglenia; b) z uwzględnieniem promieni wyokrąglenia



Ryc. 4.19. Współczynnik ścinania κ_z , stalowe dwuteowniki równoległościenne IPE, $\nu = 0,3$

Analizując przebiegi wartości współczynnika κ_z dla profili z typoszeregu IPE (ryc. 4.19), zauważyć można, że jakościowy charakter przebiegu dla wszystkich zależności jest zbliżony. Jedynie zależność zaproponowana przez Papachristidisa i in. [89] wykazuje większą od pozostałych zmienność, szczególnie dla profili o mniejszej wysokości. Zależności, które zaproponowali Cowper [27] oraz Bank i Bednarczyk [15], dają wyniki zbliżone, a dla liczby Poissona $\nu = 0$ takie same. Należy zwrócić uwagę na fakt, że wzrost liczby ν w przypadku zależności proponowanej przez Cowpera powoduje wzrost współczynnika ścinania, co pokazano na ryc. 4.20 (obliczenia wykonano dla geometrii IPE 300). Taką samą tendencję zauważyć można było w przypadku profili prostokątnych. Inaczej jest w przypadku zależności, którą podali Bank i Bednarczyk. Tutaj wzrost liczby ν powoduje obniżenie wartości κ_z .



Ryc. 4.20. Dwuteownik IPE 300 – wpływ zmiany liczby Poissona na wartość współczynnika ścinania κ_z

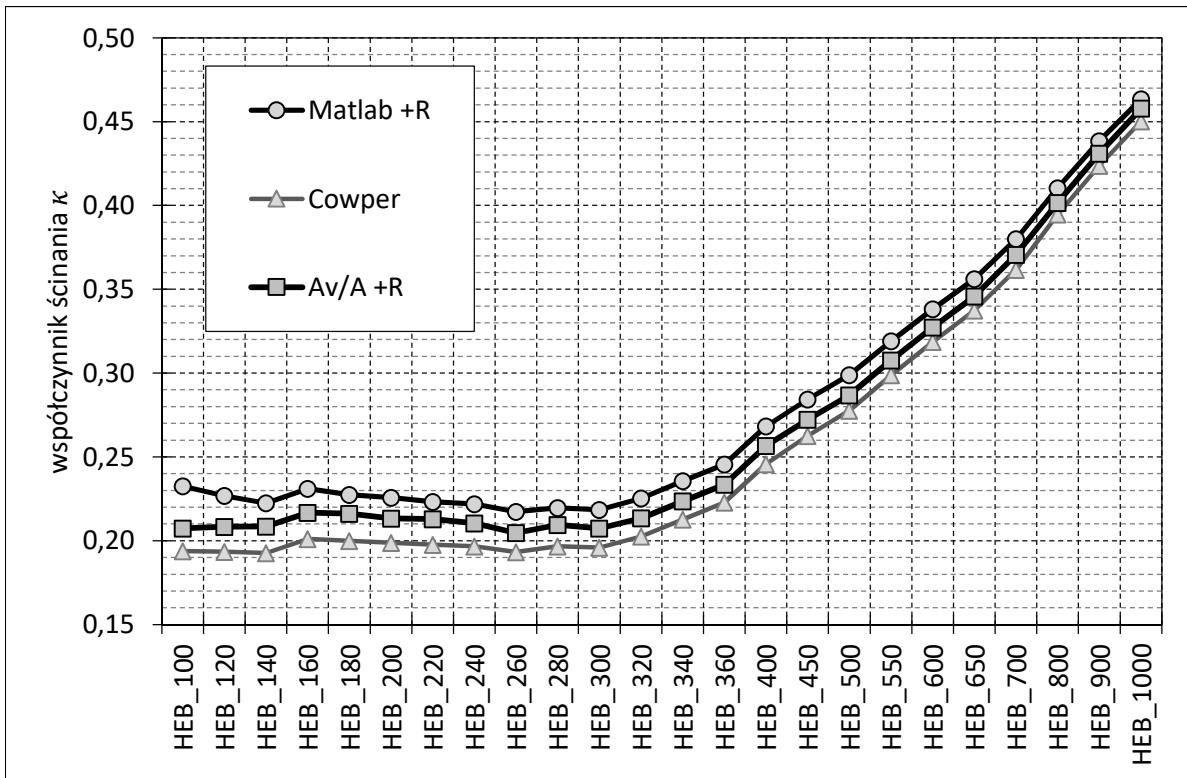
Zmiany nie są duże, w zakresie zmienności ν od 0 do 0,45 współczynnik κ_z wg Cowpera rośnie o około 1,3%, gdzie wg Banka i Bednarczyka o tyle samo spada. Analiza zależności (38), którą zaproponowali Bank i Bednarczyk, oraz jej przekształcenie wykonane przy założeniu profilu jednorodnego materiału wykazały pewne różnice w porównaniu z formułą proponowaną przez Cowpera.

$$\kappa_z = \frac{10(1 + \nu)(1 + 3m)^2}{(12 + 72m + 150m^2 + 90m^3) + \nu(11 + 73,5m + 157,5m^2 + 90m^3) + 30n^2(m + m^2) + 5\nu n^2(8m + 9m^2)} \quad (40)$$

W mianowniku, w członie równania uwzględniającym liczbę Poissona ν oraz stosunek pola przekroju pasów do średnika m zamiast $66m\nu$ występuje $73,5m\nu$, a zamiast $135m^2\nu$ występuje $157,5m^2\nu$. Wyjaśnienie rozbieżności wymagałoby dodatkowej wnikliwej analizy, jednak należy założyć, że poprawnym rozwiązaniem jest to proponowane przez Cowpera.

Pozostałe dwa przebiegi pokazane na ryc. 4.19 oznaczone jako Matlab +R oraz Av/A +R przedstawiają wartości współczynnika ścinania wyznaczone odpowiednio wg zależności (35) oraz (39). Dodatkowe oznaczenie +R wprowadzono, aby zaznaczyć, że obydwie metody uwzględniają wpływ obecności promieni wyokrąglenia, specyficznych dla profili stalowych gorącowałcowanych. Widać wyraźnie, że szczególnie w przypadku niższych profili pominięcie obecności promieni wyokrąglenia powoduje obniżenie wartości wyznaczonego współczynnika ścinania. Warto również zauważyć, że ostatnia metoda, w której współczynnik ścinania wyznaczany jest dzięki podzieleniu pola średnika o wysokości mierzonej w osiach pasów przez pole całego przekroju wyznaczone z uwzględnieniem promieni wyokrąglenia, chociaż jest najprostsza, daje bardzo dobre rezultaty. Dla wszystkich profili z typoszeregu IPE wynik tego prostego oszacowania plasuje się pomiędzy wynikiem formuły Cowpera a wynikiem szczegółowej analizy przeprowadzonej w autorskim programie Matlab z zastosowaniem metod energetycznych. Aby potwierdzić powyższe spostrzeżenia, taką samą analizę wykonano dla kształtowników z rodziny dwuteowników szerokostopowych HEB. Na ryc. 4.21 pokazano wyniki analiz z pominięciem wyników uzyskanych wg formuł (36) oraz (38).

Również w przypadku dwuteowników szerokostopowych HEB jakościowy charakter uzyskanych przebiegów współczynnika ścinania jest bardzo zbliżony. Ilościowe różnice maleją wraz ze wzrostem wysokości kształtownika, czego należało się spodziewać w związku z coraz mniejszym udziałem materiału zgromadzonego w obszarze promieni wyokrąglenia na charakterystyki przekroju dwuteownika.

Ryc. 4.21. Współczynnik ścinania κ_z , stalowe dwuteowniki szerokostopowe HEB, $\nu = 0,3$

4.6.3. Płyty o średniej grubości

Analizę właściwości statycznych oraz dynamicznych płyt o średniej grubości, tj. takich, gdzie stosunek grubości do długości/szerokości równy jest około 10%, prowadzić można z wykorzystaniem teorii płyt Reissnera-Mindlina, która bazuje na teorii ścinania pierwszego rzędu. Teoria ta zakłada liniowy, stały po grubości płyty rozkład odkształceń postaciowych. Zastosowanie teorii wymaga zatem, podobnie jak w przypadku teorii Timoshenki w odniesieniu do elementów belkowych, zastosowania współczynnika ścinania w celu uwzględnienia nierównomiernego rozkładu naprężeń ścinających podczas wyznaczania odkształceń postaciowych. Reissner [98] zaproponował stałą wartość współczynnika ścinania dla płyt wynoszącą $5/6$. Mindlin [74] doszedł do wniosku, że wartości współczynnika ścinania są liniowymi funkcjami liczby Poissona ν . Przedstawił dwa oszacowania wartości współczynnika na podstawie porównania swojej teorii z dokładniejszym rozwiązaniem trójwymiarowej teorii sprężystości. Pierwsze oszacowanie uwzględniające prędkość propagacji fal podłużnych przy drganiach wysokoczęstotliwościowych dało oszacowanie $0,76 \leq \kappa \leq 0,91$ dla liczby Poissona w zakresie $0 \leq \nu \leq 0,5$, co wynika z rozwiązania równania w postaci:

$$16(1 - \alpha\kappa)(1 - \kappa) = (2 - \kappa)^4 \quad (41)$$

gdzie: $\alpha = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$

Drugie oszacowanie uwzględniające prędkość propagacji fal poprzecznych dało w rezultacie wynik niezależny od liczby Poissona $\kappa = \pi^2/12$, co daje wynik 0,822, bardzo zbliżony do propozycji Reissnera $5/6 = 0,833$.

Kolejnym autorem proponującym wyznaczać współczynnik ścinania z uwzględnieniem liczby Poissona jest Stephen [117], który wykorzystując porównanie ze ścisłym rozwiązaniem Rayleigha-Lamba, zaproponował współczynnik ścinania w formie równania (42). Tak wyznaczony współczynnik zapewnia dobrą zgodność w zakresie drgań o dużej długości fali i niskiej prędkości fazowej. Taką samą wartość proponował również Hutchinson [48].

$$\kappa = 5/(6 - \nu) \quad (42)$$

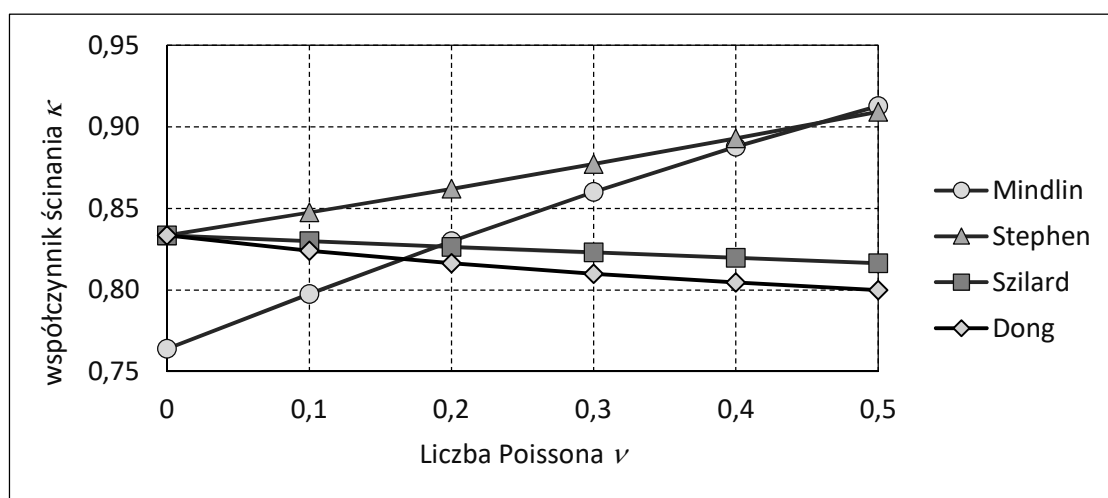
Szilard [124] podobnie jak Nänni [80] proponuje dokładniejsze rozwiązanie uwzględniające paraboliczną zmienność sił ścinających, zauważając przy tym, że dla $\nu = 0,3$ zależność (43) daje wynik równy 0,823, który jest bardzo zbliżony do wartości stałej proponowanej przez Mindlina.

$$\kappa = \frac{20(1 + \nu)}{24 + 25\nu + \nu^2} \quad (43)$$

Dla umiarkowanie grubych płyt podobną zależność zaproponowali Dong i in. [29].

$$\kappa = \frac{20(1 + \nu)}{24 + 27\nu} \quad (44)$$

Porównanie wartości współczynnika ścinania dla $0 \leq \nu \leq 0,5$ przedstawiono na ryc. 4.22. Jak widać, według propozycji Mindlina oraz Stephena/Hutchinsona wartość współczynnika ścinania rośnie wraz ze wzrostem liczby Poissona. Odwrotnie jest w przypadku zależności proponowanych przez Szilarda/Nänni oraz Donga. W tym drugim przypadku stopień redukcji wartości współczynnika jest niewielki w analizowanym zakresie zmienności liczby Poissona. Warto również zauważyć, że trzy z omówionych metod dla $\nu = 0$ dają wynik równy $5/6 = 0,833$.



Ryc. 4.22. Płyta izotropowa – zależność współczynnika ścinania κ od liczby Poissona ν

5. Weryfikacja modeli metody SES

We wcześniejszych rozdziałach omówiono technikę modelowania płytowo-belkowych układów konstrukcyjnych w konwencji metody sztywnych elementów skończonych wraz z omówieniem opracowanego programu pozwalającego na prowadzenie analiz w środowisku MATLAB. Poniżej przedstawiono wyniki analiz weryfikujących poprawność rezultatów uzyskiwanych z wykorzystaniem opracowanych modeli.

5.1. Weryfikacja modelu belki

5.1.1. Referencyjny model MES

Do weryfikacji modelu belki zdecydowano się wykorzystać wyniki uzyskane z zastosowaniem klasycznej metody odkształcalnych elementów skończonych. Analizy MES przeprowadzono za pomocą pakietu oprogramowania ABAQUS. W pierwszym kroku analizie poddano belkę o przekroju dwuteowym. Opracowano dwa modele: pierwszy z wykorzystaniem dwuwymiarowych elementów powłokowych oraz drugi z wykorzystaniem jednowymiarowych elementów belkowych. Model materiału dla kształtownika stalowego przyjęto o liniowej relacji naprężenie-odkształcenie. Tabela 5.1 zawiera zestawienie przyjętych parametrów materiałowych.

Tabela 5.1. Zestawienie parametrów materiałowych stali

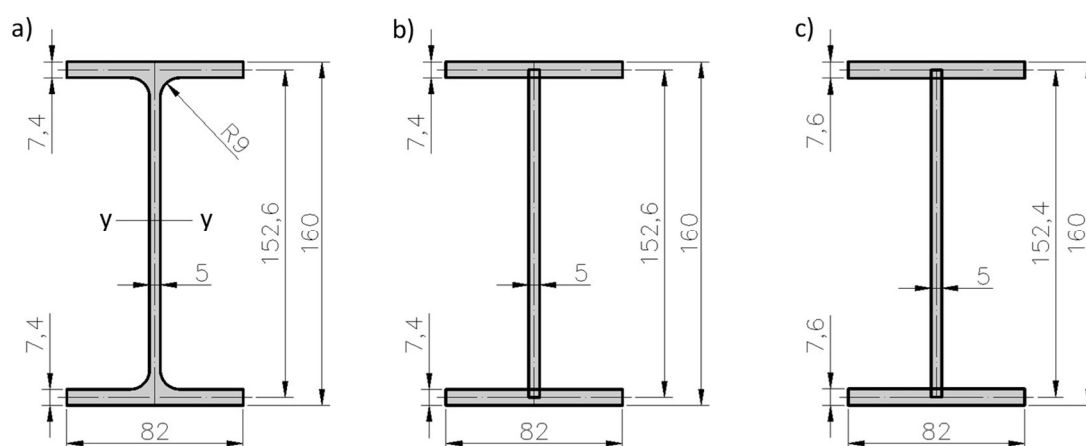
Moduł Younga	Liczba Poissona	Gęstość
$E_b = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$	$\nu_b = 0,3$	$\rho_b = 7850 \text{ kg/m}^3$

Jako obiekt modelowania przyjęto stalową belkę dwuteową wykonaną z profilu gorącowalcowanego IPE 160 o długości wynoszącej 3,24 m. Warunki brzegowe przyjęto jak dla belki swobodnej, tj. bez uwzględnienia obecności podpór. Analizy rozpoczęto od modelu złożonego z trzech powłok kształtujących środnik oraz pasy belki. Do tego konieczne było ustalenie grubości poszczególnych powłok. W pierwszym podejściu przyjęto grubości poszczególnych powłok równe tablicowym grubościom środnika $t_w = 5 \text{ mm}$ oraz pasów $t_f = 7,4 \text{ mm}$. Należy jednak zwrócić uwagę, że model powłokowy z definicji nie uwzględnia promieni wyokrąglenia występujących w profilach gorącowalcowanych.

Tabela 5.2 zawiera porównanie wartości pola przekroju A_s oraz momentów bezwładności na zginanie J_y i J_z oraz skręcanie J_T wyznaczonych dla rzeczywistego kształtu IPE 160 z tymi wyznaczonymi dla układu trzech prostokątów pokazanych na ryc. 5.1b. Jak widać, zarówno pole przekroju A_s , jak i główny moment bezwładności J_y są zaniżone o 1,6%, natomiast moment bezwładności na skręcanie różni się o ponad 5%.

Tabela 5.2. Modelowanie IPE 160 – wpływ grubości powłok na parametry przekroju poprzecznego

Wymiary	Tablice	Model wstępny		Model ostateczny	
h [mm]	160,0	160,0		160,0	
b_f [mm]	82,0	82,0		82,0	
t_w [mm]	5,0	5,0		5,0	
t_f [mm]	7,4	7,4		7,6	
R [mm]	9,0	–		–	
Parametr	Wartość	Wartość	Δ	Wartość	Δ
A_s [cm ²]	20,09	19,77	-1,6%	20,08	0,0%
J_y [cm ⁴]	869,29	855,14	-1,6%	871,80	0,3%
J_z [cm ⁴]	68,31	68,16	-0,2%	70,00	2,5%
J_T [cm ⁴]	3,61	3,42	-5,2%	3,64	0,9%

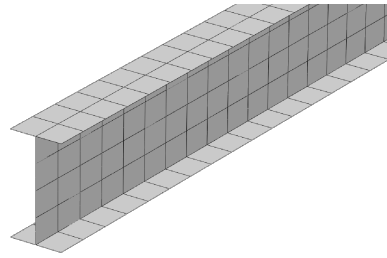


Ryc. 5.1. Dwuteownik IPE 160: a) wymiary wg tablic; b) model wstępny; c) model ostateczny

Aby zniwelować zauważone rozbieżności, zdecydowano się zwiększyć grubość powłok modelujących pasy kształtownika o 0,2 mm. Zmiana ta spowodowała poprawę dopasowania wspomnianych wcześniej charakterystyk przekroju. Pewnemu pogorszeniu uległo dopasowanie momentu bezwładności J_z . Podobną technikę modyfikacji grubości powłok modelujących pasy można stosować również podczas modelowania belek wykonanych z innych profili gorąco walcowanych.

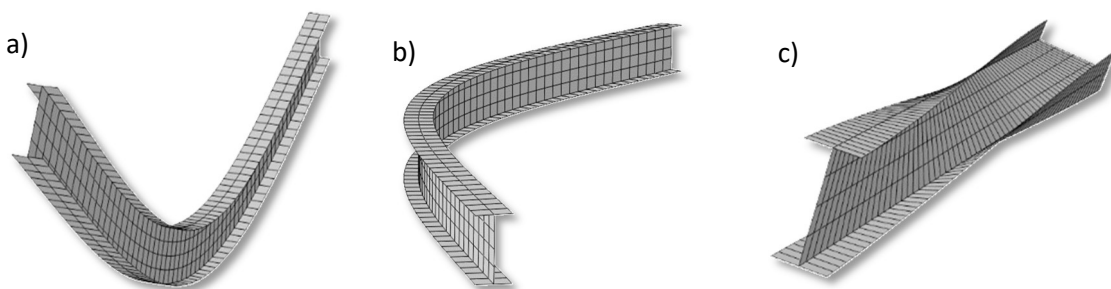
Po ustaleniu grubości i wymiarów poszczególnych powłok modelujących kształtownik przystąpiono do wyboru elementu skończonego, jaki zostanie użyty do modelowania powłok. Rozpatrywano dwa rodzaje elementów: S4R oraz S8R [1]. Obydwa są elementami czworobocznymi. Pierwszy z nich to czterowęzłowy element z liniowymi funkcjami kształtu ze zredukowanym całkowaniem. Drugi to ośmiowęzłowy element wyższego rzędu z funkcjami kształtu w postaci wielomianów drugiego stopnia.

Modele opracowane z wykorzystaniem ww. elementów zakładały dyskretyzację po długości na elementy o długości 50 mm. Środek po wysokości podzielono na cztery elementy. Pasy dwuteownika na dwa elementy w poprzek. Podział przedstawiono na ryc. 5.2.



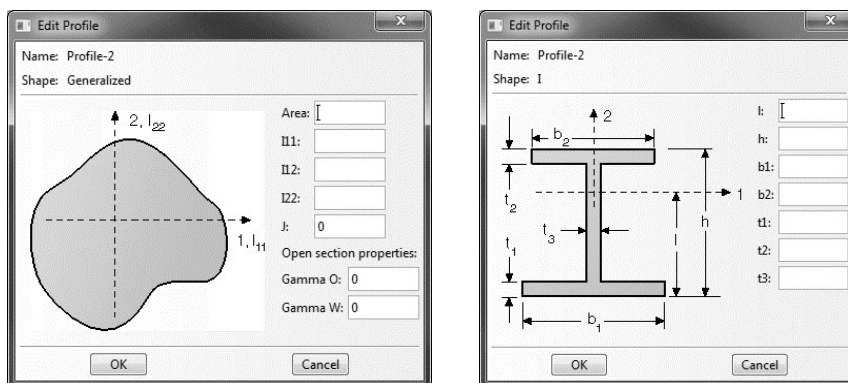
Ryc. 5.2. Widok modelu powłokowego MES dwuteownika IPE 160

Analizowano cztery postacie drgań belki: giętne pionowe, giętne poziome, skrętne oraz drgania osiowe, przy czym kluczowe dla docelowego modelu płyty usztywnionej belkami są oczywiście formy drgań giętnych pionowych (ryc. 5.3).



Ryc. 5.3. Model powłokowy, formy drgań belki: a) giętne pionowe; b) giętne poziome; c) skrętne

Model belki z wykorzystaniem elementów jednowymiarowych wykonano, wykorzystując dwuwęzłowy element oznaczony w bibliotece ABAQUS symbolem B31. Uwzględnia on możliwość odkształceń postaciowych belki, pozwalając tym samym, aby płaski przekrój poprzeczny belki nie pozostawał prostopadły do odkształconej osi belki (teoria belki Timoshenki). Przekrój poprzeczny belki można w programie zdefiniować na dwa sposoby (por. ryc. 5.4): a) jako przekrój uogólniony – należy wtedy zdefiniować poszczególne charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego; b) przez zdefiniowanie poszczególnych wymiarów geometrycznych przekroju dwuteowego – program automatycznie wyznacza charakterystyki przekroju. Wygodniejszym sposobem jest podejście drugie. Jako grubość pasa dwuteownika podano wartość zredukowaną tak samo jak podczas opracowywania modelu powłokowego.



Ryc. 5.4. System ABAQUS – definicja przekroju elementu belkowego B31 (opis w tekście)

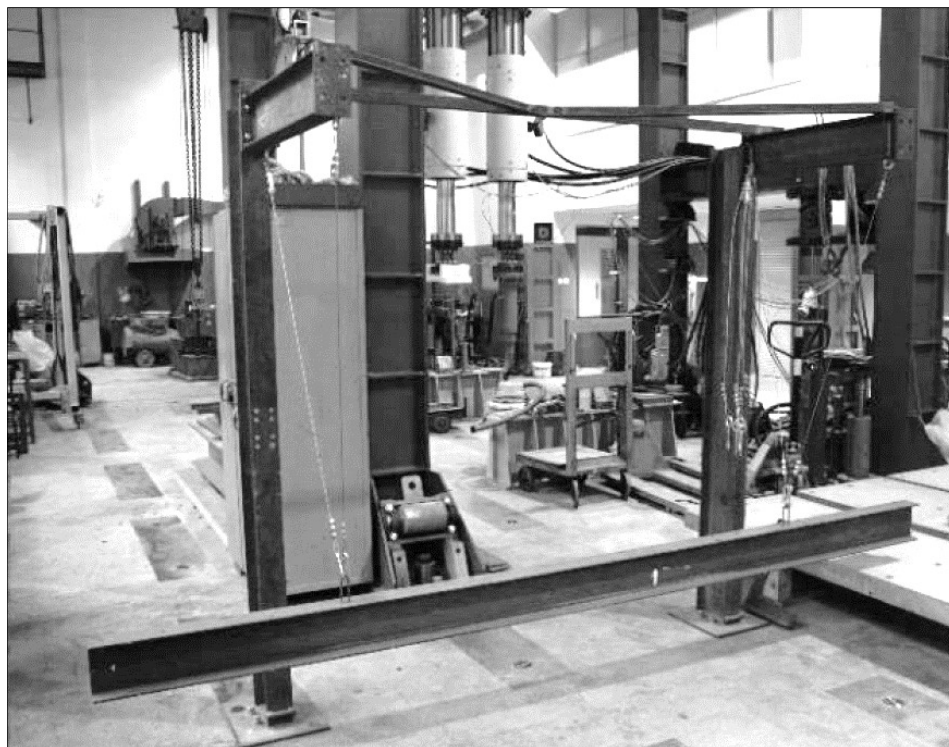
Wyniki przeprowadzonych obliczeń z wykorzystaniem modeli MES zawiera tabela 5.3. Jak widać, w zakresie drgań giętych pionowych obydwie modele powłokowe zapewniają przeważnie takie same wyniki. Częstotliwości wyznaczone na podstawie modelu wykorzystującego elementy prętowe B31 są również bardzo zbliżone, chociaż zauważyć można, że dla wyższych form drgań ich wartość rośnie w stosunku do częstotliwości wyznaczonych na podstawie modeli powłokowych (por. ostatnia kolumna tabeli). W zakresie drgań skrętnych różnice w wyznaczonych częstotliwościach na podstawie obydwu modeli powłokowych również są stosunkowo niewielkie, przy czym rosną wraz ze wzrostem analizowanej formy drgań. Znaczne różnice odnotowano przy zastosowaniu elementu B31, co wynika z faktu, iż element ten uwzględnia sześć stopni swobody na węzeł, co uniemożliwia uwzględnienie zjawiska deplanacji przekroju. Lepsze rezultaty można byłoby uzyskać, stosując element B31OS uwzględniający dodatkowy stopień swobody w węzłach. W przypadku drgań giętych poziomych występuje około 14% różnica pomiędzy wynikami uzyskanymi na podstawie modeli powłokowych. Wynika ona z faktu dyskretyzacji pasa na dwa elementy na szerokości pasa, co dla elementów liniowych S4R jest dyskretyzacją zbyt rzadką. Z kolei bardzo dobrą zgodność wyników uzyskano dla modelu powłokowego S8R oraz belkowego B31. W zakresie częstotliwości drgań osiowych wszystkie modele zapewniają właściwie ten sam wynik. Ostatecznie, jak należało się spodziewać, za najbardziej wiarygodne uznać należy wyniki uzyskane z wykorzystaniem elementów powłokowych S8R.

Tabela 5.3. Częstotliwości drgań belki w zależności od zastosowanego elementu skończonego MES

Forma drgań		Model MES			Δ [%]
		S4R	S8R	B31	
		częstotliwość drgań własnych f [Hz]			$(B31-S8R)/S8R$
Gięte pionowe	1	114,7	115,3	114,8	-0,4%
	2	299,5	300,5	300,9	0,1%
	3	546,1	547,2	552,4	0,9%
	4	828,8	829,8	846,3	2,0%
Skrętne	1	29,5	29,3	28,8	-1,7%
	2	67,7	69,8	57,5	-17,6%
	3	125,3	134,2	86,1	-35,8%
	4	208,9	229,2	114,5	-50,1%
Gięte poziome	1	29,2	33,5	33,7	0,5%
	2	80,2	91,8	92,2	0,5%
	3	156,0	177,3	179,0	1,0%
	4	254,0	284,6	292,3	2,7%
Osiowe	1	808,2	808,0	807,9	0,0%

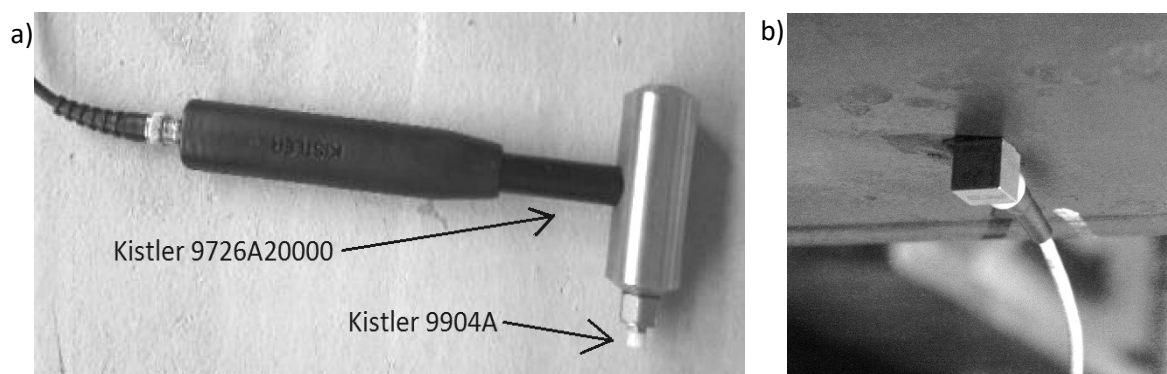
5.1.2. Badania doświadczalne belki

Na potrzeby weryfikacji opracowywanego modelu belki przeprowadzono badania doświadczalne rzeczywistej belki stalowej wykonanej z profilu IPE 160 o długości 324 cm ze stali kategorii S235 (ryc. 5.5). Badania prowadzono w ramach prac nad projektem badawczym dofinansowanym przez MNiSW w latach 2010–2013 [149]. Kierownikiem projektu był autor niniejszej monografii.



Ryc. 5.5. Swobodna belka IPE 160 na stanowisku badawczym

W trakcie badań mających na celu określenie charakterystyk dynamicznych belki stosowano test impulsowy polegający na wymuszeniu drgań belki z wykorzystaniem młotka modalnego. Jako schemat statyczny przyjęto belkę swobodną, tj. bez podpór. Schemat zrealizowano poprzez podwieszenie belki do układu dwóch stężonych ram stalowych. Liny stalowe służące do podwieszenia dobrano o takiej podatności, aby częstotliwości drgań belki wynikające z ruchu belki jako ciała sztywnego znajdowały się poza zakresem analizowanych częstotliwości drgań belki. Wymuszenia dokonywano za pomocą młotka modalnego Kistler 9726A20000 ze stalową końcówką bijaka pokrytą polioksymetylenem Kistler 9904A. Zgodnie ze świadectwem wzorcowania końcówka ta powinna zapewniać skuteczne wzbudzenie drgań o częstotliwości aż do 600 Hz. Do rejestracji przyspieszeń używano czujników PCB 356A01 mocowanych do konstrukcji za pomocą wosku dostarczonego przez producenta czujników. Czujniki rozmieszczano na pasie górnym oraz dolnym w rozstawie 375 mm (ryc. 5.6).

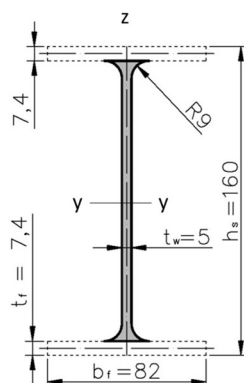


Ryc. 5.6. Aparatura pomiarowa: a) młotek modalny; b) trójosiowy czujnik przyspieszeń

Do rejestracji sygnałów użyto analizatora pomiarowego LMS SCADAS III połączonego ze stacją roboczą wyposażoną w system komputerowego wspomagania badań, jakim jest pakiet oprogramowania Test Lab firmy LMS. W celu przeprowadzenia testu impulsowego wykorzystano moduł Impact Testing ww. pakietu. Podczas pojedynczego cyklu pomiarowego dwunastokrotnie wymuszano belkę w wybranym wcześniej miejscu. Jako wynik przyjmowano uśrednioną wartość pomiaru. Proces uśredniania przebiegał automatycznie wg algorytmu zaimplementowanego w module Impact Testing. Analizowano zakres częstotliwości do 1024 Hz z rozdzielczością widma 0,25 Hz. W wyniku eksperymentu uzyskano znaczącą liczbę częstotliwościowych funkcji przejścia, które analizowano z użyciem modułu Modal Analysis systemu TestLab. Końcową analizę danych wykonano w systemie MATLAB. Szczegółowy opis przeprowadzonych badań przedstawiono w raporcie [149] oraz w pracy [2]. Wyniki przeprowadzonych badań przedstawiono w podrozdziale 5.1.4.

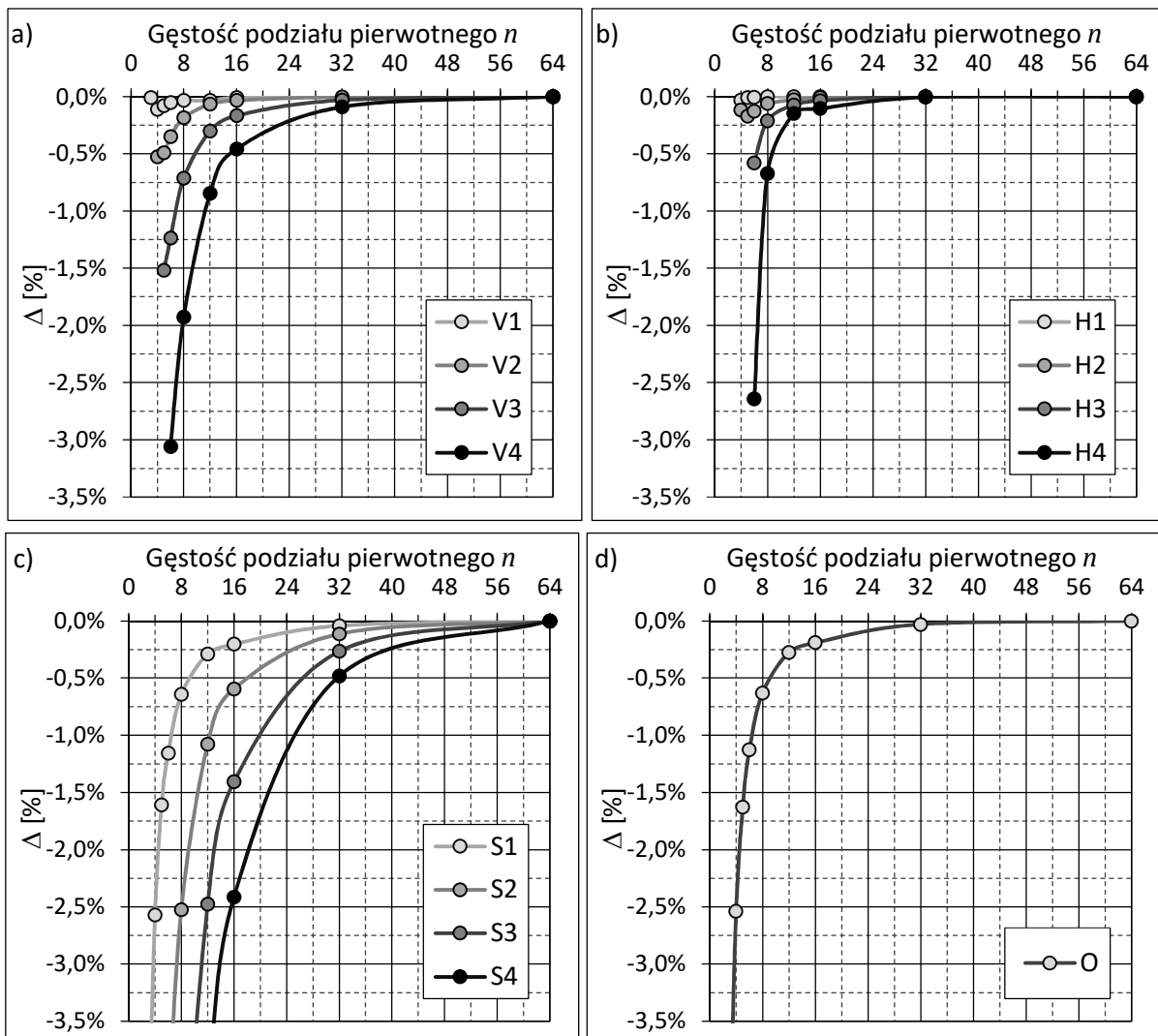
5.1.3. Model SES belki

Mając opracowany referencyjny model MES belki, przystąpiono do opracowania modelu SES. Wszystkie wymiary geometryczne przyjęto tożsame jak dla modelu MES. Założono, że w opracowanym modelu zastosowana zostanie technika rozdzielania EST na trzy niezależne, umieszczone odpowiednio w osiach pasów oraz środnika. Wyznaczając wartości bloku współczynników sztywności dla środnika, uwzględniono jego przekrój pokazany na ryc. 5.7.



Ryc. 5.7. Przekrój środnika, dla którego wyznaczano wartości bloku współczynników sztywności

Wartości współczynników ścinania wyznaczono wg zależności (39), co w rezultacie dało wartości 0,38 przy ścinaniu na kierunku osi z oraz 0,60 przy ścinaniu względem osi y. Ostatnim parametrem, który należało ustalić, była gęstość podziału na sztywne elementy skończone. Zdecydowano się przeprowadzić analizy wpływu gęstości podziału na uzyskiwane rezultaty, a tym samym zweryfikować założenie, że wraz ze wzrostem gęstości podziału wyniki asymptotycznie dążą do określonej wartości. Analizie poddano szereg modeli z gęstością podziału pierwotnego od 3 do 64 odcinków, co dawało odpowiednio modele złożone z 5 lub 65 SES. Analizowano wartości częstotliwości drgań: giętnych pionowych (ang. *vertical*, V), giętnych poziomych (ang. *horizontal*, H), skrętnych (S) oraz osiowych (O). W przypadku drgań giętnych oraz skrętnych analizie poddano częstotliwości czterech pierwszych postaci drgań. Częstotliwość drgań osiowych wyznaczano jedynie dla podstawowej formy drgań. Częstotliwości uzyskane na podstawie poszczególnych modeli odniesiono do wyników modelu o największej gęstości podziału. Wyniki analiz w formie graficznej przedstawiono na ryc. 5.8.



Ryc. 5.8. Wpływ gęstości podziału pierwotnego na częstotliwości drgań belki swobodnej: a) drgania giętna pionowe; b) giętna pozioma; c) skrętne; d) osiowe.

Na przedstawionych wykresach dla form drgań wyższego rzędu pominięto wyniki dla modeli z najmniejszą gęstością podziału. Częstotliwości podstawowych form drgań wszystkich rodzajów wyznaczone są z dokładnością poniżej 1% już dla gęstości podziału pierwotnego na osiem odcinków. Dla tej samej gęstości podziału częstotliwości wszystkich analizowanych postaci drgań giętnych wyznaczone są z błędem poniżej 2%. Częstotliwość podstawowej formy drgań giętnych pionowych, najważniejszej z punktu widzenia roli, jaką pełnią belki usztywniające, jest właściwie niezmienna w całym analizowanym zakresie, co oznacza, że jej poprawne wyznaczenie możliwe jest nawet przy podziale pierwotnym na trzy odcinki, co daje model złożony z czterech sztywnych elementów skończonych.

5.1.4. Porównanie wyników

Porównanie wyników uzyskanych na podstawie modelu SES z gęstością podziału pierwotnego na osiem odcinków z wynikami modelu MES wykonanego z zastosowaniem elementów powłokowych S8R zamieszczono w tabeli 5.4. Zestawiono w niej również wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych.

Tabela 5.4. Porównanie częstotliwości drgań belki IPE 160

Forma drgań		Badania	MES S8R	SES n = 8	Δ [%]	Δ [%]
					(SES-Exp)/Exp	(SES-MES)/MES
		f [Hz]				
Giętnie pionowe	1	113,4	115,3	115,1	1,5%	-0,2%
	2	295,8	300,5	300,2	1,5%	-0,1%
	3	541,8	547,2	545,9	0,8%	-0,2%
	4	824,6	829,8	822,7	-0,2%	-0,9%
Skrętne	1	33,4	29,3	30,9	-7,6%	5,5%
	2	75,2	69,8	60,6	-19,4%	-13,2%
	3	137,9	134,2	88,0	-36,2%	-34,4%
	4	223,0	229,2	112,0	-49,8%	-51,1%
Giętnie poziome	1	32,5	33,5	33,1	1,9%	-1,2%
	2	88,9	91,8	90,9	2,3%	-0,9%
	3	171,5	177,3	177,1	3,3%	-0,1%
	4	276,4	284,6	289,4	4,7%	1,7%
Osiowe	1	800,5	808,0	803,0	0,3%	-0,6%

Jak widać, zgodność wyników w zakresie drgań giętnych oraz osiowych jest bardzo wysoka w całym zakresie analizowanych postaci drgań. W przypadku drgań skrętnych zadawalającą zgodność uzyskano wyłącznie dla podstawowej formy drgań, podobnie jak w przypadku modelu MES opracowanego z zastosowaniem elementów belkowych B31.

Należy uznać, że w przypadku drgań skrętnych, dla których nie jest spełniona zasada płaskich przekrojów, model belki opracowany w konwencji metody SES nadaje się do analizy jedynie podstawowej formy drgań. Rozwiązaniem problemu mogłoby być zastosowanie hybrydowej metody elementów skończonych łączącej zalety obydwu metod, tj. metody sztywnych oraz odkształcalnych elementów skończonych, lub opracowanie modelu SES belki z uwzględnieniem dodatkowych stopni swobody biorących pod uwagę deplanację przekroju, co jednak nie jest przedmiotem niniejszego opracowania.

Przeprowadzone testy pozwalają uznać, że opracowany model belki zapewnia bardzo dobre wyniki, szczególnie w zakresie podstawowych z punktu widzenia zachowania się konstrukcji drgań giętnych pionowych. Model można z powodzeniem wykorzystać jako część składową modelu płyty usztywnionej.

5.2. Weryfikacja modelu płyty prostokątnej

5.2.1. Model referencyjny – rozwiązanie wg teorii Reissnera-Mindlina

W poprzednim rozdziale dokonano weryfikacji modelu belki, odnosząc wyniki uzyskane z zastosowaniem metody SES do wyników otrzymanych przy wykorzystaniu klasycznej metody elementów skończonych. W przypadku weryfikacji modelu płyty prostokątnej wyniki odnoszone będą do ścisłego rozwiązania zagadnienia drgań płyty otrzymanego z uwzględnieniem wpływu odkształceń postaciowych oraz sił bezwładności w ruchu obrotowym. Rozwiązanie zagadnienia z zastosowaniem metod energetycznych Rayleigha-Ritza przedstawili Liew i in. w czteroczęściowej pracy opublikowanej w 1993 roku. W części pierwszej [64] analizie poddano drgania płyt, uwzględniając zmienne proporcje boków, zmienny stosunek grubości do szerokości oraz ponad 20 różnych warunków podparcia krawędzi płyty. Przeanalizowano wszystkie możliwe kombinacje podparcia krawędzi, tj. podparcia sztywnego (ang. *clamped*, C), przegubowego (ang. *simply supported*, S) oraz swobodnego (ang. *free*, F). W części drugiej [65] analizie uzupełniono, uwzględniając obecność liniowych podparć pośrednich płyty o czterech różnych konfiguracjach: podparcie centralne podłużne, centralne poprzeczne, krzyżowe oraz skośne. Część trzecia [66] również uwzględniała obecność podparć pośrednich płyty, tym razem jednak o kształcie pierścieniowym. Analizowano płytę o czterech swobodnych krawędziach FFFF z podparciem pierścieniowym w liczbie od jednej do czterech sztuk, uwzględniając zmienną wartość średnicy pierścienia podpierającego. Zarówno w części drugiej, jak i trzeciej nie uwzględniano podatności podparć. Ostatnia część pracy [67] uwzględniała obecność równomiernego obciążenia w płaszczyźnie płyty.

W omówionych pracach częstości kołowe drgań własnych przedstawione były w postaci bezwymiarowej, co pozwala na łatwiejsze odniesie uzyskanych wyników do analiz innych badaczy. Częstości bezwymiarowe wyznaczano na podstawie zależności:

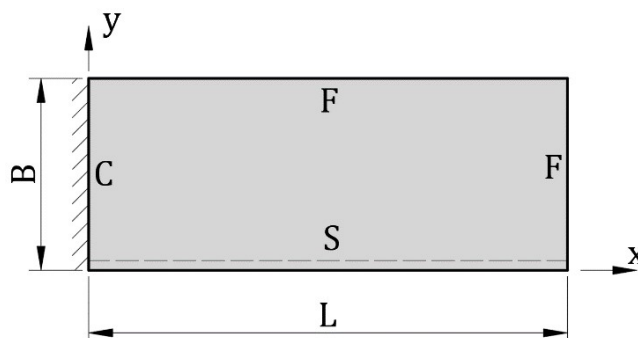
$$\lambda_i = \omega_i B^2 / \pi^2 \sqrt{\rho h_p / D} \quad (45)$$

gdzie ω jest częstością kołową drgań własnych [rad/s], ρ jest gęstością [kg/m³], natomiast D sztywnością płyty na zginanie wyznaczaną z zależności:

$$D = \frac{E_p h_p^3}{12(1 - \nu_p^2)} \quad (46)$$

5.2.2. Model SES płyty

Zdecydowano się wykorzystać wyniki przedstawione w pracy [64] i porównać z nimi wyniki otrzymane z zastosowaniem metody SES. Analizie poddano płytę o wymiarach w planie L na B , gdzie pierwszy wymiar jest długością krawędzi równoległej do osi X . Przyjęto grubość płyty równą h_p . Podobnie jak w pracy [64] analizowano płyty o różnych warunkach brzegowych.



Ryc. 5.9. Schemat płyty prostokątnej. Kod warunków brzegowych CSFF

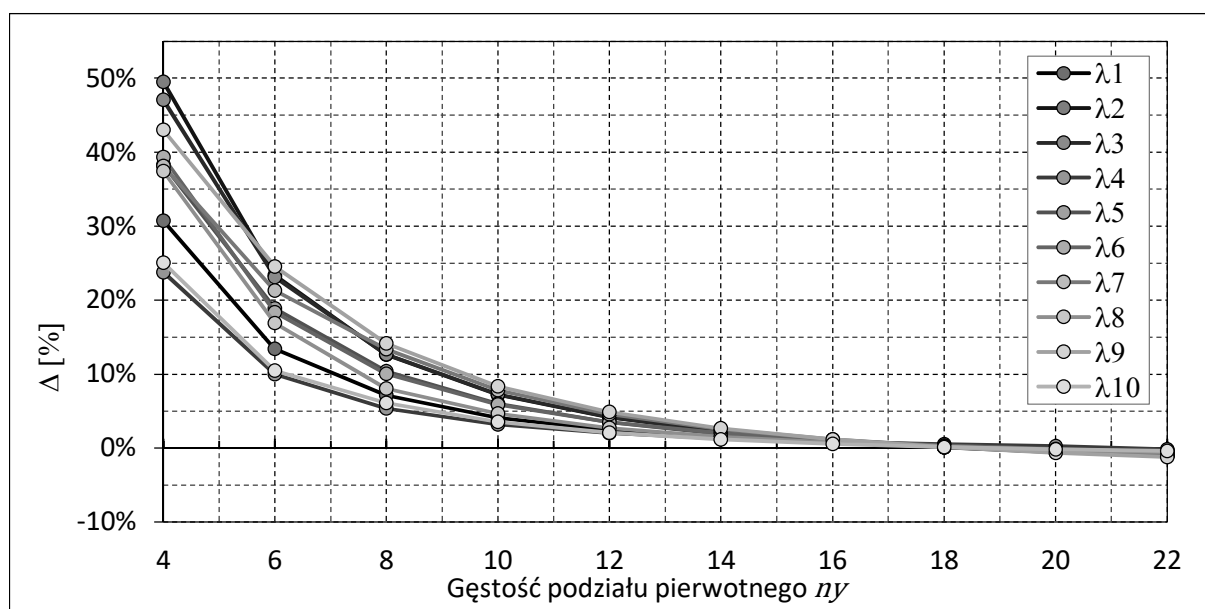
Na ryc. 5.9 przedstawiono sposób oznaczania warunków brzegowych. Każda z krawędzi płyty może mieć inny schemat podparcia. Dla przykładu pokazano płytę z układem podparć CSFF, gdzie kolejne litery oznaczają sposób podparcia, zaczynając od krawędzi pokrywającej się z osią Y . Częstości drgań własnych, będące wynikami analiz, przedstawiane będą w postaci bezwymiarowej: wpływu gęstości podziału oraz lokalizacji EST

Podobnie jak w przypadku modelu belki w pierwszym kroku przeprowadzono weryfikację zbieżności rozwiązania wraz ze wzrostem gęstości podziału płyty na sztywne elementy skończone. Analizie poddano płytę o schemacie podparcia CCCC. Stosunek długości boków L/B przyjęto równy 2,0. Stosunek grubości płyty do szerokości $h_p/B = 0,1$. W trakcie analiz, tak samo jak w pracy [64], przyjęto współczynnik ścinania równy 5/6. Gęstość podziału pierwotnego n_y , tj. na kierunku osi Y , zmieniano w zakresie od 4 do 22. Na kierunku osi X w związku z dwukrotnie większą długością zastosowano dwukrotnie większą liczbę odcinków.

Tym samym proporcje boków SES w każdym opracowanym modelu były takie same i wynosiły 1,0. Model o najmniejszej gęstości podziału składał się z 45 sztywnych elementów skończonych, każdy o sześciu stopniach swobody. Model o największej gęstości zbudowany był z 1035 SES. Omawiając technikę modelowania płyt, zwrócono uwagę, że rozmieszczenie elementów sprężysto-tłumiących możliwe jest w narożnikach SES lub na środkach ich boków (por. ryc. 4.5). Porównano obydwie techniki modelowania.

Na ryc. 5.10 przedstawiono charakter zmian bezwymiarowych częstości wraz ze zwiększaniem się gęstości podziału pierwotnego n_y . Analizowano dziesięć pierwszych form drgań własnych płyty. Wyznaczone bezwymiarowe częstości drgań $\lambda_{SES,i}$ odnoszono do częstości λ_i przedstawionych w pracy [64], wyznaczając wskaźnik błędu Δ .

$$\Delta = (\lambda_{SES,i} - \lambda_i) / \lambda_i \quad (47)$$



Ryc. 5.10. Zbieżność rozwiązania; EST narożniki; schemat CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,1$

Analizując wykres, można stwierdzić, że wyniki asymptotycznie dążą do pewnej określonej wartości. Należy jednak zauważyć, że bezwymiarowe częstości wyznaczone z wykorzystaniem modeli o mniejszej gęstości podziału różnią się o kilkadziesiąt procent od wyników referencyjnych.

Na ryc. 5.11 przedstawiono wyniki analogicznych analiz, tym razem jednak położenie EST zmieniono, przesuwając je na środek SES. Podobnie jak poprzednio widać, że wyniki asymptotycznie dążą do określonej wartości, jednak już dla modelu o gęstości podziału $n_y = 8$ wartość większości wyznaczonych częstości w zasadzie nie różni się o więcej niż 2% od wyników referencyjnych.

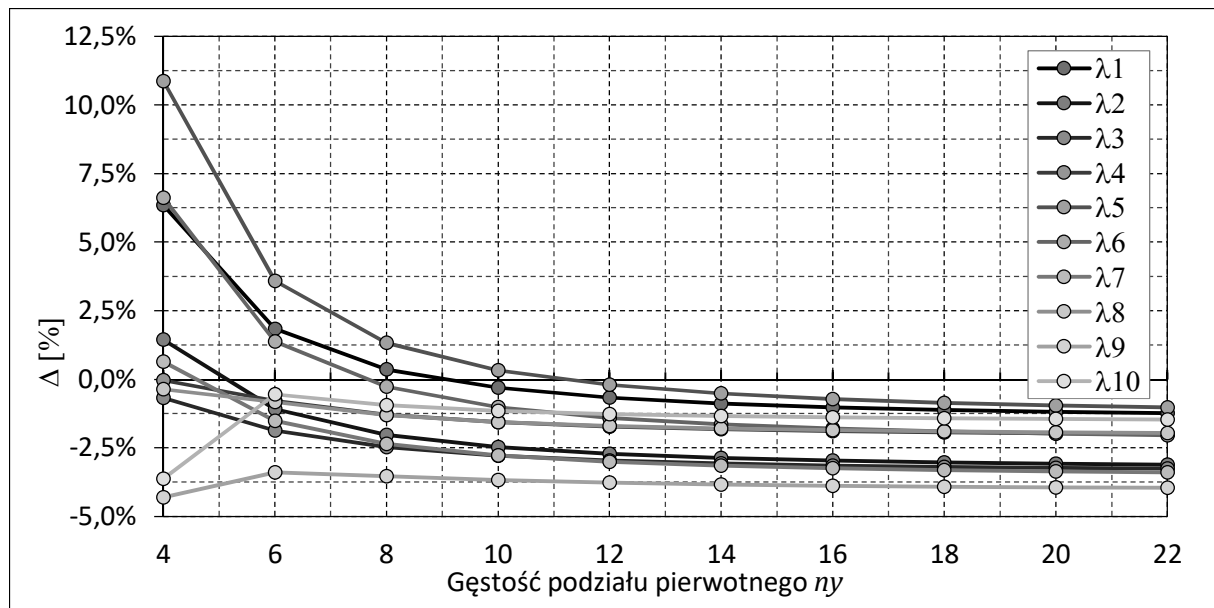
Ryc. 5.11. Zbieżność rozwiązania; EST środek; schemat CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,1$

Tabela 5.5 zawiera zestawienie wyników uzyskanych na podstawie modelu z największą analizowaną gęstością podziału, tj. $n_y = 22$. Podział na drugim kierunku, ze względu na dwukrotnie większą długość, wykonany był na dwukrotnie większą liczbę odcinków. Ostateczny model składał się z 1035 sztywnych elementów skończonych. Dla porównania model uzyskany przy gęstości podziału $n_y = 8$ złożony był ze 153 SES, co w rezultacie daje model o prawie siedmiokrotnie mniejszej liczbie stopni swobody.

Tabela 5.5. Bezwymiarowa częstość $\lambda_{SES,i}$; $n_y = 22$; liczba_SES = 1035; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,1$

i	λ_i Liew i in. [64]	$\lambda_{SES,i}$ EST narożniki	Δ [%]	$\lambda_{SES,i}$ EST środek	Δ [%]
1	2,3092	2,3025	-0,3%	2,2805	-1,2%
2	2,9515	2,9224	-1,0%	2,8596	-3,1%
3	4,0708	4,0286	-1,0%	3,9381	-3,3%
4	5,5708	5,5617	-0,2%	5,4596	-2,0%
5	5,6066	5,5763	-0,5%	5,5485	-1,0%
6	6,1256	6,0948	-0,5%	6,0007	-2,0%
7	7,0650	6,9943	-1,0%	6,8250	-3,4%
8	7,4774	7,4352	-0,6%	7,3310	-2,0%
9	8,3760	8,2746	-1,2%	8,0445	-4,0%
10	9,6144	9,5750	-0,4%	9,4730	-1,5%

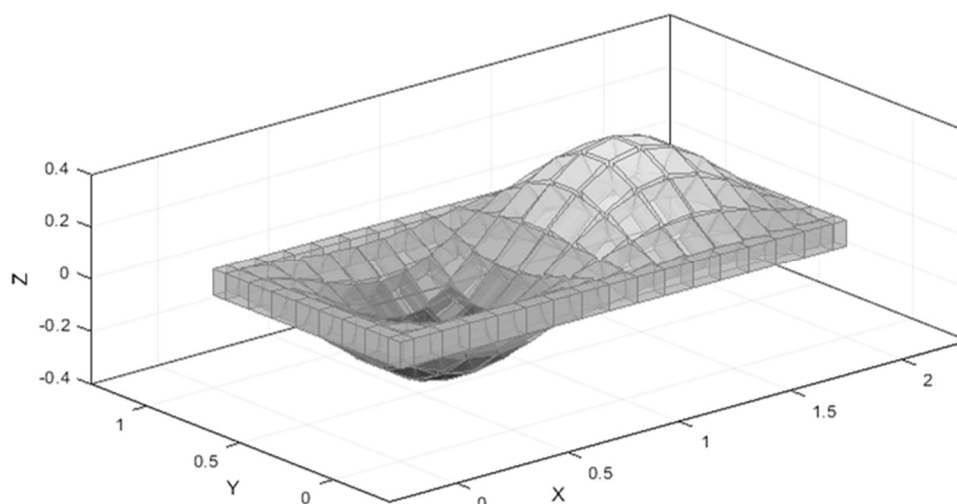
Jak widać, niezależnie od lokalizacji EST zgodność wyników uzyskanych na podstawie obydwu modeli SES jest bardzo dobra w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym. Należy zauważyć, że wyższą zgodność zapewnił model z EST umieszczonymi w narożnikach, gdzie średni błąd Δ wynosi około -0,7%. W modelu z EST umieszczonymi na środkach średni błąd

jest większy i wynosi -2,3%, co należy również uznać za bardzo dobry wynik. Nie bez znaczenia pozostaje jednak fakt, że uzyskanie bardzo dobrej zbieżności z rozwiązaniem ścisłym w przypadku modelu, gdzie EST umieszczane są w narożnikach, wymaga dużej gęstości podziału. Analogiczne porównania wyników dla modelu z gęstością podziału n_y wynoszącą 8 zamiast 22 zawiera tabela 5.6. Dokładność wyników uzyskanych z zastosowaniem modelu, gdzie EST umieszczone są w narożnikach, znacznie się pogorszyła. Średni błąd wyznaczenia bezwymiarowej częstości λ wynosi około 10%. Wyznaczone częstości są wyższe niż te przedstawione przez Liew i in. [64], co oznacza, że model jest przeszywniony. Zgodność wyników uzyskanych z drugiego modelu, gdzie EST umieszczono na środkach EST, uległa poprawie w stosunku do modelu z większą gęstością podziału. Średni błąd wynosi -1,3%.

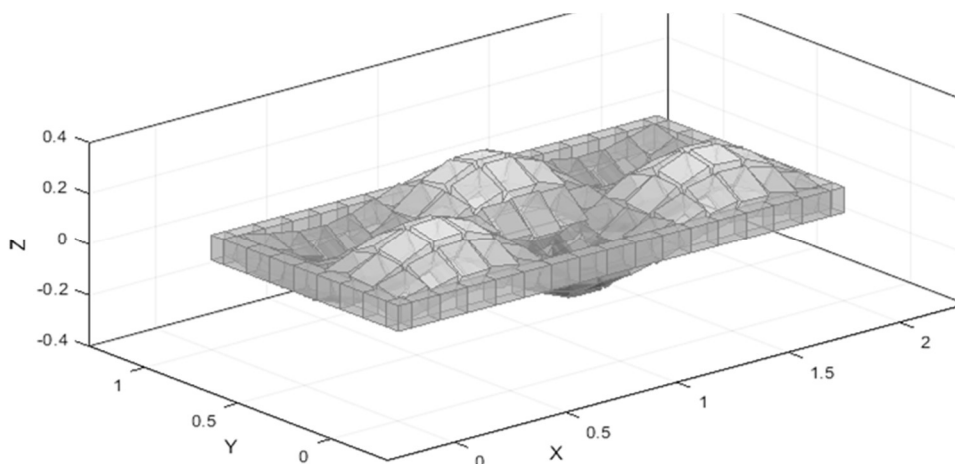
Tabela 5.6. Bezwymiarowa częstość λ_i ; $n_y = 8$; liczba_SES = 153; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,1$

i	λ_i Liew i in. [64]	$\lambda_{SES,i}$ EST narożniki	Δ [%]	$\lambda_{SES,i}$ EST środek	Δ [%]
1	2,3092	2,4733	7,1%	2,3175	0,4%
2	2,9515	3,3241	12,6%	2,8916	-2,0%
3	4,0708	4,5859	12,7%	3,9700	-2,5%
4	5,5708	5,8685	5,3%	5,4987	-1,3%
5	5,6066	6,1886	10,4%	5,6807	1,3%
6	6,1256	6,7394	10,0%	6,1086	-0,3%
7	7,0650	8,0075	13,3%	6,8980	-2,4%
8	7,4774	8,0789	8,0%	7,3793	-1,3%
9	8,3760	9,5594	14,1%	8,0796	-3,5%
10	9,6144	10,2011	6,1%	9,5227	-1,0%

Przykładowe postacie drgań płyty uzyskane dla modelu przy gęstości podziału $n_y = 8$ przedstawiono na ryc. 5.12 i 5.13.



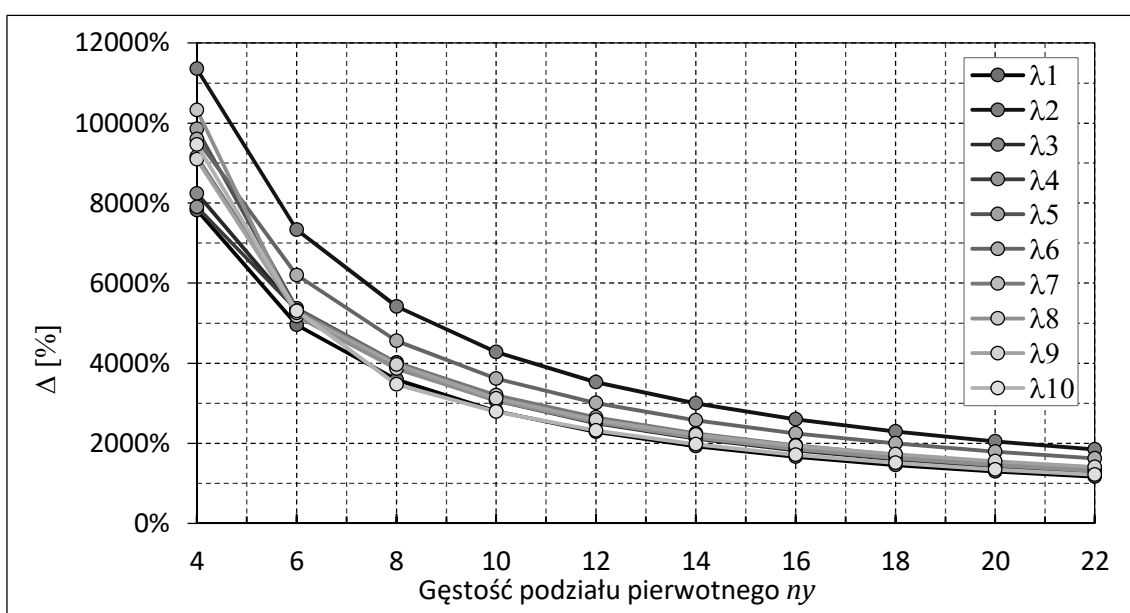
Ryc. 5.12. Przykładowa postać drgań $\lambda_{SES,2} = 2,819$; EST środek; $n_y = 8$; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,1$



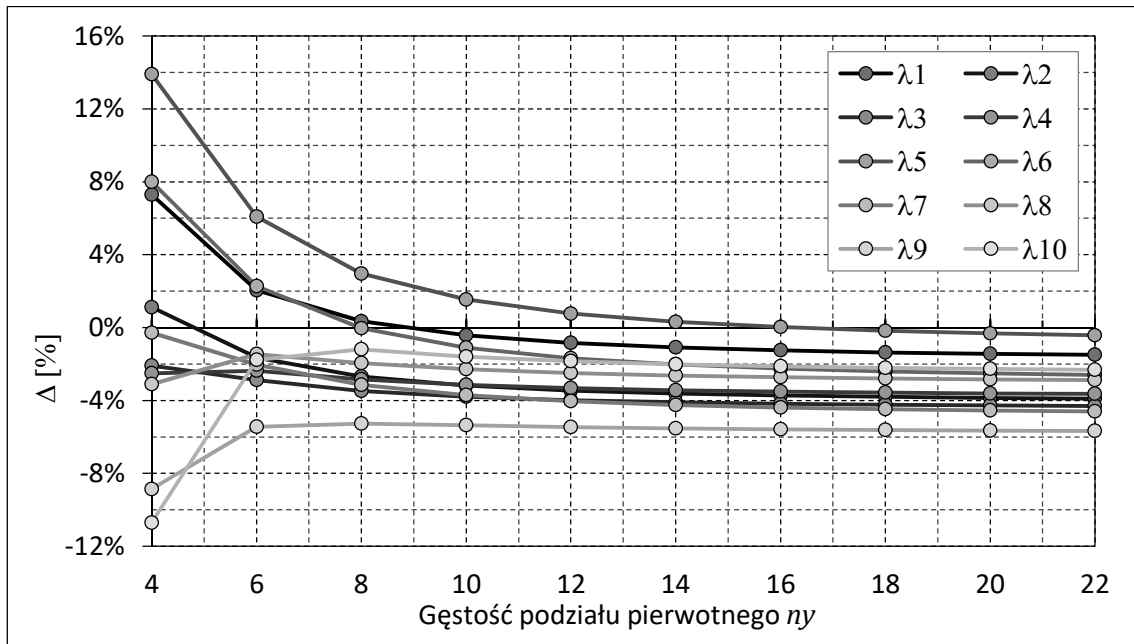
Ryc. 5.13. Przykładowa postać drgań $\lambda_{SES,7} = 6,898$; EST środek; $n_y = 8$; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,1$

5.2.3. Wpływ zmiany stosunku grubości do szerokości płyty

W poprzednim rozdziale analizowano płytę o stosunku grubości do szerokości h_p/B równym 0,1, co odpowiada płycie umiarkowanie grubej. Dla płyt o takiej lub większej grubości konieczne jest uwzględnianie w trakcie analiz wpływu odkształceń postaciowych spowodowanych działaniem naprężeń ścinających. Opracowany model SES uwzględnia to zjawisko, co zapewnia lepszą zgodność wyników, szczególnie w zakresie drgań wysokoczęstotliwościowych. Liew i in. [64] przedstawili rozwiązanie ścisłe również dla płyt o stosunku grubości do szerokości wynoszącym 0,001, czyli płyt bardzo cienkich, jak również płyt ze stosunkiem równym 0,2, czyli płyt grubych. Dla takich płyt przeprowadzono analogiczne analizy jak w poprzednim rozdziale. Na ryc. 5.14 i 5.15 przedstawiono wyniki uzyskane z zastosowaniem modelu płyty cienkiej o stosunku grubości do szerokości wynoszącym 0,001.



Ryc. 5.14. Zbieżność rozwiązania; EST narożniki; schemat CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,001$

Ryc. 5.15. Zbieżność rozwiązania; EST środek; schemat CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,001$

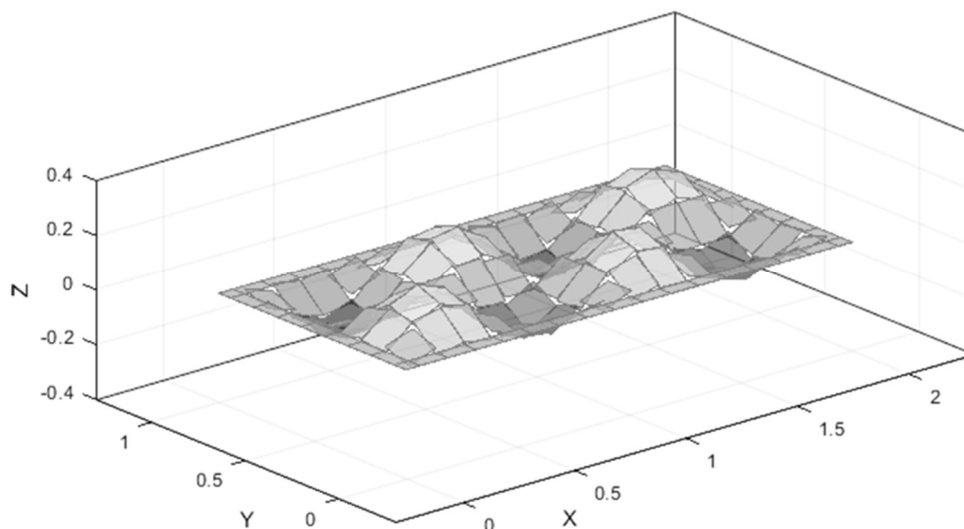
Wyniki uzyskane z wykorzystaniem modeli, w których EST umieszczono w narożnikach, zupełnie odbiegają od wyników rozwiązania ścisłego. Porównanie wykazuje różnice rzędu kilku tysięcy procent. Widać również, że pomimo zastosowania dużej gęstości podziału uzyskane wyniki nadal wykazują wyraźną tendencję spadkową.

Model z EST umieszczonymi na środku zapewnia dokładność porównywalną z modelem płyty umiarkowanie grubej. Średni błąd dla modelu o gęstości podziału $n_y = 8$ wynosi $-1,7\%$ (por. tabela 5.7) podczas gdy dla płyt o stosunku $h_p/B = 0,1$ średni błąd wynosił $-1,3\%$.

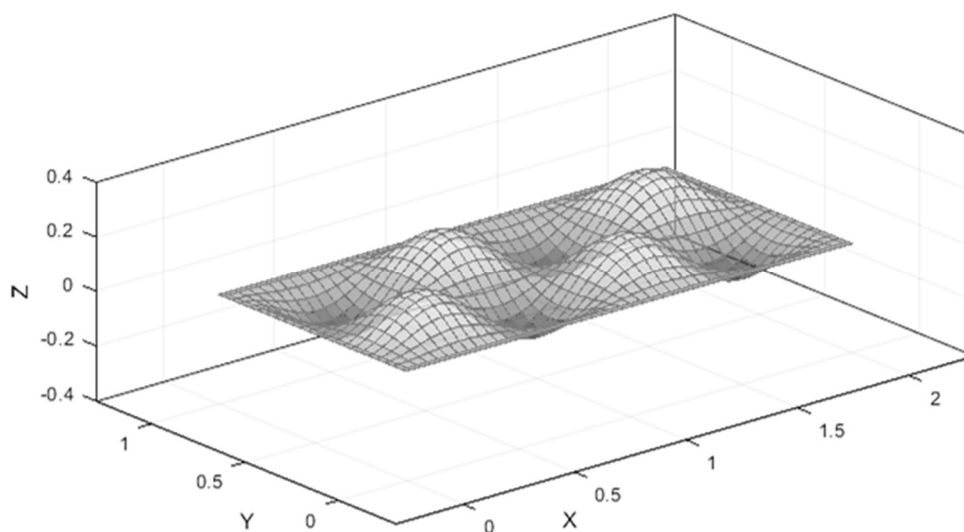
Tabela 5.7. Bezwymiarowa częstość λ_i ; $n_y = 8$; liczba_SES = 153; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,001$

i	λ_i Liew i in. [64]	$\lambda_{SES,i}$ EST narożniki	Δ [%]	$\lambda_{SES,i}$ EST środek	Δ [%]
1	2,4906	92,0	3595%	2,4991	0,3%
2	3,2249	177,9	5417%	3,1383	-2,7%
3	4,5364	181,5	3900%	4,3789	-3,5%
4	6,4169	257,5	3913%	6,2342	-2,8%
5	6,4829	266,6	4012%	6,6747	3,0%
6	7,2017	335,7	4561%	7,1991	0,0%
7	8,4374	346,6	4007%	8,1726	-3,1%
8	8,8446	350,5	3863%	8,6726	-1,9%
9	10,2131	415,1	3965%	9,6754	-5,3%
10	11,8086	421,8	3472%	11,6669	-1,2%

Podobnie jak wcześniej, przy dużej gęstości podziału błąd jest nieznacznie większy, wynosi około -3,2%. Wzrost błędu wraz ze wzrostem gęstości podziału świadczy o tym, że wyznaczone częstotliwości drgań asymptotycznie dążą do wielkości nieznacznie mniejszych od tych wyznaczonych w pracy [64], co z kolei świadczy o pewnym niedosztynieniu modelu. Na ryc. 5.16 oraz 5.17 przedstawiono przykładowe postacie drgań analizowanej płyty dla różnych gęstości podziału.

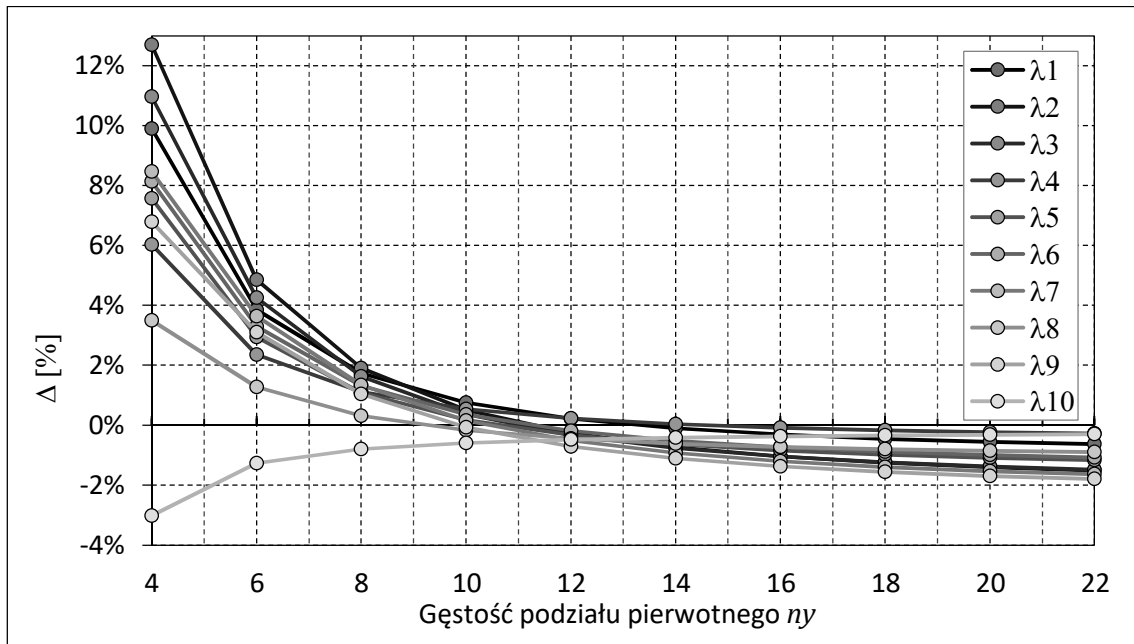
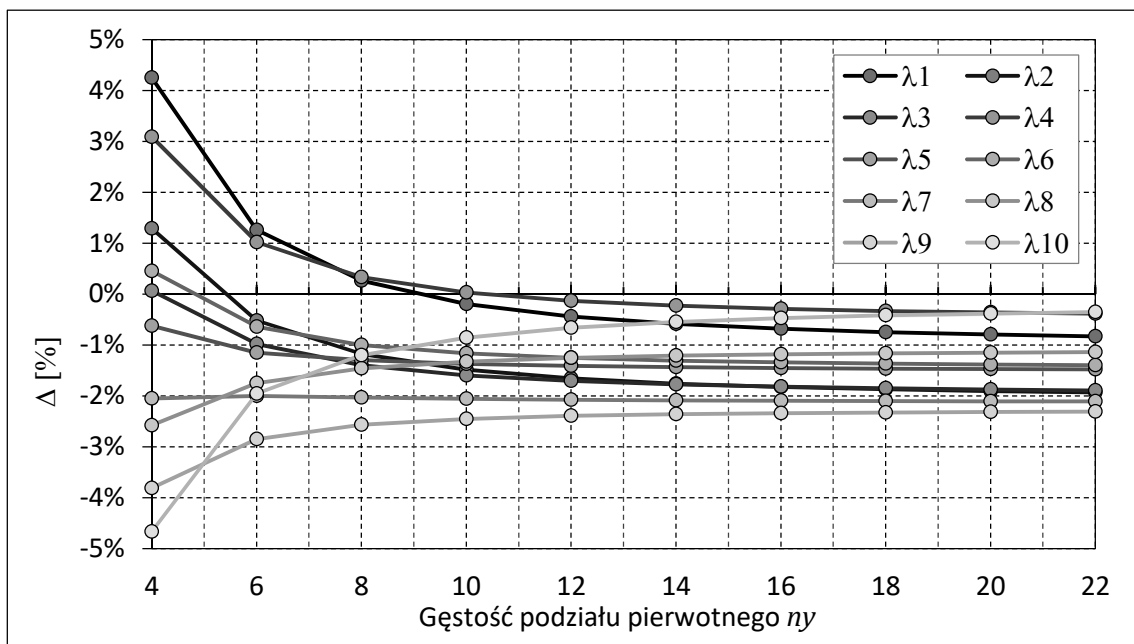


Ryc. 5.16. Przykładowa postać drgań $\lambda_{SES,9} = 9,6754$; EST środek; $n_y = 8$; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,001$



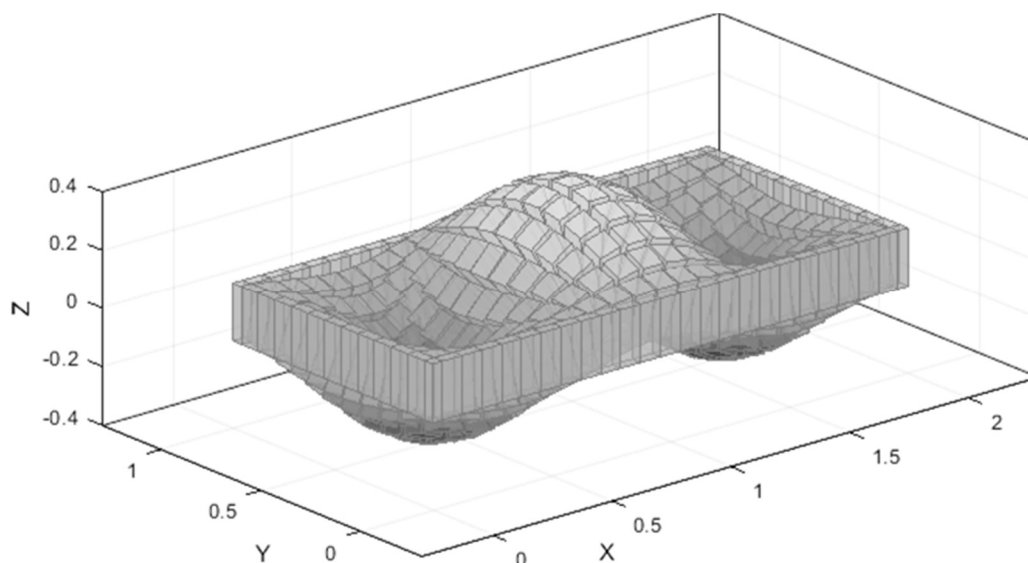
Ryc. 5.17. Przykładowa postać drgań $\lambda_{SES,9} = 9,6339$; EST środek; $n_y = 22$; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,001$

Analiza wyników uzyskanych dla płyty grubej, gdzie stosunek grubości do szerokości wynosi $h_p/B = 0,2$ (por. ryc. 5.20), pokazała z kolei, że niezależnie od przyjętej lokalizacji EST obydwie techniki modelowania dają bardzo dobre rezultaty. Przy największej analizowanej gęstości podziału obydwa modele zapewniają niemal tożsame rezultaty niższe o około 1–2% od rozwiązania ścisłego (por. ryc. 5.18 oraz 5.19). Przy mniejszych gęstościach podziału dokładniejsze wyniki podobnie jak wcześniej zapewnia model z EST umieszczonymi na środkach boków sztywnych elementów skończonych.

Ryc. 5.18. Zbieżność rozwiązania; EST narożniki; schemat CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,2$ Ryc. 5.19. Zbieżność rozwiązania; EST środek; schemat CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,2$

Podsumowując przeprowadzone analizy, należy stwierdzić, że znacznie lepszym rozwiązaniem jest lokalizowanie EST skupiających właściwości sprężysto-tłumiące płyty na środkach boków sztywnych elementów skończonych. Tak opracowany model zapewnia bardzo dobre rezultaty niezależnie od stosunku grubości płyty do jej szerokości. Należy również zauważyć, że jest to lepsze rozwiązanie w przypadku płyt umiarkowanie grubych, gdzie stosunek grubości do szerokości wynosi około 0,1. Płyty o takich proporcjach są najczęściej stosowane w rozwiązaniach konstrukcji budowlanych. Dla takich płyt obydwie lokalizacje EST zapewniają bardzo dobre wyniki analiz (w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym),

jednak lokalizowanie EST na środkach zapewnia bardzo dobre rezultaty przy modelu o siedmiokrotnie mniejszej liczbie stopni swobody w stosunku do modelu z EST umieszczonymi w narożnikach.

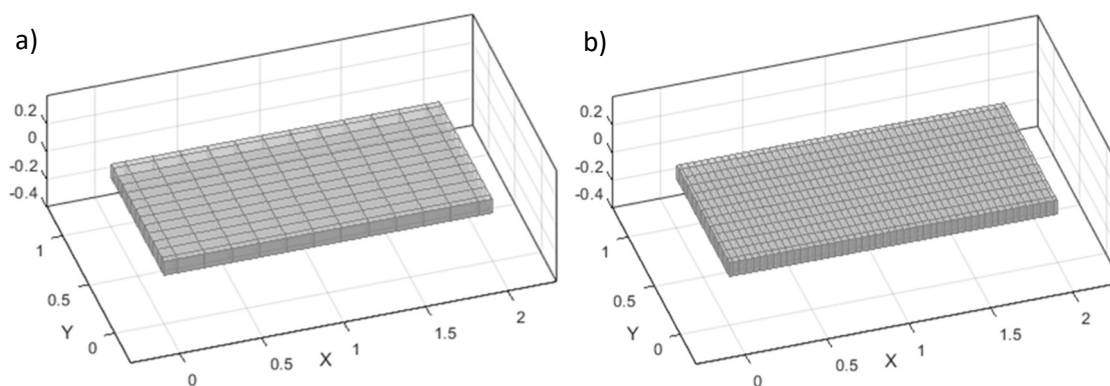
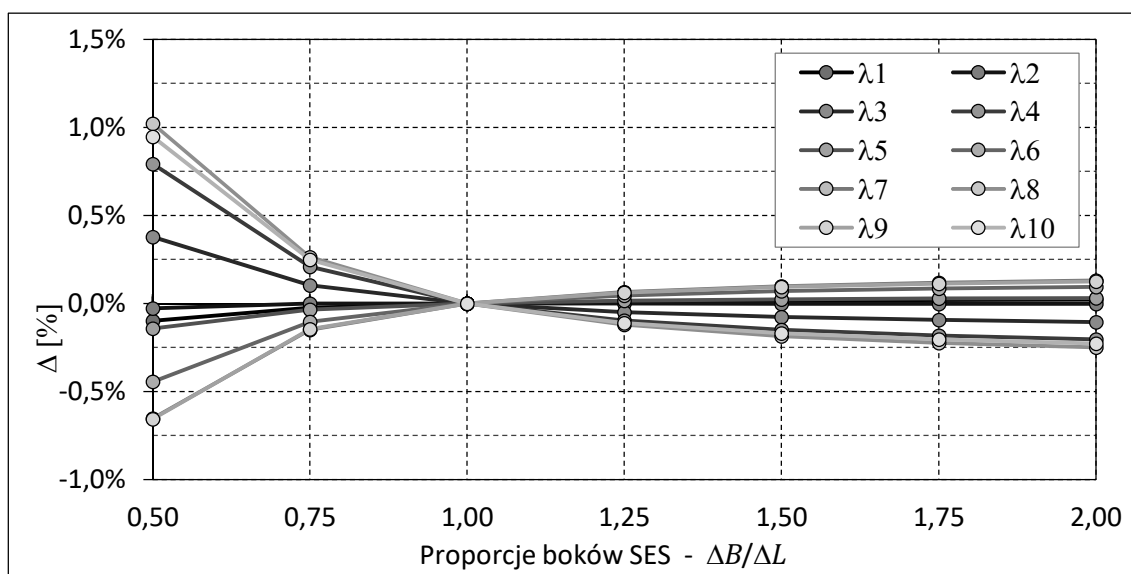


Ryc. 5.20. Przykładowa postać drgań $\lambda_{SES,3} = 3,2325$; EST środek; $n_y = 12$; CCCC; $L/B = 2$; $h_p/B = 0,2$

5.2.4. Wpływ zmiany proporcji wymiarów sztywnego elementu skończonego

Wszystkie analizy z poprzedniego rozdziału wykonano, stosując gęstość podziału płyty na obydwu kierunkach, co zapewniało proporcje boków sztywnych elementów skończonych równą jedności. Wymagało to dwukrotnie większej gęstości podziału na krawędzi o dwukrotnie większej długości. Przy opracowywaniu modelu rzeczywistej konstrukcji nie zawsze istnieje możliwość zastosowania takiego podziału. Dlatego zasadna staje się weryfikacja uzyskiwanych rezultatów przy zmieniającej się geometrii SES. Do analiz wykorzystano model płyty o proporcji boków L/B wynoszącej 2,0 i warunkach podparcia jak w poprzednim rozdziale, tj. wszystkich krawędziach utwierdzonych CCCC.

Podział pierwotny na krótszej krawędzi o długości B zastosowano stały na $n_y = 12$ odcinków o długości ΔB . Podział pierwotny na kierunku osi X , tj. wzdłuż krawędzi o długości L , był zmienny. Liczba odcinków n_x zmieniała się od 12 do 48, a długość każdego odcinka wynosiła ΔL . Wymiary sztywnych elementów skończonych modelujących wewnętrzną część płyty odpowiadały długościom odcinków z podziału pierwotnego (por. ryc. 4.4). Przykładowy model, w którym $n_y = 12$ oraz $n_x = 24$, zapewnia SES o proporcji boków równej $\Delta B/\Delta L = 1,0$. Liczba sztywnych elementów skończonych w takim modelu wynosi $(12 + 1) \times (24 + 1) = 325$ szt. Wyniki takiego modelu traktowane będą jako wyniki referencyjne. Przy założonym zakresie zmienności liczby odcinków n_x proporcje boków $\Delta B/\Delta L$ zmieniały się w zakresie od 0,5 do 2,0. Dyskretyzację modeli zbudowanych z SES o takich proporcjach przedstawiono na ryc. 5.21.

Ryc. 5.21. Dyskretyzacja modeli płyty: a) proporcje boków $\Delta B/\Delta L = 0,5$; b) $\Delta B/\Delta L = 2,0$ 

Ryc. 5.22. Wpływ proporcji boków SES na dokładność rozwiązania

Na ryc. 5.22 przedstawiono wyniki przeprowadzonych analiz. Widać, że proporcje boków nie mają znaczącego wpływu na częstości analizowanych form drgań. Zakres zmienności częstości drgań, które odpowiadają dwóm pierwszym postaciom drgań, nie przekracza wartości 0,1%. Nieznacznie większą zmienność obserwować można dla częstości wyższych form drgań. Należy jednak pamiętać, że wpływ na zmianę częstości mają nie tylko zmienne proporcje boków, ale również zmienna gęstość podziału. Największe zmiany w stosunku do modelu referencyjnego zbudowanego z SES o proporcji boków równej 1,0 odnotowano dla modelu, gdzie proporcje boków $\Delta B/\Delta L$ wynosi 0,5, co zostało osiągnięte dzięki dwukrotnemu zmniejszeniu gęstości podziału krawędzi równoległej do osi X. Zabieg ten automatycznie dwukrotnie zmniejszył liczbę stopni swobody modelu, co zapewne miało zasadniczy wpływ na obserwowane około 1% zmiany wyznaczonych częstości. Ostatecznie należy stwierdzić, że proporcje boków sztywnych elementów skończonych nie mają zasadniczego wpływu na dokładność uzyskiwanych rezultatów analiz, co ułatwi proces budowy modeli rzeczywistych obiektów inżynierskich.

5.2.5. Wpływ zmiany proporcji wymiarów płyty

Analizy w poprzednich rozdziałach prowadzone były dla modelu płyty o stałej proporcji boków wynoszącej $L/B = 2,0$. W kolejnym kroku zdecydowano się sprawdzić wpływ zmiany proporcji L/B na dokładność uzyskiwanych rezultatów. Analizy przeprowadzono dla płyty o wszystkich krawędziach sztywno zamocowanych CCCC i proporcji grubości do szerokości wynoszącej 0,1. Stosunek długości boków płyty L/B zmieniano w zakresie od 0,6 do 2,5. Przyjęto stałą gęstość podziału na krótszej krawędzi. Podział na drugiej krawędzi dobrano tak, aby proporcje długości boków sztywnych elementów skończonych równe były jedności. Liczbę SES potrzebną do budowy modelu płyty zawiera tabela 5.8. Lokalizację elementów sprężysto-tłumiących przyjęto na środkach SES. Rezultaty przeprowadzonych analiz zawiera tabela 5.9. W formie graficznej przedstawiono je również na ryc. 5.23.

Tabela 5.8. Proporcje długości krawędzi analizowanych płyt prostokątnych

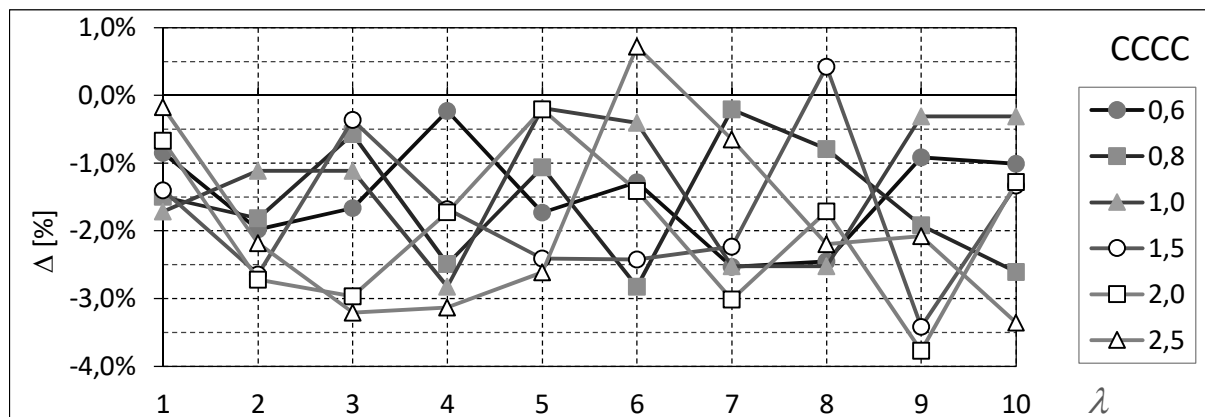
L/B	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5
n_x	12	12	12	18	24	30
n_y	20	15	12	12	12	12
Liczba SES	273	208	169	247	325	403

Tabela 5.9. Płyta CCCC – zmiana bezwymiarowej częstości λ_i w zależności od stosunku L/B

CCCC	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	5,985	8,188	11,811	13,018	14,592	16,348	17,315	21,014	21,391	21,485
	0,8	4,102	6,785	8,583	10,566	10,789	13,853	14,397	15,543	15,940	18,070
	1,0	3,239	6,216	6,216	8,561	10,360	10,435	12,237	12,237	15,244	15,244
	1,5	2,489	3,697	5,716	5,731	6,625	8,220	8,326	10,039	10,449	10,749
	2,0	2,294	2,871	3,950	5,475	5,595	6,039	6,852	7,349	8,060	9,492
	2,5	2,222	2,540	3,165	4,109	5,333	5,540	5,801	6,276	6,789	6,995
Liew i in. [64]	0,6	6,036	8,353	12,010	13,049	14,848	16,560	17,764	21,542	21,589	21,705
	0,8	4,164	6,911	8,632	10,836	10,905	14,256	14,427	15,667	16,252	18,553
	1,0	3,295	6,286	6,286	8,810	10,379	10,478	12,553	12,553	15,292	15,292
	1,5	2,525	3,798	5,737	5,828	6,789	8,425	8,516	9,996	10,818	10,894
	2,0	2,309	2,952	4,071	5,571	5,607	6,126	7,065	7,477	8,376	9,614
	2,5	2,226	2,597	3,270	4,242	5,476	5,500	5,839	6,417	6,933	7,238
Δ [%]	0,6	-0,8%	-2,0%	-1,7%	-0,2%	-1,7%	-1,3%	-2,5%	-2,5%	-0,9%	-1,0%
	0,8	-1,5%	-1,8%	-0,6%	-2,5%	-1,1%	-2,8%	-0,2%	-0,8%	-1,9%	-2,6%
	1,0	-1,7%	-1,1%	-1,1%	-2,8%	-0,2%	-0,4%	-2,5%	-2,5%	-0,3%	-0,3%
	1,5	-1,4%	-2,6%	-0,4%	-1,7%	-2,4%	-2,4%	-2,2%	0,4%	-3,4%	-1,3%
	2,0	-0,7%	-2,7%	-3,0%	-1,7%	-0,2%	-1,4%	-3,0%	-1,7%	-3,8%	-1,3%
	2,5	-0,2%	-2,2%	-3,2%	-3,1%	-2,6%	0,7%	-0,7%	-2,2%	-2,1%	-3,4%

Analiza uzyskanych rezultatów wykazała, że niezależnie od proporcji długości boków błąd wyznaczonej bezwymiarowej częstości od wartości wynikającej z rozwiązania ścisłego zmienia się w przedziale od -4% do 1%. Pokrywa się to z wcześniejszymi spostrzeżeniami

przedstawionymi na ryc. 5.11. Należy mieć na uwadze, że wyniki uzyskano dla stałej gęstości podziału pierwotnego na długości krótszego boku płyty. Średnia wartość błędu wynosi -1,7%. Biorąc pod uwagę szeroki zakres analizowanych częstości, błąd ten należy uznać za w pełni akceptowalny, a wyniki analiz za miarodajne.



Ryc. 5.23. Płyta CCCC – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty

5.2.6. Wpływ zmiany warunków brzegowych

Ostatnim etapem weryfikacji poprawności rezultatów uzyskiwanych z zastosowaniem modeli płyty opracowanych w konwencji metody sztywnych elementów skończonych była analiza płyt o zmiennych warunkach brzegowych. Wszystkie wcześniej opisane analizy dotyczyły płyty utwierdzonej na czterech krawędziach CCCC. Wybór ten nie był przypadkowy. W większości konstrukcji inżynierskich, w szczególności w konstrukcjach stropów usztywnionych belkami, płyty są elementami ciągłymi, a ich krawędzie są zazwyczaj sztywno połączone z konstrukcją, na której się opierają. Zdarzają się jednak inne warianty podparcia będące kombinacją podparcia sztywnego, przegubowego lub swobodnego.

Na kolejnych stronach przedstawiono w formie tabelarycznej (tabele 5.10–5.20) oraz graficznej (ryc. 5.24–5.43) wyniki analiz przeprowadzonych dla 10 różnych warunków brzegowych. Łącznie z przedstawionymi wcześniej wynikami dla schematu płyty o wszystkich krawędziach utwierdzonych CCCC analizie poddano płyty o 11 różnych warunkach brzegowych. Cztery schematy zakładały kombinacje krawędzi utwierdzonych C i podpartych przegubowo S. Jeden schemat zakładał wszystkie krawędzie swobodnie podparte przegubowo SSSS, cztery schematy uwzględniły kombinację krawędzi utwierdzonych C i swobodnych F, ostatni schemat to płyta swobodna FFFF, tj. bez podpartych krawędzi. Wszystkie analizy prowadzono dla płyt o różnych proporcjach boków zgodnie z danymi, które zawiera tabela 5.8. Utrzymywano stałą wartość stosunku grubości do szerokości płyty B wynoszącą 0,1. Każdy zestaw danych uzupełniono, pokazując wybraną postać drgań własnych płyty o proporcjach boków L/B wynoszącej 1,5, starając się przy tym zobrazować wpływ zmiennych warunków brzegowych na kształt analizowanej postaci drgań.

Tabela 5.10. Płyta CCCS – zmiana bezwymiarowej częstość λ_i w zależności od stosunku L/B

CCCS	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	5,789	7,645	11,055	12,929	14,296	15,541	16,821	20,408	20,652	21,415
	0,8	3,806	6,105	8,440	9,929	10,134	13,197	14,313	14,668	15,654	17,325
	1,0	2,853	5,451	6,014	8,008	9,470	10,276	11,459	11,851	14,307	14,694
	1,5	1,969	3,357	4,897	5,495	5,904	7,640	8,172	9,076	9,853	9,993
	2,0	1,719	2,426	3,630	4,741	5,235	5,254	6,153	7,175	7,466	8,958
	2,5	1,624	2,029	2,763	3,800	4,677	4,976	5,094	5,513	6,309	6,600
Liew i in. [64]	0,6	5,862	7,873	11,342	12,982	14,629	15,845	17,400	21,001	21,141	21,538
	0,8	3,901	6,308	8,521	10,143	10,504	13,752	14,370	14,897	16,059	17,978
	1,0	2,952	5,607	6,126	8,376	9,613	10,344	11,946	12,290	14,477	15,241
	1,5	2,047	3,510	4,972	5,656	6,180	8,068	8,316	9,128	10,137	10,501
	2,0	1,770	2,562	3,807	4,775	5,410	5,444	6,490	7,352	7,921	8,970
	2,5	1,657	2,138	2,927	3,991	4,691	5,094	5,292	5,763	6,682	6,797
Δ [%]	0,6	-1,2%	-2,9%	-2,5%	-0,4%	-2,3%	-1,9%	-3,3%	-2,8%	-2,3%	-0,6%
	0,8	-2,4%	-3,2%	-1,0%	-2,1%	-3,5%	-4,0%	-0,4%	-1,5%	-2,5%	-3,6%
	1,0	-3,4%	-2,8%	-1,8%	-4,4%	-1,5%	-0,7%	-4,1%	-3,6%	-1,2%	-3,6%
	1,5	-3,8%	-4,4%	-1,5%	-2,9%	-4,5%	-5,3%	-1,7%	-0,6%	-2,8%	-4,8%
	2,0	-2,9%	-5,3%	-4,7%	-0,7%	-3,2%	-3,5%	-5,2%	-2,4%	-5,7%	-0,1%
	2,5	-2,0%	-5,1%	-5,6%	-4,8%	-0,3%	-2,3%	-3,7%	-4,3%	-5,6%	-2,9%

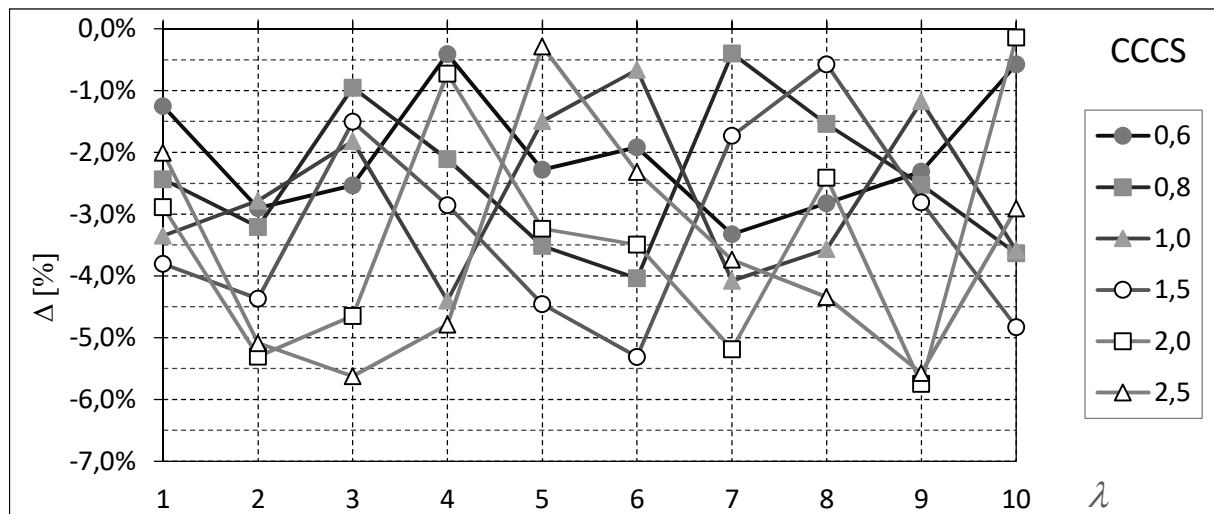
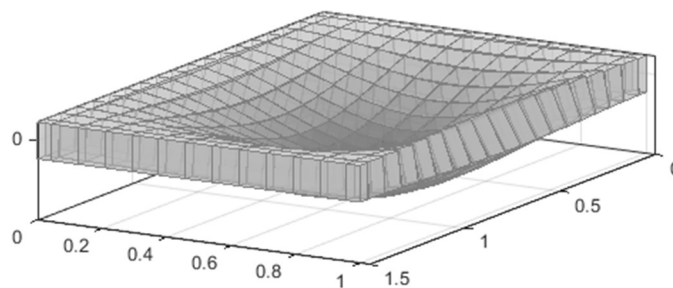
Ryc. 5.24. Płyta CCCS – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.25. Płyta CCCS – podstawowa postać drgań $\lambda_{SES,1} = 1,969$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.11. Płyta CCSS – zmiana bezwymiarowej częstość λ_i w zależności od stosunku L/B

CCSS	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	4,518	6,746	10,472	11,468	12,980	15,151	15,722	19,532	20,127	20,381
	0,8	3,063	5,665	7,351	9,235	9,665	12,518	13,172	14,489	14,621	16,822
	1,0	2,404	5,211	5,223	7,408	9,317	9,350	11,036	11,043	14,046	14,215
	1,5	1,826	2,996	4,832	4,980	5,687	7,261	7,569	9,038	9,496	9,716
	2,0	1,662	2,248	3,337	4,716	4,863	5,153	5,968	6,739	7,190	8,790
	2,5	1,598	1,934	2,587	3,555	4,665	4,794	4,929	5,413	6,150	6,260
Liew i in. [64]	0,6	4,716	7,171	10,948	11,640	13,560	15,620	16,633	20,346	20,615	20,872
	0,8	3,247	5,968	7,545	9,798	9,970	13,292	13,356	14,799	15,238	17,690
	1,0	2,562	5,410	5,444	7,921	9,512	9,536	11,650	11,696	14,418	14,435
	1,5	1,920	3,193	4,920	5,203	6,010	7,770	7,795	9,102	10,044	10,123
	2,0	1,718	2,404	3,549	4,754	5,093	5,352	6,345	6,968	7,709	8,960
	2,5	1,632	2,052	2,772	3,775	4,680	5,027	5,056	5,683	6,495	6,560
Δ [%]	0,6	-4,2%	-5,9%	-4,4%	-1,5%	-4,3%	-3,0%	-5,5%	-4,0%	-2,4%	-2,4%
	0,8	-5,6%	-5,1%	-2,6%	-5,8%	-3,1%	-5,8%	-1,4%	-2,1%	-4,0%	-4,9%
	1,0	-6,1%	-3,7%	-4,1%	-6,5%	-2,0%	-2,0%	-5,3%	-5,6%	-2,6%	-1,5%
	1,5	-4,9%	-6,2%	-1,8%	-4,3%	-5,4%	-6,6%	-2,9%	-0,7%	-5,4%	-4,0%
	2,0	-3,2%	-6,5%	-6,0%	-0,8%	-4,5%	-3,7%	-5,9%	-3,3%	-6,7%	-1,9%
	2,5	-2,1%	-5,7%	-6,7%	-5,8%	-0,3%	-4,6%	-2,5%	-4,8%	-5,3%	-4,6%

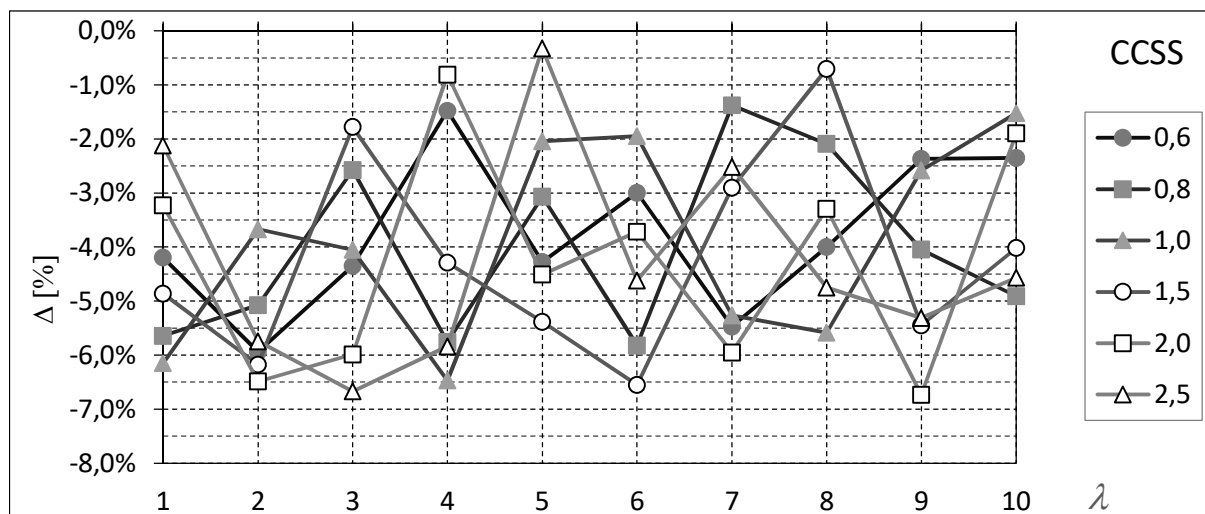
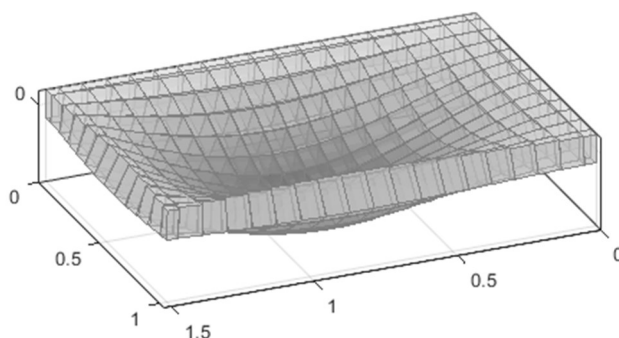
Ryc. 5.26. Płyta CCSS – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.27. Płyta CCSS – podstawowa postać drgań $\lambda_{SES,1} = 1,826$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.12. Płyta SCSC – zmiana bezwymiarowej częstotliwości λ_i w zależności od stosunku L/B

SCSC	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	3,788	6,751	10,071	10,882	12,043	15,260	15,714	18,814	19,404	20,198
	0,8	2,930	6,120	6,483	8,929	10,376	12,100	12,651	13,902	15,269	16,874
	1,0	2,587	4,746	5,871	7,524	8,549	10,183	10,706	11,519	13,343	14,115
	1,5	2,304	3,098	4,762	5,635	6,273	7,158	7,556	9,529	9,978	10,078
	2,0	2,222	2,601	3,441	4,770	5,557	5,890	6,510	6,540	7,572	8,571
	2,5	2,188	2,404	2,879	3,674	4,775	5,521	5,726	6,112	6,139	6,722
Liew i in. [64]	0,6	4,019	7,161	10,322	11,319	12,732	16,144	16,258	19,106	20,553	20,928
	0,8	3,098	6,359	6,730	9,513	10,600	12,356	13,397	14,598	15,496	17,938
	1,0	2,702	4,976	5,999	7,985	8,799	10,271	11,354	12,049	13,638	15,028
	1,5	2,350	3,256	4,976	5,655	6,499	7,388	7,986	9,951	10,094	10,322
	2,0	2,240	2,702	3,612	4,976	5,537	5,999	6,730	6,809	7,986	8,803
	2,5	2,193	2,468	3,009	3,850	4,976	5,484	5,775	6,280	6,355	7,015
Δ [%]	0,6	-5,7%	-5,7%	-2,4%	-3,9%	-5,4%	-5,5%	-3,3%	-1,5%	-5,6%	-3,5%
	0,8	-5,4%	-3,8%	-3,7%	-6,1%	-2,1%	-2,1%	-5,6%	-4,8%	-1,5%	-5,9%
	1,0	-4,3%	-4,6%	-2,1%	-5,8%	-2,8%	-0,9%	-5,7%	-4,4%	-2,2%	-6,1%
	1,5	-2,0%	-4,9%	-4,3%	-0,3%	-3,5%	-3,1%	-5,4%	-4,2%	-1,2%	-2,4%
	2,0	-0,8%	-3,8%	-4,7%	-4,1%	0,4%	-1,8%	-3,3%	-4,0%	-5,2%	-2,6%
	2,5	-0,2%	-2,6%	-4,3%	-4,6%	-4,0%	0,7%	-0,8%	-2,7%	-3,4%	-4,2%

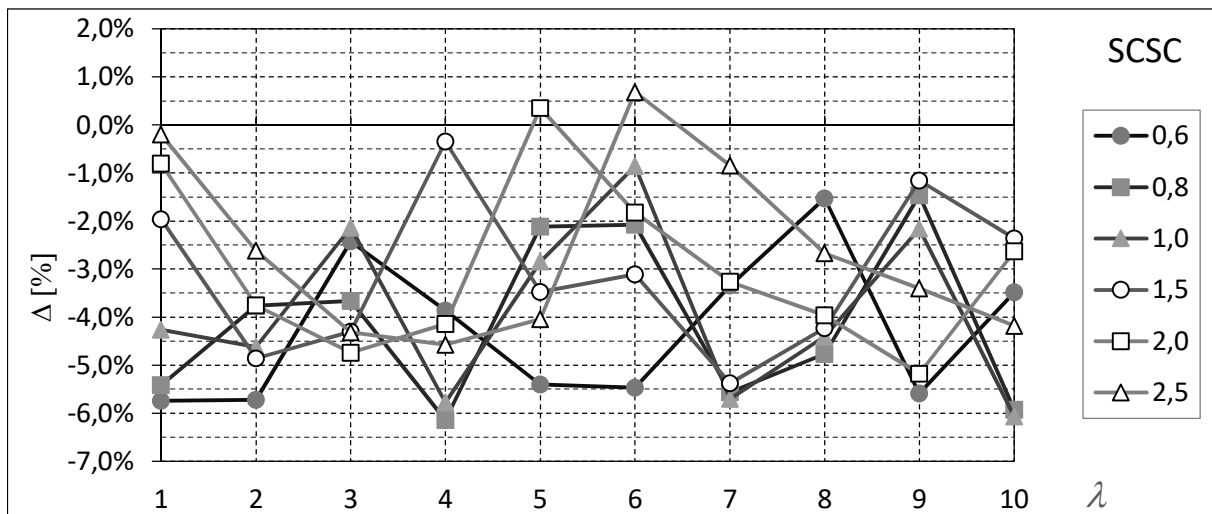
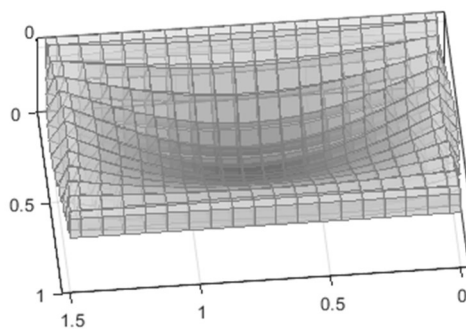
Ryc. 5.28. Płyta SCSC – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.29. Płyta SCSC – podstawowa postać drgań $\lambda_{SES,1} = 2,304$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.13. Płyta SCSS – zmiana bezwymiarowej częstość λ_i w zależności od stosunku L/B

SCSS	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	3,458	6,061	9,944	10,035	11,655	14,659	14,854	18,706	18,748	19,974
	0,8	2,496	5,349	6,287	8,397	9,470	11,908	11,993	13,562	14,363	16,324
	1,0	2,083	4,475	5,052	6,880	8,395	9,231	10,251	10,678	13,243	13,432
	1,5	1,729	2,683	4,492	4,785	5,504	6,915	6,976	9,007	9,020	9,599
	2,0	1,623	2,099	3,068	4,501	4,696	5,074	5,802	6,311	6,933	8,418
	2,5	1,578	1,856	2,431	3,325	4,506	4,655	4,888	5,325	5,927	6,004
Liew i in. [64]	0,6	3,755	6,604	10,243	10,621	12,495	15,424	15,889	19,077	20,115	20,748
	0,8	2,734	5,700	6,590	9,143	9,818	12,296	12,876	14,408	14,712	17,424
	1,0	2,268	4,773	5,284	7,508	8,701	9,446	11,070	11,423	13,586	14,381
	1,5	1,826	2,914	4,773	4,877	5,860	7,264	7,508	9,078	9,755	9,961
	2,0	1,678	2,268	3,311	4,736	4,773	5,284	6,211	6,590	7,509	8,704
	2,5	1,612	1,979	2,632	3,572	4,671	4,773	5,020	5,609	6,204	6,442
Δ [%]	0,6	-7,9%	-8,2%	-2,9%	-5,5%	-6,7%	-5,0%	-6,5%	-1,9%	-6,8%	-3,7%
	0,8	-8,7%	-6,2%	-4,6%	-8,2%	-3,6%	-3,2%	-6,9%	-5,9%	-2,4%	-6,3%
	1,0	-8,2%	-6,2%	-4,4%	-8,4%	-3,5%	-2,3%	-7,4%	-6,5%	-2,5%	-6,6%
	1,5	-5,3%	-7,9%	-5,9%	-1,9%	-6,1%	-4,8%	-7,1%	-0,8%	-7,5%	-3,6%
	2,0	-3,3%	-7,4%	-7,3%	-5,0%	-1,6%	-4,0%	-6,6%	-4,2%	-7,7%	-3,3%
	2,5	-2,1%	-6,2%	-7,6%	-6,9%	-3,5%	-2,5%	-2,6%	-5,1%	-4,5%	-6,8%

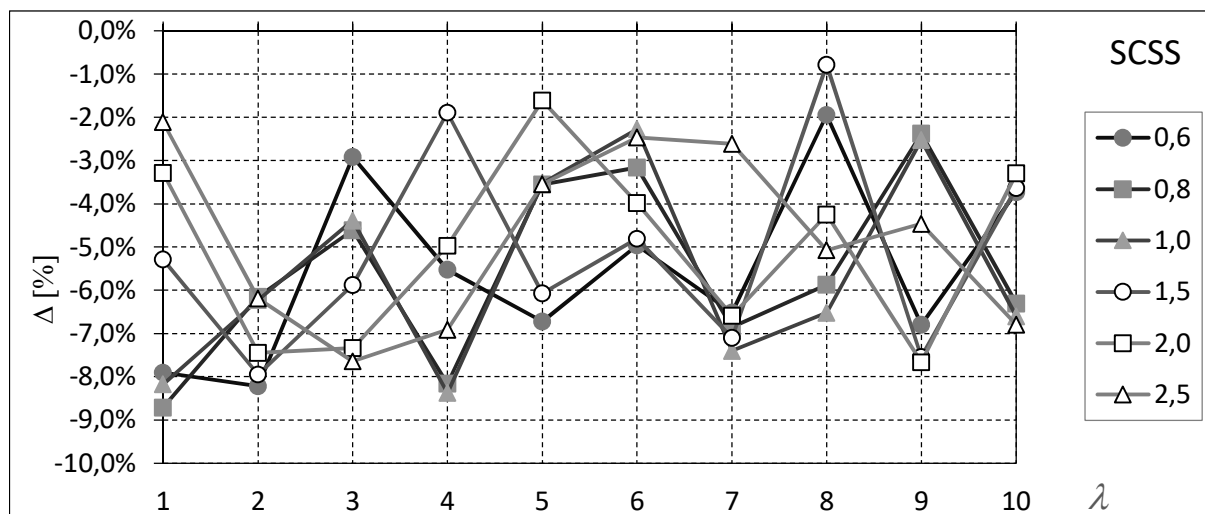
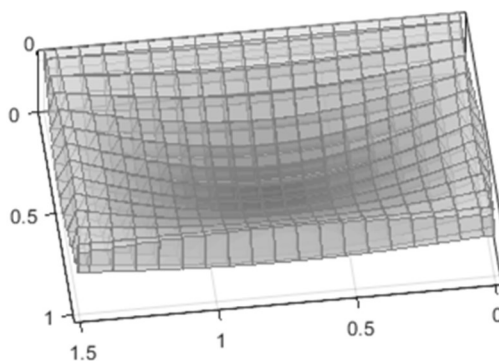
Ryc. 5.30. Płyta SCSS – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.31. Płyta SCSS – podstawowa postać drgań $\lambda_{SES,1} = 1,729$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.14. Płyta SSSS – zmiana bezwymiarowej częstość λ_i w zależności od stosunku L/B

SSSS	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	3,222	5,429	9,193	9,848	11,317	13,970	14,085	18,008	18,695	19,340
	0,8	2,179	4,631	6,143	7,929	8,564	11,188	11,910	13,266	13,429	15,559
	1,0	1,706	4,282	4,282	6,305	8,277	8,283	9,856	9,856	12,781	13,165
	1,5	1,275	2,383	3,974	4,299	4,795	6,344	6,841	8,033	8,575	8,685
	2,0	1,139	1,724	2,801	3,871	4,307	4,307	5,127	6,164	6,363	7,947
	2,5	1,080	1,433	2,102	3,075	3,824	4,094	4,312	4,592	5,351	5,773
Liew i in. [64]	0,6	3,547	6,091	9,932	10,174	12,275	14,690	15,532	19,050	19,681	20,055
	0,8	2,452	5,085	6,473	8,804	9,038	12,242	12,370	13,907	14,231	16,845
	1,0	1,932	4,608	4,608	7,072	8,616	8,616	10,809	10,809	13,539	13,539
	1,5	1,408	2,649	4,130	4,608	5,266	7,072	7,159	8,194	9,198	9,445
	2,0	1,223	1,932	3,076	3,961	4,608	4,608	5,658	6,473	7,072	8,045
	2,5	1,136	1,594	2,340	3,353	3,883	4,299	4,608	4,982	5,913	6,078
Δ [%]	0,6	-9,1%	-10,9%	-7,4%	-3,2%	-7,8%	-4,9%	-9,3%	-5,5%	-5,0%	-3,6%
	0,8	-11,1%	-8,9%	-5,1%	-9,9%	-5,2%	-8,6%	-3,7%	-4,6%	-5,6%	-7,6%
	1,0	-11,7%	-7,1%	-7,1%	-10,8%	-3,9%	-3,9%	-8,8%	-8,8%	-5,6%	-2,8%
	1,5	-9,4%	-10,1%	-3,8%	-6,7%	-8,9%	-10,3%	-4,4%	-2,0%	-6,8%	-8,0%
	2,0	-6,8%	-10,8%	-9,0%	-2,3%	-6,5%	-6,5%	-9,4%	-4,8%	-10,0%	-1,2%
	2,5	-4,9%	-10,1%	-10,2%	-8,3%	-1,5%	-4,8%	-6,4%	-7,8%	-9,5%	-5,0%

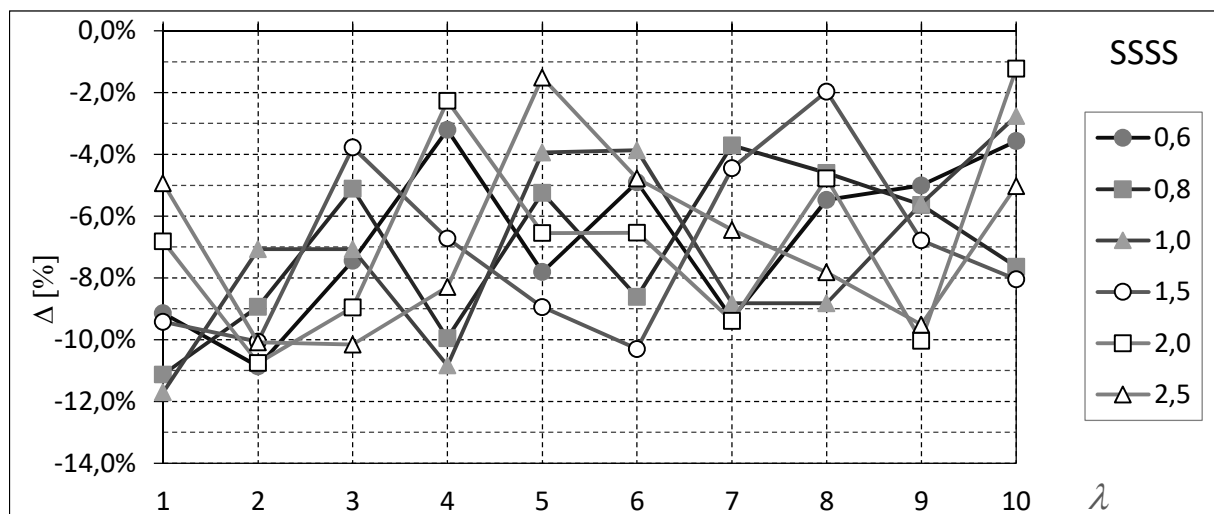
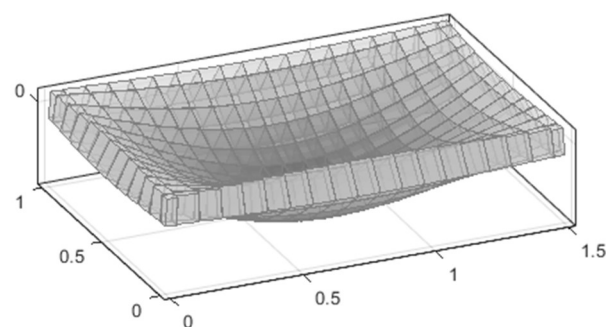
Ryc. 5.32. Płyta SSSS – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.33. Płyta CCCS – podstawowa postać drgań $\lambda_{SES,1} = 1,275$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.15. Płyta CCCF – zmiana bezwymiarowej częstość λ_i w zależności od stosunku L/B

CCCF	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	5,432	6,358	8,661	12,346	12,628	13,465	15,278	16,979	18,141	21,158
	0,8	3,338	4,461	7,175	8,079	9,069	11,222	11,229	14,013	14,579	14,852
	1,0	2,275	3,553	5,592	6,524	6,715	9,156	9,931	10,745	10,892	12,841
	1,5	1,163	2,686	2,774	4,154	5,024	5,936	6,271	7,063	7,771	8,852
	2,0	0,774	1,704	2,414	3,047	3,231	4,465	4,745	5,762	6,046	6,368
	2,5	0,602	1,198	2,078	2,299	2,809	3,217	3,608	4,580	4,655	5,684
Liew i in. [64]	0,6	5,364	6,392	8,793	12,495	12,521	13,495	15,512	17,183	18,539	21,083
	0,8	3,289	4,516	7,295	7,957	9,129	11,358	11,491	13,852	14,905	14,973
	1,0	2,239	3,610	5,494	6,613	6,800	9,416	9,765	10,835	10,963	13,196
	1,5	1,146	2,727	2,738	4,258	4,956	5,973	6,401	7,242	7,667	9,016
	2,0	0,762	1,684	2,437	3,013	3,313	4,593	4,690	5,770	6,200	6,477
	2,5	0,592	1,183	2,057	2,312	2,871	3,184	3,716	4,533	4,799	5,679
Δ [%]	0,6	1,3%	-0,5%	-1,5%	-1,2%	0,9%	-0,2%	-1,5%	-1,2%	-2,1%	0,4%
	0,8	1,5%	-1,2%	-1,6%	1,5%	-0,7%	-1,2%	-2,3%	1,2%	-2,2%	-0,8%
	1,0	1,6%	-1,6%	1,8%	-1,3%	-1,3%	-2,8%	1,7%	-0,8%	-0,6%	-2,7%
	1,5	1,5%	-1,5%	1,3%	-2,4%	1,4%	-0,6%	-2,0%	-2,5%	1,4%	-1,8%
	2,0	1,5%	1,2%	-1,0%	1,1%	-2,5%	-2,8%	1,2%	-0,1%	-2,5%	-1,7%
	2,5	1,6%	1,3%	1,0%	-0,5%	-2,1%	1,0%	-2,9%	1,0%	-3,0%	0,1%

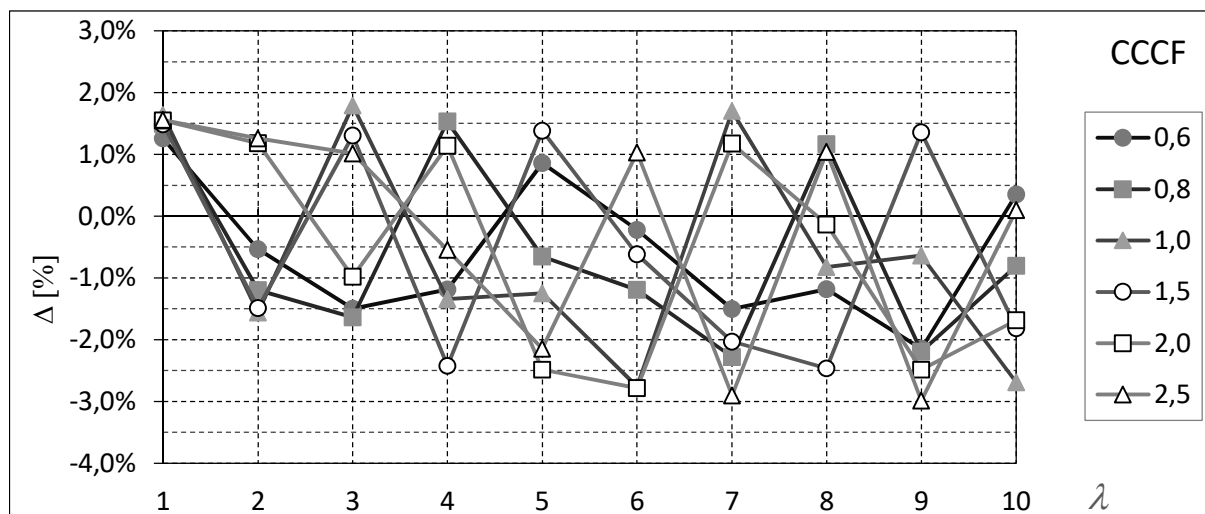
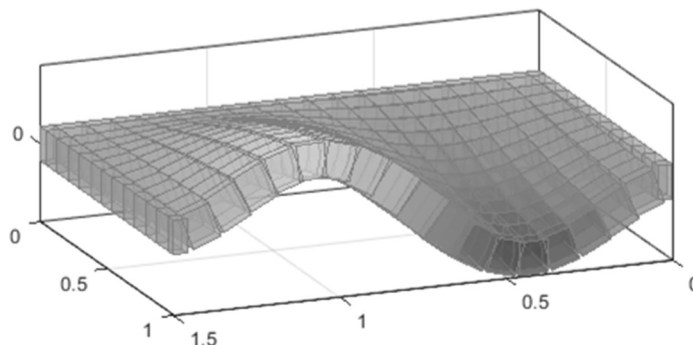
Ryc. 5.34. Płyta CCCF – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.35. Płyta CCCF – trzecia postać drgań $\lambda_{SES,3} = 2,774$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.16. Płyta CCFF – zmiana bezwymiarowej częstotliwości λ_i w zależności od stosunku L/B

CCFF	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	1,263	2,964	5,628	6,150	7,302	10,149	10,499	13,298	13,965	14,478
	0,8	0,866	2,578	3,479	5,243	5,880	8,219	8,382	9,756	10,270	12,156
	1,0	0,680	2,373	2,437	4,205	5,760	5,762	7,179	7,350	10,001	10,182
	1,5	0,494	1,295	2,239	2,868	3,094	4,574	5,130	5,645	6,304	6,637
	2,0	0,429	0,896	1,790	2,184	2,668	3,118	3,550	4,768	4,830	5,608
	2,5	0,400	0,706	1,279	2,141	2,161	2,468	3,048	3,274	3,864	4,640
Liew i in. [64]	0,6	1,248	2,906	5,523	6,089	7,346	10,165	10,463	13,174	14,112	14,505
	0,8	0,859	2,520	3,456	5,267	5,834	8,234	8,383	9,799	10,219	12,300
	1,0	0,676	2,244	2,505	4,256	5,563	5,819	7,240	7,506	9,965	10,166
	1,5	0,491	1,276	2,212	2,829	3,151	4,669	5,068	5,593	6,351	6,783
	2,0	0,425	0,885	1,763	2,167	2,692	3,093	3,635	4,762	4,912	5,553
	2,5	0,396	0,698	1,264	2,078	2,180	2,486	3,103	3,256	3,972	4,598
Δ [%]	0,6	1,2%	2,0%	1,9%	1,0%	-0,6%	-0,2%	0,3%	0,9%	-1,0%	-0,2%
	0,8	0,7%	2,3%	0,7%	-0,5%	0,8%	-0,2%	0,0%	-0,4%	0,5%	-1,2%
	1,0	0,5%	5,7%	-2,7%	-1,2%	3,5%	-1,0%	-0,8%	-2,1%	0,4%	0,2%
	1,5	0,8%	1,5%	1,2%	1,4%	-1,8%	-2,0%	1,2%	0,9%	-0,7%	-2,1%
	2,0	1,0%	1,2%	1,5%	0,8%	-0,9%	0,8%	-2,3%	0,1%	-1,7%	1,0%
	2,5	1,0%	1,2%	1,2%	3,0%	-0,8%	-0,7%	-1,8%	0,5%	-2,7%	0,9%

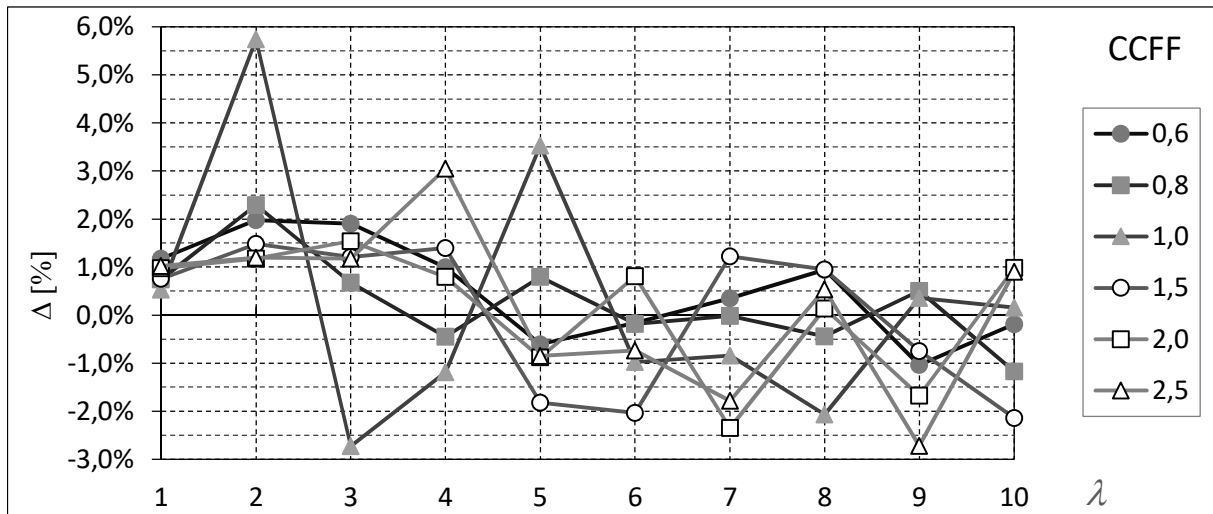
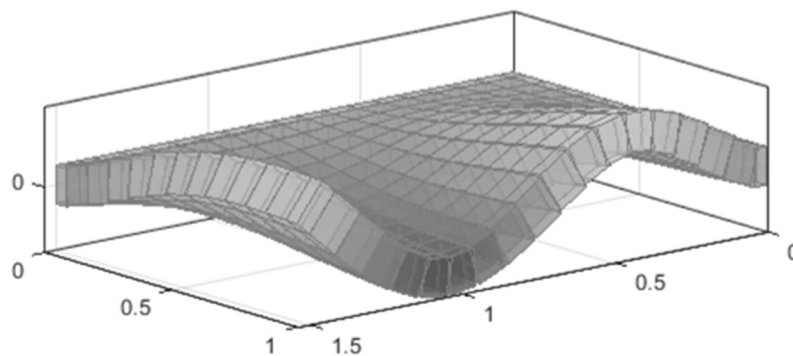
Ryc. 5.36. Płyta CCFF – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.37. Płyta CCFF – czwarta postać drgań $\lambda_{SES,4} = 2,868$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.17. Płyta CFCF – zmiana bezwymiarowej częstotliwości λ_i w zależności od stosunku L/B

CFCF	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	5,331	5,622	6,721	9,121	12,528	12,870	12,889	13,967	15,970	17,632
	0,8	3,215	3,534	4,798	7,552	7,961	8,342	9,574	11,664	11,870	13,912
	1,0	2,133	2,465	3,849	5,458	5,866	6,822	7,199	9,718	9,816	10,202
	1,5	0,980	1,311	2,603	2,899	3,053	4,567	4,873	5,333	6,147	6,795
	2,0	0,558	0,869	1,505	1,957	2,574	2,868	3,359	3,560	4,584	4,932
	2,5	0,359	0,645	0,976	1,414	1,877	2,375	2,428	3,033	3,075	3,547
Liew i in. [64]	0,6	5,257	5,548	6,738	9,225	12,380	12,728	13,042	13,995	16,176	17,831
	0,8	3,159	3,487	4,846	7,672	7,821	8,225	9,647	11,825	12,128	13,730
	1,0	2,090	2,434	3,906	5,339	5,781	6,937	7,305	9,624	9,999	10,052
	1,5	0,961	1,302	2,551	2,942	3,030	4,676	4,780	5,284	6,216	6,951
	2,0	0,547	0,865	1,474	1,949	2,603	2,813	3,343	3,646	4,503	5,040
	2,5	0,351	0,643	0,954	1,411	1,839	2,369	2,448	2,977	3,140	3,534
Δ [%]	0,6	1,4%	1,3%	-0,3%	-1,1%	1,2%	1,1%	-1,2%	-0,2%	-1,3%	-1,1%
	0,8	1,8%	1,4%	-1,0%	-1,6%	1,8%	1,4%	-0,7%	-1,4%	-2,1%	1,3%
	1,0	2,0%	1,3%	-1,5%	2,2%	1,5%	-1,7%	-1,4%	1,0%	-1,8%	1,5%
	1,5	1,9%	0,7%	2,0%	-1,5%	0,7%	-2,3%	1,9%	0,9%	-1,1%	-2,2%
	2,0	2,0%	0,5%	2,1%	0,4%	-1,1%	2,0%	0,5%	-2,3%	1,8%	-2,1%
	2,5	2,2%	0,4%	2,3%	0,2%	2,1%	0,3%	-0,8%	1,9%	-2,1%	0,4%

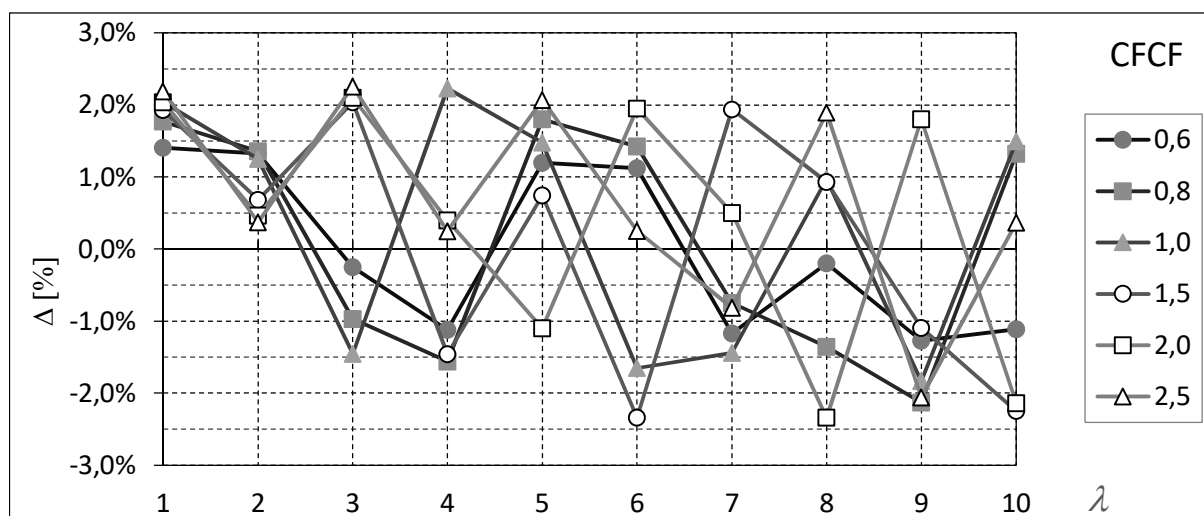
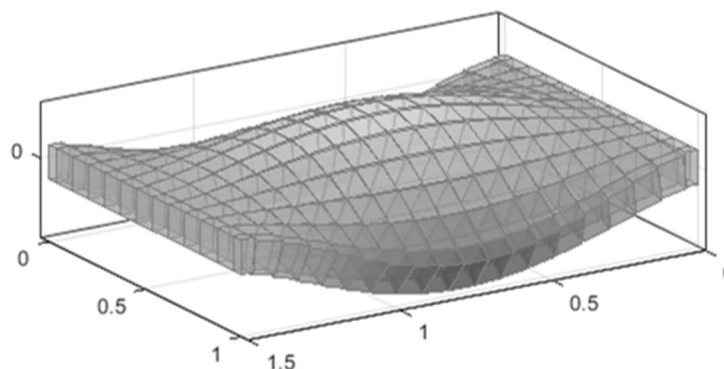
Ryc. 5.38. Płyta CFCF – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.39. Płyta CFCF – czwarta postać drgań $\lambda_{SES,4} = 2,899$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.18. Płyta CFFF – zmiana bezwymiarowej częstość λ_i w zależności od stosunku L/B

CFFF	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	0,968	1,580	3,273	5,399	6,141	6,456	8,124	10,871	11,041	13,151
	0,8	0,550	1,087	2,796	3,218	3,992	5,932	6,089	8,206	8,787	8,909
	1,0	0,354	0,821	2,121	2,569	2,887	4,757	5,563	5,924	6,204	7,772
	1,5	0,158	0,503	0,969	1,667	2,350	2,628	3,321	3,445	4,930	5,159
	2,0	0,089	0,361	0,551	1,160	1,513	2,194	2,276	2,888	2,921	3,555
	2,5	0,057	0,280	0,354	0,887	0,980	1,623	1,886	2,243	2,553	2,664
Liew i in. [64]	0,6	0,956	1,560	3,207	5,339	5,857	6,571	8,116	10,752	11,114	13,048
	0,8	0,542	1,078	2,699	3,227	3,929	5,981	6,037	8,084	8,628	9,115
	1,0	0,348	0,817	2,036	2,584	2,862	4,816	5,483	5,777	6,238	7,918
	1,5	0,155	0,502	0,941	1,663	2,292	2,614	3,301	3,497	4,849	5,289
	2,0	0,087	0,359	0,534	1,159	1,470	2,190	2,257	2,812	2,988	3,539
	2,5	0,055	0,280	0,343	0,885	0,952	1,623	1,832	2,236	2,550	2,681
Δ [%]	0,6	1,3%	1,3%	2,1%	1,1%	4,8%	-1,7%	0,1%	1,1%	-0,7%	0,8%
	0,8	1,5%	0,8%	3,6%	-0,3%	1,6%	-0,8%	0,9%	1,5%	1,8%	-2,3%
	1,0	1,8%	0,5%	4,2%	-0,6%	0,9%	-1,2%	1,4%	2,5%	-0,6%	-1,8%
	1,5	2,2%	0,4%	3,0%	0,3%	2,5%	0,5%	0,6%	-1,5%	1,7%	-2,5%
	2,0	2,5%	0,4%	3,1%	0,1%	3,0%	0,2%	0,8%	2,7%	-2,2%	0,4%
	2,5	2,8%	0,3%	3,2%	0,1%	2,9%	0,0%	3,0%	0,3%	0,1%	-0,6%

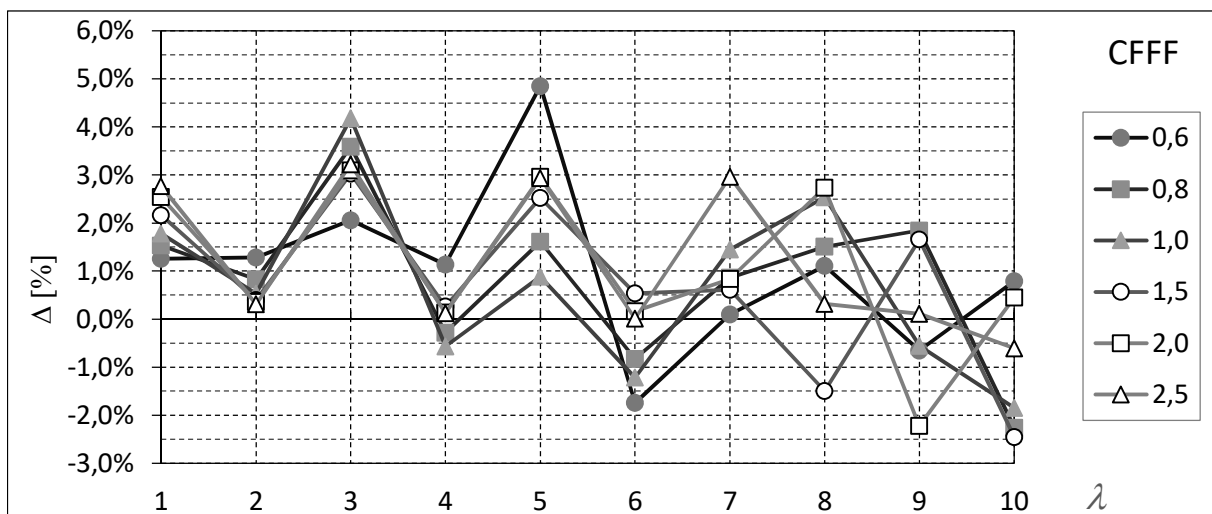
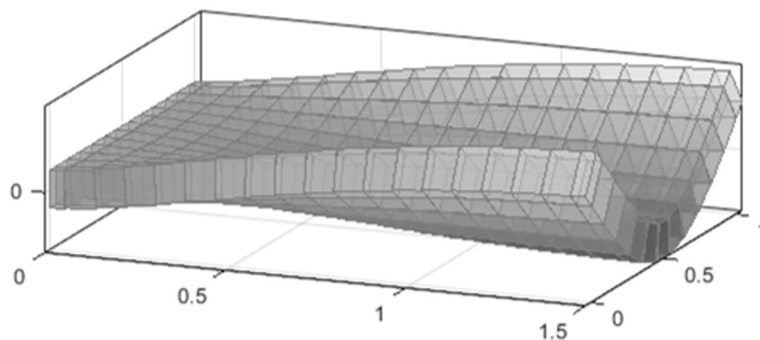
Ryc. 5.40. Płyta CFFF – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.41. Płyta CFFF – piąta postać drgań $\lambda_{SES,5} = 2,350$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.19. Płyta FFFF – zmiana bezwymiarowej częstości λ_i w zależności od stosunku L/B

FFFF	L/B	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
SES	0,6	2,094	2,186	4,568	5,667	5,739	6,803	7,887	9,368	10,287	12,163
	0,8	1,600	2,186	3,352	3,736	4,446	5,665	6,894	6,994	8,448	9,268
	1,0	1,289	2,186	2,186	3,260	3,260	5,547	5,663	5,663	6,507	6,552
	1,5	0,864	0,991	1,959	2,186	2,651	2,716	3,566	3,979	4,989	5,663
	2,0	0,561	0,646	1,403	1,521	2,186	2,404	2,496	2,909	3,293	3,738
	2,5	0,361	0,514	0,983	1,094	1,808	1,895	2,186	2,388	2,716	2,933
Liew i in. [64]	0,6	2,072	2,095	4,521	5,413	5,672	6,850	7,779	9,264	10,281	11,908
	0,8	1,593	2,075	3,351	3,710	4,336	5,655	6,876	6,959	8,347	9,257
	1,0	1,289	1,919	2,363	3,234	3,234	5,608	5,608	5,645	6,143	6,857
	1,5	0,864	0,948	1,959	2,166	2,461	2,843	3,545	4,023	4,949	5,482
	2,0	0,538	0,645	1,405	1,467	2,149	2,404	2,492	2,848	3,364	3,723
	2,5	0,346	0,514	0,949	1,095	1,811	1,822	2,192	2,357	2,717	2,964
Δ [%]	0,6	1,1%	4,4%	1,0%	4,7%	1,2%	-0,7%	1,4%	1,1%	0,1%	2,1%
	0,8	0,5%	5,3%	0,0%	0,7%	2,5%	0,2%	0,3%	0,5%	1,2%	0,1%
	1,0	0,0%	13,9%	-7,5%	0,8%	0,8%	-1,1%	1,0%	0,3%	5,9%	-4,4%
	1,5	0,0%	4,5%	0,0%	0,9%	7,7%	-4,5%	0,6%	-1,1%	0,8%	3,3%
	2,0	4,3%	0,1%	-0,1%	3,7%	1,7%	0,0%	0,2%	2,1%	-2,1%	0,4%
	2,5	4,3%	0,1%	3,6%	-0,1%	-0,2%	4,0%	-0,3%	1,4%	0,0%	-1,1%

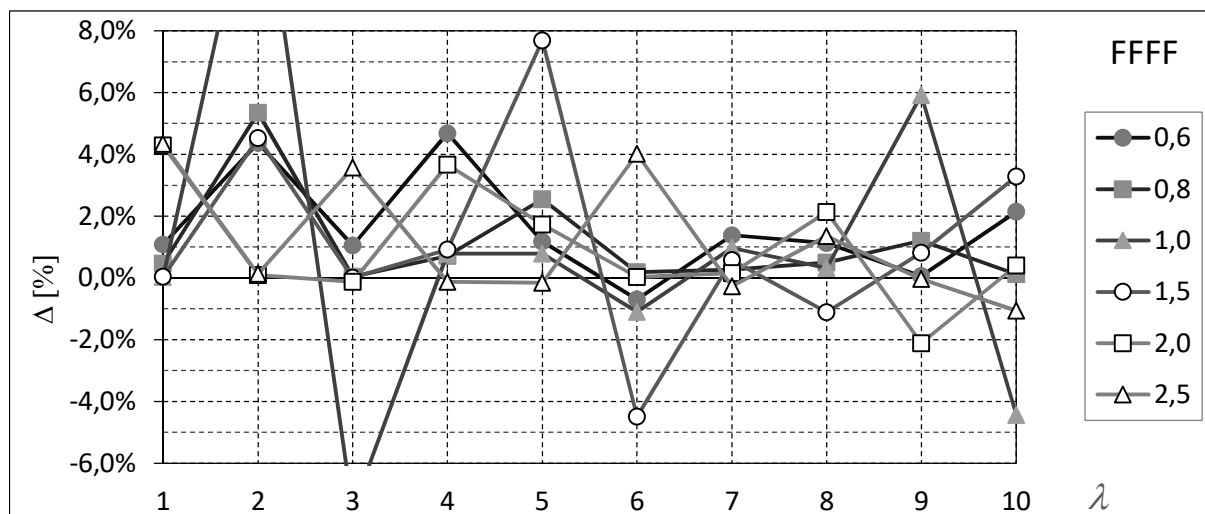
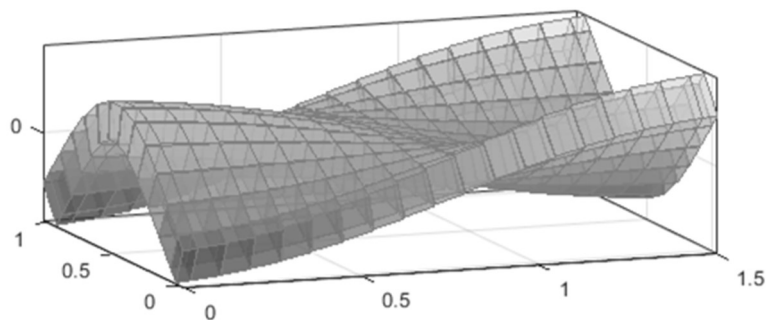
Ryc. 5.42. Płyta FFFF – dokładność rozwiązania w zależności od proporcji długości boków płyty L/B Ryc. 5.43. Płyta FFFF – piąta postać drgań $\lambda_{SES,6} = 2,350$; $L/B = 1,5$

Tabela 5.20. Wpływ warunków brzegowych na dokładność rozwiązania

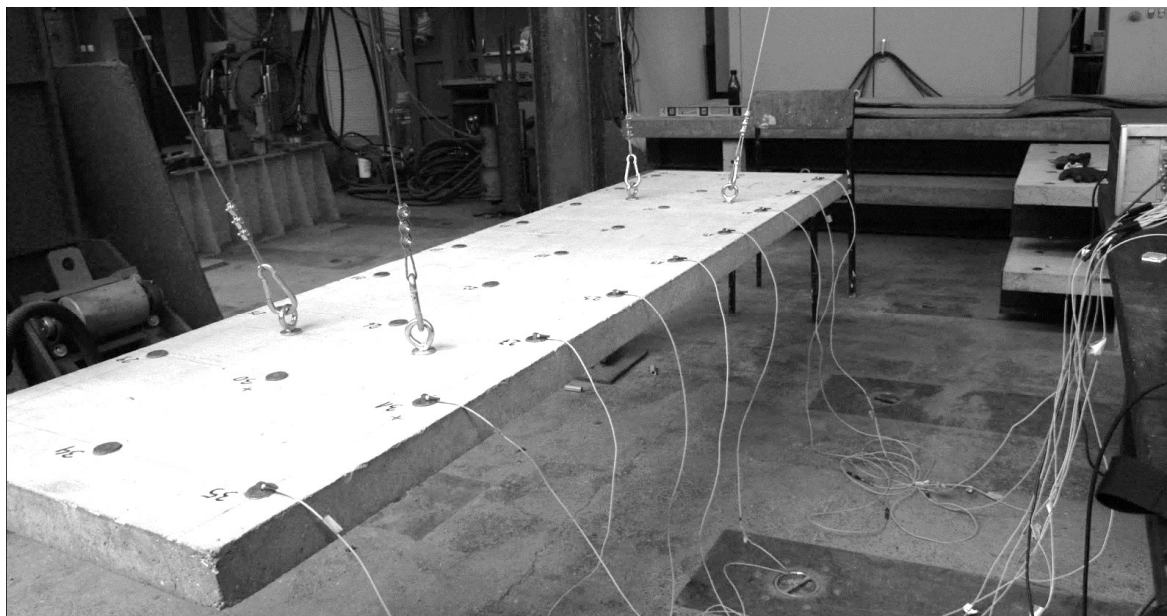
Warunki podparcia	Wartość średnia	Odchylenie standardowe
CCCC	-1,7%	1,1%
CCCS	-2,9%	1,5%
CCSS	-4,1%	1,7%
SCSC	-3,5%	1,8%
SCSS	-5,3%	2,1%
SSSS	-6,9%	2,7%
CCCF	-0,5%	1,5%
CCFF	0,2%	1,6%
CFCF	0,3%	1,5%
CFFF	0,9%	1,6%
FFFF	1,2%	3,0%

Tabela 5.20 zawiera zestawienie wartości średnich oraz odchylenia standardowego obliczone dla wartości błędów Δ wyznaczonych dla płyt o różnych warunkach brzegowych. Jak wspomniano już wcześniej, bardzo dobrą zgodność wyników z wynikami rozwiązania ścisłego uzyskano dla płyty, w której wszystkie krawędzie były utwierdzone C. Nieznacznie większe wartości błędów obserwować można w przypadku analizy płyt, w których wybrane krawędzie podparte są w sposób przegubowy S. Im większa liczba krawędzi swobodnie podpartych, tym większy błąd wyznaczenia bezwymiarowej częstości drgań. W skrajnym przypadku, gdy wszystkie cztery krawędzie płyty podparte są w sposób przegubowy, średnia wartość błędu wynosi -6,9% przy odchyleniu standardowym na poziomie 2,7%. Biorąc pod uwagę szeroki zakres analizowanych form drgań, wynik ten uznać należy za dopuszczalny. Żeby poprawić zgodność rezultatów w tym zakresie, możliwe jest uwzględnienie częściowego zamocowania płyty na krawędziach swobodnie podpartych, co usztywniłoby konstrukcję, efektem czego byłby wzrost wyznaczanych częstości drgań. Na obecnym etapie analiz nie zdecydowano się na takie rozwiązanie. Bardzo dobre rezultaty analiz uzyskano dla płyt z warunkami brzegowymi będącymi kombinacją krawędzi usztywnionych C oraz krawędzi swobodnych F. Średnia wartość błędu, niezależnie od liczby krawędzi swobodnych, nie przekracza wartości 1,0%. W przypadku płyty o wszystkich krawędziach swobodnych i proporcji boków równej 1,0 błąd wyznaczenia drugiej częstotliwości drgań osiągnął wartość około 14%. Jest to jedyny przypadek takiej rozbieżności spośród wszystkich przeanalizowanych przypadków.

Podsumowując przeprowadzone powyżej analizy, należy jednoznacznie stwierdzić, że niezależnie od warunków podparcia płyty prostokątnej model opracowany w konwencji metody sztywnych elementów skończonych zapewnia bardzo dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem ścisłym przedstawionym przez Liew i in. [64].

5.2.7. Badania doświadczalne płyty prostokątnej

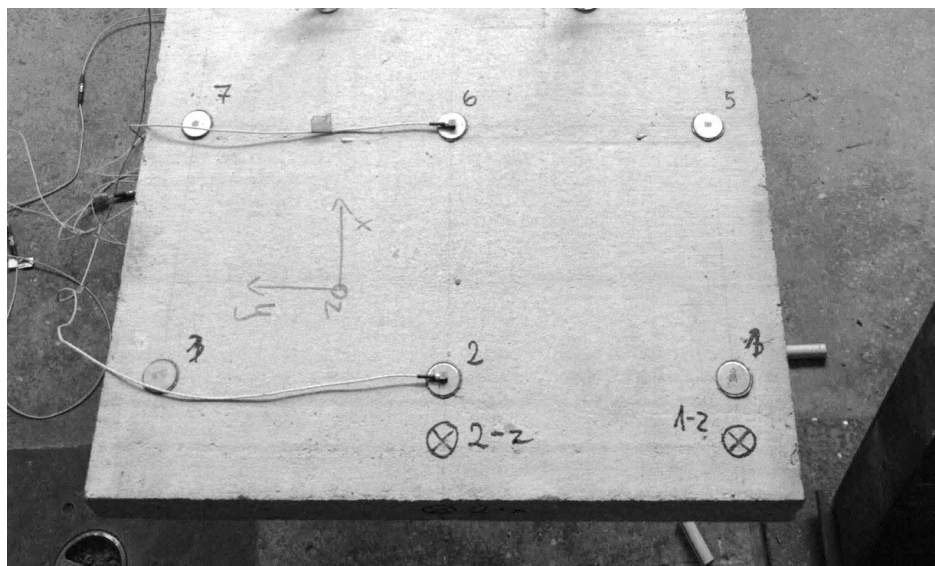
Podobnie jak w przypadku modelu belki (por. podrozdział 5.1.2) badaniu mającemu na celu określenie charakterystyk dynamicznych poddano również żelbetową płytę prostokątną (ryc. 5.44). Badania prowadzono w ramach projektu badawczego [149], którego celem było opracowanie technik identyfikacji parametrów modeli dyskretnych stalowo-betonowych konstrukcji zespolonych.



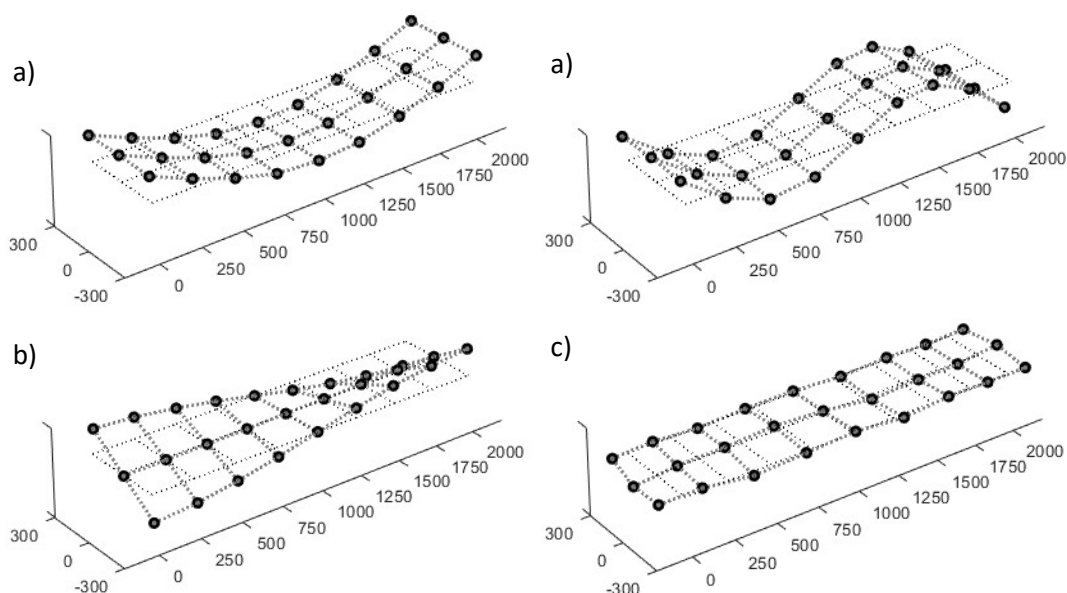
Ryc. 5.44. Płyta żelbetowa 2200 x 600 x 60 w trakcie badań dynamicznych

Płyta, podobnie jak wcześniej belka, badana była dla schematu bez podpór, który zgodnie z oznaczeniami stosowanymi w poprzednich rozdziałach oznaczyć można jako FFFF, tj. wszystkie krawędzie swobodne. Realizację takich warunków brzegowych uzyskano dzięki podwieszeniu płyty do układu ram za pomocą czterech stalowych zawiesi. Punkty mocowania zawiesi dobrano tak, aby pokrywały się one z węzłami podstawowej postaci drgań giętnych.

W trakcie badań na powierzchni płyty rozmieszczono $9 \times 3 = 27$ punktów pomiarowych (ryc. 5.45). Zarówno wzdłuż, jak i w poprzek płyty punkty pomiarowe rozmieszczone były co 25 cm. Pomiaru przyspieszeń drgań oraz impulsu siły wymuszającej dokonywano tym samym zestawem aparatury badawczej co w przypadku badań belki dwuteowej IPE 160. Wymuszenia drgań giętnych i skrętnych dokonywano w punktach umieszczonych na krawędzi płyty oznaczonych jako 1:-Z oraz 2:-Z. Drgania osiowe wymuszano, przykładając impuls siły w punkcie 2:+X zlokalizowanym na czole płyty. Przykładowe zarejestrowane formy drgań giętnych, skrętnych oraz osiowych przedstawiono na ryc. 5.46.



Ryc. 5.45. Siatka punktów pomiarowych, lokalizacja wymuszenia



Ryc. 5.46. Analizowane formy drgań płyty: a) giętne; b) skrętne; c) osiowe

5.2.8. Identyfikacja parametrów modelu płyty

Porównanie wyników badań doświadczalnych z wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem modelu SES płyty wymagało określenia parametrów potrzebnych do definicji modelu. Większość parametrów modelu można było ustalić na podstawie inwentaryzacji geometrycznej wykonanej płyty. Ustalono, że główne wymiary konstrukcyjne odpowiadają wielkościom założonym w projekcie płyty. Ustalono również masę płyty, dzięki czemu możliwe było precyzyjne ustalenia gęstości materiału potrzebnej do definicji modelu. Należy mieć na uwadze, że wyznaczona gęstość jest wypadkową gęstości betonu oraz gęstości zastosowanego zbrojenia płyty. W trakcie inwentaryzacji płyty zaobserwowano występujące w okolicach poprzecznych prętów zbrojeniowych rysy skurczowe. Stopień zarysowania nie był znaczny,

jednak zdecydowano się uwzględnić ten fakt w trakcie analiz. Zarysowanie płyty wpływa na obniżenie jej sztywności bez redukcji jej masy. W związku z powyższym zdecydowano, że grubość płyty h_p wykorzystywana będzie podczas wyznaczania masy oraz masowych momentów bezwładności, natomiast do wyznaczenia elementów macierzy współczynników sztywności wykorzystana zostanie zredukowana wartość $h_{p,eff}$. Stopień redukcji grubości był wielkością, którą należało ustalić. Kolejnym parametrem, którego wartość była nieznana, był moduł sprężystości podłużnej E_p . Zdecydowano, że obydwie wielkości ustalone zostaną na drodze identyfikacji parametrycznej.

Jako kryteria identyfikacji brakujących parametrów modelu przyjęto jak najlepsze dopasowanie wyników badań doświadczalnych do wyników otrzymywanych na podstawie modelu SES płyty. Porównania dokonywano w zakresie częstotliwości drgań własnych. W trakcie badań doświadczalnych wyznaczono częstotliwości $f_{i,exp}$ odpowiadające pięciu postaciom drgań giętnych i skrętnych oraz podstawową postać drgań osiowych płyty. W trakcie identyfikacji uwzględniano wszystkie określone częstotliwości. Zdefiniowano wskaźnik S , będący sumą kwadratów odchyłeń obliczeniowych i doświadczalnych częstotliwości drgań, którego wartość była minimalizowana.

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{i,exp} - f_{i,SES}}{f_{i,exp}} \right)^2 \quad (48)$$

Identyfikacji poddano również parametry tłumiące płyty. Do opisu właściwości tłumiących konstrukcji wykorzystano współczynnik strat η . Współczynnik strat η , podobnie jak logarytmiczny dekrement tłumienia δ lub współczynnik tłumienia ξ , jest parametrem służącym do opisu tłumienia. Przy założeniu, że tłumienie jest niewielkie, pomiędzy powyższymi wielkościami zachodzą następujące zależności [71]:

$$\eta = \frac{\delta}{\pi}; \quad \xi = \frac{\delta}{2\pi}; \quad \delta = 2\pi\xi \quad (49)$$

Współczynnik strat można oszacować, dopasowując częstotliwościowe funkcje przejścia FRF uzyskane na podstawie modelu SES do charakterystyk otrzymanych podczas badań doświadczalnych. Układ równań różniczkowych opisujący ruch drgający modelu z uwzględnieniem tłumienia zapisać można w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (50)$$

gdzie \mathbf{q} jest wektorem przemieszczeń uogólnionych, macierze \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} kolejno macierzami bezwładności, tłumienia oraz sztywności, a \mathbf{f} jest wektorem sił uogólnionych. Wektory \mathbf{q} oraz \mathbf{f} są funkcjami czasu t . Rozwiązanie powyższego układu równań różniczkowych, w zależności od postaci sygnału wymuszającego, można uzyskać, stosując różne metody, np. bezpośredniego całkowania, modalną, metodę wykorzystującą przekształcenie całkowite

Laplace'a lub Fouriera [58, 71]. Zastosowanie przekształcenia Laplace'a umożliwia przejście z dziedziny czasu, gdzie wymuszenie i odpowiedź układu są funkcjami zależnymi od t , do dziedziny częstotliwości zespolonej s . Dokonując transformacji Laplace'a, przy założeniu zerowych warunków początkowych, układ równań (50) przyjmuje postać:

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{q}(s) = \mathbf{f}(s) \quad (51)$$

Konsekwencją zastosowania przekształcenia Laplace'a jest algebraizacja układu równań (50). Rozwiązanie układu liniowych równań algebraicznych nie przedstawia większych trudności. Przy założeniu, że macierz $(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})$ jest nieosobliwa, czyli istnieje macierz do niej odwrotna, równanie (51) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{q}(s) = (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{f}(s) \quad (52)$$

Rozwiązanie w postaci Fouriera można uzyskać wprost z rozwiązania w postaci Laplace'a, podstawiając $s = j\omega$ do (52). Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie w postaci częstotliwościowej

$$\mathbf{q}(j\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{f}(j\omega) \quad (53)$$

gdzie macierz

$$\mathbf{A}(j\omega) = \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} \quad (54)$$

nazywana jest *macierzą sztywności dynamicznej*, natomiast macierz

$$\mathbf{W}(j\omega) = \mathbf{A}^{-1}(j\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C})^{-1} \quad (55)$$

jest macierzą podatności dynamicznej lub macierzą częstotliwościowych funkcji przejścia. Element tej macierzy, leżący na przecięciu i -tego wiersza i k -tej kolumny, oznaczony jako $W_{ik}(j\omega)$, jest wielkością zespoloną i zmienia się w zależności od częstotliwości ω . Wykres modułu częstotliwościowej funkcji przejścia $W_{ik}(j\omega)$ określa zależność amplitudy drgań na kierunku i -tej składowej wektora współrzędnych uogólnionych od częstotliwości ω wymuszenia przyłożonego na kierunku k -tej współrzędnej uogólnionej (przy założeniu, że amplituda siły wymuszającej jest jednostkowa i nie zależy od częstotliwości).

Podatność dynamiczna jest charakterystyką uzyskaną przy założeniu, że wejściem do układu jest siła, wyjściem natomiast przemieszczenie. Ze względów praktycznych w trakcie badań doświadczalnych najczęściej mierzone są jednak przyspieszenia (tak było również w trakcie badań przeprowadzonych w ramach niniejszego projektu). Charakterystyka uzyskiwana przy założeniu, że wejściem do układu jest siła, a wyjściem przyspieszenie, nazywana jest inertancją – $\mathbf{G}(j\omega)$. Podatność dynamiczna oraz inertancja są charakterystykami częstotliwościowymi zdefiniowanymi dla ruchu ustalonego, dlatego istnieje pomiędzy nimi ścisły związek [130].

$$|\mathbf{G}(j\omega)| = \omega^2 |\mathbf{W}(j\omega)| \quad (56)$$

Jak wynika z powyższego wywodu, aby wyznaczyć inertancję układu na podstawie modelu SES, wymagana jest znajomość macierzy sztywności \mathbf{K} , bezwładności \mathbf{M} i tłumienia \mathbf{C} . Informacje na temat technik budowy macierzy sztywności i bezwładności podaje szczegółowo literatura dotycząca metody [59, 60].

Każdy element sprężysto-tłumiący EST o numerze k charakteryzowany jest za pomocą macierzy współczynników sztywności translacyjnej $\mathbf{K}_T^{(k)}$ i rotacyjnej $\mathbf{K}_R^{(k)}$ oraz odpowiadających im macierzy współczynników tłumienia $\mathbf{C}_T^{(k)}$ i $\mathbf{C}_R^{(k)}$. Wszystkie cztery macierze są diagonalne. Związek pomiędzy odpowiadającymi sobie współczynnikami sztywności $k_{i,j}^{(k)}$ i tłumienia $c_{i,j}^{(k)}$ jest następujący:

$$c_{i,j}^{(k)} = \frac{\eta}{\omega} k_{i,j}^{(k)} \quad i = T, R \quad j = x, y, z \quad (57)$$

gdzie η jest współczynnikiem strat, a ω częstością kołową drgań.

Identyfikację wszystkich parametrów płyty przeprowadzono z wykorzystaniem procedur optymalizacyjnych pakietu MATLAB. Spośród dostępnych w systemie procedur wybrano funkcję *fmincon*, znajdującą minimum nieliniowej funkcji wielu zmiennych z liniowymi i nieliniowymi ograniczeniami równościowymi i nierównościowymi. Funkcja umożliwia odnajdywanie minimum funkcji, bazując na jednym z czterech algorytmów. Podczas analiz testowano dwa z nich: algorytm Active-set oraz Interior-point. Ostatecznie do analiz wybrano algorytm Interior-point. Skorzystanie z algorytmu wiązało się z określeniem macierzy Hessego (Hesjan, macierz drugich pochodnych), do której wyznaczania wykorzystano jedną z metod zmiennej metryki, metodę BFGS. Więcej informacji na temat zastosowanej procedury identyfikacji parametrów modelu płyty znaleźć można w raporcie z projektu badawczego [149] oraz w pracy [3].

5.2.9. Porównanie wyników badań i modelu SES

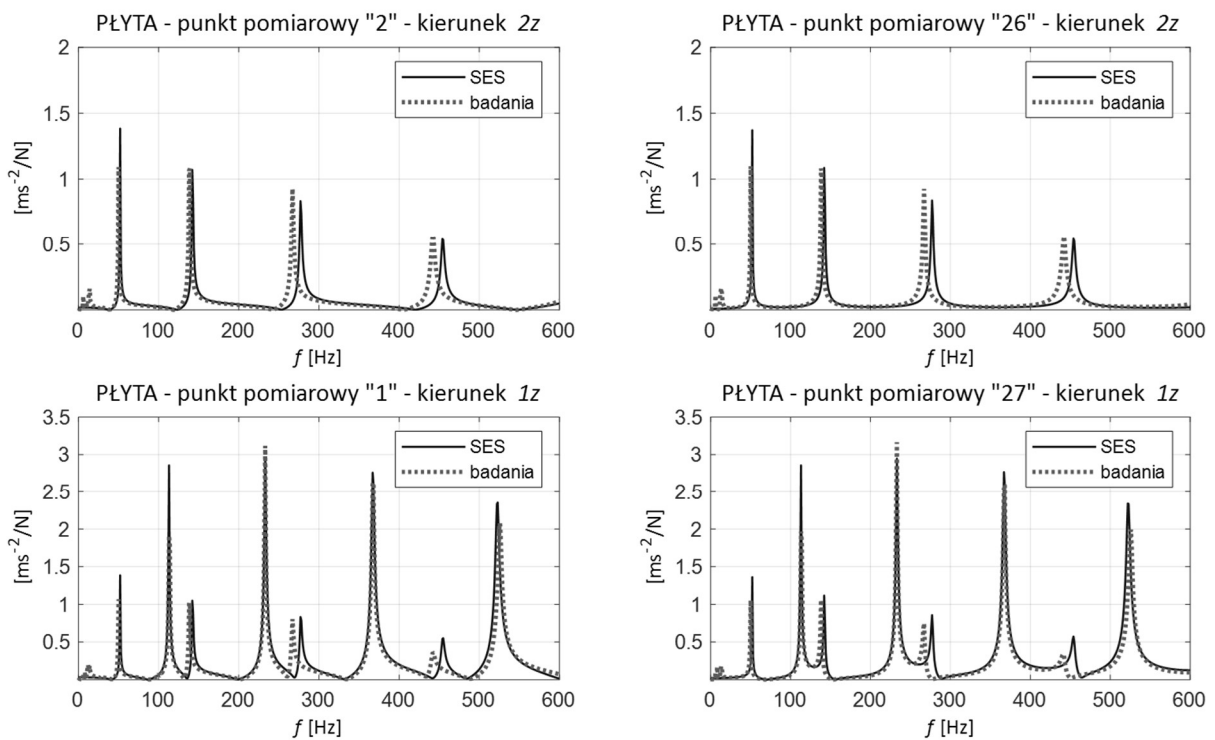
Tabela 5.21 zawiera wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych oraz ich porównanie z wynikami uzyskanymi na podstawie modelu SES zdefiniowanego z wykorzystaniem zidentyfikowanych parametrów modelu. Identyfikację parametrów modelu prowadzono tak, aby dopasowanie w zakresie częstotliwości drgań giętnych oraz tych o naturze skrętnej były do siebie zbliżone. Analizując uzyskane wyniki, należy stwierdzić, że uzyskano bardzo dobrą zgodność w tym zakresie. Różnice pomiędzy wynikami badań a wynikami symulacji z wykorzystaniem modelu SES nie przekraczają wartości 3%. Częstotliwość drgań osiowych w pełni pokrywa się z wynikami badań, co było jednym z warunków przyjętych w trakcie procesu identyfikacji parametrów.

Na ryc. 5.47 przedstawiono porównanie częstotliwościowych funkcji przejścia (ang. *frequency response function*, FRF) uzyskanych w trakcie badań oraz na podstawie

modelu SES z uwzględnieniem zidentyfikowanej wartości współczynnika tłumienia. Stopień dopasowania przebiegów FRF należy uznać za bardzo dobry, co świadczy o tym, że opracowana technika modelowania może być z powodzeniem stosowana nie tylko do rozwiązania zagadnienia drgań własnych, ale również w trakcie analizy drgań wymuszonych z uwzględnieniem tłumienia.

Tabela 5.21. Płyta 2200 x 600 x 60 – porównanie wyników badań z wynikami modelu SES

i	$f_{i,exp}$ [Hz]	$f_{i,SES}$ [Hz]	Δ [%]
1 _s	113,34	111,33	-1,8%
2 _s	232,75	229,70	-1,3%
3 _s	367,33	361,94	-1,5%
4 _s	525,61	514,64	-2,1%
5 _s	707,99	693,65	-2,0%
1 _g	50,00	51,16	2,3%
2 _g	138,34	140,36	1,5%
3 _g	266,76	273,28	2,4%
4 _g	441,54	447,67	1,4%
5 _g	649,34	661,34	1,8%
1 _o	933,12	933,12	0,0%



Ryc. 5.47. Płyta żelbetowa – porównanie FRF określonych doświadczalnie i wg modelu SES

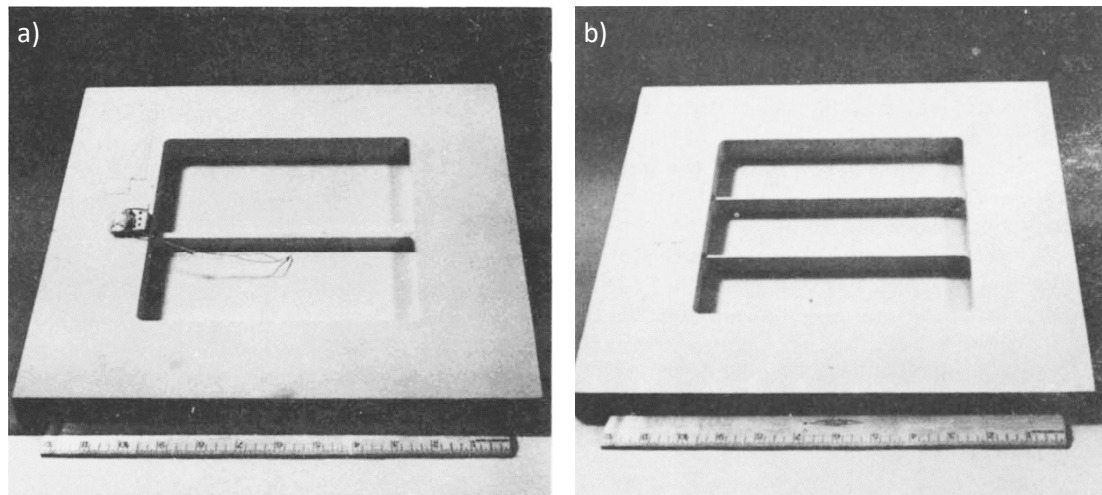
5.2.10. Podsumowanie

Przeprowadzone w podrozdziale 5.2 analizy miały na celu odpowiedź na pytanie, czy metoda sztywnych elementów skończonych może być skutecznie wykorzystywana podczas oceny właściwości dynamicznych prostokątnych płyt średnio grubych. Opracowana technika modelowania uwzględnia zarówno wpływ naprężeń ścinających na odkształcenia płyty, jak i wpływ sił bezwładności w ruchu obrotowym, co odpowiada założeniom teorii płyt Reissnera-Mindlina. Z wynikami tej teorii porównywano wyniki uzyskiwane z zastosowaniem metody SES i wykazano dużą zgodność w szerokim zakresie analizowanych częstotliwości drgań oraz zmiennych warunków brzegowych płyty. W dalszej części dokonano porównania wyników badań doświadczalnych z wynikami uzyskanymi na podstawie modelu SES ze zidentyfikowanymi parametrami opisującymi sztywność oraz właściwości tłumiące płyty. Również w tym zakresie uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników analiz, co ostatecznie potwierdziło skuteczność metody.

5.3. Weryfikacja modelu płyty usztywnionej belkami z zespoleniem niepodatnym

5.3.1. Referencyjne wyniki badań doświadczalnych i analiz numerycznych

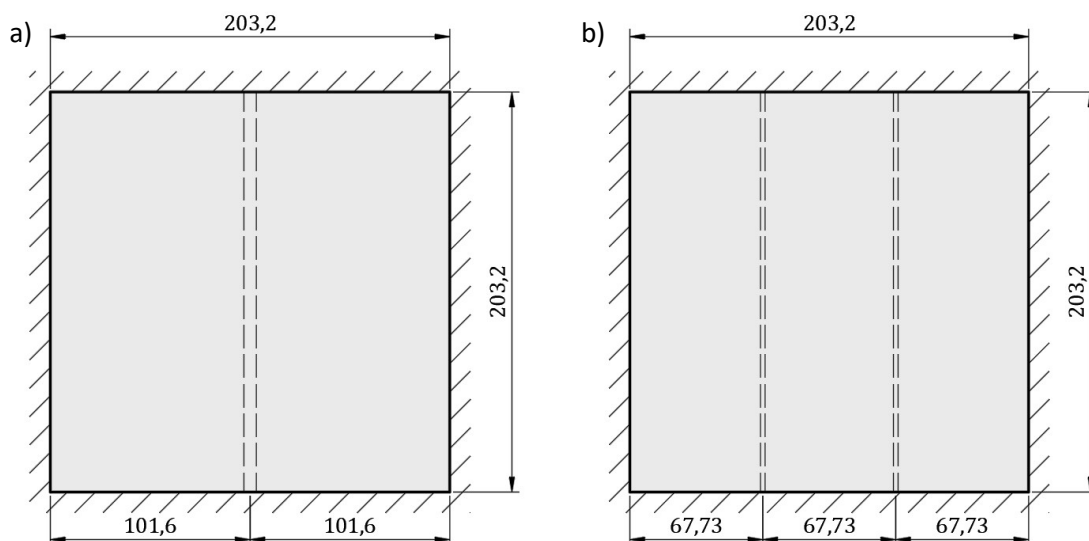
W poprzednim rozdziale analizie poddano zagadnienie drgań płyt prostokątnych. Wykazano, że metoda sztywnych elementów skończonych jest skutecznym narzędziem do prowadzenia analiz w tym zakresie. Niezależnie od proporcji wymiarów płyty oraz od jej warunków brzegowych metoda SES zapewnia wysoką zgodność wyników ze ścisłym rozwiązaniem zagadnienia uzyskanym z wykorzystaniem teorii płyt Reissnera-Mindlina. W kolejnym kroku zdecydowano się zweryfikować skuteczność metody w zakresie analizy drgań płyt usztywnionych belkami. Jak wspomniano w podrozdziale 2.2, wyniki analiz wielu badaczy odnoszone są do wyników badań, które przedstawili Olson i Hazell [85]. Zdecydowano się, podobnie jak inni, skorzystać z wyników zamieszczonych w wymienionej pracy i potraktować je jako wyniki referencyjne. Badania doświadczalne prowadzone były na modelach płyty prostokątnej o stosunku boków równym jedności. Płyty wykonano z bloku aluminium 65ST6 o grubości 25,4 mm. Bloki wydrążono z wykorzystaniem frezarki, uzyskując w ten sposób dwie płyty usztywnione odpowiednio jedną lub dwiema belkami rozmieszczonymi równomiernie po szerokości płyty. Archiwalne zdjęcia badanych płyt przedstawiono na ryc. 5.48. Schematem statycznym układu była płyta ze wszystkimi krawędziami usztywnionymi, co wg nomenklatury stosowanej w poprzednim rozdziale oznaczyć można jako CCCC. Również końce belek usztywniających płytę były utwierdzone w pozostałej części bloku aluminium.



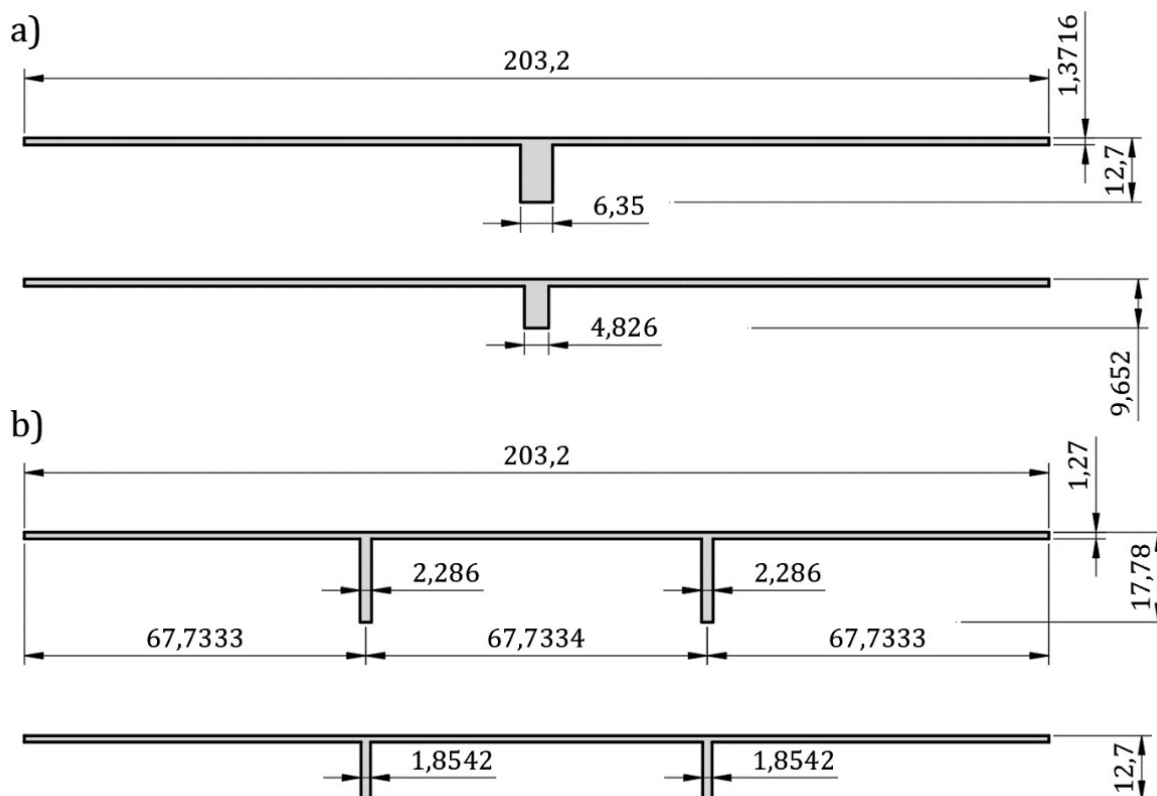
Ryc. 5.48. Analizowane modele doświadczalne płyt usztywnionych belkami [85]: a) płyta z jedną belką; b) płyta z dwiema belkami

Wymiary płyt oraz rozmieszczenie belek usztywniających przedstawiono na ryc. 5.49. Każda płyta poddana została dwóm seriom badań. Przed przeprowadzeniem drugiej serii belki usztywniające płytę poddano obróbce skrawaniem, zmniejszając tym samym ich wymiary. Szczegółowe dane na temat grubości płyty oraz wymiarów belek usztywniających płytę pokazano na ryc. 5.50. Nietypowe wymiary płyty wynikają z przeliczenia cali na mm.

Oprócz badań doświadczalnych autorzy pracy [85] przedstawili również rozwiązanie zagadnienia drgań płyt usztywnionych belkami z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Stosowali trójkątne elementy skończone do modelowania płyty oraz elementy belkowe łączone mimośrodowo z modelem płyty. W trakcie analiz stosowali gęstość podziału płyty na elementy skończone wynoszącą $n = 6$ elementów wzdłuż krawędzi płyty.



Ryc. 5.49. Schemat statyczny oraz wymiary analizowanych płyt usztywnionych belkami: a) płyta z jedną belką; b) płyta z dwiema belkami



Ryc. 5.50. Wymiary płyty z pełnym oraz zredukowanym przekrojem belki usztywniającej: a) płyta usztywniona jedną belką; b) płyta usztywniona dwiema belkami

Z wyników zamieszczonych w [85] korzystali również Mukherjee i Mukhopadhyay [78]. Przedstawili wyniki analiz z wykorzystaniem prostokątnego ośmiowzłowego elementu skończonego uwzględniającego odkształcenia postaciowe spowodowane oddziaływaniem naprężeń ścinających. Stosowali siatkę elementów skończonych o gęstości $n = 10$. Rozwiązanie zagadnienia przedstawili dla płyty usztywnionej jedną belką o pełnym wymiarze.

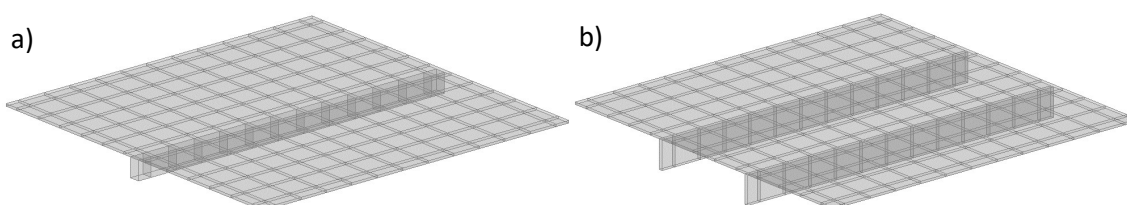
Holopainen [43] przedstawił definicję nowego elementu skończonego do analizy płyt usztywnionych z dowolnie rozmieszczonymi belkami usztywniającymi. Model płyty podobnie jak w pracy [78] uwzględniał teorię płyt Reissnera-Mindlina. Opracowany element był odporny na zjawisko tzw. blokady ścinania (ang. *shear locking*). Wyniki analiz odnosił do wyników badań [85] płyty usztywnionej dwiema belkami o pełnym wymiarze. Stosowano podział na $n = 18$ elementów wzdłuż krawędzi płyty.

Nguyen-Thoi i in. [82] wykorzystali autorską metodę CS-FEM-DSG3 (ang. *cell-based smoothed discrete shear gap method*) wykorzystującą elementy trójkątne do badania drgań swobodnych i zjawiska wyboczenia płyt usztywnionych mimośrodowo. Wyniki analiz przedstawili zarówno dla płyty usztywnionej jedną, jak i dwiema belkami o pełnym wymiarze. Analizy prowadzili przy gęstości dyskretyzacji $n = 16$ elementów wzdłuż krawędzi płyty.

Wyniki analiz prowadzonych z wykorzystaniem modelu opracowanego w konwencji metody sztywnych elementów skończonych zostały porównane z wynikami wszystkich ww. autorów. Dodatkowo wykorzystano również wyniki analiz przeprowadzonych z zastosowaniem klasycznej metody elementów skończonych. Wykorzystano w tym celu system ABAQUS. Model płyty opracowano, wykorzystując elementy powłokowe drugiego rzędu ze zredukowanym całkowaniem S8R. Stosowano gęstość podziału płyty na $n = 20$ elementów. Belki usztywniające modelowano również z wykorzystaniem elementów powłokowych.

5.3.2. Model SES płyty usztywnionej belkami

Model SES analizowanych płyt (ryc. 5.51) wykonano wg założeń przedstawionych w podrozdziale 4.4.2. Sposób dyskretyzacji płyty oraz belek ją usztywniających odpowiadał schematowi pokazanemu na ryc. 4.8b. Elementy sprężysto-tłumiące opisujące właściwości płyty lokalizowano na środkach SES, co – jak wykazano w poprzednich rozdziałach – zapewnia znacznie lepsze rezultaty obliczeń, szczególnie w zakresie modelowania płyt o małej grubości (por. ryc. 5.14 i 5.15). W analizowanych płytach stosunek grubości do szerokości płyty wynosi około 0,0065, co pozwala traktować płytę jako cienką. W trakcie procesu modelowania przyjęto następujące wielkości: gęstość materiału $\rho = 2823 \text{ kg/m}^3$, moduł sprężystości podłużnej $E = 68,7 \text{ GPa}$, liczba Poissona $\nu = 0,29$.



Ryc. 5.51. Widok modeli SES płyty usztywnionej: a) jedną; b) dwiema belkami

Opracowano łącznie cztery modele dla płyt z pełnymi oraz zredukowanymi przekrojami belek usztywniających. Na krawędziach płyty oraz na końcach belek lokalizowano elementy sprężysto-tłumiące o odpowiednio dobranej wysokiej sztywności celem zamodelowania utwierdzenia. Analizy prowadzono w zakresie częstotliwości pozwalającym na wyznaczenie 24 częstotliwości drgań własnych płyty.

5.3.3. Porównanie wyników referencyjnych z wynikami modelu SES

W tabelach 5.22–5.25 porównano wyniki analiz referencyjnych z tymi uzyskanymi na podstawie opracowanych modeli SES. Oprócz źródła wyników podano również informację na temat gęstości dyskretyzacji analizowanego modelu.

Tabela 5.22. Częstotliwości drgań [Hz] – płyta usztywniona **jedną** belką o pełnym wymiarze

Postać	Olson i Hazell Badania [85]	Olson i Hazell MES [85]	Mukherjee i Mukhopadhyay MES [78]	Nguyen-Thoi i in. DSG3 [82]	ABAQUS S8R	SES
		$n = 6$	$n = 10$	$n = 16$	$n = 20$	$n = 12$
1	689	718,1	711,8	717,9	716,1	731,4
2	725	751,4	768,2	756,6	738,9	752,8
3	961	997,4	1016,5	997,2	984,1	969,5
4	986	1007,4	1031,9	1010,4	993,1	979,0
5	1376	1419,8	1465,2	1424,5	1399,5	1361,5
6	1413	1424,3	1476,5	1430,1	1402,6	1365,5
7	1512	1631,5	1743,8	1680,7	1556,9	1573,5
8	1770	1853,9	1866,3	1848,3	1845,7	1936,9
9	1995	2022,8	2109,1	2029,0	1985,5	1940,3
10	2069	2025,0	2117,0	2032,2	1987,4	1942,3
11	2158	2224,9	2264,1	2226,6	2181,2	2226,1
12	2200	2234,9	2296,3	2250,6	2181,4	2234,5
13	2347	2400,9	2505,8	2433,4	2329,9	2392,2
14	2597	2653,9	2779,9	2661,3	2590,9	2537,4
15	2614	2670,2	2820,9	2679,8	2599,5	2550,8
16	2784	2802,4	2933,3	2808,4	2738,0	2698,9
17	2784	2804,6	2943,8	2810,2	2739,1	2699,8
18	3174	3259,0	3536,1	3248,6	3151,4	2981,7
19	3174	3265,9	3536,1	3252,7	3155,1	2988,5
20	3332	3414,2	3649,8	3269,8	3404,3	3548,3
21	3660	3754,0	3925,7	3754,3	3653,2	3589,0
22	3730	3754,8	3941,6	3755,0	3653,5	3592,2
23	3780	3985,5	4084,3	3984,6	3761,6	3622,6
24	3913	4045,9	4138,8	4017,2	3876,7	3623,0

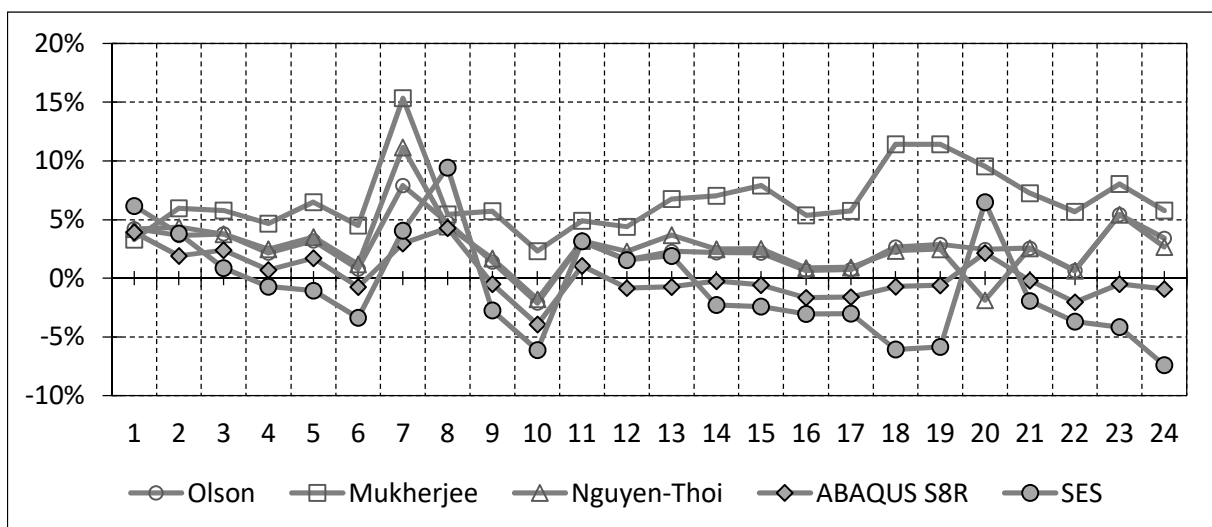
Ryc. 5.52. Porównanie wyników analiz z wynikami badań – **jedna** belka o pełnym wymiarze

Tabela 5.23. Częstotliwości drgań [Hz] – płyta usztywniona **dwoma** belkami o pełnym wymiarze

Postać	Olson i Hazell Badania [85]	Olson i Hazell MES [85]	Holopainen MES [43]	Nguyen-Thoi i in. CS-DSG3 [82]	ABAQUS S8R	SES
		<i>n</i> = 6	<i>n</i> = 18	<i>n</i> = 16	<i>n</i> = 20	<i>n</i> = 12
1	909	965,3	943,8	931,3	925,9	924,8
2	1204	1272,3	1237,9	1239,4	1205,4	1248,5
3	1319	1364,3	1331,0	1319,7	1311,9	1291,3
4	1406	1418,1	1361,2	1405,5	1318,6	1406,1
5	1560	1602,9	1561,5	1567,5	1525,9	1553,6
6	1693	1757,1	1706,1	1741,6	1652,3	1730,4
7	1807	1854,1	1808,3	1810,1	1773,1	1742,3
8	1962	2051,4	1962,9	1985,5	1914,5	1904,8
9	2052	2109,4	2057,9	2102,3	1994,0	2018,4
10	2097	2253,1	2163,7	2163,0	2086,4	2093,6
11	2410	2453,8	2392,4	2414,5	2336,1	2261,4
12	2467	2566,3	2499,6	2540,7	2433,3	2369,3
13	2505	2624,2	2561,0	2621,2	2483,8	2432,0
14	2618	2729,6	2625,6	2642,8	2513,6	2569,4
15	2631	2731,9	2622,8	2646,2	2517,5	2594,4
16	2964	2915,4	2832,0	2711,8	2809,1	2764,4
17	3169	3180,1	3104,6	3098,0	2955,6	2916,8
18	3135	3242,0	3161,8	3161,6	3030,1	2978,8
19	3120	3279,1	3185,3	3174,6	3100,3	3011,8
20	3251	3313,3	3228,8	3245,2	3135,2	3069,8
21	3446	3412,3	3317,6	3314,3	3231,5	3278,1
22	3745	3635,6	3460,5	3331,6	3543,7	3347,0
23	4019	4059,4	3968,8	3742,1	3868,3	3711,0
24	4053	4135,1	4025,6	4044,6	3905,5	3743,2

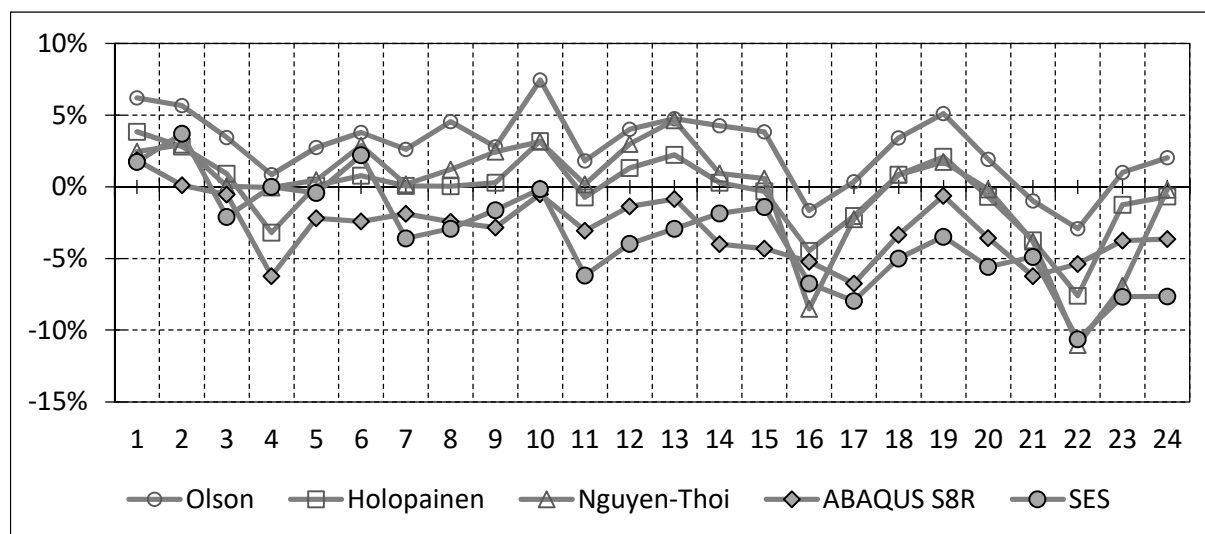
Ryc. 5.53. Porównanie wyników analiz z wynikami badań – **dwie** belki o pełnym wymiarze

Tabela 5.24. Częstotliwości drgań [Hz] – płyta usztywniona **jedną** belką o zredukowanym przekroju

Postać	Olson i Hazell Badania [85]	Olson i Hazell MES [85]	ABAQUS S8R	SES
		$n = 6$	$n = 20$	$n = 12$
1	627	670,7	663,1	672,6
2	662	724,0	683,1	694,8
3	924	977,2	958,3	943,6
4	953	1002,1	982,2	970,1
5	1370	1408,7	1272,0	1283,8
6	1336	1414,1	1386,3	1349,6
7	1452	1449,9	1408,0	1364,3
8	1672	1766,6	1756,1	1811,7
9	1953	2017,0	1978,5	1934,2
10	2038	2023,7	1984,5	1940,9
11	2067	2165,1	2093,6	2141,3
12	2158	2196,1	2106,6	2148,4
13	2331	2375,9	2306,8	2381,8
14	2520	2616,2	2550,6	2491,7
15	2558	2658,6	2573,1	2532,1
16	2762	2797,6	2733,7	2695,5
17	2914	2803,7	2737,5	2699,1
18	3095	3237,2	3127,0	2955,5
19	3135	3259,2	3136,4	2980,1
20	3231	3371,2	3315,8	3358,6
21	3464	3723,8	3364,5	3484,4
22	3584	3751,0	3650,3	3573,6
23	3690	3758,6	3664,8	3588,6
24	3772	3978,4	3835,6	3620,7

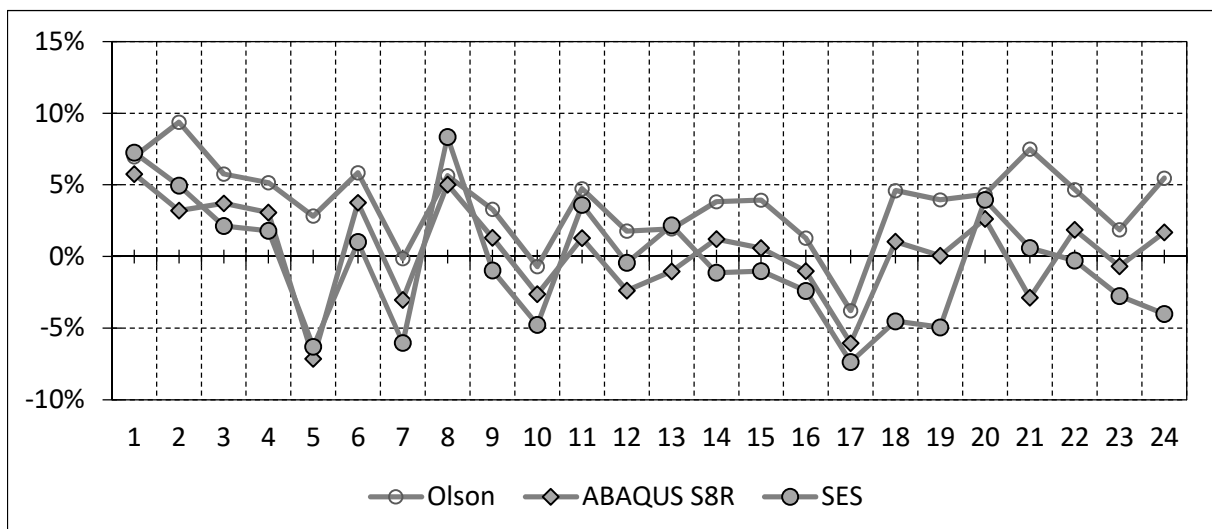
Ryc. 5.54. Porównanie wyników analiz z wynikami badań – **jedna** belka o zredukowanym przekroju

Tabela 5.25. Częstotliwości drgań [Hz] – płyta usztywniona **dwoma** belkami, przekrój zredukowany

Postać	Olson i Hazell Badania [85]	Olson i Hazell MES [85]	ABAQUS S8R	SES
		<i>n</i> = 6	<i>n</i> = 20	<i>n</i> = 12
1	859	928,6	868,3	871,2
2	1044	1205,1	1097,7	1134,0
3	1292	1229,8	1102,8	1140,9
4	1223	1274,6	1229,6	1192,7
5	1503	1557,4	1477,4	1499,3
6	1650	1714,5	1588,6	1603,5
7	1702	1737,1	1678,1	1676,2
8	1860	1927,9	1735,0	1732,8
9	1916	1984,5	1873,5	1845,7
10	2033	2092,6	1972,4	1997,2
11	2307	2337,9	2252,4	2143,3
12	2465	2513,6	2294,6	2313,9
13	2389	2515,3	2395,5	2336,9
14	2502	2615,8	2471,2	2423,0
15	2959	2974,6	2877,2	2822,7
16	3061	3076,3	2962,1	2914,5
17	3072	3157,0	2987,3	2938,4
18	3168	3230,8	3069,6	2986,8
19	3242	3305,8	3126,2	3007,3
20	3740	3732,3	3459,1	3451,1
21	3582	3761,3	3458,8	3600,1
22	3827	3823,4	3618,4	3644,8
23	3582	3954,4	3687,4	3666,8
24	3963	3981,2	3814,8	3715,7

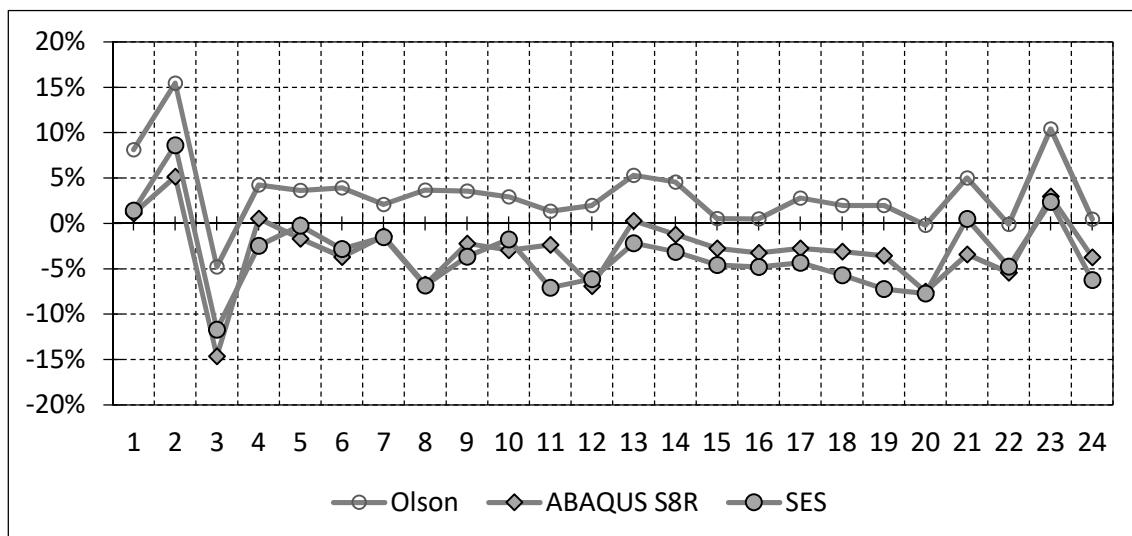
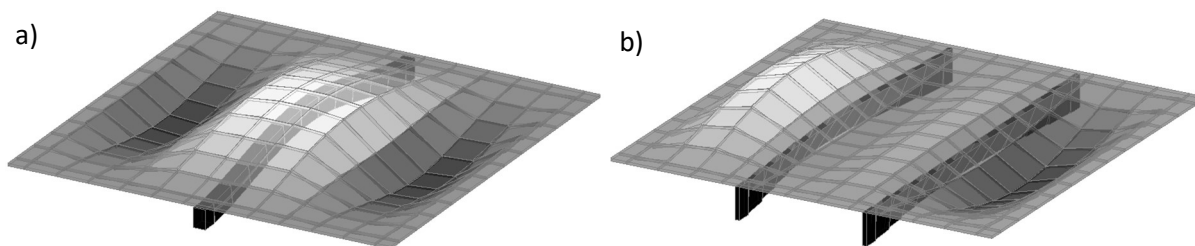
Ryc. 5.55. Porównanie wyników analiz z wynikami badań – **dwie** belki o zredukowanym przekroju

Tabela 5.22 zawiera zestawienie wyników uzyskanych dla płyty usztywnionej jedną belką o pełnym przekroju. Zestawiono w niej wyniki badań doświadczalnych i analiz numerycznych przedstawionych przez Olsona i Hazella [85] jak również wyniki analiz przedstawione w pracach [78, 82]. Ostatnie dwie kolumny zawierają wyniki analiz autora niniejszej monografii przeprowadzone z wykorzystaniem systemu ABAQUS oraz metody SES. Na ryc. 5.52 porównano wyniki analiz numerycznych z wynikami badań doświadczalnych. Na osi pionowej zamieszczono procentowe odchylenie częstotliwości wyznaczonej numerycznie od tej wyznaczonej na podstawie badań.

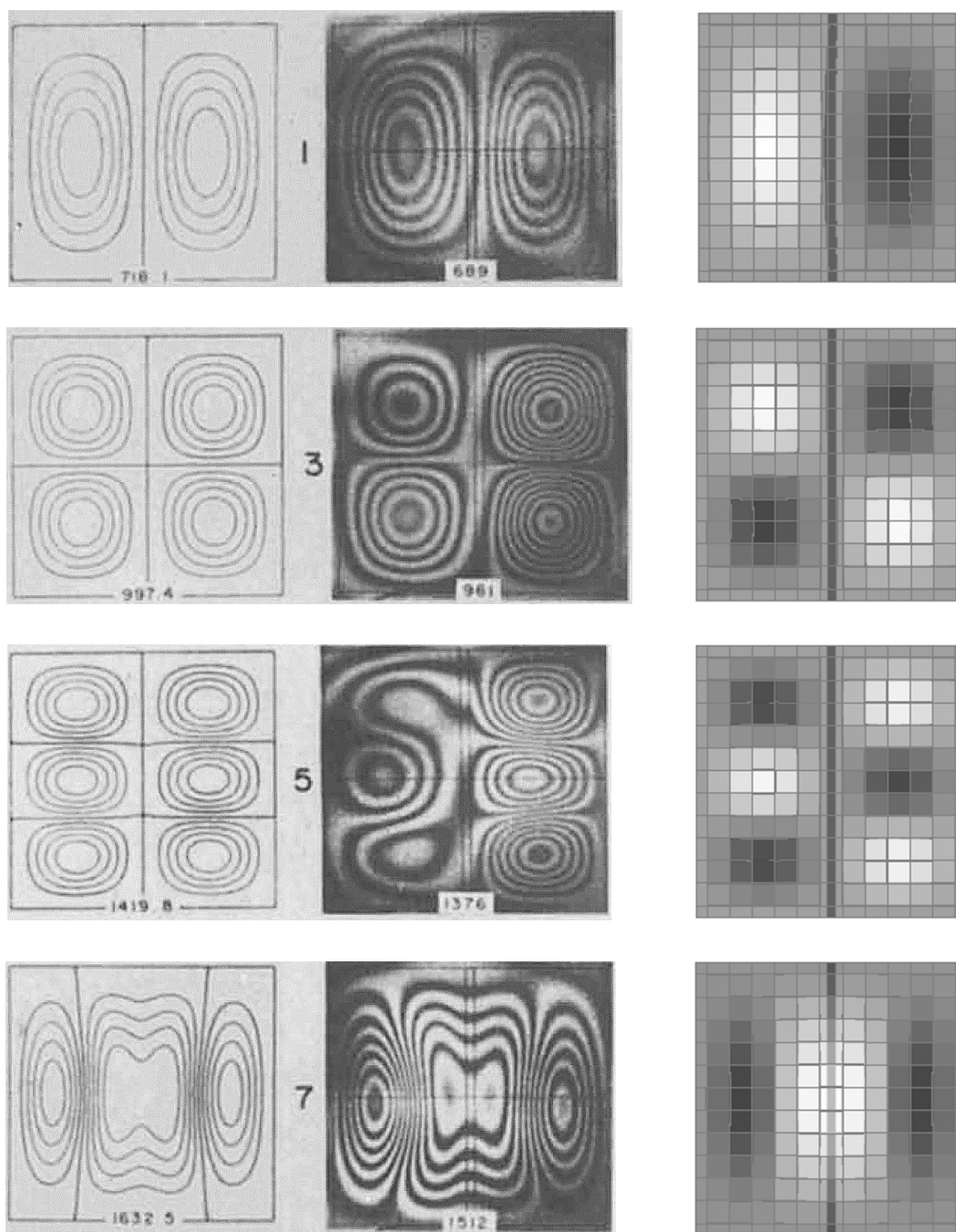
Tabela 5.23 oraz ryc. 5.53 zawierają taki zestaw wyników uzyskanych dla płyty z dwiema belkami usztywniającymi o pełnym przekroju. Ze względu na brak wyników dla takiej płyty w pracy [78] wykorzystano wyniki zaprezentowane przez Holopainen [43]. Wyniki dla pozostałych dwóch płyt, w których przekroje belek zostały zredukowane, zawierają odpowiednio tabela 5.24 i ryc. 5.54 oraz tabela 5.25 ryc. 5.55.

Analiza danych pozwala stwierdzić, że niezależnie od analizowanej płyty modele opracowane w konwencji metody sztywnych elementów skończonych zapewniają wyniki o podobnej dokładności co modele wykorzystujące klasyczną metodę odkształcalnych elementów skończonych MES. Charakter przebiegu wykresów na rysunkach obrazujących odchylenie wyników analiz od wyników badań jest podobny dla wszystkich metod. Analizując przebiegi odchyień, można zauważyć, że błąd wyznaczenia niektórych częstotliwości drgań, niezależnie od przyjętej metody, jest większy niż pozostałych (por. częstotliwość nr 2 i 3 na ryc. 5.55 lub częstotliwość 7 na ryc. 5.52). Należy mieć na uwadze, że badania przedstawione w pracy [85], chociaż powszechnie wykorzystywane do weryfikacji modeli przez innych badaczy, prowadzone były ponad 40 lat temu. Możliwe, że zawierają pewne błędy wynikające z przyjętej techniki pomiarowej. W związku z tym dokonano bezpośredniego porównania wyników uzyskanych na podstawie modelu SES z wynikami modelu opracowanego w programie ABAQUS z zastosowaniem elementów drugiego rzędu S8R. Częstotliwości drgań ustalone na podstawie modelu SES są zazwyczaj nieznacznie niższe. Średnia wartość odchylenia wynosi -0,6% z odchyleniem standardowym na poziomie 2,6%. Zbieżność wyników należy uznać za bardzo wysoką, szczególnie jeśli weźmie się pod uwagę szeroki zakres analizowanych częstotliwości drgań.

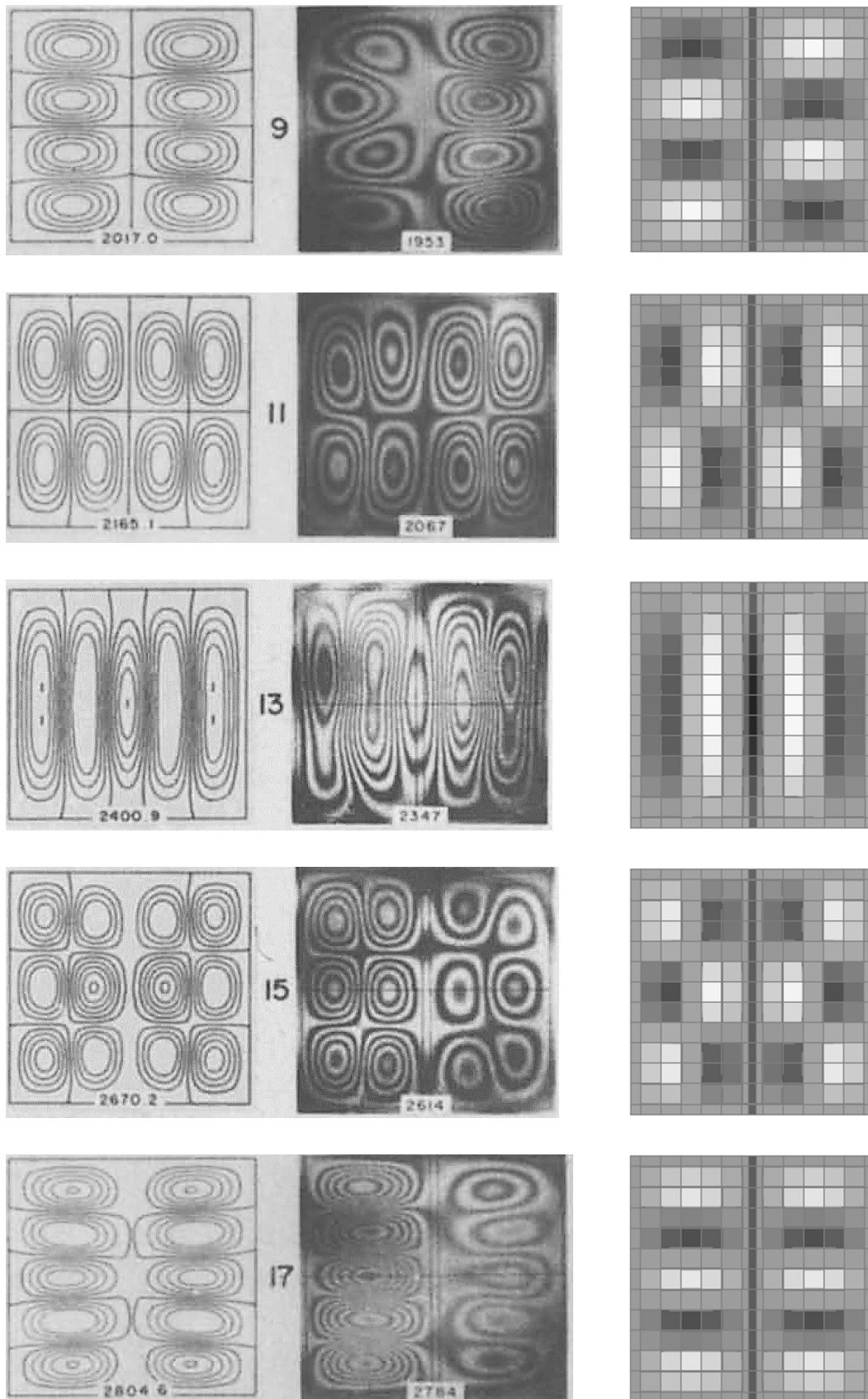
Dokonano również porównania w zakresie określonych postaci drgań własnych. Przykładowe postacie drgań wyznaczone z wykorzystaniem modelu SES przedstawiono na ryc. 5.56. Na ryc. 5.57–5.59 przedstawiono porównanie wybranych postaci drgań SES z wynikami analiz numerycznych i wynikami badań doświadczalnych zaprezentowanymi w pracy [85]. Kształt wszystkich analizowanych 24 form drgań w pełni pokrywał się z wynikami referencyjnymi.



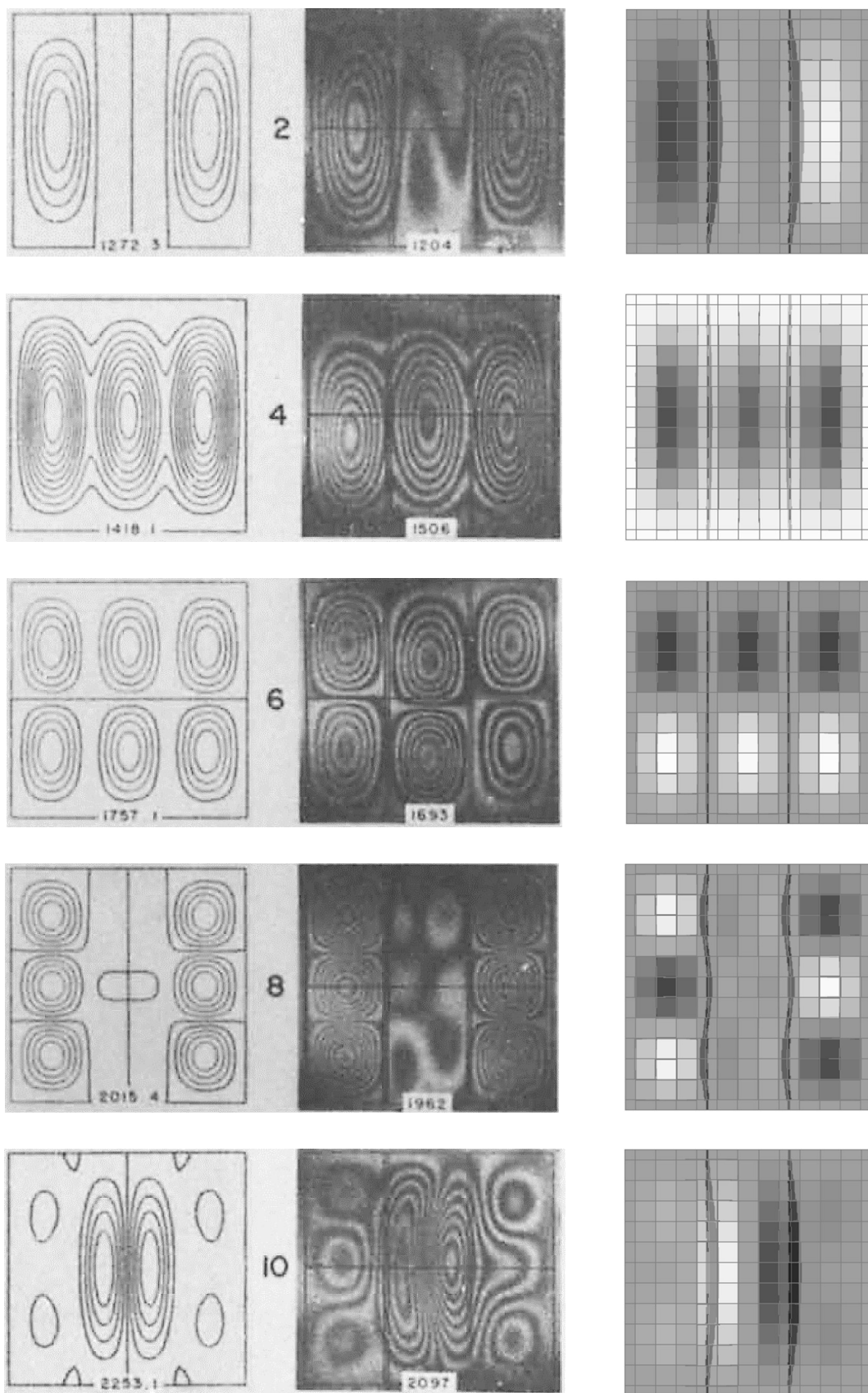
Ryc. 5.56. Płyta usztywniona belkami przykładowe postacie drgań: a) płyta usztywniona jedną belką; b) płyta usztywniona dwiema belkami



Ryc. 5.57. Płyta usztywniona jedną belką o pełnym przekroju – porównanie postaci drgań przedstawionych w pracy [85] (analiza MES i badania) z wynikami analiz metodą SES



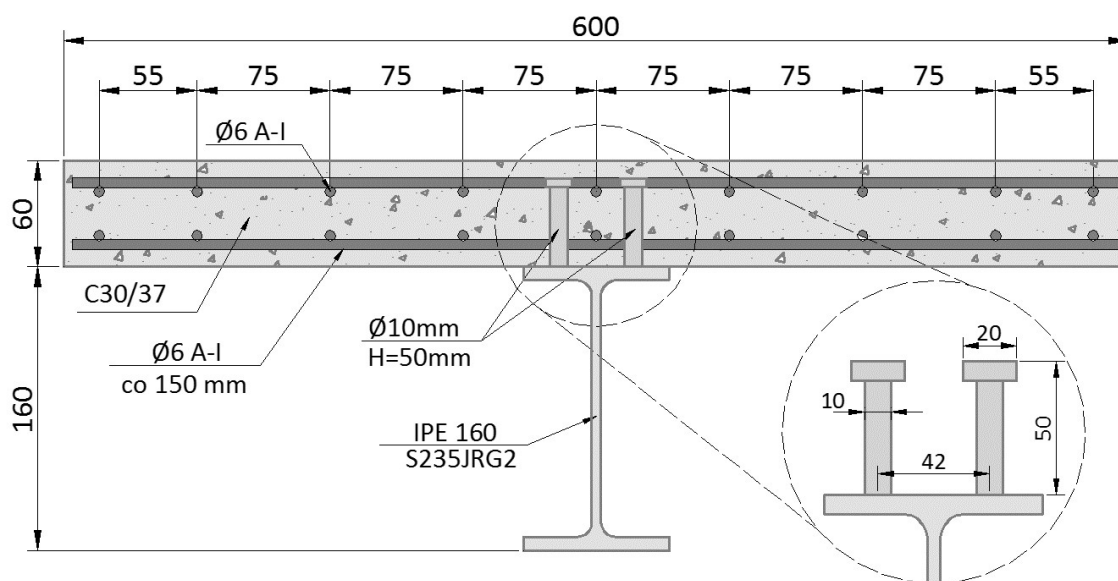
Ryc. 5.58. Płyta usztywniona jedną belką o pełnym przekroju – porównanie postaci drgań przedstawionych w pracy [85] (analiza MES i badania) z wynikami analiz metodą SES, cd.



Ryc. 5.59. Płyta usztywniona dwiema belkami o pełnym przekroju – porównanie postaci drgań przedstawionych w pracy [85] (analiza MES i badania) z wynikami analiz metodą SES

5.4. Weryfikacja modelu belki zespolonej z zespoleniem podatnym

W poprzednich rozdziałach przedstawiono wyniki analiz, które pozwoliły na weryfikację poprawności wyników uzyskanych podczas modelowania metodą SES prostych układów konstrukcyjnych takich jak pojedyncza belka czy płyta prostokątna. Analizie poddano również płyty usztywnione belkami z zespoleniem niepodatnym. Za każdym razem uzyskiwano wysoką zgodność wyników z wynikami referencyjnymi, którymi były zarówno wyniki analiz numerycznych innych autorów oraz własne, jak i wyniki rozwiązań ścisłych. Kolejnym krokiem była weryfikacja modeli bardziej złożonych, do których zaliczyć można płyty usztywnione belkami z uwzględnieniem odkształcalności zespolenia. Jako że w poprzednich rozdziałach udowodniono, że metoda SES jest skuteczna w modelowaniu płyt, w tym rozdziale przeprowadzone analizy przedstawiono na przykładzie stalowo-betonowej belki zespolonej z zespoleniem podatnym, którą traktować należy jako wycinek większej konstrukcji. Jeżeli metoda SES okaże się skuteczna w zastosowaniu do analizy takiej belki, należy zakładać, że połączenie szeregu modeli w jeden większy model płyty również zapewni poprawne rezultaty. Wszystkie analizy w tym rozdziale przeprowadzono na przykładzie belki o długości 3200 mm, której przekrój poprzeczny pokazano na ryc. 5.60.



Ryc. 5.60. Przekrój analizowanej belki zespolonej

5.4.1. Model referencyjny wg teorii belek Timoshenki

Pierwszą wersję modelu belki zespolonej wg teorii belki Timoshenki opracowano w trakcie wcześniejszych analiz, a jego szczegółowy opis zawarto w pracy [20]. Na potrzeby opisu model ten nazywany będzie w dalszej części opracowania modelem Timoshenki_v1. Podstawowymi założeniami poczynionymi podczas opracowywania modelu było niezależne traktowanie płyty i belki. Model opracowano w przestrzeni dwuwymiarowej, co pozwalało na

analizę postaci drgań w płaszczyźnie pionowej, tj. drgań giętnych pionowych oraz drgań wzdłużnych belki. Opracowując model, dokonano pewnego uproszczenia, traktując płytę współpracującą z belką jako belkę o przekroju prostokątnym. W obydwu elementach, tj. w płycie oraz belce, uwzględniano wpływ naprężeń ścinających belkę na jej odkształcenia oraz wpływ sił bezwładności w ruchu obrotowym. Uwzględnienie współpracy pomiędzy obydwoma częściami odbywało się poprzez wprowadzenie sił pochodzących od zespolenia do równań równowagi ustalanych oddzielnie dla płyty oraz belki. Zakładano odkształcalność zespolenia na dwóch kierunkach, tj. poziomym wzdłuż osi belki oraz pionowym prostopadle do osi belki. Element zespalający łączył górną krawędź belki ze środkiem ciężkości płyty, tak jak pokazano to na ryc. 5.61. Długość elementu równa była połowie grubości płyty. Element traktowano jako odkształcalną belkę obustronnie utwierdzoną i poprzez analogię wyznaczano siły działające na jej końcach, będące pochodnymi przemieszczeń, jakim element jest poddawany. Uwzględniano oddziaływania pochodzące od sił poziomych, sił pionowych, jak również momentu zginającego. Wszystkie oddziaływania traktowane były jako ciągłe. Model matematyczny stanowił układ sześciu równań różniczkowych cząstkowych opisujących ruch układu. Indeksy 1 oraz 2 w równaniach oraz na rysunku odnoszą się kolejno do fragmentu płyty oraz belki. Model powstał na podstawie kolejnych przekształceń równań równowagi sił wewnętrznych działających na odpowiednie fragmenty płyty oraz belki o długości dx .

$$E_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_c + \psi_2 e_s \right) - \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (58)$$

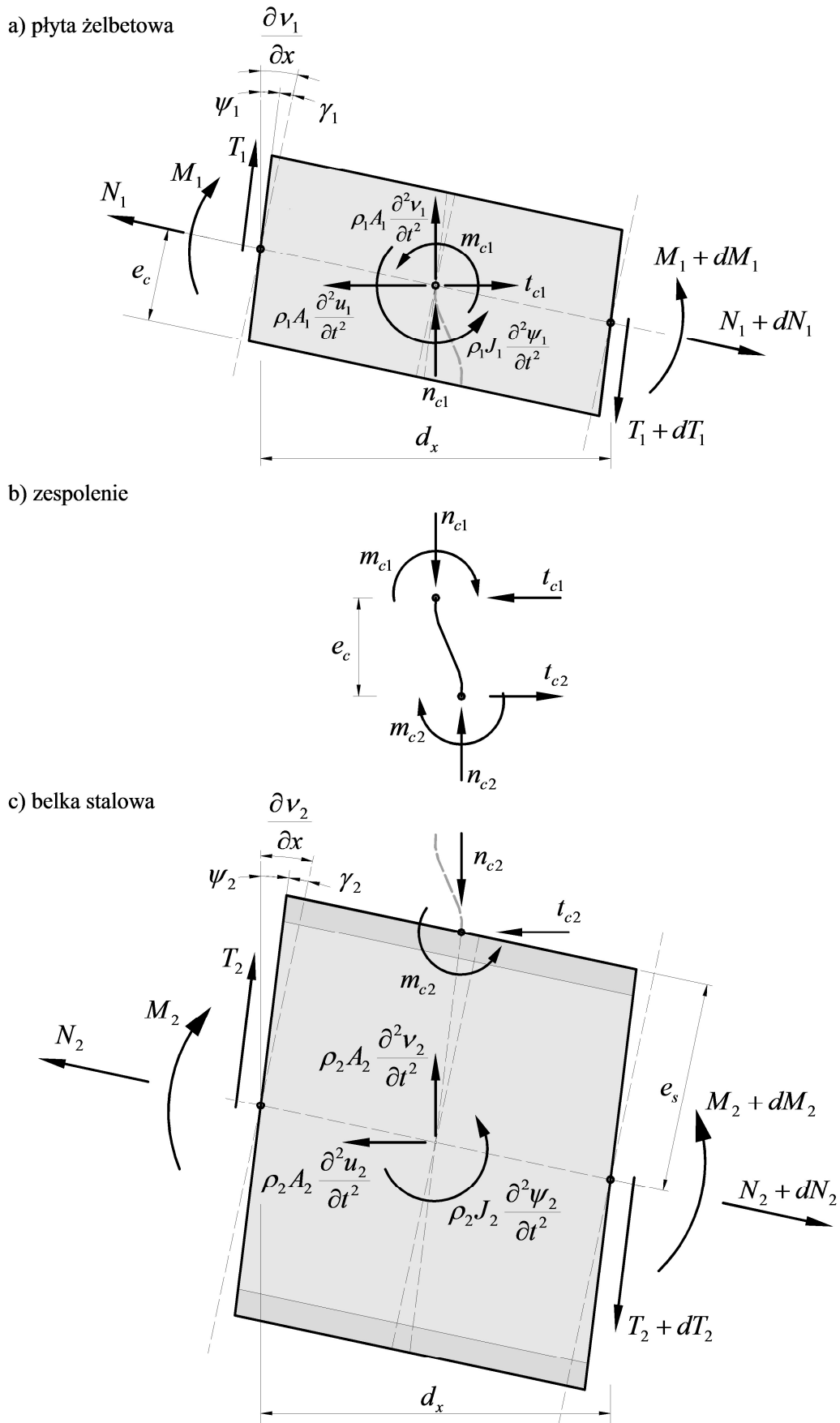
$$E_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_c + \psi_2 e_s \right) - \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\rho_1 \chi_1}{G_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\chi_1 k_v}{G_1 A_1} (v_1 - v_2) = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\rho_2 \chi_2}{G_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \frac{\chi_2 k_v}{G_2 A_2} (v_1 - v_2) = 0 \quad (61)$$

$$\begin{aligned} -E_1 J_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{k_h e_c^2}{6} \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{k_h e_c}{2} (u_2 - u_1 + \psi_2 e_s) \\ - \frac{G_1 A_1}{\chi_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \psi_1 \right) + \rho_1 J_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} -E_2 J_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_c + \psi_2 e_s \right) e_s + \frac{k_h e_c^2}{6} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \\ + \frac{k_h e_c}{2} (u_2 - u_1 + \psi_2 e_s) - \frac{G_2 A_2}{\chi_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \psi_2 \right) + \rho_2 J_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (63)$$



Ryc. 5.61. Belka zespolona z odkształcalnym zespoleniem – model Timoshenki_v1: a) płyta żelbetowa; b) zespolenie; c) belka stalowa

Jedną zasadniczą cechą odróżnia model Timoshenki_v1 od dyskretnego modelu metody SES przedstawionego wcześniej na ryc. 4.1. Cechą tą jest wybór miejsca przekazywania oddziaływań pochodzących od zespolenia na płytę żelbetową. W modelu SES oddziaływania te przekazywane są na dolną krawędź płyty, natomiast w modelu Timoshenki_v1 oddziaływania te przekazywane są do środka ciężkości płyty, tak jak to pokazano na ryc. 5.61. Różnica ta powoduje, że bezpośrednie porównywanie wyników uzyskiwanych na podstawie modelu Timoshenki_v1 oraz modelu SES staje się kłopotliwe właśnie ze względu na fakt innego zastępczego modelu zespolenia. Zdecydowano się zatem opracować zmodyfikowaną wersję modelu Timoshenki.

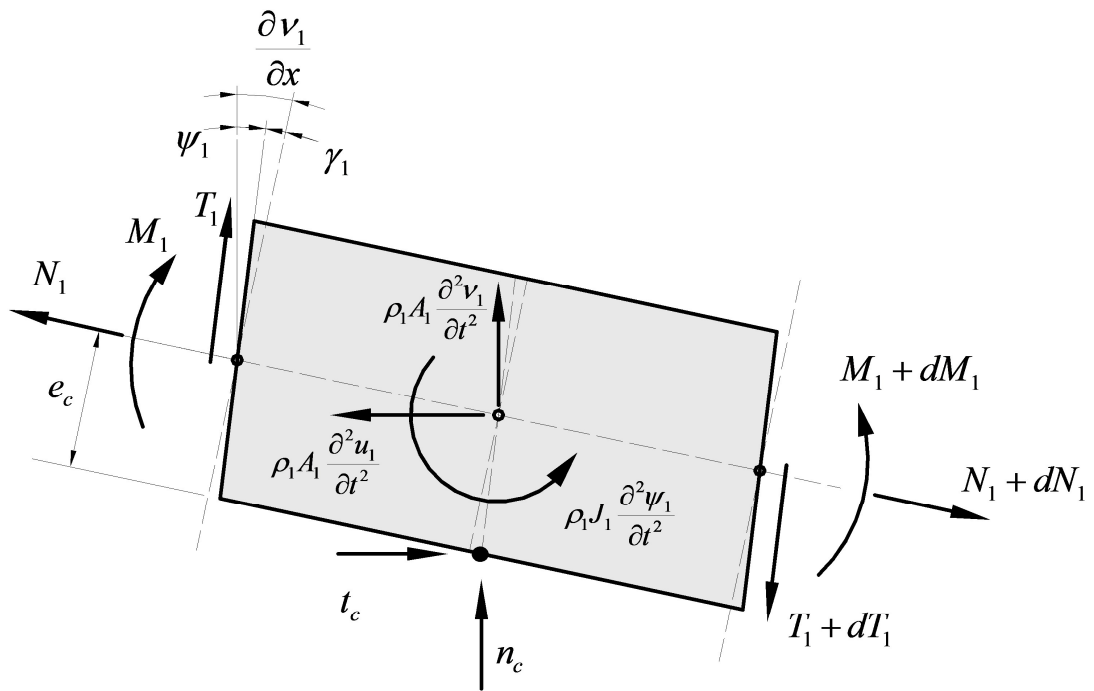
Na ryc. 5.62 przedstawiono element belki zespolonej o długości dx wraz z przedstawieniem nowej definicji sił pochodzących od zespolenia. W modelu Timoshenki_v2 zrezygnowano z analogii belkowej w odniesieniu do modelu zespolenia na rzecz bezwymiarowej warstwy stykowej charakteryzującej się określoną sztywnością styczną i normalną. Podejście takie spowodowało, że oddziaływanie pochodzące od zespolenia sprowadzone zostało do uwzględnienia sił na kierunku stycznym i normalnym do płaszczyzny zespolenia. Należy uznać, że tak opracowany model lepiej odzwierciedla rzeczywisty charakter współpracy płyty z belką. Położenie wypadkowej siły przekazywanej przez elementy zespalające znajduje się znacznie bliżej styku stal-beton niż środka ciężkości płyty, szczególnie jeśli grubość płyty jest znaczna. Zmianie uległa również definicja przemieszczeń translacyjnych, jakim poddawany jest element zespalający. Zmiana dotyczy przemieszczenia na kierunku poziomym δ_h . Przemieszczenie na kierunku pionowym δ_v pozostało bez zmian, tak jak w modelu pierwotnym.

$$\delta_v = (v_1 - v_2) \quad \delta_h = (u_2 - u_1 + \psi_1 e_c + \psi_2 e_s) \quad (64)$$

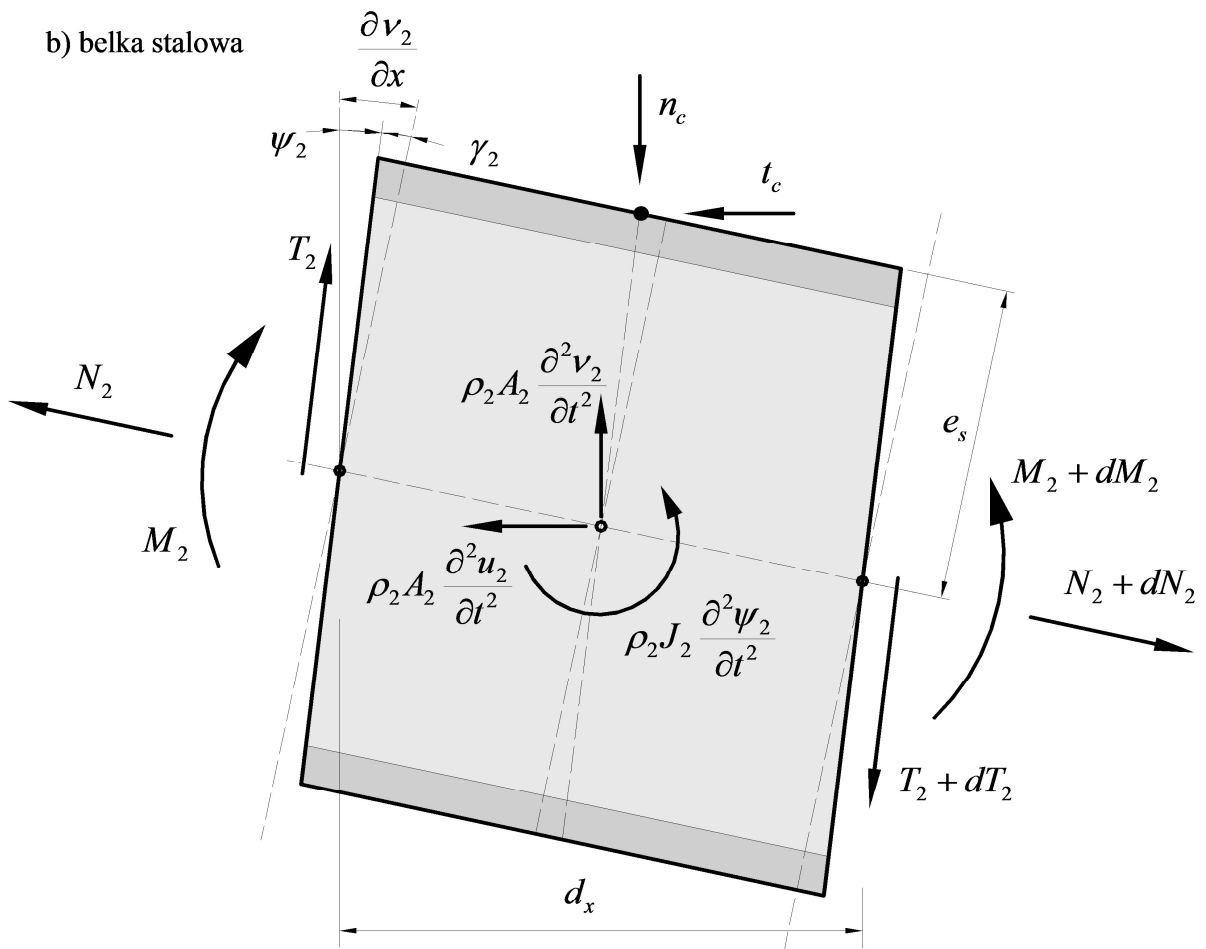
gdzie v jest pionowym przemieszczeniem środka ciężkości odpowiednio płyty i belki, u jest przemieszczeniem poziomym, natomiast Ψ jest uśrednionym kątem obrotu przekroju pokazanym na ryc. 5.62. Zmiana w definicji przemieszczenia poziomego δ_h dotyczy członu $\Psi_1 e_c$, który w poprzednim modelu nie występował ze względu na fakt mocowania zespolenia do środka ciężkości płyty, a nie do jej dolnej krawędzi. Opracowany na podstawie nowych założeń model matematyczny przedstawiają równania (65–70).

W stosunku do pierwotnej wersji modelu opisanej równaniami (58–63) widać, że wprowadzone uproszczenie w definicji modelu zespolenia znacznie usystematyzowało układ równań, szczególnie jeśli chodzi o równania powstałe w wyniku przekształceń równań równowagi momentów zginających.

a) płyta żelbetowa



b) belka stalowa



Ryc. 5.62. Belka zespolona z odkształcalnym zespoleniem – model Timoshenki_v2

$$E_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_h (u_2 - u_1 + \psi_1 e_c + \psi_2 e_s) - \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (65)$$

$$E_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - k_h (u_2 - u_1 + \psi_1 e_c + \psi_2 e_s) - \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \quad (66)$$

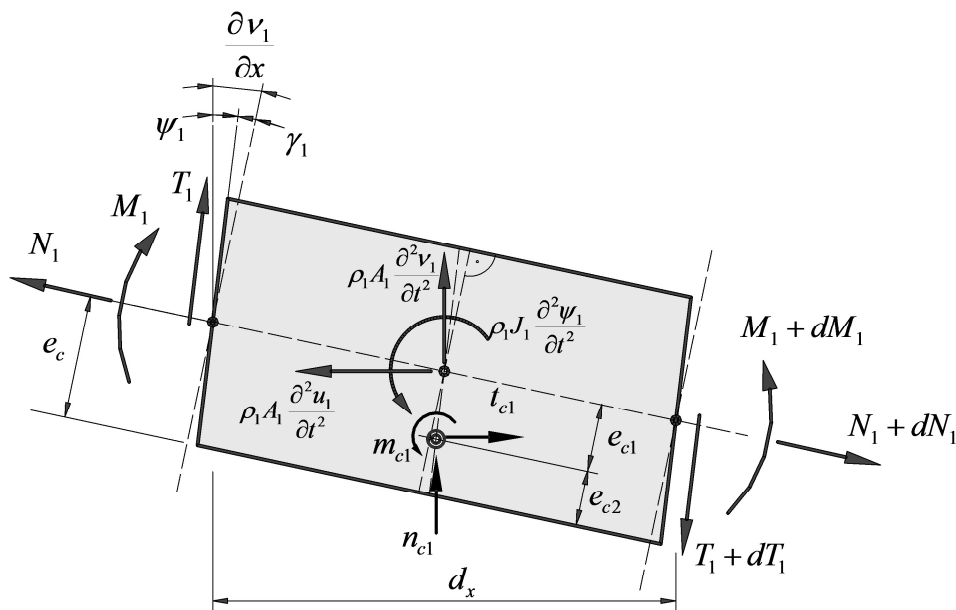
$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\rho_1 \chi_1}{G_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\chi_1 k_v}{G_1 A_1} (v_1 - v_2) = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\rho_2 \chi_2}{G_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \frac{\chi_2 k_v}{G_2 A_2} (v_1 - v_2) = 0 \quad (68)$$

$$-E_1 J_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{G_1 A_1}{\chi_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \psi_1 \right) + k_h (u_2 - u_1 + \psi_1 e_c + \psi_2 e_s) e_c + \rho_1 J_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \quad (69)$$

$$-E_2 J_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{G_2 A_2}{\chi_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \psi_2 \right) + k_h (u_2 - u_1 + \psi_1 e_c + \psi_2 e_s) e_s + \rho_2 J_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0 \quad (70)$$

Dwa niezależne modele opracowane z uwzględnieniem teorii belki Timoshenki prezentują dwa skrajne podejścia w zakresie modelu zespolenia łączącego belkę i płytę. Pierwszy model zakłada przekazywanie oddziaływań bezpośrednio do środka ciężkości płyty, drugi z kolei na jej dolnej krawędzi. W rzeczywistości oddziaływania te przekazywane będą na wysokości pośredniej. Zdecydowano się zatem opracować uniwersalną wersję modelu pozwalającą na sterowanie wysokością e_{c2} , na której oddziaływania pochodzące od elementów zespalaających przekazywane będą na płytę. Model oznaczony został jako model Timoshenki_v3.



Ryc. 5.63. Model Timoshenki_v3, element dx płyty żelbetowej

Z założenia model musiał być opracowany w taki sposób, aby przy zerowej wysokości e_{c2} odpowiadał modelowi Timoshenki_v2, natomiast przy wysokości e_{c2} równej połowie grubości płyty żelbetowej odpowiadał modelowi w wersji v1. Fragment płyty z modelu Timoshenki_v3 z pokazanym miejscem mocowania elementu modelującego zespolenie pokazano na ryc. 5.63 (model belki jest identyczny jak w modelu Timoshenki_v1).

Przemieszczenia, jakim poddawany jest element zespalający o wysokości równej e_{c2} , opisane są następującymi zależnościami:

$$\delta_v = (v_1 - v_2); \delta_h = (u_2 - u_1 + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s); \zeta_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x}; \zeta_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (71)$$

Siły na końcach elementu zespalającego, wyliczone na podstawie powyższych przemieszczeń, zapisać można jako:

$$m_{c1} = \frac{k_h e_{c2}^2}{6} \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{k_h e_{c2}}{2} (u_2 - u_1 + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s) \quad (72)$$

$$m_{c2} = \frac{k_h e_{c2}^2}{6} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{k_h e_{c2}}{2} (u_2 - u_1 + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s) \quad (73)$$

$$t_{c1} = t_{c2} = k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_{c2} + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s \right) \quad (74)$$

$$n_{c1} = n_{c2} = k_v (v_1 - v_2) \quad (75)$$

Można łatwo wykazać, że zarówno w przypadku przemieszczeń, jak i sił w elemencie zespolenia spełnione zostało dokonane pierwotnie założenie. Jeżeli $e_{c2} = e_c$, to model daje wyniki zbieżne z modelem Timoshenki_v1. Jeżeli z kolei $e_{c2} = 0$, to model jest tożsamy z modelem Timoshenki_v2.

Do modelu zdecydowano się wprowadzić jeszcze jedną zmianę w porównaniu z wcześniejszymi wersjami modelu. Do równań równowagi zostały wprowadzone cztery dodatkowe parametry: dla sił bezwładności w ruchu translacyjnym w_{u1} i w_{u2} oraz dla sił w ruchu obrotowym $w_{\psi1}$ i $w_{\psi2}$, gdzie tak jak wcześniej indeksy 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do części żelbetowej i stalowej przekroju. Parametry te mogą zmieniać się w zakresie od zera do jedności i pozwalają na ewentualną redukcję wpływu sił bezwładności w ruchu obrotowym oraz siły bezwładności w ruchu posuwistym na kierunku osi belki.

Równania równowagi po uwzględnieniu tych współczynników przyjmują postać:

- sumy sił na kierunku osi X

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + t_{c1} - w_{u1}\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} - t_{c2} - w_{u2}\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \quad (76)$$

- sumy sił na kierunku osi Z

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - n_{c1} - \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} + n_{c2} - \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = 0 \quad (77)$$

- sumy momentów zginających względem osi Y

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + m_{c1} - T_1 + t_{c1}e_{c1} + w_{\psi 1}\rho_1 J_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_2}{\partial x} + m_{c2} - T_2 + t_{c2}e_s + w_{\psi 2}\rho_2 J_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0 \quad (78)$$

Podstawiając równania opisujące siły w zespole (72–75) do sześciu równań równowagi (76–78) oraz dokonując odpowiednich przekształceń, otrzymujemy, podobnie jak dla poprzednich wersji modelu, układ sześciu równań ruchu (79–84) stanowiących model matematyczny drgań swobodnych belki zespolonej uwzględniającej teorię belek Timoshenki.

$$E_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_{c2} + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s \right) - w_{u1} \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (79)$$

$$E_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_{c2} + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s \right) - w_{u2} \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \quad (80)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\rho_1 \chi_1}{G_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\chi_1 k_v}{G_1 A_1} (v_1 - v_2) = 0 \quad (81)$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\rho_2 \chi_2}{G_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \frac{\chi_2 k_v}{G_2 A_2} (v_1 - v_2) = 0 \quad (82)$$

$$\begin{aligned} -E_1 J_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{k_h e_{c2}^2}{6} \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{k_h e_{c2}}{2} (u_2 - u_1 + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s) - \frac{G_1 A_1}{\chi_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \psi_1 \right) + \\ + k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_{c2} + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s \right) e_{c1} + w_{\psi 1} \rho_1 J_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} -E_2 J_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{k_h e_{c2}^2}{6} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{k_h e_{c2}}{2} (u_2 - u_1 + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s) - \frac{G_2 A_2}{\chi_2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \psi_2 \right) + \\ + k_h \left(u_2 - u_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) e_{c2} + \psi_1 e_{c1} + \psi_2 e_s \right) e_s + w_{\psi 2} \rho_2 J_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (84)$$

Rozwiązanie modelu matematycznego wszystkich trzech opisanych powyżej modeli możliwe było z wykorzystaniem autorskiego oprogramowania ZESP_VIB_TIM przygotowanego w środowisku MATLAB. Rozwiązanie analityczne z oczywistych względów było niemożliwe. Zdecydowano się na iteracyjne rozwiązanie numeryczne. Procedurę opisano poniżej w uproszczonej formie. Pełniejszy opis znaleźć można w pracy [20]. Technika rozwiązywania modelu jest taka sama dla wszystkich wersji modelu. Przemieszczenia pionowe poziome oraz uogólnione kąty obrotu są funkcjami dwóch zmiennych, tj. czasu t oraz położenia wzdłuż osi belki x . Uwzględnienie separacji zmiennych pozwoliło na zastąpienie układu równań cząstkowych układem równań różniczkowych zwyczajnych ze stałymi współczynnikami. Przewidując rozwiązania szczególne układu w postaci wykładniczych $w_i e^{\lambda x}$, gdzie λ jest jednym z 12 pierwiastków charakterystycznych (zespolonych lub rzeczywistych), oraz porządkując równania względem stałych współczynników w_i , otrzymano układ sześciu równań, który w zapisie macierzowym miał postać:

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{w} = 0 \quad (85)$$

Macierz \mathbf{A} jest macierzą charakterystyczną układu. Układ posiada rozwiązanie wyłącznie w sytuacji, gdy wyznacznik macierzy charakterystycznej, nazywany również równaniem charakterystycznym, przyjmuje wartość 0.

$$p(\lambda) = \det \mathbf{A} = 0 \quad (86)$$

Pierwsza wersja programu ZESP_VIB_TIM powstała ponad 15 lat temu i na potrzeby przeprowadzenia analiz wymagała wprowadzenia kilku modyfikacji i optymalizacji kodu źródłowego. Pierwszym z problemów było występowanie w kodzie programu zmiennych, których rozmiar mógł przyrastać podczas wykonywania kolejnych iteracji. Problem rozwiązano dzięki odpowiedniemu przewidywaniu docelowego rozmiaru zmiennej jeszcze przed uruchomieniem iteracyjnej procedury obliczeniowej. Pozwoliło to zoptymalizować zarządzanie pamięcią operacyjną wykorzystywaną podczas obliczeń, co z kolei przekładało się na czas wymagany do rozwiązania zadania jednostkowego. Drugi problem sygnalizowany przez system wynikał ze sposobu zapisu jednostki urojonej. W pierwotnej wersji programu stosowano zapis i . Zapis taki co prawda jest poprawnie interpretowany przez system MATLAB, jednakże najnowsze wersje systemu zalecają stosowanie zapisu $1i$. Korekta sposobu zapisu wpłynęła na przejrzystość kodu źródłowego i przyspieszyła działanie interpretatora. Trzecim modyfikowanym elementem kodu źródłowego był sposób wyznaczania równania charakterystycznego $p(\lambda)$, czyli wyznacznika macierzy \mathbf{A} . W pierwotnym kodzie źródłowym odbywało się to z wykorzystaniem obliczeń symbolicznych, gdzie zmienną symboliczną była λ . Wielokrotne przeliczanie modelu wymagało zatem prowadzenia wielokrotnych obliczeń symbolicznych, które z definicji są bardziej wymagające sprzętowo niż obliczenia numeryczne. Zdecydowano się wyprowadzić ścisłą postać wyznacznika macierzy \mathbf{A} . Zadanie to udało się,

choć należy nadmienić, że zapis ścisłej formy wyznacznika mieści się na kilku stronach standardowego maszynopisu. Wszystkie wprowadzone powyżej zmiany przełożyły się znacząco na czas wymagany do rozwiązania zadania jednostkowego, który został skrócony ponad trzydziestokrotnie, przy czym największy wpływ na skrócenie czasu miało pozbycie się obliczeń symbolicznych w głównej pętli obliczeniowej programu.

Wyznaczone 12 pierwiastków charakterystycznych równania (86) wraz z odpowiadającymi im wektorami charakterystycznymi \mathbf{w}_i pozwoliło na utworzenie rozwiązania ogólnego, na które z kolei nałożyć można zestaw 12 warunków brzegowych. Całość zapisać można w postaci macierzowej:

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{C} = 0 \quad (87)$$

Częstości drgań ω , które zerują wyznacznik macierzy \mathbf{M} , są częstościami drgań własnych nietłumionych analizowanej belki zespolonej. Każdej takiej częstości odpowiada wektor stałych \mathbf{C} , którego podstawienie do rozwiązania ogólnego daje w efekcie postać drgań własnych o częstości ω . Określanie kolejnych częstości zerujących wyznacznik $\det \mathbf{M}$ zacząć należy od przyjęcia przedziału poszukiwań. Należy określić częstość początkową ω_s , końcową ω_k , oraz stosowany przyrost $\Delta\omega$. Zaczynając od częstości ω_s , z krokiem $\Delta\omega$, kończąc na ω_k , wyznacza się wartości wyznacznika $\det \mathbf{M}$. Następnie analizuje się zbiór uzyskanych wyników, poszukując dwóch kolejnych częstości ω_i oraz $\omega_i + \Delta\omega$, dla których wartość wyznacznika zmienia znak. Dokładną wartość częstości zerującej wyznacznik określano, stosując interpolację liniową. Dokładność metody zależy w tym wypadku od zastosowanego przyrostu $\Delta\omega$. Przeprowadzone analizy wykazały, że chcąc wyznaczyć częstotliwość drgań z dokładnością około 0,1 Hz, wystarczy zastosować przyrost $\Delta\omega$ o wartości około 1–2 Hz. Dalsze zmniejszanie przyrostu nie prowadzi bowiem do zmiany wyznaczonych częstości drgań. Po utworzeniu zbioru częstotliwości własnych znajdujących się w analizowanym zakresie częstotliwości rozwiązuje się równanie (87), a uzyskany wektor stałych \mathbf{C} umożliwia określenie postaci drgań.

5.4.2. Model referencyjny MES

Drugim z rozpatrywanych modeli referencyjnych był model opracowany w konwencji klasycznej metody elementów skończonych z wykorzystaniem systemu ABAQUS. Prace nad modelem zapoczątkowane zostały podczas realizacji projektu badawczego [149]. Opracowując model, zdecydowano się wykorzystać elementy powłokowe do zamodelowania stalowej belki oraz elementy objętościowe do zamodelowania płyty. Do zamodelowania dwuteowej belki stalowej użyto elementów powłokowych S4R. W podrozdziale 5.1.1 co prawda wykazano, że podczas analizy pojedynczej belki elementy S8R zapewniają nieznacznie lepsze rezultaty analiz (przy założeniu tej samej gęstości dyskretyzacji), jednak zmiana ta będzie miała niewielki wpływ na rezultaty analiz układu płytowo-belkowego, jakim jest belka

zespolona. Różnice pomiędzy wynikami uzyskiwanymi dla elementów pierwszego S4R i drugiego rzędu S8R zauważalne były głównie dla skrętnych i giętnych poziomych form drgań pojedynczej belki. Te formy drgań odgrywają rolę drugorzędną przy analizach belki zespolonej.

Tabela 5.26. Model MES belki zespolonej – analizowane elementy skończone – oznaczenia wg ABAQUS

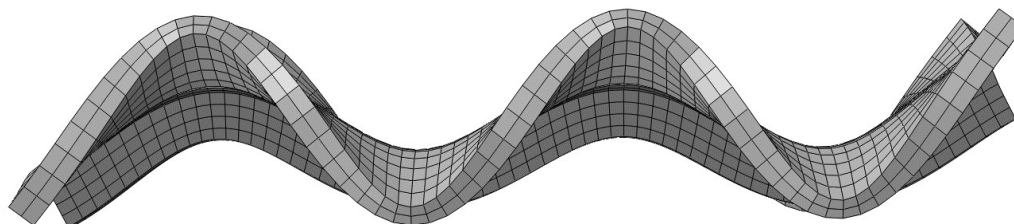
Symbol elementu	C3D20R	C3D8R	C3D8I	S8R	S4R
Wymiar	3D	3D	3D	2D	2D
Liczba węzłów	20	8	8	8	4
Funkcje kształtu	kwadratowe	liniowe	liniowe	kwadratowe	liniowe
Opcja	zredukowane całkowanie	zredukowane całkowanie	niezgodne postacie	zredukowane całkowanie	zredukowane całkowanie

Opracowując model płyty żelbetowej, rozważano zastosowanie różnych elementów objętościowych (tabela 5.26). Przeprowadzono analizy mające na celu wybór optymalnego elementu skończonego oraz gęstości dyskretyzacji. Uwzględniano przy tym zarówno zbieżność rozwiązania, jak i czas potrzebny na rozwiązanie zagadnienia. Czas zależał między innymi od liczby zmiennych w modelu. Liczba ta jest sumą liczby stopni swobody elementu oraz maksymalnej dla niego liczby dodatkowych mnożników Lagrange’a wynikającej z ewentualnych dodatkowych wewnętrznych stopni swobody (np. 13 dla elementu C3D8I). Analizowano zarówno elementy z liniowymi, jak i kwadratowymi funkcjami kształtu.

Przy zastosowaniu elementów drugiego rzędu C3D20R wyniki w zasadzie nie zmieniały się przy analizowanych gęstościach podziału. Podział płyty na grubości nawet na jedną warstwę elementów był wystarczający. Minusem tych elementów jest stopień rozbudowania modelu charakteryzujący się dużą liczbą zmiennych. Liniowym odpowiednikiem elementu C3D20R jest ośmiowęzłowy element C3D8R. Jednak wyniki uzyskiwane z jego wykorzystaniem znacznie odbiegały od wyników otrzymanych z wykorzystaniem C3D20R. Jest to spowodowane faktem, że pojedynczy element C3D8R z całkowaniem zredukowanym do jednego punktu znajdującego się w środku elementu nie jest w stanie wykryć odkształceń spowodowanych zginaniem. Przeprowadzone testy wykazały, że dobre wyniki z zastosowaniem tego typu elementu uzyskuje się dopiero przy gęstości podziału na grubości płyty wynoszącej co najmniej cztery elementy lub więcej. Takie podejście powoduje jednak znowu zbytnie rozbudowanie modelu. Dodatkowym problemem elementów C3D8R ze względu na redukcję punktów jest występowanie tzw. zjawiska *hourglassing*, objawiającego się nienaturalnymi deformacjami odkształconej siatki elementów – uzyskane postacie drgań nie są gładkie. Najbardziej efektywnym elementem okazał się element pierwszego rzędu C3D8I z opcją uwzględnienia niezgodnych postaci (ang. *incompatible mode*) [1, 107]. W elementach tych w istniejącym polu przemieszczeń uwzględniane są postacie deformacji opisujące efekt zginania elementu. Zaleca się ich używanie w symulacjach, gdzie ważne jest odwzorowanie

stanu zgięciowego. Dobre wyniki uzyskano już przy podziale na jeden element na grubości płyty. Zastosowanie dwóch warstw elementów właściwie zapewniło zgodność z elementami drugiego rzędu C3D20R. Elementy C3D8I nie są również narażone na zjawisko *hourglassing*, co zapewnia gładkość uzyskiwanych form drgań. Jak pokazały przeprowadzone testy, przy porównywalnej liczbie zmiennych czas rozwiązania zadania w przypadku zastosowania elementów C3D8I jest ponad trzykrotnie krótszy niż przy użyciu elementów C3D20R. Fakt ten nie pozostaje bez znaczenia przy konieczności wielokrotnego przeliczania modelu.

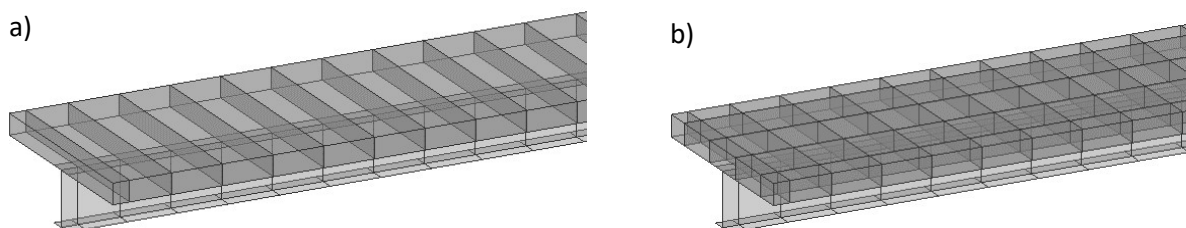
Ostatnim elementem modelu belki był wybór sposobu modelowania zespolenia. Możliwości, jakie daje system ABAQUS, są w tym zakresie stosunkowo duże. Rozważano między innymi zastosowanie elementów belkowych B31, których umiejscowienie wiernie odzwierciedlało położenie rzeczywistych sworzni zespalających. Kolejnym testowanym rozwiązaniem było wykorzystanie elementów typu SPRING rozmieszczonych na powierzchni styku belki i płyty. Możliwe jest również uwzględnienie współpracy na styku belka-płyta poprzez definicję kontaktu lub za pomocą elementów typu *connector*. Obszerny przegląd rozwiązań testowanych podczas ramach prac nad projektem [149] przedstawiony został w pracy [90]. Przykładową postać drgań uzyskaną na podstawie opracowanego modelu MES pokazano na ryc. 5.64.



Ryc. 5.64. Model MES belki zespolonej – czwarta postać drgań giętych

5.4.3. Model SES belki zespolonej

Opracowano dwa rodzaje modeli SES. Pierwszy model zakładał wykorzystanie modelu płyty z podziałem stosowanym wyłącznie wzdłuż osi belki (por. ryc. 4.6). Model ten oznaczany dalej będzie jako SES 2D. Drugi model wykorzystywał model płyty z podziałem na dwóch kierunkach.



Ryc. 5.65. Porównanie modeli SES belki zespolonej: a) model SES 2D; b) model SES 3D

W przypadku modelu SES 3D podział pierwotny na kierunku poprzecznym płyty dokonany został na parzystą liczbę odcinków. Przy tym założeniu podział wtórny zakładał nieparzystą liczbę SES w poprzek płyty, czyli środkowy SES zlokalizowany był bezpośrednio nad SES modelującym kształtownik stalowy. Zabiegu takiego dokonano, aby możliwe było zamodelowanie zespolenia pomiędzy elementami. Na ryc. 5.65 pokazano model SES 3D z podziałem pierwotnym w poprzek płyty na cztery odcinki, co dało pięć SES na szerokości płyty. Przeprowadzone analizy parametryczne wykazały, że taka gęstość podziału jest dobrym kompromisem pomiędzy dokładnością (różnica w stosunku do podziału granicznego, dla którego wyniki nie ulegają zmianie nie przekracza 2%) a czasem potrzebnym na rozwiązanie zagadnienia jednostkowego.

Podział na kierunku podłużnym zarówno płyty żelbetowej, jak i dwuteownika uzależniony jest od dokładności rozwiązania oraz od gęstości rozmieszczenia rzeczywistych elementów zespalających. Założono, że model zespolenia uwzględniać będzie rzeczywiste rozmieszczenie sworzni elementów zespalających. Modelowanie zespolenia w metodzie SES polega na połączeniu sztywnych elementów modelujących płytę żelbetową oraz elementów modelujących kształtownik stalowy za pomocą EST umieszczanych na ich krawędziach tak, jak to pokazano na ryc. 4.1. W modelu SES 3D EST modelujące zespolenie łączone były ze środkowym SES płyty.

Na zachowanie się typowej stalowo-betonowej belki zespolonej poddanej działaniu obciążeń statycznych decydujący wpływ ma sztywność elementu zespalającego na ścinanie K_h zapobiegająca poślizgom na styku stal-beton. Jest to sztywność na kierunku stycznym do płaszczyzny zespolenia. Sztywność ta ma również decydujący wpływ na dynamiczne właściwości konstrukcji w zakresie drgań giętnych o niskich częstotliwościach. Kiedy analizujemy wyższe formy drgań giętnych, wzrost częstotliwości drgań powoduje wzrost sił bezwładności na kierunku pionowym. Coraz większą rolę zaczyna odgrywać sztywność zespolenia na kierunku pionowym. Przyjęto, że sztywność ta nazywana będzie sztywnością normalną oraz oznaczana będzie jako K_v . W analizowanej belce zastosowano zespolenie w postaci rozmieszczonych parami stalowych sworzni zespalających. W modelu zastosowano pojedynczy EST skupiający właściwości sprężyste obydwu sworzni oraz ich otoczenia. Sztywności K_h i K_v odnoszą się do grupy dwóch sworzni.

5.4.4. Badania doświadczalne belki zespolonej

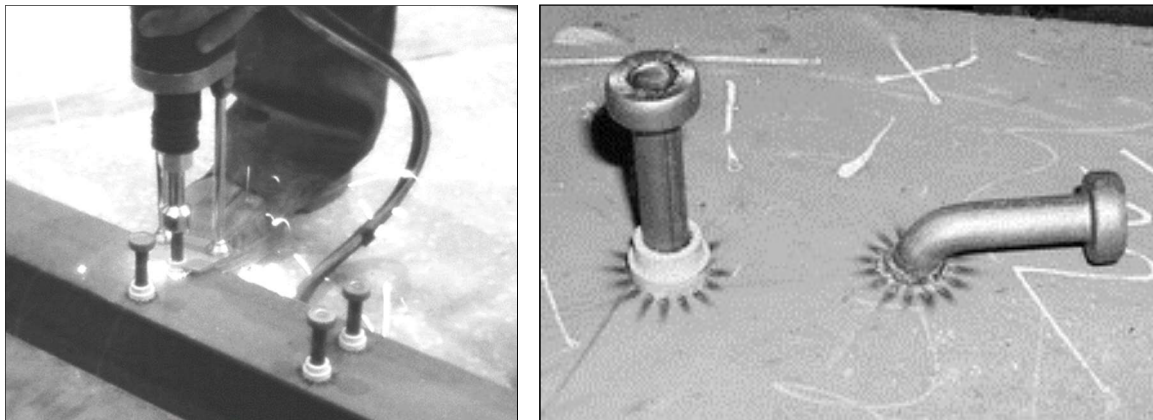
W trakcie prac nad projektami badawczymi [149] oraz [21] wykonano oraz przebadano łącznie 11 belek zespolonych różniących się między sobą klasą wytrzymałości betonu oraz rodzajem zastosowanych łączników zapewniających współpracę części stalowej i betonowej. Typowy przekrój analizowanych belek pokazano na ryc. 5.60. Wyniki przedstawione w dalszej

części monografii dotyczyły trzech belek serii C wykonanych na bazie kształtownika IPE 160 oraz płyty żelbetowej o wymiarach 600 x 60 mm wykonanej z betonu klasy C25/30. Zbrojenie podłużne zrealizowano w postaci 18 prętów o średnicy 6 mm, wykonanych ze stali klasy A-I, ułożonych w dwóch warstwach w sposób pokazany na ryc. 5.60. Zbrojenie poprzeczne stanowiły pręty rozmieszczone co 150 mm. Mieszanka betonowa klasy C25/30 dostarczona została przez lokalną wytwórnię betonów. Ze względu na wymiary geometryczne wykonywanych elementów do wykonania mieszanki betonowej stosowano kruszywo o frakcji nie większej niż 8 mm. Gęstość rozmieszczenia stalowych sworzni w belkach zróżnicowano tak, aby reprezentowały one odpowiednio belki z zespoleniem pełnym i częściowym (tabela 5.27).

Tabela 5.27. Rozstaw par sworzni w belkach

Belka	C1	C2	C3
Rozstaw sworzni	200	150	100

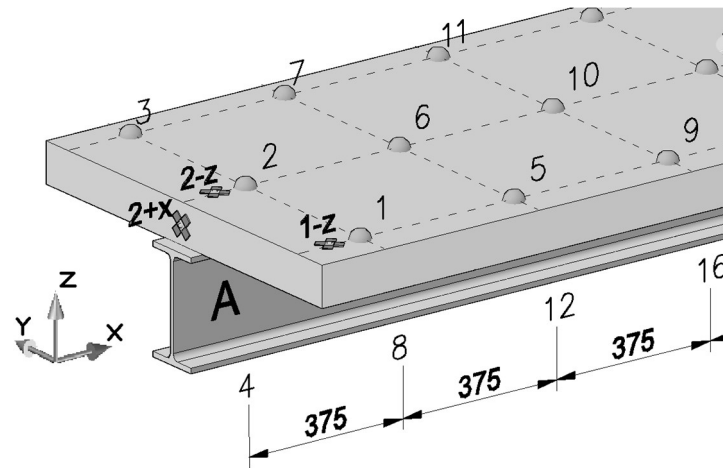
Zastosowano sworznie z łbem firmy KÖCO – typ SD o średnicy 10 mm i wysokości 50 mm, wykonane ze stali S235J2G3. Mocowania sworzni do belek dokonano za pomocą agregatu KÖCO 901E. Parametry zgrzewania, tj. czas (300 ms) oraz natężenie prądu (700 A), dobrano zgodnie z zaleceniami, jakie podał producent dla sworzni o średnicy 10 mm. Poprawność procesu zgrzewania potwierdzono, przeprowadzając próbę gięcia młotkiem (ryc. 5.66).



Ryc. 5.66. Zgrzewanie sworzni zespalających, próba gięcia młotkiem

W trakcie badań doświadczalnych mających na celu określenie charakterystyk dynamicznych belek stosowano ten sam zestaw aparatury pomiarowej co w przypadku testów belki dwuteowej oraz płyty żelbetowej opisanych odpowiednio w podrozdziałach 5.1.2 i 5.2.7. Procedurę badawczą przeprowadzano dwukrotnie, raz przed testami pod obciążeniem statycznym, drugi raz po ich wykonaniu. Badania przeprowadzono w odstępie około jednego roku. Prezentowane wyniki dotyczą wyników uzyskanych w trakcie drugiej serii badań. Belka podwieszona do stanowiska badawczego pokazana została na ryc. 5.68.

Siatkę punktów pomiarowych rozmieszczono równomiernie wzdłuż osi belki w rozstawie co 375 mm (por. ryc. 5.67). Punkty, w których dokonywano wymuszenia drgań konstrukcji, dobrano tak, aby wzbudzić drgania wszystkich rozpatrywanych form drgań belki, tj. drgań giętnych, skrętnych, osiowych oraz dystorsyjnych (por. ryc. 4.7). Wymuszenie zastosowane w punkcie 2:-Z wymuszało drgania giętne pionowe belki. Wymuszenie w punkcie 1:-Z wymuszało drgania giętne, skrętne oraz dystorsyjne. Impuls siły przyłożony w punkcie 2 na kierunku osi +X odpowiedzialny był za wzbudzenie drgań osiowych belki.

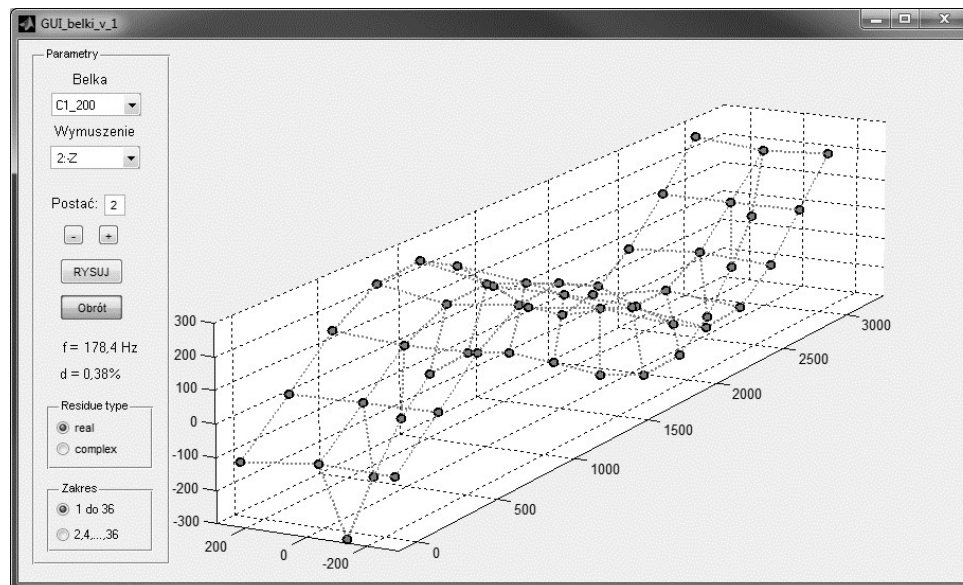


Ryc. 5.67. Siatka punktów pomiarowych stosowana w trakcie badań



Ryc. 5.68. Belka na stanowisku badawczym do określenia charakterystyk dynamicznych

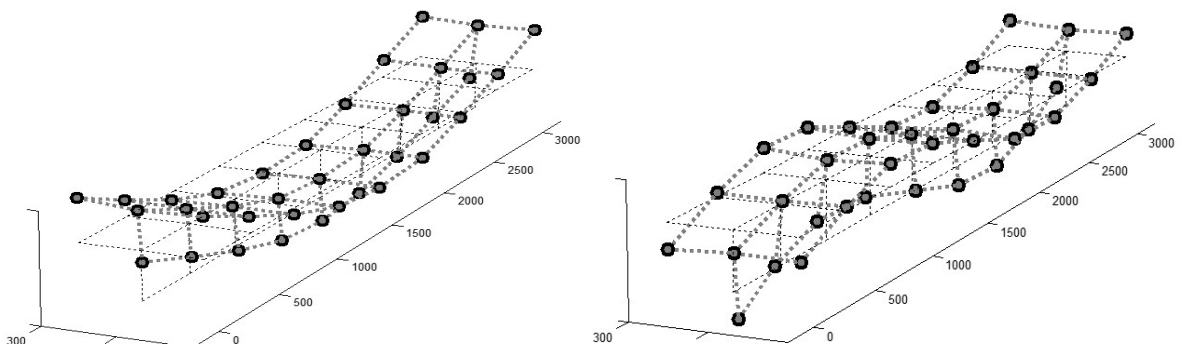
Wyniki obejmujące częstotliwości oraz wartości współczynnika tłumienia dla drgań o charakterze giętnym, skrętnym i osiowym zestawiono w tabelach 5.28–5.30. Na rycinach 5.70–5.72 zaprezentowano również wybrane formy drgań. Przedstawione na rysunkach formy drgań wykonano za pomocą autorskiego oprogramowania opracowanego w środowisku MATLAB (ryc. 5.69). Oprogramowanie to pozwala na opracowywanie wyników badań bez konieczności stosowania systemu LMS TestLab, a tylko na podstawie wygenerowanych z niego plików z uniwersalnym zapisem tekstowym.



Ryc. 5.69. Interfejs graficzny oprogramowania do obróbki danych pomiarowych

Tabela 5.28. Częstotliwości drgań giętnych belek serii C

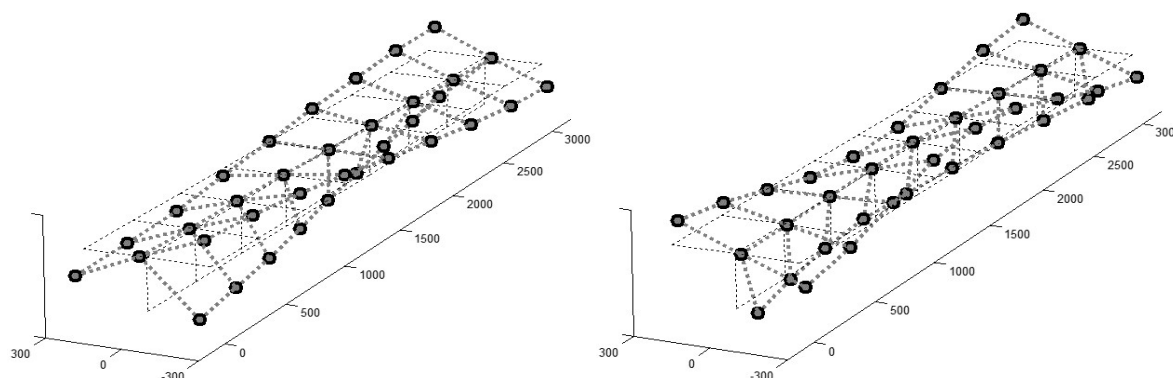
Drgania giętnie	Belka					
	C1_200		C2_150		C3_100	
	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]
1 _g	73,4	0,13	73,6	0,16	75,4	0,15
2 _g	167,4	0,51	166,0	0,54	174,8	0,34
3 _g	262,0	0,55	262,2	0,56	277,7	0,43
4 _g	356,5	0,44	356,3	0,46	378,8	0,68
5 _g	446,7	0,69	456,1	0,62	485,5	0,45



Ryc. 5.70. Pierwsze dwie formy drgań giętnych – belka C3

Tabela 5.29. Częstotliwości drgań skrętnych belek serii C

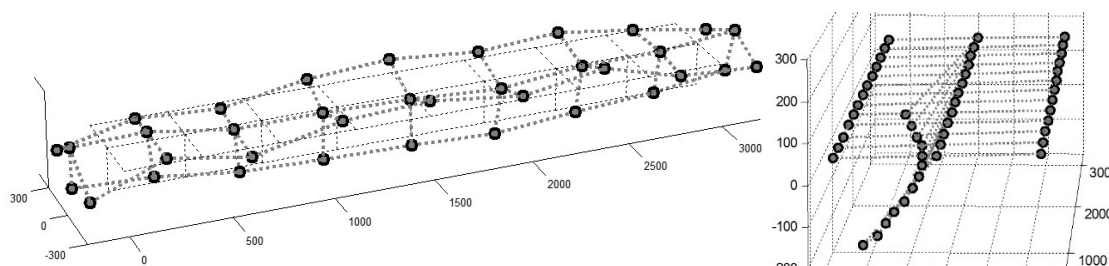
Drgania skrętne	Belka					
	C1_200		C2_150		C3_100	
	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]
1 _s	64,2	0,26	64,6	0,26	66,3	0,27
2 _s	143,7	0,33	143,1	0,27	146,6	0,26
3 _s	217,7	0,37	216,9	0,35	221,4	0,35
4 _s	299,8	0,36	298,2	0,28	302,8	0,33
5 _s	387,9	0,45	384,0	0,42	394,7	0,46



Ryc. 5.71. Pierwsze dwie formy drgań skrętnych – belka C3

Tabela 5.30. Podstawowa częstotliwość drgań osiowych i dystorsyjnych belek serii C

Drgania osiowe i dystorsyjne	Belka					
	C1_200		C2_150		C3_100	
	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]	f [Hz]	d [%]
1 _o	567,3	0,27	559,4	0,44	573,4	0,61
1 _d	92,03	0,11	92,87	0,06	94,90	0,08



Ryc. 5.72. Podstawowa forma drgań osiowych oraz dystorsyjnych belki C2

5.4.5. Identyfikacja parametrów modeli

W poprzednich rozdziałach omówiono trzy techniki modelowania belki zespolonej oraz wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych. Opracowanie modeli pozwalających na analizę przebadanych trzech belek zespolonych wymagało identyfikacji wybranych parametrów modeli. Identyfikowanymi parametrami były: moduł sprężystości podłużnej płyty betonowej, sztywność zespolenia oraz właściwości tłumiące układu. Podobnie jak

w przypadku modelu płyty żelbetowej identyfikację brakujących parametrów przeprowadzono, porównując wyniki badań doświadczalnych z wynikami uzyskiwanymi na podstawie analiz numerycznych. Tym razem porównaniu podlegały nie tylko częstotliwości obserwowanych postaci drgań, ale również same postacie drgań. Porównanie kształtu postaci drgań określonych numerycznie i doświadczalnie przeprowadzono, wyznaczając klasyczny współczynnik MAC (ang. *modal assurance criterion*). Współczynnik ten przyjmuje wartość 1, jeśli porównywane postacie są takie same. Bazując na wartości współczynnika MAC, określono parametr Z , który osiąga tym mniejszą wartość, im lepsze jest dopasowanie porównywanych postaci drgań.

$$\text{MAC}(\varphi_i^{\text{num}}, \varphi_i^{\text{exp}}) = \frac{|\varphi_i^{\text{numT}} \cdot \varphi_i^{\text{exp}}|}{(\varphi_i^{\text{expT}} \cdot \varphi_i^{\text{exp}}) \cdot (\varphi_i^{\text{numT}} \cdot \varphi_i^{\text{num}})} \quad (88)$$

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - \text{MAC}(\varphi_i^{\text{num}}, \varphi_i^{\text{exp}})) \quad (89)$$

Porównanie częstotliwości i postaci drgań belki pozwoliło na określenie brakujących cech opisujących sztywność układu. Aby ustalić właściwości tłumiące, porównywano przebieg częstotliwościowy funkcji przejścia FRF. Do opisu właściwości tłumiących, podobnie jak w przypadku modelu płyty, wykorzystano współczynnik strat η . Dla styków elementów oraz połączeń, poprzez analogię do współczynników strat dla materiałów, wprowadzić można współczynnik strat połączenia [71]. W analizowanym przypadku, tj. modelu SES belki zespolonej, wprowadzono pojęcie współczynnika strat zespolenia i oznaczono go jako η_z . Wartości współczynnika strat uzależnione są od częstotliwości drgań, temperatury i innych czynników. Im wyższa wartość współczynnika strat, tym lepsze właściwości tłumiące materiału/połączenia. Według Rao [97] współczynnik strat dla stali można przyjmować w zakresie $(2 \div 6) \cdot 10^{-4}$. Beton charakteryzuje się znacznie lepszymi właściwościami tłumiącymi niż stal, dlatego też wartości współczynnika strat dla niego zmieniają się w zakresie $(0,4 \div 6) \cdot 10^{-2}$ wg de Silvy [28]. Duży rozrzut wartości współczynnika strat dla betonu spowodowany jest dużą różnorodnością tego materiału. Tłumienie zależy od gęstości betonu, ilości zaczynu cementowego, historii obciążenia, poziomu naprężeń itp.

Szczegółowy opis procedury identyfikacji, jak również wartości zidentyfikowanych parametrów modelu belki zespolonej opracowanej w konwencji MES przedstawiony został w raporcie z projektu badawczego [149] oraz w pracy [90]. Z kolei identyfikacja parametrów modelu zbudowanego wg założeń metody SES była obszernie wyjaśniona w tym samym raporcie oraz w pracy [2].

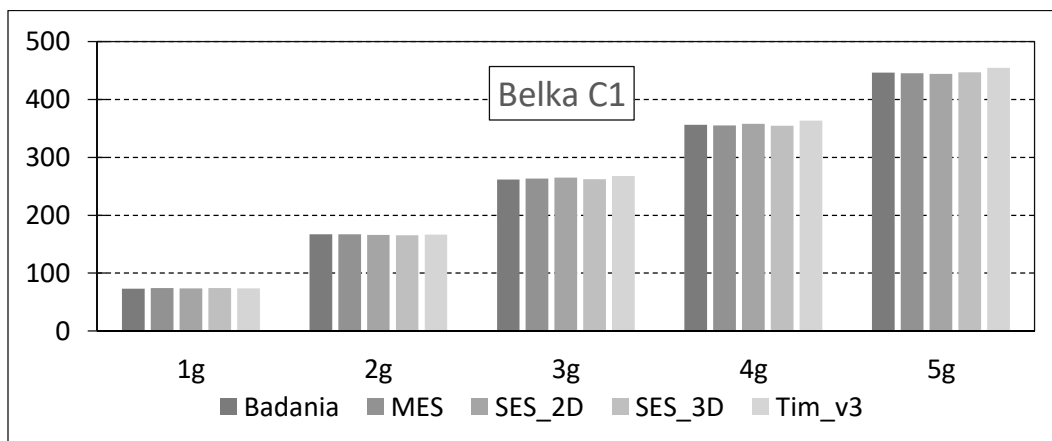
5.4.6. Porównanie wyników

Dla wszystkich analizowanych belek dokonano porównania częstotliwości drgań własnych określonych doświadczalnie $f_{i,exp}$ z wynikami obliczeń przeprowadzonych z wykorzystaniem modeli MES, SES oraz modelu Timoshenki_v3. Tabela 5.31 zawiera porównanie w zakresie drgań giętnych pionowych. Dla belki C1 wyniki przedstawiono również w formie graficznej na ryc. 5.73. Przykładową postać drgań giętnych uzyskaną na podstawie modelu SES_3D pokazano na ryc. 5.74. Tabela 5.32 zawiera z kolei porównanie częstotliwości skrętnych form drgań. Wyniki dla belki C2 w formie graficznej oraz podstawową postać drgań skrętnych pokazano odpowiednio na ryc. 5.75 oraz 5.76.

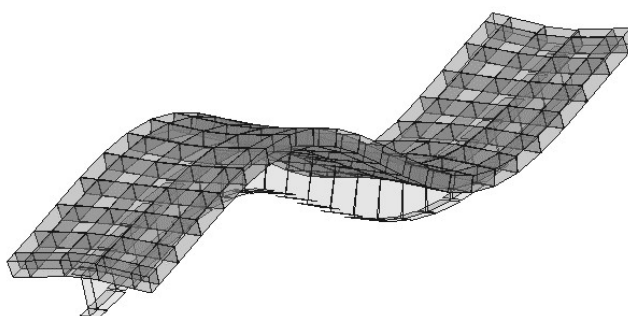
Tabela 5.31. Porównanie częstotliwości drgań giętnych – wyniki badań oraz analiz numerycznych.

Belka C1_200					
i	$f_{i,exp}$	$f_{i,MES}$	$f_{i,SES,2D}$	$f_{i,SES,3D}$	$f_{i,Tim,v3}$
1 _g	73,4	74,2	73,7	74,4	73,9
2 _g	167,4	167,2	166,0	165,8	166,8
3 _g	262,0	263,7	265,3	262,6	267,9
4 _g	356,5	355,2	357,8	354,9	363,7
5 _g	446,7	445,3	444,3	446,9	455,0
Belka C2_150					
i	$f_{i,exp}$	$f_{i,MES}$	$f_{i,SES,2D}$	$f_{i,SES,3D}$	$f_{i,Tim,v3}$
1 _g	73,6	74,1	73,2	74,0	73,3
2 _g	166,0	166,8	165,0	164,7	165,7
3 _g	262,2	263,6	265,8	262,8	268,8
4 _g	356,3	355,8	361,5	357,9	369,2
5 _g	456,1	446,7	450,4	452,7	465,2
Belka C3_100					
i	$f_{i,exp}$	$f_{i,MES}$	$f_{i,SES,2D}$	$f_{i,SES,3D}$	$f_{i,Tim,v3}$
1 _g	75,4	75,8	75,3	76,0	75,4
2 _g	174,8	175,7	173,3	173,2	174,4
3 _g	277,7	280,1	280,8	278,1	284,5
4 _g	378,8	378,3	383,7	380,6	392,2
5 _g	485,5	473,8	480,7	483,1	496,0

Analiza danych pozwala jednoznacznie stwierdzić, że obydwa modele opracowane w konwencji metody sztywnych elementów skończonych zapewniają bardzo dobrą zgodność zarówno z wynikami badań doświadczalnych, jak i z modelami referencyjnymi. Wartość bezwzględna odchylenia pomiędzy wynikami badań oraz analiz numerycznych niezależnie od przyjętej techniki modelowania mieści się w zakresie do około 2%. Należy jednak podkreślić, że tak dobre dopasowanie uzyskano dzięki zastosowanej procedurze dostrajania modelu, polegającej na identyfikacji brakujących parametrów modelu.



Ryc. 5.73. Porównanie częstotliwości drgań giętnych – badania oraz analizy numeryczne



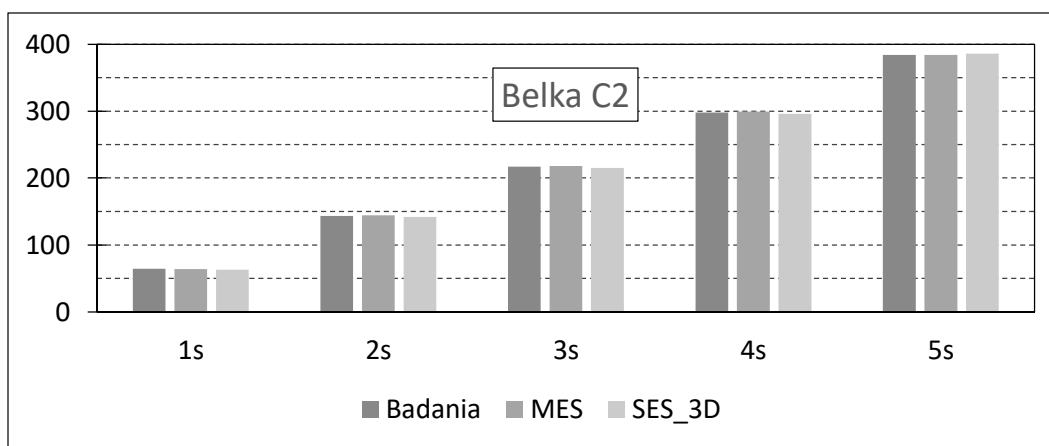
Ryc. 5.74. Model belki zespolonej SES_3D, druga forma drgań giętnych

Wartości zidentyfikowanych parametrów dla różnych technik modelowania są tego samego rzędu wielkości, jednak ich dokładne wartości różnią się od siebie. Dla przykładu, różnica pomiędzy sztywnością zespolenia ustaloną dla modelu SES_2D oraz SES_3D wynosi około 20%. Niższe wartości sztywności obserwowano dla modelu SES_3D. Należało się tego spodziewać ze względu na lepsze odzwierciedlenie stopnia odkształcalności płyty w modelu, w którym zastosowano jej podział na obydwu kierunkach. Trzeba mieć również na uwadze, że identyfikowane sztywności EST modelujących zespolenie uwzględniają sztywność nie tylko samego łącznika, ale również współpracującego z nim betonu oraz warstwy stykowej stal-beton. Z tego powodu sztywności wyznaczone dla modelu belki C1 z większym rozstawem łączników były wyższe od tych wyznaczonych dla belki C3.

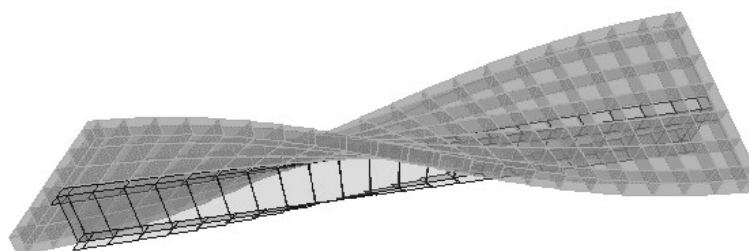
Na ryc. 5.77 przedstawiono porównanie częstotliwościowych funkcji przejścia uzyskanych doświadczalnie z tymi wyznaczonymi na podstawie modelu SES_3D. Pierwsze dwa wykresy uzyskano dla wymuszenia w punkcie 2:-Z, przy którym wzbudzane były giętne formy drgań widoczne na wykresie w postaci kolejnych pików. Odpowiedź układu wyznaczono dla punktów 2 oraz 34 zlokalizowanych na przeciwległych końcach belki. Kolejne wykresy wykonano dla wymuszenia w punkcie 1:-Z, przy którym wzbudzane były zarówno skrętne, jak i giętne formy drgań. Odpowiedź podobnie jak wcześniej wyznaczano dla dwóch punktów zlokalizowanych na przeciwległych końcach belki.

Tabela 5.32. Porównanie częstotliwości drgań skrętnych – badania oraz analizy numeryczne

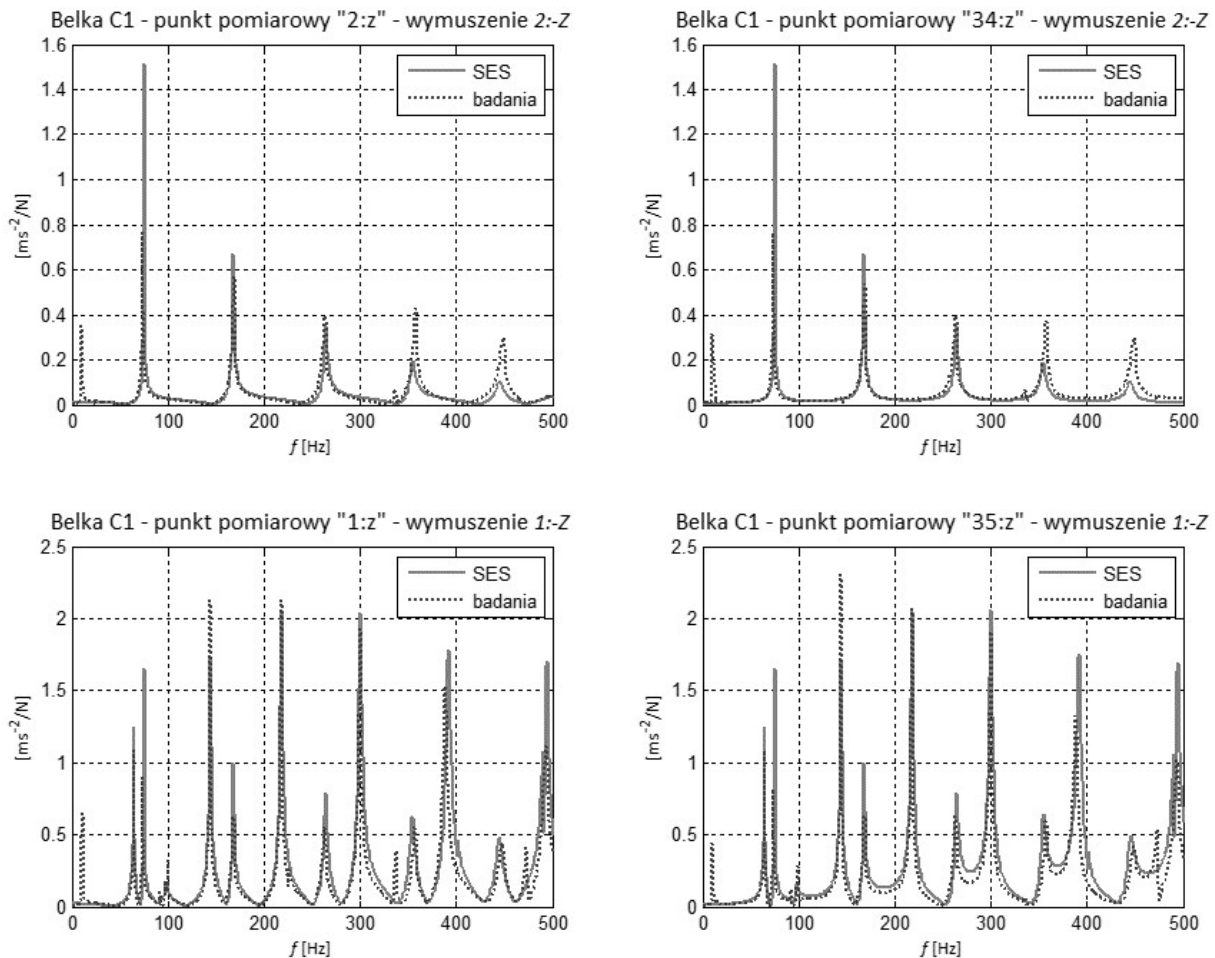
Belka C1_200			
i	f_{i_exp}	f_{i_MES}	$f_{i_SES_3D}$
1 _s	64,2	63,3	63,5
2 _s	143,7	142,0	142,8
3 _s	217,7	214,7	216,2
4 _s	299,8	295,1	297,7
5 _s	387,9	382,2	388,0
Belka C2_150			
i	f_{i_exp}	f_{i_MES}	$f_{i_SES_3D}$
1 _s	64,6	64,0	63,2
2 _s	143,1	144,3	142,0
3 _s	216,9	217,7	215,0
4 _s	298,2	299,2	295,9
5 _s	384,0	384,0	385,8
Belka C3_100			
i	f_{i_exp}	f_{i_MES}	$f_{i_SES_3D}$
1 _s	66,3	67,2	64,5
2 _s	146,6	148,8	145,1
3 _s	221,4	227,7	220,3
4 _s	302,8	310,2	303,6
5 _s	394,7	402,2	396,2



Ryc. 5.75. Porównanie częstotliwości drgań skrętnych uzyskanych w wyniku badań oraz analiz numerycznych



Ryc. 5.76. Model belki zespolonej SES_3D, podstawowa forma drgań skrętnych



Ryc. 5.77. Belka C1 – porównanie przebiegów FRF określonych doświadczalnie i wg modelu SES_3D

Niezależnie od punktu przyłożenia wymuszenia oraz punktu, w którym dokonywano pomiaru odpowiedzi, uzyskano bardzo dobre dopasowanie FRF ustalonych doświadczalnie i numerycznie. Należy w tym miejscu zauważyć, że ze względu na fakt wyznaczenia trzech niezależnych wartości współczynników strat dla betonu, stali oraz zespolenia wyznaczona na ich podstawie macierz tłumienia \mathbf{C} nie jest proporcjonalna do macierzy sztywności \mathbf{K} . Oznacza to, że analizowana belka jest układem tłumionym nieproporcjonalnie. Fakt ten można wykorzystać do detekcji uszkodzeń z zastosowaniem współczynnika transferu energii ETR (ang. *energy transfer ratio*). Współczynnik ten został zdefiniowany w pracy [63] i jak twierdzą autorzy, wykazuje on znacznie większą wrażliwość na pojawiające się uszkodzenia niż tradycyjnie określane parametry modalne. Współczynnik ETR określa stosunek modalnej energii transferowanej podczas cyklu do całkowitej energii magazynowanej w strukturze przed cyklem. Energia transferowana między postaciami drgań jest cechą obserwowaną wyłącznie w przypadku układów nieproporcjonalnie tłumionych. Szczegółowo zagadnienie wykorzystania współczynnika ETR do detekcji uszkodzeń stalowo-betonowych belek zespolonych omówione zostało w cyklu publikacji [150, 151, 152] oraz w rozprawie [50].

6. Przykłady zastosowania

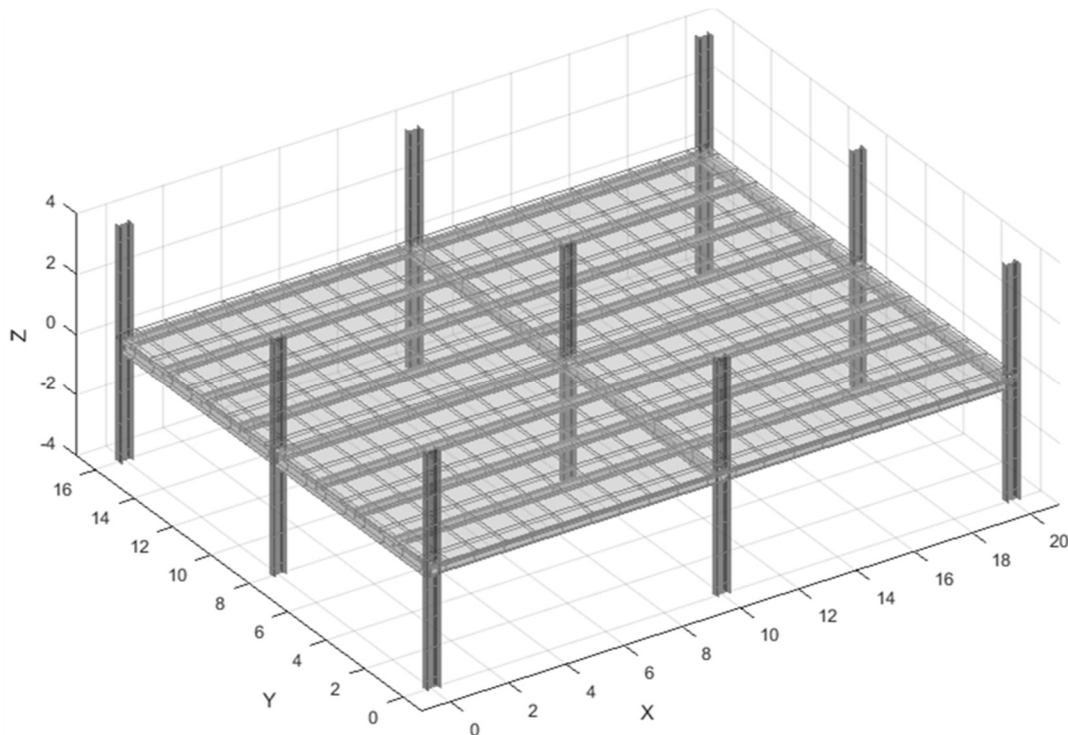
W poprzednim rozdziale przedstawiono pozytywne rezultaty analiz weryfikujących skuteczność metody sztywnych elementów skończonych. Zdecydowano się zastosować opracowaną technikę modelowania do analizy właściwości dynamicznych przykładowych konstrukcji, w których płyta współpracuje z usztywniającymi ją belkami. Jako przykłady wybrano strop stalowo-betonowy o konstrukcji zespolonej oraz model jednotorowego mostu kolejowego o konstrukcji zespolonej.

6.1. Stalowo-betonowy strop zespolony

6.1.1. Geometria stropu

Na potrzeby przeprowadzenia analiz zaprojektowano konstrukcję stropu zespolonego w budynku biurowym (ryc. 6.1). Projekt opracowano zgodnie z wytycznymi zawartymi w [158]. Podstawowe parametry geometryczne układu konstrukcyjnego budynku:

- siatka słupów $10 \times 8 \text{ m}$;
- rozpiętość belek stropowych $L_x = 10,0 \text{ m}$;
- rozpiętość podciągów $L_y = 8,0 \text{ m}$;
- wysokość słupów $L_z = 4,0 \text{ m}$;
- rozstaw belek stropowych $a = 2,0 \text{ m}$.



Ryc. 6.1. Model SES analizowanego stropu zespolonego

Płytę w budynku zaprojektowano jako żelbetową o stałej grubości $h_p = 130$ mm. Przewidziano beton klasy C25/30 o gęstości $\rho = 2500$ kg/m³. Moduł sprężystości betonu przyjęto równy $E = 31$ GPa [156]. Liczbę Poissona przyjęto o wartości $\nu = 0,2$. Jako schemat statyczny przyjęto płytę ciągłą. Dla uproszczenia analiz nie przewidziano otworów w płycie.

Belki stropowe o konstrukcji zespolonej wykonano na bazie kształtownika gorącowałcowanego IPE 270 wykonanego ze stali kategorii S355. Gęstość oraz moduł sprężystości podłużnej przyjęto równe odpowiednio $\rho = 7850$ kg/m³ oraz $E = 210$ GPa [157]. Liczbę Poissona przyjęto o wartości $\nu = 0,3$. Współpracę belki stalowej z płytą żelbetową zapewniały podatne sworznie stalowe o średnicy 16 mm i wysokości 125 mm rozmieszczone równomiernie co 250 mm wzdłuż osi belki. Przyjęto, że belki zostaną przegubowo połączone z podciągami oraz ze słupami.

Podciągi rozmieszczone pomiędzy słupami przewidziano również o konstrukcji zespolonej. Zaprojektowano je z wykorzystaniem gorącowałcowanego dwuteownika szerokostopowego HEB 360 wykonanego podobnie jak belki ze stali kategorii S355. Parametry materiałowe przyjęto jak dla belek stropowych. Przewidziano przegubowe połączenie podciągów ze słupami. Zespolenie wykonano z zastosowaniem tych samych łączników co w belkach, jednak sworznie rozmieszczano parami w rozstawie 250 mm. Dla uproszczenia założono równomierne rozmieszczenie łączników wzdłuż osi podciągu.

Słupy nośne przewidziano jako stalowe o wysokości 4,0 m na kondygnację. Wykonano je na bazie profilu HEB 400 ze stali S355.

6.1.2. Model SES stropu

Model obliczeniowy konstrukcji w konwencji metody SES wykonano, wykorzystując autorskie oprogramowanie przygotowane w środowisku MATLAB. Modelując płytę, przyjęto gęstość podziału pierwotnego zapewniającą wewnętrzne sztywne elementy skończone o wymiarach 1,0 x 1,0 m. Wymiary elementów modelujących krawędź płyty były odpowiednio mniejsze (por. ryc. 4.4). Przewidziano, że krawędź płyty przesunięta będzie o 150 mm względem osi podciągów i brzegowych belek stropowych. Taką samą gęstość dyskretyzacji, tj. podział pierwotny na odcinki o długości 1,0 m, zastosowano w odniesieniu do podciągów, belek stropowych oraz słupów. W wyniku tego każdy podciąg modelowany był za pomocą dziewięciu sztywnych elementów skończonych o długościach odpowiednio 0,5 + 7x1,0 + 0,5 m. Mniejsze długości końcowych SES wynikają z przyjętej techniki modelowania (por. ryc. 4.1). Belki stropowe modelowano w sposób analogiczny, przy czym ze względu na większą ich długość składały się one z 11 SES. Ze środkowym SES modelującym słupek o całkowitej wysokości 8,0 m łączone były elementy modelujące stalowy szkielet stropu budynku, tj. podciągi oraz belki stropowe. Założono połączenie przegubowe.

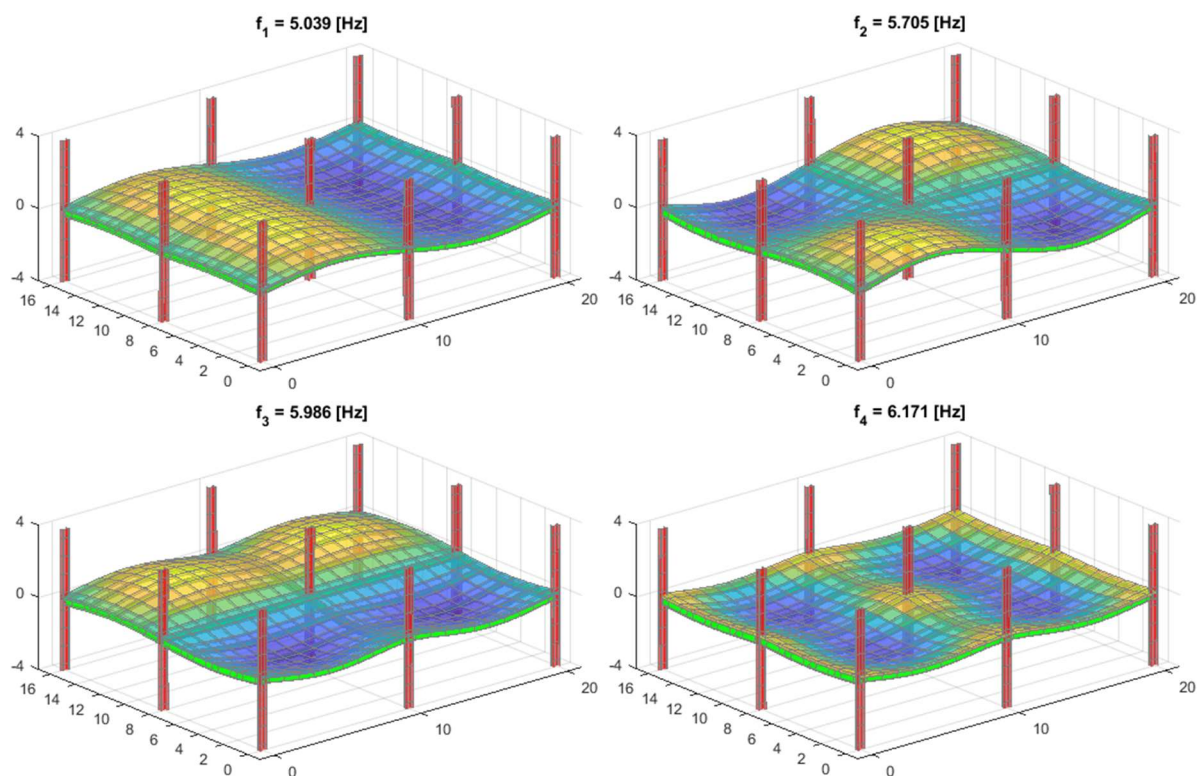
Sztywność elementów sprężysto-tłumiących EST skupiających właściwości stalowych oraz żelbetowych elementów konstrukcyjnych wyznaczano zgodnie z wytycznymi przedstawionymi w rozdziale 4. Konieczne było ustalenie sztywności EST modelujących zespolenie w belkach oraz podciągach.

Sztywność pojedynczego sworznia zespalającego o średnicy 16 mm i wysokości 125 mm osadzonego w płycie żelbetowej pełnej wyznaczyć można na podstawie nomogramu przedstawionego w pracach [38, 69]. Podatność łącznika zależy od jego średnicy, stosunku wysokości do średnicy, klasy betonu oraz grubości szczeliny dystansowej na styku stal-beton. Na podstawie analizy nomogramów przyjęto sztywność pojedynczego łącznika na ścinanie równą $K_h = 3 \times 10^8$ N/m. Wielkość ta jest porównywalna z wynikami własnych badań doświadczalnych prowadzonych podczas realizacji projektów badawczych [21, 149]. W zaprojektowanej konstrukcji łączniki rozmieszczone są w rozstawie co 250 mm, z kolei opracowany model zakłada gęstość podziału na odcinki o długości 1,0 m. Zdecydowano się łączyć każdą parę SES modelujących belki stalowe i płytę za pomocą pojedynczego EST skupiającego właściwości czterech łączników występujących na odcinku o długości 1,0 m. Podczas modelowania podciągu postępowano analogicznie, przy czym ze względu na fakt, że łączniki rozmieszczane były parami, sztywność również zwiększono dwukrotnie. Sztywność zespolenia na kierunku pionowym, tj. prostopadłym do płaszczyzny styku stal-beton, przyjęto o tej samej wielkości co sztywność na ścinanie. Sztywność ta wynika z podatności na obciążenie osiowe sworznia, podatności betonu otaczającego łącznik oraz podatności warstwy stykowej stal-beton. Badania oraz identyfikacja parametrów modeli prowadzone podczas realizacji prac nad projektami badawczymi [21, 149] wykazywały, że podatność na kierunku pionowym K_v jest porównywalnej wielkości co podatność na ścinanie K_h , co uzasadnia przyjęte założenie. Sztywność obrotową łączników przyjęto równą $K_{Rx} = 3 \times 10^4$ Nm/rad.

Warunki brzegowe na końcach słupów przyjęto jako odpowiadające połączeniu przegubowemu. Dodatkowo na poziomie stropu każdy słup miał wprowadzoną blokadę przesuwu o sztywności dobranej tak, aby częstotliwości drgań wynikające z ruchu poziomego całego stropu znalazły się poza obszarem analizowanych drgań giętych pionowych stropu. Zabieg ten pozwolił na pominięcie modelowania stężeń pionowych pomiędzy słupami. Jak wspomniano wcześniej, połączenia pomiędzy wszystkimi stalowymi elementami szkieletu budynku zamodelowano jako przegubowe.

6.1.3. Wyniki analiz

Analizy mające na celu określenie częstotliwości oraz postaci drgań własnych prowadzono w zakresie do 25 Hz. W przedziale tym odnotowano obecność 24 postaci drgań, z których przykładowe cztery pierwsze przedstawiono na ryc. 6.2.



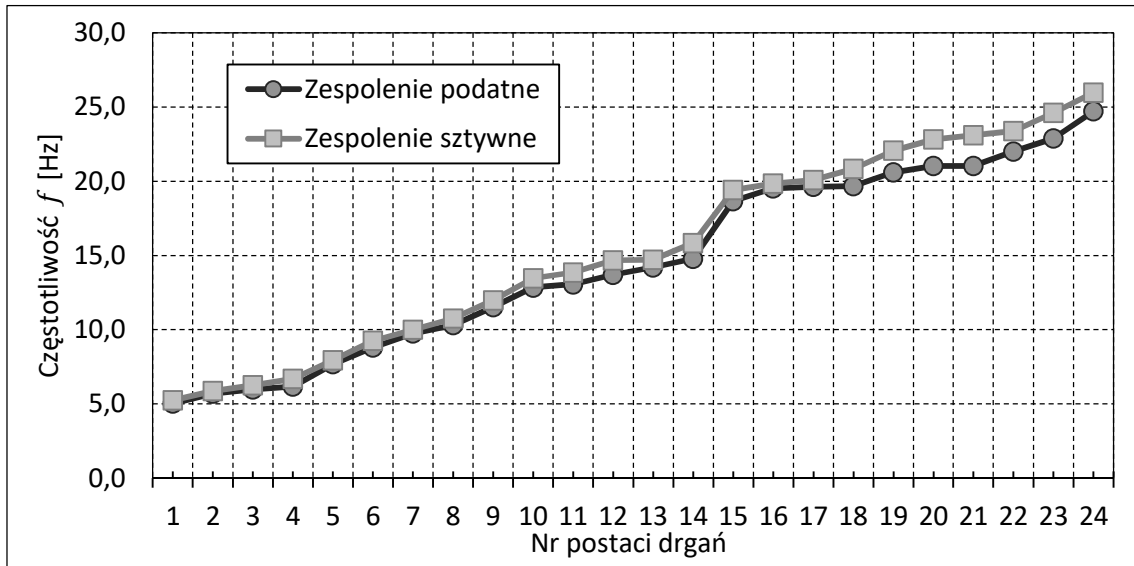
Ryc. 6.2. Podstawowe postacie drgań stropu zespolonego

Podstawowa częstotliwość drgań stropu wynosi około 5 Hz, co jest wartością wyższą od zalecanej minimalnej częstotliwości dla stropów wynoszącej $f_{min} = 4$ Hz [96], która wynika z częstotliwości chodu (kroku) użytkowników stropu, która mieści się w zakresie od 1,5 do 2,5 Hz [108]. Należy pamiętać, że określenie minimalnej wymaganej częstotliwości drgań własnych stropu f_{min} zależy głównie od przeznaczenia budynku. Dla większości stropów f_{min} nie powinna być mniejsza niż 4–5 Hz. Warunek ten jest bardziej rygorystyczny dla obiektów sportowych, gdzie f_{min} można przyjmować 8 Hz. Z kolei w pomieszczeniach, w których wykorzystywana jest precyzyjna aparatura, np. w salach szpitalnych, wymagana częstotliwość może być podniesiona nawet do minimum 12 Hz.

Opracowany model stropu w konwencji metody SES uwzględniał podatność elementów zapewniających współpracę stalowych belek z żelbetową płytą. Zdecydowano się przeprowadzić dodatkową analizę polegającą na ocenie wpływu sztywności zespolenia na wartości określanych częstotliwości drgań. W tym celu zwiększono sztywność EST modelujących zespolenie do poziomu, powyżej którego nie obserwowano już zmian częstotliwości, uzyskując w ten sposób efekt pełnego, nieodkształcalnego zespolenia. Wpływ tego zabiegu na wartości analizowanych częstotliwości drgań przedstawiono na ryc. 6.3.

Jak należało się spodziewać, brak uwzględnienia podatności zespolenia prowadzi do wzrostu częstotliwości drgań własnych stropu. Wielkość zmiany zależy od analizowanej formy drgań. W analizowanym zakresie średni wzrost częstotliwości wynosi nieznacznie powyżej 5%. Podstawowa częstotliwość drgań wzrosła o około 4%. Dodatkowe analizy wykazały, że główny

wpływ na wzrost częstotliwości ma sztywność zespolenia na kierunku stycznym do płaszczyzny zespolenia, tj. sztywność na ścinanie K_h . Tego również należało się spodziewać ze względu na zakres analizowanych częstotliwości. W zakresie drgań niskoczęstotliwościowych wpływ sztywności zespolenia K_v , tj. na kierunku normalnym do płaszczyzny styku stal-beton, jest niewielki. Rośnie on wraz ze wzrostem częstotliwości drgań, co jest efektem rosnących sił bezwładności w ruchu posuwistym na kierunku prostopadłym do płaszczyzny drgań [148].

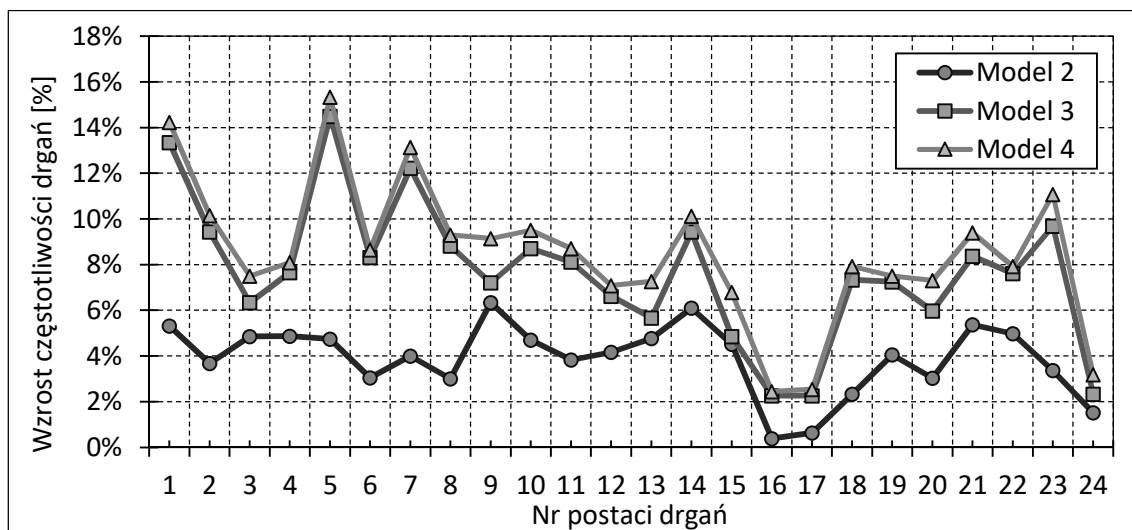


Ryc. 6.3. Wpływ podatności zespolenia na częstotliwości drgań stropu zespolonego

W analizowanym modelu połączenia pomiędzy elementami stalowego rusztu nośnego przewidziano jako przegubowe. W rzeczywistych konstrukcjach równie często spotkać można rozwiązania z połączeniami sztywnymi lub o określonej podatności. Wpływ sztywności połączeń również wpływa na właściwości dynamiczne konstrukcji, co postanowiono zweryfikować na analizowanym modelu. Model 1 jest bazową wersją modelu ze wszystkimi połączeniami przegubowymi, uwzględnia on również podatność zespolenia. Podatne zespolenie zastosowano we wszystkich analizowanych czterech modelach. W kolejnych modelach (por. tabela 6.1) wprowadzano sztywne połączenia w miejsce przegubowych. W pierwszej kolejności na końcach podciągów, w miejscu połączenia ze słupami. Następnie na końcach belek stropowych, w miejscu ich połączenia ze słupami oraz z podciągami. Ostatnim etapem było uwzględnienie sztywnego mocowania na końcach słupów.

Tabela 6.1. Analiza wpływu sztywności połączeń – parametry modeli

Model	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
Podciąg	przegubowe	sztywne	sztywne	sztywne
Belki	przegubowe	przegubowe	sztywne	sztywne
Słupy	przegubowe	przegubowe	przegubowe	sztywne



Ryc. 6.4. Wpływ rodzaju połączenia na częstotliwości drgań stropu zespolonego

Wpływ wprowadzania kolejnych usztywnień przedstawiono na ryc. 6.4. Częstotliwości drgań modeli z wprowadzonymi usztywnieniami odnoszono do częstotliwości uzyskanych na podstawie modelu 1. Skutkiem wprowadzania kolejnych usztywnień, podobnie jak wprowadzenia nieodkształcalnego zespolenia, był wzrost analizowanych częstotliwości drgań stropu. Średni wzrost częstotliwości po uwzględnieniu sztywnego połączenia podciąg-słup (model 2) wyniósł $\sim 4\%$. Sztywne połączenia zarówno podciągów, jak i belek stropowych (model 3) powodowały średni wzrost częstotliwości o $\sim 8\%$. Należy przy tym zauważyć, że podstawowa częstotliwość drgań stropu wzrosła o ponad 13%. Ostatnia modyfikacja polegająca na usztywnieniu końców słupa na poziomie ± 4 m od poziomu stropu nie miała znaczącego wpływu, chociaż niewielkie wzrosty częstotliwości również były obserwowane.

W przeprowadzonej analizie zakładano dwa skrajne rozwiązania, a mianowicie idealny przegub lub połączenie o bardzo dużej sztywności. W rzeczywistych konstrukcjach często mamy do czynienia z połączeniami podatnymi. Opracowana technika modelowania pozwala na analizę wszystkich rodzajów połączeń.

Należy również zauważyć, że oprócz modelowania sztywności połączenia można również niezależnie modelować właściwości tłumiące węzłów. Podczas analizy drgań własnych nietłumionych parametr ten nie jest brany pod uwagę, jednak rozwiązanie zagadnienia drgań wymuszonych powinno uwzględniać zjawisko tłumienia. Tłumienie drgań stropów jest oddzielnym zagadnieniem, szeroko poruszonym w literaturze [32, 100]. Jednym ze sposobów rozwiązania problemu nadmiernych drgań konstrukcji jest zastosowanie strojonych tłumików drgań TMD (ang. *tuned mass dampers*) [132, 135]. Konieczność zastosowania tłumików może wynikać zarówno z analiz wykonanych na etapie projektowania w trakcie weryfikacji stanu granicznego użyteczności jak i stwierdzenia nadmiernego poziomu drgań już w trakcie eksploatacji obiektu.



Ryc. 6.5. Zastosowanie strojonego tłumika drgań w konstrukcji stropu zespolonego [132]

Uwzględnienie obecności tłumika (por. ryc. 6.5) w modelu opracowanym w konwencji metody SES jest stosunkowo proste. Sztywny element skończony o geometrii i cechach bezwładnościowych odpowiadających masie tłumiącej zastosowanej w tłumiku należy połączyć z modelem stropu z wykorzystaniem elementu sprężysto-tłumiącego o parametrach odpowiadających tym zastosowanym w tłumiku. Optymalną lokalizację tłumika, jak również jego parametry można dobrać w sposób automatyczny, wykorzystując procedury optymalizacyjne pakietu MATLAB.

6.2. Model jednotorowego mostu kolejowego

6.2.1. Geometria obiektu

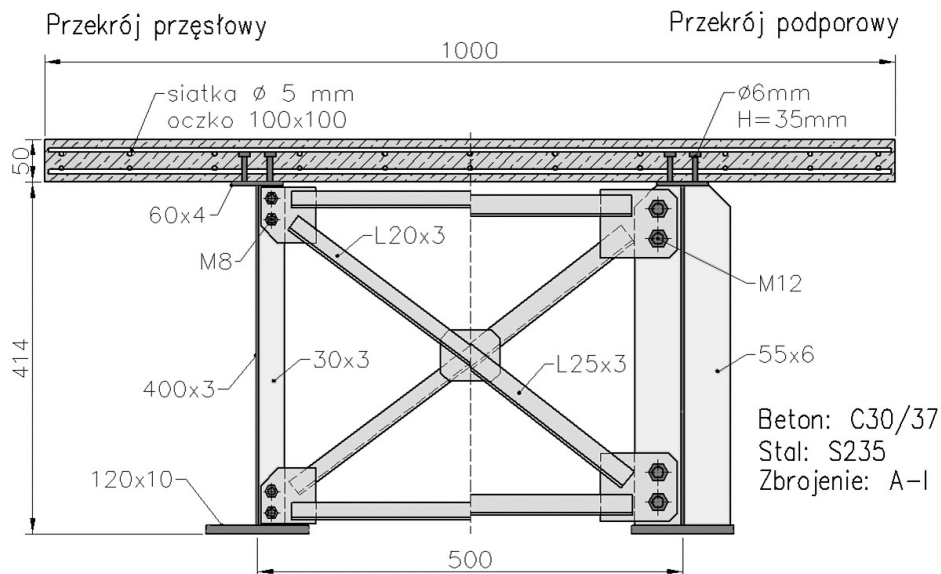
W trakcie prac nad projektem badawczym [21] opracowano projekt jednoprzęsłowego, jednotorowego mostu kolejowego. Dla uproszczenia założono stały na długości przekrój poprzeczny mostu. Zestawienie obciążeń eksploatacyjnych wykonano wg wytycznych normy [155]. Obciążenia stałe uwzględniały ciężar własny konstrukcji oraz ciężar toru jezdny, na który składały się ciężar warstwy tłucznia, podkładów i szyn kolejowych. Podstawowe parametry konstrukcji:

- liczba przęseł 1;
- rozpiętość przęsła $L = 25$ m;
- szerokość pomostu $B = 5$ m;
- schemat statyczny belka wolnopodparta;
- liczba dźwigarów nośnych 2;
- kategoria stali konstrukcyjnej S235;
- klasa betonu C30/37.

Ostateczny przekrój poprzeczny wymagany do spełnienia warunków stanu granicznego nośności oraz użytkowalności składał się z płyty żelbetowej o grubości 25 cm zespolonej z dwoma dźwigarami rozsuniętymi na odległość 250 cm o wymiarach: pas górny 300 x 20 mm,

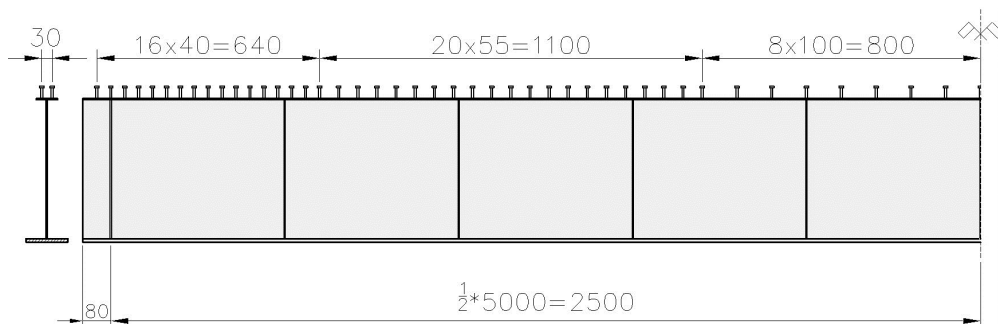
średnik 2000 x 15 mm, pas dolny 600 x 50 mm. Żebra usztywniające średnik przyjęto jednostronne od wewnętrznej strony dźwigara, rozstawione co 2,5 m. Żebra podporowe zaprojektowano jako dwustronne. Stężenia poprzeczne typu X rozstawiono co 5 m.

Prace nad projektem wymagały wykonania modelu mostu w skali 1:5. Zgodnie z prawami podobieństwa [44] zdecydowano się zachować pełne odzwierciedlenie geometryczne (skala 1:5) oraz zastosować materiały o takich samych właściwościach. Podobne podejście do badań prowadzonych na modelu mostu w skali 1:6 zastosowali autorzy opracowania [134]. Przekrój poprzeczny modelu mostu w skali 1:5 przedstawiono na ryc. 6.6.



Ryc. 6.6. Przekrój poprzeczny przez model mostu w skali 1:5

Jak widać, składa się on z dwóch dźwigarów stalowych o całkowitej wysokości 414 mm, rozsuniętych na odległość 500 mm. Dźwigary stalowe wykonano w specjalistycznej wytwórni konstrukcji stalowych. Połączono je układem stężeń typu X rozmieszczonych co 1,0 m i wykonanych z kątowników równoramiennych. Na dźwigarach spoczywała płyta żelbetowa o wymiarach 1000 x 50 mm. Zbrojenie płyty żelbetowej wykonano w postaci dwóch warstw siatki zbrojeniowej z prętów o średnicy 5 mm i wymiarach oczka 100x100 mm.

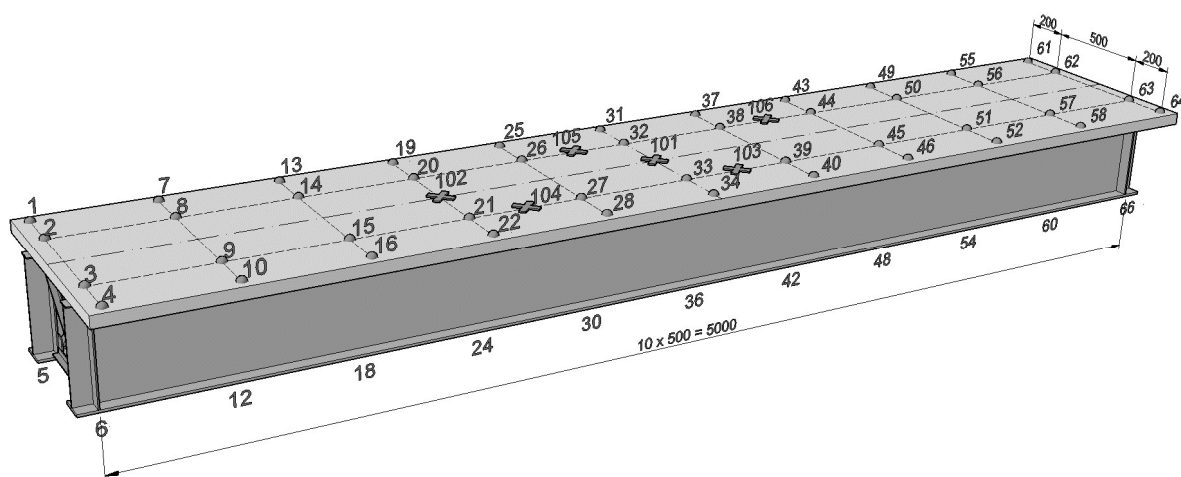


Ryc. 6.7. Rozmieszczenie sworzni zespalających na dźwigarach modelu mostu

Zespolecie części stalowej i żelbetowej zrealizowano w postaci stalowych sworzni zespalających rozmieszczonych parami. Zastosowano sworznie o średnicy 6 mm i wysokości 35 mm. Rozmieszczenie elementów zespalających na długości dźwigarów stalowych przedstawiono na ryc. 6.7. Jak widać, rozmieszczono je nierównomiernie zgodnie z rozkładem siły rozwarstwiającej na styku stal-beton, będącej funkcją sił tnących, które osiągają maksymalne wartości w obrębie podpór.

6.2.2. Badania doświadczalne

Badania mostu, mające na celu określenie jego charakterystyk dynamicznych, prowadzone były przy schemacie konstrukcji wolnopodpartej. Siatkę punktów pomiarowych zastosowaną w trakcie badań przedstawiono na ryc. 6.8.

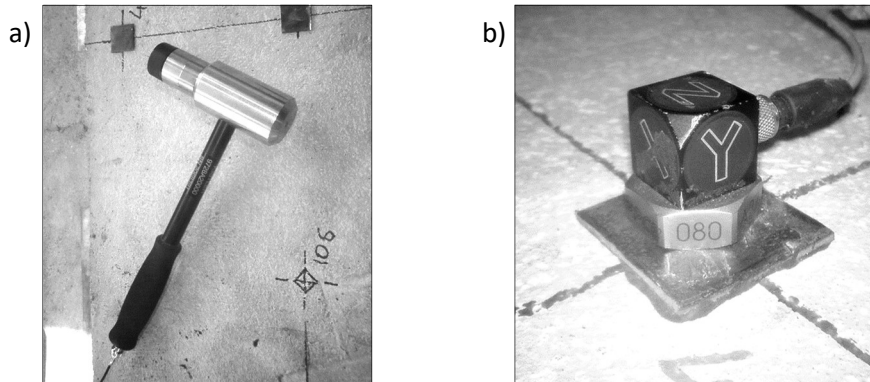


Ryc. 6.8. Siatka punktów pomiarowych na moście

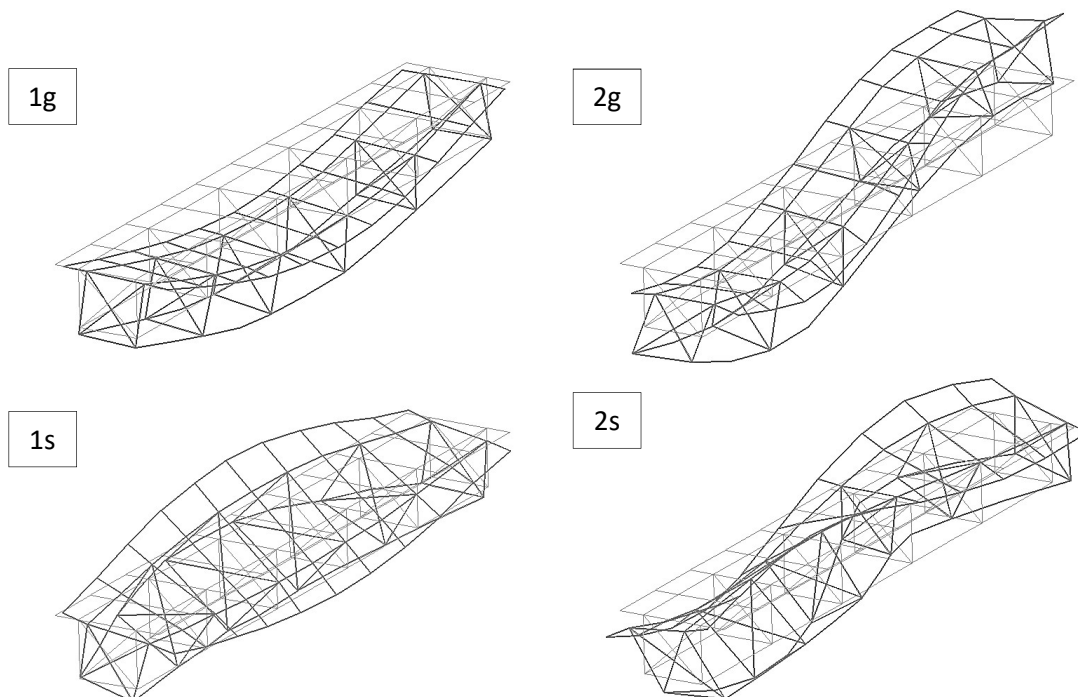
Obejmowała ona łącznie 66 punktów pomiarowych, po sześć punktów w 11 przekrojach pomiarowych rozmieszczonych po długości mostu w odstępach co 500 mm. Na pasach dolnych dźwigarów stalowych rozmieszczono 22 punkty, pozostałe 44 znajdowały się na górnej powierzchni płyty żelbetowej. Tak samo jak w przypadku badań belek zespolonych omówionych w podrozdziale 5.4.4 również w trakcie badań mostu zastosowano siłowe wymuszenie impulsowe oraz pomiar odpowiedzi układu za pomocą trójosiowych piezoelektrycznych czujników przyspieszeń. Biorąc pod uwagę większe wymiary mostu w stosunku do badanych wcześniej belek zespolonych, zastosowano większy młotek modalny Kistler 9728A o masie 1500 g. Wymuszenia drgań konstrukcji mostu dokonywano w sześciu punktach zlokalizowanych na górnej powierzchni płyty żelbetowej. Punkty te ponumerowano od 101 do 106. Punkty 101 i 102 znajdowały się na podłużnej osi symetrii mostu. Punkty 103 i 104 leżały nad osią prawego dźwigara, natomiast punkty 105 i 106 nad osią lewego dźwigara nośnego. Na ryc. 6.9 pokazano stosowany w trakcie badań młotek oraz jeden z akcelerometrów zainstalowany na górnej powierzchni płyty żelbetowej.

Tabela 6.2. Wyniki badań doświadczalnych modelu mostu zespolonego w skali 1:5

Postać drgań	Częstotliwość f [Hz]	Tłumienie modalne d [%]
1s	34,3	0,38%
1g	38,2	0,47%
2s	84,4	0,42%
2g	101,5	0,43%



Ryc. 6.9. Aparatura pomiarowa: a) młotek modalny; b) trójosiowy piezoelektryczny akcelerometr



Ryc. 6.10. Postacie drgań mostu: giętne i skrętne

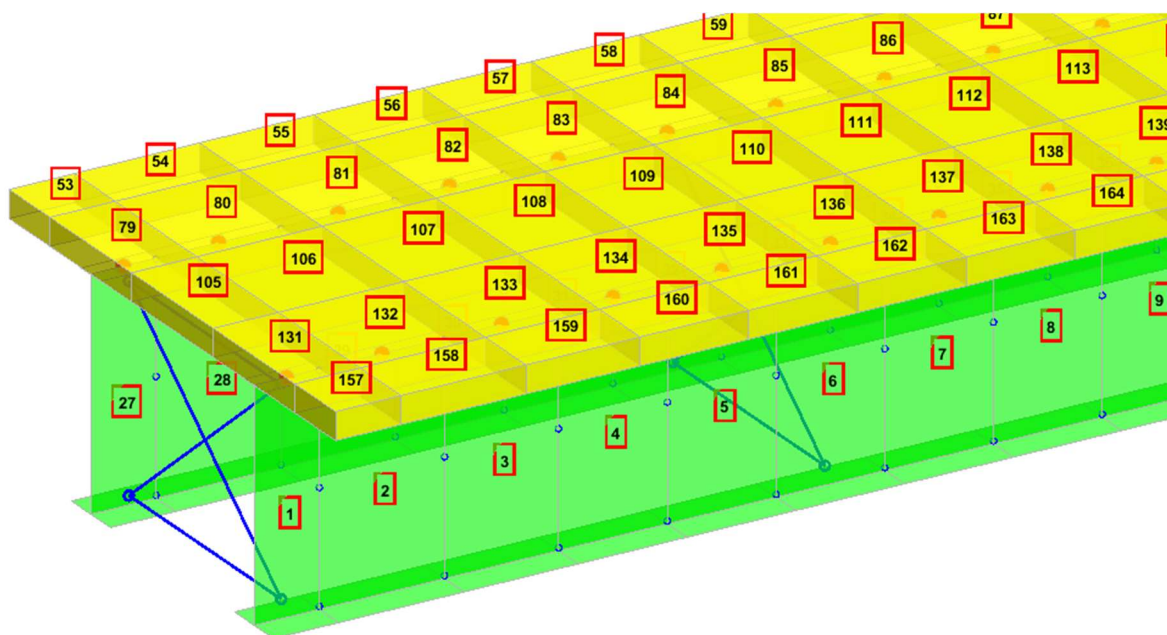
Zidentyfikowane w trakcie badań postacie drgań giętnych oraz skrętnych zostały przedstawione na ryc. 6.10. Tabela 6.2 zawiera z kolei częstotliwości oraz współczynniki tłumienia modalnego, które uzupełnione o wektory postaci drgań stanowią model modalny analizowanej konstrukcji. Analizując zidentyfikowane postacie drgań, należy zwrócić uwagę na podatność podpór, szczególnie zauważalną w przypadku drugiej formy drgań giętnych.

Pionowe składowe wektora postaci drgań są efektem znacznych sił bezwładności wynikających z wysokiej częstotliwości drgań. W rzeczywistych obiektach ze względu na niższe zakresy analizowanych częstotliwości siły docisku konstrukcji do podpór obiektu skutecznie przeciwstawiają się siłom bezwładności wynikającym z drgań pionowych obiektu.

W trakcie prac nad projektem badawczym [21] analizowano właściwości dynamiczne modelu mostu nie tylko w stanie pierwotnym, ale również z wprowadzonymi lokalnymi uszkodzeniami. Analizowano wpływ uszkodzenia stężeń, uszkodzenia w pasie dolnym oraz nierównomiernego osiadania podpór na zmianę charakterystyk dynamicznych obiektu. Wyniki tych analiz dostępne są w raporcie końcowym z projektu badawczego.

6.2.3. Model SES mostu

Prace modelowe rozpoczęto od przygotowania modelu SES mostu. Rozpiętość podporowa mostu wynosi 5000 mm (całkowita długość mostu 5120 mm). Podziału pierwotnego na kierunku podłużnym dokonano na odcinki o długościach: 240 + 220 + 21·200 + 220 + 240 = 5120 mm. Tak przyjęty podział pierwotny dał model z elementami SES o długościach: 120 + 230 + 210 + 20·200 + 210 + 230 + 120 = 5120 mm. Łącznie na każdy dźwigar stalowy przypadało po 26 SES. Gęstość podziału pierwotnego i wtórnego dla płyty na kierunku wzdłuż osi mostu przyjęto analogicznie jak dla dźwigarów stalowych. Na kierunku poprzecznym zastosowano podział pierwotny na cztery odcinki, co w rezultacie dało pięć sztywnych elementów skończonych w poprzek mostu. Łączna liczba sztywnych elementów skończonych stanowiących model mostu wynosiła $2 \cdot 26 + 5 \cdot 26 = 182$ SES o łącznej liczbie stopni swobody 1092, tj. po sześć stopni swobody na każdy SES.



Ryc. 6.11. Model SES mostu zespolonego

Na ryc. 6.11 przedstawiono widok na model SES mostu zespolonego. Zastosowano te same techniki modelowania co w przypadku belek zespolonych. Kolejne SES modelujące dźwigar nośny łączono za pomocą potrójnego układu elementów sprężysto-tłumiących EST. Parametry EST ustalano zgodnie z wytycznymi zawartymi w podrozdziale 4.2.

Połączenie pomiędzy częścią stalową i żelbetową realizowano za pomocą EST skupiających właściwości sprężyste sworzni zespalających. Liczbę sworzni uwzględnianych przy ustalaniu współczynników sztywności dla każdego EST zestawiono w tabeli 6.3. Sztywność pojedynczego sworzni zespalającego ustalano z wykorzystaniem doświadczeń zdobytych podczas analizy modeli belek zespolonych. W analizowanych belkach podobnie jak w moście zastosowane było zespolenie w postaci sworzni rozmieszczonych parami. Różnica jest taka, że sworznie zastosowane w belkach miały średnicę 10 mm, a średnica sworzni w moście to 6 mm. Założono, że sztywność zespolenia na ścinanie K_h jest funkcją momentu bezwładności przekroju sworzni, natomiast sztywność zespolenia na kierunku pionowym K_v jest funkcją pola przekroju sworzni. Do analiz mostu przyjęto sztywności zespolenia ustalone jak dla belek zmniejszone zgodnie z proporcjami wymienionych parametrów przekroju sworzni.

Tabela 6.3. Określenie liczby sworzni przypadających na każdy EST modelujący zespolenie

Nr SES	Długość SES [mm]	Gęstość rozmieszczenia sworzni na danym odcinku dźwigara [mm]	Liczba sworzni w rzędzie [szt.]	Liczba sworzni na EST
1	120	40	2	6,0
2	230	40	2	11,5
3	210	40	2	10,5
4	200	47,5	2	8,4
5–9	200	55	2	7,3
10–17	200	100	2	4,0
18–22	200	55	2	7,3
23	200	47,5	2	8,4
24	210	40	2	10,5
25	230	40	2	11,5
26	120	40	2	6,0

Stężenia w modelu SES modelowano za pomocą EST łączących sąsiadujące SES modelujące dźwigary stalowe. Pokazano to na ryc. 6.11. Sztywność dla EST modelujących stężenie przyjmowano wyłącznie na kierunku równoległym do osi stężenia. Określono ją, biorąc pod uwagę długość oraz pole przekroju stężenia. Dla uproszczenia modelu nie rozróżniano stężeń pośrednich i podporowych. Przyjmowano parametry jak dla stężeń pośrednich. Dla elementów ukośnych stężeń przyjęto sztywność $4 \cdot 10^7$ N/m, natomiast dla elementów poziomych $5 \cdot 10^7$ N/m. Lokalne układy współrzędnych dla EST modelujących

elementy ukośne stężenia obrócone były względem globalnego układu współrzędnych o kąt $38,4^\circ$, co zostało uwzględnione podczas budowy globalnych macierzy sztywności układu.

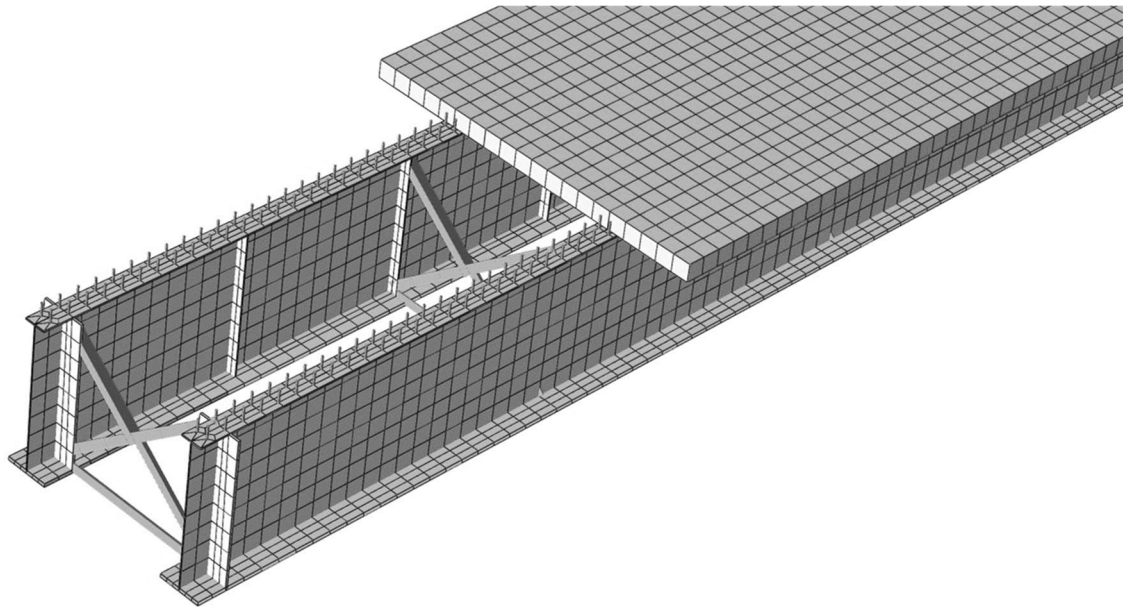
Ciążary objętościowe zastosowanych materiałów przyjęto tak, aby masa modelu odzwierciedlała masę mostu, którą ustalono w trakcie badań doświadczalnych $m = 886$ kg. Przyjęto gęstość stali o wartości 8250 kg/m³. Jest to wartość zastępcza uwzględniająca wpływ masy stężeń, żeber podporowych i pośrednich oraz sworzni zespalających. Łączna masa stalowej części modelu SES wyniosła 223 kg. Gęstość betonu w modelu SES przyjęto o wartości 2590 kg/m³, co dało płytę o masie 663 kg. Masa łączna oraz proporcjonalny rozkład masy na stal i beton są zgodne z ustaleniami dokonanymi w trakcie badań doświadczalnych. Moduły sprężystości podłużnej dla stali oraz dla betonu przyjęto zgodne z ustaleniami dokonanymi w trakcie identyfikacji parametrów belek. Wyboru takiego dokonano z kilku powodów. Zarówno belka, jak i most posiadają zespolenie w postaci sworzni zespalających. Stopień zbrojenia obydwu elementów jest zbliżony. Obydwa elementy wykonano z tego samego betonu. Historia obciążenia obydwu elementów również jest zbliżona. Wszystkie te powody uzasadniały słuszność takiego założenia.

Podparcie mostu w modelu SES zrealizowano na czterech EST mocowanych do nieodkształcalnych ostoj. Sztywność EST podporowych były jedynym, a zarazem kluczowym elementem, na temat którego nie posiadano informacji. Zdecydowano się sztywność podparcia K_{pdp} ustalić tak, aby uzyskać jak najlepsze dopasowanie w zakresie analizowanych częstotliwości drgań giętnych. Największy wpływ na częstotliwości drgań ma sztywność podpór na kierunku pionowym. Pozostałe sztywności, w szczególności ta na kierunku równoległym do osi mostu, również odgrywają pewną rolę, jednak wpływ jest znacznie mniejszy. Przeprowadzone analizy parametryczne pozwoliły ustalić, że najlepszą zgodność wyników uzyskano dla $K_{pdp} = 6 \cdot 10^7$ N/m.

6.2.4. Referencyjny model MES

Model MES mostu podobnie jak modele belek zespolonych opracowany został w systemie ABAQUS. Most jest obiektem znacznie bardziej złożonym niż modelowane wcześniej belki zespolone. Zdecydowano się, na tyle, na ile to możliwe, stosować te same techniki modelowania, które stosowano w odniesieniu do belek zespolonych. Płytę żelbetową tak jak wcześniej modelowano za pomocą elementów S3D8I, jednak podział na grubości, inaczej niż w modelach belek zespolonych, przyjęto na jedną warstwę elementów. Decyzję taką podjęto, chcąc ograniczyć liczbę stopni swobody modelu. Wyniki wcześniejszych analiz wykazywały, że elementy C3D8I można stosować do modelowania czysto zginanej płyty, stosując jeden element na grubości, osiągając dobrą zgodność wyników. Do dyskretyzacji płyty użyto elementów sześciennych o boku 50 mm. Do modelowania dźwigarów nośnych

zastosowano powłokowe elementy z liniowymi funkcjami kształtu S4R. Środek modelowano elementami o boku 50 mm, tak samo jak płytę żelbetową. Gęstości podziału pasów dolnego, górnego oraz żeber podporowych i pośrednich uzależnione były od geometrii konstrukcji, którą w modelu wiernie odwzorowano, co widać na ryc. 6.12. Na rysunku część elementów modelujących płytę żelbetową została ukryta w celu poprawienia czytelności.



Ryc. 6.12. Model MES mostu

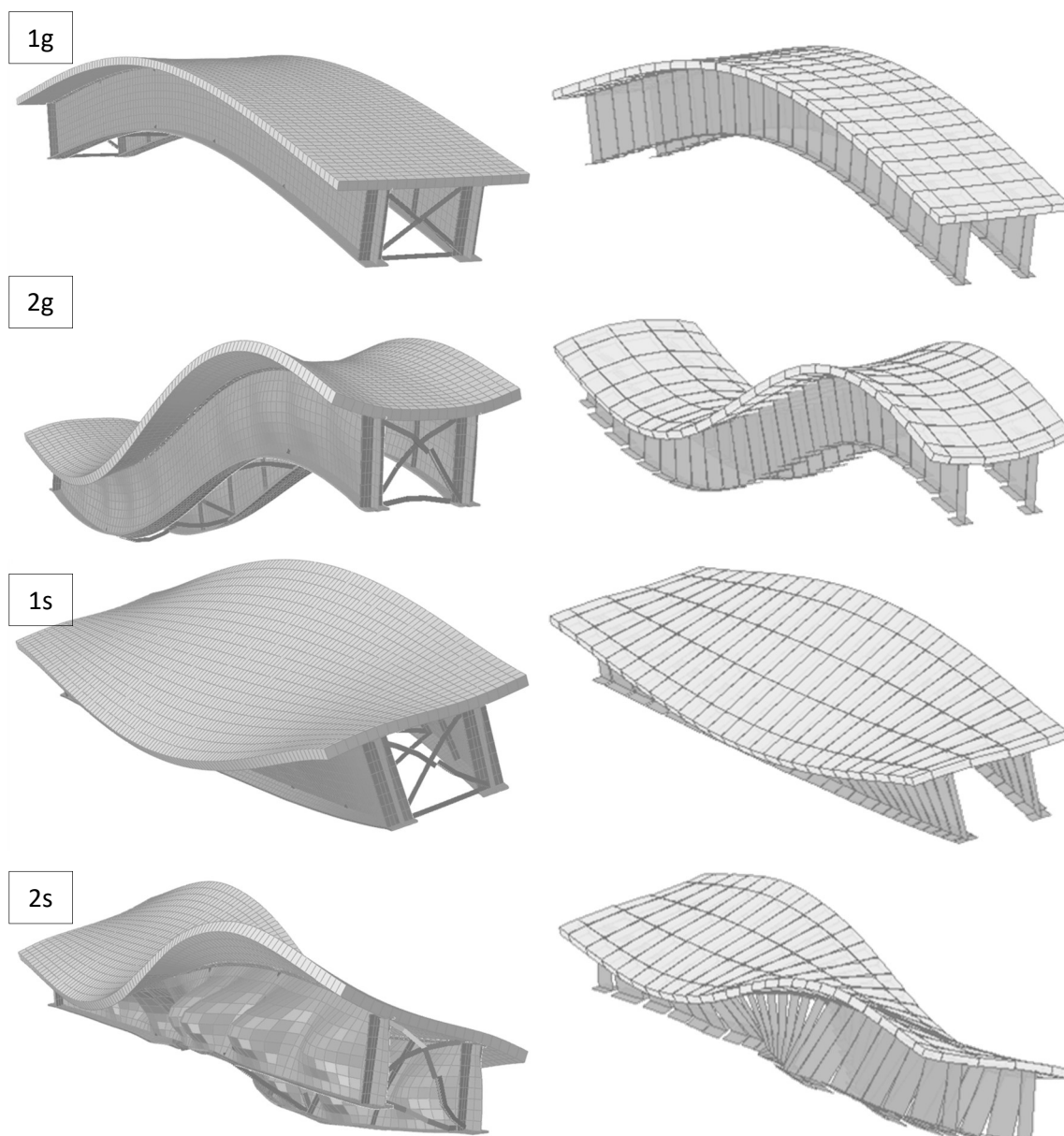
Do zamodelowania stężeń użyto elementów belkowych typu B31, którym przypisano profile kątownikowe zgodne z tymi stosowanymi w rzeczywistym obiekcie. Zespolecie modelowano, stosując skończone elementy belkowe typu B31. Gęstość rozmieszczenia sworzni starano się dobrać zgodną z faktycznym ich rozmieszczeniem w moście. Parametry dla elementów belkowych modelujących sworznie przyjmowano na podstawie dodatkowych analiz uwzględniających doświadczenia uzyskane podczas modelowania i identyfikacji parametrów modeli belek zespolonych.

Parametry materiałowe dla stali przyjmowano takie same jak podczas modelowania belek zespolonych (por. podrozdział 5.4). Gęstość betonu modelującego płytę przyjęto tak, aby masa modelu pokrywała się z masą obiektu określoną w trakcie badań doświadczalnych.

Ostatnim brakującym parametrem niezbędnym do zdefiniowania modelu była podatność sprężystych elementów wykorzystanych do modelowania podpór mostu. Uwzględnienie podatności podpór było konieczne, aby zapewnić zgodność wyników modelu z wynikami badań doświadczalnych. Każdą podporę odwzorowano za pomocą układu trzech sprężyn o kontrolowanej sztywności. Ich sztywność dobierano o takiej samej wartości jak w przypadku modelu SES.

6.2.5. Porównanie wyników badań i analiz numerycznych

Porównanie postaci drgań uzyskanych wg obydwu opracowanych modeli dyskretnych, tj. modelu MES oraz modelu SES, przedstawiono na ryc. 6.13. Nie zaobserwowano znaczących różnic pomiędzy postaciami.



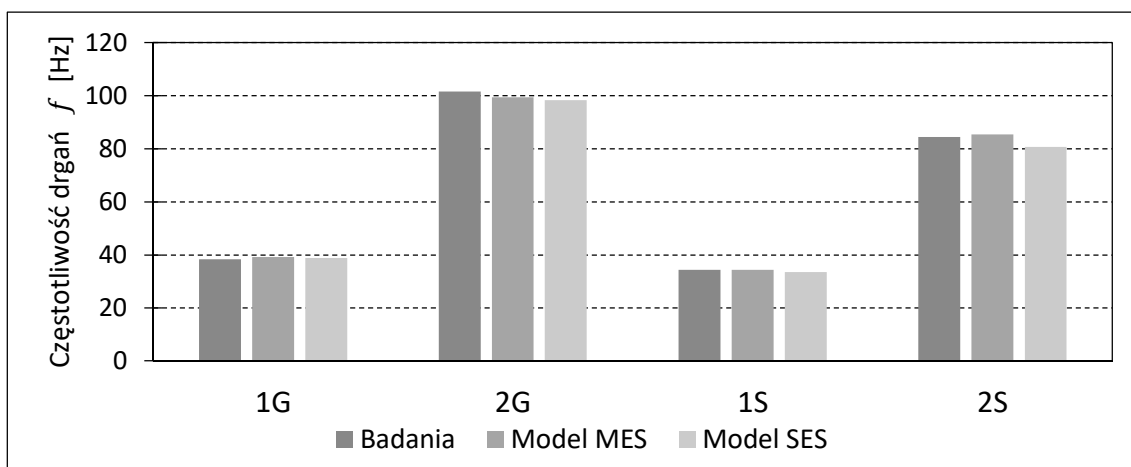
Ryc. 6.13. Porównanie postaci drgań wg modelu MES i SES

W modelu MES przy wyższych formach drgań zaobserwować można dodatkowe deformacje panelu środkowego wynikające z jego niewielkiej sztywności płytowej. W modelu SES, w którym dźwigary modelowane są za pomocą sztywnych elementów skończonych z zastosowanym podziałem wyłącznie na jednym kierunku, deformacje takie z definicji nie mogą być poprawnie odzwierciedlone. Należy jednak pamiętać, że liczba stopni swobody w opracowanym modelu MES $n_{DOF} = 71674$ jest wielokrotnie większa niż w modelu SES, gdzie

$n_{\text{DOF}} = 1092$. Z punktu widzenia analizy odpowiedzi układu na obciążenia komunikacyjne najważniejsze jest poprawne odwzorowanie kilku podstawowych postaci drgań własnych. Ograniczenie liczby stopni swobody modelu przyczynia się z kolei do znacznie krótszego czasu potrzebnego na analizę modelu.

Tabela 6.4. Porównanie częstotliwości drgań mostu

Postać drgań	Badania	Model MES		Model SES	
	f [Hz]	f [Hz]	Δ [%]	f [Hz]	Δ [%]
1G	38,2	39,2	3%	38,8	1%
2G	101,5	99,4	-2%	98,3	-3%
1S	34,3	34,3	0%	33,4	-3%
2S	84,4	85,4	1%	80,8	-4%



Ryc. 6.14. Częstotliwości drgań mostu wg badań doświadczalnych oraz modeli MES i SES

Dokładność określenia częstotliwości drgań w obydwu modelach dyskretnych również jest bardzo podobna. Różnica pomiędzy wynikami badań a wynikami analiz numerycznych jest niewielka, co pokazano na ryc. 6.14 oraz w tabeli 6.4. Uzyskane wyniki analiz potwierdzają tezę, że metoda SES może być z powodzeniem stosowana do analizy właściwości dynamicznych mostowych układów konstrukcyjnych. Za jej główną zaletę uznać należy mały stopień złożoności modelu, co może mieć kluczowe znaczenie podczas analizy w systemach monitorujących stan techniczny konstrukcji bazujących na pomiarach drgań niskoczęstotliwościowych. Metodę SES można zastosować również do analizy właściwości nie tylko samej konstrukcji nośnej obiektu, ale całego układu BTT (ang. *bridge-track-train*) [56, 94]. W trakcie analiz takich układów model pojazdu szynowego zastępowany jest często układem nieodkształcalnych brył o określonej masie i wynikających z niej cechach bezwładnościowych połączonych systemem elementów sprężystych i tłumiących. Metoda sztywnych elementów skończonych wydaje się być odpowiednia do modelowania tego typu układów. Będzie to obiektem dalszych prac prowadzonych przez autora.

7. Podsumowanie

Konstrukcje, w których głównym elementem nośnym są płyty współpracujące z belkami, są powszechnie stosowane zarówno w branży budowlanej, jak i w innych gałęziach przemysłu. Obecnie do oceny ich właściwości dynamicznych najczęściej wykorzystywane są metody numeryczne, między innymi najpopularniejsza z nich metoda elementów skończonych czy metoda elementów brzegowych. Celem niniejszej monografii była ocena możliwości zastosowania w tym zakresie alternatywnej metody, jaką jest metoda sztywnych elementów skończonych. Dotychczas metoda stosowana była z powodzeniem głównie podczas analizy konstrukcji mechanicznych takich jak maszyny, manipulatory robotów, pojazdy czy obrabiarki.

Zastosowanie metody SES do analizy konstrukcji płytowych o ciągłym rozkładzie masy z uwzględnieniem współpracy z belkami, które usztywniają płytę, wymagało przeprowadzenia szeregu analiz pozwalających na ocenę poprawności uzyskiwanych rozwiązań. Wiele elementów pracy nosi, według opinii autora, znamiona nowości w stosunku do dotychczasowych opracowań. Spośród nich można wymienić:

- opracowanie alternatywnego sposobu rozmieszczania elementów sprężysto-tłumiących EST łączących sztywne elementy skończone SES podczas modelowania dwuteowych elementów belkowych, polegającego na zastąpieniu pojedynczego elementu układem trzech niezależnych EST umieszczanych odpowiednio w osiach pasów oraz środka dwuteownika;
- modyfikację techniki modelowania płyt prostokątnych dyskretyzowanych dwukierunkowo poprzez zastosowanie sztywnych elementów skończonych o sześciu stopniach swobody łączonych za pomocą elementów sprężysto-tłumiących charakteryzowanych blokiem sześciu współczynników sztywności (trzy współczynniki sztywności translacyjnej oraz trzy współczynniki sztywności rotacyjnej);
- opracowanie metody modelowania płyt o wysokim stosunku długości do szerokości z zastosowaniem dyskretyzacji jednokierunkowej z uwzględnieniem skorygowanej wartości współczynnika sztywności rotacyjnej;
- opracowanie techniki modelowania podatnej oraz sztywnej warstwy stykowej płyta-belka ze szczególnym uwzględnieniem łączników stosowanych w stalowo-betonowych konstrukcjach zespolonych;
- opracowanie autorskiego wielomodułowego oprogramowania pozwalającego na analizę prostych oraz złożonych układów płytowo-belkowych w zakresie analizy drgań własnych oraz wymuszonych;

- weryfikację opracowanego oprogramowania z wykorzystaniem wyników rozwiązań ścisłych wg teorii Timoshenki w odniesieniu do elementów belkowych oraz teorii Reissnera-Mindlina w odniesieniu do płyt umiarkowanie grubych;
- weryfikację oprogramowania z wykorzystaniem wyników analiz numerycznych własnych oraz innych badaczy przeprowadzonych z wykorzystaniem metody elementów skończonych MES;
- walidację oprogramowania polegającą na porównaniu wyników analiz modeli SES z wynikami własnych badań doświadczalnych jednomateriałowych elementów prostych (płyta, belka) oraz wielomateriałowych elementów złożonych (stalowo-betonowa belka zespolona z zespoleniem podatnym).

Przedstawiona technika modelowania układów płytowo-belkowych w konwencji metody sztywnych elementów skończonych wraz z opracowanym oprogramowaniem mogą być z powodzeniem stosowane podczas analizy właściwości dynamicznych szeregu rzeczywistych konstrukcji inżynierskich, włączając w to zarówno obiekty budownictwa kubaturowego, jak i obiekty inżynierskie, np. konstrukcje mostowe. Jak wykazano w pracy, metoda SES zapewnia bardzo dobrą zgodność wyników w porównaniu z wynikami rozwiązań ścisłych, rozwiązań numerycznych bazujących na innych metodach, jak również z wynikami badań doświadczalnych. Modele opracowane w konwencji metody SES cechują się niewielkim stopniem złożoności (mała liczba stopni swobody), co przekłada się na krótki czas potrzebny na rozwiązanie zadania jednostkowego. Ma to szczególne znaczenie, jeśli prowadzone są analizy wymagające wielokrotnego przeliczania modelu, np. analizy parametryczne czy optymalizacyjne.

Podsumowując przedstawione wyniki analiz i badań przeprowadzonych w ramach niniejszej pracy, można stwierdzić, że założone cele zostały w pełni osiągnięte, a zakres pracy zrealizowany. Opracowane oprogramowanie ma w opinii autora duży potencjał dalszego rozwoju. Kierunki dalszych prac będą uwzględniały w szczególności:

- opracowanie techniki modelowania jedno- i wielomateriałowych płyt ortotropowych;
- modyfikację oprogramowania pozwalającą na analizę konstrukcji stropów płytowo-belkowych o zredukowanej wysokości typu *slim floor*;
- analizę wpływu obecności strojonych tłumików drgań na właściwości dynamiczne konstrukcji płytowo-belkowych (implementacja oprogramowania w środowisku MATLAB pozwalała będzie na wykorzystania wbudowanych procedur optymalizacyjnych do ustalenia optymalnych właściwości oraz lokalizacji tłumików);
- rozwój oprogramowania w zakresie modelowania obiektów inżynierskich z uwzględnieniem specyfiki obciążeń komunikacyjnych, a w zakresie obiektów kolejowych z dodatkowym uwzględnieniem współpracy w układzie most-tor-pociąg.

8. Bibliografia

8.1. Książki i artykuły

- [1] ABAQUS Theory Manual. Wersja 6.10, ABAQUS, Inc. 2010.
- [2] Abramowicz M.: *Modelowanie drgań przestrzennych i identyfikacja parametrów dyskretnych modeli stalowo-betonowych belek zespolonych*. Rozprawa doktorska. Szczecin, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, 2014.
- [3] Abramowicz M., Berczyński S., Wróblewski T.: Parameter estimation of a discrete model of reinforced concrete slab. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 55(2), 407–420.
- [4] Adamiec-Wójcik I.: Dynamics of a drilling vehicle. *Machine Vibration*, 1993, 2, 223–228.
- [5] Adamiec-Wójcik I.: Interaction between vibrations of flexible links and base motion manipulators. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2002, 40(2), 1–15.
- [6] Adamiec-Wójcik I.: *Modelling dynamics of multibody system using homogenous transformations*. Bielsko-Biała, Wydawnictwo Akademii Techniczno-Humanistycznej, 2003.
- [7] Adamiec-Wójcik I.: Modelling of systems of collecting electrodes of electrostatic precipitators by means of the rigid finite element method. *Archive of Mechanical Engineering*, 2011, 58(1), 27–47.
- [8] Adamiec-Wójcik I., Nowak A., Wojciech S.: Comparison of methods for vibration analysis of electrostatic precipitators. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, 27(1), 72–79.
- [9] Adamiec-Wójcik I., Nowak A., Wojciech S.: Modelling plates and shells by means of the rigid finite element method. *Archive of Mechanical Engineering*, 2015, 62(1), 101–114.
- [10] Adamiec-Wójcik I., Wojciech S.: Application of the rigid finite element method in dynamic analysis of plane manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 1993, 28(3), 327–334.
- [11] Adamiec-Wójcik I., Wojciech S.: Metoda sztywnych elementów skończonych w modelowaniu drgań elektrofiltrów. *Modelowanie Inżynierskie*, 2012, 43, 7–14.
- [12] Akl W., El-Sabbagh A., Baz A.: Optimization of the static and dynamic characteristics of plates with isogrid stiffeners. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2008, 44(8), 513–523.
- [13] Aksu G., Ali R.: Free vibration analysis of stiffened plates using finite difference method. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, 48(1), 15–25.
- [14] Balendra T., Shanmugam N.E.: Free vibration of plated structures by grillage method. *Journal of Sound and Vibration*, 1985, 99(3), 333–350.
- [15] Bank L.C., Bednarczyk P.J.: A beam theory for thin-walled composite beams. *Composites Science and Technology*, 1988, 32, 265–277.
- [16] Barik M., Mukhopadhyay M.: A new stiffened plate element for the analysis of arbitrary plates. *Thin-Walled Structures*, 2002, 40(7), 625–639.
- [17] Barrette M., Berry A., Beslin O.: Vibration of stiffened plates using hierarchical trigonometric functions. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 235(5), 727–747.
- [18] Bathe K.J.: *Finite element procedures*. New York, Prentice-Hall, 1996.
- [19] Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2001.
- [20] Berczyński S., Wróblewski T.: Vibration of steel-concrete composite beams using the Timoshenko beam model. *Journal of Vibration and Control*, 2005, 11, 829–848.
- [21] Berczyński S., Wróblewski T., Chodźko M., Majda P., Jarosińska M., Abramowicz M., Pełka-Sawenko A.: *Dynamika stalowo-betonowych belek zespolonych*. Projekt badawczy MNiSW N N501 0092 33 realizowany w latach 2008–2011, Szczecin, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, 2011.

- [22] Biegus A.: Przyczyny przedawaryjnego stanu technicznego płatwi hali stalowej. *Budownictwo i Architektura*, 2013, 12(2), 173–180.
- [23] Chen C.J., Liu W., Chern S.M.: Vibration analysis of stiffened plates. *Computers & Structures*, 1994, 50(4), 471–480.
- [24] Chmielewski T., Zembaty Z.: *Podstawy dynamiki budowli*. Warszawa, Arkady, 1998.
- [25] Cho D., Vladimir N., Choi T.: Natural vibration analysis of stiffened panels with arbitrary edge constraints using the assumed mode method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part M Journal of Engineering for the Maritime Environment*, 2014, 229, 340–349.
- [26] Cousins T.E., Murray T.M., Harris D.K.: *Use of sandwich plate system in a Virginia bridge*. Final contract report VTRC 09-CR12. Charlottesville, Virginia Transportation Research Council, 2009.
- [27] Cowper G.R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33, 335–340.
- [28] De Silva C.W.: *Vibration. Fundamentals and practice*. Boca Raton, CRC Press, 2000.
- [29] Dong S., Alpdogan C., Taciroglu E.: Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(13), 1651–1665.
- [30] Dourakopoulos J.A., Sapountzakis E.J.: Nonlinear dynamic analysis of plates stiffened by parallel beams with deformable connection. *Advances in Civil Engineering*, 2014, ID 942763.
- [31] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*. Tom I. Warszawa, WNT, 2003.
- [32] Ebrahimpour A., Sack R.L.: A review of vibration serviceability criteria for floor structures. *Computers & Structures*, 2005, 83(28-30), 2488–2494.
- [33] Eisele M.: Bauen mit systemen: Planung und umsetzung. *7 Europäischer Kongress (EBH 2014) Bauen mit Holz im urbanen Raum*. Köln, 2014.
- [34] Filiatrault A., Folz B., Foschi R.O.: Finite-strip free-vibration analysis of wood floors. *Journal of Structural Engineering*, 116(8), 2127–2142.
- [35] Filon L.N.G.: On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross – section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1903, ser. A, 201, 63–155.
- [36] Föppl A.: *Vorlesungen über Technische Mechanik, III Teil Festigkeitslehre*. Leipzig, Taubner, 1927.
- [37] Freund J., Karakoc A.: Shear and torsion correction factors of Timoshenko beam model for generic cross sections. *Research on Engineering Structures and Materials*, 2016, 2, 19–27.
- [38] Furtak K.: *Mosty zespolone*. Warszawa–Kraków, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
- [39] Goens E.: Über die Bestimmung des Elastizitätsmodule von Staben mit Hilfe von Biegungsschwingungen. *Annalen der Physik*, 1931, 5(11), 649–678.
- [40] Gupta B.V.R., Ganesan N., Narayanan S.: Finite element free vibration analysis of damped stiffened panels. *Computers & Structures*, 1986, 24(3), 485–489.
- [41] Hamedani S.J., Khedmati M.R., Azkat S.: Vibration analysis of stiffened plates using finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2012, 9(1), 1–20.
- [42] Harik I.E., Guo M.: Finite element analysis of eccentrically stiffened plates in free vibration. *Computers & Structures*, 1993, 49(6), 1007–1015.
- [43] Holopainen T.P.: Finite element free vibration analysis of eccentrically stiffened plates. *Computers & Structures*, 1995, 56(6), 993–1007.
- [44] Hosdorf H.: *Statyka modelowa*. Warszawa, Arkady, 1975.
- [45] Huang L., Sheikh A.H., Ng C.T., Griffith M.C.: An efficient finite element model for buckling analysis of grid stiffened laminated composite plates. *Computers & Structures*, 2015, 122, 41–50.
- [46] Hutchinson J.R.: Shear coefficients for Timoshenko beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 2000, 68(1), 87–92.

- [47] Hutchinson J.R.: Transverse vibration of beams, exact versus approximate solutions. *Journal of Applied Mechanics*, 1981, 48(12), 923–928.
- [48] Hutchinson J.R.: Vibrations of thick free circular plates, exact versus approximate solutions. *Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51(3), 581–585.
- [49] Hutchinson J.R., Zillmer S.D.: On the transverse vibration of beams of rectangular cross-sections. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, 53(1), 39–44.
- [50] Jarosińska M.: *Detekcja uszkodzeń stalowo-betonowych belek zespolonych metodami analizy modalnej*. Rozprawa doktorska. Szczecin, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, 2014.
- [51] Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W.: *Wytrzymałość materiałów*. Część 1. Warszawa, Arkady, 1985.
- [52] Kaliński K.: *Metoda elementów skończonych w obliczeniach drgań układów mechanicznych ze sprzężeniem zwrotnym*. Gdańsk, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2012.
- [53] Kaneko T.: On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *Journal of Physics*, 1975, Ser. D, 8, 1927–1936.
- [54] Katsikadelis J.T.: The analog equation method – a powerful BEM-based solution technique for solving linear and nonlinear engineering problems. *Transactions on Modelling and Simulation*, 1994, 7, 167182.
- [55] Kirk C.L.: Natural frequencies of stiffened rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1970, 13(4), 375–388.
- [56] Kłasztorny M.: *Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkobieżnymi*. Warszawa, WNT, 2005.
- [57] Koko T.S., Olson M.D.: Vibration analysis of stiffened plates by super elements. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(1), 149–167.
- [58] Kruszewski J., Sawiak S., Wittbrodt E.: *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*. Arkady, Warszawa 1984.
- [59] Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S.: *Metoda sztywnych elementów skończonych*. Warszawa, Arkady, 1975.
- [60] Kruszewski J., Sawiak S., Wittbrodt E.: *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji*. Warszawa, WNT, 1999.
- [61] Lawson R.M., Mullett D.L., Rackham J.W.: *Design of asymmetric slimflor beams using deep composite decking*, Ascot, The Steel Construction Institute, 1997.
- [62] Lee J., Schultz W.W.: Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269, 609–621.
- [63] Liang Z., Lee G.C.: *Damping of structures: Part 1 – Theory of complex damping*, Buffalo, State University of New York at Buffalo, 1991.
- [64] Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S.: Transverse vibration of thick rectangular plates – I. Comprehensive sets of boundary conditions. *Computers & Structures*, 1993, 49(1), 1–29.
- [65] Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S.: Transverse vibration of thick rectangular plates – II. Inclusion of oblique internal line supports. *Computers & Structures*, 1993, 49(1), 31–58.
- [66] Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S.: Transverse vibration of thick rectangular plates – III. Effects of multiple eccentric internal ring supports. *Computers & Structures*, 1993, 49(1), 59–67.
- [67] Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S.: Transverse vibration of thick rectangular plates – IV. Influence of isotropic in-plane pressure. *Computers & Structures*, 1993, 49(1), 69–78.
- [68] Love A.E.H.: *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge, Cambridge University Press, 1952.
- [69] Ładoga M.: *Stany graniczne podatności łączników w mostowych konstrukcjach zespolonych*. Raport PRE 52/81. Praca doktorska. Wrocław, Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki, 1981.

- [70] Łukaszewska E.: *Development of prefabricated timber-concrete composite floors*. Doctoral Thesis. Luleå, Luleå University of Technology, 2009.
- [71] Marchelek K.: *Dynamika obrabiarek*. Warszawa, WNT, 1991.
- [72] Marchelek K., Tomków J.: Vibrostability of a multidimensional machine tool-workpiece-tool system. Part I: Modeling the mechanical structure and cutting process. *Journal of Vibration and Control*, 1998, 4(2), 99–112.
- [73] Marchelek K., Tomków J.: Vibrostability of a multidimensional machine tool-workpiece-tool system. Part II: An example of vibrostability analysis made on a vertical lathe. *Journal of Vibration and Control*, 1998, 4(2), 113–130.
- [74] Mindlin R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, 18(1), 31–38.
- [75] Mindlin R.D., Deresiewicz H.: Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams. *Proceedings of the 2nd US National Congress of Applied Mechanics*, 1954, 175–178.
- [76] Mordini A., Savov K., Wenzel H.: The finite element model updating: A powerful tool for structural health monitoring bridges. *Structural Engineering International*, 2007, 17(4), s. 352–358.
- [77] Mukherjee A., Mukhopadhyay M.: A review of dynamic behaviour of stiffened plates. *The Shock and Vibration Digest*, 1986, 18(6), 3–8.
- [78] Mukherjee A., Mukhopadhyay M.: Finite element free vibration of eccentrically stiffened plates. *Computers & Structures*, 1988, 30(6), 1303–1317.
- [79] Mukhopadhyay M., Mukherjee A.: Recent advances on the dynamic behaviour of stiffened plates. *The Shock and Vibration Digest*, 1989, 21(4), 6–9.
- [80] Nänni J.: Das Eulerische Knickproblem unter Berücksichtigung der Querkräfte. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 1971, 51, 156–186.
- [81] Newlin J.A., Trayer G.W.: *Deflection of beams with special reference to shear deformation*. Washington, National Advisory Committee for Aeronautics. Technical report no. 80, 1924.
- [82] Nguyen-Thoi T., Bui-Xuan T., Phung-Van P., Nguyen-Xuan H., Ngo-Thanh P.: Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements. *Computers & Structures*, 2013, 125, 100–113.
- [83] Nowacki W. *Teoria sprężystości*. Warszawa, PWN, 1970.
- [84] Olsson R.G.: Zur Berechnung der Frequenz der Transversalschwingungen des prismatischen Stabes. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1935, 15, 245.
- [85] Olson M.D., Hazell C.R.: Vibration studies on some integral rib-stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, 50(1), 43–61.
- [86] Osiński M., Maczyński A., Wojciech S.: The influence of ship motion in regular waves on the dynamics of an off shore crane. *Archive Mechanical Engineering*, 2004, 51(2), 131–163.
- [87] Osiński M., Wojciech S.: Application of nonlinear optimisation methods to input shaping of the hoist drive of an offshore crane. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 17, 369–386.
- [88] Palani G.S., Iyer N.R., Rao T.A.: An efficient finite element model for static and vibration analysis of plates with arbitrarily located eccentric stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 166(3), 409–427.
- [89] Papachristidis A., Fragiadakis M., Papadrakakis M.: A 3D fibre beam-column element with shear modelling for the inelastic analysis of steel structures. *Comput Mech*, 2010, 45, 553–572.
- [90] Pełka-Sawenko A.: *Zastosowanie metod dostrajania modeli dyskretnych oraz transformaty falkowej do diagnostyki uszkodzeń belek zespolonych*. Rozprawa doktorska. Szczecin, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, 2015.
- [91] Peng L.X., Liew K.M., Kitipornchai S.: Buckling and free vibration analyses of stiffened plates using the FSDT mesh-free method. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 289, 421–449.

- [92] Płosa J., Wojciech S.: Dynamic analysis of a stiff weaving gripper. *Machine Vibration*, 1995, 3, 156–163.
- [93] Płosa J., Wojciech S.: Dynamics of systems with changing configuration and wit flexible beam-like links. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, 35, 1515–1534.
- [94] Podworna M.: Dynamic response of steel-concrete composite bridges loaded by high-speed train. *Structural Engineering and Mechanics*, 2017, 62(2), 179–196.
- [95] Premorov M., Dobrila P.: Experimental analysis of timber–concrete composite beam strengthened with carbon fibers. *Construction and Building Materials*, 2012, 37, 499–506.
- [96] Rackham J.W., Couchman G.H., Hicks S.J.: Composite slabs and beams using steel decking: Best practice for design and construction. Berkshire, Steel Construction Institute, 2009.
- [97] Rao S.S.: *Mechanical vibrations*. New Jersey, Pearson Education International, 2004.
- [98] Reissner E.: On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1947, 5, 55–68.
- [99] Roark R. J.: *Roark's formulas for stress and strain*. 3d ed. New York, McGraw–Hill, 1954.
- [100] Saidi I., Gada E.F., Wilsona J.L., Haritos N.: Development of passive viscoelastic damper to attenuate excessive floor vibrations. *Engineering Structures*, 2011, 33, 3317–3328.
- [101] Sapountzakis E.J.: Dynamic analysis of composite steel-concrete structures with deformable connection. *Computers and Structures*, 2004, 82, 717–729.
- [102] Sapountzakis E.J., Katsikadelis J.T.: Interface forces in composite steel–concrete structure. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37, 4455–4472.
- [103] Sapountzakis E.J., Mokos V.G.: An improved model for the dynamic analysis of plates stiffened by parallel beams. *Engineering Structures*, 2008, 30, 1720–1733.
- [104] Sapountzakis E.J., Mokos V.G.: Shear deformation effect in the dynamic analysis of plates stiffened by parallel beams. *Acta Mechanica*, 2009, 204, 249–272.
- [105] Sapountzakis E.J., Mokos V.G.: Vibration analysis of 3-D composite beam elements including warping and shear deformation effects. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306, 818–834.
- [106] Shi P., Kapania R.K., Dong C.Y.: Vibration and buckling analysis of curvilinearly stiffened plates using finite element method. *AIAA Journal*, 2015, 53, 1319–1335.
- [107] Simo J.C., Rifai M.S.: A class of assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, 29, 1595–1638.
- [108] Smith A.L., Hicks S.J., Devine P.J.: *Design of floors for vibration: A new approach*, Ascot, The Steel Construction Institute, 2009.
- [109] Srivastava A.K.L.: Vibration of stiffened plates with cutout subjected to partial edge loading. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series A*, 2012, 93, 129–135.
- [110] Srivastava A.K.L., Datta P.K., Sheikh A.H.: Buckling and vibration of stiffened plates subjected to partial edge loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2003, 45, 73–93.
- [111] Srivastava A.K.L., Datta P.K., Sheikh A.H.: Dynamic instability of stiffened plates subjected to non-uniform harmonic in-plane edge loading. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 262, 1171–1189.
- [112] Srivastava A.K.L., Datta P.K., Sheikh A.H.: Dynamic stability of stiffened plates with cutout subjected to harmonic in-plane partial edge loading. *International Journal of Crashworthiness*, 2005, 10, 403–417.
- [113] Srivastava A.K.L., Datta P.K., Sheikh A.H.: Transverse vibration of stiffened plates with cutouts subjected to in-plane uniform edge loading at the plate boundary. *Shock and Vibration*, 2004, 11, 9–19.
- [114] Srivastava A.K.L., Pandey S.R., Kumar A.: Dynamical analysis of stiffened plates under patch loading. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 18, 537–553.
- [115] Starosolski W.: *Konstrukcje żelbetowe. Tom I*, Warszawa, PWN, 2000.

- [116] Stephen N.G.: Discussion: "Shear coefficients for Timoshenko beam theory". *Journal of Applied Mechanics*, 2001, 68 (11), 959–960.
- [117] Stephen N.G.: Mindlin plate theory: Best shear coefficient and higher spectra validity. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 202(4), 539–553.
- [118] Stephen N.G.: Timoshenko's shear coefficient from a beam subjected to gravity loading. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47(1), 121–127.
- [119] Szczotka M.: Dynamic analysis of an offshore pipe laying using the reel method. *Acta Mechanica*, 2011, 27(1), 44–55.
- [120] Szczotka M.: *Metoda sztywnych elementów skończonych w modelowaniu nieliniowych układów offshore*. Gdańsk, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 2011.
- [121] Szczotka M.: Pipe laying simulation with an active reel drive. *Ocean Engineering*, 2011, 37(7), 539–548.
- [122] Szczotka M., Wojciech S., Maczyński A.: Mathematical model of a pipelay spread. *Archive Mechanical Engineering*, 2007, 54, 27–46.
- [123] Szczotka M., Wojciech S.: Model for simulation of vehicle dynamics. *Archive Mechanical Engineering*, 2003, 50, 335–350.
- [124] Szilard R.: *Theories and applications of plate analysis. Classical, numerical and engineering methods*. Hoboken, John Wiley & Sons, 2004.
- [125] Szumigała E., Szumigała M., Polus Ł.: A numerical analysis of the resistance and stiffness of the timber and concrete composite beam. *Civil and Environmental Engineering Reports*, 2014, 15(4), 139–150.
- [126] Timoshenko S.P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 1921, 41, 744–746.
- [127] Timoshenko S.P.: On the transverse vibrations of bars of uniform cross-sections. *Philosophical Magazine*, 1922, 43, 125–131.
- [128] Timoshenko S.P., Gere J.M.: *Theory of elastic stability*. New York, McGraw-Hill, 1961.
- [129] Timoshenko S.P., Goodier J.N.: *Theory of elasticity*. New York, McGraw-Hill, 1970.
- [130] Uhl T.: *Komputerowo wspomaganą identyfikacją modeli konstrukcji mechanicznych*. Warszawa, WNT, 1997.
- [131] v. Kármán T., Seewald F.: *Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt. In: Über die Grundlagen der Balkentheorie*. Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1927.
- [132] Varela W.D., Battista R.C.: Control of vibrations induced by people walking on large span composite floor decks. *Engineering Structures*, 2011, 33, 2485–2494
- [133] Vörös G.M.: Buckling and free vibration analysis of stiffened panels. *Thin-Walled Structures*, 2009, 47(4), 382–390.
- [134] Wang T.L., Zong Z.H.: *Improvement of evaluation method for existing highway bridges (Final report No. FL/DOT/RMC/6672-818)*. Florida Department of Transportation, 2002.
- [135] Webster A.C., Vaicaitis R.: Application of tuned mass dampers to control vibrations of composite floor systems. *Engineering Journal AISC*, 1992, 116–124.
- [136] Wittbrodt E., Adamiec-Wójcik I., Wojciech S.: *Dynamics of flexible multibody systems. Rigid finite element method*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 2006.
- [137] Wittbrodt E., Le Quy Thuy: Operating of mechanisms and wave effects influences in the pontoon crane dynamics. *Marine Technology Transactions*, 1991, 2, 129–149.
- [138] Wittbrodt E., Lipiński K.: Comparative analysis of dynamic reaction forces for different tram vehicle carriage systems in on-curve motion. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1997, 35, 639–662.

- [139] Wittbrodt E., Osiński M.: Dynamics of luffing jibs with flexible links. *Machine Vibration*, 1993, 2, 54–62.
- [140] Wittbrodt E., Szczotka M., Maczyński A., Wjciech S.: *Rigid finite element method in analysis of dynamics of offshore structures*. Berlin, Springer, 2013.
- [141] Wittbrodt E., Wojciech S.: Application of rigid finite element method to dynamic analysis of spatial systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1995, 18(4), 891–898.
- [142] Wojciech S.: Dynamic analysis of a manipulators mounted on car chassis. *Machine Vibration*, 1993, 2, 144–149.
- [143] Wojciech S.: Dynamic analysis of manipulators with flexible links. *Archive of Mechanical Engineering*, 1990, 37(3), 169–188.
- [144] Wojciech S.: Dynamic analysis of telescoping rapiers. *Machine Vibration*, 1993, 2, 80–87.
- [145] Wojciech S.: *Dynamika płaskich mechanizmów dźwigniowych z uwzględnieniem podatności ogniów oraz tarcia i luzów w węzłach*. Łódź, ZN Politechniki Łódzkiej, 1984.
- [146] Wojnarowski J., Adamiec-Wójcik I.: Application of the rigid finite element method to modelling of free vibrations of band saw frame. *Mechanism and Machine Theory*, 2005, 40, 241–258.
- [147] Wojnarowski J., Wojciech S.: Dynamic analysis of band saw by the use of rigid finite element method. *Machine Vibration*, 1996, 5, 142–153.
- [148] Wróblewski T., Abramowicz M., Berczyński S.: Estimation of the parameters of the discrete model of a steel-concrete composite beam. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2013, 13(2), 209–219.
- [149] Wróblewski T., Berczyński S., Chodźko M., Jarosińska M., Abramowicz M., Pełka-Sawenko A.: *Identyfikacja modeli obliczeniowych stalowo-betonowych belek zespolonych*. Projekt badawczy MNiSW N N501 1921 38 realizowany w latach 2010-2013. Szczecin, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, 2013.
- [150] Wróblewski T., Jarosińska M., Abramowicz M., Berczyński S.: Experimental validation of the use of energy transfer ratio (ETR) for damage diagnosis of steel-concrete composite beams. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 55(1), 241–252
- [151] Wróblewski T., Jarosińska M., Berczyński S.: Application of ETR for diagnosis of damage in steel-concrete composite beams. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 49(1), 51–70.
- [152] Wróblewski T., Jarosińska M., Berczyński S.: Damage location in steel-concrete composite beams using energy transfer ratio (ETR). *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 51(1), 91–103.
- [153] Zienkiewicz O.C.: *Metoda elementów skończonych*. Warszawa, Arkady, 1972.
- [154] Żółtowski K.: Bridge over Vistula river in Kiezmark. Practical application of nonlinear shell FEM system. In: *Shell structures: Theory and applications*, eds. W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak. London, Taylor & Francis, Balkema, 2005.

8.2. Normy

- [155] PN-85/S-10030. *Obiekty mostowe. Obciążenia*.
- [156] PN-EN 1992-1-1: 2008. *Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*.
- [157] PN-EN 1993-1-1: 2008. *Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*.
- [158] PN-EN 1994-1-1: 2008. *Projektowanie zespolonych konstrukcji stalowo-betonowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*.

8.3. Strony internetowe

Data dostępu 01-04-2019

- [159] Materiały firmy CANAM-BRIDGES, www.canambridges.com
- [160] Materiały firmy AGACAD, www.aga-cad.com
- [161] Materiały firmy REIDSTEEL, www.steel-bridges.com
- [162] Materiały firmy ARCELORMITTAL, ds.arcelormittal.com
- [163] Materiały firmy JORDAHL & PFEIFER, www.j-p.pl
- [164] Materiały firmy PEIKKO, www.peikko.pl
- [165] Materiały firmy INTELLIGENT ENGINEERING, www.ie-sps.com

Summary

The use of the rigid finite element method to evaluate the dynamic characteristics of slab-and-beam structural systems

The monograph deals with the topic related to the analysis of dynamic characteristics of slab-and-beam structural systems. Such systems are commonly used both in the construction industry and in other branches. To solve the issue, the rigid finite element method (RFEM) was applied. This is the original Polish method used to model the dynamics of complex structural systems with susceptible constraints. Professor Jan Kruszewski formulated the bases of the method. In 1975, he published together with his group of scientists the first monograph, to sum up the work carried out on the method at the Gdańsk University of Technology. To apply the rigid finite element method to the analysis of dynamic characteristics of slabs stiffened with beams, it required the development of proprietary software and a series of analyses to check the correctness of solutions achieved. The analyses were carried out both for simple constructions such as a beam or a rectangular slab, but also for more complex systems such as a composite structure of a floor or a span of a railway bridge. The results of the analyses were compared with reference results of exact solutions, numerical analyses conducted with the use of the classical finite element method, as well as, with the results of the author's own experimental research. It has been shown that the RFEM ensures very good compliance of results when compared to the references. The models developed using RFEM feature a small degree of complexity which transfers into a short time needed to solve a unit problem. This is particularly important in the case of analyses conducted with the need to have multiple model updating, for example parametric or optimizing analyses. In the author's opinion, the software designed has a great potential for further development.

Zusammenfassung

Anwendung der Methode der starren finiten Elemente zur Beurteilung der dynamischen Eigenschaften von Plattenbalkenkonstruktionssystemen

Die Monographie widmet sich dem Thema der Analyse der dynamischen Eigenschaften von Plattenbalkenkonstruktionssystemen. Solche Systeme sind sowohl in der Baubranche als auch in anderen Industriezweigen weit verbreitet. Zur Lösung des Problems wurde die Starre-Finite-Elemente-Methode (SFEM) eingesetzt. Es handelt sich dabei um eine originelle polnische Methode zur Modellierung der Dynamik komplexer Konstruktionssysteme mit nachgiebigen Bindungen. Die Grundlagen dieser Methode wurden von Prof. Jan Kruszewski formuliert, der im Jahre 1975 zusammen mit seinem Team die erste Monographie veröffentlichte, die die an der Technischen Universität Gdańsk geführten Arbeiten an dieser Methode zusammenfasste. Die Anwendung der SFEM-Methode zur Analyse dynamischer Eigenschaften von den mit Balken versteiften Platten erforderte die Entwicklung einer eigenen Software und die Durchführung einer Reihe von Analysen zum Nachweis der Richtigkeit der erzielten Lösungen. Die Analysen wurden sowohl für einfache Konstruktionen, wie z.B. ein Balken oder eine rechteckige Platte, als auch für komplexere Systeme, wie eine Verbunddecke oder ein Eisenbahnbrückenfeld, durchgeführt. Die Analyseergebnisse wurden mit Referenzergebnissen von strengen Lösungen, von numerischen Analysen unter Verwendung der klassischen Finite-Elemente-Methode sowie mit Ergebnissen der eigenen experimentellen Untersuchungen verifiziert. Es wurde nachgewiesen, dass die SFEM-Methode eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse im Vergleich zu den Referenzergebnissen gewährleistet. Modelle, die im Rahmen der SFEM-Methode entwickelt wurden, zeichnen sich durch einen geringen Grad an Komplexität aus, was sich in einer kurzen Zeit für die Lösung einer gegebenen Aufgabe niederschlägt. Dies ist besonders wichtig, wenn Analysen durchgeführt werden, die mehrfache Modellnachberechnungen erfordern, wie z.B. parametrische oder optimierende Analysen. Nach Ansicht des Verfassers hat die entwickelte Software ein großes Weiterentwicklungspotenzial.