

B. III. 146 a.

214009

# Die technische Mechanik des Maschineningenieurs

mit besonderer Berücksichtigung  
der Anwendungen

Von

Dipl.-Ing. P. Stephan

Regierungs-Baumeister, Professor

Erster Band

Allgemeine Statik

Mit 300 Textfiguren



Berlin

Verlag von Julius Springer

1921

531.2: 621



2388/1

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in  
fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1921 by Julius Springer in Berlin.

## Vorwort.

Im Gegensatz zu der Mehrzahl der im letzten Jahrzehnt erschienenen Lehrbücher der technischen Mechanik legt das geplante Werk, von dem hier der erste Band vorliegt, den Hauptwert auf die praktischen Anwendungen.

Die theoretischen Darlegungen sind in einer Reihe vorzüglicher Bücher bis zu jedem Grade der Vertiefung und Breite der Darstellung auseinandergesetzt; es fehlte aber immer noch ein Buch, das nicht nur dem Anfänger eine Einführung in das Gebiet, sondern auch dem in der Praxis stehenden Fachmann einen Überblick über das bisher von anderer Seite Geleistete gibt. Die Unsumme geistiger und praktischer Arbeit, die in den vielen Abhandlungen unserer technischen Zeitschriften vergraben liegt, ist bisher mit Ausnahme einiger weniger Arbeiten fast gänzlich unausgenutzt und unbeachtet geblieben, oft genug nicht einmal in den beteiligten Kreisen des betreffenden Sondergebietes der Technik bekannt geworden. Z. B. wäre der Einsturz der Münchener Maximiliansbrücke vor ihrer Fertigstellung wohl vermieden worden, wenn die in Abschnitt 14 dieses Bandes gebrachten, durchaus nicht neuen Standsicherheitsuntersuchungen bei gewölbten Stützflächen allgemeiner bekannt gewesen wären.

Der Verfasser hat es sich deshalb zur Aufgabe gemacht, in langjähriger Arbeit das Wichtigste und Wesentlichste aus der technischen Zeitschriftenliteratur zu sammeln, und hofft, daß seine Arbeit dadurch nicht nur ein Lehrbuch für den Anfänger, sondern auch ein Handbuch für den werktätigen Ingenieur sein wird. Da es unmöglich ist, in der Jetztzeit eine allgemeine Maschinenlehre wie zur Zeit Weißbachs und Grashofs zu schaffen, so muß eben die Mechanik es übernehmen, in ihren Beispielen alles beizubringen, was eine praktische Maschinenlehre, wie sie unsere Zeit notwendig gebraucht, ersetzen könnte.

Freilich kommt das in dem ersten, nur die Anfangsgründe enthaltenden Bande am wenigsten zum Ausdruck; immerhin dürften unter den mitgeteilten Beispielen manche sein, die weit über das landläufige Beispielmateriale hinausgehen und so dem praktisch arbeitenden Ingenieur wertvollen Anhalt gewähren können. Um eine gewisse Vollständigkeit zu erreichen, ist der Verfasser an einigen Stellen auch über den Stoff hinausgegangen, der ausschließlich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bewältigt werden kann; der Nachweis der Richtigkeit jener Ausführungen wird an späterer Stelle erbracht werden.

Da das Buch so ausgestaltet werden mußte, daß es gleichzeitig als methodisches Lehrbuch zu benutzen ist, so sind die Anforderungen,

die es an mathematische und technische Vorkenntnisse stellt, sehr gering; es genügen die Grundlehren der Algebra bis zu den Potenzsätzen und die der Geometrie bis zu den Ähnlichkeitssätzen. Die weitergehenden Lehren der Mathematik sind in aller Kürze eingeschoben bzw. vorausgestellt. In englischen Lehrbüchern findet man vielfach diese in Deutschland oft als unwissenschaftlich verschrieene Art der Behandlung, — falls es sich nicht etwa um die Auseinandersetzung der Vektorenrechnung handelt. Sie bietet jedenfalls den Vorteil, daß der Anfänger die gerade gebrauchten Angaben aus anderen Wissensgebieten an der betreffenden Stelle vorfindet, ohne sie erst in anderen Büchern nachschlagen zu müssen oder ohne sie, was erfahrungsgemäß das häufigste ist, unverstanden hinzunehmen. Natürlich können und sollen diese eingestreuten kurzen Abschnitte kein Lehrbuch der Mathematik ersetzen; vielleicht zeigen sie aber, wie manche, auch abstrakte Gebiete der Mathematik in anschaulicher Weise entwickelt und dargestellt werden können. Daß einige Angaben über Zahlenrechnungen und ihre Fehlergrenzen an den Anfang gestellt wurden, erschien dem Verfasser angesichts der Vernachlässigung, die diese Dinge im mathematischen Unterricht der Vorstufe erfahren, eine dringende Notwendigkeit. Denn daß die Genauigkeit technischer Berechnungen infolge der Ungenauigkeit oder Unsicherheit der grundlegenden Angaben keine sehr weitgehende sein kann, ist etwas, was immer wieder betont werden muß und was der erste Abschnitt an einigen landläufigen Beispielen zeigen soll. Rein praktische Unterrichtserfahrungen veranlaßten den Verfasser auch, das Differential- $d$  durch den Druck so hervorzuheben, daß keine Verwechslungen möglich sind.

Man wird bei einer genaueren Durchsicht des Bandes finden, daß die grundlegenden Tatsachen, Erfahrungen und Versuche mit einer gewissen Breite behandelt werden, daß dagegen die weiteren Ausführungen kürzer und knapper gehalten sind. Es genügt das auch vollständig, denn wenn die Grundlagen hinreichend klar geworden sind, bereiten die weiteren Entwicklungen keine wesentlichen Schwierigkeiten. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, die größtmögliche Anschaulichkeit zu erreichen; zu dem Zweck wurde ein reichhaltiges Figurenmateriale neu gezeichnet.

Die folgenden Bände werden enthalten:

Band II: Die Statik der Maschinenteile,

Band III: Die Grundzüge der Bewegungslehre und die Dynamik starrer Körper,

Band IV: Die Hauptsätze der Festigkeitslehre und ihre Anwendungen.

Es ist dafür vorgesorgt, daß diese Bände bis Ostern 1922 erscheinen können.

Altona, im Dezember 1920.

P. Stephan

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Die Grundlehren der Statik . . . . .	1
1. Längen, Flächen, Räume . . . . .	1
2. Körper und ihre Zustände . . . . .	9
3. Kräfte . . . . .	10
4. Kraft, Flächendruck, Längenbelastung . . . . .	14
II. Die Kräfte und Drehmomente . . . . .	18
5. Kräfte in derselben Wirkungslinie . . . . .	18
6. Das Kräftedreieck . . . . .	20
7. Das ebene Kräftevieleck . . . . .	38
8. Kräfte im Raum an einem Punkt . . . . .	42
9. Parallele Kräfte in derselben Ebene . . . . .	49
10. Kräftepaare . . . . .	57
11. Das Seileck für beliebig gerichtete Kräfte . . . . .	75
12. Beliebige im Raum wirkende Kräfte . . . . .	82
III. Das Gleichgewicht . . . . .	89
13. Der Schwerpunkt . . . . .	89
14. Formen des Gleichgewichtes . . . . .	121
15. Die Standsicherheit . . . . .	128
16. Das ausgespannte Seil . . . . .	142
IV. Eingeschobene Grundlehren der Mathematik	
a) Trigonometrie . . . . .	27
b) Geometrische Beziehungen im Raum . . . . .	87
c) Differential- und Integralrechnung I . . . . .	104
d) Differential- und Integralrechnung II . . . . .	147





## I. Die Grundlehren der Statik.

Die technische Mechanik ist die Lehre von den Kräften und dem Zusammenhang zwischen den Kräften und den Bewegungen bzw. Formänderungen der Körper, und zwar gibt die Mechanik diese Zusammenhänge nach Maß und Zahl an. Sie benutzt zu dem Zweck alle Hilfsmittel der Mathematik und Rechenkunst unter Zugrundelegung von vereinbarten bzw. zum Teil gesetzlich vorgeschriebenen Maßeinheiten.

### 1. Längen, Flächen, Räume.

Als Körper bezeichnet die Stereometrie, ein Zweig der Mathematik, der sich ausschließlich mit der Erörterung der räumlichen Abmessungen befaßt, ein beliebiges Raumgebilde von gewisser Form und festgelegten Abmessungen.

Als Raummaß gilt in der technischen Praxis des europäischen Festlandes das Kubikmeter ( $m^3$ ) bzw. seine Unterteile Kubikdezimeter ( $dm^3$ ) und Kubikzentimeter ( $cm^3$ ).

$$\begin{aligned} 1 m^3 &= 1000 dm^3 \\ 1 dm^3 &= 1000 cm^3. \end{aligned}$$

Es ist ebenso wie das Flächenmaß (S. 3) aus dem Längenmaß abgeleitet.

Nur kleine Rauminhalte können unmittelbar, entweder bei Flüssigkeiten mit dem Meßgefäß oder bei festen Körpern mit dem Pyknometer, einer genau ausgemessenen Glasflasche mit Wasserinhalt, und einer Wage bestimmt werden. Sonst findet man die Rauminhalte durch Rechnung nach Aufmessung mehrerer Längen.

Das Längenmaß der technischen Praxis des europäischen Festlandes ist das Meter (m). Es ist der gerade Abstand zweier Striche auf dem im Bureau des Poids et Mesures in Breteuil aufbewahrten Urmaßstab, und zwar bei  $0^\circ C$ .

$1 m = \frac{1}{40\,000\,905}$  des auf einem Meridian in Höhe des Meeresspiegels gemessenen Umfanges der Erde<sup>1)</sup>.

Ferner werden benutzt die Unterteile Dezimeter (dm), Zentimeter (cm), Millimeter (mm),

$$\begin{aligned} 1 m &= 10 dm, \\ 1 dm &= 10 cm, \\ 1 cm &= 10 mm, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Wallisch, Astronom. Nachrichten 1915.

und das vielfache Dekameter (Dm) in einzelnen Fällen, sonst für große Längen das Kilometer (km),

$$\begin{aligned} 1 \text{ Dm} &= 10 \text{ m,} \\ 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m.} \end{aligned}$$

Außer geraden Strecken können auch wenig gekrümmte mit einem hinreichend biegsamen Maßstab gemessen werden oder durch Zerlegung in kleine Einzelstrecken, die genau genug als gerade aufgemessen werden können.

Zeichnerisch läßt sich der Kreisbogen  $\widehat{AB} = \alpha$  auf seiner Tangente als  $\overline{AC}$  mit großer Annäherung auftragen, wenn man  $\overline{BA}$  um die Hälfte über  $A$  hinaus nach  $D$  verlängert und mit  $\overline{DB}$  aus  $D$  den Kreisbogen  $\widehat{BC}$  schlägt (Fig. 1)<sup>2)</sup>. Soll die gerade Strecke  $\overline{AC}$  auf einen gegebenen Kreisbogen, den sie in  $A$  tangiert, als  $\widehat{AB}$  aufgetragen werden (Fig. 2), so wird  $\overline{AD} = \frac{1}{4} \overline{AC}$  gemacht und aus  $D$  mit  $\overline{DC}$  der Kreisbogen  $\widehat{CB}$  geschlagen<sup>2)</sup>.

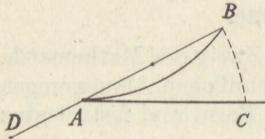


Fig. 1.

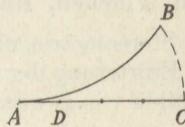


Fig. 2.

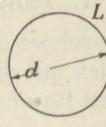


Fig. 3.

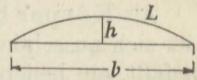


Fig. 4.

Beide Aufzeichnungen können mit dem Spitzenzirkel ohne Ziehen von Hilfslinien ausgeführt werden. Genau ist  $\overline{AC} = \alpha - 0,00093 \cdot \alpha^3$ , so daß das Verfahren bis zum Viertelkreis ohne wesentlichen Fehler — er beträgt in dem Fall erst 0,6 v. H. — benutzt werden kann.

Die Länge des ganzen Kreisumfanges  $L$  wird aus dem Durchmesser  $d$  (Fig. 3) durch Multiplikation mit der Zahl  $\pi = 3,1416 \approx \frac{22}{7}$  gefunden:

$$L = \pi \cdot d. \tag{1}$$

Die Rechnung mit der häufig bequemerer Zahl  $\frac{22}{7}$  ergibt den Endwert nur um das 1,0004fache zu groß.

Die Länge eines beliebigen flachen Bogens (Fig. 4) von der Sehnenlänge  $b$  und der Höhe  $h$  kann mit guter Annäherung als die eines Parabelbogens berechnet werden:

$$L = b \cdot \left[ 1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 - \frac{64}{10} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^4 \right]. \tag{2}$$

**Beispiel 1.** Die Tabelle der Kreisbögen ergibt für den Halbmesser 1:

Zentriwinkel $\alpha$ . . . . .	45°	75°	90°
Sehnenlänge $b$ . . . . .	0,7654	1,2175	1,4142
Bogenhöhe $h$ . . . . .	0,0761	0,2066	0,2929

<sup>2)</sup> Verfahren von Rankine; Beweis Duffing, D. p. J. 1917.

Verhältnis $h : b$ . . . . .	0,0994	0,16965	0,2071
Klammerausdruck der Formel 2	1,0257	1,0714	1,1324
Berechnete Länge $L$ . . . . .	0,7851	1,3044	1,6014
Wirkliche Länge $L$ . . . . .	0,7854	1,3090	1,5708
Unterschied $\Delta$ . . . . .	-0,0003	-0,0046	-0,0306
Fehler $\Delta : L$ . . . . .	-0,00038	-0,0035	-0,0195

Man kann demnach die Formel (2) auch für Kreisbögen bis zum Zentriwinkel 55° anwenden, ohne einen Fehler von mehr als 0,1 v.H. zu machen, oder bis zum Zentriwinkel 80° mit einem Fehler von etwa 1 v. H. Bei dem Verhältnis  $h : b < 1 : 20$  kann das letzte Glied der Klammer immer weggelassen werden.

Zu beachten ist, daß jede praktische Messung mit gewissen Fehlern behaftet ist, die zum größten Teil von der Art der benutzten Meßeinrichtung und der auf die Messung verwendeten Sorgfalt abhängen.

Die Meßfehler  $f$  einer größeren Messung können sich addieren zu dem sog. größten Fehler, der gleich der Summe aller einzelnen Fehler ist:

$$f_{max} = \sum f. \tag{3}$$

Die Summierung der jedesmaligen Einzelmessungen liefert den Mittelwert und zugleich den größten Meßfehler. Der wahrscheinliche Fehler ist geringer, da nicht anzunehmen ist, daß bei einer größeren Zahl von Messungen alle Fehler nach derselben Richtung gemacht werden. Es ist

$$f_w = 0,674 \cdot f_{max}. \tag{4}$$

**Beispiel 2.** Die Aufmessung eines rechteckigen Zimmers mit dem Meterstab ergibt bei Anwendung ziemlicher Sorgfalt etwa

Länge $l$	Breite $b$	Höhe $h$
1000 ± 1 mm	1000 ± 1 mm	1000 ± 1 mm
1000 ± 1 „	1000 ± 1 „	1000 ± 1 „
1000 ± 1 „	1000 ± 1 „	1000 ± 1 „
1000 ± 1 „	1000 ± 1 „	254 ± 1 „
1000 ± 1 „	307 ± 1 „	3254 ± 4 mm
652 ± 1 „	4307 ± 5 mm	
5652 ± 6 mm		

Die wahrscheinlichsten Werte sind somit nach Formel (4)

$$\begin{aligned} \text{Länge } l &= 5,652 \pm 0,004 \text{ m,} \\ \text{Breite } b &= 4,307 \pm 0,003 \text{ „,} \\ \text{Höhe } h &= 3,254 \pm 0,003 \text{ „,} \end{aligned}$$

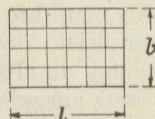
In der technischen Mechanik sind vielfach die Inhalte von bestimmten Flächen zu ermitteln, was nach den Regeln der Geometrie, eines Zweiges der Mathematik, erfolgt.

Maß der Fläche ist in der technischen Praxis des europäischen Festlandes das Quadratmeter (m<sup>2</sup>) bzw. seine Unterteile Quadratdezimeter (dm<sup>2</sup>), Quadratzentimeter (cm<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^2 &= 100 \text{ dm}^2, \\ 1 \text{ dm}^2 &= 100 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Es ist der Flächeninhalt des Rechteckes (Fig. 5):

$$F = l \cdot b,$$



(5) Fig. 5.

der Flächeninhalt des Parallelogramms (Fig. 6):

$$F = l \cdot b, \quad (5)$$

der Flächeninhalt des Dreiecks (Fig. 7):

$$F = \frac{1}{2} \cdot l \cdot b, \quad (6)$$

Geradlinig begrenzte Vielecke werden in Rechtecke oder Parallelogramme oder Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte einzeln berechnet und dann addiert werden.

So ergibt sich für das Trapez (Fig. 8) durch zweimalige Anwendung von Formel (6)

$$F = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b) \quad (7)$$

und für den Kreisinhalt durch vielfache Anwendung von Formel (6) gemäß Fig. 9

$$F = \sum \left( \frac{1}{2} \cdot \Delta L \cdot r \right).$$

Aus der Summe können die allen Gliedern gemeinsamen unveränderlichen Faktoren herausgezogen werden:

$$F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sum (\Delta L).$$

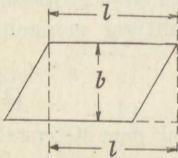


Fig. 6.

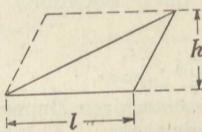


Fig. 7.

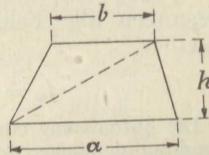


Fig. 8.

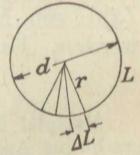


Fig. 9.

Nun ist nach Formel (1)

$$\sum (\Delta L) = \pi \cdot d$$

und so mit  $r = \frac{1}{2} d$

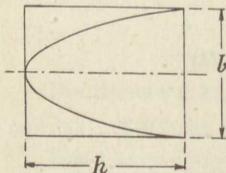


Fig. 10.

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 0,7854 \cdot d^2 \approx \frac{11}{14} \cdot d^2. \quad (8)$$

Der Flächeninhalt eines Parabelabschnittes (Fig. 10) ist

$$F = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h \quad (\text{Beweis S. 107}). \quad (9)$$

Der Inhalt eines flachen Bogens (Fig. 4) wird ebenfalls mit sehr guter Annäherung als der eines Parabelabschnittes berechnet.

Um den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche zu berechnen, teilt man ihre Länge  $l$  in  $n$  gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallelen, deren äußerste die Fläche genau einschließen (gewöhnlich genügt die 10-Teilung, die mit Hilfe eines verschiebbaren Parallelen-gitters ausgeführt werden kann). Jede Einzelfläche kann dann meistens genau genug als Trapez aufgefaßt werden, und man bemerkt, daß bei

fortlaufender Anwendung der Formel (7) alle Höhen doppelt vorkommen mit Ausnahme der ersten und letzten, deren Längen schätzungsweise so bestimmt werden, daß die anschließende erste bzw. letzte krummlinige Fläche durch ein von ihnen begrenztes Trapez ersetzt wird (Fig. 11). Man erhält so die Trapezregel:

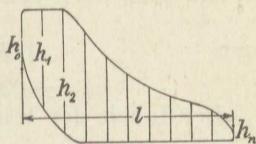


Fig. 11.

$$F = \frac{l}{n} \cdot \left( \frac{1}{2} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \dots + \frac{1}{2} h_n \right). \quad (10)$$

Man kann die Höhen einzeln aufmessen oder gleich hintereinander (die erste und letzte nur zur Hälfte) auf einer beliebig gezogenen Geraden abstecken, so daß für die Rechnung nur zwei Längenmessungen nötig werden.

Man erhält nur dann richtige Werte, wenn die einzelnen Teilstücke der Flächenbegrenzung sich von geraden Linien nicht wesentlich unterscheiden. Anderenfalls ist an der betreffenden Stelle in der Mitte zwischen zwei Höhen eine weitere einzulegen, von der in die Formel (10) nur die Hälfte einzusetzen ist, während die beiden benachbarten Höhen zu  $\frac{3}{4}$  in Anrechnung kommen. Oder es ist die Simpsonsche Regel zu benutzen, die zwei aufeinanderfolgende gekrümmte Teilstücke der Flächenbegrenzung als einen Parabelbogen auffaßt:

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{n} \cdot (h_0 + 4h_1 + 2h_2 + 4h_3 + 2h_4 + \dots + h_n), \quad (11)$$

worin die Anzahl  $n$  der Teilungen eine gerade Zahl sein muß<sup>3)</sup>.

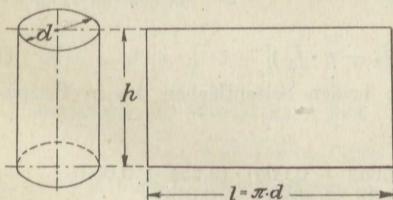


Fig. 12.

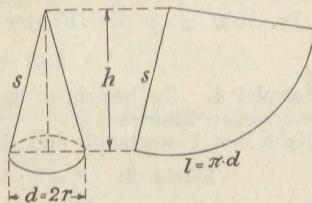


Fig. 13.

Der Inhalt der Mantelfläche eines geraden Kreiszyklinders ist nach Fig. 12

$$F = \pi \cdot d \cdot h, \quad (12)$$

derjenige der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels nach Fig. 13

$$F = \pi \cdot d \cdot s. \quad (13)$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck

$$s^2 = h^2 + \left( \frac{1}{2} d \right)^2 \quad \text{oder} \quad s = h \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{d}{2h} \right)^2},$$

<sup>3)</sup> Beweis siehe z. B. Duffing, Leitfaden der Kurvenlehre. 1911.

so daß man auch setzen kann:

$$F = \pi \cdot d \cdot h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2}. \quad (14)$$

Der Inhalt der Kugeloberfläche beträgt (Beweis S. 118)

$$F = \pi \cdot d^2. \quad (15)$$

Allgemein ist zu beachten, daß ein richtiger Endwert nur erhalten wird, wenn die verschiedenen Längen bei der Berechnung in demselben Maß eingesetzt werden.

**Beispiel 3.** Zu berechnen ist die Grundfläche des in Beispiel 2 aufgemessenen rechteckigen Zimmers.

Nach Formel (5) ist

$$\begin{aligned} F = l \cdot b &= (5,652 \pm 0,004) \cdot (4,307 \pm 0,003) \text{ m}^2 \\ &+ 5,652 \cdot 4,307 = + 24,343164 \text{ m}^2 \\ &\pm 5,652 \cdot 0,003 = \pm 0,016956 \text{ ,,} \\ &\pm 0,004 \cdot 4,307 = \pm 0,017228 \text{ ,,} \\ &+ 0,004 \cdot 0,003 = + 0,000012 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist  $24,34 \pm 0,03 \text{ m}^2$ .

Die „genaue“ Zahlenrechnung ist demnach verkehrt; im allgemeinen genügt für die technische Praxis die Genauigkeit des 25 cm langen Rechenstabes.

Gegenüber den kleinen Größen erster Ordnung (in der zweiten und dritten Zeile der Ausrechnung) sind kleine Größen zweiter Ordnung (in der vierten Zeile) immer zu vernachlässigen. Auch die Rechnung mit kleinen Größen erster Ordnung kann gewöhnlich überschlägig geschehen.

Hat der Wert  $x$  den Fehler  $f_1$  und der Wert  $y$  den Fehler  $f_2$ , so hat das Produkt  $x \cdot y$  den Fehler

$$f = \pm (x \cdot f_2 + y \cdot f_1). \quad (16)$$

**Beispiel 4.** Zu berechnen sind die beiden Seitenflächen des in Beispiel 2 aufgemessenen Zimmers.

Nach den Formeln (5) und (16) ist

$$\begin{aligned} \text{Fläche 2: } F = l \cdot h &= (5,652 \pm 0,004) \cdot (3,254 \pm 0,003) \\ &= 18,39 \pm (0,017 + 0,014) \\ &= 18,39 \pm 0,03 \text{ m}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fläche 3: } F = b \cdot h &= (4,307 \pm 0,003) \cdot (3,254 \pm 0,003) \\ &= 14,01 \pm (0,013 + 0,010) \\ &= 14,01 \pm 0,02 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

**Beispiel 5.** Der Zylinder einer Dampfmaschine hat — im Mittel aus sechs Messungen bestimmt — den Durchmesser  $D = 420,5 \pm 0,1 \text{ mm}$ , die von der einen Seite des Kolbens ausgehende Kolbenstange hat den Durchmesser  $d = 84,7 \pm 0,1 \text{ mm}$ . Zu berechnen ist der mittlere Inhalt beider Kolbenflächen (Fig. 75).

Es ist nach Gleichung (5)

$$\text{für die eine Kolbenseite: } F_2 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2,$$

$$\text{für die andere Kolbenseite: } F_3 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2.$$

Damit wird der mittlere Flächeninhalt

$$F_m = \frac{1}{2} \cdot (F_1 + F_2) = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - \frac{1}{2} \cdot d^2) = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{D^2}\right).$$

Man berechnet zuerst nach der Formel

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$42^2 = (40 + 2)^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764. \quad (17)$$

Zur Ermittlung des Wertes von  $42,05^2$  benutzt man die Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad (18)$$

in der Form  $a^2 = b^2 + (a + b) \cdot (a - b)$ :

$$42,05^2 = 42^2 + 84,05 \cdot 0,05 = 1764 + 4,2 = 1768,2 \text{ cm}^2.$$

Der Fehler beträgt nach Formel (16) mit  $x = y = 42,05 \text{ cm}^2$  und  $f_1 = f_2 = 0,01 \text{ cm}^2$

$$f = 2 \cdot 42,05 \cdot 0,01 \approx 8,4 \text{ cm}^2.$$

Entsprechend erhält man

$$8,47^2 = (8,5 - 0,03)^2 = 72,25 - 0,51 = 71,74 \text{ cm}^2$$

mit dem Fehler  $2 \cdot 8,5 \cdot 0,01 = 0,17 \text{ cm}^2$ .

Damit folgt schließlich

$$F_m = \frac{\pi}{4} (1768,2 \pm 8,4 - 35,9 \pm 0,1)$$

$$= 0,7854 \cdot (1732,3 \pm 8,5)$$

$$= 1353 \pm 7 \text{ cm}^2.$$

Wenn die Fehlerrechnung der Einfachheit halber ganz beiseite gelassen wird, ist die letzte Stelle der in ganzen Quadratcentimetern angegebenen Fläche bereits bei genauer Aufmessung bis auf 0,1 mm schon völlig unsicher.

Die einseitige Kolbenstange verringert unter normalen Verhältnissen die mittlere Fläche um rund 2 v. H.

**Beispiel 6.** Die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels vom Grundkreisdurchmesser  $d = 24,3 \text{ cm}$  und der Höhe  $h = 16,2 \text{ cm}$  ist zu berechnen.

Formel (14) ergibt

$$F = \pi \cdot d \cdot h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2} = \pi \cdot 24,3 \cdot 16,2 \cdot \sqrt{1 + 0,75^2} \text{ cm}^2.$$

Zur Ausrechnung der Wurzel kann hier die Näherungsgleichung benutzt werden

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0,960 \cdot x + 0,368 \cdot y, \quad (19)$$

worin  $x > y$  sein muß. Das Ergebnis ist

um 6,1 v. H.	zu klein	für	$y = x$ ,
„ 4,0	„ „ „	„	$y = 0,9 x$ ,
„ 1,9	„ „ „	„	$y = 0,8 x$ ,
„ 0,3	„ „ „	„	$y = 0,7 x$ ,
„ 1,3	„ „ groß	„	$y = 0,6 x$ .

Von  $y = 0,6 x$  an rechnet man genauer mit der einfacheren Formel

$$\sqrt{1 \pm z} = 1 \pm \frac{1}{2} \cdot z; \quad (20)$$

das Ergebnis ist

um 0,9 v. H.	zu groß	für	$z = 0,3$ ,
„ 0,4	„ „ „	„	$z = 0,2$ ,
„ 0,1	„ „ „	„	$z = 0,1$ .

Demnach wird

$$F = \pi \cdot \overset{24,3}{\cancel{23,4}} \cdot 16,2 \cdot (0,960 + 0,368 \cdot \frac{3}{4}) \cdot 1,011 \text{ cm}^2,$$

worin der letzte Faktor den Fehler der Wurzelberechnung ausgleicht.

$$F = 1488 \text{ cm}^2.$$

$$F = 1549 \text{ cm}^2$$

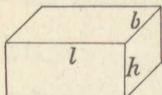


Fig. 14.

Für die Berechnung einfacher Rauminhalte gilt: beim rechteckigen Quader nach Fig. 14

$$V = l \cdot b \cdot h. \quad (21)$$

Hat  $l$  den Meßfehler  $f_1$ ,  $b$  den Meßfehler  $f_2$ ,  $h$  den Meßfehler  $f_3$ , so ergibt das Produkt

$$V = (l \pm f_1) \cdot (b \pm f_2) \cdot (h \pm f_3)$$

mit Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung

$$V = l \cdot b \cdot h \pm (l \cdot b \cdot f_3 + l \cdot h \cdot f_2 + b \cdot h \cdot f_1). \quad (22)$$

**Beispiel 7.** Der Rauminhalt des in Beispiel 2 aufgemessenen Zimmers ist zu berechnen.

Man erhält nach Formel (21)

$$V = 5,652 \cdot 4,307 \cdot 3,254 = 79,20 \text{ m}^3$$

und gemäß Formel (22) mit den Angaben des Beispiels 3

$$\left. \begin{array}{l} 24,34 \cdot 0,003 = 0,073 \text{ m}^3 \\ 18,39 \cdot 0,003 = 0,055 \text{ ,,} \\ 14,01 \cdot 0,004 = 0,056 \text{ ,,} \end{array} \right\} \pm 0,184 \text{ m}^3.$$

Der wahrscheinliche Fehler des Rauminhaltes beträgt trotz recht genauer Aufmessung doch etwa  $0,18 \text{ m}^3$  oder  $0,23$  v. H. des Mittelwertes, so daß die Angabe von mehr als einer Dezimalstelle eine gar nicht vorhandene Genauigkeit vortäuscht.

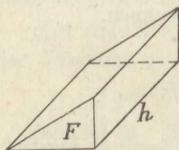


Fig. 15.

Für ein beliebiges Prisma mit parallelen Endflächen z. B. nach Fig. 15 gilt

$$V = F \cdot h, \quad (23)$$

also für den geraden Kreiszyylinder mit Formel (8)

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h. \quad (24)$$

Ein Prisma nach Fig. 15 kann durch zwei ebene, durch die Ecken gelegte Schnitte in drei Pyramiden von gleichem Rauminhalt zerlegt werden. Es gilt somit für jede Pyramide von der Grundfläche  $F$  und der Höhe  $h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot h. \quad (25)$$

Der Rauminhalt der Kugel vom Durchmesser  $d$  ist (Beweis S. 119)

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot d^3. \quad (26)$$

Anders gestaltete Räume werden in einfachere Teile, für die die Formeln (21) bis (26) zutreffen, zerlegt (Anwendung z. B. S. 120).

**Beispiel 8.** Der Hub der Dampfmaschine, deren mittlere Kolbenfläche in Beispiel 5 berechnet wurde, sei aufgemessen zu  $h = 751 \pm 0,3 \text{ mm}$ . Anzugeben ist der mittlere Hubraum des Zylinders.

Man erhält nach Formel (23)

$$\begin{aligned} V &= (1353 \pm 7) \cdot (75,1 \pm 0,03) \text{ cm}^3 \\ &= 13,53 \cdot 7,51 \pm (7,51 \cdot 0,07 + 13,53 \cdot 0,003) \text{ dm}^3 \\ &= 101,61 \pm (0,53 + 0,04) \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Der Fehler der Hubmessung ist von verschwindend geringer Bedeutung, also

$$V = 101,6 \pm 0,6 \text{ dm}^3.$$

## 2. Körper und ihre Zustände.

Die in Abschnitt 1 gegebene Erklärung des Begriffes Körper im Sinne der Stereometrie ist für die Mechanik nicht ausreichend. Denn der Lichtkegel eines Scheinwerfers, der nur ein besonders herausgehobener, bei jeder Bewegung des Spiegels wechselnder Teil des allgemeinen Luftraumes ist und dessen Ende sich unbestimmt verliert, kann im Sinne der Mechanik nicht als Körper angesehen werden. Für sie ist der stoffliche Inhalt des Körpers, der ihm oder seiner Art eigentümlich ist, von mehr Bedeutung als die häufig nebensächliche äußere Form; denn er allein, die sogenannte Masse, ist der Träger aller physikalischen Eigenschaften des Körpers. Die Mechanik erklärt demnach: Körper ist ein allseitig geschlossenes Raumgebilde, das durchweg mit Masse angefüllt ist, die natürlich je nach Art des Körpers sehr verschieden zusammengesetzt sein kann.

Zur vollständigen Erklärung aller in der reinen Mechanik untersuchten Erscheinungen genügt es, wenn über die Verteilung dieser Masse im Körper die einfache, durch den groben Augenschein immer bestätigte Annahme gemacht wird, daß sie den vom Körper eingenommenen Raum stetig ausfüllt. Poröse Körper enthalten hiernach mindestens zwei verschiedene Massen, die eigentliche Körpersubstanz und die die Poren ausfüllende Luft, Flüssigkeit, Bindschubstanz und dgl. Abgesehen wird also in der Mechanik von dem Aufbau der Körper aus Molekülen, Atomen, Elektronen, die voneinander durch verhältnismäßig große, wenn auch für unsere Sinneswahrnehmung äußerst kleine Zwischenräume getrennt sind.

Der Zustand der Masse eines Körpers kann sehr verschieden beschrieben werden, z. B. durch Angabe der Temperatur, der elektrischen Ladung usw.; in der Mechanik ist in erster Linie der Aggregatzustand von Belang, und manche für die allgemeine Beschreibung wichtigen Zustände, z. B. die elektrische Ladung, werden gar nicht oder nur nebenhin beachtet. Man unterscheidet nun die drei Hauptaggregatzustände fest, flüssig, gasförmig, und entsprechend wird das weite Gebiet der Mechanik eingeteilt in die Mechanik der festen, der flüssigen, der gasförmigen Körper. Außerdem gibt es noch die beiden Übergänge des teigförmigen und des dampfförmigen Zustandes. Der erstere hat in der Mechanik nur geringes Interesse, mehr Bedeutung kommt den Schüttungen körniger Einzelkörper zu, die in ihrem Verhalten eine Zwischenstellung zwischen den festen und den flüssigen Körpern einnehmen. Von besonderem Wert ist die Mechanik der Dämpfe infolge

der umfassenden Anwendung in den Dampfmaschinen, den Kühlmaschinen und im Haushalt der Natur.

Die festen Körper werden ihrerseits wieder unterschieden in starre und nachgiebige. Starre Körper sind solche, die unter dem Einfluß äußerer Kräfte (Abschnitt 3) ihre Form nicht ändern, während nachgiebige unter dem Einfluß von Kräften eine Formänderung erleiden.

Der Zusatz „unter dem Einfluß äußerer Kräfte“ ist notwendig, weil die Formänderung durch Raumvergrößerung oder -verkleinerung bei der Erhöhung bzw. Erniedrigung der Temperatur des Körpers kein Unterscheidungsmerkmal im Sinne der Mechanik bildet. Diese Formänderung infolge Änderung des Temperaturzustandes kommt ja allen Arten von Körpern zu, wenn auch in verschiedenem Maße.

Die tägliche Erfahrung lehrt sogleich, daß es vollkommen starre Körper nicht gibt; vielmehr erleiden alle, auch die festesten Körper, eine mehr oder weniger große Formänderung, sobald die betreffenden Kräfte hinreichend groß sind. Jedoch können die in der technischen Praxis hauptsächlich zu Konstruktionsteilen verwendeten Körper in erster Annäherung als starr angesehen werden, da man naturgemäß im allgemeinen darauf sieht, daß die etwaige Formänderung mindestens klein ausfällt.

Die nachgiebigen Körper sind wieder elastisch oder unelastisch. Elastische Körper sind solche, die eine unter der Einwirkung von äußeren Kräften angenommene Formänderung nach Aufhören der Kraftwirkung wieder vollständig rückgängig machen, während die unelastischen die einmal erlittene Formänderung beibehalten. Mit Rücksicht auf die erstrebte Dauerhaftigkeit der Konstruktion ist das Interesse an den unelastischen Körpern verhältnismäßig gering, und ihr Verhalten wird im Anschluß an das der elastischen untersucht.

Eine weitere wichtige Unterscheidung des Zustandes eines Körpers ergibt die Berücksichtigung der Zeit. Wenn während der Beobachtungszeit der Körper sowohl als Ganzes als auch in allen einzelnen Teilen, z. B. eine Dampfmaschine, die Lage zu der Umgebung nicht ändert, so sagt man, der Körper befindet sich in Ruhe, anderenfalls befindet er sich in Bewegung. Man erkennt, daß man zwei Bewegungen zu unterscheiden hat, die fortschreitende, etwa der Lokomotive oder des Lokomotivkreuzkopfes, und die Drehbewegung, z. B. der Räder. Selbstverständlich können beide Bewegungen auch gleichzeitig auftreten.

### 3. Kräfte.

Die Mechanik beruht, wie jede Naturwissenschaft, auf den Erfahrungen, die an den Erscheinungen in der Natur und Technik gewonnen sind, und außerdem auf Versuchen, die zur Erforschung bestimmter Einzelheiten mit entsprechend vorgearbeiteten Einrichtungen angestellt werden.

Man greift deshalb zur Erklärung des Begriffes Kraft auch auf die allgemeine Erfahrung zurück, die besagt, daß Kraft eine durch Muskelanstrengung ausgeübte Einwirkung ist, die sich entweder als Zug oder Druck kenntlich macht. Diese Erklärung trifft aber nur die Körper-

kräfte lebender Wesen und nicht die in den Baukonstruktionen, Maschinen usw. auftretenden Kräfte. Da es aber der Zweck aller Tragkonstruktionen und Maschinen ist, die Körperkräfte lebender Wesen durch solche zu ersetzen, die das tote, wenn auch oft bewegte Material häufig in bedeutend vergrößertem Maße zu übertragen bzw. auszuüben vermag, so kann man erklären, um einen möglichst sinnfälligen, allgemein gültigen Ausdruck zu erhalten: Kraft ist ein durch Muskelanstrengung bewirkter oder sie ersetzender Zug oder Druck<sup>4)</sup>.

Im übrigen vermeidet die Mechanik, Untersuchungen anzustellen über das Entstehen der Kräfte, mögen es nun Muskel-, Gewichts-, magnetische oder sonstige Kräfte sein. Dies ist vielmehr eine Aufgabe der Physik, und die Mechanik nimmt die Kräfte, ohne auf ihre Herkunft einzugehen, einfach als gegeben hin. Am einfachsten lassen sie sich für den Anfang als Muskel- oder Gewichtskräfte vorstellen.

An einer gegebenen Kraft ist zu unterscheiden ihre Größe, die Wirkungslinie, die Richtung in der Wirkungslinie und die Angriffsstelle.

Ein Maß der Größe wird erhalten durch Vergleich der Wirkung der untersuchten Kraft mit derjenigen einer bekannten Kraft auf den gleichen Körper. Muskel- und Schlagkräfte können z. B. verglichen werden durch die von ihnen hervorgerufene Bewegung eines Körpers, etwa eines Steines oder Balles; diejenige Kraft gilt als die größere, die den gleichen Körper weiter bewegt. Dieser Vergleich ist aber häufig nur ein überschlägiger; ruhende Kräfte, die man genauer messen will, beurteilt man deshalb an ihren Einwirkungen auf Federn oder dgl.

Ein technisches Instrument zum zahlenmäßigen Vergleich von Zugkräften ist das Dynamometer. Es besteht aus zwei kräftigen Blattfedern nach Fig. 16, deren Verlängerung stark vergrößert auf einen Zeiger übertragen wird. Für kleinere Kräfte benutzt man oft die sog. Küchenwaage, die aus zwei parallelen Schraubenfedern besteht, deren Ausdehnung ebenfalls vergrößert auf einen Zeiger übertragen wird. Geeicht werden die Dynamometer mit Hilfe von Gewichten.

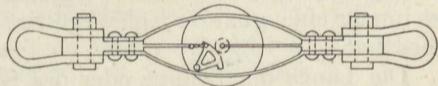


Fig. 16.

Die Gewichts- und Krafteinheit ist in der technischen Praxis des europäischen Festlandes das Kilogramm (kg) bzw. die Tonne (t) oder bisweilen das Gramm (g).

$$\begin{aligned} 1 \text{ t} &= 1000 \text{ kg,} \\ 1 \text{ g} &= 0,001 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Das Kilogramm ist das Gewicht des in Breteuil aufbewahrten Kilogrammstückes, das Gewicht von 1,00004 dm<sup>3</sup> chemisch reinen Wassers bei 4° Celsius, gemessen auf dem 45. Breitengrad in Höhe des Meeresspiegels und umgerechnet auf den luftleeren Raum.

Der erste Zusatz ist erforderlich, weil sich der eingenommene Raum einer abgemessenen Menge Wasser wie der eines jeden Körpers mit

<sup>4)</sup> Galilei, Sienza della mecanica, 1592; Wehage, Z. d. V. d. I. 1905; Schreber, D. p. J. 1906.



der Temperatur ändert; bei  $4^{\circ}\text{C}$  nimmt eine bestimmte Wassermenge den kleinsten Raum ein. Die beiden folgenden Zusätze sind nötig, weil sich das Gewicht derselben Masse mit dem Abstand vom Erdmittelpunkt ändert, der letzte, weil die umgebende Luft das Gewicht einer bestimmten Masse etwas verringert.

Die Wirkungslinie einer Kraft, das ist die Linie, in der ihre Wirkung erfolgt, kann unmittelbar mit einem durch Muskelanstrengung oder durch ein Gewicht gespannten Faden zur Anschauung gebracht werden (Fig. 17). Sie ist demnach eine Gerade.

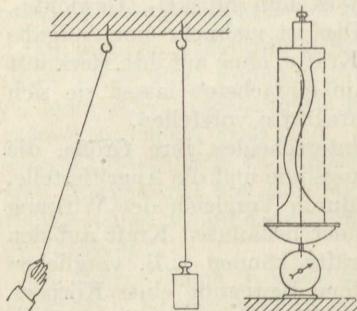


Fig. 17.

Fig. 18.

Die in Fig. 23 dargestellte Ausnahme, daß ein schweres Seil in einer Kurve durchhängt, ist nur scheinbar. Die genaue Überlegung (Abschnitt 16) lehrt, daß die Abweichung des Seiles von der geraden Linie nur durch sein Gewicht, also durch eine zweite, zur ersten hinzutretende Kraft entsteht.

Dieselbe geradlinige Form der Wirkungslinie findet sich genau so bei Druckkräften. Das Gewicht in Fig. 18 überträgt sich durch einen geraden (in der Skizze gestrichelten) Holzpfosten auf die Unterlage und kann dort am Zeiger der Federwaage abgelesen werden.

Daran wird nichts geändert, wenn der Pfosten etwa nach den ausgezogenen Linien ausgeschnitten wird. Die Wirkungslinie ist immer eine gerade, gleichgültig, welche Form das Übertragungsglied hat.

Die Länge der Schnur oder des Seiles in Fig. 17 oder der Druckstange in Fig. 18 ist ohne Einfluß auf die Kraftwirkung des betreffenden Gewichtes auf die Befestigungsstelle bzw. Unterlage, und man hat z. B. bei Seilschwebbahnen Seiltriebe von 10 km Länge ohne Unterbrechung oder Zwischenübertragung ausgeführt. Die Angriffsstelle einer Kraft kann also in ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne daß die Kraftwirkung auf die Unterstützung oder dgl. irgendeine Änderung erleidet.

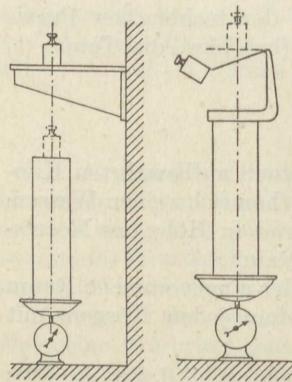


Fig. 19.

Fig. 20.

Dieser Erfahrungssatz bedarf jedoch einer Einschränkung, denn es ist klar, daß bei der Verschiebung des Gewichtes in der Wirkungslinie nach oben, wie es z. B. Fig. 19 darstellt, die Wirkung aufgehoben wird, wenn das Gewicht auf der Wandkonsole steht. Das gleiche gilt, wenn das Gewicht auf einen Bügel gesetzt wird, dessen einer Arm so nachgiebig ist, daß es weggleitet (Fig. 20), oder wenn es auf einen Zwischenkörper gesetzt wird, der eine selbständige Bewegung ausführt

(Fig. 21). Der Satz gilt also nur, wenn die neue Angriffsstelle mit der alten unveränderlich verbunden ist.

In der Wirkungslinie kann die Kraft entweder die eine oder die andere Richtung haben. Gewöhnlich gilt die Vereinbarung, daß in der lotrechten Wirkungslinie die nach dem Mittelpunkt der Erde hin gerichtete Kraft als positiv gerechnet wird; dann ist eine aufwärts gerichtete eine negative Kraft. In der wagerechten Linie wird häufig die vom Beschauer aus nach rechts gehende Richtung als die positive bezeichnet; die nach links gehende ist dann die negative.

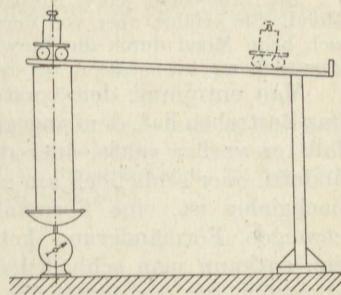


Fig. 21.

Eine Kraft kann auf einen Körper nur von einem anderen Körper ausgeübt werden, was meistens durch unmittelbare Berührung geschieht, aber auch durch Fernübertragung wie bei den magnetischen, elektrischen, Gravitationskräften erfolgen kann. Da beide Körper nur in ihrer Bezeichnung als erster oder zweiter unterschieden werden, tatsächlich aber einander völlig gleichwertig sind, so muß an der gegenseitigen Einwirkungsstelle Körper *A*, der dort auf Körper *B* eine Kraft ausübt, auch eine Kraftwirkung vom Körper *B* aus erleiden von gleicher Angriffsstelle, Wirkungslinie und Größe, nur sind die Richtungen beider Kräfte entgegengesetzt<sup>5)</sup>.

**Beispiel 9—14.** Ein Körper, der sich mit einem gewissen Druck auf eine Unterlage stützt, erfährt seinerseits in der Berührungsfläche den gleichen Gegendruck, was besonders bei nachgiebigen Körpern deutlich in Erscheinung tritt (Fig. 22).

Ein Schleppdampfer zieht mit einer gewissen, mit dem Dynamometer meßbaren Kraft an dem geschleppten Kahn; umgekehrt hält dieser den Schleppdampfer mit der gleichen Kraft zurück (Fig. 23). Wenn etwa das Verbindungsseil reißt, schießt der dann nicht mehr zurückgehaltene Schleppdampfer mit großer Geschwindigkeit voran.

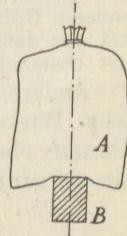


Fig. 22.

Bei einem Schuß wird durch die Pulvergase nicht nur auf das Geschos eine Kraft ausgeübt, sondern auch eine ebenso große auf das Gewehr oder Geschütz, die sich als Rückschlag bemerkbar macht.

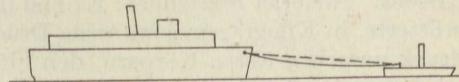


Fig. 23.

Ein Magnet zieht ein frei bewegliches Stahlstück auf einige Entfernung mit einer bestimmten, leicht meßbaren Kraft an. Genau die gleiche Kraft übt aber auch das Stahlstück auf den Magneten aus, wenn man es festhält und der Magnet etwa auf einer Korkunterlage im Wasser schwimmt.

Wird der Schienenkreis einer Spielzeugeisenbahn mit einer leichten Unterlage an mehreren Schnüren aufgehängt, die nach einem an der Zimmerdecke befestigten dünnen Draht zusammenlaufen, so treiben die zwischen den Rädern und den Schienen wirkenden Kräfte sowohl die Lokomotive vorwärts als auch die Schienenbahn in entgegengesetzter Richtung zurück.

<sup>5)</sup> Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687.

Die Erde zieht jeden Körper mit einer gewissen Kraft an, z. B. auch den Mond. Sie erfährt aber von dem betreffenden Körper dieselbe Gegenkraft, die sich beim Mond durch die Einwirkung auf das Meerwasser als Ebbe und Flut kenntlich macht.

Man entnimmt den vorstehenden Beispielen noch, daß eine Kraft das Bestreben hat, dem angegriffenen Körper eine Bewegung zu erteilen, falls er vorher ruhte, oder die Bewegung eines bewegten Körpers zu ändern, oder schließlich am angegriffenen Körper, wenn er hinreichend nachgiebig ist, eine Formänderung herbeizuführen. Tritt außer der etwaigen Formänderung keine Bewegung oder Bewegungsänderung ein, so kann man schließen, daß noch andere Kräfte an dem Körper angreifen, die der ersten das Gleichgewicht halten.

Die Lehre vom Gleichgewicht heißt die Statik; ihr ist der weitaus größere Teil dieser Hefte gewidmet. Die Lehre vom Zusammenhang der Bewegungsänderungen mit den Kräften ist die Dynamik, deren Behandlung sich mit Hilfe des d'Alembertschen Satzes auf die Statik zurückführen läßt.

Vielfach werden die Darlegungen dieses Abschnittes umgekehrt vorgetragen, indem zuerst festgesetzt wird: Kraft ist die Ursache einer Bewegung oder Bewegungsänderung. Stillschweigend wird hierbei die unter dem Einfluß einer Kraft häufig bemerkbare Formänderung, z. B. die Zusammendrückung einer eingeschlossenen Flüssigkeit durch eine große Druckkraft, als eine Bewegung der entsprechenden Teile aufgefaßt. Die gleiche Formänderung der Flüssigkeit wird aber auch durch eine Temperaturenmiedrigung erzielt, und man müßte dann folgerichtig die Temperaturänderung auch als eine Kraft ansehen, was jedoch aus anderen Gründen unzulässig ist. Die vorstehende Erklärung des Begriffes Kraft hat nur dann Berechtigung, wenn man sich von vornherein ausschließlich mit der Dynamik befaßt.

Ändert eine Kraft während der Dauer der Beobachtung ihre Größe oder Wirkungslinie oder Richtung, wie z. B. die Kolbenkraft einer Dampf- oder Gasmachine, so ist sie veränderlich; anderenfalls wird sie als gleichbleibend oder konstant bezeichnet.

#### 4. Kraft, Flächendruck, Längenbelastung.

Zu beachten ist, daß der deutsche Sprachgebrauch mit dem Wort „Druck“ zweierlei bezeichnet: Einmal die am Anfang des Abschnittes 3 erörterte, in Kilogramm gemessene Druckkraft und weiter den Flächendruck zwischen festen Körpern, den Flüssigkeitsdruck einer Flüssigkeit oder den Gasdruck eines gasförmigen Körpers, die sich ebenfalls als Flächendruck an einer festen Wandung oder dgl. bemerklich machen. Der Flächendruck wird angegeben in Kilogramm auf ein Quadratcentimeter ( $\text{kg/cm}^2$ ), bisweilen auch Kilogramm auf ein Quadratmeter ( $\text{kg/m}^2$ ); er wird also erhalten, indem man die Druckkraft  $P$  durch die Druckfläche  $F$  dividiert:

$$p = \frac{P}{F}. \quad (27)$$

Umgekehrt ergibt sich die von einem bestimmten Flüssigkeits- oder Gasdruck  $p$  auf eine Fläche  $F$  ausgeübte Kraft zu

$$P = p \cdot F. \quad (27a)$$

Häufig wird zur Abkürzung für Kilogramm auf ein Quadratmeter gesetzt Atmosphäre (at).

Der mittlere Druck der Erde umgebenden Luftatmosphäre beträgt in Höhe des Meeresspiegels 1,033 at.

**Beispiel 15.** Der Kreuzkopf einer Dampfmaschine liege etwa in der Mitte des Hubes mit der Kraft  $P = 2500$  kg auf seiner Gleitbahn, die rechteckige Fläche des Gleitschuhes habe die Abmessungen  $b = 20$  cm und  $l = 35$  cm. Zu ermitteln ist der Flächendruck  $p$  zwischen Gleitschuh und Gleitbahn.

Man erhält aus Formel (27)

$$p = \frac{2500}{20 \cdot 35} = 3,58 \text{ at.}$$

Um die Abnutzung so klein wie möglich zu halten, beträgt der größte Flächendruck je nach Bauart der Maschine 3 bis 5 at.

**Beispiel 16.** Auf den in Beispiel 5 berechneten Kolben der Dampfmaschine wirke auf der Deckelseite der Kesseldruck  $p_1 = 10$  at vermindert um den Druckverlust in der Zuleitung 0,5 at, auf der Kurbelseite der Gegendruck des Kondensators  $p_2 = 0,1$  at. Anzugeben sind die entsprechenden beiden Druckkräfte.

Nach Beispiel 5 ist die Fläche des Kolbens auf der Deckelseite

$$F_1 = 1388 \pm 7 \text{ cm}^2, \text{ also nach der Formel (27a) die Kraft}$$

$$P_1 = (1388 \pm 7) \cdot 9,5 = 13\,186 \pm 67 \text{ kg,}$$

so daß einzusetzen ist  $P_1 \approx 13\,250$  kg, wenn es sich um die Angabe des größten Wertes handelt.

Entsprechend ergibt Beispiel 5 als Kolbenfläche auf der Kurbelseite  $F_2 = 1332 \pm 7$  cm, mithin beträgt die Gegenkraft

$$P_2 = (1332 \pm 7) \cdot 0,1 = 133 \pm 1 \text{ kg,}$$

so daß mit  $P_2 \approx 130$  kg zu rechnen ist.

Beim Rückgang des Kolbens wirkt der Dampfdruck  $p_1$  auf die Fläche  $F_2$  und  $p_2$  auf die Fläche  $F_1$ ; es ist dann

$$P_1 = (1332 \pm 7) \cdot 9,5 = 12\,720 \text{ kg,}$$

wenn der größtmögliche Wert angegeben werden soll, und

$$P_2 = (1388 \pm 7) \cdot 0,1 \approx 140 \text{ kg.}$$

**Beispiel 17.** Der größte Verpuffungsdruck einer Gasmaschine beträgt etwa bei Betrieb mit

Leuchtgas . . . . .	$p = 23$ at
Kraftgas . . . . .	$p = 21$ „
Benzindampf . . . . .	$p = 16$ „
Treiböl im Gleichdruck-Dieselmotor . . . . .	$p = 40$ „

Anzugeben ist die größte Kolbenkraft bei einem Kolbendurchmesser  $D = 420$  mm.

Die Kolbenfläche ist nach Formel (8)

$$F = \frac{11}{14} \cdot 42^2 = 1386 \text{ cm}^2,$$

deren Wert mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Ausführung und Messung auf  $1390 \text{ cm}^2$  abzurunden ist.

Damit erhält man nach Formel (27a) die Kolbenkraft

bei Leuchtgas . . . . .	$P = 1390 \cdot 23 \approx 32\,000$ kg
„ Kraftgas . . . . .	$P = 1390 \cdot 21 \approx 29\,200$ „
„ Benzindampf . . . . .	$P = 1390 \cdot 16 \approx 22\,200$ „
„ Treiböl im Gleichdruckmotor . . . . .	$P = 1390 \cdot 40 \approx 55\,600$ „

Da der Gasdruck um halbe, bisweilen sogar um ganze Atmosphären schwankt, so ist eine genauere Angabe der Kraftgröße unbrauchbar.

**Beispiel 18.** Bei geeigneter Schmierölfuhr verteilt sich der Zapfendruck nahezu gleichförmig über die Projektion der Zapfenfläche  $F = l \cdot d$  (Bd. II). Der Kurbelzapfen einer Betriebsdampfmaschine vom Zylinderdurchmesser  $D = 420$  mm habe die Abmessungen  $l = 170$  mm,  $d = 130$  mm (Fig. 24); als größter Flächen- druck im Kurbelzapfenlager wird gewöhnlich  $p_z = 60$  at zugelassen. Anzugeben ist der höchste Dampfdruck  $p_1$ , mit dem die betreffende, mit Kondensation arbeitende Maschine betrieben werden kann.

Bezeichnet  $p_2 = 0,1$  at den Gegendruck des Kondensators, so ist nach Abschnitt 5 der gesamte Kolbendruck, wenn Beispiel 5 beachtet wird:

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot 0,98$$

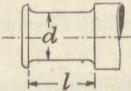


Fig. 24.

und für den Zapfendruck gilt

$$P = l \cdot d \cdot p_z.$$

In der Nähe der Totlage des Kolbens sind beide Kräfte einander gleich, demnach wird

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot 0,98 = l \cdot d \cdot p_z,$$

woraus folgt

$$p_1 = \frac{l \cdot d \cdot p_z}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,98} + p_2 = \frac{13 \cdot 17 \cdot 60}{1350} + 0,1 = 9,6 \text{ at.}$$

**Beispiel 19.** Eine Dampfleitung habe den lichten Durchmesser  $d_0 = 150$  mm und die Wandstärke  $\delta_0 = 12$  mm. Anzugeben ist die bei  $p = 10$  at vom Dampf auf das Rohrende der Ausdehnungsstopfbüchse ausgeübte Druckkraft und der erforderliche Durchmesser  $d_2$  des Entlastungsringes, damit der Druck gänzlich aufgehoben wird (Fig. 25).

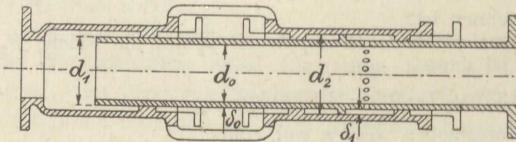


Fig. 25.

Die Druckkraft ist

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot (d_1^2 - d_0^2) \cdot p = \pi \cdot (d_0 + \delta_0) \cdot \delta_0 \cdot p = \pi \cdot 16,2 \cdot 1,2 \cdot 10 \approx 6100 \text{ kg.}$$

Wenn  $p$  in  $\text{kg/cm}^2$  benutzt wird, müssen die Längen in cm eingesetzt werden. Für den Entlastungsring muß gelten

$$\frac{\pi}{4} \cdot (d_2^2 - d_1^2) \cdot p = \frac{\pi}{4} \cdot (d_1^2 - d_0^2) \cdot p,$$

woraus folgt

$$d_2^2 = 2 \cdot d_1^2 - d_0^2,$$

also

$$d_2 = \sqrt{2 \cdot 17,4^2 - 15,0^2} = \sqrt{2 \cdot 303 - 225} = \sqrt{381} \approx 19,8 \text{ cm,}$$

mithin

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \cdot (19,8 - 17,4) = 1,1 \text{ cm.}$$

**Beispiel 20.** Ein Fabrikschornstein von quadratischem Querschnitt hat die Höhe  $h = 22$  m, die untere Breite  $b_1 = 1,8$  m, die obere  $b_0 = 1,2$  m. Zu berechnen ist die vom Wind auf die Schornsteinsäule ausgeübte größte Kraft.

Als größten Winddruck auf lotrecht stehende ebene Flächen rechnet man bei Schornsteinbauten<sup>6)</sup> im deutschen Binnenland gewöhnlich  $p = 125$  und  $150 \text{ kg/m}^2$ , in Bayern  $p = 150 \text{ kg/m}^2$ , im Küstengebiet der Nordsee  $p = 200 \text{ kg/m}^2$ . Die vom Wind getroffene Fläche hat nach Formel (7) den Inhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot (1,8 + 1,2) \cdot 22 = 33 \text{ m}^2$$

damit wird nach Formel (27a) die maßgebende Windkraft für einen im Binnenlande errichteten Schornstein

$$P = 33 \cdot 125 \approx 4130 \text{ kg.}$$

**Beispiel 21.** Eine Gasbehälterglocke hat den Durchmesser  $D = 10,2 \text{ m}$  und die freie Höhe  $h = 5,1 \text{ m}$ . Anzugeben ist die größte vom Winddruck darauf ausgeübte Kraft (Fig. 26).

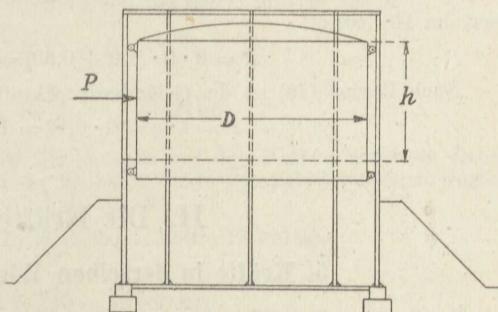


Fig. 26.

In Preußen ist als Winddruck auf lotrechte ebene Flächen bei gewöhnlichen Bauten anzusetzen<sup>7)</sup> für

Wandteile bis zu 15 m Höhe	$p = 100 \text{ kg/m}^2$ ,
Wandteile zwischen 15 und 25 m Höhe und Dächer bis 25 m Höhe	$p = 125 \text{ kg/m}^2$ ,
Wandteile und Dächer über 25 m Höhe, Eisengitterwerke, Holzgerüste und Masten	$p = 150 \text{ kg/m}^2$ .
mit einem Eisenbahnzug besetzte Brücken	$p = 150 \text{ kg/m}^2$ ,
leere Brücken	$p = 250 \text{ kg/m}^2$ .

Von der Mantelfläche eines Zylinders erfährt jedoch nur ein Teil, dessen Breite das 0,683fache des Zylinderdurchmessers beträgt, den Winddruck, wie z. B. an einem dem Schlagregen ausgesetzten Pfahl nachgeprüft werden kann<sup>8)</sup>. In die Rechnung wird gewöhnlich<sup>7)</sup> der Faktor  $\frac{2}{3}$ <sup>5)</sup> eingeführt.

Man erhält also mit  $p = 125 \text{ kg/m}^2$  die Winddruckkraft

$$P = \frac{2}{3} \cdot D \cdot h \cdot p = \frac{2}{3} \cdot 10,2 \cdot 5,1 \cdot 125 = 4350 \text{ kg.}$$

Außer dem Flächendruck oder der Flächenbelastung wird auch oft die Belastung für die Längeneinheit benutzt:

$$q = \frac{P}{l}, \quad (28)$$

die meist in  $\text{kg/m}$ , bisweilen auch  $\text{t/m}$  angegeben wird.

**Beispiel 22.** Für eine einfache gewölbte Straßenbrücke von der Länge  $l = 9 \text{ m}$  und der Breite  $b = 6 \text{ m}$  beträgt das Eigengewicht einschließlich Pflasterung i. M.  $q_1 = 1,0 \text{ t/m}^2$ , die Belastung durch Menschengedränge gewöhnlich  $q_2 = 0,20 \text{ t/m}^2$ , nur wenn die Menschen so gedrängt stehen, daß jede Bewegung ausgeschlossen ist, kann die Belastung bis auf  $500 \text{ kg/m}^2$  steigen<sup>9)</sup>, schließlich die Geländerbelastung  $q = 0,12 \text{ t/m}$ . Anzugeben ist das Gesamtgewicht der durch Menschengedränge voll belasteten Brücke und die gesamte auf das Geländer ausgeübte Kraft.

<sup>6)</sup> Preußischer Ministerialerlaß von 1902.

<sup>7)</sup> Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen von 1919.

<sup>8)</sup> Irmingier, Z. d. B. 1898; Moormann, Z. d. B. 1902.

<sup>9)</sup> Bohny, Z. d. B. 1912; Hunscheidt, Z. d. B. 1916.

Nach Formel (27a) ist die Brückenlast

$$P = F \cdot p = 9 \cdot 6 \cdot (1,0 + 0,20) = 64,8 \text{ t}$$

bzw. im Höchstfall

$$P = 9 \cdot 6 \cdot (1,0 + 0,50) = 81,0 \text{ t.}$$

Nach Formel (28) ist die Geländerdruckkraft

$$P = l \cdot q = 9 \cdot 0,12 = 10,8 \text{ t.}$$

## II. Die Kräfte.

### 5. Kräfte in derselben Wirkungslinie.

Greifen an dem Körper *A* in Fig. 27 zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  nach entgegengesetzten Richtungen, aber in derselben Wirkungslinie an, so bleibt der Körper nur dann in Ruhe, wenn beide Kräfte einander gleich sind. Schon ein kleines Übergewicht auf einer Seite genügt, um eine Bewegung hervorzurufen, die stets in der Richtung der größeren Kraft stattfindet. Beide Sätze sind grundlegende Erfahrungstatsachen, die durch eine Versuchsanordnung nach Fig. 27 leicht nachgeprüft werden können.

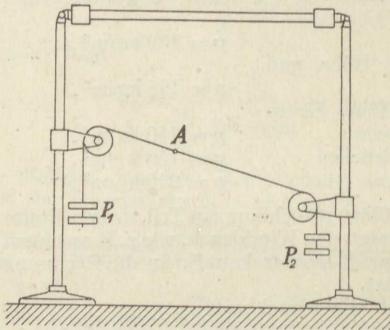


Fig. 27.

Die Bewegung geht um so schneller vor sich, je größer unter sonst gleichen Umständen der Unterschied beider Kräfte ist, und man erkennt daraus, daß für die entstehende Bewegung ausschlaggebend die Kraft  $R = P_1 - P_2$  ist, die als Mittelkraft

der beiden gegebenen bezeichnet wird. Dieser Ausdruck findet seine Erklärung in Abschnitt 6.

Für das Gleichgewicht gilt dagegen die Bedingung  $P_1 - P_2 = 0$ .

An dem Sachverhalt wird nichts geändert, wenn jede der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  aus mehreren beliebigen Einzelkräften besteht, wie das die Fig. 27 schon andeutet. Legt man einer jeden Kraft je nach ihrer Richtung gemäß den in Abschnitt 3 getroffenen Vereinbarungen das Vorzeichen + oder - bei, so kann man bei beliebig vielen, in derselben Wirkungslinie angreifenden Kräften die Gleichgewichtsbedingung aussprechen:

Die Summe aller Kräfte muß 0 ergeben:

$$\sum P = 0. \quad (29)$$

Besteht kein Gleichgewicht, so ergibt sich eine Mittelkraft von der Größe und Richtung

$$R = \sum P. \quad (30)$$

**Beispiel 23.** Der Widerstand eines Elbkahnes beträgt in einem Kanal etwa  $P_2 = 75$  kg; der Kahn soll von 3 Mann geschleppt werden. Welche Kraft  $P_1$  hat jeder Mann bei gleicher Verteilung auf die drei Leute zu leisten?  
Formel (29) ergibt

$$3 P_1 - P_2 = 0,$$

also

$$P_1 = \frac{P_2}{3} = \frac{75}{3} = 25 \text{ kg.}$$

**Beispiel 24.** Anzugeben ist die gesamte auf den Kolben wirkende Druckkraft bei der Dampfmaschine, deren Kolbenkräfte in Beispiel 16 berechnet wurden. Beim Hingang des Kolbens ist die Kraft

$$P = P_1 - P_2 = 13\,250 - 130 = 13\,120 \text{ kg,}$$

beim Rückgang

$$P = 12\,720 - 140 = 12\,580 \text{ kg,}$$

worin jedesmal die Höchstwerte genommen sind.

**Beispiel 25.** Eine Reihen-Dampfmaschine (mit hintereinander liegenden Zylindern) nach Fig. 28 haben die

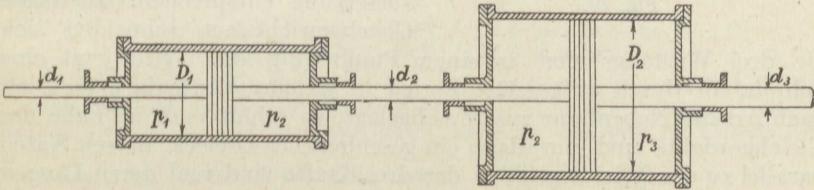


Fig. 28.

Kolbendurchmesser  $D_1 = 330$  mm,  $D_2 = 600$  mm,  
Kolbenstangendurchmesser  $d_1 = 65$  mm,  $d_2 = 90$  mm,  $d_3 = 110$  mm,  
zugehörigen Dampfdrücke  $p_1 = 9,5$  at,  $p_2 = 2,8$  at,  $p_3 = 0,1$  at.

Anzugeben ist die gesamte auf den Kreuzkopf ausgeübte Dampfkraft.

Man erhält nach Formel (27a) die 4 Kolbenkräfte

$$+ P_1 = + \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - d_1^2) \cdot p_1, \quad + P_3 = + \frac{\pi}{4} \cdot (D_2^2 - d_3^2) \cdot p_2,$$

$$- P_2 = - \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - d_2^2) \cdot p_2, \quad - P_4 = - \frac{\pi}{4} \cdot (D_2^2 - d_3^2) \cdot p_3.$$

Damit wird nach Formel (30) die Mittelkraft

$$R = \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 \cdot p_1 - d_1^2 \cdot p_1 - D_1^2 \cdot p_2 + d_2^2 \cdot p_2 + D_2^2 \cdot p_2 - d_3^2 \cdot p_2 - D_2^2 \cdot p_3 + d_3^2 \cdot p_3)$$

oder

$$R = \frac{\pi}{4} \cdot [p_1 \cdot (D_1^2 - d_1^2) + p_2 \cdot (D_2^2 - D_1^2) - p_3 \cdot (D_2^2 - d_3^2)],$$

$$R = 0,7854 \cdot [9,5 \cdot (33^2 - 6,5^2) + 2,8 \cdot (60^2 - 33^2) - 0,1 \cdot (60^2 - 11^2)].$$

Nach Formel (18) macht man den Unterschied der Quadrate für die Rechnung mit dem Rechenschieber bequemer:

$$R = 0,7854 \cdot (9,5 \cdot 39,5 \cdot 26,5 + 2,8 \cdot 93 \cdot 27 - 0,1 \cdot 71 \cdot 49)$$

und erhält so

$$R = 13\,180 \text{ kg.}$$

### 6. Das Kräftedreieck.

Es seien drei Kräfte von bestimmter Größe vorhanden, deren Wirkungslinien in derselben Ebene liegen (Fig. 29); die Bedingungen sollen angegeben werden, unter welchen sie sich im Gleichgewicht befinden, so

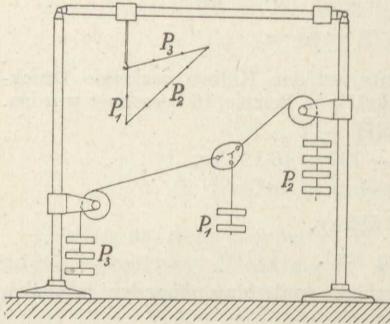


Fig. 29.

daß also der angegriffene Körper in Ruhe bleibt oder seine etwa vorhandene Bewegung nicht ändert.

Der Versuch zeigt, daß sich die drei Schnüre, an welchen die Belastungsgewichte hängen, immer wieder in derselben Weise einstellen, solange die Gewichte unverändert bleiben. Es gibt also nur eine Gleichgewichtslage für einen Körper, auf den drei gegebene Kräfte einwirken, deren Wirkungslinien der obigen Voraussetzung entsprechen. In dieser Gleichgewichtslage schneiden sich

die drei Wirkungslinien in einem Punkt (Fig. 29). Wird jetzt eine Schnur, die durch aufgesetzte Perlen in gleiche Abstände geteilt ist, nach Art der Nebenfigur zusammengelegt, so erhält man im Falle des Gleichgewichts und nur dann ein geschlossenes Dreieck, dessen Seiten parallel zu den Wirkungslinien der drei Kräfte sind und deren Längen den Größen der Kräfte entsprechen. Man gelangt so zu dem Satz:

Drei in derselben Ebene wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen und in einem beliebigen Längenmaßstab nach Größe und Richtung hintereinander abgetragen ein geschlossenes Dreieck bilden.

Da in diesem, immer wieder benutzten Satz die Kraftgröße durch eine Länge abgebildet wird, so pflegt man in der technischen Praxis eine Kraft allgemein durch eine Gerade darzustellen, in der ein angesehener Pfeil die Kraftrichtung anzeigt.

Der obige, der unmittelbaren Anschauung entnommene Satz<sup>10)</sup> wird durch alle Erfahrungen als mit größter Genauigkeit zutreffend bestätigt.

**Beispiel 26.** Ein wagerechter Ausleger wird durch die Last  $Q = 500$  kg am freien Ende beansprucht, gehalten wird er dort durch eine Zugstange, die unter dem Winkel  $\alpha = 39^\circ$  gegen die Wagerechte geneigt ist (Fig. 30). Anzugeben sind die im Ausleger und in der Zugstange auftretenden Spannkraften.

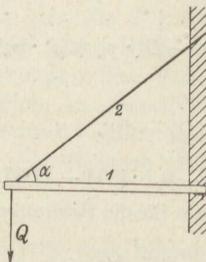


Fig. 30.

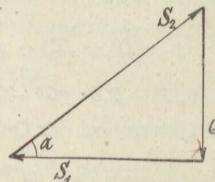


Fig. 31.

Man zeichnet das Kräftedreieck etwa im Maßstabe  $500$  kg =  $20$  mm, also  $1$  mm =  $25$  kg und erhält aus Fig. 31 durch Aufmessen

$$S_1 = 31 \text{ mm} = 25 \cdot 31 = 775 \text{ kg,}$$

$$S_2 = 37 \text{ „} = 25 \cdot 37 = 925 \text{ „.}$$

Man bemerkt, daß unter sonst

<sup>10)</sup> Stevin, de Beghinselen der Weegkonst, 1586. Varignon, Projet d'une nouvelle mécanique. 1725.

gleichen Verhältnissen beide Spannkraften wachsen, wenn der Winkel  $\alpha$  verkleinert wird.

**Beispiel 27.** Bisweilen findet sich die Bogenlampenaufhängung nach Fig. 32. Anzugeben sind die Zugkräfte  $S_1$  und  $S_2$  in den Halteseilen bei dem Lampengewicht  $P = 15,6$  kg für die Stellungen 1, 2, 3, 4, in welchen das Seil 2 mit der Lotrechten die Winkel  $\alpha = 5^\circ, 30^\circ, 55^\circ, 85^\circ$  bildet.

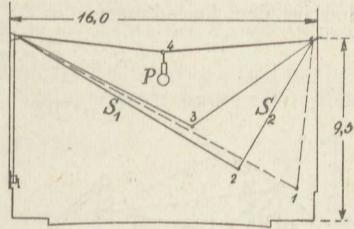


Fig. 32.

Man zeichnet die Gewichtskraft  $P$  etwa in dem Kräftemaßstab  $1 \text{ kg} = 1 \text{ mm}$  lotrecht und zieht durch die

Endpunkte die Parallelen zu den Seilen 1 und 2 für jede der vier Stellungen (Fig. 33). Die Aufmessung ergibt dann

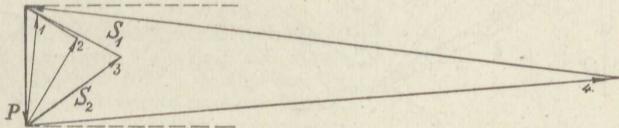


Fig. 33.

$S_1 = 1,8$	$8,0$	$14,5$	$78,3$ mm bzw. kg,
$S_2 = 14,9$	$13,5$	$15,6$	$78,3$ mm bzw. kg.

Aus den gestrichelten Linien der Fig. 33 ist zu folgern, daß es unmöglich ist, ein belastetes Seil wagerecht auszuspannen, da in dem Fall die Spannkraft unendlich groß wird, denn parallele Linien schneiden sich erst im Unendlichen.

**Beispiel 28.** Auf einer Bogenbrücke mit 3 Gelenken befindet sich die Einzellast  $Q = 10$  t in der gezeichneten Stellung (Fig. 34). Zu ermitteln ist die Richtung und Größe der beiden Widerlagerdrücke  $N_1$  und  $N_2$ .

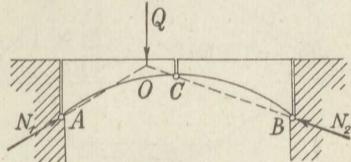


Fig. 34.

Der leere Brückenteil  $CB$  überträgt die Widerlagerkraft  $N_2$  in Richtung der geraden Verbindungslinie  $BC$  der beiden Gelenke. Da nun Gleichgewicht bestehen soll und nur drei Kräfte vorhanden sind, so müssen sie sich in dem Punkt  $O$  schneiden, der durch die Wirkungslinien von  $Q$  und  $N_2$  bestimmt ist. Damit ist auch die Wirkungslinie  $AO$  der Kraft  $N_1$  festgelegt.

Es kann somit das Kräftedreieck der Fig. 35 gezeichnet werden. Ist z. B. der Kräftemaßstab  $10 \text{ t} = 20 \text{ mm}$  angenommen worden, so ergibt die Aufmessung

$$N_1 = 24,4 \text{ mm} = 12,2 \text{ t},$$

$$N_2 = 22,2 \text{ mm} = 11,1 \text{ t}.$$

Die Richtung von  $N_2$  bleibt also dieselbe, solange die Last  $Q$  sich auf der ersten Hälfte der Brücke befindet.

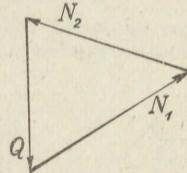


Fig. 35.

**Beispiel 29.** Für den mit  $Q = 20$  t belasteten Derrickkran nach Fig. 36 sind die Spannkraften  $S_1$  in dem Kranausleger und  $S_2$  in den Halteseilen anzugeben für die 3 Ausladungen  $a = 20, 15, 10$  m. Die Länge des Auslegers bis zur Mittelachse der Kransäule beträgt  $l = 22,50$  m, die Höhe bis zur Mitte der Rolle  $h = 15,50$  m.

Die in einem beliebigen Kräftemaßstab gezeichneten Kräftedreiecke der Fig. 37 sind dem Lageplan ähnlich; mithin gilt für alle Belastungen

$$S_1 = Q \cdot \frac{l}{h} = 20 \cdot \frac{22,5}{15,5} = 29,0 \text{ t}$$

und bei den Ausladungen  $a = 20$       15      10 m

$$S_2 = \frac{20}{15,5} \cdot 20,7 \quad \frac{20}{15,5} \cdot 15,3 \quad \frac{20}{15,5} \cdot 11,5 \text{ t}$$

$$S_2 = 26,7 \quad 19,75 \quad 14,85 \text{ t,}$$

worin die Faktoren des Bruches  $\frac{15,5}{20}$  die Länge der Halteseile von Mitte Rolle bis Mitte Säule angeben.

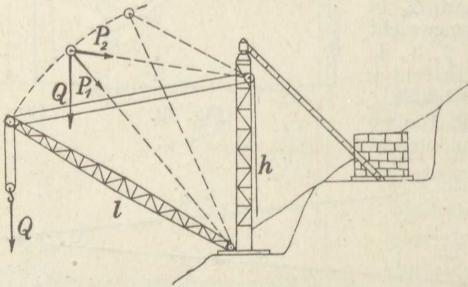


Fig. 36.

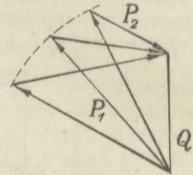


Fig. 37.

**Beispiel 30.** In der Royal-George-Schlucht hängt die Eisenbahnstrecke der Denver- und Rio-Grande-Eisenbahn auf einer Strecke von 82,6 m Länge an Hängewerken nach Fig. 38<sup>11)</sup>. Anzugeben ist die Spannkraft  $S$  der Streben, wenn die Zugstangen mit  $P = 50 \text{ t}$  belastet sind.

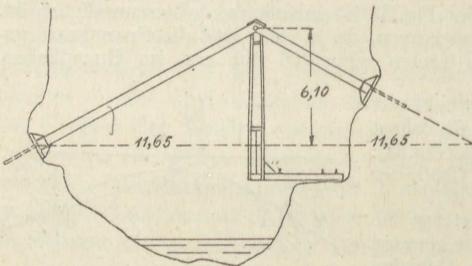


Fig. 38.

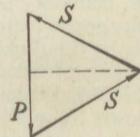


Fig. 39.

Das Kräftedreieck ist das in Fig. 39 in einem ganz beliebigen Kräftemaßstab wiedergegebene. Aus den ähnlichen Dreiecken der Fig. 38 und 39 folgt dann

$$S : \frac{1}{2} \cdot P = \sqrt{11,65^2 + 6,10^2} : 6,10,$$

also

$$S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{11,65}{6,10}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \sqrt{4,65} = 53,9 \text{ t.}$$

Bei Benutzung der Ähnlichkeitsbeziehungen genügt eine ganz überschlägige Aufzeichnung der Kräftedreiecke.

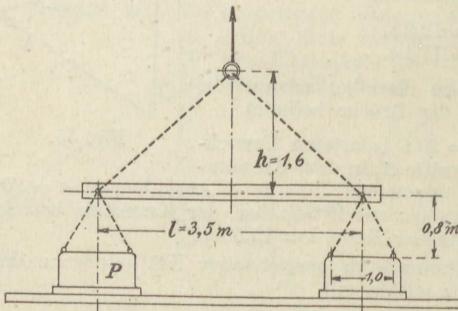


Fig. 40.

**Beispiel 31.** Um Schienen und Träger anzuheben, benutzt man auf den Lagerplätzen der Eisenwerke Elektromagnete in der durch Fig. 40 veranschaulichten Anordnung. Jeder der

<sup>11)</sup> Z. d. V. d. I. 1906.

beiden Magnete habe bei einer Tragfähigkeit von 1200 kg das Eigengewicht 900 kg. Anzugeben ist die Größe der Spannkraften in den Ketten  $S_1$  und in dem Abstefungsträger  $S_2$ .

Die Belastung einer Seite beträgt  $P = 1200 + 900 = 2100$  kg. Das Kräfte-dreieck ist das in Fig. 41 in einem beliebigen Kräfte-maßstab dargestellte. Man erhält aus ähnlichen Dreiecken

$$S_2 : P = \frac{1}{2} \cdot l : h, \quad S_1 : P = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot l\right)^2 + h^2} : h,$$

also

$$S_2 = P \cdot \frac{l}{2h} = \frac{2100 \cdot 3,5}{2 \cdot 1,6} \approx 2300 \text{ kg},$$

$$S_1 = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2} = 2100 \cdot \sqrt{2,196} \approx 3100 \text{ kg}.$$

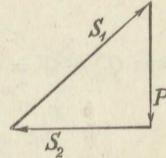


Fig. 41.

**Beispiel 32.** An einem Blechschornstein nach Fig. 42 ruft der Winddruck an dem Haltering die Kraft  $P = 510$  kg hervor (Beispiel 107). Anzugeben ist die Belastung  $Q$  der Schornsteinsäule und die Spannkraft  $S_1$  in der Verankerung 1, wenn gegeben ist  $h_2 + h_3 = 18,2$  m,  $a = 15,5$  m.

Das in Fig. 43 in einem beliebigen Kräfte-maßstab gezeichnete Kräfte-dreieck gibt sogleich aus den Pfeil-richtungen an, daß die Verankerungskraft  $S_1$  am Ring zieht und die Schornsteinsäule auf den Ring die nach oben gerichtete Druckkraft  $Q$  ausübt. Aus den ähnlichen Dreiecken folgt

$$Q : P = (h_2 + h_3) : a,$$

$$S_1 : P = l : a,$$

worin nach dem Satz des Pythagoras einzusetzen ist:  $l = \sqrt{(h_2 + h_3)^2 + a^2}$ . Somit wird

$$Q = P \cdot \frac{h_2 + h_3}{a} = \frac{510 \cdot 18,2}{15,5} \approx 600 \text{ kg},$$

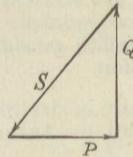


Fig. 43.

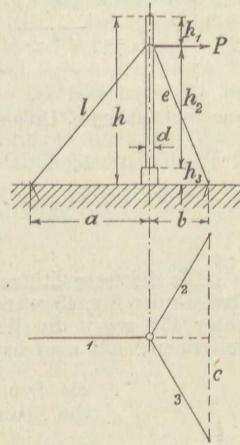


Fig. 42.

$$S = P \cdot \frac{l}{a} = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{a}\right)^2} = 510 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{18,2}{15,5}\right)^2} = 510 \cdot \sqrt{2,38} \approx 790 \text{ kg}.$$

**Beispiel 33.** An einem Kabelkran nach Fig. 44 beträgt die Belastung der im Mittel unter  $45^\circ$  geneigten Pendelstütze  $Q = 18,2$  t. Der wagrecht gemessene

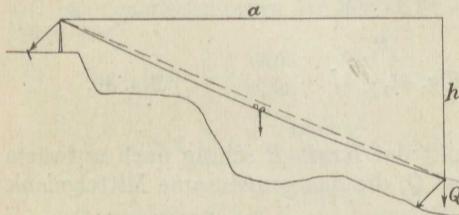


Fig. 44.

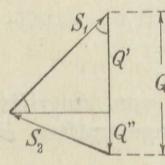


Fig. 45.

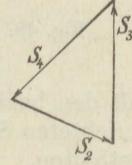


Fig. 46.

Abstand der beiden Stützenspitzen ist  $a = 200$  m, der lotrecht gemessene  $h = 83$  m. Welche Druckkräfte wirken auf die Pendelstütze und auf die feste Stütze, bzw. welcher Zug im Tragsseil und in dem unter  $45^\circ$  geneigten Verankerungsseil der festen Stütze?

Das Kräftedreieck für die Pendelstütze zeigt Fig. 45. Die durch den Schnittpunkt der Stützkraft  $S_1$  und der Seilspannkraft  $S_2$  gezogene wagerechte Linie teilt die Last  $Q$  in  $Q'$  und  $Q''$ , sie ist als zweite Kathete in dem  $45^\circ$ -Dreieck ebenfalls  $Q'$ . Das untere Dreieck ist nun dem Dreieck der Hauptfigur 44 ähnlich, so daß man erhält

$$Q'' : Q' = h : a, \quad \text{also} \quad Q'' = Q' \cdot \frac{h}{a}.$$

Aus  $Q'' + Q' = Q$  folgt hiermit

$$Q' = \frac{Q}{1 + \frac{h}{a}}.$$

Aus dem oberen Dreieck der Fig. 45 liefert der Satz des Pythagoras

$$S_1 = \sqrt{Q'^2 + Q'^2} = Q' \cdot \sqrt{2} = Q \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{h}{a}} = \frac{18,2 \cdot 14,14}{1 + \frac{41,5}{100}} \approx 18,2 \text{ t},$$

aus dem unteren Dreieck erhält man ebenso

$$S_2 = \sqrt{Q'^2 + Q''^2} = Q' \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} = Q \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2}{1 + \frac{h}{a}} = \frac{18,2 \cdot 1,086}{1,415} \approx 14,0 \text{ t}.$$

Für die feste Stütze ist das Kräftedreieck in Fig. 46 dargestellt.  $S_2$  ist dem Dreieck der Fig. 45 entnommen worden. Die Zugkraft  $S_4$  im Ankerseil soll wieder unter  $45^\circ$  gegen die Wagerechte geneigt sein, das Dreieck ist also dem ersten kongruent, und man hat sofort

$$\begin{aligned} \text{die Druckkraft in der Stütze } S_3 &= Q = 18,2 \text{ t}, \\ \text{die Spannkraft im Ankerseil } S_4 &= S_1 = 18,2 \text{ t}. \end{aligned}$$

Die Anordnung der Zugstangen und des Belastungsgewichtes  $R$  der Fig. 47 entspricht völlig der der Fig. 26, und die Kraft  $R$  ist also nach dem dazu gesetzten Kräftedreieck (Fig. 48) in Gleichgewicht

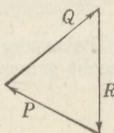


Fig. 48.

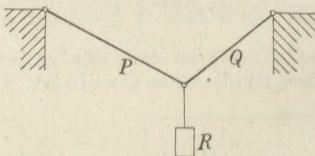


Fig. 47.

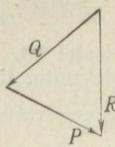


Fig. 49.

mit den beiden vom Angriffspunkt der Kraft  $R$  schräg nach aufwärts gerichteten Stangenkräften  $P$  und  $Q$ , die das gemeinsame Mittelgelenk festhalten.

Umgekehrt kann nach den Darlegungen in Abschnitt 3 von den Gegenkräften  $P$  und  $Q$  gesprochen werden, mit welchen die Last  $R$  am gemeinsamen Gelenk in beiden Stangenrichtungen nach unten zieht. Das entsprechende Kräftedreieck ist das in Fig. 49 noch einmal wieder-gegebene, und man sagt in dem Fall, die Mittelkraft  $R$  ist in die beiden

Seitenkräfte  $P$  und  $Q$  zerlegt worden, deren Pfeile im Endergebnis ebendahin führen, wie derjenige der Kraft  $R$ :

Die Mittelkraft ist die Schlußlinie des aus den beiden Seitenkräften gebildeten Dreiecks.

Die Bezeichnungen erklären sich aus Fig. 50, die den Sachverhalt noch einmal darstellt.

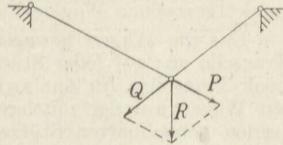


Fig. 50.

**Beispiel 40.** Fig. 51 stellt die Lage der Tragseile einer Drahtseilbahn beim Übergang über eine Bergkuppe dar. Die Spannkraft des Tragseiles für die vollbeladenen Wagen habe die wagerechte Seitenkraft  $H_v = 18,0$  t und die des Tragseiles für die leer zurückgehenden Wagen die Seitenkraft  $H_l = 11,0$  t. Anzugeben sind die Belastung  $V$  der mittleren Stütze der Fig. 51 und die in den Seilen davor und dahinter auftretenden Spannkraften  $S_1$  bzw.  $S_2$ .

Man zerlegt die Seilspannkraften  $S_1$  und  $S_2$  zu beiden Seiten der Stütze in ihre wagerechten und lotrechten Seitenkräfte (Fig. 52). Da Gleichgewicht bestehen soll, so sind die in dieselbe Wirkungslinie fallenden, entgegengesetzt gerichteten Kräfte  $H$  einander gleich, und weil das für alle Stützen in gleicher Weise zutrifft, wird  $H$  als die für das ganze Tragseil unveränderliche Spannkraft in erster Linie angegeben.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke der Fig. 51 und 52 folgt

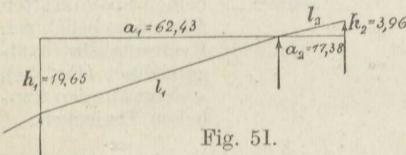


Fig. 51.

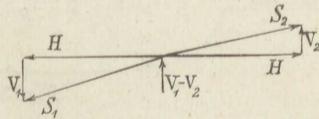


Fig. 52.

$$V_1 = H \cdot \frac{h_1}{a_1}, \quad V_2 = H \cdot \frac{h_2}{a_2},$$

$$S_1 = H \cdot \frac{l_1}{a_1}, \quad S_2 = H \cdot \frac{l_2}{a_2}.$$

Nun ist nach dem Satz des Pythagoras  $l = \sqrt{a^2 + h^2}$ , also

$$S_1 = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{a_1}\right)^2}, \quad S_2 = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{a_2}\right)^2},$$

und mit den Zahlenwerten der Fig. 51 ist somit für die Seite der vollbeladenen Wagen

$$V_v = 18,0 \cdot \left( + \frac{19,65}{62,43} - \frac{3,96}{17,38} \right) = 18,0 \cdot (0,3148 - 0,2278) = 1,57 \text{ t},$$

$$S_{v1} = 18,0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{19,65}{62,43}\right)^2} = 18,86 \text{ t},$$

$$S_{v2} = 18,0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3,96}{17,38}\right)^2} = 18,46 \text{ t},$$

und für die Seite der leeren Wagen

$$V_l = 11,0 \cdot (+0,3148 - 0,2278) = 0,96 \text{ t},$$

$$S_{l1} = 11,0 \cdot \frac{18,86}{18,0} = 11,53 \text{ t},$$

$$S_{12} = 11,0 \cdot \frac{18,46}{18,0} = 11,22 \text{ t.}$$

Zu beachten ist, daß  $V$  durch Addition der Einzelbeträge  $V_1$  und  $V_2$  erhalten wird, wenn beide Neigungswinkel des Tragseiles unterhalb der durch den Stützpunkt gezogenen Wagerechten liegen.

Das die Wagen bewegende Zugseil greift daran etwa 0,50 m unterhalb der Tragseile an; auf jeder Stütze befinden sich etwa 2,0 m unterhalb des Tragseiles noch Tragrollen für das zwischen den Wagen freihängende Zugseil. Steht nun ein Wagen auf der mittleren Stütze, so gelten für das auf den Tragrollen der beiden benachbarten Stützen aufliegende Zugseil dieselben Formeln, nur ist  $h_1$  um 1,50 m vergrößert und  $h_2$  um denselben Betrag verkleinert.

Ist die wagerechte Seitenkraft der Zugseilspannkraft  $H_z = 0,40 \text{ t}$ , so vermehrt sich die Belastung der Stütze außer um das Wagengewicht noch um

$$V_z = 0,40 \cdot \left( + \frac{21,15}{62,43} - \frac{2,46}{17,38} \right) = 0,40 \cdot (0,3389 - 0,1415) = 0,079 \text{ t.}$$

**Beispiel 41.** Zu berechnen ist der Durchhang  $f$  des Tragseiles eines Kabelkranes nach Fig. 53 von der Spannweite  $l = 250 \text{ m}$ , dessen Seil mit der Kraft  $S = 15,0 \text{ t}$  gespannt ist, unter der in der Mitte stehenden Belastung  $P = 2050 \text{ kg}$ .

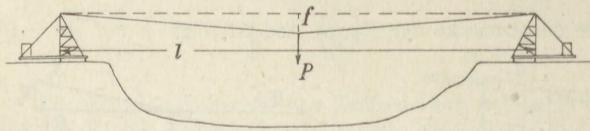


Fig. 53.

Wird das Kräfte-dreieck aus der Belastung  $P$  und den beiden Spannkraften  $S$  in einem beliebigen Kräftemaßstab aufgezeichnet (Fig. 54), so folgt aus den ähnlichen Dreiecken

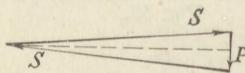


Fig. 54.

$$\frac{1}{2} \cdot P : S = f : l'$$

Hierin ist einzusetzen

$$l' = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + f^2} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2f}{l}\right)^2}$$

oder mit Formel (20)

$$l' = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot f}{l}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right].$$

Damit wird

$$f = \frac{P}{4 \cdot S} \cdot l \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right].$$

In der ersten Annäherung kann die kleine Größe  $\left(\frac{f}{l}\right)^2$  vernachlässigt werden, und man erhält

$$f = \frac{2,05 \cdot 250}{4 \cdot 15,0} = 8,43 \text{ m.}$$

Der genaue Wert bestimmt sich dann zu

$$f = 8,43 \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \left(\frac{8,43}{250}\right)^2 \right] = 8,43 \cdot 1,0023 = 8,45 \text{ m.}$$

Wäre statt der Seilspannkraft  $S$  ihre wagerechte Seitenkraft  $H = 15,0 \text{ t}$  gegeben, so wäre der erste Wert schon der endgültige.

Teilt die Last  $P$  bei einer anderen als der Mittelstellung die Länge  $l$  in die beiden Abschnitte  $a_1$  und  $a_2$  (Fig. 55), so nimmt das Kräftedreieck die Gestalt der Fig. 56 an, und die Last  $P$  wird durch die gestrichelte Wagerechte  $H$  in die beiden Teilkräfte  $V_1$  und  $V_2$  zerlegt. Aus ähnlichen Dreiecken folgt dann

$$V_1 : H = f' : a_1, \quad V_2 : H = f' : a_2,$$

also

$$V_1 = H \cdot f' \cdot \frac{1}{a_1}, \quad V_2 = H \cdot f' \cdot \frac{1}{a_2}.$$

Durch Addition beider Werte ergibt sich

$$P = H \cdot f' \cdot \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) = H \cdot f' \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1 \cdot a_2},$$

also

$$f' = \frac{P}{H} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l}.$$

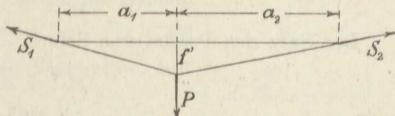


Fig. 55.

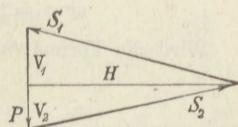


Fig. 56.

Hierin ist noch die Kraft  $H$  durch die größere Seilkraft  $S_1$  auszudrücken, indem man wieder den ähnlichen Dreiecken entnimmt

$$\frac{H}{S_1} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + f'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f'}{a_1}\right)^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f'}{a_1}\right)^2}.$$

Damit erhält man schließlich

$$f' = \frac{P}{S_1} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f'}{a_1}\right)^2 \right],$$

worin der Klammerausdruck nur als Berichtigung benutzt wird.

**Grundlehren der Trigonometrie.** In einen Kreis vom Halbmesser 1 sei von einem als Nullachse geltenden Durchmesser aus ein Winkel  $\alpha$  eingezeichnet (Fig. 57). Die den freien Schenkel  $\overline{OA}$  von der Länge 1 auf die Achse  $\overline{OB}$  projizierende Linie  $\overline{AC}$  ist der Sinus des Winkels  $\alpha$  ( $\sin \alpha$ ) und die Projektion  $\overline{OC}$  der Kosinus dieses Winkels ( $\cos \alpha$ ). Das Stück  $\overline{BD}$  der von der Achse aus im Punkt  $B$  bis zum freien Schenkel des Winkels  $\alpha$  an den Kreis gezogenen Tangente ist die Tangente des Winkels ( $\operatorname{tg} \alpha$ ) und das Stück  $\overline{DE}$  der von dem Endpunkt  $D$  der zur ersten Achse senkrechten Achse  $\overline{OD}$  an den Kreis gezogenen Tangente bis zum freien Schenkel des Winkels  $\alpha$  ist seine Kotangente ( $\operatorname{cotg} \alpha$ ).

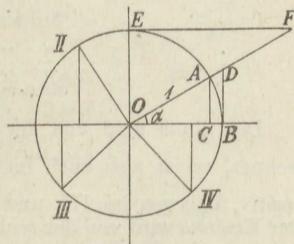


Fig. 57.

Es bestehen nun folgende Zusammenhänge zwischen den durch die vorstehenden Erklärungen festgelegten Winkelfunktionen:

Aus ähnlichen Dreiecken wird entnommen

$$\overline{BD} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{OC} \quad \text{oder} \quad \overline{BD} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

(31)

$$\overline{EF} : \overline{OE} = \overline{OB} : \overline{BD} \quad \text{oder} \quad \overline{EF} = \frac{1}{\overline{BD}},$$

$$\cotg \alpha = \frac{1}{\tg \alpha}. \quad (32)$$

Der Satz des Pythagoras liefert

$$\overline{OC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2$$

$$\text{oder} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (33)$$

also

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (34 \text{ u. } 35)$$

Wird die Formel (34) in Formel (31) eingesetzt, so ergibt sich

$$\tg \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} \quad (36)$$

und entsprechend durch Verbindung von Formel (35) und (32)

$$\cotg \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}. \quad (37)$$

Hieraus kann wieder ausgerechnet werden

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tg^2 \alpha}} \quad \text{bzw.} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}. \quad (38 \text{ u. } 39)$$

Ändert sich der Winkel von  $0^\circ$  steigend bis  $90^\circ$ , oder wenn man statt der Grade die entsprechenden Bogenlängen einsetzt, zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ , so steigt der Sinus von 0 bis 1 und fällt der Kosinus von 1 bis 0, dabei wächst die Tangente von 0 bis  $\infty$  und sinkt die Kotangente von  $\infty$  bis 0.

Man bemerkt ferner, daß sich für kleine Winkel  $\alpha$  Sinus, Tangente und Bogen ( $\text{arc } \alpha$ ) nur ganz unerheblich voneinander unterscheiden und der Kosinus von 1 wenig abweicht, und zwar ist

$$\begin{aligned} &\text{bis auf } 0,001 \text{ genau für } \alpha < 2\frac{1}{2}^\circ, \\ &,, \quad ,, \quad 0,003 \quad ,, \quad ,, \quad \alpha < 4\frac{1}{2}^\circ, \\ &,, \quad ,, \quad 0,01 \quad ,, \quad ,, \quad \alpha < 8^\circ, \\ &\sin \alpha = \tg \alpha = \text{arc } \alpha, \quad \cos \alpha = 1. \end{aligned}$$

Der Sinus wird von der wagerechten Nullachse aus nach oben positiv gerechnet, er ist also auch im II. Viertelkreis, wo  $\alpha$  zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  beträgt, positiv, dagegen im III. und IV. Viertelkreis bei  $\alpha$  zwischen  $\pi$  und  $2\pi$  negativ. Der Kosinus wird von der senkrechten Achse aus nach rechts als positiv gerechnet, er ist also im II. Viertelkreis und im III. negativ, dagegen im IV. wieder positiv. Mit Hilfe von Formel (31) erhält man hieraus, daß die Tangente und also nach Formel (32) auch die Kotangente im I. und III. Viertelkreis positiv ist, dagegen im II. und IV. negativ.

Man entnimmt der Fig. 57 leicht die folgenden Umrechnungen:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= +\cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= +\sin \alpha, \\ \sin(\pi - \alpha) &= +\sin \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha, \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos \alpha. \end{aligned} \quad (40)$$

Für die Tangente erhält man die entsprechenden Formeln am einfachsten durch Benutzung von Formel (31).

Hat die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks nicht die Länge 1, sondern irgendeine andere, z. B.  $c$ , so haben die Katheten den  $c$ -fachen des oben angegebenen Wertes, also mit den Bezeichnungen der Fig. 58 die Größen

$$a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha. \quad (41)$$

Durch Division beider Gleichungen folgt in Verbindung mit Formel (31)

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (42)$$

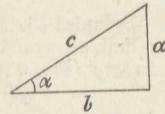


Fig. 58.

Ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck (Fig. 59) wird durch die Höhe  $h_1$  in zwei rechtwinklige zerlegt, und es gilt

$$h_1 = c \cdot \sin \beta \quad \text{bzw.} \quad h_1 = b \cdot \sin \gamma.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke folgt hieraus der Sinussatz:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \quad (43)$$

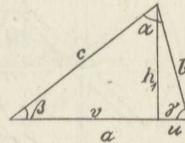


Fig. 59.

Aus dem rechten Dreieck der Fig. 59 erhält man

$$h_1 = b \cdot \sin \gamma \quad \text{und} \quad u = b \cdot \cos \gamma,$$

aus dem linken Dreieck wird entnommen

$$c^2 = h_1^2 + v^2 = h_1^2 + (a - u)^2 = h_1^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot u + u^2$$

oder mit den vorstehenden Werten

$$c^2 = b^2 \cdot \sin^2 \gamma + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma + b^2 \cdot \cos^2 \gamma,$$

und nach Formel (33) folgt hieraus der Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma. \quad (44)$$

Wird die Mittelkraft  $R$  in zwei aufeinander senkrecht stehende Seitenkräfte  $P$  und  $Q$  zerlegt, von welchen  $P$  mit  $R$  den Winkel  $\alpha$  einschließt (Fig. 60), so ist nach den Formeln (41)

$$P = R \cdot \cos \alpha, \quad (45)$$

$$Q = R \cdot \sin \alpha, \quad (46)$$

und der Winkel  $\alpha$  wird oft bestimmt, wenn  $P$  und  $Q$  gegeben sind, aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}. \quad (47)$$

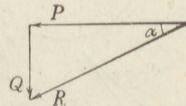


Fig. 60.

**Beispiel 42.** Ein Schiff ist im Hafen von zwei Schleppern zu ziehen, von denen der eine die 1,5fache Zugkraft des anderen besitzt. Wie groß ist der Winkel  $\beta$  zu nehmen, wenn  $\alpha \sim 20^\circ$  gewählt wird, und wie verteilt sich der Schiffswiderstand  $R$  auf beide Schlepper (Fig. 61)?

Man entnimmt dem Kräftedreieck der Fig. 62 nach dem Sinussatz Formel (43)

$$\sin \beta = \frac{P_1}{P_2} \cdot \sin \alpha = 1,5 \cdot 0,342 = 0,513,$$

mithin  $\beta \sim 31^\circ$ .

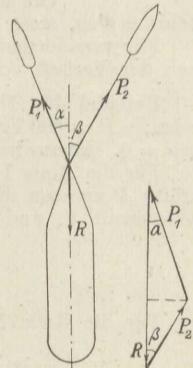


Fig. 61. Fig. 62.

Ferner ist

$$R = P_1 \cdot \cos \alpha + P_2 \cdot \cos \beta = P_1 \cdot 0,94 + P_2 \cdot 0,86.$$

Die Zugkraft des ersten Schleppers wird zum 0,94ten Teil ausgenutzt, dagegen die des zweiten, schwächeren, nur zum 0,86ten Teil.

**Beispiel 43.** Ein Seilscheibenschwungrad habe das Eigengewicht  $G \sim 4750$  kg, der Seilzug von insgesamt  $Q = 2650$  kg wirkt unter dem Winkel  $\alpha = 30^\circ$  nach aufwärts (Fig. 63). Anzugeben ist die Gesamtbelastung der Welle.

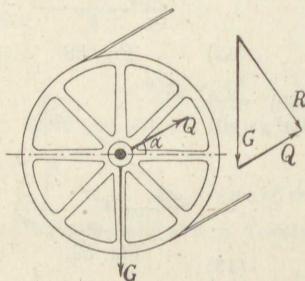


Fig. 63.

Das an die Fig. 63 gesetzte Kräftriedreieck zeigt die Mittelkraft  $R$  der beiden gegebenen Seitenkräfte in einem beliebigen Kräftemaßstab, und man findet nach dem Kosinussatz Formel (44)

$$R^2 = G^2 + Q^2 - 2 \cdot G \cdot Q \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

oder mit Benutzung der betreffenden Formel (40)

$$R^2 = G^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{Q}{G} \right)^2 - 2 \cdot \frac{Q}{G} \cdot \sin \alpha \right],$$

also

$$R = G \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{Q}{G} \right)^2 - 2 \cdot \frac{Q}{G} \cdot \sin \alpha},$$

$$R = 4750 \cdot \sqrt{1 + 0,558^2 - 2 \cdot 0,558 \cdot 0,50} = 4750 \cdot \sqrt{0,752} = 4120 \text{ kg.}$$

**Beispiel 44.** Ein Treibriemen umfaßt die Riemenscheibe mit dem Winkel  $\alpha = 165^\circ$ . Die Spannkraften im Riemen sind  $S_1 = 850$  kg und  $S_2 = 460$  kg. Zu bestimmen ist die dadurch entstehende Belastung der Welle.

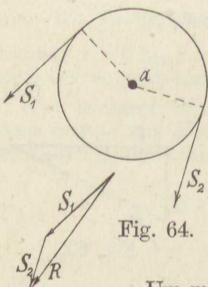


Fig. 64.

Aus dem zur Fig. 64 zugesetzten Kräftriedreieck erhält man mit Hilfe des Kosinussatzes Formel (44)

$$R^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \cos \alpha$$

oder mit Benutzung der entsprechenden Formel (40)

$$R^2 = S_1^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \cos (\pi - \alpha) \right],$$

mithin

$$R = S_1 \cdot \sqrt{1 + 0,541^2 + 2 \cdot 0,541 \cdot 0,966} \\ = 850 \cdot \sqrt{2,337} = 1300 \text{ kg.}$$

Um mit kleinen, leicht zu übersehenden Zahlen zu arbeiten, empfiehlt es sich, stets die Ausrechnung in der angegebenen Weise vorzunehmen.

Für verschiedene Verhältnisse von  $S_1 : S_2$  und verschiedene Winkel  $\alpha$  ergibt sich der Verlauf von  $R : S_1$  aus Fig. 65.

**Beispiel 45.** Das Lastseil eines Aufzuges sei nach Fig. 66 geführt. Die Last betrage  $P = 600$  kg, die Neigung des schrägen Seiltrumes gegen die Wagerechte  $\text{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ . Anzugeben ist die Größe der auf die Lager ausgeübten Drücke  $V$  und  $H$ .

Für die Rolle I liefert die Fig. 67 die zeichnerische Lösung: Die beiden Seilkräfte  $P$  ergeben die Mittelkraft  $R$ , die ihrerseits zerlegt wird in die senkrechte Seitenkraft  $V_1$  und die wagerechte  $H_1$ . Die gestrichelte Hilfslinie ergibt

$$H_1 = P \cdot \cos \alpha,$$

$$V_1 = P + P \cdot \sin \alpha = P(1 + \sin \alpha).$$

Für die Rolle II gilt die Fig. 68, und man erhält hieraus

$$H_2 = P \cdot \cos \alpha,$$

$$V_2 = P - P \cdot \sin \alpha = P(1 - \sin \alpha).$$

Werden noch die Formeln (38) und (39) angewendet, so folgt

$$H_1 = H_2 = \frac{P}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{600}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{600}{\frac{5}{4}} = 480 \text{ kg,}$$

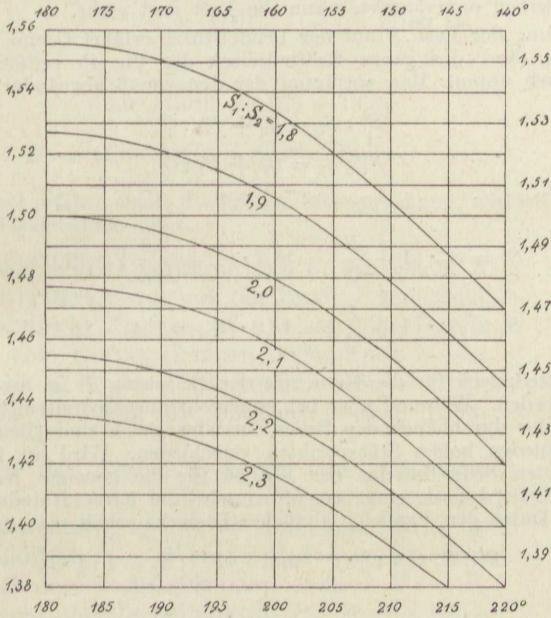


Fig. 65.

$$V_1 = P \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}\right) = 600 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}}\right) = 600 \cdot \frac{8}{5} = 960 \text{ kg,}$$

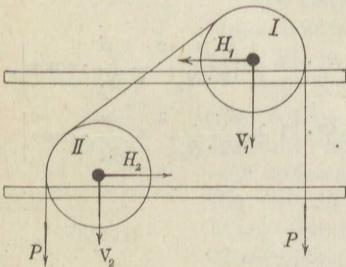


Fig. 66.

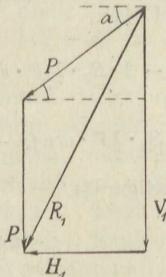


Fig. 67.

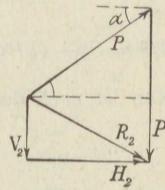


Fig. 68.

$$V_2 = P \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}\right) = 600 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 240 \text{ kg.}$$

**Beispiel 46.** Auf dem Kabelkran nach Fig. 44 verkehre eine Laufkatze, die einschließlich der Last  $P = 2,8$  t wiegt. Anzugeben sind die Kräfte in den beiden Stützen bzw. im Seil, wenn die Katze dicht davor steht, ferner der Durchhang  $f$  bei Stellung der Katze in der Mitte und die Größe der Seilspannung in diesem Fall.

Die lotrechte Belastung  $S_3$  der festen Stütze vergrößert sich um das Gewicht  $P$ ,  $S_2$  und  $S_4$  bleiben unverändert, wenn die Last dort steht.

Bei Stellung der Last  $P$  auf der Pendelstütze erfährt  $Q$  eine entsprechende Vergrößerung, und das ganze Kräftedreieck der Fig. 45 verlängert sich entsprechend nach unten. Man entnimmt der demgemäß abgeänderten Fig. 45

$$S'_1 : S_1 = (Q + P) : Q,$$

$$S'_2 : S_2 = (Q + P) : Q,$$

also

$$S'_1 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right) = 18,2 \cdot \left(1 + \frac{2,8}{18,2}\right) = 21,0 \text{ t,}$$

$$S'_2 = S_2 \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right) = 14,0 \cdot (1 + 0,154) = 16,1 \text{ t.}$$

Das Kräftedreieck für die Mitte mit der Belastung  $P$  ist bereits in Fig. 54 dargestellt worden. Während aber bei wagerecht ausgespanntem Seil die beiden Spannkraften des durchhängenden Seiles einander gleich sind (Beispiel 41), sind sie bei verschiedenen hohen Stützpunkten verschieden. Wird die Spannkraft  $S_2$  des unbelasteten Seiles in das der Fig. 54 für die geneigte Kabelbahn entsprechende Kräftedreieck eingetragen, so wird die Kraft  $P$  dadurch zerlegt in  $P'$  und  $P''$ . Durch den Vergleich ähnlicher Dreiecke erhält man dann

$$P' : S_2 = f : \frac{1}{2} \cdot l \quad \text{und} \quad P'' : S_2 = f : \frac{1}{2} \cdot l,$$

also

$$P' = P'' = \frac{1}{2} \cdot P.$$

Damit liefert jede der vorstehenden Gleichungen

$$f = \frac{S_2 \cdot l}{4 \cdot P}.$$

Die Größe der beiden jetzt vorhandenen Seilspannkraften berechnet man nach dem Kosinussatz Formel (44):

$$S_1'^2 = S_2^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot P\right)^2 - 2 \cdot S_2 \cdot \frac{1}{2} P \cdot \cos \alpha = S_2^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{P}{2 \cdot S_2}\right)^2 - \frac{P}{S_2} \cdot \cos \alpha\right],$$

$$S_2''^2 = S_2^2 + \left(\frac{1}{2} P\right)^2 - 2 \cdot S_2 \cdot \frac{1}{2} P \cdot \cos(\pi - \alpha) = S_2^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{P}{2 \cdot S_2}\right)^2 + \frac{P}{S_2} \cdot \cos \alpha\right]$$

Nun ist nach der Hauptfigur 44

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{h}$$

und nach Formel 38

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}},$$

folglich

$$\begin{aligned}
 S'_2 &= S_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{P}{2 \cdot S_2}\right)^2} - \frac{P}{S_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}} \\
 &= 14,0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} - \frac{0,20}{\sqrt{1 + \left(\frac{100}{41,5}\right)^2}} \\
 &= 14,0 \cdot \sqrt{1,010 - 0,077} = 13,5 \text{ t,} \\
 S'_2 &= 14,0 \cdot \sqrt{1,010 + 0,077} = 14,6 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

Das Tragseil erfährt somit die größte Beanspruchung, wenn die Laufkatze dicht bei der Pendelstütze steht.

Die Körper I und II berühren sich in der Fläche  $F$  (Fig. 69). Der erstere werde von der Kraft  $P$  senkrecht zur Berührungsfläche  $F$  gegen den zweiten gepreßt. Er erfährt dann vom Körper II einen Gegendruck  $N$ , der nach Abschnitt 3 in die Wirkungslinie von  $P$  fällt, gleich groß ist und nur die entgegengesetzte Richtung hat.

Wird jetzt der Körper I durch eine gegen die Flächennormale um den beliebigen Winkel  $\alpha$  geneigte Kraft  $P$  angedrückt (Fig. 70), so kann man  $P$  in die beiden Seitenkräfte  $P_1 = P \cdot \cos \alpha$  und  $P_2 = P \cdot \sin \alpha$  zerlegen. Nach dem Vorhergehenden ist dann  $N$  mit  $P_1$  im Gleichgewicht und die Seitenkraft  $P_2$ , für die keine Gegenkraft in der glatten Fläche  $F$  vorhanden ist, wirkt auf eine Verschiebung des Körpers I hin. Der Stützdruck hat also in diesem Fall die Größe und Richtung  $P_1$ :

Zwei sich in einer Fläche berührende Körper wirken stets derart aufeinander ein, daß die Stützdrücke senkrecht zur Berührungsfläche stehen.

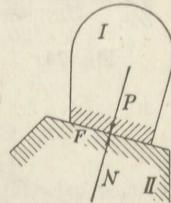


Fig. 69.

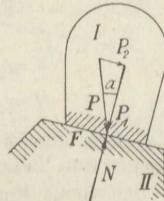


Fig. 70.

Der Satz trifft auch zu, wenn die Berührung in einer Kante (Fig. 71) oder in einem Punkt erfolgt (Fig. 72).

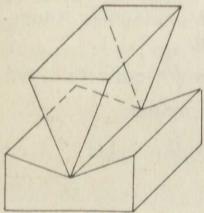


Fig. 71.

Das Kräfte-dreieck zeigt nicht alle Kräfte an ihrer Angriffsstelle wirkend an, sondern mindestens eine seitwärts verschoben, z. B. in Fig. 70 die Kraft  $P_2$ . Legt man Wert darauf, daß die Kräfte im Konstruktionsplan sämtlich an ihrer

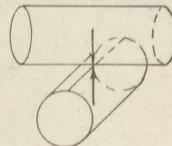


Fig. 72.

Angriffsstelle erscheinen, so zeichnet man das Kräfteparallelogramm bzw. Kräfte-rechteck, wie z. B. im Fall der Fig. 75.

**Beispiel 47 und 48.** Um zwei Teilstücke eines großen Maschinenrahmens oder dergl. miteinander fest zu verbinden, werden an der Teilfuge Stahlstücke

nach Fig. 73 warm eingelegt, die sich beim Erkalten zusammenziehen und so die Fuge dicht schließen. Um den Druck möglichst gleichmäßig über die ganze Fuge wirken zu lassen, werden die Anlageflächen etwas schräg ausgeführt.

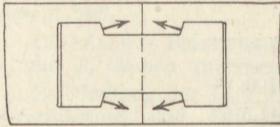


Fig. 73.

Parallel zur Fuge laufende Anlageflächen würden die äußeren Teile der Fuge nicht mehr genügend fest zusammenpressen.

Um die nachgiebige Packung einer Stopfbüchse gut gegen die Kolbenstange zu drücken, wird der Grundring und die Rotgußausfütterung der Stopfbüchse nach Fig. 74 abgeschragt.

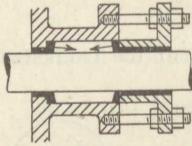


Fig. 74.

**Beispiel 49.** Das Hängewerk nach Fig. 75, dessen Streben mit der Wagerechten den Winkel  $\alpha = 40^\circ$  einschließen, ist in der Mitte durch die Last  $P = 5,3 \text{ t}$  belastet. Anzugeben sind die dadurch in den einzelnen Balken hervorgerufenen Kräfte.

Die Last  $P$  wird durch die mittlere Zugstange nach dem oberen Knotenpunkt übertragen und zerlegt sich dort nach den beiden Strebenrichtungen  $S$ . Man entnimmt dem Kräfteparallelogramm

$$S = \frac{\frac{1}{2} \cdot P}{\sin \alpha} = \frac{2,65}{0,6428} = 4,12 \text{ t},$$

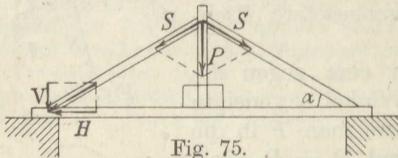


Fig. 75.

Die Pfeile zeigen an, daß  $S$  auf die Streben als Druckkraft wirkt, die sich auf die unteren Knotenpunkte überträgt. Sie wird dort in die senkrecht zur Auflagerfläche stehende Kraft  $V$  und die wagerechte  $H$  zerlegt, und man erhält aus dem Kräfterechteck

$$V = S \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot P = 2,65 \text{ t},$$

$$H = S \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \cotg \alpha = 2,65 \cdot 1,192 = 3,17 \text{ t}.$$

$V$  ist nach Fig. 75 die auf das Auflager ausgeübte Druckkraft und  $H$  die in dem wagerechten Balken wirkende Zugkraft.

Bei einem doppelten Hängewerk nach Fig. 76 ergibt sich in gleicher Weise

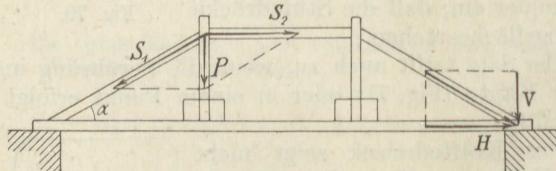


Fig. 76.

$$S_1 = P : \sin \alpha,$$

also doppelt so groß als beim einfachen Hängewerk,

$$S_2 = P : \cos \alpha$$

und weiter

$$V = P,$$

$$H = -S_2 = -\frac{P}{\cos \alpha}.$$

Freilich gilt diese Berechnung nur für das symmetrische und symmetrisch belastete Hängewerk, wie es Fig. 76 darstellt.

**Beispiel 50.** Die Fig. 77 stellt das Kurbelgestänge einer Dampfmaschine im dem Augenblick dar, wo die Schubstange am weitesten aus der Mitte ausschlägt. Beim Rechtsgang der Maschine wirkt die Kolbenkraft  $P$  in der gezeichneten Richtung, sie zerlegt sich am Kreuzkopfpapfen in Richtung der Schubstange und





Dreieck bilden (Fig. 83). Das Dreieck ist rechtwinklig und enthält den Winkel  $\alpha$  zwischen  $Q$  und  $N$ . Man erhält demnach

$$\sin \alpha = \frac{P}{Q} = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad \alpha = 30^\circ.$$

Die Belastung der Fahrbahn beträgt

$$N = Q \cdot \cos \alpha = Q \cdot 0,866.$$

**Beispiel 52.** Anzugeben ist der Grund, weswegen die Achsschenkel der Landfahrwerke etwas nach unten gekröpft werden.

Auf den Radkranz wirkt von unten der Gegendruck  $Q$  der Straße und auf die Nabe der senkrecht zur Zapfenfläche stehende Druck  $N$  (Fig. 84). Beide Kräfte setzen sich nun nach dem beigelegten Kräftedreieck zu einer Mittelkraft  $R$  zusammen, die bestrebt ist, das Rad immer wieder gegen den Bund der Achse zu schieben und dadurch den Vorstecksplint bzw. die Achsmutter zu entlasten.

Das Rad erhält etwas Sturz, damit die Wirkungslinien der Kraft  $N$ , die in der Mitte der Zapfenlänge angreift, und der Kraft  $Q$ , die etwa in der Mitte der Felgenbreite wirkt, sich ungefähr am Zapfenumfang schneiden.

Die Unterachsung beträgt gewöhnlich  $\alpha = 4^\circ 20'$ ; damit ergibt sich

$$R = Q \cdot \sin \alpha = 0,0756 \cdot Q.$$

**Beispiel 53.** Eine Dachfläche von der Breite  $b = 7,2$  m und der Länge  $l = 5,0$  m mit der Neigung  $\alpha = 35^\circ$  gegen die Wagerechte sei durch Schnee belastet. Anzugeben ist die größte vom Schneedruck ausgeübte Kraft.

Je nach der Höhenlage des betreffenden Ortes hat die Schneelast, die sich bilden kann, eine gewisse Höhe. Die größte Schneelast für  $1 \text{ m}^2$  wagerechter Fläche beträgt in Deutschland bei der Erhebung  $h$  m über den Meeresspiegel<sup>12)</sup>

$$q = 70 \left( 1 + \frac{h}{500} \right).$$

Man kann der Einfachheit halber ansetzen:

bei der Meereshöhe $h = 0$ bis	200 m:	$q = 75 \text{ kg/m}^2$ ,
„ „ „ $h = 200$ „	500 m:	$q = 120$ „
„ „ „ $h = 500$ „	1000 m:	$q = 340$ „

Auf einer geneigten Fläche von der in der Schräge gemessenen Breite  $b$  (Fig. 85) hat die Schneelast nur die Breitenausdehnung  $b \cdot \cos \alpha$  und es gilt demnach für die norddeutsche Tiefebene

$$Q = l \cdot b \cdot \cos \alpha \cdot q = 5,0 \cdot 7,2 \cdot 0,819 \cdot 75 = 2210 \text{ kg}.$$

Die Kurve  $SS$  der Fig. 87 gibt den Verlauf des Schneedruckes für  $F = 1 \text{ m}^2$  und  $q = 75 \text{ kg/m}^2$  in Abhängigkeit vom Neigungswinkel  $\alpha$  an.

Die amtlichen Vorschriften<sup>7)</sup> verlangen

bei $\alpha \leq 20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$	$> 45^\circ$
$q = 75$	70	65	60	55	50	0 $\text{kg/m}^2$ .

**Beispiel 54.** Eine Dachfläche von der Breite  $b = 7,2$  m und der Länge  $l = 5,0$  m habe die Neigung  $\alpha = 35^\circ$  gegen die Wagerechte. Anzugeben ist die größte darauf vom Wind ausgeübte Druckkraft.

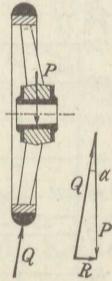


Fig. 84.

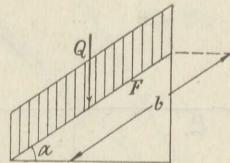


Fig. 85.

<sup>12)</sup> Schaller, Beton u. Eisen 1909.

Der größte, bei gewöhnlichen Baukonstruktionen in Mitteldeutschland einzusetzende Winddruck beträgt  $p = 125 \text{ kg/m}^2$  (Beispiel 20), und zwar auf eine lotrecht stehende Fläche. Eine unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Wagerechte geneigte Fläche, deren lotrechte Projektion die Fläche  $F$  ist, hat die Größe  $F_1 = \frac{F}{\sin \alpha}$

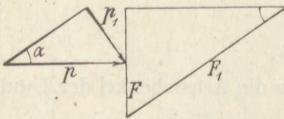


Fig. 86.

(Fig. 86). Die Windkraft  $p \cdot F$  zerlegt sich nun in eine an der Fläche  $F_1$  vorbeistreichende Seitenkraft und eine senkrecht dazu gerichtete

$$P_1 = F \cdot p_1 = F \cdot p \cdot \sin \alpha.$$

Wird hierin noch aus der vorstehenden Gleichung eingesetzt

$$F = F_1 \cdot \sin \alpha,$$

so folgt schließlich<sup>5)</sup>

$$P_1 = F_1 \cdot p \cdot \sin^2 \alpha,$$

also mit den gegebenen Zahlenwerten

$$P_1 = 7,2 \cdot 5,0 \cdot 125 \cdot 0,5736 = 1480 \text{ kg.}$$

Die Kurve  $WW$  der Fig. 87 gibt die Größe des senkrecht zur Fläche  $F_1$  wirkenden Winddruckes in Abhängigkeit vom Neigungswinkel  $\alpha$  an unter Zugrundelegung von  $F_1 = 1 \text{ m}^2$  und  $p = 125 \text{ kg/m}^2$ . Freilich ist diese bei Bauten vorgeschriebene Berechnung<sup>7)</sup> wenig zu verlässig<sup>13)</sup>.

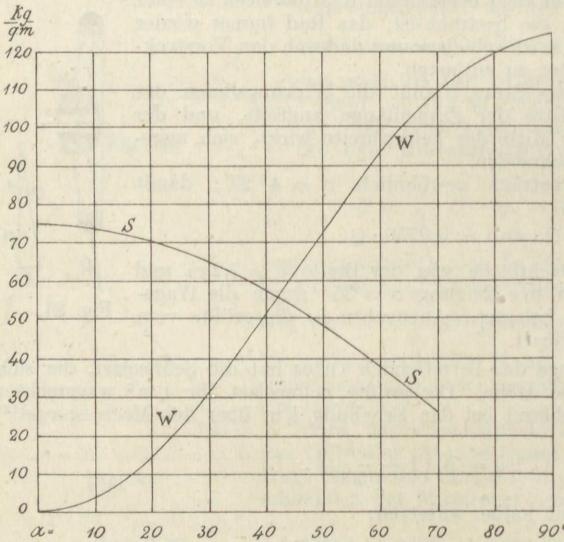


Fig. 87.

### 7. Das ebene Kräftevieleck.

An einem Körper greifen die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  an (Fig. 88), die nach Fig. 89 zu einer in derselben Ebene wirkenden

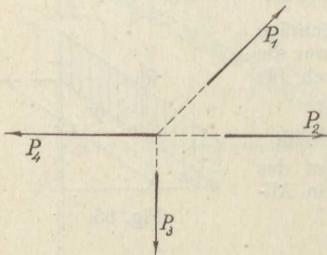


Fig. 88.

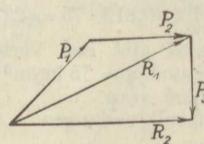


Fig. 89.

Mittelkraft  $R_1$  zusammengesetzt werden können. Durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien von  $P_1$  und  $P_2$  gehe noch eine weitere Kraft  $P_3$  ebenfalls

in derselben Ebene, die wieder mit  $R_1$  zu der Mittelkraft  $R_2$  vereinigt werden kann. Soll nun der Körper im Gleichgewicht sein, so muß an ihm noch eine vierte Kraft  $P_4$  angebracht werden, deren Wirkungslinie

<sup>13)</sup> Föppl, Z. d. V. d. I. 1912; Haedicke, Z. d. V. d. I. 1919.

mit der von  $R_2$  zusammenfällt und deren Größe gleich der von  $R_2$  ist, die aber die entgegengesetzte Richtung hat (Fig. 88). Da die Wirkungslinie von  $R_2$  nach dem Vorhergehenden durch den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  geht, so läuft auch diejenige von  $P_4$  durch denselben Punkt:

Vier in derselben Ebene wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen und das aus ihnen gebildete Kräfteviereck geschlossen ist.

Die Richtigkeit des hier aus dem Satz vom Kräfte-dreieck hergeleiteten Vierecksatzes kann durch einen Versuch nach Fig. 90 nachgeprüft werden.

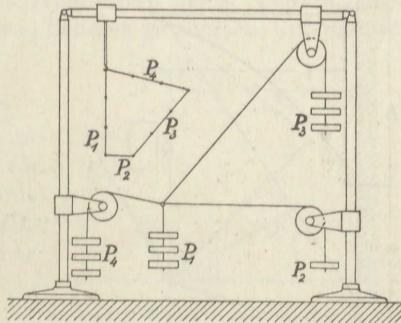


Fig. 90.

Indem man nötigenfalls die Zusammensetzung der gegebenen Kräfte in derselben Weise noch weiter fortführt, gelangt man zu dem Schluß, daß dem obigen Satz vom Kräfte-ck Geltung für beliebig viele in einer Ebene wirkende Kräfte zukommt, deren Wirkungslinien sich in demselben Punkt schneiden.

**Beispiel 55.** Anzugeben sind die Spannkraften in den Streben 1 und 2 des skizzierten Drehkrans in Fig. 91 unter der Belastung  $Q = 6,0$  t.

Der Kettenzug nach dem Windwerk beträgt  $P = \frac{1}{2} \cdot Q = 3,0$  t.

Man zeichnet das Kräfteviereck, indem man zuerst die bekannten Kräfte  $Q$  und  $P$  nach Größe und Richtung etwa in dem Maßstab  $1 \text{ t} = 5 \text{ mm}$  aneinander anträgt (Fig. 92), an das freie Ende von  $P$  die Richtung der Strebe 1 ansetzt und an den Anfang von  $Q$  die Richtung der Strebe 2. Beide Linien werden zum Schnitt gebracht und darauf die Pfeile von  $S_1$  und  $S_2$  eingefügt derart, daß alle Pfeile die Figur in demselben Sinne durchlaufen.

Durch Aufmessen erhält man dann

$$\begin{aligned} S_1 &= 49,5 \text{ mm} = 9,9 \text{ t}, \\ S_2 &= 89,0 \text{ mm} = 17,8 \text{ t}. \end{aligned}$$

$S_1$  ist, da der Pfeil vom Angriffspunkt weg gerichtet ist, eine Zugkraft,  $S_2$ , da der Pfeil zum Angriffspunkt hin gerichtet ist, eine Druckkraft.

Man erkennt, daß beide Spannkraften unter sonst gleichen Verhältnissen um so größer werden, je spitzer der Winkel zwischen  $S_1$  und  $S_2$  ist (vgl. Beispiel 26).

**Beispiel 56.** Anzugeben sind die Spannkraften  $S_1$  und  $S_2$  in den Streben 1 und 2 des Speicherkrans nach Fig. 93, wenn gegeben ist:  $Q = 250 \text{ kg}$ ,  $l = 2,0 \text{ m}$ ,  $h = 1,84 \text{ m}$ ,  $a = 1,20 \text{ m}$ .

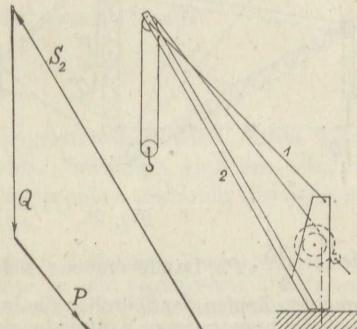
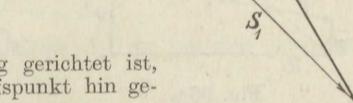


Fig. 91.

Fig. 92.



Das Kräfteviereck ist das in Fig. 94 im Kräftemaßstab 100 kg = 1 cm gezeichnete; darin ist  $S_2$  parallel zu der geraden Verbindungslinie der beiden Endpunkte der Strebe 2 gezogen. Man entnimmt der Fig. 94:

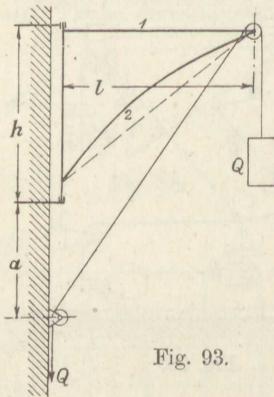


Fig. 93.

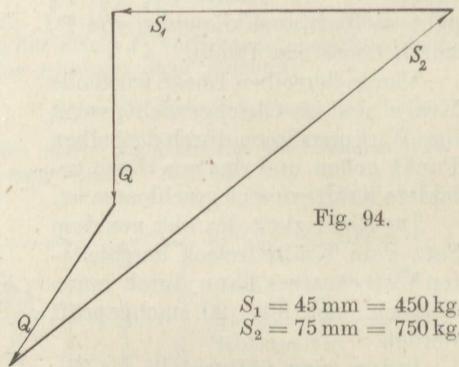


Fig. 94.

$$S_1 = 45 \text{ mm} = 450 \text{ kg},$$

$$S_2 = 75 \text{ mm} = 750 \text{ kg}.$$

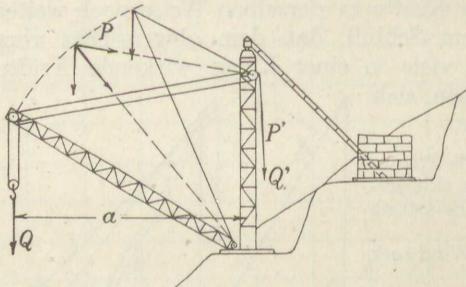


Fig. 95.

**Beispiel 57.** Anzugeben ist die Beanspruchung der Säule des Derrickkranes Fig. 95 bei den drei dargestellten Lagen des Auslegers durch die Seilzüge der viersträngigen Flaschenzüge für die Last und den Ausleger, wenn im übrigen die Angaben des Beispiels 29 gelten.

Beim viersträngigen Drahtseilflaschenzug kann die Kraft im letzten Seiltrum angesetzt werden zu  $Q' = \frac{1,15}{4} \cdot Q$  bzw.

$P' = \frac{1,15}{4} \cdot P$ . Damit ergeben sich in bezug auf den an der Kransäule angebrachten Zapfen der Seilrollen die in den Fig. 96 a, b, c nach Größe und Richtung einander angetragenen Kräfte, die sich zu der Mittelkraft  $R$  zusammensetzen. Letztere wird wieder zerlegt in die lotrecht wirkende Druckkraft  $V$  und die wagerechte Zugkraft  $H$ .

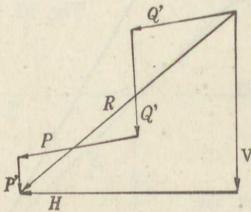


Fig. 96a.

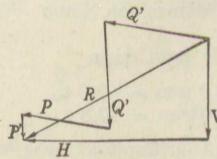


Fig. 96b.

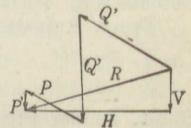


Fig. 96c.

Man erhält so aus den im Kräftemaßstab  $1 \text{ t} = 0,75 \text{ mm}$  gezeichneten Kraft-ecken für

$a = 20$	15	10 m,
$H = 47,5$	40,1	31,7 t,
$V = 39,3$	21,9	9,3 t.

Mit Hilfe der Formeln (25) und (26) kann die Aufgabe, bei einer Anzahl von Kräften, deren Wirkungslinien in einem Punkt zusammenlaufen, diejenige Kraft zu bestimmen, die zur Erhaltung des Gleichgewichtes noch erforderlich ist, auch rechnerisch gelöst werden: Man zerlegt alle gegebenen Kräfte nach zwei beliebig gewählten, aufeinander senkrecht stehenden Richtungen in

$$X_i = P_i \cdot \cos \alpha_i \quad Y_i = P_i \cdot \sin \alpha_i,$$

wie das die Fig. 97 für die Kraft  $P_1$  andeutet, und erhält so zwei Reihen von Kräften in derselben Wirkungslinie. Nach Formel (29) besteht in jeder Reihe Gleichgewicht, wenn die Bedingung erfüllt ist

$$\sum X = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum Y = 0,$$

so daß man hieraus die Größe von  $X_n$  und  $Y_n$  bestimmt.

Dann ist nach dem Satz des Pythagoras

$$P_n^2 = X_n^2 + Y_n^2,$$

und die Neigung gegen die  $X$ -Achse wird ermittelt aus

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{Y_n}{X_n}.$$

Beliebig viele, in derselben Ebene angreifende Kräfte, deren Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen, befinden sich im Gleichgewicht, wenn sowohl die Summe der wagerechten als auch die Summe der lotrechten Seitenkräfte je Null ergibt.

Der Satz wird gewöhnlich in der vorstehenden Fassung ausgesprochen, da lotrechte Kräfte und entsprechend wagerechte in der technischen Praxis am häufigsten vorkommen. Gelegentlich kann jedoch statt der wagerechten eine bestimmte andere Bezugslinie vorteilhafter sein; die „lotrechte“ muß dann aber unter allen Umständen senkrecht zur ersten stehen.

**Beispiel 58.** Gegeben sei (Fig. 97)

- Nr. 1:  $P = 1900 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ,$   
 „ 2:  $P = 3500 \text{ „ „}, \quad \alpha = 45^\circ,$   
 „ 3:  $P = 2200 \text{ „ „}, \quad \alpha = 120^\circ,$   
 „ 4:  $P = 2250 \text{ „ „}, \quad \alpha = 342^\circ.$

Anzugeben ist die Größe und Richtung der Kraft  $P_5$ , die mit den gegebenen im Gleichgewicht ist.

Nr.	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	X kg	Y kg
1	+ 0,866	+ 0,500	+ 1645	+ 950
2	+ 0,707	+ 0,707	+ 2475	+ 2475
3	+ 0,500	- 0,866	+ 1905	- 1100
4	- 0,951	+ 0,309	- 695	+ 2140
5	-	-	- 5330	- 4465
			0	0

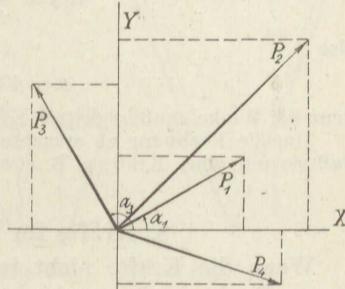


Fig. 97.

Damit wird nach Formel (19) und der dort gemachten Bemerkung über ihre Genauigkeit

$$P_5 = (0,960 \cdot 5330 + 0,368 \cdot 4465) \cdot 1,02 = 6900 \text{ kg,}$$

ferner

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-4465}{-5330} = +0,838,$$

also

$$\alpha \approx 40^\circ + 180^\circ = 220^\circ,$$

denn der Winkel muß im dritten Kreisviertel liegen, da  $X$  und  $Y$  beide negativ sind.

Um die Rechnung zu erleichtern, wählt man vorteilhaft die  $X$ -Achse derart, daß sie mit einer Kraft, z. B. etwa  $P_4$ , zusammenfällt.

### 8. Kräfte im Raum an einem Punkt.

Wenn die Kräfte nicht in derselben Ebene wirken, sondern von einem Punkt nach verschiedenen Richtungen im Raum verlaufen, so wird die Aufgabe in zwei oder bisweilen auch mehr Einzelaufgaben für in derselben Ebene wirkende Kräfte zerlegt.

Die Lösung ist besonders einfach bei völlig symmetrischer Anordnung oder, wenn die Ebenen der beiden Teilaufgaben senkrecht zueinander stehen.

**Beispiel 59.** Ein Elektromagnet von 900 kg Eigengewicht und 1200 kg Tragfähigkeit ist nach Fig. 98 an 4 Ketten aufgehängt. Zu berechnen ist die Spannkraft in jeder Kette.

Die Kraft  $Q = 2100 \text{ kg}$  verteilt sich gleichmäßig über die 4 Ketten. Für jede Öse gilt demnach das Kräftedreieck der Fig. 99, dessen Winkel  $\alpha$  sich bestimmt aus

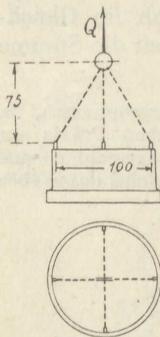


Fig. 98.

Man erhält aus dem Dreieck den Kettenzug

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

$$P = \frac{Q}{4} \cdot \frac{1}{\cos \alpha},$$

also mit Formel (38)

$$P = \frac{Q}{4} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

und die in wagerechter Richtung auf die Öse wirkende Kraft

$$H = \frac{Q}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

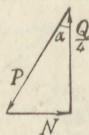


Fig. 99.

Mithin ist

$$H = \frac{2100}{4} \cdot \frac{2}{3} = 350 \text{ kg,}$$

$$P = \frac{2100}{4} \sqrt{1,444} = 630 \text{ kg.}$$

Mit Rücksicht auf etwa eintretende einseitige Belastung und kleine Ungenauigkeiten der Kettenlängen bemißt man die Ketten für  $\frac{4}{3}$  dieses Wertes.

**Beispiel 60.** Der Hauptträger eines Bockkranes besteht aus drei Fachwerk­wänden, die nach Fig. 100 miteinander verbunden sind<sup>14)</sup>. Die Höchstbelastung durch den Raddruck der Laufkatze beträgt  $Q = 2,5$  t. Anzugeben ist ihre Verteilung auf die drei Fachwerk­wände.

Die Kräfte­dreiecke für die beiden oberen Knotenpunkte sind in Fig. 101 dargestellt. Aus der Ähnlichkeit mit den Dreiecken der Hauptfigur folgt

$$P_1 = Q \cdot \frac{241}{2 \cdot 298} = 0,404 \cdot 2,5 = 1,01 \text{ t,}$$

$$P_2 = Q \cdot \frac{\sqrt{298^2 + 120,5^2}}{298} = Q \cdot \sqrt{1 + 0,404^2} \\ = 1,069 \cdot 2,5 = 2,875 \text{ t.}$$

Mit diesen Belastungen sind die betreffen­den ebenen Fachwerke zu berechnen.

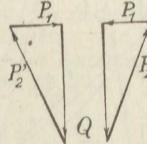


Fig. 101.

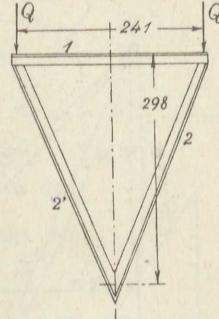


Fig. 100.

**Beispiel 61.** An einem Telegraphen­mast, der  $i = 16$  Leitungen trägt, deren jede im Höchstfall mit  $S = 110$  kg ange­spannt ist, wird die Leitungsführung um  $\alpha = 30^\circ$  abgelenkt (Fig. 102). Anzu­geben sind die Richtung des Verankerungs­seiles, die Spannkraft, die den Mast und das Verankerungsseil beanspruchen, wenn letzteres mit dem Mast den Winkel  $\beta = 25^\circ$  bildet

Die Gesamtspannkraft der Drähte beträgt auf jeder Seite des Mastes

$$P = i \cdot S = 16 \cdot 110 = 1760 \text{ kg.}$$

Das Kräfteparallelogramm ist das im Grundriß der Fig. 102 dargestellte, und man erkennt, daß die Mittelkraft  $R$  den stumpfen Winkel  $\pi - \alpha$  halbiert. Die lotrechte Ebene der Verankerung muß also mit den lotrechten Ebenen, die durch zwei aufeinander­folgende Tragstangen gehen, den Winkel  $\frac{\pi + \alpha}{2}$  bilden, wenn ein Zugseil die Verankerung bewirken soll; im Fall einer Druckstange als Verankerung muß der Winkel  $\frac{\pi - \alpha}{2}$  betragen.

Die Größe von  $R$  bestimmt sich nach dem Kosinus­satz Formel (44) zu

$$R = P \cdot \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot \cos \alpha} = P \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha)} \\ = 1760 \cdot \sqrt{2 \cdot 0,134} = 910 \text{ kg.}$$

Das Kräfte­dreieck für die Zerlegung von  $R$  in  $S_1$  und  $S_2$  enthält der Aufriß der Fig. 102, dem man entnimmt

$$S_2 = R \cdot \cot \alpha = 910 \cdot 2,145 = 1950 \text{ kg,} \\ S_1 = R \cdot \sin \alpha = 910 \cdot 0,466 = 2160 \text{ kg.}$$

Zu  $S_1$  tritt noch das halbe Gewicht der auf jeder Seite befindlichen Drähte, sowie der Querträger und schließlich der Stütze selbst.

Eine häufig wiederkehrende Aufgabe ist, die Kräfte in den Streben eines dreiseitigen Bockes zu bestimmen, auf dessen Spitze eine oder

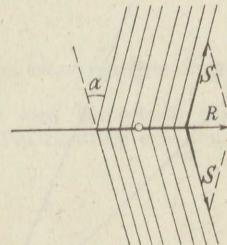
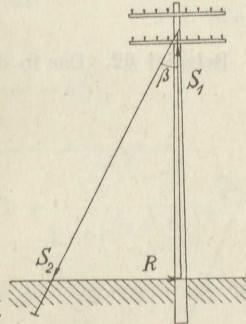


Fig. 102.

<sup>14)</sup> Z. d. V. d. I. 1902.

mehrere bekannte Kräfte einwirken. Auch hier findet die Zerlegung in zwei Aufgaben der Ebene statt, die freilich sehr verschieden vorgenommen werden kann.

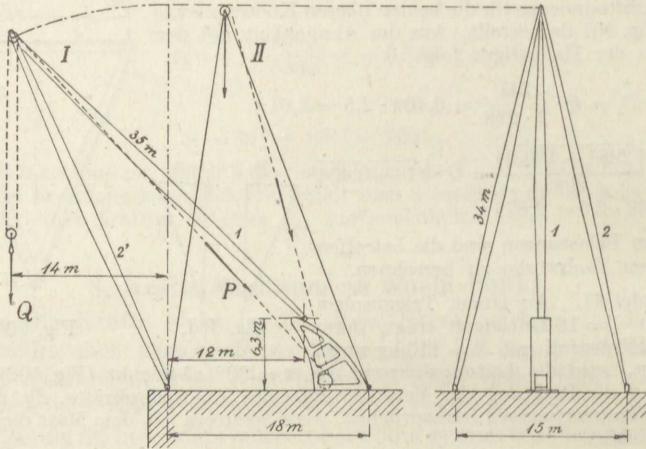


Fig. 103a u. b.

**Beispiel 62.** Der in der Fig. 103 skizzierte Scherenkran soll die Höchstlast  $Q = 80 \text{ t}$  tragen, der Kettenzug beträgt  $P = 21 \text{ t}$ . Anzugeben sind die in den drei Streben wirkenden Spannkraften, wenn der Kran ganz ausgelegt ist (Stellung I) und wenn er ganz zurückgezogen ist (Stellung II).

I. Volle Ausladung nach vorn:

Man zeichnet zuerst das Kräfteviereck für die Auslegerspitze des in der Zeichenebene der Fig. 103a gelegenen Strebensystems (Fig. 104) etwa im Kräftemaßstab  $1 \text{ t} = \frac{1}{2} \text{ mm}$  und erhält so

$$S_1 = 35,5 \text{ mm} = 71 \text{ t Zug,}$$

$$S_2' = 79,0 \text{ mm} = 158 \text{ t Druck.}$$

Dabei ist angenommen worden, daß die beiden vorderen Streben  $S_2$  eine volle Platte  $S_2'$  bilden. Diese Platte ist in Fig. 103b soweit zurückgedreht gezeichnet worden, daß die Strebe  $S_2'$  der Fig. 103a lotrecht in der strichpunktierten Lage steht. Sie erscheint dann in Fig. 103b in unverkürzter Größe und

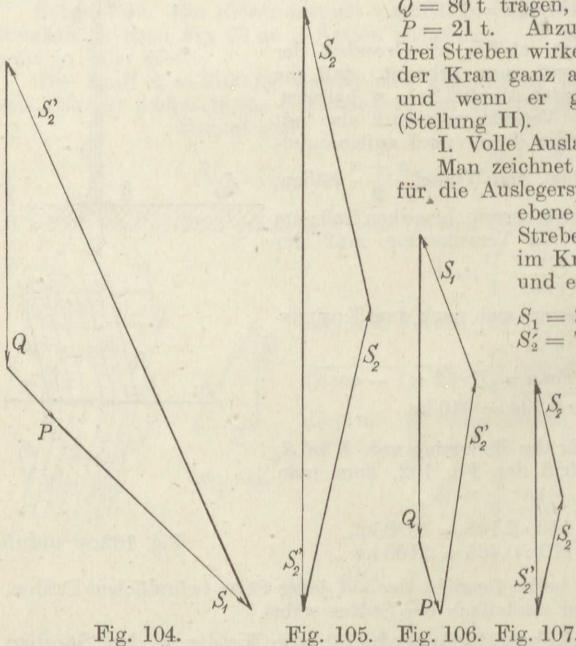


Fig. 104.

Fig. 105. Fig. 106. Fig. 107.

wird an der Spitze in ihrer Ebene durch die oben ermittelte Kraft  $S_2$  belastet. Das Kräftedreieck für den Fall ist in Fig. 105 wiedergegeben, und man mißt auf

$$S_2 = 40,5 \text{ mm} = 81 \text{ t Druck.}$$

II. Stellung ganz nach hinten:

Das Kräfteviereck für die Zeichenebene der Fig. 103a ist jetzt das in Fig. 106 dargestellte und man entnimmt ihm

$$\begin{aligned} S_1 &= 20,5 \text{ mm} = 41 \text{ t Druck,} \\ S'_2 &= 31,0 \text{ mm} = 62 \text{ t } \quad \text{,,} \end{aligned}$$

$S'_2$  wird dann wieder in derselben Weise zerlegt wie unter I, und man erhält jetzt aus Fig. 107

$$S_2 = 16,0 \text{ mm} = 32 \text{ t Druck.}$$

**Beispiel 63.** Auf den in Beispiel 32 Fig. 42 untersuchten Blechschornstein wirke der Winddruck  $P = 640 \text{ kg}$  in umgekehrter Richtung. Anzugeben ist die dadurch in den Zugstangen 2 und 3 hervorgerufene Spannkraft.

Man bestimmt zuerst für die Ebene der Seitenansicht der Fig. 42 auf demselben Wege wie in Beispiel 32

$$S'_2 = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{b}\right)^2}.$$

Das Kräftedreieck für die Ebene der beiden Zugstangen 2 und 3 (Fig. 108) ist das in Fig. 109 aufgetragene, und man entnimmt den ähnlichen Dreiecken

$$S_2 : \frac{1}{2} \cdot S'_2 = \sqrt{e^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2} : e = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2e}\right)^2},$$

worin gemäß Fig. 42 einzusetzen ist

$$e^2 = (h_2 + h_3)^2 + b^2 \quad \text{und} \quad c^2 = 4 \cdot (a^2 - b^2),$$

so daß man erhält

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot S'_2 \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2 + (h_2 + h_3)^2}} = \frac{1}{2} \cdot S'_2 \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{b}\right)^2}}.$$

Wird hierin noch der obige Wert von  $S'_2$  eingesetzt, so folgt schließlich mit  $b = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot a$ :

$$S_2 = P \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 + h_3}{a}\right)^2},$$

ebenso groß, wie in dem Fall, daß der Winddruck nur von einer einzigen Zugstange aufgenommen wird.

Die größte lotrechte Belastung der Schornsteinsäule wird demgemäß bei Winddruck umgekehrt zu der in Fig. 42 eingezeichneten Pfeilrichtung erhalten, und sie beträgt

$$Q' = P \cdot \frac{h_2 + h_3}{b} = 2 \cdot Q.$$

Wird die Säule von vier gleich geneigten und den Umfang in vier gleiche Teile zerlegenden Zugstangen gehalten, so ruft der auf die Säule gerade in der Mitte zwischen zwei Stangen wehende Wind in ihnen die Spannkraft

$$S_2 = S_1 : \sqrt{2}$$

hervor, und die Säulenbelastung wird in dem Fall

$$Q' = Q \cdot \sqrt{2}.$$

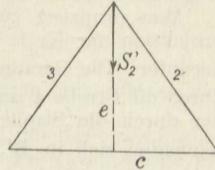


Fig. 108.

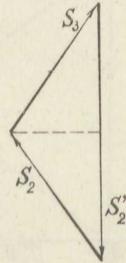


Fig. 109.

**Beispiel 64.** Anzugeben sind auf rein zeichnerischem Wege die in den drei Streben des in Fig. 110 dargestellten Bockgestelles durch die an der Spitze  $A$  angreifende Kraft  $P$  hervorgerufenen Spannkkräfte.

Man projiziert zuerst den Schnittpunkt  $C'$  der Wirkungslinie der Aufrißprojektion der Kraft mit der Grundrißebene in die Grundrißprojektion nach  $C'$  herunter. Die Gerade  $BC'$  ist dann die in der Grundrißebene liegende Spur der durch die Strobe 1 und die Kraft  $P$  gehenden Ebene. Ebenso ist  $B_2'B_3'$  die Spur der durch die Streben 2 und 3 gehenden Ebene im Grundriß. Beide Spuren schneiden sich in  $B'$ , und  $A'B'$  ist die Grundrißprojektion der Schnittgeraden beider Ebenen, deren Aufrißprojektion durch Hinaufloten nach  $A''B''$  erhalten

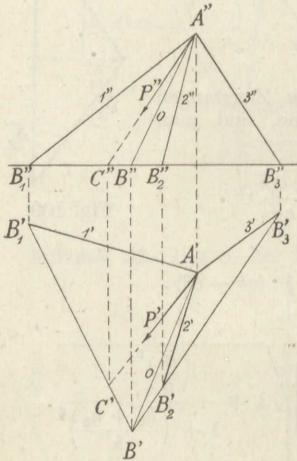


Fig. 110.

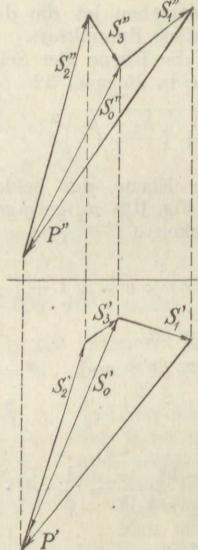


Fig. 111.

wird. Jetzt wird das Kräfte-dreieck gezeichnet für die drei in derselben Ebene befindlichen Kräfte  $P, S_1, S_0$  und zwar in beiden Projektionen, wie Fig. 111 angibt.

Die Gegenkraft von  $S_0$  (mit dem doppelten Pfeil) ist nun Belastung der Stäbe 2 und 3 und liegt ebenfalls in

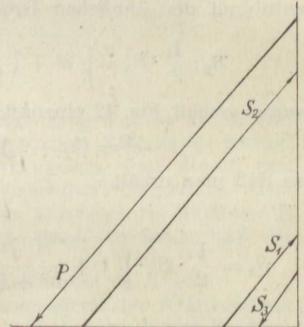


Fig. 112.

deren Ebene. Wird das Kräfte-dreieck aus  $S_0, S_2, S_3$  in beiden Projektionen an das erste herangesetzt, so hat man die Projektionen der drei gesuchten Stabkräfte damit ermittelt<sup>15)</sup>.

Ihre wirkliche Größe findet sich aus der Überlegung, daß beide Projektionsebenen und somit alle darin befindlichen Projektionen aufeinander senkrecht stehen, daß also die wahre Größe die Hypotenuse des aus den beiden Projektionen gebildeten rechtwinkligen Dreiecks ist. Die Fig. 112 liefert hiernach die wahren Größen der Strebenkräfte, ebenso wie die der Belastung  $P$ .

Man bemerkt, daß hier nur eine allgemeinere Darstellung des in Beispiel 62 behandelten Sonderfalles mit Hilfe der Regeln der darstellenden Geometrie gegeben ist.

Die zeichnerische Lösung wird besonders einfach, wenn eine Projektion der Kraft  $P$  mit der eines Stabes zusammenfällt oder ganz verschwindet.

Im zweiten Fall, wo  $P'' = P = 1200$  kg eine lotrechte Last ist (Fig. 113) zeichnet man in einem beliebigen Maßstab das Kräfte-dreieck der Grundrißebene aus  $S_1, S_2, S_3$  (Fig. 114) und darüber zwischen den Projektionsloten den Linienzug der Aufrißebene  $S_1'', S_2'', S_3''$ , der durch die Kraft  $P$  geschlossen werden muß. Man entnimmt der Zeichnung jetzt nachträglich den Kräfte-maßstab 1200 kg

<sup>15)</sup> Culmann, Die graphische Statik. II. Aufl. 1875.

= 85,5 mm oder 1 mm = 14,05 kg und setzt die Projektionen der Stabkräfte rechtwinklig aneinander (Fig. 115). Durch Aufmessen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} S_1 &= 28,5 \text{ mm} = 400 \text{ kg}, \\ S_2 &= 43,5 \text{ mm} = 610 \text{ kg}, \\ S_3 &= 58,0 \text{ mm} = 815 \text{ kg}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn die Projektion eines Stabes verschwindet.

Wenn eine Projektion der Kraftwirkungslinie, etwa  $P'$ , mit der eines Stabes, etwa  $S_1$ , zusammenfällt, arbeitet man in der betreffenden Projektionsebene mit

der vorläufig nur der Richtung nach bekannten Mittelkraft  $R' = P' \pm S_1'$  der beiden und trennt diese Mittelkraft dann gemäß den Ergebnissen der zweiten Projektion. Im übrigen entspricht die Lösung der vorstehenden. In das rechtwinklige Projektionskreuz zur Ermittlung der wahren Größen ist auch die gegebene Kraft  $P$  mit ihren Projektionen  $P'$  und  $P''$  einzutragen, die jetzt erst den Kräftemaßstab angibt.

Die allgemeine Aufgabe ist auch ohne Zuhilfenahme räumlicher Überlegungen lösbar<sup>16)</sup>: Da der räumliche Linienzug  $P, S_1, S_2, S_3$  im Fall des Gleichgewichtes geschlossen sein muß, so ist auch jede Projektion desselben ein geschlossenes ebenes Viereck, dessen Ecken auf den Projektionsloten übereinander liegen.

Man trägt also  $P'$  =  $A'B'$  und  $P''$  =  $A''B''$  im Grund- und Aufriß in einem bestimmten Kräftemaßstab auf, setzt etwa an  $P'$  die Parallelen zu den Grundrißprojektionen der Stäbe 1 und 3 (Fig. 116 und 117) an und zieht hierdurch die Parallele  $C'D'$  zu der Grundrißprojektion des Stabes 2; die letzten Eckpunkte dieses willkürlichen Kräftevierecks werden

in die Aufrißprojektion nach  $C''D''$  hinaufgelotet. Da nun  $C'$  ganz beliebig gewählt wurde, so ist die vierte, durch den Anfangspunkt von  $P''$  gezogene Linie  $A''D''$  im allgemeinen nicht parallel zu der Aufrißprojektion des Stabes 3. Man zieht jetzt im Grundriß eine zweite Parallele  $c'd'$  wieder willkürlich und lotet die neuen Eckpunkte in den Aufriß hinauf nach  $c''$  und  $d''$ ; die vierte Linie  $A''d''$  dieses Zuges ist im allgemeinen wieder nicht parallel zur Aufrißprojektion des Stabes 3. Zieht man jetzt aber die richtige Parallele durch  $A''$ , so schneidet

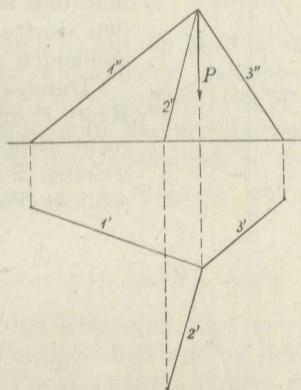


Fig. 113.

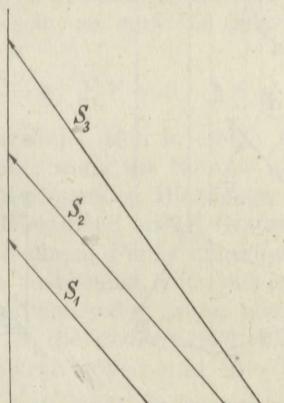


Fig. 115.

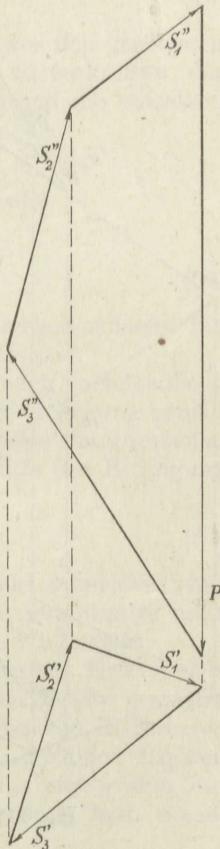


Fig. 114.

sie die Verbindungsgerade  $\overline{D''d''}$  in einem Punkt  $D$ , der der richtige ist. Denn ein nochmaliges Probieren lehrt, daß alle Punkte  $D''$  der Aufrißprojektion immer auf derselben Geraden liegen, mithin auch der richtige Punkt. Die Vervollständigung der beiden so richtig bestimmten Kräftevierecke in Auf- und Grundriß vom Punkt  $D$  aus ist jetzt leicht gemacht; die Eckpunkte müssen alle in beiden Projektionen genau senkrecht übereinander liegen. Die wahre Größe der Stabkräfte wird wieder gemäß Fig. 115 rechtwinkligen Dreiecken entnommen.

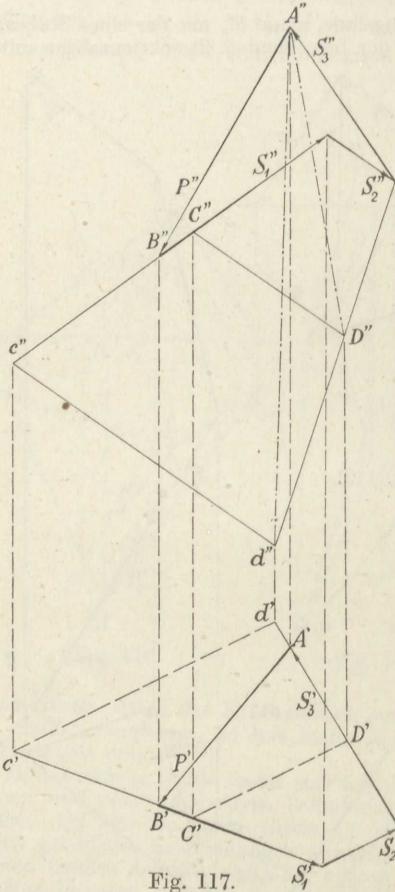


Fig. 117.

Die rein rechnerische Lösung derselben Aufgabe ist so umständlich, daß sie kaum ausgeführt werden dürfte. Es genügt, die nachstehenden Angaben beizubringen.

Durch den Angriffspunkt  $A$  der Kraft  $P$  sind drei aufeinander senkrecht stehende Achsen gelegt, mit welchen  $P$  die Winkel  $\alpha, \gamma, \beta$  einschließt (Fig. 118). Durch die Achsen

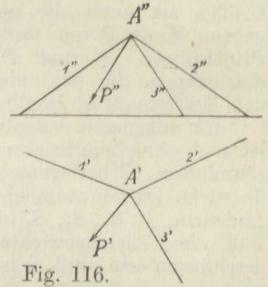


Fig. 116.

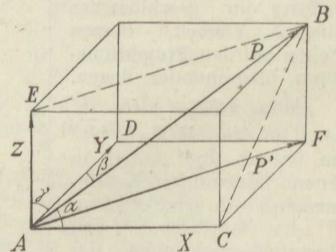


Fig. 118.

sind im Punkt  $A$  drei aufeinander senkrechte Ebenen gelegt worden und ebenso durch den Endpunkt  $B$  der Kraftstrecke  $P$  drei dazu parallele Ebenen, so daß ein Parallelepipet entstanden ist.

Man erhält nun aus den entsprechenden rechtwinkligen Dreiecken die drei Seitenkräfte, in welche  $P$  auf die Weise zerlegt worden ist:

$$\begin{array}{ll} \text{Aus Dreieck } ABC: & X = P \cdot \cos \alpha, \\ \text{,, ,, } ABD: & Y = P \cdot \cos \beta, \\ \text{,, ,, } ABE: & Z = P \cdot \cos \gamma. \end{array} \quad (48)$$

<sup>16)</sup> Müller - Breslau. Graphische Statik der Baukonstruktionen. 1887.

Zieht man in der  $X Y$ -Ebene  $ACFD$  die Mittelkraft  $P'$  von  $X$  und  $Y$ , so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$P'^2 = X^2 + Y^2,$$

ferner ebenso in dem Dreieck  $ABF$

$$P^2 = P'^2 + Z^2,$$

womit man erhält:

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \quad (49)$$

Die Gleichung wird benutzt, um die Mittelkraft aus den gegebenen drei im Raum senkrecht aufeinander stehenden Seitenkräften der Größe nach zu ermitteln. Die Neigungen von  $P$  gegen die einzelnen Seitenkräfte bestimmt man dann aus den Formeln 48.

Setzt man in Formel 49 die Gleichungen 48 ein, so folgt

$$P^2 = P^2 \cdot \cos^2 \alpha + P^2 \cdot \cos^2 \beta + P^2 \cdot \cos^2 \gamma$$

oder

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \quad (50)$$

als Bedingung, der die drei Neigungswinkel entsprechen müssen. Sie dient zur Kontrolle der richtigen Bestimmung der Winkel.

Greifen nun in einem Punkt mehrere Kräfte  $P$  nach verschiedenen Richtungen des Raumes an, so führt man die obige Zerlegung gemäß den Gleichungen 48 für jede einzelne Kraft aus. Sollen die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht sein, so muß für jede Achse die Bedingung (29) erfüllt sein:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0. \quad (51)$$

Kräfte, deren Wirkungslinien sich in einem Punkt schneiden, sind nur dann im Gleichgewicht, wenn die Summe aller Seitenkräfte nach drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen je Null ergibt.

Man erhält so drei Gleichungen ersten Grades für die Kräfte. Die räumliche Aufgabe der an einem Punkt angreifenden Kräfte gestattet also, drei Unbekannte zu bestimmen, entweder, wenn alle Richtungen gegeben sind, drei Kraftgrößen, oder, wenn alle Kraftgrößen gegeben sind, drei Richtungen oder die anderen sich hieraus ergebenden Zusammenstellungen, zwei Kraftgrößen und eine Richtung bzw. umgekehrt.

### 9. Parallele Kräfte in derselben Ebene.

Es soll festgestellt werden, ob die drei in der Zeichenebene wirkenden parallelen Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  der Fig. 119 im Gleichgewicht sind. Nach den Angaben in Abschnitt 6 sind drei in derselben Ebene befindliche Kräfte im Gleichgewicht, wenn das in einem beliebigen Längen-

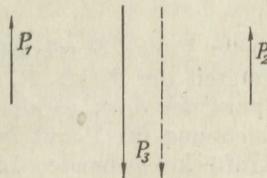


Fig. 119.

maßstab aufgetragene Kräffedreieck geschlossen ist und die Wirkungslinien durch denselben Punkt gehen.

Das Kräffedreieck fällt im vorliegenden Fall in eine Gerade zusammen — zur besseren Veranschaulichung ist  $P_3$  seitwärts als Gegen-gerade herausgezeichnet — (Fig. 122), so daß die obige Bedingung für parallele Kräfte in die des Abschnittes 5 übergeht: Die algebraische Summe aller Kräfte muß Null ergeben. Die drei parallelen Wirkungslinien kommen jedoch erst in einem unendlich fern gelegenen Punkt zum Schnitt, gleichgültig welche Lage die drei Kräfte zueinander haben, und es ist klar, daß, wenn  $P_3$  mit  $P_1$  und  $P_2$  etwa in der gezeichneten Lage der Fig. 119 im Gleichgewicht ist, sie es in der gestrichelten oder einer beliebigen anderen Lage nicht sein kann.

Man gelangt zu der Lösung, wenn man an die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  in derselben Wirkungslinie zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $P'$  ansetzt, die sich ja gegenseitig aufheben und deshalb keine Änderung an dem ursprünglichen Kräfteverhältnis hervorrufen. Jede dieser Zusatz-

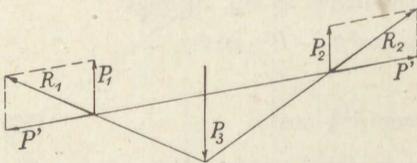


Fig. 120.

kräfte wird nun mit  $P_1$  bzw.  $P_2$  zu einer Mittelkraft  $R_1$  bzw.  $R_2$  vereinigt (Fig. 120); die beiden  $R$

schneiden sich jetzt in einem Punkt, und Gleichgewicht unter  $R_1, R_2, P_3$  besteht nach Abschnitt 6 nur dann, wenn die drei Wirkungslinie von  $P_3$  durch diesen Schnittpunkt geht<sup>10</sup>).

Der Vorgang kann z. B. durch einen Versuch nach Fig. 121 veranschaulicht werden. Eine längere Schnur, die gerade ausgespannt nach der gestrichelten Linie verläuft, wird an ihren Enden durch zwei Stifte unter den seitlichen Tragrollen festgehalten und durch die Kraft  $P_3$  vermittels eines Gleithakens belastet.

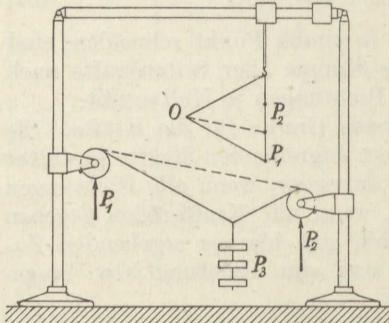


Fig. 121.

Der Haken wird unter sonst gleichen Verhältnissen immer in eine ganz bestimmte Stellung gleiten und zwar die, daß wenn die Größen von  $P_1$  und  $P_2$  wieder durch eine Perlen-schnur dargestellt werden, die drei von den Endpunkten der Kräfte parallel zu den drei Schnurrichtungen gezogenen Fäden sich in

einem Punkt  $O$  schneiden (vgl. Fig. 122). Man nennt das von dem Trageisil der Kraft  $P_3$  gebildete Dreieck das Seileck, den Schnittpunkt der dazu parallelen Linien den Pol, was nur eine andere Bezeichnung für Punkt ist, und die von dem Pol nach den Enden des Kräfteckes gehenden Linien die Polstrahlen.

Da die Länge der Schnur, an der  $P_3$  in Fig. 121 hängt, ganz be-

liebig gewählt werden kann, bzw. in Fig. 120 die Größe der Kräfte  $P'$  oder die Lage ihrer Wirkungslinie bzw. die der Tragrollen in Fig. 121, so ist auch die Lage des Poles  $O$  eine ganz beliebige.

Die gestellte Aufgabe wird demnach am einfachsten erledigt, indem man die gegebenen Kräfte auf einer Geraden in einem beliebigen Kräftemaßstab aufträgt (Fig. 122), wobei ihre algebraische Summe Null ergeben muß, einen Pol  $O$  an beliebiger Stelle der Zeichenebene wählt, von dort aus die Polstrahlen  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  nach den Endpunkten der drei Kräfte zieht und nun in dem gegebenen Kräfteplan (Fig. 123) zu  $OA$  die Parallele  $a$  an beliebiger Stelle zwischen den Wirkungslinien von  $P_1$  und  $P_2$  einträgt, von dem Endpunkte dieser Strecke  $a$  auf  $P_1$  die Parallele  $b$  zum Strahl  $OB$  und von dem Endpunkt der Strecke  $a$  auf  $P_2$  die Parallele  $c$  zum Strahl  $OC$  zieht. Gleichgewicht besteht nur dann, wenn  $P_3$  durch den Schnittpunkt von  $b$  und  $c$  geht, d. h., wenn außer dem Krafteck auch das Seileck geschlossen ist.

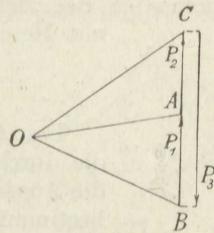


Fig. 122.

Wird noch die Länge der von der Wirkungslinie der Kraft  $P_3$  im Seileck herausgeschnittenen Strecke mit  $d$  bezeichnet, die Teilstrecke von  $a$  zwischen  $P_3$  mit  $a_2$ , so folgt aus den ähnlichen Dreiecken der Fig. 123 und 122

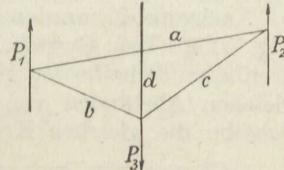


Fig. 123.

$$\frac{a_1}{d} = \frac{OA}{P_1} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{d} = \frac{OA}{P_2}$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{P_2}{P_1} \tag{52}$$

Wenn Gleichgewicht besteht, teilt die dritte Kraft den Abstand der beiden anderen im umgekehrten Verhältnis ihrer Größen.

Gewöhnlich wird der Abstand nicht in einer beliebigen Schrägen gemessen, sondern man mißt den kürzesten, senkrecht zu den Wirkungslinien der Kräfte stehenden. Schreibt man in dem Fall die Gleichung 52 als Produktengleichung, so lautet sie

$$P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2 \tag{53}$$

Man bezeichnet nun das Produkt aus der Größe einer Kraft und ihrem senkrechten Abstand von einem bestimmten Punkt oder einer bestimmten Geraden oder Ebene<sup>17)</sup>, die nur parallel zur Wirkungslinie der Kraft verläuft, als Drehmoment oder kurz Moment der Kraft in bezug auf diesen Punkt bzw. diese Gerade oder Ebene:

$$M = a \cdot P \tag{54}$$

<sup>17)</sup> Monge, *Traité élémentaire de Statique*. 1786.

Man rechnet das Drehmoment als positiv, wenn es rechtsdrehend ist, und als negativ, wenn es linksdrehend ist (Fig. 124). Da die Kraft in kg und der Abstand in m gemessen wird, so ist das Maß des Drehmomentes das Meterkilogramm (mkg). Bisweilen rechnet man auch mit Metertonnen (mt) bzw. Zentimeterkilogramm (cmkg).

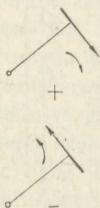


Fig. 124.

$$1 \text{ cmkg} = 0,01 \text{ mkg,}$$

$$1 \text{ mt} = 1000 \text{ mkg.}$$

Der Ausdruck Moment ist hier nur eine Abkürzung für die durch Formel (54) bestimmte Rechenoperation, etwa wie die Ausdrücke Quadratwurzel oder dritte Potenz einer Größe bestimmte Rechenoperationen angeben.

Mit dieser Bezeichnung geht die Gleichung (53) über in

$$M_1 - M_2 = 0: \quad (55)$$

Im Falle des Gleichgewichtes dreier paralleler Kräfte ist die algebraische Summe der Momente von zwei Kräften in bezug auf die Wirkungslinie der dritten gleich Null.

Nachgeprüft werden kann der Satz durch einen Versuch nach Fig. 125. Das Gewicht der freihängenden, um ihren Mittelzapfen drehbaren Scheibe ist gleich dem Gegengewicht 1. Werden nun in gleichen Abständen von der Lotrechten durch den Mittelpunkt der Scheibe die gleichen Kräfte 2 und 3 angeordnet, so besteht Gleich-

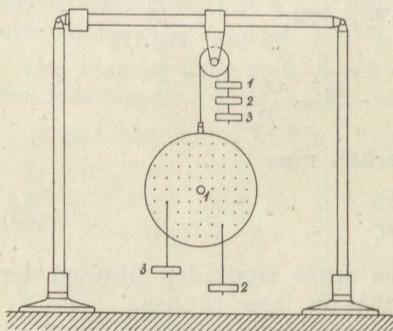


Fig. 125.

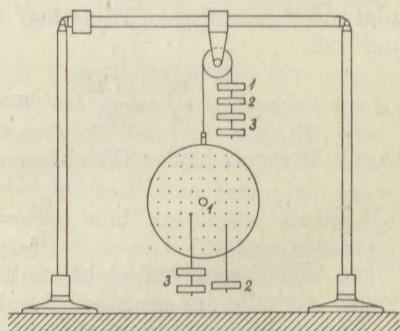


Fig. 126.

gewicht, wenn die entsprechenden Gegenkräfte 2 und 3 an der Drehachse der Scheibe nach oben wirkend angebracht werden. Sind die Abstände der Kräfte 2 und 3 von der Lotrechten durch die Scheibenachse verschieden (Fig. 126), so müssen ihre Größen im umgekehrten Verhältnis der Abstände stehen [Formel (52)], damit keine Drehung der Scheibe eintritt, und die Gegenkraft muß wieder gleich ihrer Summe sein, damit die Scheibe nicht heruntersinkt.

Bisweilen ist die folgende Umformung des Drehmomentes von Vorteil: Der Angriffspunkt  $A$  der Kraft  $R$  (Fig. 127) sei durch die gegebene Länge  $l$  mit dem Punkte  $O$  verbunden, in bezug auf den das

Drehmoment genommen werden soll. Dann gilt gemäß Formel (54)  $M = R \cdot a$ , worin  $a$  der senkrechte Abstand der Wirkungslinie von  $R$  vom Bezugspunkt  $O$  ist. Man kann nun  $R$  in zwei Seitenkräfte zerlegen, deren eine  $P_1$  senkrecht zu  $l$  steht, während die Wirkungslinie der anderen  $P_2$  mit  $l$  zusammenfällt. Die beiden Dreiecke, die von den Seiten  $R, P_1, P_2$  bzw.  $l, a, R$  gebildet werden, sind ähnlich, und man erhält somit

$$R : P_1 = l : a$$

oder

$$R \cdot a = P_1 \cdot l :$$

Das Drehmoment einer Kraft in bezug auf einen bestimmten Punkt ihrer Ebene kann ersetzt werden durch das Produkt aus Entfernung des Angriffspunktes der Kraft von dem gegebenen Punkt und ihrer Seitenkraft senkrecht zu dieser Entfernung.

**Beispiel 65.** Auf einen Körper wirken in dem Abstand  $a = 2,37$  m die beiden parallelen Kräfte  $P_1 = 325$  kg und  $P_2 = 550$  kg nach derselben Richtung. Anzugeben ist die Größe und Lage der Stützkraft  $N$ , die ihnen das Gleichgewicht hält.

Man kann die Aufgabe zeichnerisch nach der zu Fig. 123 gegebenen Vorschrift lösen. Auf rein rechnerischem Wege ergibt sich

$$N = P_1 + P_2 = 325 + 550 = 875 \text{ kg}$$

entgegengesetzt zu  $P_1$  und  $P_2$  gerichtet.

Nun gilt nach Formel (52)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

oder wenn hierzu beiderseits 1 addiert wird,

$$\frac{a_1}{a_2} + 1 = \frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$$

bzw. mit den obigen Bezeichnungen

$$\frac{a}{a_2} = \frac{N}{P_1},$$

also

$$a_2 = a \cdot \frac{P_1}{N} = 2,37 \cdot \frac{325}{875} = 0,88 \text{ m,}$$

$$a_1 = a - a_2 = 2,37 - 0,88 = 1,49 \text{ m.}$$

**Beispiel 66.** Das Schwungrad einer Dampfmaschine belastet die Welle mit  $P = 4750$  kg; die Abstände der Schwungradmitte von den beiden Lagermitten betragen  $a_1 = 110$  cm und  $a_2 = 75$  cm (Fig. 128). Anzugeben sind die beiden Lagerdrücke  $N_1$  und  $N_2$ .

Die drei Kräfte sind einander parallel. Man benutzt also Formel (55), indem man zuerst die Momentengleichung in bezug auf die Wirkungslinie von  $N_2$  aufstellt:

$$+N_1 \cdot (a_1 + a_2) - P \cdot a_2 = 0,$$

$$\text{also } N_1 = P \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_2} = 4750 \cdot \frac{75}{185} \approx 1930 \text{ kg.}$$

Nun wird die Momentengleichung für die Wirkungslinie von  $N_1$  aufgestellt:

$$+P \cdot a_1 - N_2 \cdot (a_1 + a_2) = 0,$$

$$\text{also } N_2 = P \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2} = 4750 \cdot \frac{110}{185} \approx 2820 \text{ kg.}$$

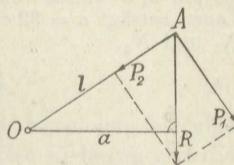


Fig. 127.

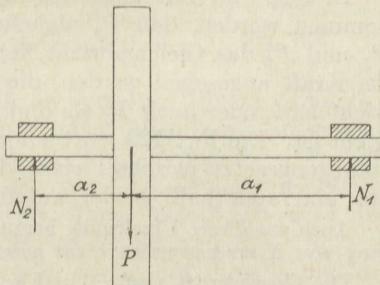


Fig. 128.

Einen Nachweis für die Richtigkeit der Rechnung gibt dann der Summensatz:

$$N_1 + N_2 = P \quad \text{bzw.} \quad 1930 + 2820 = 4750 \text{ kg.}$$

**Beispiel 67.** Eine Drahtseilscheibe ist belastet mit  $P = 380 \text{ kg}$ . Ihre Mitte ist um  $a_1 = 12 \text{ cm}$  von dem vorderen Lager entfernt; der Abstand der beiden Lager beträgt  $a = 32 \text{ cm}$  (Fig. 129). Zu berechnen sind die beiden Lagerdrücke  $N_1$  und  $N_2$ .

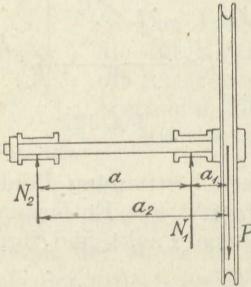


Fig. 129.

Um  $N_1$  zu ermitteln, wird die Momentengleichung für die Wirkungslinie von  $N_2$  aufgestellt:

$$-N_1 \cdot a + P \cdot a_2 = 0,$$

also

$$N_1 = P \cdot \frac{a_2}{a} = 380 \cdot \frac{44}{32} \approx 520 \text{ kg,}$$

somit größer als  $P$ !

Um  $N_2$  zu bestimmen, wird die Momentengleichung für die Wirkungslinie von  $N_1$  aufgestellt:

$$+N_2 \cdot a + P \cdot a_1 = 0,$$

also

$$N_2 = -P \cdot \frac{a_1}{a} = -380 \cdot \frac{12}{32} \approx -140 \text{ kg.}$$

Der negative Wert von  $N_2$  besagt, daß die Richtung von  $N_2$  in Fig. 129 falsch eingetragen wurde; es ist klar, daß die obere Lagerschale des zweiten Lagers die Welle halten muß, damit sie nicht von der Kraft  $P$  umgekippt wird.

Die Richtigkeit der Rechnung wird nachgewiesen durch

$$N_1 - N_2 = P \quad \text{bzw.} \quad 520 - 140 = 380 \text{ kg.}$$

In der Fig. 123 und den dabei stehenden Darlegungen ist angenommen worden, daß  $P_3$  diejenige Kraft ist, die den beiden anderen  $P_1$  und  $P_2$  das Gleichgewicht hält. Ebenso gut kann natürlich  $P_2$  als die Kraft angesehen werden, die den beiden  $P_1$  und  $P_3$  das Gleichgewicht hält, oder auch  $P_1$  als diejenige, die mit  $P_2$  und  $P_3$  im Gleichgewicht ist. Die Fig. 123 lehrt sofort, daß, wenn die beiden ersten Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind, die dritte die Richtung der kleineren hat und außerhalb beider auf der Seite der größeren liegt.

Auch aus dieser Überlegung heraus hätte man sofort in Beispiel 67 die Richtung von  $N$  entgegengesetzt zur gezeichneten eintragen müssen.

Die Gegenkraft von  $P_3$  in Fig. 123 ist die Mittelkraft der beiden anderen. Die Fig. 122 lehrt dann, wenn  $P_3$  entgegengesetzt angenommen wird: Die Mittelkraft zweier paralleler Kräfte ist gleich ihrer algebraischen Summe. Dasselbe ergibt sich, wenn etwa die Gegenkraft von  $P_2$  als Mittelkraft von  $P_1$  und  $P_3$  betrachtet wird.

In Fig. 130 sei  $R$  die Mittelkraft der beiden parallelen Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , so daß  $R = P_1 + P_2$  ist. Dann besteht außerdem die Gleichung 53:  $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$ . In bezug auf die in einem beliebigen

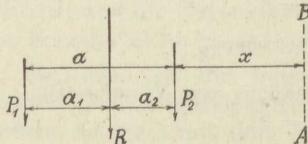


Fig. 130.

Abstand  $x$  von  $P_2$  gezogene, zu den Wirkungslinien der Kräfte parallele Gerade  $AB$  ist nun das Drehmoment der Mittelkraft

$$M_R = R \cdot (x + a_2) = R \cdot x + (P_1 + P_2) \cdot a_2$$

oder

$$M_R = R \cdot x + P_1 \cdot a_2 + P_2 \cdot a_2,$$

und die Summe der Drehmomente der Seitenkräfte ist

$$\begin{aligned} \sum M_P &= P_2 \cdot x + P_1 \cdot (a + x) \\ &= (P_2 + P_1) \cdot x + P_1 \cdot (a_1 + a_2) \\ &= R \cdot x + P_1 \cdot a_1 + P_1 \cdot a_2 \end{aligned}$$

oder, da  $P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2$  ist,

$$M_R = \sum M_P: \tag{56}$$

Das Drehmoment der Mittelkraft paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Drehmomente der Einzelkräfte in bezug auf dieselbe zu den Kräften parallele Gerade oder Ebene.

Die Formel (53) ist nur ein Sonderfall dieses Satzes für  $x = -a_2$ .

**Beispiel 68.** Zwei auf einer Säule von der Kopfbreite  $b = 40$  cm zusammenstoßende Unterzüge belasten den Säulenkopf mit  $P_1 = 34$  t bzw.  $P_2 = 28,1$  t in der Mitte jeder Auflagerfläche (Fig. 131). Anzugeben ist der Ausschlag der Mittelkraft  $R$  aus der Säulenachse.

Der Satz vom Drehmoment der Mittelkraft ergibt

$$R \cdot a = +P_2 \cdot \frac{b}{4} - P_1 \cdot \frac{b}{4}.$$

Mit  $R = P_2 + P_1$  erhält man hieraus

$$a = \frac{b \cdot P_2 - P_1}{4 \cdot P_2 + P_1} = \frac{40 \cdot 34 - 28,1}{4 \cdot 34 + 28,1} = 0,95 \text{ cm}$$

nach der Seite der größeren Kraft  $P_1$ .

Bei verschiedener Länge der Unterzüge oder auch bei gleichlangen, wenn die Lastenverteilung nicht ganz gleichmäßig ist, greift die Säulenbelastung  $R$  stets außerhalb der Säulenachse an.

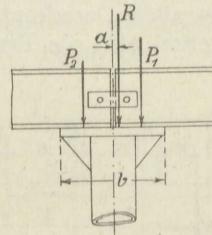


Fig. 131.

Sind mehr als zwei parallele Kräfte in derselben Ebene vorhanden, so kann man zuerst zwei von ihnen zu einer Mittelkraft zusammensetzen, deren Größe sich durch algebraische Summierung  $R_1 = P_1 + P_2$  ergibt, und deren Lage nach dem Satz vom Drehmoment der Mittelkraft  $M_{R1} = M_{P1} + M_{P2}$  bestimmt wird. Diese Mittelkraft wird darauf mit der dritten Kraft in derselben Weise vereinigt zu  $R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$ , deren Drehmoment in bezug auf dieselbe, zu den Wirkungslinien der gegebenen Kräfte parallele Gerade den Betrag hat

$$M_{R2} = M_{R1} + M_{P3} = M_{P1} + M_{P2} + M_{P3}.$$

Der obige Satz [Formel (56)] gilt also allgemein für beliebig viele parallele Kräfte.

**Beispiel 69.** Gegeben seien die parallelen Kräfte der Fig. 132:

$$\begin{aligned} P_0 &= +440 \text{ kg}, & P_1 &= +340 \text{ kg}, \\ P_2 &= -300 \text{ kg}, & P_3 &= -200 \text{ kg}, \end{aligned}$$

deren Abstände von der Wirkungslinie der Kraft  $P_0$  betragen

$$a_1 = -2,45 \text{ m}, \quad a_2 = +1,25 \text{ m}, \quad a_3 = +3,35 \text{ m}.$$

Anzugeben ist die Größe und Lage der Mittelkraft  $R$ .

Die algebraische Summe der Kräfte liefert sofort

$$R = \sum P = +440 + 340 - 300 - 200 = 280 \text{ kg}.$$

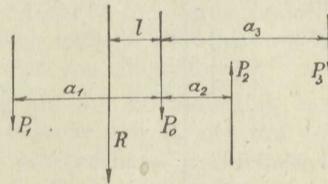


Fig. 132.

Ebenso liefert die algebraische Summe der Drehmomente in bezug auf die Wirkungslinie von  $P_0$

$$M_R = R \cdot l = 440 \cdot 0 - 340 \cdot 2,45 - 300 \cdot 1,25 - 200 \cdot 3,35 \\ = 0 - 833 - 375 - 670 = -1878 \text{ mkg,}$$

also

$$l = -\frac{1878}{280} = -6,71 \text{ m.}$$

Die in Fig. 132 ganz überschlägig eingetragene Mittelkraft  $R$  ist sowohl der Größe als auch der Lage nach unrichtig angegeben.

Zur Erleichterung der Rechnung bezieht man die Momente möglichst auf die Wirkungslinie einer Kraft. Es ergibt sich für alle Abstände das gleiche Vorzeichen, wenn dazu die äußerste Wirkungslinie des ganzen Kräftesystems gewählt wird.

Soll eine Anzahl paralleler Kräfte im Gleichgewicht sein, so darf keine Mittelkraft entstehen, d. h. ihre algebraische Summe muß Null ergeben. Demzufolge muß ihr Drehmoment in bezug auf jede beliebige, zu den in derselben Ebene angenommenen Wirkungslinien der Kräfte parallele Gerade ebenfalls Null sein. Für den Fall des Gleichgewichtes gelten also die Bedingungen

$$\sum P = 0, \quad \sum M = 0. \quad (57)$$

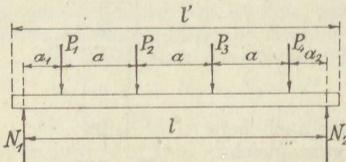


Fig. 133.

**Beispiel 70.** Ein Unterzug von der Länge  $l' = 5,1 \text{ m}$  wird durch die darüberliegenden Träger belastet mit je  $P = 18,0 \text{ t}$ ; die Abstände der Lasten betragen

$$a = 1,2 \text{ m}, \quad a_1 = 0,3 \text{ m}, \quad a_2 = 0,9 \text{ m.}$$

Anzugeben sind die Auflagerkräfte  $N_1$  und  $N_2$ , wenn der Abstand der Auflager voneinander  $l = 4,8 \text{ m}$  beträgt (Fig. 133).

Werden die Drehmomente auf die Wirkungslinie von  $N_2$  bezogen, so gilt:

$$-N_1 \cdot l + P_4 \cdot a_2 + P_3 \cdot (a_2 + a) + P_2 \cdot (a_2 + 2a) + P_1 \cdot (a_2 + 3a) = 0,$$

also 
$$N_1 = \frac{P}{l} \cdot (4a_2 + 6a) = \frac{18,0}{4,8} \cdot (4 \cdot 0,9 + 6 \cdot 1,2) = 40,5 \text{ t.}$$

Entsprechend erhält man in bezug auf die Wirkungslinie von  $N_1$

$$N_2 = \frac{P}{l} \cdot (4a_1 + 6a) = \frac{18,0}{4,8} \cdot (4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 1,2) = 31,5 \text{ t.}$$

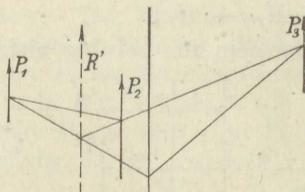


Fig. 134.

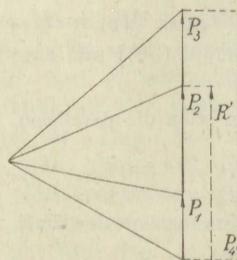


Fig. 135.

Die vorstehenden Aufgaben sind auch auf rein zeichnerischem Wege lösbar. Sind z. B. drei parallele Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  in derselben Ebene gegeben (Fig. 134) und soll die vierte Kraft  $P_4$  gesucht werden, die mit ihnen im

Gleichgewicht ist, so setzt man zuerst die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  zur Mittelkraft  $R_{1,2}$  zusammen (Fig. 135), deren Lage im Kräfteplan der Fig. 134

durch das Seileck gefunden wird, das parallel zu den Polstrahlen der Fig. 135 an beliebiger Stelle eingetragen wird. Jetzt wird  $R_{1,2}$  mit  $P_3$  vereinigt zur Kraft  $P_4$ , die gleich der algebraischen Summe aller gegebenen Kräfte ist, aber die entgegengesetzte Richtung hat (Fig. 135), und das zugehörige Seileck an das erste in Fig. 134 herangezeichnet. Der Schnittpunkt der äußersten beiden Seillinien gibt einen Punkt der Wirkungslinie von  $P_4$  an.

Man erkennt sogleich, daß für die praktische Ausführung die beiden gestrichelten Linien wegfallen können. Man trägt also an beliebiger Stelle die Seillinien parallel zu den Polstrahlen hintereinander ein, und das entstehende Seileck muß geschlossen sein, wenn Gleichgewicht zwischen den Kräften vorhanden ist<sup>15)</sup>.

### 10. Kräftepaare.

In den Figuren 136a und b ist die Lösung der Aufgabe dargestellt, die Mittelkraft  $R'$  zweier paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  zu finden, und zwar für den besonderen Fall

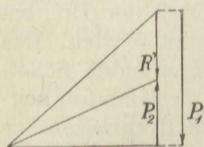


Fig. 136a.

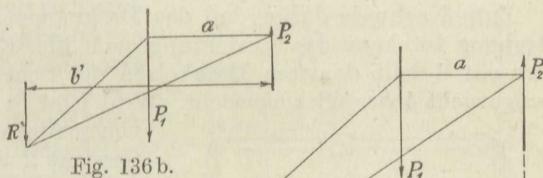


Fig. 136 b.

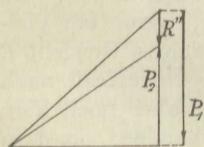


Fig. 137a.

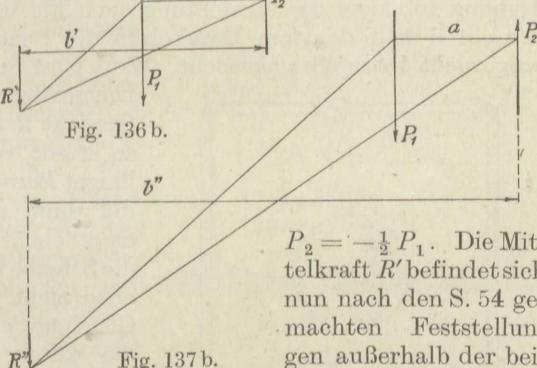


Fig. 137 b.

$P_2 = -\frac{1}{2} P_1$ . Die Mittelkraft  $R'$  befindet sich nun nach den S. 54 gemachten Feststellungen außerhalb der beiden gegebenen Kräfte

in einem bestimmten Abstand  $b'$  von  $P_2$ , der, wie die Aufmessung lehrt, gleich der doppelten Entfernung der beiden gegebenen Kräfte voneinander ist.

In den Figuren 137a und b ist dieselbe Aufgabe für den besonderen Fall  $P_2 = -\frac{3}{4} P_1$  behandelt.  $R''$  ergibt sich halb so groß als wie im ersten Fall der Fig. 136, aber doppelt so weit von  $P_2$  entfernt.

Das Drehmoment  $M = R \cdot b$  in bezug auf die Wirkungslinie von  $P_2$  ist also beidemal dasselbe. Je mehr die Größe von  $P_2$  sich der von  $P_1$  nähert, desto weiter rückt die sich entsprechend verkleinernde Mittelkraft  $R$  von  $P_1$  und  $P_2$  ab, während das Drehmoment  $M$  in bezug auf die Wirkungslinie von  $P_2$  immer dasselbe bleibt.

Wenn schließlich  $P_2 = -P_1$  gemacht wird, erhält man  $R = 0$ ; jedoch ist dann der Abstand  $b = \infty$ . Das Produkt  $M = 0 \cdot \infty$  ist

nun im allgemeinen weder 0 noch  $\infty$ , sondern hat einen bestimmten endlichen Wert, im vorliegenden Fall  $M = R' \cdot b' = R'' \cdot b''$ :

Zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte ergeben keine Mittelkraft, haben aber ein ganz bestimmtes Drehmoment  $M$ . Man bezeichnet sie als Kräftepaar<sup>18)</sup>. Das Kräftepaar bildet neben den Einzelkräften, die eine Bewegung des angegriffenen Körpers in ihrer Richtung hervorzurufen suchen, ein zweites Element der Statik. Es hat das Bestreben, dem Körper, auf den es einwirkt, eine

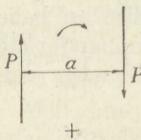


Fig. 138 a.

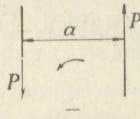


Fig. 138 b.

Drehung zu erteilen, und man unterscheidet je nach dem Drehsinn rechtsdrehende Kräftepaare, z. B. das der Fig. 138 a, und linksdrehende, z. B. das der Fig. 138 b. Das Maß der Drehbestrebung ist das Drehmoment  $M = P \cdot a$ , das Produkt aus der Größe der parallelen

Kräfte und ihrem Abstand, und zwar gilt allgemein die Vereinbarung, daß die Momente rechtsdrehender Kräftepaare positiv, die linksdrehender negativ gerechnet werden.

Zum Nachweis dafür, daß das Drehmoment das Maß der Drehbestrebung ist, kann die Vorrichtung nach Fig. 139 benutzt werden. Das Gewicht 1 hält dem am Drehbolzen der Scheibe angreifenden Scheibengewicht 1 das Gleichgewicht. Wird jetzt in einem bestimmten seitlichen

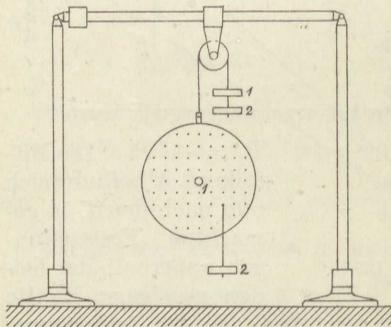


Fig. 139.

Abstand vom Drehbolzen das Gewicht 2 an die Scheibe gehängt, so erteilt es der Scheibe eine geradlinige Bewegung nach unten, die nur dann wegfällt, wenn ein gleiches, oben angebrachtes Gewicht 2 die Scheibe mit derselben Kraft nach oben zieht. Es ist aber noch kein Gleichgewicht vorhanden, sondern die durch Anziehen der Befestigungsschraube des Mittelbolzens etwas gebremste Scheibe dreht sich so lange, bis der Faden des an die Scheibe gehängten Gewichtes 2 mit

der Richtung des nach oben ziehenden Fadens zusammenfällt. Hängt man das Gewicht 2 weiter nach außen an die Scheibe an, z. B. im doppelten Abstand, so dreht sich die Scheibe schneller in die Gleichgewichtslage. Dieselbe Zeit ist unter sonst gleichen Umständen zur Drehung nötig, wenn der frühere Abstand beibehalten aber das Gewicht 2 unten und oben verdoppelt wird.

Ein Kräftepaar kann in seiner Wirkung durch ein beliebiges andere von demselben Drehsinn und dem gleichen Drehmoment ersetzt werden,

<sup>18)</sup> Poinsot, Éléments de Statique. 1804.

wie die vorstehende Darlegung lehrt, denn nur das Drehmoment ist für seine Wirkung von Bedeutung:

$$M = P \cdot a = \frac{P}{n} \cdot (a \cdot n) = (P \cdot n) \cdot \frac{a}{n},$$

worin  $n$  eine ganz beliebige unbenannte Zahl sein kann.

Das Drehmoment eines Kräftepaares ist in bezug auf jeden beliebigen in seiner Ebene gelegenen Drehpunkt dasselbe. Denn setzt man für den willkürlich angenommenen Bezugspunkt  $O$  der Fig. 140 die Drehmomente beider Kräfte gemäß den Angaben S. 51 an, so ergibt sich als Gesamtdrehmoment der beiden parallelen und gleichen Kräfte

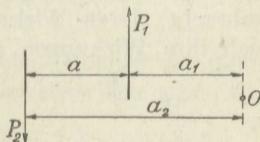


Fig. 140.

$$M = +P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 \\ = P \cdot (a_1 - a_2) = P \cdot a.$$

Deutet in Fig. 140  $O$  die senkrecht zur Zeichenebene verlaufende Drehachse des Körpers an, auf dem das Kräftepaar  $(P_1, P_2)$  linksdrehend einwirkt, so ändert sich nach dem Obigen an dem Drehbestreben oder der Wirkung des Kräftepaares nichts, wenn  $O$  eine andere als die gezeichnete Lage zu dem Kräftepaar hat oder wenn bei festgelegter Drehachse  $O$  das Kräftepaar irgendeine andere Lage dazu hat: Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene beliebig verschoben werden, solange nur die Angriffsstellen mit dem Körper unveränderlich verbunden sind (vgl. S. 12).

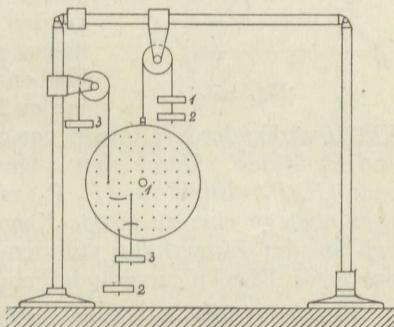


Fig. 141.

In Fig. 125 sind z. B. vorhanden zwei in dieselbe Wirkungslinie fallende Kräfte 1, das Gewicht der Scheibe und das entsprechende Gegengewicht, ein rechtsdrehendes Kräftepaar (2, 2) und ein linksdrehendes (3, 3) von gleichem Drehmoment. In Fig. 141 ist das Kräftepaar (2, 2) auf die linke Hälfte der Scheibe verschoben, während sonst alles sachlich unverändert geblieben ist. Die Scheibe befindet sich dabei ebenso im Gleichgewicht, wie im Fall der Fig. 125.

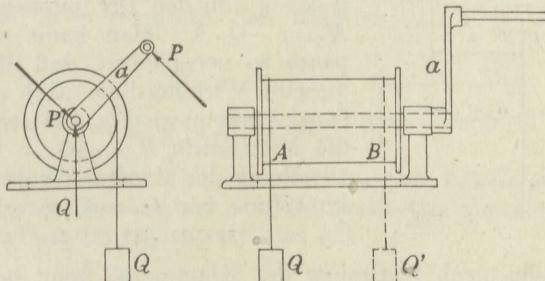


Fig. 142.

**Beispiel 71.** Bei jeder Handwinde wandert das Drehmoment, bestehend

aus dem Druck bzw. Zug  $P$  der Hand und dem entsprechenden Gegendruck im Wellenlager bei jeder Umdrehung einmal um den ganzen Kurbelkreis herum (Fig. 142).

An dem kistenförmigen Körper der Fig. 143 greifen in den Eckpunkten  $A$  und  $B$  die gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  an, deren Wirkungslinien der Einfachheit halber mit den parallelen Kanten des Körpers zusammenfallen. Sie bilden also ein in der Ebene  $ABCD$  wirkendes Kräftepaar. Jetzt werden in dem Eckpunkt  $E$  zwei Kräfte  $P_3$  und  $P_4$  von derselben Größe wie die ersten angebracht, deren Wirkungslinien in dieselbe Kante  $EH$  fallen, so daß sich ihre Wirkungen aufheben, und ebenso in dem Eckpunkt  $F$  die

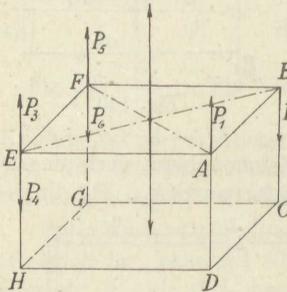


Fig. 143.

wiederum allen gleichen und parallelen Kräfte  $P_5$  und  $P_6$ , deren Wirkungslinien mit der Kante  $FG$  zusammenfallen und die sich somit gleichfalls aufheben. Man kann nun  $P_1$  mit  $P_5$  zu einer Mittelkraft von der Größe  $2P$  vereinigen, die in der Mitte der oberen Fläche  $ABFE$  nach oben wirkt, und ebenso  $P_2$  mit  $P_4$  zu der in demselben Punkt nach unten wirkenden Mittelkraft  $2P$ . Beide Mittelkräfte heben sich wieder gegenseitig auf, und es bleiben somit von allen Kräften nur die beiden  $P_3$  und  $P_6$  übrig, die ein in der Ebene  $EFGH$  wirkendes Kräftepaar von gleichem Drehmoment wie das erste  $P_1$  und  $P_2$  bilden. Durch den angewandten Kunstgriff ist das Kräftepaar  $(P_1 P_2)$  durch das  $(P_3 P_6)$  ersetzt worden: Man kann ein Kräftepaar auch in eine zu seiner Ebene parallele Ebene verschieben, ohne daß an der Einwirkung auf den Körper etwas geändert wird, wenn nur beide Ebenen unveränderlich miteinander verbunden sind.

**Beispiel 71 und 72.** Ob an der Seiltrommel der Fig. 142 die Last  $Q$  an der vorderen Stelle  $A$  der Trommel hängt oder an der hinteren  $B$  oder an irgendeiner anderen dazwischen, ist gleichgültig; das zum Aufwinden erforderliche Drehmoment  $P \cdot a$  bleibt immer dasselbe.

Ebenso kann man die Antriebsriemenscheibe einer Transmission an beliebiger Stelle auf der Welle anordnen, ohne daß eine Änderung des erforderlichen Drehmomentes eintritt.

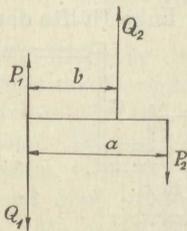


Fig. 144.

Es seien in derselben Ebene zwei Kräftepaare gegeben von den Drehmomenten  $M_1 = +P \cdot a$  und  $M_2 = -Q \cdot b$ . Man kann nun die beiden Kräftepaare so verschieben, daß die Kräfte  $Q_1$  und  $P_1$  in dieselbe Wirkungslinie nach entgegengesetzten Richtungen fallen, wie Fig. 144 zeigt; beide ergeben dann die Mittelkraft  $R = +Q_1 - P_1$ . Schreibt man die Gleichung der Kraftmomente in bezug auf die Wirkungslinie von  $Q_2$  auf, so erhält man

$$M = -(Q_1 - P_1) \cdot b + P_2 \cdot (a - b)$$

oder nach Auflösung der Klammern, wenn noch die Unterscheidung der gleichen Kräfte beiseite gelassen wird.

$$M = -Q \cdot b + P \cdot b + P \cdot a - P \cdot b \\ = +P \cdot a - Q \cdot b,$$

das ist nach dem Obigen

$$M = M_1 + M_2.$$

Soll nun Gleichgewicht bestehen, so muß nach Formel (53) für die drei parallelen Kräfte  $R$ ,  $Q_2$ ,  $P_2$  die Bedingung erfüllt sein, daß die Drehmomente  $(Q_1 - P_1) \cdot b$  und  $P_2 \cdot (a - b)$  in bezug auf die Wirkungslinie von  $Q_2$  gleich sind, aber entgegengesetzten Drehsinn haben, woraus im vorliegenden Fall folgt  $M = 0$  oder

$$M_1 + M_2 = 0:$$

Zwei verschiedene in derselben oder in parallelen Ebenen an demselben Körper wirkende Kräftepaare sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Drehmomente Null ergibt (vgl. S. 52).

Ein Beispiel dafür veranschaulicht die Fig. 145. Die Scheibe ist im Gleichgewicht, denn es ist

$$-G_3 \cdot 4 + 2 G_2 \cdot 2 = 0.$$

Wenn nicht Gleichgewicht besteht, ist die algebraische Summe der Drehmomente beider Kräftepaare das Moment des bei der Zusammensetzung beider Kräftepaare entstehenden neuen Kräftepaars.

$$M = M_1 + M_2.$$

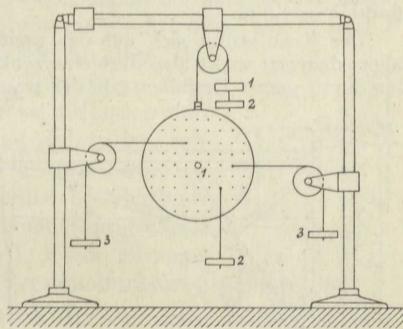


Fig. 145.

Einen unmittelbaren Nachweis dafür liefert die Fig. 146. Gegeben sind die beiden an demselben Körper angreifenden Kräftepaare  $(P_1 P_2)$  und  $(Q_1 Q_2)$  von den Momenten  $M_1 = +P \cdot a$  bzw.  $M_2 = -Q \cdot b$ .

Man verwandelt das letztere Kräftepaar in ein solches von gleichem Moment, aber dem Abstand  $a$  durch die Rechnung  $-Q' \cdot a = -Q \cdot b$ , also  $Q' = Q \cdot \frac{b}{a}$ , und bewegt dieses Kräftepaar in seiner Ebene derart, daß es die in Fig. 146 gezeichnete Lage erhält. Durch Zusammensetzen der Kräfte ergibt sich sogleich das Gesamtkräftepaar vom Moment  $M = R \cdot a$  mit den Kräften  $R = P - Q'$ . Nun ist

Durch Zusammensetzen der Kräfte ergibt sich sogleich das Gesamtkräftepaar vom Moment  $M = R \cdot a$  mit den Kräften  $R = P - Q'$ . Nun ist

$$M = R \cdot a = (P - Q') \cdot a = P \cdot a - Q' \cdot a \\ = P \cdot a - Q \cdot \frac{b}{a} \cdot a = P \cdot a - Q \cdot b = M_1 + M_2.$$

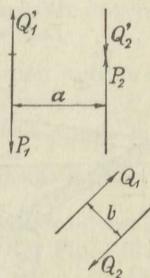


Fig. 146.

Wirken mehr als zwei Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen auf einen Körper ein, so addieren sich die Drehbestreben aller algebraisch und für den Fall des Gleichgewichtes gilt

$$\sum M = 0.$$

Gleichgewicht besteht also nur, wenn die sämtlichen auf den Körper einwirkenden Kräfte weder eine Einzelkraft liefern, die eine geradlinige Bewegung in ihrer Richtung hervorzubringen sucht, noch ein Kräftepaar, das eine Drehbewegung verursacht. Es gelten also ganz allgemein als Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in derselben Ebene die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} 1: \sum X &= 0, \\ 2: \sum Y &= 0, \\ 3: \sum M &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

**Beispiel 73.** Zu ermitteln sind die größten Auflagerkräfte des Gießereikranes nach Fig. 147. Er ist belastet mit  $Q = 2 \text{ t}$  in der größten Ausladung  $a = 4,2 \text{ m}$ , das gesamte Eigengewicht beträgt etwa  $G = 2 \text{ t}$ , dessen Wirkungslinie um  $b = 1,05 \text{ m}$  von der Hauptsäule entfernt ist. Die beiden Lager haben den Abstand  $h = 4,0 \text{ m}$ .

Der Kran stützt sich mit der wagerechten Grundzapfenfläche auf das Fußlager; dagegen wirkt also dort eine senkrechte Kraft  $V$ . Das obere Lager sichert den Kran gegen Umfallen mit der wagerechten Kraft  $H_1$  und das untere gegen Auspendeln mit der ebenfalls wagerechten Kraft  $H_2$ . Weitere äußere Kräfte sind nicht vorhanden.

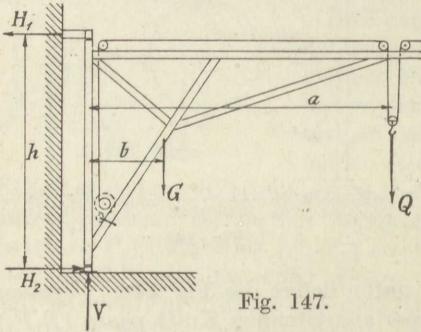


Fig. 147.

Es bestehen mithin die Gleichgewichtsbedingungen:

1. für die wagerechten Kräfte:

$$H_1 + H_2 = 0,$$

also

$$H_1 = -H_2.$$

2. für die senkrechten Kräfte:

$$+Q + G - V = 0,$$

also

$$V = Q + G = 4 \text{ t.}$$

3. für die Drehmomente in bezug auf denjenigen Punkt, durch den die Wirkungslinien der meisten Kräfte gehen, also die Mitte des unteren Lagers:

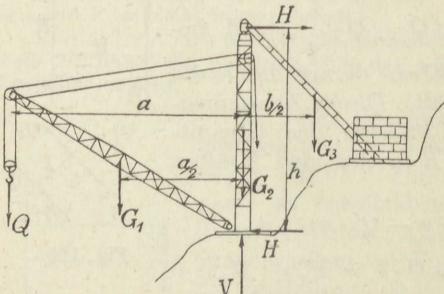


Fig. 148.

$$+Q \cdot a + G \cdot b - H_1 \cdot h = 0,$$

also

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{Q \cdot a + G \cdot b}{h} \\ &= \frac{2 \cdot 4,2 + 2 \cdot 1,05}{4,0} = 2,63 \text{ t.} \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß  $(H_1 H_2)$  das den Kran haltende Kräftepaar ist und  $(V, Q + G)$  das ihn kippende, aus den beiden Kräftepaaren  $(Q G)$  und  $(G G)$  zusammengesetzte.

**Beispiel 74.** Für den Derrickkran in Fig. 148 ist bei der größten Ausladung  $a = 20 \text{ m}$ , ferner ist  $h = 18,5 \text{ m}$ ,  $b = 12,2 \text{ m}$ . Die größte Last beträgt  $Q = 20 \text{ t}$ , die Eigengewichte sind  $G_1 = 4,0 \text{ t}$ ,  $G_2 = 4,5 \text{ t}$ ,  $G_3 = 3,0 \text{ t}$ . Zu ermitteln sind die Größen der Auflagerkräfte  $V$  und  $H$ .

Man erhält sofort

$$V = Q + \Sigma G = 31,5 \text{ t}$$

und aus der Momentengleichung für den Angriffspunkt von  $V$

$$+H \cdot h + G_3 \cdot \frac{b}{2} - G_1 \cdot \frac{a}{2} - Q \cdot a = 0,$$

also

$$H = \frac{1}{h} \cdot \left( Q \cdot a + G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_3 \cdot \frac{b}{2} \right) \\ = \frac{1}{18,5} \cdot (20 \cdot 20,0 + 4 \cdot 10,0 - 3 \cdot 6,1) = \frac{421,7}{18,5} = 22,8 \text{ t}.$$

Auf einen Körper wirke an einer Stelle die Kraft  $P_1$  (Fig. 149), an einer anderen Stelle werden in derselben Wirkungslinie die beiden zu  $P_1$  parallelen Kräfte  $P_2$  und  $P_3$  entgegengesetzt zueinander angebracht, und zwar seien die drei Kräfte von gleicher Größe. Da  $P_2$  und  $P_3$  sich unmittelbar aufheben, so ändern sie an dem Belastungszustand des Körpers nichts. Nun kann man ( $P_1 P_2$ ) als Kräftepaar vom Moment  $P \cdot a$  auffassen und  $P_3$  als die um die Strecke  $a$  parallel zu sich selbst verschobene Kraft  $P_1$ . Man gelangt so zu dem Satz:

Eine Kraft kann parallel zu sich selbst beliebig verschoben werden, wenn nur ein in der Verschiebungsebene wirkendes Kräftepaar hinzugefügt wird, dessen Moment aus der Größe der Kraft und dem Verschiebungsweg gebildet ist.

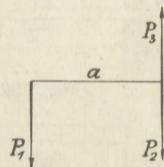


Fig. 149.

Da Kräftepaare unbewegliche Körper, die sich nicht drehen können, mindestens zu verbiegen suchen, so heißt dieses Moment das Biegemoment und die verschobene Kraft, die bei Trägern gewöhnlich quer zur Trägerachse steht, die Querkraft. Die Biegemomente und zum Teil auch die Querkräfte sind für die Berechnung von Trägern jeder Art maßgebend, wie die Zug- und Druckkräfte für Zugbänder, Säulen, Kolbenstangen usw. Man stellt das Biegemoment oft durch einen gebogenen Pfeil dar (Fig. 150).

Umgekehrt kann aus der Fig. 149 auch der Satz entnommen werden: Ein Kräftepaar ( $P_1 P_2$ ) vom Moment  $M$  kann mit einer Einzelkraft  $P_3$  zusammengesetzt werden; man erhält daraus die Einzelkraft  $P_1$  parallel zu sich selbst verschoben um den Betrag  $a = \frac{M}{P}$ . Die Richtung der Verschiebung bzw. im ersten Fall den Drehsinn des entstandenen Kräftepaares bestimmt man am besten durch Wiederholung der Fig. 149.

**Beispiel 75.** Der an einem Ende wagerecht eingespannte Träger der Fig. 150 von der Länge  $l = 2,4 \text{ m}$  wird am freien Ende durch eine nach unten wirkende Kraft  $P = 2450 \text{ kg}$  belastet. Anzugeben ist die Beanspruchung an der  $x = 1,5 \text{ m}$  vom freien Ende entfernten Stelle und an der Einspannungsstelle.

Man verschiebt die Belastung  $P$  parallel zu sich selbst um die Strecke  $x$  nach der zu untersuchenden Stelle und erhält dort wirkend die Querkraft  $P$  und das rechtsdrehende Biegemoment

$$M_x = P \cdot x = 2450 \cdot 1,5 = 3675 \text{ mkg}.$$

Im Abstände  $l$  vom freien Ende ist die Querkraft dieselbe, das Biegemoment hat dort den Wert

$$M_l = P \cdot l = 2450 \cdot 2,4 = 5880 \text{ mkg.}$$

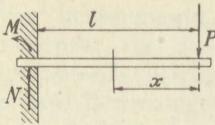


Fig. 150.

Es ist gleich dem Spannungsmoment  $M$ , das erforderlich ist, um den Träger festzuhalten, hat aber die entgegengesetzte Drehrichtung. Den Verlauf des Biegemomentes über die Trägerlänge gibt die Fig. 151 wieder.

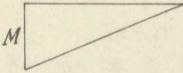


Fig. 151.

Die Auflagerkraft  $N$  ist nach der zweiten Gleichgewichtsbedingung der Formeln (57) gleich der Belastung  $P$ . An der Auflagerstelle, wo demnach die Querkraft  $Q = P - N = 0$  ist, hat das Biegemoment seinen größten Wert.

**Beispiel 76.** Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes und der Querkraft für den eingespannten Träger nach Fig. 152.

Die Gleichgewichtsbedingungen (57) liefern

$$a) \quad N = P_1 + P_2,$$

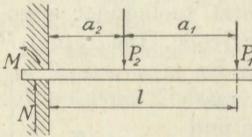


Fig. 152.

und der Verlauf der Querkraft wird durch Fig. 153 wiedergegeben. Zwischen zwei Einzelkräften ist die Querkraft unveränderlich.

$$b) \quad M = P_2 \cdot a_2 + P_1 \cdot (a_1 + a_2),$$

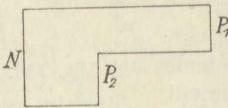


Fig. 153.

und der Verlauf des Biegemomentes ist in Fig. 154 dargestellt. Zwischen zwei Einzelkräften ändert sich das Biegemoment entsprechend der Entfernung von der einen oder anderen Kraft; die seinen Verlauf angehende Linie ist also eine geneigte Gerade. Das größte Biegemoment kann demnach bei Belastung des Trägers durch Einzelkräfte nur an einer Stelle auftreten, wo eine Kraft auf den Träger einwirkt.

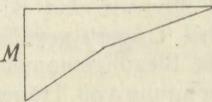


Fig. 154.

**Beispiel 77.** Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes und sein größter Wert für den auf zwei Stützen gelagerten wagerechten Träger, der durch eine Einzelkraft  $P$  belastet ist, die zwischen den Stützen angreift (Fig. 155), ferner die Größe und der Verlauf der Querkraft.

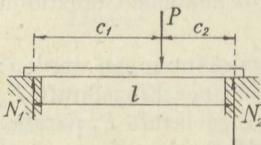


Fig. 155.

Nach den Angaben des Beispiels 63 erhält man durch Anwendung der Momentengleichung in bezug auf die Wirkungslinie der Auflagerkraft  $N_2$ :

$$+N_1 \cdot l - P \cdot c_2 = 0,$$

also

$$N_1 = P \cdot \frac{c_2}{l}. \tag{58}$$

Das Biegemoment für die Angriffsstelle von  $P$  ist

$$M = +N_1 \cdot c_1 = P \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{l}. \tag{59}$$

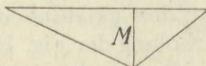


Fig. 156.

An den Auflagerstellen hat das Biegemoment den Wert Null; da seine Größe entsprechend der Entfernung vom Auflager wächst, so erreicht es unter der Last  $P$  den größten Wert (Fig. 156). Geht man etwa von der anderen Seite des Trägers aus, so ergibt sich

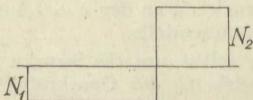


Fig. 157.

$$M = -P \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{l}.$$

An jeder Stelle treten zwei Biegemomente auf, Moment und Gegenmoment, von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Drehsinn.

Die Querkraft hat von dem Auflager 1 bis zur Last  $P$  den überall gleichen Wert  $N_1$ . Unter der Last ändert sie sich um den Betrag  $P$ , geht also durch Null und hat von dort bis zum Auflager 2 den Wert  $N_2$  (Fig. 157). Bemerkte sei, daß die Querkraft zwar unter der Last den Wert Null hat, jedoch dicht daneben die in Fig. 157 veranschaulichten Werte, so daß für eine genaue Trägerberechnung die größere Querkraft  $Q = N_1$  mit berücksichtigt werden muß.

**Beispiel 78.** Für den in Fig. 158 dargestellten Träger mit den beiden Lasten  $P$  an den übertragenden Enden ist der Verlauf des Biegemomentes festzustellen.

Die beiden Stützdrücke  $N_1$  und  $N_2$  sind aus Gründen der Symmetrie einander gleich. Das Moment über einer Stütze ist nach Beispiel 75  $M = P \cdot c$ . Da die Momentenlinie zwischen zwei benachbarten Kräften durch eine Gerade dargestellt wird, so ist das Biegemoment zwischen den Stützen überall dasselbe (Fig. 159).

Auch die Rechnung liefert das gleiche Ergebnis: In dem beliebigen Abstand  $x$  von der Stütze  $N_1$  ist

$$M = -P \cdot (c + x) + N_1 \cdot x,$$

und, da  $N_1 = P$  ist,

$$M = -P \cdot c.$$

Die Querkraft hat auf den Außenstrecken  $c$  den Wert  $P$ , sie sinkt über den Stützen auf Null und behält diesen Wert zwischen beiden Stützen bei. Der Träger ist also zwischen den Stützen ausschließlich durch das überall gleiche Biegemoment  $P \cdot c$  beansprucht.

**Beispiel 79.** Für den Standdrehkran nach Fig. 160 gilt das Umgekehrte des in Beispiel 73 berechneten Gießereikranes. Das Eigengewicht  $G \approx 350$  kg kann ungefähr in der Mittellinie der Standsäule einwirkend angenommen werden.

Man erhält dann mit  $Q = 1$  t aus den drei Gleichgewichtsbedingungen (57):

- $H_1 = H_2$ ,
- $V = Q + G = 1,35$  t,
- in bezug auf die Mitte des oberen Drehzapfens

$$+H \cdot h = +Q \cdot a,$$

also

$$H = Q \cdot \frac{a}{h} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3 \text{ t.}$$

Auf die Standsäule wirkt oben die Kraft  $H_1$  in der entgegengesetzten Richtung der Fig. 160; die Säule wird an einer beliebigen Stelle zwischen  $H_1$  und  $H_2$  beansprucht durch das Biegemoment  $M = H \cdot x$ , das den größten Wert bei  $H_2$  erreicht:

$$M_{\max} = H \cdot h = 3 \cdot 1 = 3 \text{ mt,}$$

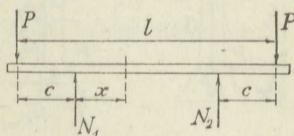


Fig. 158.

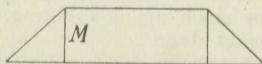


Fig. 159.

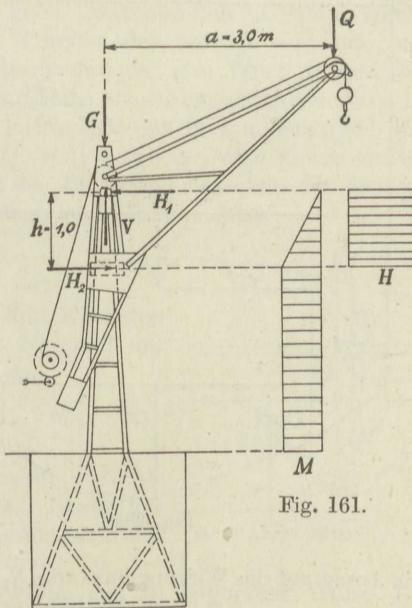


Fig. 161.

Fig. 160.

wo die Querkraft  $H_1 - H_2 = 0$  ist, während sie an den Zwischenstellen überall den Wert  $H_1$  hat. Für alle unterhalb  $H_2$  befindlichen Stellen ist das Biegemoment dasselbe  $M_{\max} = 3$  mt, jedoch tritt dort keine Querkraft mehr auf. Den Verlauf beider zeigt Fig. 161.

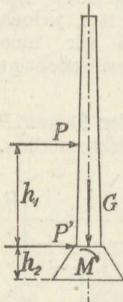


Fig. 162.

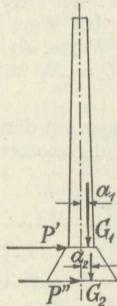


Fig. 163.

**Beispiel 80.** Auf die freistehende Schornsteinsäule der Fig. 162 vom Gewicht  $G_1 = 111,5$  t wirkt in wagerechter Richtung der Winddruck  $P = 4,71$  t in der Höhe  $h_1 = 12,74$  m (Beispiel 100).

Um die Beanspruchung der Fläche zwischen Schornsteinschaft und Fundament zu ermitteln, verschiebt man die Kraft  $P$  parallel zu sich selbst dorthin ( $P'$ ) und hat nun das Biegemoment  $M_1 = P \cdot h_1$  hinzuzufügen. Ferner ist die Fläche noch belastet mit dem Gewicht  $G_1$  der Säule. Man setzt jetzt  $G_1$  und  $M_1$  zusammen und erhält dadurch  $G_2$  in der Richtung des Winddruckes verschoben (Fig. 163) um den Betrag

$$a_1 = \frac{M_1}{G_1} = \frac{P \cdot h_1}{G} = \frac{4,71 \cdot 12,74}{111,5} = 0,54 \text{ m.}$$

Um die Beanspruchung der Fundamentsohle zu finden, wird  $P$  bis dorthin verschoben um den Betrag  $h_2 = 2,0$  m, und das Biegemoment an der Stelle beträgt dann

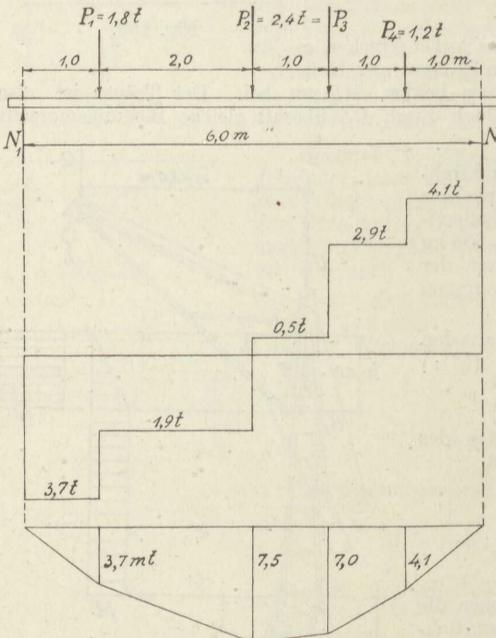


Fig. 164.

$$M_2 = P \cdot (h_1 + h_2) = M_1 + P \cdot h_2.$$

Das gesamte Gewicht von Schornsteinsäule und Fundament betrage

$G_2 = 111,5 + 35,7 = 147,2$  t, das mit dem Moment  $M_2$  zusammengesetzt wird und so um den Betrag

$$a_2 = \frac{M_2}{G_2} = \frac{M_1 + P \cdot h_2}{G_2} = \frac{4,71 \cdot (12,74 + 2,0)}{147,2} \approx 0,47 \text{ m}$$

in Richtung des Winddruckes verschoben ist.

Die Ausschläge  $a_1$  und  $a_2$  dürfen einen bestimmten Höchstbetrag nicht überschreiten.

**Beispiel 81.** Für den in Fig. 164 mit seinen Belastungen dargestellten wagerechten Träger auf zwei Stützen ist der Verlauf der Querkraft und des Biegemomentes anzugeben.

Es müssen zuerst die beiden Auflagerkräfte berechnet werden. Die Momentengleichung

in bezug auf die Wirkungslinie von  $N_2$  liefert

$$N_1 = \frac{1}{6} \cdot (1,8 \cdot 5 + 2,4 \cdot 3 + 2,4 \cdot 2 + 1,2 \cdot 1) = \frac{1}{6} \cdot (9,0 + 7,2 + 4,8 + 1,2) = 3,7 \text{ t,}$$

ebenso die Momentengleichung für die Wirkungslinie von  $N_1$

$$N_2 = \frac{1}{6} \cdot (1,8 \cdot 1 + 2,4 \cdot 3 + 2,4 \cdot 4 + 1,2 \cdot 5) \\ = \frac{1}{6} \cdot (1,8 + 7,2 + 9,6 + 6,0) = 4,1 \text{ t.}$$

Die Proberechnung ergibt

$$1,8 + 2,4 + 2,4 + 1,2 = 3,7 + 4,1 \text{ t.}$$

Jetzt können die Querkräfte bestimmt werden:

$$\begin{array}{ll} \text{zwischen } N_1 \text{ und } P_1 \text{ ist } Q = N_1 = 3,7 \text{ t,} \\ \text{,, } P_1 \text{ ,, } P_2 \text{ ,, } Q = N_1 - P_1 = 1,9 \text{ t,} \\ \text{,, } P_2 \text{ ,, } P_3 \text{ ,, } Q = N_1 - P_1 - P_2 = -0,5 \text{ t,} \\ \text{,, } P_3 \text{ ,, } P_4 \text{ ,, } Q = N_1 - P_1 - P_2 - P_3 = -2,9 \text{ t,} \\ \text{,, } P_4 \text{ ,, } N_2 \text{ ,, } Q = N_1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = -N_2 = -4,1 \text{ t.} \end{array}$$

Die Biegemomente für die Wirkungslinien der einzelnen Kräfte ergeben sich wie folgt:

$$\begin{array}{ll} \text{bei } N_1 \text{ ist } M_0 = 0, \\ \text{,, } P_1 \text{ ,, } M_1 = 3,7 \cdot 1 = 3,7 \text{ mt,} \\ \text{,, } P_2 \text{ ,, } M_2 = 3,7 \cdot 3 - 1,8 \cdot 2 = 7,5 \text{ mt,} \\ \text{,, } P_3 \text{ ,, } M_3 = 4,1 \cdot 2 - 1,2 \cdot 1 = 7,0 \text{ mt,} \end{array}$$

Vorteilhaft wird jetzt von der Seite der Auflagerkraft  $N_2$  aus gerechnet:

$$\begin{array}{ll} \text{bei } P_4 \text{ ist } M_4 = 4,1 \cdot 1 = 4,1 \text{ mt,} \\ \text{,, } N_2 \text{ ,, } M_0 = 0. \end{array}$$

Durch geradliniges Verbinden der etwa im Maßstabe  $1 \text{ mt} = 3 \text{ mm}$  aufgetragenen Werte erhält man die Momentenkurve.

Die Fig. 164 lehrt, daß bei einem durch mehrere Einzelkräfte belasteten Träger die Querkraft in der Nähe des größten Biegemomentes klein ist, so daß sie im allgemeinen nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Das größte Biegemoment tritt immer an der Stelle des Trägers auf, wo die Querkraft durch Null geht. Hat nämlich in einem Querschnitt I eines beliebig belasteten Trägers, der vom freien Ende um die Strecke  $x$  entfernt ist, das Biegemoment den Wert  $M$  und die Querkraft den Wert  $Q$ , so hat in einem dicht benachbarten Querschnitt II im Abstände  $dx$  vom Querschnitt I (Fig 165) das Biegemoment zugenommen um den Betrag  $dM = Q \cdot dx$ , wobei das eine kleine Größe zweiter Ordnung bildende Moment der Belastung zwischen den beiden Querschnitten I und II vernachlässigt ist. Hieraus folgt

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (60)$$

Aus dem kleinen Dreieck mit den Katheten  $dM$  und  $dx$  erhält man nun die Neigung der Momentenkurve zwischen I und II zu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dM}{dx}$$

An der Stelle, wo das größte Moment auftritt, muß die Momentenkurve parallel zur Stabachse verlaufen, so daß dort  $\operatorname{tg} \varphi = 0$  ist oder nach der vorhergehenden Gleichung (60)  $Q = 0$ .

Man benutzt diesen Zusammenhang, um in bequemer Weise die Stelle des größten Biegemomentes zu bestimmen.

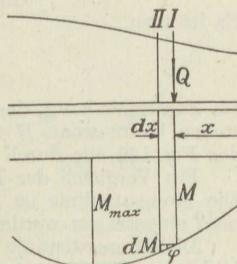


Fig. 165.

**Beispiel 82.** Die Querkraftaufstellung der Fig. 164 liefert sogleich den Ort des größten Biegemomentes unter der Last  $P_2$ . Die Berechnung der Querkraft bis zur fraglichen Stelle kann sehr häufig ohne Mühe im Kopf gemacht werden.

Die vorstehenden Darlegungen gelten ganz allgemein. Der größte oder kleinste Wert einer Größe  $y$ , die von einer gegebenen Veränderlichen  $x$  abhängig ist, ist derjenige, für den bei der zeichnerischen Auftragung des Verlaufes von  $y$  die Tangente an die betreffende Kurve parallel zur  $x$ -Achse liegt, wo also die Gleichung erfüllt wird

$$\frac{dy}{dx} = 0. \quad (61)$$

Trägt man die Belastung der Fig. 164 in einem beliebigen Kräftemaßstab, am einfachsten dem der Querkraftlinien, hintereinander ab (Fig. 166) und zieht von den Kraftendpunkten die Parallelen zu den zugehörigen Momentenlinien, die in Fig. 167 noch einmal wiederholt sind, z. B. durch den gemeinsamen Punkt von  $P_1$  und  $P_2$  in Fig. 166 die Parallele zu der zwischen  $P_1$  und  $P_2$  in Fig. 167

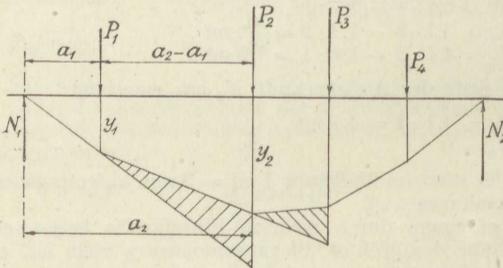


Fig. 167.

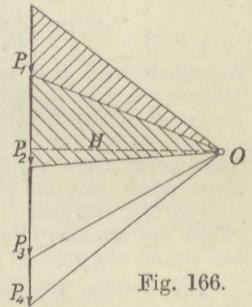


Fig. 166.

verlaufenden Momentenlinie, so schneiden sich alle Parallelen in einem Punkt  $O$ . Denn die gleich schraffierten Dreiecke beider Figuren sind einander ähnlich, da alle Seiten parallel sind; demnach verhalten sich die Höhen  $H$  der Dreiecke der Fig. 166 zu den Grundlinien  $P$  wie die Längenunterschiede  $a$  zu den Ordinatenunterschieden  $y$  in Fig. 167. Die Maßstäbe sind nun in folgender Weise gewählt, wie die Aufmessung ergibt:

Fig. 166: Kräfte  $P$ : 1 t wirkliche Größe = 5,0 mm,

Höhe  $H$ : = 20,0 „ „

Fig. 167: Länge  $a$ : 1 m „ „ = 10,0 „ „

Höhe  $y$ : 1 mt „ „ = 2,5 „ „

Es ist also

$$\frac{10,0}{2,5} = \frac{20,0}{5,0},$$

ein Zusammenhang, der zugleich mit der zuerst aufgeführten Bedingung nur bestehen kann, wenn  $H$  für alle Dreiecke dieselbe Länge hat, d. h. die Parallelen der Fig. 166 alle durch den Punkt  $O$  gehen.

Ein Vergleich der Fig. 166 und 167 mit den Fig. 120 und 123 lehrt sofort: Die Momentenlinie ist das Seileck, das für einen beliebigen Pol in den Kräfteplan eingetragen werden kann.

Die Momentenlinie kann hiernach ohne jede Rechnung gezeichnet werden. Mißt man die Ordinaten  $y$  der Momentenlinie im Längenmaßstabe und den Polabstand  $H$  im Kräftemaßstab oder auch umgekehrt ab, so ergibt das Produkt den wahren Wert des Momentes.

**Beispiel 83.** In Fig. 164 bzw. 167 ist

$$y_1 = 7,4 \text{ mm}, \quad y_2 = 15,0 \text{ mm}, \quad y_3 = 14,0 \text{ mm}, \quad y_4 = 8,2 \text{ mm}.$$

Damit wird mit

$$H = 25 \cdot \frac{1}{5} \text{ mm} \cdot \frac{t}{\text{mm}} = 5 t.$$

$$y_1 = \frac{100}{10} \cdot 7,4 = 74 \text{ cm}, \quad \text{also} \quad M_1 = 5 \cdot 74 = 370 \text{ cmt},$$

$$y_2 = 10 \cdot 15,0 = 150 \text{ cm}, \quad \text{,,} \quad M_2 = 5 \cdot 150 = 750 \text{ cmt},$$

$$y_3 = 10 \cdot 14,0 = 140 \text{ cm}, \quad \text{,,} \quad M_3 = 5 \cdot 140 = 700 \text{ cmt},$$

$$y_4 = 10 \cdot 8,2 = 82 \text{ cm}, \quad \text{,,} \quad M_4 = 5 \cdot 82 = 410 \text{ cmt}$$

oder mit

$$H = 25 \cdot \frac{100}{10} \text{ mm} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{mm}} = 250 \text{ cm}$$

$$y_1 = \frac{1}{5} \cdot 7,4 = 1,48 t, \quad \text{also} \quad M_1 = 250 \cdot 1,48 = 370 \text{ cmt},$$

$$y_2 = \frac{1}{5} \cdot 15,0 = 3,00 t, \quad \text{,,} \quad M_2 = 250 \cdot 3,00 = 750 \text{ cmt},$$

$$y_3 = \frac{1}{5} \cdot 14,0 = 2,80 t, \quad \text{,,} \quad M_3 = 250 \cdot 2,80 = 700 \text{ cmt},$$

$$y_4 = \frac{1}{5} \cdot 8,2 = 1,64 t, \quad \text{,,} \quad M_4 = 250 \cdot 1,64 = 410 \text{ cmt}.$$

Wenn der Längen- und der Kräftemaßstab in bequemen einfachen Zahlen gewählt wird, liefert die Aufmessung ohne besondere Umrechnung die Größe der Biegemomente. Auch in anderen Fällen kommt man leicht zum Ziel, wenn man zuerst das Produkt aus der in mm aufgenommenen Länge  $H$  mit dem Kräftemaßstab und dem Längenmaßstab berechnet, z. B. im vorliegenden Fall

$$25 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{100} \text{ mm} \cdot \frac{t}{\text{mm}} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{mm}} = 0,50 \frac{\text{cm} \cdot t}{\text{mm}},$$

und nun jede Aufmessung der  $y$  damit multipliziert, also

$$M_1 = 0,50 \cdot 7,4 = 370 \text{ cmt},$$

$$M_2 = 0,50 \cdot 15,0 = 750 \text{ cmt},$$

$$M_3 = 0,50 \cdot 14,0 = 700 \text{ cmt},$$

$$M_4 = 0,50 \cdot 8,2 = 410 \text{ cmt}.$$

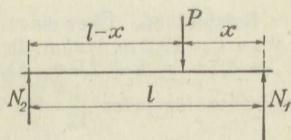


Fig. 168.

**Beispiel 84.** Auf einen wagerechten, an den Enden frei aufliegenden Hängebahnträger von der Länge  $l = 4,2 \text{ m}$  verkehrt eine Einzellast  $P = 650 \text{ kg}$ . Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes und der Querkraft unter der Last.

Die Fig. 168 stellt eine beliebige Lage der Einzellast dar. Nach den Ermittlungen der vorhergehenden Beispiele ist das jeweilige größte Biegemoment an der Angriffsstelle der Last  $P$  vorhanden. Es hat nach der Berechnung in Beispiel 77, wenn dort die Bezeichnungen der Fig. 168 eingeführt werden, den Wert

$$M_x = P \cdot \frac{x \cdot (l - x)}{l}.$$

Den Höchstwert erhält man für

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{zu} \quad M_{\max} = P \cdot \frac{l^2}{4}.$$

Das Verhältnis beider Werte zueinander ist

$$\frac{M_x}{M_{\max}} = \frac{P \cdot \frac{x \cdot (l - x)}{l}}{P \cdot \frac{l^2}{4}} = 4 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

und hieraus folgt

$$M_x = P \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

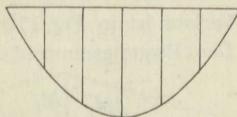


Fig. 169.

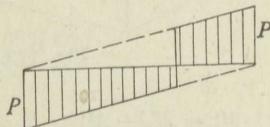


Fig. 170.

Für die zahlenmäßige Ausrechnung teilt man den Träger etwa in sechs gleiche Teile von der Länge 0,7 m. Es ist dann

$$P \cdot l^2 = 0,65 \cdot 4,2^2 = 11,46 \text{ tm}^2,$$

und hiermit ergibt sich die folgende Aufstellung:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{x}{l} = 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 0 & \frac{5}{36} & \frac{8}{36} & \frac{9}{36} & \frac{8}{36} & \frac{5}{36} & 0 \\ M_x = 0 & 1,592 & 2,549 & 2,867 & 2,549 & 1,592 & 0 \text{ mt.} \end{array}$$

Die betreffenden Werte sind in Fig. 169 aufgetragen. Die Momentenlinie ist eine Parabel.

Die Querkraft  $Q$  ist auf jeder Seite der Last gleich dem zugehörigen Auflagerdruck. Für  $x = 0$  hat man  $Q = P$ , für einen beliebigen Wert von  $x$  ist  $Q = P \cdot \frac{x}{l}$ , für  $x = \frac{l}{2}$  ist  $Q = \frac{P}{2}$ , für  $x = l$  ist wieder  $Q = P$ . Den Verlauf der Querkraft stellt somit die Fig. 170 dar. Für ihre Berücksichtigung gilt das in Beispiel 77 Gesagte.

**Beispiel 85.** Über einen an beiden Enden unterstützten Kranträger von der Länge  $l = 19,2$  m laufen die beiden Raddrücke der Laufkatze  $P_1 = 5,3$  t und  $P_2 = 4,7$  t in  $b = 2,0$  m Abstand (Fig. 171). Festzustellen sind die Biegemomente für jedes  $\frac{1}{12}$  der Trägerlänge und der Verlauf der Querkraft.

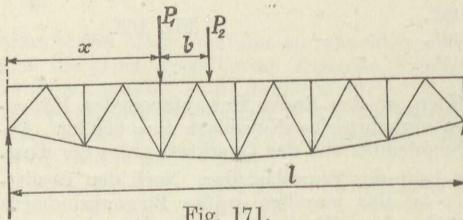


Fig. 171.

Bei der gezeichneten Laststellung ist nach Formel (61) das Moment der ersten Last für die Angriffsstelle der Kraft

$$M_1 = P_1 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

und das der zweiten Last für ihre Angriffsstelle

$$M_2 = P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x+b}{l} \cdot \left(1 - \frac{x+b}{l}\right);$$

ihr Verlauf ist in Fig. 172 über derselben Achse aufgetragen.

Das Biegemoment der zweiten Last ist an der Stelle, wo  $P_1$  angreift, verkleinert auf den Betrag

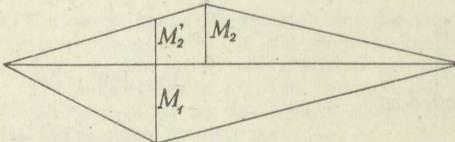


Fig. 172.

$$\begin{aligned} M_2' &= M_2 \cdot \frac{x}{x+b} \\ &= P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{b}{l}\right), \end{aligned}$$

und das Gesamtmoment an der Stelle  $x$  ist hiermit

$$M_x = M_1 + M_2' = P_1 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) + P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{b}{l}\right)$$

oder

$$M_x = l \cdot x \cdot \left[ (P_1 + P_2) \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) - P_2 \cdot \frac{b}{l} \right]. \quad (62)$$

Wird noch eingesetzt  $x = \frac{i}{12} \cdot l$ , worin  $i$  die ganzen Zahlen von 1–12 darstellt, so folgt

$$M_x = l^2 \cdot \frac{i}{12} \cdot \left[ (P_1 + P_2) \cdot \left( 1 - \frac{i}{12} \right) - P_2 \cdot \frac{b}{l} \right]$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\begin{aligned} M_x &= 19,2 \cdot 1,6 \cdot i \cdot \left[ 10 \cdot \left( 1 - \frac{i}{12} \right) - \frac{4,7 \cdot 2,0}{19,2} \right] \\ &= 30,72 \cdot i \cdot \left[ 10 \cdot \left( 1 - \frac{i}{12} \right) - 0,49 \right] \text{ mt.} \end{aligned}$$

Damit erhält man die folgende Zusammenstellung:

	$i = 1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$9$	$10$	$11$
$10 \cdot \left( 1 - \frac{i}{12} \right)$	9,167	8,333	7,500	6,667	5,833	5,000	4,167	3,333	2,500	1,667	0,833
[—]	8,667	7,843	7,010	6,177	5,344	4,510	3,677	2,843	2,010	1,177	0,343
$M_x$	266,6	482,9	645,8	759,0	820,8	1006,6	801,7	698,7	555,7	361,6	—

Die zweite Zeile der Zusammenstellung wird sofort durch einfache Addition niedergeschrieben, wenn sie von der rechten Seite begonnen wird. Die dritte folgt daraus durch Abziehen von 0,490 und die vierte durch Multiplikation der Werte der dritten Zeile mit  $30,72 \cdot i$ .

Für den 11. Knotenpunkt des Obergurtes kann kein  $M_x$  mehr angegeben werden; es ist klar, daß für den rechten Teil des Trägers die Stellung der Laufkatze maßgebend ist, bei der  $P_2$  auf einem Knotenpunkt steht. In dem Fall gilt nach Fig. 173

$$M_2 = P_2 \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot \left( 1 - \frac{x}{l} \right),$$

$$M_1 = P_1 \cdot l^2 \cdot \frac{x-b}{l} \cdot \left( 1 - \frac{x-b}{l} \right),$$

$$M'_1 = M_1 \cdot \frac{l-x}{l-x+b} = P_1 \cdot l^2 \cdot \left( \frac{x}{l} - \frac{b}{l} \right) \cdot \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$$

also

$$M_x = l^2 \cdot \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \cdot \left[ (P_1 + P_2) \cdot \frac{x}{l} - P_1 \cdot \frac{b}{l} \right]. \quad (63)$$

Wird hierin wieder  $x = \frac{i}{12} \cdot l$  eingesetzt, so gilt jetzt

$$M_x = l^2 \cdot \left( 1 - \frac{i}{12} \right) \cdot \left[ (P_1 + P_2) \cdot \frac{i}{12} - P_1 \cdot \frac{b}{l} \right]$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$M_x = 368,64 \cdot \left( 1 - \frac{i}{12} \right) \cdot [0,833 \cdot i - 0,552] \text{ mt.}$$

Die Zusammenstellung lautet jetzt:

	$i = 1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$9$	$10$	$11$
$0,833 \cdot i$	0,833	1,667	2,500	3,333	4,167	5,000	5,833	6,667	7,500	8,333	9,167
[—]	0,281	1,115	1,948	2,781	3,615	4,448	5,281	6,155	6,948	7,781	8,615
$M_x$	—	342,5	536,6	683,5	777,4	819,9	811,2	751,4	640,3	478,1	264,7

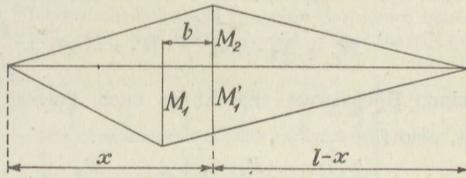


Fig. 173.

Für die Berechnung der linken Trägerhälfte ( $i = 1$  bis 6) gelten also die Werte der ersten Zusammenstellung, für die der rechten Trägerhälfte ( $i = 7-12$ ) die der zweiten. Im allgemeinen führt man die Träger symmetrisch zur Mitte aus und berechnet dann naturgemäß nur die Hälfte der ersten Zusammenstellung.

Für die Querkraft an der Stelle  $x$  gilt, wenn die Last  $P_1$  dort steht,

$$Q_x = P_1 \cdot \frac{l-x}{l} + P_2 \cdot \frac{l-x-b}{l}$$

oder

$$Q_x = (P_1 + P_2) \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) - P_2 \cdot \frac{b}{l}. \quad (64)$$

Das ist der Klammerausdruck der Formel (62). Demnach gibt die dritte Zeile beider Zusammenstellungen schon die Größe der Querkraft in t an.

**Beispiel 86.** Über einen Krangleisträger oder vollwärtigen Kranträger von der Länge  $l$  zwischen den beiden Auflagern wandern die beiden Raddrücke  $P_1$  und  $P_2$  im Abstände  $a$  voneinander. Anzugeben ist das größte Biegemoment des Trägers.

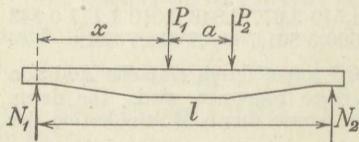


Fig. 174.

Der Auflagerdruck  $N_1$  (Fig. 174) folgt aus der Momentgleichung in bezug auf die Wirkungslinie von  $N_2$ :

$$N_1 \cdot l - P_1 \cdot (l-x) - P_2 \cdot (l-x-a) = 0.$$

Damit ergibt sich das Biegemoment unter der ersten Last zu

$$M_x = N_1 \cdot x = \frac{P_1}{l} \cdot (l \cdot x - x^2) + \frac{P_2}{l} \cdot (l \cdot x - x^2 - a \cdot x).$$

Seinen Höchstwert erreicht es nach Formel (61) an der Stelle, wo  $\frac{dM_x}{dx} = 0$  ist, also für

$$\frac{P_1}{l} \cdot (l - 2x) + \frac{P_2}{l} \cdot (l - 2x - a) = 0.$$

Hieraus erhält man die Stelle des größten Biegemomentes

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die obige Gleichung folgt

$$M_{\max} = \frac{1}{4} \cdot (P_1 + P_2) \cdot l \cdot \left[1 - \left(\frac{a}{l} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}\right)^2\right] - \frac{1}{2} \cdot P \cdot a \left(1 - \frac{a}{l} \cdot \frac{P_2}{P_1 + P_2}\right).$$

Ist  $a$  wesentlich größer als  $\frac{l}{2}$ , so ruft der in der Trägermitte stehende Raddruck  $P_1$  dort das Biegemoment  $M = \frac{1}{4} \cdot P_1 \cdot l$  hervor (Beispiel 77). Durch Gleichsetzen der beiden Biegemomente erhält man den Größtwert des Lastenabstandes, für den die obige Formel gilt, leicht zu

$$a = l \cdot \frac{P_1 + P_2}{P_2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{P_2}{P_1 + P_2}}\right),$$

der für gleiche Lasten  $P$  übergeht in  $a = 0,5857 \cdot l$ .

**Beispiel 87.** Eine mit den beiden Enden auf den Bindern aufliegende Dachpfeife von der Länge  $l$  wird durch fünf in gleichen Abständen angeordnete Sparren mit derselben Kraft  $P$  an jeder Stelle belastet (Fig. 175). Anzugeben ist der Verlauf des Biegemomentes.

Die Anordnung ist symmetrisch zur Mitte, so daß die Auflagerkräfte einander und der halben Gesamtbelastung gleich sind:  $N = \frac{3}{2}P$ . An Stelle des größten Biegemomentes ergibt sich ebenfalls sofort die Mitte der Pfette. Man erhält für diese Stelle

$$\begin{aligned} M &= N \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \frac{l}{5} - P \cdot 2 \cdot \frac{l}{5} \\ &= P \cdot l \cdot \left( \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \right) \end{aligned}$$

oder

$$M = \frac{13}{20} P \cdot l = 0,65 \cdot P \cdot l.$$

Für den Angriffspunkt der ersten Last vom Auflager aus gilt

$$\begin{aligned} M_1 &= N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{5} = \frac{5}{2} \cdot P \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{5} \\ &= 0,25 \cdot P \cdot l \end{aligned}$$

und für den Angriffspunkt der zweiten Last

$$M_2 = N \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{5} - P \cdot \frac{l}{5} = P \cdot l \cdot \left( \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = 0,55 \cdot P \cdot l.$$

Die Fig. 176 veranschaulicht den Verlauf des Biegemomentes.

Wesentlich günstiger, auch für die konstruktive Ausbildung, ist die Anordnung nach Fig. 177: Man läßt die Pfetten abwechselnd um eine Strecke  $c$  beiderseits überkragen und hängt eine kürzere von der Länge  $l_1 = l - 2c$  dazwischen.

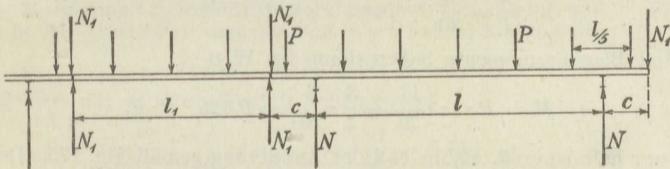


Fig. 177.

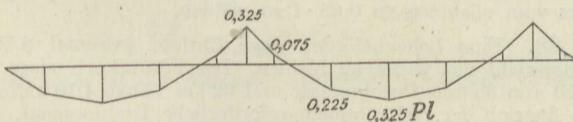


Fig. 178.

Für die kürzere Pfette gilt

$$N_1 = \frac{3}{2} \cdot P,$$

und das Biegemoment in der Mitte beträgt

$$\begin{aligned} M_1 &= N_1 \cdot \frac{l_1}{2} - P \cdot \frac{l}{5} \\ &= \frac{3}{2} P \cdot \left( \frac{l}{2} - c \right) - P \cdot \frac{l}{5} = P \cdot l \cdot \left( \frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right). \end{aligned}$$

Für die längere Pfette ist

$$N = N_1 + \frac{7}{2} \cdot P = 5P.$$

Die Querkraft geht hier, wie eine einfache Addition lehrt, dreimal durch Null, über den Auflagern und in der Mitte.

Für die Auflagerstelle der rechten Seite der Fig. 177 gilt

$$\begin{aligned} M_0 &= +N_1 \cdot c + P \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{5} \\ &= +5 \cdot P \cdot l \cdot \frac{c}{l} + P \cdot \frac{1}{10} \cdot l = +P \cdot l \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right), \end{aligned}$$

und für die Mitte der Pfette

$$\begin{aligned} M &= -N \cdot \frac{l}{2} + N_1 \cdot \left( \frac{l}{2} + c \right) + P \cdot \frac{l}{5} + P \cdot 2 \cdot \frac{l}{5} + P \cdot 3 \cdot \frac{l}{5} \\ &= -P \cdot l \cdot \left( \frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right). \end{aligned}$$

Die Momente in den beiden Trägermitten sind also einander gleich:

$$M = M_1.$$

Der Kragträger wird nun am günstigsten ausgenutzt, wenn seine beiden Biegemomente  $M_0$  und  $M$  der Größe nach übereinstimmen:

$$P \cdot l \cdot \left( \frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right) = P \cdot l \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{l} \right)$$

oder

$$3 \cdot \frac{c}{l} = \frac{11}{20} - \frac{1}{10} = \frac{9}{20}$$

also

$$\frac{c}{l} = \frac{3}{20} \quad \text{bzw.} \quad c = 0,15 \cdot l.$$

Die drei Biegemomente haben dann den Wert

$$M = P \cdot l \cdot \left( \frac{11}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{20} \right) = 0,325 \cdot P \cdot l,$$

sind also nur halb so groß, als im Fall der Anordnung gemäß Fig. 175. Den Verlauf des Biegemomentes in beiden Pfetten gibt Fig. 178 wieder.

Um die Anordnung mit bestem Vorteil auszuführen, ist der Abstand des Giebelbinders vom nächsten zu  $0,85 \cdot l$  zu wählen.

**Beispiel 88.** Eine Schachtförderanlage fördere jedesmal 6 Wagen von je 325 kg Eigengewicht mit je 550 kg Kohlen. Der Förderkorb wiege  $Q = 3850$  kg, das Förderseil von 35 mm Durchmesser und 620 m Länge  $4,10$  kg/m. Anzugeben ist das zum Antrieb der Seiltrommeln erforderliche Drehmoment.

Es ist die Nutzlast  $P = 6 \cdot 0,55 = 3,30$  t, das Gewicht der Förderwagen  $G_1 = 6 \cdot 0,325 = 1,95$  t, das Seilgewicht  $G_2 = 4,10 \cdot 620 = 2,54$  t, der geschätzte Widerstand jedes Fahrkorbes  $W = 0,50$  t.

Dann ist die Seilspannkraft der belasteten Seite

$$S_1 = P + G_1 + Q + G_2 + W = 12,14 \text{ t},$$

und die der leeren Seite

$$S_2 = G_1 + Q - W = 5,30 \text{ t},$$

und zwar bei Beginn der Aufwärtsförderung.

Ist der Durchmesser der Seiltrommeln  $D = 7,0$  m, auf deren eine sich das stark belastete Seiltrum 1 aufwickelt, während das weniger belastete sich von der anderen abwickelt (Fig. 179), so ergibt sich das bei Beginn der Förderung nötige Drehmoment zu

$$M = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (S_1 - S_2) = 3,5 \cdot 6,74 = 23,60 \text{ mt}.$$

Am Ende der Förderung fällt in  $S_1$  das Seilgewicht  $G_2$  weg, dafür kommt es jetzt zu  $S_2$  hinzu, so daß dann gilt

$$\begin{aligned} S'_1 &= 12,14 - 2,54 = 9,60 \text{ t,} \\ S'_2 &= 5,30 + 2,54 = 7,84 \text{ t.} \end{aligned}$$

Das Drehmoment an der Trommel wird dann

$$M' = 3,5 \cdot 1,76 = 6,1 \text{ mt.}$$

Es schwankt also infolge der Wirkung des Seilgewichtes innerhalb sehr weiter Grenzen um 17,44 mt.

Um das Seilgewicht auszugleichen, wird häufig ein Unterseil verwendet, wie es in Fig. 175 gestrichelt ist. Man erhält dann

$$\begin{aligned} S''_1 &= 12,14 \text{ t unverändert,} \\ S''_2 &= 7,84 \text{ t ebenfalls unveränderlich,} \end{aligned}$$

so daß jetzt das Drehmoment an der Trommelachse immer den Wert hat:

$$M'' = 3,5 \cdot (12,14 - 7,84) = 15,05 \text{ mt.}$$

Durch das Unterseil geht man aber des Vorteils verlustig, nötigenfalls gleichzeitig aus zwei verschiedenen Teufen fördern zu können, indem man die auf der Welle verstellbaren Trommeln entsprechend gegeneinander verdreht. In dem Fall kann man den Ausgleich durch kegelige Trommeln bewirken derart, daß die größere Seilspannkraft  $S_1$  an dem kleineren Halbmesser  $r$  angreift und die kleinere Seilkraft  $S_2$  an dem größeren Halbmesser  $R$ .

Die Bedingung, daß die Antriebsmomente zu Anfang und am Ende der Förderung den gleichen Wert haben, lautet dann

$$r \cdot S_1 - R \cdot S_2 = R \cdot S'_1 - r \cdot S'_2.$$

Hieraus folgt mit den berechneten Zahlenwerten

$$\frac{r}{R} = \frac{9,60 + 5,30}{12,14 + 7,84} = 0,746.$$

Wählt man also  $2r = 6,0$  m, so wird

$$2R = \frac{0,60}{0,746} = 8,04 \text{ m.}$$

In Zwischenstellungen ist der Ausgleich allerdings nicht ganz vollständig.

## 11. Das Seileck für beliebig gerichtete Kräfte.

Für beliebig gerichtete Kräfte, deren Wirkungslinien in derselben Ebene liegen, gilt außer der für die Berechnung benutzten Gleichgewichtsbedingung auf S. 39 auch die auf S 57 genannte für die zeichnerische Ermittlung: Sowohl das Krafteck als auch das Seileck müssen geschlossen sein<sup>15)</sup>. Denn die dortigen Darlegungen bleiben unverändert, wenn auch die Kräfte nicht parallel sind.

**Beispiel 89.** Der aus Kupfer bestehende Zuleitungsdraht schnellfahrender Straßen- und Überlandbahnen wird nach Fig. 180 an einem bronzenen Aufhänge-draht befestigt und dieser an einem Stahldrahtseil. Die Spannweite des letzteren betrage  $a = 50$  m, der gleiche Abstand der mit je  $P = 9$  kg belasteten Aufhänge-drähte  $c = 7$  m. Die größte Spannkraft im Stahldrahtseil sei  $S = 120$  kg. Aufzuzeichnen ist die Form des Seiles und sein größter Durchhang.

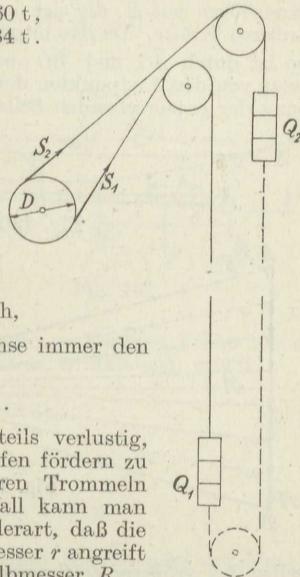


Fig. 179.

Man trägt zuerst in einem beliebigen Kräftemaßstab, z. B.  $2 \text{ kg} = 1 \text{ mm}$  die Lasten  $P$  aneinander an (Fig. 181) und schlägt von den Endpunkten dieser Linie  $AB$  Kreisbögen mit  $S$ , die sich in  $O$  schneiden. Dann ist  $ABO$  das Kräfteck für die äußeren Kräfte. Da das biegsame Seil sich in die Richtung der  $S$  einstellen muß, so ist durch  $AO$  und  $BO$  auch die Richtung der Seilenden gegeben. Zieht man jetzt von den Endpunkten der  $P$  gerade Linien nach  $O$ , so geben diese die Richtung der entsprechenden Seilstücke an, und das Seileck der Fig. 180 kann hier-

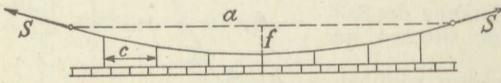


Fig. 180.

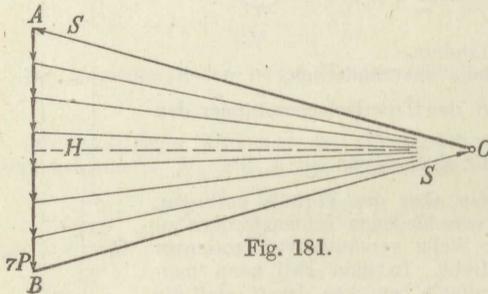


Fig. 181.

mit aufgezeichnet werden. Mit dem Maßstab 1 : 1000 entnimmt man der Fig. 180 den Durchhang in der Mitte  $f \approx 3,6 \text{ m}$ .

Die Fig. 181 zeigt nun, daß die wagerechte Seitenkraft  $H$  der Spannkraft überall im Seil den gleichen Wert hat:

$$H = \sqrt{S^2 - \left(\frac{7}{2}P\right)^2}.$$

Bei praktischen Ausführungen ist die Spannkraft  $S$  ungefähr  $3\frac{1}{2}$  mal so groß, als die Aufgabe angibt, und die Linien schneiden sich dann in so flachen Schnitten, daß

selbst bei größerer Zeichnung die Genauigkeit eine recht geringe ist. Man zieht deshalb die rechnerische Bestimmung des Durchhanges  $f$  unter Anwendung des Momentensatzes vor.

In Fig. 182 ist das halbe Seil mit den darauf wirkenden Kräften noch einmal dargestellt: in bezug auf den Befestigungspunkt erhält man als Gleichgewichtsbedingung, wenn ganz allgemein  $i$  Lasten  $P$  im gleichen Abstand  $c$  auf der Strecke  $l$  stehen:

$$-H \cdot f + \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} + P \cdot \left(\frac{l}{2} - c\right) + P \cdot \left(\frac{l}{2} - 2c\right) + \dots + P \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{i-1}{2} \cdot c\right)$$

oder

$$H \cdot f = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot i - P \cdot c \left(1 + 2 + 3 + \dots + \frac{i-1}{2}\right). \quad (65)$$

Der Klammerausdruck ist eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit dem gleichbleibenden Unterschied 1 der aufeinander folgenden Glieder. Allgemein gilt für eine solche Reihe mit dem Anfangsglied  $x$  und dem gleichen Unterschied  $y$  die Summe bis zum  $n$ ten Glied

$$\Sigma = x + (x+y) + (x+2y) + \dots + [x + (n-1) \cdot y].$$

oder nochmals in umgekehrter Reihenfolge geschrieben:

$$\Sigma = [x + (n-1) \cdot y] + [x + (n-2) \cdot y] + [x + (n-3) \cdot y] + \dots + x.$$

Durch Addition der übereinander stehenden Glieder beider Zeilen folgt

$$2 \cdot \Sigma = 2n \cdot x + (n-1) \cdot y \cdot n,$$

also

$$\Sigma = n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot y. \quad (66)$$

Mithin ist im vorliegenden Fall mit  $x = 0, y = 1, n = \frac{i-1}{2}$

$$\Sigma = \frac{i-1}{2} \cdot \left( \frac{i-1}{2} - 1 \right) \cdot 1 = \frac{(i-1) \cdot (i-3)}{8}$$

Wird ferner noch eingesetzt

$$H = \sqrt{S^2 - \left( \frac{i}{2} \cdot P \right)^2},$$

so ergibt sich schließlich

$$f = \frac{l}{2 \cdot i} \cdot \frac{i - \frac{c}{2l} \cdot (i-1) \cdot (i-3)}{\sqrt{\left( \frac{2S}{iP} \right)^2 - 1}},$$

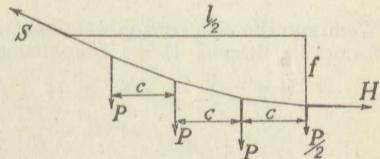


Fig. 182.

worin der kleine Subtrahend 1 unter der Wurzel ohne praktischen Fehler meist außer acht gelassen, d. h.  $H = S$  gesetzt werden kann, so daß man erhält

$$f = \frac{P}{S} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left[ i - \frac{c}{2l} \cdot (i-1) \cdot (i-3) \right]. \quad (67)$$

Damit wird im Fall des Beispiels bei  $S = 400$  kg und  $i = 7$ :

$$f = \frac{9}{400} \cdot \frac{50}{4} \cdot \left[ 7 - \frac{7}{100} \cdot 6 \cdot 4 \right] = 1,49 \text{ m.}$$

Dieselbe Gleichung wird auch zur Berechnung des Durchhanges der Tragseile von Drahtseilbahnen unter einer Reihe von Wagen benutzt. Sie gilt auch für ansteigende oder fallende Strecken nach Fig. 183, wenn  $S$  die parallel zur Schrägen  $l$  gerichtete Seitenkraft der Tragseilspannung bedeutet.

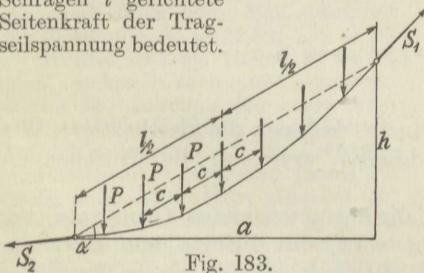


Fig. 183.

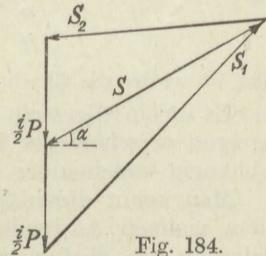


Fig. 184.

Die größte im Seil auftretende Spannkraft  $S_1$  berechnet sich dann nach Fig. 184 mit Hilfe der Formel (44) aus

$$S_1^2 = S^2 + \left( \frac{i}{2} \cdot P \right)^2 - 2 \cdot S \cdot \left( \frac{i}{2} \cdot P \right) \cdot \cos(90^\circ + \alpha)$$

mit  $\sin \alpha = \frac{h}{l}$  zu

$$S_1 = S \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)^2 + \frac{2h}{l} \cdot \left( \frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)}. \quad (68a)$$

Entsprechend ergibt sich die kleinste Seilkraft

$$S_2 = S \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)^2 - \frac{2h}{l} \cdot \left( \frac{i}{2} \cdot \frac{P}{S} \right)}. \quad (68b)$$

Der linke Pfeil von  $S$  in Fig. 184 gehört zum unteren Dreieck mit  $S_1$  als größter Seite und der rechte Pfeil zum oberen Dreieck mit  $S_2$  als kleiner Seite.

Ein anderer Weg, zu der Formel (67) zu gelangen, ist der folgende: Nach der Schlußbemerkung zu Fig. 54 in Beispiel 41 ist der Durchhang in der Mitte, wenn nur die mittlere Last  $P$  vorhanden ist,

$$f_1 = \frac{P}{H} \cdot \frac{l}{4}.$$

Wenn nur die eine benachbarte Last  $P$  vorhanden ist, ergibt sich nach der Schlußformel in Beispiel 41 als Durchhang an der Laststelle

$$f'_2 = \frac{P}{H} \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} - c\right) \cdot \left(\frac{l}{2} + c\right)}{l}$$

und der davon herrührende Durchhang in der Mitte ist nach dem Proportionsatz

$$f_2 = f'_2 \cdot \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}l + c} = \frac{P}{H} \cdot \frac{\frac{l}{2} - c}{2}.$$

Der von der dritten Last  $P$  in der Mitte hervorgebrachte Durchhang ist entsprechend

$$f_3 = \frac{P}{H} \cdot \frac{\frac{l}{2} - 2c}{2}.$$

Da nun die Lasten gleichzeitig vorhanden sind und auf beiden Seiten der Mitte stehen, so ist der Gesamtdurchhang

$$f = f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots$$

oder

$$f = \frac{P}{H} \cdot \left[ \frac{l}{4} + \left( \frac{1}{2} - c \right) + \left( \frac{l}{2} - 2c \right) + \dots \right].$$

Das ist wieder die Gleichung (65).

Es ist ein allgemein gültiges Prinzip, daß sich die gleichartigen Wirkungen verschiedener Ursachen addieren, wenn nur die Ursachen unabhängig voneinander sind.

Man nennt diesen aus der Erfahrung gewonnenen Grundsatz, von dem vielfach Anwendung gemacht wird, das Prinzip von der Summierung der Wirkungen, dessen Richtigkeit hier an einem Sonderfall nachgewiesen ist.

**Beispiel 90.** Ein Gewölbe von  $l' = 15,2$  m Spannweite entsprechend der Gesamtlänge  $l = 15,82$  m zwischen den Kämpferpunkten wird in 10 Teile von gleicher, auf der Wagerechten gemessenen Länge geteilt und erfährt etwa in der Mitte jedes Teiles die ruhende Gewichtsbelastung (Fig. 185)

$$\begin{aligned} P_1 = P_I &= 2,5 \text{ t}, & P_2 = P_{II} &= 4,4 \text{ t}, \\ P_3 = P_{III} &= 5,7 \text{ t}, & P_4 = P_{IV} &= 7,7 \text{ t}, \\ & & P_5 = P_V &= 10,4 \text{ t}. \end{aligned}$$

Anzugeben sind die Widerlagerkräfte  $N_A$  und  $N_B$  nach Größe und Richtung, sowie die günstigste Form des Gewölbes für eine gegebene Pfeilhöhe  $f = 2,7$  m.

Die Aufgabe ist ausschließlich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen nur dann lösbar, wenn das Gewölbe Kämpfer- und Scheitelgelenke besitzt, die zum Ausgleich der unvermeidlichen Unebenheiten der Hausteine Bleitafeln von 3 bis 4 mm Stärke enthalten.

Man ermittelt die Richtungen der von jeder Last der linken Gewölbeseite erzeugten Kämpferdrücke  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$  am linken Auflager nach den Angaben in Beispiel 28, indem man die gerade Verbindungslinie  $\overline{BC}$  zieht und von den Schnittpunkten dieser Linie mit den verschiedenen  $P$  der linken Seite die Geraden nach dem Kämpferpunkt  $A$  (Fig. 184). Werden die  $P$  von den Schnittpunkten aus etwa im Kräftemaßstab  $1 t = 1,5 \text{ mm}$  aufgetragen und von ihren

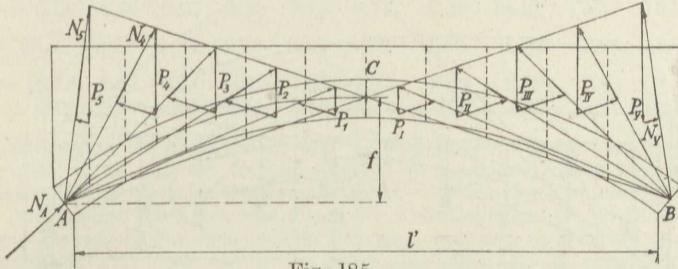


Fig. 185.

Endpunkten Parallelen zu  $\overline{BC}$  gezogen, so sind damit die Kräfte Dreiecke erhalten, die die Größe der Auflagerkräfte bestimmen.

Dieselbe Aufzeichnung wird für die rechte Seite des Gewölbes durchgeführt, und die Übereinstimmung der betreffenden Dreiecke bei symmetrischer Belastung bildet die Probe für die Richtigkeit der Zeichnung.

Man trägt jetzt die sämtlichen 10  $N$  für eine Seite hintereinander an (Fig. 186), und nach dem Prinzip von der Summierung der Wirkungen ist die Schlusslinie die Gesamtauflagerkraft  $N_A$ , die durch das linke Kämpfergelenk in der erhaltenen Richtung und Größe geht. Man entnimmt der Zeichnung  $N_A = 42,3 \text{ t}$ .

Werden nun die Lasten  $P_5$  bis  $P_1$  an  $N_A$  senkrecht nach unten angesetzt, so gibt die Schlusslinie den wagerechten Scheiteldruck  $H = 32,7 \text{ t}$  an und die vom Anfangspunkt der Kraft  $N_A$  nach den verschiedenen  $P$  gezogenen Linien die Größe und Richtung der zwischen den entsprechenden Lasten der Fig. 185 wirkenden Gewölbedrucke. Das so in Fig. 181 von  $H$  aus gezeichnete Seileck ist die Gewölbestützzlinie, und das Gewölbe ist bei ruhenden Lasten so zu formen, daß seine Mittellinie sich dieser Stützzlinie nach Möglichkeit anschließt.

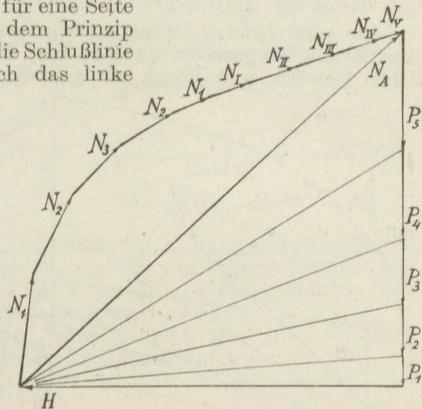


Fig. 186.

Werden die wagerechten Abstände der Lasten  $P_1$  bis  $P_5$  vom Auflager  $A$  mit  $a_1, a_2 \dots$  bezeichnet, so läßt sich bei bekanntem Pfeil  $f$  der wagerechte Schub  $H$  regelmäßig finden durch die Momentengleichung in bezug auf  $A$ :

$$P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + \dots + P_5 \cdot a_5 - H \cdot f = 0,$$

also 
$$H = \frac{1}{f} \cdot \Sigma M,$$

im vorliegenden Fall:

$$H = \frac{1}{2,7} \cdot [2,5 \cdot 7,09 + 4,4 \cdot 5,49 + 5,7 \cdot 3,90 + 7,7 \cdot 2,31 + 10,4 \cdot 0,62]$$

$$H = 32,7 \text{ t}.$$

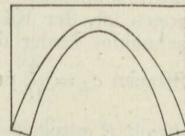


Fig. 187.

Unter gleichen Lasten  $P$  sind doch die verschiedensten Gewölbeformen möglich, je nach der Wahl des Pfeiles  $f$ . Bei kleinem  $f$  ergibt sich ein größerer wogerechter Schub  $H$  und eine entsprechend große Auflagerkraft  $N_A$ , denn nach

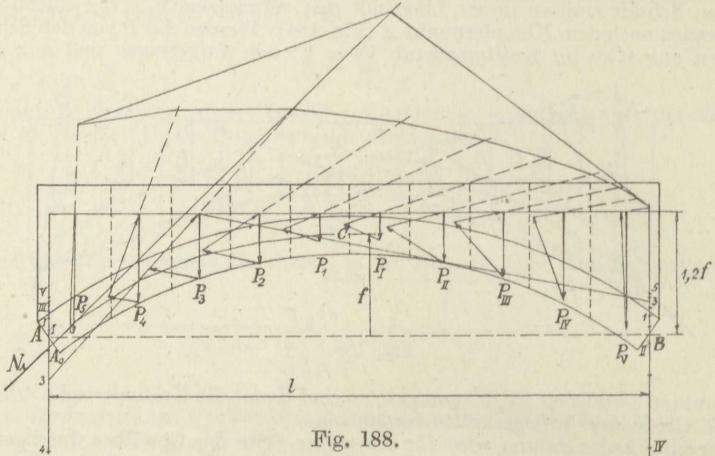
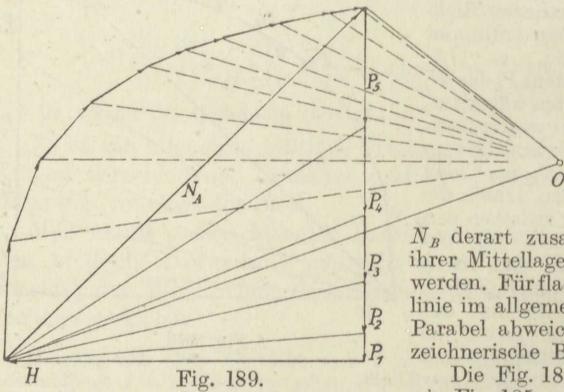


Fig. 186 ist  $N_A = H^2 + (\sum P)^2$ ; bei großem Pfeil  $f$  ist der wogerechte Schub  $H$  und damit die Auflagerkraft  $N$  klein (Fig. 187).

Die vorstehenden Darlegungen gelten nur für die verhältnismäßig selten zur Ausführung kommenden Gewölbe bzw. Bögen mit drei Gelenken. Die gebräuchlichen Gewölbe und Bögen mit geschlossenen Scheitel- und Kämpferfugen sind



in den Kämpfern eingespannt durch ein bei  $A$  wirkendes linksdrehendes Moment  $M_A$  und ein bei  $B$  wirkendes rechtsdrehendes Moment  $M_B$ . Diese Momente setzen sich nun nach S. 63 mit den Einzelkräften  $N_A$  bzw.

$N_B$  derart zusammen, daß letztere aus ihrer Mittellage nach unten verschoben werden. Für flache Gewölbe, deren Mittellinie im allgemeinen nicht sehr von einer Parabel abweicht, gilt dann die folgende zeichnerische Behandlung<sup>19)</sup>.

Die Fig. 188 stellt dasselbe Gewölbe wie Fig. 185 mit vermauertem Scheitel und Kämpfer dar;  $A, B, C$  sind jetzt die Mittelpunkte der Kämpfer- bzw. Scheitelfugen. Dann liegen die Schnittpunkte der Kämpferdrücke mit der Wirkungslinie der erzeugenden Last  $P$  auf einer Parallelen zu  $\overline{AB}$ , die im Abstände  $1,2 \cdot f$  gezogen ist, der Kämpferdrucklinie. Der von der Last  $P$  erzeugte Kämpferdruck schneidet ferner die durch  $A$  gezogene Lotrechte in einem Punkt, der um die Strecke  $c_A = \frac{4}{15} f \cdot \left(2 + \frac{l}{a_A}\right)$  von der Kämpferdrucklinie entfernt ist, und die durch  $B$  gezogene Lotrechte in einem um  $c_B = \frac{4}{15} f \cdot \left(2 + \frac{l}{a_B}\right)$  von der Kämpfer-

<sup>19)</sup> Landsberg, Z. d. V. d. I. 1901.

drucklinie entfernten Punkt. Hierin bezeichnet  $a_A$  den Abstand der Last vom Kämpferpunkt  $A$  und  $a_B$  ihren entsprechenden Abstand vom Kämpferpunkt  $B$ .

Die Werte der  $c$  werden vorteilhaft für jede Last berechnet, weil die natürlich auch mögliche zeichnerische Ermittlung die Zeichnung leicht unklar werden läßt.

Nr.	5	4	3	2	1	I	II	III	IV	V
$P = 10,4$	7,7	5,7	4,4	2,5	2,5	4,4	5,7	7,7	10,4	t
$a_A = 0,68$	2,39	3,97	5,55	7,13	8,71	10,39	11,97	13,55	15,26	m
$\frac{l}{a_A} = 23,27$	6,62	3,97	2,85	2,22	1,82	1,52	1,32	1,17	1,04	
$c_A = 18,18$	6,21	4,30	3,49	3,04	2,75	2,54	2,39	2,28	2,19	m
$c_B = 2,19$	2,28	2,39	2,54	2,75	3,04	3,49	4,30	6,21	18,18	m

Die Endpunkte der Strecken  $c_A$  und  $c_B$  sind auf den Lotrechten durch die Kämpfermittelpunkte mit den zugehörigen Zahlen bezeichnet. Jetzt werden die  $P$  von der Kämpferdrucklinie im Kräftemaßstab  $1t = 1,5$  mm nach unten abgetragen, von den Endpunkten der  $c_A$  Gerade durch die Anfangspunkte gezogen und durch die Endpunkte der  $P$  Parallele zu den Schrägen von den  $c_B$ -Punkten nach den Anfangspunkten der  $P$ , wie das für  $P_3$  genau angegeben ist. Es entstehen so die Kräftedreiecke für die entsprechenden Anteile von  $N_A$  und  $N_B$ . Die Zeichnung ist richtig durchgeführt, wenn bei symmetrischer Belastung z. B. Dreieck 3 kongruent Dreieck III ist.

Nun werden in Fig. 189 sämtliche Anteile von  $N_A$  nach Größe und Richtung aneinander angetragen, die Schlußlinie dieses Kräftecks ist die Gesamtauflagerkraft  $N_A$ . Ihr infolge des Einspannungsmomentes aus der Kämpfermitte verschobener Angriffspunkt wird ermittelt, indem man von einem beliebig gewählten Pol  $O$  die Polstrahlen zieht und in Fig. 188 das parallele Seileck zwischen den  $N$  einträgt. Durch den Schnittpunkt der letzten Seillinien geht  $N_A$  parallel zu dem  $N_A$  der Fig. 189. Damit ist ihr Angriffspunkt  $A_0$  erhalten.

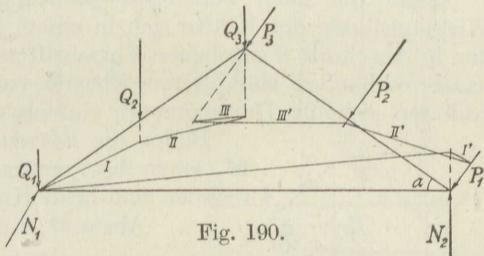


Fig. 190.

Werden jetzt noch die  $P_5 \dots P_1$  vom Endpunkt von  $N_A$  nach unten in Fig. 189 eingezeichnet und vom Anfangspunkt von  $N_A$  aus die zugehörigen Strahlen gezogen, darauf von  $A_0$  ausgehend zwischen die  $P$  der Fig. 188 die parallelen Seillinien, so ist damit die Stützlinie des eingespannten Gewölbes bestimmt. Die Richtigkeit der Zeichnung wird dadurch gewährleistet, daß die von  $A_0$  aus gezeichnete Stützlinie durch den Punkt  $C$  geht.

Man entnimmt der Zeichnung die Zahlenwerte  $N_A = 40,7$  t und  $H = 31,7$  t. Beide Werte sind um rund 3 v. H. kleiner als bei dem Gewölbe mit drei Gelenken.

**Beispiel 91.** Auf einen Dachbin- der von der Spannweite  $a = 11,80$  m und der Dachneigung  $\alpha = 35^\circ$  (Fig. 190) wirken auf der Seite des festen Auf- lagers die Schneelasten  $Q_1 = 560$  kg,  $Q_2 = 1100$  kg,  $Q_3 = 550$  kg und auf der Seite des mit Rücksicht auf die Wärme- ausdehnung verschiebbaren Auflagers die Windkräfte  $P_1 = 650$  kg,  $P_2 = 1290$  kg,  $P_3 = 640$  kg. Anzugeben sind die Auflagerkräfte  $N_1$  und  $N_2$  nach Größe und Richtung.

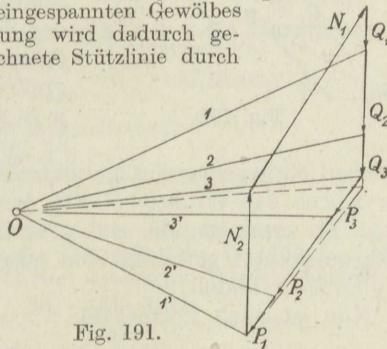


Fig. 191.

Von der Auflagerkraft  $N_2$  ist die Richtung senkrecht zum wagerecht verschiebbaren Auflager bekannt, von der Auflagerkraft  $N_1$  aber nur die Angriffsstelle am festen Auflager. Zeichnet man also das Kräfteck der Fig. 191 im Maßstab  $1 \text{ mm} = 100 \text{ kg}$  (auf dem Zeichenbrett würde man etwa  $1 \text{ mm} = 25 \text{ kg}$  wählen), so kann vorläufig nur die Wirkungslinie von  $N_2$  eingetragen werden. Jetzt wird der Pol  $O$  an beliebiger Stelle angenommen, von ihm aus werden die Polstrahlen nach den Endpunkten der einzelnen Kräfte gezogen, und nun wird in die Fig. 190 parallel zu diesen Polstrahlen das Seileck eingetragen. Man fängt am Angriffspunkt von  $N_1$  an, dann fällt nämlich die Parallele zu  $00$ , die man sonst nicht unterbringen könnte, zu dem Schnittpunkt zusammen; hieran schließt sich die Parallele zu  $01$  und so fort. Zu der Schlußlinie des Seilecks wird die gestrichelte Parallele in das Kräfteck eingetragen. Ihr Schnittpunkt mit der Wirkungslinie von  $N_2$  gibt die Größe dieser Kraft an und bestimmt zugleich die Richtung und Größe von  $N_1$ , da das Kräfteck ja des Gleichgewichts halber geschlossen sein muß. Man erhält so  $N_1 = 2900 \text{ kg}$  und  $N_2 = 1880 \text{ kg}$ .

Sind Wind- und Schneelasten vertauscht, so kann man die gleichen Figuren benutzen und vertauscht nur die Auflager und ihre Kräfte. Jetzt ist  $N_1$  lotrecht gerichtet und seine Wirkungslinie fällt in Fig. 191 mit den  $Q$  zusammen, während die schräge Richtung von  $N_2$  vorläufig unbekannt ist. Man erhält somit aus den gestrichelten Linien der Fig. 191  $N'_1 = 3000 \text{ kg}$  und  $N'_2 = 2350 \text{ kg}$ .

## 12. Beliebige im Raum wirkende Kräfte.

Wenn die nach beliebigen Richtungen im Raum verlaufenden Wirkungslinien der Kräfte sich in einem Punkt schneiden, so ist nach den in Abschnitt 8 gegebenen Vorschriften zu verfahren. Wenn Kräftepaare vorhanden sind, deren Ebenen parallel zu einander liegen, so addieren sich die Drehmomente einfach algebraisch (Abschnitt 10).

Bilden die Ebenen zweier Kräftepaare  $M_1$  und  $M_2$  einen bestimmten Winkel  $\gamma$  miteinander, so rechnet man beide Kräftepaare um auf den gleichen Abstand  $a$  der Kräfte:

$$M_1 = P \cdot a, \quad M_2 = Q \cdot a.$$

Sie werden nun so in ihrer Ebene verschoben, daß die gleichen Abstände  $a$  in der Schnittlinie der Ebenen aufeinanderfallen (Fig. 192): in dem einen Endpunkt  $A$  greifen dann die beiden Kräfte  $P_1$  und  $Q_1$  je in einer der gegebenen Ebenen I und II an und in dem anderen Endpunkt  $B$  die

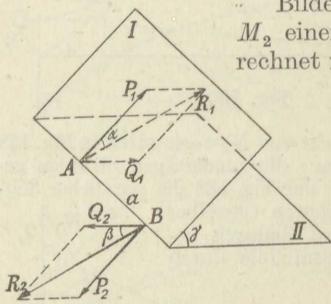


Fig. 192.

gleichen entgegengesetzt gerichteten Kräfte  $P_2$  und  $Q_2$ . Sie werden in der Ebene des Winkels  $P_1A Q_1$  bzw.  $P_2B Q_2$  zu den Mittelkräften  $R_1$  bzw.  $R_2$  vereinigt, die selbstverständlich wieder gleich, parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, also ein Kräftepaar vom Drehmoment  $M_R = R \cdot a$  bilden.

Nun ist nach Formel 44

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 \cdot P \cdot Q \cdot \cos \gamma,$$

also  $M_R = R \cdot a = \sqrt{(P \cdot a)^2 + (Q \cdot a)^2 + 2 \cdot (P \cdot a) \cdot (Q \cdot a) \cdot \cos \gamma}$

oder  $M_R = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot \cos \gamma}. \quad (69)$

In sich schneidenden Ebenen wirkende Drehmomente werden so zu einem Gesamtdrehmoment zusammengesetzt wie Kräfte, die sich in einem Punkt schneiden<sup>18)</sup>. Umgekehrt findet die Zerlegung eines Kräftepaares in zwei andere, deren Ebenen einen Winkel miteinander bilden, in entsprechender Weise statt.

Die Ebene des Gesamtkräftepaares bildet mit der gegebenen Ebene I einen Winkel  $\alpha$ , der sich nach dem Sinussatz berechnet:

$$\sin \alpha = \frac{Q_1}{P_1} \cdot \sin \gamma = \frac{Q_1 \cdot a}{P_1 \cdot a} \cdot \sin \gamma,$$

oder 
$$\sin \alpha = \frac{M_2}{M_R} \cdot \sin \gamma. \quad (70a)$$

Entsprechend wird der Winkel  $\beta$  mit der Ebene II erhalten aus

$$\sin \beta = \frac{M_1}{M_R} \cdot \sin \gamma. \quad (70b)$$

**Beispiel 92.** Auf einer Vorgelegewelle sitzen eine Seilscheibe I vom Gewicht  $G_1 = 300$  kg und eine Riemenscheibe II vom Gewicht  $G_2 = 400$  kg; ihre Abstände von den Lagern bzw. voneinander sind  $a = 0,42$  m,  $b = 0,40$  m,  $c = 0,58$  m.

Der Seilzug von der Größe  $P_1 = 1200$  kg verläuft wagerecht nach der in Fig. 193 angegebenen Richtung, der Riemenzug von der Größe  $P_2 = 550$  kg hat gegen die Lotrechte die eingetragene Neigung  $\gamma$ , und zwar ist

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2,75}{3,75}.$$

Anzugeben sind die Gesamtbiegemomente der Welle an den Stellen I und II.

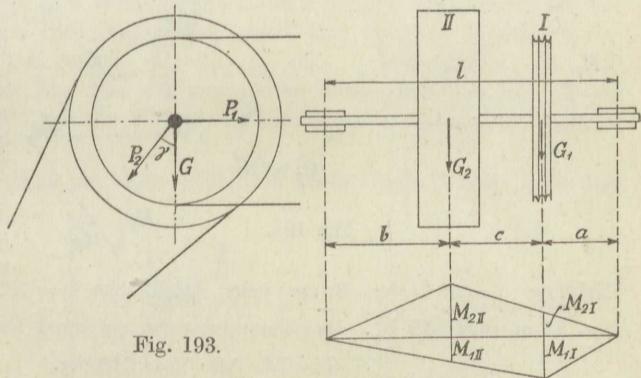


Fig. 193.

Nach Formel (36) erzeugt das Gewicht  $G_1$  an der Stelle I das Biegemoment

$$M_{1I} = G_1 \cdot \frac{a \cdot (b + c)}{l} = \frac{300 \cdot 0,42 \cdot 0,98}{1,40} = 88,25 \text{ mkg}$$

und das Gewicht  $G_2$  an der Stelle II das Biegemoment

$$M_{2II} = G_2 \cdot \frac{b \cdot (a + c)}{l} = \frac{400 \cdot 0,40 \cdot 1,00}{1,40} = 114,3 \text{ mkg}.$$

Den Verlauf der von beiden Gewichten herrührenden Biegemomente, die in derselben lotrechten Ebene wirken, stellt der untere Teil der Fig. 193 dar. Man entnimmt ihr das von  $G_1$  an der Stelle II hervorgebrachte Biegemoment zu

$$M_{1II} = M_{1I} \cdot \frac{b}{b + c} = G_1 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{300 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 36,0 \text{ mkg}$$

und das von  $G_2$  an der Stelle I erzeugte zu

$$M_{2I} = M_{2II} \cdot \frac{a}{a + c} = G_2 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{400 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 48,0 \text{ mkg}.$$

Entsprechend ist das von dem Seilzug  $P_1$  an der Stelle  $I$  in wagerechter Ebene hervorgerufene Biegemoment

$$M'_{1I} = P_1 \cdot \frac{a \cdot (b + c)}{l} = \frac{1200 \cdot 0,42 \cdot 0,98}{1,40} = 353,0 \text{ mkg}$$

und das an der Stelle  $II$

$$M'_{1II} = P_1 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{1200 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 144,0 \text{ mkg.}$$

Ebenso erhält man die beiden vom Riemenzug  $P_2$  in der schrägen Ebene bewirkten Biegemomente

$$M''_{2II} = P_2 \cdot \frac{b \cdot (a + c)}{l} = \frac{550 \cdot 0,40 \cdot 1,00}{1,40} = 157,2 \text{ mkg,}$$

$$M''_{2I} = P_2 \cdot \frac{a \cdot b}{l} = \frac{550 \cdot 0,42 \cdot 0,40}{1,40} = 66,0 \text{ mkg.}$$

Die weitere Bearbeitung erfolgt am besten zeichnerisch. Man trägt die Biegemomente etwa im Momentenmaßstab  $5 \text{ mkg} = 1 \text{ mm}$  für die Stellen  $I$  und  $II$  nach Größe und Richtung aneinander ab (Fig. 194) und entnimmt dann der Zeichnung die Gesamtmomente

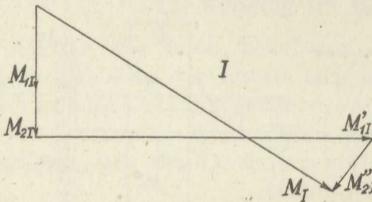
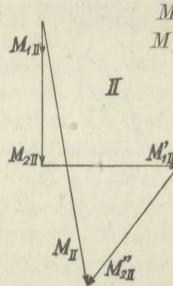


Fig. 194.



$$M_I = 46 \text{ mm} = 230 \text{ mkg,}$$

$$M_{II} = 35 \text{ mm} = 175 \text{ mkg.}$$

Bei kreisrunden Wellen u. dgl. ist es nicht nötig, die Lage der Ebene des Gesamtmomentes zu bestimmen.

**Beispiel 93.** Das doppelte Pappdach des in Fig. 190 dargestellten Daches von der

Neigung  $\alpha = 35^\circ$ , der Breite jeder Dachfläche  $b = 7,2 \text{ m}$  und der Länge  $l = 5,0 \text{ m}$  wiegt  $55 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ . Das Gesamtgewicht auf einer Dachhälfte beträgt also  $G = 7,2 \cdot 5,0 \cdot 55 = 2180 \text{ kg}$ .

Außerdem wirken darauf der Winddruck  $P = 2580 \text{ kg}$  oder die Schneelast  $Q = 2210 \text{ kg}$  (Beispiel 90). Anzugeben ist die Beanspruchung der Pfetten, die jede Dachhälfte in drei gleiche Teile zerlegen.

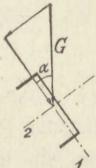


Fig. 195.

Bezeichnet  $P$  die auf eine Pfette entfallende Belastung in kg, so ist das größte darin auftretende Biegemoment bei richtiger Kranganordnung (Beispiel 87)  $M = 0,325 \cdot P \cdot l \text{ mkg}$ .

Sind die Pfetten senkrecht zur Dachneigung stehende U-Eisen (Fig. 195), so zerlegt sich die lotrechte Gewichtskraft  $G$  in die beiden Seitenkräfte  $G \cdot \sin \alpha$  parallel zur Dachneigung und  $G \cdot \cos \alpha$  senkrecht dazu, ebenso die Schneelast  $Q$ , während die Windkraft  $P$  schon senkrecht zur Dachneigung steht. Man erhält so

für Eigengewicht und Winddruck:

$$M'_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot (G \cdot \cos \alpha + P) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2180 \cdot 0,8192 + 2580) = 2364 \text{ mkg,}$$

$$M'_2 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot \sin \alpha = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2180 \cdot 0,5736 = 677 \text{ mkg.}$$

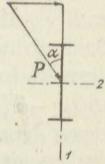
für Eigengewicht und Schneelast:

$$M''_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos \alpha \cdot (G + Q) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,8192 \cdot (2180 + 2210) = 1948 \text{ mkg.}$$

$$M''_2 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin \alpha \cdot (G + Q) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5736 \cdot (2180 + 2210) = 1364 \text{ mkg}$$

als Biegemomente in den durch die Achsenrichtungen 1 und 2 der Fig. 195 gelegten Ebenen.

Sind die Pfetten lotrecht stehende I-Eisen (Fig. 196), so fallen  $G$  und  $Q$  schon in die lotrechte Achse 1 und  $P$  ist nach den beiden Achsenrichtungen zu zerlegen in  $P \cdot \cos \alpha$  in Richtung der Achse 1 und  $P \cdot \sin \alpha$  in Richtung der Achse 2. Man erhält so



für Eigengewicht und Winddruck:

$$M'_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot (G + P \cdot \cos \alpha) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2180 + 2580 \cdot 0,8192) = 2325 \text{ mkg,}$$

$$M'_2 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot P \cdot \sin \alpha = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2580 \cdot 0,5736 = 801 \text{ mkg,}$$

für Eigengewicht und Schneelast:

$$M''_1 = 0,325 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot (G + Q) = 0,325 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2180 + 2210) = 2378 \text{ mkg.}$$

$$M''_2 = 0.$$

Fig. 196.

Es sei eine Anzahl von Kräften  $P_1, P_2, P_3 \dots$  der Größe nach gegeben, ferner je ein Punkt der Wirkungslinien dieser Kräfte, der Angriffspunkt oder auch ein beliebiger anderer, deren Abstände in bezug auf drei in demselben Punkt  $O$  zueinander senkrecht stehende Bezugslinien  $X, Y, Z$  durch die Längen  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$  gemessen seien. Um die Lage der Wirkungslinien der Kräfte vollständig zu bestimmen, sind noch ihre Neigungen gegen die positive Richtung der drei Bezugslinien mit  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots$  festzulegen. Für die Kraft  $P_1$  gibt z. B. Fig. 197 alle genannten Bestimmungen an. Es ist jetzt zu untersuchen, ob die Kräfte im Gleichgewicht sind bzw. wie sie zu vereinigen sind.

Nach dem Vorgang der Fig. 118 wird zuerst jede Kraft nach den Richtungen der drei Bezugssachsen zerlegt in

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1 \cdot \cos \alpha_1, \\ Y_1 &= P_1 \cdot \cos \beta_1, \\ Z_1 &= P_1 \cdot \cos \gamma_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= P_2 \cdot \cos \alpha_2, \\ Y_2 &= P_2 \cdot \cos \beta_2, \\ Z_2 &= P_2 \cdot \cos \gamma_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

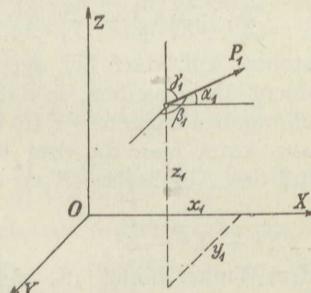


Fig. 197.

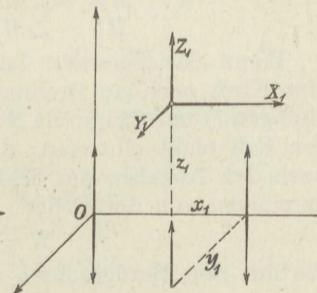


Fig. 198.

Die mit verschiedenen Ziffern gekennzeichneten Kräfte gehen im allgemeinen auch durch verschiedene Punkte des Raumes, dagegen die mit gleichen Ziffern bezeichneten durch denselben Punkt (Fig. 198).

Jetzt wird  $Z_1$  in ihrer Wirkungslinie soweit verschoben, daß der Angriffspunkt in der  $XY$ -Grundebene liegt, was nach den Angaben in Abschnitt 3 ohne weiteres zugänglich ist, solange der neue Angriffspunkt mit dem alten unveränderlich verbunden ist. Darauf wird  $Z_1$  parallel zu sich selbst und zur  $YZ$ -Ebene um die Strecke  $y_1$  bis in die  $XZ$ -Ebene verschoben. Das ist nach Abschnitt 10 zulässig, wenn ein Drehmoment von der Größe  $-M'_x = -Z_1 \cdot y_1$  hinzugefügt wird (Fig. 198). In der

$XZ$ -Ebene wird  $Z_1$  noch einmal parallel zu sich selbst bis in den Schnittpunkt  $O$  der Bezugsachsen um die Strecke  $x_1$  verschoben, was die Zuführung eines Drehmomentes  $+M'_Y = +Z_1 \cdot x_1$  erfordert.

Das gleiche geschieht mit den beiden anderen Seitenkräften  $X_1$  und  $Y_1$  der Kraft  $P_1$ ; die Verschiebung von  $X_1$  bringt wieder zwei Drehmomente  $-M'_Y = -X_1 \cdot z_1$  und  $+M'_Z = +X_1 \cdot y_1$  ein und die Verschiebung von  $Y_1$  entsprechend die Drehmomente  $+M'_X = +Y_1 \cdot z_1$  und  $-M'_Z = -Y_1 \cdot x_1$ , wie die hier nicht gegebene Aufzeichnung dieser Verschiebungen leicht ergibt. Die Vorzeichen der Drehmomente sind positiv, wenn die Drehung rechtsherum verläuft bei Betrachtung des Kräftepaares vom Schnittpunkt  $O$  der Bezugsachsen aus an der dem Buchstaben  $M$  beigesetzten Achse entlang in der positiven Richtung der Seitenkräfte, und negativ bei umgekehrter Drehrichtung.

Genau so wird mit den Seitenkräften der übrigen  $P_2, P_3 \dots$  verfahren. Die in Richtung derselben Achse durch den Anfangspunkt  $O$  verlaufenden Seitenkräfte addieren sich nach Abschnitt 5 zu einer Mittelkraft

$$\begin{aligned} X &= \sum X_i = \sum (P_i \cdot \cos \alpha_i), \\ Y &= \sum Y_i = \sum (P_i \cdot \cos \beta_i), \\ Z &= \sum Z_i = \sum (P_i \cdot \cos \gamma_i), \end{aligned} \quad (71)$$

worin der Anzeiger  $i$  der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 ... erhält. Entsprechend addieren sich die senkrecht zu derselben Achse wirkenden Drehmomente, zu denen jede Kraft  $P_i$  zwei Anteile liefert, gemäß Abschnitt 10:

$$\begin{aligned} M_X &= \sum M_X^i = \sum (+Y_i \cdot z_i - Z_i \cdot y_i), \\ M_Y &= \sum M_Y^i = \sum (+Z_i \cdot x_i - X_i \cdot z_i), \\ M_Z &= \sum M_Z^i = \sum (+X_i \cdot y_i - Y_i \cdot x_i). \end{aligned} \quad (72)$$

Wenn Gleichgewicht bestehen soll, darf bei der Addition weder eine Kraft noch ein Drehmoment übrig bleiben, so daß alle sechs Gleichungen 71 und 72 einzeln Null ergeben müssen<sup>19a)</sup>. Im allgemeinen wird der Fall nicht eintreten; dann kann man die drei Kräfte  $X, Y, Z$  nach den Angaben am Schluß des Abschnittes 8 zu einer Mittelkraft vereinigen von der Größe

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (73)$$

die mit den Bezugsachsen drei Winkel bildet, die sich berechnen aus

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}. \quad (74)$$

Ebenso ergeben die drei Drehmomente, deren jedes eine Drehung um die entsprechende Bezugsachse herbeizuführen sucht, gemäß den Darlegungen zu Anfang dieses Abschnittes ein Gesamtdrehmoment

$$M = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}, \quad (75)$$

dessen durch den Bezugspunkt  $O$  gehende Drehachse mit den Bezugsachsen drei Winkel bildet, die sich berechnen aus

$$\cos \varphi = \frac{M_X}{M}, \quad \cos \chi = \frac{M_Y}{M}, \quad \cos \psi = \frac{M_Z}{M}. \quad (76)$$

<sup>19a)</sup> d'Alembert, Recherches sur la précession des équinoxes. 1749.

Die Richtung der Drehachse ist das wesentliche Bestimmungsstück für die Lage des Drehmomentes, weil ja seine Ebene nicht festliegt, da dasselbe Drehmoment in allen zueinander parallelen Ebenen dieselbe Wirkung hat.

Der Anfangspunkt  $O$  der Bezugsachsen war nun ganz unwillkürlich gewählt. Diese Willkürlichkeit kann durch Anwendung der folgenden Hilfssätze beseitigt werden.

In Fig. 199 sind zwei gerade Strecken  $\overline{OA} = l_1$  und  $\overline{OB} = l_2$  dargestellt, deren Endpunkte  $A$  bzw.  $B$  von den durch den Nullpunkt  $O$  gelegten, zueinander rechtwinkligen Bezugsachsen die Abstände  $x_1, y_1, z_1$  bzw.  $x_2, y_2, z_2$  haben und die mit den Bezugsachsen die Winkel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  bzw.  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  einschließen. Der Abstand  $\overline{AB} = d$  wird auf die  $xy$ -Ebene als  $A'B'$  projiziert, und man entnimmt der Figur nach dem Satz des Pythagoras

$$d^2 = \overline{A'B'}^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

ferner ebenso

$$\begin{aligned} \overline{A'B'}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \quad (77)$$

In dem Dreieck  $OAB$  läßt sich aber nach dem Kosinussatz angeben, wenn  $\delta$  der Winkel ist, den die beiden Strecken  $l_1$  und  $l_2$  einschließen:

$$d^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \delta.$$

Hier ist nach Fig. 199 bzw. Formel (49)

$$l_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

und

$$l_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für  $d^2$  erhält man hiermit nach Auflösung der Klammern

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1 \cdot y_2 + y_2^2 + z_1^2 - 2z_1 \cdot z_2 + z_2^2 \\ = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \delta, \end{aligned}$$

woraus sich alle Quadrate wegheben. Nun ist nach Fig. 195

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1, & x_2 &= l_2 \cdot \cos \alpha_2, \\ y_1 &= l_1 \cdot \cos \beta_1, & y_2 &= l_2 \cdot \cos \beta_2, \\ z_1 &= l_1 \cdot \cos \gamma_1, & z_2 &= l_2 \cdot \cos \gamma_2. \end{aligned}$$

Werden diese Werte in die vorstehende Gleichung eingesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} -2l_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot l_2 \cdot \cos \alpha_2 - 2l_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot l_2 \cdot \cos \beta_2 - 2l_1 \cdot \cos \gamma_1 \cdot l_2 \cdot \cos \gamma_2 \\ = -2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \delta, \end{aligned}$$

also

$$\cos \delta = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2. \quad (78)$$

Hieraus bestimmt man den Winkel zweier Geraden gegeneinander, deren Neigungswinkel gegen die drei aufeinander senkrecht stehenden Bezugsachsen gegeben sind.

In Fig. 200 stellt die wagerechte Strecke das durch die Formeln 75 und 76 festgelegte Gesamtdrehmoment  $M$  dar, indem die aus Formel 75 errechnete Größe von  $M$  auf der durch die Formeln 76 bestimmten Drehachse abgetragen ist. Man kann nun  $M$  zerlegen in zwei aufeinander

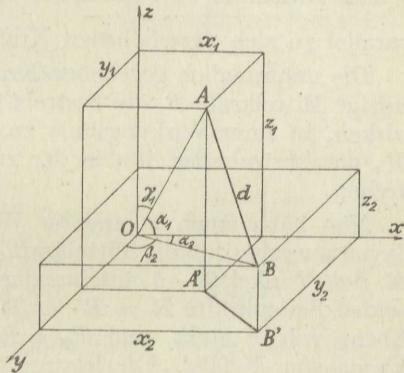


Fig. 199.

senkrechte Einzelmomente  $M_1$ , dessen Drehachse mit der Wirkungslinie der Mittelkraft  $R$  zusammenfällt, die durch die Formeln 73 und 74 nach Größe und Lage bestimmt ist, und  $M_2$ , dessen Drehachse dazu senkrecht steht. Es ist dann nach Formel 78

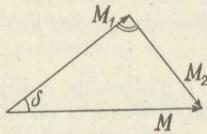


Fig. 200.

$$\cos \delta = \cos \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \cos \chi + \cos \gamma \cdot \cos \psi,$$

ferner

$$M_1 = M \cdot \cos \delta \quad \text{und} \quad M_2 = M \cdot \sin \delta. \quad (79)$$

$M_2$  kann auf seiner Drehachse so verschoben werden, daß es die Mittelkraft  $R$  in seiner Ebene enthält; dann lassen sich beide in dieser Ebene

gemäß Abschnitt 10 zusammensetzen zu der um den Betrag  $r = \frac{M_2}{R}$  parallel zu sich verschobenen Kraft  $R$ .

Die ursprünglich gegebenen Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots$  liefern also eine einzige Mittelkraft  $R$ , die bestrebt ist, den Körper, auf den die  $P$  einwirken, in ihrer Wirkungslinie zu verschieben, und ein Drehmoment  $M$ , das bestrebt ist, ihn in der zu  $R$  senkrecht stehenden Ebene zu drehen.

Man hätte auch in anderer Weise vorgehen können, indem man davon ausgeht, daß die Mittelkraft  $R$  und die Ebene des Drehmomentes  $M$  den Winkel  $90 - \delta$  miteinander bilden. Man zerlegt nun  $R$  in die beiden Seitenkräfte  $R_1 = R \cdot \sin(90 - \delta) = R \cdot \cos \delta$ , die senkrecht zur Ebene von  $M$  steht, und  $R_2 = R \cdot \cos(90 - \delta) = R \cdot \sin \delta$ , die in die Ebene von  $M$  fällt. Die letztere Seitenkraft wird mit  $M$  zusammengesetzt zu der um den Betrag  $r' = \frac{M}{R_2}$  verschobenen Kraft  $R_2$ . Es

bleiben somit zwei Kräfte  $R_1$  und  $R_2$ , deren Wirkungslinien im Raum senkrecht<sup>17)</sup> aneinander vorbeilaufen, die also ein Kraftkreuz bilden<sup>18b)</sup>.

Ein Kraftkreuz kann hiernach stets auf eine Einzelkraft und ein Drehmoment, dessen Ebene senkrecht zu der Einzelkraft steht, umgeformt werden.

Bemerkt sei, daß durch passende Lage der einzelnen Kräfte zueinander und der verschiedenen Achsen sich die hier ganz allgemein durchgeführte Aufgabe häufig sehr vereinfachen läßt.

**Beispiel 94.** Der Körper  $A$  (Fig. 201) stehe auf einer Plattform  $B$ , deren Oberfläche mit der Ebene des Versuchsfeldes abschneidet, und es soll die Gesamtheit des auf  $A$  ausgeübten Wind- oder Erddruckes  $P$  gemessen werden<sup>20)</sup>.

Die Plattform wird gestützt durch sechs Stäbe, die aus je zwei kräftigen Blattfedern bestehen und sich unter dem Einfluß einer Druckkraft etwas zusammendrücken derart, daß schon bei kleiner Verringerung der Stablänge eine bequem meßbare Ausbiegung der Federmitten erfolgt, die auf ein geeichtes Zeigerwerk übertragen wird. Die drei Stäbe  $S_1, S_2, S_3$  liegen beliebig in einer waagrechten Ebene nur so, daß sich ihre Wirkungslinien nicht in einem Punkt schneiden,

<sup>18b)</sup> Euler, *Theoria motus corporum solidorum*. 1765.

<sup>20)</sup> Müller - Breslau, *Z. d. B.* 1904.

die drei Stäbe  $S_4, S_5, S_6$  stehen senkrecht zu dieser Ebene und schneiden sich ebenfalls nicht in einem Punkt.

Die Kraft  $P$  wird nach den drei Achsenrichtungen  $X, Y, Z$  zerlegt, und es gilt dann

$$\begin{aligned} X &= S_1 \\ Y &= S_2 - S_3 \\ Z &= S_4 + S_5 + S_6. \end{aligned}$$

Damit ist die Größe und Richtung von  $P$  ermittelt, sobald die Größen der sechs Stabkräfte abgelesen sind.

Die Lage des Angriffspunktes von  $P$  am Körper  $A$  liefern die Momentengleichungen

$$\begin{aligned} M_X &= (S_5 - S_6) \cdot b, \\ M_Y &= (S_5 - S_6) \cdot a, \\ M_Z &= S_3 \cdot d. \end{aligned}$$

Über die Verteilung der Kraft  $P$  auf dem Körper  $A$  kann die Vorrichtung naturgemäß keinen Aufschluß geben.

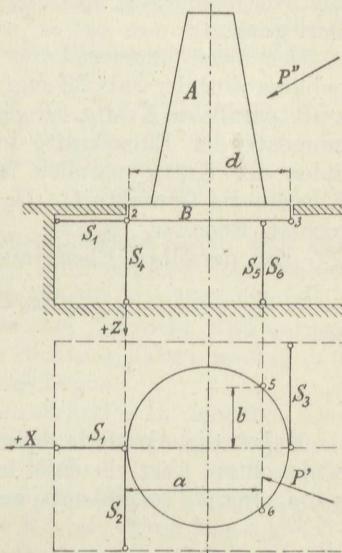


Fig. 201.

### III. Das Gleichgewicht.

#### 13. Der Schwerpunkt.

Aus der allgemeinen Erfahrung ergibt sich das Naturgesetz: Alle Körper auf der Erde werden nach dem lotrecht darunter befindlichen Teil der Erdoberfläche angezogen. Die auf jedes einzelne Teilchen eines Körpers wirkende Kraft, welche diese Anziehung hervorruft, heißt die Schwerkraft. Die Erklärung des Ursprunges und der Übertragung dieser Kraft ist nicht Gegenstand der Mechanik (vgl. Abschnitt 3).

Da alle technischen Bauwerke im Verhältnis so klein sind, daß die Krümmung der Erdoberfläche vollständig vernachlässigt werden kann, so sind die auf jedes Teilchen eines Körpers in demselben Sinne wirkenden Schwerkraften einander parallel.

**Beispiel 95.** Bei einem in der Nord-Süd-Richtung stehenden Gebäude von rund 230 m Länge würden die genau lotrechten Mauern von 20 m Höhe oben 0,73 mm weiter voneinander entfernt sein als unten. Wenn das Gebäude in der Ost-West-Richtung in Berlin ( $52^\circ 30'$ ) steht, so findet sich dieselbe Abweichung schon bei 140 m Abstand der gleichhohen Ost-West-Mauern.

Die Mittelkraft aller Schwerkraften desselben Körpers oder eines Körpersystems heißt das Gewicht des Körpers. Es ist, weil alle Kräfte in derselben Richtung wirken, gleich der Summe aller Schwerkraften des Körpers oder gleich der Summe der Einzelgewichte der verschiedenen Körperteilchen.

Da nun jede, das Gewicht bildende Einzelkraft eine ganz bestimmte Angriffsstelle hat, das zugehörige kleine Teilchen des Körpers, so muß auch die Mittelkraft einen bestimmten Angriffspunkt haben, der als Schwerpunkt des Körpers bezeichnet wird. Bei den Schwerkraften

ist also im Gegensatz zu den von anderen Körpern auf den betreffenden ausgeübten Zug- und Druckkräften auch der Angriffspunkt vielfach von Bedeutung, und seine Ermittlung ist Gegenstand der folgenden Darlegungen.

Der meist angewendeten rechnerischen Bestimmung des Schwerpunktes wird der Satz 33 zugrunde gelegt: Das Drehmoment der Mittelkraft paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Drehmomente der Einzelkräfte in bezug auf dieselbe zu den Wirkungslinien der Kräfte parallele Ebene. Haben also die Einzelteile eines Körpers die Gewichte  $G_1, G_2, G_3 \dots$  und die Abstände von einer lotrechten Ebene  $x_1, x_2, x_3 \dots$ , so folgt der Abstand  $x_0$  der Mittelkraft  $\sum G$  von derselben Ebene aus<sup>21)</sup>

$$x_0 \cdot \sum G = \sum (G \cdot x)$$

zu

$$x_0 = \frac{\sum (G \cdot x)}{\sum G}. \quad (80a)$$

Haben die Abstände derselben Einzelgewichte von einer zur ersten senkrechten, aber ebenfalls lotrecht stehenden Bezugsebene die Werte  $y_1, y_2, y_3 \dots$ , so gilt entsprechend

$$y_0 = \frac{\sum (G \cdot y)}{\sum G}, \quad (80b)$$

und die Schnittgerade der beiden in den Abständen  $x_0$  bzw.  $y_0$  zu den betreffenden Bezugsebenen parallel gelegten sogenannten Schwererebenen enthält den Schwerpunkt, ist, wie man sagt, eine Schwerlinie.

Es ist klar, daß die Einzelgewichte und ihre Angriffspunkte keine Änderung erfahren, wenn der als starr vorausgesetzte Körper gedreht wird. Dreht man nun den Körper mit den beiden Bezugsebenen derart, daß jetzt eine die ersten beiden Ebenen senkrecht schneidende, also in der ersten Lage wagerechte Ebene in eine lotrechte Lage kommt, so gilt für die Abstände  $z_1, z_2, z_3 \dots z_0$  von dieser Ebene ebenso wie oben

$$z_0 = \frac{\sum (G \cdot z)}{\sum G}. \quad (80c)$$

Die im Abstände  $z_0$  zur wagerechten Bezugsebene gelegte Schwerebene schneidet die Schwerlinie in einem Punkt, dem Schwerpunkt  $S$ .

Ist etwa die letzte Bezugsebene so angenommen worden, daß sich  $z_0 = 0$  ergibt, also auch  $z_0 \cdot \sum G = 0$ , so wird gemäß Formel 80c. auch  $\sum (G \cdot z) = 0$ . In dem Fall geht die Bezugsebene durch den Schwerpunkt, und man kann aussprechen: Ist die algebraische Summe der Drehmomente aller Kräfte in bezug auf eine Ebene gleich Null, d. h.

<sup>21)</sup> Varignon, Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1714.

sind alle Schwerkkräfte in bezug auf diese Ebene im Gleichgewicht, so enthält sie den Schwerpunkt.

**Beispiel 96.** Soll die Lage des Schwerpunktes eines Hebels für das Sicherheitsventil eines Dampfkessels ermittelt werden, so legt man den Hebel etwa nach Fig. 202 auf eine Messerschneide. Bleibt er im Gleichgewicht darauf liegen, so gibt die Mittelebene der Messerklinge seine Schwerebene an und der Abstand  $z_0$  von der Drehschneide des Hebels läßt sich bequem aufmessen.

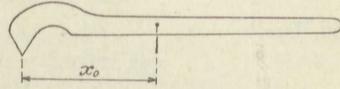


Fig. 202.

Aus den obigen Darlegungen folgt, daß, wenn alle Angriffspunkte in einer Ebene liegen, wie z. B. bei einem dünnen ebenen Blech, sich der Schwerpunkt in derselben Ebene befindet. Wird nämlich diese Ebene zur  $xy$ -Bezugsebene gewählt, so werden alle Abstände  $z$ -Null, also auch  $\sum(G \cdot z) = 0$  und damit  $z_0 \cdot \sum G = 0$ . Da nun  $\sum G$  nicht Null werden kann, weil ja alle Schwerkkräfte die gleiche Richtung haben, muß  $z_0 = 0$  sein, d. h. der Schwerpunkt in der  $xy$ -Ebene liegen.

Ebenso ergibt sich, daß, wenn alle Schwerkkräfte in derselben Geraden, etwa der Mittellinie eines Balkens oder Trägers, angreifen, auch der Schwerpunkt in dieser Geraden liegen muß.

Die obigen Darlegungen erfahren eine erhebliche Vereinfachung bei homogenen Körpern, das sind solche Körper, deren Masse gleichförmig über den ganzen vom Körper eingenommenen Raum verteilt ist. Gleiche Raunteile desselben homogenen Körpers haben also das gleiche Gewicht, d. h. das Verhältnis von Gewicht und Raum ist für denselben homogenen Körper unveränderlich:

$$\frac{dG}{dV} = \frac{G}{V} = \gamma. \quad (81)$$

Gewöhnlich wird bei festen Körpern  $G$  in kg und  $V$  in  $\text{dm}^3$  angegeben, dann ist  $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit oder kurz das Einheitsgewicht des Körpers gemessen in  $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ .

Von dem Einheitsgewicht eines Stoffes ist zu unterscheiden das spezifische Gewicht, das angibt, wieviel mal schwerer ein Stoff ist im Verhältnis zu dem gleichen Rauminhalt von reinem Wasser von der Temperatur  $4^\circ \text{C}$ , das also eine unbenannte Zahl ist. Es wird besonders bei Flüssigkeiten viel angegeben. Da das Gewicht von  $1 \text{ dm}^3$  Wasser von  $4^\circ \text{C}$  auf dem 45. Breitengrad in Höhe des Meeresspiegels und im luftleeren Raum fast genau 1 kg beträgt, so stimmt Einheitsgewicht und spezifisches Gewicht zahlenmäßig überein, solange das kg als Kraft-einheit und das dm als Längeneinheit gewählt wird. Rechnet man aber mit englischen oder russischen Maßen, so sind die Zahlenwerte der Einheitsgewichte ganz andere, während die der spezifischen Gewichte natürlich dieselben bleiben.

**Beispiel 97.** Anzugeben ist das Einheitsgewicht von Gußeisen mit dem spezifischen Gewicht 7,25 in englischen Pfund für den Kubikzoll.

Es ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ englisches Pfund} &= 0,4536 \text{ kg,} \\ 1 \text{ englischer Zoll} &= 0,254 \text{ dm,} \\ 1 \text{ englischer Kubikzoll} &= 0,01639 \text{ dm}^3, \end{aligned}$$

also

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{0,01639}{0,4536} = 0,03616 \frac{\%}{\text{dm}^3} \text{ engl.}$$

und damit

$$7,25 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 7,25 \cdot 0,03616 = 0,262 \frac{\%}{\text{dm}^3} \text{ engl.}$$

Für manche technische Anwendung ist es vorteilhaft zu wissen, daß der Rauminhalt von 1 dm<sup>3</sup> dargestellt wird durch  
 einen Stab von 10 m Länge und 1 dm<sup>2</sup> Querschnitt,  
 einen Draht von 1 km Länge und 1 mm<sup>2</sup> Querschnitt,  
 eine Blechtafel von 1 mm Stärke und 1 m<sup>2</sup> Fläche.

Einheitsgewicht  $\gamma$  bei gewöhnlicher Temperatur.

	$\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$		$\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$
Aluminium, gegossen . . . . .	2,56	Holz, lufttrocken	
„ „ gehämmert . . . . .	2,75	Kiefer . . . . .	0,31 —0,76
Aluminiumbronze . . . . .	2,7	Pechkiefer . . . . .	0,83 —0,85
Anthrazit . . . . .	1,4 —1,7	Rotbuche . . . . .	0,66 —0,83
Antimon . . . . .	6,7	Tanne . . . . .	0,37 —0,75
Asphalt . . . . .	1,1 —1,5	Weißbuche . . . . .	0,62 —0,82
Blei . . . . .	11,3	Kalkmörtel, trocken . . . . .	1,65
Braunkohle . . . . .	1,2 —1,5	„ „ frisch . . . . .	1,78
Bronze . . . . .	7,4 —8,9	Koks . . . . .	1,4
Deltametall . . . . .	8,6	Kork . . . . .	0,24
Eis . . . . .	0,9	Kupfer, gegossen . . . . .	8,8
Flußeisen . . . . .	7,85	„ „ gewalzt . . . . .	8,9
Flußstahl . . . . .	7,86	Lagermetall, Weißmetall . . . . .	7,1
Schweißeisen . . . . .	7,80	Messing, gegossen . . . . .	8,4 —8,7
Gußeisen . . . . .	7,20 —7,25	„ „ gezogen . . . . .	8,43 —8,73
Glas für Flaschen . . . . .	2,6	„ „ gewalzt . . . . .	8,52 —8,62
Gold, gehämmert . . . . .	19,30	Nickel . . . . .	8,9 —9,2
Granit . . . . .	2,5 —3,05	Platin, gegossen . . . . .	21,15
Graphit . . . . .	1,9 —2,3	„ „ gehämmert . . . . .	21,3 —21,5
Grobkohle . . . . .	1,2 —1,5	Porzellan . . . . .	2,3
Holz, lufttrocken		Schamottesteine . . . . .	1,85
Eiche . . . . .	0,69 —1,03	Silber, gehämmert . . . . .	10,5 —10,6
Erle . . . . .	0,42 —0,66	Ziegel, gewöhnliche . . . . .	1,4 —1,55
Esche . . . . .	0,57 —0,94	Zink, gewalzt . . . . .	7,13 —7,20
Fichte . . . . .	0,35 —0,60	Zinn, gegossen . . . . .	7,2

Bei nicht homogenen Körpern, wie z. B. Mauerwerk, Beton, geschütteter Kohle oder Erde ist das Verhältnis  $\frac{dG}{dV}$  je nach der Stelle, die aus dem Gesamtraum herausgegriffen wird, veränderlich. Immerhin lassen sich bei hinreichend großen Räumen  $V$  doch für jede Körperart ungefähr gleichbleibende Zahlen für das Verhältnis  $\frac{G}{V} = \gamma'$  angeben, das hier als mittleres Einheitsgewicht bezeichnet wird. Um anzudeuten,

daß  $\gamma'$  nicht für beliebige kleine Räume gilt, wählt man gewöhnlich  $V$  in  $m^3$  und  $G$  in  $t$ , so daß das mittlere Einheitsgewicht in  $\frac{t}{m^3}$  gemessen wird.

Mittlere Einheitsgewichte  $\gamma'$ .

	$\frac{t}{m^3}$		$\frac{t}{m^3}$
Beton . . . . .	2,2 — 2,3	Koks, Gas- . . . . .	0,36—0,47
Braunkohlen, lufttrocken		„ Zechen- . . . . .	0,38—0,53
in Stücken . . . . .	0,65—0,78	Mauerwerk, gewöhnliches	1,8
Formsand, aufgeschüttet	1,20	Sand, Lehm, Erde	
„ gestampft . . . . .	1,65	trocken . . . . .	1,6
Stückkohlen		naß . . . . .	2,0
oberschlesische . . . . .	0,76—0,80	Schnee, trocken . . . . .	0,12
Zwickauer . . . . .	0,76—0,80	„ feucht . . . . .	0,45
niederschlesische . . . . .	0,82—0,87	„ naß . . . . .	0,79
Saar- . . . . .	0,72—0,80		
Ruhr- . . . . .	0,80—0,86		

**Beispiel 98.** Die Freileitung eines Elektrizitätswerkes enthält Kupferdraht von der Länge 12 630 m und dem Querschnitt 7,0 mm<sup>2</sup>

„ „	3 780	„ „	„	10,0	„
„ „	5 720	„ „	„	12,5	„
„ „	1 250	„ „	„	16,0	„

Anzugeben ist das Gewicht der Leitungen.

Man erhält

$$\begin{aligned}
 G_1 &= 12,63 \cdot 7,0 \cdot 8,9 = 786 \text{ kg,} \\
 G_2 &= 3,78 \cdot 10,0 \cdot 8,9 = 336 \text{ „} \\
 G_3 &= 5,72 \cdot 12,5 \cdot 8,9 = 636 \text{ „} \\
 G_4 &= 1,25 \cdot 16,0 \cdot 8,9 = 178 \text{ „} \\
 \hline
 \Sigma G &= 1936 \text{ kg.}
 \end{aligned}$$

**Beispiel 99.** Ein Eisenbahnwagen mit  $l = 6,72$  m langer und  $b = 2,83$  m breiter Ladefläche soll  $G = 15$  t Steinkohle laden. Welche Höhe  $h$  muß der Laderaum haben?

Aus der Gleichung

$$G = l \cdot b \cdot h \cdot \gamma'$$

folgt

$$h = \frac{G}{l \cdot b \cdot \gamma'} = \frac{15}{6,72 \cdot 2,83 \cdot 0,72} \approx 1,10 \text{ m,}$$

worin für  $\gamma'$  der niedrigste Wert der vorstehenden Zusammenstellung eingesetzt wurde.

Für homogene Körper, mit denen meistens gerechnet wird, geht die Formel 80a über in

$$x_0 = \frac{\Sigma(V \cdot \gamma \cdot x)}{\Sigma(V \cdot \gamma)} = \frac{\gamma \cdot \Sigma(V \cdot x)}{\gamma \cdot \Sigma V},$$

also

$$x_0 = \frac{\Sigma(V \cdot x)}{\Sigma V} \tag{82a}$$

und entsprechend

$$y_0 = \frac{\sum(V \cdot y)}{\sum V}, \quad (82b)$$

$$z_0 = \frac{\sum(V \cdot z)}{\sum V}. \quad (82c)$$

Wird für homogene Bleche von der Oberfläche  $F$  und der überall gleichen Stärke  $\delta$  eingesetzt  $V = F \cdot \delta$ , so hebt sich die Stärke  $\delta$  heraus, und man erhält

$$x_0 = \frac{\sum(F \cdot x)}{\sum F} \quad \text{bzw.} \quad y_0 = \frac{\sum(F \cdot y)}{\sum F}. \quad (83)$$

Dieselben Formeln finden Anwendung auch auf rein mathematische Flächen, deren Stärke  $\delta = 0$  ist. Wenn Flächen unter dem Einfluß des Wind-, Wasser-, Dampfdruckes oder dgl. stehen, wird davon häufig Gebrauch gemacht, um den Angriffspunkt der Druckkraft zu ermitteln, der mit dem Schwerpunkt der Fläche zusammenfällt, solange der betreffende Druck gleichmäßig über die Fläche verteilt ist.

Entsprechend erhält man für Liniengebilde, die man sich zuerst als mit Masse belegte Drähte vorstellen kann,

$$x_0 = \frac{\sum(l \cdot x)}{\sum l} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\sum(l \cdot y)}{\sum l}. \quad (84)$$

Wenn der Querschnitt und das Einheitsgewicht schließlich nach Null konvergieren, d. h. sich der Null so weit als denkbar nähern, können die betreffenden Beträge aus den Gleichungen (80) herausgehoben werden, so daß die Formeln (84) auch für rein mathematische Gebilde zutreffen.

Hat ein homogener Körper eine Symmetrieebene, so entspricht jedem Teilchen auf der einen Seite dieser Ebene ein gleich schweres und gleich gelegenes auf der anderen Seite der Ebene, und die Mittelkraft beider Gewichte fällt in die Symmetrieebene (Fig. 203). Dies gilt für alle Teile; eine Symmetrieebene ist also auch Schwerenebene. Besitzt ein homogener Körper zwei Symmetrieebenen, so fällt der Schwerpunkt in die Schnittlinie beider, in die Symmetrieachse. Hat ein homogener Körper drei oder mehr Symmetrieebenen, so fällt der Schwerpunkt mit dem durch den Schnitt von drei solcher Ebenen erhaltenen Mittelpunkt des Körpers zusammen.

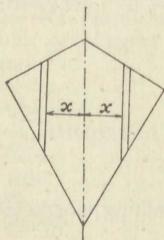


Fig. 203.

Durch sinngemäße Anwendung auf Flächen und Linien erhält man allgemein: Besitzt ein homogener Körper, eine Fläche oder eine Linie eine Symmetrieebene, Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt, so liegt darin der Schwerpunkt.

Der Schwerpunkt der geraden Linie, der Kreisfläche, der Kugel ist also ihr Mittelpunkt. Der Schwerpunkt der Rechteckfläche und des Rechteckumfanges ist der Schnittpunkt der beiden

zu den Seiten parallelen Mittelachsen. Der Schwerpunkt eines beliebigen Prismas mit parallelen Endflächen liegt in der Mitte der Länge.

Der Schwerpunkt der Parallelogrammfläche und des Parallelogrammumfanges ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen (Fig. 204), denn in bezug auf jede Diagonale entspricht jedem beliebigen Teilchen auf der einen Seite ein gleiches und gleich gelegenes auf der anderen Seite, obwohl die Diagonalen nicht eigentliche Symmetrieachsen sind.

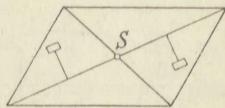


Fig. 204.

Es genügt, wenn die Ebene oder Achse nicht reine Symmetrieebene oder Achse ist, daß die auf beiden Seiten befindlichen Teile des Körpers oder der Fläche kongruent sind und die homologen, d. h. gleich liegenden Stellen denselben Abstand von der Ebene bzw. Achse haben.

Um die Schwerpunktslage beliebiger Körper, Flächen und Liniengebilde zu bestimmen, ist nur die Kenntnis der Schwerpunktslage einiger weniger Elemente erforderlich, die die folgende Zusammenstellung zu den schon oben aufgeführten beibringt.

1. Dreieckumfang. Die Länge der Seiten sei  $a, b, c$ , die Höhe  $h_1$  stehe senkrecht zu  $a$  (Fig. 201). Dann ist der Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der Seite  $s$  nach Formel (84)

$$x_0 = \frac{a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{2}h_1 + c \cdot \frac{1}{2}h_1}{a + b + c} = \frac{b + c}{a + b + c} \cdot \frac{h_1}{2}.$$

In derselben Weise kann man auch den Abstand  $r$  des Schwerpunktes von der Verbindungslinie der Mitten der beiden Seiten  $a$  und  $b$  bestimmen:

$$r = \frac{a \cdot \frac{1}{2}h_1}{a + b + c},$$

das ist der Quotient aus dem Dreiecksinhalt und dem Dreiecksumfang. Hieraus geht hervor, daß die Entfernung des Schwerpunktes von den anderen Mittenverbindungslinien die gleiche ist. Er ist also der Mittelpunkt des in Fig. 205 eingezeichneten Kreises.

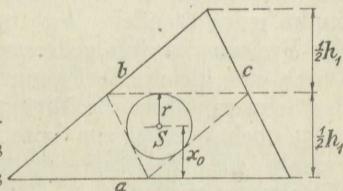


Fig. 205.

2. Kreisbogen (Fig. 206). Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen auf dem Senkrecht zur Sehne  $AB$  errichteten, den Bogen halbierenden Halbmesser  $OC$ ; sein Abstand  $x_0$  vom Mittelpunkt wird nach Formel (84) bestimmt, indem man den Bogen aus kleinen, gerade anzunehmenden Linienteilen  $db$  zusammengesetzt denkt, deren Schwerpunkte  $S'$  sich in der Mitte derselben befinden. Werden doch die Hilfslinien der Fig. 206 gezogen, so folgt aus der Ähnlichkeit des kleinen Elementardreieckes und des großen  $ODS'$   $db : ds = r : x$  und hieraus

$$x \cdot db = r \cdot ds.$$

Damit geht die Formel (84) über in

$$x_0 = \frac{\sum x \cdot db}{\sum db} = \frac{\sum r \cdot ds}{\sum db} = r \cdot \frac{\sum ds}{\sum db},$$

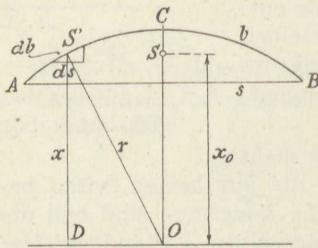


Fig. 206.

denn  $r$  ist ein in jedem Summenglied vorkommender gleichbleibender Faktor, der als einmaliger Faktor vor die ganze Summe gesetzt werden kann. Nun ist nach Fig. 206

$$\begin{aligned} \sum ds &= \text{Sehne } AB = s, \\ \sum db &= \text{Bogen } AB = b, \end{aligned}$$

mithin

$$x_0 = r \cdot \frac{s}{b}. \tag{85}$$

Zu einer beliebigen Sehne  $s$  können zwei Bögen angegeben werden (Fig. 207 und 208) mit einem großen und einem kleinen Abstand des Schwerpunktes von der Kreismitte.

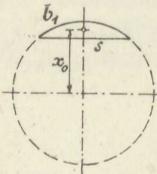


Fig. 207.

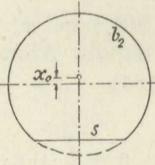


Fig. 208.

Im Halbkreis wird

$$s = 2r \text{ und } b = \pi r,$$

also

$$x_0 = r \cdot \frac{2r}{\pi r} = \frac{2}{\pi} \cdot r = 0,6366 r. \tag{85a}$$

### 3. Dreiecksfläche (Fig. 209).

Das Dreieck wird in sehr schmale Streifen zerlegt, die alle parallel zur Seite  $AB$  verlaufen. Der Schwerpunkt jedes Streifens liegt in der Mitte desselben; der Schwerpunkt des Dreiecks ist infolgedessen auf der Mitteltransversale  $CD$  gelegen. Durch eine gleiche Zerlegung parallel zur Seite  $AC$  erhält man als Ort des Schwerpunktes die Mitteltransversale  $BE$  und, wenn die Zerlegung auch noch parallel zur Seite  $BC$  vorgenommen wird, die Mitteltransversale  $AF$ . Der Schwerpunkt ist somit der Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen.

Wird die Gerade  $DF$  gezogen, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $ASC$  und  $FSD$ :

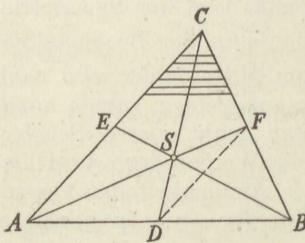


Fig. 209.

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FD}}$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $ACB$  und  $DFB$ :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{2}{1};$$

der Schwerpunkt teilt die Mitteltransversalen im Verhältnis 2:1.

Der senkrechte Abstand des Schwerpunktes von einer Dreiecksseite ist  $\frac{1}{3}$  der zugehörigen Höhe und der von einer Ecke  $\frac{2}{3}$  der zugehörigen Höhe.

Das Moment der Dreiecksfläche in bezug auf eine Seite, z. B.  $BC = a$  ist

$$M_1 = F \cdot x_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot h_1$$

oder

$$M_1 = \frac{1}{6} \cdot a \cdot h_1^2. \tag{86a}$$

Entsprechend ergibt sich in bezug auf die Spitze

$$M_2 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot h_1^2. \tag{86b}$$

4. Fläche des Parallelogramms (Fig. 210). Durch Zerlegen des Trapezes in sehr schmale Streifen längs der parallelen Seiten erhält man wie beim Dreieck als Ort des Schwerpunktes die Verbindungslinie  $GH$  der Mitten dieser Seiten.

Wird jetzt das Trapez durch die Diagonale  $CB$  in zwei Dreiecke zerlegt, so ergibt sich nach Formel (84) mit den Bezeichnungen der Fig. 210:

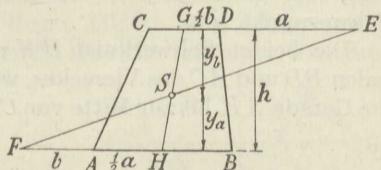


Fig. 210.

$$y_a = \frac{\frac{1}{2} a h \cdot \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} b h \cdot \frac{2}{3} h}{\frac{1}{2} h \cdot (a + b)} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}, \tag{87a}$$

$$y_b = \frac{\frac{1}{2} b h \cdot \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} a h \cdot \frac{2}{3} h}{\frac{1}{2} h \cdot (a + b)} = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2a}{b + a} \tag{87b}$$

und durch Division beider Gleichungen

$$\frac{y_a}{y_b} = \frac{a + 2b}{b + 2a} = \frac{\frac{1}{2} a + b}{\frac{1}{2} b + a}.$$

Hieraus folgt die Aufzeichnung des Schwerpunktes<sup>15)</sup>: Man zieht die Mittellinie  $GH$  des Trapezes und trägt dann an die Seite  $b$  die Länge  $a$  bis zum Punkte  $E$  an, ebenso an die Seite  $a$  die Länge  $b$  nach der entgegengesetzten Richtung bis  $E$ . Die Verbindungslinie  $EF$  schneidet die Mittellinie im Schwerpunkt  $S$ , denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $EGS$  und  $FHS$  ergibt sich

$$\frac{y_a}{y_b} = \frac{\overline{HS}}{\overline{GS}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{EG}} = \frac{\frac{1}{2} a + b}{\frac{1}{2} b + a}.$$

Bei schmalen Trapezen von großer Höhe würde der Schnitt der Hilfslinie  $EF$  mit der Mittellinie  $GH$  sehr lang ausfallen; man führt deshalb in solchen Fällen die angegebene Zeichnung zweimal aus, indem die betreffenden Verlängerungen auch nach den anderen Richtungen angetragen werden.

Faßt man das Dreieck als ein Parallelogramm auf, dessen Seite  $b = 0$  ist, so erhält man hieraus eine besonders bequeme Aufzeichnung des Dreiecksschwerpunktes, da nur die Zeichendreiecke dazu gebraucht werden.

Als Moment der Fläche in bezug auf die Seite  $a$  folgt aus der Formel (87a):

$$M_1 = \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot (a + 2b). \quad (88)$$

5. Beliebiges Viereck (Fig. 211). Das Viereck  $ABCD$  wird durch die Diagonale  $AC$  in zwei Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunkte  $H$  und  $K$  nach den Angaben unter 3 bestimmt werden, wie die gestrichelten Linien andeuten. Ihre Verbindungsgerade muß den Schwerpunkt des Viereckes enthalten. In gleicher Weise erhält man die Schwerlinie  $LN$  der durch die Diagonale  $BD$  gebildeten beiden Dreiecke. Der einzige, diesen beiden Schwerlinien gemeinsame Punkt  $S$  muß also der Schwerpunkt sein.

Die beiden Schwerlinien  $HK$  und  $LN$  sind parallel zu den Diagonalen  $BD$  und  $AC$  des Viereckes, was sich leicht beweisen läßt, wenn man die Gerade  $AH$  bis zur Mitte von  $CB$  nach  $E$  zieht. Denn die Verbindungs-

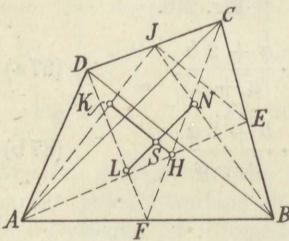


Fig. 211.

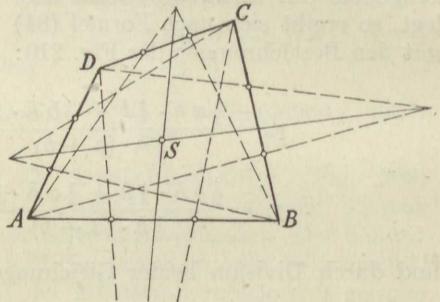


Fig. 212.

gerade  $EJ$  der Mitte von  $CB$  und  $CD$  ist selbst die Diagonale  $BD$  parallel und die Abschnitte, welche die Schwerlinie  $KH$  auf den Schenkeln des Winkels  $EAJ$  abschneidet, sind einander proportional, so daß  $KH$  parallel zu  $EJ$  sein muß.

Die Zeichnung ist vorteilhaft, wenn man bei der Schwerpunktermittlung innerhalb des Umfanges, z. B. bei einer Blechtafel, bleiben muß.

Auf dem Zeichenbrett ist es sehr bequem, alle Seiten in drei gleiche Teile zu teilen und die Spitzen der in Fig. 212 eingetragenen Dreiecke zu bestimmen. Die kreuzweisen Verbindungsgeraden der Dreieckspitzen schneiden sich dann im Schwerpunkt<sup>22)</sup>.

Für das Trapez ist der Beweis<sup>23)</sup> leicht geführt: Es wird durch die Diagonale  $AC$  in zwei Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunktgewichte

<sup>22)</sup> Beweis: Skutsch, Archiv d. Math. u. Physik 1915.

<sup>23)</sup> La. Z. d. B. 1914.

$F_1$  und  $F_2$  die Seite  $DC$  dritteln (Fig. 213). Trägt man die beiden Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  lotrecht aneinander an, so kann man durch die Stoßstelle beider eine Parallele zu  $DC$  ziehen und darauf einen Pol  $O$  so wählen, daß die beiden äußeren Polstrahlen parallel zu  $AE$  bzw.  $BG$  verlaufen. Nach den Darlegungen S. 51 ist dann  $EGH$  das Seileck, durch dessen Punkt  $H$  die Kraft  $F = F_1 + F_2$  gehen muß.

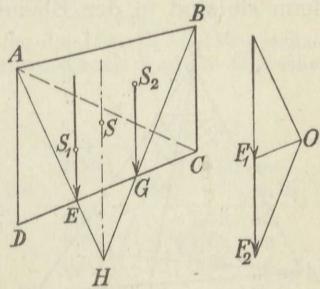


Fig. 213.

6. Kreisabschnitt (Fig. 214). Der Kreisabschnitt wird durch dicht benachbarte Halbmesser in sehr schmale Dreiecke zerlegt, deren Schwerpunkte auf dem gestrichelten Kreisbogen vom Halbmesser  $\frac{2}{3} r$  liegen, der somit einen schweren Bogen bildet. Sein Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse und gemäß Formel (85) im Abstände

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\frac{2}{3} s}{\frac{2}{3} b}$$

vom Mittelpunkt  $O$  entfernt. Hieraus folgt

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{s}{b} \quad (89)$$

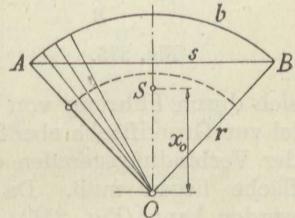


Fig. 214.

Für die Fläche des Halbkreises ergibt sich hieraus

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{2r}{\pi r} = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot r = 0,4244 r. \quad (89a)$$

In bezug auf die Spitze ist das Moment der Kreisabschnittfläche

$$M = F \cdot x_0 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r \cdot \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{s}{b} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot s, \quad (90)$$

was für den Halbkreis übergeht in

$$M = \frac{2}{3} r^3 = \frac{d^3}{12} \quad (91)$$

als Moment der Fläche in bezug auf den Durchmesser.

7. Pyramide. Gegeben sei die dreiseitige Pyramide der Fig. 215. Durch die dicht beieinander geführten Schnitte parallel zur Grundfläche  $ABC$  wird die Pyramide in dreieckige Scheiben zerlegt, deren Schwerpunkt auf der Verbindungsgeraden der Spitze  $D$  mit dem Schwerpunkt  $G$  der Grundfläche liegen. Der Gesamtschwerpunkt befindet sich demnach ebenfalls auf dieser Geraden. Der Punkt  $G$  wird erhalten, indem man die Seite  $BC$  in  $E$  halbiert und die Verbindungsgerade  $AE$  von  $A$  aus im Verhältnis 2 : 1 teilt. Wird in gleicher Weise die Fläche  $BCD$  als Grundfläche betrachtet, deren Schwerpunkt  $H$  ist, so muß der

Schwerpunkt der Pyramide auch auf der Geraden  $AH$  liegen.  $\overline{AH}$  und  $\overline{DG}$  schneiden sich nun in einem Punkte  $S$ , dem Gesamtschwerpunkt, denn sie sind in der Ebene desselben Winkels  $AED$  gezogen.

Wird jetzt noch die Gerade  $GH$  eingetragen, so folgt aus den Beziehungen

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EH}} = \frac{1}{3},$$

daß die Dreiecke  $HGH$  und  $EAD$  ähnlich sind, also  $GH$  parallel  $AD$  ist. Nun sind noch die Dreiecke  $SGH$  und  $SDA$  ähnlich, also

$$\overline{SG} : \overline{SD} = \overline{GH} : \overline{AD} = 1 : 3.$$

Hieraus folgt, daß  $\overline{SG} = \frac{1}{4}\overline{SD}$  ist:

Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide ist um  $\frac{1}{4}$  der Höhe von der Grundfläche entfernt.

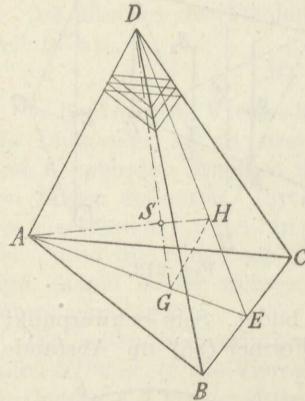


Fig. 215.

Bei einer beliebigen Pyramide ergibt sich durch Führung von dicht beieinander liegenden Schnitten parallel zur Grundfläche ebenfalls wieder, daß der Gesamtschwerpunkt auf der Verbindungsgeraden der Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche liegen muß. Da nun jede Grundfläche in Dreiecke zerlegt werden kann (Fig. 216), so läßt sich jede beliebige Pyramide durch entsprechende Schnitte in dreiseitige Pyramiden zerlegen, die alle dieselbe Spitze haben und deren Einzelschwerpunkte sich demnach alle in derselben Ebene befinden, die im Abstand  $\frac{1}{4}$  der Höhe parallel zur

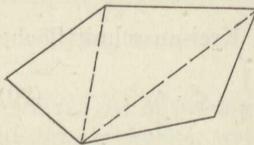


Fig. 216.

Grundfläche gelegt wird. Der gemeinsame Schwerpunkt muß deshalb die zuerst bestimmte Schwerlinie auch im Verhältnis 1:3, von der Grundfläche aus gerechnet, teilen.

Das Drehmoment der Pyramide von der Grundfläche  $F$  und der Höhe  $h$  beträgt also

$$M = \frac{1}{3}F \cdot h \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{4}Fh^2. \quad (92)$$

**Beispiel 100.** Eine Schornsteinsäule von der Höhe  $h = 30$  m habe den oberen äußeren Durchmesser  $D_0 = 1,10$  m und den unteren äußeren Durchmesser  $D_u = 2,60$  m. Anzugeben ist die Größe und das Moment des Winddruckes in bezug auf die Grundfläche der Säule bei  $p = 125 \text{ kg/m}^2 = 0,125 \text{ t/m}^2$ .

Bezeichnet  $F$  die Fläche des lotrechten Mittelschnittes der Schornsteinsäule, so ist nach den Angaben in Beispiel 20 und 21 die Windkraft

$$P = 0,667 \cdot F \cdot p = 0,667 \cdot \frac{1}{2}h \cdot (D_u + D_0) \cdot p,$$

mithin

$$P = 0,667 \cdot 0,125 \cdot 0,50 \cdot 30 \cdot (2,6 + 1,1) = 4,71 \text{ t},$$

das Windmoment nach Formel (88)

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{8} \cdot h^2 \cdot (D_u + 2D_0) \cdot 0,667 \cdot p \\ &= \frac{1}{8} \cdot 30^2 \cdot (2,6 + 2,2) \cdot 0,667 \cdot 0,125 = 60,0 \text{ mt}. \end{aligned}$$



**Beispiel 103.** Anzugeben ist der Schwerpunktsabstand  $y_1$  bzw.  $y_2$  des Viertelkreises bzw. der Restfläche von den nächstgelegenen Begrenzungshalbmessern (Fig. 218).

Für die Viertelkreisfläche gilt nach Formel (85)

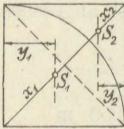


Fig. 218.

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2} r^2}{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r}$$

Nun folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$y_1 : x_1 = r : \sqrt{2} r^2 \quad \text{oder} \quad y_1 = x_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wird hierin  $x_1$  aus der ersten Gleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{r}{\frac{1}{2} \cdot \pi r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \approx 0,4244 r$$

Der Ausdruck stimmt mit der Formel (89a) überein, denn wie eine Fortsetzung der Fig. 218 nach unten angibt, ist  $y_1$  der Schwerpunktsabstand des Halbkreises.

Für die Restfläche erhält man nach Formel (83)

$$x_2 = \frac{r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} r^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 \cdot \left( \sqrt{2} r^2 - \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2} r^2}{\frac{1}{2} \pi r^2} \right)}{r^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi r^2}$$

oder nach Hebung von  $r^2$

$$x_2 = \frac{r \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \left( \sqrt{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right)}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{1 - \frac{\pi}{4}} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right)$$

und somit

$$x_2 = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{0,2146} \cdot (0,8333 - 0,7854)$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt dann

$$y_2 = x_2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2} r^2} = r \cdot \frac{0,0479}{0,2146} = 0,2235 r$$

Dieser Wert wird häufig bei Berechnung des Momentes von Abrundungszwickeln von Walzprofilen gebraucht. Man erhält in bezug auf die gerade Begrenzungslinie

$$M = F_2 \cdot y_2 = \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot r^2 \cdot r \cdot 0,2235 = 0,0479 r^3$$

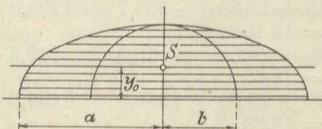


Fig. 219.

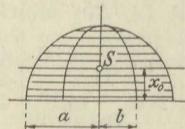


Fig. 220.

**Beispiel 104.** Der Schwerpunkt einer Ellipsenhälfte ist zu ermitteln.

Werden sämtliche Sehnen eines Halbkreises parallel zum Durchmesser um dasselbe Vielfache vergrößert, z. B. verdoppelt (Fig. 219), so daß die Sym-

metrie in bezug auf den senkrecht zum Durchmesser stehenden Halbmesser gewahrt bleibt, dann entsteht die Ellipsenhälfte, deren Schwerpunkt mit der des Halbkreises zusammenfällt, da die Summe der Drehmomente in bezug auf die Schwerachse  $AB$  denselben Wert Null behalten hat.

Dasselbe gilt bei einer entsprechenden Verkürzung aller Sehnen (Fig. 220). Es ist somit mit den Bezeichnungen der Figur

$$y_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot a \quad \text{bzw.} \quad x_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot b.$$

Dieselbe Beziehung bleibt bestehen, wenn die Sehnen des Halbkreises so verschoben werden, daß ihre Halbierungspunkte auf einer schräg zum Durchmesser gerichteten Geraden liegen; auch dadurch entsteht eine halbe schief abgeschnittene Ellipse (Fig. 221).

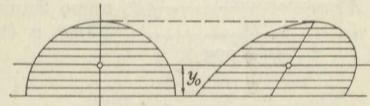


Fig. 221.

In gleicher Weise lassen sich die Schwerpunktlagen von beliebigen Ellipsenabschnitten durch Zurückführung derselben auf Kreisabschnitte bestimmen.

**Beispiel 105.** Anzugeben ist das Moment der Kreisabschnittfläche (Fig. 222).

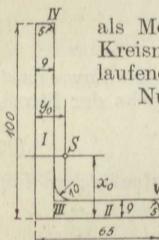
Der Kreisabschnitt ist der Unterschied des Kreisabschnittes und des durch die Sehne abgetrennten Dreiecks. In die Summenformel (83) ist demnach die Dreiecksfläche negativ einzusetzen und man erhält nach den Formeln (90) und (86b)

$$M_0 = F \cdot x_0 = \frac{1}{3} r^2 \cdot s - \frac{1}{3} \cdot s \cdot h^2 = \frac{1}{3} s (r^2 - h^2)$$

als Moment in bezug auf die durch den Kreismittelpunkt gehende parallel zu  $s$  verlaufende Achse.

Nun ist nach dem Satz des Pythagoras

$$r^2 - h^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$



also

$$M_0 = \frac{1}{12} s^3.$$

Fig. 223.

Das Moment in bezug auf die Sehne  $s$  wird nach dem Satz S. 61

$$M = M_0 - F \cdot h,$$

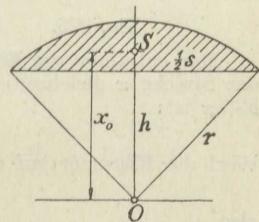


Fig. 222.

das einen für die praktische Rechnung wenig bequemen Ausdruck liefert, wenn die Einzelwerte darin eingesetzt werden.

**Beispiel 106.** Zu berechnen ist die Lage des Schwerpunktes der Querschnittsfläche eines ungleichschenkligen Winkeleisens nach Fig. 223.

Der Querschnitt wird in 5 Teile zerlegt; dann gelten die Angaben der Zusammenstellung, worin die Längenmaße in cm genommen sind.

Nr.	F	x	y
1	10 · 0,9 = + 9,00	5,0	0,45
2	0,9 · 5,6 = + 5,04	0,45	0,90 + 2,8 = 3,70
3	0,2146 · 1 = + 0,215	0,90 + 0,2235 · 1 = 1,124	0,9 + 0,2235 · 1 = 1,124
4	- 0,2146 · 0,5 = - 0,107	10,0 - 0,2235 · 0,5 = 9,888	0,9 - 0,2235 · 0,5 = 0,688
5	- 0,2146 · 0,5 = - 0,107	0,9 - 0,2235 · 0,5 = 0,688	6,5 - 0,2235 · 0,5 = 6,388
	+ 14,04		

Nr.	F · x	F · y
1	+ 45,00	+ 4,05
2	+ 2,27	+ 18,65
3	+ 0,24	+ 0,24
4	- 1,06	- 0,07
5	- 0,07	- 0,68
	+ 46,38	+ 22,19

$$x_0 = \frac{46,38}{14,04} = 3,30 \text{ cm,}$$

$$y_0 = \frac{22,19}{14,04} = 1,58 \text{ cm.}$$

**Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.** Eine Strecke  $AB$  von der Gesamtlänge  $a$  kann vom Anfangspunkt  $A$  aus in viele kleine Abschnitte  $dx$  zerlegt werden (Fig. 224). Der Ausdruck  $dx$  (Differential von  $x$ ) bezeichnet den verschwindend kleinen Zuwachs eines endlichen Wertes  $x$ , dessen Größe im vorliegenden Fall zwischen 0 und dem Höchstwert  $a$  veränderlich ist.

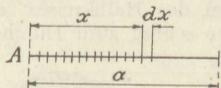


Fig. 224.

Die über die Strecke  $AB$ , also von 0 bis  $a$ , genommene Summe aller kleinen Teile  $dx$  ergibt die ganze Länge  $a$  (vgl. Nr. 2 der Schwerpunktermittlungen):

$$\int_0^a dx = a. \quad (93)$$

(Man liest: Summe oder auch Integral zwischen 0 und  $a$  von  $dx$  ist gleich  $a$ .)

Wird die Summe der im übrigen beliebigen Größen  $dx$ , die in der Fig. 225 der Einfachheit halber als Teilchen einer geraden Strecke veranschaulicht sind, nicht zwischen den Grenzen 0 und  $a$ , sondern  $b$  und  $a$  genommen, so folgt sofort aus der Figur

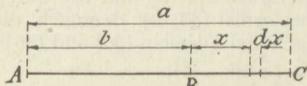


Fig. 225.

$$BC = AC - AB \text{ oder}$$

$$\int_b^a dx = \int_0^a dx - \int_0^b dx. \quad (94)$$

Man entnimmt der Fig. 225 ferner, daß der verschwindend kleine Zuwachs  $dx$  der Strecke  $x$  gleichzeitig auch der verschwindend kleine Zuwachs der Strecke  $b + x$  ist:

$$d(b + x) = dx. \quad (95)$$

Wird die Klammer auf der linken Seite der Gleichung (94) aufgelöst, so folgt

$$db + dx = dx,$$

also

$$db = 0, \quad (96)$$

was sich allerdings auch ohne weiteres aus der Überlegung ergibt, daß eine unveränderliche Größe von vornherein weder Zuwachs noch Verminderung aufweisen kann. Vielmehr beweist die vorstehende Erörterung nur, daß das Differential einer Summe gleich der Summe der Differentiale der einzelnen Glieder ist.

Sind die Grenzen, zwischen welchen die Summierung oder Integration auszuführen ist, vorläufig noch nicht hergestellt, so ist anzusetzen

$$\int dx = x + C. \quad (97)$$

Hierin entspricht die Unveränderliche  $C$  der Strecke  $b$  in der Fig. 225, deren Größe in jedem einzelnen Fall durch eine besondere Untersuchung zu ermitteln ist (vgl. z. B. S. 150).

Aus der Formel (97) geht hervor, daß Differentiation und Integration entgegengesetzte Rechenoperationen sind, da die Zeichen  $\int$  und  $d$  sich bis auf den Festwert  $C$  aufheben.

In dem Dreieck von gleicher Grundlinie und Höhe  $a$  der Fig. 226 hat der verschwindend schmale, also in Wirklichkeit zu einer Linie zusammengeschrumpfte Flächenstreifen von der Höhe  $dx$  die Breite  $x$ . Für den Flächeninhalt des ganzen Dreiecks gilt somit

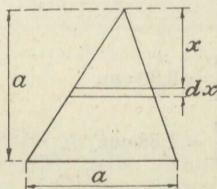


Fig. 226.

$$\int_0^a x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot a^2. \quad (98a)$$

Wird die Summe aller Momente der Flächenstreifen  $x \cdot dx$  in bezug auf die Spitze des Dreiecks gebildet, so folgt nach Formel (86b)

$$\int_0^a x \cdot (x \cdot dx) = \int_0^a x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot a^3. \quad (98b)$$

Faßt man jetzt die Fig. 226 als den Mittelschnitt einer Pyramide von quadratischer Grundfläche auf, so liefert Formel (92)

$$\int_0^a x \cdot (x^2 \cdot dx) = \int_0^a x^3 \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot a^4. \quad (98c)$$

Es kann hiernach ganz allgemein geschlossen werden

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (98d)$$

Umgekehrt gilt also

$$dx^{n+1} = (n+1) x^n \cdot dx \quad (98e)$$

z. B.

$$dx^4 = 4 \cdot x^3 \cdot dx.$$

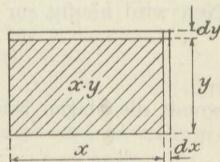


Fig. 227.

Zum genauen Nachweis wird der Fig. 227 entnommen: Die verschwindend kleine Zunahme der Rechteckfläche ist gleich der Summe der beiden verschwindend schmalen Streifen, wobei der doppelt gerechnete kleine Teil zweiter Ordnung von der Größe  $dx \cdot dy$  gegenüber den kleinen erster Ordnung vernachlässigt wird:

$$d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx. \quad (99)$$

Die Integration dieser Formel liefert

$$\int d(x \cdot y) = \int x \cdot dy + \int y \cdot dx$$

oder

$$\int y \cdot dx = x \cdot y - \int x \cdot dy. \quad (100)$$

Setzt man in Gleichung (99)  $x = u$  und  $y = \frac{1}{v} = v^{-1}$ , so folgt

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = u \cdot dv^{-1} + v^{-1} \cdot du;$$

nach Formel (98e) ist nun

$$dv^{-1} = -1 \cdot v^{-2} \cdot dv,$$

also

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}. \quad (101)$$

Man kann also ansetzen mit  $y = x^4$ :

$$\int x^4 \cdot dx = x^4 \cdot x - \int x \cdot dx^4,$$

oder mit Formel (98c)

$$\int x^4 \cdot dx = x^5 - \int x \cdot 4x^3 \cdot dx = x^5 - 4 \cdot \int x^4 \cdot dx$$

mithin

$$5 \cdot \int x^4 \cdot dx = x^5$$

oder

$$\int x^4 \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot x^5 + C.$$

In derselben Weise kann die Formel (98) von jedem beliebigen  $n$  aus auf das folgende  $n+1$  ausgedehnt werden; sie hat also allgemeine Gültigkeit.

Wird der Flächeninhalt eines Quadrates mit  $x$  bezeichnet, so hat die Quadratseite die Länge  $\sqrt{x}$ , und man erhält aus Fig. 228

$$dx = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot d\sqrt{x}$$

oder umgekehrt

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

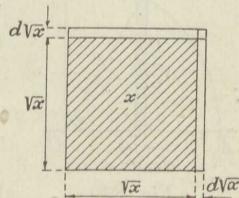


Fig. 228.

Entsprechend gilt für einen Würfel, wenn  $x$  jetzt den Würfelinhalt angibt:

$$d\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Nun wird häufig zur Abkürzung geschrieben

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \text{ usw.}$$

womit die obigen beiden Gleichungen übergehen in

$$dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot dx$$

$$dx^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} \cdot dx.$$

Hieraus kann wieder mit dem Schluß von  $n$  auf  $n+1$  hergeleitet werden, daß die Formel (98e) nicht nur für ganzzahlige Exponenten, sondern auch für alle gebrochenen und negativen Exponenten gilt, allerdings mit Ausnahme des Exponenten  $-1$  (siehe S. 149), für den sich aus Formel (98e) Null ergibt, was von vornherein unwahrscheinlich ist.

In Fig. 229 sei  $x$  ein beliebiger Winkel,  $\overline{OD} = 1$  der zugehörige Halbmesser, dann ist  $\overline{OC} = \cos x$ ,  $\overline{CD} = \sin x$ . Bezeichnet jetzt  $\overline{AB} = dx$  die Zunahme des zu dem Winkel  $x$  gehörigen Bogens in Bogenmaß, so ist  $\overline{AE} = dx \cdot \cos x$  und  $\overline{BE} = dx \cdot \sin x$ . Man entnimmt sogleich der Figur

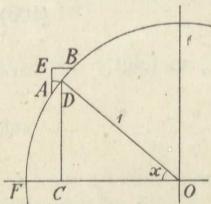


Fig. 229.

$$\overline{CD} = \int_0^x \cos x \cdot dx = \sin x \quad (102)$$

$$\overline{FC} = \int_0^x \sin x \cdot dx = 1 - \cos x. \quad (103)$$

Umgekehrt erhält man

$$d \sin x = \cos x \cdot dx \quad (104)$$

$$d \cos x = -\sin x \cdot dx. \quad (105)$$

Für Fig. 230 gelten nach dem Vorstehenden die eingeschriebenen Bezeichnungen. Damit erhält man für die Summe aller Flächenstreifen

$$\text{Fläche } OAB = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Es ist ferner  $\sin^3 x \cdot dx$  das doppelte Moment des Flächenstreifens in bezug auf die Achse  $OA$ ; also ist die Summe genommen zwischen den Grenzen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  das Moment des Halbkreises in bezug auf den Durchmesser, mithin nach Formel (91)

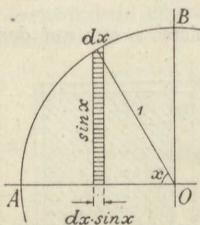


Fig. 230.

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot 1^3 = \frac{2}{3}.$$

Man kann ansetzen

$$d \operatorname{tg} x = d \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \cdot d \sin x - \sin x \cdot d \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x \cdot dx + \sin^2 x \cdot dx}{\cos^2 x}$$

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad (106)$$

oder umgekehrt

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad (107)$$

Entsprechend ergibt sich

$$d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x} \quad (108)$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C. \quad (109)$$

**Beispiel 107.** Zu bestimmen ist die Fläche, das Moment und die Schwerpunktlage eines Parabelabschnittes (Fig. 231).

Die gemeine Parabel ist die Kurve, deren Ordinaten  $y$  und Abszissen  $x$  durch die Gleichung verbunden sind

$$y^2 = 2 \cdot c \cdot x, \quad (110)$$

worin  $2c$  ein bestimmter Zahlenwert ist, dessen Änderung der Kurve eine etwas andere Form gibt. Man zeichnet sie auf, indem nach Wahl oder Festlegung des Grundwertes  $c$  für beliebige Abszissen  $x$  die zugehörigen  $y$  berechnet und danach aufgetragen werden. In der Fig. 231 sind der Einfachheit halber nur die positiven Werte von  $y$  dargestellt; da auch  $+y^2 = (-y) \cdot (-y)$  ist, so gehört zur vollständigen Auftragung noch ein gleicher negativer Zweig der Kurve unterhalb der  $x$ -Achse.

Wird die Kurvenfläche in verschwindend schmale Streifen von der Höhe  $dy$  und der Länge  $a - x$  zerlegt, so gilt

$$F = \int_0^b (a - x) \cdot dy.$$

Hierin ist aus der Kurvengleichung (106) einzusetzen  $x = \frac{y^2}{2c}$ ,

also

$$F = \int_0^b a \cdot dy - \int_0^b \frac{y^2 \cdot dy}{2c},$$

mithin

$$F = a \cdot b - \frac{1}{2c} \cdot \frac{b^3}{3}.$$

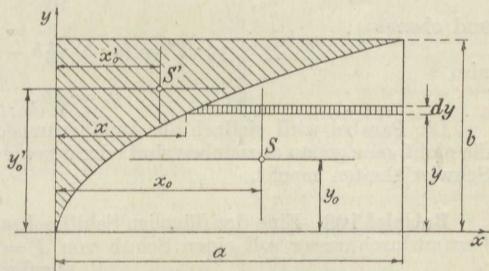


Fig. 231.

Wird jetzt die Kurvengleichung in der Form  $b^2 = 2 \cdot c \cdot a$  angewandt, so folgt

$$F = a \cdot b - \frac{2ca \cdot b}{2c \cdot 3} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b.$$

Das Moment der Fläche in bezug auf die  $x$ -Achse ist entsprechend

$$M_y = \int_0^b (a - x) \cdot y \cdot dy = \int_0^b a \cdot y \cdot dy - \int_0^b \frac{y^3 \cdot dy}{2c}$$

oder

$$M_y = a \cdot \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2c} \cdot \frac{b^4}{4}$$

$$M_y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b^2 - \frac{a \cdot b^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b^2.$$

Durch Division folgt hieraus

$$y_0 = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{1}{4} \cdot a \cdot b^2}{\frac{2}{3} \cdot a \cdot b} = \frac{3}{8} \cdot b. \quad (111a)$$

Denkt man sich jetzt die Kurvenfläche in verschwindend schmale Streifen von der Höhe  $dx$  und der Breite  $y$  zerlegt, so wird das Moment in bezug auf die  $y$ -Achse

$$M = \int_0^a y \cdot dx \cdot x,$$

worin aus der Kurvengleichung einzusetzen ist  $y = \sqrt{2c} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ , was ergibt

$$M_x = \int_0^a \sqrt{2c} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \sqrt{2c} \cdot \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$

Hierin ist wieder die Kurvengleichung in der Form  $b = 2c \cdot a^{\frac{1}{2}}$  einzusetzen, und damit wird

$$M_x = \frac{2}{5} \cdot a^2 \cdot b$$

und durch Division

$$x_0 = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{2}{5} \cdot a^2 \cdot b}{\frac{2}{3} \cdot a \cdot b} = \frac{3}{5} \cdot a. \quad (111b)$$

Für die Restfläche  $F' = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b$  kann man mit Hilfe der Formel (83) ausrechnen

$$x'_0 \cdot F' = (a \cdot b) \cdot \frac{1}{2}a - \left(\frac{2}{3}a \cdot b\right) \cdot \frac{3}{5}a,$$

also

$$x'_0 = \frac{3}{10}a$$

und ebenso

$$y'_0 \cdot F' = (a \cdot b) \cdot \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a \cdot b^2,$$

also

$$y'_0 = \frac{3}{4}b.$$

Die Parabel wird vielfach als Annäherungsform benutzt für Zusammenhänge, die nicht ganz genau anzugeben sind oder deren genaue Berücksichtigung besondere Schwierigkeiten macht.

**Beispiel 108.** Eine dreiflügelige Schiffsschraube nach Fig. 232 von  $D = 4,6$  m Gesamtdurchmesser soll einen Schub von  $P = 24$  t ausüben. Es sei ein Flügel abgebrochen, und zu berechnen ist die dadurch hervorgerufene Sonderbeanspruchung der Schraubenwelle.

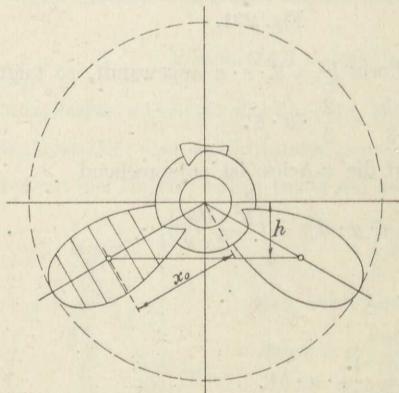


Fig. 232.

Zuerst ist der Angriffspunkt des Wasserdruckes auf eine Flügelfläche zu ermitteln. Ihre Länge wird zu dem Zweck in sechs gleiche Teile zerlegt von  $l = 27,5$  cm Länge und dann werden die Breiten  $b$  der Schraubenflügelprojektion in diesen Teilpunkten aufgemessen. Darauf wird die Fläche  $F$  jedes Streifens als Trapez nach Formel (7) berechnet. Dann ist der Abstand  $x$  von der Wellenachse bis zur Mitte des für die Zwecke der vorliegenden Rechnung jetzt genau genug als Rechteck angesehenen Flächenstreifens aufzuschreiben, wobei der Halbmesser der Schraubennabe zu  $r_0 = 0,65$  m angesetzt wird. Die letzte Fläche wird als Parabelfläche angesehen,

ihr Inhalt  $F$  wird nach Formel (109) berechnet und ihr Schwerpunktsabstand von der Grundlinie nach Formel (111b).

Die Multiplikation  $F \cdot x$  ergibt dann die Flächenmomente in bezug auf die Drehachse.

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	
$b =$	0,60	0,80	0,95	1,00	0,95	0,80	0	m,
$F =$	0,193	0,240	0,268	0,268	0,240	0,147	0	m <sup>2</sup> ,
$x =$	0,74	1,06	1,34	1,62	1,90	2,19		m,
$F \cdot x =$	0,1424	0,2547	0,3592	0,4343	0,4562	0,3141		m <sup>3</sup> .

Die Entfernung des Angriffspunktes  $S$  von der Drehachse ist nun

$$x_0 = \frac{\sum(F \cdot x)}{\sum F} = \frac{1,961}{1,356} = 1,446 \text{ m.}$$

In dem gleichschenkligen Dreieck mit den Basiswinkeln  $\gamma = 30^\circ$  ist dann die Höhe  $h = x_0 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot x_0$ . Damit berechnet sich das Biegemoment, das von dem exzentrischen Schub auf die Welle ausgeübt wird, zu

$$M = \frac{1}{8} \cdot P \cdot \frac{1}{2} x_0 = \frac{1}{8} \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,446 = 17,35 \text{ mt.}$$

**Beispiel 109.** Anzugeben ist das größte Biegemoment sowie der Verlauf des Biegemomentes über die Zapfenlänge bei einem Stirnzapfen von  $l = 17 \text{ cm}$  Länge, der mit  $P = 13\,200 \text{ kg}$  durch die Lagerschale belastet ist.

Das Schema der Belastung gibt Fig. 234 wieder; der Zapfen gilt als ein an einem Ende eingespannter Freitragler, auf den an der Einspannungsstelle die Gegenkraft zur Belastung  $P$  und das dem Lastmoment entgegengesetzte Einspannungsmoment  $M$  einwirkt. Um letzteres zu bestimmen, nimmt man die Belastung  $P$  im Schwerpunkt vereinigt an, also im Abstand  $\frac{1}{2}l$  von der Einspannungsstelle entfernt, und erhält so

$$M = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l, \quad (112a)$$

mit den gegebenen Zahlenwerten

$$M = \frac{1}{2} \cdot 13\,200 \cdot 17 = 112\,000 \text{ cmkg.}$$

Für die Feststellung des Verlaufes wird zuerst die Belastung der Längeneinheit berechnet:

$$p = \frac{P \text{ kg}}{l \text{ cm}}$$

Dann hat die Strecke  $x$  (Fig. 233) die Belastung  $p \cdot x$ , die von dem Endquerschnitt des Trägers um  $\frac{1}{2}x$  entfernt angreift, und es folgt

$$M_x = p \cdot x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot p \cdot x^2.$$

Sein Verlauf wird also durch eine Parabel dargestellt, die Fig. 234 wiedergibt; ihr Scheitel befindet sich am freien Ende der tragenden Länge des Zapfens.

**Beispiel 110.** Ein Hauptträger eines Laufkranes von  $l = 41,6 \text{ m}$  Spannweite wiegt  $p_1 = 41,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ , die darauf befestigte Schiene  $p_2 = 23,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ . Anzugeben ist das durch das Eigengewicht der Konstruktion hervorgerufene Biegemoment und sein Verlauf.

Die Gesamtbelastung ist  $P = (p_1 + p_2) \cdot l \text{ kg}$ , die nach Fig. 235 gleichmäßig über die Trägerlänge verteilt ist. Aus Symmetriegründen ist  $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}P$ . Das größte Biegemoment tritt, ebenfalls aus Symmetriegründen, in der Mitte auf und setzt sich zusammen aus den Momenten der an einer Hälfte angreifenden Kräfte  $N_1$  und  $\frac{1}{2}P$ :

$$M = +N_1 \cdot \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{4}l = \frac{1}{2}P \cdot \left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l\right)$$

oder

$$M = \frac{1}{8} \cdot P \cdot l. \quad (112b)$$

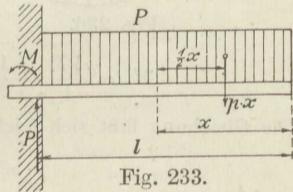


Fig. 233.

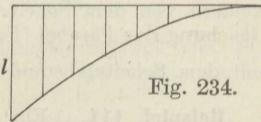


Fig. 234.

Mit den gegebenen Zahlenwerten wird

$$M = \frac{1}{8} \cdot (41,6 + 23,2) \cdot 11,6^2 = 1090 \text{ mkg.}$$

Für einen im Abstände  $x$  von der Auflagerkraft  $N_1$  gelegenen Querschnitt gilt entsprechend den Angaben in Beispiel 104

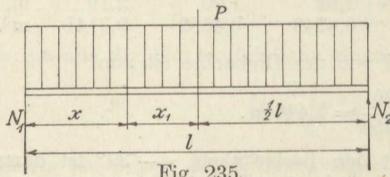


Fig. 235.

$$M_x = N_1 \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{1}{2}x$$

oder

$$M_x = \frac{1}{2} P \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (113)$$

Die Auftragung einiger hiernach berechneter Werte liefert den Linienzug der Fig. 236. Z. B. ist für

$x : l =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$M_x = \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{8} l \cdot \frac{7}{8}$	$\frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{4} l \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} P \cdot \frac{3}{8} l \cdot \frac{5}{8}$	$\frac{1}{8} P \cdot l$	
$M_x : M =$	$\frac{7}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{15}{16}$	$1$

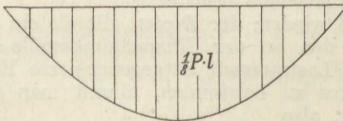


Fig. 236.

Wird aus der Fig. 235 in die Formel (113) eingesetzt  $x = \frac{1}{2}l - x_1$ , so folgt

$$M_x = \frac{1}{2} P \cdot \left(\frac{1}{2}l - x_1\right) \cdot \frac{l - (\frac{1}{2}l - x_1)}{l}$$

oder

$$M_x = \frac{\frac{1}{2}P}{l} \cdot \left(\frac{1}{2}l - x_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}l + x_1\right) = \frac{\frac{1}{2}P}{l} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - x_1^2\right).$$

Die Gleichung läßt sich leicht überführen in

$$x_1^2 = \frac{P \cdot l}{8} - 2 M_x \cdot \frac{l}{P},$$

d. h. werden die  $M_x$  nicht von der wagerechten Achse der Fig. 236 aus gerechnet, sondern von dem Scheitelpunkt der  $M_x$ -Kurve aus, so ergibt sich für  $x_1$  die Gleichung der Parabel [Formel (110)]. Die Momentenkurve ist also eine Parabel mit dem Scheitelabstand  $\frac{P \cdot l}{8}$ .

**Beispiel 111.** Ein Keil ist nach Fig. 237 belastet durch die Kraft  $P = 3 \cdot 9000 \text{ kg}$ ; der Durchmesser der Stange sei  $b = 8,0 \text{ cm}$ , die Stärke der Hülse  $a = 4,0 \text{ cm}$ . Anzugeben ist das größte Biegemoment, das den Keil beansprucht.

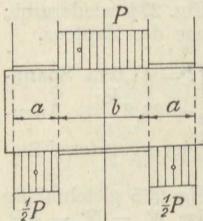


Fig. 237.

Ort des größten Biegemomentes ist aus Symmetriegründen die Mitte. Die auf eine Hälfte einwirkenden, gleichmäßig verteilten Kräfte können in dem Schwerpunkt der Belastungsfläche vereinigt angenommen werden. Es ist dann

$$M = +\frac{1}{2}P \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) - \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{4}b$$

oder

$$M = \frac{1}{4}P \cdot \left(a + \frac{1}{2}b\right). \quad (114)$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man hieraus

$$M = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 9000 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot 8\right) = 54000 \text{ cmkg.}$$

**Beispiel 112.** Die zylindrische Schornsteinsäule der Fig. 42 habe den Durchmesser  $d = 0,4 \text{ m}$ , es ist ferner  $h_1 = 4,0 \text{ m}$ ,  $h_2 = 16,0 \text{ m}$ , der größte Winddruck  $p = 150 \text{ kg/m}^2$ . Anzugeben sind die beiden Stützkkräfte  $P_1$  am Angriffsring der Haltestreben und  $P_2$  am Sockel, sowie der Verlauf des Biegemomentes über die Säule.

Für die Feststellung der Auflagerkräfte kann man sich die gleichförmig verteilte Belastung

$$Q = 0,667 \cdot 150 \cdot (16 + 4) \cdot 0,4 = 800 \text{ kg}$$

im Schwerpunkt vereinigt denken, der vom Sockel um die Strecke  $h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = 10,0 \text{ m}$  entfernt ist. Dann ist in bezug auf den Säulenfuß

$$P_1 \cdot h_2 = Q \cdot h_0,$$

also

$$P_1 = Q \cdot \frac{h_0}{h_2} = 800 \cdot \frac{10}{16} = 500 \text{ kg}.$$

Entsprechend erhält man in bezug auf den Ring der Zugstreben

$$P_2 \cdot h_2 = Q \cdot (h_2 - h_0),$$

also

$$P_2 = Q \cdot \frac{h_2 - h_0}{h_2} = 800 \cdot \frac{16 - 10}{16} = 300 \text{ kg}.$$

An einer beliebigen Stelle im Abstände  $x$  vom Säulenfuß ist

$$M_x = P_2 \cdot x - Q \cdot \frac{x}{h_2 + h_1} \cdot \frac{1}{2} x = Q \cdot x \cdot \left( \frac{h_2 - h_0}{h_2} - \frac{x}{2(h_2 + h_1)} \right).$$

Es ist somit für

$$\begin{array}{cccccc} x = & 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \text{ m} \\ M_x = & 0 & +880 & +1120 & +720 & -320 & 0 \text{ mkg} \end{array}$$

Seinen Größtwert erreicht das Biegemoment an der Stelle, wo die Querkraft durch Null geht, also für

$$P_2 - Q \cdot \frac{x_1}{h_2 + h_1} = 0,$$

woraus mit dem vorstehenden Wert von  $P_2$  folgt

$$x_1 = \frac{1}{h_2} \cdot (h_2 - h_0) \cdot (h_2 + h_1) = \frac{6 \cdot 20}{16} = 7,5 \text{ m}.$$

Dort wird somit

$$M_{max} = 800 \cdot 7,5 \cdot \left( \frac{6}{16} - \frac{7,5}{2 \cdot 20} \right) = 1125 \text{ mkg}.$$

Das Moment wird Null für die Stelle, wo der Klammerausdruck von  $M_x$  verschwindet, also bei

$$x_2 = 2x_1 = 15,0 \text{ m}.$$

Ein zweiter Größtwert des negativen Momentes befindet sich an der Angriffsstelle von  $P_1$ .

**Beispiel 113.** Anzugeben ist der günstigste Stützenabstand  $a$  eines gleichmäßig über die ganze Länge  $l$  mit der Kraft  $P$  belasteten Trägers (Fig. 238).

Aus Symmetriegründen ist wieder  $N_1 = N_2 = \frac{1}{2}P$ . Der Kragarm von der Länge  $c$  entspricht dem Beispiel 104 und man erhält als größtes

Biegemoment unter der Belastung  $p = \frac{P}{l} \text{ kg}$  über der Stütze:

$$M_1 = + \left( \frac{P}{l} \cdot c \right) \cdot \frac{1}{2} c = + \frac{P \cdot c^2}{2 \cdot l}.$$

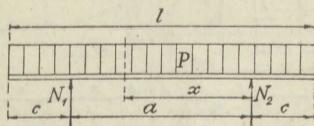


Fig. 238.

Von der Stütze an nimmt das Biegemoment ab, und an einer beliebigen Stelle der Strecke  $a$  im Abstand  $x$  von  $N_2$  beträgt es

$$M_x = -N_2 \cdot x + \frac{P}{l} \cdot (c + x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (c + x) = \frac{1}{2} P \cdot \left( -x + \frac{(c + x)^2}{l} \right).$$



Den kleinsten Betrag erreicht es aus Gründen der Symmetrie in der Mitte für  $x = \frac{1}{2}a$ . Sein Wert ist dort mit  $l = 2c + a$ :

$$M_2 = \frac{1}{2}P \cdot \left( -\frac{1}{2}a + \frac{(c + \frac{1}{2}a)^2}{2c + a} \right) = \frac{1}{2}P \cdot \left( -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \left( c + \frac{1}{2}a \right) \right)$$

oder

$$M_2 = \frac{1}{4}P \cdot \left( -\frac{1}{2}a + c \right).$$

Am vorteilhaftesten ist der Träger unterstützt, wenn die Absolutwerte des positiven Momentes  $M_1$  und des negativen  $M_2$  einander gleich sind:

$$\frac{P \cdot c^2}{2l} = \frac{1}{4}P \cdot \left( -c + \frac{1}{2}(l - 2c) \right).$$

Wird durch  $\frac{1}{2}P$  gehoben, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$c^2 + c \cdot l = \frac{1}{4}l^2.$$

Die linke Seite wird zu einem vollständigen Quadrat ergänzt, indem man beiderseits  $\left(\frac{l}{2}\right)^2$  hinzufügt, und man erhält so

$$c = -\frac{1}{2}l \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + \frac{l^2}{4}}$$

oder

$$c = \frac{l}{2} \left( -1 \pm \sqrt{2} \right) = 0,2071 l,$$

wenn nur das positive Vorzeichen der Wurzel beachtet wird. Setzt man diesen Wert in die Gleichung für  $M_1$  oder  $M_2$  ein, so wird

$$M_1 = M_2 = 0,0235 \cdot P \cdot l,$$

während bei Unterstützung an den Enden gemäß Formel (112b) ist

$$M = 0,125 \cdot P \cdot l.$$

Die Beanspruchung beträgt also bei der günstigsten Anordnung nur den 5,53ten Teil.

Häufig führt man die Ermittlung der Lage des Schwerpunktes einer Fläche auf zeichnerischem Wege aus. Man zerlegt die Fläche in einzelne Teilstücke, deren Schwerpunktlage leicht angegeben werden kann, und betrachtet den Flächeninhalt jedes Teilstückes als eine Kraft, die in seinem Schwerpunkt angreift. Die Einzelkräfte sind einander parallel, und es führt dann die S. 56 angegebene Aufzeichnung mit Hilfe

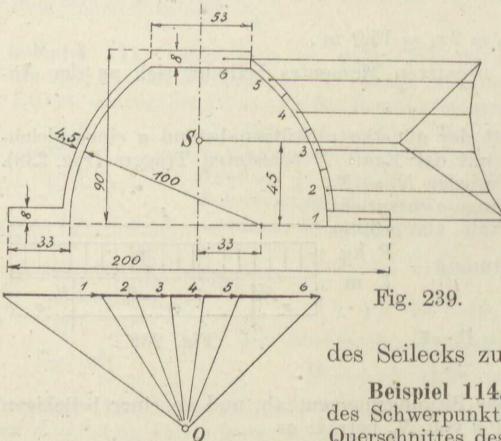


Fig. 239.

des Seilecks zum Ziel.

**Beispiel 114.** Zu ermitteln ist die Lage des Schwerpunktes des in Fig! 239 dargestellten Querschnittes des Belageisens Nr. 9.

Man zerlegt die eine Hälfte des Querschnittes etwa wie in der Figur ausgeführt, in 6 Teile, die genau genug als Rechtecke aufgefaßt werden können und deren

Einzelschwerpunkte sofort eingetragen werden können. Dann berechnet man die Flächeninhalte

Nr.	1	2	3	4	5	6
$F =$	$3,3 \cdot 0,8$	$2,2 \cdot 0,45$	$2,2 \cdot 0,45$	$0,2 \cdot 0,45$	$2,2 \cdot 0,45$	$2,65 \cdot 0,8 \text{ cm}^2$
$=$	2,64	0,99	0,99	0,99	0,99	2,12 $\text{cm}^2$

und trägt die  $F$  in ziemlich großem Maßstabe, mindestens  $1 \text{ cm}^2 = 5 \text{ mm}$ , der Reihe nach aneinander an, wählt einen beliebigen Pol  $O$  und zieht die Polstrahlen. Durch die Schwerpunkte der Teilflächen werden Parallelen zur Richtung der  $F$  gezogen, die im übrigen beliebig — nur nicht genau oder annähernd parallel zur Mittellinie des Querschnittes — angenommen werden kann. Zwischen diese Parallelen ist das Seileck parallel zu den Polstrahlen einzutragen. Die durch den Schnittpunkt der letzten freien Seillinien gelegte Parallele zu den Kraftlinien gibt auf der Symmetrieachse des Querschnittes den Schwerpunkt  $S$  an.

Hat die Fläche keine Symmetrieachse, so ist das Kraft- und Seileck zweimal nach verschiedenen Richtungen zu zeichnen. Der Kreuzungspunkt der beiden so erhaltenen Schwerlinien ist der Schwerpunkt.

Die doppelte Zeichnung kann auf Grund folgender Überlegung vermieden werden:  $S_1$  und  $S_2$  seien die Schwerpunkte zweier Flächenteile  $F_1$  und  $F_2$ , die von der Bezugsachse die Abstände  $x_1$  und  $x_2$  haben. Der Gesamtschwerpunkt der zusammengesetzten Fläche  $F_1 + F_2$  sei  $S$  im Abstände  $x_0$  von der Bezugsachse. Dann gilt nach Formel (83)

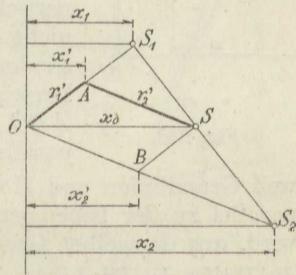


Fig. 240.

$$x_0 = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{F_1 + F_2} = \frac{F_1}{F_1 + F_2} \cdot x_1 + \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot x_2.$$

In den gleichen Verhältnissen wie hier die Strecken  $x_1$  und  $x_2$  werden, wie Fig. 240 angibt, die von einem beliebigen Pol  $O$  nach den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$  gezogenen Strahlen  $r_1$  und  $r_2$  durch Parallele zu der Bezugsachse geteilt. Man erreicht somit den Gesamtschwerpunkt  $S$  durch den Linienzug  $OAS$ . Das Verfahren kann für drei und mehr Punkte in derselben Weise wiederholt werden, und man erhält so die Vorschrift<sup>24)</sup>: Die von einem beliebigen Pol  $O$  aus nach den Einzelschwerpunkten gezogenen Strahlen  $r_1, r_2 \dots$  werden vom Pol aus

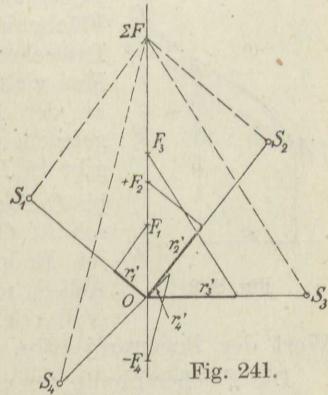


Fig. 241.

im Verhältnis  $\frac{F_1}{\sum F}, \frac{F_2}{\sum F} \dots$  geteilt; die Teilstrecken werden dann zu einem offenen Vieleck zusammengesetzt, dessen Endpunkt den Schwerpunkt der ganzen Fläche darstellt.

<sup>24)</sup> Graßmann 1844.

Die Teilung der Strahlen kann ebenfalls zeichnerisch vorgenommen werden (Fig. 241). Man zieht durch  $O$  eine Achse, die mit keinem der Strahlen  $r$  zusammenfällt, und trägt darauf die einzelnen Flächeninhalte von  $O$  aus in einem passenden Längenmaßstab auf, addiert sie mit dem Zirkel und verbindet den Endpunkt  $\Sigma F$  mit allen Schwerpunkten  $S$ , zieht darauf durch die Punkte  $F_1, F_2 \dots$  Parallele zu diesen Verbindungslinien, die von den Strahlen  $r$  die gesuchten Stücke  $r$  abschneiden, wie aus der Ähnlichkeit der zugehörigen Strecken folgt. Die in Fig. 241 gestrichelten Linien brauchen nicht gezogen zu werden.

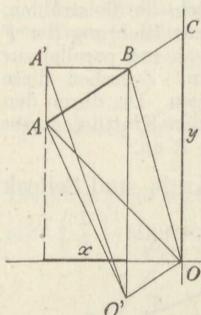


Fig. 242.

Auch die Ermittlung der Flächeninhalte  $F_1, F_2 \dots$  und der Schwerpunkte  $S_1, S_2 \dots$  kann rein zeichnerisch stattfinden. Man zerlegt die Gesamtfläche nicht in Rechtecke, wie etwa in Fig. 217 oder 231, sondern von einem zweckmäßig gewählten Pol aus in Dreiecke oder allgemein Flächenausschnitte<sup>25)</sup>. Ist  $ABO$  ein solches Dreieck (Fig. 242), und wird  $OO'$  parallel  $AB$  gezogen, so ist das Dreieck  $ABO' \cong ABO$ , weil Grundlinien und Höhen dieselben sind, und wenn noch  $A'B = x$  parallel zu der beliebigen durch den Pol  $O$  gelegten  $x$ -Achse gezogen wird, aus demselben Grunde Dreieck  $A'BO' \cong ABO'$ . Demnach stellt die Hälfte des Produktes  $\overline{A'B} \cdot \overline{OC} = x \cdot y$  den Inhalt des Dreiecks  $ABO$  dar.

Ist  $AB$  nicht ein geradliniges Stück der gegebenen Flächenbegrenzung sondern ein gekrümmtes (Fig. 243), so kann der über  $AB$  stehende Bogen als ein Parabelstück aufgefaßt werden, dessen Flächeninhalt nach Formel (107)  $\frac{2}{3}$  des Inhaltes eines Dreieckes von gleicher Grundlinie und Höhe ist. Man zieht also parallel zur Sehne  $AB$  eine Tangente an den Bogen, teilt den zwischen beiden Linien gelegenen Abschnitt der  $y$ -Achse in drei Teile und gibt in Richtung der Bogenwölbung ein Teilstück bis  $C$  zu; dann ist  $\overline{OC} = y$  für den Flächenausschnitt  $OAB$ . Die Teilung kann stets ohne Fehler im Endergebnis nach Augenmaß erfolgen. Die Achsen müssen so gewählt werden, daß  $x$  nicht gleich Null oder bei Bögen gleich dem kleinstmöglichen Wert der Bogenprojektion wird, weil sich dann  $y = \infty$  ergibt.

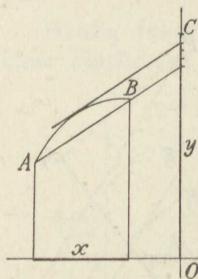


Fig. 243.

Die Flächeninhalte der einzelnen Ausschnitte, die von den durch  $O$  gezogenen Strahlen gebildet werden, erhält man nach der Konstruktion der Fig. 244: Auf der  $x$ -Achse wird im Abstände 2 ein Punkt  $O'$  festgelegt, von dem aus die Strahlen  $C_1, C_2, C_3$  nach den Endpunkten der  $y$  gezogen werden. Parallel zu  $O'C$  wird durch  $A$  eine Gerade bis zur

<sup>25)</sup> Meh m ke, Widmungsschrift an Otto Mohr, 1916.

Senkrechten  $\overline{BB'}$  gelegt, sie schneidet auf  $\overline{BB'}$  von der  $x$ -Achse aus die Länge  $\overline{B'F}$  ab, die den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABO$  darstellt. Denn es ist

$$\frac{\overline{B'F}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{O'O}} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{x_1} = \frac{y_1}{2}$$

mithin

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot y_1 \cdot x_1.$$

Entsprechend ergeben sich  $\overline{D'F_2} = F_2$  des Ausschnittes  $BDO$  und  $\overline{OF_3} = F_3$  des Ausschnittes  $DEO$ .

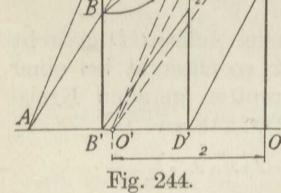


Fig. 244.

Für das Dreieck  $ABO$  ist das  $\frac{3}{2}$ fache des Schwerpunktsabstandes von  $O$  die Strecke  $\overline{OG}$ , wenn  $G$  die Dreiecksseite  $AB$  halbiert (Fig. 245). Für den Ausschnitt  $AB$  erhält man das  $\frac{3}{2}$ fache des Schwerpunktsabstandes von  $O$  mit ausreichender Genauigkeit, wenn  $GS_1$  parallel zu  $OH$  gezogen wird —  $H$  ist der Berührungspunkt der zur Sehne  $AB$  parallelen Tangente an die Kurve  $AB^{25)}$ .

Man zeichnet so alle Schwerpunktsabstände um das  $\frac{3}{2}$ fache vergrößert und verkleinert schließlich den letzten  $OS$  des Kurvenzuges  $OA \dots S$  in Fig. 240 entsprechend um  $\frac{1}{3}$ , um die wirkliche Lage des Gesamtschwerpunktes zu bestimmen.

**Beispiel 115.** Zu bestimmen ist der Schwerpunkt der in Fig. 246 gezeichneten Querschnittsfläche eines Lasthakens.

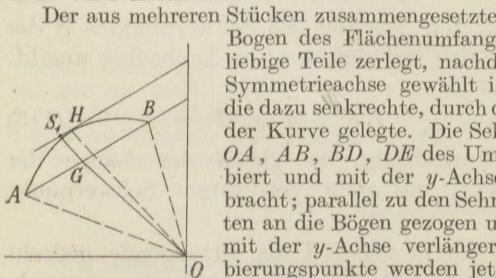


Fig. 245.

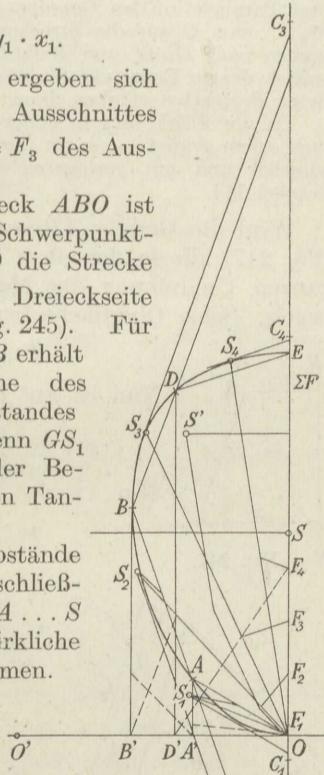


Fig. 246.

Der aus mehreren Stücken zusammengesetzte Bogen des Flächenumfanges wird in vier beliebige Teile zerlegt, nachdem als  $y$ -Achse die Symmetrieachse gewählt ist und als  $x$ -Achse die dazu senkrechte, durch den Anfangspunkt  $O$  der Kurve gelegte. Die Sehnen der Teilstücke  $OA, AB, BD, DE$  des Umfanges werden halbiert und mit der  $y$ -Achse zum Schnitt gebracht; parallel zu den Sehnen werden Tangenten an die Bögen gezogen und bis zum Schnitt mit der  $y$ -Achse verlängert. Durch die Halbierungspunkte werden jetzt Parallele zu den Verbindungsgeraden der Tangentenberührungspunkte mit dem Anfangspunkt  $O$  gezogen, die die Tangenten in den Punkten  $S_1, S_2, S_3, S_4$  treffen, welche mit dem Anfangspunkt  $O$  verbunden werden. Nun werden die Abschnitte der  $y$ -Achse zwischen den Sehnen und Tangenten gedrittelt und ein Drittel über die Tangente hinaus bis

zu den Punkten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  abgetragen und die Teilpunkte  $A, B, D$  des Umfanges auf die  $x$ -Achse als  $A', B', D'$  projiziert. An beliebiger Stelle der  $x$ -Achse wird der Punkt  $O'$  gewählt, worauf man durch die Punkte  $O', A', B', D'$  die Parallelen zu  $O'C_1, O'C_2, O'C_3, O'C_4$  bis zum Schnitt mit der projizierenden Geraden des Endpunktes des betreffenden Umfangsteiles zieht; sie schneiden darauf die Größen der Flächenstücke der zugehörigen Querschnittsausschnitte in einem beliebigen Maßstab ab, die auf die  $y$ -Achse bis  $F_1, F_2, F_3, F_4$  übertragen werden; ihre Addition ergibt den Punkt  $\Sigma F$ . Durch die Punkte  $F_1, F_2 \dots$  der  $y$ -Achse werden jetzt Parallele zu den Geraden  $S_1F$  usw. gelegt, die auf den Verbindungslinien  $OS_1 \dots$  von  $O$  aus die Strecken  $r'_1, r'_2, r'_3, r'_4$  abschneiden. Diese Strecken  $r'$  werden nach Größe und Richtung hintereinander zu dem Zug  $OS'$  zusammengesetzt, dessen Endpunkt  $S'$  auf die Symmetrieachse projiziert wird. Zwei Drittel dieser Projektion ergeben dann den Schwerpunktsabstand  $OS$ .

Da die Fläche nur in einige wenige Teile zerlegt wird — drei Teile hätten auch schon genügt —, so ist die Ausführung der Zeichnung ohne jede Rechnung schneller und mit geringerem Raumbedarf zu erledigen, als etwa die nach Beispiel 114.

Wird die Gerade  $AB$  von der Länge  $l$  um eine Achse  $CD$  gedreht (Fig. 247), die in derselben Ebene wie  $AB$  liegt, so entsteht bei einer ganzen Umdrehung der Mantel eines abgestumpften geraden Kreiskegels. Seine Oberfläche berechnet sich nach Fig. 248 zu

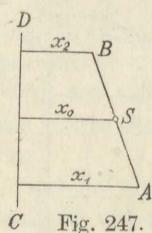


Fig. 247.

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_2 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_1 \cdot l_1.$$

Nun ist aus ähnlichen Dreiecken

$$l_1 : l = 2\pi x_1 : 2\pi \cdot (x_2 - x_1),$$

$$l_2 : l = 2\pi x_2 : 2\pi \cdot (x_2 - x_1),$$

also

$$\begin{aligned} F &= \pi \cdot l \cdot \left( x_2 \cdot \frac{x_2}{x_2 - x_1} - x_1 \cdot \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right) \\ &= \pi \cdot l \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = 2 \cdot \pi \cdot l \cdot \frac{x_2 + x_1}{2}. \end{aligned}$$

Nach Fig. 248 ist aber

$$\frac{x_2 + x_1}{2} = x_0,$$

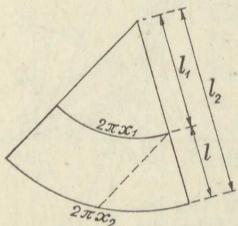


Fig. 248.

wenn  $x_0$  den Abstand des Schwerpunktes  $S$  der erzeugenden Geraden von der Drehachse angibt. Damit wird

$$F = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot l. \quad (115)$$

Die entstandene Umdrehungsfläche ist gleich der Länge der erzeugenden Linie multipliziert mit dem von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Weg<sup>26)</sup>.

Ist eine beliebige ebene Kurve  $AB = l$  als Erzeugende gedreht worden (Fig. 249), deren Schwerpunkt  $S$  von der Drehachse den Abstand  $x_0$  hat, so liefert das verschwindend kleine Kurvenstückchen  $dl$ ,

<sup>26)</sup> Pappus, Collectiones mathematicae, etwa 280; Guldin, De centro gravitatis, 1635.

das als geradlinig angesehen werden kann, bei einer ganzen Umdrehung die Oberfläche  $dF = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl$  und die Gesamtläche ist

$$F = \int_0^l 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl = 2\pi \int_0^l x \cdot dl.$$

Nach Gleichung (84) kann nun die Momentensumme der Teile ersetzt werden durch das Moment aus der Länge der ganzen Kurve und ihrem Schwerpunktsabstand  $x_0$ , so daß man wieder Formel (115) erhält.

**Beispiel 116.** Steht die erzeugende Gerade senkrecht zur Drehachse, so liefert die Drehung eine ebene Kreisringfläche, deren Inhalt mit den Bezeichnungen der Fig. 250 beträgt

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$$

oder gemäß der obigen Darlegung

$$F = \pi \cdot d_m \cdot \delta,$$

worin einzusetzen ist

$$d_m = \frac{1}{2} \cdot (D + d).$$

Die Formel (116) ist für die Zahlenrechnung die bequemere. Gegeben sei z. B. ein Gasrohr von  $1\frac{1}{4}''$  lichter Weite, 3,7 mm Stärke und 5 m Länge; zu bestimmen sei sein Gewicht.

Man erhält sogleich

$$F = \pi \cdot (2,54 \cdot \frac{1}{4} + 0,37) \cdot 0,37 \text{ cm}^2.$$

Nun ist nach S. 93  $G = F \cdot l \cdot \gamma$ , worin  $F$  in  $\text{cm}^2$ ,  $l$  in dm und  $\gamma = 7,80$  für Schweiß Eisen in  $\text{kg/dm}^3$  einzusetzen ist. Mithin wird

$$G = 3,14 \cdot 3,545 \cdot 0,37 \cdot 0,50 \cdot 7,80 = 16,1 \text{ kg}.$$

**Beispiel 117.** Anzugeben ist die mittlere Stärke und die Länge eines dicht aufgerollten Ledertreibriemens nach Fig. 251.

Die Stärke von Ledertreibriemen schwankt wegen der Änderung der Lederdicke, die am Halsende des Kroupens im Durchschnitt 1 mm stärker ist als am Schwanzende, und weil die Leimstellen gewöhnlich verstärkt werden, nicht unbedeutend. Die mittlere Stärke wird gewonnen, indem man die Breite  $\delta$  des dicht gewickelten Riemenpaketes an zwei Stellen mißt, etwa  $\delta_1 = 122$  mm und  $\delta_2 = 123$  mm, und dann den Mittelwert durch die Anzahl der Lagen des Riemens, etwa  $i = 24$ , dividiert. Damit wird die mittlere Riemenstärke

$$s_m = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\delta_1 + \delta_2)}{i} = \frac{122,5}{24} \approx 5,1 \text{ mm}.$$

Nun werden die Durchmesser des Paketes ebenfalls zweimal gemessen, z. B.

$$D_1 = 233 \text{ mm}, \quad D_2 = 235 \text{ mm}, \quad \text{also} \quad D = 234 \text{ mm}, \\ d_1 = 111 \text{ ,, ,, } \quad d_2 = 112 \text{ ,, ,, } \quad \quad \quad d = 111,5 \text{ ,, ,, }$$

damit wird

$$d_m = \frac{1}{2} \cdot (234 + 111,5) \text{ mm},$$

ferner ist

$$\delta = i \cdot s_m.$$

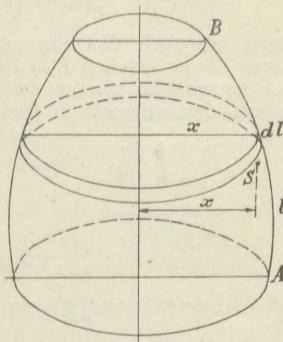


Fig. 249.

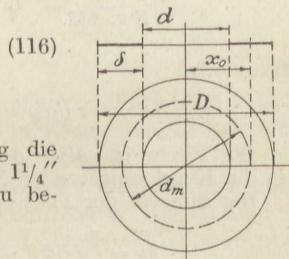


Fig. 250.

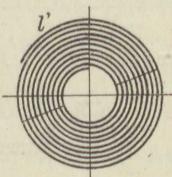


Fig. 251.

Die Gesamtlänge der vollen Ringe ist somit

$$l = \frac{F}{s} = \pi \cdot d_m \cdot i = 3,14 \cdot \frac{1}{2} \cdot 345,5 \cdot 24 = 13\,025 \text{ mm.}$$

Dazu ist noch das überschießende Stück  $l' = 52 \text{ mm}$  aufzumessen, und die ganze Länge beträgt  $L = 13,077 \text{ m}$ .

Sie wird so genauer und schneller bestimmt als durch unmittelbares Aufmessen des aufgerollten Riemens mit Hilfe des Meterstabes.

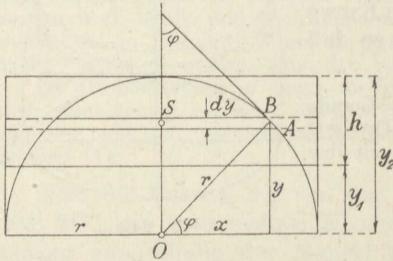


Fig. 252.

**Beispiel 118.** Der Flächeninhalt und das Moment der Fläche einer Kugelkalotte oder Kugelzone ist zu bestimmen (Fig. 252).

Die Fläche des sehr schmalen Streifens von der Länge  $AB = dl$  ist

$$dF = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl.$$

Nun ist  $x = r \cdot \cos \varphi$ , also

$$dF = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot dl$$

oder, da  $dl \cdot \cos \varphi = dy$  ist,

$$dF = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dy.$$

Mithin wird

$$F = \int_{y_1}^{y_2} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dy = 2 \cdot \pi \cdot r \int_{y_1}^{y_2} dy = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (y_2 - y_1) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h.$$

Die Fläche ist gleich der des von denselben Ebenen abgetrennten Stückes des die Kugel umgebenden Zylindermantels.

Das Moment der Fläche in bezug auf den Mittelpunkt der Kugel ist

$$M = \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dF = \int_{y_1}^{y_2} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot y \cdot dy = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dy$$

oder gemäß Formel (98a)

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_2^2 - y_1^2) = \pi \cdot r \cdot (y_2^2 - y_1^2).$$

Das ist auch das Moment der die Kugel umgebenden Zylinderfläche von den gleichen Abständen  $y_2$  und  $y_1$ , denn dafür gilt

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1) \cdot (y_2 - y_1) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot (y_2 + y_1).$$

Für die Halbkugeloberfläche folgt hieraus mit  $y_1 = 0$  und  $y_2 = r$

$$F = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r = \frac{\pi}{2} \cdot d^2$$

und

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{2} r = \pi \cdot r^3 = \frac{\pi}{8} \cdot d^3.$$

Für die ganze Kugel vom Durchmesser  $d$  gilt somit als Oberfläche

$$F = \pi \cdot d^2,$$

das ist das Vierfache einer ebenen Kreisfläche von gleichem Durchmesser.

**Beispiel 119.** Das Auslaßventil einer Gasmaschine, die mit dem Höchstdruck  $p_1 = 23 \text{ at}$  arbeitet, hat den Außendurchmesser  $D = 175 \text{ mm}$  und die Sitzbreite  $b = 5 \text{ mm}$  (Fig. 253). Anzugeben ist der Druck  $p_2$ , mit dem die Sitzfläche angepreßt wird.

Die Druckkraft ist gegeben durch die beiden Ausdrücke

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p_1 = \pi \cdot (D - b) \cdot b \cdot p_2.$$

Hieraus folgt

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{D^2}{4b \cdot (D - b)} = \frac{p_1 \cdot D}{4 \cdot b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{D}} \approx \frac{p_1 \cdot D}{4 \cdot b} \cdot \left(1 + \frac{b}{D}\right),$$

also

$$p_2 = \frac{23}{4} \cdot \frac{17,5}{0,5} \cdot \left(1 + \frac{0,5}{17,5}\right) = 207 \text{ at.}$$

Häufig kann man das zweite Glied des Klammerausdruckes vernachlässigen; man erhält dann im vorliegenden Fall

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot D}{4 \cdot b} = \frac{23 \cdot 17,5}{4 \cdot 0,5} = 201 \text{ at,}$$

nur um 3 v. H. zu klein.

Wird das Rechteck  $ABCD$  der Fig. 254 um eine zur Seite  $BD$  parallele, in derselben Ebene liegende Achse gedreht, so entsteht ein Hohlzylinder vom Inhalt

$$V = \pi \cdot h \cdot (x_1^2 - x_2^2) = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

oder

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot h \cdot b.$$

Der Inhalt des Umdrehungskörpers ist gleich dem Inhalt der erzeugenden ebenen Fläche multipliziert mit dem Wege, den ihr Schwerpunkt beschreibt.

Man kann sich nun jede beliebige ebene Fläche zusammengesetzt denken aus entsprechend vielen sehr kleinen Rechtecken. Bezeichnet  $x$  den Abstand eines solchen Rechteckes  $dF$  von der Drehachse so ergibt sich bei einer vollen Umdrehung der Anteil des Körperinhaltes

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dF$$

und der Inhalt des ganzen Körpers wird

$$V = \int 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dF = 2\pi \cdot \int x \cdot dF.$$

Nun ist nach Formel (83)

$$\int x \cdot dF = F \cdot x_0,$$

mithin gilt ganz allgemein

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_0 \cdot F. \quad (117)$$

**Beispiel 120.** Anzugeben ist der Rauminhalt eines Kugelballons von  $d = 14,2$  m Durchmesser.

Nach Formel (91) ist das Moment der Halbkreisfläche in bezug auf den Durchmesser

$$M = x_0 \cdot F = \frac{1}{12} d^3,$$

damit ergibt sich der Kugelinhalt zu

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{12} \cdot d^3 = \frac{\pi}{6} \cdot d^3.$$

Zahlenmäßig ergibt sich

$$V = \frac{22 \cdot 14,2^3}{7 \cdot 6} = \frac{11}{21} \cdot 2863,3 \approx 1500 \text{ m}^3.$$

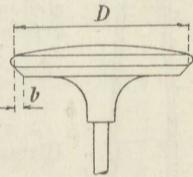


Fig. 253.

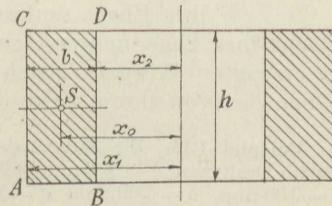


Fig. 254.

**Beispiel 121.** Der Schaft eines Fabrikschornsteines ist nach Fig. 255 ausgeführt. Gegeben ist  $H = 30$  m,  $d_0 = 1,00$  m,  $\delta_1 = 0,18$  m, also  $D_0 = 1,36$  m. Gewählt wird die Zunahme des Halbmessers für 1 m Höhe zu  $m = 2$  cm, so daß  $D_u = D_0 + 2 \cdot m \cdot H = 1,36 + 1,2 = 2,56$  m wird.

Für die einzelnen Trommeln gilt so die folgende Zusammenstellung. Nach Formel (117) ist für eine Trommel mit den angegebenen Bezeichnungen  $V = \pi \cdot d_m \cdot h \cdot \delta$ , worin einzusetzen ist  $d_m = \frac{1}{2} \cdot (d_0 + d_u) + \delta$  oder, wenn geschrieben wird  $d_u + \delta = D_u$ :

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot h \cdot \delta \cdot (d_0 + D_u)$$

Hieraus ergeben sich die Trommelgewichte durch Multiplikation mit dem Einheitsgewicht  $\gamma = 1,8 \frac{t}{m^3}$ .

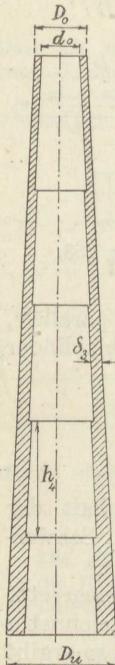


Fig. 255.

Nr.	1	2	3	4	5
$h =$	7,0	6,0	6,0	6,0	5,0 m
$\delta =$	0,18	0,25	0,30	0,38	0,51 m
$D_0 =$	1,36	1,64	1,88	2,12	2,36 m
$D_u =$	1,64	1,88	2,12	2,36	2,56 m
$d_0 =$	1,00	1,14	1,28	1,40	1,34 m
$V =$	5,23	7,12	9,67	13,33	15,63 m
$G =$	9,40	12,81	17,41	24,00	28,12 t

Der Gesamtrauminhalt des Mauerwerkes ist hiernach  $\Sigma V = 50,98 m^3$  und das Gesamtgewicht  $\Sigma G = 91,74 t$ .

Eine leicht einzusehende Erweiterung des Guldinschen Satzes ist der folgende:

Bewegt sich eine ebene Fläche im Raum derart, daß einer ihrer Punkte beständig auf einer beliebigen Kurve und ihre Ebene senkrecht zu dieser Kurve bleibt, ohne daß die Fläche ihre Lage in der eigenen Ebene ändert, so ist der Inhalt des so erzeugten Körpers gleich dem Produkt aus der Fläche und der Länge des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Weges.

**Beispiel 122.** Die Magnetspule einer Dynamomaschine bestehe aus besponnenem Draht von  $\delta = 1,2$  mm äußerem Durchmesser. Es ist ferner gemäß Fig. 256  $a = 190$  mm,  $b = 260$  mm,  $d = 84$  mm,  $r = 20$  mm,  $h = 156$  mm, so daß auf der Wicklungsbreite  $d$  70 Drähte und auf der Höhe  $h$  130 Drähte nebeneinander liegen. Anzugeben ist die gesamte Drahtlänge.

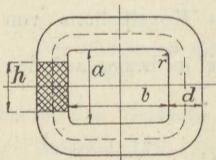


Fig. 256.

In Drahtstärken gemessen ist  $F = d \cdot h = 70 \cdot 130$ . Der Weg des Schwerpunktes der Fläche  $F$  ist

$$s_0 = a - 2r + b - 2r + 2\pi \cdot (r + \frac{1}{2}d) = a + b + 2r(\pi - 4) + \pi \cdot d$$

also mit den Zahlenwerten

$$s_0 = 190 + 260 + 40 \cdot 0,8584 + 3,1416 \cdot 84 = 748,23 \text{ mm.}$$

Damit wird

$$l = 748,23 \cdot 70 \cdot 130 = 6\,808\,900 \text{ mm} \approx 6810 \text{ m.}$$

Gewöhnlich ist die Länge  $l$  des Drahtes gegeben und die Wicklungstiefe  $d$  aus den übrigen gegebenen Massen der Spule zu berechnen.

## 14. Formen des Gleichgewichtes.

Wird ein fester Körper in einem Punkt  $A$  festgehalten oder von einer frei drehbaren Achse getragen, deren Projektion auf die Zeichenebene durch  $A$  dargestellt wird (Fig. 257), so muß dort eine Trag- oder Widerstandskraft  $N$  angreifen, die allen anderen auf den Körper einwirkenden Kräften das Gleichgewicht hält, wenn er in Ruhe bleiben soll. In vielen praktischen Fällen sind die betreffenden Kräfte die Eigengewichte des Körpers und der etwa darauf befindlichen Lasten, die nach Abschnitt 13 in dem gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  als Gesamtgewicht  $G$  vereinigt werden können.

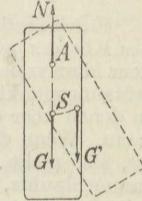


Fig. 257.

Die beiden Kräfte  $N$  und  $G$  sind nach Absatz 5 nur dann im Gleichgewicht, wenn sie gleich groß sind und in dieselbe Wirkungslinie fallen. Ist nun der Körper nach irgendeiner Seite so gedreht worden, daß sich der Schwerpunkt  $S$  nicht unter dem Aufhängungspunkt oder der Drehachse  $A$  in derselben lotrechten Geraden befindet, so bilden die beiden Kräfte  $N$  und  $G$  ein Kräftepaar, das in Fig. 257, wo der Schwerpunkt unterhalb der Unterstütsungsstelle liegt, bestrebt ist, den Körper wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen. Man bezeichnet sie aus dem Grunde als sichere oder stabile Gleichgewichtslage.

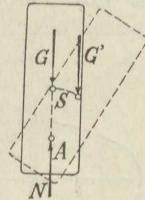


Fig. 258.

In der ausgezogenen Stellung der Fig. 258 befindet sich der Körper ebenfalls im Gleichgewicht, da  $G$  und  $N$  gleich sind und in dieselbe Wirkungslinie fallen. Wird jedoch der Körper durch irgendeine Einwirkung auch nur ein wenig aus der Gleichgewichtslage abgelenkt, so wirkt das entstandene Kräftepaar ( $G'N'$ ) der gestrichelten Lage dahin, daß er sich immer weiter aus der anfänglichen Gleichgewichtslage entfernt und schließlich in die Ruhelage der Fig. 257 übergeht. Die zweite Gleichgewichtslage, bei der sich der Schwerpunkt über der Unterstütsungsstelle befindet, heißt die unsichere oder auch labile. Sie ist für die Zwecke der Bau- und Maschinenpraxis im allgemeinen unbrauchbar, da die kleinste Ver-rückung schon genügt, um den Körper völlig um-schlagen zu lassen.

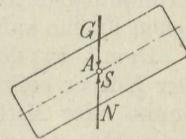


Fig. 259.

Fällt der Schwerpunkt mit dem Unterstütsungs-punkt zusammen oder in die Drehachse (Fig. 259), so sind beide Kräfte  $G$  und  $N$  in jeder Lage des Körpers im Gleichgewicht und es kann sich kein Kräftepaar herausbilden, das etwa eine Drehung bewirkt. Auch dieser Fall des unentschiedenen Gleichgewichtes muß im allgemeinen vermieden werden, da er einerseits bei der geringsten Verschiebung oder Ver-änderung der Größe einer Last in den des unsicheren Gleichgewichtes übergehen kann und andererseits auch immer verlangt wird, daß der Körper eine bestimmte, jeweilig vorgeschriebene Gleichgewichtslage

unter allen Umständen beibehält. Es ist also nötig, daß der Körper mit einer gewissen Sicherheit im stabilen Gleichgewicht bleibt.

Wird der irgendwie gekrümmte Körper durch eine wagerechte Ebene unterstützt, so muß nach den Darlegungen S. 33 der Gegendruck  $N$  sowohl senkrecht zur Ebene stehen als auch zu dem Oberflächenelement des Körpers, in dem die Stützung stattfindet.

Einen bestimmten, senkrecht zur Stützebene durch den Unterstützungspunkt  $A$  des Körpers geführten ebenen Schnitt geben z. B. die Fig. 260 bis 263 an, außerdem können natürlich noch beliebig viele andere ebene Schnitte durch den Unterstützungspunkt und senkrecht zur Stützebene durch den Körper gelegt werden, in denen aber die Krümmung des Körpers an der Stelle  $A$  sehr verschieden sein kann. Wenn die Krümmung an der Stützstelle nach jeder Richtung eine stetige ist, also nicht etwa scharfkantige Falten oder dgl. der Körperoberfläche dort zusammenlaufen, so können zwei Hauptkrümmungen angegeben werden, eine größte mit dem kleinsten Krümmungshalbmesser und eine kleinste mit dem größten Krümmungshalbmesser, zwischen denen die übrigen Krümmungen liegen. Es läßt sich nachweisen, daß die Ebenen der beiden Hauptkrümmungen senkrecht zueinander stehen müssen.

Ist der Körper nun nicht im Gleichgewicht, wie offensichtlich im Fall der Fig. 260, so sucht er durch eine Rollbewegung in eine Gleichgewichtslage zu kommen. Das Rollen eines Rades oder einer Kugel ist nun eine Drehung um den Mittelpunkt des Radkreises oder der Kugelkrümmung. Entsprechend kann

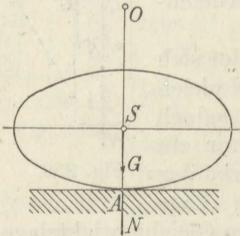


Fig. 260.

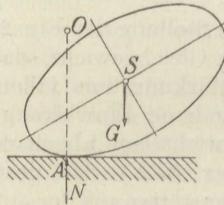


Fig. 261.

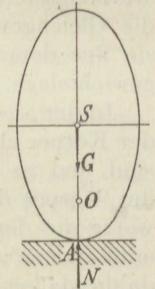


Fig. 262.

das Rollen eines beliebig gestalteten Körpers als Drehung um einen Krümmungsmittelpunkt der mit der Stützebene in Berührung befindlichen Fläche aufgefaßt werden.

Damit ist der Fall auf den vorher untersuchten zurückgeführt. Der Körper befindet sich im sicheren Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt oder Mittelpunkt aller auf den Körper einwirkenden Kräfte senkrecht unter dem Krümmungsmittelpunkt der größten Hauptkrümmung der betreffenden Stelle liegt (Fig. 261). Er ist im unsicheren Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt senkrecht über dem Krümmungsmittelpunkt der größten Hauptkrümmung der betreffenden Stelle liegt (Fig. 262). Es besteht unbestimmtes Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt  $S$  und der Krümmungsmittelpunkt  $O$  der größten Hauptkrümmung der betreffenden Stelle zusammenfallen, wie z. B. bei einer Kugel oder einem Zylinder, die nur durch ihr Eigengewicht belastet sind.

Sind beide Körper an der Berührungsstelle gekrümmt, wie etwa im Fall der Fig. 263, wo die Stützfläche vom Krümmungshalbmesser  $R$  ausgehöhlt und der gestützte Körper mit dem Krümmungshalbmesser  $r$  ausgebaucht ist, so sind bei einer kleinen seitlichen Bewegung beide Flächen um die Strecken  $R \cdot \alpha$  und  $r \cdot \beta$  aufeinander abgerollt, und unentschiedenes Gleichgewicht besteht dann, wenn der verschobene Schwerpunkt  $S'$  des Körpers gerade um eine bestimmte Strecke  $a$  über dem neuen Stützpunkt  $A'$  liegt.

Bei kleinem Winkel ist genau genug anzusetzen

$$a \cdot \gamma = r \cdot \beta = R \cdot \alpha$$

und nach dem Satz von den Außenwinkeln eines Dreiecks ist

$$\beta = \alpha + \gamma,$$

also

$$\gamma = \beta - \alpha.$$

Damit wird

$$\alpha = \frac{r \cdot \beta}{\beta - \alpha} = r \cdot \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$$

und mit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{R}$$

$$a = r \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{r \cdot R}{R - r}. \quad (118)$$

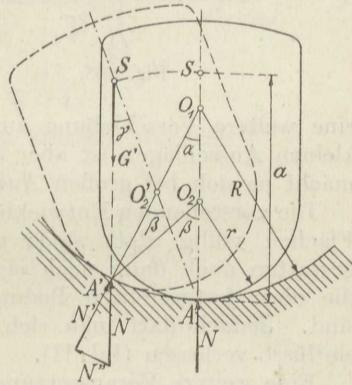


Fig. 263.

Bei großen Ausschlägen vergrößert sich der Wert von  $a$  etwas, da jedoch die Bewegung zuerst durch die kleinen Ausschläge erfolgt; so ist der obige kleinste Grenzwert maßgebend.

Sind die Berührungsflächen beider Körper ausgebaucht, so gilt wieder mit den Bezeichnungen der Fig. 264

$$a \cdot \gamma = R \cdot \alpha = r \cdot \beta \quad \text{und} \quad \gamma = \alpha + \beta.$$

Damit ergibt sich wie oben

$$a = r \cdot \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} = \frac{r \cdot R}{R + r} \quad (119)$$

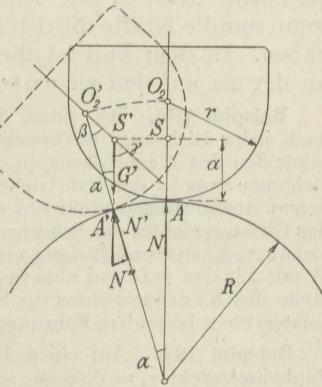


Fig. 264.

als Erhebung des Schwerpunktes  $S$  über den Stützpunkt  $A$  im Fall des unentschiedenen Gleichgewichts. Liegt  $S$  tiefer, so ist der Körper im sicheren Gleichgewicht.

Ist die stützende Fläche ausgebaucht und der gestützte Körper ausgehöhlt (Fig. 265), so besteht noch unentschiedenes Gleichgewicht, wenn bei geringem Abrollen aus der Gleichgewichtslage der verschobene Schwerpunkt  $S'$  gerade mit dem neuen Stützpunkt  $A'$  zusammenfällt.

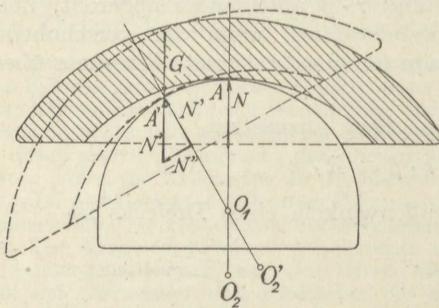


Fig. 265.

Somit muß die Erhebung  $a$  des Schwerpunktes  $S$  über den Unterstützungspunkt  $AO$  betragen. Der Fall entspricht also der Aufhängung.

Nur ist zu beachten, daß, während im Fall der Fig. 263 die Seitenkraft  $N''$  bei Verschiebung aus der Gleichgewichtslage bestrebt ist, den Körper wieder dorthin zurückzubringen, im Fall der Fig. 264 und 265 diese Seitenkraft auf

eine weitere Verschiebung aus der Gleichgewichtslage hinwirkt. Bei kleinen Ausschlägen ist aber ihr Anteil verschwindend gering; freilich macht er sich bei großen Ausschlägen recht erheblich bemerkbar.

Die vorstehenden Entwicklungen setzen voraus, daß die berührenden Flächen völlig glatt sind; geringe Vorsprünge oder Rauigkeiten gestatten auch dann noch ein gewisses sicheres Gleichgewicht, wenn die oben festgestellten Bedingungen nicht mehr genau innegehalten sind. Jedoch darf man sich nicht auf die Wirkung solcher Nebeneinflüsse verlassen (Bd. II).

Eine weitere Voraussetzung war, daß es sich um lotrecht wirkende Gewichtskräfte handelt. Die Ergebnisse gelten aber auch für beliebig gerichtete Kräfte und sich in beliebiger Weise berührende Körper, wenn nur die Kräfte die den Figuren entsprechende Lage zu den Körpern haben. In dem Fall ist die Angriffsstelle der Kraft immer diejenige, an der sie auf den zu untersuchenden Körper einwirkt.

**Beispiel 123.** Bei einem Wagebalken, dessen Last- und Gewichtsschalen nach jeder Richtung frei beweglich sind, greift die Belastung erst an den Tragschneiden des Wagebalkens an. Bei einem Drahtseilbahnwagen dagegen, wo das Gehänge zwar in der Fahrtrichtung frei auspendeln kann, aber bei den gewöhnlichen Ausführungen senkrecht dazu fest im Wagen liegt, ist für die Beurteilung des Gleichgewichtes der Schwerpunkt des ganzen Systems, bestehend aus Wagen, Gehänge, Kasten und Ladung maßgebend. An einem Elektrohängebahnwagen mit Winde für den auf- und abbeweglichen Förderkasten ist aber wieder die Angriffsstelle des Kastengewichtes die Seiltrommel, auf die sich das Hubseil aufwickelt, solange nicht besondere Führungen die freie Beweglichkeit des Kastens ausschließen.

**Beispiel 124.** Auf einen Halbzylinder vom Halbmesser  $r = 42$  cm, dessen Einheitsgewicht  $\gamma_1 = 0,65$  ist, sei ein dreiseitiges Prisma von der Grundbreite  $2r$  und der Höhe  $h$  aufgesetzt, dessen Einheitsgewicht  $\gamma_2 = 0,75$  beträgt. Wie hoch kann  $h$  gemacht werden, wenn noch  $\varnothing = 1,5$ fache Sicherheit für stabiles Gleichgewicht bestehen soll? Angenommen werde, daß die Unterstützung erfolgt durch

1. eine wagerechte Ebene,
2. ausgebauchte Zylinderfläche vom Halbmesser  $R = m \cdot r$  mit  $m = 3$ ,
3. ausgehöhlte Zylinderfläche vom Halbmesser  $R = m \cdot r$  mit  $m = 3$ .

1. Unentschiedenes Gleichgewicht besteht, wenn der Gesamtschwerpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt  $O$  zusammenfällt (Fig. 262), also für  $G_1 \cdot x_1 = G_2 \cdot x_2$ ; bei  $\mathfrak{S}$ facher Sicherheit gilt also

$$G_1 \cdot x_1 = \mathfrak{S} \cdot G_2 \cdot x_2$$

oder mit

$$G_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{4r}{3\pi},$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{h}{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 \cdot \frac{4}{3\pi} \cdot r = \mathfrak{S} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \cdot \frac{1}{3} h.$$

Hieraus folgt

$$h = r \cdot \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2}} = 42 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0,65}{1,5 \cdot 0,75}} = 45,1 \text{ cm.}$$

2. Nach Formel (118) ist

$$\mathfrak{S} \cdot a = \frac{r \cdot R}{r + R} = r \cdot \frac{m}{m + 1}.$$

In bezug auf die Berührungsstelle gilt nun die Momentengleichung

$$a \cdot (G_1 + G_2) = G_1 \cdot (r - x_1) + G_2 \cdot (r + x_2)$$

oder mit den obigen Werten von  $a$ ,  $G$ ,  $x$ :

$$\begin{aligned} & \frac{r}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{m}{m + 1} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 + \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \gamma_1 \cdot \left( r - \frac{4r}{3\pi} \right) + \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \cdot l \cdot \gamma_2 \cdot \left( r + \frac{1}{3} h \right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$h^2 + h \cdot 3r \cdot \left( 1 - \frac{1}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{m}{m + 1} \right) + \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \left( 1 - \frac{4}{3\pi} - \frac{1}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{m}{m + 1} \right) = 0.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten geht die Gleichung über in

$$h^2 + h \cdot 63 + 545,5 = 0,$$

woraus folgt

$$h = -31,5 \pm \sqrt{31,5^2 - 545,5}$$

oder, da nur der Höchstwert von  $h$  in Betracht kommt,

$$h = -31,5 + 21,1 = -10,4 \text{ cm.}$$

Der zweite Wert  $h = -31,5 - 21,1 = -52,6 \text{ cm}$  hat keine Bedeutung.

Damit sicheres Gleichgewicht mit der vorgeschriebenen Sicherheit besteht, muß aus dem Halbzylinder noch ein Prisma von 10,4 cm Tiefe herausgeschnitten werden.

3. Nach Formel (119) ist

$$\mathfrak{S} \cdot a = \frac{r \cdot R}{R - r} = r \cdot \frac{m}{m - 1}.$$

Im übrigen gilt dieselbe Rechnung wie unter 2., wenn nur  $m - 1$  statt  $m + 1$  eingesetzt wird. Die Zahlengleichung liefert dann

$$h = 42^2 \cdot \frac{0,65}{0,75} \cdot 2,$$

also

$$h = 55,25 \text{ cm.}$$

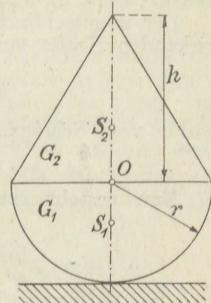


Fig. 266.

**Beispiel 125.** Bei dem Dreigelenkgebölbe nach Fig. 185 haben die ausgehöhlten Gelenkquader den Krümmungshalbmesser  $R = 3,0$  m. Anzugeben ist der Krümmungshalbmesser  $r$  der ausgebauchten Quadern, wenn für das stabile Gleichgewicht  $\mathcal{E} = 2,5$ fache Sicherheit vorgeschrieben wird (Fig. 267).

Der wagerechte Abstand des Kraftmittelpunktes der auf eine Gewölbehälfte wirkenden Kräfte vom Kämpfer beträgt nach den Angaben des Beispiels 90

$$a_0 = \frac{H \cdot f}{\Sigma P} = \frac{32,7 \cdot 2,7}{30,7} = 2,87 \text{ m,}$$

mithin vom Scheitel

$$a = \frac{1}{2} l - a_0 = 7,91 - 2,87 = 4,04 \text{ m.}$$

Nun besteht gemäß Formel (118) für das Scheitelgelenk die Gleichung

$$\mathcal{E} \cdot a = \frac{r \cdot R}{R - r}.$$

Hieraus ermittelt sich der gesuchte Wert

$$r = \frac{R \cdot \mathcal{E} \cdot a}{R + \mathcal{E} \cdot a} = \frac{3,0 \cdot 2,5 \cdot 4,04}{3,0 + 2,5 \cdot 4,04} = 2,31 \text{ m.}$$

Für das Kämpfergelenk ergibt sich

$$a = \sqrt{a_0^2 + f^2} = \sqrt{2,87^2 + 2,70^2} = 3,94 \text{ m}$$

und damit

$$r = \frac{3,0 \cdot 2,5 \cdot 3,94}{3,0 + 2,5 \cdot 3,94} = 2,30 \text{ m.}$$

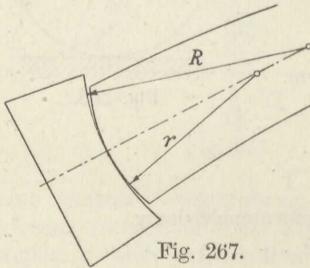


Fig. 267.

**Beispiel 126.** Das in Fig. 268 skizzierte Drahtseilbahngehänge für die Beförderung von Rundholzstämmen hat die nachstehenden Gewichte und Schwerpunktabstände von der Oberkante des Trageseils:

1. Wagen:  $G = 85$  kg,  $x = -11$  cm (darüber gelegen),
2. Gehänge:  $60$  „ „  $+90$  „ (darunter „ „),
3. Zugseil:  $120$  „ „  $+45$  „ ( „ „ „).

Anzugeben ist die Sicherheit, die für stabiles Gleichgewicht vorhanden ist.

Stabilitätsbedingung ist

$$G_2 \cdot x_2 + G_3 \cdot x_3 = \mathcal{E} \cdot G_1 \cdot x_1,$$

hieraus folgt

$$\mathcal{E} = \frac{G_2 \cdot x_2 + G_3 \cdot x_3}{G_1 \cdot x_1} = \frac{60 \cdot 90 + 120 \cdot 45}{85 \cdot 11} = 11,6.$$

Werden etwa mehrere Wagengehänge dicht hintereinander auf die Bahn gebracht, so daß das von den einzelnen getragene Zugseilgewicht nur 5 kg beträgt, so wird in dem Fall

$$\mathcal{E} = \frac{60 \cdot 90 + 5 \cdot 45}{85 \cdot 11} \approx 6.$$

Bei hochliegender Zugseilklemme kann die Sicherheit noch geringer werden. Z. B. gelten folgende Angaben:

1. Wagen:  $G = 85$  kg,  $x = -13$  cm,
2. Gehänge:  $40$  „ „  $+65$  „ „,
3. Zugseil:  $120$  „ „  $-28$  „ „,
4. Kasten leer:  $115$  „ „  $+152$  „ „.

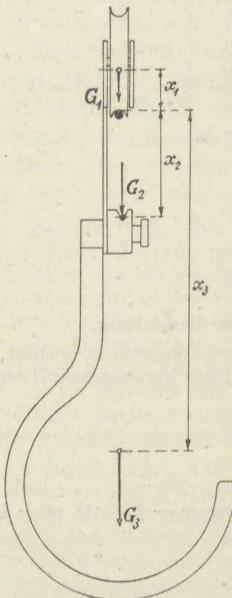


Fig. 268.

Dann ergibt sich

$$\zeta = \frac{40 \cdot 65 + 115 \cdot 152}{120 \cdot 28 + 85 \cdot 13} = 4,5,$$

ein freilich immer noch reichlich hoher Wert.

**Beispiel 127.** Der 5 hl fassende Wagenkasten einer Drahtseilbahn nach Fig. 269 wiegt  $G_1 = 115$  kg, er sei in der Schwerachse des leeren Kastens um  $x_1 = 0,36$  m unterhalb des oberen Randes aufgehängt, die Schwerachse des Laderaumes liege  $x_2 = 0,31$  m unterhalb des Randes. Wieviel Schüttgut kann eingeladen werden, wenn der Wagenkasten nach Umschlagen der Klaue noch von selbst umkippen soll?

Es hängt das wenig von der Art der Ladung ab. Ist z. B. der Kasten mit Kohle vollgeladen, deren Einheitsgewicht  $\gamma \approx 0,80$  t/m<sup>3</sup> beträgt, so hat der Gesamtschwerpunkt vom oberen Rande den Abstand

$$x_0 = \frac{0,5 \cdot 0,60 \cdot 0,31 + 0,115 \cdot 0,36}{0,5 \cdot 0,80 + 0,115} = \frac{0,124 + 0,041}{0,515} = 0,320 \text{ m.}$$

Bei voller Beladung mit Magnetkies vom Einheitsgewicht  $\gamma \approx 4,60$  t/m<sup>3</sup>, wofür der Wagen allerdings etwas zu leicht gebaut wäre, beträgt der Schwerpunktsabstand

$$x'_0 = \frac{0,5 \cdot 4,60 \cdot 0,31 + 0,115 \cdot 0,36}{0,5 \cdot 4,60 + 0,115} = \frac{0,713 + 0,041}{2,415} = 0,313 \text{ m.}$$

Der Unterschied ist also ganz unerheblich.

Die Sicherheit, daß der Wagenkasten bei voller Beladung umkippt, ist, wenn oberhalb der Aufhängungsachse 0,55 des Laderaumes mit dem Schwerpunktsabstand 0,19 cm von der Achse sich befinden und darunter 0,45 des Laderaumes mit dem Schwerpunktsabstand 0,14 cm:

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{0,55 \cdot 0,19}{0,45 \cdot 0,14} = 1,66.$$

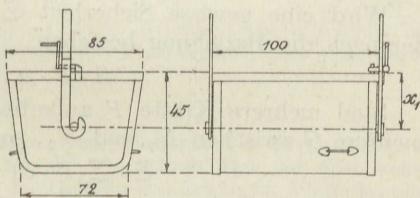


Fig. 269.

Ist  $z$  der Teil der Ladung, der fehlen kann, bis gerade unentschiedenes Gleichgewicht eintritt, so gilt in bezug auf die Aufhängungsachse

$$0,45 \cdot G \cdot 0,14 = 0,55 \cdot G \cdot 0,19 - z \cdot G \cdot \left(0,36 - \frac{z}{2}\right).$$

Die Gleichung ergibt

$$z^2 - 0,72 \cdot z + 0,083 = 0,$$

also

$$z = 0,36 \pm 0,22 = 0,14.$$

Nur das untere Vorzeichen liefert einen brauchbaren Wert.

**Beispiel 128.** Bei einem Wagebalken von  $h = 15$  mm Gesamthöhe in der Mitte liegt der Schwerpunkt um  $h = 1,6$  mm unterhalb der in der Mitte der Höhe befindlichen Schneide. Anzugeben ist die Sicherheit, mit der stabiles Gleichgewicht besteht.

Um zu einer Momentengleichung zu gelangen, hat man den Wagebalken in zwei gleiche Teile zu zerlegen, wovon der obere den Schwerpunkt 12,4 mm von der Aufhängungsschneide entfernt hat, und der untere entsprechend um 15,6 mm. Es ist dann

$$S \cdot \frac{1}{2} G \cdot 12,4 = \frac{1}{2} G \cdot 15,6,$$

also

$$S = \frac{15,6}{12,4} = 1,26.$$

## 15. Die Standsicherheit.

Liegt ein Träger frei auf zwei Stützen (Fig. 270), dessen Eigengewicht  $G$  in der Entfernung  $b$  von der einen Stütze angreift und der außerdem mit der Kraft  $P$  im Abstände  $a$  von der Stütze auf dem auskragenden Teil belastet ist, so lassen sich die Stützendrücke nach den Angaben in Abschnitt 9 leicht berechnen. Man erhält z. B. für den Fall der Fig. 270

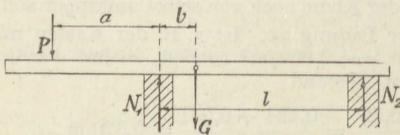


Fig. 270.

$$N_1 = \frac{1}{l} \cdot [G \cdot (l - b) + P \cdot (l + a)],$$

$$N_2 = \frac{1}{l} \cdot [G \cdot b - P \cdot a].$$

Greift  $P$  zwischen den beiden Stützen an, so ist  $a$  mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen. Es wird dann  $N_1$  kleiner und  $N_2$  größer, und zwar sind beide immer positiv. Im Fall der Zeichnung wird  $N_2 = 0$  für  $P \cdot a = G \cdot b$ , und wenn  $P \cdot a$  überwiegt, kippt der Träger nach der Seite von  $P$  über, falls er nicht bei  $N_2$  entsprechend verankert wird.

Wird eine gewisse Sicherheit  $\mathfrak{S}$  gegen Kippen verlangt, so muß demnach die Beziehung bestehen

$$S \cdot P \cdot a = G \cdot b. \quad (120a)$$

Sind mehrere Kräfte  $P$  außerhalb von  $N_1$  vorhanden und ebenso mehrere  $G$  zwischen  $N_1$  und  $N_2$ , so gilt entsprechend

$$\mathfrak{S} \cdot \sum (P \cdot a) = \sum (G \cdot b). \quad (120b)$$

Ist die Anordnung eine derartige, daß schon  $G$  außerhalb der Stütze  $N_1$  angreift, so muß unter allen Umständen bei  $N_2$  eine Verankerung angebracht werden, und die Sicherheit  $\mathfrak{S}$  besteht, wenn  $N_2$  auf das  $\mathfrak{S}$ fache des rechnerischen Wertes erhöht wird.

Mit Hilfe der oben benutzten Gleichgewichtsbedingungen lassen sich nur die Auflagerdrücke eines frei auf zwei Stützen liegenden ebenen Trägers ermitteln. Ist der Träger an einer Auflagerstelle irgendwie eingespannt oder noch durch Längskräfte beansprucht, wie etwa ein Bogenträger mit Zugband, so genügen die drei Gleichgewichtsbedingungen nicht zur Berechnung von vier Unbekannten. Die Untersuchung solcher statisch unbestimmter Träger enthält Bd. IV.

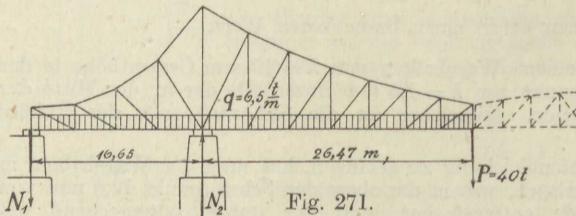


Fig. 271.

Beispiel 129. In Fig. 271 ist das Schema der Hälfte der Peißnitzbrücke bei Halle dargestellt<sup>27)</sup>. Der zwischen die beiden Kragträger eingehängte mittlere Teil hat die Länge 17,06 m, das Eigengewicht und die größte Verkehrslast ergeben zusammen  $p = 4,7$  t/m. Die Stützkräfte auf jeder Seite betragen dann

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4,7 \cdot 17,06 \approx 40 \text{ t.}$$

Zu berechnen sind die beiden Auflagerkräfte  $N_1$  und  $N_2$  des Kragträgers.

<sup>27)</sup> Ziegler, Z. d. V. d. I. 1901.

Man erhält aus der Figur in bezug auf die Wirkungslinie von  $N_1$

$$N_2 \cdot 16,65 - 6,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (16,65 + 26,47)^2 - 40 \cdot (16,65 + 26,47) = 0,$$

also

$$N_2 = \frac{43,12}{16,65} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 43,12 + 40 \right) = 466,5 \text{ t.}$$

Entsprechend ergibt sich in bezug auf die Wirkungslinie von  $N_2$ , wenn, wie meistens,  $N_1$  als nach oben gerichtet angenommen wird:

$$N_1 \cdot 16,65 + 6,5 \cdot 16,65 + 26,47 \cdot \frac{1}{2} \cdot (26,47 - 16,65) + 40 \cdot 26,47 = 0,$$

also

$$N_1 = -\frac{1376,2 + 1058,8}{16,65} = -146,2 \text{ t.}$$

Der negative Wert von  $N_1$  besagt, daß seine Richtung verkehrt angenommen war. Um die Brücke im Gleichgewicht zu halten, muß am äußeren Ende je eine Last von 146,2 t angehängt werden.

Die Richtigkeit der Rechnung erfolgt aus

$$6,5 \cdot 43,12 + 40 = 466,5 - 146,2 = 320,3.$$

Wenn der dem Brückenende benachbarte Teil des Kragträgers nur durch sein Eigengewicht belastet ist, so daß dort die Verkehrslast  $q = 2,8 \text{ t/m}$  wegfällt, so erhöht sich  $N_1$  noch um  $\frac{1}{2} \cdot 2,8 \cdot 16,65 = 23,2 \text{ t}$ . Der Höchstwert ist somit

$$N_1 = 146,2 + 23,2 = 169,5 \text{ t.}$$

Im allgemeinen muß noch eine  $\varnothing = 1,5$ fache Sicherheit gegen Kippen bestehen, so daß das Gewicht des anzuhängenden Fundamentblockes mindestens

$$G_1 = 1,5 \cdot 169,5 \approx 255 \text{ t}$$

betragen muß.

**Beispiel 130.** Ein Drahtseilbahnwagen vom Radstand  $l = 40 \text{ cm}$  und dem Eigengewicht  $G = 85 \text{ kg}$ , das um die Strecke  $a = 0,5 \text{ cm}$  über der Mittelachse des Wagens angreift, ist belastet durch das Gewicht des Gehänges, Wagenkastens und der Ladung  $Q = 40 + 115 + (400) \text{ kg}$ , das  $b = 5,5 \text{ cm}$  unterhalb der Wagenmittelachse angreift, und durch das Gewicht des Zugseiles  $P = 120 \text{ kg}$ , das um  $h = 13 \text{ cm}$  oberhalb der Wagenmittelachse wirkt (Fig. 272). Anzugeben ist die Zugseilkraft  $S$ , jeder Achsdruck  $N_1$  und  $N_2$  für verschiedene Neigungen  $\alpha$  der Fahrbahn und die Standsicherheit  $\varnothing$  des Wagens.

Man zerlegt die drei Lasten  $Q$ ,  $G$ ,  $P$  in ihre Seitenkräfte senkrecht und parallel zur Fahrbahn und erhält sogleich

$$S = (Q + G + P) \cdot \sin \alpha,$$

ferner

$$N_1 + N_2 = (Q + G + P) \cdot \cos \alpha.$$

In bezug auf den Schnittpunkt der Wirkungslinien von  $N_2$  und  $S$  erhält man

$$-N_1 \cdot l + (Q + G + P) \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l}{2} + [Q \cdot (h + b) + G \cdot (h - a) + P \cdot 0] \cdot \sin \alpha = 0$$

und in bezug auf den Schnittpunkt der Wirkungslinien von  $N_1$  und  $S$

$$+N_2 \cdot l - (Q + G + P) \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l}{2} + [Q \cdot (h + b) + G \cdot (h - a) + P \cdot 0] \cdot \sin \alpha = 0,$$

also

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot (Q + G + P) \cdot \cos \alpha + \left( Q \frac{h + b}{l} + G \frac{h - a}{l} \right) \cdot \sin \alpha,$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \cdot (Q + G + P) \cdot \cos \alpha - \left( Q \frac{h + b}{l} + G \frac{h - a}{l} \right) \cdot \sin \alpha.$$

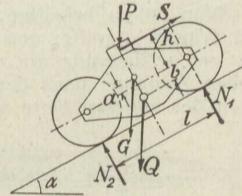


Fig. 272.

Die Sicherheit dafür, daß sich das Rad 2 nicht abhebt, findet man, da das erste Glied der Gleichung für  $N_2$  das Andrücken bewirkt und das zweite das Abheben hervorruft, zu

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2} \cdot (Q + G + P)}{Q \frac{h+b}{l} + G \frac{h-a}{l}} \cdot \cotg \alpha.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt hieraus für den leeren Wagenkasten

$$S = (40 + 115 + 85 + 120) \cdot \sin \alpha = 360 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot \cos \alpha + \left( 155 \cdot \frac{18,5}{40} + 85 \cdot \frac{12,5}{40} \right) \cdot \sin \alpha \\ = 180 \cdot \cos \alpha + 98,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_2 = 180 \cdot \cos \alpha - 98,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$\zeta = \frac{180}{98,3} \cdot \cotg \alpha = 1,83 \cdot \cotg \alpha$$

und entsprechend für den vollen Wagenkasten

$$S = (360 + 400) \cdot \sin \alpha = 760 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot 760 \cdot \cos \alpha + \left( 555 \cdot \frac{18,5}{40} + 85 \cdot \frac{12,5}{40} \right) \cdot \sin \alpha \\ = 380 \cdot \cos \alpha + 283,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$N_2 = 380 \cdot \cos \alpha - 283,3 \cdot \sin \alpha,$$

$$\zeta = \frac{380}{283,3} \cdot \cotg \alpha = 1,34 \cdot \cotg \alpha.$$

Man kann so die nachstehende Zusammenstellung berechnen.

Nun ist zu beachten, daß das Zugseil um eine Strecke  $x = 9,5$  cm seitlich am Wagen angreift; und das Wagengehänge wird so gekröpft, daß der Wagen im leeren Zustande um ebensoviel nach der einen Seite geneigt steht, wie im vollen Zustande nach der anderen. Das wird erreicht, wenn  $Q$  um  $y = 3,2$  cm nach der anderen Seite aus der Mittelachse verschoben ist. Denn es gilt dann

$$\begin{array}{l} P \cdot x = 120 \cdot 9,5 = 1140 \text{ emkg,} \\ Q \cdot y = 155 \cdot 3,2 = 496 \text{ ,, ,} \\ \text{bzw. } Q \cdot y = 555 \cdot 3,2 = 1775 \text{ ,, .} \end{array}$$

Der Unterschied beträgt

$$\begin{array}{l} 1140 - 496 = 644 \text{ emkg} \\ \text{bzw. } 1775 - 1140 = 635 \text{ ,, .} \end{array}$$



Fig. 274.

als diejenige Kraft, die jedes der beiden Räder nach der Seite drängt, und der Winkel, um den der Auflagerdruck  $N'_1$  bzw.  $N'_2$  seitwärts ausschlägt, wird bestimmt durch  $\tg \gamma = \frac{N'}{N}$ .

Fig. 273.

Infolgedessen wirkt der Seilzug  $S$  auf eine Schiefstellung des Wagens hin (Fig. 273), und das vordere Wagenrad hat etwa die in Fig. 274 veranschaulichte Stellung auf dem Tragseil. Man erhält aus der Momentengleichung  $N' \cdot l = S \cdot x$

$$N' = S \cdot \frac{x}{l} = 0,2375 \cdot S$$

	$\alpha =$	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$
	$\sin \alpha =$	0	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766
	$\cos \alpha =$	1	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643
	$\cotg \alpha =$	$\infty$	5,671	2,747	1,732	1,192	0,839
leer	$S =$	0	63	123	180	231	276 kg
	$N_1 =$	180	194	203	205	201	101 „
	$N_2 =$	180	160	136	107	75	41 „
	$\Sigma =$	$\infty$	10,38	5,02	3,17	2,18	1,54 „
beladen	$S =$	0	132	260	380	489	582 kg
	$N_1 =$	380	423	454	470	473	461 „
	$N_2 =$	380	325	260	187	109	27 „
	$\Sigma =$	$\infty$	7,60	3,60	2,32	1,60	1,12 „
leer	$N' =$	0	15	29	43	55	66 kg
	$\text{tg } \gamma_1 =$	0	0,077	0,143	0,210	0,273	0,346 „
	$\text{tg } \gamma_2 =$	0	0,094	0,213	0,402	0,734	1,61 „
beladen	$N' =$	0	31	62	90	116	138 kg
	$\text{tg } \gamma_1 =$	0	0,073	0,137	0,192	0,246	0,300 „
	$\text{tg } \gamma_2 =$	0	0,095	0,238	0,482	1,064	5,12 „

Mit Rücksicht auf die seitlichen Verrückungen, die beim plötzlichen Anfahren vorkommen können, läßt man im allgemeinen keinen größeren Ausschlag als  $\gamma \approx 20^\circ$  zu, dem  $\text{tg } \gamma = 0,364$  entspricht, so daß die gegebene Anordnung bei den obigen Belastungen schon für die Neigung  $\alpha \approx 25^\circ$  nicht mehr brauchbar ist.

Ist ein Träger in drei Punkten unterstützt, wie z. B. der Wagebalken einer Dezimalwaage nach Fig. 275, und wird er an beliebiger Stelle durch eine oder mehrere Kräfte  $Q$  belastet, so lassen sich die drei Stützkkräfte  $N_1, N_2, N_3$  wie folgt bestimmen.

In bezug auf die Verbindungslinie der Stützpunkte 1 und 2 ergibt die Momentengleichung

$$- N_1 \cdot l + Q \cdot b = 0,$$

also

$$N_1 = Q \cdot \frac{b}{l}.$$

In bezug auf den Stützpunkt 3 lautet die Momentengleichung

$$- N_2 \cdot a - N_1 \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \left( \frac{a}{2} + c \right) = 0;$$

wird hierin der Wert von  $N$  eingesetzt, so ergibt sich

$$N_2 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \left( 1 + \frac{2c}{a} - \frac{b}{l} \right).$$

Entsprechend gilt für den Stützpunkt 2

$$- N_3 \cdot a - N_1 \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot \left( \frac{a}{2} - c \right) = 0,$$

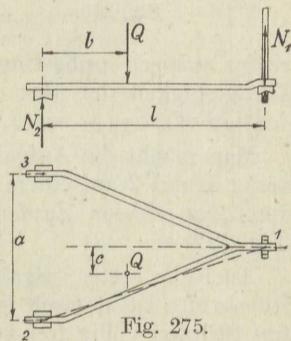


Fig. 275.

also

$$N_3 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{2c}{a} - \frac{b}{l}\right).$$

Daß richtig gerechnet worden ist, wird mit Hilfe der Summengleichung für alle Kräfte festgestellt:

$$N_1 + N_2 + N_3 = Q.$$

Wird die Last  $Q$  etwa so verschoben, daß ihr Schwerpunkt in der geraden Verbindungslinie der Stützpunkte 2 und 3 liegt, so ist  $b = 0$ , und die vordere Zugstange hat die Belastung  $N_1 = 0$ ; greift  $Q$  etwa in der Verbindungsgeraden der Stützpunkte 1 und 2 an, so wird ebenso  $N_3 = 0$ . Liegt der Schwerpunkt der Last  $Q$  außerhalb einer der geraden Verbindungslinien der drei Stützpunkte, so besteht kein Gleichgewicht mehr.

Bedingung für das Gleichgewicht ist demnach, daß die Wirkungslinie der Mittelkraft aller Belastungen die durch die drei Stützpunkte bestimmte Ebene innerhalb des von den drei Stützpunkten festgelegten Dreiecks schneidet.

Befinden sich die drei Stützpunkte mit der Wirkungslinie der Kraft  $Q$  in derselben Ebene, wie etwa bei dem Wagen einer Kabelbahn (Fig. 276), so führt die obige Darlegung nicht zum Ziel. Denn in bezug auf die Wirkungslinie von  $N_3$  erhält man beispielsweise die Momentengleichung

$$+ N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a - Q \cdot b = 0,$$

worin aber die beiden Unbekannten  $N_1$  und  $N_2$  nicht getrennt werden können, da als weitere Gleichung nur noch die Summengleichung  $N_1 + N_2 + N_3 = Q$  zur Verfügung steht. Die Aufgabe ist

wieder statisch unbestimmt und kann nur gelöst werden, wenn die Nachgiebigkeit der über den Radachsen angebrachten Federn berücksichtigt wird.

Man macht die Aufgabe dadurch statisch bestimmt, daß die beiden Räder 1 und 2 auf einem in der lotrechten Ebene frei drehbaren Hebel sitzen, an dessen Zapfen das eine Gehänge der Laufkatze angreift (Fig. 277).

Auch die erste Aufgabe für drei nicht in derselben Ebene wirkende Stützkraften ist statisch unbestimmt, sobald der Träger nicht auf allen drei Stützen völlig frei aufliegt, sondern etwa bei einer oder mehreren eingespannt ist, oder wenn zwischen zwei Stützstellen noch irgendeine Spannkraft wirkt.

**Beispiel 131.** Anzugeben ist der Abstand  $b$ , in dem die Last  $Q$  am Kabelbahnwagen aufzuhängen ist (Fig. 277), wenn die Abstände  $a_1$  und  $a_2$  der Laufäder festgelegt sind, für den Fall, daß die Auflagerkräfte  $N$  gleich groß sein sollen.

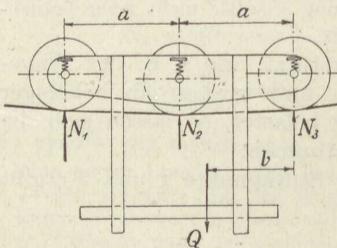


Fig. 276.

Es bestehen die folgenden Beziehungen:

$$N_2 = N_3, \quad N_1 + N_2 + N_3 = 3N = Q,$$

$$(N_2 + N_3) \cdot 0 + Q \cdot b - N_1 \cdot (a_1 + \frac{1}{2}a_2) = 0.$$

Hieraus folgt sofort

$$b = \frac{1}{3} \cdot (a_1 + \frac{1}{2}a_2).$$

Soll noch  $a_1 = a_2 = a$  sein, so ist auszuführen  $b = \frac{1}{2}a$ , d. h.  $Q$  ist in der Mitte des Wagens aufzuhängen.

Wirken auf einen in drei Punkten frei gestützten Körper mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen ein, so lassen sich die von ihnen für irgendeinen Stützpunkt oder auch eine Stützzlinie — die Verbindungsgerade zweier Stützpunkte — hervorgerufenen Drehmomente scheiden in solche, die auf Kippen des Körpers hinwirken, also bei der Zusammensetzung das Kippmoment liefern, und solche, die auf ein Andrücken des Körpers auf die Stützen hinwirken, also zu einem vereinigt das Stabilitätsmoment ergeben.

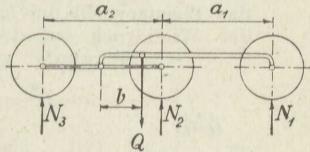


Fig. 277.

Der Körper befindet sich um so sicherer im Gleichgewicht, je mehr das Stabilitätsmoment  $M_s$  über das Kippmoment  $M_k$  überwiegt. Die Sicherheit der Standfestigkeit wird somit ausgedrückt durch das Verhältnis

$$\zeta = \frac{M_s}{M_k}. \quad (121)$$

**Beispiel 132.** Die auf drei Rädern laufende verschiebbare Winde für Koks-ofentüren gemäß Fig. 278 wird belastet durch das Türgewicht  $Q = 170$  kg, dessen Ausladung  $a = 80$  cm beträgt, ferner wirken darauf der Kurbeldruck  $P = 30$  kg (beim ersten Andrehen) eines Mannes in der Höhe  $h = 95 + 35$  cm und das Eigengewicht des Gestelles  $G_0 = 200$  kg, das den Schienenabstand teilt in  $b_1 = 50$  cm und  $b_2 = 30$  cm. Anzugeben ist die erforderliche Größe des Ausgleichgewichtes  $G$  für  $\zeta = 1,5$ fache Kippsicherheit.

Die wagerechte Druckkraft  $P$  wird durch eine gleiche  $P'$ , die zwischen den Schienen und den Radflanschen wirkt, aufgehoben. Das Kippmoment in bezug auf die Schiene 1 beträgt

$$M_k = Q \cdot a + P \cdot h = 170 \cdot 80 + 30 \cdot 130 = 17\,500 \text{ cmkg},$$

das Stabilitätsmoment ist

$$M_s = (G + G_0) \cdot b_1 = G \cdot 50 + 200 \cdot 50 = 50 \cdot G + 10\,000 \text{ cmkg}.$$

Nach Formel (121) ist also erforderlich  $M_s = \zeta \cdot M_k$ ,

$$\text{oder} \quad 50 \cdot G + 10\,000 = 1,5 \cdot 17\,500,$$

woraus folgt

$$G = 325 \text{ kg}.$$

Jetzt können die Raddrücke bestimmt werden:

$$N_1 = \frac{1}{80} \cdot [170 \cdot (80 + 30) + (325 + 200) \cdot 30 + 30 \cdot (95 + 35)],$$

$$\text{mithin} \quad N_1 = 479 \text{ kg},$$

der sich auf zwei Räder verteilt, ferner

$$N_2 = \frac{1}{80} \cdot [-170 \cdot (80 - 50) + (325 + 200) \cdot 50 - 30 \cdot (95 + 35)],$$

$$\text{mithin} \quad N_2 = 216 \text{ kg}.$$

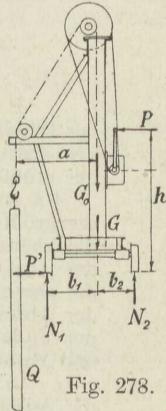


Fig. 278.

Für den Fall, daß das Windengerüst leer verschoben wird, verschwinden  $Q$  und  $P$ , und damit wird

$$N_1 = \frac{30}{80} \cdot (325 + 200) = 197 \text{ kg,}$$

$$N_2 = \frac{50}{80} \cdot (325 + 200) = 328 \text{ kg.}$$

**Beispiel 133.** Bei dem Hammerdrehkran nach Fig. 279 ist gegeben<sup>23)</sup>:

die Belastung der Laufkatze  $Q = 150 \text{ t}$ ,

das Eigengewicht derselben  $G_0 = 6 \text{ t}$ ,

das Eigengewicht des drehbaren Hammers  $G_1 = 300 \text{ t}$ ,

das Eigengewicht des feststehenden Gerüsts  $G_2 = 160 \text{ t}$ ,

der Winddruck auf den drehbaren Teil bei vollbelastetem Kran mit  $q = 30 \text{ kg/m}^2$  zu  $W_1 = 1,5 \text{ t}$ ,

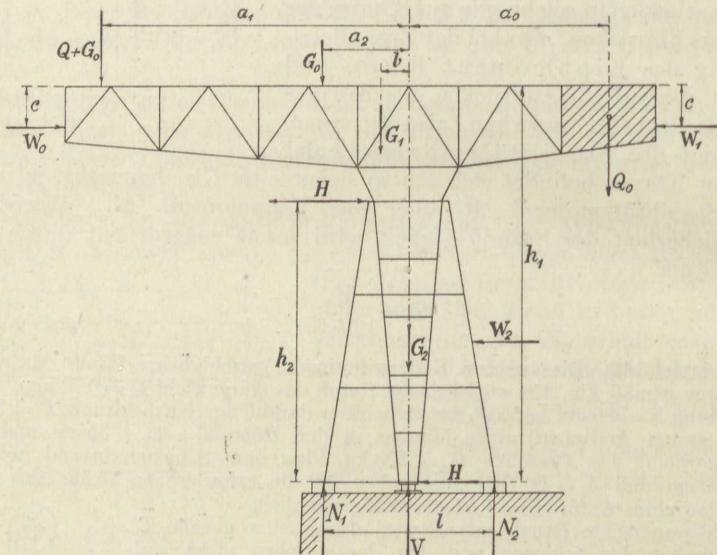


Fig. 279.

der Winddruck auf den drehbaren Teil bei leerem Kran mit  $q = 200 \text{ kg/m}^2$  zu  $W_0 = 12 \text{ t}$ ,

der größte Winddruck auf den feststehenden Teil  $W_2 = 5 \text{ t}$ , in der Höhe  $\frac{1}{2} h$  angreifend,

die größte Ausladung der Last  $a_1 = 27 \text{ m}$ ,

die kleinste Ausladung der leeren Laufkatze  $a_2 = 7,5 \text{ m}$ ,

der Abstand des Eigengewichtes  $G_1$  von der Drehachse  $b = 2,5 \text{ m}$ ,

die gesamte Kranhöhe  $h_1 = 34,4 \text{ m}$ ,

der Abstand des oberen Druckringes vom unteren Spurlager  $h_2 = 24,4 \text{ m}$ ,

der Fußabstand des quadratischen Mantelgerüsts  $l = 15 \text{ m}$ ,

der Abstand der Mittelkraft des Winddruckes von der oberen Laufschiene  $c = 8 \text{ m}$ ,

die Ausladung des Gegengewichtes  $a_0 = 17,5 \text{ m}$ .

Zu berechnen ist die Größe des erforderlichen Gegengewichtes sowie die der Auflagerkräfte  $V$ ,  $H$ ,  $N$ .

<sup>23)</sup> André, Die Statik der Schwerlastkrane. 1919.

Bei vollbelastetem Ausleger gilt in bezug auf das untere Lager des Hammers die Momentengleichung

$$+H \cdot h = +(Q + G_1) \cdot a_1 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 + W_1 \cdot (h_1 - c)$$

und entsprechend bei leerem Kran

$$-H \cdot h = +G_1 \cdot a_2 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 - W_0 \cdot (h_1 - c).$$

Der Eisenbau wird am besten ausgenutzt, wenn in beiden Fällen die absoluten Zahlenwerte von  $H$  einander gleich werden. Aus

$$\begin{aligned} (Q + G_1) \cdot a_1 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 + W_1 \cdot (h_1 - c) \\ = -G_1 \cdot a_2 - G_2 \cdot b + Q_0 \cdot a_0 + W_0 \cdot (h_1 - c) \end{aligned}$$

folgt dann

$$Q_0 = \frac{1}{2a_0} \cdot [Q \cdot a_1 + G_1 \cdot (a_1 - a_2) + 2G_2 \cdot b - (W_0 - W_1) \cdot (h_1 - c)]$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$Q_0 = \frac{1}{2 \cdot 17,5} \cdot (150 \cdot 27 + 6 \cdot 19,5 + 2 \cdot 300 \cdot 2,5 - 10,5 \cdot 26,4) = 154 \text{ t.}$$

Fällt in beiden Fällen der Winddruck weg, so verschwindet das letzte Glied der Klammer und man erhält dafür

$$Q_0 = 162 \text{ t.}$$

Wird der Mittelwert  $Q_0 = 158 \text{ t}$  ausgeführt, so ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{h} \cdot [(Q + G_1) \cdot a_1 + G_2 \cdot b - Q_0 \cdot a_0 + W_1 \cdot (h_1 - c)] \\ &= \frac{1}{24,4} \cdot [-6 \cdot 7,5 - 300 \cdot 2,5 + 158 \cdot 17,5 + 12 \cdot 26,4] \approx 93,8 \text{ t.} \end{aligned}$$

Die lotrechte Spurlagerbelastung wird im ersten Fall

$$V = Q + G_1 + G_2 + Q_0 = 614 \text{ t}$$

und bei leerem Kran

$$V = G_1 + G_2 + Q_0 = 464 \text{ t.}$$

Es ist noch zu ermitteln, bis zu welchem Abstand  $a$  die Höchstlast des Kranes  $Q_{\max} = 200 \text{ t}$  vorfahren darf, ohne daß der größte Wert von  $H$  überschritten wird. Aus der ersten Momentengleichung bestimmt sich

$$a = \frac{1}{206} \cdot (93,8 \cdot 24,4 - 300 \cdot 2,5 + 158 \cdot 17,5 - 1,5 \cdot 26,4) \approx 20,7 \text{ m.}$$

Für das feststehende Mantelgerüst des Kranes ergibt sich in bezug auf die Angriffsstelle der Auflagerkraft  $N_2$  (bei leerem Kran und starkem Wind) die Momentengleichung

$$N_1 \cdot l = W_2 \cdot \frac{h}{2} + G_3 \cdot \frac{l}{2} + H \cdot h,$$

also mit den vorstehenden Zahlenwerten

$$N_1 = \frac{1}{15} \cdot (+5 \cdot 12,2 + 160 \cdot 7,5 + 93,8 \cdot 24,4) \approx 236,5 \text{ t}$$

und in bezug auf die Angriffsstelle von  $N_1$  unter sonst gleichen Umständen

$$N_2 = \frac{1}{15} \cdot (+5 \cdot 12,2 - 160 \cdot 7,5 + 93,8 \cdot 24,4) \approx -76,5 \text{ t,}$$

d. h. das Fundament, das zur völligen Sicherheit mindestens  $1,5 \cdot 76,5 \approx 115 \text{ t}$  wiegen muß, ist an dem Fuß des Mantelgerüsts gut zu verankern. Beide Auflagerkräfte verteilen sich übrigens auf je zwei Stützpunkte.

Steht der Hammerausleger auf einer Diagonale des Fußpunktquadrates, so ist  $l' = l \cdot \sqrt{2}$ , also  $N_1 = N_1 \cdot \sqrt{2} \approx 334,5 \text{ t}$  als Höchstbelastung eines Stützpunktes.

Ist der Körper in vier Punkten unterstützt, von denen nur immer je zwei in derselben Geraden liegen, wie etwa ein Laufkran nach Fig. 280, so wird, gewöhnlich die folgende Überlegung gemacht:

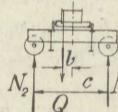
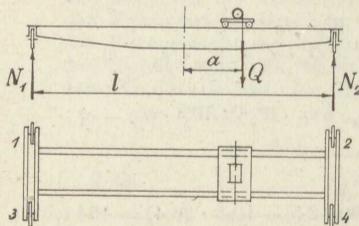


Fig. 280.

Befindet sich die Last  $Q$  genau in der Mitte, so verteilt sie sich gleichmäßig auf die vier Stützen, so daß man ansetzen kann

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4} Q.$$

Verschiebt sie sich in der Längsrichtung des Krans, so werden die Räder auf

der Seite, wohin die Last geht, entsprechend stärker belastet, das gleiche gilt für die Verschiebung in der Querrichtung. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} N_1 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l + a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c - b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{c}\right), \\ N_2 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l - a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c - b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{c}\right), \\ N_3 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l + a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c + b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{c}\right), \\ N_4 &= Q \cdot \frac{\frac{1}{2}l - a}{l} \cdot \frac{\frac{1}{2}c + b}{c} = Q \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{c}\right). \end{aligned} \quad (122)$$

Für  $a = 0$  und  $b = 0$  gehen diese Gleichungen in die obige über.

Erfolgt die Unterstützung etwa durch längere gleich ausgeführte Säulen, so liefert eine genauere Rechnung, die die elastische Nachgiebigkeit der Stützen berücksichtigt<sup>29)</sup> (vergl. Bd. IV),

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 - \frac{2a}{l} + \frac{2b}{c}\right), & N_2 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 + \frac{2a}{l} + \frac{2b}{c}\right), \\ N_3 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 - \frac{2a}{l} - \frac{2b}{c}\right), & N_4 &= \frac{Q}{4} \cdot \left(1 + \frac{2a}{l} - \frac{2b}{c}\right). \end{aligned} \quad (123)$$

**Beispiel 134.** Ein Laufkran für die Belastung  $Q = 15 \text{ t}$  von der Spannweite  $l = 12 \text{ m}$  und dem Radstand  $c = 3,2 \text{ m}$  hat eine Laufkatze vom Gewicht  $G_1 = 3 \text{ t}$ , während das Gewicht der Laufbrücke etwa  $G_2 \approx Q$  beträgt. Anzugeben sind die Radbelastungen für die Laststellung  $a = 4,5 \text{ m}$  und  $b = 0,5 \text{ m}$ .

Man erhält nach den Gleichungen (122)

$$\begin{aligned} N_1 &= (15 + 3) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4,5}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{0,5}{3,2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 15 \\ &= 18 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1,1}{3,2} + 3,75 = 9,17 \text{ t}, \end{aligned}$$

<sup>29)</sup> Lewe, Beton u. Eisen 1914.

$$N_2 = (15 + 3) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{4,5}{12} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{0,5}{3,2} \right) + \frac{1}{4} \cdot 15$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1,1}{3,2} + 3,75 = 4,52 \text{ t},$$

$$N_3 = (15 + 3) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{4,5}{12} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{0,5}{3,2} \right) + \frac{1}{4} \cdot 15$$

$$= 18 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2,1}{3,2} + 3,75 = 14,09 \text{ t},$$

$$N_4 = (15 + 3) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{4,5}{12} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{0,5}{3,2} \right) + \frac{1}{4} \cdot 15$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2,1}{3,2} + 3,75 = 5,22 \text{ t}.$$

Die unerläßliche Proberechnung lautet:  $15 + 3 + 15 = 33,00$ .

Die Verteilung auf die Stützen vereinfacht sich, wenn der Lastausschlag  $b$  nach der Querrichtung verschwindet, so daß der Laufkran als ein Balken auf zwei Stützen berechnet werden kann.

**Beispiel 135.** Anzugeben sind die Raddrücke  $N_1$  und  $N_2$  und die Kipp-sicherheit für den in Fig. 281 dargestellten drehbaren Ausleger eines Portalkranes, und zwar für die Vollbelastung und für den unbelasteten Zustand.

Die Gewichte sind abgewogen und ihre Schwerpunktsabstände von der Mitte des Drehzapfens berechnet<sup>30)</sup> gemäß folgender Zusammenstellung:

Nr.	Gegenstand	Gewicht G	Abstand a	Drehmoment in bezug auf die Mitte
		kg	cm	mt
1	Größte Last . . . . .	5000	+840	+42,000
2	Kranführer . . . . .	75	+100	+ 0,075
3	Seil, Kugel, Haken . . . . .	300	+840	+ 2,520
4	Kranausleger . . . . .	2000	+500	+10,000
5	Motoranlasser . . . . .	550	+130	+ 0,715
6	4 Tragräder mit Achsen und Lagern . . . . .	1110	0	0
7	Führerhaus . . . . .	4125	-100	- 4,125
8	Drehgestell . . . . .	2820	-115	- 3,243
9	Winde mit Motor und Zubehör	8870	-190	-16,853
10	Gegengewicht . . . . .	3150	-330	-10,395
	voll, Summe 1 ÷ 10 : 28 000 kg			+20,694 mt
	leer, Summe 3 ÷ 10 : 22 925 „			-21,381 „

(Ausgeführt wurde das Gegengewicht 1,5 t größer.)

Der Abstand des Gesamt-schwerpunktes beträgt bei Voll-belastung

$$x_0 = + \frac{28,694}{28,0} = + 0,739 \text{ m}$$

und im leeren Zustand

$$x'_0 = - \frac{21,381}{22,925} = - 0,933 \text{ m}.$$

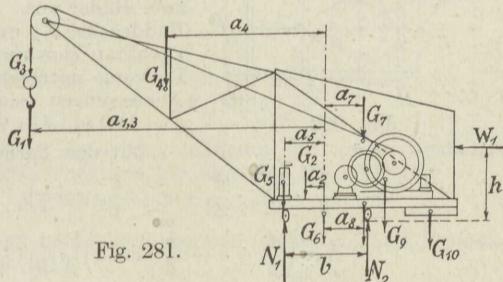


Fig. 281.

<sup>30)</sup> Koll, D. p. J. 1907.

Hinzuzurechnen ist noch das Moment des Winddruckes, der auf die Fläche des Führerhauses  $F = 4,5 \cdot 3,3 = 14,85 \text{ m}^2$  mit  $p = 50 \text{ kg/m}^2$  bei voller Belastung und  $200 \text{ kg/m}^2$  bei leerem Kran wirkt, und zwar in  $h = 2,78 \text{ m}$  über den Auflagerstellen der Räder. Es ist hiernach bei vollbelastetem Kran:

$$M_w = 14,85 \cdot 0,050 \cdot 2,78 = 2,065 \text{ mt}$$

und bei leerem Kran:

$$M'_w = 14,85 \cdot 0,200 \cdot 2,78 = 8,260 \text{ mt},$$

das in beiden Fällen zu dem Gewichtsmoment zu addieren ist.

Damit wird mit dem Abstand der Gesamtbelastung  $\frac{1}{2} b \pm x_0$  bei vollem Kran:

$$N_1 = \frac{28,00 \cdot 2,039 + 2,065}{2,60} = 22,74 \text{ t}$$

$$N_2 = \frac{28,00 \cdot 0,561 \mp 2,065}{2,60} = 0,524 \text{ bzw. } 6,83 \text{ t}$$

je nach der Windrichtung,

und bei leerem Kran:

$$N_1 = \frac{22,925 \cdot 0,367 \mp 8,260}{2,60} = 0,058 \text{ t bzw. } 6,41 \text{ t}$$

$$N_2 = \frac{22,925 \cdot 2,233 + 8,260}{2,60} = 22,86 \text{ t}.$$

Jede Belastung verteilt sich auf zwei Räder von 0,50 m Durchmesser.

Die Kippsicherheit wird erhalten, indem man die Drehmomente der innerhalb der Räder angreifenden Kräfte dividiert durch die Momente der außerhalb der Räder angreifenden Kräfte, also bei leerem Kran

$$\varnothing = \frac{\sum_3^8 M + \sum_3^8 G \cdot \frac{1}{2} b}{\sum_{10}^9 M - \sum_{10}^9 G \cdot \frac{1}{2} b + M'_w} = \frac{5,867 + 14,180}{27,248 - 15,630 + 8,260} = 1,009,$$

ebenso ist für den vollen Kran

$$\varnothing = \frac{35,406 + 20,670 \cdot 1,30}{54,52 - 7,30 \cdot 1,30 + 2,065} = 1,535.$$

Da die mittlere Drehsäule bei etwa noch weiter steigendem Winddruck das Kippen verhindert, so liegt kein Grund zu einer etwaigen Vergrößerung des Gegengewichtes vor.

**Beispiel 135.** Der Drehkran des Beispiels 134 befindet sich auf einem Portal (Fig. 282) vom Gewicht  $Q = 17 \text{ t}$ ; er übt darauf bei voller Belastung und Winddruck von hinten die Raddrücke  $N_1 = 22,74$  und  $N_2 = 0,524 \text{ t}$  durch je zwei Räder aus. Anzugeben ist der Verlauf der Raddrücke  $N_A$  und  $N_B$  des Portals, wenn der Drehkran sich um  $90^\circ$  dreht und der Wind die Drehung mitmacht. Die in Frage kommenden Abmessungen sind:  $a = 5,60 \text{ m}$ ,  $b = 2,60 \text{ m}$ ,  $c = 2,00 \text{ m}$ ,  $d = 9,25 \text{ m}$ .

Mit den Formeln (122) erhält man

$$N = \frac{1}{d} \cdot \left[ N_1 \cdot \frac{d}{2} \pm c \pm \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha \right] + N_2 \cdot \left( \frac{d}{2} \pm c \mp \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha \right) \cdot \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{a}{2} \pm \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \right) + \frac{Q}{4}.$$

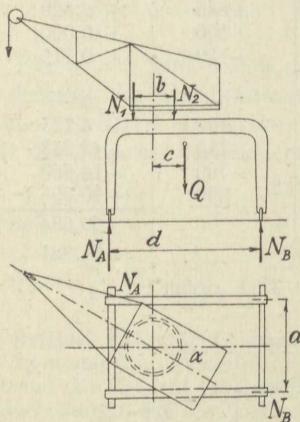


Fig. 282.

worin die oberen Vorzeichen  $N_A$ , die unteren  $N_B$  ergeben. Werden  $\frac{1}{d}$  bzw.  $\frac{1}{a}$  in die Klammerausdrücke hineingebracht und wird darauf ausmultipliziert, so ergibt sich

$$N = \frac{Q}{4} + \frac{N_1 + N_2}{4} \cdot \left(1 \pm \frac{2c}{d}\right) \pm \frac{N_1 - N_2}{4} \cdot \frac{b}{d} \cdot \cos \alpha \\ \pm \frac{N_1 + N_2}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(1 \pm \frac{2c}{d}\right) \cdot \sin \alpha + \frac{N_1 - N_2}{8} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{a} \cdot \sin 2\alpha,$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt hieraus

$$N_A = 4,250 + 8,440 + 1,560 \cdot \cos \alpha + 3,870 \cdot \sin \alpha + 0,362 \cdot \sin 2\alpha, \\ N_B = 4,250 + 3,296 - 1,561 \cdot \cos \alpha - 1,530 \cdot \sin \alpha - 0,362 \cdot \sin 2\alpha.$$

In Fig. 283 sind die Einzelbeträge der beiden Summen ihrem Verlauf nach dargestellt, aber ohne den unveränderlichen Betrag  $\frac{1}{4}Q$ . Ihre Summierung zu  $N_A$  bzw.  $N_B$  ist dann in Fig. 284 gegeben, beide Figuren im Kräftemaßstab

$$1 \text{ t} = 2,5 \text{ mm}.$$

Um die Änderung der  $N$  deutlicher zu machen, sind beide Kurvenzüge noch einmal im vierfachen Maßstab aufgetragen,  $N_A$  abzüglich 10 t.

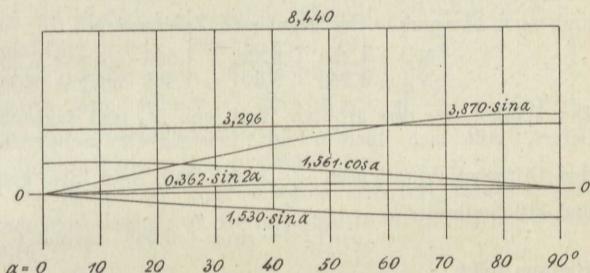


Fig. 283.

Um mit Sicherheit entscheiden zu können, bei welchem Winkel  $\alpha$  der größte Wert von  $N_A$  auftritt, wird die Differentialkurve  $\frac{dN_A}{d\alpha}$  gezeichnet. Man erhält sie am einfachsten, indem die ursprüngliche Kurve der  $N_A$  mit Hilfe einer Durchzeichnung aus Pauspapier auf derselben

wagerechten Achse um einen beliebigen kleinen Betrag  $u$  verschoben wird (Fig. 284), worauf die senkrechten Unterschiede beider Kurven von der wagerechten Achse aus aufgetragen werden, und zwar um die Strecke  $\frac{1}{2}u$  zurückverschoben. Das Verfahren führt wesentlich schneller zum Ziel, als etwa die direkte Berechnung der Differentialfunktion<sup>31)</sup>.

Für den Beweis der Richtigkeit wird die ursprüngliche Kurve geschrieben:  $N_A = f(\alpha)$ , während die um  $u$  verschobene lautet:  $N'_A = f(\alpha + u)$ . Die Differenzkurve hat demnach die Gleichung

$$N'_A - N_A = f(\alpha + u) - f(\alpha).$$

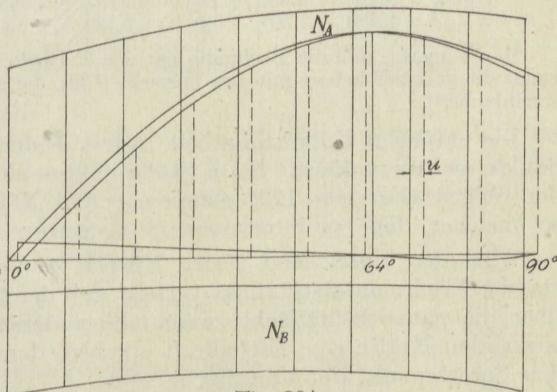


Fig. 284.

<sup>31)</sup> Slaby, Z. d. V. d. I. 1913; eine allerdings auch umständlichere Verbesserung gibt Röver, Z. d. V. d. I. 1914.

Nun ist für kleine Werte der Verschiebung  $u \propto d\alpha$ , also der Grenzwert

$$\lim_{u=0} \frac{f(\alpha + u) - f(\alpha)}{u} = \frac{dN_A}{d\alpha}.$$

An der Stelle, wo die Differentialkurve die Achse schneidet, hat  $N_A$  seinen größten Wert. Man entnimmt der Zeichnung  $\alpha \approx 64^\circ$  und

$$\begin{aligned} N_{A \max} &\approx 12,92 + 4,25 = 17,17 \text{ t}, \\ N_{A \min} &\approx 1,50 + 4,25 = 5,75 \text{ t}. \end{aligned}$$

Benutzt man die hier sicherlich besser zutreffenden Formeln (123), so wird

$$\begin{aligned} N &= \frac{Q}{4} + \frac{N_1}{4} \cdot \left( 1 \pm \frac{2c}{d} \pm \frac{b}{d} \cdot \cos \alpha \pm \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha \right) \\ &+ \frac{N_2}{4} \cdot \left( 1 \pm \frac{2c}{d} \mp \frac{b}{d} \cdot \cos \alpha \mp \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

und nach Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte

$$\begin{aligned} N_A &= 4,250 + 8,332 + 1,560 \cdot \cos \alpha + 2,568 \cdot \sin \alpha, \\ N_B &= 4,250 + 3,301 - 1,560 \cdot \cos \alpha - 2,568 \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Der Winkel, der den größten Wert von  $N_A$  und zugleich den kleinsten von  $N_B$  liefert, läßt sich hieraus mit Leichtigkeit rechnerisch finden, indem man den Differentialquotienten  $\frac{dN}{d\alpha}$  gleich Null setzt, also gemäß den Formeln (104) und (105) schreibt:

$$-1,560 \cdot \sin \alpha + 2,568 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,568}{1,560} = 1,645,$$

mithin

$$\alpha = 58^\circ 42'.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} N_{A \max} &= 4,250 + 8,332 + 1,560 \cdot 0,5194 + 2,568 \cdot 0,8544 \approx 15,59 \text{ t}, \\ N_{B \min} &= 4,250 + 3,301 - 0,810 - 2,194 \approx 4,55 \text{ t}. \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß die Rechnung mit den Formeln (123) wesentlich bequemer ist als die gebräuchlichere mit den Formeln (122), die sich freilich für  $c = 0$  auch vereinfacht<sup>32)</sup>.

Die statische Unbestimmtheit steigt, wenn die Anzahl der Stützpunkte sich vergrößert. Bei 5 Stützpunkten sind die Ergebnisse einer der obigen (Formeln 122) entsprechenden Näherungsrechnung schon so unsicher, daß vor ihrer Anwendung gewarnt werden muß.

Wird der hinreichend starre Körper von einer ebenen, ebenfalls starren Fläche unterstützt, so verteilt sich der Stützdruck gleichmäßig über die ganze Stützfläche, wenn alle anderen auf den Körper einwirkenden Kräfte eine Mittelkraft ergeben, deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt der Stützfläche geht.

Schneidet die Wirkungslinie dieser Mittelkraft die Stützfläche in einem anderen Punkt  $C$  (Fig. 285), so kann man sie nach dem Schwerpunkt  $S$  verschieben, muß aber noch ein Drehmoment von der Größe Kraft mal Verschiebungsweg hinzufügen. Das letztere wirkt nun

<sup>32)</sup> Richter, Z. d. V. d. I. 1909.

dahin, daß der Körper sich auf der Seite der Kippkante  $AB$  mit einem größeren Flächendruck anlegt und auf der entgegengesetzten mit einem geringeren. Der Flächendruck wird im Eckpunkt  $B$  der Fig. 285 am größten. Die genaue Verteilung dieses Flächendrucks kann mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht angegeben werden.

Rückt der Kraftangriffspunkt  $C$  vom Schwerpunkt  $S$  aus bis auf die Kippkante  $AB$ , so ist klar, daß die bisherige Stützfläche, auf der sich die Belastung gleichförmig verteilte, jetzt keine Belastung mehr trägt; diese wird ausschließlich von der Kante selbst getragen, wenn sie und die stützende Fläche genügend widerstandsfähig sind. Der Körper befindet sich in dem Fall gerade noch im unsicheren Gleichgewicht, er kippt um, sobald  $C$  sich noch weiter über  $AB$  hinaus vom Schwerpunkt  $S$  entfernt.

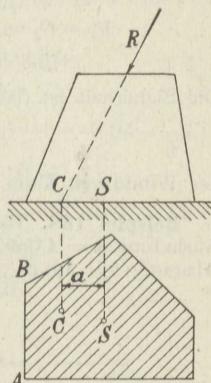


Fig. 285.

Die rechnerische Behandlung wird in der Weise vorgenommen, daß die Momente aller Kräfte, die auf Kippen hinwirken, als Kippmomente in bezug auf die Kippkante eingeführt werden, und die anderen als Stabilitätsmomente in bezug auf dieselbe Kante.

Die Kippkante ist die äußerste Begrenzungsgerade der Stützfläche, die in der Richtung  $SC$  erreicht wird (Fig. 285). Sie kann beliebig unterbrochen sein (Fig. 286).

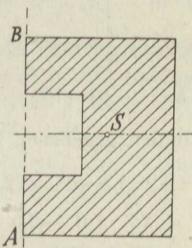


Fig. 286.

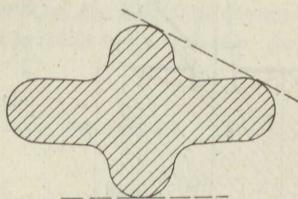


Fig. 287.

Wenn die Stützfläche

keine geradlinige Begrenzung hat, so wird die Kippkante von der gemeinsamen Tangente der in Richtung  $SC$  gelegenen äußersten Punkte der Fläche gebildet (Fig. 287) oder auch bei ausbauchender Wölbung der betreffenden Flächenbegrenzung von der senkrecht zur Linie  $SC$  stehenden Tangente.

**Beispiel 137.** Für die in Fig. 288 dargestellte Mauer von 20 m Länge ist die Stabilitätsberechnung gegen Wind durchzuführen.

Der größte vorkommende Winddruck sei  $p = 0,120 \text{ t/m}^2$  (neuerdings genügt  $p = 0,10 \text{ t/m}^2$ , vergl. Beispiel 21); das Kippmoment ist dann

$$M_k = p \cdot F \cdot \frac{1}{2} h = 0,120 \cdot 20 \cdot 3,5 \cdot 1,75 = 14,7 \text{ mt.}$$

Das Stabilitätsmoment ist, wenn das Gewicht des Mauerwerkes zu  $\gamma = 1,80 \text{ t/m}^3$  eingesetzt wird:

$$M_s = G_1 \cdot a_1 = (2,5 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,51) \cdot 20 \cdot 1,80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,51 = 13,4 \text{ mt.}$$

Die Mauer ist also, da  $M_k > M_s$  ist, nicht stabil; sie werde

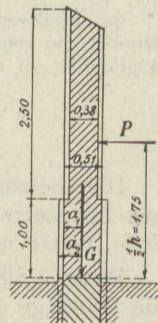


Fig. 288.

durch 4 Pfeiler von je 1,02 m Länge und mit Vörlagen von  $\frac{1}{2}$  Stein = 13 cm verstärkt, die demnach in 4,75 m Abstand voneinander stehen.

Dann wird das Stabilitätsmoment

$$M_s = G_2 \cdot a_2 = (2,5 \cdot 0,51 + 1 \cdot 0,64) \cdot 4 \cdot 1,02 \cdot 1,80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,64 \\ + (2,5 \cdot 0,38 + 1 \cdot 0,51) \cdot (20 - 4 \cdot 1,02) \cdot 1,80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,64 = 17,89 \text{ mt.}$$

Die Sicherheit ist damit

$$\xi = \frac{17,89}{14,70} \approx 1,22,$$

der Winddruck kann somit auf  $120 \cdot 1,22 = 146 \text{ kg/m}^2$  ansteigen.

**Beispiel 138.** Ein Drehkran für die Höchstbelastung  $Q = 3000 \text{ kg}$  habe die Ausladung  $a = 4,0 \text{ m}$ , das Gewicht der drehbaren Teile sei  $G = 2800 \text{ kg}$ , das im Abstand  $b = 1,0 \text{ m}$  von der Drehachse angreift, das der feststehenden Teile

$G_0 = 600 \text{ kg}$ . Das Betonfundament ( $\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3$ ) habe eine kreisförmige Grundfläche (Fig. 289), sein Durchmesser  $d$  ist unter Annahme einer  $\xi = 2,5$ fachen Sicherheit gegen Kippen zu bestimmen.

Man kann im allgemeinen annehmen, daß  $b$  ein wenig kleiner ist als der Halbmesser  $\frac{1}{2} d$ . Dann ist anzusetzen in bezug auf die Kippkante  $A$ :

$$\xi \cdot Q \cdot (a - \frac{1}{2}d) = G \cdot (\frac{1}{2}d - b) + (G_0 + Q_0) \cdot \frac{1}{2}d.$$

Nun ist  $Q_0 = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot \gamma$ , und damit ergibt sich

$$\frac{\pi}{8} \cdot d^3 \cdot h \cdot \gamma + (G + G_0 + \xi \cdot Q) \cdot \frac{1}{2}d = G \cdot b + \xi \cdot Q \cdot a$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\frac{\pi}{8} \cdot 2,2 \cdot 1,8 \cdot d^3 + (2,8 + 0,6 + 2,5 \cdot 3,0) \cdot \frac{1}{2}d \\ = 2,8 \cdot 1,0 + 2,5 \cdot 3,0 \cdot 4,0, \\ 1,555 \cdot d^3 + 5,45d = 32,8.$$

Die Gleichungen dritten Grades werden am einfachsten durch Probieren gelöst:

- Annahme 1:  $d = 2,0 \text{ m}$ :  $12,44 + 10,90 = 23,34$ , zu klein,  
 „ 2:  $d = 2,4 \text{ m}$ :  $21,50 + 13,08 = 34,58$ , zu groß,  
 „ 3:  $d = 2,35 \text{ m}$ :  $20,20 + 12,82 = 33,02$ , genau genug.

Bei größeren Lasten oder Ausladungen muß das Fundament quadratische Grundfläche erhalten, um das Gewicht bei nicht zu großer Ausdehnung nach Möglichkeit zu vergrößern.

## 16. Das ausgespannte Seil.

Die Gleichgewichtsbedingungen gelten ganz allgemein, also nicht nur für starre, sondern auch für nachgiebige Körper, wie z. B. auch Seile, Gurte und dgl.

Wenn ein Seil nur geringen Durchhang  $f$  hat, so ist nach Förmel (2) die Seillänge  $L$  nur sehr wenig von der Sehnenlänge verschieden, und man kann die Belastung  $q \text{ kg/m}$  des Seiles durch das Eigengewicht,

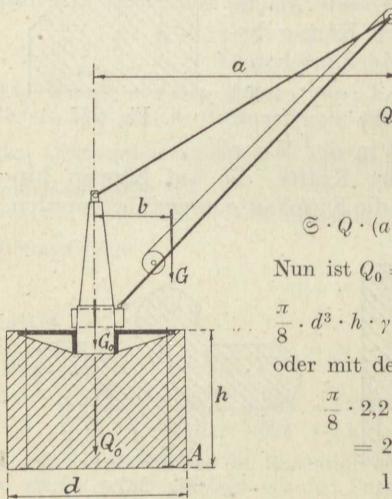


Fig. 289.

Schneelast usw. genau genug ermitteln aus  $q = \frac{Q}{l}$  anstatt  $\frac{Q}{L}$ , wenn  $Q$  das Gesamtgewicht des Seiles zwischen den Stützpunkten  $A$  und  $B$  (Fig. 290) angibt.

Man bestimmt die Auflagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen für das ganze Seil. Sie lauten für die lotrechten Kräfte:

$$V_1 + V_2 = q \cdot l,$$

wagerechten Kräfte:

$$H = H,$$

Drehmomente in bezug auf Punkt  $B$ :

$$-V_1 \cdot a + H \cdot h + q \cdot l \cdot \frac{1}{2} a = 0.$$

Hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot l + H \cdot \frac{h}{a} \\ V_2 &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot l - H \cdot \frac{h}{a} \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Um nun den Durchhang  $f$  zu ermitteln, werden die Gleichgewichtsbedingungen für die Seilhälfte  $BC$  niedergeschrieben. Es gilt für die lotrechten Kräfte:  $+V + V_2 = q \cdot \frac{1}{2} l$ ,  
wagerechten Kräfte:  $H = H$ ,

(d. h. die wagerechte Seitenkraft der Seilspannung ist überall dieselbe).

Drehmomente in bezug auf Punkt  $B$ :

$$-V \cdot \frac{1}{2} a + H \cdot \left( \frac{1}{2} h - f \right) + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} a = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich

$$V = \frac{q \cdot l}{2} - V_2 = \frac{q \cdot l}{2} - \frac{q \cdot l}{2} + H \cdot \frac{h}{a} = H \cdot \frac{h}{a}.$$

Wird dieser Wert in die Momentengleichung eingesetzt, so geht sie über in

$$\frac{h}{2} - f = \frac{H \cdot \frac{h}{a} - \frac{q \cdot l}{4}}{H} \cdot \frac{a}{2} = \frac{h}{2} - \frac{q \cdot l \cdot a}{8H},$$

woraus folgt

$$f = \frac{q \cdot l \cdot a}{8 \cdot H}. \quad (125a)$$

Nun kann die vorstehende Gleichung für  $V$  geschrieben werden

$$\frac{V}{H} = \frac{h}{a}, \quad (126)$$

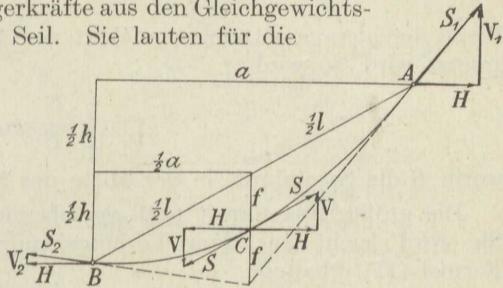


Fig. 290.

und ein Vergleich mit der Fig. 290 lehrt sofort, daß somit  $S$  parallel  $l$  sein muß; es gilt also auch

$$\frac{H}{S} = \frac{a}{l}. \quad (127)$$

Wenn der hieraus entnommene Wert von  $H$  in die Formel (125 a) eingesetzt wird, so wird

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot S}, \quad (125 b)$$

worin  $S$  die Spannkraft in der Mitte des Seiles bedeutet.

Die größte Spannkraft tritt am oberen Befestigungspunkt  $A$  auf. Sie wird leicht aus dem Vorhergehenden durch Anwendung von Formel (17) erhalten:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{H^2 + V_1^2} = \sqrt{H^2 + \left(H \cdot \frac{h}{a} + \frac{q \cdot l}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{H^2 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) + H \cdot \frac{h}{a} \cdot q \cdot l + \frac{q^2 \cdot l^2}{4}} \\ &= \sqrt{S^2 \cdot \frac{a^2}{l^2} \cdot \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right) + S \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{h}{a} \cdot q \cdot l + 2 \cdot q \cdot S \cdot f} \\ &= S \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{q}{S} \cdot \left(\frac{h}{2} + f\right)} \end{aligned}$$

oder, da  $q$  gegenüber  $S$  immer sehr klein ist, gemäß Formel (20)

$$S_1 = S + q \cdot \left(\frac{h}{2} + f\right). \quad (128 a)$$

Entsprechend ist am unteren Befestigungspunkt  $B$

$$S_2 = S - q \cdot \left(\frac{h}{2} - f\right), \quad (128 b)$$

also

$$S_1 = S_2 + q \cdot h.$$

Das Seil bildet eine Parabel<sup>33)</sup>, deren Endtangenten sich in einem Punkt unter der Mitte schneiden, der noch um die Strecke  $f$  unterhalb der Parabel liegt (Fig. 290). Denn für einen beliebigen Punkt  $D$  mit dem Abstand  $x$  und  $y$  von der Auflagerstelle  $B$  erhält man aus Fig. 291 die Momentengleichung

$$-V \cdot x + H \cdot y + q \cdot l \cdot \frac{1}{2} x = 0;$$

dazu tritt die Gleichung für die lotrechten Kräfte

$$V = -V_2 + q \cdot l.$$

<sup>33)</sup> Galilei, Discorsi. 1638.

Hiermit folgt, wenn noch aus der Fig. 291 eingesetzt wird  $l' = l \cdot \frac{x}{a}$

$$V_2 \cdot x - \frac{q \cdot l}{2a} \cdot x^2 + H \cdot y = 0$$

oder

$$x^2 - 2x \cdot \frac{V_2 \cdot a}{q \cdot l} = + \frac{2 \cdot H \cdot a}{q \cdot l} \cdot y.$$

Diese Gleichung kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \left( x - \frac{V_2 \cdot a}{q \cdot l} \right)^2 \\ & = + 2 \cdot \frac{H}{q} \cdot \frac{a}{l} \cdot \left( y + \frac{V_2^2 \cdot a}{2 \cdot H \cdot q \cdot l} \right), \end{aligned}$$

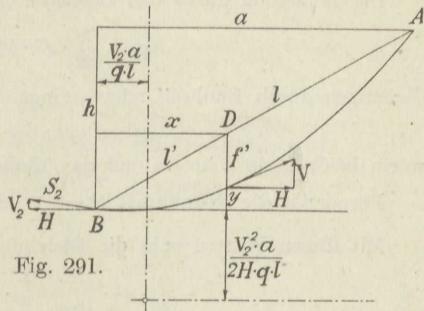


Fig. 291.

und sie entspricht der Normalform der Parabel [Formel (110)], wenn eine Achsenverschiebung um die den  $x$  und  $y$  beigegebenen Beträge stattfindet (Fig. 291). Der Beiwert von  $x$  wird positiv, wenn  $V_2$  nach unten gerichtet ist.

**Beispiel 139.** Das Tragseil einer Seilschwebbahn ohne Zwischenstützen vom Durchmesser  $d = 35$  mm hat den Querschnitt  $F = 7,77$  cm<sup>2</sup> und wiegt  $q = 6,7$  kg/m. Es werde angespannt mit  $\frac{S}{F} = \sigma = 2400$  kg/cm<sup>2</sup>. Die Strecke habe die wagerecht gemessene Länge  $a = 432$  m und das Gefälle  $h = 128$  m (Fig. 292). Anzugeben ist der Durchhang  $f$  des Seiles, die Größe des Spannunggewichtes  $S_1$  und die genaue Länge  $L$ .

Aus den Formeln (125 b) und (128 a) folgt

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot \left[ S_1 - q \cdot \left( \frac{h}{2} + f \right) \right]} = \frac{a^2 + h^2}{8 \cdot \left( \frac{S_1}{q} - \frac{h}{2} - f \right)}$$

Nun ist

$$\frac{S_1}{q} = \frac{F \cdot \sigma}{q} = \frac{7,77 \cdot 2400}{6,7} = 1,16 \cdot 2400 = 2784 \text{ m}$$

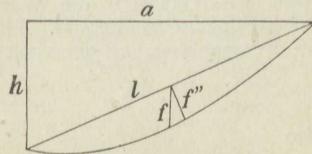


Fig. 292.

die Länge, bei der das frei herabhängende Seil gerade die zugelassene Anspannung erhält. Ihr gegenüber kann der kleine Wert von  $f$  im Nenner der obigen Formel vernachlässigt werden, und man erhält so

$$f = \frac{432^2 + 128^2}{8 \cdot (2784 - 64)} = 9,33 \text{ m.}$$

Nun wird

$$S_2 = S_1 - q \cdot h = 6,7 \cdot (2784 - 128) = 17\,800 \text{ kg.}$$

Der Fig. 292 entnimmt man jetzt  $f' = f \cdot \frac{a}{l}$  und damit ergibt sich gemäß

Formel (2)

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{203\,008} \cdot \left[ 1 + \frac{8}{3} \cdot \left( \frac{9,33 \cdot 432}{203\,008} \right)^2 - \frac{64}{10} \cdot \left( \frac{9,33 \cdot 432}{203\,008} \right)^4 \right] \\ &= 450,566 \cdot (1 + 0,0530 - 0,0025) = 452,841 \text{ m.} \end{aligned}$$

**Beispiel 140.** Es soll der Durchhang berechnet werden, der einem annähernd wagerecht ausgespannten eisernen Telegraphendraht von  $d = 3$  mm Stärke und

$l = 100$  m Spannweite zu geben ist, wenn er im Winter bei  $-15^\circ$  durch Rauhref belastet nur eine Anspannung von  $\sigma = 2000$  kg/cm<sup>2</sup> erfahren soll, und zwar für den Fall, daß er bei  $+15^\circ$  verlegt wird.

Die Belastung durch das Eigengewicht beträgt

$$q_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot 100 \cdot \frac{\gamma}{1000} \text{ kg/m,}$$

diejenigen durch Rauhref oder geringen Winddruck<sup>34)</sup>

$$q_2 = 0,50 \cdot d + 0,19 \text{ kg/m,}$$

worin beide Male  $d$  in cm und das Einheitgewicht  $\gamma$  in kg/dm<sup>3</sup> einzusetzen ist.

Ferner ist die Spannkraft  $S = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma$ .

Mit diesen Werten geht die Gleichung (125 b) über in

$$f_0 = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \frac{\gamma}{10} + \frac{1}{2} \cdot d + 1,09}{8 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma} \cdot l^2 = c \cdot l^2,$$

und man erhält hiermit die Länge des kalten Drahtes, wenn das dritte Glied der Klammer der Formel (2) als verschwindend wegliebt:

$$L_0 = l \cdot \left( 1 + \frac{1}{24} \cdot c^2 \cdot l^2 \right).$$

Wenn die Temperatur jetzt um  $t^\circ$  steigt, so verlängert sich der Draht auf die Länge  $L$  mit einem größeren Durchhang  $f$

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) = l \cdot \left[ 1 + \frac{8}{3} \cdot \left( \frac{f_1}{l} \right)^2 \right],$$

worin  $\alpha = 0,0000120$  die Wärmeausdehnungsziffer des Flußeisens und  $t$  der Temperaturunterschied ist. Wird hierin der Wert von  $L_0$  eingesetzt, so folgt mit Vernachlässigung eines verschwindend kleinen Betrages

$$\alpha \cdot t = \frac{1}{24} \cdot c^2 \cdot l^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{f_1^2}{l^2},$$

also

$$f_1 = \frac{1}{8} \cdot l \cdot (24 \cdot \alpha \cdot t + c^2 \cdot l^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist mit den gegebenen Zahlenwerten

$$c = \frac{0,0707 \cdot 0,785 + 0,15 + 0,19}{0,0707 \cdot 2200} = \frac{0,254}{100},$$

und bei dem Temperaturunterschied  $30^\circ$

$$24 \cdot \alpha \cdot t = 24 \cdot 0,0000120 \cdot 30 = 0,0086,$$

mithin

$$f_1 = \frac{100}{8} \cdot (0,0086 + 0,254)^{\frac{1}{2}} = 3,49 \text{ m.}$$

Entsprechend erhält man für die Temperaturunterschiede

$$\begin{array}{cccccc} t = & 0 & 10 & 20 & 40 & 50^\circ \\ f = & 3,29 & 3,36 & 3,43 & 3,55 & 3,62 \text{ m.} \end{array}$$

<sup>34)</sup> Normalien des Verbandes deutscher Elektrotechniker, E. T. Z. 1913, gemessen durch Schmedding, Z. d. B. 1917

**Beispiel 141.** Ein Treibriemen vom Einheitsgewicht  $\gamma = 1,025 \text{ kg/dm}^3$  ist im losen Trum gespannt mit  $\sigma_1 = 20 \text{ kg/cm}^2$  und im ziehenden mit  $\sigma_2 = 36 \text{ kg/cm}^2$ , die freie Länge beträgt  $l = 12,5 \text{ m}$ . Anzugeben ist der Durchhang beider Trümer. Aus der Formel (125b) folgt mit

$$q = b \cdot s \cdot 100 \cdot \frac{\gamma}{1000} \text{ kg/m}$$

und

$$S = b \cdot \sigma \cdot \text{kg,}$$

wenn die Breite  $b$  und die Stärke  $s$  beidemale in cm eingesetzt wird:

$$f_1 = \frac{\gamma \cdot l^2}{80 \cdot \sigma_1} = \frac{1,025 \cdot 12,5^2}{80 \cdot 20} = 0,10 \text{ m}$$

und

$$f_2 = f_1 \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 0,10 \cdot \frac{20}{36} = 0,056 \text{ m.}$$

**Differential- und Integralrechnung II.** Es sei zeichnerisch darzustellen die Gleichung

$$y = a^x. \tag{129}$$

Man erhält

für $x = 0$	1	2	3	...
$y = 1$	$a$	$a^2$	$a^3$	...

Die  $y$  bilden somit eine geometrische Reihe, bei der jedes Glied aus dem Vorhergehenden durch Multiplikation mit demselben Faktor entsteht, wenn die  $x$  nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten, bei der jedes Glied aus dem Vorhergehenden durch Addieren desselben (gegebenenfalls auch negativen) Betrages entsteht. Man trägt hiernach an die  $y$ -Achse einen beliebigen Winkel  $\alpha$  an, mißt ferner auf der  $y$ -Achse die Strecken  $1$  und  $a$  vom Nullpunkt aus ab; durch Ziehen der in Fig. 293 angegebenen Parallelen erhält man dann die gesuchte Kurve.

Hieraus läßt sich leicht eine zweite Exponentialkurve entwickeln, deren Tangente an der Stelle  $x = 0$  und  $y = 1$  parallel zu den schrägen Hilfslinien im Winkel  $\alpha$  verläuft, indem man die Rhomben zeichnet, deren Diagonalen die entsprechenden Abschnitte der  $y$ -Achse sind. Je kleiner der Winkel  $\alpha$  gewählt wird, desto genauer werden die kleinen Zunahmen  $dx$  und  $dy$  dargestellt.

Ähnlichen Dreiecken wird dann entnommen

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy \cdot \text{tg } \beta}{y}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{tg } \beta} \tag{130}$$

bzw. mit Anwendung der Kurvengleichung (129)

$$\frac{d a^x}{dx} = \frac{a^x}{\text{tg } \beta}. \tag{131}$$

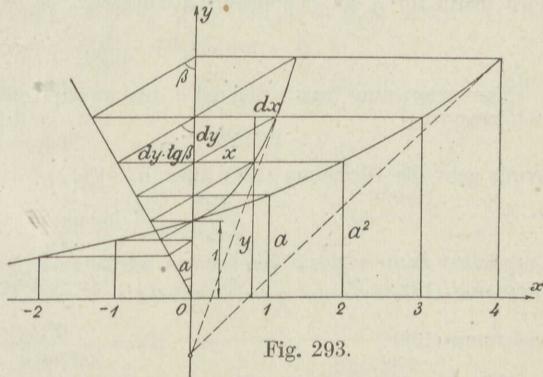


Fig. 293.

Wird in derselben Weise die Exponentialkurve gezeichnet, bei der  $\beta = 45^\circ$  ist, so erhält man unter im übrigen gleichen Umständen eine andere Basis  $e$  statt  $a$ , und es gilt, da  $\text{tg } 45^\circ = 1$  ist:

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x. \tag{132}$$

Logarithmiert man die Ausgangsgleichung (129), und zwar in bezug auf die Basis  $a$ , so lautet sie

$$x = {}^a \log y, \quad (133)$$

und die gezeichnete Kurve stellt naturgemäß auch diese Gleichung dar.

Aus der Formel (130) in der Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{y}$$

folgt

$$\frac{d {}^a \log y}{dy} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{y} \quad (134)$$

bzw.

$$\frac{d {}^a \log y}{dy} = \frac{1}{y}. \quad (135)$$

Man entnimmt nun der Fig. 293

$$dy_a = dy_e \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

woraus durch Integration folgt

$$y_a = y_e \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Es ist also

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_a}{y_e} = \frac{dy_a}{dy_e}, \quad (136)$$

worin die Zeichen  $a$  und  $e$  die Basis der betreffenden Logarithmen andeuten.

Zwischen den Differentialquotienten zweier Exponentialkurven verschiedener Basis besteht sonach das gleiche Verhältnis wie zwischen den zugehörigen Ordinaten, d. h. die an derselben Stelle  $y$  gezogenen Tangenten schneiden sich in demselben Punkt der  $y$ -Achse (Fig. 293).

Die Division der beiden Gleichungen (134) und (135) liefert nun

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d {}^a \log y}{d {}^e \log y}$$

oder gemäß Formel (136)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{{}^a \log y}{{}^e \log y}. \quad (137)$$

Wird hierin für  $y$  der Sonderwert  $a$  eingesetzt, so ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{{}^e \log a}. \quad (138)$$

Man nennt nun  ${}^e \log a = \log \operatorname{nat} a$  den natürlichen Logarithmus von  $a$ , und zwar ist

$$e = 2,71828 \dots, \quad {}^{10} \log e = 0,43429 \dots$$

Damit geht die Gleichung (131) über in

$$\frac{d a^x}{dx} = a^x \cdot \log \operatorname{nat} a. \quad (139)$$

Umgekehrt kann sogleich geschrieben werden:

$$\text{Gleichung (132):} \quad \int e^x \cdot dx = e^x + C, \quad (140)$$

$$\text{Gleichung (139):} \quad \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\log \operatorname{nat} a} + C. \quad (141)$$

Für  $\beta = 45^\circ$  ergibt die Gleichung (130)

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y},$$

und die Integration liefert

$$x + C = \int \frac{dy}{y}.$$

Nun ist aber gemäß Gleichung (133) für  $\beta = 45^\circ$

$$x = \log \text{nat } y,$$

so daß man erhält<sup>35)</sup>

$$\int \frac{dy}{y} = \log \text{nat } y + C \tag{142}$$

oder umgekehrt

$$d \log \text{nat } y = \frac{dy}{y} \tag{143}$$

Hiermit ist auch die Lösung der Formel (98e) für den Ausnahmefall  $n = -1$  gegeben.

Setzt man jetzt

$$y = a \cdot x + (1 + a^2 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}},$$

so wird mit Benutzung der Formel (98e)

$$\frac{dy}{dx} = a + (1 + a^2 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot a^2 \cdot x$$

und

$$\frac{dy}{y} = x \cdot \frac{a + (1 + a^2 \cdot x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot a^2 \cdot x}{a \cdot x + (1 + a^2 \cdot x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 \cdot x^2}}$$

Es ist also

$$\int \frac{a \cdot dx}{\sqrt{1 + a^2 \cdot x^2}} = \log \text{nat } (a \cdot x + \sqrt{1 + x^2 \cdot a^2}) + C \tag{144}$$

Ist die Seillänge  $L$  wesentlich größer als die gerade Verbindungslinie  $l$  der beiden Auflagerpunkte  $A$  und  $B$ , so ist die bisherige Annahme, die zur Parabel als Seilcurve geführt hat, nicht mehr haltbar. Um die Normalform der Kurvengleichung zu finden, werden nach den bei der Parabel gemachten Erfahrungen die Bezugsachsen von vornherein so gewählt, daß die  $y$ -Achse durch den tiefsten Punkt der Kurve geht und die  $x$ -Achse um den Betrag  $h_0$  darunter liegt (Fig. 294). An dem Seilelement  $dL$  wirken dann im Punkte  $C$  die in Fig. 295 eingetragenen Kräfte, und es gilt

$$S \cdot \sin \varphi + q \cdot dL - (S + dS) \cdot \sin(\varphi + d\varphi) = 0$$

$$\text{und } (S + dS) \cdot \cos(\varphi + d\varphi) - S \cdot \cos \varphi = 0.$$

Hierin kann der ganz kleine Zuwachs  $d\varphi$  gegenüber der endlichen Größe  $\varphi$  gestrichen werden; aber nicht  $dS$  gegenüber  $S$ , bevor nicht die

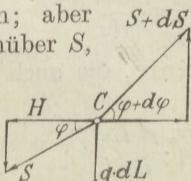


Fig. 295.

Subtraktion ausgeführt ist. Man erhält so aus der zweiten Gleichung

$$dS \cdot \cos \varphi = 0.$$

Der Zuwachs der wagerechten Seitenkraft der Spannkraft  $S$  ist Null, sie selbst also unveränderlich gleich  $H$ .

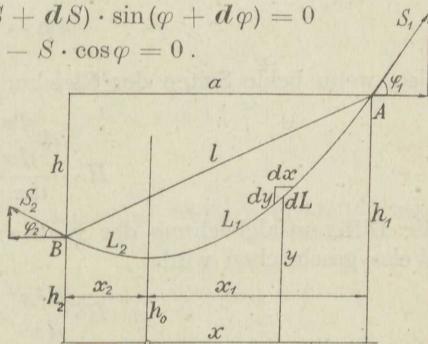


Fig. 294.

<sup>35)</sup> Fischer, Technik und Schule. 1908.

Aus der ersten Gleichung folgt ebenso

$$dS \cdot \sin \varphi = q \cdot dL$$

oder nach der Integration

$$S \cdot \sin \varphi = q \cdot L + C.$$

Rechnet man  $L$  vom Scheitelpunkt aus nach jeder Seite besonders, so ist für  $\varphi = 0$ :  $S \cdot 0 = q \cdot 0 + C = 0$  und somit

$$S \cdot \sin \varphi = q \cdot L. \quad (145)$$

Wird in die vorstehenden Differentialgleichung eingesetzt aus Fig. 294

$$S = \frac{H}{\cos \varphi}, \quad (146)$$

so lautet sie

$$d \frac{H}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi = dH \cdot \operatorname{tg} \varphi = q \cdot dL,$$

und ihre Integration ergibt

$$H \cdot \operatorname{tg} \varphi = q \cdot L + C.$$

Rechnet man wieder  $L$  vom Scheitel aus nach jeder Seite besonders, so ist für  $\varphi = 0$ :  $H \cdot 0 = q \cdot 0 + C$ , also  $C = 0$ , und man erhält so

$$\frac{H}{q} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = L_1, \quad \frac{H}{q} \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = L_2. \quad (147)$$

Andererseits ist nach Fig. 294

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx},$$

also, wenn beide Seiten der Gleichung durch  $dx$  dividiert werden,

$$H \cdot \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = q \cdot \frac{dL}{dx}$$

die Differentialgleichung der Kettenlinie, die auch in abgekürzter Weise geschrieben wird

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = q \cdot \frac{dL}{dx}. \quad (148)$$

Nun ergibt sich wieder aus Fig. 294

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

also

$$dL = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (149)$$

und wenn vorübergehend abgekürzt wird  $\frac{dy}{dx} = u$ , geht die Differentialgleichung der Kettenlinie über in

$$H \cdot \frac{du}{dx} = q \cdot \sqrt{1 + u^2}.$$

Die Trennung der Veränderlichen auf die beiden Seiten der Gleichung ergibt daraus

$$\frac{H}{q} \cdot \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = dx$$

und die Integration dieser Gleichung gemäß Formel (144)

$$x = \frac{H}{q} \cdot \log \text{nat} (u + \sqrt{1 + u^2}) + C.$$

Für  $x = 0$  ist, wie die Fig. 294 sogleich lehrt,  $u = \frac{dy}{dx} = 0$ , mithin

$$0 = \frac{H}{q} \cdot \log \text{nat} 1 + C.$$

Da nun der Logarithmus von 1 ebenfalls Null ist, so wird wieder  $C = 0$  und, wenn  $\frac{H}{q} = h_0$  gesetzt wird,

$$e^{\frac{x}{h_0}} - u = \sqrt{1 + u^2}$$

oder

$$e^{2 \cdot \frac{x}{h_0}} - 2 \cdot u \cdot e^{\frac{x}{h_0}} + u^2 = 1 + u^2,$$

woraus folgt

$$u = \frac{e^{2 \cdot \frac{x}{h_0}} - 1}{2e^{\frac{x}{h_0}}} = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right)$$

oder, wenn jetzt der frühere Wert von  $u = \frac{dy}{dx}$  wiederhergestellt wird,

$$2 \cdot dy = dx \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right) = h_0 \cdot d \frac{x}{h_0} \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right).$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt nach Formel (132)

$$2 \cdot y = h_0 \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} + e^{-\frac{x}{h_0}} \right) + C.$$

Für  $x = 0$  erhält man

$$y = \frac{1}{2} \cdot h_0 \cdot (1 + 1) + C;$$

ist  $h_0 = \frac{H}{q}$  der Abstand des Scheitels der Kettenlinie von der  $x$ -Achse, so wird  $C = 0$  und die Gleichung der Kettenlinie<sup>36)</sup> lautet

$$y = \frac{1}{2} \cdot h_0 \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} + e^{-\frac{x}{h_0}} \right). \quad (150)$$

und hieraus folgt weiter

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right), \quad (151)$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung (147)

$$L = \frac{1}{2} \cdot h_0 \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right). \quad (152)$$

Es werde jetzt noch einmal auf die Gleichung (147) zurückgegriffen. Aus

$$L = h_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

erhält man gemäß Formel (106)

$$dL = h_0 \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Nun ist nach Fig. 289  $dy = dL \cdot \sin \varphi$ , also

$$dy = h_0 \cdot \frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} = -h_0 \cdot \frac{d \cos \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

und hieraus folgt nach Formel (98)

$$y = \frac{h_0}{\cos \varphi}, \quad (153)$$

worin  $C$  ebenfalls wieder den Wert 0 annimmt und deshalb wegfällt.

Durch Division von Gleichung (146) und (153) ergibt sich

$$\frac{S}{H} = \frac{y}{h_0}$$

oder

$$S = y \cdot q, \quad (154)$$

also

$$S_1 - S_2 = h \cdot q: \quad (154a)$$

Der Spannkraftunterschied an zwei verschiedenen hohen Stellen der Kettenlinie ist gleich dem Kettengewicht des Höhenunterschiedes.

Zur Erleichterung der Zahlenrechnungen dient die folgende Zusammenstellung<sup>37)</sup> der Werte von  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} - e^{-\frac{x}{h_0}} \right)$  (erste Zeile) und  $\frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{\frac{x}{h_0}} + e^{-\frac{x}{h_0}} \right)$  (zweite Zeile) in Abhängigkeit von  $\frac{x}{h_0}$ :

<sup>36)</sup> Bernoulli, Huygens, Leibniz, Acta eruditorum. Lipsiae 1698.

<sup>37)</sup> Ligowski, Tafel der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen 1890.

$\frac{x}{h_0}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901
	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911
	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941
	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000
	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098
	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248
	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461
	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748
	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122
	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598
	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314

**Beispiel 142.** Das Zugseil einer Drahtseilschwebbahn von  $d = 13$  mm Durchmesser hat den Querschnitt  $F = 0,62 \text{ cm}^2$  und das Gewicht  $q = 0,65 \text{ kg/m}$ . Es ist an der höchsten Stelle mit  $\sigma_1 = 1200 \text{ at}$  angespannt und hängt frei über die wagerecht gemessene Strecke  $a = 432,0 \text{ m}$  bei einem Gefälle von  $h = 128,0 \text{ m}$ . Anzugeben ist die Spannung des Seiles an der tiefsten Stelle und die Form des Seiles sowie seine Gesamtlänge.

Die Anspannung am unteren Auflagerpunkt ergibt sofort Gleichung (134a)

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{h \cdot q}{F} = 1200 - \frac{128 \cdot 0,65}{0,62} = 1066 \text{ at.}$$

Jetzt muß die Bedingung bestehen

$$\frac{x_1}{h_0} - \frac{x_2}{h_0} = \frac{a}{h_0},$$

wenn, wie es bei stärkeren Neigungen der Fall ist, der Scheitel der Kettenlinie außerhalb der Strecke  $a$  dicht beim Punkt  $B$  der Fig. 294 liegt. Befindet er sich innerhalb der Strecke  $a$ , so ist  $x_2$  mit dem positiven Vorzeichen einzusetzen.

Die Gleichung muß durch Probieren mit Hilfe der Zusammenstellung gelöst werden; einen ersten Anhalt liefert die Tatsache, daß bei größeren Neigungen  $h_0$  nicht wesentlich von  $h_2$  abweicht.

$$\text{Annahme I: } h_0 = 1014 \text{ m. } \frac{a}{h_0} = \frac{432,0}{1014} = 0,4260,$$

$$\sigma_0 = 1014 \cdot \frac{0,65}{0,62} = 1063 \text{ at.}$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1200}{1063} = 1,1289, \quad \text{also} \quad \frac{x_1}{h_0} = 0,5025$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_2} = \frac{1066}{1063} = 1,0028, \quad \text{also} \quad \frac{x_2}{h_0} = 0,0743$$

$$\text{Unterschied: } 0,4282,$$

um 0,0022 zu groß.

Annahme 2:  $h_0 = 1013 \text{ m.}$   $\frac{a}{h_0} = \frac{432,0}{1013} = 0,4264,$

$$\sigma_0 = 1062 \text{ at.}$$

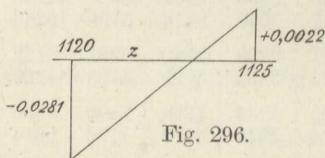
$$\frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1200}{1062} = 1,1291, \quad \text{also} \quad \frac{x_1}{h_0} = 0,5028$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_2} = \frac{1066}{1062} = 1,0038, \quad \text{also} \quad \frac{x_2}{h_0} = 0,0867$$

$$\text{Unterschied: } 0,4161,$$

um 0,0103 zu klein.

Werden die Fehler nach Fig. 296 zeichnerisch aufgetragen, so ergibt sich die Gleichung



also

$$\frac{z}{1-z} = \frac{0,0103}{0,0022},$$

$$z = \frac{1 \cdot 0,0103}{0,0103 + 0,0022} = 0,82,$$

mithin

$$h_0 = 1013,8 : \sigma_0 = 1013,8 \cdot \frac{0,65}{0,62} = 1062,8.$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_1} = \frac{1200,0}{1062,8} = 1,1290, \quad \frac{x_1}{h_0} = 0,5026, \quad \text{also} \quad x_1 = 509,5 \text{ m}$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_2} = \frac{1066,0}{1062,8} = 1,0030, \quad \frac{x_2}{h_0} = 0,0772, \quad \text{also} \quad x_2 = 78,3 \text{ m}$$

$$\underline{a = 431,2 \text{ m,}}$$

gegenüber 432,0 m.

Man bemerkt, daß die Rechnung nicht sehr genau ist, trotzdem die Genauigkeit weiter getrieben ist, als die praktischen Unterlagen es eigentlich zulassen. Es werde abgerundet:

$$x_1 = 510 \text{ m,} \quad x_2 = 78 \text{ m}$$

und berechnet

$$y_1 = \frac{h_0}{\cos \varphi_1} = 1145 \text{ m,} \quad y_2 = \frac{h_0}{\cos \varphi_2} = 1017 \text{ m.}$$

Teilt man die Spannweite  $a$  in 8 gleiche Teile von je 54 m, so erhält man

Teil:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x =$	78	132	186	240	294	348	402	456	510
$\frac{x}{h_0} =$	0,0769	0,1302	0,1835	0,2367	0,2900	0,3433	0,3965	0,4498	0,5031
$\frac{1}{\cos \varphi} =$	1,0030	1,0085	1,0169	1,0281	1,0423	1,0596	1,0797	1,1030	1,1290
$y =$	1017	1022	1031	1042	1056,7	1074	1095	1118	1145

Der Durchhang in der Mitte beträgt hiernach

$$f = y_2 + \frac{1}{2}h - y_4 = 1017 + \frac{1}{2} \cdot 128 - 1056,7 = 24,3 \text{ m.}$$

Die Parabelformel gibt an

$$f = \frac{0,65(432^2 + 128^2)}{8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1200 + 1066)} = 14,5 \text{ m,}$$

also um  $\frac{9,8}{14,5} = 0,68$  des danach berechneten Wertes zu klein.

Die Seillänge setzt sich zusammen aus

$$\begin{aligned} L_1 &= h_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 1013,8 \cdot 0,5039 = 533,3 \text{ m} \\ L_2 &= h_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = 1013,8 \cdot 0,0773 = 78,4 \text{ m} \\ \hline \text{Gesamtlänge: } &454,9 \text{ m.} \end{aligned}$$

Bemerkt werde, daß bei wagerechter Strecke  $l = a$  unter sonst gleichen Verhältnissen der Fehler der Parabel nur 0,066 beträgt.

Die gleichmäßig über die Seillänge verteilte Belastung und die über die Sehne gleichmäßig verteilte kommen zusammen vor bei den Kettenbrücken<sup>38)</sup>, allerdings überwiegt dort im allgemeinen das Gewicht der Fahrbahn.

Wichtiger ist der Fall der ungleichmäßigen Streckenbelastung nach Abb. 297. Vorausgesetzt werde ein stark angespanntes, wenig durchhängendes Seil, dessen Auflagerpunkte in derselben Wagerechten liegen. Die Einzellasten werden so klein angenommen, daß sie auch nicht annähernd einen Knick hervorrufen können, wie er im Abschnitt 6 für große Lasten berechnet wurde.

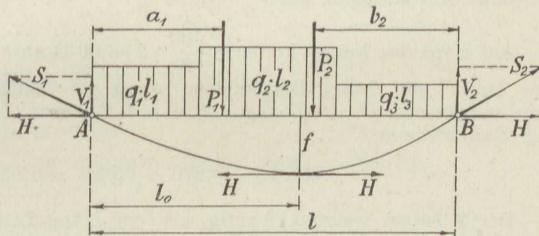


Fig. 297.

Es gelten dann die Gleichgewichtsbedingungen:

$$H = H,$$

$$V_1 + V_2 = q_1 \cdot l_1 + q_2 \cdot l_2 + q_3 \cdot l_3 + P_1 + P_2,$$

und für den dem Auflager A benachbarten Teil von der Länge  $l_0$  und den Durchhang  $f$  in bezug auf den Punkt A:

$$H \cdot f = q_1 \cdot l_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_1 + P_1 \cdot a_1 + q_2 \cdot (l_0 - l_1) \cdot (l_1 + \frac{1}{2} \cdot [l_0 - l_1]).$$

Aus der letzten Gleichung erhält man sofort

$$H \cdot f = + \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot l_0^2 - \frac{1}{2} \cdot (q_2 - q_1) \cdot l_1^2 + P_1 \cdot a_1. \quad (155)$$

Entsprechend ergibt sich für den dem Auflager B benachbarten Teil

$$H \cdot f = + \frac{1}{2} \cdot q_3 \cdot (l - l_0)^2 - \frac{1}{2} \cdot (q_2 - q_3) \cdot l_3^2 + P_2 \cdot b_2.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man den wagerechten Abstand der Stelle des größten Durchhanges  $f$  vom Auflager A zu

$$l_0 = \frac{1}{2} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{q_1}{q_2}\right) \cdot \frac{l_1^2}{l} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{q_3}{q_2}\right) \cdot \frac{l_3^2}{l} - \frac{P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot b_2}{q_2 \cdot l}, \quad (156)$$

der in Gleichung 155 einzusetzen ist.

<sup>38)</sup> Navier, Mém. sur les ponts suspendus, 1823.

**Beispiel 143.** Von dem über einen Zechenhof ausgespannten Schutznetz einer Drahtseilbahn sei gegeben  $l = 83$  m,  $l_1 = 20$  m,  $l_2 = 53$  m,  $l_3 = 10$  m, der Abstand der T-Eisen Nr. 6  $c = 5,3$  m, die Breite des Schutznetzes  $b = 4,2$  m, die Maschenweite  $a_0 = 4$  cm, die Drahtstärke  $\delta = 2$  mm, die Seilstärke 28 mm (Fig. 298). Anzugeben ist die größte in den Tragseilen auftretende Spannkraft  $S$ , wenn der Durchhang zu 5,5 v. H. der Länge  $l$  festgesetzt wird.

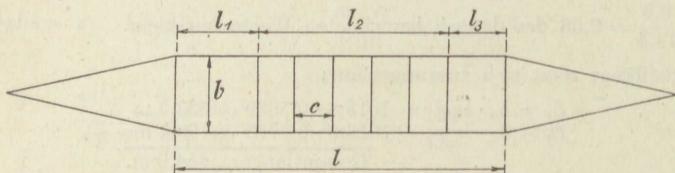


Fig. 298.

Überschlägig werde noch angenommen, daß von dem Schutznetz und seiner Rauhreifbelastung, die sich zu  $q = 0,5 \cdot d + 0,19$  kg/m berechnet, der in Fig. 299 von den gestrichelten Linien eingeschlossene Teil unmittelbar von den Verstärkungseisen getragen wird.

Auf  $1 \text{ m}^2$  des Netzes kommen  $\frac{100}{4} \cdot 2 = 50$  Drähte von etwa 1,1 m Länge. Der Draht von 2 mm Durchmesser wiegt  $q' = 0,024$  kg/m, dazu kommt das Rauhreifgewicht  $q'' = 0,5 \cdot 0,2 + 0,19 = 0,29$  kg/m. Es wiegt mithin  $1 \text{ m}^2$  Netz mit Rauhreifbesatz

$$50 \cdot 1,1 \cdot (0,290 + 0,024) \approx 17,3 \text{ kg.}$$

Der T-Träger wiegt 6,19 kg/m, also bei 4,3 m Länge

$$6,19 \cdot 4,30 = 26,6 \text{ kg.}$$

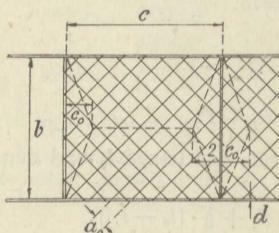


Fig. 299.

Hierzu tritt noch das Gewicht von  $b \cdot c_0 \text{ m}^2$  Schutznetz (bei den beiden äußersten T-Trägern nur die Hälfte):

$$4,2 \cdot 1 \cdot 17,3 = 72,7 \text{ kg.}$$

Für jedes Seil ergibt sich hieraus die Einzelbelastung

$$P = \frac{1}{2} \cdot (26,6 + 72,7) \approx 50 \text{ kg,}$$

bzw. für die beiden äußersten Querträger

$$P_0 = \frac{1}{2} \cdot (26,6 + 36,35) \approx 31,5 \text{ kg.}$$

Unmittelbar kommt auf jedes Seil

sein Eigengewicht

$$q' = 3,9 \text{ kg/m,}$$

der Rauhreifbesatz

$$q'' = 0,5 \cdot 2,8 + 0,19 \approx 1,6 \text{ kg/m}$$

und die Netzbelastung  $q''' = \frac{1}{2} \cdot (5,3 + 3,3) \cdot 2,1 \cdot \frac{17,3}{5,3} = 29,5$  kg/m,

zusammen also

$$q_2 = 35,0 \text{ kg/m}$$

bzw. an den Stellen ohne Netz

$$q_1 = 5,5 \text{ kg/m.}$$

Damit erhält man aus Formel (156) den Abstand der Stelle des größten Durchhanges vom Ende

$$l_0 = \frac{1}{2} \cdot 83 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5,5}{35,0}\right) \cdot \frac{20^2}{83} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5,5}{35,0}\right) \cdot \frac{10^2}{83}$$

$$- \frac{1}{35,0 \cdot 83} \cdot [ + 3,15 \cdot 20 + 50 \cdot (25,3 + 30,6 + 35,9 + 41,2) - 31,5 \cdot 10$$

$$- 50 \cdot (15,3 + 20,6 + 25,9 + 31,2 + 36,5)]$$

oder

$$l_0 = 41,50 + 1,52 + 0,13 = 43,15 \text{ m.}$$

Nun liefert die Formel (155)

$$H \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 35,2 \cdot 43,15^2 - \frac{1}{2} \cdot (35,0 - 5,5) \cdot 20^2 + 31,5 \cdot 20$$

$$+ 50 \cdot (25,3 + 30,6 + 35,9 + 41,2)$$

oder

$$H \cdot 0,055 \cdot 83 = 32750 - 5900 + 630 + 6650,$$

also

$$H = \frac{34130}{4,565} = 7480 \text{ kg.}$$

Nach Fig. 300 besteht nun der Zusammenhang

$$\frac{S}{H} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}l^2 + 4f^2}}{\frac{1}{2}l},$$

also ist

$$S = H \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2} = H \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4f}{l}\right)^2\right]$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten

$$S = 7480 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 0,055)^2\right] = 7480 \cdot 1,0247 \approx 7660 \text{ kg.}$$

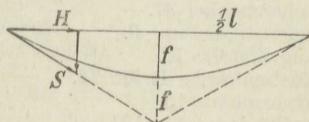


Fig. 300.



# Sachverzeichnis.

## A

$a$  Abstand, Festwert.  
arc Bogen.  
at Atmosphäre, Druck in  $\text{kg}/\text{cm}^2$ .  
 $\alpha$  Winkel.  
 $\alpha_w$  Wärmeausdehnungsziffer.  
Achsschenkel 37.  
Aggregatzustand 9.  
Angriffstelle 12.  
Arithmetische Reihe 76.  
Atmosphäre 15.  
Aufhängung 75, 121.  
Aufzug 30.  
Ausdehnungsstopfbüchse 16.  
Ausleger 20.

## B

$b$  Breite, Abstand, Bogenlänge.  
 $\beta$  Winkel.  
Belageisenquerschnitt 112.  
Bewegung 10.  
Biegemoment 63, 67, 109.  
Bock, dreiseitiger 44, 46.  
Bockkran 43.  
Bogen 78, 95.  
Bogenbrücke 21.  
Bogenlampenaufhängung 21.  
Bogenlänge 2.  
Brückenbelastung 17.

## C

$c$  Feste Länge, Festwert.  
 $C$  Integrationskonstante.  
cm Zentimeter.  
cos Kosinus.  
cotg Kotangente.

## D

$d$  Durchmesser, Abstand.  
dm Dezimeter.  
 $d$  Differential.  
 $D$  Durchmesser.  
Dm Dekameter.  
 $\delta$  Winkel, Dicke.  
 $\Delta$  Unterschied.  
Dach 37, 84.  
Dachbinder 81.  
Dachpfette 73, 84.  
Derrickkran 21, 40, 62.

Differentialkurve 139.  
Differentialrechnung 104, 147.  
Drahtseilbahn 25, 77.  
Drahtseilbahnwagen 124, 126, 127, 129.  
Drahtseilscheibe 54.  
Dreieck 4, 95, 96.  
Drehkran 39, 65, 137, 142.  
Drehmoment 51, 55, 58, 82.  
Druck 14.  
Durchhang 26, 143.  
Dynamometer 11.

## E

$e$  Basis der natürlichen Logarithmen.  
Einheitsgewicht 91.  
Eisenbahnwagen 93.  
Ellipse 102.  
Erdumfang 1.  
Exponentialreihe 147.

## F

$f$  Meßfehler, Durchhang.  
 $F$  Fläche.  
 $\varphi$  veränderlicher Winkel.  
Fabrikschornstein 16, 23, 45, 66, 100, 110, 120.  
Fahrdracht 75.  
Fehler 3, 6, 8.  
Flächenberechnung 3, 4, 5.  
Flächenmaß 3.  
Flächendruck 14.  
Förderanlage 74.

## G

$g$  Gramm.  
 $G$  Gewicht.  
 $\gamma$  Winkel, Einheitsgewicht.  
Gasbehälter 17.  
Gasmaschinenventil 118.  
Gegenwirkung 13.  
Geländerbelastung 17.  
Gelenkquader 126.  
Geometrische Reihe 147.  
Gerade 12, 94.  
Gewicht 11, 89.  
Gewichtseinheit 11.  
Gewölbe 78.  
Gießereikran 62.

Gleichgewicht 14, 20, 39, 41, 49, 51,  
56, 61, 75.  
Gleichgewichtsformen 121.  
Größtwert 68.

**H.**

*h* Höhe.  
*H* wagerechte Spannkraft.  
Hammerdrehkran 134.  
Hängewerk 22, 34.  
Hebeelektromagnete 22, 42.  
Homogen 91.

**I.**

*i* Anzahl.  
Integralrechnung 104, 147.

**K.**

kg Kilogramm.  
km Kilometer.  
Kabelbahnwagen 132.  
Kabelkran 23, 26, 32.  
Kämpferdrucklinie 79.  
Keil 110.  
Kegel 5, 7, 8.  
Kettenlinie 150.  
Kilogramm 11.  
Kippkante 141.  
Kippmoment 133.  
Kleinstwert 68.  
Kolbenfläche 6.  
Kolbenkraft 15.  
Körper 1, 9.  
Körpermaß 1.  
Kosinus 27.  
Kosinussatz 29.  
Kotangente 27.  
Kraft 11.  
Kraftdarstellung 11, 20.  
Krafteinheit 11.  
Krafteck 38.  
Kraftkreuz 88.  
Kräfteedreieck 20.  
Kräftevieleck 38.  
Kräftepaar 58, 60.  
Kräfteparallelogramm 33.  
Kragträgerbrücke 128.  
Kranträger 70, 72.  
Kreis 2, 4, 94.  
Kreisabschnitt 103.  
Kreisausschnitt 99.  
Kreisbogen 2.  
Kreiskegel 5, 7, 8, 116.  
Kreisring 117.  
Kreiszyylinder 5, 8.  
Kreuzkopf 15, 35.  
Krümmung 122.  
Kubikmeter 1.  
Kugel 6, 8.

Kugelballon 119.  
Kugelkalotte 118.  
Kugelzone 118.  
Kurbeltrieb 34.

**L.**

*l* Länge.  
*L* Bogenlänge.  
Längenbelastung 17.  
Längenmaß 1.  
Lasthakenquerschnitt 115.  
Laufkran 109, 136.  
Logarithmus 148.

**M.**

*m* Meter, Halbmesserverhältnis.  
*mm* Millimeter.  
*M* Moment.  
Magnetspule 120.  
Masse 9.  
Mauerpfeiler 101, 141.  
Menschengedränge 17.  
Meßfehler 3.  
Meter 1.  
Mittelkraft 18, 25, 54.  
Mittelpunkt 94.  
Mittelwert 3.  
Moment 51.  
Momentenlinie 66, 68.

**N.**

*N* Widerlagerkraft.  
Neigungswinkel 49, 87.

**O.**

*O* Mittelpunkt, Pol.

**P.**

*p* Flächendruck, Flüssigkeitsdruck,  
Winddruck.  
*P* Kraft, Last.  
 $\pi$  Ludolfische Zahl.  
Parabel 2, 4, 107.  
Parallele Kräfte 49.  
Parallelogramm 4, 95.  
Paralleltrapez 4, 97.  
Pendelstütze 24.  
Pol 50.  
Polstrahlen 50.  
Portalkran 137, 138.  
Prisma 8.  
Pyramide 8, 99.

**Q.**

*q* Längenbelastung.  
*Q* Last, Querkraft.  
Quader 8.  
Quadratmeter 3.  
Quadratwurzel 7.  
Querkraft 63, 67.

## R.

*r* Halbmesser.  
*R* Halbmesser, Mittelkraft.  
 Rauhreif 146.  
 Rauminhalt 1.  
 Raummaß 1.  
 Rechteck 3, 94.  
 Reihe 76, 147.  
 Reihendampfmaschine 19.  
 Resultante 18.  
 Richtung 13.  
 Riemenscheibe 30.

## S.

*s* Sehne.  
 sin Sinus.  
*S* Spannkraft.  
 ∫ Integral.  
 ∑ Summe.  
 ⊗ Sicherheit.  
 Säulenbelastung 55.  
 Scherenkran 44.  
 Schiffschraube 108.  
 Schleppdampfer 13, 29.  
 Schleppwiderstand 19.  
 Schneelast 37.  
 Schornstein 16, 23, 45, 66, 100, 110, 120.  
 Schrumpfung 34.  
 Schubstangenverhältnis 35.  
 Schutznetz 156.  
 Schwerebene 90.  
 Schwerkraft 89.  
 Schwerlinie 90.  
 Schwerpunkt 89.  
 Schwungrad 30, 53.  
 Seileck 50, 57, 75.  
 Seillänge 152.  
 Seilscheibe 30, 54, 83.  
 Seitenkraft 25, 39.  
 Simpsonsche Regel 5.  
 Sinus 27.  
 Sinussatz 29.  
 Speicherdrehkran 39.  
 Spezifisches Gewicht 91.  
 Stabilitätsmoment 133.  
 Standdrehkran 65.  
 Standsicherheit 128.  
 Stirnzapfen 16, 109.  
 Stopfbüchse 34.  
 Stützdruck 33.  
 Stützlinie 79.  
 Summierung der Wirkungen 78.  
 Symmetrieachse 94.  
 Symmetrieebene 94.

## T.

*t* Tonne.  
*t* Temperatur.  
 tg Tangente.  
 Tangente 2, 27.  
 Telegraphenleitung 43, 145.  
 Tonne 11.  
 Tragsseil 25, 145.  
 Träger, eingespannter 63.  
 — auf 2 Stützen 64, 65, 66, 111.  
 — mit beweglicher Last 69, 72.  
 Trapez 4, 97.  
 Trapezregel 5.  
 Treibriemenlänge 117.  
 Trigonometrie 27.

## U.

*u* Veränderliche Größe, beliebige Verschiebung.  
 Uferkran 36.  
 Umdrehungsfläche 116.  
 Umdrehungskörper 119.  
 Unterzug 56.

## V.

*v* Veränderliche Größe.  
*V* Rauminhalt, lotrechte Stützkraft.  
 Ventil 118.  
 Verpuffungsdruck 15.  
 Viereck 98.  
 Viertelkreis 102.

## W.

*W* Windkraft, Widerstand.  
 Wagebalken 124, 127, 131.  
 Welle 53, 54.  
 Widerlagerkraft 78.  
 Winddruck 17, 37.  
 Winde 59, 60, 133.  
 Winkeleisenquerschnitt 103.  
 Winkelfunktion 27.  
 Wirkungslinie 12.

## X.

*x* Veränderlicher Wert.  
 X Seitenkraft.

## Y.

*y* Veränderlicher Wert.  
 Y Seitenkraft.

## Z.

*z* Veränderlicher Wert.  
 Z Seitenkraft.  
 Zapfen 16.  
 Zugseil 153.  
 Zylinder 5, 6, 8.

- 
- Lehrbuch der technischen Mechanik.** Von Professor **M. Grübler**, Dresden.  
Erster Band: **Bewegungslehre.** Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 144 Textfiguren. Preis M. 22.—  
Zweiter Band: **Statik der starren Körper.** Mit 222 Textfiguren. Preis M. 18.—\*  
Dritter Band: **Dynamik starrer Körper.** Mit 77 Textfig. Preis M. 24.—

---

**Theoretische Mechanik.** Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Von Professor **A. E. H. Love.** Autorisierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. **Hans Polster.** Mit 88 Textfiguren. Preis M. 48.—; gebunden M. 54.—\*

---

**Mechanik für höhere Maschinenbauschulen.** Von Professor Dr. **Karl Laudien.** Mit etwa 230 Textfiguren. Unter der Presse.

---

**Ingenieur-Mechanik.** Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend graphischer Behandlung. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Diplom-Ingenieur, vormals Professor für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: **Graphische Statik starrer Körper.** Mit 624 Textabbildungen sowie 238 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben. Preis M. 14.—; gebunden M. 16.—\*

Band 2—4 in Vorbereitung. Der zweite und dritte Band behandeln die **gesamte Mechanik starrer und nichtstarrer Körper.**

Der vierte Band bringt die **Erweiterung der Festigkeitslehre und Dynamik für Tiefbau-, Maschinen- und Elektroingenieure.**

---

**Einführung in die Mechanik** mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik. Von Professor Dr. **Th. Pöschl** in Prag. Mit 102 Textabb. Preis M. 5.60\*

---

**Aufgaben aus der technischen Mechanik.** Von Professor **Ferd. Wittenbauer** in Graz.

Erster Band: **Allgemeiner Teil.** Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. 843 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 627 Textfiguren. Unveränderter Neudruck. Gebunden Preis M. 36.—\*

Zweiter Band: **Festigkeitslehre.** 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, verbess. Auflage. Mit 505 Textfiguren. Unveränderter Neudruck. Gebunden Preis M. 39.—

Dritter Band: **Flüssigkeiten und Gase.** 586 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit etwa 396 Textfiguren. In Vorbereitung.

---

**Technische Mechanik.** Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure. Von **Ed. Autenrieth.** Dritte Auflage. Neu bearbeitet von Professor Dr.-Ing. **Max Enßlin**, Stuttgart. Mit etwa 300 Textfiguren. In Vorbereitung.

---

**Technische Schwingungslehre.** Von Diplom-Ingenieur Dr. phil. **Wilhelm Hort.** Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. In Vorbereitung.

---

**Technische Thermodynamik.** Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle.**

Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit 232 Textfiguren und 7 Tafeln.

Unter der Presse.

Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 202 Textabbildungen und 4 Tafeln.

Gebunden Preis M. 36.—\*

---

**Leitfaden der technischen Wärmemechanik.** Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 93 Textfiguren und 3 Tafeln.

Steif broschiert Preis M. 18.—\*

---

**Ingenieur-Mathematik.** Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Diplom-Ingenieur, vormals Professor für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: **Niedere Algebra und Analysis — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung — Kegelschnitte.** Mit 320 Textfiguren und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Gebunden Preis M. 12.—\*

---

**Die Differentialgleichungen des Ingenieurs.** Darstellung der für die Ingenieurwissenschaften wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen sowie der zu ihrer Lösung dienenden genauen und angenäherten Verfahren einschl. der mechanischen und graphischen Hilfsmittel. Von Dipl.-Ing. Dr. phil. **W. Hort.** Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit etwa 230 Textfiguren und Abbildungen.

Unter der Presse.

---

**Lehrbuch der Mathematik.** Für mittlere technische Fachschulen der Maschinenindustrie. Von Prof. Dr. **R. Neuendorff**, Oberlehrer an der Staatlichen höheren Schiffs- und Maschinenbauschule, Privatdozent an der Universität in Kiel. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 262 Textfiguren.

Gebunden Preis M. 12.—\*

---

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** In zwei Bänden. Von Dr. **Georg Scheffers**, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin.

Erster Band: Mit 404 Textabbildungen. Preis M. 26.—; geb. M. 30.60\*

Zweiter Band: Mit 396 Textabbildungen. Preis M. 52.—; geb. M. 60.—\*

---

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. **A. W. Ludwig**, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

Erster Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelssystem: Vielfache, Kreis, Zylinder, Kugel.** Mit 58 Textabbildungen. Preis M. 8.—\*

---

C. W. Kreidels Verlag in Berlin und Wiesbaden

---

**Praktische Winke zum Studium der Statik und zur Anwendung ihrer Gesetze.** Ein Handbuch für Studierende und praktisch tätige Ingenieure. Von **Robert Otzen**, Geh. Regierungsrat und Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Dritte Auflage. Mit 125 Textabbildungen. Preis M. 20.—; gebunden M. 24.—

\* Hierzu Teuerungszuschläge