WEICKERT UND STOLLE

PRAKTISCHES MASCHINENRECHNEN

5. AUFLAGE

BERLIN 1902

Polytechnische Buchhandlung
A. SEYDEL

Praktisches Maschinenrechnen

von

A. Weickert und R. Stolle.

5. verb. und verm. Aufl. 1902. Preis gebd. M. 5.—.

Eingegangene Beurteilungen

über die früheren Auflagen dieses Buches.

Das **Weickert** und **Stolle'**sche Buch: **„Praktisches Maschinenrechnen“** ist ein sehr praktisches und mit Genialität einfach gestaltetes Handbuch für den Mittelstand im Maschinengewerbe.

Es herrscht eine ruhige, meisterhafte Sicherheit in der Behandlung dieses sehr schwierig populär zu machenden Gegenstandes durch das ganze Buch vor und ich werde dasselbe gern empfehlen.

Joh. F. Weyde, dipl. Maschinen-Ingenieur und ord. Professor an der Staats-Maschinen-Gewerbeschule.

Kaschau, 8. Mai 1889.

Bei Durchsicht des Buches **„Praktisches Maschinenrechnen“** finde ich, dafs dasselbe für den Unterricht an gewerblichen Fachschulen recht geeignet ist.

K. Brockmann, Ingenieur und Fachlehrer für Maschinenbau an der Kunst-Gewerbeschule.

Offenbach a. M., 20. Mai 1889.

Soweit es mir bis jetzt möglich war, den Inhalt zu prüfen, fand ich, dafs das Buch durch seine knappe Form, die verständliche Darstellungsweise und vor allen Dingen durch die praktischen Beispiele einem jeden, der ohne viel wissenschaftliche Vorkenntnisse Aufschlufs über das Wissenswerteste aus der Mechanik und Maschinenlehre haben will, warm zu empfehlen ist.

Emil Beil, Ingenieur u. Gewerbeschullehrer.

Dresden, 18. Mai 1889.

Das Werkchen **„Praktisches Maschinenrechnen“** finde ich mit besonderer Rücksicht seiner knappen Form und der Heranziehung praktischer Beispiele aus dem Gebiete der Maschinenkunde und der Mechanik als Unterrichtsbuch für gewerbliche Fortbildungs- und Handwerkerschulen sehr zweckmäfsig.

F. Kapeller, Professor an der Königl. Industrieschule.

Nürnberg, 26. November 1889.

Nachdem ich das Buch seit Anfang des Sommersemesers beim Unterricht benutzt habe, freut es mich, Ihnen mitteilen zu können, dafs ich dasselbe als seinen Zwecken in vorzüglichster Weise entsprechend gefunden habe. Das Buch verrät in seiner ganzen Anlage, in der Beschränkung theoretischer Abhandlungen auf das unumgängliche, die praktischen Verfasser, die mit Geschick die schwierige Aufgabe gelöst haben auf verhältnismäfsig geringem Raum erschöpfend zu behandeln, was unter „Praktischem Maschinenrechnen“ verstanden werden kann.

Die Wahl der Beispiele verdient besonders glücklich genannt zu werden; der Praxis entnommen und dadurch dem Verständnis des Handwerkers naheliegend, sind sie vorzüglich geeignet, das Interesse desselben zur selbständigen Behandlung ähnlicher ihm vorkommender Fragen zu erwecken. Anderseits bieten die Beispiele dem Lehrer schätzbares Material zur Belebung seines Vortrages und häufige Gelegenheit, den hohen Wert, der dem Buch angefügten mathematischen und Vergleichs-Tabellen praktisch zu zeigen.

Auch mit Bezug auf äufsere Form und Ausstattung und den in Anbetracht seines reichen Inhalts mäfsigen Preis, verdient das vorliegende Buch uneingeschränkte Anerkennung. Der Erfolg der ersten Auflage wird ohne Zweifel der vermehrten und verbesserten zweiten in noch reicherem Mafse zu teil werden. Ich werde mit Vergnügen jede Gelegenheit benutzen, um **Weickert** und **Stolle's „Praktisches Maschinenrechnen“** zu empfehlen.

E. Polhaus, Ingenieur,
Lehrer für Mathematik und Mechanik an der Handwerkerschule zu Dessau.

Dessau, 25. Juni 1894.

„Wir können das Werkchen mit vollem Nachdruck empfehlen; es wird vielen unserer Leser von grofsem Werte sein. Die Verfasser haben sich ein grofses Verdienst um die allgemeinere Verständlichmachung der Lehren der **Mechanik** und des **Maschinenbaues** erworben.“

Berlin, 26. Juli 1889. **„Deutsche Klempner-Zeitung“ No. 30.**

Die beiden Herren Verfasser, denen Erfahrung im Unterricht angehender Handwerker und Gewerbetreibender zur Seite steht, haben ihre gestellte Aufgabe gut durchgeführt.

Das Buch ist für Handwerker- und Gewerbeschulen sowie für die Selbstunterrichtung vorzüglich geeignet, die Ausstattung ist eine schöne und die zahlreichen Abbildungen sind gut gezeichnet.

Darmstadt, Juni 1889. **„Gewerbeblatt für das Grofsherzogtum Hessen.“** (Zeitschrift des Landesgewerbevereins) No. 25.

Eine ähnliche Empfehlung brachte dasselbe Blatt in der No. 22 vom Juni 1894.

Praktisches Maschinenrechnen von A. Weickert und R. Stolle. Schreiber dieser Zeilen hat an einer gewerblichen Fortbildungsschule, die fast ausschliefslich von jungen Mechanikern besucht war, Unterricht in der Elementar-Mechanik erteilt. Vergeblich suchte er nach einem Leitfaden, der das in der Praxis Nötigste in so knapper Form enthalten hätte, wie er es für die kurz zugemessene Unterrichtszeit gewünscht hätte. Es blieb ihm nichts übrig, als selber ein Heft zur Richtschnur für den Unterricht auszuarbeiten und glaubt er nun, das vorliegende Werklein nicht besser empfehlen zu können, als durch die Bemerkung, dafs dasselbe in Einteilung und Inhalt nahezu identisch ist mit seiner aus dem praktischen Bedürfnis herausgewachsenen Arbeit. Es sei daher das billige Buch allen Mechanikern bestens empfohlen; um so mehr, als jedem Kapitel eine Reihe der Praxis entnommener Übungsbeispiele beigegeben ist.

Winterthur. R.

„Schweizerisches Gewerbeblatt“ No. 25 vom 22. Juni 1889.

„Die Herren Fabrikbesitzer aber, denen daran gelegen ist, dafs ihr Arbeiterpersonal sich auch fachlich fortbildet und durch Bereicherung seiner Kenntnisse sich brauchbarer mache, wollen das eben genannte Buch ihren Leuten ja empfehlen, da es thatsächlich Berechnungen aufstellt, wie sie in jeder Maschinenfabrik — der kleinen wie der grossen — täglich vorkommen oder vorkommen können, deren Lösung den Werkstättenarbeitern aber auch möglich sein muf“,

Berlin, 1. Juni 1889. **„Die Werkstatt“ No. 35.**

Von unseren Lesern wird des Öfteren geäufsert, dafs ihnen die in verschiedenen Lehrbüchern und Fach-Kalendern aufgestellten Berechnungen des „Formelkrams“ wegen unverständlich seien und ein einfach gehaltenes Lehrbuch über **Maschinenrechnen,** das sich auch für Ungeübtere eigne, nicht zu haben sei.

Nun, das vorliegende Buch ist einmal ein solches, das wirklich seiner Deutlichkeit und Einfachheit wegen die weiteste Verbreitung verdient u. s. w.

Leipzig, 6. Juli 1889. **„Der deutsche Müller“ No. 27.**

Dieselbe Zeitung empfiehlt auch die zweite Auflage in ihrer No. 16 vom 21. April 1894.

Diese Neuauflage der gediegenen Veröffentlichung verdient, wegen ihres Strebens allgemeine, wissenschaftliche Grundsätze in die weiteren Kreise zu tragen und so die fachliche Bildung zu heben und zu fördern, die vollste Anerkennung. Dafs dieses Streben aber auch ganz gelungen ist, gereicht dem Verfasser, wie dem Verleger zur Ehre und Anerkennung. Wir wünschen dieser Arbeit die weiteste Verbreitung.

Wien, 1. Mai 1894. **„Der Gastechniker“** XXII. Bd. 3. Heft.

Die Verfasser haben die erste Auflrage vollständig umgearbeitet und die zweite Auflage ihrem Inhalte nach bedeutend erweitert. Nach dieser Erweiterung enthält die zweite Auflage 248 vollkommen durchgerechnete Aufgaben und 190 mit Lösungen versehene Übungsbeispiele. Alle Lehrer, welche an den Fachschulen für den Maschinenbau beschäftigt sind, wissen sehr wohl, wie wichtig es für die Schüler derartiger Anstalten ist, eine reiche Auswahl ausgerechneter Aufgaben zu besitzen, da nur durch die Durchrechnung vieler Beispiele die Lehren der Statik und Mechanik bei den Schülern befestigt und denselben überhaupt klar gemacht werden können. Die Anschaffung dieses Werkes wird sich aber nicht nur allen Lehrern an modernen Fachschulen und deren Schülern empfehlen, sondern auch die in der Praxis stehenden Monteure werden aus dem Gebrauche dieses Werkes grofsen Nutzen ziehen. Wir machen aber auch die jüngeren Bautechniker auf diese neue Auflage Aufmerksam, da in derselben auch die hauptsächlichsten Lehren aus der Baustatik entwickelt und durch ausgerechnete Beispiele erläutert sind. **„Baugewerks-Zeitung“**

Berlin, 19. Mai 1894. XXVI. Jahrg. No. 40.

. . . . Trotz der zu einer allgemein-verständlichen Darstellung erforderlichen ausgedehnten Zergliederung des behandelten Stoffes ist der Zusammenhang zwischen den einzelnen Hauptfächern derart gewahrt worden, dafs der Lernende das bisher Erlernte in den folgenden Kapiteln jedesmal anwenden kann und mufs, wobei eine systematische Repetition und Einprägung des bereits Durchgenommenen sehr erleichtert wird. Das Werkchen scheint uns für das Selbststudium nicht weniger geeignet als wie für den Unterricht an den unteren technischen Lehranstalten und verdient in praktischen Kreisen wohl beachtet zu werden. **„Der Monteur“**

Offenbach a. M., 4. Mai 1894. III. Jahrg. No. 18.

Schon die erste Auflage des Buches hat eine günstige Beurteilung in der Fachpresse gefunden. Es genügt darum, bei der zweiten Auflage hervorzuheben, dafs dieselbe vielfache Vermehrungen und Verbesserungen erfahren hat. Insbesondere reicht die Zahl der gelösten und ungelösten Aufgaben nahe an 400. Die mathematischen und Gewichts-Tabellen am Schlusse sind neu aufgenommen. Gg.

Berlin, 5. Mai 1894. **„Metallarbeiter“** XX. Jahrgang No. 36.

Praktisches
Maschinenrechnen.

Eine Zusammenstellung

der wichtigsten Erfahrungswerte

aus der allgemeinen und angewandten Mechanik

in ihrer Anwendung

auf den praktischen Maschinenbau.

Erläutert

durch zahlreiche der Praxis entnommene Beispiele

und eingeleitet durch

eine leichtfassliche Darstellung

der

für Maschinenbauer unentbehrlichen Gesetze des allgemeinen Buchstabenrechnens.

Bearbeitet von

A. Weickert und **R. Stolle,**

Ingenieure und Fachlehrer für Maschinenzeichnen und Mechanik in Berlin.

Mit über 100 in den Text gedruckten Abbildungen.

Fünfte Auflage.

Neuntes und zehntes Tausend.

Berlin 1902.
Polytechnische Buchhandlung
A. Seydel.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Einrichtung unserer bestehenden Fach- und Fortbildungsschulen bedingt es, dafs einem für das praktische Leben so bedeutungsvollen Unterrichtsgegenstande, wie ihn der Titel dieses Buches nennt, nur verhältnismäfsig wenig Zeit gewidmet werden kann, und so der Schüler schliefslich, nachdem er die Schule verlassen, behufs weiterer Verarbeitung des in der Schule Gehörten zum Selbstunterricht greifen mufs.

Dem Schüler bereits in der Schule ein für seinen späteren Beruf geeignetes und auch in seiner weiteren praktischen Thätigkeit verwendbares Material zu bieten, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Zum Verständnis des in demselben Gebotenen ist die Kenntnis der nur notwendigsten mathematischen Gesetze vorausgesetzt und sind, um Schüler und Leser bezüglich der auszuführenden Berechnungen zu unterstützen, in direkter Verbindung mit dem Buche die einfachsten Regeln des allgemeinen Buchstabenrechnens in elementarer Weise entwickelt.

Wir hoffen, dafs diese Verbindung vielen Lesern willkommen sein wird, da dieselbe bei dem Durcharbeiten des Textes und der Beispiele ein Nachschlagen jederzeit gestattet und so die Bestrebungen des Einzelnen, schnell vorwärts zu kommen, begünstigt.

Die in den einzelnen Kapiteln gegebenen Beispiele entsprechen rein praktischen Verhältnissen und möchten wir, da sich ein Mangel gerade in dieser Beziehung oft recht bemerklich macht, den Herren Lehrern der Mechanik die vorliegende Arbeit zur Benützung für die Schüler ihrer Lehranstalten hiermit empfehlen.

Dafs der Text des Buches in der neuen Orthographie gesetzt ist, dürfte, um dasselbe für Schulzwecke geeignet zu machen, hervorgehoben werden.

Indem wir das Buch der Öffentlichkeit übergeben, richten wir an die Leser desselben die höfliche Bitte, uns auf etwaige

Mängel, auf Fehlendes oder wünschenswerte Erweiterungen gefälligst aufmerksam machen, und so unser Bestreben, in genanntem Sinne etwas Brauchbares zu bieten, unterstützen zu wollen. Wir werden diesbezügliche Fingerzeige stets mit bestem Danke entgegennehmen.

Berlin, im April 1889.

Weickert und **Stolle.**

Vorwort zur vierten Auflage.

Der schnelle Absatz der ersten drei Auflagen des vorliegenden Buches ist ein sicherer Beweis dafür, dafs dasselbe in Fachkreisen eine aufserordentlich günstige Aufnahme gefunden hat.

Mit jeder neuen Auflage ist eine bedeutende Erweiterung verbunden gewesen, zu welcher wir durch die vielfachen Anerkennungen von Seiten der Herren Kollegen angeregt wurden.

Für diese Anerkennungen und auch für die von Seiten der Herren Lehrer uns zahlreich zugegangenen Vorschläge, welche wir bei den Neubearbeitungen fast durchweg verwerten konnten, sagen wir an dieser Stelle unseren besten Dank und verbinden damit die erneute Bitte, uns auch in Zukunft durch Anregung und Vorschläge unterstützen zu wollen.

Die stattgehabte Erweiterung bezieht sich auf mehrere neu eingefügte Kapitel, auf die mit den Lösungen versehenen Übungsbeispiele und, dank der Bereitwilligkeit unseres Herrn Verlegers, auf den ziemlich kostspieligen Abdruck der im Anhange befindlichen Tabellen. Mit letzteren und den Übungsbeispielen glauben wir denjenigen ganz besonders zu dienen, welche das Buch nicht nur zu praktischen, sondern auch zu Schulzwecken benützen.

Berlin, im Februar 1901.

Weickert und **Stolle.**

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Allgemeine Arithmetik.

Zweiter Teil.

Allgemeine Mechanik.

Dritter Teil.

Angewandte Mechanik.

Anhang.

Verzeichnis der einzelnen Tabellen.

Erster Teil.

Allgemeine Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Vorbegriffe.

1. Alles, was man vermehren oder vermindern kann, heiſst Gröſse. Man nennt die Lehre, welche sich mit den Gröſsen beschäftigt, Gröſsenlehre oder Mathematik.

Einen besonderen Teil der Mathematik bildet die allgemeine Arithmetik — Buchstabenrechnung und Algebra — welche unter Zuhilfenahme einfacher Gröſsenbezeichnungen die Beziehungen, welche zwischen den gegebenen Gröſsen stattfinden, bestimmt.

2. Eine beliebige Gröſse x kann einer anderen beliebigen Gröſse y entweder gleich oder ungleich sein.

Ist die Gröſse x gleich der Gröſse y, so schreibt man

$x = y$ (sprich: x gleich y)

nennt diese Verbindung der beiden Gröſsenzeichen x und y eine Gleichung, jede der Gröſsen x und y eine Seite der Gleichung und das Zeichen ($=$) das Gleichheitszeichen.

Ist die Gröſse x ungleich der Gröſse y, so schreibt man

$x > y$ (sprich: x gröſser als y) oder

$x < y$ (sprich: x kleiner als y)

nennt diese Verbindung der beiden Gröſsenzeichen x und y eine Ungleichung, jede der Gröſsen x und y eine Seite der Ungleichung und die Zeichen ($>$) oder ($<$) Ungleichheitszeichen.

Besonders zu beachten ist, daſs die Spitze des Ungleichheitszeichens stets der kleineren Gröſse zugekehrt sein muſs.

Ist nicht genau festgestellt, welche der beiden Gröfsen die gröfsere ist, so schreibt man

$$x \lesseqgtr y \text{ (sprich: x ungleich y).}$$

3. Sollen Gröfsen genau bestimmt werden, so giebt man sie als Vielfaches einer Einheit.

Gröfsen, welche ein und dieselbe Einheit enthalten, werden gleichnamige oder gleichartige Gröfsen genannt.

Buchstabengröfsen sind gleichartig, wenn sie aus genau denselben Buchstaben oder Buchstaben-Verbindungen bestehen; sie sind ungleichartig, wenn die Buchstaben oder deren Verbindungen verschieden sind.

So sind z. B. die Gröfsen

$$xy,\ 5xy,\ \frac{2}{3}xy,\ (a+b)\,xy,\ \frac{m-n}{p+q}xy$$

gleichartig, denn alle aufgeführten Gröfsenbezeichnungen enthalten dieselbe Buchstabenverbindung: **xy.**

Die folgenden Gröfsen

$$36mn,\ 9abc,\ (d-e)x,\ 5\frac{p+q}{r}$$

sind durchaus ungleichartig, da sich in denselben keinerlei Übereinstimmung in den Buchstabengröfsen nachweisen läfst.

Diejenige Zahl, welche angiebt, wie oft eine Buchstabengröfse genommen werden soll, oder wie oft dieselbe vorhanden ist, heifst Koeffizient.

In den Zahlenausdrücken

$$3xy,\ 7abc,\ \frac{2}{5}(a+b),\ n(x-y),\ 8\frac{mn}{sz}$$

sind entsprechend die Koeffizienten der Reihe nach:

$$3,\ 7,\ \frac{2}{5},\ n,\ 8.$$

Während also bei den gleichartigen Buchstabenverbindungen die Buchstaben selbst durchaus gleich beschaffen und zusammengesetzt sein müssen, können die einzelnen Koeffizienten vollkommen verschieden sein.

Besitzt eine Buchstabengröfse keinen Koeffizienten, so hat man stets die Zahl **1** — **Eins** — als solchen anzunehmen.

Der Koeffizient 1 wird jedoch nie geschrieben und setzt man statt:

$$1.x \text{ kurz nur: } x$$

$$1.abc \quad \text{„} \quad \text{„} \quad abc$$

$$1.\frac{x}{y} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{x}{y}, \text{ ebenso}$$

$$\text{statt: } 1 \cdot (a + b) \text{ kurz nur: } (a + b)$$
$$1 \cdot \left(x - \frac{y}{z} + n\right) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x - \frac{y}{z} + n$$

u. s. w.

Es ist deshalb bei dem späteren Rechnen immer daran zu denken und nie zu vergessen, dafs eine ohne jeden Koeffizienten erscheinende Buchstabengröfse stets stillschweigend und in jedem Falle mit dem Koeffizienten **1** behaftet ist.

4. Eine Zahl giebt an, wie oft eine angenommene Einheit gesetzt werden soll. Die Gröfse **1** (Eins) nennt man die Einheit.

Es ist daher jede beliebige Zahl als ein Vielfaches der Eins zu betrachten und entstehen somit die natürlichen Zahlen, indem man zur Eins noch Eins hinzufügt, zu der so erhaltenen Zahl wiederum Eins u. s. w.

Eine Zahl heifst bestimmt, wenn die Anzahl ihrer Einheiten festgestellt ist; bestimmte Zahlen werden stets mit Ziffern bezeichnet.

Eine Zahl heifst unbestimmt, wenn die Anzahl ihrer Einheiten dahingestellt bleibt; unbestimmte Zahlen werden stets mit Buchstaben bezeichnet.

Gewöhnlich benützt man die Buchstaben des lateinischen Alphabets; die ersten Buchstaben desselben A, B, C . . . . a, b, c . . . . dienen zur Bezeichnung für bekannte, die letzten Buchstaben X, Y, Z . . . . x, y, z . . . . zur Bezeichnung für unbekannte Gröfsen.

Der Unterschied zwischen einer bestimmten Zahl und einer durch einen Buchstaben ausgedrückten oder dargestellten Zahl, ist demnach der, dafs bei der bestimmten Zahl die Anzahl der Einheiten bekannt ist, während bei der durch Buchstaben bezeichneten Zahl diese Anzahl unbestimmt gelassen wird.

Ein und derselbe Buchstabe kann daher den verschiedensten Zahlenwerten entsprechen; bei einer einmal begonnenen Rechnung jedoch mufs für ein und denselben Buchstaben auch stets derselbe Zahlenwert eingesetzt werden, und mufs bis zum Abschlufs einer Rechnung ein und derselbe Buchstabe immer dieselbe Bedeutung behalten.

5. Bildet man unter Vornahme verschiedener Rechnungsarten — Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Radizieren u. s. w. — aus gegebenen Zahlen neue, so nennt man das mit Zahlen operieren oder rechnen.

Nur mit bestimmten Zahlen können alle Rechnungsarten ohne weiteres ausgeführt werden; mit unbestimmten Zahlen kann man sie nur andeuten, d. h. ein thatsächliches Rechnen, wie es mit Ziffern stattfindet, ist mit Buchstaben nicht möglich.

Das Buchstabenrechnen bietet aber den Vorteil, dafs eine Übersichtlichkeit des gegenseitigen Zusammenhanges verschiedener Gröfsen erreicht wird, wie sie das Rechnen mit bestimmten Zahlen nie zu bieten geeignet ist.

6. Als *Gröfsenzeichen* für Zahlen verwendet man allgemein Ziffern und Buchstaben.

Aufser den *Gröfsenzeichen* sind zum Rechnen noch *Rechnungs- und Beziehungszeichen* erforderlich.

Als Rechnungszeichen gelten:

$+$ das Zeichen der Addition; bedeutet: *plus* oder *mehr*.
$-$ „ „ „ Subtraktion; „ *minus* „ *weniger*.
$.$ „ „ „ Multiplikation; einfacher Punkt; bedeutet: *mal* oder *multipliziert mit*.
$:$ oder $—$ „ „ „ Division; Doppelpunkt oder Bruchstrich; bedeutet: *dividiert durch*.

Beispiele:

$a + b$	sprich:	a plus b.
$x - y$	„	x minus y.
$c . d$	„	c mal d.
$b : c$ oder $\frac{b}{c}$	„	b dividiert durch c.

Als Beziehungszeichen gelten:

$=$ das Gleichheitszeichen und

$\lessgtr$ das Ungleichheitszeichen.

Jede geordnete Zusammenstellung von Gröfsen-Rechnungs- und Beziehungszeichen nennt man eine *Formel*, und ist jede *Formel* als der *Ausdruck eines mathematischen Gesetzes zu betrachten*.

Eine Formel kann man benützen, um nach derselben beliebig viele einschlägige Beispiele durchzurechnen und zu lösen, indem man an die Stelle der Buchstaben oder Buchstabenverbindungen die entsprechenden, bestimmten Zahlen treten läfst.*)

---

*) Als Beispiel diene aus der „Mechanik" die Formel $s = v . t$, in welcher s einen Weg, v eine Geschwindigkeit und t eine Zeit bezeichnen. Um s berechnen zu können, sollen $v = 10$ und $t = 60$ angenommen werden. Setzt man jetzt in der Formel an die Stelle von v die Zahl 10 und an die Stelle von t die Zahl 60, so erhält man

$$s = v . t = 10 . 60 = 600.$$

Des weiteren bietet der Inhalt des ganzen Buches zahlreiche Beispiele für diesen Ersatz der Buchstaben durch bestimmte Zahlen.

7. Das Additionszeichen ($+$) und das Subtraktionszeichen ($-$) finden auch noch Verwendung als Vorzeichen, um eine den Zahlen besondere Eigenschaft zum Ausdruck zu bringen.

Man unterscheidet positive und negative Zahlen.

Positive Zahlen sind solche, denen das Pluszeichen ($+$) vorgesetzt ist; z. B:

$$+7,\ +\frac{2}{3},\ +a,\ +\frac{3a}{4},\ +\frac{axy}{n},\ +0{,}34(a+b).$$

Negative Zahlen sind solche, vor welchen das Minuszeichen ($-$) steht; z. B:

$$-9,\ -\frac{7}{8},\ -x,\ -\frac{6y}{z},\ -\frac{n}{axy},\ -0{,}71(x+y).$$

Zahlen, welche kein Vorzeichen besitzen, gelten als positive Zahlen und läfst man gewöhnlich, wenn eine positive Zahl zu Anfang eines Zahlenausdruckes oder allein steht, das Pluszeichen ($+$) vor derselben weg.

So schreibt man z. B.

statt	$+7$	kurz	nur:	7
„	$+a$	„	„	a
„	$+5b$	„	„	$5b$
„	$+a+b$	„	„	$a+b$
„	$+x-y$	„	„	$x-y$ u. s. w.

Umgekehrt mufs man sich aber bei dem späteren Rechnen (und das namentlich bei dem nachfolgend beschriebenen Auflösen der Klammern) immer daran erinnern und darf man nie vergessen, dafs eine ohne ein Vorzeichen erscheinende Zahl oder Buchstabenverbindung **nur** das Pluszeichen ($+$) vor sich haben kann.

Es kann also z. B.

$7ab$ nur $+7ab$ und niemals $-7ab$,

$\frac{3xy}{z}$ „ $+\frac{3xy}{z}$ „ „ $-\frac{3xy}{z}$ sein!

Positive und negative Zahlen werden entgegengesetzte Zahlen genannt.

Eine Zahl wird entgegengesetzt genommen, indem man ihr das entgegengesetzte Vorzeichen giebt.

Beispiele:

Der entgegengesetzte Wert von $+a$ ist $-a$.

„ „ „ „ $-\frac{b}{c}$ „ $+\frac{b}{c}$.

„ „ „ „ $+3$ „ -3.

Der entgegengesetzte Wert von $-5x$ ist $+5x$.
„ „ „ „ $a+b$ „ $-a-b$.
„ „ „ „ $a-b$ „ $-a+b$.

Zahlen oder Zahlenwerte ohne Vorzeichen, nennt man absolute Zahlen oder absolute Gröſsen. Man sagt auch:

Unter dem absoluten Wert einer Zahl versteht man die Anzahl ihrer Einheiten, ohne Berücksichtigung des Vorzeichens der Zahl.

8. Sollen die engere Zusammengehörigkeit mehrerer Zahlen, oder bestimmte Rechnungsoperationen mit gewissen Zahlen zum Ausdruck gebracht werden, so setzt man diese Zahlen in Klammern.

Man unterscheidet 3 Arten von Klammern:

$\{\ldots\}$ die geschweifte Klammer,
$[\ldots]$ die Strich-Klammer und
$(\ldots)$ die Bogen-Klammer.

Bei Anwendung mehrerer dieser verschiedenen Klammern zu gleicher Zeit ist die Anordnung stets so zu treffen, daſs die geschweifte Klammer zunächst die Strich-Klammer, diese wieder die Bogen-Klammer umfaſst.

Beispiele:

$$a+b-(a-b).$$
$$7x-[4y-(3y+5z)-3x]+8y.$$
$$-\{a-[b+(c-d)-(e+f)]+g\}.$$

Sind, wie in dem letzten Beispiel, mehrere Klammern vorhanden und wünscht man die durch die vor den Klammern stehenden Vorzeichen angedeuteten Rechnungen auszuführen, so müssen sämtliche Klammern entfernt, d. h. aufgelöst werden.

Man beginnt stets mit dem Auflösen der inneren, hier also mit dem der Bogen-Klammern; es folgt das Auflösen der Strich-Klammer, endlich das der geschweiften Klammer.

Bei dem Auflösen von Klammern sind folgende beiden Hauptregeln besonders zu beachten:

a) Steht ein Plus-Zeichen vor der Klammer, so bleiben die Vorzeichen der Gröſsen in der Klammer unverändert.

b) Steht ein Minus-Zeichen vor der Klammer, so erhalten die Gröſsen in der Klammer entgegengesetzte Vorzeichen.*)

*) Eine weitere Berücksichtigung erfahren diese beiden wichtigen Regeln bei der Besprechung der Gesetze der Addition und Subtraktion.

1. Beispiel. $a + (3b - 5c)$.
Bogenklammer aufgelöst, folgt:
$a + 3b - 5c$.

2. Beispiel. $7x - (3a - 2b) + (4z - 7y)$.
Bogenklammern aufgelöst, folgt:
$7x - 3a + 2b + 4z - 7y$.
Alphabetisch geordnet, ergiebt:
$-3a + 2b + 7x - 7y + 4z$.

3. Beispiel. $-3n - (-5y + 9) - (6x - 2a)$.
Bogenklammern aufgelöst, folgt:
$-3n + 5y - 9 - 6x + 2a$.
Alphabetisch geordnet, ergiebt:
$-9 + 2a - 3n - 6x + 5y$.

4. Beispiel. $-[-(-a + 6b) + (-3n + 4m)]$.
Bogenklammern aufgelöst, folgt:
$-[a - 6b - 3n + 4m]$.
Strichklammer aufgelöst, folgt:
$-a + 6b + 3n - 4m$.

5. Beispiel. $7x - [4y - (3y + 5z) - (5y - 3z)]$.
Bogenklammern aufgelöst, folgt:
$7x - [4y - 3y - 5z - 5y + 3z]$.
Strichklammer aufgelöst, folgt:
$7x - 4y + 3y + 5z + 5y - 3z$.
Alphabetisch geordnet, ergiebt:
$7x + 3y - 4y + 5y - 3z + 5z$.

6. Beispiel. $+\{a - [b + (c - d) - (e + f)] + g\}$.
Bogenklammern aufgelöst, folgt:
$+\{a - [b + c - d - e - f] + g\}$.
Strichklammer aufgelöst, folgt:
$+\{a - b - c + d + e + f + g\}$.
Geschweifte Klammer aufgelöst, folgt:
$+a - b - c + d + e + f + g$.

Übungsbeispiele:

$32a + 3b - (5a + 17b)$; $a + b - (2a - 3b) - (-13a + 2b)$.
$(a + b - c) - (a - b + c)$; $(8x - 5) + (3x - 7) - (9x - 11)$.
$m + [a - (n - x) + b]$; $[-(a - b) - (-c - d) - g]$.
$m - [(a - b) - (c - n)]$; $-[(a - b) + (-x + y) + 9]$.
$a - (b - c) - [c - (b - a)]$.
$(2a - 3b) + (-4b - 3a) - (6a - 4b) - (-5b - 2a)$.
$x - \{y + [x - (y - z - u)] - [x - y - (z - u)]\}$.

Zweites Kapitel.

Addition.

9. Das mathematische Gesetz der algebraischen Addition ist bedingt durch die Formel:

$$a + b = c.$$

Man sagt: Eine Zahl a zu einer Zahl b addieren heifst, eine neue Zahl c bilden, welche so viele Einheiten enthält, als die Zahlen a und b zusammengenommen.

Die Zahlen a und b heifsen Summanden oder Addenden, die Zahl c heifst Summe.

Man kann beliebig viele Zahlen zu einander addieren. Hierbei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die einzelnen Summanden zu einander addiert; denn es ist z. B:

$3 + 5 + 7 = 15$ und
$3 + 7 + 5 = 15$ und
$7 + 5 + 3 = 15$. Ebenso wird, wenn
$a + b + c = x$ ist, auch
$a + c + b = x$ und
$b + c + a = x$ sein.

Treten bei der Addition einzelne Buchstaben oder Buchstabenverbindungen auf, so wendet man zur Erzielung eines sachgemäfsen Resultates stets die Reihenfolge des Alphabetes an.

So setzt man an Stelle von

$$x + a + c - d - b + e - z$$

stets den nach dem Alphabet geordneten gleichen Wert:

$$a - b + c - d + e + x - z;$$

oder an Stelle von

$3a - 9xy + 12ac - 2xz + 7abc$ den gleichen Wert:
$3a + 7abc + 12ac - 9xy - 2xz.$

10. Die bei der algebraischen Addition zu beachtenden Regeln sind folgende:

A. Die Summanden sind gleichartig, d. h. sie bestehen aus denselben Zahlengröfsen oder Buchstaben-Verbindungen.

a) Haben die Summanden gleiche Vorzeichen, d. h. sind sie nur positiv oder nur negativ, so addiert man ihre Koeffizienten, fügt der als Summe erhaltenen Zahl die gleichartige Buchstabengröfse oder Buchstabenverbindung unverändert hinzu und giebt der so entstandenen Summe dasselbe Vorzeichen. Z. B:

$$+5+7+2+3=17.$$
$$+2x+6x+5x=(+2+6+5)x=13x.$$
$$-5yz-3yz-8yz=-16yz.$$
$$-3\frac{b}{c}-9\frac{b}{c}-\frac{b}{c}=-13\frac{b}{c}.$$
$$-6(a+b)-12(a+b)=-18(a+b).$$

b) Haben die Summanden verschiedene Vorzeichen, so addiert man zunächst alle Gröfsen mit positivem, dann alle Gröfsen mit negativem Vorzeichen für sich, zieht die kleinere Summe von der gröfseren ab, und giebt dem Rest das Vorzeichen der gröfseren Summe. Z. B:

$$+5-3+7-2+4-6=+16-11=+5=5.$$
$$5x-7x+9x-3x+4x=+18x-10x=+8x=8x.$$
$$-10y+2y-16y+3y+9y=-26y+14y=-12y.$$
$$5(x-y)-7(x-y)+10(x-y)-3(x-y)=$$
$$15(x-y)-10(x-y)=5(x-y).$$
$$7\frac{a-b}{n}-5\frac{a-b}{n}+\frac{a-b}{n}-9\frac{a-b}{n}=8\frac{a-b}{n}-14\frac{a-b}{n}$$
$$=-6\frac{a-b}{n}.$$

B. Die Summanden sind ungleichartig.

Die Addition ungleichartiger Gröfsen kann man nur andeuten, indem man die einzelnen Addenden durch das Additionszeichen $(+)$ mit einander verbindet.

Da die einzelnen Addenden selbst aber positive $(+)$ oder negative $(-)$ Vorzeichen haben können, so empfiehlt es sich, die einzelnen Addenden mit ihren zugehörigen Vorzeichen in Bogenklammern zu setzen, um so diese Vorzeichen von dem verbindenden Additionszeichen $(+)$ augenfällig zu unterscheiden.

Sollen z. B. die ungleichartigen Gröfsen

$$+a,\quad -7b,\quad +3cd,\quad -9xyz,\quad -12mn$$

zu einander addiert werden, so schreibt man:

$$+a+(-7b)+(+3cd)+(-9xyz)+(-12mn).$$

Nach dem über das Auflösen der Klammern Gesagte — Seite 6, unter 8a) — erhält man jedoch, wenn man hier die Klammern auflöst:

$$a-7b+3cd-9xyz-12mn.$$

In der vorstehenden Summe erscheinen bei genauer Betrachtung die einzelnen ungleichartigen Gröfsen in fortlaufender Reihe, einfach durch ihre Vorzeichen mit einander verbunden.

Man kann deshalb auch kurz sagen:

Ungleichartige Gröfsen werden addiert, indem man dieselben mit ihren Vorzeichen einfach in eine Reihe neben einander stellt.

Sind jedoch sehr viele Gröfsen der verschiedensten Art zu einander zu addieren, so verfährt man kurz und praktisch am vorteilhaftesten derart, dafs man der besseren Übersicht wegen etwaige gleichartige Gröfsen mit ihrem Vorzeichen senkrecht unter einander stellt, und dann die Addition wie unter A) angegeben, ausführt.

Sollen z. B. die Gröfsen

$$5a - 3b - 4c + 5d + 8 + a + b - 2d - 6 + 4b - c + 11 - x$$

zu einander addiert werden, so schreibt man:

$$\begin{array}{rrrrrr} 5a & -3b & -4c & +5d & +8 & \\ a & +b & & -2d & -6 & \\ & +4b & -c & & +11 & -x \\ \hline 6a & +2b & -5c & +3d & +13 & -x \end{array}$$

und erhält als die gesuchte Summe.

11. Eine Summe wird zu einer Zahl addiert, indem man die einzelnen Addenden derselben zu dieser Zahl addiert. Z. B:

$$5 + (7 + a) = 5 + 7 + a = 12 + a.$$
$$x + (y + z) = x + y + z.$$

Die Erklärung folgt auch hier ohne weiteres aus den angegebenen Gesetzen über das Auflösen der Klammern.

Übungsbeispiele:

$2a + 3a + 6a$; $a + 2b + 4a + b + 5b + 6a$.
$27m + 13n + 16p + 12n + 9p + 6m$; $16x + 13x - 8x - 12x$.
$22x + 3y - 14x - 6y + 9x - 8y + 20y$.
$9 + 5a - 3xy - 7b - 12 + 8a - 20xy + 22b - x + 12$.
$75a - 55b - 28d - 25g + 21a + 43b + 87d - 25g$.
$3ac - 12ab - 9ab + 7ac + 22ab$.
$-3mn + 5pq + 23x - 16pq + 2xy + 6x - 7xy + 12ab + 20mn - 18pq + 32xy - x$.
$47x - [4y - (3x + 5y) - (9y - 6x)] - [8x - (3x + 4y) + (5x - 2y) - (7x - 4y)]$.

Drittes Kapitel.

Subtraktion.

12. Das mathematische Gesetz der algebraischen Subtraktion ist bedingt durch die Formel:

$$a - b = c.$$

Man sagt: Eine Zahl b von einer Zahl a subtrahieren heifst, eine neue Zahl c bilden, welche zu b addiert die ursprüngliche Zahl a ergiebt.

Die Zahl a heifst Minuend, die Zahl b heifst Subtrahend und die Zahl c bildet die Differenz oder den Rest.

Gleichartige Gröfsen werden von einander subtrahiert, indem man ihre Koeffizienten subtrahiert und zu dem Rest die gleichartige Buchstabengröfse oder Buchstabenverbindung unverändert hinzufügt. Z. B:

$$15 - 9 = 6.$$
$$6m - 3m = (6 - 3)m = 3m.$$
$$20xy - 9xy = 11xy.$$
$$17(a - b) - 3(a - b) = 14(a - b).$$

Jede Subtraktion ist richtig ausgeführt, wenn sich bei der Addition des Restes zum Subtrahenden der Minuend ergiebt.

Ist $12 - 7 = 5$, so mufs $12 = 5 + 7$ sein.
„ $a - b = c$, „ „ $a = b + c$ „

Beispiele:

$15x - 6x = 9x$, folglich: $15x = 9x + 6x$.
$7abc - 16abc = -9abc$, folg: $7abc = -9abc + 16abc$.
$5(y + z) - 3(y + z) = 2(y + z)$, folglich:
$$5(y + z) = 2(y + z) + 3(y + z).$$

13. Bei der Subtraktion zweier Zahlen kann der Subtrahend entweder kleiner, gleich oder gröfser als der Minuend sein.

Ist der Subtrahend kleiner als der Minuend, so kann die Subtraktion ohne weiteres ausgeführt werden. Z. B:

$$20 - 13 = 7.$$
$$12ab - 3ab = 9ab.$$
$$7(m + n) - 5(m + n) = 2(m + n).$$

Ist der Subtrahend gleich dem Minuend, so erhält man als Rest den Wert **„Null“**. Man sagt in diesem Falle, die beiden Zahlen heben einander auf. Z. B:

$$+5-5=0.$$
$$14xy-14xy=0.$$
$$20(x+y+z)-20(x+y+z)=0.$$

Die „Null“ ist daher als die Differenz zweier gleich grofser Zahlen aufzufassen.

Ist der Subtrahend gröfser als der Minuend, so kann die Subtraktion nur soweit ausgeführt werden, als die Anzahl der Einheiten des Minuenden ausreicht.

Geht man z. B. von der Differenz

$$12-15 \text{ aus,}$$

so heifst das nach dem Vorstehenden, es sollen 15 Einheiten von 12 Einheiten subtrahiert, d. i. weggenommen werden. Von 12 Einheiten lassen sich aber nur 12 Einheiten wegnehmen; es bleiben demnach hier von dem Subtrahenden 15 noch 3 Einheiten übrig, welche erst bei einer passenden anderen Gelegenheit, von neu erscheinenden positiven Einheiten, subtrahiert oder weggenommen werden können.

Diese der im vorliegenden Beispiel bleibenden Zahl 3 anhaftende Eigentümlichkeit, stets die Eigenschaft der notwendigen Subtraktion zu zeigen und zu kennzeichnen, bringt man dadurch zum Ausdruck, dafs man vor dieselbe ein Minus-Zeichen (—) setzt. Man schreibt also im vorliegenden Falle:

$$12-15=-\mathbf{3}$$

und erhält demnach als Rest eine Zahl, welche nur soviel Einheiten hat, als der Subtrahend mehr Einheiten wie der Minuend besitzt, und welcher noch die Eigenschaft weiterer Subtraktion anhaftet. Z. B:

$$8-14=-6.$$
$$3x-7x=-4x.$$
$$12abx-20abx=-8abx.$$
$$4\frac{mn}{a}-9\frac{mn}{a}=-5\frac{mn}{a}.$$
$$36(f+g)-40(f+g)=-4(f+g).$$

Auf diese Weise entsteht die **negative** Zahl und mufs eine negative Zahl stets subtrahiert werden, wenn man sie zu einer positiven Zahl addieren will. Z. B:

$$\left.\begin{array}{l} +6+(-3)=6-3=3. \\ 5z+(-16z)=5z-16z=-11z. \end{array}\right\}$$ Vergl. Seite 6, unter 8a.)

Die Subtraktion ungleichartiger Gröfsen kann man nur andeuten, indem man zwischen den Minuenden und den Subtrahenden das Minuszeichen (—) setzt.

Genau, wie bereits auf Seite 9) bei der Addition ausgeführt, wird man den Minuenden in eine Bogenklammer setzen, um auch hier das Vorzeichen des Subtrahenden von dem Subtraktionszeichen (—) zu unterscheiden.

Soll z. B. 16abc von 26abc subtrahiert werden, so schreibt man:

$$26abc - (+16abc)$$

und erhält durch Auflösen der Klammer

$$26abc - 16abc = 10abc.$$

Ist dagegen 16abc negativ und von 26abc zu subtrahieren, so erhält man entsprechend:

$$26abc - (-16abc) = 26abc + 16abc = 42abc.$$

Aus diesen beiden Beispielen folgt ohne weiteres:

Bei der Subtraktion ungleichartiger Gröfsen setze man den Subtrahenden mit entgegengesetztem Vorzeichen rechts neben den Minuenden.

Sind jedoch sehr viele Gröfsen der verschiedensten Art durch Subtraktion mit einander in Verbindung zu bringen, so verfahre man nach den folgenden Regeln.

14. Soll eine mehrteilige Gröfse — Summe — von einer einfachen oder einer anderen mehrteiligen Gröfse subtrahiert werden, so mufs die zu subtrahierende mehrteilige Gröfse stets und unbedingt in Klammern gesetzt werden. Z. B:

x — b subtrahiert von a giebt

$$a - (x - b) = a - x + b.$$

6abc + 9xy — 3n subtrahiert von 12abc — 7xy giebt

$$12abc - 7xy - (6abc + 9xy - 3n) =$$
$$12abc - 7xy - 6abc - 9xy + 3n =$$
$$6abc - 16xy + 3n.$$

Es ist aus dem Vorstehenden ersichtlich, dafs es also, um zu dem Resultat zu gelangen, nur nötig ist, die Klammern entsprechend den Angaben auf Seite 6, unter 8b) aufzulösen. Hieraus ergiebt sich folgende wichtige Regel:

Eine Summe wird von einer Zahl oder einer anderen Summe subtrahiert, indem man jeden einzelnen Summanden subtrahiert. Z. B:

$$\left.\begin{array}{l} a - (b + c - d) = a - b - c + d. \\ (a + b - c) - (d + f) = a + b - c - d - f. \end{array}\right\} \text{Vergl. Seite 6, unter 8b.)}$$

Wie aus den vorstehenden Beispielen hervorgeht, hat man also nur den einzelnen Summanden der zu subtrahierenden

Summe entgegengesetzte Vorzeichen zu geben und dann zu addieren; die Subtraktionsaufgabe ist damit in eine Additionsaufgabe verwandelt.

Praktisch verfährt man so, dafs man die beiden Summen geordnet untereinander schreibt, den Summanden der Subtrahenden-Summe entgegengesetzte Vorzeichen giebt und die gleichartigen Gröfsen zu einander addiert.

1. Beispiel.

$$\begin{array}{rrrrr}
\text{Minuend:} & 12 & -13a & -8x & 3a \\
\text{Subtrahend:} & -7 \text{ oder} & 3a \text{ oder} & -17x \text{ oder} & -2b \\
\text{Vorzeichen entgegengesetzt:} & + & - & + & + \\
\hline
\text{Rest oder Differenz:} & 19 & -16a & 9x & 3a+2b.
\end{array}$$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{rl}
\text{Minuend:} & 5a - 7b + 8c - 6d + e \\
\text{Subtrahend:} & 4a - 9b + 8c - 3d \quad + 2f - x \\
\text{Vorzeichen entgegengesetzt:} & - \quad + \quad - \quad + \qquad - \quad + \\
\hline
\text{Rest oder Differenz:} & a + 2b \quad - 3d + e - 2f + x.
\end{array}$$

3. Beispiel.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & -14b & +3c & -27d & +3 & -5g \\
7a & +3b & -5c & -8d & -12 & +7g \\
- & - & + & + & + & - \\
\hline
-7a & -17b & +8c & -19d & +15 & -12g.
\end{array}$$

4. Beispiel.

$$\begin{aligned}
&2x - (6y - 8z) - [x - (3y - 4z)] = \\
&2x - 6y + 8z - [x - 3y + 4z] = \\
&2x - 6y + 8z - x + 3y - 4z = \\
&2x - x - 6y + 3y + 8z - 4z = x - 3y + 4z.
\end{aligned}$$

Übungsbeispiele:

$a - (+b)$; $a - (-b)$; $x + y - (x - y)$.

$2ab - 3bc - (-12ab + 30xy + 20bc)$.

$85m + 37n - (13m - 14n) - (9m - 8n)$.

$-4xyz + 3xy - (16yz + 20xyz - 12xy + 3xz)$.

$72a - 36nx + 80gh - 54nx + 32nx - 90gh + 36a$.

$37(a+b) - 36(x-y) - 32(a+b) + (x-y) - (x+y) + 3$.

$m - [a - (b+c) - x] - [m + (-a - x) - (b - c) - x]$.

$30x + 7a - 20y - 300xz + 290y - 62x + 35a - 9$.

$a - (b - c) - [c - (b - a)]$.

$2x - 8z + [6y - (4x + 3z)] - (x - y - z)$.

Viertes Kapitel

Multiplikation.

15. Das mathematische Gesetz der algebraischen Multiplikation ist bedingt durch die Formel:

$$a \,.\, b = c.$$

Man sagt: Eine Zahl a mit einer Zahl b multiplizieren heifst, eine neue Zahl c bilden, welche die Zahl a ebenso oft enthält, als die Zahl b Einheiten hat.

Die Zahl a heifst Multiplikand, die Zahl b heifst Multiplikator und die Zahl c bildet das Produkt.

Multiplikand und Multiplikator nennt man auch Faktoren.

Ferner heifst der Multiplikant auch noch Koeffizient, wenn er eine bestimmte, der Multiplikator aber eine unbestimmte Zahl ist. So ist z. B. in dem Produkt 5a die Zahl **5** Koeffizient.

Das Multiplikationszeichen — der einfache Punkt (.) — bleibt in der Regel zwischen unbestimmten Zahlen weg; man schreibt also nicht $a.b$ oder $(a+b).c$ sondern kurz:

$$ab \text{ oder } (a+b)c.$$

Dagegen mufs der Punkt zwischen bestimmten Zahlen stets stehen, um Verwechselungen zu vermeiden; es mufs also, wenn z. B. 6 mit 7 multipliziert werden soll, stehen

$$6.7 \text{ und nicht nur } 67!$$

Erscheinen die Faktoren nur als Buchstabengröfsen, so stelle man sie stets alphabetisch geordnet neben einander.

Es kann eine beliebige Anzahl von Faktoren mit einander multipliziert werden, wobei die Reihenfolge derselben ganz willkürlich ist; z. B:

$$abcd = acdb = dabc, \text{ oder:}$$

$$x(a+b)(c+d) = x(c+d)(a+b) \text{ u. s. w.}$$

In jedem Falle ist jedoch für das endgültige Resultat die alphabetische Anordnung der erscheinenden Buchstaben oder Buchstabenverbindungen anzustreben.

Sind die Faktoren einfache Gröfsen, so multipliziere man zunächst ihre Koeffizienten und füge der erhaltenen Zahl die vorhandenen Buchstaben, ohne einen einzigen wegzulassen, alphabetisch geordnet, hinzu.

Z. B: 6x multipliziert mit 3y giebt $6x . 3y = 6 . 3 . x . y = 18xy$.
9ab „ „ 3ac „ $9ab . 3ac = 9 . 3 . ab . ac$
$= 27aabc$.

$$17mn . 5x = 85mnx.$$
$$30xz . 7xy . 2ab = 420abxxyz.$$
$$3af . 5xz . 2abg = 30aabfgxz.$$

16. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen gelten bei dem algebraischen Multiplizieren folgende Gesetze:

$$(+a)(+b) = +ab.$$
$$(+a)(-b) = -ab.$$
$$(-a)(+b) = -ab.$$
$$(-a)(-b) = +ab,$$

oder in Worten ausgedrückt:

Das Produkt zweier Gröfsen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, dagegen mit entgegengesetzten Vorzeichen negativ.

Das Produkt beliebig vieler positiver Faktoren, und das einer geraden Anzahl negativer Faktoren, ist positiv; dagegen

das Produkt einer ungeraden Anzahl negativer Faktoren, negativ.

Beispiele:

$$(-5a) . 20bc = -100abc.$$
$$7a . (-10mn) = -70amn.$$
$$(-ab)(-ac) = aabc.$$
$$(-3xyz)(-5m) = 15mxyz.$$
$$(-a)(-a)(-a) = -aaa.$$
$$(-xy)(-xy)(-xy)(-xy) = xxxxyyyy.$$
$$(-a)(+b)(-c)(+d)(-e)(-f) = abcdef.$$
$$(-x)(+b)(-y)(+n)(-z) = -bnxyz.$$

Multipliziert man eine Zahl, oder einen Zahlenausdruck überhaupt, mit Null, so ist das Produkt ebenfalls **Null**. Z. B:

$$5 . 0 = 0.$$
$$a . 0 = 0.$$
$$6abx . 0 = 0.$$
$$(a + b) . 0 = 0.$$

17. Besonders zu beachten sind folgende Hauptregeln:

Ist ein Faktor ein mehrgliedriger Zahlenausdruck — Summe, Differenz — der andere nur eine einfache Zahl, so mufs ersterer stets in Klammern gesetzt werden.

Soll z. B. die Summe $9a + 11bc + 3d$ mit x multipliziert werden, so ist zu schreiben:

$$x(9a + 11bc + 3d).$$

Der gleichen Regel entsprechen folgende Beispiele:

$9a(4x + 5y - 7z)$ oder:

$6xyz(20n - 33m + 5p)$ oder:

$\frac{5}{8}(x - y + z - a + b)$ oder:

$\frac{3nm}{5ab}(6ab + 9cd - 12xy)$ u. s. w.

18. Eine Summe wird mit einer positiven Zahl multipliziert, indem man die einzelnen Summanden, unter Beibehaltung der Vorzeichen, mit dieser Zahl multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.*)

Beispiele:

$(a + b - c)d = ad + bd - cd.$

$(5a + 3b - 3c)4d = 20ad + 12bd - 12cd.$

$2xy - yz + n(b - c + x) = 2xy - yz + bn - cn + nx.$

Bei dem letzten Beispiel ist wohl zu beachten, daſs die Summe $(b - c + x)$ nur mit **n** zu multiplizieren, und dann das erhaltene Resultat zu $2xy - yz$ zu addieren ist.

Ist die Zahl, mit welcher eine Summe zu multiplizieren ist, eine negative Zahl, so sind die Vorzeichen der einzelnen Summanden bei der Multiplikation in die entgegengesetzten zu verwandeln.

Ist z. B. $(a + b - c)$ zu multiplizieren mit $(-d)$, so ist zu schreiben:

$$(a + b - c)(-d) = a(-d) + b(-d) + (-c)(-d)$$
$$= -ad - bd + cd.$$

Derselben Regel entspricht:

$(4xy + 3yz - 9xz)(-2ab) = -8abxy - 6abyz + 18abxz.$

Eine Summe wird mit einer anderen Summe multipliziert, indem man unter Berücksichtigung der Vorzeichen jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert, und die so erhaltenen Produkte addiert. In diesem Falle sind beide Summen in Klammern zu setzen.

1. Beispiel. $(a + b - c)$ soll mit $(d - e)$ multipliziert werden.

Man multipliziere zunächst $(a + b - c)$ mit d; dann erhält man: $(a + b - c)d = ad + bd - cd.$

Nun multipliziere man $(a + b - c)$ mit $(-e)$
$= -ae - be + ce.$

---

*) Da die bei diesen Multiplikationen erhaltenen Produkte fast immer ungleichartige Gröſsen sein werden, so beachte man das über Addition und Subtraktion derselben auf Seite 9 u. 13) Gesagte. Vorhandene gleichartige Gröſsen werden zusammengefaſst.

Addiert man die rechts von dem Gleichheitszeichen erhaltenen Produkte, und schreibt man der besseren Übersicht wegen das Ganze in Form einer Gleichung, so folgt:

$$(a + b - c)(d - e) = ad + bd - cd - ae - be + ce.$$

2. Beispiel.

$$(3a + 5b - 2c)(-3x + 4yz + 1) = -9ax - 15bx + 6cx + 12ayz + 20byz - 8cyz + 3a + 5b - 2c.$$

3. Beispiel.

$$(7a - 2b - 9)(3a - 11b) = 21aa - 6ab - 27a - 77ab + 22bb + 99b = 21aa - 83ab - 27a + 22bb + 99b.$$

4. Beispiel.

$$(a + b + c)(a + b - c) = aa + ab + ac + ab + bb + bc - ac - bc - cc = aa + 2ab + bb - cc.$$

Übungsbeispiele:

$(x - y)(c + d)$; $(9a - 3b)(5n + 7m)$.
$3a(4a + 5b) - 6b(7a - 9b)$.
$(9x - 11y)(13x - 7y)$.
$(2mn - 3)(4ax + 5m - 7)$.
$(4ab + 9ac + 12bc)(2ab + 3ac - 6bc)$.
$(2a + 7b)(9a - 5b) - (6a - 4b)(2a + 11b)$.
$(4x - 2y)(3x - 6z)(7x + 8)$.
$(2ab + 3bc - 6cd)(5ab - 2bc)(4ab - bc)$.
$(12xyz - 3mn)(6x - 2z)(3xy - 5mn + 7)$.
$[(a + b) + (x + y)] . [(a + b) - (x + y)]$.
$(6ac - 3ad + 2bc - bd)(6ac + 3ad - 2bc - bd)$.

19. Ebenso oft als der Fall eintritt, eine mehrteilige Gröfse mit einer anderen zu multiplizieren, kommt der umgekehrte Fall vor:

eine mehrteilige Gröfse in Faktoren zu zerlegen.

Besitzen mehrere Produkte einen oder mehrere Faktoren gemeinschaftlich, so kann man diesen, oder diese, als sog. „gemeinschaftlichen Faktor“ herausschreiben.

Dies geschieht, indem man den gemeinschaftlichen Faktor vor eine Klammer setzt und in diese Klammer von allen mit dem gemeinschaftlichen Faktor behafteten Gliedern das stellt, was sich nach Division derselben durch den gemeinschaftlichen Faktor ergiebt.

Die Vorzeichen der einzelnen Glieder bleiben hierbei unverändert.

1. Beispiel. Gegeben: $7x + 7y$; der gemeinschaftliche Faktor soll herausgeschrieben werden. Derselbe ist $= 7$. Dividiert man $7x$ und $+ 7y$ durch 7, so erhält man x und $+ y$.

Der vorstehenden Regel gemäfs folgt alsdann:

$$7x + 7y = 7(x + y).$$

2. Beispiel. Gegeben: $5a - 5b$. Gemeinschaftlicher Faktor $= 5$; die Division durch diesen ergiebt: $a - b$; mithin

$$5a - 5b = 5(a - b).$$

3. Beispiel. Gegeben: $ab + ac$; der gemeinschaftliche Faktor soll herausgeschrieben werden.

Die Produkte ab und ac sind beide positiv und zu addieren; sie haben a als Faktor gemeinsam, a mufs demnach herausgeschrieben werden. Dies geschieht, indem man b und c, verbunden durch das Additionszeichen, in eine Klammer setzt, welche a als Faktor erhält; also

$$ab + ac = a(b + c).$$

Die Richtigkeit der vorstehenden Beispiele ist sofort erwiesen, wenn man die rechten Seiten der entstandenen Gleichungen ausmultipliziert.

Sehr zu beachten sind bei diesem Verfahren diejenigen Glieder, welche keinen besonders geschriebenen Koeffizienten besitzen. Solche Glieder sind jedoch, wie schon Seite 2) erklärt, stets als mit dem Koeffizienten **1** behaftet zu betrachten; so kann man z. B.

für $5 = 1 . 5$
„ $a = 1 . a$
„ $xy = 1 . xy$ u. s. w. setzen.

Soll demnach aus: $9am - m$ der gemeinschaftliche Faktor **m** herausgeschrieben werden, so setze man vorerst

$$9am - m = 9am - \mathbf{1} . m,$$

woraus sich dann nach der Regel ergiebt:

$$9am - 1m = m(9a - 1).$$

4. Beispiel.

$$x + mx + nx = x(1 + m + n).$$
$$6a + 12ab - 54acx = 6a(1 + 2b - 9cx).$$

Das letzte Beispiel zeigt, dafs mehrere Faktoren zu gleicher Zeit herausgeschrieben werden können.

Überhaupt sind der möglichen Fälle so viele, dafs sich Regeln für alle Möglichkeiten gar nicht geben lassen. Übung und Aufmerksamkeit führen hier am schnellsten und sichersten zum Ziele. Hervorgehoben mögen noch werden:

5. Beispiel.

$$\frac{a . z}{3} - \frac{b . z}{3} + \frac{x . z}{3} - \frac{y . z}{3} = \frac{z}{3}(a - b + x - y).$$
$$x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y).$$
$$ax + 5y - 3x + by = ax - 3x + 5y + by$$
$$= x(a - 3) + y(5 + b).$$

Auch hier wird durch Ausmultiplizieren der rechten Seiten der Gleichungen die Richtigkeit erwiesen.

Ist das erste mehrerer Produkte, aus denen ein gemeinschaftlicher Faktor herausgeschrieben werden soll, mit einem Minuszeichen behaftet, so setze man nach diesem

Minuszeichen zunächst eine Klammer, in welche dann alle Produkte des gemeinschaftlichen Faktors mit entgegengesetztem Vorzeichen aufzunehmen sind.

Aus dem auf diese Weise entstandenen Klammerwert ist dann erst der gemeinschaftliche Faktor herauszuschreiben. Z. B:

$$x - yz - ya + yb = x - (yz + ya - yb)$$
$$= x - y(z + a - b).$$

Multipliziert man jetzt den Ausdruck $x - y(z + a - b)$ aus, so ist die Richtigkeit auch hier sofort erwiesen.

6. Beispiel.

$$5ax - 3by + 6bz = 5ax - (3by - 6bz)$$
$$= 5ax - 3b(y - 2z).$$
$$m - na - nb + nc = m - (na + nb - nc)$$
$$= m - n(a + b - c).$$

Wie sehr sich ein mehrgliedriger Zahlenausdruck durch Faktoren-Zerlegung vereinfachen läfst, soll noch folgendes Beispiel zeigen:

7. Beispiel.

$axy - ayy - xxy + xyy + axz - ayz - xxz + xyz =$
$ay(x - y) - xy(x - y) + az(x - y) - xz(x - y) =$
$(x - y)(ay - xy + az - xz) =$
$(x - y)[y(a - x) + z(a - x)] =$
$(x - y)[(a - x)(y + z)] =$
$(x - y)(a - x)(y + z) =$
$(a - x)(x - y)(y + z).$

Übungsbeispiele:

$7a + 7b$; $ax - bx + cx - dx$; $abx + aby - abz$.
$25xy + 30mn - 45ab$; $a(b + c) + d(b + c) = (a + d)(b + c)$.
$a(x - y) - b(x - y)$; $(x + y)(a + 2b) + (x + y)(3a + 5b)$.
$7a + 18xy + 27xz = 7a + 9x(2y + 3z)$; $12m - 14ab + 21ac$.
$24ap - 36aq - 35rx - 42ry$.
$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$.
$pr - ps - qr + qs$; $2ax + 3bx - 2ay - 3by$.
$u + cx - cy + dx - dy + ex - ey$.
$m(x + y) - x - y$; $2ax - 3by - 2bx + 3ay$.
$90xx - 25ax - 288bx - 80ab$.
$91xx - 112mx + 65nx - 80mn$.
$(3x - y)(2a + p) - (3x - y)(a - q)$.
$(x - y)(3a + 4b) - (4a - 5b)(x - y) + (x - y)(2a - 8b)$.
$7(a - 2b)(2x - 3y) - 5(a - 2b)(3x - 4y)$.

20. Sehr häufig tritt der Fall ein, dafs sich in einem Produkt ein und dieselbe Zahl mehreremale als Faktor befindet, d. h. mehreremale mit sich selbst multipliziert werden soll.

So erscheint z. B. in dem Zahlenausdruck $6aaabb$ die Zahl a dreimal und die Zahl b zweimal als Faktor.

Der Kürze und besseren Übersicht wegen bringt man die wiederholte Multiplikation einer Zahl mit sich selbst dadurch zum Ausdruck, dafs man die Zahl nur einmal schreibt und sie oben rechts mit einer anderen, gewöhnlich etwas kleiner geschriebenen Zahl versieht, welche angiebt, wie oft die erstere Zahl mit sich selbst zu multiplizieren ist.

Soll demnach a fünfmal als Faktor gesetzt werden, so schreibt man

nicht $a.a.a.a.a$ sondern kurz a^5, oder
man schreibt für: $5.5.5$ die Potenz: 5^3
" $a.a.x.x.x$ " " $a^2.x^3$ u. s. w.

Die Potenz ist also die abgekürzte Schreibweise für ein Produkt, welches aus nur gleichen Faktoren besteht.

Umgekehrt bedeutet natürlich:

a^4 soviel als $a.a.a.a$.
$(a + b)^2$ " " $(a + b)(a + b)$.
$(x - y)^3$ " " $(x - y)(x - y)(x - y)$.

21. Der Ausdruck x^n zeigt allgemein an, dafs die Zahl x n-mal als Faktor zu setzen ist.

Man nennt den Ausdruck x^n eine Potenz der Zahl x und sagt, man potenziere x mit n, oder man habe x zur n-ten Potenz erhoben.

Für x^n sagt man auch kurz: x hoch n.

Die Zahl x, welche potenziert wird, heifst Grundzahl oder Basis; die Zahl n, mit welcher man potenziert, wird Exponent der Potenz genannt.

Grundzahl kann jeder beliebige Zahlenausdruck sein; als mehrteilige Gröfse ist derselbe jedoch stets in Klammern zu setzen.

Soll z. B. von $a + b + c$ die zweite Potenz gebildet werden, so mufs man schreiben:

$$(a + b + c)^2.$$

Die zweite Potenz einer Zahl nennt man deren Quadrat, die dritte Potenz deren Kubus.

22. Folgende wichtigen Formeln müssen gut eingeprägt werden, da namentlich die unter 1) und 3) angeführten für das praktische Ausziehen der Quadrat- und Kubik-Wurzel von besonderer Wichtigkeit sind:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
4) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
5) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

In Worten würde man die rechte Seite der Gleichung unter 4) folgendermafsen ausdrücken: a zur Dritten, minus 3a Quadrat mal b, plus 3a mal b Quadrat, minus b zur Dritten.

Die Richtigkeit der z. B. unter 2) gegebenen Formel wird folgendermafsen durch Rechnung bewiesen:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = aa - ab - ab + bb$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

Auf dieselbe Weise sind die anderen Formeln leicht auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

Übungsbeispiele:

$(x + y)^2$; $(m + n)(m - n)$; $(2a + 5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$.
$(7a - 9b)^2$; $(m + 1)^2$; $(5x + 3y)^2 + (2x - 4y)^2$.
$(2x + 3y)(2x - 3y)$; $(5a - 7b)(5a + 7b)$.
$(3a + 8b)^2 + (4a + 6b)^2 - (5a - 10b)^2$.
$(x + y)^3$; $(m - n)^3$; $(p + 1)^3$; $(2x - 3y)^3$; $(4ab + 2bc)^3$.

Fünftes Kapitel.

Division.

23. Das mathematische Gesetz der algebraischen Division ist bedingt durch die Formel:

$$\frac{a}{b} = c.$$

Man sagt: Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren heifst, eine neue Zahl c bilden, welche mit der Zahl b multipliziert, die ursprüngliche Zahl a ergiebt.

Die Zahl a heifst Dividend, die Zahl b heifst Divisor und die Zahl c bildet den Quotienten.

Jede Division ist richtig ausgeführt, wenn Quotient und Divisor mit einander multipliziert den Dividenden als Produkt ergeben.

Ist $\frac{a}{b} = c$, so mufs auch $a = b \cdot c$ sein.

Dividiert man eine Zahl durch sich selbst, so erhält man als Quotienten stets den Wert **1**. Z. B:

$$\frac{5}{5} = 1.$$

$$\frac{a}{a} = 1.$$

Dividiert man eine Zahl durch 1, so erhält man als Quotienten stets die Zahl selbst. Z. B:

$$\frac{5}{1} = 5.$$

$$\frac{a}{1} = a.$$

$$\frac{a + x}{1} = a + x.$$

$$\frac{(a - b)(x + y)}{1} = (a - b)(x + y).$$

Beispiele:

$$\frac{12}{3} = 4, \text{ denn: } 12 = 3 \,.\, 4.$$

$$\frac{8a}{2} = 4a, \text{ denn: } 8a = 2 \,.\, 4a.$$

$$\frac{6(a + b)}{3(a + b)} = 2, \text{ denn: } 6(a + b) = 2 \,.\, 3(a + b).$$

24. Bezüglich der Vorzeichen gelten bei der Division im ähnlichen Sinne die bereits bei der Multiplikation unter 16, Seite 16) gegebenen Gesetze:

Der Quotient zweier Gröfsen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, dagegen mit entgegengesetzten Vorzeichen negativ, d. h.

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}.$$

$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

$$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}.$$

$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

25. Eine eigentliche Division, wie sie mit bestimmten Zahlen ausgeführt werden kann, ist mit Buchstabenausdrücken — so lange der Dividend nicht ein Produkt des Divisors ist, und wenn von den Koeffizienten abgesehen wird — nicht möglich.

Die Division kann nur angedeutet werden und schreibt man die bei der Division in Betracht zu ziehenden Gröfsenausdrücke gewöhnlich in Bruchform.

Soll z. B. die Division von $a - b$ durch $a + b$ angedeutet werden, so schreibt man:

$$\frac{a - b}{a + b},$$

ist die Division praktisch auszuführen, so wendet man folgende Schreibweise an:

$$(a-b):(a+b),$$

liest aber in beiden Fällen: $a-b$ dividiert durch $a+b$.

26. Ist der Dividend gleich dem Divisor, so heben sich die in denselben enthaltenen Zahlenausdrücke gegen einander; der Quotient wird hier stets $= 1$. Z. B:

$$\frac{7}{7}=1, \text{ denn: } 7=1.7.$$

$$\frac{ab}{ab}=1, \text{ denn: } ab=1.ab.$$

$$\frac{ab(x+y)}{ab(x+y)}=1.$$

$$\frac{x+y+z-a}{x+y+z-a}=1.$$

Ist der Dividend ein Vielfaches des Divisors, so ist die Division auch ohne weiteres möglich; dieselbe geht dann ohne Rest auf.

Haben hierbei Dividend und Divisor Faktoren gemeinschaftlich, so heben sich diese gegenseitig. Z. B:

$$\frac{12}{4}=3, \text{ denn: } 12=4.3.$$

$$\frac{ac}{c}=a, \text{ denn: } ac=ca=ac.$$

$$\frac{12ab}{3ab}=4, \text{ denn: } 4.3ab=12ab.$$

$$\frac{15ax}{3a}=5x, \text{ denn: } 5x.3a=15ax.$$

$$\frac{2mnx}{3mmnx}=\frac{2}{3m}; \quad \frac{16xyy}{12yz}=\frac{4xy}{3z}.$$

$$\frac{ab}{6a}=\frac{b}{6}; \quad \frac{(m+n)(p-q)}{p-q}=m+n.$$

$$\frac{ab(f+g)}{2b(f+g)}=\frac{a}{2}; \quad \frac{x(y+z)}{x(y-z)}=\frac{y+z}{y-z}.$$

$$\frac{-16a}{8b}=-\frac{2a}{b}; \quad \frac{8fmn}{-2fgm}=-\frac{4n}{g}.$$

$$\frac{-12abcde}{-8acd}=\frac{3be}{2}; \quad \frac{36aabbcfg}{-27abccghk}=-\frac{4abf}{3chk}.$$

$$\frac{x(a+b)}{mx}=\frac{a+b}{m}; \quad \frac{ay+by}{y}=\frac{y(a+b)}{y}=a+b.$$

$$\frac{12ab-18ax}{24ay+30az}=\frac{6a(2b-3x)}{6a(4y+5z)}=\frac{2b-3x}{4y+5z}.$$

Sind Dividend und Divisor so beschaffen, daſs die Division nicht ohne Rest möglich ist, so wird der Quotient eine Zahl, welcher noch die Eigenschaft weiterer Division anhaftet.

Eine solche Zahl heiſst ein Bruch, oder eine gebrochene Zahl.

Bei dem Rechnen mit algebraischen Brüchen gelten dieselben Regeln, wie bei dem Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen. (Siehe Seite 28, unter 28.)

27. Folgende Regeln sind besonders zu beachten:

Ist der Dividend eine algebraische Summe, der Divisor aber eine ganze Zahl, so führt man die Division aus, indem man jeden einzelnen Summanden durch diese Zahl dividiert und die so erhaltenen Quotienten, entsprechend den Vorzeichen der einzelnen Summanden, zu einander addiert. Z. B:

$$\frac{m+n}{3}=\frac{m}{3}+\frac{n}{3};\quad \frac{x+y}{a}=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}.$$

$$\frac{ab+ac+ad}{a}=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}+\frac{ad}{a}=b+c+d.$$

$$\frac{a+b-c+d}{f}=\frac{a}{f}+\frac{b}{f}+\frac{-c}{f}+\frac{d}{f}=\frac{a}{f}+\frac{b}{f}-\frac{c}{f}+\frac{d}{f}.$$

$$\frac{-a+b+c-d}{-n}=\frac{-a}{-n}+\frac{+b}{-n}+\frac{+c}{-n}+\frac{-d}{-n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}-\frac{c}{n}+\frac{d}{n}.$$

$$\frac{8axy+10ax}{5ax}=\frac{8axy}{5ax}+\frac{10ax}{5ax}=\frac{8y}{5}+2=2+1\frac{3}{5}y.$$

$$\frac{12acfg-4afg+5fgh}{4abfg}=\frac{12acfg}{4abfg}-\frac{4afg}{4abfg}+\frac{5fgh}{4abfg}$$
$$=\frac{3c}{b}-\frac{1}{b}+\frac{5h}{4ab}.$$

Ist der Dividend eine algebraische Summe und der Divisor ebenfalls, so kann man zweierlei Wege einschlagen:

a) Den Weg der Faktorenzerlegung.

Hierbei vereinfacht man die Zahlenausdrücke im Dividenden und im Divisor dadurch, daſs man nach dem auf Seite 18, unter 19) angegebenen Verfahren gemeinschaftliche Faktoren herausschreibt.

Haben Dividend und Divisor gleiche Faktoren, so heben sich dieselben gegenseitig. Z. B:

$$\frac{9a-9b}{3a-3b}=\frac{9(a-b)}{3(a-b)}=\frac{9}{3}=3.$$

$$\frac{ab+ac}{fb+fc}=\frac{a(b+c)}{f(b+c)}=\frac{a}{f}.$$

$$\frac{ax-a}{a-ay}=\frac{a(x-1)}{a(1-y)}=\frac{x-1}{1-y}.$$

$$\frac{aa+a}{1-aa}=\frac{a(a+1)}{(1+a)\,(1-a)}=\frac{a}{1-a}.$$ (Vgl. Kap. IV unter 22; 5.)

$$\frac{n-nn}{3an-3ann}=\frac{n(1-n)}{3an(1-n)}=\frac{1}{3a}.$$

Übungsbeispiele:

$$\frac{ax+xx}{3bx+cx};\quad \frac{14aa-7ab}{10ac-5bc};\quad \frac{ac-bcx-cz}{9bcz-cz};\quad \frac{6ac+9bc-5cc}{12adf+18bdf-10cdf};$$

$$\frac{5aa-5ax}{aa-xx};\quad \frac{6ac+10bc+9ad+15bd}{6cc+9cd-2c-3d}.$$

Diese Methode erfordert jedoch sehr viel Übung; allgemeine Regeln für dieselbe lassen sich nur schwer geben.

b) Den Weg der Partial-Division.

Hierbei verfährt man allgemein — genau wie bei natürlichen Zahlen — folgendermaßen:

Man ordnet die Glieder des Dividenden und des Divisors in alphabetischer Reihenfolge, und dividiert das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors; das erhaltene Resultat bildet das erste Glied des Quotienten.

Mit diesem Quotienten multipliziert man den ganzen Divisor und subtrahiert das so erhaltene Produkt vom Dividenden.

Zu dem entstandenen Rest nimmt man von der Dividenden-Summe neue Glieder herunter, und dividiert nun wieder mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Restes; das erhaltene Resultat bildet das zweite Glied des Quotienten.

So lange noch Glieder aus der Dividenden-Summe heruntergenommen werden können, ist das Verfahren im gleichen Sinne fortzusetzen.

Diese Methode ist die leichtere und auch am meisten angewandte.

	Dividend.	Divis. Quotient.
1. Beispiel.	(ac − bc + ad − bd):	(a − b) = c + d.
	ac − bc	Subtrahend
	− + ...	Vorzeichen umgekehrt
	„ „ + ad − bd	Rest oder neuer Dividend
	ad − bd	Subtrahend
	− +	Vorzeichen umgekehrt
	„ „	Rest.

	Dividend.	Divis. Quotient.
2. Beispiel.	(ac + bc − ad − bd):	(a + b) = c − d.
	ac + bc	Subtrahend
	− −	Vorzeichen umgekehrt
	„ „ − ad − bd	Rest oder neuer Dividend; hierbei ist jetzt mit a in — a d zu dividieren also: $\frac{-ad}{+a}=-d!$

$$\begin{array}{ll} -ad - bd & \text{Subtrahend} \\ +\quad\; + & \text{Vorzeichen umgekehrt} \\ \hline ,,\quad\; ,, & \text{Rest.} \end{array}$$

3. Beispiel.

$$\begin{array}{l} (14af - 21bf + 7cf + 6ag - 9bg + 3cg) : (7f + 3g) = 2a - 3b + c. \\ 14af \qquad\qquad\quad + 6ag \\ - \qquad\qquad\qquad\; - \\ \hline ,,\; - 21bf + 7cf \quad ,,\; - 9bg + 3cg \\ \quad - 21bf \qquad\qquad\; - 9bg \\ \quad + \qquad\qquad\qquad + \\ \hline \quad ,,\; + 7cf \qquad\quad ,,\; + 3cg \\ \qquad + 7cf \qquad\qquad + 3cg \\ \qquad - \qquad\qquad\qquad - \\ \hline \qquad ,, \qquad\qquad\qquad ,, \end{array}$$

4. Beispiel.*)

$$\begin{array}{l} (4xxx + 4xx - 29x + 21) : (2x - 3) = 2xx + 5x - 7. \\ 4xxx - 6xx \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 2x^2 + 5x - 7. \\ - \quad\; + \\ \hline ,,\; + 10xx - 29x + 21 \\ \quad + 10xx - 15x \\ \quad - \qquad + \\ \hline \qquad ,,\; - 14x + 21 \\ \qquad\quad - 14x + 21 \\ \qquad\quad + \qquad - \\ \hline \qquad\quad ,, \qquad ,, \end{array}$$

5. Beispiel.*)

$$\begin{array}{l} (6bb - bc - cc + bx) : (3b + c) = 2b - c. \\ 6bb + 2bc \\ - \quad - \\ \hline ,,\; - 3bc - cc + bx \\ \quad - 3bc - cc \\ \quad + \qquad + \\ \hline \quad ,, \qquad ,, \; \text{Rest} + bx. \end{array}$$

Die Division geht hier nicht auf; der Rest bx wäre demnach noch des weiteren durch (3b + c) zu dividieren. Bricht man die Division hier ab, so sind Rest und Divisor in Bruchform dem bis jetzt erhaltenen Quotienten (2b — c) anzuhängen, und heifst letzterer nunmehr:

$$2b - c + \frac{bx}{3b + c}$$

6. Beispiel.*)

$$\begin{array}{l} 1 : (1 - b) = 1 + b + bb + bbb + \ldots \\ 1 - b \qquad\; = 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots \\ - \quad + \\ \hline ,,\; + b \\ \quad + b - bb \\ \quad - \quad + \\ \hline \qquad ,,\; + bb \\ \qquad\quad + bb - bbb \\ \qquad\quad - \qquad + \\ \hline \qquad\quad ,, \qquad + bbb \text{ u. s. w. bis ins Unendliche.} \end{array}$$

Wie man sieht, wird hier die Division nie aufgehen; man kann dieselbe demnach unendlich weit und lange fortsetzen.

---

*) Die in diesen Beispielen erscheinenden Potenzen sind der gröfseren Deutlichkeit wegen als einzelne Faktoren geschrieben.

Übungsbeispiele:
$(ac + bc + ad + bd) : (a + b)$; $(aa + 2ab + bb - cc) : (a + b)$.
$(12mm - 51mn - 24mp + 54nn + 48np) : (3m - 6n)$.
$(35aa + 24ab - 15ac + 4bb - 6bc) : (5a + 2b)$; $(xxx + yyy) : (x + y)$.
$(2aa + 5ab - 2bb + 9ac + 9bc + 9cc) : (2a + b + 3c)$.
$(xx - yy - 2yz - zz) : (x - y - z)$.
$(60abb + 125aaa - 8bbb - 150aab) : (5a - 2b)$.

28. Ist man gezwungen mit algebraischen Brüchen zu rechnen — eine in der Praxis sehr oft auftretende Notwendigkeit — so verfahre man genau nach den für das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen aufgestellten Grundregeln, **jedoch unter Berücksichtigung der Vorzeichen.** (Vergl. Seite 16 und 23, unter 16 und 24.)

Ein einfacher algebraischer Bruch hat die Form: $\frac{a}{b}$ oder $\frac{ax}{by}$.

„ zusammengesetzter „ „ „ „ „ $\frac{a+b}{b-c}$ und

eine gemischte algebraische Zahl „ „ „ $a + \frac{bc}{d-f}$

oder: $a - \frac{bc}{d-f}$.

Bei der algebraischen gemischten Zahl kann also der an die ganze Zahl angehängte Bruch sowohl ein positives, (+) als auch ein negatives (—) Vorzeichen haben.

Die hier angenommene Zahl a mufs in jedem Falle eine **ganze** Zahl bedeuten.

Die wichtigsten Regeln sind folgende:

In einem Bruche kann man die Vorzeichen des Zählers und Nenners gleichzeitig in die entgegengesetzten verwandeln (umkehren), ohne dafs sich der Wert des Bruches dadurch ändert. Z. B:

Es ist $\frac{+60}{+3} = +20$ und ebenso:

$$\frac{-60}{-3} = +20.$$

In beiden Fällen, also mit positiven Vorzeichen ebenso wie mit negativen, erhält man dieselbe Zahl: **+20.**

Folglich müssen die beiden Werte, aus denen die Zahl **+ 20** entstanden ist, einander gleich sein, d. h. es mufs

$$\frac{+60}{+3} = \frac{-60}{-3} \text{ sein.}$$

Daraus ergiebt sich ohne weiteres:

$$\frac{+ab}{+abc} = \frac{-ab}{-abc}.$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{-(a+b)}{-(a-b)}=\frac{-a-b}{-a+b}.$$

Kehrt man jedoch in einem Bruche die Vorzeichen **nur** im Zähler oder **nur** im Nenner um, so ändert sich damit das Vorzeichen des ganzen Quotienten. (Vergl. S. 23, unter 24.)

Beispiele:

$$\frac{+60}{-3}=-20.$$

$$\frac{-60}{+3}=-20.$$

$$\frac{+29ab}{-36bc}=-\frac{29a}{36c}.$$

$$\frac{-(a+b)}{+(a-b)}=-\frac{a+b}{a-b}.$$

In einem Bruche kann man Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplizieren, oder durch ein und dieselbe Zahl dividieren, ohne dafs sich der Wert des Bruches ändert. Z. B:

$$\frac{5}{8}=\frac{5.3}{8.3}=\frac{15}{24};\text{ oder }\frac{27}{51}=\frac{27:3}{51:3}=\frac{\frac{27}{3}}{\frac{51}{3}}=\frac{9}{17}.$$

$$\frac{(5x-3y)}{7b}=\frac{(5x-3y).8a}{7b.8a}=\frac{40ax-24ay}{56ab}.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a.m}{b.m};\text{ oder }\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}=\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}.$$

$$\frac{m+n}{n-m}=\frac{(m+n)x}{(n-m)x};\ \frac{a+b}{f-g}=\frac{(a+b):(x-y)}{(f-g):(x-y)}.$$

Im ersten Falle sagt man, man erweitere, im zweiten Falle, man kürze den Bruch.

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner wieder Brüche sind, heifst ein Doppelbruch. (Siehe obige Beispiele.)

Brüche sind entweder gleichnamig oder ungleichnamig.

Sie sind gleichnamig, wenn sie ein und denselben Nenner besitzen; ungleichnamig, wenn dies nicht der Fall ist. Gleichnamige Brüche sind z. B:

$$\frac{3}{20}\text{ und }\frac{17}{20};\ \frac{a}{b}\text{ und }\frac{c}{b}.$$

$$\frac{mn}{xy}\text{ und }\frac{pq}{xy};\ \frac{fg}{n+m}\text{ und }\frac{x-y-z}{n+m}.$$

Ungleichnamige Brüche sind:

$$\frac{5}{8} \text{ und } \frac{3}{7}; \ \frac{a}{b} \text{ und } \frac{b}{c}.$$

$$\frac{rs}{x+z} \text{ und } \frac{pq}{y-x}.$$

Ungleichnamige Brüche müssen, um sie addieren oder subtrahieren zu können, gleichnamig gemacht werden.

Ungleichnamige Brüche werden gleichnamig gemacht, indem man ihren Haupt- oder Generalnenner feststellt. Alsdann dividiert man mit dem Nenner jedes einzelnen Bruches in diesen Generalnenner, und multipliziert mit dem so erhaltenen Quotienten den zu dem betreffenden Nenner gehörenden Zähler.

Die erhaltenen Produkte bilden dann die Zähler der gleichnamig gemachten Brüche, deren gemeinschaftlicher Nenner der General-Nenner wird.

Unter dem Generalnenner versteht man im allgemeinen diejenige kleinste Zahl, in welcher alle Nenner gleichnamig zu machender Brüche bei der Division ohne Rest enthalten sind.

Sind z. B. als Nenner die Zahlen 5 und 7 gegeben, so ist deren Generalnenner = 35; denn 5 und 7 gehen bei der Division in 35 ohne Rest auf.

Sind die Zahlen 4, 6 und 20 als Nenner gegeben, so ist 60 deren Generalnenner, als kleinste Zahl, in welcher 4, 6 und 20 ohne Rest enthalten sind. Für die Nenner 3, 9, 7 und 14 ist als kleinste Zahl 126 der Generalnenner u. s. w.

Bei Buchstabengröfsen, welche als Nenner gleichnamig zu machen sind, ist als Generalnenner genau ebenso die kleinste Zahl zu bestimmen, in welcher sämtliche Nenner bei der Division ohne Rest enthalten sind.

Für die Nenner a und b ist **ab**, und für die Nenner a, b und c ist **abc** der Generalnenner.

Die Gröfsen ab, ac, ad und ae haben die Zahl **abcde** zum Generalnenner, denn sie sind sämtlich ohne Rest in dieser Zahl abcde enthalten u. s. w.

1. Beispiel. Die Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ sollen gleichnamig gemacht werden.

Der Generalnenner ist = 36; dividiert man mit dem Nenner 9 des ersten Bruches in diesen Generalnenner, so erhält man als Quotienten $\frac{36}{9} = 4$. Multipliziert man mit 4 den zugehörigen Zähler 5 und setzt man unter das erhaltene

Produkt $4 . 5 = 20$ den Generalnenner 36, so erhält man an Stelle des Bruches $\frac{5}{9}$ den **gleichwertigen** Bruch $\frac{20}{36}$.

Verfährt man mit dem zweiten Bruch $\frac{7}{12}$ auf gleiche Weise, so erhält man an dessen Stelle den Bruch $\frac{21}{36}$. Die Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ ergeben, gleichnamig gemacht, somit die Werte:

$$\frac{20}{36} \text{ und } \frac{21}{36}.$$

2. Beispiel. Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sollen gleichnamig gemacht werden.

Der Generalnenner ist $= b\,d$; dividiert man mit dem Nenner b des ersten Bruches in diesen General-Nenner, so erhält man als Quotienten $\frac{b\,d}{b} = d$. Multipliziert man mit d den zugehörigen Zähler a und setzt man unter das erhaltene Produkt $a\,d$ den Generalnenner $b\,d$, so erhält man an Stelle des Bruches $\frac{a}{b}$ den **gleichwertigen** Bruch $\frac{a\,d}{b\,d}$.

Verfährt man mit dem zweiten Bruch $\frac{c}{d}$ auf gleiche Weise, so erhält man an dessen Stelle den Bruch $\frac{b\,c}{b\,d}$. Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ergeben, gleichnamig gemacht, somit die Werte:

$$\frac{a\,d}{b\,d} \text{ und } \frac{b\,c}{b\,d}.$$

3. Beispiel. Die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$ sind gleichnamig zu machen. Generalnenner $= b\,d\,f\,h$. Folglich wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,d\,f\,h}{b\,d\,f\,h}; \; \frac{c}{d} = \frac{c\,b\,f\,h}{b\,d\,f\,h}; \; \frac{e}{f} = \frac{e\,b\,d\,h}{b\,d\,f\,h} \text{ und } \frac{g}{h} = \frac{g\,b\,d\,f}{b\,d\,f\,h}.$$

Übungsbeispiele: Es sind gleichnamig zu machen:

$\frac{a}{b}$ und $\frac{x}{y}$; $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$; $\frac{1}{ab}$ und $\frac{1}{cd}$; $\frac{x}{u}, \frac{y}{v}$ und $\frac{z}{w}$; $\frac{x}{pq}$ und $\frac{y}{q}$.

$\frac{a}{xyz}, \frac{b}{yz}$ und $\frac{c}{z}$; $\frac{3a}{4b}, \frac{5f}{8g}$ und $\frac{x}{7y}$; $\frac{af}{4bg}, \frac{5cd}{12bh}$ und $\frac{2}{3}$; $\frac{a}{4bcd}, \frac{h}{2bcg}$ und $\frac{3}{4}$.

$\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$; $\frac{x}{a-b}$ und $\frac{y}{c}$; $\frac{17x-4y}{11x}$ und $\frac{3y-5x}{13y}$.

$\frac{a-b}{b}$ und $\frac{b}{a+b}$; $\frac{5a+7b}{2a-3b}$ und $\frac{2a+3b}{5a-7b}$.

Eine gemischte Zahl wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des zugehörigen Bruches multipliziert, die so erhaltene Zahl zu dem Zähler des Bruches addiert und das Ganze durch den Nenner des Bruches dividiert.

$$^{*)}\ 3 + \tfrac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} = \frac{7}{2}.$$

$$a + \frac{x}{y} = \frac{ay + x}{y}.$$

$$x - \frac{a - b}{c} = \frac{xc - (a - b)}{c} = \frac{-a + b + cx}{c}.$$

$$x - \frac{xz}{z + 1} = \frac{x(z + 1) - xz}{z + 1} = \frac{xz + x - xz}{z + 1} = \frac{x}{z + 1}.$$

$$x + y + \frac{a}{b - c} = \frac{(x + y)(b - c) + a}{b - c} = \frac{bx + by - cx - cy + a}{b - c}.$$

Übungsbeispiele: Es sind in gewöhnliche Brüche zu verwandeln:

$$a + \frac{b}{c};\ h + \frac{3a}{5b};\ x + \frac{1}{c};\ 1 - \frac{m}{n};\ 3 + \frac{4a - 5b}{2a + 3b}.$$

$$x - \frac{xx + 2xy + yy}{x + y};\ \frac{(a - b)^2}{4ab} - 1;\ 1 + \frac{(a + b)^2}{4ab}.$$

$$x - y - \frac{a}{b + c};\ a - b + c - \frac{x - y}{n + m};\ a - \frac{ax}{x + y}.$$

Gleichnamige Brüche werden allgemein addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert und der erhaltenen Zahl den gemeinschaftlichen Nenner unterschreibt. Z. B:

$$\frac{3}{18} + \frac{8}{18} = \frac{3 + 8}{18} = \frac{11}{18}.$$

$$6\tfrac{1}{3} - 1\tfrac{1}{3} = \frac{19}{3} - \frac{4}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c};\ \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

$$\frac{5}{z} - \frac{4}{z} = \frac{5 - 4}{z} = \frac{1}{z};\ \frac{16ab}{8xy} + \frac{b + c}{8xy} = \frac{16ab + b + c}{8xy}.$$

$$\frac{a - 2b}{a + b} + \frac{a + 3b}{a + b} = \frac{a - 2b + a + 3b}{a + b} = \frac{2a + b}{a + b}.$$

$$\frac{3a + 2b}{x} - \frac{2a + 3b}{x} = \frac{3a + 2b - 2a - 3b}{x} = \frac{a - b}{x}.$$

*) Bei den aus bestimmten Zahlen gebildeten gemischten Zahlen läſst man das Additionszeichen zwischen der ganzen Zahl und dem Bruch gewöhnlich weg; man schreibt also nicht: $3 + \frac{1}{2}$, sondern stets **$3^1/_2$**.

Übungsbeispiele:

$$\frac{6a}{11x}+\frac{7a}{11x};\ \frac{17m}{20y}-\frac{13m}{20y}+\frac{21m}{20y}-\frac{19m}{20y}.$$

$$\frac{2m+5n}{x+y}+\frac{7m-9n}{x+y}+\frac{11m-8n}{x+y};\ \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}.$$

$$\frac{ac-by}{ac}+\frac{cx}{ac}+\frac{by}{ac};\ 9a+\frac{3x}{4y}-\frac{7z}{4y};\ 27p-\frac{11n}{r+s}-\frac{15b}{r+s}.$$

$$\frac{3a+b}{a-b}-\frac{2a+b}{a-b};\ \frac{x}{a}-\frac{3x-2y+b}{a}-\frac{5y-3b}{a}.$$

Ungleichnamige Brüche werden allgemein addiert oder subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann wie gleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert. Z. B:

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{24+35}{56}=\frac{59}{56}=1\tfrac{3}{56}.$$

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

$$\frac{x}{y}+\frac{x+y}{nz}=\frac{nxz}{nyz}+\frac{(x+y)y}{nyz}=\frac{nxz+y(x+y)}{nyz}.$$

$$\frac{9a+5b}{5}-\frac{6a-3b}{3}=\frac{3(9a+5b)}{15}-\frac{5(6a-3b)}{15}$$

$$=\frac{3(9a+5b)-5(6a-3b)}{15}=\frac{27a+15b-30a+15b}{15}$$

$$=\frac{-3a+30b}{15}=\frac{3(-a+10b)}{15}=\frac{-a+10b}{5}.$$

$$\frac{x}{y}-\frac{x+y}{ab}=\frac{xab}{yab}-\frac{y(x+y)}{yab}=\frac{abx-xy-yy}{aby}$$

$$=\frac{x(ab-y)-y^2}{aby}.$$

$$\frac{9}{a+b}-\frac{7}{a}=\frac{9a-7(a+b)}{(a+b)a}=\frac{9a-7a-7b}{a(a+b)}=\frac{2a-7b}{a(a+b)}.$$

$$\frac{7}{4(x-y)}+\frac{3}{5(x-y)}=\frac{35+12}{20(x-y)}=\frac{47}{20(x-y)}.$$

$$\frac{6a+3b}{4a}+\frac{5b}{2a-6b}=\frac{(6a+3b)\cdot(2a-6b)+5b\cdot 4a}{4a(2a-6b)}$$

$$=\frac{12aa+6ab-36ab-18bb+20ab}{8aa-24ab}$$

$$=\frac{12aa+10ab-18bb}{8aa-24ab}.$$

$$\frac{6}{3a-3}-\frac{4}{2a-2}+\frac{7}{4a-4}=\frac{6}{3(a-1)}-\frac{4}{2(a-1)}$$
$$+\frac{7}{4(a-1)}=\frac{24-24+21}{12(a-1)}=\frac{21}{12(a-1)}=\frac{7}{4(a-1)}.$$

Übungsbeispiele:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\ \frac{1}{ab}-\frac{1}{cd};\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}.$$
$$\frac{13a-5b}{4}-\frac{7a-2b}{6}-\frac{3a}{5};\ \frac{17x-4y}{11x}-\frac{3y-5x}{13y};\ \frac{x}{pq}+\frac{y}{q}.$$
$$\frac{a}{xyz}+\frac{b}{yz}+\frac{c}{z};\ \frac{3a+2b}{c}-\frac{5bd-2a-3d}{4cd};\ \frac{x}{a-b}+\frac{y}{c}.$$
$$\frac{6a+3b}{4a}+\frac{5b}{2a-6b};\ \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y};\ \frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}.$$
$$\frac{5a+7b}{2a+3b}-\frac{2a+3b}{5a-7b};\ \frac{7x}{13y}+\frac{8y}{5x}+\frac{12xx-63yy}{65xy}.$$
$$\frac{3xx-2x+1}{4x-3}-\frac{2xx+3x-4}{3x-6}.$$
$$\frac{x+y}{a+b}+\frac{y}{a}+\frac{x}{b};\ \frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}.$$
$$\frac{1}{x+a}+\frac{2}{x+b}-\frac{3}{x+c}.$$

Brüche werden mit einander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Z. B:

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{5\cdot3}{8\cdot8}=\frac{15}{64};\ \frac{6}{7}\cdot\frac{3}{11}=\frac{18}{77}.$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\ \frac{ab}{c}\cdot\frac{e}{fg}=\frac{abe}{cfg}.$$
$$\frac{7abc}{6mn}\cdot\frac{16mnx}{14ayz}=\frac{7\cdot16\cdot abcmnx}{6\cdot14mnayz}=\frac{4bcx}{3yz}.$$

Übungsbeispiele:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{6x}{z}\cdot\frac{z}{3x};\ \frac{8mn}{xy}\cdot\frac{15mx}{6ac};\ \frac{2ax}{3}\cdot\frac{5ax}{9bc};\ \frac{35abc}{36pqr}\cdot\frac{16qrs}{35acd};\ \frac{24a}{25b}\cdot\frac{4y}{3x}\cdot\frac{5by}{6ax}.$$
$$\left(\frac{3ab}{4x}-\frac{7bc}{4y}+\frac{12cd}{5z}\right)\cdot\frac{80xx}{63abcd};\ \left(\frac{4a+5b}{3a-2b}-\frac{4a-5b}{3a+2b}\right)\cdot\frac{9a-4b}{16a-25b}.$$
$$\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{4a}\right)\left(\frac{3a}{4b}+\frac{2b}{3a}\right)-\left(\frac{a}{6b}-\frac{b}{8a}\right)\left(\frac{a}{2b}-\frac{b}{3a}\right).$$
$$\left(\frac{x}{a+x}+a\right)\left(\frac{a}{a-x}-x\right);\ \left(\frac{a}{a+x}+x\right)\left(\frac{x}{a-x}-a\right).$$

Soll ein Bruch durch einen anderen Bruch dividiert werden, so kehre man den Divisorbruch um und multipliziere die beiden Brüche.*)

---

*) Einen Bruch umkehren heiſst, den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler machen. Kehrt man den Bruch $\frac{3}{4}$ um, so erhält man: $\frac{4}{3}$. Den Bruch $\frac{5a}{7xy}$ umgekehrt, ergiebt: $\frac{7xy}{5a}$.

Beispiele:

$$\frac{4}{5}:\frac{7}{9}=\frac{4}{5}.\frac{9}{7}=\frac{4.9}{5.7}=\frac{36}{35}.$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{5ax}{9by}:\frac{7pq}{11rs}=\frac{5ax}{9by}.\frac{11rs}{7pq}=\frac{55arsx}{63bpqy}.$$

$$\left(x+\frac{b}{c}\right):\left(b-\frac{x}{d}\right)=\left(\frac{xc+b}{c}\right):\left(\frac{bd-x}{d}\right)$$

$$=\frac{cx+b}{c}.\frac{d}{bd-x}=\frac{cdx+bd}{bcd-cx}.$$

Übungsbeispiele:

$\frac{5am}{bc}:\frac{15mx}{6ac}$; $\frac{2mn}{3}:\frac{2mn}{3bc}$; $\frac{26xyz}{45pqr}:\frac{39xyz}{40pqr}$; $\frac{13abbc}{20xxy}:\frac{30xyyz}{52bccn}$.

$\frac{5ab(m-n)}{6xy(m+n)}:\frac{10ax(m-n)}{3by(m+n)}$; $\left(\frac{5x}{8u}+12xu-\frac{9u}{16x}\right):\frac{15x}{32u}$.

$\frac{n}{m}:\frac{ma}{m+n+p}$; $\frac{a+x}{a-x}:\frac{ax+xx}{ax-xx}$; $\left(\frac{5abc}{12pqr}.\frac{40xpr}{25bxc}\right):\frac{5abcxp}{25bqr}$.

$\left(\frac{2mn}{6abc}:\frac{18mnp}{3bcx}\right).\frac{7pq}{9ab}$.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert oder durch eine ganze Zahl dividiert, indem man entsprechend den Zähler oder den Nenner mit dieser Zahl multipliziert. Z. B:

$$\frac{9}{11}.3=\frac{9.3}{11}=\frac{27}{11};\quad \frac{13}{30}:5=\frac{13}{30.5}=\frac{13}{150}.$$

$$\frac{a}{b}.c=\frac{ac}{b}\text{ und }\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}.$$

$$3abc.\frac{7pq}{9abc}=\frac{3abc.7pq}{9abc}=\frac{3.7abcpq}{9abc}=\frac{7pq}{3}.$$

$$\frac{x+y}{x-y}:x+y=\frac{(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x-y}.$$

Übungsbeispiele:

$\frac{15xyz}{23pqr}.17prs$; $\frac{1}{aa}.a$; $\frac{32ab}{27(x-y)}.36(x-y)$; $\left(\frac{11x}{12y}+\frac{5xx}{4yy}-\frac{7xxx}{8y}\right).4ab$.

$\frac{x}{y}:z$; $\frac{15ab}{16xy}:2abc$; $\frac{3aabb}{5xyy}:9aabx$; $\frac{a+x}{3}:\frac{a+x}{3}$; $7ax:\frac{14ax}{5by}$.

29. Zerlegt man eine Zahl, oder einen Zahlenausdruck, in mehrere gleiche Faktoren, so bezeichnet man das hierbei einzuschlagende Verfahren mit dem Ausdrucke „Wurzelausziehen oder Radizieren"; den gesuchten Faktor nennt man „Wurzel".

Zerlegt man eine Zahl in 2, 3 oder mehr gleiche Faktoren, so erhält man entsprechend die 2te, 3te oder eine höhere Wurzel.

Das Zeichen $\sqrt{}$ (verzogenes r von dem lateinischen Wort: radix = Wurzel) heifst das Wurzelzeichen; es erstreckt sich der horizontale Strich desselben stets ganz über den zu radizierenden Zahlenausdruck. Die winkelartige Öffnung im senkrechten Teile des Wurzelzeichens dient zur Aufnahme der Zahl — des Exponenten — die angiebt, welche Wurzel aus der unter dem ganzen Zeichen stehenden Zahl gezogen werden soll.

Die zweite Wurzel aus einer Zahl a nennt man „Quadratwurzel“ und schreibt dieselbe kurz: $\sqrt{a}$, d. h. ohne Exponenten. Die dritte Wurzel heifst „Kubik-Wurzel“.

Demnach bedeutet: $\sqrt[3]{64}$ die 3te Wurzel aus der Zahl 64, d. h. die Zahl 4, welche dreimal als Faktor gesetzt, die Zahl 64 ergiebt; denn es ist $4 . 4 . 4 = 16 . 4 = 64$.

Allgemein gelten folgende Begriffe:

Aus einer Zahl a die nte Wurzel d. i. $= \sqrt[n]{a}$, ziehen — oder was dasselbe ist: eine Zahl a durch eine Zahl n radizieren — heifst, eine Zahl x suchen, welche mit n potenziert wieder die Zahl a ergiebt. Z. B:

$$\text{Ist } \sqrt[n]{a} = x, \quad \text{so mufs } x^n = a \quad \text{sein.}$$
$$\text{„ } \sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{„ „ } 5^3 = 125 \text{ „ .}$$
$$\text{„ } \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{„ „ } 2^4 = 16 \text{ „ .}$$

Die zu radizierende Zahl a heifst Radikand, die Zahl n heifst Wurzelexponent und die Zahl x bildet die gesuchte Wurzel.

Unter Berücksichtigung des auf Seite 20, unter 20) Gesagten ersieht man auf den ersten Blick, wie innig die Operationen des Potenzierens und Radizierens mit einander in Zusammenhang stehen. Man merke daher folgenden wichtigen Satz:

Wird eine Zahl mit einer anderen Zahl gleichzeitig potenziert und radiziert, so bleibt die Zahl unverändert, d. h.

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ oder was dasselbe ist: } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$
$$\sqrt[5]{x^5} = x; \; \sqrt[3]{(a+b)^3} = a + b.$$

Im Anschlufse an das in den vorstehenden Kapiteln Gebotene, mögen hier noch einige algebraische Werte in Gestalt von Formeln aufgeführt werden, gegen welche im praktischen Rechnen von dem weniger Geübten sehr oft und sehr arg verstofsen wird:

1) $a + 0 = a.$

2) $a - 0 = a.$

3) $a \,.\, 0 = 0.$

4) $\frac{a}{0} = \infty.$ (Das Zeichen des unendlich Grofsen, d. h. der Wert Null ist in jedem anderen Zahlenwerte unendlich viele Male enthalten).

5) $\frac{0}{a} = 0.$

6) $\frac{0}{0} = a = 7 = 5 = 100 = \frac{1}{8} = \frac{a+b}{c}$, d. h. Null dividiert durch Null ergiebt jeden beliebigen Zahlenwert.

7) $\frac{a}{a} = 1.$

8) $\frac{a}{1} = a.$

Die Richtigkeit der vorstehenden Formeln folgt ohne weiteres aus den Proben der Subtraktion und Division.

Sechstes Kapitel.

Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse.

30. Unter einer Gleichung versteht man allgemein die Verbindung zweier Gröfsenbezeichnungen durch das Gleichheitszeichen. Die rechts oder links vom Gleichheitszeichen stehenden Zahlenausdrücke nennt man entsprechend die rechte oder linke Seite der Gleichung. (Vergl. Seite 1, unter 2.)

Sind die Seiten einer Gleichung so beschaffen, dafs die eine durch Umformung des Zahlenausdruckes der anderen entstanden ist, so heifst die Gleichung eine analytische Gleichung, oder eine Formel. (Vergl. S. 4, unter 6.) Z. B:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Bestehen die Seiten einer Gleichung aus Zahlenausdrücken, welche von einander unabhängig sind, so entsteht die algebraische Gleichung. Z. B:

$$5x + 4 = a + \frac{3x}{b}.$$

31. Soll eine Gleichung unter Vornahme gewisser Rechnungs-Operationen umgeformt werden, so ist ein und dieselbe Operation stets mit beiden Seiten der Gleichung vorzunehmen.

32. Folgende Operationen kann man mit einer Gleichung vornehmen, ohne dafs sich der Wert derselben ändert:

a) Die Seiten einer Gleichung können mit einander vertauscht werden.

Ist $5 = 3 + 2$, so ist auch $3 + 2 = 5$.
" $a = b - c$ " " " $b - c = a$.
Ist $\frac{xy}{mn} + a = \frac{p+q}{r+s}$ " " " $\frac{p+q}{r+s} = \frac{xy}{mn} + a$.

b) Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man ein und dieselbe Zahl addieren, oder subtrahieren.

Ist $4 + 3 = 9 - 2$, so ist auch $4 + 3 + 5 = 9 - 2 + 5$.
" $a = b$ " " " $a + x = b + x$ und $a - x = b - x$.
" $a - b = c + d$ " " " $a - b - \frac{x}{y} = c + d - \frac{x}{y}$.

c) Beide Seiten einer Gleichung kann man mit ein und derselben Zahl multiplizieren, oder durch ein und dieselbe Zahl dividieren.

Ist $8 = 2 . 4$, so ist auch $2 . 8 = 2 . 2 . 4$ und $\frac{8}{2} = \frac{2 . 4}{2}$.
" $a = b + c$ " " " $an = (b + c)\, n$ " $\frac{a}{n} = \frac{b+c}{n}$.
" $\frac{p}{q} = \frac{x+y}{x-y}$ " " " $\frac{p}{qn} = \frac{x+y}{(x-y)n}$.

d) Beide Seiten einer Gleichung kann man mit ein und derselben Zahl potenzieren, oder durch ein und dieselbe Zahl radizieren.

Ist $25 = 5 . 5$, so ist auch $25^2 = (5 . 5)^2$ und $\sqrt{25} = \sqrt{5 . 5}$.
" $a + b = c$ " " " $(a + b)^2 = c^2$ " $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{c}$.

e) Ist die eine Seite einer Gleichung ein Produkt, so kann man jeden Faktor desselben als Divisor auf die andere Seite der Gleichung bringen. (Vergl. Seite 22, unter 23.)

Ist $3 . 7 = 21$, so ist auch $3 = \frac{21}{7}$ und $7 = \frac{21}{3}$.
" $a = b . c$ " " " $\frac{a}{b} = c$ " $\frac{a}{c} = b$.
" $(m + n)x = z$ " " " $m + n = \frac{z}{x}$ und $x = \frac{z}{m+n}$.

f) Ist die eine Seite einer Gleichung ein Quotient, so kann man den Divisor desselben als Faktor auf die andere Seite der Gleichung bringen. (Vergl. Seite 22, unter 23.)

Ist $\frac{36}{4} = 9$, so ist auch $36 = 9 . 4$.

„ $\frac{a - b}{c} = d + e$, so ist auch $a - b = (d + e) c$.

g) Jedes Glied der einen Seite einer Gleichung kann man mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite derselben bringen.

Ist $5 + 11 - 3 = 6 + 7$, so ist auch $5 + 11 = 6 + 7 + 3$,
oder $5 + 11 - 3 - 7 = 6$,
oder $5 = 6 + 7 - 11 + 3$ u. s. w.

„ $a - b = c + \frac{d}{2}$, so ist auch $a = c + \frac{d}{2} + b$,
oder $\frac{d}{2} = a - b - c$,
oder $c = a - b - \frac{d}{2}$ u. s. w.

Ist $n - (a + b) c = x + y$, so ist auch $n = x + y + (a + b) c$,
oder $y = n - (a + b) c - x$,
oder $-(a + b) c = -n + x + y$ u. s. w.

h) Sämtliche Glieder der einen Seite einer Gleichung kann man mit entgegengesetzen Vorzeichen auf die andere Seite bringen, wodurch in der neu entstandenen Gleichung eine Seite gleich „Null“ wird.

Ist $12 - 7 + 3 = 6 + 2$, so ist auch $12 - 7 + 3 - 6 - 2 = 0$.
„ $a + b - c = d - e + f$ „ „ „ $a + b - c - d + e - f = 0$.

i) Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man die Vorzeichen der einzelnen Glieder in die entgegengesetzten verwandeln. Man sagt in diesem Falle, man habe die ganze Gleichung mit (— 1) multipliziert.

Ist $9 - 10 + 13 = 5 - 11 + 18$, so ist auch
$-9 + 10 - 13 = -5 + 11 - 18$.
Ist $a - b + c = d - e$, so ist auch
$(a - b + c)(-1) = (d - e)(-1)$, d. h.
$-a + b - c = -d + e$.

33. Bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mehrerer Gleichungen untereinander ist folgendes zu beachten:

a) Eine Gleichung wird zu einer anderen Gleichung addiert, indem man sowohl die beiden linken Seiten, als auch die beiden rechten Seiten zu einander addiert und die so erhaltenen Summen durch ein Gleichheitszeichen verbindet.

1. Beispiel.
$$5+7=9+3 \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{I})$$
$$8+11=17+2 \;.\;.\;. \quad \mathrm{II})$$
$$\mathrm{I}+\mathrm{II}):\; 5+7+8+11=9+3+17+2.$$

2. Beispiel.
$$a+b+x=n-m \;.\;.\;. \quad \mathrm{I})$$
$$p-q=r+s \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{II})$$
$$\mathrm{I}+\mathrm{II}):\; a+b+p-q+x=n-m+r+s.$$

3. Beispiel.
$$\frac{x-y}{n}=a-\frac{p+q}{r} \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{I})$$
$$z=\frac{c}{d}+m \;.\;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{II})$$
$$\mathrm{I}+\mathrm{II}):\; \frac{x-y}{n}+z=a+\frac{c}{d}+m-\frac{p+q}{r}.$$

b) Eine Gleichung wird von einer anderen Gleichung subtrahiert, indem man die linke Seite der einen von der linken Seite der anderen, und entsprechend die rechte Seite der einen von der rechten Seite der anderen Gleichung subtrahiert. Die erhaltenen Differenzen sind durch ein Gleichheitszeichen zu verbinden.

1. Beispiel.
$$5+7=9+3 \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{I})$$
$$8+11=17+2 \;.\;.\;. \quad \mathrm{II})$$
$$\mathrm{I}-\mathrm{II}):\; 5+7-8-11=9+3-17-2.$$

2. Beispiel.
$$a+b+x=n-m \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{I})$$
$$p-q=r+s \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{II})$$
$$\mathrm{I}-\mathrm{II}):\; a+b+x-p+q=n-m-r-s.$$

c) Eine Gleichung wird mit einer anderen Gleichung multipliziert, indem man sowohl die beiden linken Seiten, als auch die beiden rechten Seiten mit einander multipliziert und die so erhaltenen Produkte durch ein Gleichheitszeichen verbindet.

1. Beispiel.
$$3.5=15 \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{I})$$
$$30=3.10 \;.\;.\;.\; \quad \mathrm{II})$$
$$\mathrm{I}.\mathrm{II}):\; 3.5.30=15.3.10.$$

2. Beispiel.
$$n+m=p+q \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{I})$$
$$a=b-c \;.\;.\;.\;. \quad \mathrm{II})$$
$$\mathrm{I}.\mathrm{II}):\; (n+m)\,a=(p+q)\,(b-c) \text{ oder:}$$
$$an+am=bp+bq-cp-cq.$$

3. Beispiel. $\frac{a}{b}-\frac{3}{4}=c+\frac{n}{m} \;....\; \mathrm{I})$

$\frac{x+y}{z}=r-s \;....\; \mathrm{II})$

$$\mathrm{I}.\mathrm{II}): \left(\frac{a}{b}-\frac{3}{4}\right)\frac{x+y}{z}=\left(c+\frac{n}{m}\right)\left(r-s\right).$$

d) Eine Gleichung wird durch eine andere Gleichung dividiert, indem man die linke Seite der einen durch die linke Seite der anderen, und entsprechend die rechte Seite der einen durch die rechte Seite der anderen Gleichung dividiert. Die erhaltenen Quotienten sind durch ein Gleichheitszeichen zu verbinden.

1. Beispiel. $7+9=10+6 \;....\; \mathrm{I})$

$8=2\,.\,4 \;....\; \mathrm{II})$

$$\left.\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}\right): \frac{7+9}{8}=\frac{10+6}{2\,.\,4}.$$

2. Beispiel. $a+b+x=n-m \;....\; \mathrm{I})$

$p-q=r+s \;....\; \mathrm{II})$

$$\left.\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}\right): \frac{a+b+x}{p-q}=\frac{n-m}{r+s}.$$

3. Beispiel. $\frac{a+b}{n}=p+q \;.....\; \mathrm{I})$

$\frac{r-s}{m}=\frac{x}{y} \;.......\; \mathrm{II})$

$$\left.\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}\right): \frac{a+b}{n}\cdot\frac{m}{r-s}=(p+q)\frac{y}{x}.^{*})$$

34. Jede aus einer Gleichung durch Rechnung zu entwickelnde Gröſse heiſst die unbekannte Gröſse, oder kurz die „Unbekannte". Man bezeichnet dieselbe gewöhnlich durch die Buchstaben x, oder y, oder z.

Soll aus einer algebraischen Gleichung eine Zahl x, welche in derselben ein oder mehreremale vorkommt, entwickelt, d. h. soll die Gleichung nach x aufgelöst werden, so muſs man eine andere algebraische Gleichung bilden, welche die Zahl x nur als Faktor zu einer Seite hat.

Die ursprüngliche Gleichung muſs also auf die allgemeine Form

$$a\,x=b$$

gebracht werden, in welchem Falle unter a und b ganz beliebige Zahlenausdrücke zu verstehen sind.

Um dieses zu erreichen, muſs man die Gleichung ordnen.

---

*) Vergl. Seite 34, unter 28; Division von Brüchen.

35. Das **Ordnen** der Gleichungen geschieht am kürzesten unter Vornahme der hierzu notwendigen Operationen in nachstehender Reihenfolge:

a) Man suche die Gleichung dadurch zu vereinfachen, dafs man Glieder der einen Seite gegen **gleiche** Glieder der anderen Seite hebt; oder dadurch, dafs man **sämtliche Glieder** der Gleichung durch **ein und dieselbe Zahl** (einen gemeinschaftlichen Faktor) dividiert.

b) Man schaffe, wenn Brüche in der Gleichung auftreten, sämtliche Nenner fort, indem man jedes Glied der Gleichung mit dem Generalnenner aller vorkommenden Nenner multipliziert.

c) Man löse sämtliche Klammern auf, in welchen die Unbekannte enthalten ist. (Hierbei ist besonders auf die Vorzeichen zu achten. Vergl. Seite 6, unter 8; a und b.)

d) Man schaffe sämtliche Wurzeln fort, welche die Unbekannte als Radikanden enthalten, indem man das Glied mit der Wurzel zu einer Seite der Gleichung macht und dann beide Seiten derselben mit dem Wurzelexponenten potenziert.

e) Man schaffe sämtliche Glieder, welche mit der Unbekannten behaftet sind, auf die eine Seite, alle übrigen Glieder auf die andere Seite der Gleichung, wobei wiederum besonders auf die Vorzeichen zu achten ist. Alsdann fasse man alle Glieder mit der Unbekannten zusammen, indem man die Unbekannte als gemeinschaftlichen Faktor herausschreibt. Den Wert der Unbekannten erhält man, wenn man nun beide Seiten der Gleichung durch den Faktor der Unbekannten dividiert.

36. Folgende Beispiele werden die Anwendung der einzelnen Regeln leicht verständlich machen:

1. **Beispiel.** $6x - 6 = 18$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:

$$6x = 18 + 6 \text{ oder:}$$

$$6x = 24. \text{ Beide Seiten durch 6 dividiert:}$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{24}{6} \text{ oder:}$$

$$x = 4.$$

2. **Beispiel.** $ax + b = c$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:

$$ax = c - b. \text{ Beide Seiten durch a dividiert:}$$

$$x = \frac{c - b}{a}.$$

3. **Beispiel.**

$3a + x - 5b + 2 = 7b - a + c + 6$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:

$$x = 7b - a + c + 6 - 3a + 5b - 2.$$

$$= 12b - 4a + c + 4.$$

$$= -4a + 12b + c + 4.$$

4. Beispiel. $8x - 5 = 13 - 7x$. Glieder mit x auf eine Seite:

$$8x + 7x = 13 + 5.$$ Jetzt x herausgeschrieben, folgt:

$$x(8+7) = 18.$$
$$15x = 18.$$
$$x = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5}.$$

5. Beispiel. $\frac{x}{6} + 4 = 7$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:

$$\frac{x}{6} = 7 - 4$$ oder:

$$\frac{x}{6} = 3.$$ Beide Seiten mit 6 multipliziert:

$$6 \cdot \frac{x}{6} = 6 \cdot 3$$ oder:

$$\frac{6x}{6} = 18;$$ mithin:

$$x = 18.$$

6. Beispiel. $\frac{x}{a} - (a + b) = c$.

$$\frac{x}{a} = c + (a + b).$$
$$x = (a + b + c)\,a.$$

7. Beispiel. $12 + \frac{4x}{10} = 28$.

$$\frac{4x}{10} = 28 - 12 = 16.$$ Nenner fortgeschafft:

$$4x = 16 \cdot 10 = 160.$$ Beide Seiten durch 4 dividiert:

$$x = \frac{160}{4} = 40.$$

8. Beispiel. $9(2x - 7) = 5(4x - 15)$. Klammern aufgelöst:

$$18x - 63 = 20x - 75.$$
$$18x - 20x = -75 + 63.$$
$$-2x = -12.$$ Vorzeichen umgekehrt:

$$2x = 12.$$
$$x = 6.$$

9. Beispiel. $\frac{4x - 7}{1 + x} = 3$. Nenner fortgeschafft, folgt:

$$4x - 7 = 3(1 + x) = 3 + 3x.$$
$$4x - 3x = 3 + 7.$$
$$x = 10.$$

10. Beispiel. $\frac{3x}{4} - \frac{2x}{5} = 14.$ Generalnenner = 20; jedes Glied der Gleichung damit multipliziert, folgt:

$$\frac{3x}{4} \cdot 20 - \frac{2x}{5} \cdot 20 = 14 \cdot 20.$$
$$15x - 8x = 280.$$
$$7x = 280.$$
$$x = 40.$$

11. Beispiel.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7x - 712 + \frac{x}{5}.$$

Jedes Glied der Gleichung mit dem Generalnenner 60 multipliziert, folgt:

$$30x + 20x + 15x = 420x - 42720 + 12x.$$
$$30x + 20x + 15x - 420x - 12x = -42720.$$
$$-367x = -42720.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung die Vorzeichen entgegengesetzt genommen:

$$367x = 42720.$$
$$x = \frac{42720}{367} = 116\tfrac{148}{367} = 116{,}4032\ldots.$$

12. Beispiel. $\frac{2-5x}{5x+1} + \frac{7+x}{3-2x} = \frac{148-5x^2}{3+13x-10x^2} - 2.$

Der Generalnenner ist: $(5x+1)(3-2x) = 3 + 13x - 10x^2$.

Multipliziert man alle Glieder der Gleichung mit diesem, so folgt:

$$(2-5x)(3-2x) + (7+x)(5x+1) = 148 - 5x^2 - 2(3 + 13x - 10x^2).$$
$$6 - 15x - 4x + 10x^2 + 35x + 5x^2 + 7 + x = 148 - 5x^2 - 6 - 26x + 20x^2.$$

Glieder mit x auf eine Seite gebracht:

$$10x^2 + 5x^2 + 5x^2 - 20x^2 - 15x - 4x + 35x + x + 26x = 148 - 6 - 6 - 7.$$

Da sich die Glieder mit x^2 heben, so folgt:

$$43x = 129.$$
$$x = \frac{129}{43} = 3.$$

13. Beispiel. $9 - \frac{128}{x} = 5.$ Nenner fortgeschafft:

$$9x - 128 = 5x.$$
$$9x - 5x = 128.$$
$$4x = 128.$$
$$x = 32.$$

14. Beispiel. $\frac{6}{x} + 7 = 64 - \frac{32}{x}.$ Generalnenner = x, also:

$$6 + 7x = 64x - 32.$$
$$7x - 64x = -32 - 6.$$
$$57x = 38.$$
$$x = \frac{38}{57} = \frac{2}{3}.$$

15a. Beispiel. $\sqrt[m]{x} = a$. Beide Seiten mit m potenziert:

$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^m = a^m \text{ folglich:}$$

$$x = a^m. \quad \text{(Vergl. Kap. V, unter 29.)}$$

15b. Beispiel. $\sqrt{16} = 4$. Beide Seiten mit 2 potenziert:

$$\left(\sqrt{16}\right)^2 = 4^2 \text{ d. h.}$$

$$16 = 4^2 = 4 \,.\, 4 = 16.$$

15c. Beispiel. $\sqrt[3]{125} = 5$.

$$\left(\sqrt[3]{125}\right)^3 = 5^3.$$

$$125 = 5^3 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 25 \,.\, 5 = 125.$$

Vergl. Kap. V u. Kap. IV unter 29 und 20.

16. Beispiel. $\sqrt[m]{ax + b} = \sqrt[m]{cx + d}$. Beide Seiten mit m potenziert:

$$ax + b = cx + d.$$

$$ax - cx = d - b.$$

$$x(a - c) = d - b.$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

17. Beispiel. $\dfrac{2 - 2\sqrt{x}}{2 - 3\sqrt{x}} = \dfrac{2 + 2\sqrt{x}}{5 + 3\sqrt{x}}$. Beide Seiten durch 2 dividiert.

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{2 - 3\sqrt{x}} = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 + 3\sqrt{x}}.$$

Generalnenner $= (2 - 3\sqrt{x})(5 + 3\sqrt{x})$ folglich:

$$(1 - \sqrt{x})\,(5 + 3\sqrt{x}) = (1 + \sqrt{x})\,(2 - 3\sqrt{x}).$$

$$5 - 5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\,.\sqrt{x} = 2 + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}.$$

Da sich auf beiden Seiten $-3\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}$ hebt, so folgt:

$$5 - 2\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x}. \text{ Glieder mit x auf eine Seite:}$$

$$-2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2 - 5.$$

$$-\sqrt{x} = -3. \text{ Vorzeichen umgekehrt, folgt:}$$

$$+\sqrt{x} = +3. \text{ Beide Seiten mit 2 potenziert:}$$

$$(\sqrt{x})^2 = 3^2.$$

$$x = 3^2 = 3 \,.\, 3 = 9.$$

Da häufig genug die Gleichungen nicht immer in so einfacher Form, wie in den vorstehenden Beispielen, erscheinen, sondern dieselben erst nach gewissen gegebenen Bedingungen aufgestellt werden müssen, so mögen hier der Vollständigkeit wegen einige sog. „eingekleidete Gleichungen“ folgen.

18. Beispiel. Das 2fache, 3fache und 7fache einer Zahl addiert ist $= 96$; wie heißt diese Zahl?

Lösung: Bezeichnet man die zu ermittelnde Zahl vorläufig mit x, so ist das 2fache derselben $= 2x$, das 3fache $= 3x$ und das 7fache $= 7x$. Addiert man diese 3 Werte und setzt man ihre Summe entsprechend der Bedingung der Aufgabe $= 96$, so folgt:

$$2x + 3x + 7x = 96 \text{ und damit}$$

$$x = 8.$$

19. Beispiel. Subtrahiert man von dem 8. Teil einer gewissen Zahl den Bruch $^4/_5$, so entsteht die Zahl 18. Wie heifst die Zahl?

Lösung: Bezeichnet man die zu bestimmende Zahl mit x, so ist der 8. Teil derselben $= \frac{x}{8}$; davon $\frac{4}{5}$ abgezogen und die Differenz gleich 18 gesetzt, giebt:

$$\frac{x}{8} - \frac{4}{5} = 18 \text{ und damit}$$
$$x = 150{,}4.$$

20. Beispiel. Drei Personen, A, B und C, sollen 72 Mark so unter sich verteilen, dafs B zweimal so viel wie A, und C dreimal so viel wie B erhält. Wie viel bekommt jeder?

Lösung: Setzt man die Summe, welche A erhält $= x$, so erhält B das doppelte, also $= 2x$ und C das dreifache von B, also $= 3 \,.\, 2x = 6x$; mithin mufs sein:

$$x + 2x + 6x = 72 \text{ und damit}$$
$$x = 8. \text{ Hieraus ergiebt sich:}$$

A	erhält =	8 Mark.
B	„ =	16 „
C	„ =	48 „
	Summa =	72 Mark.

21. Beispiel. Ein Arbeiter kann eine bestimmte Arbeit in 12 Tagen fertig stellen; ein anderer kann es schon in 6 Tagen. Wie viel Tage brauchen beide, wenn sie zusammen arbeiten?

Lösung: Setzt man die zu leistende Arbeit = 1, so schafft der Arbeiter, welcher in 12 Tagen fertig wird, in einem Tage $^1/_{12}$ dieser Arbeit und ebenso der andere in einem Tage $^1/_6$, also beide zusammen $^1/_{12} + {}^1/_6 = {}^3/_{12} = {}^1/_4$ dieser Arbeit. Setzt man nun die Zeit, welche beide zusammen zur Vollendung der Arbeit brauchen $= x$, so folgt:

$$^1/_4 x = 1 \text{ und damit}$$
$$x = 4 \text{ Tage.}$$

22. Beispiel. Eine Wasserhebemaschine kann ein Stück Land in 20 Tagen entwässern, eine zweite kann dasselbe in 30 Tagen und eine dritte braucht nur 10 Tage. Wieviel Zeit ist erforderlich, wenn alle 3 Maschinen zusammen arbeiten?

Lösung: Man setze die zu hebende Wassermenge = 1. Da nun die erste Maschine diese in 20 Tagen heben würde, so hebt sie in einem Tage $^1/_{20}$ derselben. Die zweite Maschine hebt pro Tag $^1/_{30}$ und die dritte $^1/_{10}$; alle drei zusammen heben also an einem Tage

$$^1/_{20} + {}^1/_{30} + {}^1/_{10} = {}^3/_{60} + {}^2/_{60} + {}^6/_{60} = {}^{11}/_{60}, \text{ folglich}$$

in x Tagen $= {}^{11}/_{60} \,.\, x$. Mithin mufs:

$$^{11}/_{60} \,.\, x = 1 \text{ sein, d. h.}$$
$$x = 5^5/_{11} \text{ Tage.}$$

23. Beispiel. Ein Meister nimmt einen Gesellen an und verspricht ihm für jeden Tag, den er bei ihm arbeitet, 1 Mark. Arbeitet er nicht, so mufs er dem Meister 60 Pfg. $= {}^{60}/_{100}$ Mark für Kost zahlen. Nach 80 Tagen halten sie Abrechnung und es findet sich, dafs keiner dem anderen etwas schuldig ist. Wieviel Tage hat der Geselle gearbeitet?

Lösung: Setzt man die Tage, an welchen der Geselle gearbeitet hat $= x$, so sind $80 - x$ die Tage, an welchen er nicht gearbeitet hat; sein Lohn beträgt alsdann x Mark und das Kostgeld entsprechend $(80 - x) \,.\, {}^{60}/_{100}$ Mark. Da nun der Lohn durch das Kostgeld aufgezehrt sein soll, so mufs sein:

$$x - (80 - x) \cdot \frac{60}{100} = 0 = \text{Null; d. h.}$$

$$x = \frac{(80 - x) \cdot 60}{100}. \text{ Folglich:}$$

$$x = 30 \text{ Tage.}$$

Übungsbeispiele:

$3x + 4 = 13$; $793 - 19x = 14$; $9x + 13 = 7x + 91$.
$15 - 27x = 36 - 34x$; $ax + b = c$; $m - nx = px - q$.
$3(x + 1) = 5(x - 1)$; $ax + b(x - c) = ac$.
$4[8x - 5(7 - 4x) + 9(6 - 3x) + 12x]$
$= 7[16x - 2(7x - 10) + 4x - 2]$.

$\frac{75}{x} = 3$; $a + \frac{b}{x} = c$; $x + \frac{2}{3}x = 25$; $\frac{1}{4}x + 3 = \frac{2}{9}x + 4$.

$\frac{x - 7}{9} + \frac{x - 4}{5} = 9$; $\frac{x + 3}{2} - \frac{x + 7}{3} + 4 = \frac{x + 11}{4}$.

$\frac{5x + 2}{6} + \frac{7x + 1}{5} = \frac{2x - 1}{3} + \frac{5x - 2}{2}$; $\frac{x + \frac{1}{2}}{2} + \frac{x + \frac{3}{4}}{5} = \frac{4x + 1}{4}$.

$(7x + 1)(9x - 5) + (9x - 29)(25 - 3x) = (6x + 10)^2$.

$\frac{x + 12}{x + 4} = \frac{x + 3}{x - 1}$; $\frac{3x + 2}{4a - 5b} = \frac{2x - 5}{8a - 3b}$; $\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0$.

$\frac{14(x + 2)}{x} - 2x + 1 = 7 + 4(3 - \frac{1}{2}x)$.

Weitere Beispiele bietet in reichlicher Fülle der II. Teil des Buches: „Mechanik“.

Siebentes Kapitel.

Verhältnisse und Proportionen.

37. Vergleicht man zwei Zahlen a und b in Bezug auf ihre Gröfse mit einander, so findet man das Verhältnis, in welchem sie zu einander stehen. Die Vergleichung kann auf zweierlei Art geschehen, je nachdem man die Differenz $a - b$ feststellt — um wieviel Einheiten die eine Zahl gröfser ist als die andere — oder dadurch, dafs man den Quotienten $a : b$ oder $\left(\frac{a}{b}\right)$ feststellt — wievielmal die eine Zahl gröfser ist als die andere, d. h. wie oft die eine in der anderen enthalten ist. Die letztgenannte Art der Vergleichung ist die in der Praxis gebräuchliche und soll deshalb nur diese hier weiter besprochen werden.

38. Die Zahlenausdrücke $a - b$ und $a : b$ heifsen allgemein Verhältnisse; in beiden nennt man a das Vorderglied und b das Hinterglied.

Stehen zwei Zahlen a und b in demselben Verhältnis zu einander, wie zwei andere Zahlen c und d, d. h. geben a durch b, und c durch d dividiert ein und denselben Quotienten, so kann man aus diesen beiden gleichen Verhältnissen folgende Gleichung bilden:

$a : b = c : d$ und liest alsdann:

a verhält sich zu b, wie c zu d.

Es möge an dieser Stelle gleich vorausgeschickt sein, dafs die Verhältnisse einer Proportion demnach als gleiche Brüche angesehen werden können; infolgedessen werden diese Verhältnisse auch gewöhnlich in Bruchform geschrieben. Z. B:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wobei man ebenfalls liest:

a verhält sich zu b, wie c zu d.

Aus dem Gesagten folgt, dafs für die Verhältnisse dieselben Regeln gelten, welche in Kap. V, unter 28) im besonderen für Brüche angeführt sind.

39. Eine Gleichung, deren Seiten aus 2 gleichwertigen Verhältnissen bestehen, nennt man eine Proportion. In der Proportion

$$a : b = c : d$$

werden a und d die äufseren, b und c die inneren Glieder genannt. Sind die inneren Glieder einer Proportion gleich, d. h. ist $a : b = b : c$, so heifst die Proportion eine stetige und b die mittlere Proportionale zwischen a und c.

40. **In jeder Proportion ist das Produkt der inneren Glieder gleich dem Produkt der äufseren Glieder**; d. h.

Ist $4 : 6 = 10 : 15$, so ist auch $6 . 10 = 4 . 15$.
„ $a : b = c : d$ „ „ „ $b . c = a . d$.

Dieser wichtige Satz ist besonders einzuprägen, da man mit Hilfe desselben jede Proportion sofort auf ihre Richtigkeit prüfen, und ein etwa unbekanntes Glied derselben berechnen kann.

1. Beispiel. Bezeichnet man das unbekannte Glied mit x, so findet man aus der Proportion

$x : 5 = 12 : 3$ unter Anwendung obigen Satzes:
$3 . x = 5 . 12$ und damit:
$$x = \frac{5 . 12}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

Setzt man, um die Probe zu machen, den Wert von $x = 20$ in die gegebene Proportion ein, so folgt:

$$20 : 5 = 12 : 3, \text{ oder:}$$
$$20 \cdot 3 = 12 \cdot 5, \text{ d. i.}$$
$$60 = 60.$$

2. Beispiel. $12 : x = 7\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2}.$

$$\tfrac{15}{2} \cdot x = \tfrac{5}{2} \cdot 12.$$

$$x = \frac{\tfrac{5}{2} \cdot 12}{\tfrac{15}{2}}.$$

$$x = \frac{30}{\tfrac{15}{2}} = \frac{30 \cdot 2}{15} = \frac{60}{15} = 4.$$

Aus Vorstehendem folgt unmittelbar:

1) daſs man jedes äuſsere Glied einer Proportion findet, indem man die inneren Glieder mit einander multipliziert und durch das andere äuſsere Glied dividiert; d. h.

ist $a : b = c : d$, so ist $a = \frac{b \cdot c}{d}$ und $d = \frac{b \cdot c}{a}$; (Vergl. Kap. VI, unter 32 f.)

2) daſs man jedes innere Glied einer Proportion findet, indem man die äuſseren Glieder mit einander multipliziert und durch das andere innere Glied dividiert; d. h.

ist $a : b = c : d$, so ist $b = \frac{a \cdot d}{c}$ und $c = \frac{a \cdot d}{b}$; (Vergl. Kap. VI, unter 32 f.)

3) daſs man die mittlere Proportionale zwischen zwei Zahlen findet, indem man aus dem Produkt dieser Zahlen die Quadratwurzel zieht; d. h.

ist $a : x = x : b$, so ist $x \cdot x = a \cdot b$, oder:

$x^2 = ab.$ Auf beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{ab}$, folglich:

$x = \sqrt{ab}.$ (Vergl. Kap. V, unter 29).

Beispiel zu 1.) $3 : 6 = 2{,}5 : x.$

$$x = \frac{6 \cdot 2{,}5}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Beispiel zu 2.) $12 : 4 = x : 5.$

$$x = \frac{12 \cdot 5}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

Beispiel zu 3.) $6 : a = a : 1{,}5.$

$$a^2 = 6 \cdot 1{,}5 = 9.$$
$$a = \sqrt{9} = 3.$$

41. In jeder Proportion kann man sämtliche Glieder mit ein und derselben Zahl multiplizieren und potenzieren, oder durch ein und dieselbe Zahl dividieren und radizieren.

Ist $10:5 = 6:3$, so ist auch:

$$3 \,.\, 10 : 3 \,.\, 5 = 3 \,.\, 6 : 3 \,.\, 3.$$
$$10^2 : 5^2 = 6^2 : 3^2.$$
$$\tfrac{10}{10} : \tfrac{5}{10} = \tfrac{6}{10} : \tfrac{3}{10}.$$
$$\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{3}.$$

Ist $a : b = c : d$, so ist auch:

$$n \,.\, a : n \,.\, b = n \,.\, c : n \,.\, d.$$
$$a^n : b^n = c^n : d^n.$$
$$\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}.$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

In jeder Proportion kann man die Glieder der Verhältnisse umkehren.

Ist $\underbrace{8 : 2 = 68 : 17}$, so ist auch $\underbrace{2 : 8 = 17 : 68}$, denn es ist $2 \,.\, 68 = 8 \,.\, 17$ und ebenso $8 \,.\, 17 = 2 \,.\, 68$.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $b : a = d : c$.

In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten Gliede.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch:

$$(a + b) : a = (c + d) : c.$$
$$(a + b) : b = (c + d) : d.$$
$$(a - b) : a = (c - d) : c.$$
$$(a - b) : b = (c - d) : d.$$

Beispiel. $6 : 2 = 15 : 5.$

$$(6 + 2) : 6 = (15 + 5) : 15, \text{ d. i.}$$
$$8 : 6 = 20 : 15.$$
$$6 \,.\, 20 = 8 \,.\, 15.$$
$$120 = 120.$$

Übungsbeispiele:

Aus folgenden Proportionen ist die Unbekannte zu berechnen:

$4 : 3 = 24 : x$; $12 : x = 32 : 48$; $x : 2\tfrac{4}{5} = 3\tfrac{1}{3} : 5\tfrac{1}{4}$.

$2a^3 : 5a^2b = 8ab^2 : x$; $(a + b) : (a - b) = x : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$.

$(6a^2 + ab - 12b^2) : (14a^2 + 31ab + 15b^2) = (3a^2 - 7ab + 4b^2) : x$.

Achtes Kapitel.

Potenzen.*)

42. Potenzen werden gleichartig genannt, wenn ihre Grundzahlen und deren Exponenten genau dieselben sind.

Potenzen können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleichartig sind; man addiert oder subtrahiert alsdann wie mit gewöhnlichen Buchstabengröfsen. (Vergl. Kap. II, unter 10.) Z. B:

$$4a^2 + 12a^2 = 16a^2; \; 20x^2z^5 - 15x^2z^5 + 30x^2z^5 = 35x^2z^5.$$

$$\frac{5a^3}{b^4} - \frac{7a^3}{b^4} + \frac{11a^3}{b^4} + a^4 = \frac{9a^3}{b^4} + a^4.$$

Übungsbeispiele:

$- 6a^2 + 10a^2 - 12a^3 + 4b^4 + 14a^3 + 18b^4.$
$8a^3b - 12a^2b^2 + 4a^3b - 14a^2b^2 - 8ab^3.$
$- 3a^2b - (7ab^2 + 3a^3b) - (2ab^2 - 8a^2b) - 3a^3b.$
$9a^mx^2 - 13 + 20ab^3x - 4b^mcx^2 - (3b^mcx^2 + 9a^mx^2 - 6 + 3ab^3x).$
$3a^{-7} + 10a^{-7} - 5a^{-7} + a^2b.$

43. Jede Potenz der Zahl Eins ist = Eins. Z. B:

$$1^m = 1.$$

Beispiele: $1^4 = 1 . 1 . 1 . 1 = 1.$
$1^6 = 1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 = 1.$

Jede Potenz, deren Exponent Eins ist, ist gleich der Grundzahl der Potenz. Z. B:

$3^1 = 3$ (denn 3 soll einmal als Faktor gesetzt werden).
$x^1 = x$ (denn x soll einmal als Faktor gesetzt werden).

Es ist daher bei dem Rechnen mit Potenzen jede Zahl, welcher kein besonderer Exponent beigeschrieben ist, als mit dem Exponenten **1** behaftet zu betrachten.

44. Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden multipliziert, indem man die einzelnen Exponenten addiert und die so erhaltene Summe der gemeinsamen Grundzahl zum Exponenten giebt. Z. B:

$$2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32$$
$$x^m . x^n = x^{m+n}.$$

*) Vergl. Kap. IV, unter 20, 21 und 22.)

Beispiele: $a^2 . a^4 = a . a . a . a . a . a = a^6 = a^{2+4}$.

$$6a^2 . 2a^6 . a = 6 . 2 . a^{2+6+1} = 12a^9.$$

$$7x^3 . 5x^8 = 7 . 5 . x^{3+8} = 35x^{11}.$$

$$4b^{-6} . 2b^{10} = 4 . 2 . b^{-6+10} = 8b^4.$$

$$2a^5b^3 . 3a^2b^{-2} = 2 . 3 . a^{5+2}b^{3-2} = 6a^7b.$$

Übungsbeispiele:

$x^7 . y^9 . x^5 . y^3 . y$; $a^x . a^y . a^z$; $a^{x+1} . a^{x+2} . a^{x+3}$; $5a^{2x+3} . 7a^{3-4x} . 9a^{7x-9}$.
$-5a^4b^{-3}c^{-2} . 4a^3b^{-5}d^6c^{-2}$; $(a^2 - 2ab + b^2) . 6a^2b^3$.
$(a^2 - az + z^2)(a^2 + az + z^2)$; $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$.
$\frac{a^{3x-4y}}{b^{5x+3y}} . \frac{a^{8y-7x}}{b^{4y-2x}}$; $\frac{1}{3a^{-3}b^{-m}c} . \frac{1}{4a^{-p}b}$.

Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden dividiert, indem man die Exponenten des Divisors von den Exponenten des Dividenden subtrahiert und die so erhaltene Differenz der gemeinsamen Grundzahl zum Exponenten giebt. Z. B:

$$2^3 : 2^2 = \frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2.$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Beispiele: $x^3 : x^9 = x^{3-9} = x^{-6}$.

$$b^6 : b^4 = b^{6-4} = b^2.$$

$$6a^{-8} : 2a^{-7} = \frac{6}{2} a^{-8-(-7)} = 3a^{-8+7} = 3a^{-1}.$$

$$(a + b)^5 : (a + b)^{-2} = (a + b)^{5+2} = (a + b)^7.$$

Bei der Division von Potenzen mit gleichen Grundzahlen sind nun zwei Fälle möglich:

a) Sind die Exponenten im Dividenden und im Divisor gleich, so erhält man nach vorstehender Regel eine Potenz, deren Exponent Null ist; denn:

$x^5 : x^5 = x^{5-5} = x^0$. Es ist aber auch:

$x^5 : x^5 = \frac{x^5}{x^5} = 1$. (Vergl. Kap. V, unter 26.)

Folglich mufs $x^0 = 1$ sein, d. h. allgemein:

Jede Potenz, welche **Null** zum Exponenten hat, ist gleich der Zahl **Eins**. Es ist demnach auch:

$$7^0 = 1; \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1;$$

$$100^0 = 1; \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1;$$

$$(a + b)^0 = 1; \left(\frac{x}{a - n}\right)^0 = 1 \text{ u. s. w.}$$

b) Ist der Exponent der Potenz des Divisors gröfser als der Exponent der Potenz des Dividenden, so mufs sich nach den Gesetzen der Subtraktion (vergl. Kap. III, unter 13) notgedrungen eine negative Zahl ergeben; es entsteht also eine Potenz mit *negativem* Exponenten. Denn es ist:

$b^2 : b^4 = b^{2-4} = b^{-2}$. Schreibt man jedoch

$$b^2 : b^4 = \frac{b^2}{b^4} = \frac{b\,.\,b}{b\,.\,b\,.\,b\,.\,b} = \frac{1}{b^2}$$

(da sich 2 Faktoren **b** im Dividenden gegen 2 Faktoren **b** im Divisor heben) so folgt auch hier:

$$b^{-2} = \frac{1}{b^2} \text{ d. h. allgemein:}$$

Jede Potenz mit *negativem* Exponenten ist gleich einem Bruch, dessen Zähler **Eins,** und dessen Nenner die Grundzahl der Potenz mit *positivem* Exponenten ist.

Beispiele: $3^3 : 3^6 = 3^{3-6} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3\,.\,3\,.\,3} = \frac{1}{27}.$

$$\frac{x}{y^{-n}} = x : y^{-n} = x : \frac{1}{y^n} = x\,.\,\frac{y^n}{1} = x\,y^n.$$

$$\frac{6}{5^{-2}} = 6\,.\,5^2 = 6\,.\,25 = 150.$$

$$\frac{a^p}{a^{p+q}} = a^{p-p-q} = a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

$$3\,a^{-2}b^6f^{-3} = 3\,.\,\frac{1}{a^2}b^6\,.\,\frac{1}{f^3} = \frac{3\,b^6}{a^2\,f^3}.$$

Übungsbeispiele:

$x^{72}y^{98} : x^{34}y^{62}$; $a^{3m+4} : a^{2m+3}$; $24x^3y^5z^7 : 8x^2y^3z^4$.

$105\,x^{5m+3n}\,y^{2m-7n} : 7x^{15n-7m}y^{12m-17n}$; $16\,(x+y)^{-3} : 2\,(x+y)^{-9}$.

$(a+x)^2\,(a+y)^{-3} : (a+x)^{-4}\,(a+y)^{-7}$; $\left(\frac{5\,c^2a^{-m}b^n}{8}\right) : 3\,c\,d^5\,a^p\,b^{-q}$.

$\frac{3\,a^3d}{2\,b^5} : \frac{b^3}{4\,a^2c^7}$; $\frac{a^{x-y}}{b^{r-s}} : \frac{b^{2r-3s}}{a^{4y-3x}}$; $(6\,a^3b^2 - 10\,a^2f + 7\,a^4\,b\,x) : 2\,a$.

Es sind folgende Ausdrücke auf positive Exponenten zu bringen:

$$\frac{5\,a^{-3}b^2c^{-5}}{7\,d^{-2}f^{-3}g};\ \frac{7\,n\,x^{-2}y\,z^{-3}}{8\,n\,x\,y^{-2}z^{-5}};\ \frac{9^2x^{-2}y^{-5}z^{-8}}{9^3x^{-3}y^{-2}z^5}.$$

45. Jede Potenz wird wieder *potenziert*, indem man die einzelnen Exponenten mit einander *multipliziert* und das so erhaltene Produkt der Grundzahl zum Exponenten giebt. Z. B:

$$(2^3)^2 = 2^{3\,.\,2} = 2^6 = 64;\ \text{oder: } (x^n)^m = x^{n\,.\,m}.$$

Beispiele: $(a^4)^2 = a^4 . a^4 = a^{4+4} = a^8 = a^{4.2}$.

$[(b^m)^n]^p = b^{m.n.p} = b^{nmp}$.

$(x^m)^{-n} = x^{-n.m} = \frac{1}{x^{mn}}$.

Übungsbeispiele:

$(a^3)^5$; $\left(((a^2)^3)^4\right)^5$; $(a^{-2})^3$; $\left((x^{-2})^{-3}\right)^{-5}$; $(n^{2a+3b})^{2a-3b}$.

$\left(\frac{x^3y^3z^4}{a^3b^{13}c^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^{-3}b^3z^5}{a^{-1}y^3c^3}\right)^4$; $\left(m^{10a-18b}\right)^{3a+12b} : \left(m^{15a+9b}\right)^{2a-4b}$.

Ein Produkt wird potenziert, indem man die Faktoren des Produktes einzeln mit dem Exponenten potenziert und die erhaltenen Potenzen multipliziert. Z. B:

$$(5x)^3 = 5^3 . x^3 = 125x^3; \text{ oder: } (xy)^m = x^m . y^m.$$

Beispiele: $(2abd)^3 = 2^3a^3b^3d^3 = 8a^3b^3d^3$.

$(5x . 2y . 6z)^2 = 5^2 . 2^2 . 6^2 . x^2y^2z^2 = 3600x^2y^2z^2$.

$(a^2x^3y)^7 = a^{2 \cdot 7} . x^{3 \cdot 7} . y^{1 \cdot 7} = a^{14}x^{21}y^7$.

Übungsbeispiele:

$(2a^2b^3c^4)^4$; $((3a^2bc^3)^2)^3$; $(5x^2yz^3)^{-3}$; $[3(a+b)m]^3$; $[7x(x-y)z]^2$.

$(2xy)^5 . (3xy)^2 . 6xy . (6xy)^3$; $\frac{(5ab)^2 . (3ab)^3}{(10ab)^4 . (ab)^3}$.

Ein Quotient (Bruch) wird potenziert, indem man den Dividenden (Zähler) und den Divisor (Nenner) einzeln mit dem Exponenten potenziert. Z. B:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}; \text{ oder: } \left(\frac{a}{x}\right)^n = \frac{a^n}{x^n}.$$

Beispiele: $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$.

$\left(\frac{a^2b^3x}{cd^4}\right)^5 = \frac{a^{10}b^{15}x^5}{c^5d^{20}}$; $\left(\frac{3ab}{2cd}\right)^3 = \frac{3^3a^3b^3}{2^3c^3d^3} = \frac{27a^3b^3}{8c^3d^3}$.

Übungsbeispiele:

$\left(\frac{2}{3}\right)^4$; $\left(\frac{3abc}{5xyz}\right)^2$; $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$; $\left(\frac{2a}{3b}\right)^4 \cdot \left(\frac{9b}{8a}\right)^2$.

$\left(\frac{3x}{4y}\right)^4 \cdot \left(\frac{4y}{5z}\right)^3 \cdot \left(\frac{5z}{9x}\right)^2$; $\left(\left(\frac{3a^2b^3}{2fg}\right)^3\right)^4$; $\left(\left(\frac{a^{-2}b^3c^{-4}}{d^{-2}}\right)^2\right)^3$.

46. Je nachdem der Exponent einer Potenz eine gerade oder ungerade Zahl ist, wird die Potenz eine g e r a d e o d e r u n g e r a d e P o t e n z genannt. Folgende Sätze sind besonders zu merken:

J e d e Potenz einer p o s i t i v e n Zahl ist stets wieder eine p o s i t i v e Zahl. Z. B:

$$(+x)^m = +x^m.$$

Beispiele: $(+4)^3 = (+4) \cdot (+4) \cdot (+4) = +64.$
$(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2)(+2) = +16.$

Jede gerade Potenz einer negativen Zahl ist stets eine positive Zahl. (Vergl. Kap. IV, unter 16.)

Beispiele:

$(-a)^4 = (-a)(-a)(-a)(-a) = (+a^2)(+a^2) = +a^{2+2} = +a^4.$
$(-3)^2 = (-3)(-3) = +9.$
$(-2)^6 = +2^6 = +64.$

Jede ungerade Potenz einer negativen Zahl ist stets eine negative Zahl. (Vergl. Kap. IV, unter 16.)

Beispiele:

$(-a)^5 = (-a)(-a)(-a)(-a)(-a) = (+a^2)(+a^2)(-a) = (+a^4)(-a) = -a^5.$
$(-4)^5 = (-4)(-4)(-4)(-4)(-4) = (-4^4)(-4) = +256 \cdot (-4) = -1024.$

Die Richtigkeit der in Vorstehendem gegebenen Regeln läſst sich leicht und ohne weiteres unter Berücksichtigung des in Kapitel IV, unter 20 und 21) Gesagten, und unter Anwendung der einfachen Multiplikationsgesetze nachweisen, wie dies zum Teil schon in den gegebenen Beispielen angedeutet ist.

Neuntes Kapitel.

Wurzeln.

A. Allgemeines.

47. In Kapitel V, unter 29) ist bereits auf den algebraischen Begriff „Wurzel" und den innigen Zusammenhang der Operationen des Radizierens und Potenzierens hingewiesen worden. Es ist daher leicht ersichtlich, daſs die bei dem Rechnen mit Wurzeln geltenden Regeln auf die entsprechenden, bei den Potenzen gebräuchlichen, zurückgeführt werden können und dürfte es deshalb für den Lernenden sehr vorteilhaft sein, jedes Gesetz der Wurzellehre mit dem entsprechenden der Potenzlehre zu vergleichen. Es wird dies mit um so gröſserem Verständnis geschehen, wenn man sich der in der Praxis vielfach angewandten, zweiten Schreibweise für einen Wurzelausdruck bedient.

Es ist üblich, an Stelle der Wurzel die „Bruchpotenz" treten zu lassen, und setzt man allgemein:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

d. h: Jede Wurzel aus einer Zahl ist gleich einer Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, dessen Zähler von dem Potenzexponenten und dessen Nenner von dem Wurzelexponenten gebildet wird. So schreibt man z. B:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[4]{y} = y^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. w.}$$

Befindet sich unter dem Wurzelzeichen eine Potenz, so findet das Gesetz seinen Ausdruck in der Gleichung:

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}.$$

Die Richtigkeit wird ohne weiteres durch folgendes Beispiel nachgewiesen. Es ist

$$\sqrt{a^2} = a,$$

denn a mit 2 potenziert, giebt wieder a^2. (Vergl. Kap. V, unter 29.) Wendet man die Schreibweise der Bruchpotenz an, so folgt:

$$\sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a.$$

Beispiele: $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2;\ \sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$

$\sqrt[3]{4^9} = 4^{\frac{9}{3}} = 4^3 = 64;\ \sqrt[3]{9^{\frac{3}{2}}} = 9^{\frac{\frac{3}{2}}{3}} = 9^{\frac{3}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3.$

$\sqrt[4]{a^{-8}} = a^{\frac{-8}{4}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$ (Vergl. Kap. VIII, unter 44b.)

48. Für das Rechnen mit Bruchpotenzen sind genau dieselben Regeln zu befolgen, welche im vorigen Kapitel für Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, gegeben wurden.

Beispiele: $x^{\frac{1}{2}} \,.\, x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}.$

$$a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

$$\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} = y^{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}} = y^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{y^5}.$$

$$(a\,.\,x)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}} \,.\, x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \,.\, \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{a^3x^3}.$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{c}{d}}.$$

$$a^{-\frac{q}{p}} = \frac{1}{a^{\frac{q}{p}}} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^q}}.$$

49. Wurzeln sind gleichartig, wenn ihre Grundzahlen und Exponenten genau dieselben sind.

Wurzeln können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleichartig sind; man addiert oder subtrahiert alsdann wie mit gewöhnlichen Buchstabengröſsen. (Vergl. Kap. II, unter 10.) Z. B:

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2};\ 6\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{a}-8\sqrt[3]{a}=3\sqrt[3]{a}.$$

$$5\sqrt[4]{x}+3\sqrt[5]{y}-2\sqrt[4]{x}-9\sqrt[5]{y}=5\sqrt[4]{x}-2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[5]{y}-9\sqrt[5]{y}$$
$$=3\sqrt[4]{x}-6\sqrt[5]{y}.$$

Übungsbeispiele:

$2\sqrt[6]{ab}+9\sqrt[6]{ab}-12\sqrt[6]{ab}-\sqrt[6]{ab}+8\sqrt[6]{ab}+\sqrt[6]{ab}.$

$\sqrt{ac}-(2\sqrt{ac}-7\sqrt{ac}+9\sqrt{ac}+\sqrt{ac}).$

$7\sqrt[3]{a}-(-6\sqrt[3]{a}+4\sqrt[4]{b}-9\sqrt[3]{a}-5\sqrt[4]{c}).$

$3\sqrt[4]{x^2y}-9\sqrt[4]{x^2y}+6\sqrt[5]{x^2y}+7\sqrt[5]{x^2y}.$

$12\sqrt{a}-a\sqrt{b}-(\sqrt[3]{a}-8\sqrt{b}-7\sqrt{a}).$

$7\sqrt[3]{a}-9\sqrt[3]{ab}+6\sqrt[4]{ab}-(-9\sqrt[4]{ab}+5\sqrt[3]{ab}+7\sqrt[3]{a}).$

50. Jede Wurzel aus Eins ist = Eins. Z. B:

$$\sqrt[n]{1}=1, \text{ oder:}$$

$$\sqrt[3]{1}=1;\ \text{denn } 1^3=1.1.1=1 \text{ u. s. w.}$$

51. Die Wurzel aus einem Produkt wird ausgezogen, indem man sie aus jedem Faktor einzeln auszieht und dann die erhaltenen Wurzeln multipliziert. Z. B:

$$\sqrt{36a^2}=\sqrt{36}.\sqrt{a^2}=6a \text{ und: } \sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}.$$

Beispiele: $\sqrt{16.25}=\sqrt{16}.\sqrt{25}=\sqrt{4^2}.\sqrt{5^2}=4.5=20.$

$$\sqrt[3]{6^6a^3}=\sqrt[3]{6^6}.\sqrt[3]{a^3}=6^{\frac{6}{3}}.a^{\frac{3}{3}}=6^2.a=36a.$$

$$\sqrt[3]{27a^9b^6}=\sqrt[3]{3^3a^9b^6}=3^{\frac{3}{3}}\,a^{\frac{9}{3}}\,b^{\frac{6}{3}}=3a^3b^2.$$

$$\sqrt[4]{16(a+b)^4}=\sqrt[4]{16}.\sqrt[4]{(a+b)^4}=2(a+b).$$

$$\sqrt{4a^2b^2}+\sqrt[3]{8a^3b^3}-\sqrt[4]{16a^4b^4}=2ab.$$

Übungsbeispiele:

$\sqrt{81.121};\ \sqrt{49.256};\ \sqrt[3]{27.125};\ \sqrt[3]{8x^3y^3};\ \sqrt[3]{a^6};\ \sqrt[7]{a^{28}};\ \sqrt[5]{a^{-10}}.$

$\sqrt[-4]{a^{20}};\ \sqrt[-9]{a^{-36}};\ \sqrt[\frac{2}{3}]{a^4};\ \sqrt[5]{a^{-10}.b^{45}c};\ \sqrt[x]{a^{2x}b^{nx}}.$

Die Wurzel aus einem Quotienten (Bruch) wird ausgezogen, indem man die Wurzel aus dem Dividenden (Zähler) und dem Divisor (Nenner) einzeln auszieht. Z. B:

$$\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};\quad \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}.$$

Beispiele: $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{6^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{6}{7}.$

$$\sqrt[4]{\frac{3^{12}}{a^4b^8}} = \frac{\sqrt[4]{3^{12}}}{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \frac{3^{\frac{12}{4}}}{a^{\frac{4}{4}}b^{\frac{8}{4}}} = \frac{3^3}{ab^2} = 27\frac{1}{ab^2}.$$

$$\sqrt[3]{0{,}027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{10^3}} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Bei dem praktischen Rechnen mit Wurzeln ist folgendes Verfahren oft von grofsem Vorteil: Ist der Nenner des Bruches, aus dem z. B. die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, keine Quadrat-Zahl, so kann man denselben dazu machen, indem man Zähler und Nenner des Bruches mit dem **Nenner** multipliziert; auf diese Weise umgeht man das Ausziehen einer Quadrat-Wurzel.

Beispiele: $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7.11}{11.11}} = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{1}{11}\cdot\sqrt{77}.$

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}.$$

Bei dem Ausziehen der Kubikwurzel hätte man Zähler und Nenner mit der zweiten Potenz des Nenners multiplizieren müssen u. s. w.

Übungsbeispiele:

$$\sqrt{\frac{16}{25}};\ \sqrt{0{,}25};\ \sqrt[3]{3^3/_8};\ \sqrt[3]{0{,}125};\ \sqrt[6]{\frac{a^{-12}b^{18}c^{24}}{d^{12}e^{-24}}};\ \sqrt{\frac{ab^{-4}c^8}{d^4e^{10}}};\ \sqrt[9]{\frac{a^{27}b^{18}}{cd^{36}}}.$$

52. Die Wurzel aus einer Potenz wird ausgezogen, indem man den Wurzelexponenten durch den Potenzexponenten dividiert und die Grundzahl der Potenz durch den erhaltenen Quotienten radiziert. Z. B:

$$\sqrt[3]{a^9} = \sqrt[\frac{3}{9}]{a} = \sqrt[\frac{1}{3}]{a} = a^3;\quad \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{x}.$$

Beispiele: $\sqrt[4]{a^2}\begin{cases} = \sqrt[\frac{4}{2}]{a} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}, \text{ oder:} \\ = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}. \end{cases}$

$$\sqrt[9]{a^3}\begin{cases} = \sqrt[\frac{9}{3}]{a} = \sqrt[3]{a}, \text{ oder:} \\ = a^{\frac{3}{9}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}. \end{cases}$$

Die Wurzel aus einer anderen Wurzel wird ausgezogen, indem man die beiden Wurzelexponenten multipliziert und den Radikanden durch das erhaltene Produkt radiziert. Z. B:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}.$$

Beispiele: $$\sqrt[3]{\sqrt{a}}\begin{cases} = \sqrt[3.2]{a} = \sqrt[6]{a}, \text{ oder:} \\ = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}. \end{cases}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^6}}\begin{cases} = \sqrt[2.3]{a^6} = \sqrt[6]{a^6} = a^{\frac{6}{6}} = a^1 = a. \\ = \sqrt{a^{\frac{6}{3}}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a. \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4}} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}.$$

Umgekehrt gilt natürlich auch:

$$\sqrt[6]{a^{12}}\begin{cases} = \sqrt[3.2]{a^{12}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} = \sqrt[3]{a^6} = a^2. \\ = \sqrt[2.3]{a^{12}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{a^4} = a^2. \end{cases}$$

$$\sqrt[12]{a} = \sqrt[3.2.2]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}.$$

d. h. Wurzeln mit hohen Exponenten können in durcheinander zu radizierende Wurzeln mit niedrigen Exponenten zerlegt werden.

53. Je nachdem der Exponent einer Wurzel eine gerade oder ungerade Zahl ist, wird die Wurzel eine gerade oder ungerade Wurzel genannt. Man merke folgende wichtigen Sätze:

Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist sowohl positiv als negativ.

$\sqrt{4} = \pm 2$, denn es ist $(+2)^2 = 4$ und ebenso $(-2)^2 = 4$.

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ „ „ „ $(+3)^4 = 81$ „ „ $(-3)^4 = 81$.

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$ „ „ „ $\left(+\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ „ „ $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

$\sqrt{x^4} = \pm x^2$ „ „ „ $(+x^2)^2 = +x^4$ „ $(-x^2)^2 = x^4$.

Jede ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist nur positiv.

$\sqrt[3]{27} = +3$, denn nur $(+3)^3$ ist $= +27$.

$\sqrt[5]{32} = +2$ „ „ $(+2)^5$ „ $= +32$.

$\sqrt[3]{x^{12}} = +x^4$ „ „ $(+x^4)^3$ „ $= +x^{12}$.

Jede ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist nur negativ.

$\sqrt[3]{-27} = -3$, denn nur $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3)$ ist $= -27$.

$\sqrt[5]{-243} = -3$, denn nur $(-3)^5 = -243$.

$\sqrt[3]{-a^6} = -a^{\frac{6}{3}} = -a^2$, denn nur
$(-a^2)^3 = (-a^2)(-a^2)(-a^2) = -a^6$.

B. Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln.*)

54. Bei dem Wurzelausziehen kann die gesuchte Wurzel nicht immer genau gefunden werden; in den meisten Fällen läſst sich die Wurzel nur näherungsweise bestimmen.

Eine Wurzel ist stets genau, wenn der Radikant (vergl. Kap. V, unter 29) eine Potenz der Wurzel ist, d. h. aus der zweiten Potenz einer Zahl läſst sich ohne weiteres die Quadratwurzel, aus der dritten Potenz die Kubikwurzel, aus der vierten Potenz die $2 . 2 = 4$. Wurzel genau bestimmen; u. s. w.

55. Multipliziert man einstellige Zahlen mit sich selbst, d. h. bildet man deren Quadrate, so bestehen die Resultate aus ein- oder zweiziffrigen Zahlen; mithin muſs umgekehrt

*) Vergleiche die Tabellen im Anhange des Buches.

die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl eine einziffrige Wurzel ergeben. Bildet man die Quadrate zweistelliger Zahlen, so sind die Resultate drei- oder vierziffrig, und mufs umgekehrt die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl eine zweistellige Zahl sein. Hieraus folgt, dafs eine mehrstellige Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, von rechts nach links in Klassen von je 2 Stellen geteilt werden mufs, wobei die links stehende, letzte und höchste Klasse auch nur eine Stelle erhalten kann. So hat z. B. die Zahl 8|34|69|03, wenn sie, wie angegeben, zum Zwecke des Ausziehens der Quadratwurzel in Klassen geteilt wird, 4 Klassen; die gesuchte Wurzel mufs also eine 4-ziffrige Zahl werden.

56. Erhebt man einstellige Zahlen zur dritten Potenz, so bestehen die Resultate aus 1- 2- und 3-ziffrigen Zahlen; umgekehrt mufs daher die Kubikwurzel aus solchen Zahlen einstellig werden. Bildet man die dritten Potenzen zweistelliger Zahlen, so werden die Resultate 4- 5- und 6-ziffrig; umgekehrt mufs demnach die Kubikwurzel aus derartigen Zahlen zweistellig werden. Für das Ausziehen der Kubikwurzel ist es demnach notwendig, die zu radizierende Zahl von rechts nach links in Klassen von je 3 Stellen zu teilen, wovon die links stehende, höchste Klasse auch nur 2 oder nur 1 Stelle erhalten kann. So hat z. B. die Zahl 8|346|903, wenn sie zum Zwecke des Ausziehens der dritten Wurzel in Klassen geteilt werden soll, 3 Klassen; die gesuchte Wurzel mufs also eine 3-ziffrige Zahl werden.

Einige Beispiele sollen die bei dem Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel einzuschlagenden Wege klarlegen.

Ausziehen der Quadratwurzel.

57. Die Grundlage für das Ausziehen der Quadratwurzel bildet die in Kap. IV, unter 22, 1) gegebene Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Um aus der rechten Seite dieser Gleichung die Quadratwurzel auszuziehen, ziehe man sie zunächst aus dem ersten Gliede a^2; dieselbe ist $= a$, und bildet a das erste Glied der gesuchten Wurzel. Erhebt man a in das Quadrat $= a^2$ und zieht man a^2 von der rechten Seite der Gleichung ab, so bleibt als Rest $2ab + b^2$ übrig. Nun bilde man das doppelte Produkt des

$$
\begin{array}{rll}
 & \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b. & \\
a^2 = & -a^2 & \\
2 \, . \, a = 2a & | + 2ab + b^2 & \\
2 \, . \, a \, . \, b = & \quad -2ab & \\
 & \qquad + b^2 & \\
b^2 = & \qquad -b^2 &
\end{array}
$$

ersten Gliedes a der Wurzel $= 2a$ und dividiere mit $2a$ in das erste Glied $2ab$ des Restes, so erhält man als zweites Glied der Wurzel den Wert $+ b$. Mit b multipliziere man den Wert $2a = 2ab$, bilde ferner das Quadrat des zweiten Gliedes der Wurzel $= b^2$, und subtrahiere nun $2ab$ und b^2 von dem obigen Rest; der jetzt entstehende Rest wird dann gleich Null und die gesuchte Wurzel ist genau $= a + b$.

58. Bei bestimmten Zahlen ist das Verfahren genau dasselbe:

a) Soll z. B. aus der Zahl 9025 die Quadratwurzel ausgezogen werden, so teile man die Zahl von r e c h t s n a c h l i n k s in Klassen von je 2 Stellen, suche aus der höchsten Klasse 90 die gröſste Wurzel $= 9$ und setze $9 = a$; bilde $a^2 = 9^2 = 81$ und ziehe 81 von 90 ab. Zu dem Rest 9 nehme man die erste Stelle 2 der zweiten Klasse herunter und dividiere mit $2a = 2 \, . \, 9 = 18$ in die Zahl 92. Diese Division ergiebt den

$$
\begin{array}{rrrl}
 & & & \overset{a\,b}{} \\
 & & \sqrt{90|25} & = 95. \\
a^2 = & 9^2 = & 81| & \\
2a = & 2 \, . \, 9 = & 18| & 92 \\
2ab = & 2 \, . \, 9 \, . \, 5 = & & 90 \\
 & & & 25 \\
b^2 = & 5^2 = & & 25 \\
 & & & 0
\end{array}
$$

Quotienten 5, welchen man $= b$ setzt. Nun bilde man das Produkt $2ab = 2 \, . \, 9 \, . \, 5 = 90$, ziehe 90 von 92 ab, und nehme zu dem sich ergebenden Rest 2 die zweite Stelle 5 der zweiten Klasse herunter, wodurch die Zahl 25 entsteht. Bildet man jetzt $b^2 = 5^2 = 25$ und subtrahiert man 5^2 von 25, so ergiebt sich als Rest Null; die gesuchte Wurzel ist die Zahl 95.

b) Geht die Division nicht wie im Beispiel unter a) auf, sondern ergiebt sich nach der Subtraktion von b^2 noch ein Rest, so nimmt man bei einer mehrklassigen Zahl die erste Stelle der dritten Klasse zum Rest herunter, betrachtet die b e i d e n e r s t e n S t e l l e n d e r g e f u n d e n e n W u r z e l **zusammen** a l s a, und dividiert mit dem neuen Produkt $2a$ in den vorher gebildeten Rest; ein Verfahren, welches sich bei jeder neuen Klasse wiederholt. (Siehe folgendes Beispiel.)

$$\sqrt{7|91|29|69} = \overbrace{\overbrace{\overset{a}{2}\overset{b}{8}}^{a}\overset{b}{1}}^{a}\overset{b}{3}.$$

$$\begin{array}{rrr}
a^2 = & 2^2 = & 4 \\ \hline
2a = & 2\,.\,2 = & 4|39 \\
2ab = & 2\,.\,2\,.\,8 = & 32 \\ \hline
 & & 71 \\
b^2 = & 8^2 = & 64 \\ \hline
2a = & 2\,.\,28 = & 56|72 \\
2ab = & 2\,.\,28\,.\,1 = & 56 \\ \hline
 & & 169 \\
b^2 = & 1^2 = & 1 \\ \hline
2a = & 2\,.\,281 = & 562|\,1686 \\
2ab = & 2\,.\,281\,.\,3 = & 1686 \\ \hline
 & & 9 \\
b^2 = & 3^2 = & 9 \\ \hline
 & & 0
\end{array}$$

c) Erhält man bei der Division eines Restes durch das Produkt $2a$ den Quotienten Null, so verfährt man folgendermaſsen:

$$\sqrt{1|10|25} = \overbrace{\overset{a}{1}\overset{b}{0}}^{a}\overset{b}{5}.$$

$$\begin{array}{rrl}
a^2 = & 1^2 = & 1 \\ \hline
2a = & 2\,.\,1 = & 2|\,1 = \text{Null mal!}
\end{array}$$

Folglich muſs die ganze zweite Klasse und die erste Stelle der dritten Klasse heruntergenommen werden, wodurch im Rest die Zahl 102 entsteht; a wird jetzt $= 10$, folglich $2a = 2\,.\,10 = 20$, und muſs nun mit 20 in die Zahl 102 dividiert werden.

$$\begin{array}{rrr}
2a = & 2\,.\,10 = & 20|102 \\
2ab = & 2\,.\,10\,.\,5 = & 100 \\ \hline
 & & 25 \\
b^2 = & 5^2 = & 25 \\ \hline
 & & 0
\end{array}$$

d) Ist aus einem Dezimalbruch die Wurzel zu ziehen, so kommt stets **auf das Dezimalkomma** ein Klassenstrich zu stehen und werden die Ganzen des Dezimalbruches von rechts nach links, die Dezimalstellen von links nach rechts in Klassen von je 2 Stellen geteilt. In der gefundenen Wurzel wird das Dezimalkomma stets hinter die Zahl gesetzt, welche sich als Quotient bei der Division **der letzten Klasse der Ganzen** des Dezimalbruches durch das Produkt 2a ergab.

1. Beispiel.

$$\sqrt{20|02,|56|25} = \overset{a\,b}{\overset{a\,b\,.}{\overset{a\,b\,.\,.}{44{,}75}}}.$$

$$\begin{array}{rrr}
a^2 = & 4^2 = & 16 \\
2a = & 2\,.\,4 = & 8|\ 40 \\
2ab = & 2\,.\,4\,.\,4 = & 32 \\
 & & 82 \\
b^2 = & 4^2 = & 16 \\
2a = & 2\,.\,44 = & 88|\ 665 \\
2ab = & 2\,.\,44\,.\,7 = & 616 \\
 & & 496 \\
b^2 = & 7^2 = & 49 \\
2a = & 2\,.\,447 = & 894|\ 4472 \\
2ab = & 2\,.\,447.5 = & 4470 \\
 & & 25 \\
b^2 = & 5^2 = & 25 \\
 & & 0
\end{array}$$

2. Beispiel.

$$\sqrt{0,|18|49} = \overset{a\,b}{0{,}43}.$$

$$\begin{array}{rrr}
a^2 = & 4^2 = & 16 \\
2a = & 2\,.\,4 = & 8|\ 24 \\
2ab = & 2\,.\,4\,.\,3 = & 24 \\
 & & 9 \\
b^2 = & 3^2 = & 9 \\
 & & 0
\end{array}$$

3. Beispiel.

$$\sqrt{0,|06|76} = \overset{a\,b}{0{,}26}.$$

$$\begin{array}{rrr}
a^2 = & 2^2 = & 4 \\
2a = & 2\,.\,2 = & 4|\ 27 \\
2ab = & 2\,.\,2\,.\,6 = & 24 \\
 & & 36 \\
b^2 = & 6^2 = & 36 \\
 & & 0
\end{array}$$

4. Beispiel.

$$\sqrt{0,|00|00|01|69} = \overset{a\,b}{0{,}0013}.$$

$$\begin{array}{rrr}
a^2 = & 1^2 = & 1 \\
2a = & 2\,.\,1 = & 2|\ 6 \\
2ab = & 2\,.\,1\,.\,3 = & 6 \\
 & & 9 \\
b^2 = & 3^2 = & 9 \\
 & & 0
\end{array}$$

e) Ist der Wert der Wurzel nur annähernd zu bestimmen, geht die Wurzelausziehung, nachdem die letzte Klasse heruntergenommen worden ist, nicht auf und wünscht man noch einige Stellen der Wurzel zu kennen, so werden die fehlenden, noch zur Wurzelausziehung erforderlichen Klassen, durch Nullenpaare ersetzt. Soll z. B. aus 150 die Quadratwurzel gezogen werden, so kann man statt 150 die Zahl 150,0000 . . . . . setzen. (Siehe nebenstehendes Beispiel.)

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{1|50,|00|00|\ldots} = 12{,}247\ldots \\
a^2 = & 1 \\
2a = & 2|5 \\
2ab = & 4 \\
 & .10 \\
b^2 = & 4 \\
2a = & 24|\ 60 \\
2ab = & 48 \\
 & 120 \\
b^2 = & 4 \\
2a = & 244|\ 1160 \\
 & \text{u. s. w.}
\end{array}
$$

Übungsbeispiele:

$\sqrt{1225}$; $\sqrt{676}$; $\sqrt{163216}$; $\sqrt{15129}$; $\sqrt{25836889}$; $\sqrt{5499025}$.
$\sqrt{5878888828164}$; $\sqrt{4401604}$; $\sqrt{9054081}$; $\sqrt{4236544}$; $\sqrt{123454321}$.
$\sqrt{824591124900}$; $\sqrt{227{,}7881}$; $\sqrt{0{,}013689}$; $\sqrt{0{,}00056644}$.
$\sqrt{25{,}0007000049}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt[4]{208827064576}$.

Ausziehen der Kubikwurzel.

59. Die Grundlage für das Ausziehen der Kubikwurzel bildet die in Kap. IV, unter 22, 3) gegebene Formel:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Soll aus der rechten Seite der Gleichung die 3. Wurzel gezogen werden, so ziehe man sie zunächst aus dem ersten Gliede a^3; dieselbe ist $= a$, und bildet a das erste Glied der gesuchten Wurzel. Erhebt man a in die 3. Potenz $= a^3$, und zieht man a^3 von der rechten Seite der Gleichung ab, so bleibt als Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ übrig. Nun bilde man das

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b. \\
a^3 = & -a^3 \\
3a^2 = & 3a^2 \mid 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
3a^2b = & -3a^2b \\
 & + 3ab^2 + b^3 \\
3ab^2 = & -3ab^2 \\
 & + b^3 \\
b^3 = & - b^3 \\
 & 0
\end{array}
$$

3-fache Quadrat der gefundenen Wurzel $a = 3a^2$ und dividiere mit $3a^2$ in das erste Glied $3a^2b$ des Restes, so erhält man als zweites Glied der Wurzel den Wert $+ b$. Mit b multipliziere man den Wert $3a^2 = 3a^2b$, bilde ferner das Produkt aus dem 3-fachen ersten Gliede a der Wurzel und dem Quadrat des zweiten Gliedes $b = 3ab^2$, und endlich noch die 3. Potenz des zweiten Gliedes b der Wurzel $= b^3$. Subtrahiert man die Summe $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ von dem obigen Rest, so bleibt Null übrig und die gesuchte Wurzel ist genau $= a + b$.

60. Bei dem Ausziehen der Kubikwurzel aus bestimmten Zahlen ist genau derselbe Weg einzuschlagen, wie unter 59) angegeben; es gelten auch hier, aufser der Einteilung in Klassen von je **3** Stellen, die unter 58b, c, d und e) gegebenen Regeln.

a) Um z. B. aus der Zahl 185193 die Kubikwurzel auszuziehen, teile man die Zahl von rechts nach links in Klassen von je 3 Stellen, suche aus der links stehenden, höchsten Klasse 185 die gröfste Kubikwurzel = 5 und setze $5 = a$; bilde $a^3 = 5^3 = 125$, und ziehe 125 von 185 ab. Zu dem Rest 60 nehme man die erste Stelle 1 der zweiten Klasse herunter und dividiere mit $3a^2 = 3 . 5^2 = 75$ in die erhaltene Zahl 601. Die Division ergiebt den Quotienten 7, welchen man $= b$ setzt. Nun bilde man das Produkt $3a^2b = 3 . 5^2 . 7 = 525$, ziehe diese Zahl von 601 ab und nehme zu dem entstehenden Rest 76 die zweite Stelle 9 der zweiten Klasse herunter. Von der so entstandenen Zahl 769 subtrahiere man das Produkt $3ab^2 = 3 . 5 . 7^2 = 735$, wobei sich der Rest 34 ergiebt. Fügt man zu diesem die dritte Stelle 3 der zweiten Klasse hinzu und subtrahiert man von der so entstandenen Zahl 343 den Wert $b^3 = 7^3 = 343$, so wird jetzt der Rest gleich Null. Die gesuchte Wurzel ist also die Zahl 57.

$$\begin{array}{lll}
 & & \sqrt[3]{185|193} = \overset{a}{5}\overset{b}{7}. \\
a^3 = & 5^3 = & 125 \\
3a^2 = & 3 . 5^2 = & 75|\,601 \\
3a^2b = & 3 . 5^2 . 7 = & \quad 525 \\
 & & \quad 769 \\
3ab^2 = & 3 . 5 . 7^2 = & \quad 735 \\
 & & \quad 343 \\
b^3 = & 7^3 = & \quad 343 \\
 & & \quad\;\; 0
\end{array}$$

Wären noch mehr Klassen vorhanden, so würde sich das Verfahren genau wiederholen; nur müfste man jetzt die Zahl $57 = a$ setzen und mit $3a^2 = 3 . 57^2$ in den event. vorhandenen Rest dividieren, so ein neues Glied b der Wurzel bestimmen, u. s. w.

b) Soll aus 0,08 die 3. Wurzel gezogen werden, so setze man 0,08 = 0,08000000 . . . . . (vergl. Text zu 58 c), woraus folgt:

$$\sqrt[3]{0,|080|000|000} = 0,4308 \ldots\ldots$$

$a^3 = \quad 4^3 = \quad 64$

$3a^2 = \quad 3 \cdot 4^2 = \quad 48| \; 160$

$3a^2b = 3 \cdot 4^2 \cdot 3 = \quad 144$

$\quad 160$

$3ab^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3^2 = \quad 108$

$\quad 520$

$b^3 = \quad 3^3 = \quad 27$

$3a^2 = \quad 3 \cdot 43^2 = \quad 5547|4930$ = Null mal! Folglich mufs die ganze dritte Klasse und die erste Stelle der vierten Klasse herunter genommen werden; a ist jetzt = 430 und wird nun $3a^2 = 3 \cdot 430^2$, d. h.

$3a^2 = \quad 3 \cdot 430^2 = \quad 554700|4930000$

$3a^2b = 3 \cdot 430^2 \cdot 8 = \quad 4437600$

$\quad 4924000$

$3ab^2 = 3 \cdot 430 \cdot 8^2 = \quad 82560$

$\quad 4841440$

$b^3 = \quad 8^3 = \quad 512$

$3a^2 = \quad 3 \cdot 4308^2 = 55676592| \; 48409280$

u. s. w.

Übungsbeispiele:

$\sqrt[3]{262144}$; $\sqrt[3]{405224}$; $\sqrt[3]{12167}$; $\sqrt[3]{1331}$; $\sqrt[3]{10648}$; $\sqrt[3]{91125}$.
$\sqrt[3]{1191016}$; $\sqrt[3]{700227072}$; $\sqrt[3]{28233316125}$; $\sqrt[3]{42,875}$; $\sqrt[3]{12,326391}$.
$\sqrt[3]{0,001771561}$; $\sqrt[3]{0,000078805\,99}$; $\sqrt[3]{730,215675125}$.

61. Soll die Quadrat- oder Kubikwurzel aus einem echten oder unechten Bruch gezogen werden, so verfahre man entweder nach dem in Kap. IX, unter 51) angegebenen Verfahren, oder man verwandle den gewöhnlichen Bruch in einen Dezimalbruch.

1. Beispiel.

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 8}} = \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{8^2}} = \frac{\sqrt{56}}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{56} \text{ oder:}$$

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0,875.}$$

2. Beispiel.

$$\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=\sqrt[3]{\frac{7.8^2}{8.8^2}}=\frac{\sqrt[3]{7.64}}{\sqrt[3]{8^3}}=\frac{\sqrt[3]{448}}{8}=\frac{1}{8}\sqrt[3]{448};$$

oder:

$$\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=\sqrt[3]{0{,}875}.$$

Übungsbeispiele:

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}};\ \sqrt{\tfrac{64}{81}};\ \sqrt{\tfrac{7}{4}};\ \sqrt{11\tfrac{1}{16}};\ \sqrt{\tfrac{5}{3}};\ \sqrt{\tfrac{7}{8}};\ \sqrt{\tfrac{5}{12}};\ \sqrt{\tfrac{1}{17}};\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}}.$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{343}{512}};\ \sqrt[3]{465\tfrac{31}{64}};\ \sqrt[3]{52034\tfrac{10}{27}};\ \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}};\ \sqrt[3]{\tfrac{5}{6}};\ \sqrt[3]{\tfrac{5}{14}}.$$

Zweiter Teil.

Mechanik.

Einleitung.

Die Mechanik behandelt die Lehre von der Bewegung und dem Gleichgewichte der Körper.

Soll ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung übergehen, oder soll ein in Bewegung befindlicher Körper entweder seine Richtung oder seine Geschwindigkeit ändern, so ist hierzu eine äufsere Ursache erforderlich, welche man „Kraft“ nennt. Es wird sich daher auch die Mechanik insbesondere mit den Kräften und der verschiedenen Wirksamkeit derselben, sowie mit den Hindernissen, welehe dieser Wirksamkeit entgegentreten, beschäftigen.

Ebenso giebt die Mechanik auch Aufschlufs über die Bedingungen, unter welchen Körper den auf sie einwirkenden, bewegenden Kräften zu widerstehen vermögen; sie behandelt also auch die Widerstandsfähigkeit oder Festigkeit der in der Praxis verwendeten Materialien.

Schliefslich bespricht die Mechanik auch noch besondere mechanische Vorrichtungen — die sog. Maschinen — unter deren Anwendung man eine als zweckmäfsig erkannte Bewegung einleiten, oder einer nicht gewünschten Bewegung vorbeugen kann.

Die Materie, aus welcher auch alle Körper bestehen mögen, ist nicht befähigt durch sich allein eine Bewegung anzunehmen, oder eine einmal erhaltene Bewegung umzuändern, wenn nicht äufsere Ursachen — Kräfte — auf sie einwirken.

Man nennt diese Eigenschaft der Materie „Trägheit oder Beharrungsvermögen“.

Jeder materielle Körper bleibt also so lange in Ruhe, als keine Kraft auf ihn einwirkt, und jeder einmal in Bewegung gesetzte materielle Körper behält eine einmal empfangene Bewegung, sowohl der Richtung als auch der Stärke nach, für immer bei, wenn ihm keine Hindernisse — Kräfte — entgegengesetzt werden.

Man sagt daher:

Kraft ist die Ursache jeder Bewegung oder Bewegungsänderung materieller Körper.

Gleichgewicht zwischen zwei oder mehreren Kräften wird stattfinden, wenn die Wirkungen dieser, eine entgegengesetzte Bewegung erstrebenden Kräfte sich aufheben, d. h. gleich sind.

Es ist hierbei nicht notwendig, dafs die thätigen Kräfte selbst einander genau gleich sein müssen; vielmehr kommt es hierbei auf die besonderen Verhältnisse an, unter denen sie ihre Wirksamkeit ausüben.

Im Gleichgewichtszustande kann sich sowohl ein ruhender, als ein bewegter Körper befinden; letzterer dann, wenn er eine einmal angenommene Bewegung, trotz der Einwirkung von Kräften, welche die Bewegung umzuändern suchen, beibehält.

So ist z. B. ein auf einem Tische ruhender, oder ein an einem Faden hängender Körper im Gleichgewicht mit dem auftretenden Gegendruck der Tischplatte, oder mit der in dem Faden auftretenden Spannung. Entfernt man jedoch die Tischplatte, oder durchschneidet man den Faden, so wird damit das Gleichgewicht gestört und mufs der Körper, dem Gesetze der Schwere folgend, fallen.

Die Lehre, welche die Bedingungen klarlegt, unter denen sich mehrere Kräfte das Gleichgewicht halten, heifst „Statik“, während die Lehre, welche von der Bewegung der Körper handelt, „Dynamik“ genannt wird.

Erstes Kapitel.

Die verschiedenen Bewegungsarten.

Bewegung ist die Ortsveränderung eines räumlichen Gegenstandes. Die Reihenfolge der Orte im Raume, welche ein bewegter Gegenstand nach einander einnimmt, nennt man seinen Weg oder seine Bahn.

Die Richtung einer Bewegung ist entweder veränderlich, oder unveränderlich; im ersten Falle nennt man die Bewegung eine krummlinige, im zweiten Falle eine geradlinige.

Die Bewegung selbst kann wieder eine gleichförmige oder eine ungleichförmige sein, je nachdem bei der Bewegung, in beliebig gleichen Zeitabschnitten, gleiche oder ungleiche Wege zurückgelegt werden.

Bei der Bewegung eines Körpers können folgende Fälle eintreten:

1) Alle Punkte bewegen sich in genau gleicher Richtung; (einfach fortschreitende Bewegung).

2) Die Punkte bewegen sich um eine ruhende Gerade in konzentrischen Kreisen; (einfach drehende Bewegung).

3) Die Punkte bewegen sich um eine fortschreitende Gerade; (drehend fortschreitende Bewegung).

Bei der einfach fortschreitenden Bewegung eines bestimmten Punktes wird der Weg gemessen durch die Länge der Linie, welche den Weg bildet.

Bei der drehenden Bewegung wird der Weg gemessen, entweder durch den am Mittelpunkte der Drehung von einem bestimmten Radius gebildeten Winkel, oder durch die Länge des zu diesem Winkel gehörenden Bogens, dessen Radius die Einheit ist; oder durch die Anzahl der in bestimmter Zeit vollendeten Umdrehungen.

Die Geschwindigkeit einer jeden Bewegung wird gemessen durch den Weg, welchen die als gleichförmig gedachte Bewegung in der Zeiteinheit — der Sekunde — hervorbringen würde.

Ist die Geschwindigkeit veränderlich, so tritt entweder eine beschleunigte oder eine verzögerte Bewegung ein. Beschleunigung oder Verzögerung können wieder gleichförmig oder ungleichförmig sein.

Gleichförmig beschleunigt oder verzögert nennt man eine Bewegung, wenn die zurückgelegten Wege, in gleichen Zeiten, immer um das Gleiche zu- oder abnehmen.

Ist die Zu- oder Abnahme ungleich, so nennt man die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte, oder eine ungleichförmig verzögerte.

Gleichförmige Bewegung.

Die Länge des Raumes, welchen ein Körper während seiner Bewegung durchläuft, nennt man seinen Weg. Legt der Körper in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, so ist seine Bewegung eine gleichförmige.

Die Gröfse oder Stärke der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit gemessen, mit welcher die Bewegung stattgefunden hat. Man versteht unter Geschwindigkeit den Weg, welchen ein Körper in der Zeiteinheit — in einer Sekunde — zurücklegt.

Häufig giebt man aber auch die Geschwindigkeit in anderen Zeiteinheiten, als in Sekunden an. Zu Angaben über die Umdrehungszahl eines Rades, der Hubzahl einer Maschine u. s. w. benützt man gewöhnlich die Minute, zu Angaben über die Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges, eines Schiffes u. s. w. die Stunde, als Zeiteinheit. Immer steht die Gröfse der Zeiteinheit im Verhältnis zur Gröfse der Geschwindigkeit, oder zur Gröfse des Weges.

Es kommen, wie ersichtlich, bei der gleichförmigen Bewegung nur die drei Gröfsen: Zeit, Geschwindigkeit und Weg in betracht.

Hat ein in gleichförmiger Bewegung befindlicher Körper eine Geschwindigkeit von 10 m, legt er also in jeder einzelnen Sekunde einen Weg von 10 m Länge zurück, so wird er in einer Sekunde 1 mal 10 m, in 2 Sekunden 2 mal 10 m, in 5 Sekunden 5 mal 10 m, in 100 Sekunden 100 mal 10 m u. s. w. fortgeschritten sein.

Bezeichnet man ganz allgemein mit:

t die Zeit, während welcher die Bewegung vor sich geht;
s den Weg, welcher in dieser Zeit t zurückgelegt wird;
v die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper sich fortbewegt, so ist der zurückgelegte

Weg: $s = v \cdot t =$ Geschwindigkeit mal Zeit . . . 1)

d. h. der zurückgelegte Weg ist gleich dem Produkt aus Geschwindigkeit und Zeit. Hieraus erhält man ferner die

$$\text{Zeit: } t = \frac{s}{v} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2)$$

$$\text{Geschwindigkeit: } v = \frac{s}{t} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3)$$

Beispiele:*)

1) Auf einem Flusse schwimmt ein Körper in 45 Sekunden 36 Meter weit. Wie grofs ist die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche?

Gegeben ist: $t = 45$ Sekunden und $s = 36$ Meter.

Mithin nach Formel 3): $v = \frac{s}{t} = \frac{36}{45} = 0{,}8$ Meter pro Sekunde.

2) Welchen Weg legt eine Lokomotive in 30 Minuten zurück, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit von 12 Meter pro Sekunde gleichmäfsig fortbewegt?

Gegeben ist: $t = 30 . 60 = 1800$ Sekunden und $v = 12$ Meter.
Mithin nach Formel 1): $s = v . t = 12 . 1800 = 21\,600$ Meter.

3) Ein Eisenbahnzug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 9 Meter fort; welchen Weg legt er in einer Stunde und 15 Min. zurück?

Gegeben ist: $v = 9$ und $t = 75 . 60 = 4500$ Sekunden.
Mithin nach Formel 1): $s = v . t = 9 . 4500 = 40500$ Meter.

4) Welche Zeit braucht ein Pferd, um 21 Kilometer = 21 000 Meter zurückzulegen, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit von 5 Metern bewegt?

Gegeben ist: $s = 21\,000$ Meter; $v = 5$ Meter.

Mithin nach Formel 2): $t = \frac{s}{v} = \frac{21\,000}{5} = 4200$ Sek. = 1 Std. 10 Min.

5) Ein Fahrstuhl braucht 4 Minuten Zeit, um eine Höhe von 72 Meter zu erreichen; mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich derselbe?

Gegeben ist: $t = 4 . 60 = 240$ Sek.; $s = 72$ Meter.

Mithin nach Formel 3): $v = \frac{s}{t} = \frac{72}{240} = 0{,}3$ Meter pro Sek.

6) Das Bett einer Eisenhobelmaschine, welches sich vorwärts und rückwärts mit gleicher Geschwindigkeit bewegt, und bei jedem Zuge einen Weg von 2 Meter zurücklegt, macht in jeder Minute 4 Doppelzüge, d. h. es geht 4mal vorwärts und 4mal rückwärts. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Bett?

Gegeben ist: der Weg in 1 Min. $s = 4 . 2 + 4 . 2 = 16$ Meter
und die Zeit $t = 1$ Min. $= 60$ Sek.

Mithin nach Formel 3): $v = \frac{s}{t} = \frac{16}{60} = 0{,}267$ Meter pro Sek.

7) Eine Richtplatte von 2 Meter Länge und 0,5 Meter Breite soll einmal überhobelt werden. Der Schlitten der Hobelmaschine hat eine Geschwindigkeit von 0,09 m, die Breite des Spanes beträgt 0,004 m. Welche Zeit ist hierzu erforderlich?

---

*) Über die Resultate sämtlicher nun folgenden Beispiele ist zu bemerken, dafs da, wo die Resultate in Form von Dezimalbrüchen gegeben sind, die letzte Stelle derselben um 1 erhöht worden ist, wenn die folgende, nicht angegebene Stelle = 5, oder gröfser als 5 war. Ergab sich die betreffende Stelle kleiner als 5, so blieb die vorhergehende Stelle unverändert.

Der Inhalt der abzuhobelnden Fläche ist: $2 . 0{,}5 = 1$ qm.
In einer Sek. wird eine Fläche bearbeitet von $0{,}09 . 0{,}004 = 0{,}00036$ qm.
Folglich ist zum einmaligen Überhobeln der Platte eine Zeit von
$\frac{1}{0{,}00036} = 2778$ Sek. $= 46$ Min. 18 Sek. erforderlich.

Geht bei der gleichförmigen Bewegung eines Körpers die geradlinige Richtung des Weges in eine kreisförmige über, so dafs alle Punkte des Körpers um eine mit demselben festverbunden gedachte Achse Kreise beschreiben, so entsteht die drehende oder rotierende Bewegung (Wasserrad, Schwungrad, Zahnrad, Kurbel, Excenter u. s. w.), und zwar werden diejenigen Punkte, welche am weitesten von dem Mittelpunkte der Achse entfernt liegen, den gröfsten Weg zurücklegen, während derselbe gegen den Mittelpunkt hin immer mehr abnimmt und im Mittelpunkt selbst gleich Null wird.

Den Weg, welchen ein Punkt hierbei in einer bestimmten Entfernung vom Mittelpunkte in einer Sekunde zurücklegt, nennt man seine Umfangsgeschwindigkeit.

Will man daher diese Geschwindigkeit genau bestimmen, so ist immer anzugeben, für welchen Punkt des sich drehenden Körpers sie bestimmt werden soll; z. B. für den Umfang eines Schwungrades, einer Riemenscheibe, oder den Teilkreis eines Zahnrades u. s. w.

Bezeichnet man mit:

d den Durchmesser des von dem mafsgebenden Punkte durchlaufenen Kreises;

n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute, so ist der Weg bei einer Umdrehung

$= \pi . d$, also gleich dem Umfange des Kreises; mithin in einer Minute, bei n Umdrehungen

$= \pi . d . n$; folglich die Umfangsgeschwindigkeit pro Sek.

$$v = \frac{\pi . d . n}{60} \qquad 4)$$

Hieraus folgt: $$d = \frac{60 . v}{\pi . n} \qquad 5)$$

$$n = \frac{60 . v}{\pi . d} \qquad 6)$$

Bezeichnet man ferner mit:

n die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel einer Dampfmaschine pro Minute;

s den einfachen Kolbenhub in Metern,

so ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit pro Sek.

$$v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Folglich: $$n = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

$$s = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Beispiele:

1) Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit einer Riemenscheibe von 2 Meter Durchmesser, wenn dieselbe 120 Umdrehungen pro Min. macht?

Nach Formel 4) erhält man:

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3.14 \cdot 2 \cdot 120}{60} = 12{,}56 \text{ Meter.}$$

2) Wie viel Umdrehungen pro Minute macht ein Schwungrad von 2,5 Meter Durchmesser, wenn dessen Umfangsgeschwindigkeit 7 Meter beträgt?

Nach Formel 6) erhält man:

$$n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot d} = \frac{60 \cdot 7}{3{,}14 \cdot 2{,}5} = 53{,}50 \text{ Umdrehungen.}$$

3) Welchen Teilkreis-Durchmesser erhält ein Zahnrad, wenn dessen Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreise 7,85 Meter beträgt und das Rad 150 Umdrehungen pro Minute machen soll?

Nach Formel 5) erhält man:

$$d = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n} = \frac{60 \cdot 7{,}85}{3{,}14 \cdot 150} = 1 \text{ Meter.}$$

4) Wie grofs ist die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens einer Dampfmaschine, wenn die Kurbel 46 Umdrehungen pro Minute macht und der einfache Kolbenhub 1,2 Meter beträgt?

Nach Formel 7) erhält man:

$$v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 46}{60} = 1{,}84 \text{ Meter.}$$

5) Wie viel Umdrehungen pro Minute macht die Kurbel einer Dampfmaschine, wenn die mittlere Kolbengeschwindigkeit 2,5 Meter und der Kolbenhub 1,5 Meter betragen?

Nach Formel 8) erhält man:

$$n = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot s} = \frac{60 \cdot 2{,}5}{2 \cdot 1{,}5} = 50 \text{ Umdrehungen.}$$

6) Bei einer Pumpe, welche 40 Doppelhübe pro Minute macht, betrage die mittlere Kolbengeschwindigkeit 0,4 Meter. Welchen Kolbenhub besitzt diese Pumpe?

Nach Formel 9) erhält man:

$$s = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot n} = \frac{60 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 40} = 0{,}3 \text{ Meter.}$$

Zusammenstellung einiger mittleren Geschwindigkeiten pro Sekunde:

Fufsgänger	1,3	Meter
Pferd im Schritt	1,0	„
„ „ Trab	2,1	„
„ „ Galopp	4,5	„
Mensch am Göpel	0,6	„
„ an der Kurbel	0,8	„
Ochse am Göpel	0,6	„
Güterzug	12,0	„
Personenzug	15,0	„
Schnellzug	20,0	„
Seedampfer	5,0	„
Wasser der meisten Flüsse	0,8	„
„ in Leitungen	1,0	„
„ im Saugrohr der Pumpen	1,0	„
„ „ Steigrohr „ „	1,2	„
Wind in Gebläseleitungen	10,0	„
„ gewöhnlicher	3,0	„
„ günstig für Windmühlen	6,5	„
Gas, Luft in Leitungen	2,7	„
Sturmwind	15,0	„
Orkan	30,0	„
Wasserräder	1,5	„
Mühlsteine	8,0	„
Schleifsteine für Werkzeuge	9,0	„
Flügel der Ventilatoren, am Umfange	36,0	„
Kreissäge für Holz und heifses Eisen, am Umfange	40,0	„
Sägeblatt einer Balkensäge	2,0	„
„ „ Fourniersäge	10,0	„
„ „ Bandsäge für Holz	9,0	„
„ „ „ „ Eisen	1,3	„
Schlitten einer Metallhobelmaschine	0,1	„
Schneidzeug einer Holzhobelmaschine, drehend	12,0	„
Abdrehen gufseiserner Stücke am Umfang	0,08	„
„ schmiedeeiserner Stücke am Umfang	0,12	„
Bohrer am Umfang, für Schmiede- und Gufseisen, für Löcher bis 6 mm Durchmesser	0,18	„
„ „ von 6—25 mm Durchmesser	0,14	„
„ gröfsere Löcher	0,10	„
Starker Eisendraht, beim Ziehen	0,20	„
Schwacher „ „ „	1,30	„
Brieftaube im Fluge	18,0	„
Büchsen der Rohrpost in Berlin	17,0	„
Schall in der Luft	333,0	„
Erdäquator-Umfangsgeschwindigkeit	464,0	„
Erde auf ihrer Bahn um die Sonne	30 000,0	„
Licht und Elektrizität	300 000 000,0	„

Übungsbeispiele:*)

1) Welche Zeit braucht ein Fufsgänger, um 7 km zu durchlaufen, wenn seine mittlere Geschwindigkeit 1,4 m beträgt?

Lösung: t = 1 Std. 23 Min. 20 Sek.

2) Ein Fahrstuhl bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 0,25 m. Welche Höhe erreicht derselbe in 3 Min.?

Lösung: s = 45 m.

3) Wie grofs ist die mittlere Geschwindigkeit eines Dampfschiffes, wenn dasselbe in einer Stunde 18000 m zurücklegt?

Lösung: v = 5 m pro Sekunde.

4) Zwischen Blitz und Knall eines Geschützes vergeht ein Zeitraum von 3,8 Sekunden. In welcher Entfernung steht die Kanone vom Beobachter, wenn die Geschwindigkeit des Schalles zu 333 m angenommen wird?

Lösung: s = 1265, 4 m.

5) Welche Zeit braucht ein Radfahrer, um bei einer Geschwindigkeit von 5 m einen Weg von 12 km zurückzulegen?

Lösung: t = 40 Minuten.

6) Welche Entfernung kann ein guter Schlittschuhläufer bei 9 m Geschwindigkeit in 2 Stunden durcheilen?

Lösung: s = 8,64 Meilen.

7) Welchen Durchmesser erhält ein Wasserrad, wenn die Umfangsgeschwindigkeit = 1,5 m, und die Umdrehungszahl = 10 betragen soll?

Lösung: d = 2,866 m.

8) Eine schmiedeeiserne Welle von 80 mm Durchmesser soll abgedreht werden; die Umfangsgeschwindigkeit soll 0,13 m betragen. Wie viel Umdrehungen mufs die Welle in der Minute machen, um diese Geschwindigkeit zu erreichen?

Lösung: n = 31 Umdrehungen.

9) Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit eines Rades von 1,5 m Durchmesser, wenn dasselbe 80 Umdrehungen pro Minute macht?

Lösung: v = 6,28 m.

10) Eine Dampfmaschine macht 50 Umdrehungen in jeder Minute; der Kurbelhalbmesser sei = 0,4 m. Wie grofs ist die mittlere Geschwindigheit des Kurbelzapfens?

Lösung: v = 2,09 m.

11) Wieviel Umdrehungen in einer Minute hat eine Drehbank bei dem Abdrehen einer Riemenscheibe von 1 m Durchmesser zu machen, wenn die beste Schnittgeschwindigkeit 75 mm beträgt?

Lösung: n = 1,43 Umdrehungen.

12) Welche Zeit erfordert das Abdrehen einer 80 mm starken und 4,5 m langen Welle, bei einer Schnittgeschwindigkeit von 100 mm und einer Schnittbreite von 1 mm?

Lösung: t = 3,1 Stunden.

---

*) Bei dem Lösen der Übungsbeispiele ist namentlich von dem Anfänger streng zu beachten, dafs die Werte für Weg, Zeit und Geschwindigkeit unbedingt in den richtigen Einheiten eingesetzt werden; also Wege und Geschwindigkeiten stets in Meter, Zeiten stets in Sekunden.

13) Wie viel Doppelhübe pro Minute mufs eine Pumpe machen, wenn die mittlere Kolbengeschwindigkeit 0,5 m und der Kolbenhub 0,3 m betragen soll?

Lösung: n = 50 Doppelhübe = 50 Umdrehungen.

14) Wie grofs ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit einer Dampfmaschine, wenn die Kurbel 80 Umdrehungen pro Minute macht und der Kolbenhub 0,8 m beträgt?

Lösung: v = 2,13 m.

Zweites Kapitel.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wird einem Körper durch die Einwirkung einer Kraft eine gewisse Geschwindigkeit erteilt, hört aber die Wirkung dieser Kraft plötzlich auf, so wird der Körper, infolge seines Beharrungsvermögens, mit dieser einmal erlangten Geschwindigkeit sich weter fortbewegen, wenn keine Hindernisse oder Widerstände auftreten. Wirkt die Kraft andauernd, so wird der Körper nach Verlauf einer Sekunde eine ganz bestimmte Geschwindigkeit erreichen. Nimmt diese Geschwindigkeit für alle aufeinanderfolgenden Sekunden um das Gleiche zu, so wird die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, und nennt man diese Geschwindigkeitszunahme des Körpers in einer jeden Sekunde seine Beschleunigung.

Bezeichnet man mit v die Endgeschwindigkeit, welche ein Körper nach Verlauf von t Sekunden erreicht hat, und mit p die durch die Einwirkung einer Kraft erlangte Beschleunigung pro Sekunde, so ist diese Endgeschwindigkeit v

nach Ablauf der			1^{ten}	Sekunde	= 1 p,
"	"	"	2^{ten}	"	= 2 p,
"	"	"	3^{ten}	"	= 3 p und
"	"	"	10^{ten}	"	= 10 p u. s. w.

also nach Ablauf von t Sekunden:

$$v = t \cdot p = p \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Der Weg s, welchen der Körper bei dieser Art der Bewegung zurücklegt, ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Wollte man, dafs der Körper bei gleichförmiger Bewegung den Weg s in derselben Zeit zurücklegen sollte, wie bei der beschleunigten Bewegung, so müfste er sich mit einer mittleren Geschwindigkeit fortbewegen, welche sich aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit des mit beschleunigter Bewegung fortschreitenden Körpers ergiebt.

Geht aber ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der beschleunigten Bewegung über, so ist seine Anfangsgeschwindigkeit $= 0 =$ Null; die nach t Sekunden durch die Beschleunigung p erlangte Endgeschwindigkeit nach Formel 10) $v = p \cdot t$, mithin seine mittlere Geschwindigkeit $= \frac{0 + p \cdot t}{2} = \frac{p \cdot t}{2}$, und daher der mit dieser mittleren Geschwindigkeit in t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{p \cdot t}{2} \cdot t = \frac{p \cdot t \cdot t}{2} = \frac{p \cdot t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Aus der Gleichung $v = p \cdot t$ erhält man: $p = \frac{v}{t}$ und $t = \frac{v}{p}$. Setzt man diesen Wert für p in Gleichung 11) ein, so folgt:

$$s = p \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{v}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{v \cdot t \cdot t}{2 \cdot t} = \frac{v \cdot t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

oder den Wert $t = \frac{v}{p}$ in Gleichung 12) für t eingesetzt, noch als dritter Wert für den zurückgelegten Weg:

$$s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{p} = \frac{v^2}{2 \cdot p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Hieraus: $v = \sqrt{2p \cdot s}$ . . . . 14)

Hatte der Körper in dem Momente, in welchem die Beschleunigung begann, bereits eine Anfangsgeschwindigkeit c, so ist seine nach t Sekunden erreichte Endgeschwindigkeit:

$$v = c + p \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

und der in diesen t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$\text{I)} \quad s = c \cdot t + \frac{p \cdot t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

$$\text{II)} \quad s = \left(\frac{c + v}{2}\right) \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

$$\text{III)} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2 \cdot p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Folglich: $v = \sqrt{c^2 + 2p \cdot s}$ . . . . 19)

Beispiele:

1) Ein Körper hat durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 2 m erlangt; welche Endgeschwindigkeit hat derselbe nach 10 Sekunden erreicht?

Nach Formel 10) erhält man:

$$v = p \cdot t = 2 \cdot 10 = 20 \text{ m.}$$

2) Welchen Weg hat derselbe Körper in diesen 10 Sekunden zurückgelegt?

Nach Formel 11) erhält man:

$$s = \frac{p \cdot t^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^2}{2} = 100 \text{ m};$$

oder nach Formel 12):

$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{20 \quad 10}{2} = 100 \text{ m}.$$

3) Ein Körper hat bei gleichförmig beschleunigter Bewegung in 6 Sekunden einen Weg von 50,4 m zurückgelegt; wie grofs ist seine Beschleunigung?

Aus Formel 11) $s = \frac{p \cdot t^2}{2}$ erhält man durch Umformung:

$$p = \frac{2 \cdot s}{t^2} = \frac{2 \cdot 50{,}4}{6 \cdot 6} = \frac{100{,}8}{36} = 2{,}8 \text{ m}.$$

4) Durch gleichförmige Beschleunigung ist ein Wagen in 8 Minuten aus einer Geschwindigkeit von 1,4 m in eine solche von 3,6 m versetzt worden; welchen Weg hat der Wagen in dieser Zeit zurückgelegt?

Nach Formel 17) erhält man:

$$s = \left(\frac{c + v}{2}\right) \cdot t = \left(\frac{1{,}4 + 3{,}6}{2}\right) \cdot 8 \cdot 60 = \frac{5}{2} \cdot 480 = 1200 \text{ m}.$$

5) Ein Körper hat eine Anfangsgeschwindigkeit von 8 m und erfährt in jeder Sekunde eine Beschleunigung von 1,5 m; welche Geschwindigkeit wird derselbe nach Verlauf von 4 Sekunden erreicht haben?

Nach Formel 15) erhält man:

$$v = c + p \cdot t = 8 + 1{,}5 \cdot 4 = 14 \text{ m}.$$

6) Welche Endgeschwindigkeit erreicht ein Körper, welcher durch eine Beschleunigung von 1,3 m einen Weg von 60 m zurückgelegt hat?

Nach Formel 14) erhält man:

$$v = \sqrt{2p \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 1{,}3 \cdot 60} = 12{,}49 \text{ m}.$$

Übungsbeispiele:

1) Eine von einer schiefen Ebene herabrollende Kugel hat am Anfange der Bewegung bereits eine Geschwindigkeit von 10 m, und erhält beim Herabrollen eine Beschleunigung von 2 m. Wie grofs ist die Geschwindigkeit der Kugel nach 4 Sekunden?

Lösung: $v = 18$ m.

2) Ein Körper besitzt eine Geschwindigkeit von 6 m und erhält durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 2 m. Welchen Weg hat der Körper nach Verlauf von 20 Sekunden zurückgelegt?

Lösung: $s = 520$ m.

3) Ein Körper hat durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 1,5 m erlangt; nach welcher Zeit wird der Körper eine Endgeschwindigkeit von 30 m erreicht haben?

Lösung: $t = 20$ Sekunden.

4) Welche Beschleunigung erhält ein Geschoss in dem Laufe eines 5 m langen Geschützes, wenn es mit einer Geschwindigkeit von 450 m aus der Mündung austritt?

Lösung: $p = 20250$ m.

5) Wie grofs wird die Beschleunigung eines Steines, welcher 7 Sekunden braucht, um einen 240,5 m tiefen Schacht zu durchfallen?

Lösung: $p = 9{,}81$ m.

6) Ein Eisenbahnzug geht aus dem Zustande der Ruhe in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung über, so dafs derselbe in 40 Sekunden einen Weg von 200 m zurückgelegt hat. Wie grofs ist seine Beschleunigung und seine Geschwindigkeit nach 40 Sekunden?

Lösung: $p = 0{,}25$ m.
$v = 10$ m.

Drittes Kapitel.

Gleichförmig verzögerte Bewegung.

Tritt der Bewegung eines Körpers ein andauernder Widerstand entgegen, so wird diese Bewegung eine Verzögerung erleiden. Nimmt die Geschwindigkeitsverminderung hierbei in gleichen Zeiten um das Gleiche zu, so geht die Bewegung in eine gleichförmig verzögerte über.

Bezeichnet man mit:

c die Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers;
p die Geschwindigkeitsabnahme in einer Sekunde;
t die Zeit, in welcher der Körper zur Ruhe kommt, so ist:

$$c = p \, . \, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

da durch die Verzögerung p . t die Geschwindigkeit c aufgezehrt werden mufs. Ferner ist der in t Sekunden zurükgelegte Weg:

$$\text{I)}\; s = \frac{p}{2} \, . \, t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

$$\text{II)}\; s = \frac{c \, . \, t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

$$\text{III)}\; s = \frac{c^2}{2 \, . \, p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

Die nach t Sekunden erlangte Endgeschwindigkeit eines Körpers, welcher eine Anfangsgeschwindigkeit c hatte, wird daher sein:

$$v = c - p \, . \, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

und der in diesen t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$\text{I)}\; s = c \, . \, t - \frac{p}{2} \, . \, t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

$$\text{II)}\; s = \left(\frac{c + v}{2}\right) . \, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

$$\text{III)}\; s = \frac{c^2 - v^2}{2 \, . \, p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Beispiele:

1) Ein Eisenbahnzug hat eine Geschwindigkeit von 12 m; derselbe wird derartig gebremst, dafs seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 0,75 m abnimmt. Wie grofs wird seine Geschwindigkeit nach 6 Sekunden sein?

Nach Formel 24) erhält man:

$$v = c - p \,.\, t = 12 - 0{,}75 \,.\, 6 = 7{,}5 \text{ m.}$$

2) In welcher Zeit wird dieser Zug zum Stillstand gelangen?

Aus Formel 20) $c = p \,.\, t$ erhält man durch Umformung:

$$t = \frac{c}{p} = \frac{12}{0{,}75} = 16 \text{ Sekunden.}$$

3) Welchen Weg hat dieser Eisenbahnzug, vom Moment des Bremsens an gerechnet, bis zum Stillstand zurückgelegt?

Nach Formel 23) erhält man:

$$s = \frac{c^2}{2 \,.\, p} = \frac{12^2}{2 \,.\, 0{,}75} = 96 \text{ m.}$$

4) Ein Eisenbahnzug geht mit einer Geschwindigkeit von 16 m von einer Station A ab, und erleidet pro Sekunde eine gleichförmige Verzögerung von 0,05 m; derselbe kommt an einer Station B mit einer Geschwindigkeit von 3 m an. Wie weit war A von B entfernt?

Nach Formel 27) erhält man:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2 \,.\, p} = \frac{16^2 - 3^2}{2 \,.\, 0{,}05} = 2470 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Eisenbahnzug hat eine Geschwindigkeit von 14 m. Nachdem die Maschine abgestellt wurde, bewegte er sich noch 3000 m fort, ehe er zum Stillstand kam. Wie grofs ist die Verzögerung des Zuges in jeder Sekunde gewesen?

Lösung: $p = 0{,}0326$ m.

2) Eine auf einer Ebene fortrollende Kugel hat eine Geschwindigkeit von 8,62 m; diese Geschwindigkeit wird durch Bewegungshindernisse in jeder Sekunde um 0,04 m vermindert. Nach welcher Zeit hat die Kugel eine Geschwindigkeit von 4 m angenommen?

Lösung: $t = 115{,}5$ Sekunden.

3) Welchen Weg legt die in vorstehender Aufgabe besprochene Kugel in den 115,5 Sekunden zurück?

Lösung: $s = 728{,}8$ m.

Viertes Kapitel.

Freier Fall der Körper.

Fällt ein Körper im luftleeren Raume aus nicht ungewöhnlicher Höhe frei herab, so nimmt derselbe infolge der Anziehungskraft der Erde eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an; durch Beobachtung hat man gefunden, daſs dieser Körper in einer Sekunde einen Weg von 4,095 m Länge durchfällt. Es ist daher die Endgeschwindigkeit, oder die Beschleunigung des Körpers nach Verlauf einer Sekunde, doppelt so groſs, d. i. = 9,81 m (Formel 12), welcher Wert allgemein mit dem Buchstaben g bezeichnet wird.

Die vorstehenden Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung finden auch hier ihre Anwendung, und ist eben nur für p die Fallbeschleunigung g = 9,81 zu setzen.

Wird ein Körper mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfen, so nimmt diese Geschwindigkeit in jeder Sekunde um ebensoviel ab, als sie beim Fallen des Körpers zunimmt.

Es braucht daher ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper genau dieselbe Zeit zum Steigen, als zum Fallen. Ist ein senkrecht aufwärts geworfener Körper 12 Sekunden ausgeblieben, so ist er 6 Sekunden lang gestiegen und 6 Sekunden lang gefallen; er muſs deshalb nach der Gleichung $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ einen Weg $s = \frac{9{,}81}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 176{,}58$ m zurückgelegt haben.

Es ist demnach die Gröſse des Weges, welchen ein Körper seit Anfang seiner Bewegung durchfällt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{In 1 Sekunde} & \ldots\ldots = & 1 \cdot \frac{g}{2} \\ \text{,, 2 Sekunden} & \ldots\ldots = & 4 \cdot \frac{g}{2} \\ \text{,, 3 ,,} & \ldots\ldots = & 9 \cdot \frac{g}{2} \\ \text{,, 4 ,,} & \ldots\ldots = & 16 \cdot \frac{g}{2} \\ \text{,, 5 ,,} & \ldots\ldots = & 25 \cdot \frac{g}{2} \\ \text{,, t ,,} & \ldots\ldots = & t^2 \cdot \frac{g}{2} \end{array}\right\} \text{ nach Formel 11): } s = \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Hieraus ersieht man, dafs der mit gleichförmiger Beschleunigung durchfallene Weg mit dem Quadrate der Zeit zunimmt, d. h. in 2 Sekunden wird ein 4 mal gröfserer, in 3 Sekunden ein 9 mal gröfserer, in 10 Sekunden ein 100 mal gröfserer Weg zurückgelegt, als in einer Sekunde.

Der Fallraum in einer beliebig angenommenen einzelnen Sekunde wird erhalten, wenn man von dem ganzen Fallraume, welchen der Körper bis zu Ende dieser Sekunde durchfallen hat, denjenigen der vorhergehenden Sekunde abzieht. Demnach ergeben sich die Fallräume:

In der 1ten Sekunde zu . . . . . $1\frac{g}{2} = 1\frac{g}{2}$.

„ „ 2ten „ „ $4\frac{g}{2} - 1\frac{g}{2} = 3\frac{g}{2}$.

„ „ 3ten „ „ $9\frac{g}{2} - 4\frac{g}{2} = 5\frac{g}{2}$.

„ „ 4ten „ „ $16\frac{g}{2} - 9\frac{g}{2} = 7\frac{g}{2}$.

„ „ 5ten „ „ $25\frac{g}{2} - 16\frac{g}{2} = 9\frac{g}{2}$ u. s. w.

Aus dem Inhalte des Vorstehenden lässt sich folgende Tabelle über den freien Fall der Körper zusammensetzen:

Anzahl der Sekunden t	Endschwindigkeit v in m	Fallraum in den einzelnen Sekunden in m	Ganzer Fallraum seit Anfang der Bewegung in m	Hauptformeln:
1	g	$\frac{g}{2}$	$\frac{g}{2}$	$v = gt;\ t = \frac{v}{g}$.
2	2g	$3\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$s = \frac{gt^2}{2};\ t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$.
3	3g	$5\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	
4	4g	$7\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	
t	tg	$(2t - 1)\frac{g}{2}$	$t^2\frac{g}{2}$	$v = \sqrt{2gs};\ s = \frac{v^2}{2g}$.

Beispiele:

1) Welchen Raum durchfällt ein Körper in 8 Sekunden, und welche Endgeschwindigkeit hat derselbe dabei erlangt?

Nach Formel 11) erhält man:

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9{,}81}{2} \cdot 64 = 313{,}92 \text{ m.}$$

Die Endgeschwindigkeit bestimmt sich aus Formel 10) zu:

$$v = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 8 = 78{,}48 \text{ m.}$$

2) Welche Endgeschwindigkeit erreichte ein Körper, der 60 m durchfallen hat, und welche Zeit gebrauchte derselbe hierzu?

Nach Formel 14) erhält man:

$$v = \sqrt{2g \,.\, s} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 60} = 34{,}31 \text{ m.}$$

Aus Formel 10) $v = g \,.\, t$ erhält man die Zeit:

$$t = \frac{v}{g} = \frac{34{,}31}{9{,}81} = 3{,}5 \text{ Sekunden.}$$

3) Welche Anfangsgeschwindigkeit besafs ein Körper, der senkrecht in die Höhe geworfen wurde und 18 Sekunden lang ausblieb?

Nach Formel 20) erhält man:

$$c = g \,.\, t = 9{,}81 \,.\, 9 = 88{,}29 \text{ m.}$$

4) Welche Höhe hat dieser Körper erreicht?

Nach Formel 23) erhält man:

$$s = \frac{c^2}{2 \,.\, g} = \frac{88{,}29^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 397{,}31 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Dampfhammer wird 1,05 m hoch gehoben und fällt dann frei herunter. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er das zu schmiedende Arbeitsstück?

Lösung: $v = 4{,}54$ m.

2) Bei einer Handramme wird der Bär auf eine Höhe von 1,6 m gehoben. Mit welcher Geschwindigkeit stöfst derselbe bei dem Herabfallen gegen den Pfahl, und welche Zeit braucht er zum Herabfallen?

Lösung: $v = 5{,}6$ m; $t = 0{,}57$ Sekunden.

3) Wie hoch steigt ein Körper, der mit einer Geschwindigkeit von 40 m senkrecht in die Höhe geworfen wird, und welche Zeit braucht er zum Aufsteigen?

Lösung: $s = 81{,}55$ m; $t = 4{,}07$ Sekunden.

4) Ein Körper, welcher senkrecht in die Höhe geworfen wurde, kam nach 18,5 Sekunden zurück. Wie grofs war die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers, und welche Höhe hatte derselbe erreicht?

Lösung: $v = 90{,}74$ m; $s = 419{,}67$ m.

Von den Kräften.

Jede Ursache, welche einen Körper bewegt oder zu bewegen strebt, eine vorhandene Bewegung abändert oder abzuändern sucht, nennt man **Kraft**.

Die Kräfte werden gewöhnlich eingeteilt in bewegende Kräfte und in Widerstände. Erstere können Bewegung erzeugen oder verändern, letztere dagegen können Bewegungen nur verhindern, mäſsigen, oder gänzlich vernichten. Naturgemäſs kann jede bewegende Kraft auch als Widerstand auftreten.

Die Kräfte könnnen durch verschiedene Ursachen erzeugt werden: Durch die Anziehungskraft der Erde; durch die Muskelkraft der Menschen und Tiere; durch den Stoſs und Druck des Wassers, der Luft, des Dampfes; durch die Elastizität der Federn, d. i. der Eigenschaft derselben, sich auszudehnen oder zusammenzuziehen; durch die Wirkung der Elektrizität, des Magnetismus u. s. w.

Die Schwerkraft wird ausgenützt bei Uhrwerken, Wasserrädern, Turbinen, Rammen u. s. w.

Die Elastizität gasförmiger Körper findet man verwertet als treibendes Mittel unserer Dampf- Luft- Gaskraft-Maschinen, unserer Gewehre und Geschütze.

Zu den Widerständen rechnet man die Reibung, die Steifigkeit der Seile, die Festigkeit der Materialien u. s. w.

Die Gröſsen der Kräfte werden durch Gewichte gemessen.

Als Krafteinheit dient das Kilogramm. Man spricht daher von einer Kraft von 10, 20, 30, 100 kg; d. h. die Wirkung dieser Kraft ist so groſs, wie der Zug oder Druck, welcher von einem Gewichte von 10, 20, 30, 100 kg ausgeübt wird.

Man sagt auch, eine Kraft irgend welcher Art habe eine Gröſse von z. B. 20 kg, wenn diese Kraft befähigt ist, ein Gewichtsstück von 20 kg senkrecht empor zu heben, oder schwebend zu erhalten.

Man hat bei der Wirkung der Kräfte nicht nur ihre Gröſsen, sondern auch ihre Richtung und die Lage ihres Angriffspunktes in Betracht zu ziehen.

Den Angriffspunkt einer Kraft kann man in der Richtung derselben beliebig verlegen, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern.

Man kann auch die Kräfte bildlich (zeichnerisch) durch Linien darstellen. Die Länge der Linie giebt alsdann die Gröſse der Kraft, die Lage der Linie im Raume die Richtung, ein Pfeil an einem Ende der Linie den Richtungssinn und ein beliebiger Punkt, gewöhnlich ein Endpunkt der Linie, den Angriffspunkt der Kraft an.

Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf einen Körper, so wird es sich darum handeln, eine einzige Kraft aufzufinden und festzustellen, in welcher Richtung dieselbe zu wirken hätte, damit sie die gleiche Wirkung auf den Körper hervorbringt, wie die verschiedenen Kräfte zusammengenommen. Man nennt das Verfahren, Gröſse und Richtung dieser einzigen Kraft aufzufinden, das Zusammensetzen der Kräfte.

Handelt es sich hingegen darum, die Kräfte aufzusuchen, welche durch ihre gemeinschaftliche Thätigkeit dieselbe Wirkung auf einen Körper hervorbringen würden, wie eine einzige Kraft, so nennt man dieses Verfahren das Zerlegen der Kräfte.

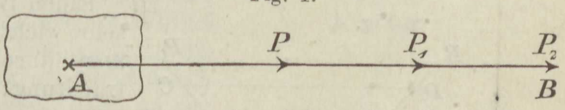
Diejenigen Kräfte, welche eine einzige Kraft zu ersetzen vermögen, nennt man Seitenkräfte oder Komponenten, während die eine Kraft, welche mehrere Kräfte zu ersetzen vermag, Mittelkraft oder Resultante genannt wird.

Fünftes Kapitel.

Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

Wirken zwei oder mehrere Kräfte P, P_1, P_2 (Fig. 1) auf einen Punkt A eines Körpers, in gerader Linie und in ein und derselben Richtung, so ist ihre Mittelkraft gleich der Summe der einzelnen Kräfte P, P_1, P_2 und erfolgt die Bewegung in derselben Richtung. Die Mittelkraft kann man sich in einem beliebigen Punkte der Linie AB wirksam denken.

Fig. 1.

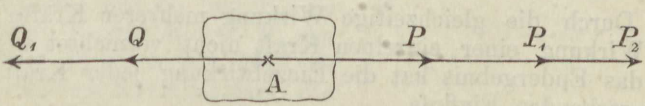


Bezeichnet man diese Mittelkraft mit R, so ist:

$$R = P + P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

Wirken mehrere Kräfte P, P_1, P_2, Q, Q_1 (Fig. 2) in gerader Linie, aber entgegengesetzt, auf einen Punkt A eines

Fig. 2.



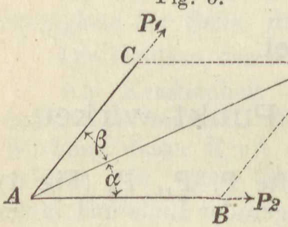
Körpers, so ist ihre Mittelkraft gleich der Summe der auf einer Seite wirkenden Kräfte, weniger der Summe der auf der anderen Seite entgegengesetzt wirkenden, und die Bewegung erfolgt in der Richtung derjenigen Kräfte, deren Summe am gröfsten ist.

Ist $P + P_1 + P_2$ gröfser $Q + Q_1$, so ist die Mittelkraft:

$$R = (P + P_1 + P_2) - (Q + Q_1) \quad \ldots\ldots \quad 29)$$

Haben 2 Kräfte, P_1 und P_2, einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt A und bilden ihre Richtungslinien einen Winkel mit einander, so erhält man ihre Mittelkraft auf folgende Weise: Man trage auf den Richtungslinien der Kräfte Teile auf, welche sich bezüglich ihrer Gröfse zu einander verhalten wie diese Kräfte, d. h. wäre $P_1 = 30$ kg und $P_2 = 50$ kg, so mache man z. B. $AC = 30$ mm und $AB = 50$ mm (Fig. 3, 4, 5), konstruiere mit Hilfe dieser Linien das Parallelogramm ABCD und ziehe die Diagonale AD. Alsdann stellt diese die Mittelkraft, sowohl ihrer Gröfse, als auch ihrer Richtung nach, vor.

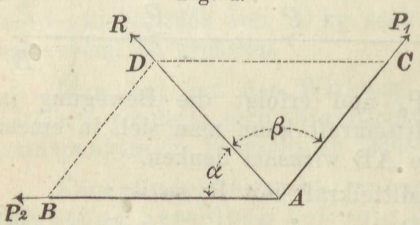
Fig. 3.



Mifst nun die Länge dieser Diagonale = 58,3 mm, so ist, da 1 kg durch 1 mm dargestellt wurde, die Mittelkraft = 58,3 kg.

Das durch diese Konstruktion erhaltene Parallelogramm heifst das Parallelogramm der Kräfte.

Fig. 4.



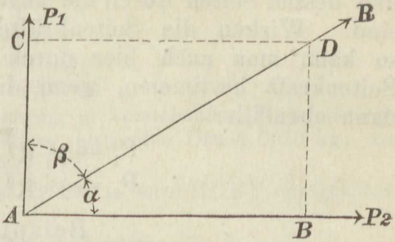
Einen Beweis für diesen sehr wichtigen Satz erhält man durch folgende Betrachtung:

Die Wirkungen beider Kräfte auf ein und denselben Körper in ein und derselben Zeit, müssen im Verhältnis zu ihrer Gröfse stehen; es müssen sich daher die Wege, welche die Kräfte den beeinflufsten Körper in ein und derselben Zeit durchlaufen lassen, zu einander verhalten, wie diese Kräfte selbst.

Durch die gleichzeitige Wirkung mehrerer Kräfte kann die Wirkung einer einzelnen Kraft nicht vernichtet werden; auf das Endergebnis hat die Einzelwirkung jeder Kraft stets entsprechenden Einflufs.

Es wird daher immer dieselbe Wirkung erzielt, gleichgültig, ob sämtliche Kräfte zugleich eine gewisse Zeit wirken, oder ob sie einzeln, eine nach der anderen, in genau derselben Zeit thätig sind.

Fig. 5.



Wendet man das Gesagte auf das Parallelogramm der Kräfte an, so ergiebt sich folgendes:

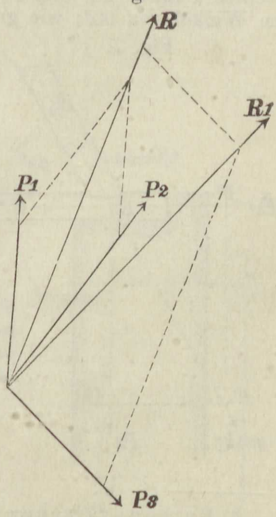
In derselben Zeit, in welcher die Kraft P_2 den Körper von A nach B bewegt, wird ihn die Kraft P_1 von A nach C bewegen. Denkt man sich daher zunächst P_2 während jener Zeit allein wirksam, so wird dadurch der Körper von A nach B geführt; ist hierauf die Kraft P_1 dieselbe Zeit allein thätig, so wird der Körper von B nach D bewegt, wobei Bedingung ist, daſs BD parallel AC ist.

Die endgültige Bewegung des Körpers ist mithin zum Ausdrucke gebracht durch die Lage der Linie AD.

Dieselbe Bewegung kann also hiernach sowohl durch die gleichzeitige Thätigkeit beider Kräfte, als auch durch diejenige einer einzigen Kraft = AD erzeugt werden.

Mithin muſs AD gleich der Mittelkraft der beiden Einzelkräfte P_1 und P_2 sowohl der Richtung, als auch der Gröſse nach, sein.

Fig. 6.



Wirken die beiden Kräfte P_1 und P_2 unter einem rechten Winkel auf den Punkt A (Fig. 5), so ist die Gröſse der Mittelkraft leicht durch Rechnung zu finden, denn es ist:

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 \text{*)} \quad . \quad . \quad 30)$$

oder: $$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2} \quad . \quad . \quad 31)$$

Aus diesen Formeln erhält man:

$$P_1 = \sqrt{R^2 - P_2{}^2} \quad . \quad . \quad 32)$$

$$P_2 = \sqrt{R^2 - P_1{}^2} \quad . \quad . \quad 33)$$

Wirken mehr als zwei Kräfte unter bestimmten Winkeln auf einen Punkt (Fig. 6), so bildet man zunächst aus P_1 und P_2 die Mittelkraft R, aus R und P_3 die Mittelkraft R_1 u. s. w. Die zuletzt gefundene Kraft ist dann die Mittelkraft sämtlicher Kräfte.

Ist nur eine einzige Kraft P gegeben und will man wissen, welche Wirkung dieselbe in einem Punkte eines Körpers nach zwei bestimmten Richtungen ausübt, so ist das Verfahren nur umzukehren, d. h. man konstruiere ein Parallelogramm, dessen Diagonale durch die gegebene Kraft P dargestellt wird, und dessen Seiten durch die angegebenen Richtungen bestimmt sind. Wirken die Seitenkräfte rechtwinkelig zu einander, so kann man auch hier durch Rechnung die Gröfse einer Seitenkraft bestimmen, wenn die andere gegeben ist; es ist dann ebenfalls:

$$P_1 = \sqrt{R^2 - P_2{}^2}$$
$$P_2 = \sqrt{R^2 - P_1{}^2}\,{}^{*)}$$

Beispiele:

1) Zwei Kräfte, $P_1 = 10$ kg und $P_2 = 15$ kg, wirken unter einem Winkel von 60° auf einen Punkt A; wie grofs ist die Mittelkraft R, und welche Winkel bildet dieselbe mit den gegebenen Kräften?

Durch Konstruktion und mit Hilfe des Transporteurs erhält man:

$R = 21{,}79$ kg; $\alpha = 23^0\ 10'$; $\beta = 36^0\ 50'$.

2) Es sind die beiden Kräfte $P_1 = 25$ kg und $P_2 = 60$ kg gegeben, welche einen Winkel von 40° einschliefsen; welche Winkel bildet die Mittelkraft mit den gegebenen Kräften und wie grofs ist dieselbe?

$R = 80{,}76$ kg; $\alpha = 11^0\ 25'$; $\beta = 28^0\ 35'$.

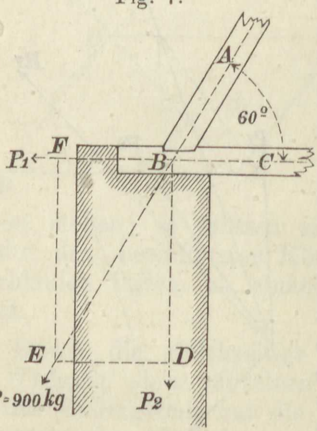
3) Zwei Kräfte, $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 35$ kg, wirken unter einem rechten Winkel auf einen Punkt A; wie grofs ist die Mittelkraft?

Nach Formel 31) erhält man:

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2} = \sqrt{20^2 + 35^2} = \sqrt{1625} = 40{,}31 \text{ kg}.$$

4) Drei Kräfte, $P_1 = 300$ kg, $P_2 = 400$ kg und $P_3 = 500$ kg, wirken auf einen Punkt. P_1 und P_2 bilden einen Winkel von 40°, P_2 und P_3 einen Winkel von 50°; wie grofs ist die Resultante dieser Kräfte?

Fig. 7.



Durch Konstruktion findet man:

$R = 960$ kg.

5) An einem Punkte A eines Körpers wirken die Kräfte $P_1 = 25$ kg, $P_2 = 36$ kg, $P_3 = 40$ kg, $P_4 = 85$ kg. P_1 und P_2 bilden einen Winkel von 45°, P_2 und P_3 einen solchen von 80°, P_3 und P_4 einen Winkel von 70°; wie grofs ist die Mittelkraft dieser Kräfte?

Durch Konstruktion findet man:

$R = 66$ kg.

6) In der Richtung eines Dachsparrens (Fig. 7) wirkt unter einem Winkel von 60° ein Druck von 900 kg; es soll der Horizontalschub P_1 und der Vertikaldruck P_2 bestimmt werden, welchen die Mauer auszuhalten hat.

---

*) Pythagoräischer Lehrsatz: In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypothenuse, gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Nimmt man auf der Richtungslinie der Kraft P ein Stück BE an, welches die Gröfse dieser Kraft darstellen soll, und zieht man BD vertikal und BF horizontal, ferner von E aus DE parallel BF und EF parallel BD, so stellt BD den Vertikaldruck und BF den Horizontalschub vor.

Durch Konstruktion ergiebt sich:

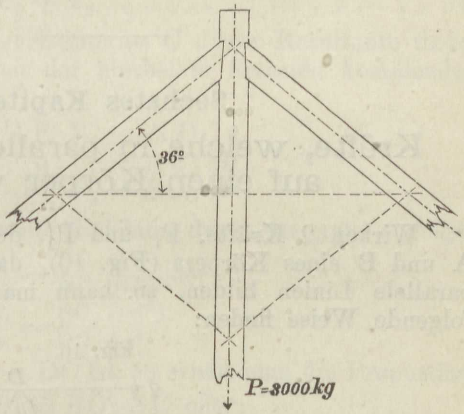
$$P_1 = 450 \text{ kg};$$
$$P_2 = 779{,}4 \text{ kg}.$$

7) Die Neigung des Dachsparrens in vorstehender Figur betrage 45^0, und der in Punkt B auf die Mauer ausgeübte Druck 2050 kg; wie grofs werden in diesem Falle P_1 und P_2?

Da hier $\measuredangle ABC = \measuredangle FBE = 45^0$ ist, so wird BDEF ein Quadrat, mithin BF = EF, folglich:

$$2050^2 = \overline{BF}^2 + \overline{EF}^2 \text{ oder:}$$
$$2050^2 = 2\ \overline{BF}^2.$$
$$\overline{BF}^2 = \frac{2050^2}{2} = \frac{4202500}{2} = 2101250.$$
$$\overline{BF} = P_1 = P_2 = \sqrt{2101250} = 1449{,}5 \text{ kg}.$$

Fig. 8.

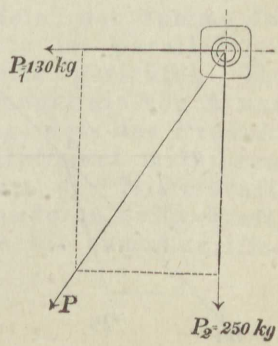


8) An der Hängesäule eines einfachen Sprengwerkes (Fig. 8) wirkt vertikal ein Zug von 3000 kg; die Streben sind unter einem Winkel von 36^0 gegen die Horizontale geneigt. Welchen Druck erhält jede der Streben?

Durch Konstruktion erhält man den Druck in jeder Strebe

= 2551 kg.

Fig. 9.



9) Auf einen Zapfen (Fig. 9) wird in horizontaler Richtung ein Zug $P_1 = 130$ kg, und in vertikaler Richtung ein Zug $P_2 = 250$ kg ausgeübt; welchen Zug P hat der Zapfen überhaupt auszuhalten?

Nach Formel 30) erhält man:

$$P^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2;\ P = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2};$$
$$P = \sqrt{130^2 + 250^2} = \sqrt{79400} = 281{,}7 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) An drei verschiedenen Punkten einer geraden Linie AB (Fig. 1) wirken die Kräfte $P = 45$ kg, $P_1 = 52$ kg, $P_2 = 63$ kg nach gleicher Richtung; wie grofs ist die Mittelkraft?

Lösung: $R = 160$ kg.

2) In einer geraden Linie wirken nach der einen Seite die Kräfte $P = 35$ kg, $P_1 = 42$ kg, $P_2 = 60$ kg, nach der entgegengesetzten Seite die Kräfte $Q = 50$ kg und $Q_1 = 25$ kg (Fig. 2); wie grofs ist die bewegende Kraft, und nach welcher Richtung bewegt sich der Körper?

Lösung: $R = 62$ kg; die Bewegung erfolgt in der Richtung der Kräfte P, P_1, P_2.

3) Unter einem rechten Winkel wirken die Kräfte $P_1 = 30$ kg und $P_2 = 50$ kg an einem Punkte A eines Körpers (Fig. 5); wie grofs ist die Mittelkraft?

Lösung: $R = 58{,}3$ kg.

4) Eine auf einen Punkt A wirkende Kraft R (Fig. 5) von 120 kg soll in zwei aufeinander rechtwinkelig stehende Kräfte zerlegt werden, von denen die eine $P_1 = 75$ kg sein mag; wie grofs wird P_2?

Lösung: $P_2 = 93{,}67$ kg.

5) Wie grofs ist in vorstehendem Beispiel der Winkel β, welchen die Kraft $P_1 = 75$ kg mit der Kraft $R = 120$ kg bildet?

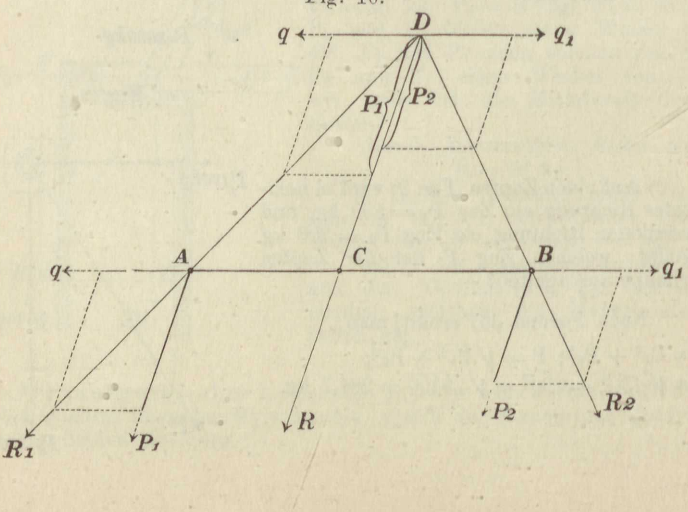
Lösung: $\beta = 51^0\ 19'$.

Sechstes Kapitel.

Kräfte, welche in paralleler Richtung auf einen Körper wirken.

Wirken 2 Kräfte, P_1 und P_2, derartig an den Punkten A und B eines Körpers (Fig. 10), dafs ihre Richtungslinien parallele Linien bilden, so kann man ihre Mittelkraft auf folgende Weise finden:

Fig. 10.



Denkt man sich in den Punkten A und B eines Körpers, in der Verlängerung der Verbindungslinie dieser Punkte, zwei gleich große Kräfte q und q_1 in entgegengesetzter Richtung angebracht, so werden dieselben den Zustand des Körpers in nichts ändern, da diese Kräfte sich gegenseitig aufheben. Nun konstruiere man mit Hilfe des Parallelogramms aus q und P_1 die Resultante R_1, ebenso aus q_1 und P_2 die Resultante R_2 und verlängere die Richtungslinien dieser Mittelkräfte R_1 und R_2, bis sie sich in dem Punkte D schneiden. Zerlegt man in D umgekehrt diese beiden Mittleren wieder in Seitenkräfte, welche gleich und parallel denjenigen sind, aus welchen sie zusammengesetzt wurden, so kommen die Komponenten q und q_1, die parallel zur Verbindungslinie der Angriffspunkte A und B gerichtet sind, nicht weiter in Betracht, da sie sich gegenseitig aufheben. Die beiden anderen Seitenkräfte P_1 und P_2 fallen in eine gerade Linie zusammen, und ergeben die Größe der gesuchten Mittelkraft

$$R = P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Die Lage des Angriffspunktes C dieser Resultante findet man aus der Ähnlichkeit der hierbei in Betracht kommenden Dreiecke.

Es ist $\triangle AP_1R_1 \sim \triangle DCA$,
folglich: $q : P_1 = AC : DC$.
Ebenso verhält sich $q_1 : P_2 = BC : DC$.

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so folgt:

$$\frac{q_1}{P_2} : \frac{q}{P_1} = \frac{BC}{DC} : \frac{AC}{DC} \text{ oder:}$$

$$\frac{q_1 \cdot P_1}{q \cdot P_2} = \frac{BC \cdot DC}{DC \cdot AC}\text{*)}$$

und da $q = q_1$ und $DC = DC$ ist, so erhält man die Proportion

$$P_1 : P_2 = BC : AC \text{ oder:}$$

$$P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Es ist also die Mittelkraft gleich der Summe der Seitenkräfte; ihre Richtungslinie ist parallel mit diesen und nach derselben Seite gerichtet. Ihr Angriffspunkt teilt die Verbindungslinie von A und B in zwei Teile und zwar derartig, daß das Produkt aus der einen Seitenkraft, multipliziert mit ihrem Abstande bis zum Angriffspunkte der Mittelkraft, gleich ist dem Produkte aus der anderen Seitenkraft, multipliziert mit deren Abstande bis zum Angriffspunkte der Mittelkraft.

---

*) Vergl. Seite 41, unter 33, d).

Wirkt in dem Angriffspunkte C der Resultante in entgegengesetzter Richtung eine Kraft, welche gleich dieser Resultante ist, so wird diese Kraft den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht halten; oder denkt man sich statt der entgegengesetzt wirkenden Kraft in C einen Stützpunkt angebracht, so wird ebenfalls Gleichgewicht stattfinden.

Es sind daher die beiden Kräfte P_1 und P_2 im Gleichgewicht, wenn

$P_1 . AC = P_2 . BC$ ist. (Vergl. Formel 35.)

Diese Gleichung läſst sich aber als Proportion folgendermaſsen schreiben:

$$P_1 : P_2 = BC : AC$$

und folgt nun aus den Regeln über Umformung der Proportionen:

$(P_1 + P_2) : P_1 = (BC + AC) : BC$ (Vergl. Kap. VII, unter 41.),

oder $R : P_1 = AB : BC$. Mithin:

$$P_1 = \frac{BC}{AB} . R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

$$\text{und } BC = \frac{AB}{R} . P_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37)$$

Ferner läſst sich noch folgende Proportion bilden:

$$P_2 : (P_1 + P_2) = AC : (BC + AC) \text{ oder:}$$

$$P_2 : R = AC : AB$$

$$\text{und damit: } P_2 = \frac{AC}{AB} . R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 38)$$

$$AC = \frac{AB}{R} . P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Beispiele:

1) An den Punkten A und B eines Körpers, welche 1,6 m von einander entfernt sind, wirken in paralleler Richtung die Kräfte $P_1 = 32$ kg und $P_2 = 54$ kg. Es ist die Gröſse der Mittelkraft und die Lage des Angriffspunktes derselben zu bestimmen.

Nach Formel 34) erhält man:

$$R = P_1 + P_2 = 32 + 54 = 86 \text{ kg.}$$

Die Lage des Angriffspunktes C bestimmt sich nach Formel 37):

$$BC = \frac{AB}{R} . P_1 = \frac{1{,}6 . 32}{86} = 595 \text{ mm,}$$

und nach Formel 39):

$$AC = \frac{AB}{R} . P_2 = \frac{1{,}6 . 54}{86} = 1005 \text{ mm.}$$

2) Zwei parallele Kräfte, $P_1 = 36$ kg und $P_2 = 68$ kg, wirken in gleicher Richtung an den Punkten A und B eines Körpers, welche 2,4 m von einander entfernt sind. Man soll die Mittelkraft und die Lage des Angriffspunktes derselben bestimmen.

Als Mittelkraft erhält man nach Formel 34):

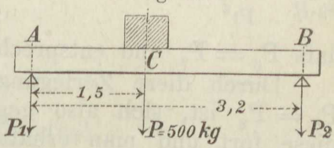
$$R = P_1 + P_2 = 36 + 68 = 104 \text{ kg}.$$

Setzt man die Entfernung $AC = x$, so wird $BC = AB - x$, mithin nach Formel 35):

$$P_1 \cdot x = P_2 \cdot (AB - x) \text{ oder:}$$
$$36x = 68 \cdot (2{,}4 - x).$$
$$36x = 68 \cdot 2{,}4 - 68x.$$
$$36x + 68x = 68 \cdot 2{,}4.$$
$$104x = 163{,}2.$$
$$x = \frac{163{,}2}{104} = 1{,}57 \text{ m; folglich:}$$
$$AC = x = 1{,}57 \text{ m, und } BC = AB - x = 2{,}4 - 1{,}57 = 0{,}83 \text{ m}.$$

3) Ein Balken liegt in den Punkten A und B frei auf und wird in einem Punkte C, der 1,5 m von A entfernt ist, mit 500 kg belastet. Welchen Druck haben die Auflagepunkte A und B auszuhalten, wenn die Entfernung $AB = 3{,}2$ m ist? (Fig. 11.)

Fig. 11.



Nach Formel 36) erhält man:

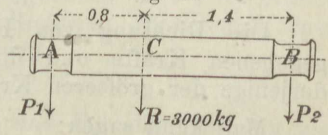
$$P_1 = \frac{BC}{AB} \cdot R = \frac{(3{,}2 - 1{,}5)}{3{,}2} \cdot 500 = 265{,}625 \text{ kg},$$

und nach Formel 38):

$$P_2 = \frac{AC}{AB} \cdot R = \frac{1{,}5 \cdot 500}{3{,}2} = 234{,}375 \text{ kg}.$$

4) An einer Achse, deren eine Zapfenmitte um 0,8 m und deren andere um 1,4 m von der Belastungsstelle entfernt ist, wirkt eine Last von 3000 kg. Wie grofs ist der Druck in den Zapfenmitten? (Fig. 12.)

Fig. 12.



Nach Formel 36) erhält man:

$$P_1 = \frac{BC}{AB} \cdot R = \frac{1{,}4 \cdot 3000}{2{,}2} = 1909 \text{ kg},$$

und nach Formel 38):

$$P_2 = \frac{AC}{AB} \cdot R = \frac{0{,}8 \cdot 3000}{2{,}2} = 1091 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Zwei Kräfte, $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 35$ kg (Fig. 10), wirken in paralleler Richtung an zwei fest mit einander verbundenen Punkten, welche 6 m von einander entfernt sind, nach ein und derselben Richtung. Es soll die Mittelkraft und deren Angriffspunkt bestimmt werden.

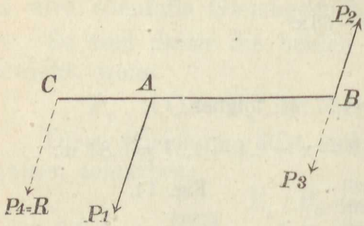
Lösung: $R = 55$ kg;
$BC = 2{,}18$ m; $AC = 3{,}82$ m.

2) Wie grofs ist die Entfernung AB zweier parallel und in gleicher Richtung wirkenden Kräfte von $P_1 = 24$ kg und $P_2 = 60$ kg, welche an zwei fest mit einander verbundenen Punkten wirken, wenn die Mittelkraft 3 m vom Angriffspunkte der Kraft P_1 angreift?

Lösung: $AB = 1{,}2$ m.

Wirken die beiden Kräfte P_1 und P_2 in paralleler Richtung, aber nach entgegengesetzten Seiten an einem Körper, so findet man die Gröſse und Lage der Mittelkraft, indem man zunächst die gröſsere der beiden Kräfte in zwei parallele Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine gleich groſs, aber entgegengesetzt der kleineren der gegebenen Kräfte gerichtet ist. Sind P_1 und P_2 (Fig. 13) die gegebenen Kräfte, und ist $P_1 > P_2$, so zerlegt man P_1 in die beiden Seitenkräfte P_3 und P_4, derart, daſs $P_3 = P_2$ und entsprechend $P_4 = P_1 - P_2$ wird.

Fig. 13.



Durch diese Zerlegung kommt P_1 in Fortfall und da $P_2 = P_3$ ist, sich also gegenseitig aufheben, so fallen auch diese fort und man erhält P_4 als Resultante der gegebenen Kräfte P_1 und P_2. Es ist daher die Gröſse dieser Mittelkraft

$$R = P_1 - P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

Für die Lage des Angriffspunktes erhält man nach Formel 35):

$$R \, . \, AC = P_2 \, . \, AB \text{ oder:}$$

$$AC = \frac{P_2 \, . \, AB}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

Die Richtung von R ist dieselbe, wie diejenige der gegebenen Kräfte und ihr Richtungssinn ist derselbe, wie derjenige der gröſseren Kraft.

Man kann sagen:

Die Mittelkraft zweier paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte ist gleich der Differenz derselben; ihr Angriffspunkt liegt auſserhalb derjenigen der Kräfte P_1 und P_2, nach der Seite der gröſseren Kraft hin, und hat gleiche Richtung und gleichen Richtungssinn wie letztere.

Sind die beiden Kräfte P_1 und P_2 einander gleich, so lassen sich dieselben nicht mehr zusammensetzen; d. h. es giebt keine einzelne Kraft, welche befähigt wäre, die Wirkung dieser beiden Kräfte zu ersetzen.

Zwei solcher gleichen Kräfte bilden ein K r ä f t e p a a r.

Ein Kräftepaar kann keine fortschreitende Bewegung, sondern nur eine drehende Bewegung erzeugen; es ist als die Ursache der Drehbewegung anzusehen.

Auch kann ein Kräftepaar niemals durch eine einzelne Kraft, sondern nur immer wieder durch ein anderes Kräftepaar ersetzt oder aufgehoben werden.

Beispiel.

Zwei Kräfte, $P_1 = 60$ kg und $P_2 = 36$ kg, wirken in den Punkten A und B, welche 1,6 m von einander entfernt sind, in paralleler aber ent gegengesetzter Richtung. Welche Gröfse und welche Entfernung AC ha die Mittelkraft?

Aus Formel 40) erhält man:

$$R = P_1 - P_2 = 60 - 36 = 24 \text{ kg},$$

und aus Formel 41):

$$AC = \frac{P_2 \, . \, AB}{R} = \frac{36 \, . \, 1{,}6}{24} = 2{,}4 \text{ m}.$$

Siebentes Kapitel.

Vom statischen Moment.

Im vorigen Kapitel wurde festgestellt, dafs zwei Kräfte P_1 und P_2, welche in paralleler Richtung an einem Körper wirken, im Gleichgewichte sind, wenn

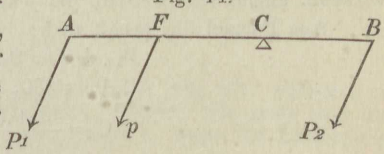
$$P_1 \, . \, AC = P_2 \, . \, BC \text{ ist.}$$

Das Bestreben der Kräfte P_1 und P_2, eine Drehung um C hervorzubringen, ist also nicht allein abhängig von der Gröfse der Kräfte selbst, sondern auch von dem Abstande ihrer Angriffspunkte vom Dreh- oder Stützpunkt.

Die Gröfse dieses Drehbestrebens wird durch das Produkt $P_1 \, . \, AC$ oder $P_2 \, . \, BC$ ausgedrückt.

Greift in F (Fig. 14) noch eine Kraft p an, so ist das Bestreben dieser Kraft, eine Drehung um C hervorzubringen $= p \, . \, FC$; das Drehbestreben von P_1 ist aber $= P_1 \, . \, AC$, mithin die Wirkung beider Kräfte zusammengenommen $= P_1 \, . \, AC + p \, . \, FC$, daher für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 14.



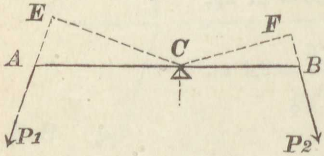
$$P_1 \, . \, AC + p \, . \, FC = P_2 \, . \, BC \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 42)$$

Wirken die Kräfte P_1 und P_2 nicht in paralleler Richtung, so kann für den Gleichgewichtszustand auch nicht mehr

$P_1 . AC = P_2 . BC$ sein, denn die Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 (eine Drehung um C hervorzubringen) wird eine andere, je nachdem ihre Richtungslinien verschieden sind.

Denkt man sich die Richtungslinien der nicht parallelen Kräfte P_1 und P_2 über ihre Angriffspunkte A und B hinaus verlängert (Fig. 15) und vom Drehpunkte C aus die Normalen EC und FC auf diese Richtungslinien gefällt, so gelten jetzt EC und FC als die eigentlichen Entfernungen der Richtungslinien vom Drehpunkte, und ist nun für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 15.



$$P_1 . EC = P_2 . FC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

Die Gröfse des Bestrebens einer Kraft, eine Drehung um den Stütz- oder Drehpunkt hervorzubringen, ist also bei nicht parallelen Kräften gleich dem Produkt aus der Gröfse der Kraft und ihrem senkrechten Abstande vom Drehpunkte.

Man nennt dieses Produkt das „Drehungsmoment oder das statische Moment" der Kraft, und sagt deshalb auch: Die Kräfte P_1 und P_2 sind im Gleichgewicht, wenn ihre statischen Momente einander gleich sind.

Sind mehrere Kräfte auf beiden Seiten des Dreh- oder Stützpunktes vorhanden, so wird Gleichgewicht stattfinden, wenn die Summe der statischen Momente aller Kräfte, welche rechts herum zu drehen suchen, gleich ist der Summe aller statischen Momente derjenigen Kräfte, welche bestrebt sind eine Drehung nach links hervorzubringen.

Beispiele:

1) An einem Körper, welcher um einen Punkt drehbar ist, wirkt eine Kraft von 50 kg in einem Abstande = 0,6 m vom Drehpunkte; in welchem Abstande mufs eine Kraft von 30 kg, in derselben Richtung wirkend, angebracht werden, um jener das Gleichgewicht zu halten?

Aus Formel 35) erhält man:

$$P_1 . AC = P_2 . BC, \text{ d. h.}$$

$$50 . 0,6 = 30 . BC; \text{ folglich:}$$

$$BC = \frac{50 . 0,6}{30} = 1,00 \text{ m.}$$

2) An den Punkten A, F und B (Fig. 14) eines Körpers wirken die Kräfte $P_1 = 20$ kg, $p = 15$ kg und $P_2 = 60$ kg; die Entfernung AF ist = 0,5 m und BF = 0,8 m. In welchem Abstande von F mufs der Stützpunkt C angebracht werden, wenn keine Drehung erfolgen soll?

Nach Formel 42) ist:

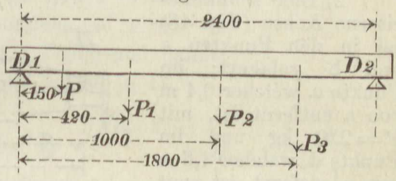
$$P_1 . AC + p . FC = P_2 . BC.$$

Setzt man hier die gegebenen Werte ein, so erhält man:

$$20\ (0{,}5 + FC) + 15 . FC = 60\ (0{,}8 - FC).$$
$$10 + 20 . FC + 15 . FC = 48 - 60 . FC.$$
$$20 . FC + 15 . FC + 60 . FC = 48 - 10.$$
$$95 . FC = 38.$$
$$FC = \frac{38}{95} = 0{,}4 \text{ m.}$$

3) Ein Balken, welcher in den Punkten D_1 und D_2 unterstützt ist, wird durch die Kräfte $P = 30$ kg, $P_1 = 46$ kg, $P_2 = 60$ kg und $P_3 = 20$ kg beansprucht. Die Entfernung der Stützpunkte betrage 2,4 m; die Entfernung der Angriffspunkte der Kräfte vom linken Stützpunkte sei für $P = 150$ mm, $P_1 = 420$ mm, $P_2 = 1000$ mm und für $P_3 = 1800$ mm. (Fig. 16.)

Fig. 16.



Wie grofs sind die Drucke in den Auflagepunkten D_1 und D_2, die Mittelkraft und die Entfernung der Lage ihres Angriffspunktes?

Denkt man sich statt des Unterstützungspunktes in D_2 eine aufwärts wirkende Kraft, so mufs diese den Kräften P, P_1, P_2, P_3 das Gleichgewicht halten. Bezeichnet man diese Kraft mit x, und nimmt man D_1 als Drehpunkt an, so ergiebt sich als Druck in D_2:

$$x . 2400 = 30 . 150 + 46 . 420 + 60 . 1000 + 20 . 1800.$$
$$x . 2400 = 119820 = 120000 \text{ abgerundet.}$$
$$x = \frac{120000}{2400} = 50 \text{ kg.}$$

Die Mittelkraft beträgt:

$$R = 30 + 46 + 60 + 20 = 156 \text{ kg,}$$

mithin der Druck im Stützpunkte D_1:

$$D_1 = R - x = 156 - 50 = 106 \text{ kg.}$$

Bezeichnet man den Abstand des Angriffspunktes der Mittelkraft von D_1 mit y, so mufs diese Mittelkraft dieselbe Wirkung auf D_2 ausüben, wie die einzelnen Kräfte zusammengenommen, es mufs daher:

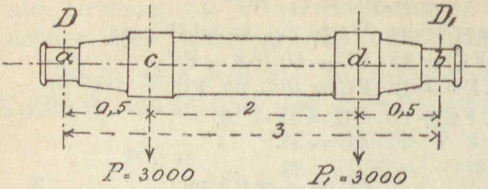
$$R . y = 2400 . x = 2400 . 50 \text{ sein, folglich:}$$
$$y = \frac{2400 . 50}{156} = 769{,}2 \text{ mm.}$$

Übungsbeispiele: *)

1) Eine Achse ist in den Punkten c und d (Fig. 17), welche 2 m von einander entfernt sind, mit je 3000 kg belastet; wie grofs sind die Drucke D und D_1 in den Zapfenmitten a und b, wenn die Entfernung derselben 3 m beträgt?

*) Bei diesen Beispielen ist das Eigengewicht der Achsen nicht in die Rechnung einbezogen!

Fig. 17.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so erhält man für das Gleichgewicht:

$3 \cdot x = 3000 \cdot 0{,}5 + 3000 \cdot 2{,}5$ und damit:

$x = 3000$ kg als Druck in D.

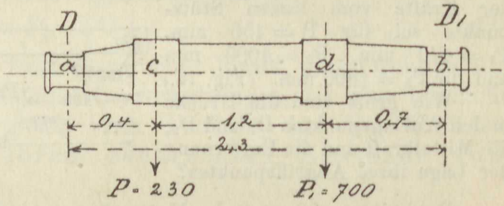
Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$$3 \cdot y = 3000 \cdot 0{,}5 + 3000 \cdot 2{,}5 \text{ und damit:}$$

$$y = 3000 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

2) Eine schmiedeeiserne Achse (Fig. 18) sei in den Punkten a und b gelagert; im Punkte c, welcher 0,4 m von a entfernt ist, mit $P = 230$ kg und im Punkte d, welcher 1,6 m von a entfernt ist, mit $P_1 = 700$ kg belastet. Wie grofs sind die Auflagerdrucke D und D_1 in den Zapfenmitten?

Fig. 18.



Nimmt man b als Drehpunkt an, so ist für das Gleichgewicht:

$$x \cdot 2{,}3 = 700 \cdot 0{,}7 + 230 \cdot 1{,}9 \text{ und damit:}$$

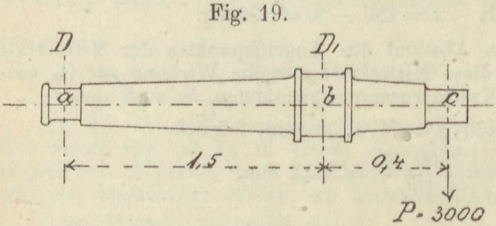
$$x = 403 \text{ kg als Druck in D.}$$

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$$y \cdot 2{,}3 = 230 \cdot 0{,}4 + 700 \cdot 1{,}6 \text{ und damit:}$$

$$y = 527 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

Fig. 19.



3) Eine Achse ist in den Punkten a und b, welche 1,5 m von einander entfernt sind (Fig. 19), gelagert. Im Punkte c ist die Achse mit $P = 3000$ kg belastet; wie grofs sind die Drucke in den Lagermitten D und D_1?

Wird b als Drehpunkt angenommen, so erhält man für das Gleichgewicht:

$$x \cdot 1{,}5 = 3000 \cdot 0{,}4 \text{ und damit:}$$

$$x = 800 \text{ kg als Druck in D.}$$

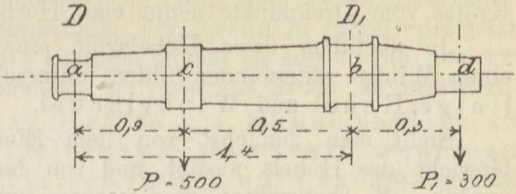
Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$$y \cdot 1{,}5 = 3000 \cdot 1{,}9 \text{ und damit:}$$

$$y = 3800 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

4) Eine schmiedeeiserne Achse ist in den Punkten a und b (Fig. 20), welche 1,4 m von einander entfernt sind, gelagert. Im Punkte c wirkt eine Kraft $P = 500$ kg und im Punkte d eine solche von $P_1 = 300$ kg; wie grofs sind die Auflagerdrucke in D und D_1?

Fig. 20.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so ist für das Gleichgewicht:

$$x \cdot 1{,}4 + 0{,}3 \cdot 300 = 0{,}5 \cdot 500, \text{ d. h.}$$

$$x \cdot 1{,}4 = 0{,}5 \cdot 500 - 0{,}3 \cdot 300 \text{ und damit:}$$

$$x = 114{,}3 \text{ kg als Druck in D.}$$

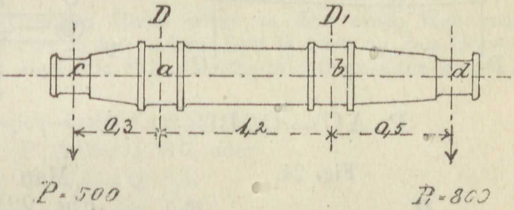
Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$$y \cdot 1{,}4 = 0{,}9 \cdot 500 + 1{,}7 \cdot 300 \text{ und damit:}$$

$$y = 685{,}7 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

5) Eine Achse ist in den 1,2 m von einander entfernten Punkten a und b (Fig. 21) gelagert; 0,3 m von a entfernt wirkt eine Kraft $P = 500$ kg und 0,5 m von b entfernt eine Kraft $P_1 = 800$ kg; wie grofs sind die Drucke in D und D_1?

Fig. 21.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so ist für das Gleichgewicht:

$$500 \cdot 1{,}5 = 800 \cdot 0{,}5 + x \cdot 1{,}2, \text{ d. h.}$$

$$x \cdot 1{,}2 = 500 \cdot 1{,}5 - 800 \cdot 0{,}5; \text{ mithin:}$$

$$x = 291{,}6 \text{ kg als Druck in D.}$$

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$$800 \cdot 1{,}7 = 500 \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}2, \text{ d. h.}$$

$$y \cdot 1{,}2 = 800 \cdot 1{,}7 - 500 \cdot 0{,}3, \text{ mithin:}$$

$$y = 1008{,}4 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

Achtes Kapitel.

Vom Hebel.

Der Hebel ist ein beliebig geformter starrer Körper, an welchem zwei oder mehrere Kräfte derartig wirken, dafs sie Drehungen in entgegengesetzten Richtungen herbeizuführen suchen.

Die senkrechten Abstände der Richtungslinien der Kräfte vom Drehpunkte nennt man Hebelarme.

Je nachdem diese Hebelarme eine gerade Linie oder einen Winkel miteinander bilden, unterscheidet man geradlinige Hebel und Winkelhebel.

Sieht man zunächst von dem Einflusse, welchen das Gewicht des Hebels ausübt, und von der Reibung im Drehpunkte ab, betrachtet man ferner nur den Zustand des Gleichgewichtes, d. h. die Bedingungen, unter denen sich der Hebel, trotz der Einwirkung der an ihm thätigen Kräfte, in Ruhe befindet, so erhält man für den geradlinigen Hebel, bei parallel und senkrecht zur Hebelachse gerichteten Kräften, (Fig. 22 u. 23) als Bedingung für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 22.

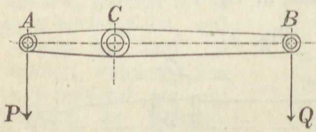
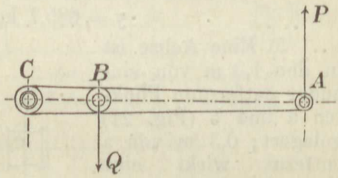
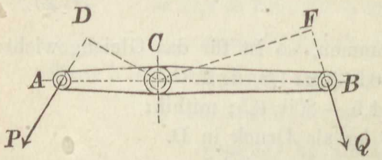


Fig. 23.



$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

Fig. 24.



Man nennt den Hebel in Fig. 22) einen zweiarmigen, und den Hebel in Fig. 23) einen einarmigen Hebel. Wirken die Kräfte nicht in paralleler Richtung (Fig. 24), so findet Gleichgewicht statt, wenn

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \text{ ist} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

Bei dem Winkelhebel und parallel gerichteten Kräften Fig. 25) wird Gleichgewicht stattfinden, wenn

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \text{ ist} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Fig. 25.

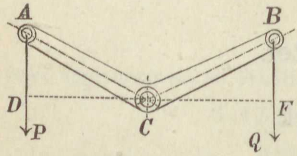
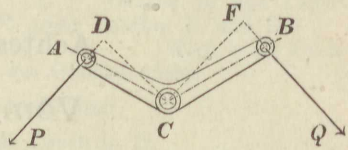


Fig. 26.



Sind die Richtungslinien der Kräfte nicht parallel (Fig. 26), so mufs auch hier für das Gleichgewicht

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \text{ sein} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

Es ist also bei dem Hebel gleichgültig, welche Richtung die Kräfte haben; man hat nur nötig, vom Drehpunkte Normalen auf die Richtungslinien der Kräfte zu fällen, die jetzt zu bildenden Momente einander gleich zu setzen und aus der so entstehenden Gleichung die gesuchte Gröſse zu ermitteln.

Sind mehrere Kräfte am Hebel thätig, so findet ebenfalls Gleichgewicht statt, wenn man die Summe der statischen Momente auf einer Seite des Hebels, gleich setzt der Summe der statischen Momente auf der anderen Seite desselben, und dann aus dieser Gleichung die unbekannte Gröſse bestimmt.

Soll noch das Gewicht des Hebels berücksichtigt werden, so ist dasselbe als eine Kraft zu betrachten, deren Angriffspunkt im Schwerpunkte des Hebels liegt und senkrecht nach unten wirkt.

Beispiele:

1) An einem zweiarmigen Hebel wirkt an dem einen Hebelarm $AC = 0{,}6$ m eine Kraft $P = 25$ kg; welche Last Q kann an dem Hebelarm $BC = 0{,}4$ m durch die Kraft P im Gleichgewichte gehalten werden? (Fig. 22.)

Für den Gleichgewichtszustand erhält man:

$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC, \text{ oder}$$
$$25 \,.\, 0{,}6 = Q \,.\, 0{,}4.$$
$$Q = \frac{25 \,.\, 0{,}6}{0{,}4} = 37{,}5 \text{ kg}.$$

2) An einem zweiarmigen Hebel (Fig. 24) wirkt im Abstande $AC = 0{,}7$ m eine Kraft $P = 30$ kg, deren Richtungslinie mit AC einen Winkel von 30^0 bildet; welche Last Q kann im Abstande $BC = 0{,}3$ m durch die Kraft P im Gleichgewichte gehalten werden, wenn die Richtungslinie der Last Q ebenfalls einen Winkel von 30^0 mit BC bildet?

Für den Gleichgewichtszustand ist nach Formel 45):

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC.$$

Unter vorstehender Annahme wird:

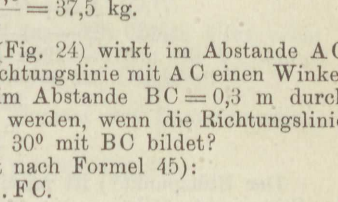
$$DC = 0{,}606 \text{ m und } FC = 0{,}26 \text{ m, mithin:}$$
$$30 \,.\, 0{,}606 = Q \,.\, 0{,}26.$$
$$Q = \frac{30 \,.\, 0{,}606}{0{,}26} = 70 \text{ kg}.$$

3) An einem einarmigen Hebel von 1,2 m Länge wirkt ein Zug von 56 kg in einer Entfernung $= 0{,}15$ m vom Drehpunkte. Wie groſs ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nötige Kraft P am Ende des Hebels? (Fig. 27.)

Für das Gleichgewicht erhält man:

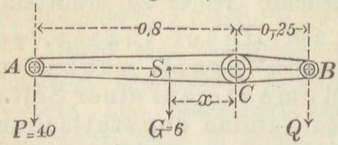
$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC.$$
$$P \,.\, 1{,}2 = 56 \,.\, 0{,}15.$$
$$P = \frac{56 \,.\, 0{,}15}{1{,}2} = 7 \text{ kg}.$$

Fig. 27.



4) An einem zweiarmigen Hebel wirkt an dem einen Hebelarme $AC = 0{,}8$ m eine Kraft $P = 40$ kg; welche Last Q kann an dem Hebelarme $BC = 0{,}25$ m im Gleichgewicht gehalten werden, wenn der überall gleich starke Hebel 6 kg schwer ist? (Fig. 28.)

Fig. 28.)



Da der Hebel überall gleich stark ist, so liegt sein Schwerpunkt S in der Mitte seiner Länge. Bezeichnet man die Entfernung desselben vom Drehpunkte C mit x und das Gewicht des Hebels mit G, so ist für das Gleichgewicht:

$$P \,.\, AC + G \,.\, x = Q \,.\, BC, \text{ oder:}$$

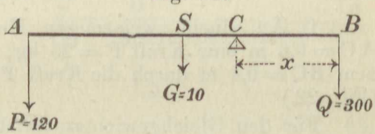
$$40 \,.\, 0{,}8 + 6\left(\frac{0{,}8 + 0{,}25}{2} - 0{,}25\right) = Q \,.\, 0{,}25.$$

$$32 + 1{,}65 = Q \,.\, 0{,}25.$$

$$Q = \frac{32 + 1{,}65}{0{,}25} = 134{,}6 \text{ kg}.$$

5) An einer überall gleich starken, 10 kg schweren Stange von 2,6 m Länge, wirkt an dem einen Ende A eine Kraft von 120 kg und am anderen Ende B eine Kraft von 300 kg; wo mufs der Stützpunkt C angebracht werden, damit die beiden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und welchen Druck hat derselbe zu erleiden? (Fig. 29.)

Fig. 29.



Da die Stange überall gleich stark ist, so liegt ihr Schwerpunkt S in der Mitte. Bezeichnet man den Abstand des Stützpunktes C von B mit x, so ist $AC = 2{,}6 - x$, und der Abstand des Schwerpunktes S der Stange von $C = 1{,}3 - x$; mithin erhält man für den Gleichgewichtszustand:

$$P \,.\, AC + G \,.\, SC = Q \,.\, BC.$$

$$120\ (2{,}6 - x) + 10\ (1{,}3 - x) = 300x.$$

$$312 - 120x + 13 - 10x = 300x.$$

$$325 = 300x + 120x + 10x.$$

$$325 = 430x.$$

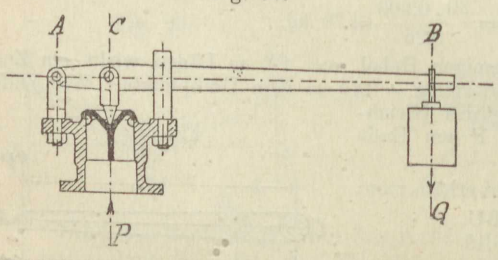
$$x = \frac{325}{430} = 0{,}756 \text{ m}.$$

Der Stützpunkt*) ist mithin 756 mm von B entfernt. Der Druck im Stützpunkte C ist:

$$P + G + Q = 120 + 10 + 300 = 430 \text{ kg}.$$

6) Gegen die untere Fläche eines Sicherheitsventiles (Fig. 30) wirkt ein Dampfdruck von 130 kg; dasselbe wird durch einen einarmigen Hebel, dessen Arme 0,12 und 0,8 m lang sind, belastet. Welches Gewicht mufs am längeren Hebelarm angehängt werden, um dem Dampfdrucke das Gleichgewicht zu halten?

Fig. 30.



*) Vergl. Seite 92.)

Nach Formel 44) erhält man:

$$P . AC = Q . AB.$$
$$130 . 0{,}12 = Q . 0{,}8.$$
$$Q = \frac{130 . 0{,}12}{0{,}8} = 19{,}5 \text{ kg}.$$

7) In vorstehender Aufgabe soll das Gewicht des Ventiles und Hebels mit in Rechnung gezogen werden, und zwar betrage das Gewicht des Hebels 6 kg und das Gewicht des Ventiles 2,5 kg.

Die Hebelstange sei prismatisch gearbeitet; ihr Gewicht kann daher als in der Mitte derselben angreifend gedacht werden.

Es wirken mithin abwärts:

Das Moment des angehängten Gewichtes $= Q . 0{,}8$.
„ „ „ Hebelgewichtes . . . $= 6 . 0{,}4$.
„ „ „ Ventilgewichtes . . . $= 2{,}5 . 0{,}12$.

Aufwärts wirkt:

Das Moment des Dampfdruckes . . . $= 130 . 0{,}12$.

Es ist daher für den Gleichgewichtszustand:

$$Q . 0{,}8 + 6 . 0{,}4 + 2{,}5 . 0{,}12 = 130 . 0{,}12.$$
$$Q . 0{,}8 = 130 . 0{,}12 - 6 . 0{,}4 - 2{,}5 . 0{,}12.$$
$$Q = \frac{12{,}9}{0{,}8} = 16{,}125 \text{ kg}.$$

8) Für ein anderes Ventil betrage der Durchmesser desselben 65 mm; der Dampfdruck 6 kg pro qcm; der Abstand des Ventiles vom Drehpunkte 0,12 m; das Hebelgewicht 7 kg, im Abstande 0,5 m vom Drehpunkte wirkend; das Ventilgewicht 2,5 kg. Welche Länge mufs der Hebel erhalten, wenn ein Gewicht von 25 kg benützt werden soll?

Als abwärts wirkende Momente erhält man:

Moment des angehängten Gewichtes $= 25 . x$.
„ „ Hebelgewichtes . . . $= 7 . 0{,}5$.
„ „ Ventilgewichtes . . . $= 2{,}5 . 0{,}12$.

Den Dampfdruck, welcher von unten gegen das Ventil wirkt, erhäl man, wenn man den Flächeninhalt des Ventiles in qcm mit der Anzahl der Atmosphären multipliziert. Demnach wird der Dampfdruck $= \frac{\pi . d^2}{4} . 6$, und das aufwärts wirkende Moment des Dampfdruckes $=$

$$\frac{\pi . d^2}{4} . 6 . 0{,}12 = \frac{3{,}14 . 6{,}5^2}{4} . 6 . 0{,}12 = 23{,}88.$$

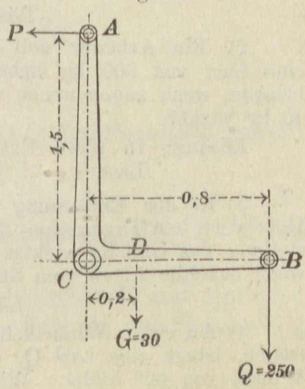
Mithin für den Gleichgewichtszustand:

$$25x + 7 . 0{,}5 + 2{,}5 . 0{,}12 = 23{,}88.$$
$$25x = 23{,}88 - 7 . 0{,}5 - 2{,}5 . 0{,}12.$$
$$x = \frac{20{,}08}{25} = 0{,}803 \text{ m}.$$

9) An einem Winkelhebel wirkt senkrecht abwärts ziehend eine Last Q $= 250$ kg, an einem Hebelarme BC $=$ 0,8 m. (Fig. 31.)

Welche Kraft P ist in wagerechter Richtung an einem Hebelarme AC $= 1{,}5$ m zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlich, wenn das Eigengewicht G des Hebels 30 kg und dessen Hebelarm CD $= 0{,}2$ m beträgt, und wie grofs ist der Zapfendruck in C?

Fig. 31.



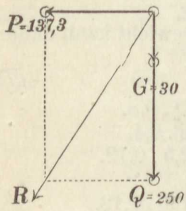
Für den Gleichgewichtszustand erhält man:

$$P . AC = Q . BC + G . CD.$$

$$P . 1{,}5 = 250 . 0{,}8 + 30 . 0{,}2.$$

$$P = \frac{250 . 0{,}8 + 30 . 0{,}2}{1{,}5} = 137{,}3 \text{ kg}.$$

Fig. 32.

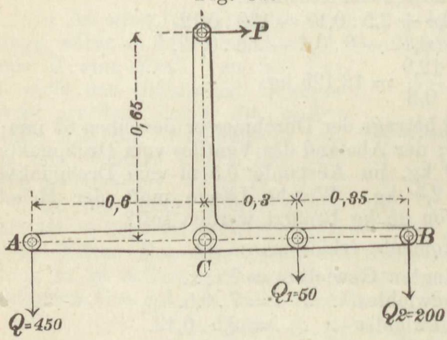


Der Zapfen (Fig. 32) wird durch die beiden senkrecht wirkenden Kräfte $G = 30$ kg und $Q = 250$ kg, sowie durch die wagerecht wirkende Kraft $P = 137{,}3$ kg beansprucht Man erhält daher als Zapfendruck die Mittlere aus diesen Kräften nach Formel 31):

$$R = \sqrt{(G + Q)^2 + P^2} = \sqrt{(30 + 250)^2 + 137{,}3^2}$$

$$R = \sqrt{97251{,}3} = 312 \text{ kg}.$$

Fig. 33.



10) Am horizontalen Schenkel eines Winkelhebels wirken die Lasten $Q = 450$ kg, $Q_1 = 50$ kg, $Q_2 = 200$ kg; welche Kraft P mufs am vertikalen Schenkel desselben angebracht werden, um diesen Lasten das Gleichgewicht zu halten? (Fig. 33.)

Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$P . 0{,}65 = 450 . 0{,}6 - 50 . 0{,}3 = 200 . 0{,}65.$$

$$P = \frac{125}{0{,}65} = 192{,}3 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Arbeiter zieht mit 30 kg an dem 2,5 m langen Arme eines zweiarmigen Hebels. Welche Last kann der Arbeiter am Ende des anderen 0,5 m langen Hebelarmes im Gleichgewicht halten?

Lösung: $Q = 150$ kg.

2) Ein Arbeiter soll mit einer Brechstange von 1,6 m Länge eine Last von 600 kg heben. Wo ist der Unterstützungspunkt anzubringen, wenn angenommen wird, dafs der Arbeiter mit einer Kraft von 40 kg wirkt?

Lösung: In einer Entfernung = 0,1 m vom Angriffspunkte der Last.

3) In der Entfernung 0,3 m vom Stützpunkte eines einarmigen Hebels ist ein Druck von 75 kg wirksam. Wie grofs ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderliche Kraft am Ende des Hebels, wenn dasselbe 2,5 m vom Stützpunkte entfernt ist?

Lösung: $P = 9$ kg.

4) An einem Winkelhebel, dessen Armlängen 0,4 m und 1,4 m betragen, hängt eine Last Q, welche mit dem 0,4 m langen Arme einen Winkel von 60° bildet. Wie grofs kann diese Last Q sein, wenn sie

durch eine rechtwinkelig gegen den 1,4 m langen Arm gerichtete Kraft P = 120 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: Durch Konstruktion ergiebt sich der Hebelarm der Last Q zu 0,346 m und hieraus: Q = 485,5 kg.

Bei der aufserordentlich mannigfaltigen Anwendung des Hebels auf allen Gebieten der Praxis ist es wünschenswert, für die hauptsächlichsten Belastungsfälle den jeweiligen Druck im Drehpunkte des Hebels zu kennen. Die Gröfse dieses Druckes ist neben ihrem Einflusse auf die Reibung und die Abmessungen des Drehzapfens, noch in vielfach anderer Beziehung massgebend. In Folgendem soll für die einzelnen Belastungsfälle noch einmal die Momentengleichung aufgestellt, und der Druck im Drehpunkte angegeben werden:

Für den in Fig. 22) dargestellten Fall ist

$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC$$

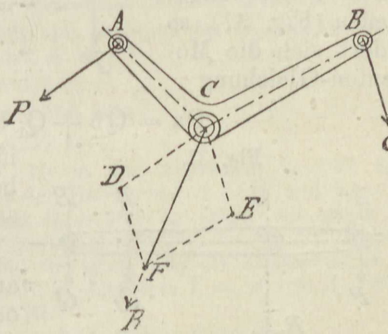
und, wenn man allgemein den Druck im Stützzapfen mit R bezeichnet,

$$R = P + Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Dem Belastungsfalle Fig. 23) entsprechend erhält man

$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC \text{ und}$$
$$R = Q - P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Fig. 34.



Die Ermittelung des Druckes R, für die den Fig. 24 und 26) entsprechenden Fälle, ist in nebenstehender Fig. 34) dargestellt. Die Momentengleichung ist zunächst nach Formel 45 und 46):

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC.$$

Um den Druck R zu bestimmen, konstruiere man, vom Drehpunkte C ausgehend, aus den beiden Kräften P und Q das Parallelogramm*) CDFE. Die Gröfse der Mittelkraft

$$R = CF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

giebt den Druck im Drehpunkte ohne weiteres, der Gröfse und Richtung entsprechend, an.

Stehen die Arme des Winkelhebels senkrecht auf einander, so ist für den in Fig. 31) angedeuteten Fall bei der Ermittelung

---

*) Vergl. S. 88 und 89.)

des Druckes R entsprechend Fig. 32) zu verfahren. Ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes G des Hebels wird dann

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

und mit Berücksichtigung desselben

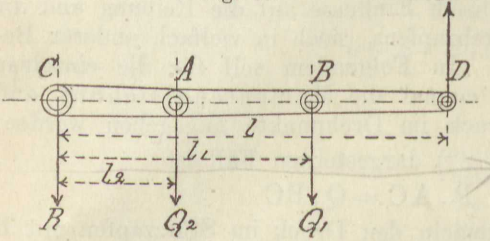
$$R = \sqrt{(G + Q)^2 + P^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

Für Fig. 35) ergiebt sich nach dem Vorstehenden:

$$P \,.\, l = Q_1 \,.\, l_1 + Q_2 \,.\, l_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 53)$$

$$\text{und } R = Q_1 + Q_2 - P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

Fig. 35.

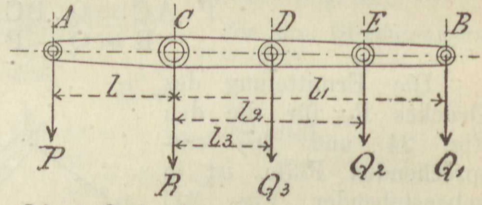


In gleicher Weise folgt für den Belastungsfall, welcher durch Fig. 36) dargestellt wird:

$$Pl = Q_1\, l_1 + Q_2\, l_2 + Q_3\, l_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

$$\text{und } R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

Fig. 36.



Wirken die an einem Hebel thätigen Kräfte in verschiedenen Umdrehungsebenen (Fig. 37), so ändert sich die Momenten-Gleichung

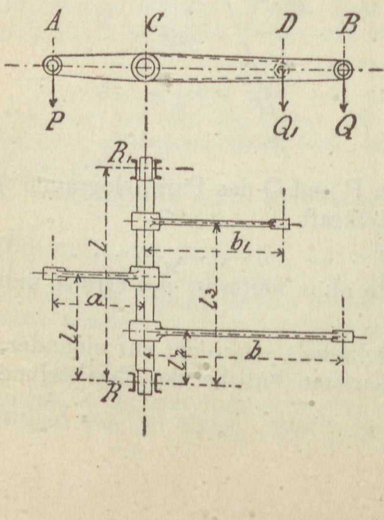
$$Pa = Qb + Q_1\, b_1 + \ldots$$

nicht; nur findet hier eine besondere Verteilung des gesamten Achsendruckes

$$R_0 = P + Q + Q_1 + \ldots$$

auf die beiden Stützpunkte, oder Zapfenlager C, statt.

Fig. 37.



Bezeichnet l die Länge der Hebelachse, oder die Entfernung der Stützpunkte C derselben von einander, und sind l_1, l_2, l_3 . . . . die Abstände der Umdrehungsebenen der Kräfte von einem dieser Stützpunkte, so hat man für die Zapfendrucke R und R_1 folgende Werte:

$$R_1 = \frac{P l_1 + Q l_2 + Q_1 l_3}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 57)$$

$$R = \frac{P(l - l_1) + Q(l - l_2) + Q_1(l - l_3)}{l} \quad \ldots \quad 58)$$

Nach den Gesetzen über parallele Kräfte*) mufs sich R_0 aus den Drucken R und R_1 zusammensetzen, d. h. es mufs

$$R_0 = R + R_1 \text{ sein.}$$

Hieraus folgt:

$$R = R_0 - R_1 \text{ und } R_1 = R_0 - R.$$

Übungsbeispiele:

1) An einem einarmigen Hebel von 1,5 m Länge (Fig. 35), wirken die vertikalen Kräfte $Q_2 = 20$ kg und $Q_1 = 46$ kg abwärts. Welcher aufwärts wirkenden Kraft P, im Abstande 1,5 m vom Drehpunkte, können die Kräfte Q_2 und Q_1 das Gleichgewicht halten, wenn der Abstand des Angriffspunktes der Kraft Q_2 vom Drehpunkte = 0,2 m und derjenige der Kraft $Q_1 = 0{,}5$ m beträgt?

Lösung: $P = 18$ kg.

2) Wie grofs ist in vorstehender Aufgabe der Druck, welchen der Drehpunkt in C auszuhalten hat?

Lösung: $R = 48$ kg.

3) An einem zweiarmigen Hebel (Fig. 36) von 1,7 m Länge, wirken im Punkte A eine Kraft $P = 60$ kg, in den Punkten D, E und B die Kräfte $Q_3 = 70$ kg, $Q_2 = 20$ kg und $Q_1 = 100$ kg. Die Entfernung EB sei = 0,1 m und DE = 0,2 m; wo mufs der Stützpunkt C angebracht werden, damit die Kräfte P, Q_1, Q_2, Q_3 sich das Gleichgewicht halten, und welchen Druck hat derselbe aufzunehmen?

Lösung: Wird die Entfernung des Stützpunktes C vom Angriffspunkte der Kraft P gleich x gesetzt, so ist:

$$x = 1{,}2 \text{ m.}$$

Als Druck im Stützpunkte C erhält man:

$$R = 250 \text{ kg.}$$

4) Wenn der Hebel in Fig. 37) in den Abständen $l_2 = 12$ und $l_3 = 24$ vom Zapfenlager R, die an den Hebelarmen $b = 16$ und $b_1 = 10$ wirkenden Lasten $Q = 300$ kg und $Q_1 = 480$ kg trägt, wie grofs ist dann die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderliche, an dem Hebelarme $a = 60$ wirkende Kraft P, und wie grofs sind die Zapfendrucke R und R_1, vorausgesetzt, dafs die Kraft im Abstande $l_1 = 18$ von R wirkt, und die ganze Achsenlänge $l = 32$ ist?

Lösung: Es ist die Gröfse der erforderlichen Kraft:

$$P = \frac{Q \cdot b + Q_1 \cdot b_1}{a} = \frac{300 \cdot 16 + 480 \cdot 10}{60} = 160 \text{ kg}$$

und die Zapfendrucke:

$$R_1 = \frac{P \cdot l_1 + Q \cdot l_2 + Q_1 \cdot l_3}{l} = \frac{160 \cdot 18 + 300 \cdot 12 + 480 \cdot 24}{32} = 562{,}5 \text{ kg;}$$

$$R = R_0 - R_1 = 300 + 480 + 160 - 562{,}5 = 377{,}5 \text{ kg.}$$

---

*) Vergl. Seite 92.)

Um mit geringen Kräften gröfsere Lasten zu bewältigen, werden mehrere einfache Hebel zu Hebelwerken zusammengesetzt, welche so angeordnet sind, dafs immer der kürzere Hebelarm des einen Hebels, mit dem längeren Hebelarme des folgenden Hebels verbunden wird.

Um die Wirkung dieser Hebelwerke kennen zu lernen, bestimme man den Gleichgewichtszustand für jeden einzelnen Hebel und multipliziere die dadurch erhaltenen Gleichungen miteinander. (Vergl. Seite 40, unter 33, c.)

Fig. 38.

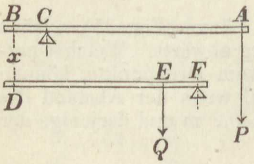


Fig. 39.

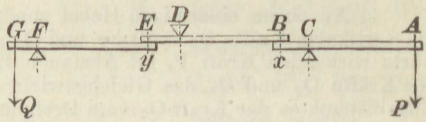
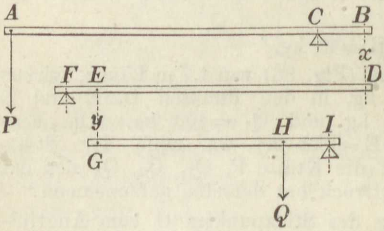


Fig. 40.



Bezeichnet man die an den Verbindungsstangen oder Berührungsstellen des einen Hebels mit dem anderen stattfindenden Drucke mit x und y, so dafs x für den ersten Hebel die Last und für den zweiten Hebel die Kraft, y für den zweiten Hebel die Last und für den folgenden die Kraft bildet u. s. w., so erhält man für den Gleichgewichtszustand (Fig. 38)

am ersten Hebel: $P \,.\, AC = x \,.\, BC.$

„ zweiten „ $x \,.\, DF = Q \,.\, EF.$

Durch Multiplikation beider Gleichungen ergiebt sich:

$$P \,.\, AC \,.\, x \,.\, DF = x \,.\, BC \,.\, Q \,.\, EF.$$

Da sich x auf beiden Seiten hebt, so folgt:

$$P \,.\, AC \,.\, DF = Q \,.\, BC \,.\, EF, \text{ mithin:}$$

$$P = \frac{BC \,.\, EF}{AC \,.\, DF} \,.\, Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 59)$$

$$Q = \frac{AC \,.\, DF}{BC \,.\, EF} \,.\, P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 60)$$

Nimmt man nun

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{5}, \text{ oder:}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{5} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

an, so erhält man die Bedingungen der Hebelgesetze für die Dezimalwage, denn es ist in diesen Fällen

$$P = \frac{1}{10} Q.$$

Nimmt man

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{10}, \text{ oder:}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{20} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{5} \text{ u. s. w.}$$

an, so erhält man die Bedingungen der Hebelgesetze für die Centesimalwage, denn es ist alsdann

$$P = \frac{1}{100} Q.$$

Die Wirkung des Hebelwerkes Fig. 39) berechnet sich folgendermafsen:

Für den ersten Hebel ist $P . AC = x . BC.$

„ „ zweiten „ „ $x . BD = y . ED.$

„ „ dritten „ „ $y . EF = Q . GF.$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man:

$$P . AC . x . BD . y . EF = x . BC . y . ED . Q . GF$$

oder, da sich x und y heben,

$$P . AC . BD . EF = Q . BC . ED . GF. \text{ Folglich:}$$

$$P = \frac{BC . ED . GF}{AC . BD . EF} . Q \quad \ldots \ldots \quad 61)$$

$$Q = \frac{AC . BD . EF}{BC . ED . GF} . P \quad \ldots \ldots \quad 62)$$

Ebenso ergiebt die Berechnung des Hebelwerkes Fig. 40):

$$P = \frac{BC . EF . HI}{AC . EF . HI} . Q \quad \ldots \ldots \quad 63)$$

$$Q = \frac{AC . DF . GI}{BC . EF . HI} . P \quad \ldots \ldots \quad 64)$$

Es verhält sich mithin bei dergleichen Hebelverbindungen die Kraft zur Last, wie das Produkt der kleineren Hebelarme zum Produkt der gröfseren Hebelarme.

Beispiele:

1) Bei dem zusammengesetzten Hebelwerke Fig. 38) betrage:

$AC = 0{,}7$ m; $BC = 0{,}2$ m;

$DF = 0{,}5$ „ ; $EF = 0{,}1$ „ .

Welche Kraft P kann einer Last $Q = 250$ kg das Gleichgewicht halten?

Nach Formel 59) erhält man:

$$P = \frac{BC . EF}{AC . DF} . Q = \frac{0{,}2 . 0{,}1}{0{,}7 . 0{,}5} . 250 = 14{,}28 \text{ kg}.$$

2) Welche Last Q kann vermittelst der Hebelverbindung Fig. 40) durch eine Kraft $P = 20$ kg im Gleichgewichte gehalten werden, wenn

$$AC = 1{,}2 \text{ m}; \quad BC = 0{,}2 \text{ m};$$
$$DF = 0{,}8 \text{ „}; \quad EF = 0{,}15 \text{ „};$$
$$GI = 0{,}5 \text{ „}; \quad HI = 0{,}1 \text{ „ sind?}$$

Nach Formel 64) erhält man:

$$Q = \frac{AC . DF . GI}{BC . EF . HI} . P = \frac{1{,}2 . 0{,}8 . 0{,}5}{0{,}2 . 0{,}15 . 0{,}1} . 20 = 3200 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Hebellänge AC ist bei dem zusammengesetzten Hebelwerke Fig. 38) zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlich, wenn

$$DF = 0{,}6 \text{ m}; \quad EF = 0{,}08 \text{ m};$$
$$BC = 0{,}2 \text{ „}; \quad P = 20 \text{ kg und}$$
$$Q = 500 \text{ kg sind?}$$

Lösung: $AC = 0{,}66$ m.

2) Welche Kraft P kann vermittelst der Hebelverbindung Fig. 39) einer Last $Q = 800$ kg das Gleichgewicht halten, wenn

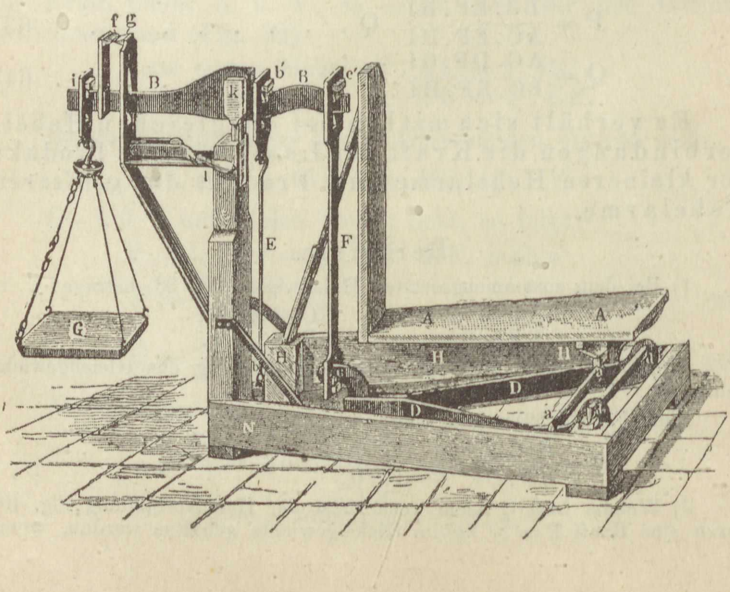
$$GF = 0{,}1 \text{ m}; \quad BD = 0{,}7 \text{ m};$$
$$EF = 0{,}4 \text{ „}; \quad BC = 0{,}2 \text{ „};$$
$$DE = 0{,}2 \text{ „}; \quad AC = 0{,}5 \text{ „ sind?}$$

Lösung: $P = 22{,}857$ kg.

Eine der vorteilhaftesten Verwendungen finden die Hebelverbindungen bei der Konstruktion der Brückenwagen.

Besonders zu unterscheiden sind die Dezimalwage und die Centesimalwage; erstere soll hier einer kurzen Betrachtung unterworfen werden.

Fig. 41.



Die Dezimalwage, nach ihrem Erfinder die Quintenzsche, oder auch wohl die Strafsburger Brückenwage genannt, ist eine der gebräuchlichsten Wagen, welche überall da Verwendung findet, wo die zu wiegenden Lasten von bedeutendem Rauminhalt sind. Fig. 41) stellt diese Wage in der Ansicht dar.

Es ist in derselben AA die Brücke oder derjenige Teil der Wage, auf welchen die abzuwiegende Last gelegt wird. Dieselbe besitzt die Form eines abgestumpften gleichschenkeligen Dreiecks und ist in der Figur zum gröfsten Teil weggelassen, um die unter derselben befindliche Hebelverbindung besser zeigen zu können. Mit dieser Brücke ist ein senkrecht stehendes Brett fest verbunden, gegen welches sich wieder ein schräg stehendes Brett anlegt, so dafs diese drei Teile mit dem dreiseitigen hölzernen Rahmen HH ein fest zusammengehöriges Ganzes bilden. Der Rahmen H sitzt, in der Figur rechts, auf der Stahlschneide aa und ist links, bei b, in die Stange E eingehängt. Die Schneide aa ist auf dem gabelförmigen, einarmigen Hebel DD befestigt, welcher seine Drehachse in der Stahlschneide dd hat und mit seinem linken Ende c an der Zugstange F hängt. Der gröfseren Deutlichkeit halber ist der Rahmen H, auf welchem die Brücke AA ruht, zu hoch gezeichnet; er ist in der Ausführung so niedrig, dafs, wenn durch Aufschlagen des Abstellers l der linke Arm des Hebels BB gehoben wird, der rechte Arm sich so weit senkt, dafs die Brücke AA auf dem Rande des Gestelles N ruht und dann die Schneiden c und c′ die Last der Brücke nicht mehr zu tragen haben, damit also aufserordentlich geschont werden. Die beiden Stangen E und F sind ebenfalls vermittelst Stahlschneiden in einen ungleicharmigen Hebel BB eingehängt, welcher sich um seinen festen Stützpunkt K drehen kann; an dessen äufserstem Ende i befindet sich eine Wagschale G, welche zur Aufnahme der Gewichtsstücke dient.

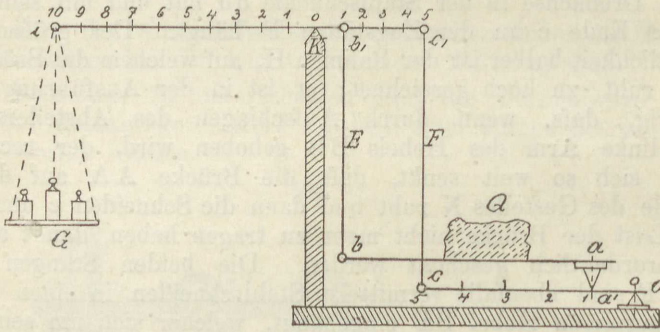
Die wagerechte oder Gleichgewichts-Lage des Hebels BB wird durch zwei vorspringende Ansätze f und g, wovon f mit dem Hebel B fest verbunden ist, angezeigt. Zur Ausgleichung etwaiger Störungen des Gleichgewichtes im Hebelmechanismus der Wage selbst, dient die kleine, direkt unter i angebrachte Schale, in welche zu gedachtem Zwecke die Tariergewichte gelegt werden.

Haupterfordernis bei dieser Wage ist nun, dafs es gleichgültig bleiben mufs, auf welchen Punkt der Brücke die zu wiegende Last gelegt wird. Ferner soll die Wage, ihrem Namen „Dezimalwage“ entsprechend, eine solche sein, dafs das zum Wiegen erforderliche Gewicht G nur $^1/_{10}$ der zu wiegenden Last Q beträgt.

In Fig 42) ist schematisch noch einmal die Anordnung der einzelnen Hebel gezeigt und leicht zu übersehen; die Buchstaben sind dieselben wie in Fig. 41). Aus den eingetragenen Zahlen gehen die Verhältnisse der Hebellängen hervor und sollen dieselben, bei der folgenden Berechnung der Lastverteilung auf die einzelnen Stützpunkte, direkt als Zahlenwerte für die Hebellängen benützt werden.

Nimmt man z. B. eine Last von Q = 100 kg an, und denkt man sich diese 100 kg auf die Mitte der Brücke a b gelegt, so verteilen sich dieselben derart, dafs auf die Punkte a und b gleiche Drucke kommen, dafs also in a genau 50 kg, und in b ebenfalls 50 kg nach unten wirken; denn umgekehrt müssen nach dem Gesetz über die Wirkung paralleler Kräfte*) die in a und b wirksamen Drucke von je 50 kg, zusammen gleich ihrer Mittelkraft Q = 100 kg sein. Der Druck in b überträgt sich direkt durch die Stange E auf den Punkt b_1

Fig. 42.



des Hebels ic_1; es sind demnach im Abstande 1 am Hebelarm kc_1 genau 50 kg thätig. Der Druck im Punkte a überträgt sich direkt auf den Punkt a_1 des einarmigen Hebels cd; demnach entfallen auf den Punkt c des Hebels cd im Abstande 5 nur 50 : 5 = 10 kg, denn diese 10 kg im Abstande 5 wirken nach den Gesetzen über den Hebel genau so, als wie 50 kg im Abstande 1, da ja die statischen Momente -:- 50 . 1 = 10 . 5 -:- einander gleich sein müssen. Durch die Zugstange F werden die letztgenannten 10 kg auf den Punkt c_1 des Hebels kc_1 im Abstande 5 übertragen.

Es handelt sich jetzt darum, zu ermitteln, welches Gewicht G im Abstande 10, d. i. im Punkte i des Hebels ic_1, wirken

*) Vergl. S. 92.)

mufs, um den Gewichten von 50 kg im Punkte b_1 und von 10 kg im Punkte c_1 das Gleichgewicht zu halten. Nach den Gesetzen über statische Momente*) mufs, diesem Fall entsprechend, sein:

$$G \,.\, 10 = 50 \,.\, 1 + 10 \,.\, 5 \text{ und damit:}$$

$$G = \frac{50 + 50}{10} = \frac{100}{10}$$

$$= 10 \text{ kg} = {}^1/_{10} \text{ der Last } Q.$$

Legt man die Last Q = 100 kg so nahe an den Punkt b, dafs auf denselben 80 kg Druck entfallen, so bleiben für die Punkte a und a_1 nur 20 kg übrig. Das entspricht einer Belastung der Punkte b und c_1 von 20 : 5 = 4 kg. Für den Gleichgewichtszustand mufs dementsprechend sein:

$$G \,.\, 10 = 80 \,.\, 1 + 4 \,.\, 5; \text{ mithin:}$$

$$G = \frac{80 + 20}{10} = \frac{100}{10}$$

$$= 10 \text{ kg} = {}^1/_{10} \text{ der Last } Q.$$

Es ist also thatsächlich gleichgültig, auf welche Stelle der Brücke man die Last legt; es ist das aber auch die Grundbedingung für die Hebelverbindung an der Dezimalwage.

Im allgemeinen stellt sich die Rechnung folgendermafsen:

Bezeichnet man die in den Punkten a und b auftretenden Seitenkräfte der Last Q entsprechend mit p und q, so mufs $p + q = Q$ sein. Setzt man den von p ausgehenden und im Punkte c wirksam werdenden Druck = x, so mufs am einarmigen Hebel cd für den Gleichgewichtszustand $x \,.\, 5 = p \,.\, 1$ sein, woraus $x = p/_5$ folgt. Am zweiarmigen Hebel ic_1 wirken demnach im Punkte b_1 das Gewicht q, im Punkte c_1 das Gewicht $p/_5$ und im Punkte i das Gewicht G. Demnach mufs sein:

$$G \,.\, 10 = q \,.\, 1 + \frac{p}{5} \,.\, 5$$

$$= p + q = Q; \text{ mithin:}$$

$$G = \frac{Q}{10} = {}^1/_{10} \text{ der Last } Q.$$

Die Einrichtung der Centesimalwage ist entsprechend getroffen, nur mufs bei dieser Hebelverbindung das Gewicht $= {}^1/_{100}$ der abzuwiegenden Last betragen. Auch hier ist es gleichgültig, auf welchen Punkt der Brücke die Last gestellt wird.

*) Vergl. S. 97.)

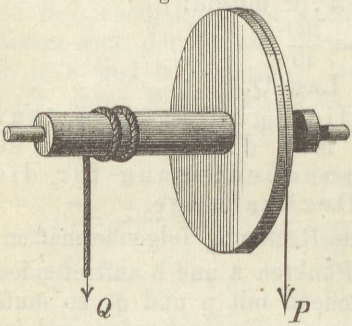
Neuntes Kapitel.

Das Wellrad.

Das Wellrad, oder Rad an der Welle, Fig. 43) besteht aus einer um ihre Achse drehbaren Welle und einer kreisförmigen Scheibe (oder Rad), welche mit der Welle fest verbunden ist.

Am Umfange des Rades oder der Scheibe wirkt die Kraft; an der Welle hängt vermittelst eines Seiles die Last, welche durch Aufwickeln des Seiles auf die Welle bewegt wird. Die Welle kann wagerecht, senkrecht oder auch geneigt angeordnet sein.

Fig. 43.



Für die Bestimmung des Gleichgewichtszustandes am Wellrade kommen die Gesetze des zweiarmigen Hebels in Betracht.

Bezeichnet man mit R den Halbmesser des Rades und mit r den Halbmesser der Welle, so ist R der Hebelarm der Kraft und r der Hebelarm der Last; mithin für den Gleichgewichtszustand ohne Berücksichtigung der Bewegungshindernisse:

$$P \,.\, R = Q \,.\, r, \text{ woraus folgt:}$$

$$P = \frac{Q \,.\, r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

$$Q = \frac{P \,.\, R}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

Gewöhnlich werden hierbei die Halbmesser R und r immer bis zur Mitte der zugehörigen Seilenden gerechnet.

Beispiele:

1) Welche Kraft ist an einer Welle von 180 mm Durchmesser erforderlich, um eine Last von 500 kg zu heben, wenn der Durchmesser des Rades 2,5 m beträgt?

Nach Formel 65) erhält man:

$$P = \frac{Q \,.\, r}{R} = \frac{500 \,.\, 0{,}09}{1{,}25} = 36 \text{ kg.}$$

2) Welche Last kann vermittelst eines Wellrades gehoben werden, wenn der Durchmesser der Welle 230 mm, der Durchmesser des Rades 1,6 m, und die am Umfange des Rades wirkende Kraft P = 20 kg ist?

Aus Formel 66) erhält man:

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} = \frac{20 \cdot 0{,}8}{0{,}115} = 139{,}13 \text{ kg.}$$

3) Welchen Halbmesser muſs man dem Rade geben, wenn durch eine Kraft von 30 kg eine Last von 500 kg gehoben werden soll, welche an einer Welle von 240 mm Durchmesser hängt?

Aus Formel 65) $P = \frac{Q \cdot r}{R}$ ergiebt sich durch Umformung:

$$R = \frac{Q \cdot r}{P} = \frac{500 \cdot 0{,}12}{30} = 2 \text{ m.}$$

4) Wie groſs muſs der Halbmesser der Welle genommen werden, wenn durch eine Kraft von 40 kg, welche an einem Rade von 2,6 m Durchmesser wirkt, eine Last von 450 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Aus Formel 65) $P = \frac{Q \cdot r}{R}$ erhält man durch Umformung:

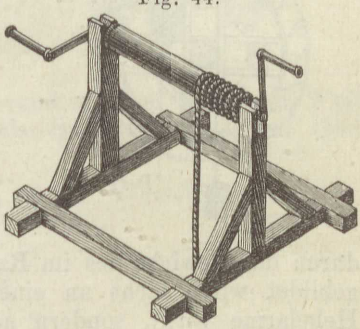
$$r = \frac{P \cdot R}{Q} = \frac{40 \cdot 1{,}3}{450} = 116 \text{ mm.}$$

Das Wellrad kommt in den verschiedensten Gestalten zur Anwendung; als Winde, Haspel, Tretrad, Tretscheibe, Sprossenrad, Göpel, Spillrad u. s. w.

Die Berechnung ist in allen Fällen auf gleiche Weise durchzuführen und es mag genügen, hier nur noch einige allgemeine Bemerkungen einzufügen.

Der gewöhnliche Kurbelhaspel (Fig. 44) hat zwei einander gegenüberstehende, um 90^0 versetzte Kurbeln von 36 bis 45 cm Armlänge, und eine zur Aufnahme des Seiles dienende Welle von 20—25 cm Durchmesser.

Fig. 44.



Bei einer fortdauernden, 8—12 stündigen Arbeitszeit nimmt man die an der Kurbel wirkende Kraft eines Arbeiters zu 8—10 kg an.

Wirken an einem solchen Kurbelhaspel zwei Arbeiter zusammen mit einer Kraft $P = 16$ kg, an einer Kurbel von 40 cm Länge und einem Wellen-Halbmesser von 12 cm, so erhält man nach Formel 66) als zu hebende Last:

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} = \frac{16 \cdot 40}{12} = 53{,}3 \text{ kg.}$$

Infolge der Bewegungshindernisse, der Reibung der Zapfen in den Lagern, der Steifigkeit der Seile u. s. w. wird aber eine beträchtlich gröfsere Kraft aufgeboten werden müssen, um die Last zu bewältigen. Man nimmt meistens den Reibungs- und Seilsteifigkeits-Widerstand zu $\frac{1}{3}$, in günstigen Fällen zu $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ der Last Q an, so dafs in vorstehendem Beispiele die zu hebende Last nur 40 kg betragen dürfte.

Ist die Last gröfser, so mufs ein Rädervorgelege eingeschaltet werden, da die Kurbellänge 40—45 cm nicht überschreiten soll und der Wellen-Durchmesser, der Festigkeit wegen, nicht unter 20 cm gewählt werden darf. Bei nicht andauernder, sehr kurzer Wirkung auf die Kurbel, kann man die Kraft e i n e s Arbeiters zu 12—16 kg annehmen.

Bei einem durch Menschenkraft angetriebenen Göpel, soll der Bahndurchmesser nicht kleiner als 3 m sein. Die Kraft eines Menschen kann man hier etwas höher als bei der Kurbel annehmen, nämlich zu 9—10 kg.

Bei dem Pferdegöpel nimmt man für ein Pferd gewöhnlichen Schlages eine Zugkraft von 45 kg an; für kräftige Pferde eine solche von 60—70 kg. Der Bahndurchmesser soll mindestens 10 m betragen.

Bei der Berechnung des Tretrades (Fig. 45), oder des Laufrades (Fig. 46), ist zu berücksichtigen, dafs die Kraft, welche

Fig. 45.

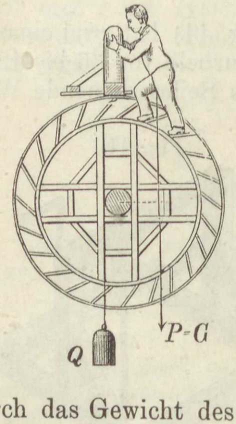
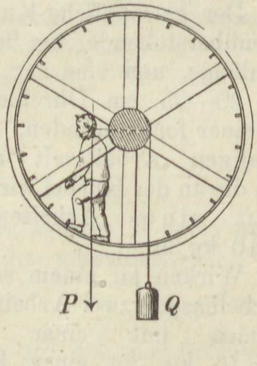


Fig. 46.



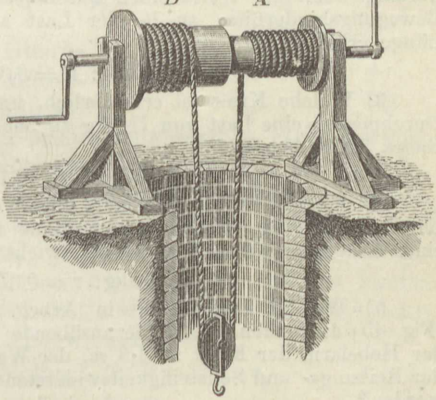
durch das Gewicht des im Rade arbeitenden lebenden Wesens gebildet wird, nicht an einem dem Radhalbmesser gleichen Hebelarme wirkt, sondern an einem Hebelarme, welcher erhalten wird, wenn man durch den Schwerpunkt des arbeitenden Geschöpfes eine Senkrechte gezogen denkt, und auf diese wieder eine Senkrechte vom Drehpunkte aus fällt. Diese letzte

Senkrechte ist alsdann der in die Rechnung einzusetzende Hebelarm. Der Erfahrung zufolge ist die von dem betreffenden lebenden Wesen ausgeübte Kraft gleich $\frac{1}{5}$ seines Gewichtes.

Die Wirkung eines Wellrades ist von der Gröfse des Hebelarmes der Kraft und von dem Halbmesser der Welle abhängig, d. h. die zu hebende Last kann um so gröfser sein, je gröfser der Hebelarm der Kraft und je kleiner der Wellenhalbmesser ist. Diese Gröfsen dürfen aber gewisse Grenzen nicht überschreiten, da der Festigkeit wegen der Wellenhalbmesser nicht zu klein, und des Raumes wegen der Hebelarm der Kraft nicht zu grofs genommen werden darf.

Um diesen Übelständen abzuhelfen, giebt man der Welle zwei verschiedene Durchmesser (Fig. 47), schlingt das Seil, an welchem die Last hängt, um eine lose Rolle und läfst dieses Seil bei der Umdrehung der Welle sich von dem dünnen Teil A der Welle ab-, und auf den stärkeren Teil B aufwickeln. Man nennt diese Vorrichtung Differentialwinde.

Fig. 47.



Die Last Q wird hierbei in zwei Seitenkräfte, jede gleich $\frac{1}{2}$ Q, zerlegt, wovon die eine an der Welle A, die andere im entgegengesetzten Sinne an der Welle B wirksam ist.

Bezeichnet P die Kraft, R den Hebelarm der Kraft, r_1 den gröfseren und r_2 den kleineren Wellenhalbmesser, so erhält man als Bedingung für den Gleichgewichtszustand:

$$P . R + \tfrac{1}{2} Q . r_2 = \tfrac{1}{2} Q . r_1 \text{ oder:}$$

$$P = \frac{Q}{2} . \frac{(r_1 - r_2)}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 67)$$

$$Q = 2 . P . \frac{R}{(r_1 - r_2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 68)$$

Es ist hieraus ersichtlich, dafs die Gröfse der zu hebenden Last nur abhängig ist von dem Unterschiede $(r_1 - r_2)$ der beiden Wellenhalbmesser.

Beispiele:

1) Welche Kraft ist erforderlich, um eine Last von 600 kg im Gleichgewichte zu halten, wenn $R = 0{,}4$ m, $r_1 = 0{,}15$ m und $r_2 = 0{,}12$ m angenommen werden?

Nach Formel 67) ist:

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{(r_1 - r_2)}{R} = \frac{600}{2} \cdot \frac{(0{,}15 - 0{,}12)}{0{,}4} = 22{,}5 \text{ kg.}$$

2) Welche Last Q ist durch eine Kraft $P = 20$ kg im Gleichgewichte zu halten, wenn $R = 0{,}4$ m, $r_1 = 0{,}2$ m und $r_2 = 0{,}18$ m, betragen?

Nach Formel 68) ist:

$$Q = 2 \,.\, P \,.\, \frac{R}{(r_1 - r_2)} = 2 \,.\, 20 \,.\, \frac{0{,}4}{(0{,}2 - 0{,}18)} = 800 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Last kann vermittelst eines Wellrades gehoben werden, wenn der Durchmesser der Welle = 180 mm, der Raddurchmesser = 1,2 m ist und am Umfange des Rades eine Kraft $P = 30$ kg wirkt?

Lösung: $Q = 200$ kg.

2) An einem Kurbelhaspel (Fig. 44) wirken zwei Arbeiter zusammen mit einer Kraft $P = 30$ kg. Es soll eine Last $Q = 100$ kg gehoben werden, wenn die Welle einen Durchmesser von 188 mm hat und die Bewegungshindernisse zu $^1/_5$ der Last angenommen werden. Welche Länge erhalten die Kurbeln?

Lösung: $R = 0{,}36$ m.

3) Welche Kraft ist erforderlich, um an einer Welle von 150 mm Durchmesser eine Last von 750 kg zu heben, wenn der Durchmesser des Rades 2,8 m beträgt?

Lösung: $P = 40{,}17$ kg.

4) Welchen Halbmesser mufs eine Welle erhalten, wenn durch eine Kraft $P = 25$ kg, die an einem Rade von 1,5 m Halbmesser wirkt, einer Last $Q = 500$ kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: $r = 0{,}075$ m.

5) Welche Last kann ein Arbeiter vermittelst eines Tretrades (Fig. 45) aufwinden, wenn die ausübende Kraft des Arbeiters zu 15 kg, der Hebelarm der Kraft zu 1,3 m, der Wellenhalbmesser zu 0,12 m und der Reibungs- und Seilsteifigkeitswiderstand zu $^1/_3$ der Last angenommen werden?

Lösung: $Q = 122$ kg.

6) Welche Kurbellänge R ist bei der Differentialwinde (Fig. 47) erforderlich, um eine Last $Q = 750$ kg aufzuwinden, wenn die Kraft $P = 24$ kg, die Wellenhalbmesser $r_1 = 0{,}15$ m und $r_2 = 0{,}13$ m betragen?

Lösung: $R = 0{,}312$ m.

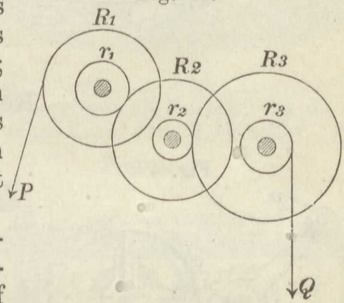
Zehntes Kapitel.

Räderwerke.

Mehrere Wellräder werden untereinander entweder durch Riemen, Seile, Ketten oder Räder verbunden.

In letzterem Falle sitzt auf der Welle, an welcher die Kraft vermittelst einer Kurbel oder eines Rades wirkt, ein kleines Rad, das Getriebe, welches in ein gröfseres Rad auf der zweiten Welle eingreift; an dieser Welle kann wieder ein Getriebe angebracht sein, welches die Bewegung auf ein an der dritten Welle befindliches Rad überträgt u. s. w. (Fig. 48.)

Fig. 48.



Um den Zustand des Gleichgewichtes für ein solches Räderwerk herzustellen, verfährt man auf dieselbe Weise, wie bei den zusammengesetzten Hebelwerken.

Bezeichnet man die Halbmesser der Räder mit R_1, R_2, R_3, die der Getriebe mit r_1, r_2, r_3, den Druck zwischen dem ersten und zweiten Wellrade mit x, und den Druck zwischen dem zweiten und dritten Rade mit y, so ist x für das erste Wellrad die Last und für das zweite die Kraft, y für das zweite Wellrad die Last und für das dritte die Kraft. Man hat dann als Bedingung für den Gleichgewichtszustand:

Für das erste Wellrad $P \cdot R_1 = x \cdot r_1$ . . . I)

" " zweite " $x \cdot R_2 = y \cdot r_2$ . . . II)

" " dritte " $y \cdot R_3 = Q \cdot r_3$ . . . III)

Durch Multiplikation*) dieser drei Gleichungen ergiebt sich:

$$P \cdot R_1 \cdot x \cdot R_2 \cdot y \cdot R_3 = x \cdot r_1 \cdot y \cdot r_2 \cdot Q \cdot r_3.$$

Da sich x und y auf beiden Seiten heben, folgt:

$$P \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = Q \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \text{ oder:}$$

$$P = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} \cdot Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 69)$$

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 70)$$

*) Vergl. Seite 40, unter 33, c).

Würden die Räder mit den Halbmessern R_3 und r_3 ausfallen, so gehen die Formeln 69 und 70) über in:

$$P = \frac{r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 71)$$

$$\text{und } Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72)$$

Als Zahndruck an den Berührungsstellen der Zähne, d. i. im Teilkreise der Zahnräder, erhält man aus Gleichung I):

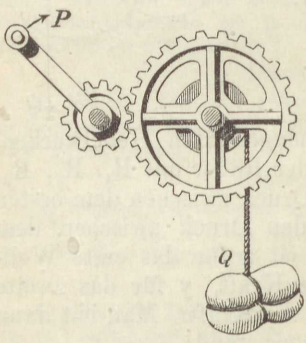
$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

und aus Gleichung III):

$$y = \frac{Q \cdot r_3}{R_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74)$$

Beispiele:

Fig. 49.



1) An einer Winde, deren Räderwerk in Fig. 49) dargestellt ist, wirken zwei Arbeiter, jeder mit einer Kraft von 10 kg, an einer 40 cm langen Kurbel. Das an der Kurbelwelle sitzende Trieb hat 6 cm, das Rad an der Trommelwelle 36 cm, die Seiltrommel 10 cm Halbmesser. Welche Last kann durch diese Kraft im Gleichgewichte gehalten werden?

Gegeben sind: $P = 20\,\text{kg}$, $R_1 = 40\,\text{cm}$, $R_2 = 36\,\text{cm}$, $r_1 = 6\,\text{cm}$, $r_2 = 10\,\text{cm}$.

Aus Formel 72) ergiebt sich:

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P = \frac{40 \cdot 36}{6 \cdot 10} \cdot 20 = 480 \text{ kg.}$$

Rechnet man $15\,\% = 0{,}15$ der zu bewältigenden Last als Verlust auf die vorhandenen Widerstände, so würden in Wirklichkeit nur $480 - 0{,}15 \cdot 480 = 408$ kg als zu hebende Last anzunehmen sein.

Den Zahndruck an der Berührungsstelle erhält man aus Formel 73):

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{20 \cdot 40}{6} = 133{,}33 \text{ kg.}$$

2) Mit vorstehender Winde sollen durch zwei Arbeiter 900 kg gehoben werden. Welchen Halbmesser mufs das Rad auf der Trommelwelle erhalten, wenn der Reibungswiderstände wegen die zu hebende Last zu 1000 kg angenommen wird?

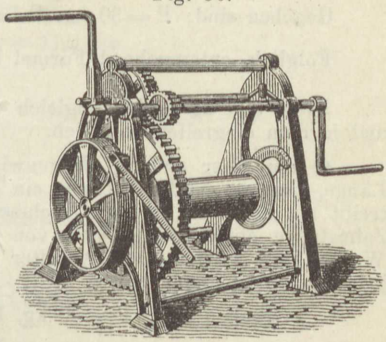
Aus Formel 72) $Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P$ ergiebt sich durch Umformung:

$$R_2 = \frac{Q \cdot r_1 \cdot r_2}{P \cdot R_1} = \frac{1000 \cdot 6 \cdot 10}{20 \cdot 40} = 75 \text{ cm.}$$

3) Bei einer Winde mit doppeltem Rädervorgelege sind gegeben: $R_1 = 40$ cm, $R_2 = 50$ cm, $R_3 = 60$ cm; $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 10$ cm, $r_3 = 15$ cm.

Welche Last kann durch eine Kraft von 24 kg im Gleichgewichte gehalten werden? (Fig. 50.)

Fig. 50.



Nach Formel 70) ist:

$$Q = \frac{R_1 \,.\, R_2 \,.\, R_3}{r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3} \,.\, P = \frac{40 \,.\, 50 \,.\, 60}{6 \,.\, 10 \,.\, 15} \,.\, 24 = 3200 \text{ kg.}$$

Als Zahndruck ergiebt sich aus Formel 73):

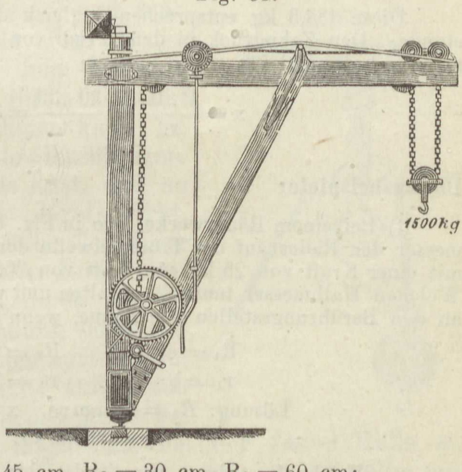
$$x = \frac{P \,.\, R_1}{r_1} = \frac{24 \,.\, 40}{6} = 160 \text{ kg,}$$

und aus Formel 74):

$$y = \frac{Q \,.\, r_3}{R_3} = \frac{3200 \,.\, 15}{60} = 800 \text{ kg.}$$

4) Ein Krahn (Fig. 51) hat zwei Vorgelege mit Kurbeln von 45 cm Länge, an denen je ein Arbeiter mit einer Kraft von 12 kg wirkt. Auf der Kurbelwelle sitzt ein Trieb von 9 cm Halbmesser, welches im Eingriff mit einem Rade von 30 cm Halbmesser auf der Vorgelegewelle steht. Auf dieser sitzt ein Trieb von 12 cm Halbmesser und treibt ein Rad auf der Kettentrommelwelle von 60 cm Halbmesser.

Fig. 51.



Wie grofs mufs der Halbmesser der Kettentrommel genommen werden, wenn durch die Arbeiter eine Last von 1500 kg, ohne Rücksicht auf Reibung, gehoben werden soll?

Gegeben sind:

$$P = 24 \text{ kg}, \; R_1 = 45 \text{ cm}, \; R_2 = 30 \text{ cm}, \; R_3 = 60 \text{ cm};$$
$$r_1 = 9 \;\text{„}, \; r_2 = 12 \;\text{„}, \; Q = 1500 \text{ kg.}$$

Aus Formel 70) $Q = \frac{R_1 \,.\, R_2 \,.\, R_3}{r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3} \,.\, P$ erhält man:

$$r_3 = \frac{R_1 \,.\, R_2 \,.\, R_3 \,.\, P}{r_1 \,.\, r_2 \,.\, Q} = \frac{45 \,.\, 30 \,.\, 60 \,.\, 24}{1500 \,.\, 9 \,.\, 12} = 12 \text{ cm.}$$

Als Zahndruck erhält man:

$$x = \frac{P \,.\, R_1}{r_1} = \frac{24 \,.\, 45}{9} = 120 \text{ kg,}$$

$$\text{und } y = \frac{Q \,.\, r_3}{R_3} = \frac{1500 \,.\, 12}{60} = 300 \text{ kg.}$$

5) Eine Wagenwinde hat eine Kurbel von 30 cm Länge und ein in die Zahnstange eingreifendes Trieb von 6 cm Durchmesser. Welche Last können zwei Arbeiter mit dieser Winde heben, wenn die Kraft eines Arbeiters zu 15 kg angenommen wird?

Gegeben sind: $P = 30$ kg, $R_1 = 30$ cm, $r_1 = 3$ cm.

Folglich, entsprechend Formel I): $Q = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{30 \cdot 30}{3} = 300$ kg.

Diese 300 kg bilden zugleich den Zahndruck in der Zahnstange und in dem eingreifenden Trieb.

6) Bei einer anderen Wagenwinde, mit einer Kurbel von 30 cm Länge, sitzt an der Kurbelwelle ein Trieb von 6 cm Durchmesser. Dieses treibt ein Rad von 13 cm Durchmesser, mit dessen Welle das in die Zahnstange eingreifende Trieb von 9 cm Durchmesser verbunden ist. Welche Last können zwei Arbeiter überwinden, wenn die Kraft eines jeden zu 15 kg angenommen wird?

Gegeben sind: $P = 30$ kg, $R_1 = 30$ cm, $R_2 = 6{,}5$ cm;
$r_1 = 3$ „ , $r_2 = 4{,}5$ „ .

Mithin nach Formel 72):

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P = \frac{30 \cdot 6{,}5 \cdot 30}{3 \cdot 4{,}5} = 433{,}3 \text{ kg.}$$

Diese 433,3 kg entsprechen zugleich dem Zahndruck in der Zahnstange. Den Zahndruck in dem Trieb von 6 cm Durchmesser berechnet man nach Formel 73) zu:

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{30 \cdot 30}{3} = 300 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Bei einem Räderwerke, wie in Fig. 48) dargestellt, soll der Halbmesser des Rades auf der Trommelwelle derartig bestimmt werden, dafs mit einer Kraft von 25 kg eine Last von 2000 kg gehoben werden kann. Welchen Halbmesser mufs R_3 erhalten und wie grofs sind die Zahndrucke an den Berührungsstellen der Zähne, wenn gegeben sind:

$R_1 = 40$ cm, $R_2 = 50$ cm;
$r_1 = 6$ „ , $r_2 = 10$ „ , $r_3 = 20$ cm.
Lösung: $R_3 = 48$ cm; $x = 166{,}7$ kg;
$y = 833{,}3$ kg.

2) Welche Last kann vermittelst des Räderwerkes Fig. 48) durch einen Arbeiter, welcher an der Kurbel mit 12 kg wirkt, gehoben werden, wenn gegeben sind:

$R_1 = 45$ cm, $R_2 = 54$ cm, $R_3 = 60$ cm;
$r_1 = 12$ „ , $r_2 = 15$ „ , $r_3 = 9$ „ .
Lösung: $Q = 1080$ kg.

3) Welche Kraft ist erforderlich, um mit einem Krahn (Fig. 51) eine Last von 3000 kg zu heben, wenn gegeben sind:

$R_1 = 45$ cm, $R_2 = 54$ cm, $R_3 = 75$ cm;
$r_1 = 10$ „ , $r_2 = 12$ „ , $r_3 = 15$ „ .
Lösung: $P = 30$ kg (abgerundet).

4) Welchen Halbmesser erhält die Trommel einer Windevorrichtung, wenn gegeben sind:

$R_1 = 44{,}8$ cm, $R_2 = 26$ cm, $R_3 = 62{,}4$ cm;
$r_1 = 5{,}2$ „ , $r_2 = 10{,}4$ „ ;
$Q = 3600$ kg, $P = 30$ kg.

Lösung: $r_3 = 11{,}2$ cm.

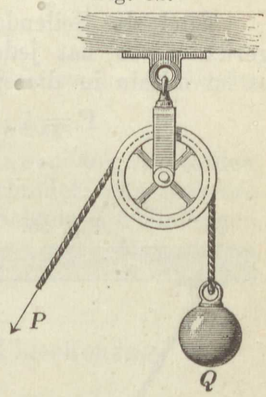
Elftes Kapitel.

Die Rolle.

Die Rolle ist eine kreisrunde, mit konzentrischer Achse versehene bewegliche Scheibe, deren Umfang zur Aufnahme eines Seiles, eines Riemens oder einer Kette vorgerichtet ist.

Man unterscheidet feste und lose Rollen. Eine feste Rolle (Fig. 52) ist eine solche, welche nur eine drehende Bewegung um eine feste, ihren Ort nicht verändernde Achse annehmen kann; sie ist zum Teil von einem Seile umschlungen, an dessen einem Ende die Last, und an dessen anderem Ende die Kraft wirkt.

Fig. 52.



Zieht man in nebenstehender Figur aus dem Mittelpunkte der Rolle Normalen zu den Richtungslinien von P und Q, so ist die Verbindung derselben als ein gleicharmiger Hebel aufzufassen, an welchem Gleichgewicht stattfinden wird, wenn die Kraft ebenso groſs ist, als die Last. Hieraus folgt, daſs bei der festen Rolle an Kraft nichts gewonnen, d. h. gespart wird, und dieselbe nur dazu dient, eine Veränderung in der Kraftrichtung herbeizuführen. Um Bewegung zu ermöglichen, muſs sogar die Kraft, der Reibung und der Steifigkeit der Seile wegen, gröſser sein als die Last.

Eine lose Rolle (Fig. 53) ist eine solche, welche sich nicht nur um ihren Mittelpunkt dreht, sondern sich mit der Last, welche in der Rollenmitte an einem Kloben befestigt ist, hebt und senkt; also ihren Ort verändert.

Verschiedene Anordnungen der losen Rolle sind aus den Fig. 53, 54 und 55) ersichtlich; der besseren Leitung wegen wird das Seilende, an welchem die Kraft wirkt, gewöhnlich noch über eine feste Rolle geleitet.

Fig. 53.

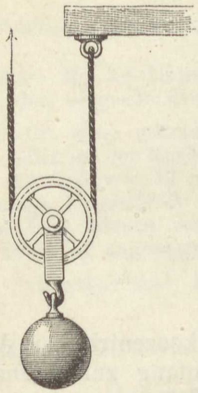
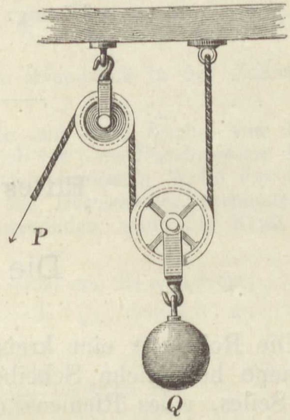


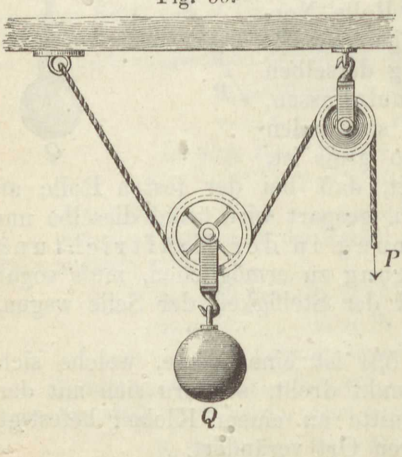
Fig. 54.



Sind die Seilenden wie in Fig. 53 und 54) parallel gerichtet, so hat jedes derselben die halbe Last zu tragen; es ist mithin in diesem Falle für den Gleichgewichtszustand:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

Fig. 55.



Sind die Seilenden nicht paralell (Fig. 55), so ist der Gewinn an Kraft nicht so grofs; er wird um so geringer, je mehr die Seilenden von ihrer parallelen Lage abweichen. Für die in Fig. 55) dargestellte Anordnung ergiebt sich folgendes Gesetz:

Gleichgewicht findet statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens.

Bezeichnet man den Halbmesser der Rolle mit r, die Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens mit s, so erhält man für den Gleichgewichtszustand:

$$P : Q = r : s, \text{ woraus folgt:}$$

$$P = \frac{Q \cdot r}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

$$Q = \frac{P \cdot s}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

Beispiele:

1) Durch die in Fig. 54) dargestellte Rollenverbindung soll eine Last von 100 kg gehoben werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Aus Formel 75) erhält man:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot Q = \frac{100}{2} = 50 \text{ kg}.$$

Nimmt man die Bewegungswiderstände zu $^1/_{10} = 10\,\%$ der Last an, so folgt:

$$P = 50 + 0{,}1 \cdot 100 = 50 + 10 = 60 \text{ kg}.$$

2) Welche Last Q kann vermittelst der in Fig. 55) dargestellten Rollenverbindung durch eine Kraft $P = 60$ kg gehoben werden, wenn der Radius der losen Rolle $r = 20$ cm und die Sehne $s = 30$ cm angenommen werden?

Aus Formel 77) erhält man:

$$Q = \frac{P \cdot s}{r} = \frac{60 \cdot 30}{20} = 90 \text{ kg}.$$

Werden auch hier die Bewegungswiderstände zu $^1/_{10} = 10\,\%$ der Last angenommen, so folgt:

$$Q = 90 - 0{,}1 \cdot 90 = 90 - 9 = 81 \text{ kg}.$$

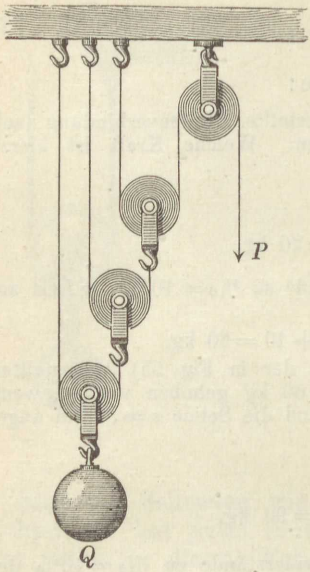
Will man mit geringer Kraft unter Anwendung von Rollen grofse Lasten heben oder senken, so verbindet man mehrere feste und lose Rollen mit einander. Solche Verbindungen nennt man Rollen- oder Flaschenzüge. Man unterscheidet hierbei folgende Arten:

1) Der Rollenzug oder Potenz-Flaschenzug.

Derselbe besteht aus mehreren losen Rollen, welche vermittelst einer gleich grofsen Anzahl Seile auf die aus Fig. 56) ersichtliche Weise mit einander in Verbindung gebracht werden. An der untersten Rolle hängt die Last Q, während die Kraft P an dem über die feste Rolle geleiteten Seilende wirkt.

Nimmt man 3 lose Rollen und parallele Seilrichtungen an, so ist nach Vorstehendem der Zug in dem an der zweiten Rolle befestigten Seilende des um die erste Rolle geleiteten Seiles gleich der halben Last, also $= \tfrac{1}{2}\,Q$. Dieser Zug bildet aber die an der zweiten Rolle wirkende Last; mithin ist die Spannung des an der dritten Rolle befestigten Seilendes wiederum nur gleich der halben, an der zweiten losen Rolle wirkenden Last, also $= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}Q) = \frac{1}{4}Q$, und aus demselben Grunde der Zug in dem über die feste Rolle geleiteten Seilende $= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}Q) = \frac{1}{8}Q$; folglich für den Gleichgewichtszustand, ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse und das der Kraft entgegenwirkende Eigengewicht der Rollen

Fig. 56.



$$P = \frac{1}{8}Q \quad . \quad . \quad . \quad 78)$$

woraus folgt:

$$Q = 8 . P \quad . \quad . \quad . \quad 79)$$

d. h. man kann mit einem solchen Potenzflaschenzuge eine Last heben, welche 8 mal so grofs ist als die an dem Zuge thätige Kraft. Formel 78) kann, wenn man berücksichtigt, dafs $8 = 2^3$ ist, auch noch wie folgt geschrieben werden:

$P = \frac{Q}{2^3}$, woraus unmittelbar folgt:

$Q = 2^3 . P.$

Wären in dem Zuge 4 lose Rollen vorhanden, so müfste

$P = \frac{1}{16} . Q = \frac{Q}{16} = \frac{Q}{2^4}$ sein, woraus sich dann

$Q = 2^4 . P$ ergiebt.

In den letzten Formeln erscheint die Zahl 2 immer in der Potenz, welche der Anzahl der in dem Zuge vorhandenen **losen** Rollen entspricht; bezeichnet man diese Anzahl allgemein mit **n**, so folgt entsprechend:

$$P = \frac{Q}{2^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 80)$$

$$Q = 2^n . P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 81)$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse, die Last mit der n^{ten} Potenz von 2 zunehmen kann. Bei 4 losen Rollen braucht man demnach nur den $2^4 = 16^{ten}$, und bei 6 losen Rollen nur den $2^6 = 64^{ten}$ Teil der Last als erforderliche Kraft.

2) Der gemeine Flaschenzug.

Derselbe besteht aus mehreren festen Rollen a und mehreren losen Rollen b, welche in einem gemeinschaftlichen Gehäuse, der Flasche, untergebracht sind, und in der aus den Fig. 57, 58 und 59) ersichtlichen Weise von einem in c befestigten Seile umschlungen werden.

Ist dieses Seil an der festen Flasche befestigt, wie Fig. 57) zeigt, so ist stets die gleiche Anzahl Rollen in jeder Flasche erforderlich; ist es aber an der losen, beweglichen Flasche fest gemacht, wie in Fig. 58), so mufs in der festen Flasche stets eine Rolle mehr vorhanden sein.

Fig. 57.

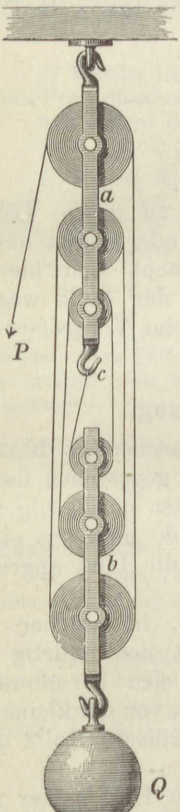


Fig. 58.

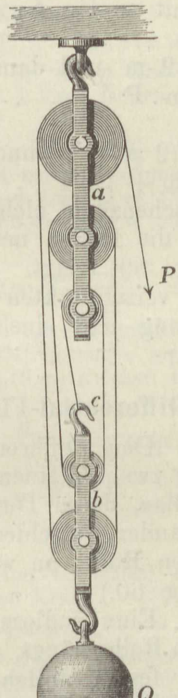
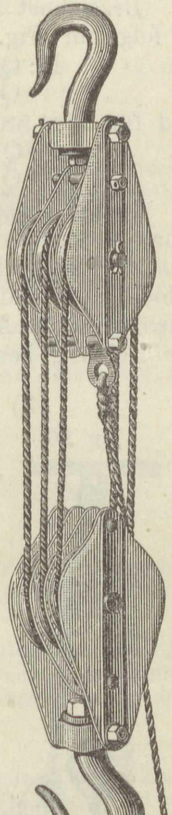


Fig. 59.



In beiden Fällen verteilt sich die Last gleichmäfsig auf die Anzahl der Seilenden; es ist daher die Spannung der Seilenden im ersten Falle, bei 6 Rollen $= \frac{1}{6}$ Q, und im zweiten, bei 5 Rollen $= \frac{1}{5}$ Q, infolgedessen auch

$$P = \frac{1}{6} Q \text{ oder } P = \frac{1}{5} Q$$

wird, woraus für den Gleichgewichtszustand folgt:

$$P : Q = 1 : 6 \text{ (Fig. 57) und}$$
$$P : Q = 1 : 5 \text{ (Fig. 58).}$$

Bezeichnet man allgemein bei einem gewöhnlichen Flaschenzuge mit n die Anzahl der Rollen überhaupt, so verhält sich entsprechend:

$$P : Q = 1 : n \text{ oder:}$$
$$P = \frac{Q}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 82)$$
$$\text{und } Q = P \cdot n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Bezeichnet man mit m die Anzahl der losen Rollen, so folgt für Fig. 57):

$$P : Q = 1 : 2\,m \text{ und damit}$$
$$Q = 2\,m \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

und für Fig. 58):

$$P : Q = 1 : (2\,m + 1) \text{ und damit}$$
$$Q = (2\,m + 1) \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

Damit diese Flaschenzüge nicht eine zu grofse Länge erhalten, ordnet man die Rollen nebeneinander, statt untereinander an, wie Fig. 59) zeigt. Es macht sich hierbei jedoch der schiefen, verschränkten Lage der Seile wegen, eine stärkere Abnutzung und eine ziemliche Vergröfserung der Reibung bemerkbar.

3) Der Differential-Flaschenzug.

Fig. 60.

Der Differential-Flaschenzug besteht aus zwei, in einem Stück gegossenen festen Rollen, deren Durchmesser nur wenig von einander verschieden sind, und aus einer losen Rolle, an welcher die Last angreift. (Fig. 60.)

Eine endlose Kette, in welcher die lose Rolle hängt, schlingt sich derartig um die festen Rollen, dafs sich bei abwärts gerichtetem Zuge die Kette von der kleineren Rolle ab- und auf die gröfsere Rolle aufwickelt.

Bezeichnet man den Halbmesser der gröfseren Rolle mit R, den der kleineren mit r, so folgt für den Gleichgewichtszustand, da die Spannung in den beiden Kettenenden je $\frac{1}{2}$ Q beträgt:

$$P \cdot R + \tfrac{1}{2} Q \cdot r = \tfrac{1}{2} Q \cdot R \text{ d. h:}$$
$$P = \frac{R - r}{2 \cdot R} \cdot Q \quad \ldots\ldots \quad 86)$$
$$\text{und} \quad Q = \frac{2 \cdot R}{R - r} \cdot P \quad \ldots\ldots \quad 87)$$

Beispiele:

1) Welche Kraft ist erforderlich, um an einem gewöhnlichen Flaschenzuge mit 6 Rollen einer Last $Q = 300$ kg das Gleichgewicht zu halten?

Nach Formel 82) ist:

$$P = \frac{Q}{n} = \frac{300}{6} = 50 \text{ kg.}$$

2) Welcher Last kann durch eine Kraft von 20 kg, bei Anwendung eines gewöhnlichen Flaschenzuges mit 8 Rollen, das Gleichgewicht gehalten werden?

Nach Formel 83) erhält man:

$$Q = P \,.\, n = 20 \,.\, 8 = 160 \text{ kg.}$$

3) Welche Last kann bei einem Kraftaufwande von 25 kg durch einen Potenzflaschenzug mit 4 losen Rollen gehoben werden?

Aus Formel 81) folgt:

$$Q = P \,.\, 2^n = 25 \,.\, 2^4 = 25 \,.\, 16 = 400 \text{ kg.}$$

4) Welche Kraft P ist bei Anwendung eines Differential-Flaschenzuges erforderlich, um einer Last $Q = 500$ kg das Gleichgewicht zu halten, wenn $R = 0{,}13$ m und $r = 0{,}12$ m angenommen werden?

Nach Formel 86) ist:

$$P = \frac{R - r}{2 \,.\, R} \,.\, Q = \frac{0{,}13 - 0{,}12}{2 \,.\, 0{,}13} \,.\, 500 = 19{,}2 \text{ kg.}$$

5) Eine Last von 400 kg soll durch eine Kraft von 35 kg vermittelst eines Differential-Flaschenzuges gehoben werden. Der Radius der grofsen Rolle beträgt 0,10 m; welchen Radius mufs die kleine Rolle erhalten?

Aus Formel 86) $P = \frac{R - r}{2 \,.\, R} \,.\, Q$ folgt:

$$r = \frac{Q \,.\, R - 2 P \,.\, R}{Q} = \frac{400 \,.\, 0{,}1 - 2 \,.\, 35 \,.\, 0{,}1}{400} = 82{,}5 \text{ mm.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Last Q kann vermittelst der in Fig. 54) dargestellten Rollenverbindung durch eine Kraft $P = 50$ kg gehoben werden?

Lösung: $Q = 100$ kg.

2) Vermittelst der in Fig. 55) dargestellten Rollenverbindung soll eine Last $Q = 120$ kg gehoben werden; der Halbmesser der Rolle betrage 26 cm und die Sehne des vom Seile umspannten Bogens 40 cm. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Lösung: $P = 78$ kg.

3) Welche Last können 4 Arbeiter, die zusammen einen Zug von 48 kg ausüben, vermittelst eines Potenzflaschenzuges, bestehend aus 6 losen Rollen, heben?

Lösung: $Q = 3072$ kg.

4) Welche Kraft ist erforderlich, um durch einen gewöhnlichen Flaschenzug mit 8 Rollen eine Last von 150 kg zu heben?

Lösung: $P = 18{,}75$ kg.

5) Welche Last können 2 Arbeiter, die zusammen einen Zug von 30 kg ausüben, mit einem gewöhnlichen Flaschenzuge heben, wenn derselbe aus 7 Rollen besteht und die bewegliche Flasche ein Gewicht von 12 kg hat?

Lösung: $Q = 198$ kg.

6) Wie viel Rollen mufs man einem gewöhnlichen Flaschenzuge geben, wenn ein Arbeiter mit einer Kraft von 15 kg eine Last von 150 kg heben soll?

Lösung: $n = 10$ Rollen.

7) Welche Last kann ein Arbeiter, der einen Zug von 16 kg ausübt, vermittelst eines Differential-Flaschenzuges heben, wenn der Halbmesser der gröfseren Rolle $R = 0{,}1$ m, und derjenige der kleineren Rolle $r = 0{,}08$ m beträgt?

Lösung: $Q = 160$ kg.

8) Vermittelst eines Differential-Flaschenzuges soll eine Last von 500 kg gehoben werden. Der Halbmesser der gröfseren Rolle betrage 0,13 m, der Halbmesser der kleineren Rolle 0,12 m. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Lösung: $P = 19{,}2$ kg.

Bei allen Rollenverbindungen und Flaschenzügen bilden Reibung und Seilsteifigkeit ein aufserordentliches Bewegungshindernis. Bei gewöhnlichen Flaschenzügen, mit 2 bis 3 Rollen in jeder Flasche, sind die Widerstände zu $\frac{1}{3}$ bis zu $\frac{1}{2}$ der Last zu veranschlagen, so dafs man, um sicher zu gehen, $\frac{4}{3}$ Q bis $\frac{3}{2}$ Q in die Rechnung einführen mufs. Mit wachsender Rollenzahl steigern sich die Widerstände derart, dafs unter Umständen kaum noch von einem Kraftgewinn die Rede sein kann. Überdies mufs nach den Gesetzen über „Mechanische Arbeit“ die Kraft einen soviel mal gröfseren Weg zurücklegen, als die Last gröfser ist, wie die Kraft. In den folgenden Gleichungen sind die Kraftwege der hier besprochenen Rollenverbindungen angegeben. Bezeichnet man mit

S den Weg der Kraft,

s den Weg der Last,

so ist für den Potenzflaschenzug:

$$s = \frac{S}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 88)$$

und besonders für den Zug nach Fig. 56):

$s = \frac{S}{2^3} = \frac{S}{8}$; d. h. die Kraft macht einen 8-mal längeren Weg, als die Last.

Für den gemeinen Flaschenzug folgt:

$$s = \frac{S}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 89)$$

und besonders für den Zug nach Fig. 57):

$s = \frac{S}{6}$; für den Zug nach Fig. 58):

$s = \frac{S}{5}$.

Für den Differential-Flaschenzug nach Fig. 60) folgt:

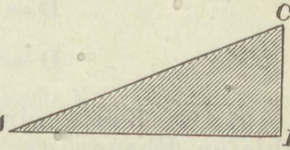
$$s = \frac{R - r}{2 . R} . S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90)$$

Zwölftes Kapitel.

Die schiefe Ebene.

Unter einer schiefen Ebene versteht man eine ebene Fläche, welche mit einer wagerechten Ebene irgend einen spitzen Winkel bildet. In nebenstehender Fig. 61) sind: AB die Basis, AC die Länge und BC die Höhe der schiefen Ebene.

Fig. 61.



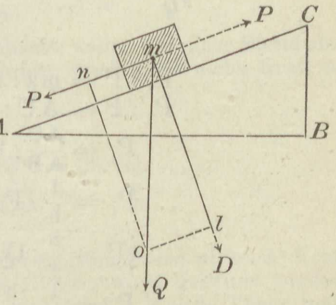
Bei der schiefen Ebene ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine auf derselben befindliche Last im Gleichgewicht gehalten, oder fortbewegt werden kann.

Folgende Fälle sind hierbei hauptsächlich in Betracht zu ziehen:

1) Die Kraft wirkt parallel zur Länge AC der schiefen Ebene.

Man zerlege in Fig. 62) die Last Q in zwei rechtwinkelig zu einander stehende Seitenkräfte, von denen die eine, P = mn, parallel und die andere, D = lm, senkrecht zur Länge der schiefen Ebene wirkt. Die Seitenkraft lm giebt den von der Last Q auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck D an, während mn die Kraft P darstellt, welche die Last in der Richtung der schiefen Ebene nach abwärts zu bewegen sucht. Um die Last auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht zu erhalten, mufs eine gleich grofse Kraft mn = P, aber entgegengesetzt gerichtet, wirksam sein. Es verhält sich demnach

Fig. 62.



$$P : Q = mn : mo.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke omn und ABC folgt aber:

$$mn : mo = BC : AC, \text{ mithin:}$$
$$P : Q = BC : AC, \text{ oder}$$
$$P = \frac{BC}{AC} \cdot Q.$$

Bezeichnet man die Höhe der schiefen Ebene mit h, die Länge mit l und die Basis mit b, so erhält man, wenn diese Bezeichnungen in die letzte Gleichung eingesetzt werden:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

Der Druck D, welchen die Last Q auf die schiefe Ebene ausübt, ergiebt sich aus der Proportion:

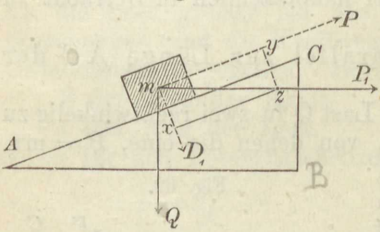
$$D : Q = lm : mo.$$

Da aber die Dreiecke lmo und ABC ähnlich sind, folgt auch hier:

$$D : Q = AB : AC, \text{ mithin:}$$
$$D = \frac{AB}{AC} \cdot Q, \text{ oder was dasselbe ist:}$$
$$D = \frac{b}{l} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 92)$$

2) Die Kraft wirkt parallel zur Basis AB der schiefen Ebene.

Fig. 63.



Man zerlege in Fig. 63) die Kraft P_1 in die beiden zu einander rechtwinkeligen Seitenkräfte $my = P$ und $mx = D_1$, so giebt D_1 den von P_1 auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck an, um welchen der Druck von Q auf die schiefe Ebene also noch vermehrt wird. Hierbei verhält sich:

$$P_1 : P = mz : my, \text{ d. h:}$$
$$P_1 : P = AC : AB, \text{ folglich:}$$
$$P_1 = \frac{AC}{AB} \cdot P, \text{ oder was dasselbe ist:}$$
$$P_1 = \frac{l}{b} \cdot P. \text{ Nach Formel 91) ist aber:}$$
$$P = \frac{h}{l} \cdot Q.$$

Diesen Wert für P in die vorstehende Gleichung eingesetzt, ergiebt:

$$P_1 = \frac{l}{b} \cdot \frac{h}{l} \cdot Q, \text{ oder:}$$
$$P_1 = \frac{h}{b} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 93)$$

Für den von P_1 auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck erhält man:

$$D_1 = \frac{h}{l} . P_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 94)$$

Wirkt die Kraft weder parallel zur Länge, noch parallel zur Basis der schiefen Ebene, so sind die in der Figur bei Zerlegung der Kraft entstehenden Dreiecke nicht mehr dem Grunddreieck ABC ähnlich; es lassen sich dann auch die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand nicht mehr so einfach aufstellen und nachweisen, als in den vorstehend aufgeführten Fällen. Ohne Anwendung komplizierter Rechnungsarten kann die Auflösung derartiger Aufgaben nur durch Konstruktion — graphische Darstellung — erfolgen.

Beispiele:

1) Eine schiefe Ebene steigt auf 15 m Länge um 1 m; auf derselben befindet sich eine Last von 600 kg, welche durch eine parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden soll. Wie grofs mufs diese Kraft sein?

Nach Formel 91) erhält man:

$$P = \frac{h}{l} . Q = \frac{1 . 600}{15} = 40 \text{ kg.}$$

2) Durch eine parallel zur Basis wirkende Kraft von 100 kg soll auf einer schiefen Ebene, welche bei einer Länge der Basis von 30 m um 6 m steigt, eine Last im Gleichgewicht gehalten werden. Wie grofs kann diese Last sein?

Nach Formel 93) ist $P_1 = \frac{h}{b} . Q$; hieraus folgt:

$$Q = \frac{P_1 . b}{h} = \frac{100 . 30}{6} = 500 \text{ kg.}$$

3) Welche Höhe mufs man dieser schiefen Ebene geben, wenn mit derselben Kraft eine Last von 1200 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Aus Formel 93) ergiebt sich:

$$h = \frac{P_1 . b}{Q} = \frac{100 . 30}{1200} = 2{,}5 \text{ m.}$$

4) Fünf Wagen, von je 1000 kg Gewicht, sollen auf einer Eisenbahn, welche im Verhältnis 1 : 50 steigt, befördert werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Nach Formel 91) erhält man:

$$P = \frac{h}{l} . Q = \frac{1}{50} . 5 . 1000 = 100 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Durch eine parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkende Kraft von 50 kg soll eine Last von 750 kg im Gleichgewicht gehalten werden, wenn die Höhe der schiefen Ebene 1,5 m beträgt. Welche Länge mufs die schiefe Ebene erhalten?

Lösung: $l = 22{,}5$ m.

2) Welchen Druck übt eine Last von 800 kg auf eine schiefe Ebene aus, deren Basis = 18 m und deren Länge = 20 m ist?

Lösung: D = 720 kg.

3) Eine Last von 855 kg soll durch eine parallel zur Basis einer schiefen Ebene wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden, wenn die Höhe der schiefen Ebene 2 m und deren Basis 27 m beträgt. Wie grofs ist die hierzu erforderliche Kraft?

Lösung: P = 63,3 kg.

4) Welchen Druck übt eine parallel zur Basis einer schiefen Ebene wirkende Kraft von 120 kg aus, wenn die Höhe der schiefen Ebene = 3 m und deren Länge = 18 m ist?

Lösung: D_1 = 20 kg.

5) Welche Länge erhält die Basis einer schiefen Ebene, deren Höhe = 1,5 m ist, wenn durch eine parallel zur Basis wirkende Kraft von 60 kg einer Last von 500 kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: b = 12,5 m.

6) Die Steigung einer schiefen Ebene zur Basis sei 30°; wie grofs mufs die parallel zur Länge dieser schiefen Ebene wirkende Kraft sein, um das Herabrollen einer Kugel von 900 kg Gewicht zu verhindern?

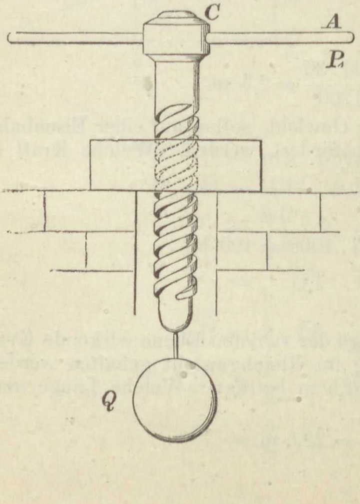
Lösung: P = 450 kg.

Dreizehntes Kapitel.

Die Schraube.

Wird an der Aufsenseite eines Cylinders ein Punkt derartig herumgeführt, dafs er stets um dieselbe Gröfse steigt und seine Richtung immer denselben Neigungswinkel beibehält, so nennt man die hierdurch entstehende, doppelt gekrümmte Linie eine Schraubenlinie.

Fig. 64.



Wird ein biegsamer, prismatischer Körper auf dieser Schraubenlinie so um den Cylinder gewunden, dafs immer eine Seite des Körpers an dem Cylinder anliegt, so nennt man die entstehende Hervorragung ein Schraubengewinde. Eine einzige der so entstandenen Windungen heifst Schraubengang, und wenn mehrere derartige Gänge vorhanden sind, das Ganze Schraubenspindel oder kurz Schraube.

Je nach der Gestalt des umgewundenen Prismas entsteht flaches oder spitzes Gewinde.

Jeder einzelne Schraubengang ist als eine schiefe Ebene aufzufassen, deren Basis gleich dem Umfange der Schraubenspindel, und deren Höhe gleich der Steigung eines Schraubenganges ist.

Denkt man sich eine Schraube in der durch Fig. 64) dargestellten Anordnung und sieht man von den vorhandenen Bewegungswiderständen ab, so wird die Schraubenspindel sowohl infolge ihres eigenen Gewichtes, als auch infolge einer angehängten Last Q ein Bestreben haben, sich abwärts zu bewegen, durch welches sie, unter stetiger Drehung in den Gängen des Muttergewindes, genau wie auf einer schiefen Ebene, herabgleiten würde. Diesem Bestreben, herabzugleiten, soll nun durch eine, entweder am Umfange der Schraube, oder an einem gröſseren Hebelarme wirkende, in jedem Falle aber horizontal gerichtete Kraft P entgegengearbeitet, und dadurch der Gleichgewichtszustand herbeigeführt werden.

Es sind hierbei die Gesetze der schiefen Ebene in Betracht zu ziehen. Besonders ist Fall 2) ins Auge zu fassen, in welchem die Kraft parallel zur Basis der schiefen Ebene gerichtet ist; für diesen Fall folgt aus Formel 93):

$$P = \frac{h}{b} \cdot Q$$

in welcher Gleichung für die Anwendung auf die Schraube: h = der Ganghöhe der Schraube und b = dem Umfange derselben zu setzen ist. Bezeichnet man den mittleren Schraubenhalbmesser mit r und die Steigung mit h, so hat man für den Gleichgewichtszustand, da der mittlere Umfang der Schraube $= 2r\pi$ ist,

$$P = \frac{h}{2r\pi} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 95)$$

Für gewöhnlich wirkt aber die Kraft P nicht am Umfange der Schraube, sondern in den meisten Fällen eine andere Kraft P_1 an einem gröſseren Hebelarme AC = R (siehe Fig. 64). Um für diese Kraft P_1 die Formel für den Gleichgewichtszustand aufzustellen, ist zu berücksichtigen, daſs die Kraft P mit dem Momente $P \cdot r$, die Kraft P_1 dagegen mit dem Momente $P_1 \cdot R$ an der Schraube wirkt. Setzt man beide Momente einander gleich, so erhält man:

$$P \cdot r = P_1 \cdot R \text{ und}$$

$$P = \frac{P_1 \cdot R}{r}.$$

Setzt man diesen Wert von P in Formel 95) ein, so folgt:

$$\frac{P_1 . R}{r} = \frac{h}{2 r \pi} . Q \text{ oder}$$

$$P_1 . R = \frac{h}{2\pi} . Q. \text{ Mithin:}$$

$$P_1 = \frac{h}{2 R \pi} . Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 96)$$

Beispiele:

1) Eine Schraubenspindel hat 10 cm Durchmesser und 3 cm Steigung; sie wiegt 50 kg und trägt eine Last von 200 kg. Um die Spindel selbst wird eine Schnur geschlungen, und diese mit einem Gewichte P belastet Wie grofs ist das Gewicht zu nehmen, wenn dasselbe das Herabgleiten der Schraubenspindel verhindern soll?

Gegeben sind: $Q = 200 + 50 = 250$ kg;
$r = 5$ cm, $h = 3$ cm.

Nach Formel 95) erhält man:

$$P = \frac{h}{2 r \pi} . Q = \frac{3 . 250}{2 . 5 . 3{,}14} = 23{,}88 \text{ kg.}$$

2) An derselben Schraubenspindel läfst man die Kraft an einem Hebel von 0,7 m Länge wirken. Welche Kraft P_1 ist jetzt erforderlich, um den Gleichgewichtszustand herbeizuführen?

Aus Formel 96) folgt:

$$P_1 = \frac{h}{2 R \pi} . Q = \frac{3 . 250}{2 . 70 . 3{,}14} = 1{,}7 \text{ kg.}$$

Die Schraube findet in den verschiedenartigsten Anordnungen Verwendung. Am häufigsten dient sie zur Ausübung eines grofsen Druckes, wie z. B. bei den verschiedenen Pressen. Die Last wird hier durch den Widerstand gebildet, welchen der zu pressende Gegenstand dem Zusammendrücken entgegensetzt. Die Richtung, in welcher dieser Widerstand wirkt, kann ganz beliebig sein; die Gröfse des Widerstandes selbst so grofs, dafs das eigene Gewicht der Schraube ganz aufser Betracht kommt. Für alle Fälle bleibt die Rechnung jedoch dieselbe, selbst dann, wenn die Schraube festgehalten und die Kraft an der Schraubenmutter wirkend gedacht wird.

Für Schrauben von gewöhnlichen Abmessungen nimmt man die Kraft, der Bewegungshindernisse wegen, 2 bis 3-mal so grofs, als die Rechnung ohne Berücksichtigung derselben ergeben würde.

Beispiele:

1) Durch eine Schraubenpresse, deren Spindel eine Steigung von 16 mm besitzt, soll ein Druck von 2500 kg ausgeübt werden. Welche Kraft ist an einem Hebelarme von 1,5 m Länge erforderlich?

Aus Formel 96) folgt:

$$P_1 = \frac{h}{2 R \pi} . Q = \frac{0{,}016 . 2500}{2 . 1{,}5 . 3{,}14} = 4{,}246 \text{ kg.}$$

2) An derselben Presse gelangt eine Kraft von 36 kg zur Wirkung. Wie grofs ist der mit dieser Kraft auszuübende Druck?

Aus Gleichung 96) $P_1 = \frac{h}{2R\pi} \cdot Q$ folgt:

$$Q = \frac{2RP_1\pi}{h} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 36 \cdot 3{,}14}{0{,}016} = 21195 \text{ kg.}$$

3) An einem Parallelschraubstocke, dessen Spindel eine Steigung von 8 mm hat, wirkt ein Arbeiter an einem Hebelarme von 300 mm Länge, mit einer Kraft von 15 kg. Welchem Drucke ist das eingespannte Arbeitsstück ausgesetzt?

Nach Formel 96) wird:

$$Q = \frac{2RP_1\pi}{h} = \frac{2 \cdot 0{,}3 \cdot 15 \cdot 3{,}14}{0{,}008} = 3532{,}5 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welcher Druck kann mit einer Schraubenpresse ausgeübt werden, wenn die Kraft an dem 0,6 m langen Hebelarme zu 16 kg und die Ganghöhe der Spindel zu 12 mm angenommen werden?

Lösung: $Q = 5024$ kg.

2) Welchen mittleren Durchmesser erhält eine Schraubenspindel von 20 mm Ganghöhe, wenn an deren Umfange durch eine Kraft von 40 kg einer Last von 750 kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: $d = 119{,}42$ mm.

3) Vermittelst einer Schraube soll ein Druck von 4500 kg ausgeübt werden; die Ganghöhe betrage 13 mm. An welchem Hebelarme mufs eine Kraft von 16 kg wirken, um diesen Druck von 4500 kg hervorzubringen?

Lösung: $R = 582{,}2$ mm.

4) Welche Ganghöhe erhält die Spindel einer Schraubenpresse, wenn durch eine Kraft von 20 kg an einem Hebelarme von 800 mm Länge ein Druck von 6000 kg ausgeübt werden soll?

Lösung: $h = 16{,}75$ mm.

5) Eine Schraube hat einen mittleren Durchmesser von 110 mm und eine Ganghöhe von 26 mm. Die Spindel hat ein Gewicht von 36 kg und trägt eine Last von 500 kg. Wie grofs mufs die am mittleren Spindelumfange thätige Kraft sein, um jenen Gewichten das Gleichgewicht zu halten?

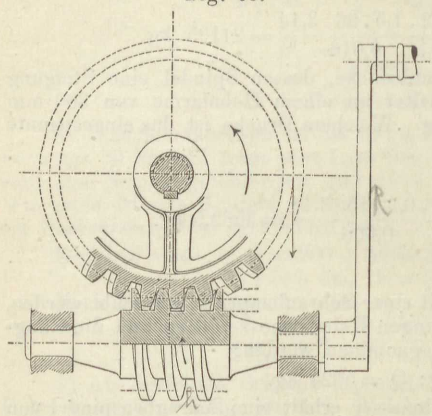
Lösung: $P = 40{,}3$ kg.

Schraube ohne Ende.

Die Schraube ohne Ende, auch endlose Schraube oder Schnecke genannt, besteht aus einer mit einigen Schraubengängen versehenen Spindel, deren einzelne Gänge in ein Zahnrad eingreifen, und welche durch eine Kurbel in Bewegung gesetzt wird (Fig. 65). Die Zähne des Rades stehen so geneigt auf dem Radkranze, dafs ihre Richtung der des Schraubengewindes entspricht; letzteres greift in die Zähne des Rades, wie in die Gänge der Schraubenmutter ein. Eine Seiltrommel ist auf der Welle des Rades aufgekeilt.

Der Druck x, welcher zwischen den Schraubengängen und den Radzähnen auftritt, ist für die Schraube als Last, für das Wellrad aber als Kraft zu betrachten, und hat man bei einer Kurbellänge R, einer Steigung h, einem Radhalbmesser R_1 und einem Trommelhalbmesser r, für das Gleichgewicht an der Schraubenwelle:

Fig. 65.



$$P \,.\, 2R\pi = x \,.\, h;$$

für das Gleichgewicht an der Trommelwelle:

$$x \,.\, R_1 = Q \,.\, r.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit einander, so folgt:

$P \,.\, 2R\pi \,.\, xR_1 = xh \,.\, Qr$ oder:

$2R\pi \,.\, R_1 \,.\, P = Q \,.\, hr.$ Hieraus ergiebt sich:

$$P = \frac{Qhr}{2R\pi R_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

$$\text{und } Q = \frac{2R\pi R_1 P}{hr} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 98)$$

Bei der Schraube ohne Ende geht aber ein groſser Teil der Kraftwirkung durch die Reibung zwischen den Zähnen und dem Schraubengewinde, und durch Zapfenreibung verloren; der wirkliche Nutzeffekt ist daher nur zu $^1/_4$ bis $^1/_3$ der aus obiger Rechnung hervorgehenden theoretischen Leistung anzunehmen.

Übungsbeispiele:

1) Welche Last kann mit einer Schraube ohne Ende gehoben werden, wenn die Kraft an der 0,4 m langen Kurbel zu 12 kg, der Radhalbmesser zu 0,2 m, der Trommelhalbmesser zu 0,3 m und die Steigung der Schraube zu 0,03 m angenommen werden?

Lösung: Q = 669,86 kg.

2) Wie groſs ist in vorstehendem Beispiele der Druck, welcher zwischen den Schraubengängen und den Radzähnen auftritt?

Lösung: x = 1004,8 kg.

3) Bei einer Schraube ohne Ende sind gegeben: der Radhalbmesser = 0,25 m, der Trommelhalbmesser = 0,2 m, die Steigung der Schraube = 0,025 m. Welche Länge erhält die Kurbel, wenn durch eine Kraft von 12 kg eine Last von 1200 kg gehoben werden soll?

Lösung: R = 318,5 mm.

4) Welche Kraft ist erforderlich, um mit einer Schraube ohne Ende eine Last von 1000 kg zu heben, wenn die Kurbellänge = 0,4 m, der Radhalbmesser = 0,24 m, der Trommelhalbmesser = 0,36 m und die Steigung der Schraube = 0,02 m betragen?

Lösung: P = 12 kg (abgerundet).

Vierzehntes Kapitel.

Die Reibung.*)

1) Gleitende Reibung.

Der Bewegungswiderstand, welcher an der Berührungsstelle zweier Körper auftritt, von denen der eine über den anderen fortbewegt wird, heifst Reibung.

Die Reibung ist direkt als Widerstand — Bewegungshindernis — aus dem Grunde aufzufassen, weil sie Bewegungen jeder Art nur hindert oder hemmt, niemals aber Bewegungen erzeugt.

Gleichgültig, in welcher Richtung man einen Körper auf einer wagerechten oder geneigten Ebene fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung dieser entgegenwirken; sie wird z. B. dem Herabgleiten eines Körpers auf einer schiefen Ebene ebenso viel hinderlich sein, als dem Heraufziehen auf derselben.

Um die Reibung möglichst zu verringern, bedient man sich der Schmiermittel — Öl, Fett, Seife, Graphit — welche zugleich auch von hemmendem Einflusse auf die schnelle Abnützung der reibenden Flächen sind.

Je nachdem die Bewegung des einen Körpers eine gleitende, drehende oder wälzende ist, unterscheidet man gleitende, drehende und wälzende Reibung.

Man unterscheidet auch noch die Reibung der Ruhe, welche zu überwinden ist, wenn ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung überzuführen ist, von der Reibung der Bewegung, welche dieser Bewegung hemmend entgegenwirkt.

---

*) Über „Arbeit der Reibung" siehe unter „Mechanische Arbeit".

Vielfach angestellte Versuche haben zu folgenden Erfahrungssätzen geführt:

1) Die Reibung ist um so geringer, je härter und glatter die Flächen der reibenden Körper sind.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der reibenden Körper. Diese darf nur nicht so grofs werden, dafs ein Erhitzen eintritt, da hiermit zu gleicher Zeit eine Vergröfserung der Reibung verbunden ist.

3) Die Reibung ist ferner unabhängig von der Gröfse der Berührungsflächen. Die Abnützung dagegen ist um so gröfser, je kleiner unter sonst gleichen Verhältnissen die Berührungsflächen sind. Bei gröfseren Flächen kommen allerdings mehr reibende Teile in Betracht; der auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck ist dann aber auch in demselben Mafse geringer. Es ist durchaus gleichgültig, auf welcher seiner 6 Flächen ein Ziegelstein z. B. auf einer wagerechten Ebene fortbewegt wird; in jedem Falle fällt die Reibung gleich grofs aus.

4) Die Reibung ist direkt proportional dem Normaldrucke, d. i. dem Drucke, welcher rechtwinkelig gegen die sich berührenden Flächen ausgeübt wird. Hat ein Körper das doppelte oder dreifache Gewicht, oder was dasselbe ist, übt er einen doppelt oder dreimal so grofsen Druck aus, so ist auch die Reibung doppelt oder dreimal so grofs, als bei einfachem Drucke.

5) Bei Beginn der Bewegung ist die Reibung gröfser, als während der Bewegung, oder was dasselbe ist: Die Reibung der Ruhe ist gröfser, als die Reibung der Bewegung.

Bezeichnet man die Gröfse der Reibung mit R und den Normaldruck mit N, so nennt man das Verhältnis $\frac{R}{N}$, d. h. das Verhältnis der Reibung zum Normaldruck, den Reibungskoeffizienten.

Der Reibungskoeffizient ist diejenige Zahl, welche angiebt, der wievielte Teil einer Last als Kraft erforderlich wird, um diese Last fortzubewegen. Bezeichnet man denselben mit f, so ist:

$$f = \frac{R}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 99)$$

mithin:

$$R = f \cdot N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 100)$$

Die Gröfse der Reibung R entspricht derjenigen Kraft, welche erforderlich ist, um einen Körper über einen anderen fortzubewegen.

Tabelle der Reibungskoeffizienten f für gleitende Reibung.

Holz . . . auf Holz, trocken		0,36
„ . . . „ „ geschmiert		0,07
„ . . . „ Metall, trocken		0,42
„ . . . „ „ geschmiert		0,08
Metall . . . „ „ trocken		0,18
„ . . . „ „ geschmiert		0,07
Gewöhnliche fette Riemen	„ hölzernen Scheiben	0,47
	„ eisernen „	0,28
Hanfseile	„ rauhem Holz	0,50
	„ sehr glattem Holz	0,33

Beispiele:

1) Das Bett einer leerlaufenden Hobelmaschine hat ein Gewicht von 500 kg. Welche Zugkraft ist erforderlich, um dasselbe bei Anwendung von Schmiermaterial in Bewegung zu erhalten?

Nach Formel 100) ist:

$$R = f \,.\, N = 0{,}07 \,.\, 500 = 35 \text{ kg.}$$

2) Wie grofs ist die Reibung eines mit Eisen beschlagenen und mit 1000 kg belasteten Schlittens, welcher sich ohne Anwendung von Schmiermaterial auf einer Holzbahn bewegt?

Aus Formel 100) folgt:

$$R = f \,.\, N = 0{,}42 \,.\, 1000 = 420 \text{ kg.}$$

3) Wie grofs ist der Normaldruck eines Körpers auf eine ebene Bahn, wenn der Reibungswiderstand 500 kg und $f = 0{,}21$ ist?

Aus Formel 100) folgt:

$$N = \frac{R}{f} = \frac{500}{0{,}21} = 2380{,}952 \text{ kg.}$$

4) Auf dem Dampfschieber einer Schiebersteuerung lastet ein Dampfdruck von 4000 kg. Welche Kraft ist zur Bewegung des Schiebers erforderlich, wenn $f = 0{,}1$ angenommen wird?

Nach Formel 100) ist:

$$R = f \,.\, N = 0{,}1 \,.\, 4000 = 400 \text{ kg.}$$

5) Der Schieber einer Schiebersteuerung besitzt eine Oberfläche von 150 qcm; der in den Schieberkasten eintretende Dampf eine Spannung von 7 Atmosphären (7 kg auf 1 qcm). Wie grofs ist die Reibung, oder was dasselbe ist, welche Kraft ist zur Bewegung dieses Schiebers erforderlich? ($f = 0{,}12$.)

Der auf dem Schieber lastende Dampfdruck wird erhalten, wenn man die Fläche des Schiebers in qcm mit dem Dampfdrucke multipliziert. Es wird also

$$N = 150 \,.\, 7 = 1050 \text{ kg.}$$

Mithin nach Formel 100):

$$R = f \,.\, N = 0{,}12 \,.\, 1050 = 126 \text{ kg.}$$

6) Wie grofs ist der Reibungskoeffizient, wenn ein Körper von 62,75 kg Gewicht, auf fester Unterlage liegend, durch eine Kraft von 15,25 kg bewegt wird?

Nach Formel 99) erhält man:

$$f = \frac{R}{N} = \frac{15{,}25}{62{,}75} = 0{,}243.$$

7) Ein belasteter Schlitten von 600 kg Gewicht soll auf einer ungeschmierten Holzbahn, welche eine Neigung von 25° besitzt, heraufgezogen werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}4$ gesetzt wird?

Denkt man sich unter Anwendung der bei Besprechung der schiefen Ebene entwickelten Gesetze die Last Q in zwei Komponenten zerlegt, so übt

die Komponente parallel der schiefen Ebene eine Wirkung = 254 kg und
" " rechtwinkelig zur " " " " = 543,5 "

aus. Die durch letztere erzeugte Reibung ist mithin nach Formel 100):

$$R = f \,.\, N = 0{,}4 \,.\, 543{,}5 = 217{,}4 \text{ kg},$$

folglich muss die Kraft zum Heraufziehen des Schlittens

$$P = 254 + 217{,}4 = 471{,}4 \text{ kg betragen.}$$

8) Wie grofs mufs die Kraft sein, welche den Schlitten am Herabgleiten hindert?

Die Reibung unterstützt in diesem Falle die aufgewandte Kraft; es ist daher:

$$P = 254 - 217{,}4 = 36{,}6 \text{ kg}.$$

---

2) Drehende oder Zapfen-Reibung.

Drehende oder Zapfenreibung tritt am Umfange cylindrischer Körper — Wellen — auf, welche sich um ihre Achse drehen und von Lagern umschlossen sind.

Die Gröfse der Zapfenreibung an sich, d. h. die Gröfse des am Umfange der Zapfen des rotierenden Körpers auftretenden Widerstandes, wird nach der für gleitende Reibung aufgestellten Formel

$$R = f \,.\, N$$

berechnet; jedoch mufs die Einwirkung des Momentes der Zapfenreibung auf den Gleichgewichtszustand in die Rechnung eingeführt werden.

Bezeichnet man entsprechend Fig. 66) mit

N den Normaldruck, mit welchem der Zapfen einer Welle in sein Lager geprefst wird;

$R = f \,.\, N$ die Gröfse der am Umfange des Zapfens thätigen Reibung;

r den Halbmesser des Zapfens;

a den Halbmesser eines auf der Welle sitzenden Rades;

P die am Halbmesser a zur Überwindung der Reibung R erforderliche Kraft,

so mufs, da man die Reibung als eine am Umfange des Zapfens der Kraft P entgegengesetzt wirkende Kraft ansehen kann, nach dem über das Rad an der Welle Gesagten

$$R \,.\, r = P \,.\, a,$$

oder was dasselbe ist:

$$f \,.\, N \,.\, r = P \,.\, a \quad \ldots\ldots\ldots \quad 101)$$

sein. Hieraus folgt:

$$P = \frac{f \,.\, N \,.\, r}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

$$\text{und } R = f \,.\, N = \frac{P \,.\, a}{r} \quad \ldots\ldots \quad 103)$$

Die letzte Gleichung giebt alsdann, entsprechend Fig. 66) auch zugleich noch diejenige Kraft an, welche am Umfange des Zapfens direkt wirken müſste, um die Reibung zu überwinden.

Der Reibungskoeffizient f ist für Zapfenreibung etwas kleiner, als für gleitende Reibung zu nehmen, und zwar ist für Zapfen aus Schmiedeeisen oder Guſseisen, welche sich in Lagern von Guſseisen oder Bronze drehen und mit Öl, Talg oder Fett geschmiert werden, bei ununterbrochener Schmierung

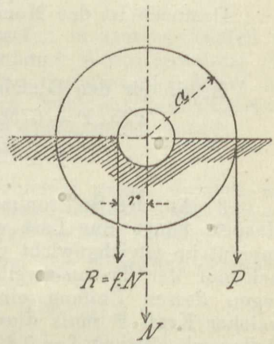
$$f = 0{,}05 \text{ bis } 0{,}06,$$

bei gewöhnlicher periodischer Schmierung

$$f = 0{,}07 \text{ bis } 0{,}08$$

zu setzen.

Fig. 66.



Beispiele:

1) Ein Rad von N = 1500 kg Gewicht und einem Halbmesser von a = 1,5 m ist in Zapfen von r = 90 mm Halbmesser gelagert. Welche Kraft P muſs, um die Zapfenreibung R zu überwinden, am Umfange des Rades thätig sein, wenn f = 0,08 gesetzt wird?

Nach Formel 102) erhält man:

$$P = \frac{f \,.\, N \,.\, r}{a} = \frac{0{,}08 \,.\, 1500 \,.\, 0{,}09}{1{,}5} = 7{,}2 \text{ kg.}$$

Die Aufgabe lieſse sich ohne Formel 102) auch folgendermaſsen lösen:

Die Gröſse der Zapfenreibung ist:

$$R = f \,.\, N = 0{,}08 \,.\, 1500 = 120 \text{ kg.}$$

Demnach ist das Reibungsmoment der Zapfen:

$$R \,.\, r = 120 \,.\, 0{,}09 = 10{,}8.$$

Das Moment der Kraft ist = P . a = P . 1,5; mithin für den Gleichgewichtszustand:

$$P \,.\, 1{,}5 = 10{,}8 \text{ oder:}$$

$$P = \frac{10{,}8}{1{,}5} = 7{,}2 \text{ kg.}$$

2) Vermittelst einer festen Rolle soll eine Last von Q = 300 kg gehoben werden. Die Zapfendurchmesser betragen 40 mm; der Rollen-

durchmesser ist zu 450 mm angenommen, und der Normaldruck zu 375 kg ermittelt worden. Welche Kraft ist unter Berücksichtigung der Zapfenreibung aufzuwenden, wenn $f = 0{,}07$ gesetzt wird?

Da hier aufser der Zapfenreibung auch noch eine Last von 300 kg am Rollenhalbmesser mit überwunden werden soll, so ist das Moment dieser Last mit in Rechnung zu stellen. Dasselbe ist $= Q \,.\, a$ und mufs zum Reibungsmoment addiert werden; man erhält deshalb unter Anwendung von Formel 101):

$$P \,.\, a = f \,.\, N \,.\, r + Q \,.\, a \text{ und hieraus:}$$

$$P = \frac{f \,.\, N \,.\, r + Q \,.\, a}{a} = \frac{0{,}07 \,.\, 375 \,.\, 20 + 300 \,.\, 225}{225}.$$

$$P = 302{,}33 \text{ kg}.$$

Ohne Formel 101) läfst sich die Aufgabe in folgender Weise lösen:

Für die Zapfenreibung erhält man:

$$R = f \,.\, N = 0{,}07 \,.\, 375 = 26{,}25 \text{ kg}.$$

Demnach ist das Moment der Zapfenreibung $= 26{,}25 \,.\, 20 = 525$.

Das Moment der Last ist $= 300 \,.\, 225 = 67500$

und das Moment der Kraft $= 225 \,.\, P$.

Mithin für den Gleichgewichtszustand:

$$225 \,.\, P = 67500 + 525, \text{ oder was dasselbe ist:}$$

$$P = \frac{67500 + 525}{225} = 302{,}33 \text{ kg}.$$

3) An der Seiltrommel von 200 mm Durchmesser eines einfachen Haspels hängt eine Last von 500 kg; dieselbe soll durch einen Bremsapparat im Gleichgewicht gehalten werden. Zu diesem Zwecke befindet sich auf der Trommelwelle ein Bremsrad von 900 mm Durchmesser, gegen dessen Umfang ein hölzerner Bremsklotz geprefst wird. Mit welcher Kraft P mufs dieser Bremsklotz angedrückt werden, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}42$ gesetzt wird?

Das Moment der Kraft ist $= P \,.\, 450$, mithin

das Moment der Reibung $= P \,.\, 450 \,.\, 0{,}42 = 189 \,.\, P$.

Das Moment der Last ist $= 500 \,.\, 100 = 50000$.

Da diese Momente für den Gleichgewichtszustand gleich sein müssen, folgt:

$$189 \,.\, P = 50000 \text{ und}$$

$$P = \frac{50000}{189} = 264{,}55 \text{ kg}.$$

Bei allen Maschinen treten aufser der Zapfenreibung noch andere Bewegungshindernisse auf; z. B.: Reibung in den Zähnen, Widerstände durch die Steifigkeit der Seile u. s. w. Da alle diese Widerstände sich mit den jeweiligen Verhältnissen ändern, so sind sie äufserst schwer mit ihren richtigen Werten in Rechnung zu stellen. Man verfährt daher gewöhnlich so, dafs man die Kraft, welche man für die ohne Reibung arbeitende Maschine berechnet hat, um einen bestimmten Bruchteil, welcher bei einfachen Maschinen $^1/_{10}$ bis $^1/_6$, bei zusammengesetzten $^1/_6$ bis $^1/_5$ beträgt, erhöht, oder die zu überwindende Last um ebensoviel vermindert.

Übungsbeispiele:

1) Welche Kraft ist erforderlich, um eine Last von 1000 kg auf einer wagerechten Ebene fortzuschleifen? ($f = 0,44$.)

Lösung: $R = 440$ kg.

2) Wie grofs ist der Reibungskoeffizient, wenn 2 Körper durch einen Druck von 200 kg gegen einander gepresst werden, und die zur Bewegung erforderliche Kraft 30 kg beträgt?

Lösung: $f = 0,15$.

3) Wie grofs ist der Druck des Bettes einer Hobelmaschine, wenn die erforderliche Zugkraft 100 kg und der Reibungskoeffizient $f = 0,08$ ist?

Lösung: $N = 1250$ kg.

4) Ein Schlitten, welcher mit 400 kg belastet ist, soll auf einer wagerechten, sehr glatten Schneebahn fortgezogen werden. Wie grofs ist die erforderliche Zugkraft? ($f = 0,038$.)

Lösung: $R = 15,2$ kg.

5) Ein Wasserrad, welches mit seinen 0,3 m starken Zapfen in Lagern von Bronze läuft, besitzt mit Welle und Wasserbelastung ein Gewicht von 18000 kg. Welche Kraft ist am Umfange des Rades erforderlich, um die Zapfenreibung zu überwinden, wenn der Radhalbmesser zu 3,6 m und der Reibungskoeffizient zu 0,08 angenommen wird?

Lösung: $P = 60$ kg.

6) Ein senkrecht stehender Schleufsenschieber, gegen welchen ein Wasserdruck von 1000 kg gerichtet ist und dessen Eigengewicht 100 kg beträgt, soll aufgezogen werden. Welche Kraft ist erforderlich:

1) In dem Augenblicke, in welchem die Bewegung beginnt? ($f = 0,64$.)
2) Während der Bewegung selbst? ($f = 0,31$.)

Lösung: 1) $P = 740$ kg.
2) $P = 410$ kg.

7) Der Schieber einer Schiebersteuerung besitzt eine Oberfläche von 120 qcm, und der in den Schieberkasten eintretende Dampf eine Spannung von 5 Atmosphären. Wie grofs ist die durch die Excenterstange zu übertragende Kraft, wenn $f = 0,15$ gesetzt wird?

Lösung: $R = 90$ kg.

8) Eine Dampfmaschine arbeitet mit 7 Atmosphären Dampfdruck im Schieberkasten. Der Dampfschieber ist 30 cm lang und 26 cm breit. Welche Kraft ist zur Bewegung des Schiebers erforderlich, wenn $f = 0,11$ gesetzt wird?

Lösung: $R = 600,6$ kg.

Fünfzehntes Kapitel.

Zusammengesetzte Riemen- u. Räderwerke.

Denkt man sich auf die beiden Wellen A und B (Fig. 67 und 68) zwei Riemenscheiben von den Durchmessern a und b aufgekeilt und durch einen endlosen Riemen verbunden, so werden die Wellen während der Bewegung, bei offenem Riemen, wie in Fig. 67), in gleicher Richtung, dagegen bei gekreuztem Riemen, wie in Fig. 68), in entgegengesetzter Richtung umlaufen. Geht man von der Annahme aus, dafs A die treibende, B die getriebene Welle sei, und bezeichnet man die Anzahl der Umdrehungen der Wellen pro Minute entsprechend mit m und n, so ist die

Fig. 67.

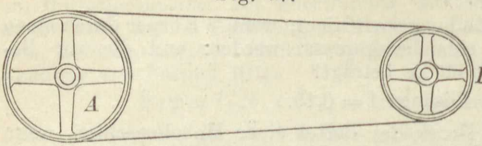
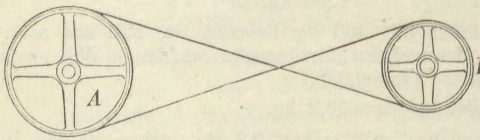


Fig. 68.



Umfangsgeschwindigkeit*) der treibenden Scheibe $= \frac{a \cdot \pi \cdot m}{60}$;

„ „ getriebenen „ $= \frac{b \cdot \pi \cdot n}{60}$.

Diese Umfangsgeschwindigkeiten müssen einander gleich sein, folglich:

$$\frac{a \cdot \pi \cdot m}{60} = \frac{b \cdot \pi \cdot n}{60}, \text{ oder was dasselbe ist:}$$

$$a \cdot m = b \cdot n \quad \dots\dots\dots \quad 104)$$

d. h. das Produkt aus Umlaufszahl und Durchmesser der treibenden Scheibe, ist gleich dem Produkte aus Umlaufszahl und Durchmesser der getriebenen Scheibe.

An Stelle der Durchmesser kann man auch die Halbmesser in die Rechnung einführen.

Aus Gleichung 104) folgt:

$$a = \frac{b \cdot n}{m} \quad \dots\dots\dots \quad 105)$$

$$b = \frac{a \cdot m}{n} \quad \dots\dots\dots \quad 106)$$

$$m = \frac{b \cdot n}{a} \quad \dots\dots\dots \quad 107)$$

$$n = \frac{a \cdot m}{b} \quad \dots\dots\dots \quad 108)$$

Beispiele:

1) Eine Ventilatorwelle soll mit 1200 Umdrehungen pro Minute laufen. Auf dieselbe wird eine Riemenscheibe von 0,2 m Durchmesser

---

*) Siehe Seite 74).

aufgekeilt, und diese durch eine solche von 1,8 m Durchmesser angetrieben. Wie viel Umdrehungen mufs letztere machen?

Aus Formel 107) folgt:

$$m = \frac{b \cdot n}{a} = \frac{0{,}2 \cdot 1200}{1{,}8} = 133{,}3 \text{ Umdrehungen.}$$

2) Eine Turbinenwelle macht 150 Umdrehungen pro Minute und soll eine Transmissionswelle mit 80 Umdrehungen treiben. Auf die Turbinenwelle ist eine Riemenscheibe von 50 cm Halbmesser aufgekeilt; welchen Halbmesser mufs die auf der Transmissionswelle anzubringende Riemenscheibe erhalten?

Aus Formel 106) erhält man:

$$b = \frac{a \cdot m}{n} = \frac{50 \cdot 150}{80} = 93{,}75 \text{ cm.}$$

3) Auf einer Transmissionswelle, welche 100 Umdrehungen pro Minute macht, sitzt eine Riemenscheibe von 60 cm Durchmesser und treibt eine solche von 40 cm Durchmesser auf einer Drehbankspindel. Wie viel Umdrehungen macht die Drehbankspindel?

Nach Formel 108) wird:

$$n = \frac{a \cdot m}{b} = \frac{100 \cdot 60}{40} = 150 \text{ Umdrehungen.}$$

4) Welchen Durchmesser mufs die Riemenscheibe auf der Drehbankspindel erhalten, wenn die letztere 120 Umdrehungen machen soll?

Aus Formel 106) folgt:

$$b = \frac{a \cdot m}{n} = \frac{60 \cdot 100}{120} = 50 \text{ cm.}$$

Die Bewegungsübertragung durch Riemen oder Ketten wird überall da stattfinden, wo die Entfernung der Wellen sehr grofs, die zu übertragende Kraft aber nur klein ist. Sind jedoch bedeutende Kräfte von einer Welle auf eine andere

Fig. 69.

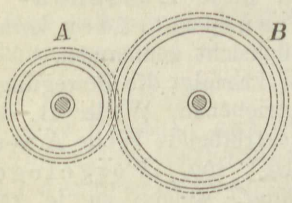
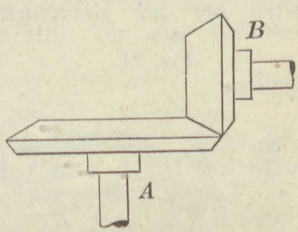


Fig. 70.



zu übertragen, deren Entfernung nicht zu grofs ist, so werden statt der Riemen oder Ketten Zahnräder angewandt. Diese bewirken, dafs sich die Wellen in entgegengesetzter Richtung drehen. (Fig. 69 und 70.)

Die ineinander greifenden Räder müssen ebenfalls wieder gleiche Umfangsgeschwindigkeiten haben; es gelangt mithin auch hier die Gleichung

$$a \,.\, m = b \,.\, n$$

zur Anwendung, und kann man dann mit a und b nicht nur die Halb- oder Durchmesser, sondern auch die Zähnezahlen der Räder bezeichnen.

Auch hier gilt sinngemäfs das Gesetz:

Das Produkt aus der Umlaufszahl der treibenden Welle und der Zähnezahl des treibenden Rades, ist gleich dem Produkte aus der Umlaufszahl der getriebenen Welle und der Zähnezahl des getriebenen Rades.

Beispiele:

1) Auf einer mit 30 Umdrehungen laufenden Wasserradwelle sitzt ein konisches Rad mit 130 Zähnen, welches in ein auf einer Mühlspindel sitzendes Trieb mit 40 Zähnen eingreift. Wieviel Umdrehungen macht die Mühlspindel?

Aus Formel 108) folgt:

$$n = \frac{a \,.\, m}{b} = \frac{30 \,.\, 130}{40} = 97{,}5 \text{ Umdrehungen.}$$

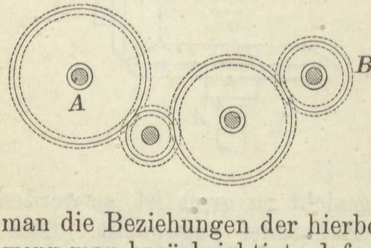
2) Durch einen Pferdegöpel, dessen Welle sich in 5 Minuten 8mal umdreht, soll eine zweite Welle mit 16 Umdrehungen pro Minute bewegt werden. Auf letzterer bringt man ein Trieb mit 30 Zähnen an; wieviel Zähne mufs das Rad auf der Göpelwelle erhalten?

Aus Formel 105) folgt:

$$a = \frac{b \,.\, n}{m} = \frac{30 \,.\, 16}{\frac{8}{5}} = 300 \text{ Zähne.}$$

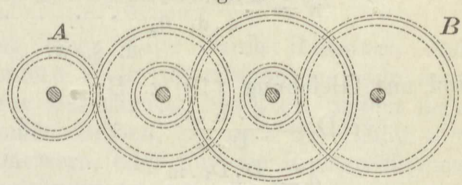
Die Rechnung bleibt dieselbe, wenn zwischen treibendem und getriebenem Rade mehrere Zwischenräder in der aus Fig. 71) ersichtlichen Anordnung eingeschaltet werden, d. h. es wird bei der Berechnung auf diese Zwischen- oder Transporträder keinerlei Rücksicht genommen.

Fig. 71.



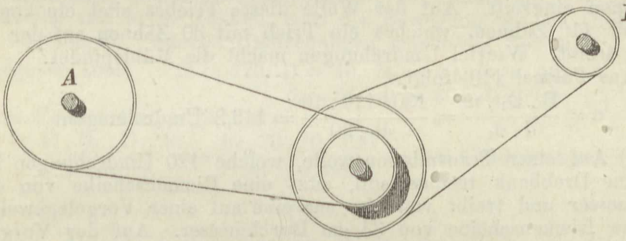
Erfolgt die Bewegung der getriebenen Welle B durch die treibende Welle A vermittelst sog. Vorgelege ÷ Räder, welche zu je zweien auf einer Zwischenwelle sitzen (Fig. 72 und 73) ÷ so findet man die Beziehungen der hierbei in Frage kommenden Gröfsen, wenn man berücksichtigt, dafs immer je 2 in einander greifende Räder, oder durch Riemen verbundene Scheiben, gleiche Umfangsgeschwindigkeiten besitzen, je zwei auf einer Welle sitzende Räder oder Scheiben hingegen gleich viel Umdrehungen machen müssen.

Fig. 72.



Bezeichnet man die Durchmesser oder Zähnezahlen der treibenden Räder mit D, D_1, D_2; die Durchmesser oder Zähnezahlen der getriebenen Räder mit d, d_1, d_2; die Umdrehungszahlen der treibenden und getriebenen Welle mit m und n, und die Umdrehungszahlen der Vorgelege- oder Zwischenwellen mit x und y, so folgt entsprechend Gleichung 104):

Fig. 73.



$$D \,.\, m = d \,.\, x.$$
$$D_1 \,.\, x = d_1 \,.\, y.$$
$$D_2 \,.\, y = d_2 \,.\, n.$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man:

$$^{*)}\; D \,.\, D_1 \,.\, D_2 \,.\, m = d \,.\, d_1 \,.\, d_2 \,.\, n \quad \ldots\ldots \quad 109)$$

Ist wie in Fig. 73) nur eine Vorgelegewelle vorhanden, so folgt entsprechend Gleichung 109) für das Umsetzungsverhältnis:

$$D \,.\, D_1 \,.\, m = d \,.\, d_1 \,.\, n \quad \ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

d. h. das Produkt aus den Durchmessern oder Zähnezahlen aller treibenden Räder und der Umdrehungszahl der treibenden Welle, ist gleich dem Produkte aus den Durchmessern oder Zähnezahlen der getriebenen Räder und der Umdrehungszahl der getriebenen Welle.

---

*) Vergl. Seite 40, unter 33, c).

Aus Gleichung 109) ergiebt sich dann z. B. weiter:

$$D = \frac{d \, . \, d_1 \, . \, d_2 \, . \, n}{D_1 \, . \, D_2 \, . \, m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 111)$$

$$n = \frac{D \, . \, D_1 \, . \, D_2 \, . \, m}{d \, . \, d_1 \, . \, d_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 112)$$

u. s. w.

und aus Gleichung 110) z. B:

$$D_1 = \frac{d \, . \, d_1 \, . \, n}{D \, . \, m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 113)$$

$$d = \frac{D \, . \, D_1 \, . \, m}{d_1 \, . \, n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 114)$$

u. s. w.

Beispiele:

1) Ein zum Betriebe einer Mühlspindel dienendes Wasserrad macht 10 Umdrehungen pro Minute. Die Welle desselben trägt ein Rad mit 130 Zähnen, welches in ein auf der Vorgelegewelle sitzendes Trieb mit 40 Zähnen eingreift. Auf der Welle dieses Triebes sitzt ein konisches Rad mit 110 Zähnen, welches ein Trieb mit 30 Zähnen auf der Mühlspindel treibt. Wieviel Umdrehungen macht die Mühlspindel?

Aus Formel 110) folgt:

$$n = \frac{D \, . \, D_1 \, . \, m}{d \, . \, d_1} = \frac{130 \, . \, 110 \, . \, 10}{40 \, . \, 30} = 119{,}2 \text{ Umdrehungen.}$$

2) Auf einer Transmissionswelle, welche 120 Umdrehungen macht und eine Drehbank treiben soll, sitzt eine Riemenscheibe von 40 cm Durchmesser und treibt von hier aus eine auf einer Vorgelegewelle befindliche Riemenscheibe von 34 cm Durchmesser. Auf der Vorgelegewelle sitzt eine zweite Riemenscheibe von 46 cm Durchmesser, von welcher die 26 cm im Durchmesser haltende Riemenscheibe der Drehbankspindel angetrieben wird. Wieviel Umdrehungen macht die Drehbankspindel?

Aus Formel 110) erhält man:

$$n = \frac{D \, . \, D_1 \, . \, m}{d \, . \, d_1} = \frac{40 \, . \, 46 \, . \, 120}{34 \, . \, 26} = 250 \text{ Umdrehungen.}$$

3) Von der mit 320 Umdrehungen laufenden Welle A (Fig. 72) soll die Welle B mit 20 Umdrehungen angetrieben werden. Von den hierzu erforderlichen 6 Rädern sind 5 vorhanden und für diese folgende Zähnezahlen gegeben:

$$D = 45, \; D_1 = 36, \; D_2 = 48, \; d = 90, \; d_1 = 128.$$

Welche Zähnezahl mufs das auf der Welle B aufzukeilende Rad d_2 erhalten?

Nach Formel 109) wird:

$$d_2 = \frac{D \, . \, D_1 \, . \, D_2 \, . \, m}{d \, . \, d_1 \, . \, n} = \frac{45 \, . \, 36 \, . \, 48 \, . \, 320}{90 \, . \, 128 \, . \, 20} = 108 \text{ Zähne.}$$

4) Die Kurbelwelle einer Dampfmaschine macht 40 Umdrehungen pro Minute; man will vermittelst eines doppelten Vorgeleges die auf einer anderen Welle sitzende Kreissäge mit 320 Umdrehungen treiben. Die Riemenscheibe auf der Welle der Kreissäge habe 24 cm Durchmesser; der Durchmesser der beiden ersten treibenden Scheiben sei je 64 cm, die Durchmesser der von ihnen getriebenen Scheiben 34 cm und 30 cm. Welchen Durchmesser mufs die letzte treibende Scheibe erhalten?

Gegeben sind: $m = 40,\ n = 320;$
$D = 64,\ D_1 = 64,\ d = 34,\ d_1 = 30,\ d_2 = 24.$

Folglich nach Formel 109):

$$D_2 = \frac{d \,.\, d_1 \,.\, d_2 \,.\, n}{D \,.\, D_1 \,.\, m} = \frac{34 \,.\, 30 \,.\, 24 \,.\, 320}{64 \,.\, 64 \,.\, 40} = 47{,}8 \text{ cm}.$$

Wird die Bewegung einer Welle durch Riemen- und Räderwerk auf eine andere Welle übertragen, so kann man Formel 109) ebenfalls zur Berechnung benützen, indem man entweder sowohl die Riemenscheiben, als auch die Räder mit ihren Halb- oder Durchmessern, oder nur die Riemenscheiben mit ihren Halb- oder Durchmessern, und die Räder mit ihren Zähnezahlen in die Rechnung einführt.

Beispiel.

Die Spindel einer Drehbank, auf welcher sich eine Riemenscheibe von 36 cm Durchmesser befindet, wird durch eine Transmissionswelle, die 120 Umdrehungen macht, und auf welcher sich eine Riemenscheibe von 40 cm Durchmesser befindet, angetrieben. Durch 2 Räder mit je 60 Zähnen, und 2 Triebe mit je 20 Zähnen, wird die Bewegung auf die Drehbankspindel übertragen. Wieviel Umdrehungen macht die Spindel?

Gegeben sind: $m = 120,\ D = 40,\ D_1 = 20,\ D_2 = 20;$
$d = 36,\ d_1 = 60,\ d_2 = 60.$

Aus Formel 112) ergiebt sich:

$$n = \frac{D \,.\, D_1 \,.\, D_2 \,.\, m}{d \,.\, d_1 \,.\, d_2} = \frac{40 \,.\, 20 \,.\, 20 \,.\, 120}{36 \,.\, 60 \,.\, 60} = 14{,}8 \text{ Umdrehungen.}$$

Wird die Umdrehung einer Welle durch die in Fig. 65) dargestellte Schraube ohne Ende bewirkt, so ist zu beachten, dafs die Schraube als ein Trieb mit einem Zahne in Rechnung zu bringen ist, wenn sie eingängig, hingegen als ein Trieb mit 2 oder 3 Zähnen, wenn sie zwei- oder dreigängig ist.

Beispiele:

1) Wie hoch wird eine an einer Seiltrommel von $d = 30$ cm Durchmesser hängende Last bei 126 Kurbelumdrehungen gehoben, wenn das Rad 90 Zähne hat und die Schraube eingängig ist?

Die Trommelwelle macht bei 126 Kurbelumdrehungen

$$126 \,.\, {}^1/_{90} = 1{,}4 \text{ Umdrehungen;}$$

demnach hebt sich die Last um

$$1{,}4 \,.\, d \,.\, \pi = 1{,}4 \,.\, 30 \,.\, 3{,}14 = 132 \text{ cm.}$$

2) Bei einer durch Schnecke und Schneckenrad getriebenen Windenvorrichtung beträgt der Trommel-Durchmesser $d = 36$ cm. Das Schneckenrad hat 110 Zähne; die Schnecke ist dreigängig. Wie hoch wird eine an der Seiltrommel hängende Last bei 80 Kurbelumdrehungen gehoben?

Bei 80 Umdrehungen der Kurbel macht die Trommelwelle

$$80 \,.\, {}^3/_{110} = 2{,}18 \text{ Umdrehungen,}$$

die Last hebt sich mithin um

$$2{,}18 \,.\, d \,.\, \pi = 2{,}18 \,.\, 36 \,.\, 3{,}14 = 246{,}63 \text{ cm.}$$

3) Es soll der Durchmesser der Windentrommel einer durch Schnecke und Schneckenrad getriebenen Windenvorrichtung bestimmt werden, wenn die Schnecke zweigängig ist, das Schneckenrad 130 Zähne hat, und die Last bei 60 Umdrehungen der Kurbel um 150 cm gehoben werden soll.

Bei 60 Umdrehungen der Kurbel macht die Trommelwelle

$$60 \cdot \frac{2}{130} = 0{,}923 \text{ Umdrehungen.}$$

Da die Last um 150 cm gehoben werden soll, mufs

$$150 = 0{,}923 \cdot \pi \cdot d \text{ sein;}$$

hieraus erhält man als Durchmesser:

$$d = \frac{150}{0{,}923 \cdot 3{,}14} = 50 \text{ cm (abgerundet).}$$

Übungsbeispiele:

1) Auf einer Drehbankspindel, welche 180 Umdrehungen pro Minute machen soll, sitzt eine Riemenscheibe von 30 cm Durchmesser. Dieselbe soll durch eine Transmissionswelle, welche 80 Umdrehungen pro Minute macht, angetrieben werden. Welchen Durchmesser mufs die auf der Transmissionswelle anzubringende Riemenscheibe erhalten?

Lösung: D = 67,5 cm.

2) Auf einer Wasserradwelle sitzt ein konisches Rad mit 120 Zähnen, welches in ein auf einer Mühlspindel sitzendes Trieb mit 30 Zähnen eingreift. Die Mühlspindel soll 100 Umdrehungen pro Minute machen. Wie viel Umdrehungen mufs die Wasserradwelle machen?

Lösung: m = 25 Umdrehungen.

3) Die Welle einer Holzhobelmaschine soll mit 600 Umdrehungen pro Minute laufen. Auf dieselbe wird eine Riemenscheibe von 0,15 m Durchmesser aufgekeilt. Wie viel Umdrehungen mufs die Transmissionswelle machen, wenn die auf derselben befindliche Riemenscheibe einen Durchmesser von 1,5 m hat?

Lösung: m = 60 Umdrehungen.

4) Eine Wasserradwelle macht 12 Umdrehungen pro Minute; die Arbeitswelle, welche 120 Umdrehungen pro Minute machen soll, wird durch ein doppeltes Vorgelege angetrieben. Das Rad auf der Wasserradwelle habe 100 Zähne, das Trieb auf der Vorgelegewelle 20 Zähne, und das treibende Rad auf der Vorgelegewelle 60 Zähne. Welche Zähnezahl erhält das Trieb auf der Arbeitswelle?

Lösung: d_1 = 30 Zähne.

5) Durch eine mit 30 Umdrehungen pro Minute laufende Betriebswelle soll vermittelst eines dreifachen Vorgeleges eine Arbeitswelle mit 300 Umdrehungen pro Minute angetrieben werden. Auf der Arbeitswelle sitzt eine Riemenscheibe von 24 cm Durchmesser. Die Durchmesser der treibenden Scheiben auf den Vorgelegewellen betragen 64 und 56,25 cm, und diejenigen der getriebenen Scheiben 32 und 30 cm. Welchen Durchmesser erhält die treibende Scheibe auf der Betriebswelle?

Lösung: D = 64 cm.

Sechzehntes Kapitel.

Der Schwerpunkt.*)

Jeden Körper kann man sich aus einer Reihe einzelner Körperteilchen bestehend denken. Jedes dieser einzelnen Körperteilchen besitzt ein bestimmtes Gewicht, und die Gewichte aller dieser Teilchen bilden eine Reihe von parallel und senkrecht nach unten gerichteten Kräften, deren Mittelkraft**) das Gewicht des ganzen Körpers bildet.

Den Angriffspunkt dieser Mittelkraft, in welchem also das ganze Gewicht des Körpers vereinigt gedacht ist, nennt man den Schwerpunkt des Körpers.

Der Schwerpunkt eines und desselben Körpers behält innerhalb des Körpers stets seine Lage bei, man mag den Körper drehen oder wenden wie man will. Wird der Schwerpunkt eines Körpers auf irgend eine Weise unterstützt oder festgehalten, so bleibt der Körper in Ruhe, da die einzelnen Körperteilchen in Bezug auf ihr Gewicht in dem Schwerpunkte vereinigt gedacht sind. Man sagt deshalb:

Der Schwerpunkt eines Körpers ist derjenige Punkt, in welchem derselbe unterstützt oder festgehalten werden mufs, damit er in jeder Lage im Gleichgewicht bleibt.

Über die Lage des Schwerpunktes von Linien, Flächen und Körpern giebt die im Anhange des Buches befindliche Tabelle Aufschlufs; allgemein zu bemerken ist Folgendes:

Der Schwerpunkt gerader Linien liegt in der Mitte der Länge derselben. Hierher gehören gerade Flach- Rund- oder Profil-Eisenstangen.

Der Schwerpunkt regelmäfsiger Flächen liegt im Mittelpunkte derselben. Hierher gehören Flächen von der Form des Kreises, Quadrates, Rechtecks, regelmäfsigen Vielecks u. s. w. Als Flächen lassen sich in diesem Sinne auch alle jene Körper behandeln, bei welchen die Dicke gegenüber der Breite und Länge sehr gering ist; z. B. Blechtafeln, Steinplatten, Bretter u. s. w.

Bei regelmäfsigen Körpern — Würfel, Kugel — liegt der Schwerpunkt stets im Mittelpunkte derselben, wobei hier sowohl, als bei dem Vorstehenden angenommen ist, dafs die

---

*) Siehe Anhang; Tabelle.
**) Vergl. Kapitel VI, Seite 93.)

Teile, deren Schwerpunktslage bestimmt werden soll, aus dem gleichen Material bestehen.

Bei einigen Körpern, z. B. bei Ringen, Hohlcylindern, Hohlkugeln, fällt der Schwerpunkt aufserhalb der Masse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte unterstützt werden, so wird es notwendig, den Körper mit einem zweiten so zu verbinden, dafs die Schwerpunkte beider Körper zusammenfallen.

Guldin'sche Regel.

Eine sehr nützliche und praktische Anwendung findet die Lehre vom Schwerpunkte bei der Berechnung von Oberflächen und Inhalten gewisser Körper.

Dreht sich eine gerade oder eine krumme Linie um eine fest stehende Achse, welche mit ihr in einer Ebene liegt, so erzeugt diese Linie eine Fläche, eine sog. Rotationsfläche.

Dreht sich eine Fläche um eine fest stehende Achse, welche mit ihr in einer Ebene liegt, so erzeugt diese Fläche einen Körper, einen sog. Rotationskörper.

Nach der Guldin'schen Regel findet man nun

die Gröfse der Oberfläche eines Rotationskörpers, wenn man die Länge der diese Oberfläche erzeugenden Linie mit dem Wege, welchen ihr Schwerpunkt bei der Drehung durchläuft, multipliziert; und

die Gröfse des Rauminhaltes eines Rotationskörpers, wenn man den Inhalt der den Körper erzeugenden Fläche mit dem Wege, welchen ihr Schwerpunkt bei der Drehung durchläuft, multipliziert.

Es ist in Folgendem angenommen, dafs die Schwerpunkte der sich drehenden Linien oder Flächen nur Kreise beschreiben. Bezeichnet man mit

l die Länge der eine Oberfläche erzeugenden Linie;
F den Flächeninhalt der einen Körper erzeugenden Fläche;
O die Oberfläche eines Körpers;
I den Rauminhalt eines Körpers;
r den Halbmesser des vom Schwerpunkte durchlaufenen Kreises,

so erhält man allgemein die Gröfse der erzeugten Oberfläche

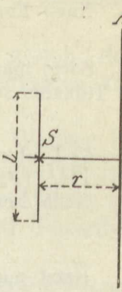
$$O = 2\pi r \, . \, l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 115)$$

und die Gröfse des Rauminhaltes des erzeugten Körpers

$$I = 2\pi r \, . \, F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 116)$$

Beispiele:

Fig. 74.



1) Oberfläche — Mantel — des geraden Cylinders.*)

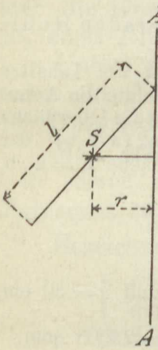
Dieselbe entsteht, wenn sich eine gerade Linie l um eine feste Achse AA dreht. (Fig. 74.) Es ist alsdann:

Weg des Schwerpunktes $= 2\pi r$.
Länge der Erzeugenden $= l$; folglich:
Oberfläche des Cylindermantels $= 2\pi r \cdot l$.

Macht man $l = 500$ mm und $r = 200$ mm, so erhält man:

$O = 2\pi r \cdot l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 200 \cdot 500 = 628000$ qmm.

Fig. 75.



2) Oberfläche des Kegels.*)

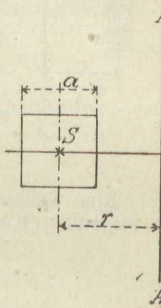
Gegeben sei eine gegen die feste Achse AA geneigte gerade Linie l, welche mit einem ihrer Endpunkte in die Achse AA fällt. (Fig. 75.) Es folgt dann nach Formel 115):

$$O = 2\pi r \cdot l.$$

Setzt man $l = 0{,}5$ m und $r = 0{,}2$ m, so wird:

$O = 2\pi r \cdot l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}628$ qm.

Fig. 76.



3) Oberfläche eines Ringes von quadratischem Querschnitt.*)

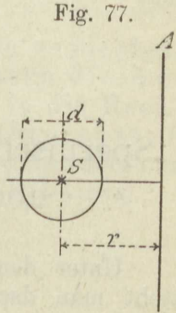
Zur Erzeugung dieser Oberfläche mufs sich ein Quadrat von der Seite a um die Achse AA drehen. Die Länge der erzeugenden Linie ist hier gleich dem Umfange des Quadrates, also $= 4a$ (Fig. 76), mithin nach Formel 115):

$$O = 2\pi r \cdot l = 2\pi r \cdot 4a = 8\pi r a.$$

Setzt man $a = 0{,}5$ dcm und $r = 3$ dcm, so wird:

$O = 8\pi r a = 8 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 0{,}5 = 37{,}68$ qdcm

Fig. 77.



4) Oberfläche eines Ringes von kreisförmigem Querschnitt.*)

Um diese Oberfläche zu erzeugen, mufs sich eine Kreislinie um die Achse AA drehen. (Fig. 77.) Nach Formel 115) wird demnach, wenn man den Durchmesser der Kreislinie mit d bezeichnet:

$$O = 2\pi r \cdot l = 2\pi r \cdot \pi d = 2\pi^2 d r.$$

Setzt man $r = 30$ cm und $d = 10$ cm, so folgt:

$O = 2\pi^2 d r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 30 = 5915{,}76$ qcm.

Soll für die in Beispiel 3 und 4) gegebenen Ringe noch der Rauminhalt berechnet werden, so mufs im ersten Falle eine quadratische Fläche und im zweiten Falle eine Kreisfläche rotieren.

---

*) Die Werte in den Beispielen 1—4 sind mit $\pi = 3{,}14$ durchgerechnet; es wird sich natürlich empfehlen, die am Ende des Buches befindliche Tabelle über die Kreis-Inhalte und -Umfänge zu benützen.

5) Inhalt des Kreisringes mit quadratischem Querschnitt. (Fig. 76.)

Nach Formel 116) ergiebt sich:

$$I = 2\pi r \,.\, F = 2\pi r \,.\, a^2.$$

Setzt man $r = 0{,}5$ m und $a = 0{,}15$ m, so folgt unter Anwendung der Tabellen im Anhange:

$$I = 2\pi r \,.\, a^2 = 3{,}142 \,.\, 0{,}0225 = 0{,}071 \text{ cbm}.$$

6) Inhalt des Kreisringes mit kreisförmigem Querschnitt. (Fig. 77.)

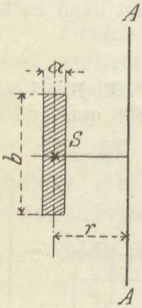
Nach Formel 116) erhält man:

$$I = 2\pi r \,.\, F = 2\pi r \,.\, \frac{\pi d^2}{4}.$$

Setzt man $r = 2$ dcm und $d = 0{,}8$ dcm, so folgt laut Tabelle:

$$I = 2\pi r \,.\, \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}57 \,.\, 0{,}503 = 6{,}323 \text{ cdcm}.$$

Fig. 78.



7) Oberfläche und Inhalt des geraden Hohlcylinders.

Zur Erzeugung der Oberfläche und des Inhaltes mufs ein Rechteck von den Seiten a und b um die Achse AA rotieren. (Fig. 78.) Der Umfang der die Oberfläche erzeugenden Geraden ist $l = 2a + 2b = 2(a + b)$; der Inhalt der den Körper erzeugenden Fläche $F = a \,.\, b$, mithin nach Formel 115):

$$O = 2\pi r \,.\, l = 2\pi r \,.\, 2(a + b)$$

und nach Formel 116):

$$I = 2\pi r \,.\, F = 2\pi r \,.\, a b.$$

Setzt man $a = 5$ cm, $b = 60$ cm und $r = 30$ cm, so folgt:

$$O = 2\pi r \,.\, 2(a + b) = 188{,}5 \,.\, 2 \,.\, 65 = 24505 \text{ qcm}.$$

$$I = 2\pi r \,.\, a b = 188{,}5 \,.\, 5 \,.\, 60 = 56550 \text{ ccm}.$$

Eine weitere Berücksichtigung erfahren die vorstehenden Regeln im folgenden Kapitel unter Gewichtsberechnungen.

Siebzehntes Kapitel.

Spezifisches Gewicht, absolutes Gewicht und Gewichtsberechnungen.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Körpers versteht man das Gewicht einer Volumen*)-Einheit, d. i. eines Kubikcentimeters oder eines Kubikdecimeters, des Körpers.

*) Volumen = Rauminhalt.

Man sagt auch: Das spezifische Gewicht eines Körpers ist gleich dem Gewichte eines Kubikcentimeters*) desselben in Gramm, oder:

Das spezifische Gewicht eines Körpers ist gleich dem Gewichte eines Kubikdecimeters desselben in Kilogramm ausgedrückt.

Da die spezifischen Gewichte gewöhnlich auf Wasser bezogen sind, so sagt man auch noch: Das spezifische Gewicht eines Körpers giebt an, wievielmal dieser Körper schwerer ist, als das Gewicht einer Wassermasse, welche genau denselben Rauminhalt besitzt, wie der Körper selbst.

Aufschlufs über die spezifischen Gewichte der verschiedenen Materialien giebt die Tabelle im Anhange des Buches; es sind hier die Gewichte eines Kubikdecimeters, oder was dasselbe ist, eines Liters, in Kilogramm angegeben.

Unter dem absoluten Gewichte eines Körpers versteht man das Gewicht des gesamten Materiales, aus welchem der Körper hergestellt ist.

Man erhält das absolute Gewicht eines Körpers, wenn man seinen Rauminhalt mit dem spezifischen Gewichte des Materiales, aus welchem der Körpers besteht, multipliziert.

Bezeichnet man mit

$$\left.\begin{array}{l} s \text{ das spezifische Gewicht,} \\ I \text{ den Rauminhalt (Volumen),} \\ G \text{ das absolute Gewicht} \end{array}\right\} \text{ eines Körpers,}$$

so wird sein absolutes Gewicht

$$G = I \, . \, s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 117)$$

Hieraus folgt:

$$I = \frac{G}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 118)$$

$$s = \frac{G}{I} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 119)$$

Es wird sich nach dem Vorstehenden empfehlen, bei Gewichtsberechnungen von Körpern die Abmessungen derselben stets in **Decimetern** in die Rechnung einzuführen, da die spezifischen Gewichte in Kilogrammen gegeben sind. Das Gewicht der Körper wird dann ohne weiteres in **Kilogrammen** erhalten.

---

*) Ist das Gewicht von

1 cdcm $= s$ kg, so wird das Gewicht von

1 cbm $= s \, . \, 1000$ kg, von

1 ccm $= \frac{s}{1000}$ kg und von

1 cmm $= \frac{s}{1000000}$ kg.

Da gewöhnlich nur die Rauminhalte einfacher geometrischer Körper allgemein bekannt sind, so wird es notwendig, Körper von komplizierten Formen auf solche von möglichst einfachen Formen zurückzuführen.

In der Regel verfährt man so, dafs man jeden Körper in eine Reihe einfacher Körper, deren Rauminhalte infolge ihrer richtigen oder angenäherten geometrischen Form bekannt sind, zerlegt, deren Gewichte berechnet und diese dann, um das Gesamtgewicht des Körpers zu erhalten, addiert.

Beispiele:

1) Wie grofs ist das Gewicht einer gufseisernen Kugel, welche 12 cdcm Rauminhalt besitzt?

Das spezifische Gewicht des Gufseisens ist nach der Tabelle = 7,25; mithin nach Formel 117):

$$G = I . s = 12 . 7,25 = 87,0 \text{ kg}.$$

2) Wieviel kg wiegt eine Rundeisenstange von 50 mm Durchmesser und 1200 mm Länge?*)

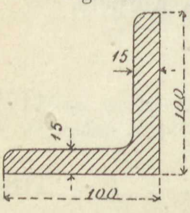
Die Stange ist als Cylinder von 0,5 dcm Durchmesser und 12 dcm Länge aufzufassen; der Rauminhalt ist somit:

$$I = \pi r^2 . h = 0,1964 . 12 = 2,357 \text{ cdcm}.$$

Nimmt man nach der Tabelle das spezifische Gewicht des Schmiedeeisens zu 7,78 an, so folgt nach Formel 117):

$$G = I . s = 2,357 . 7,78 = 18,337 \text{ kg}.$$

Fig. 79.



3) Wie grofs ist das Gewicht eines Winkeleisens nach nebenstehender Fig. 79), wenn die Länge desselben = 5 m ist?**)

Sieht man von den Abrundungen des Profiles ab, so kann man das Winkeleisen bestehend denken aus 2 Rechtecken von den Flächeninhalten

$$f_1 = 1 . 0,15 = 0,15 \text{ qdcm und}$$
$$f_2 = 0,85 . 0,15 = 0,1275 \text{ qdcm.}$$
$$\text{Mithin } F = f_1 + f_2 = 0,2775 \text{ qdcm.}$$

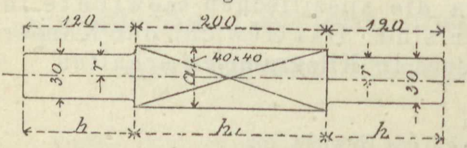
Folglich: Rauminhalt = Fläche mal Länge, d. i.

$$I = F . l = 0,2775 . 50 = 13,875 \text{ cdcm}$$

und damit, wenn s = 7,78 gesetzt wird, nach Formel 117):

$$G = I . s = 13,875 . 7,78 = 107,948 \text{ kg}.$$

Fig. 80.



4) Wieviel kg wiegt die in Fig. 80) gegebene Messingstange, wenn s = 8,55 angenommen wird?

Die Stange ist als aus 2 Cylindern u. einem Prisma bestehend aufzufassen. Der Rauminhalt eines Cylinders

*) Für die folgenden Gewichtsberechnungen sind die Tabellen am Ende des Buches benützt.

**) Sämtliche Mafse in den folgenden Figuren sind in Millimetern angegeben.

ist $= \pi r^2 . h$; derjenige des Prismas von quadratischem Querschnitt $= a^2 . h_1$, mithin der Rauminhalt der ganzen Stange:

$$I = 2 . \pi r^2 . h + a^2 . h_1 = 2 . 0{,}071 . 1{,}2 + 0{,}4 . 0{,}4 . 2.$$

$$I = 0{,}170 + 0{,}32 = 0{,}490 \text{ cdcm.}$$

Damit ergiebt sich nach Formel 117):

$$G = I . s = 0{,}490 . 8{,}55 = 4{,}189 \text{ kg.}$$

5) Wie grofs ist das Gewicht einer Granitplatte von 1500 mm Länge, 800 mm Breite und 70 mm Stärke, wenn sich in derselben eine Öffnung von 200 mm Länge und 100 mm Breite befindet? ($s = 2{,}8$.)

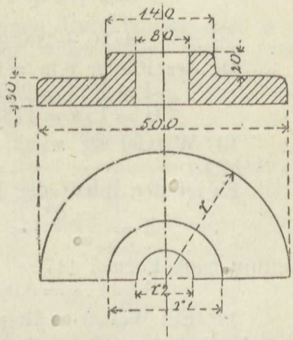
Der Rauminhalt der Platte berechnet sich aus dem Gesamtinhalt derselben, verringert um den Rauminhalt der Öffnung; demnach wird

$$I = 15 . 8 . 0{,}7 - 2 . 1 . 0{,}7 = (15 . 8 - 2 . 1)\, 0{,}7 = 82{,}6 \text{ cdcm.}$$

Hieraus folgt nach Formel 117):

$$G = I . s = 82{,}6 . 2{,}8 = 231{,}28 \text{ kg.}$$

Fig. 81.



6) Wieviel kg wiegt die in Fig. 81) dargestellte Gufseisenplatte? ($s = 7{,}3$.)

Bezeichnet man die Höhe der eigentlichen Platte mit h und die Höhe des Auges mit h_1, so ist der für das Gewicht nutzbare Rauminhalt der Platte gleich dem der vollen Platte, vermehrt um denjenigen des Auges und vermindert um denjenigen der Bohrung; d. h.:

$$I = \pi r^2 . h + \pi r_1^2 . h_1 - \pi r_2^2 (h + h_1).$$

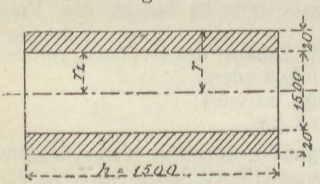
$$= 19{,}635 . 0{,}3 + 1{,}539 . 0{,}2 - 0{,}503 . 0{,}5.$$

$$= 5{,}891 + 0{,}308 - 0{,}252 = 5{,}947 \text{ cdcm.}$$

Mithin nach Formel 117):

$$G = I . s = 5{,}947 . 7{,}3 = 43{,}413 \text{ kg.}$$

Fig. 82.



7) Wie grofs ist das Gewicht eines Kesselbleches von 1500 mm Länge und 20 mm Stärke, wenn dasselbe zu einem Kessel von 1500 mm lichtem Durchmesser gehört? ($s = 7{,}8$.)

Der Rauminhalt des Bleches, welcher durch die Wandung eines Hohlcylinders gebildet wird, kann auf zweierlei Weise gefunden werden. Einmal nach der Guldinschen Regel (Seite 137, Beispiel 7) und das andere mal aus der Differenz der beiden Cylinder von den Halbmessern r und r_1 (Fig 82), also:

$$I = \pi r^2 . h - \pi r_1^2 . h = (\pi r^2 - \pi r_1^2)\, h.$$

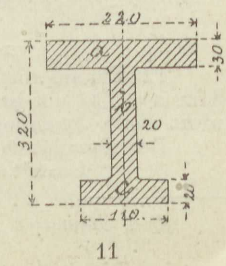
Der Halbmesser r wird nach Fig. 82) $= 770$ mm, mithin in Decimetern:

$$I = 186{,}3 . 15 - 176{,}7 . 15 = (186{,}3 - 176{,}7)\, 15 = 144{,}0 \text{ cdcm.}$$

Nach Formel 117) ergiebt sich nun:

$$G = I . s = 144 . 7{,}8 = 1123{,}2 \text{ kg.}$$

Fig. 83.



8) Wie grofs ist das Gewicht eines gufseisernen Trägers nach Fig. 83), wenn derselbe 5 m lang ist? ($s = 7{,}3$.)

Teilt man sich das Profil des Trägers in die 3 Flächenteile a, b und c, so ist der Flächeninhalt des Trägers

$$F = a + b + c. \quad \text{Nun ist}$$

$$a = 2{,}2 . 0{,}3 = 0{,}660.$$

$$b = 2{,}7 . 0{,}2 = 0{,}540.$$

$$c = 1{,}1 . 0{,}2 = 0{,}220. \quad \text{Mithin:}$$

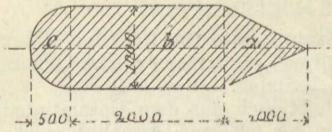
$$F = 1{,}420 \text{ qdcm;}$$

folglich der Rauminhalt desselben:

$$I = F \,.\, l = 1{,}420 \,.\, 50 = 71 \text{ cdcm und damit}$$

$$G = I \,.\, s = 71 \,.\, 7{,}3 = 518{,}3 \text{ kg}.$$

Fig. 84.



9) Ein Brückenpfeiler aus Ziegelmauerwerk besitzt die in Fig. 84) angegebene Form und ist 6 m hoch. Wie grofs ist sein Gewicht, wenn das spezifische Gewicht des Mauerwerks zu 1,8 angenommen wird?

Zerlegt man sich den Querschnitt des Pfeilers in das Dreieck a, das Rechteck b und den Halbkreis c, so folgt für den Flächeninhalt des Querschnittes — in Decimetern —

$$F = a + b + c = \frac{10 \,.\, 10}{2} + 20 \,.\, 10 + \frac{78{,}54}{2} \text{ oder}$$

$$= 50 + 200 + 39{,}27 = 289{,}3 \text{ qdcm}.$$

Da der Pfeiler 6 m = 60 dcm hoch ist, so wird

$$I = F \,.\, l = 289{,}3 \,.\, 60 = 17358 \text{ cdcm, folglich:}$$

$$G = I \,.\, s = 17358 \,.\, 1{,}8 = 31244{,}4 \text{ kg}.$$

10) Wieviel kg wiegt eine Bleikugel von 50 mm Durchmesser? ($s = 11{,}4$.)

Es ist der Inhalt der Kugel:

$$I = \frac{\pi \,.\, d^3}{6} = \frac{3{,}14 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}5}{6} = 0{,}0654 \text{ cdcm};$$

mithin nach Formel 117):

$$G = I \,.\, s = 0{,}0654 \,.\, 11{,}4 = 0{,}746 \text{ kg}.$$

11) Ein Wasserbehälter von cylindrischem Querschnitt besitzt einen Halbmesser $r = 0{,}5$ m und eine Höhe $h = 2$ m. Wieviel wiegt das in dem Behälter befindliche Wasser, wenn derselbe bis an den Rand gefüllt ist?

Die Wassermenge ist hier gleich dem Inhalte des Gefässes, mithin:

$$I = \pi r^2 \,.\, h = 78{,}54 \,.\, 20 = 1570{,}8 \text{ cdcm}.$$

Da nun 1 cdcm Wasser*) 1 kg wiegt, so wird:

$$G = I \,.\, s = 1570{,}8 \,.\, 1 = 1570{,}8 \text{ kg}.$$

12) Für den in vorstehendem Beispiele gegebenen Wasserbehälter steht aus räumlichen Rücksichten nur eine Höhe $h_1 = 1{,}5$ m zur Verfügung. Welchen Halbmesser x mufs bei dieser Höhe ein anderer Behälter von gleichem Rauminhalte erhalten?

Die Inhalte beider Behälter müssen einander gleich sein, mithin wird:

$$\pi r^2 \,.\, h = \pi x^2 \,.\, h_1. \text{ Folglich:}$$

$$x^2 = \frac{\pi r^2 \,.\, h}{\pi \,.\, h_1} = \frac{r^2 \,.\, h}{h_1} \text{ und damit}$$

$$x = \sqrt{\frac{r^2 \,.\, h}{h_1}} = \sqrt{\frac{5 \,.\, 5 \,.\, 20}{15}} = \sqrt{33{,}33 \ldots}$$

$$x = 5{,}773 \text{ dcm} = 0{,}577 \text{ m} = 577 \text{ mm}.$$

13) Ein aus einer bestimmten Legierung hergestellter Würfel, dessen Seite $a = 120$ mm ist, wiegt 20 kg. Wie grofs ist das spezifische Gewicht dieser Legierung?

Der Rauminhalt des Würfels ist:

$$I = a^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728 \text{ cdcm}.$$

---

*) 1 cdcm = 1 Liter.

Nach Formel 119) erhält man demnach:

$$s = \frac{G}{I} = \frac{20}{1,728} = 11,57.$$

14) Wieviel kg wiegt der in Beispiel 6, Seite 158) berechnete Ring, wenn derselbe aus Stahl hergestellt wird? (s = 7,7.)

Nach der Guldin'schen Regel ergab sich

$I = 6,323$ cdcm. Mithin nach Formel 117):

$$G = I \,.\, s = 6,323 \,.\, 7,7 = 48,687 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:*)

1) Wie grofs ist das Gewicht einer Stange aus Quadrat-Eisen, wenn die Seite des Quadrats 40 mm und die Länge der Stange 5 m beträgt? (s = 7,7.)

Lösung: G = 61,6 kg.

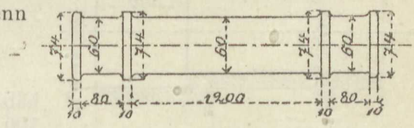
2) Eine Transmissionswelle besitzt einen Durchmesser von 8 cm und eine Länge von 11,5 m. Wieviel kg wiegt diese Welle, wenn s = 7,8 gesetzt wird?

Lösung: I = 57,799 cdcm und G = 450,84 kg.

3) Wieviel kg wiegt eine Gufsstahlachse nach Fig. 85), wenn s = 7,9 angenommen wird?

Lösung: I = 4,016 cdcm und G = 31,73 kg.

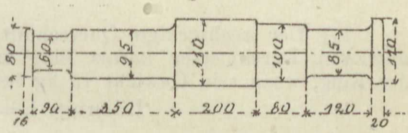
Fig. 85.



4) Es ist das Gewicht der in Fig. 86) dargestellten Achse zu berechnen. Wie grofs wird dasselbe, wenn s = 7,8 angenommen wird?

Lösung: I = 6,215 cdcm und G = 48,477 kg.

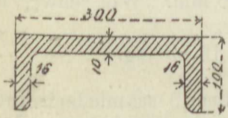
Fig. 86.



5) Wieviel kg wiegt ein schmiedeeiserner Träger nach Fig. 87), wenn derselbe 6 m lang ist? (s = 7,8.)

Lösung: I = 35,28 cdcm und G = 275,184 kg.

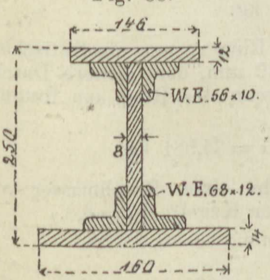
Fig. 87.



6) Wieviel kg wiegt der in Fig. 88) dargestellte, zusammengesetzte, schmiedeeiserne Träger, wenn s = 7,7 gesetzt wird und der Träger 4 m lang ist?

Lösung: I = 43,2 cdcm und G = 332,64 kg.

Fig. 88.



*) Zu den folgenden Beispielen sind die Tabellen im Anhange des Buches bis zur dritten Decimalstelle benützt.

7) Wieviel kg wiegen:

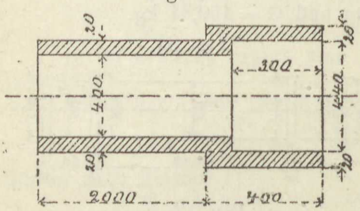
a) 1 qm Eisenblech, 3 mm stark? (s = 7,78.)
b) 2 qm Kupferblech, 4 mm stark? (s = 8,9.)
c) 5 qm Messingblech, 1 mm stark? (s = 8,55.)
d) eine 3 qm grofse Gufseisenplatte, 40 mm stark? (s = 7,25.)
e) eine ausgewalzte Zinkplatte, 0,5 qm grofs und 7 mm stark? (s = 6,9.)
f) eine 1,5 qm grofse Bleiplatte, 15 mm stark? (s = 11,4.)
g) eine 2 qm grofse Gufsstahlplatte, 30 mm stark? (s = 7,87.)

Lösung: a) 23,34 kg; b) 71,2 kg; c) 42,75 kg; d) 870 kg; e) 24,15 kg; f) 256,5 kg; g) 472,2 kg.

8) Wie grofs ist das Gewicht eines gufseisernen Hohlcylinders von 0,55 m lichtem Durchmesser, 15 mm Wandstärke und 1,25 m Länge? (s = 7,3.)

Lösung: I = 33,288 cdcm und G = 243,002 kg.

Fig. 89.



9) Welches Gewicht besitzt der in Fig. 89) dargestellte röhrenförmige, gufseiserne Körper, wenn s = 7,3 angenommen wird?

Lösung: I = 66,983 cdcm und G = 488,976 kg.

10) Welchen Durchmesser erhält eine gufseiserne Kugel von 100 kg Gewicht? (s = 7,07.)

Lösung: d = 300 mm.

11) Der rechteckige Querschnitt eines Bleiringes von 300 mm mittlerem Durchmesser besitzt eine Breite von 40 mm. Wie hoch ist der Ring, wenn sein Gewicht 13 kg beträgt? (s = 11,5.)

Lösung: h = 30 mm.

12) Eine Hohlkugel aus Gufsstahl besitzt einen inneren Durchmesser von 160 mm und eine Wandstärke von 20 mm. Wie schwer ist diese Hohlkugel? (s = 7,9.)

Lösung: I = 2,043 cdcm und G = 16,140 kg.

13) Wieviel kg wiegt ein Gewicht, welches aus 15 schmiedeeisernen Platten von 20 mm Stärke und 200 mm Durchmesser besteht? (s = 7,8.)

Lösung: G = 73,523 kg.

14) Wie grofs ist das Gewicht eines Ringes von quadratischem Querschnitt, wenn die Seite des Quadrates 40 mm, der mittlere Durchmesser des Ringes 800 mm beträgt, und wenn der Ring aus Rotgufs hergestellt ist? (s = 8,6.)

Lösung: I = 4,021 cdcm und G = 34,581 kg.

15) Ein Kupferkegel, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 90 mm besitzt, wiegt 9 kg. Wie hoch ist der Kegel? (s = 8,8.)

Lösung: h = 482 mm.

Die in diesem Kapitel gegebenen Beispiele bilden die Grundlage für die Berechnung einzelner Maschinenteile, oder ganzer Maschinen. Wenn z. B. das Gewicht eines Ventiles, Lagers, Dampfcylinders, Zahnrades oder einer Treibstange, Riemenscheibe, Seilscheibe u. s. w. berechnet werden soll, so müssen diese Gegenstände an der Hand von Skizzen oder Zeichnungen in Teile zergliedert werden, welche mit Leichtigkeit gestatten, die entsprechenden Rauminhalte, und damit die Gewichte, zu ermitteln. Die Summe aller dieser Teilgewichte bildet dann das Gesamtgewicht des zu berechnenden Gegenstandes.

Der Hauptwert ist darauf zu legen, schnell einfache Formen für die einzelnen Teile und Teilchen zu finden; bei einiger Übung wird dann sehr bald ein gutes Resultat erzielt werden.

Dritter Teil.

Angewandte Mechanik.

Achtzehntes Kapitel.

Die Festigkeit.

Die Festigkeitslehre zeigt, wie diejenigen Teile, aus welchen Bau- oder Maschinenkonstruktionen zusammengesetzt sind, zu gestalten und bezüglich ihrer Abmessungen zu behandeln sind, damit sie unter möglichst geringer Materialverwendung befähigt werden, den auf sie einwirkenden äufseren Kräften genügenden Widerstand zu leisten.

Die auf einen Körper einwirkenden äufseren Kräfte haben das Bestreben, denselben einer Formveränderung — Verlängerung, Verkürzung, Biegung, Verdrehung — zu unterwerfen. Diese Formveränderung kann bis zur Zerstörung des Körpers — Rifs, Bruch — gesteigert werden.

Feste Körper setzen dieser Wirkung der an ihnen thätigen äufseren Kräfte einen Widerstand entgegen, welcher, abhängig von ihrer Beschaffenheit, gröfser oder kleiner ausfallen wird. Die Ursache dieses Widerstandes, also die den äufseren Kräften entgegenwirkende innere Kraft, ist die Zusammenhangskraft — Kohäsionskraft — der einzelnen Körperteilchen untereinander, vermöge welcher dieselben jeder Änderung ihrer gegenseitigen Lage zu widerstehen befähigt sind.

Diese zwischen den einzelnen Körperteilchen thätigen inneren Kräfte nennt man Spannungen.

Die Zusammenhangskraft ist auch zugleich die Ursache, dafs eine an einem Körper erzeugte Formveränderung wieder verschwindet, wenn die äufseren Kräfte zu wirken aufgehört haben; die Körperteilchen kehren dann in ihre ursprüngliche Lage wieder zurück. Dieses Bestreben eines Körpers, seine ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, nennt man Elastizität.

Aber nicht immer nehmen die Teilchen eines Körpers ihre ursprüngliche Lage wieder ein. Wenn die Formveränderung eine gewisse Grenze überschreitet, behält der Körper dieselbe teilweise bei, nachdem die äufseren Kräfte zu wirken aufgehört haben — er bleibt verlängert, verkürzt, verbogen. Diese Grenze, bis zu welcher man einem festen Körper eine Formveränderung zumuten darf, damit seine Teilchen noch in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehren, nennt man die Elastizitätsgrenze.

Nimmt die Formveränderung noch über die Elastizitätsgrenze hinaus zu, so wird schliefslich der Zusammenhang der einzelnen Körperteilchen untereinander zerstört. Der Widerstand, welcher hierbei durch die Zusammenhangskraft der Trennung der Körperteilchen entgegengesetzt wird, heifst Festigkeit.

Die Grenze, bis zu welcher man einen Körper der Einwirkung äufserer Kräfte unterwerfen kann, ohne dafs seine vollkommene Zerstörung eintritt, nennt man die Festigkeitsgrenze.

Diese und die Grenze der vollkommenen Elastizität liegen bei den einzelnen Materialien sehr verschieden zu einander. So liegen dieselben beim Gufseisen z. B. sehr nahe zusammen; denn überschreitet man hier nur um ein Geringes die Elastizitätsgrenze, so wird unmittelbar die Festigkeitsgrenze erreicht, d. h. der Zusammenhang der einzelnen Teile des Körpers wird bei weiterer Belastung zerstört. Schmiedeeisen hingegen kann nach Überschreiten seiner Elastizitätsgrenze noch bedeutende Formveränderungen erleiden, ehe es der Zerstörung anheimfällt.

Je nach der Art und Weise, in welcher äufsere Kräfte einen Körper beeinflussen, Formveränderungen an demselben erzeugen und ihn zu zerstören suchen, unterscheidet man folgende Arten der Festigkeit:

1) Absolute oder Zugfestigkeit, wenn ein Körper an einem Ende festgehalten und am anderen Ende ein in der Mittellinie dieses Körpers wirkender Zug ausgeübt wird, welcher ihn zu verlängern oder zu zerreifsen sucht. (Seile, Riemen, Ketten, Zugstangen u. s. w.)

2) Rückwirkende oder Druckfestigkeit, wenn an Stelle des Zuges in der Mittellinie des Körpers ein Druck ausgeübt wird. (Fundamente, Unterlagen, kurze Stützen u. s. w.)

Ist hierbei die Länge des Körpers im Verhältnis zu seinen Querschnittsabmessungen sehr grofs, so wird ein Ausbiegen desselben in der Mitte stattfinden. Der Körper wird alsdann auf Zerknicken in Anspruch genommen. (Säulen, stehende Wellen, Treibstangen, Krahnausleger u. s. w.)

3) Scher- oder Schubfestigkeit, wenn Kräfte die Teile eines Körpers übereinander zu schieben suchen. (Nieten, Bolzen, Keile, Schraubengewinde u. s. w.)

4) Relative- oder Biegungsfestigkeit, wenn der Körper an einem oder an mehreren Punkten unterstützt ist, und die senkrecht zu seiner Längsachse wirkenden Kräfte denselben durch Biegung zu zerstören suchen. (Träger in Gebäuden, die Arme der Hebel, Zähne der Räder, Krahnbalken, Wagenachsen, Zapfen u. s. w.)

5) Torsions- oder Drehungsfestigkeit, wenn der Körper an der Drehung um seine Achse verhindert ist und an demselben Kräfte wirken, welche die Teile des Körpers schraubenförmig verwinden. (Schraubenspindeln, Wellenleitungen.)

Um nun die den verschiedenen Festigkeitsarten entsprechenden, im Inneren der Körper auftretenden Widerstände genau untersuchen und beurteilen zu können, bezieht man dieselben auf eine Flächen-Einheit. Es soll den folgenden Berechnungen als

Flächeneinheit **1 qcm** und als
Krafteinheit **1 kg**

zu Grunde gelegt werden.

Ferner ist noch besonders zu beachten:

Da bei Eintritt einer bleibenden Formveränderung ein Körper bereits als teilweise zerstört angesehen werden kann, so darf bei statischen Konstruktionen die Elastizitätsgrenze niemals überschritten werden.

Diejenige Belastung, welche in der Praxis dem Material auf die Dauer und mit Sicherheit zugemutet werden darf, die zulässige Belastung, Faserspannung, zulässige Inanspruchnahme, zulässige Beanspruchung, mufs daher immer kleiner als die Belastung sein, welche den Körper bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht.

Gewöhnlich wird bei Eisenkonstruktionen nur ein gewisser Teil der einen Körper bis zur Elastizitätsgrenze beanspruchenden Belastung in die Rechnung eingeführt.

---

1) Zugfestigkeit.

Durch Versuche ist festgestellt worden, dafs die Zugfestigkeit nur von der Gröfse des Querschnittes eines Körpers abhängig und diesem Querschnitte zugleich direkt proportional ist; d. h. hat ein Körper einen doppelt so grofsen Querschnitt als ein anderer gleichen Materiales, so ist er auch in der Lage, den doppelten Zug auszuhalten.

Die Kraft oder das Gewicht, welche einen Körper, dessen Querschnitt = 1 qcm ist, zu zerreifsen vermag, wird Festigkeitskoeffizient genannt.

Bezeichnet man mit

*) k die zulässige Beanspruchung des Materiales in kg auf 1 qcm (Festigkeitskoeffizient);

F den Querschnitt des Körpers in qcm;

P die Kraft in kg, welche den Körper angreift, so ist

$$P = F \cdot k \qquad \text{120)}$$

Hieraus folgt: $$F = \frac{P}{k} \qquad \text{121)}$$

$$k = \frac{P}{F} \qquad \text{122)}$$

In der Praxis geht man mit der zulässigen Beanspruchung der verschiedenen Materialien nicht über die Hälfte der zur Erreichung der Elastizitätsgrenze erforderlichen Belastung hinaus; die allgemein gebräuchlichen Koeffizienten sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle der Koeffizienten der Zugfestigkeit.

Namen der Materialien.	In der Praxis zulässige Belastung k	Belastung, welche den Körper bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht	Belastung, welche den Körper bis zur Festigkeitsgrenze beansprucht
	in kg auf 1 qcm.	in kg auf 1 qcm.	in kg auf 1 qcm.
Eisendraht	1200	2200	6500
Stabeisen	750	1500	4000
Eisenblech	750	1500	3500
Gufseisen	**)250	900	1250
Stahl	1500	3000	6000
Kupfer	250	300	3000
Messing	250	480	1200
Holz, hart	100	200	800
Holz, weich	70	140	680

*) In der folgenden Tabelle sind die Belastungen in kg auf 1 qcm angegeben. Wünscht man dieselbe auf eine andere Flächeneinheit bezogen zu wissen, so ist z. B. für Schmiedeeisen zu beachten:

k = 750 kg auf 1 qcm (laut Tabelle); mithin:
= 7,5 kg auf 1 qmm.
= 75000 kg auf 1 qdcm.
= 7500000 kg auf 1 qm.

**) Für Biegungsfestigkeit k = 500 kg.

Die in der Praxis zulässige Belastung k kann jedoch unter Umständen von den Werten der Tabelle abweichen. Hierbei ist besonders zu berücksichtigen:

1) Ob das Material von überall gleichartiger Beschaffenheit ist; z. B. Gufseisen, Stahlguss, Messing.

2) Ob das Material sich im Laufe der Zeit verändert; z. B. durch Rosten, Faulen, Verwittern.

3) Ob die Belastung eine ruhige ist, oder Stöfse und Erschütterungen mit derselben verbunden sind; z. B. Dachstühle, Eisenbahnbrücken, Lokomotiven.

4) Ob der Körper abwechselnd bald auf Druck, oder bald auf Zug beansprucht wird; z. B. Treibstangen, Kolbenstangen.

5) Ob der Körper einer mehr oder weniger schnellen Abnützung unterworfen ist; z. B. Zapfen, Seile, Ketten.

6) Ob seine Zerstörung mehr oder weniger nachteilige Folgen mit sich bringt.

Als Mafsstab für die Annahme des Wertes von k kann, entsprechend den Punkten 1—6), folgendes dienen:

Folgt auf die gröfste Belastung eines Körpers, für welche die Berechnung auf Festigkeit stets durchzuführen ist, eine völlige Entlastung, so nehme man die Werte der Tabelle.

Ist die Belastung eine vollkommen ruhige, also frei von Stöfsen und Erschütterungen, so kann man k um die Hälfte gröfser, als wie in der Tabelle angegeben, nehmen.

Ist jedoch die Belastung eine zwischen einem gröfsten Druck und einem gröfsten Zug wechselnde, so nehme man für k nur die Hälfte des Tabellenwertes.

In den folgenden Beispielen ist auf die Verschiedenartigkeit der Gröfse des Wertes k zu achten.

Beispiele:*)

1) Bei welcher Belastung zerreifst eine Stange aus Stabeisen, welche 6,5 cm breit und 3 cm stark ist?

Der Querschnitt F der Stange ist $= 6{,}5 \, . \, 3 = 19{,}5$ qcm; k ist nach vorstehender Tabelle $= 4000$ kg, mithin nach Formel 120):

$$P = F \, . \, k = 19{,}5 \, . \, 4000 = 78000 \text{ kg.}$$

2) Wie grofs ist für diese Stange die Belastung an der Elastizitätsgrenze?

Hier ist $k = 1500$ zu setzen, mithin nach Formel 120):

$$P = F \, . \, k = 19{,}5 \, . \, 1500 = 29250 \text{ kg.}$$

3) Wie grofs wird die Belastung auf 1 qcm, wenn die in den vorstehenden Beispielen berechnete Stange a) mit 60000 kg und b) mit 100000 kg belastet wird?

Nach Formel 122) ergiebt sich:

$$\text{a) } k = \frac{P}{F} = \frac{60000}{19{,}5} = 3077 \text{ kg.}$$

---

*) Unter Anwendung der Tabellen im Anhange des Buches.

b) $k = \frac{P}{F} = \frac{100000}{19,5} = 5128$ kg.

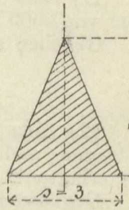
4) Welche zulässige Belastung kann dieselbe Stange mit einer für die Praxis genügenden Sicherheit tragen?

Hier ist $k = 750$ kg anzunehmen, mithin nach Formel 120):

$$P = F \,.\, k = 19,5 \,.\, 750 = 14625 \text{ kg.}$$

5) Wieviel kg kann eine Stahlstange mit Dreieck-Querschnitt nach nebenstehender Fig. 90) tragen: a) als zulässige Belastung; b) an der Elastizitätsgrenze; c) an der Festigkeitsgrenze?

Fig. 90.



Der Querschnitt F der Stange ist dem Dreieck entsprechend:

$$F = \frac{\text{Grundlinie} \times \text{Höhe}}{2} = \frac{s \,.\, h}{2} = \frac{3 \,.\, 4}{2} = 6 \text{ qcm.}$$ Mithin nach Formel 120):

a) $P = F \,.\, k = 6 \,.\, 1500 = 9000$ kg.
b) $P = F \,.\, k = 6 \,.\, 3000 = 18000$ kg.
c) $P = F \,.\, k = 6 \,.\, 6000 = 36000$ kg.

6) Wie grofs wird die Beanspruchung auf 1 qcm in der Stange nach Beispiel 5), wenn dieselbe mit 10500 kg belastet wird?

Nach Formel 122) ist:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{10500}{6} = 1750 \text{ kg.}$$

7) Wieviel kg kann eine Messingstange von quadratischem Querschnitt mit genügender Sicherheit tragen, wenn die Seite des Quadrates 3 cm lang ist?

Der Querschnitt F der Stange ist, da quadratisch:

$F = 3^2 = 3 \,.\, 3 = 9$ qcm. Mithin nach Formel 120):

$P = F \,.\, k = 9 \,.\, 250 = 2250$ kg,

da hier k, der geforderten Sicherheit wegen, zu 250 kg angenommen werden mufs. (Siehe Tabelle Seite 169.)

8) Welche Belastung kann eine Stange aus Rundeisen mit Sicherheit tragen, wenn der Durchmesser des Rundeisens = 6 cm ist?

Der Kreis-Tabelle entsprechend wird $F = 28,27$ qcm; mithin nach Formel 120):

$$P = F \,.\, k = 28,27 \,.\, 750 = 21203 \text{ kg.}$$ Wenn $\pi = 3,14$, so kommt: 21195

9) Durch eine Konstruktionsbedingung ist für eine Flacheisenstange, welche eine Belastung von 21000 kg mit Sicherheit tragen soll, eine Breite von $b = 10$ cm vorgeschrieben. Welche Stärke a mufs das Flacheisen erhalten?

Die Stärke a kann nur aus dem Flächeninhalte $F = a \,.\, b$ des Querschnittes der Stange gefunden werden. Derselbe ergiebt sich nach Formel 121) zu:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{21000}{750} = 28 \text{ qcm.}$$

Setzt man diese 28 qcm gleich dem Querschnitte a . b, so folgt:

$$a \,.\, b = 28 \text{ und damit:}$$

$$a = \frac{28}{b} = \frac{28}{10} = 2,8 \text{ cm.}$$

10) Eine schmiedeeiserne Stange aus Quadrateisen soll einen Zug von 7000 kg mit Sicherheit aufnehmen. Wie grofs wird die Seite a des Quadrates? ($k = 700$.)

Die Seite a ergiebt sich auch hier wieder nur aus dem Querschnitte $F = a^2$ des Quadrateisens. Letzterer wird nach Formel 121):

$$F = \frac{P}{k} = \frac{7000}{700} = 10 \text{ qcm.}$$

Da nun auch $a^2 = 10$ sein mufs, so folgt: *)

$$a = \sqrt{10} = 3{,}162 \text{ cm.}$$

11) Eine Stange aus Rundeisen von 4 cm Durchmesser hat einem Zuge von 6000 kg widerstanden; wie grofs war die Spannung auf 1 qcm?

Gegeben sind: $P = 6000$; $F = 12{,}57$; mithin nach Formel 122):

$$k = \frac{P}{F} = \frac{6000}{12{,}57} = 477 \text{ kg.}$$

12) Eine Zugstange aus Rundeisen hat eine Belastung von 4000 kg zu tragen; welchen Durchmesser d mufs dieselbe bei genügender Sicherheit erhalten?

Gegeben sind: $P = 4000$; $k = 750$ kg und der Stangenquerschnitt

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

Demnach ergiebt sich, da der Durchmesser d nur aus dem Querschnitte F der Stange ermittelt werden kann, letzterer nach Formel 121) zu:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{P}{k} \text{ Hieraus folgt:}$$

$$d^2 = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot k} \text{ und damit:}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4000}{3{,}14 \cdot 750}} = 2{,}6 \text{ cm.}$$

13) Die Dampfspannung in einem Dampfcylinder von 35 cm Durchmesser beträgt 5 Atm. Zur Befestigung des Cylinderdeckels sollen 6 Schraubenbolzen verwendet werden; welchen Durchmesser d müssen dieselben erhalten?

Den Druck auf den Deckel erhält man, wenn man den Flächeninhalt**) desselben in qcm mit dem Atmosphärendrucke multipliziert; derselbe wird also $= 962 \cdot 5 = 4810$ kg. Dieser Druck verteilt sich gleichmäfsig auf die 6 Schrauben, mithin kommt auf jede Schraube ein Druck $P = \frac{4810}{6} = 802$ kg (abgerundet).

Nimmt man der gröfseren Sicherheit halber k nur zu 400 kg an, so erhält man den Flächeninhalt des Querschnittes einer Schraube, wenn man den Kerndurchmesser der Schraube mit d bezeichnet, nach Formel 121) zu:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{P}{k}, \text{ woraus, wie in Beispiel 12), folgt:}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 802}{3{,}14 \cdot 400}} = 1{,}6 \text{ cm} = 16 \text{ mm.}$$

Bei Benützung der unter „Drehbänke“ angegebenen Schraubentabelle entspricht diesem Kerndurchmesser ein Schraubenbolzen von $^3/_4$″ engl. Gewinde.

---

*) Vergl. Seite 35, unter 29).

**) Siehe Tabellen im Anhange.

14) Welchen Durchmesser d erhalten die Glieder einer Kette, wenn dieselbe eine Last von 1500 kg tragen soll?

Da das Kettenglied in seinen Längsseiten nur auf Zug beansprucht wird, so ist der tragende Querschnitt der Kette $F = 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$; nimmt man hier k = 600 kg an, so ergiebt sich aus Formel 120):

$$P = F \cdot k = 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot k \text{ und damit:}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1500}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 600}} = 1{,}26 \text{ cm.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Belastung kann ein schmiedeeiserner Stab von quadratischem Querschnitte mit Sicherheit tragen, wenn die Seite des Quadrates 2 cm lang ist?

Lösung: P = 3000 kg.

2) Welche Kraft kann diesen Stab zerreifsen?

Lösung: P = 16000 kg.

3) Welche Kraft beansprucht denselben Stab bis zu seiner Elastizitätsgrenze?

Lösung: P = 6000 kg.

4) Eine Hängesäule mit quadratischem Querschnitt, aus Eichenholz, soll eine Belastung von 14000 kg mit Sicherheit tragen. Wie grofs wird die Seite des Quadrates? (k = 100.)

Lösung: a = 11,83 cm = 118,3 mm.

5) Welchen Durchmesser erhält eine Rundeisenstange, welche 25000 kg mit Sicherheit tragen soll?

Lösung: d = 6,5 cm = 65 mm.

6) Ein Riemen von 0,3 cm Stärke hat einen Zug von 450 kg auszuhalten; welche Breite b mufs man demselben geben? (k = 100.)

Lösung: b = 15 cm = 150 mm.

7) Die Zugstange eines Daches besteht aus 2 Flacheisen, welche je 1 cm stark sind. Welche Breite b erhalten die Flacheisen, wenn die Stange einen Zug von 9000 kg aufnehmen soll?

Lösung: b = 6 cm = 60 mm.

8) Welche Last kann eine eiserne Kette aufnehmen, wenn die Ketteneisenstärke 2 cm beträgt? (k = 500.)

Lösung: P = 3140 kg.

9) Welchen Durchmesser erhalten die 4 schmiedeeisernen Säulen einer hydraulischen Presse, wenn der durch die Presse erzeugte Druck 100000 kg beträgt? (k = 750.)

Lösung: d = 6,5 cm = 65 mm.

10) Eine hydraulische Presse besitzt einen Presscylinder von 300 mm Durchmesser, in welchem ein Druck von 200 Atmosphären herrscht. Welchen Durchmesser erhalten an dieser Presse die 4 Säulen?

Lösung: d = 7,7 cm = 77 mm.

11) Eine schmiedeeiserne Stange von 32 mm Durchmesser hat einem Zuge von 5300 kg mit Sicherheit widerstanden. Wie grofs war die Belastung auf 1 qcm?

Lösung: k = 659 kg.

12) Eine cylindrische Stahlstange soll mit Sicherheit 3000 kg tragen. Wie grofs mufs der Querschnitt derselben werden?

Lösung: $F = 2$ qcm $= 200$ qmm.

13) An einer Eisenkonstruktion soll ein Flacheisenstab einen Zug von 10000 kg aufnehmen. Welche Abmessungen erhält sein rechteckiger Querschnitt, wenn die Seiten desselben sich wie 2 : 5 verhalten? ($k = 700$.)

Lösung: $a = 2{,}4$ cm $= 24$ mm; $b = 6$ cm $= 60$ mm.

2) Druckfestigkeit.

Die Widerstandsfähigkeit, welche die Körper gegen Kräfte äufsern, die sie durch Annäherung ihrer Teile zu zerstören suchen, ist von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu betrachten, je nachdem die Körper würfelförmig oder säulenförmig sind. Im ersten Falle findet ein Zerdrücken, im zweiten ein Zerknicken statt, dadurch, dafs vor dem eigentlichen Bruche noch eine Biegung eintritt. Das Gesetz über die Druckfestigkeit säulenförmiger Körper ist so kompliziert, dafs es hier aufser Acht gelassen werden mufs; das Gesetz über die Druckfestigkeit würfelförmiger oder plattenförmiger Körper gestaltet sich jedoch äufserst einfach. Es ist in diesem Falle wiederum die Festigkeit nur proportional dem Querschnitte F des gedrückten Körpers und wird auch hier die Kraft P, welche den Körper zerdrückt:

$$P = F \cdot k \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad 123)$$

wenn k den Koeffizienten der Druckfestigkeit bezeichnet.

Tabelle der Koeffizienten der Druckfestigkeit.

Namen der Materialien.	Bruchbelastung (in kg auf 1 qcm.)	Zulässige Belastung k (in kg auf 1 qcm.)
Gufseisen	6000	600
Schmiedeeisen	3000	750
Stahl	6000	1200
Kalkstein	300—500	30—50
Sandstein	200—300	20—30
Ziegelstein	60—120	6—12
Eiche und Tanne	500	80
Buche	600	100

Beispiele:

1) Welche Kraft P ist erforderlich, um einen eichenen Ständer von 21×31 cm Querschnitt zu zerdrücken, ÷ k = 500 ÷ und welche Last Q kann dieser Ständer tragen, wenn die zulässige Belastung zu 80 kg auf 1 qcm angenommen wird?

Nach Formel 123) ist:

$$P = F . k = 21 . 31 . 500 = 325500 \text{ kg und}$$
$$Q = F . k = 21 . 31 . 80 = 52080 \text{ kg.}$$

2) Die Decke eines Speichers wird durch 6 Säulen aus Tannenholz, von quadratischem Querschnitt, unterstützt. Die gröſste Belastung einer Säule beträgt 36000 kg; welche Querschnittsabmessungen muſs man der Säule geben?

Die zu berechnende Seite a des Quadrates ergiebt sich nur aus dem Querschnitte der Säule: $F = a^2$. Letzterer entwickelt sich aus Formel 123), entsprechend Formel 121), zu:

$$F = \frac{P}{k} = a^2 = \frac{36000}{80} \text{ und damit:}$$

$$a = \sqrt{\frac{36000}{80}} = \sqrt{450} = 21,2 \text{ cm} = 212 \text{ mm.}$$

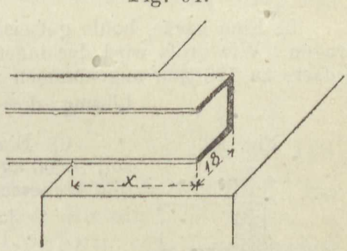
3) Wie groſs wird die Belastung eines 2 Steine starken, quadratischen Pfeilers aus Ziegelsteinen, wenn die zulässige Belastung auf 1 qcm zu $k = 6$ kg angenommen wird?

Bei Anwendung von gewöhnlichen Ziegeln ($25 \times 12 \times 6,5$ cm), unter Annahme einer Fugenstärke von 1 cm, wird die Seitenlänge des Pfeilers $a = 25 + 1 + 25 = 51$ cm, mithin der Querschnitt $F = a^2 = 51 . 51 = 2601$ qcm, und damit nach Gleichung 123):

$$P = F . k = 2601 . 6 = 15606 \text{ kg.}$$

4) Ein ⊏-Eisen (Fig. 91) drückt mit 5400 kg auf eine Mauer. Wie weit muſs der Träger auf der Mauer aufliegen, wenn sein Flansch 18 cm breit angenommen wird, und eine besondere Unterlagsplatte nicht angewendet werden soll?

Fig. 91.



Nimmt man k zu 12 kg auf 1 qcm an, so folgt aus Formel 123):

$$F = \frac{P}{k} = \frac{5400}{12} = 450 \text{ qcm.}$$

Setzt man die Länge des aufliegenden Teiles des ⊏-Eisens $= x$, so wird $F = 18 . x = 450$ und damit:

$$x = \frac{450}{18} = 25 \text{ cm.}$$

5) Welchen Durchmesser erhält der schmiedeeiserne Spurzapfen einer 500 kg schweren, senkrecht stehenden Welle, wenn derselbe mit Sicherheit den stattfindenden Druck aufnehmen soll?

Bezeichnet man den Durchmesser mit d und setzt man k der bedeutenden Abnützung wegen $= 300$ kg, so folgt aus Formel 123):

$$F = \frac{P}{k} = \frac{\pi . d^2}{4} \text{ und hieraus:}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 . P}{\pi . k}} = \sqrt{\frac{4 . 500}{3,14 . 300}} = 1,5 \text{ cm} = 15 \text{ mm.}$$

6) Welche Last vermag eine **kurze**, hohle guſseiserne Säule mit Sicherheit zu tragen, wenn der innere Durchmesser $d = 20$ cm, und der äuſsere $d_1 = 30$ cm angenommen wird? ($k = 500$.)

Der tragende Querschnitt F der Säule wird erhalten, wenn man den Flächeninhalt des inneren Kreises von dem des äufseren abzieht; demnach wird:

$F = \frac{\pi . d^2_1}{4} - \frac{\pi . d^2}{4} = 706,86 - 314,16 = 392,7$ qcm. Mithin nach Formel 123):

$$P = F . k = 392,7 . 500 = 196350 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Welchen Druck vermag ein Gufseisenstab mit Sicherheit aufzunehmen, wenn die Seite des quadratischen Querschnittes a = 50 mm ist?

Lösung: P = 12500 kg.

2) Welche Kraft wird denselben Stab zerdrücken?

Lösung: P = 150000 kg.

3) Wie grofs mufs der Durchmesser einer kurzen, vollen gufseisernen Säule sein, welche eine Last von 100530 kg mit Sicherheit trägt?

Lösung: d = 16 cm = 160 mm.

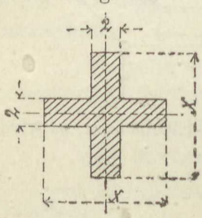
4) Welche Länge a erhält die Seite des quadratischen Fufses derselben Säule, wenn ein darunter liegender Granitquader mit k = 30 kg beansprucht werden darf?

Lösung: a = 57,8 cm = 580 mm (abgerundet).

5) Eine kurze, hohle gufseiserne Säule soll 30000 kg mit Sicherheit tragen. Wie grofs wird der innere Durchmesser dieser Säule, wenn der äufsere zu 120 mm angenommen wird?

Lösung: d = 8,2 cm = 82 mm.

Fig. 92.



6) Eine kurze, gufseiserne Säule (Fig. 92) soll 10000 kg mit Sicherheit tragen. Wie grofs wird die Abmessung x?

Lösung: x = 6 cm = 60 mm.

7) Welchen Druck vermag ein Würfel aus Kalkstein aufzunehmen, wenn dessen Seitenlänge a = 400 mm ist? (k = 40.)

Lösung: P = 64000 kg.

8) Welchen Durchmesser d erhält der Spurzapfen einer stehenden, schmiedeeisernen Welle von 140 mm Durchmesser und 10 m Länge, auf welcher 3 Zahnräder von je 600 kg, und 3 Riemenscheiben von je 100 kg Gewicht sitzen? (s = 7,8; k = 165.)

Lösung: d = 5 cm = 50 mm.

9) Ein Gebäude von 1000000 kg Gewicht steht auf einem Pfahlroste, dessen einzelne Pfähle einen Durchmesser von 250 mm haben. Wie viel Pfähle befinden sich in dem Pfahlroste, wenn k den Wert von 40 nicht überschreiten darf?

Lösung: 51 Pfähle.

3) Scher- oder Schubfestigkeit.

Diese Art der Festigkeit ist am häufigsten bei den zur Verbindung von Blechen dienenden Nieten, bei Verbindungskeilen, Schraubenbolzen und beim Lochen oder Abschneiden von Blechen zu berücksichtigen.

Versuchs-Resultaten entsprechend wächst die Scher- oder Schubfestigkeit, wie die absolute Festigkeit, mit dem Querschnitte des Körpers, oder mit der Gröfse der Trennungsfläche.

Bezeichnet man mit

P die auf Abscheren wirkende Kraft in kg;

F den Querschnitt des Körpers in qcm;

k_1 den Festigkeitskoeffizienten für Scherfestigkeit, so wird

$$P = F \cdot k_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 124)$$

Soll der Körper mit Sicherheit dem Abscheren widerstehen, so nimmt man als zulässige Belastung auf 1 qcm nur $^4/_5$ der in der Tabelle für die Koeffizienten der Zugfestigkeit*) gegebenen Werte an; man macht also

$$k_1 = \frac{4}{5} \cdot k.$$

Setzt man diesen Wert für k_1 in Gleichung 124) ein, so folgt:

$$P = \frac{4}{5} \cdot F \cdot k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 125)$$

und

$$F = \frac{5 \cdot P}{4 \cdot k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 126)$$

Diese Formeln finden hauptsächlich Anwendung zur Berechnung von Schraubenbolzen und Nieten.

Der Widerstand gegen das Lochen von Eisenblechen beträgt 4300 kg auf jeden qcm Schnittfläche; gegen Abscheren jedoch nur 3275 kg auf jeden qcm Schnittfläche.

Beispiele:

1) Welche Belastung kann ein Niet von 2,6 cm Durchmesser gegen Abscheren aufnehmen? ($k = 1000$.)

Der Querschnitt des Nietes ist $F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 5{,}309$ qcm. Mithin nach Formel 125):

$$P = \frac{4 \cdot F \cdot k}{5} = \frac{4 \cdot 5{,}309 \cdot 1000}{5} = 4247 \text{ kg.}$$

2) Bei welcher Belastung wird das Niet zerstört? ($k = 6000$.) Aus Formel 125) folgt:

$$P = \frac{4 \cdot F \cdot k}{5} = \frac{4 \cdot 5{,}309 \cdot 6000}{5} = 25483 \text{ kg.}$$

*) Siehe Seite 169.)

3) Wie grofs mufs der Durchmesser d eines schmiedeeisernen Bolzens sein, welcher einer abscherenden Kraft von 6000 kg mit genügender Sicherheit widerstehen soll? ($k = 750$.)

Der Durchmesser läfst sich nur aus der Querschnittsfläche des Bolzens

$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ ermitteln, mithin nach Formel 126):

$$F = \frac{5 \cdot P}{4 \cdot k} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \text{ woraus folgt:}$$

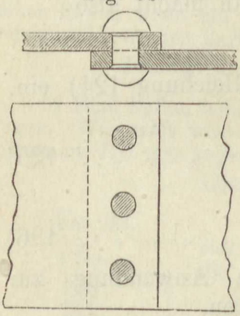
$$d = \sqrt{\frac{5 \cdot P}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6000}{3{,}14 \cdot 750}} = 3{,}5 \text{ cm} = 35 \text{ mm.}$$

4) Welche Kraft ist zum Durchstofsen des Bleches für ein Niet von $d = 2{,}6$ cm Durchmesser erforderlich, wenn die Blechstärke $h = 2$ cm beträgt? (Vergl. Beispiel 1; $k = 3500$.)

Die abzuscherende Fläche ist gleich einem Cylindermantel, dessen Umfang gleich demjenigen des Nietes, und dessen Höhe gleich der Blechstärke ist; mithin $F = \pi \cdot d \cdot h = 3{,}14 \cdot 2{,}6 \cdot 2 = 16{,}328$ qcm. Folglich nach Formel 124):

$$P = F \cdot k_1 = 16{,}328 \cdot 3500 = 57148 \text{ kg.}$$

Fig. 93.



5) Welche Kraft ist erforderlich, um die in Fig. 93) dargestellte Nietverbindung durch Abscheren der Nieten zu zerstören, wenn der Durchmesser derselben 20 mm ist und die Kraft sich auf alle 3 Nieten gleichmäfsig verteilt?

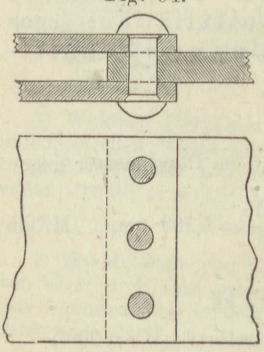
In diesem Falle sind die 3 Nieten nur in **je einer** Querschnittsfläche abzuscheren; daher der Inhalt der gesamten Trennungsfläche:

$$F = 3 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 2}{4} = 9{,}42 \text{ qcm.}$$

Mithin nach Formel 125):

$$P = \frac{4 \cdot F \cdot k}{5} = \frac{4 \cdot 9{,}42 \cdot 6500}{5} = 48984 \text{ kg.}$$

Fig. 94.



6) Wie grofs ist die zulässige Belastung der in Fig. 94) dargestellten Nietverbindung, wenn der Durchmesser der Nieten 20 mm beträgt und die Kraft sich auf alle 3 Nieten gleichmäfsig verteilt?

Bei dieser Nietverbindung sind die Nieten in **je zwei** Querschnittsflächen abzuscheren, daher der Inhalt der gesamten Trennungsfläche:

$$F = 6 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{6 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 2}{4} = 18{,}84 \text{ qcm.}$$

Mithin nach Formel 125):

$$P = \frac{4 \cdot F \cdot k}{5} = \frac{4 \cdot 18{,}84 \cdot 750}{5} = 11304 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Belastung P kann ein Dübel aus Buchenholz von 30 mm Durchmesser mit Sicherheit aufnehmen? ($k = 100$.)

Lösung: $P = 566$ kg.

2) Zwei Flacheisen sind durch 4 Nieten von je 23 mm Durchmesser verbunden. Welche Schubkraft P ist zur Zerstörung dieser Verbindung erforderlich? (k = 6500.)

Lösung: P = 86403 kg.

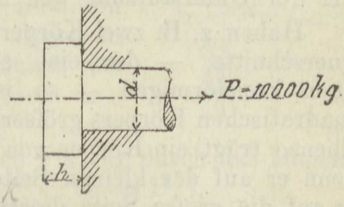
3) Welchen Durchmesser erhalten die Nieten des vorigen Beispieles, wenn sie durch eine Kraft von 60000 kg zerstört werden sollen? (k = 6500.)

Lösung: d = 1,9 cm = 19 mm.

4) In eine Blechtafel von 20 mm Stärke sollen Löcher von 23 mm Durchmesser gestanzt werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich? (k = 4800.)

Lösung: P = 62143 kg.

Fig. 95.



5) Wie groſs muſs die Kopfhöhe h eines Schraubenbolzens von d = 40 mm Durchmesser werden, wenn derselbe, wie in Fig. 95) angegeben, mit 10000 kg belastet wird? (k = 750.)

Lösung: h = 1,3 cm = 13 mm.

6) Wie groſs wird die Scherspannung k_1 in demselben Bolzen, wenn er unter gleichen Verhältnissen nur mit 8500 kg belastet wird?

Lösung: k_1 = 521 kg.

7) Zwei Bleche sind durch Doppel-Laschennietung, in welcher sich im Ganzen 6 Nieten von 13 mm Durchmesser befinden, verbunden. Welche Scherspannung herrscht in jedem der 6 Nieten, wenn die Verbindung einer abscherenden Kraft von 9000 kg widerstehen soll? (Zweischnittige Nieten!)

Lösung: k_1 = 585 kg.

8) Ein guſseiserner Stab von rechteckigem Querschnitt hat einer abscherenden Kraft von 7500 kg mit Sicherheit Widerstand geleistet. Wie groſs wird die eine Seite b des Querschnittes des Stabes, wenn die andere zu a = 45 mm angenommen wird? (k = 250.)

Lösung: b = 6,6 cm = 66 mm.

---

4) Relative oder Biegungsfestigkeit.

Wird ein Balken an einem Ende fest eingespannt, oder in mehreren Punkten unterstützt, und wirkt eine Kraft senkrecht zur Längsrichtung auf denselben, so sucht diese Kraft den Balken abzubrechen, oder durchzubiegen.

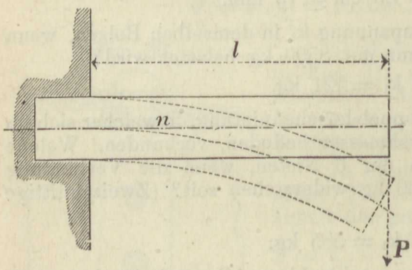
Der Widerstand, welchen ein Körper diesem Abbrechen oder Durchbiegen entgegengesetzt, heiſst relative oder Biegungsfestigkeit.

Im allgemeinen wächst zwar dieser Widerstand bei demselben Körper, unter gleichen Umständen, mit der Gröſse seines Querschnittes; es sind aber zur Bestimmung der Gröſse dieses Widerstandes noch folgende Punkte in Betracht zu ziehen:

Die relative Festigkeit hängt ab von der Form des Querschnittes und der Lage desselben, von der Länge des Körpers, von der Art und Weise der Belastung — d. h. ob die Last am Ende oder in der Mitte angreift, oder ob sie über den ganzen Balken gleichmäfsig verteilt ist — schliefslich von der Art der Unterstützung und Auflagerung.

Haben z. B. zwei Körper gleichen Materiales gleich grofse Querschnitte, — der eine einen quadratischen, der andere einen kreisförmigen — so ist die Widerstandsfähigkeit des quadratischen Körpers gröfser, als diejenige des kreisförmigen. Ebenso trägt ein Körper von rechteckigem Querschnitte mehr, wenn er auf der kleinen Seite des Rechteckes liegt, als wenn er auf die grofse Seite desselben gelegt wird.

Fig. 96.



Wird ein Körper an einem Ende fest eingespannt (Fig. 96) und am anderen Ende senkrecht zu seiner Längsrichtung durch ein Gewicht P belastet, so wird dieses Gewicht den Körper um eine in dem Querschnitte liegende Achse n zu biegen suchen. Sämtliche Querschnittsteile oder Fasern, welche sich über n befinden, werden hierdurch ausgereckt, die unterhalb liegenden Fasern dagegen zusammengedrückt.

Die in der Achse n selbst liegenden Querschnittsteile oder Fasern werden aber weder ausgereckt noch zusammengedrückt, d. h. sie bleiben neutral. Man nennt deshalb auch diese Achse „Neutrale Achse", und die mit derselben zusammenfallende Faserschicht „Neutrale Faserschicht."

Sind die Widerstände gegen das Zusammendrücken und Ausrecken der unterhalb und oberhalb der Achse n liegenden Fasern gleich grofs, so geht diese Achse durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Bei der Beanspruchung eines Körpers auf Biegungsfestigkeit, hat man es stets mit einer Beanspruchung durch ein statisches Moment*) zu thun.

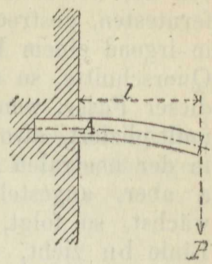
Ist z. B. ein Körper an seinem einen Ende A fest eingespannt — unwandelbar befestigt — und an dem anderen mit

---

*) Vergl. Seite 97.)

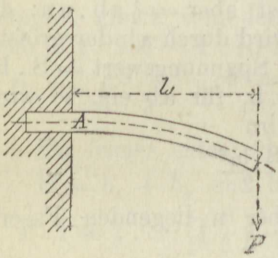
einer Kraft P auf Biegung beansprucht (Fig. 97 und 98), dann werden, entsprechend den Entfernungen l und l_1, an dem Körper verschiedene Momente zur Wirkung gelangen, welche den Körper durchzubiegen oder gänzlich zu zerstören suchen. So würde ein etwaiger Bruch in den Punkten A nach Fig. 97) durch das Moment

Fig. 97.



$$M = P \cdot l$$

Fig. 98.



und nach Fig. 98) durch das Moment

$$M_1 = P \cdot l_1$$

verursacht werden.

Jedes durch die Belastung eines auf Biegung beanspruchten Körpers erzeugte Moment nennt man **Kraftmoment**, oder **Moment der äufseren Kräfte**.

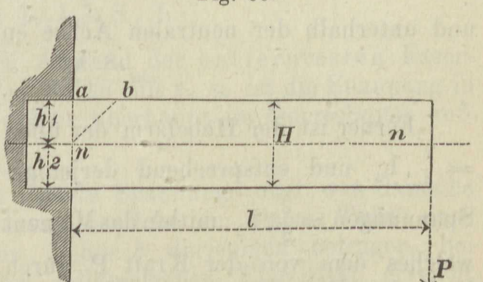
Damit nun der Körper nicht bricht, müssen die im Inneren desselben wirksam werdenden Kräfte — das sind die in den einzelnen gezogenen oder gedrückten Fasern oder Faserschichten auftretenden Widerstände — ebenfalls ein Moment erzeugen, welches dem Momente der äufseren Kräfte, dem **Kraftmomente**, gleich und diesem entgegengesetzt wirksam ist.

Dieses widerstehende Moment heifst das **Moment der inneren Kräfte**.

Es mufs also bei einem auf Biegung beanspruchten Körper stets das Moment der äufseren Kräfte, gleich sein dem Momente der inneren Kräfte.

Je gröfser nun der Abstand irgend einer Faser oder Faserschicht von der neutralen Achse ist, desto gröfser ist die Verlängerung oder Verkürzung, welche dieselbe erleidet; desto gröfser ist also auch die Spannung, welche sie auszuhalten hat.

Fig. 99.



Diese Spannung ist ihrem Abstande von der neutralen Achse direkt proportional.

Bezeichnet man ganz allgemein mit S diejenige Spannung, welche eine Faser im Abstande 1 (dcm, cm, mm u. s. w.)

von der neutralen Achse erleidet; mit h_1 den Abstand der entferntesten, gestreckten Faser von der neutralen Achse (Fig. 99) in irgend einem Längsschnitt eines Balkens von rechteckigem Querschnitte, so erhält man einen Wert für die Spannung in dieser Faser, wenn man die Spannung S mit ihrem Abstande multipliziert, also in dem Produkte $S \cdot h_1$. Da die Spannung in der neutralen Achse n gleich Null ist, dieselbe von n nach a aber, angestellten Versuchen entsprechend, gleichmäfsig wächst, so folgt, dafs, wenn man $ab = h_1$ macht und die Linie bn zieht, durch das Dreieck abn die Spannung jeder zwischen n und a liegenden Faser dargestellt wird.

Der Inhalt des Dreiecks abn ist aber $= \frac{1}{2} ab \cdot an$; da man jedoch $ab = h_1$ gemacht hat, so wird durch ab der gröfste in der obersten Faser bestehende Spannungswert $= S \cdot h_1$ dargestellt; setzt man diesen Wert $S \cdot h_1$ für ab ein, so wird nun durch den Inhalt des Dreiecks abn

$$= \frac{1}{2} \cdot S \cdot h_1 \cdot h_1 = \frac{S \cdot h_1^2}{2}$$

die Summe aller Spannungen der über n liegenden Fasern dargestellt.

Da diese Spannungen sämtlich in einer Richtung wirken, also untereinander parallel sind, so kann man die Mittlere aller dieser Spannungen im Schwerpunkte des Dreiecks abn angreifend denken, also an einem Hebelarme $= \frac{2}{3} \cdot h_1$, wobei alsdann n als Drehpunkt angenommen wird.

Dasselbe ist mit den Fasern unterhalb der neutralen Achse n der Fall.

Die Summe aller Spannungen oberhalb der neutralen Achse ist daher:

$$= \frac{S \cdot h_1^2}{2}$$

und unterhalb der neutralen Achse entsprechend:

$$= \frac{S \cdot h_2^2}{2}.$$

Ferner ist der Hebelarm der über n thätigen Spannungen $= \frac{2}{3} \cdot h_1$ und entsprechend derjenige der unter n thätigen Spannungen $= \frac{2}{3} \cdot h_2$; mithin das Moment der inneren Spannungen, welches dem von der Kraft P durch Ausrecken der über n liegenden Fasern erzeugten Momente entgegenwirkt

$$= \frac{S \cdot h_1^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h_1$$

$$= \frac{S \cdot h_1^3}{3} \text{ und}$$

das Moment der unter n liegenden Fasern

$$= \frac{S \cdot h_2^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h_2$$

$$= \frac{S \cdot h_2^3}{3}.$$

Bezeichnet man die Breite des Balkens mit b, so ist das Gesamtmoment aller überhaupt im Inneren des Balkens thätigen Spannungen

$$= \left(\frac{S \cdot h_1^3}{3} + \frac{S \cdot h_2^3}{3}\right) \cdot b.$$

Dieses Moment der inneren Kräfte mufs nach dem Vorhergesagten gleich sein dem Momente der äufseren Kräfte, also nach Fig. 99) $= P \cdot l$; d. h. es mufs

$$P \cdot l = \left(\frac{S \cdot h_1^3}{3} + \frac{S \cdot h_2^3}{3}\right) \cdot b = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot (h_1^3 + h_2^3) \cdot b \text{ sein.}$$

Da ferner entsprechend Fig. 99)

$$H = h_1 + h_2 \text{ und } h_1 = h_2 = \tfrac{1}{2} H \text{ ist, so folgt:}$$

$$P \cdot l = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot \left\{\left(\frac{H}{2}\right)^3 + \left(\frac{H}{2}\right)^3\right\} \cdot b = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot \left(\frac{H^3}{8} + \frac{H^3}{8}\right) \cdot b$$

oder was dasselbe ist:

$$P \cdot l = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot \left(\frac{H^3}{4}\right) \cdot b = S \cdot \left(\frac{b \cdot H^3}{12}\right).$$

Der eingeklammerte Ausdruck $\left(\frac{b \cdot H^3}{12}\right)$ ist nur von der geometrischen Form des Querschnittes abhängig und ändert sich natürlich mit diesem; man nennt diesen Ausdruck das „Trägheitsmoment“ des Körpers und bezeichnet dasselbe mit **J.**

Es ist mithin für den rechteckigen Querschnitt:

$$P \cdot l = S \cdot J.$$

Bezeichnet man den Abstand der entferntesten Faserschicht von der neutralen Achse mit y, so ist die Spannung in derselben (die gröfste, welche überhaupt im Querschnitte auftritt) $= S \cdot y$.

Es soll aber diese gröfste Spannung, oder was dasselbe ist, die zulässige Belastung, welche in einem Teile eines Körpers stattfindet, nur $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ derjenigen betragen, bei welcher die Grenze der vollkommenen Elastizität erreicht wird. Bezeichnet man auch hier diese zulässige Belastung wieder mit k, so mufs

$$S \cdot y = k, \text{ und damit: } S = \frac{k}{y} \text{ sein.}$$

Setzt man diesen letzten Wert für S in die Formel $P . l = S . J$ ein, so folgt:

$$P . l = \frac{k}{y} . J, \text{ oder:}$$
$$= k . \frac{J}{y}.$$

Den Ausdruck $\frac{J}{y}$, welcher ebenfalls nur von der geometrischen Form des Querschnittes abhängig ist, nennt man das „Widerstandsmoment“ des Querschnittes und bezeichnet dasselbe mit W; es ist daher

$$W = \frac{J}{y}.$$

Man findet demnach das Widerstandsmoment eines Querschnittes, indem man das Trägheitsmoment desselben durch den Abstand der neutralen Achse von der entferntesten Faserschicht dividiert.

Für das Widerstandsmoment eines Rechteckes ergiebt sich somit z. B:

$J = \frac{b . H^3}{12}$, wie vorstehend nachgewiesen. Ferner

$y = \frac{1}{2} H$, weil bei einem Rechteck die neutrale Achse in der Mitte der Höhe H desselben liegt. Folglich:

$$W = \frac{J}{y} = \frac{1/_{12} . b . H^3}{1/_2 . H} = \frac{2 . b . H^3}{12 . H} = \frac{b . H^2}{6}.$$

Der Berechnung eines rechteckigen Balkens, welcher an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch eine Kraft P belastet ist, liegt nun nach dem Vorstehenden die Formel

$P . l = \frac{J}{y} . k$, oder was dasselbe ist:

$P . l = W . k$ . . . . 127)

zu Grunde. Hieraus folgt:

$W = \frac{P . l}{k}$ . . . . 128)

$P = \frac{W . k}{l}$ . . . . 129)

$k = \frac{P . l}{W}$ . . . . 130)

$l = \frac{W . k}{P}$ . . . . 131)

Hinsichtlich der Trägheits- und Widerstandsmomente, sowie der Art und Weise der Belastung und Unterstützung der Körper, sind die auf Seite 186 und 187) befindlichen Tabellen zusammengestellt worden, aus denen die speziellen

Widerstandsmomente, und die einer bestimmten Belastung entsprechenden Formeln, zu entnehmen sind.

Die Werte für k sind in jedem Falle der Tabelle der Festigkeitskoeffizienten der absoluten Festigkeit, Seite 169), zu entnehmen.

Die in der Tabelle auf Seite 187) in den einzelnen Figuren dargestellten Belastungsarten verstehen sich folgendermafsen:

1) Der Balken ist an einem Ende fest eingespannt — unwandelbar befestigt — und am anderen belastet.

   Diese Art der Belastung genügt den Bedingungen der Gleichung 127). Balken, welche in anderer Weise gelagert und belastet sind, vermögen im Gegensatze zu 1) vielfach mehr zu tragen, wie folgt:

2) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und in der Mitte belastet; in diesem Falle trägt er das 2-fache.

3) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und die Last gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt; in diesem Falle trägt er ebenfalls das 2-fache.

4) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und liegt mit dem anderen Ende frei auf; die Last greift in der Mitte an. In diesem Falle trägt er das $^{16}/_{3}$-fache.

5) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und liegt mit dem anderen Ende frei auf; die Last ist gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt. In diesem Falle trägt er das 8-fache.

6) Der Balken liegt mit beiden Enden frei auf; die Last greift in der Mitte an; in diesem Falle trägt er das 4-fache.

7) Der Balken liegt mit beiden Enden frei auf; die Last ist gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt; in diesem Falle trägt er das 8-fache.

8) Der Balken ist an beiden Enden unwandelbar befestigt, die Last greift in der Mitte an; in diesem Falle trägt er ebenfalls das 8-fache.

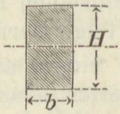
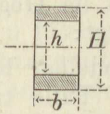
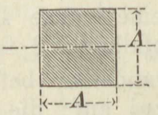
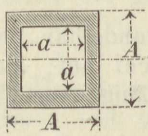
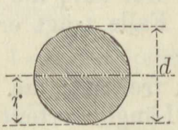
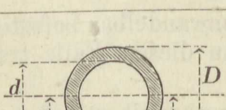
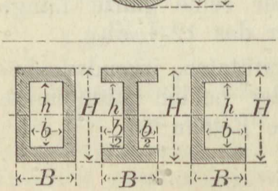
9) Der Balken ist an beiden Enden unwandelbar befestigt, die Last aber gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt; in diesem Falle trägt er das 12-fache.

Um bei einem in 2 Punkten unterstützten, irgendwie belasteten Balken die Last auf einen der beiden Stützpunkte zu reduzieren, gelten allgemein folgende Regeln:*)

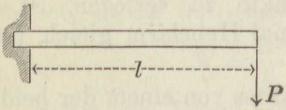
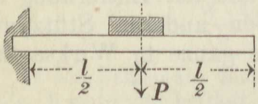
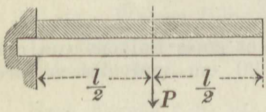
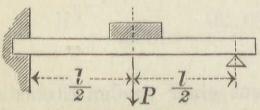
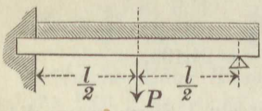
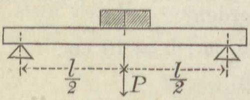
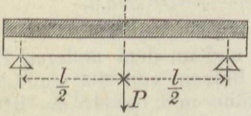
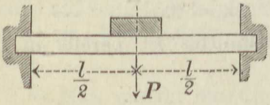
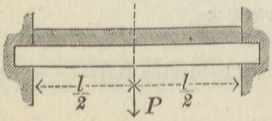
---

*) Vergl. Kap. VI, VII und VIII.)

Trägheitsmomente und Widerstandsmomente der gebräuchlichsten Querschnittsformen.

Querschnittsform.	J.	$W = \frac{J}{y}$.
	$\frac{b \cdot H^3}{12}$	$\frac{b \cdot H^2}{6}$.
	$\frac{b}{12} \cdot (H^3 - h^3)$.	$\frac{b}{6 \cdot H} \cdot (H^3 - h^3)$.
	$\frac{A^4}{12}$.	$\frac{A^3}{6}$.
	$\frac{A^4 - a^4}{12}$.	$\frac{1}{6} \cdot \frac{A^4 - a^4}{A}$.
	$\frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$.	$\frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot r^3}{4}$ $= 0{,}0982\ d^3$.
	$\frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) =$ $\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$.	$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} =$ $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R}$.
	$\frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$.	$\frac{B' \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$.

Die verschiedenen Belastungsarten und die zur Berechnung der Tragfähigkeit dienenden zugehörigen Formeln.

Art der Belastung und Auflagerung.	Zur Berechnung dient:		
1. 	$P = \frac{W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{k}$	$P . l = W . k.$
2. 	$P = \frac{2 . W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{2 . k}$	$P . l = 2 W . k.$
3. 	$P = \frac{2 . W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{2 . k}$	$P . l = 2 . W . k.$
4. 	$P = \frac{16 . W . k}{3 . l}$	$W = \frac{P . 3 . l}{16 . k}$	$P . l = \frac{16 . W . k.}{3}$
5. 	$P = \frac{8 . W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{8 . k}$	$P . l = 8 . W . k.$
6. 	$P = \frac{4 . W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{4 . k}$	$P . l = 4 . W . k.$
7. 	$P = \frac{8 . W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{8 . k}$	$P . l = 8 . W . k.$
8. 	$P = \frac{8 . W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{8 . k}$	$P . l = 8 . W . k.$
9. 	$P = \frac{12 . W . k}{l}$	$W = \frac{P . l}{12 . k}$	$P . l = 12 . W . k.$

1) Man reduziert eine Last auf einen der beiden Stützpunkte, indem man sie mit ihrer Entfernung vom anderen Stützpunkte multipliziert, und das erhaltene Produkt durch die ganze Entfernung der beiden Stützpunkte dividiert.

2) Um eine Last von ihrem ursprünglichen Angriffspunkte nach einem beliebigen anderen Punkte zu verlegen, ist zu berücksichtigen, dafs stets „Kraft mal Hebelarm gleich Last mal Hebelarm“ sein mufs.

3) Die Entfernung des Bruchpunktes von einem der beiden Stützpunkte, ist gleich dem Produkte aus der Entfernung der beiden Stützpunkte und dem auf den anderen Stützpunkt reduzierten Druck, dividiert durch die ganze in Wirksamkeit gewesene Last.

Beispiele:

1) Wie grofs ist das Widerstandsmoment eines Balkens von rechteckigem Querschnitt, dessen Höhe $H = 20$ cm und dessen Breite $b = 15$ cm ist?

Nach der Tabelle auf Seite 186) ist:

$$W = \frac{b \,.\, H^2}{6} = \frac{15 \,.\, 20^2}{6} = \frac{15 \,.\, 20 \,.\, 20}{6} = 1000.$$

2) Wie grofs ist das Widerstandsmoment einer runden Eisenstange von 6 cm Durchmesser?

Nach der Tabelle auf Seite 186) ist:

$$W = \frac{\pi \,.\, r^3}{4} = \frac{3{,}14 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3}{4} = 21{,}195.$$

3) Welches Widerstandsmoment besitzt ein I-Eisen, wenn die Abmessungen desselben, entsprechend den Buchstaben der Figur in der Tabelle auf Seite 186), wie folgt gewählt werden?

$$H = 30 \text{ cm};\ B = 12{,}5 \text{ cm};\ h = 26 \text{ cm};\ b = 10 \text{ cm}.$$

Nach der genannten Tabelle erhält man:

$$W = \frac{B \,.\, H^3 - b \,.\, h^3}{6 \,.\, H} = \frac{12{,}5 \,.\, 30^3 - 10 \,.\, 26^3}{6 \,.\, 30} = 898{,}6.$$

4) Ein an einem Ende eingemauerter und an dem anderen Ende mit einer Last P beanspruchter, hölzerner Balken von 400 cm Länge besitzt einen Querschnitt von $H = 20$ cm Höhe und $b = 15$ cm Breite. Wie grofs ist die Tragfähigkeit dieses Balkens, d. h. wieviel kg darf die Last P bei genügender Sicherheit betragen? $(k = 80.)$

Das Widerstandsmoment dieses Querschnittes ist bereits in Beispiel 1) zu $W = 1000$ berechnet.

Aus Formel 129) folgt demnach:

$$P = \frac{W \,.\, k}{l} = \frac{1000 \,.\, 80}{400} = 200 \text{ kg}.$$

5) Wie grofs darf die Last P am freien Ende dieses Balkens werden, wenn derselbe nur 250 cm lang ist?

Aus Formel 129) ergiebt sich:

$$P = \frac{W . k}{l} = \frac{1000 . 80}{250} = 320 \text{ kg.*)}$$

6) Welche Last P vermag der Balken aus Beispiel 4) zu tragen, wenn dessen Höhe $H = 15$ cm ist?

Das Widerstandsmoment berechnet sich nach der Tabelle auf Seite 186), da der Querschnitt des Balkens jetzt ein Quadrat ist, zu

$$W = \frac{H^3}{6} = \frac{15 . 15 . 15}{6} = 562{,}5.$$

Mithin nach Formel 129):

$$P = \frac{W . k}{l} = \frac{562{,}5 . 80}{400} = 112{,}5 \text{ kg.**)}$$

7) Ein Balken aus Eichenholz, von rechteckigem Querschnitt, dessen Breite $b = 15$ cm beträgt, ist an einem Ende eingemauert und am anderen, freien mit $P = 250$ kg belastet. Die Länge des Balkens sei $l = 200$ cm. Welche Höhe h erhält dieser Balken? ($k = 80$.)

Die Höhe des Balkens läfst sich nur aus dem Widerstandsmomente desselben berechnen.

Nach Formel 128) ist: $W = \frac{P . l}{k}$; nach Tabelle auf Seite 186) ist: $W = \frac{b . H^2}{6}$; mithin mufs $\frac{P . l}{k} = \frac{b . H^2}{6}$ sein. Hieraus folgt:

$$H^2 = \frac{6 . P . l}{k . b} \text{ und damit}$$

$$H = \sqrt{\frac{6 . P . l}{k . b}} = \sqrt{\frac{6 . 250 . 200}{80 . 15}} = \sqrt{250} = 15{,}8 \text{ cm.}$$

8) Welche Höhe H müfste der Balken aus Beispiel 7) erhalten, wenn die Last $P = 250$ kg gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt wäre?

Dem Belastungsfall 3) in der Tabelle auf Seite 187) entsprechend, ist hier $P . l = 2 . W . k$. Hieraus ergiebt sich:

$$W = \frac{P . l}{2 . k} = \frac{b . H^2}{6} \text{ und damit}$$

$$H = \sqrt{\frac{6 . P . l}{2 . k . b}} = \sqrt{\frac{6 . 250 . 200}{2 . 80 . 15}} = \sqrt{125} = 11{,}2 \text{ cm.}$$

9) Wie weit kann ein an einem Ende fest eingespannter, schmiedeeiserner I-Träger frei ausladen, wenn die Belastung am freien Ende $P = 2400$ kg ist, und wenn der Träger, entsprechend der Figur in der Tabelle auf Seite 186) folgende Abmessungen erhält: $B = 9$ cm; $H = 20$ cm; $b = 8{,}1$ cm; $h = 17{,}6$ cm? ($k = 700$.)

---

*) Man ersieht aus diesen beiden Beispielen, dafs der Balken umsomehr zu tragen vermag, je kürzer er unter sonst gleichen Verhältnissen wird.

**) Aus diesem Beispiel geht im Vergleich mit Beispiel 4) ganz deutlich hervor, wie sehr die Tragfähigkeit eines Balkens abnimmt, wenn seine Höhe verringert wird.

Das Widerstandsmoment berechnet sich zu:

$$W = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H} = \frac{9 \cdot 20^3 - 8{,}1 \cdot 17{,}6^3}{6 \cdot 20} = 232;$$

damit folgt aus Formel 131):

$$l = \frac{W \cdot k}{P} = \frac{232 \cdot 700}{2400} = 67{,}6 \text{ cm.}$$

10) Ein schmiedeeiserner Träger von rechteckigem Querschnitte, welcher an einem Ende fest eingespannt ist und am anderen, freien Ende eine Last von 2000 kg tragen soll, ist zu berechnen. Die Länge des Trägers ist = 180 cm; die Breite verhält sich zur Höhe wie 1 : 3. Welche Abmessungen mufs man dem Träger geben?

Die Abmessungen lassen sich nur aus dem Widerstandsmomente bestimmen. Dasselbe ist nach der Tabelle auf Seite 186):

$$W = \frac{b \cdot H^2}{6}.$$ Da nun $b = \frac{H}{3}$ sein soll, so wird

$$W = \frac{H}{3} \cdot \frac{H^2}{6} = \frac{H^3}{18}.$$ Damit ergiebt sich aus Formel 128):

$$W = \frac{H^3}{18} = \frac{P \cdot l}{k}.$$ Folglich: $H^3 = \frac{18 \cdot P \cdot l}{k}$ und

$$H = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot P \cdot l}{k}} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 2000 \cdot 180}{750}} = \sqrt[3]{8640} = 20{,}5 \text{ cm.}$$

Da $b = \frac{H}{3}$ war, so wird jetzt: $b = \frac{20{,}5}{3} = 6{,}8$ cm.

11) Wie grofs ist die Belastung eines Trägers von I-förmigem Querschnitte, wenn dessen Abmessungen, der Figur auf Seite 186) entsprechend, wie folgt, gewählt werden: H = 30 cm; B = 12,5 cm; b = 10 cm und h = 26 cm. Der Träger liegt an beiden Enden frei auf, die Last ist gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt und die Entfernung der Unterstützungspunkte ist = 2 m = 200 cm? (k = 500.)

Das Widerstandsmoment des Trägers ist bereits in Beispiel 3) zu W = 898,5 berechnet. Dem gegebenen Belastungsfall 7, Seite 187) entsprechend ist

$$P \cdot l = 8 \cdot W \cdot k, \text{ woraus}$$

$$P = \frac{8 \cdot W \cdot k}{l}$$ folgt. Mithin:

$$P = \frac{8 \cdot 898{,}5 \cdot 500}{200} = 17970 \text{ kg.}$$

12) Wieviel kg vermag der Träger des vorigen Beispieles zu tragen, wenn die Last P in der Mitte des Trägers angreift?

Da für diesen Belastungsfall — 6, Seite 187) — $P \cdot l = 4 \cdot W \cdot k$, also nur halb so grofs, als im vorigen Beispiele ist, so wird:

$$P = \frac{17970}{2} = 8985 \text{ kg.}$$

13) Welchen Durchmesser d erhält ein schmiedeeiserner, 11 cm langer Kurbelzapfen einer Dampfmaschine von D = 30 cm Cylinderdurchmesser, wenn die mittlere Dampfspannung im Cylinder 4 Atm. beträgt?

Nimmt man im ungünstigsten Falle an, dafs der Druck nicht gleichmäfsig verteilt, sondern am äufsersten Ende des Zapfens thätig ist, so berechnet sich der letztere, entsprechend dem Belastungsfall 1, Seite 187) nach der Formel

$$P \,.\, l = W \,.\, k,$$

wofür der Druck auf den Kurbelzapfen gleich dem Gesamtdrucke des Dampfes auf den Kolben, d. i.

$$P = \frac{\pi \,.\, D^2}{4} \,.\, 4 = \frac{3{,}14 \,.\, 30 \,.\, 30}{4} \,.\, 4 = 2826 \text{ kg}; \; l = 11 \text{ cm};$$

$$W = \frac{\pi \,.\, d^3}{32} \text{ und } k = 600 \text{ kg gegeben sind.}$$

Diese Werte in die Gleichung $P \,.\, l = W \,.\, k$ eingesetzt, folgt:

$$2826 \,.\, 11 = \frac{3{,}14 \,.\, d^3}{32} \,.\, 600.$$

$$d^3 = \frac{2826 \,.\, 11 \,.\, 32}{3{,}14 \,.\, 600} = 528.$$

$$d = \sqrt[3]{528} = 8{,}1 \text{ cm} = 81 \text{ mm}.$$

14) Eine Welle, welche in den 2 m = 200 cm von einander entfernten Punkten A und B gelagert ist, trägt in einer Entfernung = 80 cm vom Stützpunkte B eine Last von 3000 kg. Welchen Druck erleiden die Lagerstellen A und B; wie stark müssen die Zapfen genommen werden, und welchen Durchmesser erhält die Welle im Angriffspunkte der Last, ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes?

Als Druck in den Stützpunkten erhält man:

$$P_1 = \frac{80 \,.\, 3000}{200} = 1200 \text{ kg.*)}$$

$$P_2 = \frac{120 \,.\, 3000}{200} = 1800 \text{ kg.*)}$$

Zur Bestimmung der Stärke des Zapfens in A nimmt man im ungünstigsten Falle an, dafs die Kraft am äufsersten Ende des Zapfens wirkt und diesen auf Biegung beansprucht. Für diesen Belastungsfall gilt die Gleichung:

$$P \,.\, l = W \,.\, k.$$

Verhält sich ferner der Durchmesser des Zapfens zur Länge desselben, wie 1 : 1,5 und setzt man k = 600, so wird:

$$1200 \,.\, l = \frac{\pi \,.\, d^3}{32} \,.\, 600.$$

$$1200 \,.\, l \,.\, 32 = 3{,}14 \,.\, d^2 \,.\, d \,.\, 600.$$

$$d^2 = \frac{1200 \,.\, 32}{3{,}14 \,.\, 600} \cdot \frac{l}{d} = 20{,}38 \,.\, \frac{l}{d} = 20{,}38 \,.\, 1{,}5 = 30{,}57.$$

$$d = \sqrt{30{,}57} = 5{,}5 \text{ cm} = 55 \text{ mm}.$$

Als Durchmesser des Zapfens in B erhält man:

$$d_1^2 = \frac{1800 \,.\, 32}{3{,}14 \,.\, 600} \cdot \frac{l}{d_1} = 30{,}58 \,.\, 1{,}5 = 46.$$

$$d_1 = \sqrt{46} = 6{,}8 \text{ cm} = 68 \text{ mm}.$$

---

*) Vergl. Seite 95, Beispiel 4.)

Für den Durchmesser d_2 der Welle, im Angriffspunkte der Last, ergiebt sich aus der Gleichung

$$P \cdot l = W \cdot k:$$

$$1800 \cdot 80 = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot 600.$$

$$d^3 = \frac{1800 \cdot 80 \cdot 32}{3{,}14 \cdot 600} = 2446.$$

$$d = \sqrt[3]{2446} = 13{,}5 \text{ cm} = 135 \text{ mm}.$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Holzbalken von rechteckigem Querschnitt, dessen Breite 200 mm und dessen Höhe 240 mm beträgt, ist an einem Ende fest eingespannt. Wie grofs darf eine am freien Ende wirkende Last P werden, wenn der Balken 1,8 m lang ist? (k = 70.)

Lösung: P = 747 kg.

2) Welche gleichmäfsig verteilte Belastung P kann derselbe Balken tragen?

Lösung: P = 1494 kg.

3) Welche Last P kann ein Holzbalken in der Mitte seiner Länge tragen, wenn derselbe mit seinen Enden frei aufliegt, eine Länge von 3000 mm, und einen rechteckigen Quercchnitt von b = 180 mm und H = 240 mm besitzt? (k = 70.)

Lösung: P = 1613 kg.

4) Welche gleichmäfsig verteilte Last trägt derselbe Balken, wenn er mit beiden Enden fest eingespannt ist? (Belastungsfall 9, Seite 187.)

Lösung: P = 4839 kg.

5) Welchen Durchmesser mufs eine runde schmiedeeiserne Stange von 2 m Länge erhalten, wenn dieselbe an einem Ende eingemauert und am anderen, freien Ende mit 1500 kg belastet ist? (k = 750.)

Lösung: d = 16 cm (abgerundet).

6) Wie grofs wird der Durchmesser d eines schmiedeeisernen Zapfens, dessen Länge l = 1,5 . d ist, unter der Annahme, dafs der Zapfendruck, P = 3000 kg, in der Mitte des Zapfens angreift? (k = 500.)

Lösung: d = 68 mm (abgerundet).

7) Ein I-Träger besitzt folgende Abmessungen: B = 10 cm; H = 23 cm; b = 8 cm; h = 21 cm. Er liegt an beiden Enden frei auf und ist 4 m lang. Wie grofs kann eine über die Länge des Trägers gleichmäfsig verteilte Last werden, wenn der Träger a) aus Schmiedeeisen (k = 750), b) aus Gufseisen (k = 300) hergestellt ist?

Lösung: a) P = 5172 kg; b) P = 2068,8 kg.

8) Welche Last kann derselbe Träger in der Mitte seiner Länge tragen?

Lösung: a) P = 2586 kg; b) P = 1034,4 kg.

9) Ein an beiden Enden frei aufliegender, schmiedeeiserner Träger hat eine gleichmäfsig verteilte Last von P = 13500 kg zu tragen. Die Länge sei l = 2500 mm. Wieviel Eisenbahnschienen, deren Widerstandsmoment W = 140 ist, können diesen Träger ersetzen? (k = 750.)

Lösung: 4 Stück.

10) Eine 6 m lange, mit beiden Enden frei aufliegende gufseiserne Röhre von 300 mm äufserem Durchmesser und 30 mm Wandstärke soll in der Mitte belastet werden. Wie grofs darf diese Belastung sein? ($k = 300$.)

Lösung: $P = 3128$ kg.

11) Welche gleichmäfsig verteilte Last kann ein an beiden Enden fest eingemauerter, gufseiserner Träger von hohlem und rechteckigem Querschnitte tragen, wenn derselbe 2,5 m lang ist und folgende Abmessungen besitzt: $B = 20$ cm; $H = 70$ cm; $b = 15$ cm; $h = 65$ cm? ($k = 400$.)

Lösung: $P = 125280$ kg.

12) An die Stelle einer gebrochenen schmiedeeisernen Achse, welche einen quadratischen Querschnitt von $A = 10$ cm Seitenlänge besafs, soll eine runde Achse gleichen Materiales treten, welche dreifache Sicherheit gegenüber der quadratischen Achse bietet. Welchen Durchmesser d erhält die runde Achse?

Lösung*): $d = 17,2$ cm.

---

5) Torsions- oder Drehungsfestigkeit.

Zapfen und Wellen werden durch angehängte Lasten — Räder, Riemenscheiben, Kupplungen u. s. w. — nicht nur auf Biegung beansprucht, sondern es haben die an diesen thätigen Kräfte auch das Bestreben, die beanspruchte Welle um ihre Achse zu verdrehen. Es werden daher die Längsfasern, welche ursprünglich geradlinig waren, eine schraubenförmig gewundene Form annehmen, wobei die äufseren Fasern gestreckt, die inneren dagegen verkürzt werden.

Die Widerstandsfähigkeit gegen das Verdrehen nimmt im allgemeinen mit der Gröfse des Querschnittes zu; jedoch nimmt die Drehungsfestigkeit eines kreisförmigen Querschnittes, nicht nur wie bei der Biegungs-Festigkeit, im direkten Verhältnis zur Gröfse des Querschnittes zu, sondern sie wächst mit der 3^{ten} Potenz des Halbmessers oder Durchmessers der belasteten Welle.

Der Widerstand der einzelnen Fasern gegen das Verdrehen ist aber verschieden, je nachdem ihr Abstand von der Wellenmitte gröfser oder kleiner ist.

Bezeichnet d den Durchmesser der Welle, so ist die Entfernung der äufsersten Faser vom Mittelpunkte $= \frac{d}{2}$; die der innersten Faser aber = Null. Nimmt man als

---

*) Die Widerstandsmomente müssen gleich sein! Das k der quadratischen Achse geht bei der runden Achse über in $\frac{k}{3}$.

Mittelwert den gemeinschaftlichen Abstand sämtlicher Fasern vom Mittelpunkte $= \frac{d}{4}$ an, und setzt man die zulässige Belastung der Fasern auf 1 qcm = k, so ist der Widerstand des ganzen Querschnittes gegen das Verdrehen $= F \,.\, k = \frac{\pi \,.\, d^2}{4} \,.\, k$; mithin das statische Moment desselben

$$= \frac{\pi \,.\, d^2}{4} \,.\, k \,.\, \frac{d}{4} = \frac{\pi \,.\, d^3}{16} \,.\, k.$$

Nun wirkt aber die Kraft P stets an einem bestimmten Hebelarme (am Umfange eines Rades oder einer Riemenscheibe u. s. w.); es mufs daher das statische Moment dieser Kraft gleich dem obigen Momente gegen das Verdrehen sein.

Bezeichnet man den Hebelarm der Kraft P mit R, so folgt:

$$P \,.\, R = \frac{\pi \,.\, d^3}{16} \,.\, k \text{ und hieraus:}$$

$$P = \frac{\pi \,.\, d^3 \,.\, k}{16 \,.\, R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 132)$$

$$R = \frac{\pi \,.\, d^3 \,.\, k}{16 \,.\, P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 133)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, P \,.\, R}{\pi \,.\, k}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 134)$$

Als zulässige Belastung auf 1 qcm ist für k zu setzen bei

Schmiedeeisen: k = 500 — 600 kg.
Gufseisen: k = 250 — 300 „
Holz: k = 80 — 100 „

Gufsstahl-Wellen kann man das 0,8-fache des Durchmessers von gleich beanspruchten schmiedeeisernen Wellen geben.

Bei langen Transmissionswellen soll die Verdrehung der Welle pro laufenden Meter $\frac{1}{4}$ Grad nicht überschreiten, und erhält man mit Rücksicht hierauf passende Durchmesser, wenn man setzt:

Für schmiedeeis. Wellen: $d = 2{,}32 \sqrt[4]{P \,.\, R} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ . . . 135)

„ gufseiserne „ : $d = 2{,}76 \sqrt[4]{P \,.\, R} = 14{,}1 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ . . . 136)

in welchen Formeln N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken, n die Anzahl der Umdrehungen in jeder Minute bezeichnet und R in Metern einzusetzen ist.

Beispiele:

1) Eine runde schmiedeeiserne Welle von 5 cm Durchmesser wird durch eine Kraft P, welche an einem Hebelarme R = 65 cm angreift, auf Drehung beansprucht. Wie grofs kann P werden, wenn k = 600 kg angenommen wird?

Aus Formel 132) folgt:

$$P = \frac{\pi \,.\, d^3 \,.\, k}{16 \,.\, R} = \frac{3{,}14 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 600}{16 \,.\, 65} = 226{,}5 \text{ kg.}$$

2) Eine schmiedeeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte und 2 m Länge wird durch eine Kraft von 300 kg, welche an einem Hebelarme von 60 cm Länge angreift, auf Drehung beansprucht. Welchen Durchmesser mufs diese Welle erhalten, wenn die zulässige Belastung k zu 500 kg angenommen wird?

Nach Formel 134) ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, P \,.\, R}{\pi \,.\, k}} = 1{,}7 \sqrt[3]{\frac{P \,.\, R}{k}} = 1{,}7 \sqrt[3]{\frac{300 \,.\, 60}{500}}$$

$$= 1{,}7 \,.\, 3{,}3 = 5{,}6 \text{ cm} = 56 \text{ mm.}$$

Soll auf die Verdrehung Rücksicht genommen werden, so wird nach Formel 135):

$$d = 2{,}32 \,.\, \sqrt[4]{P \,.\, R} = 2{,}32 \,.\, \sqrt{\sqrt{300 \,.\, 0{,}6.}}\ ^{*)}$$

$$d = 2{,}32 \,.\, \sqrt{13{,}4} = 2{,}32 \,.\, 3{,}7.$$

$$d = 8{,}6 \text{ cm} = 86 \text{ mm.}$$

3) An welchem Radhalbmesser R kann eine Kraft von 1000 kg angreifen, wenn an einer auf Drehung beanspruchten, runden schmiedeeisernen Welle von 7 cm Durchmesser eine zulässige Belastung von k = 550 kg gestattet ist?

Aus Formel 133) ergiebt sich:

$$R = \frac{\pi \,.\, d^3 \,.\, k}{16 \,.\, P} = \frac{3{,}14 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 550}{16 \,.\, 1000} = 37 \text{ cm} = 370 \text{ mm.}$$

4) An den Enden einer an zwei Stellen gelagerten schmiedeeisernen Welle, sitzen zwei Riemenscheiben von den Halbmessern R = 60 cm und r = 20 cm. Am Umfange der letzteren wirkt eine Kraft P = 150 kg, welche von der ersteren Scheibe aufgenommen und an irgend eine Maschine abgegeben wird. Welchen Durchmesser mufs diese Welle erhalten, wenn auf die Verdrehung keine Rücksicht genommen wird?

Es ist hier gleichgültig, welches der beiden Drehmomente zur Anwendung kommt, da für den Zustand des Gleichgewichtes das Moment der Kraft gleich dem Momente der Last sein mufs.

Es ist daher: P . R = Q . R = 150 . 20 = 3000. Folglich nach Formel 134), wenn k = 500 angenommen wird:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, P \,.\, R}{\pi \,.\, k}} = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 3000}{3{,}14 \,.\, 500}} = 3{,}2 \text{ cm} = 32 \text{ mm.}$$

5) Wie grofs wird der Durchmesser einer gufseisernen Welle, wenn dieselbe 27 Pferdestärken bei 90 Umdrehungen in der Minute übertragen soll?

---

*) Vergl. Seite 58 und 59.)

Aus Formel 136) folgt:

$$d = 14{,}1 \,.\, \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 14{,}1 \,.\, \sqrt{\sqrt{\frac{27}{90}}} = 10{,}4 \text{ cm} = 104 \text{ mm}.$$

Übungsbeispiele:

1) Welchen Durchmesser d erhält eine schmiedeeiserne runde Welle, welche bei 100 Umdrehungen in der Minute 16 Pferdestärken übertragen soll?

Lösung: d = 76 mm.

2) Welche Kraft P in kg kann eine gufseiserne Welle von 100 mm Durchmesser übertragen, wenn die Kraft an einer Riemenscheibe von 100 cm Durchmesser wirkt, und auf die Verdrehung der Welle keine Rücksicht genommen werden soll? (k = 300.)

Lösung: P = 177 kg.

3) Welchen Durchmesser d mufs eine runde schmiedeeiserne Welle erhalten, wenn dieselbe durch ein Zahnrad von 65 cm Teilkreis-Halbmesser, bei 500 kg Zahndruck, in Umdrehung versetzt wird? (k = 500.)

Lösung: d = 69 mm.

4) Wie grofs wird der Durchmesser der schmiedeeisernen Kurbelwelle einer Winde, wenn die Handkurbel 400 mm lang ist und an derselben 2 Arbeiter mit je 15 kg wirken? (k = 600.)

Lösung: d = 22 mm.

Ist das drehende Moment P . R oder der Quotient $\frac{N}{n} = \frac{\text{Pferdestärken}}{\text{Umdrehungszahl}}$ bekannt, so kann man sich mit Vorteil, zur schnellen und angenäherten Bestimmung der Wellendurchmesser, der folgenden Tabelle bedienen.

Tabelle der Durchmesser d schmiedeeiserner Transmissionswellen, berechnet nach der Formel:

$$d = 2{,}32 \sqrt[4]{P \,.\, R} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

d cm	P . R	$\frac{N}{n}$	d cm	P . R	$\frac{N}{n}$	d cm	P . R	$\frac{N}{n}$
3,0	2,8	0,004	9,0	226	0,32	15	1740	2,43
3,5	5,1	0,007	9,5	280	0,39	16	2253	3,16
4,0	8,8	0,012	10,0	344	0,48	17	2871	4,04
4,5	14,1	0,020	10,5	418	0,59	18	3608	5,06
5,0	21,5	0,030	11,0	503	0,71	19	4479	6,25
5,5	31,5	0,044	11,5	601	0,84	20	5499	7,72
6,0	44,5	0,063	12,0	713	1,00	21	6685	9,36
6,5	61,4	0,086	12,5	839	1,17	22	8239	11,3
7,0	82,5	0,116	13,0	982	1,37	23	9619	13,5
7,5	109	0,152	13,5	1142	1,63	24	11144	16,0
8,0	141	0,196	14,0	1320	1,88	25	13423	18,8
8,5	179	0,251	14,5	1519	2,13	26	15707	22,1

Der Durchmesser der Welle aus Übungsbeispiel 1) ist aus dieser Tabelle ohne weiteres, wie folgt, zu entnehmen: Der Quotient $\frac{N}{n}$ wird $= \frac{16}{100} = 0{,}160$. Diesem Werte liegt in der Tabelle der Wert 0,152 am nächsten, und entspricht dem letzteren ein Wellendurchmesser d = 7,5 cm = 75 mm. Die Aufgabe verlangt 76 mm.

Ist wie in Beispiel 2) das Drehungsmoment P . R = 300 . 0,6 = 180 bekannt, so giebt die Tabelle als nächstliegendes Drehmoment den Wert 179 an, welchem ein Wellendurchmesser von d = 8,5 cm = 85 mm entspricht. Die Aufgabe verlangt 86 mm.

Um bei gegebenen Transmissions-Wellendurchmessern die erforderlichen Lagerentfernungen zu kennen, bedient man sich folgender Tabelle, in welcher d den Wellendurchmesser in mm und l die zulässige weiteste Entfernung zweier Lagermitten, ebenfalls in mm, bezeichnet:

d =	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$l \leqq$	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500

Demnach müſste eine Welle von z. B. 70 mm Durchmesser in Entfernungen von je 2100 mm gelagert werden; eine solche von 105 mm Durchmesser in Entfernungen von je 2450 mm u. s. w.

Um bei Transmissions-Anlagen nicht zu groſse Wellenstärken zu erhalten, wird man gut thun, die Umdrehungszahlen der Wellen möglichst groſs zu nehmen. Erfordern die zu betreibenden Arbeitsmaschinen keine bedeutenden Geschwindigkeiten, so kann man die Hauptwellenleitung etwa 100 — 150 Umdrehungen machen lassen; für den Betrieb schnell laufender Arbeitsmaschinen — Holzbearbeitungsmaschinen — kann die Wellenleitung 250 — 350 Umdrehungen machen.

Bei langen Wellenleitungen ist in den meisten Fällen am Ende derselben weniger Kraft zu übertragen, und können deshalb die letzten Wellenstücke schwächer gehalten werden. Z. B: Eine Wellenleitung macht 120 Umdrehungen in der Minute; es sind im ganzen 60 Pferdestärken zu übertragen. Von diesen 60 Pferdestärken werden am Anfang 30, in der Mitte 10 und am Ende 20 Pferdestärken abgegeben. Alsdann wird das erste Wellenstück auf 60, das zweite auf 10 + 20, und das letzte auf 20 Pferdestärken berechnet.

Bei Herstellung eines derartigen Wellenstranges von verschiedenen Durchmessern der einzelnen Wellen, werden die Kupplungen derartig ausgeführt, dafs entweder die eine Hälfte nach der stärkeren, die andere nach der schwächeren Welle ausgebohrt wird; oder man dreht das Ende der stärkeren Welle auf den Durchmesser der schwächeren Anschlufswelle, um einfache Kupplungen verwenden zu können. Die Kupplungen sind möglichst in der Nähe der Lagerstellen anzubringen.

Neunzehntes Kapitel.

Mechanische Arbeit.

1) Arbeit im allgemeinen.

Wird irgend ein Widerstand durch den Zug oder den Druck einer Kraft auf einem bestimmten Wege überwunden, so wird durch diese Kraft eine gewisse Arbeit verrichtet, welche mechanische Arbeit genannt wird.

Beim Heben von Lasten auf bestimmte Höhen, beim Fortschaffen von Lasten auf Strafsen, Eisenbahnen, Flüssen, bei Überwindung der Reibung, beim Bearbeiten von Metallen, Hölzern u. s. w. wird mechanische Arbeit geleistet.

Der Widerstand selbst kann durch eine Kraft ersetzt werden, welche diesem Widerstande gleich ist, aber in entgegengesetzter Richtung wirkt. Die Richtung des Widerstandes und die Richtung seines Weges fallen alsdann in eine gerade Linie zusammen.

Bringen zwei verschiedene Kräfte gleiche Wirkungen auf einen Körper hervor, d. h. üben die Kräfte denselben Zug oder denselben Druck aus, so können trotzdem ihre Leistungen in ein und demselben Zeitabschnitte sehr verschieden sein.

Wird durch die eine Kraft der Körper auf die doppelte Höhe gehoben, oder legt der Körper infolge der Einwirkung dieser Kraft den doppelten Weg zurück, so wird auch die Wirkung oder Leistung dieser Kraft doppelt so grofs sein, als die Leistung der anderen.

Oder soll z. B. durch dieselbe Kraft vermittelst ein und derselben Pumpe doppelt so viel Wasser gefördert werden, so mufs der Kolben der Pumpe auch den doppelten Weg zurücklegen, d. h. der Kolben mufs den doppelten Hub machen, um die zweifache Arbeit zu verrichten.

Soll mithin die Leistung oder die Arbeit einer Kraft bestimmt werden, so ist aufser der Gröfse dieser Kraft auch noch der Weg, innerhalb dessen Länge sie thätig war, oder einen Widerstand überwunden hat, in Rechnung zu bringen.

Bei stets gleichbleibendem Widerstande ist die Arbeit sowohl diesem Widerstande, als auch dem von demselben zurückgelegten Wege direkt proportional,

d. h.: ist die Wirkung

einer Kraft von 10 kg auf einem Wege von 1 m = 10 . 1 = 10,

so ist die Wirkung

einer Kraft von 20 kg auf einem Wege von 2 m = 20 . 2 = 40,
„ „ „ 10 „ „ „ „ „ 3 „ = 10 . 3 = 30,
„ „ „ 20 „ „ „ „ „ 3 „ = 20 . 3 = 60,

u. s. w.

Die Leistung oder Arbeit einer Kraft wird stets durch das Produkt aus Kraft und Weg ausgedrückt, und wächst daher mit der Kraft und dem Wege zugleich.

Die Arbeit bleibt dieselbe, gleichviel ob sie in kürzerer oder längerer Zeit verrichtet wurde.

Gleiche mechanische Arbeiten werden verrichtet, wenn z. B. 4 kg zugleich, oder 4mal je 1 kg auf 1 m Höhe gehoben werden; oder wenn 1 kg auf 4 m Höhe, oder 1 kg 4mal auf 1 m Höhe gehoben wird, denn in jedem dieser Fälle sind die Produkte aus Kraft und Weg einander gleich.

Um die beiden Faktoren der Arbeit — Kraft und Weg — in Zahlen auszudrücken, kann man sich beliebiger Einheiten: des Kilogramms, des Pfundes, Meters, Fufses u. s. w. bedienen.

Allgemein gebraucht man jedoch das Kilogramm als Krafteinheit und das Meter als Wegeinheit.

Die Arbeit, welche eine Kraft von 1 kg auf einem Wege von 1 m Länge verrichtet, nimmt man in der Mechanik allgemein als Einheit der mechanischen Arbeit an; dieselbe wird „Kilogramm-Meter oder auch Meter-Kilogramm“ genannt und **kgm** geschrieben.

Unter einer Arbeit von 80 kgm ist daher die Wirkung zu verstehen, welche durch eine Kraft von

80 kg auf einer Weglänge von 1 m,
oder von 1 „ „ „ „ „ 80 „
„ „ 20 „ „ „ „ „ 4 „
„ „ 40 „ „ „ „ „ 2 „ u. s. w.

hervorgebracht wurde.

Wird der Fuſs als Wegeinheit und das Pfund als Krafteinheit angenommen, so heiſst das Maſs der verrichteten mechanischen Arbeit „Fuſspfund“.

Bezeichnet man den Zug oder den Druck, welcher durch eine Kraft auf einen Körper ausgeübt wird mit P, den Weg, auf welchem diese Kraft thätig ist oder einen Widerstand überwindet mit s, und die mechanische Arbeit, welche hierbei verrichtet wird mit A, so ist:

$$A = \text{Kraft mal Weg} = P\,.\,s \quad \ldots\ldots\ldots \quad 137)$$

$$\text{woraus folgt: } P = \frac{A}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 138)$$

$$\text{und } s = \frac{A}{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 139)$$

Will man an Stelle des Weges, welchen die Kraft zurücklegt, die Geschwindigkeit treten lassen, mit welcher sich der Körper unter dem Einflusse der Kraft bewegt, so ist zu berücksichtigen, daſs für die Zeiteinheit — eine Sekunde — der zurückgelegte Weg s gleich der Geschwindigkeit v (Kap. I, Seite 71) ist, mithin die in **einer Sekunde** verrichtete Arbeit

$$A = P\,.\,v\,.\,1 = P\,.\,v \text{ wird} \quad . \quad 140)$$

$$\text{Demnach ist für t Sekunden: } A = P\,.\,v\,.\,t \quad \ldots\ldots \quad 141)$$

$$\text{woraus folgt: } P = \frac{A}{v\,.\,t} \quad \ldots\ldots \quad 142)$$

$$v = \frac{A}{P\,.\,t} \quad \ldots\ldots \quad 143)$$

$$t = \frac{A}{P\,.\,v} \quad \ldots\ldots \quad 144)$$

Beispiele:

1) Welche Arbeit ist erforderlich, um eine Last von 1200 kg auf eine Höhe von 9 m zu heben?

Nach Formel 137) ist:

$$A = P\,.\,s = 1200\,.\,9 = 10800 \text{ kgm.}$$

2) Durch einen Kraftmesser hat man beobachtet, daſs die Zugkraft eines Pferdes auf wagerechter Bahn 65 kg beträgt. Welche Arbeit verrichtet das Pferd, wenn es 7500 m ziehend zurücklegt?

Aus Formel 137) folgt:

$$A = P\,.\,s = 65\,.\,7500 = 487500 \text{ kgm.}$$

3) Welche Arbeit wird von einem Hammer verrichtet, der ein Gewicht von 90 kg und eine Hubhöhe von 0,5 m hat?

Aus Formel 137) erhält man:

$$A = P\,.\,s = 90\,.\,0{,}5 = 45 \text{ kgm.}$$

4) Welche Last kann durch einen Fahrstuhl befördert werden, wenn derselbe durch eine Arbeitsleistung von 1200 kgm auf eine Höhe von 30 m gehoben wird?

Aus Formel 138) erhält man:

$$P = \frac{A}{s} = \frac{12000}{30} = 400 \text{ kg.}$$

5) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn 10 Hektoliter Getreide drei Stockwerke hoch gehoben werden? Ein Hektoliter Getreide wiege durchschnittlich 80 kg, und jedes Stockwerk sei 4 m hoch.

Nach Formel 137) ist:

$$A = P \,.\, s = 10 \,.\, 80 \,.\, 3 \,.\, 4 = 9600 \text{ kgm.}$$

6) Auf welche Höhe kann eine Last von 1000 kg durch eine Arbeitsleistung von 12000 kgm gehoben werden?

Nach Formel 139) folgt:

$$s = \frac{A}{P} = \frac{12000}{1000} = 12 \text{ m.}$$

7) Ein Wagen von 1200 kg Gewicht soll mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m in der Sekunde fortbewegt werden. Welche mechanische Arbeit ist hierzu erforderlich?

Nach Formel 140) ist:

$$A = P \,.\, v = 1200 \,.\, 1{,}5 = 1800 \text{ kgm.}$$

8) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Körper, wenn an demselben durch eine Kraft von 125 kg, während einer Zeit von 10 Sekunden, eine Arbeit von 15000 kgm verrichtet wird?

Nach Formel 143) erhält man:

$$v = \frac{A}{P \,.\, t} = \frac{15000}{125 \,.\, 10} = 12 \text{ m.}$$

9) Auf welche Weglänge kann ein Wagen durch eine Arbeitsleistung von 1500 kgm fortgezogen werden, wenn dieser Fortbewegung ein Widerstand von 75 kg entgegentritt?

Nach Formel 139) erhält man:

$$s = \frac{A}{P} = \frac{1500}{75} = 20 \text{ m.}$$

10) Durch einen Arbeiter soll Erde mit einer Schaufel auf eine mittlere Höhe von 1,3 m geworfen werden. Wieviel Erde kann derselbe in einer Stunde ausheben, wenn die Leistung des Arbeiters zu 2 kgm, und das spezifische Gewicht der Erde zu 1,6 angenommen werden?

Das Gewicht, welches der Arbeiter pro Sekunde heben kann, ist:

$$\frac{2}{1{,}3} = 1{,}54 \text{ kg;}$$

mithin in 1 Stunde:

$$1{,}54 \,.\, 60 \,.\, 60 = 5544 \text{ kg.}$$

1 cbm Erde wiegt aber $1{,}6 \,.\, 1000 = 1600$ kg;

folglich wird die Erdmenge, welche der Arbeiter in 1 Stunde hebt:

$$\frac{5544}{1600} = 3{,}46 \text{ cbm.}$$

---

2) Arbeit in gegebener Zeit.

In fast allen Fällen, in denen es sich um die Verrichtung mechanischer Arbeit handelt, wird jedoch verlangt, dafs eine gewisse Arbeit auch in einer bestimmten Zeit verrichtet wird; es ist daher bei Bestimmung der Wirkungsgröfse auch noch die Zeitdauer zu berücksichtigen. Es genügt hierbei die

Arbeit zu kennen, welche in einer Sekunde geleistet wird, da man dann auch die Arbeit für jeden anderen Zeitraum berechnen kann.

Die auf eine Sekunde bezogene Arbeit einer Kraft, nennt man den Effekt derselben.

Zur Bestimmung der in der Zeiteinheit verrichteten mechanischen Arbeit gröſserer Motoren, der Dampf- und Wasserkräfte u. s. w., wendet man in der Regel eine gröſsere Arbeitseinheit an, nämlich **75 kgm,** welche Einheit man = einer **Pferdestärke** setzt, nachdem man durch Kraftmessungen festgestellt hat, daſs die mittlere Zugkraft eines Pferdes, wenn es den Tag über 8 bis 10 Stunden arbeiten, und dabei in 1 Sekunde einen Weg von 1 m zurücklegen soll, gleich einer solchen von 75 kg ist.

Soll mithin die in der Zeiteinheit verrichtete mechanische Arbeit in Pferdestärken ausgedrückt werden, so ist diese Arbeit durch 75 zu dividieren und geht Formel 137) über in:

$$A = \frac{P \, . \, s}{75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 145)$$

Wird die von einer Kraft verrichtete Arbeit auf eine andere Zeit als die Sekunde, z. B. auf die Minute, bezogen, so ist diese Arbeit stets auf die Zeiteinheit — eine Sekunde — zurückzuführen. Da eine Minute 60 Sekunden hat, geht Formel 137) über in:

$$A = \frac{P \, . \, s}{60} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 146)$$

Soll diese Arbeit ebenfalls in Pferdestärken umgerechnet werden, so wird entsprechend:

$$A = \frac{\frac{P \, . \, s}{60}}{75} = \frac{P \, . \, s}{60 \, . \, 75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 147)$$

Tritt eine Kraft in Thätigkeit, so soll durch diese Kraft ein derselben entgegentretender Widerstand auf einem gewissen Wege überwunden werden. Wie schon vorstehend bemerkt, kann dieser Widerstand durch eine Kraft ersetzt werden, welche demselben gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist, wenn ihre Angriffspunkte in eine gerade Linie fallen, oder überhaupt gleiche Wege zurückgelegt werden.

Man erhält mithin auch die Arbeit des Widerstandes, wenn man die Gröſse desselben mit seinem vom Angriffspunkte aus zurückgelegten Wege multipliziert.

Da in dem erwähnten Falle der Widerstand während der Wirkung der Kraft denselben Weg zurücklegen muſs, wie die Kraft selbst, so muſs auch das Produkt aus Kraft und

Weg, gleich sein dem Produkte aus Widerstand (oder Last) und Weg.

Fallen die Angriffspunkte nicht in eine gerade Linie, so kann der Widerstand oder die Last — wie z. B. bei Hebemaschinen — bedeutend gröfser sein, als die Kraft; es ist aber alsdann der Weg, welchen der Widerstand oder die Last in derselben Zeit zurücklegt, um so viel mal kleiner, als der Widerstand gröfser ist, wie die Kraft. Jedoch mufs in diesem Falle stets die Arbeit der Kraft, gleich sein der Arbeit des Widerstandes, oder der Arbeit der Last.

Dieses Gesetz, welches in der Mechanik von aufserordentlicher Bedeutung ist, findet in folgenden Worten Ausdruck:

Die Arbeit der bewegenden Kraft, ist gleich der Arbeit der widerstehenden Kraft; oder:

Das Produkt aus Kraft und Weg, ist gleich dem Produkte aus Widerstand oder Last und Weg.

Bezeichnet man mit:

s den Weg der Kraft P;

s_1 den Weg der Last Q, so ist:

$$P \,.\, s = Q \,.\, s_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 148)$$

woraus folgt: $$P = \frac{Q \,.\, s_1}{s} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 149)$$

$$Q = \frac{P \,.\, s}{s_1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 150)$$

$$s = \frac{Q \,.\, s_1}{P} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 151)$$

$$s_1 = \frac{P \,.\, s}{Q} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 152)$$

Beispiele:

1) Vermittelst eines Dampfkrahnes soll in einer Minute eine Last von 12000 kg auf eine Höhe von 2,5 m gehoben werden; wieviel Pferdestärken mufs die zum Betriebe des Krahnes erforderliche Dampfmaschine besitzen?

Nach Formel 137) ist die zu verrichtende Arbeit:

$$A = P \,.\, s = 12000 \,.\, 2{,}5 = 30000 \text{ kgm},$$

und diese Arbeit in Pferdestärken nach Formel 147):

$$A = \frac{P \,.\, S}{60 \,.\, 75} = \frac{30000}{60 \,.\, 75} = 6{,}6 \text{ Pferdestärken.}$$

2) Durch eine Dampfmaschine sollen in der Stunde 72 cbm Wasser auf eine Höhe von 50 m gehoben werden. Welche Arbeit mufs die Maschine verrichten?

Wassermenge, welche in 1 Sekunde gehoben werden soll $= \frac{72}{3600} = 0{,}02$ cbm;

Gewicht des Wassers, da 1 cbm $= 1000$ kg wiegt, $= 0{,}02 \,.\, 1000 = 20$ kg.

Mithin nach Formel 137) die zu verrichtende Arbeit:

$$A = P \,.\, s = 20 \,.\, 50 = 1000 \text{ kgm}.$$

3) Welche Arbeit erfordert eine einfach wirkende Pumpe zum Betriebe, wenn der Kolben 25 Hübe in jeder Minute macht und bei jedem Hube 12 l Wasser auf eine Höhe von 15 m gehoben werden?

Die Wassermenge, welche die Pumpe in jeder Sekunde liefert, ist, da 1 l Wasser = 1 kg wiegt:

$$\frac{25 \,.\, 12}{60} = 5 \text{ kg};$$

folglich die zum Heben dieser Wassermenge erforderliche Arbeit nach Formel 137):

$$A = P \,.\, s = 15 \,.\, 5 = 75 \text{ kgm} = 1 \text{ Pferdestärke.}$$

4) Bei einer anderen Pumpe sei der Durchmesser des Kolbens 0,4 m, die Hubhöhe 1,5 m. Das Wasser soll auf eine Höhe von 12 m gehoben werden, wobei der Kolben in einer Minute 16 Hübe macht. Wieviel Pferdestärken sind zum Betriebe der Pumpe erforderlich?

Da der Kolben eine Fläche $= \frac{\pi \,.\, d^2}{4} = \frac{3{,}14 \,.\, 4^2}{4}$ qdcm besitzt, so hat die zu hebende Wassermenge ein Gewicht von:

$$\frac{3{,}14 \,.\, 4^2 \,.\, 15}{4} = 188{,}4 \text{ kg.}$$

Die bei einem Hube in jeder Minute zu leistende Arbeit ist mithin nach Formel 137):

$$A = P \,.\, s = 188{,}4 \,.\, 12 = 2260{,}8 \text{ kgm};$$

folglich bei 16 Hüben in jeder Minute:

$$2260{,}8 \,.\, 16 = 36172{,}8 \text{ kgm,}$$

und somit die Arbeitsleistung in Pferdestärken nach Formel 147):

$$A = \frac{P \,.\, s}{60 \,.\, 75} = \frac{36172{,}8}{60 \,.\, 75} = 8{,}04 \text{ Pferdestärken.}$$

5) Auf den Kolben einer Dampfmaschine wirkt ein Dampfdruck von 5000 kg. Wieviel Pferdestärken leistet die zugehörige Maschine, ohne Rücksicht auf Reibung, wenn der einfache Kolbenweg 0,6 m beträgt und die Kurbelwelle 50 Umdrehungen in jeder Minute macht?

Es ist der Druck auf den Kolben = 5000 kg, und der Weg des Kolbens in jeder Sekunde nach Formel 7):

$$= \frac{2 \,.\, 0{,}6 \,.\, 50}{60} = 1 \text{ m.}$$

Folglich nach Formel 137) die zu verrichtende Arbeit:

$$A = P \,.\, s = 5000 \,.\, 1 = 5000 \text{ kgm,}$$

oder nach Formel 145):

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{5000}{75} = 66{,}6 \ldots \text{ Pferdestärken.}$$

6) Auf jedem qcm eines Dampfkolbens, welcher 1200 qcm Fläche hat, lastet ein Druck von 5 kg. Wieviel Pferdestärken leistet die zugehörige Maschine, ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse, wenn der Kolbenhub 0,8 m beträgt und die Kurbelwelle 40 Umdrehungen in jeder Minute macht?

Der Gesamtdruck auf die Kolbenfläche beträgt:

$$1200 \,.\, 5 = 6000 \text{ kg};$$

der Weg des Kolbens in jeder Sekunde nach Formel 7) $= \frac{2 \,.\, 0{,}8 \,.\, 40}{60} = 1{,}06$ m.

Nach Formel 137) ist demnach die zu verrichtende Arbeit:

$A = P . s = 6000 . 1{,}06 = 6360$ kgm, oder nach Formel 145):

$$A = \frac{P . s}{75} = \frac{6360}{75} = 84{,}8 \text{ Pferdestärken.}$$

7) Eine Dampfmaschine besitze einen Kolbendurchmesser von 30 cm und einen Kolbenhub von 0,7 m. Die Kurbelwelle mache 50 Umdrehungen in jeder Minute, und der Dampfdruck auf den Kolben betrage 6 Atmosphären. Wie grofs wird die Arbeit dieser Maschine in Pferdestärken, ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse?

Die Kolbenfläche ergiebt sich nach der Tabelle im Anhange zu 706,86 qcm; mithin wird der Druck auf den Kolben

$$= 706{,}86 . 6 = 4241{,}2 \text{ kg.}$$

Der Kolbenweg in jeder Sekunde wird nach Formel 7)

$$= \frac{2 . 0{,}7 . 50}{60} = 1{,}17 \text{ m.}$$

Folglich ist nach Formel 145) die geleistete Arbeit:

$$A = \frac{P . s}{75} = \frac{4241{,}2 . 1{,}17}{75} = 66{,}2 \text{ Pferdestärken.}$$

8) Bei einer einfach wirkenden Pumpe sei der Durchmesser des Kolbens $= 0{,}5$ m, die Hubhöhe $= 1{,}6$ m. Das Wasser soll auf eine Höhe von 12 m gehoben werden, wenn der Kolben in einer Minute 20 Hübe macht. Wieviel Pferdestärken sind hierzu erforderlich?

Die zu hebenbe Wassermenge hat ein Gewicht von

$$\frac{3{,}14 . 5^2 . 16}{4} = 314 \text{ kg.}$$

Nach Formel 146) ist mithin die in jeder Sekunde zu verrichtende Arbeit:

$$A = \frac{P . s}{60} = \frac{314 . 12 . 20}{60} = 1256 \text{ kgm,}$$

oder in Pferdestärken:

$$A = \frac{1256}{75} = 17 \text{ Pferdestärken (abgerundet).}$$

9) Am Umfange einer Riemenscheibe von 0,5 m Halbmesser wirkt eine Kraft $P = 60$ kg. Welche Arbeit leistet diese Kraft, wenn die Scheibe in einer Minute 200 Umdrehungen macht?

Nach Formel 4) ist der Weg der Kraft in einer Sekunde:

$$s = v = \frac{\pi . d . n}{60} = \frac{3{,}14 . 1 . 200}{60} = 10{,}46 \text{ m.}$$

Mithin wird nach Formel 137) die verrichtete Arbeit:

$$A = P . s = 60 . 10{,}46 = 627{,}60 \text{ kgm,}$$

oder nach Formel 145):

$$A = \frac{P . s}{75} = \frac{627{,}60}{75} = 8{,}37 \text{ Pferdestärken.}$$

10) Eine Maschine, welche eine Pumpe treibt, arbeitet mit 10 Pferdestärken; der Pumpenkolben hat eine Geschwindigkeit von 0,8 m in der Sekunde. Wie grofs ist der Druck auf den Kolben?

Nach Formel 148) erhält man:

$$P . s = Q . s_1,$$

oder, wenn man die 10 Pferdestärken in kgm ausdrückt:*)

$$10 \,.\, 75 \,.\, 1 = Q \,.\, 0{,}8.$$

$$Q = \frac{75 \,.\, 10}{0{,}8} = 937{,}5 \text{ kg}.$$

11) Ein Riemen überträgt einen Zug von 70 kg. Wie grofs mufs der Halbmesser der zugehörigen Scheibe genommen werden, wenn dieselbe bei 80 Umdrehungen in jeder Minute 5 Pferdestärken abgeben soll?

Bezeichnet man den Halbmesser der Scheibe mit R, so erhält man nach Formel 148):

$$P \,.\, s = Q \,.\, s_1 \text{ oder:}$$

$$5 \,.\, 75 \,.\, 1 = 70 \,.\, \frac{2 \,.\, R \,.\, 3{,}14 \,.\, 80}{60}.$$

$$R = \frac{5 \,.\, 75 \,.\, 60}{2 \,.\, 70 \,.\, 3{,}14 \,.\, 80} = 0{,}639 \text{ m}.$$

12) Eine Maschine von 30 Pferdestärken macht 40 Umdrehungen in der Minute. Auf der Kurbelwelle befindet sich eine Riemenscheibe von 2 m Durchmesser, durch welche eine Transmissionswelle angetrieben wird, die 160 Umdrehungen in jeder Minute machen soll. Wie grofs ist der Riemenzug, und welchen Durchmesser mufs die Scheibe auf der Transmissionswelle erhalten?

Für den Riemenzug folgt aus Formel 148):

$$P \,.\, s = Q \,.\, s_1; \text{ oder}$$

$$30 \,.\, 75 \,.\, 1 = \frac{Q \,.\, 3{,}14 \,.\, 2 \,.\, 40}{60}.$$

$$Q = \frac{30 \,.\, 75 \,.\, 60}{3{,}14 \,.\, 2 \,.\, 40} = 537 \text{ kg}.$$

Den Durchmesser der Riemenscheibe auf der Transmissionswelle erhält man nach Formel 104) wie folgt:

$$\text{Es ist: } a \,.\, m = b \,.\, n, \text{ oder: } 2 \,.\, 40 = b \,.\, 160;$$

$$\text{mithin: } b = 0{,}5 \text{ m}.$$

13) Eine Eisenhobelmaschine läuft vorwärts, d. h. wenn der Stahl schneidet, mit einer Geschwindigkeit von 20 cm; rückwärts dagegen, wenn der Stahl aufser Thätigkeit gesetzt ist, mit einer solchen von 35 cm. Wenn das Gewicht des Bettes nebst dem Arbeitsstück 1000 kg beträgt, und der durch das Hobeln hervorgerufene Widerstand zu 400 kg angenommen wird, wie grofs ist dann die Arbeit beim Vorgange und beim Rückgange unter der Voraussetzung, dafs ein Druck in senkrechter Richtung von dem Stahle während seiner Thätigkeit nicht hervorgebracht wurde?

Der Reibungswiderstand des Bettes beim Leergange beträgt nach Formel 100), wenn der Reibungskoeffizient f zu 0,07 angenommen wird:

$$1000 \,.\, 0{,}07 = 70 \text{ kg};$$

mithin der Gesamtwiderstand während des Hobelns:

$$70 + 400 = 470 \text{ kg}.$$

Die Arbeit in 1 Sek. während des Rückganges ist $= 70 \,.\, 0{,}35 = 24{,}5$ kgm;
" " " " " " Vorganges ist $= 470 \,.\, 0{,}2 = 94{,}0$ " ;

*) 1 Pferdestärke $= 75$ kgm, mithin:
10 Pferdestärken $= 75 \,.\, 10 = 750$ kgm.

folglich sind zum Betriebe dieser Maschine erforderlich:

$$\text{Beim Rückgange } \frac{24,5}{75} = 0,33 \text{ Pferdestärken und}$$

$$\text{„ Vorgange } \frac{94,0}{75} = 1,25 \text{ Pferdestärken.}$$

14) Eine Last von 500 kg soll auf eine schiefe Ebene heraufgezogen werden, deren Basis 30 m und deren Höhe 6 m beträgt. Welche Kraft ist hierzu erforderlich, wenn dieselbe parallel zur Basis der schiefen Ebene gerichtet ist?

Weg der Kraft P = Länge der Basis der schiefen Ebene = 30 m = s;
„ „ Last Q = Länge der Höhe „ „ „ = 6 m = s_1.

Nach Formel 149) erhält man:

$$P = \frac{Q \cdot s_1}{s} = \frac{500 \cdot 6}{30} = 100 \text{ kg.}$$

15) Durch eine Kraft von 40 kg soll eine Last von 600 kg auf eine schiefe Ebene heraufgezogen werden, deren Höhe 1 m beträgt; die Kraft ist parallel zur Länge der schiefen Ebene gerichtet. Welche Länge erhält die schiefe Ebene?

Weg der Kraft P = Länge der schiefen Ebene = s;
„ „ Last Q = Höhe „ „ „ = 1 m = s_1.

Nach Formel 151) erhält man:

$$s = \frac{Q \cdot s_1}{P} = \frac{600 \cdot 1}{40} = 15 \text{ m.}$$

16) Welcher gröſste Druck kann mit einer Schraubenpresse ausgeübt werden, wenn die Ganghöhe der Schraube 13 mm, und die an einem 0,4 m langen Hebelarme angreifende Kraft 15 kg beträgt?

Weg der Kraft P = Umfang des Kreises vom Durchmesser d = π . d = s;
„ „ Last Q = Ganghöhe der Schraube = s_1.

Nach Formel 150) ist:

$$Q = \frac{P \cdot s}{s_1} = \frac{15 \cdot 3,14 \cdot 0,8}{0,013} = 2898,46 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Eine Wassermenge von 500 kg Gewicht hat ein Gefälle von 7 m. Welche Arbeit leistet diese Wassermenge?

Lösung: A = 3500 kgm.

2) Wie groſs ist die Arbeit einer Lokomotive, deren Zugkraft = 750 kg und deren Geschwindigkeit = 16 m ist?

Lösung: A = 12000 kgm.

3) Durch eine Arbeitsleistung von 84 kgm soll ein Wagen, welcher seiner Fortbewegung einen Widerstand von 40 kg entgegensetzt, fortgezogen werden. Mit welcher Geschwindigkeit wird sich der Wagen bewegen?

Lösung: v = 2,1 m.

4) Durch eine einfach wirkende Pumpe sollen in der Minute 420 Liter Wasser auf eine Höhe von 8 m gehoben werden. Welche Arbeit in Pferdestärken ist hierzu erforderlich?

Lösung: A = 0,746 Pferdestärken.

5) Ein Wasserlauf mit einem Gefälle von 7 m und einer Wassermenge von 24 cbm in der Minute, soll zum Betriebe einer Turbine beüntzt werden. Wie grofs ist die Arbeit der Wasserkraft in Pferdestärken?

Lösung: A = 37,33 Pferdestärken.

6) Wieviel Pferdestärken mufs die Lokomotive eines Eisenbahnzuges entwickeln, wenn das Gewicht des Zuges zu 130 Tonnen (1 Tonne = 1000 kg), die Geschwindigkeit zu 12 m und der gesamte Widerstand zu 800 kg angenommen wird?

Lösung: A = 128 Pferdestärken.

7) Eine Pumpe, deren Kolbengeschwindigkeit 0,9 m in der Sekunde beträgt, wird durch eine Dampfmaschine von 12 Pferdestärken betrieben. Wie grofs ist der Druck auf den Kolben der Pumpe?

Lösung: Q = 1000 kg.

8) Durch eine Dampfmaschine von 20 Pferdestärken soll vermittelst einer Pumpe Wasser 30 m hoch gehoben werden. Welche Wassermenge kann durch diese Maschine auf die betreffende Höhe befördert werden?

Lösung: Q = 50 kg = 50 Liter in jeder Sekunde.

9) Es soll eine Dampfmaschine von 50 Pferdestärken gebaut werden; der Kolbenhub betrage 600 mm, die Umdrehungszahl der Kurbel sei 80 in jeder Minute und die mittlere Dampfspannung 6 Atmosphären. Welchen Durchmesser D mufs der Dampfcylinder erhalten?

Lösung: D = 22,3 cm.

10) Durch eine Riemenscheibe von 1,5 m Durchmesser, welche 50 Umdrehungen in jeder Minute macht, wird ein Riemenzug von 150 kg ausgeübt. Welche Arbeit in Pferdestärken kann durch diese Riemenscheibe übertragen werden?

Lösung: A = 6,28 Pferdestärken.

11) Ein Schleifstein von 1,5 m Durchmesser macht 90 Umdrehungen in jeder Minute; der durch Anpressen des abzuschleifenden Gegenstandes hervorgebrachte Widerstand betrage 30 kg. Wie grofs ist die zum Betriebe des Schleifsteines erforderliche Arbeitsleistung?

Lösung: A = 2,826 Pferdestärken.

12) Auf der Kurbelwelle einer Dampfmaschine von 40 Pferdestärken ist eine Riemenscheibe von 2 m Durchmesser aufgekeilt, durch welche ein Riemenzug von 200 kg übertragen werden soll. Wie viel Umdrehungen mufs die Kurbelwelle in jeder Minute machen?

Lösung: 143,3 Umdrehungen.

---

3) Arbeit lebender Wesen.

Das Arbeitsvermögen lebender Wesen ist nicht allein bei Individuen verschiedener Gattungen, sondern auch bei ein und derselben Gattung sehr verschieden; es hängt dasselbe von der Körperbeschaffenheit, dem Alter, der Gesundheit, der Nahrung, der Gewohnheit u. s. w. ab. Es sind daher bei der Berechnung stets solche Wesen vorausgesetzt, welche den mittleren Grad von Stärke und Behendigkeit besitzen, und an die zu verrichtende Arbeit gewöhnt sind.

Das Arbeitsvermögen eines Tieres hängt von der Kraft, der Geschwindigkeit und Arbeitszeit desselben ab; sie werden bei einer mittleren Kraft, Geschwindigkeit und täglichen Arbeitszeit am gröfsten ausfallen.

Je gröfser die Kraft ist, welche ein Geschöpf ausübt, desto kleiner wird die Geschwindigkeit werden, und umgekehrt.

Für die Beurteilung der Wirkungen tierischer Motoren ist die tägliche Leistung von besonderer Bedeutung. Ermittelt man dieselbe für die verschiedenen tierischen Kräfte und vergleicht man sie mit den Kosten, welche durch die Unterhaltung, Verzinsung und Amortisation entstehen, so erhält man ein Mafs zur Vergleichung der Werte arbeitender Tiere unter einander.

Wie schon vorstehend gesagt, erreicht die tägliche Arbeitsleistung nur bei Annahme gewisser Mittelwerte ihren höchsten Betrag, vermindert sich aber sofort, sobald Kraft, Geschwindigkeit oder Zeit verändert werden; auch ist hierbei vorausgesetzt, dafs das arbeitende Geschöpf nicht über das gewöhnliche Mafs angestrengt und ermüdet werde.

Bei Annahme von 8 Stunden mittlerer Arbeitszeit, ergeben sich durch Erfahrung die in folgender Tabelle zusammengestellten Werte für die mittlere Kraft und die mittlere Geschwindigkeit, welche den höchsten Werten der täglichen Arbeitsleistung entsprechen:

Art der Arbeit und Bezeichnung des lebenden Wesens	Mittlere Kraft kg	Mittlere Geschwindigkeit m	Arbeit in der Sekunde kgm
Der Mensch beim Zug	15	0,8	12,0
„ „ am Hebel	6	1,1	6,6
„ „ an der Kurbel	10	0,8	8,0
„ „ am Göpel	12	0,6	7,2
„ „ am Tretrad	12	0,7	8,4
Das Pferd am Wagen	56	1,3	72,8
„ „ „ Göpel	46	0,9	41,4
Der Ochse am Wagen	60	0,8	48,0
„ „ „ Göpel	60	0,6	36,0
Das Maultier am Wagen	50	1,1	55,0
„ „ „ Göpel	30	0,9	27,0
Der Esel am Wagen	36	0,8	28,8
„ „ „ Göpel	14	0,8	11,2

Bezeichnet man in vorstehender Tabelle mit P die mittlere Kraft, mit v die mittlere Geschwindigkeit, mit t die mittlere Zeit, so findet man nach *Gerstner* die Kraft P_1, welche ein lebendes Wesen bei irgend einer Geschwindigkeit v_1 und der Zeitdauer t_1 ausüben kann, durch die Formel:

$$P_1 = P . \left(2 - \frac{v_1}{v}\right) . \left(2 - \frac{t_1}{t}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 153)$$

Beispiele:

1) Welche Kraft kann ein Mensch bei 0,9 m Geschwindigkeit und einer Arbeitszeit von 5 Stunden ausüben, wenn die mittlere Arbeitszeit zu 8 Stunden und die mittlere Kraft zu 14 kg angenommen werden?

Nach Formel 153) ist:

$$P_1 = P . \left(2 - \frac{v_1}{v}\right) . \left(2 - \frac{t_1}{t}\right) = 14 . \left(2 - \frac{0,9}{0,8}\right) . \left(2 - \frac{5}{8}\right) = 16,8 \text{ kg.}$$

2) Wie grofs ist die Zugkraft eines Pferdes, welches im schweren Zuge täglich 8 Stunden mit einer Geschwindigkeit von 0,8 m arbeitet?

Nach Formel 153) ist:

$$P_1 = P . \left(2 - \frac{v_1}{v}\right) . \left(2 - \frac{t_1}{t}\right) = 56 . \left(2 - \frac{0,8}{1,3}\right) . \left(2 - \frac{8}{8}\right) = 77,54 \text{ kg.}$$

3) Mit einer Bauwinde werden in gröfseren Zwischenräumen schwere Lasten gehoben. Die gesamte tägliche Arbeitszeit beträgt nur 5 Stunden, die Kurbel wird mit nur 0,5 m Geschwindigkeit umgedreht. Welche Kraft wird von einem Arbeiter ausgeübt?

Nach Formel 153) ist:

$$P_1 = 10 . \left(2 - \frac{0,5}{0,8}\right) . \left(2 - \frac{5}{8}\right) = 18,9 \text{ kg.}$$

---

4) Nutzarbeit und Nebenarbeit.

Bei Bestimmung der Wirkungsgröfse der Kräfte ist zu berücksichtigen, dass ein gewisser Teil der Arbeit durch Bewegungshindernisse, Reibung u. s. w., verloren geht. Soll daher eine bestimmte Arbeit verrichtet werden, so ist dieselbe um so viel gröfser zu veranschlagen, als durch Überwindung der Bewegungshindernisse Arbeit beansprucht wird.

Wird vermittelst einer Pumpe Wasser gehoben, so wird durch die Reibung des Pumpenkolbens im Cylinder, durch die Reibung des Wassers in den Rohrleitungen u. s. w. die zum Betriebe der Pumpe erforderliche Arbeitsgröfse nicht nur gleich dem Produkte aus dem Gewichte der gehobenen Wassermenge und der Förderhöhe, sondern um einen gewissen Betrag gröfser sein.

Ebenso entspricht die aus dem Drucke auf den Kolben, dem Kolbenhube und der Umdrehungszahl berechnete Arbeit einer Dampfmaschine bei weitem nicht der wirklichen nutzbaren Arbeit, da der vielfachen Bewegungshindernisse wegen die von der Schwungradwelle zu entnehmende Arbeit ebenfalls weit geringer ausfällt, als die aus den genannten Angaben berechnete Wirkungsgröſse.

Derjenige Teil der Arbeitsgröſse, welcher den gewünschten nutzbaren Effekt hervorbringt, wird Nutzarbeit oder Nutzeffekt genannt, während der durch die allgemeinen Bewegungshindernisse, Reibung, Luftwiderstand, Stöſse u. s. w. verlorene Teil mit dem Namen Nebenarbeit oder Nebeneffekt bezeichnet wird.

Nutzeffekt und Nebeneffekt zusammengenommen geben den Totaleffekt eines Motors an.

Das Verhältnis des Nutzeffektes einer Maschine zu deren Totaleffekt wird als Wirkungsgrad der Maschine bezeichnet; es entsteht mithin die Gleichung:

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nutzeffekt}}{\text{Totaleffekt}}.$$

Man drückt auch oft den Nutzeffekt in Prozenten der Totalarbeit aus; z. B: Die Totalarbeit einer Maschine betrage 15 Pferdestärken, die Nutzarbeit jedoch nur 12; demnach ist der Wirkungsgrad $= \frac{12}{15} = 0{,}8$; mithin der Nutzeffekt $= 0{,}80 = \frac{80}{100} = 80\,\%$ des Totaleffektes.

Durch zahlreiche Versuche und Messungen hat man die Wirkungsgrade verschiedener Maschinen, namentlich der Betriebsmaschinen, zu ermitteln gesucht. Wenn auch hierdurch nur Mittelwerte erlangt wurden, so ist die Kenntnis derselben doch erforderlich, um die Leistung und Güte einer Maschine beurteilen zu können.

Bei Dampfmaschinen guter Ausführung und Konstruktion ist als Wirkungsgrad zu nehmen:

Für kleine	Maschinen	$= 0{,}60.$
„ mittlere	„	$= 0{,}70.$
„ groſse	„	$= 0{,}80.$

Als Dampfspannung ist diejenige des Dampfes im Kessel in Rechnung zu setzen.

Man baut die Dampfmaschinen mit und ohne Expansion.

Im ersteren Falle wird der Dampf durch die Steuerung bereits abgesperrt, wenn der Dampfkolben erst einen Teil des

Cylinders durchlaufen hat. Der im Cylinder eingeschlossene Dampf beginnt nun sich auszudehnen — zu expandieren — und treibt den Kolben bis zum Ende seines Hubes, wobei die Spannung des Dampfes infolge seiner Ausdehnung immer geringer wird.

Bei den Dampfmaschinen ohne Expansion, tritt während des ganzen Kolbenlaufes Dampf hinter den Kolben und behält derselbe so immer dieselbe Spannung; es geht bei diesen Maschinen die Arbeit, welche der Dampf infolge seiner Expansion verrichten könnte, vollständig verloren.

Da bei den Expansionsdampfmaschinen der Arbeitsdruck sich in jedem Augenblicke ändert, so bietet die Berechnung derselben vielfache Schwierigkeiten und ist in der Folge nur auf solche Maschinen Rücksicht genommen, welche mit voller Füllung — ohne Expansion — arbeiten.

Über die Wirkungsgröfse anderer Motoren, namentlich der Wasserräder, ist nachstehende Tabelle zusammengestellt:

Art des Rades	Gefälle H Meter	Wassermenge Q-cbm.	Wirkungs-Grad
Oberschlächtiges Wasserrad . . .	7—12 2,5—7	0,05—0,8 0,06—0,7	0,70—0,75 0,50—0,70
Rückschlächtiges „	2,5—8	0,09—1,3	0,60—0,70
Schaufelrad m. Coulisseneinlauf . .	2,5—4,6	0,30—2,4	0,60—0,70
„ „ Überfalleinlauf . .	1,5—2,5	0,12—2,5	0,60—0,65
Kropfrad m. Durchfallschütze . . .	0,5—2,0	0,12—3,0	0,40—0,50
Ponceletrad	0,5—1,7	0,12—3,7	0,60—0,65
Unterschlächtiges Wasserrad . . .	0,3—1,0	0,12—5,0	0,30—0,35

Beispiele:

1) Zum Betriebe eines Wasserrades stehen in jeder Sekunde 1,5 cbm Wasser, bei einem Gefälle von 5 m, zur Verfügung. Man hat durch Messung gefunden, dafs die von diesem Wasserrade gelieferte Nutzarbeit 50 Pferdestärken beträgt. Mit wie viel Prozent Nutzeffekt arbeitet dieses Rad?

Die Totalarbeit beträgt, da 1,5 cbm Wasser 1500 kg wiegen, nach Formel 145):

$$A = \frac{P.s}{75} = \frac{1500.5}{75} = 100 \text{ Pferdestärken.}$$

Der Wirkungsgrad ist demnach $= \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Totalarbeit}} = \frac{50}{100} = 0,5;$

mithin der Nutzeffekt $= 0,50 = \frac{50}{100} = 50\,\% = \frac{1}{2}$ der Totalarbeit.

2) Der Cylinderdurchmesser einer Dampfmaschine sei = 30 cm und der Kolbenhub = 80 cm; die Kurbel mache 50 Umdrehungen in jeder Minute. Im Dampfkessel wird Dampf von 4 Atm. Überdruck erzeugt. Wie grofs kann die Nutzarbeit dieser Maschine angenommen werden?

Der Druck auf den Kolben ist:

$$\frac{3{,}14 \,.\, 30^2}{4} \,.\, 4 = 2826 \text{ kg}.$$

Die totale Arbeit in 1 Sekunde beträgt nach Formel 137):

$$A = P \,.\, s = \frac{2826 \,.\, 0{,}8 \,.\, 2 \,.\, 50}{60} = 3768 \text{ kgm, oder nach Formel 145):}$$

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{3768}{75} = 50 \text{ Pferdestärken.}$$

Nimmt man den Wirkungsgrad zu 0,7 an, so ergiebt sich der Nutzeffekt zu:

$$0{,}7 \,.\, 50 = 35 \text{ Pferdestärken.}$$

3) Dieselbe Dampfmaschine soll eine Nutzbarkeit von 42 Pferdestärken liefern. Wie viel Umdrehungen mufs dann die Schwungradwelle machen?

Da sich die Umdrehungszahl der Welle, oder die Geschwindigkeit des Kolbens, in demselben Verhältnisse steigern mufs, wie die Arbeit vermehrt wird, so folgt:

$$42 : 30 = x : 50.$$

$$x = \frac{42 \,.\, 50}{30} = 70 \text{ Umdrehungen.}$$

4) Zum Betriebe einer Turbine steht eine Wasserkraft von 4 m Gefälle und 0,8 cbm Wassermenge in der Sekunde zur Verfügung. Wie grofs ist die Nutzbarkeit in Pferdestärken, wenn der Wirkungsgrad der Turbine zu 0,65 angenommen wird?

Die Gesamtarbeit beträgt nach Formel 137):

$$A = P \,.\, s = 1000 \,.\, 0{,}8 \,.\, 4 = 3200 \text{ kgm;}$$

mithin die Arbeit in Pferdestärken nach Formel 145):

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{3200}{75} = 42{,}66 \text{ Pferdestärken.}$$

Bei einem Wirkungsgrade von 0,65 erhält man demnach den Nutzeffekt zu:

$$42{,}66 \,.\, 0{,}65 = 27{,}73 \text{ Pferdestärken.}$$

Übungsbeispiele:

1) Wie grofs ist der Nutzeffekt eines Wasserrades in Pferdestärken, bei einem Gefälle von 8 m und einer Wassermenge von 0,3 cbm in der Sekunde, wenn der Wirkungsgrad zu 0,6 angenommen wird?

Lösung: Nutzeffekt = 19,2 Pferdestärken.

2) Ein Wasserlauf mit einem Gefälle von 5 m und einer Wassermenge von 20 cbm in der Minute, soll zum Betriebe einer Turbine benützt werden. Wie grofs ist die Arbeit der Wasserkraft in Pferdestärken und wie grofs ist der Nutzeffekt der Turbine, wenn der Wirkungsgrad derselben zu 0,7 angenommen wird?

Lösung: Arbeit der Wasserkraft = 22,22 Pferdestärken.
Nutzeffekt der Turbine = 15,55 „

3) Eine Dampfmaschine von 400 mm Cylinderdurchmesser und 750 mm Hub arbeitet mit einer Dampfspannung von 5,5 Atmosphären. Die Anzahl der Umdrehungen sei 120 in jeder Minute. Welchen Nutzeffekt in Pferdestärken entwickelt diese Maschine, wenn der Wirkungsgrad zu 0,7 angenommen wird?

Lösung: Nutzeffekt = 193,48 Pferdestärken.

4) Durch eine einfach wirkende Pumpe sollen in der Minute 800 Liter Wasser auf eine Höhe von 15 Meter gehoben werden. Welche Arbeit in Pferdestärken ist hierzu erforderlich und wie grofs ist die Nutzarbeit, wenn der Wirkungsgrad zu 0,65 angenommen wird?

Lösung: Gesamtarbeit = 2,66 Pferdestärken.
Nutzarbeit = 1,73 „

---

5) Arbeit der Reibung.

a) Gleitende Reibung.

Wird ein Körper über einen anderen fortbewegt, so macht sich zwischen beiden ein Widerstand bemerkbar, welcher Reibung genannt wird; über denselben sind bereits in Kap. 14, Seite 141) die erforderlichen Angaben gemacht. Zieht man nun noch den Weg in Betracht, längs welchem die zwischen zwei Körpern auftretende Reibung als Widerstand thätig ist, so findet man nach Vorstehendem die Arbeit der Reibung, wenn man deren Gröfse in kg mit diesem Wege multipliziert.

Bezeichnet man, wie früher, mit:

R die Gröfse der auftretenden Reibung in kg;
N den Normaldruck in kg;
f den Reibungskoeffizienten;
A die mechanische Arbeit der Reibung in kgm;
s den Weg in m, welchen der eine Körper während seiner Bewegung über den anderen in einer Sekunde zurücklegt, so war nach Formel 100):

$$R = f \, . \, N.$$

Multipliziert man den Wert f . N mit dem Wege s, so erhält man die Arbeit der Reibung in kgm:

$$A = f \, . \, N \, . \, s \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 154)$$

b) Zapfenreibung.

Durch Beibehaltung der Bezeichnungen unter a) berechnet sich die Arbeit der Zapfenreibung, wenn man den Halbmesser des Zapfens noch mit r (Fig. 100), und die Umdrehungszahl des Zapfens in der Minute mit n bezeichnet, folgendermafsen:

Der Weg s, welchen die Reibung hier bei einer Umdrehung des Zapfens zurücklegt, ist gleich dem Umfange des Zapfens, also $= 2 \,.\, r \,.\, \pi$. Dieser Weg wird von dem Zapfen in einer Minute n mal, also in einer Sekunde $\frac{n}{60}$ mal zurückgelegt; mithin wird der Weg in einer Sekunde $= \frac{2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, n}{60}$*), und da bei der Zapfenreibung die Gröſse der Reibung ebenfalls $= f \,.\, N$ war, so folgt für die Arbeit der Zapfenreibung:

$$A = f \,.\, N \,.\, \frac{2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, n}{60} = 0{,}105 \,.\, f \,.\, N \,.\, r \,.\, n \quad . \;.\; .\; 155)$$

Setzt man für $f \,.\, N$ den gleichen Wert $\frac{P \,.\, a}{r}$ aus Formel 103) ein, so erhält man:

$$A = 0{,}105 \,.\, \frac{P \,.\, a}{r} \,.\, r \,.\, n = 0{,}105 \,.\, P \,.\, a \,.\, n \quad . \;.\; .\; .\; 156)$$

Beispiele:

1) Ein mit Eisen beschlagener und mit 1000 kg belasteter Schlitten, soll ohne Anwendung von Schmiermaterial auf einer Holzbahn 2,5 m weit fortgezogen werden. Welche Arbeit ist hierzu erforderlich, wenn $f = 0{,}42$ angenommen wird?

Nach Formel 154) ergiebt sich:

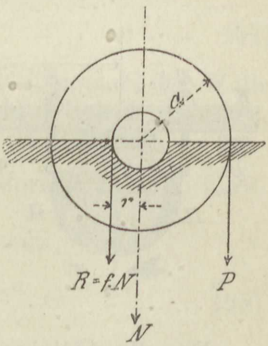
$A = f \,.\, N \,.\, s = 0{,}42 \,.\, 1000 \,.\, 2{,}5 = 1050$ kgm.

2) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen auf sehr glatter Schneebahn gleitenden Schlitten, welcher mit 400 kg belastet ist, 200 m weit fortzuziehen, wenn $f = 0{,}038$ angenommen wird?

Nach Formel 154) ist:

$A = f \,.\, N \,.\, s = 0{,}038 \,.\, 400 \,.\, 200 = 3040$ kgm.

Fig. 100.



3) Ein Schwungrad, dessen Gewicht mit Welle 1800 kg beträgt, ist in Lagern von 0,13 m Durchmesser gelagert und macht 60 Umdrehungen in einer Minute. Wie groſs ist die durch die Reibung dem Schwungrade entzogene Arbeit, wenn $f = 0{,}06$ angenommen wird?

Nach Formel 155) ist:

$A = 0{,}105 \,.\, f \,.\, N \,.\, r \,.\, n = 0{,}105 \,.\, 0{,}06 \,.\, 1800 \,.\, 0{,}065 \,.\, 60.$

$A = 44{,}2$ kgm $= 0{,}59$ Pferdestärken.

4) Eine wagerecht gelagerte Transmissionswellenleitung von 0,1 m Durchmesser hat ein Gewicht von 6000 kg und kann ohne Berücksichtigung der Reibung, bei 50 Umdrehungen in der Minute, 20 Pferdestärken abgeben. Wieviel Arbeit verliert die Welle durch Reibung, wenn $f = 0{,}05$ gesetzt wird?

---

*) Vergl. Formel 4.)

Nach Formel 155) ist:

$$A = 0{,}105 \,.\, f \,.\, N \,.\, r \,.\, n = 0{,}105 \,.\, 0{,}05 \,.\, 6000 \,.\, 0{,}05 \,.\, 50.$$

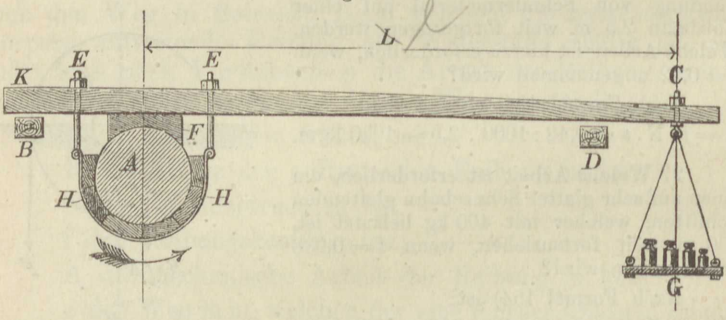
$$A = 78{,}75 \text{ kgm} = 1{,}05 \text{ Pferdestärken.}$$

Aus Formel 155) ist ersichtlich, dafs die Arbeit der Zapfenreibung gleichzeitig mit dem Zapfendrucke, dem Zapfenhalbmesser und der Umdrehungszahl zunimmt. Es ist daher eine in der Praxis stehend gewordene Regel, bei sich drehenden Maschinenteilen den Zapfendruck durch grofse Gewichte — Zahnräder, Riemenscheiben, Kupplungen — nicht übermäfsig zu vermehren.

Auch werden die Zapfen nur so stark als unbedingt erforderlich gemacht, um den Halbmesser r möglichst klein zu halten. Die Umdrehungszahl wird ebenfalls, wenn nicht besondere Verhältnisse es bedingen, möglichst niedrig angenommen.

Die Arbeit der Reibung kann mit Vorteil dazu benützt werden, um die von einer Dampfmaschine, einem Wasserrade u. s. w. in Wirklichkeit geleistete Arbeit zu ermitteln. Man bedient sich hierzu des aus Fig. 101) ersichtlichen Apparates, welcher nach seinem Erfinder der „Pronysche Zaum“ genannt wird.

Fig. 101.



Derselbe besteht aus einem kreisförmig ausgeschnittenen Holzstücke F, welches auf einer Welle A, deren Arbeitsgröfse bestimmt werden soll, aufsitzt, sowie aus mehreren kleineren, nach der Welle zu ausgerundeten Holzstücken H, welche die Welle von unten umschliessen. Ein Stahlband umfafst die unteren Holzstücke und ist an den Enden mit Schraubenbolzen versehen, welche durch den Hebel CK dringen und durch Schraubenmuttern mehr oder weniger angezogen werden können. Am Ende des Hebels CK befindet sich eine Wagschale, welche zur Aufnahme von Gewichten G dient.

Wird die Welle A in der Richtung des Pfeiles in Bewegung gesetzt, so wird dieselbe infolge der Reibung das Hebelstück AC emporheben. Um dieses zu verhindern, belastet man die Wagschale durch Gewichte G und sucht nun, teils durch Veränderung dieser Gewichte, teils durch Anziehen oder Lösen der Schraubenmuttern E, den Balken CK in wagerechter Lage zu erhalten, so dafs derselbe mit keinem der Balken B und D in Berührung kommt. Ist auf diese Weise die Umdrehungszahl, welche die gebremste Welle annehmen soll, erreicht, so giebt die Gröfse der zwischen den Holzstücken und der Welle stattfindenden Reibung die Kraft an, welche die Welle an ihrem Umfange, bei der betreffenden Umdrehungszahl, auf andere Maschinen übertragen kann.

Für die wagerechte Lage des Hebels wird das in der Wagschale befindliche Gewicht, mit der in der Umdrehungsrichtung wirkenden Reibung am Wellenumfange, im Gleichgewichte sein.

Bezeichnet man den am Wellenumfange auftretenden Reibungswiderstand mit R, den Halbmesser der Welle mit r, das Gewicht in der Wagschale, mit Einschlufs des auf den Punkt C reduzierten eigenen Gewichtes des Zaumes, mit G, die Länge des Hebelarmes AC mit L, so folgt für den Gleichgewichtszustand:

$$R \, . \, r = G \, . \, L \text{ oder:}$$

$$R = \frac{G \, . \, L}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 157)$$

Bezeichnet man noch mit n die Umdrehungszahl der Welle in 1 Minute und mit v die Umfangsgeschwindigkeit derselben, so ist, wenn man Gleichung 157) mit v multipliziert,

$$A = R \, . \, v = \frac{G \, . \, L \, . \, v}{r}, \text{ oder da nach Formel 4)}$$

$$v = \frac{\pi \, . \, d \, . \, n}{60} = \frac{2 \, . \, r \, . \, \pi \, . \, n}{60} \text{ ist, auch}$$

$$A = R \, . \, v = \frac{G \, . \, L \, . \, 2 \, . \, r \, . \, \pi \, . \, n}{60 \, . \, r} = \frac{2 \, . \, L \, . \, \pi \, . \, n}{60} \, . \, G \quad \ldots \quad 158)$$

die von der Reibung beanspruchte Arbeit, oder die Nutzarbeit, welche die Welle bei gleicher Umdrehungszahl auf andere Arbeitsmaschinen übertragen kann.

Wird die Nutzarbeit in Pferdestärken ausgedrückt, so geht Formel 158) über in:

$$A = \frac{2 \, . \, L \, . \, \pi \, . \, n}{60 \, . \, 75} \, . \, G = 0{,}00139 \, . \, L \, . \, n \, . \, G \quad . \; . \quad 159)$$

Wird bei Bestimmung der von einer Maschine ausgeübten Arbeitsleistung stets derselbe Apparat benützt, so dafs L stets unverändert bleibt, so wird auch der Wert $\frac{2 \, . \, \pi \, . \, L}{60 \, . \, 75}$ unverändert bleiben. Nimmt man z. B. die Hebellänge L für alle Versuche zu 2,5 m an, so geht Formel 159) über in:

$$A = 0{,}003491 \, . \, n \, . \, G \quad \ldots \ldots \ldots \quad 160)$$

Bei Anwendung des Apparates ist Folgendes zu beachten:

1) Der durch die Schraubenbolzen E, E ausgeübte Druck mufs während der Dauer des Versuches fortwährend durch Zu- und Losdrehen der Muttern derartig reguliert werden, dafs eine möglichst gleichförmige Bewegung der Welle erreicht wird.

2) Durch das Zu- und Losdrehen der Schraubenmuttern werden Veränderungen in der Gröfse der Reibung stattfinden; der Hebel wird sich infolgedessen auf- und niederbewegen. Um dieses zu verhindern, müssen Vorkehrungen getroffen werden, welche nur eine geringe Bewegung des Hebels aus der wagerechten Lage gestatten.

3) Bei fortgesetzten Bremsversuchen wird durch die Reibung eine Erhitzung der Holzstücke stattfinden; es ist deshalb für möglichst gute Schmierung durch Seifenwasser zu sorgen.

Beispiele:

1) Es ist vermittelst eines Bremszaumes die Nutzarbeit eines Wasserrades zu bestimmen, welches für gewöhnlich mit 8 Umdrehungen laufen soll. Der Hebelarm des Zaumes ist = 3 m; das Gewicht in der Wagschale = 250 kg.

Nach Formel 159) ist:

$$A = 0{,}00139 \,.\, L \,.\, n \,.\, G = 0{,}00139 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 250 = 8{,}34 \text{ Pferdestärken.}$$

2) Um die Nutzarbeit der auf Seite 204, Beispiel 6) berechneten Dampfmaschine kennen zu lernen, wird dieselbe unter Anwendung eines Bremszaumes, dessen Hebellänge 3 m beträgt, gebremst. Das Gewicht der Wagschale, das auf den Anhängepunkt der Wagschale reduzierte Gewicht des Hebels und das auf die Wagschale aufgelegte Gewicht betrug 330 kg, um die erforderlichen 40 Umdrehungen zu erzielen. Wie grofs ist die Nutzarbeit?

Nach Formel 159) ist:

$$A = 0{,}00139 \,.\, L \,.\, n \,.\, G = 0{,}00139 \,.\, 3 \,.\, 40 \,.\, 330 = 55{,}044 \text{ Pferdestärken.}$$

Der Wirkungsgrad ist mithin:

$$\frac{55{,}044}{84{,}8} = 0{,}649 = \frac{65}{100} = 65\,\%.$$

---

6) Arbeitsvermögen in Bewegung befindlicher Körper.

(Lebendige Arbeit.)

Fällt ein Körper vom Gewichte P durch eine Höhe s frei herab,*) und erreicht der Körper hierbei eine End-

*) Vergl. Kap. IV, Seite 83.)

geschwindigkeit v, so ist diese Endgeschwindigkeit nach der auf Seite 84) angegebenen Formel:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s},$$

in welcher Gleichung $g = 9{,}81$ m, also gleich der Fallbeschleunigung, ist.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot s \text{ und damit: } s = \frac{v^2}{2 \cdot g}.$$

Die mechanische Arbeit A eines sich senkenden Gewichtes ist aber gleich dem Produkte aus Gewicht und Weg, in diesem Falle also:

$$A = P \cdot s.$$

Setzt man an Stelle dieses s den vorstehenden gleichen Wert $\frac{v^2}{2 \cdot g}$, so erhält man:

$$A = P \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 161)$$

Der Wert $\frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g}$ giebt an, welche Arbeit auf den Körper einwirken mufste, um ihn aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung überzuführen und ihm dabei eine Geschwindigkeit v zu erteilen. Die ganze Arbeit ist somit auf die Überwindung des Trägheitsvermögens und auf die Bewegung des Körpers, *also nicht auf die Überwindung eines Widerstandes*, verwandt worden. Sie ist gewissermafsen in dem Körper angesammelt, um erforderlichen Falles von demselben wieder abgegeben werden zu können.

Diese Abgabe wird dann eintreten, wenn der Körper einen Widerstand überwinden mufs; sie wird so lange währen, bis der Körper seine Geschwindigkeit verloren hat.

Man nennt die in einem Körper aufgespeicherte Arbeitsmenge $\frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g}$, welche er also wieder abgeben kann, die *lebendige Arbeit* des Körpers.

Beispiele:

1) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen Wagen, dessen Gewicht 5000 kg beträgt, aus dem Zustande der Ruhe in eine Geschwindigkeit von 5 m zu versetzen, wenn von den Bewegungswiderständen abgesehen wird?

Nach Formel 161) ist:

$$A = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} = \frac{5000 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 9{,}81} = 6371{,}05 \text{ kgm.}$$

2) Wie grofs ist die im Wasser enthaltene Arbeit, wenn dasselbe durch einen Kanal von 1,5 qm Querschnitt fliefst und die mittlere Geschwindigkeit des Wassers 0,8 m beträgt?

Nach Formel 161) ist:

$$A = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} = \frac{1200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 9{,}81} = 39{,}14 \text{ kgm.}$$

3) Der Ring eines Schwungrades habe ein Gewicht von 5000 kg und einen Durchmesser von 4 m. Die Umdrehungszahl des Rades sei 80 in der Minute. Wie grofs ist die vom Ringe aufgenommene und wieder abzugebende Arbeit?

Die Umfangsgeschwindigkeit ist nach Formel 4):

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3{,}14 \cdot 4 \cdot 80}{60} = 16{,}76 \text{ m;}$$

mithin die Arbeit nach Formel 161):

$$A = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} = \frac{5000 \cdot 16{,}76 \cdot 16{,}76}{2 \cdot 9{,}81} = 71585 \text{ kgm.}$$

Übungsbeispiele:

1) Das Bett einer Hobelmaschine habe ein Gewicht von 600 kg, die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Bett bewegt, betrage 0,1 m; der Reibungskoeffizient sei = 0,44. Welche Arbeit ist zur Bewegung des Bettes erforderlich?

Lösung: A = 26,4 kgm.

2) Ein Wasserrad, dessen Gewicht mit Welle 12000 kg beträgt, ist in Lagern von 0,18 m Durchmesser gelagert und macht 6 Umdrehungen in einer Minute. Wie grofs ist die von der Zapfenreibung aufgezehrte Arbeit, wenn der Reibungskoeffizient zu 0,07 angenommen wird?

Lösung: A = 47,63 kgm.

3) Ein Schleifstein von 1,5 m Durchmesser laufe mit 90 Umdrehungen in jeder Minute. Das abzuschleifende Stück werde mit einer Kraft von 60 kg gegen den Schleifstein gedrückt; der Reibungskoeffizient sei = 0,4. Welche Reibungsarbeit findet am Umfange des Schleifsteines statt?

Lösung: A = 169,63 kgm.

4) Vermittelst des in Fig. 101) dargestellten Bremszaumes soll die Nutzarbeit einer Turbine bestimmt werden, deren Umdrehungszahl = 120 in der Minute ist. Der Hebelarm des Zaumes ist = 2,5 m, das Gewicht in der Wagschale = 130 kg.

Lösung: A = 54,44 Pferdestärken.

5) Das Gewicht einer Lokomotive betrage 20000 kg; dieselbe soll aus dem Zustande der Ruhe in eine Geschwindigkeit von 8 m in der Sekunde versetzt werden. Welche Arbeit mufs der Dampf in den Cylindern der Lokomotive verrichten, wenn auf Bewegungshindernisse keine Rücksicht genommen wird?

Lösung: A = 65239,5 kgm.

6) Wie grofs ist die zum Betriebe einer Feuerspritze erforderliche Arbeit, wenn dieselbe in der Sekunde 15 Liter Wasser mit einer Geschwindigkeit von 20 m fortschleudern soll?

Lösung: A = 305,81 kgm.

7) Eine Wasserrohrleitung habe eine Länge von 120 m und einen lichten Durchmesser von 300 mm. Das Wasser bewege sich in der Rohrleitung mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m. Wie viel Arbeit ist in dem Wasser der Leitung angesammelt?

Lösung: A = 972,6 kgm.

8) Eine Kanonenkugel von 20 kg Gewicht werde mit einer Geschwindigkeit von 600 m abgeschossen. Wie grofs mufste die von dem Pulvergase verrichtete Arbeit werden, um der Kanonenkugel diese Geschwindigkeit zu erteilen?

Lösung: A = 366972,4 kgm.

Zwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Drehbänke.

Die Drehbänke dienen den verschiedensten Zwecken. Am häufigsten werden sie zur Herstellung von runden Körpern — sog. Rotationskörpern — und zum Schneiden von Schraubengewinden benützt.

Um sie für den ersten Zweck zu verwenden, ist es von besonderer Wichtigkeit die Drehbank so herzurichten, dafs das abzudrehende Arbeitsstück auch diejenige Umfangsgeschwindigkeit erhält, welche dessen Durchmesser und Material entspricht. Die Verschiedenartigkeit der Widerstände, welche die einzelnen Materialien dem Drehstahle entgegensetzen, bedingt diese Notwendigkeit.

Um die Drehbank dem anderen Zwecke dienstbar zu machen, ist es erforderlich, demjenigen Teile derselben, welcher den Drehstahl trägt — dem Support — eine solche Geschwindigkeit der Bewegung zu geben, dafs auch in der That auf dem mit Gewinde zu versehenden Körper eine Schraubenlinie von vorgeschriebener Ganghöhe entsteht.

Damit man nun eine Drehbank zum Abdrehen gewisser Körper herrichten, und die hierzu erforderlichen kleinen Rechnungen ausführen kann, mufs man diejenigen Umfangsgeschwindigkeiten v kennen, welche die abzudrehenden Materialien höchstens annehmen dürfen, wenn gute und saubere Arbeit erzielt werden soll.

Die wichtigsten Werte sind nachstehend angegeben:

Für Gufseisen, hartes ist	v = 2 cm.
„ „ weiches „	v = 9 cm.
„ Stahl . . . . . „	v = 5 cm.
„ Schmiedeeisen . . „	v = 13 cm.
„ Messing u. Bronze „	v = 15 cm.
„ hartes Holz . . . „	v = 20—35 cm.
„ weiches „ . . . „	v = 100—120 cm.

Bezeichnet man mit:

d in cm den Durchmesser des abzudrehenden Arbeitsstückes;

n die Umdrehungszahl der Drehbankspindel in jeder Minute,

so liegt der anzustellenden Berechnung die im I. Kapitel, Seite 74 hergeleitete Formel 4) zu Grunde, nach welcher die Umfangsgeschwindigkeit

$v = \frac{\pi . d . n}{60}$ gefunden wurde. Hieraus folgt unmittelbar:

$n = \frac{60 . v}{\pi . d}$, welchen Wert man für überschlägige Rechnungen mit genügender Genauigkeit

$n = 19{,}1 . \frac{v}{d}$ setzen kann . . . . 162)

Beispiele:

1) Eine schmiedeeiserne Welle von 8 cm Durchmesser soll abgedreht werden. Wie oft mufs sich dieselbe in der Minute umdrehen?

Da hier v = 13 cm ist, so folgt nach Formel 162):

$$n = 19{,}1 . \frac{v}{d} = 19{,}1 . \frac{13}{8} = 31.$$

2) Wie viel Umdrehungen in jeder Minute mufs ein Radreifen aus hartem Schmiedeeisen und von 100 cm Durchmesser machen, wenn derselbe abgedreht werden soll?

Setzt man hier v = 9,5, so folgt nach Formel 162):

$$n = 19{,}1 . \frac{v}{d} = 19{,}1 . \frac{9{,}5}{100} = 1{,}8 = 2 \text{ (abgerundet).}$$

3) Ein Pumpencylinder aus Messing von 22 cm Durchmesser soll ausgebohrt werden. Wie grofs ist die Anzahl seiner Umdrehungen in jeder Minute?

Für Messing ist v = 15 cm; mithin nach Formel 162):

$$n = 19{,}1 . \frac{v}{d} = 19{,}1 . \frac{15}{22} = 13 \text{ (abgerundet).}$$

4) Welchen kleinsten Durchmesser darf ein abzudrehendes Holzstück erhalten, wenn die mit Planscheibe versehene Drehbank nur 45 Umdrehungen in jeder Minute macht?

Es sei v = 50 cm; nach Formel 162) wird alsdann:

$$d = 19{,}1 . \frac{v}{n} = 19{,}1 . \frac{50}{45} = 21{,}2 \text{ cm.}$$

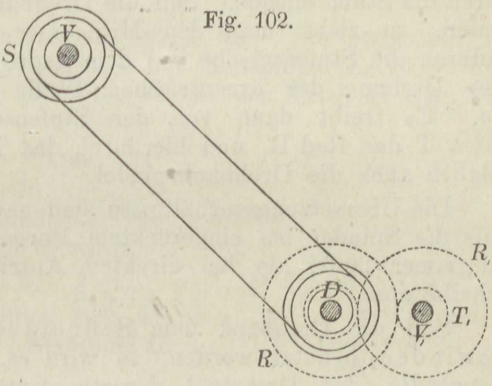
5) Auf einer Drehbank, welche 40 Umdrehungen in jeder Minute macht, soll das Holzmodell eines Cylinders von 35 cm Durchmesser abgedreht werden. Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit?

Aus Formel 162) folgt:

$$v = \frac{n . d}{19{,}1} = \frac{40 . 35}{19{,}1} = 73 \text{ cm.}$$

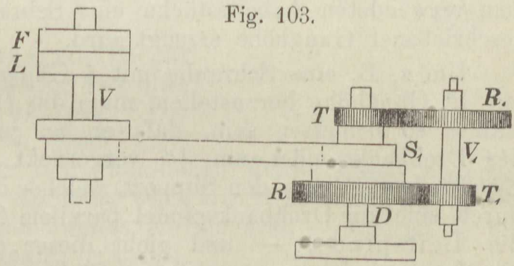
Über die Geschwindigkeit, mit welcher der Drehstahl parallel zur Achse der Drehbankspindel fortbewegt werden darf, nähere Angaben zu machen, ist insofern äufserst schwierig, als dieselbe erstens innerhalb ziemlich weiter Grenzen liegt und zweitens, aufser von dem zu bearbeitenden Materiale, noch von vielen anderen Umständen abhängig ist. Es sind hierbei die Gröfse der Betriebskraft, die Arbeitsleistung der Drehbank, die Form des zu erzeugenden Körpers, insbesondere die Art der Arbeit, ob schroppen oder schlichten, wohl zu berücksichtigen.

Fig. 102.



Es ist aber auch eine Berechnung in gerade diesem Sinne weniger notwendig, da die Einrichtung des Supportes jeder Zeit und ohne Mühe gestattet, eine falsche Geschwindigkeit mit Leichtigkeit zu ändern.

Fig. 103.



Um die Anzahl der Umdrehungen dem jeweiligen Bedürfnisse anpassen zu können, wird die Bewegung der Drehbankspindel von einer Vorgelegewelle aus, durch Stufenscheiben und Zahnräder, bewerkstelligt. Eine derartige, allgemein übliche Anordnung ist in Fig. 102 und 103) im Aufrifs und Grundrifs zur Anschauung gebracht.

Auf der Vorgelegewelle eines Deckenvorgeleges sitzen die Fest- und Losscheiben F und L, sowie die Stufenscheibe S. Die Drehbankspindel D trägt lose, d. h. ohne Verbindung mit derselben, eine korrespondierende Stufenscheibe S_1 und das in diese eingesetzte Trieb T; fest dagegen ist das Rad R aufgekeilt. In der Scheibe dieses Rades befindet sich ein Mitnehmer, welcher in einen Einschnitt am inneren Rande der Stufenscheibe geschoben werden kann und dazu dient, eine feste Verbindung zwischen der Stufenscheibe S_1 und der Drehbankspindel herzustellen. Neben der Drehbankspindel liegt die Vorgelegewelle V_1, auf welche ein Rad R_1 und ein Trieb T_1 fest aufgekeilt sind. Die Vorgelegewelle selbst ist hohl und läuft auf einer anderen Welle mit exzentrischen Zapfen, so dafs eine nur geringe Drehung der inneren Welle genügt, um das Rädervorgelege ein- oder auszurücken. Für gewöhnliche Geschwindigkeiten kuppelt man das Rad R mit der Stufenscheibe S_1 und treibt so die Drehbankspindel direkt durch die Stufenscheibe. Soll die Drehbank jedoch langsamer laufen, so zieht man den Mitnehmer zurück, entkuppelt dadurch die Stufenscheibe von dem Rade R, und rückt durch eine Drehung der exzentrischen Welle das Rädervorgelege ein. Es treibt dann von der Stufenscheibe S_1 aus, das Trieb T das Rad R_1 und hierdurch das Trieb T_1 das Rad R, folglich auch die Drehbankspindel.

Die Übersetzungsverhältnisse sind gewöhnlich so gewählt, dafs die Spindel bei eingerücktem Vorgelege ungefähr 9-mal langsamer läuft, als bei direktem Antriebe von der Stufenscheibe aus.

Soll die Drehbank zum Schneiden von Schraubengewinden benützt werden, so wird es, wie schon erwähnt, notwendig, den Drehstahl derartig fortzubewegen, dafs auf dem verwendeten Arbeitsstücke eine Schraubenlinie von vorgeschriebener Ganghöhe erzeugt wird.

Um z. B. eine Schraube mit 4 Gängen auf 1 Zoll, oder mit $\frac{1}{4}''$ Ganghöhe herzustellen, mufs die Bewegung des Drehstahles so bemessen sein, dafs er bei je einer Umdrehung der Drehbankspindel um $\frac{1}{4}''$ vorgerückt wird. Zu diesem Zwecke bewegt man den Support, welcher den Drehstahl trägt, durch eine zur Drehbankspindel parallele Schraubenspindel — die Leitspindel — und giebt dieser durch ein von der Drehbankspindel aus getriebenes Räderwerk die erforderliche Umdrehungszahl.

Der Drehstahl bewegt sich dabei mit derselben Geschwindigkeit, wie die Schraubenmutter, welche auf der Leitspindel sitzt; der Drehstahl schreitet also um die Ganghöhe der Leitspindel vor, wenn diese sich einmal umgedreht hat.

Besitzen daher Drehbankspindel und Leitspindel gleiche Umdrehungszahlen, so entsteht ein Gewinde, dessen Ganghöhe gleich der Ganghöhe der Leitspindel ist. Macht die Drehbankspindel 2-mal soviel Umdrehungen, als die Leitspindel, so erhält das zu schneidende Gewinde eine Ganghöhe, welche gleich der halben Ganghöhe der Leitspindel ist. Macht endlich die Drehbankspindel nur 2 Umdrehungen in derselben Zeit, in welcher die Leitspindel deren 3 macht, so kommen 2 Ganghöhen des neu zu schneidenden Gewindes auf eine

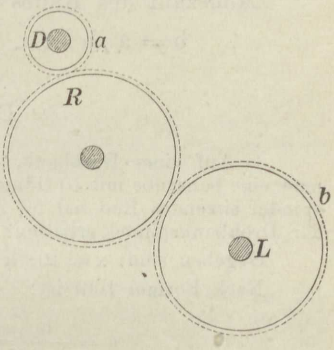
Länge, welche $= 3$ Ganghöhen der Leitspindel ist; d. h. die Ganghöhe des neu zu schneidenden Gewindes ist $1^1/_2$ mal gröfser, als diejenige der Leitspindel.

Fig. 104) stellt ein zur Bewegung der Leitspindel dienendes Räderwerk dar, in welchem auf der Drehbankspindel D ein Trieb mit a Zähnen sitzt, welches durch ein Zwischenrad R mit c Zähnen ein auf der Leitspindel L sitzendes Rad mit b Zähnen treibt.

Bezeichnet man hierbei mit z die Umdrehungszahl des Rades R, und mit y diejenige der Leitspindel L, so ist nach dem auf Seite 150) Gesagten, wenn das Trieb D **eine** Umdrehung macht:

$$1 . a = z . c \text{ und}$$
$$z . c = y . b.$$

Fig 104.



Multipliziert man beide Gleichungen miteinander, so wird

$$1 . a = y . b,$$

aus welcher Gleichung sich die Umdrehungszahl der Leitspindel zu

$$y = \frac{1 . a}{b} = \frac{a}{b}$$

berechnet.

Das Zwischenrad R ist also ohne Bedeutung für das Übersetzungsverhältnis. Die Zähnezahl desselben kann ganz beliebig grofs, aber den räumlichen Verhältnissen angepafst sein. Zu beachten ist, dafs, wenn Linksgewinde geschnitten werden soll, noch ein zweites Zwischenrad — Leitrad — eingeschaltet werden mufs.

Der Support mufs sich nun dem Übersetzungsverhältnisse $\frac{a}{b}$ entsprechend fortbewegen. Ist hierbei die Ganghöhe der Leitspindel $=$ h Zoll, so ist der Weg des Supports demgemäfs

$$= \frac{a}{b} . h \text{ Zoll.}$$

Will man Gewinde mit x Gängen auf 1 Zoll oder mit $\frac{1}{x}$ Zoll Ganghöhe schneiden, so muss nach dem Vorhergesagten der Support bei je einer Umdrehung der Drehbankspindel sich um $\frac{1}{x}$ Zoll fortbewegen. Hieraus folgt, dafs

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} . h \text{ sein mufs} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 163)$$

Aus Formel 163) folgt:

Ganghöhe der Leitspindel:

$$h = \frac{b}{a \cdot x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 164)$$

Anzahl der auf 1 Zoll zu schneidenden Gänge des neuen Gewindes:

$$x = \frac{b}{a \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 165)$$

Zähnezahl des Rades auf der Drehbankspindel:

$$a = \frac{b}{h \cdot x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 166)$$

Zähnezahl des Rades auf der Leitspindel:

$$b = a \cdot h \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 167)$$

Beispiele:

1) Auf einer Drehbank, deren Leitspindel $^1/_4''$ Ganghöhe hat, will man eine Schraube mit 10 Gängen auf 1 Zoll schneiden. Ein auf der Leitspindel sitzendes Rad hat 50 Zähne; wieviel Zähne mufs das Trieb auf der Drehbankspindel erhalten?

Gegeben sind: $x = 10$; $h = {^1/_4} = 0{,}25$; $b = 50$.

Nach Formel 166) ist:

$$a = \frac{b}{h \cdot x} = \frac{50}{0{,}25 \cdot 10} = 20 \text{ Zähne.}$$

2) Auf derselben Drehbank sitzen ein Trieb mit 20 und ein Rad mit 70 Zähnen. Wieviel Gänge auf 1 Zoll erhält die zu schneidende Schraube?

Gegeben sind: $h = {^1/_4} = 0{,}25$; $a = 20$; $b = 70$.

Nach Formel 165) ist:

$$x = \frac{b}{a \cdot h} = \frac{70}{20 \cdot 0{,}25} = 14 \text{ Gänge auf 1 Zoll.}$$

3) Bei Anwendung eines Triebes mit 20 und eines Rades mit 110 Zähnen, wurde auf einer Drehbank eine Schraube mit 11 Gängen auf 1 Zoll geschnitten. Welche Ganghöhe hatte die zugehörige Leitspindel?

Gegeben sind: $a = 20$; $b = 110$; $x = 11$.

Nach Formel 164) ist:

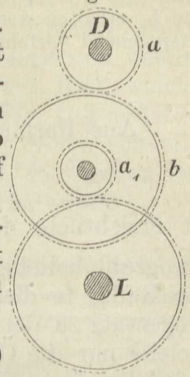
$$h = \frac{b}{a \cdot x} = \frac{110}{20 \cdot 11} = {^1/_2}'';$$ d. h. die Leitspindel hatte 2 Gänge auf 1 Zoll.

Ein anderes, zum Betriebe einer Drehbank dienendes Räderwerk zeigt Fig. 105). Die Drehbankspindel D trägt ein Trieb mit a Zähnen, welches ein auf einen Zapfen aufgestecktes Rad mit b Zähnen treibt. Durch ein auf demselben Zapfen sitzendes Trieb mit a_1 Zähnen, wird die Bewegung des auf der Leitspindel L sitzenden Rades mit b_1 Zähnen bewirkt. Für eine derartige Anordnung von Rädern ergiebt sich, wenn mit x wieder die Ganghöhe des zu schneidenden Gewindes bezeichnet wird:

$$\frac{1}{x} = \frac{a \cdot a_1}{b \cdot b_1} \cdot h \quad \ldots \ldots \quad 168)$$

(Vergl. Kap. XV, Seite 153.)

Fig. 105.



Beispiele:

1) Die Ganghöhe der Leitspindel einer Drehbank ist $h = 1/2'' = 0{,}5''$. Wie viel Gänge auf 1 Zoll erhält eine zu schneidende Schraube, wenn $a = 70$; $b = 100$; $a_1 = 20$ und $b_1 = 140$ angenommen werden?

Nach Formel 168) wird:

$$x = \frac{b \cdot b_1}{a \cdot a_1 \cdot h} = \frac{100 \cdot 140}{70 \cdot 20 \cdot 0{,}5} = 20 \text{ Gänge.}$$

2) Gegeben sind: $a = 40$; $b = 80$ und $a_1 = 40$; man will ein Gewinde mit 9 Gängen auf 1 Zoll schneiden. Wie viel Zähne mufs das Rad auf der Leitspindel besitzen, wenn die Ganghöhe der letzteren $h = 1/2''$ ist?

Aus Formel 168) folgt:

$$b_1 = \frac{a \cdot a_1 \cdot h \cdot x}{b} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 0{,}5 \cdot 9}{80} = 90 \text{ Zähne.}$$

3) Auf der in den vorstehenden Beispielen angenommenen Drehbank, soll eine Schraube mit 10 Gängen auf 1 Zoll geschnitten werden. Die Drehbankspindel trägt ein Trieb mit 80, der Zapfen ein Rad mit 100 Zähnen. Welche Zähnezahlen müssen die beiden anderen noch erforderlichen Räder erhalten?

Gegeben sind: $x = 10$; $a = 80$; $b = 100$ und $h = 0{,}5$. Man stelle das Verhältnis $\frac{a_1}{b_1}$ der Zähnezahlen der beiden erforderlichen Räder fest, welches sich aus Formel 168) wie folgt, ergiebt:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b}{x \cdot a \cdot h} = \frac{100}{10 \cdot 80 \cdot 0{,}5} = \frac{1}{4}, \text{ d. h.}$$

die Zähnezahlen der Räder müssen sich wie 1 : 4 verhalten. Man kann demnach wählen

$a_1 = 15$; $b_1 = 60$ oder:
$a_1 = 20$; $b_1 = 80$ oder:
$a_1 = 25$; $b_1 = 100$ oder:
$a_1 = 30$; $b_1 = 120$ oder:
$a_1 = 40$; $b_1 = 160$
u. s. w.

immer mufs, wenn man die Zähnezahl a_1 mit 4 multipliziert, die Zähnezahl b_1 erhalten werden. Wäre das Verhältnis $= 1/5$ geworden, so müfste entsprechend verfahren werden; u. s. w.

Aus Formel 168):

$$\frac{1}{x} = \frac{a \cdot a_1}{b \cdot b_1} \cdot h$$

ist ersichtlich, dafs durch das Übersetzungsverhältnis $\frac{a_1}{b}$ die Gangzahl beliebig geändert werden kann. Man nennt deshalb die Räder in dieser Schaltung „Übersetzungsräder“, im Gegensatz zu den „Zwischen- oder Übertragungsrädern“, welche nur die Übertragung der Bewegung von der Drehbankspindel auf die Leitspindel vermitteln, jedoch keinen Einflufs auf die Übersetzungsverhältnisse haben. Im allgemeinen nennt man beide Arten Räder, da sie für die verschiedenen Gewinde jedesmal ausgewechselt werden müssen, „Wechselräder“.

Die meisten Leitspindeldrehbänke sind jetzt so eingerichtet, dafs für die gebräuchlichsten Steigungen auf der Drehbankspindel nur ein Trieb mit 20, 40 oder 80 Zähnen sitzt, während die Zähnezahl des Rades auf der Leitspindel ein entsprechendes Vielfaches der Gangzahl des zu schneidenden Gewindes wird. Zum Übertragen der Bewegung sind ein oder zwei Zwischenräder eingeschaltet. Nur bei einer aufsergewöhnlichen Anzahl der Gänge auf 1 Zoll ist man bei diesen Drehbänken genötigt, Übersetzungsräder anzuwenden, wie dies aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle zum Gewindeschneiden; Leitspindel 4 Gänge auf 1″ engl.

Anzahl der Gänge auf 1″ engl.	Rad auf der Spindel	Übersetzungsräder	Rad auf der Leit-Spindel	Anzahl der Gänge auf 1″ engl.	Rad auf der Spindel	Übersetzungsräder	Rad auf der Leit-Spindel
36	20	60/30	90	9	40		90
27	20	60/40	90	8	40		80
24	20	60/40	80	7	40		70
20	18		90	6	40		60
18	20		90	5	40		50
16	20		80	$4\frac{1}{2}$	40		45
14	20		70	4	40		40
12	20		60	$3\frac{1}{2}$	40		35
11	20		55	3	40		30
10	20		50	$2\frac{3}{4}$	80		55

Da sich bei Gewinden mit sehr grofser Steigung die Leitspindel bedeutend schneller als die Drehbankspindel drehen mufs, arbeitet man hier stets mit Rädervorgelege und benützt für den Antrieb der Wechselräder ein besonderes Rad, welches direkt von dem Trieb in der Stufenscheibe (Fig. 102 und 103) bewegt wird. Da aber dieses Trieb ungefähr 9-mal schneller als das Trieb auf der Drehbankspindel läuft, so ergeben sich für die Übersetzungsräder sehr günstige Verhältnisse.

Tabelle zum Gewindeschneiden für eine Drehbank mit Vorgelege und einer Ganghöhe der Leitspindel = $^1/_2$″ engl.

Anzahl der Gänge auf 1″ engl. x	Rad auf der Spindel a	Vorgelegerad b	Vorgelege-trieb a_1	Rad auf der Leitspindel b_1
8,5	90	85	20	90
10	60	75	20	80
12	90	90	20	120
14	90	90	20	140
16	60	80	20	120
18	40	60	20	120
20	60	100	20	120
25	60	100	20	150
30	70	140	20	150
40	30	100	20	120
50	30	100	20	150
60	30	120	20	150
70	30	140	20	150

Von dem englischen Werkzeugfabrikanten *Whitworth* sind für gewöhnliche Befestigungsschrauben Normalien aufgestellt worden, welche das Verhältnis des Durchmessers eines Bolzens zur Anzahl der auf denselben zu schneidenden Gänge feststellen. Die Tabelle auf Seite 231) giebt sowohl über die genannten Verhältnisse, als auch über die an Schrauben und glatten Bolzen gebräuchlichen Abmessungen Aufschlufs.

Erwähnt sei noch, dafs man für Schrauben mit flachem Gewinde die Anzahl der Gänge halb so grofs, als für Schrauben mit spitzem Gewinde nimmt.

In neuerer Zeit hat man, besonders für Mechaniker-Gewinde, Tabellen aufgestellt, welche eine bestimmte Gangzahl a u f 1 cm a n s t a t t a u f 1 Z o l l angeben. Derartige Gewinde lassen sich jedoch, ohne Anwendung besonderer Übersetzungsräder, auf den gewöhnlichen Drehbänken nicht schneiden.

In nachstehender Tabelle sind die Anzahl der Gänge n auf 10 mm Bolzenlänge bei einem Durchmesser von d mm angegeben.

$$\text{Ist } d = \underline{6\,.\,8\,.\,10\,.\,12\,.\,15\,.\,18\,.\,21\,.\,24\,.\,27\,.\,30}$$
$$\text{so wird } n = 7\,.\,6\,.\,5\tfrac{1}{2}\,.\,5\,.\,4\tfrac{1}{4}\,.\,4\,.\,3\tfrac{3}{4}\,.\,3\,.\,3\,.\,2\tfrac{1}{2}$$
$$\text{Ist } d = \underline{34\,.\,38\,.\,42\,.\,46\,.\,50\,.\,55\,.\,60\,.\,65\,.\,70\,.\,75}$$
$$\text{so wird } n = 2\tfrac{1}{2}\,.\,2\tfrac{1}{2}\,.\,2\tfrac{1}{8}\,.\,2\tfrac{1}{8}\,.\,1\tfrac{7}{8}\,.\,1\tfrac{7}{8}\,.\,1\tfrac{5}{8}\,.\,1\tfrac{5}{8}\,.\,1\tfrac{3}{8}\,.\,1\tfrac{3}{8}$$

In den Maschinenfabriken schneidet man die Schrauben regelmäfsig nach Whitworth-Skala, wobei man sich gewöhnlich der den Drehbänken mitgegebenen, im voraus für jede Drehbank berechneten Tabellen bedient, welche die zur Erreichung einer vorgeschriebenen Ganghöhe zu verwendenden Wechselräder genau bezeichnen.

Übungsbeispiele:

1) Auf einer Drehbank, deren Leitspindel $^3/_8''$ Ganghöhe hat, soll eine Schraube mit 11 Gängen auf 1 Zoll geschnitten werden. Wie viel Zähne mufs das auf die Leitspindel zu steckende Rad haben, wenn die Zähnezahl des Triebes zu 16 angenommen wird?

Lösung: $b = 66$ Zähne.

2) Welche Ganghöhe hatte die Leitspindel einer Drehbank, wenn vermittelst derselben eine Schraube mit 16 Gängen auf 1 Zoll geschnitten wurde. Das Rad auf der Leitspindel hatte 64 Zähne und das Trieb 16 Zähne?

Lösung: $h = {}^1/_4''$ Ganghöhe.

3) Auf einer Drehbank sitzt ein Trieb mit 24 Zähnen, auf der Leitspindel ein Rad mit 108 Zähnen; die Leitspindel hat $^1/_2''$ Ganghöhe. Wie viel Gänge auf 1 Zoll erhält die zu schneidende Schraube?

Lösung: $x = 9$ Gänge.

4) Auf einer Drehbank soll eine Schraube mit 18 Gängen auf 1 Zoll geschnitten werden. Welche Ganghöhe erhält die Leitspindel, wenn $a = 40$; $b = 60$; $a_1 = 20$; $b_1 = 120$ angenommen werden?

Lösung: $h = {}^1/_2''$ Ganghöhe.

5) Bei einer Drehbank sind gegeben: $a = 20$; $b = 60$; $a_1 = 30$ und $b_1 = 90$. Die Ganghöhe der Leitspindel beträgt $^1/_4''$. Wie viel Gänge auf 1 Zoll erhält die zu schneidende Schraube?

Lösung: $x = 36$ Gänge.

6) Eine Drehbank habe eine Leitspindel mit $^1/_4''$ Ganghöhe. Das Rad auf der Spindel habe 20 Zähne, das Rad auf der Leitspindel 80 Zähne und das Rad auf der Vorgelegewelle 60 Zähne. Es soll eine Schraube mit 24 Gängen geschnitten werden. Welche Zähnezahl erhält das Trieb auf der Vorgelegewelle?

Lösung: $a_1 = 40$ Zähne.

Normaltabelle der Abmessungen von Schrauben (System Whitworth) und glatten Bolzen.

(Normalien der preufsischen Staatsbahnen.)

No. der Schrauben	Durchmesser der glatten Bolzen in mm	Schrauben-Bolzen: Gewindedurchmesser in den Spitzen, Zoll engl.	Gewindedurchmesser in den Spitzen, mm	Kerndurchmesser mm	Zahl der Gänge auf einen Zoll engl.	Höhe: des sechseckigen oder viereckigen Kopfes in mm	Höhe: der Mutter in mm	Höhe: der Gegenmutter in mm	Höhe: des versenkten Kopfes im Ganzen mm	Höhe: des versenkten Kopfes im Konus mm	Schlüsselweite und Seite des viereckigen Kopfes in mm	Seite des Sechsecks für den Kopf oder die Mutter in mm	Splintdurchmesser in mm	Entfernung des Splintes: durch die Mutter vom Rande der letzteren in mm	Entfernung des Splintes: vor der Mutter vom Ende des Bolzens in mm	Schrauben mit versenkten Köpfen: Durchmesser des äufseren Kreises, der die Ecken des viereckigen Kopfes bricht, in mm	Seite des viereckigen Kopfes (Ecken gebrochen) in mm	Durchmesser des Ansatzes bei den Schrauben mit runden Köpfen	Glatte Bolzen: Durchmesser des Kopfes in mm	Höhe des Kopfes in mm	Unterlegscheiben: Durchmesser für glatte Bolzen in mm	Durchmesser für Schraubenmuttern in mm	Stärke der Unterlegscheibe in mm	Höhe des Splintringes in mm
3	10	$^3/_8$	9,52	7,49	16	7	10	7	6	5	17	9,8	4	7	6	14	12	13	16	5	16	22	3	10
4	13	$^1/_2$	12,70	9,99	12	9	13	10	8	7	22	12,7	5	9	8	20	17	16	22	6	22	28	4	11
5	16	$^5/_8$	15,87	12,91	11	12	16	12	10	8	28	16,2	5	12	8	22	17	20	26	7	26	36	4	12
6	20	$^3/_4$	19,05	15,79	10	14	20	15	12	10	33	19,1	6	14	9	26	22	23	32	8	32	44	5	13
7	23	$^7/_8$	22,22	18,60	9	16	23	17	14	11	39	22,5	6	16	9	34	28	26	36	9	36	50	5	15
8	26	1	25,40	21,33	8	18	26	19	16	13	44	25,4	7	18	10	34	28	30	40	10	40	56	6	16
9	30	$1^1/_8$	28,57	23,92	7	20	30	21	18	14	50	28,9	7	20	12	40	33	33	44	10	44	62	6	17
10	33	$1^1/_4$	31,75	27,10	7	22	33	24	20	16	55	31,8	8	22	12	40	33	36	48	11	48	68	7	18
11	36	$1^3/_8$	34,92	29,50	6	24	36	26	22	18	61	35,2	9	24	13	—	—	—	52	11	52	74	7	19
12	40	$1^1/_2$	38,10	32,68	6	26	40	28	24	20	66	38,1	9	26	14	—	—	—	56	12	56	80	8	20
13	43	$1^5/_8$	41,27	34,76	5	29	43	31	26	21	72	41,6	10	29	15	—	—	—	60	12	60	86	8	21
14	46	$1^3/_4$	44,45	37,94	5	31	46	33	28	23	77	44,5	10	31	15	—	—	—	64	13	64	92	9	22
15	50	$1^7/_8$	47,63	40,40	$4^1/_2$	34	50	36	30	25	83	47,9	10	34	16	—	—	—	68	13	68	100	9	23

Zulässige Belastung eines Schraubenbolzens: $P = 200 \cdot d^2$ kg, wenn d der Durchmesser in cm ist.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Pumpen.

Um Wasser oder andere Flüssigkeiten auf beliebige Höhen zu heben und dann noch weiter zu befördern, dienen als bestes und bewährtestes aller bekannten Mittel die Pumpen.

Es sollen in Folgendem nur die Kolbenpumpen — Maschinen, welche aus Cylindern bestehen, in denen sich zweckmäfsig konstruierte Kolben bewegen, durch welche das Wasser oder eine andere zu hebende Flüssigkeit angesaugt und dann weiter fortgeschafft wird — einer eingehenden Besprechung unterzogen werden und die erforderlichen Berechnungen sich hauptsächlich auf die zu liefernde Wassermenge, die wichtigsten Abmessungen, und auf die zum Betriebe einer Pumpe erforderliche Arbeit erstrecken.

Man unterscheidet einfachwirkende und doppeltwirkende Kolbenpumpen, je nachdem die Pumpe bei einem Hin- und Hergange des Kolbens einmal oder zweimal Wasser ansaugt und weiter drückt.

Für die einfachwirkende Kolbenpumpe müfste die Wassermenge, wenn die thatsächlichen Verluste durch Zurückfliefsen einer geringen Wassermenge durch die Ventile nicht vorhanden wären, gleich dem Inhalte des von dem Kolben durchlaufenen Raumes sein.

Bezeichnet man mit:

Q_t die bei jedem Kolbenhube angesaugte Wassermenge in cbm;

d den Durchmesser des Kolbens in m;

s den Kolbenhub in m, so ist:

$$Q_t = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot s \text{ Kubikmeter.}$$

Diese sog. theoretische Wassermenge ist jedoch der schon erwähnten Verluste wegen zu grofs.

Um die effektive, d. i. die in der That von der Pumpe gelieferte Wassermenge zu finden, mufs man den in vorstehender Gleichung für Q_t gefundenen Wert mit einem Koeffizienten c, welcher den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Pumpe angiebt, multiplizieren. Man setzt:

Für sorgfältig ausgeführte Pumpen: $c = 0{,}95$.
„ gute „ $c = 0{,}90$.
„ gewöhnliche „ $c = 0{,}80$.

Dementsprechend wird die bei jedem Kolbenhube von einer einfach wirkenden Pumpe gelieferte effektive Wassermenge:

$$Q_e = c \cdot \frac{d_2 \cdot \pi}{4} \cdot s = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s \text{ Kubikmeter;}$$

oder, da ein cbm = 1000 l ist:

$$Q_e = 1000 \cdot 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s = 785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s \text{ Liter.}$$

Bezeichnet man noch mit

n die Anzahl der Doppelhübe des Kolbens in 1 Minute,

so macht derselbe deren in einer Sekunde $\frac{n}{60}$ und ergiebt sich somit die in 1 Sekunde von der Pumpe zu liefernde Wassermenge Q_s zu:

$$Q_s = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s \cdot \frac{n}{60} = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot \frac{s \cdot n}{60} \text{ Kubikmeter.}$$

Nach Formel 7) ist aber die mittlere Kolbengeschwindigkeit $v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60}$, also demgemäfs der Wert $\frac{s \cdot n}{60} = \frac{v}{2}$; mithin erhält man auch:

$$Q_s = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot \frac{v}{2} \text{ Kubikmeter.}$$

Nimmt man noch, um ganz sicher zu gehen, c = 0,8 an, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$Q_s = 0{,}785 \cdot 0{,}8 \cdot d^2 \cdot \frac{s \cdot n}{60}.$$

$$= 0{,}011 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Kubikmeter} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 169)$$

$$= 11 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Liter.}$$

$$= 0{,}785 \cdot 0{,}8 \cdot d^2 \cdot \frac{v}{2}.$$

$$= 0{,}314 \cdot d^2 \cdot v \text{ Kubikmeter} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 170)$$

$$= 314 \cdot d^2 \cdot v \text{ Liter.}$$

Der Durchmesser des Pumpencylinders berechnet sich nach Formel 169) wie folgt:

$$d = \sqrt{\frac{Q_s}{0{,}011 \cdot n \cdot s}} = 9{,}5 \cdot \sqrt{\frac{Q_s}{n \cdot s}} \text{ Meter} \quad . \quad . \quad . \quad 171)$$

Aus Formel 170):

$$d = \sqrt{\frac{Q_s}{0{,}314 \cdot v}} = 1{,}785 \cdot \sqrt{\frac{Q_s}{v}} \text{ Meter} \quad . \quad . \quad . \quad 172)$$

Ferner entwickelt sich aus Formel 169) der Kolbenhub s zu:

$$s = \frac{Q_s}{0{,}011 \cdot d^2 \cdot n} = 90{,}9 \cdot \frac{Q_s}{d^2 \cdot n} \text{ Meter} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 173)$$

und aus der vorstehend angegebenen Gleichung für v zu:

$$s = \frac{30 \cdot v}{n} \text{ Meter} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 174)$$

Es empfiehlt sich, den Kolbenhub möglichst grofs zu nehmen, da jeder Wechsel der Kolbenbewegung mit Kraftverlusten verbunden ist.

Die Höhe des Hubes für gewöhnliche Handpumpen schwankt zwischen 0,15 m und 0,3 m.

Den Saug- und Druckrohren giebt man in der Regel gleiche Durchmesser, d. h. sie erhalten gleiche Querschnitte, welche man bei langen Leitungen gewöhnlich $= \frac{1}{2}$, bei kurzen jedoch $= \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ des Kolbenquerschnittes macht. Die Saugleitungen sind stets nach der Pumpe zu ansteigend zu legen.

Die Höhe, bis zu welcher eine Pumpe Wasser ansaugen kann, die Saughöhe, ist abhängig vom Kolbenhube und vom schädlichen Raume, d. i. demjenigen Raume, welcher sich zwischen dem Kolben in seiner tiefsten Stellung und dem geschlossenen Saugventile befindet.

Berücksichtigt man, dafs durch den mittlereren Luftdruck nur einer Wassersäule von 10,336 m das Gleichgewicht gehalten werden kann, mit anderen Worten, dafs das Wasser im luftleer gedachten Saugrohre durch den auf dem ganzen Wasserspiegel lastenden Atmosphärendruck nur auf die genannte Höhe steigen würde, so folgt, dass im günstigsten Falle der Kolben in seiner tiefsten Stellung nur 10 m über dem Wasserspiegel sich befinden dürfte.

Der Einflufs des schädlichen Raumes, des Ventilgewichtes (welches das steigende Wasser mit heben mufs), der Ungleichmäfsigkeit des Atmosphärendruckes und der Widerstände, welche das steigende Wasser in den Rohrleitungen zu überwinden hat, bedingt jedoch, dafs der Kolben nicht 10 m, sondern

für gute Pumpen nur 7 m bis 8 m und
„ gewöhnliche Pumpen nur 5 m bis 6 m

vom Wasserspiegel entfernt sein darf.

Die Druckhöhe ist jedoch eine beliebige; das Wasser über dem Kolben kann bei genügendem Kraftaufwande beliebig hoch gedrückt werden.

Die Geschwindigkeit des angesaugten Wassers — 0,7 m bis 1,3 m in der Sekunde — mufs stets grösser sein als die Kolbengeschwindigkeit, damit das Wasser dem Kolben folgen und dieser sich so nicht etwa von dem nachfolgenden Wasser trennen kann. Es entsteht in diesem Falle zwischen Kolben und Wasseroberfläche ein luftverdünnter Raum, welchen das Wasser sofort ausfüllen wird, wenn der Kolben, nahe dem Ende seines Hubes, eine langsamere Bewegung annimmt. Das Wasser prallt dann ziemlich heftig gegen den Kolben und verursacht dadurch den bekannten Wasserschlag.

Gebräuchliche Kolbengeschwindigkeiten sind:

Bei guten Pumpen 0,2 m bis 0,3 m in 1 Sekunde;
„ gewöhnlichen Pumpen 0,3 m bis 0,4 m in 1 Sekunde.

Gegen das Schlagen vorhandener Pumpen hilft man sich durch Beschweren der Pumpenventile, durch Vergröfserung der Saugrohre und durch Anbringung von Saug- und Druckwindkesseln.

Der Inhalt eines Windkessels soll gleich dem 4—6fachen Inhalte des Pumpencylinders sein.

Bei Feststellung der Gröfse der Ventilquerschnitte ist darauf zu achten, dass dieselben gross genug sein müssen, um das Wasser gleichmässig, d. h. ohne Beschleunigung durchzulassen. Der freie Durchgang derselben mufs daher mindestens gleich dem Querschnitte der Rohre sein.

Bezeichnet man mit:

d_1 den Durchmesser der Ventilöffnung in m;
F den Querschnitt der Rohre in qm;
f die Fläche des Ventilführungssteges, ebenfalls in qm, so folgt:

$$\frac{d_1{}^2 \cdot \pi}{4} = F + f.$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{(F + f) \cdot 4}{\pi}}$$

$$d_1 = 1{,}13 \cdot \sqrt{F + f} \text{ Meter} \quad \ldots\ldots \quad 175)$$

Sobald das Wasser das Ventil passiert hat, mufs es durch eine Öffnung = dem Umfange des Ventiles und der Hubhöhe h desselben = $h \cdot d_1 \cdot \pi$ in das über dem Ventile befindliche Druckrohr treten. Die genannte Öffnung mufs natürlich, um dem Wasser freien Durchgang zu gewähren gleich dem Ventilquerschnitte sein, woraus

$$h \cdot d_1 \cdot \pi = \frac{d_1{}^2 \cdot \pi}{4} \text{ folgt. Mithin:}$$

$$h = \frac{d_1}{4} = \tfrac{1}{4} \cdot d_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 176)$$

Dieser Wert gilt im besonderen für das Kegelventil; dasselbe mufs nach der vorstehenden Rechnung einen Hub erhalten, dessen Höhe = $\frac{1}{4}$ seines Durchmessers ist.

Bei den Klappenventilen ist für die Gröfse des freien Durchganges der Ausschlagwinkel derselben mafsgebend. Nach *Grove* folgt für diesen Winkel γ:

1) Rechteckige Klappe:

Sind a und b die Seiten des Rechtecks, so ist für

$\frac{a}{b} = 1$ der Winkel $\gamma = 33^0$

$= \frac{3}{4}$ „ „ $\gamma = 39^0$

$= \frac{2}{3}$ „ „ $\gamma = 42^0$

$= \frac{1}{2}$ „ „ $\gamma = 49^0$

2) Halbrunde Klappe: $\gamma = 52^0$

3) Kreisrunde Klappe: $\gamma = 33^0$

Um eine bestimmte Wassermenge Q_s cbm in einer Sekunde auf eine Höhe von H Meter zu heben ist theoretisch, da 1 cbm Wasser = 1000 kg wiegt, eine Arbeit von $1000 \cdot Q_s \cdot H$ kgm erforderlich.

Bezeichnet man mit:

Q_s die in jeder Sekunde zu hebende Wassermenge in cbm (vergl. Formel 169 und 170);

H die Summe der Saug- und Druckhöhen,

so ist die in einer Sekunde erforderliche Betriebsarbeit in Pferdestärken:

$$A = \frac{Q_s \cdot H \cdot 1000}{75} \cdot c = 13{,}3 \cdot Q_s \cdot H \cdot c \text{ Pferdestärken*)} \quad . \; . \; 177)$$

wenn c einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet, welcher

für sorgfältig ausgeführte Pumpen c = 1,25

„ gute „ c = 1,30

„ gewöhnliche „ c = 1,4 bis 1,5

zu setzen ist.

Für die doppelt wirkende Kolbenpumpe mufs unter sonst gleichen Verhältnissen, und da die Pumpe sowohl bei dem Hingange als auch bei dem Hergange des Kolbens Wasser ansaugt, die in einer Sekunde zu liefernde Wassermenge doppelt so grofs, als bei der einfach wirkenden Kolbenpumpe sein.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen folgt demnach aus Formel 169):

$$Q_s = 2 \cdot 0{,}011 \cdot d^2 \cdot n \cdot s = 0{,}022 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Kubikmeter} . \quad 178)$$
$$= 22 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Liter.}$$

Aus Formel 170):

$$Q_s = 2 \cdot 0{,}314 \cdot d^2 \cdot v = 0{,}628 \cdot d^2 \cdot v \text{ Kubikmeter} \quad . \; . \; . \quad 179)$$
$$= 628 \cdot d^2 \cdot v \text{ Liter.}$$

---

*) 1 cbm Wasser = 1000 Liter = 1000 kg.
Q_s cbm „ = Q_s . 1000 Liter = Q_s . 1000 kg.

Für den Durchmesser des Pumpenkolbens ergiebt sich aus Formel 178):

$$d = \sqrt{\frac{Qs}{0{,}022 \, . \, n \, . \, s}} = 6{,}74 \, . \sqrt{\frac{Qs}{n \, . \, s}} \text{ Meter} \; . \; . \quad 180)$$

Aus Formel 179):

$$d = \sqrt{\frac{Qs}{0{,}628 \, . \, v}} = 1{,}262 \, . \sqrt{\frac{Qs}{v}} \text{ Meter} \; . \; . \; . \; . \; . \quad 181)$$

Der Kolbenhub berechnet sich aus Formel 178) zu:

$$s = \frac{Qs}{0{,}022 \, . \, d^2 \, . \, n} = 45{,}5 \, . \frac{Qs}{d^2 \, . \, n} \text{ Meter} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 182)$$

Über die Aufstellung und Inbetriebsetzung der Wasserpumpen ist noch Folgendes zu bemerken:

Die Aufstellung der Pumpen in senkrechter Entfernung vom niedrigsten Wasserstande bis zum Druckventilsitze — Saughöhe — soll, wie schon erwähnt, nicht mehr als 6 bis 7 m betragen; geringere Entfernung ist nur vorteilhaft, wenn die Pumpen leicht und sicher arbeiten sollen. Bei mehr als 15 m Entfernung des Aufstellungsortes der Pumpe von der Saugestelle in wagerechter Richtung, ist die Saughöhe entsprechend zu verringern.

Auf das Dichthalten der Saugeleitung ist die gröſste Sorgfalt zu verwenden; dieselbe ist am Ende mit einem Saugekorb und einem Fuſsventil zu versehen. Die Saugeleitung ist stets nach der Pumpe zu ansteigend zu legen.

Um das Dichthalten der Saugeleitung zu prüfen, nimmt man das Saugventil heraus und füllt die Leitung mit Wasser auf; es darf dann während des Zeitraumes einer Stunde keine wahrnehmbare Abnahme des Wassers stattfinden. In der gesamten Rohrleitung — Sauge- wie Druckleitung — sind scharfe Krümmungen möglichst zu vermeiden.

Bei Dampfpumpen sind die Dampfzuleitungsrohre vor Inbetriebsetzung der Pumpen gut mit Dampf auszublasen, um die Rohre von allen Rückständen — Sand, Hammerschlag u. s. w. — zu befreien, damit diese nicht mit in den Schieberkasten und den Dampfcylinder gerissen werden.

Die Ventilgehäuse der Pumpen sollen möglichst freiliegend und leicht zugänglich angeordnet werden, um ein etwa notwendiges Nachschleifen der Ventilkegel leicht bewerkstelligen zu können.

Beispiele:*)

1) Welche theoretische Wassermenge Q_t mufs eine einfachwirkende Kolbenpumpe bei jedem Hube liefern, wenn dieselbe einen Kolbendurchmesser = 0,08 m und einen Kolbenhub = 0,200 m besitzt?

Die Wassermenge mufs gleich dem Inhalte des von dem Kolben durchlaufenen Raumes sein, folglich:

$$Q_t = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot s = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}08^2}{4} \cdot 0{,}2 = 0{,}001 \text{ cbm} = 1 \text{ Liter.}$$

2) Wie grofs ist die in jeder Sekunde gelieferte, effektive Wassermenge, wenn die genannte Pumpe 30 Hübe in der Minute macht?

Aus Formel 169) folgt:

$$Q_s = 0{,}011 \cdot d^2 \cdot n \cdot s = 0{,}011 \cdot 0{,}08^2 \cdot 30 \cdot 0{,}2$$
$$= 0{,}0004 \text{ cbm} = 0{,}4 \text{ Liter.}$$

3) Wie grofs ist hierbei die mittlere Kolbengeschwindigkeit?

$$v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60} = \frac{s \cdot n}{30} = \frac{0{,}2 \cdot 30}{30} = 0{,}2 \text{ m.}$$

4) Eine Pumpe hat einen Kolbendurchmesser von 0,12 m und einen Kolbenhub von 0,25 m. Dieselbe liefert bei 20 Kolbenspielen in der Minute 0,045 cbm = 45 l Wasser. Wieviel Prozent (%) beträgt diese Wassermenge von der theoretischen?

Die theoretische Wassermenge in 1 Minute ist:

$$Q_t = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot s \cdot n = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}12^2}{4} \cdot 0{,}25 \cdot 20 = 0{,}057 \text{ cbm} = 57 \text{ Liter.}$$

Das Verhältnis der beiden Wassermengen ist mithin:

$Q_s : Q_t = 45 : 57$; folglich der Wirkungsgrad:

$c = \frac{45}{57} = 0{,}79$; d. h. die effektive Wassermenge beträgt nur $\frac{79}{100} = 79\%$ der theoretischen.

5) Wie grofs ist der Kolbenhub einer doppelt wirkenden Pumpe, wenn dieselbe bei einem Kolbendurchmesser von 0,3 m und 40 Doppelhüben in der Minute 0,024 cbm Wasser in jeder Sekunde liefert?

Aus Formel 182) folgt:

$$s = 45{,}5 \cdot \frac{Q_s}{d^2 \cdot n} = 45{,}5 \cdot \frac{0{,}024}{0{,}3^2 \cdot 40} = 0{,}303 \text{ m} = 303 \text{ mm.}$$

6) Das Saugventil einer Pumpe hat eine freie Durchgangsöffnung von 50 qcm Inhalt. Wie grofs ist der Hub des Kegelventiles?

Der einem Querschnitte von 50 qcm entsprechende Durchmesser ist = 8 cm (siehe Tabelle im Anhang). Aus Formel 176) ergiebt sich demnach:

$$h = \frac{d_1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ cm.}$$

7) Eine Dampfmaschine von 6 Pferdestärken treibt eine Pumpe, welche in einer Minute eine Wassermenge von 2,5 cbm auf eine Höhe von 9 m fördert. Wie grofs ist der Wirkungsgrad dieser Pumpe?

Nach dem auf Seite 236) Gesagten ist die Arbeit der Pumpe in jeder Sekunde:

$$A = 1000 \cdot Q_s \cdot H = 1000 \cdot \frac{2{,}5}{60} \cdot 9 = 375 \text{ kgm.}$$

---

*) Vergleiche auch Beispiele unter „Mechanische Arbeit“, Seite 204.)

Die Arbeit der Dampfmaschine in jeder Sekunde ist aber:

$$A = 6 . 75 = 450 \text{ kgm};$$

mithin der Wirkungsgrad:

$$c = \frac{375}{450} = 0{,}83.$$

Es gehen demnach 1,00 — 0,83 = 0,17 = 17% der von der Dampfmaschine thatsächlich geleisteten Arbeit durch Reibung u. s. w. verloren.

8) Wie viel Pferdestärken sind erforderlich, um mit einer Pumpe stündlich 120 cbm Wasser auf eine Höhe von 50 m zu heben, wenn c zu 1,3 angenommen wird?

Die in jeder Sekunde zu hebende Wassermenge ist $= \frac{120}{60 . 60} =$ 0,033 cbm; mithin nach Formel 177):

$$A = 13{,}3 . Q_s . H . c = 13{,}3 . 0{,}033 . 50 . 1{,}3 = 28{,}5 \text{ Pferdestärken.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche theoretische Wassermenge Q_t liefert eine einfach wirkende Pumpe, deren Kolbendurchmesser 80 mm und deren Hub 300 mm beträgt, bei jedem einzelnen Hube?

Lösung: $Q_t = 1{,}51$ Liter.

2) Welche effektive Wassermenge Q_e liefert dieselbe Pumpe bei jedem Hube, wenn $c = 0.8$ angenommen wird?

Lösung: $Q_e = 1{,}21$ Liter.

3) Welche effektive Wassermenge Q_e liefert dieselbe Pumpe bei 20 Hüben, wenn sie doppelt wirkend ist?

Lösung: $Q_e = 48{,}4$ Liter.

4) Wieviel Liter Wasser liefert effektiv eine einfach wirkende Pumpe in einer Stunde, wenn der Durchmesser des Kolbens 140 mm und dessen Hub 420 mm beträgt, und wenn die Pumpe 12 Kolbenspiele in der Minute macht? ($c = 0{,}8$.)

Lösung: $Q_e = 3912$ Liter = 3,912 cbm.

5) Ein doppelt wirkendes Gebläse von 1,3 m Cylinderdurchmesser und 1,75 m Kolbenhub macht 18 Kolbenspiele in der Minute. Wie grofs ist die in jeder Sekunde gelieferte theoretische Windmenge?

Lösung: $Q_t = 1{,}393$ cbm.

6) Welche Zeit t braucht eine doppelt wirkende Pumpe von 500 mm Kolbendurchmesser und 1400 mm Hublänge, bei 10 Kolbenspielen in der Minute, um einen Wasserbehälter von 6 m Durchmesser und 2,5 m Höhe vollkommen mit Wasser zu füllen? ($c = 0{,}8$.)

Lösung: $t = 16{,}1$ Minuten = 16 Min. 6 Sek.

7) Welchen Durchmesser d mufs der Cylinder einer doppelt wirkenden Pumpe erhalten, welche bei 10 Kolbenspielen in der Minute und einer Hublänge von 0,5 m eine effektive Wassermenge von 300 Liter liefert?

Lösung: $d = 213$ mm.

8) Ein Wasserbehälter von 4 m Länge, 3 m Breite und 2,5 m Höhe soll durch eine einfach wirkende Pumpe in 30 Minuten gefüllt werden. Das Ausflufsrohr der Pumpe befindet sich 15 m über dem niedrigsten Wasserspiegel. Wie grofs ist die aufzuwendende Arbeit in Pferdestärken, welche der Betrieb dieser Pumpe erfordert?

Lösung: $A = 3{,}33$ Pferdestärken.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Riemen.

Nachdem bereits in Kapitel XV, Seite 147) die Berechnung der Durchmesser und der Übersetzungsverhältnisse der Riemenscheiben besprochen wurde, ist es noch notwendig, die Bestimmung der Riemenabmessungen selbst kennen zu lernen. Da die Riemendicke durch die Beschaffenheit der zur Herstellung der Riemen verwendeten Häute innerhalb gewisser Grenzen vorgeschrieben ist, wird es sich unter Zugrundelegung einer bestimmten Dicke des Riemens namentlich um die Berechnung der dieser Dicke entsprechenden Riemenbreite handeln.

Bezeichnet man mit:

N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken;

P den am Umfange der Scheibe wirksamen, zu übertragenden Druck in kg;

R den Halbmesser der getriebenen Scheibe in mm;

v die Riemengeschwindigkeit in m in jeder Sekunde;

n die Anzahl der Umdrehungen der getriebenen Scheibe in jeder Minute;

b die Breite ⎫ des Riemens in mm,
d die Dicke ⎭

so ist für die Geschwindigkeit des Riemens: *)

$$v = \frac{2 \, . \, R \, . \, \pi}{1000} \cdot \frac{n}{60};$$

für die Arbeit aber:

$$75 \, . \, N = P \, . \, v.$$

Multipliziert man beide Gleichungen, so folgt:

$$P = 716200 \cdot \frac{N}{R \, . \, n}.$$

Da der Riemen in erster Linie auf Zug-Festigkeit beansprucht wird, so ist sein Querschnitt F der auf ihn einwirkenden Kraft direkt proportional. (Vergl. Kapitel 18, 1.)

---

*) Es sind z. B. 5 mm $= \frac{5}{1000}$ m; mithin:

R mm $= \frac{R}{1000}$ m. Dementsprechend nach Formel 4),

wenn d = 2 . R gesetzt wird:

$$v = \frac{\pi \, . \, d \, . \, n}{60} = \pi \, . \, \frac{n}{60} \cdot \frac{2 \, . \, R}{1000} = \frac{2 \, . \, R \, . \, \pi}{1000} \cdot \frac{n}{60}.$$

Es ist mithin auch:

$$P = F \,.\, k = b \,.\, d \,.\, k$$

wenn k einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet, welcher = 0,100 bis 0,125 kg für 1 qmm Riemenquerschnitt ist.

Setzt man die beiden vorstehenden Werte von P einander gleich, so folgt:

$$b \,.\, d \,.\, k = 716200 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n}, \text{ mithin:}$$

$$b = \frac{1}{d \,.\, k} \,.\, 716200 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n}.$$

$$b = \frac{1}{d \,.\, k} \,.\, 716{,}2 \,.\, \left(1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n}\right) \quad . \quad . \quad 183)$$

Für einfache Riemen von 4 bis 8 mm Dicke ergiebt sich auf Grund vorstehender Formeln folgende Tabelle:

Riemenbreite d in mm	Riemendicke d in mm	k = 0,100 kg auf 1 qmm			k = 0,125 kg auf 1 qmm		
		Übertragbare Kraft auf 1 mm Riemenbreite in kg	Gesamte übertragbare Kraft P in kg	Werte von $1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n}$	Übertragbare Kraft auf 1 mm Riemenbreite in kg	Gesamte übertragbare Kraft P in kg	Werte von $1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n}$
50	4	0,4	20	0,0279	0,500	25,00	0,0349
60	4	0,4	24	0,0335	0,500	30,00	0,0419
70	5	0,5	35	0,0489	0,625	43,75	0,0611
80	5	0,5	40	0,0558	0,625	50,00	0,0698
90	6	0,6	54	0,0754	0,750	67,50	0,0942
100	6	0,6	60	0,0837	0,750	75,00	0,1047
110	6	0.6	66	0,0922	0,750	82,50	0,1152
120	7	0,7	84	0,1173	0,875	105,00	0,1466
130	7	0,7	91	0,1271	0,875	113,75	0,1588
140	7	0,7	98	0,1368	0,875	122,50	0,1710
150	7	0,7	105	0,1466	0,875	131,25	0,1833
160	7	0,7	112	0,1564	0,875	140,00	0,1955
180	7	0,7	126	0,1759	0,875	157,50	0,2199
200	7	0,7	140	0,1955	0,875	175,00	0,2444
250	8	0,8	200	0,2793	1,000	250	0,3491
300	8	0,8	240	0,3351	1,000	300	0,4189
350	8	0,8	280	0,3910	1,000	350	0,4887
400	8	0,8	320	0,4468	1,000	400	0,5585
450	8	0,8	360	0,5027	1,000	450	0.6283
500	8	0,8	400	0,5585	1,000	500	0,6981

Gelangen Doppelriemen zur Anwendung, so erhalten dieselben das 0,7fache der für einfache Riemen berechneten Breite; man vermeide für derartige Riemen die Scheibendurchmesser zu klein zu nehmen.

Die Breite der Riemenscheibe sei um $\frac{1}{4}$ der Breite des zugehörigen Riemens gröfser als dieser. Ist die Scheibe gewölbt, so soll die Wölbung nur $\frac{1}{20}$ der Riemenbreite betragen, da im anderen Falle leicht am Scheitel der Wölbung des Riemens eine bedeutende Vergröfserung der Spannung eintritt, wodurch im Riemen Risse entstehen, welche die Dauer seiner Betriebsfähigkeit bedeutend verkürzen.

Beispiele:

1) Wie breit mufs ein 6 mm dicker Riemen sein, welcher 3 Pferdestärken, bei 75 Umdrehungen in jeder Minute, auf eine Riemenscheibe von 450 mm Halbmesser übertragen soll?

Nimmt man k = 0,1 an, so folgt aus Formel 183):

$$b = \frac{716{,}2}{d \,.\, k} \,.\, 1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n} = \frac{716{,}2}{6 \,.\, 0{,}1} \,.\, 1000 \,.\, \frac{3}{450 \,.\, 75} = 106 \text{ mm.}$$

Will man den Wert nach vorstehender Tabelle bestimmen, so ist der Wert $1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n} = 1000 \,.\, \frac{3}{450 \,.\, 75} = 0{,}0888$ zu berechnen und findet man, da in der 5. Spalte dieser Wert zwischen denen der 6. und 7. Zeile von oben liegt, die entsprechende Riemenbreite b auch zwischen den Werten der 6. und 7. Zeile der ersten Spalte liegend. Diese Werte sind aber 100 und 110 mm; mithin der in der Mitte liegende Wert = 105 mm.

2) Zum Betriebe eines Sägegatters ist eine Arbeitsleistung von 6 Pferdestärken erforderlich. Eine auf der Kurbelwelle des Gatters sitzende Riemenscheibe von 400 mm Halbmesser soll 140 Umdrehungen in jeder Minute machen. Wie breit mufs der 6 mm starke Riemen werden?

Nimmt man hier k = 0,125 an, so folgt aus Formel 183):

$$b = \frac{716{,}2}{d \,.\, k} \,.\, 1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n} = \frac{716{,}2}{6 \,.\, 0{,}125} \,.\, 1000 \,.\, \frac{6}{400 \,.\, 140} = \text{rund } 102 \text{ mm.}$$

Der Wert $1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n} = 1000 \,.\, \frac{4}{400 \,.\, 140} = 0{,}1072$ ergiebt nach der Tabelle fast genau dasselbe Resultat.

3) Auf der Welle eines Vorgeleges sitzt eine Riemenscheibe von 150 mm Halbmesser, welche 400 Umdrehungen in jeder Minute macht und einen Ventilator mit 2000 Umdrehungen in jeder Minute treibt. Zum Betriebe des Ventilators sind 4 Pferdestärken erforderlich; wie grofs werden die Riemenabmessungen, wenn die Riemenscheibe auf dem Ventilator 60 mm Halbmesser hat?

Um die Riemenabmessungen nach der Tabelle zu bestimmen, berechne man:

a) für die Riemenscheibe des Vorgeleges den Wert:

$$1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n} = 1000 \,.\, \frac{4}{150 \,.\, 400} = 0{,}0667.$$

Setzt man hier k = 0,125, so bedingt die Tabelle einen Riemen von rund 80 mm Breite und 5 mm Dicke;

b) für die Riemenscheibe auf der Ventilatorwelle den Wert:

$$1000 \,.\, \frac{N}{R \,.\, n} = \frac{1000 \,.\, 4}{60 \,.\, 2000} = 0{,}0333.$$

Setzt man hier k = 0,100, so ergiebt sich nach der Tabelle ein Riemen von 60 mm Breite und 4 mm Dicke.

4) Wie viel Pferdestärken überträgt ein 250 mm breiter und 8 mm dicker Riemen, wenn der Halbmesser der getriebenen Scheibe = 600 mm und die Umdrehungen zu 120 in jeder Minute angenommen werden?

Aus der vorstehend entwickelten Formel: $P = 716200 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ folgt, wenn den Riemenabmessungen entsprechend, nach der Tabelle $P = 200$ kg und $k = 0{,}100$ angenommen werden:

$$N = \frac{P \cdot R \cdot n}{716200} = \frac{200 \cdot 600 \cdot 120}{716200} = \text{rund } 20 \text{ Pferdestärken.}$$

5) Wie grofs ist hierbei die Riemengeschwindigkeit v in jeder Sekunde?

Aus der Formel für die Riemengeschwindigkeit: $P \cdot v = 75 \cdot N$ folgt:

$$v = \frac{75 \cdot N}{P} = \frac{75 \cdot 20}{200} = 7{,}5 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

1) Wie stark mufs ein 150 mm breiter Riemen werden, welcher 6 Pferdestärken bei 80 Umdrehungen in jeder Minute auf eine Riemenscheibe von 500 mm Halbmesser übertragen soll? ($k = 0{,}100$.)

Lösung: $d = 7$ mm.

2) Von der Kurbelwelle einer 5 Pferdestärken leistenden Dampfmaschine wird eine Vorgelegewelle angetrieben, auf welcher eine Riemenscheibe von 1200 mm Durchmesser sitzt. Welche Breite erhält der zum Betriebe dieser Vorgelegewelle dienende Riemen, wenn die Welle 90 Umdrehungen in jeder Minute macht? ($k = 0{,}100$.)

Lösung: $b = 110$ mm.

3) Wie viel Pferdestärken können durch einen 200 mm breiten und 7 mm dicken Riemen übertragen werden, wenn der Halbmesser der getriebenen Scheibe zu 500 mm und die Anzahl der Umdrehungen in jeder Minute zu 150 angenommen werden? ($P = 140$ kg; $k = 0{,}1$.)

Lösung: 14,7 Pferdestärken.

4) Am Umfange einer Riemenscheibe wird durch einen Riemen ein Zug von 60 kg ausgeübt und durch diese Kraft eine Arbeit von 8 Pferdestärken geleistet. Wie grofs ist die Riemengeschwindigkeit in jeder Sekunde?

Lösung: $v = 10$ m.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Zahnräder.

Die Zahnräder dienen zur Übertragung der drehenden Bewegung von einer Welle auf eine andere derart, dafs die Zähne des einen sich drehenden Rades, in die Zahnlücken des anderen eingreifen und so auf dieses die Bewegung fortpflanzen.

Im Maschinenbau fertigt man die Zähne zweier zusammen arbeitender Räder entweder an beiden Rädern aus Eisen, in welchem Falle die Räder „Eisenräder“ genannt werden, oder es erhält nur das eine Rad eiserne, das andere dagegen hölzerne Zähne, in welchem Falle die Räder „Holz-Eisenräder“ heifsen.

Die aus den Radmittelpunkten beschrieben gedachten, sich berührenden Kreise eines Räderpaares, welche jederzeit gleiche Umfangsgeschwindigkeiten*) haben, und welche man als die Berührungskreise der noch nicht mit Zähnen versehenen Räder betrachten kann, nennt man „Teilkreise“. Auf diesen wird die „Teilung“, d. i. die Entfernung von der einen Flanke eines Zahnes bis zur entsprechenden des benachbarten Zahnes, (Fig. 106) aufgetragen, und mufs dieselbe für je zwei zusammen arbeitende Räder stets gleich grofs sein. Die Zähnezahlen stehen somit in demselben Verhältnisse wie die Umfänge, oder die Durchmesser, oder die Halbmesser der zugehörigen Teilkreise; d. h. besitzt ein Zahnrad von 10 cm Teilkreisdurchmesser 25 Zähne, so mufs ein mit diesem in Eingriff stehendes Rad von 30 cm Teilkreisdurchmesser, da der letztere Durchmesser 3 mal gröfser ist als der erstere, auch 3 mal soviel Zähne, also = 3 . 25 . = 75 Zähne erhalten.

Für die Berechnung der Zähne der Zahnräder bezeichne:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{t} & \text{die Teilung,} \\ \mathrm{Z} & \text{die Zähnezahl,} \\ \mathrm{R} & \text{den Teilkreishalbmesser in cm} \end{array}\right\} \text{des Rades;}$$

P den Zahndruck in kg $= 71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ (siehe Kap. 22, Seite 240 und Anmerkung Seite 249);
s die Zahnstärke, auf dem Teilkreise gemessen;
b die Zahnbreite;
l die Zahnlänge;
N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken;
n die Anzahl der Umdrehungen in jeder Minute.

Um die Beziehungen zwischen Z, t und R festzustellen, geht man von der Thatsache aus, dafs das Produkt aus Zähnezahl und Teilung gleich dem Umfange des zugehörigen Teilkreises ist. Es wird mithin:

$$Z \cdot t = 2 \cdot R \cdot \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 184)$$

$$\text{Folglich: } t = \frac{2 \cdot R}{Z} \cdot \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 185)$$

*) Vergl Seite 148.)

$$R = \frac{Z}{2} \cdot \frac{t}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 186)$$

$$Z = 2 \cdot R \cdot \frac{\pi}{t} = \frac{2 \cdot R}{\frac{t}{\pi}} \quad \ldots\ldots \quad 187)$$

Um für den Halbmesser der Räder möglichst ganze Zahlen zu erhalten, wählt man die Teilung stets als ein Vielfaches der Zahl π, welche Forderung Formel 185) bereits zum Ausdruck bringt. Zur Vereinfachung der für die vorstehenden Formeln erforderlichen Berechnungen diene nachstehende Tabelle:

t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$	t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$	t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$	t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$
14	4,4563	0,2244	9	2,8648	0,3491	4,5	1,4324	0,6981	2,2	0,7003	1,4280
13	4,1380	0,2417	8	2,5465	0,3927	4,0	1,2732	0,7854	1,8	0,5730	1,7453
12	3,8197	0,2618	7	2,2282	0,4488	3,5	1,1141	0,8976	1,5	0,4775	2,0944
11	3,5014	0,2856	6	1,9099	0,5236	3,0	0,9549	1,0472	1,2	0,3820	2,6180
10	3,1831	0,3142	5	1,5915	0,6283	2,6	0,8276	1,2083	1,0	0,3183	3,1416

Erscheinen die Werte von t nicht in so abgerundeten Zahlen, wie dies in vorstehender Tabelle der Fall ist, so kann die folgende Tabelle benützt werden:

t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$
14,1372	4,5	8,7965	2,8	5,6549	1,8	3,1416	1,0	1,8850	0,6
12,5664	4,0	7,8540	2,5	5,0265	1,6	2,8274	0,9	1,5708	0,5
11,3097	3,6	6,9115	2,2	4,3982	1,4	2,5133	0,8	1,2566	0,4
10,0531	3,2	6,2832	2,0	3,7699	1,2	2,1991	0,7	0,9425	0,3

Beispiele:

1) Ein Rad von 90 cm Teilkreishalbmesser hat eine Teilung t = 3,5 cm. Wie viel Zähne erhält das Rad?

Aus Formel 187) folgt:

$$Z = 2 \cdot R \cdot \frac{\pi}{t} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 3{,}14}{3{,}5} = 162 \text{ Zähne.}$$

2) Wie grofs ist die Teilung, wenn ein Rad einen Teilkreishalbmesser von 60 cm und 80 Zähne hat?

Aus Formel 185) folgt:

$$t = \frac{2 \cdot R}{Z} \cdot \pi = \frac{2 \cdot 60 \cdot 3{,}14}{80} = 4{,}71 \text{ cm.}$$

3) Ein Rad soll 70 Zähne und 3 cm Teilung erhalten. Wie grofs wird der Teilkreishalbmesser?

Für $t = 3$ giebt die erste der beiden vorstehenden Tabellen den Wert $\frac{t}{\pi} = 0{,}9549$; mithin nach Formel 186):

$$R = \frac{Z}{2} \cdot \frac{t}{\pi} = 35 \cdot 0{,}9549 = 33{,}42 \text{ cm}.$$

4) Welche Zähnezahl erhält ein Rad von 60 cm Teilkreishalbmesser bei 5 cm Teilung?

Für $t = 5$ giebt die vorgenannte Tabelle den Wert $\frac{\pi}{t} = 0{,}6283$; es folgt demnach aus Formel 187):

$$Z = 2 \cdot R \cdot \frac{\pi}{t} = 2 \cdot 60 \cdot 0{,}6283 = 75 \text{ Zähne}.$$

5) Bei der Aufnahme eines vorhandenen Zahnrades wurde die Teilung zu 2,1991 cm ermittelt. Wie grofs wird der Teilkreishalbmesser eines neuen Rades von 60 Zähnen?

Für die genannte Teilung giebt die letzte Tabelle den Wert $\frac{t}{\pi} =$ 0,7; mithin nach Formel 186):

$$R = \frac{Z}{2} \cdot \frac{t}{\pi} = 30 \cdot 0{,}7 = 21 \text{ cm}.$$

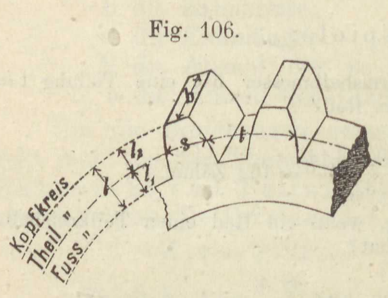
6) Für ein neu zu konstruierendes Zahnrad sind die Teilung $t = 1{,}2\,\pi$ und der Teilkreisdurchmesser = 120 cm vorgeschrieben. Wie grofs ist die Teilung in cm, und wieviel Zähne erhält das Rad?

Für den Wert $\frac{t}{\pi} = 1{,}2$ ergiebt sich aus der letzten Tabelle Seite 245) die Teilung $t = 3{,}7699$ cm.

Für Z folgt aus Formel 187) unter Benützung der genannten Tabelle:

$$Z = \frac{2 \cdot R}{\frac{t}{\pi}} = \frac{120}{1{,}2} = 100 \text{ Zähne}.$$

Fig. 106.



Bei Feststellung der Hauptabmessungen der Zähne geht man, indem man die Verhältnisse berücksichtigt, unter denen die Räder arbeiten, von der Zahnstärke s, d. i. der Stärke des Zahnes auf dem Teilkreise gemessen, aus.

In der Praxis ist es vielfach üblich, die Abmessungen der Zähne auf die Teilung zu beziehen; die gebräuchlichen Werte sollen mit angeführt werden. Nennt man wie früher, die Teilung t, so wird die Zahnstärke

1) bei Eisen auf Eisen:

Für roh bleibende Zähne $s = \frac{19}{40} . t$ . . . . . 188)

folglich: $\mathbf{t = 2{,}1 . s}$ . . . . . . 189)

„ bearbeitete Zähne $s = \frac{19}{40} . t$ bis $\frac{39}{80} . t$. 190)

2) bei Holz auf Eisen:

Für den Eisenzahn $s = \frac{16}{40} . t = 0{,}4 . t$ . . 191)

„ „ Holzzahn $s = \frac{23}{40} . t$ . . . . 192)

Die Zahnwurzel, d. i. die Länge des Zahnes zwischen Fuſskreis und Teilkreis, wird:

$$l_1 = 0{,}4 . t = 0{,}84 . s \quad \ldots\ldots \quad 193)$$

Die Zahnkrone, d. i. die Länge des Zahnes zwischen Teilkreis und Kopfkreis, wird:

$$l_2 = 0{,}3 . t = 0{,}63 . s \quad \ldots\ldots \quad 194)$$

Aus Formel 193 und 194) folgt mithin für die Zahnlänge l:

$$l = l_1 + l_2 = 0{,}4 . t + 0{,}3 . t$$
$$= 0{,}7 . t = 1{,}47 . s \quad \ldots\ldots \quad 195)$$

Ferner ist der tangentiale Spielraum

zwischen zwei unbearbeiteten Zähnen $= \frac{t}{20} = 0{,}105 . s$;

„ „ bearbeiteten „ $= \frac{t}{40} = 0{,}053 . s$.

Der Spielraum in radialer Richtung ist $= \frac{t}{10} = 0{,}21 . s$.

Für die Zahnbreite b, welche gewöhnlich gleich der Radbreite ist, sind die Betriebs-Verhältnisse, unter denen die Räder zur Verwendung gelangen, maſsgebend. Man setzt nach *Grove:*

$b = \begin{Bmatrix} 2 . t \text{ bis } 2{,}5 . t \\ 4{,}2 . s \text{ „ } 5{,}3 . s \end{Bmatrix}$ für langsam laufende Räder (z. B. Räder an Aufzugmaschinen).

$b = \begin{Bmatrix} 2{,}5 . t \text{ bis } 3 . t \\ 5{,}3 . s \text{ „ } 6{,}3 . s \end{Bmatrix}$ für Transmissionsräder mit rascherem Gange und nicht bearbeiteten Zähnen.

$b = \begin{Bmatrix} 3 . t \text{ bis } 3{,}5 . t \\ 6{,}3 . s \text{ „ } 7{,}4 . s \end{Bmatrix}$ für schnell laufende Räder mit bearbeiteten, oder durch Maschinen geformten Zähnen.

$b = \begin{Bmatrix} 3{,}5 . t \text{ bis } 5 . t \\ 7{,}4 . s \text{ „ } 10{,}5 . s \end{Bmatrix}$ desgl. bei sehr genauer Ausführung und nicht zu grosser Teilung.

Zur Ermittelung der Zahnstärke s denke man sich im ungünstigsten Falle, dafs die Kraft P nicht, wie üblich, im Teilkreise, sondern an der höchsten Kante der Zahnkrone angreift, und dafs die Zahnstärke am Fufse des Zahnes, d. h. da, wo derselbe am Radkranze haftet, gleich derjenigen im Teilkreise sei. Man kann alsdann jeden Zahn als ein Prisma betrachten, dessen eines Ende belastet und dessen anderes Ende am Zahnkranze festgehalten wird. Nach den bei Besprechung der Biegungsfestigkeit aufgestellten Formeln (Tabellen auf Seite 186 und 187) folgt für diesen Fall:

$$P \,.\, l = W \,.\, k = \frac{b \,.\, s^2}{6} \,.\, k, \text{ und damit:}$$

$$P = \frac{b \,.\, s^2}{6} \,.\, \frac{k}{l}$$

wenn k gleich dem Koeffizienten der Biegungsfestigkeit für Gufseisen ist. Setzt man in die vorstehende Gleichung den Wert für l aus Formel 195) $= 1{,}47 \,.\, s$ ein, so wird:

$$P = \frac{b \,.\, s^2}{6 \,.\, l} \,.\, k = \frac{b \,.\, s^2}{6 \,.\, 1{,}47 \,.\, s} \,.\, k, \text{ woraus}$$

$$b \,.\, s = \frac{8{,}8 \,.\, P}{k} \text{ folgt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 196)$$

Den Koeffizienten k, d. i. die zulässige Belastung auf 1 qcm, setzt man:

k = 450—350 kg für Räder an Aufzugmaschinen, also solchen mit geringen Geschwindigkeiten;

k = 300—250 kg für ruhig gehende Transmissionsräder mit mittlerer Geschwindigkeit;

k = 200—180 kg für Transmissionsräder mit gröfserer Geschwindigkeit und solche, welche mäfsigen Stöfsen ausgesetzt sind;

k = 100—80 kg für Räder, welche starke Stöfse erleiden, oder welche sich in der Nähe grofser Schwungräder befinden.

Nimmt man für Windenräder k = 350 kg und $b = 2 \,.\, t = 4{,}2 \,.\, s$ an, so ergiebt sich aus Formel 196):

$$b \,.\, s = \frac{8{,}8 \,.\, P}{k} \text{ oder:}$$

$$4{,}2 \,.\, s^2 = \frac{8{,}8 \,.\, P}{350}, \text{ folglich:}$$

$$s^2 = 0{,}0059 \,.\, P.$$

$$s = \sqrt{0{,}0059 \,.\, P} = 0{,}08 \,.\, \sqrt{P} \text{ cm} \quad . \; . \; . \; . \quad 197)$$

Setzt man in Formel 197) den Wert $P = 71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ ein, so wird:*)

$$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}} = 0{,}08 \cdot 268 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}}$$

$$= 21{,}4 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}} \text{ cm} \quad \ldots\ldots \quad 198)$$

Um für schneller laufende Transmissionsräder, welche mäſsige Stöſse erleiden, die Zahnstärke zu finden, erhält man, wenn $k = 180$ kg und $b = 3 \cdot t = 6{,}3 \cdot s$ angenommen werden, aus Formel 196):

$$b \cdot s = \frac{8{,}8 \cdot P}{k} \text{ oder}$$

$$6{,}3 \cdot s^2 = \frac{8{,}8 \cdot P}{180}, \text{ folglich:}$$

$$s^2 = 0{,}0079 \cdot P \text{ und}$$

$$s = \sqrt{0{,}0079 \cdot P} = 0{,}09 \cdot \sqrt{P} \text{ cm} \quad \ldots\ldots \quad 199)$$

oder, wenn man auch hier $P = 71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ setzt:

$$s = 0{,}09 \cdot \sqrt{71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}} = 24{,}1 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}} \text{ cm} \quad \ldots \quad 200)$$

Für langsam laufende, oder starken Stöſsen ausgesetzte Transmissionsräder würden zur Berechnung von s die diesbezüglichen Werte von k und b in Formel 196) einzusetzen, und dann genau wie vorstehend zu verfahren sein.

Beispiele:

1) Für den auf Seite 123, Beispiel 4) in seinem Vorgelege berechneten Krahn sollen die Zahnstärken bestimmt werden.

Die Zahndrucke wurden ermittelt zu:

$$x = 120 \text{ kg und } y = 300 \text{ kg.}$$

Es ergiebt sich demnach für das Trieb auf der Kurbelwelle und das Rad auf der Vorgelegewelle, nach Formel 197):

$$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{120} = 0{,}88 \text{ cm;}$$

ferner für das Trieb auf der Vorgelegewelle und das Rad auf der Trommelwelle:

$$s_1 = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{300} = 1{,}4 \text{ cm.}$$

2) Welche Abmessungen erhalten die Zähne der Räder der auf Seite 122, Beispiel 1) berechneten Winde?

Der Druck zwischen den Zähnen wurde daselbst zu 133,3 kg gefunden; es ergiebt sich mithin aus Formel 197):

$$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{133{,}3} = 0{,}9 \text{ cm.}$$

---

*) Vergl. Seite 241 und 244.) Der Wert 716200 muſs hier in 71620 übergehen, da bei Zahnrädern R in cm gegeben ist.

Es folgt demnach

aus Formel 189): Teilung $t = 2{,}1 \,.\, s = 2{,}1 \,.\, 0{,}9 = 1{,}9$ cm.

" " 195): Zahnlänge $l = 0{,}7 \,.\, t = 0{,}7 \,.\, 1{,}9 = 1{,}3$ cm.

und die Zahnbreite $b = 2 \,.\, t = 2 \,.\, 1{,}9 = 3{,}8$ cm.

3) Für die auf Seite 123, Beispiel 3) berechnete Winde sollen die Zahnabmessungen und die Zähnezahlen der zugehörigen Räder ermittelt werden.*)

a) Der Druck zwischen den Zähnen des Triebes auf der Kurbelwelle und denen des Rades auf der Vorgelegewelle ist der Rechnung entsprechend $= 160$ kg, es wird mithin:

$$s = 0{,}08 \,.\, \sqrt{P} = 0{,}08 \,.\, \sqrt{160} = 1 \text{ cm, folglich:}$$

Teilung $t = 2{,}1 \,.\, s = 2{,}1 \,.\, 1 = 2{,}1$ cm.
Zahnlänge $l = 0{,}7 \,.\, t = 0{,}7 \,.\, 2{,}1 = 1{,}5$ cm.
Zahnbreite $b = 2 \,.\, t = 2 \,.\, 2{,}1 = 4{,}2$ cm.

Die Zähnezahl für das Trieb ist nach Formel 187):

$$Z = \frac{2 \,.\, r_1 \,.\, \pi}{t} = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 3{,}14}{2{,}1} = 18 \text{ Zähne;}$$

die Zähnezahl für das Rad ist:

$$Z_1 = \frac{2 \,.\, R_2 \,.\, \pi}{t} = \frac{2 \,.\, 50 \,.\, 3{,}14}{2{,}1} = 149 \text{ Zähne.}$$

b) Der Druck zwischen den Zähnen des Triebes auf der Vorgelegewelle und denen des Rades auf der Trommelwelle ist der Rechnung entsprechend $= 800$ kg, es wird mithin:

$$s = 0{,}08 \,.\, \sqrt{P} = 0{,}08 \,.\, \sqrt{800} = 2{,}3 \text{ cm; folglich:}$$

Teilung $t = 2{,}1 \,.\, s = 2{,}1 \,.\, 2{,}3 = 4{,}8$ cm.
Zahnlänge $l = 0{,}7 \,.\, t = 0{,}7 \,.\, 4{,}8 = 3{,}4$ cm.
Zahnbreite $b = 2 \,.\, t = 2 \,.\, 4{,}8 = 9{,}6$ cm.

Die Zähnezahl des Triebes ist nach Formel 187):

$$Z = \frac{2 \,.\, r_2 \,.\, \pi}{t} = \frac{2 \,.\, 10 \,.\, 3{,}14}{4{,}8} = 13 \text{ Zähne.}$$

Die Zähnezahl des Rades mufs, da sich dessen Halbmesser zu dem des Triebes wie $\frac{60}{10} = \frac{6}{1} = 6$ verhält, 6 mal so grofs als die des Triebes, d. i. $= 6 \,.\, 13 = 78$ sein.

4) An der 30 cm langen Kurbel einer Wagenwinde wirken 2 Arbeiter zusammen mit 30 kg Druck. Die Zahnstange, welche durch ein Trieb bewegt wird, ist mit 300 kg belastet; welche Abmessungen erhält das Trieb? (Siehe Beispiel 5, S. 124.)

Es ist der Halbmesser des Triebes $r = \frac{30 \,.\, 30}{300} = 3$ cm; folglich:

---

*) Bei genauer Berechnung der Zähnezahlen nach den gegebenen Werten der Halbmesser der Triebe und Räder zeigt sich, dafs die Zähnezahlen keine **ganzen** Zahlen werden. Da jedoch unbedingt ganze Zahlen erzielt werden müssen, so würden nach den ermittelten Zähnezahlen die Halbmesser entsprechend zu ändern sein; das Beispiel soll also hier nur den Gang der Rechnung für ähnliche Fälle klarlegen, und sind in den folgenden Beispielen richtige Verhältnisse in Betracht gezogen.

$$s = 0{,}08 \,.\, \sqrt{P} = 0{,}08 \,.\, \sqrt{300} = 1{,}4 \text{ cm.}$$

Teilung $t = 2{,}1 \,.\, s = 2{,}1 \,.\, 1{,}4 = 2{,}9$ cm.

Zahnbreite $b = 2 \,.\, t = 2 \,.\, 2{,}9 = 5{,}8$ cm.

Zähnezahl $Z = \dfrac{2 \,.\, r \,.\, \pi}{t} = \dfrac{2 \,.\, 3 \,.\, 3{,}14}{2{,}9} = 6{,}5.$

Die Zähnezahl 6,5 ist jedoch unmöglich; rundet man dieselbe auf 7 ab und nimmt man die Teilung $= 2{,}8274 = 0{,}9 \,.\, \pi$, so wird nun der Teilkreishalbmesser des Triebes nach Formel 186):

$$r = \frac{Z}{2} \cdot \frac{t}{\pi} = 3{,}5 \,.\, 0{,}9 = 3{,}15 \text{ cm.}$$ (Vergl. Tabelle Seite 245.)

5) Ein Rad von 50 cm Halbmesser soll 25 Pferdestärken mit 30 Umdrehungen übertragen. Wie stark werden die Zähne und wie grofs wird die Teilung?

Aus Formel 200) folgt:

$$s = 24{,}1 \,.\, \sqrt{\frac{N}{R \,.\, n}} = 24{,}1 \,.\, \sqrt{\frac{25}{50 \,.\, 30}} = 3{,}1 \text{ cm.}$$

$t = 2{,}1 \,.\, s = 2{,}1 \,.\, 3{,}1 = 6{,}5$ cm (Formel 189).

6) Für 2 Eisenräder ist das Übersetzungsverhältnis 1 : 3 gegeben. Das Trieb hat einen Halbmesser = 40 cm und soll auf das zweite Rad 20 Pferdestärken bei 36 Umdrehungen übertragen. Wie gestalten sich hierbei sämtliche Verhältnisse?

Man bestimme zunächst nach Formel 200) die Zahnstärke

$$s = 24{,}1 \,.\, \sqrt{\frac{N}{R \,.\, n}} = 24{,}1 \,.\, \sqrt{\frac{20}{40 \,.\, 36}} = 2{,}8 \text{ cm.}$$

Aus dieser erhält man die Teilung nach Formel 189):

$$t = 2{,}1 \,.\, s = 2{,}1 \,.\, 2{,}8 = 5{,}9 \text{ cm.}$$

Damit nun für die Teilkreisdurchmesser und die Zähnezahlen ganze Zahlen erzielt werden, ändere man die Teilung in $t = 2 \,.\, \pi = 6{,}2832$ um. Es ergeben sich alsdann:

Aus Formel 188): Zahnstärke $s = \dfrac{19}{40} \,.\, t = \dfrac{19 \,.\, 6{,}2832}{40} = 2{,}9$ cm.

Aus Formel 187): Zähnezahl $Z = \dfrac{2 \,.\, R}{\frac{t}{\pi}} = \dfrac{2 \,.\, 40}{2} = 40$ Zähne.

Folglich: Zähnezahl des Rades $Z_1 = 40 \,.\, 3 = 120$ Zähne.

Teilkreishalbmesser des Rades $R_1 = 40 \,.\, 3 = 120$ cm; ferner:

Aus Formel 193): Zahnwurzel $l_1 = 0{,}4 \,.\, t = 0{,}4 \,.\, 6{,}2832 = 2{,}5$ cm.

„ „ 194): Zahnkrone $l_2 = 0{,}3 \,.\, t = 0{,}3 \,.\, 6{,}2832 = 1{,}9$ cm.

„ „ 195): Zahnlänge $l = 0{,}7 \,.\, t = 0{,}7 \,.\, 6{,}2832 = 4{,}4$ cm.

Sind die Zähne unbearbeitet geblieben, so wird der tangentiale Spielraum:

$\dfrac{t}{20} = \dfrac{6{,}2832}{20} = 0{,}3$ cm, und der radiale:

$\dfrac{t}{10} = \dfrac{6{,}2832}{10} = 0{,}6$ cm.

Zahnbreite: $3 \,.\, t = 3 \,.\, 6{,}2832 = 19$ cm.

7) Für ein Paar Holzeisenräder wurde die Teilung $t = 2{,}8 \,.\, \pi = 8{,}7965$ ermittelt. Wie grofs sind die Zahnstärken zu nehmen?

Für den Eisenzahn wird nach Formel 191):

$$s = \frac{16}{40} \cdot t = \frac{16 \cdot 8{,}7965}{40} = 3{,}5 \text{ cm und}$$

für den Holzzahn nach Formel 192):

$$s = \frac{23}{40} \cdot t = \frac{23 \cdot 8{,}7965}{40} = 5{,}06 \text{ cm.}$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Stirnrad hat einen Teilkreishalbmesser von 85 cm und eine Teilung $t = 4{,}5$ cm. Wieviel Zähne erhält das Rad?

Lösung: $Z = 118$.

2) Welchen Teilkreishalbmesser erhält ein Rad, wenn die Zähnezahl $z = 64$ und die Teilung $t = 2{,}6$ cm betragen soll?

Lösung: $R = 265$ mm.

3) Welche Zähnezahl erhält ein Rad, wenn dasselbe einen Teilkreishalbmesser von 75 cm und eine Teilung von 3,5 cm erhalten soll?

Lösung: $Z = 135$.

4) Zwei parallele Wellen sollen durch zwei Stirnräder mit 24 und 120 Zähnen verbunden werden; die Mittenentfernung der beiden Wellen betrage 84 cm. Welchen Teilkreishalbmesser, und welche Teilung erhalten die beiden Räder?

Lösung: $R = 140$ bezw. 700 mm; $t = 3{,}7$ cm.

5) Ein Stirnrad soll einen Zahndruck von 600 kg aufnehmen; wie grofs mufs die Teilung bei diesem Rade genommen werden?

Lösung: $t = 4{,}2$ cm.

6) Durch ein auf einer Wasserradwelle sitzendes Zahnrad von 4 m Durchmesser, welches 6 Umdrehungen in jeder Minute macht, sollen 40 Pferdestärken auf eine andere Welle übertragen werden, welche 30 Umdrehungen in jeder Minute machen soll. Welche Abmessungen erhalten die Zähne, und welche Zähnezahlen erhält das Rad auf der Wasserradwelle bezw. Triebwelle?

Lösung: $s = 44$ mm; $z = 136$.
$t = 92{,}4$ mm; $z_1 = 27$.

Preufs. Achtel- und Sechzehntel-Zolle = Millimeter.

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16
0		1,635	3,269	4,904	6,539	8,173	9,808	11,443	13,077	14,712	16,347	17,981	19,616	21,250	22,885	24,520
1	26,154	27,789	29,424	31,058	32,693	34,328	35,962	37,597	39,232	40,866	42,501	44,136	45,770	47,405	49,040	50,674
2	52,309	53,944	55,578	57,213	58,848	60,482	62,117	63,751	65,386	67,021	68,655	70,290	71,925	73,559	75,194	76,829
3	78,463	80,098	81,733	83,367	85,002	86,637	88,271	89,906	91,541	93,175	94,810	96,445	98,079	99,714	101,35	102,98
4	104,62	106,25	107,89	109,52	111,16	112,79	114,43	116,06	117,70	119,33	120,96	122,60	124,23	125,87	127,50	129,14
5	130,77	132,41	134,04	135,68	137,31	138,95	140,58	142,21	143,85	145,48	147,12	148,75	150,39	152,02	153,66	155,29
6	156,93	158,56	160,20	161,83	163,47	165,10	166,73	168,37	170,00	171,64	173,27	174,91	176,54	178,18	179,81	181,45
7	183,08	184,72	186,35	187,99	189,62	191,25	192,89	194,52	196,16	197,79	199,43	201,06	202,70	204,33	205,97	207,60
8	209,24	210,87	212,50	214,14	215,77	217,41	219,04	220,68	222,31	223,95	225,58	227,22	228,55	230,49	232,12	233,76
9	235,39	237,02	238,66	240,29	241,93	243,56	245,20	246,83	248,47	250,10	251,74	253,37	255,01	256,64	258,28	259,91
10	261,54	263,18	264,81	266,45	268,08	269,72	271,35	272,99	274,62	276,26	277,89	279,53	281,16	282,80	284,43	286,06
11	287,70	289,33	290,97	292,60	294,24	295,87	297,51	299,14	300,78	302,41	304,05	305,68	307,31	308,95	310,58	312,22
12	313,95	315,49	317,12	318,76	320,39	322,03	323,66	325,30	326,93	328,57	330,20	331,83	333,47	335,10	336,74	338,37

Engl. Achtel- und Sechzehntel-Zolle = Millimeter.

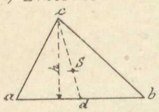
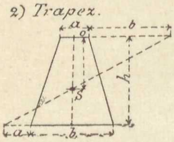
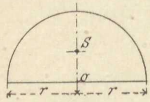
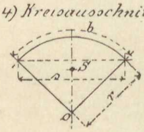
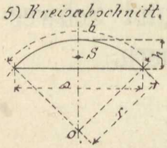
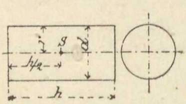
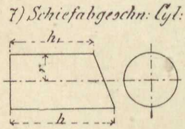
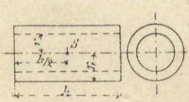
Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16
0		1,587	3,175	4,762	6,350	7,937	9,525	11,11	12,700	14,287	15,875	17,462	19,050	20,637	22,225	23,812
1	25,400	26,987	28,574	30,162	31,749	33,337	34,924	36,51	38,099	39,687	41,274	42,862	44,449	46,037	47,624	49,212
2	50,799	52,387	53,974	55,561	57,149	58,736	60,324	61,91	63,499	65,086	66,674	68,261	69,849	71,436	73,024	74,611
3	76,199	77,786	79,374	80,961	82,549	84,136	85,723	87,31	88,898	90,486	92,073	93,661	95,248	96,836	98,423	100,01
4	101,60	103,19	104,77	106,36	107,95	109,54	111,12	112,71	114,30	115,89	117,47	119,06	120,65	122,24	123,82	125,41
5	127,00	128,59	130,17	131,76	133,35	134,94	136,52	138,11	139,70	141,28	142,87	144,46	146,05	147,63	149,22	150,81
6	152,40	153,98	155,57	157,16	158,75	160,33	161,92	163,51	165,10	166,68	168,27	169,86	171,45	173,03	174,62	176,21
7	177,80	179,38	180,97	182,56	184,15	185,73	187,32	188,91	190,50	192,08	193,67	195,26	196,85	198,43	200,02	201,61
8	203,20	204,78	206,37	207,96	209,55	211,13	212,72	214,31	215,90	217,48	219,07	220,66	222,25	223,83	225,42	227,01
9	228,60	230,18	231,77	233,36	234,95	236,53	238,12	239,71	241,30	242,88	244,47	246,06	247,65	249,23	250,82	252,41
10	254,00	255,58	257,17	258,76	260,35	261,93	263,52	265,11	266,70	268,28	269,87	271,46	273,05	274,63	276,22	277,81
11	279,39	280,98	282,57	284,16	285,76	287,33	288,92	290,51	292,09	293,68	295,27	296,86	298,44	300,03	301,62	303,21
12	304,79	306,38	307,97	309,56	311,14	312,73	314,32	315,91	317,49	319,08	320,67	322,26	323,84	325,43	327,02	328,61

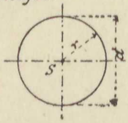
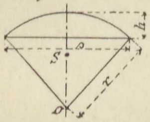
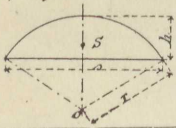
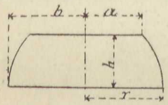
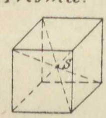
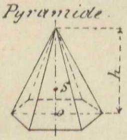
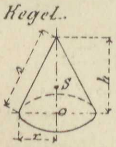
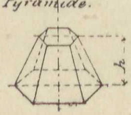
Anhang.

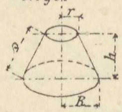
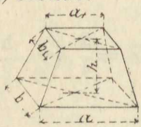
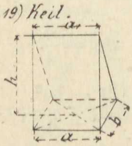
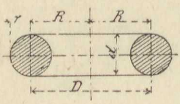
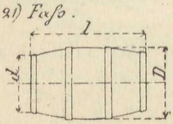
1) Tabelle

der

Flächeninhalte, Oberflächen, Rauminhalte und Schwerpunktslage von Flächen und Körpern.

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktslage
1) *Dreieck.* 	$F = \frac{\overline{ab} \,.\, h}{2}$.		$\overline{Sd} = {}^1/_3\, \overline{cd}$; $\overline{ad} = \overline{bd}$.
2) *Trapez.* 	$F = \frac{(a + b) \,.\, h}{2}$.		$\overline{So} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2 \,.\, b}{a + b}$.
3) *Halbkreis* 	$F = \frac{r^2 \,.\, \pi}{2}$.		$\overline{So} = \frac{4 \,.\, r}{3 \,.\, \pi}$ $= 0{,}4244 \,.\, r$.
4) *Kreisausschnitt.* 	$F = \frac{b \,.\, r}{2}$.		$\overline{So} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \,.\, s}{b}$.
5) *Kreisabschnitt.* 	$F = \frac{b \,.\, r - s \,.\, (r - h)}{2}$		$\overline{So} = \frac{s^3}{12 \,.\, F}$. F = Fläche; s = Sehne.
6) *Cylinder.* 	Mantel M $= 2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, h$ $= \pi \,.\, d \,.\, h$.	$I = \pi \,.\, r^2 \,.\, h$ $= \frac{\pi \,.\, d^2}{4} \,.\, h$ $= 0{,}785\, d^2 \,.\, h$.	$S = \frac{h}{2}$.
7) *Schiefabgeschn. Cyl.* 	$M = \pi \,.\, r\,(h + h_1)$.	$I = \pi \,.\, r^2 \,.\, \frac{h + h_1}{2}$.	
8) *Hohlcylinder.* 	Innerer + äufserer Mantel $= 2 \,.\, \pi \,.\, h \,.\, (r + r_1)$.	$I = \pi \,.\, h \,.\, (r_1{}^2 - r^2)$.	$S = \frac{h}{2}$.

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktslage
9) Kugel. 	$F = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ $= 12{,}566 \cdot r^2$ $= \pi \cdot d^2.$	$I = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $= 4{,}189 \cdot r^3$ $= \frac{\pi \cdot d^3}{6}$ $= 0{,}5236 \cdot d^3.$	
10) Kugelausschnitt. 	$F = \frac{\pi \cdot r}{2} \cdot (4 \cdot h + s).$	$I = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ $= 2{,}0944\ r^2 \cdot h.$	$\overline{So} = \frac{3}{4} \cdot \left(r - \frac{h}{2}\right).$
11) Kugelabschnitt. 	$F = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ $= \frac{\pi}{4} \cdot (s^2 + 4 \cdot h^2).$	$I = \pi \cdot h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3}\right)$ $= \pi \cdot h \cdot \left(\frac{s^2}{8} + \frac{h^2}{6}\right)$	$\overline{So} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$
12) Kugelzone. 	$F = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h.$	$I = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (3 \cdot a^2$ $+ 3 \cdot b^2 + h^2).$	
13) Prisma. 	Oberfläche = Summe der sechs Rechtecke.	Länge × Breite × Höhe.	
14) Pyramide 		$I = \frac{h}{3} \times$ Grundfläche.	$\overline{So} = {}^1/_4 \cdot h.$
15) Kegel. 	Kegelmantel $F = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}.$	$I = \frac{h}{3} \times$ Grundfläche.	$\overline{So} = {}^1/_4 \cdot h.$
16) Abgestumpfte Pyramide. 	Sind die Endflächen = F und f, dann ist	$I = \frac{h}{3} \cdot (F + f + \sqrt{F \cdot f}).$	

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktslage
17) Abgestumpfter Kegel 	Mantel $= \pi . s . (R + r)$.	$I = (R^2 + r^2 + r . R) . \frac{h . \pi}{3} = \frac{D^2 + d^2 + d . D}{12} . \pi . h$.	
18) Obelisk. 	Mantel = Summe der 4 Trapeze.	$I = \frac{h}{6} . \left\{ (2a + a_1) . b + (2a_1 + a) . b_1 \right\}$.	
19) Keil. 	Mantel = Summe der 2 Trapeze und der beiden Seitendreiecke.	$I = (2a + a_1) . \frac{b . h}{6}$.	
20) Cylindrisch: Ring. 	$F = 4 . \pi^2 . R . r = 39{,}478 . r . R = 9{,}87 . D . d$.	$I = 2 . \pi^2 . R . r^2 = 2{,}467 . D . d^2$	
21) Faß. 		$I = 1{,}0453 . l . (0{,}4 . D^2 + 0{,}2 . D . d + 0{,}15 . d^2)$.	

2) Tabelle

der

Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte der Zahlen 1,00 bis 100,00.

0—5

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
0,0	0,00	0,000	0,00000	0,00000	0,00000	0,000000
0,1	0,01	0,001	0,31623	0,46416	0,31416	0,007854
0,2	0,04	0,008	0,44721	0,58480	0,62832	0,031416
0,3	0,09	0,027	0,54772	0,66943	0,94248	0,070686
0,4	0,16	0,064	0,63246	0,73681	1,2566	0,125664
0,5	0,25	0,125	0,70711	0,79370	1,5708	0,196350
0,6	0,36	0,216	0,77460	0,84343	1,8850	0,282743
0,7	0,49	0,343	0,83666	0,88790	2,1991	0,384845
0,8	0,64	0,512	0,89443	0,92832	2,5133	0,502655
0,9	0,81	0,729	0,94868	0,96549	2,8274	0,636173
1,0	1,00	1,000	1,0000	1,0000	3,1416	0,78540
1,1	1,21	1,331	1,0488	1,0323	3,4558	0,95033
1,2	1,44	1,728	1,0954	1,0627	3,7699	1,13097
1,3	1,69	2,197	1,1402	1,0914	4,0841	1,32732
1,4	1,96	2,744	1,1832	1,1187	4,3982	1,53938
1,5	2,25	3,375	1,2247	1,1447	4,7124	1,76715
1,6	2,56	4,096	1,2649	1,1696	5,0265	2,01062
1,7	2,89	4,913	1,3038	1,1935	5,3407	2,26980
1,8	3,24	5,832	1,3416	1,2164	5,6549	2,54469
1,9	3,61	6,859	1,3784	1,2386	5,9690	2,83529
2,0	4,00	8,000	1,4142	1,2599	6,2832	3,14159
2,1	4,41	9,261	1,4491	1,2806	6,5973	3,46361
2,2	4,84	10,648	1,4832	1,3006	6,9115	3,80133
2,3	5,29	12,167	1,5166	1,3200	7,2257	4,15476
2,4	5,76	13,824	1,5492	1,3389	7,5398	4,52389
2,5	6,25	15,625	1,5811	1,3572	7,8540	4,90874
2,6	6,76	17,576	1,6125	1,3751	8,1681	5,30929
2,7	7,29	19,683	1,6432	1,3925	8,4823	5,72555
2,8	7,84	21,952	1,6733	1,4095	8,7965	6,15752
2,9	8,41	24,389	1,7029	1,4260	9,1106	6,60520
3,0	9,00	27,000	1,7321	1,4422	9,4248	7,06858
3,1	9,61	29,791	1,7607	1,4581	9,7389	7,54768
3,2	10,24	32,768	1,7889	1,4736	10,053	8,04248
3,3	10,89	35,937	1,8166	1,4888	10,367	8,55299
3,4	11,56	39,304	1,8439	1,5037	10,681	9,07920
3,5	12,25	42,875	1,8708	1,5183	10,996	9,62113
3,6	12,96	46,656	1,8974	1,5326	11,310	10,1788
3,7	13,69	50,653	1,9235	1,5467	11,624	10,7521
3,8	14,44	54,872	1,9494	1,5605	11,938	11,3411
3,9	15,21	59,319	1,9748	1,5741	12,252	11,9459
4,0	16,00	64,000	2,0000	1,5874	12,566	12,5664
4,1	16,81	68,921	2,0248	1,6005	12,881	13,2025
4,2	17,64	74,088	2,0494	1,6134	13,195	13,8544
4,3	18,49	79,507	2,0736	1,6261	13,509	14,5220
4,4	19,36	85,184	2,0976	1,6386	13,823	15,2053
4,5	20,25	91,125	2,1213	1,6510	14,137	15,9043
4,6	21,16	97,336	2,1448	1,6631	14,451	16,6190
4,7	22,09	103,823	2,1679	1,6751	14,765	17,3494
4,8	23,04	110,592	2,1909	1,6869	15,080	18,0956
4,9	24,01	117,649	2,2136	1,6985	15,394	18,8574
5,0	25,00	125,000	2,2361	1,7100	15,708	19,6350

5 — 10

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
5,0	25,00	125,000	2,2361	1,7100	15,708	19,6350
5,1	26,01	132,651	2,2583	1,7213	16,022	20,4282
5,2	27,04	140,608	2,2804	1,7325	16,336	21,2372
5,3	28,09	148,877	2,3022	1,7435	16,650	22,0618
5,4	29,16	157,464	2,3238	1,7544	16,965	22,9022
5,5	30,25	166,375	2,3452	1,7652	17,279	23,7583
5,6	31,36	175,616	2,3664	1,7758	17,593	24,6301
5,7	32,49	185,193	2,3875	1,7863	17,907	25,5176
5,8	33,64	195,112	2,4083	1,7967	18,221	26,4208
5,9	34,81	205,379	2,4290	1,8070	18,535	27,3397
6,0	36,00	216,000	2,4495	1,8171	18,850	28,2743
6,1	37,21	226,981	2,4698	1,8272	19,164	29,2247
6,2	38,44	238,328	2,4900	1,8371	19,478	30,1907
6,3	39,69	250,047	2,5100	1,8469	19,792	31,1725
6,4	40,96	262,144	2,5298	1,8566	20,106	32,1699
6,5	42,25	274,625	2,5495	1,8663	20,420	33,1831
6,6	43,56	287,496	2,5690	1,8758	20,735	34,2119
6,7	44,89	300,763	2,5884	1,8852	21,049	35,2565
6,8	46,24	314,432	2,6077	1,8945	21,363	36,3168
6,9	47,61	328,509	2,6268	1,9038	21,677	37,3928
7,0	49,00	343,000	2,6458	1,9129	21,991	38,4845
7,1	50,41	357,911	2,6646	1,9220	22,305	39,5919
7,2	51,84	373,248	2,6833	1,9310	22,619	40,7150
7,3	53,29	389,017	2,7019	1,9399	22,934	41,8539
7,4	54,76	405,224	2,7203	1,9487	23,248	43,0084
7,5	56,25	421,875	2,7386	1,9574	23,562	44,1786
7,6	57,76	438,976	2,7568	1,9661	23,876	45,3646
7,7	59,29	456,533	2,7749	1,9747	24,190	46,5663
7,8	60,84	474,552	2,7928	1,9832	24,504	47,7836
7,9	62,41	493,039	2,8107	1,9916	24,819	49,0167
8,0	64,00	512,000	2,8284	2,0000	25,133	50,2655
8,1	65,61	531,441	2,8461	2,0083	25,447	51,5300
8,2	67,24	551,368	2,8636	2,0165	25,761	52,8102
8,3	68,89	571,787	2,8810	2,0247	26,075	54,1061
8,4	70,56	592,704	2,8983	2,0328	26,389	55,4177
8,5	72,25	614,125	2,9155	2,0408	26,704	56,7450
8,6	73,96	636,056	2,9326	2,0488	27,018	58,0880
8,7	75,69	658,503	2,9496	2,0567	27,332	59,4468
8,8	77,44	681,472	2,9665	2,0646	27,646	60,8212
8,9	79,21	704,969	2,9833	2,0724	27,960	62,2114
9,0	81,00	729,000	3,0000	2,0801	28,274	63,6173
9,1	82,81	753,571	3,0166	2,0878	28,588	65,0388
9,2	84,64	778,688	3,0332	2,0954	28,903	66,4761
9,3	86,49	804,357	3,0496	2,1029	29,217	67,9291
9,4	88,36	830,584	3,0659	2,1105	29,531	69,3978
9,5	90,25	857,375	3,0822	2,1179	29,845	70,8822
9,6	92,16	884,736	3,0984	2,1253	30,159	72,3823
9,7	94,09	912,673	3,1145	2,1327	30,473	73,8981
9,8	96,04	941,192	3,1305	2,1400	30,788	75,4296
9,9	98,01	970,299	3,1464	2,1472	31,102	76,9769
10,0	100,00	1000,000	3,1623	2,1544	31,416	78,5398

10—15

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
10,0	100,00	1000,000	3,1623	2,1544	31,416	78,5398
10,1	102,01	1030,301	3,1780	2,1616	31,730	80,1185
10,2	104,04	1061,208	3,1937	2,1687	32,044	81,7128
10,3	106,09	1092,727	3,2094	2,1757	32,358	83,3229
10,4	108,16	1124,864	3,2249	2,1828	32,673	84,9487
10,5	110,25	1157,625	3,2404	2,1898	32,987	86,5901
10,6	112,36	1191,016	3,2558	2,1967	33,301	88,2473
10,7	114,49	1225,043	3,2711	2,2036	33,615	89,9202
10,8	116,64	1259,712	3,2863	2,2104	33,929	91,6088
10,9	118,61	1295,029	3,3015	2,2172	34,243	93,3132
11,0	121,00	1331,000	3,3166	2,2239	34,558	95,0332
11,1	123,21	1367,631	3,3317	2,2307	34,872	96,7689
11,2	125,44	1404,928	3,3466	2,2374	35,186	98,5203
11,3	127,69	1442,897	3,3615	2,2441	35,500	100,287
11,4	129,96	1481,544	3,3764	2,2506	35,814	102,070
11,5	132,25	1520,875	3,3912	2,2572	36,128	103,869
11,6	134,56	1560,896	3,4059	2,2637	36,442	105,683
11,7	136,89	1601,613	3,4205	2,2702	36,757	107,513
11,8	139,24	1643,032	3,4351	2,2766	37,071	109,359
11,9	141,61	1685,159	3,4496	2,2831	37,385	111,220
12,0	144,00	1728,000	3,4641	2,2894	37,699	113,097
12,1	146,41	1771,561	3,4785	2,2957	38,013	114,990
12,2	148,84	1815,848	3,4928	2,3021	38,327	116,899
12,3	151,29	1860,867	3,5071	2,3084	38,642	118,823
12,4	153,76	1906,624	3,5214	2,3146	38,956	120,763
12,5	156,25	1953,125	3,5355	2,3208	39,270	122,718
12,6	158,76	2000,376	3,5496	2,3270	39,584	124,690
12,7	161,29	2048,383	3,5637	2,3331	39,898	126,677
12,8	163,84	2097,152	3,5777	2,3392	40,212	128,680
12,9	166,41	2146,689	3,5917	2,3453	40,527	130,698
13,0	169,00	2197,000	3,6056	2,3513	40,841	132,732
13,1	171,61	2248,091	3,6194	2,3573	41,155	134,782
13,2	174,24	2299,968	3,6332	2,3633	41,469	136,848
13,3	176,89	2352,637	3,6469	2,3693	41,783	138,929
13,4	179,56	2406,104	3,6606	2,3752	42,097	141,026
13,5	182,25	2460,375	3,6742	2,3811	42,412	143,139
13,6	184,96	2515,456	3,6878	2,3870	42,726	145,267
13,7	187,69	2571,353	3,7014	2,3928	43,040	147,411
13,8	190,44	2628,072	3,7148	2,3986	43,354	149,571
13,9	193,21	2685,619	3,7283	2,4044	43,668	151,747
14,0	196,00	2744,000	3,7417	2,4101	43,982	153,938
14,1	198,81	2803,221	3,7550	2,4159	44,296	156,145
14,2	201,64	2863,288	3,7683	2,4216	44,611	158,368
14,3	204,49	2924,207	3,7815	2,4272	44,925	160,606
14,4	207,36	2985,984	3,7947	2,4329	45,239	162,860
14,5	210,25	3048,625	3,8079	2,4385	45,553	165,130
14,6	213,16	3112,136	3,8210	2,4441	45,867	167,415
14,7	216,09	3176,523	3,8341	2,4497	46,181	169,717
14,8	219,04	3241,792	3,8471	2,4552	46,496	172,034
14,9	222,01	3307,949	3,8601	2,4607	46,810	174,366
15,0	225,00	3375,000	3,8730	2,4662	47,124	176,715

15 — 20

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
15,0	225,00	3375,000	3,8730	2,4662	47,124	176,715
15,1	228,01	3442,951	3,8859	2,4717	47,438	179,079
15,2	231,04	3511,808	3,8987	2,4771	47,752	181,458
15,3	234,09	3581,577	3,9115	2,4825	48,066	183,854
15,4	237,16	3652,264	3,9243	2,4879	48,381	186,265
15,5	240,25	3723,875	3,9370	2,4933	48,695	188,692
15,6	243,36	3796,416	3,9497	2,4987	49,009	191,134
15,7	246,49	3869,893	3,9623	2,5040	49,323	193,593
15,8	249,64	3944,312	3,9749	2,5093	49,637	196,067
15,9	252,81	4019,679	3,9875	2,5146	49,951	198,557
16,0	256,00	4096,000	4,0000	2,5198	50,265	201,062
16,1	259,21	4173,281	4,0125	2,5251	50,580	203,583
16,2	262,44	4251,528	4,0249	2,5303	50,894	206,120
16,3	265,69	4330,747	4,0373	2,5355	51,208	208,672
16,4	268,96	4410,944	4,0497	2,5407	51,522	211,241
16,5	272,25	4492,125	4,0620	2,5458	51,836	213,825
16,6	275,56	4574,296	4,0743	2,5509	52,150	216,424
16,7	278,89	4657,463	4,0866	2,5561	52,465	219,040
16,8	282,24	4741,632	4,0988	2,5612	52,779	221,671
16,9	285,61	4826,809	4,1110	2,5662	53,093	224,318
17,0	289,00	4913,000	4,1231	2,5713	53,407	226,980
17,1	292,41	5000,211	4,1352	2,5763	53,721	229,658
17,2	295,84	5088,448	4,1473	2,5813	54,035	232,352
17,3	299,29	5177,717	4,1593	2,5863	54,350	235,062
17,4	302,76	5268,024	4,1713	2,5913	54,664	237,787
17,5	306,25	5359,375	4,1833	2,5962	54,978	240,528
17,6	309,76	5451,776	4,1952	2,6012	55,292	243,285
17,7	313,29	5545,233	4,2071	2,6061	55,606	246,057
17,8	316,84	5639,752	4,2190	2,6110	55,920	248,846
17,9	320,41	5735,339	4,2308	2,6159	56,235	251,649
18,0	324,00	5832,000	4,2426	2,6207	56,549	254,469
18,1	327,61	5929,741	4,2544	2,6256	56,863	257,304
18,2	331,24	6028,568	4,2661	2,6304	57,177	260,155
18,3	334,89	6128,487	4,2778	2,6352	57,491	263,022
18,4	338,56	6229,504	4,2895	2,6400	57,805	265,904
18,5	342,25	6331,625	4,3012	2,6448	58,119	268,803
18,6	345,96	6434,856	4,3128	2,6495	58,434	271,716
18,7	349,69	6539,203	4,3243	2,6543	58,748	274,646
18,8	353,44	6644,672	4,3359	2,6590	59,062	277,591
18,9	357,21	6751,269	4,3474	2,6637	59,376	280,552
19,0	361,00	6859,000	4,3589	2,6684	59,690	283,529
19,1	364,81	6967,871	4,3704	2,6731	60,004	286,521
19,2	368,64	7077,888	4,3818	2,6777	60,319	289,529
19,3	372,49	7189,057	4,3932	2,6824	60,633	292,553
19,4	376,36	7301,384	4,4045	2,6870	60,947	295,592
19,5	380,25	7414,875	4,4159	2,6916	61,261	298,648
19,6	384,16	7529,536	4,4272	2,6962	61,575	301,719
19,7	388,09	7645,373	4,4385	2,7008	61,889	304,805
19,8	392,04	7762,392	4,4497	2,7053	62,204	307,907
19,9	396,01	7880,599	4,4609	2,7099	62,518	311,026
20,0	400,00	8000,000	4,4721	2,7144	62,832	314,159

20 — 25

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
20,0	400,00	8 000,000	4,4721	2,7144	62,832	314,159
20,1	404,01	8 120,601	4,4833	2,7189	63,146	317,309
20,2	408,04	8 242,408	4,4944	2,7234	63,460	320,474
20,3	412,09	8 365,427	4,5056	2,7279	63,774	323,655
20,4	416,16	8 489,664	4,5166	2,7324	64,088	326,851
20,5	420,25	8 615,125	4,5277	2,7369	64,403	330,064
20,6	424,36	8 741,816	4,5387	2,7413	64,717	333,292
20,7	428,49	8 869,743	4,5497	2,7457	65,031	336,535
20,8	432,64	8 998,912	4,5607	2,7501	65,345	339,795
20,9	436,81	9 129,329	4,5717	2,7545	65,659	343,070
21,0	441,00	9 261,000	4,5826	2,7589	65,973	346,361
21,1	445,21	9 393,931	4,5935	2,7633	66,288	349,667
21,2	449,44	9 528,128	4,6043	2,7677	66,602	352,989
21,3	453,69	9 663,597	4,6152	2,7720	66,916	356,327
21,4	457,96	9 800,344	4,6260	2,7763	67,230	359,681
21,5	462,25	9 938,375	4,6368	2,7806	67,544	363,050
21,6	466,56	10 077,696	4,6476	2,7850	67,858	366,435
21,7	470,89	10 218,313	4,6583	2,7892	68,173	369,836
21,8	475,24	10 360,232	4,6690	2,7935	68,487	373,253
21,9	479,61	10 503,459	4,6797	2,7978	68,801	376,685
22,0	484,00	10 648,000	4,6904	2,8020	69,115	380,133
22,1	488,41	10 793,861	4,7011	2,8063	69,429	383,596
22,2	492,84	10 941,048	4,7117	2,8105	69,743	387,076
22,3	497,29	11 089,567	4,7223	2,8147	70,058	390,571
22,4	501,76	11 239,424	4,7329	2,8189	70,372	394,081
22,5	506,25	11 390,625	4,7434	2,8231	70,686	397,608
22,6	510,76	11 543,176	4,7539	2,8273	71,000	401,150
22,7	515,29	11 697,083	4,7645	2,8314	71,314	404,708
22,8	519,84	11 852,352	4,7749	2,8356	71,628	408,281
22,9	524,41	12 008,989	4,7854	2,8397	71,942	411,871
23,0	529,00	12 167,000	4,7958	2,8439	72,257	415,476
23,1	533,61	12 326,391	4,8062	2,8480	72,571	419,096
23,2	538,24	12 487,168	4,8166	2,8521	72,885	422,733
23,3	542,89	12 649,337	4,8270	2,8562	73,199	426,385
23,4	547,56	12 812,904	4,8374	2,8603	73,513	430,053
23,5	552,25	12 977,875	4,8477	2,8643	73,827	433,736
23,6	556,96	13 144,256	4,8580	2,8684	74,142	437,435
23,7	561,69	13 312,053	4,8683	2,8724	74,456	441,150
23,8	566,44	13 481,272	4,8785	2,8765	74,770	444,881
23,9	571,21	13 651,919	4,8888	2,8805	75,084	448,627
24,0	576,00	13 824,000	4,8990	2,8845	75,398	452,389
24,1	580,81	13 997,521	4,9092	2,8885	75,712	456,167
24,2	585,64	14 172,488	4,9193	2,8925	76,027	459,961
24,3	590,49	14 348,907	4,9295	2,8965	76,341	463,770
24,4	595,36	14 526,784	4,9396	2,9004	76,655	467,595
24,5	600,25	14 706,125	4,9497	2,9044	76,969	471,435
24,6	605,16	14 886,936	4,9598	2,9083	77,283	475,292
24,7	610,09	15 069,223	4,9699	2,9123	77,597	479,164
24,8	615,04	15 252,992	4,9800	2,9162	77,911	483,051
24,9	620,01	15 438,249	4.9900	2,9201	78,226	486,955
25,0	625,00	15 625,000	5,0000	2,9240	78,540	490,874

25 — 30

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n . \pi$	$\frac{n^2 . \pi}{4}$
25,0	625,00	15 625,000	5,0000	2,9240	78,540	490,874
25,1	630,01	15 813,251	5,0099	2,9279	78,854	494,809
25,2	635,04	16 003,008	5,0199	2,9318	79,168	498,759
25,3	640,09	16 194,277	5,0299	2,9357	79,482	502,726
25,4	645,16	16 387,064	5,0398	2,9395	79,796	506,707
25,5	650,25	16 581,375	5,0498	2,9434	80,111	510,705
25,6	655,36	16 777,216	5,0596	2,9472	80,425	514,719
25,7	660,49	16 974,593	5,0695	2,9511	80,739	518,748
25,8	665,64	17 173,512	5,0794	2,9549	81,053	522,792
25,9	670,81	17 373,979	5,0892	2,9587	81,367	526,853
26,0	676,00	17 576,000	5,0990	2,9625	81,681	530,929
26,1	681,21	17 779,581	5,1088	2,9663	81,996	535,021
26,2	686,44	17 984,728	5,1186	2,9701	82,310	539,129
26,3	691,69	18 191,447	5,1284	2,9738	82,624	543,252
26,4	696,96	18 399,744	5,1381	2,9776	82,938	547,391
26,5	702,25	18 609,625	5,1478	2,9814	83,252	551,546
26,6	707,56	18 821,096	5,1575	2,9851	83,566	555,716
26,7	712,89	19 034,163	5,1672	2,9888	83,881	559,902
26,8	718,24	19 248,832	5,1769	2,9926	84,195	564,104
26,9	723,61	19 465,109	5,1865	2,9963	84,509	568,322
27,0	729,00	19 683,000	5,1962	3,0000	84,823	572,555
27,1	734,41	19 902,511	5,2058	3,0037	85,137	576,804
27,2	739,84	20 123,648	5,2154	3,0074	85,451	581,069
27,3	745,29	20 346,417	5,2249	3,0111	85,765	585,349
27,4	750,76	20 570,824	5,2345	3,0147	86,080	589,646
27,5	756,25	20 796,875	5,2440	3,0184	86,394	593,957
27,6	761,76	21 024,576	5,2536	3,0221	86,708	598,285
27,7	767,29	21 353,933	5,2631	3,0257	87,022	602,628
27,8	772,84	21 484,952	5,2726	3,0293	87,336	606,987
27,9	778,41	21 717,639	5,2820	3,0330	87,650	611,362
28,0	784,00	21 952,000	5,2915	3,0366	87,965	615,752
28,1	789,61	22 188,041	5,3009	3,0402	88,279	620,158
28,2	795,24	22 425,768	5,3104	3,0438	88,593	624,580
28,3	800,89	22 665,187	5,3198	3,0474	88,907	629,018
28,4	806,56	22 906,304	5,3292	3,0510	89,221	633,471
28,5	812,25	23 149,125	5,3385	3,0546	89,535	637,940
28,6	817,96	23 393,656	5,3479	3,0581	89,850	642,424
28,7	823,69	23 639,903	5,3572	3,0617	90,164	646,925
28,8	829,44	23 887,872	5,3666	3,0652	90,478	651,441
28,9	835,21	24 137,569	5,3759	3,0688	90,792	655,972
29,0	841,00	24 389,000	5,3852	3,0723	91,106	660,520
29,1	846,81	24 642,171	5,3944	3,0758	91,420	665,083
29,2	852,64	24 897,088	5,4037	3,0794	91,735	669,662
29,3	858,49	25 153,757	5,4129	3,0829	92,049	674,256
29,4	864,36	25 412,184	5,4222	3,0864	92,363	678,867
29,5	870,25	25 672,375	5,4314	3,0899	92,677	683,493
29,6	876,16	25 934,336	5,4406	3,0934	92,991	688,134
29,7	882,09	26 198,073	5,4498	3,0968	93,305	692,792
29,8	888,04	26 463,592	5,4589	3,1003	93,619	697,465
29,9	894,01	26 730,899	5,4681	3,1038	93,934	702,154
30,0	900,00	27 000,000	5,4772	3,1072	94,248	706,858

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
30,0	900,00	27 000,000	5,4772	3,1072	94,248	706,858
30,1	906,01	27 270,901	5,4863	3,1107	94,562	711,579
30,2	912,04	27 543,608	5,4955	3,1141	94,876	716,315
30,3	918,09	27 818,127	5,5045	3,1176	95,190	721,066
30,4	924,16	28 094,464	5,5136	3,1210	95,504	725,834
30,5	930,25	28 372,625	5,5227	3,1244	95,819	730,617
30,6	936,36	28 652,616	5,5317	3,1278	96,133	735,415
30,7	942,49	28 934,443	5,5408	3,1312	96,447	740,230
30,8	948,64	29 218,112	5,5498	3,1346	96,761	745,060
30,9	954,81	29 503,629	5,5588	3,1380	97,075	749,906
31,0	961,00	29 791,000	5,5678	3,1414	97,389	754,768
31,1	967,21	30 080,231	5,5767	3,1448	97,704	759,645
31,2	973,44	30 371,328	5,5857	3,1481	98,018	764,538
31,3	979,69	30 664,297	5,5946	3,1515	98,332	769,447
31,4	985,96	30 959,144	5,6036	3,1548	98,646	774,371
31,5	992,25	31 255,875	5,6125	3,1582	98,960	779,311
31,6	998,56	31 554,496	6,6214	3,1615	99,274	784,267
31,7	1004,89	31 855,013	5,6303	3,1648	99,588	789,239
31,8	1011,24	32 157,432	5,6391	3,1682	99,903	794,226
31,9	1017,61	32 461,759	5,6480	3,1715	100,22	799,229
32,0	1024,00	32 768,000	5,6569	3,1748	100,53	804,248
32,1	1030,41	33 076,161	5,6657	3,1781	100,85	809,282
32,2	1036,84	33 386,248	5,6745	3,1814	101,16	814,332
32,3	1043,29	33 698,267	5,6833	3,1847	101,47	819,398
32,4	1049,76	34 012,224	5,6921	3,1880	101,79	824,480
32,5	1056,25	34 328,125	5,7009	3,1913	102,10	829,577
32,6	1062,76	34 645,976	5,7096	3,1945	102,42	834,690
32,7	1069,29	34 965,783	5,7184	3,1978	102,73	839,818
32,8	1075,84	35 287,552	5,7271	3,2010	103,04	844,963
32,9	1082,41	35,611,289	5,7359	3,2043	103,36	850,123
33,0	1089,00	35 937,000	5,7446	3,2075	103,67	855,299
33,1	1095,61	36 264,691	5,7533	3,2108	103,99	860,490
33,2	1102,24	36 594,368	5,7619	3,2140	104,30	865,697
33,3	1108,89	36 926,037	5,7706	3,2172	104,62	870,920
33,4	1115,56	37 259,704	5,7792	3,2204	104,93	876,159
33,5	1122,25	37 595,375	5,7879	3,2237	105,24	881,413
33,6	1128,96	37 933,056	5,7966	3,2269	105,56	886,683
33,7	1135,69	38 272,753	5,8052	3,2301	105,87	891,969
33,8	1142,44	38 614,472	5,8138	3,2332	106,19	897,270
33,9	1149,21	38 958,219	5,8224	3,2364	106,50	902,587
34,0	1156,00	39 304,000	5,8310	3,2396	106,81	907,920
34,1	1162,81	39 651,821	5,8395	3,2428	107,13	913,269
34,2	1169,64	40 001,688	5,8481	3,2460	107,44	918,633
34,3	1176,49	40,353,607	5,8566	3,2491	107,76	924,013
34,4	1183,36	40 707,584	5,8652	3,2523	108,07	929,409
34,5	1190,25	41 063,625	5,8737	3,2554	108,38	934,820
34,6	1197,16	41 421,736	5,8822	3,2586	108,70	940,247
34,7	1204,09	41 781,923	5,8907	3,2617	109,01	945,690
34,8	1211,04	42 144,192	5,8992	3,2648	109,33	951,149
34,9	1218,01	42 508,549	5,9076	3,2679	109,64	956,623
35,0	1225,00	42 875,000	5,9161	3,2711	109,96	962,113

35 — 40

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
35,0	1225,00	42 875,000	5,9161	3,2711	109,96	962,113
35,1	1232,01	43 243,551	5,9245	3,2742	110,27	967,618
35,2	1239,04	43 614,208	5,9330	3,2773	110,58	973,140
35,3	1246,09	43 986,977	5,9414	3,2804	110,90	978,677
35,4	1253,16	44 361,864	5,9498	3,2835	111,21	984,230
35,5	1260,25	44 738,875	5,9582	3,2866	111,53	989,798
35,6	1267,36	45 118,016	5,9666	3,2897	111,84	995,382
35,7	1274,49	45 499,293	5,9749	3,2927	112,15	1000,98
35,8	1281,64	45 882,712	5,9833	3,2958	112,47	1006,60
35,9	1288,81	46 268,279	5,9917	3,2989	112,78	1012,23
36,0	1296,00	46 656,000	6,0000	3,3019	113,10	1017,88
36,1	1303,21	47 045,881	6,0083	3,3050	113,41	1023,54
36,2	1310,44	47 437,928	6,0116	3,3080	113,73	1029,22
36,3	1317,69	47 832,147	6,0249	3,3111	114,04	1034,91
36,4	1324,96	48 228,544	6,0332	3,3141	114,35	1040,62
36,5	1332,25	48 627,125	6,0415	3,3171	114,67	1046,35
36,6	1339,56	49 027,896	6,0498	3,3202	114,98	1052,09
36,7	1346,89	49 430,863	6,0581	3,3232	115,30	1057,84
36,8	1354,24	49 836,032	6,0663	3,3262	115,61	1063,62
36,9	1361,61	50 243,409	6,0745	3,3292	115,92	1069,41
37,0	1369,00	50 653,000	6,0828	3,3322	116,24	1075,21
37,1	1376,41	51 064,811	6,0910	3,3352	116,55	1081,03
37,2	1383,84	51 478,848	6,0992	3,3382	116,87	1086,87
37,3	1391,29	51 895,117	6,1074	3,3412	117,18	1092,72
37,4	1398,76	52 313,624	6,1156	3,3442	117,50	1098,58
37,5	1406,25	52 734,375	6,1237	3,3472	117,81	1104,47
37,6	1413,76	53 157,376	6,1319	3,3501	118,12	1110,36
37,7	1421,29	53 582,633	6,1400	3,3531	118,44	1116,28
37,8	1428,84	54 010,152	6,1482	3,3561	118,75	1122,21
37,9	1436,41	54 439,939	6,1563	3,3590	119,07	1128,15
38,0	1444,00	54 872,000	6,1644	3,3620	119,38	1134,11
38,1	1451,61	55 306,341	6,1725	3,3649	119,69	1140,09
38,2	1459,24	55 742,968	6,1806	3,3679	120,01	1146,08
38,3	1466,89	56 181,887	6,1887	3,3708	120,32	1152,09
38,4	1474,56	56 623,104	6,1968	3,3737	120,64	1158,12
38,5	1482,25	57 066,625	6,2048	3,3767	120,95	1164,16
38,6	1489,96	57 512,456	6,2129	3,3796	121,27	1170,21
38,7	1497,69	57 960,603	6,2209	3,3825	121,58	1176,28
38,8	1505,44	58 411,072	6,2290	3,3854	121,89	1182,37
38,9	1513,21	58 863,869	6,2370	3,3883	122,21	1188,47
39,0	1521,00	59 319,000	6,2450	3,3912	122,52	1194,59
39,1	1528,81	59 776,471	6,2530	3,3941	122,84	1200,72
39,2	1536,64	60 236,288	6,2610	3,3970	123,15	1206,87
39,3	1544,49	60 698,457	6,2690	3,3999	123,46	1213,04
39,4	1552,36	61 162,984	6,2769	3,4028	123,78	1219,22
39,5	1560,25	61 629,875	6,2849	3,4056	124,09	1225,42
39,6	1568,16	62 099,136	6,2929	3,4085	124,41	1231,63
39,7	1576,09	62 570,773	6,3008	3,4114	124,72	1237,86
39,8	1584,04	63 044,792	6,3087	3,4142	125,04	1244,10
39,9	1592,01	63 521,199	6,3166	3,4171	125,35	1250,36
40,0	1600,00	64 000,000	6,3246	3,4200	125,66	1256,64

40—45

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
40,0	1600,00	64 000,000	6,3246	3,4200	125,66	1256,64
40,1	1608,01	64 481,201	6,3325	3,4228	125,98	1262,93
40,2	1616,04	64 964,808	6,3403	3,4256	126,29	1269,23
40,3	1624,09	65 450,827	6,3482	3,4285	126,61	1275,56
40,4	1632,16	65 939,264	6,3561	3,4313	126,92	1281,90
40,5	1640,25	66 430,125	6,3640	3,4341	127,23	1288,25
40,6	1648,36	66 923,416	6,3718	3,4370	127,55	1294,62
40,7	1656,49	67 419,143	6,3797	3,4398	127,86	1301,00
40,8	1664,64	67 917,312	6,3875	3,4426	128,18	1307,41
40,9	1672,81	68 417,929	6,3953	3,4454	128,49	1313,82
41,0	1681,00	68 921,000	6,4031	3,4482	128,81	1320,25
41,1	1689,21	69 426,531	6,4109	3,4510	129,12	1326,70
41,2	1697,44	69 934,528	6,4187	3,4538	129,43	1333,17
41,3	1705,69	70 444,997	6,4265	3,4566	129,75	1339,65
41,4	1713,96	70 957,944	6,4343	3,4594	130,06	1346,14
41,5	1722,25	71 473,375	6,4420	3,4622	130,38	1352,65
41,6	1730,56	71 991,296	6,4498	3,4650	130,69	1359,18
41,7	1738,89	72 511,713	6,4576	3,4677	131,00	1365,72
41,8	1747,24	73 034,623	6,4653	3,4705	131,32	1372,28
41,9	1755,61	73 560,059	6,4730	3,4733	131,63	1378,85
42,0	1764,00	74 088,000	6,4807	3,4760	131,95	1385,44
42,1	1772,41	74 618,461	6,4885	3,4788	132,26	1392,05
42,2	1780,84	75 151,448	6,4961	3,4815	132,58	1398,67
42,3	1789,29	75 686,967	6,5038	3,4843	132,89	1405,31
42,4	1797,76	76 225,024	6,5115	3,4870	133,20	1411,96
42,5	1806,25	76 765,625	6,5192	3,4898	133,52	1418,63
42,6	1814,76	77 308,776	6,5269	3,4925	133,83	1425,31
42,7	1823,29	77 854,483	6,5345	3,4952	134,15	1432,01
42,8	1831,84	78 402,752	6,5422	3,4980	134,46	1438,72
42,9	1840,41	78 953,589	6,5498	3,5007	134,77	1445,45
43,0	1849,00	79 507,000	6,5574	3,5034	135,09	1452,20
43,1	1857,61	80 062,991	6,5651	3,5061	135,40	1458,96
43,2	1866,24	80 621,568	6,5727	3,5088	135,72	1465,74
43,3	1874,89	81 182,737	6,5803	3,5115	136,03	1472,54
43,4	1883,56	81 746,504	6,5879	3,5142	136,35	1479,34
43,5	1892,25	82 312,875	6,5955	3,5169	136,66	1486,17
43,6	1900,96	82 881,856	6,6030	3,5196	136,97	1493,01
43,7	1909,69	83 453,453	6,6106	3,5223	137,29	1499,87
43,8	1918,44	84 027,672	6,6182	3,5250	137,60	1506,74
43,9	1927,21	84 604,519	6,6257	3,5277	137,92	1513,63
44,0	1936,00	85 184,000	6,6332	3,5303	138,23	1520,53
44,1	1944,81	85 766,121	6,6408	3,5330	138,54	1527,45
44,2	1953,64	86 350,888	6,6483	3,5357	138,86	1534,39
44,3	1962,49	86 938,307	6,6558	3,5384	139,17	1541,34
44,4	1971,36	87 528,384	6,6633	3,5410	139,49	1548,30
44,5	1980,25	88 121,125	6,6708	3,5437	139,80	1555,28
44,6	1989,16	88 716,536	6,6783	3,5463	140,12	1562,28
44,7	1998,09	89 314,623	6,6858	3,5490	140,43	1569,30
44,8	2007,04	89 915,392	6,6933	3,5516	140,74	1576,33
44,9	2016,01	90 518,849	6,7007	3,5543	141,06	1583,37
45,0	2025,00	91 125,000	6,7082	3,5569	141,37	1590,43

45 — 50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
45,0	2025,00	91 125,000	6,7082	3,5569	141,37	1590,43
45,1	2034,01	91 733,851	6,7157	3,5595	141,69	1597,51
45,2	2043,04	92 345,408	6,7231	3,5622	142,00	1604,60
45,3	2052,09	92 959,677	6,7305	3,5648	142,31	1611,71
45,4	2061,16	93 576,664	6,7380	3,5674	142,63	1618,83
45,5	2070,25	94 196,375	6,7454	3,5700	142,94	1625,97
45,6	2079,36	94 818,816	6,7528	3,5726	143,26	1633,13
45,7	2088,49	95 443,993	6,7602	3,5752	143,57	1640,30
45,8	2097,64	96 071,912	6,7676	3,5778	143,88	1647,48
45,9	2106,81	96 702,579	6,7750	3,5805	144,20	1654,68
46,0	2116,00	97 336,000	6,7823	3,5830	144,51	1661,90
46,1	2125,21	97 972,181	6,7897	3,5856	144,83	1669,14
46,2	2134,44	98 611,128	6,7971	3,5882	145,14	1676,39
46,3	2143,69	99 252,847	6,8044	3,5908	145,46	1683,65
46,4	2152,96	99 897,344	6,8118	3,5934	145,77	1690,93
46,5	2162,25	100 544,625	6,8191	3,5960	146,08	1698,23
46,6	2171,56	101 194,696	6,8264	3,5986	146,40	1705,54
46,7	2180,89	101 847,563	6,8337	3,6011	146,71	1712,87
46,8	2190,24	102 503,232	6,8411	3,6037	147,03	1720,21
46,9	2199,61	103 161,709	6,8484	3,6063	147,34	1727,57
47,0	2209,00	103 823,000	6,8557	3,6088	147,65	1734,94
47,1	2218,41	104 487,111	6,8629	3,6114	147,97	1742,34
47,2	2227,84	105 154,048	6,8702	3,6139	148,28	1749,74
47,3	2237,29	105 823,817	6,8775	3,6165	148,60	1757,16
47,4	2246,76	106 496,424	6,8848	3,6190	148,91	1764,60
47,5	2256,25	107 171,875	6,8920	3,6216	149,23	1772,05
47,6	2265,76	107 850,176	6,8993	3,6241	149,54	1779,52
47,7	2275,29	108 531,333	6,9065	3,6267	149,85	1787,01
47,8	2284,84	109 215,352	6,9138	3,6292	150,17	1794,51
47,9	2294,41	109 902,239	6,9209	3,6317	150,48	1802,03
48,0	2304,00	110 592,000	6,9282	3,6342	150,80	1809,56
48,1	2313,61	111 284,641	6,9354	3,6368	151,11	1817,11
48,2	2323,24	111 980,168	6,9426	3,6393	151,42	1824,67
48,3	2332,89	112 678,587	6,9498	3,6418	151,74	1832,25
48,4	2342,56	113 379,904	6,9570	3,6443	152,05	1839,84
48,5	2352,25	114 084,125	6,9642	3,6468	152,37	1847,45
48,6	2361,96	114 791,256	6,9714	3,6493	152,68	1855,08
48,7	2371,69	115 501,303	6,9785	3,6518	153,00	1862,72
48,8	2381,44	116 214,272	6,9857	3,6543	153,31	1870,38
48,9	2391,21	116 930,169	6,9929	3,6568	153,62	1878,05
49,0	2401,00	117 649,000	7,0000	3,6593	153,94	1885,74
49,1	2410,81	118 370,771	7,0071	3,6618	154,25	1893,45
49,2	2420,64	119 095,488	7,0143	3,6643	154,57	1901,17
49,3	2430,49	119 823,157	7,0214	3,6668	154,88	1908,90
49,4	2440,36	120 553,784	7,0285	3,6692	155,19	1916,65
49,5	2450,25	121 287,375	7,0356	3,6717	155,51	1924,42
49,6	2460,16	122 023,936	7,0427	3,6742	155,82	1932,21
49,7	2470,09	122 763,473	7,0498	3,6767	156,14	1940,00
49,8	2480,04	123 505,992	7,0569	3,6791	156,45	1947,82
49,9	2490,01	124 251,499	7,0640	3,6816	156,77	1955,65
50,0	2500,00	125 000,000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50

50—55

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
50,0	2500,00	125 000,000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50
50,1	2510,01	125 751,501	7,0781	3,6865	157,39	1971,36
50,2	2520,04	126 506,008	7,0852	3,6889	157,71	1979,23
50,3	2530,09	127 263,527	7,0922	3,6914	158,02	1987,13
50,4	2540,16	128 024,064	7,0993	3,6938	158,34	1995,04
50,5	2550,25	128 787,625	7,1063	3,6963	158,65	2002,96
50,6	2560,36	129 554,216	7,1134	3,6987	158,96	2010,90
50,7	2570,49	130 323,843	7,1204	3,7011	159,28	2018,86
50,8	2580,64	131 096,512	7,1274	3,7036	159,59	2026,83
50,9	2590,81	131 872,229	7,1344	3,7060	159,91	2034,82
51,0	2601,00	132 651,000	7,1414	3,7084	160,22	2042,82
51,1	2611,21	133 432,831	7,1484	3,7109	160,54	2050,84
51,2	2621,44	134 217,728	7,1554	3,7133	160,85	2058,87
51,3	2631,69	135 005,697	7,1624	3,7157	161,16	2066,92
51,4	2641,96	135 796,744	7,1694	3,7181	161,48	2074,99
51,5	2652,25	136 590,875	7,1764	3,7205	161,79	2083,07
51,6	2662,56	137 388,096	7,1833	3,7229	162,11	2091,17
51,7	2672,89	138 188,413	7,1903	3,7253	162,42	2099,28
51,8	2683,24	138 991,832	7,1972	3,7277	162,73	2107,41
51,9	2693,61	139 798,359	7,2042	3,7301	163,05	2115,56
52,0	2704,00	140 608,000	7,2111	3,7325	163,36	2123,72
52,1	2714,41	141 420,761	7,2180	3,7349	163,68	2131,89
52,2	2724,84	142 236,648	7,2250	3,7373	163,99	2140,08
52,3	2735,29	143 055,667	7,2319	3,7397	164,31	2148,29
52,4	2745,76	143 877,824	7,2388	3,7421	164,62	2156,51
52,5	2756,25	144 703,125	7,2457	3,7444	164,93	2164,75
52,6	2766,76	145 531,576	7,2526	3,7468	165,25	2173,01
52,7	2777,29	146 363,183	7,2595	3,7492	165,56	2181,28
52,8	2787,84	147 197,952	7,2664	3,7516	165,88	2189,56
52,9	2798,41	148 035,889	7,2732	3,7539	166,19	2197,87
53,0	2809,00	148 877,000	7,2801	3,7563	166,50	2206,18
53,1	2819,61	149 721,291	7,2870	3,7586	166,82	2214,52
53,2	2830,24	150 568,768	7,2938	3,7610	167,13	2222,87
53,3	2840,89	151 419,437	7,3007	3,7634	167,45	2231,23
53,4	2851,56	152 273,304	7,3075	3,7657	167,76	2239,61
53,5	2862,25	153 130,375	7,3144	3,7681	168,08	2248,01
53,6	2872,96	153 990,656	7,3212	3,7704	168,39	2256,42
53,7	2883,69	154 854,153	7,3280	3,7728	168,70	2264,84
53,8	2894,44	155 720,872	7,3348	3,7751	169,02	2273,29
53,9	2905,21	156 590,819	7,3417	3,7774	169,33	2281,75
54,0	2916,00	157 464,000	7,3485	3,7798	169,65	2290,22
54,1	2926,81	158 340,421	7,3553	3,7821	169,96	2298,71
54,2	2937,64	159 220,088	7,3621	3,7844	170,27	2307,22
54,3	2948,49	160 103,007	7,3689	3,7868	170,59	2315,74
54,4	2959,36	160 989,184	7,3756	3,7891	170,90	2324,28
54,5	2970,25	161 878,625	7,3824	3,7914	171,22	2332,83
54,6	2981,16	162 771,336	7,3892	3,7937	171,53	2341,40
54,7	2992,09	163 667,323	7,3959	3,7960	171,85	2349,98
54,8	3003,04	164 566,592	7,4027	3,7983	172,16	2358,58
54,9	3014,01	165 469,149	7,4095	3,8006	172,47	2367,20
55,0	3025,00	166 375,000	7,4162	3,8030	172,79	2375,83

55 — 60

n	n²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n . π	$\frac{n^2.\pi}{4}$
55,0	3025,00	166 375,000	7,4162	3,8030	172,79	2375,83
55,1	3036,01	167 284,151	7,4229	3,8053	173,10	2384,48
55,2	3047,04	168 196,608	7,4297	3,8076	173,42	2393,14
55,3	3058,09	169 112,377	7,4364	3,8099	173,73	2401,82
55,4	3069,16	170 031,464	7,4431	3,8121	174,04	2410,51
55,5	3080,25	170 953,875	7,4498	3,8144	174,36	2419,22
55,6	3091,36	171 879,616	7,4565	3,8167	174,67	2427,95
55,7	3102,49	172 808,693	7,4632	3,8190	174,99	2436,69
55,8	3113,64	173 741,112	7,4699	3,8213	175,30	2445,45
55,9	3124,81	174 676,879	7,4766	3,8236	175,62	2454,22
56,0	3136,00	175 616,000	7,4833	3,8259	175,93	2463,01
56,1	3147,21	176 558,481	7,4900	3,8281	176,24	2471,81
56,2	3158,44	177 504,328	7,4967	3,8304	176,56	2480,63
56,3	3169,69	178 453,547	7,5033	3,8327	176,87	2489,47
56,4	3180,96	179 406,144	7,5100	3,8349	177,19	2498,32
56,5	3192,25	180 362,125	7,5166	3,8372	177,50	2507,19
56,6	3203,56	181 321,496	7,5233	3,8395	177,81	2516,07
56,7	3214,89	182 284,263	7,5299	3,8417	178,13	2524,97
56,8	3226,24	183 250,432	7,5366	3,8440	178,44	2533,88
56,9	3237,61	184 220,009	7,5432	3,8462	178,76	2542,81
57,0	3249,00	185 193,000	7,5498	3,8485	179,07	2551,76
57,1	3260,41	186 169,411	7,5565	3,8508	179,38	2560,72
57,2	3271,84	187 149,218	7,5631	3,8530	179,70	2569,70
57,3	3283,29	188 132,517	7,5697	3,8552	180,01	2578,69
57,4	3294,76	189 119,224	7,5763	3,8575	180,33	2587,70
57,5	3306,25	190 109,375	7,5829	3,8597	180,64	2596,72
57,6	3317,76	191 102,976	7,5895	3,8620	180,96	2605,76
57,7	3329,29	192 100,033	7,5961	3,8642	181,27	2614,82
57,8	3340,84	193 100,552	7,6026	3,8664	181,58	2623,89
57,9	3352,41	194 104,539	7,6092	3,8687	181,90	2632,98
58,0	3364,00	195 112,000	7,6158	3,8709	182,21	2642,08
58,1	3375,61	196 122,941	7,6223	3,8731	182,53	2651,20
58,2	3387,24	197 137,368	7,6289	3,8753	182,84	2660,33
58,3	3398,89	198 155,287	7,6354	3,8775	183,15	2669,48
58,4	3410,56	199 176,704	7,6420	3,8798	183,47	2678,65
58,5	3422,25	200 201,625	7,6485	3,8820	183,78	2687,83
58,6	3433,96	201 230,056	7,6551	3,8842	184,10	2697,03
58,7	3445,69	202 262,003	7,6616	3,8864	184,41	2706,24
58,8	3457,44	203 297,472	7,6681	3,8886	184,73	2715,47
58,9	3469,21	204 336,469	7,6746	3,8908	185,04	2724,71
59,0	3481,00	205 379,000	7,6811	3,8930	185,35	2733,97
59,1	3492,81	206 425,071	7,6877	3,8952	185,67	2743,25
59,2	3504,64	207 474,688	7,6942	3,8974	185,98	2752,54
59,3	3516,49	208 527,857	7,7006	3,8996	186,30	2761,84
59,4	3528,36	209 584,584	7,7071	3,9018	186,61	2771,17
59,5	3540,25	210 644,875	7,7136	3,9040	186,92	2780,51
59,6	3552,16	211 708,736	7,7201	3,9061	187,24	2789,86
59,7	3564,09	212 776,173	7,7266	3,9083	187,55	2799,23
59,8	3576,04	213 847,192	7,7330	3,9105	187,87	2808,62
59,9	3588,01	214 921,799	7,7395	3,9127	188,18	2818,02
60,0	3600,00	216 000,000	7,7460	3,9149	188,50	2827,43

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
60,0	3600,00	216 000,000	7,7460	3,9149	188,50	2827,43
60,1	3612,01	217 081,801	7,7524	3,9170	188,81	2836,87
60,2	3624,04	218 167,208	7,7589	3,9192	189,12	2846,31
60,3	3636,09	219 256,227	7,7653	3,9214	189,44	2855,78
60,4	3648,16	220 348,864	7,7717	3,9235	189,75	2865,26
60,5	3660,25	221 445,125	7,7782	3,9257	190,07	2874,75
60,6	3672,36	222 545,016	7,7846	3,9279	190,38	2884,26
60,7	3684,49	223 648,543	7,7910	3,9300	190,69	2893,79
60,8	3696,64	224 755,712	7,7974	3,9322	191,01	2903,33
60,9	3708,81	225 866,529	7,8038	3,9343	191,32	2912,89
61,0	3721,00	226 981,000	7,8102	3,9365	191,64	2922,47
61,1	3733,21	228 099,131	7,8166	3,9386	191,95	2932,06
61,2	3745,44	229 220,928	7,8230	3,9408	192,27	2941,66
61,3	3757,69	230 346,397	7,8294	3,9429	192,58	2951,28
61,4	3769,96	231 475,544	7,8358	3,9451	192,89	2960,92
61,5	3782,25	232 608,375	7,8422	3,9472	193,21	2970,57
61,6	3794,56	233 744,896	7,8486	3,9494	193,52	2980,24
61,7	3806,89	234 885,113	7,8549	3,9515	193,84	2989,92
61,8	3819,24	236 029,032	7,8613	3,9536	194,15	2999,62
61,9	3831,61	237 176,659	7,8677	3,9558	194,46	3009,34
62,0	3844,00	238 328,000	7,8740	3,9579	194,78	3019,07
62,1	3856,41	239 483,061	7,8804	3,9600	195,09	3028,82
62,2	3868,84	240 641,848	7,8867	3,9621	195,41	3038,58
62,3	3881,29	241 804,367	7,8930	3,9643	195,72	3048,36
62,4	3893,76	242 970,624	7,8994	3,9664	196,04	3058,15
62,5	3906,25	244 140,625	7,9057	3,9685	196,35	3067,96
62,6	3918,76	245 314,376	7,9120	3,9706	196,66	3077,79
62,7	3931,29	246 491,883	7,9183	3,9727	196,98	3087,63
62,8	3943,84	247 673,152	7,9246	3,9748	197,29	3097,48
62,9	3956,41	248 858,189	7,9310	3,9770	197,61	3107,36
63,0	3969,00	250 047,000	7,9373	3,9791	197,92	3117,25
63,1	3981,61	251 239,591	7,9436	3,9812	198,23	3127,15
63,2	3994,24	252 435,968	7,9498	3,9833	198,55	3137,07
63,3	4006,89	253 636,137	7,9561	3,9854	198,86	3147,00
63,4	4019,56	254 840,104	7,9624	3,9875	199,18	3156,96
63,5	4032,25	256 047,875	7,9687	3,9896	199,49	3166,92
63,6	4044,96	257 259,456	7,9750	3,9916	199,81	3176,90
63,7	4057,69	258 474,853	7,9812	3,9937	200,12	3186,90
63,8	4070,44	259 694,072	7,9875	3,9958	200,43	3196,92
63,9	4083,21	260 917,119	7,9937	3,9979	200,75	3206,95
64,0	4096,00	262 144,000	8,0000	4,0000	201,06	3216,99
64,1	4108,81	263 374,721	8,0062	4,0021	201,38	3227,05
64,2	4121,64	264 609,288	8,0125	4,0042	201,69	3237,13
64,3	4134,49	265 847,707	8,0187	4,0062	202,00	3247,22
64,4	4147,36	267 089,984	8,0250	4,0083	202,32	3257,33
64,5	4160,25	268 336,125	8,0312	4,0104	202,63	3267,45
64,6	4173,16	269 586,136	8,0374	4,0125	202,95	3277,59
64,7	4186,09	270 840,023	8,0436	4,0145	203,26	3287,75
64,8	4199,04	272 097,792	8,0498	4,0166	203,58	3297,92
64,9	4212,01	273 359,449	8,0561	4,0187	203,89	3308,10
65,0	4225,00	274 625,000	8,0623	4,0207	204,20	3318,31

65—70

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
65,0	4225,00	274 625,000	8,0623	4,0207	204,20	3318,31
65,1	4238,01	275 894,451	8,0685	4,0228	204,52	3328,53
65,2	4251,04	277 167,808	8,0747	4,0248	204,83	3338,76
65,3	4264,09	278 445,077	8,0808	4,0269	205,15	3349,01
65,4	4277,16	279 726,264	8,0870	4,0290	205,46	3359,27
65,5	4290,25	281 011,375	8,0932	4,0310	205,78	3369,55
65,6	4303,36	282 300,416	8,0994	4,0331	206,09	3379,85
65,7	4316,49	283 593,393	8,1056	4,0351	206,40	3390,16
65,8	4329,64	284 890,312	8,1117	4,0372	206,72	3400,49
65,9	4342,81	286 191,179	8,1179	4,0392	207,03	3410,83
66,0	4356,00	287 496,000	8,1240	4,0412	207,35	3421,19
66,1	4369,21	288 804,781	8,1302	4,0433	207,66	3431,57
66,2	4382,44	290 117,528	8,1363	4,0453	207,97	3441,96
66,3	4395,69	291 434,247	8,1425	4,0474	208,29	3452,37
66,4	4408,96	292 754,944	8,1486	4,0494	208,60	3462,79
66,5	4422,25	294 079,625	8,1548	4,0514	208,92	3473,23
66,6	4435,56	295 408,296	8,1609	4,0534	209,23	3483,68
66,7	4448,89	296 740,963	8,1670	4,0555	209,54	3494,15
66,8	4462,24	298 077,632	8,1731	4,0575	209,86	3504,64
66,9	4475,61	299 418,309	8,1792	4,0595	210,17	3515,14
67,0	4489,00	300 763,000	8,1854	4,0615	210,49	3525,65
67,1	4502,41	302 111,711	8,1915	4,0636	210,80	3536,18
67,2	4515,84	303 464,448	8,1976	4,0656	211,12	3546,73
67,3	4529,29	304 821,217	8,2037	4,0676	211,43	3557,30
67,4	4542,76	306 182,024	8,2098	4,0696	211,74	3567,88
67,5	4556,25	307 546,875	8,2158	4,0716	212,06	3578,47
67,6	4569,76	308 915,776	8,2219	4,0736	212,37	3589,08
67,7	4583,29	310 288,733	8,2280	4,0756	212,69	3599,71
67,8	4596,84	311 665,752	8,2341	4,0776	213,00	3610,35
67,9	4610,41	313 046,839	8,2401	4,0797	213,51	3621,01
68,0	4624,00	314 432,000	8,2462	4,0817	213,63	3631,68
68,1	4637,61	315 821,241	8,2523	4,0837	213,94	3642,37
68,2	4651,24	317 214,568	8,2583	4,0857	214,26	3653,08
68,3	4664,89	318 611,987	8,2644	4,0877	214,57	3663,80
68,4	4678,56	320 013,504	8,2704	4,0896	214,88	3674,53
68,5	4692,25	321 419,125	8,2765	4,0916	215,20	3685,28
68,6	4705,96	322 828,856	8,2825	4,0936	215,51	3696,05
68,7	4719,69	324 242,703	8,2885	4,0956	215,83	3706,84
68,8	4733,44	325 660,672	8,2946	4,0976	216,14	3717,64
68,9	4747,21	327 082,769	8,3006	4,0996	216,46	3728,45
69,0	4761,00	328 509,000	8,3066	4,1016	216,77	3739,28
69,1	4774,81	329 939,371	8,3126	4,1035	217,08	3750,13
69,2	4788,64	331 373,888	8,3187	4,1055	217,40	3760,99
69,3	4802,49	332 812,557	8,3247	4,1075	217,71	3771,87
69,4	4816,36	334 255,384	8,3307	4,1095	218,03	3782,76
69,5	4830,25	335 702,375	8,3367	4,1114	218,34	3793,67
69,6	4844,16	337 153,536	8,3427	4,1134	218,65	3804,59
69,7	4858,09	338 608,873	8,3487	4,1154	218,97	3815,53
69,8	4872,04	340 068,392	8,3546	4,1174	219,28	3826,49
69,9	4886,01	341 532,099	8,3606	4,1193	219,60	3837,46
70,0	4900,00	343 000,000	8,3666	4,1213	219,91	3848,45

70 — 75

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
70,0	4900,00	343 000,000	8,3666	4,1213	219,91	3848,45
70,1	4914,01	344 472,101	8,3726	4,1232	220,23	3859,45
70,2	4928,04	345 948,408	8,3785	4,1252	220,54	3870,47
70,3	4942,09	347 428,927	8,3845	4,1272	220,85	3881,51
70,4	4957,16	348 913,664	8,3905	4,1291	221,17	3892,56
70,5	4970,25	350 402,625	8,3964	4,1311	221,48	3903,63
70,6	4984,36	351 895,816	8,4024	4,1330	221,80	3914,71
70,7	4989,49	353 393,243	8,4083	4,1350	222,11	3925,80
70,8	5012,64	354 894,912	8,4143	4,1369	222,42	3936,92
70,9	5026,81	356 400,829	8,4202	4,1389	222,74	3948,05
71,0	5041,00	357 911,000	8,4261	4,1408	223,05	3959,19
71,1	5055,21	359 425,431	8,4321	4,1428	223,37	3970,35
71,2	5069,44	360 944,128	8,4380	4,1447	223,68	3981,53
71,3	5083,69	362 467,097	8,4439	4,1466	224,00	3992,72
71,4	5097,96	363 994,344	8,4499	4,1486	224,31	4003,93
71,5	5112,25	365 525,875	8,4558	4,1505	224,62	4015,15
71,6	5126,56	367 061,696	8,4617	4,1524	224,94	4026,39
71,7	5140,89	368 601,813	8,4676	4,1544	225,25	4037,65
71,8	5155,24	370 146,232	8,4735	4,1563	255,57	4048,92
71,9	5169,61	371 694,959	8,4794	4,1582	225,88	4060,20
72,0	5184,00	373 248,000	8,4853	4,1602	226,19	4071,50
72,1	5198,41	374 805,361	8,4912	4,1621	226,51	4082,82
72,2	5212,84	376 367,048	8,4971	4,1640	226,82	4094,15
72,3	5227,29	377 933,067	8,5029	4,1659	227,14	4105,50
72,4	5241,76	379 503,424	8,5088	4,1679	227,45	4116,87
72,5	5256,25	381 078,125	8,5147	4,1698	227,77	4128,25
72,6	5270,76	382 657,176	8,5206	4,1717	228,08	4139,65
72,7	5285,29	384 240,583	8,5264	4,1736	228,39	4151,06
72,8	5299,84	385 828,352	8,5323	4,1755	228,71	4162,48
72,9	5314,41	387 420,489	8,5381	4,1774	229,02	4173,93
73,0	5329,00	389 017,000	8,5440	4,1793	229,34	4185,39
73,1	5343,61	390 617,891	8,5499	4,1812	229,65	4196,86
73,2	5358,24	392 223,168	8,5557	4,1832	229,96	4208,35
73,3	5372,89	393 832,837	8,5615	4,1851	230,28	4219,86
73,4	5387,56	395 446,904	8,5674	4,1870	230,59	4231,38
73,5	5402,25	397 065,375	8,5732	4,1889	230,91	4242,92
73,6	5416,96	398 688,256	8,5790	4,1908	231,22	4254,47
73,7	5431,69	400 315,553	8,5849	4,1927	231,54	4266,04
73,8	5446,44	401 947,272	8,5907	4,1946	231,85	4277,62
73,9	5461,21	403 583,419	8,5965	4,1964	232,16	4289,22
74,0	5476,00	405 224,000	8,6023	4,1983	232,48	4300,84
74,1	5490,81	406 869,021	8,6081	4,2002	232,79	4312,47
74,2	5505,64	408 518,488	8,6139	4,2021	233,11	4324,12
74,3	5520,49	410 172,407	8,6197	4,2040	233,42	4335,78
74,4	5535,36	411 830,784	8,6255	4,2059	233,73	4347,46
74,5	5550,25	413 493,625	8,6313	4,2078	234,05	4359,16
74,6	5565,16	415 160,936	8,6371	4,2097	234,36	4370,87
74,7	5580,09	416 832,723	8,6429	4,2115	234,68	4382,59
74,8	5595,04	418 508,992	8,6487	4,2134	234,99	4394,33
74,9	5610,01	420 189,749	8,6545	4,2153	235,31	4406,09
75,0	5625,00	421 875,000	8.6603	4,2172	235,62	4417,86

75—80

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
75,0	5625,00	421 875,000	8,6603	4,2172	235,62	4417,86
75,1	5640,01	423 564,751	8,6660	4,2190	235,93	4429,65
75,2	5655,04	425 259,008	8,6718	4,2209	236,25	4441,46
75,3	5670,09	426 957,777	8,6776	4,2228	236,56	4453,28
75,4	5685,15	428 661,064	8,6833	4,2246	236,88	4465,11
75,5	5700,25	430 368,875	8,6891	4,2265	237,19	4476,97
75,6	5715,36	432 081,216	8,6948	4,2284	237,50	4488,83
75,7	5730,49	433 798,093	8,7006	4,2302	237,82	4500,72
75,8	5745,64	435 519,512	8,7063	4,2321	238,13	4512,62
75,9	5760,81	437 245,479	8,7121	4,2340	238,45	4524,53
76,0	5776,00	438 976,000	8,7178	4,2358	238,76	4536,46
76,1	5791,21	440 711,081	8,7235	4,2377	239,08	4548,41
76,2	5806,44	442 450,728	8,7293	4,2395	239,39	4560,37
76,3	5821,69	444 194,947	8,7350	4,2414	239,70	4572,34
76,4	5836,90	445 943,744	8,7407	4,2432	240,02	4584,34
76,5	5852,25	447 697,125	8,7464	4,2451	240,33	4596,35
76,6	5867,56	449 455,096	8,7521	4,2469	240,65	4608,37
76,7	5882,89	451 217,663	8,7579	4,2488	240,96	4620,41
76,8	5898,24	452 984,832	8,7636	4,2506	241,27	4632,47
76,9	5913,61	454 756,509	8,7693	4,2525	241,59	4644,54
77,0	5929,00	456 533,000	8,7750	4,2543	241,90	4656,63
77,1	5944,41	458 314,011	8,7807	4,2562	242,22	4668,73
77,2	5959,84	460 099,648	8,7864	4,2580	242,53	4680,85
77,3	5975,29	461 889,917	8,7920	4,2598	242,85	4692,98
77,4	5990,76	463 684,824	8,7977	4,2617	243,16	4705,13
77,5	6006,25	465 484,375	8,8034	4,2635	243,47	4717,30
77,6	6021,76	467 288,576	8,8091	4,2653	243,79	4729,48
77,7	6037,29	469 097,433	8,8148	4,2672	244,10	4741,68
77,8	6052,84	470 910,952	8,8204	4,2690	244,42	4753,89
77,9	6068,41	472 729,139	8,8261	4,2708	244,73	4766,12
78,0	6084,00	474 552,000	8,8318	4,2727	245,04	4778,36
78,1	6099,61	476 379,541	8,8374	4,2745	245,36	4790,62
78,2	6115,24	478 211,768	8,8431	4,2763	245,67	4802,90
78,3	6130,89	480 048,687	8,8487	4,2781	245,99	4815,19
78,4	6146,56	481 890,304	8,8544	4,2799	246,30	4827,50
78,5	6162,25	483 736,625	8,8600	4,2818	246,62	4839,82
78,6	6177,96	485 587,656	8,8657	4,2836	246,93	4852,16
78,7	6193,69	487 443,403	8,8713	4,2854	247,24	4864,51
78,8	6209,44	489 303,872	8,8769	4,2872	247,56	4876,88
78,9	6225,21	491 169,069	8,8826	4,2890	247,87	4889,27
79,0	6241,00	493 039,000	8,8882	4,2908	248,19	4901,67
79,1	6256,81	494 913,671	8,8938	4,2927	248,50	4914,09
79,2	6272,64	496 793,088	8,8994	4,2945	248,81	4926,52
79,3	6288,49	498 677,257	8,9051	4,2963	249,13	4938,97
79,4	6304,36	500 566,184	8,9107	4,2981	249,44	4951,43
79,5	6320,25	502 459,875	8,9163	4,2999	249,76	4963,91
79,6	6336,16	504 358,336	8,9219	4,3017	250,07	4976,41
79,7	6352,09	506 261,573	8,9275	4,3035	250,38	4988,92
79,8	6368,04	508 169,592	8,9331	4,3053	250,70	5001,45
79,9	6384,01	510 082,399	8,9387	4,3071	251,01	5013,99
80,0	6400,00	512 000,000	8,9443	4,3089	251,33	5026,55

80—85

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
80,0	6400,00	512 000,000	8,9443	4,3089	251,33	5026,55
80,1	6416,01	513 922,401	8,9499	4,3107	251,64	5039,12
80,2	6432,04	515 849,608	8,9554	4,3125	251,96	5051,71
80,3	6448,09	517 781,627	8,9610	4,3143	252,27	5064,32
80,4	6464,16	519 718,464	8,9666	4,3160	252,58	5076,94
80,5	6480,25	521 660,125	8,9722	4,3178	252,90	5089,58
80,6	6496,36	523 606,616	8,9778	4,3196	253,21	5102,23
80,7	6512,49	525 557,943	8,9833	4,3214	253,53	5114,90
80,8	6528,64	527 514,112	8,9889	4,3232	253,84	5127,58
80,9	6544,81	529 475,129	8,9944	4,3250	254,15	5140,28
81,0	6561,00	531 441,000	9,0000	4,3267	254,47	5153,00
81,1	6577,21	533 411,731	9,0056	4,3285	254,78	5165,73
81,2	6593,44	535 387,328	9,0111	4,3303	255,10	5178,48
81,3	6609,69	537 367,797	9,0167	4,3321	255,41	5191,24
81,4	6625,96	539 353,144	9,0222	4,3339	255,73	5204,02
81,5	6642,25	541 343,375	9,0277	4,3356	256,04	5216,81
81,6	6658,56	543 338,496	9,0333	4,3374	256,35	5229,62
81,7	6674,89	545 338,513	9,0388	4,3392	256,67	5242,45
81,8	6691,24	547 343,432	9,0443	4,3409	256,98	5255,29
81,9	6707,61	549 353,259	9,0499	4,3427	257,30	5268,14
82,0	6724,00	551 368,000	9,0554	4,3445	257,61	5281,02
82,1	6740,41	553 387,661	9,0609	4,3463	257,92	5293,91
82,2	6756,84	555 412,248	9,0664	4,3480	258,24	5306,81
82,3	6773,29	557 441,767	9,0719	4,3498	258,55	5319,73
82,4	6789,76	559 476,224	9,0774	4,3515	258,87	5332,67
82,5	6806,25	561 515,625	9,0830	4,3533	259,18	5345,62
82,6	6822,76	563 559,976	9,0885	4,3551	259,50	5358,58
82,7	6839,29	565 609,283	9,0940	4,3568	259,81	5371,57
82,8	6855,84	567 663,552	9,0995	4,3586	260,12	5384,56
82,9	6872,41	569 722,789	9,1049	4,3603	260,44	5397,58
83,0	6889,00	571 787,000	9,1104	4,3621	260,75	5410,61
83,1	6905,61	573 856,191	9,1159	4,3638	261,07	5423,65
83,2	6922,24	575 930,368	9,1214	4,3656	261,38	5436,71
83,3	6938,89	578 009,537	9,1269	4,3673	261,69	5449,79
83,4	6955,56	580 093,704	9,1324	4,3691	262,01	5462,88
83,5	6972,25	582 182,875	9,1378	4,3708	262,32	5475,99
83,6	6988,96	584 277,056	9,1433	4,3726	262,64	5489,12
83,7	7005,69	586 376,253	9,1488	4,3743	262,95	5502,26
83,8	7022,44	588 480,472	9,1542	4,3760	263,27	5515,41
83,9	7039,21	590 589,719	9,1597	4,3778	263,58	5528,58
84,0	7056,00	592 704,000	9,1652	4,3795	263,89	5541,77
84,1	7072,81	594 823,321	9,1706	4,3813	264,21	5554,97
84,2	7089,64	596 947,688	9,1761	4,3830	264,52	5568,19
84,3	7106,49	599 077,107	9,1815	4,3847	264,84	5581,42
84,4	7123,36	601 211,584	9,1869	4,3865	265,15	5594,67
84,5	7140,25	603 351,125	9,1924	4,3882	265,46	5607,94
84,6	7157,16	605 495,736	9,1978	4,3899	265,78	5621,22
84,7	7174,09	607 645,423	9,2033	4,3917	266,09	5634,52
84,8	7191,04	609 800,192	9,2087	4,3934	266,41	5647,83
84,9	7208,01	611 960,049	9,2141	4,3951	266,72	5661,16
85,0	7225,00	614 125,000	9,2195	4,3968	267,04	5674,50

85 — 90

n	n²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n . π	$\frac{n^2 . \pi}{4}$
85,0	7225,00	614 125,000	9,2195	4,3968	267,04	5674,50
85,1	7242,01	616 295,051	9,2250	4,3986	267,35	5687,86
85,2	7259,04	618 470,208	9,2304	4,4003	267,66	5701,24
85,3	7276,09	620 650,477	9,2358	4,4020	267,98	5714,63
85,4	7293,16	622 835,864	9,2412	4,4037	268,29	5728,03
85,5	7310,25	625 026,375	9,2466	4,4054	268,61	5741,46
85,6	7327,36	627 222,016	9,2520	4,4072	268,92	5754,90
85,7	7344,49	629 422,793	9,2574	4,4089	269,23	5768,35
85,8	7361,64	631 628,712	9,2628	4,4106	269,55	5781,82
85,9	7378,81	633 839,779	9,2682	4,4123	269,86	5795,30
86,0	7396,00	636 056,000	9,2736	4,4140	270,18	5808,80
86,1	7413,21	638 277,381	9,2790	4,4157	270,49	5822,32
86,2	7430,44	640 503,928	9,2844	4,4174	270,81	5835,85
86,3	7447,69	642 735,647	9,2898	4,4191	271,12	5849,40
86,4	7464,96	644 972,544	9,2952	4,4208	271,43	5862,97
86,5	7482,25	647 214,625	9,3005	4,4225	271,75	5876,55
86,6	7499,56	649 461,896	9,3059	4,4242	272,06	5890,14
86,7	7516,89	651 714,363	9,3113	4,4259	272,38	5903,75
86,8	7534,24	653 972,032	9,3167	4,4276	272,69	5917,38
86,9	7551,61	656 234,909	9,3220	4,4293	273,00	5931,02
87,0	7569,00	658 503,000	9,3274	4,4310	273,32	5944,68
87,1	7586,41	660 776,311	9,3327	4,4327	273,63	5958,35
87,2	7603,84	663 054,848	9,3381	4,4344	273,95	5972,04
87,3	7621,29	665 338,617	9,3434	4,4361	274,26	5985,75
87,4	7638,76	667 627,624	9,3488	4,4378	274,58	5999,47
87,5	7656,25	669 921,875	9,3541	4,4395	274,89	6013,20
87,6	7673,76	672 221,376	9,3595	4,4412	275,20	6026,96
87,7	7691,29	674 526,133	9,3648	4,4429	275,52	6040,73
87,8	7708,84	676 836,152	9,3702	4,4446	275,83	6054,51
87,9	7726,41	679 151,439	9,3755	4,4463	276,15	6068,31
88,0	7744,00	681 472,000	9,3808	4,4480	276,46	6082,12
88,1	7761,61	683 797,841	9,3862	4,4496	276,77	6095,95
88,2	7779,24	686 128,968	9,3915	4,4513	277,09	6109,80
88,3	7796,89	688 465,387	9,3968	4,4530	277,40	6123,66
88,4	7814,56	690 807,104	9,4021	4,4547	277,72	6137,54
88,5	7832,25	693 154,125	9,4074	4,4564	278,03	6151,43
88,6	7849,96	695 506,456	9,4128	4,4580	278,35	6165,34
88,7	7867,69	697 864,103	9,4181	4,4597	278,66	6179,27
88,8	7885,44	700 227,072	9,4234	4,4614	278,97	6193,21
88,9	7903,21	702 595,369	9,4287	4,4630	279,29	6207,17
89,0	7921,00	704 969,000	9,4340	4,4647	279,60	6221,14
89,1	7938,81	707 347,971	9,4393	4,4664	279,92	6235,13
89,2	7956,64	709 732,288	9,4446	4,4681	280,23	6249,13
89,3	7974,49	712 121,957	9,4499	4,4698	280,54	6263,15
89,4	7992,36	714 516,984	9,4552	4,4714	280,86	6277,18
89,5	8010,25	716 917,375	9,4604	4,4731	281,17	6291,24
89,6	8028,16	719 323,136	9,4657	4,4748	281,49	6305,30
89,7	8046,09	721 734,273	9,4710	4,4764	281,80	6319,38
89,8	8064,04	724 150,792	9,4763	4,4781	282,12	6333,48
89,9	8082,01	726 572,699	9,4816	4,4797	282,43	6347,60
90,0	8100,00	729 000,000	9,4868	4,4814	282,74	6361,73

90--95

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n.π	$\frac{n^2.\pi}{4}$
90,0	8100,00	729 000,000	9,4868	4,4814	282,74	6361,73
90,1	8118,01	731 432,701	9,4921	4,4831	283,06	6375,87
90,2	8136,04	733 870,808	9,4974	4,4847	283,37	6390,03
90,3	8154,09	736 314,327	9,5026	4,4864	283,69	6404,21
90,4	8172,16	738 763,264	9,5079	4,4880	284,00	6418,40
90,5	8190,25	741 217,625	9,5131	4,4897	284,31	6432,61
90,6	8208,36	743 677,416	9,5184	4,4913	284,63	6446,83
90,7	8226,49	746 142,643	9,5237	4,4930	284,94	6461,07
90,8	8244,64	748 613,312	9,5289	4,4946	285,26	6475,33
90,9	8262,81	751 089,429	9,5341	4,4963	285,57	6489,60
91,0	8281,00	753 571,000	9,5394	4,4979	285,88	6503,88
91,1	8299,21	756 058,031	9,5446	4,4996	286,20	6518,18
91,2	8317,44	758 550,528	9,5499	4,5012	286,51	6532,50
91,3	8335,69	761 048,497	9,5551	4,5029	286,83	6546,84
91,4	8353,96	763 551,944	9,5603	4,5045	287,14	6561,18
91,5	8372,25	766 060,875	9,5656	4,5062	287,46	6575,55
91,6	8390,56	768 575,296	9,5708	4,5078	287,77	6589,93
91,7	8408,89	771 095,213	9,5760	4,5094	288,08	6604,33
91,8	8427,24	773 620,632	9,5812	4,5111	288,40	6618,74
91,9	8445,61	776 151,559	9,5864	4,5127	288,71	6633,17
92,0	8464,00	778 688,000	9,5917	4,5144	289,03	6647,61
92,1	8482,41	781 229,961	9,5969	4,5160	289,34	6662,07
92,2	8500,84	783 777,448	9,6021	4,5176	289,65	6676,54
92,3	8519,29	786 330,467	9,6073	4,5193	289,97	6691,03
92,4	8537,76	788 889,024	9,6125	4,5209	290,28	6705,54
92,5	8556,25	791 453,125	9,6177	4,5225	290,60	6720,06
92,6	8574,76	794 022,776	9,6229	4,5241	290,91	6734,60
92,7	8593,29	796 597,983	9,6281	4,5258	291,23	6749,15
92,8	8611,84	799 178,752	9,6333	4,5274	291,54	6763,72
92,9	8630,41	801 765,089	9,6385	4,5290	291,85	6778,31
93,0	8649,00	804 357,000	9,6437	4,5307	292,17	6792,91
93,1	8667,61	806 954,491	9,6488	4,5323	292,48	6807,52
93,2	8686,24	809 557,568	9,6540	4,5339	292,80	6822,16
93,3	8704,89	812 166,237	9,6592	4,5355	293,11	6836,80
93,4	8723,56	814 780,504	9,6644	4,5371	293,42	6851,47
93,5	8742,25	817 400,375	9,6695	4,5388	293,74	6866,15
93,6	8760,96	820 025,856	9,6747	4,5404	294,05	6880,84
93,7	8779,69	822 656,953	9,6799	4,5420	294,37	6895,55
93,8	8798,44	825 293,672	9,6850	4,5436	294,68	6910,28
93,9	8817,21	827 936,019	9,6902	4,5452	295,00	6925,02
94,0	8836,00	830 584,000	9,6954	4,5468	295,31	6939,78
94,1	8854,81	833 237,621	9,7005	4,5485	295,62	6954,55
94,2	8873,64	835 896,888	9,7057	4,5501	295,94	6969,34
94,3	8892,49	838 561,807	9,7108	4,5517	296,25	6984,15
94,4	8911,36	841 232,384	9,7160	4,5533	296,57	6998,97
94,5	8930,25	843 908,625	9,7211	4,5549	296,88	7013,80
94,6	8949,16	846 590,536	9,7263	4,5565	297,19	7028,65
94,7	8968,09	849 278,123	9,7314	4,5581	297,51	7043,52
94,8	8987,04	851 971,392	9,7365	4,5597	297,82	7058,40
94,9	9006,01	854 670,349	9,7417	4,5613	298,14	7073,30
95,0	9025,00	857 375,000	9,7468	4,5629	298,45	7088,22

95 — 100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
95,0	9025,00	857 375,000	9,7468	4,5629	298,45	7088,22
95,1	9044,01	860 085,351	9,7519	4,5645	298,77	7103,15
95,2	9063,04	862 801,408	9,7570	4,5661	299,08	7118,09
95,3	9082,09	865 523,177	9,7622	4,5677	299,39	7133,06
95,4	9101,16	868 250,664	9,7673	4,5693	299,71	7148,03
95,5	9120,25	870 983,875	9,7724	4,5709	300,02	7163,03
95,6	9139,36	873 722,816	9,7775	4,5725	300,34	7178,04
95,7	9158,49	876 467,493	9,7826	4,5741	300,65	7193,06
95,8	9177,64	879 217,912	9,7877	4,5757	300,96	7208,10
95,9	9196,81	881 974,079	9,7929	4,5773	301,28	7223,16
96,0	9216,00	884 736,000	9,7980	4,5789	301,59	7238,23
96,1	9235,21	887 503,681	9,8031	4,5804	301,91	7253,32
96,2	9254,44	890 277,128	9,8082	4,5820	302,22	7268,42
96,3	9273,69	893 056,347	9,8133	4,5836	302,54	7283,54
96,4	9292,96	895 841,344	9,8184	4,5852	302,85	7298,67
96,5	9312,25	898 632,125	9,8234	4,5868	303,16	7313,82
96,6	9331,56	901 428,696	9,8285	4,5884	303,48	7328,99
96,7	9350,89	904 231,063	9,8336	4,5900	303,79	7344,17
96,8	9370,24	907 039,232	9,8387	4,5915	304,11	7359,37
96,9	9389,61	909 853,209	9,8438	4,5931	304,42	7374,58
97,0	9409,00	912 673,000	9,8489	4,5947	304,73	7389,81
97,1	9428,41	915 498,611	9,8539	4,5963	305,05	7405,06
97,2	9447,84	918 330,048	9,8590	4,5979	305,36	7420,32
97,3	9467,29	921 167,317	9,8641	4,5994	305,68	7435,59
97,4	9486,76	924 010,424	9,8691	4,6010	305,99	7450,88
97,5	9506,25	926 859,375	9,8742	4,6026	306,31	7466,19
97,6	9525,76	929 714,176	9,8793	4,6042	306,62	7481,51
97,7	9545,29	932 574,833	9,8843	4,6057	306,93	7496,85
97,8	9564,84	935 441,352	9,8894	4,6073	307,25	7512,21
97,9	9584,41	938 313,739	9,8944	4,6089	307,56	7527,58
98,0	9604,00	941 192,000	9,8995	4,6104	307,88	7542,96
98,1	9623,61	944 076,141	9,9045	4,6120	308,19	7558,37
98,2	9643,24	946 966,168	9,9096	4,6136	308,50	7573,78
98,3	9662,89	949 862,087	9,9146	4,6151	308,82	7589,22
98,4	9682,56	952 763,904	9,9197	4,6167	309,13	7604,66
98,5	9702,25	955 671,625	9,9247	4,6183	309,45	7620,13
98,6	9721,96	958 585,256	9,9298	4,6198	309,76	7635,61
98,7	9741,69	961 504,803	9,9348	4,6214	310,08	7651,11
98,8	9761,44	964 430,272	9,9398	4,6229	310,39	7666,62
98,9	9781,21	967 361,669	9,9448	4,6245	310,70	7682,14
99,0	9801,00	970 299,000	9,9499	4,6261	311,02	7697,69
99,1	9820,81	973 242,271	9,9549	4,6276	311,33	7713,25
99,2	9840,64	976 191,488	9,9599	4,6292	311,65	7728,82
99,3	9860,49	979 146,657	9,9649	4,6307	311,96	7744,41
99,4	9880,36	982 107,784	9,9700	4,6323	312,27	7760,02
99,5	9900,25	985 074,875	9,9750	4,6338	312,59	7775,64
99,6	9920,16	988 047,936	9,9800	4,6354	312,90	7791,28
99,7	9940,09	991 026,973	9,9850	4,6369	313,22	7806,93
99,8	9960,04	994 011,992	9,9900	4,6385	313,53	7822,60
99,9	9980,01	997 002,999	9,9950	4,6400	313,85	7838,28
100,0	10 000,0	1 000 000,00	10,000	4,6416	314,16	7853,98

3) Tabelle

der

Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 100 bis 1000.

3) Tabelle

der

Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 100 bis 1000

100 — 200

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
100	10,0000	4,6416	**150**	12,2474	5,3133
101	10,0499	4,6570	151	12,2882	5,3251
102	10,0995	4,6723	152	12,3288	5,3368
103	10,1489	4,6875	153	12,3693	5,3485
104	10,1980	4,7027	154	12,4097	5,3601
105	10,2470	4,7177	155	12,4499	5,3717
106	10,2956	4,7326	156	12,4900	5,3832
107	10,3441	4,7475	157	12,5300	5,3947
108	10,3923	4,7622	158	12,5698	5,4061
109	10,4403	4,7769	159	12,6095	5,4175
110	10,4881	4,7914	**160**	12,6491	5,4288
111	10,5357	4,8059	161	12,6886	5,4401
112	10,5830	4,8203	162	12,7279	5,4514
113	10,6301	4,8346	163	12,7671	5,4626
114	10,6771	4,8488	164	12,8062	5,4737
115	10,7238	4,8629	165	12,8452	5,4848
116	10,7703	4,8770	166	12,8841	5,4959
117	10,8167	4,8910	167	12,9228	5,5069
118	10,8628	4,9049	168	12,9615	5,5178
119	10,9087	4,9187	169	13,0000	5,5288
120	10,9545	4,9324	**170**	13,0384	5,5397
121	11,0000	4,9461	171	13,0767	5,5505
122	11,0454	4,9597	172	13,1149	5,5613
123	11,0905	4,9732	173	13,1529	5,5721
124	11,1355	4,9866	174	13,1909	5,5828
125	11,1803	5,0000	175	13,2288	5,5934
126	11,2250	5,0133	176	13,2665	5,6041
127	11,2694	5,0265	177	13,3041	5,6147
128	11,3137	5,0397	178	13,3417	5,6252
129	11,3578	5,0528	179	13,3791	5,6357
130	11,4018	5,0658	**180**	13,4164	5,6462
131	11,4455	5,0788	181	13,4536	5,6567
132	11,4891	5,0916	182	13,4907	5,6671
133	11,5326	5,1045	183	13,5277	5,6774
134	11,5758	5,1172	184	13,5647	5,6877
135	11,6190	5,1299	185	13,6015	5,6980
136	11,6619	5,1426	186	13,6382	5,7083
137	11,7047	5,1551	187	13,6748	5,7185
138	11,7473	5,1676	188	13,7113	5,7287
139	11,7898	5,1801	189	13,7477	5,7388
140	11,8322	5,1925	**190**	13,7840	5,7489
141	11,8743	5,2048	191	13,8203	5,7590
142	11,9164	5,2171	192	13,8564	5,7690
143	11,9583	5,2293	193	13,8924	5,7790
144	12,0000	5,2415	194	13,9284	5,7890
145	12,0416	5,2536	195	13,9642	5,7989
146	12,0830	5,2656	196	14,0000	5,8088
147	12,1244	5,2776	197	14,0357	9,8186
148	12,1655	5,2896	198	14,0712	5,8285
149	12,2066	5,3015	199	14,1067	5,8383
150	12,2474	5,3133	**200**	14,1421	5,8480

200 — 300

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
200	14,1421	5,8480	**250**	15,8114	6,2996
201	14,1774	5,8578	251	15,8430	6,3080
202	14,2127	5,8675	252	15,8745	6,3164
203	14,2478	5,8771	253	15,9060	6,3247
204	14,2829	5,8868	254	15,9374	6,3330
205	14,3178	5,8964	255	15,9687	6,3413
206	14,3527	5,9059	256	16,0000	6,3496
207	14,3875	5,9155	257	16,0312	6,3579
208	14,4222	5,9250	258	16,0624	6,3661
209	14,4568	5,9345	259	16,0935	6,3743
210	14,4914	5,9439	**260**	16,1245	6,3825
211	14,5258	5,9533	261	16,1555	6,3907
212	14,5602	5,9627	262	16,1864	6,3988
213	14,4945	5,9721	263	16,2173	6,4070
214	14,6287	5,9814	264	16,2481	6,4151
215	14,6629	5,9907	265	16,2788	6,4232
216	14,6969	6,0000	266	16,3095	6,4312
217	14,7308	6,0092	267	16,3401	6,4393
218	14,7648	6,0185	268	16,3707	6,4473
219	14,7986	6,0277	269	16,4012	6,4553
220	14,8324	6,0368	**270**	16,4317	6,4633
221	14,8661	6,0459	271	16,4621	6,4713
222	14,8997	6,0550	272	16,4924	6,4792
223	14,9332	6,0641	273	16,5227	6,4872
224	14,9666	6,0732	274	16,5529	6,4951
225	15,0000	6,0822	275	16,5831	6,5030
226	15,0333	6,0912	276	16,6132	6,5108
227	15,0665	6,1002	277	16,6433	6,5187
228	15,0997	6,1091	278	16,6733	6,5265
229	15,1327	6,1180	279	16,7033	6,5343
230	15,1658	6,1269	**280**	16,7332	6,5421
231	15,1987	6,1358	281	16,7631	6,5499
232	15,2315	6,1446	282	16,7929	6,5577
233	15,2643	6,1534	283	16,8226	6,5654
234	15,2971	6,1622	284	16,8523	6,5731
235	15,3297	6,1710	285	16,8819	6,5808
236	15,3623	6,1797	286	16,9115	6,5885
237	15,3948	6,1885	287	16,9411	6,5962
238	15,4272	6,1972	288	16,9706	6,6039
239	15,4596	6,2058	289	17,0000	6,6115
240	15,4919	6,2145	**290**	17,0294	6,6191
241	15,5242	6,2231	291	17,0587	6,6267
242	15,5563	6,2317	292	17,0880	6,6343
243	15,5885	6,2403	293	17,1172	6,6419
244	15,6205	6,2488	294	17,1464	6,6494
245	15,6525	6,2573	295	17,1756	6,6569
246	15,6844	6,2658	296	17,2047	6,6644
247	15,7162	6,2743	297	17,2337	6,6719
248	15,7480	6,2828	298	17,2627	6,6794
249	15,7797	6,2912	299	17,2916	6,6869
250	15,8114	6,2996	**300**	17,3205	6,6943

300 — 400

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
300	17,3205	6,6943	**350**	18,7083	7,0473
301	17,3494	6,7018	351	18,7350	7,0540
302	17,3781	6,7092	352	18,7617	7,0607
303	17,4069	6,7166	353	18,7883	7,0674
304	17,4356	6,7240	354	18,8149	7,0740
305	17,4642	6,7313	355	18,8414	7,0807
306	17,4929	6,7387	356	18,8680	7,0873
307	17,5214	6,7460	357	18,8944	7,0940
308	17,5499	6,7533	358	18,9209	7,1006
309	17,5784	6,7606	359	18,9473	7,1072
310	17,6068	6,7679	**360**	18,9737	7,1138
311	17,6352	6,7752	361	19,0000	7,1204
312	17,6635	6,7824	362	19,0263	7,1269
313	17,6918	6,7897	363	19,0526	7,1335
314	17,7200	6,7969	364	19,0788	7,1400
315	17,7482	6,8041	365	19,1050	7,1466
316	17,7764	6,8113	366	19,1311	7,1531
317	17,8045	6,8185	367	19,1572	7,1596
318	17,8326	6,8256	368	19,1833	7,1661
319	17,8606	6,8328	369	19,2094	7,1726
320	17,8885	6,8399	**370**	19,2354	7,1791
321	17,9165	6,8470	371	19,2614	7,1855
322	17,9444	6,8541	372	19,2873	7,1920
323	17,9722	6,8612	373	19,3132	7,1984
324	18,0000	6,8683	374	19,3391	7,2048
325	18,0278	6,8753	375	19,3649	7,2112
326	18,0555	6,8824	376	19,3907	7,2177
327	18,0831	6,8894	377	19,4165	7,2240
328	18,1108	6,8964	378	19,4422	7,2304
329	18,1384	6,9034	379	19,4679	7,2368
330	18,1659	6,9104	**380**	19,4936	7,2432
331	18,1934	6,9174	381	19,5192	7,2495
332	18,2209	6,9244	382	19,5448	7,2558
333	18,2483	6,9313	383	19,5704	7,2622
334	18,2757	6,9382	384	19,5959	7,2685
335	18,3030	6,9451	385	19,6214	7,2748
336	18,3303	6,9521	386	19,6469	7,2811
337	18,3576	6,9589	387	19,6723	7,2874
338	18,3848	6,9658	388	19,6977	7,2936
339	18,4120	6,9727	389	19,7231	7,2999
340	18,4391	6,9795	**390**	19,7484	7,3061
341	18,4662	6,9864	391	19,7737	7,3124
342	18,4932	6,9932	392	19,7990	7,3186
343	18,5203	7,0000	393	19,8242	7,3248
344	18,5472	7,0068	394	19,8494	7,3310
345	18,5742	7,0136	395	19,8746	7,3372
346	18,6011	7,0203	396	19,8997	7,3434
347	18,6279	7,0271	397	19,9249	7,3496
348	18,6548	7,0338	398	19,9499	7,3558
349	18,6815	7,0406	399	19,9750	7,3619
350	18,7083	7,0473	**400**	20,0000	7,3681

400—500

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
400	20,0000	7,3681	**450**	21,2132	7,6631
401	20,0250	7,3742	451	21,2368	7,6688
402	20,0499	7,3803	452	21,2603	7,6744
403	20,0749	7,3864	453	21,2838	7,6801
404	20,0998	7,3925	454	21,3073	7,6857
405	20,1246	7,3986	455	21,3307	7,6914
406	20,1494	7,4047	456	21,3542	7,6970
407	20,1742	7,4108	457	21,3776	7,7026
408	20,1990	7,4169	458	21,4009	7,7082
409	20,2237	7,4229	459	21,4243	7,7138
410	20,2485	7,4290	**460**	21,4476	7,7194
411	20,2731	7,4350	461	21,4709	7,7250
412	20,2978	7,4410	462	21,4942	7,7306
413	20,3224	7,4470	463	21,5174	7,7362
414	20,3470	7,4530	464	21,5407	7,7418
415	20,3715	7,4590	465	21,5639	7,7473
416	20,3961	7,4650	466	21,5870	7,7529
417	20,4206	7,4710	467	21,6102	7,7584
418	20,4450	7,4770	468	21,6333	7,7639
419	20,4695	7,4829	469	21,6564	7,7695
420	20,4939	7,4889	**470**	21,6795	7,7750
421	20,5183	7,4948	471	21,7025	7,7805
422	20,5426	7,5007	472	21,7256	7,7860
423	20,5670	7,5067	473	21,7486	7,7915
424	20,5913	7,5126	474	21,7715	7,7970
425	20,6155	7,5185	475	21,7945	7,8025
426	20,6398	7,5244	476	21,8174	7,8079
427	20,6640	7,5302	477	21,8403	7,8134
428	20,6882	7,5361	478	21,8632	7,8188
429	20,7123	7,5420	479	21,8861	7,8243
430	20,7364	7,5478	**480**	21,9089	7,8297
431	20,7605	7,5537	481	21,9317	7,8352
432	20,7846	7,5595	482	21,9545	7,8406
433	20,8087	7,5654	483	21,9773	7,8460
434	20,8327	7,5712	484	22,0000	7,8514
435	20,8567	7,5770	485	22,0227	7,8568
436	20,8806	7,5828	486	22,0454	7,8622
437	20,9045	7,5886	487	22,0681	7,8676
438	20,9284	7,5944	488	22,0907	7,8730
439	20,9523	7,6001	489	22,1133	7,8784
440	20,9762	7,6059	**490**	22,1359	7,8837
441	21,0000	7,6117	491	22,1585	7,8891
442	21,0238	7,6174	492	22,1811	7,8944
443	21,0476	7,6232	493	22,2036	7,8998
444	21,0713	7,6289	494	22,2261	7,9051
445	21,0950	7,6346	495	22,2486	7,9105
446	21,1187	7,6403	496	22,2711	7,9158
447	21,1424	7,6460	497	22,2935	7,9211
448	21,1660	7,6517	498	22,3159	7,9264
449	21,1896	7,6574	499	22,3383	7,9317
450	21,2132	7,6631	**500**	22,3607	7,9370

500 — 600

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
500	22,3607	7,9370	**550**	23,4521	8,1932
501	22,3830	7,9423	551	23,4734	8,1982
502	22,4054	7,9476	552	23,4947	8,2031
503	22,4277	7,9528	553	23,5160	8,2081
504	22,4499	7,9581	554	23,5372	8,2130
505	22,4722	7,9634	555	23,5584	8,2180
506	22,4944	7,9686	556	23,5797	8,2229
507	22,5167	7,9739	557	23,6008	8,2278
508	22,5389	7,9791	558	23,6220	8,2327
509	22,5610	7,9843	559	23,6432	8,2377
510	22,5832	7,9896	**560**	23,6643	8,2426
511	22,6053	7,9948	561	23,6854	8,2475
512	22,6274	8,0000	562	23,7065	8,2524
513	22,6495	8,0052	563	23,7276	8,2573
514	22,6716	8,0104	564	23,7487	8,2621
515	22,6936	8,0156	565	23,7697	8,2670
516	22,7156	8,0208	566	23,7908	8,2719
517	22,7376	8,0260	567	23,8118	8,2768
518	22,7596	8,0311	568	23,8328	8,2816
519	22,7816	8,0363	569	23,8537	8,2865
520	22,8035	8,0415	**570**	23,8747	8,2913
521	22,8254	8,0466	571	23,8956	8,2962
522	22,8473	8,0517	572	23,9165	8,3010
523	22,8692	8,0569	573	23,9374	8,3059
524	22,8910	8,0620	574	23,9583	8,3107
525	22,9129	8,0671	575	23,9792	8,3155
526	22,9347	8,0723	576	24,0000	8,3203
527	22,9565	8,0774	577	24,0208	8,3251
528	22,9783	8,0825	578	24,0416	8,3300
529	23,0000	8,0876	579	24,0624	8,3348
530	23,0217	8,0927	**580**	24,0832	8,3396
531	23,0434	8,0978	581	24,1039	8,3443
532	23,0651	8,1028	582	24,1247	8,3491
533	23,0868	8,1079	583	24,1454	8,3539
534	23,1084	8,1130	584	24,1661	8,3587
535	23,1301	8,1180	585	24,1868	8,3634
536	23,1517	8,1231	586	24,2074	8,3682
537	23,1733	8,1281	587	24,2281	8,3730
538	23,1948	8,1332	588	24,2487	8,3777
539	23,2164	8,1382	589	24,2693	8,3825
540	23,2379	8,1433	**590**	24,2899	8,3872
541	23,2594	8,1483	591	24,3105	8,3919
542	23,2809	8,1533	592	24,3311	8,3967
543	23,3024	8,1583	593	24,3516	8,4014
544	23,3238	8,1633	594	24,3721	8,4061
545	23,3452	8,1683	595	24,3926	8,4108
546	23,3666	8,1733	596	24,4131	8,4155
547	23,3880	8,1783	597	24,4336	8,4202
548	23,4094	8,1833	598	24,4540	8,4249
549	23,4307	8,1882	599	24,4745	8,4296
550	23,4521	8,1932	**600**	24,4949	8,4343

600—700

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
600	24,4949	8,4343	**650**	25,4951	8,6624
601	24,5153	8,4390	651	25,5147	8,6668
602	24,5357	8,4437	652	25,5343	8,6713
603	24,5561	8,4484	653	25,5539	8,6757
604	24,5764	8,4530	654	25,5734	8,6801
605	24,5967	8,4577	655	25,5930	8,6845
606	24,6171	8,4623	656	25,6125	8,6890
607	24,6374	8,4670	657	25,6320	8,6934
608	24,6577	8,4716	658	25,6515	8,6978
609	24,6779	8,4763	659	25,6710	8,7022
610	24,6982	8,4809	**660**	25,6905	8,7066
611	24,7184	8,4856	661	25,7099	8,7110
612	24,7386	8,4902	662	25,7294	8,7154
613	24,7588	8,4948	663	25,7488	8,7198
614	24,7790	8,4994	664	25,7682	8,7241
615	24,7992	8,5040	665	25,7876	8,7285
616	24,8193	8,5086	666	25,8070	8,7329
617	24,8395	8,5132	667	25,8263	8,7373
618	24,8596	8,5178	668	25,8457	8,7416
619	24,8797	8,5224	669	25,8650	8,7460
620	24,8998	8,5270	**670**	25,8844	8,7503
621	24,9199	8,5316	671	25,9037	8,7547
622	24,9399	8,5362	672	25,9230	8,7590
623	24,9600	8,5408	673	25,9422	8,7634
624	24,9800	8,5453	674	25,9615	8,7677
625	25,0000	8,5499	675	25,9808	8,7721
626	25,0200	8,5544	676	26,0000	8,7764
627	25,0400	8,5590	677	26,0192	8,7807
628	25,0599	8,5635	678	26,0384	8,7850
629	25,0799	8,5681	679	26,0576	8,7893
630	25,0998	8,5726	**680**	26,0768	8,7937
631	25,1197	8,5772	681	26,0960	8,7980
632	25,1396	8,5817	682	26,1151	8,8023
633	25,1595	8,5862	683	26,1343	8,8066
634	25,1794	8,5907	684	26,1534	8,8109
635	25,1992	8,5952	685	26,1725	8,8152
636	25,2190	8,5997	686	26,1916	8,8194
637	25,2389	8,6043	687	26,2107	8,8237
638	25,2587	8,6088	688	26,2298	8,8280
639	25,2784	8,6132	689	26,2488	8,8323
640	25,2982	8,6177	**690**	26,2679	8,8366
641	25,3180	8,6222	691	26,2869	8,8408
642	25,3377	8,6267	692	26,3059	8,8451
643	25,3574	8,6312	693	26,3249	8,8493
644	25,3772	8,6357	694	26,3439	8,8536
645	25,3969	8,6401	695	26,3629	8,8578
646	25,4165	8,6446	696	26,3818	8,8621
647	25,4362	8,6490	697	26,4008	8,8663
648	25,4558	8,6535	698	26,4197	8,8706
649	25,4755	8,6579	699	26,4386	8,8748
650	25,4951	8,6624	**700**	26,4575	8,8790

700 — 800

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
700	26,4575	8,8790	**750**	27,3861	9,0856
701	26,4764	8,8833	751	27,4044	9,0896
702	26,4953	8,8875	752	27,4226	9,0937
703	26,5141	8,8917	753	27,4408	9,0977
704	26,5330	8,8959	754	27,4591	9,1017
705	26,5518	8,9001	755	27,4773	9,1057
706	26,5707	8,9043	756	27,4955	9,1098
707	26,5895	8,9085	757	27,5136	9,1138
708	26,6083	8,9127	758	27,5318	9,1178
709	26,6271	8,9169	759	27,5500	9,1218
710	26,6458	8,9211	**760**	27,5681	9,1258
711	26,6646	8,9253	761	27,5862	9,1298
712	26,6833	8,9295	762	27,6043	9,1338
713	26,7021	8,9337	763	27,6225	9,1378
714	26,7208	8,9378	764	27,6405	9,1418
715	26,7395	8,9420	765	27,6586	9,1458
716	26,7582	8,9462	766	27,6767	9,1498
717	26,7769	8,9503	767	27,6948	9,1537
718	26,7955	8,9545	768	27,7128	9,1577
719	26,8142	8,9587	769	27,7308	9,1617
720	26,8328	8,9628	**770**	27,7489	9,1657
721	26,8514	8,9670	771	27,7669	9,1696
722	26,8701	8,9711	772	27,7849	9,1736
723	26,8887	8,9752	773	27,8029	9,1775
724	26,9072	8,9794	774	27,8209	9,1815
725	26,9258	8,9835	775	27,8388	9,1855
726	26,9444	8,9876	776	27,8568	9,1894
727	26,9629	8,9918	777	27,8747	9,1933
728	26,9815	8,9959	778	27,8927	9,1973
729	27,0000	9,0000	779	27,9106	9,2012
730	27,0185	9,0041	**780**	27,9285	9,2052
731	27,0370	9,0082	781	27,9464	9,2091
732	27,0555	9,0123	782	27,9643	9,2130
733	27,0740	9,0164	783	27,9821	9,2170
734	27,0924	9,0205	784	28,0000	9,2209
735	27,1109	9,0246	785	28,0179	9,2248
736	27,1293	9,0287	786	28,0357	9,2287
737	27,1477	9,0328	787	28,0535	9,2326
738	27,1662	9,0369	788	28,0713	9,2365
739	27,1846	9,0410	789	28,0891	9,2404
740	27,2029	9,0450	**790**	28,1069	9,2443
741	27,2213	9,0491	791	28,1247	9,2482
742	27,2397	9,0532	792	28,1425	9,2521
743	27,2580	9,0572	793	28,1603	9,2560
744	27,2764	9,0613	794	28,1780	9,2599
745	27,2947	9,0654	795	28,1957	9,2638
746	27,3130	9,0694	796	28,2135	9,2677
747	27,3313	9,0735	797	28,2312	9,2716
748	27,3496	9,0775	798	28,2489	9,2754
749	27,3679	9,0816	799	28,2666	9,2793
750	27,3861	9,0856	**800**	28,2843	9,2832

800—900

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
800	28,2843	9,2832	**850**	29,1548	9,4727
801	28,3019	9,2870	851	29,1719	9,4764
802	28,3196	9,2909	852	29,1890	9,4801
803	28,3373	9,2948	853	29,2062	9,4838
804	28,3549	9,2968	854	29,2233	9,4875
805	28,3725	9,3025	855	29,2404	9,4912
806	28,3901	9,3063	856	29,2575	9,4949
807	28,4077	9,3102	857	29,2746	9,4986
808	28,4253	9,3140	858	29,2916	9,5023
809	28,4429	9,3179	859	29,3087	9,5060
810	28,4605	9,3217	**860**	29,3258	9,5097
811	28,4781	9,3255	861	29,3428	9,5134
812	28,4956	9,3294	862	29,3598	9,5171
813	28,5132	9,3332	863	29,3769	9,5207
814	28,5307	9,3370	864	29,3939	9,5244
815	28,5482	9,3408	865	29,4109	9,5281
816	28,5657	9,3447	866	29,4279	9 5317
817	28,5832	9,3485	867	29,4449	9,5354
818	28,6007	9,3523	868	29,4618	9,5391
819	28,6182	9,3561	869	29,4788	9,5427
820	28,6356	9,3599	**870**	29,4958	9,5464
821	28,6531	9,3637	871	29,5127	9,5501
822	28,6705	9,3675	872	29,5296	9,5537
823	28,6880	9,3713	873	29,5466	9,5574
824	28,7054	9,3751	874	29,5635	9,5610
825	28,7228	9,3789	875	29,5804	9,5647
826	28,7402	9,3827	876	29,5973	9,5683
827	28,7576	9,3865	877	29,6142	9,5719
828	28,7750	9,3902	878	29,6311	9,5756
829	28,7924	9,3940	879	29,6479	9,5792
830	28,8097	9,3978	**880**	29,6648	9,5828
831	28,8271	9,4016	881	29,6816	9,5865
832	28,8444	9,4053	882	29,6985	9,5901
833	28,8617	9,4091	883	29,7153	9,5937
834	28,8791	9,4129	884	29,7321	9,5973
835	28,8964	9,4166	885	29,7489	9,6010
836	28,9137	9,4204	886	29,7658	9,6046
837	28,9310	9,4241	887	29,7825	9,6082
838	28,9482	9,4279	888	29,7993	9,6118
839	28,9655	9,4316	889	29,8161	9,6154
840	28,9828	9,4354	**890**	29,8329	9,6190
841	29,0000	9,4391	891	29,8496	9,6226
842	29,0172	9,4429	892	29,8664	9,6262
843	29,0345	9,4466	893	29,8831	9,6298
844	29,0517	9,4503	894	29,8998	9,6334
845	29,0689	9,4541	895	29,9166	9,6370
846	29,0861	9,4578	896	29,9333	9,6406
847	29,1033	9,4615	897	29,9500	9,6442
848	29,1204	9,4652	898	29,9666	9,6477
849	29,1376	9,4690	899	29,9833	9,6513
850	29,1548	9,4727	**900**	30,0000	9,6549

900—1000

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
900	30,0000	9,6549	**950**	30,8221	9,8305
901	30,0167	9,6585	951	30,8383	9,8339
902	30,0333	9,6620	952	30,8545	9,8374
903	30,0500	9,6656	953	30,8707	9,8408
904	30,0666	9,6692	954	30,8869	9,8443
905	30,0832	9,6727	955	30,9031	9,8477
906	30,0998	9,6763	956	30,9192	9,8511
907	30,1164	9,6799	957	30,9354	9,8546
908	30,1330	9,6834	958	30,9516	9,8580
909	30,1496	9,6870	959	30,9677	9,8614
910	30,1662	9,6905	**960**	30,9839	9,8648
911	30,1828	9,6941	961	31,0000	9,8683
912	30,1993	9,6976	962	31,0161	9,8717
913	30,2159	9,7012	963	31,0322	9,8751
914	30,2324	9,7047	964	31,0483	9,8785
915	30,2490	9,7082	965	31,0644	9,8819
916	30,2655	9,7118	966	31,0805	9,8854
917	30,2820	9,7153	967	31,0966	9,8888
918	30,2985	9,7188	968	31,1127	9,8922
919	30,3150	9,7224	969	31,1288	9,8956
920	30,3315	9,7259	**970**	31,1448	9,8990
921	30,3480	9,7294	971	31,1609	9,9024
922	30,3645	9,7329	972	31,1769	9,9058
923	30,3809	9,7364	973	31,1929	9,9092
924	30,3974	9,7400	974	31,2090	9,9126
925	30,4138	9,7435	975	31,2250	9,9160
926	30,4302	9,7470	976	31,2410	9,9194
927	30,4467	9,7505	977	31,2570	9,9227
928	30,4631	9,7540	978	31,2730	9,9261
929	30,4795	9,7575	979	31,2890	9,9295
930	30,4959	9,7610	**980**	31,3050	9,9329
931	30,5123	9,7645	981	31,3209	9,9363
932	30,5287	9,7680	982	31,3369	9,9396
933	30,5450	9,7715	983	31,3528	9,9430
934	30,5614	9,7750	984	31,3688	9,9464
935	30,5778	9,7785	985	31,3847	9,9497
936	30,5941	9,7819	986	31,4006	9,9531
937	30,6105	9,7854	987	31,4166	9,9565
938	30,6268	9,7889	988	31,4325	9,9598
939	30,6431	9,7924	989	31,4484	9,9632
940	30,6594	9,7959	**990**	31,4643	9,9666
941	30,6757	9,7993	991	31,4802	9,9699
942	30,6920	9,8028	992	31,4960	9,9733
943	30,7083	9,8063	993	31,5119	9,9766
944	30,7246	9,8097	994	31,5278	9,9800
945	30,7409	9,8132	995	31,5436	9,9833
946	30,7571	9,8167	996	31,5595	9,9866
947	30,7734	9,8201	997	31,5753	9,9900
948	30,7896	9,8236	998	31,5911	9,9933
949	30,8058	9,8270	999	31,6070	9,9967
950	30,8221	9,8305	**1000**	31,6228	10,0000

Mafs- und Gewichts-Tabelle.

1 Meter (m) = 10 Decimeter (dcm) = 100 Centimeter (cm) = 1000 Millimeter (mm).
10 Meter = 1 Dekameter (dkm) oder 1 Kette; im Feldmessergebrauch ist die Kette = 2 Dekameter = 20 m.
1000 Meter = 100 dkm = 1 Kilometer (km).
7500 Meter = 1 deutsche Meile = 7,5 km.
1 Quadratmeter (qm) = 10000 Quadratcentimeter (qcm).
1 Quadratcentimeter = 100 Quadratmillimeter (qmm).
100 Quadratmeter = 1 Ar (a).
10000 Quadratmeter = 100 Ar = 1 Hektar (ha).
1 Kubikmeter (cbm) = 1000 Kubikdecimeter (cdcm) oder Liter (l).
= 1000000 Kubikcentimeter (ccm).
1 ccm = 1000 Kubikmillimeter (cmm).
100 Liter = 1 Hektoliter (hl).
50 Liter = 1 Scheffel.
1 Kilogramm (kg) = dem Gewichte eines Liters destillierten Wassers bei + 4° C.
1 Kilogramm = 1000 Gramm (g) = 2 Pfund.
1 Decigramm (dcg) = $^1/_{10}$ g.
1 Milligramm (mg) = $^1/_{1000}$ g.
10 Gramm = 1 Dekagramm (dkg) = 1 Neulot.
500 Gramm = $^1/_2$ kg = 1 Pfund.
50 Kilogramm = 100 Pfund = 1 Centner.
1000 kg = 2000 Pfund = 1 Tonne = 20 Centner.

Tabelle der spec. Gewichte einiger Körper.

(Spec. Gewicht = dem Gewichte eines cdcm des betreffenden Körpers.)

Feste Körper.

Antimon	6,72	Holz, Kiefer	0,55
Asphalt	1,07—1,16	„ „ frisch	0,91
Blei	11,40	„ Linde	0,56
Braunkohle	1,20	„ Mahagoni	0,75
Cokes	0,40	„ Nufsbaum	0,66
Chamottesteine	1,85	„ Pockholz	1,26
Eis	0,92	„ Tanne	0,56
Erde, lehmig, frisch	2,10	„ „ frisch	0,89
„ trocken	1,90	Kalkstein	2,45
„ mager, trocken	1,30	Kupfer, gehämmert	8,94
Glas, Fenster-	2,64	Kupfer, gegossen	8,79
„ Spiegel-	2,46	Messing	8,55
„ Krystall-	2,89	Nickel	8,28—9,26
Glockenmetall	8,80	Sand, trocken	1,64
Gold, gegossen	19,26	Sandstein	2,35
Granit	2,80	Schmiedeeisen	7,78
Gusseisen	7,25	Silber	10,47
Holz, lufttrocken:		„ gehämmert	10,51
„ Ahorn	0,67	Stahl	7,26—7,80
„ Buche	0,75	„ Gufs-	7,87
„ Buxbaum	0,94	Steinkohle	1,21—1,51
„ Eiche	0,69	Zink, gegossen	6,80
„ „ frisch	0,97	„ gewalzt	7,00
„ Fichte	0,47	Zinn	7,29

Flüssige Körper.

Äther	0,761	Öl	0,92
Alkohol	0,792	Quecksilber	13,595
Luft	0,0013	Seewasser	1,02
Milch	1,03	Teer	1,20

Gasförmige Körper.

Atmosph. Luft	1,0000	Kohlensäure	1,5202
Sauerstoff	1,1056	Schweflige Säure	2,2139
Stickstoff	0,9713	Leuchtgas	0,4—0,6

Wasserdampf bei 100° . . . . . 0,470.

1 cbm Luft wiegt ≅ 1,25 kg.

Druck von Herrosé & Ziemsen in Wittenberg.

Prüfung von Gussstahlkugeln. Von E. Rasch, Oberingenieur an der Materialprüfungsanstalt des Bayerischen Gewerbemuseums. (Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Werkzeugmaschinen und Werkzeuge.) 16 S. in 8°. 1900. geh. M. 1,—.

Kugel- und Rollenlager. Theorie, Berechnung und praktische Beispiele derselben. Durch 170 Textfiguren erläutert und zum praktischen Gebrauch herausgegeben von Max R. Zechlin, Civilingenieur in Charlottenburg. 70 S. in Lex. 8°. 1900. geh. M. 3,—.

Die Kleinmotoren und die Kraftübertragung von einer Centralen, ihre wirtschaftliche Bedeutung für das Kleingewerbe, ihre Konstruktion und Kosten. Von E. Claussen. 160 S. in 8° m. 16 Abb. i. Text u. 1 Tafel. 1891. (M. 3,—.) Ermäfsigter Preis geh. M. 1,50.

Das Buch von der Nähmaschine. Von Ingenieur H. W. Lind. Vollständig in zwei Teilen, deren erster: Der Nähmaschinenbau in seiner Entwickelung und die entsprechende Verwendung der verschiedenen Systeme. 1890. 79 Seiten mit 42 in den Text gedruckten Abbildungen; deren zweiter: Die Fabrikation von Nähmaschinen und die Reparaturen derselben. 1891. 225 Seiten mit 36 in den Text gedruckten Abbildungen. Zusammen in einem Band eingebunden M. 3,50.

Für Nähmaschinenfabrikanten, Nähmaschinenhändler, Mechaniker u. s. w. ein jederzeit praktisches Nachschlagebuch.

Anleitung zum Bau elektrischer Haustelegraphen, Telephon- und Blitzableiter-Anlagen. Herausgegeben von der Aktiengesellschaft Mix & Genest, Telephon-, Telegraphen- und Blitzableiter-Fabrik in Berlin. 5. erweiterte Auflage. 428 S. in gr. 8° m. 581 Abb. im Text. 1899. geb. M. 5,—.

Die Vorkehrungen zur Unfallverhütung in den Betrieben der Ziegelei-Berufsgenossenschaft. Prakt. Handbuch für Besitzer u. Leiter von Ziegeleien, Thonwaren-Fabriken, Thongräbereien, Fabriken feuerfester Produkte und Torfgräbereien, ferner für Revisionsbeamte, Maschinenfabriken u. s. w. Von C. Wahlen, Ziegeleibesitzer in Köln. 211 S. in Lex. 8° mit zahlreichen Abbildungen im Text. 1895. geh. M. 6,—, geb. M. 7,20.

Sägen und Werkzeuge für die Holzindustrie. Lehr- und Hilfsbuch für Sägemüller, Holzindustrielle, Ingenieure, Techniker und Maschinenfabrikanten, Mühlenbauer etc. etc. von J. D. Dominicus & Söhne in Remscheid-Vieringhausen (Rheinland). Zweite wesentlich vermehrte und verbesserte Auflage. Mit einem Anhange Schutzvorrichtungen an Holzbearbeitungsmaschinen bearbeitet von Ingenieur C. Braune, Berlin. Mit ca. 330 Abbildungen. 1891. geh. M. 2,50, geb. M. 3,—.

Herrosé & Ziemsen, Wittenberg.

H. SPERLING BERLIN
BUCHBINDEREI