Praktisches
Maschinenrechnen

Eine Zusammenstellung

der wichtigsten Erfahrungswerte

aus der allgemeinen und angewandten Mechanik

in ihrer Anwendung

auf den praktischen Maschinenbau

Erläutert

durch zahlreiche für die Praxis verwendbare Beispiele

Bearbeitet von

A. Weickert und **R. Stolle**

Ingenieure und Fachlehrer für Maschinenbau und Mechanik in Berlin

Sechste umgearbeitete und vermehrte Auflage

II. TEIL:

Allgemeine Mechanik

Mit 132 in den Text gedruckten Abbildungen

Berlin 1908

Polytechnische Buchhandlung

A. Seydel

Allgemeine Mechanik

Eine leichtfassliche Darstellung
der für
Maschinenbauer unentbehrlichen Gesetze
der
allgemeinen Mechanik
als Einführung
in die
angewandte Mechanik

Bearbeitet
von

A. Weickert
Ingenieur und Lehrer an der Fachschule für Maschinenbauer am Gewerbesaal
der Stadt Berlin

Sechste umgearbeitete und vermehrte Auflage

Mit 132 in den Text gedruckten Abbildungen, 193 vollkommen durchgerechneten Beispielen und 155 Übungsbeispielen

Szkoła Inżynierska
Zakład Miernictwa Elektrycznego
Szczecin, ul. Gen. Sikorskiego
615

Berlin 1908
Polytechnische Buchhandlung
A. Seydel

SZKOŁA INŻYNIERSKA
BIBLIOTEKA
1176
w Szczecinie

531(075)
Biblioteka Szkoły Inżynierskiej w Szczecinie
2733

Nachdruck verboten.
Übersetzungsrecht vorbehalten.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Einrichtung unserer bestehenden Fach- und Fortbildungsschulen bedingt es, dafs einem für das praktische Leben so bedeutungsvollen Unterrichtsgegenstande, wie ihn der Titel dieses Buches nennt, nur verhältnismäfsig wenig Zeit gewidmet werden kann und so der Schüler schliefslich, nachdem er die Schule verlassen hat, behufs weiterer Verarbeitung des in der Schule Gehörten zum Selbstunterricht greifen mufs.

Dem Schüler bereits in der Schule ein für seinen späteren Beruf geeignetes, sowie in seiner weiteren praktischen Tätigkeit verwendbares Material zu bieten, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Zum Verständnis des in demselben Gebotenen ist die Kenntnis der nur notwendigsten mathematischen Gesetze vorausgesetzt und sind, um Schüler und Leser bezüglich der auszuführenden Berechnungen zu unterstützen, in direkter Verbindung mit dem Buche die einfachsten Regeln des allgemeinen Buchstabenrechnens in elementarer Weise entwickelt.

Wir hoffen, dafs diese Verbindung vielen Lesern willkommen sein wird, da dieselbe bei dem Durcharbeiten des Textes und der Beispiele ein Nachschlagen jederzeit gestattet und so die Bestrebungen des Einzelnen, schnell vorwärts zu kommen, begünstigt.

Die in den einzelnen Kapiteln gegebenen B e i s p i e l e entsprechen r e i n p r a k t i s c h e n Verhältnissen und möchten wir, da sich ein Mangel gerade in dieser Beziehung oft recht fühlbar macht, den Herren L e h r e r n d e r M e c h a n i k die vorliegende Arbeit zur Benützung für die Schüler ihrer Lehranstalten hiermit empfehlen.

Dafs der Text des Buches in der n e u e n O r t h o g r a p h i e gesetzt ist, um es für S c h u l z w e c k e geeignet zu machen, mag hiermit hervorgehoben werden.

Indem wir das Buch der Öffentlichkeit übergeben, richten wir an die Leser desselben die höfliche Bitte, uns auf etwaige

Mängel, auf Fehlendes oder wünschenswerte Erweiterungen gefälligst aufmerksam machen und so unser Bestreben, in genanntem Sinne etwas Brauchbares zu bieten, unterstützen zu wollen. Wir werden diesbezügliche Fingerzeige stets mit bestem Danke entgegennehmen.

Berlin, im April 1889.

Weickert und **Stolle.**

Vorwort zur vierten Auflage.

Der schnelle Absatz der ersten drei Auflagen des vorliegenden Buches ist ein sicherer Beweis dafür, dafs dasselbe in Fachkreisen eine durchaus günstige Aufnahme gefunden hat.

Mit jeder neuen Auflage ist eine bedeutende Erweiterung verbunden gewesen, zu welcher wir durch die vielfachen Anerkennungen von seiten der Herren Kollegen angeregt wurden.

Für diese Anerkennungen und auch für die uns von den Herren Lehrern so zahlreich zugegangenen Vorschläge, welche wir bei den Neubearbeitungen fast durchweg verwerten konnten, sagen wir an dieser Stelle unseren besten Dank und verbinden damit die erneute Bitte, uns auch in Zukunft durch Anregung und Vorschläge unterstützen zu wollen.

Die stattgehabte Erweiterung bezieht sich auf mehrere neu eingefügte Kapitel, auf die mit den Lösungen versehenen Übungsbeispiele und, dank der Bereitwilligkeit unseres Herrn Verlegers, auf den ziemlich kostspieligen Abdruck der im Anhange befindlichen Tabellen. Mit letzteren und den Übungsbeispielen glauben wir denjenigen ganz besonders zu dienen, welche das Buch nicht nur zu praktischen, sondern auch zu Schulzwecken benützen.

Berlin, im Februar 1901.

Weickert und **Stolle.**

Vorwort zur sechsten Auflage.

Der mit dem Erscheinen des ersten Teiles angekündigte zweite Teil des Buches „Praktisches Maschinenrechnen“ wird hiermit der Öffentlichkeit übergeben. Der dritte Teil desselben „Angewandte Mechanik“ befindet sich in Vorbereitung und wird in Kürze folgen.

Im zweiten Teile haben die Kapitel I bis VIII eine durchgreifende Änderung erfahren; ganz neu eingefügt wurden die Abhandlungen über:

Winkelgeschwindigkeit,
Mittlere Geschwindigkeit,
Das einfache Kurbelgetriebe,
Kraft, Gewicht und Mafse.

Aufserdem erfuhr Kapitel VII: „Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften“ in Berücksichtigung seiner besonderen Bedeutung für die „Graphostatik“ eine sehr umfangreiche Erweiterung.

Zahlreiche neue Beispiele, praktischen Verhältnissen entnommen, sind auch dem zweiten Teile in reichem Mafse mitgegeben worden; ebenso wurden die Textfiguren erheblich vermehrt.

Durch vielfache Berufsgeschäfte aufgehalten, ist es dem unterzeichneten Verfasser leider nicht möglich geworden, den vorliegenden zweiten Teil früher herauszugeben; er hegt jedoch die Hoffnung, dafs den alten Freunden des Buches sich zahlreiche neue hinzugesellen werden, und dafs es Schulzwecken zu dienen noch mehr als bisher geeignet ist.

Den Herren Fachgenossen und Lehrern, die wiederholt ihr reges Interesse an dieser Arbeit zu erkennen gaben, möge an dieser Stelle besonders gedankt werden; ebenso dem Herrn Verleger, der sich in zuvorkommendster Weise mit der Aufnahme der erwähnten Erweiterungen einverstanden erklärte.

Berlin, im April 1908.

A. Weickert.

Inhaltsverzeichnis.

Zweiter Teil.

Allgemeine Mechanik.

Verzeichnis der einzelnen Tabellen.

Allgemeine Mechanik.

Einleitung.

Die Mechanik behandelt die Lehre von der Ruhe und der Bewegung der Körper.

Im Ruhezustande befindet sich ein Körper, wenn er seine Lage im Raume unverändert beibehält; er befindet sich in Bewegung, wenn er diese Lage ununterbrochen verändert.

Ein Urteil über den Ruhe- oder Bewegungszustand eines Körpers erlangt man dadurch, dafs man seine jeweilige Lage im Raume anderen Körpern gegenüber beobachtet und feststellt, ob er seinen Ort im Raume diesen Körpern gegenüber beibehält oder verändert.

Die Materie,*) aus welcher auch alle Körper bestehen mögen, ist nicht befähigt durch sich allein eine Bewegung anzunehmen oder eine einmal erhaltene Bewegung umzuändern. Soll ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung übergehen, oder soll ein in Bewegung befindlicher Körper seine Richtung bzw. Geschwindigkeit ändern, so ist hierzu eine äufsere Ursache erforderlich, die man „Kraft" nennt.

Mit anderen Worten: Jeder materielle Körper bleibt, solange er sich selbst überlassen ist, oder solange er nicht durch die Wirkung einer Kraft beeinflufst wird, in dem von ihm einmal angenommenen Zustande. Oder:

*) Die wirklich vorhandenen, also greifbaren Körper unterscheiden sich von den geometrischen Körpern dadurch, dafs sie nicht nur eine Form (Gestalt), sondern auch einen Inhalt haben. Dieser Inhalt ist aber das, was man mit dem Ausdruck „Materie" bezeichnet.

Nur diese ist es, welche den Körpern die ihnen anhaftenden Eigenschaften verleiht, und nur sie vermittelt die Eindrücke, welche wir mit unseren Sinnen von den Körpern empfangen.

Jeder materielle Körper bleibt so lange in Ruhe, als keine Kraft auf ihn einwirkt, und jeder in Bewegung gesetzte materielle Körper behält eine einmal empfangene Bewegung, sowohl in der Richtung als auch mit unveränderter Geschwindigkeit für immer bei, wenn ihm keine Kräfte — Bewegungshindernisse — entgegengesetzt werden.

Diese Eigenschaft der Materie wird mit dem Ausdrucke „Trägheit oder Beharrungsvermögen“ bezeichnet.

Man sagt daher allgemein:

Kraft ist die Ursache jeder Bewegung oder jeder Bewegungsänderung materieller Körper.

Es wird sich daher die Mechanik insbesondere mit den Kräften und der verschiedenen Wirksamkeit derselben, sowie mit den Hindernissen, welche dieser Wirksamkeit entgegentreten, beschäftigen.

Das Vorhandensein einer Kraft erkennt man nur an ihrer Wirkung. Diese besteht immer in einer Bewegung oder Bewegungsänderung, auch dann noch, wenn sie in einer kaum wahrnehmbaren Formveränderung des von der Kraft beeinflufsten Körpers erscheint. (Formveränderungen eines Körpers durch Zug, Druck, Stofs, Biegung, Verdrehung usw.).

Wie die Erfahrung lehrt, treten die Kräfte in der Natur nie einzeln auf; jede Kraft besitzt ihre Gegenkraft. Kraft und Gegenkraft sind stets gleich grofs; sie wirken in derselben geraden Linie, aber nach entgegengesetzten Richtungen, und führen damit den Gleichgewichtszustand eines Körpers herbei. Dieses Erfahrungsgesetz bezeichnet man allgemein als das „Gesetz von der Wirkung und Gegenwirkung“, oder als das „Gesetz von der Aktion und Reaktion“.

Gleichgewicht wird zwischen zwei oder mehreren Kräften stattfinden, wenn die Wirkungen derselben sich aufheben, d. h. gleich sind.

Es ist hierbei nicht notwendig, dafs die tätigen Kräfte einander genau gleich sein müssen; vielmehr kommt es auf die besonderen Verhältnisse an, unter denen sie ihre Wirksamkeit ausüben.

Im Gleichgewichtszustande kann sich sowohl ein ruhender als auch ein bewegter Körper befinden; letzterer dann, wenn er eine einmal angenommene Bewegung, trotz der Einwirkung von Kräften, welche die Bewegung umzuändern suchen, beibehält.

So ist ein auf einer Unterstützung ruhender, oder an einem Faden hängender Körper im Gleichgewicht mit dem auftretenden Gegendruck der Unterstützung, oder mit der in dem Faden auftretenden Zugspannung. Entfernt man jedoch die Unterstützung, oder durchschneidet man den Faden, so wird das Gleichgewicht gestört und der Körper fällt frei herab.

Ein an seinen Enden frei aufliegendes Flacheisen, welches in der Mitte durch eine Kraft (aufgelegtes Gewicht) senkrecht belastet wird, biegt bei angemessener Gröfse der Kraft bis zu einer bestimmten Grenze nach unten durch. Die Gröfse dieser Durchbiegung ist von der im Inneren des Flacheisens auftretenden Gegenkraft abhängig, welche ein weiteres Durchbiegen über die angegebene Grenze hinaus verhindert. Ferner kann man die Wirkung der Gegenkraft daran erkennen, dafs das Flacheisen, sobald die Wirkung der Kraft aufhört (das Gewicht entfernt wird), in seine Ursprungslage zurückkehrt, also seine ursprüngliche Gleichgewichtslage wieder einnimmt. Aufserdem übt das belastete Flacheisen auf seine beiden Auflager einen senkrecht nach unten gerichteten Druck, den Auflagerdruck, aus; dieser mufs von den Auflagern vollkommen aufgenommen werden, soll das Flacheisen seine Gleichgewichtslage dauernd beibehalten. Es mufs demnach seitens der Auflager gegen das Flacheisen ein dem Auflagerdruck genau gleich grofser, aber entgegengesetzt, hier also senkrecht nach oben gerichteter Gegendruck ausgeübt werden.

Ein in voller Fahrt befindliches Dampfschiff ist im Gleichgewicht mit den aus Wasser und Luft hervortretenden Widerständen, wenn es seine Fahrgeschwindigkeit ununterbrochen gleichförmig beibehält.

So sind für den Gleichgewichtszustand Druck und Gegendruck, Zug und Gegenzug überall gleich grofs, aber entgegengesetzt gerichtet.

Sind zwei oder mehrere Kräfte gleichzeitig an einem Körper tätig, so ist ihre Gesamtwirkung genau gleich der, welche eintreten würde, wenn jede der Kräfte einzeln und unabhängig von den anderen, also eine nach der anderen, auf den Körper einwirken könnte. Die Tatsache von der gegenseitigen Unabhängigkeit gleichzeitiger Kraftwirkungen auf einen Körper, findet ihre weitere Erläuterung beim „Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte“.

Alle Körper sind der Wirkung der Schwerkraft unterworfen; diese bewegt die Körper mit einer gewissen Kraft geradlinig gegen den Erdmittelpunkt hin. Die Richtung der Schwerkraft wird durch das Senklot angezeigt; man bezeichnet sie als „lotrecht, senkrecht oder vertikal“. Die auf dieser wieder senkrechte Richtung nennt man „wagerecht oder horizontal“.

Ferner gibt die Mechanik Aufschlufs über die Bedingungen, unter welchen die Körper den auf sie einwirkenden, bewegenden Kräften zu widerstehen vermögen; sie behandelt also auch die Widerstandsfähigkeit oder Festigkeit der in der Praxis verwendeten Materialien.

Schliefslich bespricht die Mechanik noch besondere mechanische Vorrichtungen, die Maschinen, durch deren Anwendung man eine als zweckmäfsig erkannte Bewegung einleiten, oder einer nicht gewünschten Bewegung vorbeugen kann.

Die Lehre, welche die Bedingungen klarlegt, unter denen sich mehrere Kräfte das Gleichgewicht halten, heifst „Statik“, während die Lehre, welche von der Bewegung der Körper handelt, „Dynamik“ genannt wird.

Erstes Kapitel.

Die verschiedenen Bewegungsarten.

Bewegung ist die Ortsveränderung eines räumlichen Gegenstandes, eines Körpers.

Die Reihenfolge der Orte im Raume, welche ein bewegter Körper nacheinander einnimmt, nennt man seinen Weg oder seine Bahn.

Die Richtung einer Bewegung ist entweder unveränderlich oder veränderlich; im ersten Falle nennt man die Bewegung eine geradlinige, im zweiten eine krummlinige.

Bei der geradlinigen Bewegung, dem einfachsten Falle, ist die Richtung der Bewegung die Gerade selbst. Bei der krummlinigen Bewegung kann sie entweder eine ebene Kurve, z. B. eine Kreislinie, oder eine Raumkurve, z. B. eine Schraubenlinie sein.

Die Bewegung selbst kann eine gleichförmige oder ungleichförmige sein, je nachdem in beliebig grofsen, aber sonst gleichen Zeitabschnitten gleiche oder ungleiche Wege zurückgelegt werden.

Bei der Bewegung eines Körpers können folgende Fälle eintreten:

1) Alle Punkte des Körpers bewegen sich in genau gleicher Richtung; dann entsteht die einfach fortschreitende Bewegung.

2) Alle Punkte des Körpers bewegen sich um eine ruhende Gerade, oder um einen festen Punkt, in konzentrischen Kreisen; dann entsteht die einfach drehende Bewegung.

3) Alle Punkte des Körpers bewegen sich um eine fortschreitende Gerade in konzentrischen Kreisen; dann entsteht die fortschreitend-drehende Bewegung.

Bei der einfach fortschreitenden Bewegung eines bestimmten Punktes wird der Weg durch die Länge der geraden oder krummen Linie, welche den Weg bildet, gemessen.

Bei der drehenden Bewegung wird der Weg entweder durch den am Mittelpunkte der Drehung von einem bestimmten Halbmesser durchlaufenen Winkel, oder durch die Länge des zu diesem Winkel gehörenden Bogens, dessen Halbmesser die Einheit ist, oder durch die Anzahl der in einer bestimmten Zeit vollendeten Umdrehungen gemessen.

Die Geschwindigkeit jeder Bewegung wird durch den Weg gemessen, welchen die als gleichförmig gedachte Bewegung in der Zeiteinheit, der Sekunde, erzeugen würde.

Ist die Geschwindigkeit veränderlich, so tritt entweder eine beschleunigte oder eine verzögerte Bewegung ein.

Sowohl Beschleunigung als auch Verzögerung können gleichförmig oder ungleichförmig sein.

Gleichförmig beschleunigt oder verzögert nennt man eine Bewegung, bei welcher die zurückgelegten Wege in gleichen Zeiten immer um die gleiche Gröfse zu- oder abnehmen.

Ist die Zu- oder Abnahme ungleich, so nennt man die Bewegung ungleichförmig beschleunigt oder ungleichförmig verzögert.

In übersichtlicher Weise läfst sich die Einteilung der Bewegungen in folgender Form vornehmen:

Bewegung

gleichförmig — ungleichförmig

ungleichförmig: beschleunigt — verzögert

beschleunigt: gleichförmig beschleunigt — ungleichförmig beschleunigt.

verzögert: gleichförmig verzögert — ungleichförmig verzögert.

Über die Entstehung der genannten Bewegungen durch die Einwirkung einer oder mehrerer Kräfte auf einen Körper, also über den Zusammenhang zwischen Bewegung und Kraft, ist noch zu bemerken:

1) Ein Körper, welcher der Einwirkung einer Kraft nicht ausgesetzt wird, bleibt im Zustande der Ruhe.

2) Um einen Körper in eine gleichförmige Bewegung zu versetzen, bedarf es nur einer einmaligen Kraftwirkung, z. B. eines Stofses. Die Kraft mufs unmittelbar, nachdem sie ihre Wirkung auf den Körper ausgeübt hat, zu wirken aufhören.

Durch sein Beharrungsvermögen nimmt der Körper alsdann eine gleichförmige Bewegung an, wobei Voraussetzung ist, dafs keinerlei Bewegungshindernisse (Reibung, Luftwiderstand usw.) auftreten. Sind diese jedoch vorhanden, so ist zur Erzeugung und Unterhaltung einer gleichförmigen Bewegung eine unveränderliche, ununterbrochen wirkende Kraft erforderlich, die gerade grofs genug sein mufs, um die Hindernisse zu überwinden.

Beispiele: Umdrehung der Erde, der Uhrzeiger; Maschinen im Beharrungszustande, also dann, wenn ihre Umdrehungszahlen in gleichen Zeitabschnitten unveränderlich dieselben bleiben.

3) Steht ein Körper unter der dauernden Einwirkung einer unveränderlichen Kraft, so ist seine Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, wenn keinerlei Bewegungshindernisse vorhanden sind, oder aber diese kleiner als die Kraft selbst ausfallen.

Beispiel: Freier Fall der Körper.

4) Ein Körper befindet sich in ungleichförmig beschleunigter Bewegung, wenn die auf ihn einwirkende Kraft eine veränderliche ist.

Beispiele: Räder und Riemenscheiben, Kurbeln, Kupplungen . . . Lokomotiven, Dampfschiffe usw. zu Beginn ihrer Bewegung.

5) Eine verzögerte Bewegung nimmt ein Körper an, wenn ihm dauernd Bewegungshindernisse entgegentreten, welche gröfser sind als die Wirkung der ihn beeinflussenden Kraft.

Beispiele: Wie unter 4), jedoch gegen das Ende der Bewegung. Zu erwähnen ist hier noch ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper, der eine gleichförmige Verzögerung erleidet.

Zweites Kapitel.

Gleichförmige Bewegung.

a) Geradlinige Bewegung.

Die Länge des Raumes, den ein Körper während seiner Bewegung durchläuft, nennt man seinen Weg.

Legt der Körper in gleichen Zeiten gleich grofse Wege zurück, so ist die Bewegung eine gleichförmige. Ist dies nicht der Fall, so ist die Bewegung eine ungleichförmige.

Es ist hierbei gleichgültig, ob der Weg geradlinig oder krummlinig ist.

Die Gröfse der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit gemessen, mit der sie stattgefunden hat.

Man versteht unter Geschwindigkeit den Weg, welchen ein Körper in der Zeiteinheit — in einer Sekunde — zurücklegt.

Sie ist also ein Teil des gesamten Weges, und bei der gleichförmigen Bewegung unveränderlich. Durchläuft z. B. ein Eisenbahnzug in jeder Sekunde einen Weg von 10 m Länge, so bringt man dies dadurch zum Ausdruck, dafs man sagt: Die Geschwindigkeit des Eisenbahnzuges ist = 10 m.

Häufig gibt man aber auch die Geschwindigkeit in anderen Zeiteinheiten, als in Sekunden an.

Zu Angaben über die Umdrehungszahl eines Rades, die Hubzahl einer Maschine usw. benutzt man gewöhnlich die Minute, zu Angaben über die Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges, eines Schiffes usw. die Stunde als Zeiteinheit.

Immer steht die Gröfse der Zeiteinheit im Verhältnis zur Gröfse der Geschwindigkeit, oder zur Gröfse des Weges. So kann z. B. die Geschwindigkeit des vorstehend erwähnten Eisenbahnzuges auch zu 36000 m = 36 km in der Stunde angegeben werden.*)

Es kommen demnach, wie aus Vorstehendem ersichtlich, zur Bestimmung der Gesetze der gleichförmigen Bewegung folgende drei Gröfsen in Betracht:

1) Die Zeit, d. i. diejenige Anzahl von Sekunden, während welcher sich eine Bewegung vollzieht, oder während welcher sie beobachtet wird.
2) Der Weg, d. i. diejenige Anzahl von Metern, die in einer bestimmten Zeit, also in einer bestimmten Anzahl von Sekunden, zurückgelegt wird.
3) Die Geschwindigkeit, d. i. diejenige Anzahl von Metern, die in 1 Sekunde zurückgelegt wird.

Besitzt nun ein in gleichförmiger Bewegung befindlicher Körper eine Geschwindigkeit von 10 m, legt er also in jeder einzelnen Sekunde einen Weg von 10 m Länge zurück, so wird er

---

*) Eine Stunde hat 60 . 60 = 3600 Sekunden. Werden in 1 Sekunde 10 m Weg zurückgelegt, so ergibt das

in 1 Stunde = 3600 . 10 = 36000 m = 36 km.

in	1 Sekunde	einen	Weg	von	1 mal	10 m	=	10 m,	
„	2 Sekunden	„	„	„	2 „	10 „	=	20 „	
„	5 „	„	„	„	5 „	10 „	=	50 „	
„	100 „	„	„	„	100 „	10 „	=	1000 „	und
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
„	t „	„	„	„	t „	10 „	=	t . 10 m	

zurücklegen.

Aus dieser Aufstellung ist ersichtlich, dafs man also nur die Zeit mit der Geschwindigkeit zu multiplizieren hat, um den Weg zu erhalten.

Da weiter, wie vorstehend erklärt, die Geschwindigkeit ein Teil des gesamten, zurückgelegten Weges ist, und zwar derjenige Teil, welcher auf die Zeitdauer einer Sekunde entfällt, so wird man die Geschwindigkeit erhalten, wenn man den gesamten Weg in so viel gleiche Teile zerlegt, als Sekunden zum Durchlaufen desselben verbraucht wurden, d. h. man erhält die Geschwindigkeit, wenn man den Weg durch die Zeit dividiert.

Hieraus folgt dann ohne weiteres, dafs man, um die Zeit zu erhalten, den Weg durch die Geschwindigkeit dividieren mufs.

Bezeichnet man ganz allgemein mit:

t die Zeit, während der die Bewegung vor sich geht;
s den Weg, der in dieser Zeit t zurückgelegt wird;
v die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper sich fortbewegt, so ist der zurückgelegte

Weg = Geschwindigkeit mal Zeit,

in Buchstaben:

$$s = v \,.\, t^{*)} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Weiter ergibt sich:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}},$$

in Buchstaben:

$$v = \frac{s}{t}{}^{*)} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

$$\text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}},$$

in Buchstaben:

$$t = \frac{s}{v}{}^{*)} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

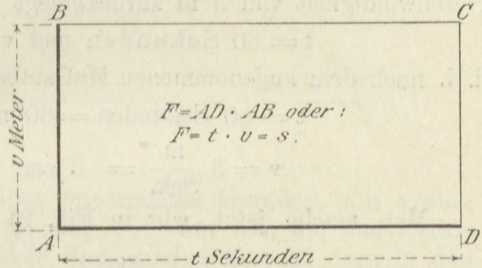
---

*) Die Formeln 1 bis 3) können infolge ihrer Allgemeinheit

Der rechnerischen Bestimmung der Gröfse des Weges s nach Formel 1) steht die zeichnerische — **graphische** — Darstellung zur Seite, welche in vergleichender Beziehung mancherlei Vorteile bietet.

Wie Formel 1) zeigt, ist der Weg das Produkt aus der Gröfse der Zeit und der Gröfse der Geschwindigkeit, also ein Produkt aus zwei Faktoren. Die Geometrie lehrt, dafs jedes Produkt aus zwei Faktoren durch den Flächeninhalt eines Rechtecks*) dargestellt werden kann, dessen Seiten die beiden Faktoren bilden.

Fig. 1.



Trägt man daher in einem ganz beliebigen Mafsstabe auf einer wagerechten, geraden Linie AD die Anzahl t der einzelnen Sekunden auf, Fig. 1), dann in einem der Endpunkte dieser Geraden — hier in A — senkrecht auf derselben die in jeder Sekunde gleiche Geschwindigkeit v, und zieht man weiter BC parallel zu AD und DC parallel zu AB, so entsteht das Rechteck ABCD, dessen Flächeninhalt

$$F = AD \,.\, AB = t \,.\, v = v \,.\, t^{**})$$

ist Dieser Wert v . t ist aber nach Formel 1) = s = dem zurückgelegten Wege; mithin veranschaulicht das Rechteck ABCD ganz allgemein die Gröfse des Weges, der in einer

---

dazu benutzt werden, Aufgaben ganz beliebiger Art, soweit sie in das Gebiet der gleichförmigen Bewegung fallen, zu berechnen.

Sie sind nichts weiter als Gleichungen, in denen der links vom Gleichheitszeichen stehende Buchstabe als „die Unbekannte" zu betrachten ist, deren Wert aus den beiden anderen, im übrigen stets zahlenmäfsig gegebenen Gröfsen zu berechnen ist. Man braucht nur an die Stelle der Buchstaben die in der Aufgabe vorkommenden Zahlenwerte zu setzen, um das Resultat zu erhalten.

Hierzu vergleiche man:

I. Teil, Arithmetik und Algebra
a) Fufsnote auf Seite 5) und
b) Gleichungen, Seite 56 unter 77.

Aus Formel 1):

$$s = v \,.\, t$$

sind übrigens die Formeln 2 und 3) nach dem auf Seite 53 unter 75, e) Gesagten ohne weiteres abzuleiten.

*) Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

**) Vgl. I. Teil; Seite 18 unter 31.

beliebigen Zeit t mit einer beliebig grofsen, aber stets gleichbleibenden Geschwindigkeit v zurückgelegt wurde.

Um an einem besonderen Fall die graphische Darstellung von Wegen bei gleichförmiger Bewegung zu zeigen, wähle man z. B. als Mafsstab für die

$$\text{Zeit-Einheit: } 1 \text{ Sek.} = 1 \text{ mm und für die}$$

$$\text{Geschwindigkeits- } \text{„} \; : 1 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}} = 1 \text{ cm.*)}$$

Soll nun das Rechteck gezeichnet werden, dessen Flächeninhalt den Weg darstellt, der z. B. in 60 Sekunden mit einer Geschwindigkeit von 3 m zurückgelegt wird, dann ist

$$t = 60 \text{ Sekunden und } v = 3 \text{ m},$$

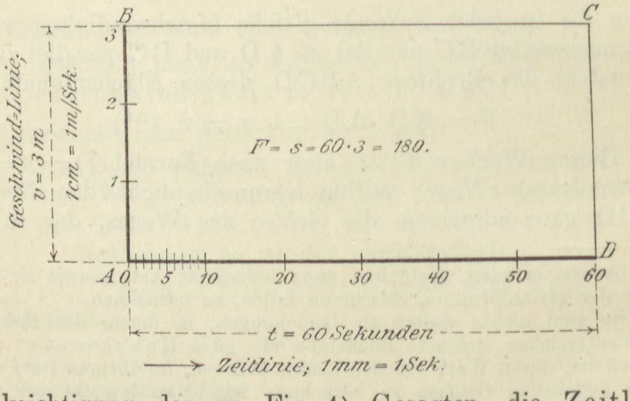
d. i. nach dem angenommenen Mafsstabe in Längen umgesetzt:

$$t = 60 \text{ Sekunden} = 60 \text{ mm und}$$

$$v = 3 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}} = 3 \text{ cm.}$$

Man mache jetzt, wie in Fig. 2) angegeben und unter

Fig. 2.



Berücksichtigung des zu Fig. 1) Gesagten, die Zeitlinie **AD = 60 mm**, ferner die Geschwindigkeitslinie **AB = 3 cm** und vervollständige zum Rechteck, dann ist dessen

$$\text{Inhalt} = AD \,.\, AB = 60 \,.\, 3 = 180.\text{**)}$$

Formel 1) ergibt dasselbe Resultat, nämlich:

$$s = v \,.\, t = 3 \,.\, 60 = 180 \text{ m.}$$

---

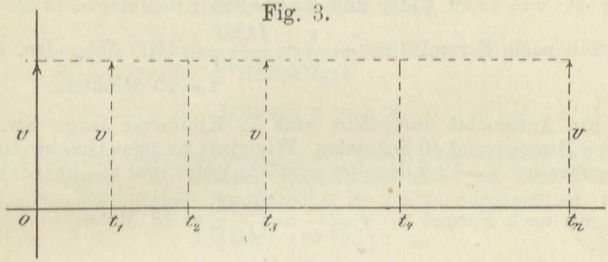
*) $1 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$ bedeutet: 1 m in der Sekunde.

**) Es ist ohne weiteres ersichtlich, dafs man die Geschwindigkeitslinie auch wagerecht und die Zeitlinie senkrecht dazu anordnen kann, ohne an der richtigen Darstellung etwas zu ändern.

Will man auf diese Weise mehrere Wege miteinander vergleichen, so ist streng darauf zu achten, dafs für sämtliche zu zeichnenden Rechtecke der einmal gewählte Mafsstab genau derselbe bleibt. Eine Änderung desselben würde für den Vergleich unrichtige Figuren und falsche Eindrücke ergeben.

Eine vergleichende Darstellung von Wegen in einem Bilde zeigt Fig. 3).

Fig. 3.



Trägt man auf einer wagerechten Geraden, von o ausgehend, Längen ot_1, ot_2, ot_3 ..... ot_n auf, die den Zeiten t_1, t_2, t_3 ..... t_n gleich sind, und senkrecht dazu in den einzelnen Teilpunkten die immer gleichbleibende Geschwindigkeit v, so stellen die Rechtecke über den Zeitlinien ot_1, ot_2, ot_3 ..... ot_n die entsprechenden Gröfsen der zurückgelegten Wege dar.

Beispiele:*)

1) Auf einem Flusse schwimmt ein Körper in 45 Sekunden 36 Meter weit. Wie grofs ist die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche?

Gegeben ist: t = 45 Sekunden und s = 36 Meter.

Mithin nach Formel 2): $v = \frac{s}{t} = \frac{36}{45} = 0{,}8$ Meter.

2) Welchen Weg legt eine Lokomotive in 30 Minuten zurück, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit von 12 Metern in jeder Sekunde gleichförmig fortbewegt?

Gegeben ist: $t = 30 \,.\, 60 = 1800$ Sekunden und $v = 12$ Meter.

Mithin nach Formel 1): $s = v \,.\, t = 12 \,.\, 1800 = 21600$ Meter.

*) Zu den Resultaten sämtlicher in diesem Buche folgenden Beispiele ist vorweg zu bemerken, dafs da, wo sie in Form von Dezimalbrüchen erscheinen, die letzte Stelle dieser um 1 erhöht worden ist, wenn die folgende, nicht mehr angegebene Stelle = 5 oder gröfser als 5 war. Ergab sich die betreffende Stelle kleiner als 5, so blieb die letzte Stelle im Resultat unverändert.

3) Ein Eisenbahnzug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 9 Metern fort; welchen Weg legt er in einer Stunde und 15 Min. zurück?

Gegeben ist: $v = 9$ Meter und $t = 75 . 60 = 4500$ Sekunden.

Mithin nach Formel 1): $s = v . t = 9 . 4500 = 40500$ Meter.

4) In welcher Zeit durcheilt ein Schnellzug den Gotthard-Tunnel, wenn die Geschwindigkeit des Zuges zu 12,49 Meter angenommen wird, und die Länge des Tunnels 14,988 Kilometer beträgt?

Gegeben ist: $v = 12{,}49$ Meter und $s = 14{,}988$ Kilometer $= 14988$ Meter.

Mithin nach Formel 3): $t = \frac{s}{v} = \frac{14988}{12{,}49} = 1200$ Sekunden, d. i.

$t = 20$ Minuten.

5) Ein Automobil durchfährt eine 72 Kilometer lange Strecke in 1 Stunde 6 Minuten und 40 Sekunden. Wie grofs ist seine Geschwindigkeit?

Gegeben ist: $s = 72$ Kilometer $= 72000$ Meter und $t = 4000$ Sekunden.

Mithin nach Formel 2): $v = \frac{s}{t} = \frac{72000}{4000} = 18$ Meter.

6) Welche Zeit braucht ein Pferd, um einen Weg von 21 Kilometern zu durchlaufen, wenn es eine Geschwindigkeit von 5 Metern annimmt?

Gegeben ist: $s = 21000$ Meter und $v = 5$ Meter.

Mithin nach Formel 3): $t = \frac{s}{v} = \frac{21000}{5} = 4200$ Sek. $= 1$ Std. 10 Min.

7) Ein Fahrstuhl braucht 4 Minuten Zeit, um eine Höhe von 72 Metern zu erreichen; mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich?

Gegeben ist: $t = 4 . 60 = 240$ Sek.; $s = 72$ Meter.

Mithin nach Formel 2): $v = \frac{s}{t} = \frac{72}{240} = 0{,}3$ Meter.

8) Der Tisch einer Eisenhobelmaschine, der sich vorwärts und rückwärts mit gleicher Geschwindigkeit bewegt und bei jedem Zuge einen Weg von 1 Meter zurücklegt, macht in jeder Minute 4 Doppelzüge, d. h. er geht 4mal vorwärts und 4mal rückwärts. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Tisch?

Gegeben ist: der Weg in 1 Min. $s = 4 . 1 + 4 . 1 = 8$ Meter und die Zeit $t = 1$ Min. $= 60$ Sek.

Mithin nach Formel 2): $v = \frac{s}{t} = \frac{8}{60} = 0{,}133$ Meter.*)

9) Eine Richtplatte von 2 Meter Länge und 0,5 Meter Breite soll einmal überhobelt werden. Der Schlitten der Hobelmaschine hat eine Geschwindigkeit von 0,09 Metern, die Breite des Spanes beträgt 0,004 Meter. Welche Zeit ist hierzu erforderlich?

Der Inhalt der abzuhobelnden Fläche ist: $2 . 0{,}5 = 1$ qm.

In einer Sek. wird eine Fläche bearbeitet von: $0{,}09 . 0{,}004 = 0{,}00036$ qm.

Folglich ist zum einmaligen Überhobeln der Platte eine Zeit von

$\frac{1}{0{,}00036} = 2778$ Sek. $= 46$ Min. 18 Sek. erforderlich.*)

---

*) Vgl. Seite 31.

Übungsbeispiele: *)

1) Welche Zeit braucht ein Fuſsgänger, um 7 km zu durchschreiten, wenn seine mittlere Geschwindigkeit 1,4 m beträgt?

Lösung: t = 1 Std. 23 Min. 20 Sek.

2) Ein Fahrstuhl bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 0,25 m. Welche Höhe erreicht er in 3 Minuten?

Lösung: s = 45 m.

3) Wie groſs ist die Geschwindigkeit eines Dampfschiffes, wenn es in einer Stunde 18000 m zurücklegt?

Lösung: v = 5 m.

4) Zwischen Blitz und Knall eines Geschützes vergeht ein Zeitraum von 3,8 Sekunden. In welcher Entfernung steht es vom Beobachter, wenn die Geschwindigkeit des Schalles zu 333 m angenommen wird?

Lösung: s = 1265,4 m.

5) Welche Zeit braucht ein Radfahrer, um mit einer Geschwindigkeit von 5 m einen Weg von 12 km zu durchfahren?

Lösung: t = 40 Minuten.

6) Welche Entfernung kann ein guter Schlittschuhläufer mit 9 m Geschwindigkeit in 2 Stunden durcheilen?

Lösung: s = 64,8 km = 8,64 Meilen.

7) Ein Eisenbahnzug besitzt eine Geschwindigkeit von 12,5 m. Welchen Weg legt er in 2 Stunden und 45 Minuten zurück?

Lösung: s = 123,750 km = 16,5 Meilen.

8) Mit welcher Geschwindigkeit fliegt eine Brieftaube, die in 6 Minuten einen Weg von 11,25 km zurücklegt?

Lösung: v = 31,25 m.

---

*) Bei dem Durchrechnen der Übungsbeispiele ist namentlich von Anfängern streng zu beachten, daſs die Werte für Weg, Zeit und Geschwindigkeit unbedingt in den richtigen Einheiten eingesetzt werden; also:

Wege und Geschwindigkeiten stets in Metern, Zeiten stets in Sekunden.

Die Folge einer Unachtsamkeit in dieser Beziehung ist immer ein falsches Resultat!

Sehr häufig treten in der Praxis Fälle auf, in denen man gezwungen ist, sich Gleichungen selbst aufzustellen und zu entwickeln. Es ist hierbei besonders darauf zu achten, daſs selbst beim Berechnen einfachster Aufgaben stets die Buchstabenausdrücke oder Formeln vor die natürlichen Zahlenwerte gestellt werden.

Eine gewisse Fertigkeit in der Behandlung von Buchstabenwerten überhaupt, und die Vermeidung von Irrtümern im allgemeinen, wird die unmittelbare Folge sein.

9) Ein Luftballon legte einen Weg von 84 Meilen in 15 Stunden zurück; wie grofs war seine Geschwindigkeit?

Lösung: $v = 11,67$ m.

10) Ein Dampfschiff besitzt ohne die Einwirkung der Strömung eine Geschwindigkeit von 5,5 m; die Strömung allein würde ihm eine solche von 1,15 m erteilen. Wie grofs wird seine Geschwindigkeit, wenn es

a) stromab, d. i. mit der Strömung, und
b) stromauf, d. i. gegen die Strömung, fährt?

Lösung: a) $v = 6,65$ m.
b) $v = 4,35$ m.

11) Nach den Angaben des Kursbuches durchfährt der D-Zug die 286 km lange Strecke Berlin—Hamburg in 3 Stunden und 30 Minuten. a) Welche Geschwindigkeit besitzt dieser Zug? b) Welche Zeit würde ein Fufsgänger bei täglich 8stündiger Marschleistung und 0,75 m Geschwindigkeit, c) ein Reiter bei gleicher Marschleistung und 4,5 m Geschwindigkeit brauchen?

Lösung: a) $v = 22,7$ m d. i. 81,720 km in der Stunde.
b) $t = 13$ Tage 1 Std. 55 Min. und 33 Sek.
c) $t = 2$ „ 1 „ 39 „ „ 15 „ .

12) Der Schall besitzt in Wasser, dessen Temperatur $= 10^0$ C. ist, eine Geschwindigkeit von 1425 m. Welchen Weg durchläuft er in 1 Minute?

Lösung: $s = 85500$ m.

---

*) Als besonderer Fall der gleichförmig-geradlinigen Bewegung ist

die Bewegung des Tisches einer Plan-Hobelmaschine

aufzufassen, dessen Vorgang und Rückgang sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten vollzieht.

Bezeichnet man mit:

h den einfachen Hub (Weg des Tisches);
t die Zeit;
v die Geschwindigkeit des Tisches beim Vorgang;
v_1 „ „ „ „ „ Rückgang;

*) Die hier folgenden Angaben sind uns in zuvorkommender Weise von „Herrn W. Niemüller, Ingenieur und Lehrer am Rheinischen Technikum Bingen a. Rh.“ zur Aufnahme in diesem Buche überlassen worden.

$p = \frac{v_1}{v}$ das Verhältnis*) beider Geschwindigkeiten, das sog. Geschwindigkeitsverhältnis;

n die Anzahl der Doppelhübe,

dann ist nach Formel 3):

die Zeit bei 1 Vorgang $t = \frac{h}{v}$;

„ „ „ 1 Rückgang $t = \frac{h}{v_1}$; mithin

„ „ „ 1 Doppelhub, d. i. bei 1 Vorgang und 1 Rückgang,

$$t = \frac{h}{v} + \frac{h}{v_1}; \text{ folglich}$$

die Zeit bei n Doppelhüben: $t = \left(\frac{h}{v} + \frac{h}{v_1}\right) . n.$

Aus der Gleichung für das Geschwindigkeitsverhältnis

$$p = \frac{v_1}{v} \text{ folgt aber:}$$

$$v_1 = p . v.\text{**)}$$

Setzt man diesen Wert von v_1 in die letzte Gleichung für

$$t = \left(\frac{h}{v} + \frac{h}{v_1}\right) . n$$

ein, so erhält man:

$$t = \left(\frac{h}{v} + \frac{h}{p . v}\right) . n.$$

Dafür kann man aber schreiben:***)

$$t = \left(\frac{h}{v} + \frac{h}{v} . \frac{1}{p}\right) . n \quad \text{oder}$$

$$t = \frac{h}{v} . \left(1 + \frac{1}{p}\right) . n.$$

Hieraus folgt:

$$t = n . \frac{h}{v} . \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Nach den Regeln über das Umformen der Brüche†) ergibt sich weiter:

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 73 unter 81.

**) „ I. „ „ 53 „ 75, f.

***) „ I. „ „ 45 „ 66 und Seite 21 unter 39.

†) „ I. „ „ 42 „ 63 „ „ 48 „ 69.

$$t = \frac{n \, . \, h}{v} \, . \left(\frac{p + 1}{p}\right) \text{ oder geordnet:}$$

$$t = \frac{h \, . \, n \, . \, (1 + p)}{p \, . \, v} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Hieraus berechnet sich*):

$$v = \frac{h \, . \, n \, . \, (1 + p)}{p \, . \, t} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Beispiele:

10) Eine Planhobelmaschine besitzt eine Hublänge von 3 m. Der Tisch macht in 4 Minuten 6 Doppelhübe; der Rückgang erfolgt doppelt (2-mal) so schnell als der Vorgang. Wie grofs wird die Geschwindigkeit beim Vorgang bzw. beim Rückgang?

Gegeben ist: Hub h = 3 m;
Zeit t = 4 Min. = 240 Sekunden;
Anzahl der Doppelhübe n = 6;

$$\text{Geschwindigkeitsverhältnis } p = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{1} = 2.$$

Setzt man diese Werte in Formel 5) ein, so erhält man die Geschwindigkeit beim Vorgang

$$v = \frac{h \, . \, n \, . \, (1 + p)}{p \, . \, t} = \frac{3 \, . \, 6 \, . \, (1 + 2)}{2 \, . \, 240} \text{ oder:}$$

$$v = \frac{18 \, . \, 3}{480} = \frac{54}{480}. \text{ Das ist aber:}$$

$$v = 0{,}1125 \text{ m bzw.}$$
$$v = 112{,}5 \text{ mm.}$$

Aus der Gleichung $p = \frac{v_1}{v}$ folgt für die Geschwindigkeit beim Rückgang:

$$v_1 = p \, . \, v \text{ oder}$$
$$v_1 = 2 \, . \, 0{,}1125 \text{ m; d. i.}$$
$$v_1 = 0{,}225 \text{ m bzw.}$$
$$v_1 = 225 \text{ mm.}$$

11) Auf der Planhobelmaschine des vorstehenden Beispieles soll eine Richtplatte von 3 m Länge und 1,8 m Breite einmal überhobelt werden. Welche Zeit ist hierzu erforderlich, wenn die Spanbreite 0,004 m beträgt?

Gegeben ist: Die Gesamtzahl der Doppelhübe; denn da bei jedem Doppelhube von der Breite der Platte 0,004 m abgehobelt werden, so ist die

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 53 unter 75, e und f.

Anzahl der Doppelhübe $n = \frac{1,8}{0,004} = 450$ im ganzen;

Hub $h = 3$ m;

Geschwindigkeit beim Vorgang $v = 0,1125$ m;

Geschwindigkeitsverhältnis $p = 2$.

Mithin nach Formel 4):

$$t = \frac{h \cdot n \cdot (1 + p)}{p \cdot v} = \frac{3 \cdot 450 \cdot (1 + 2)}{2 \cdot 0,1125} = \frac{1350 \cdot 3}{0,225} = \frac{4050}{0,225};\ \text{d. i.}$$

$t = 18000$ Sekunden bzw.

$t = 5$ Stunden.

---

b) Kreisförmige Bewegung.

1) Umfangsgeschwindigkeit.

Geht bei der gleichförmigen Bewegung eines Körpers die geradlinige Richtung des Weges in eine kreisförmige über, so entsteht die gleichförmig drehende oder rotierende Bewegung. (Wasserrad, Schwungrad, Kurbel, Exzenterscheibe, Schiffsschraube, Anker an Dynamomaschinen usw.)

Die kreisförmige Bewegung entsteht, wenn sich ein Körper so um eine mit ihm fest verbunden gedachte, unbewegliche Achse dreht, dafs alle aufserhalb dieser Achse liegenden Punkte des Körpers Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte in der (Dreh-)Achse liegen, und deren Ebenen senkrecht auf dieser stehen.

Bei der kreisförmigen Bewegung werden diejenigen Punkte, welche am weitesten vom Mittelpunkte der Achse entfernt sind, den gröfsten Weg zurücklegen, während dieser gegen den Mittelpunkt hin immer mehr und mehr abnimmt, um in demselben gleich Null zu werden. Denn bei einer Umdrehung des Körpers werden von verschiedenen Punkten desselben auch Kreise von verschiedenen Durchmessern durchlaufen, deren Umfänge*) nach dem Mittelpunkte hin immer kleiner und kleiner werden.

Den Weg nun, welchen ein Punkt hierbei in einer bestimmten Entfernung vom Mittelpunkte und in einer Sekunde zurücklegt, nennt man seine Umfangsgeschwindigkeit.

Diese Umfangsgeschwindigkeit wird je nach der Entfernung des sich drehenden Punktes vom Mittelpunkte der Drehachse ebenfalls verschieden ausfallen. Sie wird am Umfange des sich drehenden Körpers, also im gröfsten Abstande, auch am

*) Länge der Kreislinien.

Szkoły w Szczecinie

gröfsten sein, um bei immer weiterer Annäherung an den Mittelpunkt in diesem selbst gleich Null zu werden.

Will man daher eine Umfangsgeschwindigkeit genau bestimmen, so ist auch genau anzugeben, für welchen Punkt eines sich drehenden Körpers sie bestimmt werden soll; z. B. für den Umfang eines Schwungrades, einer Riemenscheibe, den Teilkreis eines Zahnrades, den Schraubenkreis einer Kupplung usw.

Da die kreisförmige Bewegung hier als gleichförmig angenommen ist, so müssen auch die bei der gleichförmigen Bewegung besprochenen Gesetze auf sie ihre Anwendung finden; denn diese Gesetze gelten ja für jede gleichförmige Bewegung, mag dieselbe nun gerad- oder krummlinig sein.

Der Begriff der Geschwindigkeit bleibt nach der vorangegangenen Erklärung ebenfalls bestehen, nämlich:

Geschwindigkeit = Weg in der Zeiteinheit, d. i.
Weg in 1 Sekunde.

Von besonderem Einflusse aber sind, da bei dieser Bewegung nicht gerade Linien, sondern Kreise durchlaufen werden, der

Durchmesser des von einem in Bewegung befindlichen Punkte durchlaufenen Kreises, und die

Umdrehungs-(Touren-)Zahl, welche angibt, wie oft der Umfang dieses Kreises von dem Punkte in einer Minute durchlaufen wird.

Nach Formel 2) war für die gleichförmig-geradlinige Bewegung die Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\text{Weg im ganzen}}{\text{Zeit in Sekunden}}.$$

Bezeichnet man nun allgemein mit:

d den Durchmesser des von dem mafsgebenden Punkte durchlaufenen Kreises;
n die Anzahl der Umdrehungen in jeder Minute;
π die Zahl 3,14*),

so ist bei einer Umdrehung

der Weg $= \pi \cdot d$ = dem Umfange des durchlaufenen Kreises;
mithin bei n Umdrehungen, also in einer Minute,
„ „ $= \pi \cdot d \cdot n$.

---

*) $\pi = 3{,}1415926$ . . . welcher Zahlenwert mit für die Praxis genügender Genauigkeit auf 3,14 abgekürzt werden kann.

Setzt man diesen Wert für den Weg in die vorstehende Gleichung an die Stelle von s, so erhält man

$$v = \frac{\pi . d . n}{t}.$$

Um aus dieser Formel die Umfangsgeschwindigkeit zu erhalten, mufs die Zeit t in Sekunden eingesetzt werden, und da der Wert $\pi . d . n$ den Weg in einer Minute darstellt, so mufs dieser durch 60 dividiert werden, um den Weg in einer Sekunde zu ergeben.

Es mufs also an Stelle des Buchstabens t die bestimmte Zahl 60 treten.

Damit ergibt sich:

die Umfangsgeschwindigkeit zu

$$v = \frac{\pi . d . n}{60} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

der Durchmesser des durchlaufenen Kreises zu

$$d = \frac{60 . v\text{*)}}{\pi . n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

die Umdrehungszahl in 1 Minute zu

$$n = \frac{60 . v\text{*)}}{\pi . d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

In den vorstehenden Formeln 6—8) ist zur Berechnung der einschlägigen Werte der Durchmesser **d** des durchlaufenen Kreises benutzt worden.

Sollen die gleichen Werte durch den Halbmesser **r** ausgedrückt werden, so ist zu beachten, dafs bei dem Kreise

der Durchmesser = dem zweifachen Halbmesser,
dafs also $d = 2 . r$ ist.

Setzt man daher in den Formeln 6—8) an Stelle des Buchstabens d dessen Gleichwert 2 . r, so erhält man für Formel 6):

$$v = \frac{\pi . 2 . r . n}{60} \text{ und damit**)}$$

$$v = \frac{\pi . r . n}{30} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

*) Vgl. I. Teil; Seite 53 unter 75, e und f.
**) „ I. „ „ 38 „ 59.

Für Formel 7) ergibt sich:

$$2 . r = \frac{60 . v}{\pi . n} \text{ oder*)}$$

$$r = \frac{30 . v}{\pi . n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Im gleichen Sinne folgt für Formel 8):

$$n = \frac{60 . v}{\pi . 2 . r}. \text{ Mithin**)}$$

$$n = \frac{30 . v}{\pi . r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Erwähnt mag hierbei werden, dafs die Formeln 6—8) überall da vorzuziehen sind, wo man, wie am Schlusse des 3. Teiles dieses Buches, über Tabellen der Kreisumfänge verfügt. Sonst ist je nach der Form der Aufgabe die für deren schnellste Berechnung passende Gleichung zu wählen.***)

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 52 unter 75, c.

**) „ I. „ „ 38 „ 59.

***) Die Formeln 6—11) können für Fälle, in denen es an Tabellen mangelt, noch einfacher gestaltet werden, wenn man die Werte

$$\frac{\pi}{60} \text{ bzw. } \frac{60}{\pi} \text{ und } \frac{\pi}{30} \text{ bzw. } \frac{30}{\pi}$$

gleich zur bestimmten Zahl umrechnet, und diese an den entsprechenden Stellen einsetzt. Es ist abgerundet:

$$\frac{\pi}{60} = 0{,}052 \ldots \text{ und } \frac{\pi}{30} = 0{,}105 \ldots$$

$$\frac{60}{\pi} = 19{,}1 \ldots \text{ „ } \frac{30}{\pi} = 9{,}55 \ldots$$

Werte, welche mit für die Praxis genügender Genauigkeit benutzt werden können. Damit geht über

Formel 6) in: $v = 0{,}052 . d . n.$

„ 7) „ $d = \frac{19{,}1 . v}{n}.$

„ 8) „ $n = \frac{19{,}1 . v}{d}.$

„ 9) „ $v = 0{,}105 . r . n.$

„ 10) „ $r = \frac{9{,}55 . v}{n}.$

„ 11) „ $n = \frac{9{,}55 . v}{r}.$

Beispiele:

12) Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit einer Riemenscheibe von 2 m Durchmesser, wenn sie 120 Umdrehungen in jeder Minute macht?

Nach Formel 6) erhält man:

$$v = \frac{\pi \,.\, d \,.\, n}{60} = \frac{3{,}14 \,.\, 2 \,.\, 120}{60} = 12{,}56 \text{ m.}$$

13) Eine schmiedeeiserne Welle von 48 mm Halbmesser soll auf einer Drehbank abgedreht werden, die 22 Umdrehungen in jeder Minute macht. Wie grofs ist die Umfangs-(Schnitt-)Geschwindigkeit?

Nach Formel 9) erhält man:

$$v = \frac{\pi \,.\, r \,.\, n}{30} = \frac{3{,}14 \,.\, 48 \,.\, 22}{30} = 110{,}5 \text{ mm.}$$

14) Wieviel Umdrehungen macht ein Schwungrad von 2,5 m Durchmesser in jeder Minute, wenn die Umfangsgeschwindigkeit 7 m beträgt?

Nach Formel 8) erhält man:

$$n = \frac{60 \,.\, v}{\pi \,.\, d} = \frac{60 \,.\, 7}{3{,}14 \,.\, 2{,}5} = 53{,}5 \text{ Umdrehungen.}$$

15) Die Umfangs-(Schnitt-)Geschwindigkeit eines abzudrehenden Rotgufszylinders sei = 220 mm, der Durchmesser = 300 mm. Wieviel Umdrehungen macht die Drehbank in jeder Minute?

Nach Formel 11) erhält man:

$$n = \frac{30 \,.\, v}{\pi \,.\, r} = \frac{30 \,.\, 220}{3{,}14 \,.\, 150} = 14 \text{ Umdrehungen.}$$

16) Welchen Teilkreis-Durchmesser erhält ein Zahnrad, dessen Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreise 7,85 m beträgt, und das 150 Umdrehungen in jeder Minute macht?

Nach Formel 7) erhält man:

$$d = \frac{60 \,.\, v}{\pi \,.\, n} = \frac{60 \,.\, 7{,}85}{3{,}14 \,.\, 150} = 1 \text{ m.}$$

17) Welchen Halbmesser mufs ein Schwungrad erhalten, damit es bei 150 Umdrehungen in jeder Minute keine gröfsere Umfangsgeschwindigkeit als 30 m annimmt?

Nach Formel 10 in der Fufsnote auf Seite 20) erhält man:

$$r = \frac{9{,}55 \,.\, v}{n} = \frac{9{,}55 \,.\, 30}{150} = 1{,}91 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

13) Welchen Durchmesser erhält ein Wasserrad, dessen Umfangsgeschwindigkeit = 1,5 m und dessen Umdrehungszahl = 10 ist?

Lösung: d = 2,866 m.

14) Eine Turbine hat einen Durchmesser von 660 mm und eine Umfangsgeschwindigkeit von 12 m. Wieviel Umdrehungen macht sie in einer Minute?

Lösung: n = 347,5 Umdrehungen.

15) Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit eines Rades von 1,5 m Durchmesser, wenn es 80 Umdrehungen in jeder Minute macht?

Lösung: $v = 6{,}28$ m.

16) Eine Dampfmaschine macht 50 Umdrehungen in jeder Minute; der Kurbelhalbmesser sei $= 0{,}4$ m. Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens?

Lösung: $v = 2{,}09$ m.

17) Eine Handkurbel von 40 cm Länge wird von einem Arbeiter in jeder Minute 20mal herumgedreht. Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit dieser Kurbel?

Lösung: $v = 0{,}838$ m.

18) An einer Handkurbel von 35 cm Länge vermag erfahrungsgemäfs ein Arbeiter längere Zeit mit einer Umfangsgeschwindigkeit von 0,75 m tätig zu sein. Wieviel Umdrehungen macht die Kurbel in einer Minute?

Lösung: $n = 20{,}5$ Umdrehungen.

19) Wieviel Umdrehungen in einer Minute hat die Planscheibe einer Drehbank bei dem Abdrehen einer Riemenscheibe von 1 m Durchmesser zu machen, wenn die (Umfangs-)Schnittgeschwindigkeit 75 mm beträgt?

Lösung: $n = 1{,}43$ Umdrehungen.

20) Eine schmiedeeiserne Welle von 80 mm Durchmesser soll abgedreht werden; die Umfangs-(Schnitt-)Geschwindigkeit soll 0,13 m betragen. Wieviel Umdrehungen mufs die Welle in jeder Minute machen, damit diese Geschwindigkeit erreicht wird?

Lösung: $n = 31$ Umdrehungen.

21) Welche Zeit erfordert das Abdrehen einer 80 mm starken und 4,5 m langen Welle, wenn die Schnittgeschwindigkeit $= 100$ mm und die Schnittbreite $= 1$ mm ist?

Lösung: $t = 3$ Std. 8 Min. 29 Sek.

22) Eine Welle von 80 mm Durchmesser und 1980 mm Länge soll mit 2 Schnitten fertig gedreht werden. Beim Schruppen macht dieselbe 28, beim Schlichten jedoch 40 Umdrehungen in jeder Minute. Die Schnittbreite (Vorschub) beträgt entsprechend 0,6 bzw. 0,45 mm bei jeder Umdrehung. Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit bei jedem Schnitt, und wie lange dauert jeder Schnitt?

Lösung:	v beim Schruppen	=	0,117 m	= 117 mm.	
	v „ Schlichten	=	0,168 „	= 168 „	
	t zum Schruppen	=	118 Min.	= 1 Std.	58 Min.
	t „ Schlichten	=	110 „	= 1 „	50 „

23) Auf eine zylindrische Seiltrommel von 6 m Durchmesser soll ein 2 cm starkes und 600 m langes Förderseil aufgewickelt werden. Die Geschwindigkeit des aufzuwickelnden Seiles sei $= 10$ m.

1) In welcher Zeit wird das Seil aufgewickelt sein?
2) Wieviel Umdrehungen hat hierbei die Seiltrommel in einer Minute zu machen?
3) Wie breit mufs die Seiltrommel werden, wenn sie das ganze

Seil in einer Lage aufnehmen soll, derart, dafs sich eine Seilwindung dicht an die andere legt?

Lösung: 1) Zeit = 1 Minute.
2) n = 31,85 Umdrehungen.
3) Breite = 63,7 cm = 637 mm.

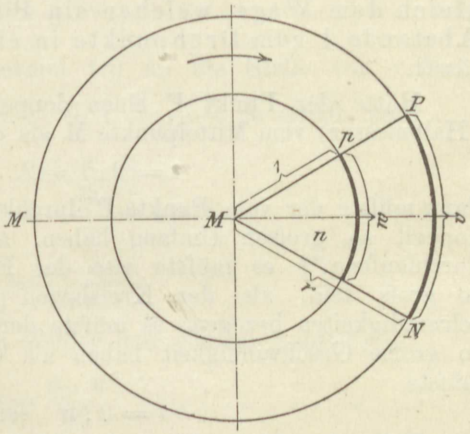
24) Welche Geschwindigkeit hat die Spitze des Stundenzeigers einer Uhr, dessen Länge = 1 m ist?

Lösung:*) v = 0,000145 m, d. i.
v = 0,145 mm.

2) Winkelgeschwindigkeit.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig auf dem Umfange eines Kreises, so ist der von ihm in einer Sekunde zurückgelegte Weg gleich seiner Geschwindigkeit.

Fig. 4.



Trägt man, wie in Fig. 4) angegeben, die Geschwindigkeit v eines Punktes P auf dem Umfange des von ihm durchlaufenen Kreises auf, so dafs v gleich der Bogenlänge PN ist, und verbindet man P und N mit dem Mittelpunkte M des Kreises, dann ist ohne weiteres ersichtlich, dafs ein Punkt p, der sich auf dem Umfange eines Kreises von kleinerem Durchmesser als der Punkt P bewegt, auch eine gleichförmige, aber kleinere Geschwindigkeit w besitzt, die in der Figur durch die Bogenlänge p n zum Ausdruck gebracht ist.

Denkt man sich bei einem kreisförmig bewegten Körper (Schwungrad) eine gerade Linie MP, die senkrecht auf der durch den Mittelpunkt M gehenden, festliegenden Drehachse steht, etwa wie die Mittellinie des Armes eines Schwungrades, so durchläuft diese Gerade mit den auf ihr befindlichen Punkten

*) Es ist hierbei zu beachten, dafs der Zeiger zu **einer** vollen Umdrehung 12 Stunden braucht.

P und p in einer gewissen Zeit den Winkel PMN, welcher der angenommenen Geschwindigkeit entsprechend, gröfser oder kleiner ausfallen wird.

Bewegt sich der Punkt P auf einem Kreise vom Halbmesser = r, und der Punkt p auf einem Kreise vom Halbmesser = 1, also im Abstande 1 vom Mittelpunkte als Längeneinheit gemessen, dann stellt in Fig. 4)

die Länge des Kreisbogens PN die Umfangsgeschwindigkeit v, und

die Länge des Kreisbogens pn die Winkelgeschwindigkeit **w** dar.

Man sagt:

Die Winkelgeschwindigkeit eines sich um eine feste Achse drehenden Körpers ist diejenige Geschwindigkeit, welche ein Punkt des Körpers im Abstande **1** (1 m, 1 dcm ...) von der Drehachse besitzt; oder:

Die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers ist gleich dem Wege, welchen ein Punkt des Körpers im Abstande **1** vom Drehpunkte in einer Sekunde durchläuft.

Hätte der Punkt P einen doppelt so grofsen Abstand (Halbmesser) vom Mittelpunkte M als der Punkt p, wäre also

$$r = 2 . 1 = 2,$$

dann müfste der vom Punkte P durchlaufene Kreis auch einen doppelt so grofsen Umfang haben, als der vom Punkte p durchlaufene;*) es müfste also der Kreisbogen PN doppelt so grofs sein, als der Kreisbogen pn; oder, auf die Geschwindigkeiten bezogen: es müfste der Punkt P eine doppelt so grofse Geschwindigkeit haben als der Punkt p, d. h. es müfste

$$v = 2 . w \quad \text{sein.}$$

Wäre der Abstand r = der 3fachen Längeneinheit, wäre also

$$r = 3,$$

dann müfste aus den eben angeführten Gründen

$$v = 3 . w \quad \text{sein.}$$

---

*) Lehrsätze aus der Geometrie:

1) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser. Besitzt z. B. ein Kreis einen 3mal so grofsen Halbmesser als ein anderer, so ist auch die Länge seiner Kreislinie 3mal so grofs, als die des anderen.

2) Die zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehörenden Bogen ungleicher Kreise, verhalten sich wie die Umfänge dieser Kreise.

Behält man für den allgemeinen Fall zur Bezeichnung des Abstandes des Punktes P vom Mittelpunkte M den Wert r bei, so wird entsprechend die Umfangsgeschwindigkeit dieses Punktes

$$v = r \cdot w \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 12)$$

Aus dieser allgemeinen Formel geht unmittelbar hervor, dafs man die Umfangsgeschwindigkeit eines beliebigen Punktes des sich drehenden Körpers erhält, wenn man die Winkelgeschwindigkeit dieses Punktes mit seinem Abstande von der Drehachse (Drehpunkt) multipliziert.

Besitzt also z. B. ein Schwungrad von 4 m Durchmesser eine Winkelgeschwindigkeit von 9 m, so ist seine Umfangsgeschwindigkeit

$$v = r \cdot w = 2 \cdot 9 = 18 \text{ m}.$$

Aus Formel 12) ergibt sich nunmehr die Winkelgeschwindigkeit zu:

$$w = \frac{v}{r} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad 13)$$

Setzt man in Formel 13) an die Stelle von v dessen Gleichwert aus Formel 9), d. i. $\frac{\pi \cdot r \cdot n}{30}$, so erhält man:

$$w = \frac{\frac{\pi \cdot r \cdot n}{30}}{r} \text{ oder*)}$$

$$w = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{30 \cdot r},$$

und da sich hier r im Zähler und Nenner hebt:**)

$$\mathbf{w = \frac{\pi \cdot n}{30}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{14)}$$

Rechnet man in der vorstehenden Gleichung den Wert $\frac{\pi}{30} = \frac{3{,}14159\ldots}{30}$ aus, so geht Formel 14) über in

$$\mathbf{w = 0{,}1047 \cdot n} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{15)}$$

Aus Formel 14 und 15) ist ersichtlich, dafs die Winkelgeschwindigkeit nur von der Umdrehungszahl n beeinflufst wird. Sie ist also weder abhängig vom Halbmesser r

*) Vgl. I. Teil; Seite 48 unter 69.
**) „ I. „ „ 31 „ 52.

noch vom Durchmesser d des von einem Punkte durchlaufenen Kreises.*)

Die Umdrehungszahl berechnet sich aus Formel 14) zu:

$$n = \frac{30 \cdot w}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

oder, wenn man auch hier den Wert $\frac{30}{\pi}$ gleich ausrechnet, zu:

$$n = 9{,}5493 \cdot w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

Nimmt man an, der Punkt p in Fig. 4) durchliefe den mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreis einmal in 1 Sekunde, also einen Winkel von 360°, so würde er dabei

einen Weg = dem Umfange dieses Kreises

zurückgelegt haben.

Seine Winkelgeschwindigkeit wäre also gleich diesem Wege, d. i. gleich dem Umfange des Kreises

mit dem Halbmesser 1, oder was dasselbe ist,
„ „ Durchmesser 2.

Der Umfang eines Kreises ist aber $= d \cdot \pi$.

Setzt man an Stelle des Buchstabens d jetzt den Durchmesser 2, so wird für diesen besonderen Fall die Winkelgeschwindigkeit

$$w = 2 \cdot \pi.$$

Würde der Punkt in 1 Sekunde nur den halben Kreisumfang, also einen Halbkreis = einem Winkel von 180°, durchlaufen, so würde die Winkelgeschwindigkeit auch nur die Hälfte des vorstehenden Wertes betragen.

Damit wird alsdann:

$$w = \frac{2 \cdot \pi}{2} \text{ oder}$$

$$w = \pi.$$

Für den Viertelkreis, entsprechend einem Winkel von 90°, ergibt sich sinngemäfs

$$w = \frac{\pi}{2},$$

usw.

---

*) Entsprechend der Erklärung der „Winkelgeschwindigkeit" wird $r = 1$ und damit $d = 2$. Setzt man diese beiden Werte in die Gleichungen 9 und 6) ein, so erhält man auf den rechten Seiten denselben Wert, wie in Gleichung 14).

Beispiele:

18) Wie grofs ist die Winkelgeschwindigkeit eines Schleifsteines der bei einem Durchmesser von 1,2 m eine Umfangsgeschwindigkeit von 8,475 m besitzt?

Nach Formel 13) erhält man:

$$w = \frac{v}{r} = \frac{8,475}{0,6} = \frac{84,75}{6} = 14,125 \text{ m.}$$

19) Wieviel Umdrehungen macht der in dem vorstehenden Beispiele angenommene Schleifstein in jeder Minute?

Nach Formel 16) erhält man:

$$n = \frac{30 \, . \, w}{\pi} = \frac{30 \, . \, 14,13}{3,14} = 30 \, . \, 4,5 = 135 \text{ Umdrehungen,}$$

oder nach Formel 17):

$$n = 9,5493 \, . \, w = 9,5493 \, . \, 14,13 = 135 \text{ Umdrehungen.}$$

20) Wie grofs ist die Winkelgeschwindigkeit einer Riemenscheibe, die 105 Umdrehungen in jeder Minute macht?

Nach Formel 14) erhält man:

$$w = \frac{\pi \, . \, n}{30} = \frac{3,14 \, . \, 105}{30} = 3,14 \, . \, 3,5 = 10,990 \text{ m,}$$

oder nach Formel 15):

$$w = 0,1047 \, . \, n = 0,1047 \, . \, 105 = 10,994 \text{ m.}$$

21) Die elastische Kupplung einer Dampfdynamo besitzt eine Umfangsgeschwindigkeit von 12,48 m und eine Winkelgeschwindigkeit von 20,8 m. Wie grofs wird der Durchmesser der Kupplung?

Aus Formel 12) $v = r \, . \, w$ erhält man:

$$r = \frac{v}{w} = \frac{12,48}{20,8} = 0,6 \text{ m.}$$

Das ist der Halbmesser der Kupplung, mithin der Durchmesser:

$$d = 2 \, . \, r = 2 \, . \, 0,6 = 1,2 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

25) Ein Schwungrad von 3,5 m Durchmesser macht in jeder Minute 150 Umdrehungen. Wie grofs ist
1) seine Umfangsgeschwindigkeit und
2) seine Winkelgeschwindigkeit?

Lösung: 1) $v = 27,5$ m;
2) $w = 15,705$ m.

26) Die Planscheibe einer schweren Kopfbank macht 20 Umdrehungen in jeder Minute. Wie grofs ist ihre Winkelgeschwindigkeit?

Lösung: $w = 2,09$ m.

27) Wieviel Umdrehungen macht eine Riemenscheibe, deren Winkelgeschwindigkeit = 15,70 m ist?

Lösung: n = 150 Umdrehungen.

28) Ein auf der Drehbank befindliches Holzmodell besitzt eine Umfangsgeschwindigkeit von 2,5 m und eine Winkelgeschwindigkeit von 5 m. Wie grofs ist der Durchmesser des Modelles?

Lösung: d = 2 . r = 1 m.

Drittes Kapitel.

Mittlere Geschwindigkeit.

In den vorhergehenden Kapiteln war unter Geschwindigkeit*) der Weg verstanden worden, den ein in gleichförmiger Bewegung befindlicher Körper in jeder Sekunde zurücklegt.

Bewegt sich jedoch ein Körper derartig, dafs er in einer gegebenen Zeit — t Sekunden — einen bestimmten Weg — s Meter — ungleichförmig zurücklegt, so spricht man von einer mittleren oder durchschnittlichen Geschwindigkeit, die der Körper besitzt, und welche man erhält, indem man den Gesamtweg durch die Anzahl der Sekunden dividiert.

Die so erhaltene Geschwindigkeit entspricht dann derjenigen, welche der Körper besitzen müfste, um in der gegebenen Zeit t genau den Weg s in gleichförmiger Bewegung zu durchlaufen, der sonst ungleichförmig von ihm zurückgelegt wurde.**)

Aus dem Vorstehenden geht unmittelbar hervor, dafs die mittlere Geschwindigkeit eines sich ungleichförmig bewegenden Körpers ebenfalls nach Formel 2) bestimmt werden kann, nämlich:

$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}.$$

Bezeichnet man zum Unterschiede von der stets gleich

*) Vgl. Seite 7.

**) Vgl. Seite 5, Absatz 2 von oben.

bleibenden Geschwindigkeit v die mittlere Geschwindigkeit mit c, so erhält man entsprechend:

$$c = \frac{s}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

Hieraus folgt:

$$s = c \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

$$t = \frac{s}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

Als Beispiele können hier dienen: Eisenbahnzüge, Schiffe u. a. m., die sich bald schnell, bald langsam fortbewegen und dazwischen verschiedene Aufenthalte erfahren; im gleichen Sinne Radfahrer, Reiter usw. Ferner: Kolben in den Zylindern von Kolbenmaschinen, Kurbeln, Riemenscheiben, Räder, Kupplungen, Anker an Dynamomaschinen usw. usw. Bei allen diesen ist es angebracht, nur von mittleren Geschwindigkeiten zu sprechen.

Beispiele:

22) Nach dem Kursbuche verläſst der Vorortzug Berlin-Oranienburg die Station Berlin 7^{40} Vormittag, um 8^{40} Vormittag in Oranienburg einzutreffen. Der Zug muſs unterwegs zwölfmal anhalten; die zu durchfahrende Strecke ist 29 km lang. Welche mittlere Geschwindigkeit besitzt dieser Eisenbahnzug?

Nach Formel 18) erhält man:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{29\,000}{3\,600} = 8{,}055 \text{ m.}$$

23) Ein Radfahrer durchfährt in hügeligem Gelände eine Strecke von 18 km mit einer mittleren Geschwindigkeit von 6 m. Welche Zeit braucht er hierzu?

Nach Formel 20) erhält man:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{18\,000}{6} = 3\,000 \text{ Sek.} = 50 \text{ Minuten.}$$

24) Bei dem Taunus-Rennen um den Kaiserpreis im Jahre 1907, durchfuhr das schnellste Automobil die 472 km lange Rennstrecke in 5 Stunden 34 Minuten und 26 Sekunden. Wie groſs war seine mittlere Geschwindigkeit?

Nach Formel 18) erhält man:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{472\,000}{20\,066} = 23{,}522 \text{ m.}$$

Das sind in der Stunde 84,679 km.

25) Ein anderes Automobil durchfuhr dieselbe Strecke mit einer mittleren Geschwindigkeit von 19,05 m. Welche Zeit brauchte dieses Automobil?

Nach Formel 20) erhält man:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{472000}{19,05} = 24776 \text{ Sekunden} = 6 \text{ Std. } 52 \text{ Min. } 56 \text{ Sek.}$$

26) Bei einem Tourenwagen-Rennen auf der Insel Sizilien, durchlief ein Automobil die kurvenreiche und schwierige Bergstrecke in 8 Stunden 17 Minuten und 26 Sekunden mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15,077 m. Wie lang war die Rennstrecke?

Nach Formel 19) erhält man:

$$s = c \,.\, t = 15,077 \,.\, 29846 = 449988 \text{ m} = 450 \text{ km rund.}$$

Zusammenstellung

einiger mittleren Geschwindigkeiten

angegeben in:

Meter in 1 Sekunde, Kilometer in 1 Stunde und Seemeilen à 1852 Meter in 1 Stunde = Knoten.

Fufsgänger		1,30— 1,70 m	= 4,680— 6,120 km
Vorschrift im deutschen Heere		1,53 „	= 5,508 „
Schnelläufer	bis	8,50 „	= 30,600 „
Radfahrer	„	9,00 „	= 32,400 „
Schlittschuhläufer . . .	„	12,00 „	= 43,200 „
Schwimmer	„	1,10 „	= 3,960 „
Mensch am Göpel		0,60 „	
„ an der Kurbel . . .		0,80 „	
Pferd im Schritt		1,00 „	= 3,600 „
„ „ Trab		2,10— 3,50 „	= 7,560—12,600 „
„ „ Galopp		4,50 „	= 16,200 „
Rennpferd im Galopp . . .		20,00—25,00 „	= 72,000—90,000 „
Ochse am Göpel		0,60 „	
Güterzug		12,50 „	= 45,000 „
Personenzug		15,00—22,00 „	= 54,000—79,200 „
Schnellzug		20,00—25,00 „	= 72,000—90,000 „
Berlin—Hamburg*)		22,70 „	= 81,720 „
Berlin—Leipzig		21,80 „	= 78,480 „
Paris—Petersburg		15,70 „	= 56,520 „
Automobil**)			
Taunus-Rennen 1907:			
a) Beste Leistung . . .		23,52 „	= 84,680 „
b) Schwächste Leistung .		19,05 „	= 68,580 „

---

*) Vgl. Seite 14 Beispiel 11.

**) Die 4 . 118 = 472 km lange Renn-Strecke wurde durchfahren
a) in 5 Std. 34 Min. 26 Sek.;
b) „ 6 „ 52 „ 56 „
Vgl. Seite 29 u. 30, Beispiel 24 u. 25.

Elektrische Strafsenbahn, Berlin	4,50— 6,50 m	=	16,200— 23,400 km		
„ Hoch- und Untergrundbahn, Berlin bis	13,50	„	=	48,600	„
Ozean-Dampfer	7,00— 8,00	„	=	13,600— 15,600	Knoten
Flufs-Dampfer	4,50— 6,50	„	=	8,750— 12,630	„
Kriegsschiffe	9,00—13,00	„	=	17,500— 25,270	„
Torpedoboote . . . . bis	18,00	„	=	35,000	„
Wasser der meisten Flüsse .	0,80— 1,00	„	=	1,600— 1,950	„
„ in Leitungen	1,00	„			
„ im Saugrohr der Pumpen	1,00— 1,50	„			
„ „ Druckrohr „ „	1,50— 2,00	„			
Wind, gewöhnlicher . . , .	3,00— 5,00	„	=	10,800— 18,000	km
„ günstig für Windmühlen	6,00— 8,00	„	=	21,600— 28,800	„
„ starker	9,00—14,00	„	=	32,400— 50,400	„
Sturm	15,00—25,00	„	=	54,000— 90,000	„
Orkan	30,00—40,00	„	=	108,000—144,000	„
Wind in Gebläseleitungen . .	10,00	„			
Gas, Luft in Leitungen . . .	2,50— 3,50	„			
Brieftaube	20,00—35,00	„	=	72,000—126,000	„
Büchsen der Rohrpost, Berlin .	17,00	„	=	61,200	„

Infanteriegewehr, kleinkalibrig, Anfangsgeschwindigkeit	650,00	m
Geschütze, Anfangsgeschwindigkeit*)	650,00	„
Wasserräder, Umfangsgeschwindigkeit	1,50 — 2,00	„
Mühlsteine, „	8,00 —10,00	„
Schleifsteine, „	8,00 —10,00	„
Schleifsteine für Werkzeuge, Umfangsgeschwindigkeit	5,00 — 6,00	„
Schleifsteine und Schmirgelscheiben für Arbeitsstücke Umfangsgeschwindigkeit	25,00	„
Flügel der Ventilatoren, Umfangsgeschwindigkeit . .	35,00 —50,00	„
Kreissäge für Holz, „ . .	30,00 —50,00	„
Sägeblatt einer Bandsäge für Holz	20,00 —25,00	„
„ eines Sägegatters „ „		
a) einfaches Gatter	3,00 — 3,50	„
b) Bund- „	1,50 — 2,00	„
Schneidzeug einer Holzhobelmaschine, drehend . . .	25,00 —30,00	„
Metall-Sägen		
a) Kaltschneiden	0,20 — 0,23	„
b) Rotwarmschneiden	50,00 —75,00	„
Kreisscheren, 4—5 mm Blechstärke	0,50 — 0,75	„
Metallhobelmaschine, Gufs- und Schmiedeeisen . . .	0,090— 0,120	„
Shaping-Maschine:		
Gufseisen	0,125— 0,175	„
Stahl	0,075— 0,090	„
Schmiedeeisen	0,150— 0,175	„
Rotgufs, Messing	0,175— 0,225	„

Drehbänke:	Vorschruppen.	Schlichten.
Gufseisen	0,075—0,090 m	0,120—0,150 m
Stahl	0,040—0,060 „	0,080—0,150 „
Schmiedeeisen	0,100—0,125 „	0,150—0,180 „
Rotgufs, Messing	0,200—0,250 „	0,275—0,300 „
Holz	1,700—2,500 „	2,000—3,000 „

*) Vgl. Seite 57, Beispiel 36.

Bohrmaschinen:	Lochbohren.	Ausbohren.
Gufseisen	0,060—0,070 m	0,045—0,060 m
Stahl	0,030—0,050 „	0,020—0,030 „
Schmiedeeisen	0,090—0,120 „	0,060—0,070 „
Rotgufs, Messing	0,100—0,175 „	0,090—0,150 „

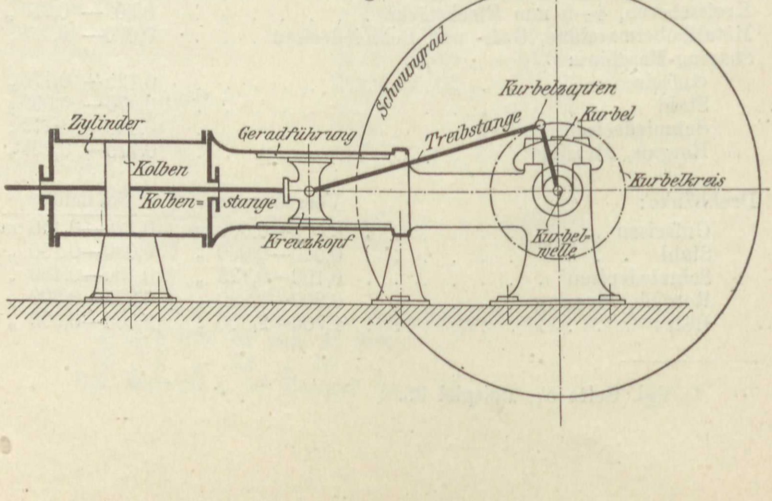
Starker Eisendraht, beim Ziehen	0,20 m
Schwacher „ „ „	1,30 „
Freifallender Körper	9,81 „
Schall in der Luft	333,00 „
„ „ Wasser	1 400,00 „
„ „ Kupferdraht	3 700,00 „
„ „ Stahldraht	5 000,00 „
Erdäquator-Umfangsgeschwindigkeit	464,00 „
Erde auf ihrer Bahn um die Sonne	30 000,00 „
Licht und Elektrizität	300 000 000,00 „

Viertes Kapitel.

Das einfache Kurbelgetriebe.

Im Anschlufs an die in den vorstehenden Kapiteln behandelte geradlinige und kreisförmige Bewegung, sollen hier die einfachen Beziehungen, welche zwischen beiden möglich sind, untersucht werden.

Fig. 5.



Im Maschinenbau wird immer wieder die Aufgabe gestellt, eine wiederkehrende geradlinige Bewegung in eine kreisförmige Drehbewegung, und umgekehrt, eine kreisförmige Bewegung in eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung umzusetzen.

Zur Ermittelung der hier mafsgebenden allgemeinen Gesetze eignet sich am besten die Betrachtung der Anordnung der Hauptteile einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine, wie eine solche in Fig. 5) schematisch dargestellt ist.

Die geradlinig hin- und hergehende Bewegung des Dampfkolbens wird hier durch die Kolbenstange auf den aufserhalb des Zylinders ebenfalls hin- und hergehenden, und durch eine besondere Geradführung geradlinig geführten Kreuzkopf übertragen. Dieser ist weiter durch die Treibstange*) mit dem Kurbelzapfen einer auf der Kurbelwelle befestigten Stirnkurbel, welche sich kreisförmig bewegt, gelenkig verbunden, und wird auf diese Weise durch die vereinigte Wirkung der genannten Teile, die geradlinig hin- und hergehende Bewegung des Dampfkolbens in die Drehbewegung der Kurbel- bzw. Maschinenwelle umgesetzt.

Die Treibstange führt während der Übertragung der Kolbenbewegung vom Kreuzkopf auf den Kurbelzapfen eine eigenartige, schwingende Bewegung aus.

Die Vereinigung von Kreuzkopf, Treibstange und Kurbel zum Zwecke der angedeuteten Bewegungsumsetzung, wird allgemein

„Kurbelgetriebe oder Kurbeltrieb“

genannt.

Denkt man sich die Maschine in Bewegung gesetzt, so wird der Weg des Kolbens von einem Zylinderende bis zum andern als „einfacher Kolbenweg oder einfacher Kolbenhub“ bezeichnet, zum Unterschiede vom „doppelten Kolbenwege oder doppelten Kolbenhube“, der vom Kolben bei einer einmaligen, vollendeten Kurbelumdrehung durchlaufen wird. Die Kolbenstellungen an den Enden des Dampfzylinders — also da, wo der Kolben seine Bewegungsrichtung umkehrt — nennt man die „Hubenden“.

Allgemein werden die einzelnen Kolbenstellungen durch die Entfernungen des Kolbens vom Hubende bestimmt, und nimmt man hier gewöhnlich das Hubende an, von dem sich der in Bewegung befindliche Kolben eben gerade entfernen will. Die hierbei entstehenden Abstände zwischen Hubende und

*) Auch Pleuel-Schubstange usw. genannt.

jeweiliger Kolbenstellung bezeichnet man allgemein als „Kolbenwege".

Einer ganz bestimmten Kolbenstellung entspricht eine ganz bestimmte Kurbelstellung, und umgekehrt.

Steht z. B. der Dampfkolben in seinem linken Hubende A (Fig. 6), so steht der in dieser Figur zunächst in ganz beliebiger Stellung eingezeichnete Kurbelzapfen Z im Punkte A_1 des Kurbelkreises, und der Kreuzkopf K im Punkte A_2 seines Weges; die Mittellinien von Kolbenstange, Treibstange und Kurbel bilden alsdann die gerade Linie AC.

In dieser Lage der Teile des Kurbelgetriebes zueinander könnte ein noch so großer Dampfdruck auf die linke Kolbenfläche die Maschine niemals in Bewegung setzen. Die Maschine müßte also im Ruhezustande verharren; jede Bewegung wäre ausgeschlossen.

Man bezeichnet deshalb die Stellungen des Kolbens in den Hubenden als „Totpunkte", und spricht sinngemäß auch von einer „Totpunktlage" der Kurbel in den Stellungen A_1 und B_1 des Kurbelkreises.

Man unterscheidet zwischen einer „vorderen und hinteren bzw. rechten und linken Totpunktlage" des Kolbens bzw. der Kurbel. Maßgebend hierfür ist die Bewegung der Antriebsteile in bezug auf die Kurbelwelle. Bewegt sich der Kolben auf die Kurbelwelle zu, so kommt er in seinen vorderen, die Kurbel in ihren rechten toten Punkt, umgekehrt, also von der Kurbelwelle weg, in den hinteren bzw. linken toten Punkt.

Es würde also eine Maschine in jeder Totpunktlage zum Stillstand kommen.

Von einer guten Dampfmaschine verlangt man aber eine ununterbrochene und möglichst gleichförmige Bewegung der Kurbelwelle. Diese wird durch Anwendung eines richtig bemessenen, also genügend großen und energisch wirkenden Schwungrades fast vollkommen erreicht, welches, wenn die Maschine erst einmal in Gang gekommen ist, durch sein fortgesetztes Drehbestreben die Kurbel stets über ihre Totpunktlagen wegbringt.

Befindet sich jedoch das „Gestänge"*) im Augenblicke des Anlassens der Maschine zufällig in einer seiner Totpunktlagen, dann bleibt auch ein vorhandenes Schwungrad ohne jede Wirkung; die Maschine steht trotzdem still. Es ist deshalb beim Anlassen von Einzylindermaschinen notwendig, das Gestänge erst über seine Totpunktlage hinauszudrehen,

*) Kolbenstange, Treibstange und Kurbelarm.

damit der Dampf seine Arbeit beginnen und die Maschine in Bewegung setzen kann.

Um nun die Beziehungen zwischen Kolben- und Kurbelbewegung herzuleiten, beachte man, dafs, da Kolben und Kreuzkopf durch die Kolbenstange unveränderlich fest miteinander verbunden sind, beide genau gleiche Wege zurücklegen müssen und dafs ferner, wie in der Praxis aus der Anordnung der Teile einer Dampfmaschine und aus den Fig. 5 u. 6) ohne weiteres ersichtlich ist,

ein einfacher Kolbenhub = dem doppelten Halbmesser oder

= dem Durchmesser des Kurbelkreises

ist.

Bezeichnet man daher mit:

s den einfachen Kolbenhub;
r „ Halbmesser des Kurbelkreises;
d „ Durchmesser „ „

dann ist

$$s = 2.r \text{ oder, was dasselbe ist: }$$
$$s = d.$$

Dieser Kolbenweg entspricht einer *halben* Umdrehung der Kurbel; bei einer *ganzen* Kurbelumdrehung geht der Kolben im Zylinder einmal hin und einmal her, er *durchläuft also den einfachen Kolbenweg zweimal.* Für diesen Fall gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$2.s = 4.r \text{ oder:}$$
$$2.s = 2.d.$$

Der Kurbelzapfen durchläuft bei einer ganzen Kurbelumdrehung den Kurbelkreis einmal; er legt also einen Weg = dem Umfange des Kurbelkreises zurück. Bezeichnet man diesen Weg mit s_1, dann wird

$$s_1 = \pi . d = 3{,}14 . d.$$

Vergleicht man nun die Wege des Kolbens und Kurbelzapfens miteinander, so findet man, dafs

bei einer ganzen Kurbelumdrehung

der Kolben einen Weg = 2.d,
„ Kurbelzapfen „ „ = 3,14.d

zurückgelegt hat. Der Kurbelzapfen hat also hierbei einen Weg durchlaufen, der um

$$3{,}14.d - 2.d = 1{,}14.d$$

gröfser ist als der Kolbenweg. Daraus ist ersichtlich, dafs sich Kolben und Kurbelzapfen nicht mit gleicher Geschwindigkeit bewegen können.

Bedenkt man weiter, dafs die Bewegung des Kurbelzapfens eine ununterbrochen stattfindende, fast vollkommen gleichförmige Drehbewegung ist, und dafs im Gegensatze hierzu die Bewegung des Kolbens zwischen 2 Ruhepunkten, den beiden Totpunkten, stattfindet, so ist ohne weiteres erkenntlich, dafs die Kolbenbewegung eine ungleichförmige Bewegung sein mufs.

Die Kolbengeschwindigkeit ist innerhalb des aufserordentlich kleinen Zeitmomentes des Hubwechsels in dem einen toten Punkte = Null, nimmt dann bis ungefähr Mitte Kolbenhub beschleunigt bis zur Höchstgeschwindigkeit zu, und vermindert sich von hier ab durch Verzögerung, um im andern toten Punkte wieder = Null zu werden.

Die Verschiedenartigkeit beider Bewegungen läfst sich zeichnerisch, wie in Fig. 6) angegeben, darstellen.

Wie schon vorstehend erwähnt, sind Kolben- und Kreuzkopfweg genau gleich. Zur Vereinfachung der Zeichnung kann man daher in dieser statt vom Kolbenwege vom Kreuzkopfwege ausgehen, und auf diesem die erforderlichen Messungen und Eintragungen vornehmen.

Entfernt sich der Kolben vom linken Hubende, dreht sich also der Kurbelzapfen vom Totpunkte A_1 in die beliebig angenommene Stellung Z, so hat der Kolben den Weg AD, und der Kreuzkopf den diesem gleichen Weg A_2K zurückgelegt, welche Wege mit x bezeichnet werden sollen.

Um für die beliebige Kurbelstellung CZ den Punkt K innerhalb der Länge A_2B_2 des Kreuzkopfweges genau festzulegen, beschreibe man mit der Treibstangenlänge l von Z aus einen Kreisbogen, der die Länge A_2B_2 in K schneidet.

Beschreibt man umgekehrt von K aus mit l durch Z einen Kreisbogen, so schneidet dieser den Kurbelkreisdurchmesser A_1B_1 im Punkte E. Aus dieser Konstruktion ist ohne weiteres ersichtlich, dafs für die Kurbelzapfenstellung Z

$$AD = A_2K = A_1E = x$$

sein mufs.

Weiter geht aus Fig. 6) hervor, dafs für die Kurbelzapfenstellung Z, wenn der Punkt M die Hublänge A_2B_2 halbiert, also die Hubmitte bildet, die Länge

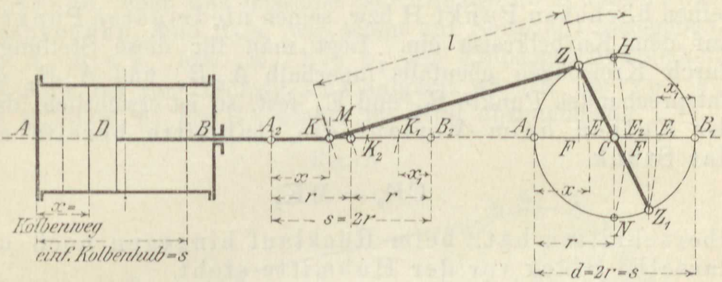
$$KM = EC$$

den Abstand des Kolbens von seiner Hubmitte, und die Länge

$$KB_2 = EB_1$$

den zugehörigen Abstand des Kolbens vom rechten Hubende darstellt.

Fig. 6.



Genau so wäre füı alle anderen in Frage kommenden Kolben- bzw. Kurbelstellungen zu verfahren.

Denkt man sich die Kurbel um genau $180^0 = 2R$ weiter gedreht, dann liegt die so erzeugte Kurbelzapfenstellung Z_1 der ursprünglichen Stellung Z diametral gegenüber. Der Kreuzkopf und damit auch der Kolben, befinden sich dann in entgegengesetzter Bewegungsrichtung, im Rücklauf.

Demnach ist also der obere Kurbelhalbkreis für den Kolbenvorlauf, der untere für den Kolbenrücklauf in Betracht zu ziehen.

Legt man nun für die Stellung Z_1, genau wie für Z angegeben, die Punkte K_1 und E_1 fest, dann ist jetzt die Länge

$$B_2 K_1 = B_1 E_1 = x_1$$

gleich dem Abstande des Kolbens vom rechten Hubende, die Länge

$$K_1 M = E_1 C$$

gleich dem Abstande des Kolbens von der Hubmitte, und die Länge

$$K_1 A_2 = E_1 A_1$$

gleich dem zugehörigen Abstande vom linken Hubende.

Nach der Konstruktion ist

$$\measuredangle A_1 CZ = \measuredangle B_1 CZ_1.$$

Vergleicht man in Fig. 6) die Längen $A_1 E$ und $B_1 E_1$ mafsstäblich miteinander, so findet man, dafs dieselben nicht gleich grofs sind; es ist hier

$$A_1 E > B_1 E_1.$$

Daraus geht hervor, dafs gleichen Drehwinkeln beim Vor- und Rücklauf des Kolbens ungleiche Kolbenwege entsprechen.

Denkt man sich noch die Kurbel aus den Totpunktlagen A_1 und B_1 um $90^0 = 1\,R$ gedreht, so nimmt der Kurbelzapfen seinen höchsten Punkt H bzw. seinen niedrigsten Punkt N auf dem Kurbelkreise ein. Legt man für diese Stellungen durch Kreisbögen ebenfalls innerhalb $A_2\,B_2$ und $A_1\,B_1$ die entsprechenden Punkte K_2 und E_2 fest, so ist ersichtlich, dafs der Kolben beim Vorlauf die Hubmitte bereits um das Stück

$$CE_2 = MK_2$$

überschritten hat, beim Rücklauf hingegen noch um dasselbe Stück vor der Hubmitte steht.

Kolben- und zugehörige Kurbelstellungen fallen also in ihren Hubmitten zeitlich auch nicht zusammen.

Die hier auftretenden Ungleichheiten sind aber nur bei begrenzter Länge der Treibstange vorhanden; man pflegt, was hier nebenbei erwähnt sein mag, in der Praxis die Länge der Treibstange zwischen ihren Lagermitten allgemein gleich dem **4—6**fachen Kurbelhalbmesser zu machen, so dafs gewöhnlich

$$l \simeq 4r \text{ bis } 6r, \text{ im Mittel} = 5r,$$

ausgeführt wird.

Würden die Raumverhältnisse gestatten, die Treibstange erheblich länger, und schliefslich unbegrenzt – unendlich – lang zu machen, so würden die erwähnten Ungleichheiten immer mehr verschwinden, um zuletzt bei unendlich langer Treibstange = Null zu werden.

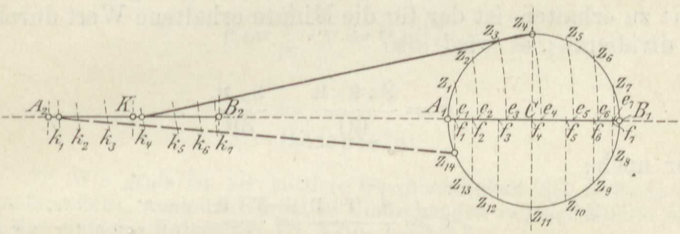
Das ist leicht einzusehen, wenn man berücksichtigt, dafs mit wachsendem l die Kreisbögen ZE, $Z_1\,E_1$, $H\,E_2$, $N\,E_2$ usw. immer flacher werden, um bei unendlich langem l in die geraden Linien ZF, $Z_1\,F_1$, HC, NC usw. überzugehen, welche dann senkrecht auf $A_1\,B_1$ stehen.

Nur in diesem Falle würden gleichen Drehwinkeln gleiche Kolbenwege beim Vor- und Rücklauf entsprechen; ein Fall, der für die Praxis ausgeschlossen ist.

In Fig. 7) ist diese Ungleichheit der Kolbenwege, bei gleichen Kurbelstellungen rechts und links von der Hubmitte, mehr zum Ausdruck gebracht.

Denkt man sich den Kurbelkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile*) geteilt, welche der Reihe nach mit $z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots$ bezeichnet werden sollen, und führt man zur Ermittelung der zugehörigen Kolbenwege die vorstehend erklärte Kreisbogenkonstruktion aus, so ist aus der Figur direkt zu entnehmen, dafs gleichen Kurbelzapfenwegen ungleiche Kreuzkopfwege, oder was dasselbe ist, ungleiche Kolbenwege entsprechen, und dafs, wie schon auf Seite 36) angegeben, von A_2 bis k_4 bzw. A_1 bis e_4 die Kolbengeschwindigkeit von Null bis zur Höchstgeschwindigkeit wächst, um von k_4 bis B_2 bzw. e_4 bis B_1 wieder bis Null abzunehmen.

Fig. 7.



Unter Annahme einer unendlich langen Treibstange würden an Stelle der Kreisbögen $z_1\,e_1$, $z_2\,e_2$, $z_3\,e_3 \ldots\ldots$ die senkrechten, geraden Linien $z_{14}\,f_1$, $z_{13}\,f_2$, $z_{12}\,f_3 \ldots\ldots$ treten. In diesem Falle sind dann die Kolbenwege rechts und links von der Hubmitte einander gleich, d. h. es ist

$$
\begin{aligned}
f_4 f_3 &= f_4 f_5,\\
f_4 f_2 &= f_4 f_6,\\
&\;\;\vdots\\
f_3 f_2 &= f_5 f_6\\
f_1 A_1 &= f_7 B_1 \quad \text{usw.**)}
\end{aligned}
$$

Nach dem Vorangegangenen kann man, selbst unter der Voraussetzung, dafs die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens eine gleichförmige wäre, nur von einer „mittleren Kolbengeschwindigkeit“ sprechen.

Um diese zu ermitteln, bezeichne man allgemein mit:

s den einfachen Kolbenhub in m;

r den Halbmesser des Kurbelkreises in m;

---

*) Man kann dabei annehmen, dafs der Kurbelzapfen sich gleichförmig bewegt, also in gleichen Zeitteilchen gleiche Wege zurücklegt.

**) Anfängern soll hiermit sehr empfohlen sein, die Fig. 6 u. 7) selbst einmal in gröfserem Mafsstabe durchzuzeichnen.

n die Anzahl der Kurbelumdrehungen in jeder Minute;
c die mittlere Kolbengeschwindigkeit in m,

dann ist nach dem bereits auf Seite 35) Gesagten der Kolbenweg bei einer Kurbelumdrehung

$$2 . s = 4 . r,$$

mithin bei n Umdrehungen in 1 Minute:

$$2 . s . n = 4 . r . n.$$

Um den durchschnittlichen Kolbenweg in 1 Sekunde, oder was dasselbe ist, die mittlere Kolbengeschwindigkeit zu erhalten, ist der für die Minute erhaltene Wert durch 60 zu dividieren; es wird also

$$c = \frac{2 . s . n}{60} = \frac{s . n}{30} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

oder auch:

$$c = \frac{4 . r . n}{60} = \frac{r . n}{15} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

Aus Formel 21) folgt:

$$s = \frac{30 . c}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

$$n = \frac{30 . c}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

und aus Formel 22):

$$r = \frac{15 . c}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

$$n = \frac{15 . c}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Nach Formel 9) wird die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens

$$v = \frac{\pi . r . n}{30}.$$

Um das Verhältnis zwischen dieser und der mittleren Kolbengeschwindigkeit festzustellen, dividiere man die letzte Gleichung durch die Gleichung 22, dann erhält man*)

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 56 unter 76,d und Seite 46 unter 67.

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{\pi . r . n}{30}}{\frac{r . n}{15}} = \frac{\pi . r . n}{30} . \frac{15}{r . n} = \frac{\pi . 15}{30} \text{ oder:*)}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Hieraus folgt:

$$v = \frac{\pi}{2} \cdot c = \mathbf{1{,}571 . c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

$$c = \frac{2}{\pi} \cdot v = \mathbf{0{,}637 . v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

Beispiele:

27) Wie grofs ist die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens einer Dampfmaschine, wenn die Kurbel 46 Umdrehungen in jeder Minute macht und der einfache Kolbenhub 1,2 Meter beträgt?

Nach Formel 21) erhält man:

$$c = \frac{s . n}{30} = \frac{1{,}2 . 46}{30} = 1{,}84 \text{ m.}$$

28) Bei einer Pumpe, welche 40 Doppelhübe in jeder Minute macht, betrage die mittlere Kolbengeschwindigkeit 0,4 Meter. Welchen Kolbenhub besitzt diese Pumpe?

Nach Formel 23) erhält man:

$$s = \frac{30 . c}{n} = \frac{30 . 0{,}4}{40} = 0{,}3 \text{ m.}$$

29) Wie viel Umdrehungen in jeder Minute macht die Kurbel einer Dampfmaschine, wenn die mittlere Kolbengeschwindigkeit = 2,5 Meter und der Kolbenhub = 1,5 Meter ist?

Nach Formel 24) erhält man:

$$n = \frac{30 . c}{s} = \frac{30 . 2{,}5}{1{,}5} = 50 \text{ Umdrehungen.}$$

30) Eine liegende Verbundmaschine hat einen Kurbelhalbmesser r = 675 mm und macht 62 Umdrehungen in jeder Minute. Wie grofs ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit?

Nach Formel 22) erhält man:

$$c = \frac{r . n}{15} = \frac{0{,}675 . 62}{15} = 2{,}79 \text{ m.}$$

31) An einer Dampfmaschine ist die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens v = 1,95 m. Wie grofs ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit c?

Nach Formel 29) erhält man:

$$c = 0{,}637 . v = 0{,}637 . 1{,}95 = 1{,}242 \text{ m.}$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 74 unter 83.

Übungsbeispiele:

29) Wie grofs ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit einer Dampfmaschine, wenn die Kurbel 80 Umdrehungen in jeder Minute macht und der Kolbenhub 0,8 m beträgt?

Lösung: $c = 2{,}13$ m.

30) Wie grofs ist die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens der Maschine des vorigen Beispieles?

Lösung: $v = 3{,}346$ m.

31) Welchen Kolbenhub besitzt eine Dampfmaschine, deren mittlere Kolbengeschwindigkeit bei 60 Umdrehungen 2,7 m beträgt?

Lösung: $s = 1{,}350$ m.

32) Wieviel Doppelhübe mufs eine Pumpe in jeder Minute machen, wenn die mittlere Kolbengeschwindigkeit 0,5 m und der Kolbenhub 0,3 m beträgt?

Lösung: 50 Doppelhübe.

Fünftes Kapitel.

Ungleichförmige Bewegung.

A. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Nach den einleitenden Erklärungen befindet sich ein Körper in ungleichförmiger Bewegung, wenn in gleichen Zeiten nicht mehr gleiche Wege zurückgelegt werden.*)

Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit unverändert blieb, also stets dieselbe Gröfse behielt, wechselt diese bei der ungleichförmigen Bewegung von einem Augenblick zum andern; sie nimmt zu oder ab, je nach der Art der Einwirkung einer Kraft auf den in Bewegung gesetzten Körper.

Nimmt die Geschwindigkeit eines Körpers fortwährend zu, so ist seine Bewegung eine beschleunigte; nimmt sie im gleichen Sinne ab, so nennt man die Bewegung eine verzögerte.

---

*) Vgl. Seite 4—6.

Gleichförmig beschleunigt ist eine Bewegung dann, wenn die Geschwindigkeit in aufeinander folgenden gleichen Zeitabschnitten um genau gleiche Gröfsen zunimmt.

Die Geschwindigkeitszunahme in der Zeiteinheit nennt man hierbei die Beschleunigung.

Man kann demnach bei der ungleichförmigen Bewegung von einer Geschwindigkeit im Sinne der gleichförmigen Bewegung nicht sprechen. Jedoch kann von einer Geschwindigkeit in einem ganz bestimmten Zeitpunkte die Rede sein, und zwar von einem Zeitpunkte ab, von dem die Bewegung fortdauern würde, ohne die Geschwindigkeit weiter zu ändern, von dem ab sie also gleichförmig fortgesetzt würde.

Diese Geschwindigkeit wäre dann demjenigen Wege gleich, welchen der bewegte Körper in der dem angenommenen Zeitpunkte folgenden Sekunde zurücklegen würde, wenn von da ab die Bewegung eine gleichförmige bliebe.*)

Ein Körper, der in gleichförmig beschleunigte Bewegung versetzt werden soll, kann vorher

a) sich im Zustande der Ruhe befinden, oder

b) bereits eine beliebige Geschwindigkeit angenommen haben.

Man spricht alsdann von einer Anfangsgeschwindigkeit, die der Körper bereits vor Aufnahme der Beschleunigung besessen hat, welche

im Falle a) gleich Null ist, und welche

„ „ b) beliebig viele Meter grofs sein kann.

Nimmt dann diese Anfangsgeschwindigkeit durch die Beschleunigung gleichförmig zu, so mufs nach Ablauf von t Sekunden der Körper eine ganz bestimmte gröfsere Geschwindigkeit, die sog. Endgeschwindigkeit, erreicht haben.

Anfangsgeschwindigkeit, Beschleunigung und Endgeschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeit, sind mafsgebend für die Länge des von dem Körper zurückgelegten Gesamtweges.

Wie ersichtlich, kommen bei der Bestimmung der Gesetze

---

*) Als Beispiel mag hier ein aus dem Hafen auslaufendes Schiff angenommen werden, das sich der offenen See nähernd, immer schneller und schneller fährt, und hierbei in einem ganz genau bestimmten Zeitpunkte eine Geschwindigkeit von 5 m besitzt.

Das ist dann aber keineswegs so zu verstehen, als ob das Schiff in einer Sekunde einen Weg von 5 m tatsächlich zurücklegt, sondern so, dafs es diesen Weg in jeder Sekunde durchlaufen würde, wenn von dem genau bestimmten Zeitpunkte ab die Geschwindigkeit stets dieselbe bliebe, also gleichförmig würde.

der gleichförmig beschleunigten Bewegung folgende Gröfsen in Betracht:

Die Zeit t,

Der Gesamtweg s, beide im Sinne der bei der gleichförmigen Bewegung gegebenen Erklärung;

Die Anfangsgeschwindigkeit c, d. i. der Weg, den der Körper in der dem Beginn der Beschleunigung vorhergehenden Sekunde mit gleichbleibender Geschwindigkeit, also gleichförmig, zurückgelegt hat;

Die Beschleunigung p, d. i. die Geschwindigkeitszunahme in jeder einzelnen Sekunde, also in der Zeiteinheit;

Die Endgeschwindigkeit v, d. i. der Weg, den der Körper nach Ablauf von t Sekunden in der nächstfolgenden Sekunde ohne weitere Geschwindigkeitszunahme, also gleichförmig, durchlaufen würde.

Befindet sich ein Körper im Zustande der Ruhe, und geht er aus diesem unmittelbar in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit einer Beschleunigung $p = 3$ m über, so ist seine Anfangsgeschwindigkeit $c =$ Null und die nach 5 Sekunden erreichte Endgeschwindigkeit offenbar

$$v = 5 \cdot 3 = 15 \text{ m}.$$

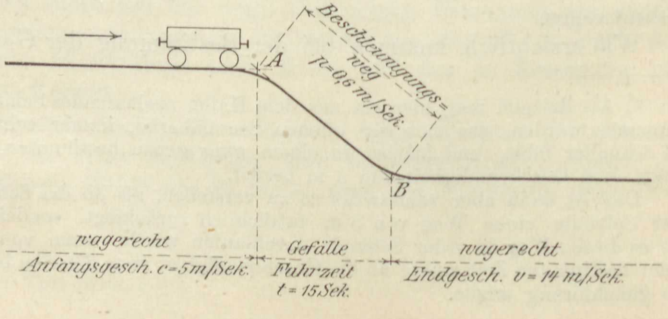
Besitzt derselbe Körper jedoch vor Beginn der Beschleunigung bereits eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 40$ m, so ist jetzt seine nach 5 Sekunden erreichte Endgeschwindigkeit

$$v = 40 + 5 \cdot 3 = 40 + 15 = 55 \text{ m},$$

da ja doch, wie ohne weiteres einzusehen, zu der bereits vorhandenen Anfangsgeschwindigkeit die durch die Beschleunigung hervorgebrachte Geschwindigkeitszunahme addiert werden mufs.

Als Beispiel hierzu kann die Bewegung eines Eisenbahnwagens angenommen werden, der, auf wagerechter Strecke

Fig. 8.



gleichförmig anfahrend, innerhalb eines gewissen Gefälles (Talfahrt) eine bestimmte Beschleunigung aufnimmt, um nach Verlassen des Gefälles auf wagerechter Strecke weiterzufahren. (Fig. 8.)

Die Anfangsgeschwindigkeit des Wagens auf der wagerechten Anfahrstrecke sei c = 5 m. Mit dieser tritt er bei A in das Gefälle ein, und erfährt innerhalb desselben eine Geschwindigkeitszunahme von p = 0,6 m in jeder Sekunde. Dann mufs bei einer Gefälle-Fahrzeit von 15 Sekunden die Geschwindigkeit um 15 . 0,6 = 9 m zugenommen haben, so dafs der Wagen am Ende des Gefälles B eine Endgeschwindigkeit v = 5 m + 9 m = 14 m besitzt, mit welcher er, ebenfalls bei B, in den tiefergelegenen wagerechten Schienenstrang eintritt.

Unter Berücksichtigung der vorstehend gegebenen Erklärungen und Bezeichnungen ergibt sich nun rechnerisch für den unter a) angenommenen Fall, dafs ein Körper unmittelbar aus dem Zustande der Ruhe in den der gleichförmig beschleunigten Bewegung versetzt werden soll,

die Geschwindigkeit nach Ablauf der 1ten Sek. zu p = 1 : p,

da ja die von dem Körper in der ersten Sekunde aufgenommene Geschwindigkeit nur gleich der durch die Beschleunigung erzeugten sein kann.

Entsprechend ist weiter

die Geschwindigkeit nach Ablauf der 2ten Sek. = 2 . p,
" " " " " 3ten " = 3 . p,
" " " " " 10ten " = 10 . p und
. . . .
. . . .
. . . .
" " " " " tten " = t . p

oder, da die nach Ablauf von t Sekunden erreichte Geschwindigkeit nichts anderes als die Endgeschwindigkeit ist:

$$v = p \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

Hieraus folgt:

$$p = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

$$t = \frac{v}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

Für den unter b) angenommenen Fall, dafs der Körper bereits vor Beginn der Beschleunigung p eine Anfangsgeschwindigkeit c besitzt, ist

die Geschwindigkeit	zu Anfang der	1ten	Sek.	$= c$,
„ „	am Ende „	1ten	„	$= c + 1 . p$,
„ „	„ „ „	2ten	„	$= c + 2 . p$,
„ „	„ „ „	3ten	„	$= c + 3 . p$,
„ „	„ „ „	10ten	„	$= c + 10 . p$,
. .	. . .	.	.	. . .
. .	. . .	.	.	. . .
. .	. . .	.	.	. . .
„ „	„ „ „	tten	„	$= c + t . p$,

oder, was dasselbe ist, die Endgeschwindigkeit:

$$v = c + p . t \qquad 33)$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$c = v - p . t \qquad 34)$$

$$p = \frac{v - c}{t} \qquad 35)$$

$$t = \frac{v - c}{p} \qquad 36)$$

Der Weg s, welchen der Körper im Falle b) zurücklegt, ergibt sich, da hier Anfangs- und Endgeschwindigkeit zu berücksichtigen sind, aus folgender Betrachtung:

Angenommen, der Körper bewegte sich innerhalb der ganzen Zeit t nur mit seiner kleinsten, d. i. seiner Anfangsgeschwindigkeit c gleichförmig fort, so würde er nach Formel 1) einen Weg

$$s_1 = c . t$$

zurücklegen. In gleicher Weise würde er mit seiner gröfsten, d. i. seiner Endgeschwindigkeit v, einen Weg

$$s_2 = v . t$$

durchlaufen.

Nun kann aber naturgemäfs zur Bestimmung der Gröfse eines Weges weder die kleinste Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung, noch die gröfste am Ende derselben benutzt werden, sondern nur eine mittlere Geschwindigkeit, welche, da die Geschwindigkeitszunahme hier eine durchaus gleichmäfsige ist, von dem arithmetischen Mittel*) beider Geschwindigkeiten, d. i.

$$\frac{c + v}{2}$$

gebildet wird.

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 75, Fufsnote.

Entsprechend wird dann auch der tatsächlich zurückgelegte Weg s gleich dem arithmetischen Mittel der vorstehend berechneten Wege s_1 und s_2 sein, d. h. es wird

$$s = \frac{c \cdot t + v \cdot t}{2} \text{ oder, was dasselbe ist,*)}$$

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 37)$$

sein.

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dafs ein Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung genau denselben Weg zurücklegt, als wenn er sich in der gleichen Zeit mit der aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit berechneten mittleren Geschwindigkeit $\frac{c + v}{2}$ gleichförmig bewegt hätte.

Für den Fall a) erhält man den entsprechenden Wert, wenn man, da hier eine Anfangsgeschwindigkeit c nicht vorhanden ist, $c = o$ setzt. Formel 37) geht damit über in

$$s = \frac{o + v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t \text{ oder: **)}$$

$$s = \frac{v \cdot t}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 38)$$

Das arithmetische Mittel aus Anfangsgeschwindigkeit o und Endgeschwindigkeit v ist hier $= \frac{o + v}{2} = \frac{v}{2}$, und zeigt Formel 38), dafs für diesen Fall der mit gleichförmiger Beschleunigung zurückgelegte Weg eines Körpers nur halb so grofs ist als der Weg, den der Körper mit der gleichen Geschwindigkeit v in genau derselben Zeit t gleichförmig zurücklegen würde. (Vgl. Formel 1.)

Nach vorstehendem ist für den Fall a) die nach Ablauf der 1ten Sekunde von dem Körper angenommene Endgeschwindigkeit $= 1 \cdot p$, mithin die mittlere Geschwindigkeit

$$= \frac{o + 1 \cdot p}{2} = \frac{1 \cdot p}{2} = 1 \cdot \frac{p}{2},$$

und damit der nach der ersten Sekunde zurückgelegte Weg:

$$s = 1 \cdot \frac{p}{2} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{p}{2}.$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 21 unter 39.
**) „ I. „ „ 48 „ 69.

Nach Ablauf der 2ten Sekunde ist im gleichen Falle die Endgeschwindigkeit $= 2 \cdot p$, mithin die mittlere Geschwindigkeit

$$= \frac{o + 2 \cdot p}{2} = \frac{2 \cdot p}{2} = 2 \cdot \frac{p}{2},$$

und damit der nach 2 Sekunden zurückgelegte Weg:

$$s = 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{p}{2} = 4 \cdot \frac{p}{2}.$$

Setzt man diese Berechnungen weiter fort, so entstehen die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte:

Zeit t	End-geschw. v	Mittlere Geschwindigkeit	Weg s
1te Sek.	$1 \cdot p$	$\frac{o + 1 \cdot p}{2} = 1 \cdot \frac{p}{2}$	$1 \cdot \frac{p}{2} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{p}{2}$
2te „	$2 \cdot p$	$\frac{o + 2 \cdot p}{2} = 2 \cdot \frac{p}{2}$	$2 \cdot \frac{p}{2} \cdot 2 = 4 \cdot \frac{p}{2}$
3te „	$3 \cdot p$	$\frac{o + 3 \cdot p}{2} = 3 \cdot \frac{p}{2}$	$3 \cdot \frac{p}{2} \cdot 3 = 9 \cdot \frac{p}{2}$
4te „	$4 \cdot p$	$\frac{o + 4 \cdot p}{2} = 4 \cdot \frac{p}{2}$	$4 \cdot \frac{p}{2} \cdot 4 = 16 \cdot \frac{p}{2}$
10te „	$10 \cdot p$	$\frac{o + 10 \cdot p}{2} = 10 \cdot \frac{p}{2}$	$10 \cdot \frac{p}{2} \cdot 10 = 100 \cdot \frac{p}{2}$
.	.	. .	. . .
.	.	. .	. . .
.	.	. .	. . .
tte „	$t \cdot p$	$\frac{o + t \cdot p}{2} = t \cdot \frac{p}{2}$	$t \cdot \frac{p}{2} \cdot t = t^2 \cdot \frac{p}{2}$

Aus dieser Aufstellung ist ersichtlich, dafs ein Körper, der aus dem Ruhezustande in gleichförmig beschleunigte Bewegung übergeht, in der ersten Sekunde einen Weg zurücklegt, der halb so grofs ist, als die am Ende der ersten Sekunde erreichte Endgeschwindigkeit, nämlich gleich der halben Beschleunigung $\frac{p}{2}$, und dafs weiter der von Sekunde zu Sekunde zurückgelegte Weg mit dem Quadrat der Zeit wächst, dafs also

in 2 Sekunden ein 4mal gröſserer,*)
„ 3 „ „ 9 „ „
„ 10 „ „ 100 „ „

und

„ t „ „ t^2 „ „

Weg zurückgelegt wird, als in einer Sekunde; im übrigen ganz selbstverständlich, da nach der zweifachen Zeit auch die Geschwindigkeit die zweifache, mithin der Weg der Vierfache, nach der dreifachen Zeit die Geschwindigkeit die dreifache, mithin der Weg der Neunfache usw. wird.

Den in der Tabelle enthaltenen Wert für den Weg

$$s = \frac{p}{2} \cdot t^2$$

kann man auch rechnerisch herleiten, wie folgt:

Nach Formel 38) war

$$s = \frac{v \,.\, t}{2}.$$

Setzt man in dieser Gleichung an Stelle von v den Gleichwert p . t aus Formel 30) ein, so erhält man

$$s = v \cdot \frac{t}{2} = p \cdot t \cdot \frac{t}{2} = \frac{p \,.\, t \,.\, t}{2} = \frac{p \,.\, t^2}{2} \text{ oder:}$$

$$\mathbf{s = \frac{p}{2} \cdot t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{39)}$$

Nach Formel 32) ist weiter $t = \frac{v}{p}$. Setzt man diesen Wert in Formel 38) ein, so ergibt sich

$$s = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{p} \text{ oder:}$$

$$\mathbf{s = \frac{v^2}{2 \,.\, p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{40)}$$

Hieraus folgt unmittelbar:**)

$$\mathbf{v = \sqrt{2 \,.\, p \,.\, s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{41)}$$

$$\mathbf{p = \frac{v^2}{2 \,.\, s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{42)}$$

*) $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $100 = 10^2$; usw.

**) Vgl. I. Teil; Seite 49 und 50.

Für den Fall b) ergeben sich durch Umformung noch folgende Beziehungen:

Nach Formel 33) war $v = c + p.t$. Setzt man diesen Wert in Formel 37) ein, so folgt:

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{c + c + p.t}{2} \cdot t = \frac{(2.c + p.t).t}{2}, \text{ d. i.}$$

$$s = \frac{2.c.t + p.t^2}{2}. \text{ Oder*)}$$

$$s = \frac{2.c.t}{2} + \frac{p.t^2}{2} \text{ und damit:**)}$$

$$s = c.t + \frac{p.t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

Setzt man den Gleichwert für c aus Formel 34) in Gleichung 37) ein, so ergibt sich:

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{v - p.t + v}{2} \cdot t = \frac{(2.v - p.t).t}{2}, \text{ d. i.}$$

$$s = \frac{2.v.t - p.t^2}{2}. \text{ Mithin:}$$

$$s = v.t - \frac{p.t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

Formel 36) ergab: $t = \frac{v - c}{p}$. Diesen Wert für t in Gleichung 37) eingesetzt, folgt:

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{c + v}{2} \cdot \frac{v - c}{p} = \frac{(v + c).(v - c)}{2.p}, \text{ oder***)}$$

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2.p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

Das ergibt weiter

$$v^2 = 2.p.s + c^2 \text{ und damit:}$$

$$v = \sqrt{c^2 + 2.p.s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Bezüglich der graphischen Darstellung ist folgendes zu bemerken:

a) Der Körper besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit, also $c = 0$.

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 19 unter 35 und 36.
**) „ I. „ „ 32 „ 54.
***) „ I. „ „ 45 „ 66 „ Seite 27 unter 45; 7.

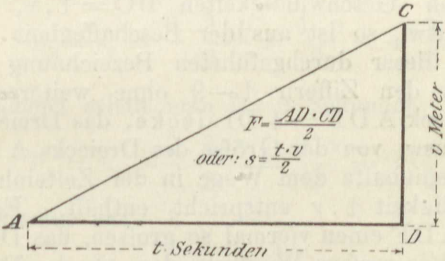
Nach Formel 38) ist für diesen Fall der Weg

$$s = \frac{v \cdot t}{2},$$

also gleich dem halben Produkt aus Geschwindigkeit und Zeit. Nach den Gesetzen der Geometrie ist der Wert $\frac{v \cdot t}{2}$ = dem Inhalte eines Dreiecks, dessen Grundlinie die Zeit t und dessen Höhe die Geschwindigkeit v ist.*)

Um dieses Dreieck zu zeichnen, nehme man, wie in Fig. 1), eine wagerechte Linie AD an, auf welcher von A aus in beliebigem Maſsstabe die Anzahl der Sekunden t aufgetragen wird. Senkrecht auf AD, im Punkte D, ziehe man eine Gerade DC, deren Länge der ebenfalls in beliebigem Maſsstabe aufgetragenen Endgeschwindigkeit v entspricht. (Fig. 9.)

Fig. 9.



Verbindet man A mit C, so entsteht das Dreieck ADC, dessen Flächeninhalt

$$F = \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{t \cdot v}{2} = \frac{v \cdot t}{2} \text{ ist.}$$

Daſs in diesem Falle der Punkt C direkt mit dem Punkte A verbunden werden muſs, ist im Vergleich mit Fig. 1) ohne weiteres einzusehen, da in A, wegen des Fehlens einer Geschwindigkeit, eine Linie AB nicht aufgetragen werden kann, denn AB ist hier = Null.

Berücksichtigt man weiter, daſs nach Formel 30) die Endgeschwindigkeit $v = p \cdot t$ war, so erhält man, wenn man in Fig. 9) an Stelle von v den Gleichwert $p \cdot t$ setzt, den Flächeninhalt des Dreiecks zu

$$F = \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{t \cdot p \cdot t}{2} \text{ oder, was dasselbe ist:}$$

*) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

$$F = \frac{p \cdot t^2}{2} = s,$$

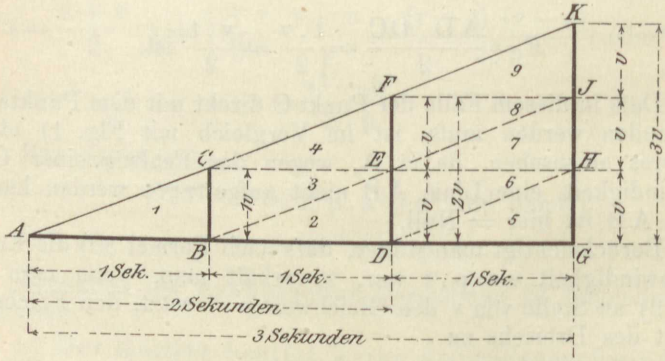
welcher Wert dem in Formel 39) angegebenen genau entspricht.

Es wird also der ohne Anfangsgeschwindigkeit mit gleichförmiger Beschleunigung zurückgelegte Weg graphisch durch ein Dreieck dargestellt.

Weiter läfst sich graphisch zeigen, dafs ein Körper nach der doppelten Zeit 2t, in der sich die Endgeschwindigkeit bei gleichförmiger Beschleunigung verdoppelt, einen viermal so grofsen Weg, nach dreifacher Zeit 3t entsprechend einen neunmal so grofsen Weg usw. zurücklegen mufs, wie in der einfachen Zeit t mit der Endgeschwindigkeit v.*)

Trägt man nämlich, wie in Fig. 10) angegeben, wieder auf einer wagerechten Geraden AG die Zeiteinheiten AB = BD = DG = usw. auf, und senkrecht dazu in B, D, G usw. die erreichten Geschwindigkeiten BC = 1.v, DF = 2.v, GK = 3.v usw., so ist aus der Beschaffenheit der Fig. 10) und der in dieser durchgeführten Bezeichnung der Einzeldreiecke mit den Ziffern 1—9 ohne weiteres ersichtlich, dafs das Dreieck ADF = 4 Dreiecke, das Dreieck AGK = 9 Dreiecke usw. von der Gröfse des Dreiecks ABC, das mit seinem Flächeninhalte dem Wege in der Zeiteinheit bei einer Endgeschwindigkeit 1.v entspricht, enthält. Es stellt also das Dreieck ADF einen viermal so grofsen, das Dreieck AGK einen neunmal so grofsen Weg usw. dar, als das Dreieck ABC.

Fig. 10.



*) Vgl. Tabelle auf Seite 48) mit zugehörigem Text.

Anm. zu Fig. 10). Dafs die Linie AK im Falle einer gleichförmig beschleunigten Bewegung eine Gerade sein mufs, geht aus den Lehr-

Rechnerisch läfst sich diese Zunahme des Weges ebenfalls leicht aus Fig. 10) nachweisen.

Der Inhalt des Dreiecks ABC ist

$$F_1 = s_1 = \frac{1 \,.\, 1 \,.\, v}{2} = \frac{v}{2}.$$

Setzt man hier an Stelle von v den Gleichwert*) 1 . p, so erhält man:

$$F_1 = s_1 = \frac{1 \,.\, p}{2} = 1 \cdot \frac{p}{2}.$$

Der Inhalt des Dreiecks ADF ist

$$F_2 = s_2 = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, v}{2} = \frac{4 \,.\, v}{2} = 4 \cdot \frac{v}{2}$$

und, da nach dem Vorhergesagten an die Stelle von v der Gleichwert so gesetzt werden kann:

$$F_2 = s_2 = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, p}{2} = \frac{4 \,.\, p}{2} = 4 \cdot \frac{p}{2}.$$

Entsprechend erhält man für 3 Sekunden

$$F_3 = s_3 = \frac{3 \,.\, 3 \,.\, v}{2} = \frac{9 \,.\, v}{2} = 9 \cdot \frac{v}{2}$$

oder, was dasselbe ist:

$$s_3 = 9 \cdot \frac{p}{2}.$$

Besonders die hier berechneten Wege

$$1 \cdot \frac{p}{2},\quad 4 \cdot \frac{p}{2},\quad 9 \cdot \frac{p}{2} \,.\,.\,.\,.$$

zeigen ihre vollkommene Übereinstimmung mit den Werten der Tabelle auf Seite 48).

---

sätzen der Geometrie über die „Proportionalität der Linien“ hervor. Für Fig. 10) kommt folgender Lehrsatz in Betracht:

Wird eine gerade Linie (AG) von mehreren begrenzten Parallelen (BC, DF, GK) geschnitten, und verhalten sich die von einem Punkte (A) dieser Linie bis zu den Durchschnittspunkten (B, D, G) derselben mit den Parallelen genommenen Abschnitte (AB, AD, AG) wie jene Parallelen (BC, DF, GK), so liegt dieser Punkt (A) mit den freien Endpunkten (C, F, K) der Parallelen in einer geraden Linie.

Diese Bedingung ist hier erfüllt; die wagerecht liegenden Zeitlinien wachsen wie die senkrecht dazu stehenden Geschwindigkeitslinien.

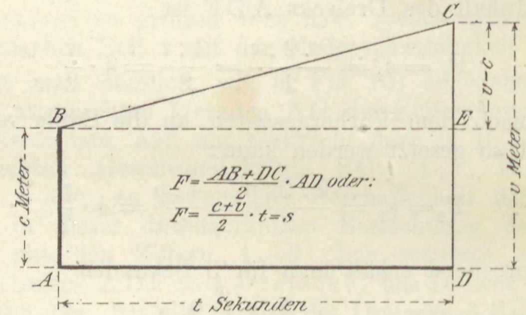
*) Vgl. Seite 45.

b) Der Körper besitzt eine Anfangsgeschwindigkeit $= c$.

In diesem Falle geht man ebenfalls von einer wagerecht angenommenen Zeitlinie AD aus, auf welcher man in beliebigem Maſsstabe die Zeit t aufträgt. (Fig. 11.)

Da die Anfangsgeschwindigkeit $= c$ ist, und in der Zeit t bis zur Endgeschwindigkeit v anwächst, so errichte man (vgl. Fig. 1) in A eine Senkrechte AB, in D eine solche DC und mache $AB = c$ und $DC = v$.

Fig. 11.



Verbindet man nun B mit C, so erhält man ein Trapez ABCD, dessen Flächeninhalt*) die Gröſse des zurückgelegten Weges darstellt.

Dementsprechend muſs

$$F = \frac{AB + DC}{2} \cdot AD,$$

oder, die Gleichwerte eingesetzt,

$$F = \frac{c + v}{2} \cdot t = s$$

sein, welcher Wert genau mit dem in Formel 37) angegebenen übereinstimmt.

Zu dem gleichen Resultat hätte man aber auch noch durch folgende Erwägungen gelangen können.

Zieht man in Fig. 11) die Linie BE parallel AD, so wird das Trapez ABCD in ein Rechteck ABED und ein Dreieck BEC zerlegt.

Nach dem Vorangegangenen stellt ein Rechteck eine

---

*) Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der halben Summe der parallelen Seiten und dem senkrechten Abstande (Höhe) derselben.

gleichförmige, ein Dreieck eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit dar.

Damit wäre graphisch die gleichförmig beschleunigte Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit c dargestellt durch

eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c, und durch

eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit = o und einer Endgeschwindigkeit = v — c.

Die Flächeninhalte beider Figuren sind naturgemäſs zu addieren, um den Gesamtweg zu ergeben. Demnach ist:

Inh. d. Trap. ABCD = Inh. d. Rechtecks ABED + Inh. d. Dreiecks BEC

oder, mit den Bezeichnungen in Fig. 11),

$$F = t \,.\, c + \frac{t \,.\, (v - c)}{2}. \quad \text{Mithin:*)}$$

$$F = \frac{2 \,.\, c \,.\, t + t \,.\, v - c \,.\, t}{2} = \frac{c \,.\, t + t \,.\, v}{2} = \frac{(c + v) \,.\, t}{2}, \text{ d. i.}$$

$$F = \frac{c + v}{2} \cdot t = s,$$

welche Gleichung mit dem vorstehenden und Formel 37) wieder übereinstimmt.

Um für diesen Fall ein Beispiel mit bestimmten Gröſsen zu schaffen, nehme man eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 9 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$ an, die in t = 20 Sekunden bis zu einer Endgeschwindigkeit $v = 31 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$ anwächst. Der Maſsstab sei für die

Zeit-Einheit: 1 Sek. = 3 mm und für die

Geschwindigkeits- „ : $1 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}} = 2$ mm.

Entsprechend Fig. 11) mache man jetzt in Fig. 12)

$$\begin{aligned} AD &= 20 \,.\, 3 = 60 \text{ mm}, \\ AB &= 9 \,.\, 2 = 18 \text{ mm}, \\ DC &= 31 \,.\, 2 = 62 \text{ mm} \end{aligned}$$

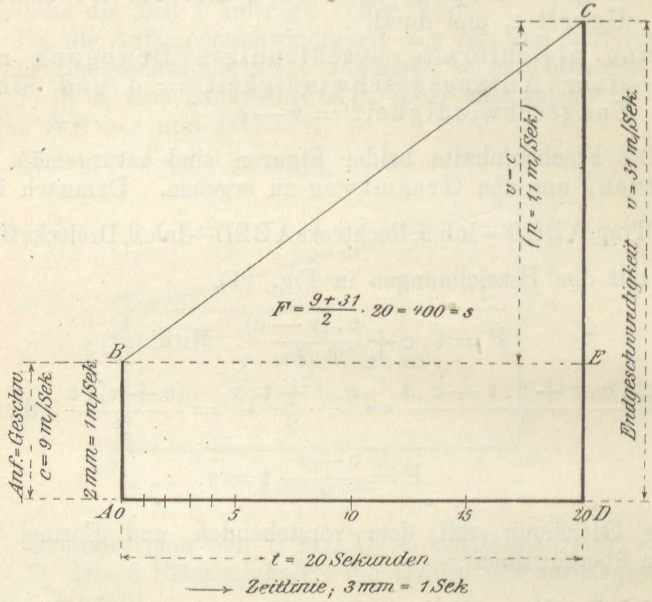
und verbinde B mit C, dann stellt der Inhalt des Trapezes in Fig. 12) den diesem besonderen Fall entsprechenden Weg dar. Der Inhalt dieses Trapezes ist

*) Vgl. I. Teil; Seite 42 unter 63 und Seite 21 unter 39.

$$F = s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{9 + 31}{2} \cdot 20, \text{ oder:}$$

$$s = 20 \cdot 20 = 400 \text{ m.}$$

Fig. 12.



Die zum Übergange aus einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 9$ m in eine Endgeschwindigkeit $v = 31$ m erforderliche Beschleunigung p, läfst sich aus Fig. 12) durch eine einfache Betrachtung feststellen.

In dieser Figur stellt die Länge der Linie

$$CE = v - c$$

die Geschwindigkeitszunahme innerhalb einer Zeit von t Sekunden dar. Um also die Geschwindigkeitszunahme für 1 Sekunde — und das ist die Beschleunigung — zu erhalten, ist die Differenz $v - c$ durch t zu dividieren.*) Man erhält demnach

$$p = \frac{v - c}{t},$$

ein Wert, der sich mit dem in Formel 35) berechneten vollkommen deckt.

*) Hier ist, wie folgt, zu schliefsen:
In t Sekunden Geschwindigkeitszunahme $= v - c$,
„ 1 „ „ „ = den t^{ten} Teil.

Für das Beispiel zu Fig. 12) wird also die Beschleunigung

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{31 - 9}{20} = \frac{22}{20} = 1{,}1 \text{ m.*)}$$

Beispiele:

32) Ein Körper hat durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 2 m erlangt; welche Endgeschwindigkeit hat derselbe nach 10 Sekunden erreicht?

Nach Formel 30) erhält man:

$$v = p \,.\, t = 2 \,.\, 10 = 20 \text{ m.}$$

33) Welchen Weg hat derselbe Körper in diesen 10 Sekunden zurückgelegt?

Nach Formel 39) erhält man:

$$s = \frac{p \,.\, t^2}{2} = \frac{2 \,.\, 10^2}{2} = 100 \text{ m;}$$

oder nach Formel 38):

$$s = \frac{v \,.\, t}{2} = \frac{20 \,.\, 10}{2} = 100 \text{ m.}$$

34) Ein Körper hat bei gleichförmig beschleunigter Bewegung in 6 Sekunden einen Weg von 50,4 m durchlaufen; wie grofs ist seine Beschleunigung?

Aus Formel 39) $s = \frac{p \,.\, t^2}{2}$ erhält man durch Umformung:

$$p = \frac{2 \,.\, s}{t^2} = \frac{2 \,.\, 50{,}4}{6 \,.\, 6} = \frac{100{,}8}{36} = 2{,}8 \text{ m.}$$

35) Welche Endgeschwindigkeit erreicht ein Körper, der mit einer Beschleunigung von 1,3 m einen Weg von 60 m zurückgelegt hat?

Nach Formel 41) erhält man:

$$v = \sqrt{2 \,.\, p \,.\, s} = \sqrt{2 \,.\, 1{,}3 \,.\, 60} = 12{,}49 \text{ m.}$$

36) Die Krupp'sche 42 cm Küstenkanone**) verfeuert Geschosse mit einem Gewichte von ca. 1140 kg und einer Mündungsgeschwindigkeit $v = 604$ m; die Seele des Geschützes ist 12700 mm lang. Welche Beschleunigung p besitzt das Geschofs in dem Zeitpunkte, in welchem es die Mündung verläfst?

Nach Formel 42) erhält man:

$$p = \frac{v^2}{2 \,.\, s} = \frac{604^2}{2 \,.\, 12{,}7} = \frac{364816}{25{,}4}\text{***)} = 14363 \text{ m.}$$

*) Der Lernende zeichne mehrere Beispiele mafsstäblich auf!

**) Vgl. Beispiel 54, Seite 73 und Beispiel 80, Seite 92.

***) „ Tabellen der Potenzen, Wurzeln usw. in Teil III.

37) Welche Zeit braucht das Geschofs bis zum Verlassen der Mündung?

Nach Formel 32) erhält man:

$$t = \frac{v}{p} = \frac{604}{14363} = 0{,}042 \text{ Sekunden.}$$

38) Ein Körper hat eine Anfangsgeschwindigkeit von 8 m und erfährt in jeder Sekunde eine Beschleunigung von 1,5 m; welche Geschwindigkeit wird derselbe nach Verlauf von 4 Sekunden erreicht haben?

Nach Formel 33) erhält man:

$$v = c + p \,.\, t = 8 + 1{,}5 \,.\, 4 = 14 \text{ m.}$$

39) Welche Beschleunigung nimmt ein Körper an, der nach 30 Sekunden aus einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 12$ m in eine Endgeschwindigkeit $v = 84$ m übergegangen ist?

Nach Formel 35) erhält man:

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{84 - 12}{30} = \frac{72}{30} = 2{,}4 \text{ m.}$$

40) Welche Zeit braucht ein mit einer Beschleunigung $p = 3$ m sich bewegender Körper, um aus einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 6$ m in eine Endgeschwindigkeit $v = 63$ m überzugehen?

Nach Formel 36) erhält man:

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{63 - 6}{3} = \frac{57}{3} = 19 \text{ Sekunden.}$$

41) Durch gleichförmige Beschleunigung ist ein Wagen in 8 Minuten aus einer Geschwindigkeit von 1,4 m in eine solche von 3,6 m versetzt worden; welchen Weg hat der Wagen in dieser Zeit zurückgelegt?

Nach Formel 37) erhält man:

$$s = \frac{c + v}{2} \,.\, t = \frac{1{,}4 + 3{,}6}{2} \,.\, 8 \,.\, 60 = \frac{5}{2} \,.\, 480 = 1200 \text{ m.}$$

42) Ein Automobil besitzt in einem genau bestimmten Zeitpunkte eine Geschwindigkeit von 3 m, und bewegt sich von diesem an noch 1 Minute lang mit einer Beschleunigung von 0,25 m weiter fort. Wie grofs ist der Weg, den es in dieser Zeit zurückgelegt hat?

Nach Formel 43) erhält man:

$$s = c \,.\, t + \frac{p \,.\, t^2}{2} = 3 \,.\, 60 + \frac{0{,}25 \,.\, 60^2}{2} = 180 + 450 = 630 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

33) Eine von einer schiefen Ebene herabrollende Kugel hat am Anfange der Bewegung bereits eine Geschwindigkeit von 10 m, und erhält beim Herabrollen eine Beschleunigung von 2 m. Wie grofs ist die Geschwindigkeit der Kugel nach 4 Sekunden?

Lösung: $v = 18$ m.

34) Ein Körper besitzt eine Geschwindigkeit von 6 m und erhält durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 2 m. Welchen Weg hat der Körper nach Verlauf von 20 Sekunden zurückgelegt?

Lösung: s = 520 m.

35) Welche Beschleunigung erhält ein Geschoſs in dem Laufe eines 5 m langen Geschützes, wenn es mit einer Geschwindigkeit von 450 m aus der Mündung tritt?

Lösung: p = 20 250 m.

36) Ein Körper hat durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 1,5 m erlangt; nach welcher Zeit wird der Körper eine Endgeschwindigkeit von 30 m erreicht haben?

Lösung: t = 20 Sekunden.

37) Ein Fluſsdampfer besitzt eine Anfangsgeschwindigkeit von 3,5 m, und hat nach dem Durchfahren einer Strecke von 6000 m eine Endgeschwindigkeit von 6,5 m erreicht. Welche Zeit war hierzu erforderlich?

Lösung: t = 20 Minuten.

38) Die Geschwindigkeit eines Körpers wächst innerhalb 3 Minuten von 2 m auf 362 m an. Wie groſs ist die hierzu erforderliche Beschleunigung?

Lösung: p = 2 m.

39) Welchen Weg legt der in Beispiel 38, Seite 58) angenommene Körper in der Zeit von 4 Sekunden zurück?

Lösung: s = 44 m.

40) Ein Körper legt in $1^1/_2$ Minuten einen Weg von 6000 m zurück; seine Anfangsgeschwindigkeit war c = 3 m. Wie groſs ist seine Beschleunigung?

Lösung: p = 1,415 m.

41) Ein Eisenbahnzug geht aus dem Zustande der Ruhe in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung über, und legt dabei in 40 Sekunden einen Weg von 200 m zurück. Wie groſs ist seine Beschleunigung und seine Geschwindigkeit nach 40 Sekunden?

Lösung: p = 0,25 m;
v = 10 m.

42) Ein Eisenbahnzug durchfährt eine Station N mit einer Geschwindigkeit von 14 m, und eine zweite Station X mit einer solchen von 22 m.

Wie weit war N von X entfernt, wenn die von dem Zuge zwischen beiden Stationen aufgenommene Beschleunigung = 0,1 m war?

Lösung: s = 480 m.

B. Gleichförmig verzögerte Bewegung.

Eine verzögerte Bewegung nimmt ein Körper an, wenn ihm dauernd Bewegungshindernisse entgegentreten, welche gröfser sind als die Wirkung der ihn beeinflussenden Kraft.*)

Nimmt hierbei die Geschwindigkeit in aufeinander folgenden gleichen Zeitabschnitten um genau gleiche Gröfsen ab, so wird die Bewegung eine gleichförmig verzögerte.

Die Geschwindigkeitsabnahme in der Zeiteinheit nennt man hierbei die Verzögerung.

Bezüglich des Begriffes der Geschwindigkeit gilt für die gleichförmig verzögerte Bewegung sinngemäfs das unter A auf Seite 43) Gesagte; für die Beurteilung der Bewegungsgesetze jedoch scheidet der auf Seite 43 angeführte Fall a) aus, nämlich der, dafs ein Körper, der in gleichförmig verzögerte Bewegung versetzt werden soll, sich vorher im Zustande der Ruhe befindet.

Denn ein im Ruhezustande befindlicher Körper kann naturgemäfs eine Verzögerung nicht mehr erfahren,

> eine gleichförmig verzögerte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit ist demnach unmöglich.

Die Anfangsgeschwindigkeit mufs bei dieser Art der Bewegung eines Körpers immer gröfser als die Endgeschwindigkeit sein. Die Möglichkeit, dafs die Anfangsgeschwindigkeit = o ist, ist ausgeschlossen; die Endgeschwindigkeit kann aber = o werden, wenn der bewegte Körper durch fortgesetzte Verzögerung zur Ruhe gelangt.

Es kommen demnach bei der Bestimmung der Gesetze der gleichförmig verzögerten Bewegung genau dieselben Gröfsen in Betracht, wie bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, nämlich:**)

die Zeit t,
der Gesamtweg s,
die Anfangsgeschwindigkeit c,
die Endgeschwindigkeit v und
die Verzögerung p.

Die Verzögerung erhält denselben Buchstaben p, wie im vorhergehenden die Beschleunigung, da sich auf diese Weise die einschlägigen Formeln für die gleichförmig verzögerte Bewegung leicht in sinngemäfse Übereinstimmung mit denen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung bringen lassen.

---

*) Vgl. Seite 5 und 6.
**) „ „ 44.

Verzögerung ist der Gegensatz von Beschleunigung; bei der gleichförmig verzögerten Bewegung ist die Geschwindigkeitsabnahme von Sekunde zu Sekunde zu subtrahieren, während bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeitszunahme entsprechend zu addieren war.

Das p der Beschleunigung ist demnach positiv (+), das der Verzögerung dagegen negativ (—), mithin dem ersteren entgegengesetzt.*)

Man wird daher aus den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung diejenigen für die gleichförmig verzögerte ohne weiteres ableiten können, wenn man in den ersteren an die Stelle von $+p$ den Wert $-p$ setzt.

Nach dem auf Seite 45) über die Geschwindigkeitszunahme, die ein Körper durch eine Beschleunigung p nach t Sekunden aufnimmt, Gesagten, mufs entsprechend durch eine Verzögerung p die Geschwindigkeitsverminderung nach Ablauf von t Sekunden ebenfalls $= p \,.\, t$ werden; nur mufs in diesem Falle der Wert $p \,.\, t$ nicht gleich der Endgeschwindigkeit v, sondern gleich der Anfangsgeschwindigkeit c sein, da ja diese durch eine andauernde Verzögerung schliefslich aufgezehrt wird.

Kommt also der Körper nach t Sekunden zur Ruhe, dann mufs

$$c = p \,.\, t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

sein. Hieraus folgt:

$$p = \frac{c}{t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

$$t = \frac{c}{p} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Soll jedoch der Körper durch gleichförmige Verzögerung nach Ablauf von t Sekunden nur aus einer Anfangsgeschwindigkeit c in eine geringere Endgeschwindigkeit v versetzt werden, so ist naturgemäfs die nach t Sekunden eingetretene Verzögerung $p \,.\, t$ von der Anfangsgeschwindigkeit c zu subtrahieren, es mufs also

$$v = c - p \,.\, t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

werden. Diese Gleichung ist aber auch aus Formel 33) abzuleiten, wie folgt:

Setzt man in Formel 33) $-p$ an die Stelle von $+p$, dann erhält man:

$$v = c + (-p) \,.\, t = c + (-p \,.\, t) = c - p \,.\, t.^{**})$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 5 und 6 unter 11 bis 13.

**) „ I. „ „ 18 unter 33.

Aus Formel 50) ergibt sich unmittelbar:

$$c = v + p . t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Um hieraus p und t zu bestimmen, kann man schreiben:

$v - c = - p . t$ oder, was dasselbe ist,

$p . t = c - v$. Hieraus folgt:

$$p = \frac{c - v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

$$t = \frac{c - v}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 53)$$

Zur Berechnung der Gröſse der mit gleichförmiger Verzögerung zurückgelegten Wege gelangt man ebenfalls, wie bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung auf Seite 47) angegeben, durch Einführung der mittleren Geschwindigkeit.

Bei einer Anfangsgeschwindigkeit c und einer Endgeschwindigkeit v ist die

$$\text{mittlere Geschwindigkeit} = \frac{c + v}{2},$$

mithin der nach t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{c + v}{2} . t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

welche Gleichung mit Formel 37) genau übereinstimmt.

Soll ein Körper durch gleichförmige Verzögerung zur Ruhe gelangen, dann ist seine Anfangsgeschwindigkeit $= c$, seine Endgeschwindigkeit $= o$, mithin seine

$$\text{mittlere Geschwindigkeit} = \frac{o + c}{2} = \frac{c}{2},$$

folglich der nach t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{c}{2} . t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

d. h. ein in gleichförmig verzögerter Bewegung befindlicher Körper legt, bis er in den Ruhezustand gelangt, in t Sekunden einen Weg zurück, der halb so groſs ist als derjenige Weg, den der Körper in der gleichen Zeit mit seiner Anfangsgeschwindigkeit c durchlaufen würde.

Nach Formel 47) war $c = p . t$. Setzt man diesen Wert in Formel 55) ein, so erhält man

$$s = \frac{c}{2} \cdot t = \frac{p \cdot t}{2} \cdot t = \frac{p \cdot t \cdot t}{2} = \frac{p \cdot t^2}{2}, \text{ oder:}$$

$$\mathbf{s = \frac{p}{2} \cdot t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

Diese Gleichung stimmt mit Formel 39) überein.

Formel 49) ergab: $t = \frac{c}{p}$. Setzt man diesen Wert für t in Formel 55) ein, so folgt:

$$s = \frac{c}{2} \cdot t = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{p}, \text{ oder}$$

$$\mathbf{s = \frac{c^2}{2 \cdot p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 57)$$

Hieraus ergibt sich weiter:

$$\mathbf{c = \sqrt{2 \cdot p \cdot s}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 58)$$

Weitere Umformungen ergeben noch folgende Werte für **s**:

Nach Formel 50) war: $v = c - p \cdot t$. Setzt man diesen Wert in Formel 54) ein, so erhält man

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{c + (c - p \cdot t)}{2} \cdot t \text{ und damit:*)}$$

$$\mathbf{s = c \cdot t - \frac{p \cdot t^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 59)$$

Setzt man weiter in Formel 54) den Wert für $c = v + p \cdot t$ aus Formel 51) ein, so wird

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{v + p \cdot t + v}{2} \cdot t. \text{ Mithin:**)}$$

$$\mathbf{s = v \cdot t + \frac{p \cdot t^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

Ferner ergibt sich noch, wenn man in Formel 54) den Wert für $t = \frac{c - v}{p}$ aus Formel 53) einsetzt:

Anm.: Die Formeln 50—53 und 59—62) hätte man aus den Formeln 33—36 und 43—46) ableiten können, indem man an die Stelle von $+ p$ den Wert $- p$ gesetzt hätte. Anfänger wollen diese Rechnungen zur Übung durchführen.

*) Vgl. Seite 50; Ableitung zu Formel 43.
**) „ „ 50; „ „ „ 44.

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{c + v}{2} \cdot \frac{c - v}{p} \quad \text{oder}$$

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2 \cdot p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

Schliefslich folgt hieraus:

$$v = \sqrt{c^2 - 2 \cdot p \cdot s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

In bezug auf die graphische Darstellung der Wege gilt sinngemäfs das vorstehend unter **A)** über die gleichförmig beschleunigte Bewegung Gesagte.

Beispiele:

43) Ein Eisenbahnzug hat eine Geschwindigkeit von 12 m; er wird derartig gebremst, dafs seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 0,75 m abnimmt. Wie grofs wird seine Geschwindigkeit nach 6 Sekunden sein?

Nach Formel 50) erhält man:

$$v = c - p \cdot t = 12 - 0{,}75 \cdot 6 = 7{,}5 \text{ m.}$$

44) In welcher Zeit wird dieser Zug zum Stillstand gelangen?

Nach Formel 49) erhält man:

$$t = \frac{c}{p} = \frac{12}{0{,}75} = 16 \text{ Sekunden.}$$

45) Wie grofs mufs die Verzögerung in jeder Sekunde werden, wenn derselbe Zug erst nach 24 Sekunden zum Stillstand gelangen soll?

Nach Formel 48) erhält man:

$$p = \frac{c}{t} = \frac{12}{24} = 0{,}5 \text{ m.}$$

46) Welchen Weg hat dieser Eisenbahnzug, vom Moment des Bremsens an gerechnet, bis zum Stillstand zurückgelegt?

Nach Formel 57) erhält man:

$$s = \frac{c^2}{2 \cdot p} = \frac{12^2}{2 \cdot 0{,}75} = 96 \text{ m.}$$

47) Ein Körper besitzt eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 90$ m, und erfährt durch Widerstände eine gleichförmige Verzögerung von $p = 6$ m. Wie grofs ist seine Endgeschwindigkeit nach 5 Sekunden?

Nach Formel 50) erhält man:

$$v = c - p \cdot t = 90 - 6 \cdot 5 = 60 \text{ m.}$$

48) Welchen Weg hat dieser Körper hierbei durchlaufen?

Nach Formel 59) erhält man:

$$s = c \cdot t - \frac{p \cdot t^2}{2} = 90 \cdot 5 - \frac{6 \cdot 5^2}{2} = 450 - 75 = 375 \text{ m.}$$

49) Ein Eisenbahnzug geht mit einer Geschwindigkeit = 16 m von einer Station A ab, und erleidet in jeder Sekunde eine gleichförmige Verzögerung von 0,05 m; er kommt in einer Station B mit einer Geschwindigkeit von 3 m an. Wie weit war A von B entfernt?

Nach Formel 61) erhält man:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2 \,.\, p} = \frac{16^2 - 3^2}{2 \,.\, 0{,}05} = 2470 \text{ m.}$$

50) Ein Torpedoboot, das sich einer Hafeneinfahrt mit 16 m Geschwindigkeit nähert, darf diese Einfahrt nur mit halber Geschwindigkeit passieren. Wie grofs mufs die Verzögerung werden, wenn dem Torpedoboot zu dieser Fahrtverminderung nur $^1/_4$ Minute zur Verfügung steht?

Nach Formel 52) erhält man:

$$p = \frac{c - v}{t} = \frac{16 - 8}{15} = \frac{8}{15} = 0{,}533 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

43) Ein Eisenbahnzug hat eine Geschwindigkeit von 14 m. Nachdem die Maschine abgestellt wurde, bewegte er sich noch 3000 m fort, ehe er zum Stillstand kam. Wie grofs ist die Verzögerung des Zuges in jeder Sekunde gewesen?

Lösung: $p = 0{,}0326$ m.

44) Eine auf einer Ebene fortrollende Kugel hat eine Geschwindigkeit von 8,62 m; diese Geschwindigkeit wird durch Bewegungshindernisse in jeder Sekunde um 0,04 vermindert. Nach welcher Zeit hat die Kugel eine Geschwindigkeit von 4 m angenommen?

Lösung: $t = 115{,}5$ Sekunden.

45) Welchen Weg legt die in vorstehender Aufgabe besprochene Kugel in den 115,5 Sekunden zurück?

Lösung: $s = 728{,}8$ m.

46) Ein Panzerfahrzeug besitzt eine Fahrtgeschwindigkeit von 9 m. Von seiner Hafenboje, an der es festmachen soll, ist es noch 405 m entfernt. 1) Welche Verzögerung mufs es in seiner Fahrt erleiden, und 2) welche Zeit vergeht, ehe es an seine Boje gelangt?

Lösung 1): $p = 0{,}1$ m;
„ 2): $t = 1^1/_2$ Minuten.

47) Ein Körper besitzt eine Geschwindigkeit von 36 m. Diese soll in 3 Minuten durch gleichförmige Verzögerung auf $^1/_4$ herabgemindert werden. 1) Wie grofs ist die Verzögerung, und 2) welchen Weg legt der Körper in diesen 3 Minuten zurück?

Lösung 1): $p : 0{,}15$ m;
„ 2): $s : 4050$ „

C. Freier Fall und senkrechter Wurf.

Die unter **A** u. **B)** dieses Kapitels entwickelten Gesetze über gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegung, finden besondere Anwendung bei dem freien Fall und dem senkrechten Wurf der Körper.

Wird ein in beliebiger Höhe festgehaltener Körper plötzlich losgelassen, so fällt er unter dem Einflusse der Anziehungskraft der Erde — der Schwerkraft — so lange geradlinig und senkrecht herab, bis er auf irgend ein Hindernis stöfst, das sich seiner weiteren Fallbewegung entgegensetzt.

Da die Anziehungskraft der Erde als eine unveränderliche und dauernd wirkende Kraft angesehen werden kann, so mufs nach den auf Seite 6) gegebenen Erklärungen die senkrechte Abwärtsbewegung eines frei fallenden Körpers eine gleichförmig beschleunigte Bewegung sein.

Nach den Gesetzen der Physik beträgt die Beschleunigung hierbei im luftleeren Raume **9,81 m** und ist dieselbe allen Körpern gemeinsam, d. h. im luftleeren Raume fallen Körper aus Metall, Stein, Holz, Kork, Papier usw. gleich schnell.

Es erhalten also alle Körper durch die Schwerkraft die gleiche Beschleunigung, welche, wie allgemein gebräuchlich, mit g bezeichnet wird. Es ist demnach:

$$g = 9{,}81 \text{ m}.$$

Bei der Fallbewegung von Körpern verschiedener Beschaffenheit im lufterfüllten Raume kann man allerdings beobachten, dafs z. B. ein Stückchen Papier oder eine Seifenblase eine viel längere Zeit brauchen als eine Metallkugel, um gleiche Höhen zu durchfallen.

Diese Geschwindigkeitsdifferenzen rühren aber lediglich von dem Widerstande, den die Luft der Bewegung dieser verschiedenartigen Körper entgegensetzt, her, da sich dieser bei den leichteren Körpern viel mehr bemerkbar macht als bei den schwereren.

Vielfache Versuche und Messungen haben jedoch ergeben, dafs die Beibehaltung des Wertes $g = 9{,}81$ m für die Praxis nicht zu störenden Fehlern führt, da die hier in Betracht kommenden Fallräume, und damit die Wirkungen des Luftwiderstandes, verhältnismässig so gering ausfallen, dafs sie für technische Berechnungen allgemeiner Art ohne besondere Bedeutung bleiben.

Wird ein Körper mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfen,*) so wird durch die Schwerkraft, die ihn beim Steigen in gleicher Weise und mit derselben Gröfse ununterbrochen beeinflufst wie beim Fallen, seine Geschwindigkeit in demselben Mafse abnehmen (verzögert), wie sie beim freien Herabfallen zunahm (beschleunigt wurde).

Die Verzögerung eines senkrecht aufwärts geworfenen Körpers ist also ebenfalls $= 9{,}81$ m; er steigt so lange, bis seine Geschwindigkeit $= 0$ wird.

In diesem Zeitpunkte hat der Körper die gröfste Höhe, auf welche er überhaupt gelangen kann, erreicht; er befindet sich hier einen Augenblick im Ruhezustande, um dann, wie vorstehend beschrieben, wieder senkrecht herabzufallen.

Es braucht daher ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper genau dieselbe Zeit zum Steigen, wie zum Fallen. Ist also ein senkrecht aufwärts geworfener Körper 12 Sekunden ausgeblieben, so ist er 6 Sekunden lang gestiegen und 6 Sekunden lang gefallen.

Da die hier in Betracht kommenden Bewegungen gleichförmig beschleunigt bzw. gleichförmig verzögert sind, so kommen auch deren Gesetze, wie sie in den Formeln 30—62) zum Ausdruck gebracht sind, unmittelbar zur Anwendung. Allgemein gebräuchlich ist es jedoch, den bei diesen Bewegungsarten zurückgelegten Weg — **die Fallhöhe** — nicht mit s, sondern mit **h** und die Beschleunigung bzw. Verzögerung nicht mit p, sondern mit g zu bezeichnen.

Die vorgehend eingeführten Buchstabenbezeichnungen:

t für die Zeit,
c „ „ Anfangsgeschwindigkeit und
v „ „ Endgeschwindigkeit

werden in der bisherigen Bedeutung beibehalten.

Man wird demnach die Bewegungsgesetze für den freien Fall und den senkrechten Wurf ohne weiteres aus den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten bzw. gleichförmig verzögerten Bewegung ableiten können, indem man in den einschlägigen Formeln an Stelle von s den Wert h, und an Stelle von p den Wert g setzt.

Damit ergibt sich nach Formel 30) die Endgeschwindig-

*) Senkrecht aufwärtsgeworfenes Geschofs.

keit eines frei fallenden (bzw. senkrecht aufwärts geworfenen) Körpers nach t Sekunden zu

$$v = g \, . \, t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

ein Wert, zu dem man auch durch folgende Erwägungen hätte gelangen können:

Wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit von z. B. 5 . 9,81 = 49,05 m senkrecht in die Höhe geworfen, so ist nach dem vorher Gesagten seine Geschwindigkeit

nach	Ablauf	der	1ten	Sek.	**aufwärts**	nur	noch	= 4 . 9,81 m,
„	„	„	2ten	„	„	„	„	= 3 . 9,81 „
„	„	„	3ten	„	„	„	„	= 2 . 9,81 „
„	„	„	4ten	„	„	„	„	= 1 . 9,81 „
„	„	„	5ten	„	„	„	„	= 0 „

d. h. der Körper steht am Ende der 5ten Sekunde in der erreichten Höhe einen Augenblick still und beginnt dann sofort wieder zu fallen. Hierbei erreicht er eine Geschwindigkeit

zu Beginn	der		1ten	Sek.	. . . .		= 0 m,
nach	Ablauf	„	1ten	„	**abwärts**	bereits	= 1 . 9,81 „
„	„	„	2ten	„	„	„	= 2 . 9,81 „
„	„	„	3ten	„	„	„	= 3 . 9,81 „
„	„	„	4ten	„	„	„	= 4 . 9,81 „
„	„	„	5ten	„	„	„	= 5 . 9,81 „
.	.	.	.	.	.	.	. . .
.	.	.	.	.	.	.	. . .
.	.	.	.	.	.	.	. . .
„	„	„	tten	„	„	„	= t . g „.

Die nach t Sekunden durch die Beschleunigung g erreichte Geschwindigkeit ist aber die Endgeschwindigkeit, mithin ist:

$$v = g \, . \, t.$$

Aus dieser Aufstellung ist ersichtlich, daſs die Geschwindigkeit eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers an irgend einem Punkte seines Weges genau gleich der Geschwindigkeit ist, welche er annehmen würde, wenn er von seinem höchsten Punkte bis zu dieser Stelle frei herabgefallen wäre.

Ist also ein Körper 30 Sekunden lang gefallen, so hat er eine Endgeschwindigkeit von

$$v = g \, . \, t = 9{,}81 \, . \, 30 = 294{,}3 \text{ m}$$

erreicht.

Um den Weg — die Fallhöhe h — zu bestimmen, den der Körper hierbei zurücklegt, kann man wieder von der mittleren Geschwindigkeit*) ausgehen. Diese ist hier

$$= \frac{0 + 294,3}{2} = 147,15 \text{ m},$$

mithin die nach 30 Sekunden durchfallene Höhe:

$$h = 147,15 \,.\, 30 = 4414,5 \text{ m}.$$

Den gleichen Wert erhält man unter Berücksichtigung von Formel 39), wenn man p durch g ersetzt. Dann wird

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{64)}$$

und damit für den vorliegenden Fall:

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9,81}{2} \cdot 30^2 = 9,81 \,.\, 450 = 4414,5 \text{ m}.$$

Aus der auf Seite 48) gegebenen Erklärung und Tabelle ist ersichtlich, dafs ein aus dem Ruhezustande in gleichförmig beschleunigte Bewegung übergehender Körper nach Ablauf der 1ten Sekunde einen Weg = der halben Beschleunigung zurückgelegt hat, dafs also

$$s = \frac{p}{2} \text{ wird.}$$

Wendet man dieses Gesetz auf den freien Fall an, so erhält man entsprechend:

$$h = \frac{g}{2} = \frac{9,81}{2} = 4,905 \text{ m}.$$

Formel 64) gibt dasselbe Resultat, wenn man $t = 1$ setzt. Dann wird ebenfalls:

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9,81}{2} \cdot 1^2 = \frac{9,81}{2} = 4,905 \text{ m}.$$

In einer Sekunde durchfällt also ein Körper einen Weg, welcher gleich der halben Fallbeschleunigung ist.

Unter Anwendung von Formel 64) läfst sich bzgl. der Fallhöhen innerhalb einer bestimmten Anzahl von Sekunden folgende Übersicht aufstellen:

Es ist vom Beginn des freien Falles an gerechnet

---

*) Vgl. Seite 46.

der Weg nach Ablauf von 1 Sekunde . . . . $= 1 \cdot \frac{g}{2}$

" " " " " 2 Sekunden . . . . $= 4 \cdot \frac{g}{2}$

" " " " " 3 " . . . . $= 9 \cdot \frac{g}{2}$

" " " " " 4 " . . . . $= 16 \cdot \frac{g}{2}$

" " " " " 5 " . . . . $= 25 \cdot \frac{g}{2}$

. . . .

. . . .

. . . .

" " " " " t " . . . . $= t^2 \cdot \frac{g}{2}$

Hieraus ersieht man, dafs, wie auf Seite 48 angegeben, die Fallhöhen mit dem Quadrat der Fallzeiten wachsen.

Aufserdem erkennt man ohne weiteres, dafs die Fallhöhe in einer beliebig angenommenen einzelnen Sekunde erhalten wird, wenn man von der Gesamt-Fallhöhe, die der Körper bis zu Ende dieser Sekunde durchfallen hat, diejenige der vorhergehenden Sekunde abzieht. Demnach ergibt sich

die Fallhöhe in der 1ten Sekunde zu . . . . . . $1 \cdot \frac{g}{2} = 1 \cdot \frac{g}{2}$.

" " " " 2ten " " $4 \cdot \frac{g}{2} - 1 \cdot \frac{g}{2} = 3 \cdot \frac{g}{2}$.

" " " " 3ten " " $9 \cdot \frac{g}{2} - 4 \cdot \frac{g}{2} = 5 \cdot \frac{g}{2}$.

" " " " 4ten " " $16 \cdot \frac{g}{2} - 9 \cdot \frac{g}{2} = 7 \cdot \frac{g}{2}$.

" " " " 5ten " " $25 \cdot \frac{g}{2} - 16 \cdot \frac{g}{2} = 9 \cdot \frac{g}{2}$.

usw.

Es verhalten sich also die Fallhöhen der einzelnen aufeinander folgenden Sekunden zu einander wie die ungeraden Zahlen.

Aus Formel 63) folgt:

$$g = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

$$t = \frac{v}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

Aus Formel 64) ergibt sich:

$$g = \frac{2 \cdot h}{t^2} \dots\dots\dots\dots 67)$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \dots\dots\dots\dots 68)$$

Formel 40) geht für den freien Fall über in

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} \dots\dots\dots\dots 69)$$

woraus folgt:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \dots\dots\dots\dots 70)$$

$$g = \frac{v^2}{2 \cdot h} \dots\dots\dots\dots 71)$$

Sämtliche anderen Formeln von Interesse wären weiter sinngemäſs aus den entsprechenden der gleichförmig beschleunigten und gleichförmig verzögerten Bewegung abzuleiten.

Aus dem Inhalte des Vorstehenden läſst sich folgende Tabelle über den freien Fall der Körper zusammenstellen:

Anzahl der Sekunden t	Endgeschwindigkeit v, in m	Fallhöhe in den einzelnen Sekunden, in m	Ganze Fallhöhe seit Anfang der Bewegung, in m	Hauptformeln:
1	$1 \cdot g$	$1 \cdot \frac{g}{2}$	$1 \cdot \frac{g}{2}$	$v = g \cdot t;\ t = \frac{v}{g}$.
2	$2 \cdot g$	$3 \cdot \frac{g}{2}$	$4 \cdot \frac{g}{2}$	$g = \frac{v}{t};\ h = \frac{g \cdot t^2}{2}$.
3	$3 \cdot$	$5 \cdot \frac{g}{2}$	$9 \cdot \frac{g}{2}$	$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$.
4	$4 \cdot g$	$7 \cdot \frac{g}{2}$	$16 \cdot \frac{g}{2}$	$g = \frac{2 \cdot h}{t^2};\ h = \frac{v^2}{2 \cdot g}$.
.	.	.	.	
.	.	.	.	$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$.
.	.	.	.	
	$t \cdot g$	$(2t - 1) \cdot \frac{g}{2}$	$t^2 \cdot \frac{g}{2}$	$g = \frac{v^2}{2 \cdot h}$.

Für den senkrechten Wurf, bei dem ein Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfen wird, geht Formel 50) für die Endgeschwindigkeit nach t Sekunden über in

$$v = c - g \cdot t \dots\dots\dots\dots 72)$$

und die Formeln 59 u. 60) für die Wurf- oder Steighöhe nach t Sekunden in

$$h = c \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 73)$$

$$h = v \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 74)$$

Um noch die gröſste Steighöhe, die ein senkrecht aufwärts geworfener Körper überhaupt erreichen kann, zu bestimmen, beachte man, daſs seine Endgeschwindigkeit $v = 0$ geworden ist, wenn er den höchsten Punkt erreicht hat.

Damit geht Formel 72) über in

$0 = c - g \cdot t$, woraus durch Umformung

$$t = \frac{c}{g} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad 75)$$

folgt. Setzt man diesen Wert für t in Formel 73) ein, so erhält man

$$h = c \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = c \cdot \frac{c}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{c}{g}\right)^2 = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2 \cdot g}{2 \cdot g^2}\text{*)}, \text{ d. i.}$$

$$h = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{2 \cdot g}, \text{ oder**)}$$

$$h = 1 \cdot \frac{c^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{g}. \text{ Mithin:}$$

$$h = \frac{c^2}{2 \cdot g} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad 76)$$

welche Gleichung mit Formel 57) übereinstimmt.

Weiter erwünschte Formeln sind auch hier unter Berücksichtigung des Vorgehenden entsprechend abzuleiten.

Beispiele.

51) Welchen Raum durchfällt ein Körper in 8 Sekunden, und welche Endgeschwindigkeit hat er dabei erlangt?

Nach Formel 64) erhält man:

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9{,}81}{2} \cdot 64 = 313{,}92 \text{ m.}$$

Die Endgeschwindigkeit bestimmt sich aus Formel 63) zu:

$$v = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 8 = 78{,}48 \text{ m.}$$

52) Ein freifallender Körper hat eine Endgeschwindigkeit von 75 m erreicht. Welche Höhe hat er durchfallen?

Nach Formel 69) erhält man:

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{75^2}{2 \cdot 9{,}81} = 286{,}7 \text{ m.}$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 90 unter 107.

**) „ I. „ ; „ 2 „ 5 und Seite 45 unter 66.

53) Welche Endgeschwindigkeit erreichte ein Körper, der 60 m durchfallen hat, und welche Zeit gebrauchte er hierzu?

Nach Formel 70) erhält man:

$$v = \sqrt{2g \,.\, h} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 60} = 34{,}31 \text{ m.}$$

Nach Formel 66) erhält man:

$$t = \frac{v}{g} = \frac{34{,}31}{9{,}81} = 3{,}5 \text{ Sekunden.}$$

54) Unter Bezugnahme auf Beispiel 36, Seite 57) sei angenommen, dafs das Geschofs senkrecht in die Höhe geschossen würde. 1) Wie hoch wird dasselbe steigen, und 2) nach welcher Zeit kehrt es an die Erdoberfläche zurück?

Nach Formel 76) erhält man:

$$h = \frac{c^2}{2 \,.\, g} = \frac{604^2}{2 \,.\, 9{,}81} = \frac{364816}{2 \,.\, 9{,}81} = 18594 \text{ m.}$$

Bei Berechnung der Zeit ist zu beachten, dafs die Hälfte der gesamten Zeit für das Fallen erforderlich ist, und dafs beim Herabfallen nach Seite 67) das Geschofs dieselbe Geschwindigkeit wieder erreicht, mit der es die Kanone verliefs. Es ist daher nur die Fallzeit zu ermitteln, die ein Körper braucht, um eine Endgeschwindigkeit von 604 m anzunehmen. Diese ist nach Formel 66):

$$t = \frac{v}{g} = \frac{604}{9{,}81} = 61{,}57 \text{ Sekunden.}$$

Im ganzen blieb das Geschofs also:

$$2 \times 61{,}57 = 123{,}14 \text{ Sekunden} = 2 \text{ Minuten } 3{,}14 \text{ Sekunden aus.}$$

55) Welche Anfangsgeschwindigkeit besafs ein Körper, der senkrecht in die Höhe geworfen wurde und 18 Sekunden lang ausblieb?

Entsprechend Formel 47), oder durch Umformung von Formel 75), erhält man:

$$c = g \,.\, t = 9{,}81 \,.\, 9 = 88{,}29 \text{ m.}$$

56) Welche Höhe hat dieser Körper erreicht?

Nach Formel 76) erhält man:

$$h = \frac{c^2}{2 \,.\, g} = \frac{88{,}29^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 397{,}31 \text{ m.}$$

57) Welche Geschwindigkeit erhält ein senkrecht aufwärts geworfener Körper nach 40 Sekunden, dessen Anfangsgeschwindigkeit 400 m beträgt?

Nach Formel 72) erhält man:

$$v = c - g \,.\, t = 400 - 9{,}81 \,.\, 40 = 7{,}6 \text{ m.}$$

58) Welche Steighöhe hat der Körper in dieser Zeit erreicht?

Nach Formel 73) erhält man:

$$h = c \,.\, t - \frac{g \,.\, t^2}{2} = 400 \,.\, 40 - \frac{9{,}81 \,.\, 40^2}{2} = 16000 - 7848 = 8152 \text{ m,}$$

oder nach Formel 74):

$$h = v \,.\, t + \frac{g \,.\, t^2}{2} = 7{,}6 \,.\, 40 + \frac{9{,}81 \,.\, 40^2}{2} = 304 + 7848 = 8152 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

48) Wie grofs wird die Beschleunigung eines Steines, der 7 Sekunden braucht, um einen 240,5 m tiefen Schacht zu durchfallen?

Lösung: $g = 9{,}81$ m.

49) Ein frei fallender Körper kommt nach 18 Sekunden auf der Erdoberfläche an. Wie grofs ist die Fallhöhe?

Lösung: $h = 1589{,}22$ m.

50) Mit welcher Geschwindigkeit kommt der Körper des vorigen Beispieles auf der Erdoberfläche an?

Lösung: $v = 176{,}58$ m.

51) Ein Dampfhammer wird 1,05 m hoch gehoben und fällt dann frei herab. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er das zu schmiedende Arbeitsstück?

Lösung: $v = 4{,}54$ m.

52) Bei einer Ramme wird der Bär auf eine Höhe von 1,6 m gehoben. Mit welcher Geschwindigkeit stöfst derselbe bei dem Herabfallen gegen den Pfahl, und welche Zeit braucht er zum Herabfallen?

Lösung: $v = 5{,}6$ m;
$t = 0{,}57$ Sekunden.

53) Ein Körper wurde mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 60 m senkrecht in die Höhe geworfen. 1) Wie hoch steigt der Körper, und 2) welche Zeit braucht er, um den höchsten Punkt zu erreichen?

Lösung 1): $h = 183{,}5$ m;
„ 2): $t = 6{,}12$ Sekunden.

54) Ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper kehrte nach 30 Sekunden an die Erdoberfläche zurück. 1) Welche Anfangsgeschwindigkeit besafs er, und 2) wie hoch war er gestiegen?

Lösung 1): $c = 147{,}15$ m;
„ 2): $h = 1103{,}63$ m.

55) Nach welcher Zeit erreicht ein Geschofs, das mit 604 m Anfangsgeschwindigkeit senkrecht in die Höhe steigt, die Hälfte dieser Geschwindigkeit?

Lösung: $t = 30{,}8$ Sekunden.

56) In welcher Zeit erreicht der Körper des Beispieles 57, S. 73) seine gröfste Höhe, d. h. wann kommt er oben zur Ruhe, um dann umzukehren?

Lösung: $t = 40{,}8$ Sekunden.

57) Wie hoch würde der Körper in dieser Zeit steigen?

Lösung: $h = 8155$ m.

58) Ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper kommt nach 1 Minute an die Erdoberfläche zurück. Wie grofs war seine Anfangsgeschwindigkeit?

Lösung: $c = 294{,}30$ m.

Sechstes Kapitel.

Kraft, Gewicht und Masse.

A) Beziehungen zur Beschleunigung bzw. Verzögerung.

Jede im Zustande eines Körpers eintretende Änderung besitzt eine Ursache.

Um einen Körper in Bewegung zu versetzen, oder um eine ihm anhaftende Bewegung abzuändern, ist ebenfalls eine Ursache erforderlich, die man, welcher Art sie auch sei, Kraft nennt.

Wie schon in der Einleitung gesagt wurde, ist Kraft die Ursache jeder Bewegung oder jeder Bewegungsänderung materieller Körper, und das sowohl in bezug auf Richtung als auch auf Geschwindigkeit. Denn nach dem Trägheitsgesetz liegt es ja in der Natur eines jeden Körpers, Richtung und Geschwindigkeit einer einmal angenommenen Bewegung unverändert beizubehalten, also sich z. B. geradlinig und gleichförmig zu bewegen, solange diese Bewegung nicht durch äufsere Ursachen gestört wird.

Die Änderung selbst kann verschiedener Art sein. Der Körper kann sich im Ruhezustande befinden, und aus diesem heraus eine Geschwindigkeit in der Richtung der Kraft aufnehmen; oder es wird eine bereits vorhandene Geschwindigkeit durch Beschleunigung in derselben Richtung vermehrt, oder durch Verzögerung vermindert bzw. gänzlich aufgehoben, oder in entgegengesetzte Richtung gebracht; schliefslich kann die Geschwindigkeitszunahme ein Ausweichen des Körpers in seitlicher Richtung bedingen. In jedem Falle kann die angenommene Änderung nur durch die Wirkung einer Kraft herbeigeführt werden.

Nicht immer ist jedoch eine auf einen ruhenden Körper einwirkende Kraft imstande, denselben in Bewegung zu versetzen.

Legt man einen schweren Körper auf eine wagerechte Unterlage, oder hängt man ihn mittels eines Seiles an einem festen Punkte frei auf, so bleibt der Körper in Ruhe, trotzdem er der Wirkung der Schwerkraft unterworfen ist, unter deren Einflufs er sofort fallen würde, wenn die Unterlage entfernt bzw. das Seil durchschnitten wird. Im ersten Falle übt der Körper einen Druck, im zweiten einen Zug aus. Will man einen Körper mit einer Greifvorrichtung senkrecht emporheben, so erzeugt er an den Berührungsstellen der Greifvorrichtung einen Druck.

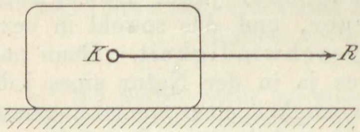
Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, dafs eine Kraft immer dann, wenn sie den von ihr beeinflufsten Körper nicht in Bewegung zu versetzen vermag, einen Druck oder einen Zug erzeugt.

Man nennt insbesondere den Druck, welchen ein nur der Wirkung der Schwerkraft ausgesetzter Körper auf eine wagerechte, ruhende Unterlage ausübt, sein **Gewicht.***)

Es kann demnach jeder Druck, und damit auch jede Kraft, durch ein Gewicht gemessen werden.

Dafs man die Wirkung einer Kraft auch mit dem Zuge vergleichen kann, den ein entsprechend grofses Gewicht ausübt, wird aus dem folgenden Beispiel hervorgehen.

Fig. 13.



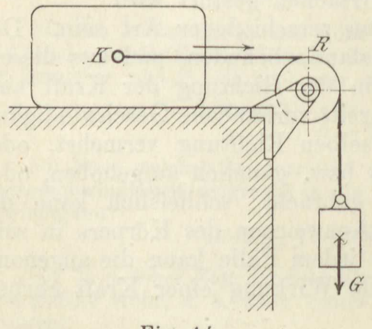


Fig. 14.

Soll ein Körper K auf einer wagerechten Unterlage mit einer gewissen Geschwindigkeit in der Richtung KR fortbewegt werden (Fig. 13), so kann die Kraft, die hierzu erforderlich ist, verschiedenen Ursprunges sein; sie kann der Muskelkraft eines lebenden Wesens, oder auch einer mechanischen Vorrichtung — einer Maschine — entspringen. Es ist aus Fig. 14) ohne weiteres ersichtlich, dafs man an Stelle einer solchen Kraft ein entsprechend grofses Gewicht G treten lassen kann, welches an einem Seile, das über eine Rolle R geleitet wird, befestigt ist, und welches auf den Körper K genau dieselbe Wirkung hervorbringt, wie die vorher angenommene Kraft. Vernachlässigt man hierbei den durch das Biegen des Seiles und die Reibung des Zapfens im Rollenlager vermehrten Widerstand, so ist sofort klar, dafs, wenn der Körper K sich in der genau gleichen Weise bewegen soll, wie unter dem

*) Schwerkraft und Gewicht dürfen nie miteinander verwechselt werden. Mit „Schwerkraft“ — Schwere — bezeichnet man die Ursache des Fallens der Körper, mit „Gewicht“ jedoch die Wirkung dieser Ursache auf einen einzelnen Körper.

Einflusse der Kraft, das Gewicht G einen Zug erzeugen mufs, der dem von der Kraft hervorgebrachten entsprechen, d. h. genau so grofs wie dieser sein mufs.

Das Gewicht G gibt also die Gröfse der erforderlichen Kraft direkt an.

Es ist demnach das einfachste, die Gröfsen aller Kräfte, gleichgültig welchen Ursprunges sie auch sein mögen, durch Gewichte zu messen. Dazu ist jedoch eine zweckmäfsige, dem praktischen Leben angepafste Einheit erforderlich.

Diese Einheit bildet das Kilogramm, d. i. das Gewicht eines Kubikdezimeters Wasser — eines Liters — gemessen bei 4° C, unter 45° geographischer Breite und in Meereshöhe.

Das Kilogramm ist demnach auch zugleich die Krafteinheit.

Man spricht von einer Kraft von 10, 20, 50, 1000 .... G kg, womit gesagt sein soll, dafs die Wirkung dieser Kraft genau so grofs ist, wie der Druck oder Zug, der von einem Gewichte von 10, 20, 50, 1000 .... G kg ausgeübt wird. Auch sagt man, eine Kraft habe eine Gröfse von z. B. 120 kg, wenn sie imstande ist, einen Körper von 120 kg Gewicht senkrecht emporzuheben, oder in der Schwebe zu halten, denn nur hierbei ist tatsächlich der nach oben gerichtete Zug, gleich dem von dem zu hebenden Körper nach unten hervorgebrachten Druck.

Dem allgemeinen Begriffe der Kraft entsprechend und unter der Annahme, dafs Ursache und Wirkung in ganz bestimmtem Verhältnis zueinander stehen, ist ersichtlich, dafs eine an Gröfse zunehmende Kraft an einem Körper, dessen sonstiges Verhalten unverändert bleibt, eine zunehmende Geschwindigkeitsänderung erzeugen mufs. Es wird demnach eine stets gleich grofs bleibende — unveränderliche — Kraft unter den gedachten Umständen eine stets gleich grofs bleibende Änderung der Geschwindigkeit, also eine andauernd gleich grofse Beschleunigung hervorbringen.*)

Man kann daher die Gröfse einer Kraft auch durch die Beschleunigung messen, die sie an einem bestimmten Körper, dessen Verhalten sonst unveränderlich bleibt, hervorbringt. Man sagt:

Eine Kraft ist genau so grofs wie eine andere, wenn sie ein und demselben Körper unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen die genau gleich grofse Beschleunigung erteilt, wie die andere Kraft, oder:

---

*) Vgl. Seite 6 unter 3.
Eine solche Kraft nennt man eine „konstante Kraft“.

Eine Kraft ist 3mal so grofs als eine andere, wenn sie an ein und demselben Körper unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen eine 3mal so grofse Beschleunigung hervorbringt, als die andere Kraft.

Auch die Erfahrung lehrt, dafs die Kräfte den von ihnen an ein und demselben Körper erzeugten Beschleunigungen proportional sind, mit anderen Worten:

Die Kräfte verhalten sich wie diese Beschleunigungen,

und zwar wird die Beschleunigung in genau demselben Mafse gröfser, wie die Kraft gröfser wird.

Wenn nun auf ein und denselben Körper der Reihe nach die verschieden grofsen Kräfte P_1 und P_2 wirken, so erhält der Körper die verschieden grofsen Beschleunigungen p_1 und p_2, und es entsteht nach dem vorstehenden die Proportion: *)

$$P_1 : P_2 = p_1 : p_2 \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 77)$$

Dafür kann man aber auch schreiben**)

$$P_1 : p_1 = P_2 : p_2 \text{ oder: *)}$$

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 78)$$

Läfst man, nachdem die Kraft P_1 auf den Körper gewirkt hat, eine andere Kraft P_3 auf denselben Körper einwirken, so wird ihm diese eine Beschleunigung p_3 erteilen, und es entsteht dann die Proportion:

$$P_1 : P_3 = p_1 : p_3$$

aus der, wie bei Gleichung 77), die neue Gleichung

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_3}{p_3}$$

gebildet werden kann. Aus dieser und Gleichung 78) folgt dann unmittelbar: ***)

$$\frac{P_2}{p_2} = \frac{P_3}{p_3}$$

und hieraus wieder, in Verbindung mit Gleichung 78):

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \frac{P_3}{p_3}.$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 74 unter 83.

**) „ I. „ ; „ 78 „ 91; 2.

***) Sind zwei Gröfsen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich.

Weitere Kräfte P_4 P_5 .... P_n würden mit den an demselben Körper nacheinander hervorgebrachten Beschleunigungen p_4, p_5 .... p_n die letzte Gleichung zu folgender Ergänzung führen:

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \frac{P_3}{p_3} = \frac{P_4}{p_4} = \frac{P_5}{p_5} = \ldots . \frac{P_n}{p_n} \ldots . \quad 79)$$

Gleichung 79) läſst klar erkennen, daſs, gleichgültig wie viele Kräfte auch immer nacheinander auf ein und denselben Körper wirken, die Quotienten aus den einzelnen Kräften und den von ihnen erzeugten Beschleunigungen genau gleich sind, oder was dasselbe ist:

Das Verhältnis zwischen wirksamer Kraft und der durch diese erzeugten Beschleunigung, besitzt bei ein und demselben Körper stets denselben Wert.

Dieses für einen gegebenen Körper feststehende und unveränderliche Verhältnis bezeichnet man als die **Masse** des Körpers.

Man bezeichnet dieselbe gewöhnlich mit dem Buchstaben M, und erhält demnach für eine beliebig groſse aber unveränderliche Kraft P, die einem Körper eine Beschleunigung p erteilt, als Wert für die Masse des Körpers:

$$M = \frac{P}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \quad 80)$$

in Worten: $\textbf{Masse} = \frac{\textbf{Kraft}}{\textbf{Beschleunigung}}$.

Da es durchaus gleichgültig ist, welcher Art die unveränderliche Kraft ist, die auf den Körper einwirken muſs, um ihm eine gewisse Beschleunigung zu erteilen, so wird man zur Untersuchung der einschlägigen Verhältnisse diejenige Kraft heranziehen, welche das Verhältnis zwischen Kraft und Beschleunigung am schnellsten und sichersten kennzeichnet, nämlich die Schwerkraft, indem man an die Stelle der sonst wirksamen Kraft P das Gewicht G des Körpers treten läſst.

Nach dem auf Seite 66) Gesagten erhalten alle Körper durch die Schwerkraft die gleiche Beschleunigung g und ergibt sich, wenn man diese in Formel 80) an die Stelle von p setzt, ein weiterer Wert für die Masse in

$$M = \frac{G}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots . \quad 81)$$

Demnach wird die Masse eines Körpers auch ausgedrückt durch das Verhältnis zwischen dem Gewichte desselben und der Fallbeschleunigung, kurz:

$$\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Fallbeschleunigung}}.$$

Aus Gleichung 80 und 81) folgt unmittelbar:

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 82)$$

Da nun für jeden materiellen Körper das Gewicht G und die Fallbeschleunigung g genau feststellbare Gröfsen sind, das Verhältnis zwischen G und g also ein genau feststehendes ist, so kann man die Masse eines Körpers ebenfalls als ein reines, für ein und denselben Körper feststehendes Zahlenverhältnis ansehen.

Man darf jedoch Gewicht und Masse auf keinen Fall miteinander verwechseln. Wie schon früher erwähnt, versteht man unter dem „Gewicht" eines Körpers dessen Druck gegen eine wagerechte, in Ruhe befindliche Unterlage. Dieser Druck erfährt nach physikalischen Messungen auf der Oberfläche der Erde Änderungen bis zu $^1/_2$ Prozent. Es bildet demnach das Gewicht eines Körpers eine Gröfse, welche nur in bezug auf die Erde und einen bestimmten Punkt ihrer Oberfläche unveränderlich ist; es nimmt zu oder ab, je nachdem sich der Körper dem Schwerpunkte der Erde nähert, oder von demselben entfernt.*)

Auf anderen Himmelskörpern, auf denen die Schwerkraft eine ganz andere Wirkung ausübt als auf der Erde, wird auch derselbe Körper einen ganz anderen Druck hervorbringen, also ein ganz anderes Gewicht annehmen. Man spricht z. B. von dem Gewichte, das ein Körper auf dem Monde oder auf der Sonne annehmen würde und sagt dabei, dafs das erstere kleiner, das letztere erheblich gröfser sei, als das Gewicht desselben Körpers auf der Erde.

Die „Masse" eines Körpers bleibt jedoch an allen nur möglichen Orten die gleiche, da zugleich mit dem Gewichte G sich auch die Fallbeschleunigung g ändert, und das immer in der Art, dafs der Quotient $\frac{G}{g}$ stets denselben Wert erhält.

Das Gewicht ist also etwas durchaus Veränderliches; stets und immer unveränderlich ist nur die Masse.

*) Ein Kilogrammstück hat also in der Nähe der Pole ein gröfseres Gewicht als am Äquator; es wird um so leichter, je höher es über den Meeresspiegel erhoben wird. Wenn trotzdem im praktischen Leben Gewichte zum Messen von Kräften Verwendung finden, so ist dies nur aus dem Grunde zulässig, dafs die Änderung der Schwere von einem Orte der Erde zum anderen gering genug ausfällt, um fast gänzlich vernachlässigt werden zu können.

Man kann zwei Körper in bezug auf ihre Massen miteinander vergleichen und bezeichnet die Massen dann als gleich, wenn jedem der beiden Körper durch ein und dieselbe unveränderliche Kraft die gleiche Beschleunigung erteilt wird.

Man sagt: Eine Masse ist genau so grofs wie eine andere, wenn ihr durch ein und dieselbe Kraft eine genau gleich grofse Beschleunigung erteilt wird, wie der anderen Masse.

Ungleich dagegen sind die Massen der beiden Körper, wenn diesen durch ein und dieselbe Kraft verschiedene Beschleunigungen erteilt werden, und zwar besitzt derjenige Körper die gröfsere Masse, welcher die kleinere Beschleunigung erhält.

Dafs die Beschleunigung durch ein und dieselbe Kraft um so geringer wird, je gröfser die Masse eines Körpers wird, ist eine Erscheinung, welche auf die Trägheit der Masse*) zurückzuführen ist und die sich auf folgende Weise erklären läfst: Man denke sich eine Masse M, welche durch eine Kraft P die Beschleunigung p erhalten hat. Verdoppelt man jetzt die Masse und läfst man auf diese Masse = 2M dieselbe Kraft P einwirken, so kann man annehmen, dafs die eine Hälfte der Kraft $= \frac{P}{2}$ auf die eine Hälfte der Masse $= \frac{2 \cdot M}{2} = M$, und die andere Hälfte der Kraft auf die andere Hälfte der Masse zur Wirkung gelangt. Nun erteilt aber nach dem vorher Gesagten eine Kraft $\frac{P}{2}$ einer Masse M nur eine Beschleunigung $\frac{p}{2}$; mithin werden beide Massenhälften M, und damit die ganze Masse 2 M, nur die Beschleunigung $\frac{p}{2}$ erhalten.

Man sagt: Eine Masse ist 5mal so grofs als eine andere, wenn sie durch ein und dieselbe Kraft nur den 5ten Teil der Beschleunigung erfährt, als die andere Masse; oder

wenn sie durch eine 5mal so grofse Kraft die genau gleiche Beschleunigung erfährt, wie die andere Masse.

Aus dem vorstehenden folgt:

1) Die Massen verhalten sich wie die Kräfte, welche ihnen gleiche Beschleunigungen erteilen; d. h:

$$\mathbf{M_1 : M_2 = P_1 : P_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

*) Jede Masse bietet infolge ihres Trägheitsvermögens der Annahme einer Beschleunigung einen gewissen Widerstand.

2) Die Beschleunigungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen, auf welche gleiche Kräfte wirken; d. h:

$$p_1 : p_2 = M_2 : M_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

Die Gröfse der Masse eines Körpers wird nach einer ganz bestimmten Einheit gemessen:

Masseneinheit ist die Masse desjenigen Körpers, an welchem durch die Einwirkung der Krafteinheit*) in der Zeiteinheit die Beschleunigung = 1 Meter hervorgebracht wird.

Um das Gewicht G des Körpers festzustellen, welcher die Masse **1** besitzt, kann man von Formel 81)

$$M = \frac{G}{g} \text{ ausgehen.}$$

Soll in dieser Gleichung $M = 1$ werden, so mufs auch $\frac{G}{g} = 1$ werden, d. h. es mufs, da $g = 9{,}81$ ist, auch $G = 9{,}81$ sein, denn nur auf diese Weise wird der Quotient $\frac{G}{g}$ ebenfalls = 1.**) Es ist demnach auch

die Masseneinheit = der Masse desjenigen Körpers, der ein Gewicht $G = 9{,}81$ kg besitzt.

Bezeichnet man eine andere Masse mit M_1 und deren Gewicht mit G_1, so mufs entsprechend der Herleitung von Formel 81)

$$M_1 = \frac{G_1}{g}$$

werden. Dividiert man diese Gleichung durch die Gleichung 81), so erhält man***)

$$\frac{M_1}{M} = \frac{\frac{G_1}{g}}{\frac{G}{g}} = \frac{G_1}{G}$$

oder als Proportion geschrieben:

$$M : M_1 = G : G_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

d. h. die Massen der Körper verhalten sich wie ihre Gewichte; mit anderen Worten:

Gleichen Massen entsprechen gleiche Gewichte.

---

*) Vgl. Seite 77.

**) „ I. Teil; Seite 29 unter 47.

***) „ I. „ „ 56 „ 76; d.

Will man also die Massen mehrerer Körper miteinander vergleichen, so hat man lediglich die Gewichte der Körper mittels einer Wage festzustellen.

Aus Gleichung 80) ergibt sich nun zunächst:

$$P = M \cdot p \qquad 86)$$

in Worten: Die Gröfse der unveränderlichen Kraft P, welche einem gegebenen Körper von der Masse M die Beschleunigung p erteilt, ist gleich dem Produkt aus der Massenzahl des bewegten Körpers und der Beschleunigung.

Gleichung 86) läfst ohne weiteres erkennen, dafs die Kraft, welche einem Körper eine gewisse Beschleunigung erteilen soll, um so gröfser werden mufs, je gröfser die zu bewegende Masse wird.

Weiter folgt aus Formel 80):

$$p = \frac{P}{M} \qquad 87)$$

d. h: Man findet die Beschleunigung, die eine gegebene Kraft einer gegebenen Masse erteilt, wenn man die Kraftzahl durch die Massenzahl dividiert.

Das hier wiedergegebene Gesetz wird „das Gesetz der Beschleunigung“ genannt.

Aus demselben und aus Gleichung 87) geht unmittelbar hervor, dafs die Beschleunigung, welche eine bestimmte Kraft einer Masse zu erteilen imstande ist, um so kleiner ausfällt, je gröfser diese Masse wird, eine Tatsache, die schon auf Seite 81) bei der Vergleichung der Massen erwähnt wurde.*)

Ferner ist klar ersichtlich, dafs, wenn die tätige Kraft zu wirken aufhört, wenn also $P =$ Null wird, auch $p =$ Null werden mufs, da **M nicht = 0** werden kann; mit anderen Worten: Ist eine Kraft nicht wirksam, so ändert sich auch der Bewegungszustand bzw. die Geschwindigkeit eines Körpers nicht. Damit kommt in dem Gesetz der Beschleunigung auch das Gesetz der Trägheit zum Ausdruck.

Aus Gleichung 81) folgt:

$$G = M \cdot g \qquad 88)$$

d. h: Das Gewicht eines Körpers wird erhalten, wenn man die Masse desselben mit der Fallbeschleunigung multipliziert.

---

*) Der Wert eines Bruches wird um so kleiner, je gröfser der Nenner desselben wird.

Weiter ergibt sich aus Gleichung 81):

$$g = \frac{G}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 89)$$

Aus Gleichung 82):

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$$

berechnet sich die Gröfse der unveränderlichen Kraft P, die einem Körper vom Gewichte G die sekundliche Beschleunigung p erteilt, zu*)

$$P = \frac{p}{g} \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90)$$

und die Beschleunigung p zu*)

$$p = \frac{P}{G} \cdot g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

Was nun bisher über die Aufnahme einer Beschleunigung durch einen Körper bzw. eine Masse gesagt wurde, gilt sinngemäfs auch für eine Verzögerung derselben.

So gibt der Wert von P in Gleichung 90) zugleich die Gröfse der Kraft (des Widerstandes) an, welche einem mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich fortbewegenden Körper eine sekundliche Verzögerung von p Meter erteilt, und im gleichen Sinne stellt der Wert von p in Gleichung 91) die Verzögerung dar, welche ein in bestimmter Bewegung befindlicher Körper durch eine bekannte Kraft (Widerstand) P erfährt.

Setzt man den in Formel 91) errechneten Wert von p in die Geschwindigkeits- und Wege-Gleichungen, welche bei Besprechung der Gesetze der gleichförmig beschleunigten bzw. gleichförmig verzögerten Bewegung aufgestellt wurden, ein, so entwickeln sich, wenn man noch das über Anfangs- und Endgeschwindigkeit Gesagte berücksichtigt, folgende Beziehungen:

a) Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

1) Ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Formel 30), $v = p \cdot t$, geht über in:

$$v = \frac{P}{G} \cdot g \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 92)$$

*) Vgl. I. Teil; Seite 53 unter 75, e und f.

in Worten: Eine unveränderliche Kraft P erteilt einem in Ruhe befindlichen Körper vom Gewichte G eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Endgeschwindigkeit nach Ablauf von t Sekunden

$$v = \frac{P}{G} \cdot g \cdot t \text{ ist.}$$

Formel 39), $s = \frac{p}{2} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot p \cdot t^2$, ergibt:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{G} \cdot g \cdot t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 93)$$

2) Mit Anfangsgeschwindigkeit.

Aus Formel 33), $v = c + p \cdot t$, erhält man:

$$v = c + \frac{P}{G} \cdot g \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 94)$$

und aus Formel 43), $s = c \cdot t + \frac{1}{2} \cdot p \cdot t^2$:

$$s = c \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{G} \cdot g \cdot t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 95)$$

oder auch aus Formel 44), $s = v \cdot t - \frac{1}{2} \cdot p \cdot t^2$:

$$s = v \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{G} \cdot g \cdot t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 96)$$

b) Gleichförmig verzögerte Bewegung.

Formel 47), $c = p \cdot t$, ergibt:

$$c = \frac{P}{G} \cdot g \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 97)$$

und aus Formel 56), $s = \frac{p}{2} \cdot t^2$, erhält man:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{G} \cdot g \cdot t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 98)$$

Formel 50), $v = c - p \cdot t$, geht über in:

$$v = c - \frac{P}{G} \cdot g \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 99)$$

und Formel 59), $s = c \cdot t - \frac{1}{2} \cdot p \cdot t^2$, in:

$$s = c \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{G} \cdot g \cdot t^2 \quad \ldots \ldots \quad 100)$$

B) Bewegungsgröfse und Antrieb.

Aus dem Gesetz der Beschleunigung und aus Formel 87) ging hervor, dafs eine Kraft P einem in Ruhe befindlichen Körper von der Masse M eine Beschleunigung

$$p = \frac{P}{M}$$

erteilt, und aus Formel 30) ist weiter ersichtlich, dafs dieser Körper nach Ablauf von t Sekunden eine Geschwindigkeit

$$v = p \, . \, t$$

angenommen hat.

Setzt man den Wert von p aus der vorletzten Gleichung in die letzte ein, so erhält man

$$v = \frac{P}{M} \cdot t \text{ oder:}$$

$$\mathbf{M \, . \, v = P \, . \, t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{101)}$$

Man bezeichnet allgemein das Produkt aus der Masse M eines Körpers und seiner Geschwindigkeit v als die „Bewegungsgröfse des Körpers“, dagegen das Produkt aus der wirksamen Kraft P und der Zeit t, welche für P erforderlich ist, um die Masse M aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v zu versetzen, als den „Antrieb der Kraft“.

Aus Gleichung 101) ist ersichtlich:

Die Bewegungsgröfse eines Körpers hat denselben Wert wie der Antrieb der bewegenden Kraft; oder:

Die Bewegungsgröfse einer Masse M, welche sich mit einer Geschwindigkeit v fortbewegt, ist gleich dem Antriebe der Kraft P, welche in t Sekunden die Masse M aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v zu versetzen vermag.

Weiter ist ersichtlich, dafs die Wirkungsgröfse einer Kraft aufser von der Gröfse der Kraft selbst, auch noch von der Zeitdauer abhängig ist, welche erforderlich wird, um durch diese Kraft eine Masse in eine gewisse Geschwindigkeit zu versetzen. Auch läfst die Gleichung

$$P \, . \, t = M \, . \, v$$

unmittelbar erkennen, dafs die Wirkung einer Kraft P in einer gegebenen Zeit t mit wachsendem P zunimmt, und aufserdem auch desto gröfser wird, je länger die Zeit t dauert;

ferner, dafs die Wirkung der Kraft um so gröfser werden mufs, je gröfser die Masse wird, welche in Bewegung zu setzen ist, und auch je gröfser die Geschwindigkeit ist, welche die Masse hierbei erhalten soll.

Es genügt demnach schon eine kleine Kraft, um eine ruhende Masse in eine bestimmte Geschwindigkeit zu versetzen, wenn dieser kleinen Kraft nur eine genügend lange Zeit gewährt wird, innerhalb der sie ihre Wirkung ausüben kann.

Je kleiner jedoch die Zeit wird, desto gröfser mufs umgekehrt die Kraft werden, und es ist damit ohne weiteres einzusehen, dafs es unmöglich ist, einen ruhenden Körper ganz plötzlich — momentan — in eine Bewegung von bestimmter Geschwindigkeit zu versetzen.*)

Hierzu wäre eine unendlich grofse Kraft erforderlich.

Wenn man daher auch hin und wieder den Eindruck gewinnt, als ob ein Körper durch einen Stofs oder Schlag usw. plötzlich aus der Ruhe in irgend eine Bewegung übergeht, so darf man dabei auf keinen Fall eine momentan wirkende Kraft als Ursache annehmen; diese Kraft müfste, wie gesagt, unendlich grofs sein.

Überall da, wo ein Körper in eine bestimmte Geschwindigkeit versetzt werden soll, ist auch eine ganz bestimmte Zeit aufzuwenden und zwar eine längere da, wo die bewegende Kraft verhältnismäfsig klein, eine kürzere da, wo sie entsprechend grofs ist.

Nach Formel 101) war:

$$M \,.\, v = P \,.\, t.$$

---

*) Als Beispiel liefse sich folgendes anführen: Man denke sich einen ruhenden Körper von ganz bestimmtem Gewichte mit einer Schnur verbunden, die eben gerade stark genug ist, das Gewicht des Körpers zu tragen, ohne zu zerreifsen. Zieht man nun mit dieser Schnur den Körper zunächst ganz langsam und vorsichtig in die Höhe, so wird man nach und nach die Geschwindigkeit vergröfsern können, ohne dafs die Schnur zerreifst. Zieht man jedoch unmittelbar mit sehr grofser Geschwindigkeit — plötzlich, mit einem Ruck — an der Schnur, so wird diese sofort zerreifsen.

Der Grund hierfür ist darin zu suchen, dafs man im ersten Falle Zeit genug aufwendet, um den nötigen Kraftantrieb allmählich zu sammeln. Im anderen Falle jedoch wird die Kraft, welche grofs genug wäre, in so kurzer Zeit einen Kraftantrieb zu liefern, der die Masse des gedachten Körpers mit sehr grofser Geschwindigkeit — plötzlich — in Bewegung setzt, gröfser als der Widerstand der Schnur gegen das Zerreifsen. Die Schnur wird zerreifsen, ohne dafs der Körper eine besonders bemerkbare Bewegung annimmt.

Wirkt nun noch eine andere Kraft P_1 auf eine andere Masse M_1 und erteilt dieser in genau der gleichen Zeit t eine Geschwindigkeit v_1, so wird entsprechend Formel 101) auch:

$$M_1 \,.\, v_1 = P_1 \,.\, t.$$

Dividiert man mit der letzten Gleichung in die vorletzte, so erhält man

$$\frac{M \,.\, v}{M_1 \,.\, v_1} = \frac{P \,.\, t}{P_1 \,.\, t}$$

oder, da sich t hebt, die Proportion:

$$M \,.\, v : M_1 \,.\, v_1 = P : P_1.$$

Dafür kann man aber schreiben:

$$\mathbf{P : P_1 = M \,.\, v : M_1 \,.\, v_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{102)}$$

d. h: Die bewegenden Kräfte verhalten sich wie die Bewegungsgröfsen, welche sie den von ihnen beeinflufsten Massen erteilen, vorausgesetzt, dafs diese Kräfte genau gleiche Zeiten hindurch gewirkt haben.

Wirkt jedoch die Kraft P_1 innerhalb einer Zeit t_1, dann entsteht entsprechend Formel 101) die Gleichung:

$$M_1 \,.\, v_1 = P_1 \,.\, t_1.$$

Dividirt man mit dieser Gleichung in Gleichung 101), so erhält man die Proportion:

$$\mathbf{M \,.\, v : M_1 \,.\, v_1 = P \,.\, t : P_1 \,.\, t_1} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{103)}$$

d. h: Die Bewegungsgröfsen verhalten sich wie die Kraftantriebe.

Beispiele:

59) Durch eine Kraft $P_1 = 32$ kg wird einem Körper eine Beschleunigung $p_1 = 8$ m erteilt. Welche Beschleunigung p_2 nimmt derselbe Körper durch eine andere Kraft $P_2 = 40$ kg an?

Aus Formel 77), $P_1 : P_2 = p_1 : p_2$, erhält man:

$$p_2 = \frac{P_2 \,.\, p_1}{P_1} = \frac{40 \,.\, 8}{32} = 10 \text{ m}.$$

60) Zu wie viel kg berechnet sich das Gewicht G des Körpers in Beispiel 59)?

Formel 82), $\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$, geht für den vorliegenden Fall über in: $\frac{P_1}{p_1} = \frac{G}{g}$.

Hieraus folgt:

$$G = \frac{P_1}{p_1} \cdot g = \frac{32 \,.\, 9{,}81}{8} = 39{,}24 \text{ kg}.$$

61) Welche Kraft P_1 würde an dem Körper des Beispieles 59) nur eine Beschleunigung von $p_1 = 1{,}6$ m hervorbringen?

Aus Formel 77), $P_1 : P_2 = p_1 : p_2$, folgt, wenn man den in Beispiel 59) für p_2 errechneten Wert $= 10$ m einsetzt:

$$P_1 = \frac{P_2 \cdot p_1}{p_2} = \frac{40 \cdot 1{,}6}{10} = 6{,}4 \text{ kg}.$$

62) Einem Körper von der Masse $M_2 = 20$ wird durch eine Kraft $P_2 = 75$ kg eine Beschleunigung p erteilt. Wie grofs mufs die Masse M_1 eines anderen Körpers werden, dem durch eine Kraft $P_1 = 90$ kg dieselbe Beschleunigung p erteilt werden soll?

Aus Formel 83), $M_1 : M_2 = P_1 : P_2$, folgt:

$$M_1 = \frac{M_2 \cdot P_1}{P_2} = \frac{20 \cdot 90}{75} = 24.$$

63) Wieviel kg wiegt der Körper, dessen Masse M_1 in Beispiel 62) zu 24 berechnet wurde?

Nach Formel 88) erhält man für diesen Fall:

$$G = M_1 \cdot g = 24 \cdot 9{,}81 = 235{,}44 \text{ kg}.$$

64) Eine bestimmte Kraft P erteilt einem Körper von der Masse M_1 eine Beschleunigung $p_1 = 12$ m; ein anderer Körper von der Masse M_2 erhält durch dieselbe Kraft P die Beschleunigung $p_2 = 3$ m. Wie grofs wird die Masse M_1 im Vergleich mit der Masse M_2?

Aus Formel 84), $p_1 : p_2 = M_2 : M_1$, erhält man:

$$M_1 = \frac{M_2 \cdot p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot M_2 = \frac{3}{12} \cdot M_2 = \frac{1}{4} \cdot M_2. \quad \text{Mithin:}$$

$$M_2 = 4 \cdot M_1.\text{*)}$$

65) Einer Masse $M = 36$ soll eine Beschleunigung $p = 5$ m erteilt werden; welche unveränderliche Kraft P ist hierzu erforderlich?

Nach Formel 86) erhält man:

$$P = M \cdot p = 36 \cdot 5 = 180 \text{ kg}.$$

66) Ein Körper wiegt 44,145 kg; wie grofs ist seine Masse?

Nach Formel 81) erhält man:

$$M = \frac{G}{g} = \frac{44{,}145}{9{,}81} = 4{,}5.$$

67) Ein Körper besitzt eine Masse $M = 110$. Welche Beschleunigung p erteilt ihm eine unveränderliche Kraft $P = 825$ kg?

Nach Formel 87) erhält man:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{825}{110} = 7{,}5 \text{ m}.$$

68) Einem Körper von 245,25 kg Gewicht wurde durch eine Kraft P eine Beschleunigung von 4,4 m erteilt. Wie grofs mufs diese Kraft werden, wenn von den auftretenden Widerständen abgesehen wird?

Nach Formel 90) erhält man:

$$P = \frac{p}{g} \cdot G = \frac{4{,}4 \cdot 245{,}25}{9{,}81} = 110 \text{ kg}.$$

*) Vgl. Seite 81.

69) Eine $^2/_3$ Schnellzug-Lokomotive heutiger Bauart hat ein Dienstgewicht von rund 37800 kg, der zugehörige Tender ein solches von rund 26200 kg; beide zusammen sollen in 2 Minuten eine Geschwindigkeit von 21 m annehmen. Welche Betriebskraft mufs die Lokomotive entwickeln, wenn sie auf freier, wagerechter Strecke fährt, und wenn von den Bewegungswiderständen abgesehen wird?

Das Gesamtgewicht ist $G = 37800 + 26200 = 64000$ kg, die Zeit $t = 120$ Sekunden und die Endgeschwindigkeit $v = 21$ m. Es mufs zunächst die Beschleunigung p berechnet werden; diese erhält man aus Formel 30), $v = p \cdot t$, zu:

$$p = \frac{v}{t} = \frac{21}{120} = 0{,}175 \text{ m.}$$

Mit dieser erhält man aus Formel 90):

$$P = \frac{p}{g} \cdot G = \frac{0{,}175 \cdot 64000}{9{,}81} = 1141{,}7 \text{ kg.}$$

70) Welche Geschwindigkeit nimmt die Lokomotive des vorigen Beispieles in derselben Zeit und unter sonst gleichen Verhältnissen an, wenn sie nur eine Betriebskraft von 1000 kg entwickelt?

Nach Formel 92) erhält man:

$$v = \frac{P}{G} \cdot g \cdot t = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 120}{64000} = 18{,}4 \text{ m.}$$

71) Welchen Weg legt dieselbe Lokomotive zurück
a) nach den Angaben des Beispieles 69),
b) „ „ „ „ „ 70)?

a) Nach Formel 93) erhält man:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{G} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1141{,}7 \cdot 9{,}81 \cdot 14400}{2 \cdot 64000} = 1260 \text{ m.}$$

Da hier die Endgeschwindigkeit v und die Zeit t gegeben sind, so kann man auch nach Formel 38) rechnen und erhält ebenfalls:

$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{21 \cdot 120}{2} = 1260 \text{ m.}$$

b) Nach Formel 38) erhält man:

$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{18{,}4 \cdot 120}{2} = 1104 \text{ m.}$$

72) Wie grofs wird der Gesamtwiderstand — Reibung und Luftwiderstand — welchen die Lokomotive des Beispieles 69) zu überwinden hat, wenn sich, nachdem der Dampf abgesperrt ist, nur noch durch ihr Trägheitsvermögen fortbewegt und erst nach 5 Minuten zum Stillstand kommt?

Nach dem, was über die Anwendung der Formeln 90 und 91) auf Seite 84) gesagt wurde, berechne man zunächst die Verzögerung, welche die Lokomotive erleidet und beachte, dafs in diesem Beispiele die bisherige Endgeschwindigkeit zur Anfangsgeschwindigkeit c wird.

Nach Formel 48) erhält man alsdann:

$$p = \frac{c}{t} = \frac{21}{300} = 0{,}07 \text{ m.}$$

Setzt man diesen Wert in Formel 90) ein, so folgt:

$$P = \frac{p}{g} \cdot G = \frac{0{,}07 \cdot 64000}{9{,}81} = 456{,}7 \text{ kg;}$$

also rund der 140te Teil des Gesamtgewichtes.

73) Wie grofs müfste aber der Gesamtwiderstand nach den Angaben des Beispieles 72) werden, wenn die Lokomotive unter sonst gleichen Verhältnissen nach 30 Sekunden zum Stillstand kommen soll?

Nach Formel 48) wird für diesen Fall:

$$p = \frac{c}{t} = \frac{21}{30} = 0{,}7 \text{ m.}$$

Mithin nach Formel 90):

$$P = \frac{p}{g} \cdot G = \frac{0{,}7 \, . \, 64000}{9{,}81} = 4567 \text{ kg.}$$

74) Nach welcher Zeit würde die Lokomotive des Beispieles 72) zum Stillstand kommen, wenn der Gesamtwiderstand zu $^1/_{200}$ des Gesamtgewichtes angenommen wird?

In diesem Falle wird die verzögernde Kraft — der Widerstand:

$$P = \frac{1}{200} \cdot 64000 = \frac{64000}{200} = 320 \text{ kg}$$

und erhält man damit die Verzögerung, welche die Lokomotive erleidet, nach Formel 91) zu:

$$p = \frac{P}{G} \cdot g = \frac{320 \, . \, 9{,}81}{64000} = 0{,}0491 \text{ m.}$$

Aus dieser und der Anfangsgeschwindigkeit $c = 21$ m bestimmt sich nun nach Formel 49) die Zeit zu

$$t = \frac{c}{p} = \frac{21}{0{,}0491} = 427{,}7 \text{ Sekunden, d. i:}$$

$$t = 7 \text{ Minuten } 7{,}7 \text{ Sekunden.}$$

75) Welchen Weg durchläuft die Lokomotive nach den Angaben des Beispieles 74)?

Nach Formel 55) erhält man:

$$s = \frac{c}{2} \cdot t = \frac{21 \, . \, 427{,}7}{2} = 4490{,}85 \text{ m.}$$

76) Wie stellt sich die Berechnung für Beispiel 69), wenn „Bewegungsgröfse und Antrieb“ in die Rechnung eingeführt werden?

Aus Formel 101), $M \, . \, v = P \, . \, t$, erhält man zunächst:

$$P = M \cdot \frac{v}{t}.$$

Nach Formel 81) ist aber: $M = \frac{G}{g}$.

Setzt man diesen Wert für M in die vorstehende Gleichung ein, so ergibt sich:

$$P = \frac{G}{g} \cdot \frac{v}{t} = \frac{64000 \, . \, 21}{9{,}81 \, . \, 120} = 1141{,}7 \text{ kg.}$$

Man erhält also das genau gleiche Resultat.

77) Ein Automobil von 6000 kg Gewicht bewegt sich auf einer wagerechten Bahn mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 6 m. Um diese Geschwindigkeit zu erhöhen, steigert man die bisherige Betriebskraft um 100 kg und läfst diese 30 Sekunden lang auf das Automobil wirken. Mit welcher Geschwindigkeit wird sich dasselbe nach dieser Kraftwirkung fortbewegen, wenn auf Bewegungshindernisse keine Rücksicht genommen wird?

Nach Formel 94) erhält man:

$$v = c + \frac{P}{G} \cdot g \cdot t = 6 + \frac{100 \cdot 9{,}81 \cdot 30}{6000} = 10{,}905 \text{ m}.$$

78) Welchen Weg legt das Automobil nach den Angaben des Beispieles 77) in den 30 Sekunden zurück?

Nach Formel 95) erhält man:

$$s = c \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{G} \cdot g \cdot t^2 = 6 \cdot 30 + \frac{100 \cdot 9{,}81 \cdot 900}{2 \cdot 6000} = 253{,}575 \text{ m}.$$

Denselben Wert erhält man, wenn man nach Formel 37) rechnet. Nach dieser ist:

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{6 + 10{,}905}{2} \cdot 30 = 253{,}575 \text{ m}.$$

79) Ein Eisenbahnzug im Gesamtgewichte von 180000 kg soll nach dem Anfahren und nach Ablauf der ersten Minute seiner Fahrzeit eine Geschwindigkeit von 12 m erlangt haben. Welche Zugkraft muſs die vorgelegte Lokomotive entwickeln?

Aus Formel 101), $M \cdot v = P \cdot t$, folgt:

$$P = \frac{M \cdot v}{t}.$$

Nun ist aber nach Formel 81): $M = \frac{G}{g}$. Mithin wird:

$$P = \frac{G}{g} \cdot \frac{v}{t} = \frac{180000 \cdot 12}{9{,}81 \cdot 60} = 3670 \text{ kg}.$$

80) Nach den Angaben des Beispieles 36 auf Seite 57) erreicht das Geschoſs von 1140 kg Gewicht eine Mündungsgeschwindigkeit von 604 m; es gebraucht bis zur Aufnahme dieser Geschwindigkeit, also bis zum Augenblicke des Verlassens der Mündung, eine Zeit von 0,042 Sekunden. Wie groſs wird die zur Erteilung dieser Geschwindigkeit erforderliche Kraft, wenn sie innerhalb der angegebenen Zeit als unveränderlich angenommen wird, und wenn die im Geschützrohre auftretenden Widerstände unberücksichtigt bleiben?

Aus Formel 101), $M \cdot v = P \cdot t$, folgt:

$$P = \frac{M \cdot v}{t} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v}{t} = \frac{1140 \cdot 604}{9{,}81 \cdot 0{,}042} = 1671181 \text{ kg}.$$

Genau denselben Wert würde man erhalten, wenn man zur Berechnung Formel 90):

$$P = \frac{p}{g} \cdot G \text{ wählen würde.}$$

81) Eine Kraft = 100 kg erteilt einer Masse = 300 in einer ganz bestimmten Zeit eine Geschwindigkeit von 6 m. Welche Kraft ist erforderlich, um einer Masse = 562,5 in genau derselben Zeit eine Geschwindigkeit von 8 m zu erteilen?

Aus Formel 102), $P : P_1 = M \cdot v : M_1 \cdot v_1$, folgt:

$$P_1 = \frac{M_1 \cdot v_1 \cdot P}{M \cdot v} = \frac{562{,}5 \cdot 8 \cdot 100}{300 \cdot 6} = 250 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele: *)

59) Eine Kraft von 66 kg erteilt einem Körper eine Beschleunigung von 3,3 m. Wie grofs mufs eine andere Kraft werden, welche demselben Körper eine Beschleunigung von 5 m erteilt?

Lösung: $P_2 = 100$ kg.

60) Welche Masse enthält ein Geschofs**) von 1140 kg Gewicht?

Lösung: $M = 116,21$.

61) Welche unveränderliche Kraft erteilt einem Körper, dessen Masse = 120 ist, eine Beschleunigung von 3,5 m?

Lösung: $P = 420$ kg.

62) Ein frei fallender Körper hat bei einem Gewicht von 147,15 kg eine Masse = 15. Welche Beschleunigung nimmt er an?

Lösung: $g = 9,81$ m.

63) Ein Körper besitzt eine Masse = 50. Welches Gewicht hat der Körper?

Lösung: $G = 490,5$ kg.

64) Die Masse eines Körpers ist = 300. Welche Beschleunigung wird diesem Körper durch eine unveränderliche Kraft von 750 kg erteilt?

Lösung: $p = 2,5$ m.

65) Ein Handschlitten von 100 kg Gewicht wird auf einer sehr glatten Eisbahn fortbewegt. Wie grofs mufs die bewegende Kraft werden, wenn der Schlitten eine Beschleunigung von 0,2 m annehmen soll, und wenn die geringe Reibung und der Luftwiderstand vernachlässigt werden?

Lösung: $P = 2,04$ kg.

66) Welche Beschleunigung wird dem Schlitten des vorigen Beispieles erteilt, wenn die bewegende Kraft 5 kg beträgt?

Lösung: $p = 0,491$ m.

67) Welche Betriebskraft ist erforderlich, um einen automobilen Lastwagen von 6000 kg Gewicht, der aus dem Zustande der Ruhe heraus sofort eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annimmt, in 1 Minute 600 m weit fortzubewegen?

Lösung: a) $p = 0,333$ m;
b) $P = 204$ kg.

---

*) Vorweg mag hier erwähnt werden, dafs in diesem Kapitel ausnahmsweise der Hauptwert auf die durchgerechneten „Beispiele" gelegt wurde, da der hier behandelte Stoff namentlich dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten dürfte. Die Übungsbeispiele sind daher nur einfacherer Art.

**) Vgl. Beispiel 36, Seite 57.

Siebentes Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften.

A) Allgemeines.

Die Kräfte werden eingeteilt in bewegende Kräfte und in Widerstände. Erstere können Bewegungen erzeugen oder abändern, letztere dagegen können nur bereits vorhandene Bewegungen mäfsigen, gänzlich vernichten, oder überhaupt die Entstehung von Bewegungen verhindern. Jede bewegende Kraft kann auch als Widerstand auftreten, indem sie der Bewegung eines Körpers entgegenwirkt.

Die Kräfte können verschiedenen Ursprunges sein. Zu den bewegenden Kräften rechnet man:

Die Anziehungskraft der Erde, die Schwerkraft; Anwendung bei Uhrwerken, Wasserrädern, Turbinen, Rammen usw.

Das Arbeitsvermögen in Bewegung befindlicher Körper; ein in Bewegung befindlicher Körper setzt einen anderen in Ruhe befindlichen in Bewegung: Eisenbahnwagen beim Rangieren, Dampfhammerbär und zu schmiedender Eisenblock, Billardbälle usw.

Die Ausdehnung aller Körper durch die Wärme bzw. die Zusammenziehung derselben durch die Kälte; Aufschrumpfen eiserner Ringe auf Kurbel- und Schwungradnaben, Aufziehen von Radreifen; Sprengwirkung des Wassers im Augenblicke des Gefrierens usw.

Die Muskelkraft der Menschen und Tiere; Zug- Druck- Drehbewegungen usw.

Die Elastizität fester Körper; Spiralfedern, Blattfedern usw. in ihrer Eigenschaft sich auszudehnen bzw. zusammenzuziehen; Kautschuk.

Den Stofs und Druck des Wassers; Wassermotoren, hydraulische Presse usw.

Den Stofs und Druck der Luft; Maschinen mit Druckluftbetrieb, Wind bei Segelschiffen, Windmühlen usw.

Die Elektrizität und den Magnetismus; Dynamomaschinen, Elektromotoren usw.

Zu den Widerständen rechnet man:

Die Trägheit ruhender Körper; Verzögerung bzw. Vernichtung der Bewegung eines Körpers beim Zusammenstofs mit einem in Ruhe befindlichen Körper: Eisenbahnwagen beim Rangieren, Schmiedehammer und Schmiedestück usw.

Die Reibung in jeder Art ihres Auftretens an Maschinen, Transmissionen, Fahrzeugen, Geschossen usw.

Den Widerstand des Wassers und der Luft; Fahrzeuge zu Wasser und zu Lande, Geschosse usw.

Die Steifigkeit der Zugorgane; Widerstand von Seilen und Ketten an Rollen, Flaschenzügen, Winden und Kranen gegen das Auf- und Abwickeln auf bzw. von Rollen und Trommeln; Riemen- Seil- und Kettentransmission usw.

Die Festigkeit der Materialien; Widerstand der Körper infolge ihrer Molekularkraft*) gegen die durch äufsere Kraftwirkungen entstehende Trennung ihrer kleinsten Teile (Moleküle).

Wie schon früher erwähnt, werden die Gröfsen der Kräfte durch Gewichte gemessen; als Krafteinheit dient das Kilogramm**).

Zur vollständigen Bestimmung einer Kraft mufs man aufser

der Gröfse, auch noch die Lage
des Angriffspunktes und
die Richtung

derselben kennen.

Angriffspunkt einer Kraft ist derjenige Punkt, an dem der Druck oder Zug unmittelbar angreift, welchen die Kraft auf den gegebenen Körper ausübt.

Die Richtung einer Kraft wird angegeben durch diejenige Gerade, in welcher sich der Körper unter dem alleinigen Einflusse der wirksamen Kraft bewegen wird, wenn er derselben folgen kann. Diese stets geradlinige Richtung, nach welcher der Druck bzw. Zug mittelbar oder unmittelbar erfolgt, nennt man die Wirkungslinie oder die Richtungslinie der Kraft. In dieser Geraden liegt auch der Angriffspunkt.

Durch den Angriffspunkt und die Richtungslinie ist die Lage einer Kraft vollkommen bestimmt.

Ändert eine Kraft ihre Gröfse und Richtung nicht, sondern behält sie dieselben während der Dauer ihrer Wirksamkeit unverändert bei, so nennt man die Kraft „konstant", im anderen Falle „veränderlich".

Bedient man sich zur mittelbaren Übertragung des Zuges oder Druckes der Kraft auf einen Körper eines Seiles oder einer festen Stange, so ist ersichtlich, dafs, wenn von dem

*) Zusammenhangskraft.
**) Vgl. Seite 77.

Eigengewichte derselben abgesehen wird, deren Längen hierbei von keinerlei Einflufs sind. Denkt man sich, wie in Fig. 15 u. 16) angedeutet, ein Gewicht — eine Kraft G = 10 kg einmal direkt und das andere Mal mittels eines Seilendes an einem Haken A befestigt, so ist offenbar der von dem Gewichte auf den Haken ausgeübte Zug in jedem Falle der gleiche. Im Falle Fig. 16) ist zwischen Haken und Gewicht ein Seil eingeschaltet und damit die Kraft G um die Strecke A B in ihrer, hier senkrechten Richtungslinie verschoben, ohne dafs an ihrer Wirkung etwas geändert wird. Weiter ist es für die Bewegung eines gewöhnlichen Wagens jedenfalls ganz gleichgültig, ob man ihn an einem Seile hinter sich herzieht, oder ihn mittels einer Stange (Deichsel) in genau derselben Richtung vor sich herstöfst. Aus diesen Beispielen folgt:

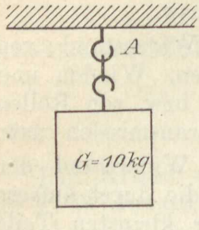


Fig. 15.

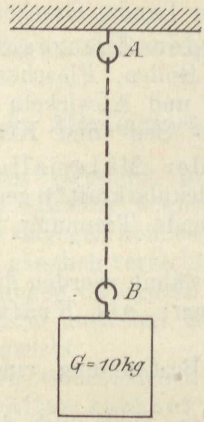


Fig. 16.

Der Angriffspunkt einer Kraft kann in einen beliebigen Punkt ihrer Richtungslinie verlegt werden, wenn letzterer mit dem ersteren unveränderlich verbunden ist.

Wirken zwei oder mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3 .... gleichzeitig auf einen Punkt A eines frei beweglichen Körpers, so wird dieser nicht jeder einzelnen Kraft folgen, sondern sich in einer ganz bestimmten Richtung derart fortbewegen, als ob er nur unter dem Einflusse einer einzigen Kraft von ganz bestimmter Gröfse stände. Man kann also an die Stelle von mehreren Kräften eine einzige Kraft treten lassen, welche in derselben Zeit die gleiche Wirkung auf den Körper hervorbringt, wie die Einzelkräfte zusammengenommen.

Man nennt diese eine Kraft, welche mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3 ... in der vorbezeichneten Art zu ersetzen vermag, die Mittelkraft oder die Resultante derselben und bezeichnet sie allgemein mit **R**; die Einzelkräfte P_1, P_2, P_3 ... heifsen Seitenkräfte oder Komponenten.

Das Verfahren, Gröfse, Richtung und Lage des Angriffspunktes der Mittelkraft aus gegebenen Seitenkräften zu bestimmen, nennt man das „Zusammensetzen der Kräfte".

Handelt es sich umgekehrt darum, eine einzige Kraft R in ihrer Wirkung durch die gleichzeitige und gemeinschaftliche Tätigkeit mehrerer anderer Kräfte P_1, P_2, P_3 ... also durch ihre Seitenkräfte zu ersetzen, so nennt man das hierbei einzuschlagende Verfahren das „Zerlegen der Kräfte".

Das Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte wird zum gröfsten Teil auf rein zeichnerischem Wege vorgenommen. Dazu ist es aber erforderlich, die Kräfte zeichnerisch — bildlich — darzustellen.

Man stellt eine Kraft zeichnerisch durch eine **gerade Linie** dar, deren Richtung zugleich die Richtungslinie der Kraft ist und deren Länge die Gröfse der Kraft angibt. Die Anzahl der Längeneinheiten dieser Linie stimmt hierbei mit der Anzahl der Gewichtseinheiten, die eine Kraft besitzt, überein; der Mafsstab kann für jeden einzelnen Fall ganz beliebig angenommen werden.

Will man demnach eine Kraft von 50 kg zeichnerisch darstellen und nimmt man hierzu an, dafs 1 kg Kraft durch 1 mm Linienlänge ausgedrückt werden soll, so mufs man eine Linie von 50 mm Länge zeichnen, wie dies in Fig. 17) angedeutet ist.

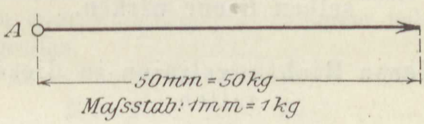


Fig. 17.

Bedeutet weiter in der Zeichnung 1 cm Linienlänge eine Kraft von 100 kg, so stellt eine Linie von 5,2 cm Länge eine Kraft von $5{,}2 \cdot 100 = 520$ kg dar. (Fig. 18.)

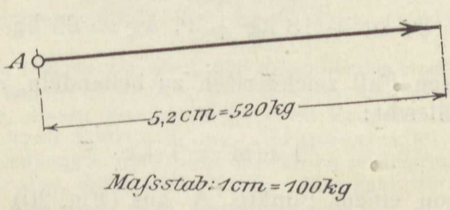


Fig. 18.

Im gleichen Sinne stellt bei der Wahl eines Maſsstabes 1 cm = 1000 kg, eine Linie von 3,7 cm Länge eine Kraft von 3,7 . 1000 = 3700 kg dar. (Fig. 19.)

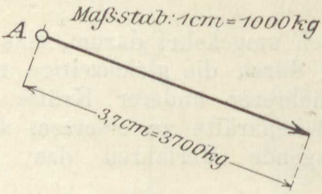


Fig. 19.

Umgekehrt entspricht, wenn 3 mm = 500 kg darstellen, einer Kraft von 1750 kg eine Linie von

$$\frac{1750}{500} . 3 = 3{,}5 . 3 = 10{,}5 \text{ mm Länge usw.}$$

Die Richtung, in der eine Kraft wirkt, den Richtungssinn, bezeichnet man allgemein durch einen Pfeil an einem Ende der Kraftlinie und den Angriffspunkt gewöhnlich durch einen kleinen Kreis am anderen Ende derselben. (Fig. 17—19.) Pfeil und Kreis können übrigens in jedem beliebigen Punkte der Richtungslinie angebracht werden.

B) Kräfte, die an einem Punkte angreifen und in derselben Ebene wirken.

1) Kräfte, deren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen.

Wirken beliebig viele Seitenkräfte: $P_1 = 30$ kg, $P_2 = 18$ kg, $P_3 = 17$ kg . . . . . auf einen Punkt A in gerader Linie und nach derselben Richtung, so ist ihre Gesamtwirkung offenbar gleich der einer einzigen Kraft R, die ebenfalls im Punkte A angreift, in derselben Geraden wirkt und gleich der Summe der hier angenommenen 3 Seitenkräfte, also

$$= 30 \text{ kg} + 18 \text{ kg} + 17 \text{ kg} = 65 \text{ kg ist.}$$

Um diesen Fall zeichnerisch zu behandeln, wähle man als Maſsstab vielleicht:

$$1 \text{ mm} = 1 \text{ kg}$$

und trage von einem Punkte A aus (Fig. 20) in beliebiger Richtung, hier wagerecht, die 3 Seitenkräfte nacheinander in gerader Linie an; dann ergibt sich die Mittelkraft, wie in Fig. 21) gezeichnet, zu:

$$R = 65 \text{ kg.*)}$$

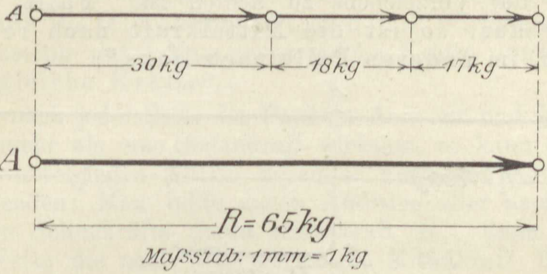


Fig. 20. u. 21.

Die allgemeine Behandlung desselben Falles stellt bei mehreren gegebenen Seitenkräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ Fig. 22) dar:

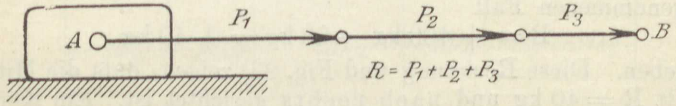


Fig. 22.

Die Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte; ihre Richtung fällt mit der Richtung der Seitenkräfte zusammen.

Die Mittelkraft R ist hier gleich der Länge der Linie AB; sie kann nach dem Vorstehenden in einem beliebigen Punkte derselben angreifen.

Für die Berechnung der Mittelkraft erhält man:

$$\mathbf{R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots} \quad \mathbf{104)}$$

Wirken 2 Seitenkräfte in derselben geraden Linie, jedoch nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt A, so kann man in folgender Weise verfahren:

Nimmt man eine Kraft $P_1 = 100$ kg nach rechts wirkend und eine zweite Kraft $P_2 = 60$ kg nach links wirkend an, so kann man die nach rechts wirkende Kraft als positiv und die entgegengesetzt, also nach links wirkende als ne-

*) Um die Längen der die Kräfte darstellenden Geraden ganz genau auftragen und messen zu können, sind dieselben nur bis zu einem kleinen Kreise gezogen, dessen Mittelpunkt je einen Endpunkt der Seitenkräfte bzw. der Mittelkraft bildet. In der „Graphostatik" begrenzt man allgemein die Endpunkte von Linien, die für die zeichnerische Darstellung von Wichtigkeit sind, durch kleine Kreise Man kann die Linien alsdann beliebig stark ausziehen, ohne Ungenauigkeiten in die Zeichnung zu bringen.

gativ bezeichnen (Fig. 23). Die Mittelkraft erhält man alsdann, indem man die als negativ angenommene Kraft von der als positiv geltenden abzieht, wobei auf den Ausfall des Vorzeichens zu achten ist. Fällt dasselbe positiv aus, so ist die Mittelkraft nach rechts gerichtet, im anderen Falle nach links.*)

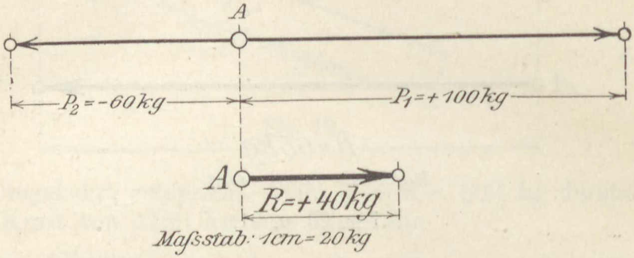


Fig. 23.

Die Berechnung der Mittelkraft würde demnach für den angenommenen Fall

$$R = +100\,\text{kg} - 60\,\text{kg} = +40\,\text{kg}$$

ergeben. Diese Rechnung und Fig. 23) zeigen, dafs die Mittelkraft $R = 40$ kg und nach rechts gerichtet ist. Ein Körper würde sich also unter dem Einflusse der beiden Kräfte $P_1 = +100$ kg und $P_2 = -60$ kg genau so bewegen, als wenn ihn nur eine einzige Kraft $R = 40$ kg nach rechts hin fortbewegen wollte. Aus dem Vorstehenden folgt:

Wirken 2 Seitenkräfte in derselben geraden Linie, jedoch nach entgegengesetzten Richtungen, so ist ihre Mittelkraft gleich der Differenz**) der Seitenkräfte; ihre Richtung fällt mit derjenigen der gröfseren Seitenkraft zusammen.

Sind im vorliegenden Falle die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 einander gleich (Fig. 24), so wird ihre Mittelkraft

$$R = \text{Null}.$$

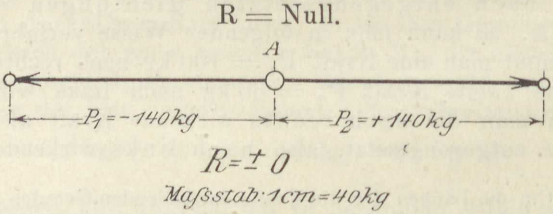


Fig. 24.

*) Der Unterschied zwischen positiv und negativ kann in jeder beliebigen Lage der Kraftrichtungslinien gemacht werden; Bedingung ist dabei, dafs, wenn man irgendeine Richtung als positiv angenommen hat, die genau entgegengesetzte durchaus als negativ gelten mufs.

**) Vgl. I. Teil; Seite 12 unter 22.

Die Rechnung ergibt ebenfalls:

$$R = + 140 \text{ kg} - 140 \text{ kg} = \pm 0.$$

Man sagt in diesem Falle: Die beiden Seitenkräfte halten sich im Gleichgewicht, d. h. ihre Wirkungen heben sich gegenseitig auf. Man nennt solche Kräfte „entgegengesetzt gleiche Kräfte".

Sind nach jeder Seite des Punktes A in ein und derselben Geraden mehr als eine Seitenkraft wirksam, so kann man das in den vorstehenden Fällen gezeigte Verfahren auf diesen Fall anwenden: Man bilde durch Addition aller nach rechts gerichteten Seitenkräfte deren Mittelkraft R_1, dann auf die gleiche Weise die nach links gerichtete Mittelkraft R_2, und aus diesen beiden schliefslich durch Subtraktion der kleineren von der gröfseren die eigentliche Mittelkraft R. (Fig. 25.) Hier ist besonders auf die Vorzeichen zu achten.*)

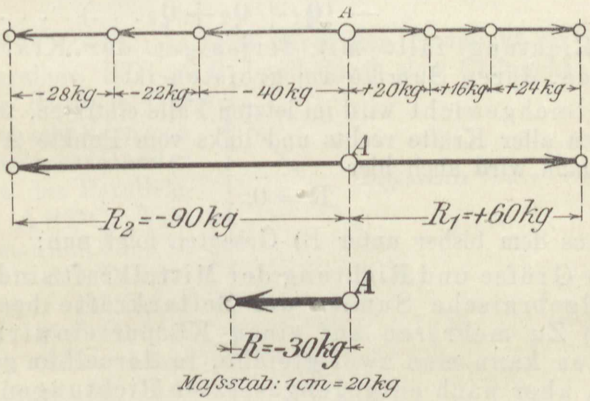


Fig. 25.

Aus Fig. 25) ist ohne weiteres zu ersehen, dafs sich ein Körper unter dem Einflusse der angenommenen Kräfte genau so bewegen würde, als wenn ihn nur eine einzige Kraft R = — 30 kg nach links hin fortbewegen wollte. Die Berechnung stellt sich wie nachstehend angegeben:

Nach rechts wirkt:

$$R_1 = + 20 \text{ kg} + 16 \text{ kg} + 24 \text{ kg} = + 60 \text{ kg};$$

Nach links wirkt:

$$R_2 = - 40 \text{ kg} - 22 \text{ kg} - 28 \text{ kg} = - 90 \text{ kg}.$$

Daraus folgt für die eigentliche Mittelkraft:

$$R = + 60 \text{ kg} - 90 \text{ kg} = - 30 \text{ kg}.$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 10 unter 19, b und Seite 13 unter 25, c.

Die allgemeine Behandlung dieses letzten Falles ergibt entsprechend Fig. 26) folgendes:

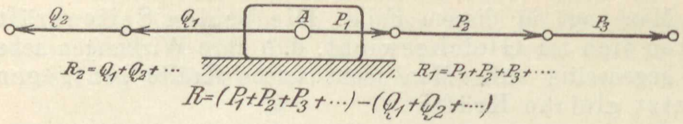


Fig. 26.

Nach rechts wirkt:

$$R_1 = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots$$

Nach links wirkt:

$$R_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots\ldots$$

Ist nun $R_1 > R_2$, so wird die eigentliche Mittelkraft:*)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \ldots) - (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 \ldots) \quad \ldots\ldots \mathbf{105)}$$

ihre Richtung fällt mit derjenigen der Kräfte zusammen, deren Summe am gröfsten ist.

Gleichgewicht wird im letzten Falle eintreten, wenn die Summen aller Kräfte rechts und links vom Punkte A gleich sind; dann wird auch hier

$$R = 0.$$

Aus dem bisher unter B) Gesagten folgt nun:

a) Gröfse und Richtung der Mittelkraft sind durch die algebraische Summe der Seitenkräfte bestimmt.

b) Zu mehreren auf einen Körper einwirkenden Kräften kann man zwei gleiche, in derselben geraden Linie, aber nach entgegengesetzten Richtungen tätige Kräfte, deren Mittelkraft = Null ist, hinzufügen, ohne an dem Bewegungszustande des Körpers etwas zu ändern.

2) Das Parallelogramm der Kräfte und das Kräftedreieck.

Besitzen 2 Kräfte P_1 und P_2 einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt A und bilden ihre Richtungslinien einen Winkel miteinander, so ergibt sich die Gröfse und Richtung der Mittelkraft R als die Diagonale desjenigen Parallelogramms, das man aus den gegebenen Kräften P_1 und P_2 als Seiten und dem gegebenen, von ihnen eingeschlossenen Winkel konstruieren kann.

---

*) Vgl. I. Teil, Seite 1 unter 2.

Um also 2 Kräfte P_1 und P_2, die an einem Punkte A angreifen und einen Winkel α miteinander bilden, zeichnerisch zusammenzusetzen, nehme man 2 gerade Linien an, welche die Gröfsen der Kräfte darstellen; es sei P_1 dargestellt durch die Linie AB und P_2 durch die Linie AC. (Fig. 27.) Diese beiden Linien lasse man sich im Punkte A unter dem Winkel α

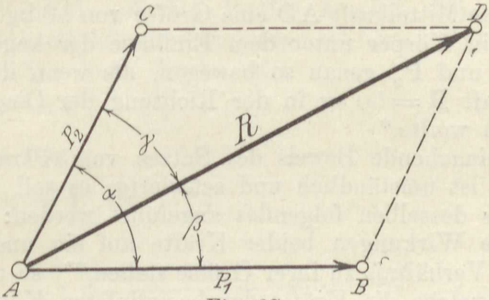


Fig. 27.

schneiden. Zieht man jetzt durch den Endpunkt B von P_1 eine Parallele BD zu P_2 und durch den Endpunkt C von P_2 eine Parallele CD zu P_1, so schneiden sich diese im Punkte D und es entsteht das Parallelogramm ABDC. Verbindet man nun A mit D, so stellt die Diagonale AD in ihrer Länge die Gröfse und in ihrer Lage die Richtung der Mittelkraft R dar, welche die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 in ihrer Wirkung zu ersetzen vermag.

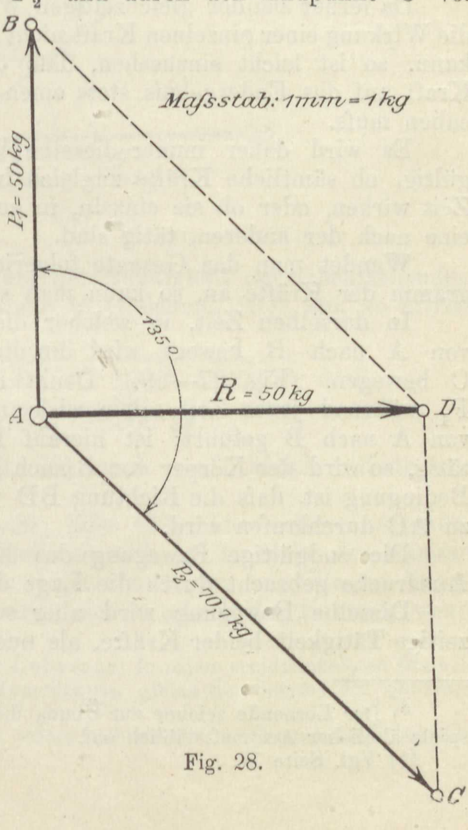


Fig. 28.

Das auf die vorstehend beschriebene Weise konstruierte Parallelogramm nennt man das „Parallelogramm der Kräfte“.

Um diese allgemeine Darstellung an einem bestimmten Falle zu erweisen, nehme man

2 Kräfte $P_1 = 50$ kg und $P_2 = 70,7$ kg an, welche unter einem stumpfen Winkel von 135^0 auf einen gemeinsamen Punkt A wirken. Konstruiert man nun, wie in Fig. 28) angegeben und unter Annahme eines Mafsstabes: 1 mm = 1 kg, das Kräfteparallelogramm ABDC, so findet man dessen Diagonale AD = 50 mm lang. Da 1 mm Länge = 1 kg Kraft darstellt, so besitzt die Mittelkraft AD eine Gröfse von 50 kg. Es würde sich also ein Körper unter dem Einflusse der angenommenen Kräfte P_1 und P_2 genau so bewegen, als wenn ihn nur eine einzige Kraft R = 50 kg in der Richtung der Diagonale AD fortbewegen wollte.*)

Der eingehende Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte ist umständlich und schwierig; es soll jedoch zum Verständnis desselben folgendes angeführt werden:

Da die Wirkungen beider Kräfte auf ein und denselben Körper im Verhältnis zu ihrer Gröfse stehen,**) so müssen sich die Wege, welche die Kräfte den beeinflufsten Körper in derselben Zeit durchlaufen lassen, zueinander verhalten wie diese Kräfte selbst.

Da ferner bei der gleichzeitigen Wirkung mehrerer Kräfte die Wirkung einer einzelnen Kraft nicht unberücksichtigt bleiben kann, so ist leicht einzusehen, dafs die Einzelwirkung jeder Kraft auf das Endergebnis stets einen entsprechenden Einflufs haben mufs.

Es wird daher immer dieselbe Wirkung erzielt, gleichgültig, ob sämtliche Kräfte zugleich innerhalb einer gewissen Zeit wirken, oder ob sie einzeln, in genau derselben Zeit und eine nach der anderen, tätig sind.

Wendet man das Gesagte folgerichtig auf das Parallelogramm der Kräfte an, so kann man schliefsen:

In derselben Zeit, in welcher die Kraft P_1 den Körper von A nach B bewegt, wird ihn die Kraft P_2 von A nach C bewegen. (Fig. 27—29.) Denkt man sich nun zunächst P_1 während jener Zeit allein wirksam, so wird der Körper von A nach B geführt; ist hierauf P_2 dieselbe Zeit allein tätig, so wird der Körper von B nach D bewegt werden, wobei Bedingung ist, dafs die Richtung BD von dem Körper parallel zu AC durchlaufen wird.

Die endgültige Bewegung des Körpers ist mithin zum Ausdrucke gebracht durch die Lage der Linie AD.

Dieselbe Bewegung wird aber sowohl durch die gleichzeitige Tätigkeit beider Kräfte, als auch durch diejenige einer

---

*) Der Lernende zeichne zur Übung dieses und die folgenden Beispiele ähnlicher Art mafsstäblich auf.

**) Vgl. Seite 77.

einzigen Kraft von der Gröſse AD erzeugt. Mithin muſs AD gleich der Mittelkraft der beiden Seitenkräfte P_1 und P_2, sowohl der Richtung als auch der Gröſse nach, sein.

Der Richtungssinn dieser Mittelkraft ist dem Angriffspunkte A **abgewandt.**

Wirken die beiden Kräfte P_1 und P_2 unter einem rechten Winkel auf den Punkt A (Fig. 29), so ist die Gröſse der Mittelkraft ohne weiteres nach dem „Pythagoras“ zu berechnen.*) Nach diesem ist:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

Hieraus folgt:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 107)$$

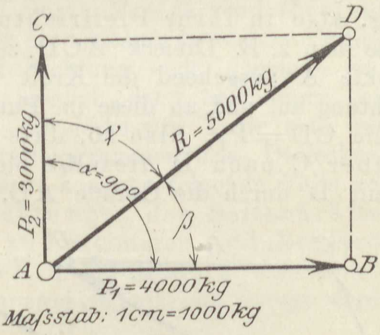


Fig. 29.

Setzt man zur Prüfung der Richtigkeit der nebenstehenden Fig. 29) deren Zahlenwerte in Gleichung 107) ein, so erhält man als Mittelkraft:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{4000^2 + 3000^2} \text{ d. i.}$$

$$R = \sqrt{25000000} = 5000 \text{ kg},$$

welcher Wert der Fig. 29) auch maſsstäblich entnommen werden kann.

Aus den Fig. 27—29) läſst sich ohne weiteres ersehen, daſs die Gröſse der Mittelkraft sich um so mehr der Summe der Seitenkräfte nähert, je kleiner der von diesen eingeschlossene Winkel α wird; sie ist gleich der Summe, wenn

*) Pythagoräischer Lehrsatz: In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypothenuse, gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Anm. zu Fig. 29): In jedem rechtwinkeligen Dreieck verhalten sich die Seiten wie 3 : 4 : 5.

der Winkel $\alpha =$ Null wird, also wenn die beiden Seitenkräfte in eine Gerade zusammenfallen. Umgekehrt nähert sich der Wert der Mittelkraft immer mehr der Differenz der Seitenkräfte, je gröſser der Winkel α wird; sie ist gleich der Differenz, wenn der Winkel $\alpha = 180^0 = 2R$ wird.

Damit würde man also auf die unter B, Seite 99—102) besprochenen Fälle zurückkommen.

Durch das rein zeichnerische Verfahren findet man die Mittelkraft am schnellsten, wenn man statt des ganzen Kräfteparallelogramms nur eine Hälfte desselben, ein Dreieck zeichnet, wie dies aus der Zerlegung der Fig. 27) in die beiden Dreiecke ACD und ABD hervorgeht und in Fig. 30) angegeben ist.

Ein solches Dreieck erhält man, wenn man die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 vom Angriffspunkte A aus nach Gröſse und Richtung, also in ihrer Pfeilrichtung, aneinander anträgt. Wollte man z. B. Dreieck ACD zeichnen, so trage man vom Punkte A ausgehend die Kraft $P_2 = AC$ nach Gröſse und Richtung auf und an diese im Punkte C, parallel zu P_1, die Linie $CD = P_1$, also so, daſs die Pfeilrichtung von A über C nach D dieselbe bleibt. Verbindet man jetzt A mit D durch die Gerade AD, so entsteht ein

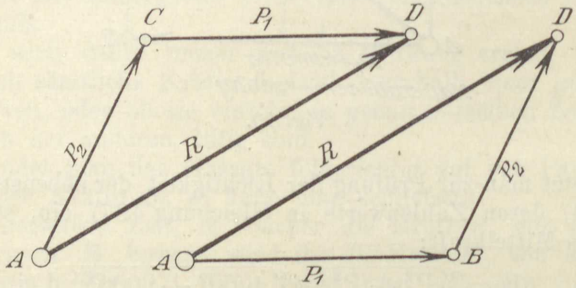


Fig. 30.

geschlossener Linienzug ACDA, der sog. „Kräftezug“; dieser bildet das „Kräftedreieck“ ACD.

Die Verbindungslinie AD nennt man die „Schluſslinie“; sie ist in bezug auf Gröſse und Richtung die Mittelkraft R der Seitenkräfte P_1 und P_2.

Es ist offenbar gleichgültig, ob man die eine oder die andere Hälfte des Parallelogramms zeichnet, d. h. ob man P_1 an P_2, oder P_2 an P_1 anträgt. Aus dem Gesagten folgt:

Die Mittelkraft zweier Kräfte mit gemeinsamen Angriffspunkte wird durch die dritte Seite eines Dreiecks dargestellt, dessen beide anderen Seiten von den

Seitenkräften gebildet werden; diese müssen in **derselben** Pfeilrichtung aneinander gesetzt werden. Die Mittelkraft erhält die **entgegengesetzte** Pfeilrichtung.

Das bisher Gesagte gilt für das Zusammensetzen zweier Kräfte zu einer Mittelkraft. Die Praxis stellt jedoch viel häufiger die umgekehrte Aufgabe, nämlich

die Zerlegung einer Kraft

in zwei Seitenkräfte, welche der gegebenen Kraft in ihrer Wirkung durchaus gleich sind, sie also vollkommen zu ersetzen vermögen.

Diese Aufgabe kann sowohl mittels des Kräfteparallelogramms als auch mittels des Kräftedreiecks gelöst werden; nur ist hier die Diagonale bzw. die dritte Seite gegeben und die Seitenkräfte sind festzustellen.

Sind nun für die letzteren besondere Bedingungen in bezug auf Gröfse und Richtung nicht gegeben, so sind unendlich viele Lösungen möglich, denn über einer geraden Linie als Diagonale bzw. Dreiecksseite kann man eine unbegrenzte Anzahl von Parallelogrammen bzw. Dreiecken zeichnen.

Am häufigsten kommen folgende Fälle vor:

a) Die Richtungen der Seitenkräfte P_1 und P_2 sind gegeben; zu bestimmen sind ihre Gröfsen. (Fig. 31.)

Ist $AD = R$ die Mittelkraft, welche in den Richtungen Ax und Ay in zwei Seitenkräfte zerlegt werden soll, so ziehe

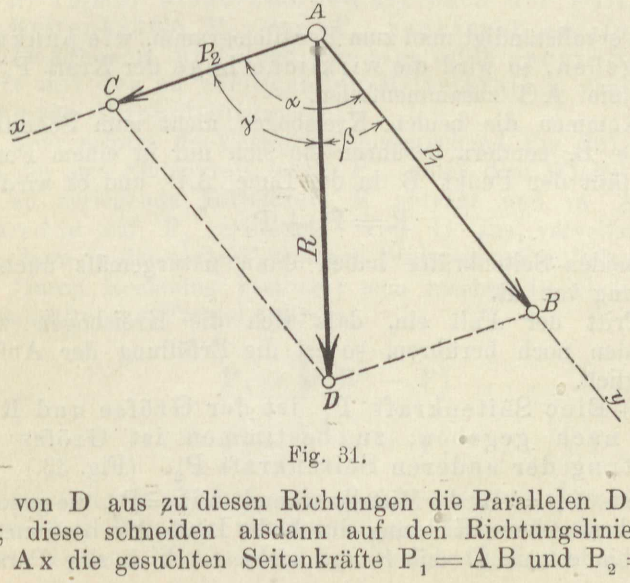


Fig. 31.

man von D aus zu diesen Richtungen die Parallelen DB und DC; diese schneiden alsdann auf den Richtungslinien Ay und Ax die gesuchten Seitenkräfte $P_1 = AB$ und $P_2 = AC$

ab. War AD mafsstäblich gezeichnet, so können die Gröfsen von P_1 und P_2 nach demselben Mafsstabe aus Fig. 31) entnommen werden. Liegen die Richtungslinien Ax und Ay nicht wie hier, in der Figur, sondern aufserhalb derselben, so sind parallele Linien zu ihnen durch D und A zu ziehen, um die Gröfse der Seitenkräfte zu bestimmen.

b) Die Gröfsen der Seitenkräfte P_1 und P_2 sind gegeben; zu bestimmen sind ihre Richtungen. (Fig. 32.)

Ist $AD = R$ die Mittelkraft, so beschreibe man aus A mit P_1 und aus D mit P_2 je einen Kreisbogen. Der Schnittpunkt B beider ist der dritte Punkt des Kräftedreiecks ABD, in welchem die beiden Seiten AB und BD die gewünschten Richtungen angeben.

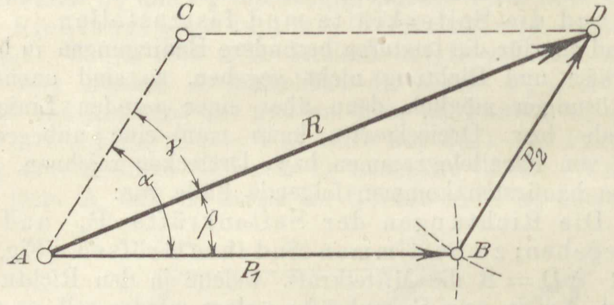


Fig. 32.

Vervollständigt man zum Parallelogramm, wie punktiert angegeben, so wird die wirkliche Lage der Kraft P_2 mit der Linie AC zusammenfallen.

Kommen die beiden Kreisbogen nicht zum Schnitt im Punkte B, sondern berühren sie sich nur in einem Punkte, dann fällt der Punkt B in die Linie AD und es wird

$$R = P_1 + P_2.$$

Die beiden Seitenkräfte haben dann naturgemäfs auch die Richtung von R.

Tritt der Fall ein, dafs sich die Kreisbogen weder schneiden noch berühren, so ist die Erfüllung der Aufgabe unmöglich.

c) Eine Seitenkraft P_1 ist der Gröfse und Richtung nach gegeben; zu bestimmen ist Gröfse und Richtung der anderen Seitenkraft P_2. (Fig. 33.)

Ist $AD = R$ die Mittelkraft und $AB = P_1$ die gegebene Seitenkraft, deren Richtung durch die Linie Ax bestimmt ist, so verbinde man D mit B und ziehe durch A eine Parallele zu DB, und durch D eine Parallele zu AB, die sich in C schneiden; dann ist $AC = P_2$ die gesuchte zweite Seitenkraft, sowohl in bezug auf Gröfse als auch auf Richtung.

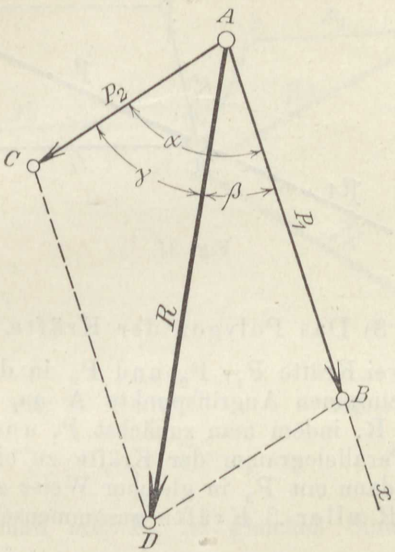


Fig. 33.

d) Immer wiederkehrend ist noch der Fall, dafs die Seitenkräfte P_1 und P_2 senkrecht aufeinander stehen müssen, und dafs die eine oder andere Seitenkraft mit der zu zerlegenden Mittelkraft R einen bestimmten Winkel bilden soll.

Hier erfolgt die Zerlegung entsprechend Fig. 29), indem man die eine Seitenkraft, z. B. P_1, unter dem Winkel β an die zu zerlegende Mittelkraft R anträgt und in A eine Senkrechte auf P_1 errichtet. Von D aus vervollständigt man dann in der vorbeschriebenen Weise zum Parallelogramm.

Durch Rechnung bestimmt sich hierbei die Gröfse der Seitenkräfte aus Formel 106) zu:

$$P_1 = \sqrt{R^2 - P_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 108)$$

$$P_2 = \sqrt{R^2 - P_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 109)$$

Gleichgewicht zwischen zwei Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte wird stattfinden, wenn in diesem eine Kraft R_1 zur Wirkung gelangt, welche genau so grofs ist wie die Mittelkraft R der gegebenen Seitenkräfte, dieser aber entgegengesetzt gerichtet ist (Fig. 34). Man nennt diese Kraft R_1 die „entgegengesetzte Mittelkraft".

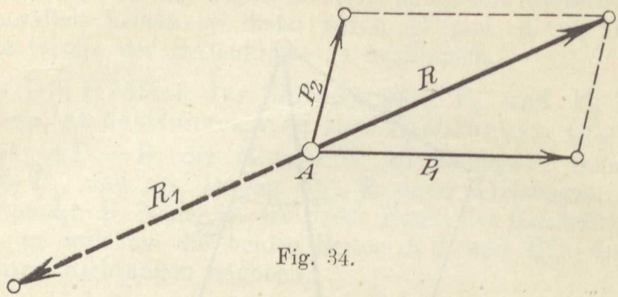


Fig. 34.

3) Das Polygon der Kräfte.

Greifen drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 in derselben Ebene an einem gemeinsamen Angriffspunkte A an, so findet man die Mittelkraft R, indem man zunächst P_1 und P_2 nach dem Gesetze vom Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft R_1, und diese dann mit P_3 in gleicher Weise zur gesuchten Mittelkraft R aller 3 Kräfte zusammensetzt. (Fig. 35.)

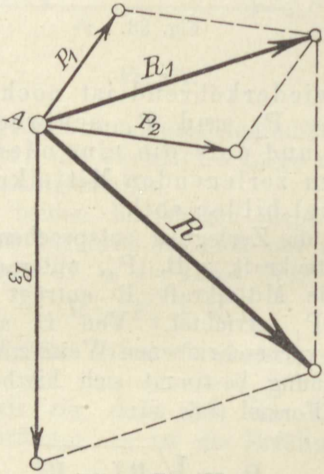


Fig. 35.

Einfacher gestaltet sich die Zeichnung unter Anwendung des Kräftedreiecks. Zum Vergleich nehme man in Fig. 36) dieselben Kräfte P_1, P_2 und P_3 nach Gröfse und Richtung an, wie in Fig. 35) und zeichne in Fig. 37), von A ausgehend,

A b parallel und $= P_1$;

in b trage man, genau wie bei Fig. 30) beschrieben, der Gröfse und Richtung nach P_2 an, mache also in Fig. 37)

bc parallel und $= P_2$.

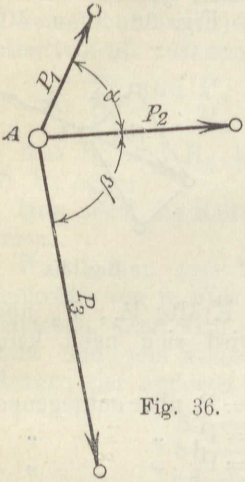


Fig. 36.

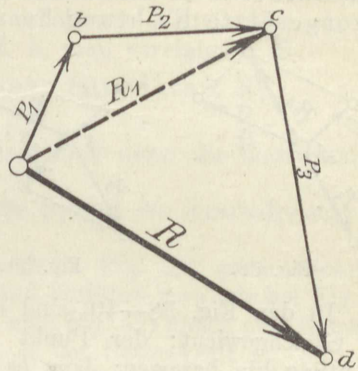


Fig. 37.

Verfährt man mit P_3 im gleichen Sinne, macht man also in Fig. 37)

cd parallel und $= P_3$,

so erhält man den Kräftezug Abcd. Zieht man jetzt in diesem die Schlufslinie Ad, so ist diese nach Gröfse und Richtung die gesuchte Mittelkraft R der 3 Seitenkräfte P_1, P_2 und P_3 und braucht nur nach Gröfse und Richtung in Fig. 36) übertragen zu werden. Verbindet man noch A mit c, so ist $Ac = R_1 =$ der Mittelkraft von P_1 und P_2.

Die Fig. 35 u. 37) lassen sofort die Übereinstimmung und Richtigkeit erkennen.*)

Es ist in jedem Falle ganz gleichgültig, in welcher Reihenfolge die 3 Kräfte zusammengesetzt werden; man kann auch P_1 mit P_3, oder P_2 mit P_3 zu R_1 zusammensetzen, und diese dann mit P_2 bzw. P_1 zu der Gesamtmittelkraft R vereinigen.

Gleichgewicht wird herbeigeführt werden, wenn man in Fig. 35 oder 36) im Punkte A die entgegengesetzte Mittelkraft angreifen läfst.**) Aus dem Vorstehenden läfst sich folgendes Gesetz ableiten:

---

*) Der Lernende zeichne beide Figuren unter Annahme ganz beliebiger Kräfte mafsstäblich auf.

**) Vgl. Seite 110 und Fig. 34.

Gleichgewicht zwischen 3 Seitenkräften P_1, P_2 und P_3, die auf einen Punkt wirken, wird auch dann stattfinden, wenn jede derselben genau gleich der Mittelkraft der beiden anderen ist, jedoch die entgegengesetzte Richtung besitzt. (Fig. 38, 39 u. 40.)

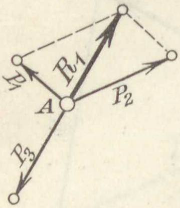


Fig. 38.

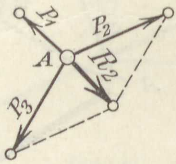


Fig. 39.

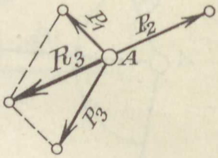


Fig. 40.

In den Fig. 38—40) sind die 3 Kräfte P_1, P_2 und P_3 im Gleichgewicht; der Punkt A wird sich nach keinerlei Richtung hin bewegen; denn es ist

in Fig. 38): R_1 Mittelkraft v. P_1 u. $P_2 = P_3$ aber entgegengesetzt
„ „ 39): R_2 „ „ P_2 „ $P_3 = P_1$ „ „
„ „ 40): R_3 „ „ P_1 „ $P_3 = P_2$ „ „

gerichtet. Eine genaue Zeichnung ergibt den besten Beweis!

Greifen mehrere nach verschiedenen Richtungen wirkende Kräfte P_1, P_2, P_3 .... P_n an einem Punkte A an (Fig. 41), so kann man nach dem Vorstehenden verschiedene Wege zur Bestimmung der Mittelkraft R einschlagen:

Man setze zunächst P_1 und P_2 nach der Parallelogramm-Konstruktion zu einer Mittelkraft R_1 zusammen, dann diese in gleicher Weise mit P_3 zu einer neuen Mittelkraft R_2,

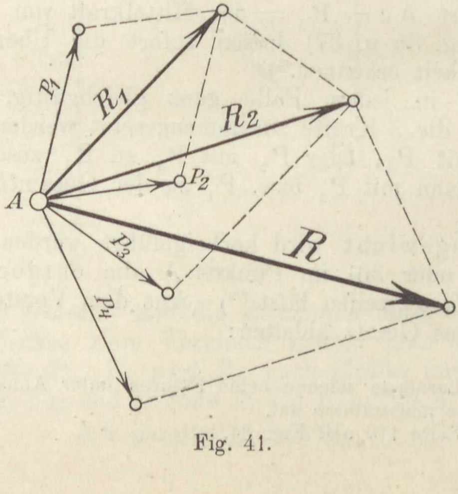


Fig. 41.

welche bei 4 angenommenen Seitenkräften endlich mit P_4 vereinigt, die Gesamtmittelkraft R aller tätigen Seitenkräfte nach Gröſse und Richtung ergibt; oder:

Man vereinige immer je 2 Seitenkräfte zu einer Mittelkraft, und setze schlieſslich die so erhaltenen Mittelkräfte zur Gesamtmittelkraft zusammen; d. h. man vereinige z. B.

P_1 und P_2 zu einer Mittelkraft R_1,
P_3 „ P_4 „ „ „ R_2.

Aus R_1 und R_2 bestimme man dann die Gesamtmittelkraft R; oder:

Man setze die Seitenkräfte mittels des Kräftedreiecks zusammen.

Wählt man zum Vergleich in Fig. 42) genau dieselben Seitenkräfte wie in Fig. 41), und verfährt man wie bei Fig. 37) beschrieben, dann wird, wenn man Fig. 42) gleich zum Zeichnen benutzt und vom Endpunkte b der Seitenkraft P_1 mit dem Auftragen der anderen Seitenkräfte beginnt:

Ab = ... P_1,
bc = und parallel P_2,
cd = „ „ P_3 und
de = „ „ P_4.

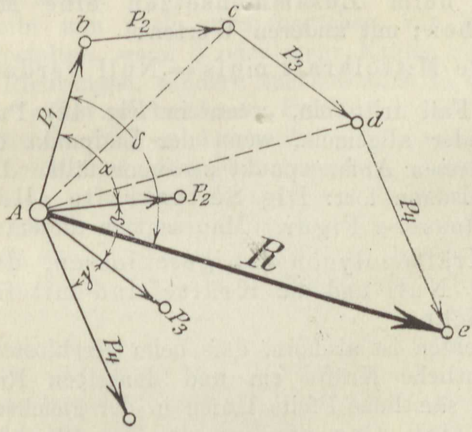


Fig. 42.

Es entsteht der **Kräftezug Abcde** mit der **Schluſslinie** Ae, welche die Mittelkraft R der 4 Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 darstellt.

Die Fig. AbcdeA nennt man das „**Polygon der Kräfte**".*)

*) Auch **Kräftevieleck** genannt.

Die Pfeile der nacheinander aufgetragenen Seitenkräfte haben sämtlich die **gleiche** Richtung, die Pfeilrichtung von R ist **entgegengesetzt**; sie geht immer vom Angriffspunkte (Anfangspunkte) zum Endpunkte des Kräftezuges.

Die Reihenfolge, in welcher die Seitenkräfte aneinander angetragen werden, ist auch hier gleichgültig. Schlägt man eine andere Reihenfolge als die in Fig. 42) vorgenommene ein, so ergibt das wohl einen anderen Kräftezug, **aber stets dieselbe Schlufslinie.** Man überzeuge sich durch die Zeichnung!

Zieht man in Fig. 42) von A aus die Diagonalen Ac und Ad, so ist im Vergleich mit Fig. 41)

$$\begin{aligned} Ac &= \text{der Mittelkraft } R_1 \text{ aus } P_1 \text{ und } P_2, \\ Ad &= \text{"} \quad \text{"} \quad R_2 \text{ " } R_1 \text{ " } P_3 \end{aligned}$$

und ist damit der Zusammenhang und die Übereinstimmung der beiden Verfahren ersichtlich gemacht.

Gleichgewicht kann durch die Wirkung der entgegengesetzten Mittelkraft herbeigeführt werden.

Sollen jedoch die Seitenkräfte in sich im Gleichgewicht sein, so müssen sie sich in ihrer Wirkung aufheben, d. h. es darf sich beim Zusammensetzen eine Mittelkraft nicht ergeben; mit anderen Worten:

Die Mittelkraft mufs = Null werden.

Dieser Fall tritt ein, wenn in Fig. 42) Punkt e mit Punkt A, oder allgemein, wenn der Endpunkt des Kräftezuges mit dessen Anfangspunkt zusammenfällt. Die Schlufslinie fällt alsdann fort: Die Seitenkräfte allein bilden eine geschlossene Figur. Man sagt in diesem Falle:

Das Kräftepolygon ist geschlossen, die Mittelkraft ist = Null und die Kräfte sind miteinander im Gleichgewicht.

Zu beachten ist alsdann, dafs beim geschlossenen Kräftepolygon sämtliche Kräfte ein und denselben Richtungssinn haben, d. h. sämtliche Pfeile laufen in der gleichen Richtung; es dürfen sich also nie, wie in Fig. 42) bei Punkt e, zwei Pfeile treffen.

Wollte man demnach Fig. 42) zur Gleichgewichtsfigur machen, so müfste man den Pfeil von R umkehren und ihn vom Punkte e weg nach dem Angriffspunkte A verlegen. Daraus geht unmittelbar hervor, dafs man bei geschlossenem Kräftepolygon jede einzelne Seitenkraft P als die Mittelkraft aller anderen tätigen Seitenkräfte auffassen kann, natürlich entgegengesetzt der Richtung, die sie sonst im

Polygon besitzt. Kehrt man also in einem geschlossenen Kräftepolygon den Pfeil einer Seitenkraft um, so wird diese damit zur Mittelkraft aller anderen Seitenkräfte.

Es ist der zeichnerischen Methode der Kräfte-Zusammensetzung bzw. -Zerlegung hier in besonderer Weise der Vorzug gegeben worden; die rechnende Methode erfordert trigonometrisches Wissen, das wohl nicht allen Lesern dieser Abhandlung geläufig sein dürfte. Erwähnt soll dabei werden, dafs, wenn auch die graphische Methode nicht so viel Genauigkeit sichert wie die rechnende, sie doch eine genügende Kontrolle für Rechnungen jeder Art bietet und im allgemeinen auch vor groben Fehlern schützt.

C) Kräfte, die an verschiedenen Punkten angreifen und in derselben Ebene wirken.

Bisher war angenommen, dafs die Kräfte, welche auf einen Körper in derselben Ebene nach beliebigen Richtungen wirkten, einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt hatten; die übrigen materiellen Punkte, aus denen der Körper bestand, waren nicht weiter berücksichtigt worden, da ihre Bewegung als genau gleich derjenigen vorausgesetzt war, welche der Angriffspunkt selbst besafs.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn 2 oder mehr Kräfte nicht nur nach beliebigen Richtungen, sondern zugleich auch an verschiedenen, miteinander starr verbundenen Punkten eines Körpers angreifen. Die Punkte, an denen die Kräfte dabei unmittelbar angreifen, nennt man auch hier die „Angriffspunkte“.

Man kann sich dabei die einzelnen Punkte durch gerade Linien unveränderlich und unverschiebbar verbunden denken, also so, dafs die gegenseitige Entfernung der einzelnen Punkte unverändert bleibt. Ein derartiges System von materiellen Punkten nennt man ein „starres System“; man kommt dem Begriffe eines „starren oder absolut festen Körpers“ dabei um so näher, je gröfser man die Anzahl und je kleiner man die Entfernung zweier benachbarter Punkte annimmt.

Aus diesem und dem auf Seite 96) angeführten Satze, dafs man den Angriffspunkt einer Kraft in einen beliebigen Punkt ihrer Richtungslinie verlegen kann, wenn letzterer mit dem ersteren unveränderlich verbunden ist, geht ohne weiteres hervor, dafs aufser dem eigentlichen Angriffspunkte der Kraft auch alle die Punkte eines festen Körpers, welche in der Richtungslinie der Kraft liegen, als Angriffspunkte angesehen werden können. Es ist also für den in Fig. 43) dargestellten festen Körper ganz

8*

gleichgültig, ob die Kraft P in den Punkten A, B, C, D oder E ihrer Richtungslinie angreift; ihre Wirkung auf den Körper wird in jedem Falle dieselbe bleiben.

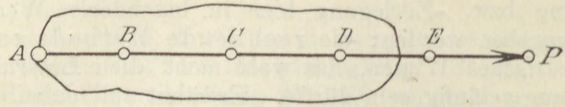


Fig. 43.

Nimmt man zunächst nur 2 Kräfte P_1 und P_2 an, die an den Punkten A und B eines festen und starren Körpers angreifen (Fig. 44), so wird nach dem Vorstehenden an der Wirkung dieser Kräfte auf den Körper nichts geändert, wenn man sie in dem durch die Verlängerung ihrer Richtungslinien über A und B hinaus entstehenden gemeinschaftlichen Angriffspunkte D angreifen läſst. Durch die Verlegung der Angriffspunkte A und B in den gemeinsamen Angriffspunkt D, ist dieser Fall auf den bei Fig. 27) behandelten zurückgeführt.

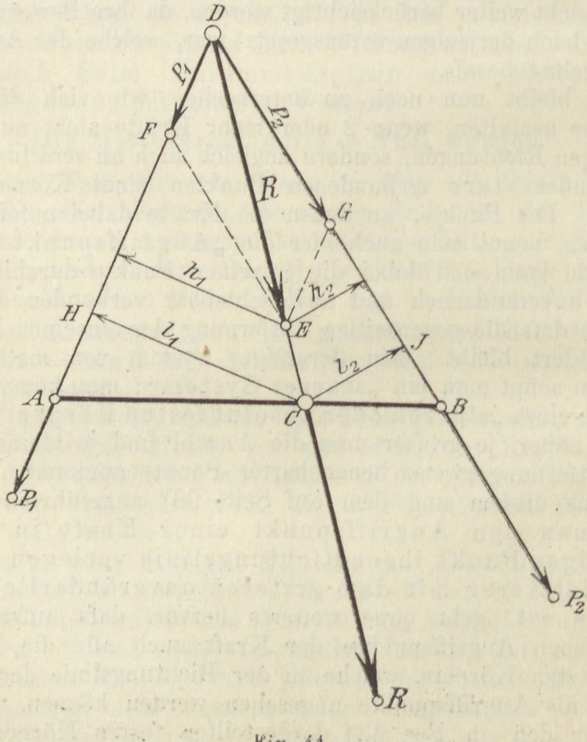


Fig. 44.

Setzt man nun in D die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 nach dem Kräfteparallelogramm zusammen, indem man $DF = P_1$, $DG = P_2$, ferner EG parallel DF und EF parallel DG macht, so findet man in der Diagonalen DE des Parallelogramms DFEG die gesuchte Mittelkraft R sowohl der Gröſse als auch der Richtung nach. Als Angriffspunkt derselben kann nach dem vorher Gesagten jeder Punkt des Körpers angenommen werden, der in ihrer Richtungslinie DE oder in deren Verlängerung über E hinaus liegt; man kann also den gemeinsamen Angriffspunkt D in den Schnittpunkt C der Richtungslinie mit der starren Linie AB verschieben. Die nunmehr in C angreifende Mittelkraft R ersetzt dann die ursprünglich in A und B angreifenden, gegebenen Kräfte P_1 und P_2 vollkommen.

Es ist nach Fig. 44):

$$\triangle DEF \cong \triangle DEG.\text{*)}$$

Zeichnet man von Punkt E aus die Höhen h_1 und h_2 dieser beiden Dreiecke ein, macht man also h_1 senkrecht DF und h_2 senkrecht DG, dann erhält man, da die Flächeninhalte**) dieser Dreiecke einander gleich sind,

$$\frac{DF \cdot h_1}{2} = \frac{DG \cdot h_2}{2}$$

oder nach der Konstruktion, und da sich 2 hebt:***)

$$P_1 \cdot h_1 = P_2 \cdot h_2.$$

Dafür kann man aber auch schreiben:†)

$$P_1 : P_2 = h_2 : h_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Zieht man von C aus die beiden Senkrechten l_1 und l_2 auf die Richtungslinien der Seitenkräfte P_1 und P_2, so verhält sich in dem dadurch entstandenen Dreieck DCJ:††)

$$h_2 : l_2 = DE : DC \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

und in dem Dreieck DCH:††)

$$h_1 : l_1 = DE : DC \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

---

*) Dritter Kongruentsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Seiten des einen bezüglich gleich sind den drei Seiten des anderen.

**) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus einer Seite desselben und der zugehörigen Höhe.

***) Vgl. I. Teil; Seite 52 unter 75, c.

†) „ I. „ „ 77 „ 88.

††) Die Parallele mit einer Dreieckseite verhält sich zu dieser, wie der am Scheitel liegende Abschnitt jeder der beiden anderen Seiten zu der betreffenden Seite.

Da die rechten Seiten der Gleichungen II u. III) einander gleich sind, so folgt:

$$h_2 : l_2 = h_1 : l_1 \text{ oder auch:*)}$$
$$h_2 : h_1 = l_2 : l_1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{IV)}$$

Setzt man in Gleichung I) an die Stelle von $h_2 : h_1$ den gleichen Wert $l_2 : l_1$ aus Gleichung IV) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{P_1 : P_2 = l_2 : l_1} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbf{110)}$$

in Worten: Die senkrechten Abstände des Angriffspunktes der Mittelkraft von den Richtungslinien der Seitenkräfte, verhalten sich umgekehrt wie diese Seitenkräfte.

Da der Angriffspunkt der Mittelkraft beliebig in der Richtungslinie derselben verschoben werden kann, so gilt dieser Satz für jeden Punkt der Mittelkraft; in Fig. 44) also auch für den Punkt E, wie Gleichung I) übrigens zeigt.

Aus Gleichung 110) erhält man**)

$$\mathbf{P_1 . l_1 = P_2 . l_2} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbf{111)}$$

in Worten: Die Produkte aus den senkrechten Abständen des Angriffspunktes der Mittelkraft von den Richtungslinien der Seitenkräfte und den Gröfsen dieser, sind einander gleich.

Auch dieser Satz gilt nach dem vorstehend Gesagten für jeden Punkt der Mittelkraft.

Durch Gleichung 110 u. 111) und den hinzugefügten Erklärungen ist die Lage des Punktes C bestimmt.

Man nennt allgemein das Produkt aus der Gröfse einer Kraft und dem senkrechten Abstande eines beliebigen Punktes von der Richtungslinie derselben, das **„statische Moment“** dieser Kraft in bezug auf die durch den Punkt gehende, auf der Ebene der Kraft und des Punktes senkrecht stehende Achse.

Wirken auf einen Körper beliebig viele in einer Ebene liegenden Kräfte ein, deren Richtungslinien sich nicht in einem Punkte schneiden, so kann die Mittelkraft in folgender Weise bestimmt werden: Man verlängere 2 der gegebenen Kraftlinien bis zu ihrem Schnittpunkte und setze sie in diesem, wie vorstehend beschrieben, zu einer Mittelkraft zusammen; diese und eine dritte der gegebenen Kräfte bringt man wieder zum Schnitt, und setzt sie hier zu einer weiteren Mittelkraft zusammen, ein Verfahren, das so lange wiederholt wird, bis

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 78 unter 91.
**) „ I. „ ; „ 75 „ 86.

sämtliche gegebenen Seitenkräfte berücksichtigt und zu einer Gesamtmittelkraft zusammengesetzt sind. Hierbei ist das über das Polygon der Kräfte Gesagte zu beachten.

Bei der beliebigen Lage der Kräfte in einer Ebene wird häufig der Fall vorkommen, dafs die eine Kraft am Angriffspunkte drückend, die andere aber ziehend auftritt. Hier bietet sich dann sehr bald Gelegenheit zu falscher und fehlerhafter Zusammensetzung, wie solche in den Fig. 45 u. 46) gezeigt ist.

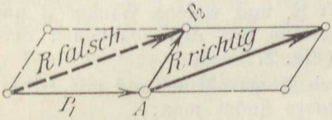


Fig. 45.

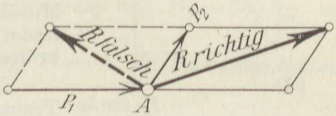


Fig. 46.

Um diese Fehler zu vermeiden, zeichne man beide Seitenkräfte so, dafs sie stets ziehend am Angriffspunkte auftreten, wie das auch in den Fig. 27—44) durchgeführt ist und durch Verschieben der Kräfte in ihren Richtungslinien jederzeit erreicht werden kann.

Beispiele:*)

82) An einem Punkte A greifen in ein und derselben Richtung die Seitenkräfte $P_1 = 30$ kg, $P_2 = 48$ kg, $P_3 = 12$ kg und $P_4 = 55$ kg an. Wie grofs ist die Mittelkraft R? (Fig. 22.)

Nach Formel 104) erhält man:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 30 + 48 + 12 + 55 = 145 \text{ kg}.$$

83) In derselben geraden Linie greifen an einem Punkte A die Seitenkräfte $P_1 = 28$ kg, $P_2 = 62$ kg, $P_3 = 25$ kg und $P_4 = 52$ kg nach der einen Richtung, und nach der entgegengesetzten die Seitenkräfte $Q_1 = 21$ kg, $Q_2 = 17$ kg und $Q_3 = 39$ kg an; wie grofs ist die Mittelkraft R, und in welcher Richtung übt sie ihre Wirkung aus? (Fig. 26.)

Nach Formel 105) erhält man:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - (Q_1 + Q_2 + Q_3) \text{ oder:}$$
$$R = 28 + 62 + 25 + 52 - 21 - 17 - 39 = 90 \text{ kg}.$$

Die Mittelkraft wirkt in der Richtung der Kräfte P_1 bis P_4.

84) Zwei Seitenkräfte, $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 35$ kg, wirken unter einem rechten Winkel auf einen Punkt A; wie grofs ist die Mittelkraft R? (Fig. 29.)

Nach Formel 107) erhält man:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{20^2 + 35^2} = \sqrt{1625} = 40{,}31 \text{ kg}.$$

*) Es wird sich in jedem Falle empfehlen, die Beispiele, zu deren Lösung das Parallelogramm oder das Polygon der Kräfte angewendet werden mufs, mafsstäblich aufzuzeichnen. Der Mafsstab ist hierbei möglichst grofs zu wählen.

85) Auf einen Zapfen (Fig. 47), wird in wagerechter Richtung ein Zug $P_1 = 130$ kg und in senkrechter Richtung ein Druck $P_2 = 250$ kg ausgeübt; welche Belastung P hat der Zapfen überhaupt aufzunehmen?

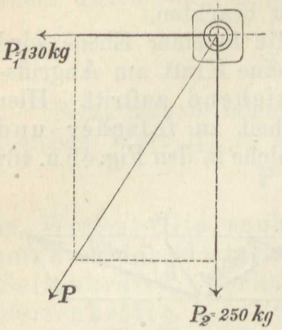


Fig. 47.

Entsprechend Formel 107) erhält man:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}, \text{ d. i.}$$

$$P = \sqrt{130^2 + 250^2} = \sqrt{79400} = 281{,}78 \text{ kg}.$$

86) Zwei Seitenkräfte, $P_1 = 15$ kg und $P_2 = 10$ kg, wirken unter einem Winkel $\alpha = 60^0$ auf einen Punkt A; wie grofs ist die Mittelkraft R, und welche Winkel β und γ bildet dieselbe mit den gegebenen Seitenkräften? (Fig. 27.)

Durch Konstruktion und mit Hilfe des Transporteurs findet man:

$$R = 21{,}79 \text{ kg}; \quad \beta = 23^0\ 10'; \quad \gamma = 36^0\ 50'.$$

87) Es sind die beiden Seitenkräfte $P_1 = 60$ kg und $P_2 = 25$ kg gegeben, welche einen Winkel $\alpha = 40^0$ einschliefsen; welche Winkel β und γ bildet die Mittelkraft R mit den gegebenen Seitenkräften und wie grofs ist dieselbe? (Fig. 27.)

$$R = 80{,}76 \text{ kg}; \quad \beta = 11^0\ 25'; \quad \gamma = 28^0\ 35'.$$

88) Zwei gleiche Seitenkräfte P_1 und P_2, jede $= 2750$ kg, wirken unter einem Winkel $\alpha = 120^0$ auf einen Punkt A; wie grofs wird die Mittelkraft R? (Fig. 48.)

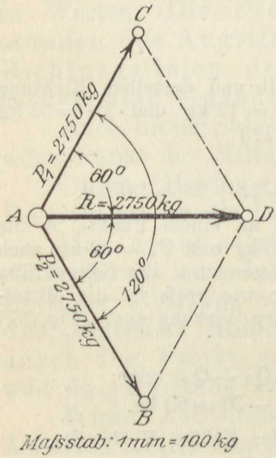


Fig. 48.

Durch Konstruktion findet man: R = 2750 kg.

Da $P_1 = P_2$ ist, so sind in dem Parallelogramm ABDC alle Seiten einander gleich; die Diagonale AD = R halbiert deshalb den Winkel von 120^0. Die Dreiecke ABD und ACD sind aber nach Konstruktion gleichschenklich, folglich sind die Winkel bei B, C und D ebenfalls je $= 60^0$ und damit die Dreiecke auch gleichseitig; mithin:

$$AB = AC = AD = 2750 \text{ kg}.$$

89) Drei Seitenkrätfte, $P_1 = 300$ kg, $P_2 = 400$ kg und $P_3 = 500$ kg, wirken auf einen Punkt A. P_1 und P_2 bilden einen Winkel $\alpha = 40^0$, P_2 und P_3 einen Winkel $\beta = 50^0$; wie grofs ist die Mittelkraft R? (Fig. 36.)

Durch Konstruktion findet man: R = 970 kg.

90) An einem Punkte A eines Körpers wirken die 4 Seitenkräfte $P_1 = 25$ kg, $P_2 = 36$ kg, $P_3 = 40$ kg, $P_4 = 85$ kg. P_1 und P_2 bilden einen Winkel $\alpha = 45^0$, P_2 und P_3 einen Winkel $\beta = 80^0$, P_3 und P_4 einen Winkel $\gamma = 70^0$; wie grofs ist die Mittelkraft R? (Fig. 42.)

Durch Konstruktion findet man: R = 65 kg.

91) An einem gemeinsamen Angriffspunkte A greifen die 4 Seitenkräfte $P_1 = 185$ kg, $P_2 = 357$ kg, $P_3 = 328$ kg und $P_4 = 445$ kg an.

P_1 und P_2 bilden einen Winkel $\alpha = 30^0$, P_2 und P_3 einen Winkel $\beta = 70^0$ und P_3 schliefst mit P_4 einen Winkel $\gamma = 50^0$ ein. Wie grofs ist die Mittelkraft R, und welchen Winkel δ bildet sie mit P_1? (Fig. 42.)

Durch Konstruktion des Kräftepolygons findet man:

$$R = 725 \text{ kg}; \quad \delta = 85^0\ 50'.$$

92) Auf einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt A wirken in derselben Geraden, aber nach entgegengesetzten Richtungen, 2 Seitenkräfte $P_1 = 1000$ kg und $P_2 = 600$ kg; senkrecht zu diesen, ebenfalls in ein und derselben Geraden und nach entgegengesetzten Richtungen, greifen am Punkte A zwei weitere Kräfte, $P_3 = 500$ kg und $P_4 = 200$ kg, an. Wie grofs ist die Mittelkraft R?

Man vereinige zunächst entsprechend Formel 105) die beiden Seitenkräfte P_1 und P_2 zur Mittelkraft

$$R_1 = P_1 - P_2 = 1000 - 600 = 400 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise setze man P_3 und P_4 zur Mittelkraft

$$R_2 = P_3 - P_4 = 500 - 200 = 300 \text{ kg} \quad \text{zusammen.}$$

Da die Richtungslinien dieser beiden Mittelkräfte senkrecht aufeinander stehen, so erhält man die Gesamtmittelkraft R entsprechend Formel 107):

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = \sqrt{250000} = 500 \text{ kg}.$$

93) Eine gegebene Kraft $R = 100$ kg soll in 2 Seitenkräfte, $P_1 = 72$ kg und $P_2 = 48$ kg, zerlegt werden; welche Winkel β und γ schliefsen diese mit R ein, und welchen Winkel α bilden sie miteinander?

Die Zerlegung hat hier nach dem auf Seite 108 besprochenen Falle b) und nach Fig. 32) zu erfolgen.

Durch Konstruktion findet man:

$$\beta = 26^0\ 34' \quad \text{und} \quad \gamma = 42^0\ 7'.$$

Winkel α ist gleich der Summe beider, d. h:

$$\alpha = \beta + \gamma = 26^0\ 34' + 42^0\ 7' = 68^0\ 41'.$$

94) Eine gegebene Kraft $R = 300$ kg ist in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zu zerlegen. P_1 bildet mit R einen Winkel $\beta = 40^0$, P_2 einen solchen von $\gamma = 50^0$. Welche Gröfsen erhalten die Seitenkräfte?

Die Zerlegung erfolgt hier nach dem auf Seite 109 unter d) besprochenen Falle und nach Fig. 29.)

Durch Konstruktion findet man:

$$P_1 = 230 \text{ kg} \quad \text{und} \quad P_2 = 192 \text{ kg}.$$

95) Auf einer wagerechten Unterlage ruht ein Körper, dessen Gewicht 400 kg beträgt; an dem Punkte A desselben greift unter einem Winkel von 60^0 zur Wagerechten eine Kraft $R = 300$ kg an. Um wieviel Kilogramm verringert sich unter dem Einflusse dieser Kraft der Druck auf die Unterlage, und welche wagerecht gerichtete Kraft wird den Körper auf der Unterlage fortbewegen wollen? (Fig. 49.)

Der Druck des Körpers ist senkrecht nach unten gerichtet, folglich mufs die Seitenkraft P_2, welche diesen Druck vermindern soll, senkrecht nach oben gerichtet sein; P_1 soll eine wagerechte Richtung besitzen. Mithin ist die Kraft $R = 300$ kg in 2 senkrecht aufeinander stehende Seitenkräfte zu zerlegen, deren Gröfsen sich nach der Konstruktion in Fig. 49) zu

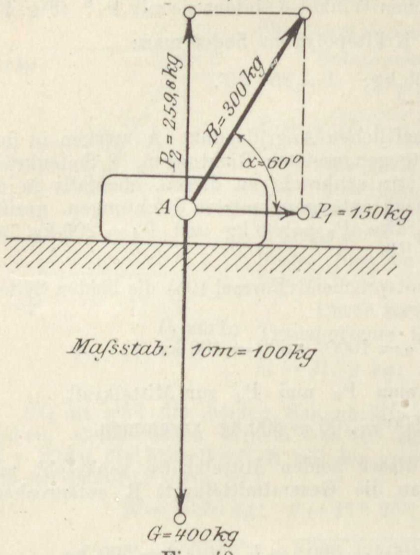


Fig. 49.

$P_1 = 150$ kg und $P_2 = 259{,}8$ kg ergeben. Damit wird der Druck, den der Körper nun tatsächlich auf die Unterlage ausübt, nur noch

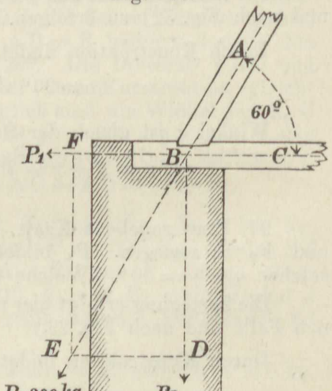
$$G - P_2 = 400 - 259{,}8 = 140{,}2 \text{ kg}$$

betragen; die Kraft, die ihn in dem vorliegenden Falle nach rechts hin zu bewegen sucht, ist $P_1 = 150$ kg.

96) In der Richtung eines Dachsparrens (Fig. 50), wirkt unter einem Winkel von 60° ein Druck $P = 900$ kg; es sollen der H o r i z o n t a l s c h u b P_1 und der V e r t i k a l d r u c k P_2 bestimmt werden, welche die Mauer auszuhalten hat.

Nimmt man auf der Richtungslinie der zu zerlegenden Kraft P ein Stück BE an, welches die Gröfse dieser Kraft darstellt, und zieht man BD senkrecht und BF wagerecht, ferner von E aus DE parallel BF und EF parallel BD, so stellt BD den V e r t i k a l d r u c k und BF den H o r i z o n t a l s c h u b vor.

Fig. 50.



Mafsstab : 1 mm= 30 kg.

Durch Konstruktion ergibt sich:

$P_1 = 450$ kg;
$P_2 = 779{,}4$ kg.

97) Die Neigung des Dachsparrens in nebenstehender Figur sei $= 45°$ und der in Punkt B auf die Mauer ausgeübte Druck $P = 2050$ kg; wie grofs werden in diesem Falle die Seitenkräfte P_1 und P_2?

Da hier $\measuredangle ABC = \measuredangle FBE = 45°$ ist, so wird das Parallelogramm BDEF zum Quadrat; mithin $BF = EF$.

Folglich:

$$2050^2 = \overline{BF}^2 + \overline{EF}^2 \text{ oder}$$

$$2050^2 = 2\,\overline{BF}^2. \text{ Hieraus ergibt sich:}$$

$$\overline{BF}^2 = \frac{2050^2}{2} = \frac{4202500}{2} = 2101250 \text{ und damit:}$$

$$\overline{BF} = P_1 = P_2 = \sqrt{2101250} = 1449{,}5 \text{ kg}.$$

98) An der Hängesäule eines einfachen Sprengwerkes (Fig. 51), wirkt in senkrechter Richtung ein Zug P = 3000 kg; die Streben sind unter einem Winkel von 36° gegen eine wagerechte Gerade geneigt. Welchen Druck erhält jede Strebe?

Durch Konstruktion findet man den

Druck in jeder Strebe = 2551 kg.

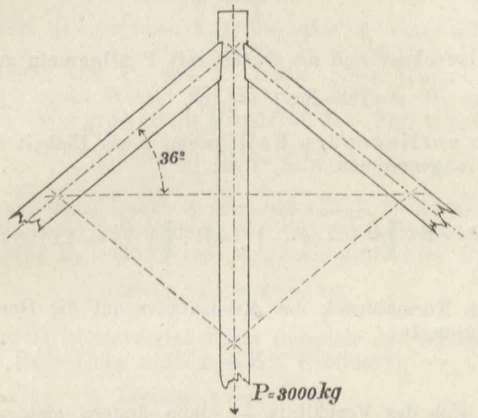
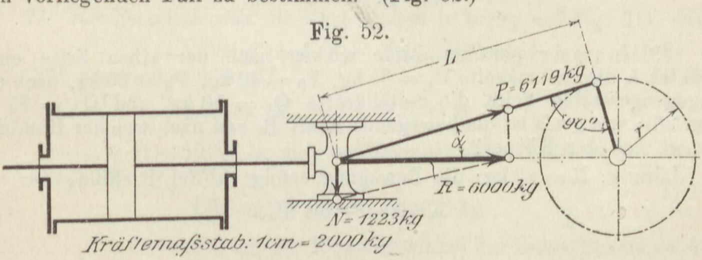


Fig. 51.

99) Eine Dampfmaschine besitzt einen Kurbelhalbmesser r = 500 mm und, wie üblich, eine Pleuelstangenlänge L = 5 . r = 5 . 500 = 2500 mm;*) die Kolbenstange überträgt auf den Kreuzkopf einen Druck R = 6000 kg. Dieser Druck wird am Kreuzkopfe in zwei Seitendrucke zerlegt, von denen der eine, N, senkrecht zur Kolbenstange steht, also dem Drucke entspricht, mit dem der Kreuzkopf senkrecht gegen die Geradführung gepreſst wird, und der andere, P, in der Längsrichtung der Pleuelstange auf den Kurbelzapfen übertragen wird. Beide Seitendrucke erhalten ihren gröſsten Wert, wenn Kurbel und Pleuelstange so zueinander stehen, daſs sie einen rechten Winkel miteinander bilden. N und P sind für den vorliegenden Fall zu bestimmen. (Fig. 52.)

Fig. 52.



Führt man die Zerlegung der Kraft R maſsstäblich**) und wie in Fig. 52) angegeben aus, so findet man:

N = 1223 kg und
P = 6119 kg.

---

*) Vgl. II. Teil; Seite 38.

**) Es wird sich empfehlen hierzu den Maſsstab gröſser zu wählen als in Fig. 52) angegeben.

Erwähnt mag bei dieser Gelegenheit werden, dafs für den vorliegenden Fall der Winkel α, den R und P miteinander bilden, $= 11^0\ 20'$ wird.

Bezeichnet man das Verhältnis der Kurbellänge r zur Pleuelstangenlänge L mit n, so wird

$$\frac{r}{L} = n.$$

Damit berechnet sich die Seitenkraft P **allgemein** zu:

$$P = R \, . \sqrt{1 + n^2},$$

also für den vorliegenden Fall, wenn r als Einheit für die Pleuelstangenlänge angenommen wird,*) zu:

$$P = R \, . \sqrt{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = R \, . \sqrt{\frac{26}{25}} = 1{,}0198 \, . \, R.$$

Für den Normaldruck des Kreuzkopfes auf die Geradführung erhält man **allgemein:**

$$N = n \, . \, P.$$

Ändert sich das Verhältnis $\frac{r}{L}$, dann ändern sich auch die vorstehend angegebenen Werte.

Übungsbeispiele:

68) An drei verschiedenen Punkten einer geraden Linie AB (Fig. 22), wirken die Seitenkräfte $P_1 = 45$ kg, $P_2 = 52$ kg, $P_3 = 63$ kg nach gleicher Richtung; wie grofs ist die Mittelkraft R?

Lösung: $R = 160$ kg.

69) In einer geraden Linie wirken nach der einen Seite eines Punktes A die Seitenkräfte $P_1 = 35$ kg, $P_2 = 42$ kg, $P_3 = 60$ kg, nach der entgegengesetzten Seite die Seitenkräfte $Q_1 = 50$ kg und $Q_2 = 25$ kg (Fig. 26); wie grofs ist die bewegende Kraft R, und nach welcher Richtung bewegt sich der Körper?

Lösung: $R = 62$ kg; die Bewegung erfolgt in der Richtung der Kräfte P_1 bis P_3.

70) Unter einem rechten Winkel wirken die Seitenkräfte $P_1 = 30$ kg und $P_2 = 50$ kg an einem Punkte A eines Körpers (Fig. 29); wie grofs ist die Mittelkraft R?

Lösung: $R = 58{,}3$ kg.

---

*) Wenn $r = 1$ ist, wird hier $L = 5$!

71) Unter einem Winkel von 72^0 greifen an dem gemeinsamen Angriffspunkte A eines Körpers 2 Seitenkräfte $P_1 = 144$ kg und $P_2 = 108$ kg an. Wie grofs ist die Mittelkraft R, und welche Winkel bilden P_1 und P_2 mit R? (Fig. 27.)

Lösung: $R = 204$ kg;

$\beta = 30^0$; $\gamma = 42^0$.

72) An einem gemeinsamen Angriffspunkte A eines Körpers wirken 4 Seitenkräfte: $P_1 = 75$ kg, $P_2 = 108$ kg, $P_3 = 120$ kg und $P_4 = 255$ kg. Die Richtungslinien von P_1 und P_2 bilden einen Winkel von 45^0, die von P_2 und P_3 einen Winkel von 80^0 und die von P_3 und P_4 einen solchen von 70^0. Wie grofs ist die Mittelkraft R? (Fig. 41 u. 42.)

Lösung: $R = 198$ kg.

73) Eine auf einen Punkt A wirkende Kraft $R = 120$ kg (Fig. 29), soll in zwei aufeinander rechtwinkelig stehende Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine $P_2 = 75$ kg sein mag; wie grofs wird P_1?

Lösung: $P_1 = 93{,}67$ kg.

74) Wie grofs ist in vorstehendem Beispiele der Winkel γ, welchen die Seitenkraft $P_2 = 75$ kg mit der Kraft R bildet?

Lösung: $\gamma = 51^0\ 19'$.

75) Eine gegebene Kraft $R = 250$ kg soll durch 2 in demselben Punkte A angreifende Seitenkräfte P_1 und P_2 ersetzt werden, welche mit R die Winkel $\beta = 30^0$ und $\gamma = 45^0$ einschliefsen. Wie grofs werden P_1 und P_2? (Fig. 31.)

Lösung: $P_1 = 180$ kg und $P_2 = 125$ kg.

76) Wie gestalten sich die Verhältnisse in bezug auf Fig. 50), wenn $P = 2000$ kg und der Neigungswinkel des Dachsparrens zu 30^0 angenommen wird?

Lösung: $P_1 = 1732$ kg und $P_2 = 1000$ kg.

77) Wie gestalten sich die Verhältnisse in bezug auf Fig. 51), wenn

a) $P = 1000$ kg und der Neigungswinkel jeder Strebe zu 30^0 angenommen wird?

Lösung: $P_1 = P_2 = 1000$ kg.*)

b) $P = 10\,000$ kg und der Neigungswinkel jeder Strebe zu 45^0 angenommen wird?

Lösung: $P_1 = P_2 = 7071$ kg.

c) $P = 2000$ kg, der Neigungswinkel der linken Strebe zu 45^0 und derjenige der rechten zu 30^0 angenommen wird?

Lösung: Druck in der linken Strebe = 1800 kg;
„ „ „ rechten „ = 1430 „ .

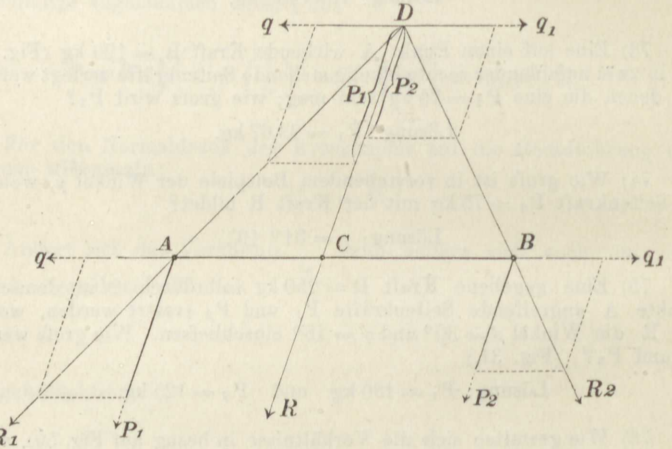
---

*) Vgl. II. Teil; Seite 123, Beispiel 98.

D) Kräfte, die in paralleler Richtung an einem Körper angreifen und in derselben Ebene wirken.

Wirken 2 Kräfte, P_1 und P_2, derartig an den Punkten A und B eines Körpers (Fig. 53), daſs ihre Richtungslinien parallele Linien bilden, so kann man ihre Mittelkraft auf folgende Weise finden:

Fig. 53.



Denkt man sich in den Punkten A und B eines festen und starren Körpers, in der Verlängerung der Verbindungslinie dieser Punkte, zwei gleich groſse Kräfte q und q_1 in entgegengesetzter Richtung wirksam, so werden dieselben den Zustand des Körpers in nichts ändern, da diese Kräfte sich gegenseitig aufheben.*) Nun konstruiere man mit Hilfe des Parallelogramms aus q und P_1 die Mittelkraft R_1, ebenso aus q_1 und P_2 die Mittelkraft R_2 und verlängere die Richtungslinien dieser Mittelkräfte R_1 und R_2, bis sie sich in dem Punkte D schneiden. Zerlegt man in D umgekehrt diese beiden Mittleren wieder in Seitenkräfte, die gleich und parallel denjenigen sind, aus welchen sie zusammengesetzt wurden, so kommen die Komponenten q und q_1, die parallel zur Verbindungslinie der Angriffspunkte A und B gerichtet sind, nicht weiter in Betracht, da sie sich gegenseitig aufheben.

*) Vgl. II. Teil; Seite 102 unter b.

Die beiden anderen Seitenkräfte P_1 und P_2 fallen in eine gerade Linie zusammen und ergeben auf diese Weise die Gröfse der gesuchten Mittelkraft:

$$\mathbf{R = P_1 + P_2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{112)}$$

Die Lage des Angriffspunktes C dieser Mittelkraft findet man aus der Ähnlichkeit der hierbei in Betracht kommenden Dreiecke.

Es ist $\triangle AP_1 R_1 \sim \triangle DCA$, folglich:

$$q : P_1 = AC : DC.$$

Entsprechend verhält sich $q_1 : P_2 = BC : DC.$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so folgt:

$$\frac{q_1}{P_2} : \frac{q}{P_1} = \frac{BC}{DC} : \frac{AC}{DC} \quad \text{oder}$$

$$\frac{q_1 \cdot P_1}{q \cdot P_2} = \frac{BC \cdot DC^{*)}}{DC \cdot AC}.$$

Da sich hier q gegen q_1 und DC gegen DC hebt, so erhält man

$$P_1 : P_2 = BC : AC \quad \text{oder:}$$

$$\mathbf{P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{113)}$$

Es ist also die Mittelkraft gleich der Summe der Seitenkräfte; ihre Richtungslinie ist parallel mit diesen und nach derselben Seite gerichtet. Ihr Angriffspunkt teilt die Verbindungslinie von A und B in zwei Teile derart, dafs das Produkt aus der einen Seitenkraft und ihrem Abstande vom Angriffspunkte der Mittelkraft, gleich ist dem Produkte aus der anderen Seitenkraft und deren Abstande vom Angriffspunkte der Mittelkraft.

Nach vorstehendem verhielt sich:

$$P_1 : P_2 = BC : AC.$$

Hieraus folgt nach den Regeln über das Umformen von Proportionen**):

$$(P_1 + P_2) : P_1 = (BC + AC) : BC \quad \text{oder}$$

$$R : P_1 = AB : BC. \quad \text{Mithin:}$$

$$\mathbf{P_1 = \frac{BC}{AB} \cdot R} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{114)}$$

$$\mathbf{BC = \frac{AB}{R} \cdot P_1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{115)}$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 46 unter 67.
**) „ I. „ ; „ 78 „ 92.

Weiter läſst sich noch folgende Proportion aufstellen:

$$P_2 : (P_1 + P_2) = AC : (BC + AC) \text{ oder}$$

$$P_2 : R = AC : AB. \text{ Mithin:}$$

$$P_2 = \frac{AC}{AB} . R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 116)$$

$$AC = \frac{AB}{R} . P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 117)$$

Gleichgewicht kann entweder durch die Wirkung der entgegengesetzten Mittelkraft herbeigeführt werden oder dadurch, daſs man im Punkte C einen Stützpunkt anbringt. Dieser hätte dann einen Druck gleich der Gröſse der Mittelkraft R aufzunehmen.

Beispiele:

100) An den Punkten A und B eines Körpers, welche 1,6 m voneinander entfernt sind, wirken in paralleler Richtung die Kräfte $P_1 = 32$ kg und $P_2 = 54$ kg. Es ist die Gröſse der Mittelkraft und die Lage des Angriffspunktes derselben zu bestimmen.

Nach Formel 112) erhält man die Mittelkraft:

$$R = P_1 + P_2 = 32 + 54 = 86 \text{ kg}.$$

Die Lage des Angriffspunktes C bestimmt sich nach Formel 115) zu:

$$BC = \frac{AB}{R} \cdot P_1 = \frac{1{,}6 \,.\, 32}{86} = 0{,}595 \text{ m} = 595 \text{ mm}$$

und nach Formel 117) zu:

$$AC = \frac{AB}{R} \cdot P_2 = \frac{1{,}6 \,.\, 54}{86} = 1{,}005 \text{ m} = 1005 \text{ mm}.$$

AC und BC zusammen ergeben die Entfernung $AB = 1{,}6$ m.

101) Zwei parallele Kräfte, $P_1 = 36$ kg und $P_2 = 68$ kg, wirken in gleicher Richtung an den Punkten A und B eines Körpers, welche 2,4 m voneinander entfernt sind. Man soll die Mittelkraft und die Lage des Angriffspunktes derselben bestimmen.

Als Mittelkraft erhält man nach Formel 112):

$$R = P_1 + P_2 = 36 + 68 = 104 \text{ kg}.$$

Setzt man in Fig. 53) die Entfernung $AC = x$, dann wird $BC = AB - x$; mithin entsprechend Formel 113):

$$P_1 \,.\, x = P_2 \,.\, (AB - x) \text{ oder}$$

$$36x = 68 \,.\, (2{,}4 - x).$$

$$36x = 68 \,.\, 2{,}4 - 68x.$$

$$36x + 68x = 68 \,.\, 2{,}4.$$

$$104x = 163{,}2.$$

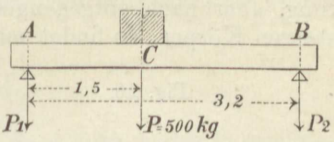
$$x = \frac{163{,}2}{104} = 1{,}57 \text{ m. Folglich:}$$

$$AC = x = 1{,}57 \text{ m und}$$

$$BC = AB - x = 2{,}4 - 1{,}57 = 0{,}83 \text{ m}.$$

102) Ein Balken liegt in den Punkten A und B frei auf und wird in einem Punkte C, der 1,5 m von A entfernt ist, mit 500 kg belastet. Welchen Druck haben die Auflagerpunkte A und B auszuhalten, wenn die Entfernung AB = 3,2 m ist? (Fig. 54.)

Fig. 54.



Nach Formel 114) erhält man:

$$P_1 = \frac{BC}{AB} \cdot R = \frac{(3,2 - 1,5)}{3,2} \cdot 500 = 265,625 \text{ kg}$$

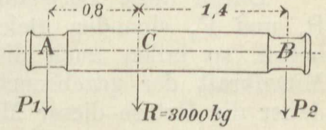
und nach Formel 116):

$$P_2 = \frac{AC}{AB} \cdot R = \frac{1,5 \cdot 500}{3,2} = 234,375 \text{ kg.}$$

P_1 und P_2 ergeben zusammen die Gesamtlast $P = 500$ kg.

103) An einer Achse, deren eine Zapfenmitte um 0,8 m und deren andere um 1,4 m von der Belastungsstelle entfernt ist, wirkt eine Last von 3000 kg. Wie grofs ist der Druck in den Zapfenmitten? (Fig. 55.)

Fig. 55.



Nach Formel 114) erhält man:

$$P_1 = \frac{BC}{AB} \cdot R = \frac{1,4 \cdot 3000}{2,2} = 1909 \text{ kg}$$

und nach Formel 116):

$$P_2 = \frac{AC}{AB} \cdot R = \frac{0,8 \cdot 3000}{2,2} = 1091 \text{ kg.}$$

P_1 und P_2 ergeben zusammen die Gesamtlast $R = 3000$ kg.

Übungsbeispiele:

78) Zwei Kräfte, $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 35$ kg (Fig. 53), wirken in gleicher und paralleler Richtung an zwei fest miteinander verbundenen Punkten eines Körpers, welche 6 m voneinander entfernt sind. Es soll die Mittelkraft und die Lage ihres Angriffspunktes bestimmt werden.

Lösung: $R = 55$ kg;

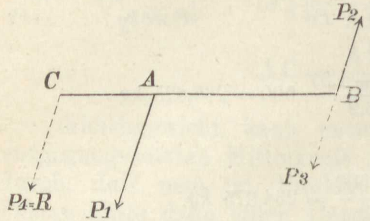
$BC = 2,18$ m; $AC = 3,82$ m.

79) Wie grofs ist die Entfernung AB zweier parallel und in gleicher Richtung wirkenden Kräfte $P_1 = 24$ kg und $P_2 = 60$ kg, welche an zwei fest miteinander verbundenen Punkten eines Körpers angreifen, wenn die Mittelkraft 3 m vom Angriffspunkte der Kraft P_1 entfernt ist? (Fig. 53.)

Lösung: $AB = 1,2$ m.

Wirken die beiden Kräfte P_1 und P_2 in paralleler Richtung, aber nach entgegengesetzten Seiten an einem festen und starren Körper, so findet man die Gröfse und Lage der Mittelkraft, indem man zunächst die gröfsere der beiden Kräfte in zwei parallele Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine genau so grofs wie die kleinere der gegebenen Kräfte, dieser aber entgegengesetzt gerichtet ist. Sind P_1 und P_2 (Fig. 56) die gegebenen Kräfte und ist $P_1 > P_2$, so zerlegt man P_1 in die beiden Seitenkräfte P_3 und P_4 derart, dafs $P_3 = P_2$ und entsprechend $P_4 = P_1 - P_2$ wird.

Fig. 56.



Durch diese Zerlegung kommt P_1 in Fortfall, und da P_2 und P_3 einander gleich sind, sich also gegenseitig aufheben, so fallen auch diese fort und es bleibt nur P_4 als Mittelkraft der gegebenen Kräfte P_1 und P_2 übrig. Es ist daher die Gröfse dieser Mittelkraft

$$R = P_1 - P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 118)$$

Für die Lage des Angriffspunktes erhält man entsprechend Formel 113):

$$R \,.\, AC = P_2 \,.\, AB \text{ und daraus}$$

$$AC = \frac{P_2 \,.\, AB}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 119)$$

Die Richtung von R ist parallel zu derjenigen der gegebenen Kräfte; ihr Richtungssinn ist derselbe, wie derjenige der gröfseren Kraft. Man kann sagen:

Die Mittelkraft zweier paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte ist gleich der Differenz derselben; ihr Angriffspunkt liegt aufserhalb der Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2, nach der Seite der gröfseren Kraft hin; sie hat gleiche Richtung und gleichen Richtungssinn wie diese.

Sind die beiden Kräfte P_1 und P_2 gleich grofs, so lassen sich dieselben nicht mehr zusammensetzen, d. h. es gibt keine einzelne Kraft, welche die Wirkung dieser beiden Kräfte vollkommen zu ersetzen vermöchte.

Zwei derartige parallel gerichtete und gleiche Kräfte bilden ein K r ä f t e p a a r.

Ein Kräftepaar kann keine fortschreitende Bewegung, sondern nur eine drehende Bewegung erzeugen; es ist als die Ursache der Drehbewegung anzusehen.

Auch kann ein Kräftepaar niemals durch eine einzelne Kraft, sondern immer nur durch ein anderes Kräftepaar ersetzt oder aufgehoben werden.

Beispiel:

104) Zwei Kräfte, $P_1 = 60$ kg und $P_2 = 36$ kg, wirken in paralleler, aber entgegengesetzter Richtung in den Punkten A und B eines starren Körpers, welche 1,6 m voneinander entfernt sind. Welche Gröfse, und welche Entfernung AC besitzt die Mittelkraft? (Fig. 56.)

Aus Formel 118) erhält man:

$$R = P_1 - P_2 = 60 - 36 = 24 \text{ kg}$$

und aus Formel 119):

$$AC = \frac{P_2 \,.\, AB}{R} = \frac{36 \,.\, 1{,}6}{24} = 2{,}4 \text{ m.}$$

Achtes Kapitel.

Das statische Moment.

Im vorigen Kapitel wurde erklärt, dafs zwei Kräfte P_1 und P_2, welche in paralleler Richtung an einem Körper wirken, im Gleichgewichte sind, wenn in bezug auf Fig. 53) die Produkte

$$P_1 \,.\, AC \text{ und } P_2 \,.\, BC$$

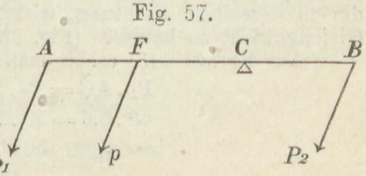
einander gleich sind.

Das Bestreben der Kräfte P_1 und P_2, eine Drehung um einen Stützpunkt C hervorzubringen, ist demnach nicht allein abhängig von der Gröfse der Kräfte selbst, sondern auch von dem Abstande ihrer Angriffspunkte von diesem Stützpunkte.

Die Gröfse dieses Drehbestrebens wird durch die Produkte $P_1 \,.\, AC$ und $P_2 \,.\, BC$ ausgedrückt.

Greift im Punkte F in gleicher Richtung mit den Kräften P_1 und P_2 eine weitere Kraft p an (Fig. 57), so ist nach dem Vorangegangenen das Bestreben dieser Kraft, eine Drehung um C hervorzubringen, $= p \,.\, FC$; das Drehbestreben von P_1 ist aber $= P_1 \,.\, AC$, mithin die Wirkung beid. Kräfte zusammengenommen $= P_1 \,.\, AC + p \,.\, FC$. Damit ergibt sich für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 57.

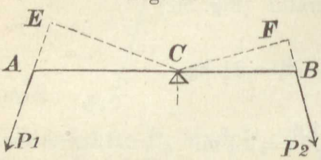


$$P_1 \,.\, AC + p \,.\, FC = P_2 \,.\, BC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 120)$$

Wirken die Kräfte P_1 und P_2 nicht in paralleler Richtung, so verliert die Gleichung $P_1 . AC = P_2 . BC$ ihre Gültigkeit; die Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 (eine Drehung um den Stützpunkt C zu erzeugen) wird eine andere, je nachdem ihre Richtungslinien von der parallelen Lage abweichen.

Denkt man sich in Fig. 58) die Richtungslinien der nicht parallelen Kräfte P_1 und P_2 über ihre Angriffspunkte A und B hinaus verlängert, und vom Drehpunkte C aus die Senkrechten EC und FC auf diese Richtungslinien gefällt, so sind jetzt EC und FC die mafsgebenden Entfernungen der Richtungslinien vom Stützpunkte, mit denen sich für den Gleichgewichtszustand die Beziehung

Fig. 58.



$$P_1 . EC = P_2 . FC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 121)$$

ergibt.

Die Gröfse des Bestrebens einer Kraft, eine Drehung um einen Stütz- oder Drehpunkt hervorzubringen, ist also bei nicht parallelen Kräften gleich dem Produkt aus der Gröfse der Kraft und ihrem **senkrechten** Abstande vom Stützpunkte.

Man nennt dieses Produkt das „Drehungsmoment oder das statische Moment“ einer Kraft und sagt: Die Kräfte P_1 und P_2 sind im Gleichgewicht, wenn ihre statischen Momente einander gleich sind.*)

Sind mehrere Kräfte auf jeder Seite des Dreh- oder Stützpunktes tätig, so wird Gleichgewicht eintreten, wenn die Summe der statischen Momente aller Kräfte, welche rechts herum zu drehen suchen, gleich ist der Summe aller statischen Momente derjenigen Kräfte, welche bestrebt sind eine Drehung nach links hervorzubringen.

Beispiele:

105) An einem starren Körper, welcher in einem Punkte unterstützt ist, wirkt eine Kraft von 50 kg in einem Abstande = 0,6 m vom Stützpunkte; in welchem Abstande von diesem mufs eine Kraft von 30 kg, die in derselben Richtung wirkt, angebracht werden, um jener das Gleichgewicht zu halten? (Fig. 53.)

Aus Formel 113) erhält man:

$$P_1 . AC = P_2 . BC, \text{ d. i.}$$

$$50 . 0{,}6 = 30 . BC; \text{ folglich:}$$

$$BC = \frac{50 . 0{,}6}{30} = 1{,}00 \text{ m.}$$

*) Vgl. II. Teil; Seite 118.

106) An den Punkten A, F und B eines starren Körpers (Fig. 57), greifen die Kräfte $P_1 = 20$ kg, $p = 15$ kg und $P_2 = 60$ kg an; die Entfernung AF beträgt 0,5 m, BF ist = 0,8 m. In welchem Abstande vom Punkte F mufs der Stützpunkt C angebracht werden, wenn Gleichgewicht eintreten soll?

Nach Formel 120) ist:

$$P_1 . AC + p . FC = P_2 . BC.$$

Setzt man hier die gegebenen Werte ein, so erhält man:*)

$$20 . (0{,}5 + FC) + 15 . FC = 60 . (0{,}8 - FC).$$

$$10 + 20 . FC + 15 . FC = 48 - 60 . FC.$$

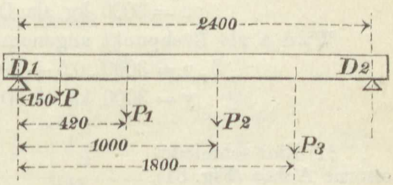
$$20 . FC + 15 . FC + 60 . FC = 48 - 10.$$

$$95 . FC = 38.$$

$$FC = \frac{38}{95} = 0{,}4 \text{ m}.$$

107) Ein Balken, welcher in den Punkten D_1 und D_2 unterstützt ist, wird durch die Kräfte $P = 30$ kg, $P_1 = 46$ kg, $P_2 = 60$ kg und $P_3 = 20$ kg beansprucht. Die Entfernung der Stützpunkte betrage 2,4 m; die Entfernung der Angriffspunkte der Kräfte vom linken Stützpunkte sei für $P = 150$ mm, $P_1 = 420$ mm, $P_2 = 1000$ mm und für $P_3 = 1800$ mm. (Fig. 59.)

Fig. 59.



Wie grofs sind die Drucke in den Auflagerpunkten D_1 und D_2; wie grofs ist die Mittelkraft und die Entfernung der Lage ihres Angriffspunktes vom Stützpunkte D_1?

Denkt man sich statt des Unterstützungspunktes in D_2 eine aufwärts gerichtete Kraft tätig, so mufs diese den Kräften P, P_1, P_2, und P_3 das Gleichgewicht halten, wenn der Balken seine Lage im Raume nicht verändern soll. Bezeichnet man diese Kraft mit x und nimmt man D_1 als Drehpunkt an, so ergibt sich für den Druck in D_2:

$$x . 2400 = 30 . 150 + 46 . 420 + 60 . 1000 + 20 . 1800.$$

$$x . 2400 = 119820.$$

$$x = \frac{119820}{2400} = 49{,}92 \text{ kg} \cong 50 \text{ kg}.$$

Die Mittelkraft wird entsprechend Formel 112):

$$R = P + P_1 + P_2 + P_3 = 30 + 46 + 60 + 20 = 156 \text{ kg}$$

und damit der Druck im Stützpunkte D_1:

$$D_1 = R - x = 156 - 50 = 106 \text{ kg}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Angriffspunktes der Mittelkraft von D_1 mit y, so mufs das statische Moment dieser nach unten gerichteten Mittelkraft (rechts drehend), gleich sein dem statischen Moment der in D_2 angreifenden und nach oben gerichteten Kraft x (links drehend), d. h. es mufs

$R . y = 2400 . x$ sein. Hieraus folgt:

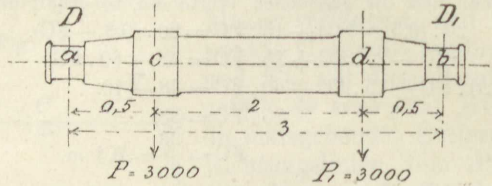
$$y = \frac{2400 . x}{R} = \frac{2400 . 50}{156} = 769{,}2 \text{ mm}.$$

*) Vgl. I. Teil; Seite 19 unter 35 u. 36.

Übungsbeispiele:*)

80) Eine Achse ist in den Punkten c und d (Fig. 60), welche 2 m voneinander entfernt sind, mit je 3000 kg belastet; wie grofs sind die Drucke D und D_1 in den Zapfenmitten a und b, wenn die Entfernung derselben 3 m beträgt?

Fig. 60.



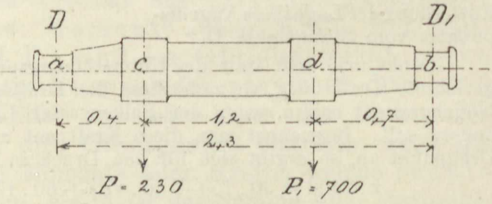
Wird b als Drehpunkt angenommen und bezeichnet man den Druck in D mit x und den in D_1 mit y, so erhält man für den Gleichgewichtszustand:

$$3 . x = 3000 . 0{,}5 + 3000 . 2{,}5 \text{ und damit:}$$
$$x = 3000 \text{ kg als Druck in D.}$$

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird entsprechend:

$$3 . y = 3000 . 0{,}5 + 3000 . 2{,}5 \text{ und damit:}$$
$$y = 3000 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

Fig. 61.



81) Eine schmiedeeiserne Achse (Fig. 61), sei in den Punkten a und b gelagert, im Punkte c, welcher 0,4 m von a entfernt ist, mit P = 230 kg und im Punkte d, welcher 1,6 m von a entfernt ist, mit P_1 = 700 kg belastet. Wie grofs sind die Auflagerdrucke D und D_1 in den Zapfenmitten a und b, welche 2,3 m von einander entfernt sind?

Nimmt man b als Drehpunkt an, so ist wie im vorstehenden Beispiele für den Gleichgewichtszustand:

$$x . 2{,}3 = 700 . 0{,}7 + 230 . 1{,}9 \text{ und damit:}$$
$$x = 403 \text{ kg als Druck in D.}$$

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird entsprechend:

$$y . 2{,}3 = 230 . 0{,}4 + 700 . 1{,}6 \text{ und damit:}$$
$$y = 527 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

Die Mittelkraft ist nach Formel 112):

$$R = P + P_1 = 230 + 700 = 930 \text{ kg.}$$

---

*) Bei diesen Beispielen ist das Eigengewicht der Achsen nicht in die Rechnung einbezogen!

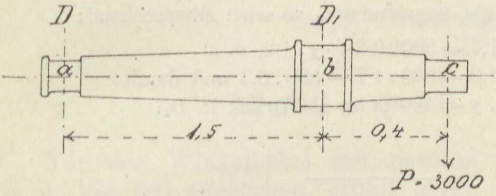
Addiert man die beiden Auflagerdrucke in D und D_1, so erhält man:

$$x + y = 403 + 700 = 930 \text{ kg},$$

also gleich der Summe der wirksamen parallelen Kräfte.

82) Eine Achse ist in den Punkten a und b, welche 1,5 m voneinander entfernt sind (Fig. 62), gelagert. Im Punkte c ist die Achse mit P = 3000 kg belastet; wie grofs sind die Drucke in den Lagermitten D und D_1, wenn b c = 0,4 m ist?

Fig. 62.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so erhält man für den Gleichgewichtszustand:

$$x \cdot 1{,}5 = 3000 \cdot 0{,}4 \text{ und damit:}$$

$$x = 800 \text{ kg als Druck in D.}$$

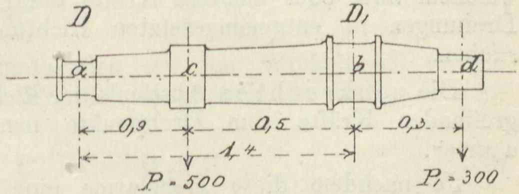
Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird entsprechend:

$$y \cdot 1{,}5 = 3000 \cdot 1{,}9 \text{ und damit:}$$

$$y = 3800 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

83) Eine schmiedeeiserne Achse ist in den Punkten a und b (Fig. 63), welche 1,4 m voneinander entfernt sind, gelagert. Im Punkte c wirkt eine Kraft P = 500 kg und im Punkte d eine solche von P_1 = 300 kg abwärts; wie grofs sind nach den Abmessungen der Figur die Auflagerdrucke in D und D_1?

Fig. 63.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so ist für den Gleichgewichtszustand:

$$x \cdot 1{,}4 + 0{,}3 \cdot 300 = 0{,}5 \cdot 500, \text{ d. i.}$$

$$x \cdot 1{,}4 = 0{,}5 \cdot 500 - 0{,}3 \cdot 300 \text{ und damit:}$$

$$x = 114{,}3 \text{ kg als Druck in D.}$$

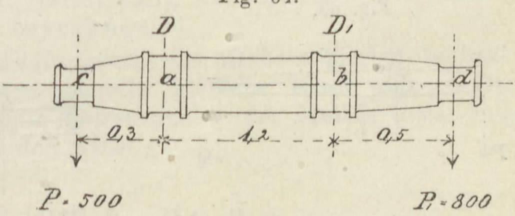
Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird entsprechend:

$$y \cdot 1{,}4 = 0{,}9 \cdot 500 + 1{,}7 \cdot 300 \text{ und damit:}$$

$$y = 685{,}7 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

84) Eine Achse ist in den 1,2 m voneinander entfernten Punkten a und b (Fig. 64) gelagert; 0,3 m von a entfernt wirkt im Punkte c eine Kraft P = 500 kg und 0,5 m von b entfernt im Punkte d eine Kraft P_1 = 800 kg abwärts; wie grofs sind die Drucke in D und D_1?

Fig. 64.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so ist für den Gleichgewichtszustand:

$$500 \,.\, 1{,}5 = 800 \,.\, 0{,}5 + x \,.\, 1{,}2, \text{ d. i.}$$
$$x \,.\, 1{,}2 = 500 \,.\, 1{,}5 - 800 \,.\, 0{,}5 \text{ und damit:}$$
$$x = 291{,}6 \text{ kg als Druck in D.}$$

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird entsprechend:

$$800 \,.\, 1{,}7 = 500 \,.\, 0{,}3 + y \,.\, 1{,}2, \text{ d. i.}$$
$$y \,.\, 1{,}2 = 800 \,.\, 1{,}7 - 500 \,.\, 0{,}3 \text{ und damit:}$$
$$y = 1008{,}4 \text{ kg als Druck in } D_1.$$

Neuntes Kapitel.

Der Hebel.

Der Hebel ist ein beliebig geformter, starrer Körper, an welchem zwei oder mehrere Kräfte derartig wirken, dafs sie Drehungen in entgegengesetzten Richtungen herbeizuführen suchen.

Die senkrechten Abstände der Richtungslinien der angreifenden Kräfte vom Drehpunkte nennt man „Hebelarme“.

Je nachdem diese Hebelarme eine gerade Linie oder einen Winkel miteinander bilden, unterscheidet man „geradlinige Hebel und Winkelhebel“.

Sieht man zunächst von dem Einflusse, welchen das Eigengewicht des Hebels ausübt und von der Reibung im Drehpunkte ab, untersucht man ferner nur den Zustand des Gleichgewichtes, d. h. die Bedingungen, unter denen sich der Hebel trotz der Einwirkung der an ihm tätigen Kräfte in Ruhe befindet, so erhält man für den geradlinigen Hebel, bei parallel und senkrecht zur Hebelachse gerichteten Kräften (Fig. 65 u. 66), als Bedingung für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 65.

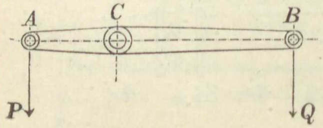
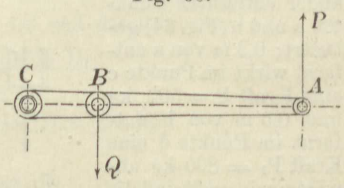
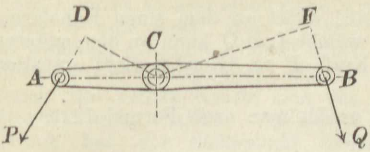


Fig. 66.



$$\mathbf{P \,.\, AC = Q \,.\, BC} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \mathbf{122)}$$

Fig. 67.



Man nennt den Hebel in Fig. 65) einen zweiarmigen, den in Fig. 66) einen einarmigen Hebel. Wirken die Kräfte nicht in paralleler Richtung (Fig. 67), so ist für den Gleichgewichtszustand: *)

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \quad \ldots\ldots\ldots \quad 123)$$

Für den Winkelhebel mit parallel gerichteten Kräften, wie in Fig. 68) angegeben, erhält man:

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \quad \ldots\ldots\ldots \quad 124)$$

Fig. 68.

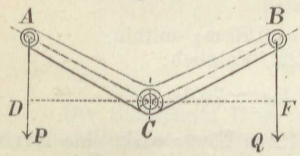
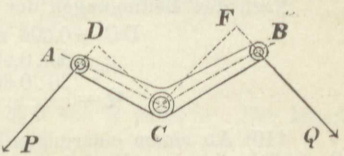


Fig. 69.



Sind die Richtungslinien der am Winkelhebel tätigen Kräfte nicht parallel (Fig. 69), so ist auch hier für den Gleichgewichtszustand: *)

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \quad \ldots\ldots\ldots \quad 125)$$

Es ist also bei dem Hebel im allgemeinen gleichgültig, welche Richtung die Kräfte haben; man mufs, um einen der einschlägigen Werte berechnen zu können, vom Drehpunkte Senkrechte auf die Richtungslinien der Kräfte fällen, die mit diesen zu bildenden Momente einander gleichsetzen und aus der so entstehenden Gleichung die gesuchte Gröfse ermitteln.

Sind mehrere Kräfte gleichzeitig an einem Hebel tätig, so setze man die Summe der statischen Momente auf einer Seite des Drehpunktes gleich der Summe der statischen Momente auf der anderen Seite desselben; aus dieser Gleichung ist alsdann die unbekannte Gröfse zu berechnen.

Soll auch das Eigengewicht des Hebels hierbei berücksichtigt werden, so ist dasselbe als eine Kraft aufzufassen, deren Angriffspunkt im Schwerpunkte des Hebels liegt, und die senkrecht nach unten wirkt.

---

*) Vgl. II. Teil; Seite 132.

Beispiele:

108) An einem zweiarmigen Hebel wirkt an dem einen Hebelarme AC = 0,6 m eine Kraft P = 25 kg; welche Last Q kann an dem anderen Hebelarme BC = 0,4 m durch die Kraft P im Gleichgewicht gehalten werden? (Fig. 65.)

Für den Gleichgewichtszustand erhält man nach Formel 122):

$$P . AC = Q . BC \text{ oder}$$
$$25 . 0{,}6 = Q . 0{,}4. \text{ Folglich:}$$
$$Q = \frac{25 . 0{,}6}{0{,}4} = 37{,}5 \text{ kg.}$$

109) An einem zweiarmigen Hebel (Fig. 67), wirkt im Abstande AC = 0,7 m eine Kraft P = 30 kg, deren Richtungslinie mit AC einen Winkel von 30° bildet; welche Last Q kann im Abstande BC = 0,3 m durch die Kraft P im Gleichgewichte gehalten werden, wenn die Richtungslinie der Last Q mit BC ebenfalls einen Winkel von 30° bildet?

Für den Gleichgewichtszustand erhält man nach Formel 123):

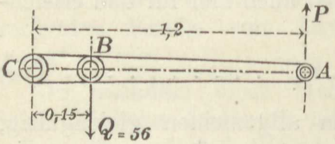
$$P . DC = Q . FC.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe wird

$$DC = 0{,}606 \text{ m und } FC = 0{,}26 \text{ m; mithin:}$$
$$30 . 0{,}606 = Q . 0{,}26. \text{ Folglich:}$$
$$Q = \frac{30 . 0{,}606}{0{,}26} = 69{,}93 \text{ kg} \cong 70 \text{ kg.}$$

110) An einem einarmigen Hebel von 1,2 m Länge wirkt eine Kraft Q = 56 kg in einer Entfernung = 0,15 m vom Drehpunkte. Wie grofs ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderliche Kraft P am Endpunkte A des Hebels? (Fig. 70.)

Fig. 70.

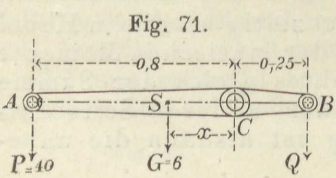


Für den Gleichgewichtszustand erhält man nach Formel 122):

$$P . AC = Q . BC, \text{ d. i.}$$
$$P . 1{,}2 = 56 . 0{,}15. \text{ Folglich:}$$
$$P = \frac{56 . 0{,}15}{1{,}2} = 7 \text{ kg.}$$

111) An einem zweiarmigen Hebel greift an dem einen Hebelarme AC = 0,8 m eine Kraft P = 40 kg an; welche Last Q kann dadurch an dem Hebelarme BC = 0,25 m im Gleichgewicht gehalten werden, wenn der überall gleich starke Hebel 6 kg schwer ist? (Fig. 71.)

Fig. 71.



Da der Hebel überall gleich stark ist, so liegt sein Schwerpunkt S in der Mitte seiner Länge. Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte C mit x und das Gewicht des Hebels mit G, so erhält man für den Gleichgewichtszustand, entsprechend Formel 120):

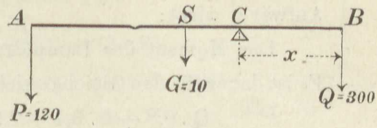
$$P . AC + G . x = Q . BC \text{ oder}$$
$$40 . 0{,}8 + 6 . \left(\frac{0{,}8 + 0{,}25}{2} - 0{,}25\right) = Q . 0{,}25.*)$$
$$32 + 1{,}65 = Q . 0{,}25.$$
$$Q = \frac{32 + 1{,}65}{0{,}25} = 134{,}6 \text{ kg.}$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 19 unter 35.

112) An einer überall gleich starken, 10 kg schweren Stange von 2,6 m Länge, wirkt an dem einen Ende A eine Kraft P = 120 kg und am anderen Ende B eine Kraft Q = 300 kg; in welchem Abstande von B muſs der Stützpunkt C angebracht werden, damit die beiden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Welchen Druck hat der Stützpunkt aufzunehmen? (Fig. 72.)

Fig. 72.



Da die Stange überall gleich stark ist, so liegt ihr Schwerpunkt S in deren Mitte. Bezeichnet man den Abstand des Stützpunktes C von B mit x, so ist AC = 2,6 — x und der Abstand des Schwerpunktes S der Stange von C = 1,3 — x; mithin erhält man für den Gleichgewichtszustand, entsprechend Formel 120):

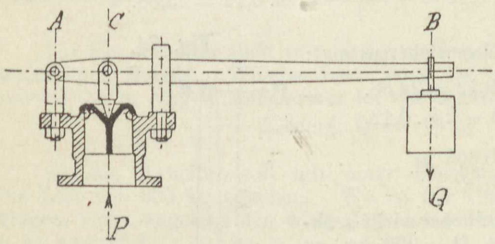
$$P . AC + G . SC = Q . BC.$$
$$120 . (2,6 - x) + 10 . (1,3 - x) = 300x.$$
$$312 - 120x + 13 - 10x = 300x.$$
$$325 = 300x + 120x + 10x.$$
$$325 = 430x.$$
$$x = \frac{325}{430} = 0,756 \text{ m}.$$

Der Stützpunkt C ist mithin 756 mm von B entfernt. Der Druck in demselben ist entsprechend Formel 112):

$$R = P + G + Q = 120 + 10 + 300 = 430 \text{ kg.*)}$$

113) Gegen die untere Fläche eines Sicherheitsventiles (Fig. 73), ist ein Dampfdruck von 130 kg gerichtet; dasselbe wird durch einen einarmigen Hebel, dessen Arme 0,12 m und 0,8 m lang sind, belastet. Welches Gewicht muſs am längeren Hebelarme angehängt werden, um dem Dampfdrucke das Gleichgewicht zu halten?

Fig. 73.



Entsprechend Formel 122) erhält man:

$$P . AC = Q . AB.$$
$$130 . 0,12 = Q . 0,8.$$
$$Q = \frac{130 . 0,12}{0,8} = 19,5 \text{ kg}.$$

114) In vorstehender Aufgabe soll das Gewicht des Ventiles und Hebels mit in Rechnung gezogen werden; es betrage das Gewicht des Hebels 6 kg und das des Ventiles 2,5 kg.

Die Hebelstange sei prismatisch gearbeitet; ihr Gewicht kann daher als in der Mitte derselben angreifend gedacht werden.

---

*) Vgl. II. Teil; Seite 127, Formel 112.

Es wirken mithin abwärts:

Das Moment des angehängten Gewichtes $= Q \ . \ 0{,}8$.
„ „ „ Hebelgewichtes . . . $= 6 \ . \ 0{,}4$.
„ „ „ Ventil „ . . . $= 2{,}5 \ . \ 0{,}12$.

Aufwärts wirkt:

Das Moment des Dampfdruckes . . . $= 130 \ . \ 0{,}12$.

Es ist daher für den Gleichgewichtszustand, entsprechend Formel 122):

$$Q \, . \, 0{,}8 + 6 \, . \, 0{,}4 + 2{,}5 \, . \, 0{,}12 = 130 \, . \, 0{,}12.$$
$$Q \, . \, 0{,}8 = 130 \, . \, 0{,}12 - 6 \, . \, 0{,}4 - 2{,}5 \, . \, 0{,}12.$$
$$Q = \frac{12{,}9}{0{,}8} = 16{,}125 \text{ kg}.$$

115) Für ein anderes Sicherheitsventil sei der Durchmesser $d = 65$ mm; der Dampfdruck $= 6$ atm; der Abstand des Ventiles vom Drehpunkte $= 0{,}12$ m; das Hebelgewicht $= 7$ kg, im Abstande 0,5 m vom Drehpunkte wirkend; das Ventilgewicht $= 2{,}5$ kg. Welche Länge x mufs der Hebel erhalten, wenn ein Gewicht von 25 kg verwendet werden soll?

Als abwärts wirkende Momente erhält man:

Moment des angehängten Gewichtes $= 25 \ . \ x$.
„ „ Hebelgewichtes . . . $= 7 \ . \ 0{,}5$.
„ „ Ventil „ . . . $= 2{,}5 \ . \ 0{,}12$.

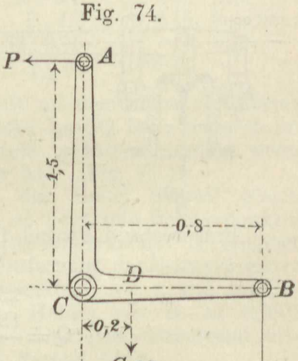
Den Dampfdruck, welcher von unten gegen das Ventil gerichtet ist, erhält man, wenn man den Flächeninhalt des Ventiles in qcm mit der Anzahl der Atmosphären multipliziert. Demnach wird der Dampfdruck $= \frac{\pi \, . \, d^2}{4} \, . \, 6$ kg und damit das aufwärts wirkende Moment des Dampfdruckes

$$= \frac{\pi \, . \, d^2}{4} \, . \, 6 \, . \, 0{,}12 = \frac{3{,}14 \, . \, 6{,}5^2}{4} \, . \, 6 \, . \, 0{,}12 = 23{,}88.$$

Mithin wird für den Gleichgewichtszustand:

$$25x + 7 \, . \, 0{,}5 + 2{,}5 \, . \, 0{,}12 = 23{,}88.$$
$$25x = 23{,}88 - 7 \, . \, 0{,}5 - 2{,}5 \, . \, 0{,}12.$$
$$x = \frac{20{,}08}{25} = 0{,}803 \text{ m}.$$

Fig. 74.



116) An einem Winkelhebel wirkt senkrecht abwärts eine Last $Q = 250$ kg an einem Hebelarme $BC = 0{,}8$ m. (Fig. 74.)

Welche Kraft P mufs in wagerechter Richtung an einem Hebelarme $AC = 1{,}5$ m zur Herstellung des Gleichgewichtes angreifen, wenn das Eigengewicht G des Hebels 30 kg und dessen Hebelarm $CD = 0{,}2$ m beträgt; wie grofs ist aufserdem der Zapfendruck in C?

Für den Gleichgewichtszustand erhält man:

$$P \, . \, AC = Q \, . \, BC + G \, . \, CD.$$
$$P \, . \, 1{,}5 = 250 \, . \, 0{,}8 + 30 \, . \, 0{,}2.$$
$$P = \frac{250 \, . \, 0{,}8 + 30 \, . \, 0{,}2}{1{,}5} = 137{,}3 \text{ kg}.$$

Der Zapfen (Fig. 75) wird durch die beiden senkrecht gerichteten Kräfte $G = 30$ kg und $Q = 250$ kg, sowie durch die wagerecht wirkende Kraft $P = 137,3$ kg beansprucht. Man erhält daher als Zapfendruck die Mittlere*) aus diesen Kräften nach Formel 107):

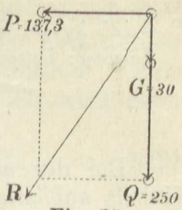
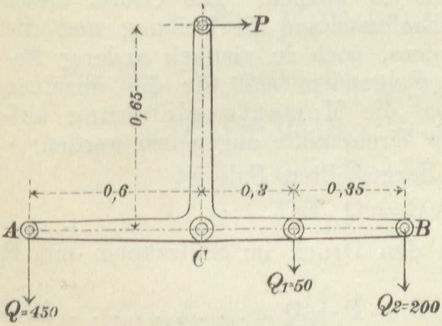


Fig. 75.

$$R = \sqrt{(G + Q)^2 + P^2} = \sqrt{(30 + 250)^2 + 137,3^2}.$$

$$R = \sqrt{97251,3} = 312 \text{ kg}.$$

Fig. 76.



117) Am wagerechten Arme eines Winkelhebels wirken die Lasten

$$Q = 450 \text{ kg}, \quad Q_1 = 50 \text{ kg}, \quad Q_2 = 200 \text{ kg};$$

welche Kraft P mufs am senkrechten Arme desselben angreifen, um diesen Lasten das Gleichgewicht zu halten? (Fig. 76.)

Für den Gleichgewichtszustand wird:

$$P \,.\, 0,65 = 450 \,.\, 0,6 - 50 \,.\, 0,3 - 200 \,.\, 0,65.$$

$$P = \frac{125}{0,65} = 192,3 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

85) Ein Arbeiter zieht mit 30 kg an dem 2,5 m langen Arme eines zweiarmigen Hebels. Welche Last kann der Arbeiter am Ende des anderen 0,5 m langen Hebelarmes im Gleichgewicht halten?

Lösung: $Q = 150$ kg.

86) Ein Arbeiter soll mit einer Brechstange von 1,6 m Länge eine Last von 600 kg anheben. Wo ist der Unterstützungspunkt anzubringen, wenn angenommen wird, dafs der Arbeiter mit einer Kraft von 40 kg angreift?

Lösung:

In einer Entfernung = 0,1 m vom Angriffspunkte der Last.

87) In einer Entfernung = 0,3 m vom Stützpunkte eines einarmigen Hebels ist ein Druck von 75 kg wirksam. Wie grofs ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderliche Kraft am Ende des Hebels, wenn dasselbe 2,5 m vom Stützpunkte entfernt ist?

Lösung: $P = 9$ kg.

88) An einem Winkelhebel, dessen Armlängen 0,4 m und 1,4 m betragen, hängt eine Last Q, welche mit dem 0,4 m langen Arme einen Winkel von 60° bildet. Wie grofs kann diese Last Q sein, wenn sie

---

*) Vgl. II. Teil; Seite 120, Beispiel 85.

durch eine rechtwinkelig gegen den 1,4 m langen Arm gerichtete Kraft P = 120 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: Durch Konstruktion ergibt sich der Hebelarm der Last Q zu 0,346 m. Damit wird: Q = 485,5 kg.

Bei der aufserordentlich mannigfaltigen Anwendung des Hebels auf allen Gebieten der Praxis ist es wünschenswert, für die hauptsächlichsten Belastungsfälle den jeweiligen Druck im Drehpunkte des Hebels zu kennen. Die Gröfse dieses Druckes ist neben ihrem Einflusse auf die Reibung und die Abmessungen des Drehzapfens, noch in vielfach anderer Beziehung massgebend. In Folgendem soll für die einzelnen Belastungsfälle noch einmal die Momentengleichung aufgestellt, und der Druck im Drehpunkte angegeben werden:

Für den in Fig. 65) dargestellten Fall ist

$$P . AC = Q . BC$$

und, wenn man allgemein den Druck im Stützzapfen mit R bezeichnet:

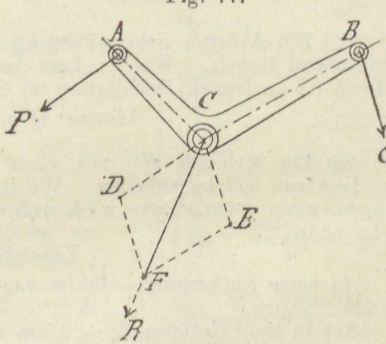
$$\mathbf{R = P + Q} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{126)}$$

Dem Belastungsfalle Fig. 66) entsprechend erhält man

$$P . AC = Q . BC \text{ und:}$$

$$\mathbf{R = Q - P} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{127)}$$

Fig. 77.



Die Ermittelung des Druckes R für die den Fig. 67 und 69) entsprechenden Fälle, ist in nebenstehender Fig. 77) dargestellt. Die Momentengleichung ist zunächst nach Formel 123 und 124):

$$P . DC = Q . FC.$$

Um den Druck R zu bestimmen, konstruiere man, vom Drehpunkte C ausgehend, aus den beiden Kräften P und Q das Kräfteparallelogramm*) CDFE. Die Gröfse der Mittelkraft:

$$\mathbf{R = CF} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{128)}$$

gibt den Druck im Drehpunkte ohne weiteres, seiner Gröfse und Richtung entsprechend, an.

---

*) Vgl. II. Teil; Seite 102 unter 2.

Stehen die Arme des Winkelhebels senkrecht aufeinander, so ist für den in Fig. 74) angedeuteten Fall bei der Ermittelung des Druckes R entsprechend Fig. 75) zu verfahren. Ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes G des Hebels wird dann

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ . . . . } 129)$$

und mit Berücksichtigung desselben:

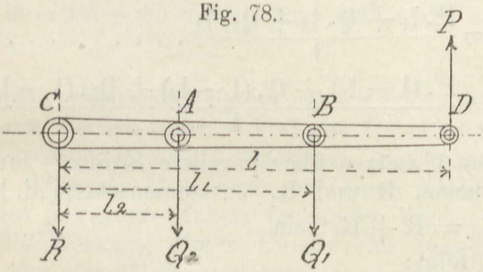
$$R = \sqrt{(G + Q)^2 + P^2} \text{ . . . . } 130)$$

Für Fig. 78) ergibt sich nach dem Vorstehenden:

$$P \cdot l = Q_1 \cdot l_1 + Q_2 \cdot l_2 \text{ . . . . } 131)$$

$$R = Q_1 + Q_2 - P \text{ . . . . } 132)$$

Fig. 78.

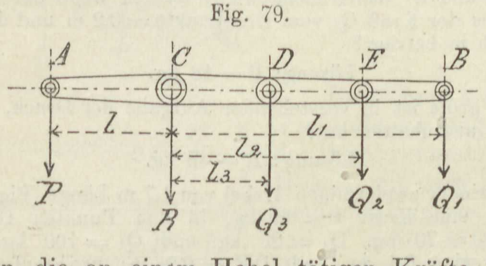


In gleicher Weise folgt für den Belastungsfall, welcher in Fig. 79) dargestellt ist:

$$P \cdot l = Q_1 \cdot l_1 + Q_2 \cdot l_2 + Q_3 \cdot l_3 \text{ . . . . . } 133)$$

$$R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3 \text{ . . . . } 134)$$

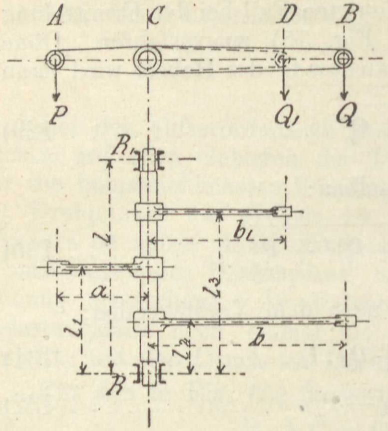
Fig. 79.



Wirken die an einem Hebel tätigen Kräfte in verschiedenen Schwingungsebenen (Fig. 80), so ändert sich die Momentengleichung

$$P \cdot a = Q \cdot b + Q_1 \cdot b_1 + \text{ . . . .}$$

Fig. 80.



nicht; jedoch findet hier eine besondere Verteilung des gesamten Achsendruckes

$R_0 = P + Q + Q_1 + \ldots$

auf die beiden Stützpunkte oder Zapfenlager C statt.

Bezeichnet l die Länge der Hebelachse oder die Entfernung der Stützpunkte C derselben voneinander, und sind l_1, l_2, l_3 .... die Abstände der Schwingungsebenen der Kräfte von einem dieser Stützpunkte, so hat man für die Zapfendrucke R und R_1 folgende Werte:

$$R_1 = \frac{P \cdot l_1 + Q \cdot l_2 + Q_1 \cdot l_3}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 135)$$

$$R = \frac{P \cdot (l - l_1) + Q \cdot (l - l_2) + Q_1 \cdot (l - l_3)}{l} \ldots \quad 136)$$

Nach den Gesetzen über parallele Kräfte*) mufs sich R_0 aus den Drucken R und R_1 zusammensetzen, d. h. es mufs

$R_0 = R + R_1$ sein.

Hieraus folgt:

$R = R_0 - R_1$ und $R_1 = R_0 - R$.

Übungsbeispiele:

89) An einem einarmigen Hebel von 1,5 m Länge (Fig. 78), wirken die vertikalen Kräfte $Q_2 = 20$ kg und $Q_1 = 46$ kg abwärts. Welcher aufwärts wirkenden Kraft P, im Abstande 1,5 m vom Drehpunkte, können die Kräfte Q_2 und Q_1 das Gleichgewicht halten, wenn der Abstand des Angriffspunktes der Kraft Q_2 vom Drehpunkte = 0,2 m und derjenige der Kraft $Q_1 = 0,5$ m beträgt?

Lösung: $P = 18$ kg.

90) Wie grofs ist in vorstehender Aufgabe der Druck, welchen der Drehpunkt C auszuhalten hat?

Lösung: $R = 48$ kg.

91) An einem zweiarmigen Hebel von 1,7 m Länge (Fig. 79), wirken im Punkte A eine Kraft $P = 60$ kg, in den Punkten D, E und B die Kräfte $Q_3 = 70$ kg, $Q_2 = 20$ kg und $Q_1 = 100$ kg. Die Entfernung EB sei = 0,1 m und DE = 0,2 m; wo mufs der Stützpunkt C angebracht werden, damit die Kräfte P, Q_1, Q_2, Q_3 sich das Gleichgewicht halten, und welchen Druck hat derselbe aufzunehmen?

*) Vgl. II. Teil; Seite 126.

Lösung: Wird die Entfernung des Stützpunktes C vom Angriffspunkte der Kraft P gleich x gesetzt, so ist:

$$x = 1{,}2 \text{ m}.$$

Als Druck im Stützpunkte C erhält man:

$$R = 250 \text{ kg}.$$

92) Angenommen der Hebel in Fig. 80) trage in den Abständen $l_2 = 12$ und $l_3 = 24$ vom Zapfenlager R die an den Hebelarmen $b = 16$ und $b_1 = 10$ wirkenden Lasten $Q = 300$ kg und $Q_1 = 480$ kg. Wie grofs ist dann die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderliche, an dem Hebelarme $a = 60$ wirkende Kraft P, und wie grofs sind die Zapfendrucke R und R_1, vorausgesetzt, dafs die Kraft im Abstande $l_1 = 18$ von R angreift und die ganze Achsenlänge $l = 32$ ist?

Lösung: Es ist die Gröfse der erforderlichen Kraft:

$$P = \frac{Q \cdot b + Q_1 \cdot b_1}{a} = \frac{300 \cdot 16 + 480 \cdot 10}{60} = 160 \text{ kg}$$

und die Zapfendrucke:

$$R_1 = \frac{P \cdot l_1 + Q \cdot l_2 + Q_1 \cdot l_3}{l} = \frac{160 \cdot 18 + 300 \cdot 12 + 480 \cdot 24}{32} = 562{,}5 \text{ kg};$$

$$R = R_0 - R_1 = 300 + 480 + 160 - 562{,}5 = 377{,}5 \text{ kg}.$$

Um mit verhältnismäfsig geringen Kräften gröfsere Lasten zu bewältigen, werden mehrere einfache Hebel zu sog. „Hebelwerken" zusammengesetzt, welche so angeordnet sind, dafs immer der kürzere Hebelarm des einen Hebels mit dem längeren des folgenden Hebels verbunden wird.

Um die Wirkung dieser Hebelwerke kennen zu lernen, bestimme man den Gleichgewichtszustand für jeden einzelnen Hebel und multipliziere die dadurch erhaltenen Gleichungen miteinander.

Fig. 81.

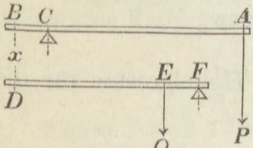
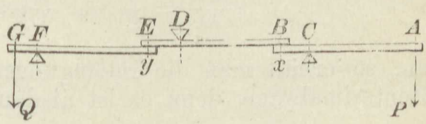


Fig. 82.



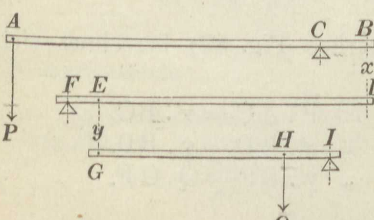


Fig. 83.

Bezeichnet man den in den Verbindungsstangen oder an den Berührungsstellen des einen Hebels mit dem anderen auftretenden Zug bzw. Druck mit x und y, sodafs x für den ersten Hebel die Last und für den zweiten Hebel die Kraft, y für den zweiten Hebel die Last und für den folgenden die Kraft bildet usw., so erhält man für den Gleichgewichtszustand (Fig. 81)

$$\text{am ersten Hebel: } P \cdot AC = x \cdot BC \text{ und}$$
$$\text{„ zweiten „ } x \cdot DF = Q \cdot EF.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich*):

$$P \cdot AC \cdot x \cdot DF = x \cdot BC \cdot Q \cdot EF.$$

Da sich x auf beiden Seiten hebt, so wird:

$$P \cdot AC \cdot DF = Q \cdot BC \cdot EF. \text{ Folglich:}$$

$$P = \frac{BC \cdot EF}{AC \cdot DF} \cdot Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 137)$$

$$Q = \frac{AC \cdot DF}{BC \cdot EF} \cdot P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 138)$$

Nimmt man nun

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{5}, \text{ oder}$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{5} \text{ „ } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{2} \text{ usw.}$$

an, so erhält man die Bedingungen der Hebelgesetze für die Dezimalwage, denn es ist in diesen Fällen:

$$P = \frac{1}{10} \cdot Q = \text{dem } 10^{\text{ten}} \text{ Teile der zu wiegenden Last.}$$

Nimmt man

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{10}, \text{ oder}$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{20} \text{ „ } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{5} \text{ usw.}$$

an, so erhält man die Bedingungen der Hebelgesetze für die Zentesimalwage, denn es ist alsdann:

$$P = \frac{1}{100} \cdot Q = \text{dem } 100^{\text{ten}} \text{ Teile der zu wiegenden Last.}$$

Die Wirkung des Hebelwerkes Fig. 82) berechnet sich folgendermafsen:

$$\text{Für den ersten Hebel ist } P \cdot AC = x \cdot BC.$$
$$\text{„ „ zweiten „ „ } x \cdot BD = y \cdot ED.$$
$$\text{„ „ dritten „ „ } y \cdot EF = Q \cdot GF.$$

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 55 unter 76, c.

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man:

$$P . AC . x . BD . y . EF = x . BC . y . ED . Q . GF$$

oder, da sich x und y heben,

$$P . AC . BD . EF = Q . BC . ED . GF.$$ Folglich:

$$P = \frac{BC . ED . GF}{AC . BD . EF} . Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 139)$$

$$Q = \frac{AC . BD . EF}{BC . ED . GF} . P \quad \ldots\ldots\ldots \quad 140)$$

Ebenso ergibt die Berechnung des Hebelwerkes Fig. 83):

$$P = \frac{BC . EF . HI}{AC . DF . GI} . Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 141)$$

$$Q = \frac{AC . DF . GI}{BC . EF . HI} . P \quad \ldots\ldots\ldots \quad 142)$$

Es verhält sich mithin bei derartigen Hebelverbindungen die Kraft zur Last, wie das Produkt der kleineren Hebelarme zum Produkt der gröfseren Hebelarme.

Beispiele:

118) Bei dem zusammengesetzten Hebelwerke Fig. 81) betrage:

AC = 0,7 m; BC = 0,2 m;
DF = 0,5 „ ; EF = 0,1 „

Welche Kraft P kann einer Last Q = 250 kg das Gleichgewicht halten?

Nach Formel 137) erhält man:

$$P = \frac{BC . EF}{AC . DF} . Q = \frac{0,2 . 0,1}{0,7 . 0,5} . 250 = 14,28 \text{ kg}.$$

119) Welche Last Q kann mittels der Hebelverbindung Fig. 83) durch eine Kraft P = 20 kg im Gleichgewichte gehalten werden, wenn

AC = 1,2 m; BC = 0,2 m;
DF = 0,8 „ ; EF = 0,15 „ ;
GI = 0,5 „ ; HI = 0,1 „ sind?

Nach Formel 142) erhält man:

$$Q = \frac{AC . DF . GI}{BC . EF . HI} . P = \frac{1,2 . 0,8 . 0,5}{0,2 . 0,15 . 0,1} . 20 = 3200 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

93) Welche Hebellänge AC ist bei dem zusammengesetzten Hebelwerke Fig. 81) zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlich, wenn

DF = 0,6 m; EF = 0,08 m;
BC = 0,2 „ ; P = 20 kg und
Q = 500 kg sind?

Lösung: AC = 0,66 m.

94) Welche Kraft P kann mittels der Hebelverbindung Fig. 82) einer Last $Q = 800$ kg das Gleichgewicht halten, wenn

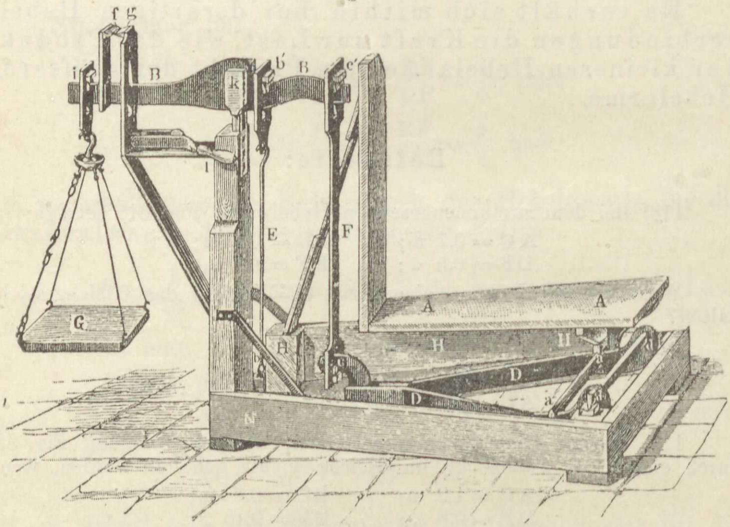
$GF = 0{,}1$ m; $BD = 0{,}7$ m;
$EF = 0{,}4$ „ ; $BC = 0{,}2$ „ ;
$DE = 0{,}2$ „ ; $AC = 0{,}5$ „ sind?

Lösung: $P = 22{,}857$ kg.

Eine der vorteilhaftesten Verwendungen finden die Hebelverbindungen bei der Konstruktion der sog. Brückenwagen.

Besonders zu unterscheiden sind die Dezimalwage und die Zentesimalwage; erstere soll hier einer kurzen Besprechung unterworfen werden.

Fig. 84.



Die Dezimalwage, nach ihrem Erfinder die „Quintenzsche oder auch wohl die Strafsburger Brückenwage“ genannt, ist eine der gebräuchlichsten Wagen, welche überall da Verwendung findet, wo die zu wiegenden Lasten einen gröfseren Rauminhalt besitzen. Fig. 84) stellt diese Wage in der Ansicht dar.

Es ist in derselben AA die Brücke oder derjenige Teil der Wage, auf welchen die abzuwiegende Last gelegt wird. Dieselbe besitzt die Form eines abgestumpften, gleichschenkeligen Dreiecks und ist in der Figur zum gröfsten Teil weggelassen, um die unter ihr befindliche Hebelverbindung besser sehen zu können. Mit dieser Brücke ist ein senkrecht stehendes Brett fest verbunden, gegen welches sich wieder ein schräg stehendes Brett anlegt, so dafs diese drei Teile mit dem dreiseitigen hölzernen Rahmen HH ein zusammengehöriges Ganzes bilden. Der Rahmen H sitzt, in der Figur rechts, auf der Stahlschneide aa und ist links, bei b, in die Stange E eingehängt. Die Schneide aa ist auf dem gabelförmigen, einarmigen Hebel DD befestigt, welcher seine Drehachse in der Stahlschneide dd hat und mit seinem linken Ende c an der Zugstange F hängt. Der gröfseren Deutlichkeit halber ist in Fig. 84) der Rahmen H, auf welchem die Brücke AA ruht, zu hoch gezeichnet; er ist in Wirklichkeit so niedrig, dafs, wenn durch Aufheben des Abstellers l der linke Arm des Hebels BB gehoben wird, der rechte Arm sich so tief senkt, dafs die Brücke AA auf dem Rande des Gestelles N ruht und dann die Schneiden c und c′ die Last der Brücke nicht mehr zu tragen haben, damit also sehr geschont werden. Die beiden Stangen E und F sind ebenfalls mittels Stahlschneiden in den ungleicharmigen Hebel BB eingehängt, welcher sich um seinen festen Stützpunkt K drehen kann; an dessen äufsersten Ende i befindet sich eine Wagschale G, welche zur Aufnahme der Gewichtstücke dient.

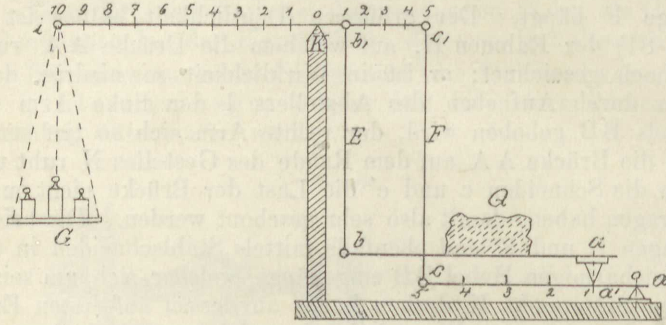
Die wagerechte oder Gleichgewichts-Lage des Hebels BB wird durch zwei vorspringende Ansätze f und g, von denen f mit dem Hebel B fest verbunden ist, angezeigt. Zum Ausgleich etwaiger Störungen des Gleichgewichtes im Hebelmechanismus der Wage selbst, dient die kleine, direkt unter i angebrachte Schale, in welche zu genanntem Zwecke die Tariergewichte gelegt werden.

Haupterfordernis bei dieser Wage ist nun, dafs es gleichgültig bleiben mufs, auf welchen Punkt der Brücke die zu wiegende Last gelegt wird. Ferner soll die Wage, ihrem Namen „Dezimalwage“ entsprechend, eine solche sein, dafs das zum Wiegen erforderliche Gewicht G nur $^1/_{10}$ der zu wiegenden Last Q beträgt.

In Fig. 85) ist die Anordnung der einzelnen Hebel schematisch gezeigt und auf diese Weise leicht zu übersehen; die Buchstaben sind dieselben wie in Fig. 84). Aus den eingetragenen Zahlen gehen die Verhältnisse der Hebellängen hervor, und sollen dieselben bei der folgenden Berechnung der Lastverteilung auf die einzelnen Stützpunkte, direkt als Zahlenwerte für die Hebellängen benutzt werden.

Nimmt man z. B. eine Last Q = 100 kg an und denkt man sich diese 100 kg auf die Mitte der Brücke a b gelegt, so verteilen sich dieselben derart, dafs auf die Punkte a und b gleiche Drucke kommen, dafs also in a 50 kg und in b ebenfalls 50 kg nach unten wirken; denn umgekehrt müssen nach dem Gesetz über die Wirkung paralleler Kräfte die in a und b wirksamen Drucke von je 50 kg zusammen gleich ihrer Mittelkraft Q = 100 kg sein. Der Druck in b überträgt sich direkt durch die Stange E auf den Punkt b_1

Fig. 85.



des Hebels $i\,c_1$; es sind demnach im Abstande 1 von K des Hebelarmes $K\,c_1$ 50 kg tätig. Der Druck im Punkte a überträgt sich direkt auf den Punkt a_1 des einarmigen Hebels c d; demnach entfallen auf den Punkt c des Hebels c d im Abstande 5 von d nur 50 : 5 = 10 kg, denn diese 10 kg im Abstande 5 wirken nach den Hebelgesetzen genau so, wie 50 kg im Abstande 1, da ja die statischen Momente ÷ 50 . 1 = 10 . 5 ÷ einander gleich sind. Durch die Zugstange F werden die letztgenannten 10 kg auf den Punkt c_1 des Hebelarmes $K\,c_1$ im Abstande 5 von K übertragen.

Es handelt sich jetzt darum zu ermitteln, welches Gewicht G im Abstande 10, d. i. im Punkte i des Hebels $i\,c_1$ angreifen mufs, um den Wirkungen der 50 kg im Punkte b_1 und der 10 kg im Punkte c_1 das Gleichgewicht zu halten. Nach den Gesetzen über statische Momente*) mufs für diesen Fall

$$G \,.\, 10 = 50 \,.\, 1 + 10 \,.\, 5 \text{ sein. Damit wird:}$$

$$G = \frac{50 + 50}{10} = \frac{100}{10}, \text{ d. i.}$$

$$G = 10 \text{ kg} = \frac{1}{10} \text{ der angenommenen Last Q.}$$

*) Vgl. II. Teil; Seite 131.

Legt man die Last $Q = 100$ kg so nahe an den Punkt b, dafs auf denselben 80 kg entfallen, so bleiben für die Punkte a und a_1 nur 20 kg übrig. Das entspricht nach dem Vorangegangenen einer Belastung der Punkte c und c_1 von $20:5 = 4$ kg. Für den Gleichgewichtszustand mufs dementsprechend

$G . 10 = 80 . 1 + 4 . 5$ sein. Damit wird:

$$G = \frac{80 + 20}{10} = \frac{100}{10}, \text{ d. i.}$$

$$G = 10 \text{ kg} = \frac{1}{10} \text{ der angenommenen Last } Q.$$

Es ist also tatsächlich gleichgültig, auf welche Stelle der Brücke man die Last legt; es ist das aber auch die Grundbedingung für die Hebelverbindung an der Dezimalwage.

Im allgemeinen stellt sich die Rechnung wie folgt:

Bezeichnet man die in den Punkten a und b auftretenden Seitenkräfte der Last Q entsprechend mit p und q, so mufs $p + q = Q$ sein. Setzt man den von p ausgehenden und im Punkte c wirksam werdenden Druck $= x$, so mufs am einarmigen Hebel c d für den Gleichgewichtszustand

$$x . 5 = p . 1$$

sein, woraus $x = \frac{p}{5}$ folgt. Am zweiarmigen Hebel i c_1 wirken demnach im Punkte b_1 das Gewicht q, im Punkte c_1 das Gewicht $\frac{p}{5}$ und im Punkte i das Gewicht G. Demnach mufs

$$G . 10 = q . 1 + \frac{p}{5} . 5 \text{ oder}$$

$$G . 10 = p + q = Q \text{ sein. Hieraus ergibt sich:}$$

$$G = \frac{Q}{10} = \frac{1}{10} \text{ der angenommenen Last } Q.$$

Die Einrichtung der Zentesimalwage ist entsprechend getroffen, nur mufs bei der Hebelverbindung dieser Wage das Gewicht $= {}^1/_{100}$ der abzuwiegenden Last betragen. Auch hier ist es gleichgültig, auf welchen Punkt der Brücke die Last gebracht wird.

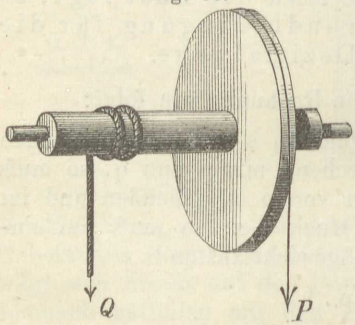
Zehntes Kapitel.

Das Wellrad.

Das Wellrad oder Rad an der Welle Fig. 86), besteht aus einer um ihre Achse drehbaren Welle und einer kreisrunden Scheibe (oder Rad), welche mit der Welle fest verbunden ist.

Am Umfange der Scheibe oder des Rades wirkt die Kraft; am Umfange der Welle hängt mittels eines Seiles die Last, welche durch Aufwickeln des Seiles auf die Welle bewegt, meistens gehoben wird. Die Welle kann wagerecht, senkrecht oder auch geneigt angeordnet werden.

Fig. 86.



Für die Bestimmung des Gleichgewichtszustandes am Wellrade kommen die Gesetze des zweiarmigen Hebels in Betracht.

Bezeichnet man mit R den Halbmesser der Scheibe oder des Rades und mit r den Halbmesser der Welle, so bildet durchweg R den Hebelarm der Kraft und r den Hebelarm der Last; mithin mufs für den Gleichgewichtszustand, ohne Berücksichtigung der Bewegungshindernisse

$P \,.\, R = Q \,.\, r$ sein. Hieraus folgt:

$$P = \frac{Q \,.\, r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 143)$$

$$Q = \frac{P \,.\, R}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 144)$$

Gewöhnlich werden hierbei die Halbmesser R und r bis zur Mitte der zugehörigen Seilenden gerechnet.

Beispiele:

120) Welche Kraft mufs an einer Welle von 180 mm Durchmesser angreifen, um eine Last von 500 kg zu heben, wenn der Durchmesser des Rades 2,5 m beträgt?

Nach Formel 143) erhält man:

$$P = \frac{Q \cdot r}{R} = \frac{500 \cdot 0{,}09}{1{,}25} = 36 \text{ kg}.$$

121) Welche Last kann mittels eines Wellrades gehoben werden, wenn der Durchmesser der Welle zu 230 mm, der Durchmesser des Rades zu 1,6 m und die am Umfange des Rades wirkende Kraft zu P = 20 kg angenommen werden?

Nach Formel 144) erhält man:

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} = \frac{20 \cdot 0{,}8}{0{,}115} = 139{,}13 \text{ kg}.$$

122) Welchen Halbmesser mufs man einem Rade geben, wenn mit demselben durch eine Kraft von 30 kg eine Last von 500 kg gehoben werden soll, die an einer Welle von 240 mm Durchmesser hängt?

Aus Formel 143), $P = \frac{Q \cdot r}{R}$, ergibt sich durch Umformung:

$$R = \frac{Q \cdot r}{P} = \frac{500 \cdot 0{,}12}{30} = 2 \text{ m}.$$

123) Wie grofs mufs der Halbmesser der Welle genommen werden, wenn durch eine Kraft von 40 kg, die an einem Rade von 2,6 m Durchmesser angreift, eine Last von 450 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

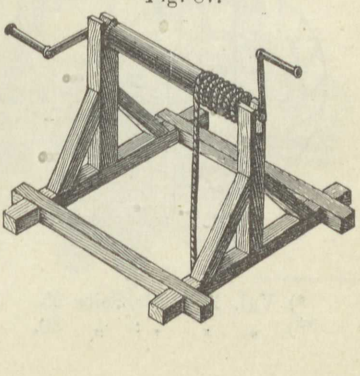
Aus Formel 143), $P = \frac{Q \cdot r}{R}$, erhält man durch Umformung:

$$r = \frac{P \cdot R}{Q} = \frac{40 \cdot 1{,}3}{450} = 116 \text{ mm}.$$

Das Wellenrad kommt in den verschiedensten Ausführungen zur Anwendung als: Winde, Haspel, Tretrad, Tretscheibe, Sprossenrad, Göpel, Spillrad usw.

Die Berechnung ist in allen Fällen auf die gleiche Weise durchzuführen und genügt es daher, hier noch einige allgemeine Bemerkungen einzufügen.

Fig. 87.



Der gewöhnliche Kurbelhaspel (Fig. 87), hat zwei einander gegenüberstehende, um 90^0 versetzte Kurbeln von 36 bis 45 cm Armlänge und eine zur Aufnahme des Seiles dienende Welle von 20 bis 25 cm Durchmesser. Bei einer ununterbrochenen 8 bis 12 stündigen Arbeitszeit nimmt man die an der Kurbel angreifende Kraft eines Arbeiters zu 8 bis 10 kg an.

Wirken an einem solchen Kurbelhaspel zwei Arbeiter zusammen mit einer Kraft P = 16 kg an einer Kurbel von 40 cm Länge und einem Wellen-Halbmesser von 12 cm, so erhält man nach Formel 144) als zu hebende Last:

$$Q = \frac{P \, . \, R}{r} = \frac{16 \, . \, 40}{12} = 53{,}3 \text{ kg}.$$

Infolge der unvermeidlichen Widerstände,*) d. s. Reibung der Wellenzapfen in den Lagern, Steifigkeit der Seile usw. wird aber eine beträchtlich gröfsere Kraft aufgeboten werden müssen, um die jeweiligen Lasten zu bewältigen. Man nimmt in üblicher Weise den Reibungs- und Seilsteifigkeits-Widerstand zu $\frac{1}{3}$, in günstigeren Fällen zu $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ der Last Q an, so dafs in vorstehendem Beispiele die zu hebende Last nur 40 kg betragen dürfte.

Ist die Last gröfser, so mufs ein sog. Vorgelege eingeschaltet werden, da die Kurbellänge 40 bis 45 cm nicht überschreiten soll und der Wellen-Durchmesser, der Festigkeit wegen, nicht unter 20 cm gewählt werden darf. Bei nur kurzer Arbeitszeit an der Kurbel, kann man die Kraft eines Arbeiters zu 12 bis 16 kg annehmen.**)

Bei einem durch Menschenkraft angetriebenen Göpel soll der Bahndurchmesser nicht kleiner als 3 m sein. Die Kraft eines Menschen kann man hier etwas höher als bei der Kurbel annehmen, nämlich zu 9 bis 10 kg.**)

Bei dem Pferdegöpel nimmt man für ein Pferd gewöhnlichen Schlages eine Zugkraft von 45 kg an; für kräftigere und bessere Pferde eine solche von 60 bis 70 kg. Der Bahndurchmesser soll mindestens 10 m betragen.**)

Fig. 88.

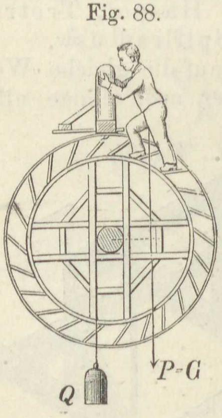
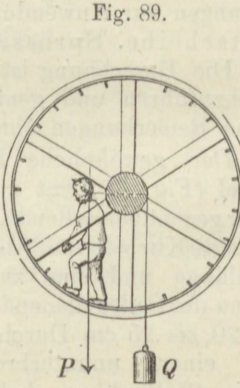


Fig. 89.



*) Vgl. II. Teil; Seite 95.
**) „ „ „ ; „ 30.

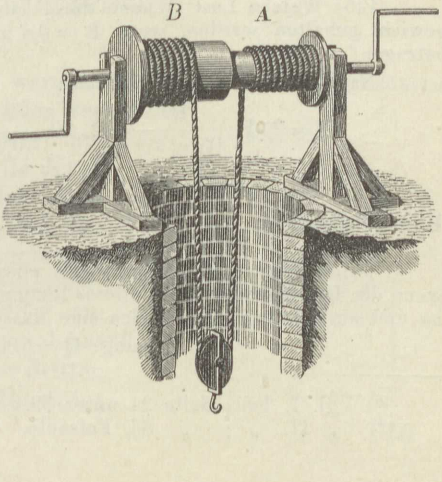
Bei der Berechnung der Wirkung einer Kraft am Tretrade (Fig. 88), oder im Laufrade (Fig. 89), ist zu berücksichtigen, dafs die Kraft, welche durch das Gewicht des am oder im Rade arbeitenden lebenden Wesens erzeugt wird, nicht an einem dem Radhalbmesser gleichen Hebelarme zur Wirkung gelangt, sondern an einem Hebelarme, welcher erhalten wird, wenn man durch den Schwerpunkt des arbeitenden Geschöpfes eine Senkrechte gezogen denkt und auf diese wieder eine Senkrechte vom Drehpunkte aus fällt. Diese letztere Senkrechte bildet alsdann den in die Rechnung einzuführenden Hebelarm. Der Erfahrung zufolge entspricht die von dem betreffenden lebenden Wesen tatsächlich ausgeübte Kraft ungefähr $\frac{1}{5}$ seines Gewichtes.

Die Wirkung eines Wellrades ist nach dem Vorhergesagten von der Gröfse des Hebelarmes der Kraft und von derjenigen des Halbmessers der Welle abhängig, d. h. die zu hebende Last kann um so gröfser sein, je gröfser der Hebelarm der Kraft und je kleiner der Wellenhalbmesser ist. Diese Gröfsen dürfen aber gewisse Grenzen nicht überschreiten, da einmal der Festigkeit wegen der Wellenhalbmesser nicht zu klein, des Raumes wegen aber der Hebelarm der Kraft nicht zu grofs angenommen werden darf.

Um diesen Übelständen zu begegnen, gibt man der Welle zwei verschiedene Durchmesser (Fig. 90), schlingt das Seil, an welchem die Last hängt, um eine sog. lose Rolle und läfst dieses Seil bei der Umdrehung der Welle sich von dem schwächeren Teil A der Welle ab- und auf den stärkeren Teil B derselben aufwickeln. Man nennt diese Vorrichtnng eine „Differentialwinde“

Die Last Q wird hierbei in zwei Seitenkräfte, jede gleich $\frac{1}{2}$ Q, zerlegt, von denen die eine an der Welle A, die andere im entgegengesetzten Sinne an der Welle B wirksam ist.

Fig. 90.



Bezeichnet man noch mit:

P die tätige Kraft,
R den Hebelarm dieser Kraft,
r_1 den gröfseren Wellenhalbmesser,
r_2 „ kleineren „

dann ergibt sich für den Gleichgewichtszustand:

$P . R + \frac{1}{2} . Q . r_2 = \frac{1}{2} . Q . r_1$. Hieraus folgt:

$P . R = \frac{Q}{2} . r_1 - \frac{Q}{2} . r_2$ oder*)

$P . R = \frac{Q}{2} . (r_1 - r_2)$. Damit wird:

$$P = \frac{Q}{2} . \frac{(r_1 - r_2)}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 145)$$

$$Q = 2 . P . \frac{R}{(r_1 - r_2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 146)$$

Es ist hieraus ersichtlich, dafs die Gröfse der zu hebenden Last nur abhängig ist von dem Unterschiede $(r_1 - r_2)$ der beiden Wellenhalbmesser.**)

Beispiele:

124) Welche Kraft ist erforderlich, um einer Last von 600 kg das Gleichgewicht zu halten, wenn $R = 0{,}4$ m, $r_1 = 0{,}15$ m und $r_2 = 0{,}12$ m angenommen werden?

Nach Formel 145) erhält man:

$$P = \frac{Q}{2} . \frac{(r_1 - r_2)}{R} = \frac{600}{2} . \frac{(0{,}15 - 0{,}12)}{0{,}4} = 22{,}5 \text{ kg}.$$

125) Welche Last Q kann durch eine Kraft $P = 20$ kg im Gleichgewicht gehalten werden, wenn $R = 0{,}4$ m, $r_1 = 0{,}2$ m und $r_2 = 0{,}18$ m betragen?

Nach Formel 146) erhält man:

$$Q = 2 . P . \frac{R}{(r_1 - r_2)} = 2 . 20 . \frac{0{,}4}{(0{,}2 - 0{,}18)} = 800 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

95) Welche Last kann mittels eines Wellrades gehoben werden, wenn der Durchmesser der Welle = 180 mm, der Raddurchmesser = 1,2 m ist und am Umfange des Rades eine Kraft P = 30 kg angreift?

Lösung: Q = 200 kg.

---

*) Vgl. I. Teil; Seite 21 unter 39.
**) „ II. „ ; „ 83, Fufsnote.

96) An einem Kurbelhaspel (Fig. 87), wirken zwei Arbeiter zusammen mit einer Kraft $P = 30$ kg. Es soll eine Last $Q = 100$ kg gehoben werden, wenn die Welle einen Durchmesser von 188 mm hat und die Bewegungshindernisse zu $^1/_5$ der Last angenommen werden. Welche Länge erhalten die Kurbeln?

Lösung: $R = 360$ mm.

97) Welche Kraft ist erforderlich, um mit einer Welle von 150 mm Durchmesser eine Last von 750 kg zu heben, wenn der Durchmesser des Rades 2,8 m beträgt?

Lösung: $P = 40{,}17$ kg.

98) Welcher Halbmesser mufs einer Welle gegeben werden, wenn durch eine Kraft $P = 25$ kg, die an einem Rade von 1,5 m Halbmesser angreift, einer Last $Q = 500$ kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: $r = 0{,}075$ m.

99) Welche Last kann ein Arbeiter mittels eines Tretrades (Fig. 88) aufwinden, wenn die von dem Arbeiter erzeugte Kraft zu 15 kg, der Hebelarm der Kraft zu 1,3 m, der Wellenhalbmesser zu 0,12 m und der Reibungs- und Seilsteifigkeitswiderstand zu $^1/_3$ der Last angenommen werden?

Lösung: $Q = 122$ kg.

100) Welche Kurbellänge R ist an einer Differentialwinde nach Fig. 90) erforderlich, um eine Last $Q = 750$ kg aufzuwinden, wenn die Kraft $P = 24$ kg, die Wellenhalbmesser $r_1 = 0{,}15$ m und $r_2 = 0{,}13$ m betragen?

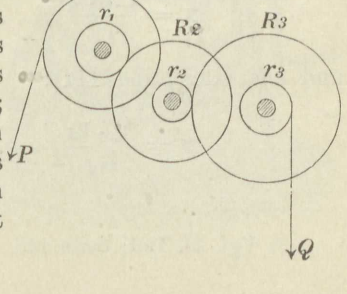
Lösung: $R = 0{,}312$ m.

Elftes Kapitel.

Räderwerke.

Mehrere Wellräder werden miteinander durch Riemen, Seile, Ketten oder Zahnräder verbunden.

Fig. 91.



Im letzteren Falle sitzt auf der Welle, an welcher die Kraft mittels einer Kurbel oder eines Rades angreift, ein kleines Rad, das sog. Getriebe, welches in ein gröfseres Rad auf der zweiten Welle eingreift; an dieser Welle kann wieder ein Getriebe angebracht sein, welches die Bewegung auf ein an der dritten Welle befindliches Rad überträgt usw. (Fig. 91.)

Um die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand eines solchen Räderwerkes zu untersuchen, verfährt man auf dieselbe Weise wie bei den zusammengesetzten Hebelwerken.*)

Bezeichnet man die Halbmesser der Räder mit R_1, R_2, R_3, die der Getriebe mit r_1, r_2, r_3, den Druck zwischen dem ersten und zweiten Wellrade mit x und den Druck zwischen dem zweiten und dritten Wellrade mit y, dann ist x für das erste Wellrad die Last und für das zweite die Kraft, y für das zweite Wellrad die Last und für das dritte die Kraft. Als Bedingung für den Gleichgewichtszustand ergibt sich alsdann:

Für das erste Wellrad: $P \cdot R_1 = x \cdot r_1$ . . . . I)

„ „ zweite „ $x \cdot R_2 = y \cdot r_2$ . . . . II)

„ „ dritte „ $y \cdot R_3 = Q \cdot r_3$ . . . . III)

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man alsdann:

$$P \cdot R_1 \cdot x \cdot R_2 \cdot y \cdot R_3 = x \cdot r_1 \cdot y \cdot r_2 \cdot Q \cdot r_3.$$

Da sich x und y auf beiden Seiten heben, folgt:

$$P \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = Q \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \text{ oder:}$$

$$P = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} \cdot Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 147)$$

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 148)$$

Werden die Räder mit den Halbmessern R_3 und r_3 nicht gebraucht, dann gehen die Formeln 147 und 148) über in:

$$P = \frac{r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 149)$$

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 150)$$

Als Zahndruck an den Berührungsstellen der Zähne, d. i. im Teilkreise der Zahnräder, erhält man aus Gleichung I):

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 151)$$

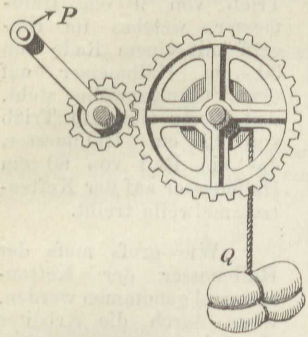
und aus Gleichung III):

$$y = \frac{Q \cdot r_3}{R_3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 152)$$

*) Vgl. II. Teil; Seite 145.

Beispiele:

Fig. 92.



126) An einer Winde, deren Räderwerk in Fig. 92) dargestellt ist, wirken zwei Arbeiter, jeder mit einer Kraft von 10 kg, an einer 40 cm langen Kurbel. Das auf der Kurbelwelle sitzende Trieb hat 6 cm, das Rad auf der Trommelwelle 36 cm und die Seiltrommel 10 cm Halbmesser. Welche Last kann durch diese Kraft im Gleichgewicht gehalten werden?

Gegeben sind: $P = 20$ kg, $R_1 = 40$ cm, $R_2 = 36$ cm, $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 10$ cm.

Nach Formel 150) erhält man:

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P = \frac{40 \cdot 36}{6 \cdot 10} \cdot 20 = 480 \text{ kg.}$$

Rechnet man $15\,\% = 0{,}15$ der zu bewältigenden Last als Verlust für die vorhandenen Widerstände, so würden in Wirklichkeit nur

$$480 - 0{,}15 \cdot 480 = 408 \text{ kg}$$

als zu hebende Last anzunehmen sein.

Den Zahndruck an der Berührungsstelle erhält man nach Formel 151):

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{20 \cdot 40}{6} = 133{,}33 \text{ kg.}$$

127) Mit derselben Winde sollen durch zwei Arbeiter 900 kg gehoben werden. Welchen Halbmesser mufs jetzt das Rad auf der Trommelwelle erhalten, wenn der Bewegungswiderstände wegen die zu hebende Last zu 1000 kg angenommen wird?

Aus Formel 150), $Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P$, ergibt sich durch Umformung:

$$R_2 = \frac{Q \cdot r_1 \cdot r_2}{P \cdot R_1} = \frac{1000 \cdot 6 \cdot 10}{20 \cdot 40} = 75 \text{ cm.}$$

128) Bei einer Winde mit doppeltem Rädervorgelege sind gegeben: $R_1 = 40$ cm, $R_2 = 50$ cm, $R_3 = 60$ cm; $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 10$ cm, $r_3 = 15$ cm.

Welche Last kann durch eine Kraft von 24 kg im Gleichgewicht gehalten werden? (Fig. 93.)

Nach Formel 148) erhält man:

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot P =$$

$$= \frac{40 \cdot 50 \cdot 60}{6 \cdot 10 \cdot 15} \cdot 24 = 3200 \text{ kg.}$$

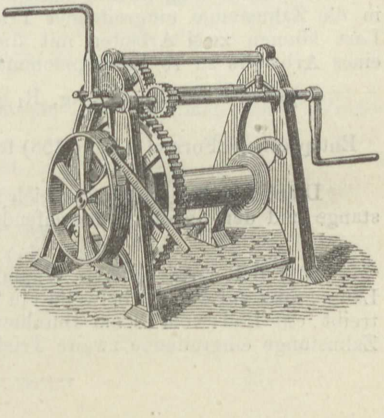
Als Zahndruck erhält man nach Formel 151):

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{24 \cdot 40}{6} = 160 \text{ kg}$$

und nach Formel 152):

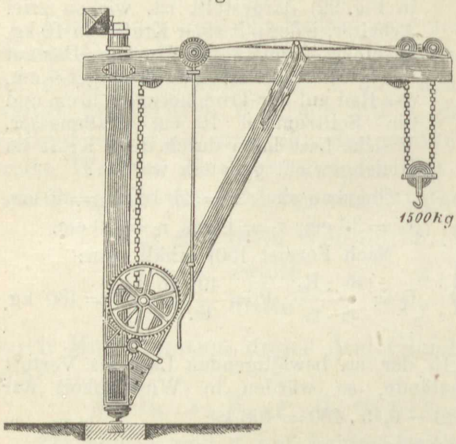
$$y = \frac{Q \cdot r_3}{R_3} = \frac{3200 \cdot 15}{60} = 800 \text{ kg.}$$

Fig. 93.



129) Ein Krahn (Fig. 94), hat zwei Vorgelege mit Kurbeln von 45 cm Länge, an denen je ein Arbeiter mit einer Kraft von 12 kg tätig ist. Auf der Kurbelwelle sitzt ein Trieb von 9 cm Halbmesser, welches im Eingriff mit einem Rade von 30 cm Halbmesser auf der Vorgelegewelle steht. Auf dieser sitzt ein Trieb von 12 cm Halbmesser, das ein Rad von 60 cm Halbmesser auf der Kettentrommelwelle treibt.

Fig. 94.



Wie grofs mufs der Halbmesser der Kettentrommel genommen werden, wenn durch die Arbeiter eine Last von 1500 kg ohne Rücksicht auf Reibung gehoben werden soll?

Gegeben sind:

$$P = 24 \text{ kg}, \; R_1 = 45 \text{ cm}, \; R_2 = 30 \text{ cm}, \; R_3 = 60 \text{ cm};$$
$$r_1 = 9 \;\;", \; r_2 = 12 \;\;", \; Q = 1500 \text{ kg}.$$

Aus Formel 148), $Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot P$, erhält man:

$$r_3 = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot P}{r_1 \cdot r_2 \cdot Q} = \frac{45 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 24}{1500 \cdot 9 \cdot 12} = 12 \text{ cm}.$$

Als Zahndruck erhält man nach Formel 151):

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{24 \cdot 45}{9} = 120 \text{ kg}$$

und nach Formel 152):

$$y = \frac{Q \cdot r_3}{R_3} = \frac{1500 \cdot 12}{60} = 300 \text{ kg}.$$

130) Eine Wagenwinde hat eine Kurbel von 30 cm Länge und ein in die Zahnstange eingreifendes Trieb von 6 cm Durchmesser. Welche Last können zwei Arbeiter mit dieser Winde heben, wenn die Kraft eines Arbeiters zu 15 kg angenommen wird?

Gegeben sind: $P = 30$ kg, $R_1 = 30$ cm, $r_1 = 3$ cm.

Entsprechend Formel I, Seite 158) folgt: $Q = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{30 \cdot 30}{3} = 300$ kg.

Diese 300 kg bilden zugleich den Zahndruck zwischen der Zahnstange und dem in diese eingreifenden Trieb.

131) Bei einer anderen Wagenwinde mit einer Kurbel von 30 cm Länge, sitzt auf der Kurbelwelle ein Trieb von 6 cm Durchmesser. Dieses treibt ein Rad von 13 cm Durchmesser, mit dessen Welle das in die Zahnstange eingreifende zweite Trieb von 9 cm Durchmesser verbunden

ist. Welche Last können zwei Arbeiter mit dieser Winde bewältigen, wenn die Kraft eines jeden zu 15 kg angenommen wird?

Gegeben sind: $P = 30$ kg, $R_1 = 30$ cm, $R_2 = 6{,}5$ cm;
$r_1 = 3$ „ $r_2 = 4{,}5$ „.

Nach Formel 150) erhält man:

$$Q = \frac{R_1 . R_2}{r_1 . r_2} . P = \frac{30 . 6{,}5 . 30}{3 . 4{,}5} = 433{,}3 \text{ kg.}$$

Diese 433,3 kg entsprechen zugleich dem Zahndruck in der Zahnstange. Der Zahndruck in dem ersten Trieb von 6 cm Durchmesser berechnet sich nach Formel 151) zu:

$$x = \frac{P . R_1}{r_1} = \frac{30 . 30}{3} = 300 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

101) Bei einem Räderwerke nach Fig. 91) soll der Halbmesser des Rades auf der Trommelwelle so berechnet werden, dafs mit einer Kraft von 25 kg eine Last von 2000 kg gehoben werden kann. Wie grofs mufs demnach R_3 werden, und wie grofs sind die Zahndrucke an den Berührungsstellen der Zähne, wenn gegeben sind:

$R_1 = 40$ cm, $R_2 = 50$ cm;
$r_1 = 6$ „ $r_2 = 10$ „ $r_3 = 20$ cm.

Lösung: $R_3 = 48$ cm; $x = 166{,}7$ kg;
$y = 833{,}3$ kg.

102) Welche Last kann mittels eines Räderwerkes nach Fig. 91) durch einen Arbeiter, welcher an der Kurbel mit 12 kg tätig ist, gehoben werden, wenn gegeben sind:

$R_1 = 45$ cm, $R_2 = 54$ cm, $R_3 = 60$ cm;
$r_1 = 12$ „ $r_2 = 15$ „ $r_3 = 9$ „.

Lösung: $Q = 1080$ kg.

103) Welche Kraft ist erforderlich, um mit einem Krahn nach Fig. 94) eine Last von 3000 kg zu heben, wenn gegeben sind:

$R_1 = 45$ cm, $R_2 = 54$ cm, $R_3 = 75$ cm;
$r_1 = 10$ „ $r_2 = 12$ „ $r_3 = 15$ „.

Lösung: $P \cong 30$ kg.

104) Welchen Halbmesser erhält die Trommel einer Windevorrichtung, wenn gegeben sind:

$R_1 = 44{,}8$ cm, $R_2 = 26$ cm, $R_3 = 62{,}4$ cm;
$r_1 = 5{,}2$ „ $r_2 = 10{,}4$ „ $Q = 3600$ kg;
$P = 30$ kg.

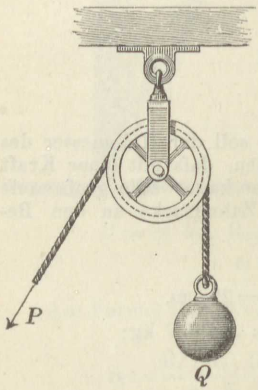
Lösung: $r_3 = 11{,}2$ cm.

Zwölftes Kapitel.

Die Rolle.

Die Rolle ist eine kreisrunde, mit konzentrischer Achse versehene, bewegliche Scheibe, deren Umfang zur Aufnahme eines Seiles, eines Riemens oder einer Kette hergerichtet ist.

Fig. 95.



Man unterscheidet feste und lose Rollen. Eine feste Rolle (Fig. 95) ist eine solche, die nur eine drehende Bewegung um eine feste, ihren Ort nicht verändernde Achse annehmen kann; sie ist zum Teil von einem Seile umschlungen, an dessen einem Ende die Last und an dessen anderem Ende die Kraft angreift.

Zieht man in nebenstehender Figur aus dem Mittelpunkte der Rolle die Senkrechten auf die Richtungslinien von P und Q, so ist das Ganze nunmehr als ein gleicharmiger Hebel aufzufassen, an welchem Gleichgewicht stattfinden wird, wenn die Kraft ebenso grofs ist wie die Last. Hieraus folgt, dafs bei der festen Rolle an Kraft nichts gewonnen wird, und dafs dieselbe nur dazu dient, eine Änderung in der Kraftrichtung herbeizuführen. Um Bewegung zu erzeugen mufs sogar die Kraft, der Reibung und der Steifigkeit der Seile wegen, gröfser sein als die Last.

Fig. 96.

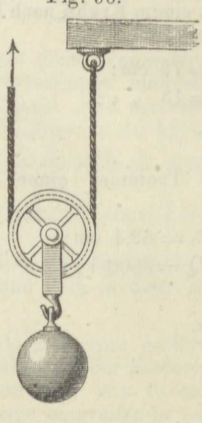
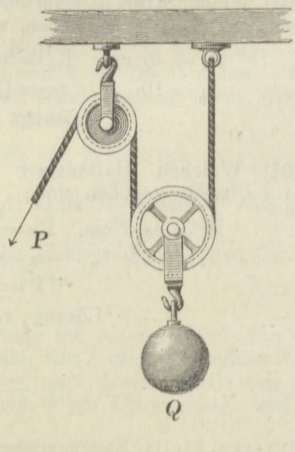


Fig. 97.



Eine lose Rolle (Fig. 96) ist eine solche, die sich nicht nur um ihren Mittelpunkt dreht, sondern sich zugleich mit der Last, welche in der Rollenmitte an einem Kloben angehängt ist, hebt und senkt; also ihren Ort verändert.

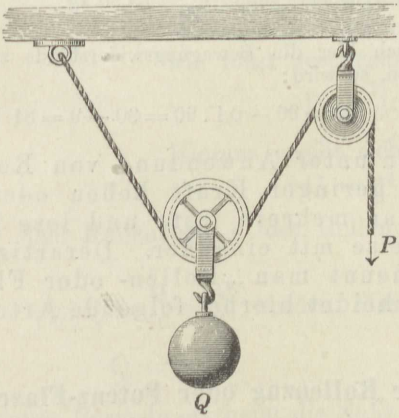
Verschiedene Anordnungen der losen Rolle sind aus den Fig. 96, 97 und 98) ersichtlich; der besseren Seilführung wegen wird das Seilende, an welchem die Kraft angreift, noch über eine feste Rolle geleitet.

Sind die Seilenden wie in Fig. 96 und 97) parallel gerichtet, so hat jedes derselben die halbe Last zu tragen; es ist alsdann für den Gleichgewichtszustand:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 153)$$

Sind die Seilenden nicht parallel (Fig. 98), so ist der Gewinn an Kraft nicht so groſs; er wird um so geringer, je mehr die Seilenden von ihrer parallelen Lage abweichen. Für die in Fig. 98) dargestellte Anordnung gilt folgende Regel:

Fig. 98.



Gleichgewicht findet statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie der Halbmesser der losen Rolle zur Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens.

Bezeichnet man den Halbmesser der losen Rolle mit r, die Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens derselben mit s, so erhält man nach der angegebenen Regel für den Gleichgewichtszustand:

$P : Q = r : s.$ Hieraus folgt:

$$P = \frac{Q \cdot r}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 154)$$

$$Q = \frac{P \cdot s}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 155)$$

Beispiele:

132) Durch die in Fig. 97) dargestellte Rollenverbindung soll eine Last von 100 kg im Gleichgewicht gehalten werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Nach Formel 153) erhält man:

$$P = \frac{1}{2} . Q = \frac{100}{2} = 50 \text{ kg.}$$

Soll die Last gehoben werden, und nimmt man die hierbei auftretenden Bewegungswiderstände zu $^1/_{10} = 10\%$ der Last an, so wird:

$$P = 50 + 0{,}1 . 100 = 50 + 10 = 60 \text{ kg.}$$

133) Welche Last Q kann mittels der in Fig. 98) dargestellten Rollenverbindung durch eine Kraft $P = 60$ kg gehoben werden, wenn der Radius der losen Rolle $r = 20$ cm und die Sehne $s = 30$ cm angenommen werden?

Nach Formel 155) erhält man zunächst für den Gleichgewichtszustand:

$$Q = \frac{P . s}{r} = \frac{60 . 30}{20} = 90 \text{ kg.}$$

Werden auch hier die Bewegungswiderstände zu $^1/_{10} = 10\%$ der Last angenommen, so wird:

$$Q = 90 - 0{,}1 . 90 = 90 - 9 = 81 \text{ kg.}$$

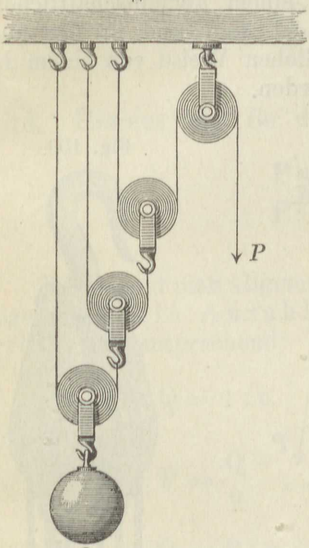
Will man unter Anwendung von Rollen gröfsere Lasten mit geringer Kraft heben oder senken, so verbindet man mehrere feste und lose Rollen in geeigneter Weise mit einander. Derartige Rollenverbindungen nennt man „Rollen- oder Flaschenzüge“. Man unterscheidet hierbei folgende Arten:

1) Der Rollenzug oder Potenz-Flaschenzug.

Derselbe besteht aus mehreren losen Rollen, welche mittels einer gleich grofsen Anzahl von Seilen auf die aus Fig. 99) ersichtliche Weise mit einander in Verbindung gebracht sind. An der untersten Rolle hängt die Last Q, während die Kraft P an dem über eine feste Rolle geleiteten Seilende angreift.

Nimmt man 3 lose Rollen und parallele Seilrichtungen an, so ist nach Vorstehendem der Zug in dem an der zweiten Rolle befestigten Seilende des um die erste Rolle geleiteten Seiles gleich der halben angehängten Last, also $= \frac{1}{2}$ Q. Dieser Zug bildet aber die an der zweiten Rolle wirkende Last; mithin ist die Spannung in dem an der dritten Rolle befestigten Seilende wiederum nur gleich der halben, an der zweiten losen Rolle wirkenden Last, also gleich der Hälfte von $\frac{1}{2}$ Q $= \frac{1}{2} . (\frac{1}{2}$ Q$) = \frac{1}{4}$ Q, und aus demselben Grunde der Zug in dem über die feste Rolle geleiteten Seilende $= \frac{1}{2} . (\frac{1}{4}$ Q$) = \frac{1}{8}$ Q; mithin für den Gleichgewichtszustand, ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse und das der Kraft entgegenwirkende Eigengewicht der Rollen:

Fig. 99.



$$\mathbf{P} = \tfrac{1}{8} . \mathbf{Q} \quad \ldots\ldots \quad 156)$$

Hieraus folgt:

$$\mathbf{Q} = 8 . \mathbf{P} \quad \ldots\ldots \quad 157)$$

d. h. man kann mit einem solchen Potenzflaschenzuge eine Last im Gleichgewicht halten, welche 8 mal so grofs ist wie die an dem Zuge tätige Kraft.

Formel 156) kann, wenn man berücksichtigt, dafs $8 = 2^3$ ist, auch wie folgt geschrieben werden:

$$P = \frac{Q}{2^3}.$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$Q = 2^3 . P.$$

Wären in dem Rollenzuge 4 lose Rollen vorhanden, so müfste

$P = \frac{1}{16} . Q = \frac{Q}{16} = \frac{Q}{2^4}$ werden. Hieraus folgt dann:

$$Q = 2^4 . P.$$

In den letzten Formeln erscheint die Zahl **2** immer in der Potenz, welche der Anzahl der in dem Rollenzuge vorhandenen **losen** Rollen entspricht; bezeichnet man diese Anzahl allgemein mit **n**, dann wird entsprechend:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2^n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 158)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{2^n} . \mathbf{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 159)$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse die Last mit der n^{ten} Potenz von 2 zunehmen darf. Bei 4 losen Rollen braucht man demnach nur den 2^4, d. i. den 16^{ten}, und bei 6 losen Rollen nur den 2^6, d. i. den 64^{ten} Teil der Last als erforderliche Kraft.

2) Der gemeine Flaschenzug.

Derselbe besteht aus mehreren festen Rollen a und mehreren losen Rollen b, welche in einem gemeinschaftlichen Gehäuse, der Flasche, untergebracht sind und in der aus den Fig. 100, 101 und 102) ersichtlichen Weise von einem in c befestigten Seile umschlungen werden.

Fig. 100.

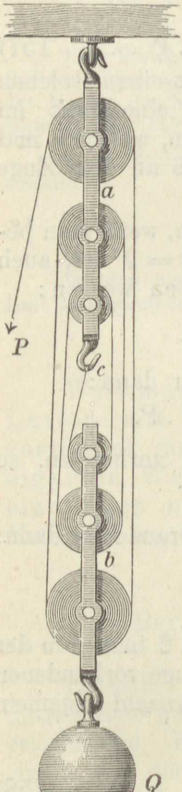


Fig. 101.

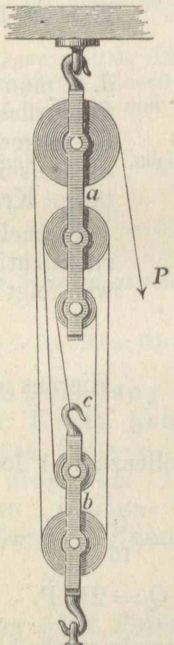
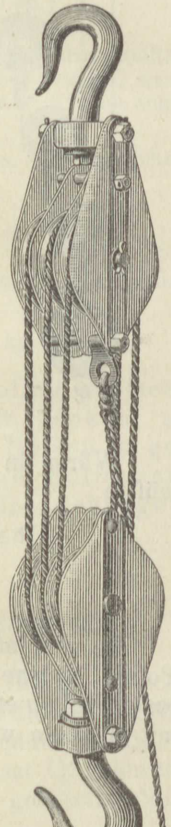


Fig. 102.



Ist dieses Seil an der festen Flasche befestigt, wie Fig. 100) zeigt, so ist stets die gleiche Anzahl Rollen in jeder Flasche erforderlich; ist es aber an der losen, beweglichen Flasche fest gemacht, wie in Fig. 101), so mufs in der festen Flasche stets eine Rolle mehr vorhanden sein.

In beiden Fällen verteilt sich die Last gleichmäſsig auf die Anzahl der Seilenden; es ist daher die Spannung in den Seilenden nach Fig. 100) bei 6 Rollen $= \frac{1}{6}$ Q, und nach Fig. 101) bei 5 Rollen $= \frac{1}{5}$ Q, infolgedessen auch

$$P = \tfrac{1}{6} Q \text{ und}$$
$$P = \tfrac{1}{5} Q$$

wird. Hieraus folgt für den Gleichgewichtszustand:

$$P : Q = 1 : 6 \text{ und}$$
$$P : Q = 1 : 5.$$

Bezeichnet man allgemein bei einem gewöhnlichen Flaschenzuge mit n die Anzahl der Rollen überhaupt, so verhält sich entprechend:

$P : Q = 1 : n.$ Damit wird:

$$\mathbf{P = \frac{Q}{n}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{160)}$$

$$\mathbf{Q = P \, . \, n} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{161)}$$

Bezeichnet man mit m die Anzahl der losen Rollen, so folgt für Fig. 100):

$P : Q = 1 : 2\,m$ und damit

$$\mathbf{Q = 2\,m \, . \, P} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{162)}$$

und für Fig. 101):

$P : Q = 1 : (2\,m + 1)$ und damit

$$\mathbf{Q = (2\,m + 1) \, . \, P} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{163)}$$

Damit diese Flaschenzüge nicht eine zu groſse Länge annehmen, ordnet man die Rollen nicht untereinander, sondern nebeneinander an, wie Fig. 102) zeigt. Es macht sich hierbei jedoch der schiefen, geschränkten Lage der Seile wegen eine stärkere Abnutzung derselben und eine nicht unerhebliche Vergröſserung der Reibung bemerkbar.

3) Der Differential-Flaschenzug.

Fig. 103.

Der Differential-Flaschenzug besteht aus zwei in einem Stück gegossenen festen Rollen, deren Durchmesser nur wenig von einander verschieden sind, und aus einer losen Rolle, an welcher die Last angreift. (Fig. 103.)

Eine Kette ohne Ende, in welcher die lose Rolle hängt, schlingt sich derartig um die festen Rollen, dafs sich bei abwärts gerichtetem Zuge die Kette von der kleineren Rolle ab- und auf die gröfsere Rolle aufwickelt.

Bezeichnet man den Halbmesser der gröfseren Rolle mit R, den der kleineren mit r, so folgt für den Gleichgewichtszustand, da die Spannung in den beiden Kettenenden je $\frac{1}{2}$ Q beträgt:

$P . R + \frac{1}{2} Q . r = \frac{1}{2} Q . R.$ Hieraus folgt:*)

$$P = \frac{R - r}{2 . R} . Q \quad \ldots . \quad 164)$$

$$Q = \frac{2 . R}{R - r} . P \quad \ldots . \quad 165)$$

Beispiele:

134) Welche Kraft ist erforderlich, um an einem gewöhnlichen Flaschenzuge mit 6 Rollen einer Last Q = 300 kg das Gleichgewicht zu halten?

Nach Formel 160) erhält man:

$$P = \frac{Q}{n} = \frac{300}{6} = 50 \text{ kg.}$$

135) Welcher Last kann durch eine Kraft von 20 kg, bei Anwendung eines gewöhnlichen Flaschenzuges mit 8 Rollen, das Gleichgewicht gehalten werden?

Nach Formel 161) erhält man:

$$Q = P . n = 20 . 8 = 160 \text{ kg.}$$

136) Welche Last kann bei einem Kraftaufwande von 25 kg durch einen Potenzflaschenzug mit 4 losen Rollen angehoben werden?

Nach Formel 159) erhält man:

$$Q = P . 2^n = 25 . 2^4 = 25 . 16 = 400 \text{ kg.}$$

*) Vgl. II. Teil; Seite 156: Ableitung der Formeln 145 u. 146.

137) Welche Kraft P ist bei Anwendung eines Differential-Flaschenzuges erforderlich, um einer Last $Q = 500$ kg das Gleichgewicht zu halten, wenn $R = 0{,}13$ m und $r = 0{,}12$ m angenommen werden?

Nach Formel 164) erhält man:

$$P = \frac{R - r}{2 . R} . Q = \frac{0{,}13 - 0{,}12}{2 . 0{,}13} . 500 = 19{,}2 \text{ kg}.$$

138) Eine Last von 400 kg soll durch eine Kraft von 35 kg mittels eines Differential-Flaschenzuges gehoben werden. Der Halbmesser der grofsen Rolle ist $= 0{,}10$ m; welchen Halbmesser mufs die kleine Rolle erhalten?

Aus Formel 164), $P = \frac{R - r}{2 . R} . Q$, folgt:

$$2 . R . P = (R - r) . Q \text{ und damit:}$$

$$r = \frac{Q . R - 2 . P . R}{Q} = \frac{400 . 0{,}1 - 2 . 35 . 0{,}1}{400} = 82{,}5 \text{ mm}.$$

Übungsbeispiele:

105) Welche Last Q kann mittels der in Fig. 97) dargestellten Rollenverbindung durch eine Kraft $P = 50$ kg gehoben werden?

Lösung: $Q = 100$ kg.

106) Mittels der in Fig. 98) dargestellten Rollenverbindung soll eine Last $Q = 120$ kg gehoben werden; der Halbmesser der Rolle sei $=$ 26 cm und die Sehne des vom Seile umspannten Bogens $= 40$ cm. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Lösung: $P = 78$ kg.

107) Welche Last können 4 Arbeiter, die zusammen einen Zug von 48 kg ausüben, mittels eines Potenzflaschenzuges, der aus 6 losen Rollen besteht, heben?

Lösung: $Q = 3072$ kg.

108) Welche Kraft ist erforderlich, um durch einen gewöhnlichen Flaschenzug mit 8 Rollen eine Last von 150 kg zu heben?

Lösung: $P = 18{,}75$ kg.

109) Welche Last können 2 Arbeiter, die zusammen eine Zugkraft von 30 kg entwickeln, mit einem gewöhnlichen Flaschenzuge heben, wenn derselbe aus 7 Rollen besteht und die bewegliche Flasche ein Gewicht von 12 kg hat?

Lösung: $Q = 198$ kg.

110) Wieviel Rollen mufs man einem gewöhnlichen Flaschenzuge geben, wenn ein Arbeiter mit einer Kraft von 15 kg eine Last von 90 kg heben soll?

Lösung: $n = 6$ Rollen.

111) Welche Last kann ein Arbeiter, der eine Zugkraft von 16 kg ausübt, mittels eines Differential-Flaschenzuges heben, wenn der Halbmesser der gröfseren Rolle R = 0,1 m und derjenige der kleineren Rolle r = 0,08 m beträgt?

Lösung: Q = 160 kg.

112) Mittels eines Differential-Flaschenzuges soll eine Last von 500 kg gehoben werden. Der Halbmesser der gröfseren Rolle sei = 0,13 m, derjenige der kleineren Rolle = 0,12 m. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Lösung: P = 19,2 kg.

Bei allen Rollenverbindungen und Flaschenzügen bilden Reibung und Seilsteifigkeit aufserordentliche Bewegungshindernisse. Bei gewöhnlichen Flaschenzügen mit 2 bis 3 Rollen in jeder Flasche, sind die Widerstände zu $\frac{1}{3}$ bis zu $\frac{1}{2}$ der angehängten Last zu veranschlagen, so dafs man, um sicher zu gehen, zur Berechnung des erforderlichen Kraftaufwandes $\frac{4}{3}$ Q bis $\frac{3}{2}$ Q in die Rechnung einführen mufs. Mit zunehmender Rollenzahl steigern sich die Widerstände derart, dafs unter Umständen kaum noch von einem Kraftgewinn die Rede sein kann. Überdies mufs nach den Gesetzen über „Mechanische Arbeit“ die Kraft einen soviel mal gröfseren Weg zurücklegen, als die Last gröfser ist, als die Kraft.*) In den folgenden Gleichungen sind die Kraftwege der vorstehend besprochenen Rollenverbindungen angegeben. Bezeichnet man mit:

S den Weg der Kraft,
s „ „ „ Last,

so ist für den Potenzflaschenzug im allgemeinen:

$$s = \frac{S}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 166)$$

und für den Zug nach Fig. 99) im besonderen:

$s = \frac{S}{2^3} = \frac{S}{8}$; d. h. die Kraft legt einen 8 mal längeren Weg zurück als die Last.

---

*) Vgl. III. Teil: „Mechanische Arbeit“.

Für den gemeinen Flaschenzug ist im allgemeinen:

$$s = \frac{S}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 167)$$

und für den Zug nach Fig. 100) im besonderen:

$s = \frac{S}{6}$; im gleichen Sinne für den Zug nach Fig. 101):

$s = \frac{S}{5}$.

Für den Differential-Flaschenzug nach Fig. 103) ist allgemein:

$$s = \frac{R - r}{2 \cdot R} \cdot S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 168)$$

Dreizehntes Kapitel.

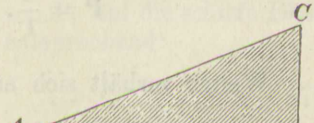
Die schiefe Ebene.

Unter einer schiefen Ebene versteht man eine ebene Fläche, welche mit einer wagerechten Ebene einen beliebigen spitzen Winkel bildet. In nebenstehender Fig. 104) bezeichnen:

AB die Basis,
AC die Länge und
BC die Höhe

der schiefen Ebene.

Fig. 104.



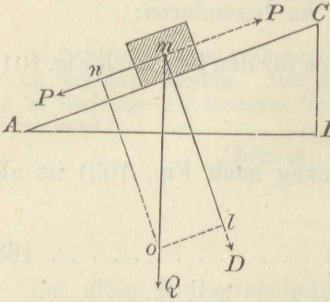
Bei der schiefen Ebene ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine auf derselben befindliche Last im Gleichgewicht gehalten oder aber bewegt werden kann.

Folgende Fälle sind hierbei hauptsächlich in Betracht zu ziehen:

1) Die Kraft wirkt parallel zur Länge AC der schiefen Ebene.

Man zerlege, wie in Fig. 105) gezeigt, die Last Q in zwei rechtwinkelig zu einander stehende Seitenkräfte, von denen die eine, P = m n, parallel und die andere, D = l m, senkrecht zur Länge der schiefen Ebene wirkt. Die Seitenkraft l m gibt den von der Last Q auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck D an, während m n die Kraft P darstellt, welche die Last in der Richtung der schiefen Ebene abwärts zu bewegen sucht. Um die Last auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht zu erhalten, mufs der erstgenannten Kraft P eine gleich grofse Kraft P entgegenwirken.

Fig. 105.



Nach der Konstruktion verhält sich nun:

$$P : Q = mn : mo.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke omn und ABC folgt aber:

$$mn : mo = BC : AC;$$ folglich mufs sich auch

$$P : Q = BC : AC$$ verhalten. Mithin:

$$P = \frac{BC}{AC} \cdot Q.$$

Bezeichnet man in üblicher Weise die Höhe der schiefen Ebene mit h, die Länge mit l und die Basis mit b, so erhält man, wenn diese Bezeichnungen in die letzte Gleichung eingeführt werden:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 169)$$

Weiter verhält sich nach Konstruktion:

$$D : Q = lm : mo.$$

Da aber die Dreiecke lmo und ABC ähnlich sind, folgt auch hier ohne Weiteres:

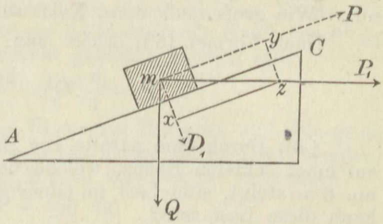
$$D : Q = AB : AC.$$ Daraus ergibt sich:

$$D = \frac{AB}{AC} \cdot Q$$ oder, was dasselbe ist:

$$D = \frac{b}{l} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 170)$$

2) Die Kraft wirkt parallel zur Basis AB der schiefen Ebene.

Fig. 106.



Man zerlege, wie in Fig. 106) gezeigt, die Kraft P_1 in die beiden zu einander rechtwinkeligen Seitenkräfte my = P und mx = D_1, dann gibt D_1 den durch die Wirkung von P_1 auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck an, um welchen also der Druck von Q auf die schiefe Ebene noch vermehrt wird. Hierbei verhält sich nach der Konstruktion:

$P_1 : P = mz : my$ oder, was dasselbe ist:

$P_1 : P = AC : AB$. Daraus ergibt sich

$P_1 = \frac{AC}{AB} . P$ oder auch:

$P_1 = \frac{l}{b} . P$. Nach Formel 169) ist aber:

$P = \frac{h}{l} . Q$. Setzt man diesen Wert für P in die vorstehende Gleichung ein, so erhält man:

$P_1 = \frac{l}{b} . \frac{h}{l} . Q$ und damit:

$$\mathbf{P_1 = \frac{h}{b} . Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{171)}$$

Für den durch die Wirkung von P_1 auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck D_1 erhält man entsprechend:

$$\mathbf{D_1 = \frac{h}{l} . P_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{172)}$$

Wirkt die Kraft weder parallel zur Länge noch parallel zur Basis der schiefen Ebene, so sind die in der Zeichnung bei der Zerlegung der Kraft entstehenden Dreiecke nicht mehr dem Grunddreieck ABC ähnlich; es lassen sich dann auch die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand nicht mehr so einfach nachweisen, wie in den vorstehend aufgeführten Fällen. Ohne Anwendung besonderer Rechnungsarten kann die Lösung derartiger Aufgaben nur durch Konstruktion — graphische Darstellung*) — erfolgen.

*) Vgl. II. Teil; Kapitel VII.

Beispiele:

139) Eine schiefe Ebene steigt auf 15 m Länge um 1 m; auf derselben befindet sich eine Last von 600 kg, welche durch eine parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden soll. Wie grofs mufs diese Kraft sein?

Nach Formel 169) erhält man:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q = \frac{1 \cdot 600}{15} = 40 \text{ kg}.$$

140) Durch eine parallel zur Basis wirkende Kraft von 100 kg soll auf einer schiefen Ebene, welche bei einer Länge der Basis von 30 m um 6 m steigt, eine Last im Gleichgewicht gehalten werden. Wie grofs kann diese Last sein?

Nach Formel 171) erhält man: $P_1 = \frac{h}{b} \cdot Q$. Hieraus folgt:

$$Q = \frac{P_1 \cdot b}{h} = \frac{100 \cdot 30}{6} = 500 \text{ kg}.$$

141) Welche Höhe mufs man dieser schiefen Ebene geben, wenn mit derselben Kraft eine Last von 1200 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Aus Formel 171) ergibt sich:

$$h = \frac{P_1 \cdot b}{Q} = \frac{100 \cdot 30}{1200} = 2{,}5 \text{ m}.$$

142) Fünf Wagen, jeder von 1000 kg Gewicht, sollen auf einer Bahnstrecke, welche im Verhältnis 1 : 50 steigt, befördert werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Nach Formel 169) erhält man:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q = \frac{1}{50} \cdot 5 \cdot 1000 = 100 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

113) Durch eine parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkende Kraft von 50 kg soll eine Last von 750 kg im Gleichgewicht gehalten werden, wenn die Höhe der schiefen Ebene 1,5 m beträgt. Welche Länge mufs die schiefe Ebene erhalten?

Lösung: $l = 22{,}5$ m.

114) Welchen Druck übt eine Last von 800 kg auf eine schiefe Ebene aus, deren Basis = 18 m und deren Länge = 20 m ist?

Lösung: $D = 720$ kg.

115) Eine Last von 855 kg soll durch eine parallel zur Basis einer schiefen Ebene wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden, wenn die Höhe der schiefen Ebene = 2 m und die Länge der Basis = 27 m ist. Wie grofs ist die hierzu erforderliche Kraft?

Lösung: $P = 63{,}3$ kg.

116) Welchen Druck übt eine parallel zur Basis einer schiefen Ebene gerichtete Kraft von 120 kg auf die schiefe Ebene aus, wenn die Höhe derselben = 3 m und die Länge = 18 m ist?

Lösung: $D_1 = 20$ kg.

117) Welche Länge erhält die Basis einer schiefen Ebene von 1,5 m Höhe, wenn durch eine parallel zur Basis wirkende Kraft von 60 kg einer Last von 500 kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: $b = 12{,}5$ m.

118) Die Neigung einer schiefen Ebene zur Basis sei 30^0; wie grofs mufs eine parallel zur Länge dieser schiefen Ebene tätige Kraft werden, um das Herabrollen einer Kugel von 900 kg Gewicht zu verhindern?

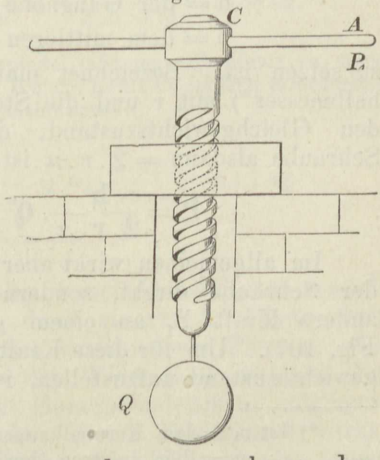
Lösung: $P = 450$ kg.

Vierzehntes Kapitel.

Die Schraube.

Wird an der Aufsenseite eines Zylinders ein Punkt derartig herumgeführt, dafs er stets um dieselbe Gröfse senkrecht steigt und seine Richtung dabei immer denselben Neigungswinkel zu einer Wagerechten behält, so nennt man die hierdurch entstehende, doppelt gekrümmte Linie eine „Schraubenlinie“.

Fig. 107.



Wird ein biegsamer, prismatischer Körper auf dieser Schraubenlinie so um den Zylinder gewunden, dafs immer eine Seite des Körpers an dem Zylinder anliegt, so nennt man die entstehende Hervorragung ein „Schraubengewinde“. Jede einzelne der so entstandenen Windungen heifst „Schraubengang“ und, wenn mehrere derartige Gänge vorhanden sind, das Ganze „Schraubenspindel oder kurz Schraube“.

Je nach der Gestalt des umgewundenen Prismas entsteht spitzes, flaches, halbrundes, Trapez- u. a. Gewinde.

Jeder einzelne Schraubengang ist als eine schiefe Ebene aufzufassen, deren Basis gleich dem Umfange der Schraubenspindel, und deren Höhe gleich der Steigung eines Schraubenganges ist.

Denkt man sich eine Schraube in der durch Fig 107) dargestellten Anordnung, und sieht man von den vorhandenen Bewegungswiderständen ab, so wird die Schraubenspindel sowohl infolge ihres eigenen Gewichtes als auch infolge einer angehängten Last Q, ein Bestreben haben, sich abwärts zu bewegen, durch welches sie, unter stetiger Drehung in den Gängen des Muttergewindes, genau wie auf einer schiefen Ebene herabgleiten würde. Diesem Bestreben, herabzugleiten, soll nun durch eine entweder am Umfange der Schraube direkt oder an einem gröfseren Hebelarme wirkende, in jedem Falle aber wagerecht gerichtete Kraft P entgegengearbeitet, und dadurch der Gleichgewichtszustand herbeigeführt werden.

Es sind hierbei die Gesetze der schiefen Ebene in Betracht zu ziehen; besonders ist Fall 2) ins Auge zu fassen, nach welchem die Kraft parallel zur Basis der schiefen Ebene gerichtet ist. Für diesen Fall wird entsprechend Formel 171):

$$P = \frac{h}{b} \cdot Q,$$

in welcher Gleichung für die Anwendung auf die Schraube:

h = der Ganghöhe der Schraube und

b = dem mittleren Umfange derselben

zu setzen ist. Bezeichnet man den mittleren Schraubenhalbmesser*) mit r und die Steigung mit h, so hat man für den Gleichgewichtszustand, da der mittlere Umfang der Schraube alsdann $= 2 . r . \pi$ ist:

$$P = \frac{h}{2 . r . \pi} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 173)$$

Im allgemeinen wirkt aber die Kraft P nicht am Umfange der Schraube direkt, sondern in den meisten Fällen eine andere Kraft P_1 an einem gröfseren Hebelarme $AC = R$ Fig. 107). Um für diese Kraft P_1 die Formel für den Gleichgewichtszustand aufzustellen, ist zu berücksichtigen, dafs die

---

*) Ist r_1 = dem Kernhalbmesser der Schraube und

r_2 = dem äufseren Gewindehalbmesser derselben,

dann ist das arithmetische Mittel zwischen diesen beiden Halbmessern der sog. „mittlere Schraubenhalbmesser“.

Bezeichnet man diesen mit r, dann wird:

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Kraft P mit dem Momente $P \,.\, r$, die Kraft P_1 dagegen mit dem Momente $P_1 \,.\, R$ an der Schraube tätig ist. Setzt man beide Momente einander gleich, so erhält man:

$$P \,.\, r = P_1 \,.\, R \text{ und damit}$$

$$P = \frac{P_1 \,.\, R}{r}.$$

Setzt man diesen Wert von P in Formel 173) ein, so wird:

$$\frac{P_1 \,.\, R}{r} = \frac{h}{2 \,.\, r \,.\, \pi} \,.\, Q \text{ oder, da sich r hebt,}$$

$$P_1 \,.\, R = \frac{h}{2 \,.\, \pi} \,.\, Q. \text{ Mithin:}$$

$$\mathbf{P_1 = \frac{h}{2 \,.\, R \,.\, \pi} \cdot Q \;\ldots\ldots\ldots\ldots 174)}$$

Beispiele:

143) Eine senkrecht stehende Schraubenspindel hat 10 cm Durchmesser und 3 cm Steigung; sie wiegt 50 kg und trägt eine Last von 200 kg. Um die Spindel selbst wird eine Schnur geschlungen, diese über eine feste Rolle geleitet und mit einem Gewichte P belastet. Wie grofs ist dieses Gewicht zu nehmen, wenn dasselbe das Herabgleiten der Schraubenspindel verhindern soll?

Gegeben sind: $Q = 200 + 50 = 250$ kg;
$r = 5$ cm; $h = 3$ cm.

Nach Formel 173) erhält man:

$$P = \frac{h}{2 \,.\, r \,.\, \pi} \,.\, Q = \frac{3 \,.\, 250}{2 \,.\, 5 \,.\, 3{,}14} = 23{,}88 \text{ kg}.$$

144) An derselben Schraubenspindel läfst man die Kraft an einem Hebel von 0,7 m Länge angreifen. Welche Kraft P_1 ist jetzt erforderlich, um den Gleichgewichtszustand herbeizuführen?

Nach Formel 174) erhält man:

$$P_1 = \frac{h}{2 \,.\, R \,.\, \pi} \,.\, Q = \frac{3 \,.\, 250}{2 \,.\, 70 \,.\, 3{,}14} = 1{,}7 \text{ kg}.$$

Die Schraube findet in den verschiedenartigsten Anordnungen Verwendung. Vielfach dient sie zur Ausübung eines grofsen Druckes, wie z. B. bei den verschiedenen Pressen. An die Stelle der Last tritt hier der Widerstand, welchen der zu pressende Gegenstand dem Zusammendrücken entgegensetzt. Die Richtung, in welcher dieser Widerstand wirkt, kann ganz beliebig sein; die Gröfse des Widerstandes selbst so grofs, dafs das eigene Gewicht der Schraube ganz aufser Betracht kommt. Für alle Fälle bleibt die Rechnung jedoch dieselbe, selbst dann, wenn die Schraube festgehalten und die Kraft an der Schraubenmutter wirkend gedacht wird.

Beispiele:

145) Durch eine Schraubenpresse, deren Spindel eine Steigung von 16 mm besitzt, soll ein Druck von 2500 kg ausgeübt werden. Welche Kraft ist an einem Hebelarme von 1,5 m Länge erforderlich?

Nach Formel 174) erhält man:

$$P_1 = \frac{h}{2 . R . \pi} . Q = \frac{0{,}016 . 2500}{2 . 1{,}5 . 3{,}14} = 4{,}246 \text{ kg.}$$

146) An derselben Presse gelangt eine Kraft von 36 kg zur Wirkung. Wie grofs wird der mit dieser Kraft auszuübende Druck?

Aus Gleichung 174), $P_1 = \frac{h}{2 . R . \pi} . Q$, folgt:

$$Q = \frac{2 . R . P_1 . \pi}{h} = \frac{2 . 1{,}5 . 36 . 3{,}14}{0{,}016} = 21195 \text{ kg.}$$

147) An einem Parallelschraubstocke, dessen Spindel eine Steigung von 8 mm hat, wirkt ein Arbeiter an einem Hebelarme von 300 mm Länge mit einer Kraft von 15 kg. Welchem Drucke ist das eingespannte Arbeitsstück ausgesetzt?

Aus Formel 174) ergibt sich:

$$Q = \frac{2 . R . P_1 . \pi}{h} = \frac{2 . 0{,}3 . 15 . 3{,}14}{0{,}008} = 3532{,}5 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

119) Welcher Druck kann mit einer Schraubenpresse ausgeübt werden, wenn die Kraft an dem 0,6 m langen Hebelarme zu 16 kg und die Ganghöhe der Spindel zu 12 mm angenommen werden?

Lösung: $Q = 5024$ kg.

120) Welchen mittleren Durchmesser erhält eine Schraubenspindel von 20 mm Ganghöhe, wenn an deren Umfange durch eine Kraft von 40 kg einer Last von 750 kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: $d = 119{,}42$ mm.

121) Mittels einer Schraube soll ein Druck von 4500 kg ausgeübt werden; die Ganghöhe sei = 13 mm. An welchem Hebelarme mufs eine Kraft von 16 kg angreifen, um diesen Druck von 4500 kg hervorzubringen?

Lösung: $R = 582{,}2$ mm.

122) Welche Ganghöhe erhält die Spindel einer Schraubenpresse, wenn durch eine Kraft von 20 kg an einem Hebelarme von 800 mm Länge ein Druck von 6000 kg ausgeübt werden soll?

Lösung: $h = 16{,}75$ mm.

123) Eine Schraube hat einen mittleren Durchmesser von 110 mm und eine Ganghöhe von 26 mm. Die Spindel hat ein Gewicht von 36 kg und trägt eine Last von 500 kg. Wie grofs mufs die am mittleren Schraubenumfange tätige Kraft sein, um jenen Gewichten das Gleichgewicht zu halten?

Lösung: $P = 40{,}3$ kg.

Schraube ohne Ende.

Die Schraube ohne Ende, auch „endlose Schraube oder Schnecke“ genannt, besteht aus einer mit einigen Schraubengängen versehenen Spindel, welche durch eine Kurbel in Bewegung gesetzt wird und deren einzelne Gänge in ein Zahnrad eingreifen (Fig. 108). Die Zähne des Rades stehen so geneigt auf dem Radkranze, daſs ihre Richtung der des Schraubengewindes genau entspricht; letzteres greift in die Zähne des Rades wie in die Gänge einer Schraubenmutter ein. Eine Seiltrommel ist auf der Welle des Rades aufgekeilt.

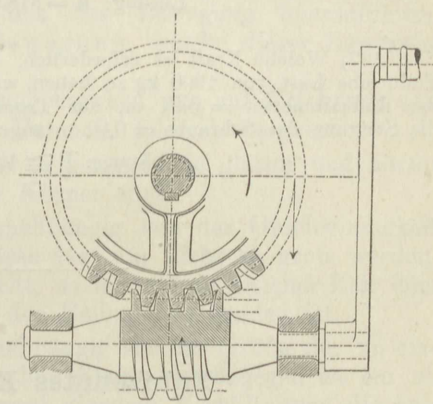
Der Druck x, welcher zwischen den Schraubengängen und den Radzähnen auftritt, ist für die Schraube als Last, für das Wellrad aber als Kraft zu betrachten, und hat man bei einer Kurbellänge R, einer Steigung h, einem Radhalbmesser R_1 und einem Trommelhalbmesser r für das Gleichgewicht an der Schraubenwelle:

$$P \cdot 2 R \pi = x \cdot h;$$ *)

für das Gleichgewicht an der Trommelwelle:

$$x \cdot R_1 = Q \cdot r.$$

Fig. 108.



Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, so folgt:

$$P \cdot 2 R \pi \cdot x R_1 = x h \cdot Q r \text{ oder:}$$

$$P \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot R_1 = Q \cdot h \cdot r. \text{ Hieraus ergibt sich:}$$

$$P = \frac{Q \cdot h \cdot r}{2 \cdot R \cdot \pi \cdot R_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 175)$$

$$Q = \frac{2 \cdot R \cdot \pi \cdot R_1 \cdot P}{h \cdot r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 176)$$

Bei der Schraube ohne Ende geht aber ein groſser Teil der Kraftwirkung, auſser durch die Reibung zwischen den Zähnen und dem Schraubengewinde, auch noch durch die Zapfenreibung verloren; die wirkliche Leistung ist daher nur zu $^1/_4$ bis $^1/_3$ der aus obiger Rechnung hervorgegangenen theoretischen Leistung anzunehmen.

*) Vgl. III. Teil: „Mechanische Arbeit“.

Übungsbeispiele:

124) Welche Last kann mit einer Schraube ohne Ende gehoben werden, wenn die Kraft an der 0,4 m langen Kurbel zu 12 kg, der Radhalbmesser zu 0,2 m, der Trommelhalbmesser zu 0,3 m und die Steigung der Schraube zu 0,03 m angenommen werden?

Lösung: Q = 669,86 kg.

125) Wie grofs ist in vorstehendem Beispiele der Druck, welcher zwischen den Schraubengängen und den Radzähnen auftritt?

Lösung: x = 1004,8 kg.

126) Bei einer Schraube ohne Ende sind gegeben: Der Radhalbmesser = 0,25 m, der Trommelhalbmesser 0,2 m, die Steigung der Schraube = 0,025 m. Welche Länge erhält die Kurbel, wenn durch eine Kraft von 12 kg eine Last von 1200 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: R = 318,5 mm.

127) Welche Kraft ist erforderlich, um mit einer Schraube ohne Ende eine Last von 1000 kg zu heben, wenn die Kurbellänge = 0,4 m, der Radhalbmesser = 0,24 m, der Trommelhalbmesser = 0,36 m und die Steigung der Schraube = 0,02 m angenommen werden?

Lösung: P $\cong$ 12 kg.

Fünfzehntes Kapitel.

Die Reibung.*)

1) Gleitende Reibung.

Der Bewegungswiderstand, welcher an der Berührungsstelle zweier Körper auftritt, von denen der eine über den anderen fortbewegt wird, heifst Reibung.

Die Reibung ist direkt als Widerstand — Bewegungshindernis — aus dem Grunde aufzufassen, weil sie vorwiegend Bewegungen jeder Art nur hindert oder hemmt, selten aber zur Erzeugung von Bewegungen dient.

*) Vgl. III. Teil: „Arbeit der Reibung“.

Gleichgültig, in welcher Richtung man einen Körper auf einer wagerechten oder geneigten Ebene fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung dieser entgegenwirken; sie wird z. B. dem Herabgleiten eines Körpers auf einer schiefen Ebene ebensosehr hinderlich sein, als dem Heraufziehen auf derselben.

Um die Reibung möglichst zu veringern, bedient man sich der Schmiermittel — Öl, Fett, Seife, Graphit usw. — welche zugleich auch von hemmendem Einflusse auf die schnelle Abnutzung der reibenden Flächen sind.

Je nachdem die Bewegung des einen Körpers eine gleitende, drehende oder wälzende ist, unterscheidet man auch gleitende, drehende und wälzende Reibung.

Man unterscheidet aufserdem noch die Reibung der Ruhe, welche überwunden werden mufs, um einen Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung überzuführen, von der Reibung der Bewegung, welche dieser Bewegung hemmend entgegenwirkt.

Die Gesetze der Reibung beruhen nur auf Erfahrung und haben vielfach angestellte Versuche folgendes ergeben:

1) Die Reibung ist um so geringer, je glatter und härter die reibenden Flächen der Körper sind.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der reibenden Körper. Diese darf nur nicht so grofs werden, dafs eine Erwärmung eintritt, da hiermit zu gleicher Zeit eine bedeutende Vergröfserung der Reibung verbunden ist.

3) Die Reibung ist unabhängig von der Gröfse der an einander reibenden Flächen. Die Abnützung dagegen ist um so gröfser, je kleiner unter sonst gleichen Verhältnissen die reibenden Flächen sind. Bei gröfseren Flächen kommen allerdings mehr reibende Teile in Betracht; der auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck ist dann aber auch in demselben Mafse geringer. Es ist z. B. durchaus gleichgültig, auf welcher seiner 6 Flächen ein Ziegelstein auf einer wagerechten Ebene fortbewegt wird; in jedem Falle fällt die Reibung gleich grofs aus.

4) Die Reibung steht im geraden Verhältnis zum Normaldrucke, d. i. dem Drucke, welcher rechtwinkelig gegen die sich berührenden Flächen ausgeübt wird. Hat ein Körper das zweifache oder dreifache Gewicht oder, was dasselbe ist, übt er einen zweimal oder dreimal so grofsen Druck aus, so ist auch die Reibung zweimal oder dreimal so grofs als bei einfachem Drucke.

5) Bei Beginn der Bewegung ist die Reibung gröfser als während derselben oder, was dasselbe ist: Die Reibung der Ruhe ist gröfser als die Reibung der Bewegung.

Bezeichnet man die Gröfse der Reibung mit R und den Normaldruck mit N, so nennt man das Verhältnis $\frac{R}{N}$, d. i. das Verhältnis der Reibung zum Normaldruck, den „Reibungskoeffizienten“.

Der Reibungskoeffizient ist diejenige Zahl, welche angibt, der wievielte Teil einer Last als Kraft erforderlich ist, um diese Last fortzubewegen. Bezeichnet man denselben mit f, so ist:

$$f = \frac{R}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 177)$$

$$R = f \,.\, N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 178)$$

Die Gröfse der Reibung R entspricht zugleich auch derjenigen Kraft, welche erforderlich ist, um einen Körper über einen anderen fortzubewegen.

Tabelle der Reibungskoeffizienten f für gleitende Reibung.

Holz . . .	auf	Holz, trocken	0,36
„ . . .	„	„ gut geschmiert	0,07
„ . . .	„	Metall, trocken	0,42
„ . . .	„	„ gut geschmiert	0,08
Metall . . .	„	„ trocken	0,18
„ . . .	„	„ gut geschmiert	0,07
Gewöhnliche, fette Riemen	„	hölzernen Scheiben	0,47
	„	eisernen „	0,28
Hanfseile	„	rauhem Holz	0,50
	„	sehr glattem Holz	0,33

Beispiele:

148) Das Bett einer leerlaufenden Hobelmaschine hat ein Gewicht von 500 kg. Welche Zugkraft ist erforderlich, um dasselbe bei Anwendung von Schmiermaterial in Bewegung zu erhalten? ($f = 0{,}07$.)

Nach Formel 178) erhält man:

$$R = f \,.\, N = 0{,}07 \,.\, 500 = 35 \text{ kg.}$$

149) Wie grofs ist die Reibung eines mit Eisen beschlagenen und mit 1000 kg belasteten Schlittens, welcher sich ohne Anwendung von Schmiermaterial auf einer Holzbahn bewegt? ($f = 0{,}42$.)

Nach Formel 178) erhält man:

$$R = f \,.\, N = 0{,}42 \,.\, 1000 = 420 \text{ kg.}$$

150) Wie grofs ist der Normaldruck eines Körpers auf eine ebene Bahn, wenn der Reibungswiderstand $= 500$ kg und $f = 0{,}21$ ist?

Aus Formel 178) folgt:

$$N = \frac{R}{f} = \frac{500}{0{,}21} = 2380{,}952 \text{ kg.}$$

151) Auf dem Dampfschieber einer Schiebersteuerung lastet ein Dampfdruck von 4000 kg. Welche Kraft ist zur Bewegung des Schiebers erforderlich, wenn $f = 0,1$ angenommen wird?

Nach Formel 178) erhält man:

$$R = f \,.\, N = 0,1 \,.\, 4000 = 400 \text{ kg.}$$

152) Der Schieber einer Schiebersteuerung besitzt eine Oberfläche von 150 qcm, der in den Schieberkasten eintretende Dampf eine Spannung von 7 Atmosphären (7 kg auf 1 qcm). Wie grofs ist die Reibung oder, was dasselbe ist, welche Kraft ist zur Bewegung dieses Schiebers erforderlich? ($f = 0,12$.)

Der auf dem Schieber lastende Dampfdruck wird erhalten, wenn man die Fläche des Schiebers in qcm mit dem Dampfdrucke auf 1 qcm multipliziert. Es wird also

$$N = 150 \,.\, 7 = 1050 \text{ kg.}$$

Mithin nach Formel 178):

$$R = f \,.\, N = 0,12 \,.\, 1050 = 126 \text{ kg.}$$

153) Wie grofs wird der Reibungskoeffizient, wenn ein Körper von 62,75 kg Gewicht, der auf fester Unterlage ruht, durch eine Kraft von 15,25 kg bewegt werden soll?

Nach Formel 177) erhält man:

$$f = \frac{R}{N} = \frac{15,25}{62,75} = 0,243.$$

154) Ein belasteter Schlitten von 600 kg Gewicht soll auf einer ungeschmierten Holzbahn, welche eine Neigung von 25^0 zur Wagerechten besitzt, heraufgezogen werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0,4$ angenommen wird?

Denkt man sich unter Anwendung der bei Besprechung der schiefen Ebene entwickelten Gesetze die Last Q in zwei Komponenten zerlegt, so übt die Komponente parallel der schiefen Ebene eine Wirkung = 254 kg und „ „ rechtwinkelig zur „ „ „ „ = 543,5 „ aus. Die durch letztere erzeugte Reibung ist mithin nach Formel 178):

$$R = f \,.\, N = 0,4 \,.\, 543,5 = 217,4 \text{ kg;}$$

folglich mufs die Kraft zum Heraufziehen des Schlittens

$$P = 254 + 217,4 = 471,4 \text{ kg betragen.}$$

155) Wie grofs mufs die Kraft werden, welche den Schlitten am Herabgleiten hindert?

Die Reibung unterstützt in diesem Falle die aufgewandte Kraft; es ist daher:

$$P = 254 - 217,4 = 36,6 \text{ kg.}$$

2) Drehende oder Zapfenreibung.

Drehende oder Zapfenreibung tritt am Umfange zylindrischer Körper — Wagenachsen, Wellen usw. — auf, welche sich um ihre eigene Achse drehen und von Lagern umschlossen sind.

Die Gröfse der Zapfenreibung an sich, d. i. die Gröfse des am Umfange der Zapfen des sich drehenden Körpers auftretenden Widerstandes, wird nach der für gleitende Reibung aufgestellten Formel

$$R = f . N$$

berechnet; jedoch mufs die Einwirkung des Momentes der Zapfenreibung auf den Gleichgewichtszustand in die Rechnung eingeführt werden.

Bezeichnet man entsprechend Fig. 109) mit:

N den Normaldruck, mit welchem der Zapfen einer Achse oder Welle in ein Lager gedrückt wird;

$R = f . N$ die Gröfse der am Umfange des Zapfens tätigen Reibung;

r den Halbmesser des Zapfens;

a „ „ eines auf der Welle sitzenden Rades;

P die am Halbmesser a zur Überwindung der Reibung R erforderliche Kraft,

so mufs, da man die Reibung als eine am Umfange des Zapfens der Kraft P entgegengesetzt wirkende Kraft auffassen kann, nach dem über das Rad an der Welle Gesagten

$$R . r = P . a$$

oder, was dasselbe ist:

$$\mathbf{f . N . r = P . a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 179)$$

sein. Hieraus folgt:

$$\mathbf{P = \frac{f . N . r}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 180)$$

$$\mathbf{R = f . N = \frac{P . a}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 181)$$

Die letzte Gleichung gibt alsdann, unter Bezug auf Fig. 109), auch zugleich diejenige Kraft an, welche am Umfange des Zapfens direkt wirken müfste, um die Reibung zu überwinden.

Der Reibungskoeffizient f ist für Zapfenreibung etwas kleiner als für gleitende Reibung zu nehmen, und zwar ist für Zapfen aus Schmiedeeisen oder Gufseisen, welche sich in Lagern von Gufseisen oder Bronze drehen und mit Öl, Talg oder Fett geschmiert werden, bei ununterbrochener Schmierung

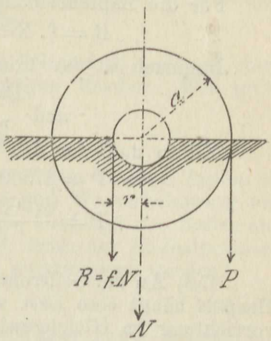
$$f = 0,05 \text{ bis } 0,06,$$

bei gewöhnlicher, periodischer Schmierung

$$f = 0,06 \text{ bis } 0,08$$

zu nehmen.

Fig. 109.



Beispiele:

156) Ein Rad von N = 1500 kg Gewicht und einem Halbmesser von a = 1,5 m ist in Zapfen von r = 90 mm Halbmesser gelagert. Welche Kraft P mufs, um die Zapfenreibung R zu überwinden, am Umfange des Rades tätig sein, wenn f = 0,08 gesetzt wird?

Nach Formel 180) erhält man:

$$P = \frac{f \,.\, N \,.\, r}{a} = \frac{0,08 \,.\, 1500 \,.\, 0,09}{1,5} = 7,2 \text{ kg.}$$

Die Aufgabe liefse sich ohne Formel 180) auch folgendermafsen lösen:

Die Gröfse der Zapfenreibung ist:

$$R = f \,.\, N = 0,08 \,.\, 1500 = 120 \text{ kg.}$$

Demnach ist das Moment der Zapfenreibung:

$$R \,.\, r = 120 \,.\, 0,09 = 10,8.$$

Das Moment der Kraft ist = P . a = P . 1,5; mithin mufs für den Gleichgewichtszustand

$$P \,.\, 1,5 = 10,8 \quad \text{sein. Damit wird:}$$

$$P = \frac{10,8}{1,5} = 7,2 \text{ kg.}$$

157) Mittels einer festen Rolle soll eine Last von Q = 300 kg gehoben werden. Die Zapfen haben einen Durchmesser von 40 mm; der Rollendurchmesser ist zu 450 mm angenommen und der Normaldruck zu 375 kg ermittelt worden. Welche Kraft ist unter Berücksichtigung der Zapfenreibung aufzuwenden, wenn f = 0,07 gesetzt wird?

Da hier aufser der Zapfenreibung auch noch eine Last von 300 kg am Rollenhalbmesser mit überwunden werden soll, so ist das Moment dieser Last mit in die Rechnung einzuführen. Dasselbe ist = Q . a und mufs zum Reibungsmoment addiert werden; man erhält deshalb unter Anwendung von Formel 179):

$$P \,.\, a = f \,.\, N \,.\, r + Q \,.\, a \quad \text{und hieraus:}$$

$$P = \frac{f \,.\, N \,.\, r + Q \,.\, a}{a} = \frac{0,07 \,.\, 375 \,.\, 20 + 300 \,.\, 225}{225}.$$

$$P = 302,33 \text{ kg.}$$

Ohne Formel 179) läfst sich die Aufgabe in folgender Weise lösen: Für die Zapfenreibung erhält man:

$$R = f \, . \, N = 0{,}07 \, . \, 375 = 26{,}25 \text{ kg.}$$

Demnach ist das Moment der Zapfenreibung $= 26{,}25 \, . \, 20 = 525$.

Das Moment der Last ist $= 300 \, . \, 225 = 67500$
und „ „ „ Kraft $= 225 \, . \, P$.

Mithin mufs für den Gleichgewichtszustand

$225 \, . \, P = 67500 + 525$ sein. Hieraus folgt:

$$P = \frac{67500 + 525}{225} = 302{,}33 \text{ kg.}$$

158) An der Seiltrommel von 200 mm Durchmesser eines einfachen Haspels hängt eine Last von 500 kg; dieselbe soll durch eine Bremsvorrichtung im Gleichgewicht gehalten werden. Zu diesem Zwecke befindet sich auf der Trommelwelle ein Bremsrad von 900 mm Durchmesser, gegen dessen Umfang ein hölzerner Bremsklotz geprefst wird. Mit welcher Kraft P mufs dieser Bremsklotz angedrückt werden, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}42$ angenommen wird?

Das Moment der Kraft ist $= P \, . \, 450$, mithin
„ „ „ Reibung $= P \, . \, 450 \, . \, 0{,}42 = 189 \, . \, P$.
„ „ „ Last ist $= 500 \, . \, 100 = 50000$.

Da diese Momente für den Gleichgewichtszustand einander gleich sein müssen, so folgt:

$189 \, . \, P = 50000$ und damit:

$$P = \frac{50000}{189} = 264{,}55 \text{ kg.}$$

Bei allen Maschinen treten aufser der Zapfenreibung noch andere Bewegungshindernisse auf; z. B: Reibung in den Zähnen, Widerstände durch die Steifigkeit der Zugorgane usw. Da alle diese Widerstände sich mit den jeweiligen Verhältnissen ändern, so sind sie äufserst schwer mit ihren richtigen Werten in die Rechnung einzuführen. Man verfährt daher gewöhnlich so, dafs man die Kraft, welche man für die ohne Reibung arbeitende Maschine berechnet hat, um einen bestimmten Bruchteil erhöht oder die zu überwindende Last um einen entsprechenden Wert vermindert.

Übungsbeispiele:

128) Welche Kraft ist erforderlich, um eine Last von 1000 kg auf einer wagerechten Ebene fortzuschleifen? ($f = 0{,}44$.)

Lösung: $R = 440$ kg.

129) Wie grofs wird der Reibungskoeffizient, wenn 2 Körper durch einen Druck von 200 kg aneinander geprefst werden und die zur Bewegung erforderliche Kraft 30 kg beträgt?

Lösung: $f = 0{,}15$.

130) Wie grofs ist der Druck des Bettes einer Hobelmaschine, wenn die erforderliche Zugkraft 100 kg und der Reibungskoeffizient f = 0,08 ist?

Lösung: N = 1250 kg.

131) Ein Schlitten, welcher mit 400 kg belastet ist, soll auf einer wagerechten, sehr glatten Schneebahn fortgezogen werden. Wie grofs ist die erforderliche Zugkraft? (f = 0,038.)

Lösung: R = 15,2 kg.

132) Ein Wasserrad, welches mit seinen 0,3 m starken Zapfen in Lagern von Bronze läuft, besitzt mit Welle und Wasserbelastung ein Gewicht von 18000 kg. Welche Kraft mufs am Umfange des Rades angreifen, um die Zapfenreibung zu überwinden, wenn der Radhalbmesser zu 3,6 m und der Reibungskoeffizient zu 0,08 angenommen werden?

Lösung: P = 60 kg.

133) Ein senkrecht stehender Schleusenschieber, gegen welchen ein Wasserdruck von 1000 kg gerichtet ist und dessen Eigengewicht 100 kg beträgt, soll aufgezogen werden. Welche Kraft ist erforderlich:

1) In dem Zeitpunkte, in welchem die Bewegung beginnt? (f = 0,64.)
2) Während der Bewegung selbst? (f = 0,31.)

Lösung: 1) P = 740 kg.
2) P = **410 kg.**

134) Der Schieber einer Schiebersteuerung besitzt eine Oberfläche von 120 qcm und der in den Schieberkasten eintretende Dampf eine Spannung von 5 Atmosphären. Wie grofs ist die durch die Exzenterstange zu übertragende Kraft, wenn f = 0,15 angenommen wird?

Lösung: R = 90 kg.

135) Eine Dampfmaschine arbeitet mit 7 Atmosphären Dampfdruck im Schieberkasten. Der Dampfschieber ist 30 cm lang und 26 cm breit. Welche Kraft ist zur Bewegung des Schiebers erforderlich, wenn f = 0,11 angenommen wird?

Lösung: R = 600,6 kg.

Sechzehntes Kapitel.

Zusammengesetzte Riemen- und Räderwerke.

Denkt man sich auf die beiden Wellen A und B (Fig. 110 und 111) zwei Riemenscheiben von den Durchmessern a und b aufgekeilt und durch einen endlosen Riemen verbunden, so werden die Wellen während der Bewegung, bei offenem

Riemen wie in Fig. 110), in gleicher Richtung, dagegen bei gekreuztem Riemen wie in Fig. 111), in entgegengesetzter Richtung umlaufen.

Fig. 110.

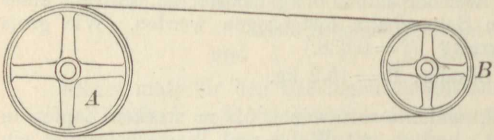
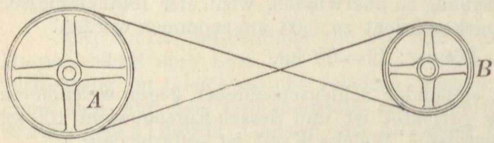


Fig. 111.



Geht man von der Annahme aus, dafs A die treibende, B die getriebene Welle sei, und bezeichnet man die Anzahl der Umdrehungen der Wellen in einer Minute entsprechend mit m und n, so ist die

Umfangsgeschwindigkeit*) der treibenden Scheibe $= \frac{a \cdot \pi \cdot m}{60}$;

„ „ getriebenen „ $= \frac{b \cdot \pi \cdot n}{60}$.

Diese Umfangsgeschwindigkeiten müssen einander gleich sein, folglich:

$$\frac{a \cdot \pi \cdot m}{60} = \frac{b \cdot \pi \cdot n}{60}$$ oder, was dasselbe ist:**)

$$\mathbf{a \cdot m = b \cdot n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 182)$$

in Worten: Das Produkt aus Durchmesser und Umlaufszahl der treibenden Scheibe, ist gleich dem Produkte aus Durchmesser und Umlaufszahl der getriebenen Scheibe.

An Stelle der Durchmesser kann man auch die Halbmesser in die Rechnung einführen.***)

Aus Gleichung 182) folgt:

$$\mathbf{a = \frac{b \cdot n}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 183)$$

$$\mathbf{b = \frac{a \cdot m}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 184)$$

$$\mathbf{m = \frac{b \cdot n}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 185)$$

$$\mathbf{n = \frac{a \cdot m}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 186)$$

*) Vgl. II. Teil; Seite 19.
**) „ I. „ ; „ 52 unter 75, c.
***) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser.

Beispiele:

159) Eine Ventilatorwelle soll mit 1200 Umdrehungen in jeder Minute laufen. Auf dieselbe wird eine Riemenscheibe von 0,2 m Durchmesser aufgekeilt, welche durch eine andere Scheibe von 1,8 m Durchmesser angetrieben wird. Wieviel Umdrehungen mufs letztere machen?

Nach Formel 185) erhält man:

$$m = \frac{b \,.\, n}{a} = \frac{0{,}2 \,.\, 1200}{1{,}8} = 133{,}3 \text{ Umdrehungen.}$$

160) Eine Turbinenwelle macht 150 Umdrehungen in jeder Minute und soll eine Transmissionswelle mit 80 Umdrehungen antreiben. Auf die Turbinenwelle ist eine Riemenscheibe von 50 cm Halbmesser aufgekeilt; welchen Halbmesser mufs die auf der Transmissionswelle anzubringende Riemenscheibe erhalten?

Nach Formel 184) erhält man:

$$b = \frac{a \,.\, m}{n} = \frac{50 \,.\, 150}{80} = 93{,}75 \text{ cm.}$$

161) Auf einer Transmissionswelle, welche 100 Umdrehungen in jeder Minute macht, sitzt eine Riemenscheibe von 60 cm Durchmesser und treibt eine andere Scheibe von 40 cm Durchmesser auf einer Drehbankspindel an. Wieviel Umdrehungen macht die Drehbankspindel?

Nach Formel 186) erhält man:

$$n = \frac{a \,.\, m}{b} = \frac{100 \,.\, 60}{40} = 150 \text{ Umdrehungen.}$$

162) Welchen Durchmesser mufs die Riemenscheibe auf der Drehbankspindel erhalten, wenn dieselbe 120 Umdrehungen in der Minute machen soll?

Nach Formel 184) erhält man:

$$b = \frac{a \,.\, m}{n} = \frac{60 \,.\, 100}{120} = 50 \text{ cm.}$$

Die Bewegungsübertragung durch Riemen, Seile oder Ketten wird überall da stattfinden, wo die Entfernung der

Fig. 112.

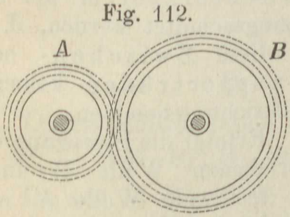
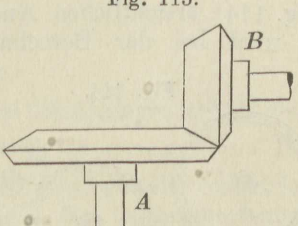


Fig. 113.



Wellen grofs, die zu übertragende Kraft aber verhältnismäfsig klein ist. Sind jedoch bedeutende Kräfte von einer Welle auf eine andere, deren Entfernung nicht zu grofs ist, zu übertragen, so werden statt der genannten Zugorgane Zahnräder angewandt. Diese bewirken, dafs sich die Wellen, auf denen sie sitzen, in entgegengesetzter Richtung drehen. (Fig. 112 und 113.)

Die ineinander greifenden Räder müssen ebenfalls gleiche Umfangsgeschwindigkeiten haben; mithin kommt auch hier die Gleichung

$$a \, . \, m = b \, . \, n$$

zur Anwendung, und kann man jetzt mit a und b nicht nur die Halb- oder Durchmesser, sondern auch die Zähnezahlen der Räder bezeichnen.

Hier gilt sinngemäfs das Gesetz:

Das Produkt aus der Zähnezahl des treibenden Rades und der Umlaufszahl der treibenden Welle, ist gleich dem Produkte aus der Zähnezahl des getriebenen Rades und der Umlaufszahl der getriebenen Welle.

Beispiele:

163) Auf einer mit 30 Umdrehungen in jeder Minute laufenden Wasserradwelle sitzt ein konisches Rad mit 130 Zähnen, welches in ein auf einer Mühlspindel sitzendes Trieb mit 40 Zähnen eingreift. Wieviel Umdrehungen macht die Mühlspindel in jeder Minute?

Nach Formel 186) erhält man:

$$n = \frac{a \, . \, m}{b} = \frac{30 \, . \, 130}{40} = 97{,}5 \text{ Umdrehungen.}$$

164) Durch einen Pferdegöpel, dessen Welle sich in 5 Minuten 8mal umdreht, soll eine zweite Welle mit 16 Umdrehungen in jeder Minute angetrieben werden. Auf letzterer bringt man ein Trieb mit 30 Zähnen an; wieviel Zähne mufs das Rad auf der Göpelwelle erhalten?

Nach Formel 183) erhält man:

$$a = \frac{b \, . \, n}{m} = \frac{30 \, . \, 16}{\frac{8}{5}} = 300 \text{ Zähne.*)}$$

Die Rechnung bleibt dieselbe, wenn zwischen treibendem und getriebenem Rade mehrere Zwischenräder in der aus Fig. 114) ersichtlichen Anordnung eingeschaltet werden, d. h. es wird bei der Berechnung auf diese Zwischen- oder Transporträder keinerlei Rücksicht genommen.

Fig. 114.

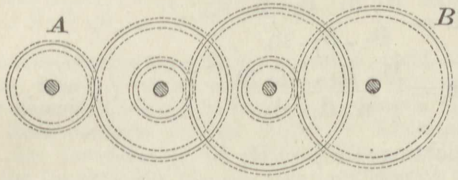
Erfolgt die Bewegung der getriebenen Welle B durch die treibende Welle A mittels sog. Vorgelege — Räder, welche zu je zweien auf einer Zwischenwelle sitzen Fig. 115 und 116) — so findet

*) Vgl. I. Teil; Seite 47 unter 68.

man die Beziehungen der hierbei in Frage kommenden Gröſsen, wenn man berücksichtigt, daſs immer je 2 ineinander greifende Räder gleiche Umfangsgeschwindigkeiten besitzen, je zwei auf einer Welle sitzende Räder hingegen gleich viel Umdrehungen machen müssen.

Dasselbe gilt auch für Scheiben, welche durch Riemen oder durch Seile verbunden sind. (Fig. 116.)

Fig. 115.



Bezeichnet man mit:

D, D_1, D_2 die Durchmesser oder Zähnezahlen der treibenden Räder,

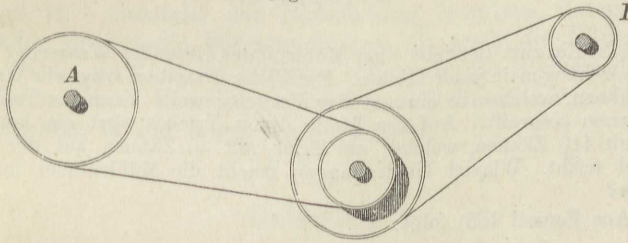
d, d_1, d_2 „ „ „ „ „ getriebenen „ ,

m und n die Umdrehungszahlen der treibenden und getriebenen Welle,

x und y die Umdrehungszahlen der Vorgelege- oder Zwischenwellen,

dann folgt entsprechend Gleichung 182):

Fig. 116.



$$D \;.\; m = d \;.\; x.$$
$$D_1 \;.\; x = d_1 \;.\; y.$$
$$D_2 \;.\; y = d_2 \;.\; n.$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man:

*) $$\mathbf{D \,.\, D_1 \,.\, D_2 \,.\, m = d \,.\, d_1 \,.\, d_2 \,.\, n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 187)$$

Ist wie in Fig. 116) nur eine Vorgelegewelle vorhanden, so folgt entsprechend Gleichung 187) für das Umsetzungsverhältnis:

$$\mathbf{D \,.\, D_1 \,.\, m = d \,.\, d_1 \,.\, n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 188)$$

*) Vgl. II. Teil; Seite 146 u. 147: Ableitung der Formeln 139 bis 142.

in Worten: Das Produkt aus den Durchmessern oder Zähnezahlen aller treibenden Räder und der Umdrehungszahl der treibenden Welle, ist gleich dem Produkte aus den Durchmessern oder Zähnezahlen der getriebenen Räder und der Umdrehungszahl der getriebenen Welle.

Aus Gleichung 187) ergibt sich dann z. B:

$$D = \frac{d \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot n}{D_1 \cdot D_2 \cdot m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 189)$$

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot m}{d \cdot d_1 \cdot d_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 190)$$

und aus Gleichung 188) z. B:

$$D_1 = \frac{d \cdot d_1 \cdot n}{D \cdot m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 191)$$

$$d = \frac{D \cdot D_1 \cdot m}{d_1 \cdot n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 192)$$

Weitere Werte sind nach den in Teil I, Kapilel VI) gegebenen Regeln über das Rechnen mit Gleichungen je nach Bedarf zu entwickeln.

Beispiele:

165) Ein zum Betriebe einer Mühlspindel dienendes Wasserrad macht 10 Umdrehungen in jeder Minute. Die Welle desselben trägt ein Rad mit 130 Zähnen, welches in ein auf der Vorgelegewelle sitzendes Trieb mit 40 Zähnen eingreift. Auf der Welle dieses Triebes sitzt ein konisches Rad mit 110 Zähnen, welches ein Trieb mit 30 Zähnen auf der Mühlspindel treibt. Wieviel Umdrehungen macht die Mühlspindel in jeder Minute?

Aus Formel 188) folgt:

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot m}{d \cdot d_1} = \frac{130 \cdot 110 \cdot 10}{40 \cdot 30} = 119{,}2 \text{ Umdrehungen.}$$

166) Auf einer Transmissionswelle, welche 120 Umdrehungen in jeder Minute macht und eine Drehbank treiben soll, sitzt eine Riemenscheibe von 40 cm Durchmesser und treibt eine auf einer Vorgelegewelle befindliche Riemenscheibe von 34 cm Durchmesser. Auf der Vorgelegewelle sitzt eine zweite Riemenscheibe von 46 cm Durchmesser, von welcher die 26 cm im Durchmesser haltende Riemenscheibe der Drehbankspindel angetrieben wird. Wieviel Umdrehungen macht die Drehbankspindel in jeder Minute?

Aus Formel 188) erhält man:

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot m}{d \cdot d_1} = \frac{40 \cdot 46 \cdot 120}{34 \cdot 26} = 250 \text{ Umdrehungen.}$$

167) Von der mit 320 Umdrehungen laufenden Welle A (Fig. 115), soll die Welle B so angetrieben werden, dafs sie 20 Umdrehungen in jeder Minute macht. Von den hierzu erforderlichen 6 Rädern sind 5 vorhanden und für diese folgende Zähnezahlen gegeben:

$$D = 45,\ D_1 = 36,\ D_2 = 48,\ d = 90,\ d_1 = 128.$$

Welche Zähnezahl d_2 mufs das auf der Welle B aufzukeilende Rad erhalten?

Aus Formel 187) folgt:

$$d_2 = \frac{D \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot m}{d \cdot d_1 \cdot n} = \frac{45 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 320}{90 \cdot 128 \cdot 20} = 108 \text{ Zähne.}$$

168) Die Kurbelwelle einer Dampfmaschine macht 40 Umdrehungen in jeder Minute; man will mittels eines doppelten Vorgeleges die auf einer anderen Welle sitzende Kreissäge mit 320 Umdrehungen in der Minute antreiben. Die Riemenscheibe auf der Welle der Kreissäge habe 24 cm Durchmesser; der Durchmesser der beiden ersten treibenden Scheiben sei je 64 cm, die Durchmesser der von ihnen getriebenen Scheiben 34 cm und 30 cm. Welchen Durchmesser D_2 mufs die letzte treibende Scheibe erhalten?

Gegeben sind: $m = 40,\ n = 320;$

$$D = 64,\ D_1 = 64,\ d = 34,\ d_1 = 30,\ d_2 = 24.$$

Folglich entsprechend Formel 187):

$$D_2 = \frac{d \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot n}{D \cdot D_1 \cdot m} = \frac{34 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 320}{64 \cdot 64 \cdot 40} = 47{,}8 \text{ cm.}$$

Wird die Bewegung einer Welle durch Riemen- und Räderwerk auf eine andere Welle übertragen, so kann man Formel 187) ebenfalls zur Berechnung benutzen, indem man entweder sowohl die Riemenscheiben als auch die Räder mit ihren Halb- bzw. Durchmessern, oder nur die Riemenscheiben mit ihren Halb- bzw. Durchmessern und die Räder mit ihren Zähnezahlen in die Rechnung einführt.

Beispiel:

169) Die Spindel einer Drehbank, auf welcher sich eine Riemenscheibe von 36 cm Durchmesser befindet, wird durch eine Transmissionswelle, die 120 Umdrehungen macht, und auf der eine Riemenscheibe von 40 cm Durchmesser sitzt, angetrieben. Durch 2 Räder mit je 60 Zähnen und 2 Triebe mit je 20 Zähnen, wird die Bewegung auf die Drehbankspindel übertragen. Wieviel Umdrehungen macht die Spindel in jeder Minute?

Gegeben sind: $m = 120,\ D = 40,\ D_1 = 20,\ D_2 = 20;$
$d = 36,\ d_1 = 60,\ d_2 = 60.$

Nach Formel 190) erhält man:

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot m}{d \cdot d_1 \cdot d_2} = \frac{40 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 120}{36 \cdot 60 \cdot 60} = 14{,}8 \text{ Umdrehungen.}$$

Wird die Umdrehung einer Welle durch die in Fig. 108) dargestellte Schraube ohne Ende bewirkt, so ist zu beachten, dafs die Schraube als ein Trieb mit einem Zahne in Rechnung zu bringen ist, wenn sie eingängig, hingegen als ein Trieb mit 2 oder 3 Zähnen, wenn sie zwei- oder dreigängig ist.

Beispiele:

170) Wie hoch wird eine an einer Seiltrommel von d = 30 cm Durchmesser hängende Last bei 126 Kurbelumdrehungen mittels eines Schneckengetriebes gehoben, wenn das Rad 90 Zähne hat und die Schraube eingängig ist? (Fig. 108.)

Die Trommelwelle macht bei 126 Kurbelumdrehungen

$$126 \cdot \frac{1}{90} = 1{,}4 \text{ Umdrehungen;}$$

demnach hebt sich die Last um:

$$1{,}4 \cdot d \cdot \pi = 1{,}4 \cdot 30 \cdot 3{,}14 = 132 \text{ cm.}$$

171) Bei einer durch Schnecke und Schneckenrad angetriebenen Windevorrichtung ist der Seiltrommel-Durchmesser d = 36 cm. Das Schneckenrad hat 110 Zähne; die Schnecke ist dreigängig. Wie hoch wird eine an der Seiltrommel hängende Last bei 80 Kurbelumdrehungen gehoben? (Fig. 108.)

Bei 80 Umdrehungen der Kurbel macht die Trommelwelle

$$80 \cdot \frac{3}{110} = 2{,}18 \text{ Umdrehungen,}$$

die Last hebt sich mithin um:

$$2{,}18 \cdot d \cdot \pi = 2{,}18 \cdot 36 \cdot 3{,}14 = 246{,}63 \text{ cm.}$$

172) Es soll der Durchmesser der Seiltrommel einer durch Schnecke und Schneckenrad angetriebenen Windevorrichtung bestimmt werden, wenn die Schnecke zweigängig ist, das Schneckenrad 130 Zähne hat und die Last bei 60 Umdrehungen der Kurbel um 150 cm gehoben wird.

Bei 60 Umdrehungen der Kurbel macht die Trommelwelle

$$60 \cdot \frac{2}{130} = 0{,}923 \text{ Umdrehungen.}$$

Da die Last um 150 cm gehoben werden soll, mufs

$$150 = 0{,}923 \cdot \pi \cdot d \text{ sein.}$$

Hieraus erhält man als Durchmesser der Seiltrommel:

$$d = \frac{150}{0{,}923 \cdot 3{,}14} \cong 50 \text{ cm}$$

Übungsbeispiele:

136) Auf einer Drehbankspindel, welche 180 Umdrehungen in jeder Minute machen mufs, sitzt eine Riemenscheibe von 30 cm Durchmesser. Dieselbe soll durch eine Transmissionswelle, welche 80 Umdrehungen in der Minute macht, angetrieben werden. Welchen Durchmesser mufs die auf der Transmissionswelle anzubringende Riemenscheibe erhalten?

Lösung: D = 67,5 cm.

137) Auf einer Wasserradwelle sitzt ein konisches Rad mit 120 Zähnen, welches in ein auf einer Mühlspindel sitzendes Trieb mit 30 Zähnen eingreift. Die Mühlspindel soll 100 Umdrehungen in der Minute machen. Wie viel Umdrehungen mufs die Wasserradwelle in derselben Zeit machen?

Lösung: $m = 25$ Umdrehungen.

138) Die Welle einer Holzhobelmaschine soll mit 600 Umdrehungen in jeder Minute laufen. Auf dieselbe wird eine Riemenscheibe von 0,15 m Durchmesser aufgekeilt. Wie viel Umdrehungen in der Minute mufs die Transmissionswelle machen, wenn die auf derselben befindliche Riemenscheibe einen Durchmesser von 1,5 m hat?

Lösung: $m = 60$ Umdrehungen.

139) Eine Wasserradwelle macht 12 Umdrehungen in der Minute; die Arbeitswelle, welche 120 Umdrehungen in jeder Minute machen soll, wird durch ein doppeltes Vorgelege angetrieben. Das Rad auf der Wasserradwelle habe 100 Zähne, das Trieb auf der Vorgelegewelle 20 Zähne und das treibende Rad auf der Vorgelegewelle 60 Zähne. Welche Zähnezahl erhält das Trieb auf der Arbeitswelle?

Lösung: $d_1 = 30$ Zähne.

140) Durch eine mit 30 Umdrehungen in jeder Minute laufende Betriebswelle soll mittels eines dreifachen Vorgeleges eine Arbeitswelle mit 300 Umdrehungen in jeder Minute angetrieben werden. Auf der Arbeitswelle sitzt eine Riemenscheibe von 24 cm Durchmesser. Die Durchmesser der treibenden Scheiben auf den Vorgelegewellen sind 64 cm und 56,25 cm, diejenigen der getriebenen Scheiben 32 cm und 30 cm. Welchen Durchmesser erhält die treibende Scheibe auf der Betriebswelle?

Lösung: $D = 64$ cm.

Siebzehntes Kapitel.

Der Schwerpunkt.*)

Jeden Körper kann man sich aus einer Reihe einzelner Körperteilchen bestehend denken. Jedes dieser Körperteilchen besitzt ein bestimmtes Gewicht; die Gewichte aller dieser Teilchen bilden eine Reihe von parallel und senkrecht nach unten gerichteten Kräften, deren Mittelkraft**) das Gesamtgewicht des ganzen Körpers darstellt.

*) Vgl. „Tabelle der Flächeninhalte, Oberflächen, Rauminhalte und Schwerpunktslage von Flächen und Körpern", Seite 207 bis 209.

**) Vgl. II. Teil; Seite 126.

Den Angriffspunkt dieser Mittelkraft, in welchem also das Gesamtgewicht des Körpers vereinigt gedacht ist, nennt man den „Schwerpunkt" des Körpers.

Der Schwerpunkt eines und desselben Körpers behält innerhalb des Körpers stets seine Lage bei, man mag denselben drehen oder wenden wie man will. Wird der Schwerpunkt eines Körpers auf irgend eine Weise unterstützt oder festgehalten, so bleibt der Körper in Ruhe, da die einzelnen Körperteilchen in bezug auf ihr Gewicht in dem Schwerpunkte vereinigt gedacht sind. Man sagt deshalb:

Der Schwerpunkt eines Körpers ist derjenige Punkt, in welchem derselbe unterstützt oder festgehalten werden mufs, damit er in jeder Lage im Gleichgewicht bleibt.

Über die Lage des Schwerpunktes von Flächen und Körpern gibt die am Ende dieses Buches befindliche Tabelle Aufschlufs. Allgemein zu bemerken ist Folgendes:

Der Schwerpunkt gerader Linien liegt in der Mitte der Länge derselben. Hierher gehören auch gerade Flach- Rund- oder Profil-Eisenstangen.

Der Schwerpunkt regelmäfsiger Flächen liegt im Mittelpunkte derselben. Hierher gehören Flächen von der Form des Kreises, Quadrates, Rechtecks, regelmäfsigen Vielecks usw. Als Flächen lassen sich in diesem Sinne auch jene Körper auffassen, bei welchen die Dicke gegenüber der Breite und Länge nur sehr gering ist; z. B. Blechtafeln, Bretter, Steinplatten usw.

Bei regelmäfsigen Körpern — Würfel, Kugel usw. — liegt der Schwerpunkt stets im Mittelpunkte derselben.

Bei einigen Körpern, z. B. bei Ringen, Hohlzylindern, Hohlkugeln usw., fällt der Schwerpunkt aufserhalb der Masse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte unterstützt werden, so mufs er mit einem zweiten so verbunden werden, dafs die Schwerpunkte beider Körper zusammenfallen.

Guldin'sche Regel.

Eine sehr verbreitete und praktische Anwendung findet die Lehre vom Schwerpunkte bei der Berechnung von Oberflächen und Inhalten gewisser Körper.

Dreht sich eine gerade oder eine krumme Linie um eine feststehende Achse, welche mit ihr in einer Ebene liegt, so erzeugt diese Linie eine Fläche, eine sog. Rotationsfläche.

Dreht sich eine ebene Fläche um eine feststehende Achse, welche mit ihr in einer Ebene liegt, so erzeugt diese Fläche einen Körper, einen sog. Rotationskörper.

Nach der Guldin'schen Regel findet man nun

die Gröfse der Oberfläche eines Rotationskörpers, indem man die Länge der diese Oberfläche erzeugenden Linie mit dem Wege, welchen ihr Schwerpunkt bei der Drehung durchläuft, multipliziert; und

die Gröfse des Rauminhaltes eines Rotationskörpers, indem man den Inhalt der den Körper erzeugenden ebenen Fläche mit dem Wege, welchen ihr Schwerpunkt bei der Drehung durchläuft, multipliziert.

Es ist in Folgendem angenommen, dafs die Schwerpunkte der sich drehenden Linien oder Flächen **nur Kreise** beschreiben. Bezeichnet man dabei mit:

l die Länge der eine Körperoberfläche erzeugenden Linie;
F den Flächeninhalt der einen Körper erzeugenden Fläche;
O die Oberfläche eines Körpers;
I den Rauminhalt eines Körpers;
r den Halbmesser des vom Schwerpunkte der erzeugenden Linie oder Fläche durchlaufenen Kreises,

so wird allgemein die Gröfse der erzeugten Körperoberfläche

$$\mathbf{O = 2\,r\,\pi\,.\,l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{193)}$$

und die Gröfse des Rauminhaltes des erzeugten Körpers

$$\mathbf{I = 2\,r\,\pi\,.\,F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{194)}$$

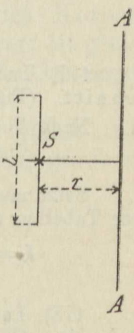
Beispiele:

173) Oberfläche — Mantel — des geraden Zylinders.*)

Dieselbe entsteht, wenn sich eine gerade, zu einer festen Achse AA parallele Linie l um diese Achse AA dreht. (Fig. 117.) Es ist alsdann:

Weg des Schwerpunktes $= 2\,r\,\pi$.
Länge der Erzeugenden $=$ l. Folglich:
Flächeninhalt des Zylindermantels $= 2\,r\,\pi\,.\,l$.

Fig. 117.

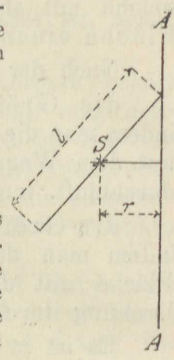


Macht man $l = 500$ mm und $r = 200$ mm, dann erhält man:

$O = 2\,r\,\pi\,.\,l = 2\,.\,200\,.\,3{,}14\,.\,500 = 628000$ qmm.

*) Die Werte in den Beispielen 173—176) sind mit $\pi = 3{,}14$ durchgerechnet; es wird sich natürlich empfehlen, die am Ende des III. Teiles dieses Buches befindliche Tabelle über die Kreis-Inhalte und -Umfänge zu benutzen.

174) Oberfläche — Mantel — des Kegels. Fig. 118.

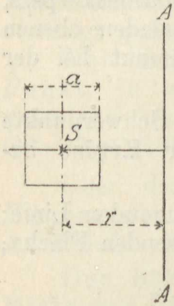


Gegeben sei eine gegen die feste Achse A A geneigte gerade Linie l, welche mit einem ihrer Endpunkte in die Achse A A fällt. (Fig. 118.) Man erhält dann nach Formel 193):

$$O = 2 r \pi . l.$$

Setzt man $l = 0{,}5$ m und $r = 0{,}2$ m, dann wird:
$O = 2 r \pi . l = 2 . 0{,}2 . 3{,}14 . 0{,}5 = 0{,}628$ qm.

Fig. 119.



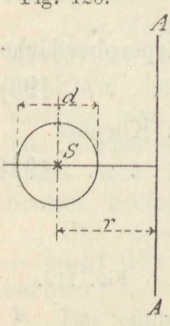
175) Oberfläche eines Ringes mit quadratischem Querschnitt.

Zur Erzeugung dieser Oberfläche mufs sich ein Quadrat von der Seite a um die Achse AA drehen. Die Länge der erzeugenden Linie ist hier gleich dem Umfange des Quadrates, also $= 4$ a (Fig. 119); mithin nach Formel 193):

$$O = 2 r \pi . l = 2 r \pi . 4a = 8 . r \pi a.$$

Setzt man $a = 0{,}5$ dcm und $r = 3$ dcm, dann wird:
$O = 8 . r \pi a = 8 . 3 . 3{,}14 . 0{,}5 = 37{,}68$ qdcm.

Fig. 120.



176) Oberfläche eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt.

Um diese Oberfläche zu erzeugen, mufs sich eine Kreislinie um die Achse A A drehen. (Fig. 120.) Nach Formel 193) wird alsdann, wenn man den Durchmesser der Kreislinie mit d bezeichnet:

$$O = 2 r \pi . l = 2 r \pi . d \pi = 2 . d r \pi^2.$$

Setzt man $r = 30$ cm und $d = 10$ cm, dann folgt:

$$O = 2 . d r \pi^2 = 2 . 10 . 30 . 3{,}14 . 3{,}14 = 5915{,}76 \text{ qcm}.$$

Soll für die in Beispiel 175 und 176) gegebenen Ringe noch der Rauminhalt berechnet werden, so mufs sich im ersten Falle eine quadratische Fläche und im zweiten Falle eine Kreisfläche um eine feste Achse drehen.

177) Inhalt des Kreisringes mit quadratischem Querschnitt. (Fig. 119.)

Nach Formel 194) erhält man:

$$I = 2 r \pi . F = 2 r \pi . a^2.$$

Setzt man $r = 0{,}5$ m und $a = 0{,}15$ m, dann folgt unter Anwendung der Tabellen am Ende des III. Teiles dieses Buches:

$$I = 2 r \pi . a^2 = d \pi . a^2 = 3{,}142 . 0{,}0225 = 0{,}071 \text{ cbm}.$$

178) Inhalt des Kreisringes mit kreisförmigem Querschnitt. (Fig. 120.)

Nach Formel 194) erhält man:

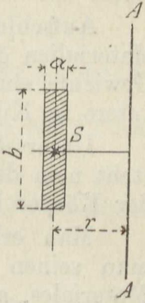
$$I = 2 r \pi . F = 2 r \pi . \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Setzt man $r = 2$ dcm und $d = 0{,}8$ dcm, dann wird nach Tabelle:

$$I = 2r\pi \,.\, \frac{d^2\pi}{4} = d\pi \,.\, \frac{d^2\pi}{4} = 12{,}57 \,.\, 0{,}503 = 6{,}323 \text{ cdcm.}$$

179) Oberfläche und Inhalt des geraden Hohlzylinders.

Fig. 121.



Zur Erzeugung der Oberfläche und des Inhaltes mufs sich ein Rechteck von den Seiten a und b um die Achse AA drehen. (Fig. 121.) Der Umfang der die Oberfläche erzeugenden Geraden ist $l = 2a + 2b = 2(a + b)$; der Inhalt der den Körper erzeugenden Fläche $F = a \,.\, b$; mithin nach Formel 193):

$$O = 2r\pi \,.\, l = 2r\pi \,.\, 2(a + b)$$

und nach Formel 194):

$$I = 2r\pi \,.\, F = 2r\pi \,.\, ab.$$

Setzt man $a = 5$ cm, $b = 60$ cm und $r = 30$ cm, dann folgt:

$$O = 2r\pi \,.\, 2(a + b) = 188{,}5 \,.\, 2 \,.\, 65 = 24505 \text{ qcm.}$$
$$I = 2r\pi \,.\, ab = 188{,}5 \,.\, 5 \,.\, 60 = 56550 \text{ ccm.}$$

Eine weitere Berücksichtigung erfahren die vorstehenden Regeln im folgenden Kapitel unter Gewichtsberechnungen.

Achtzehntes Kapitel.

Spezifisches Gewicht, absolutes Gewicht und Gewichtsberechnungen.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Körpers versteht man das Gewicht einer Volumen*)-Einheit, d. i. eines Kubikzentimeters oder eines Kubikdezimeters des Körpers.

Man sagt: Das spezifische Gewicht eines Körpers ist gleich dem Gewichte eines Kubikzentimeters**) desselben in Grammen, oder:

Das spezifische Gewicht eines Körpers ist gleich dem Gewichte eines Kubikdezimeters**) desselben, in Kilogrammen ausgedrückt.

*) Volumen = Rauminhalt.

**) Ist das Gewicht von
1 cdcm = s kg, so wird das Gewicht von
1 cbm = s . 1000 kg, von
1 ccm $= \frac{s}{1000}$ kg und von
1 cmm $= \frac{s}{1000000}$ kg.

Da die spezifischen Gewichte gewöhnlich auf Wasser bezogen sind, so sagt man auch noch: Das spezifische Gewicht eines Körpers gibt an, wievielmal dieser Körper schwerer ist als das Gewicht einer Wassermasse, welche genau denselben Raum einnimmt wie das Material, aus dem der Körper besteht.

Aufschlufs über die spezifischen Gewichte der verschiedenen Materialien gibt die Tabelle auf Seite 210); es sind hier die Gewichte eines Kubikdezimeters oder, was dasselbe ist, eines Liters in Kilogrammen angegeben.

Unter dem absoluten Gewichte eines Körpers versteht man das Gewicht des gesamten Materiales, aus welchem der Körper hergestellt ist.

Man erhält das absolute Gewicht eines Körpers, wenn man seinen Rauminhalt mit dem spezifischen Gewichte des Materiales, aus welchem der Körper besteht, multipliziert.

Bezeichnet man mit:

$$\left.\begin{array}{l} s \text{ das spezifische Gewicht,} \\ I \text{ den Rauminhalt (Volumen),} \\ G \text{ das absolute Gewicht} \end{array}\right\} \text{eines Körpers,}$$

so wird sein absolutes Gewicht:

$$G = I \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 195)$$

Hieraus folgt:

$$I = \frac{G}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 196)$$

$$s = \frac{G}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 197)$$

Es wird sich nach dem Vorstehenden empfehlen, bei Gewichtsberechnungen von Körpern die Abmessungen derselben stets in **Dezimetern** in die Rechnung einzuführen, da dann die für die spezifischen Gewichte gegebenen Zahlenwerte als in Kilogrammen gegeben anzusehen sind. Das Gewicht der Körper wird dann ohne weiteres in **Kilogrammen** erhalten.

Da gewöhnlich nur die Rauminhalte einfacher geometrischer Körper allgemein bekannt sind, so wird es notwendig, Körper von komplizierten Formen auf solche von möglichst einfachen Formen zurückzuführen.

In der Regel verfährt man so, dafs man jeden Körper in eine Reihe einfacher Teilkörper, deren Rauminhalte infolge ihrer richtigen oder angenäherten geometrischen Form bekannt sind, zerlegt, deren Gewichte berechnet und diese dann, um das Gesamtgewicht des Körpers zu erhalten, addiert.

Beispiele:

180) Wie grofs ist das Gewicht einer gufseisernen Kugel, welche 12 cdcm Rauminhalt besitzt?

Das spezifische Gewicht des Gufseisens ist nach der Tabelle = 7,25; mithin erhält man nach Formel 195):

$$G = I \,.\, s = 12 \,.\, 7{,}25 = 87{,}0 \text{ kg.}$$

181) Wieviel kg wiegt eine Rundeisenstange von 50 mm Durchmesser und 1200 mm Länge?*)

Die Stange ist als Zylinder von 0,5 dcm Durchmesser und 12 dcm Länge aufzufassen; der Rauminhalt ist demnach:

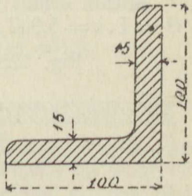
$$I = r^2\pi \,.\, h = 0{,}1964 \,.\, 12 = 2{,}357 \text{ cdcm.}$$

Nimmt man nach der Tabelle das spezifische Gewicht des Schmiedeeisens zu 7,78 an, so erhält man nach Formel 195):

$$G = I \,.\, s = 2{,}357 \,.\, 7{,}78 = 18{,}337 \text{ kg.}$$

182) Wie grofs ist das Gewicht eines Winkeleisens nach nebenstehender Figur 122), wenn die Länge desselben = 5 m ist?**)

Fig. 122.



Sieht man von den Abrundungen des Profiles ab, so kann man das Winkeleisen bestehend denken aus 2 Rechtecken von den Flächeninhalten

$f_1 = 1 \,.\, 0{,}15 = 0{,}15$ qdcm und
$f_2 = 0{,}85 \,.\, 0{,}15 = 0{,}1275$ qdcm.

Mithin: $F = f_1 + f_2 = 0{,}2775$ qdcm.

Folglich: Rauminhalt = Fläche mal Länge, d. i.

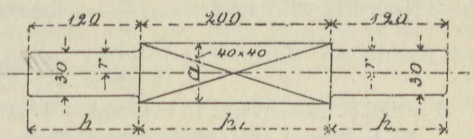
$$I = F \,.\, l = 0{,}2775 \,.\, 50 = 13{,}875 \text{ cdcm}$$

und damit, wenn s = 7,78 gesetzt wird, nach Formel 195):

$$G = I \,.\, s = 13{,}875 \,.\, 7{,}78 = 107{,}948 \text{ kg.}$$

183) Wieviel kg wiegt die in Fig. 123) gegebene Messingstange, wenn s = 8,55 angenommen wird?

Fig. 123.



Die Stange ist als aus 2 Zylindern und einem Prisma bestehend aufzufassen. Der Rauminhalt eines Zylinders ist $= r^2\pi \,.\, h$, derjenige des Prismas von quadratischem Querschnitt $= a^2 \,.\, h_1$; mithin der Rauminhalt der ganzen Stange:

$$I = 2 \,.\, r^2\pi \,.\, h + a^2 \,.\, h_1 = 2 \,.\, 0{,}071 \,.\, 1{,}2 + 0{,}4 \,.\, 0{,}4 \,.\, 2.$$
$$I = 0{,}170 + 0{,}32 = 0{,}490 \text{ cdcm.}$$

Damit erhält man nach Formel 195):

$$G = I \,.\, s = 0{,}490 \,.\, 8{,}55 = 4{,}189 \text{ kg.}$$

184) Wie grofs ist das Gewicht einer Granitplatte von 1500 mm Länge, 800 mm Breite und 70 mm Stärke, wenn sich in derselben eine Öffnung von 200 mm Länge und 100 mm Breite befindet? (s = 2,8.)

---

*) Für die folgenden Gewichtsberechnungen sind die Tabellen am Ende des III. Teiles dieses Buches benutzt.

**) Sämtliche Mafse in den folgenden Figuren sind in Millimetern angegeben.

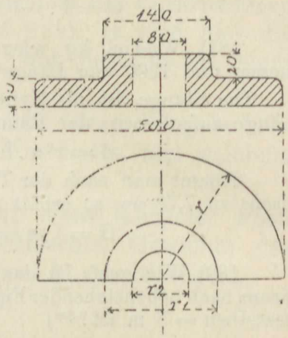
Der hier in Betracht kommende Rauminhalt der Platte berechnet sich aus dem Gesamtinhalt derselben, verringert um den Rauminhalt der Öffnung; demnach wird:

$$I = 15 \,.\, 8 \,.\, 0{,}7 - 2 \,.\, 1 \,.\, 0{,}7 = (15 \,.\, 8 - 2 \,.\, 1) \,.\, 0{,}7 = 82{,}6 \text{ cdcm.}$$

Damit erhält man nach Formel 195):

$$G = I \,.\, s = 82{,}6 \,.\, 2{,}8 = 231{,}28 \text{ kg.}$$

Fig. 124.



185) Wieviel kg wiegt die in Fig. 124) dargestellte Gufseisenplatte? (s = 7,3.)

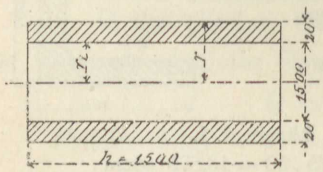
Bezeichnet man die Höhe der eigentlichen Platte mit h und die Höhe des Auges mit h_1, so ist der für das Gewicht nutzbare Rauminhalt der Platte gleich dem der vollen Platte, vermehrt um denjenigen des Auges und vermindert um denjenigen der Bohrung; d. h:

$$I = r^2\pi \,.\, h + r_1{}^2\pi \,.\, h_1 - r_2{}^2\pi \,.\, (h + h_1).$$
$$= 19{,}635 \,.\, 0{,}3 + 1{,}539 \,.\, 0{,}2 - 0{,}503 \,.\, 0{,}5.$$
$$= 5{,}891 + 0{,}308 - 0{,}252 = 5{,}947 \text{ cdcm.}$$

Mithin erhält man nach Formel 195):

$$G = I \,.\, s = 5{,}947 \,.\, 7{,}3 = 43{,}413 \text{ kg.}$$

Fig. 125.



186) Wie grofs ist das Gewicht eines Kesselbleches von 1500 mm Länge und 20 mm Stärke, wenn dasselbe zu einem Kessel von 1500 mm lichtem Durchmesser gehört? (s = 7,8.)

Der Rauminhalt des Bleches, welcher durch die Wandung eines Hohlzylinders gebildet wird, kann auf zweierlei Weise gefunden werden. Einmal nach der Guldinschen Regel (Seite 199, Beispiel 179), und das andere Mal aus der Differenz der beiden Zylinder von den Halbmessern r und r_1 (Fig. 125), also:

$$I = r^2\pi \,.\, h - r_1{}^2\pi \,.\, h = (r^2\pi - r_1{}^2\pi) \,.\, h.$$

Nach Fig. 125) wird $r_1 = \frac{1500}{2} = 750$ mm und

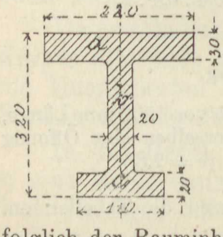
$$r = \frac{1540}{2} = 770 \text{ mm, mithin in Dezimetern:}$$

$$I = 186{,}3 \,.\, 15 - 176{,}7 \,.\, 15 = (186{,}3 - 176{,}7) \,.\, 15 = 144{,}0 \text{ cdcm.}$$

Nach Formel 195) erhält man alsdann:

$$G = I \,.\, s = 144 \,.\, 7{,}8 = 1123{,}2 \text{ kg.}$$

Fig. 126.



187) Wie grofs ist das Gewicht eines gufseisernen Trägers nach Fig. 126), wenn derselbe 5 m lang ist? (s = 7,3.)

Teilt man das Profil des Trägers in die 3 Flächenteile a, b und c, so ist der Flächeninhalt des Trägers:

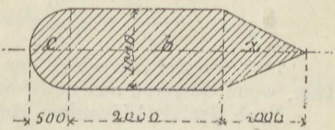
$$F = a + b + c. \quad \text{Nun ist:}$$
$$a = 2{,}2 \,.\, 0{,}3 = 0{,}660 \text{ qdcm}$$
$$b = 2{,}7 \,.\, 0{,}2 = 0{,}540 \quad „$$
$$c = 1{,}1 \,.\, 0{,}2 = 0{,}220 \quad „ \quad \text{Mithin:}$$
$$F = 1{,}420 \text{ qdcm;}$$

folglich der Rauminhalt desselben:

$$I = F \,.\, l = 1{,}420 \,.\, 50 = 71 \text{ cdcm und damit nach Formel 195):}$$
$$G = I \,.\, s = 71 \,.\, 7{,}3 = 518{,}3 \text{ kg.}$$

188) Ein Brückenpfeiler aus Ziegelmauerwerk besitzt die in Fig. 127) angegebene Form und ist 6 m hoch. Wie grofs ist sein Gewicht, wenn das spezifische Gewicht des Mauerwerks zu 1,8 angenommen wird?

Fig. 127.



Zerlegt man den Querschnitt des Pfeilers in das Dreieck a, das Rechteck b und den Halbkreis c, so folgt für den Flächeninhalt des Querschnittes — in Dezimetern:

$$F = a + b + c = \frac{10 . 10}{2} + 20 . 10 + \frac{78,54}{2} \quad \text{oder}$$

$$F = 50 + 200 + 39,27 = 289,27 \text{ qdcm.}$$

Da der Pfeiler 6 m = 60 dcm hoch ist, so wird
$I = F . l = 289,3 . 60 = 17358$ cdcm. Folglich erhält man nach Formel 195):

$$G = I . s = 17358 . 1,8 = 31244,4 \text{ kg.}$$

189) Wieviel kg wiegt eine Bleikugel von 50 mm Durchmesser? (s = 11,4.)

Es ist der Inhalt der Kugel:*)

$$I = \frac{\pi . d^3}{6} = \frac{3,14 . 0,5 . 0,5 . 0,5}{6} = 0,0654 \text{ cdcm;}$$

mithin erhält man nach Formel 195):

$$G = I . s = 0,0654 . 11,4 = 0,746 \text{ kg.}$$

190) Ein Wasserbehälter von zylindrischem Querschnitt besitzt einen Halbmesser r = 0,5 m und eine Höhe h = 2 m. Wieviel kg wiegt das in dem Behälter befindliche Wasser, wenn derselbe bis an den Rand gefüllt ist?

Die Wassermenge ist hier gleich dem Inhalte des Gefäfses, mithin:

$$I = r^2 \pi . h = 78,54 . 20 = 1570,8 \text{ cdcm.}$$

Da nun 1 cdcm Wasser**) 1 kg wiegt, so wird nach Formel 195):

$$G = I . s = 1570,8 . 1 = 1570,8 \text{ kg.}$$

191) Für den in vorstehendem Beispiele gegebenen Wasserbehälter steht aus räumlichen Rücksichten nur eine Höhe $h_1 = 1,5$ m zur Verfügung. Welchen Halbmesser x mufs bei dieser Höhe ein anderer Behälter von gleichem Rauminhalte erhalten?

Die Inhalte beider Behälter müssen einander gleich sein, d. h. es mufs:

$$r^2 \pi . h = x^2 \pi . h_1 \quad \text{sein. Folglich:}$$

$$x^2 = \frac{r^2 \pi . h}{\pi . h_1} = \frac{r^2 . h}{h_1} \quad \text{und damit}$$

$$x = \sqrt{\frac{r^2 . h}{h_1}} = \sqrt{\frac{5 . 5 . 20}{15}} = \sqrt{33,33 \ldots}$$

$$x = 5,773 \text{ dcm} = 0,577 \text{ m} = 577 \text{ mm.}$$

192) Ein aus einer bestimmten Legierung hergestellter Würfel, dessen Seite a = 120 mm ist, wiegt 20 kg. Wie grofs ist das spezifische Gewicht dieser Legierung?

Der Rauminhalt des Würfels ist:

$$I = a^3 = 1,2^3 = 1,728 \text{ cdcm.}$$

---

*) Vgl. II. Teil; Seite 208.

**) 1 cdcm = 1 Liter.

Nach Formel 197) erhält man demnach:

$$s = \frac{G}{I} = \frac{20}{1,728} = 11,57.$$

193) Wieviel kg wiegt der in Beispiel 178, Seite 198) berechnete Ring, wenn derselbe aus Stahl hergestellt wird? (s = 7,7.)

Nach der Guldinschen Regel ergab sich:

$$I = 6,323 \text{ cdcm. Mithin nach Formel 195):}$$
$$G = I \,.\, s = 6,323 \,.\, 7,7 = 48,687 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:*)

141) Wie grofs ist das Gewicht einer Stange aus Quadrateisen, wenn die Seite des Quadrates zu 40 mm und die Länge der Stange zu 5 m angenommen werden? (s = 7,7.)

Lösung: G = 61,6 kg.

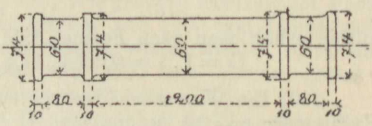
142) Eine Transmissionswelle besitzt einen Durchmesser von 8 cm und eine Länge von 11,5 m. Wieviel kg wiegt diese Welle, wenn s = 7,8 gesetzt wird?

Lösung: I = 57,799 cdcm; G = 450,84 kg.

143) Wieviel kg wiegt eine Gufsstahlachse nach Fig. 128), wenn s = 7,9 angenommen wird?

Lösung: I = 4,016 cdcm; G = 31,73 kg.

Fig. 128.



144) Es ist das Gewicht der in Fig. 129) dargestellten Achse zu berechnen. Wie grofs wird dasselbe, wenn s = 7,8 angenommen wird?

Lösung: I = 6,215 cdcm; G = 48,477 kg.

Fig. 129.

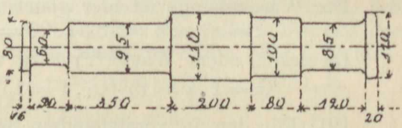
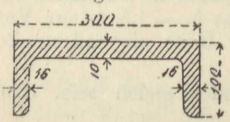


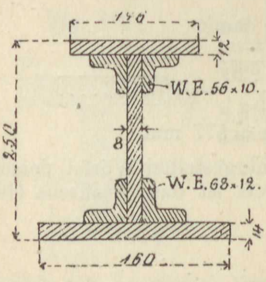
Fig. 130.



145) Wieviel kg wiegt ein schmiedeeiserner Träger nach Fig. 130), wenn derselbe 6 m lang ist und wenn von den Abrundungen des Profiles abgesehen wird? (s = 7,8.)

Lösung: I = 35,28 cdcm; G = 275,184 kg.

Fig. 131.



146) Wieviel kg wiegt der in Fig. 131) dargestellte, zusammengesetzte Träger, wenn s = 7,7 angenommen wird und der Träger 4 m lang ist?

Lösung: I = 43,2 cdcm; G = 332,64 kg.

*) Zu den folgenden Beispielen sind die Tabellenwerte am Ende des III. Teiles dieses Buches bis zur dritten Dezimalstelle einschl. benutzt.

147) Wieviel kg wiegen:

a) 1 qm Eisenblech, 3 mm stark? (s = 7,78.)
b) 2 „ Kupfer „ , 4 „ „ (s = 8,9.)
c) 5 „ Messing „ , 1 „ „ (s = 8,55.)
d) eine 3 qm grofse Gufseisenplatte, 40 mm stark? (s = 7,25.)
e) „ 0,5 „ „ Zinkplatte, 7 mm stark? (s = 6,9.)
f) „ 1,5 „ „ Blei „ , 15 „ „ (s = 11,4.)
g) „ 2 „ „ Stahlgufsplatte, 60 mm stark? (s = 7,87.)

Lösung: a) 23,34 kg; b) 71,2 kg; c) 42,75 kg; d) 870 kg; e) 24,15 kg; f) 256,5 kg; g) 944,4 kg.

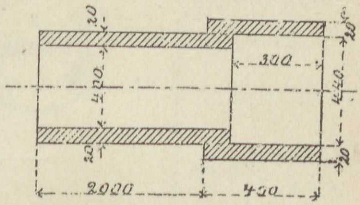
148) Wie grofs ist das Gewicht eines gufseisernen Hohlzylinders von 0,55 m lichtem Durchmesser, 15 mm Wandstärke und 1,25 m Länge? (s = 7,3.)

Lösung: I = 33,288 cdcm; G = 243,002 kg.

149) Welches Gewicht besitzt der in Fig. 132) dargestellte röhrenförmige, gufseiserne Körper, wenn s = 7,3 angenommen wird?

Lösung: I = 66,983 cdcm;
G = 488,976 kg.

Fig. 132.



150) Welchen Durchmesser erhält eine gufseiserne Kugel von 100 kg Gewicht? (s = 7,07.)

Lösung: d = 300 mm.

151) Der rechteckige Querschnitt eines Bleiringes von 300 mm mittlerem Durchmesser besitzt eine Breite von 40 mm. Wie hoch ist der Ring, wenn sein Gewicht 13 kg beträgt? (s = 11,5.)

Lösung: h = 30 mm.

152) Eine Hohlkugel aus Stahlgufs besitzt einen inneren Durchmesser von 160 mm und eine Wandstärke von 20 mm. Wie schwer ist diese Hohlkugel? (s = 7,9.)

Lösung: I = 2,043 cdcm; G = 16,140 kg.

153) Wieviel kg wiegt ein Gewicht, welches aus 15 schmiedeeisernen Platten von 20 mm Stärke und 200 mm Durchmesser besteht? (s = 7,8.)

Lösung: G = 73,523 kg.

154) Wie grofs ist das Gewicht eines Ringes von quadratischem Querschnitt, wenn die Seite des Quadrates zu 40 mm, der mittlere Durchmesser des Ringes zu 800 mm angenommen werden, und wenn der Ring aus Rotgufs hergestellt ist? (s = 8,6.)

Lösung: I = 4,021 cdcm; G = 34,581 kg.

155) Ein Kupferkegel, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 90 mm besitzt, wiegt 9 kg. Wie hoch ist der Kegel? (s = 8,8.)

Lösung: h = 482 mm.

Die in diesem Kapitel gegebenen Beispiele bilden die Grundlage für die Berechnung einzelner Maschinenteile oder auch ganzer Maschinen. Wenn z. B. das Gewicht eines Ventiles, Lagers, Dampfzylinders, Zahnrades oder einer Treibstange, Riemenscheibe, Seilscheibe usw. berechnet werden soll, so müssen diese Gegenstände an der Hand von Skizzen oder Zeichnungen in Teile zergliedert werden, welche mit Leichtigkeit gestatten die entsprechenden Rauminhalte, und damit die Gewichte, zu ermitteln. Die Summe sämtlicher Teilgewichte bildet dann das Gesamtgewicht des der Berechnung unterworfenen Gegenstandes.

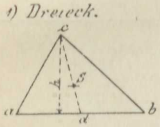
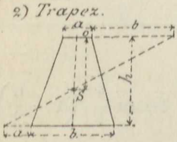
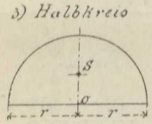
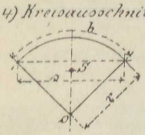
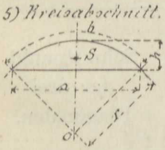
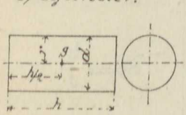
Der Hauptwert ist darauf zu legen, schnell einfache, leicht zu berechnende Formen für die einzelnen Teile und Teilchen zu finden; bei einiger Übung wird dann sehr bald ein gutes Resultat erzielt werden.

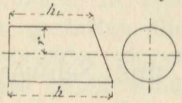
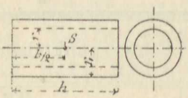
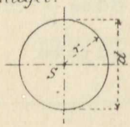
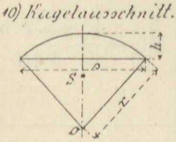
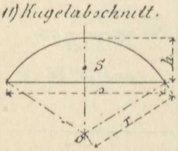
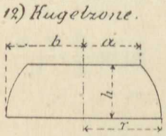
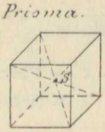
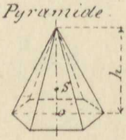
Biblioteka Szkoły Inżynierskiej w Szczecinie

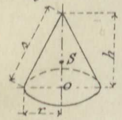
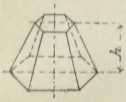
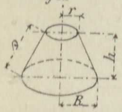
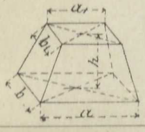
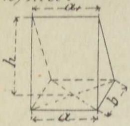
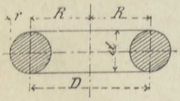
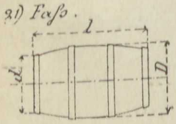
Tabelle

der

Flächeninhalte, Oberflächen, Rauminhalte und Schwerpunktslage von Flächen und Körpern.

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktslage
1) *Dreieck.* 	$F = \frac{\overline{ab} \cdot h}{2}.$		$\overline{Sd} = \frac{1}{3} \cdot \overline{cd};$ $\overline{ad} = \overline{bd}.$
2) *Trapez.* 	$F = \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$		$\overline{So} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2 \cdot b}{a+b}.$
3) *Halbkreis* 	$F = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}.$		$\overline{So} = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} =$ $= 0{,}4244 \cdot r.$
4) *Kreisausschnitt.* 	$F = \frac{b \cdot r}{2}.$		$\overline{So} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b}.$
5) *Kreisabschnitt.* 	$F = \frac{b \cdot r - s \cdot (r-h)}{2}$		$\overline{So} = \frac{s^3}{12 \cdot F}.$ F = Fläche; s = Sehne.
6) *Cylinder.* 	Mantel M $= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ $= d \cdot \pi \cdot h$	$I = r^2 \cdot \pi \cdot h$ $= \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$ $= 0{,}785 \cdot d^2 \cdot h.$	$S = \frac{h}{2}.$

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktslage
7) Schiefabgeschn: Cyl: 	Mantel $M = r.\pi.(h+h_1)$.	$I = r^2.\pi.\frac{h+h_1}{2}$.	
8) Hohlcylinder. 	Innerer + äufserer Mantel = $2.h.\pi.(r+r_1)$.	$I = h.\pi.(r_1{}^2 - r^2)$.	$S = \frac{h}{2}$.
9) Kugel. 	$F = 4.r^2.\pi$ $= 12{,}566.r^2$ $= d^2.\pi$.	$I = \frac{4}{3}.r^3.\pi$ $= 4{,}189.r^3$ $= \frac{d^3.\pi}{6}$ $= 0{,}5236.d^3$.	
10) Kugelausschnitt. 	$F = \frac{r.\pi}{2}.$ $.(4.h+s)$.	$I = \frac{2}{3}.r^2.\pi.h$ $= 2{,}0944\, r^2.h$.	$\overline{So} = \frac{3}{4}\cdot\left(r - \frac{h}{2}\right)$.
11) Kugelabschnitt. 	$F = 2.r.\pi.h$ $= \frac{\pi}{4}\cdot(s^2+4.h^2)$.	$I = \pi.h^2.\left(r - \frac{h}{3}\right)$ $= \pi.h.\left(\frac{s^2}{8} + \frac{h^2}{6}\right)$	$\overline{So} = \frac{3}{4}.$ $.\frac{(2r-h)^2}{3r-h}$.
12) Kugelzone. 	$F = 2.r.\pi.h$.	$I = \frac{\pi.h}{6}\cdot(3.a^2$ $+ 3.b^2 + h^2)$.	
13) Prisma. 	Oberfläche = Summe der sechs Rechtecke.	Länge $\times$ Breite $\times$ Höhe.	Schnittpunkt der drei Diagonalen.
14) Pyramide 	Oberfläche = Summe der Seitendreiecke plus Grundfläche.	$I = \frac{h}{3} \times$ Grundfläche.	$\overline{So} = \frac{h}{4}$.

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktslage
15) Kegel. 	Kegelmantel $= r\,.\,\pi\,.\,s =$ $r\,.\,\pi\,.\,\sqrt{r^2 + h^2}$.	$I = \frac{h}{3} \times$ Grundfläche.	$\overline{So} = \frac{h}{4}$.
16) Abgestumpfte Pyramide. 	Sind die Endflächen = F und f, dann ist	$I = \frac{h}{3}\,.\,(F + f + \sqrt{F\,.\,f})$.	
17) Abgestumpfter Kegel 	Mantel $= \pi\,.\,s\,.\,(R + r)$.	$I = (R^2 + r^2 + R\,.\,r)\cdot\frac{h\,.\,\pi}{3} = \frac{D^2 + d^2 + D\,.\,d}{12}\,.\,\pi\,.\,h.$	
18) Obelisk. 	Mantel = Summe der 4 Trapeze.	$I = \frac{h}{6}\cdot\left\{(2a + a_1)\,.\,b + (2a_1 + a)\,.\,b_1\right\}$.	
19) Keil. 	Mantel = Summe der 2 Trapeze und der beiden Seitendreiecke.	$I = (2a + a_1)\cdot\frac{b\,.\,h}{6}$.	
20) Cylindrisch. Ring. 	$F = 4\,.\,R\,.\,r\,.\,\pi^2 = 39{,}478\,.\,R\,.\,r = 9{,}87\,.\,D\,.\,d.$	$I = 2\,.\,R\,.\,r^2\,.\,\pi^2 = 2{,}467\,.\,D\,.\,d^2$.	
21) Faß. 		$I = 1{,}0453\,.\,l\,.\,(2\,.\,D^2 + D\,.\,d + 0{,}75\,.\,d^2)$.	

Biblioteka Szkoły Inżynierskiej w Szczecinie

Tabelle der spez. Gewichte einiger Körper.

(Spez. Gewicht = dem Gewichte eines cdcm des betreffenden Körpers.)

Feste Körper.

Antimon	6,72	Holz, Kiefer	0,55
Asphalt	1,07—1,16	,, ,, frisch	0,91
Blei	11,40	,, Linde	0,56
Braunkohle	1,20	,, Mahagoni	0,75
Cokes, gehäufelt	0,40	,, Nußbaum	0,66
Chamottesteine	2,05	,, Pockholz	1,26
Eis, bei 0°	0,92	,, Tanne	0,56
Erde, lehmig, frisch	2,10	,, ,, frisch	0,89
,, trocken	1,90	Kalkstein	2,60
,, mager, trocken	1,30	Kupfer, gehämmert	8,94
Glas, Fenster-	2,64	Kupfer, gegossen	8,79
,, Spiegel-	2,46	Messing	8,55
,, Krystall-	2,89	Nickel	8,28—9,26
Glockenmetall	8,80	Sand, trocken	1,64
Gold, gegossen	19,26	Sandstein	2,35
Granit	2,80	Schmiedeeisen	7,78
Gußeisen	7,25	Silber	10,47
Holz, lufttrocken:		,, gehämmert	10,51
,, Ahorn	0,67	Stahl	7,26—7,80
,, Buche	0,75	,, Guß-	7,87
,, Buchsbaum	0,94	Steinkohle	1,21—1,51
,, Eiche	0,69	Zink, gegossen	6,80
,, ,, frisch	0,97	,, gewalzt	7,20
,, Fichte	0,47	Zinn	7,35

Flüssige Körper.

Äther, bei 20°	0,716	Öl, Mineral-	0,85—0,93
Alkohol, abs. bei 20°	0,792	Quecksilber	13,595
Öl, Lein-	0,94	Seewasser	1,02
,, Rüb-	0,94	Teer	1,20

Gasförmige Körper.

Atmosphärische Luft	1,0000	Kohlensäure	1,5290
Sauerstoff	1,1056	Schweflige Säure	2,2139
Stickstoff	0,9713	Leuchtgas	0,4—0,6

Wasserdampf bei 100° . . . . 0,640.

1 cbm Luft wiegt ≅ 1,25 kg.

Maſs- und Gewichtstabelle.

1 Meter (m) = 10 Dezimeter (dcm) = 100 Zentimeter (cm) = 1000 Millimeter (mm).
10 Meter = 1 Dekameter (dkm) oder 1 Kette; im Feldmessergebrauch ist die Kette = 2 Dekameter = 20 m.
1000 Meter = 100 dkm = 1 Kilometer (km).
7500 Meter = 1 deutsche Meile = 7,5 km.
1 Quadratmeter (qm) = 10 000 Quadratzentimeter (qcm).
1 Quadratzentimeter = 100 Quadratmillimeter (qmm).
100 Quadratmeter = 1 Ar (a).
10 000 Quadratmeter = 100 Ar = 1 Hektar (ha).
1 Kubikmeter (cbm) = 1000 Kubikdezimeter (cdcm) oder Liter (l).
1 ,, ,, = 1 000 000 Kubikzentimeter (ccm).
1 ccm = 1000 Kubikmillimeter (cmm).
100 Liter = 1 Hektoliter (hl).
50 Liter = 1 Scheffel.
1 Kilogramm (kg) = dem Gewichte eines Liters destillierten Wassers bei + 4° C.
1 Kilogramm = 1000 Gramm (g) = 2 Pfund.
1 Dezigramm (dcg) = $^1/_{10}$ g.
1 Milligramm (mg) = $^1/_{1000}$ g.
10 Gramm = 1 Dekagramm (dkg) = 1 Neulot.
500 Gramm = $^1/_2$ kg = 1 Pfund.
50 Kilogramm = 100 Pfund = 1 Zentner.
1000 kg = 2000 Pfund = 1 Tonne = 20 Zentner.

Druck von Herrosé & Ziemsen, G. m. b. H., Wittenberg.

Im unterzeichneten Verlage ist erschienen:

Die Anfertigung der Zeichnungen für Maschinenfabriken.

Anweisung,

technische Zeichnungen für das Konstruktionsbureau und für die Werkstätten der Maschinenfabriken zweckmässig, sachgemäss und den Anforderungen der Praxis entsprechend herzustellen, zu vervielfältigen, zu behandeln, auszustatten und zu registrieren.

Mit 45 erläuternden Textfiguren, zwei Schrifttafeln und sechs (darunter fünf farbigen) lithogr. Tafeln.

Von

Joh. Franz Weyde,

vormals Dipl. Maschinen-Ingenieur, ord. Professor an der Königl. Höheren Maschinen-Gewerbeschule in Kaschau in Ungarn

und

A. Weickert,

Ingenieur und Fachlehrer für Maschinenzeichnen und Mechanik usw. in Berlin.

3. vermehrte und verbesserte Auflage. 1900. 5. u. 6. Tausend.

Gebd. in Ganz-Kaliko Preis M. 5,—.

Polytechnische Buchhandlung A. Seydel

in Berlin SW, Königgrätzerstr. 31.

Inhalt von: Weyde und Weickert
Die Anfertigung der Zeichnungen für Maschinenfabriken.

I. Abschnitt.

Prüfung der Zeichenmaterialien und -Instrumente, sowie deren zweckmässigste Anwendung für das Maschinenzeichnen.

II. Abschnitt.

Ausführung der Hauptzeichnungen.