Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

von

J. SCHLOTKE,

Oberlehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg.

III. Teil.

Perspektive.

Mit 133 Figuren.

Dresden,

Verlag von Gerhard Kühtmann.

1894.

Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

von

J. SCHLOTKE,
Oberlehrer der allgemeinen Gewerbeschule in Hamburg.

III. Teil.

Perspektive.

Mit 133 Figuren.

Dresden,
Verlag von Gerhard Kühtmann.
1894.

Vorwort.

Der dritte Teil dieses Werkes enthält die Grundzüge der Linearperspektive. Es soll hiermit dem praktischen Zeichner und besonders dem Techniker eine möglichst einfache Darstellung der Konstruktion perspektivischer Zeichnungen dargeboten werden, welche allerdings einige, wenn auch nur wenige Vorkenntnisse der Geometrie beansprucht. Ohne diese ist überhaupt ein wirkliches Studium der Perspektive nicht möglich, wenn man sich nicht mit unverstandenen mechanischen Regeln begnügen will, bei deren Anwendung der Zeichner aber in seiner Unkenntnis leicht den grössten Fehlern ausgesetzt ist.

Es sind allerdings und sogar noch in den letzten Jahren mannigfache Versuche gemacht worden, die Linearperspektive von der, wie es scheint, lästigen mathematischen Begründung frei zu machen, und dieselbe, wie man zu sagen peflegt, rein auf Anschauung zu stützen. Aber diese Versuche sind vergeblich und manche derselben fallen geradezu der Lächerlichkeit anheim. Was soll man sich z. B. bei der Erklärung denken: „Die Grenze zwischen Himmel und Erde heisst der Horizont“ oder wie in einem anderen Lehrbuche (welches nach dem eigenen Urteil seines Verfassers nicht mehr übertroffen werden kann) zu lesen ist: „Je weiter ein Gegenstand in die Ferne tritt, desto kleiner wird er nach allen Seiten hin, bis er auf der Horizontlinie sich in einen Punkt vereinigt und unsichtbar wird. Diese Horizontlinie oder kurzweg Horizont genannt, ist für den Zeichner das Wichtigste“, u. s. f. Oder: „Steht uns ein rechtwinkliger Gegenstand auf einer seiner Seitenfront gegenüber, das ist parallel mit der Stellung des Zeichners, dann zieht sich die andere sichtbare Seite geometrisch ganz direkt nach hinten, ohne Abweichung nach rechts oder links zurück, was auf dem Papier senkrecht erscheint“, u. s. f.

Aus diesen Proben, deren wir noch eine Menge anderer hinzufügen könnten, ist zu ersehen, wohin vollständige Unkenntnis der Sache führt.

Der Anfänger möge deshalb die wenigen, leicht zu fassenden, auf geometrischer Grundlage beruhenden Gesetze der Linearperspektive gründlich studieren. Alles übrige wird ihm bei den Anwendungen alsdann keine Schwierigkeiten mehr bereiten. Das letztere gilt namentlich für den technischen Zeichner, welcher ohnehin durch die Kenntnis der Darstellenden Geometrie besser auf das Studium der Linearperspektive vorbereitet ist.

Die im Buche enthaltenen Anwendungen auf grössere Beispiele sollen nur als Anleitung dienen.

Zu selbständigen Übungen wird man am besten aus der eigenen Umgebung Beispiele wählen und dieselben nach Aufnahme durch Messung perspektivisch darzustellen suchen. In erster Linie kommt für die eigentliche Konstruktion die Darstellung solcher Gegenstände in Betracht, welche von Ebenen oder gesetzmässig gestalteten krummen Flächen begrenzt sind, also Gebäude, Innenansichten von Treppen, Gewölben u. s. w. Doch ist eine genaue Kenntnis der Perspektive, auch für das Zeichnen landschaftlicher Motive u. s. w., wobei man allerdings nicht mehr konstruiert, das wichtigste Hülfsmittel für naturwahre Darstellung.

Der Vollständigkeit wegen sind noch Anwendungen auf Vogelperspektive, auf das Zeichnen stereoskopischer Figuren, und auf die Herstellung von Panoramen, sowie endlich die Grundzüge der Reliefperspektive hinzugefügt worden.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

1) Die Perspektive ist derjenige Teil der Darstellenden Geometrie, welcher die Herstellung der Abbildungen räumlicher Gebilde auf einer Ebene (Bildfläche) lehrt. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass das Auge in endlicher Entfernung von dem abzubildenden Gegenstand und von der Bildfläche sich befindet, und da nach der Einleitung des I. Teiles des Werkes eine Abbildung durch Projicieren aller Ecken, Kanten etc. des Gegenstandes von dem Punkte aus entsteht, in welchem das Auge postiert ist, so folgt, dass die Abbildungen in diesem Falle Centralprojektionen sind. Demnach werden in der Perspektive diejenigen Hilfsmittel aufgesucht, welche zur Konstruktion der Centralprojektionen erforderlich sind; zugleich zieht die Perspektive besonders diejenigen Eigenschaften der letzteren in den Kreis ihrer Untersuchungen, welche für das Zeichnen von hervorragender Wichtigkeit sind.

Es soll nun zunächst an einem einfachen Beispiel die Herstellung der Centralprojektion eines Gegenstandes erläutert werden. Die Projektion ist bestimmt, wenn die Lage des Auges (Projektionscentrum), die Lage der Bildfläche, ferner diejenige des abzubildenden Gegenstandes und die Dimensionen des letzteren gegeben sind. Man bedient sich zur Darstellung derselben am besten der im I. Teile erörterten geraden Parallelprojektionen, deren Kenntnis in der Perspektive vorausgesetzt wird.

Es seien Q_1 und Q_2, Fig. 1, erste bez. zweite Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedums; A_1 und A_2 ebenso die Projektionen des Punktes A, in welchem sich das Auge befindet (Augenpunkt). Die Bildfläche sei ein Rechteck, welches senkrecht zu den beiden ersten Projektionsebenen steht, so dass die Projektionen desselben die beiden zur Achse OX senkrechten Geraden OY und OZ sind (Grundlinie und Höhe des Rechtecks).

Man ziehe nun von einem beliebigen Eckpunkte, z. B. von (a_1, a_2) den Strahl ($a_1 A_1$, $a_2 A_2$) nach dem Augenpunkte; derselbe schneidet die Bildfläche in einem Punkte M, dessen Projektionen m_1 und m_2 sind. Durch diese beiden Projektionen ist die Lage des Punktes M bestimmt. In gleicher Weise findet man die Durchschnitte aller übrigen Strahlen mit der Bildfläche.

Um nun die eigentliche Abbildung des Parallelepipedums in ihrer wahren Gestalt darzustellen, legt man die Bildfläche auf die Zeichenfläche so, dass die Grundlinie OY nach O′Y′, die Höhe OZ nach O′Z′ gelangt. Den vorhin bestimmten Punkt M erhält man, wenn man $O'm_1' = Om_1$ macht und

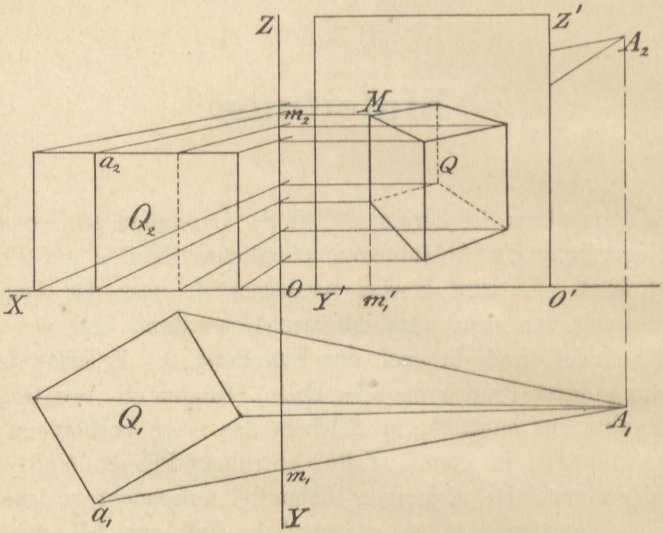


Fig. 1.

in m_1' die Gerade $m_1'M = Om_2$, senkrecht zu O′Y′ aufträgt. Werden nun in gleicher Weise die Abbildungen der übrigen Ecken bestimmt, so ergiebt sich hieraus leicht die in Fig. 1 dargestellte Abbildung Q des Parallelepipedums.

Dieses Verfahren, welches man die „Durchschnittsmethode“ zu nennen pflegt, ist das einfachste, sich gleichsam von selbst darbietende Mittel, um perspektivische Abbildungen herzustellen. Wir empfehlen dem Anfänger, zur eigenen Übung und zur zweckmässigen Vorbereitung auf das Studium der später zu entwickelnden perspektivischen Gesetze, die Abbildungen der in den Figuren 2—4 durch Grund- und Aufriss dargestellten Gegenstände in gleicher Weise zu konstruieren. Fast scheint es, als ob hiermit die Lehre von der Konstruktion perspektivischer Abbildungen erledigt wäre. Dies würde auch wirklich der Fall sein, wenn dieselbe nichts weiter bezweckte, als die gleichsam mechanische Zusammensetzung einer Abbildung durch Bestimmung der Durchschnittspunkte aller nötigen Sehstrahlen mit der Bildfläche. Das genauere Studium der Eigenschaften perspektivischer Abbildungen ist aber erforderlich, um einerseits möglichst einfache Wege zur Herstellung derselben kennen zu lernen, andererseits um grössere Sicherheit des Urteils über die Richtigkeit von Zeichnungen zu erlangen.

2) Scheinbare Grösse und scheinbarer Umriss eines Gegenstandes.

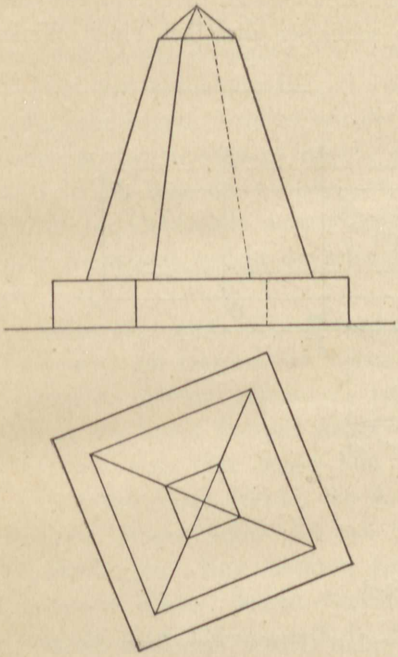


Fig 2.

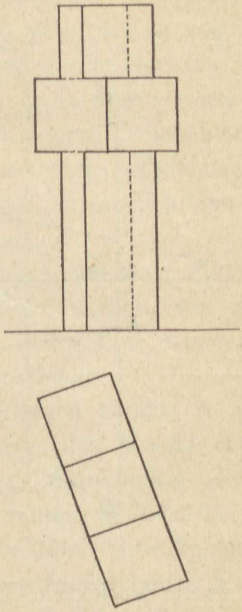


Fig. 3.

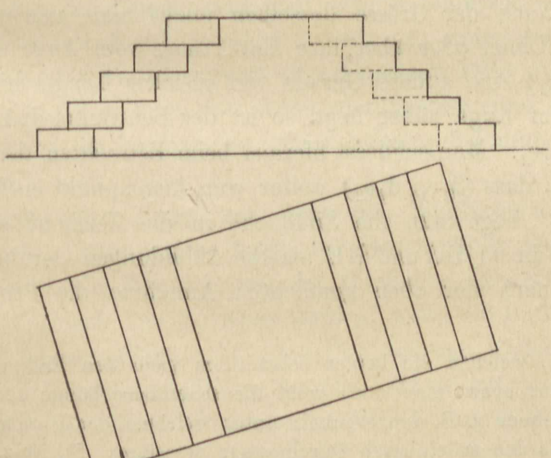


Fig. 4.

Es seien ($d_1 e_1$, $d_2 e_2$) (Fig. 5) die Projektionen einer zur ersten Projektionsebene P_1 senkrechten Geraden; A_1 und A_2 die Projektionen des Augenpunktes und OY sowie OZ diejenigen der zu P_1 senkrecht stehenden Bildfläche. Wir nehmen an, dass die durch die Gerade (d_1e_1, d_2e_2) und durch den Augenpunkt gelegte Ebene senkrecht zur Bildfläche, also auch parallel zu P_2 sei. Zieht man nun von den Endpunkten der Geraden die Sehstrahlen nach dem Augenpunkte, so schliessen dieselben einen Winkel ein,

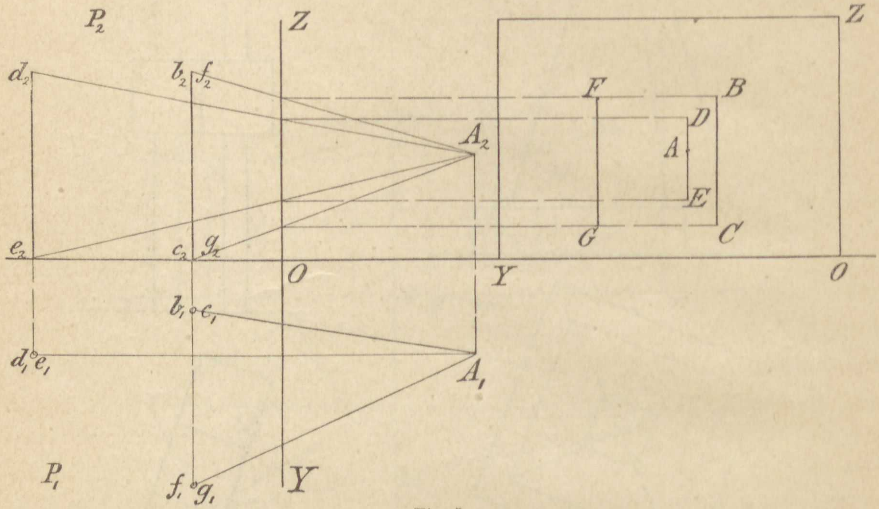


Fig. 5.

dessen zweite Projektion $d_2A_2e_2$ die wahre Grösse desselben darstellt. Man nennt diesen Winkel, unter welchem die Gerade dem Auge erscheint, den Sehwinkel. Nach der Grösse desselben pflegt man sich ein Urteil über die Länge der Linie, oder über ihre Entfernung vom Auge zu bilden. Ist z. B. (b_1c_1, b_2c_2) eine andere Gerade von gleicher Länge mit (d_1e_1, d_2e_2), welche aber dem Auge näher liegt, so ist der Sehwinkel $d_2A_2e_2$ kleiner als der Winkel $b_2A_2c_2$. Man schliesst hieraus beim Betrachten der beiden gleich langen Geraden, dass (d_1e_1, d_2e_2) weiter vom Augenpunkt entfernt sein muss als die erstere. Legt man die Bildfläche in die Zeichenfläche nieder, so findet man wie in 1) BC und DE als die Abbildungen der beiden Geraden. Auf DE liegt nach der oben gemachten Annahme die Projektion A des Augenpunktes.

Den Winkel, welchen die beiden Sehstrahlen nach den Endpunkten einer Geraden einschliessen, nennt man auch wohl die scheinbare Länge der letzteren. Die Astronomen bezeichnen z. B. den Winkel, unter welchem der Durchmesser eines Gestirns erscheint als den scheinbaren Durchmesser desselben. So ist z. B. der scheinbare Durchmesser der Sonne ca. 0° 32′ 16″; derjenige des Mondes ca. 0° 31′; der scheinbare Durchmesser des Jupiters in Erdnähe ca. 49″ in Erdferne, ca. 30″ u. s. f.

Es sei in Fig. 5 (f_1g_1, f_2g_2) eine dritte Linie, welche ebenfalls zu P_1 senkrecht steht, und deren zweite Projektion mit b_2c_2 zusammenfällt. Die letztere Bedingung sagt, dass beide Geraden alsdann gleichen Abstand von der Bildfläche haben. Dagegen ist der Abstand der neuen Geraden vom Auge, wie aus der ersten Projektion hervorgeht, grösser als derjenige der Geraden (b_1c_1, b_2c_2). Folglich erscheint sie unter einem kleineren Sehwinkel. Konstruiert man aber die Abbildung FG der Geraden, so ergiebt sich aus dem Zusammenfallen der zweiten Projektionen der Sehstrahlen, dass dieselbe der Abbildung BC an Länge gleich wird. Hierin scheint ein Widerspruch zu liegen, insofern als die Abbildungen zweier Geraden, welche verschiedene scheinbare Länge haben, doch gleich gross sein können. Man sieht aber leicht, dass die Abbildungen BC und FG dem senkrecht über A befindlichen Auge ebenfalls unter verschiedenen Sehwinkeln erscheinen, nämlich unter denjenigen, welche die scheinbaren Längen der abgebildeten Linien angeben.

Es möge hier noch eine Bemerkung angeknüpft werden. Man pflegt wohl zu sagen, ein Gegenstand müsse so gezeichnet werden, wie er dem Auge erscheint. Streng genommen ist nun der Sachverhalt etwas anders, wie wir hier an einem Beispiel näher erläutern wollen.

Betrachtet man eine Kugel von einem beliebigen Punkte A aus, so bilden alle Sehstrahlen, welche die Kugel berühren, den Mantel eines geraden Kegels, dessen Achse der von A nach dem Mittelpunkte der Kugel gehende Strahl ist. Nun berührt jener Kegelmantel die Oberfläche der Kugel in einem Kreise, dessen einzelne Punkte sämtlich vom Augenpunkte A gleichen Abstand haben, und die Ebene dieses Kreises steht senkrecht zu der Achse des Kegels. Für das Auge bildet dieser Kreis den äussersten sichtbaren Umriss der Kugel, und weil alle Durchmesser desselben unter gleichen Winkeln von A aus gesehen werden, so muss der Eindruck derjenige einer völligen Gleichförmigkeit aller einzelnen Teile des Umrisses sein. In dieser Hinsicht kann man also sagen, der Umriss einer Kugel erscheint dem Auge, welches die letztere von einem beliebigen Punkte aus betrachtet, stets als Kreis.

Wird nun zwischen Kugel und Auge eine Bildfläche aufgestellt, so ist als Abbildung des Umrisses der Kugel der Durchschnitt des von den Sehstrahlen gebildeten Kegelmantels mit der Bildfläche zu zeichnen. Die Abbildung kann demnach nur ein Kreis werden, wenn die Bildfläche senkrecht zur Achse des Kegelmantels steht. In allen anderen Fällen wird aber die Abbildung des Umrisses eine Ellipse*). Die letztere hat alsdann die Eigenschaft, dass ihre sämtlichen Durchmesser von A aus unter gleich grossen Winkeln erscheinen. Wenn demnach der Umriss einer Kugel dem Auge auch stets als Kreis erscheint, so muss als Abbildung doch im allgemeinen eine Ellipse gezeichnet werden. Dieselbe geht nur in dem oben angegebenen besonderen Falle in einen Kreis über.

*) Vergl. IV, 4, I. Teil.

Dass bei den Abbildungen anderer Gegenstände ähnliche Betrachtungen angestellt werden können, wird dem aufmerksamen Leser im Laufe der weiteren Entwicklungen von selbst klar werden.

3) Zur ferneren Begründung der Linearperspektive ist die Kenntnis einiger Gesetze über gerade Linien und Ebenen erforderlich, welche wir hier kurz zusammenstellen, um gelegentlich darauf verweisen zu können.

α. Ist eine Gerade G parallel zu einer in der Ebene E liegenden Geraden, so ist auch G parallel zu E.

β. Ist eine Gerade G parallel zu einer Ebene E, so wird E von jeder durch G gelegten Ebene in einer zu G parallelen Geraden geschnitten.

γ. Legt man durch jede von zwei parallelen Geraden eine Ebene, so ist die Durchschnittslinie dieser Ebenen jenen Geraden parallel.

δ. Steht eine Gerade G senkrecht zu einer Ebene E, so steht sie auch senkrecht zu allen in E liegenden Geraden.

ε. Steht eine Gerade G senkrecht zu einer Ebene E, so steht auch jede durch G gehende Ebene senkrecht zu E.

η. Stehen zwei Ebenen E_1 und E_2 senkrecht zu einer dritten Ebene E_3, so steht auch die Durchschnittslinie von E_1 und E_2 senkrecht zu E_3.

4) Abbildung gerader Linien.

Zur Feststellung der Lage eines abzubildenden Gegenstandes beziehen wir dieselbe auf die Bildfläche (vertikale Ebene) und auf eine zu dieser senkrecht stehenden Ebene, welche die „Horizontalebene“ genannt werden mag. Die Durchschnittslinie beider heisst die Achse.

Hiernach lassen sich nun leicht die folgenden Fundamentalgesetze über die Abbildungen gerader Linien nachweisen.

α. Die Abbildung einer zur Horizontalebene senkrechten Geraden ist eine Gerade, welche senkrecht zur Achse steht (Fig. 6).

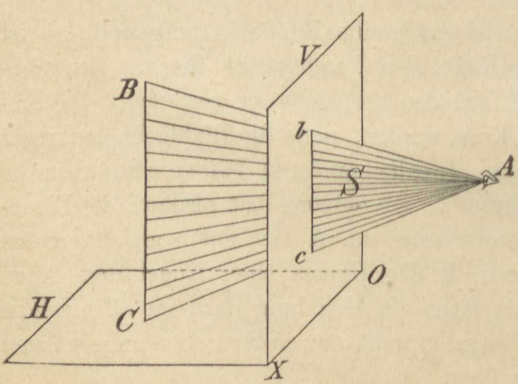


Fig. 6.

Beweis. BC stehe senkrecht zur Horizontalebene H; A sei der Augenpunkt. Zieht man von allen Punkten der abzubildenden Geraden Sehstrahlen nach A, so bilden diese eine Ebene S′, welche die Ebene der Sehstrahlen genannt wird. Nach 3) ε. steht nun S senkrecht zu H, und da die Bildfläche V ebenfalls $\perp$ H ist, so folgt aus 3) η., dass die Durchschnittslinie bc von S und V senkrecht zu H, folglich auch senkrecht zur Achse OX steht. bc ist aber die Abbildung (Centralprojektion) von BC.

β. Die Abbildung einer zur Achse OX parallelen Geraden ist eine Gerade, welche ebenfalls parallel zu OX ist (Fig. 7).

Die Gerade BC sei parallel zu OX, dann ist sie nach 3) α. auch parallel zur Bildfläche V. Die Ebene S der durch BC und A gehenden Sehstrahlen schneidet nun nach 3) β. die Bildfläche V in einer zu BC parallelen Geraden bc, welche die Abbildung von BC ist. Da bc || BC || OX, so ist auch

bc || OX.

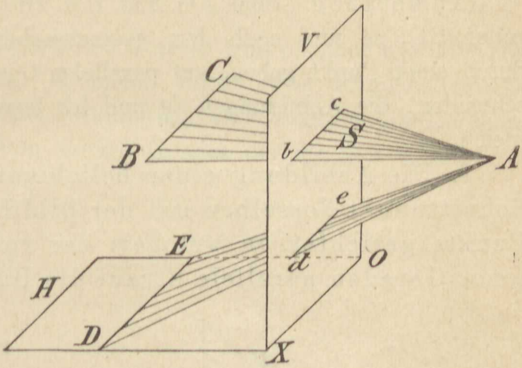


Fig. 7

Ist DE eine zweite zu OX parallele Gerade, so ist auch ihre Abbildung de || OX; folglich ist auch de || bc.

γ. Die Abbildung einer zur Bildfläche parallelen Geraden ist eine Gerade, welche der abgebildeten Geraden parallel ist (Fig. 8).

BC sei parallel zur Bildfläche V. Nach 3) β. schneidet nun die Ebene S der Sehstrahlen die Bildfläche in der zu BC parallelen Geraden bc und diese ist die Abbildung von BC.

Ist ferner DE parallel zu V, so ist auch die Abbildung derselben, nämlich de || DE. Wäre gleichzeitig DE noch parallel zu BC, so würde auch de || bc sein. Hieraus folgt: Die Abbildungen solcher Geraden, welche unter sich und zugleich parallel zur Bildfläche sind, müssen untereinander parallel sein.

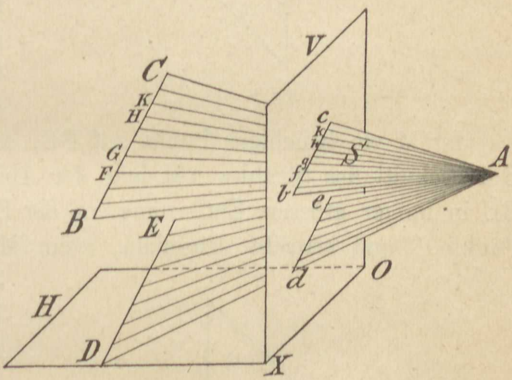


Fig. 8.

Hiernach wird also die Abbildung eines sehr langen und schmalen Rechtecks (z. B. die Vorderfronte eines Gebäudes von grosser Länge), welches parallel zur Bildfläche ist, wieder ein Rechteck sein. Die Abbildungen der Abstände zweier parallelen Seiten desselben sind demnach stets dieselben, wie weit sich die abgebildeten Geraden auch vom Auge entfernen mögen (s. 2). Ferner ergiebt sich hieraus noch leicht, dass die Abbildung einer ebenen Figur F, welche parallel zur Bildfläche ist, der F ähnlich sein muss. Dies folgt ausserdem auch aus dem stereometrischen Satze, dass parallele Schnitte eines pyramidalen Raumes ähnliche Figuren sind.

Anmerkung. Sind FG und HK zwei gleich lange Strecken der Geraden BC, so sind nach dem geometrischen Satze, dass Strahlen, welche durch einen Punkt gehen, auf parallelen Geraden proportionierte Stücke abschneiden, die Abbildungen fg und hk jener Strecken ebenfalls unter sich gleich.

δ. Die Abbildung einer beliebigen Geraden geht durch den Schnittpunkt derselben mit der Bildfläche, und sie ist nach dem Punkte gerichtet, in welchem der vom Augenpunkt ausgehende jener Geraden parallele Strahl die Bildfläche trifft (Fig. 9).

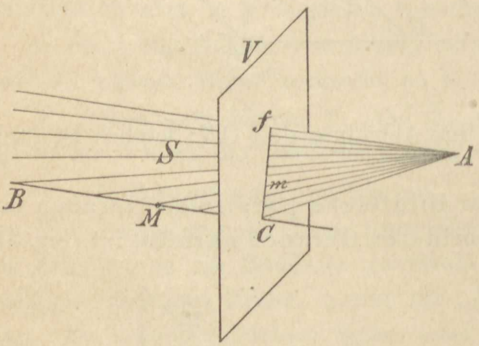


Fig. 9.

Die abzubildende Gerade BC treffe die Bildfläche V in C. Legt man durch den Augenpunkt und durch BC die Ebene S der Sehstrahlen, so enthält diese auch eine durch A gehende und zu BC parallele Gerade Af. Die letztere schneide die Bildfläche in f; dann ist Cf als Durchschnittslinie der Sehstrahlenebene S mit der Bildfläche die Abbildung von BC.

Ist M ein beliebiger Punkt auf BC, so liegt dessen Abbildung m im Durchschnitt des Strahles AM und der Abbildung Cf. Rückt man M auf BC in immer grössere Entfernung von der Bildfläche, so nähert sich m dem Punkte f und erreicht denselben, wenn M unendlich weit entfernt liegt. Der Punkt f ist deshalb die Abbildung des unendlich fernen Punktes und Cf die Abbildung der unendlich langen Geraden BC.

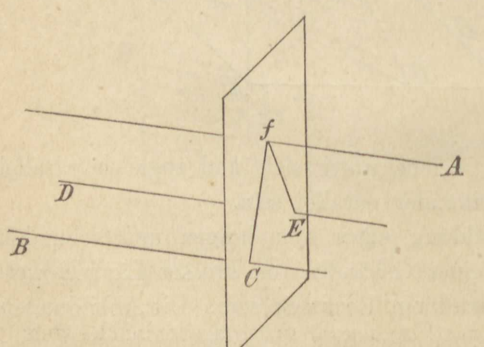


Fig. 10.

Man nennt f den Fluchtpunkt und C die Spur der Geraden BC.

Sind BC und DE zwei parallele Geraden, C und E die Spuren derselben und Af der vom Augenpunkt ausgehende Parallelstrahl, so ist der Schnittpunkt f des letzteren mit der Bildfläche der Fluchtpunkt für beide Geraden. Parallele Geraden haben deshalb einen gemeinsamen Fluchtpunkt. Die Abbildungen der Abstände der beiden Parallelen werden deshalb um so kleiner ausfallen, je grösser die Entfernungen derselben von der Bildfläche genommen werden.

Die unter α, β und γ aufgestellten Gesetze sind offenbar specielle Fälle des letzten allgemeinen Satzes. Dennoch dürfte eine eingehendere Besprechung der drei ersten Gesetze zweckmässig sein, dagegen überlassen wir die Herleitung derselben aus dem vierten Gesetze der eigenen Übung.

I. Abschnitt.

Konstruktion perspektivischer Abbildungen.

1) Hauptpunkt, Horizont, Distanzpunkte.

Nach den in der Einleitung entwickelten Fundamentalgesetzen können wir nun zu den für die Perspektive erforderlichen Konstruktionsmitteln übergehen. Hierzu dienen zunächst bestimmte Punkte und Geraden auf der Bildfläche, durch welche die Lage des Augenpunktes festgestellt wird.

Zieht man vom Augenpunkt A′ (Fig. 11) die Gerade A′A senkrecht zur Bildfläche V, so heisst diese Gerade der Hauptstrahl. Der Durchschnitt A

$AD_1 = AA_1 = AD_2$

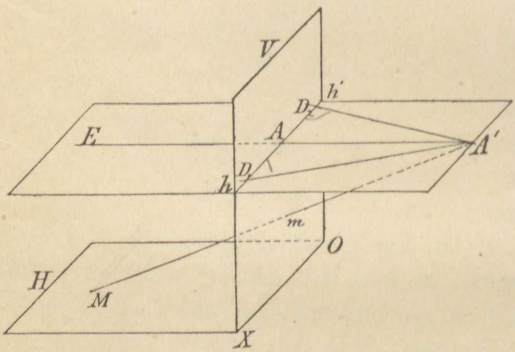


Fig. 11.

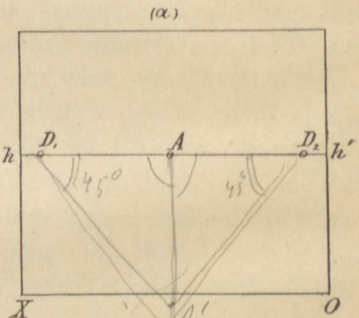


Fig. 11 α.

des Hauptstrahles mit der Bildfläche wird der Hauptpunkt genannt. Eine durch den Augenpunkt parallel zur Horizontalebene gelegte Ebene E schneidet die Bildfläche in einer Geraden hh′, welche durch den Hauptpunkt geht und parallel zur Achse OX ist. Diese Gerade wird der Horizont genannt. Auf der letzteren trägt man vom Hauptpunkte aus die Entfernung AA′ zu beiden Seiten ab, wodurch man zwei Punkte D_1 und D_2 erhält, so dass also $AD_1 = AD_2 = AA'$; diese beiden Punkte heissen Distanzpunkte.

Wird die Bildfläche V wie bei (α) in Fig. 11 auf die Zeichenfläche niedergelegt, so erscheint dieselbe in wahrer Gestalt. Ist alsdann A der Hauptpunkt, hh′ der Horizont, OX die Achse, D_1 der eine und D_2 der andere

Distanzpunkt, so ist hierdurch die Lage des Augenpunktes in Bezug auf Bildfläche und Horizontalebene völlig bestimmt. Man hat sich in (α) den Augenpunkt senkrecht über A in der Entfernung AD_1 von der Zeichenfläche vorzustellen. Die Höhe des Augenpunktes über der Horizontalebene ist gleich dem Abstand des Horizonts von der Achse.

2) Der Hauptpunkt A ist der Fluchtpunkt aller zur Bildfläche senkrechten Geraden.

Der Hauptstrahl ist der Parallelstrahl für alle zur Bildfläche senkrecht stehenden Geraden, folglich ist sein Schnittpunkt mit der Bildfläche nach Einleitung 4) δ. der Fluchtpunkt für jene Geraden.

3) Der Horizont ist der Ort der Fluchtpunkte für alle horizontalen Geraden (d. h. für solche Geraden, welche entweder in der Horizontalebene liegen, oder parallel zu derselben sind).

Der von A ausgehende Parallelstrahl einer horizontalen Geraden ist ebenfalls parallel zur Horizontalebene. Folglich liegt derselbe in der durch A gelegten Ebene E der Fig. 11 und trifft deshalb die Bildfläche auf dem Horizont hh'.

4) Die beiden Distanzpunkte sind die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden, welche mit der Bildfläche einen Winkel von 45° bilden.

Zieht man die Geraden $A'D_1$ und $A'D_2$ (Fig. 11), so sind die Dreiecke $AA'D_1$ und $AA'D_2$ rechtwinklig bei A und weil $AD_1 = AA' = AD_2$, so sind dieselben auch gleichschenklig. Folglich ist $\angle AD_1A' = \angle AD_2A' = 45°$. Hiernach sind $A'D_1$ und $A'D_2$ die vom Augenpunkte ausgehenden Parallelstrahlen für alle horizontalen Geraden, welche nach der einen oder andern Seite unter 45° gegen die Bildfläche geneigt sind. Folglich sind D_1 und D_2 die Fluchtpunkte dieser Geraden.

5) Die Abbildung m eines in der Horizontalebene liegenden Punktes M (Fig. 11) liegt offenbar stets zwischen Achse und Horizont. Wird der Punkt M in der Horizontalebene mehr und mehr von der Bildfläche entfernt, so nähert sich die Abbildung m dem Horizont. Bei unendlicher Entfernung des Punktes M von der Bildfläche wird demnach m in den Horizont fallen. Man schliesst hieraus, dass der Horizont selbst als Abbildung der unendlich fernen Geraden der Horizontalebene zu betrachten ist. Die Abbildung der bis ins Unendliche erweiterten Horizontalebene (diese Erweiterung auf der dem Augenpunkte entgegengesetzten Seite der Bildfläche genommen), umfasst demnach den zwischen der Achse und dem Horizont liegenden Teil der Bildfläche.

Mit Hilfe des Hauptpunktes, des Horizonts und der Distanzpunkte lassen sich nun perspektivische Abbildungen in anderer Weise, wie in der Einleitung gezeigt wurde, konstruieren. Diese Konstruktionen gewähren, wie wir sehen werden, einen klareren Einblick in die Gesetzmässigkeit der perspektivischen Darstellungen.

6) Die Abbildung eines Punktes M ist der Durchschnitt der Abbildungen zweier durch M gehenden Geraden (Fig. 12).

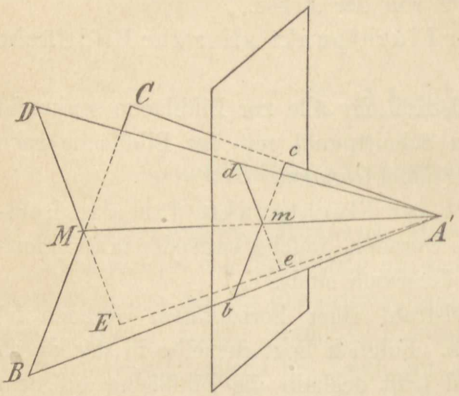


Fig. 12.

Sind BC und DE zwei beliebige durch M gehende Geraden, bc und de ihre Abbildungen, ferner A′BC und A′DE die Ebenen der Sehstrahlen für die Linien BC und DE, so schneiden sich die letzteren in dem von A′ nach M gehenden Strahl. Da nun die Durchschnittslinien von drei Ebenen sich bekanntlich in einem Punkte treffen, so liegt der Schnittpunkt m des Strahles A′M und der Bildfläche auch auf bc und de. m ist aber die Abbildung des Punktes M.

7) Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Punktes (Fig. 13).

Bei dieser wie bei allen folgenden Aufgaben ist die Lage des Augenpunktes durch Hauptpunkt, Horizont, Achse, Distanzpunkt stets gegeben.

Es sei M der auf der Horizontalebene gegebene Punkt, dessen Abbildung zu bestimmen ist. Wir erläutern nun zuerst mit Hülfe der schiefen Projektion (Fig. 13α) den räumlichen Vorgang und leiten hieraus die Konstruktion auf der ebenen Zeichenfläche ab. Nach (6) legt man durch M zwei Geraden und bestimmt deren Abbildungen. Wir ziehen Ma senkrecht zur Bildfläche, dann ist a die Spur und A nach (2) der Fluchtpunkt dieser Geraden. Die Abbildung derselben fällt hiernach in die Verbindungslinie der Punkte a und A. Zieht man ferner die Gerade

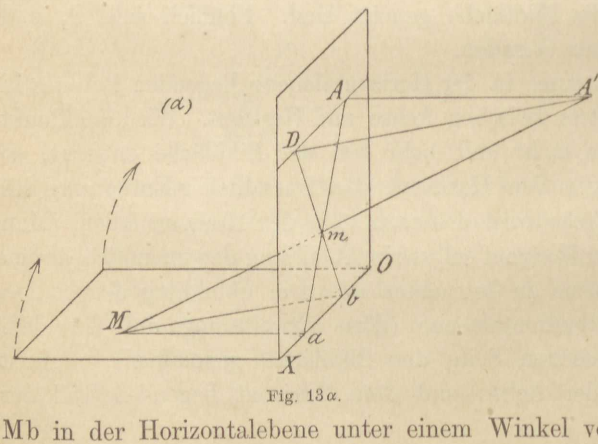


Fig. 13α.

Mb in der Horizontalebene unter einem Winkel von 45° gegen die Achse OX (parallel zu A′D), so ist nach (4) der Distanzpunkt D der Fluchtpunkt, und b ist die Spur der Geraden, folglich liegt die Abbildung derselben in bD. Da nun die Abbildung des Punktes M sowohl auf aA als auch auf bD liegen muss, so fällt dieselbe mit dem Schnittpunkt m dieser beiden Geraden zusammen. Hieraus ergiebt sich, dass zur Bestimmung der Abbildung des Punktes M der Sehstrahl von M nach dem Augenpunkte A′ nicht benutzt zu werden braucht.

Zur Ermittelung der Abbildung m auf der in die Zeichenfläche niedergelegten Bildebene (Fig. 13β) drehe man in (α) die Horizontalebene um die Achse OX (in dem Sinne wie die Pfeilspitzen andeuten), bis dieselbe mit der Bildfläche zusammenfällt. Nach der Drehung verschiebt man die Horizontalebene derart abwärts, dass jeder Punkt derselben sich senkrecht zur Achse OX bewegt, und zwar soweit, bis die auf der Bildfläche und auf der Horizontalebene zu zeichnenden Linien sich nicht mehr störend durchkreuzen. In Fig. 13 (β) ist die so verschobene Horizontalebene durch das Rechteck OXX′O′ angegeben; die Verschiebung ist soweit fortgesetzt, bis der abzubildende Punkt M unterhalb OX liegt. Die beiden Geraden Ma und Mb in (α) nehmen in (β) die Lagen Ma′ und Mb′ an, wo Ma′ ⊥ O′X′ und Mb′ unter einem Winkel von 45° gegen dieselbe geneigt ist. Man sieht nun leicht, dass Ma′b′ die wahre Gestalt des Dreiecks Mab in (α) und somit Ma′ den wahren Abstand des Punktes M von der Bildfläche darstellt.

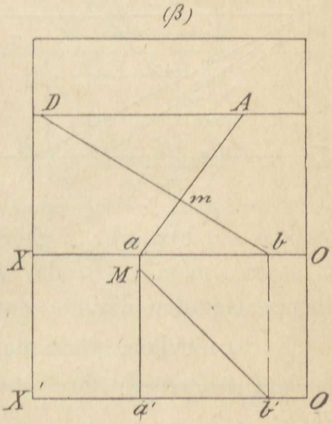


Fig. 13β.

Um nun in (β) die Abbildung des Punktes M zu finden, denkt man sich die Horizontalebene wieder hinaufgeschoben, bis O′X′ mit OX zusammenfällt. Die beiden Punkte a′ und b′ bewegen sich auf den zur Achse OX senkrechten Geraden a′a bez. b′b und gelangen schliesslich nach a bez. b. Diese beiden Punkte stellen die in (α) angegebenen, ebenfalls mit a und b bezeichneten Spuren der durch M gezogenen Hilfslinien dar, deren Fluchtpunkte A bez. D sind. Man zieht also die Geraden Aa und Db, dieselben schneiden sich dann in m, der gesuchten Abbildung des Punktes M.

Selbstverständlich kann man auf gleiche Weise die Abbildung m mit Hilfe des anderen Distanzpunktes bestimmen, welcher rechts vom Hauptpunkte liegt.

Das Dreieck abm ist die perspektivische Abbildung des Dreiecks abM (welches in (β) durch a′b′M dargestellt ist). Da ferner ab = a′b′ = a′M, so kann man m auch finden, wenn man von der Spur a aus die Entfernung a′M auf OX nach ab abträgt; dann schneidet die Verbindungslinie von b nach D die Gerade Aa in m.

Jede Gerade, welche von einem Punkte der Achse nach dem Hauptpunkt geht, kann als Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden und zur Bildfläche senkrechten Geraden angesehen werden. Nach dem vorigen kann man ferner die Abbildung eines Punktes M, welcher auf dieser Geraden im Abstand k von der Bildfläche liegt, ohne Benutzung der Horizontalebene finden. Ist aA (Fig. 14) die Abbildung der Geraden (a die Spur, der Hauptpunkt A der Fluchtpunkt derselben), so trage man von a aus die Strecke ab = k ab und ziehe bD (D Distanzpunkt), dann schneidet letztere die Gerade aA in der gesuchten Abbildung m. Sind c, d . . . beliebige andere Punkte der Achse, so schneiden ebenso die Geraden cD, dD . . . die gegebene Gerade aA in Punkten m′, m″ . . ., welche Abbildungen solcher Punkte sind, deren Abstände von der Bildfläche den Strecken ac, bez. ad . . . gleich sind. Ist ab = bc = cd = . . ., so stellen am, mm′, m′m″ . . . die Abbildungen gleich langer Strecken der gegebenen Geraden dar.

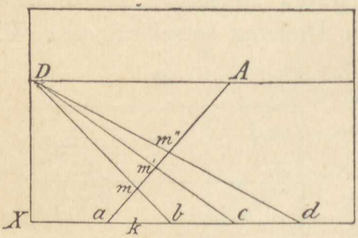


Fig. 14.

Es ist nützlich, wenn man sich die wahre Gestalt der in der Horizontalebene liegenden Figur vergegenwärtigt, welche in Fig. 14 abgebildet ist. Dieselbe wird durch Fig. 15 dargestellt. Die Geraden bm, cm′, dm″ . . . sind die Abbildungen der Parallelen bM, cM′, dM″ . . ., welche unter 45° gegen die Achse OX geneigt sind.

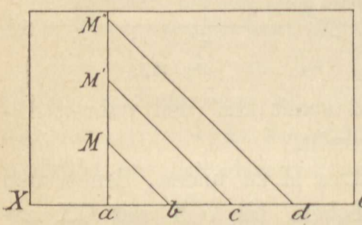


Fig. 15.

Die Lösungen folgender Aufgaben werden hiernach leicht zu finden sein:

α. Von einem auf aA gegebenen Punkte m aus ist eine Strecke von gegebener Länge abzutragen. Die Abbildung dieser Strecke zu finden.

β. Eine auf aA gegebene Strecke MN ist in eine gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen. Man soll die Abbildungen der Teilpunkte angeben.

8) Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Rechtecks CDEF zu finden, wenn die Seiten BF und CE mit der Achse OX parallel sind (Fig. 16).

Man verlängere die Seiten BC und EF, welche der gemachten Annahme zufolge auf OX senkrecht stehen, bis dieselben O′X′ in G′ und H′ schneiden. Die beiden letzteren Punkte werden auf OX nach G und H projiciert, dann sind G und H die Spuren der zur Bildfläche senkrechten Seiten des Rechtecks. Die Abbildungen der letzteren liegen in den von G und H nach dem Hauptpunkte A, dem gemeinsamen Fluchtpunkte, gehenden Geraden. Zieht man noch BJ′

und CK unter einem Winkel von 45° gegen O′X′ und projiciert J′ und K′ nach J und K auf OX (oder, was dasselbe ist, macht man GJ = BG′ und GK = CG′) und zieht von J und K die Geraden JD und KD nach dem Distanzpunkte D, so schneiden die letzteren die Gerade GA in den Abbildungen b und c der beiden Eckpunkte B und C. Nach Einleitung 4 (β) sind ferner die Abbildungen bf und ce der Geraden BF und CE parallel zur Achse, wodurch sich dann die Eckpunkte e und f ebenfalls leicht ergeben.

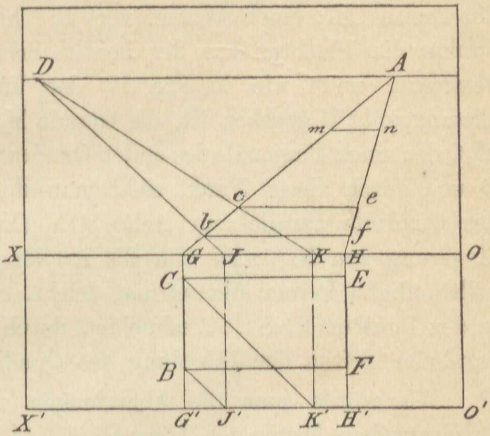


Fig. 16.

Jede zur Achse parallele Gerade, z. B. mn, welche zwischen GA und HA liegt, stellt die Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden Geraden von der gleichen Länge wie BF vor, welche ebenfalls parallel zur Achse ist.

Aus dem vorhergehenden ergeben sich leicht die Lösungen folgender Aufgaben:

α. Auf der Abbildung einer zur Achse parallelen und in der Horizontalebene liegenden Geraden von einem gegebenen Punkte aus die Abbildung einer Strecke von gegebener Länge l zu bestimmen.

β. Die wahre Länge einer zur Achse parallelen und in der Horizontalebene liegenden Geraden aus ihrer perspektivischen Abbildung zu finden.

9) Die Abbidung eines in der Horizontalebene liegenden Quadratnetzes (z. B. Parketfussboden eines Zimmers) soll konstruiert werden, wenn die Seiten der einzelnen Quadrate teils senkrecht, teils parallel zur Achse sind (Fig. 17).

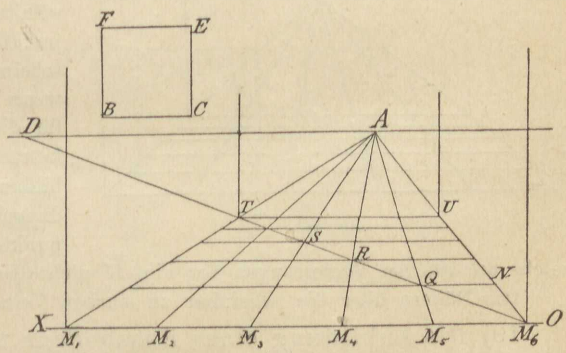


Fig. 17.

Stellt BCEF die wahre Grösse eines der quadratischen Felder dar und nehmen wir an, dass die erste Quadratreihe unmittelbar an der Achse liegt, so erhält man durch mehrmaliges Auftragen der Quadratseite BC auf OX leicht die Spuren M_1,

M_2, M_3 ... der zur Achse senkrechten Seiten des Netzes. Die Abbildungen der letzteren sind von den Spuren nach dem Hauptpunkte A gerichtet. Da jede Diagonale eines Quadrats mit der Seite desselben, folglich auch mit der Achse OX, einen Winkel von 45° bildet, so sind die beiden Distanzpunkte die Fluchtpunkte der beiden Scharen der Diagonalen. Man zieht demnach, wenn wie in Fig. 17 der links vom Hauptpunkt A liegende Distanzpunkt D gegeben ist, die Gerade M_6D. In dieser liegt die Abbildung M_6Q der einen Diagonale des ersten Quadrats rechts. Dieselbe schneidet M_5A in Q und durch diesen Punkt zieht man die Abbildung NQ der vierten Seite des Quadrats parallel zur Achse OX (Einleitung 4, β). Durch die Verlängerung von NQ wird nun die an der Achse liegende Quadratreihe vervollständigt. Ferner erkennt man leicht, dass M_6D die Seiten M_4A, M_3A ... in den Punkten R, S ... schneidet, durch welche die noch fehlenden zu OX parallelen Seiten der Abbildung des Quadratnetzes gezogen werden können.

Wie würde man die Abbildungen noch mehrerer hierauf folgenden Quadratreihen bestimmen können?

Nach Einleitung 4 (γ) schneiden die Geraden M_1A, M_2A, M_3A ... auf jeder der zur Achse parallelen Seiten des Quadratnetzes unter sich gleiche Stücke ab.

Anmerkung. Es ist in Fig. 17 auffällig, dass die äusserste Reihe der Abbildungen der einzelnen Felder starke Verzerrungen zeigt, welche auf den Beschauer nicht den Eindruck vollkommener Richtigkeit machen. Da ferner die Anzahl der Quadrate, welche an der Achse OX liegen, gleich der Anzahl derjenigen an M_1A ist, so stellt auch M_1TUM_6 die Abbildung eines Quadrates vor. Nun wird man aber beim aufmerksamen Betrachten der Fig. 17 die Empfindung haben, als wäre M_1TUM_6 die Abbildung eines Rechtecks, dessen grössere Seite nicht M_1M_6, sondern diejenige Seite, welche senkrecht zur Bildfläche steht, und durch die Strecke M_1T abgebildet ist. Der Grund dieser Erscheinung liegt in der zu klein gewählten Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche; die anscheinende Verzerrung verschwindet, wenn man die Abbildung aus dem für dieselbe gewählten Augenpunkte betrachtet. In Fig. 18 ist die Abbildung desselben Fussbodens für die doppelte Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche dargestellt, welche die starken Verzerrungen der Fig. 17 nicht besitzt.

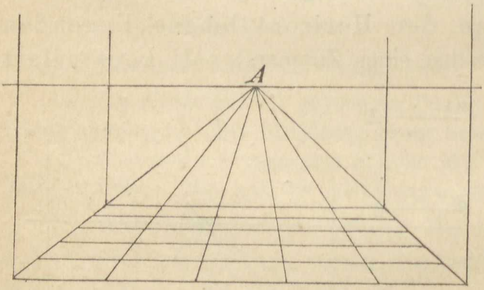


Fig. 18.

Das Nähere über die scheinbar zu starken Verzerrungen findet man in IV, 1.

10) Die Abbildung eines Fussbodens mit regelmässigen achteckigen Feldern zu konstruieren. Die vordere Reihe der Rechtecke liege unmittelbar an der Achse (Fig. 19).

Es sei bcdefghi eines der gegebenen Achtecke. Man zeichne um dasselbe das Quadrat klmn und konstruiere wie in 9 die perspektivische Abbildung eines Quadratnetzes, dessen einzelne Quadrate die Grösse klmn haben. Um auf den Abbildungen der Quadratseiten die Eckpunkte der achteckigen Felder zu bestimmen, zieht man die zur Achse OX senkrechten Geraden ch und dg, deren Abbildungen von h bez. g nach dem Hauptpunkte A gerichtet sind. Diese schneiden auf denjenigen Geraden des Netzes, welche parallel zur Achse sind, eine Reihe von Eckpunkten der achteckigen Felder ab. Diejenigen Seiten der Achtecke, welche nicht in die Seiten des Quadratnetzes fallen, sind unter 45° gegen die Achse OX geneigt. Ihre Abbildungen sind deshalb teils nach D_1, teils nach D_2 gerichtet und können hiernach leicht gefunden werden.

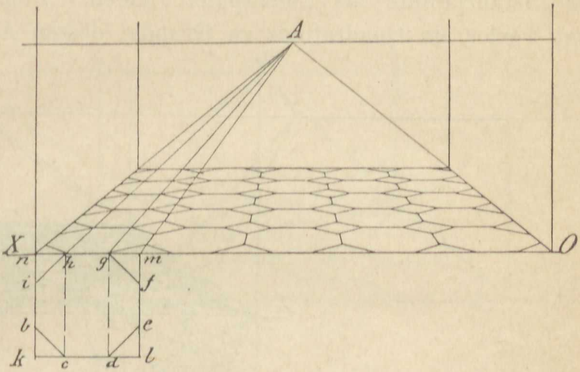


Fig. 19

Damit die Achtecksreihen an den äusseren Rändern keine übermässigen Verschiebungen zeigen, nehme der Anfänger die Entfernung eines Distanzpunktes vom Hauptpunkte mindestens gleich der $1\frac{1}{2}$ bis 2fachen Breite des ganzen Fussbodens an. Man wird übrigens leicht bemerken, dass zur Konstruktion einer der beiden Distanzpunkte ausreichend ist.

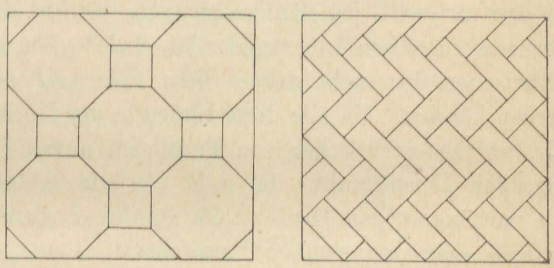


Fig. 20.

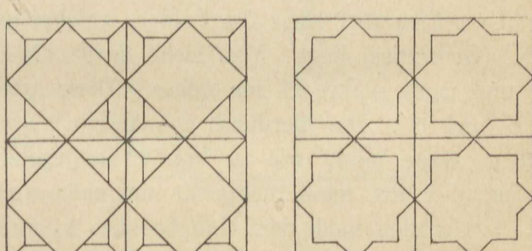


Fig 21.

11) Zur eigenen Übung konstruiere man die perspektivischen Abbildungen einiger Fussböden mit den in den Fig. 20 und 21 dargestellten Feldern. Die bei diesen Figuren vorkommenden Geraden sind entweder senkrecht oder parallel zur Achse oder

unter einem Winkel von 45° gegen dieselbe geneigt, ihre Abbildungen werden deshalb leicht mit Hülfe der vorigen Entwickelungen gefunden.

11) In Fig. 22 ist noch ein Beispiel angegeben, in welchem mehrere Scharen von Parallelen auftreten, die weder den Hauptpunkt, noch einen der Distanzpunkte als Fluchtpunkt haben. Dem Muster des Fussbodens liegt wieder ein Quadratnetz zu Grunde, dessen Abbildung man zuerst wie

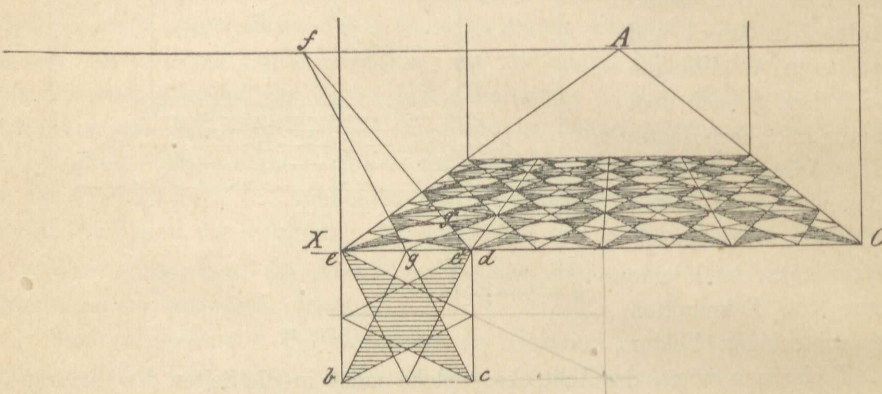


Fig. 22.

bei den vorigen Beispielen konstruiert. Die in die Quadrate eingezeichneten Sterne werden von Linien gebildet, welche von einer Quadratecke nach der Mitte einer der nicht durch diese Ecke gehenden Quadratseiten gezogen werden können. Da alle diese Linien in der Horizontalebene liegen, so haben alle, welche einer Schar von Parallelen angehören einen auf dem Horizont liegenden Fluchtpunkt. Ist z. B. c′g′ die Abbildung von cg, so schneidet c′g′ verlängert den Horizont im Punkte f, dem Fluchtpunkte der Geraden cg und aller zu derselben Parallelen.

12) Abbildung eines Fussbodens mit regelmässigen sechseckigen Feldern (Fig. 23).

Es sei abcdef eines der Felder, welches mit der Seite bc an der Achse O′X′ (Grundriss) liegt. Man ziehe durch die Ecken die Geraden gg′, bb′. cc′ und mm′ senkrecht zur Achse. Diese treffen OX in den Punkten g′, b′, c′ und m′. Die hierdurch entstandenen Abschnitte g′b′, b′c′ und c′m′ = b′g′ trage man, wie in Fig. 23 angegeben, auf der Achse OX entsprechend weiter nach rechts ab und ziehe von den Teilpunkten m′, c′, b′, g′.... Geraden nach dem Hauptpunkte A, welche alsdann die Abbildungen jener Hilfslinien sind. Auf diesen liegen die Abbildungen sämtlicher Eckpunkte des Netzes. Zieht man ferner durch die Ecken der Felder Parallelen zur Achse OX (Grundriss), so schneiden dieselben auf der zur Achse senkrechten Grenzlinie gg′ des Fussbodens gleiche Teile ag = ag′ u. s. w. ab, deren Abbildungen wie in Fig. 14 bestimmt werden. Man trägt die Strecke ag von g′ aus beliebig viele male nach rechts auf O′X′ ab und zieht von den erhaltenen Teilpunkten 1, 2, 3, . . . Geraden nach dem Distanzpunkte D. Die letzteren schneiden auf g′A die Abbildungen jener Teilstrecken ab. Zieht man durch die so erhaltenen Punkte a′, k′ . . . Parallelen

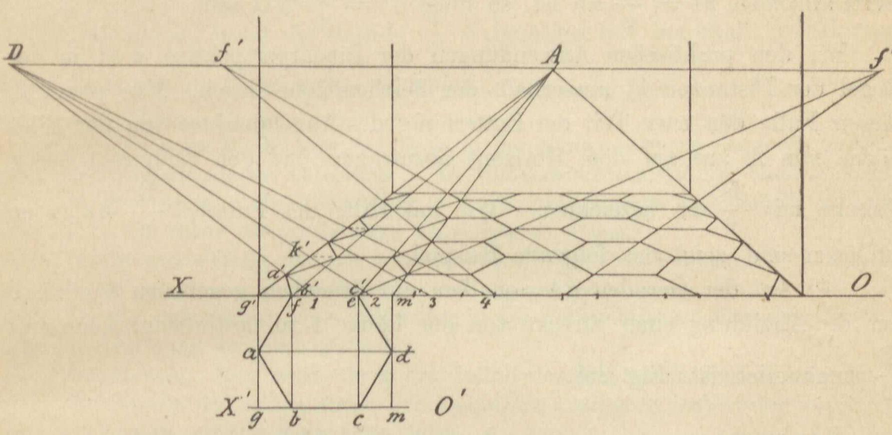


Fig. 23.

zur Achse, so sind diese die Abbildungen derjenigen Geraden, in welchen die zu OX parallelen Seiten der Sechsecke liegen. Hierdurch sind nun sämtliche Ecken des Netzes bestimmt. Unter den Seiten der Sechsecke giebt es zwei Scharen paralleler Geraden, deren Fluchtpunkte f′ und f″ auf dem Horizont gleichweit vom Hauptpunkt entfernt liegen. Man findet dieselben zunächst, wenn man eine Gerade jeder Schar bis zum Durchschnitt mit dem Horizont verlängert. Es ist vorteilhaft, diese beiden Fluchtpunkte zur Kontrolle der Genauigkeit der Zeichnung mit zu benutzen.

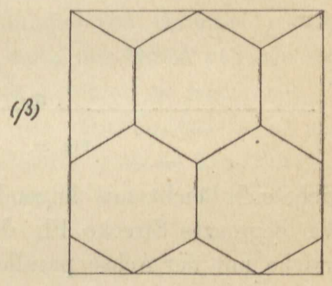


Fig. 23 (β).

Man zeichne auch die Abbildung für die in Fig. 23 (β) angedeutete Lage der sechseckigen Felder.

13) Ist aA die Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden und zur Bildfläche senkrechten Geraden, so schneidet nach (7) die von einem beliebigen Punkte b der Achse OX nach D gezogene Gerade bD (Fig. 24) auf aA die Abbildung einer Strecke ac von der Länge ab ab. Zieht man nun

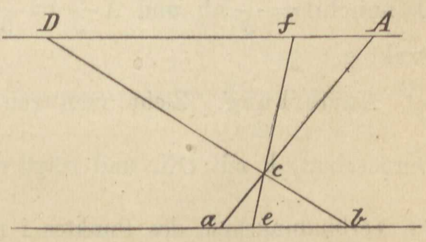


Fig. 24.

durch c die Gerade ef beliebig und sind e und f die Schnittpunkte derselben mit Achse bez. Horizont, so verhält sich bekanntlich:

$$ae : ab = Af : AD.$$

Ist z. B. e die Mitte von ab, so ist auch f die Mitte von AD, oder wenn allgemein $ae = \frac{1}{n} ab$ ist, so muss $Af = \frac{1}{n} AD$ sein.

Bei den praktischen Anwendungen der Linearperspektive wird in der Regel der Distanzpunkt ausserhalb der Zeichenfläche liegen. Man pflegt in diesem Falle den nten Teil der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche von A aus auf dem Horizont abzutragen und den Endpunkt dieser Strecke mit $\frac{D}{n}$ zu bezeichnen. Wie mit Hilfe des Punktes $\frac{D}{n}$ Aufgaben zu lösen sind, zeigt das folgende Beispiel.

14) Auf der Geraden aA von dem auf derselben gegebenen Punkte b aus die Abbildung einer Strecke von der Länge l zu bestimmen, wenn nur $\frac{D}{3}$ zugänglich ist (Fig. 25).

Man mache $ac = \frac{1}{3} l$, ziehe durch b die Gerade bh parallel zur Achse OX und verbinde c mit A durch die Gerade cA, dann schneidet die letztere bh in d. Es ist nun bd die Abbildung einer Strecke von der Länge $\frac{l}{3}$. Zieht man die Gerade $d\frac{D}{3}$, so trifft dieselbe aA in e und es ist nun be die gesuchte Abbildung. Der Beweis ergiebt sich leicht aus folgender Betrachtung. Ist $ag = l$, so ist die durch Ag begrenzte Strecke bh die Abbildung einer Geraden von der Länge l, welche mit der Achse parallel ist. Die Gerade von h nach dem unzugänglichen Distanzpunkte D würde auf bA die gesuchte Strecke be abschneiden. Da nun $bd = \frac{1}{3} bh$ und $A\frac{D}{3} = \frac{1}{3} AD$ ist, so geht $d\frac{D}{3}$ auch durch den Punkt e.

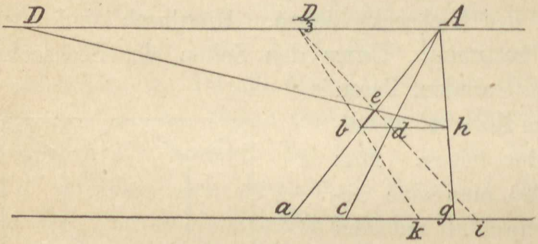


Fig. 25.

Anmerkung. Zieht man von $\frac{D}{3}$ eine Gerade durch b bis zum Durchschnitt k mit OX, und trägt von k aus $ki = \frac{1}{3} l$ auf OX ab, so geht die Verbindungslinie des Punktes i mit $\frac{D}{3}$ durch d, also auch durch e.

Es sind nämlich kb und di die Abbildungen zweier Parallelen, deren Fluchtpunkt $\frac{D}{3}$ ist, folglich stellt bdik die Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Parallelogramms dar, in welchem also bd die Abbildung einer Strecke von der Länge ik bedeutet. Diese Konstruktion von be ist nicht brauchbar, wenn die Gerade $\frac{D}{3}$ b die Achse OX innerhalb der Grenzen der Zeichenfläche nicht mehr schneidet.

Aufgaben.

14) Wie gross ist der Abstand eines in der Horizontalebene liegenden Punktes von der Bildfläche, dessen Abbildung in der Mitte zwischen Achse und Horizont liegt?

15) Den Abstand eines beliebigen in der Horizontalebene liegenden Punktes von der Achse aus seiner perspektivischen Abbildung zu finden.

16) Die wahre Länge einer zur Achse senkrechten Geraden, welche in der Horizontalebene liegt aus ihrer perspektivischen Abbildung zu finden.

17) Die wahre Länge einer beliebigen in der Horizontalebene liegenden Geraden aus der Abbildung derselben zu finden.

Anleitung. Man suche die wahre Gestalt des Trapezes zu finden, welches die gegebene Gerade, die beiden durch ihre Endpunkte gezogenen Senkrechten zur Achse, und die letztere selbst mit einander bilden.

Die vorigen Aufgaben zu lösen, wenn auf dem Horizont nur ein Teil der Entfernung AD angegeben werden kann.

Abbildungen von Geraden, welche senkrecht zur Horizontalebene stehen.

Die Abbildungen, welche wir in diesem Abschnitte bisher betrachtet haben, bezogen sich auf solche Punkte und Figuren, welche in der Horizontalebene liegen. Wir schliessen hieran die Abbildungen von Geraden, welche senkrecht zur Horizontalebene stehen, wodurch dann das Mittel gegeben ist, die Abbildung jedes beliebig im Raum gelegenen Punktes zu bestimmen.

18) In einem gegebenen Punkte M der Horizontalebene ist eine Senkrechte MN zu der letzteren errichtet, welche die Länge l hat. Es soll die Abbildung von MN bestimmt werden (Fig. 26).

Die Abbildung m des Punktes M wird wie in (7) durch die beiden Geraden a′M und c′M, von denen die erstere senkrecht zur Achse O′X′, die zweite unter einem Winkel von 45° gegen dieselbe geneigt ist, gefunden. Die Abbildung der Geraden MN steht nach Einleitung 6 senkrecht zur Achse; sie kann also der Richtung nach schon gezeichnet werden. Um

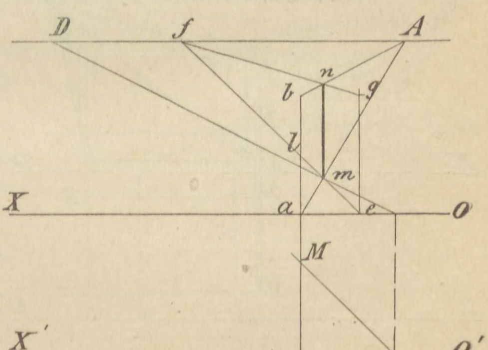


Fig. 26.

die Länge der Abbildung zu bestimmen, trage man in a die gegebene Länge ab = l senkrecht zu OX ab. Zieht man die Gerade von b nach dem Hauptpunkte A, so sind aA und bA die Abbildungen zweier Parallelen, welche (weil A der gemeinsame Fluchtpunkt derselben ist) senkrecht zur Bildfläche stehen und durch die Endpunkte M und N der gegebenen Geraden gehen, (vergl. die Darstellung (α) in schiefer Projektion). Folglich schneiden aA und bA auf der in m zur Achse errichteten Senkrechten die gesuchte Abbildung mn ab.

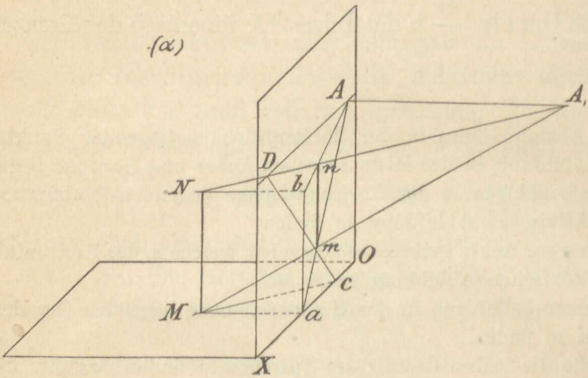


Fig. 26α.

In (α) sind auch die beiden Strahlen von M und N nach dem Augenpunkte angegeben, welche selbstverständlich die Bildfläche in m bez. n treffen.

Man sieht leicht aus Fig. 26, dass mn ohne Benutzung des Grundrisses gefunden werden kann, wenn die Abbildung m des Fusspunktes schon gegeben ist. Übrigens kann man zum Auftragen der Höhe in m auch einen anderen Fluchtpunkt als A benutzen. Man ziehe durch m eine beliebige Gerade, welche die Achse in e und den Horizont in f schneidet, trage ge = l senkrecht zu OX auf und ziehe die Gerade fg. Dann kann man ef und fg als die Abbildungen zweier Parallelen mit dem gemeinsamen Fluchtpunkte f ansehen, welche demnach auf mn ebenfalls die gesuchte Höhe h abschneiden.

19) Abbildung eines mit der Grundfläche auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 27).

Das Parallelepipedum ist durch seine mit der Grundfläche BCEF zusammenfallende Horizontalprojektion und durch die Höhe h gegeben. BF sei parallel zu Achse OX. Die Abbildung der Grundfläche wird nach (8) bestimmt. Durch die Eckpunkte b, c, e und f zieht man senkrecht zur Achse OX die Geraden bg, ci, ek und fl, deren Längen noch näher zu bestimmen sind.

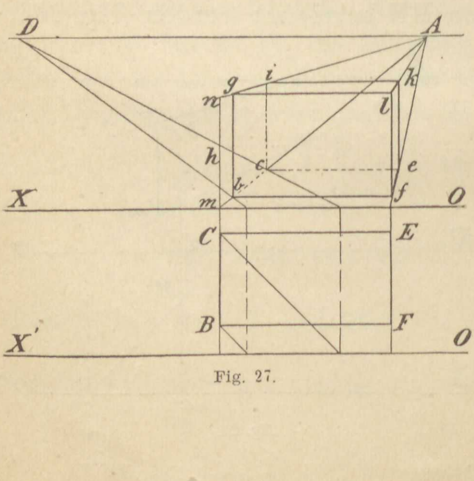


Fig. 27.

Man verlängere bc bis m und ziehe die Gerade mn = h senkrecht zur Achse. Nach 18 schneidet dann nA auf bg sowohl als auch auf ci die Höhe h ab. Ferner sind die Kanten gl und ik nach (Einleitung 4 β) parallel zur Achse OX, und gi und lk sind nach dem Hauptpunkte A gerichtet.

Leicht ergiebt sich aus dieser Konstruktion noch, dass die Abbildungen gleich langer Senkrechten zur Horizontalebene, welche dieselben Abstände von der Bildfläche haben, gleich gross werden.

Die besondere Stellung des Parallelepipedums, bei welcher eine Seitenfläche parallel zur Bildfläche ist, wird Frontstellung, die Abbildung in Folge dessen eine Frontansicht, genannt. Diese Bezeichnung ist auch bei den Abbildungen grösserer Gegenstände gebräuchlich. So nennt man z. B. die Abbildung eines Gebäudes eine Frontansicht desselben, wenn die dem Beschauer zugekehrte Frontfläche des Gebäudes parallel zur Bildfläche angenommen ist.

Die Frontansichten sind am leichtesten herzustellen, wir werden deshalb die Konstruktion derselben zuerst betrachten und dann zu den schiefen Stellungen (Übereckstellungen) übergehen.

20) Abbildung eines rechtwinkligen Parallelepipedums mit quadratischer Basis, welches auf zwei ebenfalls quadratischen Platten steht (Fig. 28).

Wir setzen wieder voraus, dass ein Teil der Kanten parallel zur Achse ist. Man wird alsdann zunächst die perspektivischen Abbildungen der Horizontalprojektionen aller Grundflächen bestimmen und hierauf das Auftragen der Höhen vornehmen. Das erstere kann wie früher ausgeführt werden; die Abbildungen der Höhen erhält man am einfachsten, wenn man eine der beiden Diagonalen der Grundfläche z. B. BC bis zum Durchschnitt E mit OX verlängert. In E zieht man die Gerade EF senkrecht zu OX und trägt auf dieser die drei gegebenen Höhen eg, eh u. s. f. ab. Zieht man von g, h . . . Geraden nach dem Distanzpunkte D, so schneiden diese auf den über der Diagonale stehenden zur Horizontalebene senkrechten Kanten die gesuchten Höhen ab. Die Abbildungen der übrigen Kanten werden in bekannter Weise hinzugefügt.

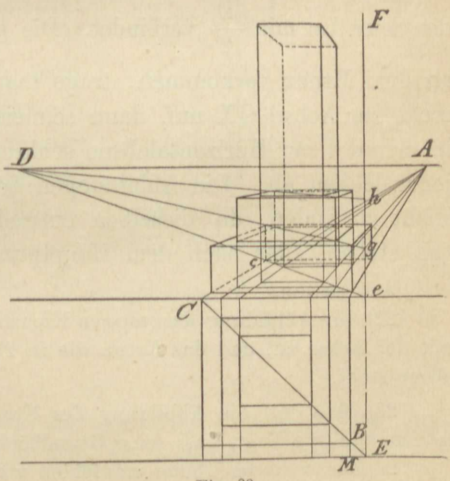


Fig. 28.

Es ist leicht ersichtlich, dass der Grundriss entbehrt werden kann, wenn ausser den nötigen Dimensionen des Gegenstandes der Abstand BM gegeben ist.

21) Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden Kreuzes, dessen Frontfläche parallel zur Bildfläche ist (Fig. 29).

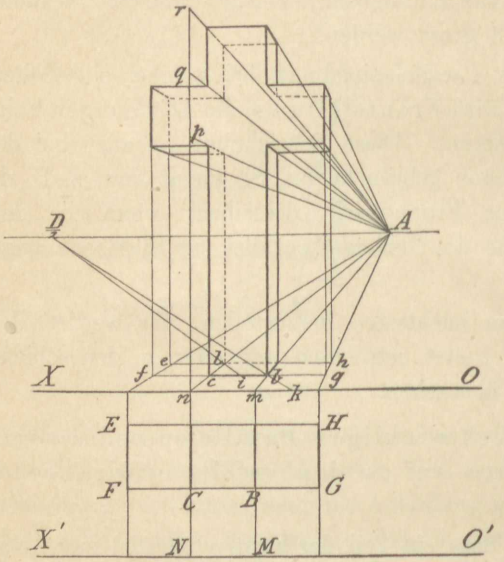


Fig. 29.

Es soll hierbei noch angenommen werden, dass der Distanzpunkt ausserhalb der Grenzen der Zeichenfläche liegt, und etwa $\frac{D}{2}$ noch erreichbar ist. Das aus drei Quadraten bestehende Rechteck EFGH sei die Horizontalprojektion des Kreuzes, BM der Abstand desselben von der Bildfläche. Die Abbildung des Rechtecks EFGH ist efgh, welche sich, wie schon früher angegeben, leicht konstruieren lässt. Der Punkt b auf mA z. B. wird bestimmt durch die Gerade k $\frac{D}{2}$, welche man findet, wenn man mk gleich der Hälfte des Abstandes BM macht. Ferner liegt der Eckpunkt l auf derjenigen Geraden, welche die Mitte i der Seite bc mit $\frac{D}{2}$ verbindet. Die gegebenen Höhen np, nq, nr, welche an dem Kreuz vorkommen, trage man in der Spur n der Kante cl senkrecht zur Achse OX auf, dann schneiden die Geraden pA, qA, rA auf den in c und l zur Horizontalebene senkrecht stehenden Kanten die Abbildungen jener Höhen ab. Die Abbildungen der noch übrigen Kanten sind alsdann leicht zu finden, da dieselben entweder parallel oder senkrecht zur Achse OX stehen, oder nach dem Hauptpunkte A gerichtet sind.

Aufgaben.

22) Die Abbildung des vorigen Kreuzes zu zeichnen, wenn die Kante EF parallel mit der Achse ist, und das Kreuz wie in 21) mit der Grundfläche auf der Horizontalebene steht.

23) Man soll die Abbildung des Kreuzes zeichnen, wenn dasselbe so auf der Horizontalebene liegt, dass seine Grundfläche mit der Bildfläche parallel ist.

24) Zur weiteren Übung empfehlen wir dem Anfänger die in den Figuren 30—33 durch Grundriss und Aufriss dargestellten Gegenstände perspektivisch abzubilden unter der Voraussetzung, dass eine Frontfläche parallel zur Bildfläche ist. Man ver-

suche auch einige dieser Beispiele zu konstruieren, wenn die Distanzpunkte ausserhalb der Zeichenfläche liegen.

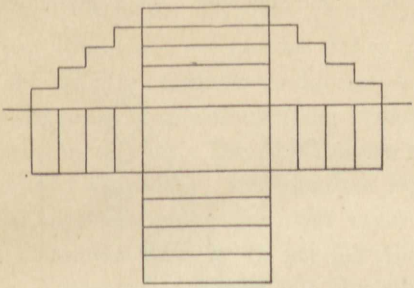


Fig. 30.

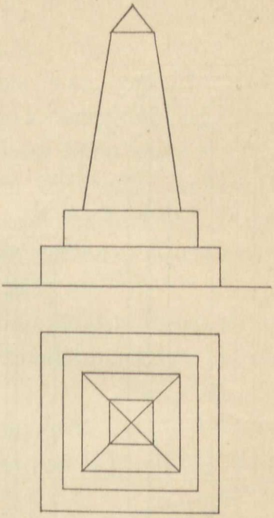


Fig 31.

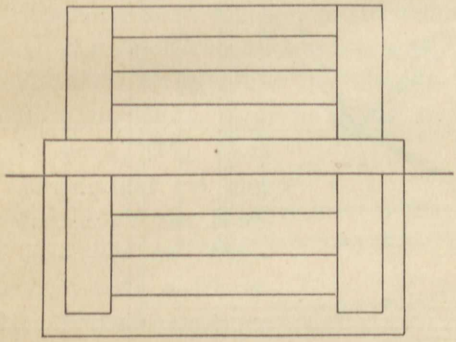


Fig. 32.

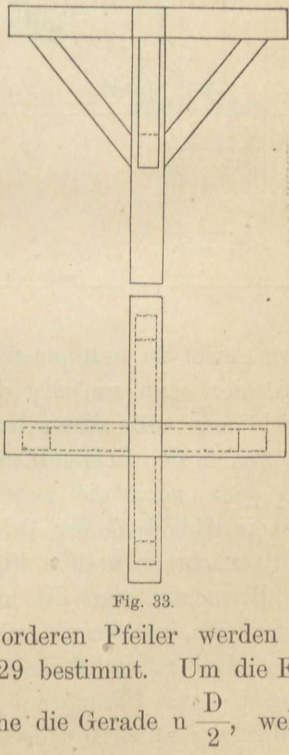


Fig. 33.

25) Abbildung von 6 einfachen Pfeilern mit quadratischem Querschnitt (Fig. 34).

Es wird vorausgesetzt, dass die in einer Geraden liegenden Kanten BC und EF (Grundriss) parallel zur Achse sind, und dass je vier innere Ecken der Pfeiler, deren Abbildungen z. B. die Punkte h, i, m, l sind, die Ecken eines Quadrats bilden. Zur Konstruktion genügt hiernach ein Teil des Grundrisses, wie in Fig. 34 angedeutet ist. Ferner sei nur $\frac{D}{2}$ erreichbar.

Die Abbildungen der Grundflächen der vorderen Pfeiler werden wie diejenige der Grundfläche des Kreuzes in Fig. 29 bestimmt. Um die Ecke l zu bestimmen, halbiere man hi in n und ziehe die Gerade n $\frac{D}{2}$, welche cA in l schneiden muss. Die hintere Ecke t des zweiten Pfeilers links ergiebt sich durch die Gerade, welche man von der Mitte s der Kante ol nach $\frac{D}{2}$ zieht. Die Höhen der Pfeiler sind wie bei den vorhergehenden Auf-

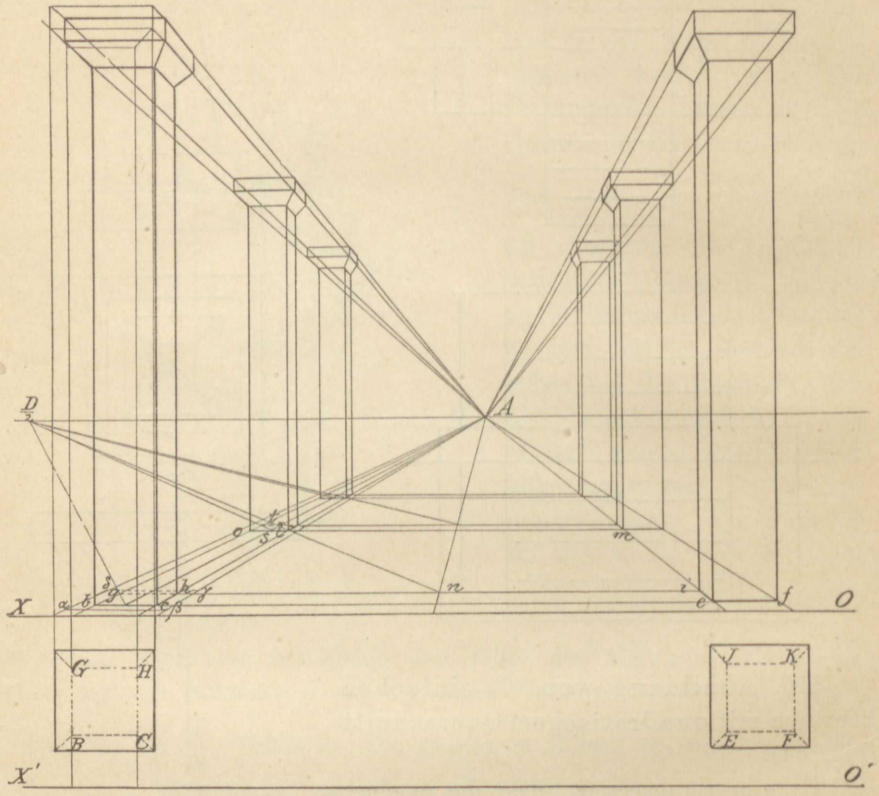


Fig. 34.

gaben leicht zu bestimmen. Um die Abbildungen der Kapitäle zu finden, konstruiert man zunächst die perspektivischen Abbildungen ihrer Horizontalprojektionen, wie dieses bei dem ersten Pfeiler durch $\alpha\beta\gamma\delta$ angedeutet ist. Auf den in den Eckpunkten einer solchen Projektion errichteten Senkrechten sind dann noch die zugehörigen Höhen auf bekannte Weise abzutragen. Wie die Abbildung des dritten Paares der Pfeiler gefunden wird, ist nun leicht ersichtlich und in Fig. 34 hinreichend angedeutet.

Betrachtet man die bisher konstruierten Abbildungen (Frontansichten) aufmerksam, so bemerkt man, dass dieselben einen etwas gezwungenen Eindruck machen, und deshalb keine vollkommen befriedigende Wirkung hervorbringen. Der Hauptgrund dieser Erscheinung liegt darin, dass alle zur Bildfläche parallelen Flächen in ihren Abbildungen Grössenverhältnisse haben, welche den wirklichen proportioniert sind, während die Abbildungen unmittelbar daranstossender Flächen starke Verzerrungen zeigen. Dieser plötzliche Übergang ist es, welcher der Abbildung den etwas schroffen gezwungenen Charakter verleiht; ausserdem wirkt auch eintönig die grössere Zahl von Geraden, welche der Achse parallel sind. Wenn deshalb nicht besonders wichtige Gründe vorhanden sind, so zieht man, vor allen Dingen bei freistehenden Gegenständen, der Frontansicht die zutällige schräge Stellung (Übereckstellung) vor. Die Abbildungen erhalten dann einen ungezwungenen, lebendigeren Charakter, insbesondere verschwinden die vielen horizontalen Geraden, welche nun nicht mehr unter sich parallel erscheinen. Dagegen ist bei Innenansichten, z. B. bei der Abbildung eines langen Korridors und dgl. die Frontansicht häufig mit Vorteil zu benutzen.

Wir gehen nun im folgenden zum Studium derjenigen Konstruktionen und Hilfsmittel über, welche zur Herstellung der Abbildungen bei beliebiger Stellung der Bildfläche erforderlich sind.

26) Abbildung einer beliebigen Geraden, welche in der Horizontalebene liegt, oder parallel zu derselben ist (Fig. 35(α) und (β).

Es sei A_1 (Fig. 35α) der Augenpunkt, A der Hauptpunkt hh′ der Horizont und ab die abzubildende Gerade, welche in der Horizontalebene liegen mag. Nach (3) trifft nun der zu ab von A_1 aus gezogene Parallelstrahl die Bildfläche in einem Punkte f des Horizontes. Dieser Punkt ist der Fluchtpunkt der gegebenen Geraden; folglich liegt die Abbildung derselben in der Verbindungslinie ihrer Spur a mit f.

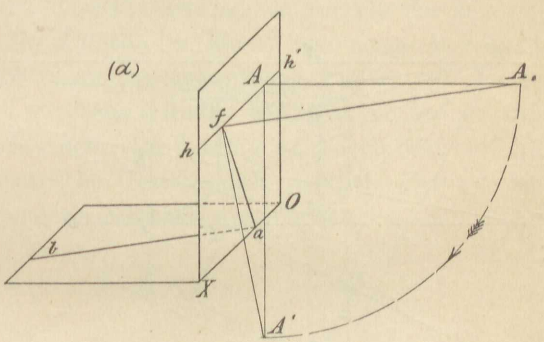


Fig. 35α.

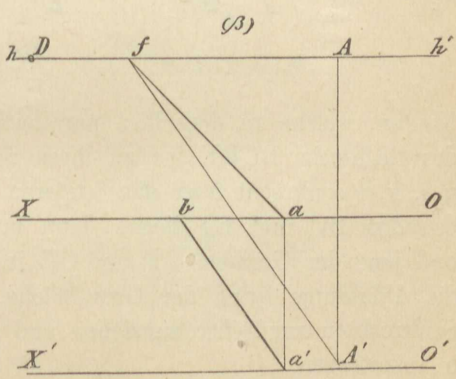


Fig. 35β.

Die wirkliche Ausführung der so angedeuteten Konstruktion ist in (β) angegeben. Die Lage der gegebenen Geraden a′b und ihre Spur a′ ist aus dem Grundriss ersichtlich. Um den Fluchtpunkt f zu finden, hat man sich das bei A rechtwinklige Dreieck A_1 A f [s. (α)] um Af gedreht zu denken bis dasselbe in die Bildfläche nach AA′f gelangt. Die Lage des gedrehten Dreiecks lässt sich in (β) leicht bestimmen. Da nämlich in (α) $\angle$ AfA_1 = $\angle$ baX also in (β) $\angle$ AfA′ = $\angle$ ba′X′ ist, so muss A′f || a′b sein. Man mache deshalb in (β) AA′ $\perp$ hh′ und AA′ = AD; ziehe A′f || a′b, dann ist der Schnittpunkt f der gesuchte Fluchtpunkt. Projiciert man noch die Spur a′ nach a, dann liegt in der Verbindungslinie des Punktes a mit f die Abbildung der Geraden ab.

Da die Fluchtpunkte aller zur Horizontalebene parallelen Geraden im Horizont liegen, so ist die eben angegebene Konstruktion des Fluchtpunktes auch noch gültig, wenn a′b nicht die gegebene Gerade selbst, sondern die Horizontalprojektion einer zu ihr parallelen Geraden bedeutet.

27) Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 36).

Es sei BCEF der Grundriss des Parallelepipedums und h die Höhe desselben. Man ziehe in A die Gerade AA′ = AD, senkrecht zum Horizont und lege durch A′ die Geraden A′f_1 und A′f_2 bez. parallel zu BF und BC, dann erhält man in f_1 und f_2 die Fluchtpunkte der letzteren und aller

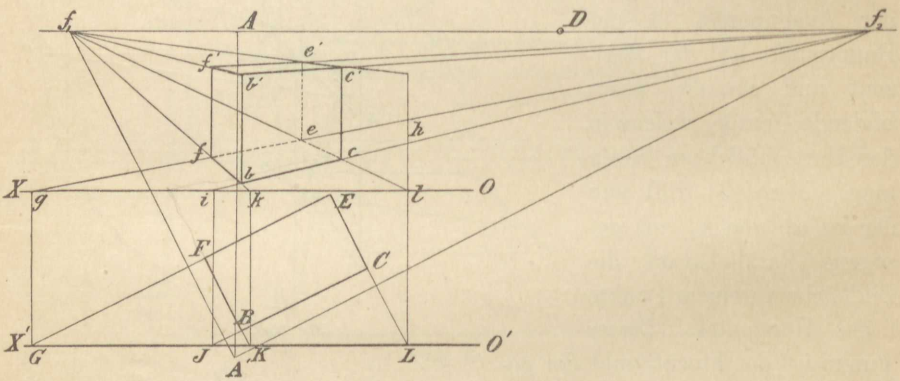


Fig. 36.

Kanten, welche zu denselben parallel sind. Nun verlängere man die Seiten des Rechtecks BCEF bis zu ihren Spuren G, I, K, L, deren Abbildungen g, i, k, l senkrecht über den letzteren liegen. Die Abbildungen der beiden Geraden BC und EF liegen dann in den Verbindungslinien gf_2 und if_2, und jene der Geraden BF und CE in kf_1 bez. lf_1. Hierdurch ergiebt sich die Abbildung bcef der Grundfläche. In den Ecken der letzteren sind Senkrechten zur Achse zu ziehen und auf diesen die Abbildungen der Höhe h aufzutragen.

Man konstruiere hiernach die Abbildungen von Übereckstellungen der in den Figuren 30—33 dargestellten Gegenstände.

Unzugängliche Fluchtpunkte.

28) Die Ermittelung der perspektivischen Abbildungen beliebiger horizontaler Geraden zeigt, wie die Abbildungen von Übereckstellungen leicht gefunden werden können mit Berücksichtigung auf das scheinbare Zusammenlaufen paralleler Geraden in einem Fluchtpunkte. Zwar hätte man derartige Abbildungen auch nach 7) und 18) dieses Abschnittes konstruieren können; man wäre dann aber gezwungen die Abbildungen aller Ecken zu bestimmen und diese den Kanten des abzubildenden Gegenstandes entsprechend mit einander zu verbinden. Dadurch tritt aber (was gerade für das Zeichnen von besonderer Wichtigkeit ist) die Gesetzmässigkeit in dem Verlauf der Abbildungen der Kanten nicht so klar hervor wie z. B. bei dem in 27) angegebenen Verfahren. Überhaupt gewährt die Benutzung der Fluchtpunkte der vorkommenden Geraden einen besonders lehrreichen Einblick in die Eigentümlichkeiten perspektivischer Abbildungen und man wird nur in einzelnen Fällen (s. 30) mit der punktweisen Ermittelung sich begnügen.

Nun tritt häufig der Fall ein, dass Fluchtpunkte ausserhalb der Zeichenfläche liegen. Es ist dann die Aufgabe zu lösen, von einem beliebigen Punkte der Zeichenfläche nach einem unzugänglichen Punkte zu ziehen, dessen Lage immer durch zwei gegebene Geraden bestimmt ist, welche sich ausserhalb der Zeichenfläche schneiden. Die Lösung ist jedoch sehr einfach; sie stützt sich auf das planimetrische Gesetz, dass parallele Geraden auf anderen Geraden stets proportionierte Strecken abschneiden.

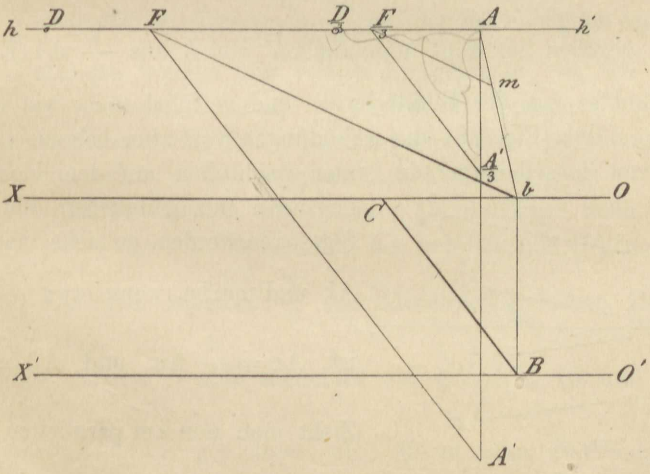


Fig. 37.

Es sei BC Fig. 37 eine in der Horizontalebene liegende Gerade, deren Abbildung gefunden werden soll. Ist AA' ⊥ hh' und gleich AD,* ferner

A'F parallel BC, so ist nach 26) F der Fluchtpunkt der gegebenen Geraden. Projiciert man noch die Spur B nach b auf OX, so liegt in bF die Abbildung von BC. Liegt nun D ausserhalb der Zeichenfläche, so dass z. B. nur noch $\frac{D}{3}$ auf derselben erreichbar ist, so kann man die Richtung der Abbildung von b nach F leicht folgendermassen bestimmen.

Man mache $A\frac{A'}{3} = \frac{1}{3}AA'$ (also $= \frac{1}{3}AD$) und ziehe von $\frac{A'}{3}$ aus eine Parallele zu BC. Die letztere schneidet den Horizont hh' in $\frac{F}{3}$, dann verhält sich:

$$A\frac{F}{3} : AF = A\frac{A}{3} : AA';$$

folglich ist auch $A\frac{F}{3} = \frac{1}{3}AF$.

Mit Hilfe von $\frac{F}{3}$ kann man nun leicht die Richtung von bF finden. Man ziehe Ab und mache $Am = \frac{1}{3}Ab$; verbinde m mit $\frac{F}{3}$ durch die Gerade $m\frac{F}{3}$ und ziehe nun von b aus eine Parallele zu $m\frac{F}{3}$. Diese Parallele fällt mit bF zusammen. Der Beweis ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke AbF und $Am\frac{F}{3}$.

Ist $\frac{D}{n}$ gegeben, so trägt man auf AA' von A aus $\frac{1}{n}$ der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ab und verfährt sonst wie vorhin.

Sind a und b (Fig. 38) die Abbildungen von zwei beliebigen Punkten und sollen von denselben gerade Linien nach dem auf dem Horizont hh' liegenden unzugänglichen Fluchtpunkte f gezogen werden, so ziehe man Aa und Ab und mache, wenn etwa $\frac{f}{3}$ gegeben ist, $Ac = \frac{1}{3}Aa$ und $Ad = \frac{1}{3}Ab$. Zieht man nun am parallel zu $c\frac{f}{3}$ und bn parallel zu $d\frac{f}{3}$, so gehen am und bn verlängert durch f.

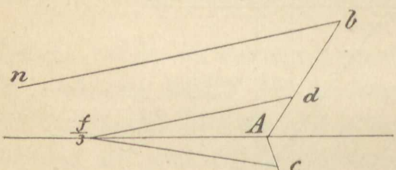


Fig. 38.

Soll man von mehreren Punkten a, b, c, d, e . . . (Fig. 39), welche auf der Achse OX, oder wie in Fig. 40, auf einer beliebigen Geraden an liegen, gerade Linien nach dem auf dem Horizonte liegenden unzugänglichen Fluchtpunkte f gezogen werden, so verbindet man zunächst die gegebenen Punkte mit dem Hauptpunkte A durch gerade Linien. Ist nun wieder etwa $\frac{f}{3}$ gegeben, so mache man $A\alpha = \frac{1}{3} Aa$ und ziehe die Gerade kl durch α parallel zur Achse OX bez. parallel zu an. Diese Parallele schneidet auf jeder der Verbindungsgeraden der Punkte a, b, c, d, e . . mit A ein Drittel ihrer Länge von A aus gerechnet, ab. Die gesuchten von a, b, c, d, e . . nach f gehenden Geraden sind dann bez. parallel zu denjenigen Geraden, welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . . mit $\frac{f}{3}$ verbinden.

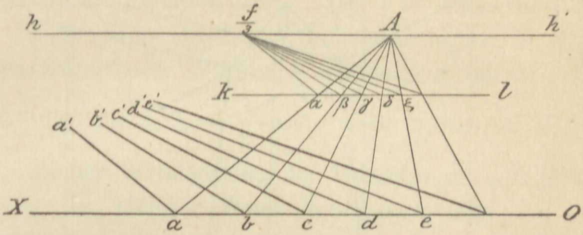


Fig. 39.

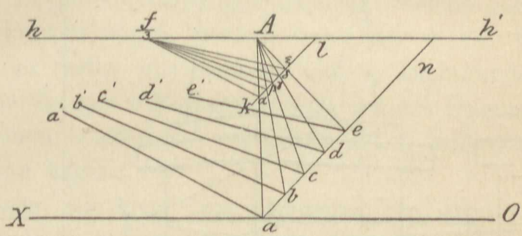


Fig. 40.

29) Die in 28) erläuterten Konstruktionen sind in Fig. 41 zur perspektivischen Darstellung eines Monumentes bei Übereckstellung benutzt worden, unter der Voraussetzung, dass noch $\frac{D}{6}$ auf der Zeichenfläche zugänglich ist. Einige Andeutungen werden hier vollständig genügen, da wir bereits Gesagtes nur zu wiederholen haben. Nachdem die Spuren G, H, I, und K der Kanten der Grundfläche in der Horizontalprojektion gefunden, und durch Senkrechten zur Achse in der perspektivischen Abbildung in g, h, i, und k bestimmt sind, zieht man von den letzteren gerade Linien nach dem Hauptpunkte A. Ferner lege man die Gerade mn parallel zum Horizonte so, dass ihr Abstand von dem letzteren $\frac{1}{6}$ des Abstandes zwischen Horizont und Achse beträgt. Diese Gerade schneidet auf gA, hA, iA und kA je $\frac{1}{6}$ ihrer Länge, von A aus gerechnet, ab. Macht man nun $AA_2 = \frac{1}{6}$ der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche und senkrecht zum Horizont, und zieht $A_2 \frac{f}{6}$ parallel zu BC, $A_2 \frac{F}{6}$ parallel zu BE, so sind $A \frac{f}{6}$ und

$A \frac{F}{6}$ bez. die sechsten Teile der Entfernungen der wahren Fluchtpunkte vom Hauptpunkte A.

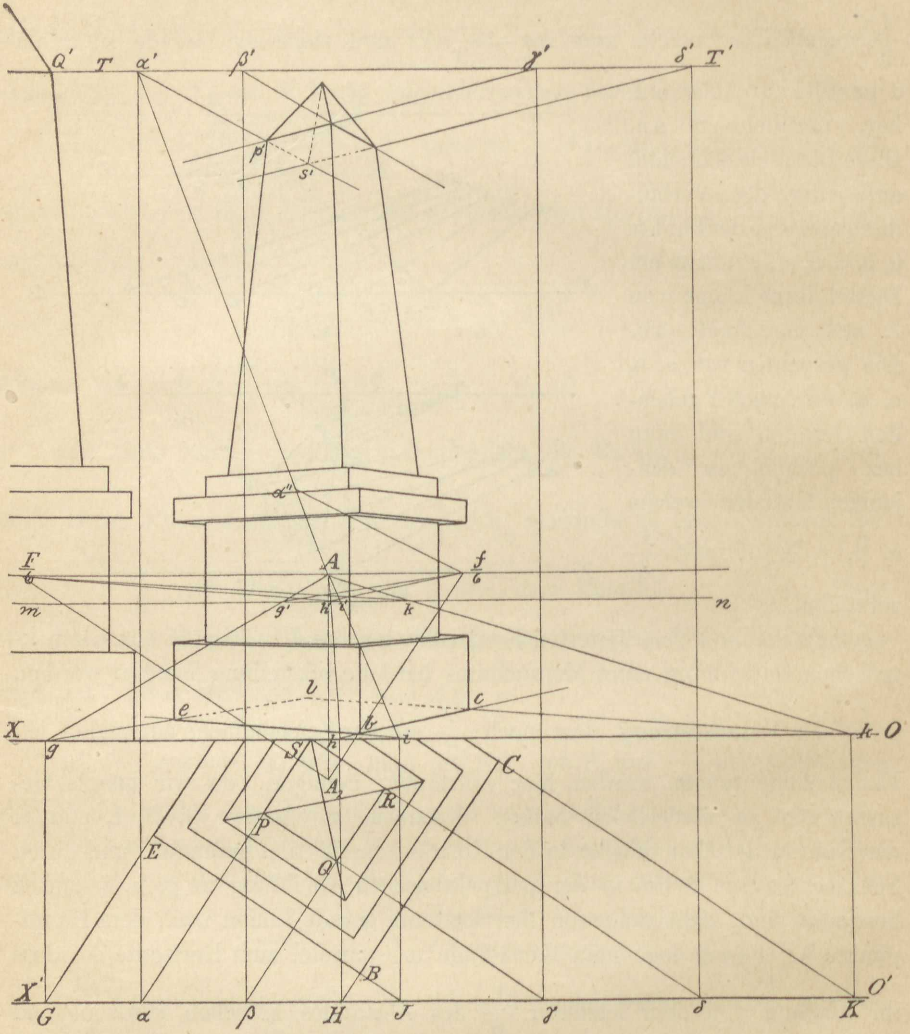


Fig. 41.

Wir ziehen nun $g l \parallel g' \frac{f}{6}$

$h c \parallel h' \frac{f}{6}$

ferner $i e \parallel i' \frac{F}{6}$

$k c \parallel k' \frac{F}{6}$

Durch diese Geraden erhalten wir die Abbildung b c l e der Grundfläche.

Um die Abbildung desjenigen Quadrates zu finden, dessen Horizontalprojektion PQRS ist, denken wir uns die Ebene desselben erweitert. Diese Ebene schneidet die Bildfläche in einer zur Achse parallelen Geraden TT′, welche in gleicher Höhe mit dem entsprechenden Eckpunkte Q′ des links in unserer Zeichnung angegebenen Aufrisses liegt. Auf TT′ liegen nun die Spuren α', β', γ', δ' der Seiten jenes Quadrates und zwar senkrecht über den Punkten α, β, γ, δ des Grundrisses. Verbindet man jetzt α' mit A durch die Gerade $\alpha'A$ und macht alsdann $\alpha''A = \frac{1}{6}\,\alpha'A$, zieht ferner zu $\alpha''\,\frac{f}{6}$ die Parallele $\alpha'p'$, so liegt in der Verlängerung der letzteren die Abbildung $p's'$ der einen Quadratseite. In gleicher Weise konstruiert man die Abbildungen der übrigen Kanten.

Die Abbildungen der Eckpunkte derjenigen Quadrate, welche nahezu in gleicher Höhe mit dem Horizont liegen, werden wegen der spitzen Winkel, welche die Abbildungen der Seiten mit einander bilden, leicht undeutlich. Man kann in diesem Falle die ganze Horizontalprojektion des Gegenstandes perspektivisch abbilden, dann werden die gesuchten Ecken senkrecht über denjenigen dieser Abbildung liegen.

30) Um noch zu zeigen, wie man ohne Benutzung von Fluchtpunkten einzelner Kanten perspektivische Abbildungen konstruieren kann, betrachten wir die Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums, welches auf seiner oberen Grundfläche eine regelmässige vierseitige Pyramide trägt (Fig. 42).

Durch die Eckpunkte des Grundrisses ziehen wir die Geraden BB′, CC′, EE′ und FF′ senkrecht zur Achse O′X′ und bestimmen deren Spuren b′, c′, e′ und f′, welche senkrecht über B′, C′, E′ F′ auf OX liegen. Die Abbildungen dieser Geraden sind von b′, c′, e′, f′ nach dem Hauptpunkte A gerichtet. Um nun auf den letzteren die Abbildungen der Eckpunkte der Grundfläche zu bestimmen, stellen wir eine Ebene auf, welche senkrecht zur Achse OX steht und im Grundriss deshalb als die Gerade MN erscheint. Die Abbildung von MN ist von N nach A gerichtet und die Schnittlinie der Ebene mit der Bildfläche die zur Achse OX senkrechte Gerade NQ. Auf diese Ebene projicieren wir die Punkte B, C, E, F durch Geraden, welche parallel zur Achse O′X′ sind nach b″, c″, e″, f″. Die Abbildungen b_2, c_2, e_2, f_2 dieser letzteren, welche auf NA liegen, werden nach (7) mit Hilfe des Punktes $\frac{D}{2}$ bestimmt. Zieht man jetzt die Geraden b_2b, c_2c e_2e, f_2f parallel zu OX, so stellen diese die Abbildungen der projicierenden Geraden Bb″, Cc″, Ee″, Ff″ dar, und sie bestimmen die Abbildungen b, c, e und f der Ecken der Grundfläche.

Projicieren wir nun die zur Horizontalebene senkrechten Kanten des Prismas ebenfalls auf die angenommene Seitenebene, so werden die oberen Endpunkte g_2, h_2, i_2, k_2 der Projektionen in einer Geraden 1A liegen, welche man erhält, wenn man in N die wahre Länge N1 jener Kanten

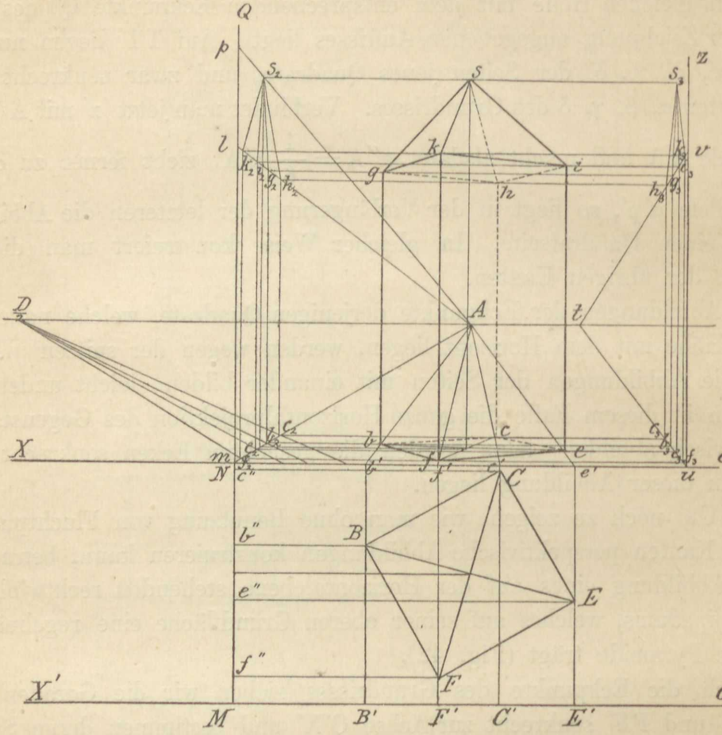


Fig. 42.

senkrecht zur Achse aufträgt und von 1 aus die Gerade 1A zieht. Jetzt kann man die Abbildungen der vertikalen Kanten in b, c, e und f zeichnen und durch Parallelen zur Achse, welche von g_2, h_2, i_2, k_2 aus gezogen werden, die Eckpunkte g, h, i, k bestimmen. Auf gleiche Weise ergiebt sich die Abbildung der Spitze s. (In Fig. 42 ist die perspektivische Abbildung der Seitenprojektion vollständig angegeben).

Besonders brauchbar ist die Projektion auf eine Seitenebene, wenn sehr viele gleiche Höhen, welche in verschiedenen Entfernungen von der Bildfläche liegen, aufzutragen sind. Man vergl. die Anwendungen in den Fig. 83, 86, 88, und 89.

Sind die Punkte b, c, e und f bestimmt, so kann man dieselben auch auf eine beliebige zwischen Achse und Horizont liegende Gerade ut projicieren. In den Projektionen und in u errichtet man Senkrechten zur Achse und trägt auf diesen die Höhen perspektivisch ab (man mache also uv = N1 und ziehe vt, wodurch auf jenen Senkrechten die gesuchten Strecken nach (18) des Abschnittes bestimmt werden). Durch Parallelen zur Achse, welche man von den so erhaltenen Punkten g_3, h_3, i_3, k_3 zieht, ergeben sich nun gleichfalls die Ecken des Parallelepipedums. Die Konstruktion ist aus Fig. 42 ersichtlich; man benutzt in diesem Falle die Projektion des zu zeichnenden Gegenstandes auf einer zur Horizontalebene senkrechten Ebene, welche jedoch nicht senkrecht zur Bildfläche steht. Die projicierenden Linien sind aber parallel zur Bildfläche und fassen demnach gleiche Höhen zwischen sich. Dies Verfahren ist anzuwenden, wenn im ersten Falle die Ecken der Seitenprojektion durch zu spitze Schnitte der Hilfslinien undeutlich werden sollten.

Man zeichne hiernach die perspektivische Abbildung des Gegenstandes Fig. 41.

Der Teilungspunkt.

31) Es sei BC Fig. 43 eine in der Horizontalebene liegende Gerade und bF ihre nach (26) bestimmte perspektivische Abbildung. Um auf der letzteren die gegebene Strecke BE von b aus perspektivisch darzustellen, machen wir

BG = BE

und suchen nun die Abbildung der Verbindungslinie der Punkte G und E. Wir ziehen also von dem niedergeklappten Hauptpunkte A′ aus die Gerade A′T parallel zu GE, dann ist T der Fluchtpunkt der letzteren. Durch die Senkrechte Gg zur Achse bestimmen wir die Spur g, dann erhält man in der Verbindungslinie der Punkte g und T die Abbildung der durch G und E gehenden Geraden. gT schneidet nun auf bF die Abbildung be der gegebenen Strecke BE ab.

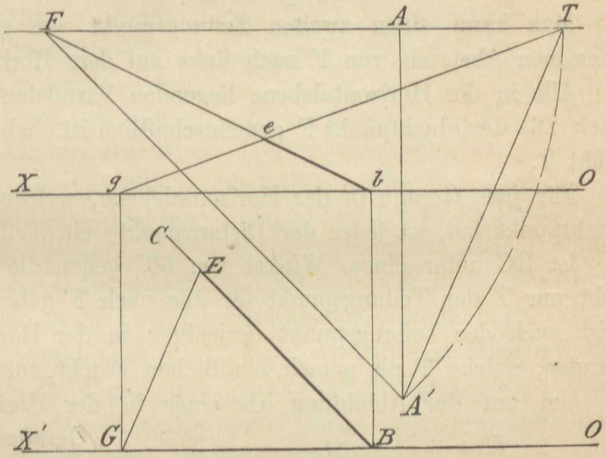


Fig. 43.

Aus der eben angegebenen Konstruktion folgt, dass die Dreiecke A′FT und BEG ähnlich sind, weil ihre Seiten paarweise parallel liegen. Da nun das letztere Dreieck gleichschenklig ist (BG = BE), so ist auch in dem Dreieck A′FT:

A′F = FT.

Man kann deshalb den Punkt T auch mit Hilfe eines um den Fluchtpunkt F mit dem Halbmesser FA′ beschriebenen Kreises bestimmen. Ferner ist noch bg = BG = BE.

Hiernach lässt sich auf der gegebenen Abbildung einer beliebigen in der Horizontalebene liegenden Geraden eine bestimmte Strecke ohne Benutzung des Grundrisses von der Spur der Geraden aus perspektivisch abtragen. Man zeichnet um den Fluchtpunkt F der gegebenen Geraden bF mit dem Halbmesser FA′ einen Kreis, welcher den Horizont in T, dem sog. Teilungspunkt der Geraden, trifft. Die gegebene Strecke trägt man von der Spur b aus nach bg auf der Achse OX ab und zieht von g die Gerade gT nach dem Teilpunkte T. Diese Gerade schneidet auf bF die gesuchte Abbildung ab.

Alle in der Horizontalebene liegenden Geraden, welche zu GE parallel sind, haben den Fluchtpunkt T gemeinschaftlich und man sieht leicht, dass die Abbildungen aller dieser Geraden auf bF Strecken abschneiden, deren wahre Längen denjenigen Strecken gleich sind, welche die Geraden selbst auf der Achse (von b aus gerechnet) abschneiden. Wegen dieser Eigenschaft heisst T der Teilungspunkt der Geraden bF.

Man kann einen zweiten Teilungspunkt von gleicher Eigenschaft in demselben Abstande von F nach links auf dem Horizont abtragen.

Alle in der Horizontalebene liegenden Parallelen zu BC, welchen nach (nach 26) der Fluchtpunkt F gemeinschaftlich ist, haben denselben Teilungspunkt T.

Für jede Gerade in der Horizontalebene, welche den Hauptpunkt zum Fluchtpunkt hat, ist jeder der Distanzpunkte ein Teilungspunkt.

Ist BC unter einem Winkel von 60° gegen die Achse geneigt, so ist nicht nur T der Teilungspunkt für alle nach F gehenden Geraden, sondern F ist auch der Teilungspunkt derjenigen in der Horizontalebene liegenden Geraden, welche T als gemeinschaftlichen Fluchtpunkt haben.

Um auf der Abbildung bF einer in der Horizontalebene liegenden Geraden, Fig. 44, von einem Punkte c derselben eine Strecke von gegebener Länge l perspektivisch abzutragen, ziehen wir vom Teilpunkte T der Geraden durch c die Linie Tc, und verlängern die letztere bis zum Durchschnitt e mit der Achse OX. Jetzt machen wir ge = l und ziehen gT, dann schneidet die letztere auf bF den Endpunkt h der gesuchten Strecke ab. Es ist nämlich nach dem früheren:

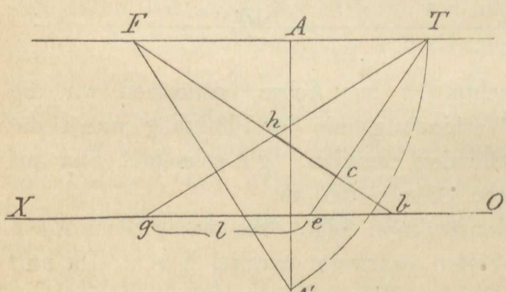


Fig. 44.

bg gleich der wahren Länge von bh
be " " " " " bc

folglich ist auch bg — be = ge = l gleich der wahren Länge von bh — bc oder von ch.

Umgekehrt: Soll die wahre Länge einer in der Horizontalebene liegenden Strecke aus ihrer Abbildung ch bestimmt werden, so ziehen wir von dem Teilpunkte derselben die Geraden Tc und Th. Die Verlängerungen der der letzteren begrenzen auf der Achse die Strecke ge, welche die gesuchte wahre Länge darstellt. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ist aus Fig. 44 unmittelbar ersichtlich.

Die Aufgabe, auf der Abbildung einer in der Horizontalebene liegenden Geraden bF (Fig. 45) von einem bestimmten Punkte c derselben die gegebene Strecke l perspektivisch abzutragen, wollen wir noch für den Fall lösen, wenn der gegebene Punkt c so nahe dem Horizonte liegt, dass die Gerade, welche ihn mit dem Teilungspunkte verbindet, die Achse innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche nicht mehr treffen würde.

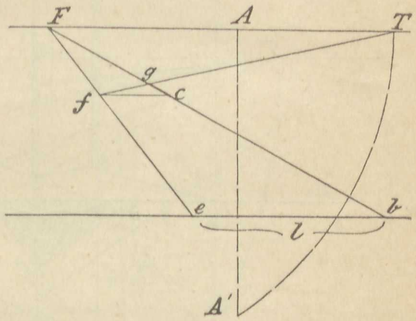


Fig. 45.

Wir tragen be = l von der Spur b aus auf der Achse OX ab; ziehen eF und durch c die Gerade cf parallel zu OX. Da nun eF und bF die Abbildungen zweier Parallelen mit dem gemeinschaftlichen Fluchtpunkte F sind, so ist bcfe die Abbildung eines Parallelogramms. Es ist also die wahre Länge der Seite cf = be = l. Ziehen wir nun die Gerade fT, so ist cfg die Abbildung eines gleichschenkligen Dreiecks, in welchem cf und cg die Abbildungen der beiden gleichen Seiten desselben sind. Folglich ist auch cg die Abbildung einer Strecke von der gegebenen Länge l.

Hiernach löse man die Aufgabe: Die wahre Länge einer in der Horizontalebene liegenden Geraden aus ihrer Abbildung zu finden.

32) Als Beispiel zur Anwendung der in 31) gegebenen Erläuterungen diene die Abbildung einer Reihe von Pfeilern mit quadratischen Grundflächen, welche auf der Horizontalebene stehen (Fig. 46). Durch den unter OX liegenden Teil des Grundrisses ist die Lage des ersten Pfeilers in Bezug auf die Bildfläche bestimmt. e sei die Entfernung je zweier Pfeiler von einander und h die gemeinschaftliche Höhe derselben.

Wir verlängern, wie in Fig. 46 angegeben ist, zwei parallele Seiten der Grundflächen bis zu ihren Spuren G und J und übertragen die letzteren durch Senkrechten zur Achse auf die perspektivische Abbildung nach g und i. Die Abbildungen dieser verlängerten Seiten sind alsdann nach dem auf bekannte Weise bestimmten Fluchtpunkte F zu ziehen (AA′ = Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche und A′F parallel zu CG) und nun bestimmen wir durch den um F als Mittelpunkt mit dem Halbmesser FA′ gezeichneten Kreisbogen den Teilungspunkt T für gF. Den Eckpunkt c

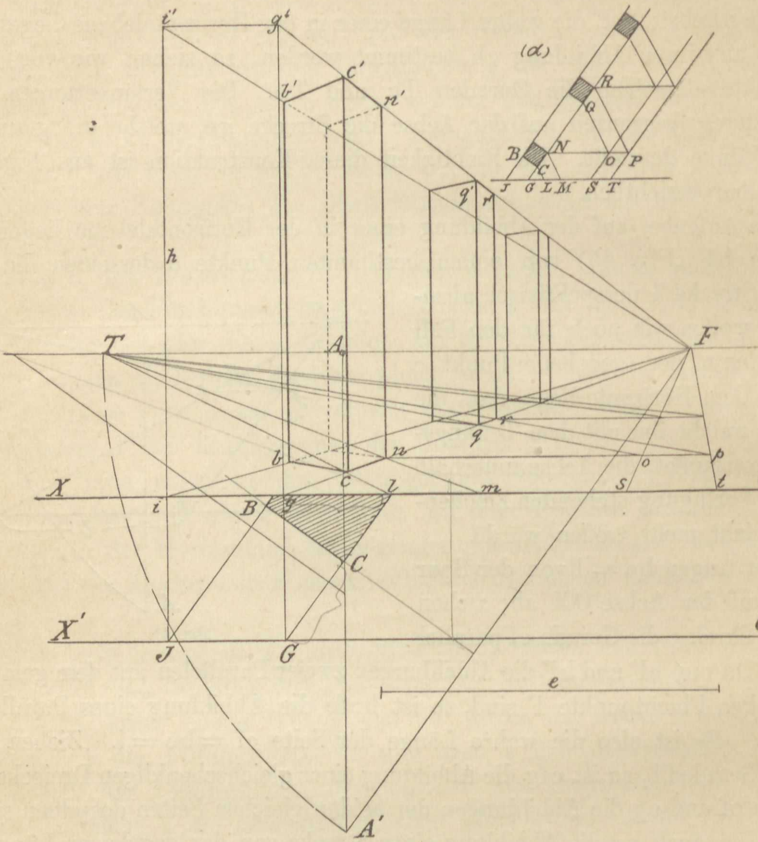


Fig. 46.

findet man alsdann, wenn man gl = CG macht und die Gerade lT zieht, welche gF in c schneidet. Ferner tragen wir von l aus die Strecke lm = der Seite der Grundfläche eines der Pfeiler und ziehen von m eine Gerade nach T. Diese trifft gF in einem zweiten Eckpunkte n (vergl. Fig. 44).

Um die beiden auf gF liegenden Ecken der Grundfläche des folgenden Pfeilers zu bestimmen, trage man auf OX von g aus die Strecken gs = e und st = lm an; ziehe sF und tF, und durch den Eckpunkt n die Gerade np parallel zur Achse. Auf der letzteren werden durch sF und tF die Strecken no und op abgeschnitten, welche die Abbildungen von Geraden darstellen, deren wahre Längen gleich gs und st sind. Zieht man demnach von o und p Geraden nach dem Teilungspunkte T, so schneiden dieselben auf gF die gesuchten Eckpunkte q und r des nächsten Pfeilers ab. Von r aus kann man wie vorhin von m aus weitergehend die entsprechenden Ecken des dritten Pfeilers bestimmen u. s. f. (s. Fig. 45). Das Auftragen der Höhen ist wie früher auszuführen.

In der Nebenfigur (α) ist der Grundriss in kleinem Massstabe dargestellt, mit denjenigen Hilfslinien, welche zur Bestimmung der Abbildungen der in der Horizontalebene liegenden Ecken gedient haben. Es ist $GL = CG$, $GM = GN$, $GS = e$, $ST = BC$; $PT \parallel SO \parallel GR$; $OQ \parallel PR \parallel MN$, $NP \parallel GT$ u. s. f. Man vergl. nun (α) mit dem perspektivischen Grundriss in Fig. 46.

33) Abbildung einer beliebig im Raume liegenden Geraden (Fig. 47).

Unsere nächste Aufgabe ist, zu zeigen wie der Fluchtpunkt einer der Lage nach gegebenen Geraden Bc bestimmt werden kann. Bc treffe die Horizontalebene in B und BC sei die Horizontalprojektion der Geraden. Wir ziehen durch den Augenpunkt A_1 die Geraden A_1F parallel zu BC und A_1f parallel zu Bc. Da A_1F nun auch parallel zur Horizontalebene ist, so trifft sie die Bildfläche in einem Punkte F, welcher auf dem Horizont liegt und zugleich der Fluchtpunkt für BC ist, (s. I, 3). Legt man durch A_1f und A_1F eine Ebene, so ist dieselbe parallel mit der projicierenden Ebene BCc; sie steht also senkrecht zur Horizontalebene und schneidet die Bildfläche deshalb in einer Geraden Ff, welche senkrecht zur Achse steht. Hieraus geht hervor, dass A_1f die Bildfläche in dem senkrecht über F liegenden Punkte f schneidet. Nach Einleitung 3) ist aber f der Fluchtpunkt der Geraden Bc.

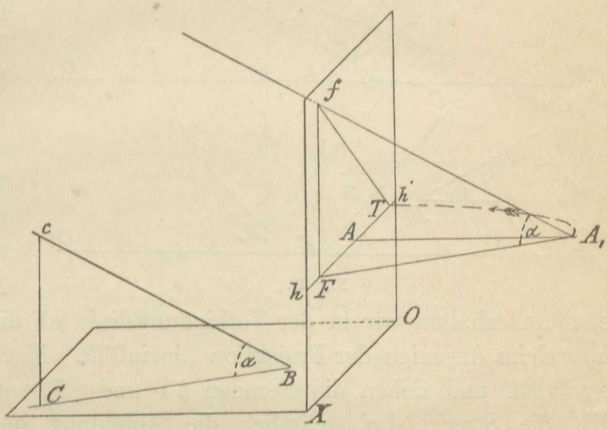


Fig. 47

Anmerkung. Da $A_1F \parallel BC$, $A_1f \parallel Bc$, so ist $\angle cBC = \angle fA_1F$. Ferner ist $\angle BCc = \angle A_1Ff = 90^\circ$. Folglich ist $\triangle BCc \sim \triangle A_1Ff$.

Man drehe das Dreieck A_1Ff um Ff, bis dasselbe in die Bildfläche fällt. Da $\angle A_1Ff$ ein rechter Winkel ist, so fällt A_1F nach der Umklappung mit dem Horizont zusammen und A_1 gelangt nach T, wenn $FT = A_1F$ ist. Nach der Drehung hat das Dreieck die Lage FfT, und es ist $\angle FTf = \angle FA_1f = \angle cBC$. Aus der Konstruktion geht aber sofort hervor, dass T der Teilungspunkt für die Abbildung der Geraden BC ist.

Hiernach ist die Ausführung der Konstruktion auf der ebenen Zeichenfläche in Fig. 48 dargestellt. Die abzubildende Gerade ist gegeben durch ihre Horizontalprojektion BC, ihre wahre Länge B′C′ und ihren Neigungswinkel C′B′C″ $= \alpha$ gegen die Horizontalebene; in B schneide sie die letztere.

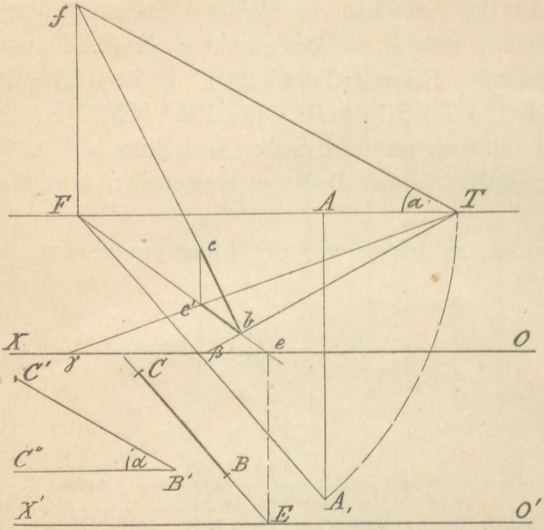


Fig. 48.

Von dem in die Bildfläche niedergeklappten Augenpunkte A_1 ziehen wir die Gerade A_1F parallel zu BC, dann erhalten wir in F den Fluchtpunkt der Horizontalprojektion der gegebenen Geraden. Mit Hilfe eines um F als Mittelpunkt und FA_1 als Halbmesser gezeichneten Kreisbogens bestimmen wir alsdann den Teilpunkt T der Projektion BC. Die Spur E der letzteren übertragen wir durch die zur Achse Senkrechte Ee nach e, dann erhalten wir in der Verbindungslinie eF die Abbildung der Geraden in welche diejenige der Projektion hineinfällt. Machen wir noch $e\beta = EB$, $e\gamma = EC$ und ziehen die Geraden βT und γT, so schneiden dieselben auf EF die Strecke bc′, nämlich die Abbildung der gegebenen Projektion BC ab.

In T legen wir den Neigungswinkel $FTf = \alpha$ an den Horizont und ziehen Ff senkrecht zu dem letzteren, dann erhalten wir in dem Schnittpunkt f, wie sich aus Fig. 47 ergiebt, den Fluchtpunkt der gegebenen Geraden, deren Abbildung nun von b nach f gerichtet ist. Zieht man noch durch c′ die Gerade cc′ senkrecht zur Achse, so schneidet dieselbe auf bF die gesuchte Abbildung bc ab.

Wenn die abzubildende Gerade in einer Ebene liegt, welche senkrecht zur Bildfläche und Horizontalebene zugleich steht, so liegt der Fluchtpunkt, wie man leicht sieht, in der durch A gehenden zum Horizont senkrechten Geraden.

Aufgaben:

34) Die Abbildung eines geraden dreiseitigen Prismas zu finden, welches mit einer Seitenfläche auf der Horizontalebene liegt, Fig. 49.

Das Prisma ist gegeben durch seine Horizontalprojektion BCEG und durch die wahre Gestalt seiner Grundfläche, welche durch das in die Horizontalebene niedergeklappte gleichschenklige Dreieck CEJ′ dargestellt wird (CJ′ = EJ′).

Nachdem die Abbildung bceg des Rechtecks BCEG gefunden ist, wird nach (31) der Teilpunkt T der Geraden bg und ce bestimmt. In T ist

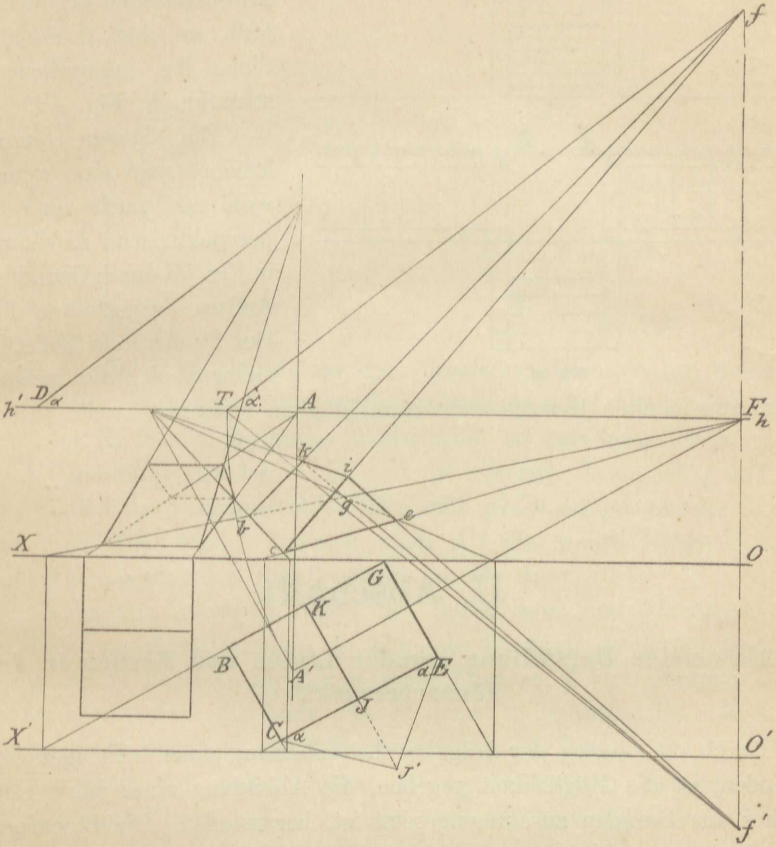


Fig. 49.

dann der Winkel α, welchen die gleichen Schenkel des Dreiecks CEJ′ mit der Grundlinie bilden, sowohl oberhalb, als auch unterhalb des Horizonts anzutragen. Die Schenkel treffen die in F zu hh′ gezogene Senkrechte in den Punkten f und f′, welche nun die bez. Fluchtpunkte der beiden zur Horizontalebene geneigten Kantenpaare des Prismas sind. Die Abbildungen des einen Paares sind von b und c nach f gerichtet, diejenigen des anderen Paares liegen in den Geraden von f′ durch e und g. Durch die Schnittpunkte k und i ergiebt sich endlich noch die Abbildung der letzten Kante i k.

In Fig. 49 ist noch eine zweite Abbildung desselben Körpers dargestellt, wenn die Kanten BC und GE senkrecht zur Achse stehen. Die Fluchtpunkte der beiden Paare schräger Kanten liegen dann auf einer zur

Achse OX senkrechten Geraden, welche durch den Hauptpunkt A geht. Man findet diese beiden Punkte leicht, wenn man in einem der Distanzpunkte den Winkel α sowohl oberhalb als auch unterhalb an den Horizont legt. Siehe die angegebene Konstruktion in Fig. 49.

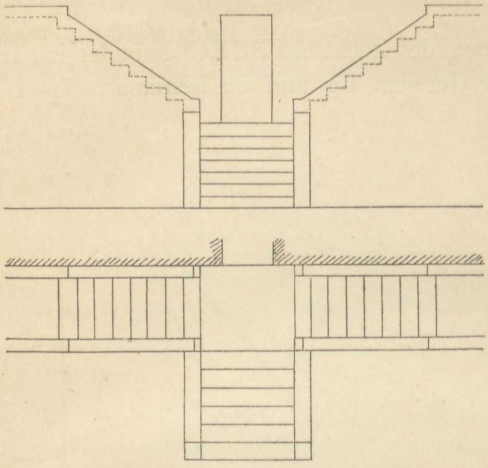


Fig. 50.

Zur eigenen Übung konstruiere man eine gerade sowohl als auch eine schiefe perspektivische Abbildung der in Fig. 50 durch Grundriss und Aufriss dargestellten Treppe. Der Studierende findet hierbei Gelegenheit, die meisten der bisher entwickelten Gesetze zur Anwendung zu bringen.

II. Abschnitt.

Allgemeine Darstellung gerader Linien und Ebenen in der Linearperspektive.

Durch die Lösung der Aufgabe, die Abbildung einer beliebigen Geraden zu finden, ist die Möglichkeit gegeben, die Abbildung eines jeden Gebildes, welches aus Geraden zusammengesetzt ist, herzustellen. Die Linearperspektive könnte man mit diesem Satze als abgeschlossen ansehen, da alles folgende (auch die punktweise zu bestimmenden Abbildungen krummer Linien) nur Anwendungen der bisher aufgestellten Gesetze und Konstruktionen sind. Es ist jedoch von Interesse, auch auf weitere Aufgaben über Punkt, gerade Linie und Ebene einzugehen. Wir fügen deshalb der Vollständigkeit wegen diesen Abschnitt besonders für diejenigen hinzu, denen ein tieferes Eindringen in die Gesetze der Linearperspektive erwünscht ist. Wenngleich diese Gesetze vorwiegend theoretisches Interesse beanspruchen, so werden wir doch später auch Fälle kennen lernen, in welchen dieselben praktisch mit Vorteil zu verwerten sind.

1) Die Abbildung einer unbegrenzten Geraden Bs ist bestimmt, sobald ihre Spur s und ihr Fluchtpunkt f bekannt sind. Ist A (Fig. 51β) der

Hauptpunkt, D der Distanzpunkt, so denke man sich in A (Fig. 51 α) eine Senkrechte AA_1 zur Zeichenfläche errichtet, so dass $AA_1 = AD$ ist, dann erhält man in A_1 den Augenpunkt. Diejenige Gerade, welche A_1 mit f

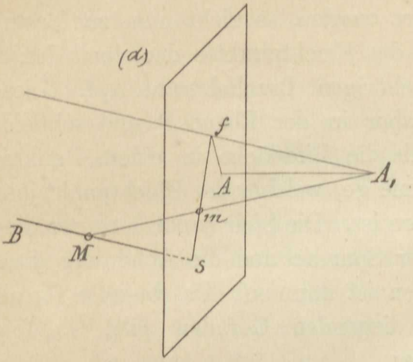


Fig. 51 α.

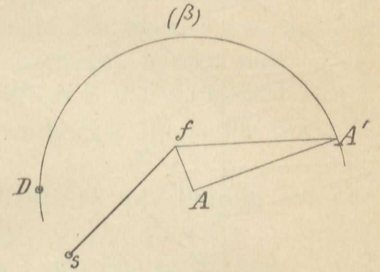


Fig. 51 β.

verbindet, ist der Parallelstrahl zu der räumlichen Geraden bs, deren Abbildung sf ist. Das bei A rechtwinklige Dreieck AA_1f können wir durch Drehung um Af in die Bildfläche niederlegen, so dass dasselbe in (β) die Lage $AA'f$ annimmt (wo $AA' \perp Af$ und $= AD$ ist). Dann ist $\angle AfA'$ der Neigungswinkel des Parallelstrahles, also auch gleich demjenigen der Geraden Bs gegen die Bildfläche. Zugleich stellt $A'f$ die wahre Länge des vom Augenpunkte ausgehenden Parallelstrahls zu Bs dar.

Es ist hieraus ersichtlich, dass die, durch Spur und Fluchtpunkt gegebene Abbildung einer Geraden, die Lage der letzteren im Raume bestimmt. Ist m die auf fs liegende Abbildung eines Punktes M der Geraden Bs, so sieht man leicht, dass die Lage von M durch m bestimmt ist. M ist der Schnittpunkt des durch m gehenden Sehstrahls mit Bs.

In den folgenden Entwicklungen ist eine Gerade G stets durch ihre Spur s und ihren Fluchtpunkt f gegeben, was wir kurz durch G (s, f) (d. h. die Gerade G, deren Spur s und Fluchtpunkt f ist) bezeichnen wollen. Ein Punkt M ist durch seine Abbildung m, und die Abbildung einer durch den Punkt gehenden Geraden G (s, f) bestimmt.

Anmerkung. Ein um den Hauptpunkt A als Mittelpunkt gezeichneter Kreis, welcher in der Bildfläche liegt und dessen Halbmesser gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ist, heisst der Distanzkreis. Jeder Strahl, welcher einen Punkt dieses Kreises mit dem Augenpunkte verbindet, bildet mit der Bildfläche einen Winkel von 45°. Daher liegen auf dem Distanzkreise die Fluchtpunkte aller unter 45° gegen die Bildfläche geneigten Geraden.

Darstellung der Ebenen.

2) Es sei V (Fig. 52) die Bildfläche, E eine beliebige Ebene, welche

V in bc, der Spur der Ebene E, schneidet. Wir legen durch den Augenpunkt A_1 eine Ebene P, parallel zu E; dann ist die Schnittlinie ge der Ebenen P und V parallel zu bc. Soll eine in E liegende Gerade sm abgebildet werden, so zieht man zur Bestimmung des Fluchtpunktes derselben den zu sm gehörigen Parallelstrahl A_1f. Dieser liegt aber in der Ebene P und schneidet deshalb die Bildfläche in einem Punkte f der Linie ge, welcher der Fluchtpunkt jener Geraden ist. Die Spur s der letzteren liegt auf der Spur bc und die Abbildung dieser Geraden ist dann sf. Da dasselbe für alle in E liegenden Geraden gilt, so folgt hieraus:

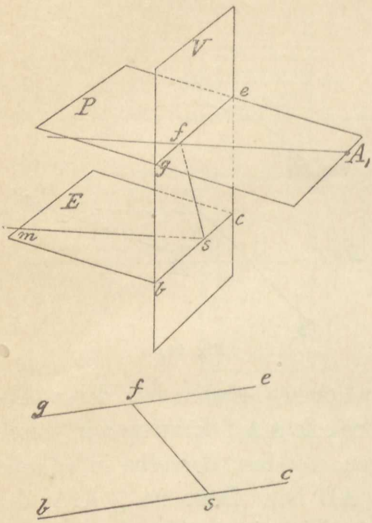


Fig. 52.

Die Fluchtpunkte aller Geraden der Ebene E liegen in ge, welche die Fluchtlinie der Ebene E genannt wird. Diese Linie enthält somit die Abbildungen aller unendlich fernen Punkte der Ebene E. Der Teil der Bildfläche, welcher zwischen der Spur bc und der Fluchtlinie ge der Ebene E liegt, stellt demnach die Abbildung desjenigen bis ins Unendliche erweiterten Teiles der Ebene E dar, welcher auf der dem Augenpunkte A_1 entgegengesetzten Seite der Bildfläche liegt. So ist z. B. der Horizont die Fluchtlinie der Horizontalebene. (Vergl. auch 3 u. 5 I. Abschnitt.)

Weil zu allen Ebenen, welche der Ebene E parallel sind, nur die eine Parallelebene P durch den Augenpunkt gelegt werden kann, so folgt daraus, dass ge die gemeinsame Fluchtlinie aller zu P oder E parallelen Ebenen ist, oder dass allgemein parallele Ebenen eine gemeinschaftliche Fluchtlinie haben. Und weil ferner alle zu ms parallelen Geraden auch parallel zur Ebene E sind und nach (Einleitung 4δ) denselben Fluchtpunkt haben, so folgt:

Ist eine Gerade G parallel zu einer Ebene E, so liegt der Fluchtpunkt der Geraden auf der Fluchtlinie der Ebene.

Folgende spezielle Gesetze ergeben sich leicht aus den obigen Entwickelungen. Die Fluchtlinien aller Ebenen, welche senkrecht zur Bildfläche stehen, gehen durch den Hauptpunkt.

Die Fluchtlinie einer Ebene, welche erweitert durch den Augenpunkt geht, fällt mit ihrer Spur zusammen. Die Abbildungen aller Geraden dieser Ebene liegen in der Spur derselben.

Die Fluchtlinie einer Ebene, welche zur Bildfläche und Horizontalebene zugleich senkrecht steht, geht durch den Hauptpunkt und steht senkrecht zur Achse.

Mit Hilfe dieser Gesetze können wir nun eine Reihe von Aufgaben über gerade Linien und Ebenen lösen. Bei allen Aufgaben, in denen es sich lediglich um Lagenbeziehungen handelt, braucht man den Hauptpunkt und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche nicht zu kennen. Diese Stücke sind jedoch stets notwendig, wenn wahre Dimensionen aus der Abbildung ermittelt oder Maſse perspektivisch abgetragen werden sollen.

Ist die Lage einer Ebene E durch ihre Spur S und ihre Fluchtlinie F gegeben, so deuten wir dies durch das Zeichen E (S, F) (d. h. die Ebene E, deren Spur S und Fluchtlinie F ist) an.

3) Die Abbildung der Durchschnittslinie der beiden Ebenen E_1 (S_1, F_1), E_2 (S_2, F_2) zu finden (Fig. 53).

Da die Spur s der Durchschnittslinie auf den Spuren S_1 und S_2 und der Fluchtpunkt f auf den Fluchtlinien F_1 und F_2 der gegebenen Ebene liegen muss, so ist die gesuchte Abbildung die Gerade sf, welche den Schnittpunkt von S_1 und S_2 mit demjenigen von F_1 und F_2 verbindet.

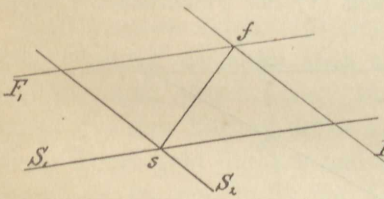


Fig. 53.

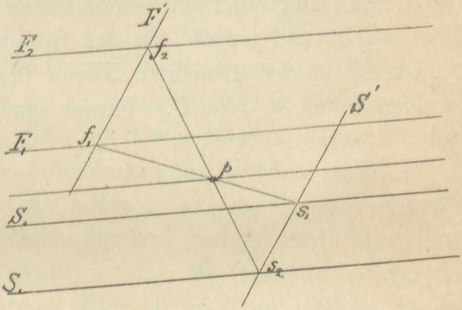


Fig. 54.

4) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn die Spur und Fluchtlinie der einen Ebene E_1 parallel mit derjenigen der anderen Ebene E_2 sind (Fig. 54).

Wir nehmen eine Ebene E′ zu Hilfe, deren Spur S′ und Fluchtlinie F′ durch zwei beliebig zu ziehende Parallelen dargestellt werden können. Dann sind die Abbildungen der beiden Durchschnittslinien von E′ mit E_1 und E_2 bez. s_1f_1 und s_2f_2 und der Durchschnittspunkt p der letzteren liegt nun auf der gesuchten Abbildung mn der Schnittlinie von E_1 und E_2, welche in diesem Falle parallel zu S_1 und F_1 ist.

5) Sind s_1 und s_2 (Fig. 55) die Spuren zweier in einem Punkte P (dessen Abbildung p ist) sich schneidenden Geraden G_1 und G_2 und f_1 der Fluchtpunkt von G_1, so kann der Fluchtpunkt der Geraden G_2 ebenfalls leicht bestimmt werden. Die durch s_1 und s_2 gehende Gerade S stellt nämlich die Spur der Ebene dar, welche man durch G_1 und G_2 legen kann. Die

Fluchtlinie F dieser Ebene geht durch f_1 und sie ist parallel zu S. Dieselbe trifft $s_2 p$ in dem gesuchten Fluchtpunkte f_2.

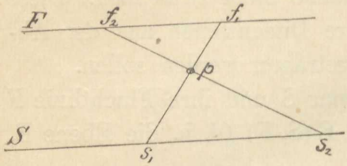


Fig. 55.

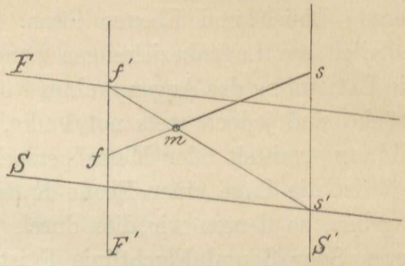


Fig. 56.

6) Die Abbildung des Durchschnittspunktes der Geraden G (sf) mit der Ebene E (S, F) zu finden (Fig. 56).

Wir legen durch die Gerade G eine beliebige Ebene E′ (S′ F′). (S′ geht durch s und F′ durch f). Die Abbildung s′f′ der Durchschnittslinie der beiden Ebenen E und E′ trifft sf in dem gesuchten Punkte m.

7) Spur und Fluchtlinie einer Ebene zu finden, welche durch die Gerade $G_1 (s_1 f_1)$ geht und parallel zu der Geraden G_2 $(s_2 f_2)$ ist (Fig. 57).

Da G_1 in der gesuchten Ebene liegt, so gehen Spur und Fluchtlinie derselben durch s_1 bez. f_1. Ferner muss nach (1) der Fluchtpunkt f_2 der

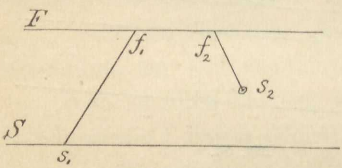


Fig. 57.

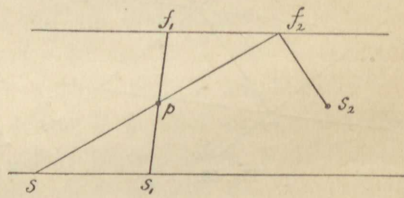


Fig. 58.

Geraden G_2 auf der Fluchtlinie der gesuchten Ebene liegen. Man ziehe demnach durch f_1 und f_2 die Fluchtlinie F, und durch s_1 die zu F parallele Spur S der Ebene.

8) Spur und Fluchtpunkt der Geraden G zu finden, welche durch den auf der Geraden G_1 $(s_1 f_1)$ liegenden Punkt P (p) geht und parallel zu der Geraden G_2 (s_2, f_2) ist (Fig. 58).

Die gesuchte Gerade G hat mit G_2 den Fluchtpunkt f_2 gemeinschaftlich, ihre Abbildung geht deshalb durch f_2 und p. Legen wir nun durch G und G_1 eine Ebene, so ist $f_1 f_2$ die Fluchtlinie und die durch s_1 gehende Parallele $s_1 s$ die Spur derselben. Auf der letzteren liegt die Spur s der Geraden G.

9) Durch den Punkt P (p), welcher auf der Geraden G_1 $(s_1 f_1)$ liegt, und durch die Gerade G_2 $(s_2 f_2)$ eine Ebene zu legen (Fig. 59).

Wir ziehen durch p die Gerade f_2p. Diese ist die Abbildung einer zu G_2 (s_2f_2) parallelen Geraden. Ihre Spur ergiebt sich leicht mit Hilfe der durch die beiden in p sich schneidenden Geraden gelegten Ebene (S′F′) in s. Die Gesuchte Ebene geht nun durch die beiden Parallelen (sf_2) und (s_2, f_2). Ihre Spur ist also die durch s und s_2 bestimmte Gerade S und die Fluchtlinie F geht durch f_2.

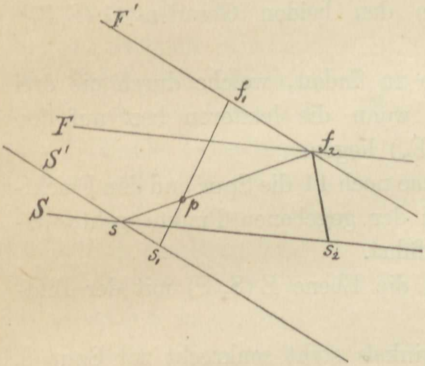


Fig. 59.

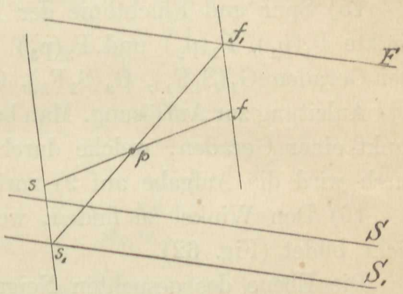


Fig. 60.

10) Durch den auf der Geraden G (s, f) liegenden Punkt P (p) eine Ebene zu legen, welche der Ebene E (S, F) parallel ist (Fig. 60).

Wir ziehen durch P (p) eine Parallele zu der gegebenen Ebene E. Der Fluchtpunkt f_1 derselben kann auf F beliebig gewählt werden, dann ist pf_1 die Abbildung dieser Linie. Durch die letztere und durch die Gerade g legen wir eine Ebene, deren Fluchtlinie durch f und f_1 geht. Die Spur dieser Ebene geht durch s und ist parallel zu ff_1; sie schneidet pf_1 in der Spur s_1. Da nun (s_1f_1) die Abbildung einer Geraden ist, welche in der gesuchten Ebene liegt, so geht die Spur S_1 der letzteren durch s_1 und zwar ist sie parallel zu F. Die Fluchtlinie der gesuchten Ebene fällt mit F zusammen (s. 2).

11) Spur und Fluchtpunkt der Geraden zu finden, welche durch die beiden Punkte $P_1(p_1)$ und $P_2(p_2)$ geht. P_1 liegt auf der Geraden $G_1(s_1f_1)$, P_2 auf $G_2(s_2f_2)$ (Fig. 61).

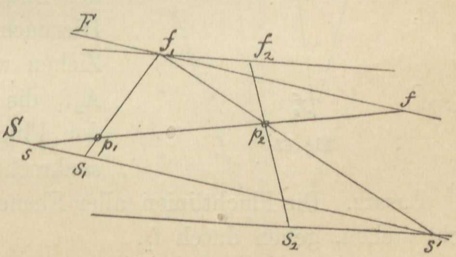


Fig. 61.

Nach 9) legen wir durch den Punkt $P_2(p_2)$ und die Gerade $G_1(s_1f_1)$ die Ebene E (S, F). Da nun die beiden gegebenen Punkte in dieser Ebene liegen, so findet man durch Verlängerung der Geraden p_1p_2 den Fluchtpunkt f und die Spur s derselben auf F bez. S.

12) Die Abbildung der Geraden zu finden, welche durch den auf der Geraden $G_1(s_1f_1)$ liegenden Punkt P (p) geht und die beiden gegebenen Geraden $G_2(s_2f_2)$ $G_3(s_3f_3)$ schneidet.

13) Die Abbildung (Spur und Fluchtpunkt) einer Geraden zu finden, welche zwei gegebene Geraden $G_1(s_1f_1)$, $G_2(s_2f_2)$ schneidet, und einer dritten gegebenen Geraden $G_3(s_3f_3)$ parallel ist.

14) Spur und Fluchtlinie derjenigen Ebene zu finden, welche durch den Punkt P(p) geht, und parallel zu den beiden Geraden $G_1(S_1F_1)$, $G_2(S_2F_2)$ ist.

15) Spur und Fluchtlinie der Ebene zu finden, welche durch die drei Punkte $P_1(p_1)$, $P_2(p_2)$ und $P_3(p_3)$ geht, wenn die letzteren bez. auf den drei Geraden $G_1(S_1F_1)$, $G_2(S_2F_2)$, $G_3(S_3F_3)$ liegen.

Anleitung zur Auflösung. Man bestimme noch 11 die Spur und den Fluchtpunkt einer Geraden, welche durch zwei der gegebenen Punkte geht; dadurch wird die Aufgabe auf 9) zurückgeführt.

16) Den Winkel zu finden, welchen die Ebene E (S, F) mit der Bildfläche bildet (Fig. 62).

Die Ebene des gesuchten Neigungswinkels steht senkrecht zur Spur S. Legen wir dieselbe durch den Augenpunkt A_1 (welchen man sich auf der im Hauptpunkt A zur Zeichenfläche errichteten Senkrechten vorstellen muss), so fällt die Spur dieser Ebene in diejenige Gerade ff_1, welche durch A geht und senkrecht zu S und F steht. Durch A_1 und F ist nun die durch den Augenpunkt gehende Parallelebene zur Ebene E bestimmt, welche zu der Bildfläche unter dem gleichen Winkel wie E geneigt ist. Der gesuchte Winkel liegt demnach in dem rechtwinkligen Dreieck AA_1f, welches durch Umlegen in die Bildfläche die Lage AA_2f annimmt (AA_2 ist gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche und steht senkrecht zu Af). Hiernach ist A_2fA der gesuchte Winkel. Ziehen wir A_2f_1 senkrecht zu A_2f und trifft A_2f_1 die Gerade Af in f_1, so ist f_1 offenbar der Fluchtpunkt aller zur Ebene E (S, F) senkrechten Geraden.

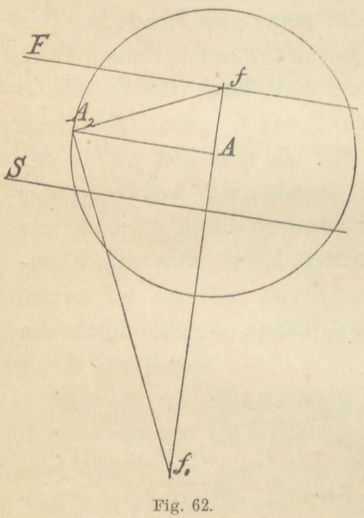


Fig. 62.

Zusatz. Die Fluchtlinien aller Ebenen, welche zur Ebene E (S, F) senkrecht stehen, gehen durch f_1.

17) Auf der Geraden G (s, f) ist von einem auf derselben gegebenen Punkte P (p) die gegebene Strecke m perspektivisch abzutragen (Fig. 63)

Wir legen durch die Gerade G eine Ebene, welche senkrecht zur Bildfläche steht. Ihre Fluchtlinie F geht durch f und den Hauptpunkt, die Spur S durch s.

Für die gegebene Gerade können wir nun wie in (I 31) einen Teilungspunkt konstruieren, welcher auf F liegt. Wir ziehen AA_2 senkrecht zu F und machen AA_2 gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche. Um f zeichnen wir mit dem Halbmesser fA_2 einen Kreisbogen, welcher auf F den Teilpunkt T bestimmt. (Achse und Horizont bedeuten in I 31 Spur und Fluchtlinie der Horizontalebene). Ziehen wir nun Tp bis dieselbe S in c schneidet, machen $cd = m$ und ziehen alsdann die Gerade dT, so wird durch die letztere die Strecke pq bestimmt, welche die gesuchte Abbildung einer Strecke von der Länge m darstellt. Ist umgekehrt die Strecke pq auf sf gegeben, so sieht man leicht, wie die wahre Länge derselben gefunden werden kann.

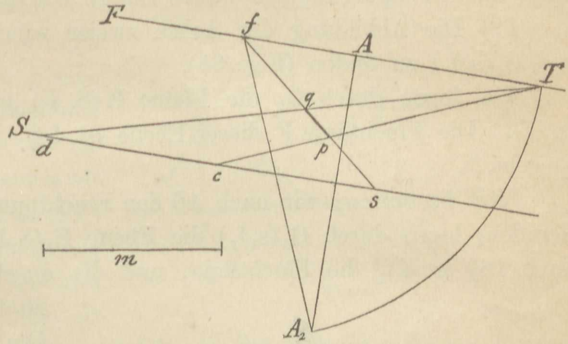


Fig. 63.

18) Den Abstand des auf der Geraden G (s, f) liegenden Punktes P (p) von der Ebene E (S, F) zu bestimmen (Fig. 64).

Wir bestimmen wie in 16) den Fluchtpunkt f′ der zur E senkrechten Geraden, ziehen pf′, welche die Abbildung des von P (p) auf E gefällten Lotes darstellt. Durch das letztere und G (s, f) legen wir eine Ebene, deren Fluchtlinie ff′ ist und deren Spur parallel zu ff′ ist und durch s geht. Diese trifft pf′ in ihrer Spur s_1. Um den Durchschnitt des Lotes mit der gegebenen Ebene zu finden, legen wir durch s_1f′ eine zur Bildfläche senkrechte Ebene, deren Fluchtlinie somit die Gerade f′A, und deren

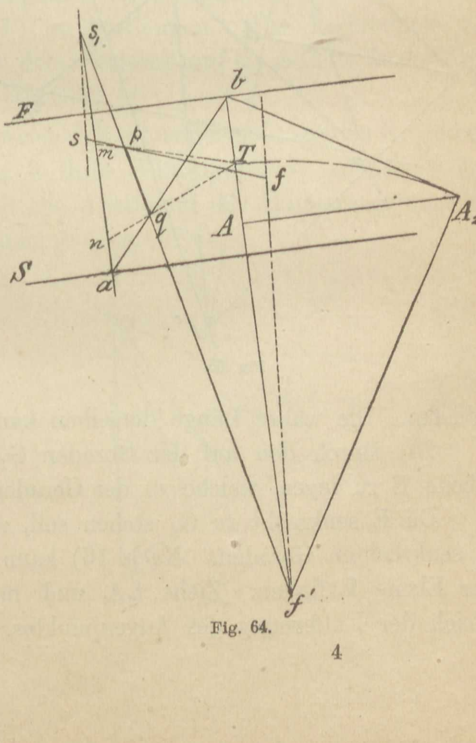


Fig. 64.

Spur parallel $f'A$ ist und durch s_1 geht. Die Abbildung der Schnittlinie beider Ebenen ist ab, und die letztere wird von $f'p$ in q getroffen; pq ist nun die Abbildung des gesuchten Abstandes. Man bestimmt mit Hilfe des um f' mit dem Halbmesser $f'A_2$ beschriebenen Kreisbogens A_2T den Teilpunkt T für $f'p$. Die von T durch p und q gezogenen Geraden schneiden alsdann auf der Spur as_1 die wahre Länge von pq in der Strecke mn ab.

19) Die Abbildung der Achse zweier windschiefen Geraden $G_1(s_1f_1)$, und $G_2(s_2f_2)$ zu finden (Fig. 65).

Wir legen durch G_2 die Ebene $E(S, F)$ parallel zu der Geraden G_1 (s. 7). Die Fluchtlinie F dieser Ebene ist f_1f_2, während ihre Spur S durch s_2 geht.

Jetzt bestimmen wir nach 16 den Fluchtpunkt f' aller zu E senkrechten Geraden; legen durch $G_1(s_1f_1)$ die Ebene $E_1(S_1F_1)$ senkrecht zur Ebene E. Nach 16) ist $f'f_1$ die Fluchtlinie, und die durch s_1 gehende Parallele s_1a zu $f'f_1$ die Spur dieser Ebene. Die Abbildung ihrer Schnittlinie mit der Ebene $E(F, S)$ erhält man in af_1, welche $G_2(s_2f_2)$ in c trifft. Zieht man nun durch c die Gerade bf', so ist bf' die Abbildung einer Geraden, welche senkrecht zur Ebene $E(F, S)$ (weil f' ihr Fluchtpunkt ist), folglich auch senkrecht zu der Geraden $G_2(s_2f_2)$ steht. Ferner trifft sie auch die Gerade $G_1(s_1f_1)$ in b, weil beide in derjenigen Ebene liegen, deren Spur und Fluchtlinie as_1 bez. $f'f_1$ sind. Endlich steht $f'b$ auch senkrecht auf $G_1(s_1f_1)$, weil letztere parallel zur Ebene $E(F, S)$ ist. Folglich ist bc die Abbildung der Achse der beiden Windschiefen. Die wahre Länge derselben kann wie in 18) bestimmt werden.

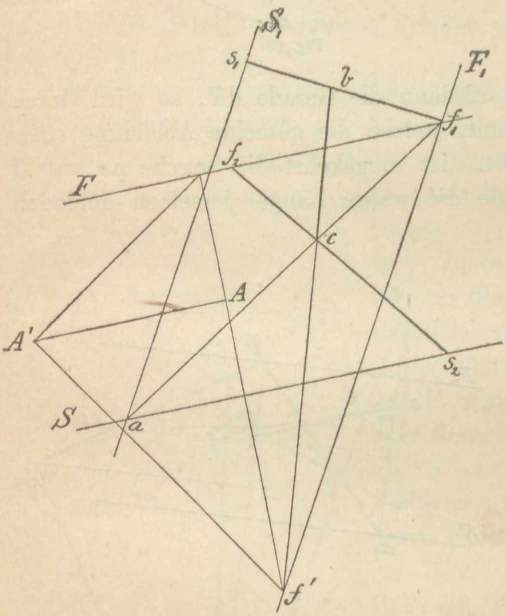


Fig. 65.

20) Durch den auf der Geraden $G_1(s_1f_1)$ liegenden Punkt $P(p)$ eine Ebene E zu legen, welche zu der Geraden $G_2(sf_2)$ senkrecht steht (Fig. 66).

Da E senkrecht zu G_2 stehen soll, so ist f_2 der Fluchtpunkt aller zu E senkrechten Geraden. Nach 16) kann man nun hieraus die Fluchtlinie der Ebene E finden. Ziehe f_2A, und mache AA_1 senkrecht zu f_2A und gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche. Ferner zieht man $A_1 f \perp A_1 f_2$, dann treffen sich $A_1 f$ und $A f_2$ in dem Punkte f, durch welchen, wie der Vergleich mit Fig. 62 zeigt, die Fluchtlinie F der Ebene E gehen muss. Dieselbe steht senkrecht zu $f_2 f$. Da F die Fluchtlinie aller zu der Geraden $G_2(s_2 f_2)$ senkrechten Ebenen ist, so ist zunächst F unabhängig von der Lage des gegebenen Punktes P (p), weshalb bis hierher p auch noch nicht benutzt worden ist. Wir ziehen jetzt durch p eine beliebige Gerade $G'(s'f')$, und nehmen ihren Schnittpunkt f' mit F als Fluchtpunkt an. Die Spur s' finden wir mittelst einer durch $(s_1 f_1)$ und $(s'f')$ gelegten Ebene, deren Fluchtlinie $f'f_1$ und Spur die durch s_1 gehende Parallele $s_1 s'$ zu $f_1 f'$ ist. Nun ist f's' die Abbildung einer Geraden, welche in der gesuchten Ebene E liegt, folglich ist die Spur der letzteren die Gerade S, welche durch s' parallel zu F gelegt werden kann.

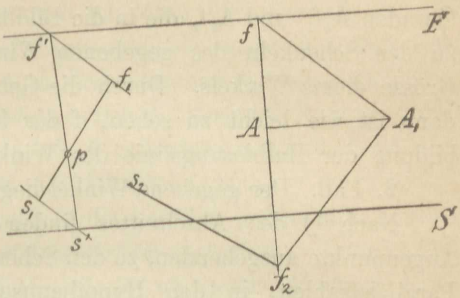


Fig. 66.

21) Den Abstand des auf der Geraden $G_1(s_1 f_1)$ liegenden Punktes P (p) von der Geraden $G_2(s_2 f_2)$ zu finden.

Anleitung zur Auflösung. Die Aufgabe kommt auf die vorige zurück. Es ist nur noch der Durchschnittspunkt der Geraden $G_2(s_2 f_2)$ mit der in Fig. 66 gefundenen Ebene E (S F) zu bestimmen. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit P (p) ist die von dem letzteren auf G_2 gefällte Senkrechte, deren wahre Länge nach 18) zu ermitteln ist.

22) Es sind die Abbildungen zweier sich schneidenden Geraden G_1 und G_2 gegeben, und zwar die Abbildung a ihres Schnittpunktes, ausserdem ihre Fluchtpunkte f_1 und f_2. Man soll die Abbildung der Halbierungslinie des Winkels der beiden Geraden bestimmen (Fig. 67 α).

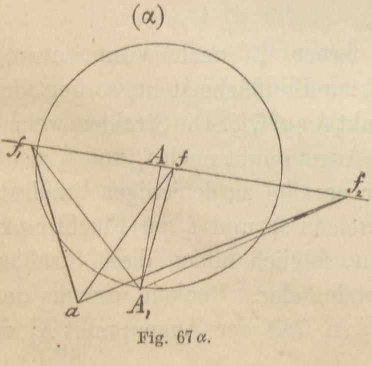


Fig. 67 α.

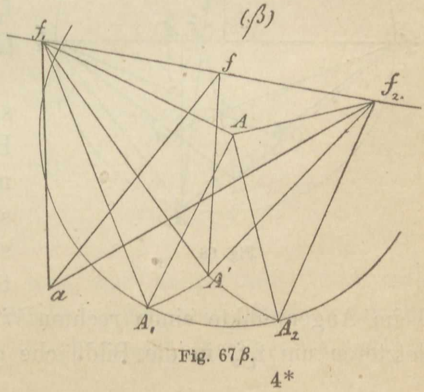


Fig. 67 β.

1. Fall. Der gegebene Winkel liege in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene (Fig. 67 α).

In diesem Falle liegt der Hauptpunkt A auf der Fluchtlinie $f_1 f_2$ der Ebene des gegebenen Winkels. Zeichnen wir um A als Mittelpunkt den Distanzkreis und den Halbmesser AA_1 senkrecht zu $f_1 f_2$, dann sind die Geraden $A_1 f_1$ und $A_1 f_2$ die in die Bildfläche niedergeklappten Parallelstrahlen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels, und somit $\angle f_1 A_1 f_2$ die wahre Grösse dieses Winkels. Durch die Gerade $A_1 f$ halbieren wir nun $\angle f_1 A_1 f_2$, dann ist wie leicht zu sehen, f der Fluchtpunkt und af die gesuchte Abbildung der Halbierungslinie des Winkels der gegebenen Geraden.

2. Fall. Der gegebene Winkel liegt in einer beliebigen Ebene (Fig. 67 β).

Nach 1) des Abschnittes finden wir die wahren Längen der vom Augenpunkte ausgehenden, zu den Schenkeln des gegebenen Winkels gehörigen Parallelstrahlen, in den Hypothenusen der beiden bei A rechtwinkligen Dreiecke $A_1 A f_1$ und $A_2 A f_2$ (A_1 und A_2 liegen auf dem Distanzkreise). Machen wir deshalb $A'f_1 = A_1 f_1$ und $A'f_2 = A_2 f_2$, so ist $\angle f_1 A' f_2$ der in die Bildfläche niedergelegte Winkel. Seine Halbierungslinie trifft deshalb die Bildfläche in dem Fluchtpunkte f auf $f_1 f_2$. Folglich ist af die gesuchte Abbildung.

Anmerkung. Die Gerade durch A' und A steht senkrecht zu $f_1 f_2$. Warum? Wie lässt sich die oben angegebene Konstruktion hiernach etwas einfacher ausführen?

23) Aus der Abbildung eines Quadrats, welches in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene liegen soll, den Hauptpunkt und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche zu finden (Fig. 68).

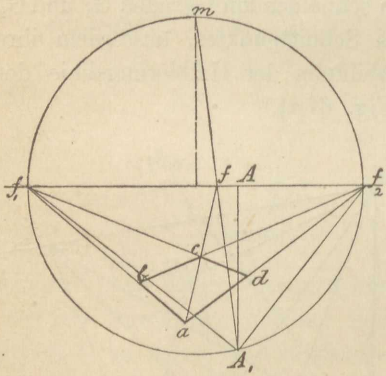


Fig. 68.

Es sei das beliebige Viereck abcd als Abbildung eines Quadrats gegeben. Die beiden Paare gegenüberliegender Seiten schneiden sich in f_1 und f_2, den Fluchtpunkten derselben, und folglich ist $f_1 f_2$ die Fluchtlinie der Ebene E des Quadrats.

Da ferner E nach Voraussetzung senkrecht zur Bildfläche steht, so liegt der Hauptpunkt A auf $f_1 f_2$. Die Strahlen, welche man vom Augenpunkt nach f_1 und f_2 zieht, sind aber parallel zu denjenigen Quadratseiten, welche f_1 und f_2 zu Fluchtpunkten haben, folglich bilden diese Strahlen beim Augenpunkte einen rechten Winkel miteinander. Denken wir uns den letzteren um $f_1 f_2$ in die Bildfläche gedrecht, so fällt der Augenpunkt A_1 in den Umfang des um $f_1 f_2$ als Durchmesser gezeichneten Kreises. Ferner ist der Schnittpunkt f von ac mit $f_1 f_2$ der Fluchtpunkt der Diagonale des Quadrats, folglich muss $A_1 f$ als Parallelstrahl derselben den rechten Winkel $f_1 A_1 f_2$ halbieren. Der Punkt A_1 muss auf dem Umfang des Kreises demnach so bestimmt werden, dass seine Verbindungslinie mit dem gegebenen Punkte f den Winkel $f_1 A_1 f_2$ halbiert. Ist m nun die Mitte des oberhalb $f_1 f_2$ liegenden Halbkreises, so ziehe man mf; diese schneidet verlängert den Umfang in A_1, denn $\angle f_1 A_1 m$ und $\angle f_2 A_1 m$ sind Peripheriewinkel, welche auf den gleichen Bögen $f_1 m$ und $f_2 m$ stehen. Der Hauptpunkt A wird durch die von A_1 zu $f_1 f_2$ gezogene Senkrechte $A_1 A$ gefunden; zugleich stellt $A_1 A$ die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche dar.

Die Spur der Ebene des Quadrats bleibt bei den gemachten Voraussetzungen unbestimmt, ebenso die wahre Grösse desselben. Denn abcd kann sowohl Abbildung eines Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$, als auch diejenige eines anderen Quadrats $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sein, dessen Ebene zu der des ersteren parallel ist und dessen Ecken mit denen des Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$ auf denselben Sehstrahlen liegen.

24) Es sei die Abbildung eines Rechtecks gegeben, welches in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene liegt. Man soll den Hauptpunkt und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche bestimmen, wenn das Verhältnis der Länge zur Breite des Rechtecks oder, was dasselbe ist, ein ähnliches Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ gegeben ist (Fig. 69).

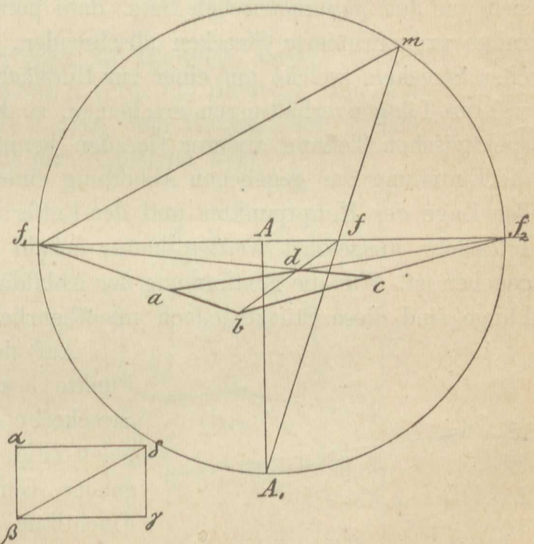


Fig. 69.

Wie in der vorigen Aufgabe verlängern wir zunächst die beiden Paare gegenüberliegender Seiten bis zu ihren Schnittpunkten f_1 und f_2, dann ist die Gerade $f_1 f_2$ die Fluchtlinie der Ebene des Rechtecks, auf welcher der gemachten Voraussetzung zufolge der Hauptpunkt A liegen muss. Verlängern wir noch bd bis f, so ist f der Fluchtpunkt der einen Diagonale des Rechtecks. Denkt man sich wieder den Augenpunkt wie in der vorigen Aufgabe in die Bildfläche niedergelegt, so dass derselbe in den Umfang des über $f_1 f_2$ als Durchmesser gezeichneten Kreises nach A_1

gelangt, so würden A_1f_1, A_1f_2 und A_1f die umgeklappten Parallelstrahlen zu den beiden Seiten des Rechtecks bez. zu der Diagonale desselben sein. Folglich müssen die Winkel f_1A_1f und fA_1f_2 den Winkeln $\alpha\beta\delta$ bez. $\delta\beta\gamma$ gleich sein. Man mache deshalb $\angle mf_1f_2 = \angle\delta\beta\gamma$; verbinde den hierdurch erhaltenen Punkt m mit f durch eine Gerade, welche verlängert den Kreis in A_1 trifft. Man sieht dann leicht, dass $\angle mA_1f_2$ ein mit $\angle mf_1f_2$ auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel ist, woraus sich weiter ergiebt, dass auch $\angle mA_1f_1 = \angle\alpha\beta\delta$ ist. Die Senkrechte von A_1 auf f_1f_2 trifft letztere in dem gesuchten Hauptpunkte und A_1A ist gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche.

Aus 23) und 24) geht hervor, dass ein beliebig gewähltes Viereck als Abbildung eines Quadrats oder auch eines Rechteckes von gegebenem Seitenverhältnis, welches in einer zur Bildfläche senkrechten Ebene liegt, angesehen werden kann. Hiervon kann man häufig bei der praktischen Ausführung perspektivischer Zeichnungen mit Vorteil Gebrauch machen. Man siehe (IV, 13).

Perspektivische Teilungen.

25) Die Konstruktionen der Abbildungen gleich langer Strecken, welche auf derselben Geraden liegen, sowie die Einteilung der gegebenen Abbildung einer Strecke in gleiche Teile oder in solche von gegebenem Verhältnis stützen sich auf den planimetrischen Satz, dass parallele Geraden auf anderen Geraden proportionierte Strecken abschneiden. Da nun die Abbildungen solcher Strecken, welche auf einer zur Bildfläche parallelen Geraden liegen, in wahren Längenverhältnissen erscheinen, so kann man solche auch zur perspektivischen Teilung anderer Geraden benutzen. Bemerkenswert ist, dass die Einteilung der gegebenen Abbildung einer Strecke stets unabhängig von der Lage des Hauptpunktes und der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ausgeführt werden kann, sobald der Fluchtpunkt jener Strecke gegeben ist. Für die Bestimmung der Abbildung einer Strecke von gegebener Länge sind diese Stücke jedoch unentbehrlich.

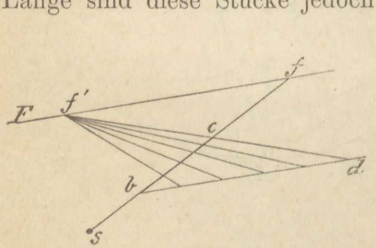


Fig. 70.

Auf der Geraden G (s, f) sind zwei Punkte b und c gegeben. Man soll die Strecke bc perspektivisch in n gleiche Teile teilen (Fig. 70). Wir legen durch die gegebene Gerade G eine Ebene E, deren Fluchtlinie die durch f beliebig gezogene Gerade F sein mag. Durch einen der Endpunkte der gegebenen Strecke, z. B. b, ziehen wir die Gerade bd parallel zu F, dann stellt bd die Abbildung einer zur Bildfläche parallelen Geraden dar, welche die gegebene Gerade schneidet und ebenfalls in E liegt. Auf bd tragen wir n gleiche Stücke ab, verbinden

den so erhaltenen Punkt d mit c und verlängern cd bis zum Schnittpunkt f′ mit F, dann ist f′ der Fluchtpunkt von cd. Ziehen wir nun von den Teilpunkten auf cd Geraden nach f′, so stellen diese die Abbildungen einer Schar von Parallelen mit dem gemeinsamen Fluchtpunkte f′ dar, welche bc in die verlangten Teile teilen.

Für die Abbildungen aller Geraden, welche in der Horizontalebene liegen oder parallel mit derselben sind, geht F in den Horizont über (s. I, 7).

III. Abschnitt.

Abbildungen des Kreises und der Umdrehungskörper.

Die Abbildungen krummer Linien werden, wie früher die Parallelprojektionen derselben, punktweise, oder durch eine Schar einhüllender Tangenten bestimmt. Liegt eine Kurve in einer zur Bildfläche parallelen Ebene, so ist die Abbildung eine ihr ähnliche Kurve; denn es sind in diesem Falle die Kurve und ihre Abbildung parallele Schnitte des von den Sehstrahlen gebildeten Kegelmantels.

1) Die Abbildung eines Kreises zu zeichnen, dessen wirkliche Grösse der in der Bildfläche liegende Kreis K (Fig. 71) darstellt, und dessen Mittelpunkt auf der vom Mittelpunkt c nach dem Hauptpunkte A gehenden Geraden in der Entfernung e von der Bildfläche liegt.

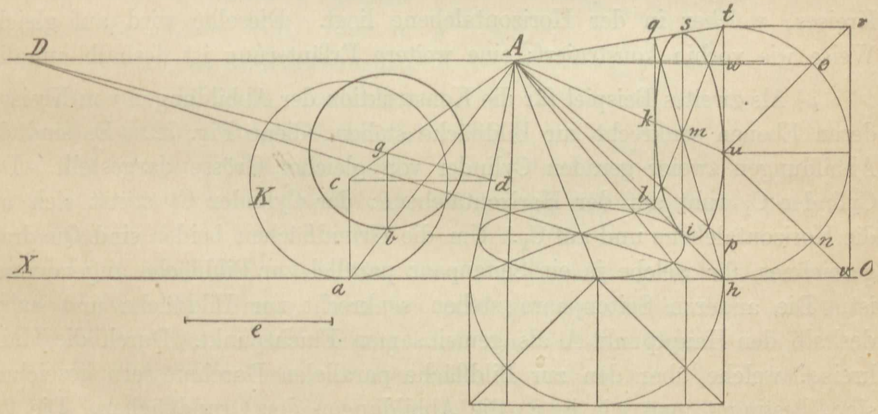


Fig. 71.

Wir ziehen durch c die Gerade cd = e parallel zur Achse OX und verbinden d mit dem Distanzpunkte D durch die Gerade dD. Die letztere schneidet cA in der Abbildung g des gesuchten Mittelpunktes. Da der gemachten Voraussetzung zufolge die Abbildung des Kreises wieder ein Kreis sein muss, so ist nur noch der Halbmesser desselben zu bestimmen. Wir ziehen bg parallel zu ac und verbinden a mit dem Hauptpunkte durch die Gerade aA, dann schneidet diese auf bg die Grösse des gesuchten Halbmessers ab, wonach nun die Abbildung des Kreises gezeichnet werden kann.

2) Der abzubildende Kreis liege in einer zur Achse senkrechten Ebene, welche die Bildfläche in der Geraden ht ($\perp$ OX) durchschneidet (Fig. 71).

Es sei ht gleich dem Durchmesser des Kreises. Setzen wir voraus, dass der letztere die Bildfläche berührt, so bestimmen wir zunächst die Abbildung htql des den Kreis einschliessenden Quadrats, dessen eine Seite ht ist. Indem wir durch den Schnittpunkt m der beiden Diagonalen is parallel ht und uk nach dem Hauptpunkte A ziehen, erhalten wir auch die Abbildungen der vier Berührungspunkte, nämlich i, k, s und u. Bei sehr kleinen Dimensionen genügen diese Punkte und die vier Tangenten. Fällt die Abbildung grösser aus, so lassen sich leicht noch die auf den Diagonalen liegenden Punkte des Kreises bestimmen. Wir denken uns die eine Hälfte des Kreises und des einhüllenden Quadrats an ht in die Bildfläche gelegt, ziehen vom Mittelpunkt u die Geraden ur und uv nach den Ecken, dann sind o und n zwei Schnittpunkte des Kreises mit den Diagonalen des vollständigen Quadrats. Ziehen wir nun ow und np senkrecht zu ht, so finden wir als Abbildungen der ow und np entsprechenden Geraden die Linien wA und pA, welche die Diagonalen lt und hq in den Abbildungen von vier weiteren Punkten schneiden.

In Figur 71 sieht man noch die Abbildung eines ebenso grossen Kreises, welcher in der Horizontalebene liegt. Dieselbe wird auf gleiche Weise wie vorhin konstruiert; eine weitere Erläuterung ist deshalb unnötig.

3) Als zweites Beispiel für die Konstruktion der Abbildungen von Kreisen, deren Ebenen senkrecht zur Bildfläche stehen, diene Fig. 72. Es sind die Abbildungen zweier geraden Cylinder von gleicher Grösse dargestellt. Der Cylinder C_1 ruht auf der Horizontalebene; der Cylinder C_2 stützt sich auf die Horizontalebene und auf C_1. Um die Grundflächen beider sind Quadrate gezeichnet, für welche je ein Seitenpaar parallel zur Bildfläche angenommen ist. Die anderen Seitenpaare stehen senkrecht zur Bildfläche und haben deshalb den Hauptpunkt A als gemeinsamen Fluchtpunkt. Durch die Halbkreise, welche über den zur Bildfläche parallelen Durchmessern gezeichnet sind, bestimmt man wie in 2) die Abbildungen der Grundflächen. Die Cylinderflächen werden alsdann noch durch je zwei gemeinschaftliche Tangenten begrenzt, welche an die Abbildungen der Grundflächen gezogen werden können.

4) Liegt endlich der Kreis in einer beliebigen Ebene E (S, F), Fig. 73, so kann man leicht wieder die Abbildung des einhüllenden Quadrats a b c d

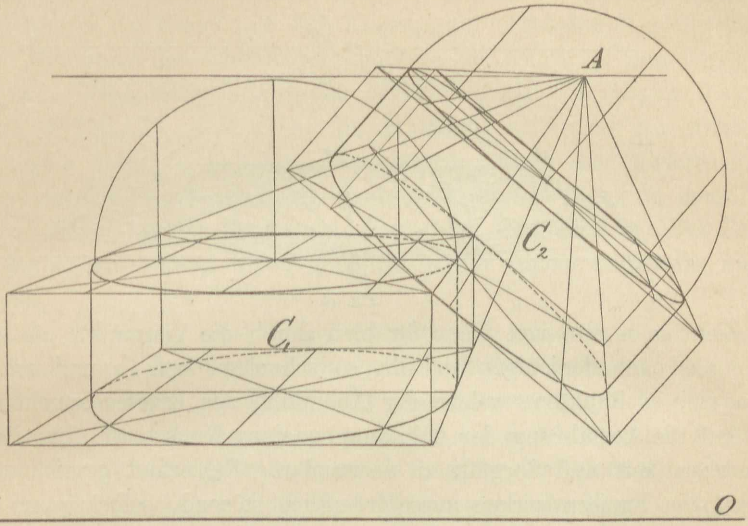


Fig. 72.

zeichnen, von welchem zwei Seiten mit der Bildfläche parallel sind. Die letzteren sind dann zugleich der Spur S parallel, während die Abbildungen der beiden anderen Quadratseiten nach dem Punkte f gerichtet sind, in welchem die von A auf die Fluchtlinie F gefällte Senkrechte die letztere trifft. Auch in diesem Falle bestimmt man durch einen über dem zur Bildfläche parallelen Durchmesser g e gezeichneten Halbkreis wie in den vorigen Fällen die Abbildungen derjenigen Punkte des Kreises, welche auf den Diagonalen des Quadrats liegen.

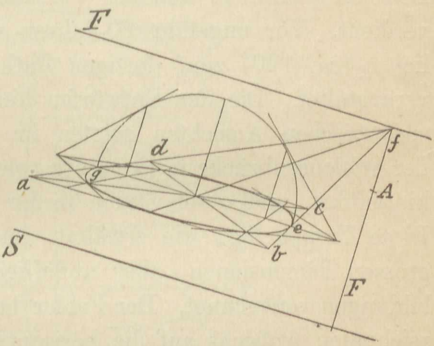


Fig. 73.

In den meisten Fällen genügen diese Punkte, um die Abbildung eines Kreises zeichnen zu können. Nur bei sehr grossen Dimensionen oder bei der Darstellung einer Kreiseinteilung wird man weiterer Punkte bedürfen.

5) Mit Hilfe eines den gegebenen Kreis umschliessenden Quadrats kann man aber leicht nach (IV, 23, I. Teil) beliebig viele Punkte der Abbildung eines Kreises konstruieren (Fig. 74).

Es sei a b c d die Abbildung eines in der Horizontalebene liegenden Quadrats, e f und g h diejenigen der Verbindungslinien der Seitenmitten.

Man teilt nun mh und ch in dieselbe Anzahl gleicher Teile (welche auf der zur Bildfläche parallelen Geraden mh wirklich unter sich gleich erscheinen).

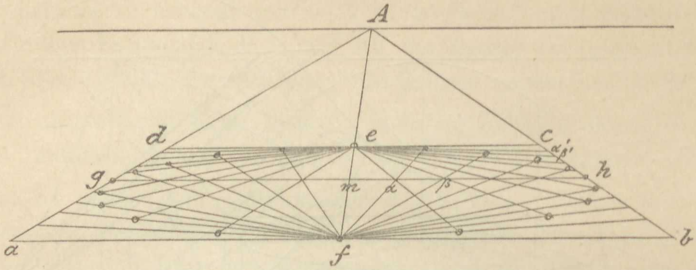


Fig. 74.

Zieht man nun von f aus Strahlen durch die Teilpunkte auf mh, und von e aus nach denjenigen auf ch, so schneiden sich fα und eα′, fβ und eβ′ u. s. f. in Punkten, welche der Abbildung des Kreises angehören.

Auf die Ausführung der Abbildungen eines Kreises ist stets die grösste Aufmerksamkeit und Sorgfalt zu verwenden. Fehlerhaft gezeichnete Abbildungen von Kreisen wirken ausserordentlich störend, selbst wenn dieselben nur an ganz nebensächlichen Teilen der Abbildung vorkommen. In dieser Beziehung erinnert sich der Verfasser eines Falles, der erwähnt zu werden verdient. Vor ungefähr 20 Jahren war in Hamburg eine Ausstellung sämtlicher (ca. 120) zum dortigen Rathausbau eingelieferten Konkurrenz-Pläne veranstaltet. Die den Entwürfen hinzugefügten durchweg vortrefflichen perspektivischen Ansichten zeigten im Vordergrunde eine Treppe, welche an der Schleusenbrücke in Hamburg gelegen, nach dem sog. kleinen Alsterbassin hinabführt, und deren Stufen in der Horizontalprojektion Viertelkreise bilden. Diese Treppe lag, wie erwähnt, im Vordergrunde und erschien deshalb in grossen Dimensionen, aber auffälligerweise war dieselbe fast auf allen Abbildungen verzeichnet. Der Fehler bestand vorwiegend in einer zu breit gezeichneten Aufsicht auf die horizontalen Flächen der Treppenstufen und der dadurch verursachten zu starken Krümmung der vielen an der Treppe vorkommenden Kreisbögen. Wenn nun auch der Gegenstand an und für sich von untergeordneter Bedeutung war, so trat der Fehler schon deshalb besonders auffällig hervor, weil derselbe eine beträchtliche im Vordergrund liegende Partie betraf. Die Wirkung war so störend, dass der Blick beim Betrachten jeder neuen Abbildung unwillkürlich zuerst auf diese Treppe fiel, als hätte man gleichsam das Bedürfnis empfunden, doch endlich einmal einer richtigen Abbildung zu begegnen.

Abbildungen der Umdrehungskörper.

6) Abbildung der Kugel. Der scheinbare Umriss einer Kugel ist stets ein Kreis. Denn alle Strahlen, welche durch den Augenpunkt gehen

und die Kugel berühren, bilden die Mantelfläche eines geraden Kegels. Die Berührungslinie dieses Kegelmantels mit der Kugelfläche ist aber bekanntlich eine Kreislinie, deren Ebene senkrecht zu dem Strahl steht, welcher den Mittelpunkt der Kugel mit dem Augenpunkt verbindet (s. Einleitung 2).

Die Abbildung des scheinbaren Umrisses der Kugel ist nun der Durchschnitt jenes Strahlenkegels mit der Bildfläche, also im Allgemeinen eine Ellipse (s. I. Teil, IV, 4). Steht die Bildfläche senkrecht zur Achse des Strahlenkegels (welcher Fall nur dann eintritt, wenn der Mittelpunkt der Kugel auf dem Hauptstrahle liegt), dann geht die Abbildung in einen Kreis über. Die Fälle, wo der Strahlenkegel von der Bildfläche in einer Parabel oder Hyperbel geschnitten wird, kommen in der Linearperspektive niemals in Betracht.

Um die Abbildung einer Kugel zu zeichnen, wollen wir annehmen, es sei die Abbildung c (Fig. 75) ihres Mittelpunktes bereits bestimmt. Ist dann As die Abbildung der durch den Mittelpunkt gehenden, zur Bildfläche senkrechten Geraden, s die Spur der letzteren, so ziehen wir durch s und c Parallelen zur Achse. Die durch s gehende Parallele liegt in der Bildfläche; auf dieser machen wir die Strecke es gleich dem Halbmesser r der Kugel. Ziehen wir

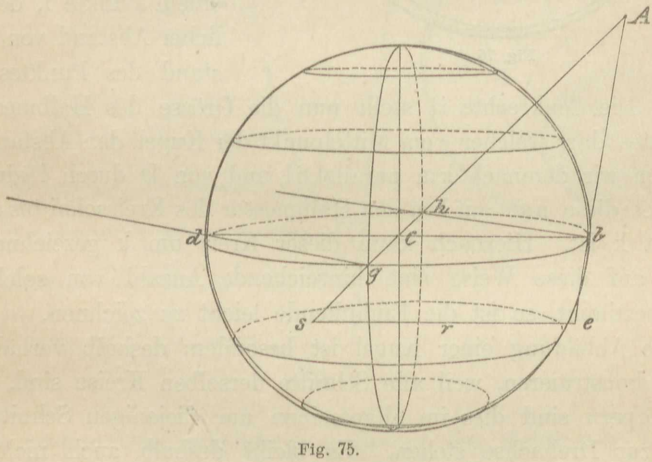


Fig. 75.

jetzt die Gerade eA, so schneidet sie auf cb den Halbmesser der Abbildung desjenigen grössten Kreises der Kugel ab, welcher parallel zur Bildfläche liegt. Dieser Kreis kann also mit dem Halbmesser bc um c als Mittelpunkt gezeichnet werden. Verlängern wir bc bis d, so ist bd auch der Durchmesser desjenigen grössten Kreises, welcher parallel zur Horizontalebene ist.

Die Abbildung des Durchmessers, welcher senkrecht zur Bildfläche steht, findet man leicht, wenn man die Geraden von b und d nach dem Distanzpunkte zieht; dieselben schneiden auf Ac die Endpunkten g und h ab. Hiernach kann man leicht die Abbildung dieses Kreises finden. Ebenso findet man die Abbildung des grössten Kreises, welcher senkrecht zur Achse steht. In Fig. 75 sind noch einige zu bgdh parallele Kreisschnitte der Kugel angegeben. Alle diese Kurven werden von einer Ellipse, der Abbildung des scheinbaren Umrisses der Kugel, eingehüllt.

Man kann den Umriss auch als Einhüllende der Abbildungen aller zur Bildfläche parallelen Kreisschnitte konstruieren, was noch einfacher als das vorige Verfahren ist (Fig. 76). Ist wieder bd die Abbildung des Durchmessers, welcher parallel zur Achse und gh diejenige des zur Bildfläche senkrechten Durchmessers, so können wir einen beliebigen Punkt k auf dem letzteren als Mittelpunkt eines Kreisschnittes annehmen. Ziehen wir die Gerade von k nach dem Distanzpunkte D, so schneidet dieselbe cd in einem Punkte i, dessen wirklicher Abstand von c dem Abstand des Punktes k von c gleich ist. Die Senkrechte il stellt nun die Grösse des Halbmessers eines Kreisschnittes dar, welcher vom Mittelpunkt der Kugel den Abstand ci = ck hat. Ziehen wir demnach km parallel il und von D durch l eine Gerade, so schneidet diese nun auf km den Halbmesser des Kreisschnittes ab, dessen Mittelpunkt k ist. Hiernach kann dieser Kreis um k gezeichnet werden. Hat man auf diese Weise eine hinreichende Anzahl von solchen Kreisschnitten bestimmt, so ist die Einhüllende leicht zu zeichnen.

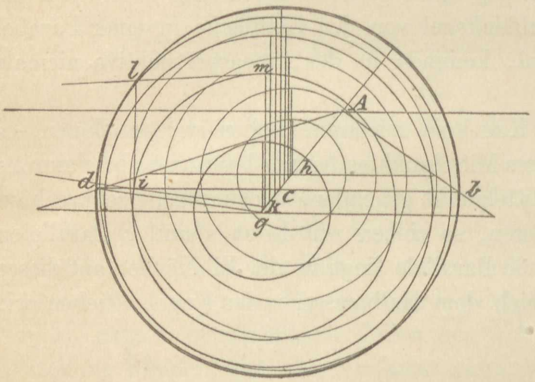


Fig. 76.

7) Die Abbildung einer Kugel ist besonders deshalb verhältnismässig einfach zu konstruieren, weil alle Schnitte derselben Kreise sind. Bei Umdrehungskörpern sind dies im allgemeinen nur diejenigen Schnitte, welche senkrecht zur Drehachse stehen. Es bleibt deshalb auch nichts anderes übrig, als die Abbildungen einer Reihe solcher Schnitte zu konstruieren und alsdann die Einhüllende derselben zu zeichnen. Da dies Verfahren stets auf die Bestimmung der Abbildungen von Kreisen zurückkommt, so ist eine weitere Erläuterung unnötig und wir geben deshalb nur in den Figuren 77 und 78 noch ein paar ausgeführte Beispiele an.

In Fig. 78 α und β ist die Ringfläche dargestellt, α) wenn die Drehachse senkrecht zur Bildfläche, und bei (β), wenn dieselbe senkrecht zur Horizontalebene steht. In dem ersteren Falle ist der Umriss als Einhüllende von Kreisschnitten gezeichnet, welche mit der Bildfläche parallel sind, im zweiten Falle als Einhüllende der Abbildungen einer Reihe von Meridianschnitten.

Die Kurven, welche die Umrisse der gezeichneten Schnitte einhüllen, enden zuweilen scheinbar, ohne sich zu schliessen. Wir sehen dies an den Stellen a und b der Figuren 77 und 78. (Man vergleiche auch die Darstellungen Fig. 137 und 138, I. Teil.) In Wirklichkeit hört aber die Kurve in diesen Punkten nicht auf, sondern dieselbe schliesst sich (allerdings nicht sichtbar), wie dies durch die punktierte Linie angedeutet ist. Wäre die Fläche durchsichtig, so würde das Auge diesen Teil der Einhüllenden eben-

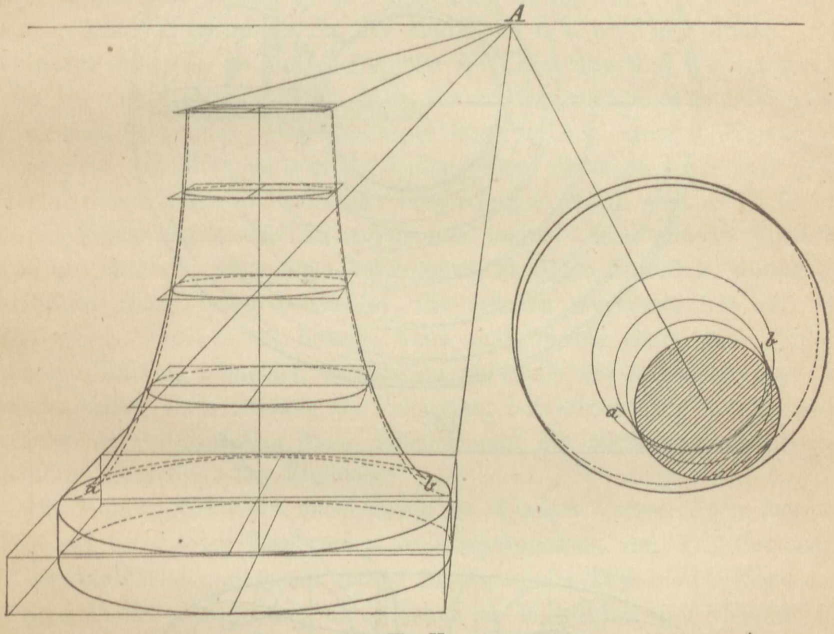


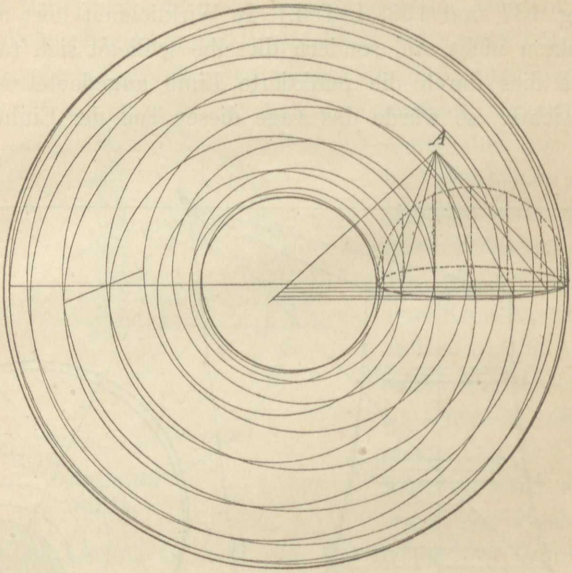
Fig. 77.

falls wahrnehmen. Das scheinbare Aufhören des sichtbaren Teiles rührt davon her, dass die Kurve in dem betreffenden Punkte eine Richtung hat, welche mit dem Sehstrahl zusammenfällt, d. h. in diesem Punkte ist die Tangente der Kurve nach dem Augenpunkte gerichtet.

Man könnte die Abbildungen der scheinbaren Umrisse der Umdrehungskörper auch punktweise konstruieren. In diesem Falle würden vom Augenpunkte aus Berührungsebenen an die Oberfläche des abzubildenden Gegenstandes zu legen und dann die Abbildungen der Berührungspunkte zu bestimmen sein. Für unsere vorwiegend praktischen Zwecke müssen wir jedoch von dieser viel zu umständlichen Konstruktion gänzlich absehen.

Weitere Übungen über die Abbildungen krummer Linien und Flächen findet man in folgendem Kapitel, welches die Anwendung der bisher entwickelten Gesetze auf die Herstellung perspektivischer Zeichnungen enthält.

(α)



(β)

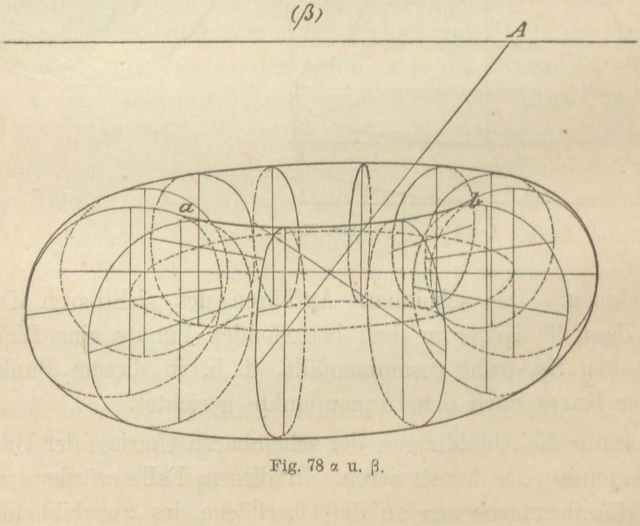


Fig. 78 α u. β.

IV. Abschnitt.

Anwendung der perspektivischen Gesetze bei der Ausführung grösserer Abbildungen.

Bevor wir zu den Anwendungen der perspektivischen Gesetze übergehen, mögen einige allgemeine Bemerkungen über die Lage des Augenpunktes, seine Entfernung von der Bildfläche u. s. w. Platz finden. Man sieht leicht ein, dass es zunächst Sache der Erfahrung und des praktischen Blickes ist, den Standpunkt, von dem aus ein Gegenstand abgebildet werden soll, günstig zu wählen. Der Anfänger wird bei der ersten Zeichnung perspektivischer Abbildungen bemerkt haben, dass dieselben trotz richtig ausgeführter Konstruktion oft auffällige Verzerrungen zeigen, welche die Richtigkeit der Zeichnung zweifelhaft erscheinen lassen. Eine solche Abbildung macht aber auf das Auge einen vollkommen richtigen Eindruck, sobald man dieselbe aus dem Punkte betrachtet, für welchen sie konstruiert ist. Man macht diesen Versuch am besten, wenn man in ein Blatt steifen Papiers eine kleine Öffnung schneidet, letztere an die Stelle des Augenpunktes bringt und nun durch diese Öffnung die Zeichnung betrachtet. Die anscheinenden Verzerrungen verschwinden dann gänzlich und die Abbildung macht einen vollständig befriedigenden Eindruck.

Die Hauptursache der anscheinend zu krassen Verzerrungen liegt einmal in der zu kleinen Entfernung des Augenpunktes von dem Gegenstand und der Bildfläche und ferner darin, dass man das Bild in der Regel nicht aus dem Punkte betrachtet, für welchen es konstruiert ist. Nimmt man den Augenpunkt entfernter von der Bildfläche an, so wird die Abbildung auch dann noch einen befriedigenden Eindruck machen, wenn sich das Auge nicht genau in dem zugehörigen Augenpunkte befindet. Sie wird infolgedessen auch nicht scheinbar zu starke Verzerrungen aufweisen. Den Grund hiervon können wir uns etwa in folgender Weise klar machen.

1) Es sei P (Fig. 79 α) der Grundriss eines rechtwinkligen Parallelepipedums, die Gerade V sei die Horizontalprojektion der Bildfläche, A_1 diejenige des Augenpunktes. Ziehen wir einmal die Strahlen von A_1 nach den sichtbaren Ecken a, b und c und dann auch von einem anderen Punkte A_2 aus die Strahlen nach denselben Ecken, so erkennen wir leicht, dass die Schnittpunkte der Sehstrahlen mit der Bildfläche durch eine Verlegung des Augenpunktes von A_1 nach A_2 erhebliche Veränderungen erleiden. Es kann

also die für A_1 konstruierte Abbildung von A_2 aus gesehen nicht mehr den richtigen Eindruck machen.

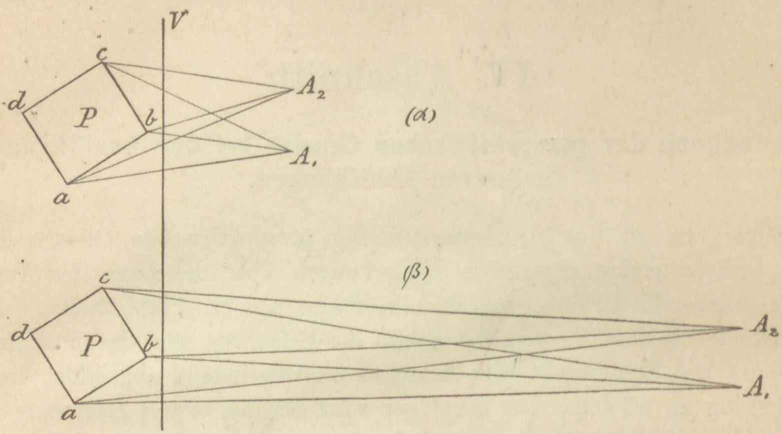


Fig. 79 α u. β.

Liegt dagegen A_1 in grösserer Entfernung von der Bildfläche (s. β), so sieht man, dass eine gleich grosse Verschiebung des Augenpunktes die Schnittpunkte der Sehstrahlen mit der Bildfläche nur sehr wenig verändert. Es würde also das in Bezug auf A_1 konstruierte Bild auch dann noch nahezu denselben Eindruck machen, wenn es von A_2 aus betrachtet wird. Da nun in der Regel das Auge beim Betrachten einer Abbildung sich nicht genau in dem richtigen Augenpunkt befinden wird, so ergiebt sich hieraus die Notwendigkeit, die Entfernung des Augenpunktes, für welchen die Abbildung konstruiert werden soll, so gross zu nehmen, dass eine kleine Veränderung der Lage des Augenpunktes das Bild nicht erheblich ändern würde.

Indessen darf man hieraus nicht schliessen, dass die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche beliebig vergrössert werden könne. Je grösser die Distanz gemacht wird, um so mehr nähern sich die projicierenden Strahlen der parallelen Lage und das Bild nähert sich mehr und mehr einer Parallelprojektion. Da nun das Zusammenlaufen der Abbildungen paralleler Kanten in diesem Falle viel weniger hervortritt, so erhält die Zeichnung dadurch einen einförmigen Charakter, welchem der lebendigere Linienfluss fehlt. Hier ist es nun Sache der Erfahrung und des guten Geschmackes, die günstigste Lage des Augenpunktes zu finden; der Zeichner wird aber leicht darauf geführt, wenn er mehremale zur eigenen Übung Abbildungen desselben Gegenstandes für verschiedene Lagen des Augenpunktes konstruiert und diese miteinander vergleicht.

Noch ein anderer Umstand, welcher Einfluss auf die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche hat, ist zu berücksichtigen. Da wir beim

Betrachten der Abbildung das Auge nach dem Augenpunkte zu bringen haben, um den richtigen Eindruck zu erhalten, so soll man auch aus diesem Punkte die Abbildung vollständig, d. h. mit einem Blick, ohne Drehen des Kopfes bequem übersehen können. Nun weiss Jedermann aus Erfahrung, dass, wenn man einen Gegenstand deutlich mit dem Auge erkennt, andere in der Nähe befindliche Gegenstände beiläufig mitgesehen, aber nicht mehr so scharf und deutlich wahrgenommen werden. Alle innerhalb eines Strahlenkegels liegende Objekte können im allgemeinen ohne Drehen oder Wenden des Kopfes noch bequem übersehen werden, wenn dessen gegenüberliegende Seitenlinien höchstens einen Winkel von 50° miteinander bilden, und hieraus folgt, dass die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche mindestens gleich der grössten Dimension der Abbildung sein muss.

Ferner ist wohl einleuchtend, dass in der Regel der Hauptpunkt in der Mitte oder doch in der Nähe der Mitte der Abbildung liegen wird. Um den Hauptpunkt wird der Zeichner hauptsächlich dasjenige gruppieren, was die Aufmerksamkeit des Beschauers in erster Linie in Anspruch nehmen soll. Abweichungen hiervon können aber eintreten, wenn man z. B. bei geraden Innenansichten eine vollkommene Symmetrie der Zeichnung in Bezug auf die Mitte, welche eintönig wirkt, vermeiden will. Derartige Fälle werden nun in den nachfolgenden Anwendungen gehörige Berücksichtigung finden.

A. Gerade Ansichten.

2) Abbildung eines Tonnengewölbes (Fig. 80).

Es sei (α) Grundriss und Querschnitt eines halbkreisförmigen Tonnengewölbes in verkleinertem Maſsstabe. In Zwischenräumen, welche dem Durchmesser des Gewölbes gleich sind, befinden sich Wandpfeiler, verbunden durch sog. Gurtbögen. Hiernach ist der Raum zwischen zwei Paaren aufeinanderfolgender Wandpfeiler, wie z. B. $b\,c\,c_1\,b_1$ ein Quadrat. Die Bildfläche stehe senkrecht zur Längenrichtung, dann werden die vorkommenden Kreise parallel zur Bildfläche sein und deshalb in der Abbildung wieder als Kreise gezeichnet werden können. Den Hauptpunkt nehmen wir ein wenig seitwärts von der Mitte an, damit die Abbildungen der Seitenwände nicht völlig gleich erscheinen. Endlich liege der Horizont etwa in $\frac{1}{4}$ der Höhe des Gewölbes über der Grundfläche und die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche nehmen wir so gross an, dass nur noch $\frac{D}{4}$ auf der Zeichenfläche angegeben werden kann.

Um die Konstruktion in einfachster Weise deutlich zu machen, zeichnen wir einen Teil des Grundrisses, welcher die Grundflächen eines Paares einander gegenüberliegender Pfeiler enthält, unterhalb der Achse OX. Dann sei noch O′X′ die Achse für den Grundriss, so dass hieraus die Entfernung dieses Pfeilerpaares von der Bildfläche sich ergiebt. Ferner ist senkrecht über dem Grundriss ein Querschnitt des Gewölbes mit der Ansicht der Wand-

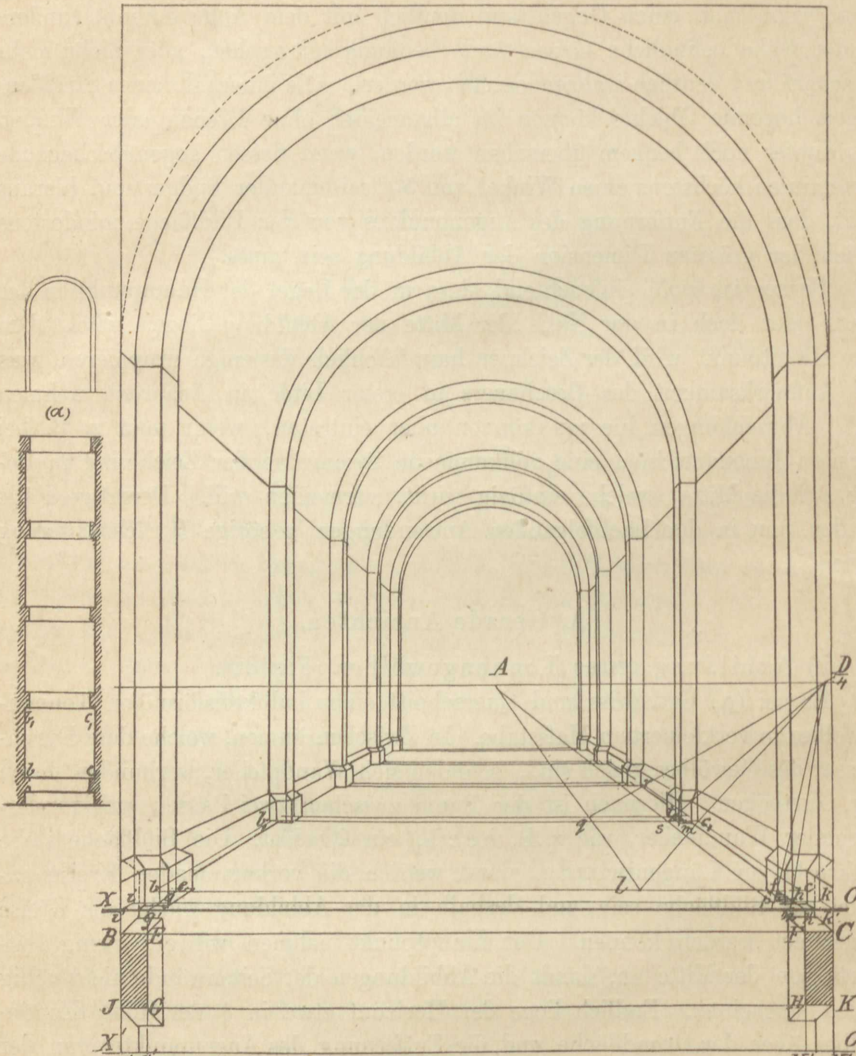


Fig. 80.

pfeiler und des dieselben verbindenden Gurtbogens angegeben, wodurch auch die Höhen bestimmt sind.

Zunächst ist nun der Grundriss perspektivisch abzubilden. Wir projicieren aus demselben die Spuren aller zur Bildfläche senkrechten Geraden auf die Achse OX und ziehen von den so erhaltenen Punkten i', g', h' und k' gerade Linien nach A. Um die Abbildung des Punktes H zu finden, machen wir h'n gleich $\frac{1}{4}$ des Abstandes HH', und ziehen die Gerade n $\frac{D}{4}$, dann schneidet diese h'A in h, der Abbildung von H. (Vergl. I, 13). Ebenso wird f als Abbildung von F bestimmt. Durch f und h zieht man nun Parallelen zur Achse OX, dadurch ergeben sich cfhk und begi als Abbildungen der Grundflächen des ersten Pfeilerpaares. Die Grundflächen des zweiten Paares werden ebenfalls nach (I, 13) gefunden. Man macht cl $= \frac{1}{4}$ bc und zieht die Gerade l $\frac{D}{4}$; diese trifft k'A im Punkte c_1. Es ist dann nach (I, 13) die wahre Länge von cc_1 gleich derjenigen der Geraden bc, und wenn man durch c_1 die Gerade b_1c_1 parallel zur Achse zieht, so liegen in dieser die Abbildungen der vorderen zu OX parallelen Grundkanten des zweiten Pfeilerpaares. Durch p ziehen wir die Gerade pA; dieselbe schneidet auf b_1c_1 die Strecke sm ab, deren wahre Länge gleich der von ph ist. Ziehen wir nun noch s $\frac{D}{4}$, so entsteht das auf der Horizontalebene liegende Dreieck mst, welches demjenigen Dreieck, dessen Abbildung fhp ist, kongruent sein muss. Folglich stellt auch tm die Breite des nächsten Pfeilers dar; durch die Gerade q $\frac{D}{4}$ erhält man den Punkt r u. s. f. Hieraus ergiebt sich, wie alle folgenden Pfeilerstellungen gefunden werden können. Das Auftragen der Höhen geschieht in bekannter Weise, und die Mittelpunkte und Halbmesser der Kreise, durch welche die Abbildungen der Gurtbögen gefunden werden, ergeben sich dann von selbst.

Sind die Pfeiler und Gurtbögen bestimmt, so füge man noch den Sockel hinzu.

3) Abbildung eines Kreuzgewölbes.

Ein quadratischer Raum, in dessen Ecken 4 Pfeiler mit quadratischen Grundflächen stehen, ist von zwei sich rechtwinklig durchschneidenden Tonnengewölben überwölbt (Fig. 81 α). Die Querschnitte der letzteren seien gleich grosse Halbkreise, dann sind die Schnittlinien der Gewölbeflächen (die sog. Gratbögen) Ellipsen, deren Horizontalprojektionen mit den beiden Diagonalen BG und CE zusammenfallen. Man soll die Abbildung dieses Gewölbes zeichnen, wenn die Bildfläche parallel mit dem Querschnitte eines der Tonnengewölbe ist.

Sind M und N die Grundflächen der beiden vordersten Pfeiler, O'X' die Achse für den Grundriss, so kann man zunächst die perspektivische Abbildung des Grundrisses des ganzen Gewölbes ähnlich wie in 2) konstruieren. Um die Gratbögen zeichnen zu können, bestimmt man die Durchschnittspunkte solcher

Seitenlinien der beiden sich schneidenden Tonnengewölbe, welche je in gleicher Höhe über der Horizontalebene liegen. Betrachten wir den in verkleinertem Maſsstabe gezeichneten Grundriss der Nebenfigur (α), welcher aber nur den Teil des Gewölbes darstellt, welcher über dem Quadrat BCGE

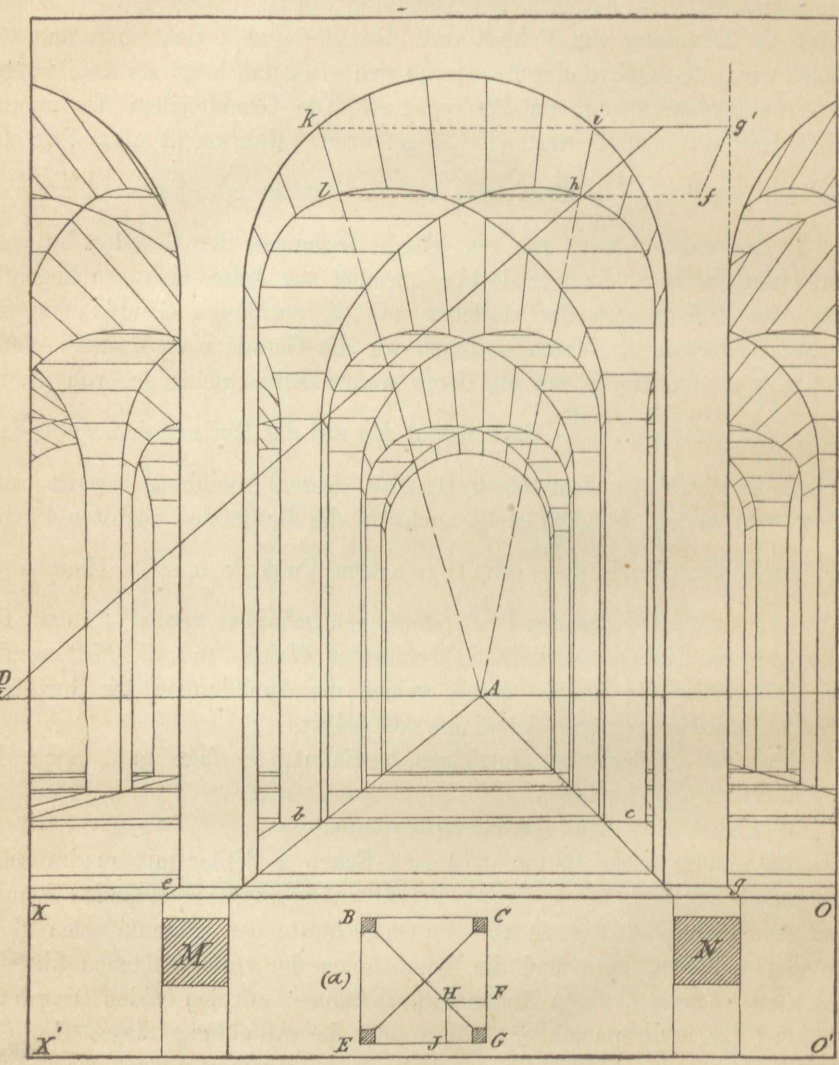


Fig. 81.

liegt, und denkt man sich nun oberhalb des Bogenanfanges einen horizontalen Schnitt durch das Gewölbe gelegt, so wird die Horizontalprojektion ein dem wirklichen Schnitte gleiches Quadrat GJHF sein. Der Eckpunkt H gehört dem Gratbogen an.

Wir suchen nun die perspektivische Abbildung eines solchen Schnittes auf. Von einem Punkte i des vordersten Halbkreises ziehen wir die Gerade ig' parallel zur Achse bis zu der durch den Eckpunkt g gehenden senkrechten Pfeilerkante. ig' betrachten wir nun als die eine Seite des zu konstruierenden quadratischen Schnittes. Die beiden anderen von i und g' ausgehenden Seiten sind als Geraden, welche senkrecht zur Bildfläche stehen, nach dem Hauptpunkte A gerichtet. Die Länge der Seite ig' ist nun perspektivisch auf iA abzutragen; wir ziehen zu diesem Zwecke entweder die Diagonale von g' nach dem Distanzpunkte D, oder wenn, wie in Fig. 81, nur $\frac{D}{2}$ zugänglich ist, von der Mitte der Seite ig' nach $\frac{D}{2}$. Jede dieser Geraden schneidet iA in dem gesuchten Eckpunkte h.

Ist k der zweite Punkt des vorderen Kreises, welcher mit i in gleicher Höhe über der Horizontalebene liegt, so findet man auf kA einen dem h entsprechenden Punkt l des anderen Gratbogens, wenn man durch h eine Parallele zur Achse OX zieht. Die weitere Ausführung kann dem Studierenden überlassen bleiben.

In Fig. 81 sind auch die teilweisen Einblicke in die seitlich liegenden Gewölbe mit angegeben.

4) Abbildung des Durchschnittes zweier halbkreisförmigen Tonnengewölbe von verschiedenen Durchmessern (Fig. 82).

Beide Gewölbe durchkreuzen sich unter rechtem Winkel; die Bildfläche ist senkrecht zur Längenrichtung des grösseren Gewölbes angenommen. Die Abbildungen der in der Zeichnung vorkommenden Geraden können nach dem früheren leicht konstruiert werden; wir nehmen deshalb an, dass die Punkte a und c, in welchem der gesuchte Durchschnitt beginnt, bereits gefunden sind.

Es sei nun der Halbkreis $afdb$ parallel zur Bildfläche und sein Durchmesser ab dem des kleineren Gewölbes gleich, welches der Fall ist, wenn bc nach dem rechts liegenden Distanzpunkte D geht (in Fig. 82 liegt derselbe ausserhalb der Zeichenfläche). Ist d_1 die Projektion eines beliebigen Punktes d des Halbkreises auf ab, so kann man auf der Abbildung ac des kleineren Gewölbedurchmessers den entsprechenden Punkt h_1 durch die nach D gehende Gerade d_1h_1 finden. Zieht man noch hh_1 senkrecht zur Achse und dh nach D, so ist der Schnittpunkt h dieser beiden Geraden ein Punkt des über ac stehenden kreisförmigen Querschnittes des kleineren Gewölbes. Man konstruiert auf diese Weise so viele Punkte dieses Querschnittes, dass die Gestalt desselben deutlich zu erkennen ist (in Fig. 82 punktiert angegeben). Um den gesuchten Durchschnitt zu finden, ziehen wir auf beiden Gewölbflächen Seitenlinien, welche in gleichen Höhen über der Horizontalebene liegen. Wir legen demnach durch h die Gerade Ai und verlängern dieselbe, bis sie die senkrechte Kante uv in i trifft. Ai liegt dann in der Ebene der rechts liegenden Seitenwand. Durch i ziehen wir ik parallel zur Achse, dann liegt k mit i und h in gleicher Höhe über der Horizontalebene. Legen wir demnach durch k die nach A gerichtete Seitenlinie kl und durch h die parallel zur Achse laufende Seitenlinie hl der kleineren Gewölbfläche, so treffen dieselben sich in einem Punkt l der gesuchten Durchschnittskurve.

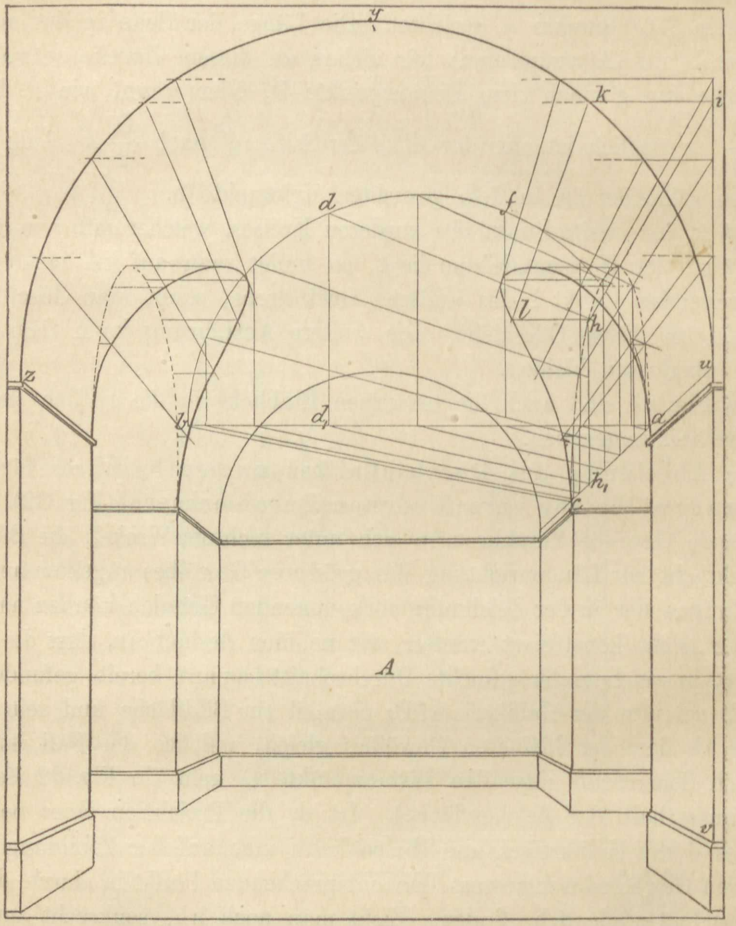


Fig. 82.

Hiernach ist die ganze Durchschnittsfigur konstruiert, welche dann auch leicht auf die linke Seite des Gewölbes übertragen werden kann.

5) Abbildung einer Wendeltreppe (Fig. 83).

Das Motiv hierzu bildet die Treppe auf dem Michaelisturm in Hamburg, welche zur Kuppel desselben führt. Die Treppe windet sich um eine freistehende Säule. In unserer Figur ist unterhalb der Achse die Hälfte des Grundrisses angegeben. Die perspektivische Abbildung desselben ist zuerst zu

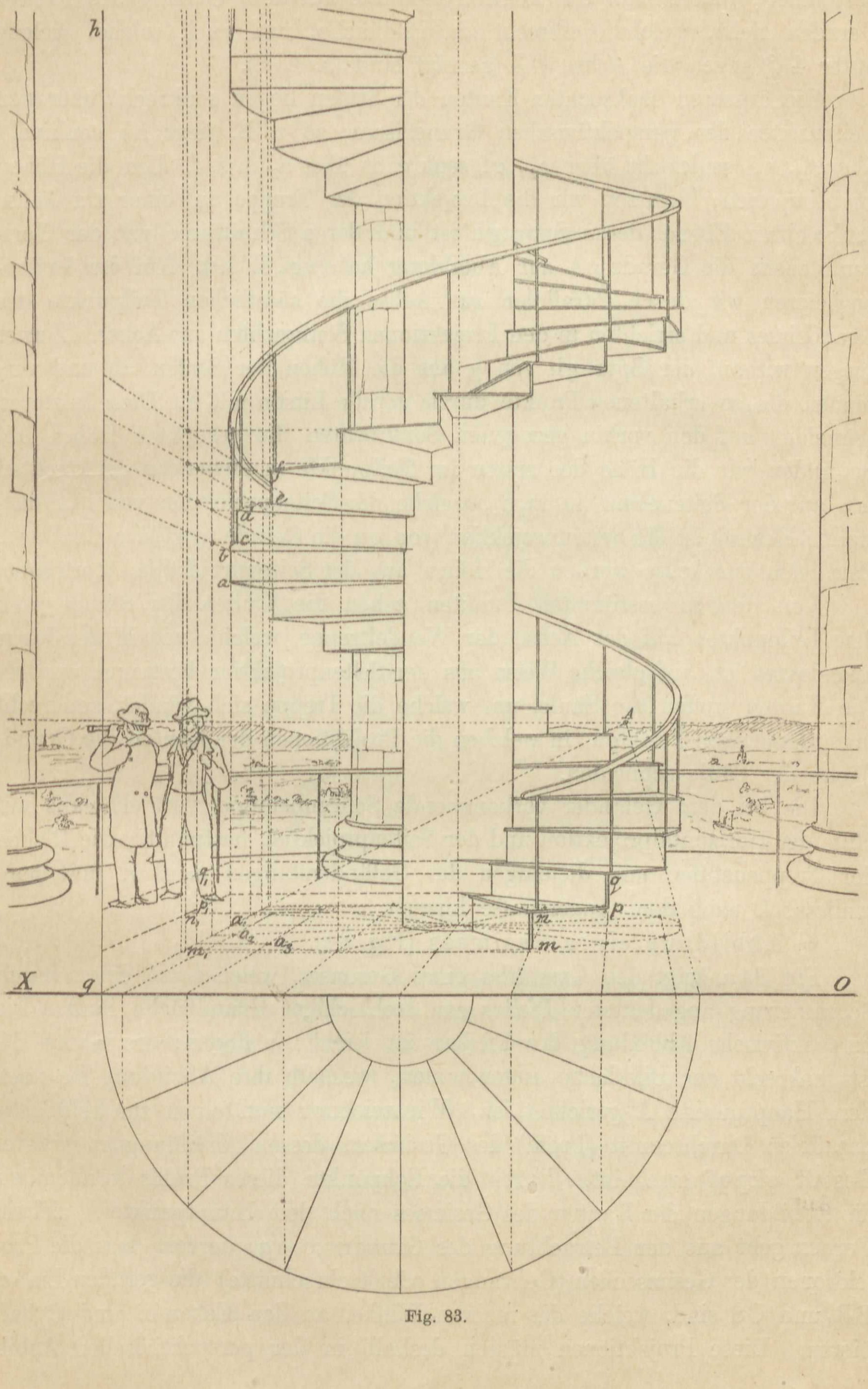


Fig. 83.

bestimmen, indem man durch die Teilpunkte auf dem Umfang des Kreises Geraden zieht, welche senkrecht zur Bildfläche, und auch solche, welche unter 45° gegen die Achse OX geneigt sind (s. I, 7).

Die äusseren senkrechten Kanten der Stufen liegen senkrecht über den Teilpunkten des perspektivischen Grundrisses; so z. B. liegt ab senkrecht über a_1, cd senkrecht über a_2, ef senkrecht über a_3 u. s. f. Um die Höhen zu bestimmen, benutzen wir die Projektion der Treppe auf einer zur Achse senkrechten Ebene, deren Spur gh ist und deren Schnittlinie mit der Horizontalebene die Gerade gA zur Abbildung hat (vgl. I, 30). Auf die letztere projicieren wir durch Parallelen zur Achse die sämtlichen Teilpunkte des Grundrisses und errichten in den Projektionen Senkrechten zur Achse. Ferner tragen wir auf der Spur gh von g aus die Höhen der Stufen ab und verbinden die so erhaltenen Punkte durch gerade Linien mit A. Diese letzteren schneiden auf den vorhin gezogenen Senkrechten die gesuchten Höhen ab. So finden wir die Höhe der ersten im Teilpunkte m stehenden Senkrechten mn auf der Seitenebene in m_1n_1, welche die Seitenprojektion von mn darstellt. Ebenso ist die Seitenprojektion von pq die Gerade p_1q_1 u. s. f. Durch Parallelen zur Achse werden die Höhen aus der Seitenprojektion übertragen.

Von den so bestimmten Punkten gehen die Kanten der Stufen nach den Teilpunkten auf der Achse der Wendeltreppe, welche, wie in der Figur angedeutet ist, auf gleiche Weise aus der Seitenprojektion bestimmt werden. Die Kanten treffen die Säule, um welche die Treppe sich windet, senkrecht über denjenigen Punkten, in welchen die Projektionen der Kanten die Grundfläche der Säule schneiden.

Die bei dem Geländer vorkommende Schraubenlinie wird ebenfalls mit Hilfe der Horizontalprojektion und der Seitenprojektion bestimmt. Die Dicken der Treppenstufen und diejenigen der Geländerstangen u. s. w. fügt man schliesslich nach dem Augenmafse hinzu.

6) Abbildung eines Gesimses (Fig. 84).

Fig. 84α zeigt den Grundriss eines Gesimses, welches um einen durch Schraffierung angedeuteten Pfeiler von rechteckiger Grundfläche läuft. Die perspektivische Abbildung des Pfeilers ist leicht zu finden; die Kante BC ist senkrecht zur Bildfläche angenommen, weshalb ihre Abbildung bc nach dem Hauptpunkte A gerichtet ist. Wir zeichnen nun einen zur Bildfläche parallelen Durchschnitt (Profil) des Gesimses, dessen Abbildung in wahrer Gestalt ekpqf erscheint. Durch die Eckpunkte dieses Profils können wir die Abbildungen der Kanten des Gesimses nach dem Hauptpunkte A ziehen. Ferner geht aus der Betrachtung des Grundrisses (α) hervor, dass die Projektionen der Gesimsecken (Gehrungen oder Gehrschnitte) die geraden Linien BR und CS sind, welche die rechten Winkel an den Ecken B und C halbieren. Diese Projektionen müssen deshalb in der perspektivischen Abbildung nach den beiden Distanzpunkten gerichtet sein. In unserer Zeichnung sind zu beiden Seiten des Hauptpunktes noch $\frac{D}{8}$ und $\frac{D_1}{8}$ angegeben; man macht deshalb $\beta A = \frac{1}{8} Ab$ und $\gamma A = \frac{1}{8} Ac$, zieht br parallel zu $\beta \frac{D_1}{8}$ und cs parallel zu $\gamma \frac{D}{8}$, dann sind br und cs als Projektionen der beiden Gehrungen anzusehen. Diese Projektionen liegen in einer durch bc gehenden zur Horizontalebene parallelen Ebene.

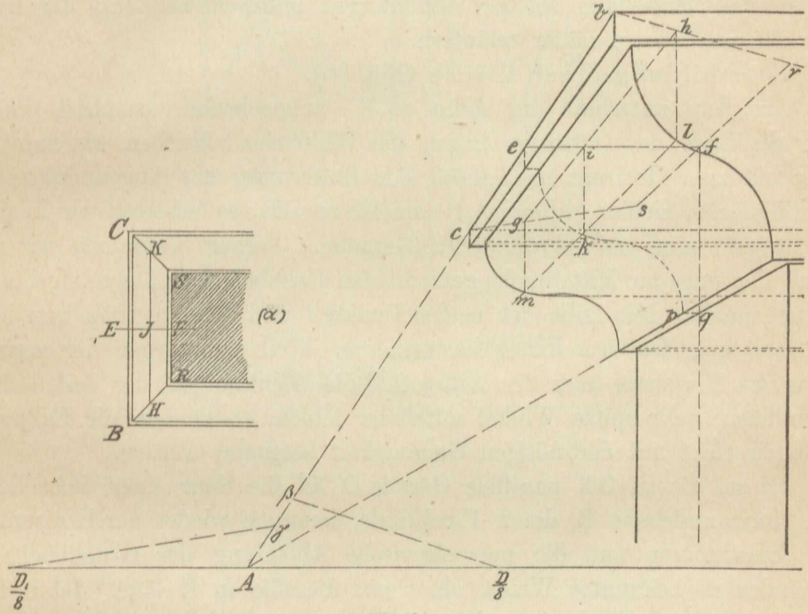


Fig. 84.

Die Abbildung eines Punktes des Gehrschnittes ergiebt sich nun leicht auf folgende Weise. Man zieht durch einen beliebigen Punkt k des Profils eine auf der cylindrischen Fläche des Gesimses liegende Seitenlinie, deren Abbildung von k nach A gerichtet ist. Jetzt wird k auf ef projiciert und durch die Projektion i zieht man nun die Projektion gh jener Seitenlinie, welche ebenfalls nach A gerichtet ist. Die Abbildungen m und f der Endpunkte der Seitenlinie liegen senkrecht unter den Punkten g und h, in welchen gh die Projektionen der Gehrungen trifft.

Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte der Gehrschnitte bestimmen. Besondere Aufmerksamkeit erfordern auch die Richtungen der Tangenten in den Anfangs- und Endpunkten der Bögen, sowie bei den etwaigen Wendepunkten derselben.

B. Schräge Ansichten.

Wir verstehen, wie schon in I, 25 angegeben, unter schräger Ansicht, die Abbildung eines Gegenstandes bei beliebiger Stellung der Bildfläche. Es wird also vorausgesetzt, dass bedeutsame Flächen, z. B. Frontflächen von Gebäuden u. s. w. nicht parallel zur Bildfläche sind. Innenansichten, wie die in den Figuren 80—83 dargestellten, eignen sich schon eher zu einer Darstellung in gerader Ansicht, dagegen wird man bei frei stehenden Gebäuden der schrägen Ansicht ihres ungezwungenen und lebendigen Charakters wegen den Vorzug geben. Wir wollen nun an einigen grösseren Beispielen die Herstellung solcher Abbildungen unter Anwendung der früher entwickelten Gesetze näher erläutern.

7) Abbildung einer Kirche (Fig. 85).

Aus dem unterhalb der Achse $O''X''$ angegebenen Grundriss erkennt man die Lage des Gebäudes gegen die Bildfläche. Machen wir nun AA_1 senkrecht zum Horizont und gleich der Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche, ziehen alsdann A_1f parallel zu BE, so erhalten wir in f den Fluchtpunkt aller zu BE parallelen Geraden. Ferner bestimmen wir noch durch den um f als Mittelpunkt gezeichneten Kreisbogen A_1T den zugehörigen Teilungspunkt. Mit Hilfe der beiden Punkte f und T kann man nun leicht die Abbildung des Grundrisses konstruieren. Weil aber wegen der geringen Höhe des Horizonts über der Achse OX die Abbildungen der Seiten dieser Grundfläche sehr spitze Winkel miteinder bilden, so können die Eckpunkte hiernach nicht mit der nötigen Genauigkeit bestimmt werden.

Es sei die zu OX parallele Gerade $O''X''$ die Spur einer tiefer liegenden Horizontalebene E, deren Fluchtlinie demnach wieder der Horizont ist. Wir konstruieren nun die perspektivische Abbildung der Grundfläche des Gebäudes in bekannter Weise, als wenn dieselbe in E läge. Ist $m'f$ die Abbildung der Geraden, in welcher BE liegt, und b' die Abbildung von B, so hat die Abbildung der entsprechenden Geraden in der ersten Horizontalebene ebenfalls f zum Fluchtpunkt und ihre Spur m liegt senkrecht über der Spur m' (und selbstverständlich auch senkrecht über M).

Auf mf liegt nun die Abbildung b des Eckpunktes B und zwar ebenfalls senkrecht über b'. Da in der perspektivischen Abbildung die Ecken des tiefer liegenden Grundrisses deutlich genug werden, so kann man hieraus dieselben mit Sicherheit entnehmen. Die Höhen sind dann nach I, 18 aufzutragen.

Wir bemerken noch, dass die Abbildung einer Ecke z. B. B nach I, 31 mit Hilfe des Teilpunktes bestimmt werden kann. Hiernach ist $m'n' = MB$ zu machen, dann schneidet die Gerade $n'T$ die Linie $m'f$ in der Abbildung b' des Punktes B.

Sind die in unserer Figur angegebenen Hauptumrisse konstruiert, so wird ein geübter Zeichner hinreichenden Anhalt haben, um die noch fehlen-

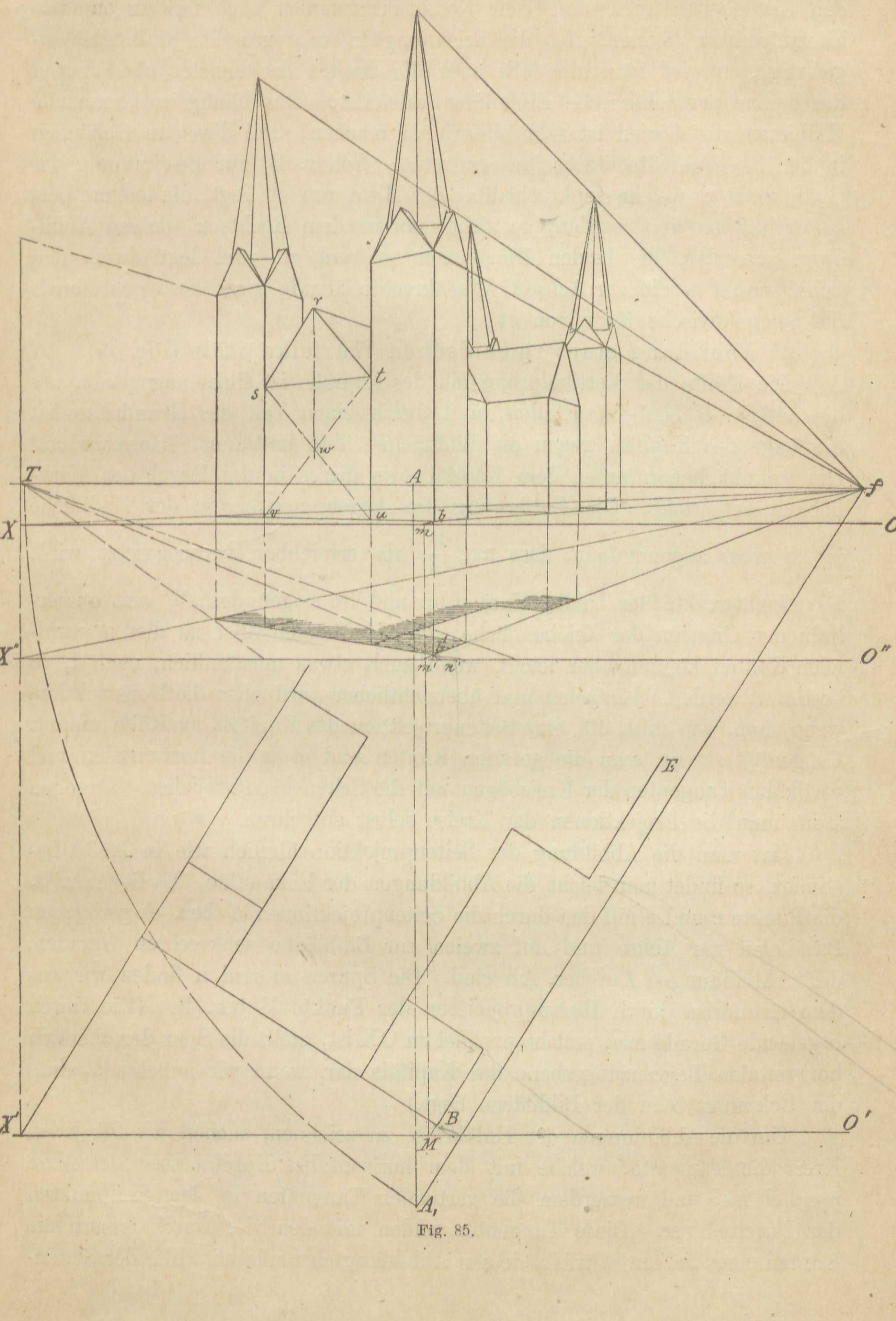


Fig. 85.

den Einzelheiten auch ohne viele Konstruktionslinien nach dem Augenmafse hinzufügen zu können. Ist die Zeichnung in sehr grossem Mafsstabe angefertigt, so wird man allenfalls noch die Breiten der Fenster und Thüren durch eine perspektivische Einteilung feststellen. Das häufig vorkommende Halbieren von Linien ist sehr einfach zu machen, weil diese an Gebäuden in der Regel als Rechteckseiten auftreten. Soll z. B. zur Bestimmung der Giebelspitze r, welche senkrecht über der Mitte von st liegt, die letztere perspektivisch halbiert werden, so zieht man in dem Rechteck, dessen Abbildung stuv ist, die beiden Diagonalen su und vt, und legt durch den Schnittpunkt w die zur Achse OX senkrechte Gerade wr. Diese geht durch die perspektivische Mitte von st.

8) Abbildung eines romanischen Würfelkapitäls (Fig. 86).

Die Hälfte der Vertikalprojektion des Kapitäls ist links angegeben, um die nötigen Höhen festzustellen, und durch einen Teil des Grundrisses ist die Lage des Kapitäls gegen die Bildfläche näher bestimmt. Horizont und Hauptpunkt liegen unter dem Kapitäl, wie dieses in der Regel der Wirklichkeit entspricht. Die Entfernung des Augenpunktes von der Bildfläche ist so gross angenommen, dass nur $\frac{D}{8}$ als erreichbar vorausgesetzt wird. Die Fluchtpunkte der beiden Kanten bc und be liegen deshalb weit ausserhalb der Grenzen der Zeichenfläche; die Abbildungen aller zu diesen parallelen Kanten können aber leicht, wenn auch etwas umständlich, nach I, 28 bestimmt werden. Einfacher und übersichtlicher wird aber die Konstruktion, wenn man, wie in I, 30, eine Seitenprojektion des Kapitäls zu Hülfe nimmt. Es genügt, wenn man die geraden Kanten und etwa die horizontalen und vertikalen Tangenten der Kreisbögen auf die Seitenebene projiciert. Dagegen kann man die Projektionen der Kreise selbst entbehren.

Hat man die Abbildung der Seitenprojektion ähnlich wie in I, 30 bestimmt, so findet man leicht die Abbildungen der Eckpunkte. Es liegen z. B. die Punkte c und e auf den durch die Seitenprojektionen c' bez. e' gezogenen Parallelen zur Achse und auf zweien zur Bildfläche senkrechten Geraden, deren Abbildungen Am bez. An sind. Die Spuren m und n finden wir aus dem Grundriss durch Hinaufprojicieren der Punkte M bez. N. (Die durch b gehende Gerade mn, welche parallel zu OX ist, stellt die Spur der obersten horizontalen Begrenzungsebene des Kapitäls dar, wenn wir annehmen, dass der Eckpunkt b in der Bildfläche liegt.)

Um die Abbildungen der Halbkreise zu zeichnen, suchen wir für jeden Kreis die Tangente, welche mit dem horizontalen Durchmesser desselben parallel ist, und ausserdem die vertikalen Tangenten in den Endpunkten der Durchmesser. Diese Tangenten bilden mit den vier Durchmessern die Kanten eines halben Würfels, dessen Abbildung ebenfalls mit Hilfe der Seitenprojektion gefunden wird. Bei kleineren Dimensionen sind diese Tangenten völlig ausreichend, um darnach die Abbildungen der Kreise zeichnen zu können. Für eine Zeichnung in grossem Maſsstabe bestimmt man noch die Abbildungen der Punkte, in welchen die nach den Schnittpunkten zweier

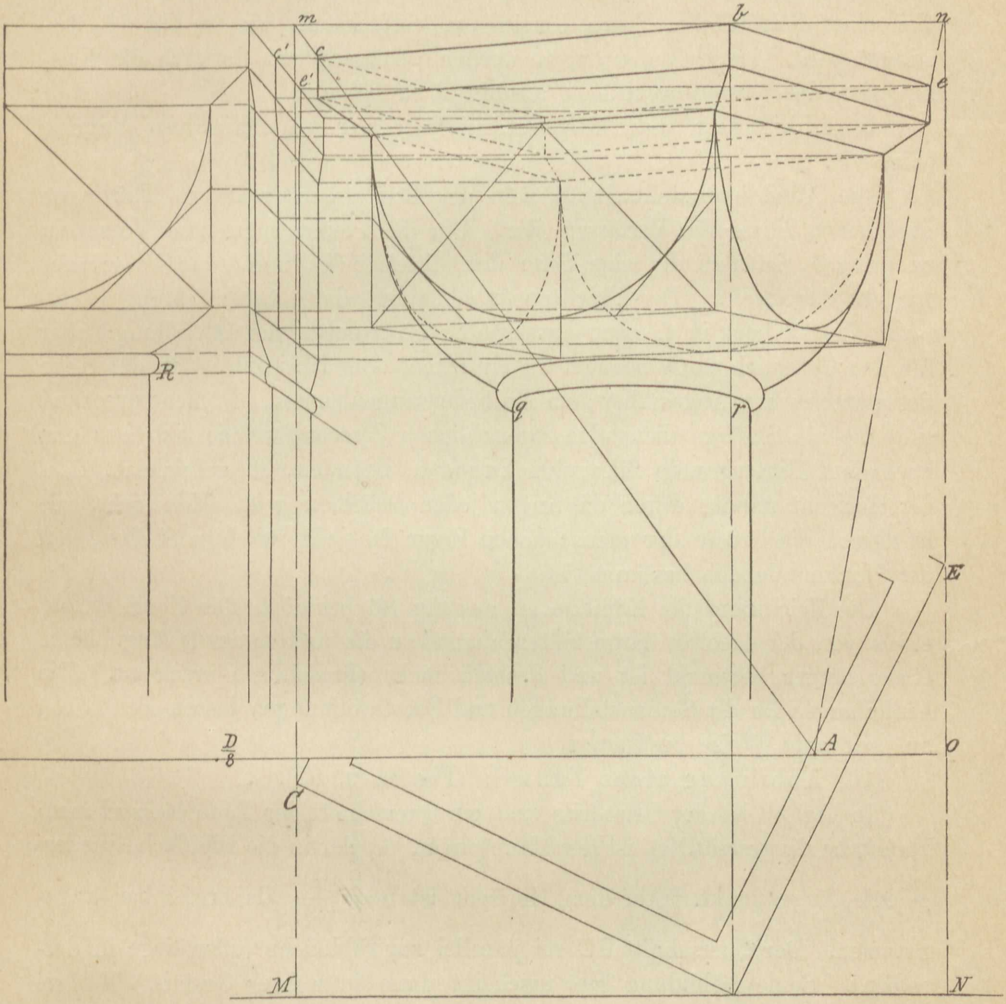


Fig. 86.

Tangenten gerichteten Radien die Kreise treffen und etwa noch die Abbildung der Tangenten für diese Punkte. Alle diese Linien ergeben sich, wie man aus Fig. 86 sieht, leicht mit Hilfe der Seitenprojektion. Um den Säulenschaft zeichnen zu können, konstruieren wir die Abbildung qr des kreisförmigen Querschnittes QR nach III; und ziehen an die Ellipse qr zwei senkrechte Tangenten als sichtbare Begrenzungslinien der Abbildung des Schaftes. Nimmt aber der Durchmesser des Schaftes nach unten zu, so zeichnet man noch mehrere Querschnitte, wodurch sich dann leicht die Gestalt der äusseren Grenzlinien ergiebt.

Zwischen den Halbkreisen des Würfelkapitäls und dem Wulst liegt ein Teil einer Kugelfläche, deren Umriss am einfachsten, wie in Fig. 76, bestimmt wird. Diese Andeutungen werden genügen, um darnach die Konstruktion der ganzen Abbildung ausführen zu können.

9) Abbildung des Mittelschiffes einer romanischen Kirche (Fig. 87).

Die Abbildung stellt das Innere der Ruine Paulinzella in Thüringen nach einer Skizze des Verfassers dar. Um die Pfeiler mehr zum Vorschein zu bringen, ist nur die eine Seite des Mittelschiffes und zwar in schiefer Ansicht dargestellt. Der Fluchtpunkt aller mit der Längenrichtung parallelen Kanten liegt in f, eben ausserhalb der Grenzen der Abbildung, aber für den Gebrauch noch bequem zu erreichen. Der Horizont ist in der Höhe des menschlichen Auges über dem Erdboden angenommen. Dementsprechend sind die als Staffage dienenden menschlichen Figuren, welche sich auf dem nach dem Hintergrunde führenden Fusswege befinden, so gezeichnet, dass der Horizont nahezu durch die Augen jeder derselben geht. Man sieht, wie hierdurch die Grösse der menschlichen Figur für jede beliebige Stellung auf der Horizontalebene bestimmt ist.

Die Zeichnung der Kapitäle ist aus Fig. 86 bekannt. Die Form weicht etwas von der daselbst dargestellten ab, indem die vorkommende Kugelfläche etwas länger gestreckt ist und deshalb mehr ellipsoidisch erscheint. Die Einteilungen für die Säulenstellungen und Fensteröffnungen lassen sich leicht auf bekannte Weise bestimmen.

10) Abbildung eines Tunnels (Fig. 88 u. 89).

In Fig. 88 ist der Grundriss und ein Querschnitt des Tunnels in kleinem Maſsstabe dargestellt. A ist der Hauptpunkt, A_1 der in die Bildfläche niedergelegte Augenpunkt. Auf dem Horizont ist noch $\frac{D}{3}$ als erreichbar angenommen. Der Querschnitt BC sei parallel zur Bildfläche (oder liege in derselben). Seine Abbildung bqc erscheint dann in wahrer Gestalt. KL sei die Projektion eines zweiten Querschnittes. Durch K ziehen wir die zur Bildfläche senkrechte Gerade KM, deren Abbildung mA ist; machen jetzt $mn = \frac{1}{3}KM$ und ziehen die Gerade $n\frac{D}{3}$. Diese letztere bestimmt auf mA in k die Abbildung des Punktes K. Auf gleiche Weise finden wir l als Abbildung von L, und erhalten dadurch in der Geraden kl die Abbildung der Horizontalprojektion des neuen Querschnittes. Da der Tunnel nicht geradlinig, sondern kreisförmig verläuft, so sind auch die horizontalen Lagerfugen Kreisbögen; und wenn man die Punkte, in welchen eine Lagerfuge

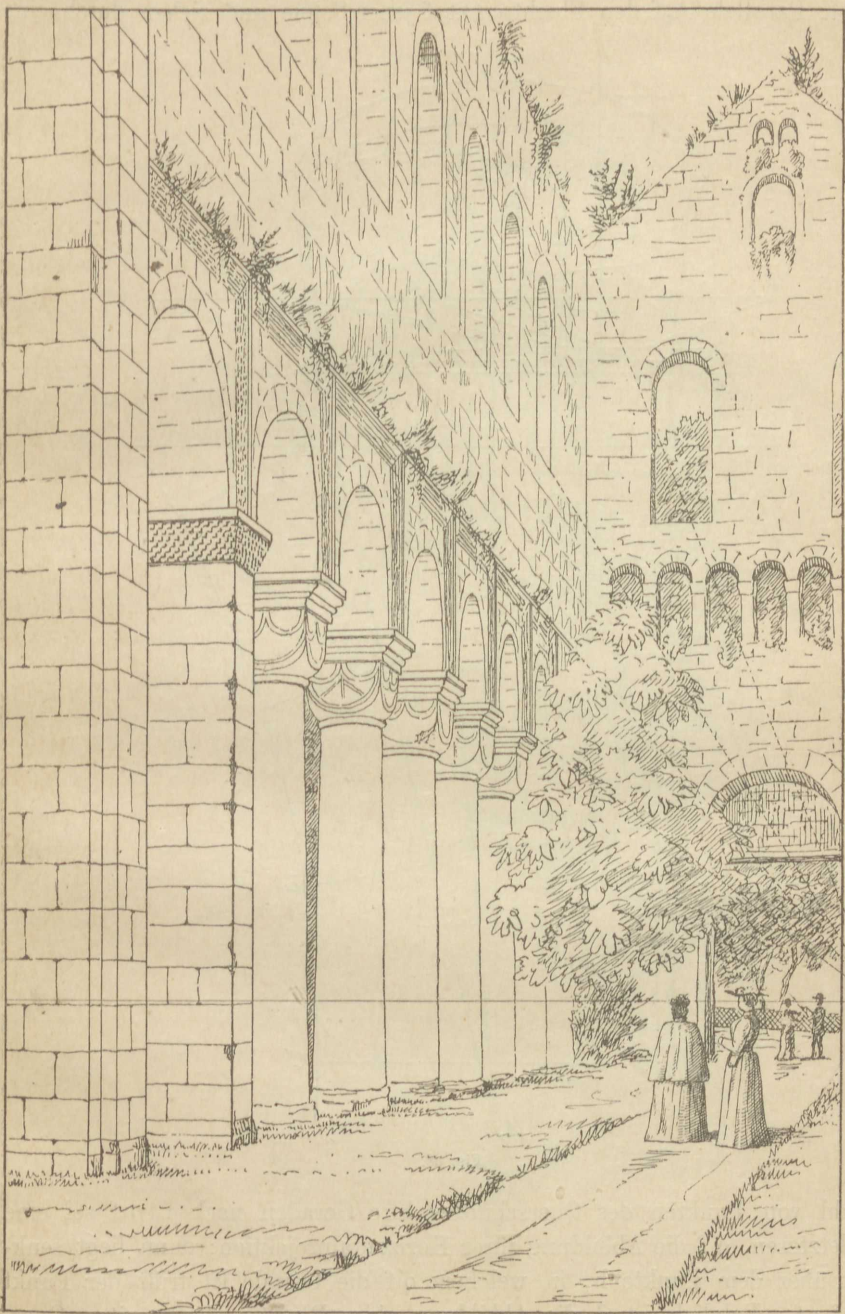


Fig 87.

die beiden Querschnitte BC und KL schneidet, durch eine Gerade verbindet, so ist dieselbe der Sehne BK parallel. Wir bestimmen deshalb durch die zu BK Parallele A_1f den Fluchtpunkt f jener Sehne und ziehen durch eine

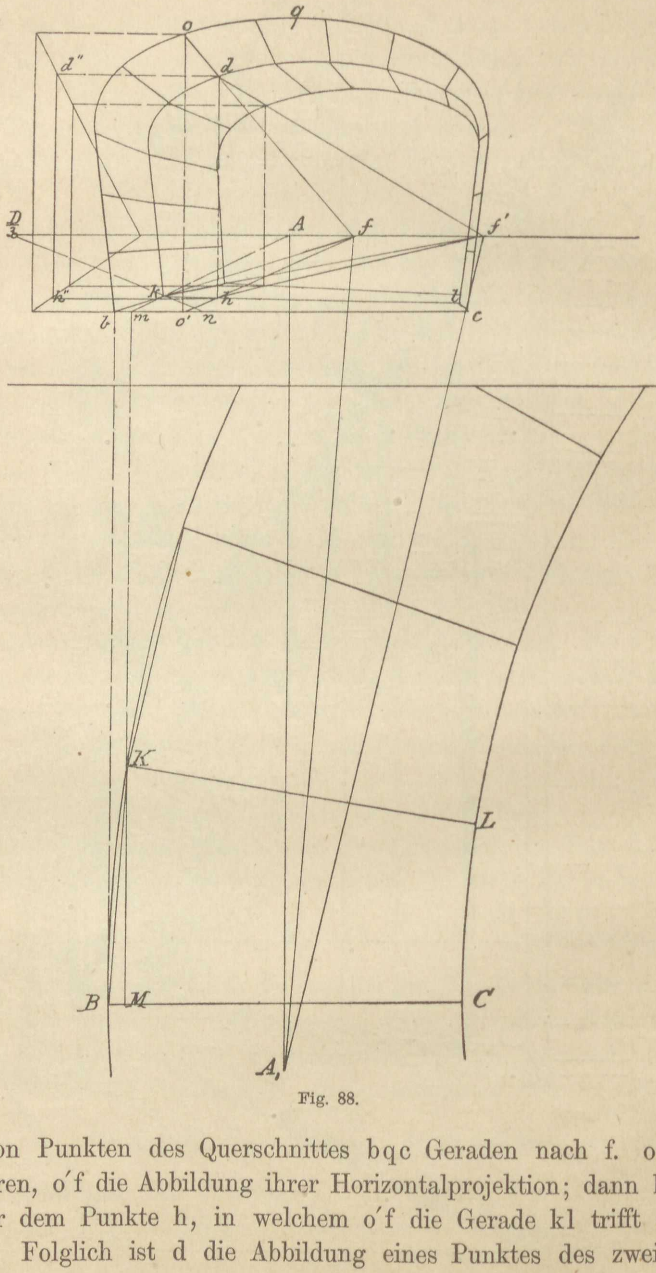


Fig. 88.

Anzahl von Punkten des Querschnittes bqc Geraden nach f. of sei eine der letzteren, o′f die Abbildung ihrer Horizontalprojektion; dann liegt senkrecht über dem Punkte h, in welchem o′f die Gerade kl trifft der Punkt d auf of. Folglich ist d die Abbildung eines Punktes des zweiten Quer-

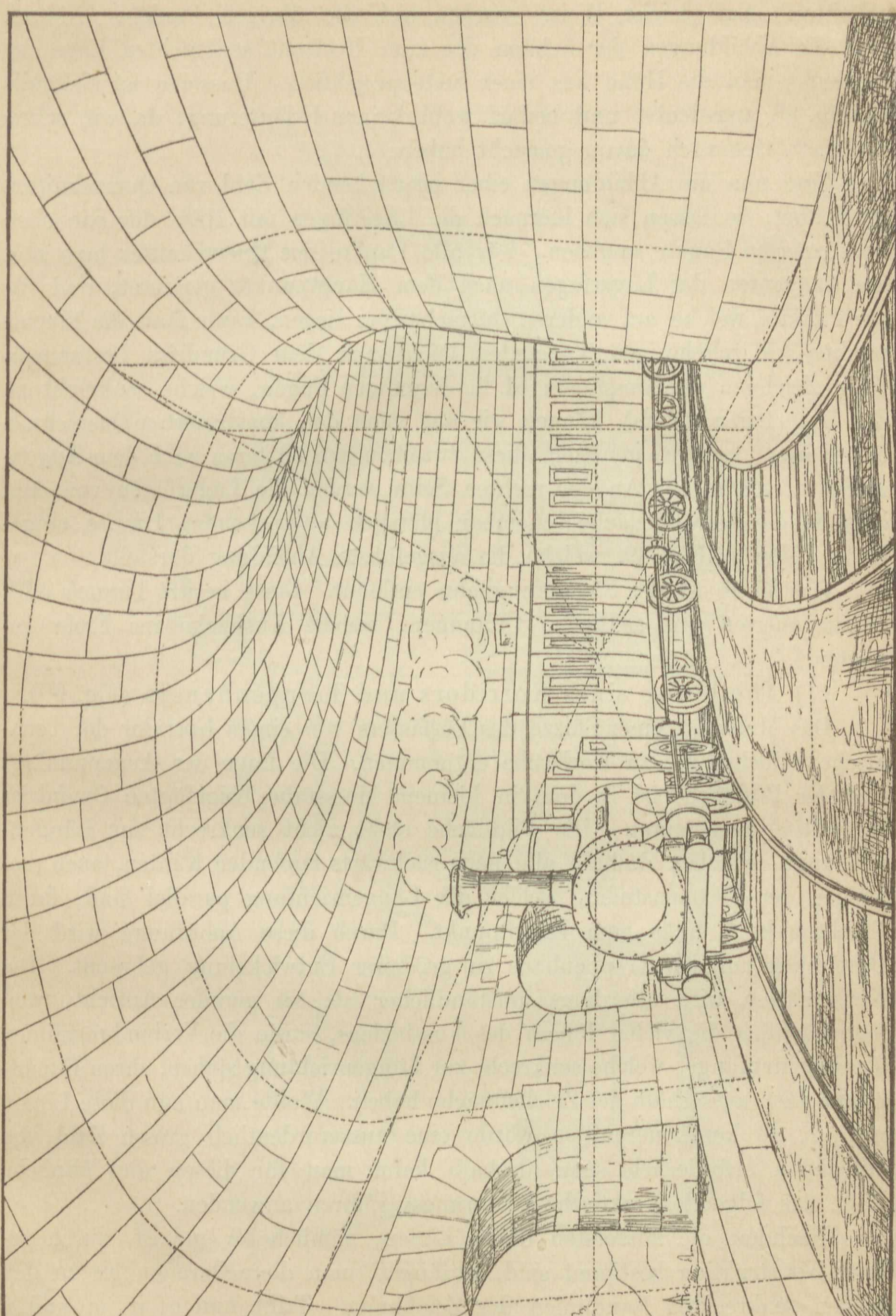


Fig. 89.

schnittes. Auf gleiche Weise ergeben sich die übrigen Punkte. Nähern sich die Abbildungen der Sehnen der zum Horizont senkrechten Lage, so bestimmt man die Höhe aus einer Seitenprojektion. Dasselbe ist ebenfalls in Fig. 88 angedeutet und bedarf wohl keiner Erläuterung, da wir schon mehrfach Gebrauch davon gemacht haben.

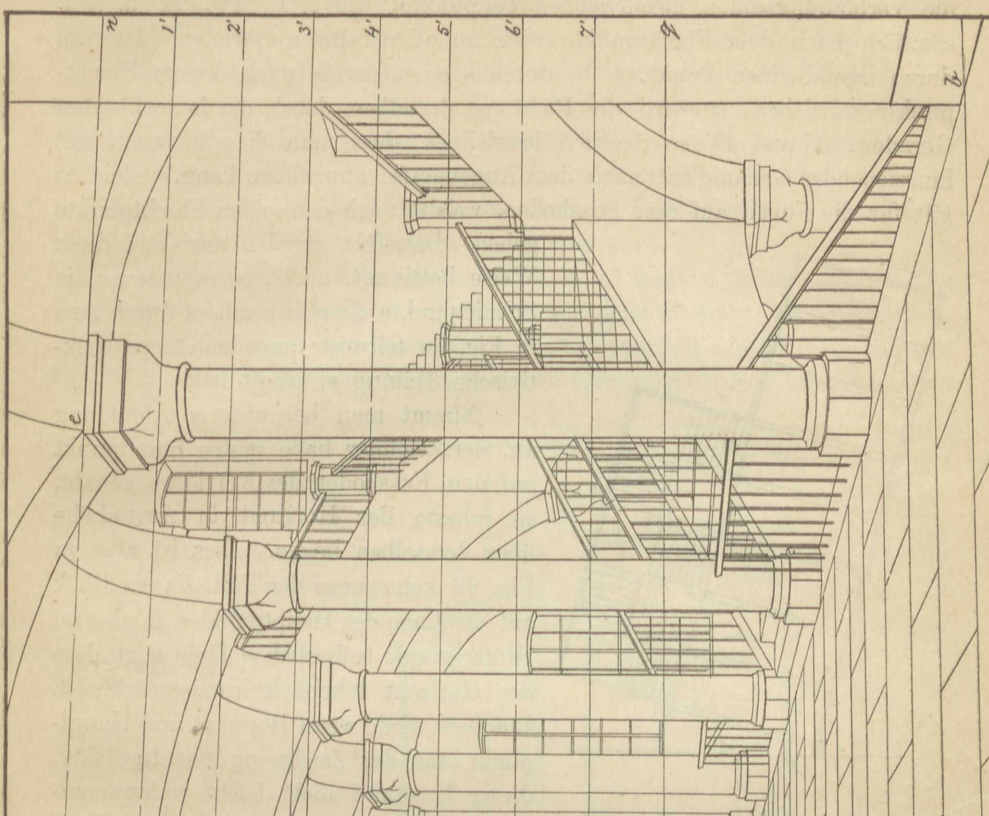
Sind nun die Abbildungen einer hinreichenden Zahl von Querschnitten gezeichnet, so lassen sich hiernach die Lagerfugen mit Hilfe der wie oben konstruierten Punkte angeben. Für alle Punkte des Querschnittes bqc sind die Tangenten der Lagerfugen nach dem Hauptpunkte gerichtet, und für die Punkte, welche auf anderen Querschnitten liegen, kann man die Fluchtpunkte der zugehörigen Tangenten leicht aus dem Grundriss bestimmen. Beim Zeichnen der Stossfugen (d. h. derjenigen Fugen, welche senkrecht zu den Lagerfugen stehen), können wir uns nach den konstruierten Querschnitten richten; es wird genügen, diese zwischen den letzteren nach dem Augenmafse zu zeichnen. An der rechten Seite werden die Lagerfugen von dem oben in der Gewölbefläche scheinbar plötzlich abbrechenden Umriss eingehüllt. Man s. Fig. 89, welche die ausgeführte Abbildung darstellt.

Das Motiv ist der Sömmeringbahn entlehnt. Diese besitzt Tunnels oder Schutzgallerien mit seitlichen Öffnungen, welche Ausblicke ins Freie gestatten.

11) Abbildung eines Korridors und Treppenhauses (Fig. 90).

Das Motiv ist einer Skizze des Verfassers von einem Korridor der Technischen Hochschule zu Karlsruhe entnommen. Die Lage des Augenpunktes und der Bildfläche ist in dem in kleinem Mafsstabe beigefügten Grundriss (Fig. 90α) angedeutet. Die Bildfläche steht nicht senkrecht zur Längenrichtung; es haben deshalb alle nach rückwärts laufenden Kanten, auch diejenigen der Treppenstufen, welche der Längenrichtung parallel sind, ihren Fluchtpunkt F links vom Hauptpunkt. Durch diese Anordnung wird der Durchblick auf das Treppenhaus zu grösserer Entwickelung gebracht. Die Konstruktion wird allerdings umständlicher als bei gerader Ansicht, weil hauptsächlich die vielen Fugen des Fussbodens, sowie die Verbindungslinien der Bogenanfänge, welche senkrecht zur Längenrichtung stehen, ihren Fluchtpunkt weit ausserhalb der Zeichenfläche haben. Wollte man nun diese Linien nach I, 28 konstruieren, so würde eine ausserordentlich grosse Zahl von Hilfslinien erforderlich sein; deshalb kann man für diesen und ähnliche Fälle das folgende praktische Näherungsverfahren anwenden.

Nachdem die äussersten dieser Linien, nämlich bc und ef, durch genaue Konstruktion bestimmt sind, verlängert man diese Geraden bis zu den beiden senkrechten Randlinien der Zeichnung. Trifft nun ef in m und n die beiden Randlinien, so teile man die zwischen ef und dem Horizont liegenden Abschnitte mp und nq in dieselbe Anzahl gleicher Teile; dann gehen


n
1'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
p'
v
e
A
F
m
f
1
2
3
4
5
6
7
p
c

die Verbindungslinien gleichvielster Teilpunkte, wie z. B. 11′, 22′ u. s. f. sämtlich nach dem Fluchtpunkte aller zu ef parallelen Geraden. Ist nun durch irgend einen Punkt, z. B. durch s eine Gerade nach diesem Fluchtpunkte zu ziehen, so wird die Richtung derselben durch die benachbarten Geraden 33′ und 44′ so deutlich bezeichnet, dass man dieselbe auch mit hinreichender Genauigkeit nach dem Augenmafse hinzufügen kann. Gleiches gilt für die Fugen auf dem Fussboden, welche nach demselben Fluchtpunkte gehen. Dieselben werden auch auf diese Weise bestimmt, nachdem man zuvor die Schnittpunkte derselben mit ci durch eine in Fig. 90 teilweise angedeutete perspektivische Teilung ermittelt hat.

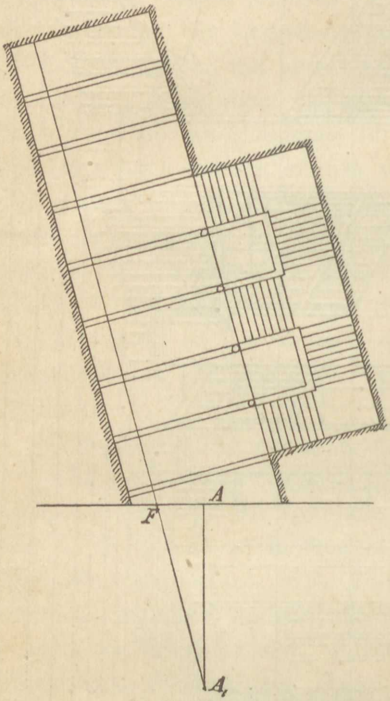


Fig. 90α.

Nimmt man bei unserer Abbildung an, der Zeichner habe seinen Standpunkt auf dem Fussboden des Korridors gehabt, so müsste der Horizont in Augenhöhe über demselben liegen. Dies ist aber in Fig. 90 keineswegs der Fall, da ein Blick auf die Lage des Hauptpunktes in der im Hintergrunde befindlichen Thür zeigt, dass der Horizont erheblich hinabgerückt ist. Indessen wird, wenn Horizont und Hauptpunkt aus der Zeichnung beseitigt sind, dieser Umstand nicht leicht wahrgenommen werden. Das Hinabrücken des Horizonts bei Innenansichten lässt den abgebildeten Raum höher erscheinen, wie man leicht aus dem Vergleich der beiden in Fig. 91 dargestellten Abbildungen desselben Korridors für zwei verschiedene Horizonthöhen ersieht.

Man wird beim Betrachten der ersteren Abbildung aus der grösseren Untersicht des Gewölbes auf eine tiefere Lage des Augenpunktes schliessen, und da man die letztere unwillkürlich mit der Höhe der menschlichen Figur vergleicht, so beurteilt man auch die Höhe des dargestellten Innenraumes nach dieser. Wenn also eine menschliche Figur darzustellen wäre, welche z. B. ihren Standpunkt zwischen den beiden vorderen Wandpfeilern hätte, so würde dieselbe für die in Fig. 91 dargestellten Fälle sehr verschiedene Grössen haben müssen. Im ersten Falle würde hiernach das Gewölbe etwa die 5fache, im zweiten Falle aber nur die ca. $2\frac{1}{3}$fache Höhe dieser Figur zeigen.

Im übrigen ist auch für die Abbildung Fig. 90 die Möglichkeit einer so niedrigen Lage des Horizontes nicht ausgeschlossen. Sie entspricht etwa der Augenhöhe des Zeichners beim Sitzen auf einem niedrigen Stuhle.

Betrachten wir ferner in Fig. 90α (Grundriss) die Lage der Bildfläche und des Augenpunktes in Bezug auf die links liegende Seitenwand, so ist schon hieraus ersichtlich, dass die letztere in der perspektivischen Abbildung starke Verzerrungen aufweisen muss. Dennoch wirken dieselben nicht so auffällig, weil das Hauptinteresse von den vier Säulen und der Durchsicht auf das Treppenhaus in Anspruch genommen wird.

Innenansichten, Strassenprospekte u. s. w. können manchmal an den Rändern starke Verzerrungen enthalten, ohne dass dieselben störend wirken. Bei den Abbildungen frei stehender Gebäude machen starke Verzerrungen in den meisten Fällen einen unangenehmen Eindruck. Nun kann man aber,

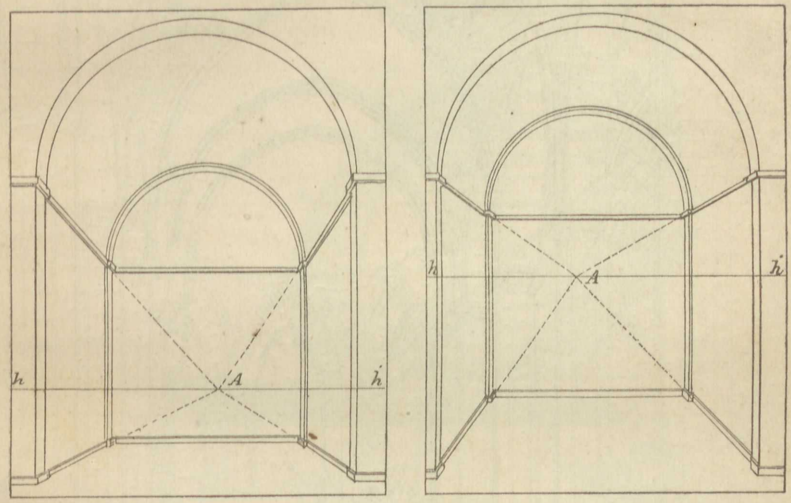


Fig. 91.

wie wir bei einem folgenden Beispiel sehen werden, von der vollkommen exakten perspektivischen Darstellung in solchen Fällen abweichen, wo bedeutsame Teile mehr hervorzuheben, oder allzu starke Verzerrungen zu mildern sind, wenn der begangene Fehler ohne Nachmessen gar nicht wahrgenommen werden kann.

12) Abbildung des Inneren einer Kirchenruine (Fig. 92).

Die vorliegende Abbildung, welche nach einer Skizze des Verfassers vom Jahre 1889 angefertigt ist, stellt das Innere der Ruine der St. Katharinenkirche zu Wisby auf der Insel Gotland dar. Da die vorderen achteckigen Pfeiler dem Augenpunkte sehr nahe liegen, so müssten die Kapitäle starke Verzerrungen erhalten. Um dies zu vermeiden, ist der Fluchtpunkt für die parallel mit der Längenrichtung laufenden Kanten für die oberen

Teile der Pfeiler hinaufgerückt nach F, während für die Pfeilerbasen der Fluchtpunkt f in der richtigen Augenhöhe (senkrecht unter F) beibehalten ist. Der dadurch begangene Fehler ist namentlich, nach Beseitigung aller Hilfslinien, kaum zu bemerken und wird dem unbefangenen Beschauer nicht

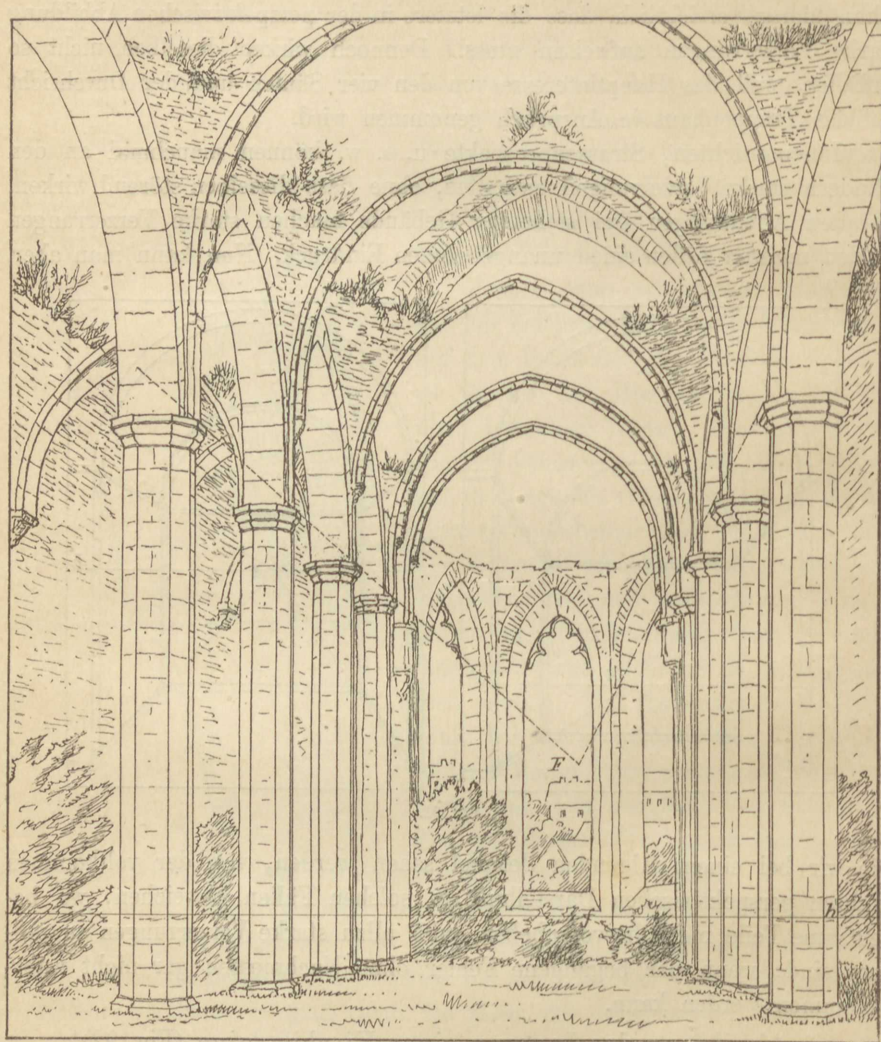
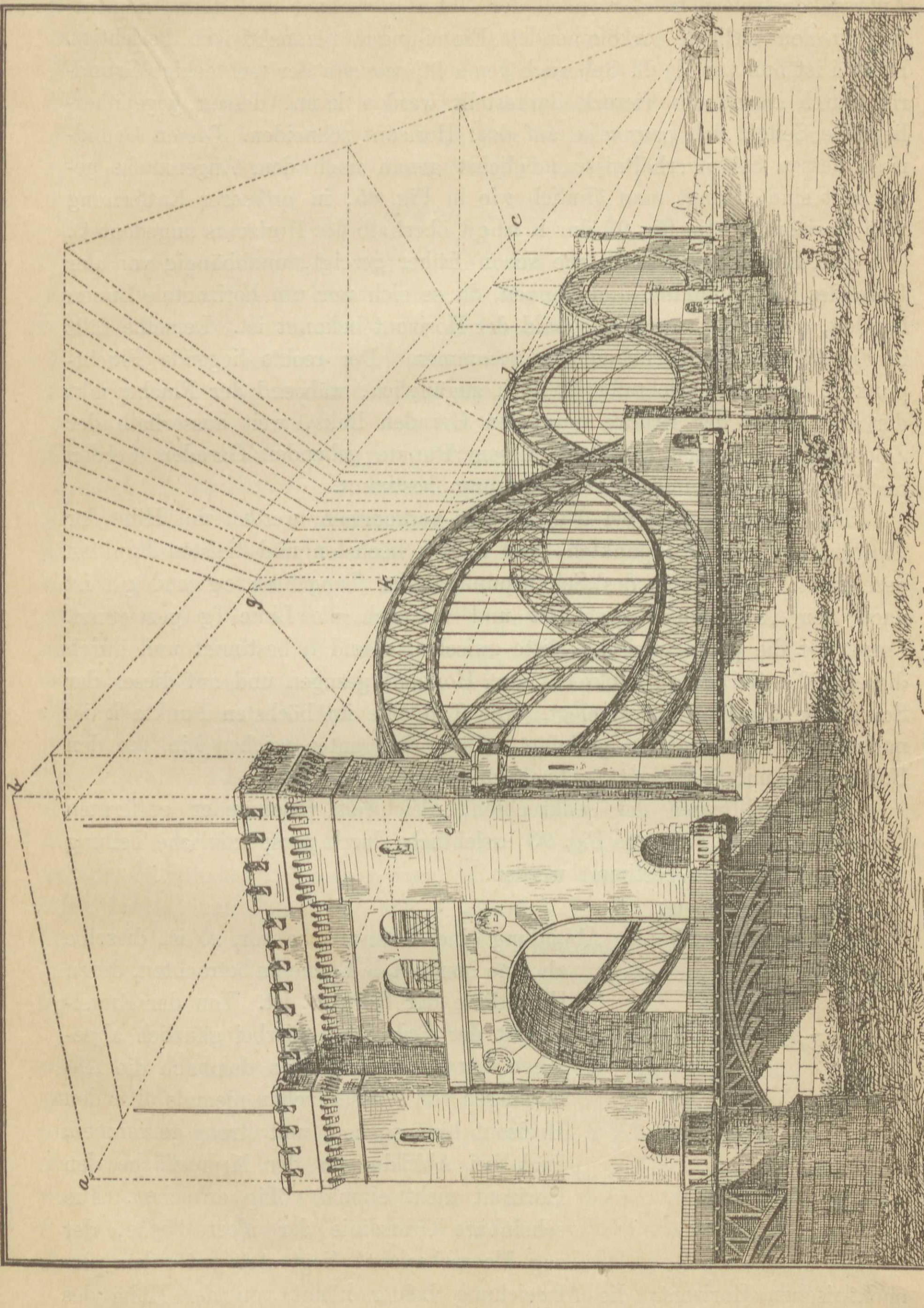


Fig. 92.

leicht auffallen. Wir schliessen daraus, dass dies Mittel wohl zulässig ist, wenn der Zweck, unschöne Verzerrungen zu beseitigen, dadurch in unauffälliger Weise erreicht werden kann.

13) Abbildung der Elbbrücke bei Hamburg (Fig. 93).

Die Abbildung dieser grossen Brücke ist nicht streng aus Grund- und


c
g
k
b
a

Aufriss konstruiert, sondern nach der Natur gezeichnet und dann, namentlich in den vielfach vorkommenden Einteilungen perspektivisch berichtigt. Hierbei ist nun von II, 24 Gebrauch gemacht, wonach der rechteckige Grundriss durch irgend ein Viereck dargestellt werden kann, dessen gegenüberliegende Seiten sich paarweise auf dem Horizont schneiden. Diesen Grundriss, dessen Seitenverhältnisse möglichst genau nach dem Augenmafse gezeichnet sind, bringt man ähnlich wie in Fig. 85, in grösserer Entfernung vom Horizont an (in Fig. 93 durch abcd oberhalb des Horizonts angedeutet).

Die Einteilungen sind, wie schon früher gezeigt, unabhängig von der Lage des Hauptpunktes, und können, da es sich nur um horizontale Linien handelt, ausgeführt werden, sobald der Horizont bekannt ist. Derselbe fällt in Fig. 93 mit der Brückenbahn zusammen. Der rechts liegende Fluchtpunkt f der Längenrichtung ist noch zugänglich, während der Fluchtpunkt der zur Breite der Brücke parallelen Geraden links, weit ausserhalb der Zeichenfläche, liegt. Die nach diesem Punkte gehenden Geraden werden nach dem in 11) angegebenen Verfahren bestimmt.

Die Bögen, welche bei den Trägern vorkommen, werden mit Hilfe der Tangenten in den Endpunkten, und in den höchsten und tiefsten Punkten gezeichnet. Die Höhe des Schnittpunktes der Tangenten eg und gh ist nach dem Augenmafse geschätzt und hiernach die Linie fg gezeichnet. Ferner ist die perspektivische Mitte zwischen e und h bestimmt und durch dieselbe die Gerade gk senkrecht zum Horizont gezogen und auf dieser der Scheitel k des Bogens festgelegt. Die Tangente im höchsten Punkte k ist nach dem Fluchtpunkte f gerichtet. Diese Tangenten reichen hin, um den Bogen ekh mit Sicherheit zeichnen zu können.

Die Abbildungen der senkrechten, gleichweit voneinander entfernten Tragstangen sind, wie aus Fig. 93 ersichtlich, durch perspektivische Teilung nach dem Früheren bestimmt worden.

Meereshorizont.

14) Kommt auf einer Abbildung eine Wasserfläche vor, so ist dieselbe als eine horizontale Ebene zu betrachten, deren Fluchtlinie der Horizont ist. Von der Kugelgestalt der Erde kann hierbei gänzlich abgesehen werden. Es können demnach die Abbildungen von Wasserflächen niemals über den Horizont hinausgehen, und streng genommen, auch bei Abbildungen der Meeresfläche den Horizont nicht einmal völlig erreichen. Die scheinbare Grenzlinie der Meeresfläche, der sog. Meereshorizont, liegt stets unter dem perspektivischen Horizont; die Abweichung beider hängt von der Höhe des

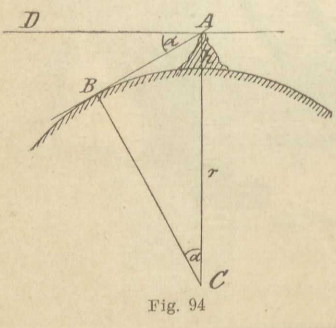


Fig. 94

Augenpunktes A über der Meeresfläche ab. Ist die letztere gleich h (Fig. 94) und ziehen wir durch den Augenpunkt A die Gerade AD senkrecht zum Halbmesser r, legen ferner von A die Tangente AB an die Erdkugel, so heisst der Winkel $DAB = \alpha$ die Depression des Meereshorizontes. Ziehen wir noch den Halbmesser von C nach dem Berührungspunkte B, so ist auch $\angle ACB = \angle BAD = \alpha$ und hieraus ergiebt sich

$$\cos\alpha = \frac{r}{r + h}.$$

Der Erdhalbmesser ist nun ca. 6 377 350 m. Hieraus ergiebt sich leicht, dass für $h = 100$ m die Depression α des Meereshorizontes ca. $19'10''$ beträgt.

Nimmt man den Abstand des Augenpunktes von der Bildfläche gleich 1 m an, so liegt hiernach der Meereshorizont bei so grosser Höhe des Augenpunktes nur ca. $5\frac{1}{2}$ mm unter dem perspektivischen Horizont.

Für $h = 10$ m ergiebt sich bei denselben Annahmen die Tiefe des Meereshorizontes unter dem perspektivischen Horizont gleich 1,5 mm.

Aus diesen Zahlen geht deutlich hervor, dass man bei allen Abbildungen der Meeresfläche, den Meereshorizont mit dem perspektivischen Horizont ohne irgend welchen erheblichen Fehler zusammenfallen lassen kann. Fig. 95 ist eine hierher gehörige Abbildung nach einer Skizze des Verfassers. Dieselbe stellt einen Teil der noch erhaltenen Ringmauer der alten Hansastadt Wisby auf der schwedischen Insel Gotland dar. Der Augenpunkt lag etwa 45 m über dem Ostseespiegel, infolgedessen reicht auch der Horizont (und der mit demselben zusammenfallende Meereshorizont) fast bis zur halben Bildhöhe. Alle horizontalen Kanten und Fugen an den Türmen und Mauern haben ihre Fluchtpunkte auf dem Horizont. Deshalb werden die unterhalb desselben liegenden Geraden nach dem Hintergrunde zu aufwärts, die oberhalb liegenden scheinbar abwärts, gerichtet sein. Das Terrain ist nach dem Hintergrunde zu fallend, was sich namentlich durch den Gegensatz der horizontalen Kanten und Fugen, wo solche auftreten, bemerkbar macht. Dasselbe kann man auch aus den oberen Begrenzungsflächen der nahezu gleich hohen Türme schliessen, welche weiter nach rückwärts tiefer unter den Meereshorizont sinken.

Das Fallen des Terrains nach dem Hintergrunde zu wird ferner noch durch sog. Überschneidungen, wo kleine Bodenerhebungen die dahinter liegenden tieferen Partien teilweise verdecken, deutlich. Man sieht z. B. in unserer Abbildung von der Landstrasse, welche durch den ersten Turm in die Stadt führt, rechts nur ein kleines Stückchen, und von der Thoröffnung nur den obersten Teil des Spitzbogens. Beide werden durch eine geringe Bodenerhebung teilweise verdeckt, welche aber in der Zeichnung die Landstrasse tiefer liegend als den Vordergrund der Zeichnung erscheinen lässt.

Durch die letzte Reihe von Beispielen wird dem Studierenden einleuchtend, dass zur Herstellung einer guten Abbildung keineswegs jede Linie konstruiert zu werden braucht. Wie schon in B, 7) dieses Abschnittes angedeutet ist, wird man die eigentliche Konstruktion auf die grossen Haupt-

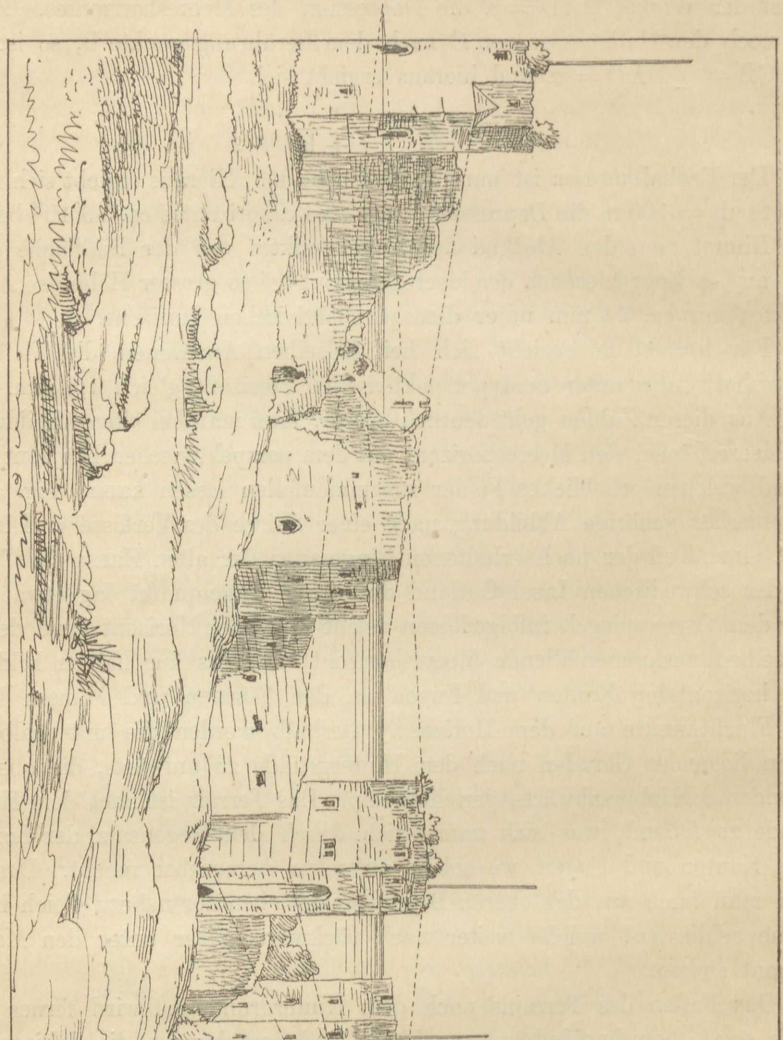


Fig. 95.

umrisse beschränken, und sie ausserdem nur noch da anwenden, wo man beim Zeichnen nach dem Augenmafse leicht erheblichen Fehlern ausgesetzt sein würde. Macht die fertige Zeichnung einen guten und richtigen Eindruck, so wird der Beschauer jedenfalls nicht auf den Einfall kommen, diesen Eindruck noch durch Nachmessen mit dem Zirkel erhöhen zu wollen. Doch ist zu dem freien Zeichnen das vollkommene Verständnis der perspektivischen Gesetze und der Hilfsmittel zur Konstruktion erforderlich. Erst wenn man diese selbständig zu handhaben weiss, wird man auch Einzelheiten einer grösseren perspektivischen Zeichnung den konstruierten Hauptumrissen mit Sicherheit aus freier Hand hinzufügen können.

V. Abschnitt.

Schattenkonstruktion.

1) Als natürliche Lichtquelle nehmen wir bei der Bestimmung der Schlagschatten die Sonne an. Wegen der ungeheuren Entfernung derselben können wir alle Lichtstrahlen als parallel betrachten (s. II. Teil, Einleitung), wenn auch das Sonnenbild dem Auge keineswegs als Punkt erscheint. Die äussersten Strahlen, welche wir vom Augenpunkt an den Sonnenrand ziehen können, bilden noch einen Winkel miteinander, welcher ungefähr $\frac{1}{2}$ Grad (genauer $31' \, 16''$) beträgt. Wir werden indessen hiervon absehen, und den Einfluss des scheinbaren Durchmessers der Sonne auf die Schlagschatten später kurz in Betracht ziehen.

Die Konstruktion der Schlag- und Eigenschatten ist nach den schon im II. Teil angegebenen Grundsätzen auszuführen. Wir gebrauchen dazu vor allen Dingen die Abbildungen der Lichtstrahlen.

Wird durch die Gerade BE (Fig. 96 α) die Richtung eines Strahles und durch CE seine gerade Projektion auf der Horizontalebene angedeutet, und zieht man nun vom Augenpunkte A_1 die Gerade A_1S parallel zu BE, so schneidet dieselbe die Bildfläche in S, dem Fluchtpunkte der Lichtstrahlen.

Nun ist A_1S auch als derjenige Strahl anzusehen, welcher vom Augenpunkte nach der (unendlich fernen) Lichtquelle, d. h. nach dem Mittelpunkte der Sonne geht, folglich bedeutet S die Abbildung dieses Punktes. Fällt man von S das Lot Ss auf den Horizont HH′, so ist der Fusspunkt s nach (I, 33) der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen aller Lichtstrahlen.

Der Schatten E eines Punktes B, welcher auf die Horizontalebene fällt, liegt im Durchschnitt des durch B gehenden Strahles und seiner Horizontalprojektion. Ist die Gerade BC senkrecht zur Horizontalebene, so fällt ihr Schatten mit der Horizontalprojektion des Lichtstrahles zusammen (s. Einleitung 4, II. Teil).

In (β) ist die Konstruktion perspektivisch dargestellt. Die Strahlenrichtung ist durch den Fluchtpunkt S (Abbildung des Sonnenmittelpunktes) gegeben, s ist der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen der Strahlen. Ist also bc die Abbildung der in (α) angenommenen Geraden BC, c die Abbildung ihres Schnittpunktes mit der Horizontalebene, so stellen Sb und sc die Abbildungen des durch b gehenden Strahles und seiner Horizontalprojektion dar. Folglich ist der Schnittpunkt e die Abbildung des Schattens von b. Der Schatten der gegebenen Geraden erscheint in (β) als die Gerade ce. Ebenso findet man den Schatten einer anderen zur Horizontalebene senkrechten Geraden fg in fk. Die auf die Horizontalebene fallenden Schatten von Geraden, welche senkrecht zu derselben stehen, sind demnach alle nach s gerichtet.

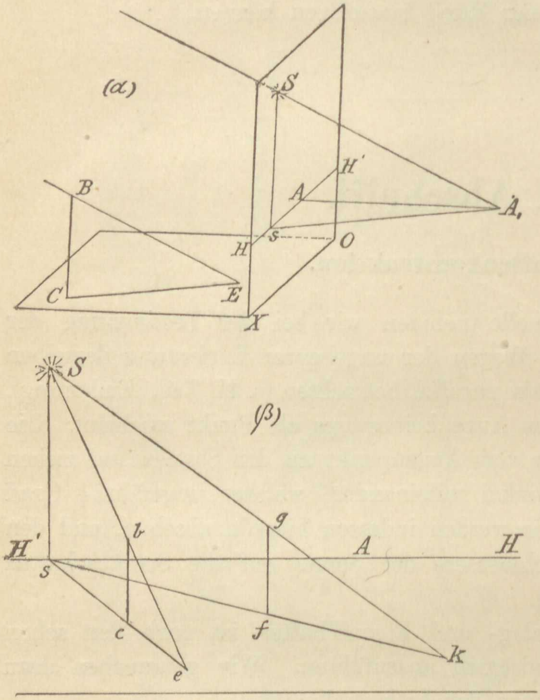


Fig. 96 α u. β.

In Fig. 96 ist die Voraussetzung gemacht, dass der Zeichner von A_1 aus die Sonne vor sich hat, ihre Abbildung demnach in die Bildfläche nach S fällt. Es gelten aber die oben gemachten Bemerkungen auch für den Fall, wenn der Zeichner die Sonne hinter sich hat (Fig. 97).

Der durch A_1 gehende Parallelstrahl schneidet die Bildfläche dann wiederum in dem Fluchtpunkte L der Lichtstrahlen, nur ist dieser Punkt wohl als die Centralprojektion des Sonnenmittelpunktes, aber nicht als wirklich vorhandene Abbildung desselben zu betrachten. Der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen liegt in dem Fusspunkte l des Lotes von L auf den Horizont. Bei dieser letzten Annahme liegt der Fluchtpunkt L stets unter dem Horizont. Ist in (β) L und damit auch l gegeben, so finden wir den Schatten einer zur Horizontalebene senkrechten Geraden bc wie vorhin. Wir zeichnen den Strahl bL und dessen Horizontalprojektion cl. Der Schnittpunkt e bezeichnet den Schatten des Punktes b und ce den Schatten der Geraden bc. Auf gleiche Weise findet man den Schatten der Geraden fg in fk.

Hiernach lassen sich schon eine Reihe von Schattenkonstruktionen ausführen, da wir hier auch die Kenntnis derselben für die Parallelprojektionen als bekannt voraussetzen können.

2) Es ist die Abbildung einer auf der Horizontalebene liegenden rechtwinkligen Platte und diejenige eines darauf stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums in Frontstellung gegeben. Man soll die hierbei vorkommenden Schatten konstruieren, wenn die Abbildung S des Sonnenmittelpunktes in die Bildfläche fällt (Fig. 98).

Durch die Senkrechte Ss zum Horizont bestimmen wir zuerst den Fluchtpunkt s der Horizontalprojektionen der Lichtstrahlen. Trifft nun die Kante bb_1 verlängert die Horizontalebene in g, so finden wir den Schatten der Kante in gk, der Projektion des durch b gehenden Strahles Sk. Die Schatten der übrigen senkrechten Kanten sind ebenso zu bestimmen, dieselben sind sämtlich nach s gerichtet. Da die Kante ce die Abbildung einer zur Horizontalebene parallelen Geraden ist, so ist ihr Schatten mn parallel zur Kante. Deshalb muss mn ebenso wie ce nach dem Hauptpunkt gerichtet sein. Durch b_1 und e_1 gehen noch die Schatten der Kanten bb_1 und ee_1, welche auf der oberen Fläche der Platte liegen. Diese Schatten sind, als Projektionen der durch b und e gehenden Strahlen auf eine horizontale Ebene, nach s gerichtet. Man findet auch leicht hieraus diejenigen Flächen, welche im Eigenschatten liegen.

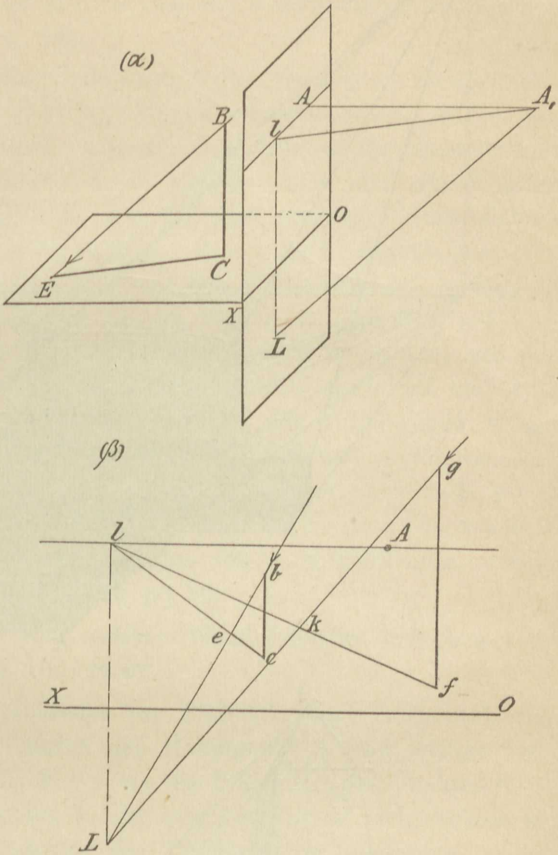


Fig. 97 α u. β.

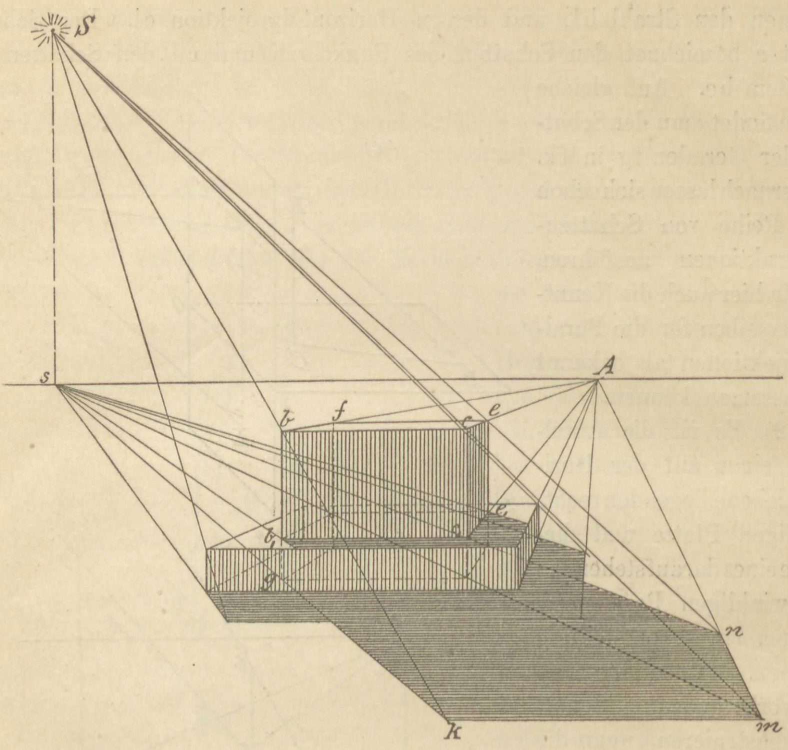


Fig. 98.

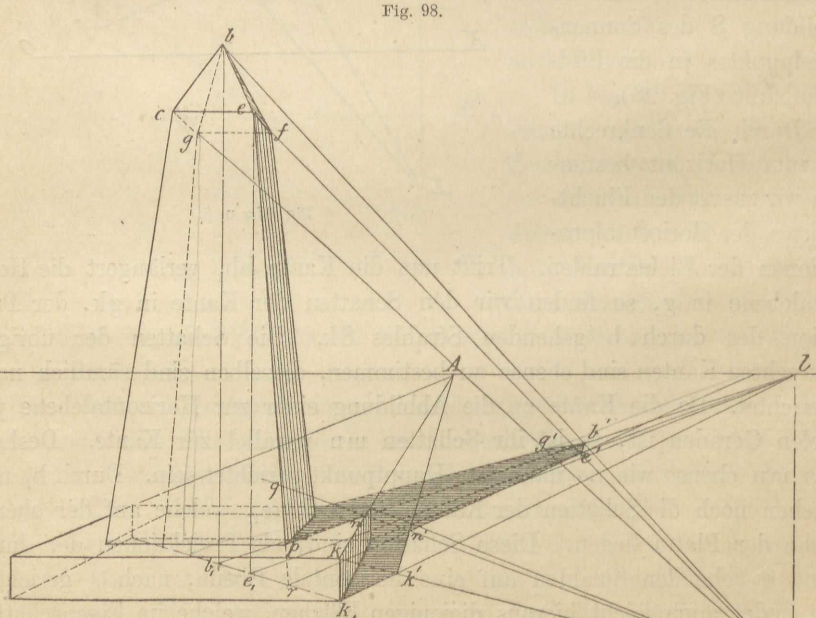


Fig. 99.

3) Die Schlagschatten und Eigenschatten bei der durch perspektivische Abbildung gegebenen Pyramide auf quadratischer Platte zu finden. Die Sonne habe der Zeichner hinter sich, so dass der Fluchtpunkt L der Strahlen unter dem Horizont liegt (Fig. 99).

Um den Schatten eines Eckpunktes der Pyramide, z. B. e, zu ermitteln, bestimmt man zunächst die Horizontalprojektion e_1 desselben. Ziehe nun den Strahl eL und zeichne seine Projektion $e_1 l$, dann ist der Schnittpunkt e' dieser beiden der Schatten von e. In gleicher Weise sind die Schatten aller übrigen Ecken zu finden. Der Schatten einer der zur Horizontalebene nicht senkrechten Kanten der Pyramide, z. B. ep, wird dadurch bestimmt, dass man ep bis zum Schnittpunkt r mit der Horizontalebene verlängert. Alsdann ist $e'r$ der Schatten dieser Kante. Man kann hier auch mit Vorteil das im II. Teil unter II, 8 angegebene Verfahren anwenden, um den Teil des Schattens der Kante ep zu finden, welcher noch auf die obere Grundfläche der Platte fällt. Man zieht durch den Schnittpunkt n' der beiden Schattengrenzen $k'n'$ und $n'e'$ den Strahl Ln' und verlängert denselben bis n, dann ist pn der gesuchte Schatten. Der Strahl $n'L$ würde nämlich die beiden schattenwerfenden Kanten ep und kn in q bez. n schneiden müssen, folglich ist n auch als Schatten von q zu betrachten, woraus sich ergiebt, dass pn der Schatten von pq ist.

4) Konstruktion des auf eine vertikale Wand fallenden Schattens eines gothischen Strebepfeilers (Fig. 100).

Die Wandfläche stehe senkrecht zur Bildfläche und Horizontalebene, dann geht ihre Fluchtlinie F durch den Hauptpunkt A und letztere steht senkrecht zum Horizont (s. II, 2). s' sei die Projektion des Punktes S auf F, dann ist s' auch der Fluchtpunkt der Projektionen der Lichtstrahlen auf der Wandfläche. Um den Schatten des Punktes c zu bestimmen, ziehen wir den Strahl Sc, projicieren c durch die zum Horizont parallele Gerade cc_1 auf die Wandfläche nach c_1; dann ist $s'c_1$ die Projektion des Strahles Sc, welcher dieselbe in c', dem Schatten des Punktes c, trifft. Auf gleiche Weise können die Schatten aller anderen Ecken bestimmt werden. Übrigens kann man auch, wenn c' gefunden ist, die Kante bc verlängern, bis sie in t die Wand trifft, dann erhält man die Gerade $c't$ als Schatten von ct. Verlängern wir ebenso ce bis u, so ist $c'u$ der Schatten von cu. Die Strahlen Sb und Se treffen alsdann $c't$ bez. $c'u$ in b' bez. e', welches nun die Schatten der Punkte b und e sind, u. s. f. Die sehr einfache Konstruktion, welche in Fig. 100 vollständig angegeben ist, bedarf hiernach weiterer Erläuterungen nicht.

Die Beispiele Fig. 101 und 102 möge der Schüler hiernach zur eignen Übung benutzen.

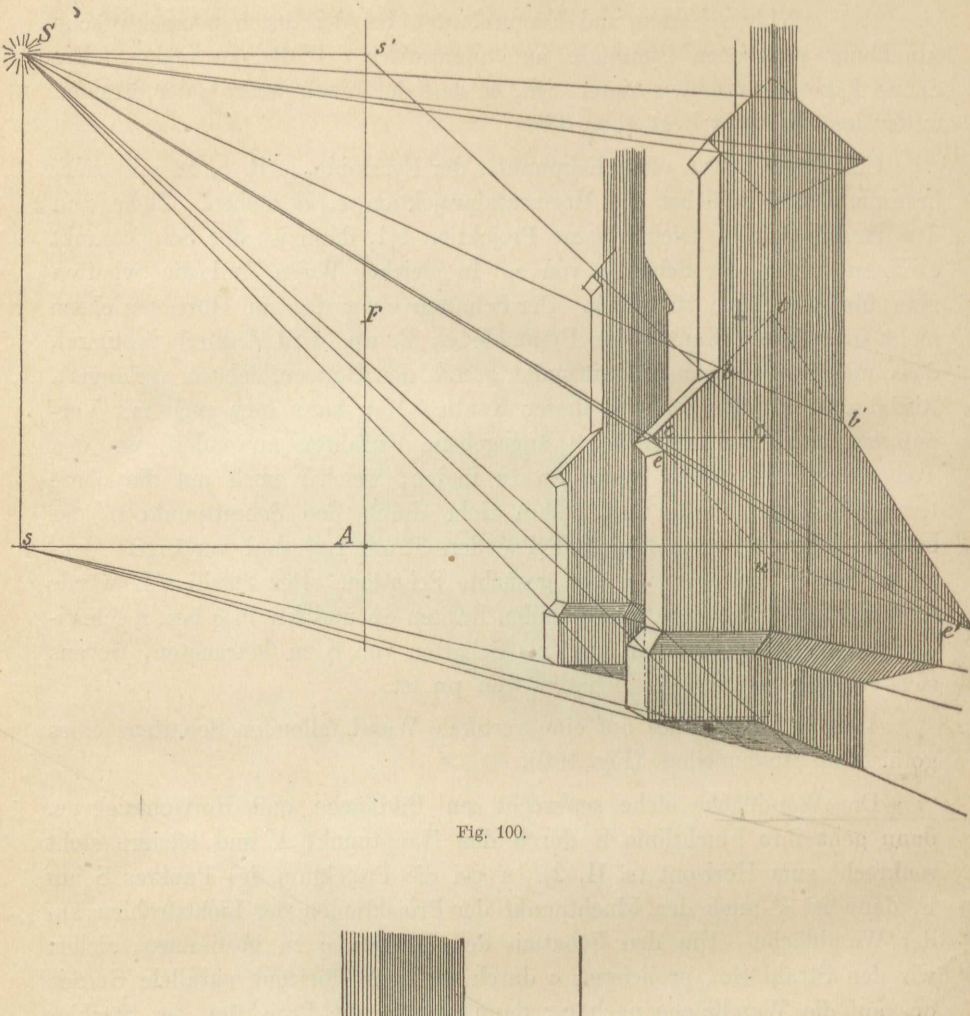


Fig. 100.

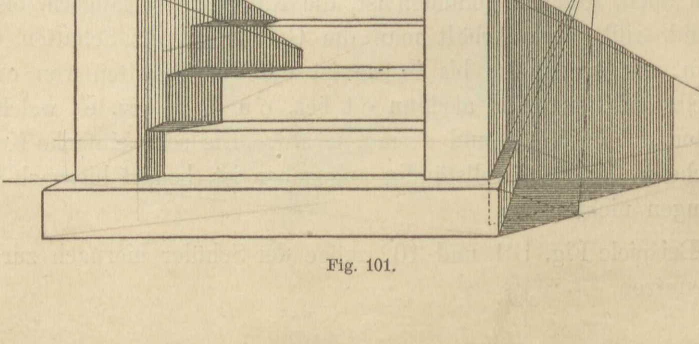


Fig. 101.

5) Die Konstruktion der Schatten von Geraden, welche auf beliebige Ebenen fallen, wollen wir an einem praktischen Beispiel erläutern. Fig. 103 stellt die perspektivische Abbildung eines Gebäudes in Übereckstellung dar, welche mit Hilfe eines tiefer liegenden Grundrisses konstruiert ist. Der letztere kann auch für die auszuführende Schattenkonstruktion mit Nutzen verwendet werden. Von Einzelheiten ist abgesehen und das Gebäude gleichsam nur schematisch dargestellt, um die grösseren Hauptumrisse des Schattens deutlich konstruieren zu können. Der Fluchtpunkt L (in unserer Ab-

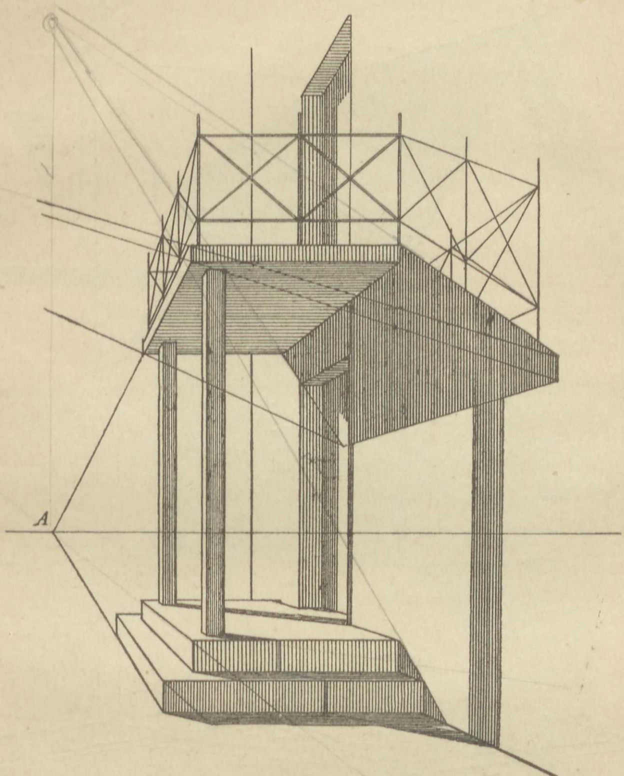


Fig. 102.

bildung nicht mehr mit angegeben) der Lichtstrahlen liege unter dem Horizont. Um den Schatten, welchen der Eckpunkt b auf die Dachfläche des andern Flügels wirft, zu finden, legen wir durch den Strahl bL eine Ebene M senkrecht zur Horizontalebene und erweitern M bis zu der tiefer liegenden horizontalen Ebene des Grundrisses. Die letztere wird dann in der Projektion BE des Strahles bL geschnitten. Nun trifft BE die Projektionen der Firstlinie CF und der Dachtraufe GH in D bez. E. Folglich schneidet die Ebene M die Dachfläche in der Linie de, deren Horizontalprojektion

DE ist. de wird aber von dem Strahle bL in b′, dem Schatten des Punktes b, getroffen. Da ferner bc die Dachfläche cfgh in c trifft, so ist nun cb′ der Schatten der Firstlinie bc.

Dies ist der allgemein zu befolgende Weg, um den Schatten zu finden, welchen ein Punkt auf eine gegebene Ebene wirft; derselbe, welcher zur Lösung der Aufgabe (III, 18 I. Teil) angegeben ist. Der Schatten des Schornsteins u. s. f. ist in gleicher Weise konstruiert.

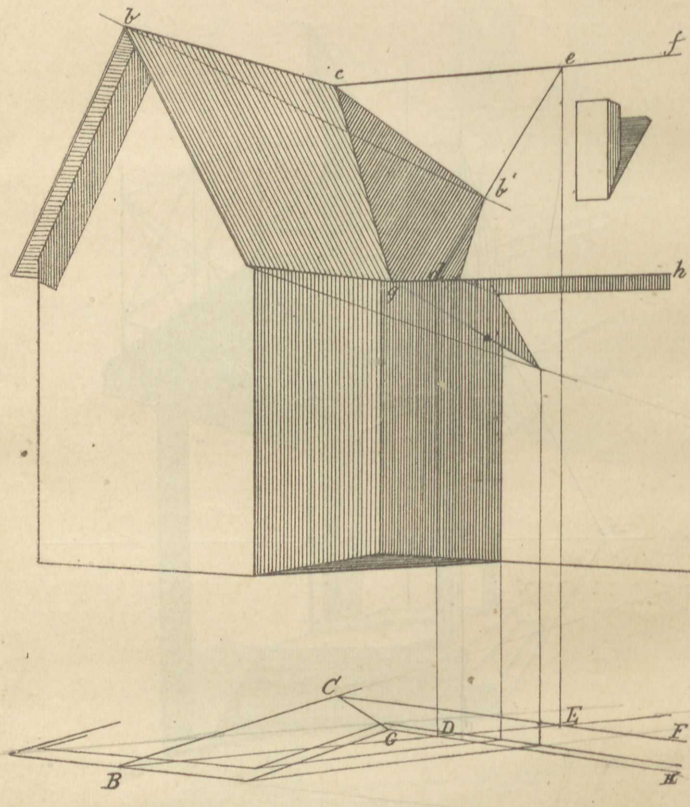


Fig. 103.

6) In Fig. 104 ist ein anderes Beispiel einer Schattenkonstruktion dargestellt. Durch einen Thorbogen, welcher in Frontstellung gezeichnet ist, blickt man in einen Hofraum. Die Schattenkonstruktion für den Hintergrund bietet keine weiteren Schwierigkeiten, dieselbe ist wie die bisherigen auszuführen. Nur auf die Bestimmung des Schattens bcd haben wir noch näher einzugehen. Der von der senkrechten Kante be herrührende Schatten bc fällt mit der Horizontalprojektion des durch e gehenden Strahles Se zusammen; derselbe ist folglich nach s gerichtet. In c erreicht der Schatten

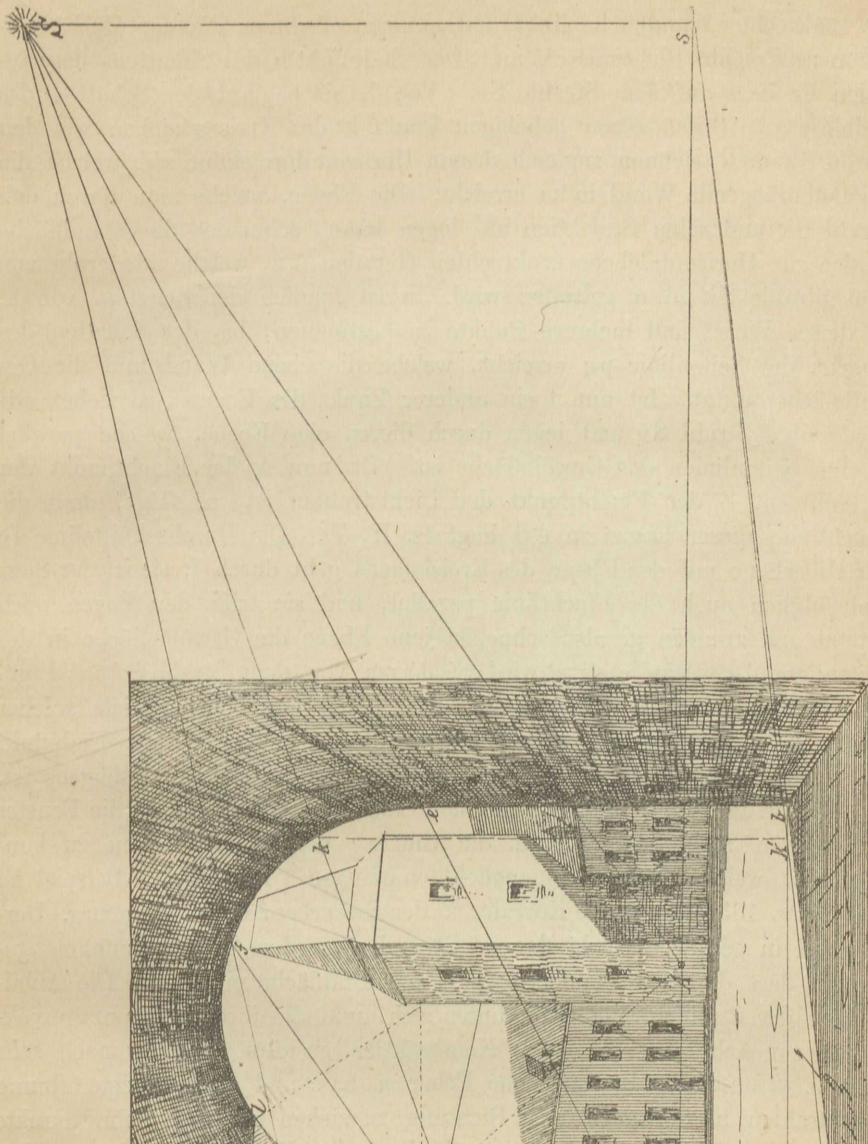


Fig. 104.

die senkrechte Wandfläche links und nimmt auf dieser die zur Horizontalebene senkrechte Richtung ch an. Der Endpunkt h des Schattens der Geraden be liegt auf dem Strahle Se. Von h ab beginnt der Schatten des Halbkreises. Durch einen beliebigen Punkt k des Kreises ziehen wir den Strahl Sk und zeichnen zugleich dessen Horizontalprojektion sk′, welche die gegenüberliegende Wand in m erreicht. Die Ebene, welche man durch den Strahl Sk und seine Projektion sk′ legen kann, schneidet die Wandfläche in der zur Horizontalebene senkrechten Geraden mn, welche wiederum von dem Strahle Sk in n getroffen wird. n ist folglich der Schatten von k. In dieser Weise sind mehrere Punkte zu bestimmen, bis der Schatten des Bogens die Seitenlinie pq erreicht, welche die ebene Wand und die Gewölbfläche trennt. Ist nun f ein anderer Punkt des Bogens, so ziehen wir wieder den Strahl Sf und legen durch diesen eine Ebene, welche parallel zu den Seitenlinien der Gewölbfläche ist. Da nun A der Fluchtpunkt der Seitenlinien, S der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen ist, so folgt, dass die Fluchtlinie dieser Ebene in AS liegt (s. II, 7). Die Durchschnittslinie fg der Hilfsebene mit der Ebene des Kreisbogens geht durch f; sie ist der Spur und folglich auch der Fluchtlinie parallel, und sie trifft den Bogen noch einmal und zwar in g, also schneidet jene Ebene die Gewölbefläche in der Seitenlinie dg. Die letztere wird wiederum von dem Strahl Sf in d getroffen, folglich ist d der Schatten von f. Hat man beliebig viele solcher Punkte konstruiert, so ergiebt sich daraus die ganze Kurve, deren Endpunkt l der Berührungspunkt der zu AS parallelen Tangente des Kreisbogens ist.

7) Auf Innenansichten von Kirchen, Sälen etc. sind die durch die Fenster einfallenden Schlaglichter, d. h. die Umrisse derjenigen Flächen zu konstruieren, welche direktes Sonnenlicht empfangen. Ein solches Beispiel ist der in Fig. 105 dargestellte Korridor in der Gewerbeschule zu Hamburg. Derselbe ist in gerader Ansicht dargestellt und ausserdem ist die Annahme gemacht, dass die Lichtstrahlen parallel zur Bildfläche einfallen. Die Abbildungen der Strahlen sind dann unter sich, und die ihrer Horizontalprojektionen zur Achse parallel. Die Konstruktion gestaltet sich demnach sehr einfach. Man hat z. B. durch die Ecken a, b, c und d der Fensteröffnung die Strahlen in der gegebenen Richtung zu ziehen und ihre Schnittpunkte mit dem Fussboden oder der gegenüberliegenden Wand zu ermitteln. Die erste Fensteröffnung ist in der Abbildung vollständig (auch die Durchsicht) angegeben, damit man erkennen kann, von welchen Punkten und Kanten die Schatten zu bestimmen sind. Wir ziehen durch a den Strahl ag; durch die Horizontalprojektion a_1 des Punktes a die Projektion a_1e parallel zur Achse. Dann liegt der Schatten von ad in a_1e. Der Strahl df trifft a_1e in f, also ist f der Schatten von d. Ferner erreicht der Schatten der Kante ad die gegenüberliegende Wand in e, und geht von diesem Punkte aus

senkrecht aufwärts bis nach g, wo derselbe von dem durch a gehenden Lichtstrahle getroffen wird. In gleicher Weise werden alle übrigen Punkte gefunden.

Eine malerische Wirkung bringen oft die in der Luft schwebenden, durch das hereinfallende Licht erleuchteten Staubteilchen hervor. Die Umrisse der so scheinbar helleren Luftschichten findet man sehr leicht. Dieselben werden, wie aus Fig. 105 hervorgeht, durch die äussersten Strahlen,

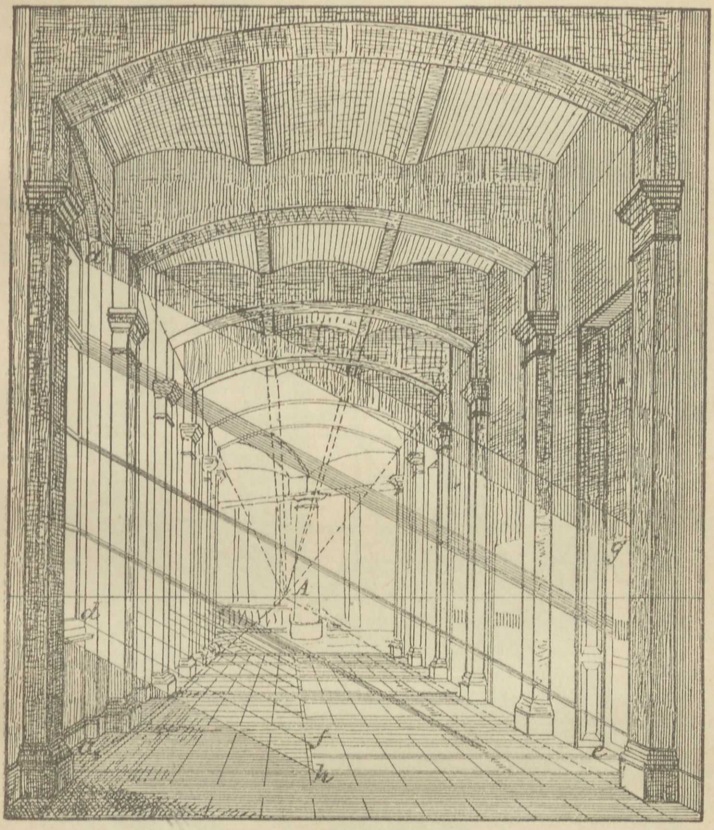


Fig 105.

welche die Ecken der Fensteröffnungen streifen, begrenzt. Die Kreuzungen der Fenstersprossen ergeben wiederum dunklere Streifen. Schlagschatten und Flächen im Eigenschatten, welche hinter solchen erleuchteten Luftschichten liegen, erscheinen wesentlich heller, als an anderen Stellen.

8) In Fig. 106 ist eine ähnliche Konstruktion dargestellt für den Fall, dass die Lichtstrahlen nicht parallel zur Bildfläche sind.

9) Beim Auf- oder Untergang steht die Sonne am Horizont. Nehmen

wir den Mittelpunkt der Sonne, also den Fluchtpunkt der Lichtstrahlen im Horizont selbst an, so fallen die Strahlen mit ihren Projektionen zusammen. Alle Schatten, welche auf horizontale Ebenen fallen, werden alsdann unendlich lang. Allerdings werden diese Ebenen selbst nur noch schwach von dem über dem Horizont hervorragenden Teile der Sonnenscheibe erleuchtet,

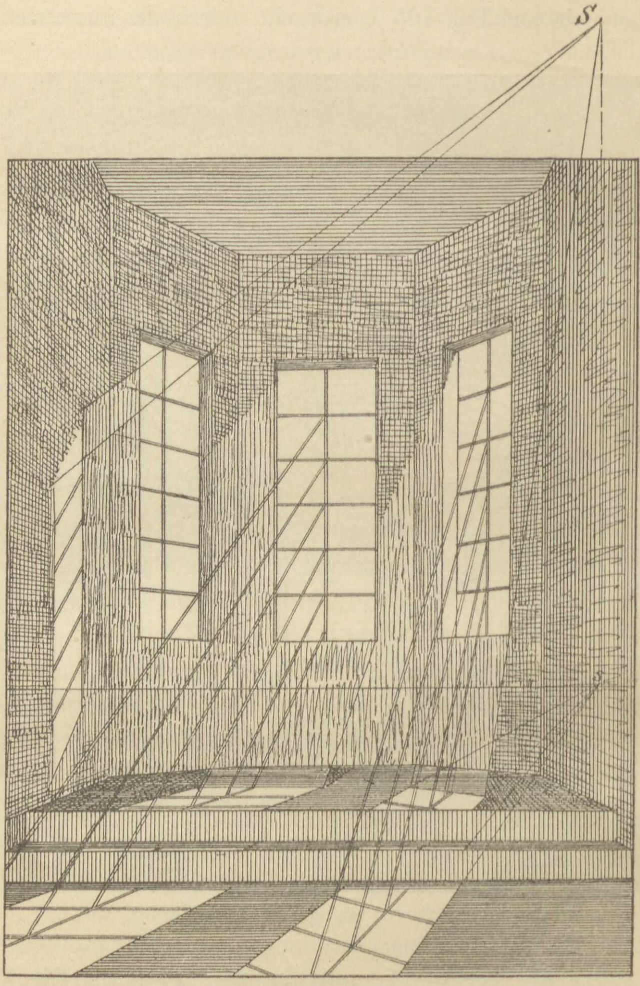


Fig. 106.

so dass diese Schatten kaum sichtbar werden, allein fast dasselbe tritt schon ein, wenn die Sonne sich dem Horizonte ganz nahe befindet. In Fig. 107 ist ein solcher Fall dargestellt. Die Schattenkonstruktion ist äusserst einfach und aus der Figur leicht zu ersehen. Bemerkenswert ist noch, dass die Grenzen des Schattens der rechts in unserer Zeichnung angegebenen

Pyramide nach S gerichtet sind. Die Lichtstrahlenebenen, welche die beiden äussersten Kanten derselben streifen, schneiden die Horizontalebene in zwei Geraden, welche S zum gemeinschaftlichen Fluchtpunkte haben. Leicht

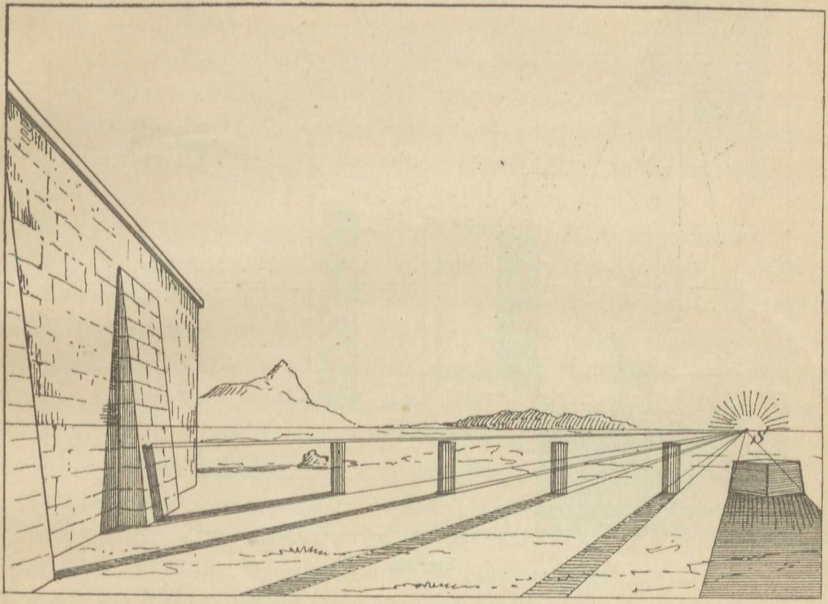


Fig. 107.

sieht man hieraus, dass der Schatten irgend eines andern über derselben Grundfläche stehenden Körpers in diesem besonderen Falle ganz derselbe ist. Denn die über der Horizontalebene liegenden Punkte können keinen Einfluss mehr auf die Gestalt des Schattens haben, weil die Schatten derselben ins Unendliche fallen.

10) In Fig. 108 ist noch ein Beispiel der Schattenkonstruktion bei künstlicher Beleuchtung angegeben. L sei die Lichtquelle, l die auf der Horizontalebene liegende Projektion von L. Der Schatten eines Eckpunktes a wird gefunden, wenn man den Strahl La und seine Horizontalprojektion la_1 zeichnet. Die letztere wird von La in dem Schatten a' des Punktes a getroffen.

Ist l' die Projektion von L auf eine Seitenwand, so findet man den Schatten eines Punktes b auf dieser ebenfalls als Schnittpunkt des Strahles Lb und seiner Projektion $l'b_1$. Überhaupt sind die sämtlichen Konstruktionen in diesem Falle so einfach, dass man dieselben leicht aus Fig. 108 erkennen kann.

11) Abweichungen in den Umrissen der Schlagschatten mit Berücksichtigung des scheinbaren Durchmessers der Sonnenscheibe (Fig. 109).

Der scheinbare Durchmesser der Sonne, d. h. der Winkel, unter welchem derselbe dem Auge erscheint, ist ca. 31 Minuten 16 Sekunden. Be-

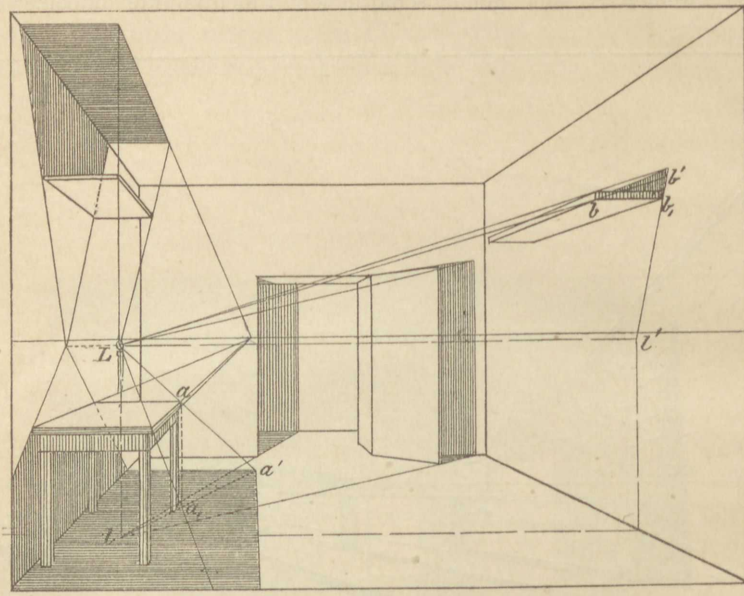


Fig. 108.

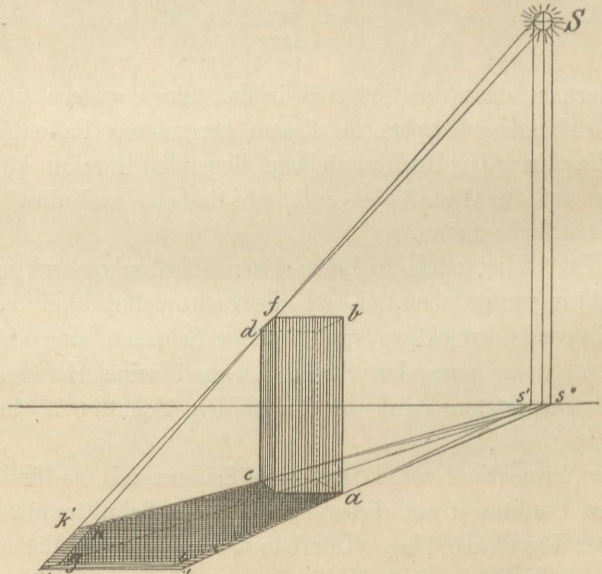


Fig. 109.

trägt die Entfernung des Auges von der Bildfläche 1 m, so würde hiernach die Sonnenscheibe durch einen Kreis von 9 mm Durchmesser dargestellt werden müssen. Für andere Entfernungen des Augenpunktes von der Bildfläche ist dieser Durchmesser proportioniert dem Abstande zu nehmen, z. B. für 2 m Entfernung würde die Sonnenscheibe als Kreis von 18 mm Durchmesser zu zeichnen sein u. s. f. Streng genommen, gilt dies nur, wenn die Abbildung des Sonnenmittelpunktes in den Hauptpunkt fällt, es wird jedoch bei anderen Lagen die Sonnenscheibe ohne merklichen Fehler ebenfalls kreisförmig gezeichnet werden können. In den weitaus meisten Fällen wird man Abbildungen der Sonne nur für einen niedrigen Stand derselben auf Gemälden antreffen, für welche die vorhin gemachte Bemerkung noch zutreffender ist.

Es sei nun der Schatten eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums zu konstruieren. S sei die Abbildung der Sonnenscheibe, welche etwas zu gross angenommen ist, um die nötigen Hilfslinien deutlich hervortreten zu lassen. Wir projicieren den horizontalen Durchmesser auf den Horizont und ziehen durch die Endpunkte der Projektion $s's''$ die Geraden $s'a$, $s'c$ und $s''a$, $s''c$. Die letzteren sind die Projektionen der äussersten Strahlen, welche vom Sonnenrand ausgehend, die senkrechten Kanten ab und cd streifen. Alle Strahlen, welche durch den höchsten Punkt des Sonnenrandes gehen und bf treffen, schneiden die Horizontalebene in der Geraden gi, welche parallel zu bf ist; von den die Kante df streifenden Strahlen rührt die Schattengrenze gk her, so dass nun $aigkc$ derjenige Teil der Horizontalebene ist, welcher von keinem Strahl getroffen werden kann. Man nennt diesen den Kernschatten des Parallelepipedums. Ferner schneiden die Strahlen, welche vom untersten Punkte des Sonnenrandes ausgehend die Kanten bf und df streifen, in $i'g'$ und $g'k'$ die Horizontalebene. Der Raum zwischen dem Kernschatten und dem Linienzug $ai'g'k'c$ wird noch von einem Teile der Sonnenstrahlen getroffen und ist deshalb etwas dunkler als der ausserhalb desselben in voller Beleuchtung liegende Teil der Horizontalebene. Nach dem äusseren Rande zu wird dieser sog. Halbschatten heller, weil in grösserer Nähe desselben mehr Strahlen auffallen, als nahe bei der Grenze des Kernschattens.

Man sieht leicht, dass in der Nähe der Punkte a und c der Halbschatten sehr schmal wird und erst in grösserer Entfernung eine merkliche Breite erreicht. Ferner nimmt die Helligkeit des Halbschattens nach den Aussenrändern sehr rasch zu, so dass die äussere Grenze des letzteren überhaupt nicht mehr wahrnehmbar ist. Ebensowenig wird man aus einiger Entfernung noch Spuren des Halbschattens bemerken. Der Schlagschatten zeigt alsdann die scharfen Umrisse des Kernschattens und wir können in allen solchen Fällen die frühere Konstruktion gelten lassen. Nur bei Abbildungen in grossem Mafsstabe und hier auch nur bei den ganz im Vordergrunde liegenden Partieen dürfte zuweilen Rücksicht auf den Halbschatten genommen werden, für welchen dann die oben angegebene Konstruktion völlig genügt.

Spiegelbilder.

12) Durch Reflexion (Zurückwerfung) der Lichtstrahlen, welche auf Wasserflächen oder andere spiegelnde Flächen fallen, entstehen sogenannte Spiegelbilder. Dieselben treten häufig in perspektivischen Darstellungen auf und müssen deshalb auch hier berücksichtigt werden.

Die Konstruktion der Spiegelbilder ist sehr einfach. Besonders gilt dies von denjenigen, welche von der Oberfläche des Wassers herrühren, weil in diesem Falle die spiegelnde Fläche stets horizontal ist. Da nun die letzteren am häufigsten Gegenstand der perspektivischen Darstellung sind, so wollen wir die Konstruktion an einem grösseren Beispiel ausführlicher betrachten. Zuvor bemerken wir folgendes:

Ist a (Fig. 110) ein beliebiger Punkt, die Horizontalebene eine spiegelnde Fläche, A_1 der Augenpunkt, ac der auffallende und cA_1 der nach A_1 zurückgeworfene Strahl, so liegen ac und cA_1 bekanntlich in einer Ebene, welche senkrecht zur Horizontalebene steht. Ferner bilden dieselben gleiche Winkel mit der Horizontalspur bc dieser Ebene. Es ist also $\angle acb = \angle A_1cd$. Verlängern wir nun das von a auf die Horizontalebene gefällte Lot, bis dasselbe von A_1c in a_1 getroffen wird, so ist

$$\triangle abc \cong \triangle a_1bc,$$

$(bc = bc, \angle abc = \angle a_1bc = R,$ $\angle acb = \angle A_1cd = \angle a_1cb)$. Folglich ist auch $a_1b = ab$. Der Strahl cA_1 hat deshalb eine solche Richtung, als käme er von dem Punkte a_1, welcher mit a auf derselben Senkrechten zur Horizontalebene, und ebenso tief unter dem Wasserspiegel liegt, als jener darüber. Der Durchschnitt a_1' des Strahles a_1A_1 mit der Bildfläche ist

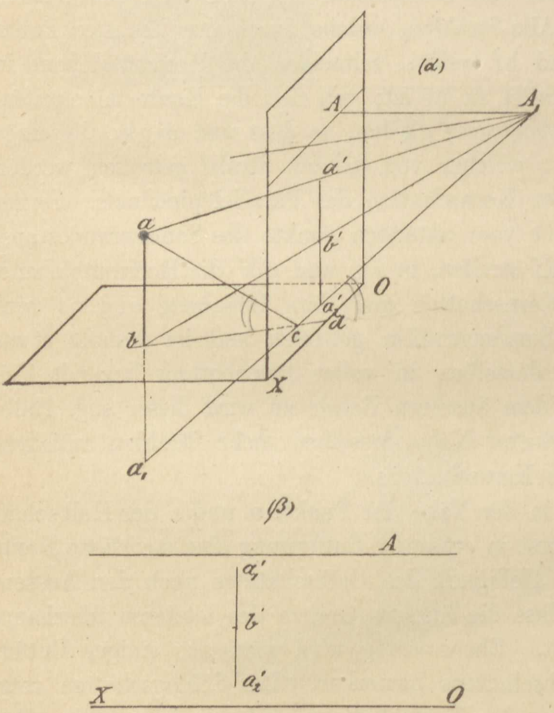


Fig. 110α u. β.

nun die Abbildung des Spiegelbildes von a. Die Abbildung der Geraden aa_1, nämlich $a'a_2'$ steht nach (Einleitung 4, α) senkrecht zur Achse und die Abbildungen der beiden Strecken ab und a_1b, also $a'b'$ und $a_2'b'$ sind ebenfalls unter sich gleich.

Ist also a' (Fig. 110 β) die Abbildung eines beliebigen Punktes a, so erhält man die Abbildung des von der Horizontalebene als spiegelnder Fläche hervorgerufenen Spiegelbildes, indem man das von a auf die Horizontalebene gefällte Lot ab abbildet und diese Abbildung $a'b'$ um sich selbst nach unten verlängert. Der Endpunkt a_2' ist die Abbildung des Spiegelbildes von a.

Hiernach können wir in einfachster Weise das Spiegelbild des in Fig. 111 dargestellten Brückenbogens und Umgebung konstruieren. Von einem be-

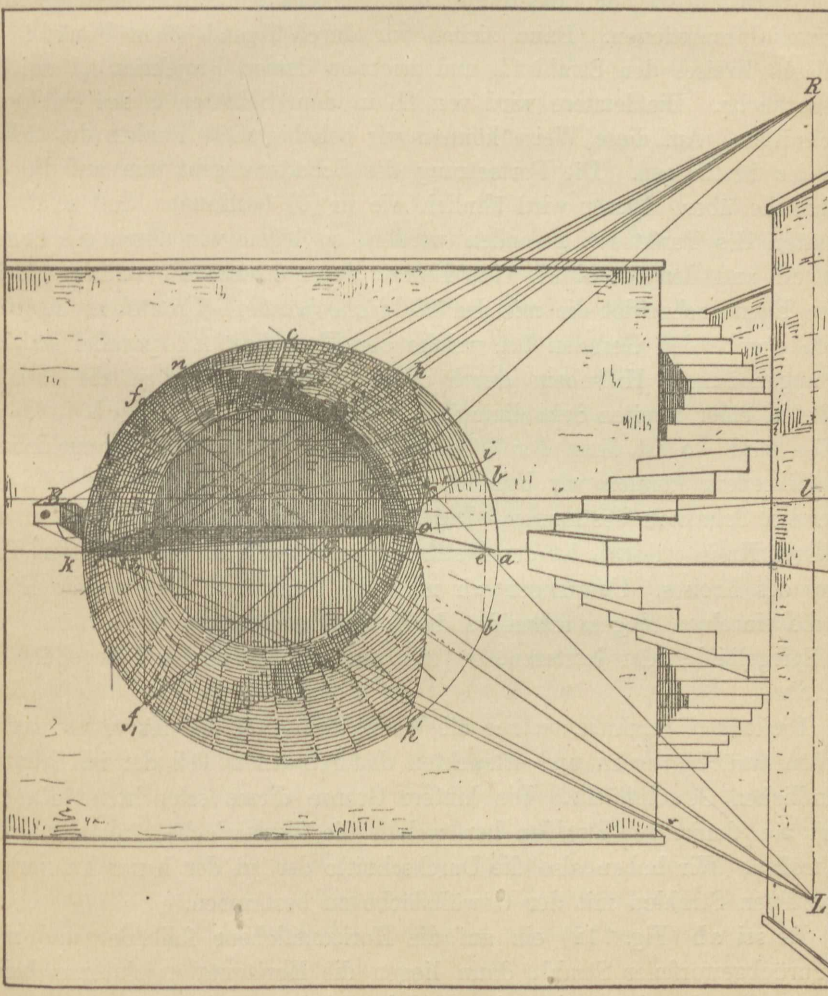


Fig. 111.

liebigen Punkte b des vorderen Kreises fällen wir ein Lot auf die Oberfläche des Wassers. Der Fusspunkt e liegt auf ak. Tragen wir auf der Verlängerung von be die Strecke $eb' = be$ ab, so ist b' die Abbildung des Spiegelbildes von b. Es ergiebt sich leicht hieraus, dass bei der in Fig. 111 gewählten Frontansicht das Spiegelbild der vorderen Begrenzung der Brückenöffnung, sowie das der ganzen Frontfläche eine der letzteren kongruente Figur, und symmetrisch in Bezug auf die Gerade ak sein muss. Ebenso erscheinen die hintere Begrenzung der Brückenöffnung und ihr Spiegelbild symmetrisch in Bezug auf die Linie pq. Leicht sind die hiernach auch Spiegelbilder der Treppen und Geländer u. s. w. zu bestimmen.

Es ist jetzt noch die Konstruktion der Schatten und deren Spiegelbilder zu erörtern. L sei der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen und l derjenige ihrer Horizontalprojektionen. Dann ziehen wir durch irgend einen Punkt f des vorderen Kreises den Strahl fL und zeichnen dessen Projektion $f_2 l$ auf der Wasserfläche. Die letztere wird von fL in dem Schatten g des Punktes f geschnitten. Auf diese Weise können wir beliebig viele Punkte des Schattens ko bestimmen. Die Fortsetzung des Schattens geht nun auf die Gewölbfläche über. Dieser wird ähnlich wie in (6) bestimmt. Soll z. B. der Schatten des Punktes c gefunden werden, so legen wir durch die Seitenlinie cd und den Strahl cL eine Ebene, deren Fluchtlinie mithin AL ist. Diese Ebene schneidet die mit der Bildfläche parallele Frontebene in einer durch c gehenden Geraden bc, welche der Fluchtlinie AL parallel ist. Da die angenommene Hilfsebene durch cd geht, so schneidet sie die Gewölbfläche in einer zweiten Seitenlinie bm, welche von dem Strahl cL in c' getroffen wird. c' ist dann der Schatten von c. Durch Parallelverschiebung der Hilfsebene können wir beliebig viele Punkte des auf die Gewölbfläche fallenden Schattens bestimmen. Der Punkt h, in welchem der Schatten den vorderen Kreis erreicht, ist der Berührungspunkt der zu AL parallelen Tangente des Kreises. Übertragen wir noch die Punkte, in welchen die Kurve oh die einzelnen Fugen schneidet durch Senkrechten zur Wasserfläche auf die Spiegelbilder der letzteren, so erhalten wir leicht das Spiegelbild oh' von oh.

Diejenigen Strahlen, welche die Wasserfläche vor der Kurve ko treffen, werden zurückgeworfen und erleuchten dadurch einen Teil der im Schatten befindlichen Gewölbfläche. Die hintere Grenze dieses erleuchteten Raumes rührt von denjenigen Strahlen her, welche die Wasserfläche längs der Kurve ko treffen. Wir haben also die Durchschnitte der an der Kurve ko zurückgeworfenen Strahlen mit der Gewölbfläche zu bestimmen.

Es sei ab (Fig. 112) ein auf die Horizontalebene fallender und nach bc zurückgeworfener Strahl, dann liegen die Horizontalprojektionen beider in einer Geraden de, und es ist $\angle abd = \angle cbe$. Ziehen wir vom Augenpunkt A_1 aus die Geraden A_1L und A_1R parallel zu ab bez. bc, so treffen diese die Bildfläche in den Fluchtpunkten L und R der direkten und der zurückgeworfenen Strahlen. Da die durch LA_1 und RA_1 gelegte Ebene senkrecht zur Horizontalebene steht, so ist auch ihre Schnittlinie RL mit der Bildfläche senkrecht zum Horizont. Ziehen wir noch A_1l parallel zu der Projektion de, so ist $\angle RA_1l = \angle cbe$, $\angle LA_1l = \angle abd$, folglich auch $\angle RA_1l = \angle LA_1l$, woraus man leicht findet, dass auch $Rl = Ll$ ist. Der Fluchtpunkt der von der Horizontalebene zurückgeworfenen Strahlen liegt hiernach ebenso hoch über dem Horizont, wie der Fluchtpunkt der auffallenden Strahlen unter demselben.

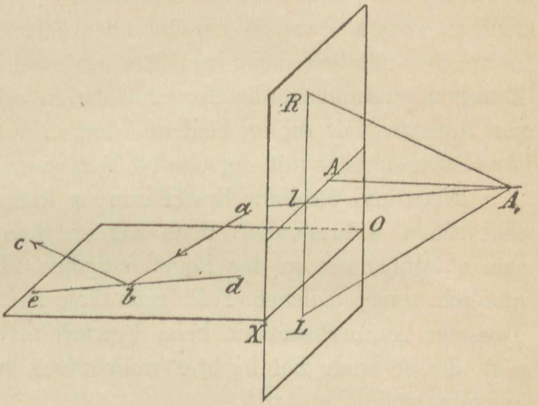


Fig. 112.

In Fig. 111 sei nun R der Fluchtpunkt der von der Wasserfläche zurückgeworfenen Strahlen; $Rl = Ll$. Trifft demnach der Strahl fg die Wasserfläche in g, so ist gR der zurückgeworfene Strahl, dessen Durchschnitt mit der Gewölbfläche bestimmt werden muss. Weil aber die Lage des Strahls gR derart ist, als käme derselbe von dem Spiegelbilde f_1 des Punktes f, so können wir annehmen, dieser Punkt f_1 oder auch das ganze in der Spiegelung erscheinende Gewölbe sei wirklich unter dem Wasser vorhanden und der Strahl gR komme von f_1. Legen wir jetzt durch f_1R und die Seitenlinie f_1A eine Ebene, so ist deren Fluchtlinie AR. Diese Ebene schneidet die Frontfläche in der zu AR parallelen Geraden if_1 und die Gewölbfläche ausser in f_1A noch in der Seitenlinie iA. Die letztere wird von dem Strahl f_1R in p′ getroffen, welcher Punkt nun der gesuchten Kurve on angehört. Diese Konstruktion setzt man fort bis zu dem Endpunkt n, welcher der Berührungspunkt der zu AR parallelen Tangente des Kreises ist. Auch von dieser Kurve ist das Spiegelbild zu zeichnen.

Es ist noch zu bemerken, dass der obere Teil der Kurve on von dem Punkte an, in welchem der bei k zurückgeworfene Strahl die Gewölbfläche trifft, von denjenigen Strahlen herrühren, welche zuerst die Wasserfläche treffen und nach der Zurückwerfung den Rand des Gewölbes zwischen k und n streifen. Wir können deshalb von k ab die zurückgeworfenen Strahlen unmittelbar durch die Punkte des Randes kn nach R ziehen und ihre Durchschnitte mit der Gewölbfläche wie oben bestimmen.

Links vom Gewölbe ragt aus der Frontfläche ein Stein B hervor, welcher die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums hat. Der leicht zu konstruierende Schatten desselben, welcher auf die Wasserfläche fällt, sei xyz. Innerhalb dieses Schlagschattens werden keine direkten Lichtstrahlen zurückgeworfen, weshalb sich das Fehlen dieser Strahlen durch den Schatten x′y′z′ auf der Gewölbfläche bemerkbar macht. Es entsteht aber noch ein zweiter, ebenfalls von B herrührender Schatten uvw auf der Gewölbfläche; es werden nämlich diejenigen Strahlen, welche nach der Zurückwerfung auf B treffen, verhindert, die Gewölbfläche zu erleuchten. Alle Strahlen, welche zur Konstruktion dieser beiden Schatten erforderlich sind, gehen nach R. Ihre Durchschnitte mit der Gewölbfläche werden ähnlich wie oben bestimmt.

Diese und ähnliche Erscheinungen kann man bei stillstehendem Wasser sehr schön wahrnehmen, doch werden dieselben dem nicht sehr aufmerksamen Beobachter in der Regel entgehen. Es ist deshalb für den Zeichner nützlich, einen solchen Fall gründlich zu studieren; er wird dadurch zu grösserer Aufmerksamkeit beim Beobachten derartiger Erscheinungen angeregt, die er auch viel leichter wahrnimmt, wenn ihm die Ursachen derselben bekannt sind.

VI. Abschnitt.

Vogelperspektive. Panoramen. Stereoskopische Bilder.

1) Mit dem Namen „Vogelperspektive“ bezeichnet man Abbildungen grösserer Länderstrecken, ganzer Städte u. s. w., wenn der Augenpunkt in bedeutender Höhe über dem abzubildenden Terrain angenommen wird. Für die Herstellung solcher Abbildungen gelten selbstverständlich alle bisher entwickelten Gesetze, aber eine wirkliche Ausführung der Konstruktion, z. B. eines Städtebildes aus der Vogelschau, würde so weitläufig sein, dass dieselbe praktisch nicht mehr ausführbar wäre. In solchen Fällen bedienen wir uns mit Vorteil eines Näherungsverfahrens, welches wir an folgendem Beispiel erläutern wollen.

In Fig. 112 ist der Grundriss des hamburgischen Stadtteiles St. Georg angegeben. Wir denken uns denselben in der Horizontalebene liegend und konstruieren nun seine perspektivische Abbildung. Hierzu dient ein Quadratnetz, welches in den Grundriss eingezeichnet wird. Die Abbildung dieses Netzes wird nun nach I, 9 bestimmt (s. Fig. 113). Mit Hilfe des letzteren kann man nun den gegebenen Grundriss nach dem Augenmafs mit hinlänglicher Genauigkeit perspektivisch abzeichnen und hierauf die einzelnen Gebäude u. s. w., welche in solchen Ansichten stets klein erscheinen, nach aufgenommenen Skizzen ebenfalls nach dem Augenmafs eintragen. Selbstverständlich ist besondere Sorgfalt auf die im Vordergrund liegenden, deshalb grösser erscheinenden Gegenstände, sowie auf dem Beschauer zugewendeten Hausfronten und auf hervorragende Baulichkeiten zu verwenden. Die senkrechten Höhen der Gebäude, Türme u. s. w. mag man stets etwas grösser nehmen, damit die Ansicht weniger gedrückt erscheint. Geringe Erhebungen

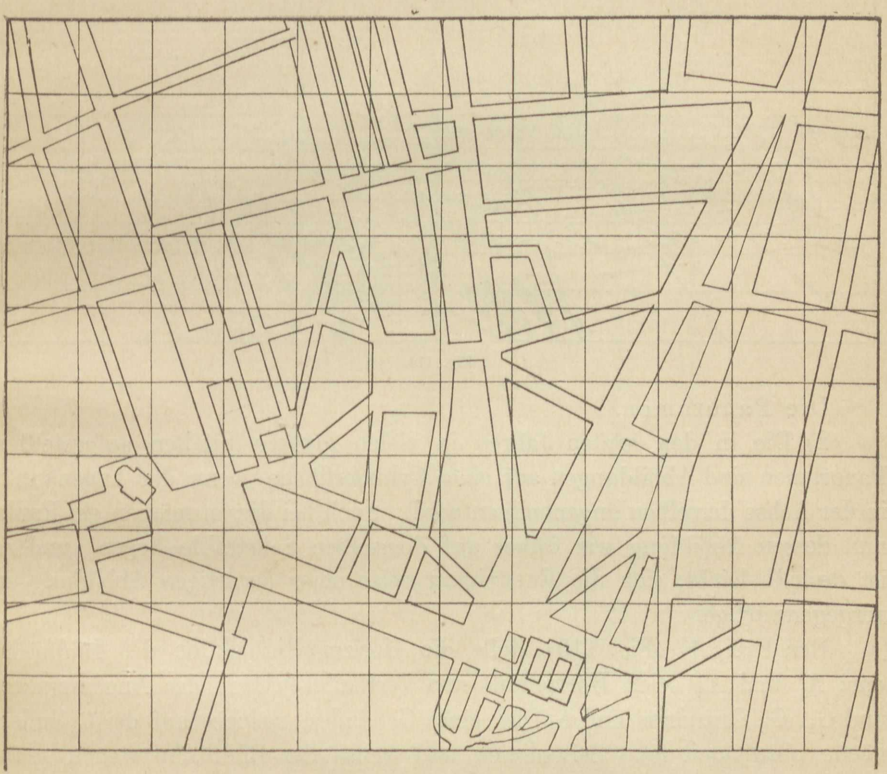


Fig 113

des Terrains werden aus grösseren Höhen kaum wahrgenommen, weshalb man bei den Städtebildern dieselben meistens vernachlässigen kann.

In Fig. 114 sind einige kleine Partieen angedeutet, z. B. die im Vordergrunde liegende Gewerbeschule und die zunächst sich anschliessenden Strasseneingänge.

Für den geübteren Zeichner, welcher bereits mit den perspektivischen Gesetzen vertraut ist, werden diese Andeutungen genügen.

Noch mag bemerkt werden, dass ein auf der Horizontalebene liegendes Quadratnetz häufig mit Vorteil zur Herstellung perspektivischer Abbildungen benutzt werden kann, namentlich wenn viele Gegenstände, welche zerstreut auf der Horizontalebene liegen, abgebildet werden sollen. Der Gebrauch eines solchen Netzes ist nach den oben gegebenen Andeutungen ohne weiteres klar.

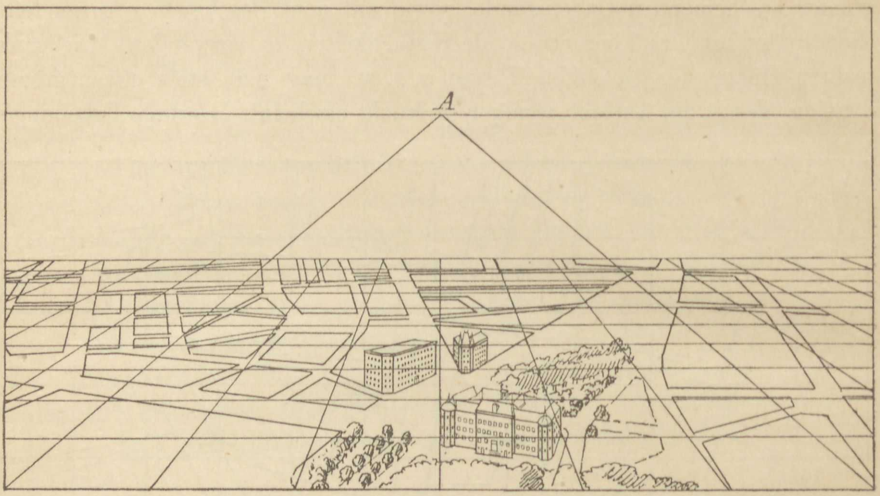


Fig. 114.

Die Panoramen.

2) Die in den letzten Jahren in vielen grossen Städten aufgestellten Panoramen sind Abbildungen auf einer Cylinderfläche, wenn der Augenpunkt in der Achse derselben angenommen wird. Auch bei diesen müssen ein Punkt und dessen Abbildung wie früher auf demselben Sehstrahle liegen, und es ist deshalb leicht, sich die Entstehungsweise einer derartigen Abbildung zu vergegenwärtigen.

Der Kreis K (Fig. 115) stelle die Horizontalprojektion der Bildfläche dar; A_1 und A_2 seien Horizontal- und Vertikalprojektion des Augenpunktes und G_1, G_2 Grundriss und Aufriss eines Gebäudes, welches auf der Cylinderfläche abzubilden ist. Seitenlinien und Achse der Bildfläche stehen senkrecht zur Horizontalebene. Die Abbildung einer Geraden, welche der Achse des Cylinders parallel ist, fällt in eine Seitenlinie. Es genügt hier, wenn wir die Abbildung irgend einer Geraden, z. B. ($a_1 b_1$, $a_2 b_2$) etwas näher betrachten.

Wir ziehen von den Endpunkten dieser Geraden die Strahlen ($a_1 A_1$, $a_2 A_2$) und ($b_1 A_1$, $b_2 A_2$) nach dem Augenpunkte und bestimmen die Schnittpunkte (a_1', a_2') und (b_1', b_2') mit der Cylinderfläche. Diese sind die Abbildungen jener Endpunkte. Auf gleiche Weise werden die Abbildungen anderer Punkte der Geraden gefunden. Um nun auf der ebenen Zeichenfläche das Bild konstruieren zu können, zeichnen wir die Abwickelung der Cylinderfläche, s. (α), in welcher $A'B'$ gleich der wahren Länge des Bogens

$a_1' b_1'$ zu machen ist. In A' und B' errichten wir Senkrechten zu $A'B'$ und tragen auf diesen die Höhen der Punkte a_2' und b_2' über der Achse OX

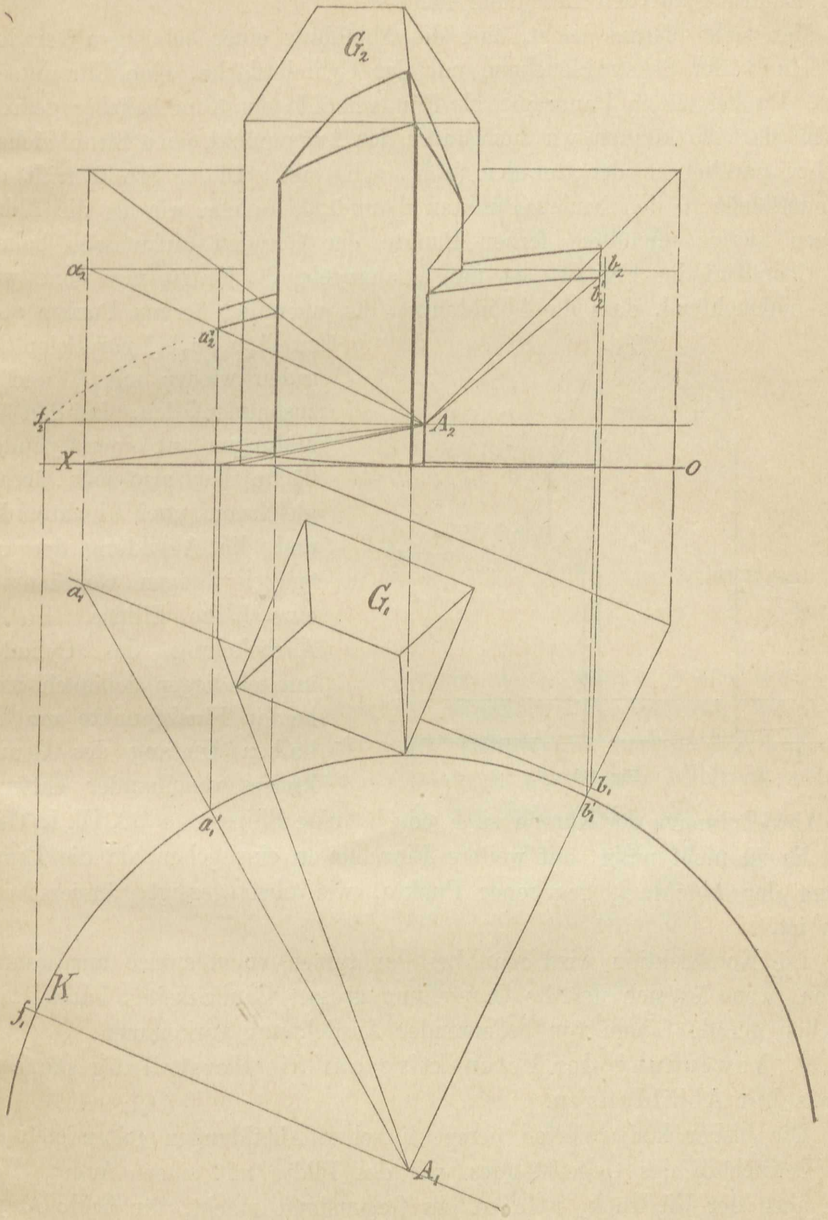


Fig. 115.

ab, wodurch sich die Abbildungen jener Endpunkte in a_2'' und b_2'' ergeben. Ebenso bestimmen wir die Abbildungen aller anderen Punkte. Wird nun die Figur α wieder nach der Form des Cylindermantels gebogen und aus dem Punkte (A_1, A_2) der Achse desselben betrachtet, so wird sie den richtigen Eindruck auf den Beschauer machen.

Man sieht hieraus leicht, dass die Abbildung einer beliebigen Geraden, als Schnitt der Sehstrahlenebene mit der Cylinderfläche, eine Ellipse sein muss. Da bei einem Panorama als Rundgemälde der Kopf beliebig gedreht werden darf, so können wir auch durch den Augenpunkt einen Strahl ziehen, welcher parallel zu der Geraden $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ ist. Dieser Strahl trifft die Cylinderfläche in den beiden Punkten f_1 und f_2, welche wir als die Abbildungen zweier unendlich fernen Punkte der Geraden aufzufassen haben. (Im Grundriss der Fig. 115 ist nur f_1 angegeben.) Es ist nun ohne weiteres einleuchtend, dass die Abbildungen der unendlich fernen Punkte aller zu $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ parallelen Geraden wieder mit f_1 und f_2 zusammenfallen. Bei den Abbildungen auf einer Cylinderfläche hat also jede Gerade gleichsam zwei Fluchtpunkte und die Abbildung der unendlich langen Geraden ist eine halbe Ellipse. In der Abwickelung des Cylindermantels liegen demnach diese beiden Fluchtpunkte um den halben Umfang des Grundkreises voneinander entfernt.

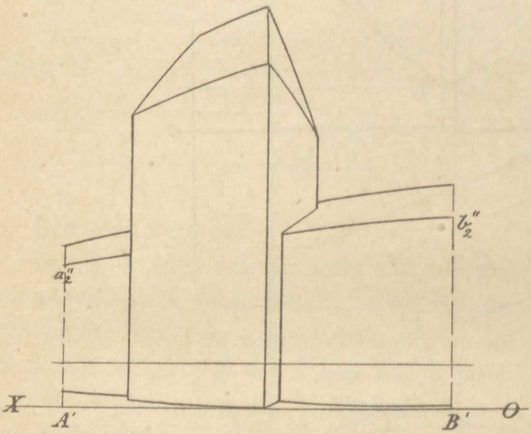


Fig. 115 α.

Die Abwickelungen der Kurven sind jedoch keine Ellipsen (s. 38, IV, I. Teil).

Es ist nicht nötig, auf weitere Einzelheiten einzugehen, da die Ermittelung der Abbildung gegebener Punkte, wie oben gezeigt, äusserst einfach ist.

Die Konstruktion wird man bei Panoramen vorzugsweise anzuwenden haben, wenn es sich um die Darstellung grosser Baulichkeiten handelt, an welchen gerade Linien von bedeutender Ausdehnung vorkommen.

3. Anwendung der Perspektive auf die Herstellung stereoskopischer Abbildungen.

Die bisher konstruierten perspektivischen Abbildungen gelten stets für das Betrachten des Gegenstandes und des Bildes mit einem Auge. Weil nun aber der Eindruck, welchen ein Gegenstand macht, für beide Augen verschieden ist, so kann durch ein einziges Bild die Täuschung nicht so weit gehen, dass der Beschauer den abgebildeten Gegenstand gleichsam körperlich greifbar vor sich zu haben glaubt. Wenn man jedoch für jedes

Auge eine entsprechende Abbildung des Gegenstandes herstellt, so kann durch das gleichzeitige Betrachten dieser Abbildungen eine derartige Täuschung in der That erreicht werden.

Es ist leicht, sich von dem Vorgange, welcher hierbei stattfindet, Rechenschaft zu geben. Sind z. B. P_1 und P_2 (Fig. 116) Grundriss und Aufriss eines rechtwinkligen Parallelepipedums, A_1 und A_2 die Horizontalprojektionen der beiden Augenpunkte und A_2'' die gemeinschaftliche Vertikalprojektion

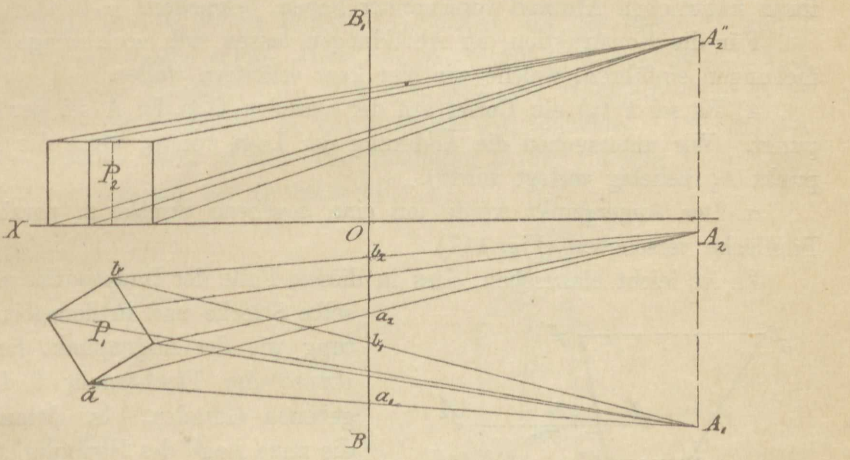


Fig. 116.

der letzteren, so können wir die beiden Abbildungen, welche auf der zu beiden Projektionsebenen senkrechten Bildfläche BB_1 entstehen, wie in Einleitung 1 konstruieren. Diese beiden Abbildungen sind in Fig. 116 α dargestellt und man wird einen vollkommen plastischen Eindruck erhalten, wenn man beide zugleich, die eine mit dem linken, die andere mit dem rechten Auge betrachtet, wozu allerdings einige Übung erforderlich ist. Erheblich erleichtert wird dies gleichzeitige Sehen zweier verschiedenen Abbildungen durch das allgemein bekannte Stereoskop.

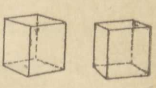


Fig. 116 α.

Der Gesamteindruck beim gleichzeitigen Betrachten der beiden Abbildungen a_1 und a_2 desselben Punktes a besteht darin, dass der Beschauende nur einen einzigen Punkt zu sehen glaubt, welchen er unwillkürlich nach dem Schnittpunkte a der beiden Strahlen a_1A_1 und a_2A_2 verlegt. Ebenso bewirken die beiden Abbildungen b_1 und b_2 beim gleichzeitigen Betrachten die Vorstellung von der wahren Lage des Punktes b u. s. f. Hieraus erklärt sich die auffällige Täuschung.

Die Herstellung zweier solcher Abbildungen hat keine weiteren Schwierigkeiten. Jede Abbildung ist nach den bisher entwickelten Gesetzen für sich zu konstruieren. Es ist hierbei nicht notwendig, dass die Entfernung der beiden Augenpunkte dem wirklichen Abstand der beiden menschlichen Augen voneinander gleich ist. Der Zeichner kann diesen Abstand sehr willkürlich annehmen. Wenn man z. B. zwei Abbildungen einer Stadt aus zwei Augenpunkten herstellt, deren Abstand das Hundertfache des Abstandes der menschlichen Augen voneinander beträgt, so entsprechen zwei solche Abbildungen denjenigen, welche man erhalten würde, wenn man ein hundertfach verkleinertes plastisches Modell jener Stadt aus zwei Augenpunkten, welche ihren natürlichen Abstand voneinander haben, betrachtet.

Für die Konstruktion der Abbildungen lassen sich noch einige Vereinfachungen einführen, welche wir hier kurz erläutern wollen.

4) Es sei P (p) ein Punkt auf der Geraden G (s, f); A sei der Hauptpunkt. Wir untersuchen die Änderung der Lage von p, wenn der Augenpunkt A_1 beliebig verlegt wird*).

α. Der Augenpunkt werde um eine gegebene Strecke m parallel zur Bildfläche verschoben (Fig. 117).

Es ist leicht einzusehen, dass in diesem Falle der Hauptpunkt um dieselbe Strecke und in derselben Richtung wie der Augenpunkt fortrückt, ebenso der Fluchtpunkt f der gegebenen Geraden. Ist demnach A′ die neue Lage des Hauptpunktes (wo $AA' = m$), so machen wir $ff' \parallel AA'$ und gleich m, dann ist f′ der neue Fluchtpunkt der gegebenen Geraden. Da die Spur s der Geraden sich nicht ändert, so ist nun sf′ die Abbildung der Geraden in Bezug auf den neuen Augenpunkt. Auf sf′ muss nun die neue Abbildung des Punktes P liegen. Denkt man sich durch die beiden Strahlen, welche von P nach beiden Lagen A_1 und A_2 (s. α) des Augenpunktes gehen, eine Ebene gelegt, so enthält diese auch die Verbindungslinie A_1A_2. Folglich muss jene Ebene die Bildfläche in einer durch p gehenden, zu A_1A_2 parallelen Geraden pp′ durchschneiden. Auf dieser und auf sf′ liegt folglich die neue Abbildung des Punktes P.

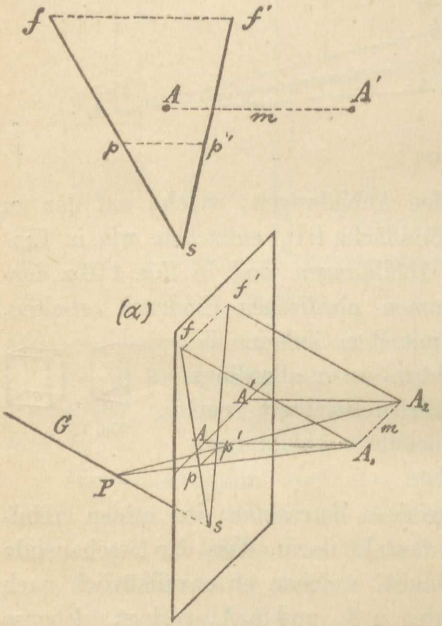


Fig. 117.

*) Vergl. „Die Transformationen in der Centralprojektion“ von J. Schmiedhauser, in dem Bericht der Gewerbeschule zu Basel 1873—74 enthalten.

Hieraus folgt, dass die Abbildung eines beliebigen Punktes durch eine zur Bildfläche parallele Verschiebung des Augenpunktes stets parallel zu der letzteren verschoben wird.

β. Der Augenpunkt werde um eine gegebene Strecke auf dem Hauptstrahle verschoben (Fig. 118).

Der zu G gehörige neue Parallelstrahl $A_2 f'$ (s. α) liegt in diesem Falle in einer Ebene mit $A_1 f$ und dem Hauptstrahle $A_1 A$, und derselbe trifft deshalb die Bildfläche in einem Punkte f′, welcher auf der durch A und f gehenden Geraden liegen muss. Hiernach ist sf′ die neue Abbildung von G. Ferner liegen die Strahlen PA_1 und PA_2 und der Hauptstrahl in einer Ebene, welche die Bildfläche in der Geraden pA schneidet. Da, wo pA von PA_2 getroffen wird, ist die neue Abbildung p′ des Punktes P; dieselbe liegt auch zugleich auf der Geraden sf′.

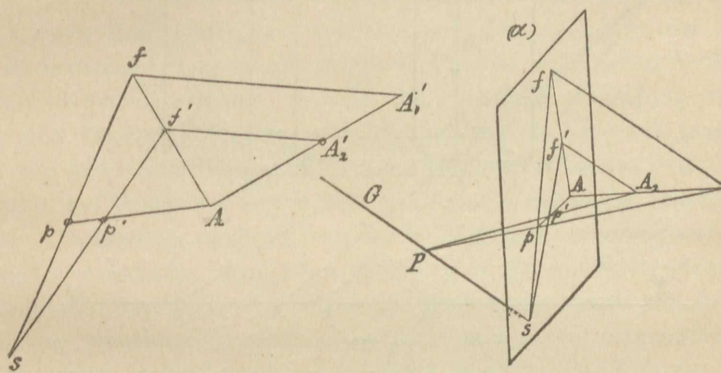


Fig. 118.

Zur Ausführung der Konstruktion auf der ebenen Zeichenfläche ist die Ebene $A_1 Af$ durch Drehung um Af in die Bildebene niederzulegen. Wir ziehen demnach AA_1' senkrecht zu Af, machen AA_1' gleich der ursprünglichen Entfernung des Auges von der Bildfläche und $A_1'A_2'$ gleich der gegebenen Strecke, um welche der Augenpunkt auf dem Hauptstrahle verschoben werden soll. Zu $A_1'f$ ziehen wir die Parallele $A_2'f'$, welche Af in dem neuen Fluchtpunkte f′ der Geraden G schneidet. Hierdurch ergiebt sich sf′ als die neue Abbidung von G. Die neue Abbildung p′ des Punktes P liegt nun im Durchschnitt von sf′ und Ap.

γ. Der Augenpunkt A_1 werde nach einem anderen beliebigen Punkte A_2 verlegt.

Wir geben dem Augenpunkte A_1 zuerst eine Verschiebung parallel zur Bildfläche, bis seine Projektion auf dem zu A_2 gehörigen Hauptstrahle liegt. Hierdurch gelangt A_1 nach einem Punkte A′ dieses Hauptstrahles. Auf dem letzteren verschieben wir alsdann A′ nach A_2. Die hierdurch verursachten

Änderungen der Lage von p können wir nacheinander mit Hilfe von α. und β. bestimmen. Damit ist dieser Fall erledigt.

5) Für die Konstruktion stereoskopischer Abbildungen ist nun der in α. erläuterte Fall mit Vorteil zu benutzen, weil man hiernach aus der Abbildung, welche für das eine Auge bereits konstruiert ist, diejenige für das andere Auge leicht findet, wenn man eine zur Bildfläche parallele Verschiebung des Augenpunktes vornimmt.

So ist z. B. aus der für das linke Auge gegebenen Abbildung K eines auf der Horizontalebene stehenden rechtwinkligen Parallelepipedums (Fig. 119),

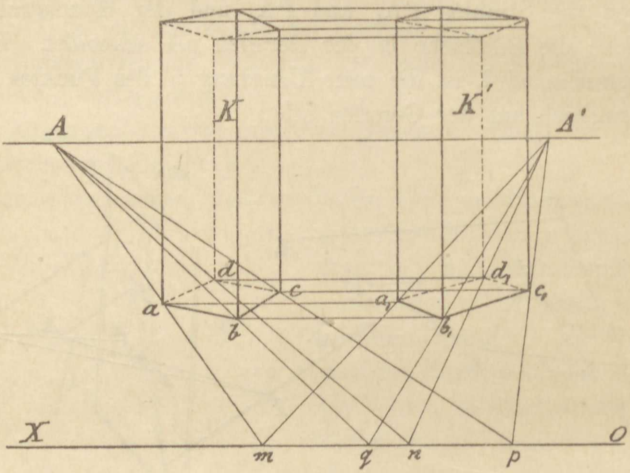


Fig. 119.

bei welcher A der Hauptpunkt, AA′ der Horizont, OX die Achse ist, die Abbildung für das rechte Auge (d. h. in Bezug auf den neuen Hauptpunkt A′) folgendermafsen konstruiert.

Durch sämtliche Ecken der Grundfläche abcd werden Senkrechten zur Achse gezogen, deren Abbildungen also nach A gerichtet sind, während ihre Spuren m, n, p, q in OX liegen. Durch die Verschiebung des Hauptpunktes von A nach A′ gehen nun die Abbildungen jener Senkrechten in die Geraden mA′, nA′, pA′, qA′ über. Nach α. sind die Verschiebungen der Abbildungen der Ecken parallel zu AA′, folglich finden wir die neuen Abbildungen a_1, b_1, c_1, d_1 durch die Geraden aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, welche wir durch die Ecken a, b, c, d parallel zum Horizont ziehen u. s. f.

Die Längen der zur Horizontalebene senkrechten Kanten des Parallelepipedums stimmen wegen der parallelen Verschiebungen aller Punkte in den beiden Abbildungen überein.

Sind die Fluchtpunkte und Spuren der einzelnen Kanten erreichbar, so kann man durch Verschiebung der ersteren ebenso leicht die eine Abbildung aus der anderen ableiten.

Diese Andeutungen mögen genügen. Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass eine Verlegung des Augenpunktes oder der Horizontalebene bei perspektivischen Konstruktionen zuweilen auch benutzt werden kann, wenn es sich um genauere Bestimmung des Durchschnittes zweier unter sehr spitzem Winkel zusammentreffender Geraden handelt.

VII. Abschnitt.

Reliefperspektive.

1) Unter Reliefperspektive verstehen wir die Lehre von der Abbildung eines körperlichen Gegenstandes in einem Raume. Wir gehen hierbei wieder von der Voraussetzung aus, es solle die räumliche Abbildung von einem bestimmten Augenpunkte aus betrachtet, denselben Eindruck machen, wie der abgebildete Gegenstand, woraus zunächst folgt, dass ein Punkt und seine Abbildung auf demselben durch den Augenpunkt gehenden Sehstrahl liegen müssen. Die Gesetze, nach welchen die Abbildungen herzustellen sind, lassen sich leicht entwickeln; man kann dieselben sogar auf linearperspektivische Konstruktionen zurückführen. Wenn nun auch in der Praxis von der strengen Darstellung manchmal abgewichen werden muss, weil namentlich die Beleuchtung hierbei eine eigentümliche Rolle spielt, so ist doch ein genaueres Studium der Gesetze um so mehr zu empfehlen, da man bei diesen Darstellungen weit mehr Fehlern begegnet, als bei den Abbildungen auf einer Ebene. Wer aber mit den Gesetzen gründlich vertraut ist, wird auch ohne viel zu konstruieren das Richtige treffen und auch wissen, in welchen Fällen mit Rücksicht auf künstlerische Wirkung von der strengen Darstellung abgewichen werden kann.

Um in möglichst verständlicher Weise zu der Darstellung solcher räumlichen Abbildungen zu gelangen, wollen wir an einem einfachen Beispiel die zu befolgenden Grundsätze feststellen.

2) Es sei FF_1H_1H (Fig. 120) die gerade Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedums, welches wir uns so gegen die Zeichenfläche gestellt denken, dass die Geraden FH, FF_1, F_1H_1 und HH_1 die Projektionen von 4 Seitenflächen darstellen. Der Augenpunkt sei A. Es soll nun das Parallelepipedum in dem Raume $BCFF_1$, welcher ebenfalls die Gestalt eines rechtwinkligen Parallepipedums hat, und dessen dem Augenpunkt zugewendete Seitenfläche mit FF_1 zusammenfällt, abgebildet werden. Die Abbildung

von FF_1 ist diese selbst und die Abbildung der Seitenfläche HH_1 soll in der Ebene BC liegen.

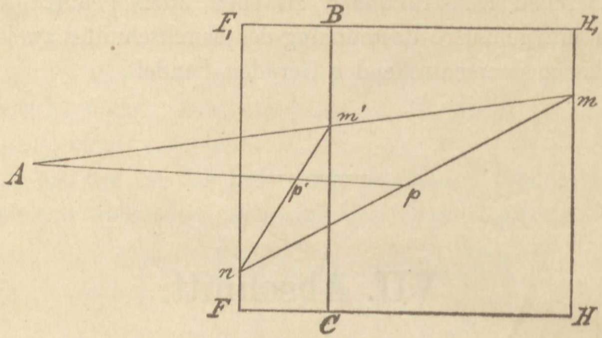


Fig. 120.

Den Raum FF_1BC wollen wir künftig den Bildraum und die dem Augenpunkt zugewendete Seitenfläche FF_1 die Frontebene, ferner HH_1 die Hintergrundsebene nennen.

Die Abbildung eines beliebigen Punktes m der Ebene HH_1 liegt hiernach im Durchschnitt m′ des Sehstrahles Am mit der Ebene BC. Dagegen fällt die Abbildung eines Punktes n der Frontebene mit n zusammen. Ziehen wir jetzt die Geraden nm′ und nm, so fällt nm′ von A aus gesehen scheinbar mit nm zusammen und nm′ soll deshalb als die in dem Bildraum liegende Abbildung von nm betrachtet werden.

Anmerkung. Dass eine Gerade G im Relief wieder durch eine Gerade abgebildet werden muss, ist wohl eine ganz natürliche oder selbstverständliche Forderung. Allerdings könnte auch jede Kurve, welche in der durch G und den Augenpunkt gehenden Ebene liegt, als eine Abbildung von G betrachtet werden. Weil aber ein Relief ebensowohl wie eine ebene Abbildung in der Regel nicht gerade von dem richtigen Augenpunkt aus betrachtet wird, so würde die Krümmung der Abbildungen sofort in störender Weise sichtbar werden.

Ist p ein beliebiger Punkt der Geraden nm, so ist seine Abbildung p′ der Durchschnitt des Sehstrahles pA mit nm′.

Aus den oben festgestellten Voraussetzungen über die Entstehung der räumlichen Abbildung leiten wir nun folgende Gesetze ab:

α. Die Abbildung eines beliebigen Punktes m ist der Durchschnitt m′ der Abbildungen zweier in m sich schneidenden Geraden.

Zum Beweise benutzen wir die schiefe Projektion (Fig. 121). Es seien ab und cd zwei durch m gehende Geraden, a und c ihre Durchschnitte mit der Frontebene, und b und d die Durchschnitte mit der Ebene H, deren

Abbildung in die Ebene h fallen soll. Die Strahlen bA und dA treffen nun die Ebene h in b′ und d′, woraus sich ab′ und cd′ als Abbildungen von ab und cd ergeben. Es ist nun noch zu zeigen, dass ab′ und cd′ sich in einem Punkte m′ schneiden und dass dieser auf dem Sehstrahl Am liegt.

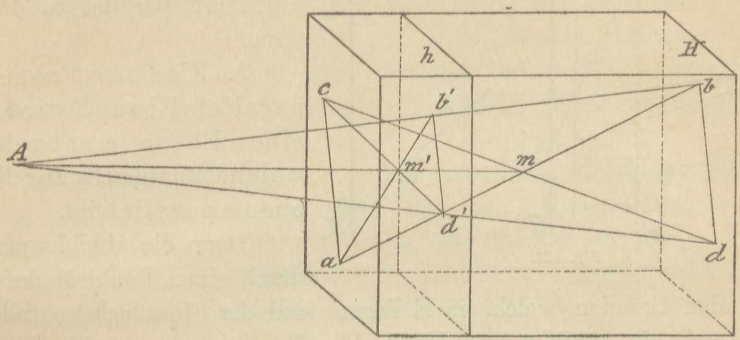


Fig. 121.

Nun liegen ab und cd (weil sie sich in m schneiden) in einer Ebene und folglich sind ac und bd als Durchschnitte dieser Ebene mit zwei parallelen Ebenen unter sich parallel. Ebenso ist b′d′ mit bd, also auch mit ac parallel (b′d′ und bd sind Durchschnitte der Ebene Abd mit zwei parallelen Ebenen). Man kann demnach durch ac und b′d′ wiederum eine Ebene legen, welche auch die Abbildungen ab′ und cd′ enthält. Folglich müssen die letzteren sich in einem Punkte m′ schneiden. Nun liegt aber m′ auch in den beiden Sehstrahlenebenen Aab und Acd und folglich in der Schnittlinie dem Sehstrahl Am.

Hieraus folgt auch unmittelbar: Die Abbildungen aller durch einen Punkt m gehenden Geraden gehen durch dessen Abbildung m′.

β. Die Abbildung einer Ebene ist wieder eine Ebene.

Es ist aus Fig. 121 leicht zu ersehen, dass die durch ab′ und cd′ bestimmte Ebene die Abbildung der durch ab und cd gehende Ebene ist. Die Schnittlinie mit der Frontfläche (Spur) ist beiden gemeinsam, und die Schnittlinie der Abbildung mit der Ebene h ist ihrer Spur parallel. Die Abbildung der Ebene enthält die Abbildungen aller Geraden derselben.

γ. Die Abbildung einer zur Frontebene parallelen Geraden ist eine der abgebildeten parallele Gerade (Fig. 122).

Die Gerade mn und ihre Abbildung m′n′ treffen stets in demselben Punkte (Spur) die Frontebene. Schneidet also mn die Frontebene im Unendlichen, so ist dasselbe mit der Abbildung m′n′ der Fall. Ferner sind mn und m′n unter sich auch parallel, weil beide noch in einer Ebene, der Sehstrahlenebene liegen. Um die Abbildung der Geraden mn zu bestimmen, ermitteln wir diejenige eines beliebigen Punktes m derselben. Wir ziehen durch m die beliebige Gerade bc, deren Abbildung bc′, wie oben angegeben, gefunden wird. Dann schneidet der Sehstrahl Am die Gerade bc′ in der Abbildung m′ von m. Durch m′ geht die Abbildung m′n′ der Geraden mn parallel zu der letzteren.

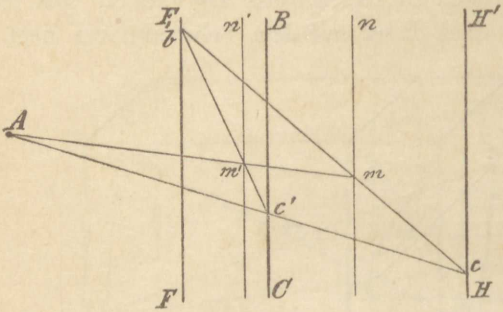


Fig. 122.

δ. Eine zur Frontebene parallele Ebene E wird durch eine Ebene e abgebildet, welche ebenfalls zur Frontebene parallel ist.

Denn die Abbildungen aller durch einen Punkt M der Ebene E gehenden Geraden, welche in E liegen, sind der Frontfläche parallel und gehen durch die Abbildung m des Punktes M. Somit liegen die Abildungen jener Geraden in einer Ebene e, der Abbildung der Ebene E.

Aus diesem Grunde werden die Abbildungen ebener Figuren, welche zur Frontfläche parallel sind, den Originalen geometrisch ähnlich.

Fluchtpunkte und Fluchtlinien.

3) Der Strahl AA_1, welcher vom Augenpunkt aus senkrecht zur Frontebene gezogen wird, soll der Hauptstrahl genannt werden (Fig. 123).

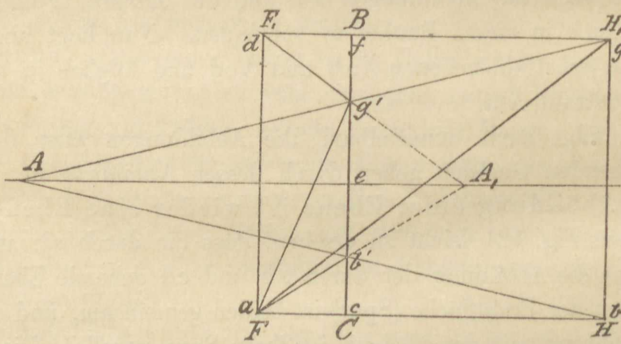


Fig. 123.

Es sei ab eine Gerade, welche dem Hauptstrahle parallel ist. Die Abbildung ihres Schnittpunktes b mit der Hintergrundsebene HH_1 sei b′, dann ist ab′ die Abbildung der Geraden. Weil nun ab′ in der durch ab und den Hauptstrahl gehenden Ebene liegt, so schneidet ab′ den Hauptstrahl in einem Punkte A_1. Nach diesem Punkte sind die Abbildungen aller zur Frontebene senkrechten Geraden gerichtet. Hiervon überzeugt man sich leicht durch die Proportion:

$$A_1e : Ae = ac : bc.$$

Ist dg eine andere zur Frontebene senkrechte Gerade und dg′ ihre Abbildung, und schneidet die letztere den Hauptstrahl in dem Punkte A′, so erhält man die Proportion:

$$A'e : Ae = df : fg.$$

Der Vergleich beider Proportionen zeigt, dass, weil $Ae = Ae$, $df = ac$, $fg = bc$, auch $A'e = A_1e$ sein muss, d. h. A_1 und A' fallen zusammen. Deshalb sind die Abbildungen aller zur Frontebene senkrechten Geraden nach dem Punkte A_1 gerichtet, welchen wir künftig den Hauptpunkt nennen wollen.

Ist der Hauptpunkt gegeben, so kann man die Abbildung jeder zur Frontebene senkrechten Geraden finden, ohne den Augenpunkt zu benutzen.

Ferner sieht man aus Fig. 123 leicht, wie die Abbildung eines Punktes g der Hintergrundsebene mit Hilfe des Hauptpunktes bestimmt werden kann. Wir ziehen durch g die Gerade dg senkrecht zur Frontebene; die Abbildung dieser Geraden ist die von der Spur d nach dem Hauptpunkte A_1 gerichtete Gerade, welche nun BC in g′, der Abbildung von g, schneidet.

Endlich ergiebt sich, dass man auch eine beliebige Gerade z. B. ag abbilden kann, sobald der Hauptpunkt gegeben ist. Die Abbildung ist die Gerade, welche den vorhin gefundenen Punkt g′ mit a verbindet.

4) Durch den Hauptpunkt A_1, welcher als Abbildung des unendlich fernen Punktes jeder zur Frontebene senkrechten Geraden betrachtet werden kann, legen wir eine zur Frontebene parallele Ebene VV′. Diese Ebene enthält die Fluchtpunkte (d. h. die Abbildungen der unendlich fernen Punkte) aller möglichen Geraden (Fig. 124).

Ist wieder wie in der vorigen Figur ab′ die Abbildung der zur Bildfläche senkrechten Geraden ab; A_1 der Hauptpunkt, ferner dg eine beliebige Gerade, dg′ deren Abbildung, welche verlängert den Parallelstrahl Af in f schneidet, so folgt:

$$A_1e : Ae = ac : bc;$$

ferner:

$$fm : Am = dk : gk,$$
$$= ac : bc;$$

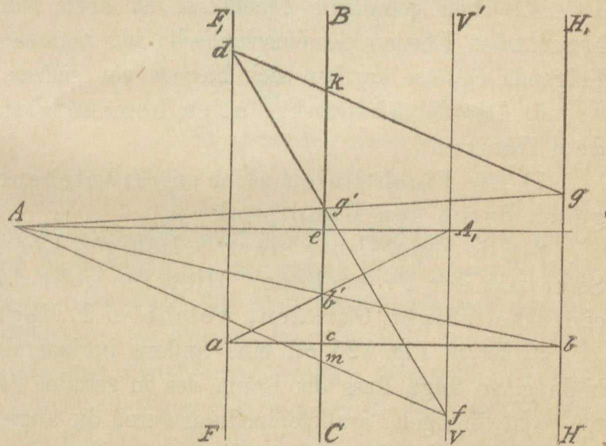


Fig. 124.

folglich verhält sich auch:

$$fm : Am = A_1e : Ae.$$

Mithin ist die durch A_1 und f gehende Gerade VV' parallel zur Frontebene. Man sieht leicht, dass die Gerade VV' die Projektion einer Ebene darstellt, welche parallel zur Frontebene ist. Hiernach liegen die Fluchtpunkte aller Geraden in dieser Ebene, welche wir deshalb künftig die Fluchtebene nennen wollen. Die Abbildungen paralleler Geraden sind folglich nach demjenigen Punkte gerichtet, in welchem der durch A gehende Parallelstrahl die Fluchtebene schneidet.

5) Wie bei den Abbildungen auf einer Ebene haben wir auch bei den räumlichen Abbildungen die sog. Fluchtlinie, d. h. die Abbildung der unendlich fernen Geraden einer Ebene, zu berücksichtigen. Die Abbildung der horizontalen Ebene ab (Fig. 125) wird durch ab_1 dargestellt. Sie hat mit der gegebenen Ebene eine gemeinschaftliche Spur in der Frontebene, welche in unserer geraden Projektion als der Punkt a erscheint. Erweitern wir die Ebene ab_1, so schneidet sie die Fluchtebene in einer der Spur parallelen Geraden, welche durch den Hauptpunkt A_1 geht. Diese Gerade ist somit die Fluchtlinie der Ebene ab; sie enthält die Fluchtpunkte aller in ab liegenden Geraden.

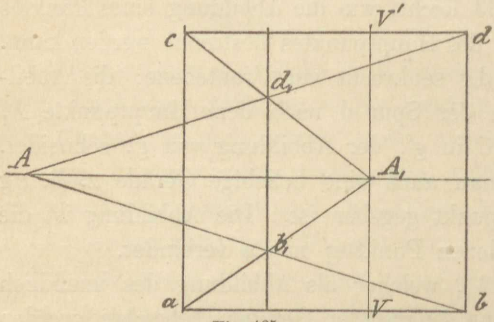


Fig. 125.

Die eben gefundene Fluchtlinie ist aber, wie man leicht sieht, allen horizontalen Ebenen gemeinschaftlich; wir nennen dieselbe den Horizont. Folgende Gesetze ergeben sich hieraus von selbst:

6) Die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden liegen auf dem Horizont.

7) Die Fluchtlinien aller zur Frontebene senkrechten Ebenen gehen durch den Hauptpunkt A_1.

8) Die Fluchtlinie einer beliebigen Ebene E ist parallel ihrer Spur mit der Frontebene. Dieselbe geht durch den Fluchtpunkt einer beliebigen Geraden, welche in E liegt.

9) Ist in Fig. 125 cd eine andere horizontale Ebene, cd_1 deren Abbildung, so folgt, dass der Raum des in gerader Projektion acdb dargestellten rechtwinkligen Parallelepipedums durch die abgestumpfte Pyramide acd_1b_1 abgebildet wird. Der vollständige pyramidale Raum acA_1a ist die Abbildung des nach rechts bis ins unendliche erweiterten prismatischen Raumes acdb.

Die bisher aufgestellten Gesetze enthalten dasjenige, was zur Konstruktion eines Reliefs erforderlich ist. Wir wollen zunächst ein einfaches Beispiel als Anwendung näher betrachten.

10) Die Abbildung des in Fig. 126 durch Grund- und Aufriss dargestellten Raumes (F_1Fgh, $F'F_1'g'h'$), welcher die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums hat, soll in dem von den parallelen Ebenen FF_1 und HH_1 begrenzten Bildraum (Aufriss) konstruiert werden. Innerhalb des ersten Raumes befindet sich, an der Hintergrundsebene stehend, ein rechtwinkliges Parallelepipedum P auf zwei rechteckigen Platten Q und R ruhend, deren Dimensionen ebenfalls aus Grundriss und Aufriss zu erkennen sind. Auch hiervon sind die räumlichen Abbildungen zu ermitteln.

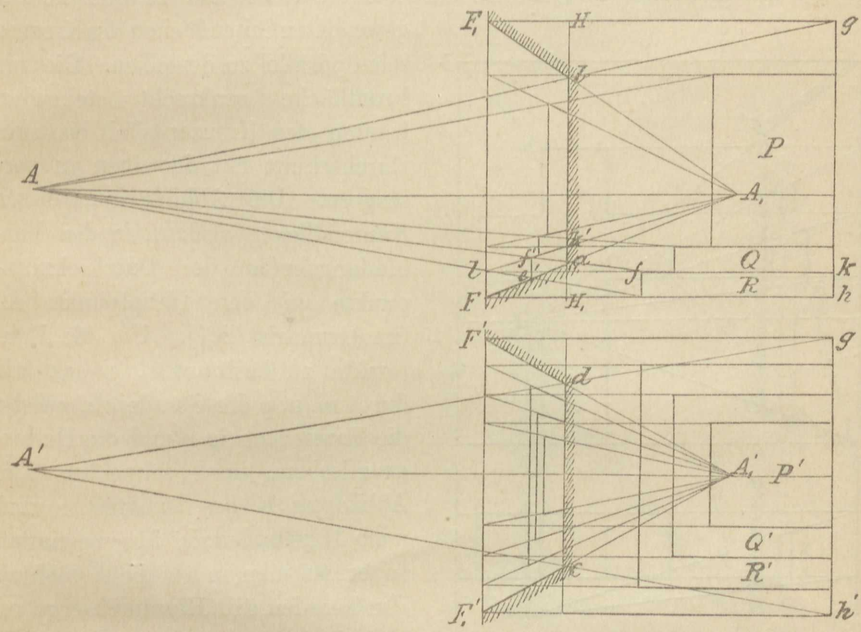


Fig. 126.

Die Abbildung des gegebenen parallelepipedischen Raumes wird nach 9) durch den abgestumpften pyramidalen Raum, dessen Projektionen F_1Fab und $F_1'F'dc$ sind, dargestellt. Um auch die Abbildungen der drei Körper P, Q und R zu finden, verlängern wir sowohl im Grundriss wie auch im Aufriss diejenigen Kanten bis zur Frontfläche, welche senkrecht zu der letzteren stehen. Von den Durchschnittspunkten aus gehen die Abbildungen derselben nach dem Hauptpunkte A_1. So ist z. B. die in lA_1 liegende Strecke lk' (Aufriss) die Abbildung von lk. Ziehen wir noch den Strahl fA, so schneidet derselbe lk' in f', welcher die Abbildung von f ist. Dann erhält man weiter in der zu FF_1 gezogenen Parallelen $e'f'$ die Abbildung von ef u. s. f. Auf gleiche Weise kann man die Abbildungen aller übrigen Eckpunkte in beiden Projektionen ermitteln, und man sieht leicht, dass aus dem jetzt durch Grund- und Aufrisss dargestellten Relief alle Dimensionen desselben entnommen werden können.

11) In 3) ist gezeigt worden, dass die Abbildung einer beliebigen Geraden auch mit Hilfe des Hauptpunktes A_1 allein gefunden werden kann. Hierdurch wird der zur Konstruktion der Abbildung erforderliche Raum auf den abzubildenden Raum beschränkt, so lange A_1 innerhalb des letzteren liegt. Wir geben hierzu einige Beispiele.

Abbildung eines auf der Horizontalebene stehenden Kreuzes, welches in Fig. 127 durch Grund- und Aufriss dargestellt ist. Die der Frontebene zugewendeten Seitenflächen des Kreuzes seien parallel zu derselben. Die zur Frontfläche senkrecht stehenden Kanten des Kreuzes sind bis zum Durchschnitt mit derselben zu verlängern. Die Abbildungen dieser Kanten liegen alsdann in den Verbindungslinien der Durchschnittspunkte mit dem Hauptpunkte A_1 (im Grundriss A_1'). Um die Eckpunkte zu bestimmen, ziehen wir durch m, n, p die Gerade ab, welche die Frontebene in a und die Hintergrundsebene in b schneidet. Die Abbildung b′ des Punktes b wird nach 3) gefunden; ist diese bestimmt, so erhält man in ab′ die Abbildung der Geraden ab. Hierdurch ergeben sich in m′, n′ und p′ die Abbildungen der Punkte m, n und p, durch welche nun wieder die Abbildungen der zur Horizontalebene senkrechten Kanten des Kreuzes bestimmt sind. Endlich lässt sich durch Projicieren aus dem gefundenen Aufriss leicht der Grundriss der Abbildung vervollständigen, wodurch dann alle Dimensionen des Reliefs ermittelt sind.

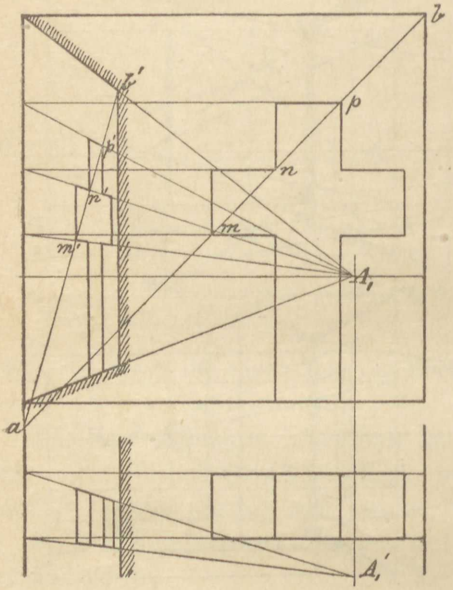


Fig. 127.

12) Abbildung einer Treppe in schiefer Stellung gegen die Frontfläche (Fig. 128).

Lage und Dimensionen der Treppe sind aus Grund- und Aufriss zu erkennen. Die Abbildung kann ebenfalls ohne Benutzung des Augenpunktes konstruiert werden, wenn der Hauptpunkt A_1 gegeben ist. Wir verlängern a_1b_1 und c_1d_1 (Grundriss) bis zu ihren Schnittpunkten m und n mit der

Frontebene; bestimmen alsdann die Abbildung b' des Punktes b_1 nach 3), hieraus ergiebt sich mb' als Abbildung von mb_1. Es sei VV_1 die Projektion der durch A_1 gehenden Fluchtebene. Wir verlängern mb' bis zum Durchschnitt f mit VV_1; dann ist f der Fluchtpunkt, nach welchem auch die Abbildung nd' der Geraden nd_1 gerichtet ist. Da der Fluchtpunkt der zu a_1c_1 parallelen Kanten nicht zugänglich ist, so bestimmen wir die Abbildungen derselben auf folgende Weise. Von einem beliebigen Fluchtpunkte f_1 auf VV_1 ziehen wir durch b' die Gerade pf_1, alsdann ist pb' die Abbildung von pb_1. Nun legen wir durch a_1, c_1 und d_1 und durch die auf a_1b_1 und c_1d_1 liegenden Teilpunkte Parallelen zu pb_1 und verbinden die Punkte, in welchen die letzteren die Frontebene treffen mit f_1 durch Geraden. Hierdurch erhält man die Abbildungen jener Parallelen und damit auch auf mb' und nf die Abbildungen aller Ecken des Grundrisses.

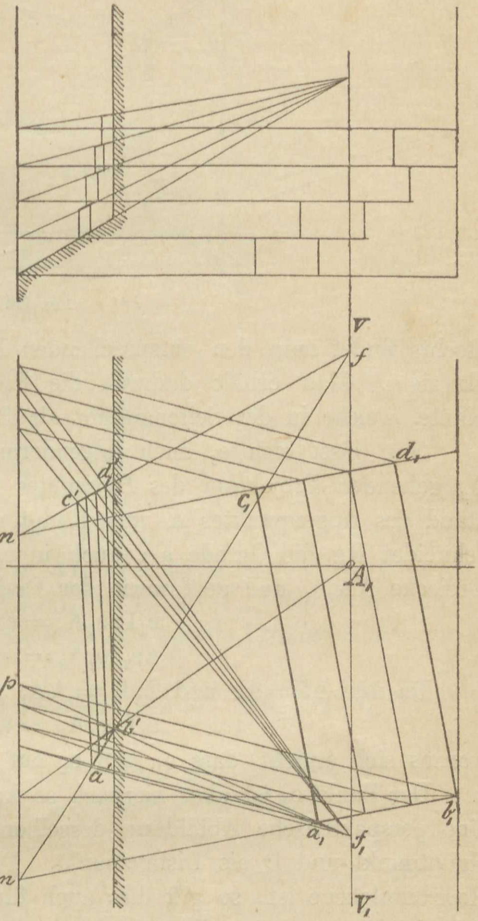


Fig. 128.

Die Ermittelung des Aufrisses ist aus Fig. 128 wohl sofort zu erkennen, wenn wir noch bemerken, dass die Ecken desselben senkrecht über den entsprechenden Ecken des Grundrisses liegen müssen.

Unabhängig vom Grundriss kann man jedoch die Eckpunkte des Aufrisses ähnlich wie in Fig. 127 finden, was wir dem Leser wohl überlassen können.

13) Die Dimensionen eines Reliefs lassen sich noch besser aus der Projektion desselben auf der Frontebene entnehmen, wie wir an dem in Fig. 129 dargestellten Beispiel zeigen wollen. Das rechtwinklige Parallelepipedum P, welches auf der Horizontalebene und an der Hintergrundsebene steht, ist durch P_1 als Relief in der Seitenansicht wie bei den bisherigen Figuren abgebildet. Ist nun das Rechteck abcd die Projektion des Parallelepipedums

auf der Frontebene, welche in Fig. 129 rechts auf die Zeichenfläche gelegt ist, ferner A_2 die Projektion des Hauptpunktes A_1, so gehen die Projektionen der Abbildungen der zur Bildfläche senkrechten Kanten des Parallelepipedums von a, b, c und d nach A_2. Die Abbildung des Eckpunktes e liegt im Durchschnitt e_1 des Strahles Ae mit der Abbildung der Horizontalebene.

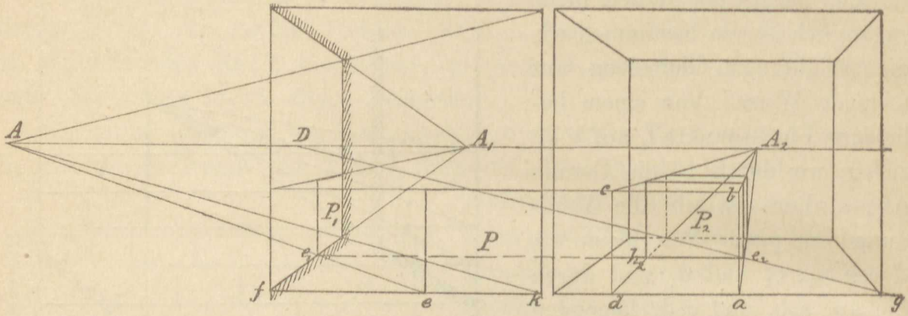


Fig. 129.

Rechts findet man den entsprechenden Punkt, wenn man $e_1 e_2$ parallel zu fk zieht. Man erhält dadurch die Projektion der Abbildung $e_2 h_2$ einer Kante, welche in der Seitenansicht als Punkt e_1 erscheint.

Nun lässt sich e_2 auch folgendermafsen bestimmen. Auf der durch A_2 gehenden Projektion des Horizontes machen wir $A_2 D$ gleich dem Abstand des Augenpunktes A vom Hauptpunkte A_1. Ist ferner $ag = ef$, so schneidet Dg die Gerade aA auch in e_2. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AA_1e_1 und ee_1f sowie der Dreiecke A_2De_2 und ae_2g folgt:

$$e_1f : e_1A_1 = ef : AA_1$$
$$ae_2 : e_2A_2 = ag : A_2D.$$

Da nun $ef = ag$ und $A_2D = AA_1$ ist, so folgt:

$$e_1f : e_1A_1 = ae_2 : e_2A_2,$$

woraus sich ergiebt, dass e_1 und e_2 auf einer Parallelen zu AA_2 liegen.

Der Punkt e_2 ist aber hiernach so konstruiert, als wäre die Figur rechts eine perspektivische Abbildung desselben auf der Frontebene, mit A_2 als Hauptpunkt und D als Distanzpunkt. Da nun e ein beliebiger Punkt der Horizontalebene ist, so gilt dies auch für alle Punkte derselben, und man sieht leicht, dass dasselbe auch auf alle nicht in der Horizontalebene liegenden Punkte angewendet werden kann. Es folgt hieraus das wichtige Gesetz:

Die Projektion eines Reliefs auf der Frontebene ist eine linearperspektivische Abbildung des darzustellenden Gegenstandes auf dieser, welche durch Annahme eines auf demselben Hauptstrahle liegenden Augenpunktes entsteht, dessen Abstand von der Frontfläche gleich dem Abstand des ursprünglichen Augenpunktes vom Hauptpunkte des Reliefs ist.

Man kann den Beweis dieses Satzes auch auf folgende Weise führen. Es sei ab′ (Fig. 130) die Abbildung einer beliebigen Geraden ab. a ihre Spur in der Frontebene und f ihr Fluchtpunkt (also Af || ab). Wir denken uns die Fluchtebene parallel mit sich selbst bis zur Frontebene so verschoben,

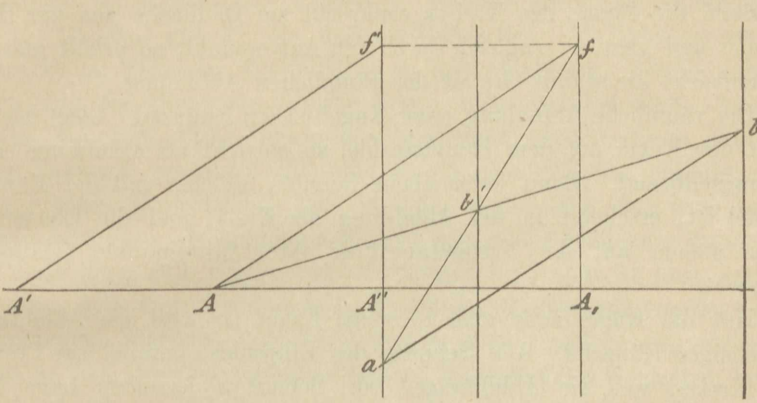


Fig. 130.

dass der Hauptpunkt A_1 sich auf dem Hauptstrahle bewegt und nach A″ gelangt. Gleichzeitig werde der Augenpunkt A auf dem Hauptstrahle um die Strecke $A'A = A_1A''$ verschoben, dann kommt das Dreieck AA_1f in die Lage A′A″f′. Der Punkt f′ ist die in der Frontebene liegende gerade Projektion von f und A′f′ ist parallel zu Af, also auch parallel zu ab. Die Abbildung von ab auf der Frontfläche liegt somit in af′, wenn A′ als Augenpunkt betrachtet wird, und af′ ist wiederum die gerade Projektion der räumlichen Abbildung af.

Hiermit ist der Satz für eine beliebige Gerade und folglich für jede Gerade allgemein nachgewiesen.

14) Wir können hiermit die Begründung der Reliefperspektive abschliessen, weil man nach den bisher gegebenen Entwickelungen die Dimensionen der zu konstruierenden Abbildung eines Gegenstandes leicht zu bestimmen vermag. Wir wollen jedoch noch einige Bemerkungen über die Abbildungen runder Formen machen, welche auch praktisch nützlich sein dürften.

Nach 2 δ) ist die Abbildung eines Kreises, welcher zur Frontebene parallel ist, wieder ein Kreis. Sie liegt in einer zur Frontebene parallelen Ebene und die Abbildungen des Mittelpunktes und des Halbmessers werden nach dem früheren leicht gefunden. Die Projektion des Reliefs (welche nun nach 13 konstruiert werden kann) giebt die wahre Grösse der räumlichen Abbildung des Kreises an.

Ist der Kreis nicht parallel zur Bildfläche, so bestimmt man zuerst die

Abbildung seiner Ebene (Spur und Fluchtlinie derselben) und in dieser so viele Punkte, als zur Zeichnung der Abbildung nötig sind. Am besten ist es auch hier wieder, die Vertikalprojektion und die Seitenansicht des Reliefs herzustellen.

Steht die Ebene des Kreises senkrecht zur Bildfläche und zur Horizontalebene und geht sie zugleich durch den Augenpunkt, so erhält man in der Seitenansicht die wahre Gestalt der räumlichen Abbildung.

Die räumliche Abbildung einer Kugel ist ein Ellipsoid. Liegt der Mittelpunkt der Kugel auf dem Hauptstrahle, so entsteht als Abbildung ein Umdrehungsellipsoid. Denn jeder ebene Schnitt, welcher mit der Frontfläche parallel ist, erscheint in der Abbildung als Kreis, und die Ebenen dieser Kreise stehen auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte (Hauptstrahl) senkrecht.

Hat die Kugelfläche eine beliebige Lage, so wird die Abbildung ein dreiachsiges Ellipsoid. Alle Schnitte des Ellipsoids, parallel zur Frontebene sind Kreise, weil sie Abbildungen von Schnitten derselben Lage mit der Kugelfläche darstellen. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Kreisschnitte des Ellipsoids ist nach dem Hauptpunkte des Reliefs gerichtet.

15) Abbildung eines Halbcylinders, welcher auf einem halbkreisförmigen Sockel steht (Fig. 131).

Es ist die Vertikalprojektion, eine Seitenansicht und der Grundriss des

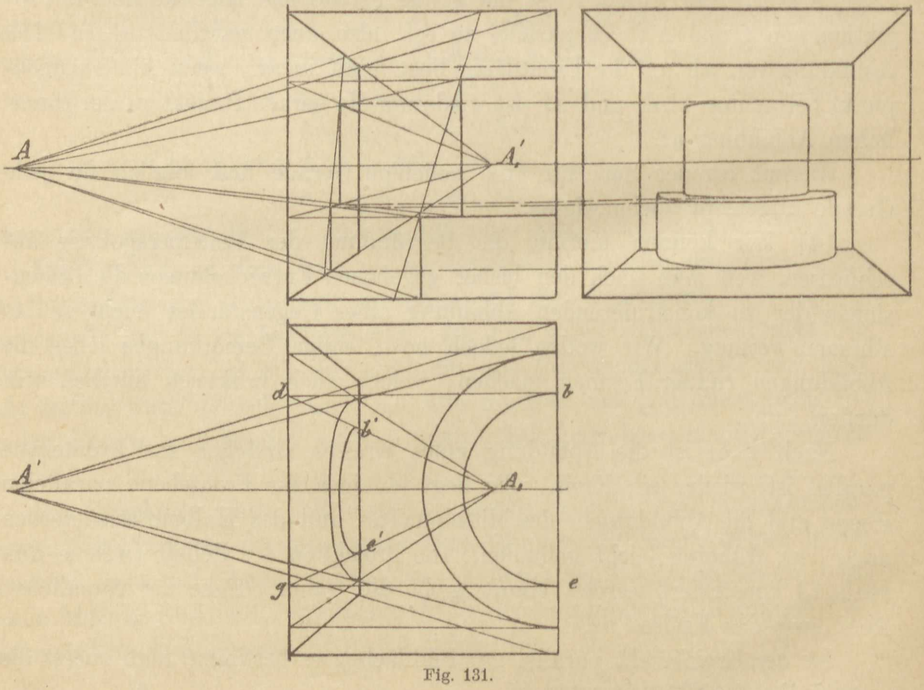


Fig. 131.

Reliefs dargestellt. Die Konstruktion bedarf keiner weiteren Erläuterung. Betrachten wir den Grundriss, so ist zu bemerken, dass die Abbildung $b'd$ der Tangente bd, nach dem Hauptpunkte A_1 gerichtet ist. Man sieht hieraus sofort, dass die Abbildung des Halbkreises, welchen diese Tangente berührt, nicht die Hälfte einer Ellipse ist, sondern ein etwas grösserer Teil derselben. Gleiches gilt für die übrigen Halbkreise. Es geht daraus hervor, dass kleine Teile der Mantelfläche in der Abbildung, welche nahe an der Abbildung der Hintergrundsebene liegen, nicht sichtbar sind. Nun soll das Relief nur vom Augenpunkte aus betrachtet werden, wenn man den richtigen Eindruck gewinnen will, und da ist denn offenbar unnötig, nicht sichtbare Flächen darzustellen. Dies mag der Grund sein, dass man in solchem Falle wie oben als Annäherung nicht selten den Halbkreis durch eine halbe Ellipse dargestellt findet. Ein derartiges Verfahren ist aber gerechtfertigt, wenn man den Augenpunkt in unendlicher Entfernung von der Frontebene annimmt, wodurch man Abbildungen erhält, welche das räumliche Analogon zu den geraden Projektionen der Darstellenden Geometrie bilden.

16) Abbildung bei der Annahme paralleler Sehstrahlen.

Es sei wie früher FF_1 (Fig. 132) die Frontebene, HH_1 die Hintergrundsebene, BC die Abbildung der letzteren. Soll ein Punkt a abgebildet werden, so legen wir durch a eine beliebige Gerade bc. Durch c ziehen wir den Sehstrahl ce senkrecht zur Frontfläche, derselbe schneidet BC in der Abbildung c' des Punktes c und nun erhält man in bc' die Abbildung der Geraden bc. Durch a ziehen wir ebenfalls den Sehstrahl senkrecht zur Frontebene, dann schneidet dieser bc' in der gesuchten Abbildung a' des Punktes a. Trifft aa' die Frontebene in a'', so folgt:

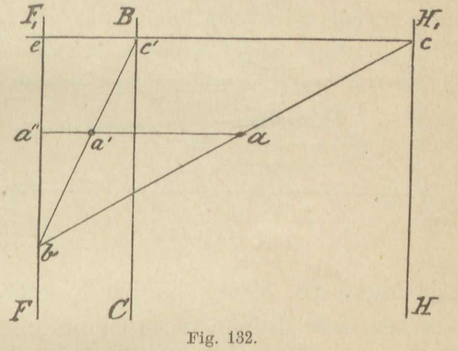


Fig. 132.

$$a'a'' : aa'' = c'e : ce,$$

d. h. der Abstand der Abbildung eines Punktes a von der Frontebene verhält sich zum Abstand des Punktes a von derselben Ebene, wie die Tiefe des Bildraumes zur Tiefe des abgebildeten Raumes. Hiernach lässt sich jede derartige Abbildung leicht konstruieren. Bemerkenswert ist noch, dass die Projektion der Abbildung auf der Frontebene mit der Projektion des abzubildenden Gegenstandes zusammenfällt.

17) Die Abbildung eines auf der Horizontalebene liegenden und eines stehenden Cylinders ist hiernach in Fig. 133 dargestellt, und zwar durch den Grundriss und die Vertikalprojektion des Reliefs.

Der Grundriss C des auf der Horizontalebene liegenden Cylinders ist das Rechteck abcd. Ist nun FF′ die Horizontalprojektion der Frontebene FM, die Tiefe des Bildraumes HH′, die mit der Achse OX zusammenfallende Projektion der Hintergrundsebene, so findet man die Abbildung von cd z. B., wenn man die letztere bis g und f verlängert. Durch f ziehen wir den Sehstrahl ff′ senkrecht zur Frontebene. Die Abbildung f′ von f liegt dann in der Abbildung MN der Hintergrundsebene und gf′ ist nun die Abbildung von gf. Ziehen wir noch die Sehstrahlen dd′ und cc′ parallel ff′, so schneiden dieselben auf gf′ die gesuchte Abbildung c′d′ ab.

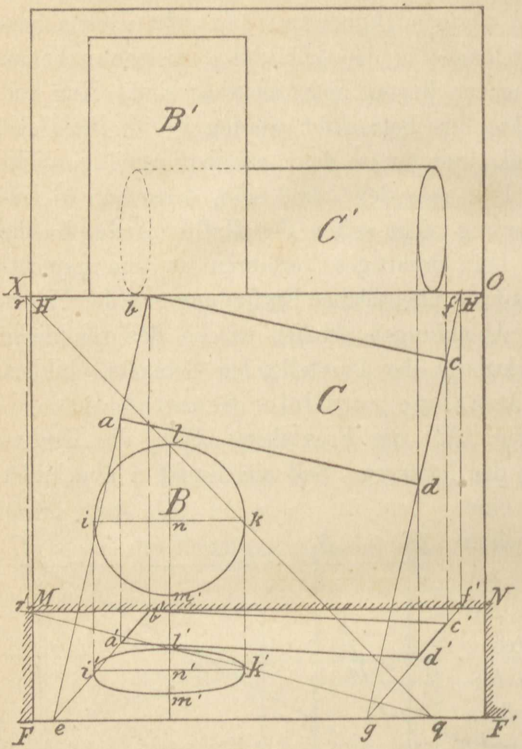


Fig. 133.

Um die Abbildung des Grundkreises des Cylinders B zu finden, bestimmen wir die Achsen der Ellipse, welche die Abbildung dieses Kreises ist. Wir ziehen den Durchmesser ik parallel und den Durchmesser ml senkrecht zur Frontebene; legen durch die Endpunkte k und l die Gerade qr und bestimmen deren Abbildung qr′. Durch die zur Frontfläche senkrechten Strahlen kk′ und ll′, ergeben sich alsdann die Abbildungen k′ und l′ der Punkte k und l. Ferner ziehen wir i′k′ parallel zur Frontfläche und machen alsdann i′n′ = k′n′; m′n′ = n′l′, dann sind i′k′ und m′l′ die Hauptachsen der gesuchten Ellipse, welche man nun nach (IV, 5, I. Teil) mit Hilfe eines Papierstreifens leicht zeichnen kann.

Bei der Darstellung eines Reliefs unter Annahme paralleler Sehstrahlen verschwinden die Verkürzungen an allen Linien, welche parallel zur Frontebene sind. Es dürfte sich deshalb dies Verfahren hauptsächlich für geringere Tiefen des Bildraumes wie des abzubildenden Raumes eignen.

18) Man begegnet häufig Reliefdarstellungen, welchen scheinbar die Annahme paralleler Sehstrahlen zu Grunde gelegen hat. Selten macht man jedoch die Wahrnehmung, dass der Künstler sich über die Grundsätze voll-

ständig klar ist, nach welchen dieselben gebildet sein müssen. So z. B. findet man vielfach bei den Reliefdarstellungen runder Vasen die horizontalen Kreise durch ebenfalls horizontal liegende Ellipsen dargestellt; nur beim Sockel pflegt der Künstler dann plötzlich abzuweichen und die Kreise an dem letzteren durch sehr schräg liegende Ellipsen abzubilden u. s. f.

Noch mag erwähnt werden, dass Portraits, welche im Relief dargestellt sind, meistens den Eindruck machen, als habe denselben die Annahme paralleler Sehstrahlen zu Grunde gelegen. Dass hier von Konstruktion keine Rede mehr sein kann, ist selbstverständlich. Dennoch wird man beim aufmerksamen Betrachten die Wahrnehmung machen, als habe der Künstler nur die senkrecht zur Frontebene stehenden Dimensionen entsprechend verkleinert, während die mit der Frontfläche parallelen Dimensionen unverändert geblieben sind.

Reliefs, welche eine bedeutende Längenausdehnung besitzen, wie z. B. die auf fortlaufenden Friesen vorkommenden Darstellungen, können nicht unter Voraussetzung eines Augenpunktes hergestellt werden. Häufig wird ja auch der Fries zur künstlerischen Darstellung einer Reihe von aufeinanderfolgenden, zeitlich oder räumlich getrennten Ereignissen benutzt. Hiernach würde jede Gruppe ihren eigenen Augenpunkt erfordern; oder man müsste, was einem solchen Fries einen einheitlicheren Charakter verleihen würde, parallele Sehstrahlen annehmen. Es würde nicht notwendig sein, die letzteren senkrecht zur Frontfläche anzunehmen, besonders dann nicht, wenn das Relief sich hoch über dem Beschauer befindet.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.