

Handwritten notes:
E II 7 I
8: 2 2

Darstellende Geometrie

für

Bauhandwerker.

Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten,
sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker.

Zweiter Teil:

Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers,
Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppen-
krümmungs, Steinschnitt, Centralperspektive.

Anhang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.

Mit 217 Figuren.

Bearbeitet von

J. Vonderlinn

Ingenieur und Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule in Breslau.



Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1894.

55



2603/2

Zweiter Teil:

Anfang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.
 Krümmung: Stainschnitt, Centralperspektive.
 Schattierung bei Dächern, Wandschicht, Dächer, Darstellung eines Tragen.
 Schattierung, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers.

Mit 247 Figuren.

Verfasser von

J. Vonderlinn



Stuttgart

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

1841

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch enthält das Unterrichtspensum der Darstellenden Geometrie für die dritte, zweite und erste Klasse einer Baugewerkschule. Die Schattenlehre ist so ausführlich behandelt worden, wie dies für den Bautechniker notwendig ist. Wenn auch die Isophotenkonstruktionen, sowie die bildliche Darstellung der Beleuchtung nicht an allen Baugewerkschulen zum Unterrichtspensum gehören, so wurden diese Kapitel doch in das Lehrbuch aufgenommen, weil dasselbe auch zum Selbststudium geeignet sein soll. Aus dem gleichen Grunde wurde auch die Schiftung bei Dächern besprochen.

Der Steinschnitt ist nur insoweit behandelt, als dies für den Bautechniker von Interesse ist.

Bei der Centralperspektive sind die gebräuchlichsten Methoden unter Zugrundelegung von praktischen Beispielen zur Anwendung gekommen.

Der Verlagshandlung gebührt für die sorgfältige Ausstattung des Buches alle Anerkennung.

Breslau, im März 1894.

J. Vonderlinn.

Inhaltsverzeichnis.

I. Schattenlehre.

	Seite
1) Allgemeine Bemerkungen	1
2) Richtung der Lichtstrahlen	1
3) Konstruktion der Schlagschatten von Punkten, Linien und ebenen Figuren	2
a) Schlagschatten eines Punktes	2
b) Schlagschatten einer Geraden	3
c) Schlagschatten einer ebenen Figur	5
d) Zusammenhang zwischen den Schlagschatten einer ebenen Figur unter sich und mit den Projektionen der Figur	7
4) Konstruktion der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Körpern	10
a) Allgemeine Bemerkungen	10
b) Bestimmung der Schattenkanten eines ebenflächigen Körpers	10
c) Schlagschatten eines Körpers	11
d) Bedeutung der Schattenkanten in technischen Zeichnungen	11
5) Konstruktion des Selbstschattens und Schlagschattens ebenflächiger Körper	13
6) Schatten eines Prismas	13
a) Allgemeine Bemerkungen	13
b) Das Prisma steht senkrecht zu einer Pr. Eb.	13
c) Das Prisma ist gegen beide Pr. Ebn. beliebig geneigt, liegt aber mit einer Grundfläche in einer der beiden Pr. Ebn.	14
d) Das Prisma liegt ganz beliebig im Raume	15
e) Aufgaben	15
7) Schatten einer Pyramide	19
a) Allgemeine Bemerkungen	19
b) Aufgaben	20
8) Schatten eines Cylinders	21
a) Allgemeine Bemerkungen	21
b) Aufgaben	22
9) Schatten eines Kreiskegels	26
a) Allgemeine Bemerkungen	26
b) Aufgaben	27
10) Schatten einer Kugel	29
a) Allgemeine Bemerkungen	29
b) Aufgaben	31
11) Schatten eines Rotationskörpers	34
a) Konstruktion der Selbstschattengrenze	34
b) Konstruktion der Selbstschattengrenze mittelst berührender Kugelflächen	34
c) Konstruktion der Selbstschattengrenze mittelst berührender Kegelflächen	36

	Seite
d) Konstruktion der Schlagschattengrenze	37
e) Aufgabe	37
f) Schlagschatten eines Rotationskörpers auf seine eigene Oberfläche	38
g) Aufgaben	39
12) Schatten von Gesimskörpern	43
a) Allgemeine Bemerkungen	43
b) Aufgaben	43
13) Schatten von Röhrenflächen	50
a) Allgemeine Bemerkungen	50
b) Aufgaben	51
14) Schatten von Schraubenflächen	52
a) Allgemeine Bemerkungen	52
b) Aufgaben	52
15) Schattenkonstruktion in axonometrischer Darstellung	54
a) Allgemeine Bemerkungen	54
b) Aufgaben	55

II. Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers.

1) Allgemeine Bemerkungen	56
2) Beleuchtung einer projizierenden Ebene	58
3) Bestimmung der Lage einer projizierenden Ebene von gegebener Beleuchtungsstärke	59
4) Konstruktion des Normalenbüschels für die Pr. Eb. E_1	59
5) Beleuchtung eines senkrechten Kreiscylinders	60
a) Allgemeine Bemerkungen	60
b) Aufgaben	61
6) Beleuchtung eines senkrechten Kreiskegels	62
a) Allgemeine Bemerkungen	62
b) Aufgaben	64
7) Beleuchtung einer Kugel	65
a) Allgemeine Bemerkungen	65
b) Aufgaben	66
8) Beleuchtung eines allgemeinen Rotationskörpers	67
a) Allgemeine Bemerkungen	67
b) Aufgaben	69
9) Beleuchtung von Gesimskörpern	69
10) Bildliche Darstellung der Beleuchtung	70
a) Einteilung der Oberfläche in Zonen	70
b) Schattierung durch Lagentuschen	70
c) Geometrische Beleuchtung im Gegensatz zur natürlichen Beleuchtung	71
d) Abstufung der einzelnen Tuschlagen	71
e) Schattierung durch Verwaschen (Lawieren)	72

III. Schiftung bei Dächern.

1) Schiftung bei Walmdächern	72
Gratsparrenschiftung	72
2) Schiftung bei Dächern mit Kehlen	77
a) Kehlsparrenschiftung	77
b) Bohlenschiftung	81

IV. Windschiefe Dächer.

	Seite
1) Das windschiefe Satteldach mit Giebel	82
2) Das windschiefe Walmdach	84

V. Darstellung eines Treppenkrümmlings.

1) Krümmling für eine kreisförmige Holzterappe	84
a) Allgemeine Bemerkungen	84
b) Grund- und Aufriss des Krümmlings	85
c) Verstreckungsschablonen des Krümmings	86
d) Isometrische Darstellung des Krümmings	89
21 Krümmling für eine massive Treppe	90
a) Allgemeine Bemerkungen	90
b) Darstellung des Krümmings durch Grund- und Aufriss	91
c) Aufgaben	92

VI. Steinschnitt.

1) Allgemeine Bemerkungen	92
2) Steinverband in lotrechten Mauern	94
3) Steinschnitt lotrechter und geböschter Mauern	94
a) Steinschnitt eines schrägen lotrechten Böschungsfügels	94
b) Steinschnitt eines cylindrischen Fügels in einer lotrechten Mauer	96
4) Steinschnitt einer konischen Mauer	99
5) Steinschnitt einfacher Bögen	99
a) Scheitrechter Bogen in einer lotrechten Mauer	99
b) Kreiscylindrischer Bogen in einer lotrechten Mauer	101
c) Schiefer kreiscylindrischer Bogen in einer lotrechten Mauer	105
d) Elliptisch cylindrischer Bogen in einer lotrechten cylindrischen Mauer	106
e) Kegelförmiger Bogen in einer schrägen lotrechten Mauer	110
6) Steinschnitt von Gewölben	111
a) Kreuzgewölbe	111
b) Aufgaben	114
c) Klostergewölbe	115
d) Aufgaben	117
e) Kugelgewölbe	117
f) Gewölbeauge in einem Tonnengewölbe	119
g) Uebungsbeispiele	121

VII. Centralperspektive.

1) Entstehung des perspektivischen Bildes eines Körpers, Durchschnittsmethode	125
a) Allgemeine Bemerkungen	125
b) Aufgaben	127
2) Durchschnitts- und Fluchtpunktmethode	127
a) Allgemeine Bemerkungen	127
b) Spezielle Konstruktionen	129
c) Aufgaben	131

	Seite
3) Distanzpunktmethode unter Anwendung der ganzen Distanz	133
a) Allgemeine Bemerkungen	133
b) Aufgaben	134
4) Distanzpunktmethode unter Anwendung einer Teildistanz	137
a) Allgemeine Bemerkungen	137
b) Aufgaben	138
5) Konstruktion der Perspektive eines Körpers aus dem sogenannten mittleren Profile	139
6) Konstruktion der Perspektive eines Punktes mittelst der Teilungs- und Flucht-	
punktmethode	140
a) Allgemeine Bemerkungen (Teilungspunkt)	140
b) Perspektivische Teilung einer horizontalen Geraden	142
c) Errichten und Fällen von Senkrechten zu horizontalen Geraden	143
d) Aufgaben	143
7) Schattenkonstruktion in centralperspektivischer Darstellung	145
a) Allgemeine Bemerkungen	145
b) Richtung der Lichtstrahlen in der perspektivischen Darstellung	146
c) Schatten eines Punktes und einer vertikalen Geraden auf die Horizontalebene	148
d) Aufgaben	148

Anhang.

1) Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern	152
2) Uebungsbeispiele	160



I. Schattenlehre.

1) Allgemeine Bemerkungen.

1) Bei den bisherigen Darstellungen im ersten Teile dieses Lehrbuches kam es lediglich darauf an, die Gestalt eines Körpers durch seine Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 bzw. E_3 festzulegen. Dass der Körper hierbei beleuchtet und auf seiner Oberfläche Licht und Schatten verteilt sei, wurde nicht in Erwägung gezogen. Bei technischen Zeichnungen ist es aber oft von Bedeutung, auch die Beleuchtung eines Körpers in den Bereich der Darstellung zu ziehen, weil hierdurch die Bildlichkeit der letzteren wesentlich erhöht wird. Man nimmt dabei an, dass die Beleuchtung auf dem Körper in bestimmter Weise fixiert sei und projiziert sie in gleicher Weise wie den Körper auf die **Pr. Ebn.**

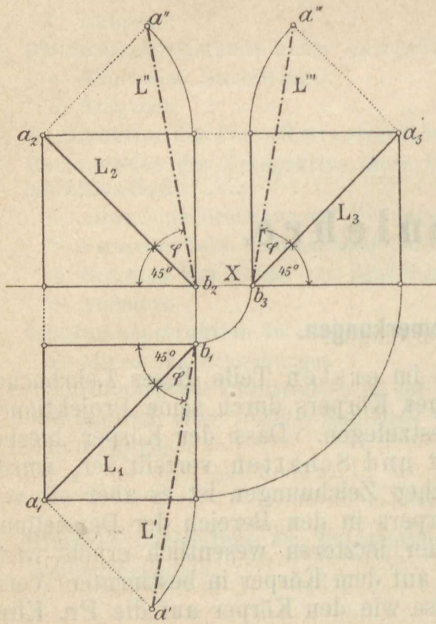
Als Lichtquelle dient in der Regel ein leuchtender Punkt in unendlicher Ferne, von welchem das Licht in geradlinigen Strahlen ausgeht, auf die Oberfläche des Körpers trifft und diese beleuchtet. Ein Teil der Oberfläche wird von den Lichtstrahlen nicht erreicht werden können, weil diese schon an anderer Stelle die Oberfläche desselben oder eines anderen Körpers getroffen und von dort zurückgeworfen sind. Dieser Teil der Körperoberfläche befindet sich im Schatten. Auf der Oberfläche eines Körpers ist nun eine Linie vorhanden, welche den beleuchteten Teil von dem nicht beleuchteten trennt und welche man Schattengrenze nennt. Die Schattengrenze denkt man sich auf der Körperoberfläche verzeichnet und auf die **Pr. Ebn.** projiziert. Der Zweck der folgenden Auseinandersetzungen ist, für Körper mit gesetzmässig gestalteter Oberfläche einerseits die Schattengrenzen bzw. deren Projektionen zu ermitteln und konstruktiv zu bestimmen, andererseits zu untersuchen, nach welchen Gesetzen die Lichtverteilung auf einer Körperoberfläche vor sich geht, sowie anzugeben, wie auf Grund der gewonnenen Gesetze die bildliche Darstellung dieser Lichtverteilung auf den Projektionen eines Körpers vorgenommen werden kann.

Dabei ist es an und für sich gleichgültig, in welcher Richtung die unendlich ferne Lichtquelle vorausgesetzt wird; in technischen Zeichnungen ist es aber üblich geworden, die Lage des leuchtenden Punktes in bestimmter Weise festzusetzen.

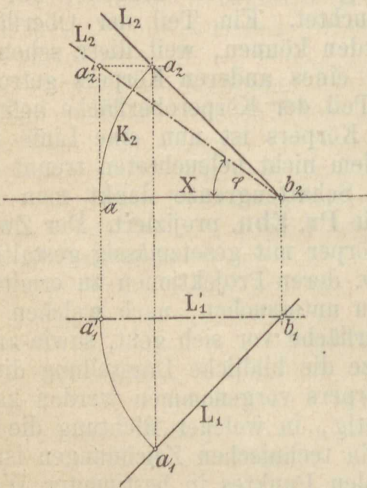
2) Richtung der Lichtstrahlen.

2) Die Richtung der Lichtstrahlen kann eine ganz beliebige sein, jedoch ist es aus Zweckmässigkeitsgründen, und zwar vornehmlich zur Erzielung von Konstruktionsvereinfachungen, üblich, die Lichtstrahlen parallel zu einer Diagonale eines Würfels zu wählen, der mit seinen Seitenflächen bzw. parallel zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gerichtet ist und zwar parallel zu jener Diagonale, welche die vordere obere linke Ecke mit der rückwärtigen unteren rechten Ecke verbindet. Die Projektionen L_1 , L_2 und L_3 eines

Figur 1.



Figur 1a.



Lichtstrahles L auf die **Pr. Ebn.** bilden in diesem Falle mit der zugehörigen Projektionsachse je den Winkel von 45° , siehe Figur 1. Die Lichtstrahlen selbst sind zu den **Pr. Ebn.** unter dem Winkel φ , der kleiner als 45° ist, geneigt. In Figur 1 ist die Konstruktion des Winkels φ angegeben; es wurden die projizierenden Ebenen L_1 und L_2 in die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 bzw. umgelegt; der umgelegte Lichtstrahl schliesst dann mit der zugehörigen Projektion L_1 bzw. L_2 den Winkel φ ein.

Anmerkung 1. Bezeichnet man die Länge der Würfelseite mit 1, so ist die Länge der Strecke $\overline{a_2 b_2} = \sqrt{2}$, daher $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, oder da $\sqrt{2} = 1,4142$ ist,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1,4142} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

Konstruiert man daher ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 5 und 7, so liegt in demselben der kleineren Kathete der Winkel φ gegenüber.

Anmerkung 2. Eine andere Konstruktion des Winkels φ , von welcher in der Folge sehr häufig Gebrauch gemacht werden wird, ist die nachstehende:

Man dreht die den Lichtstrahl L enthaltende, zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechte Ebene L_1 , um die Vertikale des Punktes b parallel zur **Pr. Eb.** E_2 und zeichnet den Aufriss L_2' des Lichtstrahles L nach der Drehung. L_2' schliesst mit der X -Achse den Winkel φ ein.

Anmerkung 3. Aus der Figur 1a erkennt man die Gleichheit der Strecken:

$$\overline{b_1 a_1} = \overline{b_1 a_1'} = \overline{b_2 a} = \overline{b_2 a_2'}.$$

Hieraus folgt aber eine Konstruktion von L_2' ohne Benützung eines Grundrisses. Man nimmt auf L_2 den Punkt a_2 beliebig an, beschreibt um den Schnittpunkt b_2 von L_2 und X den Kreis K_2 , zieht $a a_2'$ senkrecht und $a_2 a_2'$ parallel zur X -Achse, so liefert der Schnittpunkt dieser beiden Parallelen einen Punkt a_2' von L_2' ; ein weiterer Punkt ist b_2 .

3) Konstruktion der Schlagschatten von Punkten, Linien und ebenen Figuren.

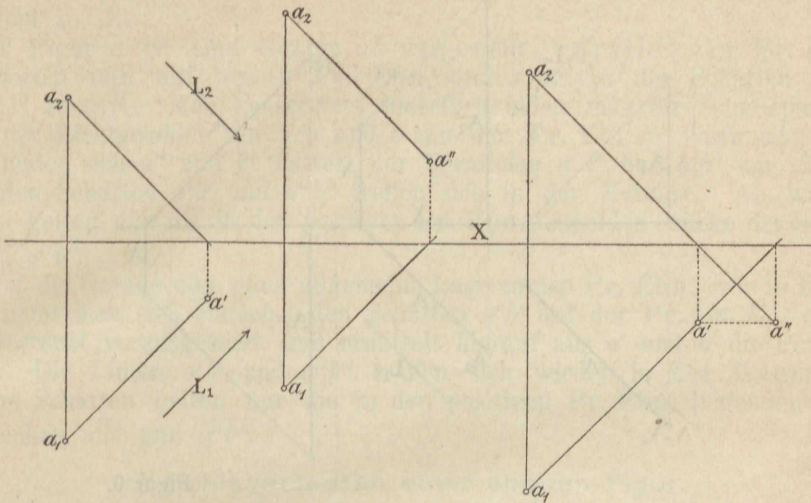
a) Schlagschatten eines Punktes.

3) Unter dem Schlagschatten eines Punktes auf eine beliebige Fläche versteht man den Durchschnittspunkt des den Punkt enthaltenden Lichtstrahles mit der betreffenden Fläche. Der Schlagschatten eines Punktes auf eine der **Pr. Ebn.** ist also stets die Spur des durch den Punkt geführten Lichtstrahles.

Figur 2.

Figur 3.

Figur 4.



Der Schlagschatten eines Punktes auf die erste **Pr. Eb.** ist die erste, der Schlagschatten auf die zweite **Pr. Eb.** die zweite Spur des den Punkt enthaltenden Lichtstrahles. Dabei ist vorausgesetzt, dass der den Schatten hervorrufoende, d. h. der Schatten werfende Punkt zwischen der Lichtquelle und der bezüglichen **Pr. Eb.**, also vor der zweiten und über der ersten **Pr. Eb.** liegt.

In Figur 2 ist der Schlagschatten a' des Punktes a auf die erste, in Figur 3 der Schatten a'' von a auf die zweite **Pr. Eb.** dargestellt. Ob der Schatten eines Punktes auf die erste oder zweite **Pr. Eb.** fällt, hängt lediglich von dem Abstand des Punktes von der bezüglichen **Pr. Eb.** ab. Ist der Abstand des Punktes von der **Pr. Eb.** E_1 kleiner als jener von der **Pr. Eb.** E_2 , so fällt der Schatten auf die **Pr. Eb.** E_1 , siehe Figur 2, im anderen Falle aber auf die **Pr. Eb.** E_2 , siehe Figur 3. Bei gleichem Abstand des Punktes von beiden **Pr. Ebn.** fällt der Schatten in die X -Achse.

Anmerkung 4. Konstruiert man die beiden Spuren a' und a'' des durch einen Punkt a gehenden Lichtstrahles, so kann nur einer der beiden Punkte a' oder a'' als wirklicher Schlagschattenpunkt gelten und zwar jener, welcher in der positiven **Pr. Eb.** liegt, im Falle der Figur 4 also der Punkt a' . Der Punkt a'' wäre ein Schlagschatten für den Fall die **Pr. Eb.** E_1 weggewomen würde und nur die **Pr. Eb.** E_2 vorhanden bliebe.

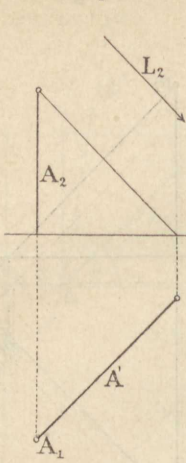
Zwischen den beiden Punkten a' und a'' besteht aber bei der gewählten Lichtrichtung stets die Beziehung, dass die Verbindungslinie $a'a''$ parallel zur X -Achse läuft, ein Ergebnis, das sehr häufig konstruktiv verwendet werden kann.

Anmerkung 5. Die Schattenpunkte in den **Pr. Ebn.** sollen für die Folge mit den gleichen Buchstaben bezeichnet werden wie die Punkte im Raume, nur erhalten die Schattenpunkte in der **Pr. Eb.** E_1 den Index „rechts oben“, die Schattenpunkte in der **Pr. Eb.** E_2 den Index „rechts unten“. Heisst also der Punkt im Raume a , so heisst sein Schlagschatten auf den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 a' und a'' bezw.

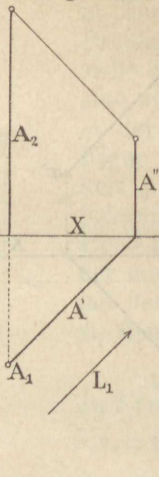
b) Schlagschatten einer Geraden.

4) Zieht man durch sämtliche Punkte einer Geraden im Raume Lichtstrahlen, so bilden diese eine Ebene parallel zur Lichtrichtung, deren Schnittlinie mit der den Schatten auffangenden Fläche den Schlagschatten der Geraden bestimmt. Ist diese Fläche eine Ebene, etwa eine der **Pr. Ebn.**, so ist der Schlagschatten einer Geraden wieder eine Gerade.

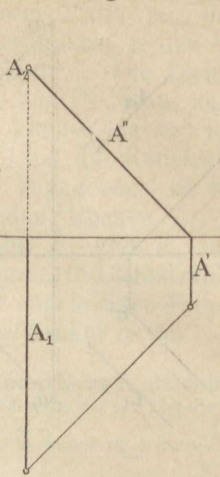
Figur 5.



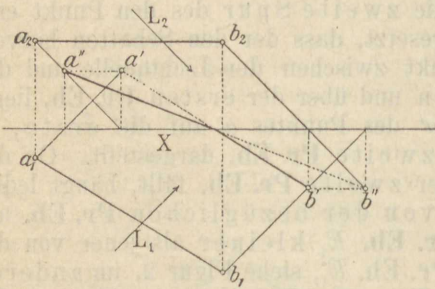
Figur 6.



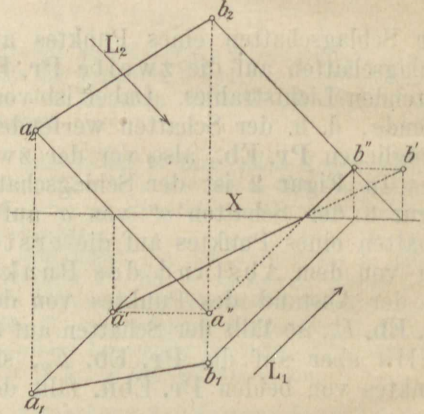
Figur 7.



Figur 8.



Figur 9.



Anmerkung 6. Eine zur Lichtrichtung parallele Ebene soll für die Folge stets eine „Lichtebeane“ heißen.

5) Mit Rückticht auf das in No. 4) und in Anmerkung 4 Gesagte, lässt sich bezüglich des Schlagschattens einer Geraden folgender Satz aussprechen:

„Der Schlagschatten einer Geraden auf eine beliebige Fläche ist die Durchschnittslinie der die Gerade enthaltenen Lichtebeane mit der betreffenden Fläche; ist letztere eine Ebene, so ist der Schatten einer Geraden gleichfalls eine Gerade, ist die Schatten auffangende Fläche eine **Pr. Eb.**, so ist der Schlagschatten der Geraden die Spur der Gerade enthaltenen Lichtebeane in der betreffenden **Pr. Eb.**“

5a) In den Figuren 5 bis 9 ist der Schatten von Geraden in verschiedenen Lagen zu den **Pr. Ebn.** in den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dargestellt.

In Figur 5 steht die Gerade A senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 , der Schatten A' fällt ganz in die **Pr. Eb.** E_1 und ist parallel zu L_1 . In Figur 6 steht die Gerade A gleichfalls senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 , der Schatten fällt zum Teil in die **Pr. Eb.** E_1 , zum Teil in die **Pr. Eb.** E_2 und ist bezw. parallel zu L_1 und A_2 .

In Figur 7 steht die Gerade senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2 , der Schatten ist parallel zu L_2 und zu A_1 .

In Figur 8 ist eine Gerade ab dargestellt, parallel zur **Pr. Eb.** E_1 . Ihr Schatten fällt auf beide **Pr. Ebn.** und zwar ist der Schatten auf E_1 parallel zu a_1b_1 . Man konstruiert denselben indem man die Schnittpunkte a' und b' der Lichtstrahlen durch a und b mit der **Pr. Eb.** E_1 bestimmt, aus a' und b' findet sich a'' und b'' mittels der Parallelen $a'a''$ und $b'b''$ zur X -Achse. Die beiden Schatten $a'b'$ und $a''b''$ treffen sich in der X -Achse. Als wirkliche Schatten gelten nur die in den positiven **Pr. Ebn.** liegenden Stücke der Strecken $a'b'$ und $a''b''$.

Hat die Gerade eine ganz allgemeine Lage zu den **Pr. Ebn.**, wie in Figur 9, so bestimmt man sich zunächst den Schatten $a'b'$ auf der **Pr. Eb.** E_1 , dieselbe als unbegrenzt vorausgesetzt, und ermittelt hierauf aus a' und b' die Punkte a'' und b'' . Die Linien $a'b'$ und $a''b''$ treffen sich wieder in der X -Achse. Als wirkliche Schatten gelten nur die in den positiven **Pr. Ebn.** liegenden Stücke der Strecken $a'b'$ und $a''b''$.

c) Schlagschatten einer ebenen Figur.

6) Ist eine von geraden oder krummen Linien begrenzte ebene Figur gegeben, so versteht man unter dem Schlagschatten dieser Figur den von den Schlagschatten ihrer Begrenzungslinien eingeschlossenen Teil der Schatten auffangenden Fläche. Die Lichtstrahlen, welche die Punkte des Umrisses der Figur enthalten, bilden nun ein Prisma, wenn die Figur ein Vieleck ist, oder aber einen Cylinder, für den Fall die Begrenzung aus krummen Linien besteht. Der Durchschnitt dieses Prismas bzw. Cylinders mit der Schatten auffangenden Fläche begrenzt den Schlagschatten der Figur auf dieser Fläche. Der Schatten in den beiden **Pr. Ebn.** ist daher begrenzt von der diesbezüglichen Spur des genannten Prismas bzw. Cylinders.

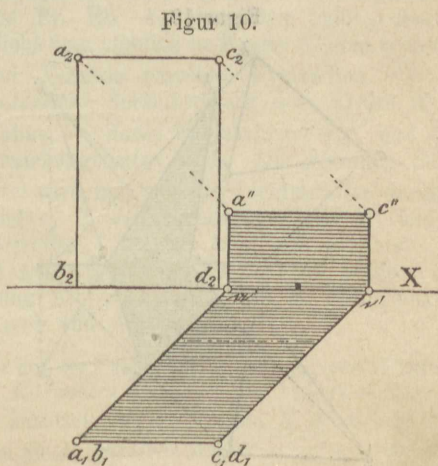
Anmerkung 7. Das Prisma bzw. der Cylinder, dessen Leitlinie die Schatten werfende Figur und dessen Richtung die Lichtrichtung ist, soll für die Folge „Lichtprisma“ bzw. „Lichtcylinder“ heissen.

7) Mit Rücksicht auf No. 6) und Anmerkung 7 lässt sich folgender Satz aussprechen:

„Der Schlagschatten einer begrenzten ebenen Figur auf eine Fläche ist begrenzt durch die Schnittlinie des die ebene Figur enthaltenden Lichtprismas bzw. Lichtcylinders mit der Schatten auffangenden Fläche. Ist letztere eine der **Pr. Ebn.**, so fällt die Schlagschattengrenze der Figur zusammen mit der gleichnamigen Spur des die Figur enthaltenden Lichtprismas bzw. Lichtcylinders.“

8) **Aufgabe 1.** Ein zur **Pr. Eb.** E_2 paralleles und mit einer Seite in der **Pr. Eb.** E_1 aufliegendes Rechteck ist gegeben. Man soll den Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 konstruieren.

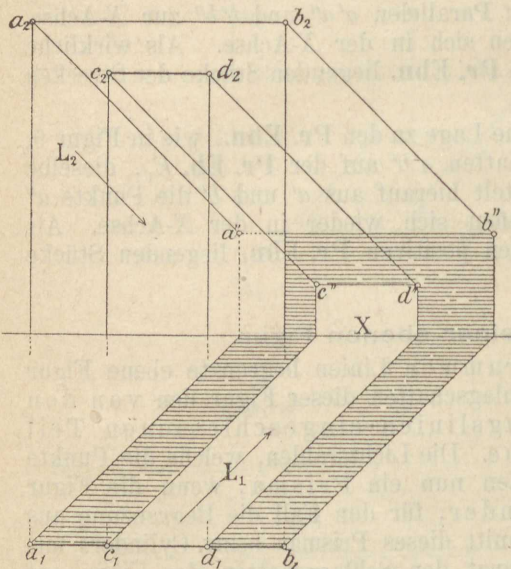
Auflösung. Der Schatten von a und c kommt nach a'' und c'' , so dass der Schlagschatten des Rechtecks durch die schraffierte Fläche dargestellt ist.



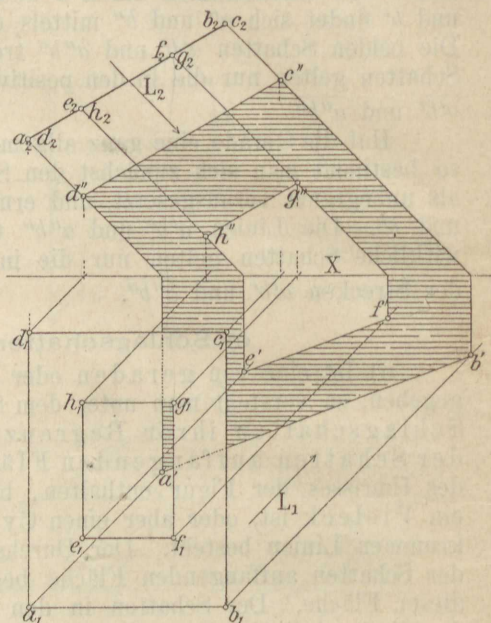
9) **Aufgabe 2.** Ein zur **Pr. Eb. E_2** paralleles durchbrochenes Rechteck, siehe Figur 11, ist gegeben. Man soll seinen Schlagschatten auf die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 konstruieren.

Auflösung. Der Schlagschatten der Punkte a, b, c, d kommt nach a'', b'', c'', d'' , so dass der Schlagschatten der Figur die schraffierte Fläche einnimmt.

Figur 11.



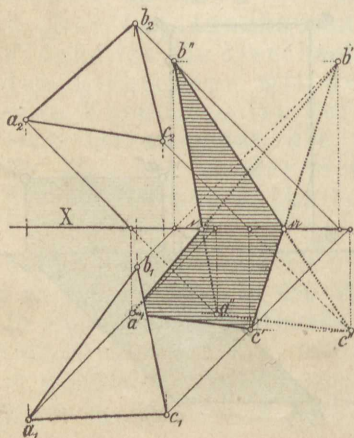
Figur 12.



10) **Aufgabe 3.** Ein zur **Pr. Eb. E_2** senkrechtes und gegen die **Pr. Eb. E_1** geneigtes durchbrochenes Rechteck, siehe Figur 12, ist gegeben. Man soll seinen Schatten auf die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 konstruieren.

Auflösung. Man konstruiert den Schlagschatten der Punkte a bis h . Man kann sofort aus der Lage der genannten Punkte zu den **Pr. Ebn.** erkennen, dass der Schatten der Punkte a, b, ef auf die **Pr. Eb. E_1** , jener der Punkte d, c, gh auf die **Pr. Eb. E_2** gelangt. Da der Schatten der Linien ad, eh, fg und bc auf die **Pr. Eb. E_1** parallel zu den Grundrissen, auf die **Pr. Eb. E_2** aber parallel zu A_2 ist, so ergibt sich als Schlagschatten der gegebenen Figur die schraffierte Fläche.

Figur 13.



11) **Aufgabe 4.** Ein gegen beide **Pr. Ebn.** geneigtes Dreieck abc , siehe Figur 13, ist gegeben, man soll seinen Schlagschatten auf die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 konstruieren.

Auflösung. Man konstruiert die Schlagschattenpunkte a', b', c' der Punkte a, b, c und ermittelt aus diesen die Punkte a'', b'', c'' ; durch Verbindung ergeben sich die Schlagschattendreiecke $a'b'c'$ und $a''b''c''$, von denen nur die schraffierten Teile als wirkliche Schlagschatten zu gelten haben.

d) Zusammenhang zwischen den Schlagschatten einer ebenen Figur unter sich und mit den Projektionen der Figur.

12) Betrachtet man die beiden Schlagschattendreiecke $a'b'c'$ und $a''b''c''$, siehe Figur 13, so erkennt man, dass dieselben in affiner Beziehung zu einander stehen, siehe I. Teil dieses Lehrbuches No. 58, mit der X -Achse als Affinitätsachse und Richtung. Allein nicht nur die beiden Schlagschattenfiguren, sondern auch jede Projektion einer ebenen Figur steht zur Schlagschattenfigur in der gleichnamigen **Pr. Eb.** in Affinitätsbeziehung, wobei die betreffende Projektion der Lichtrichtung als Affinitätsrichtung erscheint, während die Affinitätsachse mit der Spur der Ebene der Figur zusammenfällt. Das eben Gesagte lässt sich als Satz so ausdrücken:

„Die Schlagschattengrenzen einer ebenen Figur auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 sind affine Figuren mit der X -Achse als Affinitätsachse und Richtung.“

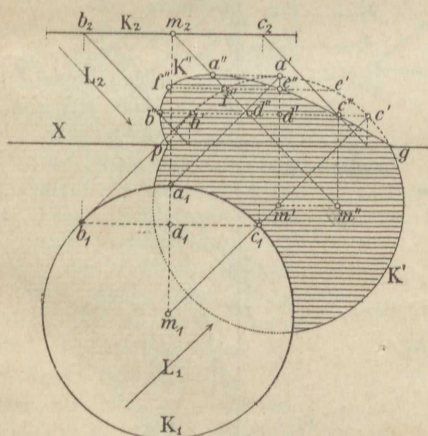
„Die Projektion einer ebenen Figur und ihre Schlagschattengrenze in die gleichnamige **Pr. Eb.** sind affine Figuren mit der Projektion der Lichtrichtung als Affinitätsrichtung und der bezüglichen Spur der Ebene als Affinitätsachse.“

Die eben genannten affinen Beziehungen sind häufig mit Vorteil zu Konstruktionsvereinfachungen oder auch Genauigkeitsproben, wie in einigen der folgenden Beispiele gezeigt werden soll, zu verwenden.

13) **Aufgabe 5.** Eine zur **Pr. Eb.** E_1 parallele Kreisfläche K , siehe Figur 13, ist gegeben. Man soll den Schlagschatten der Kreisfläche auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 konstruieren.

Auflösung. Man denkt sich zunächst die **Pr. Eb.** E_1 als unbegrenzt vorausgesetzt, konstruiert den Schatten der Kreislinie K auf die **Pr. Eb.** E_1 und erhält hierfür einen

Figur 14.



Kreis K' mit dem Mittelpunkt m' . Von diesem Kreise liegt aber, wenn man nunmehr die **Pr. Eb.** E_2 als vorhanden annimmt, ein Teil in der negativen **Pr. Eb.** E_1 ; hier kann aber Schatten nicht entstehen, dieser wird vielmehr von der **Pr. Eb.** E_2 aufgefangen werden. Man erhält leicht mittelst der in No. 12) angegebenen affinen Beziehung den auf die **Pr. Eb.** E_2 treffenden Schlagschatten. Zieht man nämlich im Kreise K' eine beliebige zur X -Achse parallele Kreissehne $b'c'$, so entspricht derselben auf dem Kreise K die Sehne bc , deren Projektionen b_1c_1 und b_2c_2 beziehungsweise sind. Die genannte Sehne $b'c'$ wird nun von den Lichtstrahlen durch b_2 und c_2 in den Schattenpunkten b'' und c'' getroffen. Durch Annahme weiterer zur X -Achse parallelen Kreissehnen, ergeben sich weitere Punkte von der Schlagschattenbegrenzung K'' ; so entspricht z. B. dem Punkt a'' der Punkt a' , und die Linie $a''a'$ ist Tangente von K' und K'' .

Anmerkung 8. Man kann aber auch, ohne auf die Projektion K_1 und K_2 von K zurückgreifen zu müssen, direkt aus K' die Punkte von K'' finden, man darf nur bedenken, dass der zur **Pr. Eb.** E_2 senkrechte Kreishalbmesser ma als Schatten auf die **Pr. Eb.** E_1 die zur X -Achse senkrechte Linie $m'a'$, auf die **Pr. Eb.** E_2 aber die zu L_2 parallele Gerade $m''a''$ besitzt; beide

Linien schneiden sich auf X . Denkt man sich nun in K' die Linie $b'c'$ parallel zu X' gezogen, so erhält man sofort die entsprechende Sehne $b''c''$, wenn man $b'c'$ in sich selbst verschoben denkt, bis ihr Mittelpunkt d' nach d'' auf $m''a''$ zu liegen kommt. Mit anderen Worten: Man trägt von d'' aus die Strecke $d'c'$ nach $d''c''$ und $d''b''$ ab; entsprechend verfährt man für eine andere Kreissehne ef u. s. w.

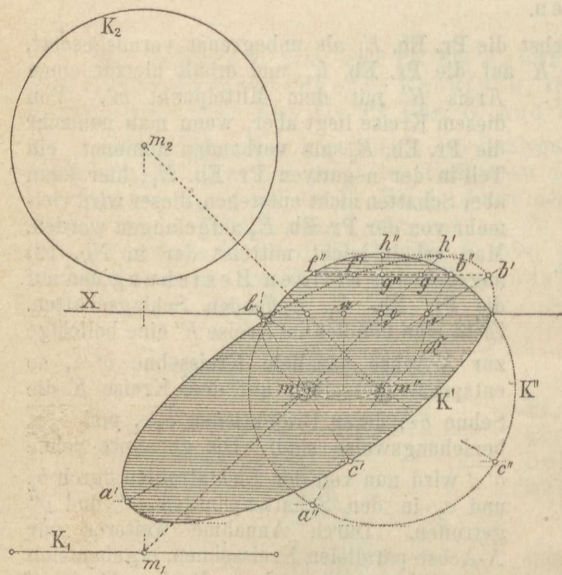
14) **Aufgabe 6.** Eine zur **Pr. Eb.** E_2 parallele Kreisfläche, s. Figur 15, ist gegeben. Man soll den Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 konstruieren.

Auflösung. Die Konstruktion kann in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie in der vorigen Aufgabe. Man bestimmt zunächst wieder den Schatten auf die **Pr. Eb.** E_2 , welcher ein Kreis K'' von dem gleichen Halbmesser wie K und dem Mittelpunkt m'' sein wird; hiervon gilt natürlich nur der auf der positiven **Pr. Eb.** E_2 befindliche Teil als wirklicher Schatten. Aus K'' bestimmen sich dann die Punkte von K' , wie in Aufgabe 5.

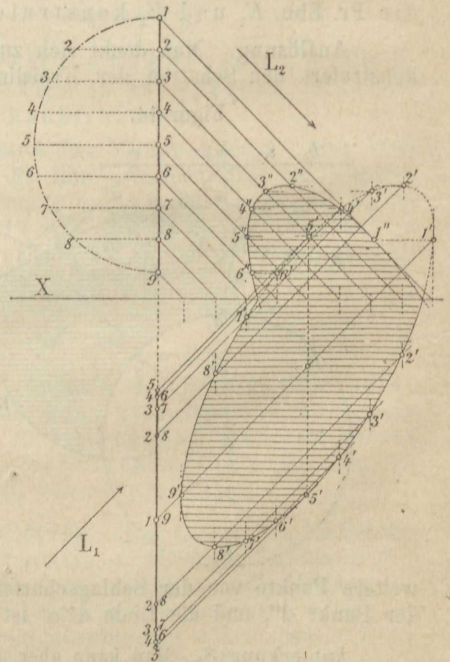
Anmerkung 9. Will man die Ellipse K' sehr genau zeichnen, so ist es ratsam, ihre Hauptachsen zu konstruieren, was in einfacher Weise geschehen kann: Man beschreibt durch die Punkte m' und m'' den Kreis K , dessen Mittelpunkt auf der X -Achse liegt, so schneidet dieser die letztere Linie in zwei Punkten b und c , durch welche die gesuchten Hauptachsen der Ellipse K' hindurchgehen; denn den Linien $m'b$ und $m'c$ entsprechen im Kreise K'' affin zwei die Punkte a und b enthaltende aufeinander senkrecht stehende Kreisdurchmesser $a''b''$ und $c''d''$ (d'' ist in der Figur 15, weil zu nahe an b liegend, nicht eingezeichnet). Die Endpunkte der Hauptachsen sind demnach die Punkte a' , b' , c' , d' .

Die Anwendung der zuletzt angegebenen Konstruktion ist zweckmässig, wenn man die Schlagschatten einer Reihe von Kreisen zu konstruieren hat, deren Ebenen zu einer der **Pr. Ebn.** E_1 oder E_2 parallel laufen, wie dies z. B. bei Rotationskörpern der Fall ist, weil hier die Achsen sämtlicher Schlagschattenellipsen zu einander parallel gerichtet sind, und bezüglich ihrer Länge gleiches Verhältnis besitzen, daher zur Bestimmung ihrer Lage die angegebene Konstruktion nur einmal auszuführen ist.

Figur 15.



Figur 16.



15) **Aufgabe 7.** Eine zur **Pr. Eb.** E_1 und E_2 senkrecht stehende Kreisfläche ist gegeben. Man soll den Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 konstruieren.

Auflösung. Man denkt sich auf der Kreisfläche eine Anzahl von Punkten angenommen, etwa dadurch, dass man den Aufriss in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilt, und mittels einer Umlegung die zugehörigen Grundrisse bestimmt. Hierauf konstruiert man den Schlagschatten dieser Punkte auf die **Pr. Eb.** E_1 und ermittelt für jenen Teil des Schlagschattens, welcher auf die negative **Pr. Eb.** E_1 gelangt, die zugehörigen Punkte in der **Pr. Eb.** E_2 .

16) **Aufgabe 8.** Man löse die Aufgaben 5, 6 und 7, wenn statt der Kreisfläche eine Kreisringfläche gegeben ist.

17) **Aufgabe 9.** Man zeichne den Schlagschatten einer Kreis- bzw. Kreisringfläche, wenn deren Ebene

a) senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 und geneigt zur **Pr. Eb.** E_2 ,

b) senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2 und geneigt zur **Pr. Eb.** E_1

sein soll.

18) **Aufgabe 10.** Eine ebene Fläche ist von einem Rechteck und daran anschliessendem Halbkreis begrenzt. Die Ebene der Figur soll

a) zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehen, zur **Pr. Eb.** E_2 geneigt sein,

b) zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehen, zur **Pr. Eb.** E_1 geneigt sein.

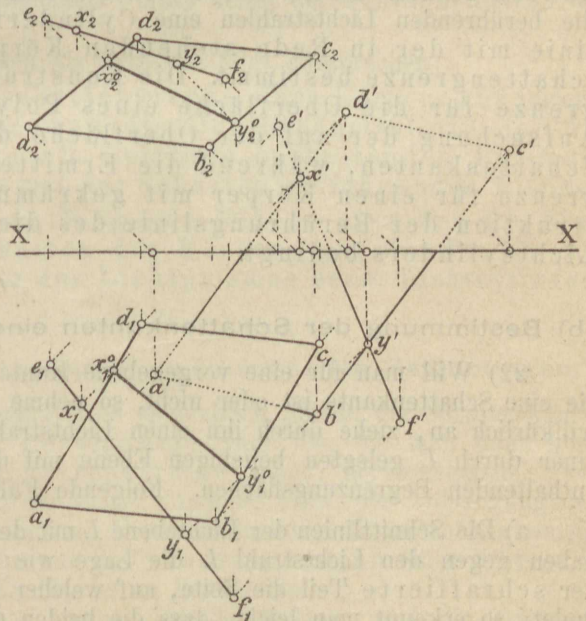
Man soll den Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 konstruieren.

19) **Aufgabe 11.** Eine gegen die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 beliebig geneigte ebene Fläche $abcd$, siehe Figur 17, und eine ausserhalb dieser Fläche liegende Gerade ef sind gegeben. Man soll den Schatten der Geraden ef auf die Fläche $abcd$ konstruieren.

Auflösung. Man bestimmt den Schlagschatten sowohl der Fläche $abcd$ als auch der Geraden ef auf eine **Pr. Eb.**, etwa E_1 . Ruft nun die Linie ef auf der Fläche $abcd$

einen Schatten hervor, so wird auch der Schlagschatten $e'f'$ von ef die Schlagschattenbegrenzung $a'b'c'd'$ von $abcd$ treffen und dasjenige Stück $x'y'$ von $e'f'$, das innerhalb der Schattenbegrenzung $a'b'c'd'$ liegt, entspricht jenem Stücke der Linie im Raume, das seinen Schatten auf die Fläche $abcd$ wirft. Man erhält daher die Punkte der Schattengrenze auf jener Fläche als Durchschnittspunkte jener Lichtstrahlen mit der Fläche, welche durch die Punkte x' und y' hindurchgehen. Zieht man also durch diese Punkte parallel zu L_1 die Lichtstrahlen, so treffen diese die Seiten $\overline{a_1d_1}$ und $\overline{b_1c_1}$ in den Punkten x_1^0 und y_1^0 und die Linie e_1f_1 in x_1 und y_1 , welchen im Aufriss die Punkte x_2^0, y_2^0 und x_2, y_2 entsprechen. Der Schlagschatten der Linie ef auf die Fläche $abcd$ ist also im Grundriss durch die Strecke $\overline{x_1^0y_1^0}$, im Aufriss durch $\overline{x_2^0y_2^0}$ dargestellt.

Figur 17.



4) Konstruktion der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Körpern.

a) Allgemeine Bemerkungen.

20) Während bei Linien und ebenen Flächen lediglich von einem Schlagschatten die Rede sein kann, gibt es auf der Oberfläche eines Körpers Punkte, welche von der Lichtquelle kein Licht empfangen können, weil die Lichtstrahlen schon an anderer Stelle auf die Körperoberfläche getroffen und daselbst ihr Licht abgegeben haben. Solche Punkte, zu welchen die Lichtstrahlen erst nach Durchdringung der Masse des Körpers gelangen könnten, befinden sich im Schatten und zwar im Selbstschatten des Körpers, der auch Eigen- oder Streifschatten genannt wird. Auf der Oberfläche jeden Körpers gibt es demnach einen Linienzug, welcher die beleuchteten Punkte von den kein direktes Licht empfangenden Punkten der Oberfläche trennt; man nennt diesen Linienzug die Selbstschatten- oder auch die Streifschattengrenze des Körpers.

Ist der Körper ein Polyeder, d. h. ein von Ebenen begrenzter Körper, so besteht die Selbstschattengrenze aus gewissen Kanten des Körpers, welche ein Vieleck, Polygon bilden, das Selbstschatten- oder auch Streifschattenspolygon heisst. Bei einem Körper mit gekrümmter Oberfläche ist die Selbstschattengrenze nicht von vornherein gegeben, sondern muss erst durch Konstruktion bestimmt werden und zwar dadurch, dass man alle jene Lichtstrahlen zeichnet, welche die Körperoberfläche berühren und diese Berührungspunkte zu einem Linienzug vereinigt.

21) Bei einem Polyeder gehören die Seiten des Streifpolygons zu jenen Körperkanten, welche je eine beleuchtete Körperfläche von einer nicht beleuchteten Fläche trennen; diese Kanten kann man zweckmässig Schattenkanten nennen. Ist der Körper von gekrümmten Flächen begrenzt, so bilden die berührenden Lichtstrahlen eine Cylinderfläche, deren Berührungslinie mit der in Rede stehenden Körperoberfläche die Selbstschattengrenze bestimmt. Die Konstruktion der Selbstschattengrenze für die Oberfläche eines Polyeders erfordert also die Aufsuchung der auf der Oberfläche des Körpers vorhandenen Schattenkanten, während die Ermittlung der Selbstschattengrenze für einen Körper mit gekrümmter Oberfläche die Konstruktion der Berührungslinie des die Oberfläche berührenden Lichtcylinders bedingt.

b) Bestimmung der Schattenkanten eines ebenflächigen Körpers.

22) Will man für eine vorgegebene Kante eines Körpers entscheiden, ob sie eine Schattenkante ist oder nicht, so nehme man auf der Kante einen Punkt willkürlich an, ziehe durch ihn einen Lichtstrahl L und bestimme die Schnitte einer durch L gelegten beliebigen Ebene mit den beiden, die fragliche Kante enthaltenden Begrenzungsflächen. Folgende Fälle können eintreten:

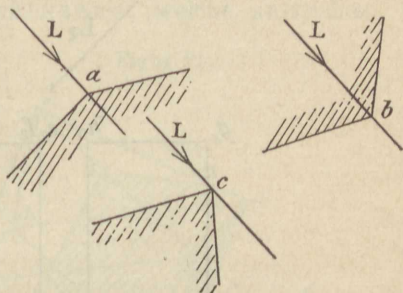
a) Die Schnittlinien der Lichtebene L mit den genannten Begrenzungsflächen haben gegen den Lichtstrahl L die Lage wie in Figur 18a. Bezeichnet nun der schraffierte Teil die Seite, auf welcher die Masse des Körpers sich befindet, so erkennt man leicht, dass die beiden die Kante durch a enthaltenden Flächen beleuchtet sind, also die gemeinsame Kante keine Schattenkante sein kann.

b) Haben die Schnittlinien der Lichtebene L mit den beiden, die in Rede stehende Kante enthaltenden Flächen gegen den Lichtstrahl L die Lage wie in Figur 18b, so ist zu ersehen, dass die Lichtstrahlen erst durch die Körpermasse hindurchgehen müssen, um auf die beiden die Kante b bestimmenden Flächen zu gelangen, woraus hervorgeht, dass keine der beiden Flächen beleuchtet, demnach ihre gemeinsame Kante keine Schattenkante sein kann.

Es bleibt noch übrig der Fall

c) in welchem die Schnittlinien der Lichtebene L mit den beiden in Betracht kommenden Flächen gegen den Lichtstrahl L eine Lage einnehmen, wie in Figur 18c, aus welcher hervorgeht, dass nur auf die eine der beiden Flächen Licht gelangen kann. Die gemeinsame Kante trennt somit eine beleuchtete von einer nicht beleuchteten Fläche und ist demnach eine Schattenkante, d. h. eine Seite des Streif- oder Selbstschattenpolygons.

Figur 18a, b, c.



c) Schlagschatten eines Körpers.

23) Zieht man durch alle Punkte der Selbstschattengrenze eines Körpers Lichtstrahlen, so bilden diese entweder eine Prismen- oder Cylinderfläche und der Durchschnitt dieser Fläche mit der Oberfläche des betrachteten Körpers bildet die Schlagschattengrenze des Körpers auf sich selbst oder den zweiten Körper. Der von der Schlagschattengrenze eingeschlossene Teil der Oberfläche der Schatten empfangenden Fläche heisst der Schlagschatten des Körpers auf diese Fläche.

Das eben Gesagte lässt sich als Satz wie folgt aussprechen:

„Unter der Schlagschattengrenze eines Körpers auf irgend eine Fläche versteht man die Durchschnittslinie der die Selbstschattengrenze als Leitlinie enthaltenden Prismen- bzw. Cylinderfläche mit der Schatten auffangenden Fläche.“

„Ist die Schatten auffangende Fläche eine der **Pr. Ebn.**, so ist der Schlagschatten des Körpers auf die **Pr. Eb.** begrenzt durch die Spur des Lichtprismas bzw. Lichtcylinders mit dieser Ebene.“

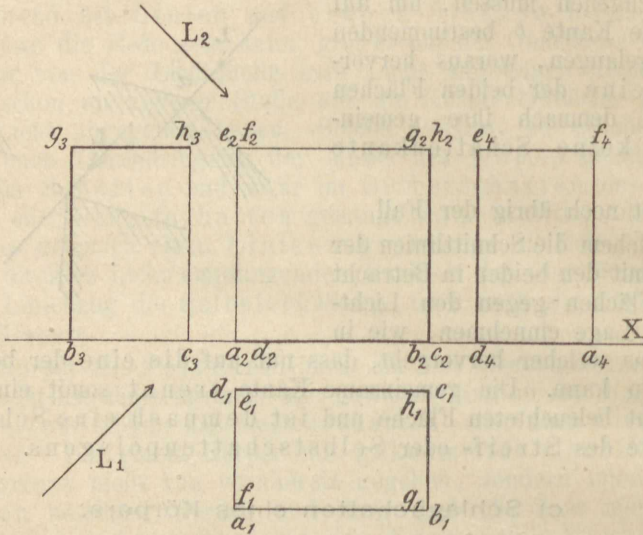
d) Bedeutung der Schattenkanten in technischen Zeichnungen.

24) In technischen Zeichnungen ist es vielfach üblich, die Schattenkanten eines Körpers durch stärker gezeichnete Striche, die man dann kurzweg Schattenlinien oder Schattenstriche nennt, hervorzuheben. Doch herrscht bezüglich der Auswahl der Schattenstriche, bzw. der Anbringung derselben noch nicht überall vollkommene Uebereinstimmung. Zweckmässig scheint es sicherlich, als Schattenstriche nur die Schattenkanten eines Körpers im Sinne der Auseinandersetzung in No. 22 zu bezeichnen.

Durch die Anbringung von solchen Schattenstrichen wird die Zeichnung nicht allein übersichtlich, sondern auch die Gestalt des dargestellten Körpers leichter erkennbar, als ohne solche Linien. Einige Beispiele mögen dies zeigen.

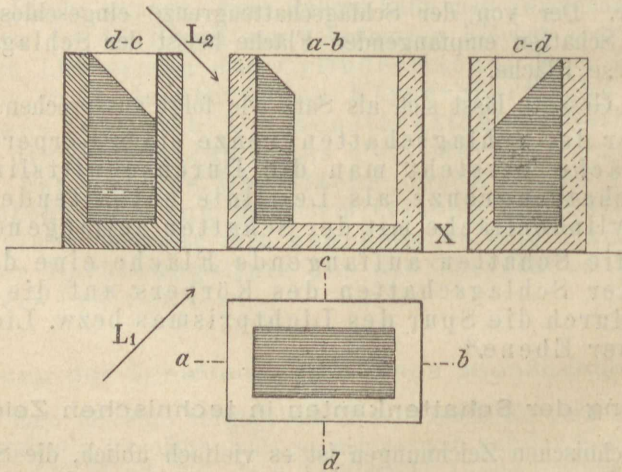
In Figur 19 ist ein rechtwinkliges Parallelepipid durch seine Projektionen dargestellt. Sollen nun in jeder Projektion Schattenstriche ge-

Figur 19.



zeichnet werden, so sind diese Schattenstriche so anzubringen, wie die Figur 19 dies zeigt.

Figur 20.



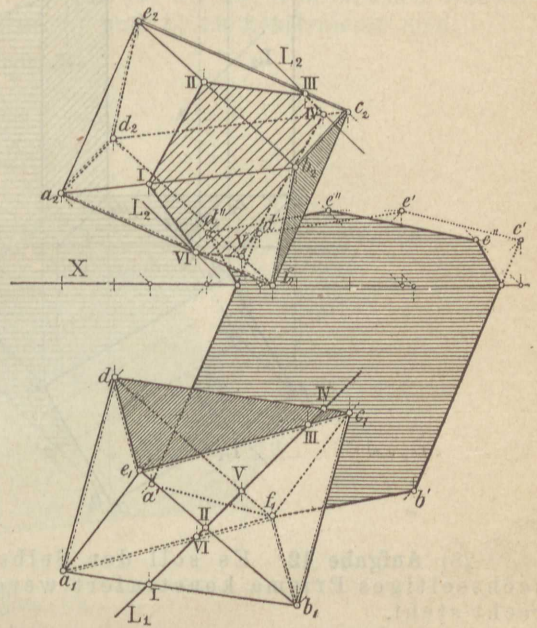
In Figur 20 ist ein hohles rechtwinkliges Parallelepipid durch seine erste Projektion sowie durch Vertikalschnitt nach den Linien ab , cd und de dargestellt, in welchen Darstellungen gleichfalls die Schattenstriche nach den Angaben der No. 22 eingezeichnet sind. Aus den Figuren 19 und 20 ist deutlich zu sehen, wie durch Anbringung von Schattenstrichen an richtiger Stelle nicht allein die Deutlichkeit der Zeichnung vermehrt, sondern auch das Erkennen der Gestalt des dargestellten Gegenstandes wesentlich erleichtert wird.

5) Konstruktion des Selbstschattens und Schlagschattens ebenflächiger Körper.

25) Soll für einen beliebigen, durch Grund- und Aufriss dargestellten Körper, siehe Figur 21, die Selbstschattengrenze ermittelt werden, so schneidet man den Körper durch eine Lichtebene, welche ausserdem, der Einfachheit halber noch zu einer der **Pr. Ebn.**, etwa zur **Pr. Eb. E_1** , senkrecht stehen kann, und konstruiert die Schnittfigur I-II-III-IV-V-VI in der zweiten Projektion, siehe Figur 21. Zieht man an dieses Vieleck parallel zu L_2 jene Strahlen, welche durch eine Ecke des Vieleckes gehen, ohne dasselbe noch in weiteren Punkten zu treffen, im vorliegenden Falle gehen diese Strahlen durch die Ecken III und IV, so sind die diese Ecken enthaltenden Körperkanten ce und af Schattenkanten und gehören als solche der Selbstschattengrenze des Körpers an.

Nun ist aber unmittelbar aus der Figur 21 mit Rücksicht auf die Schnittfigur I—VI ersichtlich, dass die Flächen abf , abe , ade und bec beleuchtet sind, die übrigen also im Schatten liegen. Als Streif- oder Selbstschattenspolygon ergibt sich also für den vorliegenden Körper das Polygon $edafbce$. Die erste und zweite Spur des das Streifpolygon als Leitlinie enthaltenden Lichteylinders bestimmen den Schlagschatten auf die **Pr. Ebn. E_1** und E_2 .

Figur 21.



6) Schatten eines Prismas.

a) Allgemeine Bemerkungen.

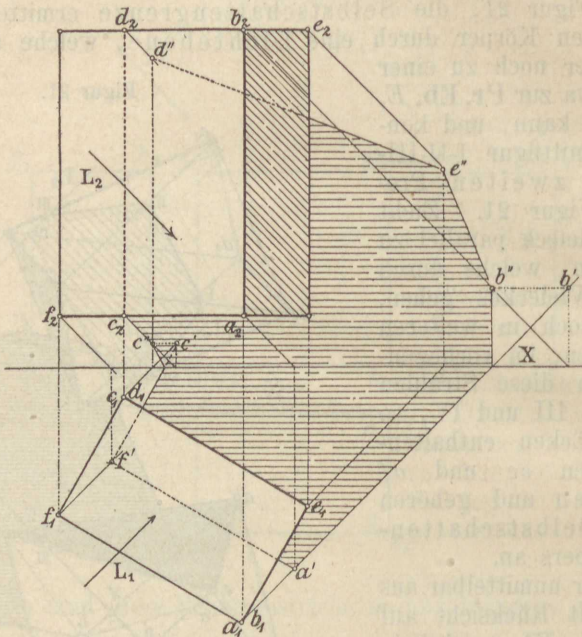
26) Bei einem Prisma besteht die Selbstschattengrenze in der Regel aus zwei Seitenkanten und einer Anzahl Grundkanten, welche je nach der Lage des Körpers zu den **Pr. Ebn.** entweder unmittelbar zu erkennen oder durch Konstruktion zu bestimmen sind.

b) Das Prisma steht senkrecht zu einer Pr. Eb.

27) Steht das Prisma zu einer **Pr. Eb.**, etwa zur **Pr. Eb. E_1** senkrecht, so erhält man diejenigen Seitenkanten, welche zur Selbstschattengrenze gehören unmittelbar, wenn man parallel zu L_1 , siehe Figur 22, an den Grundriss des Prismas die Streifstrahlen zieht, welche im vorliegenden Falle durch die Punkte a_1 und c_1 hindurchgehen und hierdurch die Kanten ab und cd ergeben. Das Selbstschattenspolygon setzt sich nunmehr zusammen aus den Seitenkanten ab , cd und den Grundkanten de , ab und cf , fa . Für diese Punkte ist der Schlag-

schatten auf die **Pr. Ebn.** zu ermitteln, der im vorliegenden Falle die gezeichnete Form erhält.

Figur 22.

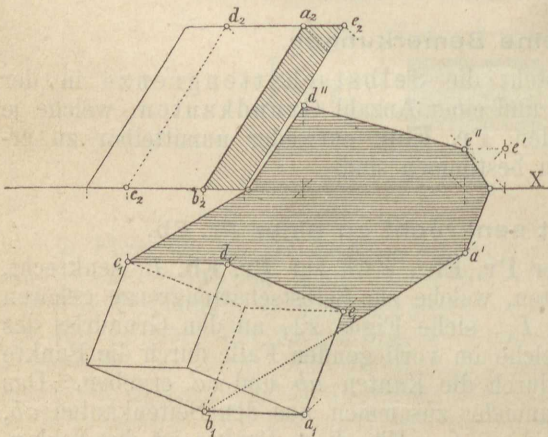


28) **Aufgabe 12.** Es soll der Selbst- und Schlagschatten für ein sechsseitiges Prisma konstruiert werden, das auf der **Pr. Eb.** E_2 senkrecht steht.

c) Das Prisma ist gegen beide **Pr. Ebn.** beliebig geneigt, liegt aber mit einer Grundfläche in einer der beiden **Pr. Ebn.**

29) Ist ein Prisma, etwa so wie in Figur 23, gegeben, so legt man durch eine Seitenkante ab eine Lichtebene und bestimmt deren erste Spur b_1a' . Parallel zu b_1a' sind dann an die Grundfläche des Prismas die Streifstrahlen zu ziehen, welche im vorliegenden Falle durch die Eckpunkte b_1 und c_1 hindurchgehen und damit die Seitenkanten ab und cd , sowie die oberen Grundkanten de und ae als Seiten des Selbstschattenpolygones bestimmen. Von dessen Punkten sind dann die Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** zu ermitteln. Der Schlagschatten erhält die Gestalt der Figur 23.

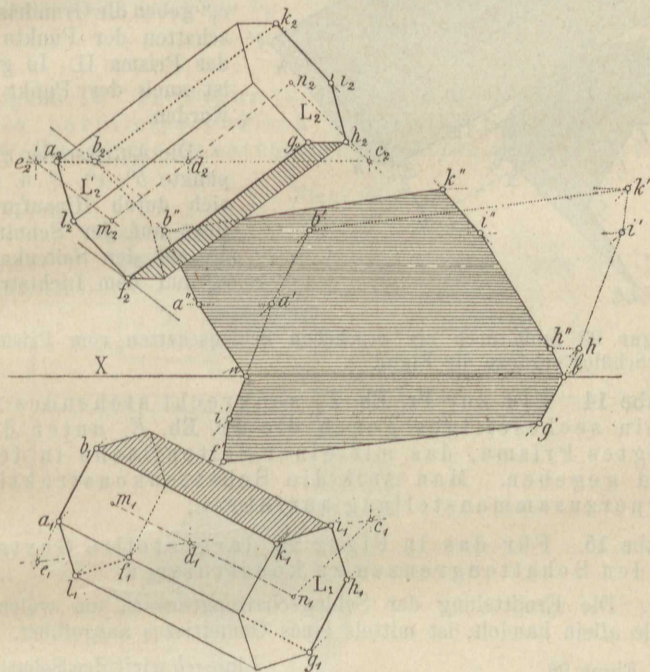
Figur 23.



d) Das Prisma liegt ganz beliebig im Raume.

30) Zur Bestimmung der Selbstschattengrenze legt man etwa durch die Achse mn des Prismas, siehe Figur 24, eine Lichtebene und bestimmt deren Schnittlinie me mit einer der Grundflächen, etwa mit der Grundfläche mab . Zieht man nun im Aufriss parallel zu m_2e_2 an die Grundfläche mab die Streifstrahlen, so gehen diese im vorliegenden Falle durch die Ecken b_2 und f_2 hindurch. Das Selbstschattenpolygon besteht daher aus den Seitenkanten bk und fg und aus den Grundkanten ki , ih , hg und fl , al , ab , von welchen Kanten die Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zu konstruieren sind.

Figur 24.



e) Aufgaben.

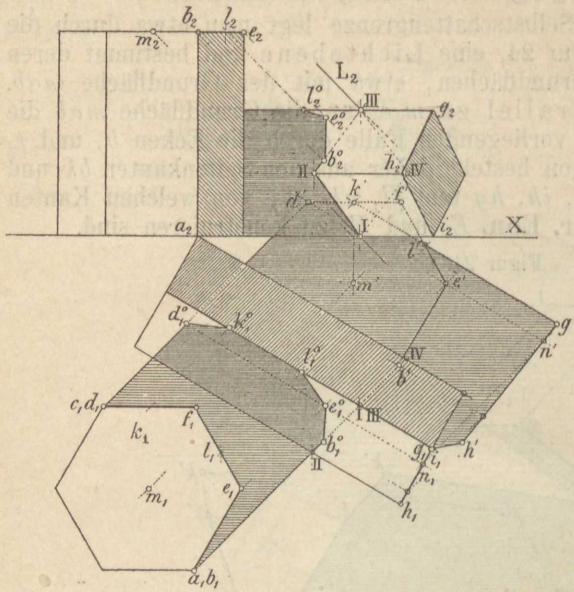
31) **Aufgabe 13.** Für die in Figur 25 gezeichneten Körper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Man konstruiert nach No. 26 zuerst die Selbstschattengrenze für das sechsseitige Prisma (Prisma I) und erhält hierfür die beiden Seitenkanten ab und cd (in der Figur 25 fehlen im Aufriss die Buchstaben c_2 und d_2 , c_2 liegt in der X -Achse, d_2 in der oberen Grundfläche), sowie die Grundkanten df , fe und eb . Hierdurch ist auch der Schlagschatten des Prismas I auf der **Pr. Ebn.** E_1 bestimmt.

Zur Konstruktion des Selbstschattens für das Prisma II benützt man die durch die Kante ab geführte Lichtebene, welche das Prisma II nach dem Viereck I, II, III, IV schneidet, an dessen Aufriss man daher nur parallel zu L_2 die Streifstrahlen zu ziehen hat. Diese enthalten die Eckpunkte I und III und bestimmen hiedurch als Seiten des Selbstschattenpolygons die oberste und unterste Seitenkante, sowie die Kanten hg und hi der einen Grundfläche. Die Kanten der zweiten Grundfläche sind nicht bezeichnet. Damit ist auch der Schlagschatten des Prismas II auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 bestimmt.

Aus der Lage der Schlagschattenpolygone ist zu erkennen, dass vom Prisma I Schatten auf die Oberfläche des Prismas II fällt. Zunächst schneiden sich die Linien $d'f'$ und $f'e'$ mit der Linie $g'h'$ in den Punkten k' und l' , denen auf der Seitenkante durch g_1 die Punkte k_1^0 und l_1^0 entsprechen und letztere Punkte sind die Grundrisse der

Figur 25.



Schlagschatten der Punkte k und l auf den Kanten df und fe des Prismas I. Zufolge der Lage der beiden Prismen zu einander ist die Verbindungslinie $d'e'$ parallel zur Seitenkantenrichtung des Prismas II und es kann die Linie $d'e'$ als Schatten einer Linie d^0e^0 auf dem Prisma II aufgefasst werden, deren Grundriss $d_1^0e_1^0$ durch den dem Punkt n' entsprechenden Punkt n_1 hindurchgeht. Die Punkte d_1^0 und e_1^0 geben die Grundrisse der Schlagschatten der Punkte d und e auf das Prisma II. In gleicher Weise ist auch der Punkt b_1^0 bestimmt worden.

Die Aufrisse der Schlagschattenpunkte b^0, e^0, l^0 u. s. w. ergeben sich durch Hinaufprojizieren; b_2^0 liegt auf der Schnittkante II III, l_2^0 auf der Seitenkante durch g_2 , e_2^0 auf dem Lichtstrahle durch e_2 .

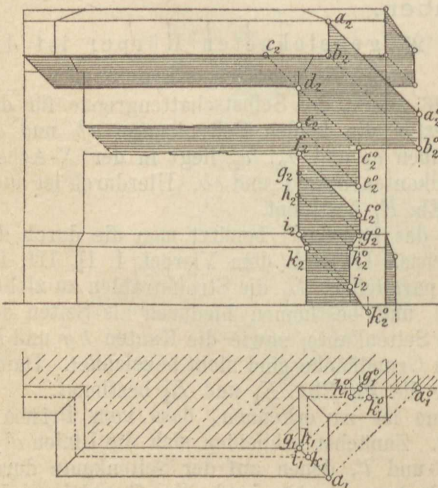
In der Figur 25 fehlt noch ein Stückchen Schlagschatten vom Prisma II auf die **Pr. Eb. E_1** . Der Schüler ergänze die Figur.

32) **Aufgabe 14.** Ein zur **Pr. Eb. E_2** senkrecht stehendes vierseitiges Prisma und ein sechsseitiges gegen die **Pr. Eb. E_1** unter dem Winkel von 30° geneigtes Prisma, das mit einer Seitenfläche in der **Pr. Eb. E_2** aufliegt, sind gegeben. Man soll die Schattenkonstruktion für die genannte Körperzusammenstellung ausführen:

33) **Aufgabe 15.** Für das in Figur 28 dargestellte Gurtgesims sind die auftretenden Schattengrenzen zu konstruieren.

Auflösung. Die Ermittlung der Schlagschattengrenzen, um welche es sich im vorliegenden Falle allein handelt, ist mittels eines Grundrisses ausgeführt.

Figur 26.



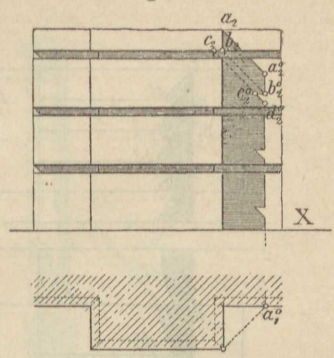
Linie ab wirft den Schatten nach $a_2^0b_2^0$, so dass $a_2^0b_2^0$ parallel a_2b_2 läuft; $b_2^0c_2^0$ ist parallel zu b_2c_2 und wird von der Parallelen durch g_2^0 (mittels des Lichtstrahles durch g_1 findet sich g_1^0 , aus g_1^0 bestimmt sich g_2^0) zu i_2d_2 in c_2^0 getroffen; der Lichtstrahl durch c_2^0 liefert auf i_2d_2 den Punkt d_2 , durch welchen der Schatten der vordersten Gesimskante $bc \dots$ hindurchgeht. Der mittlere Wandpfeiler ist unterbrochen gedacht, so dass auch von der unteren vorderen Kante des oberen Teiles dieses Pfeilers ein Schlagschatten auf die rückwärtige Wand entsteht. Man erkennt aus der Figur ferner, dass ein Teil der Kante f_2i_2 Schatten auf die schiefe Fläche nach $g_2^0h_2^0$, sowie auf die vordere Vertikalfläche nach $h_2^0i_2^0$,*) das Stückchen i_2k_2 Schatten nach $i_2^0k_2^0$ wirft.

*) In Figur 26 fehlt bei i_2 auf den Linienzug $h_2^0i_2k_2^0$ die Null rechts oben.

Figur 27.

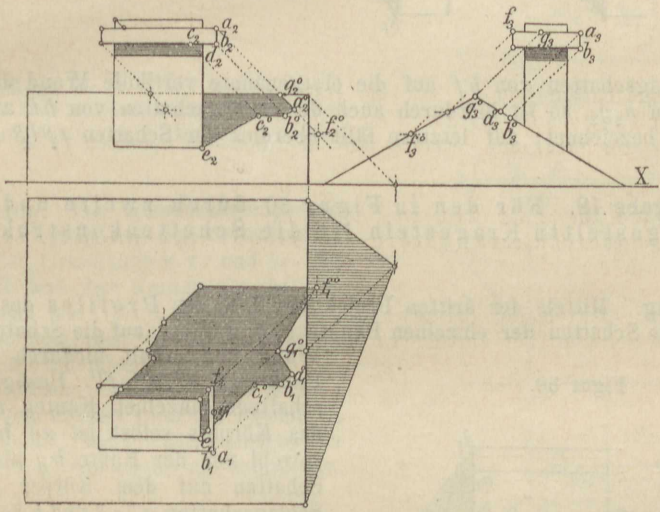
34) Aufgabe 16. Für den in Figur 27 dargestellten Wandpfeiler sind die auftretenden Schattengrenzen zu konstruieren.

Auflösung. Die Konstruktion des Schlagschattens ist aus der Figur direkt zu entnehmen. In der Figur fehlt der Punkt d_2 . Derselbe liegt auf der verlängerten Linie $a_2 b_2$ und auf der Horizontalen unterhalb b_2 .



35) Aufgabe 17. In Figur 28 ist ein Teil eines Satteldaches, aus welchem ein parallelepipedisch geformter Schornstein hervorragt, dargestellt. Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Figur 28.



Auflösung. Der Schlagschatten der Kante ab bestimmt sich mittelst der Punkte a_3, b_3 , aus welchen sich a_3^0 und b_3^0 , sowie a_2^0 und b_2^0 ergeben, woraus sich dann a_1^0 und b_1^0 findet. Die Parallele durch b_1^0 zur Firstlinie gibt auf dem Lichtstrahl durch e_1 den Punkt c_1^0 . Mittelst g_3^0 bestimmt sich g_3 und hieraus g_1 und g_1^0 . Man findet aber g_1^0 direkt mittelst des Lichtstrahles durch a_2 , der auf der Firstlinie den Punkt g_2^0 liefert, dem im Grundriss g_1^0 entspricht. Aus f_3 findet sich f_3^0 , hieraus f_2^0 und f_1^0 . Die weitere Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich.

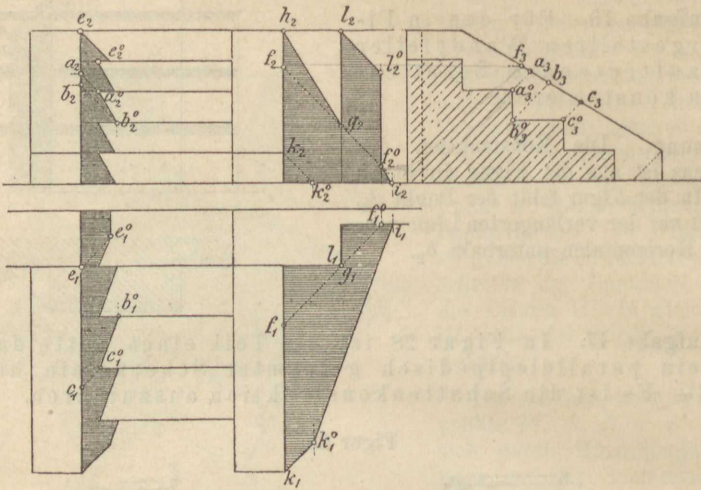
36) Aufgabe 18. Für die in Figur 29 dargestellte Treppe ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Die Konstruktion des Schlagschattens auf die vertikalen Flächen der Treppenstufen ist mittelst der Punkte a und b angedeutet. Die Lichtstrahlen durch a_3^0 und b_3^0 bestimmen a_3 und b_3 , woraus sich a_2 und b_2 , sowie a_2^0, b_2^0 und b_1^0 findet. Mittelst c_3^0 ergibt sich c_3 und c_1 , hieraus c_1^0 und schliesslich die Schattengrenze $b_1^0 c_1^0$.

Die Begrenzung hf der Treppenwange ruft Schatten hervor auf den vertikalen, zur *H. Eb.* E_2 parallelen Wänden durch lg und i . Mittelst des Lichtstrahles durch g_1 bestimmt sich f_1 und f_1^0 , hieraus f_3 und f_2 und damit auch f_2^0 und g_2 . Die Gerade $h_2 g_2$



Figur 29.

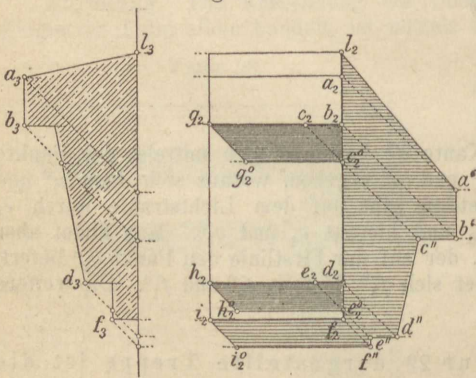


stellt den Schlagschatten von hf auf die erstgenannte vertikale Wand dar. Zieht man $f_2^0 i_2$ parallel zu $h_2 g_2$, so ist hierdurch auch der Schlagschatten von hk auf die vertikale Wand durch i bezeichnet; auf letztere fällt überdies der Schatten $f_2^0 l_2^0$ der Linie gl .

37) **Aufgabe 19.** Für den in Figur 30 durch zweite und dritte Projektion dargestellten Kragstein ist die Schattenkonstruktion durchzuführen.

Auflösung. Mittels der dritten Projektion, d. h. des Profiles des Körpers, konstruiert man die Schatten der einzelnen Punkte $a, b, d, f \dots$ auf die Schatten auffangende Wand und erhält hiedurch im Aufriss die Punkte a'', b'', d'', f'' . Bezüglich des Schlagschattens einzelner Kanten auf die Fläche des Körpers selbst ist zu bemerken, dass sowohl von der Kante bg als auch von dh Schatten auf dem Körper entsteht. Die Schlagschatten $g_2^0 c_2^0$ und $h_2^0 e_2^0$ dieser Linien ergeben sich mittelst der Lichtstrahlen durch b_3 und d_3 , sowie g_2 und h_2 , wie die Figur 30 dies zeigt. Die Lichtstrahlen durch c_2^0 und e_2^0 treffen die Kanten $b_2 g_2$ und $d_2 h_2$ in den Punkten c_2 und e_2 , woraus folgt, dass die Stückchen $b_2 c_2$ und $d_2 e_2$ Schlagschatten auf der rückwärtigen vertikalen Wand hervorbringen; man erhält diesen Schatten in den Parallelen durch b'' und d'' zu den Schatten werfenden Kanten.

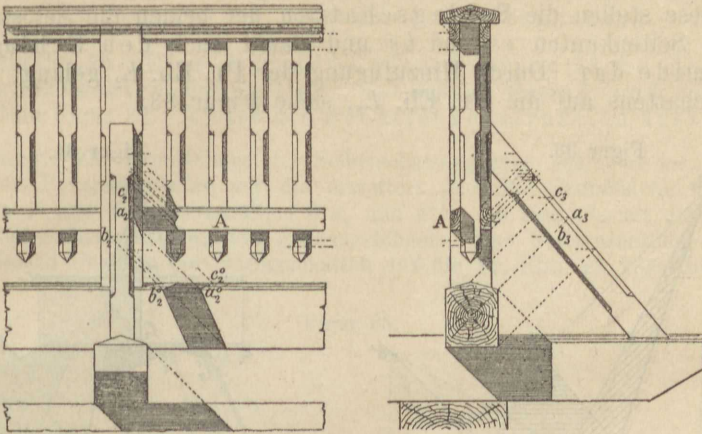
Figur 30.



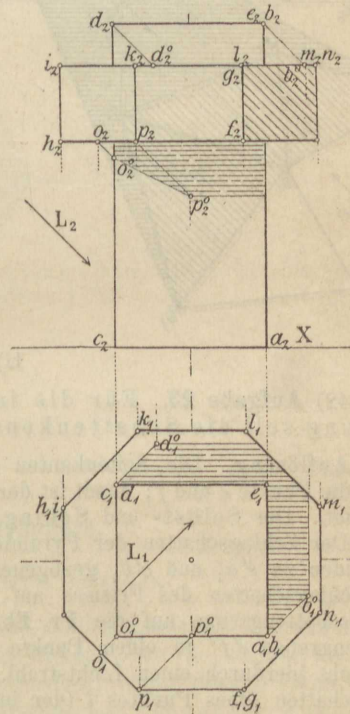
38) **Aufgabe 20.** Für das in Figur 31 dargestellte Brückengeländer ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. In der Figur 31 ist die Konstruktion der Schlagschatten einzelner Punkte der schrägen Strebe auf die einzelnen Balken des Geländers angedeutet. So gelangt der Schatten der Punkte a, b, c nach a_2^0, b_2^0, c_2^0 u. s. w.

Figur 31.



Figur 32.



39) **Aufgabe 21.** Für die in Figur 32 gezeichnete Körperzusammenstellung ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Die Selbstschattengrenze des Prismas I besteht aus den Seitenkanten ab, cd und den Grundkanten de und be , für das Prisma II aus den Kanten fg, hi, ik, kl, lm, mn und ng .

Hieraus bestimmt sich der Schlagsschatten auf die **Pr. Ebn.**

Ausser diesem Schlagsschatten gibt es noch solchen vom Prisma I auf das Prisma II, dann von Prisma II auf I. Die Konstruktion desselben ist aus der Figur zu entnehmen.

40) **Aufgabe 22.** Man wähle eine andere Körperzusammenstellung, etwa für I ein sechsseitiges, für II ein vierseitiges Prisma und konstruiere die auftretenden Schattengrenzen.

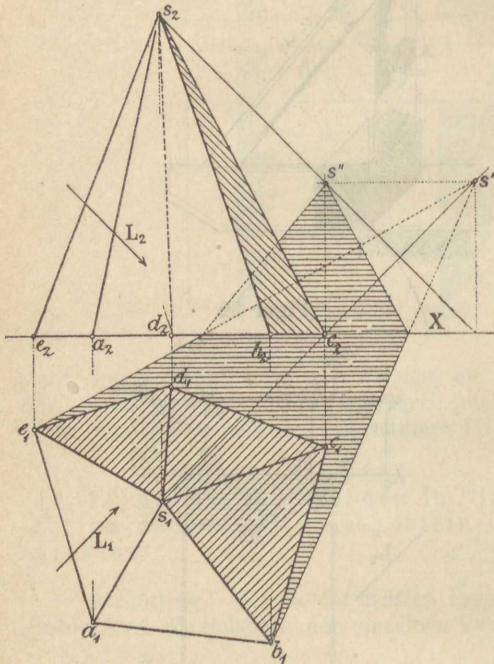
7) Schatten einer Pyramide.

a) Allgemeine Bemerkungen.

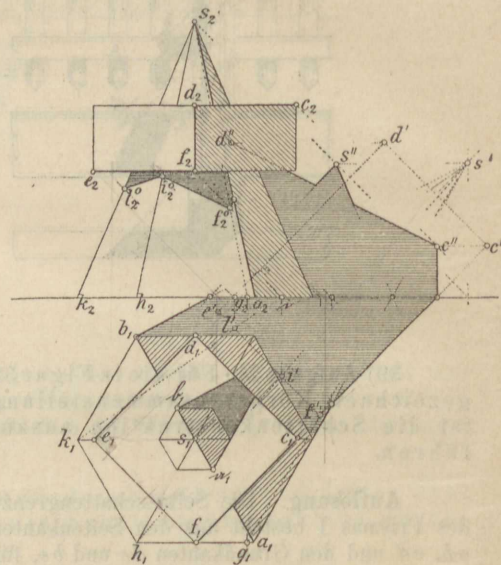
41) Liegt die Pyramide mit ihrer Grundfläche in einer **Pr. Eb.**, etwa in E_1 , so bestimmt man sich den Schlagsschatten s' der Pyramidenspitze auf die **Pr. Eb.** E_1 , letztere unbegrenzt gedacht. Die Schlagsschatten von sämtlichen Pyramidenkanten werden nun den Punkt s' enthalten. Zieht man also von s'

an die Grundfläche Strahlen, die nur eine Ecke enthalten, sonst aber die Grundfläche nicht schneiden, so sind dies im vorliegenden Falle die Linien e_1s' und b_1s' und diese stellen die Schlagschatten der beiden die Selbstschatten bestimmenden Seitenkanten es und bs und damit auch den Schlagschatten der Pyramide dar. Durch Hinzufügung der **Pr. Eb.** E_2 gelangt ein Teil des Pyramidenschattens auf die **Pr. Eb.** E_2 , siehe Figur 33.

Figur 33.



Figur 34.



b) Aufgaben.

42) **Aufgabe 23.** Für die in Figur 34 gezeichnete Körperzusammensetzung soll die Schattenkonstruktion ausgeführt werden.

Auflösung. Die Seitenkanten der Selbstschattengrenze für das Prisma gehen durch die Punkte e und f ; damit ist der Selbst- und Schlagschatten des Prismas bestimmt. Der Selbst- und Schlagschatten der Pyramide ergibt sich wie in No. 41.

Der Schlagschatten der Pyramide auf die obere Grundfläche des Prismas ist durch die beiden zu $s'a_1$ und $s'b_1$ gezogenen Parallelen durch die Punkte a_1 und b_1 begrenzt. Den Schlagschatten des Prismas auf die Pyramide erhält man zweckmässig mittels der Schlagschattengrenze auf die **Pr. Ebn.**; so schneidet z. B. die Linie k_1s' die Schlagschattengrenze $e'f'$ in einem Punkte l' ; projiziert man diesen Punkt auf die X -Achse und zieht hierdurch einen Lichtstrahl, so trifft dieser die Kante k_2s_2 in einem Punkte l_2^0 , dem Schatten eines Punktes l (der in der Figur nicht gezeichnet, den man aber erhält, wenn man den obengenannten Lichtstrahl bis e_2f_2 verlängert) der Kante e_2f_2 .

In gleicher Weise liefert h_1s' auf $e'f'$ einen Punkt i' , dem auf der X -Achse der Punkt i entspricht; der Lichtstrahl durch i schneidet die Kante h_2s_2 in einem weiteren Punkte i_2^0 der Schlagschattengrenze.

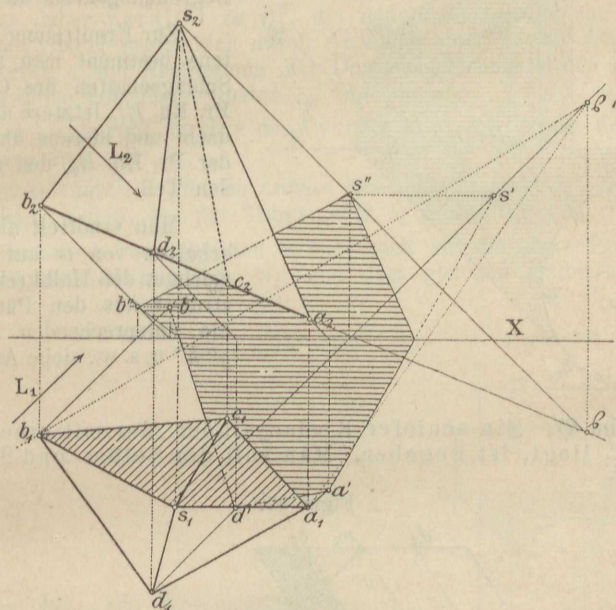
Zieht man ferner $s'f'$ bis zum Schnitt g_1 mit a_1h_1 , so gibt der Aufriss s_2g_2 eine Mantellinie der Pyramide an, welche mit dem Lichtstrahl durch f in einer Lichte Ebene liegt, d. h. der Lichtstrahl durch f_2 schneidet auf g_2s_2 den Punkt f_2^0 aus; schliesslich trifft a_1s' die $f'c'$ in einem Punkte, der auf die X -Achse zu projizieren ist. Der Lichtstrahl durch letzteren Punkt gibt den auf a_2s_2 liegenden Punkt des Schattens.

43) **Aufgabe 24.** Man zeichne die in Figur 34 angedeutete Körperzusammenstellung so, dass die Pyramidengrundfläche in der **Pr. Eb. E_2** liegt und konstruiere die auftretenden Schattengrenzen.

44) **Aufgabe 25.** Eine Pyramide, deren Grundfläche in einer zur **Pr. Eb. E_2** senkrechten Ebene liegt, ist durch Grund- und Aufriss dargestellt, siehe Figur 35. Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Zur Ermittlung der Selbstschattengrenze bestimmt man den Schlagschatten \bar{s} der Pyramidenspitze auf die erweitert gedachte Grundfläche der Pyramide und zieht von \bar{s}' aus die Streifstrahlen $\bar{s}'a_1$ und $\bar{s}'b_1$, so sind hiermit die Seitenkanten sb und sa der Selbstschattengrenze gekennzeichnet. Das Selbstschattenpolygon heisst $sadb$, von dessen Punkten der Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** zu konstruieren ist.

Figur 35.



8) Schatten eines Cylinders.

a) Allgemeine Bemerkungen.

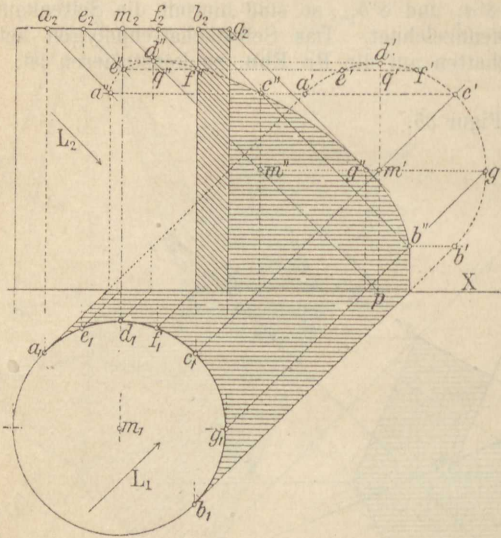
45) Bei der Konstruktion des Selbst- und Schlagschattens für einen Cylinder kann in ganz ähnlicher Weise verfahren werden, wie bei einem Prisma, d. h. man zieht beim senkrechten Kreiscylinder, wenn dessen Grundfläche in einer der **Pr. Ebn.** liegt oder parallel hierzu ist, parallel zur diesbezüglichen Projektion der Lichtrichtung, d. h. parallel zu L_1 oder L_2 Tangenten an den Grundkreis. Durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehen nun zwei Mantellinien des Cylinders hindurch, welche zur Selbstschattengrenze gehören; zu letzterer kommen noch von den Begrenzungen der Grundflächen je eine Hälfte. Steht der Cylinder auf keiner der **Pr. Ebn.** senkrecht, so bestimmt man sich den Schlagschatten einer zur Cylinderichtung parallelen Geraden auf jene **Pr. Eb.**, in welcher eine Grundfläche liegt und zieht parallel zur gefundenen Schlagschattenrichtung Tangenten an die

Grundlinie. Durch die Berührungspunkte dieser Tangenten gehen die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurch.

b) Aufgaben.

46) **Aufgabe 26.** Ein senkrechter Kreiscylinder liegt mit einer Grundfläche in der **Pr. Eb. E_1** , siehe Figur 36. Es ist der Selbst- und Schlagschatten des Cylinders zu konstruieren.

Figur 36.



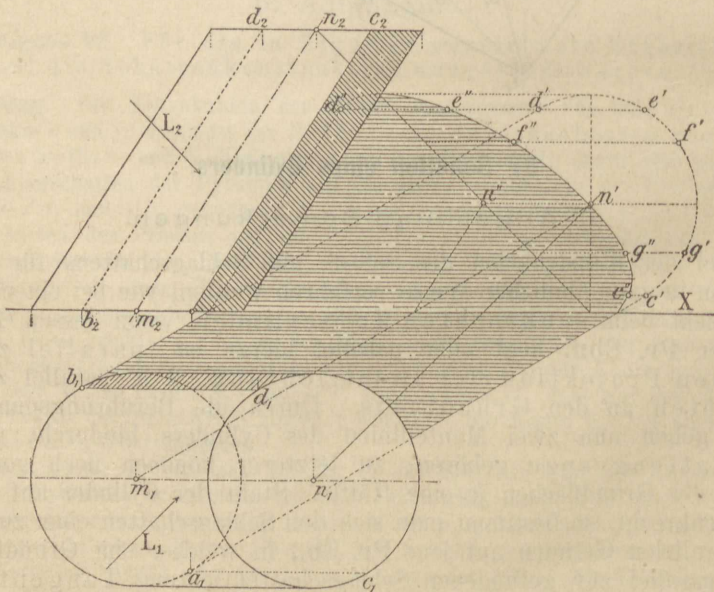
Auflösung. Zieht man parallel zu L_1 die Tangenten an den Grundkreis, so gehören die beiden durch die Berührungspunkte a_1 und b_1 gezogenen Mantellinien der Selbstschattengrenze an, ausserdem aber noch vom oberen Begrenzungskreis die Hälfte acb .

Zur Ermittlung des Schlagschattens bestimmt man zweckmässig den Schlagschatten des Cylinders auf die **Pr. Eb. E_1** , letztere als unbegrenzt gedacht und hieraus durch Hinzufügung der **Pr. Eb. E_2** , den auf diese treffenden Teil.

Man ermittelt also m' als Schlagschatten von m auf die **Pr. Eb. E_1** , zeichnet den Halbkreis $a'c'b'$ und konstruiert aus den Punkten $a' d' e' g' b'$ die entsprechenden Punkte $a'' d'' e'' g'' h''$ u. s. w., siehe Aufgabe 5, No. 13.

47) **Aufgabe 27.** Ein schiefer Kreiscylinder, der mit einer Grundfläche in der **Pr. Eb. E_1** liegt, ist gegeben. Man soll den Selbst- und Schlagschatten konstruieren.

Figur 37.



Auflösung. Man bestimmt zweckmässig den Schlagschatten $m_1 n'$ der Cylinderachse auf die Pr. Eb. E_1 und zieht parallel zu $m_1 n'$ an den Grundkreis des Cylinders die möglichen Tangenten; durch deren Berührungspunkte a_1, b_1 gehen die Mantellinien des Selbstschattens hindurch.

Zur Ermittlung des Schlagschattens nimmt man wieder die Pr. Eb. E_1 zunächst als unbegrenzt an, konstruiert auf diese den Schlagschatten des Cylinders und bestimmt hierauf den auf die Pr. Eb. E_2 treffenden Teil.

48) **Aufgabe 28.** Für die in Figur 38 gezeichnete Körperzusammensetzung ist der Schatten zu konstruieren.

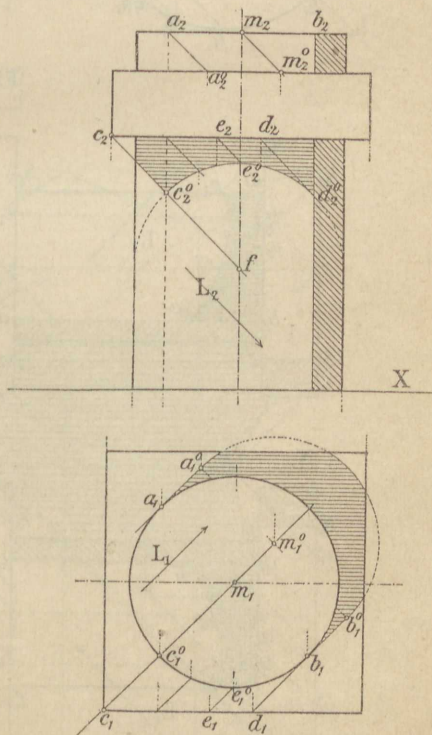
Auflösung. Es soll hier nur der Selbstschatten des Cylinders, sowie der Schlagschatten von dem Prisma auf den Cylinder und von dem letzteren auf das Prisma konstruiert werden. Was nun den Schlagschatten des Prismas auf den Cylinder anbetrifft, so wird Schatten hervorgerufen durch die beiden durch den Punkt c gehenden horizontalen Prismenkanten. Von diesen steht die eine senkrecht zur Pr. Eb. E_2 , ihr Schatten $c_2 c_2^0$ ist daher parallel zu L_2 , die andere ist parallel zur X -Achse und ihr Schatten auf den Cylinder ergibt sich durch Annahme einer Anzahl Punkte d, e u. s. w. auf der Kante durch c und Ermittlung der Durchschnittspunkte der diese Punkte enthaltenden Lichtstrahlen mit dem Cylinder.

So trifft der Lichtstrahl durch e den Cylinder in e^0, e_2^0 , gehört daher der Schattengrenze im Aufriss an.

Der Lichtstrahl durch d gibt im Aufriss den Schattenpunkt d_2^0 , der auf der Selbstschattengrenze liegt, weil d_1 auf der Tangente in b_1 gewählt wurde.

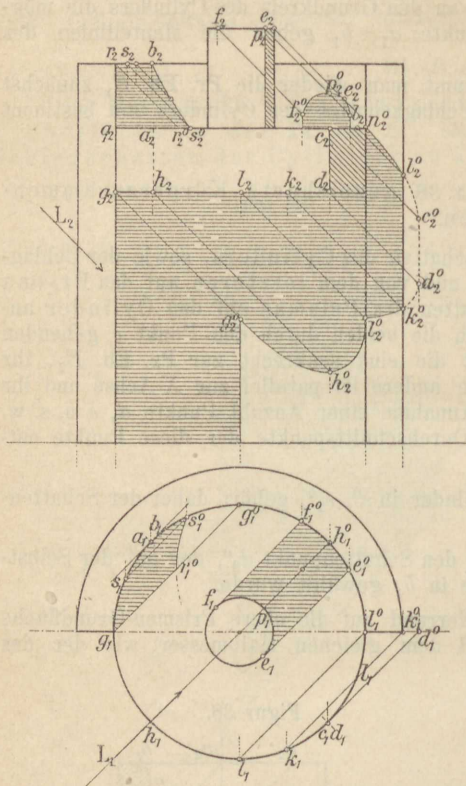
Der Schlagschatten vom obersten Cylinderrand auf die obere Prismen-Grundfläche ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte m_1^0 und dem gleichen Halbmesser wie der des Cylinderkreises.

Figur 38.



Anmerkung 10. Die Schattengrenze $c_2^0 e_2^0 d_2^0$ projiziert sich als eine Kreislinie, welche den Cylinderumriss berührt und ihren Mittelpunkt in f hat. Man braucht also nur den Schnittpunkt des durch c_2 gehenden Lichtstrahles mit der Achsenprojektion des Cylinders aufzusuchen, und um f mit dem Cylinderhalbmesser den Kreis $c_2^0 e_2^0 d_2^0$ zu beschreiben; das Bogenstück $c_2^0 e_2^0 d_2^0$ bildet dann die gesuchte Schlagschattengrenze.

Figur 39.



49) Aufgabe 29. Für die in Fig. 39 gezeichnete Körperzusammenstellung ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Zunächst sind die auftretenden Selbstschattengrenzen zu ermitteln durch Ziehen von Tangenten parallel zu A_1 an die Grundkreise. Schlagschatten entsteht:

1. von der Kolbenstange auf den inneren Cylindermantel; man erhält hierfür die Begrenzung $f_2^0 p_2^0 e_2^0 \dots$;

2. von dem unteren vorderen Kolbenrand auf den inneren Cylindermantel = $g_2^0 h_0^2 l_2^0$;

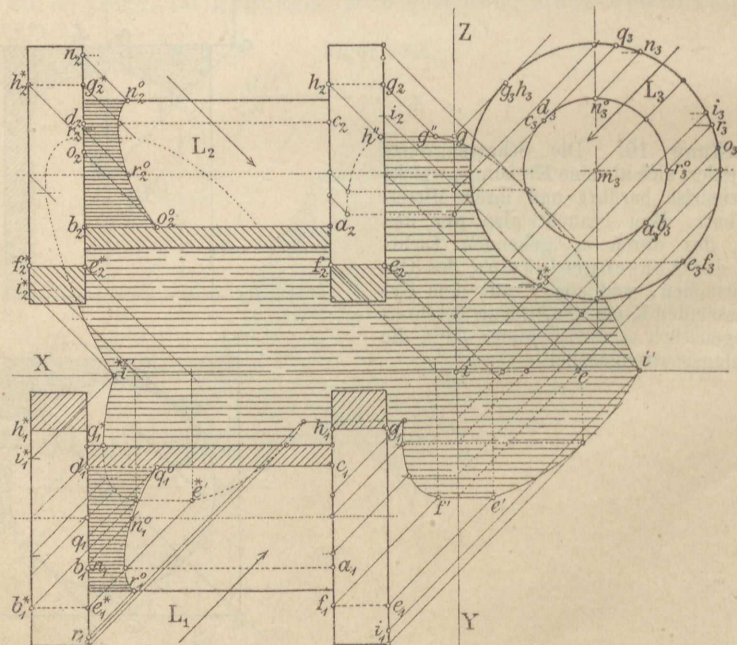
3. von dem unteren vorderen Kolbenrand, sowie von der Linie cd auf die vertikale Schnittfläche durch die Cylinderwandung = $l_0^2 k_2^0 d_2^0 c_2^0 l_2^0 n_2^0$;

4. von dem oberen inneren Cylinderrand auf die inneren Cylindermantel = $b_2 s_2^0$ bzw. $r_1^0 s_1^0$.

Der Schatten beginnt im Aufriss in b_2 .

Die Konstruktion der einzelnen Punkte ist aus der Figur 39 so deutlich zu ersehen, dass eine Beschreibung nicht nötig ist, es sei nur bemerkt, dass die Bezeichnungen l_1 bzw. l_2 und l_2^0 doppelt auftreten.

Figur 40.



50) **Aufgabe 30.** Für die in Figur 40 gezeichnete Körperzusammenstellung ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Man nimmt sich eine dritte Projektion zu Hilfe und kann in derselben unmittelbar die Mantellinien der Selbstschattengrenze durch die Berührungspunkte des parallel zu L_3 an die Cylinderkreise gezogenen Tangenten bestimmen und in den Grund- und Aufriss übertragen. Auch der Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_1 und E_2 bestimmt sich mittels der dritten Projektion sehr leicht. So gelangt z. B. der Schatten des Punktes e_3 nach e , aus e bestimmt sich, wie dies aus der Figur 40 zu entnehmen ist, der Punkt e' ; in gleicher Weise ist jeder Punkt der Schattenkurve zu ermitteln; die Schatten schneiden sich in den Punkten i' und $i^{*'}$ der X -Achse; in der dritten Projektion ergibt sich unmittelbar der Punkt i_3 , dem im Grund- und Aufriss i_1 und i_2 entsprechen.

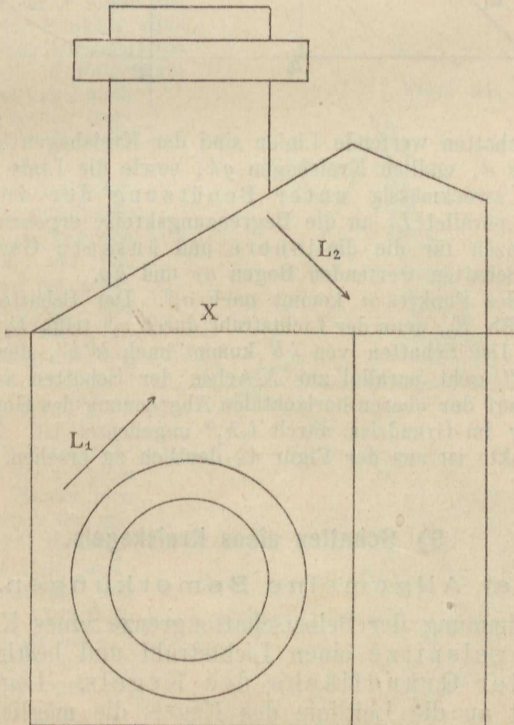
Sowohl im Aufriss wie im Grundriss ist noch Schatten sichtbar, herrührend von dem Kreise g^*e^* , auch dieser Schatten bestimmt sich leicht mittelst der dritten Projektion; in der Figur 40 ist für mehrere Punkte n, o, q, r die Konstruktion angegeben.

51) **Aufgabe 31.** Man wähle statt der Zusammenstellung in Aufgabe 30 zwei Prismen mit Grundflächen von verschiedener Seitenzahl, ein Prisma mit cylindrischen Randplatten oder einen Cylinder mit prismatischen Randplatten und führe die Schattenkonstruktion in ähnlicher Weise wie in Aufgabe 30 durch.

52) **Aufgabe 32.** In Figur 41 ist ein Teil eines Satteldaches, über welches ein cylindrisch geformter Schornstein hervorragt, dargestellt. Man soll die Schattenkonstruktion ausführen.

53) **Aufgabe 33.** Eine halbkreisförmige cylindrische Rinne liegt in der **Pr. Eb.** E_1 auf und steht senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2 . Man soll die Schattenkonstruktion ausführen.

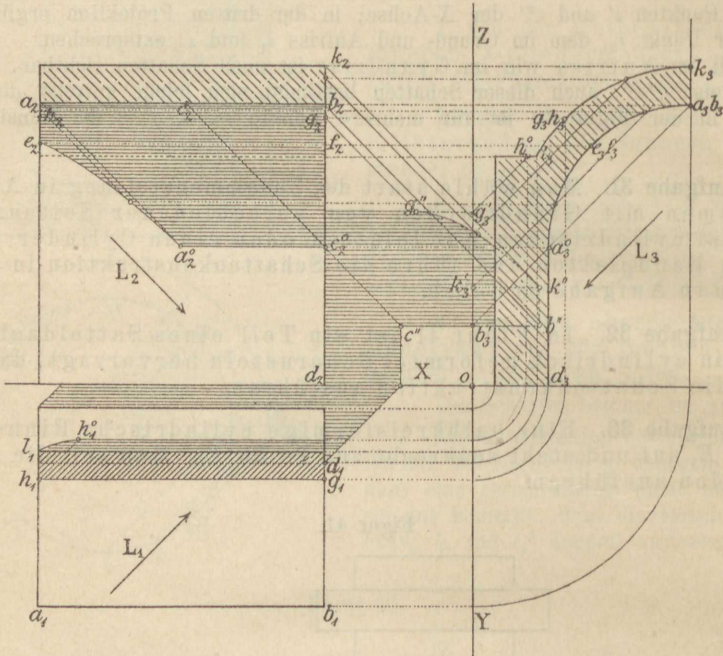
Figur 41.



54) **Aufgabe 34.** Die in Aufgabe 33 genannte Rinne sei gegen die Pr. Eb. E_2 unter dem Winkel von 30° geneigt. Man konstruiere die auftretenden Schattengrenzen.

55) **Aufgabe 35.** Ein halbkreisförmiges Tonnengewölbe, dessen Achse parallel zu den Pr. Ebn. E_1 und E_2 läuft, ist in Figur 42 durch Grundriss, Längen- und Querschnitt dargestellt. Es ist die Schattenkonstruktion durchzuführen.

Figur 42.



Auflösung. Schatten werfende Linien sind der Kreisbogen ae , die Kante ab , die vertikale Kante durch d , endlich Kreisbogen gh , sowie die Linie gh . Man konstruiert die Schattengrenzen zweckmässig unter Benützung der dritten Projektion. Durch die Tangenten parallel L_3 an die Begrenzungskreise ergeben sich die Mantellinien der Selbstschattengrenzen für die innere und äussere Gewölbleibung und damit die Begrenzung der Schatten werfenden Bogen ae und kg .

Der Schatten des Punktes a kommt nach a_2^0 . Der Schatten der Linie ab fällt zum Teil auf die Pr. Eb. E_2 , denn der Lichtstrahl durch c_2^0 trifft E_2 in c'' , die Linie $c''b''$ ist dieser Schatten. Der Schatten von kb kommt nach $k''b''$, der des Kreisbogens kg nach $k''g''$; durch g'' geht parallel zur X-Achse der Schatten von gh . Teil hl des Kreisbogens lk ruft auf der oberen horizontalen Abgrenzung des Gewölbewiderlagers noch Schatten hervor, der im Grundriss durch $l_1h_1^0$ angedeutet ist. Die Konstruktion der einzelnen Schattenpunkte ist aus der Figur 42 deutlich zu ersehen.

9) Schatten eines Kreiskegels.

a) Allgemeine Bemerkungen.

56) Zur Bestimmung der Selbstschattengrenze eines Kreiskegels führt man durch die Kegelspitze einen Lichtstrahl und bestimmt dessen Schnitt mit der Ebene der Grundfläche des Kegels. Legt man dann durch diesen Schnittpunkt an die Leitlinie des Kegels die möglichen Tangenten, so

gehen durch deren Berührungspunkte die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurch. Durch die genannten Berührungspunkte wird die Leitlinie des Kegels in zwei Teile geteilt, von denen der der Lichtquelle zugekehrte Teil gleichfalls der Selbstschattengrenze des Kegels angehört. Führt man durch die Punkte der Selbstschattengrenze Lichtstrahlen, so bestimmen deren Schnitte mit den **Pr. Ebn.** den Schlagschatten des Kegels auf diese.

b) Aufgaben.

57) **Aufgabe 36.** Es ist die Schattenkonstruktion für einen mit seiner Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 aufliegenden senkrechten Kreiskegel, siehe Fig. 43, auszuführen.

Auflösung. Man bestimmt den Schlagschatten s' von s auf die **Pr. Eb.** E_1 , zieht von s' aus die möglichen Tangenten an den Grundkreis, durch deren Berührungspunkte a_1 und b_1 die Mantellinien und ermittelt die zugehörigen Aufrisse. Ein Teil des Schlagschattens fällt auf die **Pr. Eb.** E_1 .

In der Figur 43 ist der Aufriss des Punktes a statt mit a_2 mit a_1 bezeichnet.

Anmerkung 11. Die in No. 57 angegebene Lösung für die Konstruktion des Kegelschattens kann unter Umständen versagen, wenn nämlich die Kegelspitze s_2 sehr weit von der X -Achse absteht. Es fällt dann der Punkt s' vielleicht über die Grenzen des Zeichenblattes hinaus und soll deshalb in Folgendem für den senkrechten Kreiskegel auch eine Konstruktion angegeben werden, die von der Lage der Kegelspitze unabhängig ist.

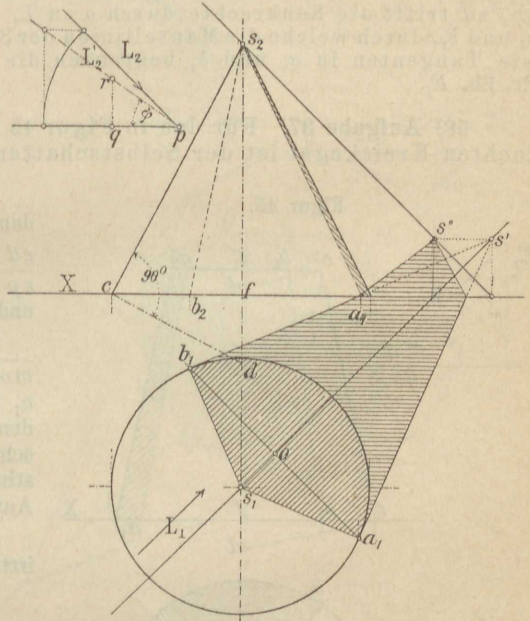
Um diese Konstruktion möglichst einfach entwickeln zu können, denkt man sich die ursprüngliche Lichtrichtung L parallel zur **Pr. Eb.** E_2 gedreht, so dass der Aufriss von L die Lage L'_2 der Grundriss jene von L_1' hat.

Unter dieser Voraussetzung erhält man den Schatten des Kegels nach No. 57, so wie in der Fig. 44 angegeben ist.

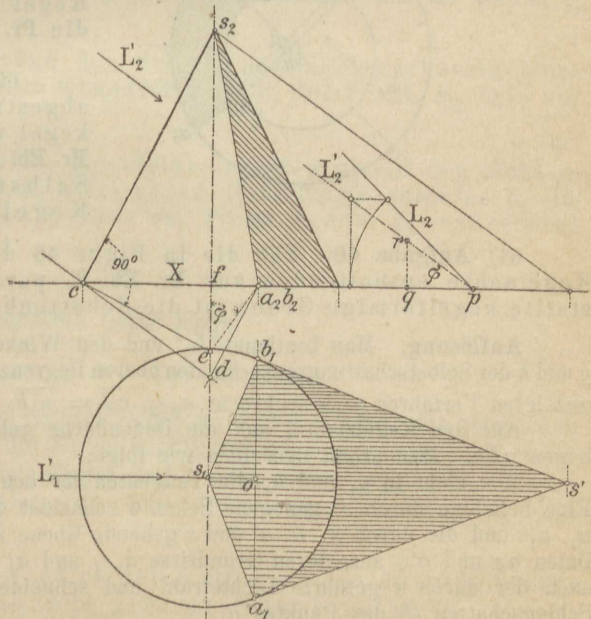
Denkt man sich nun ce senkrecht es_2 gezogen, so ist e Spitze eines Kegels, dessen Mantellinien auf den Berührungsebenen des gegebenen Kegels senkrecht stehen.

Die Ebene ea_1b_1 steht senkrecht auf der Schnittlinie der beiden Ebenen sas' und sbs' , d. h. senkrecht auf dem Lichtstrahl ss' ; es ist also ea_2 senkrecht zu L_2 , daher ist $\sphericalangle fea_2 = \varphi$ und die Strecke $fa_2 = s_1o = fe \cdot \text{tg } \varphi$.

Figur 43.



Figur 44.



Trägt man also in der Nebenfigur die Strecke $\overline{qp} = \overline{fe}$ an, zieht \overline{qr} senkrecht zu X bis zum Schnittpunkt r mit L_2' , so ist $\overline{qr} = \overline{qp} \cdot \operatorname{tg} \varphi$; man hat also nur $\overline{fa_2} = \overline{s_1 o} = \overline{qr}$ abzutragen.

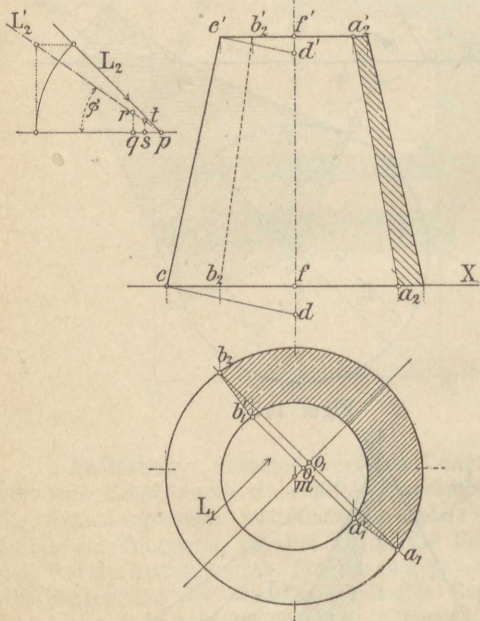
Denkt man sich die Lichtrichtung in ihre ursprüngliche Lage zurückgeführt, so ist auch im Grundriss der Figur 43 die Strecke $\overline{s_1 o} = \overline{qr} = \overline{fd} \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

Man erhält somit für den senkrechten Kreiskegel folgende einfache Konstruktion der Selbstschattengrenze:

Man bestimmt sich, siehe Figur 43, zunächst die Linie $\overline{L_2'}$ und damit den Winkel φ . Hierauf zieht man \overline{cd} senkrecht $\overline{cs_2}$ und macht $\overline{pq} = \overline{df}$ und zieht \overline{rq} ; trägt man nun auf dem durch s_1 gehenden Lichtstrahl von s_1 aus die Strecke $\overline{s_1 o} = \overline{qr}$ ab, so trifft die Senkrechte durch o zu L_1 den Grundkreis in zwei Punkten a_1 und b_1 , durch welche die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurch gehen. Die Tangenten in a_1 und b_1 begrenzen die Schlagschatten des Kegels auf die Pr. Eb. E_1 .

58) **Aufgabe 37.** Für den in Figur 45 dargestellten abgestumpften senkrechten Kreiskegel ist der Selbstschatten zu konstruieren.

Figur 45.



Auflösung. Man bestimmt L_2' und \overline{fd} , damit auch den Winkel φ , zeichnet hierauf \overline{cd} und $\overline{c'd'}$ senkrecht zu $\overline{cc'}$, macht $\overline{qp} = \overline{sp} = \overline{f'd'}$ und zieht die Senkrechten \overline{qr} und \overline{st} zur X -Achse.

Macht man nun $\overline{m o_1} = \overline{qr}$ und $\overline{m o_1'} = \overline{st}$, so treffen die Senkrechten durch o_1 und o_1' die zugehörigen Kegelkreise in den Punkten a_1, b_1, a_1' und b_1' der Selbstschattengrenze. Aus dem Grundriss bestimmen sich die entsprechenden Punkte im Aufriss durch Hinaufprojizieren.

In Figur 45 ist im Grundriss statt b_1 irrtümlich b_2 geschrieben.

59) **Aufgabe 38.** Man konstruiere für den in Aufgabe 37 dargestellten Kegel auch den Schlagschatten auf die Pr. Ebn. E_1 und E_2 .

60) **Aufgabe 39.** Man stelle einen abgestumpften senkrechten Kreiskegel mit einer Grundfläche auf die Pr. Eb. E_2 und konstruiere hierauf den Selbst- und Schlagschatten des Kegels.

61) **Aufgabe 40.** Für die in Figur 46 durch Grundriss und einen die Kegelachse enthaltenden zur Pr. Eb. E_2 parallelen Vertikalschnitt dargestellte kegelförmige Grube ist die Schattenkonstruktion durchzuführen.

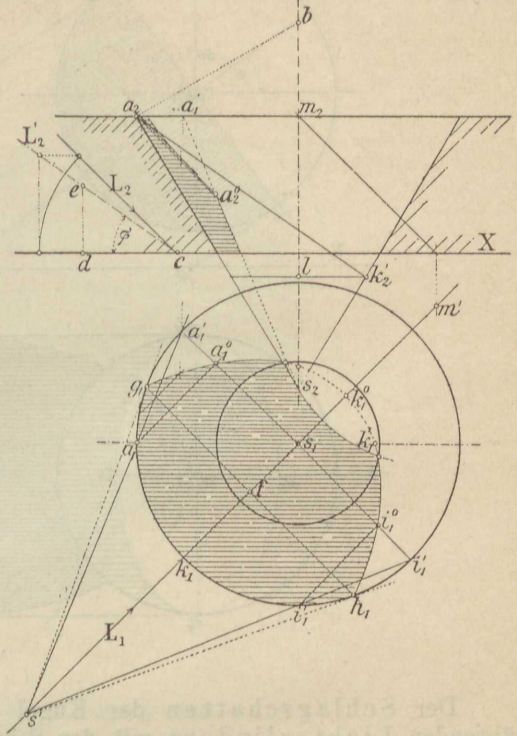
Auflösung. Man bestimmt L_2' und den Winkel φ , konstruiert hierauf die Punkte g und h der Selbstschattengrenze für den oberen Begrenzungskreis nach dem in Anmerkung 11 gezeigten Verfahren ($\overline{a_2 b}$ senkrecht $\overline{a_2 s_2}$, $\overline{cd} = \overline{m_2 b}$, $\overline{de} = \overline{s_1 f}$, $\overline{h_1 g_1}$ senkrecht L_1).

Auf den Kegelmantel und die Bodenfläche gelangt nun Schatten von dem Kreisbogen ghh . Man erhält denselben wie folgt:

Man zieht in g_1 und h_1 die Tangenten an den Kegelkreis, die sich s' begegnen. Eine beliebige durch s' gezogene Sekante schneidet den Kegelkreis z. B. in den Punkten a_1, a_1' und die durch s', a, a' und s gehende Ebene schneidet aus dem Kegel die Mantellinien as und $a's$ aus, deren Grundrisse $a_1 s_1$ und $a_1' s_1$ sind. In dieser Ebene liegt aber auch der durch a geführte Lichtstrahl und schneidet somit die Mantellinie $a's$ in dem Schlagschatten a^0 des Punktes a .

Zieht man also durch a_1 einen Lichtstrahl, so trifft dieser die $a_1's_1$ in a_1^0 , dem Schlagschatten des Punktes a im Grundriss. Der Aufriss ergibt sich durch Hinaufprojizieren. Es ist noch für einen zweiten Punkt i die Konstruktion durchgeführt; für die Sekante $s'k_1m'$ versagt das Verfahren. Für diesen Fall denkt man sich die Lichtebene L_1 samt ihrem Schnitt mit dem Kegel um die Kegelachse parallel zur Pr. Eb. E_2 gedreht, dann kommt Punkt k_1 nach a_1 und im Aufriss nach a_2 . Der Lichtstrahl durch a_2 parallel L_2' schneidet den Kegelmantel in k_2' , dem im Grundriss k_1' entspricht, welcher Punkt nach der Zurückdrehung der Lichtebene L_1 in ihre ursprüngliche Lage nach k_1^0 gelangt. Der Ellipsenbogen $g_1a_1^0k_1^0i_1^0h_1$ ist demnach der Durchschnitt des durch den Bogen $gaklh$ gelegten Lichtcylinders mit dem Kegelmantel. Nun liegt aber der Punkt k^0 schon unterhalb des Bodens der Grube, es gelangt daher ein Teil des Schattens des Kreises gkh auf die Bodenfläche; um diesen zu erhalten, bestimmt man m' auf dem Lichtstrahle durch m und zeichnet um m' als Mittelpunkt einen Kreis mit dem gleichen Halbmesser wie $g_1k_1h_1$. Im Aufriss zeigt sich nur der Schatten des Bogenstückes ag als $g_2a_2^0$, sowie der Schatten der Mantellinie as , als $a_2^0s_2$.

Figur 46.



In Figur 46 Aufriss ist a_1' statt a_2' geschrieben, ausserdem fehlt der Aufriss g_2 von g .

62) **Aufgabe 41.** Man zeichne den Selbst- und Schlagschatten eines schiefen Kreiskegels, wenn dessen Grundfläche a) in der Pr. Eb. E_1 , b) in der Pr. Eb. E_2 liegen soll.

63) **Aufgabe 42.** Man zeichne den Selbstschatten sowie den Schlagschatten auf die Pr. Ebn. E_1 und E_2 eines senkrechten bzw. schiefen Kreiskegels, wenn dessen Grundfläche in einer zur Pr. Eb. E_1 oder E_2 senkrechten Ebene liegen soll.

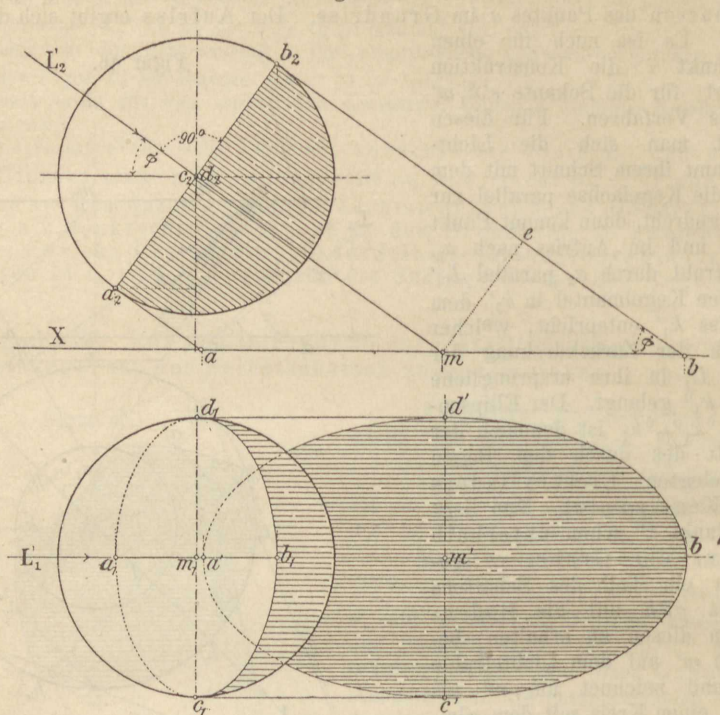
10) Schatten einer Kugel.

a) Allgemeine Bemerkungen.

64) Zieht man parallel zur Lichtrichtung an eine Kugel die möglichen Tangenten, so bilden diese einen die Kugel berührenden senkrechten Kreis cylinder. Die Berührung mit der Kugel findet nach einem grössten Kreise statt, dessen Ebene senkrecht zur Lichtrichtung steht. Es folgt hieraus der Satz:

„Die Selbstschattengrenze der Kugel ist der auf der Lichtrichtung senkrecht stehende grösste Kugelkreis.“

Figur 47.



Der Schlagschatten der Kugel entsteht durch den Schnitt des berührenden Lichtcylinders mit der Schatten auffangenden Fläche; ist diese eine Projektionsebene, so ist die Durchschnittslinie eine Ellipse.

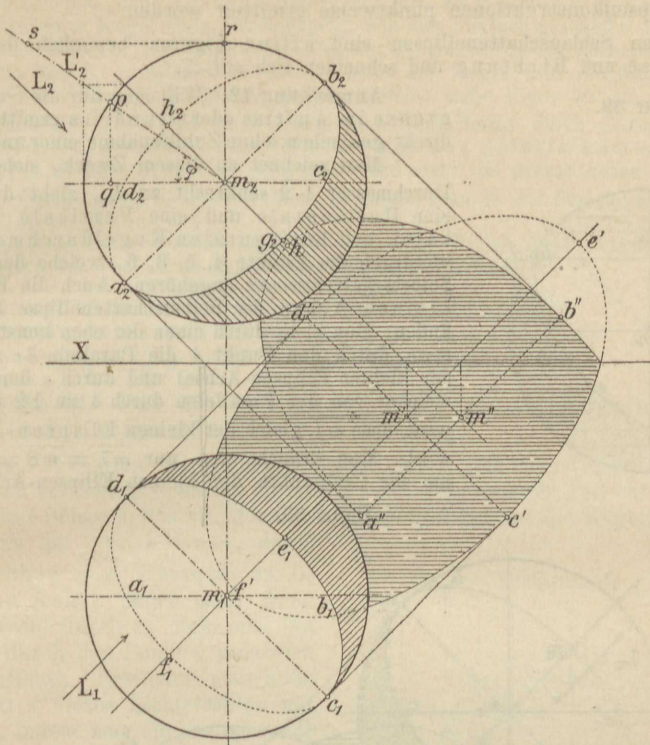
Zur leichteren Erkennung des geometrischen Zusammenhangs zwischen dem Winkel φ der Lichtrichtung mit einer **Pr. Eb.** und den Achsenlängen der als Ellipsen sich projizierenden Schattengrenzen sei die Lichtrichtung parallel zur **Pr. Eb.** E_2 , aber unter dem Winkel φ gegen die **Pr. Eb.** E_1 geneigt, angenommen. Unter dieser Voraussetzung ist der Aufriss der Selbstschattengrenze der zu L_2' senkrecht stehende Kreisdurchmesser $\overline{a_2 b_2}$, siehe Figur 47, der Grundriss stellt sich als Ellipse mit den Achsen $\overline{c_1 d_1}$ und $\overline{a_1 b_1}$ dar.

Dabei ist die grosse Achse $\overline{c_1 d_1}$ gleich dem Kugeldurchmesser und senkrecht zu L_1' , während die kleine Achse $\overline{a_1 b_1} = \overline{d} \cdot \sin \varphi$ ist, wenn \overline{d} den Kugeldurchmesser bezeichnet. Die kleine Halbachse $\overline{m_1 a_1}$ ist daher gleich $r \cdot \sin \varphi$, unter r den Kugelhalbmesser verstanden.

Die Schlagschattengrenze projiziert sich im Grundriss als eine Ellipse $a' b' c' d'$, deren grosse Achse mit dem durch den Grundriss des Kugelmittelpunkts gehenden Lichtstrahle zusammenfällt; ihre Länge ergibt sich, in Rücksicht auf das Dreieck mbe zu $\overline{a' b'} = \overline{d} \sec \varphi$; die Länge der kleinen Achse ist gleich \overline{d} .

Drückt man die Längen der Halbachsen der Schlagschattenellipse durch den Kugelhalbmesser r und den Winkel φ aus, so erhält man:

Figur 48.



$$\overline{m'a'} = \overline{m'b'} = r \cdot \sec \varphi \text{ und} \\ \overline{m'c'} = \overline{m'd'} = r.$$

Dreht man nun den Grundriss in Figur 47 um die durch den Kugelmittelpunkt gezogene Vertikale so lange, bis L_1' die Lage von L_1 in Figur 48 einnimmt, so erhält man die Lage der Schattengrenzen der Kugel für die übliche Lichtrichtung im Grundriss. Da ferner die Lichtrichtung gegen beide **Pr. Ebn.** unter dem gleichen Winkel φ geneigt ist, so ergibt sich der Aufriss als eine dem Grundriss kongruente Figur, welche gegen den letzteren nur um einen Winkel von 90° gedreht erscheint, siehe Figur 48 Aufriss. Die Figur 48 lässt sich nun direkt ohne Zuhilfenahme der Figur 47 herstellen. An der folgenden Aufgabe soll dies gezeigt werden.

b) Aufgaben.

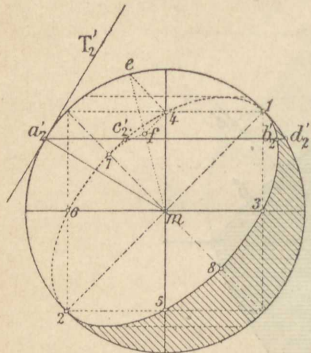
65) **Aufgabe 43.** Eine Kugel ist im Grund- und Aufriss dargestellt, siehe Figur 48. Es soll die Schattenkonstruktion ausgeführt werden.

Auflösung. Man zeichnet L_2' und damit den Winkel φ . Zur Bestimmung der Selbstschattengrenze zieht man durch den Kugelmittelpunkt einen Lichtstrahl, errichtet im Aufriss a_2b_2 senkrecht zu L_2 , im Grundriss c_1d_1 senkrecht zu L_1 und macht $\overline{m_1e_1} = \overline{m_1f_1} = \overline{m_2g_2} = \overline{m_2h_2} = \overline{qp} = r \cdot \sin \varphi$, so sind hiermit die Achsen der Projektionen der Selbstschattengrenze bestimmt und können diese Projektionen gezeichnet werden. Nunmehr ermittelt man die Schnittpunkte m' und m'' des durch den Kugelmittelpunkt geführten Lichtstrahles mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 und errichtet in m' zu L_1 die Senkrechte $\overline{c'd'} = d$ und in m'' zu L_2 die Senkrechte $\overline{a''b''} = d$. Macht man ferner $\overline{m'e'} = \overline{m'f'} = \overline{m''h''} = \overline{m_2s} = r \cdot \sec \varphi$, so sind hiermit auch die Achsenlängen der

Schlagschattenellipsen gegeben und können letztere nach einer der in Band I erläuterten Ellipsenkonstruktionen punktweise ermittelt werden.

Die beiden Schlagschattenellipsen sind affine Figuren bezüglich der X-Achse als Affinitätsachse und Richtung und schneiden sich auf X.

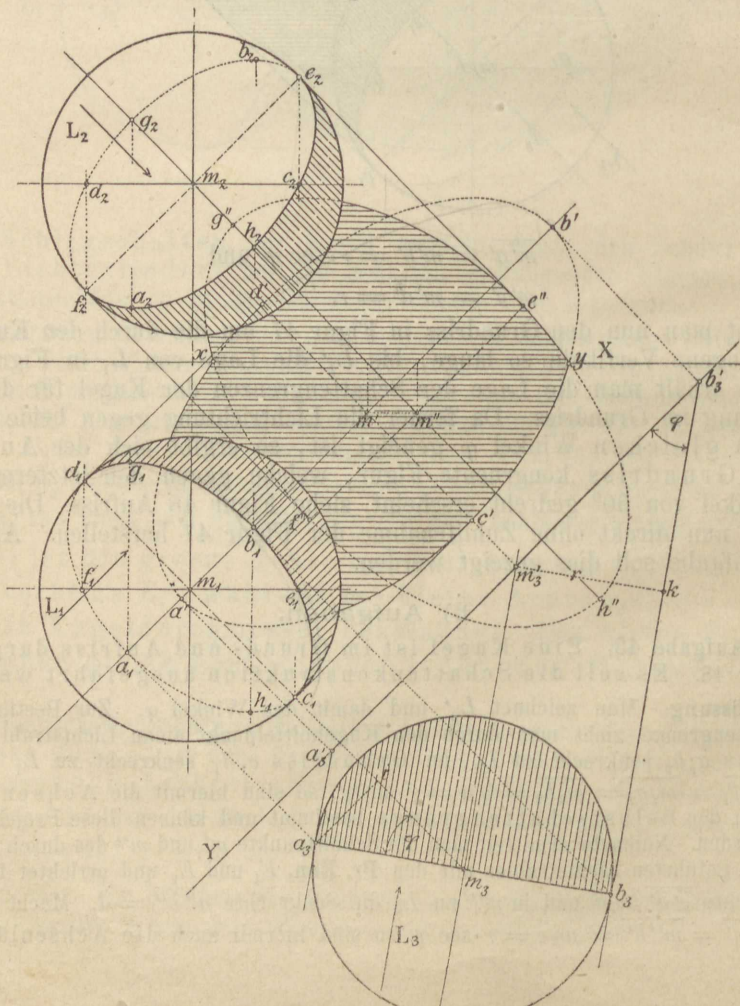
Figur 49.



Anmerkung 12. Will man nur die Selbstschattengrenze im Aufriss oder Grundriss ermitteln, so kann dies direkt geschehen, ohne Zuhilfenahme einer anderen Projektion.

Man zeichnet zu diesem Zweck, siehe Figur 49, den Durchmesser 1-2 senkrecht zu L_2 , zieht durch 1 und 2 je eine Horizontale und eine Vertikale bis zum vertikalen und horizontalen Kugeldurchmesser und erhält hierdurch die Punkte 4, 5, 3, 6, welche dem Aufriss der Selbstschattengrenze angehören. Auch die Endpunkte der kleinen Achse der Selbstschattenellipse lassen sich leicht finden: Man zieht durch einen der eben konstruierten Punkte, etwa durch den Punkt 4 die Parallele $4e$ zu L_2 (Richtung der kleinen Ellipsen-Achse) und durch e den Halbmesser me , welcher von der Parallelen durch 4 zu 12 in f so getroffen wird, dass \overline{mf} gleich der kleinen Ellipsen-Halbachse sein wird. Man braucht also nur $\overline{m7} = \overline{m8} = \overline{mf}$ zu machen, um die Endpunkte der kleinen Ellipsen-Achse zu erhalten.

Figur 50.



Anmerkung 13. Die Herleitung der in No. 63 gefundenen Beziehungen zwischen dem Kugelhalbmesser und den Achsenlängen der als Ellipse sich projizierenden Schattengrenze einer Kugel kann zweckmässig, wie dies vielfach geschieht, auch in folgender Weise vorgenommen werden: Man wählt eine **Pr. Eb.** E_3 parallel zur Lichtrichtung und etwa senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 , projiziert in diese Ebene die Kugel und die Lichtrichtung. Die dritte Projektion der Selbstschattengrenze projiziert sich, siehe Figur 50, als der zu L_3 senkrechte Kreisdurchmesser $\overline{a_3 b_3}$, mittelst welchem man dann leicht durch Zurückprojizieren die Endpunkte a_1, b_1, c_1, d_1 der Ellipse des Grundrisses der Selbstschattengrenze findet.

Der Aufriss ist dem Grundriss kongruent und steht die grosse Achse senkrecht zu L_2 .

Zieht man durch a_3 und b_3 Lichtstrahlen, so erhält man in der Strecke $\overline{a_3' b_3'}$ die grosse Achse der Schlagschattengrenze.

Auch bei dieser Entwicklung kann man aus der Figur direkt entnehmen, dass die kleine Halbachse der Projektion der Selbstschattengrenze ist:

$$\overline{m_1 a_1} = \overline{m_1 b_1} = \overline{m_2 g_2} = \overline{m_2 h_2} = \overline{a_3 i} = r \cdot \sin \varphi.$$

Für die grosse Achse der Schlagschattenellipse erhält man:

$$\overline{m' a'} = \overline{m' b'} = \overline{m'' g''} = \overline{m'' h''} = \overline{m_3' b_3'} = r \cdot \sec \varphi.$$

66) **Aufgabe 44.** Für die in Figur 51 dargestellte Kugelnische ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Schatten wird hervorgerufen durch den vorderen Nischenrand. Ein Teil desselben verursacht Schatten auf der Kugel-, ein anderer Teil auf der Cylinderoberfläche. Der Schatten des kreisförmigen Nischenrandes auf die Kugelfläche projiziert sich im Aufriss als eine Ellipse, deren grosse Halbachse $\overline{m_2 d}$ senkrecht zu L_2 ist. Die kleine Achse findet man, wenn man den Lichtstrahl durch m_2 zieht und ihn als Aufriss des durch den Punkt c gehenden Lichtstrahles auffasst. Bestimmt man dann den Schnittpunkt f dieses Lichtstrahles mit der Kugelfläche, indem man die projizierende Ebene durch $m_2 c_2$ samt ihrem Schnitt mit der Kugel in eine Parallelebene zur **Pr. Eb.** E_2 umlegt (bei dieser Umlegung fällt der Schnittkreis der Kugel und der Lichtebene mit dem Kreise $a_2 b_2 d f'$ zusammen, der umgelegte Lichtstrahl gelangt nach $c_2 f'$ ($\overline{m' e'} = \overline{m_1 e}$) und schneidet den Kugelkreis in f' , dem im Aufriss der Punkt f_2 entspricht), so kann nunmehr die Ellipse $m_2 d f_2$ punktweise konstruiert werden; sie schneidet die Horizontale durch m_2 im Punkte g . Von g beginnt der Linienzug $g a_0$ als Schatten des kreisförmigen Nischenrandes auf den Cylindermantel; von a_0 an ist die Schattengrenze eine Mantellinie als Schatten des geraden Nischenrandes auf die cylindrische Innenwand.

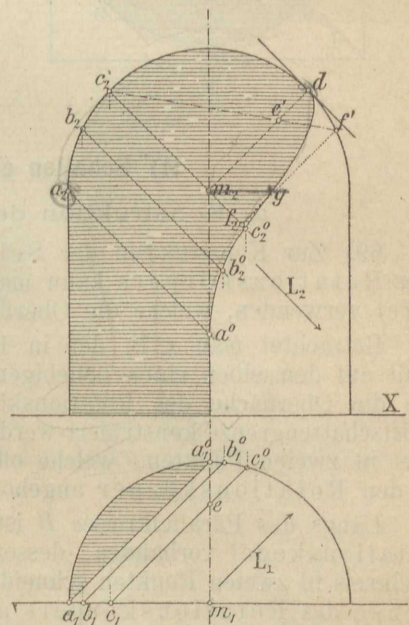
Der Schüler konstruiere auch noch die Schlagschattengrenzen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 .

67) **Aufgabe 45.** Für die in Figur 52 durch Grundriss und Vertikalschnitt dargestellte Kugelschale ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Der Schatten des kreisförmigen Schalenrandes K projiziert sich im Grundriss als Ellipse, deren grosse Achse $\overline{a_1 b_1}$ durch m_1 geht und senkrecht zu L_1 steht.

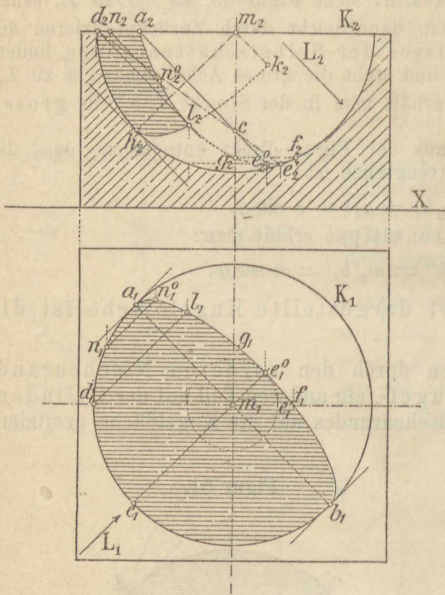
Die kleine Achse findet man am zweckmässigsten, wenn man durch L_1 einen vertikalen Schnitt führt und diesen um die Vertikale durch m parallel zur **Pr. Eb.** E_2

Figur 51.



dreht; dann deckt sich der Schnitt der Ebene L_1 mit der Kugel im Aufriss mit dem Kreise $d_2 h_2 c_2$; der gedrehte Lichtstrahl fällt im Aufriss auf die Linie $d_2 c$ ($m_2 a_2 = m c$) und schneidet den genannten Kugelkreis im Punkte e_2' , dem im Grundriss e_1' entspricht. Bringt man den Schnitt L_1 in seine ursprüngliche Lage zurück, so kommt e_1' nach e_1^0 ; der Aufriss liegt in e_2^0 und $m_1 e_1^0$ ist die kleine Achse der Schlagschattenellipse im Grundriss. Der Aufriss bestimmt sich punktweise mittelst Lichtstrahlen; der Lichtstrahl des Punktes d enthält den Punkt l , der durch n den Punkt n^0 .

Figur 52.



Im Aufrisse wird, letzterer als Vertikalschnitt durch den Kugelmittelpunkt gedacht, noch ein Teil des Schattens des Kreises dh sichtbar sein. Dieser Schatten gehört einer Ellipse an, deren grosse Achse $m_2 h_2$ senkrecht zu L_2 steht und deren kleine Halbachse $m_2 k_2 = m_1 e_1^0$ ist.

Die beiden Ellipsen $a_2 l_2 e_2^0 f_2$ und $k_2 l_2 h_2$ schneiden sich in l_2 , dem Aufriss des Schlagschattens des Punktes d auf die Kugel.

68) **Aufgabe 46.** Man löse die Aufgabe 41 für den Fall, dass der kreisförmige Schalenrand K in einer Vertikalebene liegen soll.

11) Schatten eines Rotationskörpers.

a) Konstruktion der Selbstschattengrenze.

69) Zur Konstruktion der Selbstschattengrenze auf der Oberfläche eines Rotationskörpers kann man zweckmässig Hilfskugeln oder Hilfskegel verwenden, welche die Oberfläche nach Parallelkreisen berühren.

Betrachtet man z. B. den in Figur 53 dargestellten Rotationskörper und wählt auf demselben einen beliebigen Parallelkreis B , so gibt es längs desselben eine die Oberfläche des Rotationskörpers berührende Kugel, für welche die Selbstschattengrenze konstruiert werden kann. Diese schneidet aber den Parallelkreis in zwei Punkten, welche offenbar auch der Selbstschattengrenze für den Rotationskörper angehören.

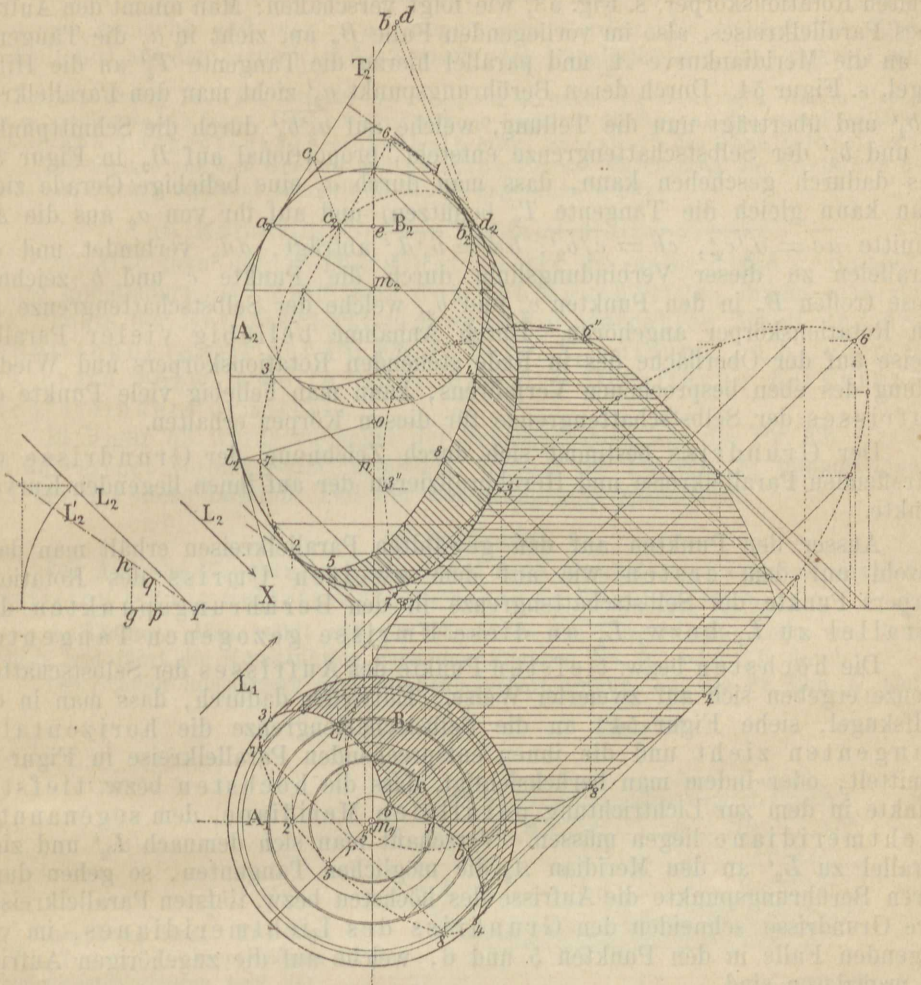
Längs des Parallelkreises B ist aber auch ein die Oberfläche berührender Rotationskegel vorhanden, dessen Selbstschattengrenze den genannten Parallelkreis in zwei Punkten schneidet, welche gleichfalls der Selbstschattengrenze des Rotationskörpers angehören.

Man kann also zunächst zwei Verfahren zur Bestimmung der Selbstschattengrenze für Rotationskörper benützen.

b) Konstruktion der Selbstschattengrenze mittelst berührender Kugelflächen.

70) Vergleicht man die Aufrisse der Selbstschattengrenzen von zwei Kugeln, z. B. der Kugeln in Figur 53 und 54, so erkennt man, dass diese Aufrisse ähnliche Figuren sind. Zieht man daher in Figur 54 parallel

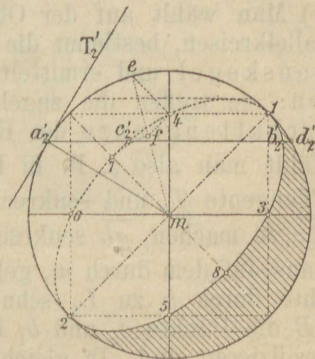
Figur 53.



zur Tangente T_2 in Figur 53 die Tangente T'_2 und durch ihren Berührungspunkt die Horizontale $a'_2 d'_2$, so stellt $\overline{a'_2 d'_2}$ den Aufriss eines Parallelkreises der

Kugel dar, der vom Aufriss der Selbstschattengrenze in zweien Punkten b'_2 und c'_2 getroffen wird; zwischen den Abschnitten $\overline{a_2 c_2}$, $\overline{c_2 b_2}$, $\overline{b_2 d_2}$ in Figur 53 und jenen $\overline{a'_2 c'_2}$, $\overline{c'_2 b'_2}$, $\overline{b'_2 d'_2}$ in Fig. 54 findet nun die Verhältnisgleichheit $\overline{a_2 c_2} : \overline{c_2 b_2} : \overline{b_2 d_2} = \overline{a'_2 c'_2} : \overline{c'_2 b'_2} : \overline{b'_2 d'_2}$ statt.

Figur 54.



Hat man sich also beispielsweise den Aufriss der Selbstschattengrenze für eine Kugel von beliebigem Halbmesser, etwa nach dem in Anmerkung 12 genannten Verfahren konstruiert, so kann man sich in einfacher

und bequemer Weise die Punkte der Selbstschattengrenze für einen beliebig geformten Rotationskörper, s. Fig. 53, wie folgt verschaffen: Man nimmt den Aufriss eines Parallelkreises, also im vorliegenden Falle B_2 an, zieht in a_2 die Tangente T_2 an die Meridiankurve A_2 und parallel hierzu die Tangente T_2' an die Hilfskugel, s. Figur 54. Durch deren Berührungspunkt a_2' zieht man den Parallelkreis $a_2'b_2'$ und überträgt nun die Teilung, welche auf $a_2'b_2'$ durch die Schnittpunkte c_2' und b_2' der Selbstschattengrenze entsteht, proportional auf B_2 in Figur 53, was dadurch geschehen kann, dass man durch a_2 eine beliebige Gerade zieht (man kann gleich die Tangente T_2 benutzen) und auf ihr von a_2 aus die Abschnitte $\overline{ac} = \overline{a_2'c_2'}$, $\overline{cb} = \overline{c_2'b_2'}$, $\overline{bd} = \overline{b_2'd_2'}$ abträgt, dd_2 verbindet und die Parallelen zu dieser Verbindungslinie durch die Punkte c und b zeichnet. Diese treffen B_2 in den Punkten c_2 und b_2 , welche der Selbstschattengrenze für den Rotationskörper angehören. Durch Annahme beliebig vieler Parallelkreise auf der Oberfläche des in Rede stehenden Rotationskörpers und Wiederholung des eben besprochenen Verfahrens, kann man beliebig viele Punkte des Aufrisses der Selbstschattengrenze für diesen Körper erhalten.

Der Grundriss bestimmt sich durch Zeichnung der Grundrisse der betreffenden Parallelkreise und Herabprojizieren der auf ihnen liegenden Kurvenpunkte.

Ausser den Punkten auf den gewählten Parallelkreisen erhält man dann sowohl auf dem ersten wie auf dem zweiten Umriss des Rotationskörpers Punkte der Selbstschattengrenze in den Berührungspunkten der parallel zu L_1 bzw. L_2 an diese Umrisse gezogenen Tangenten.

Die höchsten bzw. tiefsten Punkte des Aufrisses der Selbstschattengrenze ergeben sich auf zweierlei Weise. Entweder dadurch, dass man in der Hilfskugel, siehe Figur 54, an die Selbstschattengrenze die horizontalen Tangenten zieht und die ihnen entsprechenden Parallelkreise in Figur 53 ermittelt, oder indem man berücksichtigt, dass die höchsten bzw. tiefsten Punkte in dem zur Lichtrichtung parallelen Meridiane, dem sogenannten Lichtmeridiane liegen müssen. Verschafft man sich demnach L_2' und zieht parallel zu L_2' an den Meridian A_2 die möglichen Tangenten, so gehen durch deren Berührungspunkte die Aufrisse des höchsten bzw. tiefsten Parallelkreises; ihre Grundrisse schneiden den Grundriss des Lichtmeridians, im vorliegenden Falle in den Punkten 5 und 6, welche auf die zugehörigen Aufrisse zu projizieren sind.

c) Konstruktion der Selbstschattengrenze mittelst berührender Kegelflächen.

71) Man wählt auf der Oberfläche des Rotationskörpers eine Reihe von Parallelkreisen, bestimmt die nach diesen Kreisen die Oberfläche berührenden Rotationskegel und ermittelt für diese die zugehörigen Selbstschattengrenzen; sie treffen die zugehörigen Parallelkreise in Punkten, welche der Selbstschattengrenze des Rotationskörpers angehören.

Wählt man also z. B. in Figur 53 den Parallelkreis B_2 , zieht in a_2 an A_2 die Tangente T_2 und senkrecht zu ihr die Linie $\overline{a_2m_2}$, so braucht man nur $\overline{gf} = \overline{m_2e}$ zu machen, \overline{gh} senkrecht zur X -Achse zu ziehen und die Strecke \overline{gh} von m_1 aus auf dem durch m_1 gehenden Lichtstrahle nach $\overline{m_1k}$ abzutragen. Die Senkrechte durch k zu L_1 schneidet auf dem Grundrisse B_1 des Parallelkreises B die Punkte c_1 und b_1 der Selbstschattengrenze aus, welche auf B_2 zu projizieren sind. In gleicher Weise wurden in Figur 53 für einen zweiten

Parallelkreis, die auf ihm liegenden Punkte 7 und 8 der Selbstschattengrenze konstruiert. Es ist hier l_2o senkrecht zur Tangente in l_2 an A_2 gezogen, $\overline{pf} = \overline{no}$ gemacht und $m_1r = \overline{pq}$ abgetragen worden, die Senkrechte durch r zu L_1 liefert auf dem Grundriss des betreffenden Parallelkreises die Punkte 7 und 8.

Anmerkung 14. Die Strecke $\overline{gh} = \overline{m_2e} \cdot \text{tg } \varphi$ bzw. $\overline{pq} = \overline{no} \cdot \text{tg } \varphi$ ist im Grundriss von m_1 nach rechts bzw. links abzutragen, je nachdem die Spitze des zum Parallelkreise gehörigen Tangentenkegels oberhalb bzw. unterhalb des Parallelkreises liegt.

Die Punkte auf dem ersten und zweiten Umriss, desgleichen die höchsten bzw. tiefsten Punkte bestimmt man wie in No. 68 angegegen wurde.

d) Konstruktion der Schlagschattengrenze.

72) Hat man den Selbstschatten auf die unter b und c angegebene Weise konstruiert, so erhält man den Schlagschatten, indem man durch alle Punkte der Selbstschattengrenze Lichtstrahlen führt und deren Schnittpunkte mit der **Pr. Eb.** E_1 bzw. E_2 aufsucht, d. h. indem man die erste bzw. zweite Spur des die Oberfläche berührenden Lichtzylinders ermittelt.

In Figur 53 wurde zunächst der Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_1 , diese als unbegrenzt vorausgesetzt, ermittelt, hierauf die **Pr. Eb.** E_2 hinzugenommen und der auf diese fallende Teil der Schattengrenze gezeichnet.

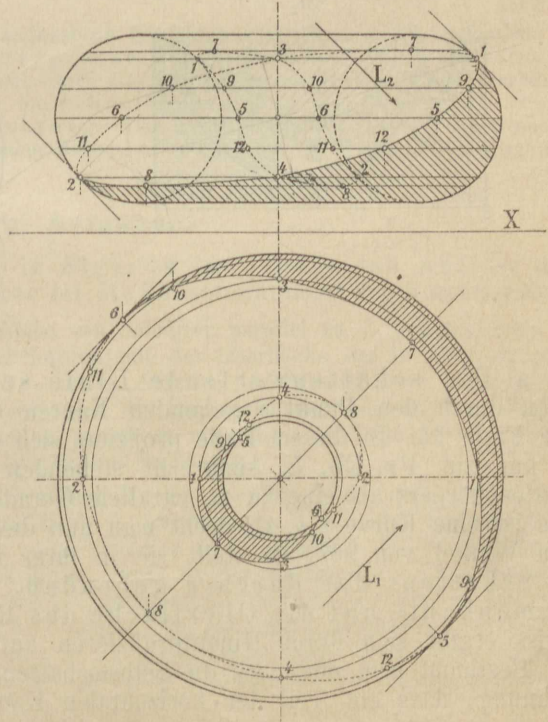
e) Aufgabe.

73) **Aufgabe 47.** Für in Figur 55 durch Grund- und Aufriss gegebenen Kreisring ist die Selbstschattengrenze zu konstruieren.

Auflösung. Man wählt auf der Oberfläche des Körpers eine Reihe von Parallelkreisen und führt die Konstruktion nach den Angaben No. 70) oder 71) durch.

Der Schüler konstruiere auch die Schlagschattengrenze auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_3 .

Figur 55.



Anmerkung 14 a. Aus den in No. 70 und 71 besprochenen Konstruktionsverfahren geht hervor, dass die Punkte der Selbstschattengrenze eines Rotationskörpers symmetrisch liegen zur Ebene des Lichtmeridianes der Oberfläche. Steht die Achse des Rotationskörpers senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 , so liegen die Punkte des Grundrisses der Selbstschattengrenze symmetrisch zum Grundriss des Lichtmeridianes.

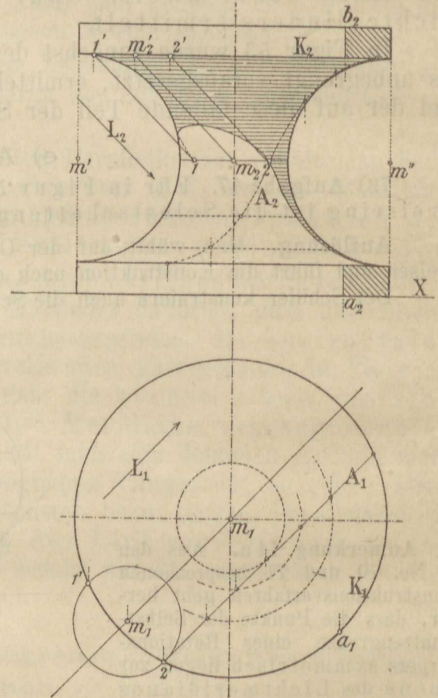
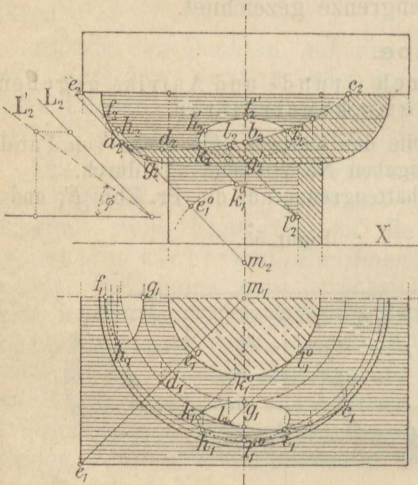
f) Schlagschatten eines Rotationskörpers auf seine eigene Oberfläche.

74) Je nach der Gestalt der Oberfläche eines Rotationskörpers kann es vorkommen, dass auf dieser Fläche von einzelnen ihrer Punkte oder Linien Schatten hervorgerufen wird. Um ihn zu konstruieren, hat man durch die Schatten erzeugenden Punkte Lichtstrahlen zu ziehen und deren Schnittpunkte mit der Oberfläche aufzusuchen.

Je nachdem die schattenwerfenden Punkte auf einer geraden oder krummen Linie liegen, bilden die diese Punkte enthaltenden Lichtstrahlen eine Ebene oder eine Cylinderfläche; der betreffende Schlagschatten ist daher entweder die Durchschnittslinie einer Ebene oder eines Cylinders mit der Oberfläche eines Rotationskörpers. Die Konstruktion dieser Durchschnittslinie kann auf verschiedene Art durchgeführt werden.

Figur 57.

Figur 56.



a) Die schattenwerfende Linie sei eine **Gerade**, wie z. B. die beiden durch den Punkt e gehenden Kanten der quadratischen Platte, siehe Figur 56. In diesem Falle projiziert sich der Schatten der durch e gehenden und zur **Pr. Eb. E_2** senkrecht stehenden Kante auf die Oberfläche des Rotationskörpers als eine zu L_2 parallele Gerade $f_2 h_2 g_2$. Der Grundriss dieser Linie ist eine Kurve $f_1 h_1 g_1$; dreht man nun diese Kurve um den Punkt m_1 um einen Winkel von 90° , so stellt sie in ihrer neuen Lage den Grundriss des Schattens der durch e gehenden, zur **Pr. Eb. E_2** parallelen Prismenkante auf die Oberfläche des Rotationskörpers dar. Der Aufriss ergibt sich durch Hinaufprojizieren auf die zugehörigen Parallelkreise.

Bestimmt man nun noch die Selbstschattengrenze, so erkennt man aus der Zeichnung, dass ein Teil der horizontalen Kanten durch e Schatten auf den

Cylinder wirft; man bestimmt ihn wie in No. 48, ferner gelangt noch Schatten von dem Kurvenstückchen kl auf den Cylinder; die Konstruktion desselben ist aus der Figur 56 zu entnehmen.

b) Die schattenwerfende Linie ist ein **Parallellkreis** des Rotationskörpers. In diesem Falle kann man in zweifacher Weise seinen Schlagschatten auf die Oberfläche des Rotationskörpers ermitteln:

Man nimmt auf der Körperoberfläche einen beliebigen Parallelkreis, z. B. jenen mit dem Mittelpunkt m an, siehe Figur 57, legt durch ihn einen Lichtcylinder und ermittelt dessen Schnitt mit der Ebene des schattenwerfenden Kreises; man zieht also durch m_2 einen Lichtstrahl, bestimmt m_2' und m_1' und zeichnet um m_1' als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Halbmesser gleich dem des angenommenen Parallelkreises. Hierdurch ergeben sich die Schnittpunkte $1'$ und $2'$ mit dem Grundriss K_1 , deren Aufrisse auf K_2 liegen; die hierdurch gezogenen Lichtstrahlen liefern auf dem Aufrisse des angenommenen Parallelkreises zwei Punkte 1 und 2 des gesuchten Schlagschattens. Durch Wiederholung des Verfahrens ermittelt man so viele Punkte der Schlagschattenkurve, dass diese anstandslos gezeichnet werden kann.

Ein zweites Verfahren zur Ermittlung des Schlagschattens des Parallelkreises K auf die Oberfläche des Rotationskörpers besteht darin, dass man durch einen beliebigen Punkt des Schatten werfenden Kreises einen Lichtstrahl führt, durch diesen eine etwa zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechtstehende Ebene legt und deren Schnittlinie A mit der Oberfläche des Rotationskörpers konstruiert. Der Aufriss A_2 dieser Schnittlinie wird dann von dem Aufriss des Lichtstrahles in einem Punkt 2 der gesuchten Schattengrenze getroffen. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man beliebig viele Punkte der Schattengrenze konstruieren.

Anmerkung 15. Das zuletzt angegebene Verfahren kann man auch zweckmässig zur Ermittlung der Selbstschattengrenze eines Rotationskörpers benützen. Man schneidet die Oberfläche des Körpers durch eine zur ersten oder zweiten **Pr. Eb.** senkrecht stehende Lichtebeine und zieht an die Schnittkurve eine Tangente zur bezüglichen Projektion der Lichtrichtung. Der Berührungspunkt gehört der gesuchten Selbstschattengrenze an. In den folgenden Beispielen ist diese Art der Konstruktion ausgeführt.

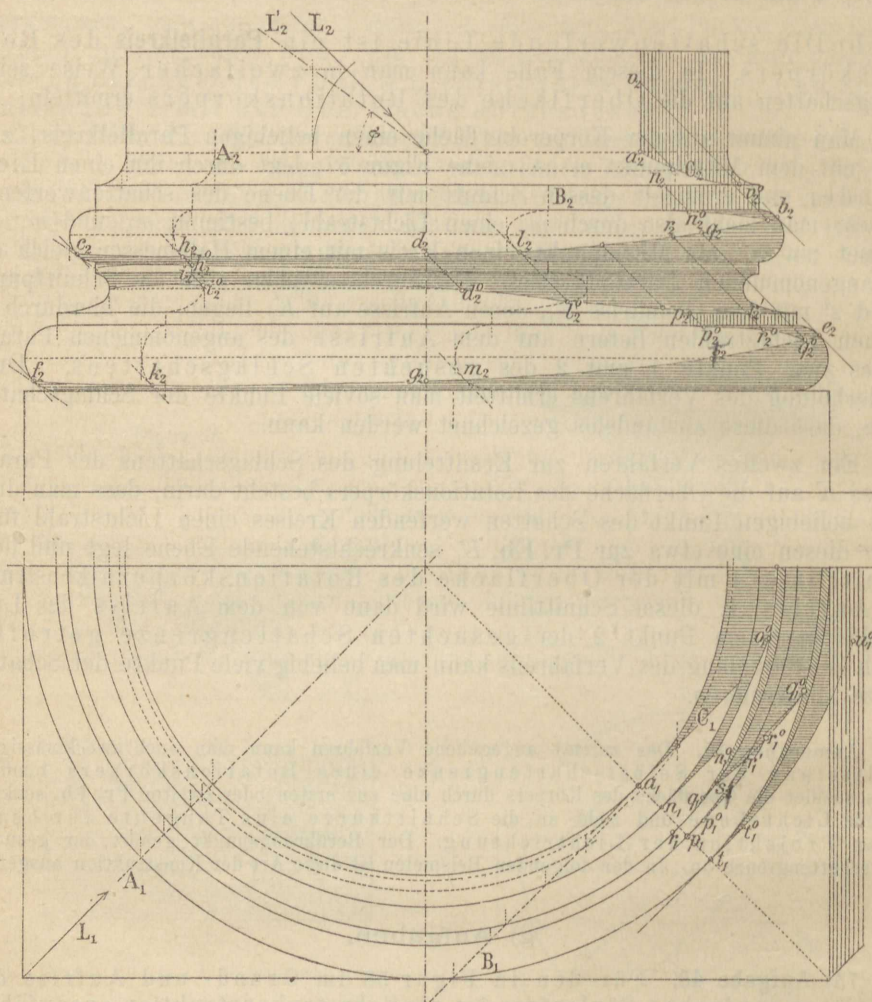
g) Aufgaben.

75) **Aufgabe 48.** Für den in Figur 58 im Grund- und Aufriss dargestellten jonischen Säulenfuß ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung: Man führt eine Reihe von Schnitten parallel zu L und senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 und bestimmt die Schnittkurven mit der Oberfläche des in Rede stehenden Körpers. Zieht man nun parallel zu L_2 an die Aufrisse der Schnittkurven die möglichen Tangenten, so gehören die Berührungspunkte der Selbstschattengrenze an; schneiden die ebengenannten berührenden Lichtstrahlen ausserdem noch die Oberfläche des Körpers, so bestimmen letztere Punkte die Schlagschattengrenze.

So liefert z. B. der Schnitt der Ebene A_1 mit der Oberfläche eine Kurve, deren Aufriss A_2 ist. Die Tangenten parallel zu L_2 berühren in h_2 und h_2' ; letztere Punkte liegen auf der Selbstschattengrenze. Die Tangente in h_2 schneidet die Schnittkurve A_2 aber noch in einem Punkte h_2^0 und dieser Punkt ist der Schlagschatten des Punktes h im Aufriss. So schneidet auch der durch i_2 geführte Lichtstrahl die Linie A_2 in i_2^0 und i_2^0 ist gleichfalls der Schlagschatten des Punktes i auf die Körperoberfläche. Durch Zeichnung einer Reihe von solchen Schnitten, in der Figur 58 ist noch ein zweiter Schnitt B_1 angedeutet, kann man so viele Punkte des Schattens konstruieren, dass dessen Begrenzung gezeichnet werden kann.

Figur 58.



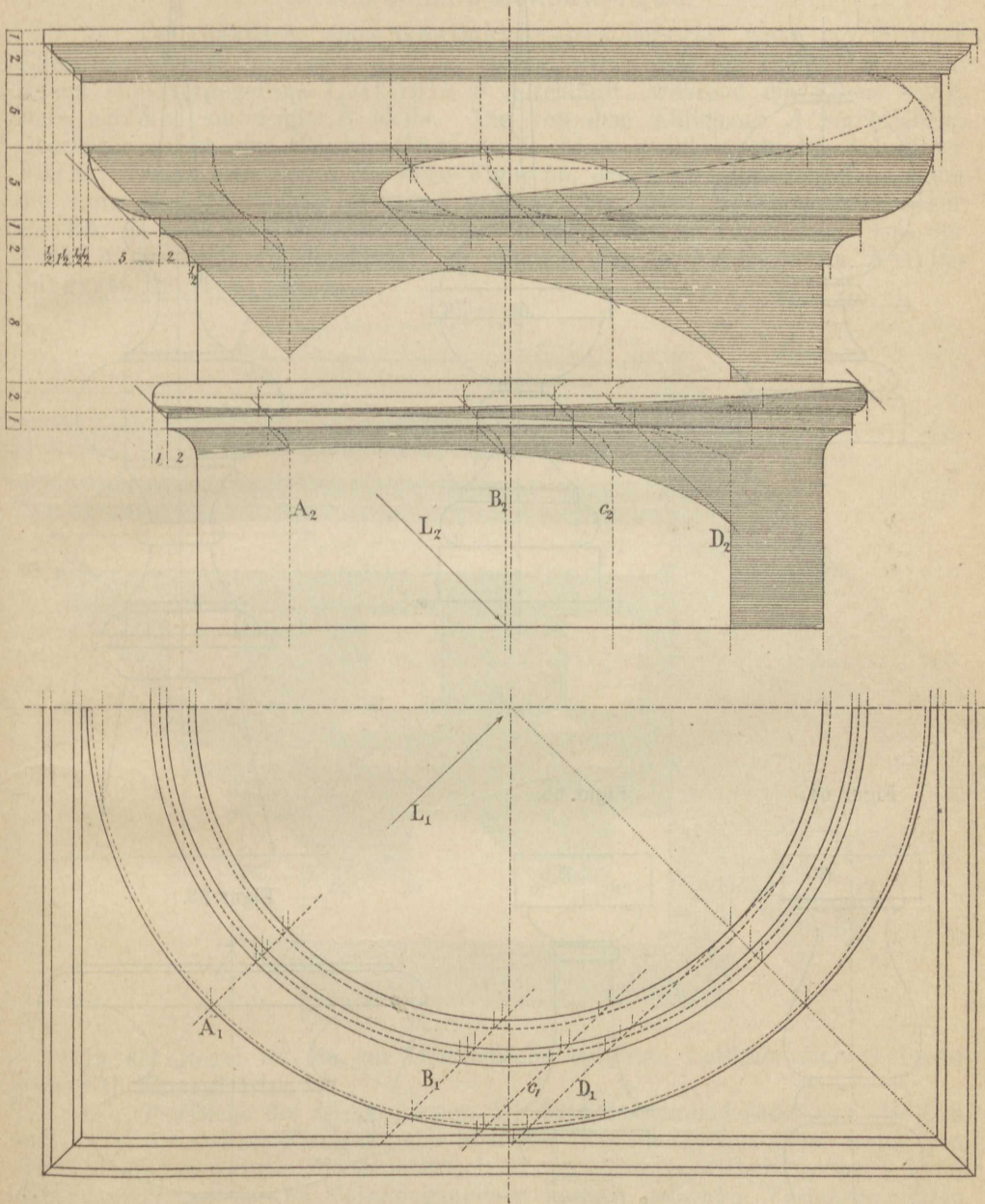
In der Figur 58 ist im Grundriss s_1 statt s_2 , im Aufriss t_2 statt s_2 zu setzen.

Die Schatten sind so bezeichnet, dass die Konstruktion ohne weitere Beschreibung verständlich sein dürfte.

76) **Aufgabe 49.** Für das in Figur 59 im Grund- und Aufriss dargestellte römisch-dorische Kapital ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Das Kapital ist nach den Gesetzen der Formenlehre aufzutragen. Die Konstruktion des Schattens ist aus der Figur deutlich zu ersehen; es sind eine Reihe von Schnitten parallel zu L_1 und senkrecht zur Pr. Eb. E_1 geführt und die Aufrisse der Schnittkurven gezeichnet. Durch Ziehen von Lichtstrahlen berührend an die Schnittkurven bzw. durch die schattenwerfenden Punkte sind die Punkte der Schattengrenzen ermittelt worden.

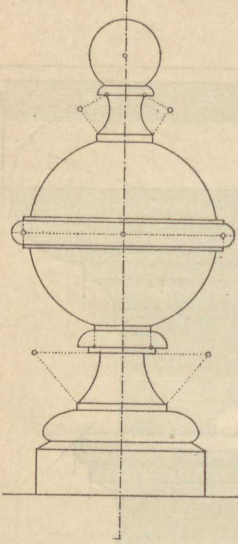
Figur 59.



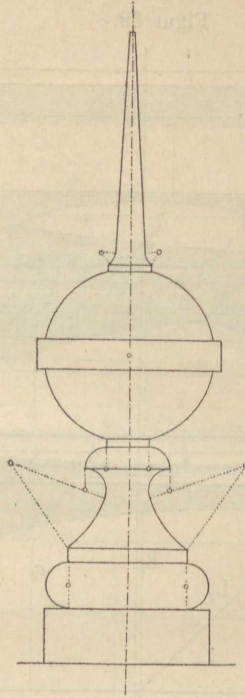
77) **Aufgabe 50.** Für die in den Figuren 60 bis 65 im Aufrisse dargestellten Rotationskörper sind die Schattenkonstruktionen auszuführen und zwar soll der Schatten auf der Körperoberfläche und auf den **Pr. Ebn.** ermittelt werden.

Die in den Figuren 63, 64 und 65 mit A und B bezeichneten Körperteile stellen die Aufrisse von Prismen mit quadratischer Grundfläche dar.

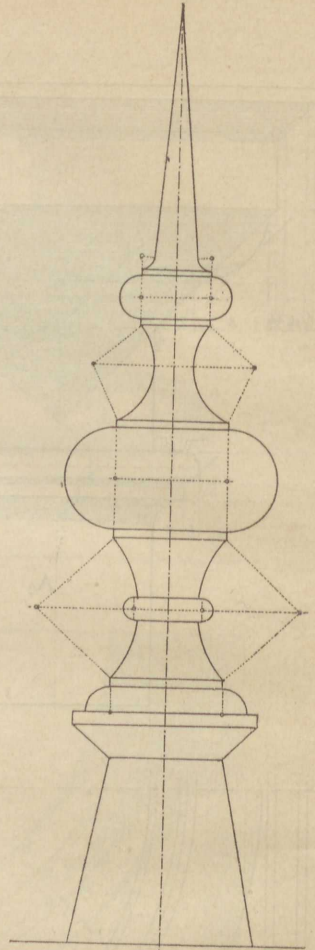
Figur 60.



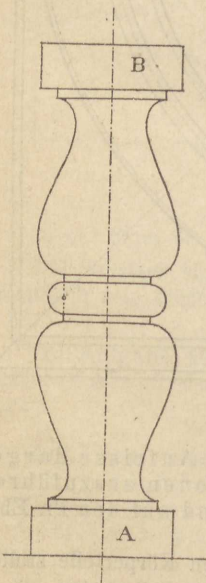
Figur 61.



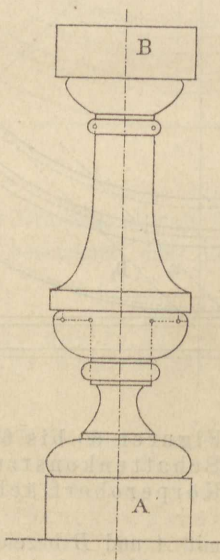
Figur 62.



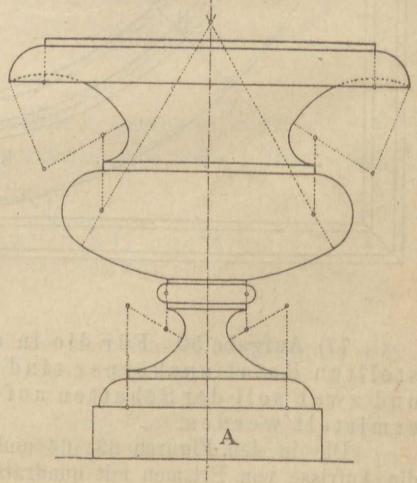
Figur 64.



Figur 65.



Figur 63.

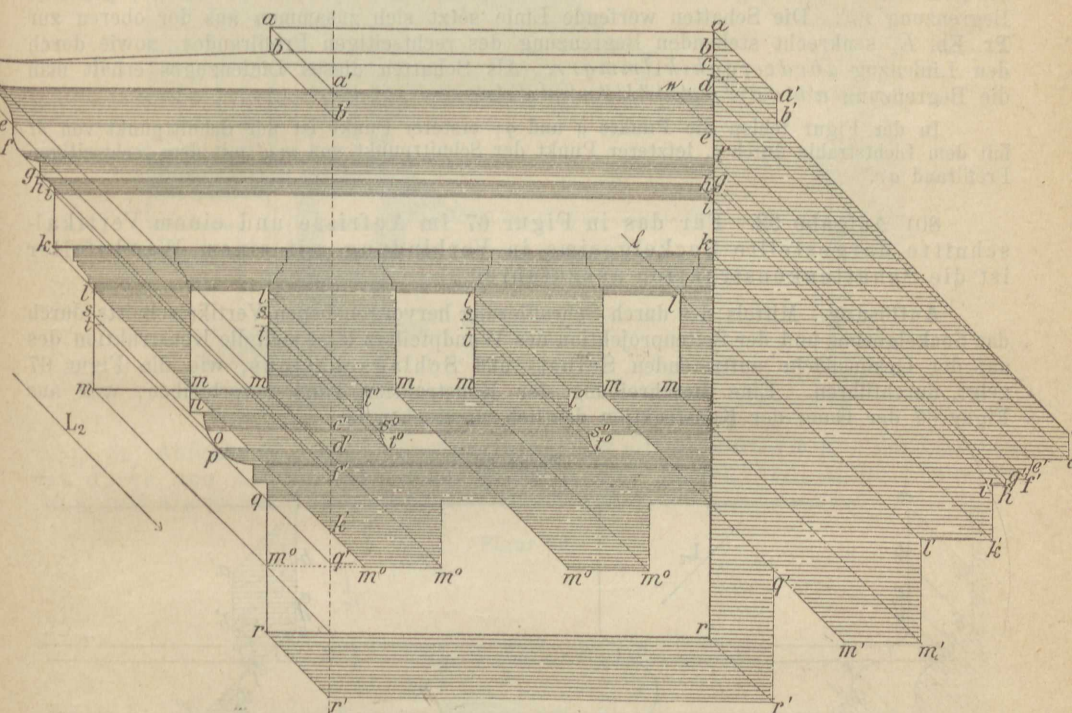


12) Schatten von Gesimskörpern.

a) Allgemeine Bemerkungen.

78) Die Oberfläche eines Gesimskörpers entsteht, wenn ein in einer Ebene befindlicher Linienzug A so bewegt wird, dass ein Punkt der Ebene irgend eine vorgegebene Leitlinie B durchläuft, während die Ebene selbst stets normal zur Linie B bleibt. Die von dem Linienzug A beschriebene Oberfläche heisst eine Gesimsfläche, die Linie A bildet ein Profil dieser Fläche. Denkt man sich z. B., siehe Figur 66, den Linienzug $abcdef\dots r$ um die Linie $r'a'$ als Achse so lange gedreht, bis diese Ebene senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2 steht und nunmehr parallel zu sich selbst so verschoben, dass der Punkt a die Linie aa durchläuft, so entsteht das in Figur 66 im Aufriss dargestellte Hauptgesims.

Figur 66.



In der Regel ist die zur Gesimsfläche gehörige Leitlinie eine Gerade oder eine Kreislinie.

Die Oberfläche des Gesimskörpers ist dann zusammengesetzt aus ebenen und cylindrischen Flächen, oder aber aus den Oberflächen einer Reihe von Rotationskörpern. Die geometrische Ermittlung der Schattengrenzen kann daher auf Grund der im Vorangegangenen kennen gelernten Verfahrensarten durchgeführt werden.

b) Aufgaben.

79) **Aufgabe 51.** Für das in Figur 66 im Aufrisse dargestellte Hauptgesims soll die Schattenkonstruktion ausgeführt werden.

Auflösung. Der Linienzug $abcd\dots r$, welcher die Ausladung des Gesimses begrenzt, kann zugleich als Umlegung einer Profilebene in die **Pr. Eb.** E_2 aufgefasst werden.

Die beliebig zu wählende Vertikale $a'r'$ stellt dann die Schnittlinie der Profilebene mit der **Pr. Eb.** E_2 dar, in welche der Schlagschatten des Gesimses konstruiert werden soll.

Es entsteht zunächst Schlagschatten auf der Oberfläche des Gesimskörpers. Als schattenwerfende Kanten treten auf: Die Kante dd , ihr Schatten auf die Sima ist begrenzt durch cc , die Linie der Selbstschattengrenze ft der Sima, ihr Schatten ist gs ; die Kante hh , ihr Schatten ist ii ; die Kante kk , ihr Schatten fällt zum Teil auf die vordere vertikale Fläche der Konsolen und ist begrenzt durch ll , zum Teil auf die vertikale Gesimsfläche nach l^0l^0 ; die unteren horizontalen Kanten mm der Konsolen, ihr Schatten ist begrenzt durch m^0m^0 ; die Selbstschattengrenze durch p des Rundstabes, ihr Schatten geht durch q . Ausserdem entsteht auf der Oberfläche des Gesimskörpers Schatten durch die vertikalen rechtseitigen Kanten der Konsolen, er gelangt zum Teil auf die vertikale ebene Gesimsfläche und geht parallel zu lm durch l^0 , bezw. m^0 , ferner auf den Rundstab nach s^0l^0 ; endlich erzeugt noch Schatten die untere linkseitige, zur **Pr. Eb.** E_2 senkrechte Kante mn der Konsole; er geht durch m parallel zu L_2 .

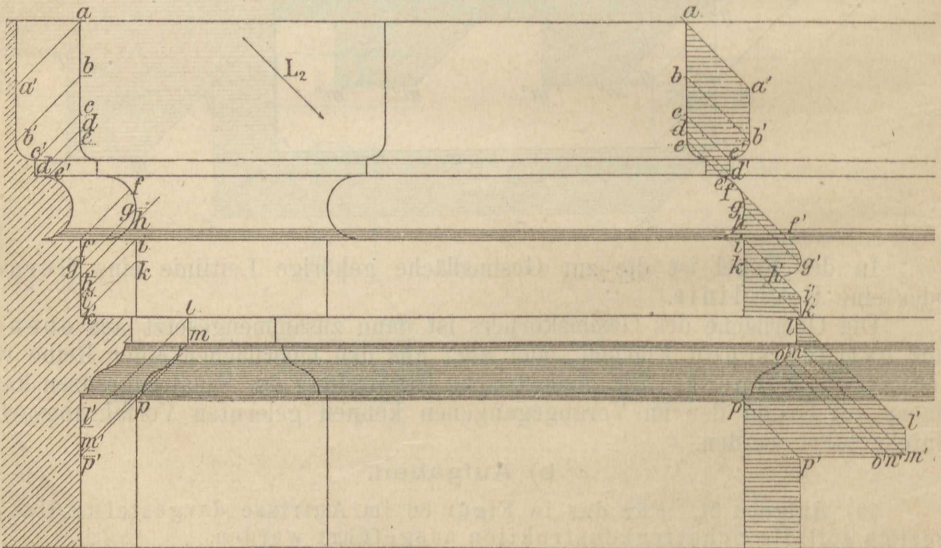
Der Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_2 wird hervorgerufen durch den rechtseitigen Profilrand, sowie durch die untere horizontale und zur **Pr. Eb.** E_2 parallele Begrenzung rr' . Die Schatten werfende Linie setzt sich zusammen aus der oberen zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehenden Begrenzung des rechtseitigen Profilrandes, sowie durch den Linienzug $abcdeefgghihkllmmqrr$. Als Schatten dieses Linienzuges erhält man die Begrenzung $a'b'c'd'e'f'g'h'i'k'l'm'm'q'r'r'$.

In der Figur fehlen die Punkte g und q ; ersterer Punkt ist der Schnittpunkt von ff mit dem Lichtstrahle durch g , letzterer Punkt der Schnittpunkt von $m'q'$ mit dem rechtseitigen Profilrand ar .

80) **Aufgabe 52.** Für das in Figur 67 im Aufrisse und einem Vertikalschnitte dargestellte Sockelgesims in Verbindung mit einem Wandpfeiler ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Mittels des durch Schraffierung hervorgehobenen Vertikalschnitts durch das Sockelgesims und der Seitenprojektion des Wandpfeilers lässt sich die Konstruktion des auf der Gesimsfläche auftretenden Selbst- und Schlagschattens, wie die Figur 67 zeigt, durchführen. Eine Beschreibung der Konstruktion kann unterbleiben, weil aus Figur 67 der Gang der Konstruktion deutlich zu ersehen ist.

Figur 67.

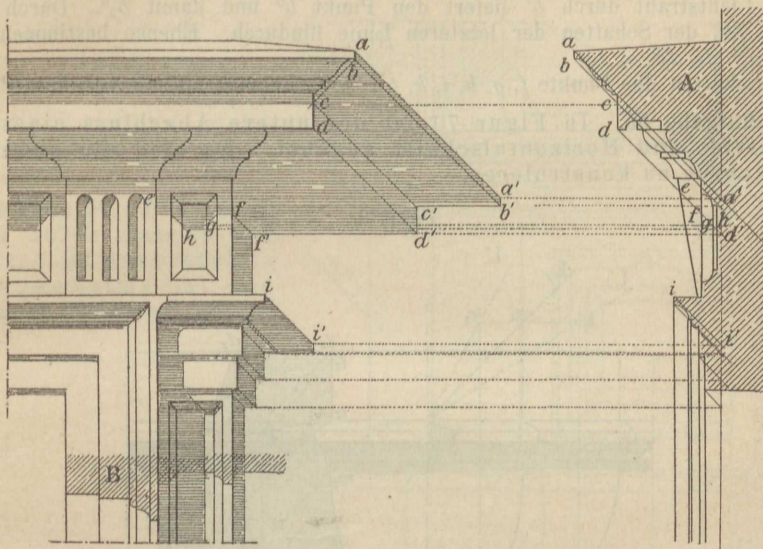


In der Figur 67 ist im Aufrisse der Punkt m , im Seitenrisse der Punkt n nicht eingezeichnet.

81) **Aufgabe 53.** Ein Teil einer Fenstereinfassung ist in Figur 68 im Aufriss und einem Vertikalschnitte dargestellt. Es soll die Schattenkonstruktion ausgeführt werden.

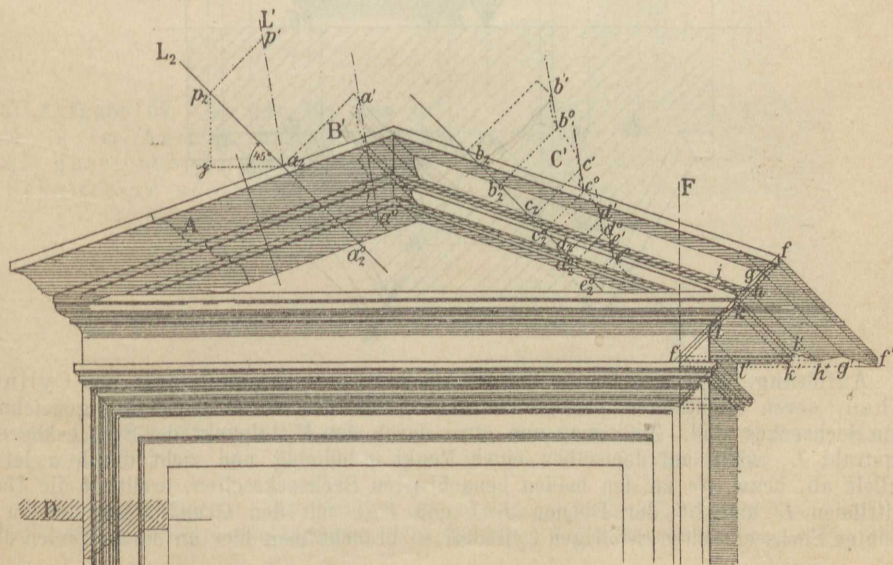
Auflösung. Diejenigen Körperkanten, welche auf die Fenstereinfassung Schatten werfen, kann man unmittelbar im Vertikalschnitte *A* feststellen; es sind die Kanten durch die Punkte *a, b, d, i* u. s. w. Hierdurch ist aber auch der Schlagschatten auf die vertikale Mauerfläche bestimmt. So liefern z. B. die Punkte *a, b, c, d, f, i* u. s. w. die Schattenpunkte *a', b', c', d', f', i'* u. s. w.

Figur 68.



82) **Aufgabe 54.** Eine Fenstereinfassung mit giebelförmiger Verdachung ist durch den Aufriss und die Profile *A* und *D* gegeben, siehe Figur 69. Man soll die Schattenkonstruktion ausführen.

Figur 69.



Auflösung. Um den Schatten der Giebelverdachung zu konstruieren, führt man auf jeder Hälfte einen Schnitt senkrecht zur **Pr. Eb. E_2** und parallel zu L_2 und legt die Schnittebenen samt der Lichtrichtung L in die **Pr. Eb. E_2** um. Man erhält hierdurch die Figuren B' und C' . Führt man an diese Linien parallel zur umgelegten Lichtrichtung L' die möglichen Streifstrahlen, so bestimmt sich hierdurch sowohl der Selbstschatten, wie auch der Schlagschatten auf jeder Giebelhälfte.

So liefert z. B. der Lichtstrahl durch a' den Punkt a^0 , dem auf L_2 der Punkt a_2^0 entspricht. Durch a_2^0 geht parallel zur oberen Kante der Sima die Schlagschattengrenze dieser Kante.

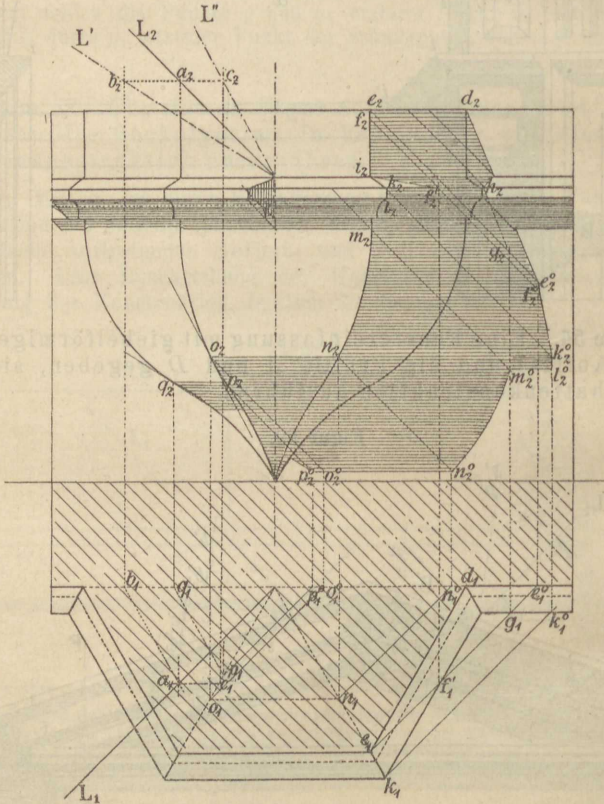
In gleicher Weise findet man die Schattengrenzen mittelst C' .

Der Lichtstrahl durch b' liefert den Punkt b^0 und damit b_2^0 . Durch b_2^0 geht parallel zu fb_2 der Schatten der letzteren Linie hindurch. Ebenso bestimmen sich die Punkte $c_2, c_2^0, d_2, d_2^0, e_2$.

Der Schatten der Punkte f, g, h, i, k, t u. s. w. gelangt auf die vertikale **Pr. Eb. E_2** .

83) **Aufgabe 55.** In Figur 70 ist der untere Abschluss eines Erkers durch Aufriss und Horizontalschnitt gegeben. Es sind die auftretenden Schattenkanten zu konstruieren.

Figur 70.



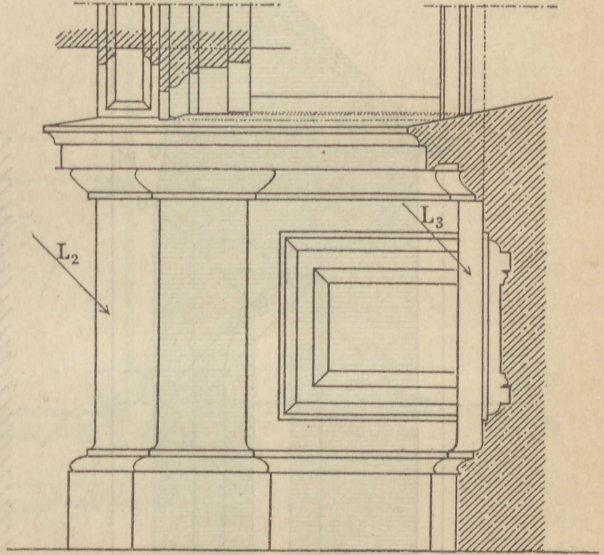
Auflösung. Der gekrümmte untere Abschluss des Erkers besteht aus Cylinderflächen, deren Richtungen parallel zu den Seiten des im Grundriss gezeichneten halben Sechsecks sind. Zieht man nun etwa durch den Mittelpunkt des Sechsecks einen Lichtstrahl L , wählt auf demselben einen Punkt a beliebig und zieht durch a je eine Parallele ab, bezw. bc zu den beiden benachbarten Sechsecksseiten, ermittelt die Durchschnittslinien L' und L'' der Ebenen Lab und Lac mit den Grundflächen der zu den genannten Sechsecksseiten gehörigen Cylinder, so braucht man hier an die Leitlinien dieser

Cylinder parallel zu L' , bzw. L'' Tangenten zu ziehen, so gehen durch die Berührungspunkte q_2 und o_2 die Mantellinien der Selbstschattengrenzen dieser Cylinder hindurch. Die dritte Cylinderfläche ist ganz im Schatten.

Es bleibt noch übrig, den Schatten auf die **Pr. Eb.** E_2 zu konstruieren. Der Linienzug $defif_2k_2l_2m_2n_2o_2p_2$ liefert den Schatten $d_2, h_2e_2^0, f_2^0k_2^0, l_2^0m_2^0, n_2^0, o_2^0p_2^0$.

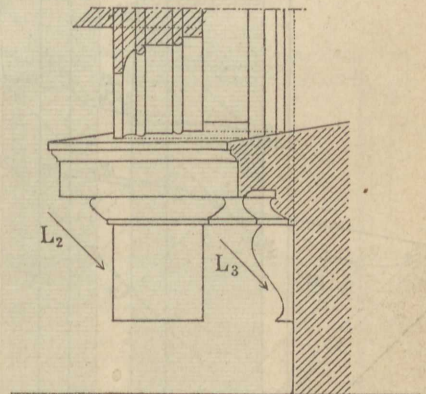
Der Schatten des Gurtgesimses bestimmt sich zweckmässig mittelst eines Profiles.

Figur 71.



84) **Aufgabe 56.** Für das in Figur 71 durch Aufriss und Vertikalschnitt dargestellte Brüstungsgesims ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Figur 72.



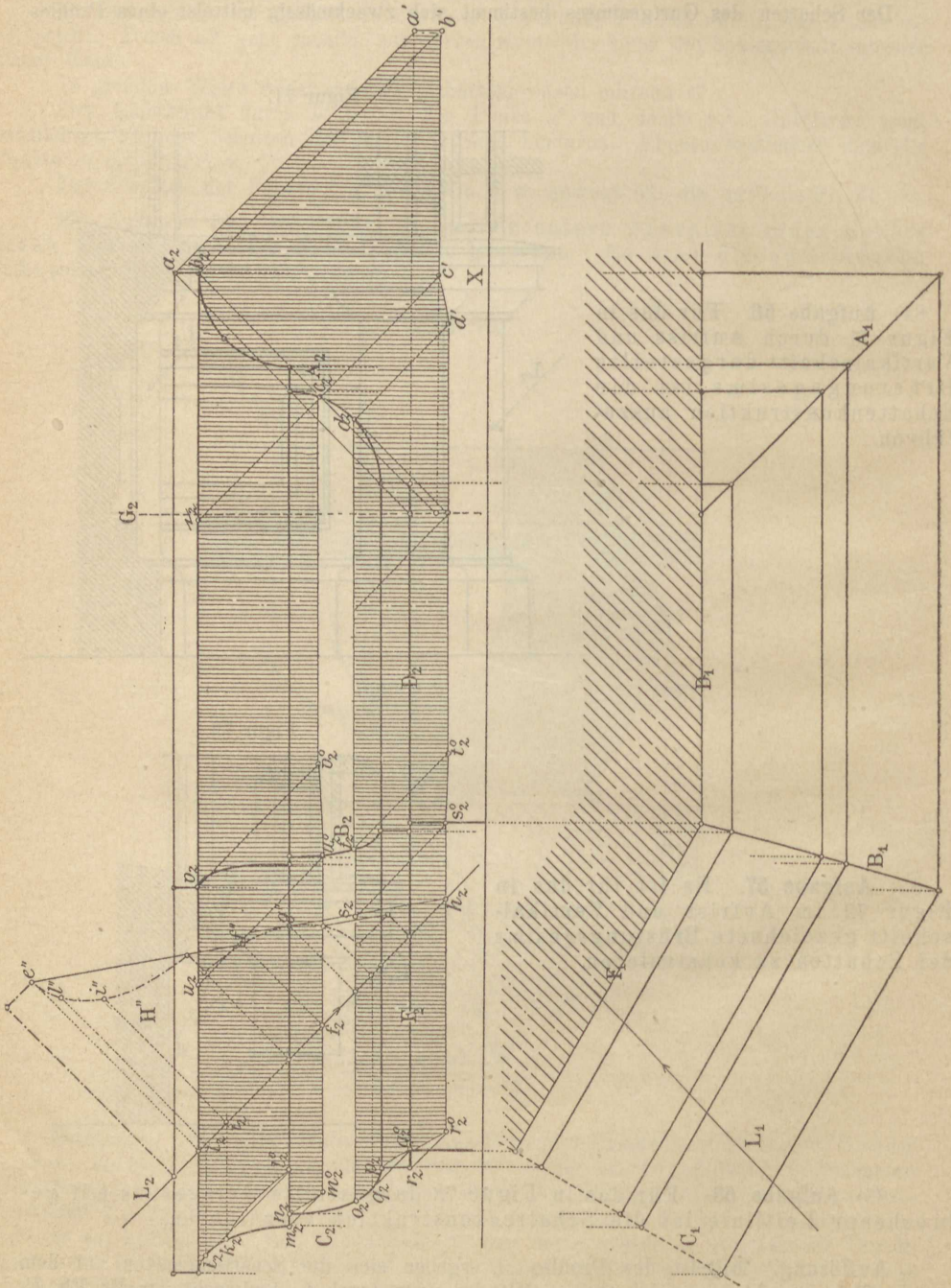
85) **Aufgabe 57.** Es ist für das in Figur 72 im Aufriss und Vertikalschnitt gezeichnete Brüstungsgesims der Schatten zu konstruieren.

86) **Aufgabe 58.** Für das in Figur 73 dargestellte Gurtgesims mit gebrochener Leitlinie ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Mittelst des Profiles A ergeben sich die Schattengrenzen auf dem zur Leitlinie D gehörigen Gesimsteile. Mittelst eines durch L_2 senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2

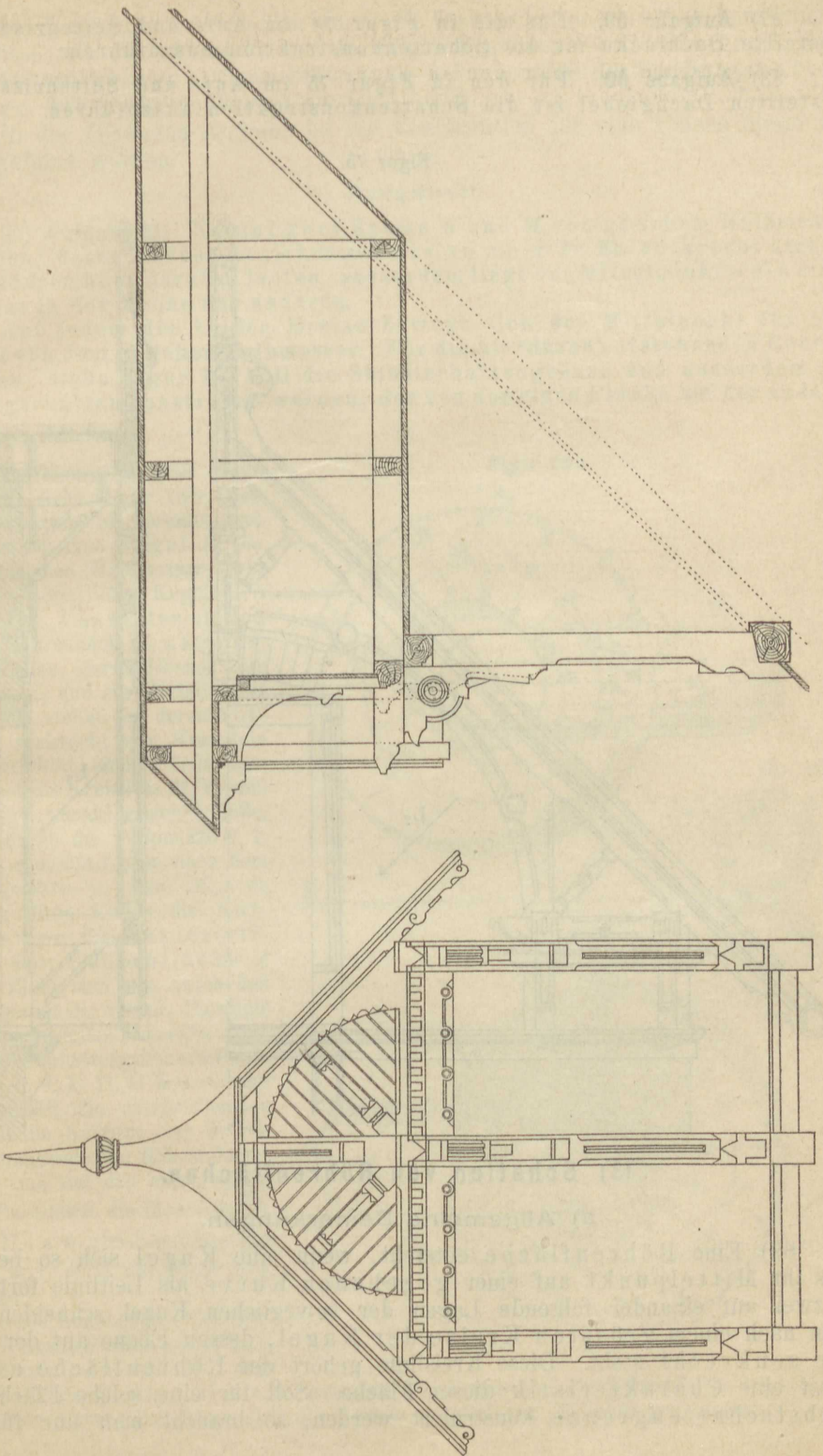
geführten Schnittes bzw. dessen Umlegung H'' in die Pr. Eb. E_2 erhält man die Schattenpunkte auf dem Gesimse mit der Leitlinie F .

Die Konstruktion der einzelnen Punkte der Schattengrenzen ist aus der Figur 73 so deutlich zu ersehen, dass eine weitere Beschreibung wohl überflüssig ist.



Figur 73.

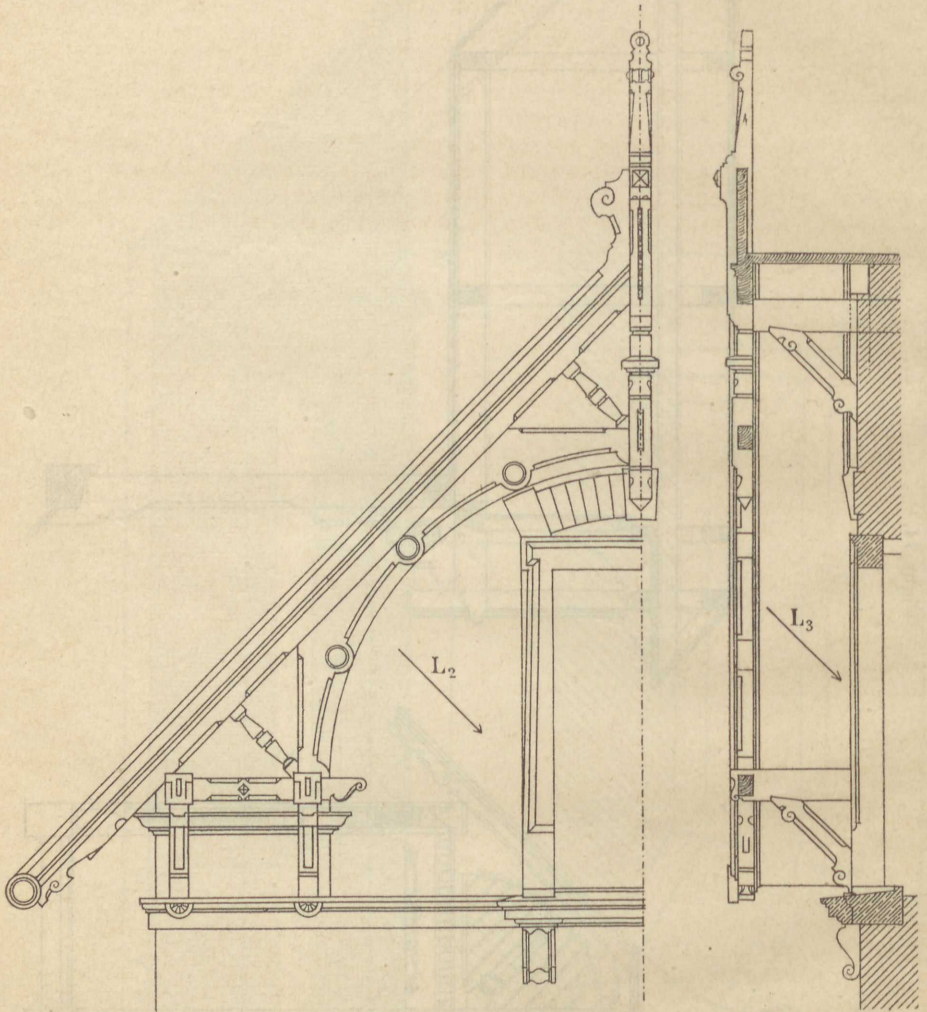
Figur 74.



87) **Aufgabe 59.** Für die in Figur 74 im Auf- und Seitenrisse dargestellte Dachlucke ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

88) **Aufgabe 60.** Für den in Figur 75 im Auf- und Seitenrisse dargestellten Dachgiebel ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Figur 75.



13) Schatten von Röhrenflächen.

a) Allgemeine Bemerkungen.

89) Eine Röhrenfläche entsteht, wenn eine Kugel sich so bewegt, dass ihr Mittelpunkt auf einer gegebenen Curve als Leitlinie fortläuft; je zwei auf einander folgende Lagen der beweglichen Kugel schneiden sich dann nach einem grössten Kreise der Kugel, dessen Ebene auf der Leitlinie senkrecht steht. Diese Kreislinie gehört der Röhrenfläche an und heisst eine Charakteristik dieser Fläche. Soll für eine solche Fläche die Selbstschattengrenze konstruiert werden, so braucht man nur für die

einzelnen Lagen der beweglichen Kugel die Selbstschattengrenze zu konstruieren und diese mit der gleichfalls auf der Kugel liegenden Charakteristik zum Schnitt zu bringen, dann gehören die Schnittpunkte der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche an.

In der folgenden Aufgabe ist die Konstruktion für eine Fläche dieser Art durchgeführt worden.

b) Aufgaben.

90) **Aufgabe 61.** Es sind zwei Kreise K und M von gleichem Halbmesser gegeben, deren Ebenen beziehungsweise zu einer **Pr. Eb.** senkrecht stehen, zur anderen aber parallel laufen, ausserdem liegt der Mittelpunkt n des einen Kreises in der Ebene des anderen.

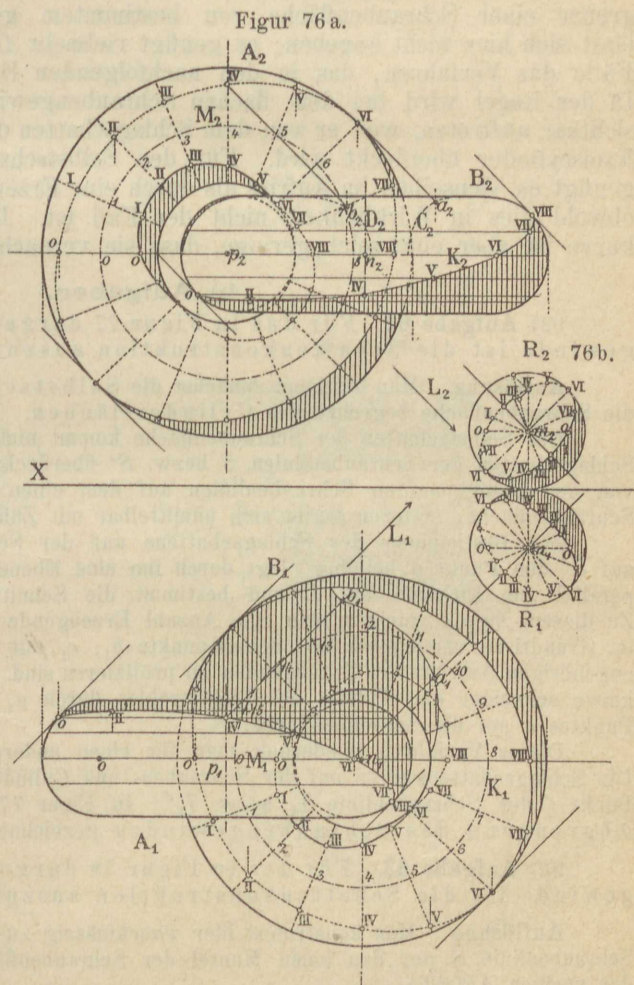
Auf jedem der beiden Kreise bewegt sich der Mittelpunkt für eine Kugel von dem gleichen Halbmesser. Für die hierdurch entstehenden Röhrenflächen, siehe Figur 76, soll die Selbstschattengrenze und ausserdem der Schlagschatten konstruiert werden, der von der einen Fläche auf der anderen erzeugt wird.

Auflösung. Man konstruiert, siehe Figur 76b, den Selbstschatten im Grund- und Aufriss für eine Kugel R von dem gleichen Halbmesser, wie der der beweglichen Kugel.

Die Charakteristiken für die Röhrenfläche A , s. Fig. 76a, sind Kreise, deren Ebenen zur **Pr. Eb.** E_2 und zur Kreislinie M senkrecht stehen und deren Aufrisse senkrecht zur Kreislinie M_2 gerichtet sind. Teilt man demnach die Kreislinie M_2 in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, zieht durch die Teilpunkte 0, 1, 2, 3 u. s. w. die Linien nach dem Mittelpunkte p_2 von M_2 , so stellen diese Linien die Aufrisse der Charakteristiken der Röhrenfläche A dar. Zieht man nun durch den Mittelpunkt m_2 von R_2 Parallele zu diesen Linien, so treffen diese die Selbstschattengrenze in Punkten 0, 0, I, I, II, II u. s. w. und man erhält die entsprechenden Punkte im Aufrisse der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche, wenn man auf den entsprechenden Parallelen die Strecken 00 , $1I$, $2II$ u. s. w. gleich den Strecken m_20 , m_2I , m_2II der Figur 76b, abträgt.

Die zugehörigen Grundrisse dieser Punkte erhält man, wenn man berücksichtigt, dass

die durch die Punkte I, II u. s. w. gelegten Vertikalebene die Röhrenfläche nach Kreisen schneiden, deren Grundrisse sich als Gerade parallel zur X -Achse projizieren.



Für die Röhrenfläche B lässt sich dieselbe Konstruktion im Grundrisse ausführen, wie sie eben für den Aufriss von A angegeben wurde.

Zur Bestimmung des Schlagschattens wählt man auf der Selbstschattengrenze von A beliebige Punkte, zieht hierdurch Lichtstrahlen und legt durch letztere Lichtebenen, deren Schnitte mit der Oberfläche von B zu bestimmen sind. So ist z. B. durch den Punkt VI ein Lichtstrahl gezogen und durch ihn eine Lichtebene senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2 gelegt worden. Diese Lichtebene schneidet die Oberfläche von B nach einer Kurve C , deren Aufriss C_2 ist. C_2 und der Lichtstrahl durch VI schneiden sich in a_2 . Der Grundriss a_1 hierzu gibt einen Punkt der gesuchten Schlagschattengrenze; im Aufriss ist derselbe nicht sichtbar. Für den Lichtstrahl durch den Punkt IV ergibt sich im Aufriss eine Schnittkurve D_2 und auf ihr ein Schlagschattenpunkt b_2 , dessen Grundriss b_1 ist.

14) Schatten von Schraubenflächen.

a) Allgemeine Bemerkungen.

91) Das streng geometrische Verfahren zur Bestimmung der Selbstschattengrenze einer Schraubenfläche von bestimmtem geometrischem Bildungsgesetz lässt sich hier nicht angeben; es genügt vielmehr für die praktisch auftretenden Fälle das Verfahren, das in den nachfolgenden Beispielen angewendet wurde. In der Regel wird bei dem flachen Schraubengewinde ein Selbstschatten nicht sichtbar auftreten, weil er von dem Schlagschatten der die Gewinde begrenzenden Kreiscylinder überdeckt wird. Für den Selbstschatten beim scharfen Gewinde genügt es, denselben im Aufriss als durch eine Erzeugende begrenzt anzunehmen, obwohl dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Die Krümmung der Schattenkurve ist aber eine solch geringe, dass sie vernachlässigt werden darf.

b) Aufgaben.

92) **Aufgabe 62.** Für das in Figur 77 dargestellte flache Schraubengewinde ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Man bestimmt zunächst die Selbstschattengrenze auf den beiden die Schraubenfläche begrenzenden Cylinderflächen.

Der Selbstschatten der Schraubenfläche kommt nicht in Betracht, weil er von dem Schlagschatten der Schraubenlinien S bzw. S' überdeckt wird. Schlagschatten entsteht von den obengenannten Schraubenlinien auf dem einen Cylindermantel, sowie auf der Schraubenfläche; ersterer ergibt sich unmittelbar mit Zuhilfenahme des Grundrisses.

Zur Bestimmung des Schlagschattens auf der Schraubenfläche wählt man etwa auf S' den Punkt a beliebig, legt durch ihn eine Ebene senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 und parallel zur Lichtrichtung L und bestimmt die Schnittlinie mit der Schraubenfläche. Zu diesem Zweck zeichnet man eine Anzahl Erzeugende der Schraubenfläche und erhält im Grundrisse unmittelbar die Schnittpunkte b_1, c_1 mit der Ebene L_1 , welche auf die zugehörigen Aufrisse der Erzeugenden zu projizieren sind. Der Aufriss b_2, c_2, d_2 der Schnittkurve schneidet den Aufriss des Lichtstrahles durch a_2 in dem Schlagschatten a_2^0 des Punktes a auf die Schraubenfläche.

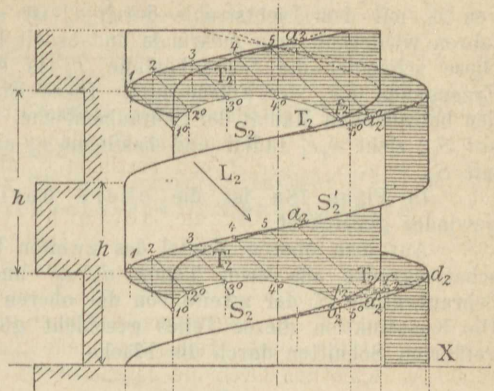
Dieses Verfahren wiederholt man für einen anderen Punkt der Schraubenlinie S' . Die Schlagschattenkurven auf der Schrauben- und Cylinderfläche begegnen sich in einem Punkt f der Schraubenlinie T_2 bzw. T_2' . In Figur 77a ist die obere horizontale Abgrenzung des Schraubengewindes gezeichnet.

93) **Aufgabe 63.** Für das in Figur 78 dargestellte scharfe Schraubengewinde ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

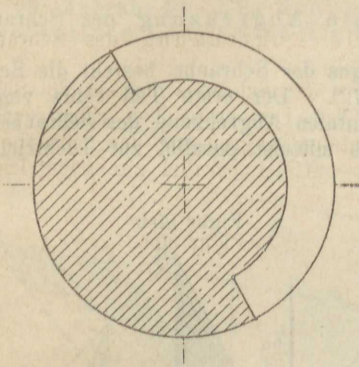
Auflösung. Man konstruiert hier zweckmässig zuerst den Schlagschatten der Schraubenlinie S auf den einen Mantel der Schraubenfläche in gleicher Weise wie bei der vorigen Aufgabe.

Man wählt also auf S den Punkt a beliebig, zieht durch ihn einen Lichtstrahl, legt durch diesen eine Lichtebene etwa senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 und bestimmt den Auf-

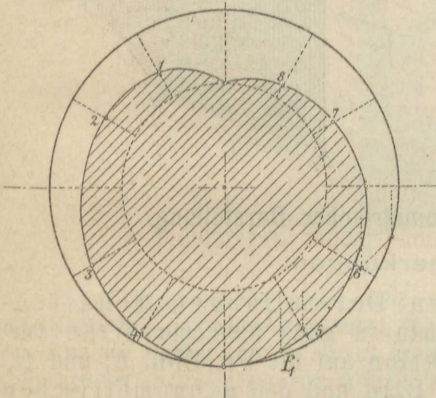
Figur 77.



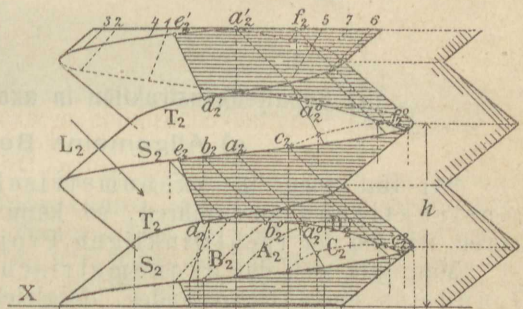
Figur 77 a.



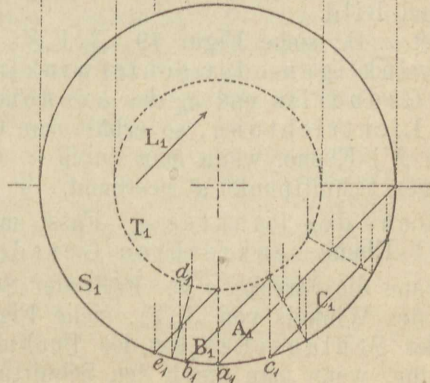
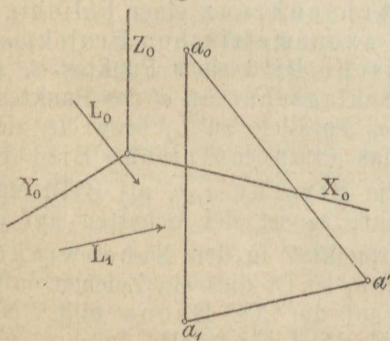
Figur 78 a.



Figur 78.



Figur 79.

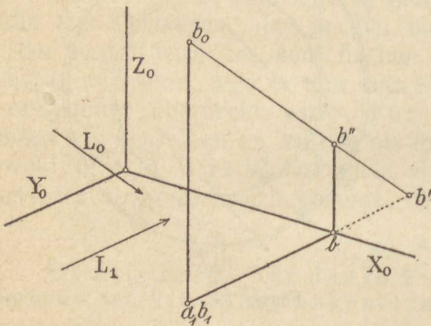


riss A_2 der Schnittkurve A dieser Ebene mit der Schraubenfläche. Der Schnittpunkt a_2^0 von A_2 mit dem Lichtstrahle durch a_2 ist ein Punkt der Schattengrenze. Dieses Verfahren wiederholt man mehrmals und erhält hierdurch die Schattengrenze D_2 im Aufriss. Diese schneidet die Schraubenlinie T_2 in einem Punkt d_2 , durch welchen man eine Erzeugende d_2e_2 der Fläche legt. Diese ist dann genau genug die Schattengrenze für den betrachteten Mantel der Schraubenfläche. Um d_2e_2 zu konstruieren, bestimmt man d_1 auf S_1 , zieht d_1e_1 radial und bestimmt e_2 als Schnittpunkt der Projizierenden durch e_1 mit S_2 .

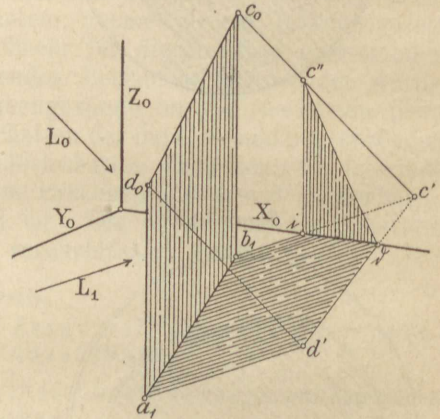
In Figur 78a ist die obere horizontale Abgrenzung des Schraubengewindes gezeichnet.

Auf dem oberen Mantel des zweiten Umganges der Schraube besteht die Schlag-schattengrenze aus zwei Teilen $d_2'a_2^0$ und $a_2^0f_2^0$. Der erste Teil rührt von der Schraubenlinie S , der zweite von der oberen horizontalen Abgrenzung der Schraube her. Die Konstruktion dieses Teiles geschieht gleichfalls mittelst parallel zur Lichtrichtung geführten Schnitten durch die Fläche.

Figur 80a.



Figur 80 b.



15) Schattenkonstruktion in axonometrischer Darstellung.

a) Allgemeine Bemerkungen.

94) Hat man in axonometrischen Darstellungen Schattenkonstruktionen auszuführen, so kann man in ganz ähnlicher Weise verfahren, wie bei der rechtwinkligen Projektion auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 .

Man gibt sich das axonometrische Bild und den axonometrischen Grundriss eines Gegenstandes, desgleichen die Lichtrichtung durch Grundriss und Bild.

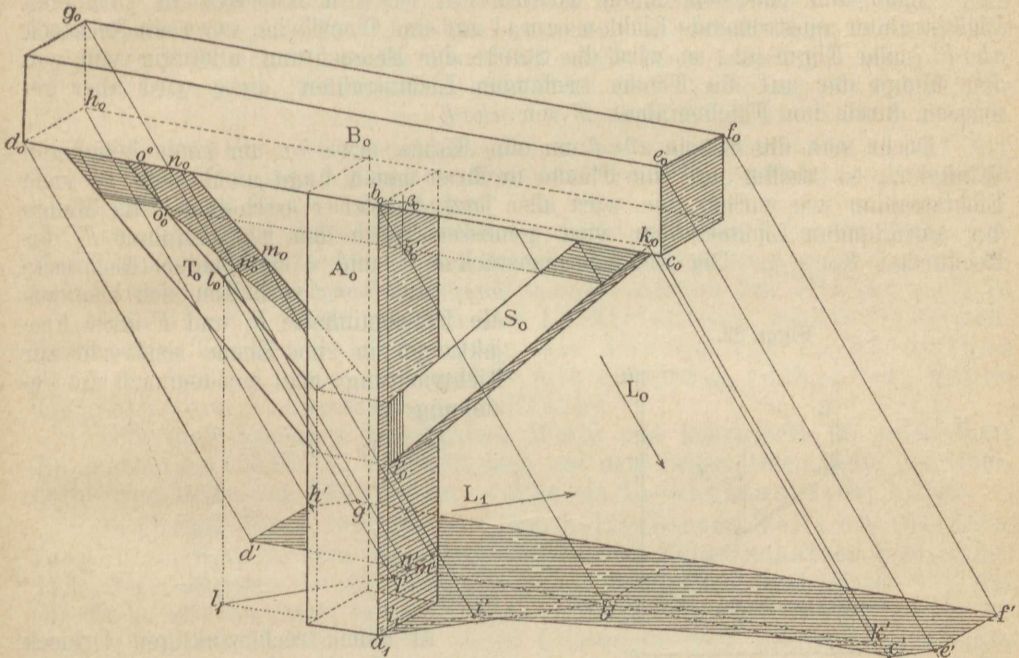
Ist z. B., siehe Figur 79, $X_0Y_0Z_0$ ein Achsenkreuz einer beliebigen rechtwinkligen oder schiefwinkligen axonometrischen Projektion, a_1 der Grundriss und a_0 das axonometrische Bild eines Punktes a , L_1 , L_0 die Lichtrichtung, so erhält man den Schlagschatten a' des Punktes a auf die XY -Ebene, wenn man durch a_1 und a_0 Parallele zu L_1 bzw. L_0 zieht und deren Schnittpunkt a' bestimmt. a' ist das axonometrische Bild des Schattens des Punktes a . Fasst man die Strecke $\overline{a_1a_0}$ als Bild einer zur XY -Ebene senkrechten Geraden auf, so ist der Schatten auf die XY -Ebene die Strecke $\overline{a_1a'}$. Fällt der Schnittpunkt b' in den Nebenwinkelraum des Winkels von X_0Y_0 , siehe Figur 80a, so ist dies ein Zeichen dafür, dass der Schlagschatten des Punktes b auf die XZ -Ebene fällt. Man erhält ihn, wenn man durch den Schnittpunkt b des Lichtstrahles durch a_1 eine

Parallele zur Z -Achse zeichnet bis zum Schnittpunkt b'' mit dem Lichtstrahl durch b_0 . Ist a_1b_0 das Bild einer zur XY -Ebene senkrechten Geraden, so ist ihr Schatten auf die beiden Ebenen XY und XZ die Strecke b_1b'' . In Figur 80b ist der Schatten einer ebenen Figur $abcd$ auf die XY - bzw. XZ -Ebene dargestellt; die Konstruktion ist wohl ohne weitere Erklärung verständlich.

b) Aufgaben.

95) Aufgabe 64. Für den in Figur 81 in axonometrischer Projektion dargestellten Körper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

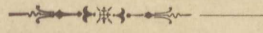
Figur 81.



Auflösung. Zieht man parallel zu L_1 die Streifstrahlen, so erhält man hierdurch die Kante a_1b_0 als Schattenkante, ihr Schlagschatten ist a_1b' . Durch b' geht parallel zu d_0c_0 der Schlagschatten dieser Linie; hierdurch sind die Punkte c' und d' bestimmt. Schattenwerfende Kanten von dem Balken B_0 sind ferner die Kanten $c_0e_0, e_0f_0, f_0g_0, g_0h_0$ und h_0d_0 ; ihre Schlagschatten sind bzw. $c'e'$ parallel $L_1, e'f'$ parallel $e_0f_0, f'g'$ parallel $f_0g_0, g'h'$ parallel L_1 , endlich $h'd'$ parallel h_0d_0 .

Von der Strebe S_0 erscheint als sichtbare Schattenkante die Linie i_0k_0 , ihr Schatten ist $i'h'$. Die schraffierte Fläche stellt den Schlagschatten des ganzen Körpers auf die Ebene XY dar. Auf dem Körper selbst entsteht noch Schatten von der Kante a_1b_0 auf die Strebe S_0 ; man zieht durch b_0 die Parallele $b_0\beta_0$, so begrenzt die Parallele durch β_0 zu Z_0 auf der vorderen Fläche von S_0 den Schatten.

Auf beiden Streben entsteht Schatten von der Kante c_0d_0 . Der Lichtstrahl durch b_0 schneidet die Parallele durch β_0 zu a_1b_0 in b_0' . Die Parallele durch b_0' zu c_0d_0 begrenzt auf den beiden vordern Flächen von S_0 und T_0 den bezüglichen Schatten. Um endlich den Schatten auf die obere Begrenzungsfläche der Strebe T_0 zu erhalten, zieht man durch einen beliebig auf der oberen Vorderkante von T_0 gewählten Punkt l_0 die Parallele l_0m_0 zu d_0h_0 bestimmt deren Schlagschatten $l'm'$ auf die XY -Ebene, so schneidet $l'm'$ die Linie $d'e'$ in einem Punkte n' und der durch n' gezogene Lichtstrahl schneidet l_0m_0 in n_0' und d_0c_0 in n_0 und es ist n_0' der Schlagschatten von n_0 . Die gesuchte Schattengrenze ist somit die Linie $o_0'n_0'$.



II. Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers.

1) Allgemeine Bemerkungen.

96) Bei den bisherigen Aufgaben hat es sich darum gehandelt, die Grenzen des Selbst- bzw. Schlagschattens auf der Oberfläche eines Körpers zu bestimmen; es wurde aber nicht darnach gefragt, wie sich das Licht auf die einzelnen Punkte der Körperoberfläche verteilt.

Trifft nun das von einem unendlich fernen Punkte in parallelen Lichtstrahlen ausströmende Licht normal auf eine Oberfläche, etwa ein Rechteck $abcd$, siehe Figur 82, so wird die Stärke der Beleuchtung abhängig sein von der Menge der auf die Fläche treffenden Lichtstrahlen; diese wird aber gemessen durch den Flächeninhalt F von $abcd$.

Dreht man die Fläche $abcd$ um eine Kante, etwa bc , um einen beliebigen Winkel λ , so treffen auf die Fläche in ihrer neuen Lage nicht mehr so viele Lichtstrahlen wie vorher, sie wird also jetzt dunkler erscheinen; die Menge der auffallenden Lichtstrahlen wird gemessen durch den Flächeninhalt F_1 des Rechteckes $b_1c_1e_1f_1$. Die Beleuchtungsstärken i_1 und i der beiden Rechtecke

$bcef$ und $b_1c_1d_1a_1$ verhalten sich also wie die Flächeninhalte F_1 und F ihrer Projektionen in eine Ebene senkrecht zur Lichtrichtung; man hat demnach die Beziehung:

$$\begin{aligned} 1) \dots \frac{i_1}{i} &= \frac{F_1}{F} \\ &= \frac{c_1 f_1}{c_1 d_1} \\ &= \frac{b_2 g}{b_2 e_2} \end{aligned}$$

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man aber das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse den Cosinus des der Kathete anliegenden Winkels.

Es ist also:

$$2) \dots \frac{b_2 g}{b_2 e_2} = \text{cosinus } \lambda, \text{ abgekürzt } \cos \lambda$$

und in Rücksicht auf die Beziehung 1):

$$3) \dots i_1 = i \cdot \cos \lambda$$

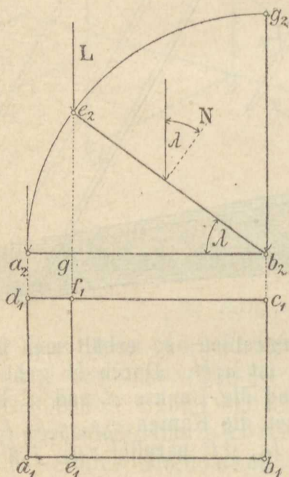
Setzt man die Stärke der Beleuchtung einer ebenen Fläche, auf welche das Licht normal auftrifft, gleich der Einheit, so hat man:

$$4) \dots i_1 = \cos \lambda$$

d. h. die Beleuchtungsstärke einer ebenen Fläche ist proportional dem Cosinus des Winkels, welchen die Normale zur Fläche mit der Lichtrichtung einschliesst.

Hat man eine krumme Oberfläche, so gibt es in jedem Punkte derselben an die Fläche eine Berührungsebene, Tangentialebene, welcher eine bestimmte Beleuchtung zukommt; dieselbe Beleuchtung erfährt auch der Berührungspunkt der Tangentialebene mit der Fläche.

Figur 82.



Will man also auf einer krummen Oberfläche jene Punkte konstruieren, welchen eine bestimmte Beleuchtungsstärke zukommt, so entspricht denselben ein bestimmter Winkel λ und man hat nur die Aufgabe zu lösen, auf der Fläche jene Punkte konstruktiv zu bestimmen, in welchen die zugehörigen Tangentialebenen mit der Lichtrichtung einen Winkel gleich $90^\circ - \lambda$ einschliessen.

Zu jedem Berührungspunkte einer solchen Tangentialebene gehört eine Flächennormale, welche auf der zugehörigen Tangentialebene senkrecht steht.

Man kann die Aufgabe, die Punkte einer Oberfläche zu bestimmen, denen eine Beleuchtungsstärke gleich $\cos \lambda$ zukommt, auch so fassen: Es sind jene Punkte auf der Oberfläche zu bestimmen, in welchen die Flächennormalen mit der Lichtrichtung den Winkel λ einschliessen. Verbindet man diese Punkte durch eine Linie mit einander, so erhält man eine Linie gleicher Beleuchtungsstärke. Eine solche Linie heisst eine „Isophote“.

„Die grösste Beleuchtungsstärke tritt in jenen Punkten der Fläche auf, für welche $\cos \lambda = 1$, also der Winkel $\lambda = 0$ ist, d. h. in jenen Punkten, in welchen die Lichtrichtung normal auf die Fläche trifft; diese Punkte heissen die Glanzpunkte oder auch die Lichtpole der Oberfläche.“

Die kleinste Beleuchtungsstärke, welche auftreten kann, ist Null. Für diese Punkte ist $\cos \lambda = 0$ bzw. $\lambda = 90^\circ$. Man kann also sagen: „Die Beleuchtungsstärke Null tritt in jenen Punkten der Fläche auf, in welchen die Flächennormalen zur Lichtrichtung senkrecht stehen, bzw. die Tangentialebenen an die Fläche zur Lichtrichtung parallel laufen.“ Diese Punkte mit einander verbunden, geben die Selbstschattengrenze der Fläche.

Gibt man dem $\cos \lambda$ verschiedene Werte und konstruiert für jeden Wert die zugehörige Isophote, so erhält man auf dem beleuchteten Teile der Oberfläche eine Reihe von Isophoten, welche ein Isophotensystem bilden.

In gleicher Weise, wie man auf dem beleuchteten Teile der Oberfläche Isophoten festlegt, kann man auch auf dem im Selbstschatten befindlichen Teile der Oberfläche Isophoten annehmen, indem man auch diesen Teil der Oberfläche als von einem in unendlicher Ferne befindlichen Punkte beleuchtet voraussetzt, die Stärke dieser Lichtquelle aber bedeutend schwächer wählt, als die Lichtquelle für den beleuchteten Teil der Oberfläche. Diese Beleuchtung kann man als indirekte Beleuchtung bezeichnen im Gegensatz zu der direkten Beleuchtung. Sie entspricht der in der Natur beobachteten Reflexbeleuchtung. Die Richtung der indirekten Lichtstrahlen ist jener der direkten entgegengesetzt.

Um das Isophotensystem für eine Oberfläche festzulegen, gibt man dem $\cos \lambda$ die Werte $+1, 0,9, 0,8, 0,7 \dots 0,1, 0$ für den direkt beleuchteten Teil und $-1, -0,9, -0,8 \dots 0$ für den Selbstschatten und erhält hierdurch eine bestimmte Beleuchtungsskala.

Konstruiert man für die festgesetzten Werte von $\cos \lambda$ die zugehörigen Isophoten, so werden durch dieselben sowohl auf dem beleuchteten, wie auf dem im Selbstschatten befindlichen Teile durch je zwei auf einander folgende Isophoten eine Anzahl von Flächenzonen gebildet, denen eine bestimmte Beleuchtungsstärke zukommt.

Man kann diese Beleuchtung in den Projektionen bildlich darstellen, indem man in jeder Projektion die einzelnen Zonen mit Farbe überlegt und die Stärke der Farbtöne umgekehrt proportional nimmt der Beleuchtungsstärke. Der Beleuchtungsstärke 1 entspricht dabei die weisse Farbe des Papiers.

Für den im Schlagschatten befindlichen Teil ist es nicht nötig, Isophoten

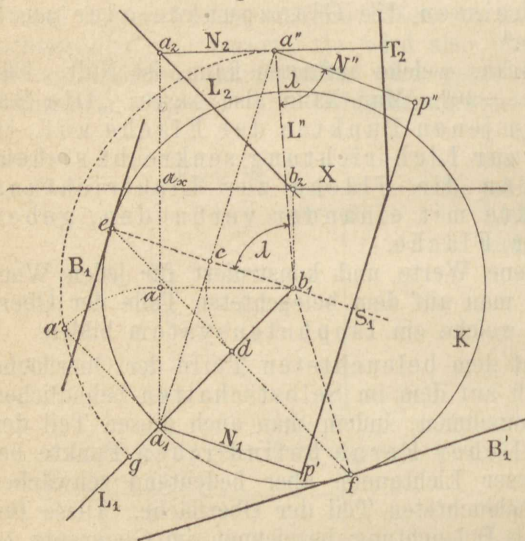
zu konstruieren, es bleiben vielmehr die für den beleuchteten Teil konstruierten Isophoten in Geltung, weil die Erfahrung lehrt, dass der Schlagschatten sich stets an jener Stelle am dunkelsten zeigt, wo die Fläche am hellsten wäre, wenn der schattenwerfende Gegenstand entfernt würde. Der Schlagschatten wird demnach von der Selbstschattengrenze ausgehend bis zur hellsten Stelle der Oberfläche an Dunkelheit zunehmen.

Anmerkung 15a. Da es sich bei der in No. 96 angeführten Beleuchtungsskala nur um das gegenseitige Verhältnis der einzelnen Beleuchtungsstärken handelt, so kann man statt der Werte: $+1, 0,9, 0,8, 0,7 \dots 0, -0,1, -0,2 \dots -1$ auch schreiben: $+10, 9, 8, 7 \dots 0, -1, -2 \dots -10$. In der Folge ist dies auch stets durchgeführt.

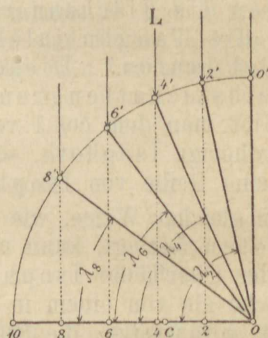
2) Beleuchtung einer projizierenden Ebene.

97) Ist durch $S_1 T_2$ eine zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechte Ebene gegeben, so erhält man deren Beleuchtungsstärke durch Ermittlung des Winkels λ einer Normalen zu dieser Ebene mit der Lichtrichtung.

Figur 83.



Figur 84.



Ist also, siehe Figur 83, L ein beliebiger Lichtstrahl, so wählt man auf demselben einen Punkt a willkürlich, fällt von ihm eine Normale N auf die Ebene $S_1 T_2$, indem man durch a_1 eine Senkrechte $a_1 p'$ zu S_1 fällt. Zieht man ferner durch die Spur b_1 des Lichtstrahles L eine Parallele zu $a_1 p'$, so stellt diese die erste Spur der Ebene bap dar und man kann nun die Ebene bap in die **Pr. Eb.** E_1 umlegen, wodurch a nach a'' gelangt ($a_1 a''$ senkrecht zu $b_1 c$, $\overline{a_1 a'} = \overline{a_x a_2}$, $\overline{b_1 a''} = \overline{b_1 a'}$). Die Parallele N'' zu $b_1 c$ ist die umgelegte Normale N , und es schliessen nun L'' und N'' den gesuchten Winkel λ ein, dessen Cosinus unter der Annahme der Strecke $\overline{b_1 a''}$ gleich der Einheit, gleich der Strecke $\overline{c b_1}$ ist. Da es sich nur um die Bestimmung des $\cos \lambda$ handelt, so ist die Ausführung der Umlegung der Ebene LN in die **Pr. Eb.** nicht notwendig, es genügt vielmehr, auf L_2 den Punkt a_2 beliebig zu wählen und von a_1 die Senkrechte zu $b_1 c$ zu fallen, dann ist $\overline{b_1 c} = \cos \lambda$.

Zeichnet man sich nun eine Beleuchtungsskala, siehe Figur 84, indem man Strecke $010 = \overline{b a'}$ macht und diese in zehn gleiche Teile teilt, so braucht man

nur die Strecke $\overline{b_1c}$ von Figur 83 an der Figur 84 von 0 aus $0c$ abzutragen; es fällt dann der zweite Endpunkt zwischen die Teilpunkte 3 und 4, was andeutet, dass die Beleuchtungsstärke der Ebene ST zwischen 3 und 4 beträgt.

3) Bestimmung der Lage einer projizierenden Ebene von gegebener Beleuchtungsstärke.

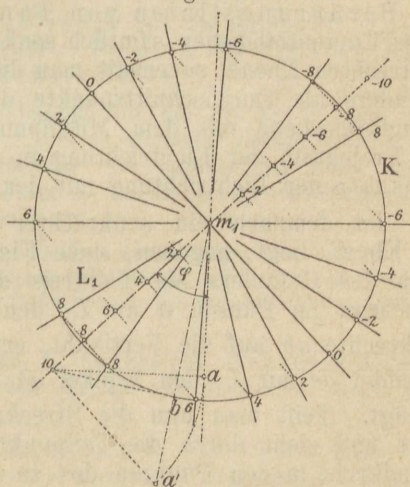
98) Soll die Lage einer projizierenden Ebene von bestimmter Beleuchtungsstärke ermittelt werden, so kann dies in einfacher Weise geschehen; man macht, siehe Figur 83, die Strecke $\overline{b_1d} = \overline{b_1c}$ und zieht de senkrecht zu L_1 , so entsteht das Dreieck b_1de , das kongruent ist dem Dreieck b_1ca_1 , daher ist $\overline{b_1e} = \overline{b_1a_1}$, d. h. die Strecke $\overline{b_1e}$ ist für alle Winkel λ von konstanter Grösse; mit anderen Worten, der Punkt e liegt auf einem Kreise K mit dem Halbmesser $\overline{b_1a_1} = \cos \varphi$. Zieht man in e eine Tangente an den Kreis K , so ist diese parallel zu S_1 und stellt die Spur einer Ebene von der Beleuchtungsstärke λ dar. Da die Senkrechte de zu L_1 den Kreis K noch in einem zweiten Punkte f schneidet, so ist auch die Tangente B_1' die Spur einer Ebene von der Beleuchtungsstärke λ . Die beiden Linien B_1 und B_1' liegen symmetrisch zu L_1 und alle zur Pr. Eb. E_1 senkrechten Ebenen von der Beleuchtungsstärke λ müssen parallel gerichtet sein zu den Ebenen B_1 und B_1' beziehungsweise.

4) Konstruktion des Normalenbüschels für die Pr. Eb. E_1 .

99) Auf Grund des Vorangegangenen ist man im Stande, die Spuren von sämtlichen zur Pr. Eb. E_1 senkrechten Ebenen zu zeichnen, welche den in der Beleuchtungsskala, siehe Figur 84, entsprechenden Werten von $\cos \lambda$ zukommen. Trägt man nämlich, s. Fig. 85, auf einer zum Grundriss der Lichtrichtung parallelen Geraden L_1 , von einem Punkte m_1 aus, zehn gleiche Teile ab, zieht durch m_1 eine Vertikale und fällt auf diese vom Punkte 10 die Senkrechte $\overline{10a}$, errichtet $\overline{10a'}$ senkrecht zu L_1 und gleich $\overline{10a}$, so schliesst die Gerade m_1a' mit L_1 den Winkel φ der Lichtrichtung mit der Pr. Eb. E_1 ein. Zieht man daher $\overline{10b}$ senkrecht zu m_1a' , so ist $\overline{m_1b} = \cos \varphi$.

Beschreibt man nun um m_1 mit einem Halbmesser gleich $\overline{m_1b}$ den Kreis K und errichtet in den Teilpunkten 2, 4, 6, 8, 10 von L_1 Senkrechte zu L_1 , so treffen diese den Kreis K in Punkten 2, 4, 6, 8. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit m_1 stellen die Normalen zu Ebenen dar, die auf der Pr. Eb. E_1 senkrecht stehen und mit der Lichtrichtung L_1 Winkel einschliessen, deren Cosinus bzw. die Werte besitzen gleich den Strecken $\overline{m_12}$, $\overline{m_14}$, $\overline{m_16}$, $\overline{m_18}$ auf L_1 .

Figur 85.



Die zu diesen Verbindungslinien senkrecht stehenden Ebenen besitzen also Beleuchtungsstärken nach den Werten der Beleuchtungsskala, Trägt man die genannten Teile auch auf der andern Seite von L_1 von dem Punkte m_1 aus nach $-2, -4, -6$ u. s. w. auf, konstruiert die ihnen entsprechenden Punkte auf K und zeichnet die Verbindungslinien mit m_1 , so fallen diese Linien in die Verlängerungen der schon konstruierten Verbindungslinien $m_1, 2$ u. s. w. und stellen die Normalen der zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechten Ebenen dar, denen die negativen Beleuchtungsstärken der Beleuchtungsskala zukommen.

Die Verbindungslinien der Punkte $0, 2, \dots - 2, - \dots$ auf K mit den Punkten m_1 bilden ein Strahlenbüschel, das man das Normalenbüschel für die zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechten Ebenen bestimmter Beleuchtungsstärke, oder kurz das Normalenbüschel für die **Pr. Eb.** E_1 nennt. Die Strahlen desselben liegen symmetrisch zu L_1 . L_1 heisst die Achse des Büschels, m_1 sein Mittelpunkt und der Winkel φ , d. i. der Winkel, den die Lichtrichtung mit der **Pr. Eb.** E_1 einschliesst, der Winkel, endlich K der Teilkreis des Büschels.

Anmerkung 16. Wie für die **Pr. Eb.** E_1 , gibt es auch für die **Pr. Eb.** E_2 ein Normalenbüschel; dasselbe besitzt die Lichtrichtung L_2 als Achse und als Teilkreis einen Kreis mit einem Halbmesser gleich $\cos \varphi$. Ja für jede Ebene von beliebiger Lage gegen die Projektionsebene gibt es ein Normalenbüschel, seine Achse läuft parallel zur Richtung der Projektion der Lichtrichtung auf diese Ebene und dementsprechend ist sein Winkel φ_0 gleich dem Winkel der Lichtrichtung mit der genannten Ebene. Der Teilkreis besitzt einen Halbmesser von der Grösse $\cos \varphi_0$.

5) Beleuchtung eines senkrechten Kreiscylinders.

a) Allgemeine Bemerkungen.

100) Die Isophoten eines Kreiscylinders sind Mantellinien als Berührungslinien von Tangentialebenen mit der Fläche. Da diese Tangentialebenen sämtlich senkrecht stehen zu einer auf der Cylinderachse senkrechten Ebene, so erhält man die Isophotenpunkte auf dem Grundkreise des Cylinders als Durchschnittspunkte der Strahlen des Normalenbüschels für die Grundkreisebene mit dem Mittelpunkt des Grundkreises als Mittelpunkt, der Projektion der Lichtrichtung in die Grundkreisebene als Achse und dem Winkel φ der Lichtrichtung mit der Grundkreisebene als Winkel.

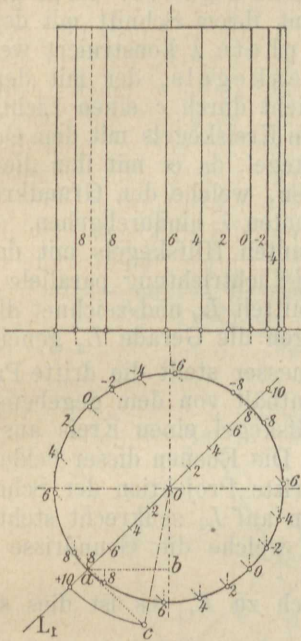
Ist demnach ein senkrechter Kreiscylinder, dessen Grundkreis in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, gegeben, siehe Figur 86, so konstruiert man für den Grundkreis des Cylinders als Teilkreis das Normalenbüschel einfach dadurch, dass man im Punkte 0 an L_1 den Winkel φ anträgt (man fällt von a die Senkrechte ab auf die Vertikale, errichtet ac senkrecht zu L_1 und gleich ab , so bildet oc mit L_1 den Winkel φ) und die Strecke $oc = \overline{0+10}$ und $\overline{0-10}$ abträgt. Teilt man nun die Strecken $\overline{0+10}$ und $\overline{0-10}$ in je zehn gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu L_1 , so treffen diese den Grundkreis in den Punkten des zu ihm gehörigen Isophotensystems. Die Aufrisse der Isophoten ergeben sich durch Hinaufprojizieren.

Aus der vorstehenden Konstruktion geht hervor, dass das Isophotensystem eines senkrechten Kreiscylinders symmetrisch liegt zu der die Cylinderachse enthaltenden Lichtebene. Seine Projektion in die Grundkreisebene gibt ein punktförmiges Iso-

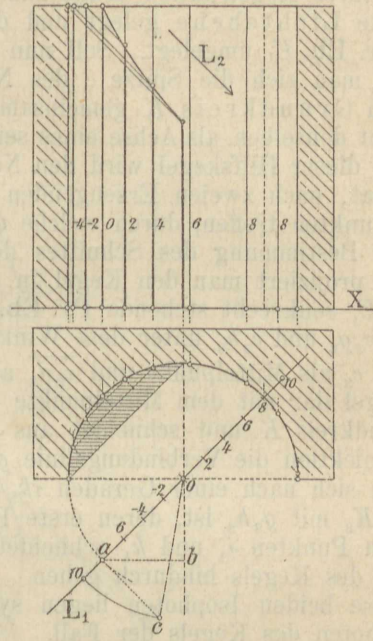
photensystem als Durchschnitt des zur Grundkreisebene gehörigen Normalenbüschels mit dem Grundkreise des Cylinders.

Anmerkung 17. In allen den folgenden Konstruktionen sind sowohl im beleuchteten Teil, wie auch im Selbstschatten nur die Isophoten 0, 2, 4, 6, 8 und 10 konstruiert worden.

Figur 86.



Figur 87.



b) Aufgaben.

101) **Aufgabe 65.** Ein hohler Kreiscylinder ist in Figur 87 durch Vertikal und Horizontalschnitt dargestellt. Es sind für die sichtbare Cylinderoberfläche die Isophoten zu konstruieren.

Auflösung. Man konstruiert das Normalenbüschel für die Pr. Eb. E_1 mit dem Cylindergrundkreise als Teilkreis, ebenso wie in No. 100, so schneiden dessen Strahlen auf dem Grundkreise das zugehörige Isophotensystem aus. Im vorliegenden Falle geben die rechts von o liegenden, durch die Teilpunkte auf L_1 zu L_2 gezogenen Senkrechten die Isophoten des beleuchteten Teiles der Oberfläche an.

Anmerkung 18. In der Figur 87 ist auch der Schlagschatten konstruiert worden, der von der Cylinderbegrenzung auf dem inneren Cylindermantel erzeugt wird. Die im Schlagschatten befindlichen Teile der Isophoten sind entsprechend dem in No. 96 aufgeführten Gesetze stärker gezeichnet worden.

102) **Aufgabe 66.** Für einen zur Pr. Eb. E_2 senkrecht stehenden Kreiscylinder, der mit einer Mantellinie in der Pr. Eb. E_1 aufliegt, sind die Isophoten zu konstruieren.

103) **Aufgabe 67.** Für einen zur Pr. Eb. E_1 und E_2 parallelen, also zur Pr. Eb. E_3 senkrecht stehenden Kreiscylinder sind die Isophoten zu konstruieren.

104) **Aufgabe 68.** Für einen zur Pr. Eb. E_1 parallelen und zur Pr. Eb. E_2 geneigten senkrechten Kreiscylinder sind die Isophoten zu konstruieren.

105) **Aufgabe 69.** Für einen zur Pr. Eb. E_2 parallelen und zur Pr. Eb. E_1 geneigten senkrechten Kreiscylinder sind die Isophoten zu konstruieren.

6) Beleuchtung eines senkrechten Kreiskegels.

a) Allgemeine Bemerkungen.

106) Eine Tangentialebene berührt einen Kegel nach einer Mantellinie, es sind somit die Isophoten des Kreiskegels Mantellinien.

Zu ihrer Konstruktion denkt man sich, siehe Figur 88, durch die Kegelachse eine Lichtebene gelegt und diese samt ihrem Schnitt mit dem Kegel in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt. Soll nun die Isophote λ konstruiert werden, so bestimmt man sich die Spitze c des Normalenkegels, der mit dem Kreiskegel den Grundkreis K gemeinsam hat, zieht durch c einen Lichtstrahl L und nimmt denselben als Achse eines senkrechten Kreiskegels mit dem Oeffnungswinkel λ ; dieser Hilfskegel wird den Normalenkegel, da er mit ihm die Spitze c gemein hat, nach zwei Erzeugenden schneiden, welche den Grundkreis K in zwei Punkten treffen, durch welche die Isophoten λ hindurchgehen.

Zur Bestimmung des Schnittes des genannten Hilfskegels mit der Lichtebene L_1 projiziert man den Kegel in eine zur Lichttrichtung parallele und zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehende **Pr. Eb.** E_3 , ermittelt L_3 und zeichnet die beiden Geraden c_3g_3 und c_3h_3 unter dem Winkel λ gegen die Gerade L_3 geneigt. Ein Kreis um c_3 als Mittelpunkt und c_3d_3 als Halbmesser stellt die dritte Projektion einer Kugel dar mit dem Mittelpunkte c ; sie enthält von dem gegebenen Kegel den Grundkreis K und schneidet aus dem Hilfskegel einen Kreis aus, dessen dritte Projektion die Verbindungslinie g_3h_3 ist. Die Ebenen dieser beiden Kreise schneiden sich nach einer Geraden ik , deren dritte Projektion der Schnittpunkt i_3k_3 von K_3 mit g_3h_3 ist, deren erste Projektion auf L_1 senkrecht steht und K_1 in zwei Punkten i_1 und k_1 schneidet, durch welche die Grundrisse der Isophoten λ des Kegels hindurch gehen.

Diese beiden Isophoten liegen symmetrisch zu L_1 ; es ist dies somit für alle Isophoten des Kegels der Fall.

Man kann also sagen: „Das Isophotensystem eines senkrechten Kreiskegels liegt symmetrisch zu der die Kegelachse enthaltenden Lichtebene. Die Projektion des Isophotensystems in die Ebene des Grundkreises liegt symmetrisch zur Projektion des die Kegelspitze enthaltenden Lichtstrahles in diese Ebene.“

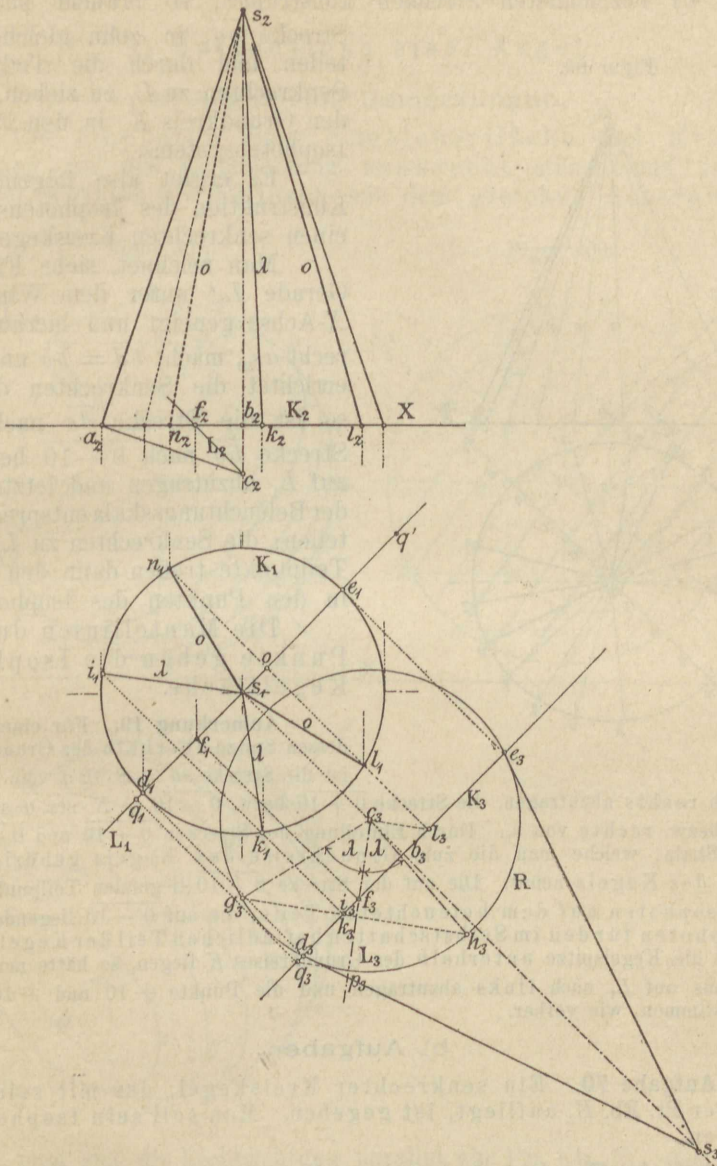
107) Trägt man, siehe Figur 88, an L_3 alle Winkel λ der Beleuchtungsskala an und wiederholt die angegebene Konstruktion, so erhält man das ganze Isophotensystem des Kegels. Man kann aber die Konstruktion bedeutend vereinfachen durch folgende Betrachtung:

Die Senkrechte c_3l_3 stellt die dritte Projektion einer zu L senkrechten Ebene dar und l_3 ist ihre Schnittlinie mit der Grundkreisebene; ihr entspricht im Grundriss die Senkrechte l_1n_1 zu L_1 ; durch l_1 und n_1 gehen die Isophoten Null hindurch.

Die Linie L_3 selbst kann als Schnitt eines Hilfskegels mit dem Oeffnungswinkel gleich Null mit der Lichtebene L_1 aufgefasst werden; dieser Kegel schneidet die Hilfskugel L nach einem unendlich kleinen Kreise, dessen Ebene durch p_3 senkrecht zu L_3 hindurch geht, letztere Ebene trifft die Ebene des Grundkreises K nach einer Geraden, deren dritte Projektion durch den Punkt q_3 dargestellt ist und deren erste Projektion durch q_1 senkrecht zu L_1 hindurch geht.

Zufolge der Konstruktion muss q_1 ausserhalb des Kreises K_1 fallen; nur wenn die Kegelerzeugenden mit der Grundkreisebene einen Winkel einschliessen gleich $90^\circ - \varphi$, fällt q_1 auf den Kreis K_1 und es stellt dann die durch q_1 gezogene Kegelmantellinie die Isophote 10 dar.

Figur 88.



Aus der Figur kann man die Beziehungen entnehmen:

$$\overline{b_3 l_3} = \overline{s_1 o} = \overline{b_3 c_3} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \overline{b_2 c_2} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\overline{l_3 q_3} = \overline{o q_1} = \frac{c_3 p_3}{\cos \varphi} = \frac{a_2 c_2}{\cos \varphi}$$

Bezeichnet man nun kurz die Strecke $\overline{b_2 c_2}$ mit S , die Strecke $\overline{a_2 c_2}$ mit N , so erhält man die Beziehungen:

$$5) \dots \overline{s_1 o} = S \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$6) \dots \overline{o q_1} = N \cdot \sec \varphi$$

Voraussetzung, dass die zweite bezw. erste Projektion der Kegelspitze nicht benützt werden kann, das Isophotensystem zu konstruieren.

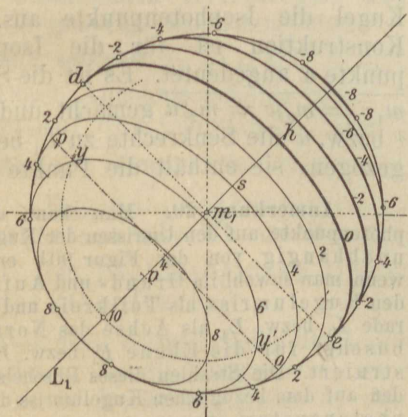
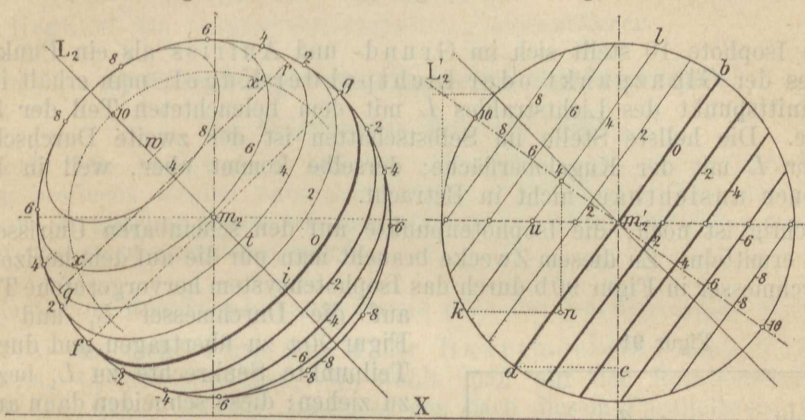
7) Beleuchtung einer Kugel.

a) Allgemeine Bemerkungen.

113) Die Isophoten einer Kugeloberfläche sind Kreislinien, deren Ebenen auf der Lichtrichtung senkrecht stehen und die sich im Grund- und Aufriss als Ellipsen mit dem gleichen Achsenverhältnis projizieren.

Figur 90 a.

Figur 90 b.



Denkt man sich die Lichtrichtung parallel zur **Pr. Eb. E_2** , aber unter dem Winkel φ zur **Pr. Eb. E_1** geneigt angenommen, siehe Figur 90 b, so projizieren sich die Aufrisse der Isophoten als parallele zur Lichtrichtung L_2' senkrecht stehende, in gleichen Abständen von einander befindliche Kreissehnen.

Um sie zu erhalten, teilt man den zur Lichtrichtung parallelen Kreisdurchmesser L_2' in zwanzig Teile und zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu L_2' .

Die Ermittlung des Grund- und Aufrisses des Isophotensystems für die Lichtrichtung L ist sehr einfach. Man überträgt mittels Parallelen zur X -Achse die Teilpunkte von L_2' auf L_2 , s. Fig. 90 a u. b. Die grossen Achsen der

Ellipsen stehen dann senkrecht zu L_2 und sind gleich den Längen der betreffenden Kreissehnen in Figur 90b, die kleinen Achsen fallen in den Durchmesser L_2 und sind gleich den Projektionen der genannten Kreissehnen auf die Horizontale.

In Figur 90a und b ist die Konstruktion der Isophote 4 angedeutet.

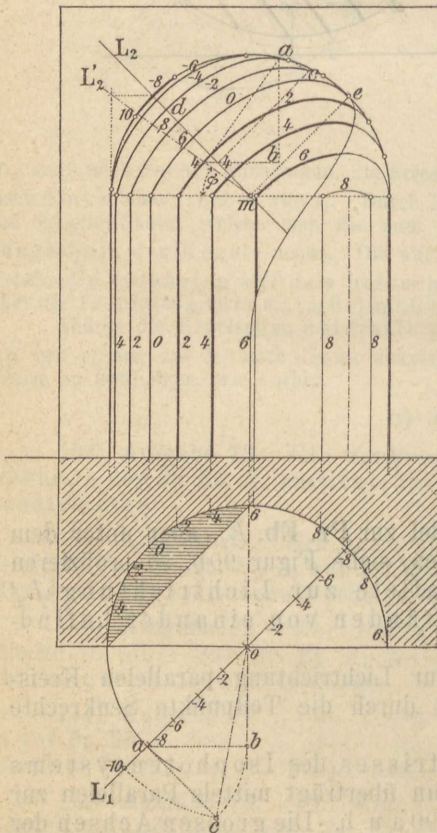
Durch den Punkt 4 auf L_2 ist die Senkrechte zu L_2 gezogen und $\overline{rq} = \overline{tk}$ gemacht. Die kleine Halbachse $\overline{4t}$ ist dann gleich der Strecke \overline{kn} , siehe Figur 90b, abzutragen. Hierdurch ist die Ellipse 4 bestimmt und kann nunmehr gezeichnet werden. In gleicher Weise ist jede der Ellipsen zu konstruieren.

Der Grundriss des Isophotensystems ist dem Aufriss desselben kongruent und hat den durch m_1 gezogenen Lichtstrahl als Symmetrieachse.

Die Isophote 10 stellt sich im Grund- und Aufriss als ein Punkt dar, es ist dies der Glanzpunkt oder Lichtpol der Kugel; man erhält ihn als Durchschnittspunkt des Lichtstrahles L mit dem beleuchteten Teil der Kugeloberfläche. Die hellste Stelle im Selbstschatten ist der zweite Durchschnittspunkt von L mit der Kugeloberfläche; derselbe kommt aber, weil in beiden Projektionen unsichtbar, nicht in Betracht.

Wichtig ist noch, die Isophotenpunkte auf den scheinbaren Umrissen der Kugel zu ermitteln. Zu diesem Zwecke braucht man nur die auf dem horizontalen Kugeldurchmesser in Figur 90b durch das Isophotensystem hervorgerufene Teilung

Figur 91.



auf die Durchmesser L_1 und L_2 in Figur 90a zu übertragen und durch die Teilpunkte Senkrechte zu L_1 bzw. L_2 zu ziehen; diese schneiden dann auf dem ersten bzw. zweiten Umriss der Kugel die Isophotenpunkte aus. Die Konstruktion ist für die Isophotenpunkte 4 angedeutet. Es ist die Strecke $\overline{m_1v} = \overline{m_2w} = \overline{m_2'u}$ gemacht und durch v bzw. w die Senkrechte zu L_1 bzw. L_2 gezogen; sie enthält die Punkte 4.

Anmerkung 20. Man kann die Isophotenpunkte auf den Umrissen der Kugel auch unabhängig von der Figur 90b ermitteln, wenn man sowohl im Grund- und Aufriss für den Kugelumriss als Teilkreis und die Gerade L_1 bzw. L_2 als Achse das Normalenbündel für die Ebene E_1 bzw. E_2 konstruiert. Die Strahlen dieses Bündels schneiden auf dem bezüglichen Kugelumriss das Isophotensystem aus.

b) Aufgaben.

114) **Aufgabe 75.** Es sind die Isophoten für eine hohle Halbkugel auszuführen.

Auflösung. Man braucht nur in Fig. 90a Grund- und Aufriss um je 180° zu drehen, um die Isophoten für eine hohle Halbkugel zu erhalten, welche im ersten Falle von dem horizontalen, im zweiten Falle von dem vertikalen grössten Kugelkreise begrenzt ist.

115) **Aufgabe 76.** Für die in Figur 91 dargestellte Kugelnische mit daranstossendem Hohlcyylinder ist das Isophotensystem zu konstruieren.

Auflösung. Man konstruiert für den Cylindergrundkreis als Teilkreis das Normalenbüschel der **Pr. Eb. E_1** . Bezüglich der Kugel führt man die in No. 113 angegebene Konstruktion aus, jedoch unter Berücksichtigung des in Auflösung der Aufgabe 76 Gesagten.

116) **Aufgabe 77.** Für eine halbkugelförmige Nische, deren Begrenzungskreis ein Nebenkreis der Kugel ist und

- a) in einer vertikalen,
- b) in einer horizontalen

Wand liegt, ist die Isophotenkonstruktion auszuführen.

8) Beleuchtung eines allgemeinen Rotationskörpers.

a) Allgemeine Bemerkungen.

117) Die Isophoten auf der Oberfläche eines Rotationskörpers können bestimmt werden entweder mittelst Hilfskegel- oder Hilfskugelflächen, in gleicher Weise wie dies hinsichtlich der Konstruktion der Selbstschattengrenze ausgeführt wurde.

Konstruktion des Isophotensystems mittelst berührendem Hilfskegel.

118) Ist, siehe Figur 92, A der Hauptmeridian eines Rotationskörpers, C_2 dessen Achse, so wählt man auf der Rotationsfläche einen Parallellkreis B beliebig, bestimmt den nach diesem Parallelkreise die Oberfläche berührenden Hilfskegel und für letzteren nach No. 105 das zum Kreise B gehörige Isophotensystem.

$$(a_2c_2 \text{ senkrecht } T_2, \overline{qe} = \overline{b_2c_2}, \overline{qg} = \overline{a_2c_2}, \overline{fe} = \overline{s_1o}, \overline{qh} = \overline{0+10} \text{ und } \overline{0-10})$$

Durch Annahme beliebig vieler Parallellkreise erhält man das Isophotensystem auf der Oberfläche des Rotationskörpers.

Aus der Konstruktion ergeben sich folgende Sätze:

„Das Isophotensystem eines Rotationskörpers liegt symmetrisch zur Ebene des Lichtmeridians.“

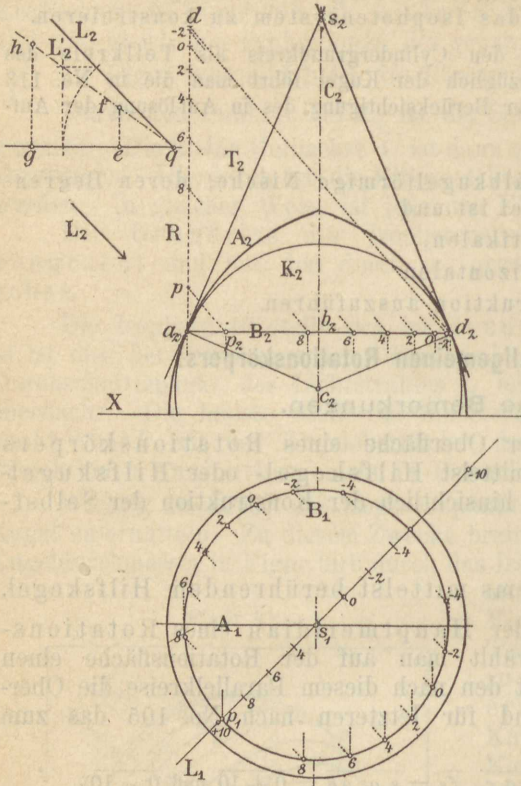
„Im Lichtmeridian liegen die höchst beleuchteten Punkte der Oberfläche.“

Will man beispielsweise die Lichtpole konstruieren, so braucht man nur senkrecht zu L_3' die Tangente U_2 an den Hauptmeridian A_2 zu ziehen und durch ihren Berührungspunkt k_2 den Aufriss D_2 eines Parallelkreises der Fläche zu legen. Der zugehörige Grundriss D_1 schneidet auf dem Lichtmeridian L_1 den Grundriss l_1 des Lichtpoles l aus, der Aufriss ergibt sich durch Hinaufprojizieren.

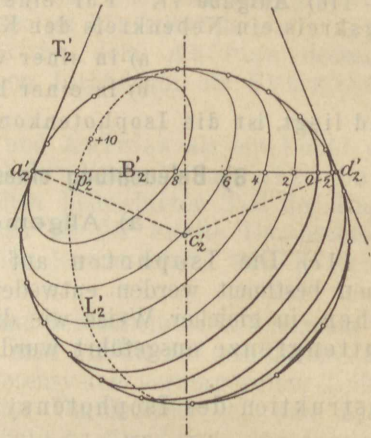
Gibt es mehrere Tangenten parallel zu L_3' an den Hauptmeridian A_2 , so gibt es für jeden zugehörigen Parallelkreis einen Lichtpol, der sowohl auf dem beleuchteten wie auf dem im Selbstschatten befindlichen Teile liegen kann; im ersten Falle kommt ihm die Beleuchtungsstärke $+10$, im letzteren eine solche gleich -10 zu.

Die Isophotenpunkte auf dem ersten Umriss bestimmt man zweckmässig mittelst des Normalenbüschels für die **Pr. Eb. E_1** , das den betreffenden Umrisskreis als Teilkreis besitzt. Für die Isophoten auf dem Umriss im Aufrisse kann man gleichfalls zweckmässig das Normalenbüschel für die **Pr. Eb. E_2**

Figur 92.



Figur 93.



benützen; man zieht nämlich senkrecht zu dessen Strahlen Tangenten an den zweiten Umriss und erhält in deren Berührungspunkten die gesuchten Isophotenpunkte.

Konstruktion der Isophotenpunkte mittelst berührender Kugelflächen.

119) Man wählt auf der Oberfläche des Rotationskörpers, siehe Figur 92, einen Parallelkreis B beliebig, sucht den entsprechenden Parallelkreis auf der Hilfskugel auf, siehe Figur 93, für deren Aufriss die Isophoten nach No. 113 konstruiert sind. Man zieht also parallel zur Tangente T_2 an den Umriss der Kugel die Tangente T_2' und zeichnet durch deren Berührungspunkt a_2' den Aufriss B_2' des Parallelkreises B . Durch das Isophotensystem der Kugel werden nun auf B_2' eine Reihe von Punkten ausgeschnitten, welche man so auf den Aufriss B_2 in Figur 92 zu übertragen hat, dass die Teilungen auf B_2' und B_2 proportional sind.

Man zeichnet sich zu diesem Zwecke die Teilung auf B_2' auf einen Papierstreifen, überträgt sie mittelst desselben auf eine durch a_2 unter einen beliebigen Winkel gezogene Gerade R , verbindet die Endpunkte d und d_2 und zieht durch die Teilpunkte Parallele zu d_2d , so treffen diese Linien den Aufriss B_2 in den Punkten des Isophotensystems der Oberfläche.

Durch Annahme beliebiger Parallelkreise kann man hinlänglich viele Isophotenpunkte bestimmen und die gleichnamigen mit einander zu einer Isophote verbinden.

Anmerkung 21. Man wird zweckmässig auf der Kugel die Parallelkreise so wählen, dass sie durch die höchsten bzw. tiefsten Punkte der Isophoten gehen und die entsprechenden Parallelkreise auf der Oberfläche des Rotationskörpers bestimmen. Man erhält hierdurch auch die höchsten bzw. tiefsten Punkte des Isophotensystems für den Rotationskörper im Aufriss.

Der Grundriss ergibt sich durch Herabprojizieren auf die Grundrisse der zugehörigen Parallelkreise.

b) Aufgaben.

120) **Aufgabe 78.** Für den in Figur 94 im Aufrisse dargestellten Rotationskörper ist das Isophotensystem zu konstruieren.

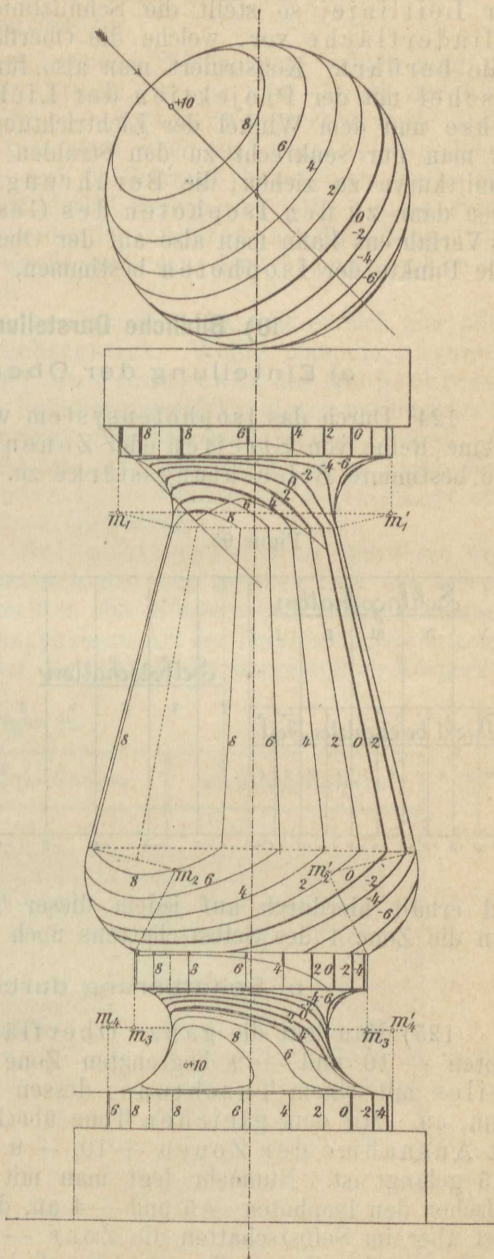
Auflösung. Für die Kugel, die cylindrischen und kegelförmigen Teile konstruiert man die Isophoten nach den in den No. 113, 100 und 106 gemachten Angaben für die übrigen Teile nach der No. 118.

Im vorliegenden Beispiele sind auch die Schlagschattengrenzen auf der Körperoberfläche konstruiert und die im Schlagschatten befindlichen Teile der Isophoten stärker ausgezeichnet worden.

121) **Aufgabe 79.** Für einen Kreisring, bzw. eine Hohlkehle soll die Isophotenkonstruktion ausgeführt werden.

122) **Aufgabe 80.** Man konstruiere das Isophotensystem für die in den Figuren 60—65a im Aufrisse dargestellten Rotationskörper.

Figur 94.



9) Beleuchtung von Gesimskörpern.

123) Die Oberfläche eines Gesimskörpers setzt sich in der Regel aus Ebenen, Cylinder-, Kegel- und Rotationsflächen zusammen und es können daher für diese Flächen die an entsprechender Stelle angegebenen Konstruktionen Verwendung finden. Ueberdies lässt sich lediglich mit Zuhilfenahme berührender Cylinderflächen die Konstruktion der Beleuchtung für die Oberfläche eines Gesimskörpers durchführen. Denn führt man

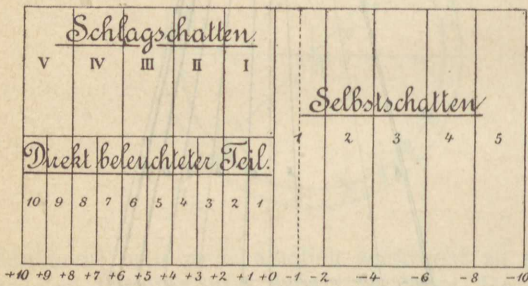
an beliebiger Stelle durch den Gesimskörper einen Schnitt senkrecht zur Leitlinie, so stellt die Schnittlinie einen Normalschnitt für eine Cylinderfläche vor, welche die Oberfläche des Gesimskörpers nach dieser Linie berührt. Konstruiert man also für diese Schnittlinie das Normalenbündel mit der Projektion der Lichtrichtung in die Schnittebene als Achse und dem Winkel der Lichtrichtung mit dieser Ebene als Winkel, so hat man nur senkrecht zu den Strahlen dieses Bündels Tangenten an die Schnittkurve zu ziehen; die Berührungspunkte dieser Tangenten gehören dann zu den Isophoten des Gesimskörpers. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man also auf der Oberfläche des Gesimskörpers hinlänglich viele Punkte der Isophoten bestimmen, um die letzteren zeichnen zu können.

10) Bildliche Darstellung der Beleuchtung.

a) Einteilung der Oberfläche in Zonen.

124) Durch das Isophotensystem wird die Oberfläche eines Körpers in eine Reihe von Streifen oder Zonen eingeteilt; jeder dieser Zonen kommt eine bestimmte Beleuchtungsstärke zu. Man kann letztere darstellen, wenn

Figur 95.



man die betreffende Zone mit einem Tusch oder Farbtone von bestimmter Stärke anlegt. Zweckmässig verfährt man dabei folgendermassen: Auf dem direkt beleuchteten Teile hat man nach der Beleuchtungsskala zehn Isophoten und demnach auch zehn Zonen, siehe Fig. 95. Auf dem im Selbstschatten befindlichen Teile fasst man je zwei auf einander folgende Zonen zu einer Zone zusammen, desgleichen auch im Schlagschatten und erhält hierdurch auf jedem dieser Teile fünf Zonen. Bisweilen teilt man die Zone 1 des Selbstschattens noch in zwei Hälften, siehe Figur 95.

b) Schattierung durch Lagentuschen.

125) Man legt die ganze Oberfläche, mit Ausnahme der von den Isophoten +10 und +9 begrenzten Zone +10 des direkt beleuchteten Teiles mit einem Tuschtone, dessen Stärke man willkürlich festsetzen kann, an. Mit dem gleichen Tone überlegt man wieder die ganze Oberfläche mit Ausnahme der Zonen +10, +9 und fährt so fort, bis man zur Zone +5 gelangt ist. Nunmehr legt man mit einem sechsten Tone die Fläche zwischen den Isophoten +5 und -4 an, desgleichen den ganzen Schlagschatten, lässt aber im Selbstschatten die Zone -5 frei. Der nächste Ton umfasst die Fläche zwischen Zone +3, -3, hierauf +2 bis -2, +1 bis -1 und schliesslich noch -1 für sich allein; ist letztere noch geteilt, so legt man die an die Selbstschattengrenze angrenzende halbe Zone mit einem weiteren Tone an. Dabei ist aber stets der im Schlagschatten befindliche Teil mit überlegt worden. Auf diese Weise erhält man für das Anlegen das in Figur 96 dargestellte Schema, in welchem die auf jede einzelne Zone treffende Anzahl von Tönen angegeben ist.

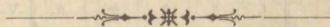
Man tönt nun den Schlagschatten ab, indem man von V bis I, dann von V bis II, V bis III, V bis IV und schliesslich V allein überlegt.

der Dunkelheit des betreffenden Streifens. Mit anderen Worten: „Der Unterschied, beispielsweise zwischen dem siebenten und achten Tone ist nicht in der gleichen Stärke wahrnehmbar, wie der Unterschied zwischen dem ersten und zweiten Tone.“ Will man trotzdem eine gleichmässige Abstufung der Dunkelheit erzielen, so muss man die Anzahl der Tuschlagen grösser annehmen, als dies in vorstehender Tabelle angegeben ist; doch wird hierdurch die Schattierung zu umständlich; man hilft sich dadurch, dass man den gewählten Grundton fortwährend so verstärkt, dass eine möglichst gleichmässige Abstufung bei der Schattierung erzielt wird.

e) Schattierung durch Verwaschen (Lawieren).

128) Viel rascher als durch die oben erwähnte Art des Schattierens durch „Lagentuschen“ gelangt man zum Ziele, wenn man nicht alle Streifen dem Beleuchtungsschema entsprechend anlegt, sondern zunächst nur den Selbst- und Schlagschatten mit einem Tuschtone versieht und hierauf von der Selbstschattengrenze ausgehend nach beiden Seiten zu Tuschtöne auflegt und diese gegen die hellsten Stellen der direkt beleuchteten und im Selbstschatten befindlichen Teile hin durch Beimischung von Wasser in den Tushton verwäscht; hierbei nimmt man zunächst keine Rücksicht auf den Schlagschatten, man behandelt denselben vielmehr erst zuletzt, indem von der Stelle aus, an welcher der Selbstschatten am dunkelsten sein muss, d. i. in der Zone +10, nach der Schlagschattengrenze hin eine Reihe von immer schmaler werdenden Streifen auflegt und diese nach der letzten Grenze hin ebenfalls verwäscht.

Das Verwaschen kann so lange fortgesetzt werden, bis die Schattierung längs der Selbstschattengrenze, sowie auch im Schlagschatten eine solche Dunkelheit erreicht hat, dass in der Zeichnung die körperliche Form des Gegenstandes in die Erscheinung tritt.



III. Schiftung bei Dächern.

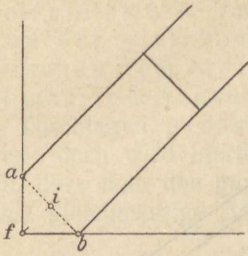
1) Schiftung bei Walmdächern.

Gratsparrenschiftung.

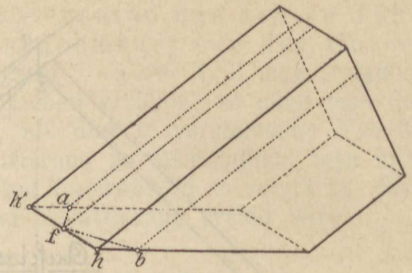
129) Wird ein Satteldach auf der Giebelseite abgedacht, so entsteht ein Walmdach. Die zu diesem Zwecke benützte Fläche heisst die Walmfläche oder der Walm; in der Regel ist die Walmfläche eine ebene Fläche. Die Schnittlinien der Walmflächen mit den übrigen Dachflächen heissen die Grate. Zur Aufnahme der Sparren für den Walm und zum Teil für die übrigen Dachflächen dienen der Gratsparren G und G' , s. Fig. 97; erstgenannte Sparren heissen Schiftsparren oder kurzweg Schifter; ein solcher Schiftsparren ist z. B. lk , s. Figur 97. Die Ausmittelung der wahren Länge des Sparrens, sowie die Bestimmung der wahren Gestalt der Schnittfläche oder Schmiege, mittelst welcher er sich an ein anderes Holzstück anschliesst, heisst man Schiften. Die Schiftung für die an den Gratsparren anstossenden Schiftsparren heisst die Gratsparrenschiftung.

130) Um das Schiften vornehmen zu können, ist eine Horizontalprojektion, d. h. ein Grundriss des Daches erforderlich. Diese Horizontalprojektion muss in wahrer Grösse auf dem Werkplatze aufgetragen werden

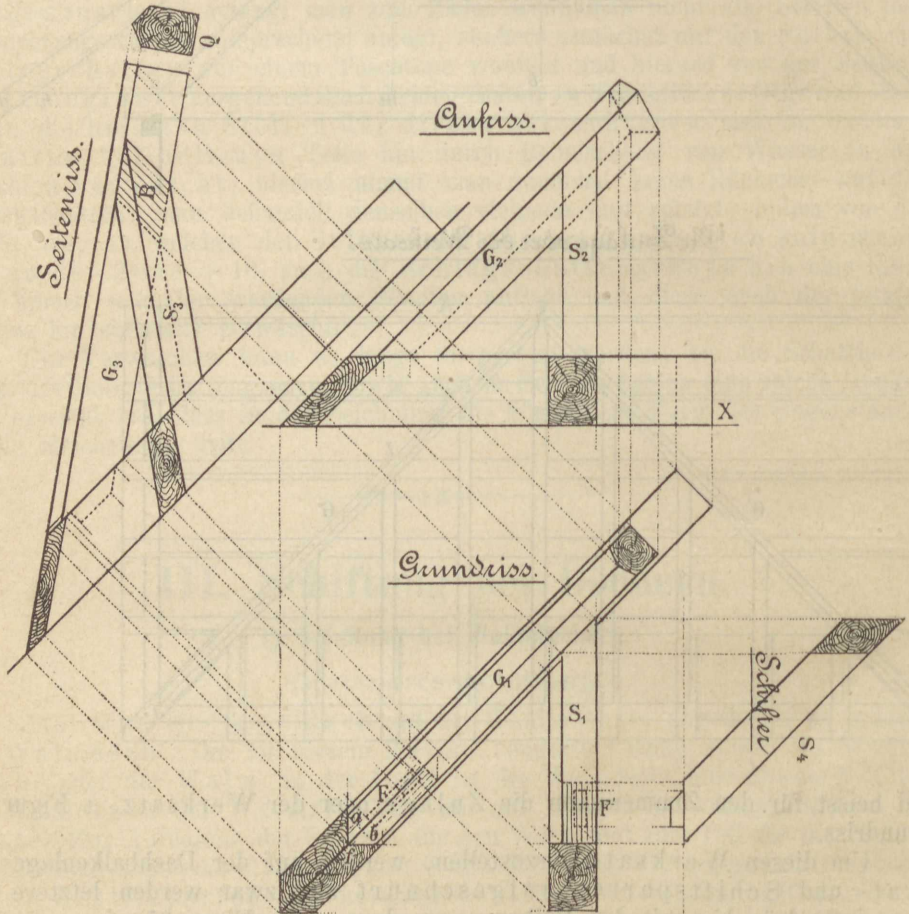
Figur 98.



Figur 99.



Figur 100.

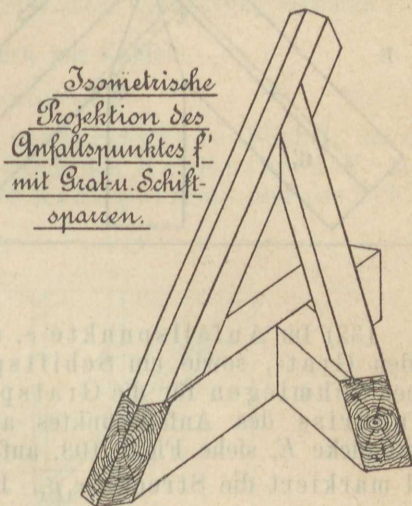


eines Zapfens erforderlich ist. Die Länge des Gratsparrens ist durch \overline{ag} gegeben; \overline{ai} stellt die Länge der Lotschmiege, \overline{hg} die der Fusschmiege dar.

Da die obere Fläche des Gratsparrens in den beiden anstossenden Dachflächen liegt, so muss der Sparren oben abgefasst werden, was dadurch geschieht, dass man die Fusslinien der Sparren bis zum Gratfusspunkt f , siehe Figur 98, aufschnürt und hierauf auf der Fusschmiege die Entfernung $\overline{fi} = x$

von h und h' aus nach $\overline{h'a}$ und $\overline{h'b}$, siehe Figur 99, abträgt und nun durch a und b einen Schnurschlag parallel zur Kantenrichtung des Sparrens führt. Man kann nun das zwischen der Mittellinie durch f , welche gleichfalls mittels Schnurschlages bestimmt wurde, und den Kanten durch a und b liegende Holz abarbeiten.

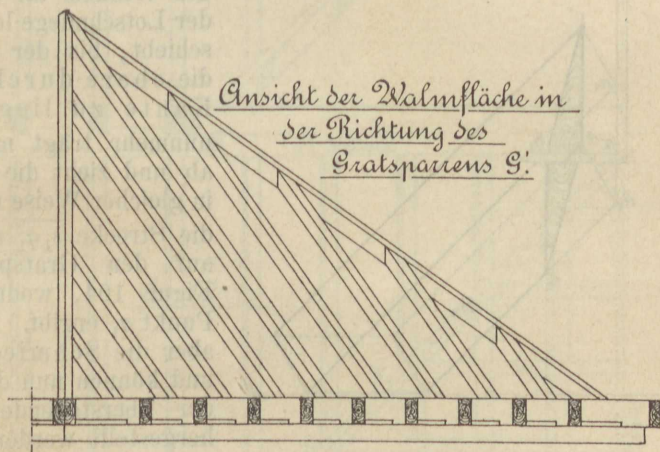
Figur 101.



131) Zur Ermittlung der Länge eines Schiftsparrens, z. B. lk , siehe Figur 97, macht man die Strecke \overline{lk} gleich \overline{dm} , errichtet in m die Vertikale und legt nun das zum Schiftsparren bestimmte Holz an die Vertikalfläche des Sparrens da an, so liefert die Vertikale durch m die Länge \overline{on} der Lotschmiege, die Horizontale durch m die der Fusschmiege.

In der Figur 100 ist die Verbindung zwischen Grat- und Schiftsparren mit der Balkenlage in vergrössertem Massstabe im Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt und der Schifter S besonders herausgezeichnet.

Figur 102.

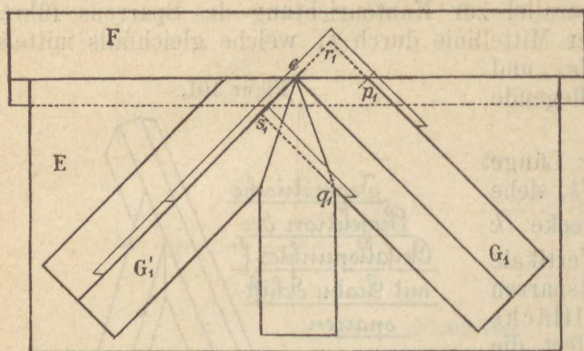


Die Figur 101 zeigt eine axonometrische Darstellung dieser Verbindung.

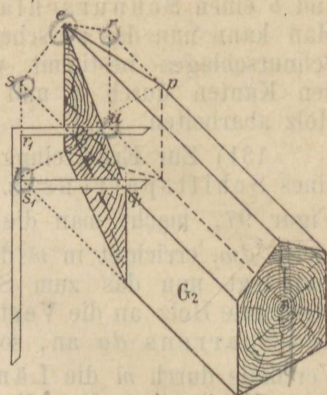
In der Figur 100 zeigt Q das Profil des Gratsparrens; F ist dessen Fusschmiege. Die Fläche, mittelst welcher der Schiftsparren auf dem Gratsparren aufliegt, heisst die Backenschmiege, sie ist in Figur 100 im Seitenriss durch die Fläche B in wahrer Grösse dargestellt; F' ist die Fusschmiege des Schifters S . Die Befestigung des Schifters an dem Gratsparren erfolgt durch Nagelung.

In Figur 102 ist eine Projektion der ganzen Walmfläche in eine Vertikalenebene, welche zum Grundriss G' des einen Gratsparrens senkrecht steht, dargestellt.

Figur 103.

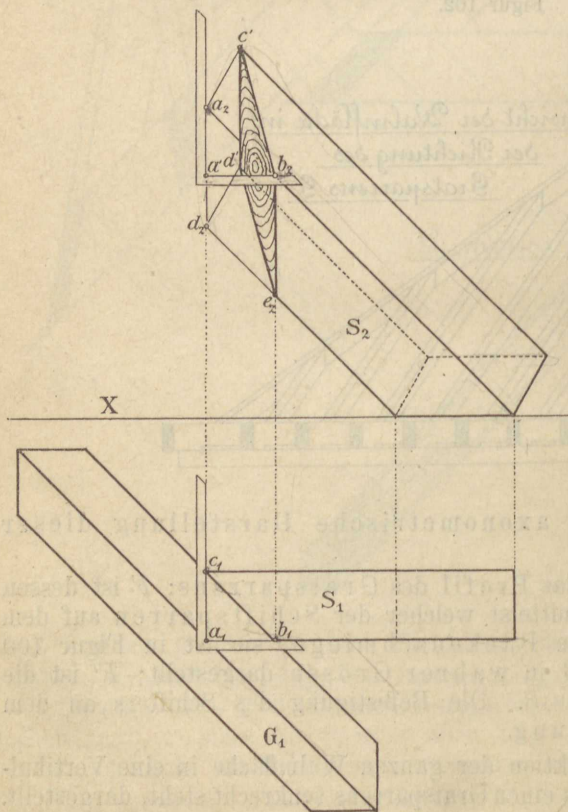


Figur 104.



132) Im Anfallspunkte e , siehe Figur 97, stoßen drei Hölzer, die beiden Grat-, sowie ein Schiftsparren zusammen. Um nun die erforderlichen Schmiegen für die Gratsparren zu erhalten, schnürt man sich einen Grundriß des Anfallpunktes auf einem auf der Balkenlage befestigten Brettstücke E , siehe Figur 103, auf, legt das Winkeleisen auf den Grundriß und markiert die Strecke r_1p_1 . Diese Strecke überträgt man auf den Gratsparren, siehe Figur 104, indem man den einen Schenkel des Winkels an die Kante ss_1 der Lotschmiege legt und so verschiebt, bis der Punkt p_1 auf die obere durch s gehende Kante zu liegen kommt; nunmehr trägt man $rp = sp$ ab und zieht die Vertikale; in gleicher Weise überträgt man die Strecke s_1q_1 aus Figur 103 auf den Gratsparren, siehe Figur 104, wodurch sich der Punkt q_1 ergibt. Hiedurch sind aber die Schmiegen begrenzt und können nun durch Absägen der überstehenden Holzstücke hergestellt werden.

Figur 106 und Figur 105.



133) Die Backenschmiege für den Schifter bestimmt sich in ganz ähnlicher Weise: Man entnimmt aus der Zulaage, siehe Figur 105, mittelst des Winkeleisens die Strecke a_1b_1 und führt an der Vorderkante der Lotschmiege des Schifters das Winkeleisen so, dass der Punkt b_1 auf die obere Vorderkante des Schifters nach

b_2 zu liegen kommt, siehe Figur 106. Die Vertikale durch b_2 bestimmt mit d' die Backenschmiege des Schifters.

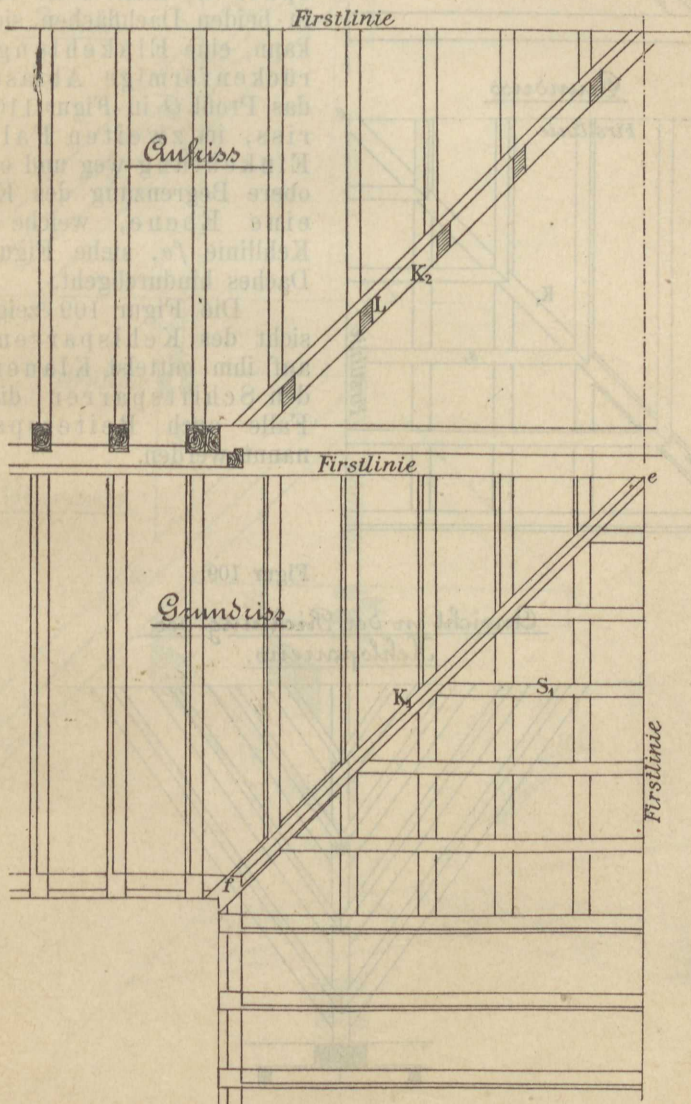
Anmerkung 22. Will man das Zusammenstossen von drei Hölzern, der beiden Gratsparren und des Mittelschifters im Anfallspunkte e , siehe Figur 97 und 103, vermeiden, so kann man etwas unterhalb des Punktes e zwischen die beiden Gratsparren einen Wechsel einlegen und mit diesem den Mittelschifter durch Verzapfung verbinden.

2) Schiftung bei Dächern mit Kehlen.

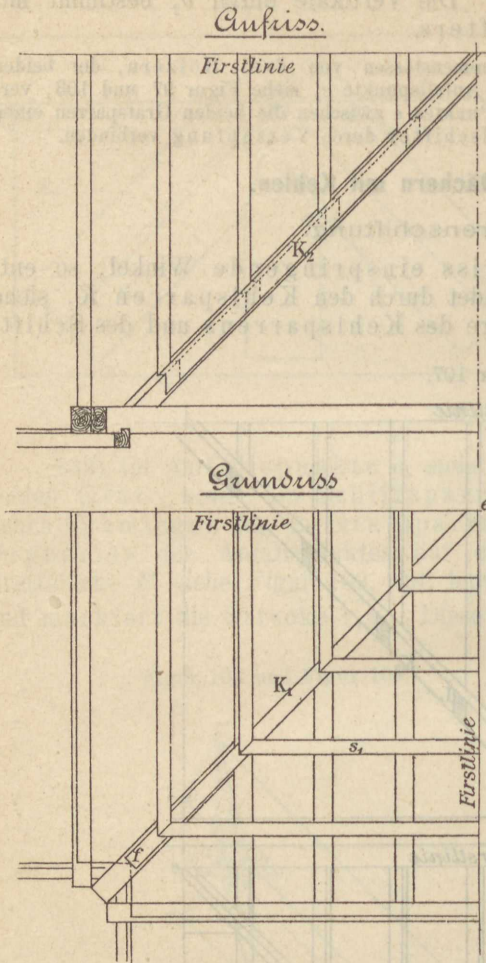
a) Kehlsparrenschiftung.

134) Hat ein Gebäudegrundriss einspringende Winkel, so entstehen Kehlen. Die Kehle wird gebildet durch den Kehlsparren K , siehe Figur 107. Die Ermittlung der Länge des Kehlsparrrens und des Schift-

Figur 107.



Figur 108.

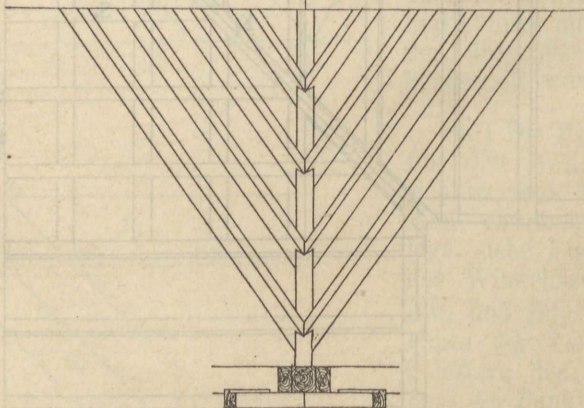


sparrens kann in gleicher Weise erfolgen wie in No. 130 für den Gratsparren. Die Verbindung des Schifters mit dem Kehlsparrnen geschieht in zweierlei Weise, entweder lehnen sich die Schiftsparren mittels der Backenschmiege an die Gratsparren an und werden mit denselben durch Nagelung befestigt, siehe Figur 107, oder sie sitzen auf den Gratsparren mittelst einer Kläue auf, siehe Figur 108 und 109. Im ersten Falle erhält der Kehlsparrnen, damit seine obere Fläche in beiden Dachflächen sich befinden kann, eine Einkehlung, d. h. eine rückenförmige Abfasung, siehe das Profil Q in Figur 110, Seitenriß, im zweiten Falle fällt die Einkehlung weg und es bleibt die obere Begrenzung des Kehlsparrnen eine Ebene, welche durch die Kehllinie fe , siehe Figur 108, des Daches hindurchgeht.

Die Figur 109 zeigt eine Ansicht des Kehlsparrnen mit den auf ihm mittelst Klauen aufsitzenden Schiftsparren, die in diesem Falle auch Reitersparren genannt werden.

Figur 109.

Anoicht in der Richtung des
Kehlsparrnen.



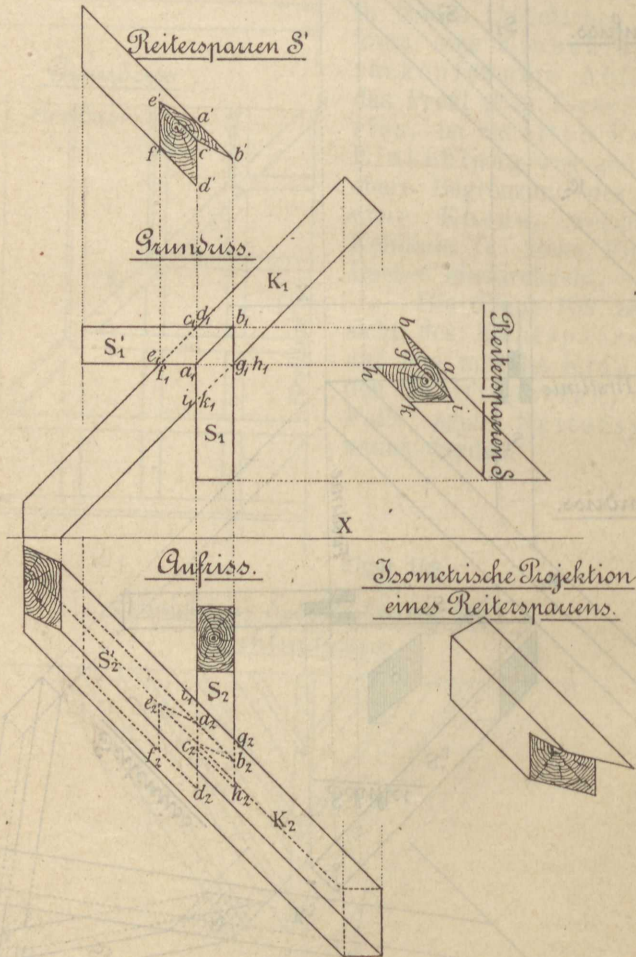
136) In Figur 111 ist der Kehlsparren ohne Einkehlung vorausgesetzt und die Verbindung der Reitersparren mit dem Kehlsparren ersichtlich gemacht.

Die beiden Reitersparren sind samt ihren Klauen besonders herausgezeichnet, ausserdem ist einer derselben noch in einer isometrischen Projektion dargestellt.

Anmerkung 23. Sowohl bei der Gratsparren- wie bei der Kehlsparrenschiftung kann man die Sparren, anstatt sie mit der Balkenlage zu verzapfen, auch auf der Fusspfette aufklauen.

Der Schüler führe ein Beispiel dieser Art durch.

Figur 111.



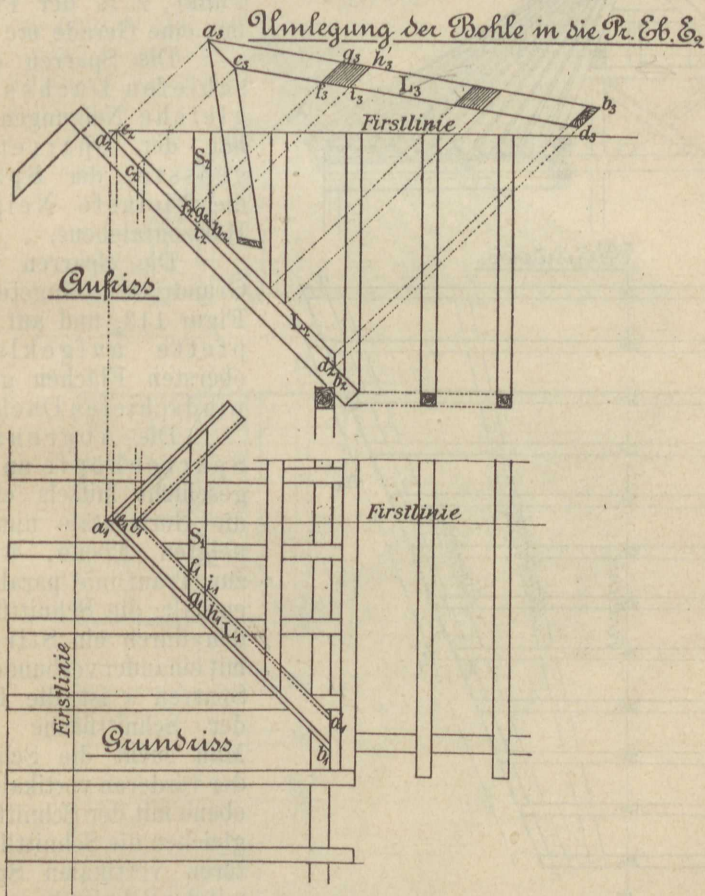
b) Bohlenschiftung.

137) In manchen Fällen wird die Dachkehle auch dadurch gebildet, dass man das eine Dach ganz unabhängig von dem anderen konstruiert, die Sparren des letzteren stützen sich dann auf eine, auf den Sparren des ersten Daches gelagerte Bohle L .

In Figur 112 ist diese Art der Schiftung angedeutet. L ist die Bohle, welche auf den Sparren des einen Daches aufliegt, auf sie sind die Schiftsparren des zweiten Daches aufgesetzt.

Es ist die Dachfläche des ersten Daches samt der Bohle in die **Pr. Eb. E_2** umgelegt; in der Umlegung erscheinen dann die wahren Grössen der Fusschmiegen der Schifter.

Figur 112.



IV. Windschiefe Dächer.

1) Das windschiefe Satteldach mit Giebel.

138) Ist der Gebäudegrundriss ein Viereck, wie in Figur 113, d. h. läuft die Vorderfront nicht parallel mit der Hinterfront, so tritt die Notwendigkeit, die Dachfläche windschief zu machen, dann ein, wenn nur eine Firstlinie vorhanden und diese parallel zu einer Gebäudefront sein soll, siehe auch I. Teil, No. 187.

Ist z. B., siehe Figur 113, die Firstlinie mn parallel zur Trauflinie ab eines Satteldaches, so wird die Fläche $mncd$ windschief sein müssen und

zwar entsteht sie durch die Bewegung einer horizontalen Geraden aus ihrer Anfangslage cd in die Endlage mn , wobei ein Punkt, z. B. der Punkt c von ihr, eine Gerade mc durchläuft.

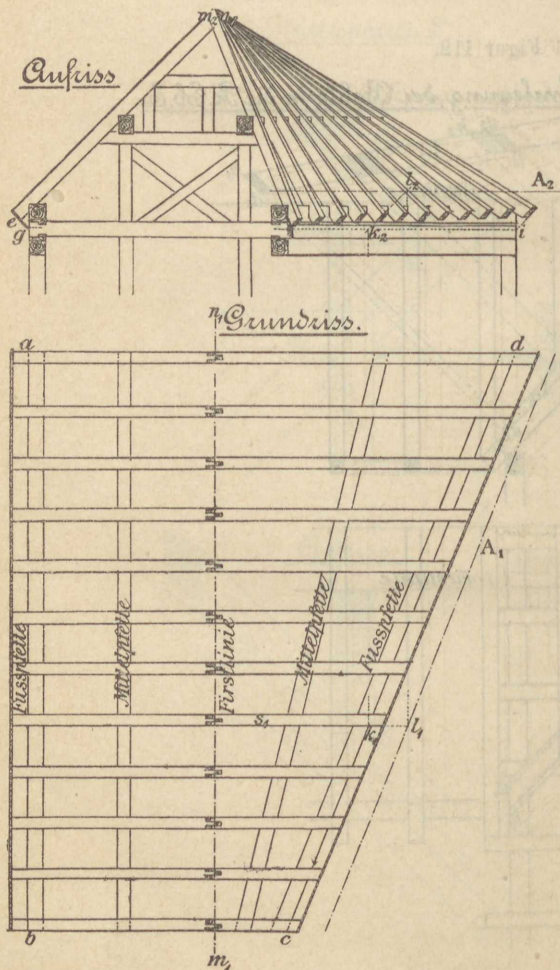
Die Sparren des windschiefen Daches haben ungleiche Neigungen und zwar hat der Sparren mc die grösste, der Sparren nd die kleinste Neigung zur Horizontalebene.

Die Sparren werden im Grundrisse eingeteilt, siehe Figur 113, und auf der Fusspfette aufgeklaut; ihre obersten Flächen gehören der windschiefen Dachfläche an.

Die Abgrenzung der Sparrenköpfe an der Traufe geschieht mittels einer gegen die Horizontale unter 45° geneigten Ebene, welche eine zur Trauflinie parallele Gerade enthält; die Schnittflächen werden durch ein Stirnbrett eg mit einander verbunden. Für den Sparren s ist die Ermittlung der Schnittfläche angedeutet. Man sucht die Schnittlinie kl der vorderen vertikalen Sparrenebene mit der Schnittebene, desgleichen die Schnittlinie der hinteren vertikalen Sparrenebene mit der Schnittebene und wiederholt dies für jeden Sparren.

Die Lage der Mittelpfette fällt nicht mit einer Erzeugenden der windschiefen Dachfläche zusammen, sie ist vielmehr zur Ausgleichung der Auflager der Sparrenklauen an der schmalen Giebelseite etwas

Figur 113.

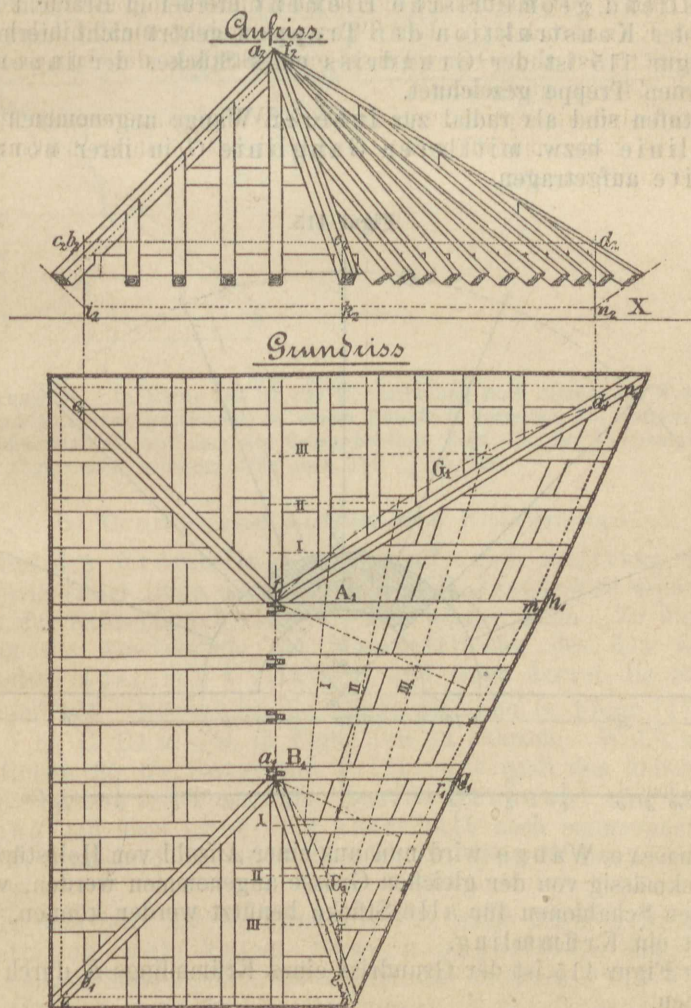


nach einwärts, an der breiten Giebelseite aber etwas nach auswärts verschoben.

2) Das windschiefe Walmdach.

139) Ist bei einem viereckigen Gebäudegrundriss, s. Figur 114, der Raum nach allen vier Seiten abgedacht, die Firstlinie aber parallel zu einer Gebäudefront gewählt, so entsteht das windschiefe Walmdach. Bei diesem werden die Durchschnittslinien der windschiefen Dachfläche mit den Walmflächen krumme Linien; es müssten also die Gratsparren krummlinig angeordnet werden. Da dies aber sehr umständlich, und der Sparren auch schwierig zu bearbeiten wäre, so wählt man gerade Gratsparren, siehe Figur 114, und legt an die Anfallpunkte a und f die Lehrgebände A und B . Man behandelt nun das zwischen diesen Gebinden liegende Stück Dachfläche als windsschiefe Dachfläche, während man den Schiftern ebene Oberflächen gibt.

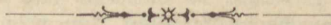
Figur 114.



Es entsteht längs der Kante fa ein schwacher Grat, längs der Kante ra aber eine schwache Kehle.

Die Sparrenköpfe schneidet man wieder durch eine Ebene ab, welche gegen die Horizontale unter 45° geneigt ist und verbindet die Schnittflächen durch Stirnbretter.

Die Einteilung der Sparren im Grundrisse ist aus der Figur 114 zu ersehen.



V. Darstellung eines Treppenkrümmings.

1) Krümmling für eine kreisförmige Holzterppe.

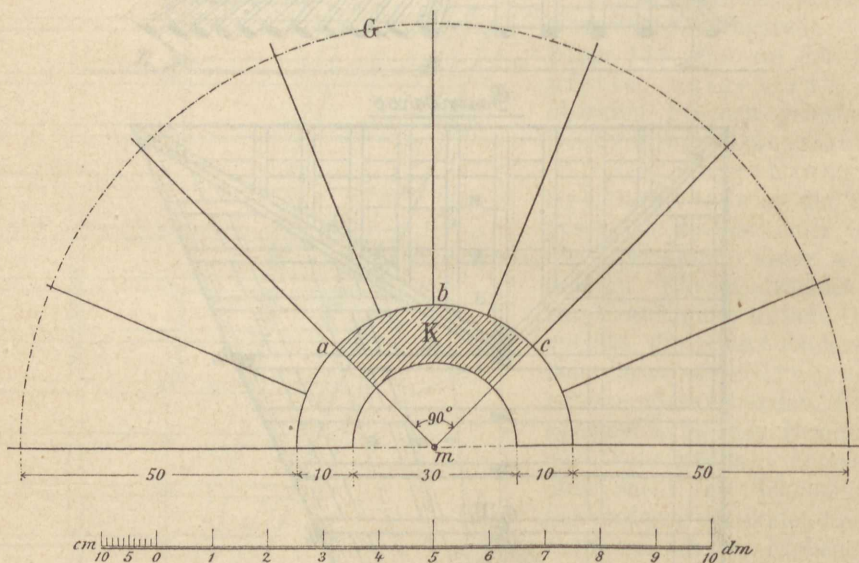
a) Allgemeine Bemerkungen.

140) Im Nachfolgenden soll lediglich die Darstellung eines Stückes der Wange für eine hölzerne Treppe besprochen werden und zwar nur insofern, als das darstellend geometrische Element hierbei in Betracht kommt. Die Lehre von der Konstruktion der Treppen gehört nicht hierher.

In Figur 115 ist der Grundriss eines Stückes der inneren Wange einer hölzernen Treppe gezeichnet.

Die Stufen sind als radial zur inneren Wange angenommen und auf der Auftrittslinie bzw. mittleren Ganglinie G in ihrer normalen Auftrittsweite aufgetragen.

Figur 115.

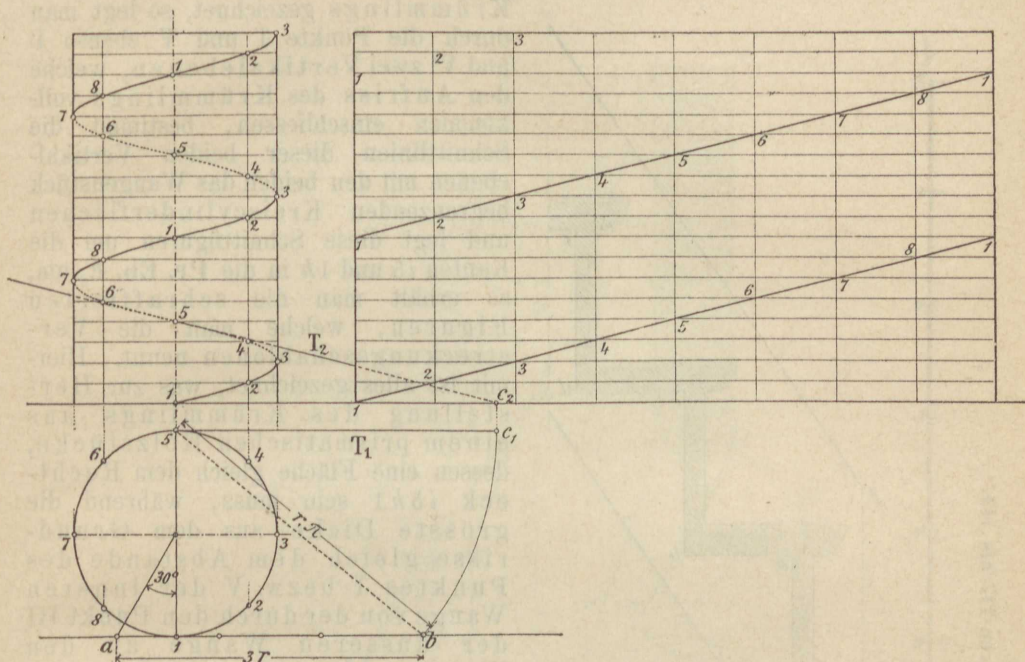


Die innere Wange wird nun aus einer Anzahl von Holzstücken gebildet, welche zweckmässig von der gleichen Grösse angenommen werden, weil dann die erforderlichen Schablonen für alle Stücke benützt werden können. Ein solches Stück heisst ein Krümmling.

In der Figur 115 ist der Grundriss eines Krümmings K durch Schraffur hervorgehoben.

Ein Treppenkrümmling ist begrenzt durch zwei Kreiscylinderflächen, zwei vertikale Ebenen und zwei Schraubenflächen; letztere sind wieder begrenzt durch ihre Schnittlinien mit den vorhin genannten Cylinderflächen und vertikalen Ebenen.

Figur 116.



Anmerkung 24. In Figur 116 ist zur Wiederholung noch einmal die Schraubenlinie im Grund- und Aufrisse gezeichnet, in einem Punkte 5 derselben die Tangente konstruiert, sowie der Cylindermantel, auf dem die Schraubenlinie liegt, in die Vertikalebene samt der Schraubenlinie abgewickelt worden; siehe auch Teil I, No. 118.

b) Grund- und Aufriss des Krümmings.

141) Um den Krümmling im Grund- und Aufrisse darstellen zu können, muss in erster Linie die Breite des Holzstückes ermittelt werden, aus welchem der Krümmling herausgearbeitet werden kann. Zu diesem Zwecke zeichnet man die Abwicklung der Mantelfläche des den Krümmling begrenzenden äusseren Cylinders und trägt darauf die Stufenhäupter an, siehe Figur 117. Hierbei ist die Länge $\overline{ab} = \overline{cd}$ (s. Figur 117) gleich der Bogenlänge I II, II III u. s. w. in Figur 118 zu nehmen. Wählt man nun die Stärke des Holzes für die Setz- und Trittstufe nach den üblichen Maassen, erstere 2–3, letztere 4–5 cm, gibt dem Stufenhaupt eine entsprechende Profilierung und lässt ober- und unterhalb noch entsprechend viel Holz überstehen, etwa je 5 cm, so ergibt sich auf diese Weise, siehe Figur 117, die Länge \overline{fg} .

Zeichnet man jetzt das Rechteck II, I'I', siehe Figur 118, als Aufriss der linkseitigen vertikalen Begrenzungsfläche des Krümmings ebenso, aber um vier Steigungen höher liegend, das Rechteck VV, V'V' als Aufriss der rechtseitigen vertikalen Begrenzung des Krümmings, so lassen

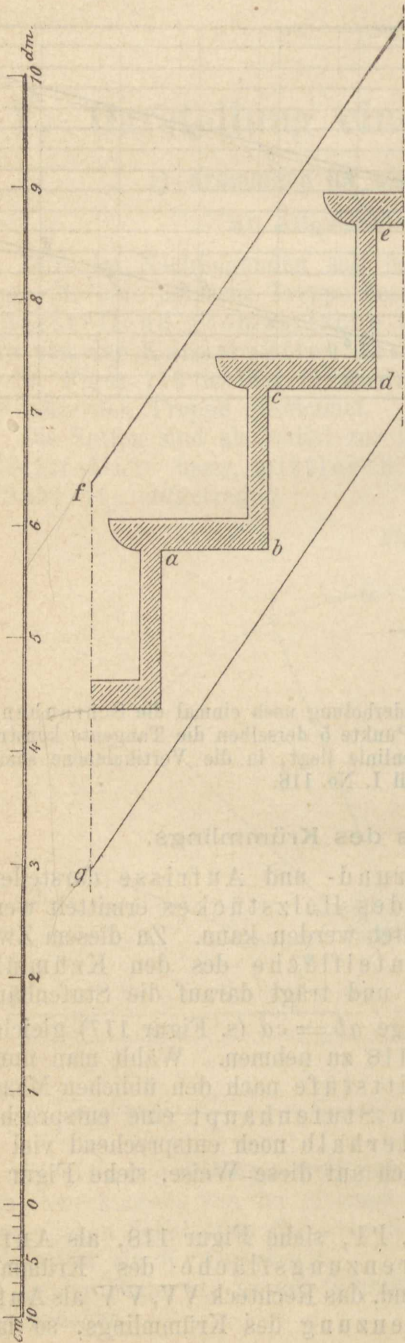
sich die Punkte I und V, ebenso I' und V' durch Schraubenlinien verbinden, deren Grundrisse die Kreisbogen I—V beziehungsweise sind.

c) Ver Streckungsschablonen des Krümmings.

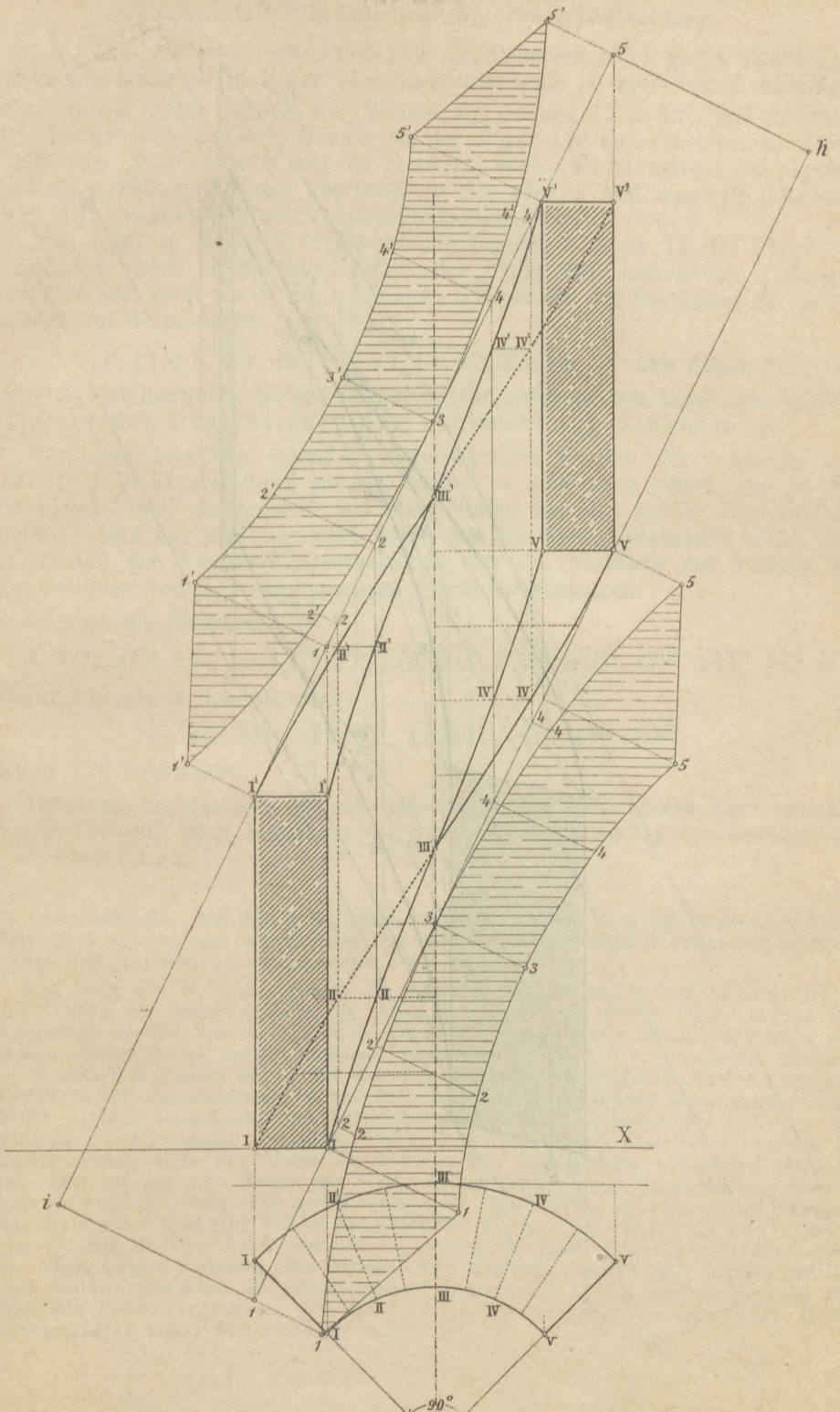
Figur 117.

142) Hat man den Aufriss des Krümmings gezeichnet, so legt man durch die Punkte I und V ebenso I' und V' zwei Vertikalebene, welche den Aufriss des Krümmings vollkommen einschliessen, bestimmt die Schnittlinien dieser beiden Vertikalebene mit den beiden das Wangenstück begrenzenden Kreiscylinderflächen und legt diese Schnittfiguren um die Kanten $i5$ und $1h$ in die **Pr. Eb. E_2** um, so erhält man die schraffierten Figuren, welche man die Ver Streckungsschablonen nennt. Hiermit ist alles gezeichnet, was zur Herstellung des Krümmings aus einem prismatischen Holzstücke, dessen eine Fläche gleich dem Rechteck $i5h1$ sein muss, während die grösste Dicke aus dem Grundrisse gleich dem Abstände des Punktes I bzw. V der inneren Wange von der durch den Punkt III der äusseren Wange an den Wangencylinder gelegten zur **Pr. Eb. E_2** parallelen Tangentialebene zu entnehmen ist.

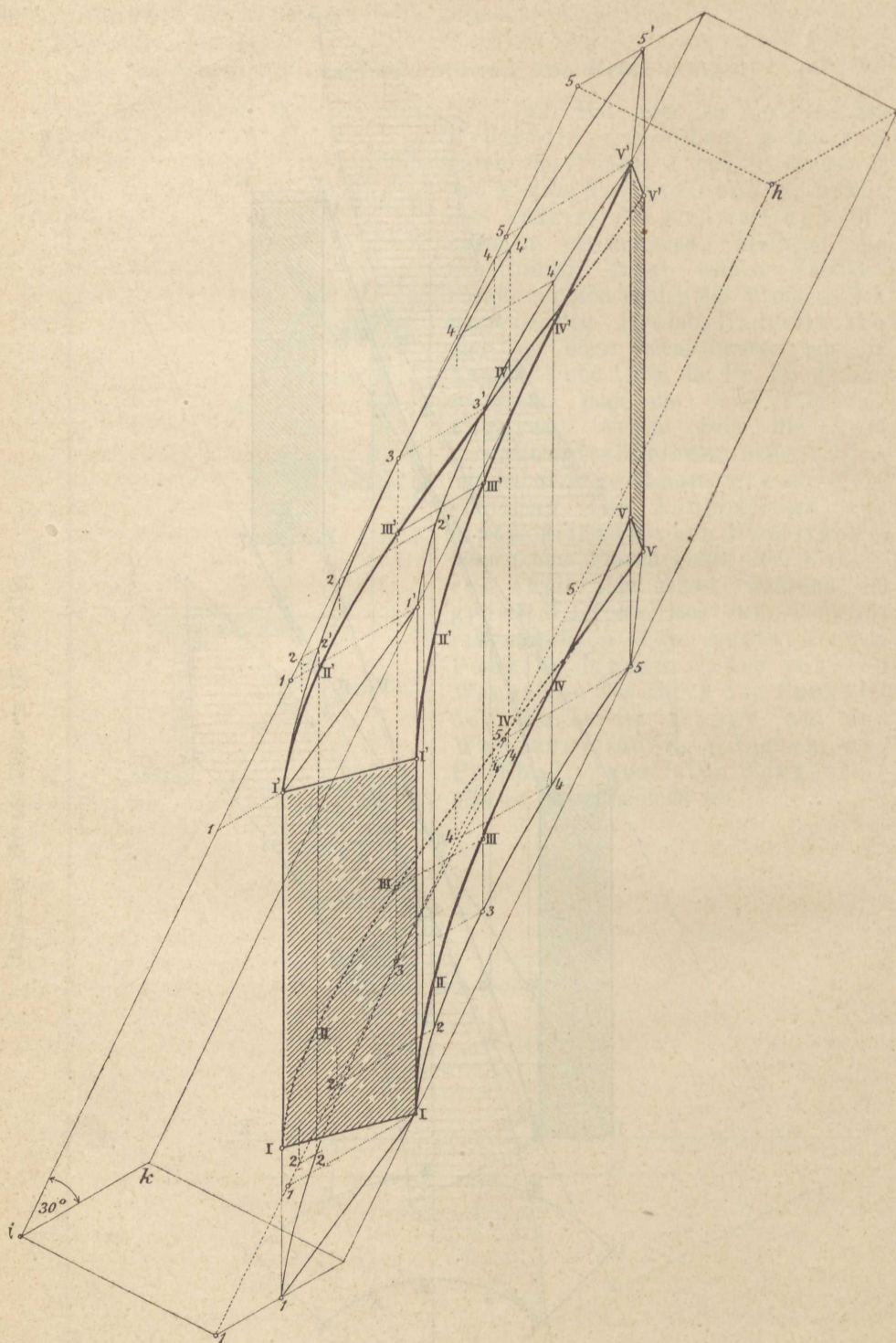
Massstab für die Figuren 117 bis 119.



Figur 118.



Figur 119.



d) Isometrische Darstellung des Krümmllings.

143) Man zeichnet, siehe Figur 119, das Rechteck $i5h1$ gleich dem ebenso bezeichneten Rechteck in Figur 118, zieht die Linie ik unter einen beliebigen Winkel (in der Figur beträgt der Winkel von ik und $i5 = 30^\circ$) und macht ik gleich der grössten aus dem Grundrisse der Figur 118 zu entnehmenden Dicke des Holzes. Man vollendet nun die isometrische Projektion des parallel-epipedischen Holzstückes und überträgt in die obere und untere Begrenzungsfläche desselben die Verstreckungsschablonen.

Man trägt zu diesem Zwecke auf den Linien $i5$ bzw. $1h$ der Figur 119 die auf den gleich bezeichneten Linien der Figur 118 enthaltenen Theilungen unverkürzt auf, zieht durch die erhaltenen Theilpunkte die Parallelen zu ik und überträgt auf dieselben die Strecken:

$\overline{1I}, \overline{11}, \overline{22'}, \overline{33'}, \overline{44'}, \overline{55'}, \overline{1I}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}$ aus Figur 118,

so ergeben sich hierdurch die mit feinem Striche ausgezogenen bzw. gestrichelten isometrischen Projektionen der Verstreckungsschablonen.

Verbindet man die einander entsprechenden Punkte der oberen und unteren Schablone durch gerade Linien, so sind diese Linien alle zu einander parallel und entsprechen den Mantellinien auf den beiden Begrenzungscylindern. Man hat jetzt nur noch nötig, auf den zuletzt genannten Linien von den Punkten der Verstreckungsschablonen aus die Abstände der Punkte der Schraubenlinien von den erstgenannten Punkten abzutragen.

So sind die Strecken:

$\overline{1I}, \overline{2II}, \overline{3III}, \overline{4IV}, \overline{5V}$, dann $\overline{1I'}, \overline{1'I'}, \overline{2II'}, \overline{2'II'}, \overline{3III'}, \overline{3'III'}, \overline{4IV'}, \overline{4'IV'}, \overline{5V'}, \overline{5'V'}$ in Figur 119 gleich den Strecken:

$\overline{1I}, \overline{2II}, \overline{3III}, \overline{4IV}, \overline{5V}, \overline{1I'}, \overline{2II'}, \overline{3III'}, \overline{4IV'}, \overline{5V'}$

in Figur 118 abzutragen.

Hierdurch ergeben sich die mit römischen Ziffern bezeichneten Kurvenpunkte in Figur 119 und diese begrenzen die Schrauben- und Cylinderflächen des Krümmllings.

Anmerkung 25. Mit dem in No. 143 Gesagten ist zugleich auch das Verfahren gekennzeichnet, nach welchem man den Krümmlling aus dem erforderlichen kleinsten parallel-epipedischen Holzstücke herausarbeiten kann.

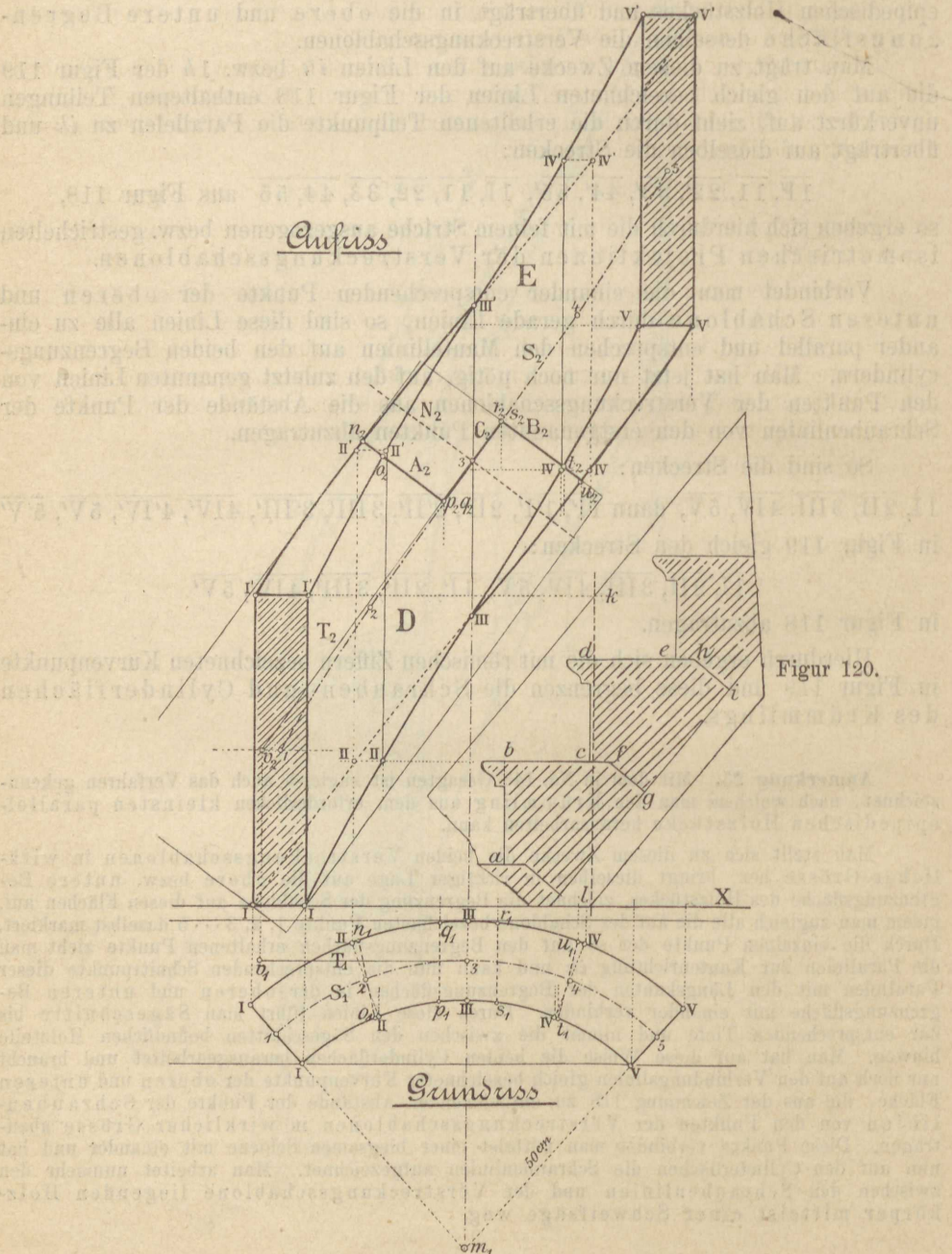
Man stellt sich zu diesem Zwecke die beiden Verstreckungsschablonen in wirklicher Grösse her, bringt dieselben in richtiger Lage auf die obere bzw. untere Begrenzungsfläche des Holzstückes, zeichnet die Begrenzung der Schablone auf diesen Flächen auf, indem man zugleich alle die auf der Schablone bezeichneten Punkte 1, 2, 3...5 daselbst markiert. Durch die einzelnen Punkte der so auf den Begrenzungsflächen erhaltenen Punkte zieht man die Parallelen zur Kantenrichtung ik und kann nun die entsprechenden Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Längskanten der Begrenzungsflächen in der oberen und unteren Begrenzungsfläche mit einander verbinden. Durch diese Linien führt man Sägeschnitte bis zur entsprechenden Tiefe und nimmt die zwischen den Sägeschnitten befindlichen Holztheile hinweg. Man hat auf diese Weise die beiden Cylinderflächen herausgearbeitet und braucht nur noch auf den Verbindungslinien gleich bezeichneter Kurvenpunkte der oberen und unteren Fläche, die aus der Zeichnung 118 zu entnehmenden Abstände der Punkte der Schraubenlinien von den Punkten der Verstreckungsschablonen in wirklicher Grösse abzutragen. Diese Punkte verbindet man mittelst einer biegsamen Schiene mit einander und hat nun auf den Cylinderflächen die Schraubenlinien aufgezeichnet. Man arbeitet nummehr den zwischen den Schraubenlinien und der Verstreckungsschablone liegenden Holzkörper mittelst einer Schweißsäge weg.

2) Krümmung für eine massive Treppe.

a) Allgemeine Bemerkungen.

144) Zur Ermittlung des Grund- und Aufrisses eines Krümmings für eine massive Treppe zeichnet man sich wieder wie beim Krümmung für

Figur 121.



Figur 120.

die Holzterrasse ein Stück Abwicklung des äusseren Wangencylinders, indem man aus dem Grundrisse der Treppenanlage die Auftrittsweite bc , sowie die Steigung ab zu einem rechtwinkligen Dreieck abc , siehe Figur 120, anträgt und dessen Hypotenuse bc verlängert.

Die einzelnen Stufen liegen zum Teil mittelst horizontaler Ebenen cf über einander, zum Teil stossen sie längs windschiefen Flächen, deren Schnitte mit der Wangenfläche in der Abwicklung als Normalen zu ae erscheinen, an einander.

Gibt man nun dem Stufenhaupt eine entsprechende Profilierung und lässt über und unter der Stufe noch einen Ueberstand von 3—4 cm, so ergibt sich die Wangenbreite und damit auch die Länge \overline{lk} .

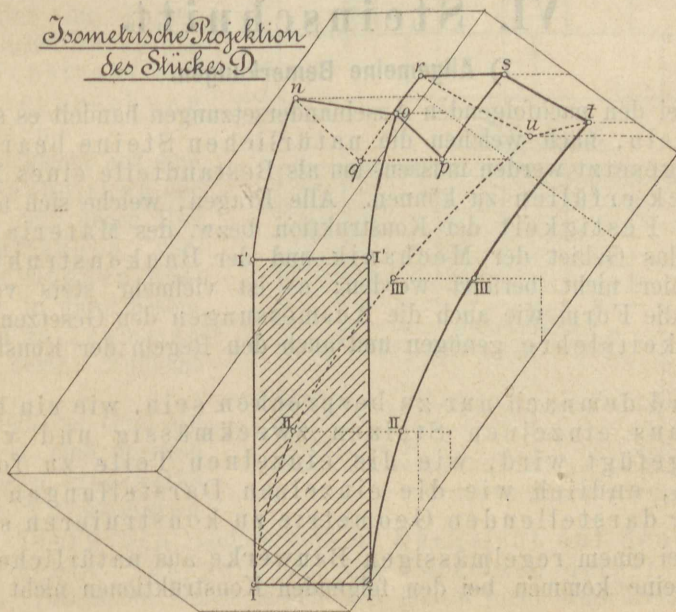
b) Darstellung des Krümmings durch Grund- und Aufriss.

145) Nunmehr kann der Grund- und Aufriss des Wangenstückes in gleicher Weise wie in No. 141 aufgetragen werden.

In der Figur 121 ist das Kreisringstück IIVV im Grundrisse beliebig angenommen und dasselbe in vier gleiche Teile geteilt worden. Mittels der Abwicklung der Schraubenlinien der Wange in Fig. 120 lässt sich nun das zu dem Bogen I, II des äusseren Begrenzungskreises I, V gehörige Stück der Ganghöhe der zugehörigen Schraubenlinie ermitteln, welches man viermal nach einander auf die Schraubenachse aufträgt. Die Aufrisse der unteren Schraubenlinien lassen sich jetzt zeichnen. Zieht man durch die Punkte I, II, III und IV derselben Vertikale von der Länge \overline{lk} , so ergibt sich die obere Abgrenzung der Wange.

Die Wange setzt man in gleicher Weise wie bei der Holzterrasse aus einzelnen gleich grossen Stücken, Krümmungen, zusammen, lässt dieselben aber nicht mittelst Vertikalebene auf einander stossen, sondern mittelst Ebenen normal zu einer Schraubenlinie S , siehe Figur 121, welche die Mittelpunkte der vertikalen Rechtecke II, I'I', II'II', II''II'' u. s. w. verbindet.

Figur 122.



An diese Schraubenlinie zeichnet man im Punkte 3 die Tangente T und senkrecht zu T_2 die Normalebene N_2 und führt nun gleich weit absteigend vom Punkte 3, etwa je 5 cm, zwei Parallelebenen A_2 und B_2 zu N_2 und durch 3 eine Ebene C_2 senkrecht zu N_2 . Die beiden Krümmlinge stossen also mittelst der drei ebenen Flächen A_2, B_2, C_2 an einander.

146) Die in der Figur 121 schraffierten Flächen bedeuten keine Lagerflächen, sondern lediglich zwei vertikale durch die Achse der Schraubenlinien geführte ebene Schnitte.

In Figur 122 ist eine isometrische Projektion des unteren Krümmlingsstückes D dargestellt, aus welcher die Gestalt desselben deutlich zu entnehmen ist. Die Linien ut und no sind als Schnitte der Lagerflächen mit den Schraubenflächen krumme Linien, desgleichen auch die Linien st, ru, sp, rq, po und nq als Schnitte der Lagerflächen mit den Cylinderflächen der Wange.

Anmerkung 26. In der Figur 121 ist kein eigentlicher Krümmling gezeichnet, sondern von zwei an einander stossenden Krümmlingen D und E je ein Stück.

Die obere Abgrenzung des Stückes E wird in gleicher Weise gebildet, wie seine untere. Um sie zu erhalten, braucht man nur den Grundriss $n_1, o_1, p_1, q_1, s_1, r_1, t_1, u_1$ der unteren Abgrenzung um einen der Grösse des Krümmlings entsprechenden Winkel nach rechts zu drehen und aus dem Grundriss in der neuen Lage den zugehörigen Aufriss zu ermitteln.

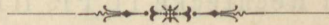
Die Herstellung der Verstreckungsschablonen kann in der nämlichen Weise erfolgen, wie beim Holzkrümmling.

c) Aufgaben.

147) **Aufgabe 81.** Man zeichne den Grund- und Aufriss eines Krümmlings für die äussere Wange:

- a) einer kreisförmigen Holzterrasse,
- b) einer kreisförmigen massiven Treppe;

ferner die zugehörigen Verstreckungsschablonen, sowie eine isometrische Projektion des Krümmlings.



VI. Steinschnitt.

1) Allgemeine Bemerkungen.

148) Bei den nachfolgenden Auseinandersetzungen handelt es sich lediglich um die Regeln, nach welchen die natürlichen Steine bearbeitet und aneinandergesetzt werden müssen, um als Bestandteile eines Bauwerkes ihren Zweck erfüllen zu können. Alle Fragen, welche sich auf die Stabilität und Festigkeit der Konstruktion bezw. des Materials beziehen, gehören in das Gebiet der Mechanik und der Baukonstruktionslehre und sollen hier nicht berührt werden; es ist vielmehr stets vorausgesetzt, dass sowohl die Form wie auch die Ausmessungen den Gesetzen der Statik und Festigkeitslehre genügen und auch den Regeln der Konstruktion entsprechen.

Es wird demnach nur zu besprechen sein, wie ein bestimmtes Bauwerk aus einzelnen Steinen zweckmässig und vorteilhaft zusammengefügt wird, wie die einzelnen Teile zu formen und bearbeiten, endlich wie die einzelnen Darstellungen nach den Regeln der darstellenden Geometrie zu konstruieren sind.

149) Bei einem regelmässigen Bauwerke aus natürlichen Steinen, künstliche Steine kommen bei den folgenden Konstruktionen nicht in Betracht,

sollen die Begrenzungen der Steine in der Regel möglichst senkrecht bzw. parallel zur Richtung der Resultierenden der

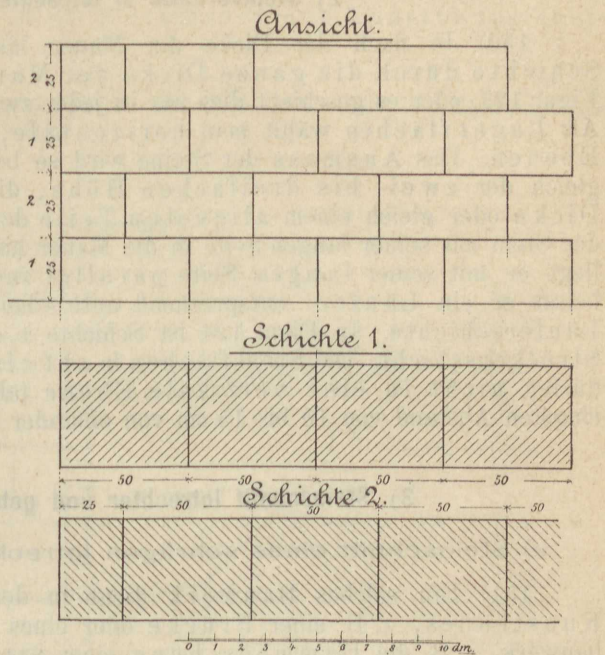
äusseren Kräfte gewählt werden. Erstere Flächen nennt man Lagerflächen, letztere Stossflächen. Die Schnittlinien der Lager- und Stossflächen mit den Begrenzungsflächen des Bauwerkes nennt man Lager- bzw. Stossfugen. Die Konstruktion muss so angeordnet sein, dass die einzelnen Teile nur auf ihre Druckfestigkeit beansprucht werden, und da diese am grössten ist, wenn die Steine mittelst ihrer natürlichen Lager- oder Bruchfläche im Bauwerke aufrufen, so wird man diese Lagerflächen bei der Gewinnung der Steine im Bruche besonders kennzeichnen, um sie dementsprechend verwenden zu können.

Um ungleichen Setzungen des Bauwerkes vorzubeugen, sollen die Lagerflächen möglichst durch die ganze Konstruktion ohne Unterbrechung durchgreifen.

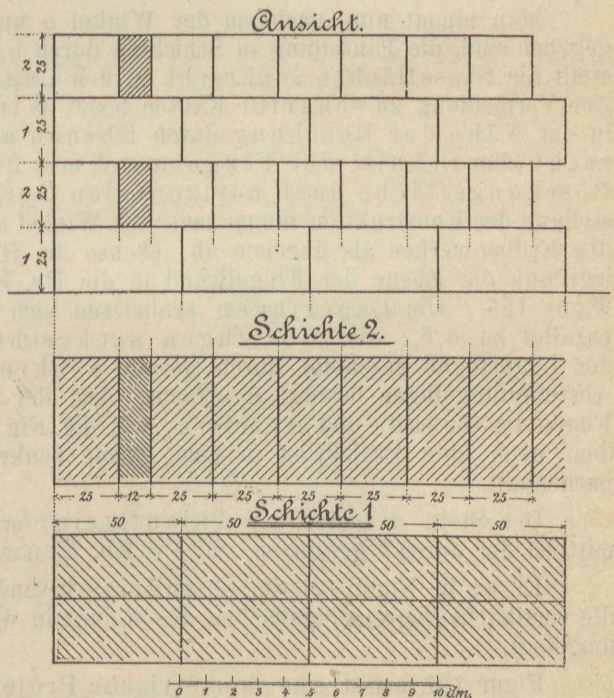
Mit Rücksicht auf eine leichte Bearbeitung der Steine wird man deren Begrenzungsflächen vornehmlich als Ebenen wählen und nur in ganz besonderen Fällen zu krummen Flächen seine Zuflucht nehmen.

Bezüglich der Grösse der Steine ist eine gewisse Grenze gezogen, einerseits durch ihr Vorkommen in den Steinbrüchen, andererseits in Rücksicht auf den leichteren und bequemeren Transport und das Versetzen derselben auf der Baustelle. Bestimmte Masse lassen sich jedoch nicht vorschreiben.

Figur 123.



Figur 124.



2) Steinverband in lotrechten Mauern.

150) Je nach der Dicke der Mauer lässt man die Steine in jeder Schichte durch die ganze Dicke der Mauer hindurchgreifen, siehe Figur 123, oder es geschieht dies nur in jeder zweiten Schichte, siehe Figur 124. Als Lagerflächen wählt man horizontale, als Stossflächen vertikale Ebenen. Das Ausmass der Steine wird so bemessen, dass die Länge etwa gleich der zwei- bis dreifachen Höhe, die Breite entweder gleich der Dicke oder gleich einem aliquoten Teile der Dicke genommen wird. Greift der Stein mit seiner langen Seite in die Mauer hinein, so heisst er ein Strecker, liegt er mit seiner langen Seite parallel zur vordern Begrenzung, so heisst er ein Läufer; entsprechend unterscheidet man eine Strecker- und Läufer-schichte. In Figur 124 ist Schichte 1 eine Läufer-, Schichte 2 eine Streckerschicht. Die Stossflächen in auf einander folgenden Schichten dürfen nicht in eine vertikale Ebene fallen, sondern müssen einen geringsten Abstand von 10 bis 15 cm von einander haben, siehe Figur 123 und 124.

3) Steinschnitt lotrechter und geböschter Mauern.

a) Steinschnitt eines schrägen lotrechten Böschungsflügels.

151) Ein solches Bauwerk dient in der Regel als Abschluss eines Kunstbaues, z. B. einer Brücke oder eines Durchlasses gegen ein Erdbauwerk, z. B. die Dammböschung einer Strasse oder einer Eisenbahnlinie, eventuell die Uferböschung eines Flusses u. dergl.

Man nimmt nun, nachdem der Winkel α und das Böschungsverhältnis gegeben sind, die Einteilung in Schichten durch horizontale Ebenen vor und stellt die Stossflächen senkrecht zu den Lagerflächen und Lagerfugen. Zur Vermeidung zu scharfer Kanten bezw. Winkel, werden die Lagerflächen in der Nähe der Böschung durch Ebenen abgestumpft, welche senkrecht zum Schnitt der Flügelwand mit der Böschung stehen und die Böschungsfläche nach horizontalen Geraden schneiden. Zur Darstellung der Konstruktion nimmt man den Winkel α der Flügelwand mit der Achse des Erdbauwerkes als gegeben an, ebenso die Höhe der Dammböschung, und legt nun die Ebene der Flügelwand in die **Pr. Eb.** E_1 nach $a_1 b_1 a'$ um, siehe Figur 125. Die Lagerfugen projizieren sich in der Umlegung als Gerade parallel zu $a_1 b_1$; die Stossfugen senkrecht hierzu. Die Abstumpfung der Lagerfugen geschieht durch Gerade senkrecht zu $a' b_1$. Die Länge der Abstumpfungsfugen beträgt 8—10 cm. Aus der Umlegung bestimmen sich die Fugen im Grund- und Aufrisse, wie die Fig. 125 dies zeigt; es ist ausserdem noch eine Projektion in eine Ebene senkrecht zur Achse der Böschung pargestellt.

Der Stein A heisst der Anlaufstein, er tritt aus der Böschungsfläche mittelst der durch b geführten, zur **Pr. Eb.** E_2 parallelen Vertikalebene hervor.

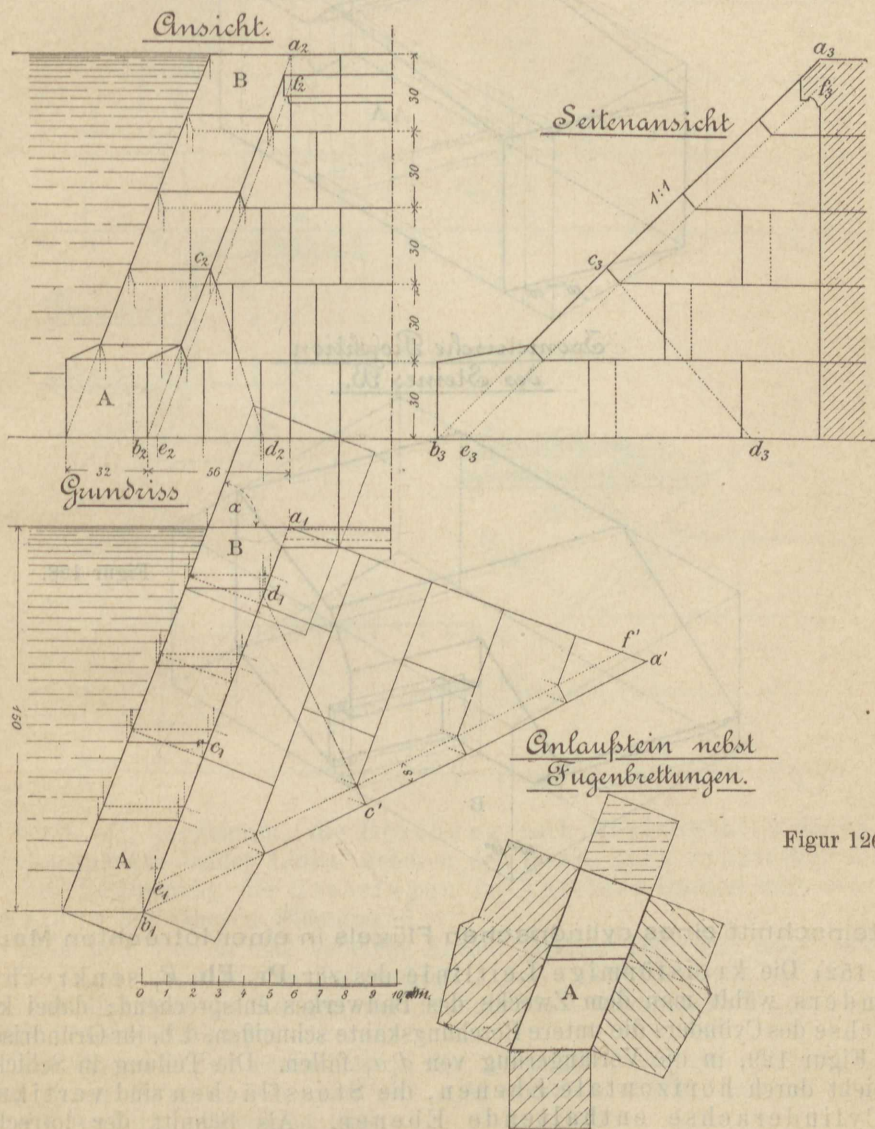
Er ist in Figur 126 im Grundriss besonders herausgezeichnet und sind die vertikalen Begrenzungsflächen des Steines in wahrer Gestalt in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt.

Figur 127 heisst eine isometrische Projektion des Anlaufsteines A . Figur 128 stellt die isometrische Projektion des obersten Flügelsteines B dar und ist daraus zu ersehen, wie dieser Stein in die Stirnmauer des Kunstbaues übergreift. Längs der einspringenden Kante, welche der

Flügel mit dem Kunstbau bildet, soll keine Fuge vorhanden sein, vielmehr müssen die bezüglichen Steine in die Stirnmauer des Kunstbaues übergreifen.

Anmerkung 27. Der Schüler konstruiere den in No. 151 behandelten Böschungsfügel unter der Annahme des Winkels $\alpha = 90^\circ$.

Figur 125.

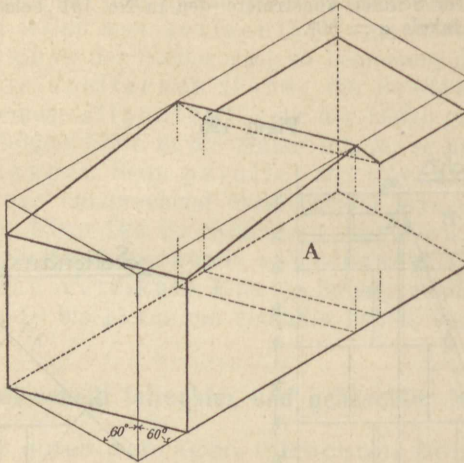


Figur 126.

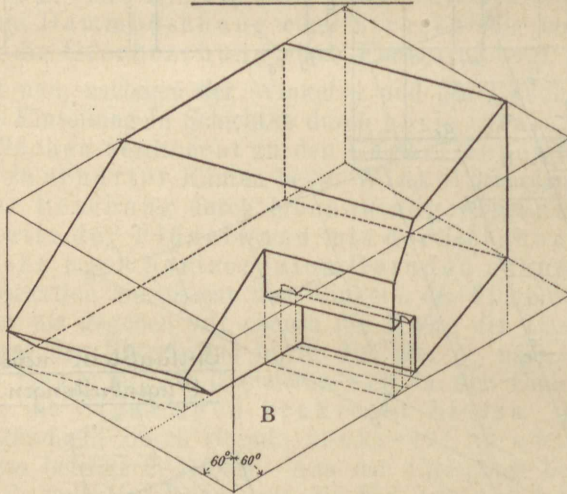
Die eingeschriebenen Masse bezeichnen Centimeter.

Figur 127.

Isometrische Projektion
Des Steines A.



Isometrische Projektion
Des Steines B.

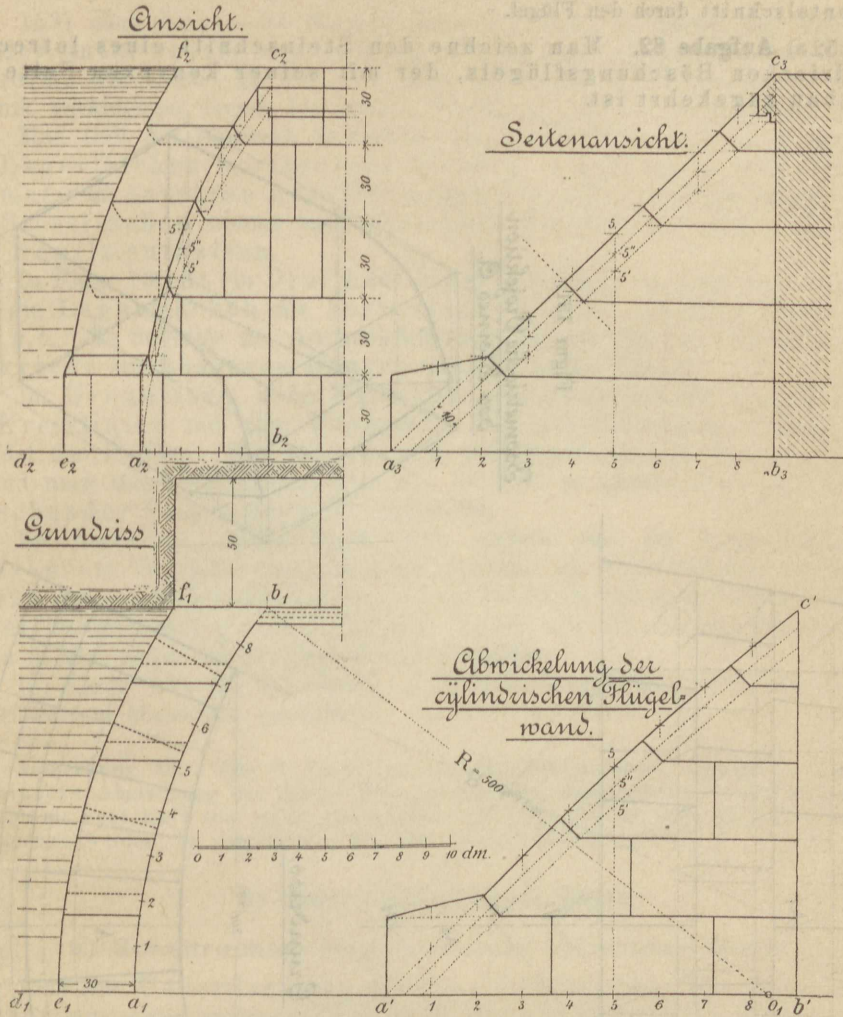


Figur 128.

b) Steinschnitt eines cylindrischen Flügels in einer lotrechten Mauer.

152) Die kreisförmige Leitlinie des zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechten Cylinders wählt man dem Zwecke des Bauwerkes entsprechend; dabei kann die Achse des Cylinders die untere Böschungskante schneiden, d. h. ihr Grundriss 0_1 , siehe Figur 129, in die Verlängerung von $d_1 a_1$ fallen. Die Teilung in Schichten geschieht durch horizontale Ebenen, die Stossflächen sind vertikale, die Cylinderachse enthaltende Ebenen. Als Schnitt der lotrechten Stirnfläche des Hauptbaues mit dem cylindrischen Flügel ergibt sich die Cylindermantellinie bc . Zur Bestimmung des Schnittes der die Flügelwändungen bildenden Cylinderflächen benützt man horizontale Hilfeebenen; dieselben schneiden die Cylinderflächen nach Kreisbögen, die sich im Grundrisse in

Figur 129.



a_1b_1 bzw. e_1f_1 projizieren, die Böschung nach horizontalen Geraden; die Schnittpunkte beider Linien gehören den gesuchten Schnittkurven an.

Zur Bestimmung der Stossfugen im Aufrisse benützt man eine Abwicklung der inneren Flügelwand.

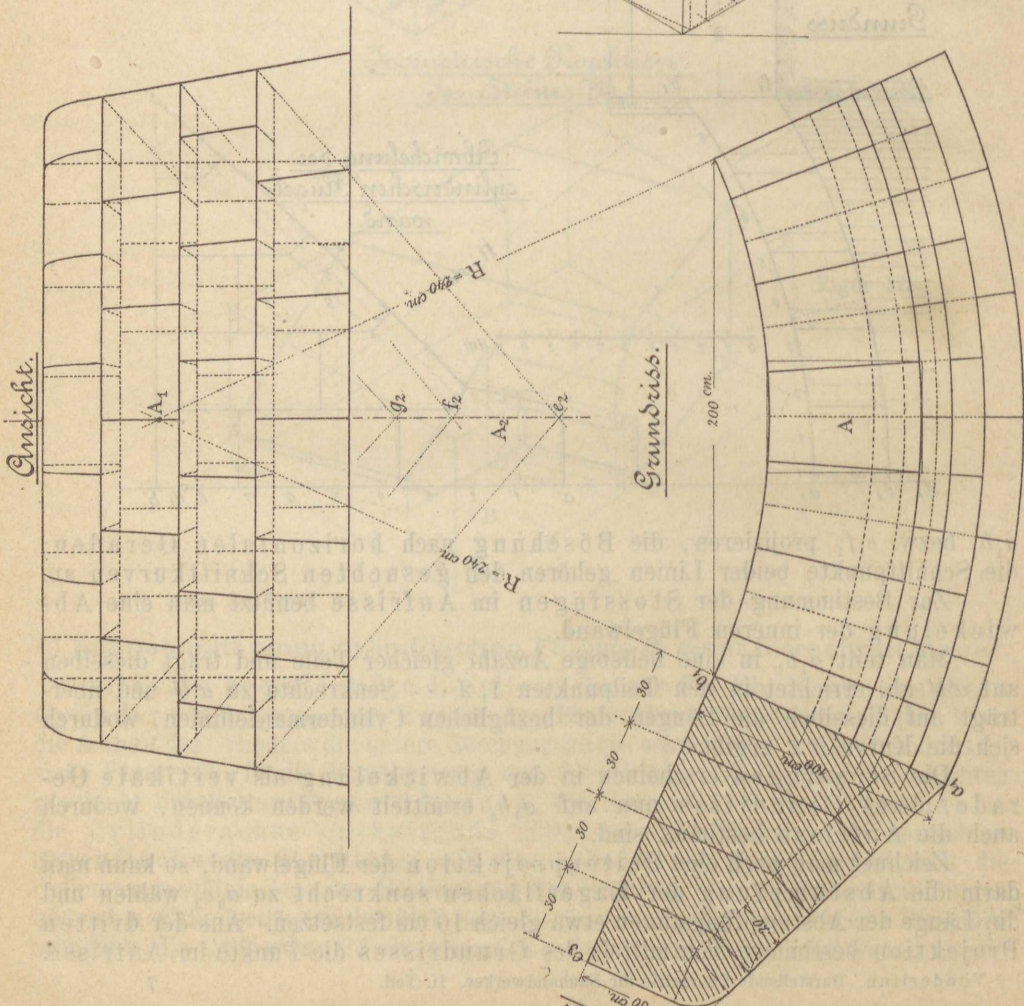
Man teilt a_1b_1 in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und trägt dieselben auf $a'b'$ ab, errichtet in den Teilpunkten 1, 2 ... Senkrechte zu $a'b'$ und überträgt auf dieselben die Längen der bezüglichen Cylindermantellinien, wodurch sich die Kurve $a'c'$ ergibt.

Die Stossfugen erscheinen in der Abwicklung als vertikale Gerade, deren Grundrisse nun auf a_1b_1 ermittelt werden können, wodurch auch die Aufrisse bestimmt sind.

Zeichnet man noch eine Seitenprojektion der Flügelwand, so kann man darin die Abstumpfung der Lagerflächen senkrecht zu a_3c_3 wählen und die Länge der Abstumpfungsfugen etwa gleich 10 cm festsetzen. Aus der dritten Projektion bestimmen sich mittels des Grundrisses die Punkte im Aufrisse.

Anmerkung 28. Der Schüler zeichne den untersten und obersten Flügelstein in isometrischer Projektion und führe in beliebiger Höhe über der Horizontalebene einen Horizontalschnitt durch den Flügel.

152a) Aufgabe 82. Man zeichne den Steinschnitt eines lotrechten cylindrischen Böschungsfügels, der mit seiner konvexen Seite dem Hauptbau zugekehrt ist.



Figur 131.

Isometrische Projektion
des Steines C.

Ansicht.

Grundriss.

Figur 130.

4) Steinschnitt einer konischen Mauer.

153) Eine konische Mauer kann Verwendung finden zur Verbindung zweier unter einem bestimmten Winkel sich begegnenden geböschten Mauern, wie solche als Stütz-, Futter- oder Kaimauern in der Bau-technik vorkommen, ferner bei runden Türmen, wie Leuchttürmen u. dergl.

Man teilt das Bauwerk in horizontale Schichten ab, d. h. man wählt als Lagerflächen horizontale Ebenen, welche durch Kegelflächen normal zur äusseren kegelförmigen Stirnmauer abgestumpft werden. Als Stossflächen nimmt man vertikale Ebenen an, welche die Achse des Kegels enthalten.

In Figur 130 ist ein Profil der Mauer gezeichnet; in demselben projizieren sich die Lagerflächen als horizontale Gerade parallel zur Grundlinie a_1b_1 ; die Schnitte der Abstumpfungskegelflächen mit der Profilebene stehen senkrecht zur äusseren Begrenzung a_1d_3 der Mauer.

Im Grundrisse, siehe Figur 130, projizieren sich die Lagerflächen als Kreislinien mit dem Mittelpunkte A_1 , ihre Halbmesser bestimmen sich mittelst des Profiles. Die Stossfugen projizieren sich als gerade Linien, gehend nach dem Mittelpunkte A_1 ; sie sind so anzuordnen, dass ein entsprechender Fugenwechsel stattfindet.

Im Aufrisse, siehe Figur 130, stellen sich die Lagerfugen als horizontale Gerade parallel zur X-Achse, die Stossfugen senkrecht hierzu dar. Die Schnittlinien der Stossflächen mit den Abstumpfungskegelflächen sind gerade Linien, welche sich für ein und dieselbe Kegelfläche in der Spitze dieser Kegelfläche schneiden.

In Figur 131 ist der Stein A in isometrischer Projektion und vergrössertem Massstabe gezeichnet.

Anmerkung 29. Die in Figur 130 eingeschriebenen Masse bezeichnen Centimeter. Die hintere Abgrenzung der Mauer wird je nach den Umständen verschieden gewählt; sie kann als vertikale oder geneigte Ebene, als Kegelfläche oder als Cylinderfläche angenommen werden; im vorstehenden Beispiele ist das letztere der Fall.

5) Steinschnitt einfacher Bögen.

a) Scheitrechter Bogen in einer lotrechten Mauer.

154) Zur Ueberdeckung kleiner Oeffnungen, wie Fenster- oder Thüröffnungen, verwendet man häufig den scheinrechten Bogen. Dabei kann die Wölbfläche gebildet sein durch eine horizontale oder eine gegen die Horizontalebene nur wenig geneigte Ebene, wie im vorliegenden Falle. Die zur Ueberwölbung des Bogens dienenden Steine erhalten geneigte Lagerflächen, welche eine zur vorderen Stirnfläche der Mauer senkrechte, die Symmetrieachse des Bogens schneidende Gerade enthalten.

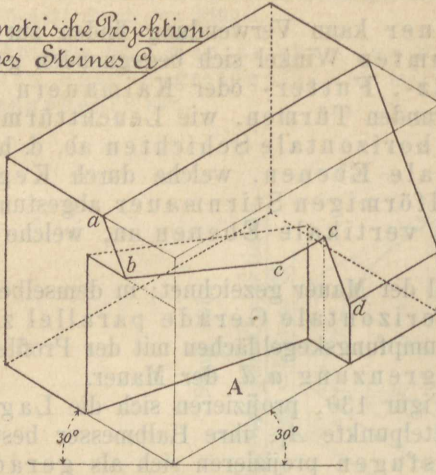
Man wählt die letztere in der Regel so, dass ihre Projektion o_2 , s. Fig. 132, in die Stirnfläche der Mauer, die Spitze eines gleichseitigen Dreieckes bildet, dessen Grundlinie durch die Projektion der Wölblinie dargestellt ist. Die Lagerfugen schneiden sich somit in dem Punkte o_2 . Die Einteilung des Bogens in Steine wählt man so, dass die Lagerfugen symmetrisch liegen zur vertikalen Mittelachse des Bogens.

Zur Anlehnung des Thür- oder Fensterrahmens wird ein Anschlag von etwa 10 cm Breite und Tiefe angenommen.

In Figur 132 ist der Bogen durch Grund- und Aufriss, Horizontal- und Vertikalschnitt dargestellt.

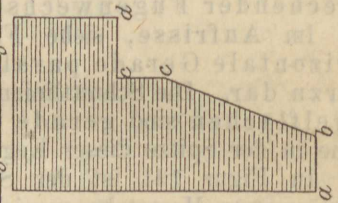
Isometrische Projektion
des Steines A

Figur 184.

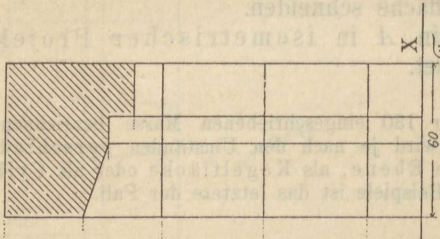


Figur 183.

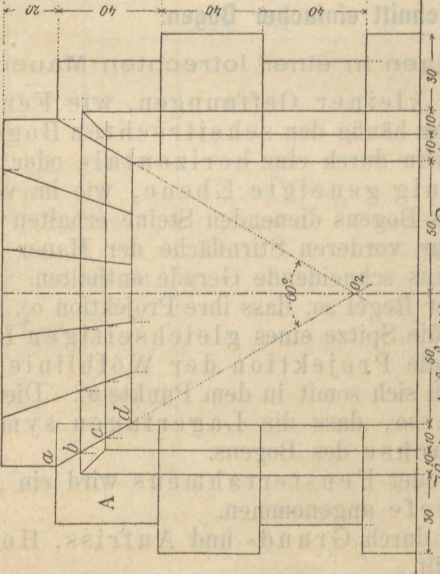
Jugenbettung a-b



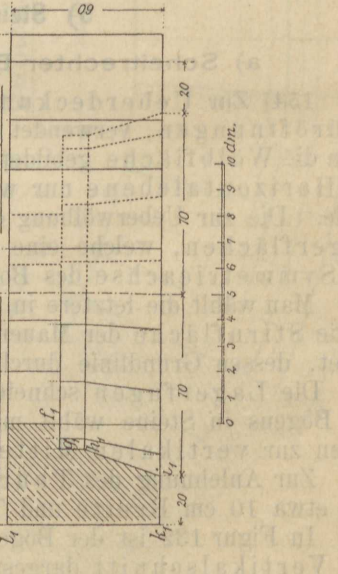
Vertikalschnitt.



Ansicht.



Grundriss



Figur 182.

Zur Bearbeitung der Gewölbsteine bedarf der Steinmetz der wahren Grössen der Lagerflächen der Steine.

Eine solche Lagerfläche für den Stein A ist in Figur 133 dargestellt; der Steinmetz benützt diese Fläche als Schablone und nennt sie die Fugent Brettung.

In Figur 134 ist der Stein A in isometrischer Projektion gezeichnet.

Anmerkung 30. Die eingeschriebenen Masse bezeichnen Centimeter.

155) **Aufgabe 83.** Der Schüler löse die vorstehend besprochene Aufgabe unter der Voraussetzung, dass die vordere Begrenzungsfläche des Bogens, d. h. die Stirnmauer, gegen die Horizontalebene eine Neigung oder einen Anlauf von 1:10 habe.

Anmerkung 31. Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen vertikale Kathete = 10 und dessen horizontale Kathete = 1 ist, so bildet die Hypotenuse mit der Horizontalen eine Neigung oder einen Anlauf gleich 1:10.

b) Kreiscylindrischer Bogen in einer lotrechten Mauer.

156) Ist die Mauerstärke im Verhältnis zur Breite der zu überdeckenden Oeffnung nur klein, so spricht man von einem Bogen im Gegensatz zu einem Gewölbe. Die Anordnung der Steine erfolgt aber nach denselben Regeln, wie beim Gewölbe, nur dass die Steine entweder sämtlich durch die ganze Mauerstärke hindurch greifen, oder nur abwechselnd in nicht auf einander folgenden Schichten.

Ist die Leitlinie des Bogens eine Kreislinie und die Achse des cylindrischen Bogens senkrecht zur Stirnfläche der Mauer vorausgesetzt, so teilt man den Bogen in einzelne Steine, symmetrisch angeordnet zur vertikalen Mittelachse des Bogens und wählt als Lagerflächen Ebenen, welche die Bogenachse enthalten. Die Lagerfugen der Bogensteine projizieren sich somit in die Stirnfläche als Normalen zu dem in der Stirnfläche liegenden Kreisbogen.

Es ist bei der Einteilung des Bogens in Steine darauf zu sehen, dass der Anschluss an das übrige Stirnmauerwerk so stattfindet, dass die Schichtenhöhe wo möglich überall die gleiche bleibt und Hackensteine möglichst vermieden werden.

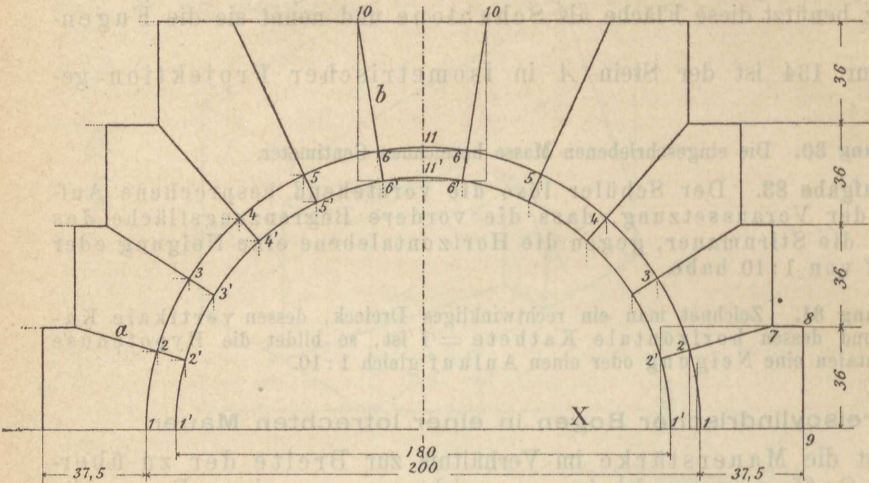
Die Anordnung der Hackensteine ist stets mangelhaft, weil in der Regel bei Setzungen des Mauerwerks Sprünge in den Hackensteinen die Folge sind.

Die Figuren 135 bis 142 stellen die Konstruktion eines kreiscylindrischen Bogens in einer lotrechten Mauer möglichst übersichtlich dar.

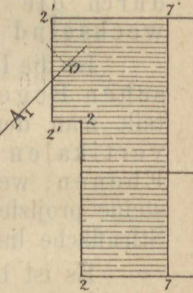
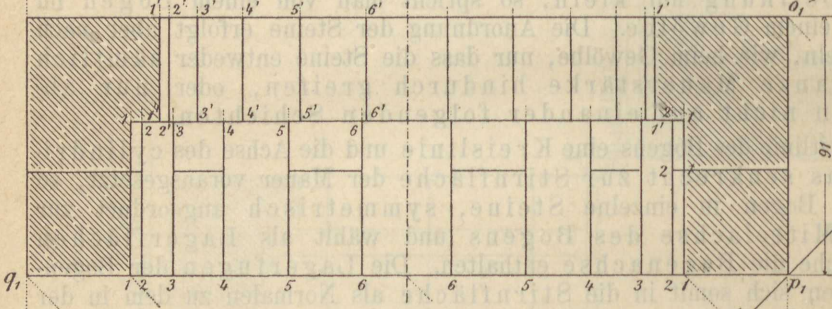
Figur 135 gibt die Stirnansicht, einen Horizontalschnitt in der Höhe des Kämpfers, endlich eine Oberansicht; in Figur 136 ist ein Vertikalschnitt durch die Achse des Leibungscylinders, sowie eine Seitenansicht, in Figur 137 eine Vertikalprojektion des ganzen Bogens in eine Vertikalebene A_1 , in Figur 138 eine isometrische Projektion der linken Bogenhälfte dargestellt. Die Figuren 139 und 140 zeigen eine isometrische Projektion des rechtseitigen Kämpfers und des Schlusssteines. Die Figuren 141 und 142 geben die zugehörigen Lagerflächen und zwar gibt Figur 141 die Kämpferfuge 2, 7, Figur 142 die Schlusssteinfuge b in wahrer Grösse.

Figur 135.

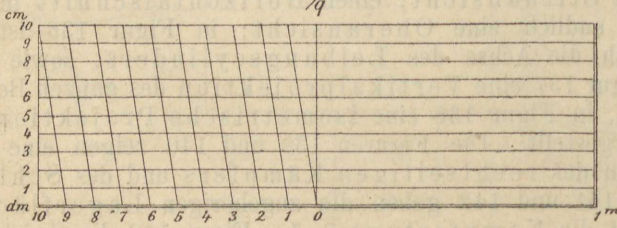
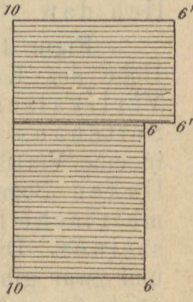
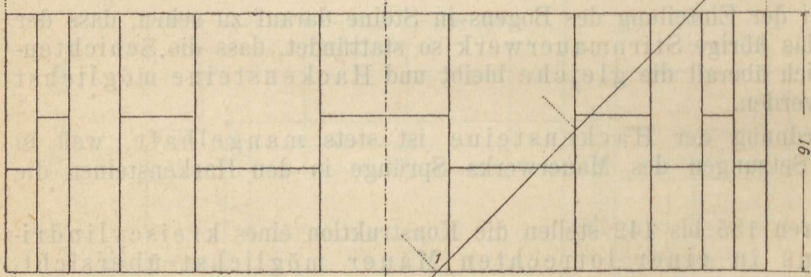
Aufriss, Horizontalschnitt und obere Ansicht.



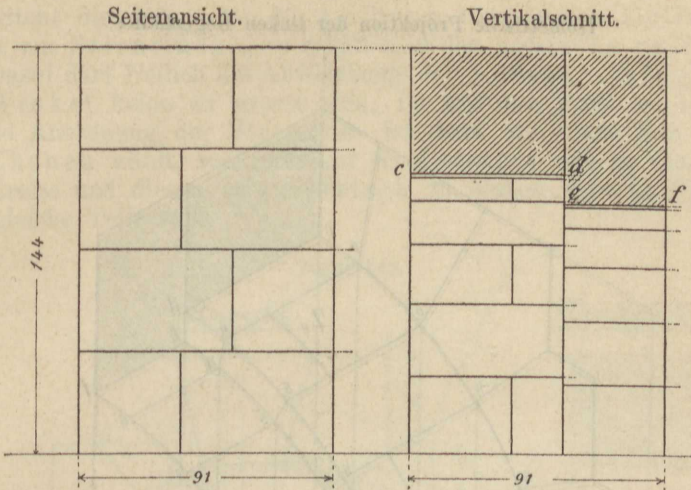
Figur 141.
Fugenbreitung



Figur 142.
Fugenbreitung.

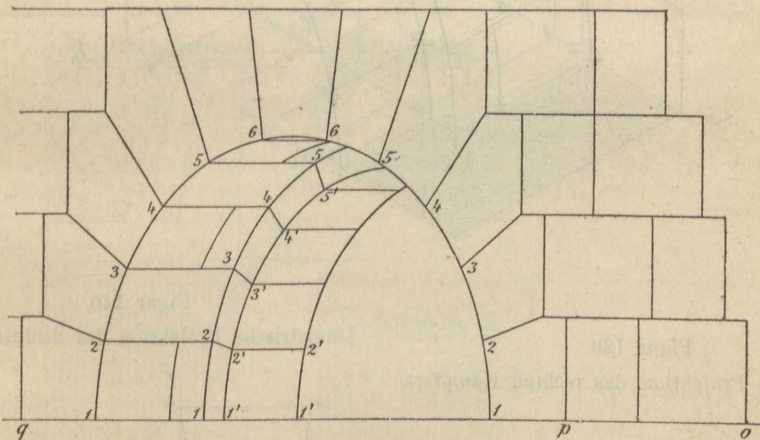


Figur 136.



Figur 137.

Vertikalprojektion in die Ebene A_2 .



Eine nähere Beschreibung der Konstruktion ist bei der Deutlichkeit der Zeichnungen und der angewandten Bezeichnung wohl nicht nötig. Die eingeschriebenen Masse bezeichnen wieder Centimeter.

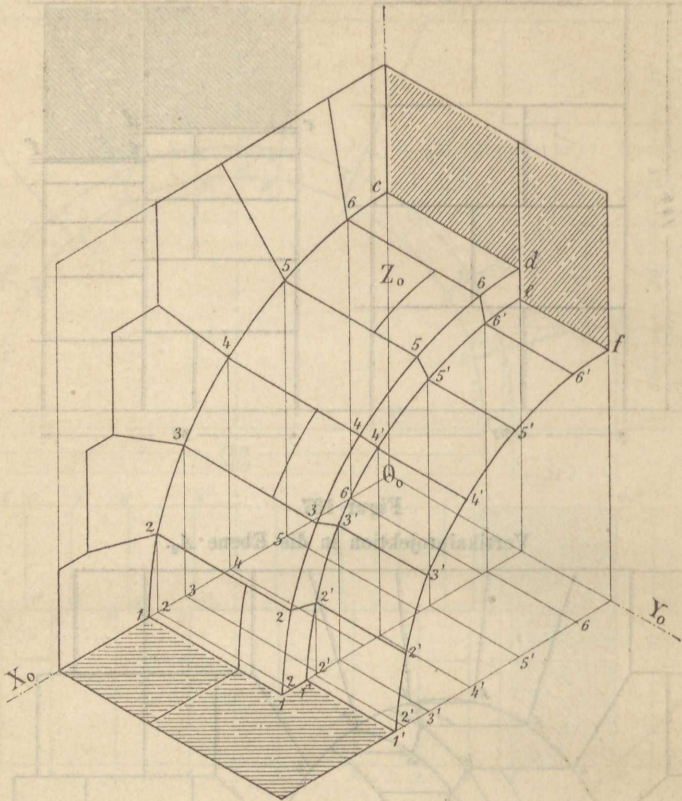
157) **Aufgabe 84.** Der Schüler führe den Steinschnitt eines kreiszylindrischen Bogens durch, für den Fall die vordere Begrenzungsfläche, d. h. die Stirnmur zur Horizontalebene geneigt sei, z. B wie 1:8.

158) **Aufgabe 85.** Es ist der Steinschnitt eines kreiszylindrischen Bogens darzustellen, wenn die Stirnmur vertikal sein und zur Vertikalebene eine Neigung 1:6 haben soll.

159) **Aufgabe 86.** Es ist der Steinschnitt eines kreiszylindrischen Bogens darzustellen, wenn die Stirnmur zur Horizontalebene und zur Vertikalebene geneigt sein soll wie 1:8 bzw. wie 1:6.

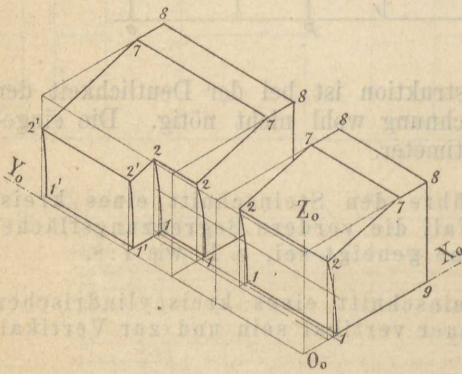
Figur 138.

Isometrische Projektion der linken Bogenhälfte.



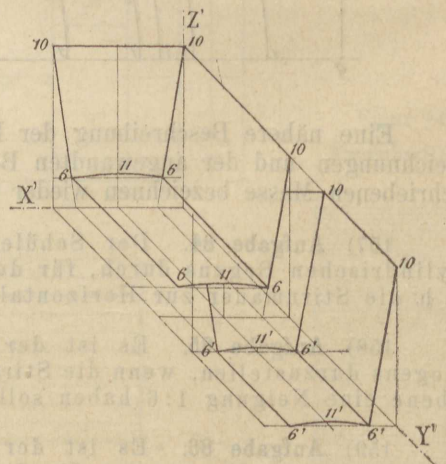
Figur 139.

Isometrische Projektion des rechten Kämpfers.



Figur 140.

Isometrische Projektion des Schlusssteines.

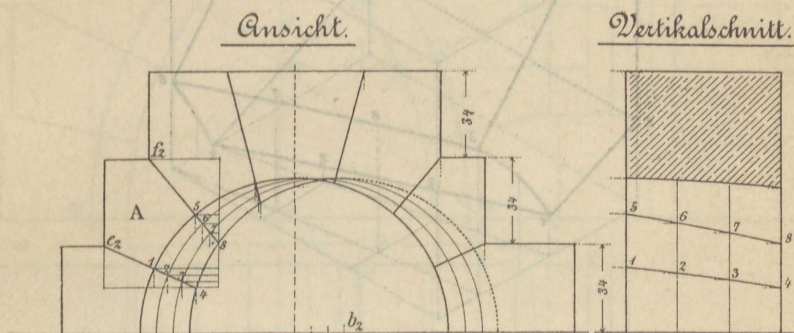


Figur 141 und 142 siehe Seite 102.

c) Schiefer kreisylindrischer Bogen in einer lotrechten Mauer.

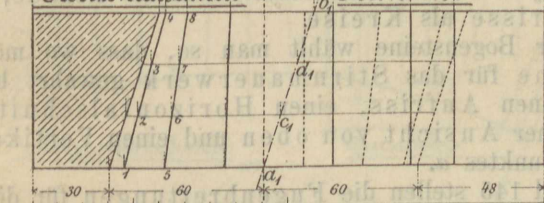
160) Steht die Achse des die Leibung bildenden Cylinders nicht senkrecht zur Stirnfläche, so erhält man den schiefen cylindrischen Bogen. Dabei darf freilich die Abweichung der Achsenrichtung von dem rechten Winkel keine zu grosse sein, im höchsten Falle ca. 15° . Die gebräuchlichste Anordnung der Bogensteine ist dann die, dass man als Lagerflächen Ebenen wählt, senkrecht zur Stirnmauer und zu dem in letzterer liegenden Kreise und diesen symmetrisch zu dessen vertikaler Mittelachse in gleiche Teile teilt.

Figur 143.

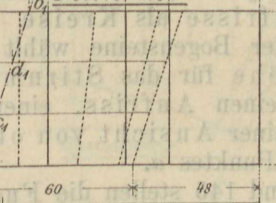


Horizontalschnitt

Grundriss



Figur 144.

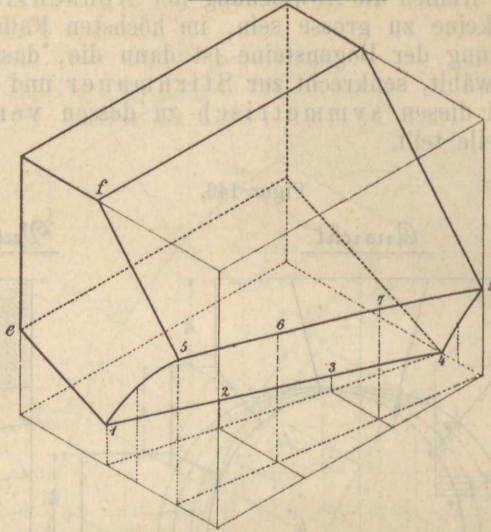


Figur 145.

Die Lagerfugen sind Ellipsenstücke, die sich im Aufrisse unter der Voraussetzung, dass die Stirnfläche parallel zur **Pr. Eb.** E_2 angenommen ist, als gerade Linien, gehend durch den Mittelpunkt a_2 des vordersten Begrenzungskreises, projizieren; die Grundrisse der Lagerfugen sind Ellipsenstücke, die man dadurch erhält, dass man durch den Bogen Ebenen legt parallel zur **Pr. Eb.** E_2 und die Schnittpunkte der Schnittkreise dieser Ebenen mit der inneren Leibungsfläche des Bogens aufsucht.

Figur 146.

Isometrische Projektion
des Steines A.



Im Grundrisse projizieren sich diese Schnittlinien als Gerade, parallel zur X-Achse, im Aufrisse als Kreise.

Die Abgrenzung der Bogensteine wählt man so, dass wo möglich die gleiche Schichtenhöhe für das Stirnmauerwerk gewahrt bleibt.

Figur 143 zeigt einen Aufriss, einen Horizontalschnitt in der Höhe des Kämpfers, einer Ansicht von oben und einen Vertikalschnitt durch die Vertikale des Punktes a .

Die Figuren 144 und 145 stellen die Fugenbrettungen für die Lagerfugen durch die Punkte e und f in doppeltem Massstabe der Figur 143 dar.

Figur 146 gibt eine isometrische Projektion des linkseitigen Bogenstückes A .

Die eingeschriebenen Masse bezeichnen wieder Centimeter.

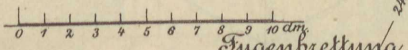
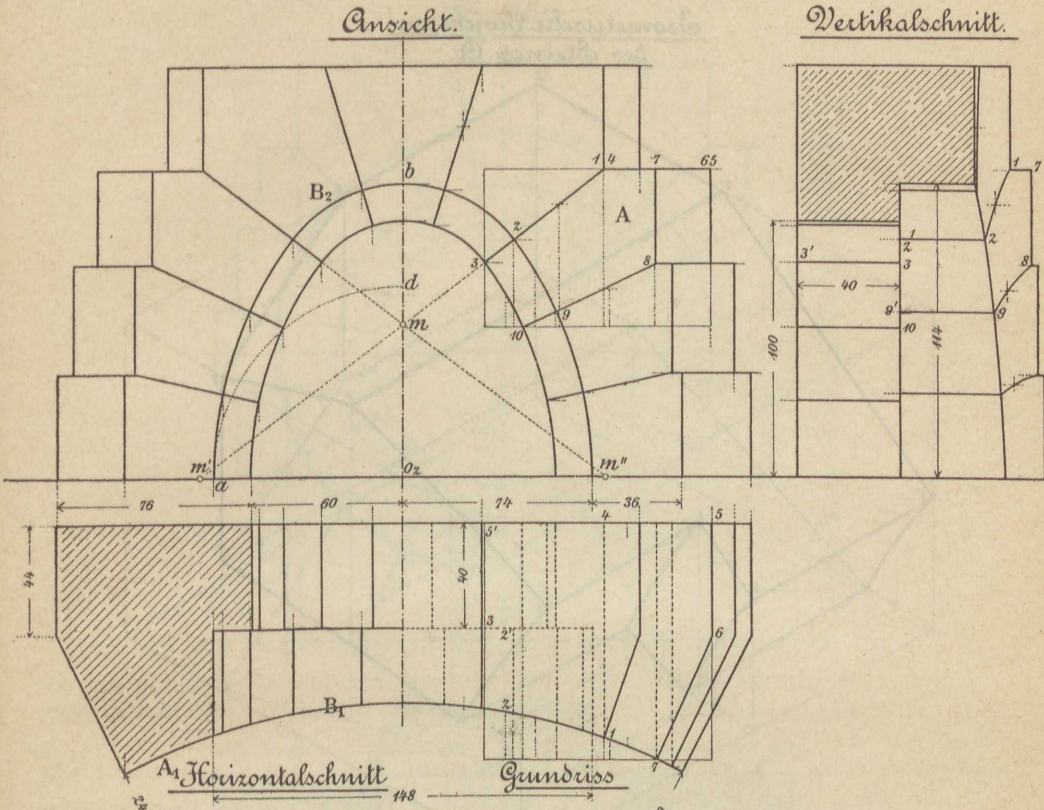
Anmerkung 32. Anstatt die Lagerflächen der Bogensteine senkrecht zu dem in der Stirnfläche der Mauer liegenden Cylinderkreise zu wählen, kann man diese auch senkrecht stellen zu dem Schnittkreise der zur Stirnfläche parallelen Mittelebene der Mauer mit der Cylinderleibung, oder aber man kann die ebenen Lagerflächen auch so annehmen, dass sie einerseits die Cylinderachse und andererseits eine Normale zu dem in der Stirnfläche liegenden Cylinderkreise enthalten.

Der Schüler führe ein Beispiel dieser Art durch.

d) Elliptisch cylindrischer Bogen in einer lotrechten
cylindrischen Mauer.

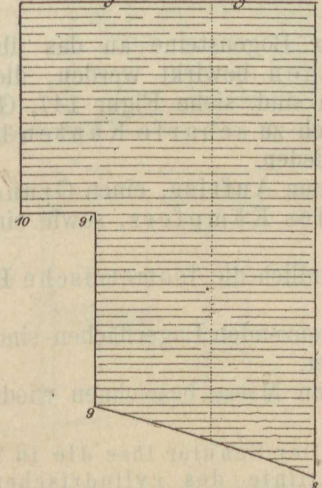
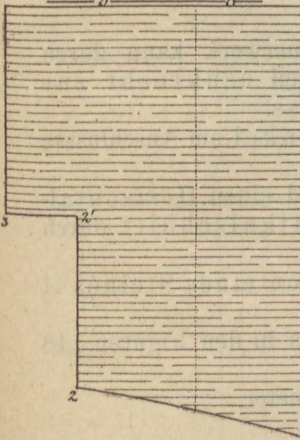
161) Ist die Stirnmauer des Bogens cylindrisch, der Normalschnitt zur Leibung des Bogens etwa eine Korblinie, siehe Figur 147, so werden die Lagerflächen der Bogensteine senkrecht zur Leibung B des Cylinders gestellt. Die Fugen auf der Bogenleibung stellen sich somit als Mantellinien des Cylinders dar, jene auf der Stirnfläche des Bogens sind Ellipsenstücke, die sich im Aufrisse als Normalen zu B_2 projizieren, im Grundrisse aber mit B_1 sich decken.

Figur 147.



Fugenbreitungen

Fugenbreitungen

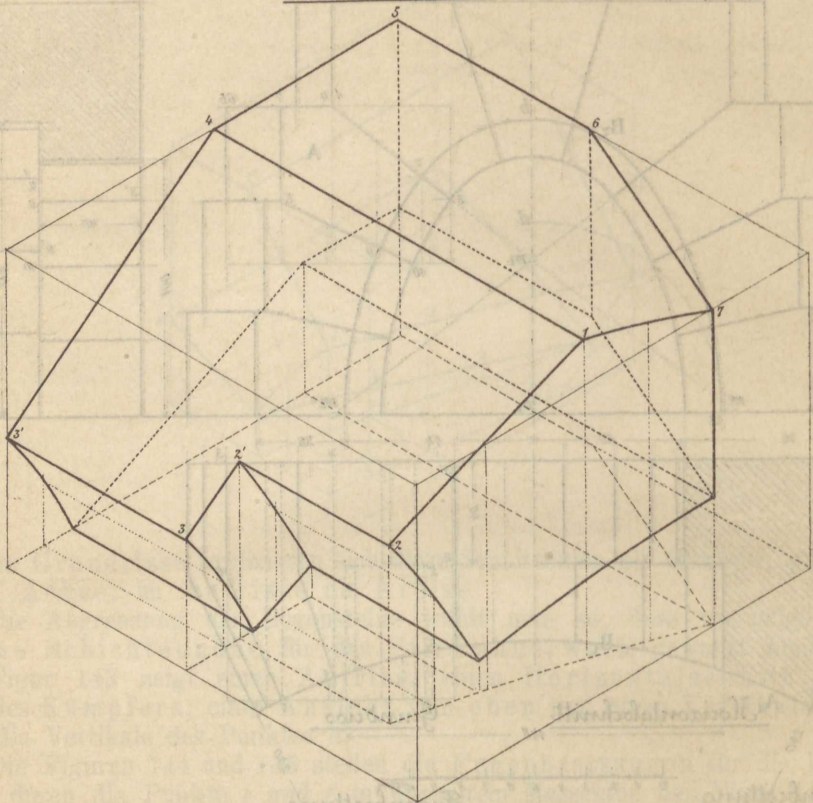


Figur 148.

Figur 149.

Figur 150.

Isometrische Projektion
des Steines A.



Der Anschluss der Bogensteine an das übrige Mauerwerk kann durch vertikale Stossflächen bewirkt werden, die zum Teil senkrecht zur Stirnmauer zu stellen sind, siehe Figur 147, Grundriss.

Es werden hierdurch zu scharfe Kanten bzw. Winkel am Anschlusse an die Stirnmauer vermieden.

Figur 147 zeigt einen Aufriss, einen Grundriss und einen Horizontalschnitt in der Höhe des Kämpfers, sowie einen Vertikalschnitt durch die Bogenachse.

In Figur 150 ist endlich die isometrische Projektion eines Steines A dargestellt.

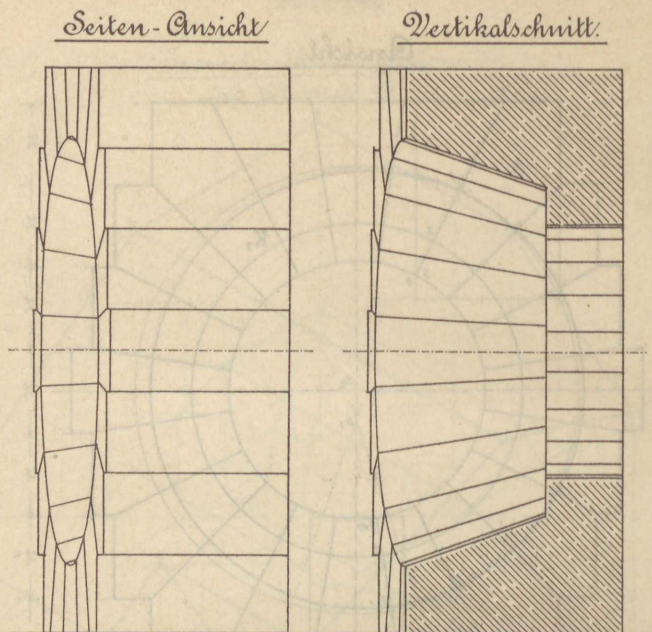
Die den Stein begrenzenden Lagerflächen sind überdies in den Figuren 148 und 149 herausgezeichnet.

Die eingeschriebenen Masse bezeichnen wieder Centimeter.

162) **Aufgabe 87.** Der Schüler löse die in No. 161 behandelte Aufgabe, für den Fall die Leitlinie des cylindrischen Bogens keine Korblinie, sondern eine Ellipse mit gegebenem Achsenverhältnis sein soll.

Die Lagerfugen in der Stirnfläche projizieren sich in diesem Falle im Aufrisse als Normalen zur elliptischen Leitlinie des Bogens.

Figur 152.



e) Kegelförmiger Bogen in einer schrägen lotrechten Mauer.

163) In Folge der Neigung der Mauer zur **Pr. Eb. E_2** wird die Stirnlinie des Bogens eine Ellipse sein, die man erhält, wenn man den Kegel durch Ebenen parallel zur **Pr. Eb. E_2** schneidet und die Schnittpunkte der Schnittkreise dieser Ebenen mit der Stirnfläche ermittelt.

Als Lagerflächen für den kegelförmigen Bogen nimmt man Ebenen an, die senkrecht stehen zur Stirnfläche des Bogens und die Kegelachse enthalten. Die Fugen in der Stirnfläche projizieren sich im Aufrisse normal zum Kreise K_2 ; die Fugen auf der Leibungsfläche sind im Aufrisse gleichfalls Normalen zu K_2 , im Grundrisse Gerade, gehend durch den Grundriss s_1 , der Kegelspitze s . Die Anschlagfläche zur Anlehnung des Fensterrahmens ist parallel zur **Pr. Eb. E_2** angenommen; als Fortsetzung des Bogens ist ein zur **Pr. Eb. E_2** senkrechter Kreiscylinder gewählt.

Der Anschluss der Bogensteine an das übrige Mauerwerk ist so einzurichten, dass die Mauerschichten wo möglich gleiche Höhe erhalten.

Die Figuren 151 bis 156 stellen den Steinschnitt des Bogens hinlänglich deutlich dar.

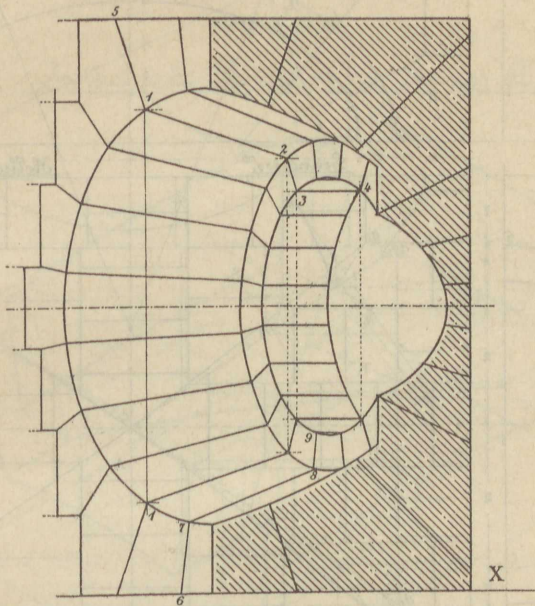
Figur 151 gibt einen Aufriss, einen Horizontalschnitt in der Höhe der Kämpferfuge und eine obere Ansicht, Figur 152 einen Vertikalschnitt durch die Kegelachse und eine Seitenansicht, Figur 153 einen Vertikalschnitt nach der Ebene CD . Die isometrische Projektion des Schlusssteines B , sowie eines Bogenstückes A ist in den Figuren 154 und 155 gegeben.

Die wahre Gestalt einer Lagerfläche, und zwar die linkseitige Lagerfläche des Schlusssteines B ist in Figur 156 gezeichnet.

164) **Aufgabe 88.** Den Steinschnitt eines kegelförmigen Bogens darzustellen, wenn die Stirnfläche senkrecht zur horizontalen und parallel zur vertikalen **Pr. Eb.** sein soll.

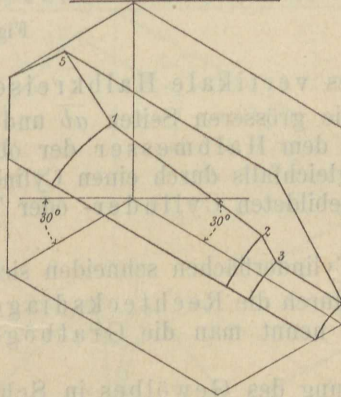
Figur 153.

Vertikalschnitt nach C-D.



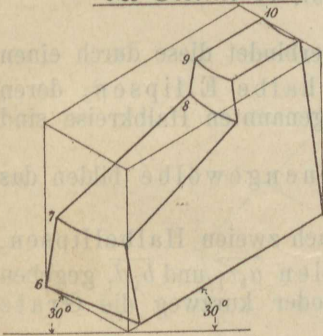
Figur 155.

Isometrische Projektion
des Steines A.



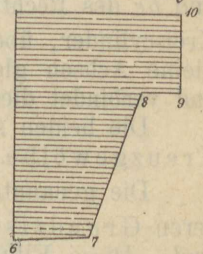
Figur 154.

Isometrische Projektion
des Steines B.



Figur 156.

Fugenbreitung.

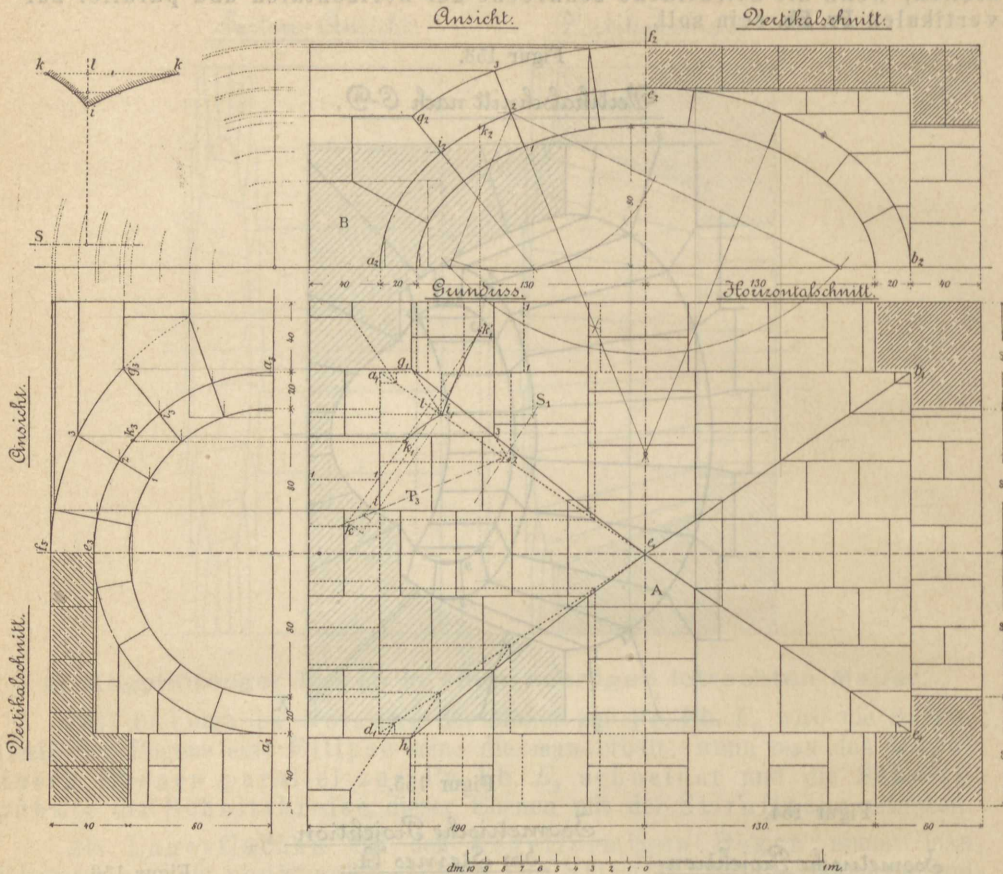


6) Steinschnitt von Gewölben.

a) Kreuzgewölbe.

165) Handelt es sich um die Ueberwölbung einer polygonalen Grundfläche, z. B. eines Rechteckes $abcd$, siehe Figur 157, so kann dies in mehrfacher Weise geschehen. Man stellt über die kleineren Seiten \overline{ad}

Figur 158.



Figur 157.

und bc des Rechteckes vertikale Halbkreise, verbindet diese durch einen Kreiscylinder, über die grösseren Seiten ab und dc halbe Ellipsen, deren kleine Achsen gleich dem Halbmesser der oben genannten Halbkreise sind und verbindet diese gleichfalls durch einen Cylinder.

Die beiden so gebildeten Cylinder- oder Tonnengewölbe bilden das Kreuzgewölbe.

Die genannten Cylinderflächen schneiden sich nach zweien Halbellipsen, deren Grundrisse durch die Rechteckdiagonalen a_1c_1 und b_1d_1 gegeben sind. Diese Ellipsen nennt man die Gratabögen oder kurzweg die Grate des Kreuzgewölbes.

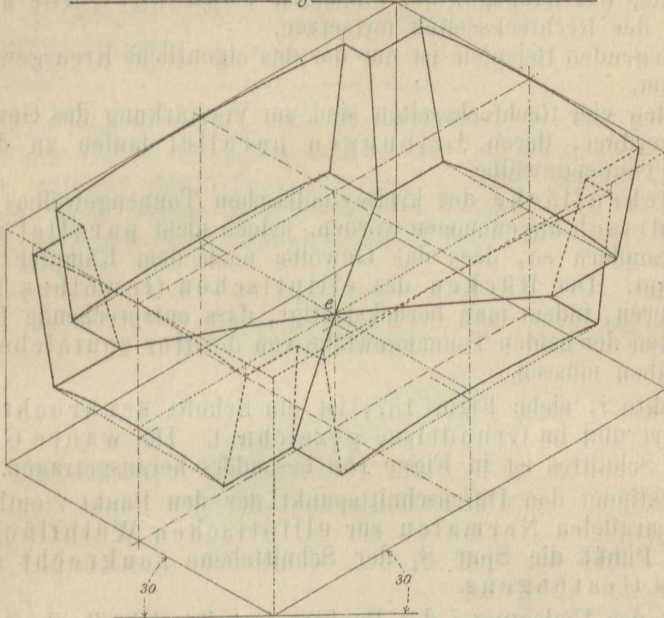
Was die Einteilung des Gewölbes in Schichten und einzelne Steine anbetrifft, so wählt man als Lagerflächen Ebenen, welche je eine Achse der beiden Cylinder enthalten; die Lagerfugen in den Stirnflächen stehen normal zur inneren Wölblinie eines jeden Tonnengewölbes und projizieren sich für das kreisförmige Gewölbe als Normalen zum Halbkreise, für das elliptische Gewölbe als Normalen zur Ellipse. Die Lagerfugen auf den Gewölbeleibungen sind Cylindermantellinien, welche sich auf den Gratabögen schneiden müssen.

Die Stossflächen sind vertikale, zu den Lagerflächen normale Ebenen.

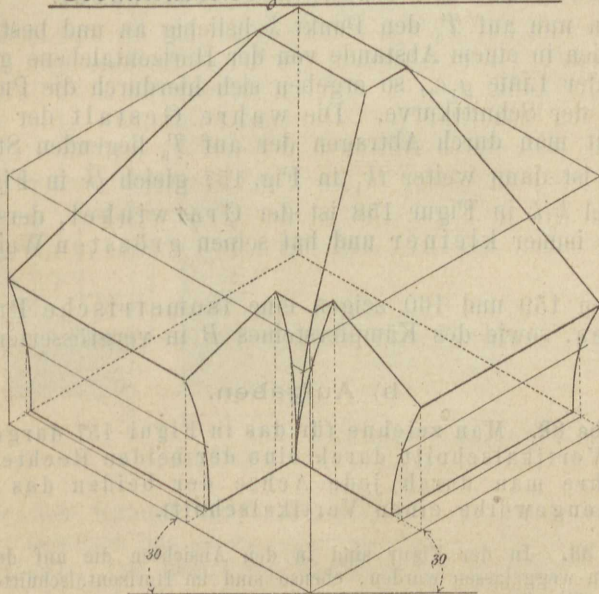
Man teilt zweckmässig in der Stirnfläche des kreisförmigen Gewölbes die Wölblinie in eine ungerade Anzahl gleicher Teile, symmetrisch zu ihrer vertikalen Mittelachse und bestimmt die entsprechenden Ellipsenpunkte,

Figur 159.

Isometrische Projektion des Steines A.



Isometrische Projektion des Steines B.



Figur 160.

indem man berücksichtigt, dass entsprechende Punkte in beiden Gewölben den gleichen Abstand von der horizontalen Ebene besitzen.

Die Steine an den Gratbögen beider Gewölbe müssen so abgegrenzt werden, dass jede Lagerfläche auf eine gewisse Länge in jedes der beiden Tonnengewölbe eingreift; es entstehen hierdurch Hackensteine.

In der Figur 157 ist ein Kreuzgewölbe im Grund- und Aufrisse, sowie im Vertikalschnitte dargestellt. Die eingeschriebenen Maasse bezeichnen Centimeter.

Die beiden das Kreuzgewölbe bildenden Tonnengewölbe können sich in der Richtung der Rechtecksseiten fortsetzen.

Im vorliegenden Beispiele ist nur der das eigentliche Kreuzgewölbe bildende Teil gezeichnet.

Ueber den vier Rechtecksseiten sind zur Verstärkung des Gewölbes Gurtbögen angeordnet, deren Leibungen parallel laufen zu der inneren Leibung der Tonnengewölbe.

Die Rückenfläche des kreisylindrischen Tonnengewölbes ist ebenfalls kreisylindrisch angenommen worden, jedoch nicht parallel zur inneren Wölbfläche, sondern so, dass das Gewölbe nach dem Kämpfer zu etwas an Stärke gewinnt. Der Rücken des elliptischen Gewölbes bestimmt sich durch Projizieren, indem man berücksichtigt, dass entsprechende Lagerfugen auf dem Rücken der beiden Tonnengewölbe von der Horizontalebene gleichen Abstand haben müssen.

Im Punkte i , siehe Figur 157, ist ein Schnitt senkrecht zum Gratbogen geführt und im Grundrisse gezeichnet. Die wahre Gestalt eines Teiles dieses Schnittes ist in Figur 158 besonders herausgetragen.

Man bestimmt den Durchschnittspunkt der den Punkt i enthaltenden zur **Pr. Eb.** E_2 parallelen Normalen zur elliptischen Wölbfläche und zieht durch diesen Punkt die Spur S_1 der Schnittebene senkrecht zum Grundriss g_1c_1 des Gratbogens.

Mittelst der Umlegung i des Punktes i ergibt sich T_3 als Schnittlinie der Schnittebene mit der Ebene des Gratbogens.

Nimmt man nun auf T_3 den Punkt k beliebig an und bestimmt k_2 und k_3 auf den Wöblinien in einem Abstände von der Horizontalebene gleich jenem des Punktes k von der Linie g_1c_1 , so ergeben sich hierdurch die Punkte k_1 und k_1' des Grundrisses der Schnittkurve. Die wahre Gestalt der Schnittkurve in Figur 158 erhält man durch Abtragen der auf T_3 liegenden Strecken auf die Vertikale li ; es ist dann weiter $\overline{lk_1}$ in Fig. 157 gleich \overline{lk} in Fig. 158 u. s. w.

Der Winkel kik in Figur 158 ist der Gratwinkel, derselbe wird nach dem Kämpfer zu immer kleiner und hat seinen grössten Wert im Scheitelpunkte e .

Die Figuren 159 und 160 zeigen eine isometrische Projektion des Schlusssteines, sowie des Kämpfersteines B in vergrössertem Massstabe.

b) Aufgaben.

166) **Aufgabe 89.** Man zeichne für das in Figur 157 dargestellte Kreuzgewölbe einen Vertikalschnitt durch eine der beiden Rechtecksdiagonalen, desgleichen führe man durch jede Achse der beiden das Kreuzgewölbe bildenden Tonnengewölbe einen Vertikalschnitt.

Anmerkung 33. In der Figur sind in den Ansichten die auf dem Gewölbertücken liegenden Stossfugen weggelassen worden, ebenso sind im Horizontalschnitte die unsichtbaren Lagerfugen des Gewölberückens nicht eingezeichnet.

167) Aufgabe 90. Man zeichne ein Kreuzgewölbe:

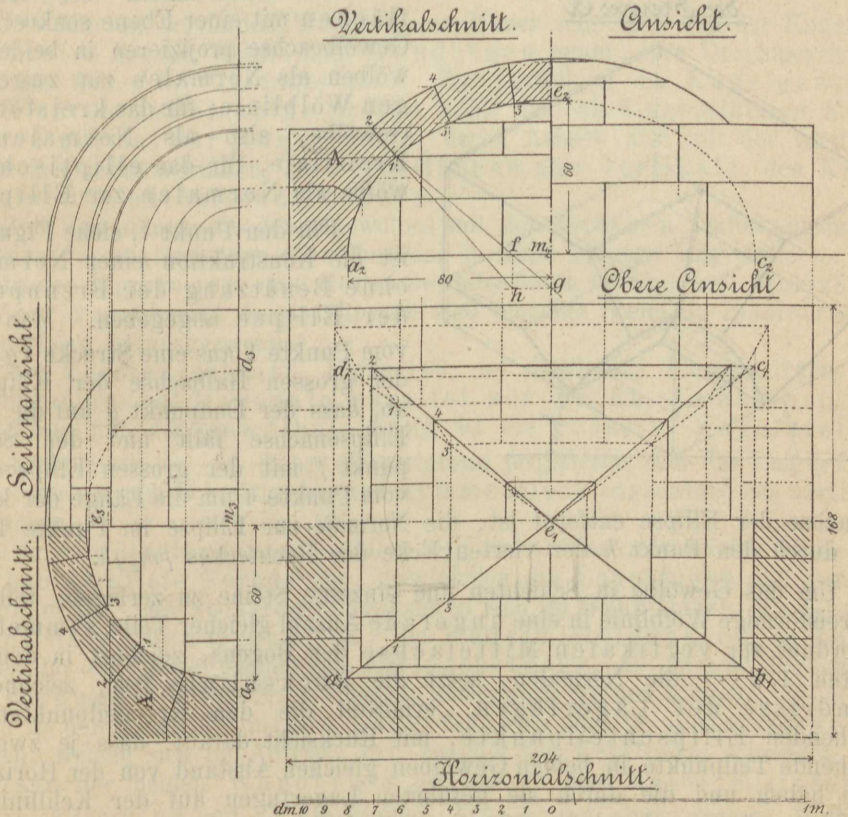
- a) über einem quadratischen Grundrisse,
- b) über einem regelmässigen Sechseck,
- c) über einem beliebigen Viereck.

Anmerkung 34. Im Falle c) kann man den Grundriss des Scheitelpunktes des Gewölbes beliebig wählen; man wählt ihn in der Regel so, dass er mit dem Schwerpunkt des Viereckes, über welchem man das Kreuzgewölbe konstruieren soll, zusammenfällt. Die Cylinderachsen gehen dann im Grundriss durch diesen Punkt und durch die Mitten der Vierecksseiten; über der kleinsten Vierecksseite wählt man als Leitlinie des zugehörigen Cylinders einen Halbkreis; damit sind dann die Leitlinien der übrigen drei Cylinderflächen als Ellipsen über den drei noch übrigen Vierecksseiten bestimmt.

c) Klostergewölbe.

168) Nimmt man die Seiten eines Polygons, z. B. eines Rechteckes $abcd$, siehe Figur 161, als Kämpferlinien zweier sich schneidenden Tonnengewölbe, so entsteht das Klostergewölbe. Die beiden Tonnengewölbe schneiden sich nach zweien Halbellipsen, deren Grundrisse durch die Rechtecksdagonalen a_1c_1 und b_1d_1 , siehe Figur 161, gegeben sind.

Figur 161.



Das über den Kämpferlinien ab und cd errichtete Tonnengewölbe ist kreisförmig, demnach das zweite über den Kämpferlinien ad und bc stehende Gewölbe elliptisch. Die Einteilung des Gewölbes in Schichten und einzelne Steine geschieht ähnlich wie beim Kreuzgewölbe, d. h. man wählt als Lager-

flächen wieder Ebenen, welche die Achse des zugehörigen Cylinders enthalten und als Stossflächen vertikale zu den Lagerflächen senkrecht stehende Ebenen.

Während beim Kreuzgewölbe über den Rechtecksdiagonalen je ein Grat gebildet ist, entsteht beim Klostergewölbe eine Einkehlung.

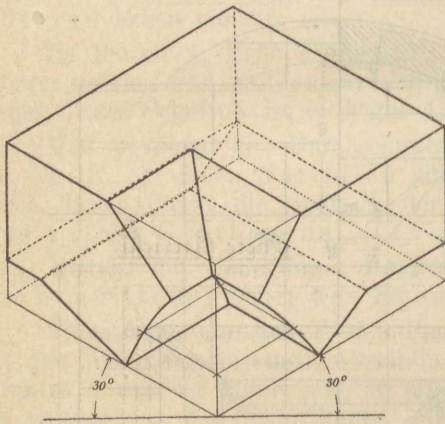
Auch hier müssen die Lagerflächen jener die Kehle bildenden Steine in jedes der beiden Gewölbe eine gewisse Strecke weit eingreifen, so dass wieder Hackensteine entstehen.

In Figur 164 ist ein Klostergewölbe über einem rechteckigen Grundriss, durch Aufriss, Vertikalschnitt, Grundriss und Horizontalschnitt dargestellt. Die Figur 162 stellt eine isometrische Projektion eines Steines *A* dar. Die eingeschriebenen Masse bezeichnen Centimeter.

Der Gewölberücken ist beim kreisförmigen Gewölbe ebenfalls kreisförmig angenommen, jedoch so, dass das Gewölbe nach dem Kämpfer zu an Stärke zunimmt; hiernach bestimmt sich die Rückenfläche für das elliptische Gewölbe.

Figur 162.

Isometrische Projektion
des Steines A



Die Schnittlinien der Lagerflächen mit einer Ebene senkrecht zur Gewölbeachse projizieren in beiden Gewölben als Normalen zur zugehörigen Wölblinie; für das kreisförmige Gewölbe, also als Normalen zur Kreislinie, für das elliptische Gewölbe als Normalen zur Ellipse.

Für den Punkt 1, siehe Figur 161, ist die Konstruktion einer Normalen, ohne Benützung der Brennpunkte der Ellipse angegeben. Man trägt vom Punkte 1 aus eine Strecke $1g$ gleich der grossen Halbachse der Ellipse so ab, dass der Endpunkt g auf die kleine Ellipsenachse fällt und der Schnittpunkt f mit der grossen Ellipsenachse vom Punkte 1 um die Länge der kleinen

Halbachse der Ellipse entfernt ist; die Normale zur Ellipse im Punkte 1 geht dann durch den Punkt h der vierten Ecke des Rechteckes fm_2gh .

Um das Gewölbe in Schichten und einzelne Steine zu zerlegen, teilt man die kreisförmige Wölblinie in eine ungerade Anzahl gleicher Teile, symmetrisch angeordnet zur vertikalen Mittelachse des Bogens, zeichnet in den Teilpunkten 1, 2... die Normalen, setzt die Rückenlinie fest, zeichnet die Grundrisse der Lagerfugen, ermittelt die den Kreisteilpunkten entsprechenden Ellipsenteilpunkte, mit Rücksicht darauf, dass je zwei entsprechende Teilpunkte in beiden Gewölben gleichen Abstand von der Horizontalebene haben und die durch sie geführten Lagerfugen auf der Kehllinie sich schneiden müssen. In den so bestimmten Ellipsenpunkten errichtet man die Ellipsennormalen und sucht auf denselben die zugehörigen Punkte der Rückenfläche. Bei der Anordnung der Stossfugen hat man auf einen entsprechenden Fugenwechsel, sowie darauf zu sehen, dass längs der Kehle die Steine in jedes Gewölbe auf eine Länge von 10—15 cm eingreifen.

d) Aufgaben.

169) **Aufgabe 91.** Man zeichne für das in Figur 161 dargestellte Klostergewölbe einen Vertikalschnitt durch eine der beiden Rechtecksdiagonalen, ferner eine Projektion des Gewölbes in eine Ebene senkrecht zu einer der genannten Rechtecksdiagonalen.

170) **Aufgabe 92.** Man zeichne ein Klostergewölbe:

- a) über einem quadratischen Grundrisse,
- b) über einem regelmässigen Vieleck (Fünfeck, Sechseck, Achteck und dergleichen),
- c) über einem beliebigen Viereck.

e) Kugelgewölbe.

171) Soll ein durch vier vertikale Mauern begrenzter Raum von quadratischer Grundfläche nach oben abgeschlossen werden, so kann dies mittelst eines Kugelgewölbes geschehen.

Der Durchmesser der die Wölbefläche bildenden Kugel ist gleich der Diagonale $\overline{a_1c_1}$ des Quadrates $a_1b_1c_1d_1$, siehe Figur 163, Grundriss.

Die vier vertikalen Umfassungsmauern bilden das Widerlager des Kugelgewölbes.

Die inneren vertikalen Wände dieser Mauer schneiden aus der Kugel vier Halbkreise heraus, welche man Wandbögen nennt; ihre Durchmesser sind gleich den Seiten des Quadrates $abcd$. Zur Einteilung des Kugelgewölbes in Schichten und einzelne Steine wählt man als Lagerflächen Kegelflächen normal zur Kugelfläche, deren Achsen also mit der vertikalen Kugelachse zusammenfallen, als Stossflächen aber vertikale, den Kugelmittelpunkt enthaltende Ebenen.

Zur Verbindung des Kugelgewölbes mit den vertikalen Umfassungsmauern lässt man die angrenzenden Gewölbesteine in diese Mauern eingreifen.

In den Figuren 163—166 ist das Gewölbe durch Grundriss, Horizontal- und Vertikalschnitt dargestellt und sind einzelne Steine in isometrischer Projektion herausgezeichnet.

Der Vertikalschnitt, Figur 163, ist durch den Kugelmittelpunkt und eine Quadratdiagonale parallel zur **Pr. Eb. E_2** geführt. Der Schnittkreis mit der Gewölbeleibung ist ein grösster Kugelkreis mit dem Durchmesser \overline{ac} . In dieser Schnittebene projizieren sich die Lagerfugen als Normalen zum Schnittkreise und symmetrisch angeordnet zur vertikalen Kugelachse.

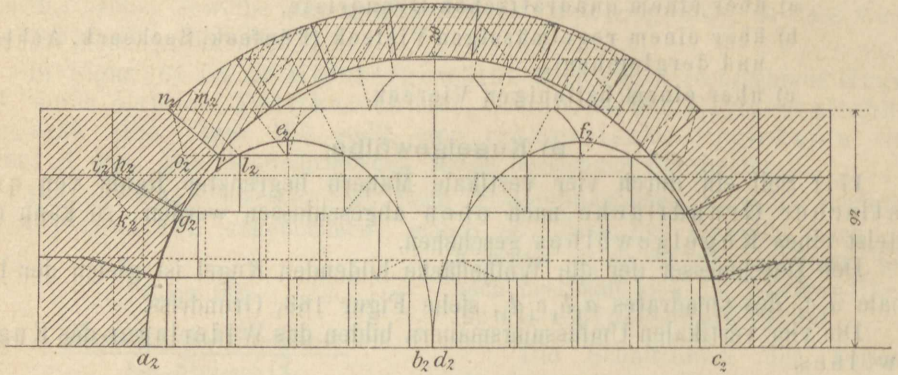
Die Gewölbelagerfugen stellen sich im Aufrisse als horizontale, zur X-Achse parallele Gerade dar, desgleichen die Lagerfugen auf dem Gewölberücken. Die Stossfugen projizieren sich im Grundrisse, als Gerade, gehend durch den Grundriss s des Kugelmittelpunktes; im Aufriss sind es für die Gewölbeleibungen Ellipsenstücke, die mittelst horizontalen durch die Kugel geführten Schnittebenen konstruiert werden können. Die Stossfugen in den kegelförmigen Lagerflächen sind im Aufrisse gerade Linien, welche sich im Aufrisse der zugehörigen Kegelspitze schneiden. Die Aufrisse der beiden Wandbögen ad und cd sind halbe Ellipsen mit den Projektionen \overline{ad} und \overline{cd} als kleinen Achsen und einer grossen Halbachse gleich dem Kreishalbmesser a_1c_1 .

Der Anschluss der Gewölbsteine an die Umfassungsmauern wird durch Ebenen erzielt, welche durch eine Kegelerzeugende und durch eine horizontale Gerade bestimmt werden.

So schneidet z. B. die Lagerfuge gg die Wandflächen ad und ab in den Punkten g und g . Durch diese Punkte führt man die Kegelerzeugenden gh , welche die Lagerfuge des Gewölberückens in den Punkten h schneiden, durch

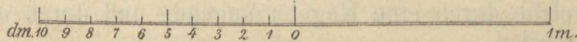
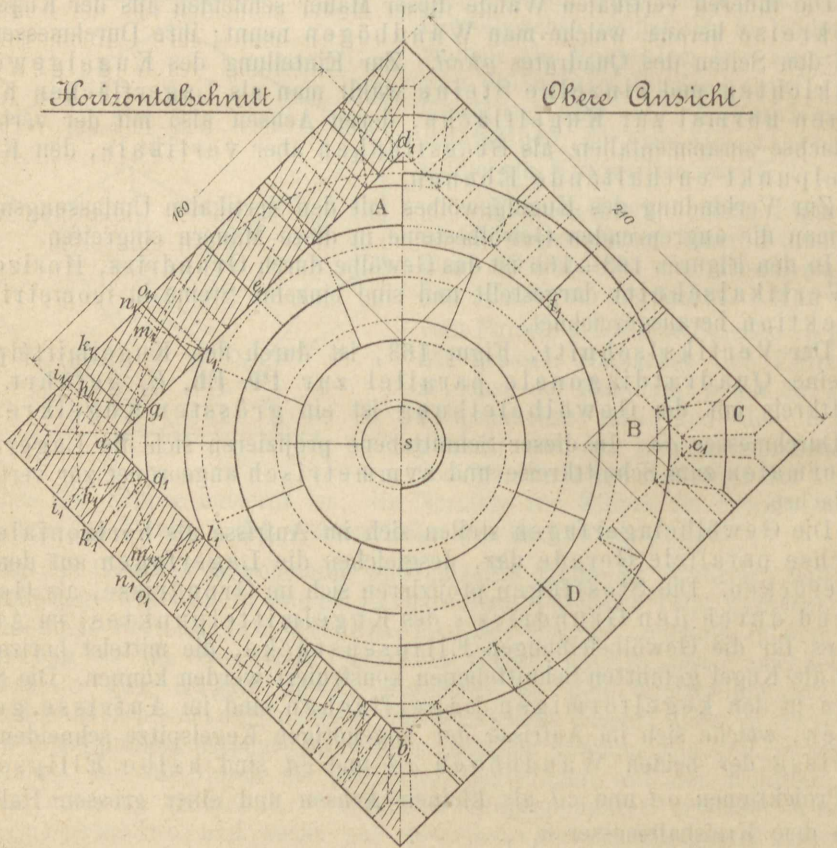
Figur 163.

Vertikal-Schnitt



Horizontalschnitt

Obere Ansicht

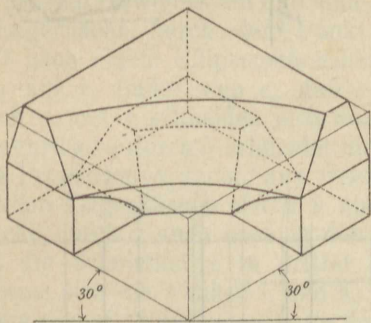


die Punkte g und h führt man die horizontalen Geraden gk und hi und nimmt als Begrenzungsfläche des Steines die Ebene $ghik$. An die Linien gk und hi schliessen sich noch horizontale Lagerflächen an.

Die Figuren 164 bis 167 stellen die Steine A, B, C und D in isometrischer Projektion dar. Die in den Figuren eingeschriebenen Masse bezeichnen Centimeter.

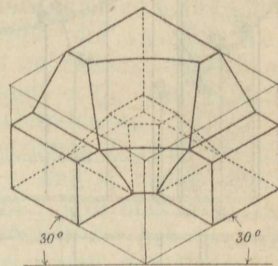
Figur 164.

Isometrische Projektion
des Steines A.



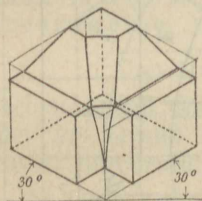
Figur 165.

Isometrische Projektion
des Steines B.



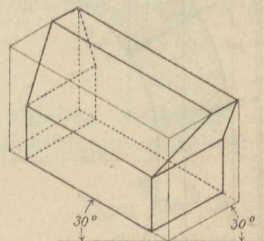
Figur 166.

Isometrische Projektion
des Steines C.



Figur 167.

Isometrische Projektion
des Steines D.



172) Aufgabe 93. Man zeichne ein Kugelgewölbe als Abschluss eines kreisylindrisch begrenzten Raumes.

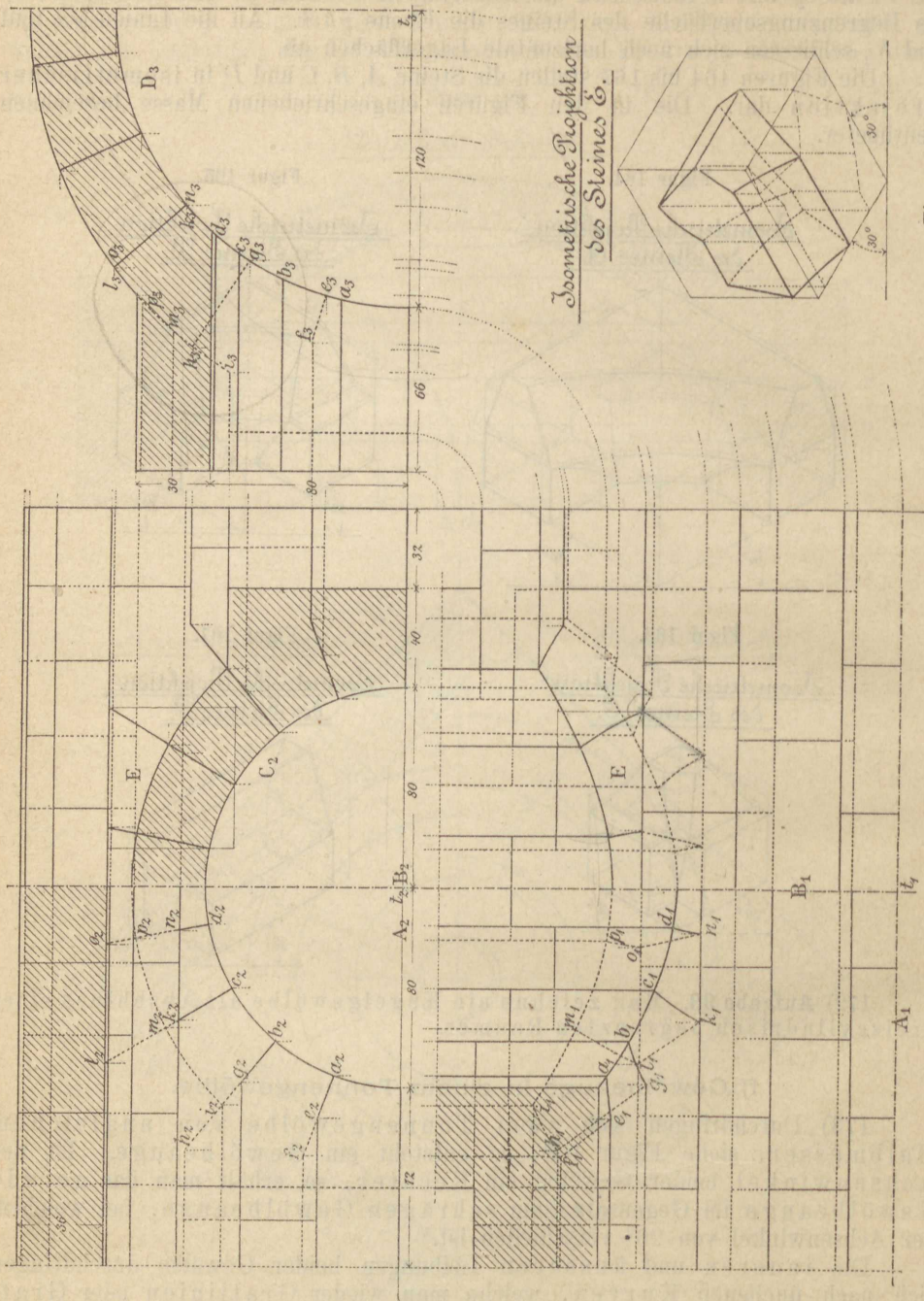
f) Gewölbeage in einem Tonnengewölbe.

173) Durchdringen sich zwei Tonnengewölbe von ungleichem Halbmesser, siehe Figur 168, so entsteht ein Gewölbeage. Ist der Achsenwinkel beider Gewölbe ein Rechter, so erhält man das gerade Gewölbeage im Gegensatz zum schrägen Gewölbeage, bei welchem der Achsenwinkel von 90° verschieden ist.

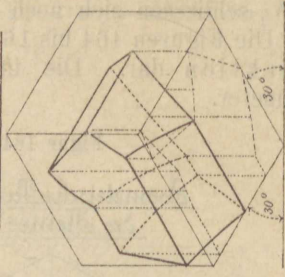
Die inneren und äusseren Leibungen beider Gewölbe durchdringen sich nach unebenen Kurven, welche man wieder Gratlinien oder Gratbögen nennt; man erhält sie mittelst horizontalen Schnittebenen, welche beide Cylinder nach Mantellinien treffen, die sich in Punkten der Gratbögen schneiden.

Die Einteilung der Gewölbe in Schichten und einzelne Steine erfolgt durch Ebenen, welche je die Achse des zugehörigen Cylinders enthalten und auf der Gewölbeleibung senkrecht stehen. Als

Figur 168.



*Isometrische Projektion
des Steines G.*



Figur 169.

Stoßflächen dienen vertikale und zu der zugehörigen Cylinderachse senkrechte Ebenen.

In Figur 168 ist ein gerades Gewölbe im Horizontalschnitt in oberer Ansicht und mehreren Vertikalschnitten dargestellt.

C_2 ist der Aufriss des Cylindergrundkreises für das kleinere Gewölbe, D_3 der Seitenriss des Grundkreises für das grössere Gewölbe.

Man teilt C_2 symmetrisch zur vertikalen Mittelachse des Bogens ein und stellt die Lagerfugen normal zu C_2 , desgleichen teilt man D_3 symmetrisch zur vertikalen Bogenachse ein und stellt die Lagerfugen normal zu D_3 , wobei nur darauf zu sehen ist, dass die Bogenstücke, welche zwischen den einzelnen Lagerfugen liegen, auf D_3 etwas grösser genommen werden als auf C_2 . Nunmehr lassen sich die Lagerfugen auf den Gewölbeleibungen beider Gewölbe im Grund- und Aufrisse ermitteln.

Die Lagerflächen des kleineren Gewölbes schneiden in die Leibungen und Lagerflächen des grossen Gewölbes ein und sind diese Schnittlinien zu konstruieren.

Die Lagerfläche durch den Punkt a schneidet die innere Gewölbeleibung D nach einem Ellipsenstückchen ae , das im Seitenriss durch a_3e_3 dargestellt ist; aus e_3 findet sich e_2 und e_1 und damit a_1e_1 . Die beiden Lagerflächen durch a und e schneiden sich nach einer Geraden ef .

Die Lagerfläche durch b schneidet die Gewölbeleibung D nach der Kurve bg , deren dritte Projektion b_3g_3 ist, aus welcher sich g_2 und g_1 findet. Die Schnittlinie der beiden Lagerflächen durch b und g ist gh . Wie man sieht, schneidet die Lagerfläche durch b auch noch in den Gewölberücken des grösseren Gewölbes ein und ist die Schnittkurve in dritter Projektion durch den Bogen i_3h_3 dargestellt, woraus sich die Punkte i_1 und h_1 ergeben. In gleicher Weise bestimmen sich auch die Schnittlinien der Lagerflächen durch die Punkte c und d des kleineren Gewölbes mit den Leibungen und Lagerflächen des grösseren.

In Figur 169 ist ein Gewölbestein E in isometrischer Projektion herausgezeichnet.

174) **Aufgabe 94.** Man zeichne ein schräges Gewölbeauge unter Annahme eines Winkels von 60° zwischen den sich schneidenden Achsen der beiden Tonnengewölbe.

g) Übungsbeispiele.

175) Im Nachstehenden sollen noch einige Aufgaben angeführt werden, welche der Schüler auf Grund der gegebenen Andeutungen wohl im Stande sein wird, konstruktiv durchzuführen.

176) **Aufgabe 95.** Eine lotrechte Mauer ist durch einen schiefen keiskegelförmigen Bogen durchbrochen, es ist der Steinschnitt des Bogens darzustellen.

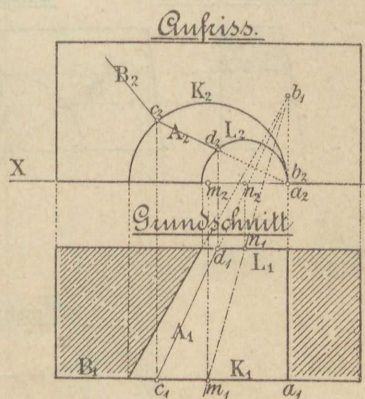
Die Kegelspitze liegt, siehe Figur 170, in b auf der Senkrechten durch a zur vordern Stirnfläche der Mauer; die Schnittlinien des Kegels mit der vertikalen vorderen und hinteren Stirnfläche der Mauer sind die Kreise K und L .

Als Lagerflächen wählt man Ebenen, welche die Kegelspitze b enthalten und die Stirnflächen nach Normalen zu den Kreisen K und L schneiden.

Es projizieren sich somit die Lagerfugen in den Stirnflächen als Normalen zu den bezüglichen Kreislinien, die Lagerfugen auf der Gewölbeleibung als Kegelmantellinien.

Will man die Steine nicht durch die ganze Dicke der Mauer hindurchgreifen lassen, so kann man sie durch Stossflächen parallel zu den Stirnflächen begrenzen. Der Anschluss an das übrige Stirnmauerwerk wird durch horizontale Lager- bzw. vertikale, zur Stirnwand senkrechte Stossflächen erzielt.

Figur 170.



177) **Aufgabe 96.** Eine lotrechte Mauer, deren vordere Stirnfläche durch eine windschiefe Fläche begrenzt ist, soll von einem kreis-cylindrischen Bogen durchbrochen werden; es ist der Steinschnitt des Bogens darzustellen.

Der Fall einer windschiefen Begrenzung der vorderen Stirnfläche einer lotrechten Mauer kann eintreten, wenn die Mauer zwei Böschungsmauern, deren vordere Stirnflächen ungleiche Neigungen gegen die Horizontalebene besitzen, mit einander zu verbinden hat. In Figur 171 sind die Profile dieser Böschungsmauern gezeichnet.

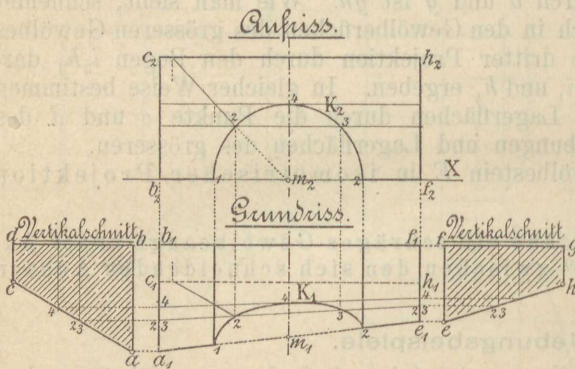
Die windschiefe Fläche wird nun erzeugt durch die Bewegung einer horizontalen Geraden längs der beiden Kanten ac und eh .

Die Wölbfläche schneidet die vordere Stirnfläche nach einer krummen Linie, deren Aufriss der Halbkreis K_2 und deren Grundriss durch Annahme von horizontalen Schnittebenen, welche die windschiefe Fläche nach Erzeugenden schneiden, konstruiert werden kann.

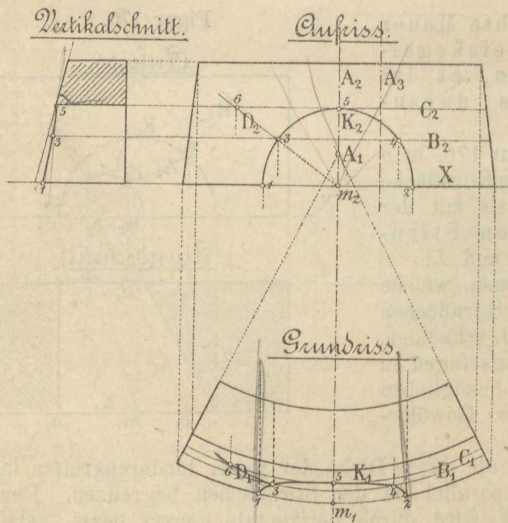
Als Lagerflächen wählt man Ebenen senkrecht zur Gewölbeleibung, welche die Cylinderachse enthalten. Die Aufrisse der Lagerfugen stehen

normal auf K_2 , die Grundrisse sind gekrümmt und ermitteln sich gleichfalls unter Anwendung von horizontalen Hilfsebenen.

Figur 171.



Figur 172.



178) **Aufgabe 97.** Eine lotrechte Mauer, deren vordere Fläche durch eine senkrechte Kreiskegel-fläche mit vertikaler Achse begrenzt ist, wird von einem kreis-cylindrischen Bogen durchbrochen. Es ist der Steinschnitt des Bogens darzustellen.

Anmerkung 35. Die Achse der kegelförmigen Stirnfläche ist die Gerade A , siehe Figur 172. Als Aufriss der Schnittlinie der zylindrischen Wölbfläche mit der kegelförmigen Stirnfläche dient die Kreislinie K_2 . Der Grundriss ist eine gekrümmte Linie K_1 , die sich mittels horizontalen durch den Kegel geführten Schnittebenen, welche den Kegel nach Kreisen schneiden, bestimmen lässt.

Als Lagerflächen wählt man Ebenen, gehend durch die Cylinderachse und senkrecht zur Wölbfläche. Die Aufrisse der Lagerfugen projizieren sich als Normalen zu K_2 . Die Grundrisse sind Kurven, die sich gleichfalls mittels horizontalen Hilfsebenen bestimmen. Aus der Figur 172 ist die Konstruktion deutlich zu ersehen.

Als Stossflächen kann man vertikale, die Kegelachse enthaltende Ebenen annehmen oder aber man wählt vertikale, zur Pr. Eb. E_2 senkrechte Ebenen.

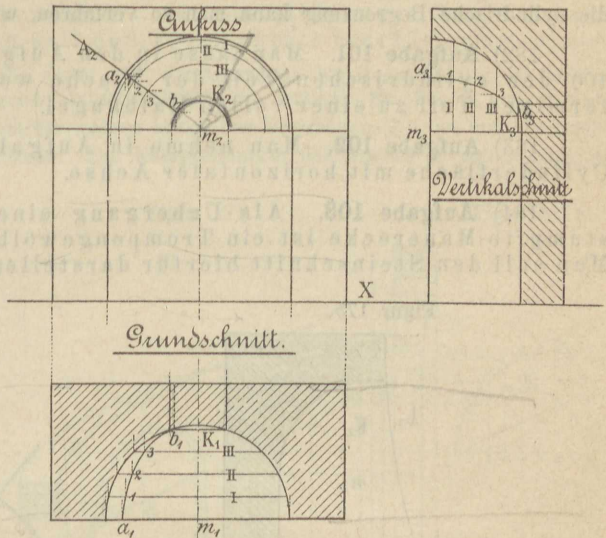
179) **Aufgabe 98.** In eine lotrechte Mauer ist eine kugelförmige Nische mit cylindrischer Fortsetzung anzuordnen. Es ist der Steinschnitt der Nische darzustellen.

Anmerkung 36. Für den kugelförmigen Teil der Nische sind als Lagerflächen Ebenen zu wählen senkrecht zur Kugelfläche, sowie zur vorderen Stirnfläche der Mauer. Die Lagerfugen auf der kugelförmigen Gewölbleitung sind dann Kreislinien, die sich im Aufrisse als Kugelkreise, im Grundrisse als Ellipsen projizieren, s. Figur 173. Man erhält dieselben mittels ebenen Schnitten, welche vertikal und parallel zur Pr. Eb. E_2 durch die Kugel geführt werden; die Schnittebenen treffen die Kugel nach Kreisen I, II, III u. s. w., welche die Aufrisse der Lagerfugen in Punkten 1, 2, 3 u. s. w. treffen, deren Grundrisse nun ermittelt werden können.

Wollte man die Lagerflächen bis zum Mittelpunkte der Kugel durchgehen lassen, so würden sich daselbst die einzelnen Gewölbsteine unter zu scharfen Kanten treffen. Man setzt deshalb die Gewölbsteine auf einen besonderen Stein K auf, dessen obere Fläche kreisylindrisch und dessen vordere Fläche kugelförmig geformt ist. Dieser Stein führt den Namen Trompillon.

Die Lagerflächen für den cylindrischen Teil der Nische sind horizontale Ebenen; die Lagerfugen also Kreise. Als Stossflächen wählt man vertikale, die Cylinderachse enthaltende Ebenen.

Figur 173.

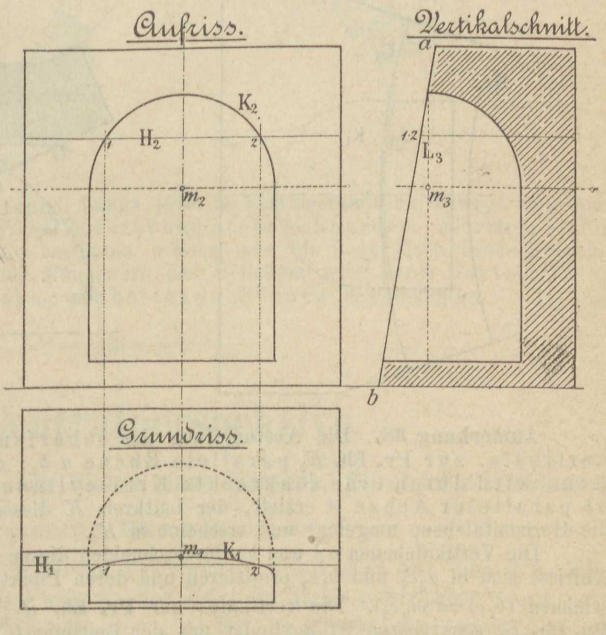


180) **Aufgabe 99.** Man führe die Aufgabe 99 durch, für den Fall die vordere Stirnfläche zur Horizontalenebene geneigt ist, siehe Figur 174.

Anmerkung 37. Der Mittelpunkt der Kugel ist m . Durch den vertikalen grössten Kugelkreis L ist noch eine Cylinderfläche gelegt, welche die vordere Stirnfläche nach einer elliptischen Linie K schneidet, deren Aufriss K_2 sich als Halbkreis mit einem Halbmesser gleich jenem der Kugel projiziert. Der Grundriss K_1 ist eine Ellipse, deren einzelne Punkte wieder mittels horizontalen Hilfsebenen und mit Zuhilfenahme des Vertikalschnittes bestimmt werden können.

Die Anordnung der Lagerflächen für den kugelförmigen und cylindrischen Teil bleibt dieselbe wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Figur 174.



181) **Aufgabe 100.** Man führe die Aufgabe 98 durch, wenn die vordere Stirnfläche durch eine Kreiskegelfläche mit vertikaler Achse begrenzt ist.

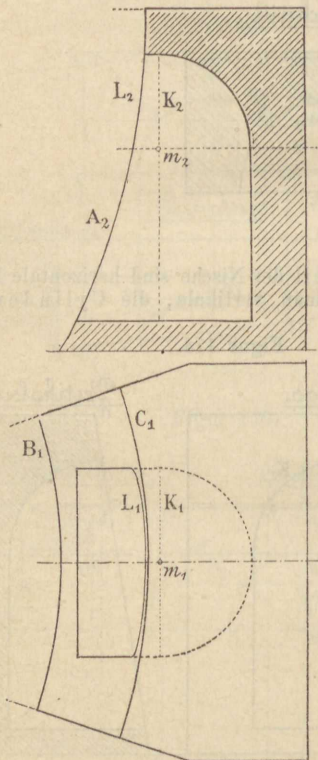
Der Mittelpunkt der Kugel ist wieder durch m gegeben, siehe Figur 175. Man legt durch den vertikalen grössten Kugelkreis eine Cylinderfläche mit horizontaler Achse und bestimmt ihren Durchschnitt mit der kegelförmigen Stirnfläche, was wieder mittels horizontalen Hilfsebenen bewerkstelligt werden kann. Die Anordnung der Lagerflächen für den kegelförmigen Teil bleibt dieselbe wie bisher; bezüglich der Lagerflächen für die cylindrische Begrenzung kann man so verfahren, wie bei der konischen Mauer.

182) **Aufgabe 101.** Man lasse in den Aufgaben 98 bis einschliesslich 100 den cylindrischen Teil der Nische weg und ergänze den kegelförmigen Teil zu einer vollen Halbkugel.

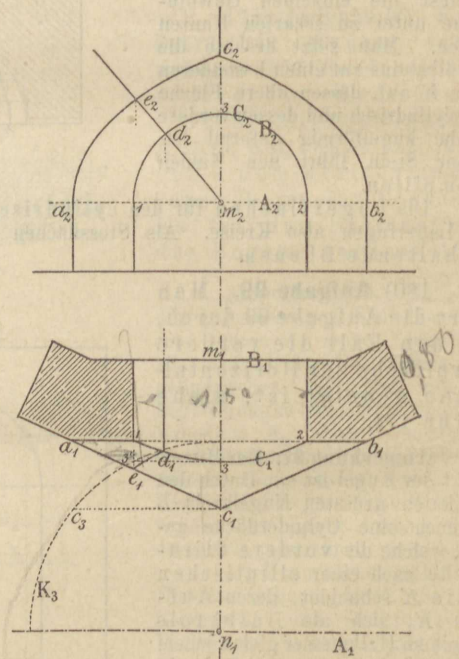
183) **Aufgabe 102.** Man nehme in Aufgabe 100 als Stirnfläche eine Cylinderfläche mit horizontaler Achse.

184) **Aufgabe 103.** Als Uebergang einer scharfen in eine abgestumpfte Mauerecke ist ein Trompengewölbe angeordnet, s. Figur 176. Man soll den Steinschnitt hierfür darstellen.

Figur 175.



Figur 176.



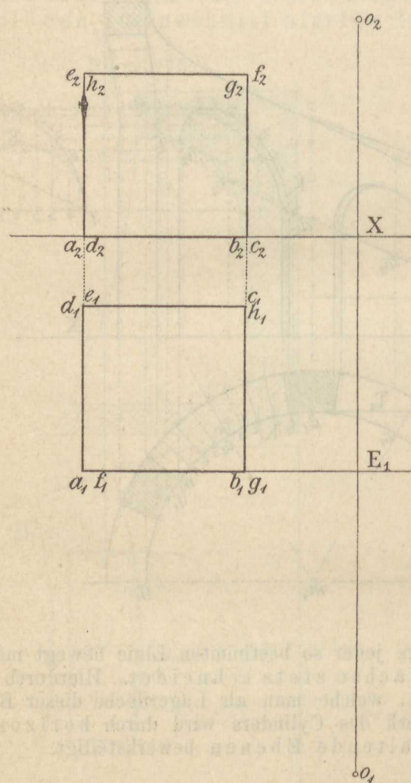
Anmerkung 38. Die Abstumpfung der scharfen Mauerecke geschieht durch die vertikale, zur **Pr. Eb.** E_2 parallele Ebene a_1b_1 ; der Uebergang in die scharfe Ecke wird durch eine senkrechte Kreisylinderfläche mit horizontaler, zu ab paralleler Achse A erzielt, der Leitkreis K dieses Cylinders ist um die Achse mn in die Horizontalebene umgelegt und erscheint in K_3 .

Die Vertikalebene ac und bc durchschneiden diesen Cylinder nach Ellipsenstücken, deren Aufrisse sich in a_2c_2 und b_2c_2 projizieren und deren Punkte mittels der Umlegung K_3 sich bestimmen ($c_1c_3 = m_3c_2$). Die vertikale, zur **Pr. Eb.** E_2 parallele Mauer ist von einem zur **Pr. Eb.** E_2 senkrechten Kreisylinder mit der Leitlinie B durchbrochen. Die beiden Cylinder-

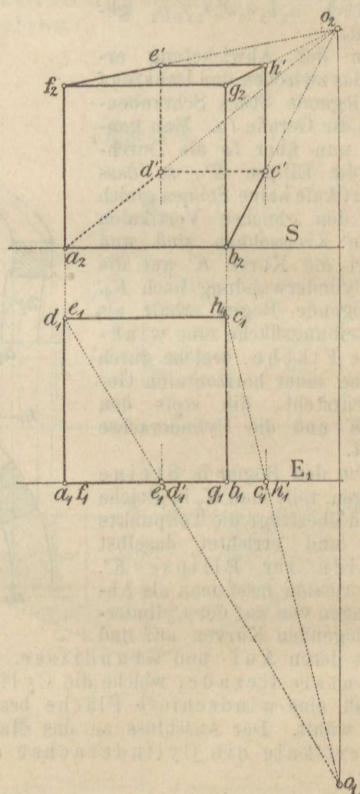
Centralprojektion des Körpers. Ist der gewählte Punkt o das Auge des Beschauers und die **Pr. Eb.** eine vor dem Beschauer aufgestellt gedachte vertikale Ebene, hinter welcher der Körper sich befindet, so heisst die Centralprojektion das perspektivische Bild oder die Perspektive des Körpers. Die Projektionsebene führt in diesem Falle zweckmässig die Bezeichnung Bildebene oder Bildtafel.

Ist z. B. in Figur 178 ein Würfel durch Grund- und Aufriss gegeben und fällt die Bildebene mit der vorderen Begrenzungsfläche des Würfels zusammen, während durch $o_1 o_2$ das Auge dargestellt ist, so ergibt sich, wenn man von allen Eckpunkten des Würfels nach dem Auge o Strahlen zieht und deren Schnittpunkte mit der Bildebene aufsucht, das perspektivische Bild des Würfels, so wie Figur 179 dies zeigt.

Figur 178.



Figur 179.



Der Punkt o_2 , d. i. die rechtwinklige Projektion des Auges auf die Bildebene heisst der Augpunkt. Die Entfernung des Auges von der Bildebene heisst die Distanz. Die Projizierende des Punktes o , d. h. die Senkrechte von o auf die Bildebene heisst der Hauptstrahl. Aus der Figur 179 lassen sich eine Reihe von Sätzen ableiten, deren Kenntnis bei der Ausführung von perspektivischen Konstruktionen von Wichtigkeit ist.

187) Man erkennt, dass die Figur $c'd'e'h'$ ein Quadrat ist, aber mit kleinerem Flächeninhalt als jener des Quadrates $a_2 b_2 f_2 g_2$; allgemein kann

man sagen: „Das perspektivische Bild einer zur Bildebene parallelen Figur ist stets eine derselben ähnliche Figur.“

Die übrigen Begrenzungsflächen des Würfels erscheinen im perspektivischen Bilde als Trapeze. Wie man sieht, schneiden sich die Linien a_2d' , b_2c' , f_2e' und g_2h' in dem Augpunkte o_2 . Die genannten Linien sind aber die perspektivischen Bilder von Geraden, welche auf der Bildebene senkrecht stehen. Man kann also sagen: „Die perspektivischen Bilder aller auf der Bildebene senkrechten geraden Linien schneiden sich im Augpunkt.“

Die Geraden a_2f_2 , b_2g_2 , $d'e'$, $e'h'$ sind die Bilder von vertikalen Geraden und bleiben vertikal; die Geraden a_2b_2 , f_2g_2 , $d'e'$, $e'h'$ sind die Bilder von „horizontalen und zur Bildebene parallelen“ Geraden, sie bleiben im perspektivischen Bilde gleichfalls horizontal.

Zieht man durch den Augpunkt o_2 eine Horizontale H , so stellt diese die Perspektive einer unendlich fernen, horizontalen und zur Bildebene parallelen Geraden dar; die Linie H nennt man die Horizontlinie oder auch den Horizont.

Die Schnittlinie S der Bildebene mit der Horizontalebene, d. i. die X -Achse, soll für die Folge kurz die Grundlinie genannt werden.

b) Aufgaben.

188) **Aufgabe 105.** Ein senkrechter Kreiscylinder, dessen Grundkreis in der Horizontalebene aufliegt, ist durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll die Perspektive konstruieren unter der Voraussetzung, dass die Bildebene mit einer Tangentialebene des Cylinders zusammenfällt.

Auflösung. Man nimmt auf den Begrenzungskreisen des Cylinders eine Anzahl Punkte an, etwa dadurch, dass man jeden Kreis in sechzehn gleiche Teile teilt (in der Figur 180 sind nur acht gleiche Teile angenommen), und von den Teilpunkten Strahlen nach dem Auge zieht, die Grundrisse dieser Strahlen treffen die Bildebene E_1 in Punkten, welche auf die Aufrisse zu projizieren sind.

189) **Aufgabe 106.** Ein senkrechter Kreiskegel, der mit seiner Grundfläche in der Horizontalebene liegt, ist gegeben. Man soll die Perspektive konstruieren, wenn die Bildebene den Grundkreis des Kegels berührt.

Auflösung. Man teilt den Grundkreis wieder in eine Anzahl gleicher Teile, etwa acht, siehe Figur 181, und bestimmt die Perspektiven der einzelnen Punkte, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

190) **Aufgabe 107.** Man zeichne die Perspektive

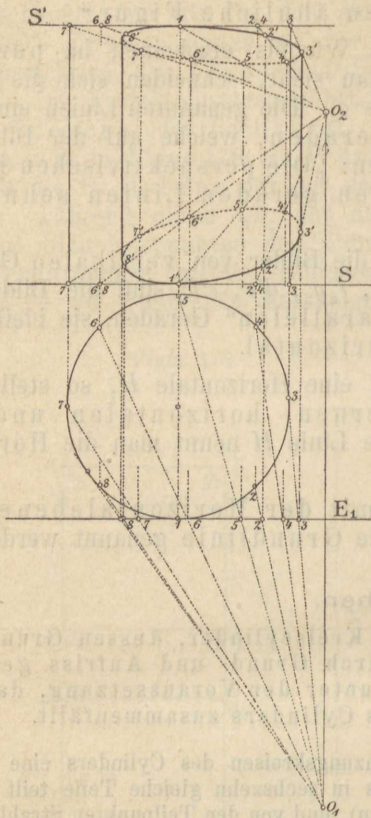
- a) eines senkrechten Prismas, dessen Grundfläche von einem regelmässigen Vieleck begrenzt ist,
- b) einer Pyramide, deren Grundfläche gleichfalls ein regelmässiges Vieleck sein soll.

2) Durchschnitts- und Fluchtpunktmethode.

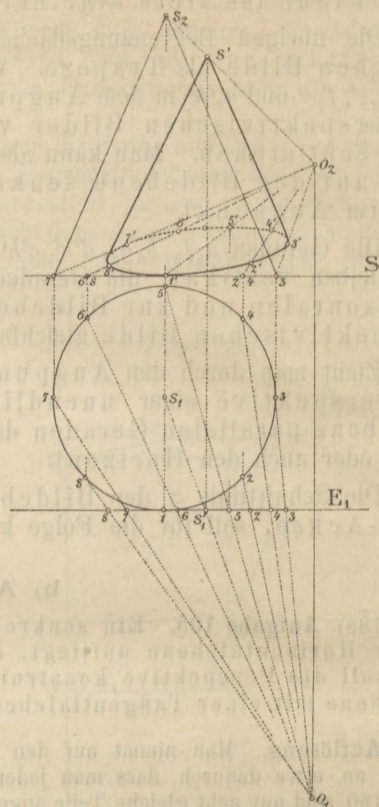
a) Allgemeine Bemerkungen.

191) Auf Grund des Bisherigen könnte man das perspektivische Bild eines jeden Körpers auf einfache Weise konstruieren; es sollen aber in Folgendem noch weitere Sätze, welche zu Konstruktionsvereinfachungen führen, angegeben werden.

Figur 180.



Figur 181.



Hat der Würfel eine Lage zur Bildebene, wie in Figur 182, so gelangt man auf die gleiche Weise wie bisher zum perspektivischen Bilde; es erscheinen aber jetzt die Bilder von sämtlichen Begrenzungsflächen als Trapeze.

Verlängert man die Linien a_2b' , $d'e'$, $e'h'$, $f'g'$, so begegnen sich dieselben in einem Punkte q' auf dem Horizonte, desgleichen schneiden sich die Linien a_2d' , $b'e'$, $e'f'$, $h'g'$ in einem Punkte p' , der gleichfalls auf dem Horizonte liegt; die Linien a_2f' , $b'g'$, $c'h'$, $d'e'$ sind dagegen wieder zu einander parallel.

Man erhält folgenden Satz: „Die perspektivischen Bilder von horizontalen parallelen Geraden schneiden sich in einem Punkte des Horizontes.“

Diesen Punkt nennt man den Fluchtpunkt oder auch den Verschwindungspunkt der parallelen Geraden.

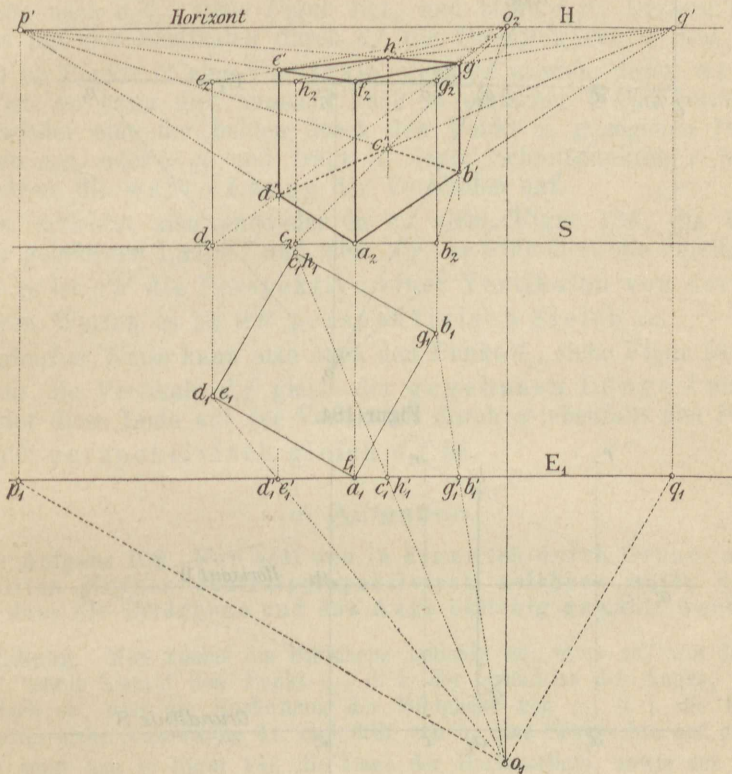
Denkt man sich eine Gerade unbegrenzt, d. h. unendlich lang, so versteht man unter dem Verschwindungspunkt auch das perspektivische Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden und man erhält ihn als den Durchschnittspunkt eines Parallelstrahles durch das Auge zu der gegebenen Geraden mit der Bildebene.

Zieht man also beispielsweise durch o_1 , siehe Figur 182, eine Parallele zu den Linien f_1b_1 und d_1e_1 , so geben diese den Punkt q_1 , dessen vertikale Projektion q' auf H den Fluchtpunkt der perspektivischen Bilder der Würfelkanten ab , cd , fg und eh darstellt. Durch eine Parallele durch o_1

zu a_1d_1 ergibt sich p_1 , dem auf H der Punkt p' als Fluchtpunkt der Würfelkanten bc , ad , ef und hg entspricht.

Der oben angegebene Satz lässt sich nunmehr auch so aussprechen: „Die Fluchtpunkte von horizontalen parallelen Geraden liegen stets auf dem Horizonte.“

Figur 182.



b) Spezielle Konstruktionen.

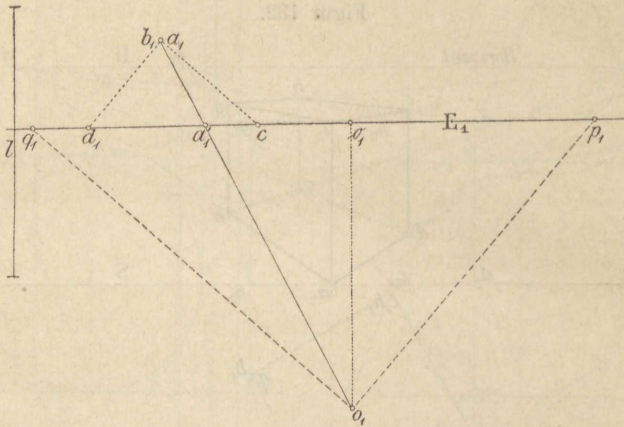
192) Das perspektivische Bild des in Figur 182 durch Grund- und Aufriss dargestellten Würfels ergibt sich jetzt in folgender bequemen Weise: Man bestimmt die Fluchtpunkte der horizontalen Würfelkanten, indem man durch o_1 zu den Würfelkanten Parallele zieht und deren Schnittpunkte mit der Bildebene auf den Horizont H projiziert. Liegt wie im vorliegenden Falle eine Würfelkante af in der Bildebene, so zieht man durch die Endpunkte a_2 und f_2 dieser Kante nach den Fluchtpunkten p' und q' , hierauf durch die Grundrisse der Würfelkanten nach o_1 und projiziert die Schnittpunkte dieser Strahlen mit der Bildebene auf die perspektivischen Bilder der entsprechenden Würfelkanten. Hierdurch ergeben sich zunächst die Punkte b', g', d' und e' , wodurch auch die noch fehlenden Ecken c' und h' bestimmt sind.

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung müssen die Punkte c' und h' senkrecht über $c_1'h_1'$ liegen.

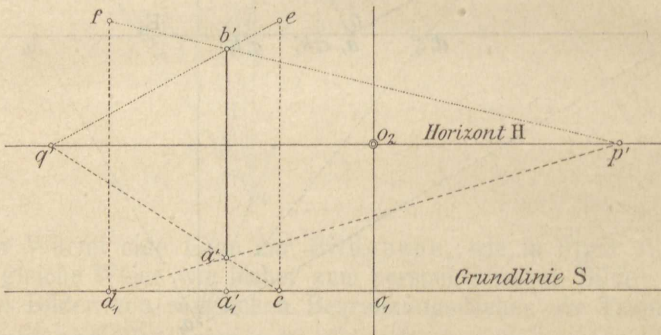
193) Bisher wurde das perspektivische Bild eines Körpers ermittelt mit direkter Benützung des Grund- und Aufrisses des Körpers.

In der Regel soll aber die perspektivische Zeichnung getrennt vom Grund- und Aufrisse auf einem besonderen Blatte angefertigt werden, wobei man freilich die zur Konstruktion des Bildes erforderlichen Ausmasse dem Grund- bzw. Aufriss des Körpers entnimmt.

Figur 183.



Figur 184.



Zur Ermittlung der Perspektive eines Punktes kann man dann stets folgendes einfache Verfahren anwenden:

Ist E_1 die Bildebene, siehe Figur 183, und a_1 der Grundriss eines in der Horizontalebene liegenden Punktes a , so wählt man das Auge in einer beliebigen Entfernung von der Bildebene, etwa so, dass der Grundriss desselben mit o_1 zusammenfällt und setzt die Horizontlinie H , die Grundlinie S und den Augpunkt o_2 , etwa so, wie in Figur 184, fest.

Zieht man jetzt, siehe Figur 183, die Linie $o_1 p_1$ beliebig und senkrecht zu ihr die Gerade $o_1 q_1$, so stellen die Punkte p_1 und q_1 die Fluchtpunkte für alle zu den Geraden op und pq parallelen Geraden dar. Man überträgt die Fluchtpunkte p_1 und q_1 aus Figur 183 auf den Horizont in Figur 184 nach p' und q' , indem man die Strecken $\overline{o_2 p'} = \overline{o_1 p_1}$ und $\overline{o_2 q'} = \overline{o_1 q_1}$ abträgt.

194) Soll nun die Perspektive eines beliebigen Punktes der Horizontal Ebene, z. B. des Punktes a_1 , siehe Figur 183, bestimmt werden, so zieht man durch a_1 den Strahl $o_1 a_1$ nach dem Auge o_1 , überträgt die Strecke $\overline{o_1 a_1'}$, siehe Figur 183, nach $\overline{o_1 a_1'}$, siehe Figur 184; auf der Vertikalen durch a_1' liegt dann die Perspektive des Punktes a .

Zieht man ferner durch a_1 , s. Figur 183, eine Parallele zu einer der beiden Geraden o_1p_1 oder o_1q_1 etwa zu o_1q_1 , so trifft diese die Bildebene in c_1 und man erhält die Perspektive von ac , wenn man die Strecke $\overline{o_1c}$, s. Figur 183, nach $\overline{o_1c}$, siehe Figur 184, überträgt und cq' zieht; diese Verbindungslinie schneidet auf der Vertikalen durch a_1' die Perspektive a' des Punktes a aus. Man kann aber auch die Parallele a_1d_1 zu o_1p_1 benützen; man überträgt $\overline{o_1d_1}$, siehe Figur 183, nach $\overline{o_1d_1}$, siehe Figur 184, und zieht d_1p' ; letztere Linie liefert gleichfalls auf der Vertikalen durch a_1' die Perspektive a' des Punktes a .

Soll im Punkte a' eine Vertikale errichtet werden, deren wahre Länge gegeben ist, so kann dies nunmehr auch in einfacher Weise geschehen. Man benützt wieder eine der beiden durch den Punkt a_1 gezogenen Parallelen zu den Linien o_1p_1 oder o_1q_1 und trägt in deren Schnittpunkten c bzw. d_1 mit der Bildebene die wahre Länge der Vertikalen auf.

Man errichtet also entweder in c , siehe Figur 184, die Vertikale \overline{ce} gleich der gegebenen Länge l und zieht eq' , so trifft diese die Vertikale durch a' in b' und es ist $\overline{a'b'}$ die Perspektive einer Vertikalen von der Länge \overline{ce} , mit anderen Worten es ist $\overline{a'b'}$ perspektivisch gleich \overline{ce} .

In gleicher Weise kann man auch den Punkt d_1 , siehe Figur 183, benützen. Man macht die Vertikale $\overline{d_1f}$ gleich der gegebenen Länge l und zieht fp' , so schneidet diese Linie auf der Vertikalen durch a' ebenfalls den Punkt b' aus, so dass $\overline{a'b'}$ perspektivisch gleich $\overline{d_1f}$ ist.

c) Aufgaben.

195) **Aufgabe 108.** Man soll den in Figur 185 durch Grund- und Aufriss dargestellten Körper centralperspektivisch zeichnen unter der Voraussetzung, dass die Bildebene und das Auge beliebig gewählt werden können.

Auflösung. Man nimmt die Bildebene beliebig an, etwa so, wie die Figur 185 dies zeigt, wählt hierauf den Punkt o_1 , d. i. der Grundriss des Auges, ebenfalls beliebig, jedoch so, dass die Entfernung der Bildebene von o_1 , d. i. die Distanz nicht zu klein wird, siehe Anmerkung 41, und fällt von o_1 eine Senkrechte auf die Bildebene.

Man setzt nun in Figur 186 die Lage der Horizontlinie, sowie der Grundlinie S fest und wählt auf H den Augpunkt o_2 . Durch den Grundriss o_1 , siehe Figur 185, zieht man die Parallelen zu den Linien a_1b_1 und a_1d_1 und erhält hierdurch die Fluchtpunkte p_1 und q_1 , siehe Anmerkung 40, welche auf den Horizont in Figur 186 nach p' und q' zu übertragen sind.

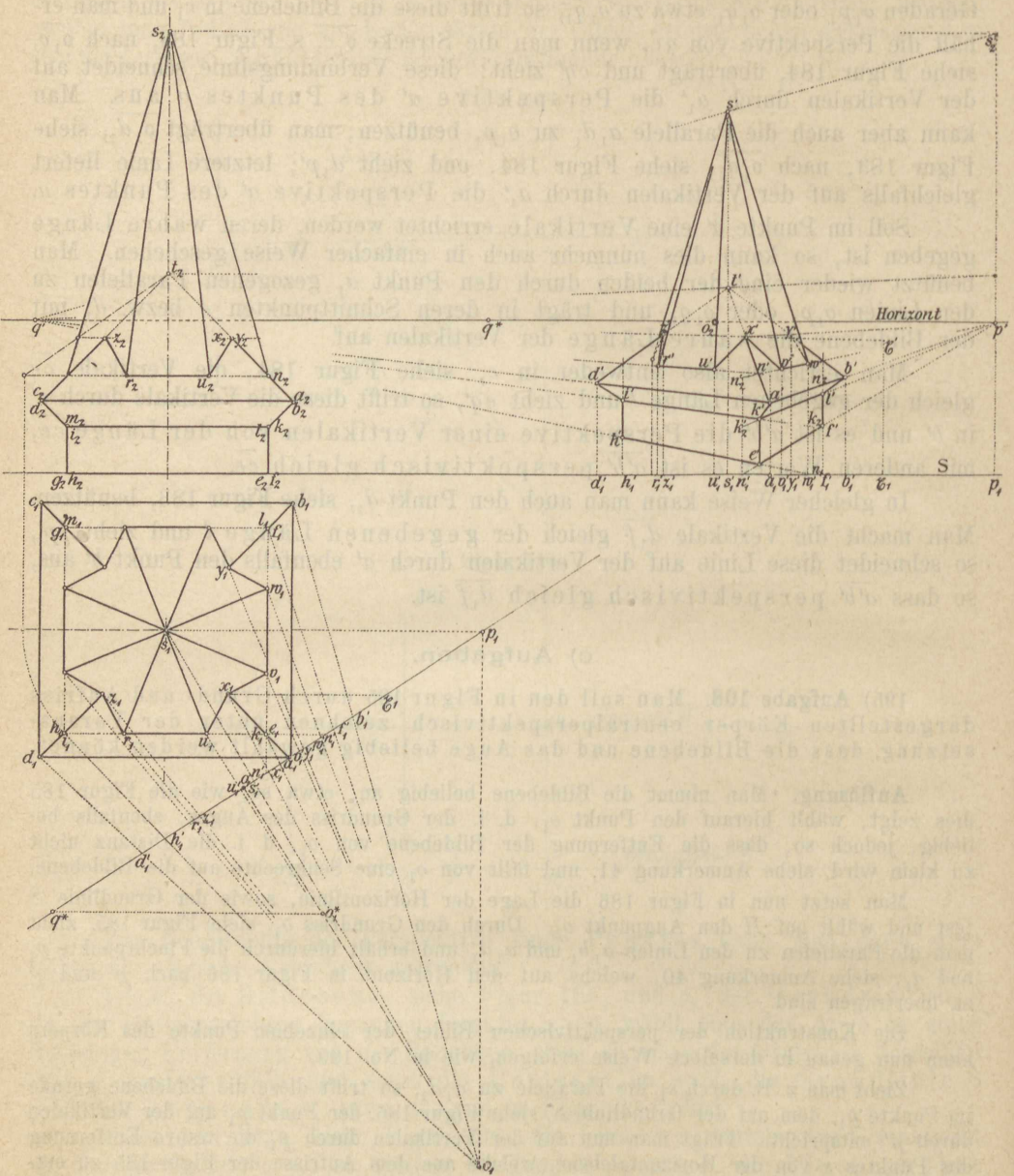
Die Konstruktion der perspektivischen Bilder der einzelnen Punkte des Körpers kann nun genau in derselben Weise erfolgen, wie in No. 193.

Zieht man z. B. durch s_1 die Parallele zu a_1d_1 , so trifft diese die Bildebene gerade im Punkte p_1 , dem auf der Grundlinie S , siehe Figur 186, der Punkt p_1 auf der Vertikalen durch p' entspricht. Trägt man nun auf der Vertikalen durch p_1 die wahre Entfernung des Punktes s von der Horizontalebene, welche aus dem Aufrisse der Figur 185 zu entnehmen ist, nach $\overline{p_1s_2'}$, siehe Figur 186, ab, so liegt auf der Linie $q's_2'$ die Perspektive s' des Punktes s . Zieht man aber ausserdem noch in Figur 185 den Strahl os_1 , welcher die Bildebene in s_1' schneidet, und überträgt die Strecke $\overline{p_1s_1'}$ von Figur 185 nach $\overline{p_1s_1'}$, siehe Figur 186, so liegt auf der Vertikalen durch s_1' gleichfalls die Perspektive s' von s . In der gleichen Weise sind die Perspektiven aller Punkte des Körpers konstruiert worden.

Anmerkung 40. Die Parallele durch o_1 zu a_1d_1 schneidet die Bildebene in einem Punkte q_1 , der ausserhalb der Grenzen der Zeichenfläche liegt; es ist aus diesem Grunde auf der Senkrechten o_1o_1 der Punkt o_1^* in halber Distanz gewählt und durch o_1^* die Parallele $o_1^*q^*$ zu a_1d_1 gezogen. Man erhält dann q' auf dem Horizont H in Figur 186, wenn man $\overline{o_2q'} = 2 \cdot \overline{o_1o_1^*}$ abträgt.

Figur 185.

Figur 186.



Anmerkung 41. Zweckmässig soll die Distanz nicht kleiner sein, als die grösste Längenausdehnung am Körper. Manchmal nimmt man jedoch die Distanz auch gleich der einundeinhalb- bis zweifachen grössten Ausdehnung. Es genügt aber in der Regel der zuerst angegebene Wert. Im vorliegenden Beispiele ist die Distanz etwas grösser als die Höhe des Körpers angenommen worden. Bei der Wahl des Standpunktes des Beobachters ist darauf zu sehen, dass man von ersterem aus die sichtbaren Flächen des Körpers bequem übersehen kann und keine derselben eine zu bedeutende Verkürzung, d. h. Verzerrung erleidet. Was schliesslich die Höhe des Auges über der Horizontalebene anbelangt, so ist diese im allgemeinen beliebig, bei Gebäudeperspektiven aber in der Regel gleich der Höhe eines erwachsenen Menschen, d. i. ca. 1,5 m bis 2,0 m zu

nehmen. Selbstverständlich ist eine grössere Augenhöhe nicht ausgeschlossen und richtet sich diese dann nach dem Standpunkte des Beobachters.

3) Distanzpunktmethode unter Anwendung der ganzen Distanz.

a) Allgemeine Bemerkungen.

196) Zieht man, siehe Figur 187, durch den Grundriss o_1 des Auges die Geraden o_1d_1 und o_1d_1' je unter 45° zur Bildebene geneigt und überträgt die Punkte d_1 und d_1' nach d und d' auf den Horizont, siehe Figur 188, so stellen die Punkte d und d' die Fluchtpunkte von horizontalen, zur Bildebene unter 45° geneigten Geraden dar; sie liegen auf dem Horizonte H und ihre Entfernung vom Augpunkt o_2 ist gleich der Distanz.

Will man die Perspektive eines Punktes a der Horizontalebene konstruieren, so zieht man durch den Grundriss a_1 die Gerade a_1e_1 unter 45° zur Bildebene geneigt, überträgt die Strecke o_1e_1 , siehe Figur 187, nach o_1e , siehe Figur 188, und zieht von e nach dem linksseitigen Distanzpunkt d' .

Zieht man ferner durch a_1 eine Senkrechte a_1c_1 zur Bildebene, überträgt die Strecke o_1c_1 , siehe Fig. 187, nach o_1c_1 , siehe Fig. 188, so schneidet die Verbindungslinie o_2c_1 auf ed' die gesuchte Perspektive a' des Punktes a aus.

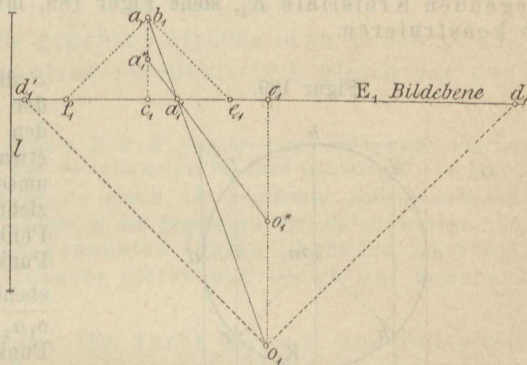
Man hätte selbstverständlich auch die Linie a_1f_1 , welche ebenfalls unter 45° zur Bildebene geneigt ist, zur Konstruktion des perspektivischen Bildes von a benutzen können.

Soll in a' eine Vertikale von gegebener Grösse etwa gleich l errichtet werden, so erhält man deren perspektivisches Bild in mehrfacher Weise.

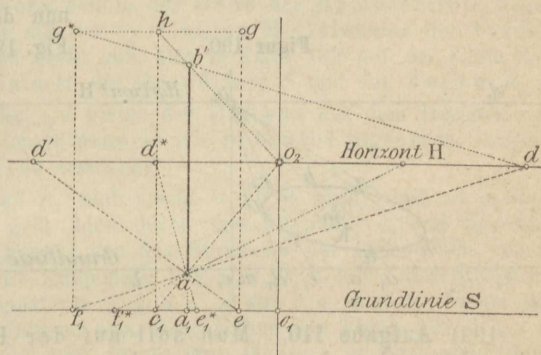
Man trägt entweder in c_1 , siehe Figur 188, die Vertikale c_1h in der gegebenen Grösse gleich l auf, so schneidet die Linie o_2h auf der Vertikalen durch a' die perspektivische Länge $a'b'$ ab, oder man errichtet in dem Punkt e bzw. f_1 die Vertikale eg bzw. f_1g^* , so geht die Verbindungslinie gd' bzw. g^*d gleichfalls durch die Perspektive b' , so dass $a'b'$ perspektivisch gleich der gegebenen Strecke ist.

197) Infolge der Neigung der Linien a_1e_1 und a_1f_1 , siehe Figur 187, zur Bildebene ist offenbar $c_1e_1 = c_1f_1 = c_1a_1$ gleich dem Abstände des Punktes a von der Bildebene. Auf Grund dieser Beziehung lässt sich vorstehend angeführte

Figur 187.



Figur 188.

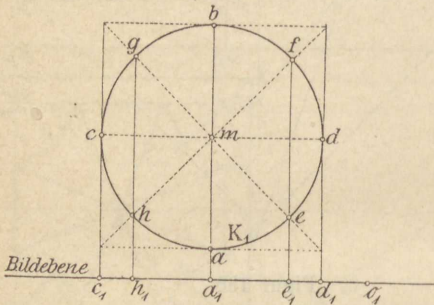


Konstruktion der Perspektive eines Punktes a der Horizontalebene noch etwas vereinfachen. Man überträgt nämlich die Strecke $\nu_1 c_1$ aus Figur 187 nach $\overline{\nu_1 c_1}$ in Figur 188 und zieht $c_1 o_2$. Macht man nun in Figur 188 $c_1 e$ oder $c_1 f_1 = c_1 a_1$ in Figur 187, gleich dem Abstände des Punktes a , von der Bildebene, so braucht man nur von e oder f_1 nach den Distanzpunkten d' bzw. d zu ziehen, um im Schnittpunkte dieser Linien mit $c_1 o_2$ die Perspektive a' des Punktes a zu erhalten. Das Auftragen einer Vertikalen von bestimmter Grösse geschieht in gleicher Weise wie vorhin.

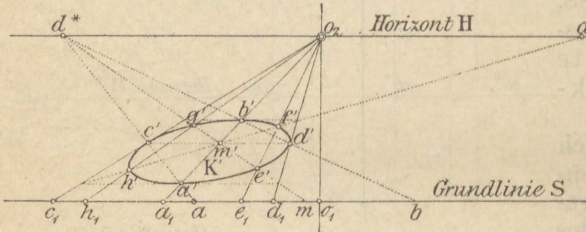
b) Aufgaben.

198) Aufgabe 109. Es ist die Perspektive einer in der Horizontalebene liegenden Kreislinie K_1 , siehe Figur 189, mittelst der Distanzpunktmethode zu konstruieren.

Figur 189.



Figur 190.



Auflösung. Ist H der Horizont, S die Grundlinie und o_2 , siehe Figur 190, der Augpunkt, so teilt man in Figur 189 den Kreis K_1 in eine Anzahl gleicher Teile, etwa dadurch, dass man ihm ein Quadrat umschreibt und in letzterem die Diagonalen zieht; man erhält dann auf dem Kreise acht Punkte a, b, c, d, e, f, g, h . Durch diese Punkte fällt man Senkrechte auf die Bildebene und überträgt die Strecken $\nu_1 d_1, \nu_1 e_1, \nu_1 a_1, \nu_1 h_1, \nu_1 c_1$ in Figur 189 von dem Punkte ν_1 der Fig. 190 auf die Grundlinie S nach $\nu_1 d_1 \dots \nu_1 c_1$. Durch die so erhaltenen Punkte zieht man nach o_2 . Macht man nun die Strecken $\overline{a_1 a}, \overline{a_1 m}, \overline{a_1 b}$ auf S in Fig. 190 gleich den Strecken $\overline{a_1 a}, \overline{a_1 m}, \overline{a_1 b}$ in Figur 189, so schneiden die Linien ad^*, md^* und bd^* die Perspektiven a', c', e', m', g', d' und b' aus.

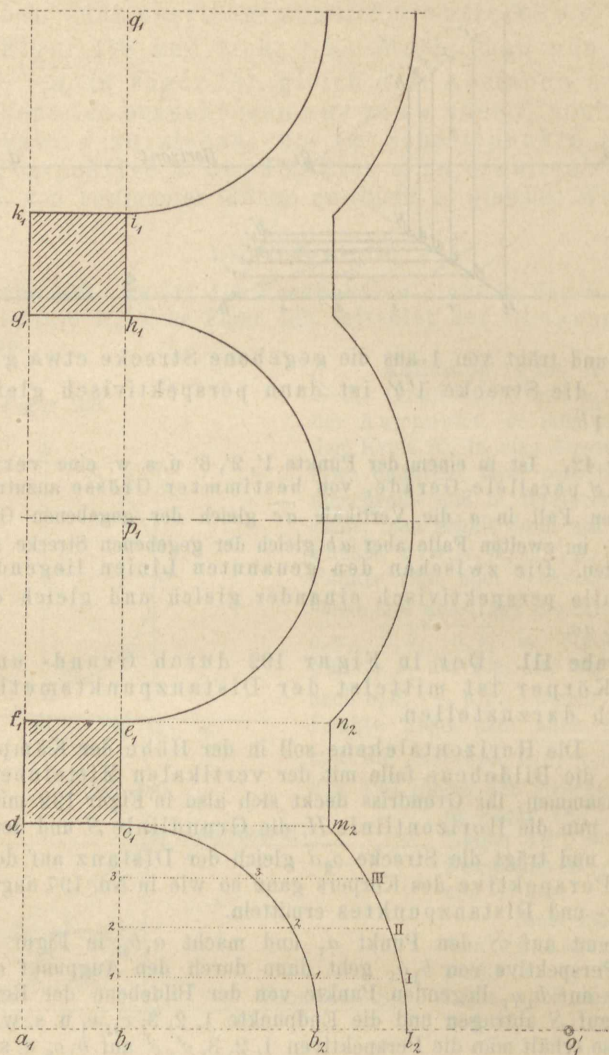
Zieht man durch m' nach dem rechtsseitigen Distanzpunkt d , so liegen auf dieser Linie noch die Perspektiven f' und h' .

199) Aufgabe 110. Man soll auf der Perspektive einer zur Bildtafel senkrechten Geraden eine Strecke von gegebener Länge von einem ihrer Punkte aus perspektivisch abtragen und die Strecke dann perspektivisch in gleiche Teile teilen.

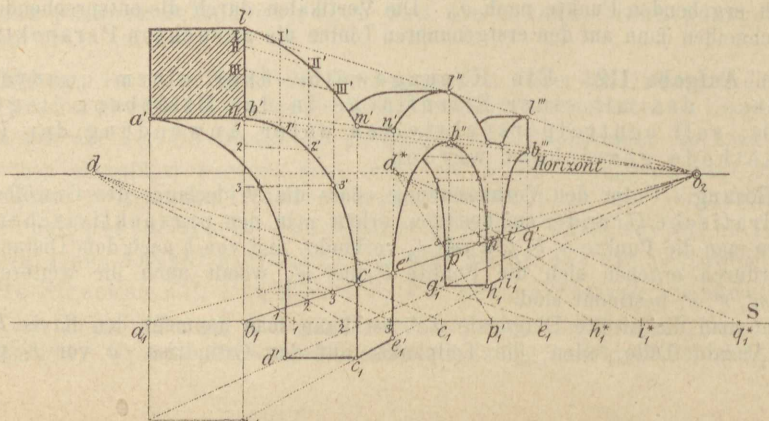
Auflösung. Ist o_2 , s. Figur 191, der Augpunkt, H der Horizont, S die Grundlinie und ao_2 das perspektivische Bild einer zur Bildebene senkrechten Geraden und ist etwa von a aus auf ao_2 die Strecke \overline{ab} perspektivisch abzutragen, so kann dies nach früherem schon ausgeführt werden; man trägt auf S die Strecke \overline{ab} nach rechts an und zieht durch b nach dem linksseitigen Distanzpunkt d' . Will man nun die Strecke $\overline{ab'}$ perspektivisch in eine Anzahl gleicher Teile teilen, so teilt man \overline{ab} auf S in diese Anzahl gleicher Teile und verbindet die Teilpunkte mit d' , so sind die Strecken $\overline{a'1'}, \overline{1'2'}, \overline{2'3'}, \overline{3'4'}, \overline{4'b'}$ perspektivisch einander gleich.

Soll von einem nicht auf S liegenden Punkte, etwa vom Punkte $1'$ eine Strecke von bestimmter Grösse abgetragen werden, so zieht man zunächst $d'1'$ bis zum

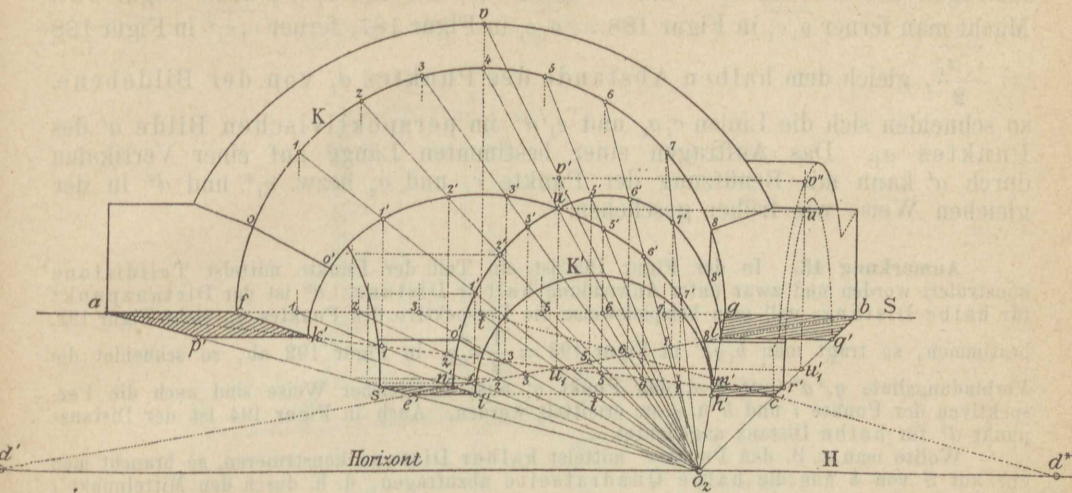
Figur 192.



Figur 193.



Figur 194.



und nun durch die ersteren und letzteren Punkte Strahlen nach dem Augpunkte zeichnen. Letztere treffen die perspektivischen Grundrisse der Gratbögen in Punkten 1, 2, 3, ... Die Vertikalen durch diese Punkte schneiden die nach dem Augpunkte durch die gleichnamigen Teilpunkte von K gezogenen Verbindungslinien in Punkten $1', 1', 3'$, welche der Perspektive der Gratbögen angehören. Der hintere zu K parallele Wandbogen stellt sich in der Perspektive als Halbkreis K' mit dem Mittelpunkt t' und dem Durchmesser $i'h'$ dar.

Die Punkte der beiden seitlichen Wandbögen erhält man durch Ziehen von Parallelen zu S durch die Punkte 1, 2, 3, ... der Grundrisse der Gratbögen; diese schneiden die Grundrisse der Wandbögen in Punkten, in welchen Vertikale gleich den entsprechenden Kreisbögen zu errichten sind. So liefert die Parallele durch u_1 zu S auf bo_2 den Punkt u_1' . Die Vertikale durch u_1' und die Horizontale durch u' schneiden sich im Punkte u'' , welcher dem Wandbogen über bc' angehört.

4) Distanzpunktmethode unter Anwendung einer Teildistanz.

a) Allgemeine Bemerkungen.

202) Sehr häufig ist die Distanz, für welche das perspektivische Bild eines Körpers konstruiert werden soll, so gross, dass die Distanzpunkte auf dem Horizonte über die zur Verfügung stehende Zeichenfläche hinausfallen, d. h. unzugänglich werden; in diesem Falle kann man unter Benützung eines aliquoten Teiles der Distanz zum perspektivischen Bilde eines Punktes wie folgt gelangen:

Zieht man, siehe Figur 187, den Strahl o_1a_1 , so ist a_1' der Grundriss des perspektivischen Bildes des Punktes a_1 .

Wählt man nun auf dem Hauptstrahle o_1o_1 den Punkt o_1^* in der Mitte der Strecke o_1o_1 und zieht von o_1^* nach a_1' , so liefert dieser Strahl auf der Senkrechten a_1c_1 den Punkt a_1^* , dessen Abstand von der Bildebene halb so gross ist, als jener des Punktes a_1 .

Verschiebt man also das Auge auf dem Hauptstrahle, so bleibt das perspektivische Bild eines Körpers ungeändert, wenn man auch den Körper in demselben Verhältnisse der Bildebene nähert, in welchem dies für das Auge geschehen ist.

Für den Punkt a_1 , siehe Figur 187, ergibt sich also unter Anwendung der halben Distanz zunächst in Figur 188 der Distanzpunkt d^* durch

Abtragen der Strecke $\overline{o_2 d^*}$ auf H gleich der Strecke $\overline{o_1 o_1^*}$, siehe Figur 187. Macht man ferner $\overline{o_1 c_1}$ in Figur 188 $= \overline{o_1 c_1}$ in Figur 187, ferner $c_1 e_1^*$ in Figur 188 $= \frac{c_1 a_1}{2}$, gleich dem halben Abstände des Punktes a_1 von der Bildebene, so schneiden sich die Linien $c_1 o_2$ und $e_1' d^*$ im perspektivischen Bilde a' des Punktes a_1 . Das Auftragen einer bestimmten Länge auf einer Vertikalen durch a' kann mit Benützung der Punkte c_1 und o_2 bzw. e_1^* und d^* in der gleichen Weise wie früher geschehen.

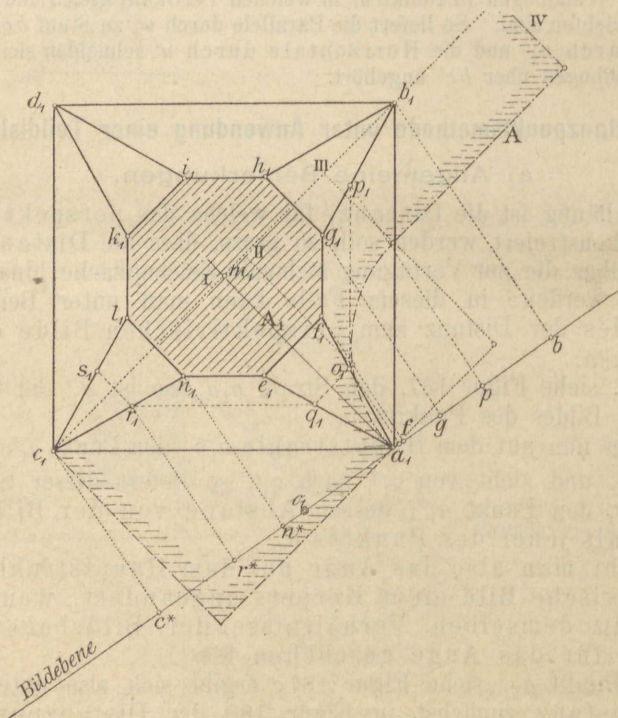
Anmerkung 43. In der Figur 193 ist ein Teil der Punkte mittelst Teildistanz konstruiert worden und zwar unter Anwendung halber Distanz. d^* ist der Distanzpunkt für halbe Distanz; will man beispielsweise die Perspektive des Punktes q_1 , siehe Figur 192, bestimmen, so trägt man $\overline{b_1 q_1^*}$ in Figur 193 $= \frac{1}{2} \overline{b_1 q_1}$ in Figur 192 ab, so schneidet die Verbindungslinie $q_1^* d^*$ auf $b_1 o_2$ den Punkt q' aus; in gleicher Weise sind auch die Perspektiven der Punkte i und h u. s. w. ermittelt worden. Auch in Figur 194 ist der Distanzpunkt d^* für halbe Distanz angedeutet.

Wollte man z. B. den Punkt c' mittelst halber Distanz konstruieren, so braucht man nur auf S von b aus die halbe Quadratseite abzutragen, d. h. durch den Mittelpunkt t von \overline{ab} nach d^* zu ziehen, so trifft diese Linie die Linie $b o_2$ in c' u. s. w.

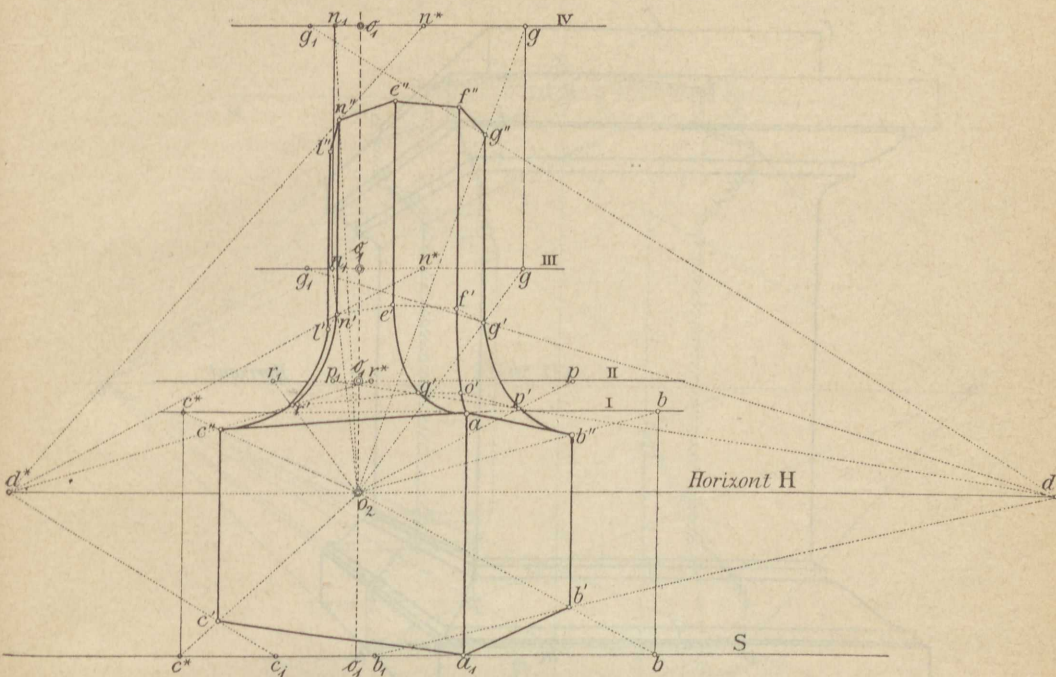
b) Aufgaben.

203) **Aufgabe 113.** Der in Figur 195 durch Grundriss und im Profil A dargestellte Körper ist mittelst der Distanzpunktmethode unter Anwendung von ganzer oder halber Distanz centralperspektivisch darzustellen.

Figur 195.



Figur 196.



Auflösung. Der Körper ist durch Horizontalebenen 0, I, II, III, IV durchschnitten und sind die in diesen Ebenen liegenden Schnittfiguren mittelst der Distanzpunktmethode centralperspektivisch dargestellt; dabei ist angenommen, dass die Schnittlinie der Horizontalebene 0 mit der Grundlinie S zusammenfällt. Die Konstruktion der Punkte b', b'', p', g', g'' mittelst der ganzen Distanz, die der Punkte c', c'', r', n', n'' mittelst der halben Distanz ist in der Zeichnung, siehe Figur 196, dargestellt.

$\overline{o_2 d}$ ist gleich der ganzen, $\overline{o_2 d^*}$ gleich der halben Distanz.

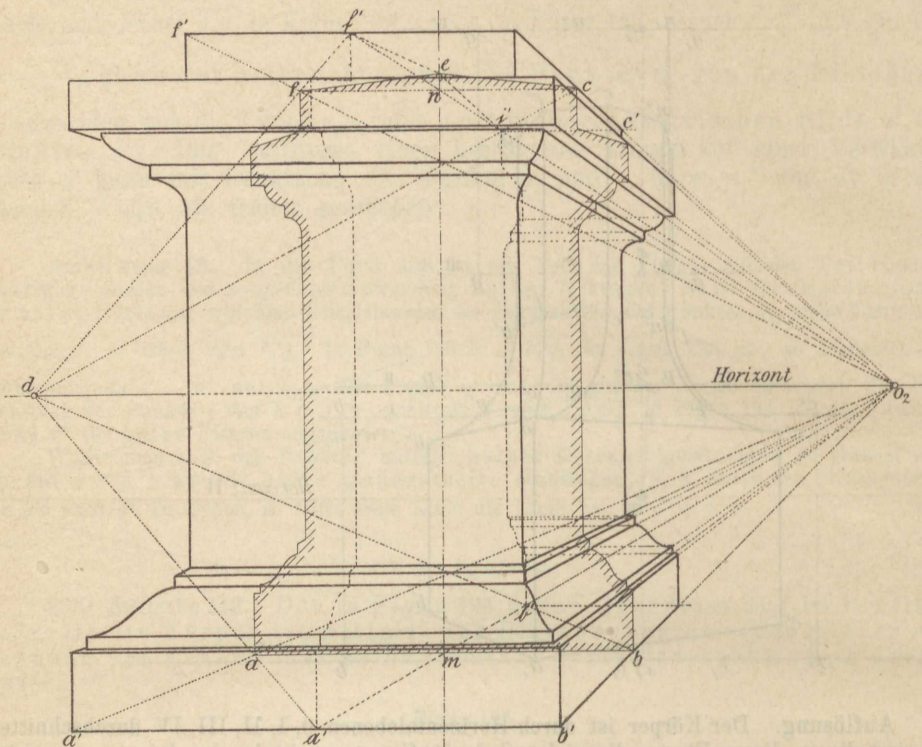
5) Konstruktion der Perspektive eines Körpers aus dem sogenannten mittleren Profile.

204) Die Distanzpunktmethode ist besonders geeignet zur Herstellung des perspektivischen Bildes eines Körpers, wenn letzterer eine zur Bildebene parallele Symmetrieebene besitzt. In diesem Falle kann man mittelst der in dieser Symmetrieebene liegenden Schnittfigur, welche man das mittlere Profil des Körpers nennen kann, sehr einfach die Perspektive des Körpers erhalten, wenn man in den einzelnen Punkten des Profils Senkrechte zur Profilebene errichtet und auf diesen nach beiden Seiten je die halbe Körpertiefe perspektivisch abträgt.

Ist z. B., siehe Figur 197, durch $abcef$ das mittlere Profil eines Postamentes gegeben, so erhält man, wenn man den Horizont, Augpunkt und Distanzpunkt, wie gegeben, annimmt und die Horizontalschnitte durch den Körper als Quadrate voraussetzt, das perspektivische Bild des Körpers wie folgt:

Man zieht durch den Mittelpunkt m der Strecke \overline{ab} eine Linie nach dem Augpunkt o_2 und durch die Punkte a und b Linien nach dem Distanzpunkt d , so ergeben sich hierdurch die Punkte a' und b' . Die Parallelen durch a' und b'

Figur 197.



zum Horizont treffen die von den Punkten a und b nach dem Augpunkt o_2 gezogenen Strahlen in den Perspektiven a' , b' u. s. w. der Eckpunkte des untersten Quadrates; in gleicher Weise bestimmt man für jeden Horizontalschnitt die Perspektive des zugehörigen Quadrates. In der Figur 197 ist die Konstruktion noch für das in der Horizontalebene fc liegende Quadrat angedeutet.

Anmerkung 44. Dass man die in No. 204 bezeichnete Methode auch unter Benützung einer Teildistanz anwenden kann, ist klar.

205) **Aufgabe 114.** Man konstruiere das perspektivische Bild des in Figur 197 durch sein mittleres Profil gegebenen Körpers unter Anwendung einer Teildistanz gleich ein Drittel der ganzen Distanz.

6) Konstruktion der Perspektive eines Punktes mittelst der Teilungs- und Fluchtpunktmethode.

a) Allgemeine Bemerkungen (Teilungspunkt).

206) Ist a_1 ein Punkt der Horizontalebene, siehe Figur 198, so kann man die Perspektive a' des Punktes a_1 wie früher in zweifacher Weise mittelst der aufeinander senkrechten Geraden a_1b und a_1c , deren Fluchtpunkte p_1 und q_1 sind, in Figur 199 ermitteln. Aus den Figuren 198 und 199 ergeben sich nun die folgenden Beziehungen:

Es ist in Figur 198:

$$\frac{\overline{p_1 a'_1}}{b a'_1} = \frac{\overline{p_1 o_1}}{b a_1}.$$

gegengesetzte gerichtete Halbmesser, so geht die Verbindungslinie ihrer zweiten Endpunkte stets durch den Punkt a' . Schneidet also der Kreis K den Horizont H in p_t , der Kreis K_1 die Grundlinie S in e , so geht auch die Verbindungslinie ep_t durch die Perspektive a' des Punktes a_1 .

Der Kreis K heisst der Teilungskreis, sein Schnittpunkt p_t auf dem Horizontkreise der Teilungspunkt der Geraden a_1b .

So gibt es auch für die Gerade a_1c einen Teilungspunkt, den man erhält, wenn man, siehe Figur 199, um q' mit dem Halbmesser $\overline{q'o}$ einen Kreis schlägt und seinen Schnittpunkt q_t mit dem Horizonte aufsucht.

207) Mit Benützung des Teilungspunktes erhält man nunmehr folgende einfache Konstruktion der Perspektive eines Punktes a_1 der Horizontalebene.

Man zieht durch a_1 eine beliebige Gerade a_1b , siehe Figur 198, und durch o_1 eine Parallele hierzu. Nun setzt man in Figur 199 die Lage der Grundlinie, des Horizontes und des Augpunktes fest und überträgt den Fluchtpunkt p_1 von Figur 198 nach p' in Figur 199, desgleichen den Punkt b von Figur 198 nach b in Figur 199. Errichtet man nun o_2o senkrecht zu H und gleich der Distanz, macht $\overline{p'p_t} = \overline{p'o}$, so ist p_t der Teilungspunkt für die Gerade a_1b . Man überträgt jetzt die Länge $\overline{ba_1}$ aus Figur 198 nach \overline{be} in Figur 199 und zwar von b aus nach rechts, wenn p_t links von p' liegt und verbindet bp' und ep_t .

Beide Linien treffen sich in der Perspektive a' des Punktes a_1 .

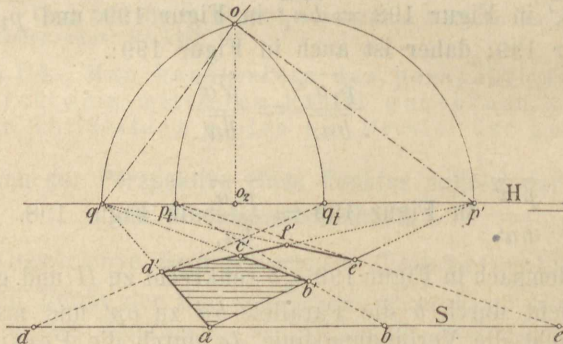
In gleicher Weise hätte man auch mittelst einer Geraden a_1c , siehe Figur 198 und 199 die Perspektive a' des Punktes a_1 bestimmen können.

Die eben angegebene Art des Bestimmens der Perspektive eines Punktes der Horizontalebene nennt man die Teilungs- und Fluchtpunktmethode.

b. Perspektivische Teilung einer horizontalen Geraden.

208) Mittelst des Teilungspunktes kann man nunmehr auch die perspektivische Teilung einer gegen die Bildebene beliebig geneigten horizontalen Geraden in einfacher Weise ausführen.

Figur 200.



Es sei z. B. in Figur 200 Grundlinie, Horizont, Augpunkt und Distanz o_2o einer perspektivischen Darstellung gegeben. Ausserdem das perspektivische Bild $a'p'$ einer Geraden der Horizontalebene. Man soll von a aus auf dem perspektivischen Bilde eine gegebene Strecke ae perspektivisch abtragen.

Man bestimmt nach No. 206 den Teilungspunkt p_i der Gerade ap' und verbindet ep_i , so schneidet diese Linie auf ap' den Punkt e' so aus, dass $\overline{ae'}$ perspektivisch gleich der Strecke \overline{ae} ist.

Will man die Strecke $\overline{ae'}$ perspektivisch halbieren, so braucht man nur den Halbierungspunkt b von \overline{ae} mit p_i zu verbinden, so liefert die Verbindungslinie auf ae' den perspektivischen Halbierungspunkt b' von $\overline{ae'}$.

209) Umgekehrt lässt sich natürlich auch zu dem perspektivischen Bilde einer Strecke die zugehörige wahre Länge finden. Ist z. B., siehe Figur 200, die Strecke $\overline{ae'}$ im perspektivischen Bilde gegeben und die wahre Länge gesucht, so bestimmt man p' , hieraus p_i und zieht $p_i e'$; diese Linie schneidet auf S den Punkt e so aus, dass \overline{ae} die wahre Länge der Strecke $\overline{ae'}$ ist.

c) Errichten und Fällen von Senkrechten zu horizontalen Geraden.

210) Auch das Antragen von gegebenen Winkeln an eine horizontale Gerade bzw. das Errichten und Fällen von Senkrechten hierzu ist perspektivisch leicht ausführbar.

Soll z. B. im Punkte a der Figur 200 auf der Geraden ap' eine perspektivische Senkrechte errichtet werden, so braucht man nur oq' senkrecht op' bis zum Schnittpunkt q' mit dem Horizont zu ziehen, so ist q' der Fluchtpunkt für alle in der Horizontalebene liegenden zu ap' senkrechten Geraden; die Linie aq' ist also die gesuchte Senkrechte.

211) Soll von einem beliebigen Punkte der Horizontalebene, etwa dem Punkte d' , siehe Figur 200, eine Senkrechte auf eine Gerade ab' gefällt werden, so bestimmt man den Fluchtpunkt p' von ab' , zieht op' und senkrecht hierzu die Gerade oq' bis zum Horizont. Der Punkt q' ist der Fluchtpunkt der gesuchten Senkrechten, welche somit die Verbindungslinie $q'd'$ sein muss.

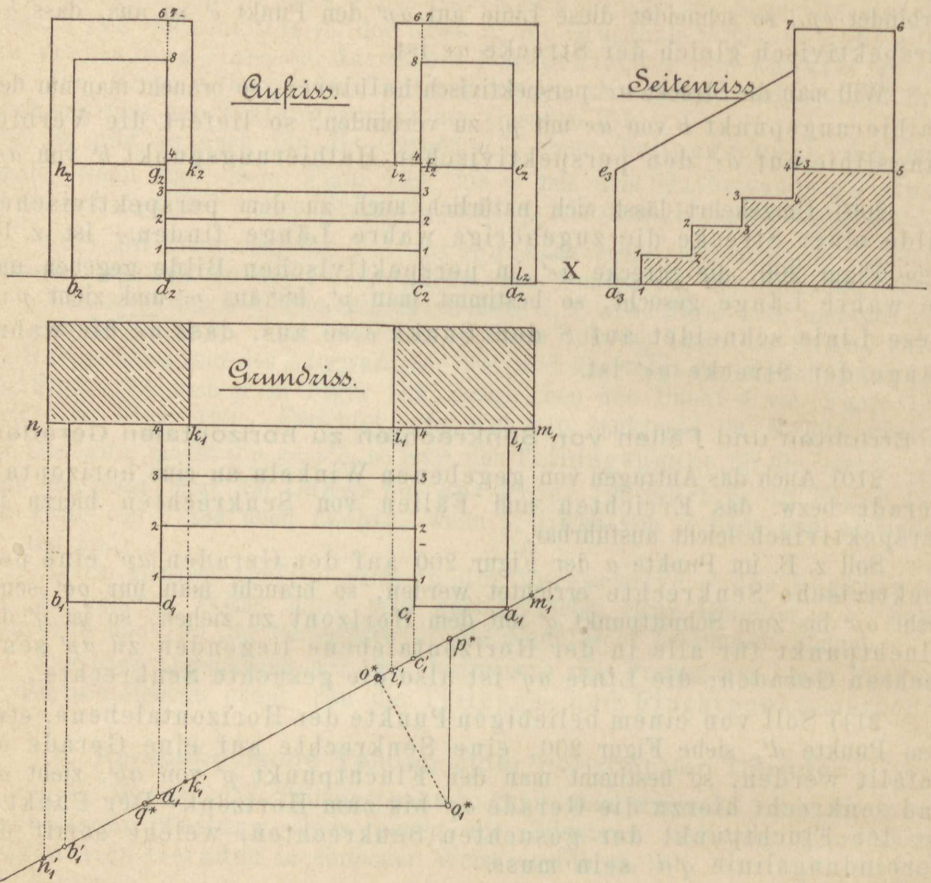
212) Bestimmt man den Teilungspunkt q_i von aq' , so kann man jetzt auch auf dieser Linie gegebene Längen auftragen bzw. zu perspektivischen Längen die wahren Grössen ermitteln. Will man z. B. auf aq' eine Strecke gleich \overline{ab} abtragen, so macht man $\overline{ad} = \overline{ab}$ und zieht dq_i ; diese Linie schneidet auf aq' die Strecke $\overline{ad'}$ ab, die perspektivisch gleich \overline{ab} ist. Zieht man nun $d'p'$ und $b'q'$, so ist die Figur $ab'c'd'$, ebenso $b'e'f'c'$ das perspektivische Bild eines Quadrates mit der Seitenlänge \overline{ab} .

Anmerkung 45. Soll an eine durch ihr perspektivisches Bild gegebene Gerade der Horizontalebene, z. B. die Gerade ap' , siehe Figur 200, in einem beliebigen Punkte, etwa a , ein Winkel α von beliebiger Grösse angetragen werden, so zieht man $p'o$ und trägt an die Linie $p'o$ im Punkte o den gegebenen Winkel α an; der so bestimmte Winkelschenkel schneidet auf dem Horizonte H den Fluchtpunkt der gesuchten Geraden aus. Die Verbindungslinie dieses Fluchtpunktes mit dem Punkte a ist dann die gesuchte Gerade. Es ist klar, dass jede durch den ebengenannten Fluchtpunkt gehende Gerade das perspektivische Bild einer Linie darstellt, welche mit der Geraden ap' den gegebenen Winkel α einschliesst.

d) Aufgaben.

213) **Aufgabe 115.** Man soll die in Figur 201 durch Aufriss, Grundriss und Seitenriss dargestellte Treppe unter Anwendung der Teilungs- und Fluchtpunktmethode centralperspektivisch darstellen.

Figur 201.

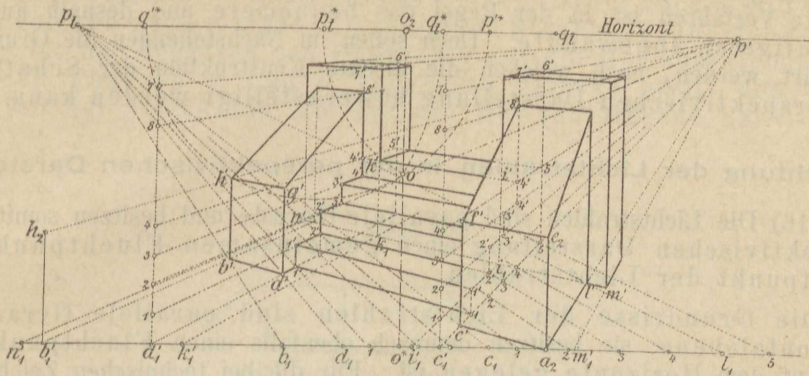


Auflösung. Man wählt, siehe Figur 201, Grundriss, die Bildebene und darauf den Augpunkt o^* ; senkrecht zum Grundriss der Bildebene zieht man $o^*o_1^*$ gleich einem aliquoten Teile der Distanz, im vorliegenden Falle gleich ein Viertel Distanz und zeichnet durch o_1^* die Parallelen $o_1^*p^*$ und $o_1^*q^*$ zu den beiden Richtungen der Grundrisskanten der Treppe.

In Figur 202 setzt man nun die Grundlinie, den Horizont und den Augpunkt o_2 fest, zieht o_2o senkrecht zum Horizont, überträgt aus Figur 200 die Fluchpunkte p^* und q^* nach p'^* und q'^* , indem man $o_2p_2'^* = o^*p^*$ und $o_2q_2'^* = o^*q^*$ abträgt. Um p'^* und q'^* beschreibt man Kreisbögen durch o , welche den Horizont in den Punkten p_t^* und q_t^* schneiden. Um nun für die wirkliche Distanz die Flucht- und Teilungspunkte zu erhalten, muss man von o_2 aus $o_2p_t' = 4 \cdot o_2p'^*$, $o_2q_t = 4 \cdot o_2q'^*$, $o_2p_t = 4 \cdot o_2p_t^*$ abtragen. Der dem Punkte q'^* entsprechende Fluchpunkt liegt links von o_2 auf dem Horizont in einem Abstände von o_2 gleich $4 \cdot o_2q_t'^*$, er ist in der Figur, weil ausserhalb der verfügbaren Zeichenfläche liegend, nicht angegeben, vielmehr ist die Konstruktion der perspektivischen Bilder nur mit Benützung des einen Fluchpunktes p' nach dem in No. 207 angegebenen Verfahren durchgeführt worden.

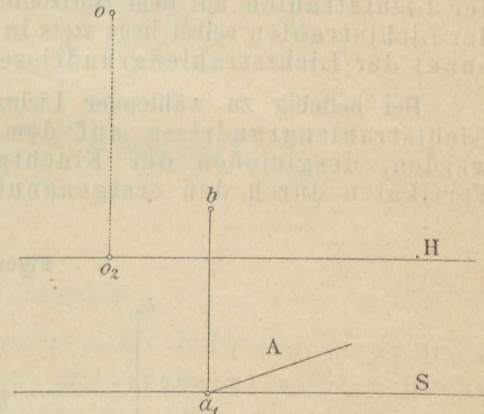
Man zieht durch jeden Punkt des Grundrisses der Treppe, z. B. b_1 eine Parallele zu $o_1^*p^*$, bestimmt den Durchschnittspunkt b_1' dieser Parallelen mit der Bildebene, überträgt b_1' aus Figur 201 nach b_1' in Figur 202, o^*b_1' in Figur 201 = o^*b_1' in Figur 202, zieht $b_1'p'$ und trägt mittelst des Teilungspunktes p_t die Strecke $b_1'b_1$

Figur 202.



aus Figur 201 auf $b_1'p'$ in Figur 202 perspektivisch auf, dadurch, dass man auf der Grundlinie in Figur 202 die Strecke $\overline{b_1'b_1'} = \overline{b_1'b_1}$ in Figur 201 abträgt und b_1 mit dem Teilungspunkt p_1 verbindet. Diese Verbindungslinie schneidet den Punkt b' aus. Ist im Punkte b' eine Vertikale von bestimmter Länge zu errichten, im vorliegenden Falle gleich $\overline{b_2'h_2}$ in Figur 201 Aufriss, so trägt man in b_1' , siehe Figur 202, diese Vertikale in wahrer Grösse nach $\overline{b_1'h_2}$ auf und zieht von h_2 nach p' ; h_2p' schneidet auf der Vertikalen durch b' die Strecke $\overline{b'h'}$ perspektivisch gleich $\overline{b_1'h_2}$ ab. Auf dieselbe Weise kann die Perspektive eines jeden Punktes der Treppe konstruiert werden.

Figur 203.



In der Figur 202 sind die Perspektiven der beiden durch die inneren Wangenkanten der Treppe geführten Vertikalschnitte gezeichnet worden. Hierdurch ergeben sich auch die Perspektiven aller nach dem nicht vorhandenen Fluchtpunkte q' laufenden Linien als Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Vertikalschnitte.

214) **Aufgabe 116.** In Figur 203 bezeichnet S und H Grundlinie und Horizont, o_2 den Augpunkt, $\overline{o_2o}$ die Distanz. Ferner ist A das perspektivische Bild der Kante eines Würfels, der mit einer Fläche in der Horizontalebene und mit einer Kante $\overline{a_1b}$ in der Bildebene liegt. Es ist das perspektivische Bild des Würfels zu zeichnen.

7) Schattenkonstruktion in centralperspektivischer Darstellung.

a) Allgemeine Bemerkungen.

215) Will man in centralperspektivischen Darstellungen die auftretenden Schattengrenzen angeben, so kann dies in zweifacher Weise geschehen, entweder dadurch, dass man die Schattengrenzen bei der Darstellung in rechtwinkliger Projektion, d. h. im Grund- und Aufrisse des in Betracht kommenden Körpers konstruiert und die ermittelten Punkte in die perspektivische Darstellung nach einer der im Vorstehenden besprochenen Methoden überträgt, oder dadurch, dass man in der perspektivischen Zeichnung direkt die Schattengrenzen ermittelt, d. h. ohne auf die

rechtwinkligen Projektion des Körpers Bezug nehmen zu müssen. Das zuerst genannte Verfahren ist in der Regel das bequemere und deshalb auch das am häufigsten angewandte. Doch sollen im Nachstehenden die Grundsätze angeführt werden, nach welchen die direkte Konstruktion der Schatten in der perspektivischen Darstellung bewerkstelligt werden kann.

b) Richtung der Lichtstrahlen in der perspektivischen Darstellung.

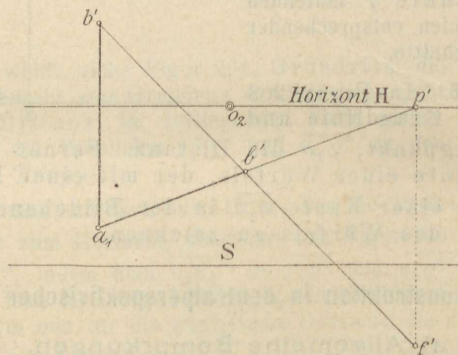
216) Die Lichtstrahlen sind parallele Gerade und besitzen somit in der perspektivischen Darstellung einen gemeinsamen Fluchtpunkt, den Fluchtpunkt der Lichtstrahlen.

Die Grundrisse der Lichtstrahlen sind parallele Gerade der Horizontalebene; sie besitzen demnach ebenfalls einen Fluchtpunkt, der stets auf dem Horizonte gelegen ist. Für die bei technischen Zeichnungen übliche Lichtrichtung besitzen die Grundrisse der Lichtstrahlen gegen die vertikale **Pr. Eb.** eine Neigung von 45° . Fällt nun die Bildebene mit der vertikalen **Pr. Eb.** zusammen, so deckt sich der Fluchtpunkt der Grundrisse der Lichtstrahlen mit dem rechtseitigen Distanzpunkte.

Schliesst aber die Bildebene mit der vertikalen **Pr. Eb.** irgend einen Winkel ein, so muss hieraus die Lage des Fluchtpunktes der Grundrisse der Lichtstrahlen auf dem Horizonte bestimmt werden. Der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen selbst liegt stets in einer Vertikalen durch den Fluchtpunkt der Lichtstrahlengrundrisse.

Bei beliebig zu wählender Lichtrichtung kann der Fluchtpunkt der Lichtstrahlengrundrisse auf dem Horizonte beliebig angenommen werden, desgleichen der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen auf der Vertikalen durch den erstgenannten Fluchtpunkt.

Figur 204.

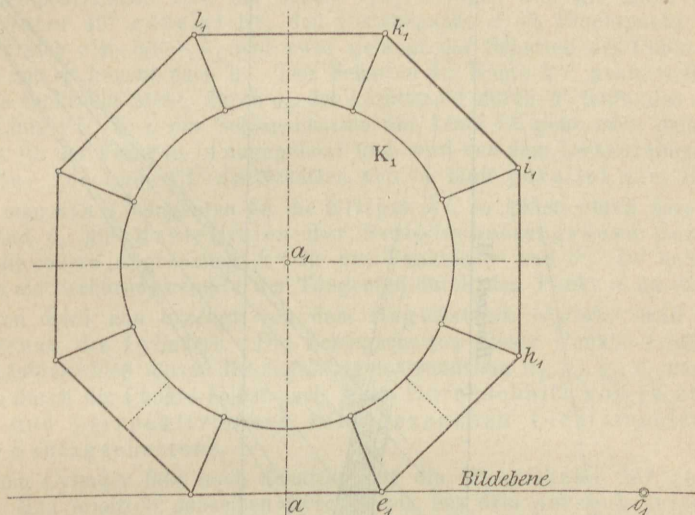


c) Schatten eines Punktes und einer vertikalen Geraden auf die Horizontalebene.

217) Ist, siehe Figur 204, $a_1 b'$ das perspektivische Bild einer vertikalen Geraden, p' der Fluchtpunkt der Lichtstrahlengrundrisse, f' der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen selbst, so erhält man den Schatten des Punktes b' auf die Horizontalebene, wenn man durch den perspek-

tivischen Grundriss a_1 des Punktes b einen Strahl nach p' und durch b' einen solchen nach f' zieht; diese beiden Strahlen schneiden sich in b'' und b'' ist der Schatten des Punktes b auf die Horizontalebene. Die von den Punkten a_1 und b' begrenzte Strecke stellt den Schlag-schatten der Vertikalen a_1b' auf die Horizontalebene dar.

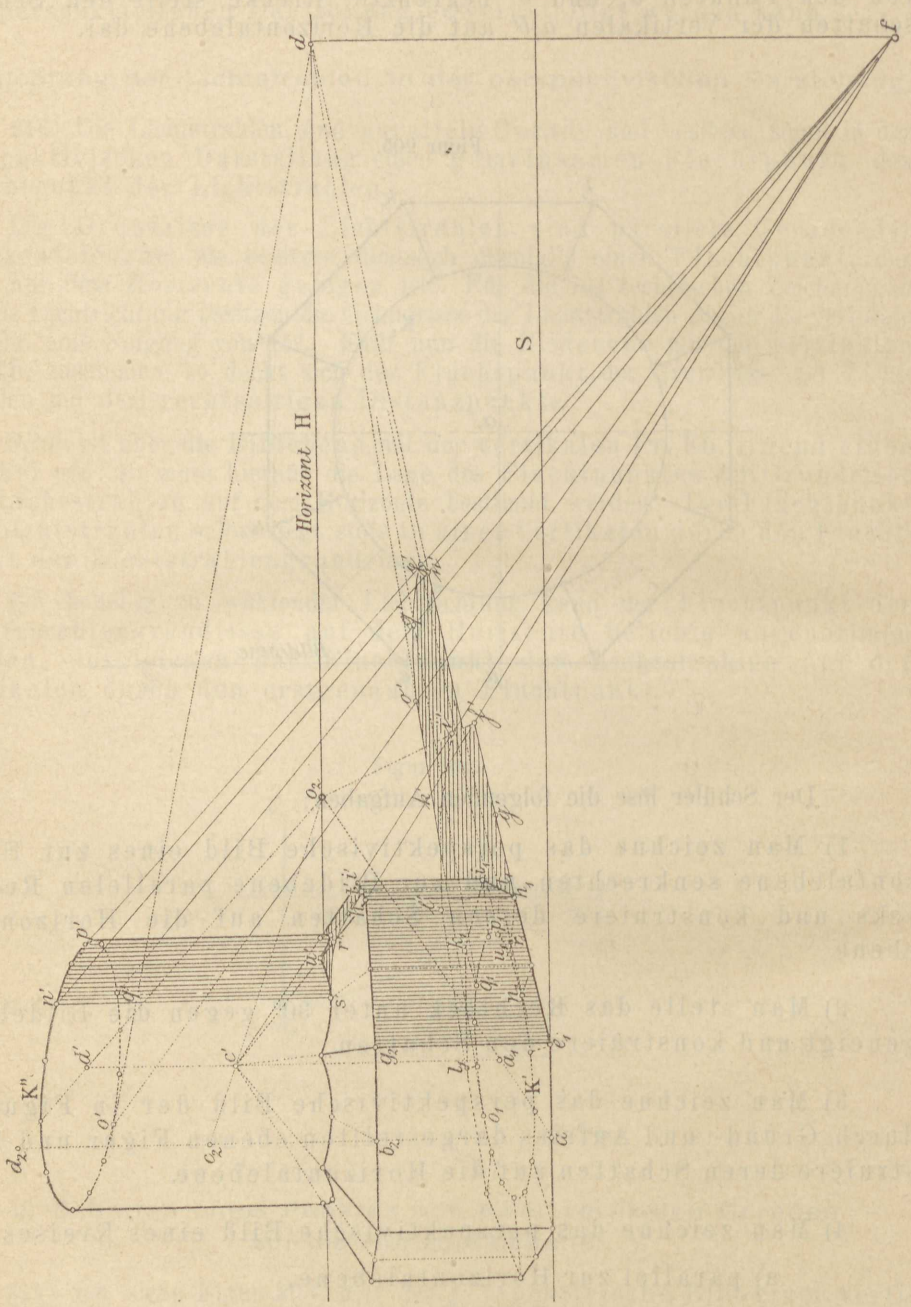
Figur 205.



Der Schüler löse die folgenden Aufgaben:

- 1) Man zeichne das perspektivische Bild eines zur Horizontalebene senkrechten und zur Bildebene parallelen Rechtecks und konstruiere dessen Schatten auf die Horizontalebene.
- 2) Man stelle das Rechteck unter 30° gegen die Bildebene geneigt und konstruiere den Schatten.
- 3) Man zeichne das perspektivische Bild der in Figur 11 durch Grund- und Aufriss dargestellten ebenen Figur und konstruiere deren Schatten auf die Horizontalebene.
- 4) Man zeichne das perspektivische Bild eines Kreises der
 - a) parallel zur Horizontalebene,
 - b) parallel zur Bildebene,
 - c) zur Bildebene unter 30° geneigt ist und konstruiere dessen Schatten auf die Horizontalebene.

Figur 206.



d) Aufgaben.

218) **Aufgabe 117.** Für den in Figur 205 im rechtwinkligen Grundrisse, in Figur 206 in centraler Projektion gezeichneten Körper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Es ist angenommen, dass der Fluchtpunkt der Lichtstrahlengrundrisse mit dem rechtseitigen Distanzpunkt d zusammenfällt, der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen selbst aber f sei, siehe Figur 206.

Das perspektivische Bild der Kante $e_1 h_1$ besitzt, weil die Linie eh gegen die Bildebene unter 45° geneigt ist, den Distanzpunkt d als Fluchtpunkt, der Schatten von eg deckt sich also mit $e_1 h_1$ und zwar gelangt der Schatten des Punktes g_2 nach g' , der Schatten von h' kommt nach h' . Der Schatten der Kante $h'i'$ geht, weil die Kante hi zur Bildebene senkrecht steht, durch o_2 , der Lichtstrahl durch h' trifft also die Linie $h'o_2$ in i' . Die Linie $i'f'$, d. i. der Schlagschatten der Linie ik geht nach dem rechtseitigen Distanzpunkt (in der Figur nicht angegeben) und wird von dem Lichtstrahlengrundriss $k_1 d$ in f' getroffen. Die Linie $i'f'$ als Schatten von lk läuft parallel zum Horizont.

Zieht man von d Tangenten an die Ellipse K' , so gehen durch deren Berührungspunkte n_1 und o_1 die Mantellinien der Selbstschattengrenze des Cylinders, sie treffen die obere Abgrenzung K'' in den Punkten n' und o' . (n' und o' kann man auch erhalten als Berührungspunkte der Tangenten durch den Punkt d an die Ellipse K'').

Schatten wird nun erzeugt von dem Bogenstück $n'p'q'o'$ und der Selbstschattengrenze des Cylinders. Die Schlagschatten dieser Punkte erhält man durch Ziehen von Lichtstrahlen durch die zugehörigen Grundrisse n_1, p_1, q_1, o_1 nach d und von Lichtstrahlen durch die Punkte selbst nach f ; im Durchschnitt von je zweien durch Grundriss und perspektivisches Bild gezogenen Lichtstrahlen liegt ein Punkt des Schlagschattens.

Von dem Cylinder fällt noch Schatten auf die Oberfläche der rechtseitigen Pyramide. Man ermittelt denselben zweckmässig aus dem perspektivischen Grundrisse. Der genannte Schatten projiziert sich im Grundrisse in der Geraden $n_1 d$ und diese trifft die Kanten $u_1 h_1$ und $h_1 i_1$ in den Punkten r_1 und t_1 , denen die perspektivischen Bilder r' und t' entsprechen. $s'r't'$ ist der gesuchte Schatten.

219) **Aufgabe 118.** Für das in Figur 207 durch Grund- und Aufriss in Figur 208 centralperspektivisch dargestellte Hauptgesimse soll die Schattenkonstruktion perspektivisch ausgeführt werden.

Auflösung. Zufolge der Wahl der Bildebene und des Grundrisses der Lichtrichtung besitzen die Bilder der horizontalen Gesimskanten die beiden Distanzpunkte als Fluchtpunkte. Der Fluchtpunkt f' der Lichtstrahlen liegt auf der Vertikalen durch den rechtseitigen Distanzpunkt d .

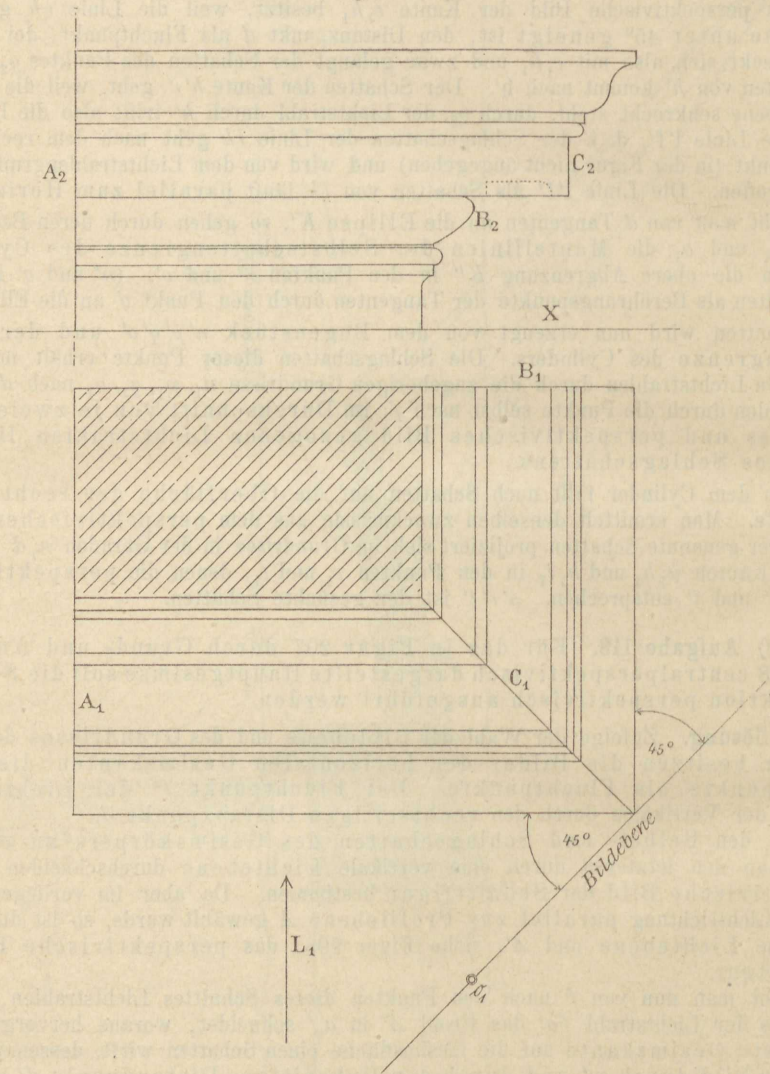
Um den Selbst- und Schlagschatten des Gesimskörpers zu erhalten, müsste man den letzteren durch eine vertikale Lichtebeane durchschneiden und das perspektivische Bild der Schnittfigur bestimmen. Da aber im vorliegenden Beispiel die Lichtrichtung parallel zur Profilebene A gewählt wurde, so ist diese Ebene schon eine Lichtebeane und A' , siehe Figur 208, das perspektivische Bild der Schnittfigur.

Zieht man nun von f' nach den Punkten dieses Schnittes Lichtstrahlen, so sieht man, dass der Lichtstrahl fa' das Profil A' in a_0' schneidet, woraus hervorgeht, dass die oberste Gesimskante auf die Gesimsfläche einen Schatten wirft, dessen perspektivisches Bild durch a_0' und durch den linkseitigen Distanzpunkt d' hindurch geht. Ein weiterer Lichtstrahl berührt in b' und schneidet ausserdem in b_0' . Hierdurch ist die Selbstschattengrenze für die Sima und ihr Schlagschatten auf das Plättchen bestimmt.

In gleicher Weise liefern die Lichtstrahlen durch die Punkte c' , d' und e' die übrigen Schattengrenzen, wie dies aus der Figur zu ersehen ist.

Die rechtseitige Gesimsfläche befindet sich vollständig im Selbstschatten.

Figur 207.



Anhang.

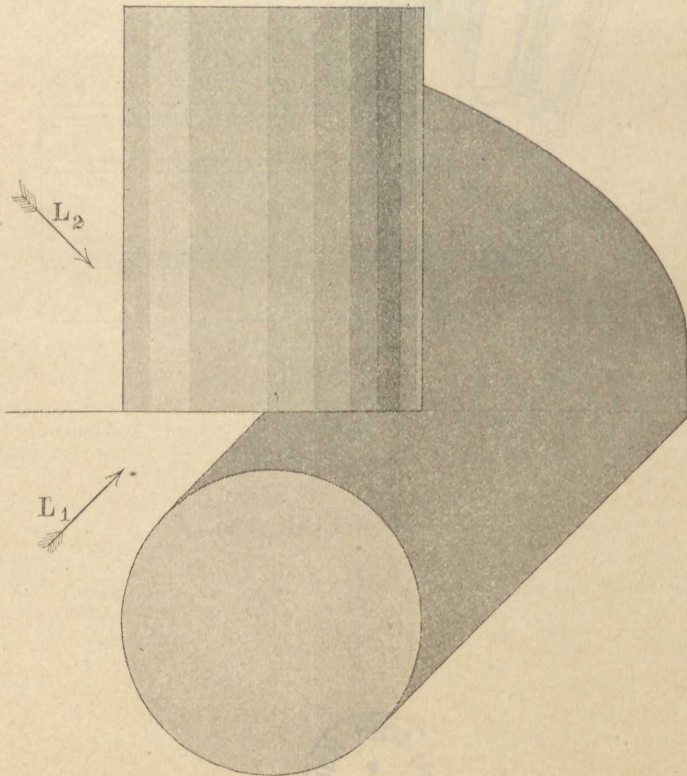
1) Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.

220) In den nachfolgenden Figuren 209 bis 217 ist für eine Reihe von Körpern die Beleuchtung nach den in den No. 124) bis 126) entwickelten Gesetzen bildlich dargestellt worden, jedoch mit dem Unterschiede, dass sowohl im direkt beleuchteten Teile, wie auch im Selbstschatten nur je fünf Zonen angenommen wurden.

Der Schüler versuche die Beispiele durchzuführen unter Annahme von zehn Zonen im beleuchteten Teile und von fünf im Selbstschatten, siehe das Schema in Figur 96.

221) In Figur 209 ist die Beleuchtung eines senkrechten Kreiscylinders, der mit einer Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 aufliegt, bildlich dargestellt. Es ist hier auch der Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** mit angelegt worden. Die Stärke dieses Schlagschattens ergibt sich, wenn man die Beleuchtungsstärke der **Pr. Ebn.**, nachdem in No. 97) angegebenen Verfahren,

Figur 209.

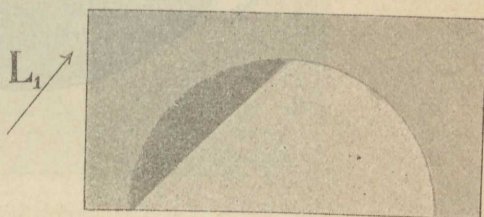
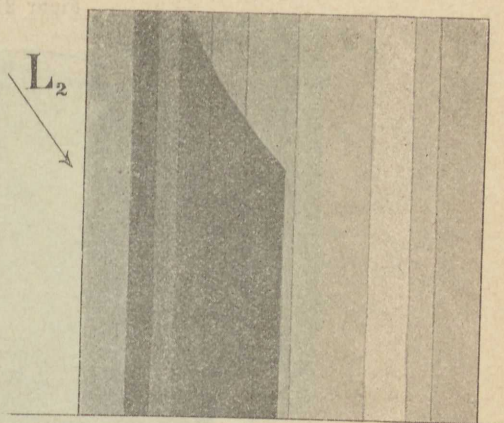


ermittelt. Man findet hierfür etwa 8, womit dann auch in Rücksicht auf No. 96), sowie 124) und 125) in Stärke des Schlagschattens bestimmt ist.

In Figur 210 ist die Beleuchtung eines hohlen Kreiscylinders wiedergegeben, die hierauf bezügliche Isophotenkonstruktion ist in Figur 87 ausgeführt.

Der Schüler stelle die Beleuchtung für die in den Aufgaben 66 bis 69 erwähnten Lagen des Kreiscylinders dar.

Figur 210.

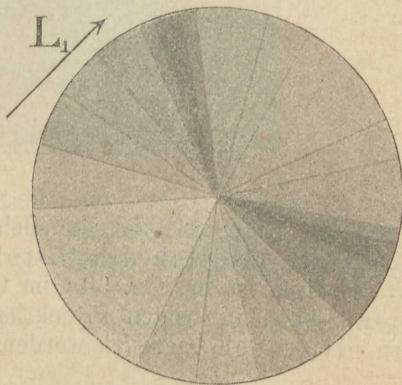
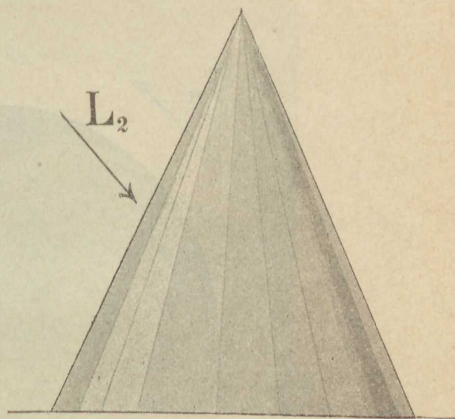


Figur 211.

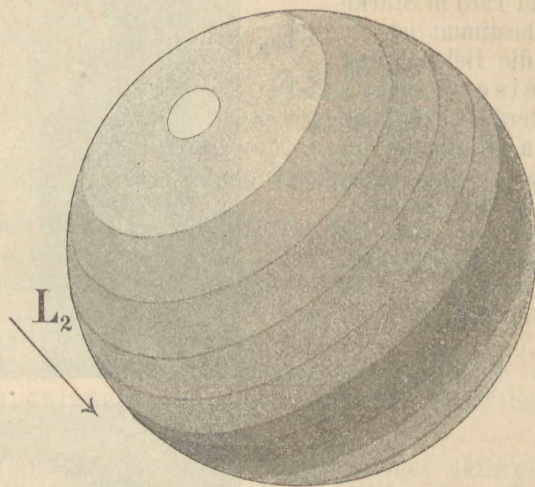
222) In Figur 211 ist die Beleuchtung eines senkrechten Kreiskegels, der mit seiner Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 aufliegt, bildlich dargestellt. Die hierauf bezügliche Isophotenkonstruktion ist in Figur 89 durchgeführt.

Der Schüler stelle die Beleuchtung für die in den Aufgaben 70 bis 74 erwähnten Lagen des Kreiskegels dar.

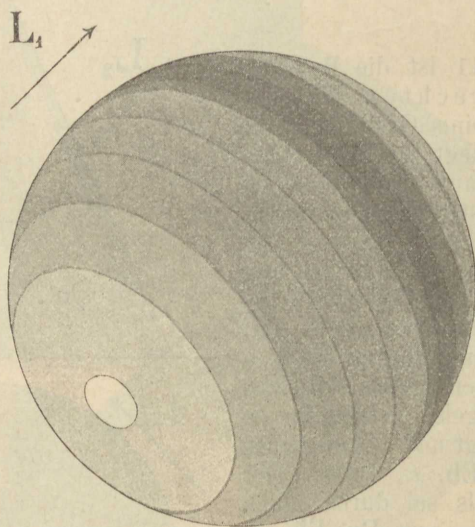
Der Schüler zeichne ferner die Isophoten für den inneren hohlen Teil eines senkrechten Kreiskegels, dessen Spitze in der **Pr. Eb.** E_1 liegt und dessen Achse senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 steht. Der Aufriss des Kegels sei durch einen durch die Kegellachse zur **Pr. Eb.** E_2 parallel geführten Vertikalschnitt ersetzt.



Figur 212.

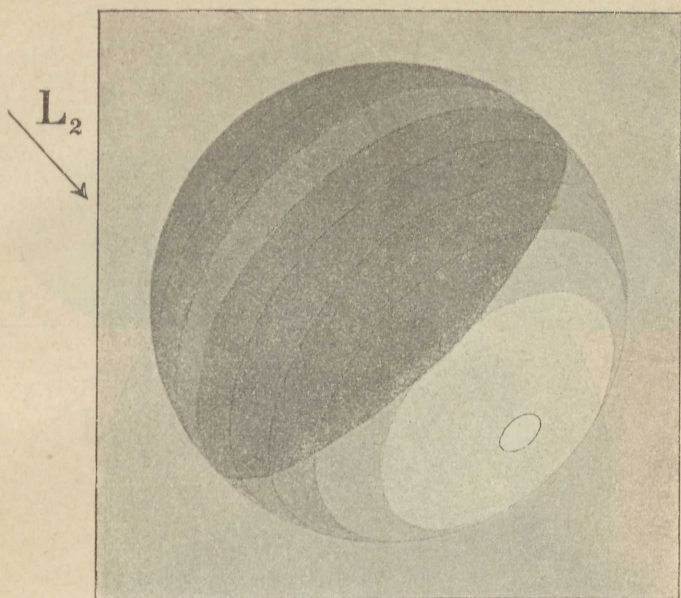


X

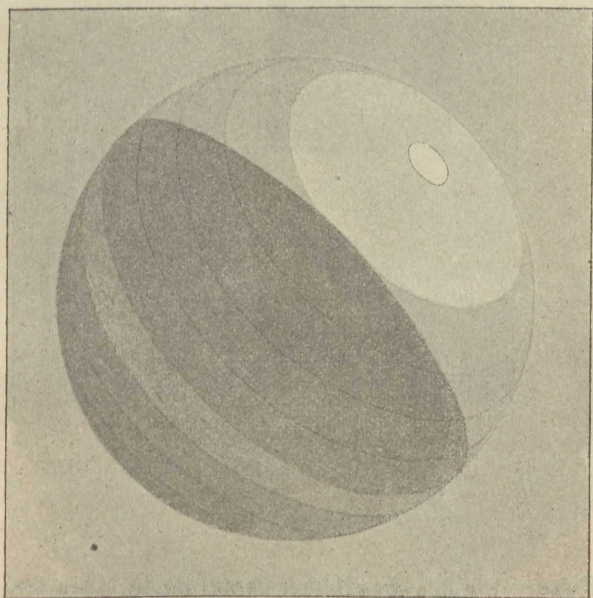


223) In Figur 212 ist die Beleuchtung einer Vollkugel im Grund- und Aufrisse bildlich dargestellt. Die hierauf bezügliche Isophotekonstruktion ist in Fig. 90a im Grund- und Aufrisse durchgeführt. Die hellsten Stellen in beiden Projektionen sind nicht punktförmig angenommen, sondern elliptisch begrenzt worden.

Figur 213.



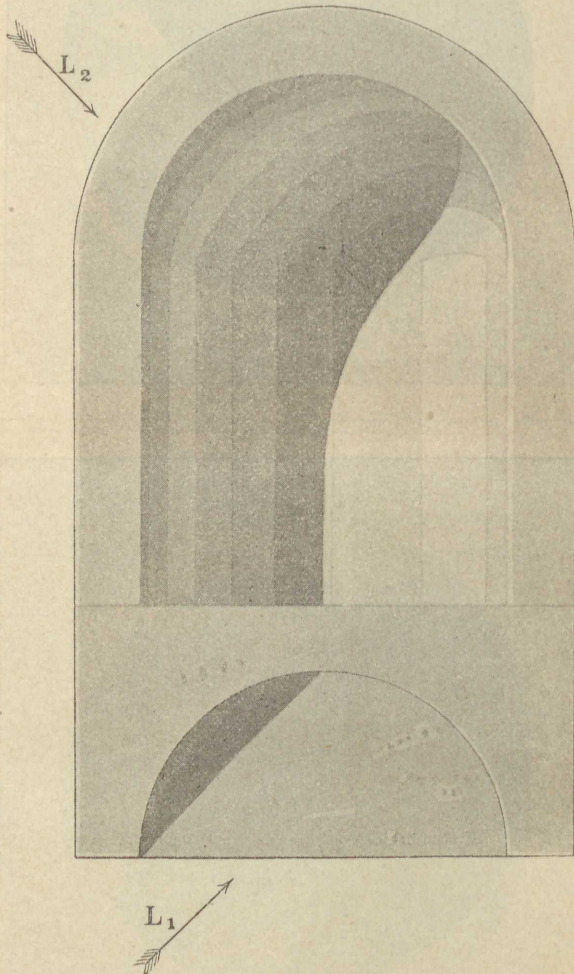
X



224) In Figur 213 ist die Beleuchtung einer Hohlkugel im Grund- und Aufrisse bildlich dargestellt. Die hierauf bezügliche Isophotekonstruktion findet sich in Figur 90 a unter Berücksichtigung der Bemerkung in Auflösung der Aufgabe 75.

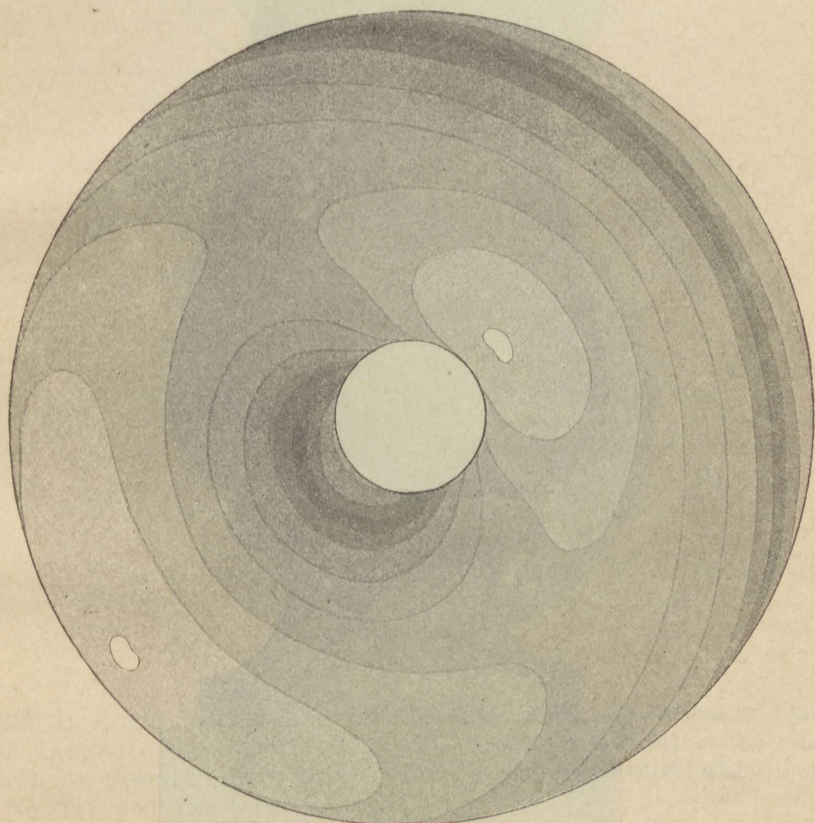
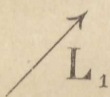
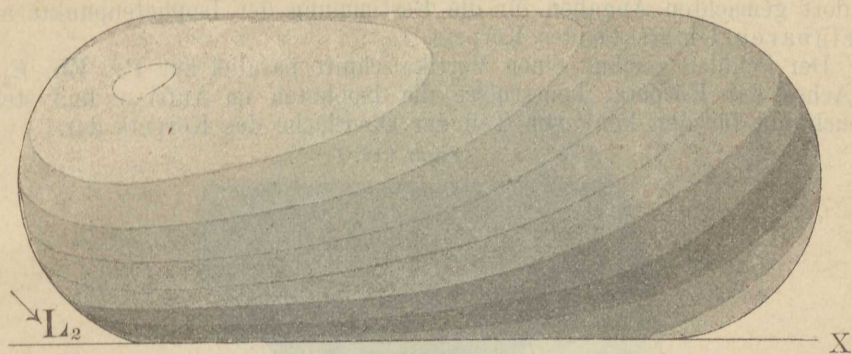
Der Schüler stelle die Beleuchtung der in Aufgabe 77 genannten Körper bildlich dar.

Figur 214.



225) In Figur 214 ist die Beleuchtung einer kugelförmigen Nische mit daranstossendem Halbcylinder bildlich dargestellt. Die hierzu gehörige Isophotenkonstruktion ist in Figur 91 ausgeführt.

Figur 215.



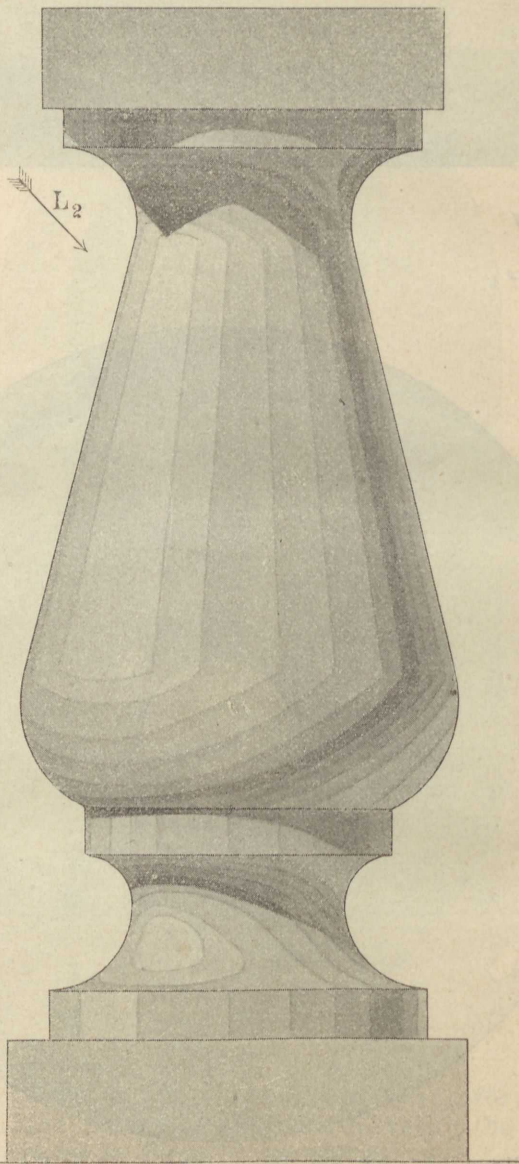
226) In Figur 215 ist die Beleuchtung eines Kreisringes im Grund- und Aufrisse bildlich dargestellt.

Man zeichnet sich das Isophotensystem in beiden Projektionen, indem man auf der Oberfläche des Körpers eine Reihe von Parallelkreisen wählt und für dieselben die zugehörigen Isophoten bestimmt, entweder mittels Hilfskegel

nach No. 117) oder mittels Hilfskugeln nach No. 119) unter Berücksichtigung der dort gemachten Angaben für die Bestimmung der Isophotenpunkte auf den scheinbaren Umrissen des Körpers.

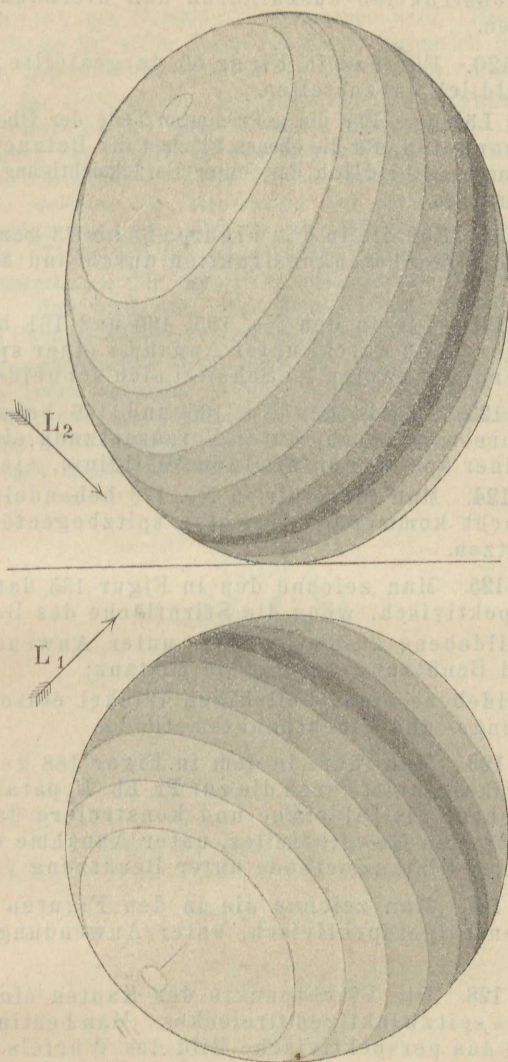
Der Schüler zeichne einen Vertikalschnitt parallel zur **Pr. Eb. E_2** durch die Achse des Körpers, konstruiere die Isophoten im Aufrisse und stelle die Beleuchtung für den konkaven Teil der Oberfläche des Körpers dar.

Figur 216.



227) In der Figur 216 ist die Beleuchtung des in Figur 94 samt seinem Isophotensystem gezeichneten Rotationskörpers, mit Hinweglassung der Kugel bildlich dargestellt. Das auf die Konstruktion des Isophotensystems Bezügliche ist in Auflösung der Aufgabe 120 enthalten.

Figur 217.



228) In Figur 217 ist die Beleuchtung eines Rotationsellipsoïdes bildlich dargestellt. Der Körper entsteht, wenn eine Ellipse um eine ihrer Hauptachsen gedreht wird. Bezüglich der Isophotenkonstruktion gilt das in den No. 117 und 119 Gesagte.

Der Schüler stelle die bildliche Beleuchtung eines Ellipsoïdes dar, das durch Drehung um die kleine Hauptachse einer Ellipse entsteht.

2) Uebungsbeispiele.

229) **Aufgabe 119.** Für die in den Figuren 58 bis 63 dargestellten Körper ist die Isophotenkonstruktion auszuführen und hiernach die Beleuchtung bildlich darzustellen.

230) **Aufgabe 120.** Für das in Figur 66 dargestellte Hauptgesimse ist die Beleuchtung bildlich darzustellen.

Andeutung zur Lösung. Für die gekrümmten Teile der Oberfläche des Gesimses konstruiert man die Isophoten, für die ebenen Flächen die Beleuchtungsstärken und stellt hierauf die Beleuchtung bildlich dar, unter Berücksichtigung der in den No. 124) bis 128) gemachten Angaben.

231) **Aufgabe 121.** Für die in den Figuren 68 bis 73 gezeichneten Gesimskörper führe man die Isophotenkonstruktion durch und stelle die Beleuchtung bildlich dar.

232) **Aufgabe 122.** Die in den No. 156, 160 und 161 behandelten Steinschnittaufgaben führe man durch, unter Annahme einer spitzbogenförmigen Wöblinie, bestehend aus zweien im Scheitel sich schneidenden Kreisbögen.

233) **Aufgabe 123.** Die in den No. 165 und 168 behandelten Gewölbe-konstruktionen führe man durch, unter Voraussetzung eines quadratischen Grundrisses und einer spitzbogenförmigen Wöblinie, siehe No. 232.

234) **Aufgabe 124.** Man führe die in No. 173 behandelte Aufgabe durch, wenn die in Betracht kommenden Gewölbe spitzbogenförmige Wöblinien, siehe No. 232, besitzen.

235) **Aufgabe 125.** Man zeichne den in Figur 135 dargestellten Mauerbogen centralperspektivisch, wenn die Stirnfläche des Bogens

a) mit der Bildebene zusammenfällt, unter Anwendung der Distanzpunktmethode und Benützung der ganzen Distanz;

b) mit der Bildebene einen beliebigen Winkel einschliesst, unter Anwendung der Teilungs- und Fluchtpunktmethode.

236) **Aufgabe 126.** Man führe in dem in Figur 188 gezeichneten Kreuzgewölbe einen Vertikalschnitt durch die zur **Pr. Eb. E_2** parallele Gewölbachse, nehme die Schnittebene als Bildebene und konstruiere das perspektivische Bild des übrigbleibenden Gewölbeteiles, unter Annahme einer entsprechenden Distanz nach der Distanzmethode unter Benützung von $\frac{1}{4}$ Distanz.

237) **Aufgabe 127.** Man zeichne die in den Figuren 58 und 59 dargestellten Körper centralperspektivisch, unter Anwendung der Methode des mittleren Profiles.

238) **Aufgabe 128.** Die Fluchtpunkte der Kanten eines Würfels bilden die Eckpunkte eines spitzwinkligen Dreieckes. Man bestimme den Augpunkt, die Distanz, sowie das perspektivische Bild des Würfels, wenn die Würfelkante eine gegebene Länge l besitzen soll und das Bild einer Würfecke gegeben ist.

239) **Aufgabe 129.** Man führe für die in No. 213 behandelte Aufgabe die Schattenkonstruktion centralperspektivisch aus, wenn der Fluchtpunkt der Lichtstrahlengrundrisse, sowie jener der Lichtstrahlen selbst unter Berücksichtigung des in No. 216 Gesagten, beliebig gewählt werden kann.

240) **Aufgabe 130.** Der Schüler zeichne die Perspektive eines ganzen Gebäudes und benütze hiezu seinen in der zweiten Klasse der Baugewerkschule gefertigten Entwurf.

Andeutung zur Lösung. Die Bildebene wählt man in der Regel so, dass die Hauptfaçade in ersterer Reihe zur Darstellung gelangt. Man wird demgemäss den Winkel der Bildebene und der Flucht der Hauptfaçade etwas kleiner nehmen, als

jenen der Flucht der Nebenfaçade und der Bildebene. Bezüglich der Wahl der Augenhöhe gilt das in Anmerkung 41 Gesagte. Die Lage des Auges ist so zu wählen, dass von derselben aus das ganze Gebäude bequem übersehen werden kann. Dies wird der Fall sein, wenn die Distanz etwa gleich der grössten horizontalen bezw. vertikalen Ausdehnung des Gebäudes angenommen wird. Hinsichtlich der Wahl der Konstruktionsmethode ist, wenn der nötige Raum vorhanden ist, stets der in No. 186 bis 195 besprochenen Durchschnittsmethode der Vorzug zu geben.

Es werden bei der Grösse der Distanz die Fluchtpunkte in der Regel über die Grenze des Zeichenbogens und -Brettes hinausfallen. Man hilft sich zweckmässig durch Anbringung von Leisten an dem Reissbrette in der Höhe des Horizontes, auf welchen man die Fluchtpunkte durch Nadeln bemerkt und konstruiert nun mittels eines Grundrisses, in welchem die Bildebene und der Grundriss des Auges verzeichnet sind, die Punkte des perspektivischen Bildes so wie dies in No. 195, Aufgabe 108, gezeigt ist. Dabei ist selbstverständlich nicht ausgeschlossen, dass auch die übrigen Konstruktionsmethoden für den einen oder andern Punkt zweckmässig Verwendung finden können. Man wird eben stets jene Methode zur Ermittlung des perspektivischen Bildes eines Punktes wählen, welche am einfachsten und raschesten zum Ziele führt.

Ist in dem perspektivischen Bilde auch die Schattenkonstruktion anzugeben, so kann man den Schatten entweder in der rechtwinkligen Projektion, d. h. im Aufrisse und Grundrisse des Gebäudes ermitteln und die einzelnen Punkte in das perspektivische Bild übertragen, oder man konstruiert im perspektivischen Bilde direkt die Schatten nach Angabe in der No. 215 ff.



Logarithmische Tafeln

trigonometrischen Tafel

und einen Anzahl von andern Tabellen, deren Bedeutung gewisse numerische Berechnungen erleichtern

für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis

Dr. A. Meyer



Zur Einführung in Schulen besonders empfohlen.



Vierstellige Logarithmische Tafeln

der
natürlichen und trigonometrischen Zahlen
nebst den erforderlichen Hilfstabellen.

Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis

bearbeitet

von

E. R. Müller.

Preis gebunden 60 \mathcal{A} .

Fünfstellige Logarithmische Tafeln

nebst einer
trigonometrischen Tafel

und einer Anzahl von anderen Tabellen, deren Benutzung gewisse
numerische Berechnungen erleichtern

besonders bearbeitet

für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis

von

Dr. A. Kleyer.

Preis gebunden \mathcal{M} . 2. 50.

Vorlegeblätter

für den

Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen.

Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen u. s. w.

12 Tafeln mit erläuterndem Texte.

Entworfen und gezeichnet von

Jakob Vonderlinn,

Ingenieur, Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkeschule sowie an der Sonntags- und Abendschule für Handwerker zu Breslau.

Preis: In Mappe Mk. 5. 50.

Inhalt.

- Tafel 1. **Kurven-Konstruktionen.**
- ” 2. **Die gebräuchlichsten axonometrischen Projektionsarten.** Rechtwinklige Axonometrie. Schiefwinklige Axonometrie. Axonometrische Projektion eines Körpers.
- ” 3. **Durchdringung von zwei senkrechten Kreiscylindern.** Axonometrische Darstellung des Cylinderstückes B. Kreiscylindrische Stichkappe in einem Tonnengewölbe. Isometrische Darstellung der Stichkappe. Schräge kreiscylindrische Stichkappe in einem Tonnengewölbe.
- ” 4. **Durchdringung einer Pyramide mit einem senkrechten Kreiskegel.**
- ” 5. **Durchdringung eines senkrechten Kreiscylinders mit einem senkrechten Kreiskegel.** Kegelförmige Stichkappe in einem Tonnengewölbe. Isometrische Darstellung der Stichkappe. Axonometrische Darstellung, dimetrisch $1 : \frac{1}{2} : 1$ der Durchdringung in Figur 3 und 4.
- ” 6. **Durchdringung eines senkrechten Kreiscylinders mit einer Kugel. Durchdringung eines senkrechten Kreiskegels mit einer Kugel.** Fenster in einem Kugelgewölbe.
- ” 7. **Durchdringung zweier schiefen Kreiscylinder. Durchdringung eines schiefen Kreiskegels mit einer Kugel.**
Durchdringung a) einer Kugel
b) eines senkrechten Kreiscylinders } mit einem Wulste.
- ” 8. **Darstellung einer knieförmig gebogenen Röhre. Darstellung einer Röhrenfläche. Darstellung einer gewundenen cylindrischen Röhre.**
- ” 9. **Darstellung der verschiedenen Walmarten.**
- ” 10. **Darstellung eines Krümmings für die innere Wange einer hölzernen Treppe.** Grund- und Aufriss einer Schraubenlinie nebst Abwicklung des Schraubencylinders, samt der Schraubenlinie in die Zeichnungsebene. Grund- und Aufriss des Krümmings. Isometrische Darstellung des Krümmings.
- ” 11. **Steinschnitt eines kreiscylindrischen Bogens in einer lotrechten Mauer.**
- ” 12. **Darstellung eines Schraubenbolzens.** Grund- und Aufriss des Schraubenbolzens. Dimetrische Projektion des Bolzens.



Lehrbuch des Projektionszeichnens.

Von
J. Vonderlinn.

Erster Teil.

Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.

Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben.

Mit 271 Erklärungen und 226 in den Text gedruckten Figuren.

Bearbeitet nach System Kleyer von **J. Vonderlinn.**

Preis Mk. 3. 50.

Zweiter Teil.

Ueber die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.

Mit 180. Erklärungen und 99 in den Text gedruckten Figuren.

Bearbeitet nach System Kleyer von **J. Vonderlinn.**

Preis Mk. 3. 50.

Dritter Teil. Erste Hälfte.

Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie.

Mit 195 Erklärungen und 169 in den Text gedruckten Figuren.

Bearbeitet nach System Kleyer von **J. Vonderlinn.**

Preis Mk. 3. 50.

Dritter Teil. Zweite Hälfte.

Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.

Mit 218 Erklärungen und 210 in den Text gedruckten Figuren.

Bearbeitet nach System Kleyer von **J. Vonderlinn.**

Preis Mk. 5. —.

Der IV. Teil des Projektionszeichnens und Schluss des Werkes erscheint im Herbst 1894.



Neuestes Verzeichnis der Bandausgaben der Kleyer'schen Encyclopädie (1894).

Von *Kleyer's Encyclopädie der gesamten mathematischen, technischen u. exakten Natur-Wissenschaften* sind nachstehende Bände vollständig erschienen:

- Lehrbuch der Grundrechnungsarten.** Erstes Buch: Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen. Mit 71 Erklärungen und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von A. Frömter. Preis: M. 3.—.
- do. do. Zweites Buch: Das Rechnen mit benannten Zahlen. Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Frömter und Neubüser. Preis: M. 3.—.
- do. do. Drittes Buch: Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.) Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von J. G. Maier. Preis: M. 3.—.
- Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens.** Erster Teil: Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldeetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen. Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer Münz-, Mass- und Gewichtstabelle. Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Richard Olbricht. Preis: M. 4.50.
- do. do. Zweiter Teil: Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente. Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. R. Olbricht. Preis: M. 6.—.
- do. do. Dritter Teil: Die Gold-, Silber-, Münz-, Effekten- und Wechselrechnung, sowie die Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. R. Olbricht. — Befindet sich unter der Presse. —
- Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrößen** (Elemente der Buchstabenrechnung), der **Verhältnisse und Proportionen** mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von Hans Staudacher, Prof. an der kgl. Industrieschule zu Nürnberg. Erster Teil. Preis: M. 5.—.
- do. do. Zweiter Teil: Elemente der Zahlenlehre, Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen. Mit einer Sammlung v. 277 gelöst. u. analogen ungelöst. Aufg., nebst d. Resultaten d. letzteren. Bearb. n. System Kleyer v. Prof. Hans Staudacher. Preis: M. 5.—.
- Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln** nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6.—.
- Lehrbuch der Logarithmen** nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4.—.
- Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln** nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von Ad. Kleyer. Preis: gebunden M. 2.50.
- Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen**, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4.—.
- Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung** nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 8.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten.** Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Otto Prange. Preis: M. 7.—.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten.** (Quadrat. Gleichungen.) Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Aug. Blind. Preis: M. 10.—.
- Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades**, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Conrad Metger. Preis: M. 6.—.
- Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades.** (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des Bachez de Méziriac, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Uebersetzung. Bearbeitet zum Teil nach System Kleyer von W. Fr. Schüler. Erstes Buch. Preis: M. 4.50.
- Geschichte der Geometrie** für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von Richard Klimpert. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 3.—.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Erster Teil: Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 1.80.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Zweiter Teil: Der Winkel und die parallelen Linien. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. J. Sachs. Preis: M. 2. 20.

do. do. **Dritter Teil: Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen.** Die einfachen Vielecke. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. J. Sachs. Preis: M. 6. —

do. do. **Vierter Teil: Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: M. 6. —

do. do. **Fünfter Teil: Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: M. 4. —

do. do. **Sechster Teil: Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. Preis: M. 4. —

do. do. **Siebenter Teil: Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. J. Sachs. — Befindet sich unter der Presse und erscheint im Herbst 1894. —

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Preis: M. 5. —

do. do. **Zweiter Teil: Aufgaben gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Preis: M. 4. —

do. do. **Dritter Teil: Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und unbeschriebene Figuren.** Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. E. R. Müller. Preis: M. 2. —

Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach System Kleyer durchaus neu bearb. Zweite Aufl. Von Prof. **Heinr. Cranz.** Preis: M. 6. —

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Erster Teil: Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn, Privatdocent an der techn. Hochschule in München. Preis: M. 3. 50.

do. do. **Zweiter Teil: Ueber die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: M. 3. 50.

do. do. **Dritter Teil. Erste Hälfte: Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion** einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie. Mit 195 Erklärungen und 169 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: M. 3. 50.

do. do. **Dritter Teil. Zweite Hälfte: Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.** Mit 218 Erklärungen und 210 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: M. 5. —

do. do. **Vierter Teil: Krümme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krümme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre.** Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Befindet sich unter der Presse und erscheint im Herbst 1894.

Lehrbuch der Analytischen Geometrie der Ebene. Erster Teil: Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. **Heinr. Cranz.** Preis: M. 6. —

do. do. **Zweiter Teil: Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades.** Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. H. Cranz. Befindet sich unter der Presse und erscheint im Herbst 1894.









Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erkl. und 52 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung v. 513 gelöst. u. ungelöst. analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 7. —

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erkl., 563 in den Text gedruckten Fig. u. 65 Anmerk. nebst einem ausführlich. Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 18. —

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von **Dr. W. Láska.** Preis: M. 4. 50.

Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erkl. und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearb. nach System Kleyer von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: M. 5. —

Lehrbuch der Polygonometrie. Bearbeitet nach System Kleyer von **Dr. W. Láska.** Befindet sich unter der Presse und erscheint im Herbst 1894.

- Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie).** Zwei Teile. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Láska.  Befindet sich unter der Presse und erscheint im Herbst 1894. 
- Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie).** Erster Teil: Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Seipp. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Erstes Buch. Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4.—
- do. do. Zweites Buch. Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 9.—
- Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. G. Weichold. Preis: M. 10.—
- do. do. Zweiter Teil. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. G. Weichold.  Befindet sich unter der Presse. 
- Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen.** Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Krüger. Preis: M. 5.—
- Lehrbuch der Differentialrechnung.** Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation expliziter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen- und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 5.—
- do. do. Zweiter Teil: Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren und 230 Erklärungen. Bearbeitet nach dem System Kleyer von Prof. Dr. Haas. Preis: M. 8.—
- do. do. Dritter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nach System Kleyer bearbeitet von Prof. Dr. Haas.  Befindet sich unter der Presse und erscheint im Herbst 1894. 
- do. do. Vierter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven und Flächen. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Dr. Haas.  Befindet sich in Bearbeitung. 
- Lehrbuch der Integralrechnung.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung von Adolph Kleyer. Preis: M. 10.—
- Einführung in die Funktionentheorie.** Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Von Dr. W. Láska. Preis: M. 1.50.
- Lehrbuch der Kombinatorik.** Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren nach System Kleyer für den Unterricht und zum Selbststudium bearbeitet von Prof. H. Staudacher. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Nach System Kleyer bearbeitet von Dr. K. J. Bobek. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der sphärisch. und theoret. Astronomie und der mathematischen Geographie.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Mit 328 Erklärungen, Formelverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Láska. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der allgemeinen Physik.** (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 8.—
- Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen.** Mit 352 Fragen, 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Hovestadt. Preis: M. 6.—
- Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik).** Mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 9.—
- Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik).** Mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 13.50.
- Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper.** Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 3.—
- Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit.** Mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 5.50.
- Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik).** Mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Klimpert. Preis: M. 8.—

- Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).** Erster Band: Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter sowie veränderlicher Druckhöhe fließen. Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben, und den Resultaten der letzteren. Bearb. nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 8. —.
- do. do. Zweiter Band. Erste Hälfte: Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand. Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 5. —.
- do. do. Zweiter Band. Zweite Hälfte: Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger. Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von R. Klimpert. Preis: M. 3. 50.
- Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper.** Mit 55 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 2. —.
- Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus.** Nebst einer Samml. von gelösten u. ungelösten Aufgaben erläutert durch 189 in den Text gedr. Fig. u. 10 Karten. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der Reibungselektricität (Friktions-Elektricität, statischen oder ruhenden Elektricität).** Erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckte Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 7. —.
- Lehrbuch der Kontaktelektricität (Galvanismus).** Nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May. Preis: M. 8. —.
- Lehrbuch der Elektrodynamik.** Erster Teil. Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May. Preis: M. 3. —.
- Lehrbuch des Elektromagnetismus.** Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Oscar May und Adolf Krebs. Preis: M. 4. 50.
- Lehrbuch der Induktionselektricität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik).** Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Adolf Krebs. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie.** Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Hovestadt. Preis: M. 7. —.
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band: Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Wilh. Steffen. Preis: M. 16. —.
- do. do. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band: Die Metalle. Mit 573 Erklärungen, 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von W. Steffen. Preis: M. 16. —.

Im gleichen Verlag sind ferner erschienen:

- Vierstellige logarithmische Tafeln** der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von E. R. Müller. Preis: gebunden 60 Pfg.
- Das Zeichnen der Stereometrie.** Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 23 Tafeln mit Text. Von Prof. A. Brude. Preis: M. 6. —.
- Stereoskopische Bilder** aus der Stereometrie. Bezogen auf den Kubus und entnommen dem Werke desselben Verfassers „Das Zeichnen der Stereometrie“. Von Prof. A. Brude. Preis: M. 3. —.
- Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen.** Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen u. s. w. 12 Tafeln mit erläuterndem Texte. Entworfen und gezeichnet von Jakob Vonderlinn, Ingenieur, Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule, sowie an der Sonntags- und Abendschule für Handwerker zu Breslau. Preis: In Mappe M. 5. 50.
- Lehr- und Übungsbuch der Allgemeinen Arithmetik und Algebra** für die unteren Klassen der Mittelschulen von Moriz Bretschneider. Erster Teil. Mit 6 in den Text eingedr. Figuren. Preis: M. 1. 40.
- Darstellende Geometrie für Bauhandwerker.** Erster Teil: Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittlungen. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Mit 258 Figuren. Bearbeitet von Jakob Vonderlinn. Preis: broschiert M. 3. —, gebunden M. 3. 30.
- do. do. Zweiter Teil: Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmings, Steinschnitt, Centralperspektive. Anhang: Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Mit 217 Fig. Bearbeitet von J. Vonderlinn. Preis: M. 3. —, geb. M. 3. 30.