Darstellende Geometrie

für

Bauhandwerker.

Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten,
sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker.

Erster Teil:

Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.

Mit 258 Figuren.

Bearbeitet von

J. Vonderlinn

Ingenieur und Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule zu Breslau.

Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1893.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch ist speziell für Baugewerkschulen und ähnliche technische Lehranstalten bestimmt. Sein Inhalt beschränkt sich auf das Unterrichtspensum in der Darstellenden Geometrie der vierten Klasse einer Baugewerkschule. Die Beispiele sind mit besonderer Rücksicht auf den Beruf des Bautechnikers ausgewählt und dienen als Grundlage für den weiteren Unterricht in der dritten Klasse.

Der nachfolgende zweite Teil wird die Unterrichtspensa der dritten, zweiten und ersten Klasse, nämlich die Schattenkonstruktion, das Schiften bei Walmdächern, das Projizieren und Austragen der Treppenkrümmlinge, die Lehre vom Steinschnitt und schliesslich die Centralperspektive in der für den Baugewerkschüler gebotenen Beschränkung behandeln.

Für die sorgfältige Herstellung des Buches sage ich der geehrten Verlagshandlung meinen verbindlichsten Dank.

Breslau, im September 1892.

J. Vonderlinn.

Inhalts-Verzeichnis.

I. Geometrische Konstruktionen.

II. Die Projektionslehre.

III. Die rechtwinklige Projektion von Körpern und deren Schnitte mit Ebenen und Geraden, Netzbestimmungen.

IV. Die rechtwinklige Projektion der Schraubenlinie und der Schraubenflächen.

V. Ueber die Bestimmung des Schnittes einer Geraden mit der Oberfläche eines Körpers.

VI. Die rechtwinklige Axonometrie.

VII. Die schiefwinklige Axonometrie.

VIII. Ueber die Durchdringung von Körpern.

IX. Einfache Dachausmittelungen.

I. Geometrische Konstruktionen.

1) Allgemeine Bemerkungen über die Herstellung von Zeichnungen.

1) Zur Anfertigung einer sauberen und korrekten Zeichnung sind in erster Linie tadellose Zeicheninstrumente erforderlich; hierzu gehören: Ein gutes, astfreies und womöglich völlig ausgetrocknetes Reissbrett mit Schiene, ein Paar Dreiecke, mit den Winkeln 30° und 60° bezw. 45°, ein prismatischer Massstab, ein gutes Reisszeug, Bleistifte, am besten Faberstifte in dem entsprechenden Härtegrade, für Linearzeichnungen No. 5, 4 oder 3, einige Stückchen Gummi, darunter Naturgummi, ein Wasserglas, ein Stückchen Schwamm, eine Anzahl von Farbenschalen, ein Stück Leder zum Reinigen der Ziehfedern und endlich die notwendigen technischen Farben.

Näheres über die Beschaffenheit der Zeicheninstrumente sowie Anhaltspunkte für das Anfertigen von technischen Zeichnungen findet man in dem Werkchen: „Wie fertigt man technische Zeichnungen?“ von A. zur Megede, kgl. Regierungsbaumeister, Berlin. Polytechnische Buchhandlung von A. Seydel.

Hier sei nur noch bemerkt, dass jede technische Zeichnung folgenden Anforderungen genügen soll: Sie muss einerseits mit peinlichster Genauigkeit und Sauberkeit, andererseits sachlich richtig und endlich in einem ihrem Zwecke entsprechenden Massstabe hergestellt sein.

2) Konstruktion des Massstabes.

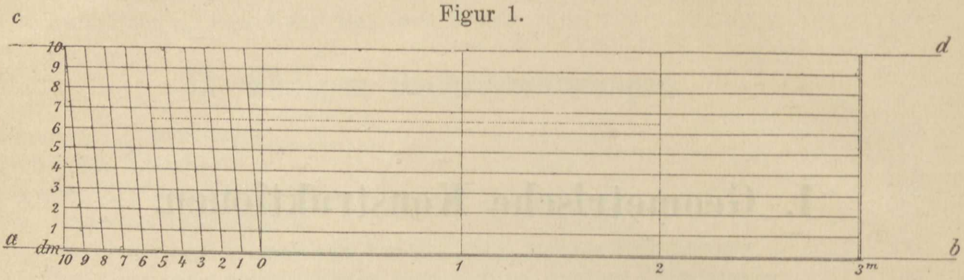
2) In der Regel wird eine technische Zeichnung in einem verjüngten Massstabe angefertigt, d. h. die in der Zeichnung dargestellten Ausdehnungen eines Gegenstandes stehen zu dessen entsprechenden Ausdehnungen in der Wirklichkeit in einem bestimmten Verhältnisse. Dies Verhältnis kann, je nach dem Zwecke, welchem die Zeichnung zu dienen hat, verschiedenen Wert besitzen.

So fertigt man z. B. Bauzeichnungen, wie Grund- und Aufriss oder Durchschnitt eines Gebäudes in der Regel in den Massstäben 1:100, 1:50, 1:25 u. dergl. an, d. h. die Masse in der Zeichnung verhalten sich zu jenen der Wirklichkeit wie 1:100 oder 1:50 bezw. 1:25.

Ein Massstab soll nun so beschaffen sein, dass man aus demselben die Längeneinheit mit ihren Unterabteilungen unmittelbar abgreifen kann. Nach dem metrischen Masssystem ist die gebräuchliche Längeneinheit der Meter, d. i. der 40millionste Teil eines Erdmeridians; es ist wünschenswert aus dem Massstabe die Meter, Decimeter, Centimeter event. auch die Millimeter direkt abgreifen zu können. In folgender Weise kann dies erreicht werden.

Beträgt z. B. das Verjüngungsverhältnis 1:37, so entspricht einem Meter der Wirklichkeit in der Zeichnung eine Länge von $\frac{1000}{37} = 2\dot{7}$ mm.

Figur 1.



Trägt man diese Länge von 27 mm auf eine Gerade ab, siehe Figur 1, gleich der Strecke 0·10 an, teilt letztere in 10 gleiche Teile, so entspricht ein solcher Teil der Länge eines Decimeters der Zeichnung.

Wird nun im Punkte 10 die Senkrechte zu ab errichtet und trägt man auf diese vom Punkte 10 aus eine Strecke von beliebiger Länge 10 mal auf, zieht durch die Teilpunkte 1 bis 10 Parallele zu ab, verbindet den Teilpunkt 9 auf der Linie ab mit dem Punkte 10 auf der Parallelen cd und zieht durch die übrigen Punkte 8, 7, 6 bis 0 auf ab die Parallelen zu 10·9, so kann man, wenn überdies vom Punkte 0 der Linie ab aus die Längeneinheit noch nach 1, 2, 3 ··· abgetragen und in jedem dieser Punkte eine Senkrechte zu ab errichtet wird, aus dem so konstruierten Massstabe eine Länge bis auf 1 cm genau unmittelbar abgreifen.

Soll z. B. eine Länge = 2,56 m abgegriffen werden, so geht man einerseits auf der Vertikalen des Punktes 2 der Meterteilung, andererseits auf der Schrägen durch den Punkt 5 der Decimeterteilung je bis zur 6. Horizontalen, greift auf letzterer die zwischen der vertikalen und schrägen Linie liegende Strecke ab. Diese beträgt dann 2,56 m.

Die Millimeter lassen sich zwar nicht mehr direkt abgreifen, wohl aber mit hinlänglicher Genauigkeit schätzen. Hätte man z. B. die Länge 2,565 abzugreifen, so würde man in gleicher Weise wie vorhin verfahren, nunmehr aber nicht auf der 6. Horizontalen, sondern sich in der Mitte zwischen der 6. und 7. Horizontalen eine Zwischenhorizontale gezogen denken und auf dieser abgreifen.

Will man umgekehrt eine bestimmte Länge der Zeichnung durch die zugehörige Masszahl ausdrücken, so nimmt man diese Länge in den Zirkel und führt letzteren so, dass die eine Spitze auf der Vertikalen der Meterteilung, die andere auf die Schrägen der Decimeterteilung zu liegen kommt und ausserdem beide Zirkelspitzen in einer Horizontalen des Massstabes oder einer gedachten Zwischenhorizontalen sich befinden. Man kann dann die Centimeter unmittelbar ablesen, die Millimeter aber schätzen. Wäre die Lage der auszudrückenden Länge die im Massstabe, siehe Figur 1, gestrichelte Linie, so beträgt diese wie im vorigen Falle ungefähr 2,565 m.

3) Konstruktion der wichtigsten regelmässigen Vielecke.

3) Die regelmässigen Vielecke finden in der Bautechnik häufig Verwendung einerseits zu konstruktiven, andererseits zu ornamentalen Zwecken; es sollen daher im folgenden die Konstruktionen der gebräuchlichsten, regelmässigen Vielecke angegeben werden.

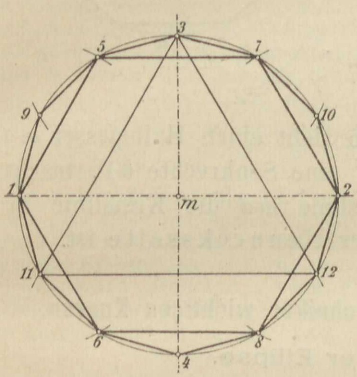
Die Ecken eines jeden regelmässigen Vielecks liegen auf einem Kreise. Man nennt ihn den dem Vieleck umbeschriebenen Kreis. Derselbe soll stets als gegeben vorausgesetzt werden.

Das regelmässige Sechseck. Die Seite des regelmässigen Sechsecks ist gleich dem *Halbmesser* des umbeschriebenen Kreises. Man braucht also nur diesen Halbmesser etwa von einem Punkte 1 der Kreislinie aus, siehe Figur 2, 6 mal als Sehne in den Kreis zu tragen.

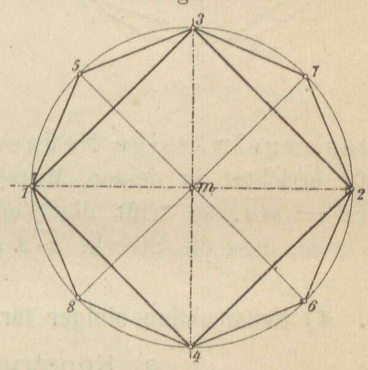
Das regelmässige Zwölfeck. Man zieht, siehe Figur 2, zwei aufeinander senkrechte Kreisdurchmesser $\overline{1 \cdot 2}$ und $\overline{3 \cdot 4}$ und trägt von deren Endpunkten aus den Kreishalbmesser als Sehne in den Kreis.

Das regelmässige Dreieck. Man zieht, siehe Figur 2, einen Kreisdurchmesser, trägt von dessen einem Endpunkte etwa 4, den Kreishalbmesser als Sehne in den Kreis und verbindet die so sich ergebenden Punkte 11 und 12 mit dem Punkte 3.

Figur 2.



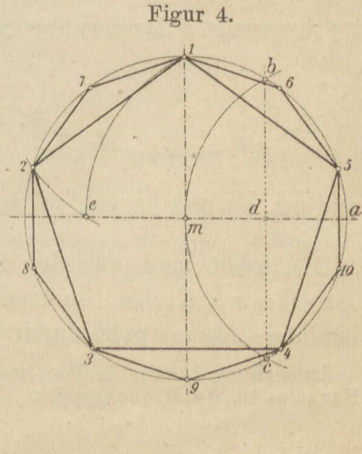
Figur 3.



Das regelmässige Viereck (Quadrat). Man zeichnet zwei aufeinander senkrechte Durchmesser $\overline{1 \cdot 2}$ und $\overline{4 \cdot 5}$, siehe Figur 3, und verbindet deren Endpunkte miteinander.

Das regelmässige Achteck. Man zeichnet wieder zwei aufeinander senkrechte Durchmesser und halbiert deren Winkel; die Halbierungslinien bilden gleichfalls zwei aufeinander senkrechte Durchmesser $\overline{5 \cdot 6}$ und $\overline{7 \cdot 8}$ und ihre Endpunkte 5, 6 und 7, 8 bilden in Verbindung mit den Punkten 1, 2, 3, 4 die Ecken des *regelmässigen Achtecks.*

Figur 4.

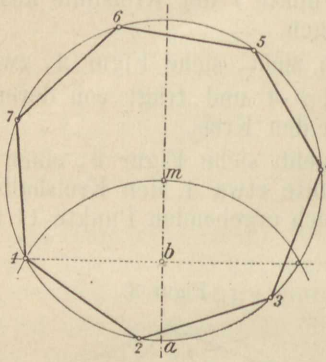


Das regelmässige Fünfeck. Man zeichnet zwei aufeinander senkrechte Durchmesser, halbiert auf dem einen den Halbmesser $\overline{ma}$, siehe Figur 4 im Punkte d, beschreibt um d als Mittelpunkt einen Kreisbogen $\overline{1e}$, gehend durch den Endpunkt 1, so ist die Länge $\overline{1e}$ gleich der Seite des *regelmässigen Fünfecks.*

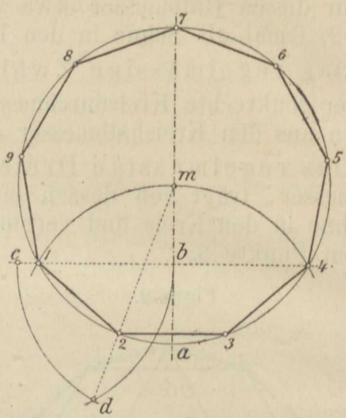
Das regelmässige Zehneck. Man konstruiert in gleicher Weise wie vorhin und erhält in der Strecke $\overline{me}$, siehe Figur 4, die Seite des *regelmässigen Zehnecks.*

Das regelmässige Siebeneck. Man zieht einen Halbmesser $\overline{ma}$, siehe Figur 5, errichtet in dessen Mittelpunkte b eine Senkrechte $b\,1$, so ist die Länge $\overline{b\,1}$ hinlänglich genau gleich der Seite des regelmässigen Siebenecks.

Figur 5.



Figur 6.



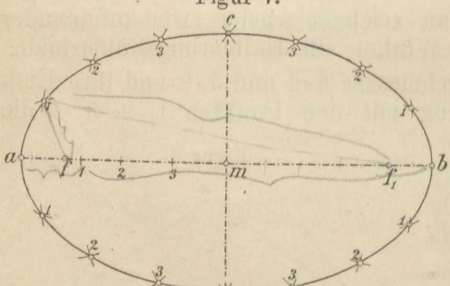
Das regelmässige Neuneck. Man zieht einen Halbmesser $\overline{ma}$, siehe Figur 6, errichtet in dessen Mittelpunkt b eine Senkrechte $b\,1$, macht $\overline{bc} = \overline{bd} = \overline{cd} = \overline{ma}$, so trifft die Verbindungslinie md die Kreislinie in einem Punkte 2 so, dass die Strecke $\overline{1 \cdot 2}$ gleich der Neunecksseite ist.

4) Konstruktion einiger für den Techniker wichtigen Kurven.

a) Konstruktion der Ellipse.

4) Die Ellipse ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien festen Punkten eine gegebene Abstandssumme besitzen. Aus dieser Eigenschaft leitet sich die folgende Konstruktion der Kurve ab:

Figur 7.



Sind f und f_1 die beiden festen Punkte, siehe Figur 7, so verbinde man sie durch eine Gerade, halbiere die Strecke $\overline{ff_1}$ in dem Punkte m und mache $\overline{ma} = \overline{mb}$ gleich einer beliebigen Länge, jedoch grösser als die Strecke $\overline{mf}$.

Nimmt man nun auf der Strecke $\overline{mf}$ die Punkte 1, 2, 3 ⋯ beliebig an und beschreibt aus den Punkten f und f_1 als Mittelpunkte Kreise mit den Halbmessern gleich den Strecken $\overline{a1}$ und $\overline{b1}$, $\overline{a2}$ und $\overline{b2}$, $\overline{a3}$ und $\overline{b3}$ ein, so treffen sich diese Kreise in den Punkten 1, 2, 3 ⋯ der Ellipse.

Beschreibt man aus den Punkten f und f_1 mit einem Halbmesser gleich der Strecke $\overline{ma}$ Kreise, so treffen sich diese in den Punkten c und d und die Verbindungslinie cd geht durch m und steht senkrecht auf $\overline{ab}$.

Anmerkung 1. Die beiden Geraden ab und cd heissen die Hauptachsen der Ellipse; der Punkt m ist ihr Mittelpunkt. Durch die beiden Hauptachsen wird die von der Ellipse eingeschlossene Fläche in vier gleichgrosse, kongruente Abschnitte geteilt. Die Hauptachsen sind Symmetrieachsen der Kurve.

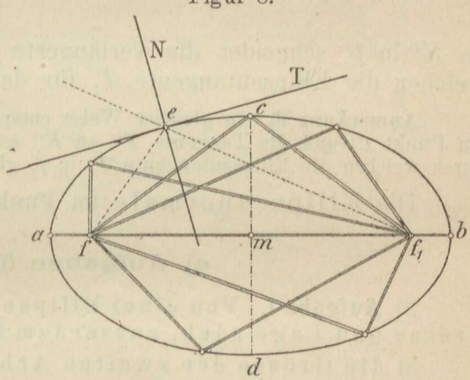
Die Achse ab heisst die grosse, die Achse cd die kleine Hauptachse. Beide Hauptachsen werden im Punkte m gegenseitig gehälftet. Ueberhaupt wird jede durch den Mittelpunkt m gehende Gerade, deren Endpunkte auf der Ellipse liegen, im Mittelpunkt gehälftet. Eine solche Gerade heisst ein Ellipsendurchmesser, ihre Hälfte ein Ellipsenhalbmesser. Die Ellipsendurchmesser sind von ungleicher Länge; $\overline{ab}$ ist der grösste, $\overline{cd}$ der kleinste Durchmesser.

Sind von einer Ellipse die Hauptachsen von vorn herein gegeben und dies ist in der Regel der Fall, so kann man sich leicht die Brennpunkte verschaffen. Man braucht ja nur aus einem Endpunkte c oder d der kleinen Achse mit einem Halbmesser gleich der grossen Halbachse, also gleich $\overline{ma}$ einen Kreis zu beschreiben, so schneidet dieser die grosse Halbachse in den Brennpunkten f und f_1. Hat man aber diese bestimmt, so bleibt die Konstruktion der einzelnen Ellipsenpunkte die gleiche wie vorhin.

Anmerkung 2. Die eben angeführte Konstruktion der Ellipse benützt der Techniker mit Vorteil, wenn es sich darum handelt, die Schablone oder Brettung für einen elliptischen Bogen herzustellen Es werden in diesem Falle auf dem Brette die Hauptachsen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, siehe Figur 8, aufgezeichnet und mittels eines Schnurschlages die Brennpunkte f und f_1 ermittelt und etwa durch Nägel markiert.

Legt man nur durch die drei Punkte f, f_1 und c eine straff angespannte Schnur, siehe Figur 8, und verbindet mit ihr im Punkte c mittels eines Knotens ein Bleistift, so beschreibt die Spitze desselben, wenn die Schnur längs den Punkten f und f_1 gleitet und stets gespannt bleibt, die Ellipse.

Figur 8.



b) Konstruktion der Tangente und Normalen an die Ellipse.

5) Für den Techniker ist die Konstruktion der Normalen von Wichtigkeit, denn dieser bedarf er bei der Konstruktion von Gewölben als Richtung der Stossfugen für die Gewölbsteine.

Unter Benützung der Brennpunkte erhält man die Normale in einem beliebigen Punkt e der Ellipse, siehe Figur 8, als die Halbierungslinie des Winkels fef_1. Die Tangente T in e steht senkrecht zu N, d. h. sie ist die zweite Halbierungslinie des genannten Winkels.

c) Konstruktion der Ellipse ohne Benützung der Brennpunkte.

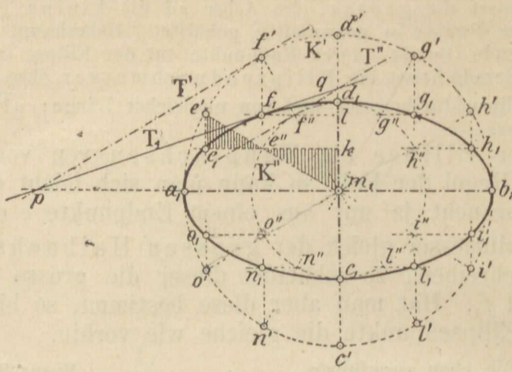
6) Sind die beiden Hauptachsen $\overline{a_1b_1}$ und $\overline{c_1d_1}$, siehe Figur 9, Seite 6, gegeben, so beschreibe man um den Mittelpunkt m_1 die Kreise K' und K'', gehend durch die Scheitel der Ellipse, teile den grösseren derselben in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und verbinde die Teilpunkte mit dem Mittelpunkte, wodurch auch der kleine Kreis entsprechend geteilt wird.

Durch die Punkte des grossen Kreises ziehe man Parallellinien zur kleinen, durch die entsprechenden Punkte des kleinen Kreises Parallele zur grossen Achse. Je ein Paar solcher Parallellinien treffen sich in Ellipsenpunkten.

d) Konstruktion der Tangente und Normalen.

7) Die Tangente in einem beliebigen Punkte, z. B. f_1, ergibt sich wie folgt: Dem Punkte f_1 entspricht auf dem Kreise K' der Punkt f'; die Tangente T'

Figur 9.



an K' in f' schneidet die verlängerte Achse $a_1 b_1$ in einem Punkte p, durch welchen die Ellipsentangente T_1 für den Punkt f_1 hindurchgeht.

Anmerkung 3. In gleicher Weise entspricht dem Ellipsenpunkte f_1 auf dem Kreise K'' ein Punkt f'' und die Tangente T'' an K'' schneidet die verlängerte $c_1 d_1$ in einem Punkt q, durch welchen die Ellipsentangente T_1 in f_1 gleichfalls hindurchgeht.

Die Ellipsennormale im Punkte f steht senkrecht zur Tangente T_1.

e) Aufgaben über die Ellipse.

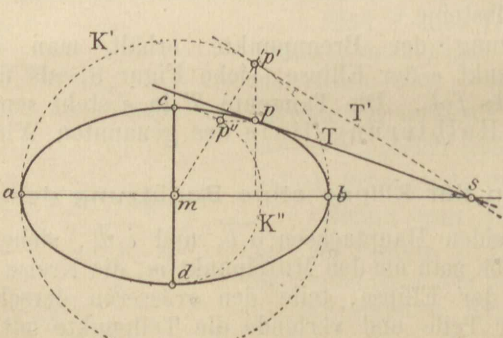
8) **Aufgabe 1.** Von einer Ellipse ist gegeben die grosse Achse $\overline{ab}$ der Grösse und Lage nach, ausserdem im Punkt p. Man soll

a) die Grösse der zweiten Achse,

b) beliebig viele weitere Ellipsenpunkte,

c) im Punkte p eine Tangente bezw. Normale an die Ellipse konstruieren.

Figur 10.



Auflösung a. Beschreibe, siehe Figur 9, über $\overline{ab}$ als Durchmesser den Kreis K', ziehe durch p eine Senkrechte und eine Parallele zu ab; erstere schneidet den Kreis K' in einem Punkte p' und letztere trifft die Verbindungslinie mp' in einem Punkte p'' so, dass $\overline{mp''}$ gleich der Länge der kleinen Halbachse ist.

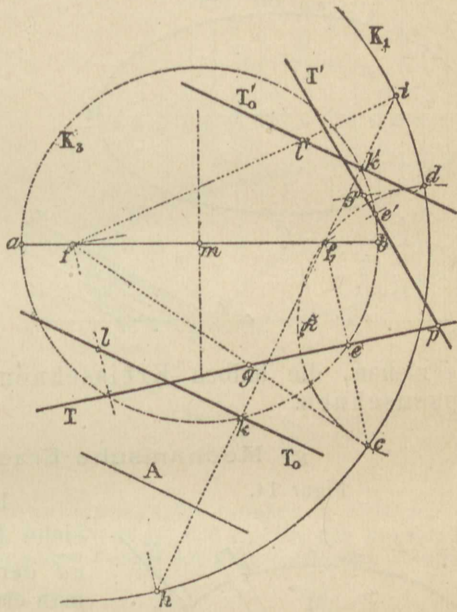
Auflösung b und c. Die Konstruktion weiterer Ellipsenpunkte geschieht nach dem unter 6) angegebenen Verfahren, die Ermittelung der Tangente im Punkte p nach 7).

Bezüglich weiterer Aufgaben über die Ellipse siehe des Verfassers: „Lehrbuch des Projektionszeichnens I. bis III. Teil."

8a) **Aufgabe 2.** Von einer Ellipse sind gegeben die grosse Achse $\overline{ab}$, sowie die beiden Brennpunkte f und f_1. Man soll

a) durch einen gegebenen Punkt p,
b) parallel einer Geraden A,
die möglichen Tangenten an die Ellipse zeichnen.

Figur 11.



Auflösung a. Um den gegebenen Punkt p als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis $\mathfrak{K}$, gehend durch den einen Brennpunkt f_1. Um den andern Brennpunkt f beschreibe man einen zweiten Kreis mit einem Halbmesser gleich der grossen Achse $\overline{ab}$. Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten d und e und die gesuchten Tangenten gehen durch p und stehen senkrecht zu den Verbindungslinien $f_1 d$ und $f_1 e$. Ihre Berührungspunkte liegen auf den Verbindungslinien fd und fe. Es sind höchstens zwei Tangenten von p aus an die Ellipse möglich.

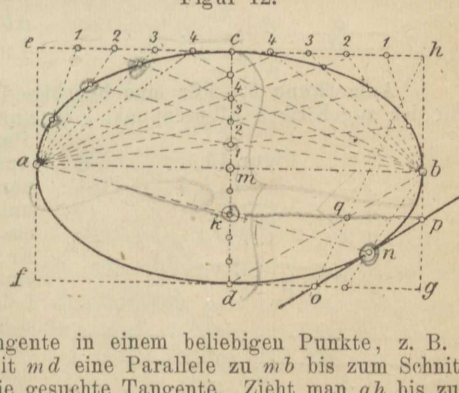
Auflösung b. Die Konstruktion bleibt ganz die nämliche wie unter a, nur geht der Kreis $\mathfrak{K}$ in eine Senkrechte durch f_1 zu der Geraden A über.

f) Weitere Konstruktionen der Ellipse.

9) Man kennt wieder die Hauptachsen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$. Zeichne, s. Figur 10, durch die Punkte a, b, c, d das Rechteck $efgh$. Zur Konstruktion des Ellipsenviertels ac teilt man die Seite $\overline{ec}$ in eine beliebige Anzahl, z. B. fünf, gleicher Teile, desgleichen die Strecke $\overline{mc}$. Die Teilpunkte auf ec verbinde man mit dem Punkte a, jene auf mc mit dem Punkte b. Die durch gleichbezeichnete Teilpunkte gehenden Verbindungsstrahlen schneiden sich in Ellipsenpunkten.

Für das Ellipsenviertel bc geschieht die Teilung auf $\overline{ch}$ und $\overline{mc}$.

Figur 12.



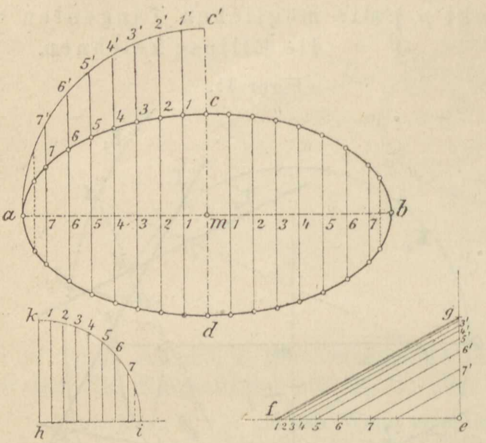
Anmerkung 4. Zur Bestimmung der Tangente in einem beliebigen Punkte, z. B. n, ziehe man na und durch den Schnittpunkt k mit md eine Parallele zu mb bis zum Schnittpunkt p mit bg. Die Verbindungslinie np ist die gesuchte Tangente. Zieht man qh bis zum Schnittpunkt o mit dg, so ist auch o ein Punkt der Tangente im Punkte n.

Eine weitere häufig mit Vorteil zu benützende Konstruktion ist auch folgende:

Man zeichnet über der grossen Halbachse $\overline{ma}$, siehe Figur 13, einen Viertelskreis, teilt $\overline{ma}$ und $\overline{mb}$ je in eine beliebige Anzahl, z. B. 8, gleicher

Teile und zieht die Senkrechten zur grossen Achse. Teilt man jede der halben Kreissehnen $\overline{11'}$, $\overline{22'}$ ··· so, dass die Abschnitte in dem gleichen Verhältnis zu einander stehen, wie die Halbachsen $\overline{ma}$ und $\overline{mb}$, so geben die Teilpunkte Ellipsenpunkte. Zu diesem Zwecke trägt man auf einer Geraden $\overline{ef} = \overline{ma}$, siehe Figur 13 a, die genannten halben Kreissehnen ab, desgleichen auf der Senkrechten eg zu ef die kleine Achse $\overline{mc}$ und zieht durch die Teilpunkte auf ef Parallele zu fg; die Strecken auf eg geben die bezüglichen halben Ellipsensehnen.

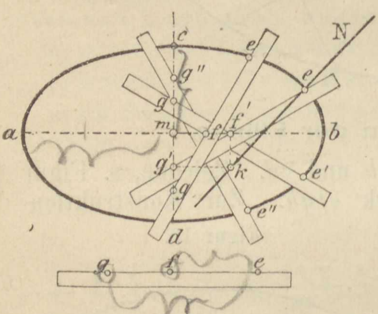
Figur 13 b. Figur 13. Figur 13 a.



Entsprechend kann man auch, siehe Figur 13 b, über einer Strecke $\overline{hi} = \overline{mc}$ einen Viertelskreis beschreiben, $\overline{hi}$ in ebensoviel Teile teilen als die Strecke $\overline{ma}$ oder $\overline{mb}$ geteilt ist, und durch die Teilpunkte Senkrechte zu hi ziehen, die halben Kreissehnen sind gleich den bezüglichen halben Ellipsensehnen.

g) Mechanische Erzeugung der Ellipse.

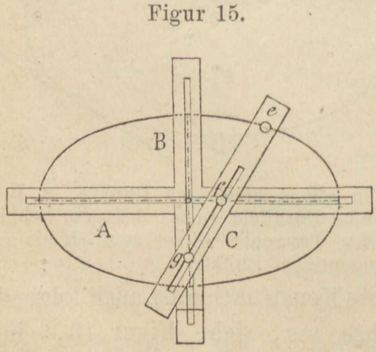
Figur 14.



10) Kennt man von einer Ellipse, siehe Figur 14, die beiden Achsen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ der Grösse und Lage nach, so trage man etwa auf dem Rande eines Papierstreifens von einem Punkte e aus nach der nämlichen Richtung hin die Längen $\overline{ef}$ und $\overline{eg}$ gleich den beiden Halbachsen ab und bewege nun den Papierstreifen so, dass die Endpunkte f und g stets auf den beiden Geraden ab und cd fortrücken. Die verschiedenen Lagen des Punktes e bilden die Ellipse.

Anmerkung 5. Für eine beliebige Lage des Strahles ge, siehe Figur 14, erhält man für den zugehörigen Ellipsenpunkt e in einfacher Weise die Normale, wenn man durch die Punkte f' und g' Parallele zu den Hauptachsen zieht und deren Schnittpunkt k mit e verbindet. Ein Apparat, mittels welchem man eine Ellipse auf die unter 10) beschriebene Weise erzeugen kann, heisst ein Ellipsenzirkel (Ellipsograph), s. Fig. 15. Er besteht aus zweien in fester Verbindung und aufeinander senkrecht stehenden mit Nuten versehenen Leisten A und B. Eine dritte Leiste C, auf welcher sich zwei verstellbare Schrauben f und g befinden, bewegt sich so, dass die Bolzen der Schrauben, unter sich gleichen Abstand behaltend, in den Nuten der Leisten A und B fortrücken. Das mit einem Schreibstift versehene Ende e der Leiste C zeichnet die Ellipse. Soll der Apparat zum Zeichnen einer Ellipse Verwendung finden, so bringt man die Leisten A und B über die Achsen der zu zeichnenden Ellipse, macht die Entfernungen $\overline{eg}$ und $\overline{ef}$ gleich der grossen

Figur 15.



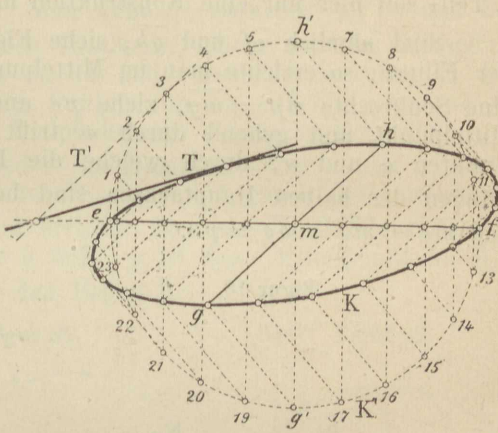
bezw. kleinen Halbachse, zieht die Schrauben f und g fest an und führt die eben beschriebene Bewegung aus.

h) Konstruktion der Ellipse aus conjugierten Durchmessern.

11) Unter conjugierten Durchmessern einer Ellipse versteht man zwei solche Durchmesser, bei welchen die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers parallel laufen zum andern Durchmesser.

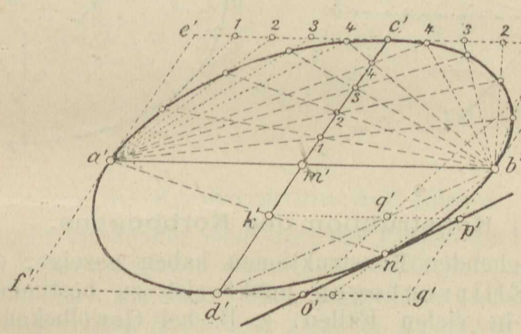
1. Konstruktion. Sind, siehe Figur 16, $\overline{ef}$ und $\overline{gh}$ zwei conjugierte Durchmesser, so beschreibe man über dem einen Durchmesser, etwa $\overline{ef}$ als Durchmesser einen Kreis, teile denselben in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, ziehe durch dieselben Senkrechte zu ef und durch deren Schnittpunkte mit ef Parallele zu gh. Die Endpunkte des zu ef senkrechten Kreisdurchmessers $\overline{g'h'}$ verbinde man mit den Punkten g und h und ziehe durch die Kreispunkte 1, 2, 3, 4 ··· zu dieser Verbindungslinie Parallele, diese treffen die Parallelen zu gh in Ellipsenpunkten.

Fig. 16.



Anmerkung 6. Ist eine Tangente in einem Ellipsenpunkte verlangt, so zieht man durch ihn eine Parallele zu hh' bis zum Schnitt mit dem Kreise K' und legt an den Kreispunkt die Tangente T', welche die verlängerte Linie ef in einem Punkte der Ellipsentangente T schneidet.

Figur 17.



2. Konstruktion. Sind wieder die conjugierten Durchmesser $\overline{a'b'}$ und $\overline{c'd'}$, siehe Figur 17, gegeben, so lege man durch die vier Punkte a', b', c' d' das Parallelogramm $e'f'g'h'$, teile $\overline{e'c'}$, desgleichen $\overline{m'c'}$ in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und verbinde die Teilpunkte auf $e'c'$ mit a', jene auf $m'c'$ mit b'. Je zwei durch die gleich bezeichneten Teilpunkte gehenden Verbindungslinien schneiden sich in Ellipsenpunkten. Für das Ellipsenviertel $c'b'$ sind die Teilpunkte auf $c'h'$ mit b', jene auf $m'c'$ mit a' zu verbinden.

Anmerkung 7. Ist etwa in einem Punkte n' eine Tangente zu konstruieren, so ziehe man $n'a'$ und durch den Schnittpunkt k' mit $c'd'$ eine Parallele zu $m'b$; ihr Schnitt p' auf $b'g'$ ist ein Punkt der Tangente in n'; desgleichen liefert die Verbindungslinie $h'q'$ auf $d'g'$ einen weiteren Punkt dieser Tangente.

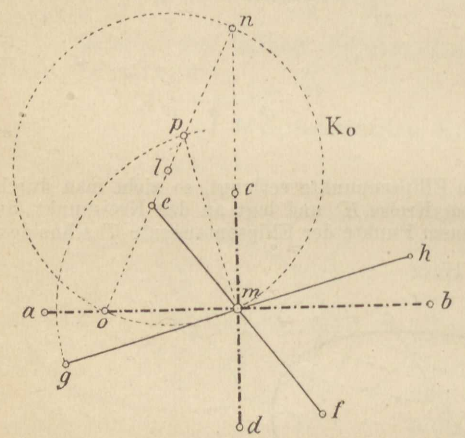
i) Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse aus conjugierten Durchmessern.

12) Zur bessern Verzeichnung einer Ellipse ist es manchmal wünschenswert und zweckmässig, anstatt zweier conjugierten Durchmesser die Hauptachsen der Ellipse zu benützen.

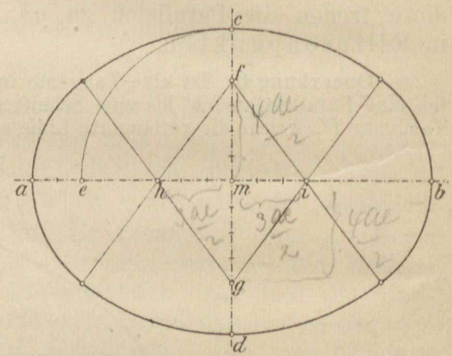
Von den verschiedenen Konstruktionen der Hauptachsen einer Ellipse aus conjugierten Durchmessern, (siehe des Verfassers Lehrbuch des Projektionszeichnens I. Teil) soll hier nur eine Konstruktion mitgeteilt werden.

Sind nämlich $\overline{ef}$ und $\overline{gh}$, siehe Figur 18, zwei conjugierte Durchmesser der Ellipse, so errichte man im Mittelpunkt m auf dem grösseren Durchmesser eine Senkrechte $\overline{mp} = \overline{mg}$, ziehe pe und mache $\overline{pl} = \overline{el}$; ein Kreis um l als Mittelpunkt und gehend durch m trifft die verlängerte Linie pe in zweien Punkten o und n, durch welche die Hauptachsen hindurchgehen. Die Längen der halben Hauptachsen sind beziehungsweise $\overline{ma} = \overline{mb} = \overline{op} = \overline{en}$ und $\overline{mc} = \overline{md} = \overline{oe} = \overline{pn}$.

Figur 18.



Figur 19.



k) Konstruktion des Korbbogens.

13) Die vorhergehenden Konstruktionen haben gezeigt, dass es ziemlich mühsam ist, einen Ellipsenbogen punktweise zu bestimmen; aus diesem Gründe ersetzt man in vielen Fällen, z. B. bei Gewölbekonstruktionen, die Ellipse durch eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Linie, welche man Korbbogen nennt. Ausserordentlich mannigfaltig sind die Konstruktionen hierfür. Hier soll nur eine der wichtigsten und zweckmässigsten dieser Konstruktionen angegeben werden.

Sind, siehe Figur 19, ab und cd die Hauptachsen einer Ellipse, welche durch einen Korbbogen ersetzt werden soll, so mache man $\overline{me} = \overline{mc}$ und halbiere $\overline{ae}$; trägt man nun die Hälfte von $\overline{ae}$ von m aus dreimal nach beiden Seiten von ab nach h und i, und viermal auf der kleineren Achs cd nach f und g ab, zieht die Linien fh, gh, fi, gi, so sind die Punkte h, f, i und g die Mittelpunkte von Kreisbögen, welche auf den genannten Linien zusammenstossen und den Korbbogen bilden.

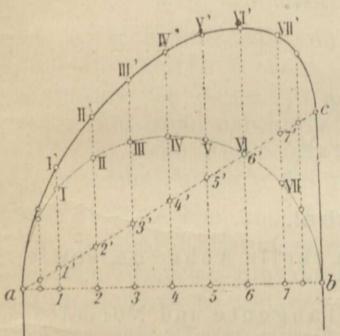
l) Konstruktion des steigenden Bogens.

14) Der steigende Bogen findet vielfach Verwendung bei der Anlage von Treppenhäusern und besteht in der Regel aus einer Ellipse, von welcher zwei conjugierte Durchmesser gegeben sind, oder als Ersatz hierfür aus einem Korbbogen. Folgende Konstruktionen sind vielfach in Anwendung:

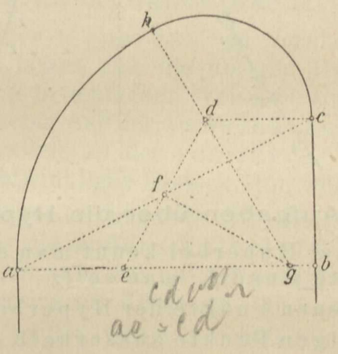
1. Konstruktion. Es sind, siehe Figur 20, die Punkte a und c als Kämpferpunkte eines steigenden Bogens gegeben, die Höhe des Bogens soll gleich der halben Länge von $\overline{ab}$ sein. Man ziehe ab senkrecht zu bc und beschreibe über $\overline{ab}$ als Durchmesser einen Halbkreis. Zieht man in demselben nun eine Reihe von Sehnen senkrecht zu ab und verschiebt dieselben in den durch sie bestimmten Geraden, bis die Punkte von ab auf die Linie ac zu liegen kommen, so bilden die zweiten Endpunkte die elliptische Bogenlinie.

2. Konstruktion. Es sind wieder die Kämpferpunkte a und c, siehe Figur 21, gegeben. Man ziehe cd senkrecht zu ab und gleich einer beliebigen Länge. Mache $\overline{ae} = \overline{cd}$, ziehe de und errichte über $\overline{de}$ die Halbierungssenkrechte, welche die Linie ab im Punkte g trifft. g ist dann Mittelpunkt für den Bogen ah, d dagegen Mittelpunkt für den Bogen $\overline{hc}$.

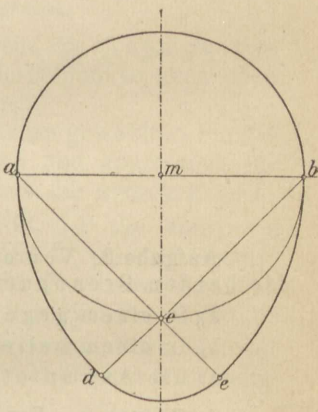
Figur 20.



Figur 21.



Figur 22.



m) Konstruktion der Eilinie.

15) Manchmal verwendet man statt der Ellipse auch die Eilinie als Bogenform bei Kanal-, Tunnelprofilen u. dergl.; eine einfache Konstruktion einer solchen Linie ist nebenstehend gegeben. Man beschreibe, siehe Figur 22, mit einem gegebenen Halbmesser den Kreis abc, ziehe in ihm zwei aufeinander senkrechte Durchmesser ab und mc, verbinde bc und ac, so sind die Punkte a, b und c die Mittelpunkte für die Kreisbögen be, ad und de.

n) Konstruktion der Hyperbel.

16) Die Hyperbel ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zweien festen Punkten eine gegebene Abstandsdifferenz besitzen. Aus der angegebenen Eigenschaft folgt die nachstehende Konstruktion der Kurve:

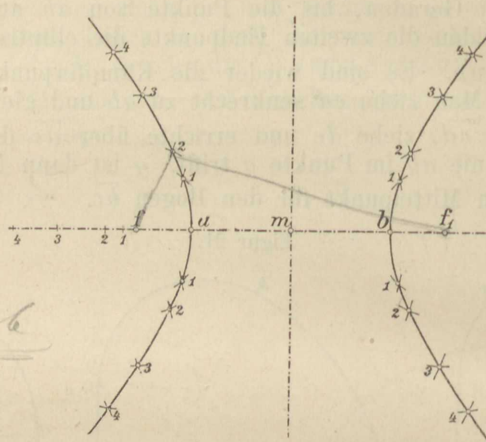
Sind f und f_1, siehe Figur 23, die gegebenen Punkte, so ziehe man ff_1, halbiere diese Linie in dem Punkte m und mache die Strecke $\overline{ma} = \overline{mb}$ gleich der Hälfte der gegebenen Abstandsdifferenz. Wählt man auf ff_1 die Punkte

1, 2, 3, 4 ··· willkürlich, jedoch so, dass ihre Entfernungen vom Punkte m stets grösser als die Strecke $\overline{ma}$ sind, und beschreibt mit den Längen $\overline{a1}$, $\overline{b1}$, $\overline{a2}$, $\overline{b2}$, $\overline{a3}$, $\overline{b3}$ ··· um die Punkte f und f_1 als Mittelpunkte Kreise, so liefern deren Schnittpunkte Hyperbelpunkte.

Anmerkung 8. Die Gerade ff_1 und die durch m hierzu gezogene Senkrechte sind Symmetrieachsen für die Kurve. Sie heissen ihre Hauptachsen und zwar ist erstere Linie die reelle, letztere Linie die imaginäre Hauptachse der Hyperbel.

Die Punkte f und f_1 heissen die Brennpunkte, die Punkte a und b die Scheitel der Hyperbel. Während die Ellipse einen endlichen Teil der Zeichenfläche einschliesst, erstreckt sich die Hyperbel nach zwei Seiten hin in unendliche Ferne.

Figur 23.



o) Aufgaben über die Hyperbel.

Aufgabe 3. Von einer Hyperbel kennt man die reelle Achse $\overline{ab}$, sowie die beiden Brennpunkte f und f_1; man soll:

a) in einem gegebenen Punkte der Hyperbel Tangente und Normale,

b) in einem beliebigen Punkte ausserhalb der Kurve eine Tangente,

c) die Asymptoten der Hyperbel konstruieren.

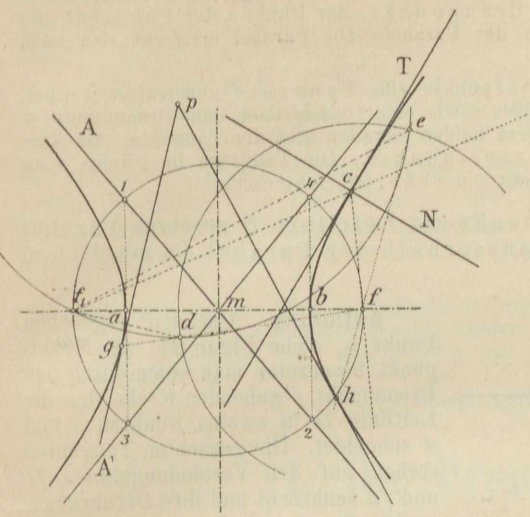
Auflösung a. Den gegebenen Punkt c, siehe Figur 24, verbinde man mit den beiden Brennpunkten und halbiere den Winkel der beiden Verbindungslinien (Fahrstrahlen). Die innere Halbierungslinie gibt die Tangente T, die äussere die Normale N für die Hyperbel.

Auflösung b. Um den Punkt p, siehe Figur 24, beschreibe man einen Kreis, gehend durch den einen Brennpunkt f_1. Um den andern Brennpunkt f beschreibe man einen zweiten Kreis mit einem Halbmesser gleich der Länge der reellen Achse $\overline{ab}$. Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten d und e, und die gesuchten Tangenten gehen durch p und stehen senkrecht zu den Verbindungslinien f_1d und f_1e. Ihre Berührungspunkte g und h liegen auf den Verbindungslinien fd und fe. Es sind nur zwei Tangenten von p aus an die Hyperbel möglich.

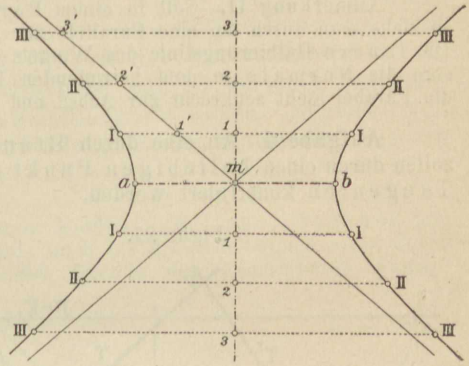
Auflösung c. Man beschreibe um m, siehe Figur 24, als Mittelpunkt einen Kreis, gehend durch die beiden Brennpunkte f und f_1. Die in den Scheiteln a und b zur reellen Achse errichteten Senkrechten treffen diesen Kreis in Punkten, durch welche die Asymptoten hindurchgehen.

Anmerkung 9. Unter den Asymptoten der Hyperbel versteht man die von dem Mittelpunkte m an die Hyperbel gezogenen Tangenten; ihre Berührungspunkte liegen in unendlicher Ferne, d. h. die Hyperbel nähert sich den Asymptoten immer mehr und mehr, ohne sie je zu erreichen.

Figur 24.



Figur 25.



p) Weitere Konstruktion der Hyperbel.

18) Kennt man von einer Hyperbel von vornherein die Asymptoten und die reelle Achse, so lassen sich die übrigen Hyperbelpunkte auch ohne Kenntnis der Brennpunkte in einfacher Weise bestimmen.

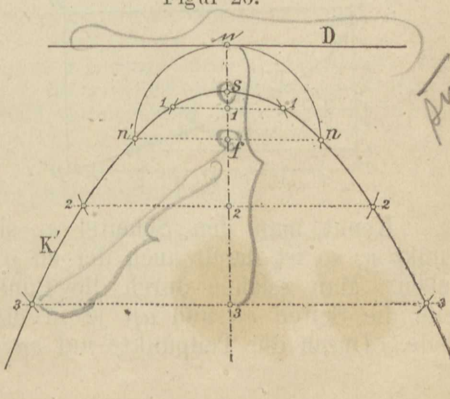
Man zieht durch die beliebig auf der imaginären Achse gewählten Punkte 1, 2, 3, siehe Figur 25, Parallele zu der reellen Achse und konstruiert für jede solche Parallele ein rechtwinkliges Dreieck, für welches die zwischen imaginärer Achse und Asymptote liegende Strecke, z. B. $\overline{11'}$ die eine, die reelle Halbachse aber stets die andere Kathete ist. Die Hypotenuse eines solchen Dreieckes gibt die Entfernung des auf der bezüglichen Parallelen liegenden Hyperbelpunktes von der imaginären Achse an, also im vorliegenden Falle die Länge $\overline{1\mathrm{I}}$. Für je zwei zur reellen Achse symmetrisch liegenden Parallelen ist selbstverständlich nur die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreieckes notwendig.

q) Konstruktion der Parabel.

19) Die Parabel ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem festen Punkte und einer festen Geraden gleiche Entfernung besitzen.

Ist, siehe Figur 26, f der feste Punkt, D die feste Gerade, so ziehe man durch f eine Senkrechte zu D und halbiere die Strecke fn im Punkte s, so ist s ein Parabelpunkt. Zieht man nun in beliebigen Abständen von D Parallele zu dieser Linie und beschreibt um f als Mittelpunkt mit diesen Abständen als Halbmesser Kreise, so treffen diese die zugehörigen Parallelen in Parabelpunkten.

Figur 26.

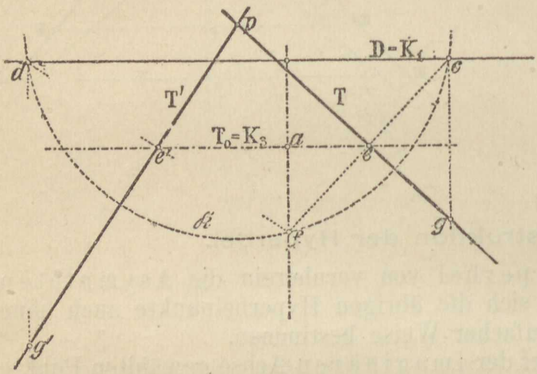


Anmerkung 10. Die Linie fn ist eine Symmetrieachse der Parabel und heisst deren Hauptachse, der Punkt f heisst der Brennpunkt, der Punkt s der Scheitel, die Linie D die Leitlinie oder auch Direktrix der Parabel. Die Parabel erstreckt sich nach einer Seite hin in unendliche Ferne.

Anmerkung 11. Soll in einem Parabelpunkte eine Tangente konstruiert werden, so ziehe man durch ihn eine Parallele zur Achse, sowie eine Gerade nach dem Brennpunkte f. Die innere Halbierungslinie des Winkels dieser beiden Geraden gibt die Tangente, die äussere die Normale in dem betreffenden Parabelpunkte. Die Tangente im Punkte s an die Parabel steht senkrecht zur Achse und heisst die Scheiteltangente.

Aufgabe 4. An eine durch Brennpunkt und Leitlinie D gegebene Parabel sollen durch einen beliebigen Punkt p ausserhalb der Parabel die möglichen Tangenten konstruiert werden.

Figur 27.

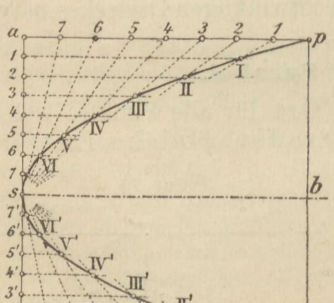


Auflösung. Um den gegebenen Punkt p, siehe Figur 27, als Mittelpunkt beschreibe man einen durch den Brennpunkt f gehenden Kreis, der die Leitlinie D in zweien Punkten c und d schneidet. Die gesuchten Tangenten stehen auf den Verbindungslinien fc und fd senkrecht und ihre Berührungspunkte liegen auf den durch c und d zur Achse gezogenen Parallelen. Aus der Konstruktion geht hervor, dass im höchsten Falle zwei Tangenten von einem Punkte aus an die Parabel möglich sind.

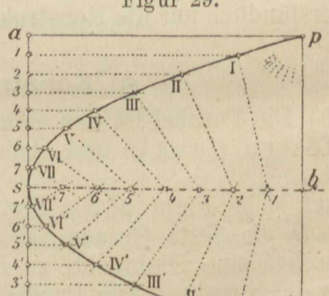
r) Weitere Konstruktionen der Parabel.

20) In vielen Fällen kennt man von einer Parabel den Brennpunkt nicht unmittelbar, wohl aber den Scheitel, die Achse und noch einen weiteren Punkt; man kann in diesem Falle leicht mit Umgehung des Brennpunktes weitere Punkte konstruieren.

Figur 28.



Figur 29.



Kennt man den Scheitel s, siehe Figur 28, die Achse sb sowie den Punkt p, so ist damit auch der zu p hinsichtlich sb symmetrische Punkt p' gegeben. Man zeichne durch die Punkte s, p und p' das Rechteck $app'a'$ und teile die Seiten sa und ap je in eine beliebige aber gleiche Anzahl gleicher Teile. Durch die Teilpunkte auf sa ziehe Parallele zur Achse, die Teilpunkte auf ap verbinde mit p; je zwei durch gleichbezeichnete Teilpunkte gehenden Verbindungslinien schneiden sich in Parabelpunkten. Entsprechend vollzieht sich die Konstruktion der anderen Parabelhälfte.

Man kann auch in folgender Weise beliebig viele Parabelpunkte ermitteln: Man zeichnet, siehe Figur 29, wieder das Rechteck $app'a'$, teilt aber nunmehr die Linie sb sowie jede der Hälften der Rechtecksseite aa' in die nämliche Anzahl gleicher Teile. Die Teilpunkte auf sb verbinde man mit p und p', durch jene auf aa' ziehe man Parallellinien zur Achse. Je zwei durch gleichbezeichnete Teilpunkte gehenden Verbindungslinien schneiden sich in Parabelpunkten.

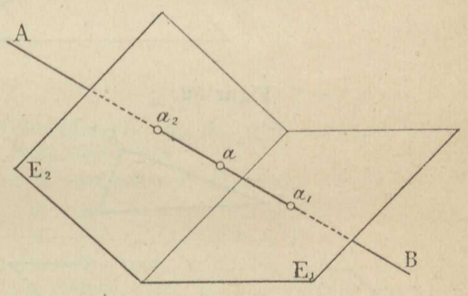
Anmerkung 12. Die vorstehend besprochenen Kurven: „Ellipse, Parabel und Hyperbel" treten, wie später gezeigt werden wird, auch als die Schnittlinien einer Ebene mit einem Kreiskegel auf und führen aus diesem Grunde den gemeinsamen Namen: „Kegelschnitte".

II. Die Projektionslehre.

1) Begriff und Zweck der Projektionslehre.

21) Die Projektionslehre hat den Zweck, Raumgrössen, siehe Anmerkung 13, durch Zeichnung darzustellen; es geschieht dies durch das Projizieren der Raumgrössen auf eine oder mehrere Projektionsebenen. Dieses Projizieren einer Raumgrösse, z. B. eines Punktes, besteht im allgemeinen darin, dass durch den Punkt, siehe Figur 30, eine gerade Linie gezogen wird, die eine bestimmte Lage gegen die Projektionsebenen einnimmt. Der Durchschnittspunkt dieser geraden Linie, welche „Projizierende" oder „Projektionsstrahl" heisst, mit der betreffenden Projektionsebene (siehe Anmerkung 13) ist die Projektion des Punktes.

Figur 30.



So ist z. B. in Figur 30 durch den Punkt a die Projizierende AB gezogen, welche die Projektionsebene E_1 in einem Punkte a_1, die Projektionsebene E_2 in einem Punkte a_2 trifft. Die Punkte a_1 und a_2 sind die Projektionen des Punktes a auf die Projektionsebenen E_1 und E_2.

Anmerkung 13. Projektionsebene soll in der Folge stets abgekürzt **„Pr. Eb."** geschrieben werden; man versteht darunter die Zeichnungsebene, d. i. jene Ebene, in welcher die Zeichnung der Raumgrösse ausgeführt wird. Raumgrössen sind: Punkte, Linien, Flächen und Körper.

2) Die verschiedenen Projektionsmethoden.

22) Die Art und Weise des Projizierens wird bedingt sowohl durch die Lage der Projizierenden unter sich als auch gegen die **Pr. Ebn.** In Rücksicht hierauf unterscheidet man verschiedene Projektionsmethoden. Die wichtigsten Projektionsmethoden sind:

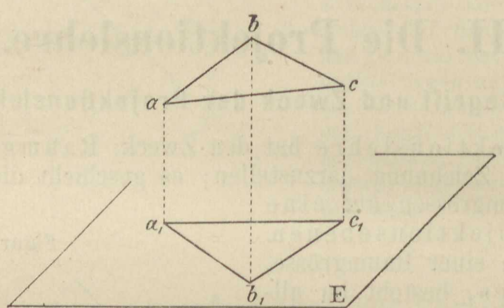
1) die Parallelprojektion und zwar
   a) die rechtwinklige oder orthogonale Parallelprojektion,
   b) die schiefwinklige oder klinogonale Parallelprojektion;
2) die Centralprojektion.

Bei der Parallelprojektion sind die Projizierenden zu einander parallel, bei der Centralprojektion gehen sie durch einen festen Punkt, welcher Projektionscentrum oder auch Projektionsmittelpunkt genannt wird.

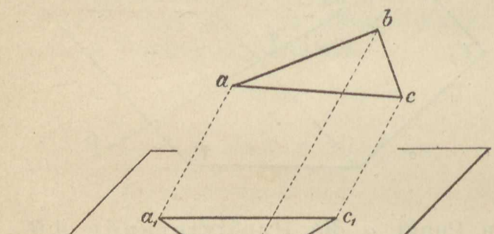
Der Unterschied zwischen rechtwinkliger und schiefwinkliger Parallelprojektion besteht darin, dass im ersteren Falle die Projizierenden senkrecht zur **Pr. Eb.** stehen, während sie bei der letzteren unter einem beliebigen, aber gleichen Winkel gegen die **Pr. Eb.** geneigt sind.

In den Figuren 31, 32, 33 ist eine rechtwinklige, eine schiefwinklige und eine centrale Projektion eines Dreieckes veranschaulicht.

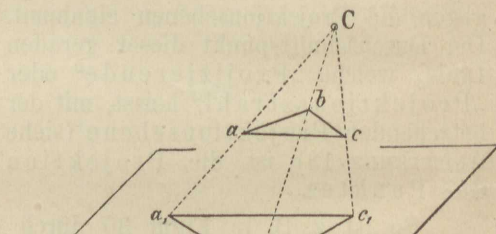
Figur 31.



Figur 32.



Figur 33.



Anmerkung 14. Im nachfolgenden soll zunächst nur von der rechtwinkligen Parallelprojektion die Rede sein.

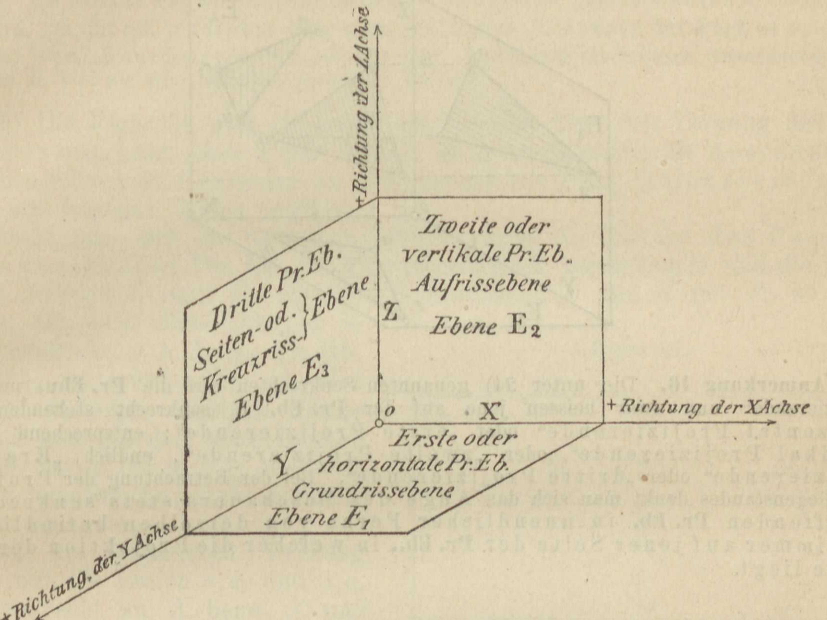
3) Ueber die rechtwinklige Projektion von Punkten, Linien und ebenen Flächen.

a) Ueber die zweckmässige Wahl der Projektionsebenen.

23) An und für sich ist es gleichgültig, welche Lagen die in Betracht kommenden **Pr. Ebn.** zu einander einnehmen. In der Regel aber gibt man einer der **Pr. Ebn.** eine horizontale Lage und wählt die übrigen **Pr. Ebn.** senkrecht zu ihr. Zumeist wählt man nun zwei **Pr. Ebn.**, siehe Figur 34, nämlich eine erste oder horizontale **Pr. Eb.** E_1, auch Grundrissebene genannt

und eine zweite oder vertikale **Pr. Eb.** E_2 auch Aufrissebene genannt. Manchmal gebraucht man aber auch noch eine dritte **Pr. Eb.** E_3 senkrecht zu E_1 und E_2, d. h. senkrecht zur Schnittlinie X der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 und nennt diese dritte **Pr. Eb.** die Seitenebene oder die Kreuzrissebene.

Figur 34.



Anmerkung 15. Die Schnittlinien der drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3, siehe Figur 34, heissen Projektionsachsen und zwar nennt man die Schnittlinie von:

E_1 und E_2 die Projektionsachse X oder auch die X-Achse,
E_1 „ E_3 „ „ Y „ „ „ Y- „
E_2 „ E_3 „ „ Z „ „ „ Z- „

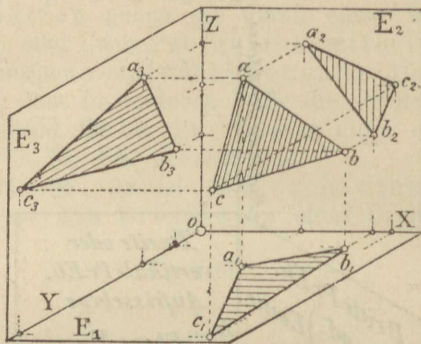
Die drei **Pr. Ebn.** schneiden sich in einem Punkte o und in diesem Punkte wird jede der drei Projektionsachsen in zwei Hälften zerlegt, von welchen die eine die positive, die andere die negative Hälfte genannt werden soll. Welche Hälfte man als positiv bezeichnet, ist an sich gleichgültig; üblich ist es, die Bezeichnung wie in der Figur 34 geschehen, vorzunehmen.

b) Ueber das Projizieren einer Raumgrösse auf die Pr. Ebn.

24) Das Projizieren einer Raumgrösse auf die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 geschieht im allgemeinen wie folgt: Man denke sich durch sämtliche Punkte der Raumgrösse, z. B. des Dreieckes *abc*, siehe Figur 35, Senkrechte auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 gefällt und deren Fusspunkte miteinander in derselben Reihenfolge wie die Punkte der Raumgrösse selbst verbunden, so erhält man in jeder **Pr. Eb.** eine Projektion der Raumgrösse. Die Projektion der Raumgrösse, z. B. des Dreieckes *abc*, siehe Figur 35, auf die erste oder horizontale **Pr. Eb.** E_1 heisst die erste oder horizontale Projektion oder auch der Grundriss bezw. die obere Ansicht des Dreieckes. Die Projektion auf die zweite oder vertikale **Pr. Eb.** E_2 heisst die zweite oder vertikale Projektion oder auch der Aufriss bezw. die

vordere Ansicht des Dreieckes. Die Projektion endlich auf die dritte **Pr. Eb.** E_3 heisst die dritte Projektion oder der Kreuzriss bezw. die Seitenansicht des Dreieckes abc.

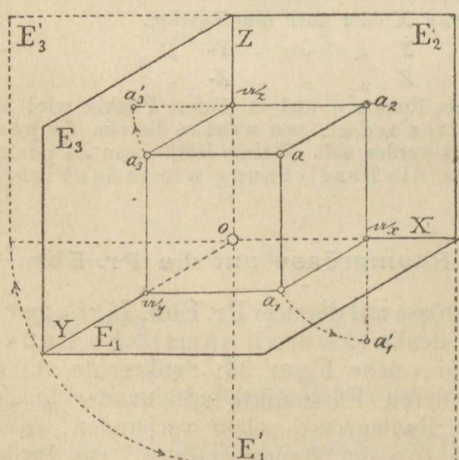
Figur 35.



Anmerkung 16. Die unter 24) genannten Senkrechten auf die **Pr. Ebn.** nennt man „Projizierende“ und zwar heissen jene auf der **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehenden Linien „horizontal Projizierende“ oder „erste Projizierende“; entsprechend hat man „vertikal Projizierende“ oder „zweite Projizierende“, endlich „Kreuzriss-Projizierende“ oder „dritte Projizierende“. Bei der Betrachtung der Projektion eines Gegenstandes denkt man sich das Auge des Beschauers stets senkrecht zur betreffenden **Pr. Eb.** in unendlicher Ferne von derselben befindlich und zwar immer auf jener Seite der **Pr. Eb.**, in welcher die Projektion der Raumgrösse liegt.

c) Ueber die rechtwinklige Projektion eines Punktes.

Figur 36.



25) Ist, siehe Fig. 36, ein Punkt a im Raume gegeben, so denke man sich, zur Ermittelung seiner Projektionen, auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 auf diese Ebenen Projizierende gezogen, so geben deren Durchschnittspunkte a_1, a_2 und a_3 mit den **Pr. Eb.** die gesuchten Projektionen des Punktes a und zwar ist a_1 die erste oder horizontale Projektion oder der Grundriss, a_2 die zweite oder vertikale Projektion oder der Aufriss, a_3 die dritte Projektion oder der Kreuzriss des Punktes a.

Anmerkung 17. Zieht man durch die Punkte a_1, a_2, a_3, siehe Figur 36, Parallele zu den drei Linien X, Y und Z, so stellen diese die Projektionen der Projizierenden durch a auf die **Pr. Ebn.** dar, und sie schneiden die Achsen X, Y und Z in den Punkten a_x, a_y und a_z, welche im Vereine mit den Punkten 0, a, a_1, a_2 und a_3 die Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipedons bilden. Die Längen $\overline{aa_1}$ $\overline{a_2\mathfrak{a}_x}$ und $\overline{a_3\mathfrak{a}_y}$ sind daher einander gleich, und gleich dem Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_1; ebenso geben die Längen $\overline{aa_2}$, $\overline{a_1\mathfrak{a}_x}$, $\overline{a_3\mathfrak{a}_z}$ den Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_2 an.

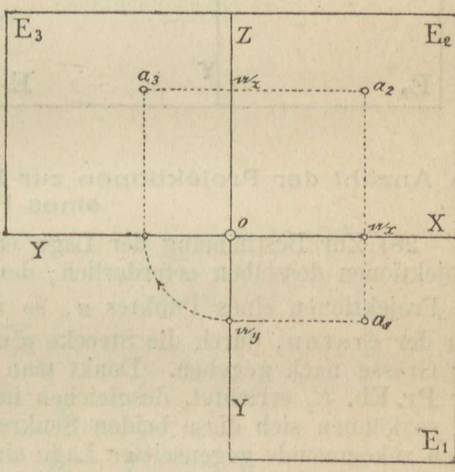
Man kann die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3 auch mit dem gemeinsamen Namen: „Koordinatenebenen" bezeichnen und die Längen $\overline{o\mathfrak{a}_x}$, $\overline{o\mathfrak{a}_y}$ und $\overline{o\mathfrak{a}_z}$ die Koordinaten des Punktes a nennen. Dabei bezeichnet man die Strecke $\overline{o\mathfrak{a}_x}$ als die „x-Koordinate" oder „Abscisse" die Strecke $\overline{o\mathfrak{a}_y}$ als die y-Koordinate oder auch die „erste Ordinate", endlich die Strecke $\overline{o\mathfrak{a}_z}$ als die z-Koordinate oder auch die zweite Ordinate des Punktes a.

Das Wort „Koordinaten" stammt aus dem Lateinischen (coordinare, zusammengehören) und heisst so viel als wie „zusammengehörige Linien."

26) Die Figur 36 gibt ein anschauliches Bild über den Vorgang des Projizierens; man kann diese Figur deshalb auch zweckmässig als Anschauungsfigur bezeichnen im Gegensatz zu der eigentlichen Projektionszeichnung, welche auf folgende Weise entsteht:

Denkt man sich die Zeichenfläche, d. h. die Ebene des Papieres mit der vertikalen **Pr. Eb.** E_2 zusammenfallend angenommen und die beiden anderen Ebenen E_1 und E_3 um ihre Schnittlinien X und Z mit E_2 so lange gedreht, bis auch diese Ebenen in die Zeichenfläche, d. h. in die **Pr. Eb.** E_2 fallen, so erhält man die drei **Pr. Ebn.** in einer einzigen Ebene vereinigt und die drei abgegrenzten **Pr. Ebn.** haben die in Fig. 36 durch unterbrochene Striche gekennzeichnete Lage zu einander.

Figur 37.



Bei der genannten Drehung bleiben nun die Linien $a_1\mathfrak{a}_x$ und $a_3\mathfrak{a}_z$ stets senkrecht zu X bezw. Z und kommen daher, sobald die Ebenen E_1 und E_3 in die Ebene E_2, d. h. nach E_1' und E_3' gebracht sind, in die Verlängerung von $a_2\mathfrak{a}_x$ bezw. $a_2\mathfrak{a}_z$ zu liegen, so dass man die Projektionszeichnung, siehe Figur 37, erhält. Hierin sind alle drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 in die Zeichnungsebene niedergelegt und es bezeichnen die Längen $\overline{a_2\mathfrak{a}_x}$, $\overline{a_1\mathfrak{a}_x}$ und $\overline{a_2\mathfrak{a}_z}$, die Abstände des Punktes a von den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3.

Aus dem eben Entwickelten ergeben sich die folgenden Sätze:

„Die erste und zweite Projektion eines Punktes liegen in der Projektionszeichnung stets in einer Senkrechten zur X-Achse."

„Die Entfernungen der ersten bezw. zweiten Projektion eines Punktes von der X-Achse sind gleich den Abständen des Punktes von der zweiten bezw. ersten **Pr. Eb.**"

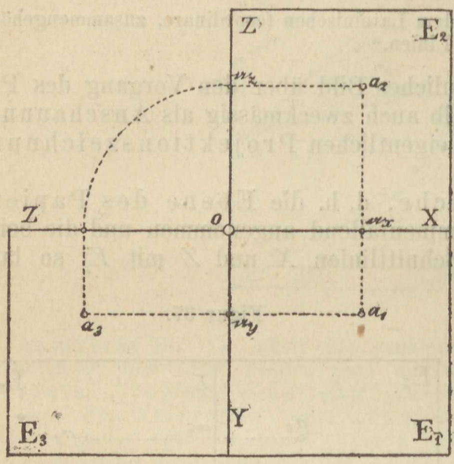
„Die zweite und dritte Projektion eines Punktes liegen stets in einer Senkrechten zur Z-Achse."

„Die Entfernungen der zweiten bezw. dritten Projektion eines Punktes von der Z-Achse sind gleich den Abständen des Punktes von der dritten bezw. zweiten **Pr. Eb.**"

Umgekehrt gilt auch der Satz:

„Sollen zwei Punkte der Projektionszeichnung die Projektionen eines Punktes darstellen, so muss ihre Verbindungslinie stets senkrecht stehen zur zugehörigen Projektionsachse.“

Figur 38.



27) Man könnte selbstverständlich auch die erste **Pr. Eb.** mit der Zeichnungsebene zusammenfallend annehmen, und die zweite und dritte um die Achsen X bezw. Y in die Zeichnungsebene umlegen. Man erhielte dann für die Projektionen eines Punktes die Projektionszeichnung, s. Figur 38. Welche Art der Umlegung man vornimmt, ist entweder in das Belieben des Zeichners gestellt, oder hängt von den Umständen, unter welchen die Zeichnung ausgeführt werden soll, ab. Der Schüler modifiziere die unter 26) angeführten Sätze, für den Fall die Umlegung auf die zuletzt genannte Weise vorgenommen werden soll.

d) Anzahl der Projektionen zur Bestimmung der räumlichen Lage eines Punktes.

28) Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume sind nur zwei Projektionen desselben erforderlich; denn sind z. B. a_1 und a_2, siehe Figur 37, die Projektionen eines Punktes a, so ist durch die Strecke $\overline{a_2 \mathfrak{a}_x}$ sein Abstand von der ersten, durch die Strecke $\overline{a_1 \mathfrak{a}_x}$ sein Abstand von der zweiten **Pr. Eb.** der Grösse nach gegeben. Denkt man sich nun im Punkte a_2 eine Senkrechte zur **Pr. Eb.** E_2 errichtet, desgleichen im Punkte a_1 eine Senkrechte zur **Pr. Eb.** E_1, so können sich diese beiden Senkrechten, wenn die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 die ihnen zukommende gegenseitige Lage einnehmen, nur in einem einzigen Punkte a im Raume schneiden. Aus Vorstehendem ergibt sich der Satz:

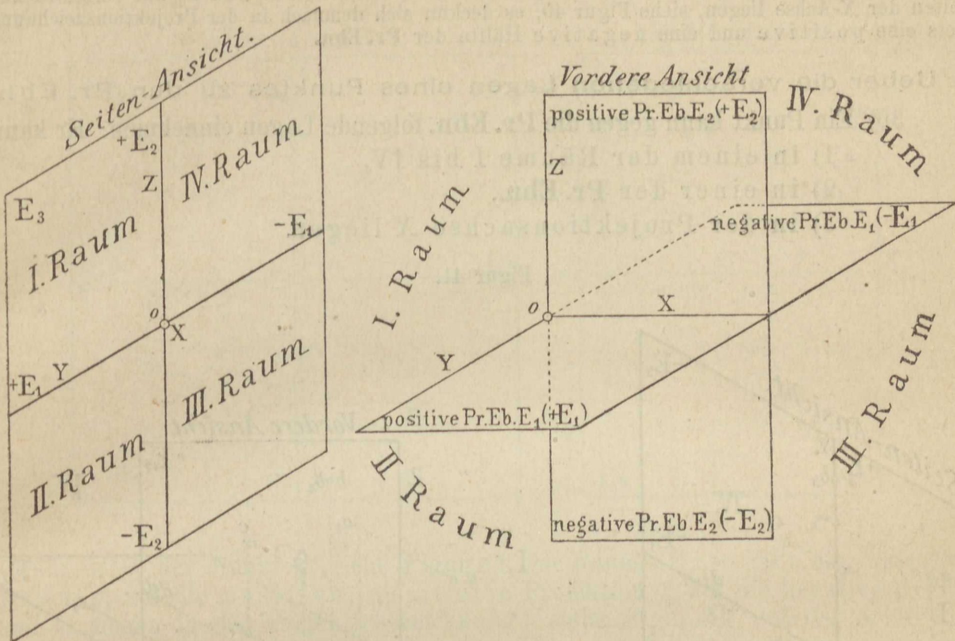
„Die Lage eines Punktes im Raume ist durch seine rechtwinkligen Projektionen auf zwei zu einander senkrecht stehenden **Pr. Ebn.** vollständig bestimmt.“

Anmerkung 18. Je zwei der **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 sollen ein Projektionssystem heissen und zwar bilden die Ebenen E_1 und E_2, E_1 und E_3, endlich E_2 und E_3 die Systeme I — II, I — III und II — III bezw.; die Strecken $\overline{o \mathfrak{a}_x}$, $\overline{o \mathfrak{a}_y}$ und $\overline{o \mathfrak{a}_z}$, s. Fig. 37 u. 38, sind die Koordinaten des Punktes a und zwar ist $\overline{o \mathfrak{a}_x}$ die Abscisse, die Strecke $\overline{o \mathfrak{a}_y} = \overline{a_1 \mathfrak{a}_x}$ bezw. $\overline{o \mathfrak{a}_z} = \overline{\mathfrak{a}_x a_2}$ die erste bezw. zweite Ordinate. Der Punkt o, dessen Lage auf der X-Achse beliebig gewählt werden kann, soll für die Folge der „Koordinatenanfangspunkt“ oder auch der „Ursprung“ heissen.

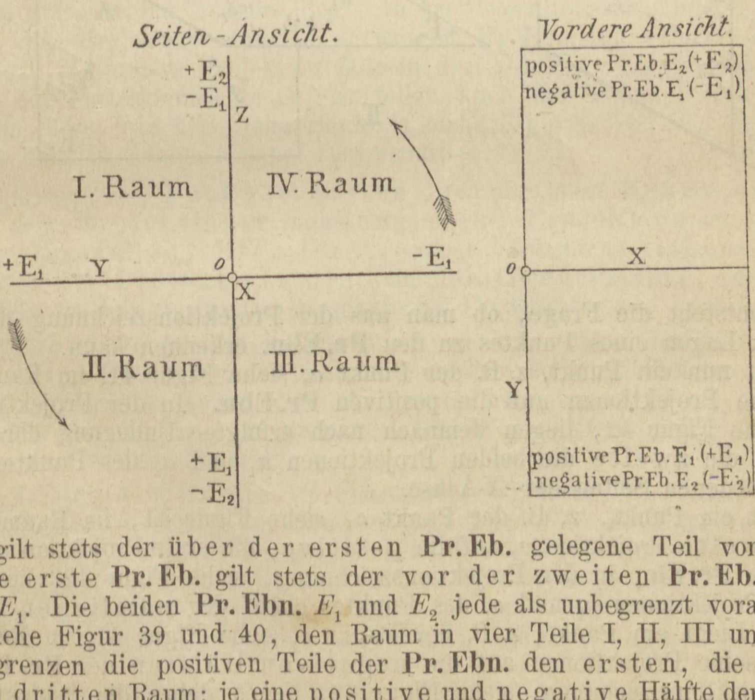
e) Einteilung des Raumes durch die Pr. Ebn.

29) Die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, siehe Figur 39 und 40, werden durch die X-Achse je in zwei Hälften geteilt, von welchen man die eine als positive **Pr. Eb.**, die andere als negative **Pr. Eb.** bezeichnet. Als positive zweite

Figur 39.



Figur 40.



Pr. Eb. gilt stets der über der ersten **Pr. Eb.** gelegene Teil von E_2, als positive erste **Pr. Eb.** gilt stets der vor der zweiten **Pr. Eb.** gelegene Teil von E_1. Die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 jede als unbegrenzt vorausgesetzt, teilen, siehe Figur 39 und 40, den Raum in vier Teile I, II, III und IV und zwar begrenzen die positiven Teile der **Pr. Ebn.** den ersten, die negativen Teile den dritten Raum; je eine positive und negative Hälfte der **Pr. Ebn.** begrenzen die Räume zwei und vier.

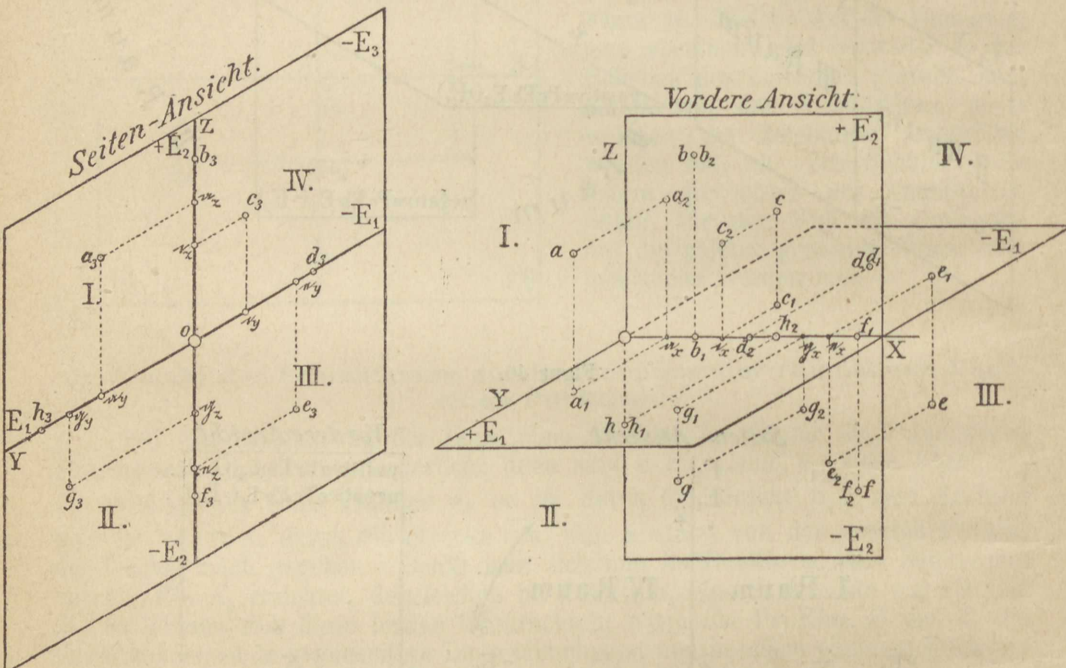
Anmerkung 19. Werden die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 in die Zeichnungsebene umlegt, so geschieht dies stets so, dass die positiven Hälften von E_1 und E_2 auf verschiedenen Seiten der X-Achse liegen, siehe Figur 40, es decken sich demnach in der Projektionszeichnung stets eine positive und eine negative Hälfte der **Pr. Ebn.**

f) Ueber die verschiedenen Lagen eines Punktes zu den Pr. Ebn.

30) Ein Punkt kann gegen die **Pr. Ebn.** folgende Lagen einnehmen: Er kann

1) in einem der Räume I bis IV,
2) in einer der **Pr. Ebn.**,
3) in der Projektionsachse X liegen.

Figur 41.

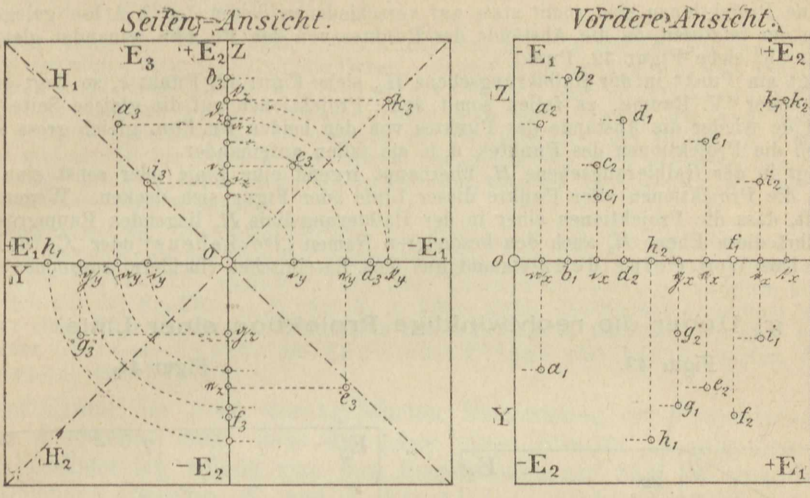


Es entsteht die Frage, ob man aus der Projektionszeichnung diese verschiedenen Lagen eines Punktes zu den **Pr. Ebn.** erkennen kann.

Liegt nun ein Punkt, z. B. der Punkt a, siehe Figur 41, im Raume I, so fallen seine Projektionen auf die positiven **Pr. Ebn.** In der Projektionszeichnung, siehe Figur 42, liegen demnach nach erfolgter Umlegung der ersten **Pr. Eb.** in die zweite die beiden Projektionen a_1 und a_2 des Punktes a stets auf verschiedenen Seiten der X-Achse.

Liegt ein Punkt, z. B. der Punkt c, siehe Figur 41, im Raume IV, so fällt die zweite Projektion c_2 auf die positive, die erste Projektion c_1 auf die negative **Pr. Eb.**, in der Projektionszeichnung, siehe Figur 42, liegen demnach die Projektionen c_1 und c_2 des Punktes c auf der nämlichen Seite der X-Achse. Liegt ein Punkt, z. B. der Punkt e, siehe Figur 41, im Raume III, so fallen seine Projektionen auf die negativen Hälften der **Pr. Ebn.** und in der Projektionszeichnung, siehe Figur 42, liegen daher die Projektionen e_1 und e_2 von e wieder auf verschiedenen Seiten der X-Achse. Liegt endlich ein

Figur 42.



Punkt, z. B. der Punkt g, siehe Figur 41, im Raume II, so fällt die erste Projektion g_1 auf die positive, die zweite Projektion g_2 auf die negative **Pr. Eb.** und es liegen in der Projektionszeichnung, siehe Figur 42, wieder beide Projektionen auf der gleichen Seite der X-Achse. Liegt ein Punkt in einer der **Pr. Ebn.** selbst, wie z. B. die Punkte b, d, f und h, siehe Figur 41, so fällt die eine Projektion mit dem Punkte selbst zusammen, während die andere Projektion stets in der X-Achse liegt. In der Projektionszeichnung, s. Figur 42, liegt die eine Projektion stets in derjenigen **Pr. Eb.**, in welcher der Punkt selbst liegt, die andere Projektion fällt in die X-Achse. Liegt schliesslich der Punkt in der Projektionsachse X, so fallen auch die beiden Projektionen des Punktes in diese, wie z. B. beim Punkt 0, siehe Figur 41 und 42. Vorstehendes lässt sich kurz in folgende Sätze zusammenfassen:

„Liegt ein Punkt im ersten oder dritten Raume, so liegen in der Projektionszeichnung seine Projektionen stets auf verschiedenen Seiten der X-Achse und zwar liegen im ersten Falle die Projektionen in den positiven **Pr. Ebn.**, im zweiten Falle dagegen in den negativen **Pr. Ebn.**"

„Liegt ein Punkt im zweiten oder vierten Raume, so liegen in der Projektionszeichnung seine Projektionen stets auf der gleichen Seite der X-Achse und zwar liegt im ersten Falle die erste, im zweiten Falle die zweite Projektion in der positiven **Pr. Eb.**"

„Liegt ein Punkt in einer der **Pr. Ebn.**, so fällt die eine Projektion stets in denjenigen Teil der **Pr. Eb.**, in welcher der Punkt selbst liegt, die andere Projektion fällt in die X-Achse. Liegt also ein Punkt in der ersten **Pr. Eb.**, so fällt seine zweite Projektion, liegt er aber in der zweiten **Pr. Eb.**, so fällt seine erste Projektion in die X-Achse."

Anmerkung 20. Ausser den in 30) kennen gelernten Lagen kann ein Punkt im Raume noch besondere Lagen einnehmen, so kann er insbesondere von den beiden **Pr. Ebn.** gleich weit abstehen, d. h. in einer der beiden Halbierungsebenen H_1 oder H_2 der Winkel der beiden **Pr. Ebn.** liegen.

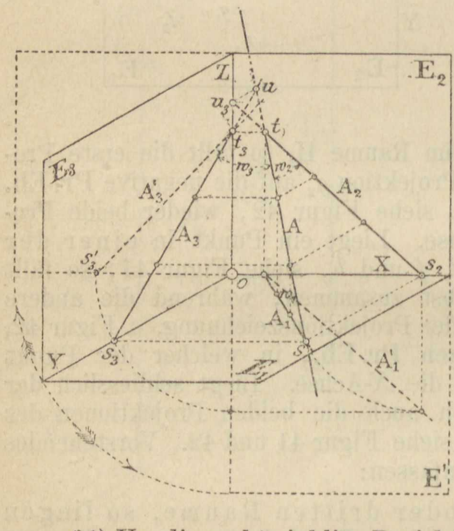
Liegt der Punkt in der Halbierungsebene H_1, so kann er überdies im I. oder III. Raume liegen, seine Projektionen sind somit stets auf verschiedenen Seiten der X-Achse gelegen und stehen von der letzteren, da die Abstände des Punktes von den **Pr. Ebn.** einander gleich sind, gleich weit ab; siehe Figur 42, Punkt i.

Liegt ein Punkt in der Halbierungsebene H_2, siehe Figur 42, Punkt k, so liegt er überdies im II. oder IV. Raume, es fallen somit seine Projektionen auf die gleiche Seite der X-Achse und da wieder die Abstände des Punktes von den beiden **Pr. Ebn.** gleich gross sind, so decken sich die Projektionen des Punktes, d. h. sie fallen aufeinander.

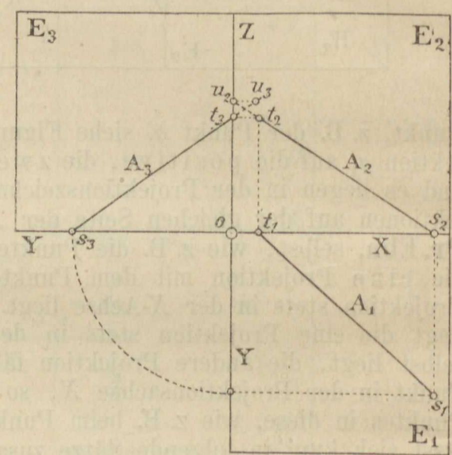
Liegt in der Halbierungsebene H_2 überhaupt irgend eine Linie oder sonst eine Figur, so werden die Projektionen aller Punkte dieser Linie oder Figur sich decken. Wegen dieser Eigenschaft, dass die Projektionen einer in der Halbierungslinie H_2 liegenden Raumgrösse sich decken, führt diese Ebene H_2 auch den besonderen Namen „Deckebene" oder „Coïncidenzebene". Das Wort Coïncidenz stammt aus dem Lateinischen (incidere, zusammenfallen).

g) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Linie.

Figur 43.



Figur 44.



31) Um die rechtwinklige Projektion einer Linie A im Raume auf die **Pr. Ebn.** zu erhalten, ziehe man von sämtlichen Punkten der Linie Projizierende auf die **Pr. Ebn.** und verbinde deren Durchschnittspunkte mit den **Pr. Ebn.** in derselben Reihenfolge, wie die Punkte im Raume miteinander verbunden sind. Die so sich ergebenden Linien A_1, A_2, A_3 sind die Projektionen der Linie A auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3.

Ist die gegebene Linie eine Gerade A, siehe Figur 43, so erhält man als Projektionen die Geraden A_1, A_2 und A_3.

Denkt man sich nun die **Pr. Ebn.** in die Zeichnungsebene umgelegt, siehe Figur 44, so werden die Projektionen einer Geraden A im allgemeinen drei gegen die X- bezw. Z- und Y-Achse unter verschiedenen Winkeln geneigte Gerade A_1, A_2 und A_3 sein.

Dabei schneidet im allgemeinen die Projektion A_1 die X-Achse in einem Punkte t_1, dem auf A_2 der Punkt t_2 als zweite Projektion zugehört; ebenso schneidet die Projektion A_2 die X-Achse in einem Punkte s_2, dem auf A_1 der Punkt s_1 als erste Projektion entspricht und es sind s_1 und s_2 bezw. t_1 und t_2 die Projektionen der Durchschnittspunkte der Geraden A mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2; siehe Anmerkung 22. Ganz entsprechend schneidet auch A_2 die Z-Achse in einem Punkte u_2, dem auf A_3 der Punkt u_3 als dritte Projektion entspricht und es sind u_2 und u_3 die zweite und dritte Projektion des Schnittpunktes u der Geraden u mit der **Pr. Eb.** E_3.

Anmerkung 21. Die Projizierenden durch eine Linie A auf den **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 bilden im allgemeinen drei Cylinderflächen, welche man projizierende Cylinderflächen nennt. Man erhält eine horizontal-projizierende, eine vertikal-projizierende und eine Kreuzriss-projizierende, oder auch eine erste, zweite und dritte projizierende Cylinderfläche, je nachdem die Projizierenden zur **Pr. Eb.** E_1, E_2 oder E_3 senkrecht stehen. Ist die Linie A eine Gerade, so gehen die eben genannten projizierenden Cylinderflächen in projizierende Ebenen über, welche entsprechend wie die Cylinderflächen bezeichnet werden können.

Anmerkung 22. Die Schnittpunkte der Geraden A mit den **Pr. Ebn.** sollen für die Folge stets die Spuren der Geraden genannt werden, und zwar erste oder horizontale, zweite oder vertikale, endlich dritte oder Kreuzrissspur, je nachdem der Schnitt der Geraden mit der **Pr. Eb.** E_1, E_2 oder E_3 in Frage steht. Ueberhaupt bezeichnet man unter der Spur einer Raumgrösse, stets deren Durchschnitt mit einer **Pr. Eb.** So ist die Spur einer Linie ein Punkt, die Spur einer Fläche eine Linie, endlich die Spur eines Körpers eine Fläche.

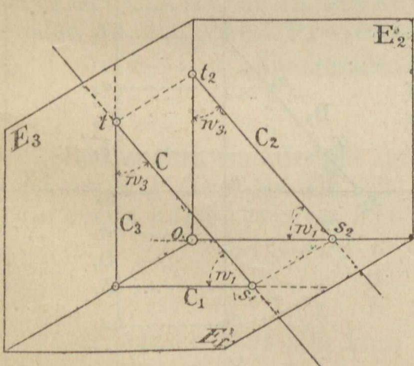
Auf Grund der oben durchgeführten Bestimmung der Projektionen einer Geraden A erkennt man, dass die Lage einer Geraden im allgemeinen vollständig bestimmt ist, sobald man ihre Projektionen auf zwei zu einander senkrecht stehenden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 kennt, denn denkt man sich durch diese beiden Projektionen der Geraden die projizierenden Ebenen gelegt, so werden sich diese im Raume im allgemeinen nach einer geraden Linie schneiden, nach eben der Raumgeraden, welche durch die gegebenen Projektionen bestimmt ist.

Hieraus folgt aber weiter, dass, sobald zwei der Projektionen einer Geraden A, etwa A_1 und A_2 willkürlich gewählt werden, die Lage der dritten Projektion A_3 hierdurch bestimmt ist.

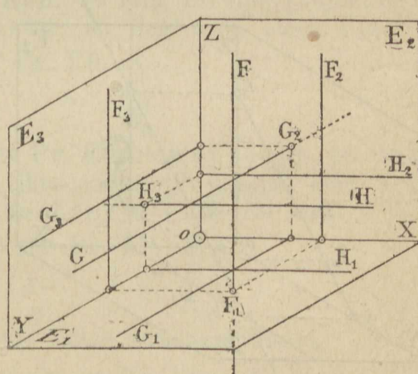
Anmerkung 23. Die Gerade A, siehe Figur 43, schliesst mit ihren Projektionen A_1, A_2 und A_3 bezw. die Winkel w_1, w_2 und w_3 ein, welche man die Neigungswinkel der Geraden A mit den **Pr. Ebn.** nennt.

h) Ueber die Lagen einer Geraden gegen die Pr. Ebn.

Figur 45.



Figur 46.



32) Eine Gerade kann:

1) eine beliebige Neigung zu den **Pr. Ebn.** haben, sowie z. B. die Gerade A in den Figuren 43 und 44,

2) zu einer der **Pr. Ebn.** parallel sein, wie die Gerade C, siehe Figur 45.

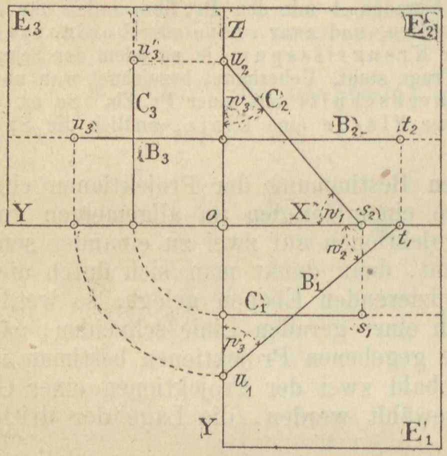
3) zu zweien **Pr. Ebn.** parallel sein, wie die Geraden *F*, *G* und *H*, siehe Figur 46,

4) in einer der **Pr. Ebn.** liegen,

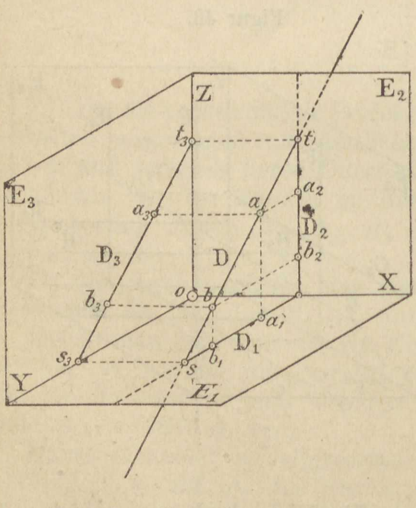
5) auf einer der **Pr. Ebn.** senkrecht stehen, wie die Geraden *F*, *G* und *H*, siehe Figur 46.

Die sämtlichen unter 1) bis 5) geschilderten Lagen lassen sich direkt aus der Projektionszeichnung erkennen; denn hat z. B. eine Gerade eine ganz allgemeine Lage im Raume, so werden auch zwei ihrer Projektionen, etwa A_1 und A_2 ganz beliebig angenommen werden dürfen. Ist eine Gerade dagegen parallel zu einer der **Pr. Ebn.**, etwa zur **Pr. Eb.** E_2, wie z. B. die Gerade *C*, siehe Figur 45, so ist sie auch parallel zu ihrer zweiten Projektion und alle Punkte der Geraden haben gleichen Abstand von der **Pr. Eb.** E_2, es besitzen somit auch die ersten bezw. dritten Projektionen aller ihrer Punkte gleichen Abstand von der *X*- bezw. *Z*-Achse. Man erhält als Projektionszeichnung die Figur 47. Ganz ähnlich verhält es sich mit einer Geraden *B* parallel zur **Pr. Eb.** E_1. Bei ihr wird sowohl die zweite wie die dritte Projektion parallel sein müssen zur *X*- bezw. *Y*-Achse.

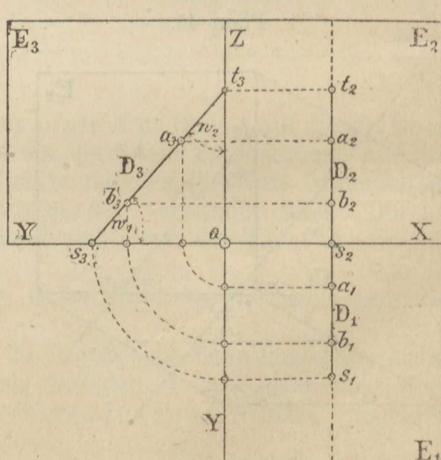
Figur 47.



Figur 48.



Figur 49.

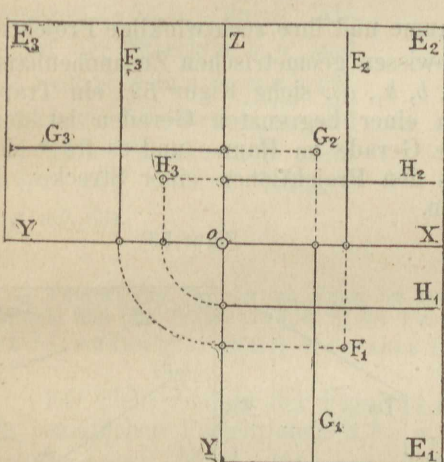


Ist eine Gerade parallel zur **Pr. Eb.** E_3, wie die Gerade *D*, s. Figur 48, so fallen die beiden projizierenden Ebenen in eine Ebene senkrecht zur *X*-Achse zusammen und treffen daher die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 nach zweien in einem Punkte der *X*-Achse sich schneidenden und auf ihr senkrecht stehenden Geraden D_1 und D_2; in der Projektionszeichnung, s. Figur 49, fallen aber die beiden Geraden D_1 und D_2 in eine einzige Senkrechte zur X-Achse zusammen und es lässt sich mittels der beiden Projektionen D_1 und D_2 allein die räumliche Lage der Geraden nicht erkennen. Will man aber dennoch über diese Lage entscheiden, so muss entweder die dritte Projektion D_3 oder aber die Lage von zweien Punkten a und b von D bekannt sein.

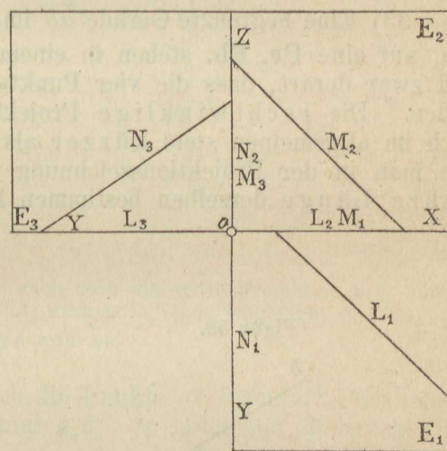
Soll eine Gerade zu zweien der **Pr. Ebn.** parallel sein, so müssen ihre beiden Projektionen zu der zugehörigen Projektionsachse parallel laufen. Man erhält also die Projektionszeichnung, siehe Figur 50,

darin bezeichnet die Gerade F eine Gerade parallel zu E_2 und E_3
„ „ G „ „ „ „ E_1 „ E_3
„ „ H „ „ „ „ E_1 „ E_2.

Figur 50.



Figur 51.



Liegt eine Gerade in einer der **Pr. Ebn.**, so fällt die eine Projektion der Geraden in eine der Projektionsachsen; so liegt z. B. siehe Figur 51,

die Gerade L in der **Pr. Eb.** E_1
„ „ M „ „ „ E_2
„ „ N „ „ „ E_3.

Steht endlich eine Gerade auf einer der **Pr. Ebn.** senkrecht, so ist ihre Projektion auf diese **Pr. Eb.** ein Punkt, ihre andere Projektion eine Senkrechte zur zugehörigen Projektionsachse; in Figur 50 steht

die Gerade F senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1
„ „ G „ „ „ E_2
„ „ H „ „ „ E_3.

Vorstehendes lässt sich kurz in folgende Sätze zusammenfassen:

„Ist eine Gerade gegen die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 beliebig geneigt, so haben auch ihre beiden Projektionen beliebige Neigungen gegen die X-Achse."

„Ist eine Gerade parallel zu einer der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, so ist ihre zweite bezw. erste Projektion parallel zur X-Achse, ihre erste bezw. zweite Projektion kann gegen die X-Achse eine beliebige Neigung haben."

„Ist eine Gerade zu beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 parallel, so sind ihre beiden Projektionen parallel zur X-Achse."

„Liegt eine Gerade in einer der **Pr. Ebn.** E_1 oder E_2, so fällt ihre zweite bezw. erste Projektion in die X-Achse, ihre erste bezw. zweite Projektion kann eine beliebige Lage haben."

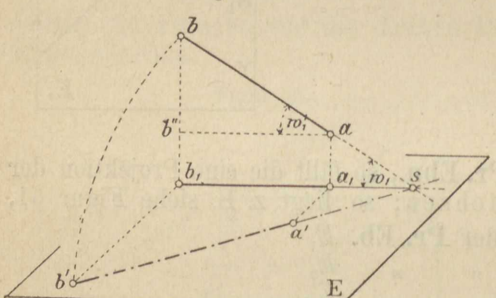
„Steht eine Gerade auf einer der **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 senkrecht, so ist ihre erste bezw. zweite Projektion ein Punkt, die zweite bezw. erste Projektion eine Senkrechte zur X-Achse."

Anmerkung 24. Der Schüler spreche die eben angeführten Sätze für die Projektionssysteme I — III bezw. II — III aus.

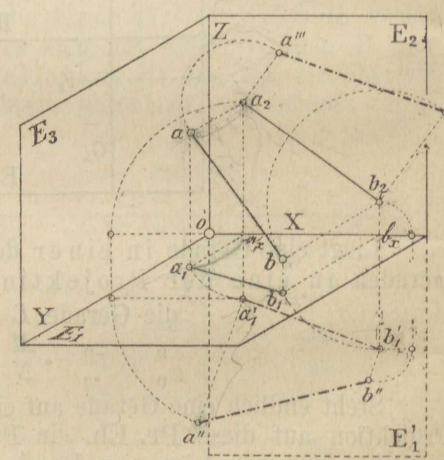
i) Ueber die Bestimmung der wahren Länge einer gegebenen Strecke und ihrer Neigungswinkel mit den Pr. Ebn.

33) Eine begrenzte Gerade $\overline{ab}$ im Raume und ihre rechtwinklige Projektion $\overline{a_1 b_1}$ auf eine **Pr. Eb.** stehen in einem gewissen geometrischen Zusammenhange und zwar derart, dass die vier Punkte a, b, b_1, a_1, siehe Figur 52, ein Trapez bilden. Die rechtwinklige Projektion einer begrenzten Geraden ist demnach im allgemeinen stets kürzer als die Gerade im Raume und es frägt sich, wie man in der Projektionszeichnung aus den Projektionen einer Strecke, die wahre Länge derselben bestimmen kann.

Figur 52.



Figur 53.

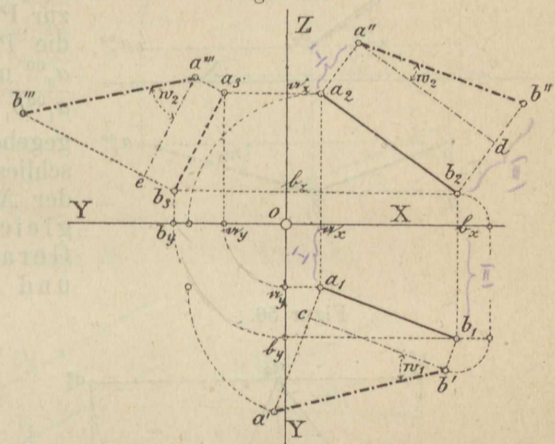


Ist, siehe Figur 53, die Gerade $\overline{ab}$ durch ihre Projektionen $\overline{a_1 b_1}$ und $\overline{a_2 b_2}$ auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegeben, so kann man sich das Trapez $a a_2 b_2 b$ um die in der **Pr. Eb.** E_2 liegende Seite $a_2 b_2$ so lange gedreht denken, bis es in die **Pr. Eb.** selbst fällt und die Lage $a_2 a''' b''' b_2$ einnimmt; dann wird die wahre Länge von $\overline{ab}$ gleich der Strecke $\overline{a''' b'''}$ sein müssen.

In gleicher Weise lässt sich auch das Trapez $a b b_1 a_1$ um die Seite $a_1 b_1$ in die **Pr. Eb.** E_1 niederlegen, so dass nach der Drehung in der **Pr. Eb.** wieder die wahre Länge abgegriffen werden kann. In der Anschauungsfigur 53 ist diese Drehung so durchgeführt, dass zunächst die **Pr. Eb.** E_1 in die **Pr. Eb.** E_2 gelegt und hierauf das genannte Trapez selbst umgelegt wurde. Infolge der ersten Drehung nimmt das Trapez $a_1 \mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_x b_1$ die Lage $a_1' \mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_x b_1'$ ein, durch die letztere Drehung erhält das Trapez $a b b_1 a_1$ die Lage $a'' b'' b_1' a_1'$, so dass die wahre Länge von $\overline{ab}$ gleich der Strecke $\overline{a'' b''}$ sein wird.

In der Projektionszeichnung, siehe Figur 54, erledigen sich die angeführten Drehungen sehr einfach. Zur Bestimmung der Umlegung des Trapezes $a b b_2 a_2$ in die **Pr. Eb.** E_2, braucht man nur die Strecken $\overline{a_2 a''}$ und $\overline{b_2 b''}$ senkrecht zu $a_2 b_2$ und beziehungsweise gleich den Strecken $\overline{a_1 \mathfrak{a}_x}$ und $\overline{b_1 \mathfrak{b}_x}$ abzutragen, um in der Strecke $\overline{a'' b''}$ die wahre Länge von $\overline{ab}$ zu erhalten. Desgleichen erhält man die Umlegung des Trapezes $a b b_1 a_1$ durch Abtragen der Strecken $\overline{a_1 a'}$ und $\overline{b_1 b'}$ senkrecht zu $a_1 b_1$ und bezw. gleich den Strecken $\overline{a_2 \mathfrak{a}_x}$ und $\overline{b_2 \mathfrak{b}_x}$. Die Strecke $\overline{a' b'}$ stellt wieder die wahre Länge von $\overline{ab}$ dar.

Figur 54.



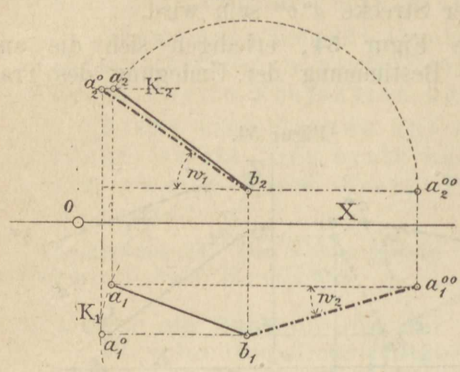
Anmerkung 25. In der Figur 54 wurde auch noch die dritte Projektion $\overline{a_3 b_3}$ von $\overline{ab}$ ermittelt und das Trapez $a b b_3 a_3$ in die **Pr. Eb.** E_3 nach $a''' b''' b_3 a_3$ umgelegt; die Strecke $\overline{a''' b'''}$ ist dann gleichfalls die wahre Länge von $\overline{ab}$.

34) Zieht man in der Figur 54 durch die Punkte a'', b' und a''' Parallele zu den bezüglichen Projektionen $a_2 b_2$, $a_1 b_1$ und $a_3 b_3$, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke $a'' b'' d$, $a' b' c$ und $a''' b''' e$, in welchen die Katheten $\overline{b'' d}$, $\overline{a' c}$ und $\overline{b''' e}$ die Differenz der Abstände der Punkte a und b von den **Pr. Ebn.** E_2, E_1 und E_3 bezw. darstellen. Die diesen Katheten gegenüberliegenden Winkel w_2, w_1 und w_3 geben die Neigungswinkel der Geraden ab gegen die genannten **Pr. Ebn.** an. Mit Rücksicht hierauf kann man den folgenden Satz aussprechen:

„Die wahre Länge einer Strecke $\overline{ab}$ ergibt sich in der Projektionszeichnung stets als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete gleich der Projektion der Strecke auf eine der **Pr. Ebn.** und dessen andere Kathete gleich der Differenz der Abstände der Endpunkte der Strecke von der betreffenden **Pr. Eb.** ist. Der der letztern Kathete gegenüberliegende Dreieckswinkel gibt den Neigungswinkel der Geraden ab mit der betreffenden **Pr. Eb.** in wahrer Grösse an."

34a) Anstatt das Trapez $a b b_1 a_1$, siehe Fig. 55, um die Seite $a_1 b_1$ in die **Pr. Eb.** E_1 umzulegen, kann man dasselbe auch um die Seite $b b_1$ so lange drehen, bis es parallel zur **Pr. Eb.** E_2 gerichtet ist; es erhält dann die Gerade $a_1 b_1$ die Lage $a_1{}^0 b_1$ und die zweite Projektion des Punktes a^0 liegt in $a_2{}^0$ so, dass $a_2 a_2{}^0$ parallel zur X-Achse läuft. Die Projektionen der Strecke $\overline{ab}$ nach dieser Drehung erhalten die Lagen von $b_1 a_1{}^0$ und $b_2 a_2{}^0$ und es wird

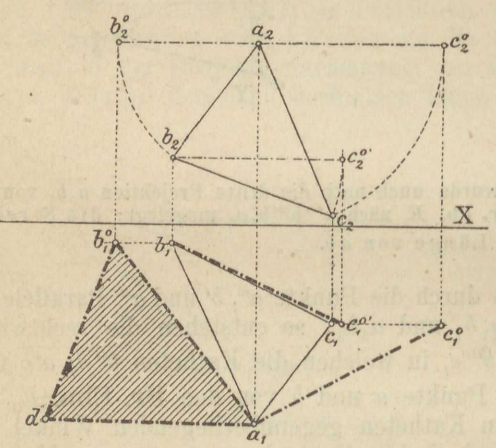
Figur 55.



in Rücksicht auf den oben ausgesprochenen Satz, die Strecke $\overline{a_2^0 b_2}$ gleich der wahren Länge der Geraden $\overline{ab}$ sein müssen.

Dreht man ebenso das Trapez $a_2 b_2 b a$ um die Seite $b_2 b$, bis es parallel zur **Pr. Eb.** E_1 gerichtet ist, so gelangen die Projektionen des Punktes a nach a_2^{00} und a_1^{00} und es ist in der Strecke $\overline{a_1^{00} b_1}$ die wahre Länge von $\overline{ab}$ gegeben. Die Längen $\overline{a_2^0 b_2}$ und $\overline{a_1^{00} b_1}$ schliessen überdies mit der Richtung der X-Achse die Winkel w_1 und w_2 gleich den Neigungswinkeln der Geraden ab mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 ein.

Figur 56.



Wie gestalten sich die in 33), 34) und 34a) angegebenen Konstruktionen für den Fall die gegebene Gerade parallel zu einer der **Pr. Ebn.** läuft?

35) **Aufgabe 4.** Es sind drei Punkte a, b, c durch ihre Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegeben. Man soll die wahre Gestalt des Dreieckes abc durch Ermittelung seiner Seitenlänge konstruieren.

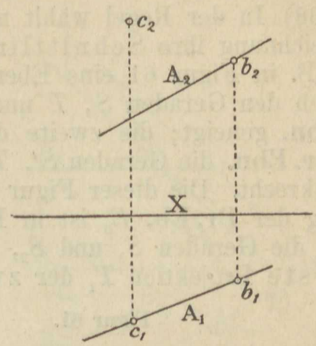
Auflösung. Man bestimmt, siehe Figur 56, nach dem unter 34a) angegebenen Verfahren die wahren Längen der drei Strecken $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ und erhält hierfür die Strecken $\overline{a_1 b_1^0}$, $\overline{a_1 c_1^0}$ und $\overline{b_1 c_1^{0'}}$, aus welchen man das Dreieck $a_1 b_1^0 d$ konstruiert.

k) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten und Geraden und ihren Projektionen.

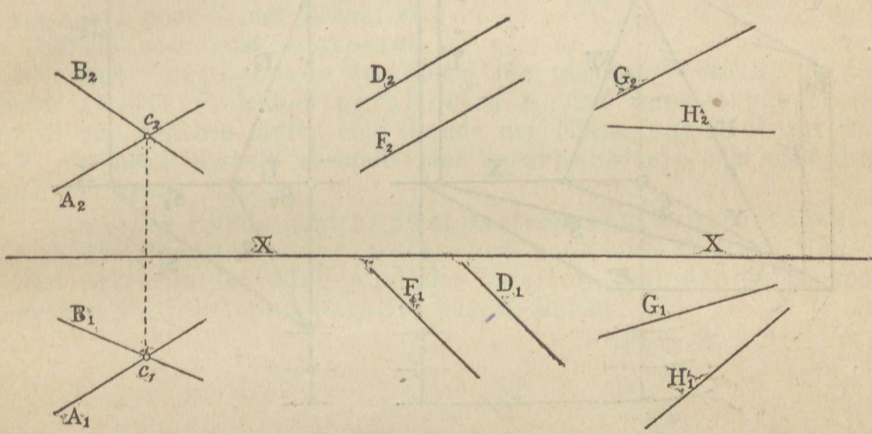
36) Wenn mehrere Punkte und Gerade im Raume gegeben sind, so können diese eine bestimmte gegenseitige Lage zu einander einnehmen und es entsteht die Frage, ob man diese Lage aus der Lage der Projektionen der Raumgrössen erkennen kann, bezw. ob eine gewisse Lage der Raumgrössen auch eine bestimmte Lage ihrer Projektionen zu einander bedingt.

Ein Punkt und eine Gerade können z. B. im Raume so liegen, dass die Gerade durch den Punkt hindurch geht, oder dass dies nicht der Fall ist. Geht aber die Gerade durch den Punkt, so muss offenbar auch die Projektion des Punktes auf der zugehörigen Projektion der Geraden liegen, also die Lage haben, wie der Punkt b und die Gerade A, siehe Figur 57. Liegt nur eine Projektion eines Punktes auf der entsprechenden Projektion der Geraden, wie z. B. bei Punkt c, siehe Figur 57, so wird der Punkt selbst nicht auf der Geraden liegen. Sind zwei Gerade im Raume gegeben, so können diese sich schneiden, zu einander parallel sein oder windschief liegen, im ersten Falle wird der Schnittpunkt beider Geraden seine Projektionen auf den Projektionen beider Geraden haben müssen, siehe Figur 58. Sind die Geraden im Raume parallel, so sind es im allgemeinen auch ihre Projektionen, siehe Figur 59. Liegen die Geraden endlich windschief, so können auch die Projektionen eine ganz beliebige Gerade haben, siehe Figur 60.

Figur 57.



Figur 58. Figur 59. Figur 60.



I) Ueber die rechtwinklige Projektion einer Ebene.

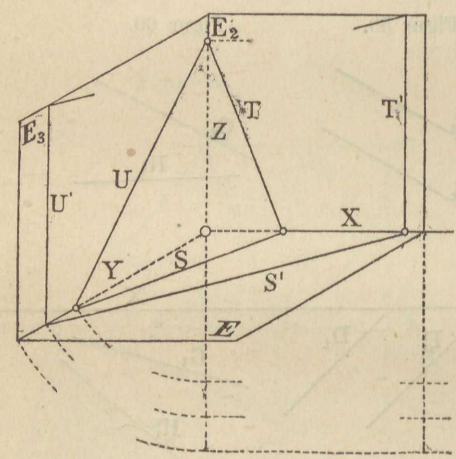
37) Bei einer Ebene hat man zu unterscheiden, ob dieselbe begrenzt oder unbegrenzt gedacht ist; im ersten Falle wird ihre Begrenzung gebildet sein durch einen Linienzug, der seinerseits wieder auf die **Pr. Ebn.** projiziert werden kann. Das von einer solchen Projektion eingeschlossene Stück der **Pr. Eb.** kann dann aufgefasst werden als die Projektion der in Rede stehenden Fläche. Ist aber die Ebene unbegrenzt gedacht, so kann man, wenn dieselbe gegen die **Pr. Ebn.** beliebig gelegen ist, von einer eigentlichen Projektion der Ebene nicht mehr sprechen, weil ja jeder Punkt der **Pr. Eb.** als die Projektion eines Punktes der Ebene aufgefasst werden kann.

In diesem Falle muss man die Lage der Ebene gegen die **Pr. Ebn.** dadurch festsetzen, dass man die Projektionen einer Anzahl von Punkten oder Geraden der Ebene als gegeben voraussetzt. So ist die Lage einer Ebene gegen die **Pr. Ebn.** vollständig bestimmt, wenn man die Lage von dreien nicht in einer Geraden liegenden Punkten, oder jene von zweien Geraden von ihr kennt. Man nennt solche Elemente die Bestimmungsstücke der Ebene. In der Projektionszeichnung ist demnach die Ebene nicht durch ihre Projektionen, sondern durch die Projektionen ihrer Bestimmungsstücke dargestellt.

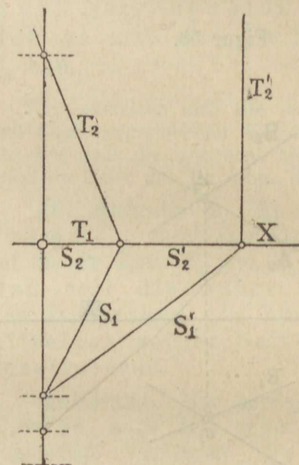
m) Spuren einer Ebene.

38) In der Regel wählt man zur Darstellung einer Ebene in der Projektionszeichnung ihre Schnittlinien mit den **Pr. Ebn.**, d. h. ihre Spuren. So ist z. B. in Figur 61 eine Ebene veranschaulicht, welche die **Pr. Ebn.** E_1, E_2, E_3 nach den Geraden S, T und U schneidet; diese Ebene ist gegen alle drei **Pr. Ebn.** geneigt; die zweite dort dargestellte Ebene hat als Schnittlinien mit den **Pr. Ebn.** die Geraden S', T' und U' und diese Ebene steht auf der **Pr. Eb.** E_1 senkrecht. Die dieser Figur entsprechende Projektionszeichnung mit Hinweglassung der **Pr. Eb.** E_3 ist in Figur 62 gegeben. Die Spur S hat als Projektionen die Geraden S_1 und S_2, wovon S_2 in die X-Achse fällt, desgleichen fällt die erste Projektion T_1 der zweiten Spur T in die X-Achse.

Figur 61.



Figur 62.



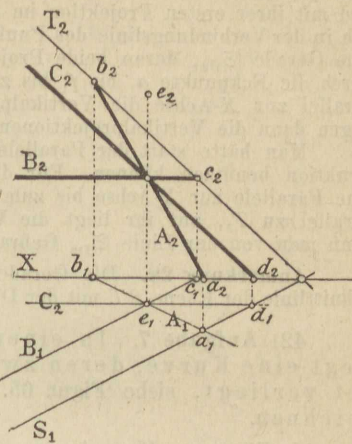
Steht die Ebene senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1, so steht auch die zweite Spur senkrecht zur X-Achse, entsprechend wird eine zur **Pr. Eb.** E_2 senkrechte Ebene eine zur X-Achse senkrechte erste Spur besitzen. Ist endlich die Ebene zur **Pr. Eb.** E_3 senkrecht, so laufen die erste und zweite Spur parallel zur X-Achse.

Anmerkung 26. Eine zu einer **Pr. Eb.** senkrechte Ebene soll für die Folge stets eine projizierende Ebene genannt werden und zwar eine horizontal projizierende Ebene, wenn sie auf der **Pr. Eb.** E_1, eine vertikal projizierende Ebene, wenn sie auf der **Pr. Eb.** E_2 senkrecht steht.

39) **Aufgabe 5.** Eine gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 geneigte Ebene ist durch ihre Spuren S_1 und T_2 gegeben, man soll in der Ebene eine beliebige Gerade zeichnen.

Auflösung. Sind, siehe Figur 63, durch die Linien S_1 und T_2 die Projektionen der beiden Spuren der Ebene gezeichnet, so ziehe man die Linien $a_1 b_1$ ganz beliebig und projiziere ihre Schnittpunkte b_1 und a_1 mit der X-Achse und der ersten Spur S_1 auf die Linie T_2 bezw. X nach b_2 und a_2, so ist $a_2 b_2$ die Vertikalprojektion einer Linie ab, welche ganz in der Ebene ST liegt. Man hätte selbstverständlich auch die Linie $a_2 b_2$ beliebig annehmen und die Punkte a_2 und b_2 nach a_1 und b_1 auf die X-Achse bezw. erste Spur S_1 projizieren können, wodurch sich dann die erste Projektion $a_1 b_1$ ergeben hätte.

Figur 63.

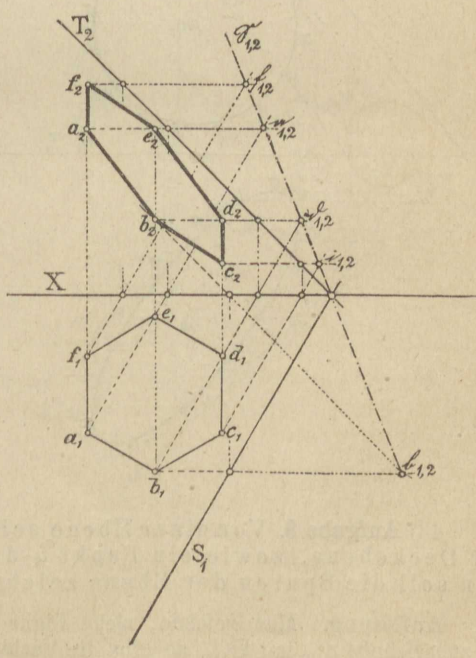


n) Hauptgeraden einer Ebene.

40) Wählt man die eine Projektion einer Geraden B etwa B_1 parallel zu S_1, siehe Figur 63, so erhält man die zweite Projektion B_2 parallel zur X-Achse und die Gerade B ist eine Gerade in der Ebene ST, welche parallel läuft zur ersten Spur S_1 der Ebene; sie heisst deshalb auch eine Spurparallele oder eine Hauptgerade der Ebene. In gleicher Weise ist die Gerade C, deren zweite Projektion parallel zu T_2 und deren erste Projektion parallel zur X-Achse läuft, eine Gerade der Ebene parallel zur zweiten Spur T, sie heisst deshalb ebenfalls eine Spurparallele oder eine Hauptgerade der Ebene ST.

„In einer Ebene gibt es zwei Systeme von Hauptgeraden, nämlich die Parallelen zur ersten und jene zur zweiten Spur, bei den ersteren Geraden sind die zweiten, bei den letzteren die ersten Projektionen parallel zur X-Achse."

Figur 64.



41) **Aufgabe 6.** Eine Ebene ist durch ihre Spuren S_1 und T_2 gegeben. In der Ebene liegt ein Vieleck, dessen erste Projektion als ein regelmässiges Sechseck gegeben ist. Man soll die zweite Projektion des Sechseckes zeichnen.

Auflösung. Ist $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ das gegebene regelmässige Sechseck, siehe Figur 64, so zeichne man durch die Ecken desselben die Parallelen zu S_1 und bestimme deren zweite Projektionen. Auf diese projiziere man die Ecken des Vieleckes; man erhält also hierdurch die Ecken a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 und f_2.

Anmerkung 27. Man könnte die Aufgabe in noch etwas einfacherer Weise lösen, wenn man die zu einem Punkte, etwa zum Punkte a, gehörige Spurparallele im Aufriss bestimmt und mit ihrer ersten Projektion im Punkte $\mathfrak{a}_{1,2}$ zum Schnitt bringt, hierdurch ergibt sich nämlich in der Verbindungslinie des Punktes $\mathfrak{a}_{1,2}$ mit dem Schnittpunkte der beiden Spuren S und T eine Gerade $\mathfrak{S}_{1,2}$, deren beide Projektionen sich decken. Verlängert man also die Parallelen durch die Eckpunkte a_1 bis f_1 bis zum Schnitt mit $\mathfrak{S}_{1,2}$, so gehen durch die letzteren Punkte parallel zur X-Achse die Vertikalprojektionen der bezüglichen Spurparallelen und auf ihnen liegen dann die Vertikalprojektionen $a_2 \cdots f_2$ der Sechseckspunkte.

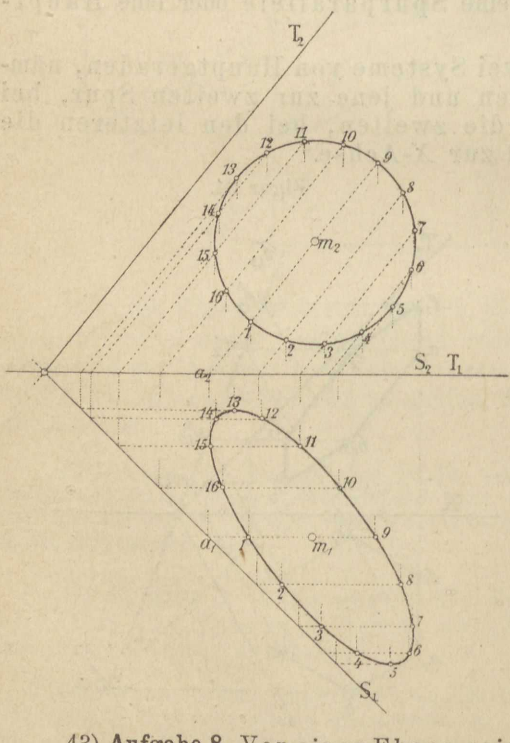
Man hätte statt der Parallelen zur Spur S auch die Parallelen zur Spur T zur Konstruktion benützen können. Für den Punkt b ist dies angedeutet. Man zeichnet durch b_1 eine Parallele zur X-Achse bis zum Schnitt mit S_1, bestimmt die zugehörige Vertikalprojektion parallel zu T_2, auf ihr liegt die Vertikalprojektion b_2 von b. Auch bei diesem Verfahren kann man von der Linie $\mathfrak{S}_{1,2}$ Gebrauch machen.

Anmerkung 28. Die Gerade $\mathfrak{S}$, deren Projektionen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ sich decken, ist die Schnittlinie der Ebene ST mit der Deckebene oder Coïncidenzebene, siehe Anmerk. 20.

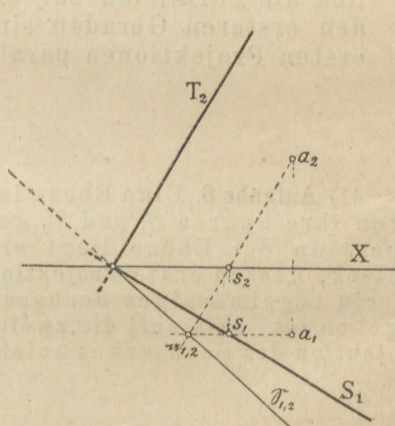
42) **Aufgabe 7.** In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene $S_1 T_2$ liegt eine Kurve, deren zweite Projektion als eine Kreislinie gezeichnet vorliegt, siehe Figur 65. Man soll die erste Projektion der Linie zeichnen.

Auflösung. Man nimmt auf der Kreislinie eine Reihe von Punkten an, am besten teilt man den Kreis in eine Anzahl (16) gleicher Teile, zieht durch die Teilpunkte Parallele zu T_2 und bestimmt deren erste Projektionen, welche parallel zur X-Achse laufen; auf ihnen liegen die ersten Projektionen der Kurvenpunkte.

Aufgabe 65.



Aufgabe 66.



43) **Aufgabe 8.** Von einer Ebene seien gegeben ihre Schnittlinie $\mathfrak{S}$ mit der Deckebene, sowie ein Punkt a durch seine Projektionen a_1 und a_2. Man soll die Spuren der Ebene zeichnen.

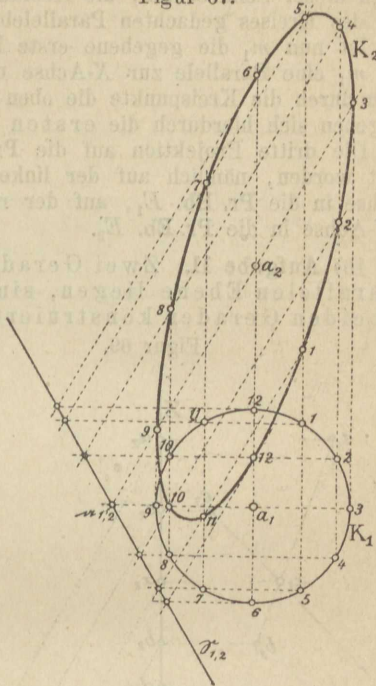
Auflösung. Man zeichne, siehe Figur 66, durch a_1 eine Parallele zur X-Achse bis zum Schnitt $\mathfrak{a}_{1,2}$ mit $\mathfrak{S}_{1,2}$, so gibt die Verbindungslinie $a_2\mathfrak{a}_{1,2}$ die Richtung der zweiten

Spur T_2. Bestimmt man ausserdem noch die erste Spur s_1 der Geraden $a\mathfrak{a}$, so ist damit auch die erste Spur S_1 der Ebene festgelegt.

44) **Aufgabe 9.** Eine Ebene ist gegeben durch die Gerade $\mathfrak{S}$, sowie durch einen weiteren Punkt a; die erste Projektion a_1 ist Mittelpunkt einer Kreislinie K_1, siehe Figur 62, von beliebigem Halbmesser. Man zeichne die zweite Projektion K_2 dieser Linie.

Auflösung. Man teile den Kreis K_1, s. Figur 67, in eine beliebige Anzahl gleicher Teile (12), ziehe durch die Teilpunkte Parallele zur X-Achse bis zum Schnitt mit der Linie $\mathfrak{S}_{1,2}$ und durch die letzteren Punkte Parallele zur Verbindungslinie $\mathfrak{a}_{1,2}\,a_2$, so liegen auf diesen Linien die zweiten Projektionen der Kurvenpunkte.

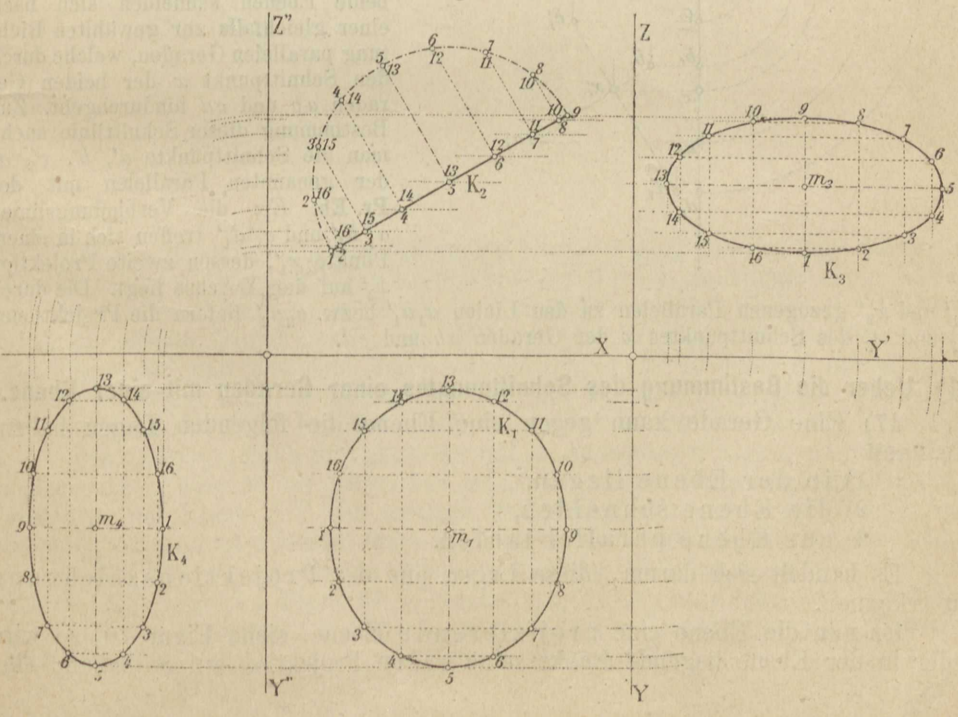
Figur 67.



45) **Aufgabe 10.** Eine Kreislinie liege in einer zur **Pr. Eb.** E_2 senkrechten Ebene und sei durch ihre zweite Projektion gegeben. Man soll ihre erste und ihre dritte Projektion zeichnen.

Auflösung. Die gegebene vertikale Projektion ist eine gegen die X-Achse unter einem beliebigen Winkel geneigte Gerade von einer Länge gleich dem Durchmesser des Kreises K. Beschreibt man über diese Strecke, siehe Figur 68, einen Kreis, teilt

Figur 68.



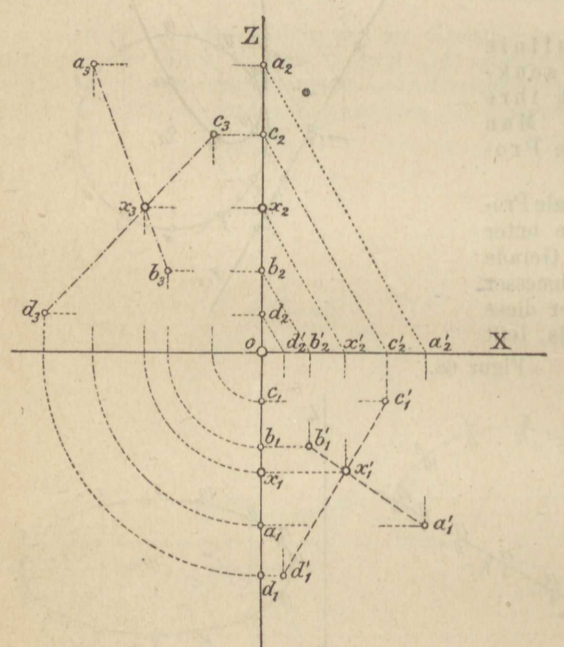
ihn in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und fällt von den Teilpunkten Senkrechte auf K_2, so geben deren Fusspunkte die zweiten Projektionen der Kreispunkte, während die Längen dieser Senkrechten, die Abstände der Kreispunkte von einer durch den Mittelpunkt des Kreises gedachten Parallelebene zur **Pr. Eb.** E_2 bezeichnen.

Ist nun m_1 die gegebene erste Projektion des Kreismittelpunktes, so ziehe man durch m_1 eine Parallele zur X-Achse und trage von dieser Linie aus auf den Projizierenden durch die Kreispunkte die oben genannten Senkrechten nach beiden Seiten hin ab, so ergeben sich hierdurch die ersten Projektionen der Kreispunkte.

Die dritte Projektion auf die **Pr. Eb.** E_3 ist in Figur 64 auf zweierlei Art bestimmt worden, nämlich auf der linken Seite durch Umlegung der **Pr. Eb.** E_3 um die Y-Achse in die **Pr. Eb.** E_1, auf der rechten Seite durch Umlegung der **Pr. Eb.** E_3 um die Z-Achse in die **Pr. Eb.** E_2.

46) **Aufgabe 11.** Zwei Gerade ab und cd, welche in einer zur **Pr. Eb.** E_3 parallelen Ebene liegen, sind gegeben. Man soll den Schnittpunkt der beiden Geraden konstruieren.

Figur 69.



Auflösung a. Man bestimme die dritten Projektionen a_3, b_3, c_3, d_3 der Punkte a, b, c, d, siehe Figur 69, so schneiden sich a_3b_3 und c_3d_3 in der dritten Projektion x_3 des gesuchten Schnittpunktes x. Aus x_3 bestimmt man x_1 und x_2, wie die Figur dies zeigt.

Auflösung b. Zieht man durch die vier Punkte a, b, c, d Parallellinien zu einer willkürlich gewählten Richtung, so bilden die durch die Punkte a und b bezw. c und d gezogenen Parallelen je eine Ebene parallel zur gewählten Richtung und beide Ebenen schneiden sich nach einer gleichfalls zur gewählten Richtung parallelen Geraden, welche durch den Schnittpunkt x der beiden Geraden ab und cd hindurchgeht. Zur Bestimmung dieser Schnittlinie suche man die Schnittpunkte a', b', c', d' der genannten Parallelen mit der **Pr. Eb.** E_1; die Verbindungslinien $a_1'b_1'$ und $c_1'd_1'$ treffen sich in einem Punkte x_1', dessen zweite Projektion x_2' auf der X-Achse liegt. Die durch x_1' und x_2' gezogenen Parallelen zu den Linien a_1a_1' bezw. a_2a_2' liefern die Projektionen x_1 und x_2 des Schnittpunktes x der Geraden ab und cd.

4) Ueber die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene.

47) Eine Gerade kann gegen eine Ebene die folgenden Lagen haben: sie kann

1) in der Ebene liegen,
2) die Ebene schneiden,
3) zur Ebene parallel laufen.

Es handelt sich darum, diese Lagen aus der Projektionszeichnung zu erkennen.

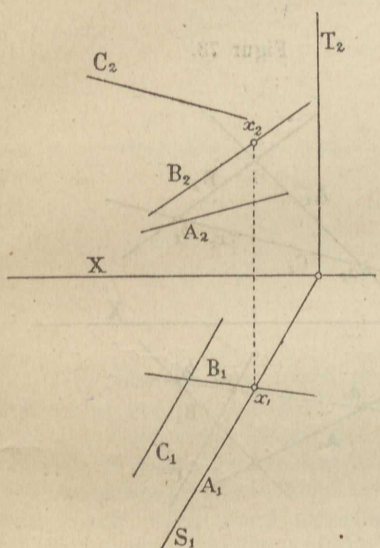
Ist nun die Ebene eine projizierende Ebene, siehe Figur 70, so wird jeder in der Ebene liegende Punkt seine erste Projektion auf S_1 haben; eine

Gerade A, deren erste Projektion mit S_1 zusammenfällt, liegt somit in der Ebene. Die zweite Projektion A_2 kann dabei eine ganz beliebige Lage haben.

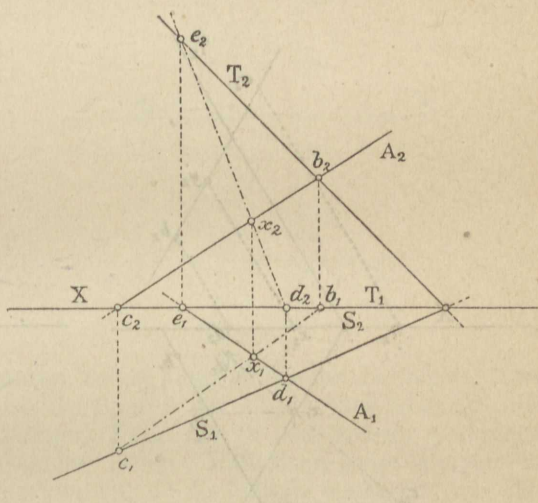
Liegen aber die Projektionen einer Geraden so, wie die der Geraden B, so kann nur der Punkt x der Geraden B, dessen erste Projektion der Schnittpunkt von S_1 und B_1 ist, in der Ebene ST liegen, dieser Punkt ist somit der Schnittpunkt der Geraden B mit der Ebene ST. Soll nun eine Gerade parallel zur Ebene laufen, so wird dies stets der Fall sein, wenn die erste Projektion C_1 parallel zu S_1 gerichtet ist, die zweite Projektion C_2 kann eine ganz beliebige Lage einnehmen.

Anmerkung 28a. Bei einer projizierenden Ebene liegen die Projektionen von allen in ihr liegenden Punkten und Linien in der Schnittlinie der Ebene mit jener **Pr. Eb.**, zu welcher die Ebene senkrecht steht. Aus diesem Grunde kann man die genannte Schnittlinie auch als Projektion der Ebene bezeichnen. Bei einer horizontal projizierenden Ebene ist also die erste, bei einer vertikal projizierenden Ebene die zweite Spur zugleich die Projektion der Ebene auf die bezügliche **Pr. Eb.**

Figur 70.



Figur 71.



Ist die Ebene gegen die beiden **Pr. Ebn.** beliebig geneigt und durch ihre Spuren S_1 und T_2 gegeben, siehe Figur 71, und soll der Schnittpunkt einer Geraden mit ihr bestimmt werden, so fasse man zunächst eine Projektion der Geraden, z. B. die zweite Projektion A_2 als die zweite Projektion b_2c_2 einer Geraden der Ebene auf und bestimme deren zugehörige erste Projektion, indem man b_2 auf die X-Achse nach b_1 und c_2 auf die Spur S_1 nach c_1 projiziert; die Linie b_1c_1 ist dann die erste Projektion einer Geraden bc der Ebene ST.

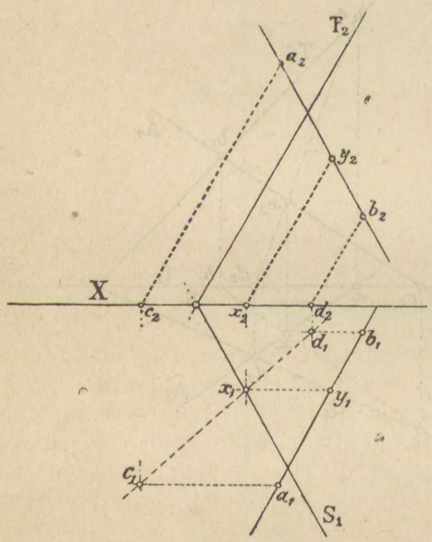
Die Linie b_1c_1 kann nun entweder mit A_1 zusammenfallen, oder diese Linie schneiden, oder zu ihr parallel sein. Im ersten Falle liegt die Gerade A selbst in der Ebene ST, im zweiten Falle liegt nur der Schnittpunkt x der Geraden bc und A, dessen erste Projektion der Schnittpunkt von b_1c_1 und A_1 ist in der Ebene, im dritten Falle endlich ist die Gerade A parallel zur Ebene. Im Falle der Figur 67 schneidet b_1c_1 die A_1 im Punkte x_1, dem auf A_2 der Punkt x_2 entspricht; x_1 und x_2 sind die Projektionen des Schnittpunktes der Geraden A mit der Ebene ST.

Ganz entsprechend kann man auch die Linie A_1 als **erste** Projektion $d_1 e_1$ einer Geraden de der Ebene ST auffassen und die **zweite** Projektion $d_2 e_2$ bestimmen. Diese schneidet im vorliegenden Falle die Linie A_2 in der zweiten Projektion x_2 des Schnittpunktes x der Geraden A und der Ebene ST.

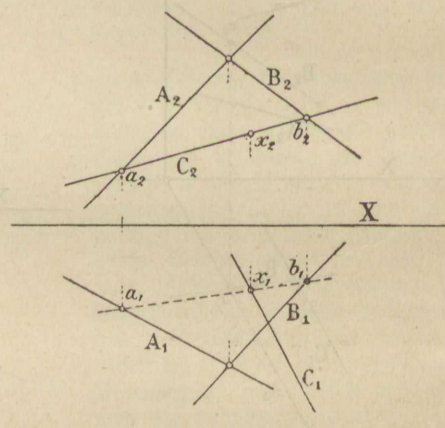
Führt man beide Konstruktionen nacheinander aus, so müssen als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung die Punkte x_1 und x_2 in einer Projizierenden liegen.

48) Der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene lässt sich auch noch auf eine andere Art ermitteln. Ist nämlich, siehe Figur 72, $S_1 T_2$ die gegebene Ebene und ab die Gerade, so ziehe man durch die Punkte a und b Parallele zur Spur T der Ebene und ermittele deren Schnittpunkte c u. d mit der **Pr. Eb.** E_1. Die Verbindungslinie $c_1 d_1$ trifft dann die Spur S_1 in einem Punkte x_1, dessen zweite Projektion x_2 auf der X-Achse liegt; die Parallele durch den Punkt x zur Spur T liefert den gesuchten Schnittpunkt y der Geraden ab und der Ebene $S_1 T_2$.

Figur 72.



Figur 73.



49) **Aufgabe 12.** **Eine Ebene ist durch zwei sich schneidende Gerade A und B, siehe Figur 73, gegeben. Man soll den Durchschnitt einer Geraden C mit dieser Ebene konstruieren.**

Auflösung. Die Lösung der Aufgabe bleibt die gleiche wie jene unter 47) angegebene, d. h. man projiziert die Schnittpunkte a_2 und b_2 von C_2 mit A_2 und B_2 auf A_1 und B_1 nach a_1 und b_1, dann schneidet die Verbindungslinie $a_1 b_1$ die C_1 in der ersten Projektion x_1 des gesuchten Schnittpunktes x der Geraden C mit der Ebene AB; die zweite Projektion x_2 liegt auf A_2.

Man stelle die Ebene durch drei nicht in einer geraden Linie liegenden Punkte dar, und bestimme den Schnitt einer Geraden mit dieser Ebene.

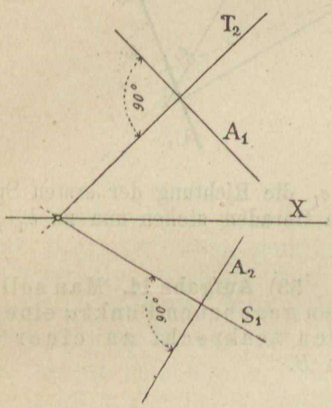
5) Ueber das Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene.

50) Soll eine **Gerade** A auf einer **Ebene** $S_1 T_2$ **senkrecht** stehen, so muss sie mindestens auf zweien Geraden der Ebene senkrecht stehen; ist dies der Fall, so steht sie auch auf **allen übrigen** Geraden der Ebene, d. h. auf **dieser selbst** senkrecht. Kennt man nun die **Spuren** der Ebene, so kann

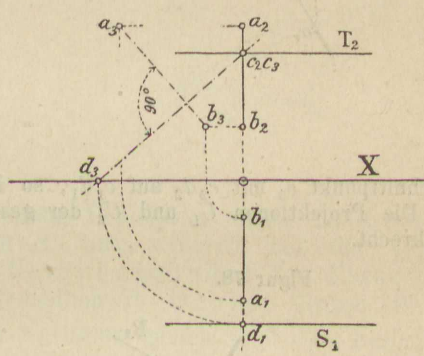
man unmittelbar eine Senkrechte zu diesen Linien zeichnen; denn eine Gerade, welche senkrecht steht zu einer in der **Pr. Eb.** E_1 liegenden Geraden, liegt in einer zu dieser Linie senkrecht stehenden, d. h. horizontalprojizierenden Ebene; ihre erste Projektion A_1 steht dann senkrecht zur ersten Projektion dieser Linie S_1, während die zweite Projektion A_2 eine beliebige Lage haben kann; soll also die Gerade A auch noch zur zweiten Spur T der Ebene senkrecht stehen, so muss auch die zweite Projektion der Linie A_2 senkrecht stehen zur zweiten Projektion T_2, siehe Figur 74. Man erhält folgenden Satz:

„Soll eine Gerade senkrecht stehen zu einer Ebene, so müssen die Projektionen der Geraden senkrecht stehen zu den gleichnamigen Spuren, bezw. deren Richtungen, der Ebene."

Figur 74.



Figur 75.



51) Die in dem oben genannten Satze ausgesprochene Bedingung reicht nicht mehr aus für den Fall, dass beide Spuren der Ebene parallel zur X-Achse gerichtet sind, denn es würden in diesem Falle die zu den Spuren senkrechten Geraden in eine Senkrechte zur X-Achse fallen. Man kann somit aus der Projektionszeichnung allein nicht mehr erkennen, ob die Gerade senkrecht zur Ebene steht, doch erhält man hierüber Aufschluss durch Herstellung einer Projektion von Ebene und Gerade auf die **Pr. Eb.** E_3, siehe Figur 75.

„Die Gerade ab steht senkrecht zur Ebene ST, wenn die dritte Projektion $a_3 b_3$ der Geraden senkrecht steht zur dritten Projektion $c_3 d_3$ der Ebene."

52) **Aufgabe 13.** Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Senkrechte zu einer Ebene fällen, wenn dieselbe

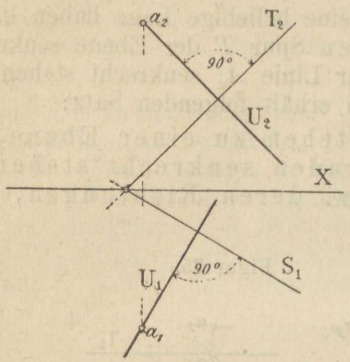
a) durch ihre Spuren,

b) durch andere Bestimmungsstücke gegeben ist.

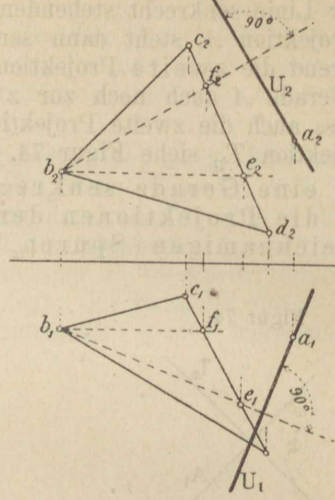
Auflösung a. Man fälle durch die Projektionen a_1 und a_2, siehe Figur 76, des Punktes a Senkrechte U_1 und U_2 zu den Spuren S_1 und T_2 der gegebenen Ebene, so sind U_1 und U_2 die Projektionen der gesuchten Geraden.

Auflösung b. Es sei die Ebene durch ein Dreieck bcd gegeben, siehe Figur 77. Man verschaffe sich zunächst die Richtungen der Spuren der gegebenen Ebene bcd. Zu diesem Zweck zeichne man durch b_1 eine Parallele zur X-Achse und projiziere deren Schnittpunkt f_1 mit $c_1 d_1$ auf $c_2 d_2$ nach f_2, so ist $b_2 f_2$ die Richtung der zweiten Spur der Ebene. Desgleichen zeichne man durch b_2 eine Parallele zur X-Achse und projiziere

Figur 76.

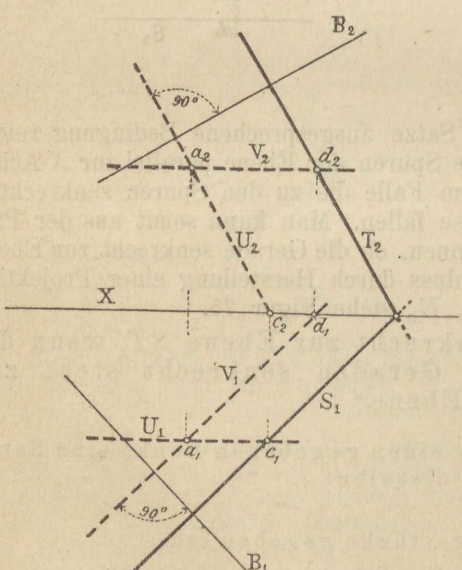


Figur 77.



deren Schnittpunkt e_2 mit $c_2 d_2$ auf $c_1 d_1$, so ist $b_1 e_1$ die Richtung der ersten Spur der Ebene. Die Projektionen U_1 und U_2 der gesuchten Geraden stehen nun zu $b_1 e_1$ bezw. $b_2 f_2$ senkrecht.

Figur 78.



53) **Aufgabe 14.** Man soll durch einen gegebenen Punkt a eine Ebene legen senkrecht zu einer Geraden B.

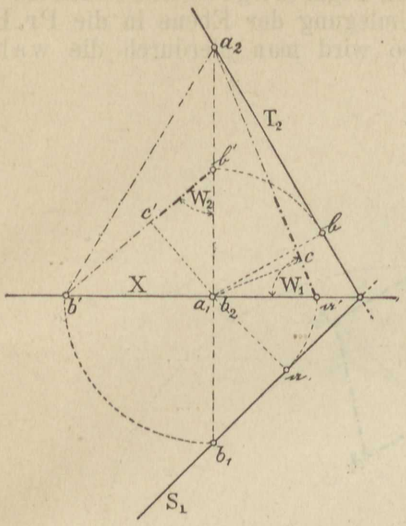
Auflösung. Man zeichne, siehe Figur 78, durch a_2 eine Senkrechte U_2 zur zweiten Projektion B_2 der gegebenen Geraden, so gibt diese Linie die Richtung der zweiten Spur der Ebene an, U_1 ist somit parallel zur X-Achse; zieht man ebenso durch a_1 eine Senkrechte V_1 zu B_1, so gibt diese Linie die Richtung der ersten Spur der Ebene an, V_2 ist daher parallel zur X-Achse. Die gesuchte Ebene ist durch die Geraden U und V vollständig bestimmt. Die Spuren S_1 und T_2 selbst gehen durch die gleichnamigen Spuren c_1 und d_2 von U und V parallel zu diesen Linien.

Anmerkung 29. Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung müssen die Linien S_1 und T_2 sich in einem Punkte der X-Achse schneiden.

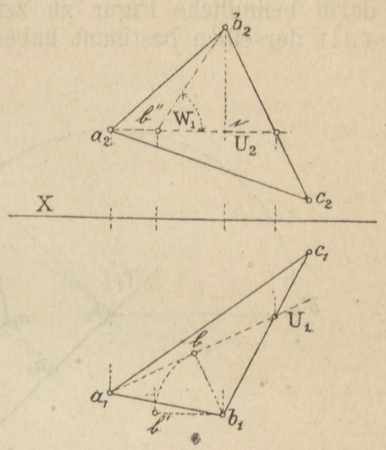
6) Ueber die Bestimmung der Winkel einer Ebene mit den Pr. Ebn.

54) Ist, siehe Figur 79, ST die gegebene Ebene und wählt man auf der zweiten Spur T derselben einen Punkt a; so kann man von ihm aus eine Senk-

Figur 79.



Figur 80.



rechte zur ersten Spur S ziehen; die erste Projektion dieser Senkrechten ist die Linie $a_1\mathfrak{a}$, sie steht senkrecht zu S_1 und schliesst mit der Linie $a\mathfrak{a}$ einen Winkel ein, welchen man den Neigungswinkel der Ebene ST mit der **Pr. Eb.** E_1 nennt. Man erhält denselben in wahrer Grösse in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Katheten gleich sind den Längen $\overline{a_2 a_1}$ und $\overline{a_1 \mathfrak{a}}$; macht man also $\overline{a_1\mathfrak{a}'} = \overline{a_1\mathfrak{a}}$ und zieht $a_2\mathfrak{a}'$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $a_2 a_1 \mathfrak{a}'$ bei $\mathfrak{a}'$ der Winkel W_1 der gesuchte Neigungswinkel der Ebene ST mit der **Pr. Eb.** E_1 in wahrer Grösse enthalten.

Nimmt man ebenso auf der Spur S den Punkt b an, zieht von b_2 die Senkrechte $b_2\mathfrak{b}$ zu T_2 und konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck $b_2\mathfrak{b}'b'$ mit den Katheten gleich den Längen $\overline{b_1 b_2}$ und $\overline{b_2\mathfrak{b}}$; macht also $\overline{b_2\mathfrak{b}'} = \overline{b_2\mathfrak{b}}$ und $\overline{b_2 b'} = \overline{b_2 b_1}$, so ist in demselben bei $\mathfrak{b}'$ der Neigungswinkel W_2 der Ebene ST mit der **Pr. Eb.** E_2 in wahrer Grösse enthalten.

55) Ist die Ebene durch anderweitige Bestimmungsstücke, etwa durch ein Dreieck abc, siehe Figur 80, gegeben, so lassen sich die Winkel W_1 und W_2 auch ohne Kenntnis der Spuren der Ebene einfach wie folgt ermitteln: Man zeichne, ähnlich wie in 52) gezeigt wurde, durch den Punkt a eine Parallele U zur ersten Spur der Ebene, fälle von b_1 auf U_1 die Senkrechte $b_1\mathfrak{b}$ und konstruiere mit den beiden Längen $b_2\mathfrak{c}$ und $b_1\mathfrak{b}$ ein rechtwinkliges Dreieck $b_2\mathfrak{c}\mathfrak{b}''$, so enthält dasselbe bei $\mathfrak{b}''$ den Winkel W_1 in wahrer Grösse. Der Schüler ermittele in ähnlicher Weise den Winkel W_2 der Dreiecksebene mit der **Pr. Eb.** E_2.

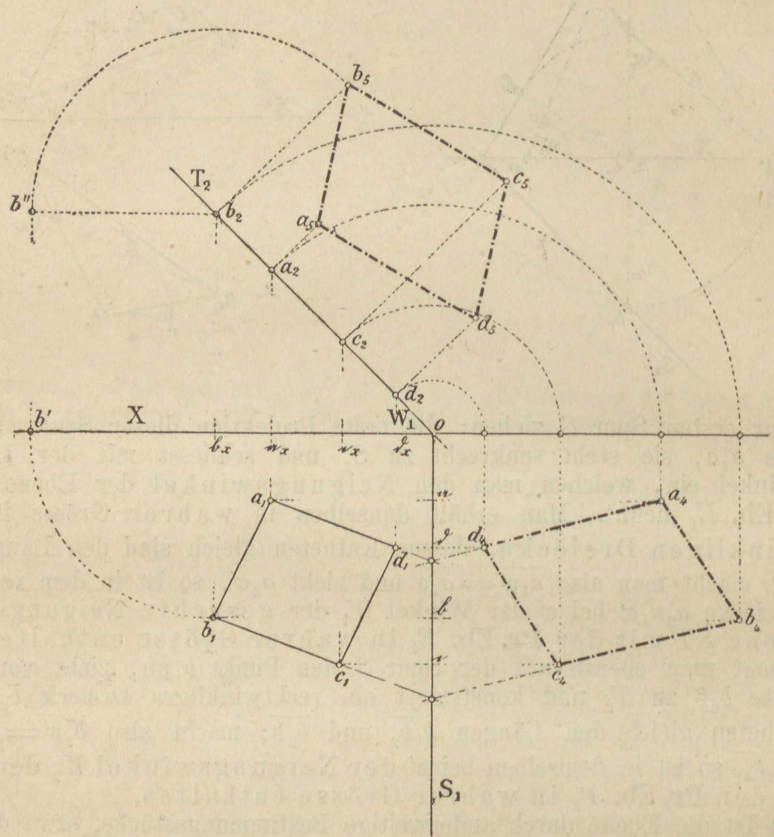
7) Ueber die Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur.

a) Umlegen einer Ebene in die Pr. Ebn. E_1 und E_2.

56) Die rechtwinklige Projektion einer ebenen Figur wird sowohl bezüglich der Form als auch der bezüglichen Grösse von der wahren Gestalt der Figur abweichen. Sehr häufig tritt aber an den Techniker die Aufgabe heran, aus den gegebenen Projektionen einer Figur die wahre Gestalt derselben herzustellen. Dies geschieht dadurch, dass man die Ebene der Figur

um ihre Schnittlinie mit einer **Pr. Eb.** in diese umlegt. Durch das Drehen der Ebene wird die Gestalt einer in ihr liegenden Figur ungeändert bleiben. Ist man also im Stande, nach der erfolgten Umlegung der Ebene in die **Pr. Eb.**, die darin befindliche Figur zu zeichnen, so wird man hierdurch die wahre Gestalt derselben bestimmt haben.

Figur 81.

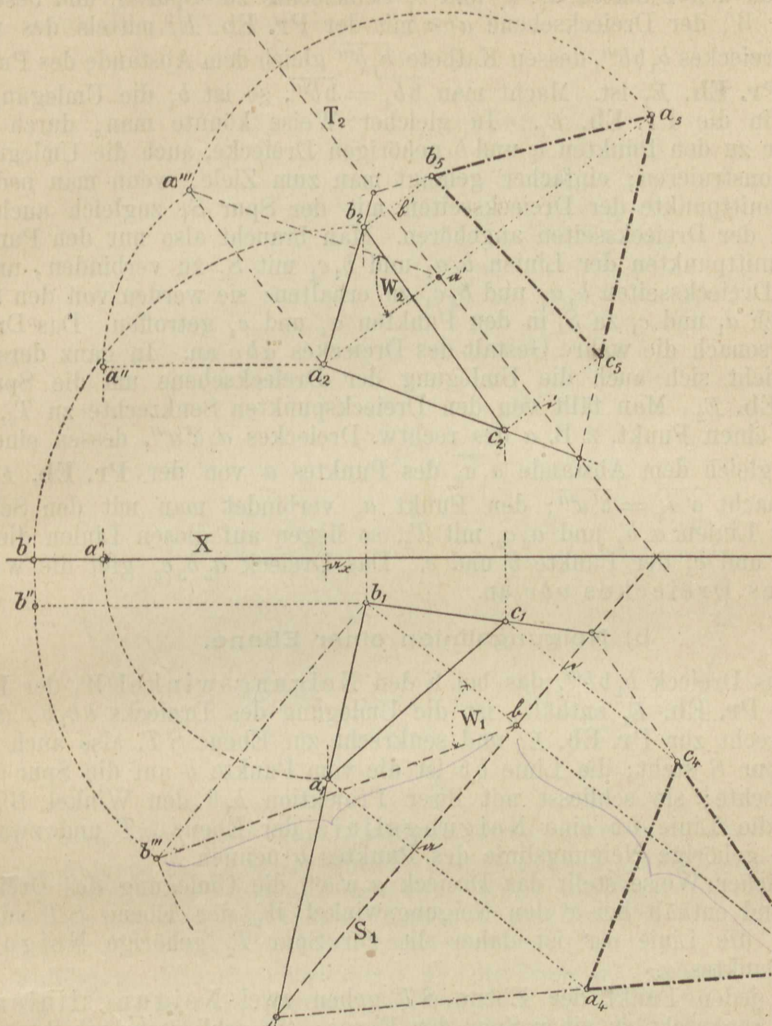


Man kann nun folgende Fälle unterscheiden:

1) Die Ebene der Figur sei eine projizierende Ebene.

Ist ST die gegebene Ebene, in welcher beispielsweise ein Viereck $abcd$, s. Fig. 81, durch seine Projektionen gegeben ist, so kann die Umlegung der Ebene einmal vorgenommen werden um die Spur T_2, dann aber auch um die Spur S_1; im ersten Falle gelangen die Eckpunkte a, b, c, d nach der Umlegung in die Senkrechten zu T_2 durch die zweiten Projektionen der Punkte a bis d derart zu liegen, dass die Entfernungen $\overline{a_2a_5}$, $\overline{b_2b_5} \cdots \overline{d_2d_5}$ gleich sind den Abständen der Punkte a bis d von der **Pr. Eb.** E_2; es ist also in Figur 81 $\overline{a_2a_5} = \overline{a_1\mathfrak{a}_x}$, $\overline{b_2b_5} = \overline{b_1\mathfrak{b}_x}$, $\overline{c_2c_5} = \overline{c_1\mathfrak{c}_x}$, endlich $\overline{d_2d_5} = \overline{d_1\mathfrak{d}_x}$. Das Viereck $a_5b_5c_5d_5$ gibt die wahre Gestalt der Figur $abcd$ an. Geschieht die Drehung der Ebene um die Linie S_1, so beschreiben die einzelnen Punkte bei dieser Drehung Kreise, deren Ebenen senkrecht stehen zur Drehachse, ihre zweiten Projektionen stellen sich als Kreise mit dem Mittelpunkte o und den Halbmessern $\overline{oa}$, $\overline{ob_2}$, $\overline{oc_2}$ und $\overline{od_2}$,

Figur 82.



ihre ersten Projektionen aber als Senkrechte durch a_1, b_1, c_1 und d_1 zu S_1 dar. Die Punkte a bis d gelangen nach der Drehung nach a_4, b_4, c_4 und d_4, so dass das Viereck $a_4 b_4 c_4 d_4$ wieder die wahre Gestalt der Figur $abcd$ angibt.

2) Die Ebene der Figur sei gegen die beiden Projektionsebenen beliebig geneigt.

Es sei ein Dreieck abc gegeben, siehe Figur 82, dessen wahre Gestalt ermittelt werden soll. Man bestimme zunächst die Spuren S_1 und T_2 der Ebene, indem man die zweiten Projektionen der Dreiecksseiten bis zur X-Achse verlängert und die Schnittpunkte auf die ersten Projektionen projiziert, letztere Punkte gehören der Spur S_1 an. Verlängert man ebenso die ersten Projektionen der Dreiecksseiten bis zur X-Achse und projiziert diese Punkte auf den zweiten Projektionen der Dreiecksseiten, so gehören diese Punkte der Spur T_2 an.

Um nun die Umlegung der Ebene in die erste **Pr. Eb.** E_1 vorzunehmen, fälle man von den Punkten a_1, b_1 und c_1 Senkrechte zur Spur S_1 und bestimme den Winkel W_1 der Dreiecksebene abc mit der **Pr. Eb.** E_1 mittels des rechtwinkligen Dreieckes $b_1 \mathfrak{b} b'''$, dessen Kathete $\overline{b_1 b'''}$ gleich dem Abstande des Punktes b von der **Pr. Eb.** E_1 ist. Macht man $\overline{\mathfrak{b} b_4} = \mathfrak{b} b'''$, so ist b_4 die Umlegung des Punktes b in die **Pr. Eb.** E_1. In gleicher Weise könnte man, durch Konstruktion der zu den Punkten a und b gehörigen Dreiecke, auch die Umlegungen a_4 und c_4 konstruieren; einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man bedenkt, dass die Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit der Spur S_1 zugleich auch den Umlegungen der Dreiecksseiten angehören. Man braucht also nur den Punkt b_4 mit den Schnittpunkten der Linien $b_1 a_1$ und $b_1 c_1$ mit S_1 zu verbinden, um die umgelegten Dreiecksseiten $b_4 a_4$ und $b_4 c_4$ zu erhalten; sie werden von den Senkrechten durch a_1 und c_1 zu S_1 in den Punkten a_4 und c_4 getroffen. Das Dreieck $a_4 b_4 c_4$ gibt sonach die wahre Gestalt des Dreieckes abc an. In ganz derselben Weise vollzieht sich auch die Umlegung der Dreiecksebene um die Spur T_2 in die **Pr. Eb.** E_2. Man fällt von den Dreieckspunkten Senkrechte zu T_2, konstruiert für einen Punkt, z. B. a des rechtw. Dreieckes $a_2 \mathfrak{a}' a'''$, dessen eine Kathete $\overline{a_2 a'''}$ gleich dem Abstande $\overline{a_1 \mathfrak{a}_x}$ des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_2 beträgt und macht $\overline{\mathfrak{a}' a_5} = \overline{\mathfrak{a}' a'''}$; den Punkt a_5 verbindet man mit den Schnittpunkten der Linien $a_2 b_2$ und $a_2 c_2$ mit T_2, so liegen auf diesen Linien die Umlegungen b_5 und c_5 der Punkte b und c. Das Dreieck $a_5 b_5 c_6$ gibt die wahre Gestalt des Dreieckes abc an.

b) Neigungslinien einer Ebene.

57) Das Dreieck $b_1 \mathfrak{b} b'''$, das bei $\mathfrak{b}$ den Neigungswinkel W_1 der Ebene ST mit der **Pr. Eb.** E_1 enthält, ist die Umlegung des Dreiecks $b b_1 \mathfrak{b}$, dessen Ebene senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 und senkrecht zur Ebene ST, also auch senkrecht zur Spur S steht; die Linie $b\mathfrak{b}$ ist die vom Punkte b auf die Spur S gefällte Senkrechte; sie schliesst mit ihrer Projektion $b_1 \mathfrak{b}$ den Winkel W_1 ein. Man kann die Linie $b\mathfrak{b}$ eine Neigungslinie der Ebene ST und zwar die zur Spur S_1 gehörige Neigungslinie des Punktes b nennen.

In gleicher Weise stellt das Dreieck $a_2 \mathfrak{a}' a'''$ die Umlegung des Dreieckes $a \mathfrak{a}' a_2$ dar und enthält bei $\mathfrak{a}'$ den Neigungswinkel W_2 der Ebene ST mit der **Pr. Eb.** E_2; die Linie $a\mathfrak{a}'$ ist daher die zur Spur T_2 gehörige Neigungslinie des Punktes a.

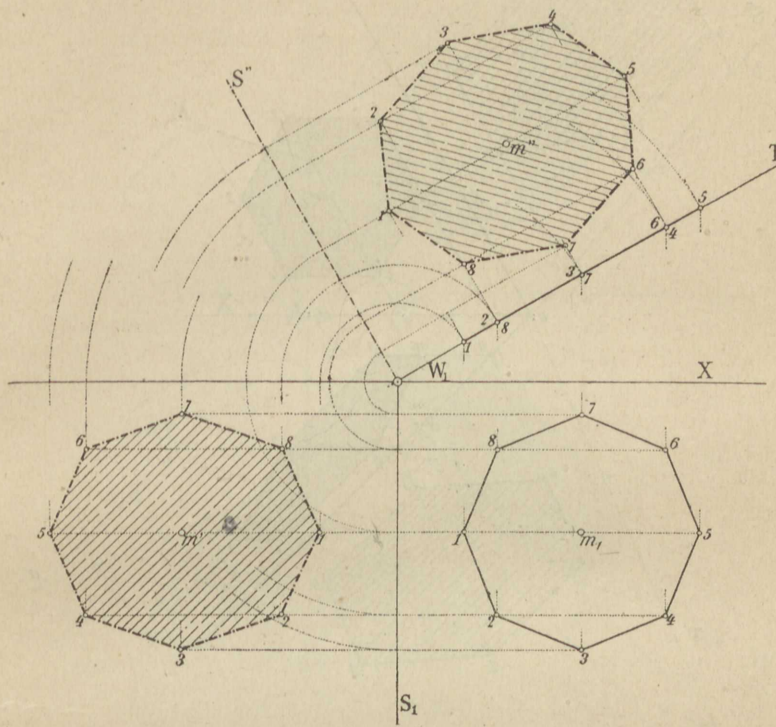
Durch jeden Punkt der Ebene ST gehen zwei Neigungslinien der Ebene, jede senkrecht zu einer Spur der Ebene; sie schliessen mit ihren Projektionen, die zu den bezüglichen Spuren senkrecht gerichtet sind, den Neigungswinkel der Ebene ST mit der zugehörigen **Pr. Eb.** ein.

c) Affinität zwischen Projektion und Umlegung.

58) Die Projektion einer ebenen Figur und ihre Umlegung in die gleichnamige **Pr. Eb.** bilden zwei Figuren, welche in einem gewissen geometrischen Zusammenhange stehen; es liegen nämlich die Projektionen der Punkte und ihre Umlegungen auf parallelen Geraden, während je eine Linie der Projektion und die zugehörige Umlegung sich auf Punkten einer Geraden (S_1 oder T_2) schneiden. Diesen geometrischen Zusammenhang nennt man Affinität und die Figuren selbst affine Figuren.

Den Punkten und Geraden der einen Figur entsprechen also gewisse Punkte und Geraden der andern Figur; entsprechende Punkte liegen auf parallelen Geraden, entsprechende Gerade schneiden sich auf einer Geraden; diese Gerade heisst die Achse der Affinität oder auch die Affinitätsachse. Die Richtung der parallelen Geraden, auf welcher je zwei entsprechende Punkte liegen, heisst die Affinitätsrichtung.

Figur 83.



d) Aufgaben über das Umlegen einer Ebene in die Pr. Ebn.

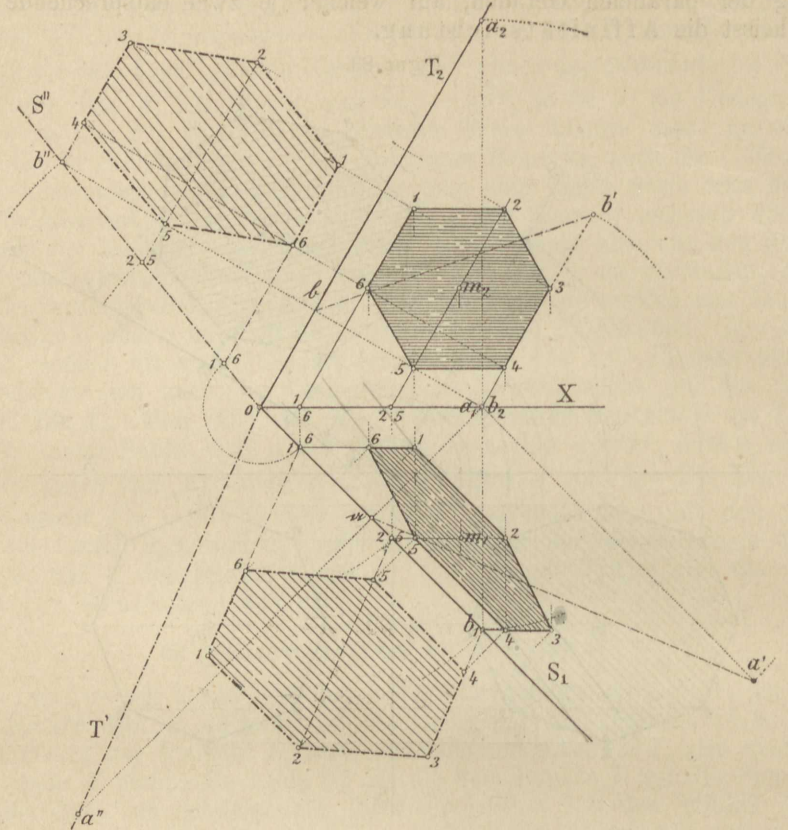
59) **Aufgabe 15.** In einer durch ihre Spuren S_1 und T_2 gegebenen, zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehenden Ebene liegt ein Vieleck, dessen erste Projektion als regelmässiges Achteck gezeichnet ist. Man soll die wahre Gestalt des Vieleckes konstruieren.

Auflösung. Man lege, siehe Figur 83, die Ebene ST entweder um die Spur T_2 in die **Pr. Eb.** E_2 um, oder aber um die Spur S_1 in die **Pr. Eb.** E_1. In beiden Fällen erhält man die schraffierten Figuren als wahre Gestalt des Achteckes.

60) **Aufgabe 16.** In einer durch ihre Spuren S_1 und T_2 gegebenen Ebene liegt ein Vieleck, dessen zweite Projektion als ein regelmässiges Sechseck gegeben ist. Man soll die erste Projektion sowie die wahre Gestalt des Sechseckes zeichnen.

Auflösung. Man zeichne, siehe Figur 84, die Parallelen durch die Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 der zweiten Projektion des Sechseckes zu der zweiten Spur T_2 der Sechsecksebene und bestimme deren erste Projektionen; auf ihnen liegen die ersten Projektionen 1, 2, 3, 4, 5, 6 des Sechseckes. Zur Bestimmung der wahren Gestalt der Figur kann man die Ebene $S_1 T_2$ sowohl um die Spur S_1 als auch um T_2 in die **Pr. Eb.** E_1 bezw. E_2 umlegen; im ersten Falle wähle man auf der Spur T den Punkt a willkürlich, zeichne das Dreieck $a_1 \mathfrak{a} a'$ mit den Katheten $\overline{a_1 \mathfrak{a}}$ und $\overline{a_1 a'} = \overline{a_1 a_2}$, dann kommt die Umlegung des Punktes a nach a'', $\overline{\mathfrak{a} a''} = \overline{\mathfrak{a} a'}$, womit in der Linie $o a''$ die Umlegung T' der zweiten Spur T_2 der Ebene gegeben ist. Nunmehr können auch die Umlegungen der Spurparallelen gezeichnet werden, auf welchen die Umlegungen 1—6 der Sechseckspunkte liegen. Das strichpunktiert gezeichnete Sechseck gibt die wahre Gestalt des Sechseckes an.

Figur 84.



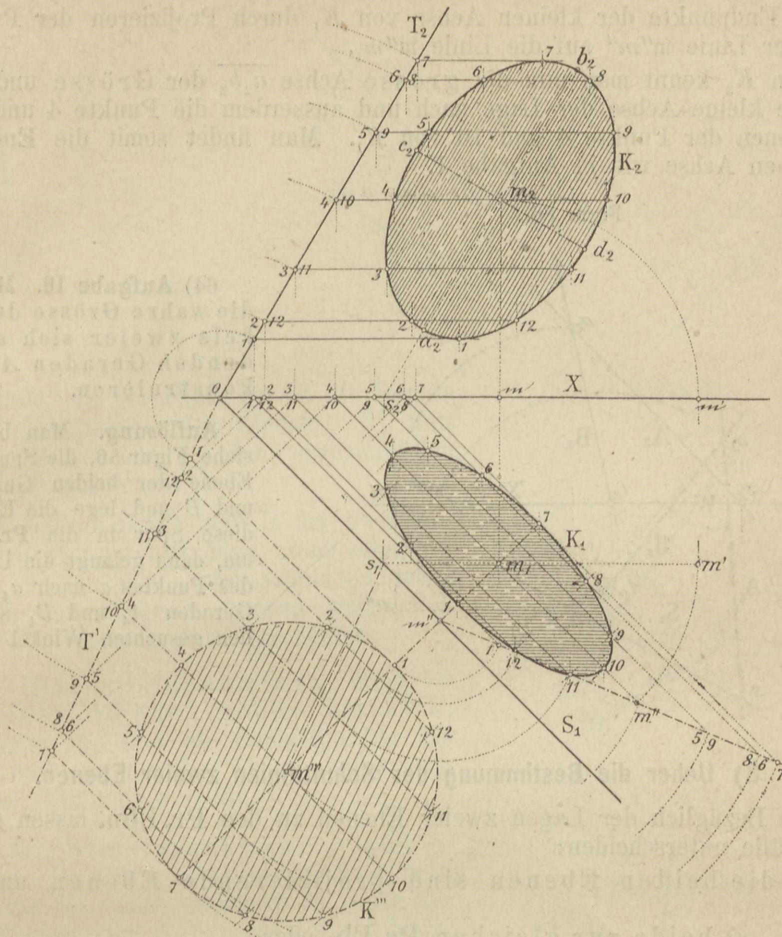
In gleicher Weise vollzieht sich die Umlegung der Ebene $S_1 T_2$ um die zweite Spur T_2. Man wählt auf S den Punkt b beliebig, zweckmässig gleich so, dass b_2 mit a_1 sich deckt und konstruiert mittels des Dreieckes $b_2 \mathfrak{b} b'$ die Umlegung b'' des Punktes b ($\overline{b_2 b'} = \overline{b_2 b_1}$, $\overline{\mathfrak{b} b''} = \overline{\mathfrak{b} b'}$) und damit auch S''. Ueberträgt man nun mittels der Kreisbögen um o als Mittelpunkt die Schnittpunkte der Spurparallelen mit S_1 auf S'', so gehen durch letztere Punkte parallel zu T_2 die Umlegungen der Spurparallelen, auf welchen die Umlegungen 1 bis 6 der Sechseckspunkte liegen; das strichpunktiert gezeichnete Sechseck ist wieder die wahre Gestalt der gegebenen Figur.

61) Ohne Benützung der Dreiecke $a_1 \mathfrak{a} a'$ und $b_2 \mathfrak{b} b'$ hätte man die Umlegungen T' und S'' auch erhalten können unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Längen $\overline{oa''} = \overline{oa_2}$ und $\overline{ob''} = \overline{ob_1}$ sein müssen. Man braucht also nur von dem Punkte $a_1 b_2$ Senkrechte zu S_1 bezw. T_2 zu fällen und aus o als Mittelpunkt mit den Halbmessern $\overline{oa_2}$ und $\overline{ob_1}$ Kreise zu schlagen bis zum Schnitt mit den genannten Senkrechten.

62) **Aufgabe 17.** In einer Ebene $S_1 T_2$ ist ein Punkt m durch seine Projektionen m_1 und m_2 als Mittelpunkt eines Kreises von bekanntem Halbmesser gegeben. Man soll die erste und zweite Projektion des Kreises zeichnen.

Auflösung. Man lege, siehe Figur 85, die Ebene $S_1 T_2$ um ihre erste Spur S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 um und bestimme die Umlegung m''' des Punktes m mittels des Dreieckes

Figur 85.



$m_1\,\mathrm{m}''m''$ und damit auch T' parallel $m'''s_1$. Zeichne hierauf um m''' als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis K''', teile ihn in eine beliebige Anzahl, z. B. 12 gleicher Teile, ziehe durch die Teilpunkte Parallele zu S_1 und ermittele die ersten und zweiten Projektionen derselben; auf ihnen liegen die Projektionen der Kreispunkte.

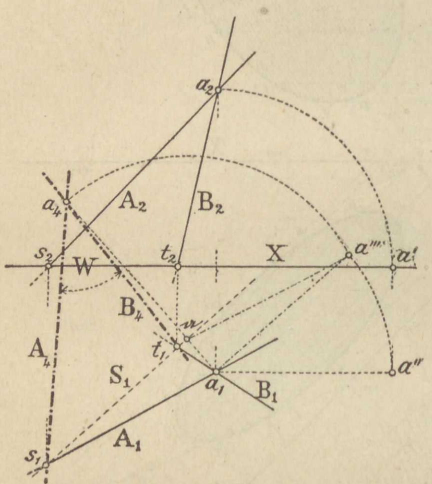
Anmerkung 30. Die Projektionen der Spurenparallelen sind, wie aus der Figur 85 ersichtlich ist, auf dreierlei Weise bestimmt worden, einmal mittels der Kreise um 0 als Mittelpunkt durch die Schnittpunkte der Spurparallelen mit T', dann durch Uebertragen der Schnittpunkte der Spurparallelen mit der Linie $\mathrm{m}''m'''$ auf die Linie $\mathrm{m}''m''$ mittels der Kreise um m'', endlich durch Projizieren der Schnittpunkte der Spurparallelen mit T' auf die X-Achse.

63) Die Kreisprojektionen K_1 und K_2 stellen sich als Ellipsen dar, deren grosse Achsen parallel gerichtet sind zur bezüglichen Spur der Ebene; die kleinen Achsen fallen je mit der Neigungslinie durch die Projektionen des Mittelpunktes m zur bezüglichen Projektionsebene zusammen.

Man kann ohne Benützung der Umlegung die Projektionen K_1 und K_2 direkt konstruieren. Man braucht ja nur durch m_1 und m_2 je eine Parallele zur bezüglichen Spur zu zeichnen und auf ihr von m_1 bezw. m_2 den Kreishalbmesser abzutragen. Trägt man ausserdem auf der Linie $\mathrm{m}''m''$ von m'' aus gleichfalls den Kreishalbmesser nach beiden Seiten nach $\overline{m''1}$ und $\overline{m''7}$ ab, so ergeben sich die Endpunkte der kleinen Achse von K_1 durch Projizieren der Punkte 1 und 7 der Linie $\mathfrak{m}''m''$ auf die Linie $\mathfrak{m}''m_1$.

Von K_2 kennt man nun die grosse Achse $\overline{a_2b_2}$ der Grösse und Lage nach, die kleine Achse der Lage nach und ausserdem die Punkte 4 und 10 als Projektionen der Punkte 4 und 10 von K_1. Man findet somit die Endpunkte der kleinen Achse wie in Aufgabe 1.

Figur 86.



64) **Aufgabe 18.** Man soll die wahre Grösse des Winkels zweier sich schneidenden Geraden A und B konstruieren.

Auflösung. Man bestimme, siehe Figur 86, die Spur S_1 der Ebene der beiden Geraden A und B und lege die Ebene um diese Spur in die **Pr. Eb.** E_1 um, dann gelangt die Umlegung des Punktes a nach a_4 und die Geraden A_4 und B_4 schliessen den gesuchten Winkel W ein.

8) Ueber die Bestimmung der Schnittlinien zweier Ebenen.

65) Bezüglich der Lagen zweier Ebenen zu den **Pr. Ebn.** lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1) die beiden Ebenen sind projizierende Ebenen und zwar sind sie

a) beide zur gleichen **Pr. Eb.** oder

b) beide auf verschiedenen **Pr. Ebn.** senkrecht,

2) eine der Ebenen ist eine projizierende Ebene, die andere nicht,

3) beide Ebenen sind gegen die **Pr. Ebn.** beliebig geneigt.

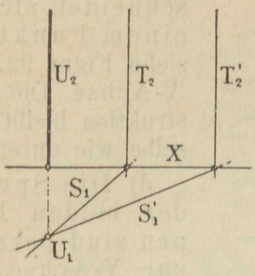
Im Falle 1) lässt sich die Lage der Ebenen stets unmittelbar in der Projektionszeichnung erkennen, denn stehen, siehe Figur 87, die beiden Ebenen auf der **Pr. Eb.** E_1 senkrecht, so werden sie sich schneiden oder parallel gerichtet sein.

In der Figur 87 schneiden sich die beiden Ebenen und zwar gibt der Schnittpunkt der ersten Spuren S_1 und S_1' die erste Projektion U_1 der Schnittlinie, die zweite Projektion U_2 steht senkrecht zur X-Achse.

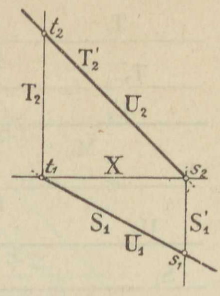
In Figur 88 steht die Ebene S_1T_2 senkrecht zur ersten, die Ebene $S_1'T_2'$ senkrecht zur zweiten **Pr. Eb.**, die Ebenen schneiden sich stets, und zwar fallen die Projektionen der Schnittlinie in die Projektionen der Ebenen, d. h. U_2 deckt sich mit T_2' und U_1 mit S_1.

Im Falle 2) findet gleichfalls stets ein Schneiden beider Ebenen statt und es geben die Schnittpunkte der Spuren der Ebene die Spuren der Durch-

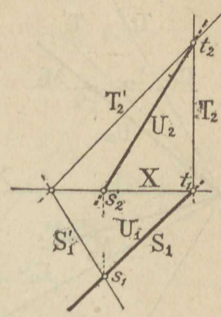
Figur 87.



Figur 88.



Figur 89.



schnittslinie. In der Figur 89 ist die Gerade U die Schnittlinie beider Ebenen. U_1 fällt mit der Projektion S_1 der projizierenden Ebene $S_1 T_2$ zusammen.

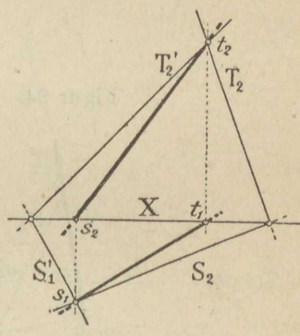
Im Falle 3) kann man in der Projektionszeichnung nur dann unmittelbar erkennen, ob die Ebenen sich schneiden, wenn sie durch ihre Spuren gegeben sind. Folgende Fälle lassen sich unterscheiden:

a) Die gleichnamigen Spuren der beiden Ebenen schneiden sich, siehe Figur 90, und die Schnittpunkte der Spuren sind zugänglich. Diese gehören der gesuchten Schnittlinie st an.

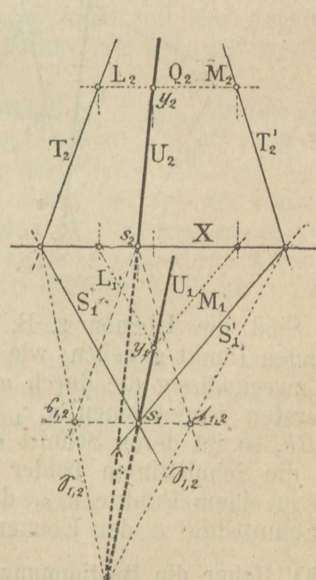
b) Ein Schnittpunkt zweier gleichnamigen Spuren ist unzugänglich, siehe Figur 91. Man zeichnet in jeder der beiden Ebenen eine Spurparallele L bezw. M, deren zweite Projektionen L_2 und M_2 sich decken, und sucht die zugehörigen ersten Projektionen L_1 und M_1, die sich in y_1 schneiden, y_2 liegt auf $L_2 M_2$. Der Punkt y ist ein Punkt der Schnittlinie, diese ist somit die Linie sy.

Andere Lösung. Zieht man durch den Punkt s in jeder Ebene eine Parallele zur zweiten Spur, sucht deren Schnittpunkt $\mathfrak{s}_{1,2}$ und $\mathfrak{t}_{1,2}$ mit der Coïncidenzebene und verbindet diese Punkte mit den Schnittpunkten der Spuren $S_1 T_2$ und $S_1' T_2'$, so geben diese Verbindungslinien die Schnittlinien der gegebenen Ebenen mit der Coïncidenzebene und liefern einen Schnittpunkt $\mathfrak{x}_{1,2}$, durch welchen die beiden Projektionen der gesuchten Schnittlinie U hindurchgehen.

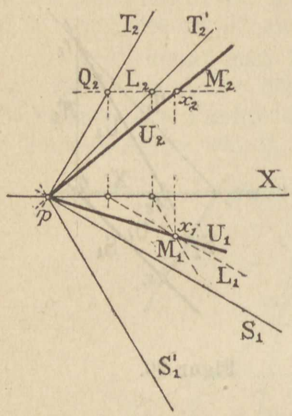
Figur 90.



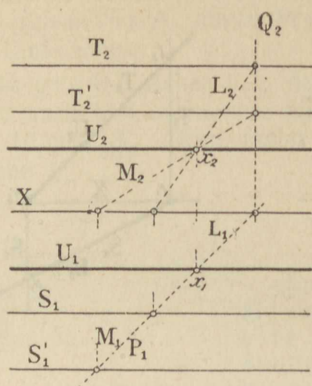
Figur 91.



Figur 92.



Figur 93.

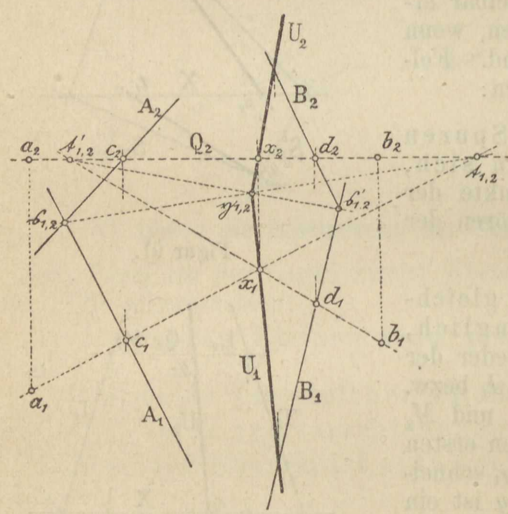


c) Die Spuren beider Ebenen schneiden sich in einem Punkte p, siehe Figur 92, der X-Achse. Die Konstruktion bleibt dieselbe wie unter b)

d) Die Spuren der beiden Ebenen sind parallel zur X-Achse.

Man schneidet die beiden Ebenen durch eine dritte Ebene PQ, siehe Figur 93, und bestimmt deren Schnittlinien M und L mit den gegebenen Ebenen wie unter a). Durch den Schnittpunkt x geht die Schnittlinie U der beiden Ebenen parallel zur X-Achse.

Figur 94.



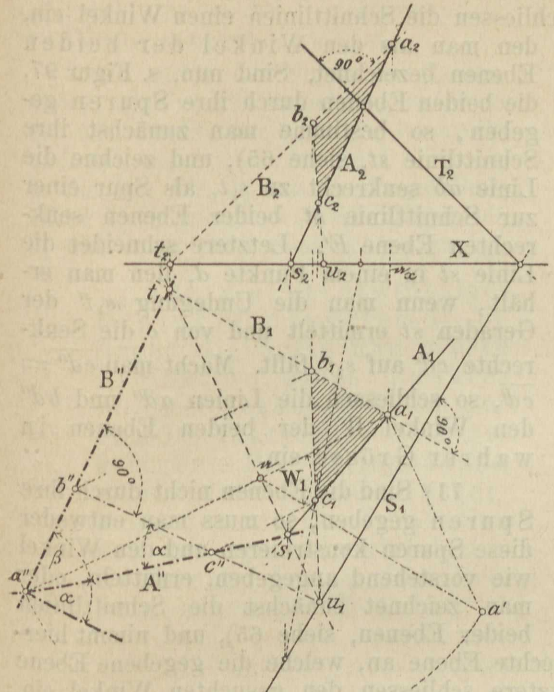
66) Sind die Ebenen nicht durch ihre Spuren, sondern durch andere Bestimmungsstücke gegeben, so kann man in der Projektionszeichnung nicht unmittelbar erkennen, ob die Ebenen sich schneiden oder nicht. Man erhält hierüber Aufschluss, wenn man die Schnittpunkte von zweien Geraden der einen Ebene mit der andern Ebene ermittelt, siehe 47); erhält man solche Schnittpunkte, so schneiden sich die Ebenen im andern Falle nicht. Man kann aber auch hier mittels einer dritten Ebene zur Schnittlinie beider Ebenen gelangen.

Sind die Ebenen z. B. je durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt gegeben, wie die Ebene Aa und Bb, siehe Figur 94, so wählt man zweckmässig die durch a und b gehende projizierende Ebene Q_2, bestimmt die ersten Projektionen $a_1 c_1$ und $b_1 d_1$ ihrer Schnittlinien mit den Ebenen Aa und Bb, so ist deren Schnitt ein Punkt x der gesuchten Schnittlinie. Sucht man noch die Schnittlinien beider Ebenen mit der Coïncidenzebene, so treffen sich diese in einem Punkte $\mathfrak{y}_{1,2}$, durch welchen die beiden Projektionen U_1 und U_2 der Schnittlinie U der Ebenen hindurchgehen.

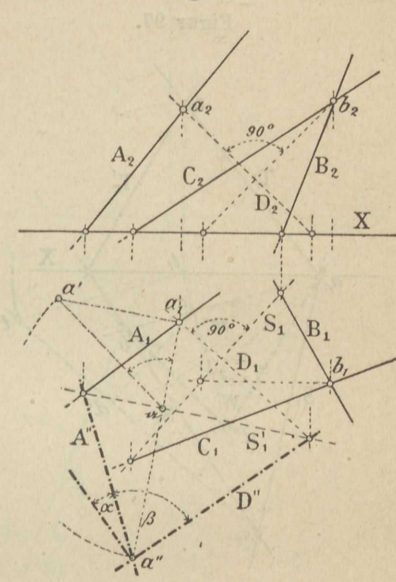
9) Ueber die Bestimmung des Winkels einer Geraden mit einer Ebene.

67) Unter dem Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene versteht man den Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene

Figur 95.



Figur 96.



einschliesst. Um diesen Winkel zu bestimmen, fällt man von einem Punkte der Geraden eine Senkrechte zur Ebene, dann schliesst diese mit der gegebenen Geraden den Komplementwinkel (Ergänzungswinkel zu 90^0) des gesuchten Winkels ein.

Ist, siehe Figur 95, durch $S_1 T_2$ die Ebene, durch $A_1 A_2$ die Gerade dargestellt, so fälle man von dem beliebig auf A gewählten Punkte a die Senkrechte B, siehe 52), zur Ebene, bestimme die Spur $s_1 t_1$ der Ebene AB und lege die Ebene AB um diese Spur in die **Pr. Eb.** E_1 um, dann gelangt die Umlegung des Punktes a nach a'' und die Umlegungen, A'' und B'' der Geraden A und B schliessen den Winkel β ein; dessen Complementwinkel α ist also der gesuchte Winkel der Geraden A und der Ebene $S_1 T_2$ in wahrer Grösse.

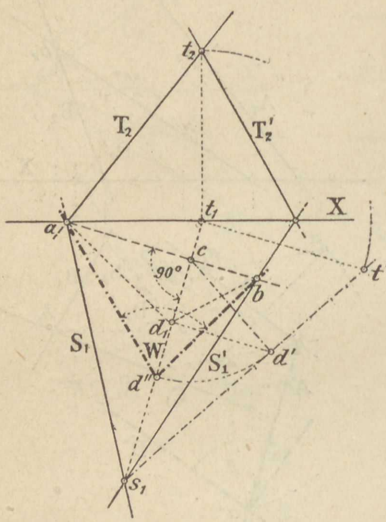
68) Zieht man durch den Schnittpunkt u_1 von $s_1 t_1$ und S_1 die Senkrechte zu B''; so stellt diese Linie die Umlegung der Projektion der Geraden A auf die Ebene $S_1 T_2$ dar und man erhält in dem rechtwinkligen Dreieck $a'' b'' c''$ bei c'' gleichfalls den Winkel α.

69) Kennt man von der Ebene etwa zwei sich schneidende Gerade B und C, siehe Figur 96, so bleibt die Konstruktion dieselbe wie vorhin. Man fällt von einem beliebigen Punkte a von A eine Senkrechte D zur Ebene AB, siehe Aufgabe 52, ermittelt die Spur S_1' der Ebene AB und legt letztere um S_1' in die **Pr. Eb.** E_1 um. Die Umlegungen A'' und D'' schliessen den Winkel $\beta = 90^0 - \alpha$ ein.

10) Ueber die Bestimmung des Winkels zweier Ebenen.

70) Schneidet man zwei Ebenen durch eine dritte Ebene, welche auf den beiden Ebenen senkrecht steht, so schliessen die Schnittlinien einen Winkel ein, den man als den Winkel der beiden Ebenen bezeichnet. Sind nun, s. Figur 97, die beiden Ebenen durch ihre Spuren gegeben, so bestimme man zunächst ihre Schnittlinie st, siehe 65), und zeichne die Linie ab senkrecht zu s_1t_1 als Spur einer zur Schnittlinie st beider Ebenen senkrechten Ebene E'. Letztere schneidet die Linie st in einem Punkte d, den man erhält, wenn man die Umlegung s_1t' der Geraden st ermittelt und von c die Senkrechte cd' auf s_1t' fällt. Macht man $\overline{cd''} = \overline{cd'}$, so schliessen die Linien ad'' und bd'' den Winkel W der beiden Ebenen in wahrer Grösse ein.

Figur 97.

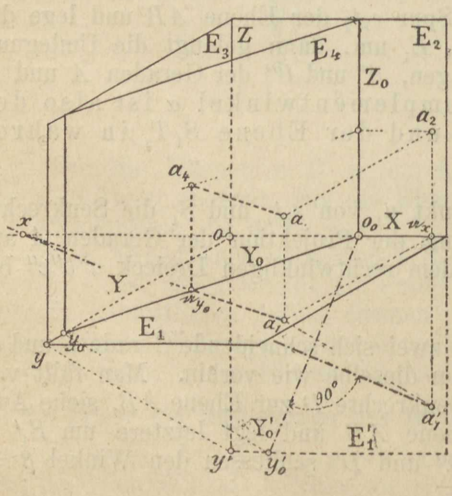


71) Sind die Ebenen nicht durch ihre Spuren gegeben, so muss man entweder diese Spuren konstruieren und den Winkel wie vorstehend angegeben, ermitteln, oder man zeichnet zunächst die Schnittlinien beider Ebenen, siehe 65), und nimmt hierauf eine zu dieser Schnittlinie senkrechte Ebene an, welche die gegebene Ebene nach zweien Geraden schneidet; letztere schliessen den gesuchten Winkel ein.

11) Ueber die Einführung neuer Projektionsebenen.

72) In dem Vorhergehenden sind die Mittel enthalten, um in der Projektionszeichnung die Konstruktionen für Aufgaben auszuführen, welche sich auf die gegenseitigen Lagen der Raumgrössen: „Punkt, Gerade und Ebene" beziehen und zwar lediglich unter Berücksichtigung eines der Projektionssysteme I—II, I—III oder II—III.

Figur 98.



Häufig benützt man aber ausser den bisher genannten **Pr. Ebn.** noch weitere **Pr. Ebn.**, teils zur Vereinfachung notwendiger Konstruktionen, teils um noch weitere Projektionen einer Raumgrösse darstellen zu können.

Bei der Wahl einer weiteren **Pr. Eb.** kommen nur folgende zwei Fälle in Betracht:

1) Die neue **Pr. Eb.** steht senkrecht zu einer der drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 oder E_3.

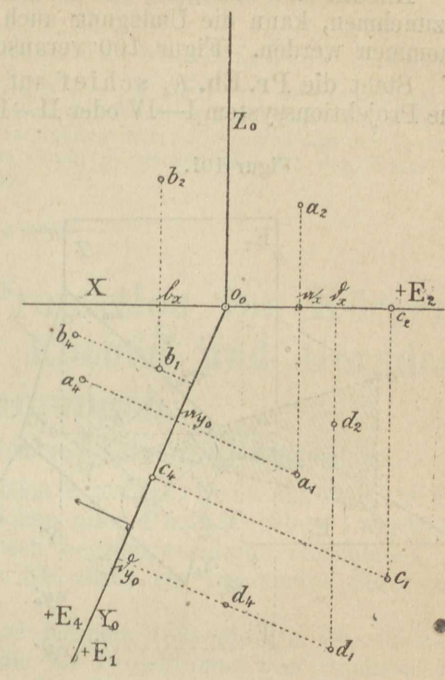
2) Es ist dies nicht der Fall.

Steht die neue **Pr. Eb.** E_4 etwa auf der **Pr. Eb.** E_1, siehe Figur 98, senkrecht, so ist das Projektionssystem I—IV ein rechtwinkliges.

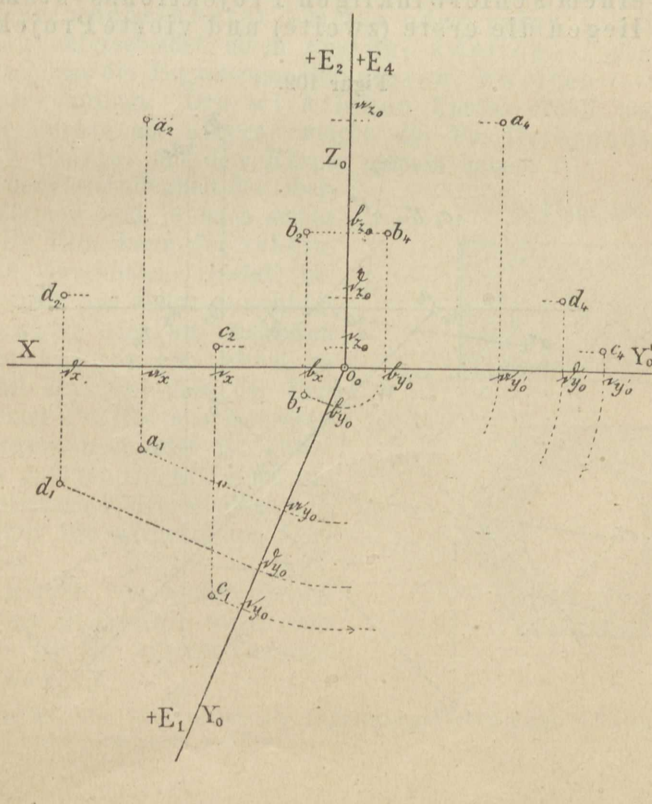
Ist nun a der Punkt im Raume, und a_4 seine vierte Projektion, so bilden die vier Punkte $a a_4 \mathfrak{a}_{y_0} a_1$ ein Rechteck, und es liegen, nachdem die **Pr. Eb.** E_4 in die **Pr. Eb.** E_1 um die Projektionsachse Y_0 umgelegt ist, siehe Figur 99, a_4 und a_1 in einer Senkrechten zu Y_0.

„Für ein rechtwinkliges Projektionssystem I—IV liegen die erste und vierte Projektion eines Punktes in einer Senkrechten zu der zum Projektionssystem gehörigen Projektionsachse. Ausserdem ist die Entfernung der vierten Projektion von der Y_0-Achse gleich der Entfernung der zweiten Projektion von der X-Achse."

Figur 99.



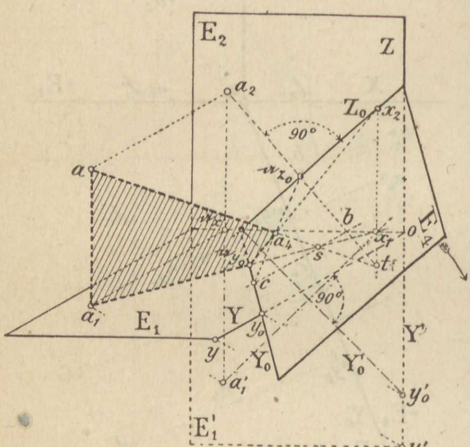
Figur 100.



Anstatt die Umlegung der **Pr. Eb.** E_4 um die Y_0-Achse in die **Pr. Eb.** E_1 vorzunehmen, kann die Umlegung auch um die Z-Achse in die **Pr. Eb.** E_2 vorgenommen werden. Figur 100 veranschaulicht diesen Vorgang.

Steht die **Pr. Eb.** E_4 schief auf einer der **Pr. Ebn.** E_1 oder E_2, so ist das neue Projektionssystem I—IV oder II—IV ein schiefwinkliges und es bilden, siehe Figur 101, die vier Punkte $a\,a_1\,\mathfrak{a}_{y_0}$ und a_4 ein Viereck, das bei $\mathfrak{a}_{y_0}$ den Winkel der **Pr. Eb.** E_4 mit der **Pr. Eb.** E_1 enthält.

Figur 101.



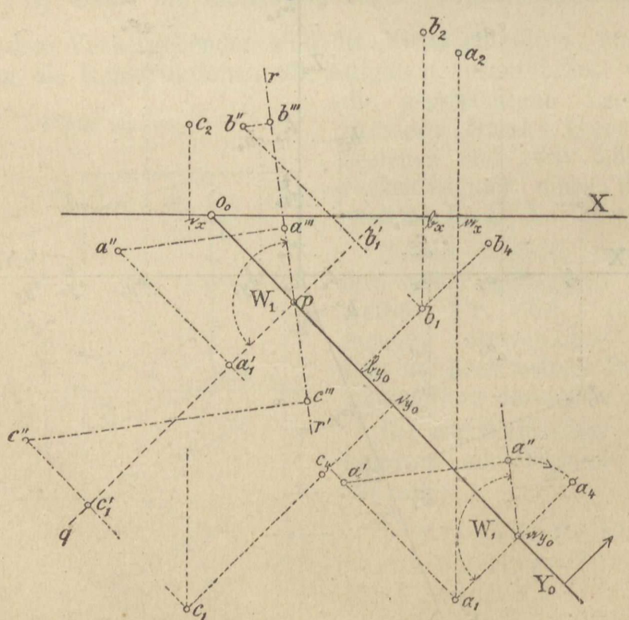
Dieses Viereck soll das Konstruktionsviereck des betreffenden Punktes heissen.

Wird nun E_4 um Y_0 nach E_1 umgelegt, siehe Figur 102, so liegen wieder a_1 und a_4 in einer Senkrechten zur Projektionsachse Y_0, aber die Länge $\overline{\mathfrak{a}_{y_0} a_4}$ ist nicht mehr gleich $\overline{a_2 \mathfrak{a}_x}$, sondern sie bestimmt sich aus dem Konstruktionsviereck $a' a_1 \mathfrak{a}_{y_0} a''$ gleich der Strecke $\overline{\mathfrak{a}_{y_0} a''}$.

Aehnlich verhält sich die Sache bei einer Umlegung der **Pr. Eb.** E_4 in die **Pr. Eb.** E_2. Man kann daher folgenden Satz aussprechen:

„Bei einem schiefwinkligen Projektionssystem I—IV oder (II—IV) liegen die erste (zweite) und vierte Projektion eines

Figur 102.



Punktes in einer Senkrechten zur Projektionsachse $Y_0 (Z_0)$. Die Entfernung der vierten Projektion von $Y_0 (Z_0)$ bestimmt sich aus dem Konstruktionsviereck des betreffenden Punktes."

Anmerkung 31. Sind von mehreren Punkten $b, c \cdots$, s. Figur 102, die Projektionen auf E_4 herzustellen, so gehört zu jedem Punkte ein Konstruktionsviereck mit dem Winkel W_1 an der auf Y_0 liegenden Ecke. Bei einer Parallelverschiebung dieser Vierecke längs der Y_0-Achse nach einem beliebig auf letzterer Linie gewählten Punkt p, decken sich die den Winkel W_1 einschliessenden Seiten mit den Linien pq und pr.

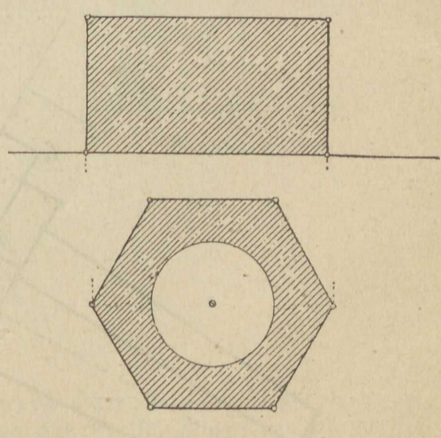
III. Die rechtwinklige Projektion von Körpern und deren Schnitte mit Ebenen und Geraden, Netzbestimmungen.

1) Ueber die rechtwinklige Projektion von Körpern im allgemeinen.

73) Unter der rechtwinkligen Projektion eines Körpers auf eine **Pr. Eb.** versteht man die Gesamtheit der Projektionen aller Punkte seiner Oberfläche. Da ein Körper stets einen von allen Seiten begrenzten Raum einschliesst, so wird auch seine Projektion auf eine **Pr. Eb.** stets ein begrenztes Stück der letzteren darstellen.

Die Begrenzung der Projektion eines Körpers teilt die **Pr. Eb.** in zwei Teile, deren einer nur Punkte enthält, die als Projektionen von Punkten der Körperoberfläche aufzufassen sind, während dies für den andern Teil der **Pr. Eb.** nicht der Fall ist. Die Begrenzungslinie der Projektion eines Körpers heisst sein scheinbarer Umriss oder seine scheinbare Contour und man unterscheidet einen ersten, zweiten $\cdots$ $n$ten scheinbaren Umriss, je nachdem die Begrenzung der ersten, zweiten $\cdots$ $n$ten Projektion des Körpers vorliegt. Den wirklichen Umriss erhält man durch Verbindung jener Punkte am Körper, welche die Projizierenden durch den scheinbaren Umriss mit dem Körper gemein haben.

Figur 103.



Je nach der Beschaffenheit der Oberfläche eines Körpers und je nach seiner Lage zu den **Pr. Ebn.** kann der scheinbare Umriss verschiedene Gestalt besitzen und entweder aus einem geschlossenen Linienzug oder aus mehreren solchen Linienzügen bestehen, ja es ist der Fall denkbar, dass der Umriss in der einen **Pr. Eb.** aus mehreren Linienzügen zusammengesetzt ist, während er in der anderen **Pr. Eb.** einen geschlossenen Linienzug bildet, wie dies z. B. bei dem in Figur 103 dargestellten Körper der Fall ist.

Ist der Körper von lauter ebenen Flächen begrenzt (Polyeder), so ist sein Umriss in jeder **Pr. Eb.** ein von Geraden begrenztes Vieleck.

Anmerkung 32. Die Schnittlinien der Begrenzungsflächen eines Körpers sollen stets als die Kanten des Körpers bezeichnet werden.

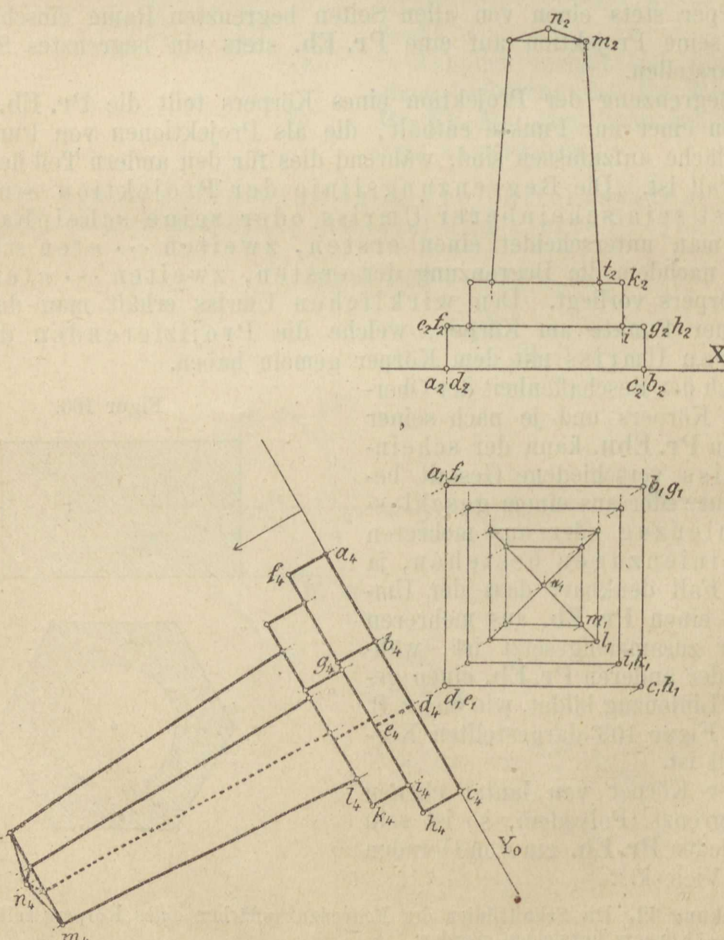
2) Ueber die Ermittelung der sichtbaren und unsichtbaren Kantenprojektionen eines Körpers.

74) Ist ein Körper durch seine Projektionen in der Projektionszeichnung dargestellt, so denkt man sich den Beschauer stets mit dem Körper auf der gleichen Seite der **Pr. Eb.**, aber in unendlicher Ferne von dieser befindlich. Die Sehrichtung ist also stets eine Projizierende zur bezüglichen **Pr. Eb.**

Ist der Körper aus einem bestimmten Materiale hergestellt gedacht, so wird nur ein Teil seiner Oberfläche dem Beschauer sichtbar erscheinen, ein anderer Teil wird verdeckt sein. Die Grenze des sichtbaren Teiles ist aber der Umriss des Körpers. In der Projektionszeichnung unterscheidet man die Projektion der sichtbaren Kanten des Körpers von jenen der unsichtbaren Kanten dadurch, dass man erstere mit ununterbrochenen, letztere mit unterbrochenen Strichen — — — zeichnet.

Schneidet nun eine Projizierende die Oberfläche eines Körpers in zweien Punkten, so wird stets der dem Auge näher befindliche Punkt dem Beschauer sichtbar, der andere aber unsichtbar sein.

Figur 104.



3) Beispiele über die rechtwinkligen Projektionen einiger Körper.

75) **Aufgabe 19.** In Figur 104 ist ein Körper durch Grund- und Aufriss dargestellt. Man soll denselben in eine zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehende vierte **Pr. Eb.** projizieren.

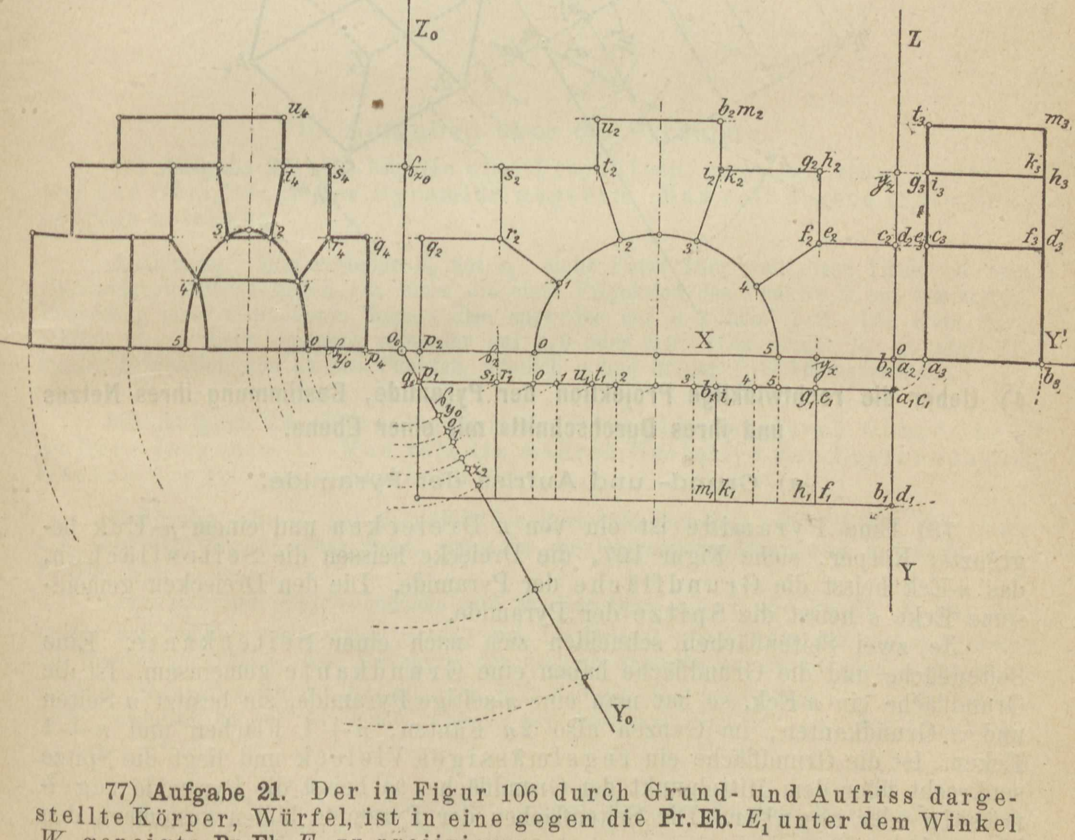
Auflösung. Ist Y_0 die neue Projektionsachse, so ziehe man von den ersten Projektionen der Körperecken Senkrechte zur Y_0-Achse und mache die Abstände der vierten Projektionen von der Y_0-Achse, gleich den Entfernungen der zweiten Projektionen von der X-Achse.

76) **Aufgabe 20.** In Figur 105 ist ein Mauerbogen durch Grund- und und Aufriss dargestellt. Man soll Körper in die **Pr. Eb.** E_3, sowie in eine zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehende Ebene E_4 projizieren.

Auflösung. Die dritten Projektionen der Eckpunkte liegen in gleicher Höhe mit ihren bezüglichen zweiten Projektionen und haben von der Z-Achse Abstände gleich jenen der ersten Projektionen von der X-Achse.

Bezüglich der vierten Projektionen bleibt die Konstruktion dieselbe, wie in der vorhergehenden Aufgabe, nur ist die **Pr. Eb.** im vorliegenden Falle um die Z-Achse gedreht und in die **Pr. Eb.** E_2 umgelegt worden.

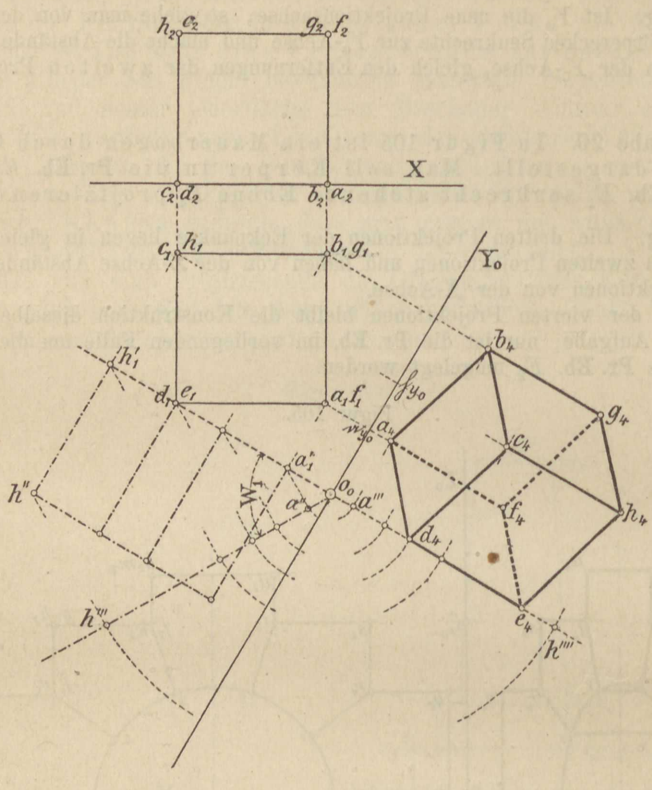
Figur 105.



77) **Aufgabe 21.** Der in Figur 106 durch Grund- und Aufriss dargestellte Körper, Würfel, ist in eine gegen die **Pr. Eb.** E_1 unter dem Winkel W_1 geneigte **Pr. Eb.** E_4 zu projizieren.

Auflösung. Ist Y_0 die neue Projektionsachse, so konstruiere man zu jedem Punkte sein Konstruktionsviereck, siehe 72), und mache die Entfernungen der vierten Projektionen von Y_0 gleich den entsprechenden Seiten der Konstruktionsvierecke. Für den Punkt h z. B. ist $\overline{o_0 h'''} = \overline{o_0 h''''} = \overline{\mathfrak{h}_{y0} h_4}$ u. s. w.

Figur 106.



4) Ueber die rechtwinklige Projektion der Pyramide, Bestimmung ihres Netzes und ihres Durchschnitts mit einer Ebene.

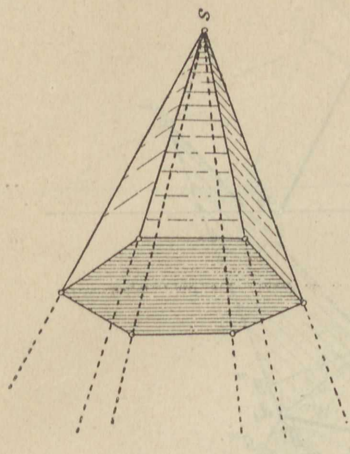
a) Grund- und Aufriss der Pyramide.

78) Eine Pyramide ist ein von n Dreiecken und einem n-Eck begrenzter Körper, siehe Figur 107, die Dreiecke heissen die Seitenflächen, das n-Eck heisst die Grundfläche der Pyramide. Die den Dreiecken gemeinsame Ecke s heisst die Spitze der Pyramide.

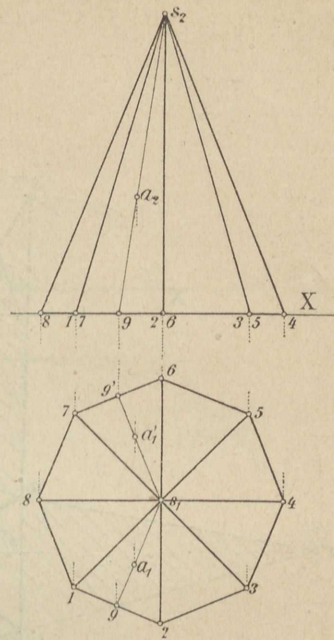
Je zwei Seitenflächen schneiden sich nach einer Seitenkante. Eine Seitenfläche und die Grundfläche haben eine Grundkante gemeinsam. Ist die Grundfläche ein n-Eck, so hat man eine n-seitige Pyramide, sie besitzt n Seiten und n Grundkanten, im Ganzen also $2n$ Kanten, $n+1$ Flächen und $n+1$ Ecken. Ist die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck und liegt die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche, so heisst die Pyramide regelmässig oder regulär. Die Seitenflächen der Pyramide bilden zusammen den Mantel der Pyramide.

In Figur 108 ist eine regelmässige achtseitige Pyramide im Grund- und Aufrisse gezeichnet.

Figur 107.



Figur 108.



b) Aufgaben über die Pyramide.

79) **Aufgabe 22.** Es ist die eine Projektion, etwa a_2, eines Punktes auf der Oberfläche der Pyramide gegeben. Man soll dessen erste Projektion zeichnen.

Auflösung. Man verbinde a_2 mit s_2, siehe Figur 108; soll diese Linie auf der Pyramidenoberfläche liegen, so muss die erste Projektion des Punktes 9 auf der ersten Projektion einer Grundkante liegen; also entweder auf $6 \cdot 7$ oder $1 \cdot 2$. Die erste Projektion von a liegt demnach entweder auf $s_1 9$ oder $s_1 9'$. Der Punkt a_2 ist also die zweite Projektion von zweien Punkten, nämlich a und a' der Pyramidenoberfläche.

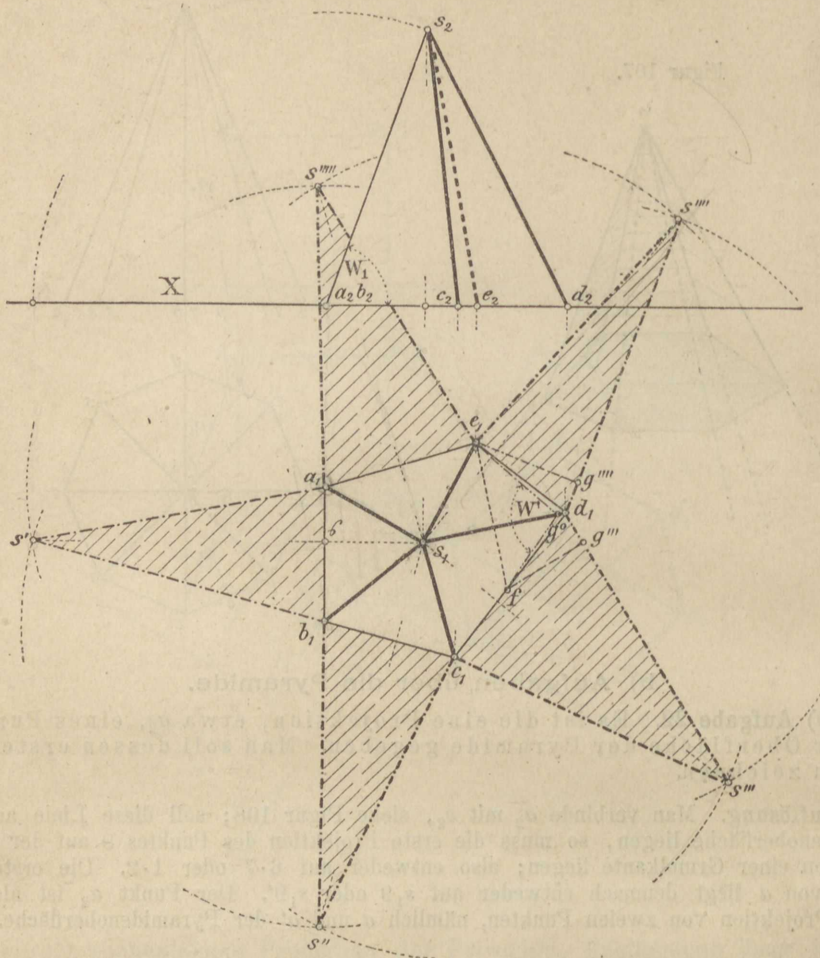
80) **Aufgabe 23.** Eine fünfseitige Pyramide ist durch Grund- und Aufriss dargestellt. Man soll die wahren Gestalten der Begrenzungsflächen der Pyramide zeichnen.

Auflösung. Es ist der Grundriss der Pyramide so gelegt, siehe Figur 109, dass $a_1 b_1$ senkrecht zur X-Achse steht, dann ist die Begrenzungsfläche sab senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2.

Legt man nun die Seitenfläche sab um ihre Spur $a_1 b_1$ in die **Pr. Eb.** E_1 um, so kommt der Punkt s nach s' ($\overline{s_1 s'} = \overline{a s_2}$) und das Dreieck $s' a_1 b_1$ gibt die wahre Gestalt der Begrenzungsfläche. Die Umlegung der übrigen Seitenflächen erhält man, indem man durch s_1 Senkrechte zu den Grundkanten fällt und berücksichtigt, dass $\overline{b_1 s'} = \overline{b_1 s''}$ sein muss. Dadurch ist s'' bestimmt. Desgleichen bestimmt sich s''' aus der Gleichheit $\overline{c_1 s''} = \overline{c_1 s'''}$ u. s. w.

Anmerkung 33. Durch die schraffierten Dreiecksflächen, einschliesslich der Grundfläche sind die wahren Gestalten sämtlicher Begrenzungsflächen der Pyramide gezeichnet, sie bilden zusammen das Netz der Pyramide. Schneidet man die Papierfläche nach dem Umrisse des Netzes durch und dreht die Dreiecksflächen um die Grundkanten, bis sie sich im Raume begegnen, so erhält man hierdurch ein Modell der durch die Projektionszeichnung bestimmten Pyramide.

Figur 109.



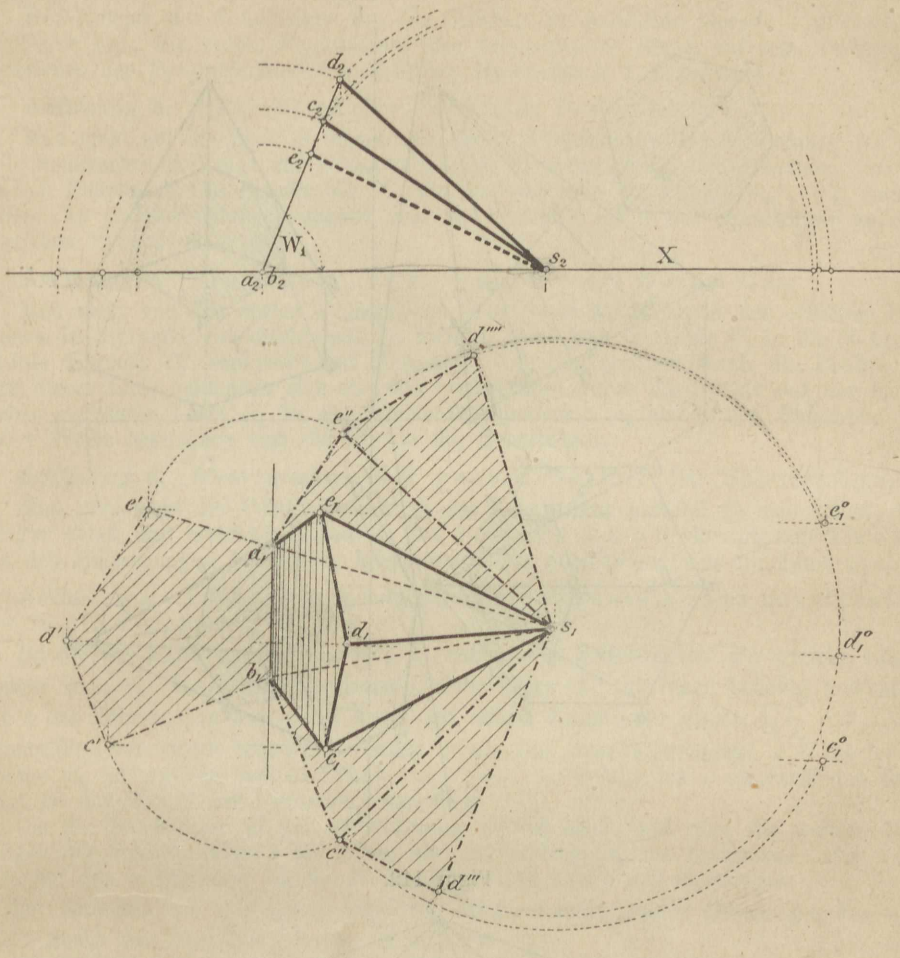
81) **Aufgabe 24.** Eine Pyramide ist durch Grund- und Aufriss dargestellt, so dass eine Seitenfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, siehe Figur 103. Man soll das Netz der Pyramide zeichnen.

Auflösung. Der Einfachheit wegen ist wieder die Grundkante $a_1 b_1$, s. Figur 110, senkrecht zur X-Achse gestellt. Dann kann man die Punkte e_1, c_1, d_1 und s_1, desgleichen den Winkel W_1 beliebig wählen, wodurch die Projektionen der Pyramide bestimmt sind.

Zur Ermittelung des Netzes legt man zunächst die Grundfläche um die Kante $a_1 b_1$ in die **Pr. Eb.** E_1 um und erhält hierdurch das Fünfeck $a_1 b_1 c' d' e'$. Die wahren Gestalten der Seitenflächen ergeben sich durch Bestimmung der wahren Längen $\overline{s_1 c_1{}^0}$, $\overline{s_1 d_1{}^0}$ und $\overline{s_1 e_1{}^0}$ der Seitenkanten $\overline{sc}$, $\overline{sd}$ und $\overline{se}$ durch Drehung ihrer vertikal projizierenden Ebenen in die **Pr. Eb.** E_1, (siehe 34a). Macht man nun $\overline{s_1 e''} = \overline{s_1 e_1{}^0}$, $\overline{s_1 c''} = \overline{s_1 c_1{}^0}$, $\overline{s_1 d'''} = \overline{s_1 d''''} = \overline{s_1 d_1{}^0}$ endlich $\overline{a_1 e''} = \overline{a_1 e'}$, $\overline{e'' d''''} = \overline{e' d'}$, $\overline{b_1 c''} = \overline{b_1 c'}$ und $\overline{c'' d'''} = \overline{c' d'}$, so ist hierdurch wieder das Netz der Pyramide gezeichnet.

82) **Aufgabe 25.** Eine regelmässige sechsseitige Pyramide, deren Grundfläche gegen die **Pr. Eb.** E_1 geneigt ist, zur **Pr. Eb.** E_2 aber senkrecht steht, ist im Grund- und Aufriss darzustellen.

Figur 110.



Man soll ausserdem

a) die Pyramide durch eine zur Ebene E_2 senkrechte Ebene schneiden,

b) die Pyramide samt der Schnittfigur in eine horizontal projizierende Ebene S_1,

c) in eine vertikal projizierende Ebene T_2 projizieren,

d) die wahre Gestalt der Schnittfigur bestimmen,

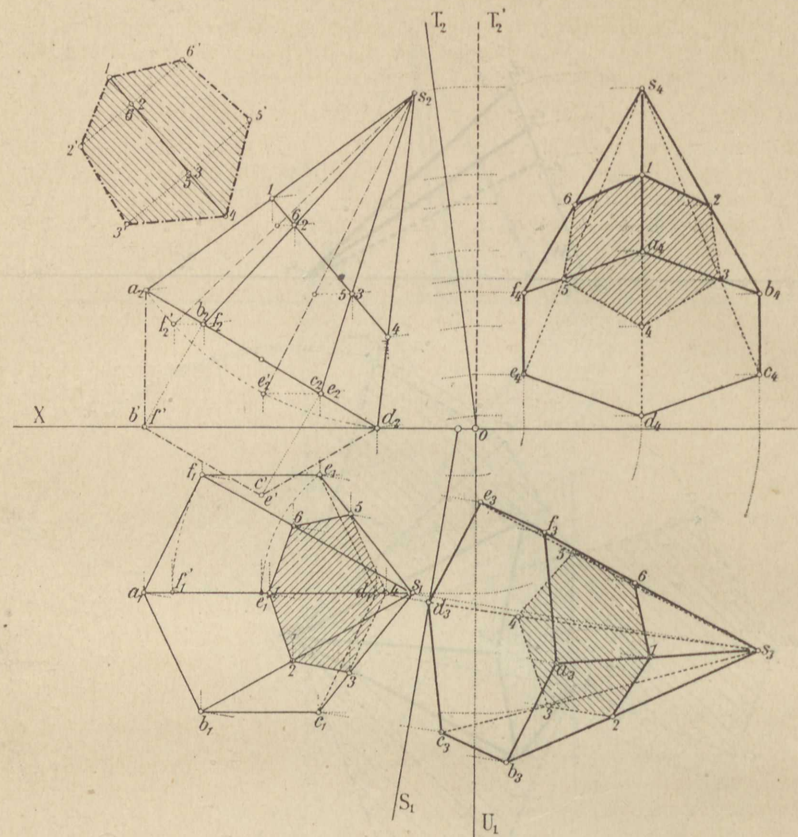
e) den Mantel der Pyramide samt der Schnittfigur in eine Ebene ausbreiten.

Auflösung. Bestimmung des Grund- und Aufrisses.

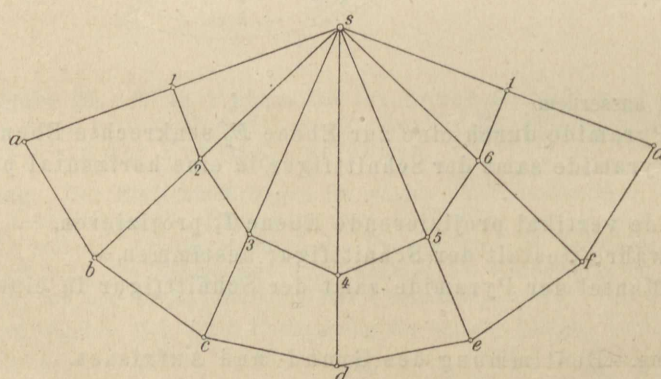
Zeichne, siehe Figur 111, das gleichschenklige Dreieck $a_2 d_2 s_2$, so dass $a_2 d_2$ unter einem beliebigen Winkel gegen die X-Achse geneigt ist und beschreibe über $a_2 d_2$ das halbe Sechseck $a_2 b' c' d_2$ projiziere die Punkte b' und c' auf $a_2 d_2$ nach b_2 und c_2, so ist, wenn die Verbindungslinien $b_2 s_2$ und $c_2 s_2$ gezogen werden, der Aufriss der Pyramide gezeichnet.

Die ersten Projektionen der Punkte a, d und s liegen auf einer Parallelen zur X-Achse in beliebiger Entfernung von letzterer. Die Projektionen der übrigen Ecken

Figur 111.



Figur 112.



der Grundfläche haben von der Linie $s_1 a_1$ Entfernungen gleich den Strecken $\overline{b' b_2}$ und $\overline{c' c_2}$. Die Verbindungslinien der Punkte a_1 bis f_1 mit s_1 geben die ersten Projektionen der Seitenkanten.

Anmerkung 34. Im Aufrisse decken sich die Projektionen der Seitenkanten bs und fs, ebenso cs und es.

Auflösung a. Bestimmung des Schnittes einer vertikal projizierenden Ebene mit der Pyramide.

Der Aufriss der Schnittfigur ist die beliebig zu wählende Gerade 1·2·3·4·5 6, siehe Figur 111, die ersten Projektionen der Schnittpunkte liegen auf den bezüglichen Projektionen der Pyramidenkanten und bilden das Sechseck 1·2·3·4·5·6.

Auflösung b. Projektion der Pyramide in der Ebene S_1.

Man zieht auf die Spur S_1 durch die ersten Projektionen der Eckpunkte der Pyramide Senkrechte und trägt auf diesen von S_1 aus Strecken gleich den Abständen der bezüglichen Eckpunkte von der **Pr. Eb.** E_1 ab, wodurch sich die Punkte $a_3, \cdots f_3$ und s_3 ergeben. In gleicher Weise projiziert man die Punkte 1 bis 6 der Schnittfigur auf die bezüglichen Pyramidenkanten.

Auflösung c. Projektion der Pyramide in die Ebene $T_2 U_1$.

Man zieht von den ersten Projektionen Senkrechte auf U_1. von den zweiten Projektionen der Pyramide Senkrechte auf T_2, hierauf dreht man die Linie U_1 in die X-Achse, die Linie T_2 nach T_2' senkrecht zur X-Achse. Die Senkrechten durch die Punkte auf T_2' zu dieser Linie schneiden sich mit den Senkrechten durch die Punkte auf der in die X-Achse gedrehten Linie U_1 in den vierten Projektionen a_4 bis s_4 der Pyramide. In gleicher Weise bestimmen sich die Punkte der Schnittfigur.

Auflösung d. Bestimmung der wahren Gestalt der Schnittfigur.

Man verschiebt die Vertikalprojektion der Schnittfigur parallel zu sich selbst, wie die Figur zeigt, und errichtet hierauf in den Punkten 2·6·3·5 Senkrechte zur Linie 1·4 gleich den Entfernungen der ersten Projektionen der Schnittfigur von der Linie $a_1 s_1$.

Auflösung e. Ausbreitung des Pyramidenmantels samt der Schnittfigur in die Zeichnungsebene.

Da die Pyramide regelmässig ist, so haben alle Seitenkanten die gleiche Länge und zwar $= \overline{a_2 d_2}$. Man beschreibe deshalb, siehe Figur 112, um einen beliebig gewählten Punkt s der Zeichnungsebene einen Kreis mit einem Halbmesser gleich $\overline{a_2 s_2}$ und trage auf demselben von einem beliebigen Punkte a aus die Grundkantenlänge $\overline{a_2 b'}$ sechsmal als Sehne ab, so ergeben sich die Punkte $a, f, e \cdots a$, welche mit s zu verbinden sind. Hiermit ist der Mantel der Pyramide gezeichnet.

Um die Schnittfigur in der Abwickelung zu zeichnen, hat man die wahren Entfernungen der Schnittpunkte 1 bis 6 von der Pyramidenspitze zu bestimmen, und diese Längen auf den bezüglichen Kanten in der Figur 112 von s aus abzutragen.

Die Strecken $\overline{s_2 1}$ und $\overline{s_2 4}$ in Figur 111 sind schon in wahrer Grösse gegeben und demnach gleich den Strecken $\overline{s 1}$ und $\overline{s 4}$ in Figur 112.

Die übrigen Entfernungen ergeben sich durch Drehung der Seitenkanten sf und se bis zum Parallelismus mit der **Pr. Eb.** E_2, die Vertikalprojektionen der gedrehten Kanten sind dann $s_2 f_2'$ und $s_2 e_2'$. Die Parallelen durch die Punkte 2·6 und 3·5 zur X-Achse schneiden auf den genannten Linien Punkte aus, welche von s_2 um die wahren Längen der Strecken $\overline{s2}$, $\overline{s6}$. $\overline{s3}$, $\overline{s5}$ entfernt sind.

83) **Aufgabe 26.** Eine unregelmässige fünfseitige Pyramide ist durch Grund- und Aufriss darzustellen.

Man soll ausserdem

a) die Pyramide durch eine gegen die beiden **Pr. Ebn.** beliebig geneigte Ebene schneiden,

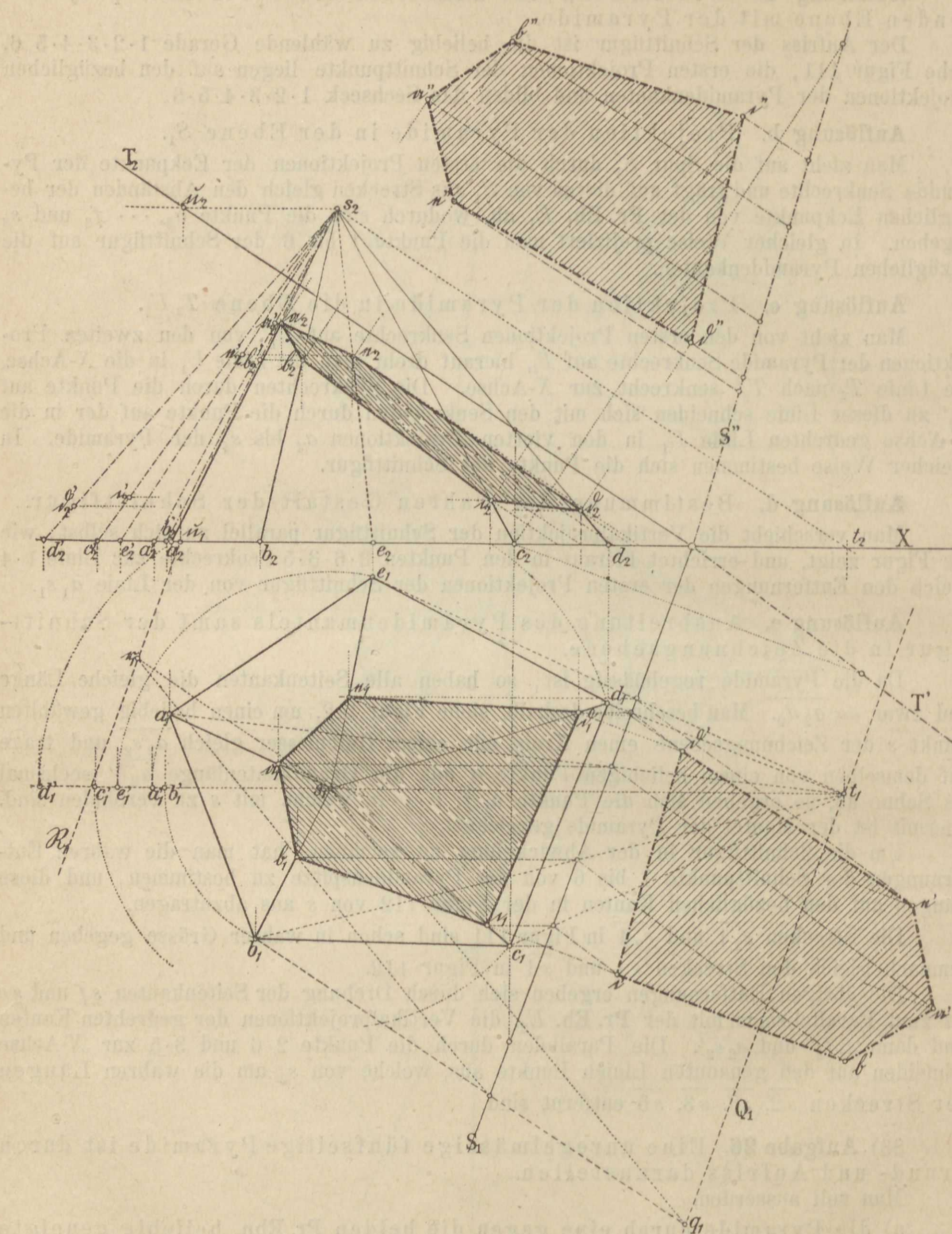
b) die wahre Gestalt der Schnittfigur zeichnen,

c) den Mantel der Pyramide samt der Schnittfigur in die Zeichnungsebene ausbreiten.

Auflösung. Bestimmung des Grund- und Aufrisses der Pyramide.

Man nehme das Fünfeck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$, siehe Figur 113, beliebig an, desgleichen den Punkt s_1. Die zweiten Projektionen der Eckpunkte a bis e liegen in der X-Achse, die des Punktes s in einem beliebig zu wählenden Abstande von der X-Achse.

Figur 113.



Auflösung a. Bestimmung des Schnittes einer Ebene $S_1 T_2$ mit der Pyramide.

Zur Ermittelung der Schnittlinie einer gegen die **Pr. Eb.** beliebig geneigten Ebene und einem Körper hat man nur nachzusehen, wo die einzelnen Körperkanten die Ebene treffen, also die unter 47) bis 49) aufgeführte Aufgabe wiederholt zu lösen. Im vorliegenden Falle zieht man zweckmässig durch die Pyramidenspitze s eine Gerade parallel zur zweiten Spur T der Ebene und bestimmt ihre erste Spur t_1. Die Verbindungslinien des Punktes t_1 mit den Ecken a_1 bis e_1 stellen nun die ersten Spuren von Ebenen dar, welche die

Gerade st, sowie überdies je eine der Pyramidenseitenkanten enthalten, diese Ebenen schneiden die Ebene $S_1 T_2$ nach Geraden parallel zu T; die ersten Projektionen gehen durch die Schnittpunkte von S_1 mit den genannten Verbindungslinien $t_1 a_1$ bis $t_1 e_1$ und liefern auf den ersten Projektionen der Seitenkanten die Eckpunkte $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{e}_1$ der Schnittfigur. Die zweiten Projektionen $\mathfrak{a}_2$ bis $\mathfrak{e}_2$ erhält man entweder direkt durch Hinaufprojizieren oder indem man die Punkte auf S_1 auf die X-Achse projiziert und durch letztere Punkte Parallele zu T_2 zieht.

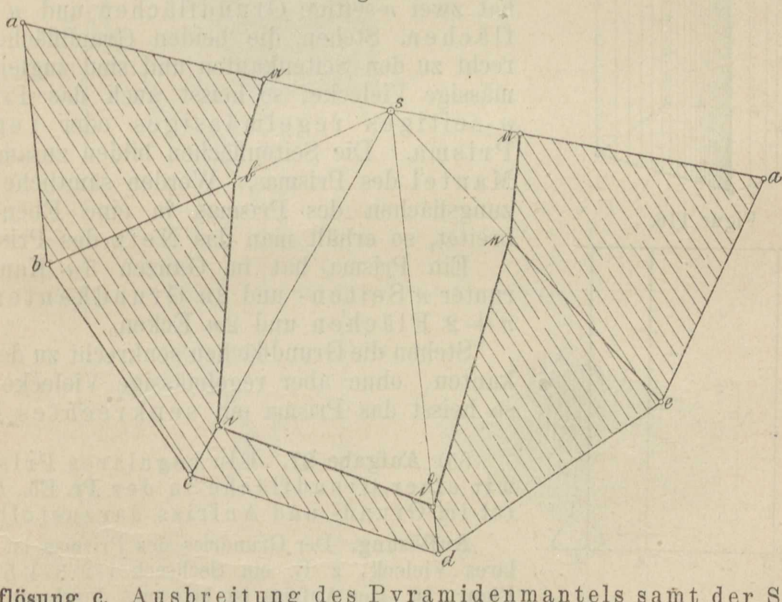
Anmerkung 35. Zieht man durch t_1 eine Parallele Q_1 zu S_1, so stellt diese Linie die erste Spur einer die Pyramidenspitze s enthaltenden Parallelebene zur gegebenen Ebene vor; ein beliebig auf Q_1 gewählter Punkt q_1 kann aufgefasst werden als die erste Spur einer Geraden sq der Ebene sQ. Verbindet man nun q_1 mit den Ecken a_1 bis e_1 und zieht durch die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit S_1 Parallele zu $s_1 q_1$, so enthalten diese gleichfalls die Schnittpunkte $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{e}_1$.

Man kann aber noch auf eine weitere Art die Schnittfigur konstruieren. Legt man nämlich durch die Pyramidenspitze s eine Parallelebene zur **Pr. Eb.** E_1, so schneidet diese die gegebene Ebene $S_1 T_2$ nach einer Geraden $\mathfrak{R}$, deren erste Projektion $\mathfrak{R}_1$ parallel zu S_1 läuft. Wählt man nun auf $\mathfrak{R}_1$ einen Punkt $\mathfrak{r}_1$ beliebig, so erhält man die Schnittpunkte $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{e}_1$, wenn man $\mathfrak{r}_1$ mit s_1 verbindet, durch die Ecken a_1 bis e_1 zur Linie $s_1 \mathfrak{r}_1$ Parallele zieht und die Schnittpunkte der letzteren auf S_1 mit $\mathfrak{r}_1$ verbindet. Die Verbindungslinien treffen die ersten Projektionen der Seitenkanten der Pyramide in den Punkten $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{e}_1$.

Auflösung b. Bestimmung der wahren Gestalt der Schnittfigur.

Man erhält dieselbe durch Umlegung der Ebene $S_1 T_2$ entweder um S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 oder um T_2 in die **Pr. Eb.** E_2; in der Figur 113 sind beide Umlegungen durchgeführt, siehe 56), 60) und Anmerkung 36.

Figur 114.



Auflösung c. Ausbreitung des Pyramidenmantels samt der Schnittfigur in die Zeichnungsebene.

Man bestimmt zunächst die wahren Längen $\overline{a_2' s_2}$, $\overline{b_2' s_2}$, $\overline{c_2' s_2}$, $\overline{d_2' s_2}$ und $\overline{e_2' s_2}$ der Pyramidenseitenkanten und auf diesen auch die Punkte der Schnittfigur und macht nun, siehe Figur 114, die Längen $\overline{sa}$, $\overline{sb}$, $\overline{sc}$, $\overline{sd}$, $\overline{se}$ gleich diesen wahren Längen, desgleichen die Längen $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ und $\overline{ea}$ gleich den wahren Längen $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{b_1 c_1}$, $\overline{c_1 d_1}$, $\overline{d_1 e_1}$ und $\overline{e_1 a_1}$ der Grundkanten. Nunmehr kann man auch die Längen $\overline{s\mathfrak{a}}$, $\overline{s\mathfrak{b}}$ $\cdots$ gleich den entsprechenden Längen $\overline{s_2 \mathfrak{a}_2'}$, $\overline{s_2 \mathfrak{b}_2'}$ $\cdots$, siehe Figur 113, abtragen. Der schraffierte Teil der Figur 114 stellt den Mantel der abgestumpften Pyramide dar.

Anmerkung 36. Die Figuren $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ und $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1 \mathfrak{e}_1$ in Figur 113 stehen in einem gewissen geometrischen Zusammenhange; es entsprechen nämlich die Punkte a_1, $b_1 \cdots$ den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1 \cdots$ derart, dass die Verbindungslinien $a_1 \mathfrak{a}_1$, $b_1 \mathfrak{b}_1 \cdots$ durch denselben Punkt s_1 gehen; desgleichen entsprechen die Geraden $a_1 b_1 \cdots$ und $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ einander derart, dass je zwei solche entsprechende Gerade sich auf der Linie S_1 schneiden. Man nennt diesen Zusammenhang „centrische Collineation“ und die Figuren selbst „centrisch-collineare Figuren“. Der Punkt s_1, in welchem sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden, heisst das Collineationscentrum, die Gerade S_1, auf welcher sich die Verbindungslinien entsprechender Geraden schneiden, heisst die Collineationsachse.

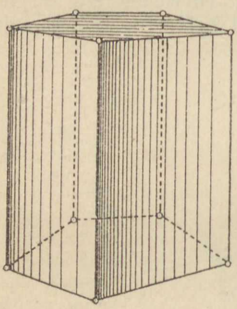
Es lässt sich die „centrisch-collineare Verwandtschaft“ der Figuren insoferne konstruktiv verwerten, als man die eine Figur direkt aus der anderen konstruieren kann, sobald die eine Figur, etwa $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$, gegeben vorliegt, von der anderen aber ein Punkt, etwa $\mathfrak{b}_1$, und ausserdem das Centrum und die Achse der Collineation bekannt sind; denn verlängert man $b_1 c_1$ bis zum Schnittpunkt mit S_1, so geht durch diesen Punkt die Linie $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1$ u. s. w.

5) Ueber die rechtwinklige Projektion des Prismas, Bestimmung seines Netzes und seines Durchschnittes mit einer Ebene.

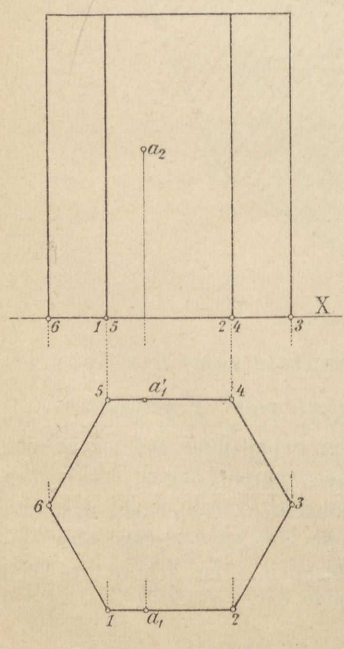
a) Grund- und Aufriss des Prismas.

84) Rückt bei einer Pyramide die Spitze in unendliche Ferne, so werden die Seitenkanten alle zu einander parallel und man erhält eine Anzahl von ebenen Begrenzungsflächen, die sämtlich parallel sind zu einer bestimmten Richtung. Schneidet man diese Ebenen noch durch eine weitere zu dieser Richtung nicht parallele Ebene, so erhält man einen Körper, siehe Fig. 115, der Prisma heisst. Ein Prisma hat zwei n-seitige Grundflächen und n Seitenflächen. Stehen die beiden Grundflächen senkrecht zu den Seitenkanten und sind zugleich regelmässige Vielecke, so heisst auch das Prisma ein n-seitiges regelmässiges oder reguläres Prisma. Die Seitenflächen bilden zusammen den Mantel des Prismas. Werden sämtliche Begrenzungsflächen des Prismas in eine Ebene ausgebreitet, so erhält man das Netz des Prismas.

Figur 115.



Figur 116.



Ein Prisma hat im Ganzen $3n$ Kanten, darunter n Seiten- und $2n$ Grundkanten, ferner $n+2$ Flächen und $2n$ Ecken.

Stehen die Grundflächen senkrecht zu den Seitenkanten, ohne aber regelmässige Vielecke zu sein, so heisst das Prisma ein senkrechtes Prisma.

85) **Aufgabe 27.** Ein reguläres Prisma, das mit einer Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, ist im Grund- und Aufriss darzustellen.

Auflösung. Der Grundriss des Prismas ist ein reguläres Vieleck, z. B. ein Sechseck $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, siehe Figur 116. Der Aufriss ist begrenzt durch ein Rechteck.

Aufgabe 28. Ein reguläres Prisma ist durch Grund- und Aufriss dargestellt, siehe Fig. 116. Man soll die Projektionen eines auf dem Prismenmantel liegenden Punktes zeichnen.

Auflösung. Soll auf der Prismenmantelfläche ein Punkt gewählt werden, so kann man auf oder innerhalb des zweiten scheinbaren Umrisses des Prismas einen Punkt, z. B. a_2, beliebig annehmen, siehe Figur 116. Die erste Projektion muss aber auf dem scheinbaren ersten Umriss liegen, also mit a_1 oder a_1' zusammenfallen. Der Punkt a_2 stellt die zweite Projektion von zweien Punkten des Prismenmantels dar, der eine Punkt a liegt in der Seitenfläche 1·2, der andere a' in der Seitenfläche 4·5.

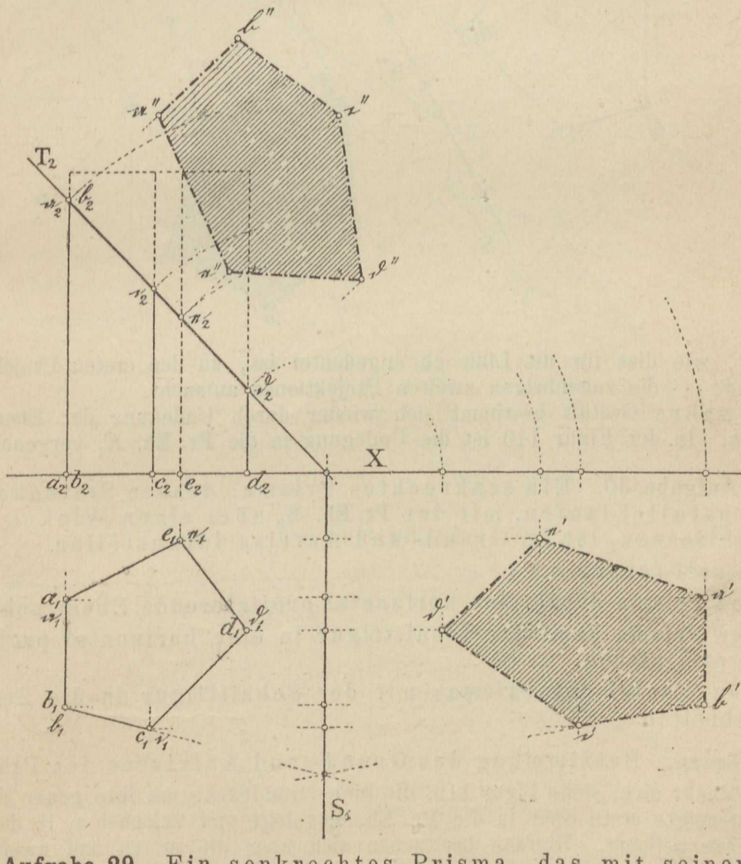
b) Aufgaben über das Prisma.

86) **Aufgabe 28a.** Ein senkrechtes Prisma, das mit seiner Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, soll durch eine vertikal projizierende Ebene geschnitten, und ausserdem die wahre Gestalt der Schnittfigur bestimmt werden.

Auflösung. Die Projektionen der Schnittfigur sind schon gezeichnet, s. Figur 117, denn die zweite Projektion fällt mit T_2, die erste mit dem scheinbaren ersten Umriss zusammen.

Zur Bestimmung der wahren Gestalt der Schnittfigur lege man die Ebene ST entweder um T_2 in die **Pr. Eb.** E_2, oder um S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 um. Die schraffierten Flächen geben die wahre Gestalt der Schnittfigur an, siehe auch Aufgabe 15.

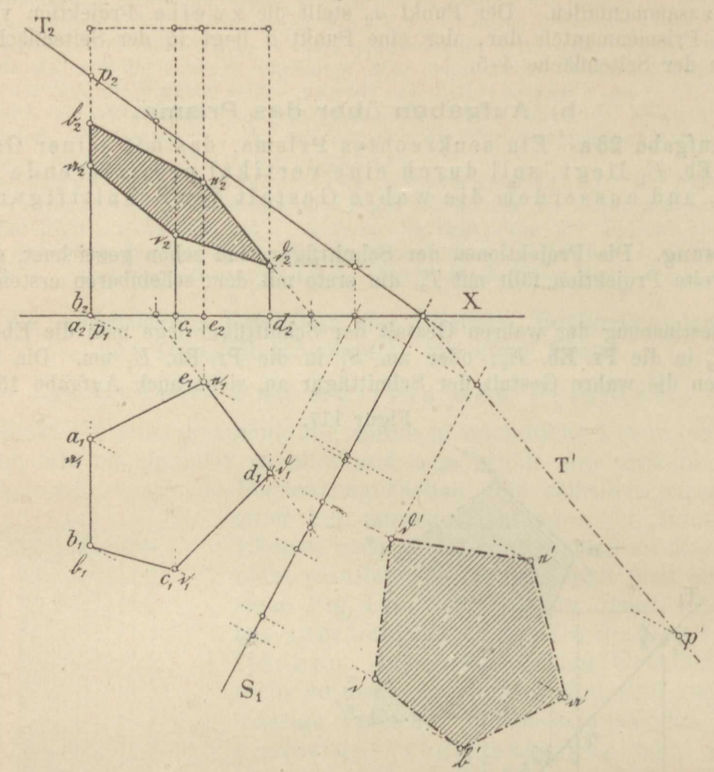
Figur 117.



87) **Aufgabe 29.** Ein senkrechtes Prisma, das mit seiner Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, soll durch eine gegen die **Pr. Eb.** beliebig geneigte Ebene S_1T_2 geschnitten und die wahre Gestalt der Schnittfigur bestimmt werden.

Auflösung. Die erste Projektion der Schnittfigur ist schon gezeichnet; sie deckt sich mit dem scheinbaren ersten Umriss des Prismas, siehe Figur 118, die zweite Projektion findet sich mit Zuhilfenahme von Spurparallelen der Ebene S_1T_2, oder indem

Figur 118.



man direkt, wie dies für die Linie e𝔡 angedeutet ist, zu den ersten Projektionen der Seiten e𝔡, 𝔟𝔠 ⋯ die zugehörigen zweiten Projektionen aufsucht.

Die wahre Gestalt bestimmt sich wieder durch Umlegung der Ebene $S_1 T_2$ in die **Pr. Ebn.** In der Figur 110 ist die Umlegung in die **Pr. Eb.** E_1 vorgenommen.

88) **Aufgabe 30.** Ein senkrechtes Prisma, dessen Seitenkanten zur **Pr. Eb.** E_1 parallel laufen, mit der **Pr. Eb.** E_2 aber einen Winkel von, z. B. 30^0, einschliessen, ist im Grund- und Aufriss darzustellen.

Man soll ferner

a) das Prisma durch eine horizontal projizierende Ebene schneiden,

b) das Prisma samt der Schnittfigur in eine horizontal projizierende Ebene X' projizieren,

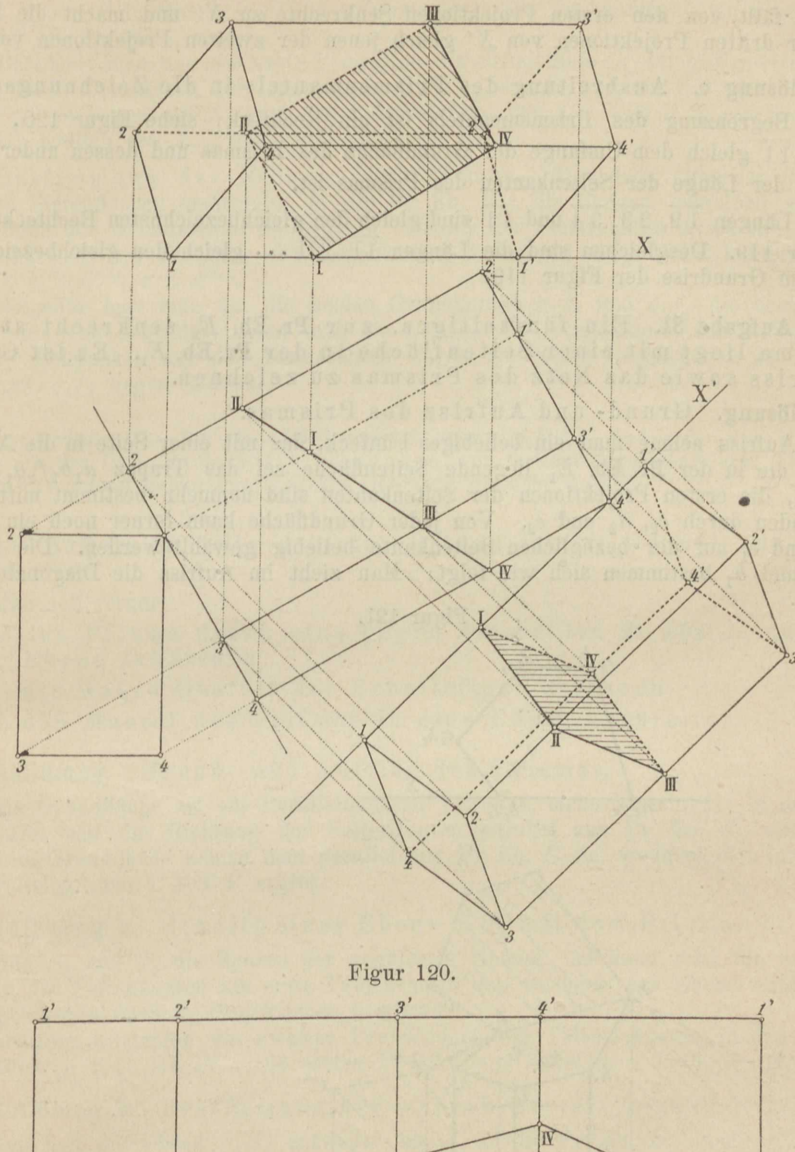
c) den Mantel des Prismas mit der Schnittfigur in die Zeichnungsebene ausbreiten.

Auflösung. Bestimmung des Grund- und Aufrisses des Prismas.

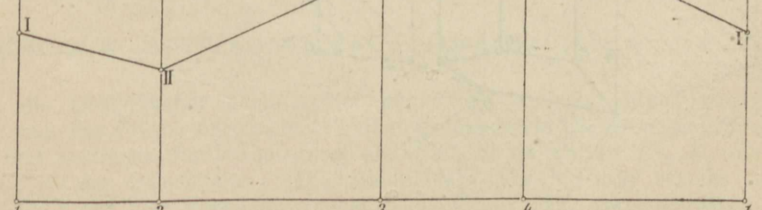
Man denkt sich, siehe Figur 119, die eine Grundfläche um ihre gegen die X-Achse unter 60^0 geneigte erste Spur in die **Pr. Eb.** umgelegt und zeichnet z. B. das Rechteck 1, 4, 3, 2 ganz beliebig. Hieraus bestimmen sich aber die ersten und zweiten Projektionen 1, 2, 3, 4 der Eckpunkte der Grundfläche, da die Entfernungen der zweiten Projektionen von der X-Achse gleich sind den Entfernungen der umgelegten Punkte 1, 2, 3, 4 von der ersten Projektion der Grundfläche. Die zweite Grundfläche ist parallel zur ersten und es kann die Strecke $\overline{1\,1'}$ beliebig lang gemacht werden.

Auflösung a. Bestimmung des Schnittes einer horizontal projizierenden Ebene mit dem Prisma.

Figur 119.



Figur 120.



Man wählt die erste Spur der Ebene beliebig und projiziert die Schnittpunkte I, II ... auf die zugehörigen zweiten Projektionen der Prismenkanten.

Auflösung b. Projektion des Prismas in die Ebene X'.

Man fällt von den ersten Projektionen Senkrechte zu X' und macht die Entfernungen der dritten Projektionen von X' gleich jenen der zweiten Projektionen von X.

Auflösung c. Ausbreitung des Prismenmantels in die Zeichnungsebene.

Die Begrenzung des Prismenmantels ist ein Rechteck, siehe Figur 120, dessen eine Seite $\overline{1\,1}$ gleich dem Umfange der Grundfläche des Prismas und dessen andere Seite $\overline{1\,1'}$ gleich der Länge der Seitenkanten des Prismas ist.

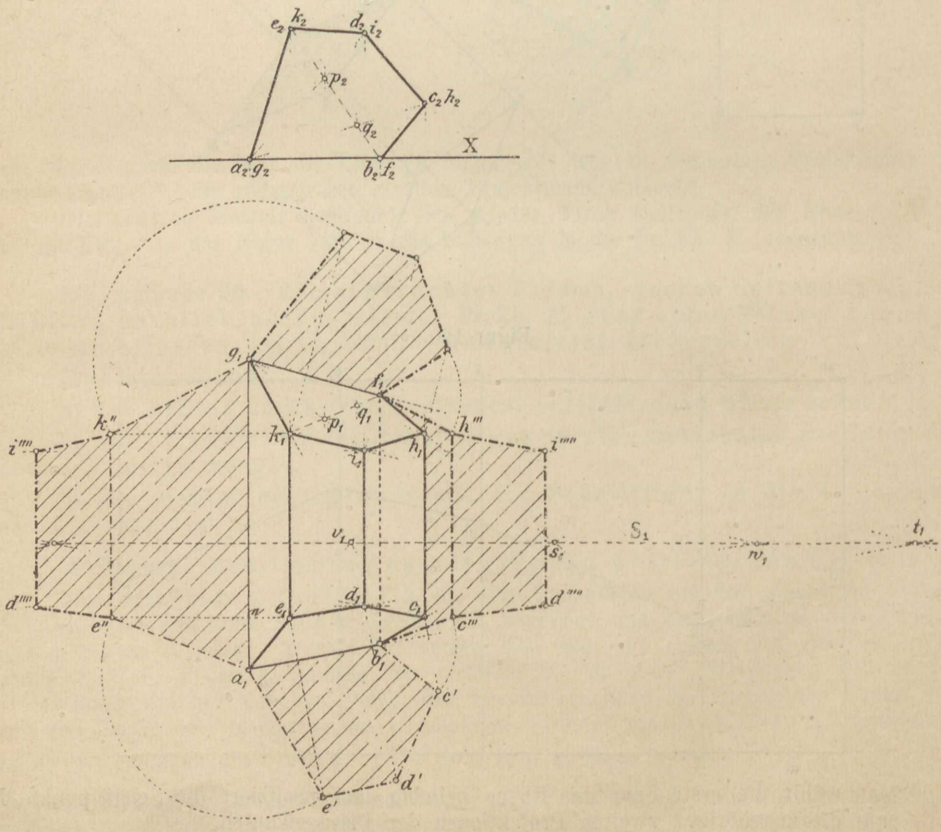
Die Längen $\overline{1\,2}$, $\overline{2\,3}$, $\overline{3\,4}$ und $\overline{4\,1}$ sind gleich den gleichbezeichneten Rechtecksseiten, siehe Figur 119. Desgleichen sind die Längen $\overline{1\mathrm{I}}$, $\overline{2\mathrm{II}}$ ··· gleich den gleichbezeichneten Strecken im Grundriss der Figur 119.

89) **Aufgabe 31.** Ein fünfseitiges, zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehendes Prisma liegt mit einer Seitenfläche in der **Pr. Eb.** E_1. Es ist Grund- und Aufriss sowie das Netz des Prismas zu zeichnen.

Auflösung. Grund- und Aufriss des Prismas.

Als Aufriss nehme man ein beliebiges Fünfeck, das mit einer Seite in die X-Achse fällt, an; die in der **Pr. Eb.** E_1 liegende Seitenfläche sei das Trapez $a_1 b_1 f_1 g_1$, siehe Figur 121, die ersten Projektionen der Seitenkanten sind nunmehr bestimmt mittels der Projizierenden durch c_2, d_2 und e_2. Von jeder Grundfläche kann ferner noch ein Punkt, etwa k_1 und e_1 auf der bezüglichen Seitenkante beliebig gewählt werden. Die übrigen Ecken i_1 und h_1 bestimmen sich wie folgt: Man zieht im Aufriss die Diagonalen $k_2 f_2$,

Figur 121.



$\overline{g_2 i_2}$ und $g_2 h_2$; im Grundriss kann man $k_1 f_1$ zeichnen und hierauf die ersten Projektionen p_1 und q_1 der Schnittpunkte p und q bestimmen; die Verbindungslinien $g_1 p_1$ und $g_1 q_1$ enthalten die Punkte i_1 und h_1.

Bestimmt man nun die erste Projektion der Schnittlinie S_1 der beiden Grundflächenebenen durch Verlängern der Linien $g_1 k_1$ und $a_1 e_1$, ebenso $g_1 f_1$ und $a_1 b_1$ bis zum Schnitt v_1 und t_1, so liegen auf S_1 auch die Schnittpunkte von $f_1 h_1$ und $b_1 c_1$, ebenso von $h_1 i_1$ und $c_1 d_1$, endlich von $k_1 i_1$ und $e_1 d_1$.

Bestimmung des Netzes des Prismas. Man legt zunächst die trapezförmigen Seitenflächen aneinander in die **Pr. Eb.** E_1; die Breiten derselben sind gleich den Längen der Grundkanten im Aufriss. Mittels der Senkrechten durch die Eckpunkte des Grundrisses zur Richtung der Seitenkanten bestimmen sich die Eckpunkte k'', i'''', d'''', e'', h''', i''''', c''', d'''''.

Nunmehr legt man um die beiden Grundkanten $a_1 b_1$ und $g_1 f_1$ die beiden Grundflächen um; von denselben kennt man die Längen der Grundkanten und weiss überdies, dass die Eckpunkte auf den Senkrechten durch die ersten Projektionen zu den Linien $a_1 b_1$ bezw. $g_1 f_1$ liegen müssen.

Anmerkung 37. Die Grundflächenprojektionen $g_1 f_1 h_1 i_1 k_1$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ sind affine Figuren mit der Linie S_1 als Affinitätsachse, von welcher Eigenschaft oben bei der Konstruktion des zuletzt genannten Vieleckes Gebrauch gemacht wurde.

90) **Aufgabe 32.** Ein schiefes Prisma ist im Grund- und Aufriss darzustellen.

Man soll ferner

a) das Prisma durch eine gegen die beiden **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 geneigte Ebene schneiden,

b) die wahre Gestalt der Schnittfigur zeichnen,

c) den Mantel des Prismas in eine Ebene ausbreiten.

Auflösung. Grund- und Aufriss des Prismas.

Als Grundfläche sei ein Parallelogramm 1·2·3·4, siehe Figur 122, in der **Pr. Eb.** E_1 gewählt und die Richtung der Seitenkanten parallel zur **Pr. Eb.** E_2 angenommen. Die zweite Grundfläche nehme man parallel zur **Pr. Eb.** E_2 an, wodurch sich im Grundriss das Parallelogramm $1' 2' 3' 4'$ ergibt.

Auflösung a. Schnitt einer Ebene $S_1 T_2$ mit dem Prisma.

Sind S_1 und T_2 die Spuren der gegebenen Ebenen, so kann man die ersten Projektionen der Seitenkanten als erste Projektionen von Geraden der Ebene auffassen und ihre zugehörigen zweiten Projektionen bestimmen.

Letztere schneiden die zweiten Projektionen der Prismenkanten in den gesuchten Schnittpunkten I, II, III, IV. Die ersten Projektionen findet man durch Herabprojizieren.

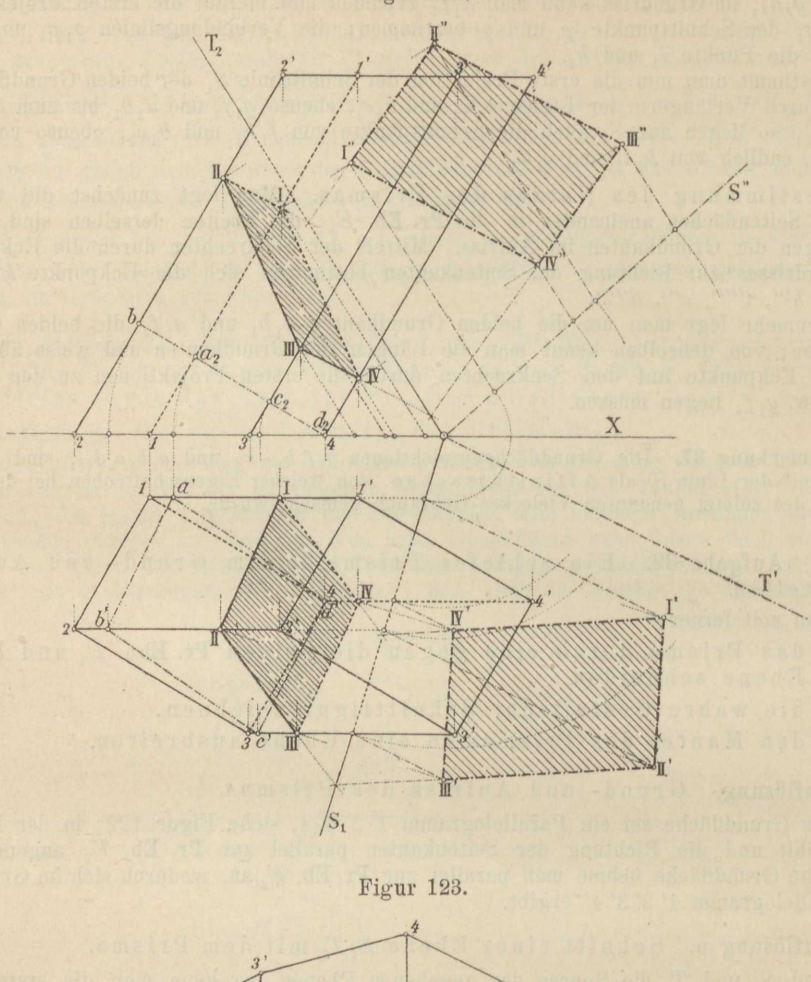
Auflösung b. Bestimmung der wahren Gestalt der Schnittfigur.

Man legt die Ebene $S_1 T_2$ entweder um S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 oder um T_2 in die **Pr. Eb.** E_2 um. In der Figur 115 sind beide Umlegungen verzeichnet, siehe auch Aufgabe 16.

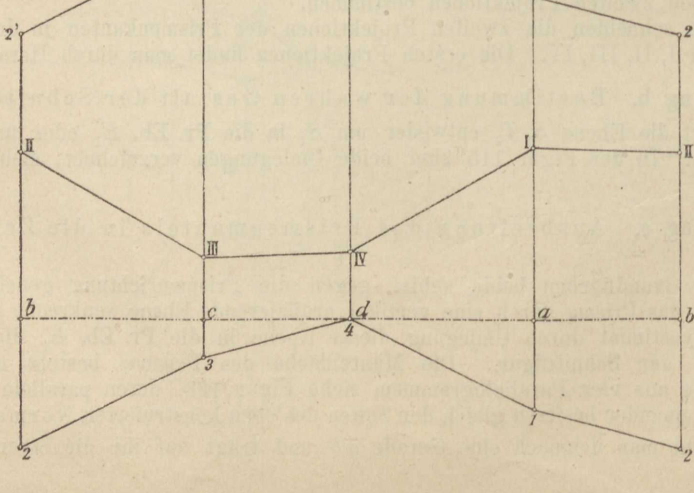
Auflösung c. Ausbreitung des Prismenmantels in die Zeichnungsebene.

Da die Grundflächen beide schief gegen die Prismenrichtung geneigt sind, so schneidet man das Prisma durch eine vertikal projizierende Ebene senkrecht zur Prismenrichtung und bestimmt durch Umlegung dieser Ebene in die **Pr. Eb.** E_1 die wahre Gestalt $a' b' c' d'$ der Schnittfigur. Die Mantelfläche des Prismas besteht nun im vorliegenden Falle aus vier Parallelogrammen, siehe Figur 123, deren parallele Seiten Entfernungen von einander besitzen gleich den Seiten des oben konstruierten Normalschnittes $a' b' c' d'$. Zieht man demnach eine Gerade ab und trägt auf ihr die Strecken $\overline{bc}$, $\overline{cd}$,

Figur 122.



Figur 123.



$\overline{da}$ und $\overline{ab}$ gleich den entsprechenden Seiten des Normalschnittes $a' b' c' d'$ ab, so gehen durch die Punkte b, c, d, a und b die Seitenkanten der Mantelfläche hindurch. Man braucht jetzt nur noch die Längen $\overline{b2}$, $\overline{b2'}$, $\overline{c3}$, $\overline{c3'}$, $\overline{d4}$, $\overline{d4'}$, $\overline{a1}$, $\overline{a1'}$ gleich den entsprechend bezeichneten Strecken des Aufrisses abzutragen, um den Mantel des Prismas zu erhalten. In gleicher Weise überträgt man auch die Längen $\overline{a_2 \mathrm{I}}$, $\overline{b_2 \mathrm{II}}$, $\overline{c_2 \mathrm{III}} \cdots$ aus Figur 122 nach $\overline{a\mathrm{I}}$, $\overline{b\mathrm{II}}$, $\overline{c\mathrm{III}}$ in Figur 123.

6) Ueber die rechtwinklige Projektion des Kreiskegels, Bestimmung seines Netzes und seines Schnittes mit einer Ebene.

a) Grund- und Aufriss des Kreiskegels.

91) Geht die Grundfläche einer Pyramide in eine Kreisfläche über und verbindet man sämtliche Punkte des Kreises mit der Spitze s, so erhält man einen Körper, den man Kegel, und zwar Kreiskegel nennt. Man unterscheidet dabei den senkrechten Kreiskegel von dem schiefen Kreiskegel; bei dem ersteren liegt die Spitze in einer Senkrechten durch den Mittelpunkt des Grundkreises zu der Ebene desselben, bei dem letzteren kann die Spitze eine ganz beliebige Lage ausserhalb der Ebene des Grundkreises einnehmen.

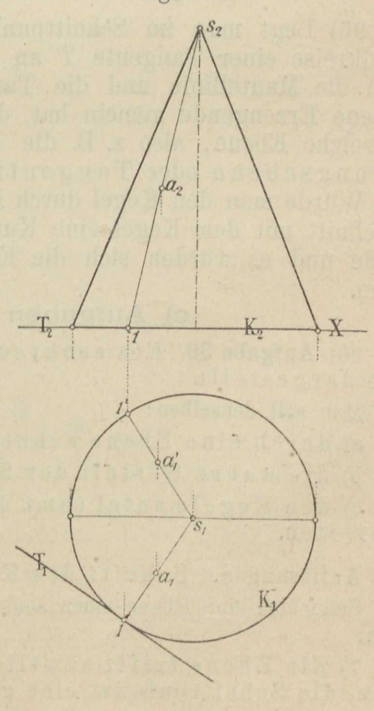
Die Begrenzung der Kegelfläche ausschliesslich der Grundfläche heisst die Mantelfläche oder auch kurzweg der Mantel des Kegels.

Man kann diesen Mantel wie bei der Pyramide gleichfalls in eine Ebene ausbreiten, oder wie man auch sagt abwickeln, und nennt deshalb die Kegelfläche auch eine abwickelbare Fläche. Die abgewickelte Mantelfläche des Kegels bildet zusammen mit der Grundfläche das Netz des Kegels.

92) **Aufgabe 33.** Ein senkrechter Kreiskegel ist im Grund- und Aufriss darzustellen und zwar so, dass der Körper gegen die **Pr. Ebn.** die einfachste Lage einnimmt.

Auflösung. Man legt die Grundfläche in die **Pr. Eb.** E_1 und erhält dann als Grundriss des Kegels eine Kreisfläche, s. Fig. 124, als Aufriss ein gleichschenkliges Dreieck.

Figur 124.

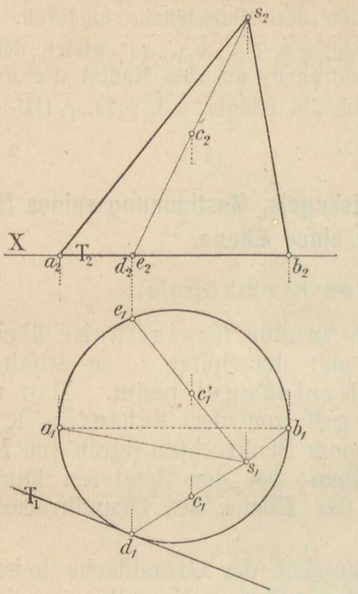


93) **Aufgabe 34.** Ein schiefer Kreiskegel ist in seiner einfachsten Lage zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 im Grund- und Aufriss darzustellen.

Auflösung. Man legt die Grundfläche wieder in die **Pr. Eb.** E_1 und kann nun die Projektionen s_1 und s_2 der Spitze ganz beliebig wählen. Es sind drei Fälle denkbar, nämlich es kann s_1 innerhalb oder ausserhalb des Kreises oder aber auf dem Kreise selbst liegen. Liegt s_1 ausserhalb des Kreises, so sind von s_1 aus zwei Tangenten an den Kreis K_1 möglich, welche den scheinbaren Umriss des Kegels begrenzen.

Der Aufriss des Kegels ist ein ungleichseitiges Dreieck $a_2 s_2 b_2$, siehe Fig. 125.

Figur 125.



94) **Aufgabe 35.** Auf einem durch Grund- und Aufriss dargestellten Kreiskegel sind die Projektionen eines auf seiner Mantelfläche liegenden Punktes zu zeichnen.

Auflösung. Man kann die zweite Projektion a_2 oder c_2, siehe Figur 124 und 125 innerhalb der zweiten Projektion des Kegels beliebig wählen und mit s_2 verbinden. Soll diese Verbindungslinie eine auf dem Mantel des Kegels liegende Gerade darstellen, so muss sie in jedem Falle den Grundkreis des Kegels schneiden; die ersten Projektionen der genannten Linien können demnach sein in Figur 124 die Linien $s_1 1$ und $s_1 1'$, in Figur 125 die Linien $s_1 d_1$ und $s_1 e_1$, auf welchen die erste Projektion des angenommenen Punktes liegen muss. Wie man sieht, gibt es zu jeder zweiten Projektion zwei erste Projektionen a_1 oder a_1' und c_1 oder c_1'.

Anmerkung 38. Jede durch die Kegelspitze gehende und auf dem Mantel des Kegels liegende Gerade heisst eine Mantellinie oder auch eine Erzeugende des Kegels; letztere Bezeichnung gilt deshalb, weil die Kegelfläche durch Bewegung einer Geraden, die stets durch einen festen Punkt s hindurchgeht und ausserdem eine feste Kreislinie K schneidet, erzeugt werden kann.

b) Berührungsebene oder Tangentialebene eines Kegels.

95) Legt man im Schnittpunkt einer Mantellinie eines Kegels mit dem Grundkreise einer Tangente T an den letzteren, siehe Figur 124 und 125, so bilden die Mantellinie und die Tangente eine Ebene, welche mit dem Kegel nur jene Erzeugende gemein hat, d. h. ihn nach derselben berührt. Man nennt eine solche Ebene, also z. B. die Ebene Ts in Figur 124 und 125 eine Berührungsebene oder Tangentialebene des Kegels.

Würde man den Kegel durch irgend eine Ebene schneiden, so erhielte man als Schnitt mit dem Kegel eine Kurve, als Schnitt mit der Tangentialebene eine Gerade und es würden sich die Kurve und Gerade stets in einem Punkte berühren.

c) Aufgaben über den Kreiskegel.

96) **Aufgabe 36.** Ein senkrechter Kreiskegel ist im Grund- und Aufrisse dargestellt.

Man soll denselben:

a) durch eine Ebene schneiden,

b) die wahre Gestalt der Schnittfigur zeichnen,

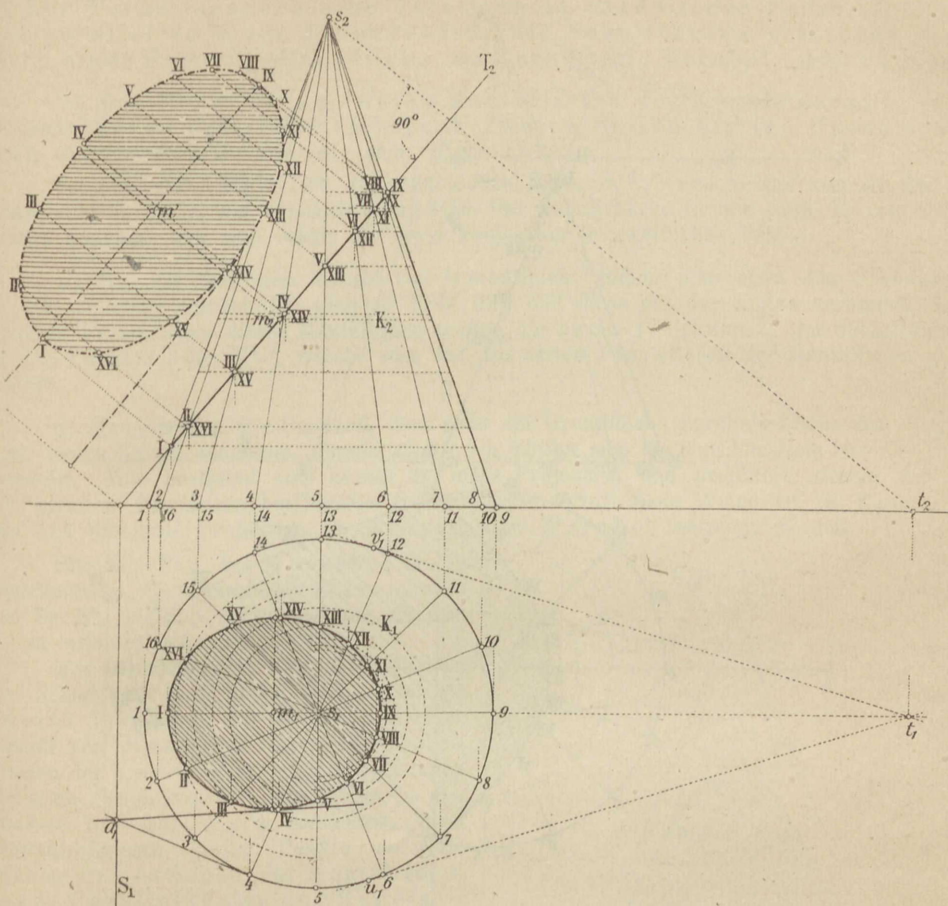
c) den Kegelmantel samt der Schnittfigur in die Zeichnungsebene ausbreiten.

Auflösung a. Schnitt des Kegels durch eine Ebene.

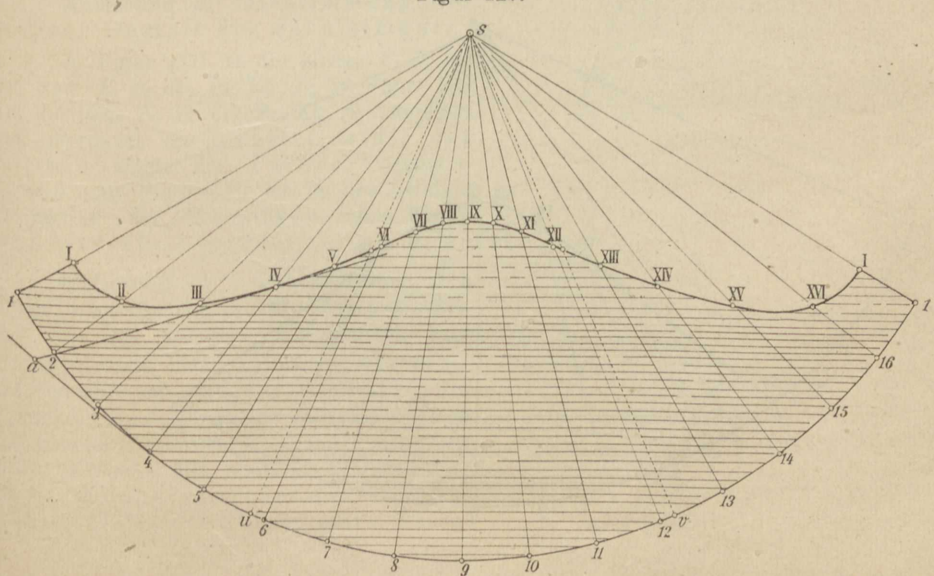
Schneidet eine Ebene einen senkrechten Kreiskegel, so können folgende Fälle eintreten:

1) die Ebene trifft sämtliche Mantellinien des Kegels in endlicher Ferne, die Schnittlinie ist eine geschlossene Linie, die Ellipse, s. Figur 126.

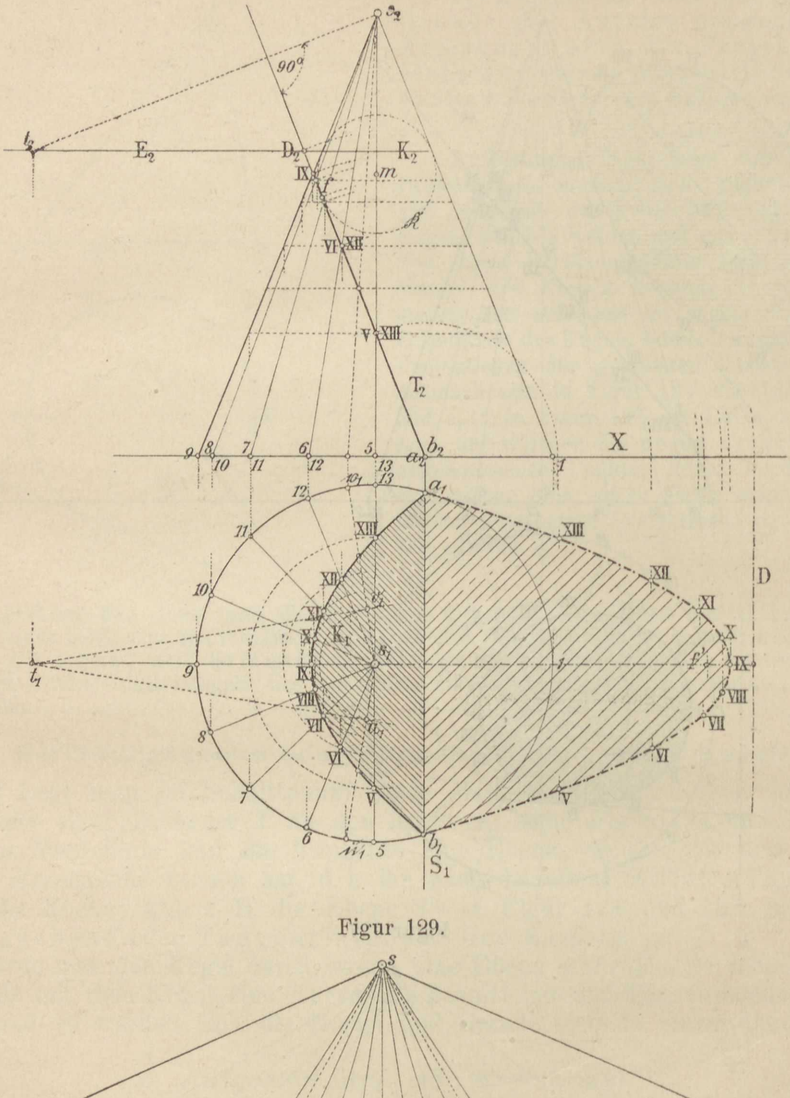
Figur 126.



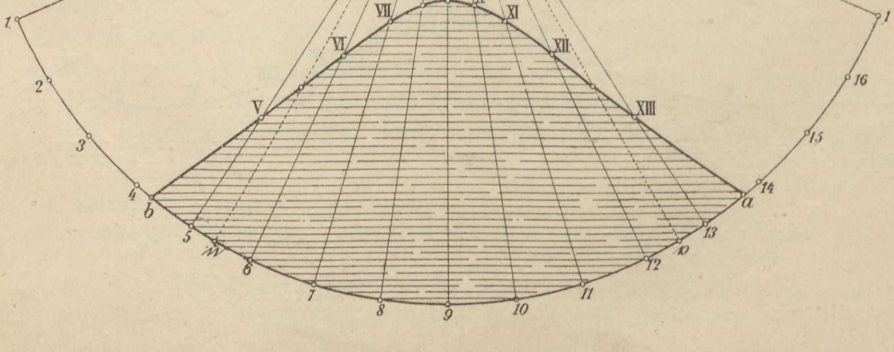
Figur 127.



Figur 128.



Figur 129.



2) Die Ebene trifft nicht alle Mantellininien des Kegels in endlicher Ferne, sondern eine derselben in unendlicher Ferne, d. h. sie ist parallel zu einer Erzeugenden; die Schnittkurve erstreckt sich nach einer Seite ins Unendliche, man erhält die Parabel, siehe Figur 128.

3) Die Ebene ist zu zweien Mantellinien des Kegels parallel, die Schnittkurve erstreckt sich nach zweien Seiten hin ins Unendliche, man erhält die Hyperbel, siehe Figur 130.

Ist nun, siehe Figur 126, die schneidende Ebene S_1T_2 senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2 angenommen, so ist die vertikale Projektion der Schnittkurve in der Linie T_2 von vornherein gegeben, und man erhält die erste Projektion in zweifacher Weise:

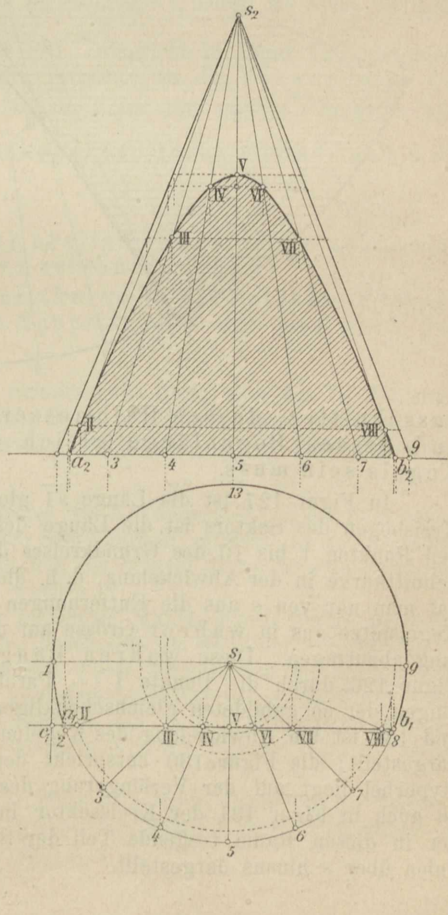
α) Man zeichnet eine Anzahl von Mantellinien, indem man etwa den Grundkreis in eine beliebige Anzahl (16) gleicher Teile teilt und diese mit der Spitze verbindet. Die zweiten Projektionen dieser Mantellinien treffen die zweite Projektion T_2 der Schnittkurve in den Punkten I bis XVI, welche man auf die ersten Projektionen der Mantellinien projiziert.

β) Man benützt den Umstand, dass jede zur Grundfläche parallele Ebene den Kegel nach einem Kreise schneidet, dessen zweite Projektion sich als eine Parallele zur X-Achse darstellt. Man bestimmt sich hierzu die erste Projektion und projiziert hierauf die in der zweiten Projektion bestimmten Schnittpunkte. Auf diese Weise ist in Figur 126 und 127 die erste Projektion der Ellipse bezw. Parabel bestimmt worden.

Für den Fall der Hyperbel ist es zweckmässig, die schneidende Ebene parallel zur **Pr. Eb.** E_2 und senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 zu wählen, siehe Figur 130.

Man kennt dann die erste Projektion der Schnittfigur und findet die zugehörige zweite Projektion durch Annahme einer Anzahl von Mantellinien oder Parallelkreisen des Kegels, deren erste Projektionen die erste Projektion der Schnittfigur in den Punkten I $\cdots$ VIII u. s. w. schneiden, durch Hinaufprojizieren dieser Punkte auf die zweiten Projektionen der Mantellinien bezw. Parallelkreise des Kegels.

Figur 130.



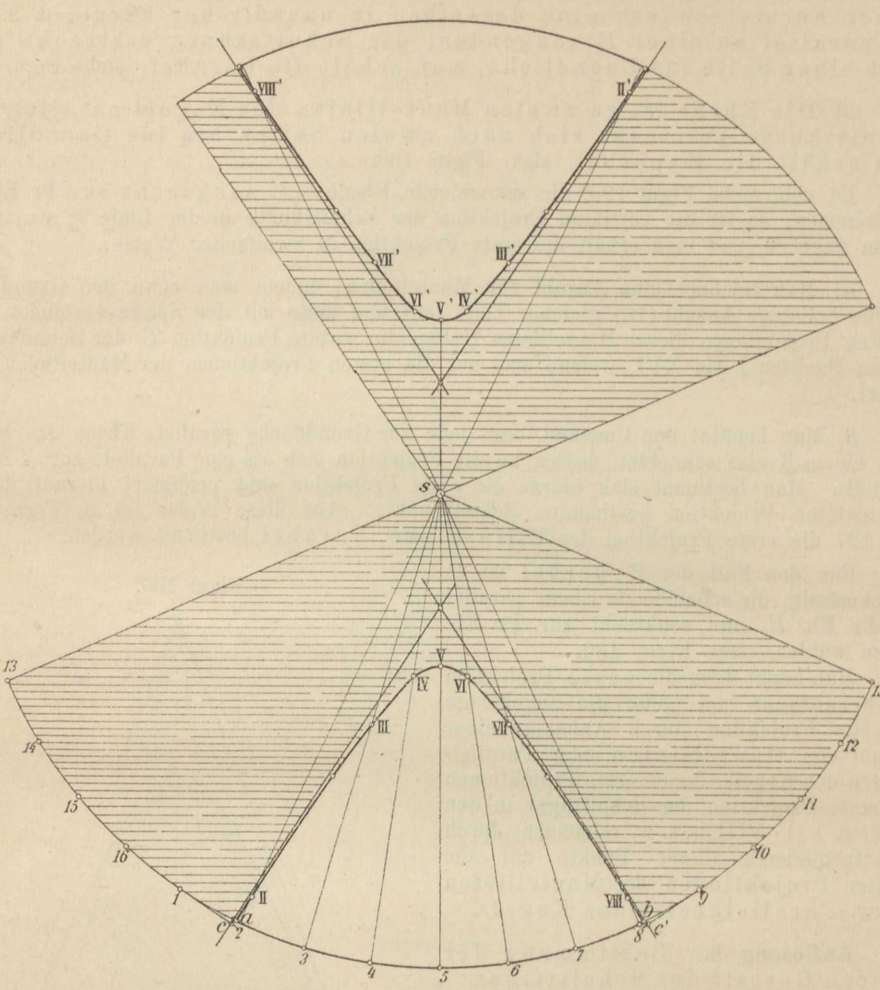
Auflösung b. Bestimmung der wahren Gestalt der Schnittfigur.

In Figur 126 ist die Ebene S_1T_2 um die Spur T_2 in die **Pr. Eb.** E_2 in Figur 128 um die Spur S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt und hierdurch die wahre Gestalt der Ellipse bezw. der Parabel bestimmt worden. In Figur 130 ist in der zweiten Projektion der Schnittfigur schon deren wahre Gestalt gegeben.

Auflösung c. Ausbreitung des Kegelmantels in die Zeichnungsebene.

Da die Kegelmantellinien alle von gleicher Länge sind, so haben die Punkte des Grundkreises nach der Ausbreitung des Mantels in die Zeichnungsebene von der Spitze aus gleiche Entfernung und liegen somit auf einem Kreise. Mit anderen Worten, der in die Ebene ausgebreitete Kegelmantel bildet die Fläche eines Kreis-

Figur 131.



ausschnittes, dessen Halbmesser gleich der Länge einer Mantellinie und dessen Bogenlänge gleich dem Umfange des Grundkreises des Kegels sein muss.

In Figur 127 ist die Länge $\overline{s1}$ gleich der Strecke $\overline{s_2 1}$ in Figur 126. Auf dem Kreisbogen des Sektors ist die Länge des Grundkreises abgetragen und es entsprechen den Punkten 1 bis 10 des Grundkreises die Punkte 1 bis 10 des Sektorbogens. Um die Schnittkurve in der Abwickelung, d. h. die Verwandelte der Schnittfigur, zu erhalten, hat man nur von s aus die Entfernungen der einzelnen Schnittpunkte I bis XVI von der Kegelspitze aus in wahrer Grösse auf den entsprechenden Erzeugenden in der Abwickelung abzutragen. Diese wahren Längen ergeben sich, wenn man im Aufrisse der Figur 126 durch die Punkte I $\cdots$ Parallele zur X-Achse zeichnet und die Schenkellängen der so gebildeten gleichschenkligen Dreiecke abgreift. In den Figuren 127, 129 und 131 ist die Abwickelung des Kegelmantels samt der darauf befindlichen Schnittkurve dargestellt; die Figur 130 entspricht dem Falle der Hyperbel, der zweite Zweig der Hyperbel liegt auf der Verlängerung des Kegels über seine Spitze hinaus. Demgemäss ist auch in Figur 131 der Kreissektor im Scheitelwinkelraume des Winkels $13 s 13$ und der in diesen Raum treffende Teil der Schnittkurve durch Verlängern der Kegelmantellinien über s hinaus dargestellt.

97) Beschreibt man in den Figuren 126 und 128 in die Vertikalprojektion des Kegels Kreise, welche die Umrissmantellinien und die Projektion T_1 der Schnittebene berühren, so stellen die Berührpunkte die Projektionen der Brennpunkte der bezüglichen Schnittkurve dar; in Figur 128 ist die Konstruktion ausgeführt. Der Kreis $\mathfrak{K}$ berührt T_2 in einem Punkte f, der in der Umlegung nach f' gelangt; f' ist der Brennpunkt der umgelegten Parabel. Der Kreis $\mathfrak{K}$ stellt die zweite Projektion einer Kugel dar, welche den Kegel nach einem Kreise K berührt, seine Ebene trifft die Parabelebene T_2 nach einer Geraden, deren zweite Projektion D_2 ist; die Umlegung D dieser Linie gibt die Leitlinie der Parabel.

Anmerkung 39. In den Figuren 126 und 128 stellt die erste Projektion s_1 der Kegelspitze für die bezügliche Projektion der Schnittkurve einen Brennpunkt dar.

98) **Aufgabe 37.** Für die in Figur 126 dargestellte Schnittkurve soll für einen beliebigen Kurvenpunkt die Tangente gezeichnet und diese nach Figur 127 übertragen werden.

Auflösung. Soll z. B. für den Punkt IV, s. Fig. 126, die Tangente bestimmt werden, so liegt diese Linie einmal in der Ebene $S_1 T_2$, dann aber auch in der Tangentialebene des Kegels für den Punkt IV, siehe 95), sie ist also die Schnittlinie beider Ebenen. Die Tangentialebene im Punkte IV ist bestimmt durch die den Punkt IV enthaltende Mantellinie und durch die Tangente an den Grundkreis im Punkte 4; letztere Tangente ist zugleich erste Spur der genannten Tangentialebene und schneidet die Spur S_1 in einem Punkte a_1 der gesuchten Tangente im Punkte IV. Diese ist somit die Linie a_1IV. Die zweite Projektion deckt sich mit T_2.

Der Tangente im Punkte 4, siehe Figur 126, entspricht in Figur 127 gleichfalls die Tangente im Punkte 4 und man erhält die Tangente an die Verwandelte der Schnittkurve durch Abtragen der Strecke $\overline{4a_1}$ in Figur 126 nach $\overline{4a}$ in Figur 127.

99) **Aufgabe 38.** Ein schiefer Kreiskegel ist durch Grund- und Aufriss dargestellt, siehe Figur 132.

Man soll

a) den Kegel durch eine vertikal projizierende Ebene schneiden und die Projektionen der Schnittkurve zeichnen,

b) den Kegelmantel samt der Schnittkurve in die Zeichnungsebene ausbreiten und eine Tangente an die Schnittkurve vor und nach der Abwickelung konstruieren.

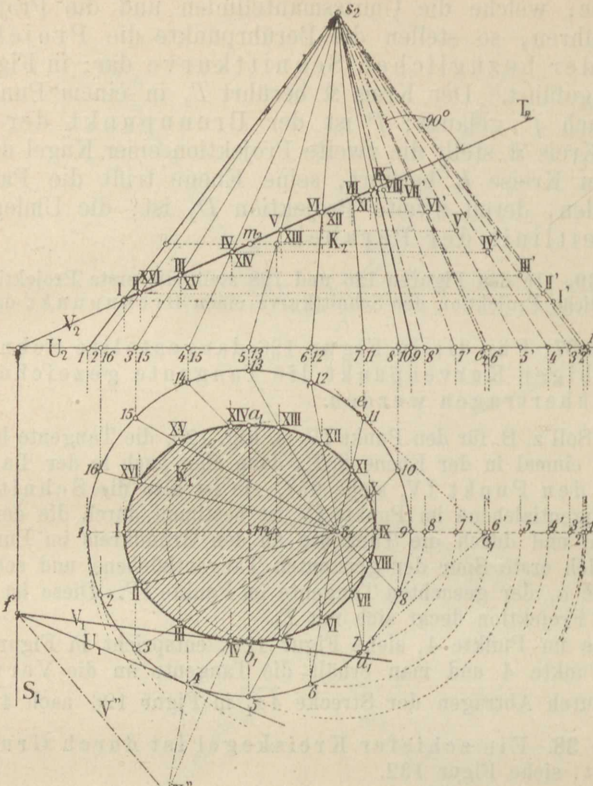
Auflösung a. Die zweite Projektion der Schnittkurve deckt sich mit T_2, die erste Projektion ergibt sich wieder durch Annahme einer Reihe von Mantellinien, deren Schnittpunkte I, II $\cdots$ mit T_2 auf die zugehörigen ersten Projektionen dieser Mantellinien zu projizieren sind.

Auflösung b. Man bestimmt die Abwickelung des Kegelmantels annäherungsweise, indem man den Kegel als Pyramide mit sehr vielen Seitenflächen auffasst; im vorliegenden Falle ist der Grundkreis in 16 Teile geteilt, und nun der Mantel dieser Pyramide genau so wie in Aufgabe 26 gezeigt wurde, bestimmt worden.

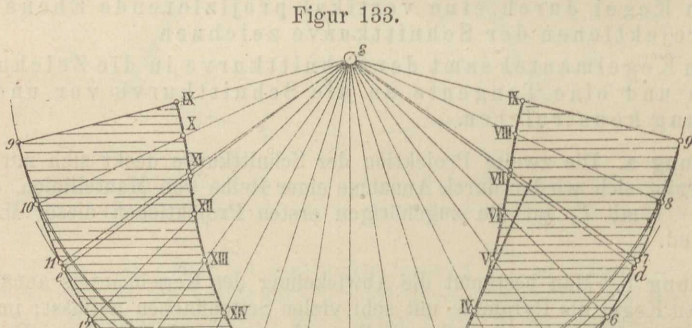
Man ermittelt die wahren Längen der einzelnen Mantellinien, durch Drehung derselben bis zum Parallelsein mit der **Pr. Eb.** E_2, beschreibt um den Punkt s als Mittelpunkt, siehe Figur 133, mit den wahren Längen dieser Mantellinien als Halbmesser Kreise und überträgt nun die Bogenlänge $1 \cdot 2$ von dem Grundkreise, siehe Figur 132, so in die Figur 133, dass die Endpunkte der Strecke je auf zweien aufeinander folgenden Mantellinien entsprechenden Kreisen liegen, wodurch sich die Punkte 1 bis 16, siehe Figur 133, ergeben.

Auf die Mantellinien in der Figur 133 überträgt man dann die wahren Entfernungen der Schnittpunkte I bis XVI von der Kegelspitze. Diese wahren Entfernungen sind gleich den Strecken $\overline{s_2 \mathrm{I}'}$, $\overline{s_2 \mathrm{II}'}$, siehe Figur 132, u. s. w.

Figur 132.



Figur 133.



Die Tangente in einem Punkte, z. B. IV der Schnittkurve ergibt sich wieder als Schnittlinie der Tangentialebene längs der Erzeugenden sIV an die Kegelfläche mit der Ebene $S_1 T_2$; in der ersten Projektion erhält man hierfür die Linie V_1.

Um die Tangente an die Schnittkurve in dem entsprechenden Punkt der Figur 132 zu erhalten, bestimmt man zunächst die Umlegung $f4\mathrm{IV}''$ des Dreieckes $f4\mathrm{IV}$, siehe Figur 122 und überträgt die Winkel dieses Dreieckes an den Ecken 4 und IV'' nach den Punkten 4 und IV der Figur 133.

100) Während bei der Abwickelung der Oberfläche einer abwickelbaren Fläche alle Längen und Winkel von Linien auf der Oberfläche unverändert bleiben, ändert sich die Gestalt, d. h. die Krümmung der Linie. So wird z. B. die Ellipse der Figur 126 nach der Abwickelung des Kegelmantels in Figur 127 eine Wellenlinie und es gibt auf derselben gewisse Punkte, in welchen die konvexe und konkave Seite der Kurve aneinanderstossen; in Figur 127 liegen diese Punkte zwischen den Punkten V und VI bezw. XII XIII. Man nennt diese Punkte die Wendepunkte oder Inflexionspunkte, in ihnen besitzt die Kurve gar keine Krümmung. Man findet die Inflexionspunkte, indem man senkrecht zur Ebene der Kurve Tangentialebenen an die Fläche legt und die Schnittpunkte ihrer Berührungslinien mit der Kurve aufsucht. Die so bestimmten Punkte werden nach der Abwickelung Wende- oder Inflexionspunkte. In Figur 126 ist die Konstruktion durchgeführt. Es ist durch die Kegelspitze eine Gerade senkrecht zur Ebene $S_1 T_2$ gezogen und deren erste Spur t_1 bestimmt. Die Tangenten von t_1 an den Grundkreis geben die Berührungspunkte u_1 und v_1, welchen in der Abwickelung die Punkte u und v entsprechen. Die Mantellinien durch u und v schneiden in Figur 127 auf der Verwandelten der Ellipse die Inflexionspunkte aus.

7) Ueber die rechtwinklige Projektion des Kreiscylinders. Bestimmung seines Netzes und seines Schnittes mit einer Ebene.

a) Grund- und Aufriss des Kreiscylinders.

101) Ein Prisma mit kreisförmiger Grundfläche heisst ein Kreiscylinder und zwar kennt man den senkrechten und den schiefen Kreiscylinder, je nachdem die Cylinderrichtung senkrecht oder schief zur Grundfläche geneigt ist. Die Oberfläche des Cylinders ausschliesslich der beiden Grundflächen heisst seine Mantelfläche. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen kann man die Cylinderachse nennen. Jede auf der Mantelfläche parallel zur Achse gezogene Gerade ist eine Erzeugende oder eine Mantellinie. Der Cylinder ist eine abwickelbare Fläche, denn es lässt sich sein Mantel in eine Ebene ausbreiten oder abwickeln; nimmt man zur Abwickelung des Mantels noch die beiden kreisförmigen Grundflächen hinzu, so erhält man das Netz des Cylinders.

102) **Aufgabe 39.** Ein senkrechter Kreiscylinder ist im Grund- und Aufriss darzustellen, so dass der Körper gegen die **Pr. Ebn.** die einfachste Lage einnimmt.

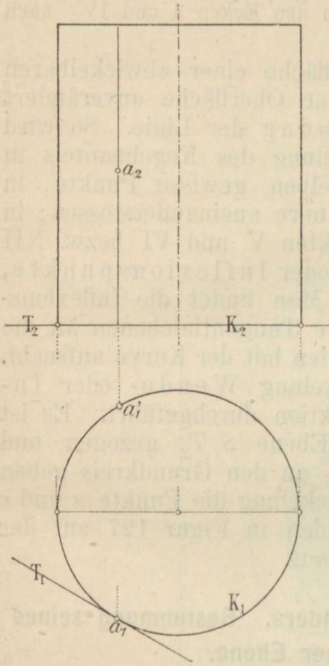
Auflösung. Man legt die Grundfläche in die **Pr. Eb.** E_1 und erhält dann als Grundriss des Cylinders eine Kreisfläche, siehe Figur 134; der Aufriss ist begrenzt durch ein Rechteck.

Anmerkung 40. Der Grundriss des Mantels des Cylinders in Figur 134 ist die Kreislinie K_1.

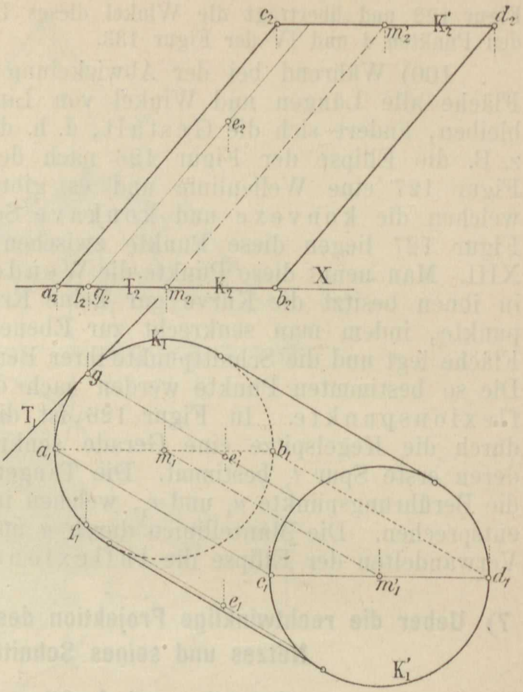
103) **Aufgabe 40.** Ein schiefer Kreiscylinder ist im Grund- und Aufriss darzustellen.

Auflösung. Der Grundriss ist begrenzt von zwei gleichgrossen Kreisen K_1 und K_1', die durch parallele Tangenten miteinander verbunden sind, siehe Figur 135. Der Aufriss ist ein Parallelogramm $a_2 b_2 c_2 d_2$, dessen eines Paar paralleler Seiten die Projektionen der Grundkreise darstellen, während das zweite Paar parallel zur Cylinderachse läuft.

Figur 134.



Figur 135.



104) **Aufgabe 41.** Auf einem durch Grund- und Aufriss dargestellten Kreiscylinder, siehe Figur 134 und 135, sind die Projektionen eines auf seiner Mantelfläche liegenden Punktes zu verzeichnen.

Auflösung. Steht der Cylinder zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht, siehe Figur 134, so muss die erste Projektion eines auf dem Cylindermantel liegenden Punktes auf K_1 liegen. Die Punkte a_1 und a_1' stellen somit die ersten Projektionen zweier Punkte a und a' auf dem Cylindermantel dar, deren zweite Projektionen sich mit a_2 decken. Steht der Cylinder schief zur **Pr. Eb.**, so nehme man innerhalb oder auf dem Umfange des Parallelogramms $a_2 b_2 c_2 d_2$ einen Punkt e_2 beliebig an, siehe Figur 135, und ziehe durch ihn eine Mantellinie; derselben entsprechen im Grundriss zwei Projektionen, auf welchen die Projektionen e_1 und e_1' entsprechend dem Punkte e_2 liegen müssen.

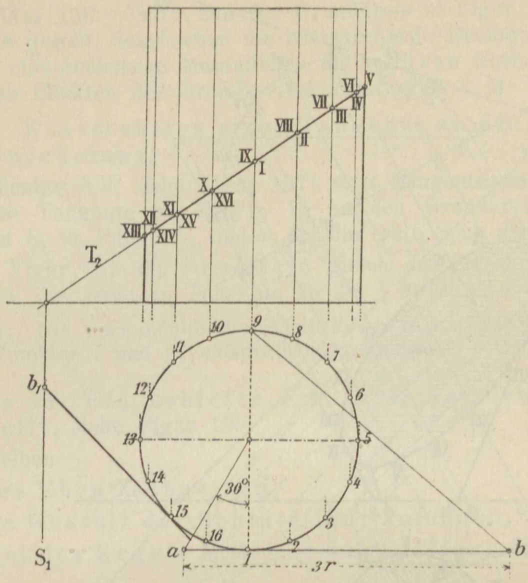
b) Berührungsebene oder Tangentialebene eines Cylinders.

105) Legt man im Schnittpunkte einer Mantellinie mit dem Grundkreise eine Tangente an letzteren, siehe Figur 134 und 135, so bilden die Mantellinie und die Tangente eine Ebene, welche mit dem Cylinder eine Mantellinie gemein hat, d. h. ihn längs derselben berührt. Man nennt eine solche Ebene, d. i. also die Ebene T_1 in Figur 134 bezw. die Ebene Te in Figur 135, eine **Berührungsebene** oder **Tangentialebene** des Cylinders.

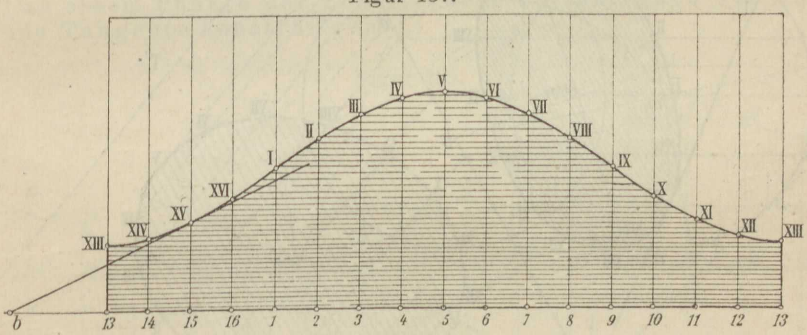
Würde man den Cylinder durch irgend eine Ebene schneiden, so erhielte man als Schnitt mit dem Cylinder eine Kurve, als Schnitt mit der Tangentialebene eine Gerade und es würden sich Kurve und Gerade stets in einem Punkte berühren.

c) Aufgaben über den Kreiscylinder.

Figur 136.



Figur 137.



106) **Aufgabe 42.** Ein senkrechter Kreiscylinder ist im Grund- und Aufriss dargestellt.

Man soll denselben

a) durch eine Ebene schneiden,

b) den Cylindermantel samt der Schnittfigur in eine Ebene ausbreiten,

c) eine Tangente an die Schnittfigur vor und nach der Abwickelung konstruieren.

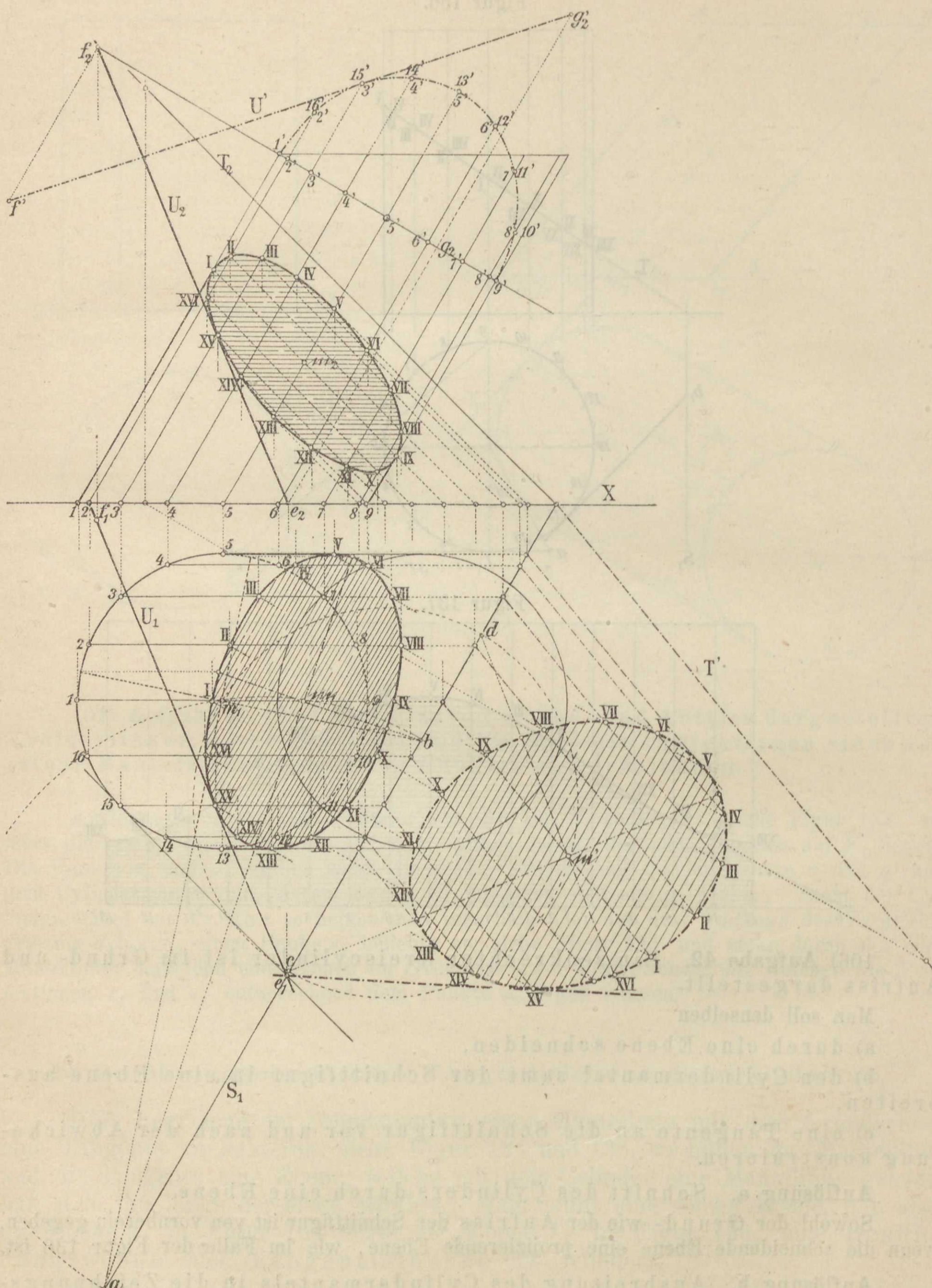
Auflösung a. Schnitt des Cylinders durch eine Ebene.

Sowohl der Grund- wie der Aufriss der Schnittfigur ist von vornherein gegeben, wenn die schneidende Ebene eine projizierende Ebene, wie im Falle der Figur 136 ist.

Auflösung b. Ausbreitung des Cylindermantels in die Zeichnungsebene.

Der Cylindermantel in die Ebene ausgebreitet, wird ein Rechteck, siehe Figur 137, dessen Seiten bezw. gleich dem Umfange des Grundkreises und der Höhe des Cylinders sein müssen.

Figur 138.



Um den Umfang des Grundkreises zu finden, trage man im Mittelpunkte des letzteren an den Halbmesser durch den Punkt 1 den Winkel von 30^0 an, ziehe in 1 die Tangente an den Grundkreis und mache die Strecke $\overline{ab} = 3r$, d. h. gleich dem dreifachen Kreishalbmesser, so ist die Länge $\overline{b9}$ hinlänglich genau gleich dem halben Kreisumfange. In Figur 137 ist somit die grosse Rechtecksseite gleich der doppelten Länge von $\overline{b9}$ in Figur 136. Wird nun der Grundkreis in Figur 136 in eine beliebige Anzahl gleicher Teile geteilt, desgleichen die entsprechende Rechtecksseite in Figur 137, so sind nur auf den entsprechenden Mantellinien die wahren Entfernungen der Schnittpunkte I ··· von den Punkten des Grundkreises abzutragen.

Auflösung c. Konstruktion einer Tangente an die Schnittfigur vor und nach der Abwickelung.

Ist z. B. im Punkte XV, siehe Figur 137, eine Tangente zu konstruieren, so ist deren Grundriss eine Tangente im Punkte 15 an den Grundkreis, siehe Figur 136. Diese Linie schneidet S_1 im Punkte b_1 und b_1 ist die erste Spur der fraglichen Tangente. Macht man nun in Figur 137 die Strecke $\overline{b15}$ gleich der Strecke $\overline{b_1 15}$ in Figur 136, so ist die Linie bXV die gesuchte Tangente an die Verwandelte der Schnittfigur.

Anmerkung 41. Die Verwandelte der Schnittkurve besitzt zwei Inflexionspunkte; es sind dies die den Punkten I und IX entsprechenden Punkte.

107) **Aufgabe 43.** Ein schiefer Kreiscylinder ist im Grund- und Aufriss dargestellt, siehe Figur 138.

Man soll denselben

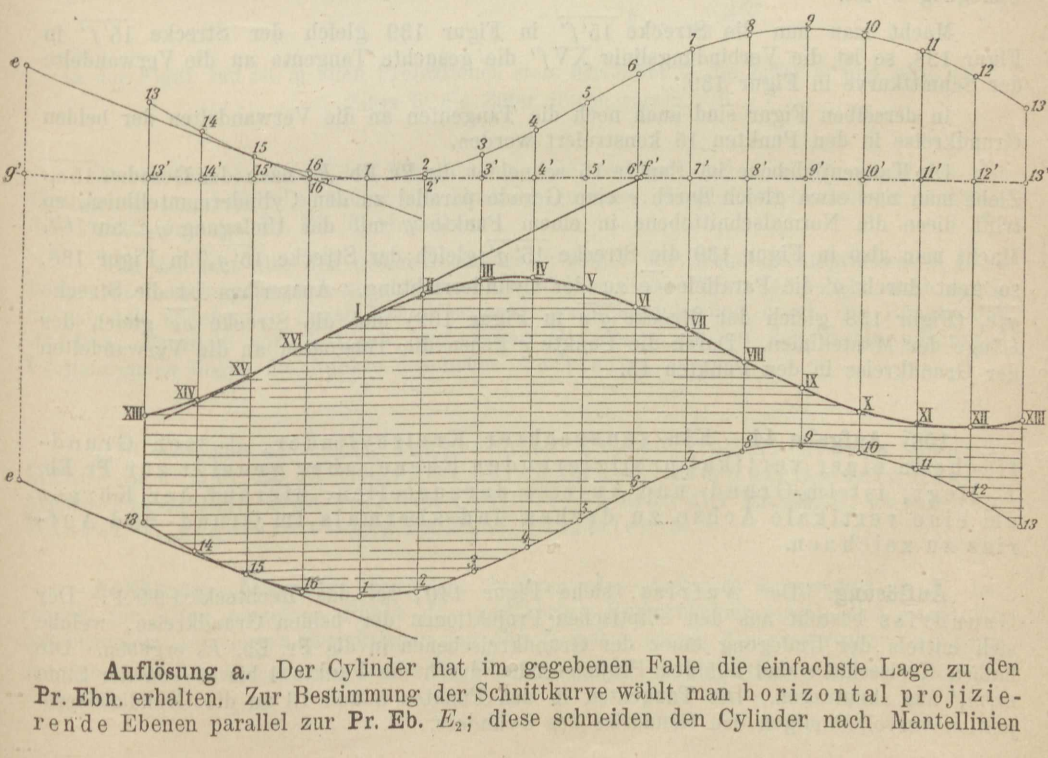
a) durch eine Ebene schneiden,

b) die wahre Gestalt der Schnittfigur zeichnen,

c) den Mantel des Kegels samt der Schnittfigur in eine Ebene ausbreiten,

d) an einem Punkte der Schnittkurve vor und nach der Abwickelung eine Tangente konstruieren.

Figur 139.



Auflösung a. Der Cylinder hat im gegebenen Falle die einfachste Lage zu den **Pr. Ebn.** erhalten. Zur Bestimmung der Schnittkurve wählt man horizontal projizierende Ebenen parallel zur **Pr. Eb.** E_2; diese schneiden den Cylinder nach Mantellinien und die Ebene ST nach Parallelen zur Spur T. Die gegenseitigen Schnitte dieser Linien enthalten die Punkte der Schnittkurve von Ebene und Cylinder.

Zur Durchführung der Konstruktion ist zweckmässig der Grundkreis eingeteilt. Die durch die Teilpunkte gezogenen Projektionen der Mantellinien schneiden die Linie S_1 in Punkten, denen auf der X-Achse Punkte entsprechen. Durch die letzteren gehen die Parallelen zu T_2 und schneiden die entsprechenden Mantellinien in den Schnittpunkten I, II $\cdots$.

Auflösung b. Wahre Gestalt der Schnittfigur.

Die Ebene $S_1 T_2$ ist um die Spur S_1 in die **Pr. Eb.** E_1 umgelegt worden, siehe 56) bis 60).

Auflösung c. Ausbreitung des Cylindermantels in die Zeichnungsebene.

Man zeichnet zunächst einen Schnitt senkrecht zur Cylinderrichtung (Normalschnitt) und bestimmt dessen wahre Gestalt durch Umlegung der Schnittebene in die **Pr. Eb.** E_2.

Nach der Abwickelung des Cylindermantels fällt der Normalschnitt in eine Gerade $\overline{13'13'}$, siehe Figur 139. Man überträgt nun aus Figur 138 die durch die Cylindermantellinien auf dem Normalschnitt abgeschnittenen Strecken $\overline{1'2'}$, $\overline{2'3'}$ $\cdots$ auf die Linie 13′13′ der Figur 139, zieht durch die so sich ergebenden Punkte Mantellinien, auf welchen man nach beiden Seiten hin die Entfernungen der auf den zugehörigen Mantellinien liegenden Punkte der Grundkreise abträgt. Hierdurch erhält man die Punkte 1, 2, 3 $\cdots$ in Figur 139, entsprechend den Punkten 1, 2, 3 $\cdots$ in Figur 138.

Auflösung d. Tangente an die Schnittkurve vor und nach der Abwickelung.

Die Tangente im Punkte XV ergibt sich wieder als Schnittlinie U der Tangentialebene längs der Erzeugenden durch den Punkt XV an den Cylinder mit der Ebene $S_1 T_2$. Diese Tangentialebene schneidet die Normalschnittebene nach einer Geraden, deren Umlegung U' ist.

Macht man nun die Strecke $\overline{15'f'}$ in Figur 139 gleich der Strecke $\overline{15'f'}$ in Figur 138, so ist die Verbindungslinie XVf' die gesuchte Tangente an die Verwandelte der Schnittkurve in Figur 139.

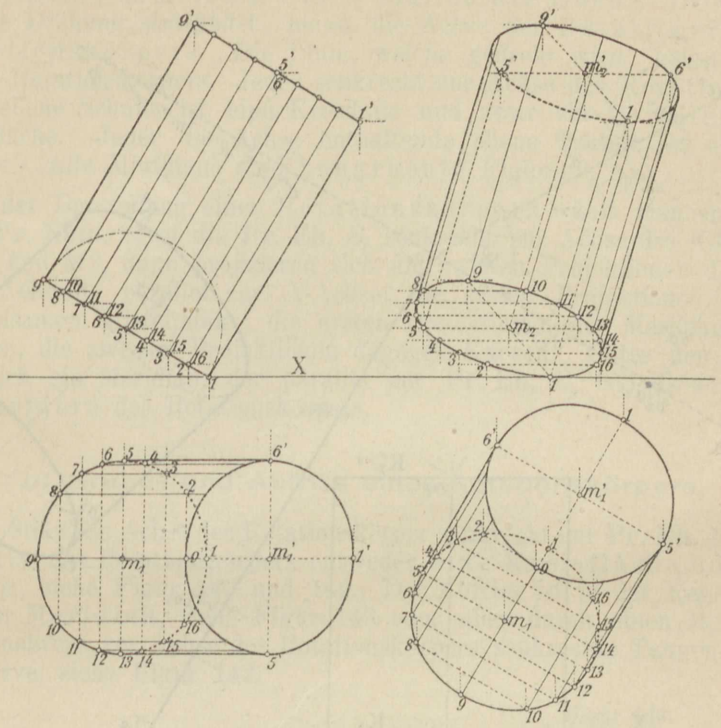
In derselben Figur sind auch noch die Tangenten an die Verwandelten der beiden Grundkreise in den Punkten 15 konstruiert worden.

Die Tangentialebene im Punkte 15 schneidet die **Pr. Eb.** E_1 nach der Geraden $\overline{15 e_1}$. Zieht man nun etwa gleich durch e eine Gerade parallel zu den Cylindermantellinien, so trifft diese die Normalschnittebene in einem Punkte g mit der Umlegung g_2' auf U'. Macht man also in Figur 139 die Strecke $\overline{15'g'}$ gleich der Strecke $\overline{15'g_2'}$ in Figur 138, so geht durch g' die Parallele $\overline{ee}$ zu der Cylinderrichtung. Ausserdem ist die Strecke $\overline{g_2 e_2}$ (Figur 138 gleich der Strecke $\overline{g'e}$ in Figur 139) und die Strecke $\overline{ee}$ gleich der Länge der Mantellinien. Durch die Punkte e gehen die Tangenten an die Verwandelten der Grundkreise in den Punkten 15.

108) **Aufgabe 44.** Ein senkrechter Kreiscylinder, dessen Grundfläche in einer vertikal projizierenden Ebene, aber geneigt zur **Pr. Eb.** E_1 liegt, ist im Grund- und Aufriss darzustellen, hierauf der Körper um eine vertikale Achse zu drehen und abermals im Grund- und Aufriss zu zeichnen.

Auflösung. Der Aufriss, siehe Figur 140, sei das Rechteck 1 9 9′1′. Der Grundriss besteht aus den elliptischen Projektionen der beiden Grundkreise, welche sich mittels der Umlegung einer der Grundkreisebenen in die **Pr. Eb.** E_2 ergeben. Die halben Kreissehnen sind auf den Projizierenden durch die Punkte 1 bis 16 von der Linie $m_1 m_1'$ aus abzutragen. Die Tangenten in den Punkten 5 und 13 an die Grundkreisprojektion vervollständigen den Grundriss des Cylinders.

Figur 140.



In der Figur 140 ist in allen Projektionen statt der Ziffer 6′ die Ziffer 5′ und statt der Ziffer 5′ die Ziffer 13′ zu setzen.

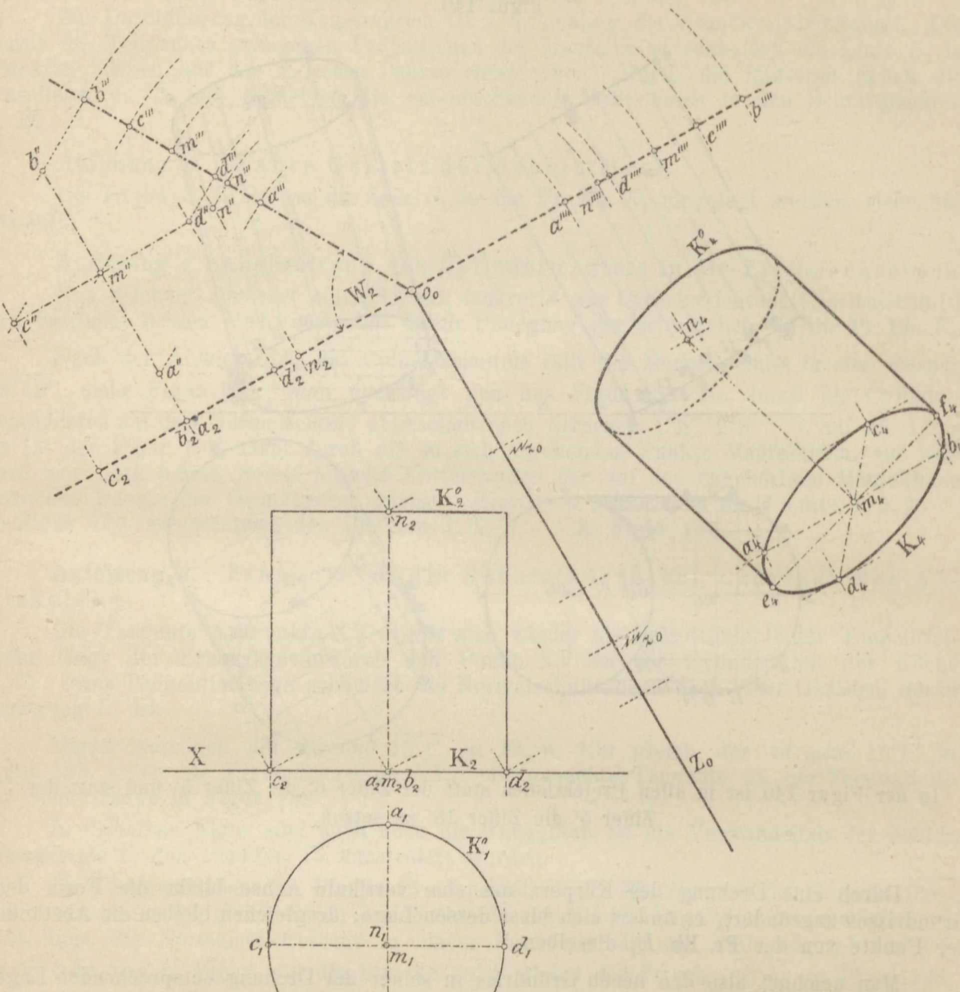
Durch eine Drehung des Körpers um eine vertikale Achse bleibt die Form des Grundrisses ungeändert, es ändert sich bloss dessen Lage; desgleichen bleiben die Abstände der Punkte von der **Pr. Eb.** E_1 dieselben.

Man zeichnet also den neuen Grundriss in seiner der Drehung entsprechenden Lage kongruent dem ursprünglich gezeichneten Grundrisse, siehe Figur 140, zieht dann durch die so sich ergebenden neuen Grundrisspunkte Projizierende und durch die Punkte des Aufrisses Parallele zur X-Achse; auf diesen Parallelen und auf den vorhin genannten Projizierenden liegen die Punkte des neuen Aufrisses.

109) **Aufgabe 45.** Ein senkrechter Kreiscylinder, dessen Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, ist durch Grund- und Aufriss dargestellt, siehe Figur 141. Man soll den Cylinder in eine zur **Pr. Eb.** E_1 unter dem Winkel W_1 geneigte vierte **Pr. Eb.** E_4 projizieren.

Auflösung. Man fällt von den Punkten des Aufrisses Senkrechte zu Z_0, bestimmt für jeden einzelnen Punkt das zugehörige Konstruktionsviereck und macht die Entfernungen der vierten Projektionen von der Z_0-Achse gleich den entsprechenden Seiten der Konstruktionsvierecke; so ist z. B. für den Punkt m die Strecke $\overline{\mathfrak{m}_{z0} m_4} = \overline{0_0 m'''} = 0_0 m''$.

Figur 141.



8) Ueber die rechtwinklige Projektion von Rotationskörpern.

a) Allgemeine Bemerkungen.

110) Dreht man irgend eine ebene Linie um eine in ihrer Ebene liegende Gerade als Achse, so beschreibt diese Linie im Raume eine krumme Oberfläche, eine Drehungs- oder Rotationsfläche.

Der von der Rotationsfläche begrenzte Körper heisst ein Drehungs- oder Rotationskörper.

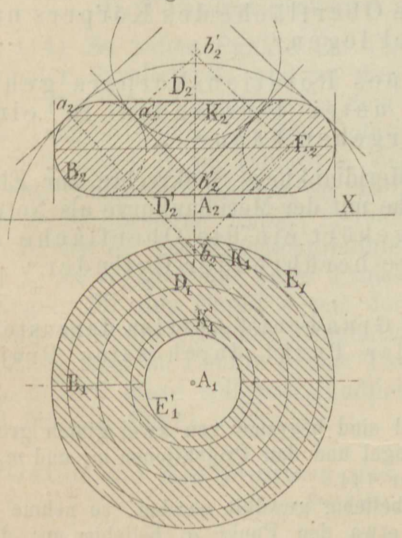
Ist z. B. die sich drehende Linie ein Kreis, die Gerade, um welche die Drehung stattfindet, ein Durchmesser, so beschreibt der Kreis eine Kugeloberfläche und der Rotationskörper ist eine Kugel. Ist die sich drehende Linie eine Gerade, so kann sie die Achse unter einem beliebigen Winkel schneiden oder zu ihr parallel sein oder endlich zu ihr senkrecht stehen, im ersten Falle entsteht der senkrechte Kreiskegel, im zweiten der senkrechte Kreiscylinder, im dritten Falle endlich die Ebene. Die Gerade, um welche die Drehung stattfindet, heisst die Achse der Rotationsfläche oder des Rotationskörpers. Die Linie, welche gedreht wird, heisst ein Meridian des Rotationskörpers. Jeder senkrecht zur Achse des Rotationskörpers geführte ebene Schnitt ist eine Kreislinie und zwar ein Parallelkreis der Rotationsfläche. Jeder die Achse enthaltende ebene Schnitt ist ein Meridian der Fläche. Alle Meridiane sind kongruente Figuren.

Bei der Darstellung eines Rotationskörpers wählt man in der Regel eine der **Pr. Ebn.**, etwa die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zur Achse des Körpers, siehe Figur 142 und 143, dann projizieren sich die zweiten Projektionen der Parallelkreise als Gerade parallel zur X-Achse, die ersten Projektionen als Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt; die ersten Projektionen der Meridiane sind gerade Linien, die zweiten Projektionen dagegen Kurven. Unter den Meridianen befindet sich ein Meridian, der parallel zur **Pr. Eb.** E_2 ist, dieser heisst der Hauptmeridian des Rotationskörpers.

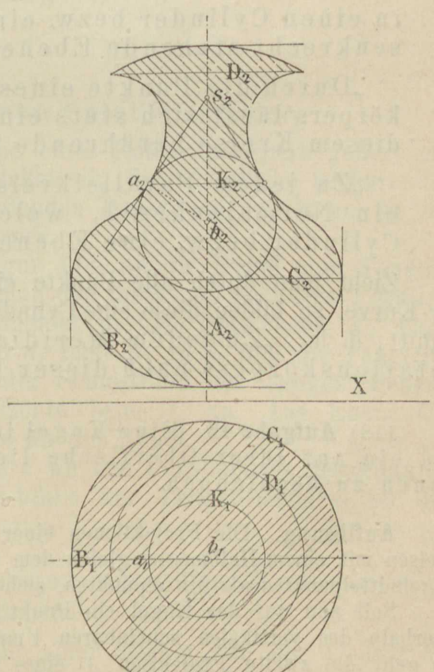
b) Grund- und Aufriss eines Rotationskörpers.

111) Steht die Achse der Rotationskörper senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1, so bildet der Grundriss des Rotationskörpers entweder eine Kreisfläche oder einen Kreisring, siehe Figur 143 und 142. Der Aufriss ist in der Regel begrenzt durch einen Meridian, siehe Figur 143 oder aber durch einen Meridian und eine oder mehrere zur Achse des Rotationskörpers senkrechte Tangenten an die Meridiankurve, siehe Figur 142.

Figur 142.



Figur 143.



c) Einige Eigenschaften der Rotationskörper.

112) Zieht man an den Hauptmeridian eines Rotationskörpers in einem beliebigen Punkte, siehe Figur 142 und 143, eine Tangente, so können folgende Fälle eintreten:

1) die Tangente schneidet die Achse des Körpers unter einem beliebigen Winkel,

2) die Tangente ist parallel zur Achse,

3) die Tangente steht senkrecht zur Achse des Körpers.

Lässt man nun die Tangente in fester Verbindung mit dem Meridian und dreht letzteren um die Achse, so beschreibt die Tangente im Falle 1) einen senkrechten Kreiskegel, im Falle 2) einen senkrechten Kreiscylinder, im Falle 3) endlich eine zur Achse senkrechte Ebene.

In allen drei Fällen berühren die genannten Flächen die Oberfläche des Rotationskörpers nach einem Parallelkreise.

Die Normale im Punkte a an die Meridiankurve schneidet die Körperachse in einem Punkte b; letzterer Punkt kann als Spitze eines Kreiskegels aufgefasst werden mit dem Parallelkreise K als Grundkreis. Man nennt diesen Kegel den Normalenkegel für den Parallelkreis K. Andererseits ist der Punkt b aber noch Mittelpunkt eines Kreises, der die Meridiankurve A im Punkte a berührt und welcher bei der Drehung der Meridiankurve eine Kugel beschreibt, die mit der Oberfläche des Rotationskörpers gleichfalls den Parallelkreis K gemein hat, d. h. sie nach diesem Kreise berührt.

Man kann folgende Sätze aussprechen:

„Zu jedem Parallelkreise eines Rotationskörpers gehört ein die Oberfläche des Körpers nach diesem Kreise berührender Kreiskegel (Tangentenkegel), welcher unter Umständen in einen Cylinder bezw. eine zur Achse des Rotationskörpers senkrecht stehende Ebene übergehen kann."

„Durch die Punkte eines Parallelkreises eines Rotationskörpers lässt sich stets eine die Oberfläche des Körpers nach diesem Kreise berührende Kugel legen."

„Zu jedem Parallelkreise eines Rotationskörpers gehört ein Normalenkegel, welcher unter Umständen in einen Cylinder bezw. eine Ebene übergehen kann."

Zieht man durch alle Punkte einer Meridiankurve Senkrechte zur Ebene der Kurve, so bilden diese eine Cylinderfläche mit der Meridiankurve als Normalschnitt, d. h.: „Zu jedem Meridiane gehört ein die Oberfläche des Rotationskörpers nach dieser Kurve berührender Cylinder."

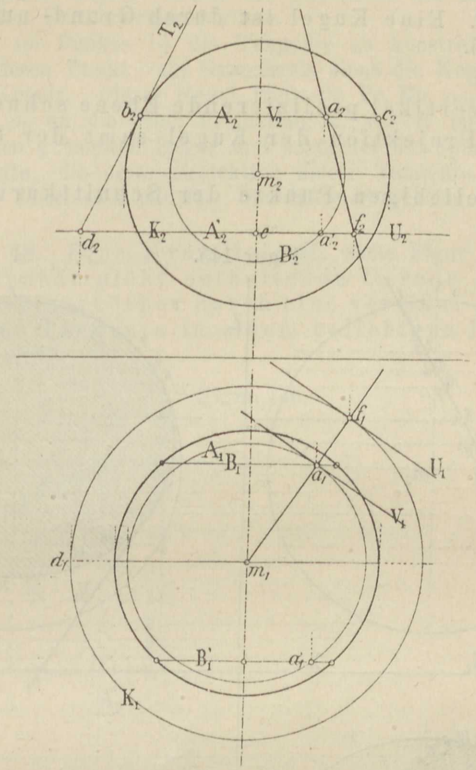
113) **Aufgabe 46** Eine Kugel ist im Grund- und Aufriss darzustellen und ein auf ihrer Oberfläche liegender Punkt durch seine Projektionen zu bezeichnen.

Auflösung. Die Projektionen einer Kugel sind begrenzt von zwei gleich grossen Kreisen mit einem Halbmesser gleich dem der Kugel und den Projektionen m_2 und m_1 des Kugelmittelpunktes als Mittelpunkten, siehe Figur 144.

Soll nun auf der Kugel ein Punkt ganz beliebig gewählt werden, so nehme man innerhalb des vertikalen scheinbaren Umrisses etwa den Punkt a_2 beliebig an; durch ihn geht die zweite Projektion A_2 eines Parallelkreises, dessen erste Projektion A_1 ist, auf A_1 liegt a_1.

Durch a_2 geht aber auch ein zur **Pr. Eb.** E_2 paralleler Kreis B_2 der Kugel, dessen erste Projektion B_1 ist; auf B_1 liegt gleichfalls a_1.

Figur 144.



d) Tangentialebene an einen Rotationskörper.

114) Zu jedem Punkte der Oberfläche eines Rotationskörpers gehört ein bestimmter Parallelkreis und zu diesem wieder ein die Oberfläche berührender Kegel. Die Tangentialebene in dem betreffenden Punkte an den Kegel ist zugleich Tangentialebene an den Rotationskörper.

Soll also z. B. im Punkte a, siehe Figur 144, an die Kugel eine Tangentialebene konstruiert werden, so bestimme man den die Kugel nach dem Parallelkreise A berührenden Kegel; derselbe schneidet die Horizotalebene A_2' nach einem Kreise K. Die Kegelmantellinie durch a_1 trifft K_1 in f_1 und die Tangente U_1 in f_1 an K_1 gibt die erste Projektion der Schnittlinie der Tangentialebene des Kegels für den Punkt a mit der Horizontalebene A_2' an. Die Ebene Ua ist somit auch die gesuchte Tangentialebene an die Kugel.

Zieht man im Punkte a eine Tangente V an den Parallelkreis des Punktes a, so gehört diese selbstverständlich gleichfalls der Tangentialebene an die Kugel für den Punkt a an.

e) Ueber die Bestimmung des Schnittes einer Ebene mit einem Rotationskörper.

115) Zur Ermittelung der Schnittlinie einer Ebene mit der Oberfläche eines Rotationskörpers macht man von der Eigenschaft Gebrauch, dass jede

zur Körperachse senkrechte Ebene die Oberfläche nach einem Parallelkreise, die gegebene Ebene aber nach einer Geraden schneidet. Kreis und Gerade liefern in ihrem Schnitte Punkte der gesuchten Schnittkurve.

116) **Aufgabe 47.** Eine Kugel ist durch Grund- und Aufriss dargestellt, siehe Figur 145.

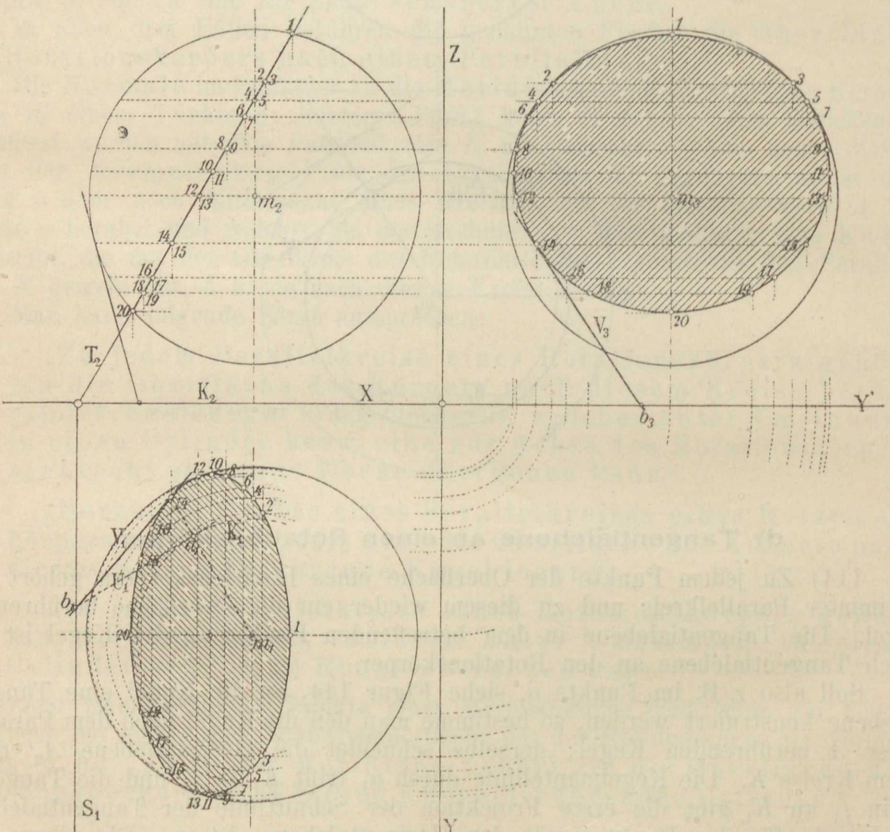
Man soll dieselbe:

a) durch eine vertikal projizierende Ebene schneiden,

b) die dritte Projektion der Kugel samt der Schnittkurve bestimmen.

c) in einem beliebigen Punkte der Schnittkurve eine Tangente konstruieren.

Figur 145.



Auflösung a. Schnitt einer Ebene mit der Oberfläche der Kugel.

Man nehme eine Reihe von Ebenen senkrecht zur Körperachse an; diese schneiden die Kugel nach Kreisen, die Ebene $S_1 T_2$ nach Parallelen zur Spur S_1. Im gegenseitigen Durchschnitte liegen die Schnittpunkte 1 bis 20.

Auflösung b. Die dritte Projektion bestimmt sich, indem man von den ersten Projektionen sämtlicher Punkte Senkrechte zu Y zieht, die Linie Y hierauf in die Lage Y' bringt, dann die Senkrechten zu Y' zeichnet, bis zum Durchschnitt mit den durch die zweiten Projektionen der bezüglichen Punkte gezogenen Parallelen zur X-Achse.

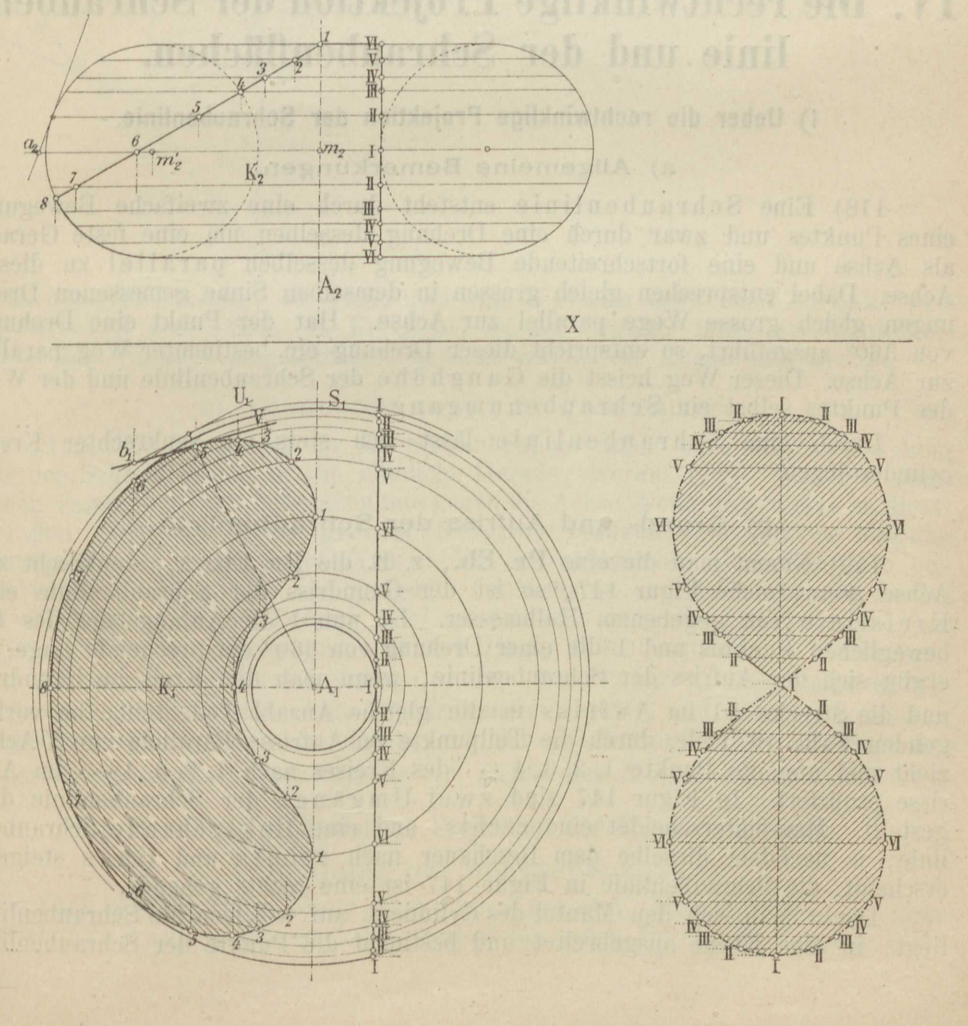
Auflösung c. Um die Tangente in einem Punkte der Schnittkurve zu ermitteln, ist in diesem Punkte zunächst die Tangentialebene an die Kugel zu konstruieren und ihre Schnittlinie mit der Ebene $S_1\,T_2$ zu bestimmen.

Die Tangentialebene in einem Punkte eines Rotationskörpers ist aber zugleich Tangentialebene an jenen Kegel, welcher die Oberfläche des Rotationskörpers nach dem den Punkt enthaltenden Parallelkreise berührt.

Um also etwa im Punkte 14 die Tangente zu konstruieren, zeichnet man den Parallelkreis durch diesen Punkt, als Grundkreis eines die Kugel nach diesem Parallelkreise berührenden Kegels. Dieser Kegel trifft die **Pr. Eb.** nach einem Kreise K. Die Tangente im Punkte a_1 an die erste Projektion K_1 von K ist die erste Spur U_1 der Tangentialebene an den genannten Kegel und schneidet die Spur S_1 in einem Punkte b_1 der gesuchten Tangente; die erste Projektion dieser Tangente ist somit die Linie V_1; die zweite Projektion deckt sich mit T_2. Die dritte Projektion ist V_3.

117) **Aufgabe 48.** Eine Kreislinie K, siehe Figur 146, dreht sich um eine ihren Mittelpunkt nicht enthaltende Gerade A. Man soll den so entstehenden Rotationskörper durch eine vertikal projizierende Ebene schneiden und eine Tangente in einem beliebigen Punkte der Schnittkurve konstruieren.

Figur 146.



Auflösung. Der Aufriss der gegebenen Ebene sei die Gerade 1·8. Die Konstruktion der Schnittkurve bleibt die nämliche wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Senkrecht zur Achse A geführte Ebenen schneiden die Oberfläche des Körpers nach Parallelkreisen, deren erste Projektionen sich als Kreise mit dem Mittelpunkte A_1 darstellen; auf ihnen liegen die ersten Projektionen der Kurvenpunkte.

Die Tangente in einem Punkte, z. B. 5, ergibt sich wieder wie folgt:

Zu dem Parallelkreise des Punktes 5 gehört ein Tangentenkegel, dessen Schnitt mit der durch m gehenden Horizontalebene ein Kreis S_1 mit einem Halbmesser gleich $\overline{m_2 a_2}$ ist.

Die Kegelerzeugende durch den Punkt (5) schneidet die Spur S_1 dieses Kegels in einem Punkte, durch welchen als Tangente an S_1 die Spur U_1 der Tangentialebene geht; sie trifft die Spur der gegebenen Ebene, d. i. im vorliegenden Falle die Projizierende durch 6, in einem Punkte b_1 der gesuchten Tangente V_1.

Anmerkung 42. In der Figur 146 ist noch ein zweiter Schnitt geführt durch eine Ebene parallel zur **Pr. Eb.** E_3 und berührend an den rechtsseitigen Halbmeridian. Die wahre Gestalt des Schnittes ist angegeben.

IV. Die rechtwinklige Projektion der Schraubenlinie und der Schraubenflächen.

1) Ueber die rechtwinklige Projektion der Schraubenlinie.

a) Allgemeine Bemerkungen.

118) Eine Schraubenlinie entsteht durch eine zweifache Bewegung eines Punktes und zwar durch eine Drehung desselben um eine feste Gerade als Achse und eine fortschreitende Bewegung desselben parallel zu dieser Achse. Dabei entsprechen gleich grossen in demselben Sinne gemessenen Drehungen gleich grosse Wege parallel zur Achse. Hat der Punkt eine Drehung von 360^0 ausgeführt, so entspricht dieser Drehung ein bestimmter Weg parallel zur Achse. Dieser Weg heisst die Ganghöhe der Schraubenlinie und der Weg des Punktes selbst ein Schraubenumgang.

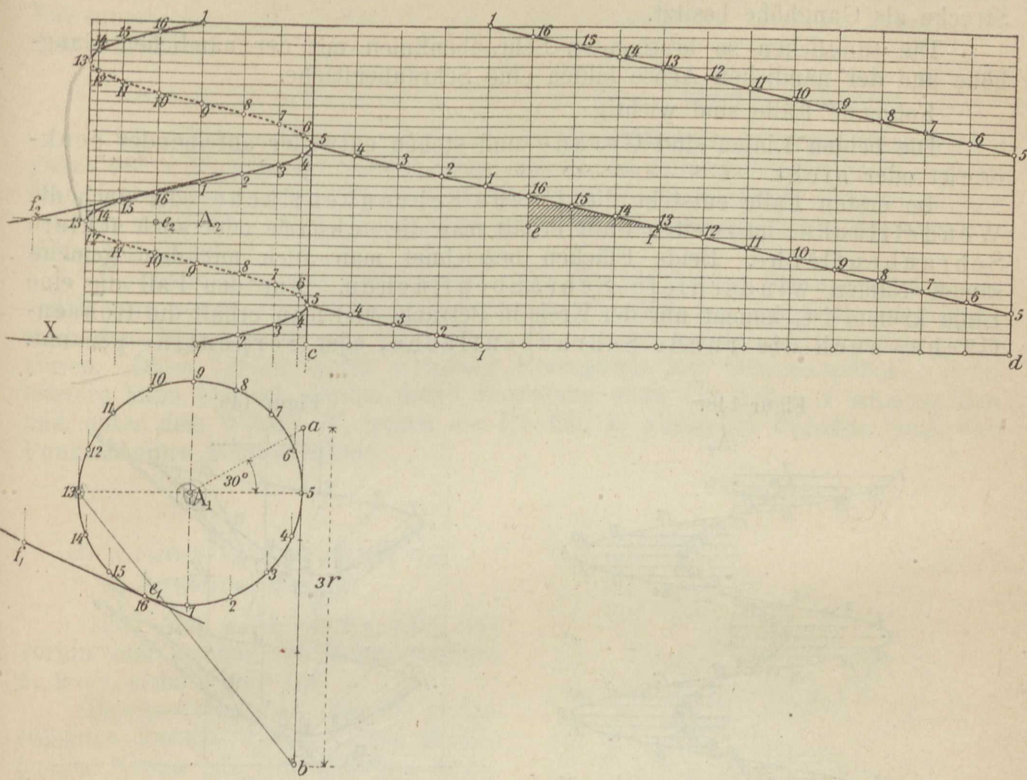
Durch eine Schraubenlinie lässt sich stets ein senkrechter Kreiscylinder legen.

b) Grund- und Aufriss der Schraubenlinie.

119) Nimmt man die eine **Pr. Eb.**, z. B. die **Pr. Eb.** E_1, senkrecht zur Achse A an, siehe Figur 147, so ist der Grundriss der Schraubenlinie eine Kreislinie von gegebenem Halbmesser. Ist nun 1 die Anfangslage des beweglichen Punktes und 1 die einer Drehung von 360^0 entsprechende Lage, so ergibt sich der Aufriss der Schraubenlinie, wenn man den Kreis im Grundriss und die Strecke $\overline{1\,1}$ im Aufriss in die gleiche Anzahl Teile teilt, im vorliegenden Falle 16 Teile, durch die Teilpunkte im Aufrisse Parallele zur X-Achse zieht und nun die Punkte 1, 2, 3, 4 ··· des Kreises nach 1, 2, 3, 4 ··· im Aufrisse projiziert. In Figur 147 sind zwei Umgänge der Schraubenlinie dargestellt. Man unterscheidet eine rechts- und eine linksgehende Schraubenlinie, je nachdem dieselbe dem Beschauer nach rechts und links steigend erscheint; die Schraubenlinie in Figur 147 ist eine rechts gehende.

Denkt man sich den Mantel des Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie liegt, in eine Ebene ausgebreitet und bestimmt die Punkte der Schraubenlinie

Figur 147.



nach der Abwickelung, so erhält man eine Gerade bezw. eine Anzahl von parallelen Geraden. In Figur 147 ist der Cylinder längs der Mantellinie durch den Punkt 5 aufgeschnitten gedacht und in die Ebene ausgebreitet.

c) Tangenten an die Schraubenlinie.

120) Die Tangenten an die Schraubenlinie fallen nach der Abwickelung mit der Schraubenlinie in die nämliche Gerade, woraus folgt, dass die sämtlichen Tangenten einer Schraubenlinie gegen die Achse A oder gegen eine zu dieser Geraden senkrechte Ebene gleiche Neigung besitzen. Die letztere Neigung nennt man den Steigungswinkel der Schraubenlinie. Will man also beispielsweise im Punkt 16 eine Tangente konstruieren, so darf man nur in der Abwickelung etwa das Dreieck $16ef$ so wählen, dass die Punkte e und f in einer Horizontalen liegen und nun den Punkt f_1 im Grundriss so bestimmen, dass die Strecke $\overline{e_1 f_1}$ = der Strecke $\overline{ef}$ ist. Der Punkt f_2 liegt dann in der Horizontalen durch f und in der Projizierenden durch f_1 und gehört der zweiten Projektion der Tangente im Punkte 16 der Schraubenlinie an. Zufolge der Konstruktion ist die gerade Strecke $\overline{e_1 f_1}$ gleich dem Kreisbogen 13 bis 16.

2) Ueber die rechtwinklige Projektion der Schraubenflächen.

a) Entstehung der Schraubenflächen.

121) Sind in einer Ebene zwei Linien gegeben, worunter die eine stets eine Gerade sein muss, so kann man durch jeden Punkt der zweiten Linie

eine Schraubenlinie legen, welche die erste Gerade als Achse und die gleiche Strecke als Ganghöhe besitzt.

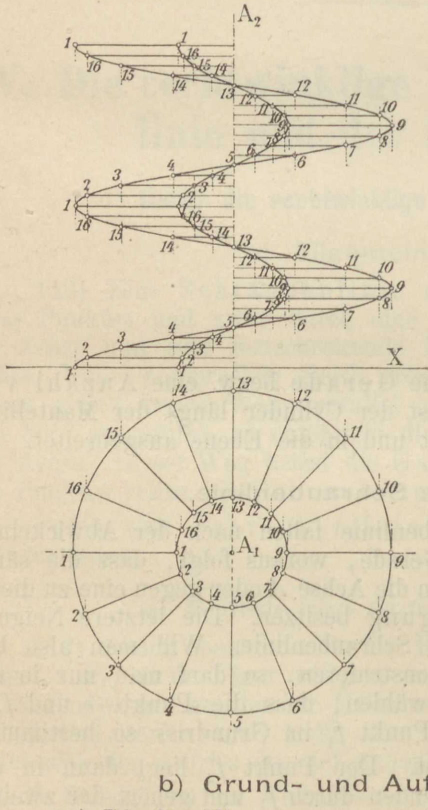
Die sämtlichen so bestimmten Schraubenlinien mit der nämlichen Ganghöhe und der nämlichen Achse bilden eine Schraubenfläche.

Folgende Fälle sind wichtig:

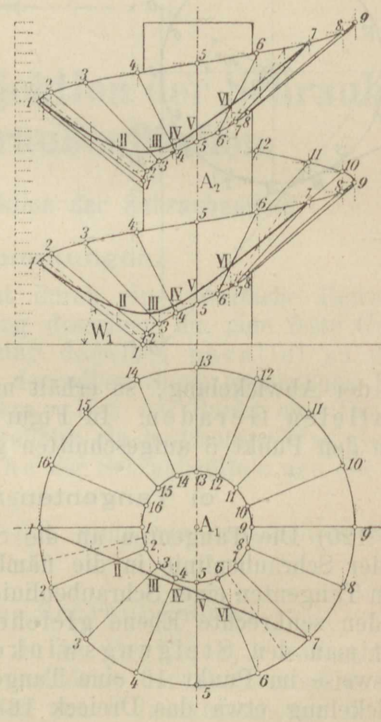
Die beiden Linien sind Gerade und stehen entweder aufeinander senkrecht oder nicht.

Im ersten Falle entsteht die flache Schraubenfläche oder auch die Wendelfläche, im zweiten Falle erhält man die scharfe oder auch schiefe Schraubenfläche. Beide Flächen bezeichnet man auch mit dem gemeinsamen Namen windschiefe Schraubenflächen. Für den Fall die eine Linie krumm ist, kommt nur der Kreis in Betracht und man erhält die Röhrenfläche, auch die runde Schraubenfläche, oder Serpentine genannt.

Figur 148.



Figur 149.



b) Grund- und Aufriss der Wendelfläche.

122) Die **Pr. Eb.** E_1 stehe zur Achse A der Schraubenfläche, s. Figur 148, senkrecht. Ist $\overline{1\,1}$ die zweite Gerade, so konstruiere man durch die Punkte 1 und 1 die in der Figur gezeichneten Schraubenlinien und zeichne noch den die kleinere Schraubenlinie enthaltenden Cylinder.

Verbindet man die Endpunkte gleichbezeichneter Punkte, wie 1, 2, 3 ⋯, so erhält man eine Reihe von Geraden auf der Schraubenfläche, welche sich im Grundriss als Linien nach dem Mittelpunkte A_1, im Aufriss als Parallele zur X-Achse darstellen. Diese Linien kann man auch als Erzeugende der

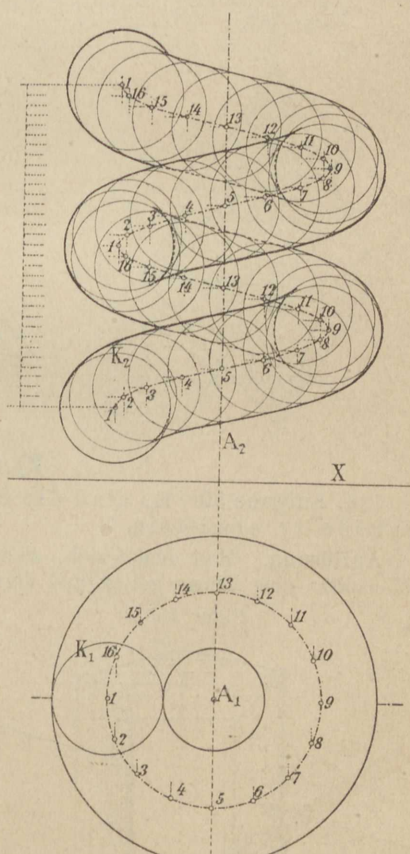
Schraubenfläche bezeichnen, weil letztere auch erzeugt werden kann durch Bewegung einer die Achse A senkrecht schneidenden Geraden längs einer Schraubenlinie.

c) Grund- und Aufriss der scharfen Schraubenfläche.

123) Die Gerade 1·1, s. Fig. 149, ist gegen die Achse A unter einem Winkel gleich $90^0 - W_1$ geneigt; die **Pr. Ebn.** sind wie im vorhergehenden Falle gewählt. Man legt wieder durch die Endpunkte 1 und 1 der Geraden Schraubenlinien von der nämlichen Ganghöhe und zeichnet den die kleinere Schraubenlinie enthaltenden Cylinder.

Verbindet man die gleichbezeichneten Punkte beider Schraubenlinien, so erhält man wieder eine Reihe von Geraden, die sich im Grundriss als Gerade nach dem Mittelpunkte A_1, im Aufriss als Gerade geneigt zur X-Achse projizieren. Diese Linien bilden ebenfalls Erzeugende der Schraubenfläche, denn letztere kann erzeugt werden durch Bewegung einer die Achse A schneidenden und unter dem Winkel W_1 gegen die **Pr. Eb.** E_1 geneigten Geraden längs den Punkten einer Schraubenlinie.

Figur 150.



d) Grund- und Aufriss der Röhrenfläche.

124) Man wähle die **Pr. Ebn.** wie vorhin und zeichne die Schraubenlinie 1, 2 ··· siehe Figur 150.

Beschreibt man nun um die so bestimmten Punkte 1, 2, 3 ··· als Mittelpunkte Kreise mit dem gleichen gegebenen Halbmesser und zeichnet eine diese Kreise berührende Linie, so erhält man hierfür im Grundriss zwei koncentrische Kreise im Aufriss die gezeichnete Kurve.

Die Schraubenfläche kann auch aufgefasst werden als Umhüllungsfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt die Schraubenlinie 1·2·3 ··· durchläuft.

e) Schnitt einer Ebene mit einer windschiefen Schraubenfläche.

125) Um den Schnitt einer Ebene mit einer windschiefen Schraubenfläche zu konstruieren, ermittelt man die Durchschnittspunkte einer Reihe von Erzeugenden der Fläche mit der schneidenden Ebene.

126) **Aufgabe 49.** Eine im Grund- und Aufriss dargestellte windschiefe scharfe Schraubenfläche, siehe Figur 149, ist durch eine horizontalprojizierende Ebene zu schneiden.

Auflösung. Im Grundriss erhält man unmittelbar die Schnittpunkte I·II·III···, welche auf die zugehörigen zweiten Projektionen der Erzeugenden zu projizieren sind. In der Figur sind noch einige Zwischenerzeugende angedeutet.

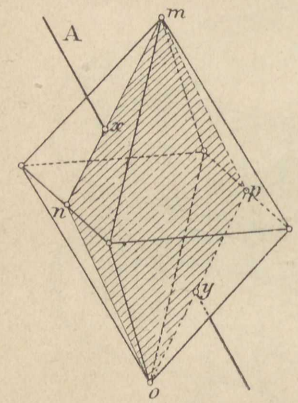
Anmerkung 43. In den Figuren 148 bis 150 ist überall nur ein begrenztes Stück der Schraubenfläche dargestellt.

V. Ueber die Bestimmung des Schnittes einer Geraden mit der Oberfläche eines Körpers.

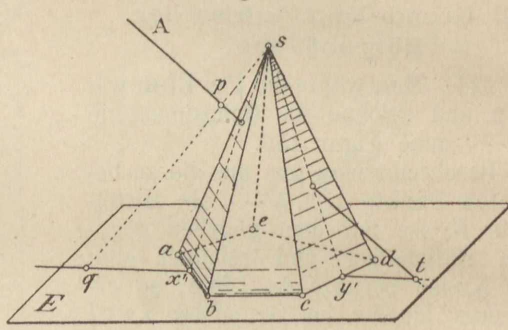
1) Allgemeine Bemerkungen.

127) Die Aufgabe, den Schnitt einer Geraden mit der Oberfläche eines Körpers zu konstruieren, ist mit der Aufsuchung eines ebenen Körperschnittes zugleich gelöst; denn denkt man sich durch die gegebene Gerade, s. Figur 151, eine Ebene von ganz beliebiger Lage geführt und ihren Schnitt $mnop$ mit der Oberfläche des Körpers ermittelt, so wird die Schnittfigur im allgemeinen die Gerade in zweien Punkten, einem Eintrittspunkte x und einem Austrittspunkte y treffen. Durch zweckmässige Wahl der die Gerade enthaltenden Hilfsebene wird sich die Ermittelung der Schnittpunkte x und y mehr oder weniger vereinfachen.

Figur 151.



Figur 152.

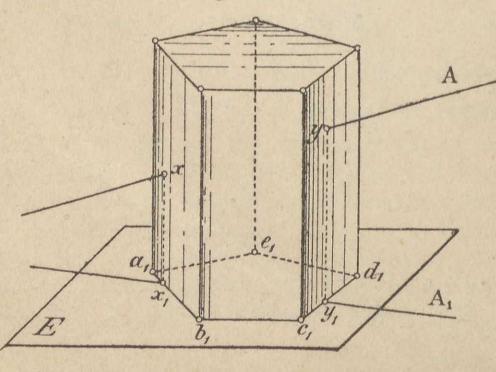


2) Aufgaben.

128) **Aufgabe 50.** Es sind die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Pyramide zu ermitteln.

Auflösung. Man denke sich, siehe Figur 152, durch die Gerade A und die Pyramidenspitze eine Ebene gelegt und deren Schnitt mit der Pyramide aufgesucht. Dieser Schnitt besteht aus zweien, die Spitze s enthaltenden Geraden sx' und sy', gehend durch die Schnittpunkte x' und y', der gleichnamigen Spuren der Ebene sA und der Pyramide. Die Spur tq der Ebene sA ermittelt man am einfachsten als Verbindungslinie der Spuren s und t der gegebenen Geraden A und einer zweiten beliebigen Geraden sp der Ebene sA.

Figur 153.



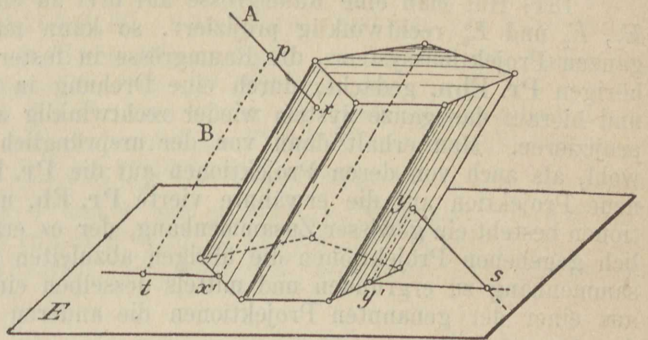
129) **Aufgabe 51.** Es sind die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Prisma zu ermitteln.

Auflösung. Steht das Prisma auf einer der **Pr. Ebn.**, etwa der **Pr. Eb.** E_1

senkrecht, siehe Figur 153, so wird die erste Projektion A_1 der Geraden A die erste Projektion des Prismenmantels, d. i. das Vieleck $a_1 b_1 c_1 d_1$ in den ersten Projektionen x_1 und y_1 der gesuchten Schnittpunkte treffen.

Ist das Prisma geneigt zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, siehe Figur 154, so denke man sich durch die Gerade A eine Ebene parallel zur Prismenrichtung geführt; diese trifft das Prisma im allgemeinen nach zweien zu den Seitenkanten parallelen Geraden, gehend durch die Schnittpunkte x' und y' der gleichnamigen Spuren von Ebene und Prisma. Die Spur st der Ebene Ats ermittelt man am einfachsten als Verbindungslinie der Spuren s und t der Geraden A und einer durch einen beliebigen Punkt p von A zur Prismenrichtung gezogenen Parallelen B.

Figur 154.



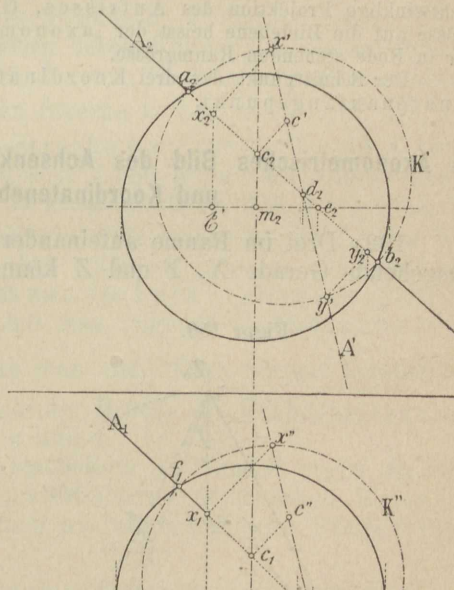
Anmerkung 44. Die angegebenen Konstruktionen bleiben ganz die gleichen, wenn statt einer Pyramide oder eines Prismas ein Kegel oder Cylinder vorliegt.

Man führe die Konstruktion durch, für den Fall, dass der betreffende Körper durch Grund- und Aufriss dargestellt ist.

130) **Aufgabe 52.** Es sind die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel zu konstruieren.

Auflösung. Man denke sich durch die Gerade A, siehe Figur 155, eine vertikal projizierende Ebene gelegt, so schneidet diese die Kugel nach einer Kreislinie, deren zweite Projektion durch die Strecke $\overline{a_2 b_2}$ dargestellt ist. Legt man nun die Kreisebene samt der Geraden A in die den Kugelmittelpunkt enthaltende Parallelebene zur **Pr. Eb.** E_2 um, so gelangt der umgelegte Kreis nach K', die umgelegte Gerade A nach A', und es schneiden sich K' und A' in x' und y', denen auf A_2 und A_1 bezw. die Projektionen x_2, x_1 und y_2, y_1 der gesuchten Schnittpunkte x und y der Geraden A mit der Kugel entsprechen. A' geht durch d_2 und es ist ausserdem $\overline{c_2 c'} = \overline{m_1 c_1}$.

Figur 155.



In gleicher Weise kann man aber auch die horizontal projizierende Ebene der Geraden A zur Konstruktion benützen, indem man den Schnittkreis dieser Ebene mit der Kugel samt der Geraden A in die den Kugelmittelpunkt enthaltende Horizontalebene umlegt; die Umlegung K'' des Schnittkreises wird von der Umlegung $e_1 c''$ der Geraden A in den Punkten x'' und y'' getroffen, denen auf A_1 und A_2 wieder die Projektionen x_1, x_2 und y_1, y_2 der Schnittpunkte x und y der Geraden A mit der Kugel bezw. entsprechen. Es ist $\overline{c_1 c''} = \overline{m_2 c_2}$.

VI. Die rechtwinklige Axonometrie.

1) Begriff und Zweck der rechtwinkligen Axonometrie.

131) Hat man eine Raumgrösse auf drei zu einander senkrechte **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 rechtwinklig projiziert, so kann man die räumliche Lage des ganzen Projektionssystems, die Raumgrösse in fester Verbindung mit den zugehörigen **Pr. Ebn.** gedacht, durch eine Drehung in beliebiger Weise verändern und hierauf das ganze System wieder rechtwinklig auf eine neue vierte **Pr. Eb.** projizieren. Man erhält dann von der ursprünglich gegebenen Raumgrösse sowohl, als auch von deren Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 je eine neue Projektion auf die erwähnte vierte **Pr. Eb.** und zwischen diesen Projektionen besteht ein gewisser Zusammenhang, der es ermöglicht, aus den ursprünglich gegebenen Projektionen die übrigen abzuleiten und umgekehrt. Diesen Zusammenhang zu ergründen und mittels desselben ein Verfahren anzugeben, um aus einer der genannten Projektionen die anderen abzuleiten, ist die Aufgabe der Axonometrie.

Anmerkung 45. Die in 131) erwähnte vierte **Pr. Eb.** heisst die axonometrische **Pr.Eb.** oder auch kurz die Bildebene. Die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 sollen kurzweg die Koordinatenebenen heissen; ihre gegenseitigen Durchschnitte X, Y und Z sind die Koordinatenachsen, sie bilden zusammen das Achsenkreuz.

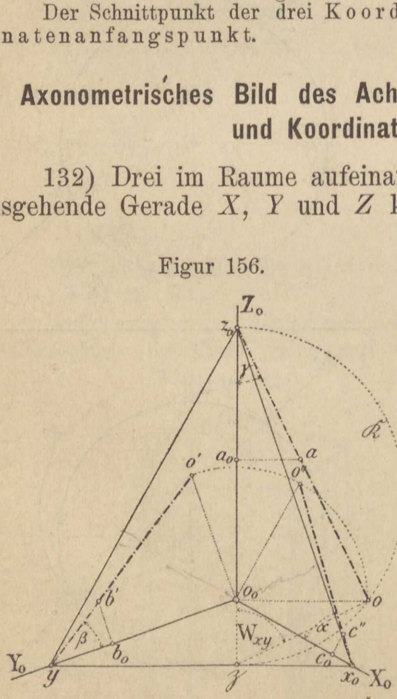
Anmerkung 46. Die rechtwinklige Projektion einer Raumgrösse auf die Bildebene heisst ihre axonometrische Projektion oder ihr „axonometrisches Bild.“ Die rechtwinklige Projektion des Aufrisses, Grundrisses oder Seitenrisses der Raumgrösse auf die Bildebene heisst der „axonometrische Auf-, Grund- oder Seitenriss“ der in Rede stehenden Raumgrösse.

Der Schnittpunkt der drei Koordinatenebenen bezw. Achsen heisst der Koordinatenanfangspunkt.

2) Axonometrisches Bild des Achsenkreuzes, Neigung der Koordinatenachsen und Koordinatenebenen zur Bildebene.

132) Drei im Raume aufeinander senkrecht stehende von einem Punkte o ausgehende Gerade X, Y und Z können als rechtwinklige Projektion auf eine Ebene drei Gerade X_0, Y_0 und Z_0, siehe Figur 156, so haben, dass der Winkel von je zweien dieser Geraden von der dritten geteilt wird, d. h. dass die Verlängerung einer jeden der drei Geraden in den Winkelraum der beiden anderen fällt; denn zeichnet man ein spitzwinkliges Dreieck $x_0 y_0 z_0$ und konstruiert in demselben die Höhen X_0, Y_0 und Z_0, so kann die Ebene des Dreieckes $x_0 y_0 z_0$ als die Bildebene bezw. als eine Parallelebene zur letzteren aufgefasst werden.

Figur 156.



Denkt man sich nun durch die Achse Z_0 eine Ebene E senkrecht zur Bildebene geführt, so bilden im Raume die Achse Z und die Schnittlinie der Ebene E mit der Bildebene und der Ebene XY ein rechtwinkliges Dreieck, dessen axonometrisches Bild durch die Gerade $z_0\mathfrak{z}$ dargestellt ist und dessen wahre Gestalt durch Umlegung der Dreiecksebene in die Bildebene erhalten werden kann. Zu diesem Zwecke braucht man nur über $z_0\mathfrak{z}$ als Durchmesser einen Kreis $\mathfrak{K}$ zu beschreiben, so liegt auf ihm und auf der Senkrechten durch o_0 zu $z_0\mathfrak{z}$ die Umlegung o des Scheitels des rechten Winkels. Das Dreieck $z_0 o \mathfrak{z}$ ist somit das gesuchte Dreieck. In demselben ist bei z_0 der Winkel γ der Achse Z und bei $\mathfrak{z}$ die Winkel W_{xy} der Ebene XY mit der Bildebene enthalten. Die Höhe $\overline{o_0 o}$ des Dreieckes $z_0 \mathfrak{z} o$ gibt den Abstand des Punktes o, d. h. des Koordinatenanfangspunktes von der Bildebene an.

Nachdem der Abstand des Punktes o von der Bildebene konstruiert ist, ergeben sich die Winkel β und α der Achsen Y und X mit der Bildebene sehr einfach dadurch, dass man $\overline{o_0 o'}$ und $\overline{o_0 o''}$ bezw. senkrecht zu Y_0 und X_0 gleich $\overline{o_0 o}$ zeichnet und die Punkte o' und o'' mit y_0 bezw. x_0 verbindet. Die Komplementswinkel der Winkel β und α geben die Winkel W_{zx} und W_{zy} der Koordinatenebenen XZ und YZ mit der Bildebene in wahrer Grösse an.

3) Bestimmung des axonometrischen Bildes einer auf einer Koordinatenachse befindlichen Strecke. Verkürzungsverhältnisse.

133) Soll auf den Koordinatenachsen etwa vom Koordinatenanfangspunkte aus eine Strecke von beliebiger Länge l abgetragen werden, so zeichnet man, siehe Figur 159, die Umlegungen oz_0, $o'y_0$ und $o''x_0$ der drei Achsen Z, Y und X, nach Anleitung von 132), trägt auf den erstgenannten Linien die Strecke l nach $\overline{oa}$, $\overline{o'b'}$ und $\overline{o''c''}$ ab und zieht durch die Punkte a, b' und c'' Senkrechte zu den Achsenbildern Z_0, Y_0 und X_0, so geben deren Fusspunkte die axonometrischen Bilder a_0, b_0 und c_0 der Endpunkte der vom Koordinatenanfangspunkte o auf den Achsen Z, Y und X abgetragenen Strecke l, d. h. es ist $\overline{o_0 a_0}$, $\overline{o_0 b_0}$ und $\overline{o_0 c_0}$ je das axonometrische Bild der Strecke l auf der Z-, Y- und X-Achse.

Zwischen der wahren Länge der Strecke l und ihren axonometrischen Bildern besteht der in 33) u. 34) angegebene Zusammenhang, d. h. die axonometrischen Bilder $\overline{o_0 a_0}$, $\overline{o_0 b_0}$ und $\overline{o_0 c_0}$ sind kürzer als die wahre Länge l. Das Verhältnis zwischen der Bildlänge und der wahren Länge einer auf den Koordinatenachsen liegenden Strecke nennt man das Verkürzungsverhältnis für diese Achse. Im vorliegenden Falle hat man folgende Verkürzungsverhältnisse $\frac{\overline{o_0 a_0}}{l}$, $\frac{\overline{o_0 b_0}}{l}$ und $\frac{\overline{o_0 c_0}}{l}$; drückt man die Werte dieser Verhältnisse durch Zahlen aus, so nennt man die Zähler der Brüche die Verhältniszahlen; man bezeichnet sie in der Regel mit m, n und p.

Je nach der Lage der drei Koordinatenachsen X, Y und Z gegen die Bildebene besitzen die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse verschiedene Werte und man unterscheidet hiernach die verschiedenen axonometrischen Projektionsarten.

Anmerkung 47. Das zu einer Koordinatenachse gehörige Verkürzungsverhältnis kommt auch jeder zu dieser Achse parallelen Geraden zu.

Anmerkung 48. Damit die drei Grössen m, n und p als Verhältniszahlen einer axonometrischen Projektion genommen werden können, muss zwischen ihnen die Beziehung bestehen:

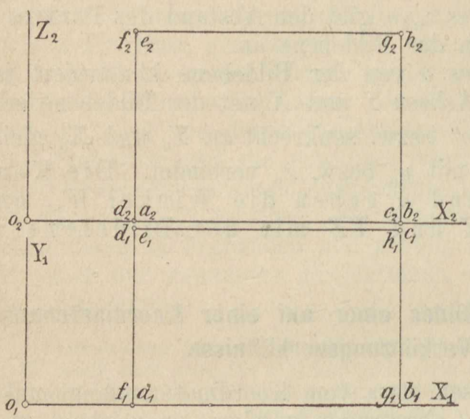
$$m^2 + n^2 > p^2$$
$$m^2 + p^2 > n^2$$
$$n^2 + p^2 > m^2$$

(siehe des Verfassers Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 2. Hälfte).

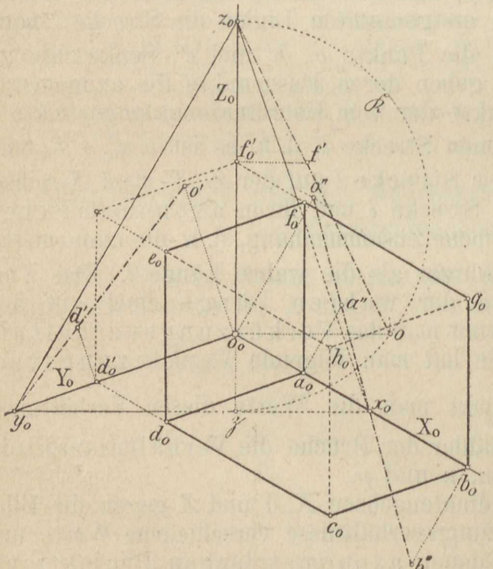
4) Axonometrisches Bild eines Körpers.

134) Soll von einem durch Grund- und Aufriss dargestellten Körper, z. B. von dem in Figur 157 gezeichneten rechtwinkligen Parallelepipedon ein axonometrisches Bild hergestellt werden, so kann man den Körper in Verbindung setzen mit dreien von einem beliebigen Punkte ausgehenden und aufeinander senkrecht stehenden Koordinatenachsen X, Y und Z, die zweckmässig parallel zu den Kantenrichtungen des Parallelepipedons gewählt werden und nunmehr das letztere samt den Koordinatenachsen in eine gegen diese beliebig geneigte Bildebene projizieren, wodurch dann ein axonometrisches Bild entstehen kann, wie es in Figur 157 dargestellt ist. Die Ableitung der Figur 158 aus der Figur 157 kann wie folgt vorgenommen werden:

Figur 157.



Figur 158.



Man zeichne zunächst das spitzwinklige Dreieck $x_0 y_0 z_0$, s. Fig. 158, ganz beliebig und nehme seine Höhen als die axonometrischen Bilder X_0, Y_0 und Z_0 der Koordinatenachsen X, Y und Z an. Bestimmt man nunmehr deren Neigungen zu den Koordinatenebenen nach Anleitung von 132) und trägt auf der umgelegten X-Achse die Strecken $\overline{o''a''}$ und $\overline{o''b''}$ gleich den wahren Längen der Strecken $\overline{oa}$ und $\overline{ob}$, also gleich den Strecken $\overline{o_1 a_1}$ und $\overline{o_1 b_1}$ in Figur 157 ab, so erhält man die axonometrischen Bilder a_0 und b_0 von zweien Ecken des Parallelepipedons. In gleicher Weise lassen sich auch auf den umgelegten Achsen Y und Z die Strecken $\overline{o'd'}$ und $\overline{of'}$ gleich den wahren Längen der Strecken $\overline{ad}$ und $\overline{af}$, also gleich $\overline{a_1 d_1}$ und $\overline{a_2 f_2}$ in Figur 157 abtragen und die axonometrischen Bilder d_0' und f_0' auf Y_0 und Z_0 ermitteln. Zieht man durch die vier Punkte a_0, b_0, d_0' und f_0' die noch möglichen Parallelen zu den Achsen des Achsenkreuzes, so ergeben sich hierdurch die Punkte c_0, d_0, f_0, g_0 und damit auch die noch übrigen Ecken e_0 und h_0 des Parallelepipedons.

Anmerkung 49. Auf die in 134) angegebene Art und Weise ist man im Stande, zu jedem durch Grund- und Aufriss dargestellten Körper, welche Gestalt er auch haben mag, ein axonometrisches Bild zu konstruieren. Man braucht zu diesem Zwecke ja nur den Körper auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz X, Y, Z zu beziehen und die axonometrische Projektion des letzteren beliebig zu wählen. Bestimmt man dann für jeden einzelnen Punkt des

Körpers seine drei Koordinaten und überträgt dieselben so, wie in 134) gezeigt wurde, auf die Achsenbilder X_0, Y_0 und Z_0, so liefern die Parallelen zu den Achsenbildern durch die so erhaltenen Punkte auf den Achsen die axonometrischen Bilder der Punkte des Körpers, welche in derselben Reihenfolge miteinander zu verbinden sind, wie dies in den gegebenen rechtwinkligen Projektionen der Fall ist.

Jeder Punkt des Raumes ist dabei vollständig festgelegt und bezogen auf die drei Koordinatenachsen X, Y, Z, sobald man seine Abstände von den drei Koordinatenebenen der Grösse und dem Vorzeichen nach kennt. Diesen Koordinaten entsprechen im axonometrischen Bilde drei axonometrische Koordinaten, deren Längen durch die Längen der wirklichen Koordinaten geteilt, die Verkürzungsverhältnisse ergeben.

Anmerkung 50. Bei dem in 134 angegebenen Verfahren kann man das Achsenkreuz im axonometrischen Bilde beliebig wählen und findet hieraus die Verkürzungsverhältnisse für alle auf den Achsenbildern oder parallel zu denselben aufzutragenden Strecken. Häufig nimmt man aber von vornherein die Verkürzungsverhältnisse als gegeben an; dann ist aber das Achsenkreuz im axonometrischen Bilde nicht mehr beliebig wählbar, es muss vielmehr in ganz bestimmter Weise angenommen bezw. konstruiert werden. Näheres hierüber siehe des Verfassers Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 2. Hälfte.

5) Die axonometrischen Projektionsarten.

135) Die gebräuchlichsten axonometrischen Projektionsarten sind:

1) Die trimetrische Projektion: Die drei Achsen X, Y und Z haben gegen die Bildebene verschiedene Neigungen. m, n und p sind von einander verschieden.

2) Die dimetrische Projektion: Zwei Achsen, in der Regel die X- und Z-Achse, sind gegen die Bildebene gleich geneigt, es ist $m = p$.

3) Die isometrische Projektion: Die drei Achsen X, Y und Z besitzen gegen die Bildebene die gleiche Neigung; es ist $m = n = p$.

Den Winkeln α, β und γ können schliesslich noch spezielle Werte zukommen, insbesondere kann einer dieser Winkel gleich Null oder ein Rechter sein. Im ersten Falle läuft die bezügliche Achse parallel zur Bildebene, die Ebene der beiden anderen Achsen steht senkrecht hierzu. Die so entstehende axonometrische Projektion heisst eine Ueber-Eck-Projektion.

Ist einer der Winkel α, β oder γ ein Rechter, so steht die bezügliche Achse senkrecht zur Bildebene, die Ebene der übrigen beiden Achsen fällt in die Bildebene. Man erhält die gewöhnliche rechtwinklige Parallelprojektion und zwar einen Aufriss für $\beta = 90^0$, die Bildebene ist die vertikale **Pr. Eb.** E_2, einen Grundriss für $\gamma = 90^0$, die Bildebene ist die horizontale **Pr. Eb.** E_1, endlich einen Seitenriss für $\alpha = 90^0$, die Bildebene ist die dritte zur horizontalen und vertikalen **Pr. Eb.** senkrecht stehende **Pr. Eb.** E_3.

a) Die trimetrische Projektion.

136) Für die gebräuchlichste und die besten Bilder liefernde trimetrische Projektion erhält man $m:n:p = 9:5:10$. Für diesen Fall ist $\alpha = 27^0\,31'\,36''$; $\beta = 60^0\,29'\,3''$; $\gamma = 9^0\,49'\,35''$.

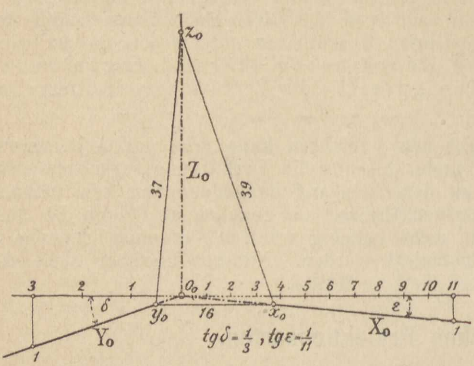
Die Werte der Verkürzungsverhältnisse sind:

0,8868 für die X-Achse,
0,4927 „ „ Y- „
0,9853 „ „ Z- „

Für das Achsenkreuz sind die folgenden Konstruktionen die zweckmässigsten:

Erste Konstruktion: Man zeichne, siehe Figur 159, ein Dreieck $x_0y_0z_0$, mit den Seitenlängen $\overline{x_0y_0} = 16$, $\overline{y_0z_0} = 37$, $\overline{z_0x_0} = 39$ Einheiten, so bilden dessen Höhen die Achsenbilder der trimetrischen Projektion.

Figur 159.



Zweite Konstruktion: Auf einer Horizontalen trage man, siehe Figur 159, von einem Punkte o_0 aus nach der einen Seite 11, nach der anderen Seite 3 Teile von unter sich gleicher, sonst aber beliebiger Grösse ab, errichte je in dem Endpunkte der letzten Teilstrecke eine Vertikale gleich einem Teile, so geben die Verbindungslinien der zweiten Endpunkte dieser Senkrechten mit o_0 die Achsenbilder X_0 und Y_0 der trimetrischen Projektion. Das Achsenbild Z_0 ist vertikal gerichtet.

Anmerkung 51. Bei allen Aufgaben, in welchen es sich darum handelt, Körper, wie z. B. Bauwerke oder Teile von solchen, durch Zeichnung axonometrisch darzustellen, treten hauptsächlich drei Hauptrichtungen, nämlich die Längen-, Breiten- und die Höhenrichtung am vorwiegendsten in die Erscheinung; die ersteren beiden Richtungen sind in der Regel horizontal, letztere Richtung ist vertikal. Für den Zeichner ist es aber bequem, die vertikale Richtung parallel zu einer Seite des Reissbrettes zu nehmen und zwar parallel zu jener Seite längs welcher die Reissschiene geführt wird; die Vertikallinien sind dann leicht mittels der rechtwinkligen Dreiecke zu zeichnen.

Soll man von einem Bauwerk ein axonometrisches Bild entwerfen, so ist es zweckmässig, die Verkürzungen auf den Vertikallinien, d. h. auf den zur Z-Achse parallelen Körperkanten möglichst gering zu wählen. Für eine der horizontalen Richtungen, in der Regel die Y-Richtung, wird dagegen eine möglichst grosse Verkürzung angenommen. Man erhält hierdurch für alle zur XZ-Ebene parallelen Begrenzungsflächen möglichst geringe Abweichungen von der wahren Gestalt, dagegen für alle zur YZ-Ebene parallelen Flächen grössere Verzerrungen. Die besten Bilder liefert nun erfahrungsgemäss die trimetrische Projektion mit den Verhältniszahlen 9 : 5 : 10.

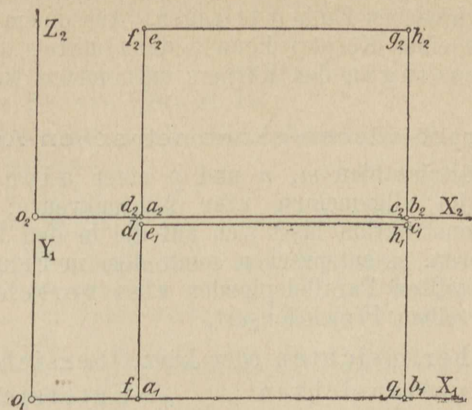
b) Die axonometrischen Massstäbe.

137) In Rücksicht auf die in 136) angegebenen Werte der Verkürzungsverhältnisse für die trimetrische Projektion erhält man für einen Punkt mit den Koordinaten x, y, z die axonometrischen Koordinaten $x_0 = 0{,}8868\,x$, $y_0 = 0{,}4927\,y$ und $z = 0{,}9853\,z$. Wollte man nun für jeden einzelnen axonometrisch darzustellenden Punkt seine axonometrischen Koordinaten berechnen, so wäre dies eine ziemlich mühsame Arbeit. Man zeichnet sich vielmehr zweckmässig für jede Koordinatenachse einen Massstab derart, dass für die X_0-Achse die Längeneinheit gleich 0,8868, für die Y_0-Achse gleich 0,4927, für die Z_0-Achse endlich gleich 0,9853 der wahren Längeneinheit beträgt. Die so bestimmten Massstäbe heissen dann die axonometrischen oder Achsenmassstäbe der trimetrischen Projektion. Für eine solche sind drei Massstäbe erforderlich.

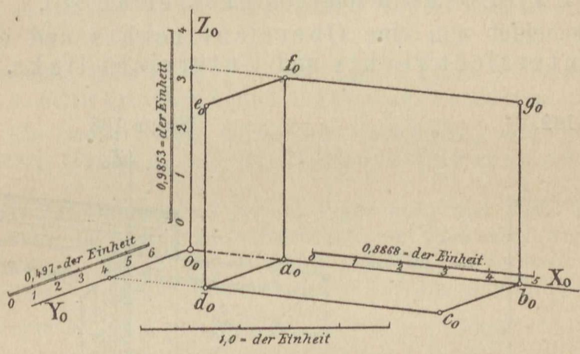
Misst man nun im rechtwinkligen Grund- und Aufriss die Koordinaten eines Punktes in wahrer Grösse, so erhält man die entsprechenden axonometrischen Koordinaten mittels der drei Achsenmassstäbe.

In Figur 161 ist auf die eben angegebene Art die trimetrische Projektion des in Figur 160 durch Grund- und Aufriss gegebenen Parallelepipedons dargestellt. Es ist demnach: $\overline{o_0a_0} = 0{,}8868 \cdot \overline{o_1a_1}$; $\overline{a_0b_0} = 0{,}8868 \cdot \overline{a_1b_1}$; $\overline{a_0d_0} = \overline{b_0c_0} = 0{,}4927 \cdot \overline{a_1d_1}$; $\overline{a_0f_0} = 0{,}9853 \cdot \overline{a_2f_2}$.

Figur 160.



Figur 161.



c) Die hypothetische Vergrösserung einer axonometrischen Projektion.

138) Bei einer trimetrischen Projektion sind nach dem Vorangegangenen drei von einander verschiedene Massstäbe erforderlich. Für praktische Zwecke ist es wünschenswert, diese Anzahl zu vermindern. Man erreicht dies dadurch, dass man die z-Koordinaten im axonometrischen Bilde unverkürzt, d. h. in wahrer Grösse aufträgt, sie also im Verhältnis $\frac{1}{0,9853}$ vergrössert. Soll das Verhältnis zwischen den axonometrischen Koordinaten eines Punktes nun unverändert bleiben, so müssen entsprechend auch die x- und y-Koordinaten vergrössert werden. Man erhält auf diese Weise nicht die eigentliche axonometrische Projektion eines Körpers, sondern eine im Verhältnis $\frac{1}{0,9853}$ vergrösserte Darstellung, welche der eigentlichen axonometrischen Projektion ähnlich ist. Für die trimetrische Projektion mit den Verhältniszahlen 9 : 5 : 10 sind dann die z-Koordinaten in wahrer Grösse, die y-Koordinaten in halber Grösse, die x-Koordinaten dagegen in $^9/_{10}$ der wahren Grösse aufzutragen.

Die so erzielte Vergrösserung des axonometrischen Bildes nennt man die hypothetische Vergrösserung. Der Zweck der Darstellung, ein anschauliches Bild eines Körpers zu geben, wird, weil das vergrösserte Bild dem wirklichen Bilde ähnlich ist, nicht vereitelt, sondern in bequemer Weise wie früher erreicht, weil nur noch zwei von einander verschiedene

Massstäbe erforderlich sind, für welche die Einheiten nunmehr gleich der Hälfte bezw. gleich $^9/_{10}$ der wirklichen Einheit betragen. Aus einem derart konstruierten axonometrischen Bilde eines Körpers können dann mittels der Achsenmassstäbe die wahren Ausmessungen des Körpers entnommen werden.

d) Die verschiedenen axonometrischen Ansichten.

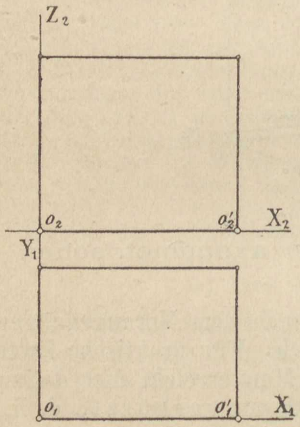
139) Den Verhältniszahlen m, n und p einer axonometrischen Projektion entsprechen im allgemeinen vier Achsenkreuze; denn die in 136) angegebene zweite Konstruktion lässt sich auf die in den Figuren 163 und 164 gezeigte Art durchführen, es entsprechen somit dem in Figur 162 durch Grund- und Aufriss dargestellten Parallelepipedon vier verschiedene axonometrische Bilder derselben Projektionsart,

nämlich zwei Oberansichten oder kurz Obersichten und
„ Unteransichten „ „ Untersichten.

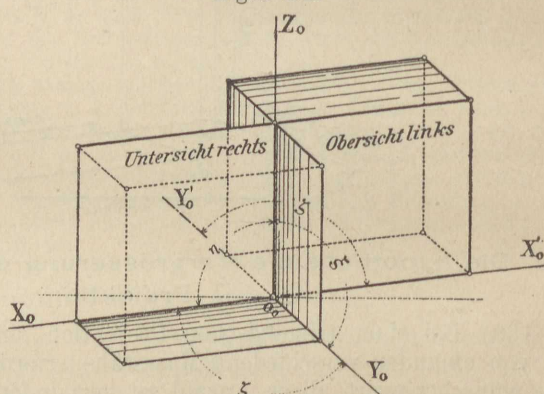
Bei den Obersichten ist der Winkel der X- und Z-Achse stets kleiner als 90^0, bei den Untersichten dagegen grösser als 90^0.

Man unterscheidet nun eine Obersicht rechts und eine Obersicht links, desgl. Untersicht rechts und Untersicht links.

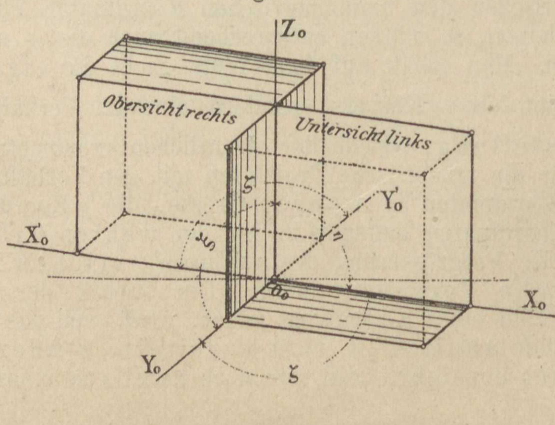
Figur 162.



Figur 163.



Figur 164.



Bei Obersicht rechts und Untersicht links ist dem Beschauer die obere rechte bezw. die untere linke Körperecke des Parallelepipedons zunächst gelegen.

Bei Obersicht links und Untersicht rechts dagegen die obere linke bezw. untere rechte Körperecke.

Für Obersicht rechts gilt das Achsenkreuz Z_0, X_0', Y_0' \
„ Untersicht links „ „ „ Z_0, X_0, Y_0 } s. Fig. 164.
„ Obersicht links „ „ „ Z_0, X_0', Y_0' \
„ Untersicht rechts „ „ „ Z_0, X_0, Y_0 } s. Fig. 163.

Anmerkung 52. Für die Konstruktion des Achsenkreuzes der trimetrischen Projektion, entsprechend den verschiedenen Ansichten kann man sich folgende Anhaltspunkte einprägen:

Untersicht links: 11 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach unten; 3 Teile links von Z_0, 1 Teil nach unten.

Untersicht rechts: 11 Teile links von Z_0, 1 Teil nach unten, 3 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach unten.

Obersicht links: 11 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach oben; 3 Teile links von Z_0, 1 Teil nach oben.

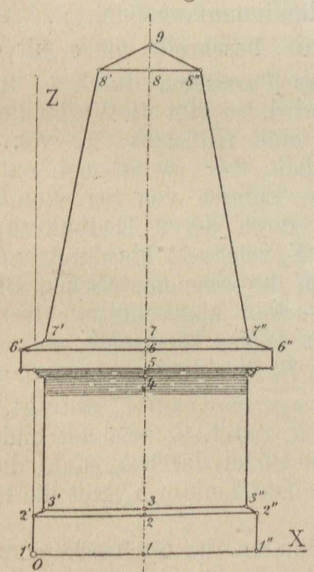
Obersicht rechts: 11 Teile links von Z_0, 1 Teil nach oben; 3 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach oben.

140) **Aufgabe 53.** Der in Figur 165 im Aufriss dargestellte Körper ist trimetrisch 9:5:10 in Obersicht links darzustellen.

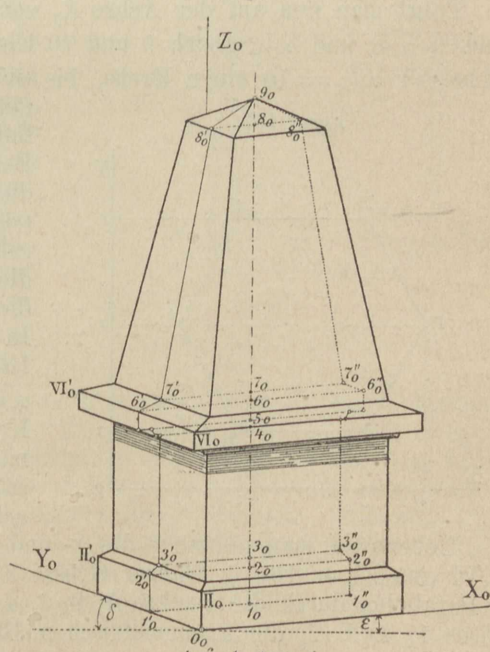
Auflösung. Ein Grundriss des Körpers ist entbehrlich, weil die je in einer Horizontalebene befindlichen Längen- und Breitenausdehnungen des Körpers einander gleich sein sollen.

Wählt man das Achsenkreuz so, wie in Figur 166, und lässt dem Punkte 0 der Figur 165 den Punkt 0_0 in Figur 166 entsprechen, so wird man wohl am bequemsten zum axonometrischen Bilde des Körpers gelangen, wenn man sich zunächst das axonometrische Bild der vertikalen Mittelachse des Körpers verschafft (mittels der Koor-

Figur 165.



Figur 166.



dinaten des Punktes 1) $y = \overline{01}$, $x = \overline{01}$, siehe Figur 165, ihnen entsprechen in Fig. 166 die axonometrischen Koordinaten $y_0 = \overline{0_0 1_0'} = \frac{1}{2} y$ und $x_0 = \overline{1_0' 1_0} = {}^9/_{10}\, x$, hierauf die Punkte $2_0, 3_0, 4_0 \cdots$, s. Figur 166, entsprechend den Punkten 2, 3, 4 $\cdots$, s. Figur 165, ermittelt ($\overline{1 \cdot 2} = \overline{1_0 \cdot 2_0}$, $\overline{2 \cdot 3} = \overline{2_0 \cdot 3_0} \cdot$, $\overline{3 \cdot 4} = \overline{3_0 \cdot 4_0}$), durch die Punkte $2_0, 3_0 \cdots$ Parallele zur X_0-Achse zeichnet und auf diesen Parallelen die Punkte $2_0', 2_0''; 3_0', 3_0''; 4_0'\ 4_0'' \cdots$, entsprechend den Punkten $2', 2''; 3', 3''; 4', 4''$ der Figur 165 ($\overline{2_0' 2_0''} = {}^9/_{10}\, \overline{2' 2''}$, $\overline{3_0' 3_0''} = {}^9/_{10}\, \overline{3' 3''}$, $\overline{4_0' 4_0''} = {}^9/_{10}\, \overline{4' 4''} \cdots$) bestimmt. Durch die so sich ergebenden Punkte sind schliesslich noch die Parallelen zu Y_0 zu ziehen und auf ihnen die halben bezüglichen Körperbreiten abzutragen, z. B. $\overline{2_0' II_0} = \overline{2_0' II_0'} = \frac{1}{2} \overline{2 \cdot 2'}$, $\overline{6_0' VI_0} = \overline{6_0' VI_0'} = \frac{1}{2} \overline{6 \cdot 6'}$ u. s. w.

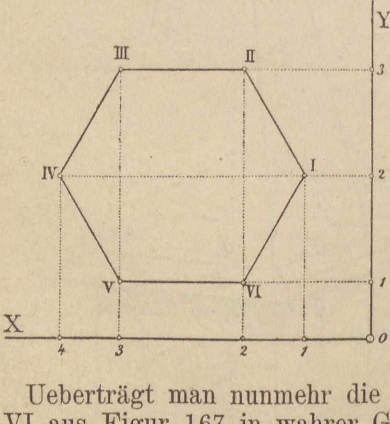
Anmerkung 53. Der in Auflösung der Aufgabe 53 geschilderten Art der Entwicklung des axonometrischen Bildes eines Körpers aus dessen Aufriss liegt die Benützung des sogenannten mittleren Querschnittes oder Profiles zu Grunde, worunter man einen durch die vertikale Körperachse parallel zu einer der Ebenen XZ oder YZ geführten ebenen Schnitt versteht, dessen axonometrisches Bild zunächst konstruiert wird und aus welchem man mittels der noch übrigen dritten Koordinaten, das axonometrische Bild des Körpers selbst bestimmt.

e) Die axonometrischen Hilfsachsen.

141) Bei der bisher angegebenen Art der Herstellung einer trimetrischen Projektion bedarf man immerhin für die Achsen X und Y noch zweier von einander verschiedenen Massstäbe. Es lässt sich aber für manche Zwecke die Reduktion der wahren Grösse einer aufzutragenden Strecke in noch bequemerer Weise als mittels der angewandten Massstäbe bewerkstelligen, nämlich durch die Konstruktion von besonderen Hilfsachsen. Soll z. B. das in Figur 167 gezeichnete Sechseck trimetrisch dargestellt werden, so wähle man die Achsen X und Y etwa so wie angegeben und zeichne das axonometrische Achsenkreuz so wie die Figur 168 zeigt (Obersicht rechts).

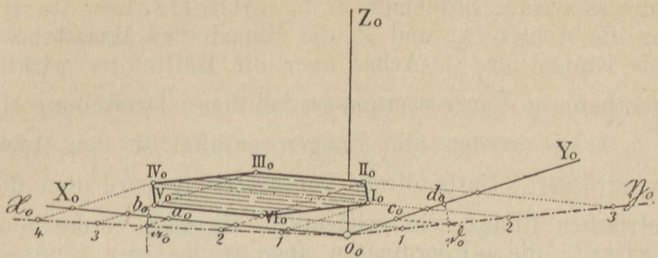
Trägt man nun auf der Achse X_0 vom Koordinatenanfangspunkt aus zwei Strecken $\overline{o_0 a_0}$ und $o_0 b_0$ gleich 9 und 10 Einheiten ab, beschreibt um o mit dem Halbmesser $\overline{o_0 b_0} = 10$ einen Kreis, bis er von der Parallelen durch a_0 in $\mathfrak{a}_0$ getroffen wird, so gibt die Verbindungslinie $o_0 \mathfrak{a}_0$ eine Hilfsachse $\mathfrak{X}_0$ von der Beschaffenheit, dass, wenn man auf ihr die wahren Längen von Strecken aufträgt und durch deren Endpunkte Parallele zu Y_0 zeichnet, hierdurch auf X_0 die Längen der axonometrischen Bilder dieser Strecken abgeschnitten werden. In gleicher Weise lässt sich auch eine Hilfsachse $\mathfrak{Y}_0$ konstruieren, wenn man $\overline{o_0 d_0} = 2$, $\overline{o_0 c_0} = 1$ auf Y_0 abträgt, den Kreis um o_0 durch d_0 zeichnet und ihn mit der Parallelen durch c_0 zu X_0 durchschneidet. Die Linie $o_0 \mathfrak{b}_0$ gibt die Hilfsachse $\mathfrak{Y}_0$.

Figur 167.



Ueberträgt man nunmehr die x- und y-Koordinaten der Sechseckspunkte I bis VI aus Figur 167 in wahrer Grösse auf die Achsen $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$, so liefern die Parallelen durch die Punkte 1, 2, 3, 4 auf $\mathfrak{X}_0$, bezw. 1, 2, 3 auf $\mathfrak{Y}_0$ zu den Achsen Y_0 und X_0 die axonometrischen Bilder I_0 bis VI_0 der Sechseckspunkte I bis VI.

Figur 168.



Mittels dieses Verfahrens erhält man, wie ersichtlich, das axonometrische Bild eines Gegenstandes mit Benützung nur eines Massstabes.

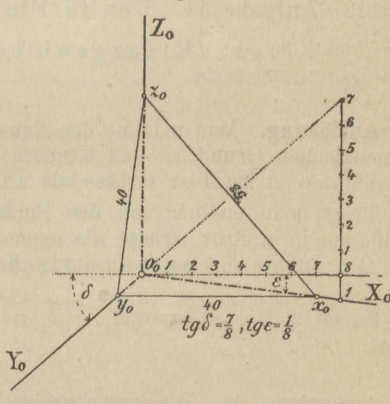
f) Die dimetrische Projektion.

142) Bei der dimetrischen Projektion sind zwei der Verhältniszahlen, in der Regel m und p einander gleich. Die besten Bilder erhält man für die Verhältniszahlen $m = p = 1$, $n = \frac{1}{2}$. Für diese Projektion ist $\alpha = \gamma = 29^0\,28'\,16''$, $\beta = 71^0\,52'\,28''$. Die Werte der Verkürzungsverhältnisse sind für die X- und Z-Achse $= 0{,}9428$, für die Y-Achse $= 0{,}4714$.

Konstruktion des Achsenkreuzes.

Erste Konstruktion: Man zeichne, siehe Figur 169, ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Grundlinie $= 53$ und einer Schenkellinie $= 40$ Einheiten. Die Höhen dieses Dreieckes geben die Achsenbilder der dimetrischen Projektion und zwar gehören zu den Schenkeln als Höhen die Achsenbilder X_0 und Z_0; die zur Grundlinie gehörige Strecke liefert das Achsenbild Y_0.

Figur 169.



Zweite Konstruktion: Man trage auf einer Horizontalen, s. Fig. 169, von einem Punkte o_0 aus nach einer Seite hin 8 gleiche Teile ab, durch den letzten Teilpunkt 8 ziehe man eine Vertikale und trage auf dieser von dem Punkte 8 aus nach der einen Seite hin 7 Teile, nach der anderen Seite 1 Teil ab. Die Verbindungslinie $7 \cdot 0_0$ gibt die Y_0-Achse, die Linie $1 \cdot 0_0$ die X_0-Achse. Die Z_0-Achse ist vertikal gerichtet.

Bei der dimetrischen Projektion sind zwei axonometrische Massstäbe erforderlich und zwar ein Massstab für die Y_0-Achse und ein solcher für die X_0- und Z_0-Achse. Bei der in Rede stehenden dimetrischen Projektion ist nun die Einheit für den Massstab der X_0- und Z_0-Achse $= 0{,}9428$ der wahren Einheit, für die Y_0-Achse dagegen $= 0{,}4714$ dieser Einheit. Will man irgend einen Körper dimetrisch darstellen, so bezieht man ihn auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz X, Y, Z, bestimmt für jeden Punkt seine Koordinaten x, y, z, verkürzt dieselben mittels der axonometrischen Massstäbe und trägt die so verkürzten Koordinaten als axonometrische Koordinaten im Achsenkreuze X_0, Y_0, Z_0 auf.

Handelt es sich aber nur um die Herstellung eines Bildes des Körpers, so zeichnet man dieses wieder bequemer in hypothetischer Vergrösserung, indem man für die Achsen X_0 und Z_0 die Einheit des Massstabes in wahrer Grösse, für die Einheit der Y_0-Achse aber die Hälfte der wirklichen Einheit wählt. Die hypothetische Vergrösserung ist bei dieser Darstellung eine $\frac{1}{0,9428} =$ 1,0606 fache, d. h. es werden alle Längen parallel zu den Achsenrichtungen etwa um $\frac{1}{16}$ vergrössert. Unter dieser Voraussetzung wird aber die Herstellung eines axonometrischen Bildes sehr erleichtert, da man ja die x- und z-Koordinaten unverkürzt, die y-Koordinaten aber in halber Grösse übertragen darf.

Was nun die verschiedenen axonometrischen Ansichten anbetrifft, so gilt hier das Gleiche wie bei der trimetrischen Projektion und man hat für die Konstruktion des Achsenkreuzes folgende Regeln:

Untersicht links: 8 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach unten, 7 Teile nach oben.

Untersicht rechts: 8 Teile links von Z_0, 1 Teil nach unten, 7 Teile nach oben.

Obersicht links: 8 Teile rechts von Z_0, 1 Teil nach oben, 7 Teile nach unten.

Obersicht rechts: 8 Teile links von Z_0, 1 Teil nach oben, 7 Teile nach unten.

143) **Aufgabe 54.** Der in Figur 170 durch Grund- und Aufriss dargestellte Körper, Kreuzgewölbe, ist dimetrisch $1:\frac{1}{2}:1$ in Untersicht links darzustellen.

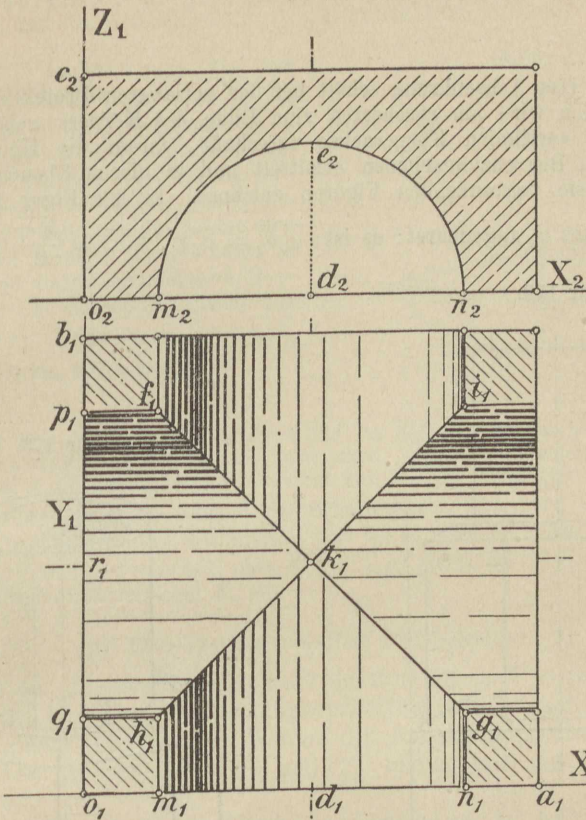
Auflösung. Man zeichne das Achsenkreuz X_0, Y_0, Z_0 nach 142) und ermittele den axonometrischen Grundriss des Körpers, indem man die x-Koordinaten in wahrer, die y-Koordinaten in halber Grösse als axonometrische Koordinaten benützt.

Trägt man endlich von den Punkten des axonometrischen Grundrisses aus die z-Koordinaten in wahrer Grösse als axonometrische Koordinaten ab, so ergeben sich hierdurch alle Punkte des axonometrischen Bildes des Körpers.

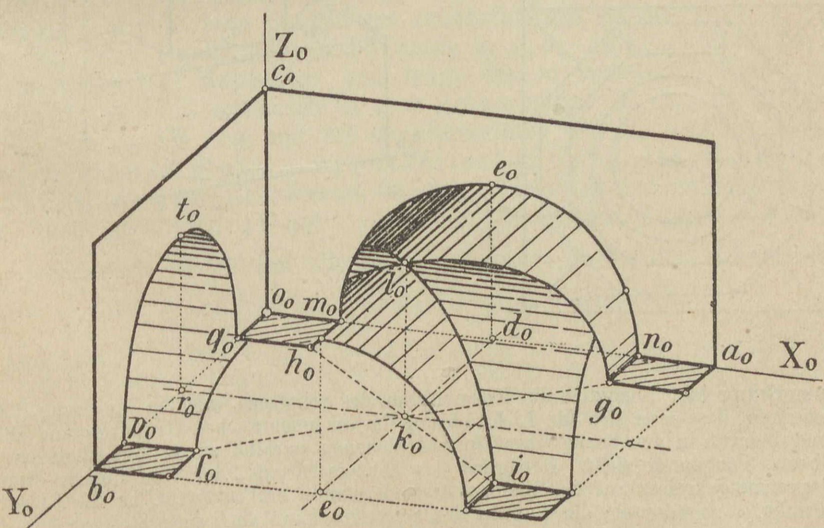
So ist z. B. $\overline{o_0 a_0} = \overline{o_1 a_1}$, $\overline{o_0 b_0} = \frac{1}{2}\overline{o_1 b_1}$, $\overline{o_0 c_0} = \overline{o_2 c_2}$, $\overline{d_0 e_0} = \overline{d_2 e_2} = \overline{k_0 l_0} = \overline{r_0 t_0}$ u. s. w.

Anmerkung 54. Die innere krumme Oberfläche des Gewölbes besteht aus zweien senkrechten Kreiscylindern von gleichem Halbmesser, die sich nach zweien Ellipsen, den Gratlinien, durchdringen; ihre Grundrisse sind in Figur 170 durch die Linien $f_1 g_1$ und $h_1 i_1$ gegeben; ihnen entsprechen im axonometrischen Bilde die Linien $f_0 g_0$ und $h_0 i_0$, siehe Figur 171. Zieht man durch den Schnittpunkt k_0 eine Parallele $k_0 l_0$ zur Z-Achse und gleich dem Halbmesser $\overline{de}$ der Cylinder, so kennt man von jeder der beiden halben Durchschnittsellipsen zwei conjugierte Halbmesser, und kann also beliebige weitere Punkte, siehe 11), ohne Benützung der Figur 170 direkt konstruieren. In gleicher Weise kennt man auch von den vier Durchschnittslinien (Wandbögen) der beiden Cylinder mit den vertikalen Begrenzungsflächen des Körpers unmittelbar je zwei conjugierte Halbmesser, z. B. $\overline{d_0 m_0} = \overline{d_0 n_0} = \overline{d_0 e_0} = \overline{d_1 m_1} = \overline{d_1 n_1}$, $\overline{r_0 p_0} = \overline{r_0 q_0} = \frac{\overline{r_1 p_1}}{2}$ u. s. w., und man kann daher die übrigen Punkte dieser Linien gleichfalls ohne Benützung der Figur 170 direkt konstruieren.

Figur 170.



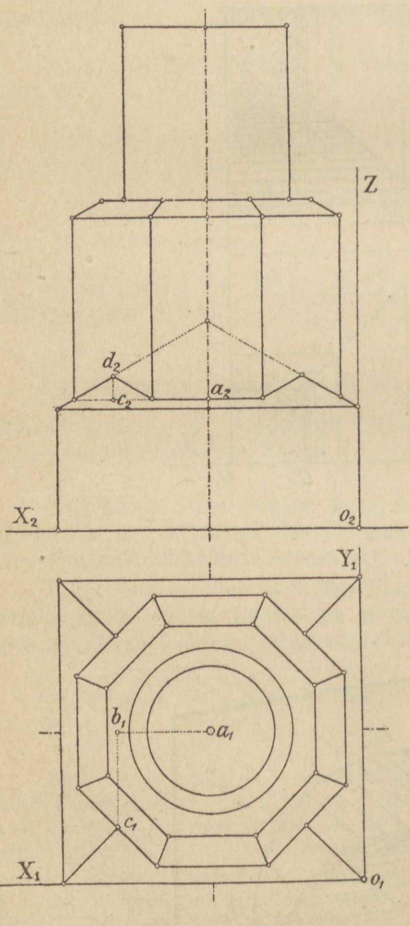
Figur 171.



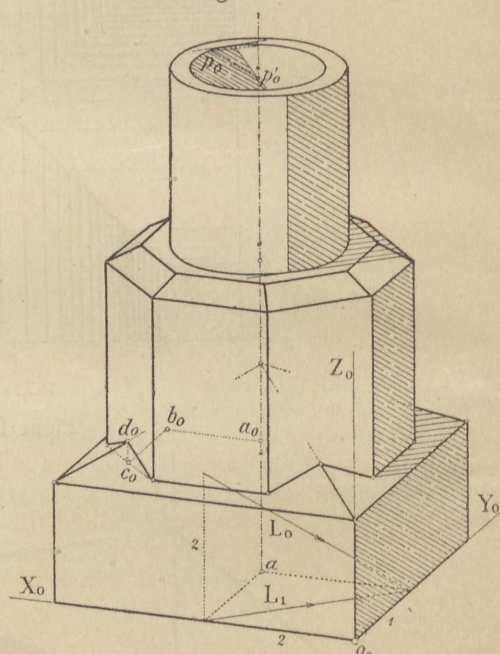
144) **Aufgabe 55.** Der in Figur 172 durch Grund- und Aufriss dargestellte Körper ist axonometrisch $1 : \frac{1}{2} : 1$ in Obersicht rechts darzustellen.

Auflösung. Das Achsenkreuz erhält bei der verlangten Projektion die Anordnung der Figur 173. Man wird am raschesten zum Bilde des Körpers gelangen, wenn man sich das Bild der vertikalen Körperachse verschafft, darauf die Höhenlagen der einzelnen horizontalen Begrenzungsebenen ermittelt und in diesen Ebenen die axonometrischen Bilder der sie begrenzenden Figuren zeichnet. In der Figur 173 ist die Konstruktion des Punktes d_0 angedeutet; es ist: $\overline{a_0 b_0} = \overline{a_1 b_1}$, $\overline{b_0 c_0} = \frac{\overline{b_1 c_1}}{2}$ und $\overline{c_0 d_0} = \overline{c_2 d_2}$.

Figur 172.



Figur 173.

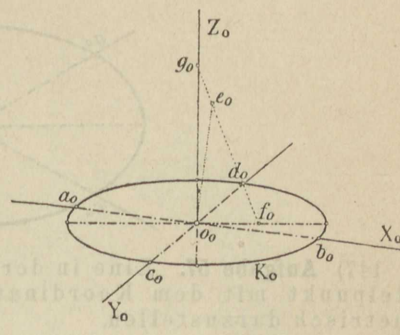


Anmerkung 55. Bezüglich der Konstruktion des Schattens, wie ihn die Figur 173 zeigt, ist zu bemerken, dass man sich die Lichtrichtung im axonometrischen Grundriss und Bilde bestimmt und hierauf in den bezüglichen Horizontalebenen parallel zu L_1 die möglichen Streifstrahlen bezw. Tangenten zieht. Bezüglich des Schlagschattens, der vom inneren Rande des oberen Begrenzungskreises auf dem inneren Cylindermantel erzeugt wird, ist die Konstruktion für den Punkt p_0 angedeutet; die Angabe des Schattens kann auch unterbleiben.

145) **Aufgabe 56.** Eine in der XY-Ebene liegende Kreislinie von bekanntem Halbmesser, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, ist dimetrisch $1:\frac{1}{2}:1$ darzustellen.

Auflösung. Zeichnet man das zur Projektion gehörige Achsenkreuz X_0, Y_0, Z_0, siehe Figur 174, so ist der Durchmesser $a_0 b_0$ auf der X-Achse gleich dem wahren Kreisdurchmesser, der Durchmesser auf der Y-Achse dagegen gleich der Hälfte des Kreisdurchmessers. Man kann nun im Kreise eine Anzahl von Sehnen parallel zur X- oder Y-Achse zeichnen und diese axonometrisch übertragen oder aber die Ellipse K_0 direkt aus den conjugierten Durchmessern $\overline{a_0 b_0}$ und $\overline{c_0 d_0}$ konstruieren, siehe auch 11).

Figur 174.



Anmerkung 56. Will man ein schönes Bild der Ellipse erhalten, so ist es stets vorteilhaft, sich die Hauptachsen der Kurve zu verschaffen, was im vorliegenden Falle sehr einfach geschehen kann, da ja die grosse Achse senkrecht zur Z-Achse steht und die kleine Achse mit der Z-Achse zusammenfällt. Die Längen der Achsen finden sich nach 12). Man zieht $\overline{o_0 e_0}$ senkrecht zu $a_0 b_0$ und gleich $\overline{o_0 a_0}$, verbindet e_0 mit d_0, so schneidet diese Linie auf den beiden Achsen die Punkte f_0 und g_0 derart aus, dass $\overline{d_0 f_0} = \overline{e_0 g_0}$ gleich der kleinen und $\overline{d_0 g_0} = \overline{e_0 f_0}$ gleich der grossen Halbachse von K_0 ist.

g) Die isometrische Projektion.

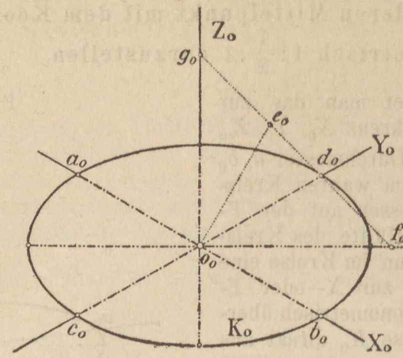
146) Bei der isometrischen Projektion ist $m = n = p = 1$ und $\alpha = \beta = \gamma = 27^0\,35'\,11''$. Das Verkürzungsverhältnis ist für alle drei Achsen dasselbe, nämlich gleich 0,8165. Die Winkel der Achsenbilder sind einander gleich und $= 120^0$. Die Achsenbilder X_0 und Y_0 bilden mit der Z-Achse je einen Winkel von 60^0.

Infolge der Gleichheit der Verhältniszahlen ist nur mehr ein axonometrischer Massstab erforderlich, in welchem die Längeneinheit gleich 0,8165 der wahren Einheit beträgt. Will man also irgend einen Körper isometrisch darstellen, so bezieht man ihn auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz X, Y, Z, bestimmt für jeden Punkt seine Koordinaten x, y, z, verkürzt dieselben mittels des axonometrischen Massstabes und trägt die so verkürzten Koordinaten als axonometrische Koordinaten in dem Achsenkreuze X_0, Y_0, Z_0 auf.

Handelt es sich aber nur um die Herstellung des Bildes des Körpers, so zeichnet man dieses wieder in hypothetischer Vergrösserung, d. h. man trägt die rechtwinkligen Koordinaten im axonometrischen Achsenkreuze in wahrer Grösse, also unverkürzt auf. Die hierdurch erzielte Vergrösserung ist eine $\frac{1}{0{,}8165}$ fache, d. h. es werden alle Längen parallel zu den drei Achsenrichtungen um etwa $\frac{1}{5}$ ihrer wirklichen Länge zu gross dargestellt.

Anmerkung 57. Die isometrische Projektion liefert im allgemeinen keine schönen Bilder, weil die Verzerrungen zu bedeutend und für alle drei Koordinatenebenen gleich gross sind. Trotzdem findet diese Projektionsmethode eine ausgedehnte Anwendung, namentlich zur Darstellung einzelner Teile von Bauwerken, z. B. einzelner Steine von Bögen oder Gewölben, Holzverbindungen, Dachkonstruktionen, Maschinenteilen und dergl., was durch die ausserordentlich leichte und bequeme Konstruktion der Bilder sowie durch den Umstand begründet erscheint, dass aus dem isometrischen Bilde direkt die wirklichen Ausmasse des dargestellten Gegenstandes im verjüngten Massstabe entnommen werden können, sobald das Bild in hypothetischer Vergrösserung gezeichnet ist.

Figur 175.



147) **Aufgabe 57.** Eine in der XY-Ebene liegende Kreislinie, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt, ist isometrisch darzustellen.

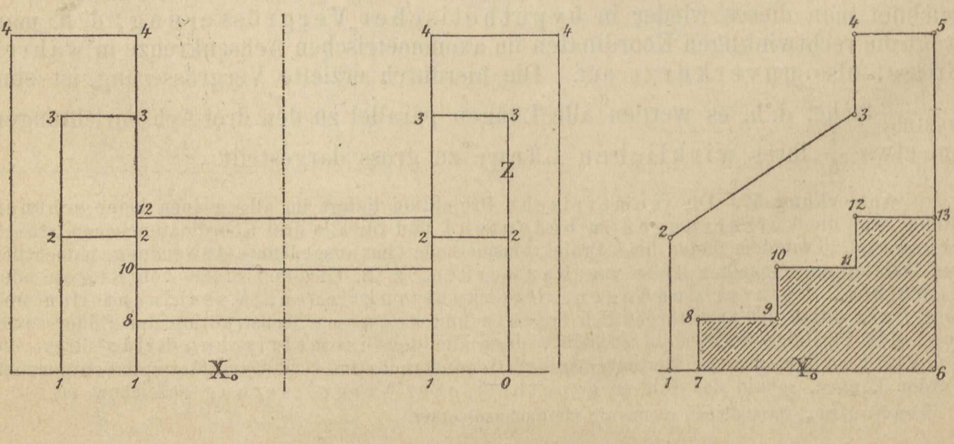
Auflösung. Die in der Auflösung der Aufgabe 56 gegebene Konstruktion der Achsen des elliptischen Bildes vereinfacht sich im vorliegenden Falle noch mehr, denn sind $\overline{a_0 b_0}$ und $\overline{c_0 d_0}$ die auf den Achsen X_0 und Y_0 liegenden conjugierten Durchmesser der Ellipse K_0, so bildet die Senkrechte $o_0 e_0$ zu X_0 mit der Z_0-Achse einen Winkel von 30^0, die Verbindungslinie $d_0 e_0$ ist daher gegen die Z_0-Achse und gegen die grosse Ellipsenachse unter 45^0 geneigt und zu ihrer Zeichnung ist die Kenntnis des Punktes e_0 nicht erforderlich; man zieht vielmehr durch den Endpunkt d_0 des mit der Y_0-Achse zusammenfallenden Durchmessers eine Gerade unter 45^0 gegen die Z-Achse, so werden hierdurch auf letzterer Linie und auf der grossen Ellipsenachse zwei Punkte g_0 und f_0 derart ausgeschnitten, dass $\overline{g_0 d_0}$ gleich der grossen und $\overline{f_0 d_0}$ gleich der kleinen Halbachse der Ellipse ist.

Nunmehr kann das elliptische Bild K_0 direkt aus den Hauptachsen konstruiert werden.

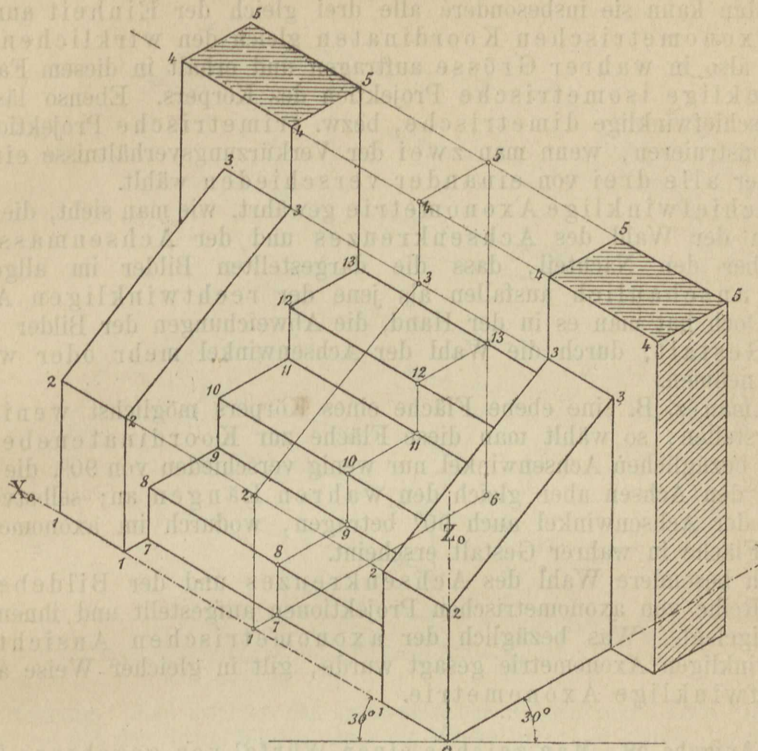
148) **Aufgabe 58.** Der in Figur 176 durch Grundriss und Vertikalschnitt dargestellte Körper (Treppe) soll in rechtwinkliger isometrischer Projektion, Obersicht links, gezeichnet werden.

Auflösung. Man zeichnet das Achsenkreuz, wie in Figur 177, bestimmt hierauf die isometrische Projektion des Vertikalschnittes und schliesslich mittels den entsprechenden x-Koordinaten die Projektionen der noch übrigen Eckpunkte des Körpers.

Figur 176.



Figur 177.



VII. Die schiefwinklige Axonometrie.

1) Die schiefwinklige Axonometrie im allgemeinen.

149) Wie aus den rechtwinkligen Projektionen einer Raumgrösse auf die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 die rechtwinklige axonometrische Projektion auf eine vierte **Pr. Eb.**, die Bildebene, abgeleitet wurde, so kann man auch eine schiefwinklige axonometrische Projektion der Raumgrösse und ihrer Projektionen darstellen, wenn man die Raumgrösse in die genannte Bildebene unter einem von 90^0 verschiedenen Winkel σ projiziert. Bei der rechtwinkligen Axonometrie konnte man entweder das Bild des Achsenkreuzes beliebig wählen und hieraus die Verkürzungsverhältnisse in bestimmter Weise ermitteln oder aber man konnte die Verkürzungsverhältnisse innerhalb bestimmter Grenzen annehmen und ihnen entsprechend das Achsenkreuz konstruieren. Bei der schiefwinkligen Axonometrie verhält sich die Sache einfacher. Hier sind sowohl das Achsenkreuz wie auch die Verkürzungsverhältnisse frei wählbar.

Soll also z. B. von einem durch Grund- und Aufriss dargestellten Körper ein axonometrisches Bild konstruiert werden, so verfährt man in gleicher Weise, wie dies bei der Darstellung in rechtwinkliger Axonometrie gezeigt wurde, nur wählt man die Achsenbilder und auch die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse oder Massstäbe ganz beliebig. Man kann sie insbesondere alle drei gleich der Einheit annehmen, d. h. die axonometrischen Koordinaten gleich den wirklichen Koordinaten, also in wahrer Grösse auftragen und erhält in diesem Falle eine schiefwinklige isometrische Projektion des Körpers. Ebenso lässt sich auch eine schiefwinklige dimetrische, bezw. trimetrische Projektion eines Körpers konstruieren, wenn man zwei der Verkürzungsverhältnisse einander gleich oder alle drei von einander verschieden wählt.

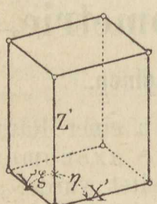
Die schiefwinklige Axonometrie gewährt, wie man sieht, die grösste Freiheit in der Wahl des Achsenkreuzes und der Achsenmassstäbe, sie hat aber den Nachteil, dass die dargestellten Bilder im allgemeinen weniger anschaulich ausfallen als jene der rechtwinkligen Axonometrie. Doch hat man es in der Hand, die Abweichungen der Bilder von der wahren Gestalt, durch die Wahl der Achsenwinkel mehr oder weniger gross zu nehmen.

Will man z. B. eine ebene Fläche eines Körpers möglichst wenig verzerrt darstellen, so wählt man diese Fläche zur Koordinatenebene und nimmt den bezüglichen Achsenwinkel nur wenig verschieden von 90^0, die Längen parallel zu den Achsen aber gleich den wahren Längen an; selbstverständlich kann der Achsenwinkel auch 90^0 betragen, wodurch im axonometrischen Bilde die Fläche in wahrer Gestalt erscheint.

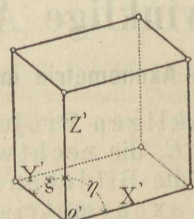
Durch besondere Wahl des Achsenkreuzes und der Bildebene hat man eine Reihe von axonometrischen Projektionen aufgestellt und ihnen eigene Namen beigelegt. Was bezüglich der axonometrischen Ansichten bei der rechtwinkligen Axonometrie gesagt wurde, gilt in gleicher Weise auch für die schiefwinklige Axonometrie.

150) **Aufgabe 59.** Man zeichne einen Würfel von gegebener Kantenlänge l in allgemeiner schiefwinkliger axonometrischer Projektion und zwar trimetrisch, dimetrisch und isometrisch in Obersicht links.

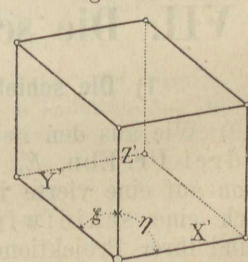
Figur 178.



Figur 179.



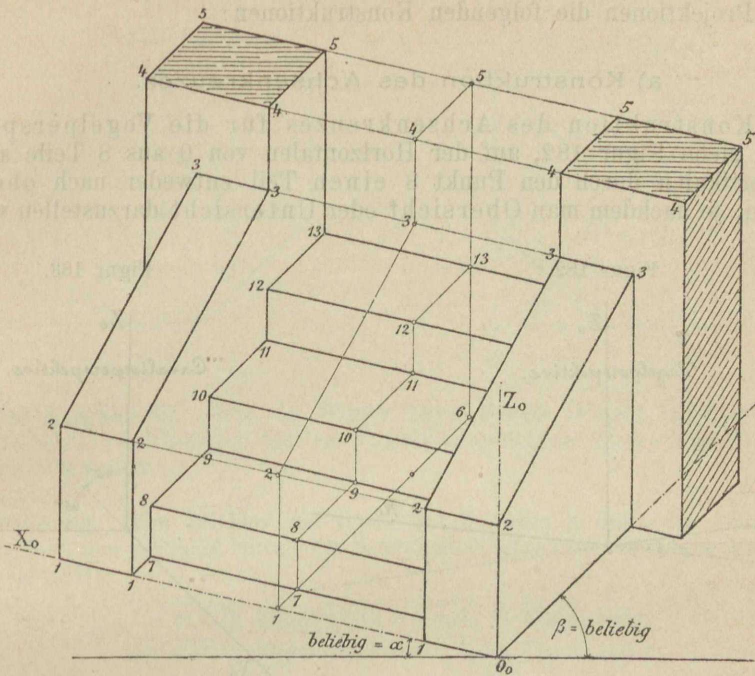
Figur 180.



Auflösung. Man wähle das Achsenkreuz so wie die Figuren 178 bis 180 zeigen und zwar die X'-Achse rechts von Z' und die Winkel ζ und η kleiner als 90^0, sonst aber beliebig. Trägt man nun in Figur 178 auf X' einen beliebigen Teil der Kantenlänge des Würfels, etwa $\frac{2}{3}l$, auf Y' etwa $\frac{1}{2}l$, auf Z' z. B. l selbst ab und zieht durch die auf den Achsenbildern sich ergebenden Endpunkte Parallele zu den Achsenrichtungen, so erhält man hierdurch eine trimetrische Projektion des Würfels. Figur 179 zeigt eine dimetrische, Figur 180 eine isometrische Projektion des Würfels.

151) **Aufgabe 60.** Der in Figur 176 durch Grundriss und Vertikalschnitt dargestellte Körper ist in allgemeiner schiefwinkliger isometrischer Projektion zu zeichnen. Obersicht links.

Figur 181.



Auflösung. Man zeichnet das axonometrische Achsenkreuz, siehe Figur 181, beliebig, jedoch mit der Beschränkung, dass die Winkel α und β kleiner als 90^0 angenommen werden, und bestimmt zunächst die isometrische Projektion des Vertikalschnittes und hierauf mittels der x-Koordinaten der einzelnen Punkte 1 bis 13 die isometrische Projektionen der übrigen Eckpunkte des Körpers.

2) Die besonderen schiefwinkligen axonometrischen Projektionsarten.

152) Besondere Projektionsarten erhält man durch Annahme einer besonderen Lage der Bildebene gegen die Achsen, sowie durch Festsetzung einer bestimmten Projektionsrichtung. Die Bildebene kann nun entweder zu einer Achse oder aber zu zweien der Achsen parallel laufen. Im ersten Falle erhält man eine Projektionsart, die man als „Vogelperspektive" bezeichnet. Ist die Bildebene parallel zu einer Koordinatenebene, so gibt es eine ganze Reihe von Projektionsarten, je nach der Wahl der Projektionsrichtung; die gebräuchlichste darunter ist die sogenannte Cavalierperspektive. Dabei kann man wieder unterscheiden zwischen trimetrischer, dimetrischer und isometrischer Projektion, je nachdem man die Verhältniszahlen ungleich oder gleich wählt. In der Regel nimmt man bei der erstgenannten Projektion die Bildebene parallel zur Z-Achse, bei der letztgenannten Projektion aber parallel zur XZ-Ebene.

Folgende Projektionsarten sind gebräuchlich:

Vogelperspektive: Isometrisch $m = p = n = 1.$

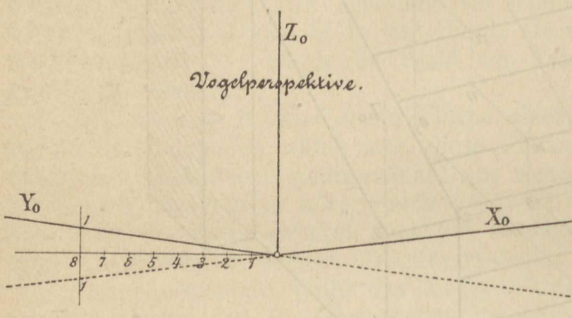
$$\text{Cavalierperspektive:} \left\{ \begin{array}{l} \text{Isometrisch } m = p = n = 1. \\ \text{Dimetrisch } m = p = 1. \quad n = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Für das axonometrische Bild des Achsenkreuzes ergeben sich zu den eben genannten Projektionen die folgenden Konstruktionen:

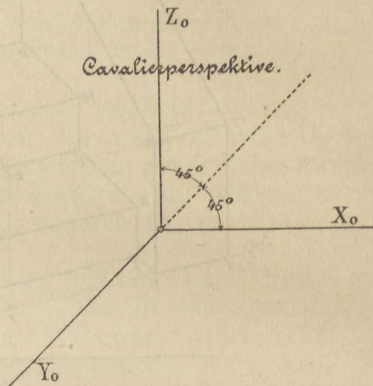
a) Konstruktion des Achsenkreuzes.

153) Konstruktion des Achsenkreuzes für die Vogelperspektive. Man trage, siehe Figur 182, auf der Horizontalen von 0 aus 8 Teile ab, dann auf der Vertikalen durch den Punkt 8 einen Teil entweder nach oben oder nach unten, je nachdem man Obersicht oder Untersicht darzustellen wünscht.

Figur 182.



Figur 183.



154) Konstruktion des Achsenkreuzes für die Cavalierperspektive. Die Achsenbilder von Z_0 und X_0 stehen aufeinander senkrecht, siehe Figur 183, das Achsenbild von Y_0 bildet mit der Z_0-Achse entweder einen Winkel von 45^0 oder von 135^0, je nachdem Obersicht oder Untersicht in Frage kommt.

b) Aufgaben.

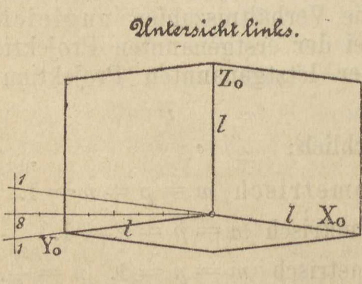
155) **Aufgabe 61.** Ein Würfel von gegebener Kantenlänge ist in schiefer Axonometrie darzustellen und zwar

a) in Vogelperspektive isometrisch,

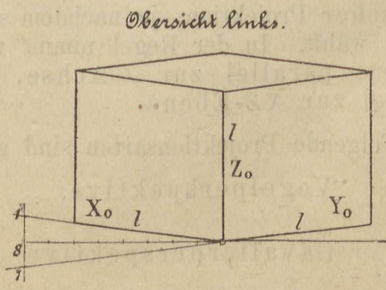
b) in Cavalierperspektive isometrisch und dimetrisch.

Auflösung. Die Figuren 184 und 185 zeigen die verschiedenen Ansichten des Würfels in Vogelperspektive, die Figuren 186 und 187 jene in Cavalierperspektive.

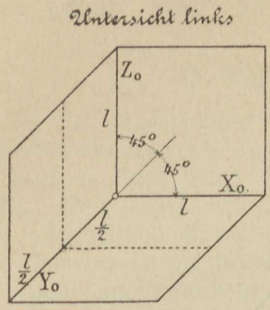
Figur 184.



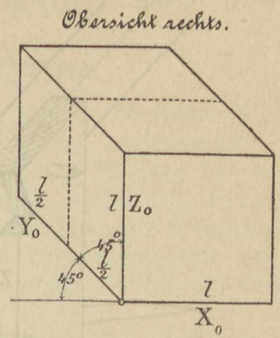
Figur 185.



Figur 186.



Figur 187.

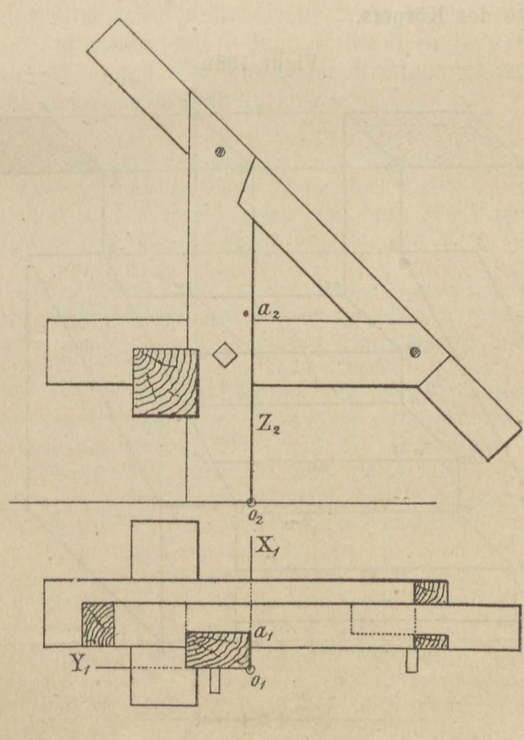


156) **Aufgabe 62.** Die in Figur 188a durch Grund- und Aufriss dargestellte Holzverbindung ist in Vogelperspektive isometrisch, Obersicht links, zu zeichnen.

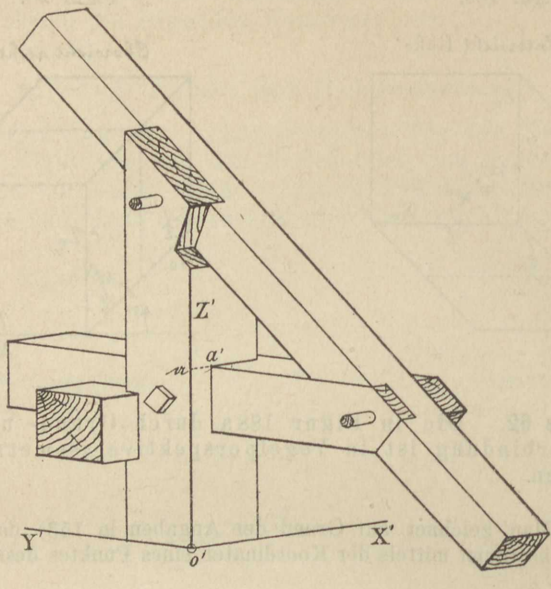
Auflösung. Man zeichnet auf Grund der Angaben in 153) das Achsenkreuz für Obersicht links und bestimmt mittels der Koordinaten eines Punktes dessen axonometrisches Bild; so ist z. B.:

$$\overline{o'a} \text{ in Figur 188b} = \overline{o_2 a_2} \text{ in Figur 188a}$$
$$\text{mit } \overline{aa'} \text{ in Figur 188b} = \overline{o_1 a_1} \text{ in Figur 188a.}$$

Figur 188a.



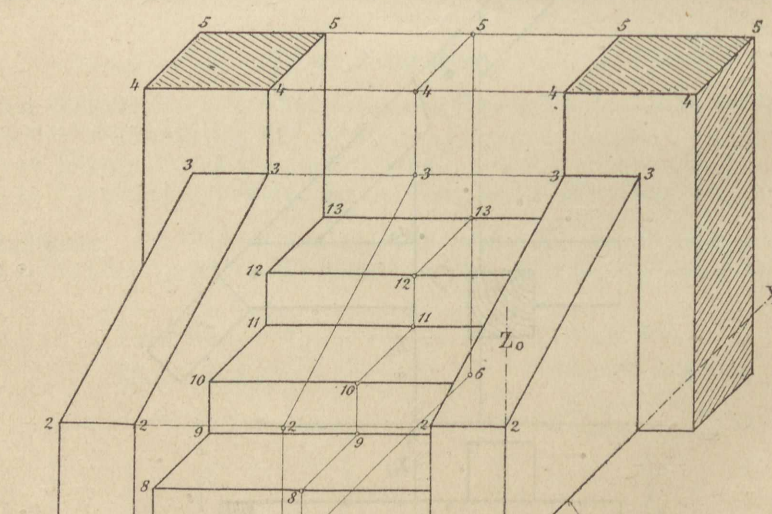
Figur 188 b.



157) **Aufgabe 63.** Der in Figur 176 durch Grundriss und Vertikalschnitt dargestellte Körper ist in Cavalierperspektive isometrisch zu zeichnen. Obersicht links.

Auflösung. Man zeichnet auf Grund der Angaben in 154) das Achsenkreuz für Obersicht links, siehe Figur 188 c, bestimmt zunächst das axonometrische Bild des Vertikalschnittes der Figur 176 und hierauf mittels der entsprechenden x-Koordinaten die Bilder der übrigen Eckpunkte des Körpers.

Figur 188 c.



VIII. Ueber die Durchdringung von Körpern.

1) Allgemeine Bemerkungen.

158) Bei der Bestimmung des Schnittes zweier ebenflächigen Körper besteht das Konstruktionsverfahren darin, dass man nacheinander die Schnittpunkte der Kanten eines jeden der Körper mit den Flächen des anderen Körpers aufsucht. Man erhält auf diese Weise eine Reihe von Punkten, welche zu einem im allgemeinen windschiefen Vielecke, der Schnittfigur, zu verbinden sind. Hierbei ist zu beachten, dass die Verbindungslinie zweier Schnittpunkte nur dann der Schnittfigur angehört, wenn sie als Schnittlinie zweier Flächen des Körpers erscheint.

Sind die Körper von krummen Flächen begrenzt, so wird man die Flächen beider Körper durch eine Hilfsfläche, in der Regel eine Ebene schneiden und die Schnittlinien dieser Ebene mit den Oberflächen beider Körper konstruieren; die gemeinsamen Punkte dieser Schnittlinien gehören der Schnittfigur der beiden Körper an. Durch Wiederholung des Verfahrens erhält man eine Reihe von Punkten, welche zur Schnittfigur zu verbinden sind. Bei diesem Verfahren wird man die Hilfsebenen so wählen, dass ihre Schnittlinien mit den Oberflächen der Körper sich auf möglichst einfache Weise herstellen lassen.

2) Durchdringung zweier Prismen.

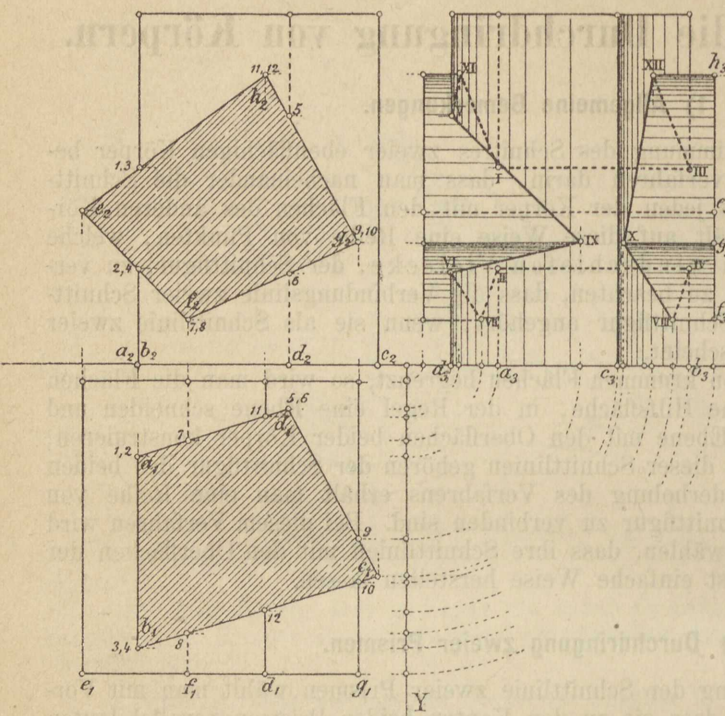
159) Zur Aufsuchung der Schnittlinie zweier Prismen wählt man mit Vorteil die Hilfsebenen so, dass sie zu den Kanten beider Prismen parallel laufen und von dem einen Prisma je eine Seitenkante enthalten, das andere Prisma aber nach Geraden parallel zu dessen Seitenkanten treffen; die in der nämlichen Ebene befindlichen Schnittlinien mit beiden Prismen liefern Punkte der Schnittfigur beider Prismen. Je nach der Lage der Prismen zu einander und zu den **Pr. Ebn.** vereinfacht sich das Konstruktionsverfahren.

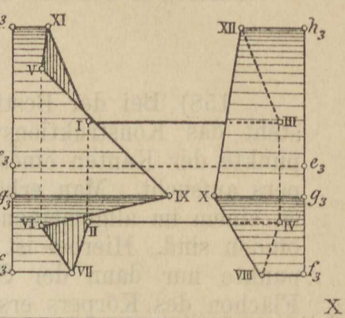
160) **Aufgabe 64.** Zwei Prismen, von welchen das eine Prisma senkrecht zur horizontalen, das andere senkrecht zur vertikalen **Pr. Eb.** angenommen ist, sind durch Grund- und Aufriss gegeben. Man bestimme den Durchschnitt der beiden Körper.

Auflösung. Im vorliegenden Falle ist der Grund- und Aufriss der Schnittfigur beider Prismen in dem Grund- bezw. Aufriss der gegebenen Prismen schon gezeichnet. Will man aber doch eine Ansicht der Schnittfigur gewinnen, so bestimme man eine Projektion beider Prismen auf die **Pr. Eb.** E_3, siehe Figur 190, und ermittele zugleich die dritten Projektionen der Punkte der Schnittfigur. In der Projektionszeichnung sind die Punkte der Schnittfigur im Grund- und Aufriss durch arabische, im Seitenriss durch römische Ziffern bezeichnet. Was nun die Reihenfolge der Verbindung der Punkte zur Schnittfigur anbetrifft, so erhält man diese wie folgt: Man zeichne sich die umstehende Tabelle, in welcher die Flächen beider Prismen enthalten sind und schreibe die in den einzelnen Flächen beider Prismen befindlichen Punkte, wie die Tabelle zeigt, zusammen.

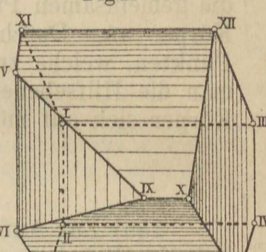
Geht man nun von einem beliebigen Punkte, etwa gleich vom Punkte 1 aus, so liegt derselbe einmal in der Fläche *ab* des Prismas I und kann in dieser Fläche verbunden werden sowohl mit dem Punkte 3 als auch mit 4 (mit 2 ist eine Verbindung nicht möglich, weil die beiden Punkte 1 und 2 auf einer Prismenkante liegen). Sieht man nun in der Tabelle bei den Flächen des Prismas II, ob die Punktpaare 1, 3 und 1, 4 je in einer Fläche vereinigt sind, so findet man in der That in der Fläche *he* die Punkte 1

Figur 189. Figur 190. Figur 191.

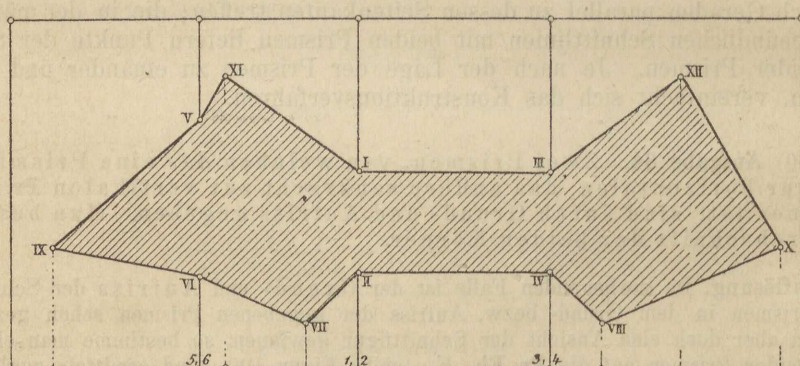




Figur 192.



Figur 193.



Prisma I.		Prisma II.	
Flächen	Punkte	Flächen	Punkte
ab	1·2·**3**·4	*ef*	**4**·2·7·8 *)
bc	**3**·4·8·**12**·**10**	*fg*	7·8·6·9·**10**
cd	9·5·6	*gh*	9·10·5·11·12
da	5·6·11·7·1·2	*he*	11·**12**·1·**3**
Verbindungs-reihenfolge	1·3·12·10·8·4·2·7·6·9·5·11·1		

*) Die fetten Ziffern sollen die durchstrichenen bedeuten.

und 3 liegend; dagegen ist 1—4 in keiner Fläche des Prismas II anzutreffen. Die Linie 1·3 ist somit eine Gerade der Schnittfigur, nämlich die Schnittlinie der Seitenflächen *ab* und *he*. Geht man nun in der Fläche *he* weiter, so kann man in ihr den Punkt 3 verbinden mit 11 oder 12; für das Prisma I finden sich in der Fläche *bc* gleichfalls die Punkte 3 und 12; somit ist die Linie 3—12 eine weitere Verbindungsgerade. In der Fläche *he* gibt es eine weitere Verbindung nicht mehr, weshalb man in der Fläche *bc* weiter zu verbinden sucht und in der That findet, dass die Punkte 12 und 10 auch in der Fläche *hg* des Prismas II vorhanden sind; man hat also als weitere Verbindung die Linie 10·12. In der Fläche *bc* kann man aber ausserdem noch die Punkte 10 und 8 verbinden, denn diese Punkte finden sich gleichzeitig in der Fläche *fg* des Prismas II vereinigt; endlich gehört der Fläche *bc* noch die Verbindungslinie 8—4 an, da diese Linie auch in der Fläche *ef* des Prismas II liegt. Eine weitere Verbindungslinie ist in der Fläche *bc* nicht mehr vorhanden, man geht deshalb in der Fläche *ef* weiter und findet zunächst die Verbindung 4—2, welche Linie auch der Fläche *ab* angehört; in der Fläche *ef* ist aber zugleich noch die Verbindungslinie 2—7 möglich, mit Rücksicht auf die Fläche *da* des Prismas I. Da es in der Fläche *ef* eine weitere Verbindung nicht mehr gibt, so gelangt man in der Fläche *da* vom Punkt 7 nach 6, denn diese Linie gehört auch zur Fläche *fg*. In der Fläche *da* ist eine weitere Verbindung nicht mehr denkbar, dagegen kann man in der Fläche *fg* Punkt 6 mit 9 verbinden, denn diese Punkte finden sich auch in der Fläche *cd*. In letzterer Fläche liegt noch die Linie 5—9, welche zugleich zur Fläche *gh* gehört. Vom Punkte 5 kommt man schliesslich nach dem Punkte 11 und von da wieder zum Anfangspunkte 1 zurück, denn die Linien 5—11 und 11—1 befinden sich in den Flächen *da* und *gh* sowie *da* und *he*. Als Verbindungsreihenfolge ergibt sich der Linienzug:

1·3·12·10·8·4·2·7·6·9·5·11·1.

Zur leichteren Uebersicht der bereits miteinander verbundenen Punkte ist es zweckmässig, letztere in der Tabelle zu durchstreichen; dies ist in der Tabelle für den Teil 1·3·12·10·8·4 des Linienzuges geschehen.

Anmerkung 58. Kommt man bei dem in der Auflösung der Aufgabe 64 angegebenen Verfahren zur Bestimmung der Verbindungsreihenfolge auf den Ausgangspunkt zurück, ohne die sämtlichen Punkte der Schnittfigur berührt zu haben, so ist dies ein Anhaltspunkt dafür, dass zwei Schnittfiguren vorhanden sind. Im vorliegenden Beispiele ist dies nicht der Fall.

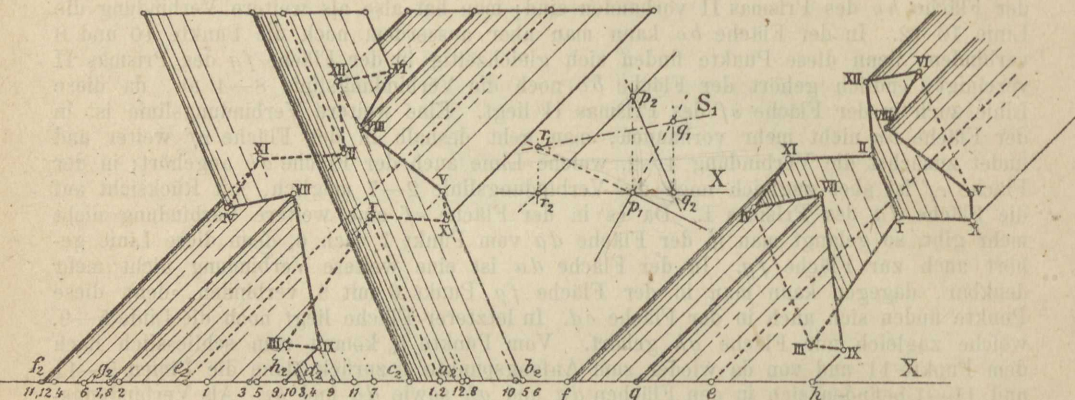
Anmerkung 59. Bei der Schnittfigur zweier Körper können mit Rücksicht auf den Standpunkt des Beobachters nicht alle Verbindungslinien sichtbar sein; in der Projektionszeichnung sollen solche Linien, wie auch die unsichtbaren Körperkanten mit unterbrochenen Strichen gezeichnet werden. Die zwischen dem Ein- und Austrittspunkte gelegenen Stücke der Körperkanten sind in den Figuren 189 und 190 weggelassen worden. Eine Linie der Schnittfigur ist stets sichtbar, wenn sie bezüglich beider Körper in sichtbaren Flächen liegt. Als sichtbare Flächen erscheinen nun in Fig 189 u. 190 die Flächen *bc* und *cd* des Prismas I, desgleichen die Flächen *fg* und *gh* des Prismas II; es sind somit alle in diesen Flächen liegenden Seiten der Schnittfigur sichtbar. In der obigen Tabelle ist die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit der Verbindungslinie zweier Punkte durch zusammenhängende bezw. unterbrochene Striche unter der Zusammenstellung der Verbindungsreihenfolge angedeutet. Für die Folge soll diese Kennzeichnung der sichtbaren und unsichtbaren Verbindungslinien der Schnittfigur für den Grundriss stets unter, für den Aufriss stets über der genannten Zusammenstellung angebracht werden.

Anmerkung 60. Schneiden sich zwei Körper nach einer zusammenhängenden, d. h. geschlossenen Schnittfigur, so heisst ein solcher Schnitt ein Anschnitt, im Gegensatz zu einem Durchschnitt, bei welchem der eine Körper von dem anderen vollständig durchdrungen wird und der Schnitt aus zweien getrennten und geschlossenen Schnittfiguren besteht.

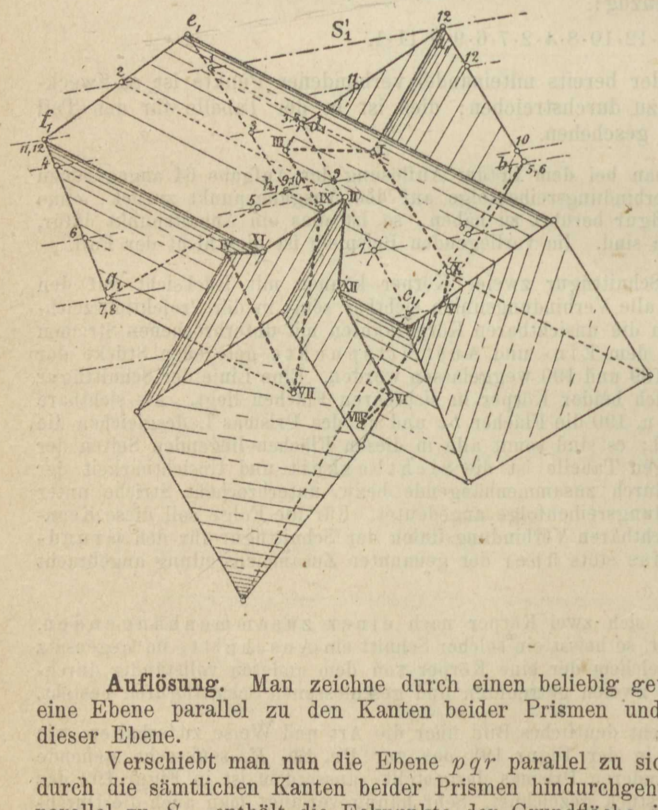
Anmerkung 61. Um ein recht deutliches Bild über die Art und Weise zu erhalten, wie das Prisma geschnitten wird, ist in der Figur 191 das zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehende Prisma, mit Hinweglassung des anderen Prismas dargestellt, ausserdem ist in Figur 192 das beiden Prismen gemeinsame Körperstück gezeichnet. Sehr häufig verlangt man auch die Durchschnittsfigur in dem Netze des Prismas. Die Zeichnung des Netzes ist für das Prisma II mit Hinweglassung seiner Grundflächen in Figur 193 ausgeführt und sind in demselben die Punkte der Schnittfigur eingetragen, einfach dadurch, dass die auf den Grundkanten befindlichen Abschnitte auf die entsprechenden Grundkanten des Netzes übertragen und durch die so erhaltenen Punkte Parallele zu den Seitenkanten des Prisma gezogen und auf ihnen die Abstände der Schnittfigur von der **Pr. Eb.** E_1 abgetragen wurden.

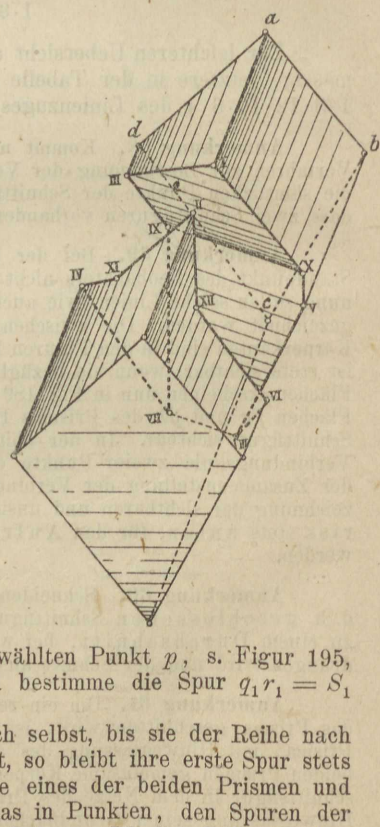
161) **Aufgabe 65.** Zwei gegen die **Pr. Ebn.** beliebig geneigte Prismen sind durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll ihren Durchschnitt konstruieren.

Figur 194. Figur 195. Figur 196.



Figur 197.

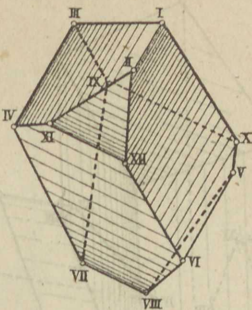




Auflösung. Man zeichne durch einen beliebig gewählten Punkt p, s. Figur 195, eine Ebene parallel zu den Kanten beider Prismen und bestimme die Spur $q_1 r_1 = S_1$ dieser Ebene.

Verschiebt man nun die Ebene pqr parallel zu sich selbst, bis sie der Reihe nach durch die sämtlichen Kanten beider Prismen hindurchgeht, so bleibt ihre erste Spur stets parallel zu S_1, enthält die Eckpunkte der Grundfläche je eines der beiden Prismen und schneidet die Seiten der Grundfläche des anderen Prismas in Punkten, den Spuren der Schnittgeraden der betreffenden Ebene mit dem genannten Prisma. Die Schnittlinien selbst sind parallel zu den Seitenkanten des geschnittenen Prismas.

Figur 198.



So liefert z. B. die Spur S_1', siehe Figur 194, gehend durch die Ecke a_1 auf den Seiten $e_1 h_1$ und $e_1 f_1$ die Punkte 1 und 2 und die durch letztere Punkte gezogenen Parallelen zu den Seitenkanten des zugehörigen Prismas bestimmen auf der Seitenkante durch a die Punkte I und II der Schnittfigur. In gleicher Weise ergeben sich die übrigen Punkte der Schnittfigur.

Anmerkung 62. Was die Verbindung der einzelnen Punkte zur Schnittfigur anbelangt, so kann man entweder das in Auflösung der Aufgabe 64 angegebene Verfahren benützen oder in noch einfacherer Weise durch folgende Betrachtung zum Ziele gelangen.

Die in der Figur 194 mit arabischen Ziffern versehenen Punkte in den Grundflächen beider Prismen lassen sich auffassen als die Parallelprojektionen der Punkte der Schnittfigur parallel zur betreffenden Prismenrichtung in die Ebene der zugehörigen Grundfläche, d. h. im vorliegenden Falle in die **Pr. Eb.** E_1.

Jede Seite der Schnittfigur muss nun, weil in einer Prismenfläche liegend, in der Parallelprojektion in eine Seite der Grundfläche eines Prismas fallen; es können daher niemals zwei Punkte der Schnittfigur miteinander verbunden werden, deren Parallelprojektionen nicht mit einer Seite der Grundflächen beider Prismen zusammenfallen, wie z. B. die Punkte 2 und 5, 1 und 6, 4 und 9 u. s. w.

Geht man nun von den mit arabischen Ziffern bezeichneten Punkten aus, so kann man stets zwei solche Punkte der Schnittfigur miteinander verbinden, deren entsprechende, mit arabischen Ziffern bezeichnete Verbindungslinie in beiden Prismen in eine Seite der Grundfläche fällt.

Man findet also, vom Punkte 1 ausgehend, die Verbindungslinien 1—3, 3—9, 9—7, 7—4, 4—11, 11—2, 2—12, 12—6, 6—8, 8—5, 5—10 und schliesslich 10—1. Die Verbindung ergibt somit das geschlossene Polygon:

1·3·9·7·4·11·2·12·6·8·5·10·1.

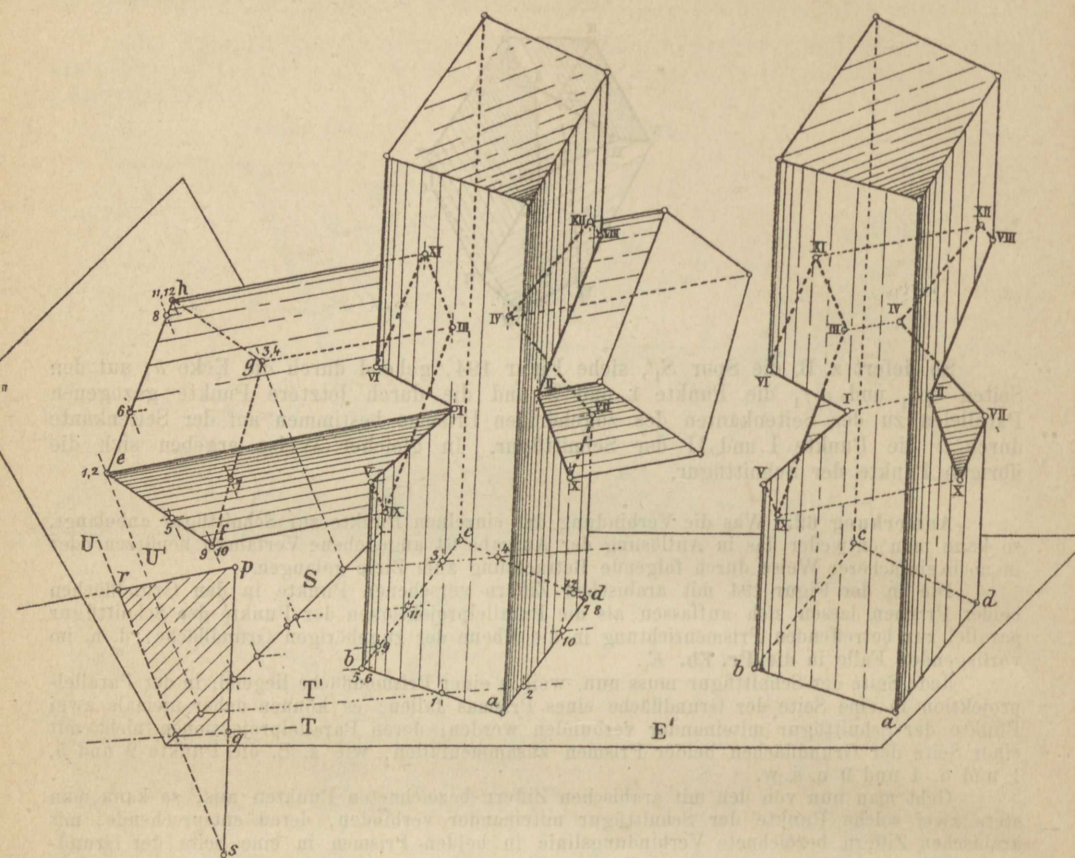
Bezüglich der Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit gilt das in Anmerkung 59 Gesagte. Als sichtbare Flächen erscheinen für den Grundriss die Flächen ab und ad des einen, dann gf und fe des anderen Prismas; für den Aufriss dagegen sind sichtbar die Flächen cd und cb, sowie gf und gh.

Anmerkung 63. Zur Erzielung möglichster Klarheit über die Beschaffenheit des erfolgten Schnittes beider Prismen ist jedes einzelne Prisma und zwar das eine in erster, das andere in zweiter Projektion, siehe Figur 196 und 197, besonders gezeichnet worden, desgleichen das beiden Prismen gemeinsame Körperstück, siehe Figur 198.

162) **Aufgabe 66.** Zwei Prismen, deren Grundflächen in den Ebenen E' und E'' liegen, sind gegeben. Man soll ihren Durchschnitt konstruieren.

Auflösung. Man lege wieder durch einen beliebig gewählten Punkt p, s. Fig. 199, eine Ebene parallel zu den Seitenkanten beider Prismen und bestimme ihre Schnittlinien T und U mit den Ebenen E' und E''. Verschiebt man nun die Ebene pqr parallel zu sich selbst, so dass sie nacheinander die Seitenkanten der beiden Prismen enthält, so laufen ihre Schnittlinien mit der Ebene E' parallel zur Linie T, jene mit der Ebene E''

Figur 199.



parallel zu U, und je zwei in einer Ebene liegenden Schnittlinien begegnen sich auf der Schnittlinie S der Ebenen E' und E''.

So liefert z. B. die durch die Kante durch e geführte Ebene in E'' die Schnittlinie U', in E' die Schnittlinie T', welche ihrerseits in der Grundfläche des Prismas I die Punkte 1 und 2 bestimmt, durch welche die Schnittlinien der Ebene $U'T'$ mit dem Prisma I hindurchgehen und auf der Prismakante durch e die Punkte I und II ausschneiden.

In gleicher Weise bestimmen sich die übrigen Punkte der Schnittfigur. Die Ermittelung der Verbindungsreihenfolge geschieht wieder entweder nach dem in Auflösung der Aufgabe 64 oder nach dem in Anmerkung 62 angegebenen Verfahren. Es entsteht im vorliegenden Falle ein vollständiger Durchschnitt mit zweien getrennten Durchschnittsfiguren:

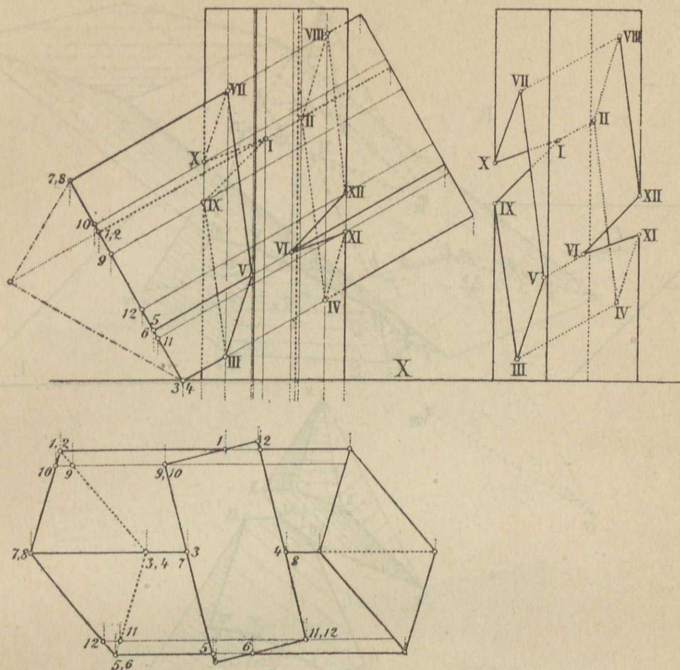
$$\overline{1\cdot5\cdot9\cdot3\cdot11\cdot6\cdot1} \text{ und } \overline{2\cdot10\cdot7\cdot4\cdot12\cdot8\cdot2}.$$

Anmerkung 64. Man führe die Aufgabe 66 in der Projektionszeichnung durch und wähle die eine der **Pr. Ebn.**, etwa E_1, zusammenfallend mit der Grundfläche des einen Prismas, die **Pr. Eb.**$_2$ aber senkrecht zur Schnittlinie S der beiden Grundflächenebenen E' und E''.

Hat das eine der beiden Prismen noch ausserdem eine besondere Lage gegen die eine der **Pr. Ebn.**, z. B. parallel zur **Pr. Eb.** E_2, so gestaltet sich die Konstruktion noch einfacher, als in Aufgabe 66 gezeigt wurde; siehe Aufgabe 67.

163) **Aufgabe 67.** Ein zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechtes Prisma wird von einem zweiten zur **Pr. Eb.** E_2 parallelen Prisma durchdrungen. Man soll die Durchschnittsfigur konstruieren.

Figur 200.



Auflösung. Die Grundfläche des zweiten gegen die **Pr. Eb.** E_1 geneigten Prismas, siehe Figur 200, soll ein Rechteck sein, von dem eine Diagonale parallel zur Ebene E_2 gerichtet ist. Mittels der Umlegung des halben Rechtecks bestimmt sich der Grundriss der Grundfläche. Zur Ermittelung des Schnittes benützt man wieder Ebenen parallel zu den beiden Prismenrichtungen. Die ersten Spuren dieser Ebenen sind aber parallel zu den ersten Projektionen der Seitenkanten des geneigten Prismas und gehen bezw. durch die Ecken der Grundrisse der beiden Grundflächen; im übrigen bleibt die Konstruktion wie in der vorhergehenden Aufgabe.

3) Durchdringung eines Prismas und einer Pyramide, sowie zweier Pyramiden.

a) Durchdringung eines Prismas mit einer Pyramide.

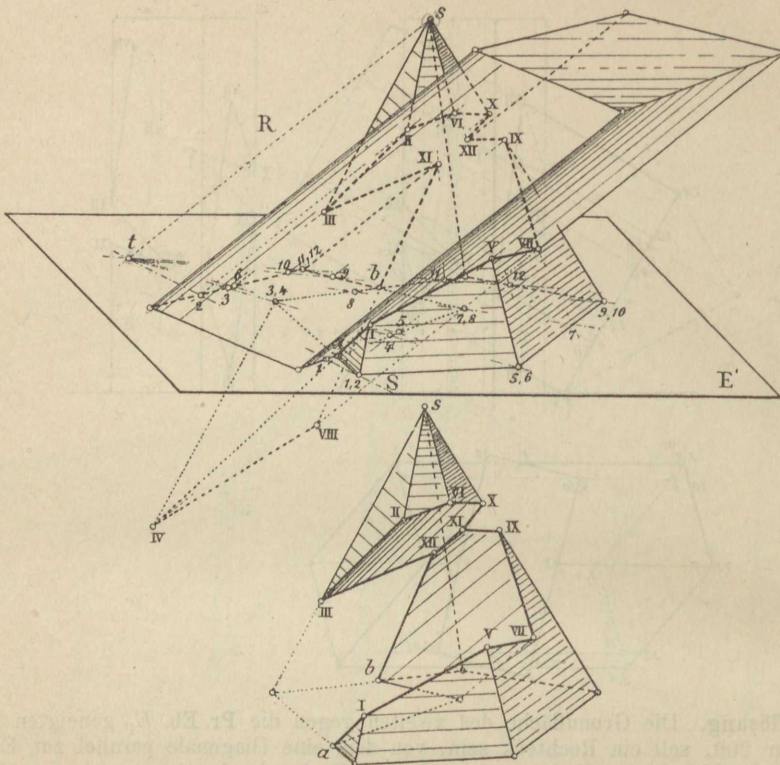
164) Soll der Schnitt eines Prismas mit einer Pyramide konstruiert werden, so benützt man zweckmässig Hilfsebenen, welche die Pyramidenspitze enthalten und parallel gerichtet sind zu den Seitenkanten des Prismas. Jede solche Hilfsebene schneidet die beiden Körper nach Geraden parallel zu den Seitenkanten des Prismas, bezw. gehend durch die Pyramidenspitze.

165) **Aufgabe 68.** Eine Pyramide und ein Prisma, deren Grundflächen in der nämlichen Ebene E' liegen, durchdringen sich. Man soll den Durchschnitt konstruieren.

Auflösung. Man zeichne durch die Pyramidenspitze s, siehe Figur 201, eine Gerade parallel zur Prismenrichtung, so gehen die Spuren der in 164) genannten Hilfsebenen durch den Schnittpunkt t dieser Geraden mit der Ebene E'.

Legt man z. B. die Hilfsebene etwa durch die Pyramidenkante $\overline{s \cdot 1 \cdot 2}$, so ist die zugehörige Spur S die Gerade $t \cdot 1 \cdot 2$, und letztere schneidet den Umriss der Prismengrundfläche in zweien Punkten 1 und 2, durch welche parallel zur Prismenrichtung die Schnittlinien der angenommenen Ebene mit dem Prisma hindurchgehen und auf der Pyramidenkante $s\,1 \cdot 2$ zwei Punkte I und II der Schnittfigur bestimmen.

Figur 201 und 202.



Anmerkung 65. Die Verbindungsreihenfolge ergibt sich zweckmässig wieder mittels der arabischen Ziffern; man erhält das Polygon:

$$\overline{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 1}.$$

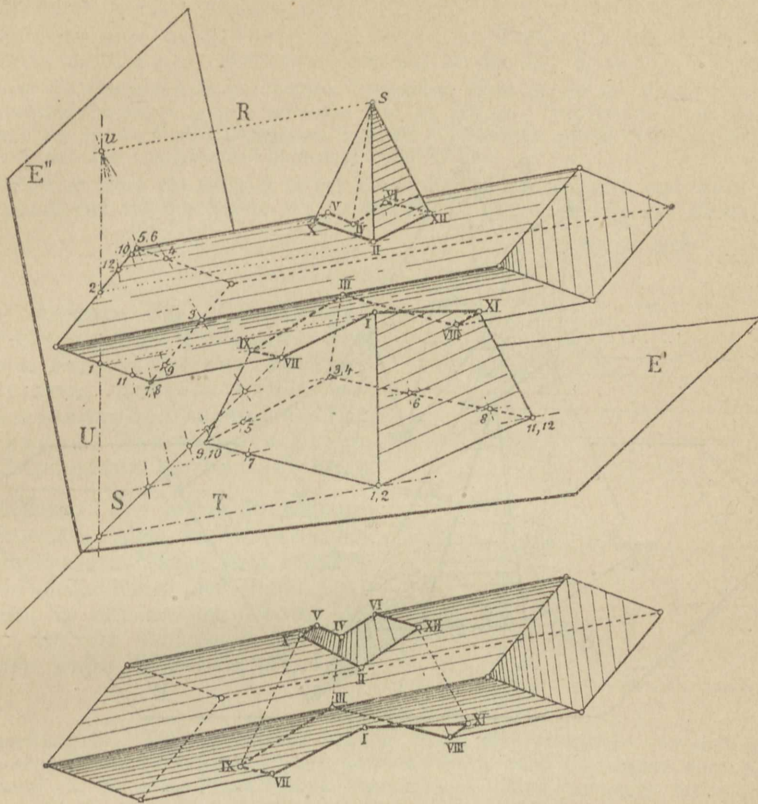
Im vorliegenden Falle beteiligen sich die Grundflächen beider Körper am Schnitte; es enthält demnach die Schnittfigur die Schnittpunkte a und b der Umrisse beider Grundflächen, und es gehört der unter der Ebene E' liegende Teil des Schnittes nicht mehr zur eigentlichen Schnittfigur. Figur 202 zeigt die durchschnittene Pyramide nach Hinwegnahme des Prismas.

Anmerkung 66. Man führe das vorstehende Beispiel in der Projektionszeichnung durch und nehme die **Pr. Eb.** E_1 zusammenfallend mit der Ebene E', die **Pr. Eb.** E_2 parallel zum Prisma an.

165a) Liegen die Grundflächen der beiden Körper nicht in einer Ebene, sondern etwa in den Ebenen E' und E'', siehe Figur 202a, so wird man die Schnittpunkte t und u einer durch die Pyramidenspitze zur Prismenrichtung geführten Parallelen R mit den Ebenen E' und E'' ermitteln, denn durch diese Schnittpunkte gehen die zur Konstruktion des Schnittes der beiden Körper zu benützenden Hilfsebenen.

Im vorliegenden Falle ist die Prismenrichtung parallel zur Ebene E' gewählt, weshalb der Punkt t nicht vorhanden ist; es laufen vielmehr die Schnittlinien der Hilfsebenen mit E' parallel zur Prismenrichtung. So schneidet z. B. die durch die Kante $s \cdot 1{,}2$ geführte Hilfsebene die Ebene E' nach der Geraden T, die Ebene E'' nach der Geraden U; letztere Linie trifft die Seiten der Prismengrundfläche in zweien Punkten 1 und 2, durch welche parallel zur Prismenrichtung die Schnittlinien der Hilfsebenen mit dem Prisma hindurch gehen und auf der Pyramidenkante $s \cdot 1{,}2$ die Punkte I und II ausschneiden.

Figur 202a und 202b.



Die Durchschnittsfigur besteht aus den beiden Vielecken $\overline{1\cdot 11\cdot 8\cdot 3\cdot 9\cdot 7\cdot 1}$ und $\overline{2\cdot 12\cdot 6\cdot 4\cdot 5\cdot 10\cdot 2}$, für welche sich die Verbindungsreihenfolge zweckmässig wieder mit Benützung der arabischen Ziffern bestimmt. Figur 202b zeigt das durchschnittene Prisma, nach Hinwegnahme der Pyramide.

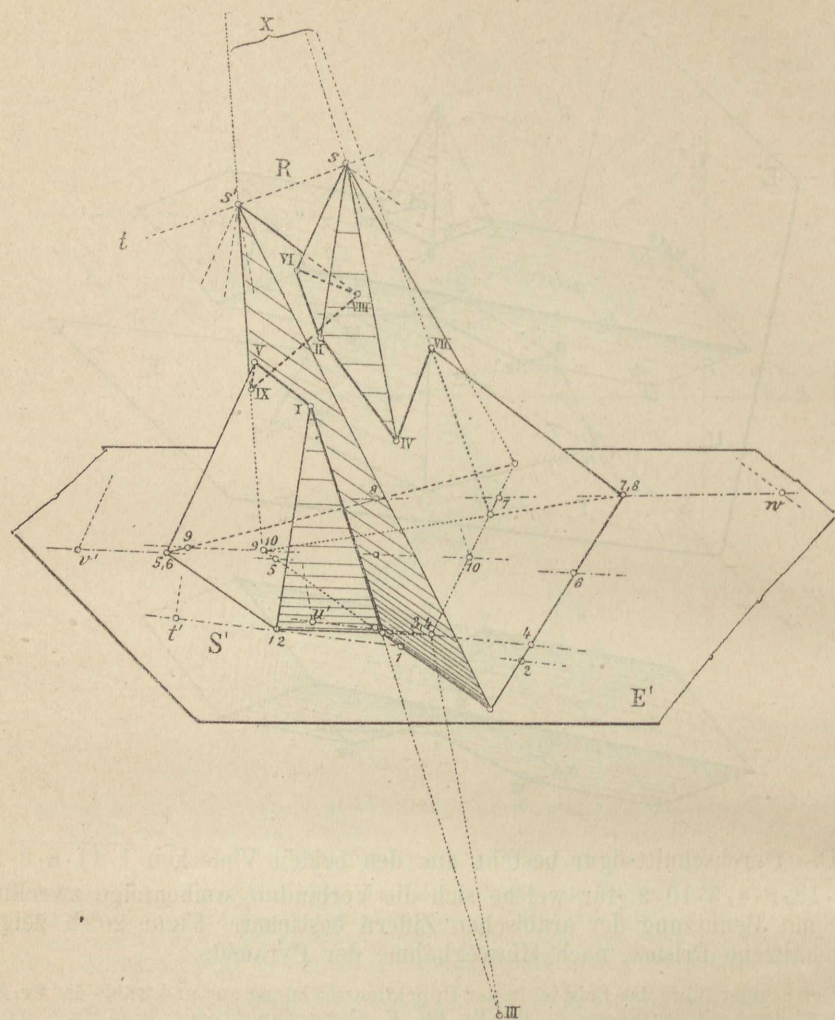
Der Schüler führe das Beispiel in der Projektionszeichnung aus und wähle die **Pr. Eb.** E_1, zusammenfallend mit der Ebene E', die **Pr. Eb.** E_2 aber senkrecht zur Schnittlinie der beiden Ebenen E' und E''.

b) Durchdringung zweier Pyramiden.

165b) Um die Durchdringung zweier Pyramiden zu konstruieren, lege man durch die Pyramidenkanten Hilfsebenen, welche die beiden Pyramidenspitzen und demnach auch deren Verbindungslinie R enthalten, sie schneiden die beiden Pyramiden nach Geraden, gehend durch die zugehörige Pyramidenspitze.

Liegen, wie in Figur 202c, die Grundflächen der beiden Pyramiden in der nämlichen Ebene E', so gehen die Schnittlinien aller Hilfsebenen durch den Schnittpunkt t der Geraden R mit der Ebene E' und ausserdem durch die Ecken der Pyramidengrundfläche. Im übrigen bleibt das Konstruktionsverfahren genau dasselbe wie in Aufgabe 68. Sehr häufig wird aber der Punkt t unzugänglich sein, d. h. über die Grenze der zur Verfügung stehenden Zeichnungsfläche hinausfallen, wie z. B. in Figur 202c. In diesem Falle erhält man einen Punkt der Schnittlinie einer Hilfsebene mit der Ebene E' mittels einer Parallelen zu der-

Figur 202 c.



jenigen Pyramidenkante, durch welche die Ebene gelegt ist, durch die Spitze der andern Pyramide. So ist z. B. durch die Pyramidenkante $s \cdot 1{,}2$ eine Ebene gelegt und durch s' eine Parallele $s't'$ zur Pyramidenkante $s \cdot 1{,}2$ gezogen; durch den Schnittpunkt t' dieser Parallelen mit der Ebene E' geht die Schnittlinie S' der Hilfsebene mit der Ebene E' und schneidet die Seiten der Grundfläche der Pyramide s' in zweien Punkten 1 und 2, durch welche die Schnittlinien der Hilfsebene mit der Pyramide s' zu ziehen sind, sie treffen die Pyramidenkante $s \cdot 1{,}2$ in den Punkten I und II.

In gleicher Weise bestimmt man die übrigen Punkte der Schnittfigur, z. B. die Punkte III und IV mittels der Parallelen $s'u'$ zu $s \cdot 3{,}4$, die Punkte V und VI mittels der Parallelen $s'v'$ zu $s \cdot 5{,}6$, die Punkte VII und VIII mittels der Parallelen sw zu $s' \cdot 7{,}8$ u. s. w.

Ist der Punkt t' als Schnittpunkt der Parallelen durch s' zu $s \cdot 1{,}2$ mit E' ermittelt, so ergibt sich der Punkt u' im Schnitt der Parallelen durch t' zur Grundkante $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ und der Parallelen durch s' zu $s \cdot 3{,}4$, ebenso der Punkt v' im Schnitt der Parallelen $t'v'$ zur Grundkante $1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6$ und der Parallelen durch s' zu $s \cdot 5{,}6$. Die Punkte t', u', $v' \cdots$ bilden in E'

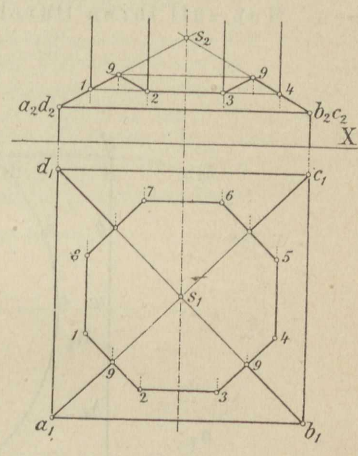
eine der Grundfläche der Pyramide s ähnliche Figur, desgleichen bilden die Punkte w eine der Grundfläche der Pyramide s' ähnliche Figur.

Der Schüler führe das in Figur 202 c dargestellte Beispiel in der Projektionszeichnung aus und nehme die Ebene E' zusammenfallend mit der **Pr. Eb.** E_1 an.

Liegen die Grundflächen der beiden Pyramiden nicht in der nämlichen Ebene, so bleibt das Konstruktionsverfahren genau dasselbe wie in 165 a). Die Gerade R ist dabei die Verbindungslinie der beiden Pyramidenspitzen und die Hilfsebenen gehen durch die Schnittpunkte t und u von R mit den Grundflächenebenen E' und E''.

Der Schüler führe ein Beispiel in der Projektionszeichnung durch und wähle die **Pr. Eb.** E_1, zusammenfallend mit der Ebene E', die **Pr. Eb.** E_2 aber senkrecht zur Ebene E''.

Figur 203.



166) **Aufgabe 69.** Eine regelmässige vierseitige Pyramide wird von einem regelmässigen achtseitigen Prisma, dessen Achse mit der Pyramidenachse zusammenfällt, durchdrungen. Man soll den Durchschnitt der beiden Körper zeichnen.

Auflösung. Die ersten Projektionen der Schnittpunkte fallen in die Achtecksseiten der Prismengrundfläche, siehe Fig. 203. Die zweiten Projektionen der Punkte 1, 9 und 4 fallen in den zweiten Umriss der Pyramide. Mit den Punkten 1 und 4 in gleicher Höhe liegen die Punkte 2 und 3.

Anmerkung 67. Das vorstehende Beispiel findet eine praktische Anwendung, wenn es sich darum handelt, ein vierseitiges Prisma, etwa als Basis eines Kirchturms oder eines Schornsteines u. dergl., in ein achtseitiges Prisma überzuführen. Man verwendet hierzu zweckmässig als Zwischenglied die vierseitige Pyramide.

Der Schüler löse die folgenden Aufgaben:

1) Ein zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechtes vierseitiges Prisma soll durchdrungen werden von einer mit ihrer Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegenden sechsseitigen Pyramide.

2) Man soll die Durchdringung von zweien Pyramiden konstruieren, deren Grundflächen beziehungsweise in den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 liegen.

3) Man soll die Durchdringung eines zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechten Kreiscylinders mit einer sechsseitigen unregelmässigen Pyramide konstruieren, wenn die Grundfläche der Pyramide in einer der **Pr. Eb.** liegt.

4) Ein zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechter Kreiscylinder und ein Prisma, das zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht steht, sind gegeben. Man soll die Durchdringung konstruieren.

5) Man soll die Durchdringung eines schiefen Kreiskegels mit einer fünfseitigen Pyramide konstruieren, wenn die Grundflächen beider Körper in der nämlichen **Pr. Eb.** liegen.

6) Zwei regelmässige Pyramiden besitzen die nämliche Achse. Die eine Pyramide ist vierseitig, die andere achtseitig. Man konstruiere die Durchdringung der beiden Körper.

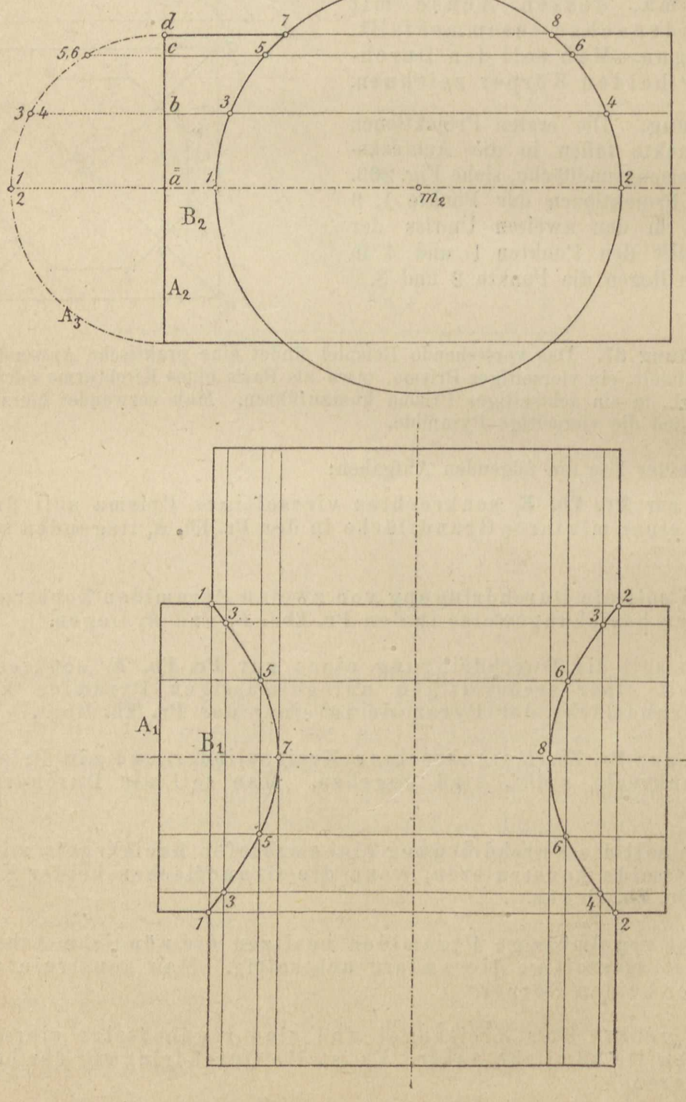
7) Ein senkrechter Kreiskegel und eine regelmässige vierseitige Pyramide besitzen die nämliche Achse. Es ist die Durchdringung der beiden Körper zu konstruieren.

4) Durchdringung zweier Kreiscylinder.

167) Die Konstruktion der Schnittfigur erledigt sich in ähnlicher Weise wie bei zweien Prismen, d. h. man wählt Hilfsebenen parallel zu den beiden Cylinderrichtungen. Diese Hilfsebenen treffen die Cylinder nach Mantellinien, deren Schnittpunkte der Durchschnittsfigur angehören.

168) **Aufgabe 70.** Zwei senkrechte Kreiscylinder, der eine senkrecht zur Ebene E_2, der andere parallel zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2, sind gegeben. Man soll ihren Durchschnitt konstruieren.

Figur 204.

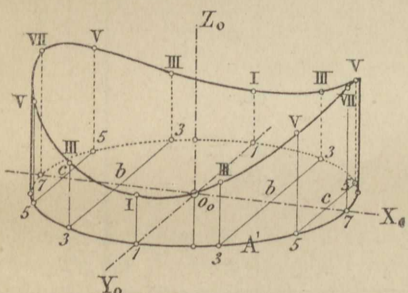


Auflösung. Es ist angenommen, dass die Achsen der beiden Cylinder, siehe Figur 204, sich senkrecht durchschneiden; die Spuren der Hilfsebenen sind im Aufriss zu zeichnen und parallel zur X-Achse.

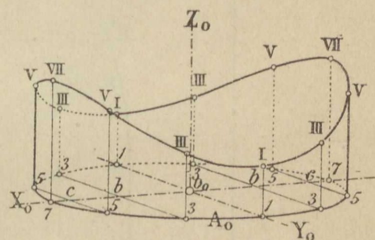
So ist z. B. die Parallele durch c zur X-Achse die zweite Spur einer solchen Hilfsebene, welche bezw. die Punkte 5 und 6 der Schnittfigur enthält. Die ersten Projektionen der Schnittpunkte erhält man mittels der Umlegung A_3 des Cylindergrundkreises.

Anmerkung 68. In den Figuren 205 und 206 ist das Cylinderstück B einmal dimetrisch $1:\frac{1}{2}:1$, siehe Figur 205, in Obersicht links, dann trimetrisch $9:5:10$, siehe Figur 206, in Obersicht rechts gezeichnet. Statt der früher erwähnten axonometrischen Massstäbe lassen sich die erforderlichen Verkürzungen auch mittels eines Hilfswinkels konstruieren. Man macht $\overline{pf}$, siehe Figur 207 und 208, gleich 10 Teilen und beschreibt um p einen Kreisbogen, gehend durch f. Trägt man dann die Sehne $fg = 5$ bezw. $= 9$ Teilen in den Kreis, so ergibt sich die Linie pg in den Figuren 207 und 208. Trägt man nun die wahre Länge einer Strecke von p aus auf pf auf und beschreibt um p einen durch den Endpunkt der Strecke gehenden Kreis, so schneidet dieser auf der Linie pg die um $\frac{5}{10}$ bezw. $\frac{1}{10}$ verkürzte Strecke ab, die dann als axonometrische Koordinate zu benützen ist.

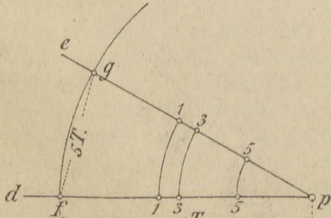
Figur 205.



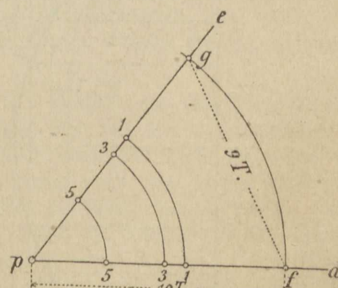
Figur 206.



Figur 207.



Figur 208.



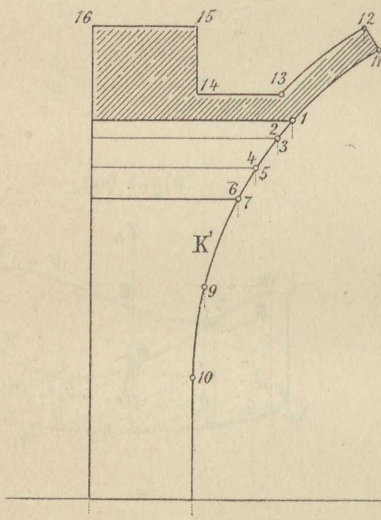
168a) Angewandtes Beispiel: **Aufgabe 71.** In ein kreiscylindrisches Tonnengewölbe ist eine kreiscylindrische Stichkappe, deren Achse zur Horizontalebene parallel läuft und zur Achse des Tonnengewölbes senkrecht steht, zu konstruieren.

Auflösung. Der Punkt m', siehe Figur 210, ist der Mittelpunkt für den Grundkreis K' des Tonnengewölbes, m jener für den Fensterbogen K. Die Bestimmung der Schnittlinien der beiden Cylinder erfolgt mittels Horizontalebenen, welche aus beiden Cylindern Mantellinien ausschneiden, die sich in Punkten der Schnittkurve treffen.

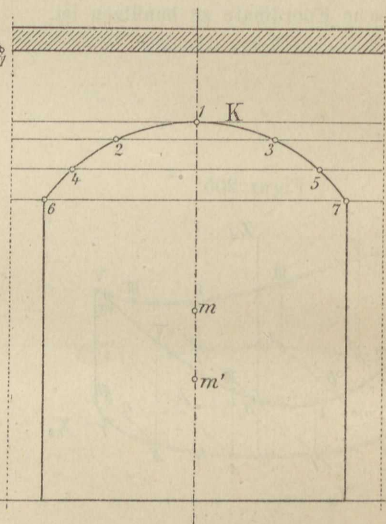
Die Strecken $\overline{2 \cdot 3}$, $\overline{4 \cdot 5}$, $\overline{6 \cdot 7}$ sind in den Figuren einander gleich.

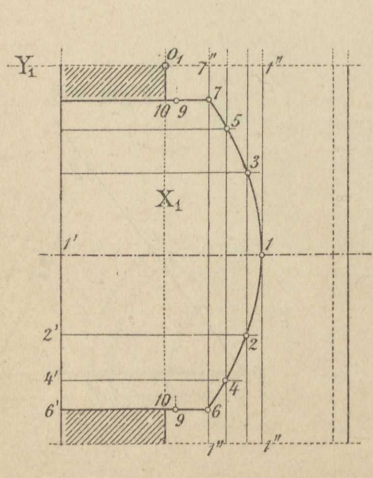
Anmerkung 69. In Figur 211 ist eine isometrische Projektion der Stichkappe in Untersicht rechts dargestellt. Man zeichnet zunächst den Grundriss der Figur 209 in isometrischer Projektion und trägt dann von den Punkten des isometrischen Grundrisses die Höhen als die z-Koordinaten in wahrer Grösse ab.

Figur 209.

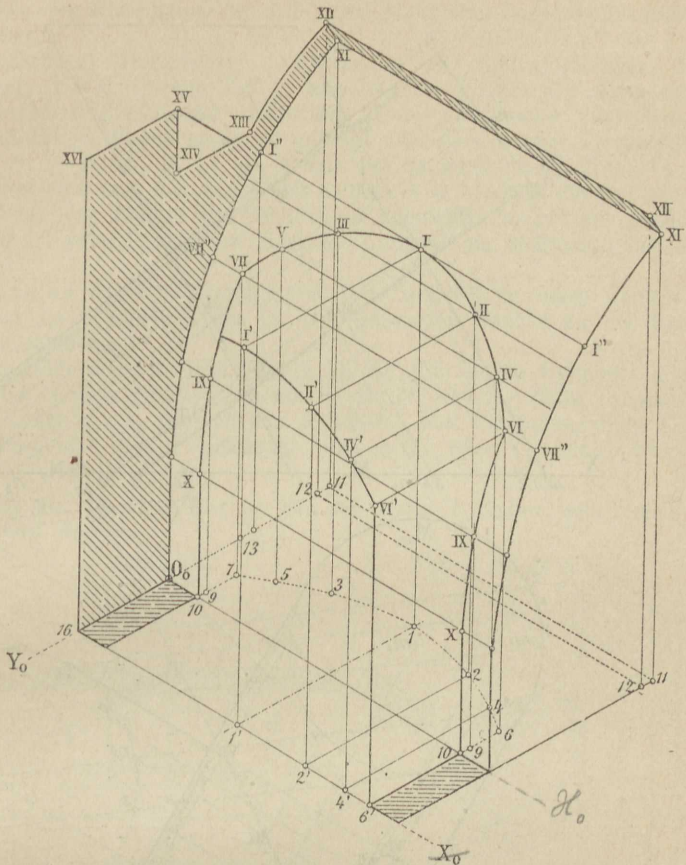


Figur 210.





Figur 211.



Bemerkung. In Figur 211 ist die X_0-Achse unrichtig eingezeichnet; sie muss durch O_0 gehen.

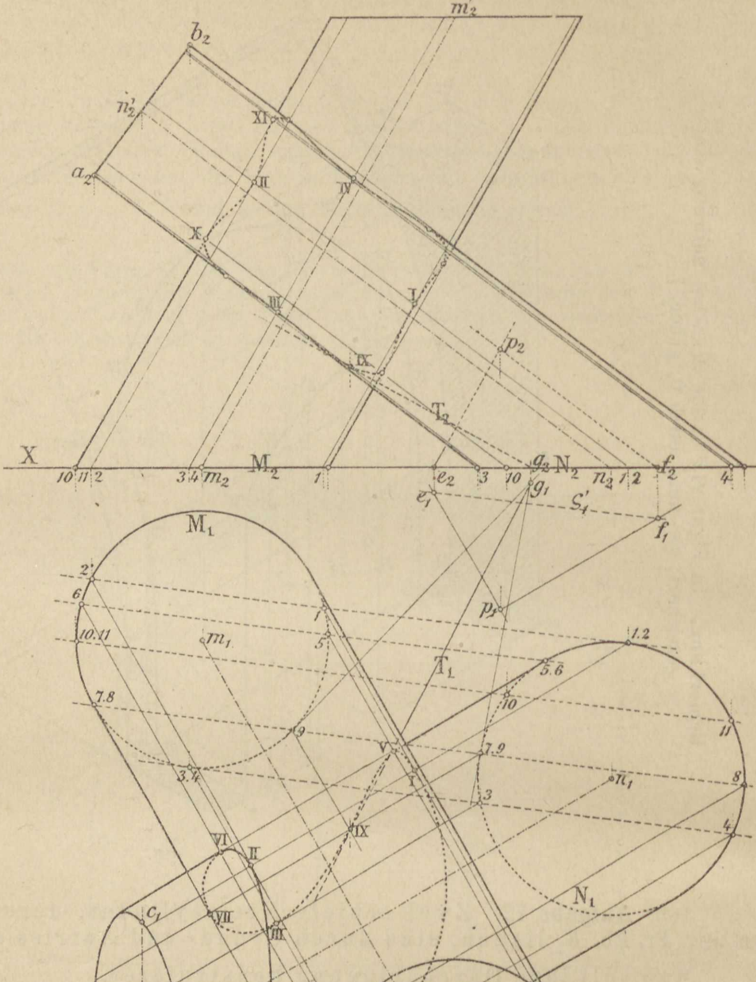
169) **Aufgabe 72.** Zwei schiefe Kreiscylinder, deren Grundflächen in der **Pr. Eb.** E_1 liegen, sind durch Grund- und Aufriss dargestellt.

Man soll ihre Durchdringung konstruieren.

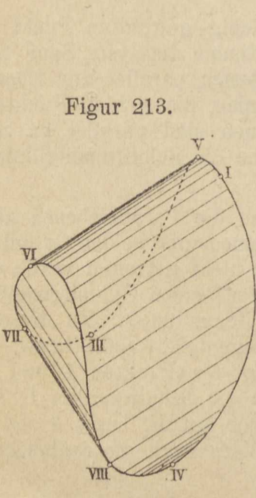
Auflösung. Man lege, siehe Figur 212, durch den beliebig gewählten Punkt p eine Ebene parallel zu den Richtungen beider Cylinder und bestimme die erste Spur S_1' dieser Ebene. Schneidet man nun die beiden Cylinder durch Ebenen parallel zur Ebene $p\,S'$, so erhält man als Schnittlinien mit den Cylindern Mantellinien, die sich in Punkten der Schnittkurve treffen. Die ersten Spuren dieser Parallelebenen sind parallel zu S_1' und treffen die Grundkreise M_1 und N_1 in Punkten, durch welche die Schnittmantellinien hindurchgehen.

Besondere Punkte der Schnittkurve. Wählt man die Parallelebenen zur Ebene $p\,S'$ ganz beliebig, so kann es vorkommen, dass nur auf einem der beiden Cylinder Schnittmantellinien enthalten sind, der andere Cylinder aber gar nicht getroffen wird; es ist daher zweckmässig, gleich von vornherein diejenigen Teile der beiden Cylindermäntel abzugrenzen, auf welchen die Schnittfigur der beiden Cylinder liegen muss. Zu diesem Zwecke zieht man parallel zu S_1' an die Kreise N_1 und M_1 Tangenten, welche bezw. in den Punkten $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ berühren und den anderen Kreis in den Punkten 1 und 2 bezw. 3 und 4 schneiden. Den Punkten 1, 2, 3, 4 entsprechen die Schnittpunkte I, II, III und IV. Für diese Punkte sind die Mantellinien durch 1 und 2 auf M_1 bezw. 3 und 4 auf N_1 Tangenten an die Schnittkurve. Diese selbst liegt auf den durch die arabischen

Figur 212.



Figur 213.



Ziffern bestimmten Mänteln beider Cylinder. Weitere wichtige Punkte der Schnittkurve sind jene auf den Umrissmantellinien liegenden Punkte. Man erhält sie, wenn man durch die Punkte, in welchen die Umrissmantellinien die Kreise M_1 und N_1 treffen, die Spuren der Hilfsebenen zeichnet und die ihnen entsprechenden Schnittpunkte bestimmt; in der Figur sind auf diese Weise die Punkte V und VI, VII und VIII auf dem ersten, desgleichen die Punkte IX und X auf dem zweiten Umriss bestimmt worden, die übrigen auf dem zweiten Umriss der Cylinder liegenden Punkte der Schnittfigur sind in der Figur 212 angegeben, aber nicht durch Ziffern bezeichnet.

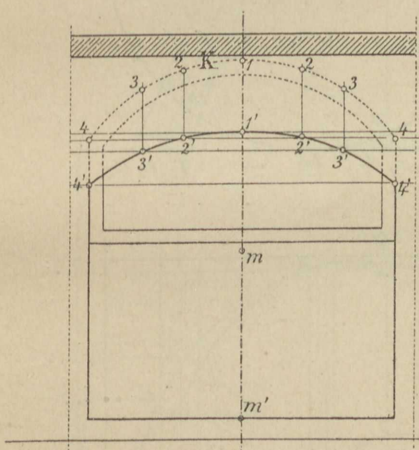
Verbindungsreihenfolge der Punkte der Schnittfigur. Man geht von einem beliebigen, mit arabischen Ziffern bezeichneten Punkte der Grundkreise aus und durchläuft auf jedem der Kreise denjenigen Teil, auf dessen zugehörigem Cylindermantel die Schnittkurve liegen muss; so gelangt man vom Punkte 1 ausgehend nach den Punkten 5, 9, 3, 7, 10, 6, 2, 11, 8, 4 und von da zurück nach Punkt 1, so dass die Verbindungsreihenfolge ist: 1·5·9·3·7·10·6·2·11·8·4·1. Was die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit der Punkte der Schnittfigur anbetrifft, so gilt die gleiche Regel wie früher: Sichtbar ist jeder Punkt, der für beide Cylinder auf sichtbaren Teilen der Mantelfläche liegt.

Tangente an die Schnittfigur. Die Tangente in einem Punkte der Schnittfigur erhält man als Schnittlinie der in dem genannten Punkte an die beiden Cylinder gelegten Tangentialebenen.

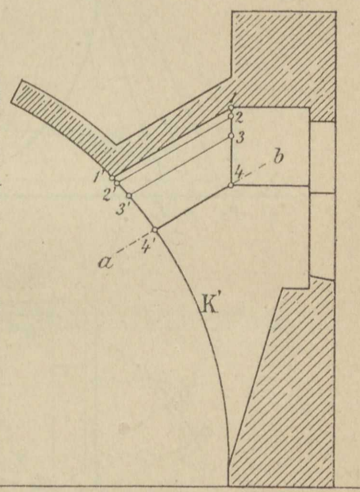
Die Tangentialebenen in dem Punkte IX an die beiden Cylinder haben als erste Spuren Tangenten in dem Punkte 9 an die Kreise M_1 und N_1; diese Tangenten schneiden sich in einem Punkte g_1; g_2 liegt in der X-Achse. Die Verbindungslinie IXg ist somit die gesuchte Tangente; ihre Projektionen sind g_1IX oder T_1 und g_2IX oder T_2 beziehungsweise.

Anmerkung 70. In Figur 213 ist das den beiden Cylindern gemeinsame Körperstück besonders gezeichnet worden.

Figur 214.



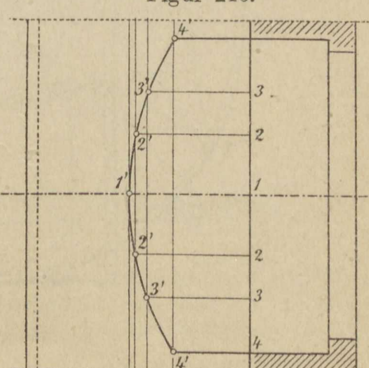
Figur 215.



170) Angewandtes Beispiel: **Aufgabe 73.** In ein kreiscylindrisches Tonnengewölbe ist eine kreiscylindrische Stichkappe, deren Achse zur Horizontalebene geneigt ist, zu konstruieren.

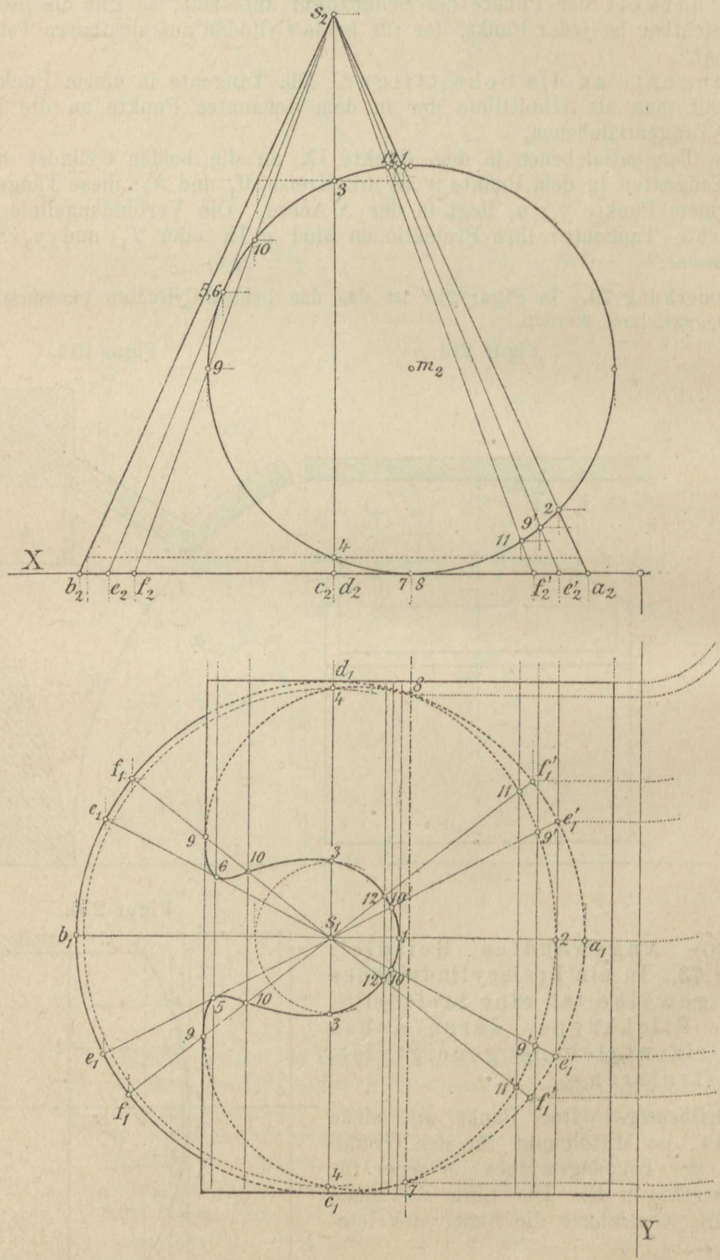
Auflösung. Der Punkt m', siehe Figur 214, ist Mittelpunkt für den Grundkreis K' des Tonnengewölbes, m jener für den Fensterbogen K. Die Linie ab, siehe Figur 215, bezeichnet die Achse des letzteren.

Figur 216.



Zur Bestimmung der Schnittlinie der beiden Cylinder wählt man auf K, siehe Figur 214, die Punkte 1, 2, 3, 4 beliebig und zieht durch sie Mantellinien und bestimmt deren Projektionen in den Figuren 215 und 216. In Figur 215 ergeben sich dann unmittelbar die Punkte 1′, 2′, 3′, 4′ der Schnittkurve, welche in die Figuren 214 und 216 zu übertragen sind.

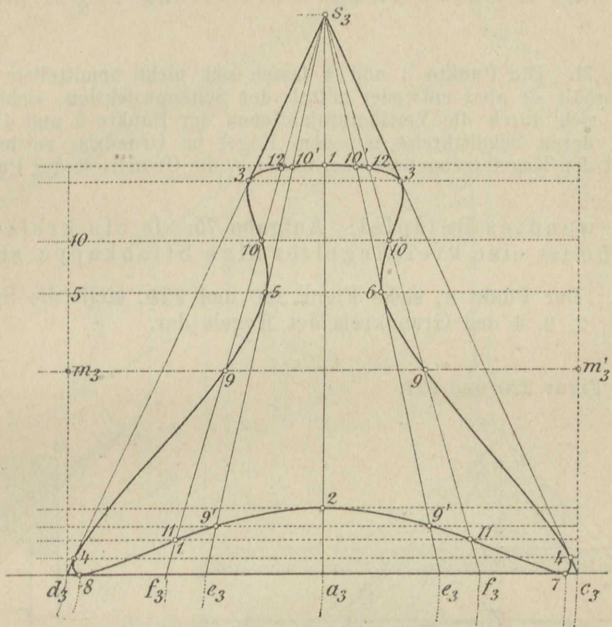
Figur 217.



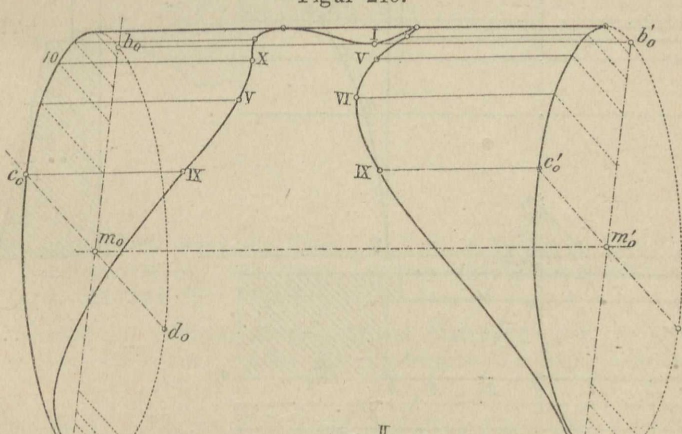
5) Durchdringung eines Kreiskegels mit einem Kreiscylinder.

171) Zur Ermittelung des Schnittes eines Kreiskegels mit einem Kreiscylinder benützt man Hilfsebenen, welche die Kegelspitze enthalten und parallel gerichtet sind zu den Mantellinien des Cylinders. Diese Ebenen schneiden die Oberflächen beider Körper nach Mantellinien, deren gegenseitige Schnittpunkte der Schnittkurve angehören.

Figur 218.



Figur 219.



172) **Aufgabe 74.** Ein senkrechter Kreiskegel und ein zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehender Kreiscylinder sind durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll die Durchdringung der beiden Körper zeichnen.

Auflösung. Im vorliegenden Falle gestaltet sich die Konstruktion sehr einfach; die oben erwähnten Hilfsebenen stehen senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2, ihre zweiten Spuren gehen durch s_2, siehe Figur 217. So liefert z. B. die Ebene $s_2 f_2$ die beiden Kegelmantellinien sf, deren erste Projektionen $s_1 f_1$ sind; sie werden von den entsprechenden Cylindermantellinien in den Punkten 9 und 10 getroffen. Die Tangente durch s_2 an den Cylinderkreis stellt die zweite Projektion von zweien Kegelmantellinien dar, deren erste Projektionen $s_1 e_1$ Tangenten an die Schnittkurve in den Punkten b sind.

Figur 218 stellt eine Seitenansicht des Kegels nach Hinwegnahme des Cylinders dar.

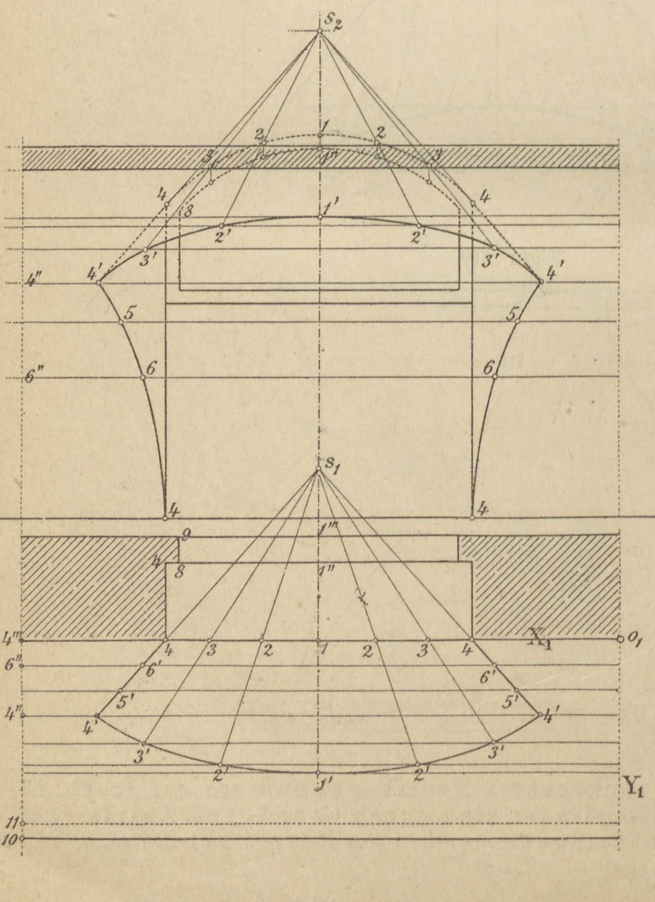
Figur 219 zeigt eine dimetrische Darstellung $1 : \frac{1}{2} : 1$ des Cylinders samt der Schnittkurve.

Anmerkung 71. Die Punkte 3 und 4 lassen sich nicht unmittelbar in den Grundriss projizieren, man erhält sie aber entweder mittels der Seitenprojektion, siehe Figur 218, oder aber, indem man sich durch die Vertikalprojektionen der Punkte 3 und 4 Horizontalebenen gelegt denkt und deren Schnittkreise mit dem Kegel im Grundriss zeichnet; die letzteren schneiden dann auf den Kegelerzeugenden $c_1 s_1$ und $d_1 s_1$ die Grundrisse der Punkte 3 und 4 aus.

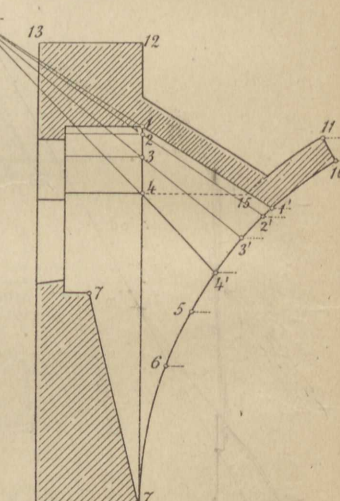
173) Angewandtes Beispiel: **Aufgabe 75.** In ein kreiscylindrisches Tonnengewölbe ist eine kreiskegelförmige Stichkappe zu konstruieren.

Auflösung. Der Punkt s, siehe Figur 220 und 221, stellt die Spitze des Kegels, der Kreisbogen 1, 2, 3, 4 den Grundkreis des Kegels dar.

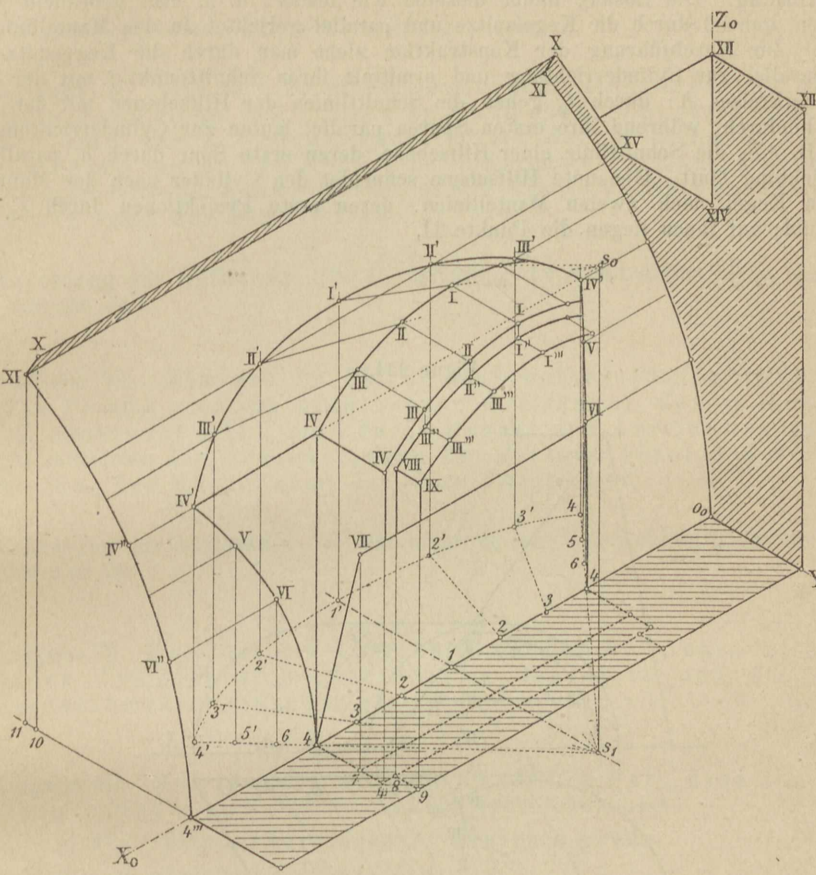
Figur 220 und 221.



Figur 222.



Figur 223.



Die Kegelmantellinien durch die Punkte 1, 2, 3, 4 liefern in Figur 222 unmittelbar die gesuchten Schnittpunkte mit der innern Leibung des Tonnengewölbes und brauchen nur in die Figuren 220 und 221 projiziert zu werden.

An die Kegelfläche schliesst sich längs der Mantellinie 4 4′ eine vertikale Ebene als Begrenzung der Kappe an, welche das Tonnengewölbe nach dem Bogen 4·5·6·4 schneidet.

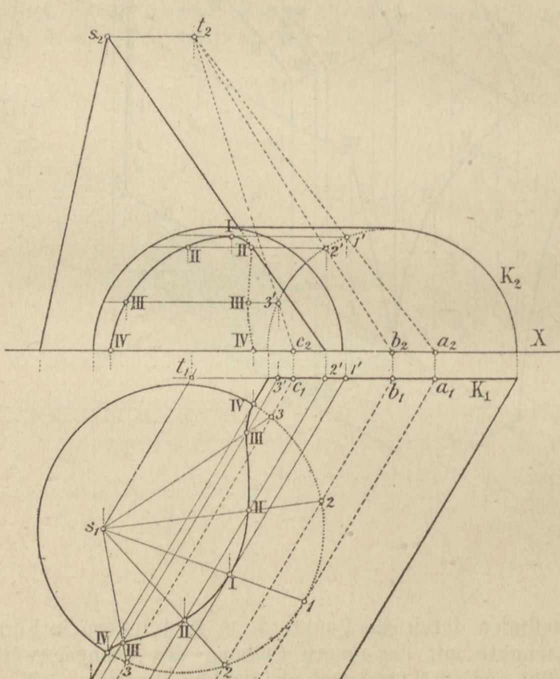
Die Schnittpunkte ergeben sich durch Annahme einer Anzahl von Cylindererzeugenden durch die Punkte 4′, 5, 6 in Figur 222 und Uebertragung derselben in die Figuren 220 und 221.

Anmerkung 72. In Figur 223 ist eine isometrische Projektion der ganzen Darstellung, Untersicht links, mit dem Punkte 0 als Koordinatenanfangspunkt, dessen zweite Projektion in der *X*-Achse zu denken ist, gezeichnet.

174) **Aufgabe 76.** Ein schiefer Kreiskegel und ein schiefer Kreiscylinder sind durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll die Durchdringung der beiden Körper zeichnen.

Auflösung. Die Lösung bleibt dieselbe wie bisher, d. h. man gebraucht wieder Hilfsebenen, gehend durch die Kegelspitze und parallel gerichtet zu den Mantellinien des Cylinders. Zur Durchführung der Konstruktion zieht man durch die Kegelspitze eine Gerade parallel zur Cylinderrichtung und ermittelt ihren Schnittpunkt t mit der Ebene des Cylinderkreises K; durch t_2 gehen die Schnittlinien der Hilfsebenen mit der Kreisebene K hindurch, während ihre ersten Spuren parallel laufen zur Cylinderrichtung. So liefert z. B. $t_2 b_2$ die Schnittlinie einer Hilfsebene, deren erste Spur durch b_1 parallel zur Cylinderrichtung läuft. Genannte Hilfsebene schneidet den Cylinder nach der Mantellinie 2'II, den Kegel nach zweien Mantellinien, deren erste Projektionen durch $s_1 2$ dargestellt sind; auf ihnen liegen die Punkte II.

Figur 224.



Die Tangente an den Kegelkreis, berührend in 1, stellt die erste Spur einer Hilfsebene dar, welche den Kegel nach der Mantellinie $s1$ berührt, den Cylinder nach der Mantellinie 1'I schneidet und hierdurch den Punkt I der Schnittkurve liefert.

Anmerkung 73. Der Cylinder in Figur 224 ist als hohl vorausgesetzt und darum in der Vertikalprojektion der Linienzug IV, III·II·I·II als sichtbar gezeichnet.

6) Uebungsaufgaben.

175) Der Schüler versuche auf Grund der vorangegangenen gelösten Aufgaben die nachfolgenden Aufgaben selbst zu lösen.

Aufgabe 77. Ein zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehendes fünfseitiges regelmässiges Prisma und ein zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht stehender Kreiscylinder sind durch Grund- und Aufriss darzustellen und ist die Durchdringung der beiden Körper zu konstruieren. Man zeichne überdies das gemeinsame Körperstück, sowie die Abwickelung der Mäntel der Körper samt der Schnittfigur.

Andeutung zur Auflösung. Die Durchführung der Konstruktion bleibt die gleiche wie in Aufgabe 64.

Aufgabe 78. Ein zur **Pr. Eb.** E_2 senkrechtes fünfseitiges regelmässiges Prisma und ein senkrechter Kreiskegel, dessen Achse zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht steht, sind durch Grund- und Aufriss darzustellen. Man konstruiere die Durchdringung der beiden Körper und stelle die Abwickelung der Mäntel samt der Schnittfigur her.

Andeutung zur Auflösung. Die Durchführung der Konstruktion bleibt die gleiche wie in Aufgabe 74.

Aufgabe 79. Man löse die Aufgabe 70 für den Fall, dass die Achsen der beiden Cylinder sich rechtwinklig schneiden und die beiden Cylinderdurchmesser einander gleich sind.

Aufgabe 80. Man löse die Aufgabe 70 für den Fall, dass die Achsen der beiden Cylinder sich schiefwinklig schneiden und

a) die Cylinderdurchmesser ungleich gross,

b) von gleicher Grösse sind.

Aufgabe 81. Man löse die Aufgabe 70 für den Fall, dass die Achsen der beiden Cylinder sich nicht schneiden.

Aufgabe 82. Man löse die Aufgabe 76, wenn statt des schiefen Kreiscylinders ein zur **Pr. Eb.** E_1 paralleles und zur **Pr. Eb.** E_2 unter dem Winkel von 60^0 geneigtes Prisma mit sechsseitiger Grundfläche gegeben ist.

Aufgabe 83. Man löse die Aufgabe 72, wenn einer der beiden Cylinder

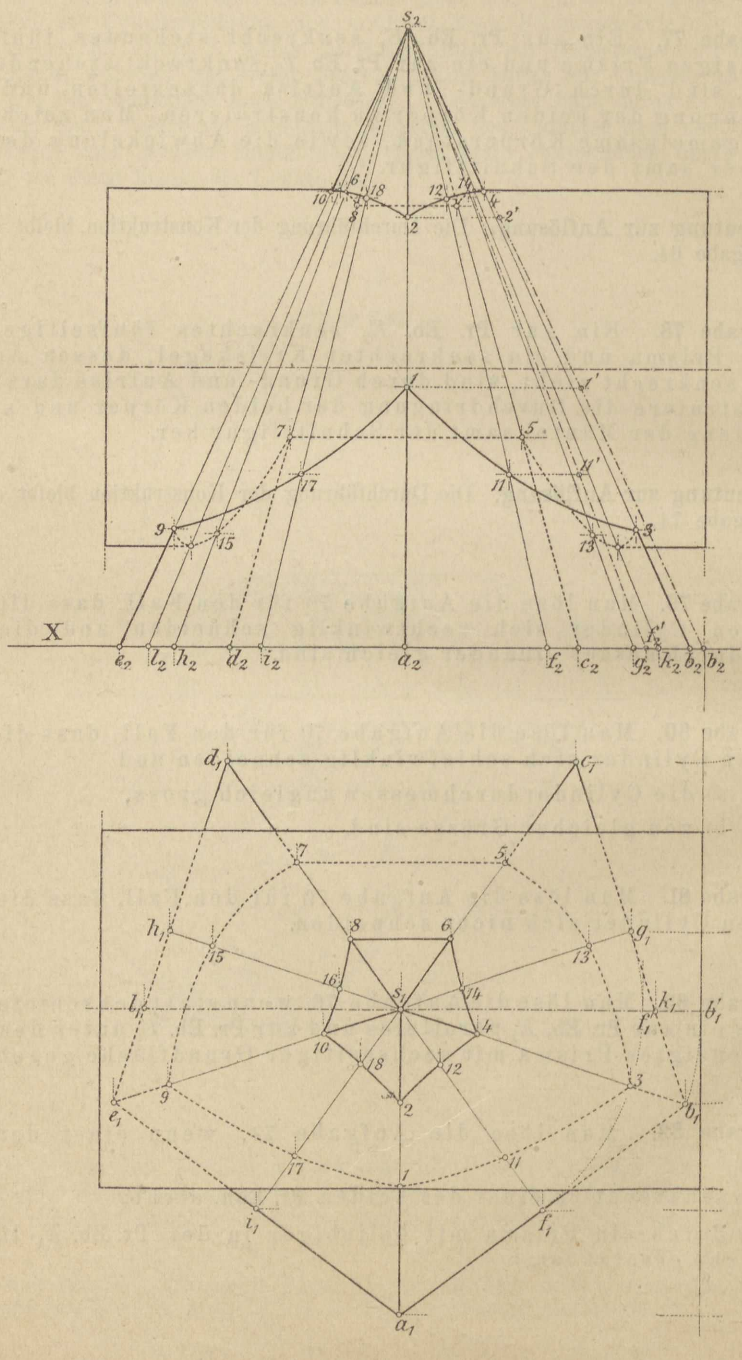
a) senkrecht zu einer der beiden **Pr. Ebn.** steht,

b) durch ein Prisma mit beliebiger in der **Pr. Eb.** E_1 liegenden Grundfläche ersetzt ist.

7) Vermischte Aufgaben.

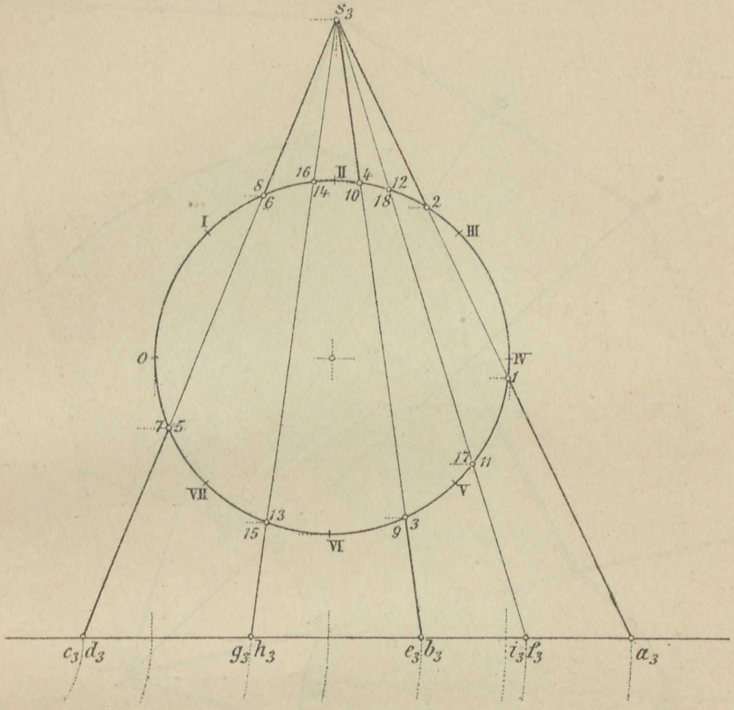
176) **Aufgabe 84.** Eine fünfseitige regelmässige Pyramide und ein senkrechter, zu den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 parallel laufender Kreiscylinder sind durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll die Durchdringung der beiden Körper konstruieren.

Figur 225.

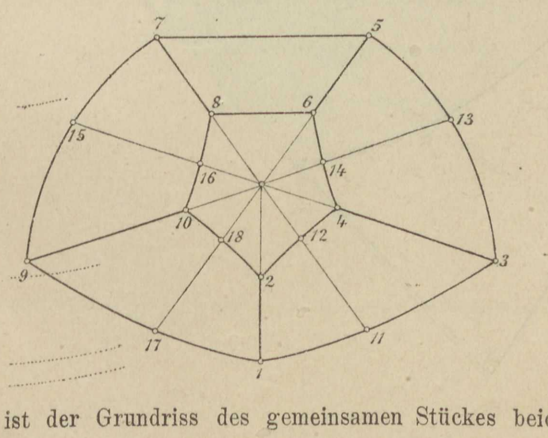


Auflösung. Man zeichnet eine Projektion der Körper in die **Pr. Eb.** E_3, siehe Figur 226, und erhält in dieser unmittelbar die Schnittpunkte der Pyramidenkanten und der Cylinderoberfläche. Zieht man ausserdem in den Pyramidenflächen noch weitere Linien nach der Pyramidenspitze, etwa durch die Mittelpunkte der Grundkanten der Pyramide, und bestimmt die dritten Projektionen dieser Linien, so erhält man hierdurch weitere Punkte der Schnittfigur, z. B. die Punkte 11, 12, 13, 14 · · ·

Figur 226.

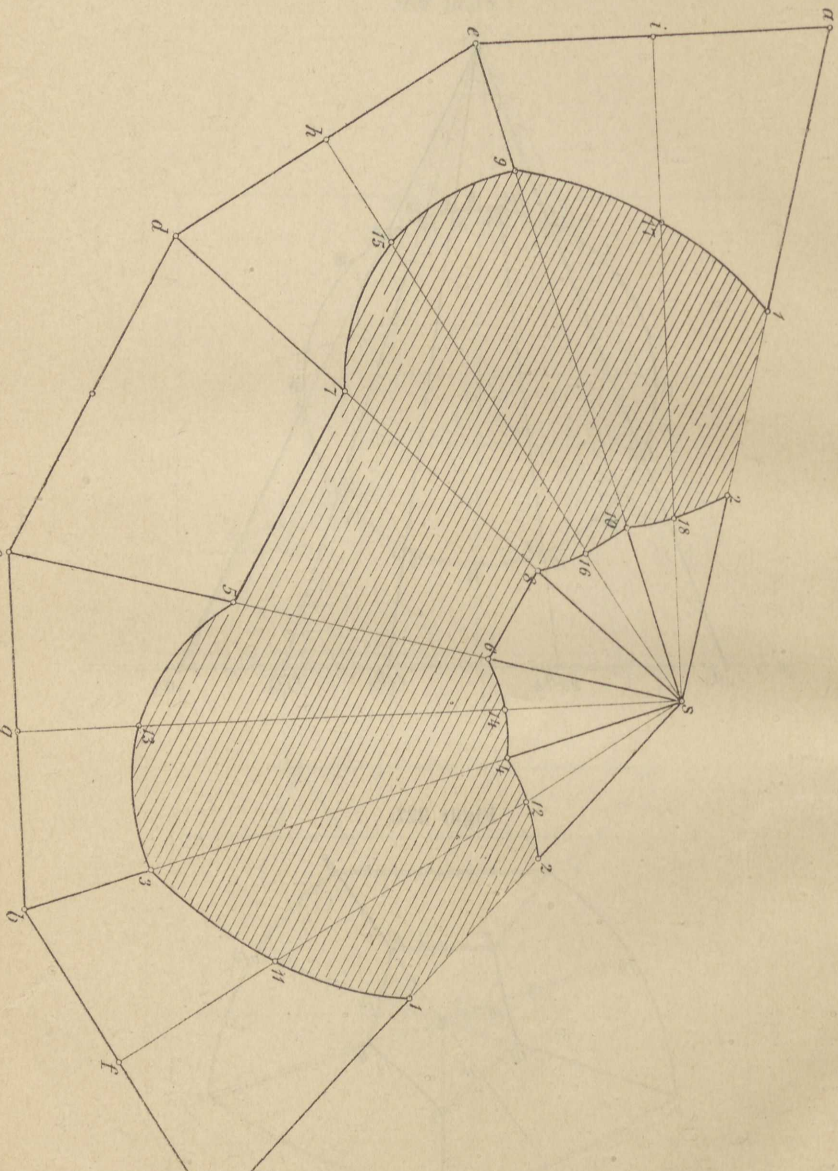


Figur 227.

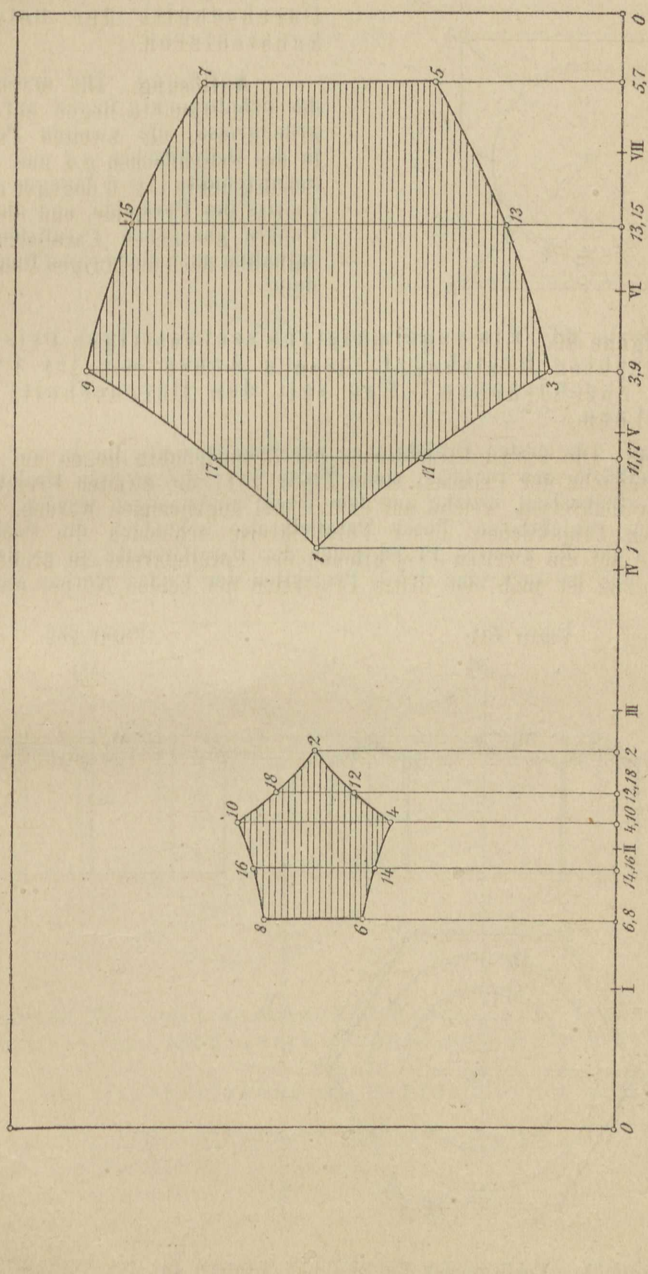


In Figur 227 ist der Grundriss des gemeinsamen Stückes beider Körper herausgetragen.

Was die Abwickelung der Mäntel von Cylinder und Pyramide, siehe Figur 228 und 229, anbelangt, so verfährt man nach den Angaben in 82, 83 und 106).

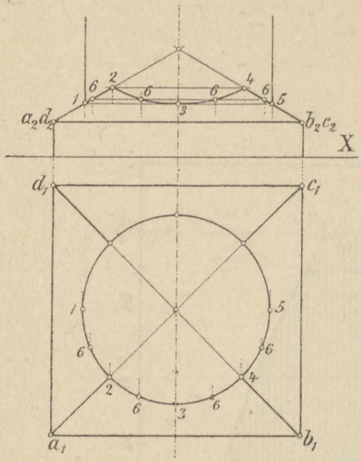


Figur 228.



Figur 229.

Figur 230.



177) **Aufgabe 85.** Eine vierseitige regelmässige Pyramide wird von einem senkrechten Kreiscylinder, dessen Achse die Pyramidenspitze enthält und auf der Grundfläche der Pyramide senkrecht steht, durchdrungen. Man soll den Durchschnitt der beiden Körper konstruieren.

Auflösung. Die ersten Projektionen der Schnittpunkte liegen auf dem Cylindergrundkreise, die zweiten Projektionen der in den Seitenflächen *ad* und *cb* befindlichen Schnittpunkte 1 · 2 6 dagegen auf dem zweiten Umriss der Pyramide, und die durch letztere Punkte gezogenen Parallelen zur *X*-Achse enthalten auch die übrigen Punkte der Schnittfigur.

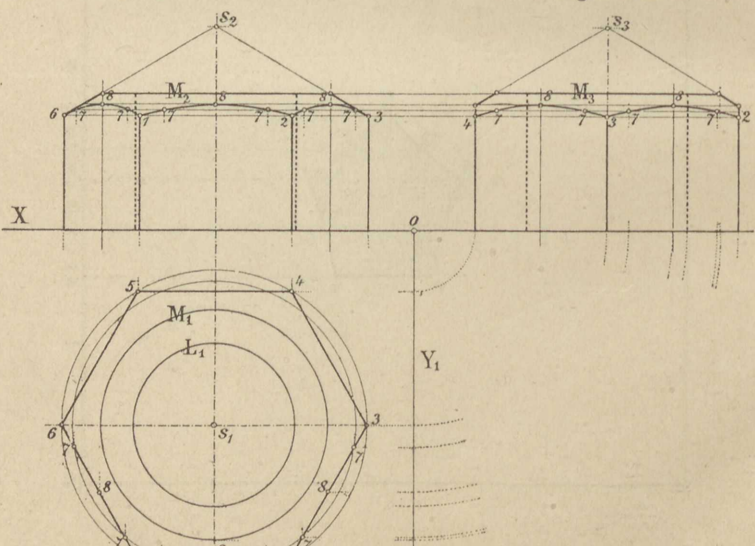
178) **Aufgabe 86.** Ein regelmässiges sechsseitiges Prisma wird von einem senkrechten Kreiskegel, dessen Achse mit der Prismenachse sich deckt, durchdrungen. Man soll den Durchschnitt der beiden Körper zeichnen.

Auflösung. Die ersten Projektionen der Schnittpunkte liegen auf den Sechsecksseiten der Grundfläche des Prismas, siehe Figur 231; die zweiten Projektionen ergeben sich mittels Parallelkreisen, welche auf dem Kegel angenommen werden.

Die ersten Projektionen dieser Parallelkreise schneiden die Sechsecksseiten in Punkten, welche auf die zweiten Projektionen der Parallelkreise zu projizieren sind.

In Figur 232 ist auch eine dritte Projektion der beiden Körper gezeichnet.

Figur 231. Figur 232.

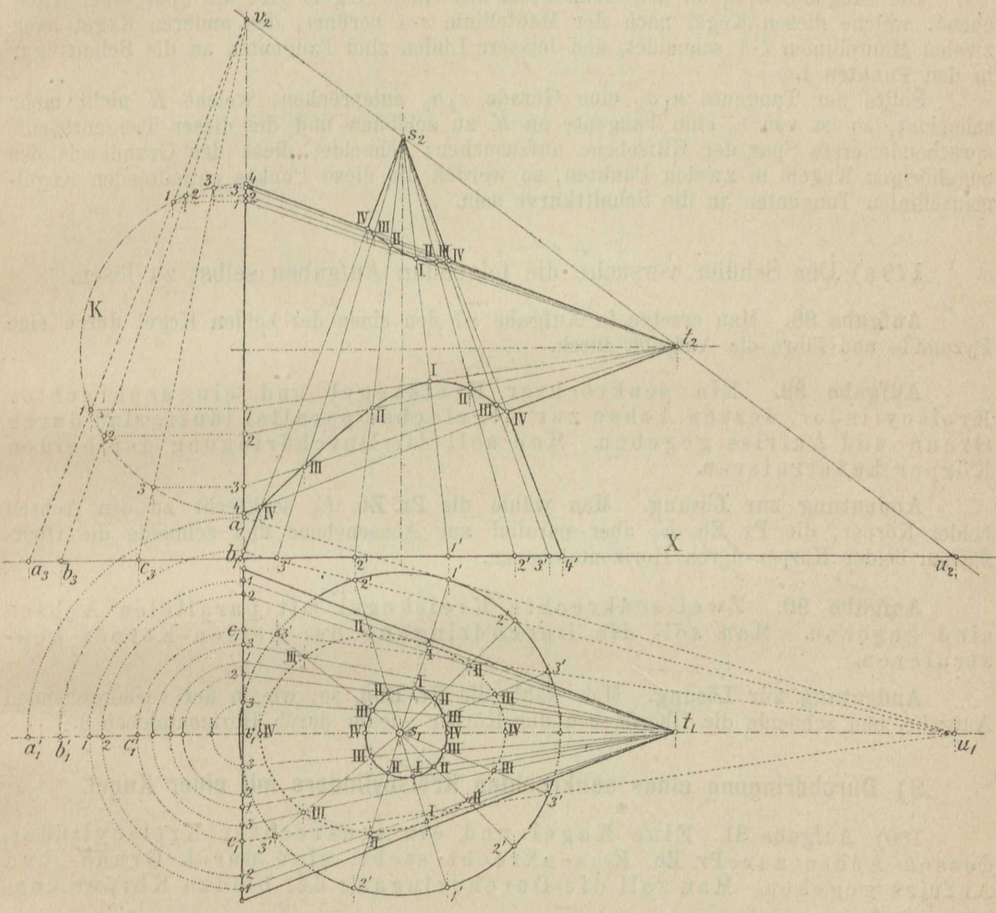


Anmerkung 74. Vorliegendes Beispiel hat insofern für den Teckniker eine praktische Bedeutung, als in der angegebenen Weise die Muttern von Befestigungsschrauben gestaltet sind. Die auftretenden Schnittkurven sind Teile von Hyperbeln; siehe auch Aufgabe 36.

8) Durchdringung zweier Kreiskegel.

178a) Zur Ermittelung des Schnittes zweier Kreiskegel benützt man Hilfsebenen, welche die beiden Kegelspitzen enthalten und die beiden Kegel nach Mantellinien schneiden. Die Durchschnittspunkte solcher in ein und derselben Hilfsebene liegenden Mantellinien beider Kegel gehören der Durchschnittsfigur an.

Figur 233.



179) **Aufgabe 87.** Zwei senkrechte Kreiskegel, deren Achsen sich senkrecht schneiden, sind durch Grund- und Aufriss, siehe Figur 233, gegeben.

Man soll die Durchdringung der beiden Körper zeichnen.

Auflösung. Die Achse des einen Kegels ist senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1, die des anderen senkrecht zur **Pr. Eb.** E_3 angenommen.

Zur Konstruktion des Durchschnittes ziehe man die Verbindungslinie der beiden Kegelspitzen s und t und bestimme die Schnittpunkte u und v dieser Linie mit den Grundflächen der beiden Kegel

Eine die Linie st enthaltende Hilfsebene schneidet die Grundflächen beider Kegel nach Geraden, gehend durch die Punkte u und v. Diese Geraden treffen dann die

Grundkreise beider Kegel in Punkten, durch welche die Schnittmantellinien der Hilfsebene mit den beiden Kegeln hindurchgehen.

So stellt z. B. die Linie $u_1 b_1$ die erste Spur einer Hilfsebene dar, welche die Grundfläche des zweiten Kegels nach einer Geraden vb schneidet, deren dritte Projektion durch $v_2 b_3$ dargestellt ist; die Linien $u_1 b_1$ und $v_2 b_3$ treffen die bezüglichen Grundkreise in den Punkten $2' \cdot 2'$ und $2 \cdot 2$, durch welche die Schnittmantellinien der Hilfsebene $stuv$ mit den beiden Kegeln hindurchgehen und die Punkte II der Schnittfigur ergeben. Durch Annahme weiterer durch u_1 gehenden Geraden, wie z. B. $u_1 c_1$ bezw. $v_2 c_3$ ergeben sich weitere Punkte der Schnittfigur.

Die Tangente $u_1 a_1$ an den Grundkreis des einen Kegels gibt die Spur einer Hilfsebene, welche diesen Kegel nach der Mantellinie $s \cdot 1$ berührt, den anderen Kegel nach zweien Mantellinien $t \cdot 1$ schneidet, und letztere Linien sind Tangenten an die Schnittfigur in den Punkten I.

Sollte der Tangente $u_1 a_1$ eine Gerade $v_2 a_3$ entsprechen, welche K nicht mehr schneidet, so ist von v_2 eine Tangente an K zu zeichnen und die dieser Tangente entsprechende erste Spur der Hilfsebene aufzusuchen; schneidet diese den Grundkreis des zugehörigen Kegels in zweien Punkten, so werden die diese Punkte enthaltenden Kegelmantellinien Tangenten an die Schnittkurve sein.

179a) Der Schüler versuche die folgenden Aufgaben selbst zu lösen.

Aufgabe 88. Man ersetze in Aufgabe 87 den einen der beiden Kegel durch eine Pyramide und führe die Aufgabe durch.

Aufgabe 89. Ein senkrechter Kreiskegel und ein senkrechter Kreiscylinder, dessen Achse zur Kegelachse parallel läuft, sind durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll die Durchdringung der beiden Körper konstruieren.

Andeutung zur Lösung. Man wähle die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zu den Achsen beider Körper, die **Pr. Eb.** E_2 aber parallel zur Achsenebene und schneide die Oberflächen beider Körper durch Horizontalebenen.

Aufgabe 90. Zwei senkrechte Kreiskegel mit parallelen Achsen sind gegeben. Man soll die Durchdringung der beiden Körper konstruieren.

Andeutung zur Lösung. Man wähle die **Pr. Ebn.** so, wie in der vorhergehenden Aufgabe, und schneide die Oberflächen der Körper wieder durch Horizontalebenen.

9) Durchdringung eines senkrechten Kreiscylinders mit einer Kugel.

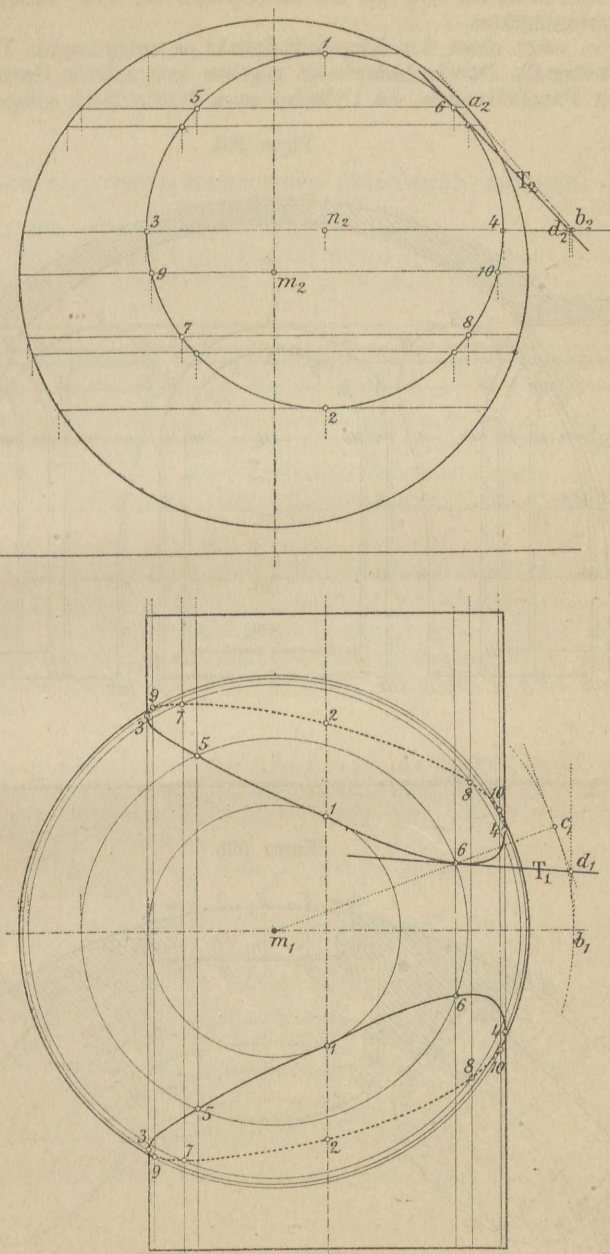
180) **Aufgabe 91.** Eine Kugel und ein senkrechter Kreiscylinder, dessen Achse zur **Pr. Eb.** E_2 senkrecht steht, sind durch Grund- und Aufriss gegeben. Man soll die Durchdringung der beiden Körper konstruieren.

Auflösung. Man schneidet die Oberflächen der beiden Körper durch Ebenen senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2 und parallel zur X-Achse und erhält hierdurch auf dem Cylinder Mantellinien, auf der Kugel Kreise; die gemeinsamen Punkte beider Schnittlinien gehören der Schnittkurve an.

Tangente in einem beliebigen Punkte der Schnittkurve.

Soll z. B. im Punkte 6 die Tangente an die Schnittkurve konstruiert werden, so bestimme man in diesem Punkte die Tangentialebene an den Cylinder und an die Kugel und konstruiere die Schnittlinien dieser Ebenen mit der nämlichen Horizontalebene, im vorliegenden Falle mit der den Punkt n enthaltenden Horizontalebene; diese Schnittlinien treffen sich in einem Punkte d, welcher der gesuchten Tangente angehört. Letztere ist somit die Linie $6d$ oder T.

Figur 234.


1
5
6
a_2
T_2
3
n_2
4
d_2
b_2
9
m_2
10
7
8
2
9
7
2
3
5
1
8
10
4
c_1
6
T_1
d_1
m_1
b_1
6
4
1
8
10
5
3
7
2
9

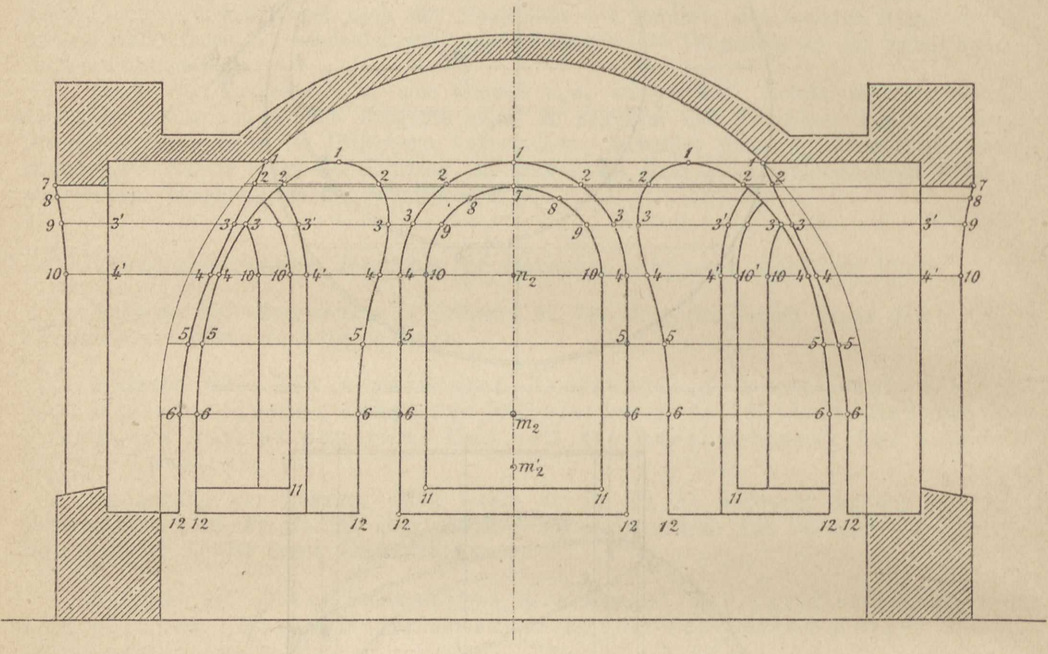
180a) Angewandtes Beispiel: **Aufgabe 92.** In ein Kuppelgewölbe sind kreiscylindrische Fenster einzulegen.

Auflösung. Figur 235 zeigt einen den Kugelmittelpunkt m enthaltenden Vertikalschnitt durch das Gewölbe. m_2' ist der Mittelpunkt für den äusseren Begrenzungskreis des Gewölbedurchschnittes.

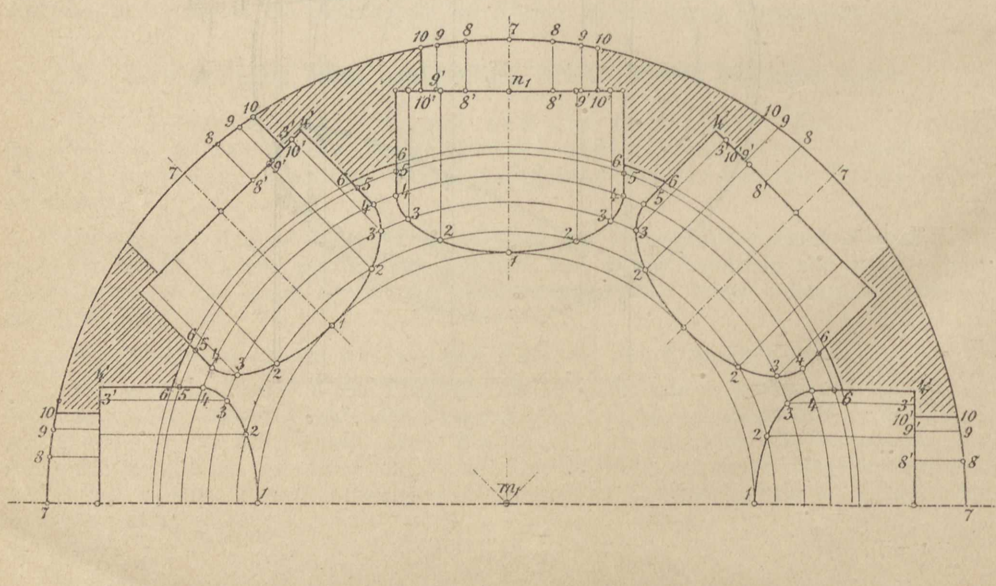
Figur 236 zeigt einen den Kugelmittelpunkt m enthaltenden Horizontalschnitt.

Die auftretenden Durchschnittslinien ergeben sich mittels Horizontalebenen, welche die Kugel nach Parallelkreisen, die Cylinder nach Mantellinien schneiden.

Figur 235.



Figur 236.



Die vertikale äussere Abgrenzung ist cylindrisch angenommen, so dass noch der Durchschnitt der Fensterbögen mit dem vertikalen äusseren Begrenzungscylinder zu konstruieren ist.

Den Fensterbögen schliessen sich vertikale Ebenen an, welche die innere Leibung des Kuppelgewölbes nach Kreisbögen 4, 5, 6 treffen, die sich als Ellipsen projizieren und sich gleichfalls mittels Horizontalebenen konstruieren lassen.

Die Figuren sind so übersichtlich, dass eine nähere Beschreibung der Konstruktion nicht erforderlich ist.

10) Durchdringung eines senkrechten Kreiskegels mit einer Kugel.

181) **Aufgabe 93.** Ein senkrechter Kreiskegel, dessen Gundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegt, und eine Kugel sind durch Grund- und Aufriss gegeben, siehe Figur 237. Man soll den Durchschnitt der beiden Körper konstruieren.

Auflösung. Der Einfachheit halber wurde die den Kugelmittelpunkt und die Kegelachse enthaltende Ebene parallel zur **Pr. Eb.** E_2 gewählt.

Die Durchschnittsfigur bestimmt sich mittels Horizontalebenen, welche die Oberflächen beider Körper nach Kreisen schneiden, deren gemeinsame Punkte der Schnittkurve angehören. Die ersten Projektionen der Kegelkreise haben den Punkt s_1, jene der Kugelkreise den Punkt m_1 als Mittelpunkt. Die Halbmesser der Kreise sind aus dem Aufriss zu entnehmen.

Tangente in einem beliebigen Punkte der Schnittfigur.

Soll etwa in dem Punkte 7 die Tangente T an die Schnittkurve konstruiert werden, so bestimme man die Tangentialebene im Punkte 7 an die Kugel und jene an den Kegel sowie die ersten Spuren dieser Ebenen; letztere treffen sich in e_1 und dieser Punkt gehört der ersten Projektion der gesuchten Tangente an. Der Aufriss e_2 des Punktes e liegt in der X-Achse.

Anmerkung 75. Der Halbmesser der Kugel wurde im vorliegenden Falle so gewählt, dass der zweite Umriss der Kugel eine Umrissmantellinie des Kegels in einem Punkte 3 berührt. In diesem Punkte durchschneidet sich, wie man sieht, die Durchschnittskurve. Der Punkt 3 ist ein Doppelpunkt der Kurve.

Man zeichne die gleiche Aufgabe, wenn der zweite Umriss des Kegelkreises keine Umrissmantellinie des Kegels berührt.

Der Schüler versuche ausserdem die folgenden Aufgaben selbst zu lösen:

1) Man löse die Aufgabe 91, wenn der Kreiscylinder senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 steht, desgleichen die Aufgabe 93, wenn die Grundfläche des Kreiskegels in der **Pr. Eb.** E_2 liegt.

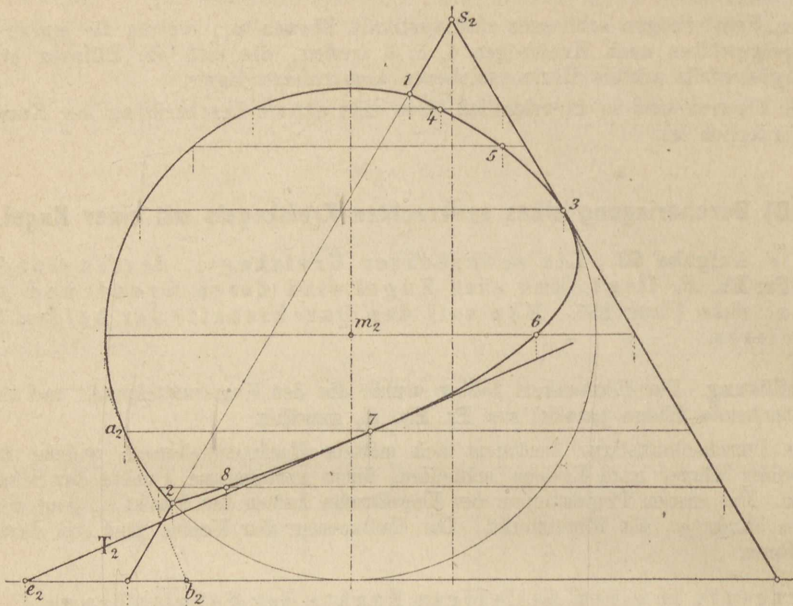
2) Man konstruiere die Durchdringung einer Kugel

a) mit einem zur **Pr. Eb.** E_1 oder E_2 senkrecht stehenden Prisma von beliebiger Grundfläche,

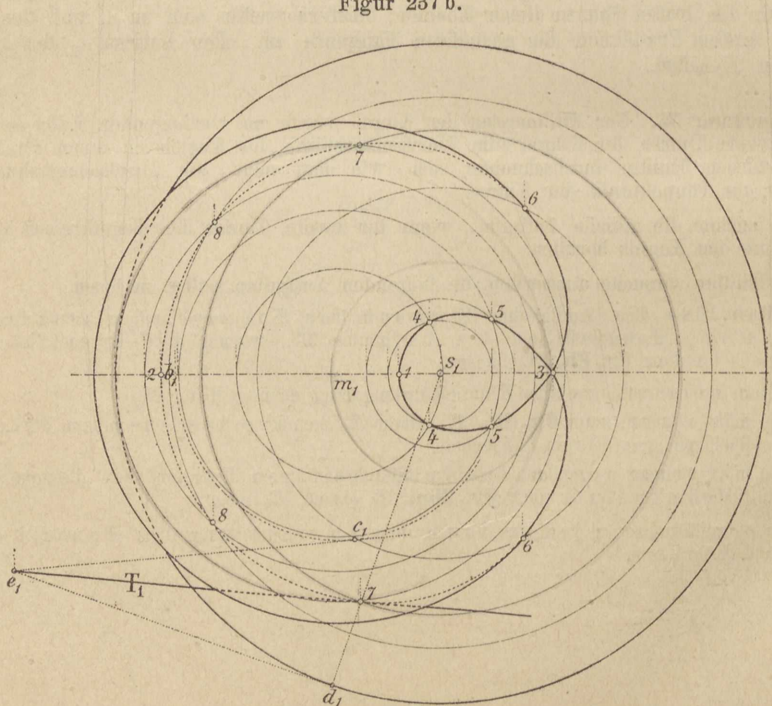
b) mit einer regelmässigen fünfseitigen Pyramide, deren Grundfläche in einer der **Pr. Ebn.** E_1 oder E_2 liegt.

Man ermittele in jedem Falle die Abwickelung des Mantels des betreffenden Körpers.

Figur 237 a.



Figur 237 b.

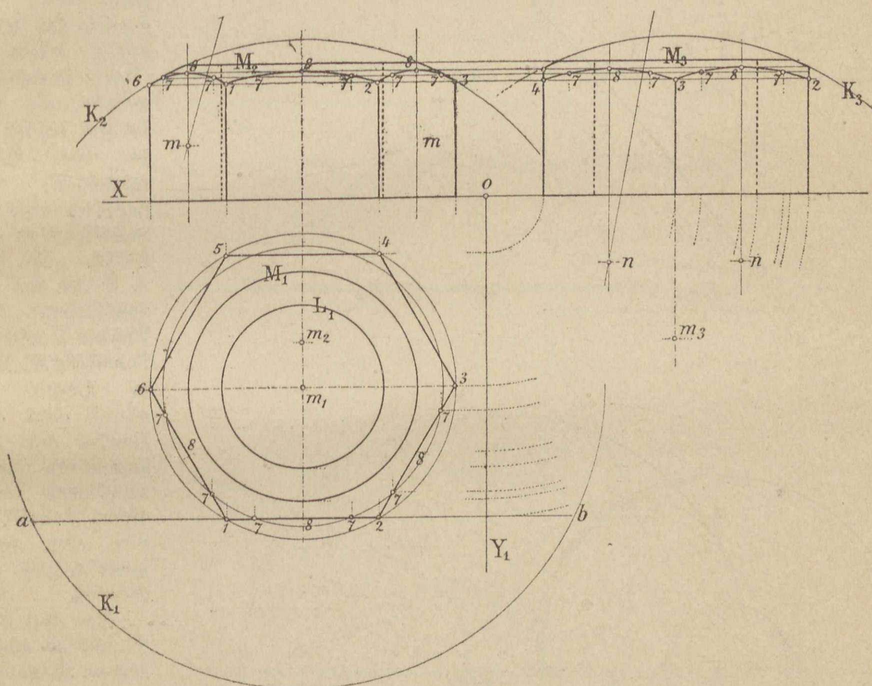


182) **Aufgabe 94.** Ein regelmässiges sechsseitiges Prisma wird von einer Kugel, deren Mittelpunkt auf der Prismenachse liegt, durchdrungen. Man soll die Durchdringung der beiden Körper zeichnen.

Auflösung. Die Schnittlinien der einzelnen Prismenflächen mit der Kugeloberfläche sind Kreise; die in den Ebenen 1·2 und 4·5 liegenden Kreise projizieren sich im Aufriss in wahrer Gestalt; ihre Mittelpunkte decken sich mit der zweiten Projektion m_2 des Kugelmittelpunktes, ihr Durchmesser ist gleich der Kreissehne $\overline{ab}$; die übrigen in den Ebenen 1·6, 2·3, 5·6 und 3·4 liegenden Kreisbögen projizieren sich im Aufriss als Ellipsenstücke und bestimmen sich mittels Horizontalebenen, welche die Kugel nach Parallelkreisen, die Prismenebene nach Geraden schneiden, deren erste Projektionen mit den Sechsecksseiten zusammenfallen.

In Figur 238 ist eine dritte Projektion dargestellt.

Figur 238 und 239.



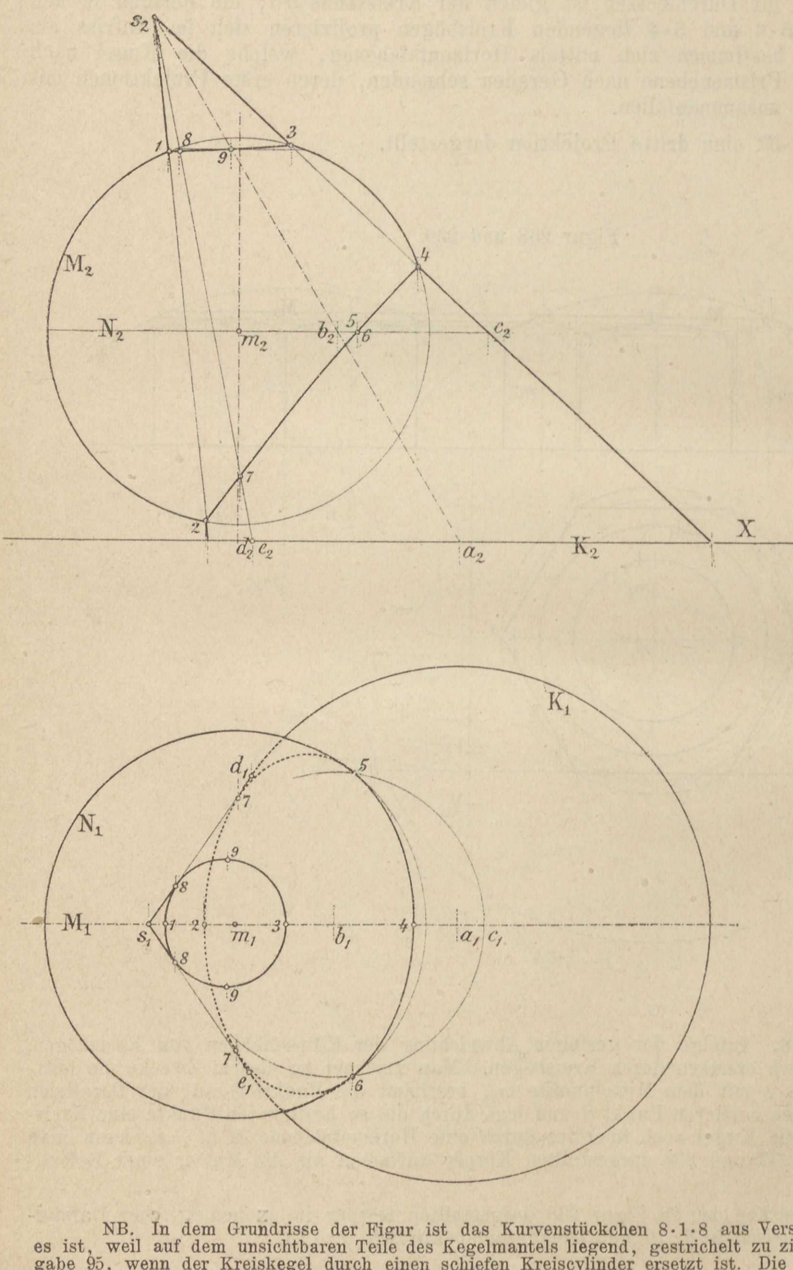
Anmerkung 76. Infolge der geringen Abweichung der Ellipsenbögen von Kreisbögen, kann man erstere auch ersetzen durch Kreisbögen. Man zeichnet zu diesem Zwecke die mittleren Kreisbögen 1·8·2 mit dem Mittelpunkte m_2, bestimmt die Punkte 8 auf der Parallelen zur X-Achse durch den mittleren Punkt 8 und legt durch die so bestimmten Punkte eine Kreislinie. Grenzt man die Kugel noch überdies durch eine Horizontalebene M ab, so kann man den in den Figuren 237 und 238 dargestellten Körper auffassen als die Mutter einer Befestigungsschraube.

Der Schüler zeichne den in Figur 238 dargestellten Körper in axonometrischer Darstellung und zwar trimetrisch 9 : 5 : 10 und cavalierperspektivisch, 1 : 1 : 1.

11) Durchdringung eines schiefen Kreiskegels mit einer Kugel.

183) **Aufgabe 95.** Ein schiefer Kreiskegel und eine Kugel sind durch Grund- und Aufriss gegeben, siehe Figur 240. Man soll die Durchdringung der beiden Körper konstruieren.

Figur 240.



Auflösung. Der Mittelpunkt der Kugel ist der Einfachheit wegen zweckmässig in der die Kegelspitze enthaltenden Parallelebene zur **Pr. Eb.** E_2 angenommen. Zur Bestimmung der Punkte der Schnittkurve wählt man Horizontalebenen, welche die Oberflächen beider Körper nach Kreisen schneiden, deren Schnittpunkte der Schnittkurve angehören. So liegen z. B. in der Horizontalebene N die Punkte 5 und 6 der Schnittfigur, welche in diesem Falle gleich dem ersten Umriss der Kugel angehören und den sichtbaren Teil der einen Schnittkurve von dem anderen unsichtbaren Teil trennen.

Um die Punkte 7 und 8 auf dem ersten Kegelumriss zu erhalten, verschafft man sich den Aufriss $s_2 d_2$ der Mantellinien sd und se und projiziert die Schnittpunkte von $d_2 s_2$ mit dem Aufrisse der Schnittkurve auf $s_1 d_1$ und $s_1 e_1$.

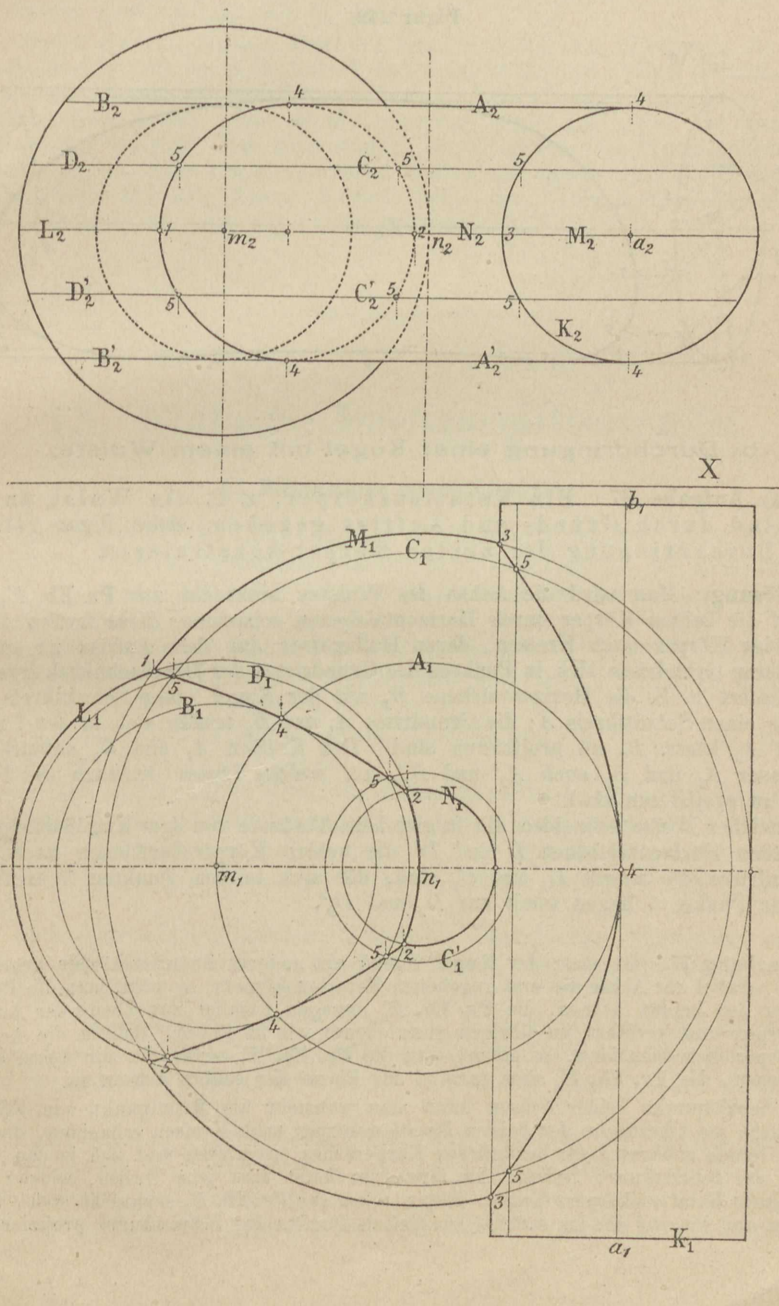
NB. In dem Grundrisse der Figur ist das Kurvenstückchen 8·1·8 aus Versehen ganz ausgezogen; es ist, weil auf dem unsichtbaren Teile des Kegelmantels liegend, gestrichelt zu ziehen. Man löse die Aufgabe 95, wenn der Kreiskegel durch einen schiefen Kreiscylinder ersetzt ist. Die Konstruktion bleibt die gleiche wie oben.

12) Durchdringung eines senkrechten Kreiscylinders und einer Kugel mit einem beliebigen Rotationskörper, z. B. einem Wulste.

a) Durchdringung eines senkrechten Kreiscylinders mit einem Wulste.

184) **Aufgabe 96.** Ein Rotationskörper, z. B. ein Wulst und ein zur **Pr. Eb.** E_2 senkrechter Kreiscylinder sind durch Grund- und Aufriss gegeben, siehe Figur 241. Man soll die Durchdringung der beiden Körper konstruieren.

Figur 241.

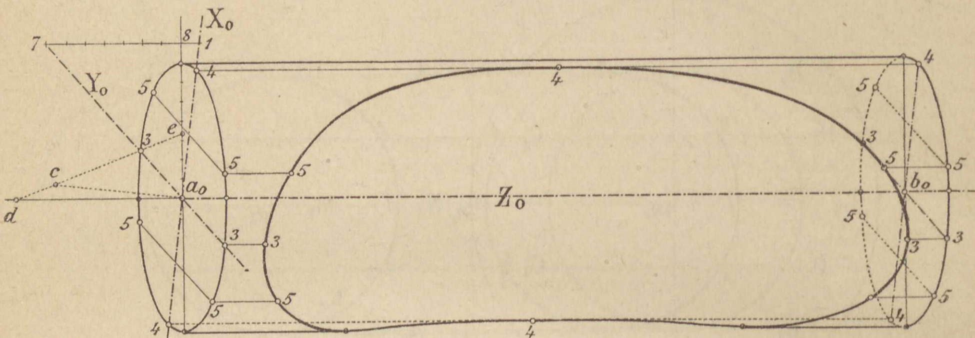


Auflösung. Horizontalebenen schneiden aus dem Cylinder Mantellinien, aus dem Rotationskörper Kreise heraus und liefern hierdurch Punkte der Schnittkurve. So enthält z. B. die Ebene A_2 die Cylindermantellinie durch 4 und den Kugelkreis A_1. Beide schneiden sich in einem Punkte 4 der Schnittkurve. Die Horizontalebene C_2 und C_2' liefern die Schnittpunkte 5.

Der Aufriss der Schnittfigur deckt sich mit dem Grundkreise K_2 des Cylinders.

In Figur 242 ist eine dimetrische Projektion $1 : \frac{1}{2} : 1$ des durchschnittenen Cylinders nach Hinwegnahme des Wulstes gezeichnet.

Figur 242.



b) Durchdringung einer Kugel mit einem Wulste.

184a) **Aufgabe 97.** Ein Rotationskörper, z. B. ein Wulst und eine Kugel, sind durch Grund- und Aufriss gegeben, siehe Figur 241. Man soll die Durchdringung der beiden Körper konstruieren.

Auflösung. Man wird die Achse des Wulstes senkrecht zur **Pr. Eb.** E_1 wählen und hierauf die beiden Körper durch Horizontalebenen schneiden; diese treffen die Oberflächen beider Körper nach Kreisen, deren Halbmesser aus dem Aufriss zu entnehmen sind und deren Grundrisse sich in Punkten des Grundrisses der Durchschnittskurve treffen.

So liefert z. B. die Horizontalebene B_2 mit der Kugel einen Schnittkreis B, mit dem Wulste einen Schnittkreis A; die Grundrisse A_1 und B_1 treffen sich in den Punkten 4, welche auf A_2 bezw. B_2 zu projizieren sind. Den Kreisen A_1 und B_1 entsprechen im Aufriss ausser A_2 und B_2 auch A_2' und B_2', auf welche Linien demnach die Punkte 4 gleichfalls zu projizieren sind.

In gleicher Weise schneiden die in gleichem Abstande von dem Kugelmittelpunkte m angenommenen Horizontalebenen D und D' die beiden Körperoberflächen nach Kreisen, deren Grundrisse die Kreise D_1 und C_1 sind, die sich in den Punkten 5 treffen. Die Aufrisse der Punkte 5 liegen somit auf D_2 und D_2'.

Anmerkung 77. Ist statt der Kugel irgend ein anderer Rotationskörper gegeben und seine Achse parallel zur Achse des erst gegebenen Rotationskörpers, so wählt man die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zu den beiden Achsen, die **Pr. Eb.** E_2 dagegen parallel zur Ebene der Achsen der Rotationskörper und verfährt im übrigen ganz ebenso wie in 184a). Sollten die Achsen der Rotationskörper sich schneiden, so nimmt man die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zur Achse des einen Rotationskörpers, die **Pr. Eb.** E_2 aber parallel zur Ebene der beiden Achsen an.

Den Schnittpunkt beider Achsen kann man nunmehr als Mittelpunkt von Hilfskugeln wählen, welche die Oberfläche der beiden Rotationskörper nach Kreisen schneiden, die sich im Aufriss als Gerade senkrecht zur bezüglichen Körperachse projizieren und sich in den Aufrissen der Punkte der Schnittkurve treffen. Im Grundriss kann man jene Kreise, welche auf der Oberfläche jenes Rotationskörpers liegen, dessen Achse zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht steht, unmittelbar zeichnen und hierauf die im Aufriss ermittelten Punkte der Schnittkurve projizieren.

Der Schüler versuche die Aufgaben zu lösen:

Aufgabe 98. Es ist gegeben ein Wulst und ein senkrechter Kreiskegel, dessen Achse die Achse des Wulstes senkrecht schneidet. Man konstruiere die Durchdringung der beiden Körper. Man wird im vorliegenden Falle die **Pr. Eb.** E_1 senkrecht zur Achse des Wulstes annehmen.

Aufgabe 99. Zwei Wülste, deren Achsen sich unter einem Winkel von 60^0 schneiden, sind durch Grund- und Aufriss darzustellen; ausserdem ist ihre Durchdringung zu konstruieren. Man wird die **Pr. Eb.** E_2 parallel zur Achsenebene der beiden Körper wählen und nun zunächst den Grundriss des Wulstes zeichnen, dessen Achse zur **Pr. Eb.** E_1 geneigt ist.

Zu diesem Zweck zeichnet man den Grundriss des den Mittelpunkt der Meridiankurve enthaltenden und zur Körperachse senkrecht stehenden Kreises K und beschreibt hierauf aus den Punkten des Grundrisses dieses Kreises mit einem Halbmesser gleich dem des Meridiankreises Kreise. Eine diese Kreise berührende Linie gibt den ersten scheinbaren Umriss des Wulstes. Man kann nämlich die Oberfläche des Wulstes auch auffassen als Umhüllungsfläche einer Kugel mit einem Halbmesser gleich dem des Meridiankreises, deren Mittelpunkt auf dem Kreise K sich fortbewegt. Die Konstruktion der Durchdringung wird dann, wie oben angegeben, durchgeführt.

IX. Einfache Dachausmittelungen.

1) Allgemeine Bemerkungen.

185) Unter Dachausmittelung versteht man einerseits die Bestimmung der Schnittlinien der auftretenden Dachflächen, andererseits die Ermittelung der wahren Gestalten der Dachflächen zum Zwecke der Herstellung der erforderlichen Balkengrössen.

Ist in Figur 241 ein Gebäudegrundriss dargestellt, so nennt man die horizontale Schnittlinie der vertikalen Mauerwand mit einer Dachfläche eine Trauflinie, z. B. $a_1 b_1$ oder $b_1 c_1$ oder $h_1 e_1$ u. s. w.

Die horizontale Schnittlinie zweier Dachflächen, z. B. $i_1 k_1$, o, p u. s. w. heisst eine Firstlinie des Daches.

Haben zwei längs einer Firstlinie zusammenstossende Dachflächen gleiche Neigung gegen die Horizontalebene, so heisst das Dach ein Satteldach, die Firstlinie liegt von den beiden zugehörigen Trauflinien gleichweit entfernt und stellt sich im Grundriss als parallele Mittellinie zwischen den beiden Trauflinien dar.

Je zwei aneinanderstossende äussere Dachflächen schneiden sich nach einer gegen die Horizontale geneigten Geraden, die man einen Grat nennt, z. B. die Linien do, ap, bk und cb.

Je zwei aneinanderstossende innere Dachflächen schneiden sich nach einer Kehle oder Widerkehr (Kehlsparren), z. B. hn, ci, fk, qm.

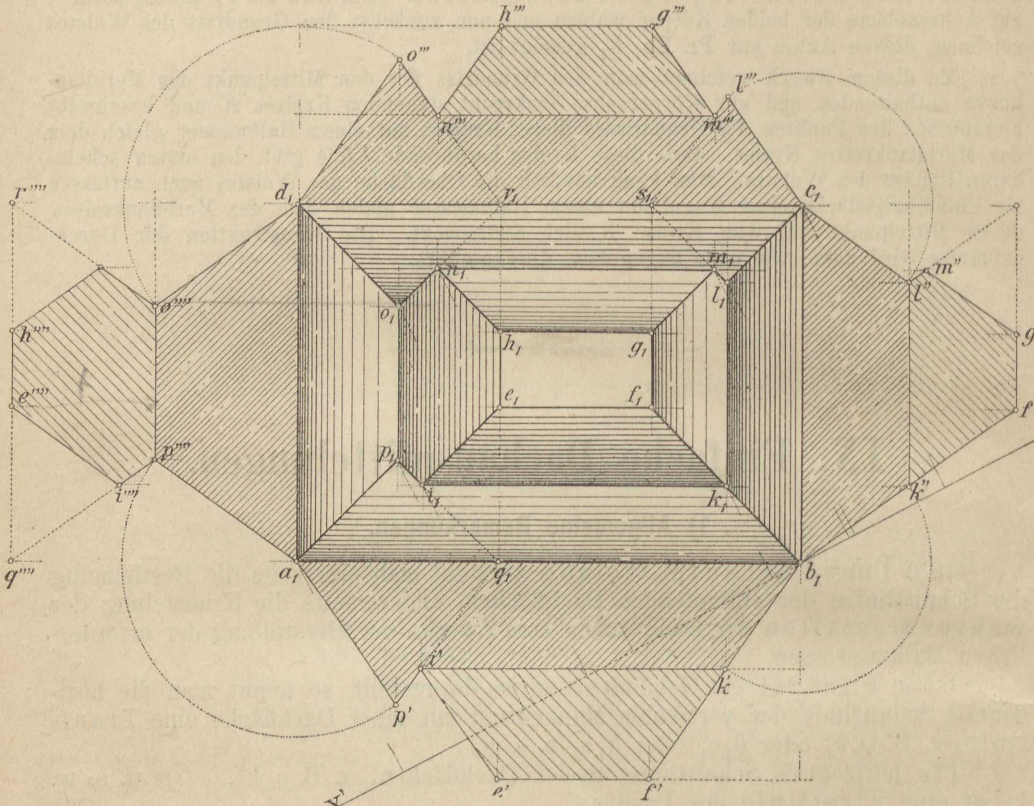
Der Schnittpunt einer Firstlinie mit einem Grate oder einer Kehle heisst ein Anfallspunkt.

Hat das Gebäude verschiedene Tiefen und besitzen die Dachflächen gleiche Neigung gegen die Horizontalebene, so liegen die Firstlinien nicht in gleicher Höhe und es muss ein Uebergang von der einen zur andern Firstlinie hergestellt werden; einen solchen Uebergang nennt man eine Verfallung, z. B. on, pi, nl.

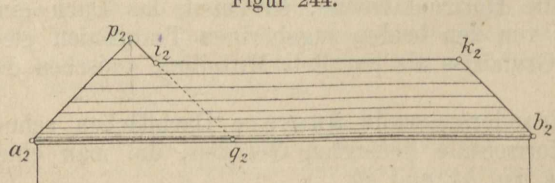
Will man Verfallungen vermeiden, so kann man sämtliche Firstlinien in gleicher Höhe anordnen; man erhält dann Dachflächen mit verschiedenen Neigungen gegen die Horizontalebene.

Wird die Giebelseite eines Gebäudes gleichfalls abgedacht, so nennt man diese Dachfläche eine Walmfläche und das Dach ein Walmdach, siehe Figur 244, Fläche *daef*.

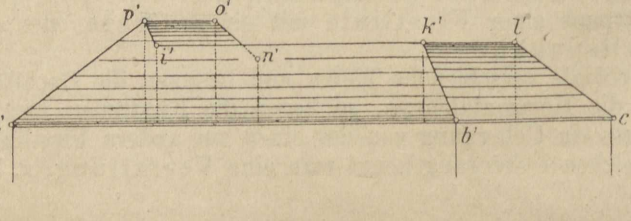
Figur 243.



Figur 244.



Figur 245.



2) Vermischte Aufgaben.

186) **Aufgabe 100.** Der in Figur 243 dargestellte Gebäudegrundriss soll mit einem Satteldache überdeckt und die Dachausmittelung hergestellt werden.

Auflösung. Man halbiert zunächst sämtliche Gebäudetiefen und zieht die Firstlinien parallel zu den Trauflinien. An den Ecken a, b, c, d entstehen Gräte, an den Ecken e, f, g und h aber Kehlen. Besitzen Dachflächen gleiche Neigung gegen die Horizontalebene, wie im vorliegenden Falle angenommen ist, so halbieren die Projektionen der Gräte und Kehlen die Winkel der Trauflinien und sind hierdurch die Anfallspunkte und damit auch die Verfallungen bestimmt.

Als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung müssen die Linien $o_1 n_1$, $p_1 i_1$ und $l_1 m_1$ gehörig verlängert, bezw. durch die Schnittpunkte r_1, q_1 und s_1 der zu den bezüglichen Dachflächen gehörigen Trauflinien hindurchgehen.

Zur Ermittelung des Aufrisses, siehe Figur 244, ist die Kenntnis des Dachwinkels erforderlich, derselbe sei im vorliegenden Falle gleich 45^0. Man zeichnet dann die Linien $a_2 p_2$ und $b_2 k_2$ unter 45^0 gegen die X-Achse geneigt und projiziert auf diese Linien die Anfallspunkte p, i und k, womit der Aufriss bestimmt ist.

In Figur 245 ist noch eine Projektion des Daches in die durch X' hindurchgehende und zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht stehende Ebene gezeichnet. Man projiziert sämtliche in Betracht kommenden Punkte auf X', überträgt diese Punkte auf die Linie $a'e'$ und entnimmt die erforderlichen Höhen aus dem Aufriss der Figur.

Um die wahren Gestalten der einzelnen Dachflächen zu erhalten, legt man zunächst die äusseren Dachflächen um die zugehörigen Trauflinien in die **Pr. Eb.** E_1 um, indem man von den Ecken o_1, p_1, n_1, m_1, l_1, k_1 und i_1 Senkrechte zu diesen Linien zieht und die erforderlichen wahren Dachbreiten abträgt. Diese sind infolge des gewählten Dachwinkels gleich den Grundrisslängen der Grat- bezw. Kehllinien, d. h. es ist z. B. $\overline{r_1 h'''} = \overline{2 n_1 h_1}$ und $\overline{r''''d_1} = \overline{2 d_1 o_1}$.

An die äusseren Dachflächen legt man längs der umgelegten Firstlinien gleich die inneren Dachflächen an.

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung müssen je die beiden Umlegungen eines Grates oder einer Kehle einander gleich sein, d. h. es ist $\overline{d_1 o'''} = \overline{d_1 o''''}$, $\overline{i'e'} = \overline{i''''e''''}$ u. s. w.

In der Figur 243 sind die äusseren umgelegten Dachflächen enger, die inneren Dachflächen weiter schraffiert.

187) **Aufgabe 101.** Ueber einem trapezförmigen Grundriss, s. Figur 246 bis 248, ist ein Walmdach zu konstruieren.

Auflösung. Die Aufgabe lässt dreierlei Lösungen zu, nämlich:

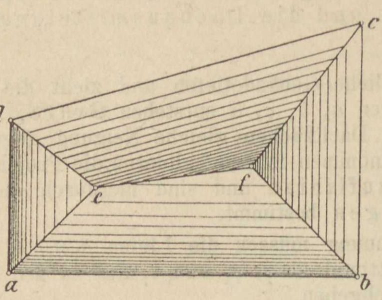
1) Man wählt als Dachflächen ebene, unter dem gleichen Winkel gegen die Horizontalebene geneigte Flächen und bringt diese zum Schnitt; dann entstehen die beiden Walme ade und bcf, siehe Figur 245, und eine Firstlinie ef, welche gegen die Horizontalebene geneigt ist. Die Gräte halbieren die Winkel der Trauflinien.

2) Man wählt wieder als Dachflächen gleich geneigte Ebenen, nimmt aber die Firstlinie horizontal an. Man erhält dann drei Firstlinien ef, eg und gf, siehe Figur 247, und als obersten Abschluss des Daches eine dreieckige horizontale Fläche efg.

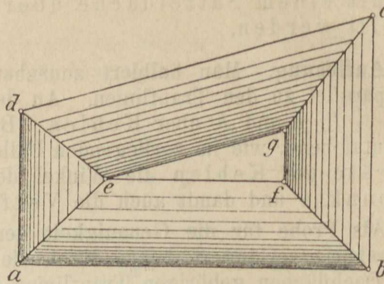
3) Man wählt längs den Trauflinien ab, ad und bc, siehe Figur 248, gleich geneigte Ebenen und eine horizontale Firstlinie ef. Die zweite Dachfläche $defc$ kann dann nicht mehr eben gewählt werden, sondern muss eine windschiefe Fläche werden, hervorgegangen durch Bewegung einer horizontalen Geraden von der Anfangslage dc nach der Endlage ef.

Die Gräte de und cf werden krumme Linien, deren Grundrisse sich ergeben, wenn man die Linien ge und hf in eine beliebige Anzahl, etwa vier, gleicher Teile teilt und die gleich bezeichneten Teilpunkte miteinander verbindet.

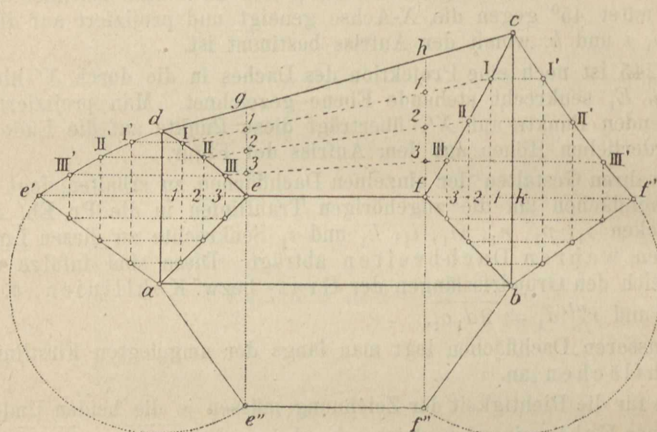
Figur 246.



Figur 247.



Figur 248.



Ebenso teilt man auch in den Walmflächen die Entfernung des Anfallspunktes von der Trauflinie in die nämliche Anzahl gleicher Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallele zu den Trauflinien; diese schneiden die vorhin gezogenen Linien in der windschiefen Dachfläche in den Punkten I, II und III der krummen Gratlinien.

In der Figur 247 sind die ebenen Dachflächen in wahrer Grösse gezeichnet. Die wahre Breite der Dachfläche *aefg* ist gleich $\overline{ae}$, unter der Voraussetzung, dass der Dachwinkel 45° beträgt.

3) Die verschiedenen Walmarten.

a) Allgemeine Bemerkungen.

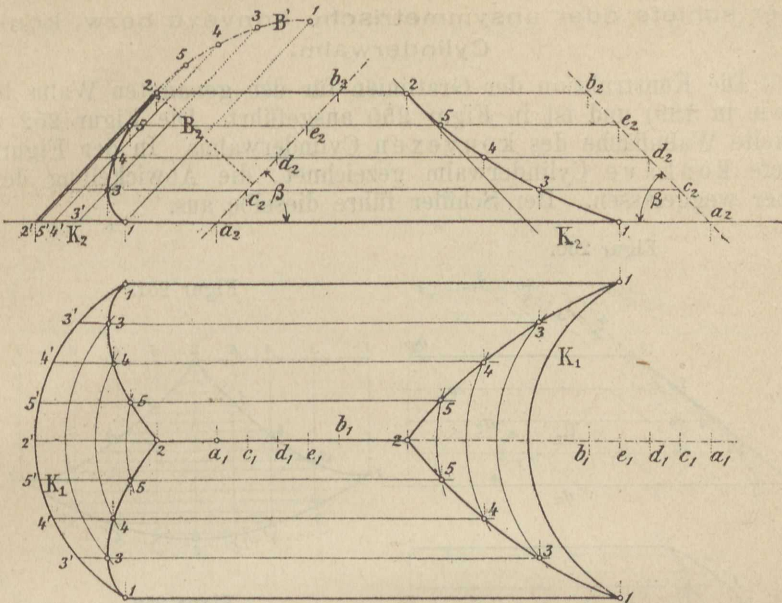
188) In manchen Fällen verwendet man statt der ebenen eine gekrümmte Walmfläche und zwar benützt man hierfür vielfach die Cylinder- und Kegelfläche. Die Gräte werden in diesen Fällen krumme Linien, nämlich die Schnittlinien von Ebenen und Cylinder- und Kegelflächen.

Ist als Walmfläche eine Cylinderfläche verwendet, so erhält man den Cylinderwalm, bei der Anwendung einer Kegelfläche den Kegelwalm.

In beiden Fällen kann man nun entweder die äussere erhabene oder aber die innere hohle Seite der betreffenden Fläche als Dachfläche benützen und unterscheidet dann den

konvexen und konkaven Cylinder bezw. Kegelwalm.

Figur 249.



Je nach der Lage der Cylinder- bezw. Kegelachse unterscheidet man schliesslich noch zwischen dem geraden oder symmetrischen und dem schiefen oder unsymmetrischen Cylinder- bezw. Kegelwalm.

Im ersten Falle liegt die Cylinder- bezw. Kegelachse in der die Firstlinie enthaltenden Vertikalebene, im zweiten Falle ausserhalb derselben.

b) Der gerade oder symmetrische konvexe bezw. konkave Cylinderwalm.

189) In der Figur 249, linke Hälfte, ist der gerade konvexe Cylinderwalm dargestellt.

ab ist die Achse, *K* der Grundkreis des Cylinders.

Man schneidet die Dachfläche durch horizontale, in gleichen Abständen von einander befindlichen Ebenen; diese treffen die ebenen Dachflächen nach Geraden, die Cylinderfläche nach Kreislinien mit demselben Halbmesser wie K_1 und den Mittelpunkten a_1, b_1, c_1, d_1, e_1. Durch die Schnittpunkte dieser Kreise mit den entsprechenden Geraden der ebenen Dachflächen ergeben sich die Punkte 1, 2·3·4·5 der krummen Gratlinien.

Die rechte Hälfte der Figur 249 zeigt den konkaven symmetrischen Cylinderwalm.

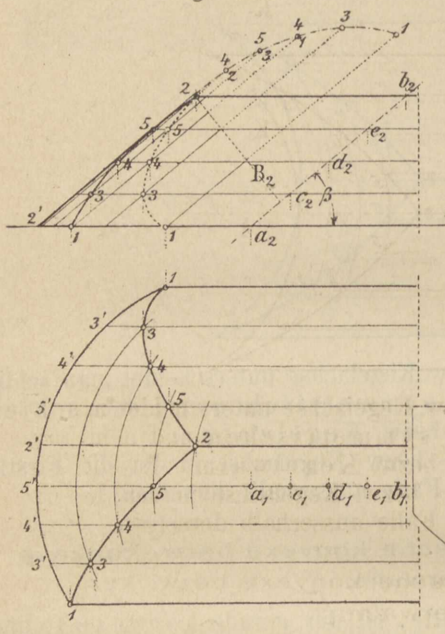
Abwickelung des Mantels der cylindrischen Walmfläche.

Die Ermittelung der Mantelabwickelung der cylindrischen Walmfläche geschieht nach den Angaben in 107), d. h. man verschafft sich einen Normalschnitt *B* zum Cylinder, bestimmt dessen wahre Gestalt *B'*, siehe Figur 249 linke Hälfte, überträgt die Länge von *B'* nach der Geraden 11, siehe Figur 251, samt den Punkten 3, 4 und 5, zieht durch diese Punkte Senkrechte zu 1·1 und trägt auf diesen die Entfernungen der Punkte der Gratlinien und des Grundkreises *K* in wahrer Grösse ab; die schraffierte Fläche in Figur 251 ist die abgewickelte Walmfläche.

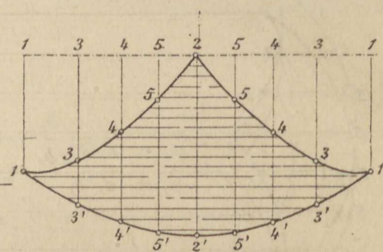
c) Der schiefe oder unsymmetrische konvexe bezw. konkave Cylinderwalm.

190) Die Konstruktion der Gratlinien für den genannten Walm bleibt die gleiche wie in 189) und ist in Figur 250 ausgeführt. Die Figur 252 zeigt die abgewickelte Walmfläche des konvexen Cylinderwalms. In der Figur 253 ist der schiefe konkave Cylinderwalm gezeichnet, die Abwickelung der Walmfläche aber weggelassen. Der Schüler führe dieselbe aus.

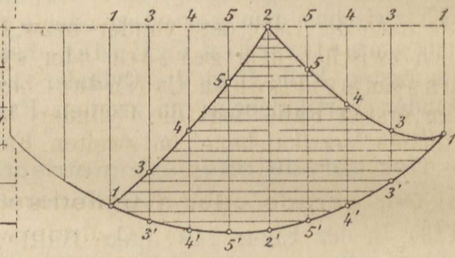
Figur 250.



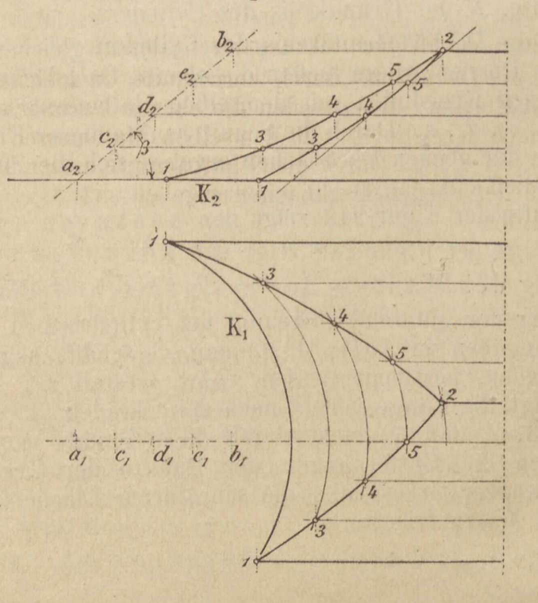
Figur 251.



Figur 252.

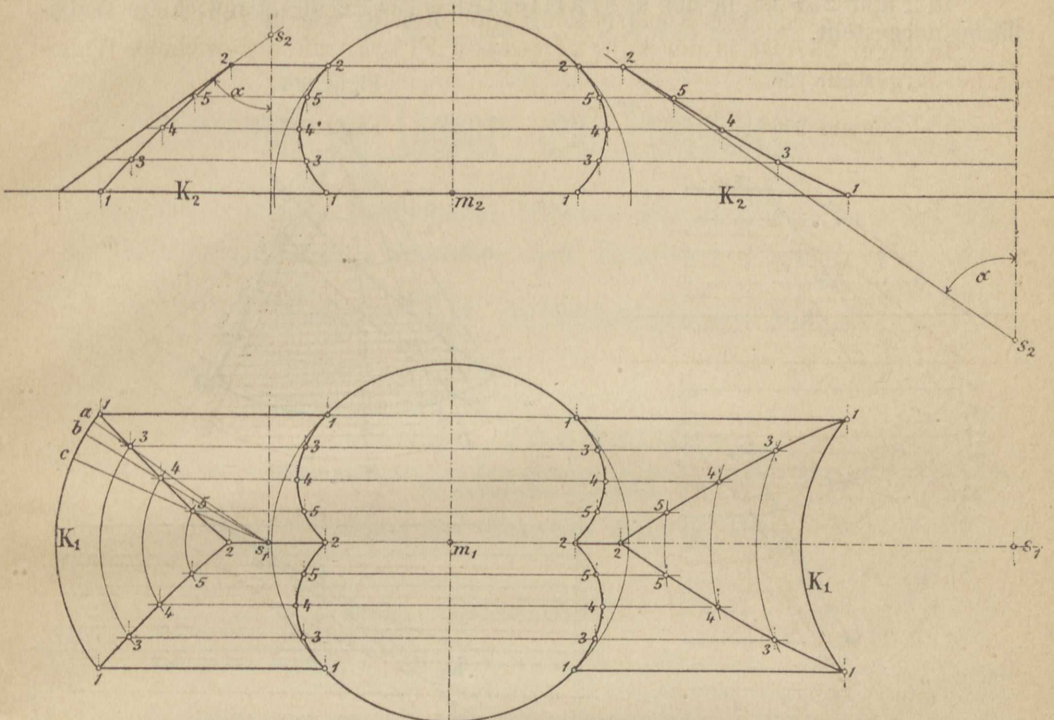


Figur 253.



d) Der gerade oder symmetrische konvexe bezw. konkave Kegelwalm.

Figur 254.



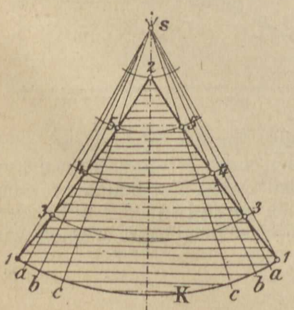
191) Die Figur 254 linke Hälfte zeigt den konvexen, die rechte Hälfte den konkaven Kegelwalm.

s ist die Spitze und *K* der Grundkreis des die Walmfläche bildenden senkrechten Kreiskegels.

Die krummen Gratlinien ergeben sich in gleicher Weise wie beim Cylinderwalm mittels Horizontalebenen, welche den Kegel nach Parallelkreisen, die ebenen Dachflächen nach Geraden schneiden.

Figur 255 zeigt die Abwickelung der kegelförmigen Walmfläche. *K* ist die Verwandelte des Grundkreises *K*, auf welche die Punkte *a*, *b*, *c* übertragen sind; die durch sie gezogenen Mantellinien treffen die Verwandelten der einzelnen Schnittkreise in den Punkten 1·2, 3·4·5 der Gratlinien. Die schraffierte Fläche ist die abgewickelte Walmfläche.

Figur 255.



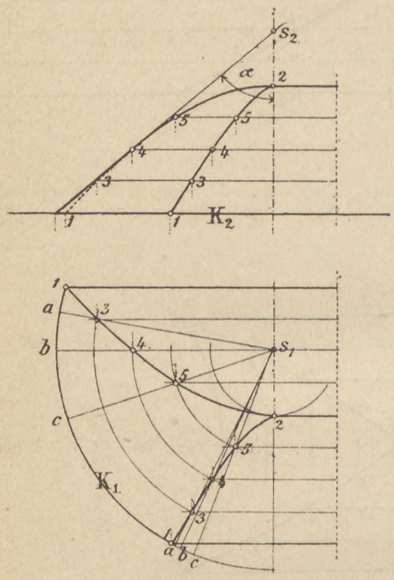
Die Figur 254, mittlerer Teil, zeigt die Verbindung einer kugelförmigen Dachfläche, Kuppeldach mit einem Satteldach; die Schnittlinien der ebenen Dachflächen mit der Kugelfläche sind Kreise, welche sich als Ellipsen projizieren; sie ergeben sich mittels Horizontalebenen, welche die Kugel nach Kreisen, die ebenen Dachflächen nach Geraden schneiden.

e) Der schiefe oder unsymmetrische konvexe bezw. konkave Kegelwalm.

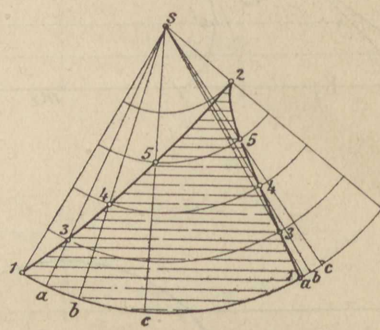
192) Figur 256 zeigt den konvexen, Figur 258 den konkaven Kegelwalm. *s* ist die Spitze, *K* der Grundkreis des die Walmfläche bildenden senkrechten Kreiskegels. Die Konstruktion bleibt dieselbe wie in 189).

In Figur 257 ist in der schraffierten Fläche die abgewickelte Walmfläche dargestellt.

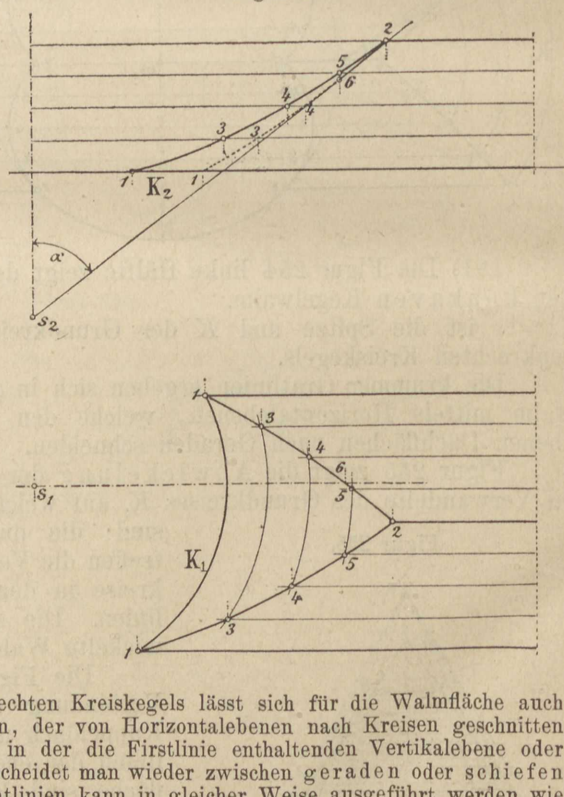
Figur 256.



Figur 257.



Figur 258.



Anmerkung 78. Statt des senkrechten Kreiskegels lässt sich für die Walmfläche auch ein schiefer Kreiskegel verwenden, der von Horizontalebenen nach Kreisen geschnitten wird. Je nachdem nun die Kegelspitze in der die Firstlinie enthaltenden Vertikalebene oder ausserhalb derselben sich befindet, unterscheidet man wieder zwischen geraden oder schiefen Kegelwalmen; die Konstruktion der Gratlinien kann in gleicher Weise ausgeführt werden wie in 191) und 192).