

Sammlung Göschen

Theoretische Physik

III

von

Prof. Dr. Gustav Jäger

Mit 33 Figuren

Verzeichnis der erschienenen Bände.

- Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre** von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.
- Akustik.** Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
- **Musikalische**, v. Dr. Karl E. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.
- Algebra.** Arithmetik u. Algebra v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- Alpen, Die**, von Dr. Rob. Sieger, Priv.-Doz. an der Universität u. Professor a. d. Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. und 1 Karte. Nr. 129.
- Altertümer, Die deutschen**, v. Dr. Franz Fuhsje, Dir. d. städt. Museums i. Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.
- Altertumskunde, Griech.,** v. Prof. Dr. Rich. Maisch, neu bearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.
- **Römische**, von Dr. Leo Bloch, Dozent an der Universität Zürich. Mit 8 Vollb. Nr. 45.
- Analyse, Techn.-Chem.,** von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.
- Analysis, Höhere, I:** Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junfer, Prof. am Realgymn. u. an der Realanstalt in Ulm. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- — — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junfer, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 42 Fig. Nr. 146.
- — — II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junfer, Prof. a. Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 89 Fig. Nr. 88.
- — — Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junfer, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 50 Fig. Nr. 147.
- Analysis, Niedere**, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.
- Arbeiterfrage, Die gewerbliche**, von Werner Sombart, Professor an der Universität Breslau. Nr. 209.
- Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- — — Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. 2765 Aufgaben, systematisch geordnet, von Dr. Hermann Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 48.
- Astronomie.** Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. S. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. S. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.
- Astrophysik.** Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter S. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.
- Aussakentwürfe** von Oberstudienrat Dr. E. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.
- Baukunst, Die, des Abendlandes** von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.
- Betriebskraft, Die zweckmäßigste**, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.
- Bewegungsspiele** von Dr. E. Kohlrausch, Professor am kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.
- Biologie der Pflanzen** von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
- Biologie der Tiere I:** Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.

000 225 143

Sammlung Götschen

Je in elegantem
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Biologie der Tiere II:** Beziehungen d. Tiere zur organ. Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
- Bleicherei.** Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Brant.** Hans Sachs und Johann Sischart nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.
- Buchführung.** Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Off. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.
- Buddha** von Professor Dr. Edmund Hardy in Bonn. Nr. 174.
- Burgenkunde, Abriss der,** von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.
- Chemie, Allgemeine und physikalische,** von Dr. Max Rudolph, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 37.
- siehe auch: Metalle. — Metalloide.
- **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 38.
- **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.
- — III: Karbocyclische Verbindungen. Nr. 193.
- — IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- Chemisch-Technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.
- Eid, Der.** Geschichte des Don Ruy Diaz, Grafen von Bivar. Von J. G. Herder. Hrsg. und erläutert von Prof. Dr. E. Naumann in Berlin. Nr. 36.
- Dampfkessel, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Obergeringieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.
- Dampfmaschine, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Obergeringieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.
- Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeben v. Dr. Herm. Janßen in Breslau. Nr. 137.
- Dietrichepen.** Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.
- Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymn. u. a. d. Realanst. in Ulm. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- **Repetitorium u. Aufgabensammlung** z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 42 Figuren. Nr. 146.
- Eddalieder** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
- Eisenhüttenkunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.
- II. Teil: Das Schmiedeeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.
- Elektrizität.** Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.
- Elektrotechnik.** Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.
- II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.
- III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

- Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht** von Dr. A. Nippoldt jr., Mitgl. d. Kgl. Preuß. Meteorol. Inst. 3. Potsdam. M. 14 Abb. u. 3 Taf. Nr. 175.
- Ethik** von Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.
- Färberei, Textil-Industrie III:** Wäscherei, Bleicherei, Färberei u. ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Krefeld. M. 28 Fig. Nr. 186.
- Fernsprechwesen, Das,** von Dr. Ludwig Kellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.
- Filzfabrikation, Textil-Industrie II:** Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Centralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Finanzwissenschaft v. Geh. Reg.-Rat Dr. R. van der Borcht in Friedenau-Berlin.** Nr. 148.
- Fischart, Johann.** Hans Sachs u. Joh. Fischart nebst e. Anh.: Brant u. Hutten. Ausgewählt u. erläut. von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.
- Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens.** Nr. 159.
- Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.**
- **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.
- Forstwissenschaft** von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.
- Fremdwort, Das, im Deutschen** von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.
- Gardinenfabrikation, Textil-Industrie II:** Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Centralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- Geodäsie** von Dr. C. Reinherz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.
- Geographie, Astronomische,** von Dr. Siegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
- **s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.**
- Geologie v. Professor Dr. Eberh. Fraas** in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.
- Geometrie, Analytische, der Ebene v. Professor Dr. M. Simon** in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.
- **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.
- **Darstellende, v. Dr. Rob. Haufner,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.
- **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.
- **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 85 zum Teil zweifarb. Figuren. Nr. 72.
- Geschichte, Badische,** von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
- **Bayerische,** von Dr. Hans Oefel in Augsburg. Nr. 160.
- **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Sammlung Götschen

Je in elegantem
Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Geschichte, Deutsche, im Mittelalter (bis 1500) von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 33.

— **im Zeitalter der Reformation u. der Religionskriege** von Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.

— **Französische**, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univerf. Berlin. Nr. 85.

— **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.

— **des 19. Jahrhunderts** v. Ostar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univerf. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.

— 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrhunderts. Nr. 217.

— **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univerf. München. M. 6 Bild u. 1 Kart. Nr. 43.

— **Österreichische**, I: Von der Urzeit bis 1526 von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. a. d. Univ. Graz. Nr. 104.

— II: Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.

— **Römische**, neubearb. von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch. Nr. 19.

— **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— **Sächsische**, von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

— **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

— **der Malerei** siehe: Malerei.

— **der Mathematik** s.: Mathematik.

— **der Musik** siehe: Musik.

— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.

— **des deutschen Romans** siehe: Roman.

— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberrealschuldirektor in Freiburg i. B. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machäel in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Götter- und Heldensage, Griechische und römische, von Dr. Herm. Steuding, Professor am Kgl. Gymnasium in Würzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage. — Mythologie.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem hof. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

— **Griechische**, I: Formenlehre von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.

— II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.

— **Lateinische.** Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Professor Dr. W. Dotsch in Magdeburg. Nr. 82.

— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Goltner, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.

— **Russische**, von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 66.

— siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaur, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.

Sammlung Götschen

Je in elegantem
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Handelskorrespondenz, Französische**, von Professor Th. de Beaug, Oberlehrer a. d. Öffentlichen Handelslehranstalt u. Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.
- **Italienische**, von Professor Alberto de Beaug, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
- Harmonielehre** von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.
- Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg**. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Professor am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
- Hauptliteraturen, Die, d. Orients** v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Universität Wien. I. II. Nr. 162. 163.
- Heldensage, Die deutsche**, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 32.
- siehe auch: Götter- und Heldensage.
— Mythologie.
- Herder, Der Cid**. Geschichte des Don Ruy Diaz, Grafen von Bivar. Herausgegeben u. erläutert von Prof. Dr. Ernst Naumann in Berlin. Nr. 36.
- Hütten**. Hans Sachs und Johann Fischart nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.
- Industrie, Anorganische Chemische**, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I.: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- II.: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
- — III.: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.
- Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Professor am Realgymn. und an der Realanstalt in Ulm. Mit 89 Figuren. Nr. 88.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedrich Junker, Professor am Realgymn. und an der Realanstalt in Ulm. Mit 50 Figuren. Nr. 147.
- Kartenkunde**, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und S. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm, neu bearbeitet von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbildungen. Nr. 30.
- Kirchenlied**. Martin Luther, Thom. Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Professor G. Berlit, Oberlehrer am Nikolai-gymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
- Klimalehre** von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln und 2 Figuren. Nr. 114.
- Kolonialgeschichte** von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.
- Kompositionslehre**. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.
- Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten**, von E. Rebmann, Oberrealschuldirektor in Freiburg i. B. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.
- Kristallographie** von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
- Kudrun und Dietrichsagen**. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.
- — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.
- Kultur, Die, der Renaissance**. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert S. Arnold, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 189.
- Kulturgeschichte, Deutsche**, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Sammlung Götschen

Je in elegantem
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Sachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Beilagen und 40 Abbildungen. Nr. 75.

Kurzschrift. Lehrbuch der vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungs-System Stolze-Schren) nebst Schlüssel, Lesebüchlein u. einem Anhang von Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses in Oranienstein. Nr. 86.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textfärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textfärtchen und Profilen. Nr. 63.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) v. Heinr. Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert. Kulturhistorische Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen. Nr. 93.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Oberlehrer Dr. Voisch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschef. Nr. 5.

— **Nathan der Weise.** Mit Anmerkungen von den Professoren Denzel und Kraz. Nr. 6.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Professor am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmale des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Janzen in Breslau. Nr. 181.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 162.

— — II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 163.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

Sammlung Götschen

Je in elegantem
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Literaturgeschichte, Englische**, von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.
- **Griechische**, mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gerke, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 70.
- **Italienische**, von Dr. Karl Voßler, Professor a. d. Universität Heidelberg. Nr. 125.
- **Portugiesische**, von Dr. Karl v. Reinhardtstoettner, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in München. Nr. 213.
- **Römische**, von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.
- **Russische**, von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.
- **Spanische**, von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.
- Logarithmen**. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 81.
- Logik**. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.
- Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts**. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
- Magnetismus**. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.
- Malerei, Geschichte der**, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Professor an der Universität Breslau. Nr. 107—111.
- Maschinenelemente, Die**. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Stg. Nr. 3.
- Massanalyse** von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.
- Mathematik, Geschichte der**, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Mechanik**. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.
- Meereskunde, Physische**, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
- Metalle**, (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
- Metalloide** (Anorganische Chemie, 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
- Meteorologie** von Dr. W. Trabert, Dozent a. d. Universität u. Sekretär d. k. k. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
- Mineralogie** von Dr. R. Brauns, Professor an der Universität Gießen. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.
- Minnefang und Spruchdichtung**. Walther v. d. Vogelweide mit Auswahl aus Minnefang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Professor an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
- Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen**. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

fortsetzung auf der 8. Voratzseite!

Sammlung Göschen

Theoretische Physik

III

Elektrizität und Magnetismus

von

Dr. Gustav Jäger

Professor der Physik an der Universität Wien

Mit 33 Figuren

Dritte, verbesserte Auflage

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1905

537/8



209/3

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.



CZ-I. 209/3

Inhaltsverzeichnis.

Elektrostatik.

Seite

§ 1.	Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz	5
§ 2.	Komponenten der elektrischen Kraft — Potential	6
§ 3.	Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektrizität gleichmäßig verteilt ist	8
§ 4.	Potential einer Vollkugel	10
§ 5.	Die Laplacesche Gleichung	11
§ 6.	Die Poissonsche Gleichung	13
§ 7.	Potential einer Kreisscheibe	14
§ 8.	Der Gaußsche Satz	16
§ 9.	Wirkung einer homogenen Zylinderfläche	18
§ 10.	Wirkung einer unendlichen Ebene	18
§ 11.	Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter	19
§ 12.	Verteilung der Elektrizität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel	20
§ 13.	Allgemeine Beziehung zwischen Elektrizitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde	21
§ 14.	Der Kugelkondensator	23
§ 15.	Der Plattenkondensator	26
§ 16.	Kraftlinien — Niveauflächen	28
§ 17.	Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte	30
§ 18.	Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel	33
§ 19.	Theorie der Dielektrika	35
§ 20.	Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektrizität	36
§ 21.	Kapazität eines Leiters, der von einem Dielektrikum umgeben ist	41
§ 22.	Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator	43
§ 23.	Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik, Brechung der Kraftlinien	44

Magnetismus.

§ 24.	Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz	47
§ 25.	Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — Inklination — magnetisches Moment	48
§ 26.	Potential eines Magnets	52
§ 27.	Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments	56
§ 28.	Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch induzierten Körpers	58

	Seite
§ 29. Die homogen magnetisierte Kugel	61
§ 30. Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld	67
§ 31. Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien	69
§ 32. Transversal magnetisierter Zylinder im homogen magnetischen Feld	70
§ 33. Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld	76
§ 34. Die magnetische Kraft auf einen langen Zylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet	78
§ 35. Kraftfunktion und Potential der magnetischen Kräfte	80
§ 36. Die magnetische Molekularkraft	81
§ 37. Magnetische Energie	82

Elektromagnetismus.

§ 38. Der elektrische Strom — Oersted's Entdeckung — Ampères Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart	86
§ 39. Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol	87
§ 40. Die Tangentenbussole — Maß der Stromstärke	88
§ 41. Potential eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol	91
§ 42. Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte	96
§ 43. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol	99
§ 44. Ersatz einer begrenzten magnetischen Platte durch eine unendliche	101
§ 45. Das Solenoid	103
§ 46. Der Stokes'sche Satz	104
§ 47. Die Wirkung elektrischer Ströme aufeinander	108
§ 48. Die Gesetze von Ohm und Joule — Arbeit des Stroms	110
§ 49. Der Induktionsstrom	111
§ 50. Das ballistische Galvanometer	113
§ 51. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand	115
§ 52. Das elektrostatische und elektromagnetische Maßsystem	118
§ 53. Absolute und praktische Einheiten	121
§ 54. Der Extrastrom	122
§ 55. Dämpfung einer schwingenden Magnetnadel	125
§ 56. Induktionswirkung zweier Stromleiter aufeinander	128
§ 57. Induktionsapparate — Transformatoren	131
§ 58. Oszillierende Entladung eines Kondensators	133
§ 59. Elektrische Ströme in einem Dielektrikum	136
§ 60. Allgemeine Gleichungen der Induktion	137
§ 61. Die Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren	140
§ 62. Elektrische Wellen	144
§ 63. Magnetische Wellen	146
§ 64. Die elektromagnetische Lichttheorie	148

Elektrostatik.

§ 1. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz.

An Seide geriebenes Glas oder an Wolle geriebene Harze ziehen leicht bewegliche Körper an und stoßen sie nach der Anziehung wieder ab. Als Ursache dieser Erscheinung sieht man die Elektrizität an, welche durch Reiben auf der Oberfläche des Glases oder Harzes entsteht und deshalb Reibungselektrizität genannt wird. Bringen wir einen Körper mit einem elektrischen in Berührung, so wird er in der Regel ebenfalls elektrisch. Es wird ihm Elektrizität mitgeteilt. Geschieht dies leicht und verteilt sich die Elektrizität sofort über den ganzen Körper, so nennen wir diesen einen Leiter, im entgegengesetzten Fall einen Nichtleiter der Elektrizität oder Isolator.

Zwei kleine Kugeln, welche durch einen Glasstab elektrisiert worden sind, stoßen sich ab, ebenso durch Harzstäbe elektrisierte Kugeln. Enthält aber die eine Glaselektrizität, die andere Harzelektrizität, so ziehen sie einander an. Glas- und Harzelektrizität haben entgegengesetzte Eigenschaften. Wir nennen die Glaselektrizität positiv, die Harzelektrizität negativ. Gleichnamige Elektrizitäten stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Befindet sich auf einer sehr kleinen Kugel die Elektrizitätsmenge m , auf einer zweiten m' , so stoßen sie sich mit einer Kraft

$$K = \varepsilon \frac{mm'}{r^2} \quad (1)$$

ab, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte r ist. Der Proportionalitätsfaktor ε hängt von der Einheit ab, mit welcher wir Elektrizitätsmengen messen. Wir wollen künftig

$$\varepsilon = 1$$

setzen. Wählen wir für die Kraft und Länge die gewohnten (C-G-S)-Einheiten, so messen wir die Elektrizitätsmengen im absoluten elektrostatischen Maß. Das in der Gleichung (1) ausgesprochene Kraftgesetz wurde von Coulomb entdeckt.

§ 2. Komponenten der elektrischen Kraft — Potential.

Aus der mathematischen Formulierung des Coulombschen Gesetzes geht hervor, daß wir eine abstoßende Kraft als positiv, eine anziehende als negativ auffassen. Die Kraft wirkt in der Richtung der Verbindungslinie r' zweier elektrischer Punkte, welche die Koordinaten x, y, z bez. x', y', z' besitzen. Wir können sie daher in drei Komponenten nach den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems zerlegen. Diese sind

$$X' = K \cos \alpha = \frac{mm'}{r'^2} \cdot \frac{x - x'}{r'} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{mm'}{r'} \right)$$

und ebenso

$$Y' = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{mm'}{r'} \right),$$

$$Z' = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{mm'}{r'} \right).$$

Ist ein dritter elektrischer Punkt von der Menge m'' in der Entfernung r'' von m vorhanden, so übt er auf m die Kraft $\frac{mm''}{r''^2}$ aus. Diese gibt parallel zur x -Achse eine Komponente

$$X'' = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{mm''}{r''} \right).$$

Wir haben daher als Gesamtkraft parallel zur x -Achse

$$\begin{aligned} X = X' + X'' &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{mm'}{r'} + \frac{mm''}{r''} \right) \\ &= - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} \right). \end{aligned}$$

Wir können diese Überlegung ohne weiteres auf beliebig viel elektrische Punkte ausdehnen und erhalten so, wenn wir $m = 1$ setzen,

$$X = - \frac{\partial}{\partial x} \sum \frac{m}{r},$$

$$Y = - \frac{\partial}{\partial y} \sum \frac{m}{r},$$

$$Z = - \frac{\partial}{\partial z} \sum \frac{m}{r}.$$

Die Größe $\sum \frac{m}{r}$ ist also nichts anderes als das Potential der Kräfte X, Y, Z (Bd. I, § 14). Man nennt daher $\sum \frac{m}{r}$ das elektrische Potential, die Potentialfunktion oder auch die Spannung der Elektrizität.

§ 3. Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektrizität gleichmäßig verteilt ist.

Auf einer Kugeloberfläche vom Radius a (Fig. 1) befinde sich gleichmäßig verteilt die Elektrizitätsmenge M . Auf der Flächeneinheit ist somit die Menge

$$\sigma = \frac{M}{4\pi a^2},$$

und wir nennen σ die Flächendichte der Elektrizität. Auf dem Flächenelement ω sitzt daher die Menge $\omega\sigma$.

Ihr Potential im Punkt A ist $\frac{\omega\sigma}{u}$. Das Potential der

gesamten Elektrizität ist daher $\sum \frac{\omega\sigma}{u}$. Lassen wir ω

um OA rotieren, so erhalten wir eine unendlich schmale

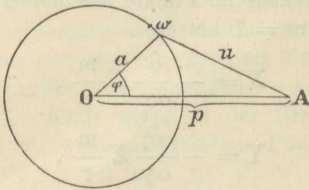


Fig. 1.

Kugelzone, deren Punkte sämtlich von A gleichweit entfernt sind. Ihre Fläche ist $2\pi a^2 \sin\varphi d\varphi$ und ihr

Potential $\frac{2\pi a^2 \sigma \sin\varphi d\varphi}{u}$. Das Potential der Kugel-

fläche ist daher

$$V = 2\pi a^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin\varphi d\varphi}{u}. \quad (2)$$

Aus $u^2 = a^2 + p^2 - 2ap \cos \varphi$
erhalten wir leicht

$$u \, du = ap \sin \varphi \, d\varphi$$

oder

$$\sin \varphi \, d\varphi = \frac{u \, du}{ap},$$

was in Gleichung (2) eingesetzt

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} \int_{u_0}^{u_\pi} du = \frac{2\pi a \sigma}{p} (u_\pi - u_0)$$

ergibt. Dabei ist u_0 der Wert von u für $\varphi = 0$, also

$$u_0 = p - a,$$

während

$$u_\pi = p + a$$

der Wert von u für $\varphi = \pi$ ist. Danach wird

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} (a + p - p + a) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{p}.$$

Nun ist aber $4\pi a^2 \sigma = M$,

folglich

$$V = \frac{M}{p}.$$

Das heißt, die auf einer Kugeloberfläche gleichmäßig verteilte Elektrizität wirkt auf einen Punkt außerhalb der Kugel so, als wäre sie im Mittelpunkt vereinigt.

Liegt der Punkt innerhalb der Kugel, so ist

$$u_0 = a - p, \quad u_\pi = a + p;$$

daher

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} (a + p - a + p) = 4\pi a \sigma.$$

Wir haben also wohl zu unterscheiden zwischen dem Wert des Potentials in einem Punkt außerhalb und in einem Punkt innerhalb der Kugelfläche. Für einen Punkt auf der Fläche selbst, d. h. für $p = a$ gehen natürlich beide Formeln ineinander über. Innerhalb der Kugel haben wir also ein konstantes Potential, wo immer der Punkt A liegt. Die Kraft, welche auf den Punkt wirkt, ist daher Null.

§ 4. Potential einer Vollkugel.

Die Elektrizitätsmenge M sei im Innern einer Vollkugel gleichmäßig verteilt. Wir können uns das in einer Kugel, welche aus einem Isolator besteht, realisiert denken. Wir haben dann in der Volumeinheit die Menge

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

und nennen ϱ die Dichte der Elektrizität. Wir denken uns die Kugel in unendlich viel dünne konzentrische Schalen zerlegt. Eine jede Schale wirkt dann auf einen Punkt außerhalb so, als wäre die gesamte Elektrizität im Mittelpunkt vereinigt. Wir haben daher auch für die Vollkugel als Potential auf einen außerhalb liegenden Punkt

$$V = \frac{M}{p} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho}{p}.$$

Liegt jedoch der Punkt im Innern der Kugel, so setzt sich das Potential aus zwei Teilen zusammen. Der eine rührt von Kugelschalen her, welche innerhalb der Kugel vom Radius p liegen. Sie wirken wie auf einen außerhalb liegenden Punkt. Ihr Potential ist

$$V_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi p^3 \varrho}{p} = \frac{4\pi p^2 \varrho}{3}.$$

Für die übrigen Kugelschalen ist jedoch der Punkt ein innerhalb liegender. Wir haben für eine solche Schale als Potential $4 \pi a \sigma$. In unserem Fall ist nun

$$\sigma = \varrho \, dr$$

zu setzen, und es wird der zweite Teil des Potentials

$$V_2 = 4 \pi \varrho \int_p^a r \, dr = 2 \pi \varrho (a^2 - p^2),$$

indem eine Schale den Anteil $4 \pi \varrho r \, dr$ liefert. Es ist somit

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \frac{4 \pi \varrho p^2}{3} + 2 \pi \varrho (a^2 - p^2) \\ &= 2 \pi \varrho a^2 - \frac{2 \pi \varrho}{3} p^2. \end{aligned}$$

§ 5. Die Laplacesche Gleichung.

Zwei Punkte in der Entfernung r haben die Koordinaten x, y, z bez. x', y', z' . Es ist dann

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2. \quad (3)$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

ist. Wir haben nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \frac{x' - x}{r} = \frac{x' - x}{r^3},$$

da nach Gleichung (3)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{x' - x}{r}$$

ist. Wir erhalten nun durch weitere Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x' - x}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} - \frac{3(x' - x)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x' - x)^2}{r^5}. \end{aligned}$$

Gleicherweise ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y' - y)^2}{r^5}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z' - z)^2}{r^5}.$$

Addieren wir die drei letzten Gleichungen, so erhalten wir tatsächlich

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

Haben wir anstatt zwei mehrere Punkte, so ist natürlich für einen bestimmten Punkt ebenfalls

$$\Sigma \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \Delta \Sigma \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

Daran wird nichts geändert, wenn in jedem Punkt eine elektrische Masse sitzt und wir $\Delta \Sigma \frac{m}{r}$ bilden. Auch diese Größe muß gleich Null sein. Nun ist aber

$$\Sigma \frac{m}{r} = V$$

das Potential der elektrischen Massen auf einen Punkt.

Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = 0,$$

welche nach ihrem Entdecker die Laplace'sche Gleichung genannt wird.

§ 6. Die Poissonsche Gleichung.

Wir fanden für das Potential einer Vollkugel auf einen außerhalb liegenden Punkt (§ 4)

$$V_e = \frac{4 \pi a^3 \rho}{3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{4 \pi a^3 \rho}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

wenn wir uns den Mittelpunkt der Kugel zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen. Es gilt für diesen Fall auch die im vorigen Paragraphen gefundene Gleichung $\Delta V_e = 0$.

Anders verhält es sich jedoch, wenn der Punkt im Innern der Vollkugel liegt. Wir haben dann

$$V_i = 2 \pi \rho a^2 - \frac{2 \pi \rho}{3} p^2,$$

wobei $p^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -\frac{4 \pi \rho}{3}$$

oder

$$\Delta V_i = -4 \pi \rho. \quad (4)$$

Diese Gleichung stimmt mit der Laplaceschen nicht überein. Das rührt daher, weil der Raum rings um unsern Punkt, für welchen wir das Potential bestimmt haben, von Massen erfüllt ist, während wir die Gleichung von Laplace unter der Bedingung ableiteten, daß der Punkt von den übrigen Massen getrennt ist.

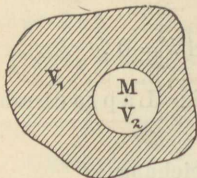


Fig. 2.

Was wir für die Kugel fanden, gilt aber für jeden mit Masse erfüllten Körper. Immer besteht für einen Punkt innerhalb zusammenhängender Massen die Gleichung (4). Wir können uns nämlich immer um diesen Punkt eine kleine Kugel geschlagen (Fig. 2) und uns das

Potential des ganzen Körpers aus den zwei Teilen V_1 , von den Massen außerhalb der Kugel herrührend, und dem Potential V_2 der Kugel bestehend denken. Es gilt dann

$$\Delta V_1 = 0, \quad \Delta V_2 = -4\pi\rho,$$

also auch, da

$$\Delta V = \Delta(V_1 + V_2) = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

ist,

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Das ist die Poissonsche Gleichung.

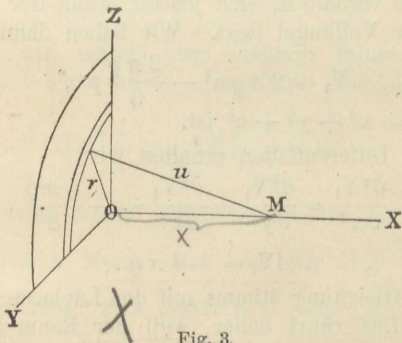


Fig. 3.

§ 7. Potential einer Kreisscheibe.

Eine Kreisscheibe (Fig. 3) liege in der (yz) -Ebene mit ihrem Mittelpunkt O im Ursprung des Koordinaten-

systems. Sie sei mit Masse von der Flächendichte σ gleichmäßig belegt. Wir suchen ihr Potential auf den Punkt M in der x -Achse. Sämtliche Punkte des Flächenelements $2\pi r dr$ liegen in der Entfernung u von M , liefern daher das Potential $\frac{2\pi r dr \sigma}{u}$, und da

$$u^2 = r^2 + x^2,$$

so ist das Potential der gesamten Scheibe

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \frac{2\pi r dr \sigma}{u} = 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= 2\pi\sigma \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right]_0^R = 2\pi\sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x). \end{aligned}$$

Für die Kraft auf den Punkt finden wir

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\sigma \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right).$$

Rückt der Punkt sehr nahe an die Scheibe, so konvergiert $\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$ gegen Null, und wir erhalten für die Kraft in unmittelbarer Nähe der Scheibe

$$X = 2\pi\sigma.$$

Denselben Wert hat natürlich die Kraft auf der andern Seite der Scheibe, nur ist sie hier entgegengesetzt gerichtet. Geht man also von der positiven Seite durch die Scheibe auf die negative, so ändert sich die Kraft um $4\pi\sigma$. Nennen wir das Potential auf der positiven Seite V_+ , auf der negativen V_- , so ist

$$-\frac{\partial V_+}{\partial x} + \frac{\partial V_-}{\partial x} = 4\pi\sigma.$$

Diese Gleichung gilt aber für jede Fläche. Wir können nämlich aus einer beliebigen Fläche (Fig. 4) eine kleine kreisförmige Scheibe herausschneiden. Nennen wir dann das zum Punkt M gehörige Potential V_+ , das zum Punkt M' gehörige V_- , so ändert sich die Kraft,

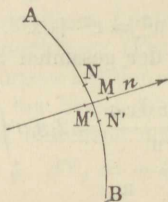


Fig. 4.

welche von der Scheibe NN' herrührt, beim Durchgang sprungweise, hingegen jener Teil, der von den übrigen Teilen der Fläche stammt, stetig. Es bleibt daher für den Durchgang wiederum

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma, \quad (5)$$

wenn wir unter n die Normale zur Fläche verstehen.

§ 8. Der Gaußsche Satz.

Von Gauß wurde folgender Satz gefunden: Bezeichnen wir mit m die Menge Elektrizität in einem Punkt, dessen Entfernung von einem beliebigen Flächenelement dS mit r , mit N die Normalkraft, welche m in dS erzeugt, und mit ω den Raumwinkel, welchen die ganze Fläche S von m aus betrachtet bildet, so gilt die Gleichung

$$\int N dS = m \omega.$$

Die Kraft von m in dS ist $\frac{m}{r^2}$. Bildet die Normale zu dS mit r den Winkel α , so ist

$$N = \frac{m}{r^2} \cos \alpha$$

und

$$N dS = m \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = m d\omega.$$

Ziehen wir nämlich von m aus Gerade an die Umgrenzung von dS , so bilden sie einen Kegel, der aus einer Kugelfläche vom Radius Eins, die wir um m als Mittelpunkt schlagen, die Fläche $d\omega$ herausschneidet. Das ist aber gleichzeitig die Definition des Raumwinkels, welchen dS von m aus betrachtet bildet. Es ist damit der Gaußsche Satz

$$\int N dS = m \omega$$

bewiesen.

Spezielle Fälle erhalten wir für eine geschlossene Fläche. Liegt m innerhalb derselben, so ist $\omega = 4\pi$, also

$$\int N dS = 4\pi m.$$

Ist m außerhalb, so $\omega = 0$, da jedes Raumwinkелеlement einmal positiv und einmal negativ in Rechnung kommt, daher

$$\int N dS = 0.$$

Liegen mehrere Punkte $m, m', m'' \dots$ zum Teil innerhalb, zum Teil außerhalb der geschlossenen Fläche, so

$$\int N dS = 4\pi \sum m_i,$$

wobei $\sum m_i$ die Summe aller wirksamen Punkte im Innern der Fläche bezeichnet.

§ 9. Wirkung einer homogenen Zylinderfläche.

Ein unendlich langer Kreiszyylinder vom Radius R sei gleichförmig mit wirksamer Masse von der Dichte σ belegt. Die Anschauung ergibt, daß die Kraft senkrecht zur Zylinderachse gerichtet sein muß. Legen wir durch einen Punkt von der Entfernung r von der Achse eine konzentrische Zylinderfläche und begrenzen wir sie außerdem durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen im Abstand Eins, so liegt innerhalb dieser Zylinder die Masse $2\pi R\sigma$, und es ist nach dem Gaußschen Satz

$$\int N_a dS = 2\pi r N_a = 4\pi \cdot 2\pi R\sigma$$

und somit die Kraft des Zylinders auf einen äußeren Punkt

$$N_a = \frac{4\pi R\sigma}{r}.$$

Für einen inneren Punkt ist

$$\int N_i dS = 2\pi r N_i = 0,$$

also

$$N_i = 0.$$

§ 10. Wirkung einer Ebene.

Haben wir eine unendliche Ebene mit Masse von der Dichte σ belegt, so steht die Krafrichtung natürlich senkrecht auf der Ebene und ist symmetrisch zu beiden Seiten der Ebene. Wir legen durch einen Punkt in der Entfernung x eine parallele Ebene und eine zweite symmetrisch dazu. Diese beiden Ebenen sollen einen mit seiner Achse zu ihnen senkrechten Zylinder vom Querschnitt Eins begrenzen. Für diesen Zylinder ergibt nun der Gaußsche Satz

$$\int N dS = 2N = 4\pi\sigma,$$

daher

$$N = 2\pi\sigma.$$

§ 11. Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter.

Im § 1 lernten wir zweierlei Elektrizitäten kennen, die positive und die negative. Laden wir einen Körper positiv mit einer bestimmten Elektrizitätsmenge und geben dann so viel negative Elektrizität noch hinzu, bis der Körper wieder unelektrisch ist, so können wir sagen: er enthält gleichviel positive und negative Elektrizität. Jeder unelektrische Körper kann als mit gleichviel positiver und negativer Elektrizität geladen angesehen werden. Beide Elektrizitäten sind in derselben Weise verteilt, können daher keine Wirkung nach außen ausüben. Bringen wir nun einen elektrischen Körper in die Nähe, so wird er die gleichnamige Elektrizität abstoßen, die ungleichnamige anziehen. Es erweist sich der ursprünglich unelektrische Körper sodann elektrisch. Wir nennen diesen Vorgang Elektrizitätserregung durch Verteilung.

Laden wir einen Leiter mit Elektrizität, so wird sie sich auf ihm in bestimmter Weise anordnen. Es befindet sich die Elektrizität im Gleichgewicht, wenn alle Kräfte, welche die einzelnen elektrischen Teilchen aufeinander ausüben, im Gleichgewicht sind. Für alle Punkte im Innern des Leiters muß daher die Kraft gleich Null, folglich das Potential eine konstante Größe sein. Es ist dann aber im Innern des Körpers

$$\Delta V = 0 ,$$

das heißt, es muß die Dichte der Elektrizität $\rho = 0$ sein; denn wäre dies nicht der Fall, so hätten wir ja nach Poisson

$$\Delta V = - 4 \pi \rho .$$

Ist demnach die Elektrizität auf einem Leiter im Gleichgewicht, so befindet sie sich nur an der Oberfläche des Leiters.

§ 12. Verteilung der Elektrizität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel.

Aus der allseitigen Symmetrie einer Kugel geht ohne weiteres hervor, daß die Elektrizität sich auf ihr gleichmäßig verteilen muß, so daß die Dichte an allen Punkten der Kugeloberfläche gleich groß ist. Das Potential auf einen inneren Punkt ist dann nach § 3

$$V = 4 \pi a \sigma = \frac{4 \pi a^2 \sigma}{a} = \frac{E}{a},$$

wenn wir mit E die gesamte Elektrizitätsmenge auf der Kugel bezeichnen. Die Elektrizitätsmenge ist also

$$E = V a.$$

Die Größe a , mit welcher das Potential multipliziert werden muß, damit man die Elektrizitätsmenge erhält, nennen wir die Kapazität der Kugel.

Sind zwei Kugeln sehr weit voneinander entfernt, so können wir den Einfluß, welchen die Elektrizitätsmengen dieser Kugeln aufeinander ausüben, vernachlässigen. Die Radien der beiden Kugeln seien a und a' , ihre Elektrizitätsmengen E beziehungsweise E' . Die Kugeln besitzen dann das Potential

$$V = \frac{E}{a}, \quad V' = \frac{E'}{a'}.$$

Wir verbinden nun beide Kugeln durch einen dünnen Draht. Demzufolge werden die Kugeln das gemeinschaftliche Potential P annehmen, da wir sie ja

jetzt als einen einzigen Körper betrachten können. Es muß jetzt

$$P = \frac{e}{a} = \frac{e'}{a'}$$

sein, wenn wir mit e und e' die Elektrizitätsmengen bezeichnen, welche nunmehr auf den Kugeln sitzen. Es ist also auch

$$P = \frac{e + e'}{a + a'} = \frac{E + E'}{a + a'}.$$

Daraus folgt

$$e = a \frac{E + E'}{a + a'}, \quad e' = a' \frac{E + E'}{a + a'}.$$

§ 13. Allgemeine Beziehung zwischen Elektrizitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde.

Bestimmen wir für einen beliebigen Körper (Fig. 5) das Potential auf einen innerhalb liegenden Körper M , so haben wir jedes Flächenelement ω mit der zuge-

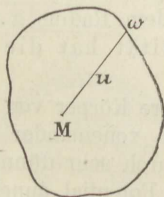


Fig. 5.

hörigen Flächendichte zu multiplizieren, durch die Entfernung u zu dividieren und über die ganze Oberfläche zu summieren. Das Potential ist also

$$V = \sum \frac{\omega \sigma}{u},$$

u. z. muß es im Innern des Körpers einen konstanten Wert haben. Wächst nun in allen Punkten des Körpers die Dichte der Elektrizität proportional, so wird das Gleichgewicht nicht gestört. Es besteht somit auch die Gleichung

$$n V = \sum \frac{\omega n \sigma}{u}.$$

$$\sum \omega n \sigma = n E$$

ist nun die auf dem Körper vorhandene Elektrizitätsmenge, welche früher den Wert

$$E = \sum \omega \sigma$$

hatte. Es wächst daher die Elektrizitätsmenge mit dem Potential proportional, so daß immer die Gleichung

$$E = \alpha V$$

besteht, wobei α eine konstante Größe ist, die wir die Kapazität des Körpers nennen. Für die Kugel fanden wir sie gleich dem Radius a . Wir können daher sagen: Die Kapazität hat die Dimension einer Länge.

Haben wir mehrere Körper von verschiedener Kapazität, die sehr weit voneinander entfernt sind, und verbinden wir sie durch sehr dünne Drähte, so werden sie ein gemeinsames Potential annehmen, während sich in diesem Fall die Kapazitäten einfach summieren. Die Kapazität ändert sich jedoch, wenn sich die Körper einander nähern. Die Elektrizitätsmengen auf den einzelnen Körpern können wir ebenso finden wie im vorhergehenden Paragraphen für die Kugeln, nur haben wir jetzt anstatt a die Kapazität α usw. zu setzen.

Bringen wir einen Körper mit der Erde in Verbindung, so nimmt er ihr Potential an. Wir setzen dies gewöhnlich gleich Null, doch ist das nicht notwendig; denn die Größe, welche wir das Potential eines Körpers nennen, ist immer nur die Differenz zum Potential der Erde. Es liegt sogar nahe, der Erde auch ein Potential zu geben. Die positiv und negativ elektrischen Körper weichen dann in verschiedenem Sinn vom Potential der Erde ab. Wir befolgen nun dieselbe Anschauungsweise wie bei der Wärme, wenn wir die Temperatur unter Null durch Kältegrade, die über Null durch Wärmegrade messen, obwohl wir beide, wie wir es nach Einführung des absoluten Nullpunkts ja auch getan haben (Bd. II, § 39), auch als gleichbezeichnete Größen ansehen können.

§ 14. Der Kugelkondensator.

Wir betrachten zwei konzentrische leitende Hohlkugeln (Fig. 6). Die Oberflächen der inneren Hohlkugel haben die Radien a_1 und a_2 , die der äußeren

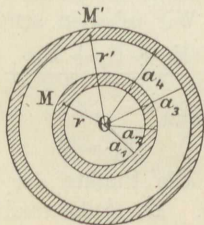


Fig. 6.

a_3 und a_4 . Durch einen sehr dünnen Draht sei die innere Hohlkugel mit einem Körper vom konstanten Potential A verbunden, die äußere werde auf dem

Potential B gehalten. Wir nehmen nun an, auf den Kugelflächen sitzen entsprechend den Radien a_1, a_2 usw. die Elektrizitätsmengen E_1, E_2, E_3, E_4 . Für einen innerhalb der inneren Hohlkugel liegenden Punkt M, der sich in der Entfernung r vom Mittelpunkt 0 befindetet, kann also das Potential nur den Wert A, hingegen in einem Punkt M' der äußeren Hohlkugel in der Entfernung r' den Wert B haben. Die Elektrizitätsmengen E_1, E_2 usw. haben wir uns wegen der allseitigen Symmetrie auf den zugehörigen Kugelflächen gleichmäßig verteilt zu denken. E_1 wirkt daher auf M, als wäre die gesamte Menge im Punkt 0 vereinigt. Für die übrigen Kugelflächen ist M ein innerhalb liegender Punkt. Das Potential A setzt sich daher folgendermaßen zusammen:

$$A = \frac{E_1}{r} + \frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Für den Punkt M' liefern die Elektrizitätsmengen E_1, E_2, E_3 ein Potential, als wären sie in 0 vereinigt. Nur für die äußerste Kugelfläche ist M' ein innerhalb liegender Punkt. Wir erhalten somit

$$B = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{r'} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Wir müssen nun

$$E_1 = 0$$

setzen, da A für alle Punkte der inneren Hohlkugel konstant sein muß. Es bleibt somit

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} + \frac{E_4}{a_4} &= A, \\ \frac{E_2 + E_3}{r'} + \frac{E_4}{a_4} &= B. \end{aligned} \quad (6)$$

Das Potential B muß wiederum für alle Punkte der äußeren Hohlkugel konstant sein. Daraus folgt

$$E_2 + E_3 = 0.$$

Es sitzt demnach auf den zwei einander zugekehrten Kugelflächen gleich viel, aber entgegengesetzte Elektrizität. Somit bleibt uns nur

$$B = \frac{E_4}{a_4}, \quad (7)$$

d. h. derselbe Potentialwert, als wäre nur eine einzige leitende Kugel vom Radius a_4 vorhanden. Die Gleichungen (6) und (7) ergeben

$$\frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} = A - B,$$

und da

$$E_2 = -E_3,$$

so

$$E_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) = A - B,$$

oder

$$E_2 = \frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} (A - B).$$

Wir nehmen nun an, die innere Kugelschale sei isoliert und die äußere werde geladen. Dann muß $E_1 + E_2 = 0$, oder da $E_1 = 0$, so muß auch $E_2 = 0$ und damit auch $E_3 = 0$ sein. Es befindet sich also dann Elektrizität nur auf der äußeren Oberfläche, deren Menge die Gleichung $E_4 = a_4 B$

angibt. Verbinden wir jetzt die innere Kugel mit der Erde, so daß $A = 0$ wird, so folgt

$$E_2 = -\frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \quad E_3 = \frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \quad E_4 = a_4 B.$$

E_2 und E_3 sind also um so größer, je kleiner $a_3 - a_2$ ist, d. d. je näher die beiden inneren Kugelflächen aneinander rücken. Wir können dann in erster Annäherung

$$a_2 = a_3 = a, \quad a_2 a_3 = a^2$$

setzen, hingegen sei

$$a_3 - a_2 = \delta.$$

Es wird jetzt

$$E_3 = \frac{a^2}{\delta} B = \frac{4 \pi a^2}{4 \pi \delta} B.$$

Da aber $4 \pi a^2$ die Oberfläche der Kugel ist, so heißt das, daß die angesammelte Elektrizitätsmenge E_3 proportional der Kugelfläche und verkehrt proportional dem Abstand δ der beiden Kugelflächen ist. Ein derartiges System von leitenden Flächen kann also als Elektrizitätssammler oder Kondensator benützt werden, und man nennt speziell den von uns untersuchten Apparat einen Kugelkondensator.

§ 15. Der Plattenkondensator.

Zwei gleichgestaltete Platten (Fig. 7) liegen parallel zueinander in der kleinen Entfernung δ . Die linke

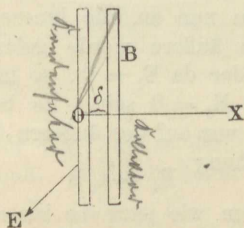


Fig. 7.

sei zur Erde E abgeleitet, die rechte werde auf dem konstanten Potential B gehalten. In erster Annäherung

können wir annehmen, das Potential steige zwischen den beiden Platten linear an. Wir haben daher

$$\frac{dV_+}{dx} = \frac{B}{\delta};$$

für das Innere der linken Platte gilt

$$\frac{dV_-}{dx} = 0.$$

Somit ist nach Gleichung (5)

$$\frac{B}{\delta} = -4\pi\sigma,$$

oder

$$\sigma = -\frac{B}{4\pi\delta}.$$

Wir haben also auf der ganzen inneren Seite der linken Platte eine Elektrizitätsmenge von der Dichte

$-\frac{B}{4\pi\delta}$ sitzen. Für die innere Seite der rechten

Platte haben wir analog

$$\frac{dV_+}{dx} = 0,$$

hingegen

$$\frac{dV_-}{dx} = \frac{B}{\delta},$$

mithin

$$\sigma = \frac{B}{4\pi\delta}.$$

Die Elektrizitätsmenge, welche sich auf der rechten Platte ansammelt, ist somit

$$E = \frac{FB}{4\pi\delta},$$

wenn wir mit F die Fläche der Platte bezeichnen. Wir erhalten somit auch für diesen Kondensator dieselbe Formel wie für den Kugelkondensator, doch ist nicht zu vergessen, daß jetzt die Formel nur annähernd gilt, daß der wahre Wert sich dem von uns berechneten jedoch um so mehr nähert, je kleiner die Entfernung δ ist.

§ 16. Kraftlinien — Niveauflächen.

Für ein ruhendes System von Leitern können wir das Potential als Funktion der Koordinaten x, y, z auffassen, also

$$V = f(x, y, z)$$

setzen. Halten wir das Potential V konstant, so stellt die letztere Gleichung eine Fläche dar, welche wir wegen der Konstanz des Potentials auf ihr eine Äquipotential- oder Niveaufläche nennen. In einer solchen Fläche liegt also keine Kraftkomponente. Die Kraft ist somit senkrecht darauf gerichtet. Erteilen wir nun dem V einen stetig wachsenden Wert, so erhalten wir eine Schar von Flächen, deren orthogonale Trajektorien die jeweilige Richtung der Kraft angeben. Diese Linien nennt man deshalb auch Kraftlinien.

Für einen einzigen Massenpunkt m ist das Potential

$$V = \frac{m}{r}.$$

Die Niveauflächen sind daher Kugelflächen mit m als Mittelpunkt, während die Kraftlinien die Radien sind. Nehmen wir an, es gehen N Kraftlinien vom

Punkt m aus, so ist deren Dichte auf einer Niveaufläche vom Radius r

$$\sigma = \frac{N}{4 \pi r^2},$$

und setzen wir

$$N = 4 \pi m,$$

so

$$\sigma = \frac{m}{r^2}.$$

Es gibt dann die Dichte der Kraftlinien unmittelbar auch die Größe der Kraft an. Es empfiehlt sich daher anzunehmen, daß jede Masse m $4 \pi m$ Kraftlinien aussendet. Es ist dann durch die Kraftlinien Richtung und Größe der Kraft vollständig bestimmt, da letztere gleich der Anzahl der Kraftlinien ist, welche die Flächeneinheit passieren. Einen von elektrischen Kraftlinien erfüllten Raum nennen wir ein elektrisches Feld.

Die Einführung der Kraftlinien ergibt auch eine bequeme Erläuterung der Sätze von Laplace und Poisson. Haben wir nämlich ein Elementarparallelepiped mit den Kanten dx , dy , dz , so ist die Zahl der Kraftlinien, welche durch die linke Fläche $dy dz$ eintreten, gleich

gleich $-\frac{\partial V}{\partial x} dy dz$, während auf der rechten

Seite, wie man mit Zuhilfenahme der Entwicklung von

$\frac{\partial V}{\partial x}$ nach der Taylorschen Reihe leicht erkennt, die

Zahl $-\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\right) dy dz$ austritt. Die Differenz

gibt den Überschuß der austretenden Kraftlinien über

die eintretenden an, also $-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz$. Gleicher-

weise erhalten wir für die beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems $-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx dy dz$ und $-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx dy dz$. Für den Fall, daß in unserem

Volumelement keine elektrischen Massen vorhanden sind, muß die Zahl der eintretenden und austretenden Kraftlinien gleich sein. Wir erhalten daher durch Addition der letzten drei Ausdrücke die Gleichung von Laplace:

$$\Delta V = 0.$$

Ist hingegen in dem Volumelement die elektrische Masse m vorhanden, so ist der Überschuß der austretenden Kraftlinien über die eintretenden $4\pi m$, und wir haben

$$-\Delta V dx dy dz = 4\pi m = 4\pi \rho dx dy dz,$$

falls wir voraussetzen, daß die Massen gleichförmig im Volumelement verteilt seien und die Dichte ρ besitzen. Diese letzte Gleichung ergibt dann den Satz von Poisson:

$$\Delta V = -4\pi \rho.$$

Es ergibt sich auch leicht der unmittelbare Zusammenhang dieser Sätze mit dem Gaußschen Satz (8).

§ 17. Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte.

Der elektrische Massenpunkt m befinde sich in einem Raum vom Potential V . Der Punkt bewege sich auf dem Weg s . Die Kraft, welche in der Richtung des Wegs auf ihn wirkt, ist also $-m \frac{dV}{ds}$ und es leistet auf dem Weg ds die Kraft die Arbeit

$$dL = -m \frac{dV}{ds} ds.$$

Gelangt der Punkt von einer Stelle mit dem Potential V_1 zu einer andern vom Potential V_2 , so haben die elektrischen Kräfte dabei die Gesamtarbeit

$$\int dL = -m V_2 + m V_1 = m(V_1 - V_2)$$

geleistet. Diese Arbeit ist von der Form der Bahn vollständig unabhängig. Sie ist nur durch den Anfangs- und Endwert des Potentials bedingt. Ist der Endpunkt unendlich weit weg, und haben wir im Unendlichen das Potential

$$V_2 = 0,$$

so stellt das Produkt $m V_1$ die Arbeit dar, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn der Punkt ins Unendliche gebracht wird. Dieselbe Arbeit muß aufgewendet werden, wenn wir den Punkt aus dem Unendlichen in den Raum vom Potential V_1 bringen wollen. Es ist daher das Potential nichts anderes als der mechanische Wert oder der Arbeitswert der Masseneinheit.

Bringen wir einen Massenpunkt m_2 aus dem Unendlichen in die Entfernung r_{12} von der Masse m_1 , so haben wir dabei die Arbeit $\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ zu leisten. Bringen wir nun noch die dritte Masse m_3 aus dem Unendlichen dazu, so haben wir noch die Arbeit $\frac{m_1 m_3}{r_{13}}$ bezüglich $\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$ aufzuwenden, wenn r_{13} die Entfernung zwischen m_1 und m_3 , r_{23} jene zwischen m_2 und m_3 ist. Um daher diese Anordnung zu bewerkstelligen, muß die Arbeit

$$A = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

geleistet werden. A ist daher der Arbeitswert dieses Systems.

Es sollen nun auf dieselbe Weise beliebig viel Punkte einander genähert werden. Der Gesamtarbeitswert A wird dann durch folgende Gleichung bestimmt sein:

$$\begin{aligned}
 2 A = & m_1 \left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_4}{r_{14}} + \dots \right) \\
 & + m_2 \left(\frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{24}} + \dots \right) \\
 & + m_3 \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{34}} + \dots \right) \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Summe auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem doppelten Arbeitswert ist, da wir jede Arbeit, welche bei der Zuführung eines Massenpunkts aus dem Unendlichen zu leisten ist, doppelt gezählt haben. So finden wir z. B. die Arbeit, welche wir bei der Annäherung von m_2 an m_1 zu leisten haben, einmal im ersten Summanden, dann noch einmal im zweiten usw. Der Faktor von m_1 ist nun nichts anderes als das Potential aller Massenpunkte auf den Punkt m_1 . Wir wollen es V_1 nennen. Desgleichen sei

$$V_2 = \frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \dots$$

usw. Danach erhalten wir

$$2 A = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots$$

Befinden sich alle elektrischen Massen auf einem leitenden Körper, so muß

$$V_1 = V_2 = \dots = V$$

sein, wobei also V das konstante Potential im Innern des Körpers vorstellt. Es ist dann

$$2 A = (m_1 + m_2 + \dots) V = MV$$

oder

$$A = \frac{MV}{2},$$

wobei M die gesamte Elektrizität auf dem Körper ist. Überlegen wir, daß

$$V = \frac{M}{C}$$

ist, wenn wir unter C die Kapazität des Körpers verstehen, so können wir den Arbeitswert auch durch die Gleichung

$$A = \frac{M^2}{2C}$$

darstellen.

Haben wir mehrere Leiter mit den Potentialen $V, V', V'' \dots$, so ist der Arbeitswert des gesamten Systems

$$A = \frac{MV}{2} + \frac{M'V'}{2} + \dots,$$

wenn $M, M' \dots$ die Elektrizitätsmengen auf den zugehörigen Körpern sind.

§ 18. Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel.

Eine leitende Kugel sei auf das Potential V geladen. Ist E die Elektrizitätsmenge und a der Radius der Kugel, so besteht die Gleichung

$$V = \frac{E}{a}.$$

Der Arbeitswert ist somit

$$A = \frac{E V}{2} = \frac{E^2}{2 a} .$$

Wir nehmen nun an, die Kugel habe eine bewegliche Oberfläche, wie es etwa für eine Seifenblase gelten würde, und wir suchen nun die Arbeit, welche die Elektrizität bei der Ausdehnung der Kugel leistet. Sie muß der Verkleinerung des Arbeitswerts entsprechen, ist daher durch die Gleichung

$$- d A = \frac{E^2}{2 a^2} d a$$

bestimmt, wenn sich der Radius um $d a$ vergrößert. $\frac{E^2}{2 a^2}$ ist somit nichts anderes als die Gesamtkraft, welche senkrecht zur Kugeloberfläche nach außen wirkt. Ihre Größe sei für die Flächeneinheit P . Es muß also

$$4 \pi a^2 P = \frac{E^2}{2 a^2}$$

oder

$$P = \frac{E^2}{8 \pi a^4}$$

sein. Ist die Dichte der Elektrizität σ , so

$$E = 4 \pi a^2 \sigma ,$$

mithin

$$P = \frac{16 \pi^2 a^4 \sigma^2}{8 \pi a^4} = 2 \pi \sigma^2 .$$

Dieses Resultat gilt übrigens für jeden elektrisch geladenen Leiter, wie man leicht durch folgende Überlegung erkennt. Da sich eine unendlich große Raumdichte der Elektrizität praktisch nicht herstellen läßt,

so müssen wir annehmen, daß die über die Oberfläche eines Leiters verteilte Elektrizität eine gewisse Schichtdicke besitzt. Diese Schicht teilen wir in unendlich viele parallele Schichten von der Dichte $d\sigma$, deren jede für sich im Gleichgewicht ist. Es erfährt jede Schicht von den sie umschließenden Schichten keine Kraftwirkung, hingegen von den eingeschlossenen die Kraft $4\pi\sigma d\sigma$ senkrecht nach außen. Die gesamte Elektrizität steht somit unter einem Druck nach außen von der Größe

$$4\pi \int_0^{\sigma} \sigma d\sigma = 2\pi\sigma^2.$$

§ 19. Theorie der Dielektrika.

Wir fanden für die Kapazität eines Kugelkondensators (§ 14) aus der Formel

$$E_3 = \frac{a^2}{\delta} B$$

die Größe

$$C = \frac{a^2}{\delta},$$

da ja die angesammelte Elektrizität gleich dem Produkt aus Kapazität und Spannung sein muß. Diese Gleichung gilt aber nur dann, wenn wir den Zwischenraum zwischen den beiden Hohlkugeln mit Luft ausgefüllt haben. Bringen wir jedoch eine andere Substanz, etwa eine nicht leitende Flüssigkeit oder einen festen Isolator hinein, so ändert sich die Kapazität, sie wird größer. Wir haben daher unsere Formel in

$$C = K \frac{a^2}{\delta}$$

abzuändern, wobei K eine Konstante ist, welche nur

von der Natur des isolierenden Zwischenmittels abhängig ist. Da Faraday die Isolatoren Dielektrika nannte, so gab er der Größe K den Namen „Dielektrizitätskonstante“.

Man kann sich vorstellen, daß die Dielektrika aus Molekeln bestehen, welche zwar die Elektrizität sehr gut leiten, die aber untereinander isoliert sind. Bringen wir deshalb einen Isolator in ein elektrisches Feld, so tritt in jeder Molekel eine elektrische Verteilung ein, indem die positive Elektrizität das Bestreben hat, sich in der Richtung der Kraftlinien zu bewegen, die nega-

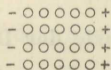


Fig. 8.

tive aber entgegengesetzt. Denken wir uns deshalb die Molekeln wie in Fig. 8 angeordnet, und es gehen die Kraftlinien von links nach rechts, so wird die linke Seite der Molekeln negativ, die rechte positiv elektrisch. Im Innern des Körpers heben sich die Elektrizitäten der benachbarten Molekeln wieder auf, und es bleibt nur an der Oberfläche links eine negative, rechts eine positive Schicht freier Elektrizität übrig.

§ 20. Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektrizität.

Wir bringen in ein homogenes elektrisches Feld (Fig. 9), das ist ein solches, in welchem die Kraftlinien gerade, parallel und von konstanter Dichte sind, zwei elektrische Massen $+e$ und $-e$, welche starr miteinander verbunden sind. Ihre Ent-

fernung sei a , die Feldstärke N . Es wirkt dann auf $+e$ eine Kraft Ne in der Richtung der Kraftlinien, auf $-e$ in entgegengesetzter Richtung dieselbe Kraft,

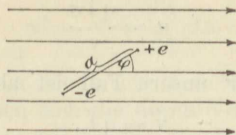


Fig. 9.

also $-Ne$. Unser System erfährt daher ein Drehungsmoment $Nea \sin \varphi$, und man nennt speziell die Größe ea das elektrische Moment der beiden getrennten elektrischen Massen $+e$ und $-e$.

Wir denken uns nun ein Dielektrikum in einem elektrischen Feld. Überall wirke dieselbe elektrische Kraft, d. h. wir haben ein homogenes Feld. Es werden also alle Molekeln des Dielektrikums gleichmäßig polarisiert werden. Wir schneiden nun aus dem Dielektrikum ein Parallelepiped so heraus, daß eine Kante in die Richtung der Kraftlinien fällt. Es zeigt sich dann nach dem Früheren nur auf jenen Flächen, welche senkrecht zu den Kraftlinien stehen, freie Elektrizität. Ihre Dichte sei σ , und wir machen nun die Annahme, daß σ proportional der verteilenden elektrischen Kraft ist. Die Elektrizitätsmengen, welche auf den Endflächen sitzen, sind somit $q\sigma$ bez. $-q\sigma$, wenn wir mit q den Querschnitt des Parallelepipeds bezeichnen. Wir können nun

$$m = q\sigma l$$

das elektrische Moment des Parallelepipeds nennen, vorausgesetzt, daß wir unter l seine Länge verstehen. Man pflegt nun den Quotienten aus dem elektrischen

Moment und dem Volumen des Körpers das elektrische Moment der Volumeinheit zu nennen, welches somit durch die Formel

$$\mu = \frac{q l \sigma}{v}$$

gegeben ist. Für unsern Fall ist aber das Volumen

$$v = q l,$$

daher

$$\mu = \sigma.$$

Das heißt: das elektrische Moment der Volumeinheit ist gleich der Flächendichte der freien Elektrizität.

Die elektrischen Kräfte können wir in drei Komponenten X , Y , Z zerlegen. Für die Endflächen eines Elementarparallelepipeds in einem Isolator seien die Flächendichten durch α , β , γ gegeben, wobei sich α auf die Fläche senkrecht zur x -Achse bezieht, usw. Wir machen dann die Annahme, daß

$$\alpha = k X, \quad \beta = k Y, \quad \gamma = k Z$$

ist, und geben der Konstanten k den Namen „Elektrisierungszahl“. Ändert sich der Wert von X , Y , Z mit den Koordinaten nicht, so sind auch die Flächendichten α , β , γ konstante Größen und, wie bereits früher bemerkt, kann demnach im Innern eines Isolators, der von einem homogenen Feld beeinflußt wird, keine freie Elektrizität vorhanden sein. Wächst aber die elektrische Kraft X längs der Strecke dx , so daß wir auf der rechten Seite des Elementarprismas die Kraft X' haben, dann befindet sich dort die Flächendichte

$$\alpha' = k X'.$$

Während wir also links etwa die freie Elektrizität $-\alpha dy dz$ haben, haben wir dann rechts $\alpha' dy dz$, und wir können schreiben

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx.$$

Ändert sich nun α längs der x-Achse von Molekel zu Molekel, so können sich die durch Verteilung erzeugten Elektrizitätsmengen im Innern des Körpers nicht mehr vollständig aufheben, sondern es wird zwischen je zwei Molekeln eine freie Elektrizitätsmenge übrig bleiben, welche gleich der algebraischen Summe der beiden zusammenstoßenden Mengen ist. Für das ganze Volumenelement erhalten wir daher unter dem Einfluß der veränderlichen Kraft X eine freie Elektrizitätsmenge

$$-(\alpha' - \alpha) dy dz = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx dy dz,$$

indem ja der Zuwachs der Flächendichte multipliziert mit der Fläche selbst die Menge der freien Elektrizität

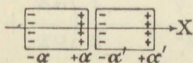


Fig. 10.

angibt. Die frei werdende Elektrizität ist negativ, wenn wir (Fig. 10) die Kraft X mit der Abszisse x wachsen lassen. Die Kräfte Y und Z erzeugen analog die freien Elektrizitätsmengen $-\frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy dz$ und $-\frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy dz$. Die im Volumenelement vorhandene freie Elektrizität ist also gleich $-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dx dy dz$,

wir können somit die Größe

$$\varrho = - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)$$

die Menge in der Volumeinheit oder die Dichte der freien Elektrizität nennen, wobei unter ϱ zum Unterschied von der Flächendichte σ eine Raumdichte zu verstehen ist.

Wir setzen nun voraus, die elektrischen Kräfte haben ein Potential V . Wir haben dann

$$\alpha = k X = -k \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\beta = k Y = -k \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\gamma = k Z = -k \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Es läßt sich nun unter der Annahme, die Elektrisierungszahl k sei eine konstante Größe, leicht folgende Gleichung bilden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{k} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = \frac{\varrho}{k}.$$

Von früher her (§ 6) wissen wir aber, daß

$$\Delta V = -4\pi\varrho$$

ist. Wir erhalten somit

$$-4\pi\varrho = \frac{\varrho}{k}$$

oder

$$(1 + 4\pi k)\varrho = 0.$$

Da k einen endlichen positiven Wert hat, so folgt

$$\varrho = 0.$$

Das heißt: im Innern eines Dielektrikums entsteht unter dem Einfluß äußerer elektrischer Kräfte keine freie Elektrizität.

§ 21. Kapazität eines Leiters, der von einem Dielektrikum umgeben ist.

Ein Leiter (Fig. 11) besitze die Elektrizitätsmenge E und befinde sich in der Mitte eines sehr großen kugelförmigen Dielektrikums. Die Menge E wirkt vertheilend auf das Dielektrikum. Es wird daher auf der

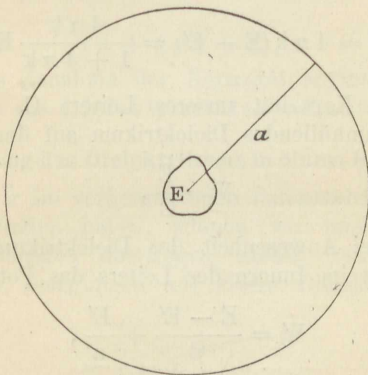


Fig. 11.

Oberfläche der Kugel eine Elektrizitätsmenge E' frei und ebenso an der Oberfläche des Leiters die Menge $-E'$, da wir annehmen, daß die Dielektrizitätskonstante k an allen Punkten des Isolators dieselbe Größe hat. Der Radius der Kugel sei a . Die Kraft, welche daher an der Oberfläche der Kugel wirkt, ist $\frac{E - E'}{a^2}$, da wir bei sehr großem a annehmen können, die gesamte Elek-

trizitätsmenge E und damit auch $-E'$ sei im Mittelpunkt der Kugel vereinigt. Auf der Oberfläche haben wir daher die Dichte

$$\sigma = k \frac{E - E'}{a^2}.$$

Da aber

$$E' = 4 \pi a^2 \sigma,$$

so folgt weiter

$$\frac{E'}{4 \pi a^2} = k \frac{E - E'}{a^2}$$

oder

$$E' = 4 \pi k (E - E') = \frac{4 \pi k}{1 + 4 \pi k} E.$$

Es sei die Kapazität unseres Leiters C . Er stände also ohne umhüllendes Dielektrikum auf dem Potential

$$V = \frac{E}{C},$$

hingegen bei Anwesenheit des Dielektrikums gilt für jeden Punkt im Innern des Leiters das Potential

$$V' = \frac{E - E'}{C} + \frac{E'}{a},$$

was allerdings nur unter der Voraussetzung gültig ist, daß a gegenüber den Dimensionen des Leiters sehr groß ist; denn nur dann haben wir eine gleichförmige Verteilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche der Kugel. Ist aber a sehr groß, so können wir $\frac{E'}{a}$ vernachlässigen und erhalten

$$V' = \frac{E - E'}{C}.$$

Um daher das alte Potential V wiederzuerhalten, haben wir unserm Leiter noch weiter Elektrizität zuzuführen. Das besagt aber nichts anderes, als: die Kapazität eines Leiters wird durch das Umhüllen mit einem Dielektrikum erhöht. Ist der umhüllende Isolator genügend ausgedehnt, so verhalten sich die Kapazitäten

$$C' : C = E : E - E',$$

oder

$$C' = (1 + 4 \pi k) C.$$

Die Zahl

$$1 + 4 \pi k = K,$$

welche die Zunahme der Kapazität angibt, ist nichts anderes als die Dielektrizitätskonstante.

§22. Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator.

Was wir im vorhergehenden Paragraphen für einen Leiter gefunden haben, können wir unmittelbar auf einen Kondensator übertragen, dessen Raum zwischen den beiden Belegungen mit einem Dielektrikum aus-

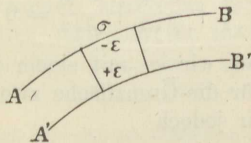


Fig. 12.

gefüllt ist. Die Kraft, welche von der einen Belegung AB (Fig. 12) auf die Mengeneinheit der anderen A'B', die zur Erde abgeleitet sein soll, ausgeübt wird, ist ohne Zwischenmittel $4 \pi \sigma$, wenn wir unter σ wieder die Flächendichte der Elektrizität auf AB verstehen.

Ist ein Dielektrikum vorhanden, so wird sich an AB eine Elektrizitätsmenge von der Dichte $-\varepsilon$ ausscheiden, welche wir nach der Gleichung

$$\varepsilon = 4\pi k(\sigma - \varepsilon)$$

finden, da ja dann $4\pi(\sigma - \varepsilon)$ die auf das Dielektrikum wirkende Kraft ist. Die neue Dichte ist somit, wie leicht zu finden,

$$\sigma' = \sigma - \varepsilon = \sigma \left(1 - \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right) = \frac{\sigma}{1 + 4\pi k}.$$

Danach erhalten wir auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Paragraphen, daß bei Vorhandensein des ausfüllenden Dielektrikums die Kapazität des Kondensators $1 + 4\pi k = K$ mal größer ist. Aus diesem Beispiel erkennen wir also unmittelbar, daß $1 + 4\pi k$ als die Dielektrizitätskonstante anzusehen ist.

§23. Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik, Brechung der Kraftlinien.

Für einen stationären Zustand der Wärmeströmung gilt die Gleichung (Bd. II, § 35)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

vorausgesetzt, daß wir es mit einem isotropen Körper zu tun haben. Für die Grenzfläche zweier verschiedener Körper haben wir jedoch

$$k \frac{du}{dn} = k' \frac{du'}{dn},$$

wenn wir unter u die Temperatur, k die Wärmeleitungsfähigkeit, $\frac{du}{dn}$ das Temperaturgefälle in der Richtung der Normalen der Trennungsfläche verstehen. Die

erste Gleichung gilt nun ohne weiteres auch für die Elektrostatik in allen Punkten eines elektrischen Feldes, wo keine freien Massen vorhanden sind, wenn wir unter u das Potential verstehen. Aber auch die zweite Gleichung findet ihr Analogon. Denken wir uns, es stoßen zwei verschiedene Isolatoren I und II von den Elektrizierungszahlen k und k' in einer Fläche $A'B'$

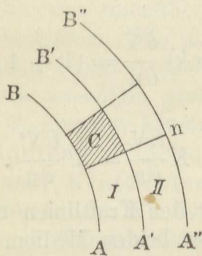


Fig. 13.

(Fig. 13) zusammen, und es wirken in ihnen elektrische Kräfte. Zerlegen wir diese für einen Punkt der Grenzfläche in Komponenten senkrecht zur Fläche und in derselben, so rufen natürlich die in die Fläche selbst fallenden Komponenten keine freie Elektrizität in dem betrachteten Punkt hervor. Die senkrechten Kraft-

komponenten sind für die verschiedenen Medien $-\frac{\partial V}{\partial n}$ und $-\frac{\partial V'}{\partial n}$. In der Grenzfläche werden daher nach

§ 20—Elektrizitätsmengen von den Dichten

$$\sigma = -k \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{und} \quad \sigma' = k' \frac{\partial V'}{\partial n}$$

frei. Die freie Elektrizität in dem betrachteten Punkt der Grenzfläche hat somit die Dichte

$$\sigma + \sigma' = -k \frac{\partial V}{\partial n} + k' \frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Nun ist nach § 7

$$\frac{\partial V'}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi(\sigma + \sigma') = 4\pi \left(k \frac{\partial V}{\partial n} - k' \frac{\partial V'}{\partial n} \right),$$

woraus folgt

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial V}{\partial n} = (1 + 4\pi k') \frac{\partial V'}{\partial n}$$

oder

$$K \frac{\partial V}{\partial n} = K' \frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Steht die Richtung der Kraftlinien nicht senkrecht zur Trennungsfläche der beiden Medien, so muß die Komponente T in der Trennungsfläche wegen der Kontinuität für beide Medien dieselbe sein. Die senkrechten Komponenten sind aber

$-\frac{\partial V}{\partial n}$ und $-\frac{\partial V'}{\partial n}$. Schließt die

Richtung der Kraft mit der Normalen die (spitzen) Winkel ϑ bezüglich ϑ' ein, so ist

$$T = -\frac{\partial V}{\partial n} \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{\partial V'}{\partial n} \operatorname{tg} \vartheta'.$$

Da aber nach dem Früheren

$$K \frac{\partial V}{\partial n} = K' \frac{\partial V'}{\partial n},$$

so

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'} = \frac{K}{K'}.$$

Diese Gleichung können wir das Brechungsgesetz der Kraftlinien nennen.

Die Gleichungen der Elektrostatik gelten also auch für die Wärmeleitung, wenn wir, wie wir oben sahen, unter K die Wärmeleitungsfähigkeit und unter V die Temperatur verstehen. Wir können somit ohne weiteres Probleme der Wärmeleitung auf die Elektrostatik und umgekehrt übertragen. Die Leiter der Elektrizität sind dabei als Dielektrika von unendlich großen Dielektrizitätskonstanten aufzufassen. Wie also in einem Leiter das Potential in allen Punkten gleich groß ist, so ist in einem Körper von unendlich großer Wärmeleitungsfähigkeit auch die Temperatur konstant. Für die Rechnung sind Äquipotentialflächen und Flächen gleicher Temperatur, Kraftlinien und Strömungslinien gleichbedeutend. Wir fanden auch zwischen der Flüssigkeits- und Wärmeströmung formale Analogien (Bd. II, § 35). Sie bestehen natürlich gleicherweise zwischen den Erscheinungen der Flüssigkeitsströmung und der Elektrostatik.

Magnetismus.

§ 24. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz.

Wir erkennen die magnetischen Kräfte an ihrer anziehenden Wirkung auf Eisen. Zwei Stellen eines Magnets pflegen in der Regel besonders kräftig zu wirken, wir nennen sie die Pole, weil sie entgegengesetzte Eigenschaften besitzen. Hängen wir nämlich den Magneten frei beweglich auf, so stellt sich die Verbindungslinie der beiden Pole immer in der Rich-

tung Nord-Süd ein, und wir nennen den nach Norden zeigenden Pol den Nordpol, den andern den Südpol. Der Nordpol eines Magnets stößt den Nordpol eines andern ab, zieht aber den Südpol an; gleicherweise stößt auch der Südpol des einen den Südpol des andern ab. Gleichnamige Pole stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Lange Stahladeln lassen sich so magnetisieren, daß fast nur die Enden Magnetismus zeigen. Mit solchen Nadeln fand Coulomb das Gesetz, daß sich zwei gleichnamige Magnetpole mit einer Kraft abstoßen, welche verkehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist und direkt proportional dem Produkt der magnetischen Massen beider Pole. Wir haben somit genau dasselbe Gesetz wie bei elektrostatischen Kraftwirkungen (§ 1), können es deshalb auch in die Form

$$K = \frac{m m'}{r^2}$$

kleiden.

§ 25. Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — Inklination — magnetisches Moment.

Aus der Übereinstimmung des Kraftgesetzes zwischen zwei magnetischen Massen mit jenem für die Elektrizität läßt sich leicht erkennen, daß man viele Begriffe der Elektrostatik ohne weiteres auf den Magnetismus übertragen kann. Jede magnetische Masse erzeugt ein Kraftfeld, welches wir durch magnetische Kraftlinien darstellen können, deren Zahl pro Flächeneinheit die Größe der magnetischen Kraft gibt. Von jeder Masse m gehen $4\pi m$ Kraftlinien aus. Positive magne-

tische Massen suchen sich in der Richtung der Kraftlinien, negative entgegengesetzt zu bewegen.

Da jeder Magnet sich in der Richtung von Nord nach Süd einzustellen sucht, müssen wir den uns umgebenden Raum selbst als ein magnetisches Feld ansehen, und zwar zeigt sich, daß bei möglichster Fernhaltung von Eisen und ähnlichen Substanzen, die vom Magneten stark angezogen werden, wir es mit einem homogenen Feld zu tun haben. Das Vorhandensein dieses großen magnetischen Feldes schreiben wir dem Erdmagnetismus zu. Die Vertikalebene, in welche sich ein nach allen Richtungen frei beweglicher, im Schwerpunkt aufgehängter Magnet einstellt, nennen wir den magnetischen Meridian, den Winkel, welchen dieser mit dem astronomischen Meridian einschließt, die Deklination, den Neigungswinkel der Nadel zum Horizont die Inklinatation.

Da sich in einem magnetischen Feld der positive und negative Magnetismus in entgegengesetzter Richtung zu bewegen sucht, müßte sich ein Körper, welcher die eine Art Magnetismus im Überschuß besitzt, nach der entsprechenden Richtung bewegen. Eine solche Bewegung konnte aber bisher noch an keinem Magneten nachgewiesen werden. Wir müssen deshalb annehmen, daß in jedem Magneten ebensoviel positiver als negativer Magnetismus vorhanden ist.

Wir wollen nun die Stärke des magnetischen Felds der Erde mit E bezeichnen. Wir können E in eine vertikale und eine horizontale Komponente zerlegen. Erstere ist

$$V = E \sin i,$$

letztere

$$H = E \cos i,$$

wenn wir unter i den Inklinationswinkel verstehen. Auf den Magnetpol m (Fig. 14) wirkt daher vertikal die Kraft mV , horizontal mH . Dieselben Kräfte, nur

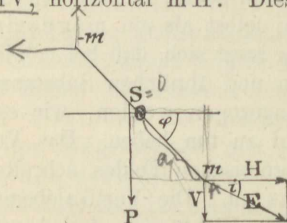


Fig. 14.

in entgegengesetzter Richtung, greifen in $-m$ an. Ist der Magnet um O drehbar, so erzeugen die Kräfte das Drehungsmoment (Bd. I, § 28)

$$\underline{mVl \cos \varphi} - mHl \sin \varphi,$$

wenn wir l die Entfernung der beiden Magnetpole nennen. Der Schwerpunkt des Magnets sei in S in der Entfernung d von O . Das Gewicht des Magnets sei P . Dann erzeugt dieses das Drehungsmoment $-Pd \cos \varphi$, wenn φ der Winkel der magnetischen Achse, d. i. der Geraden mm' , mit dem Horizont ist. Soll sich der Magnet somit im Gleichgewicht befinden, so muß

$$mVl \cos \varphi - mHl \sin \varphi - Pd \cos \varphi = 0$$

sein. Dabei ist also vorausgesetzt, daß die Drehachse des Magnets senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht. Die Größe

$$ml = M$$

nennt man das Moment des Magnets oder kurz

das magnetische Moment. Aus der letzten Gleichung erhalten wir leicht

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M V - P d}{M H}$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H} - \frac{P d}{M H} = \frac{E \sin i}{E \cos i} - \frac{P d}{M H} = \operatorname{tg} i - \frac{P d}{M H}.$$

Wenn wir nun die Nadel ummagnetisieren, so werden die Pole vertauscht. Dann wirkt das Moment des Schwerpunkts entgegengesetzt, und wir bekommen

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} i + \frac{P d}{M H},$$

folglich

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{2}.$$

Auf diese Weise bestimmt man mit Hilfe der Inklinationsnadel die Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Steht die Drehachse nicht senkrecht zum magnetischen Meridian, sondern schließt die Schwingungsebene mit dem Meridian den Winkel ψ ein, so kann, vorausgesetzt, daß die Achse horizontal steht, nicht mehr die gesamte Horizontalkraft H wirken, sondern nur die Komponente $H \cos \psi$, und die Gleichgewichtsbedingung wird

$$M V \cos \varphi - M H \cos \psi \sin \varphi - P d \cos \varphi = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M V - P d}{M H \cos \psi}.$$

Für $\cos \psi = \frac{\pi}{2}$ wird demnach $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Die Magnetonadel stellt sich somit vertikal, wenn die Schwingungsebene des Magnets senkrecht zum Meridian steht. Auf diese Weise kann man also auch ohne Deklinationsnadel die Richtung des magnetischen Meridians auffinden.

§ 26. Potential eines Magnets.

Wir nahmen bisher immer an, ein Magnet bestehe aus zwei punktförmigen magnetischen Massen. In einem homogenen magnetischen Feld ist dies immer gestattet,

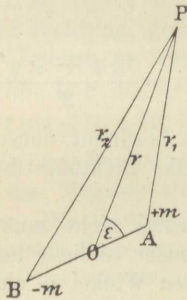


Fig. 15.

da ja dann sämtliche Massen im Massenmittelpunkt vereinigt gedacht werden können (Bd. I, § 21). Wir können daher den Magnet immer durch zwei punktförmige Massen, welche gleich groß, aber entgegengesetzt sind, ersetzen. Diese Massen $+m$ und $-m$ (Fig. 15) seien vom Punkt P um r_1 bezüglich r_2 entfernt. Wie bei elektrischen Massen können wir nun auch hier vom

Potential der magnetischen Massen auf den Punkt P sprechen. Es wird

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$$

sein; denn es wäre ja die Kraft, welche m auf die positive magnetische Masseneinheit in P ausübt, gleich $\frac{m}{r_1^2}$ und ebenso die Kraft von $-m$ gleich $-\frac{m}{r_2^2}$. Die

zugehörigen Potentiale sind also $\frac{m}{r_1}$ und $-\frac{m}{r_2}$, und die Summe beider ist das Potential V des Magneten auf den Punkt P.

Halbieren wir die Strecke $AB = \lambda$ in O und setzen wir $OP = r$, so folgt

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} - r\lambda \cos \varepsilon,$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} + r\lambda \cos \varepsilon.$$

Es ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \left(r^2 - \lambda r \cos \varepsilon + \frac{\lambda^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\lambda}{r} \cos \varepsilon + \frac{\lambda^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\lambda}{2r} \cos \varepsilon \right), \end{aligned}$$

wenn wir voraussetzen, daß λ gegen r eine kleine Größe ist, so daß wir nur die erste Potenz von $\frac{\lambda}{r}$ zu berücksichtigen brauchen. GleichermäÙen erhalten wir

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\lambda}{2r} \cos \varepsilon \right),$$

mithin

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda \cos \varepsilon}{r^2}$$

und

$$V = \frac{m \lambda \cos \varepsilon}{r^2} = \frac{M \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Der Punkt P habe nun die Koordinaten x, y, z , der Punkt O gleicherweise a, b, c . Ferner schlieÙe die Gerade AB mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel f, g, h ein. Dann gilt

$$\cos \varepsilon = \frac{x - a}{r} \cos f + \frac{y - b}{r} \cos g + \frac{z - c}{r} \cos h,$$

und es wird

$$V = \frac{M(x - a) \cos f + M(y - b) \cos g + M(z - c) \cos h}{r^3}.$$

Die GröÙe $AB = \lambda$ können wir nun auf die drei Koordinatenachsen projizieren und erhalten so die Längen $\lambda \cos f, \lambda \cos g, \lambda \cos h$. Folglich ist es erlaubt,

$$m \lambda \cos f = M \cos f = A,$$

$$m \lambda \cos g = M \cos g = B,$$

$$m \lambda \cos h = M \cos h = C$$

die Komponenten des magnetischen Moments bezüglich der drei Achsen zu nennen, und es wird so das Potential

$$V = \frac{A(x - a) + B(y - b) + C(z - c)}{r^3}. \quad (8)$$

Wir wollen dieses Potential jetzt benützen, um die magnetischen Kräfte zu berechnen, welche ein Magnet, der im Ursprung eines Koordinatensystems (Fig. 16) so

liegt, daß seine beiden Pole in der x -Achse und gleichweit vom Ursprung entfernt sind, in einem Punkt A

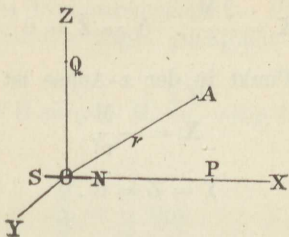


Fig. 16.

äußert. Es sind dann die Momente $B = C = 0$, während $A = M$ das Gesamtmoment bedeutet. Es ist weiter $a = b = c = 0$, mithin

$$V = \frac{M x}{r^3}.$$

Für die magnetischen Kräfte erhalten wir sonach

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{M}{r^3} + \frac{3 M x^2}{r^5},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3 M x y}{r^5},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{3 M x z}{r^5},$$

was ohne weiteres verständlich ist, wenn wir überlegen, daß

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

also

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ist. Befindet sich der Punkt in der x -Achse, etwa in P , so wird $x = r$, also

$$X = \frac{2M}{r^3}, \quad Y = Z = 0.$$

Für einen Punkt in der z -Achse ist $z = r$, somit

$$X = -\frac{M}{r^3}$$

und wieder

$$Y = Z = 0.$$

§ 27. Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments.

Wir legen einen Magnet (Fig. 17) so, daß er senkrecht zum magnetischen Meridian MN ist. Er erzeugt dann im Punkt P in der Entfernung r vom Mittelpunkt

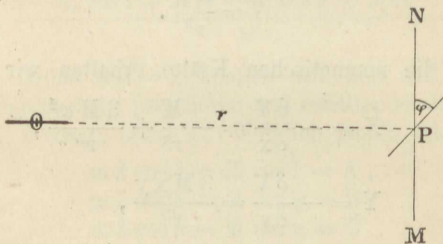


Fig. 17.

O des Magnets ein magnetisches Feld von der Stärke $\frac{2M}{r^3}$. Er wird daher eine kleine Magnetnadel im Punkt P um den Winkel φ ablenken, indem er auf sie ein Drehungsmoment $\frac{2M}{r^3} M' \cos \varphi$ ausübt, wenn M' das magnetische Moment der Nadel und φ der

Winkel der Nadel mit dem magnetischen Meridian ist. Gleichzeitig erzeugt die Horizontalintensität H des Erdmagnetismus das Drehungsmoment $-M'H \sin \varphi$. Für das Gleichgewicht der Nadel gilt somit

$$-M'H \sin \varphi + M' \frac{2M}{r^3} \cos \varphi = 0$$

oder

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir sind also in der Lage, den Quotienten $\frac{M}{H}$ zu bestimmen, erhalten aber keinen Aufschluß über den wahren Wert der Größen M und H . Dies erreichen wir erst durch einen sogenannten Schwingungsversuch. Wir wollen zu dem Zweck unsern Magnet an einem langen Faden aufhängen, so daß er leicht in einer Horizontalebene schwingen kann. Schließt er mit dem magnetischen Meridian den Winkel φ ein, so gibt ihm der Erdmagnetismus ein Drehungsmoment $-MH \sin \varphi$, und wir erhalten für seine Bewegung die Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -MH \sin \varphi$$

(Bd. I, § 28), wenn wir unter K sein Trägheitsmoment verstehen. Sind die Schwingungen nicht groß, so können wir $-\sin \varphi = \varphi$ setzen, und die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K} \varphi.$$

Das ist aber dieselbe Gleichung wie jene für die Schwingungen eines Pendels (Bd. I, § 9), und wir erhalten für die Schwingungsdauer

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}},$$

woraus folgt, daß

$$MH = \frac{\pi^2 K}{\tau^2}$$

ist. Wir können also nach der von Gauß angegebenen Methode sowohl den Quotienten $\frac{M}{H}$, als das Produkt MH experimentell bestimmen und sind jetzt in der Lage, sowohl die Größe des magnetischen Moments M , als auch die der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus anzugeben.

§ 28. Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch induzierten Körpers.

Bringen wir Eisen in die Nähe eines Magnets, so wird es selbst magnetisch. Wir können diese Erscheinung so auffassen wie die Elektrisierung eines Dielektrikums, welches wir in ein elektrisches Feld bringen (§ 19). Wir können annehmen, in jeder Molekel werde gleichviel positiver und negativer Magnetismus ausgeschieden usw., und nennen diesen Vorgang „magnetische Induktion“. Wir werden als magnetisches Moment der Volumeinheit

$$\mu = kP$$

erhalten, wenn wir unter P die magnetisierende Kraft verstehen, während jetzt k die Magnetisie-

rungszahl heißt. Die Komponenten des Moments μ sind

$$\alpha = kX, \quad \beta = kY, \quad \gamma = kZ,$$

während X, Y, Z die Komponenten von P bedeuten. Das Potential des ganzen Körpers werden wir finden, wenn wir das Potential eines Volumelements suchen und dann über das ganze Volumen des Körpers integrieren. Das Potential eines Volumelements $da db dc$ erhalten wir aber leicht nach Gleichung (8). Als magnetisches Moment des Volumelements bezüglich der drei Achsen haben wir

$$A = \alpha da db dc,$$

$$B = \beta da db dc,$$

$$C = \gamma da db dc,$$

folglich als Potential

$$dV = \frac{\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)}{r^3} da db dc. \quad (9)$$

Dabei ist

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach a , so finden wir leicht

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r},$$

was wir weiter benützen können, um folgende Gleichung zu bilden:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{x-a}{r^3}.$$

Auf ganz dieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{y-b}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{z-c}{r^3}.$$

Diese Größen können wir nun in die Gleichung (9) einsetzen und erhalten dann durch Integration das Potential des gesamten Körpers

$$V = \iiint \left[\alpha \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{r} \right) \right] da db dc.$$

Es ergibt sich nun weiter

$$\iiint \alpha \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) da db dc = \iint db dc \left[\frac{\alpha}{r} - \int \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial a} da \right].$$

Fassen wir ein Oberflächenelement dO unseres Körpers ins Auge, dessen Normale mit den Koordinatenachsen die Winkel f , g , h einschließt, so können wir

$$dO \cos f = db dc$$

setzen, gleicherweise

$$dO \cos g = da dc, \quad dO \cos h = da db.$$

Das erlaubt uns, unser Potential folgendermaßen umzuändern:

$$V = \iint \frac{\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h}{r} dO - \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} \right) da db dc.$$

Es zerfällt also im allgemeinen in zwei Teile, deren einer sich bloß auf die Oberfläche, der andere bloß auf das Volumen des Körpers bezieht. Es ist auch unmittelbar klar, daß

$$\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h = \sigma$$

sein muß, wenn wir unter σ die Oberflächendichte des Magnetismus verstehen, während

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right) = \varrho$$

die Dichte des freien Magnetismus im Innern des Körpers ist (§ 20). Unser Potential wird sonach

$$V = \iint \frac{\sigma dO}{r} + \iiint \frac{\varrho}{r} da db dc.$$

Diesen Ausdruck hätten wir ohne weiteres bilden können, wenn wir von vornherein die Begriffe des freien Magnetismus in der Oberfläche und im Innern eines Körpers aufgestellt hätten, indem er ja nichts anderes besagt als die gewöhnliche Definition des Potentials, daß es gleich ist der Summe sämtlicher vorhandenen Massen, jede einzelne dividiert durch ihre Entfernung von jenem Punkt, für welchen das Potential bestimmt wird.

§ 29. Die homogen magnetisierte Kugel.

Ist eine Kugel homogen magnetisiert, so heißt das, das magnetische Moment der Volumeinheit ist in allen ihren Punkten gleich groß und gleich gerichtet. Wir wollen es mit der Richtung der x -Achse eines Koordinatensystems zusammenfallen lassen. Für das magnetische Moment der Volumeinheit gilt also

$$\alpha = \text{konst.}, \quad \beta = \gamma = 0.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist nun

$$V = \iiint \frac{\alpha(x-a)}{r^3} da db dc,$$

wobei wir

$$\frac{x - a}{r^3} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right)$$

oder auch

$$\frac{x - a}{r^3} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$$

setzen können. Sonach wird

$$\begin{aligned} V &= - \iiint \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) da db dc \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \iiint \frac{\alpha}{r} da db dc. \end{aligned}$$

Es ist dies erlaubt, weil ja nach der Variablen x keine Integration vorkommt. Für die Vollkugel haben wir nun, wenn der Punkt, auf welchen das Potential sich bezieht, außerhalb gelegen ist (§ 4),

$$\iiint \frac{\alpha}{r} da db dc = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{p^3 \alpha}{R},$$

wenn p der Radius der Kugel und R die Entfernung des Kugelmittelpunkts von dem außerhalb gelegenen Punkt ist. Danach finden wir

$$V = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{4\pi\alpha p^3}{3R} = \frac{4\pi\alpha p^3}{3} \frac{x}{R^3},$$

wenn wir den Kugelmittelpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems verlegen, indem dann

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) &= - \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} = - \frac{x}{R^3} \end{aligned}$$

ist. Da α das magnetische Moment der Volumeinheit, $\frac{4\pi p^3}{3}$ das Volumen der Kugel ist, so ist

$$\frac{4\pi p^3 \alpha}{3} = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Kugel. Damit wird das Potential

$$V = \frac{M x}{R^3}.$$

Dasselbe Resultat haben wir aber für einen kleinen Magnet vom Moment M (§ 26) erhalten, dessen Pole in der x -Achse zu beiden Seiten des Ursprungs liegen. Es kann daher die Wirkung einer homogen magnetisierten Kugel durch einen kleinen Magnet vom selben magnetischen Moment ersetzt werden.

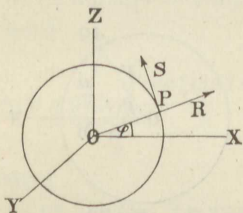


Fig. 18.

Suchen wir die magnetische Kraft in einem Punkt P (Fig. 18) der Kugeloberfläche, so haben wir

$$x = R \cos \varphi$$

zu setzen, das Potential wird also

$$V = \frac{M}{R^2} \cos \varphi.$$

Die Kraft im Punkt P wollen wir in eine Komponente in der Richtung des Radius und eine senkrecht darauf zerlegen. Erstere wird demnach sein

$$-\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2M}{R^3} \cos \varphi,$$

letztere

$$-\frac{\partial V}{R \partial \varphi} = \frac{M \sin \varphi}{R^3}.$$

Für die x-Achse selbst ist $\varphi = 0$. Wir haben daher nur eine Kraft in der Richtung des Radius. Eine Magnetnadel würde sich also dort senkrecht zur Kugeloberfläche stellen. In der yz-Ebene hingegen ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dort haben wir also nur eine Kraft parallel zur Kugeloberfläche. Ein ähnliches Verhalten zeigt unsere Erde, wenn wir die Verbindungslinie ihrer

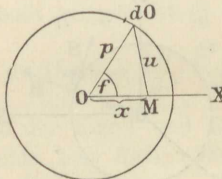


Fig. 19.

beiden magnetischen Pole als die x-Achse auffassen. An den beiden magnetischen Polen steht tatsächlich die Magnetnadel senkrecht, am Äquator horizontal. Doch trifft dies nur annähernd zu. Wir können demnach aus den Beobachtungen auf der Erdoberfläche nicht ohne weiteres auf die Verteilung des Erdmagnetismus schließen, kann ja doch ein kleiner starker Magnet eine homogen magnetisierte Kugel vollständig ersetzen.

Wir wollen nun das Potential unserer homogen magnetisierten Kugel auf einen innerhalb liegenden Punkt M (Fig. 19) berechnen, der vorerst in der x-Achse liegen soll. Da wir im Innern keinen freien Magnetismus haben, so ist $\varrho = 0$, und es wird

$$V = \iint \frac{\sigma dO}{u}.$$

Es ist ferner

$$\sigma = \alpha \cos f,$$

daher

$$V = \alpha \iint \frac{\cos f}{u} dO.$$

Da um die x-Achse alles symmetrisch ist, so können wir

$$dO = p df \cdot 2\pi p \sin f = 2\pi p^2 \sin f df$$

setzen. Danach wird

$$V = 2\pi p^2 \alpha \int_0^\pi \frac{\cos f \sin f df}{u}. \quad (10)$$

Wir haben ferner

$$u^2 = p^2 + x^2 - 2px \cos f$$

und durch Differentiation

$$u du = px \sin f df,$$

während aus der Gleichung für u^2

$$\cos f = \frac{p^2 + x^2 - u^2}{2px}$$

folgt. Führen wir diese Größen für $\cos f$ und $\sin f df$ in die Gleichung (10) ein, so bleibt uns

$$V = \frac{2 \pi p^2 \alpha}{2 p^2 x^2} \int_{p-x}^{p+x} (p^2 + x^2 - u^2) du$$

$$= \frac{\pi \alpha}{x^2} \left[(p^2 + x^2) u - \frac{u^3}{3} \right]_{p-x}^{p+x} = \frac{4 \pi \alpha x}{3},$$

was durch Einsetzen der Grenzen $p - x$ und $p + x$ leicht gefunden wird. Diese sind die Werte des u für die Winkel $f = 0$ und $f = \pi$. Unser Potential ist also der Abszisse x proportional. Die Kraft parallel zur x -Achse wird daher

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4 \pi \alpha}{3},$$

während sie senkrecht darauf Null ist. Wenn wir aber eine konstante Kraft parallel und keine senkrecht zur x -Achse haben, so heißt das: Die Kraftlinien sind parallel. Es gilt daher der Ausdruck unseres Potentials nicht nur für Punkte in der x -Achse, sondern überhaupt für jeden Punkt im Innern unserer Kugel. Für einen Punkt in der Oberfläche wird

$$x = p \cos f.$$

Ferner wissen wir von früher, daß

$$\frac{4 \pi p^3 \alpha}{3} = M$$

das magnetische Moment der Kugel ist. Wir können daher

$$4 \pi \alpha = \frac{3 M}{p^3}$$

setzen und die Gleichung bilden:

$$\nabla = \frac{4 \pi \alpha x}{3} = \frac{M p \cos f}{p^3} = \frac{M \cos f}{p^2}.$$

Dieselbe Formel fanden wir aber schon oben, nur ersetzten wir dort p durch R und f durch φ . Die Werte der beiden Ausdrücke für das Potential auf einen Punkt innerhalb und außerhalb werden also, wie es ja auch sein muß, für die Oberfläche der Kugel gleich.

§ 30. Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld.

Bringen wir einen Körper in ein magnetisches Feld, so wird in ihm Magnetismus induziert, an seiner Oberfläche wird Magnetismus frei. Dieser freie Magnetismus wirkt nun abermals induzierend auf den Körper ein und verändert daher die Lage der magnetischen Kraftlinien sowohl im Innern des Körpers als auch außerhalb. Diese neuen, infolge der Induktion erzeugten Kraftlinien pflegt man daher auch häufig die magnetischen Induktionslinien zu nennen.

Bringen wir eine Kugel in ein homogenes magnetisches Feld, so ist die erste Erscheinung eine homogene Magnetisierung. Von einer solchen Kugel wissen wir aber, daß in ihrem Innern die Kraftlinien parallel laufen. Folglich können auch die frei gewordenen Magnetismen das homogene Feld im Innern der Kugel nur seiner Stärke nach verändern.

Die ursprüngliche Feldstärke sei P . Diese ruft das magnetische Moment der Volumeinheit

$$\alpha = kP \tag{11}$$

hervor, was das Potential

$$V = \frac{4 \pi \alpha x}{3}$$

und die Kraft

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4 \pi \alpha}{3}$$

auf einen Punkt im Innern der Kugel zur Folge hat. Den wahren Wert des α finden wir also nicht aus der Gleichung (11), sondern aus der Formel

$$\alpha = k(P + X),$$

wobei X jene magnetische Kraft ist, welche vom induzierten freien Magnetismus ausgeht. Daraus folgt

$$\frac{\alpha}{k} = P - \frac{4 \pi \alpha}{3},$$

was wir weiter umformen können in

$$\alpha \left(\frac{1}{k} + \frac{4 \pi}{3} \right) = P,$$

$$\alpha = \frac{P}{\frac{1}{k} + \frac{4 \pi}{3}}.$$

Für Substanzen wie Eisen, Nickel usw. ist nun k so groß, daß wir $\frac{1}{k}$ gegenüber $\frac{4 \pi}{3}$ vernachlässigen können. Es wird dann

$$\alpha = \frac{3 P}{4 \pi}.$$

Das magnetische Moment einer Kugel vom Radius p ist nun

$$M = \frac{4 \pi}{3} p^3 \alpha = p^3 P.$$

Es ist also gleich dem Produkt aus der 3. Potenz des Radius und der Feldstärke, wenn nur der Körper eine große Magnetisierungszahl besitzt. Ist hingegen die Magnetisierungszahl wie bei den meisten Körpern sehr klein, so kann $\frac{4\pi}{3}$ gegen $\frac{1}{k}$ vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$\alpha = kP.$$

§ 31. Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien.

Bezeichnen wir das Potential im Innern eines Körpers mit V_- , außerhalb mit V_+ , die Dichte des freien Magnetismus an der Oberfläche mit σ , so gilt für die Oberfläche die Gleichung (5)

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma.$$

Für die Komponenten des magnetischen Moments der Volumeinheit haben wir

$$\alpha = -k \frac{\partial V_-}{\partial x}, \quad \beta = -k \frac{\partial V_-}{\partial y}, \quad \gamma = -k \frac{\partial V_-}{\partial z}.$$

Ferner ist

$$\sigma = -k \frac{\partial V_-}{\partial n}.$$

Obige Gleichung kann daher geschrieben werden

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = 4\pi k \frac{\partial V_-}{\partial n}$$

oder

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial V_-}{\partial n} = \frac{\partial V_+}{\partial n},$$

eine Gleichung, die zuerst von Thomson aufgestellt wurde. Auch diese Gleichung ist uns schon aus der Theorie der Dielektrika bekannt. Sie existiert ja für die Oberfläche eines Dielektrikums, welches mit dem freien Raum in Berührung steht; nur ist dort die Größe $1 + 4\pi k$ die Dielektrizitätskonstante, während wir sie hier die magnetische Induktionskonstante nennen.

Stoßen zwei Körper zusammen mit den Magnetisierungszahlen k und k' , so gilt natürlich analog

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial V}{\partial n} = (1 + 4\pi k') \frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Diese Gleichung führt uns aber wiederum zur Analogie mit der Wärmeleitung und der Flüssigkeitsströmung (§ 23).

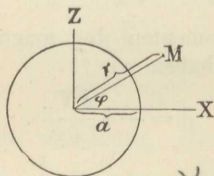


Fig. 20.

§ 32. Transversal magnetisierter Zylinder im homogenen magnetischen Feld.

Wir haben einen unendlich langen Kreiszyylinder aus Eisen (Fig. 20), dessen Achse die y -Achse eines Koordinatensystems bilden soll. Der Zylinder befinde sich in einem ursprünglich homogenen magnetischen Feld, dessen Kraftlinien parallel zur x -Achse laufen.

Durch die auf dem Zylinder frei werdenden magnetischen Massen wird das homogene Feld gestört; wir wollen die auf diese Weise entstandenen magnetischen Induktionslinien kennen lernen. Die Anschauung ergibt unmittelbar, daß längs einer zur y -Achse parallelen Geraden das Potential einen konstanten Wert haben muß. Nennen wir das Potential im Innern des Zylinders V_i , außerhalb V_e , so wird sonach

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial V_e}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = 0$$

sein. Außerhalb und innerhalb des Zylinders gilt

$$\Delta V = 0,$$

da nur an der Oberfläche freie magnetische Massen vorhanden sind. Dies führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = 0.$$

Jede Funktion von $x + zi$ ist eine Lösung dieser Gleichung. Wir werden in der Folge sehen, daß die Gleichungen

$$V_e = A(x + zi) + \frac{B}{x + zi},$$

$$V_i = A'(x + zi) + \frac{B'}{x + zi}$$

sich mit den von uns gestellten Bedingungen vertragen, also als Lösungen unserer Aufgabe angesehen werden

können. Es muß nun der reelle Teil der von uns aufgestellten Lösung für sich wieder eine Lösung sein, wodurch wir

$$V_e = A x + \frac{B x}{x^2 + z^2},$$

$$V_i = A' x + \frac{B' x}{x^2 + z^2}$$

erhalten.

Betrachten wir das Potential in einem von unserm Zylinder sehr weit entfernten Punkt, so wird $x^2 + z^2$

sehr groß, $\frac{B x}{x^2 + z^2}$ sehr klein, daher

$$V_e = A x$$

und die Kraft

$$-\frac{\partial V_e}{\partial x} = -A.$$

Wir haben also tatsächlich, wie wir es voraussetzten, in weiter Entfernung vom Zylinder ein homogenes magnetisches Feld. Für die Achse des Zylinders wird $x^2 + z^2 = 0$. Da aber V_i nicht unendlich werden kann, so muß $B' = 0$ sein, und es bleibt

$$V_i = A' x, \quad -\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A'.$$

Also auch im Innern des Zylinders existiert ein homogenes magnetisches Feld. Der Zylinder ist transversal magnetisiert, und zwar laufen die magnetischen Induktionslinien parallel zur x -Achse.

Setzen wir nun

$$x = r \cos \varphi,$$

so wird

$$V_e = \left(A r + \frac{B}{r} \right) \cos \varphi, \quad V_i = A' r \cos \varphi.$$

Für die Oberfläche des Zylinders muß

$$V_e = V_i$$

werden, das heißt, es muß

$$A a + \frac{B}{a} = A' a \quad (12)$$

sein, wenn wir unter a den Radius des Zylinders verstehen. Ferner muß

$$(1 + 4 \pi k) \frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial n}$$

sein, woraus folgt

$$(1 + 4 \pi k) A' = A - \frac{B}{a^2}. \quad (13)$$

Gleichung (12) können wir nun auch noch so schreiben:

$$A + \frac{B}{a^2} = A'.$$

Eliminieren wir aus den beiden letzten Gleichungen $\frac{B}{a^2}$, so ergibt sich leicht

$$A' = \frac{A}{1 + 2 \pi k}, \quad \frac{B}{a^2} = -\frac{2 \pi k}{1 + 2 \pi k} A.$$

Das magnetische Moment der Volumeinheit des Zylinders ist

$$\alpha = -k \frac{\partial V_i}{\partial x} = -k A' = -\frac{k A}{1 + 2 \pi k} = -\frac{A}{\frac{1}{k} + 2 \pi}.$$

Wir erhalten also eine ähnliche Formel wie für die Kugel (§ 30).

Ist eine Veränderliche durch eine Gleichung mit komplexen Zahlen gegeben und trennen wir sie in zwei

Gleichungen, deren eine nur den reellen, die andere nur den imaginären Bestandteil enthält, so entsprechen diesen Gleichungen Kurvenscharen, deren eine die orthogonalen Trajektorien der andern darstellt. Während also

$$V_i = A' x, \quad V_e = A x + \frac{B x}{r^2}$$

uns die Niveaulächen des Potentials geben, liefern uns die imaginären Bestandteile

$$U_i = A' z, \quad U_e = A z - \frac{B z}{r^2}$$

die magnetischen Kraftlinien.

In großer Entfernung vom Zylinder laufen die Kraftlinien parallel zur x -Achse. Wir wollen eine her-

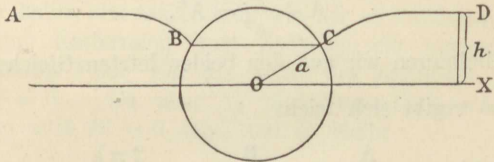


Fig. 21.

ausheben (Fig. 21), für welche $z = h$ ist. Wir haben dann, da $\frac{B h}{r^2}$ als sehr klein zu betrachten ist,

$$U_e = A h .$$

Die allgemeine Gleichung der Induktionslinien außerhalb des Zylinders wird daher

$$A h = A z - \frac{B z}{r^2} = A z + \frac{2 \pi k a^2}{(1 + 2 \pi k) r^2} A z ,$$

wenn wir den Wert von B dem Obigen entnehmen. Durch Kürzung ergibt sich schließlich

$$h = z + \frac{2 \pi k a^2}{1 + 2 \pi k} \cdot \frac{z}{x^2 + z^2}.$$

Es sind die magnetischen Induktionslinien somit Kurven dritten Grads. Der Punkt C , in welchem die Induktionslinie die Oberfläche des Zylinders trifft, hat die Ordinate z_1 . Für diese ist $x^2 + z^2 = a^2$. Unsere Gleichung wird

$$h = z_1 + \frac{2 \pi k}{1 + 2 \pi k} z_1.$$

Bei einem Eisenzylinder ist k so groß, daß wir Eins gegen $2 \pi k$ vernachlässigen können, woraus folgt

$$z_1 = \frac{h}{2}.$$

Alle Kraftlinien, welche also im Unendlichen eine Ordinate kleiner als a haben, gehen durch unsern Zylinder. Das Eisen zieht sozusagen die Kraftlinien gegen sich.

Auf ganz dieselbe Weise könnten wir die Strömungslinien der Wärme finden, wenn wir in einen Raum von konstantem Temperaturgefälle einen Zylinder brächten. Wäre dessen Wärmeleitungsfähigkeit gegenüber jener des umgebenden Raumes sehr groß, so würden die Strömungslinien genau so wie die magnetischen Induktionslinien des Eisens verlaufen.

Wie ein Vollzylinder läßt sich auch ein Hohlzylinder berechnen. Es zeigt sich da, daß im Innern des Hohlraums ein homogenes magnetisches Feld vorhanden ist, welches um so schwächer wird, je stärker die Wände

des Zylinders sind. Man nennt diese Erscheinung die magnetische Schirmwirkung des Eisens.

§ 33. Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld.

Bei Körpern von sehr kleiner Magnetisierungszahl können wir die Rückwirkung der induzierten Magnetismen gegenüber den induzierenden Kräften vollständig

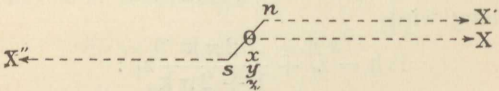


Fig. 22.

vernachlässigen. Durch die Kräfte X, Y, Z würden sonach die magnetischen Momente

$$\alpha = k X = -k \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = k Y = -k \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\gamma = k Z = -k \frac{\partial V}{\partial z}$$

erzeugt. Die Wirkung der Kraft X auf einen kleinen Magnet n s (Fig. 22) läßt sich folgendermaßen darstellen. Haben wir im Punkt O mit den Koordinaten x, y, z die Kraft X, so finden wir in n die Kraft

$$X' = X + \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \zeta,$$

wobei

$$\xi = \frac{\lambda}{2} \cos f, \quad \eta = \frac{\lambda}{2} \cos g, \quad \zeta = \frac{\lambda}{2} \cos h$$

ist. Unter λ ist also die Länge des Magnets, unter

f, g, h sind die Winkel, welche er mit den Achsen einschließt, zu verstehen. In s haben wir analog die Kraft

$$X'' = X - \frac{\partial X}{\partial x} \xi - \frac{\partial X}{\partial y} \eta - \frac{\partial X}{\partial z} \zeta.$$

Unser Magnet habe in n die magnetische Masse + m, in s die Masse - m. Als Kraft auf unsern Magnet haben wir also

$$\begin{aligned} m X' - m X'' &= 2 m \left(\frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \zeta \right) \\ &= m \lambda \left(\frac{\partial X}{\partial x} \cos f + \frac{\partial X}{\partial y} \cos g + \frac{\partial X}{\partial z} \cos h \right). \end{aligned}$$

Wir denken uns ein Volumelement dx dy dz unseres Körpers im magnetischen Feld. Sein magnetisches Moment ist $\mu dx dy dz$. Darauf wird die magnetische Kraft gerade so wirken wie auf unseren kleinen Magnet, dessen magnetisches Moment $m \lambda$ ist. Wir können daher als Kraft auf das Volumelement

$$\begin{aligned} dK &= \mu dx dy dz \left(\frac{\partial X}{\partial x} \cos f + \frac{\partial X}{\partial y} \cos g + \frac{\partial X}{\partial z} \cos h \right) \\ &= dx dy dz \left(\frac{\partial X}{\partial x} \alpha + \frac{\partial X}{\partial y} \beta + \frac{\partial X}{\partial z} \gamma \right) \end{aligned}$$

annehmen, da ja

$$\alpha = \mu \cos f$$

usw. ist.

Setzen wir nun für X den Wert $-\frac{\partial V}{\partial x}$ usf., desgleichen für α, β, γ die Werte aus den eingangs er-

wähnten Gleichungen, so finden wir für die Kraft

$$\begin{aligned} & k \, dx \, dy \, dz \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \\ &= \frac{k}{2} \, dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{k}{2} \, dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} (X^2 + Y^2 + Z^2) \\ &= dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k R^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Gleicherweise finden wir für die Kräfte nach der y- und z-Achse

$$dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k R^2}{2} \right)$$

und

$$dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k R^2}{2} \right).$$

§ 34. Die magnetische Kraft auf einen langen Zylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet.

Wir nehmen an, wir hätten das eine Ende eines Zylinders in einem magnetischen Feld, etwa zwischen den zwei Polen eines Hufeisenmagnets (Fig. 23). Für die Kraft, welche der Magnet auf unseren Zylinder parallel zur x-Achse ausübt, erhalten wir nach den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen

$$\iiint dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k R^2}{2} \right) = \iint dy \, dz \left(\frac{k R_1^2}{2} - \frac{k R_0^2}{2} \right).$$

Da wir aber zur yz-Ebene alles symmetrisch haben, so sind auch die magnetischen Kräfte R_0 und R_1 einander gleich. Daher wirkt in der Richtung der x-Achse auf

unseren Zylinder keine mechanische Kraft, ebenso in der Richtung der y -Achse. Für die Kraft in der Richtung der z -Achse haben wir jedoch

$$\iint dx dy \left(\frac{k R''^2}{2} - \frac{k R'^2}{2} \right).$$

Dabei ist R' die magnetische Kraft, d. i. die Feldstärke, am Ende des Zylinders zwischen den Magnetpolen, R'' jene am entgegengesetzten Ende. Diese sei gleich Null. Es bleibt dann bloß

$$- \iint \frac{k R'^2}{2} dx dy = - \frac{q k R'^2}{2},$$

wenn q der Querschnitt des Zylinders ist. Wir setzen hier voraus, daß das magnetische Feld am Ende des

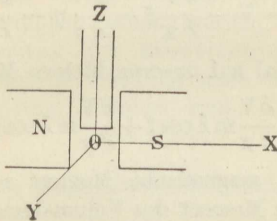


Fig. 23.

Zylinders an allen Punkten den konstanten Wert R' hat. $\frac{q k R'^2}{2}$ ist also die mechanische Kraft, mit welcher unser Zylinder in das Feld hineingezogen wird. Diese Kraft läßt sich mit der Wage bestimmen, so daß wir hier eine Methode haben, bei bekannter magnetischer Kraft R' die Magnetisierungszahl k , oder bei bekannter Magnetisierungszahl die Feldstärke R' zu finden.

§ 35. Kraftfunktion und Potential der magnetischen Kräfte.

Wir fanden (§ 33) für die Kraftkomponenten, welche ein magnetisches Feld auf ein Volumelement ausübt, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k R^2}{2} dx dy dz \right)$ usw. Wir können daher $\frac{k R^2}{2} dx dy dz$ als die Kraftfunktion für ein Volumelement ansehen. Gleicherweise wie die Kraftfunktion können wir nun auch das Potential finden. Wir suchen es erst wieder für einen kleinen Magnet sn (Fig. 22). Das Potential im Punkt O sei V , dann haben wir in n

$$V' = V + \frac{\partial V}{\partial x} \xi + \frac{\partial V}{\partial y} \eta + \frac{\partial V}{\partial z} \zeta,$$

in s

$$V'' = V - \frac{\partial V}{\partial x} \xi - \frac{\partial V}{\partial y} \eta - \frac{\partial V}{\partial z} \zeta.$$

Das Potential auf unseren kleinen Magnet wird also

$$m V' - m V'' = \frac{\partial V}{\partial x} m \lambda \cos f + \frac{\partial V}{\partial y} m \lambda \cos g + \frac{\partial V}{\partial z} m \lambda \cos h$$

sein. Für das magnetische Moment $m \lambda$ können wir nun wieder das Moment des Volumelements $\mu dx dy dz$ einsetzen und erhalten so

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mu \cos f + \frac{\partial V}{\partial y} \mu \cos g + \frac{\partial V}{\partial z} \mu \cos h \right) dx dy dz$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz$$

$$= -k \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

$$= -k R^2 dx dy dz.$$

Wir erhalten also das paradoxe Resultat, daß das Potential doppelt so groß ist als die Kraftfunktion. Das rührt daher, weil wir bei der Bildung der Kraftfunktion die Massen als konstant ansehen, was jedoch tatsächlich nicht der Fall ist, indem ja das magnetische Moment durch die Kraft selbst bedingt wird und sich mit dieser ändert. Während uns die Änderung der Kraftfunktion die Größe der mechanischen Kraft angibt, liefert uns die Änderung des Potentials die Änderung der gesamten Energie. Diese besteht in unserm Fall aber nicht bloß in Erzeugung kinetischer Energie, sondern es wird gleichzeitig Arbeit zur Erzeugung des magnetischen Moments in dem induzierten Körper benötigt. Diese Arbeit ist, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, ebenso groß wie die Änderung der kinetischen Energie des Körpers, weshalb das Potential auch doppelt so groß als die Kraftfunktion ausfallen muß.

§ 36. Die magnetische Molekularkraft.

Werden in einem Körper die ursprünglich vereinigten magnetischen Massen $+m$ und $-m$ durch die magnetische Kraft R getrennt, so wirkt auf $+m$ die Kraft $+mR$, auf $-m$ gleicherweise $-mR$. Ist die Entfernung, welche die beiden Massen dadurch erlangt haben, λ , so ist $m\lambda R$ die Arbeit, welche bei der Trennung geleistet werden mußte. Das Differential der Arbeit bei konstanter Kraft ist also $R d(m\lambda)$. Für ein Volumelement ergibt dies (§ 28)

$$R d(m\lambda) = R d\mu dx dy dz.$$

Da

$$R = \frac{\mu}{k},$$

so

$$R d\mu dx dy dz = \frac{\mu d\mu}{k} dx dy dz.$$

Für die Volumeinheit ist daher die zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft nötige Arbeit

$$\int_0^{\mu} \frac{\mu d\mu}{k} = \frac{\mu^2}{2k}$$

und für das Volumelement

$$\frac{\mu^2}{2k} dx dy dz = \frac{k R^2}{2} dx dy dz,$$

da ja $\mu = kR$ ist. Wir erhalten also in der Tat die Arbeit zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft genau so groß wie die Kraftfunktion.

§ 37. Magnetische Energie.

Wir fanden für den Arbeitswert A eines Systems elektrischer Punkte (§ 17) die Gleichung

$$A = \sum \frac{mV}{2},$$

wobei wir unter m eine elektrische Masse verstanden, unter V das Potential, unter welchem sie steht. Diesen Ausdruck können wir unmittelbar auf den Magnetismus übertragen und so den Arbeitswert oder die Energie eines magnetischen Systems bestimmen. Wir nehmen an, daß wir es mit einem System von permanenten Magneten und verschiedenen anderen Körpern zu

tun haben, in welchen die Magnete freie magnetische Massen hervorrufen. Unter permanenten Magneten verstehen wir dabei magnetische Massen, welche bei einer Änderung des Systems ihre Größe nicht ändern, wie es etwa bei Stahlmagneten annähernd der Fall ist. Wir können sonach die gesamte magnetische Energie in drei Teile zerlegen. Den ersten liefert die Wirkung der fixen Magnete auf die freien magnetischen Massen der Körper. Der zweite besteht in der Wirkung der freien Massen auf sich selbst. Der dritte Teil ist jene Arbeit, welche zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft in den Körpern erforderlich ist.

Freie magnetische Massen haben wir nur an der Oberfläche der Körper. Ihre Dichte nennen wir σ . Ist das Potential, welches die fixen Magnete erzeugen, V , so gibt uns

$$\iint V \sigma dO = \iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz$$

den ersten Teil des magnetischen Arbeitswerts. Daß diese Gleichung wirklich besteht, können wir leicht ermitteln. Die partielle Integration ergibt nämlich

$$\begin{aligned} & \iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz \\ &= \iiint (V \alpha dy dz + V \beta dx dz + V \gamma dx dy) \\ &- \iiint V \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß wir nur auf der Oberfläche freie magnetische Massen haben, wird

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Das zweite Glied unseres Integralausdrucks fällt also weg, und es bleibt nur

$$\begin{aligned} & \iint (V \alpha \, dy \, dz + V \beta \, dx \, dz + V \gamma \, dx \, dy) \\ &= \iint V (\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h) \, dO = \iint V \sigma \, dO \end{aligned}$$

(§ 28), womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir haben nun als zweiten Bestandteil der magnetischen Energie das Potential der freien magnetischen Massen auf sich selbst, multipliziert mit der jeweiligen freien Masse, zu nehmen. Dieses Potential sei U . Wir erhalten somit für die Energie

$$\frac{1}{2} \iint U \sigma \, dO = \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) dx \, dy \, dz.$$

Hier muß der Faktor $\frac{1}{2}$ stehen, weil wir bei der Bildung des Arbeitswerts gerade so wie beim Arbeitswert eines elektrischen Systems jede Masse zweimal in Rechnung gezogen haben. Beim ersten Teil war der Faktor $\frac{1}{2}$ nicht nötig, weil wir dort das Potential der fixen Massen auf die freien, aber nicht umgekehrt einführten.

Die zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft nötige Arbeit ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\iiint \frac{\mu^2}{2k} \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2k} \iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Dabei ist

$$\frac{\alpha}{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

und $-\frac{\partial V}{\partial x}$ die Kraft der fixen Magnete, $-\frac{\partial U}{\partial x}$ die rückwirkende Kraft der freien Magnetismen. Die Summe der drei maßgebenden Bestandteile liefert uns nun die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= \iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{2k} \right) \alpha \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\beta}{2k} \right) \beta \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\gamma}{2k} \right) \gamma \right] dx dy dz \\ &= \iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \alpha + \dots \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Es ist somit die Gesamtenergie nichts anderes als die Hälfte der Energie, welche die Wirkung der fixen Magnete auf die freien magnetischen Massen erzeugt.

Bei der Erzeugung der Momente α , β , γ sind in erster Linie die Kräfte $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ maßgebend. Moment und erzeugende Kraft haben immer das-

selbe Vorzeichen, folglich ist die Größe $\frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma$ und damit die gesamte Energie negativ.

Bringen wir die Körper in unendliche Entfernung von den permanenten Magneten, so wird das Potential und damit der magnetische Arbeitswert E Null. Nähern sich nun die Körper, so muß Energie gewonnen werden. Es ist dies die kinetische Energie, welche die Körper durch die Anziehung der Magnete erlangen. Tatsächlich ist auch der Differentialausdruck für die Energie

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz$$

nichts anderes als die von uns bereits früher (§§ 33, 35) gefundene Kraftfunktion.

Elektromagnetismus.

§ 38. Der elektrische Strom — Oersteds Entdeckung — Ampères Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart.

Halten wir zwei Punkte eines Leiters auf konstantem elektrischen Potential, so strömt beständig Elektrizität von dem Punkt höheren Potentials zu jenem tieferen, wir haben einen konstanten elektrischen Strom.

Oersted machte die Entdeckung, daß eine Magnetnadel durch einen nahe vorüberfließenden elektrischen Strom abgelenkt wird. Die Ablenkung befolgt nach Ampère folgende Regel: Denken wir uns im Strom schwimmend, das Gesicht der Nadel zugewendet, so weicht der Nordpol nach links ab.

Befindet sich unter einem unendlich langen geradlinigen Strom eine Magnetnadel, so wird sie mit einer Kraft abgelenkt, welche verkehrt proportional ihrer Entfernung vom Strom ist. Dieses Gesetz fanden Biot und Savart. Die nähere Untersuchung ergibt, daß das magnetische Feld, welches von einem geradlinigen Strom erzeugt wird, kreisförmige Kraftlinien besitzt, die mit ihrer Ebene senkrecht auf dem Strom stehen, während ihr Mittelpunkt im Strom selbst liegt. Zwei Ströme, welche also unendlich nahe, aber in entgegengesetzter Richtung und mit gleicher Stärke nebeneinander laufen, werden auf eine Magnetnadel keine Kraft ausüben, da sie sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben müssen.

§ 39. Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol.

Wir machen die Annahme, daß sich die Wirkung eines Stroms aus der Wirkung der einzelnen Stromelemente berechnen läßt. Stellen wir den Lauf des Stroms durch eine Kurve dar, das heißt, haben wir einen linearen Stromleiter, so können wir ein Kurvenelement als die Lage eines Stromelements ansehen. Denken wir uns einen Kreisstrom, in dessen Mitte sich eine kleine Magnetnadel befindet. Die Wirkung eines Stromelements wird nun proportional seiner Länge ds sein und einer Funktion des Radius r des Kreises. Wir können letztere durch $f(r)$ darstellen. Da alle Stromelemente vom Magnet gleichweit entfernt sind, so ist $f(r)$ konstant, und die Wirkung des gesamten Kreisstroms auf die Nadel wird $2\pi r f(r)$, da $2\pi r$ der Umfang des Kreises ist. Die Messung ergibt nun, daß diese Kraft

$$2 \pi r f(r) = \frac{K}{r}$$

ist, wobei K eine Konstante bedeutet. Es ist somit

$$f(r) = \frac{K}{2 \pi} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

In unserm Fall steht jedes Stromelement senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen Magnetpol und Strom. Ist das nicht der Fall, sondern schließt diese Gerade mit dem Stromelement im allgemeinen den Winkel ϑ ein, so kommt nur die Wirkung der senkrechten Stromkomponente $ds \sin \vartheta$ in Betracht. Die Kraft, welche somit von einem Stromelement auf einen Magnetpol ausgeübt wird, wird erstens der Masse des Magnetpols m , ferner der Länge der senkrechten Komponente des Stromelements $ds \sin \vartheta$, der Stärke des Stroms i direkt und dem Quadrat der Entfernung des Elements vom Pol r verkehrt proportional sein. Die Kraft ist somit

$$S = K \frac{m ds \sin \vartheta}{r^2} i.$$

Die Stromstärke bestimmt sich durch die Menge der Elektrizität, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert.

§ 40. Die Tangentenbussole — Maß der Stromstärke.

Wir bringen einen kreisförmigen Stromleiter in den magnetischen Meridian; in die Mitte des Kreises eine in einer Horizontalebene bewegliche Magnetnadel. Wird der Leiter von keinem Strom durchflossen, so stellt sich die Nadel in die Richtung des magnetischen Meridians AB (Fig. 24). Fließt ein Strom, so sucht

er die beiden Pole in entgegengesetzter Richtung senkrecht zur Strombahn zu bewegen. Es wirkt also auf die Nadel ein Drehungsmoment, und es wird Gleichgewicht sein, wenn dieses Drehungsmoment gleich jenem des Erdmagnetismus wird. Letzteres ist $HM \sin \varphi$, unter H die Horizontalintensität des Erdmagnetismus und unter M das magnetische Moment der Nadel verstanden. Ersteres ist $S \lambda \cos \varphi$, wenn S die magnetische Kraft des Stromkreises auf einen Pol ist. Im Fall des Gleichgewichts der Nadel muß nun

$$HM \sin \varphi = S \lambda \cos \varphi$$

oder

$$S = \frac{HM}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi$$

sein. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber die ablenkende Kraft des Stroms

$$S = K m i \int \frac{\sin \vartheta}{r^2} ds.$$

Für unsern Fall ist für alle Stromelemente $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $\sin \vartheta = 1$. Ebenso ist der Radius des Kreises r konstant, und es bleibt

$$S = \frac{K m i}{r^2} \int ds,$$

wobei

$$\int ds = 2 \pi r$$

der Umfang des Kreises ist. Es ergibt sich somit

$$S = K \frac{2 \pi m i}{r} = \frac{HM}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi$$

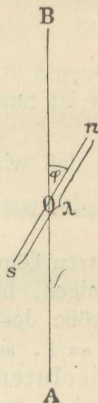


Fig. 24.

oder

$$i = \frac{HM r}{2 \pi m \lambda K} \operatorname{tg} \varphi .$$

Es ist nun das magnetische Moment der Nadel

$$M = m \lambda ,$$

so daß wir

$$i = \frac{H r}{2 \pi K} \operatorname{tg} \varphi$$

setzen können. Falls wir uns also über die Konstante K einigen, haben wir in unserm Fall eine Methode, die Größe der Stromstärke i zu bestimmen. Wählen wir $K = 1$, so sagen wir, wir haben die Stromstärke in absolutem Maß angegeben. Für die Praxis ist diese Einheit zu groß, man hat deshalb den 10. Teil davon als Einheit angenommen und sie ein Ampère genannt. Ein Strom von 10 Ampère entspricht somit der absoluten Stromeinheit. Um die Stromstärke in Ampère auszudrücken, haben wir also $K = \frac{1}{10}$ zu setzen.

Der von uns zur Bestimmung der Stromstärke benützte Apparat besteht also aus einem kreisförmigen Draht, in dessen Mitte sich eine kleine Magnetnadel befindet. Die Größe

$$\frac{H r}{2 \pi k} = A$$

ist eine Konstante. Die Stromstärke ist sonach durch

$$i = A \operatorname{tg} \varphi$$

bestimmt, d. h. sie ist proportional der Tangente des Ausschlagwinkels der Nadel. Man nennt daher einen derartigen Apparat auch eine Tangentenbussole und A ihren Reduktionsfaktor. Führen wir den Strom

zweimal im Kreis herum, so wird die ablenkende Kraft die doppelte, bei n maligem Umlauf die n fache. Der Reduktionsfaktor ist dann natürlich $\frac{A}{n}$. Wir können so die Empfindlichkeit einer Tangentenbussole bedeutend steigern.

§ 41. Potential eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol.

Wir fanden für die Kraft, welche ein Stromelement auf einen Magnetpol ausübt (§ 39), die Größe

$$dS = \frac{i m \sin \vartheta ds}{r^2}.$$

Die Richtung der Kraft ist senkrecht auf die Ebene, in welcher das Stromelement und der Magnetpol liegen. Sie bilde mit den Achsen eines Koordinatensystems die Winkel λ , μ , ν . Es sind dann die Komponenten der Kraft dS

$$d\alpha = \frac{i m \sin \vartheta ds}{r^2} \cos \lambda,$$

$$d\beta = \frac{i m \sin \vartheta ds}{r^2} \cos \mu,$$

$$d\gamma = \frac{i m \sin \vartheta ds}{r^2} \cos \nu.$$

Verbinden wir die Endpunkte des Stromelements mit dem Magnetpol, so erhalten wir ein Dreieck von der Grundlinie r und der Höhe $ds \sin \vartheta$.

$$r ds \sin \vartheta = 2 \Delta$$

ist daher der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Wir können somit auch

$$d\alpha = \frac{i m}{r^3} \cdot 2 \Delta \cos \lambda$$

schreiben, wobei $2 \Delta \cos \lambda$ der doppelte Flächeninhalt der Projektion unseres Dreiecks auf die yz -Ebene ist. Wir wollen die Koordinaten des Magnetpols a, b, c nennen, die des Anfangspunkts unseres Elements x, y, z ; die des Endpunkts sind somit $x + dx, y + dy, z + dz$. Die doppelte Fläche der Projektion des Dreiecks auf die yz -Ebene ist daher

$$2 \Delta \cos \lambda = (b - y) dz - (c - z) dy,$$

und es wird

$$d\alpha = \frac{i m}{r^3} [(b - y) dz - (c - z) dy].$$

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben finden wir ferner

$$d\beta = \frac{i m}{r^3} [(c - z) dx - (a - x) dz],$$

$$d\gamma = \frac{i m}{r^3} [(a - x) dy - (b - y) dx].$$

Da

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2, \quad (14)$$

so ist

$$\frac{b - y}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right)$$

usw. Unsere Gleichungen werden daher

$$d\alpha = -i m \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) dz + i m \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{r} \right) dy$$

usw. Durch Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= -im \int \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) dz + im \int \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{r} \right) dy \\ &= -im \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{dz}{r} + im \frac{\partial}{\partial c} \int \frac{dy}{r}.\end{aligned}$$

Wir wollen nun

$$i \int \frac{dx}{r} = A, \quad i \int \frac{dy}{r} = B, \quad i \int \frac{dz}{r} = C \quad (15)$$

eingeführen und anstatt m die Masseneinheit setzen. Es bestehen dann die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b}, \quad \beta = \frac{\partial C}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial c}, \quad \gamma = \frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a}. \quad (16)$$

Existiert ein Potential V , so daß $\alpha = -\frac{\partial V}{\partial a}$ usw.

wird, dann muß

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial b} = 0 \quad (17)$$

sein usw. Wir haben nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial b} &= \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial c} - \frac{\partial^2 B}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} \\ &= \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} - \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} \right).\end{aligned}$$

Nach der Bedeutung von $C = i \int \frac{dz}{r}$ ist die Summe

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = 0,$$

wenn der Magnetpol nicht im Strom selbst liegt, da dann (§ 5)

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

ist. Die Summe

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} \\ &= i \int \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) dx + \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) dy + \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{r} \right) dz \right] \\ &= -i \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dz \right] \\ &= -i \int d \left(\frac{1}{r} \right) = i \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung (17) wird also nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{konst.}$$

ist. Da nach der Erfahrung jeder konstante Strom ein geschlossener ist, für welchen wegen des mit dem Anfangswert zusammenfallenden Endwerts von r

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0$$

ist, so ist obige Bedingung immer erfüllt, d. h. es existiert immer ein Potential.

Liegt der Magnetpol im Strom selbst, so können wir unseren Leiter nicht mehr als linear auffassen. Die Stromstärke wird dann

$$i = q D,$$

wenn wir D die Dichte des Stroms, q den Querschnitt des Leiters nennen. Ferner wird

$$C = i \int \frac{dz}{r} = \int \frac{D q dz}{r} = \int \frac{D q}{r} \cdot \frac{dz}{ds} ds.$$

Wir können

$$D \frac{dz}{ds} = w$$

die Komponente der Stromdichte parallel zur z-Achse nennen. Ebenso haben wir parallel zur x- und y-Achse die Komponenten der Stromdichte

$$u = D \frac{dx}{ds}, \quad v = D \frac{dy}{ds}.$$

Ferner kann das Volumelement qds durch $dx dy dz$ ersetzt werden. Es wird daher

$$C = \iiint \frac{w}{r} dx dy dz.$$

Dieser Ausdruck hat die Form des Potentials für Kräfte, welche verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirken, und wir wissen (§ 6), daß dann

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = -4\pi w$$

ist. Daher werden für diesen Fall auch unsere obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial \beta}{\partial c} - \frac{\partial \gamma}{\partial b}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial \gamma}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial c}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial \alpha}{\partial b} - \frac{\partial \beta}{\partial a}. \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichungen geben also die Beziehung zwischen den Stromkomponenten und den magnetischen Kräften, welche auf den Magnetpol wirken.

§ 42. **Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte.**

Ein kleiner ebener geschlossener Strom liege um den Anfangspunkt eines Koordinatensystems in der yz -Ebene. Seine Koordinaten seien x, y, z , die eines Magnetpols a, b, c . Folglich ist

$$r^2 = a^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

da ja $x = 0$ ist. Die Entfernung des Magnetpols vom Ursprung O sei R , also

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Wir wollen nun die Ausdrücke für A, B, C nach den Gleichungen (15) bilden. Dabei haben wir den

Vorteil, daß wir $\frac{1}{r}$ nach dem Taylorschen Lehrsatz

in eine Reihe entwickeln können, von welcher wir nur die ersten Glieder in Betracht zu ziehen brauchen, da wir ja y und z als sehr klein annehmen. Wir haben daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) z \\ &= \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{R} \right) y - \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{R} \right) z. \end{aligned}$$

Alle höheren Glieder können wir vernachlässigen. Daraus folgt

$$A = i \int \frac{dx}{r} = 0,$$

weil $x = 0$ ist, ferner

$$B = \frac{i}{R} \int dy - i \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{R} \right) \int y dy - i \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{R} \right) \int z dy.$$

Da wir über einen geschlossenen Strom integrieren, so ist

$$\int dy = \int y dy = 0;$$

hingegen ist

$$\int z dy = -f,$$

wenn wir unter f die von unserem Strom umflossene Fläche verstehen, indem wir den im Sinn des Uhrzeigers fließenden Strom, von der positiven x -Richtung aus betrachtet, als positiv ansehen. Wir erhalten daher

$$B = if \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{R} \right), \quad C = -if \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{R} \right),$$

wobei C gerade so wie B gebildet wird. Diese Ausdrücke wollen wir nun in die Gleichungen (16) einsetzen. Es ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = if \left[\frac{\partial^2}{\partial c^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{R} \right) \right] \\ &= -if \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{R} \right), \end{aligned}$$

da ja

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left(\frac{1}{R} \right) = 0$$

ist. Gleicherweise ergibt sich

$$\beta = -if \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \gamma = -if \frac{\partial^2}{\partial a \partial c} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Setzen wir nun

$$if \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{R} \right) = V,$$

so wird

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial a}, \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial b}, \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial c}.$$

Wir können sonach V als das Potential des Kreisstroms auf den Magnetpol auffassen. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{a}{R^3},$$

daher

$$V = - \frac{if a}{R^3}.$$

Dieselbe Formel haben wir nun auch für das Potential eines kleinen Magnets (§ 26) erhalten, welcher in der x -Achse im Ursprung O liegt. Nur haben wir dort

$$- if = M$$

gesetzt. Wenn wir also unseren kleinen geschlossenen Strom durch eine magnetische Platte vom magnetischen Moment $M = - if$ ersetzen, so haben wir in der Wirkung auf den Magnetpol gar nichts geändert. Das negative Vorzeichen ist nur durch die entgegengesetzte Lage der Pole bedingt. Hat die Platte die Dicke δ und die Flächendichte σ , so ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\sigma \delta f = if$$

das magnetische Moment. Daraus folgt also

$$i = \sigma \delta.$$

Dieses Resultat läßt sich nun auf einen beliebigen geschlossenen Strom übertragen. Wir können uns nämlich die von einem Strom umschlossene Fläche in sehr viele kleine Flächen zerlegt denken. Alle diese kleinen Flächen sollen von einem Strom i in derselben Richtung umflossen werden. Man sieht dann ohne weiteres, daß sich die Ströme im Innern der Fläche aufheben, da die Grenze von je zwei benachbarten Flächenstücken

zweimal vom Strom, und zwar in entgegengesetzter Richtung, durchlaufen wird. Es bleibt also nur der Randstrom übrig. Die kleinen umströmten Flächen können wir aber alle durch magnetische Platten von der Flächendichte σ und der Dicke δ ersetzen, was so zu wählen ist, daß $\sigma \delta = i$ wird. Welche Gestalt wir dabei der vom Strom begrenzten Fläche geben, ist völlig gleichgültig.

§ 43. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol.

Wir denken uns eine kreisförmige Scheibe (Fig. 25) in der yz -Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung

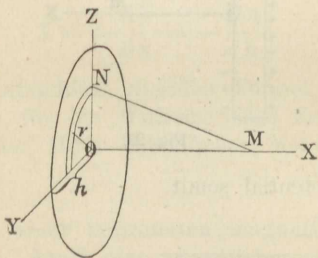


Fig. 25.

des Koordinatensystems. Ihre Flächendichte sei σ , der Radius h . Im Punkt M der x -Achse befinde sich ein Magnetpol. Das Potential auf ihn wird sein (§ 7)

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h \frac{2\pi\sigma r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \left[2\pi\sigma \sqrt{x^2 + r^2} \right]_0^h \\
 &= 2\pi\sigma (\sqrt{x^2 + h^2} - x).
 \end{aligned}$$

Dieses Resultat wollen wir nun auf eine magnetische Platte von der Dicke δ ausdehnen, welche wir so lagern, daß sie mit der negativen Seite in der yz -Ebene (Fig. 26), mit der positiven links davon ist. Das Potential der rechten Seite auf M ist also

$$V_- = -2\pi\sigma[\sqrt{h^2 + x^2} - x],$$

das der linken

$$V_+ = 2\pi\sigma[\sqrt{h^2 + (x + \delta)^2} - (x + \delta)],$$

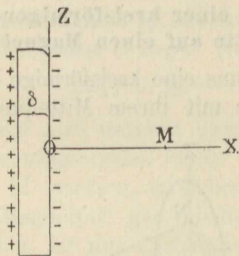


Fig. 26.

das Gesamtpotential somit

$$\begin{aligned} V &= V_+ + V_- \\ &= 2\pi\sigma[\sqrt{h^2 + (x + \delta)^2} - x - \delta - \sqrt{h^2 + x^2} + x] \\ &= 2\pi\sigma\delta\left[\frac{\sqrt{h^2 + (x + \delta)^2} - \sqrt{h^2 + x^2}}{\delta} - 1\right]. \end{aligned}$$

Da δ eigentlich unendlich klein ist, so können wir den ersten Teil in der Klammer als den Differentialquotienten

$$\frac{d\sqrt{h^2 + x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

ansehen. Wir erhalten somit

$$V = 2 \pi \sigma \delta \left(\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1 \right).$$

Setzen wir hier $\sigma \delta = i$, so haben wir das Potential eines Kreisstroms auf den Punkt M. Die Kraft wird nun

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= -2 \pi i \left[\frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{x^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= -\frac{2 \pi i h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $x = 0$, so wird

$$X = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2 \pi i}{h}.$$

Das ist tatsächlich dieselbe Formel, welche wir bereits früher für die Wirkung eines Kreisstroms auf einen in seiner Mitte befindlichen Magnetpol fanden (§ 40).

§ 44. Ersatz einer begrenzten magnetischen Platte durch eine unendliche.

Nach §§ 7, 10 und 43 ist die Kraft, welche eine unendliche Ebene mit der Flächendichte σ auf die Masseneinheit ausübt, unabhängig von der Entfernung des Punktes von der Ebene gleich $2 \pi \sigma$. Haben wir demnach eine unendliche ebene magnetische Platte mit den Belegungen $+\sigma$ und $-\sigma$, so ist ihre Wirkung auf einen magnetischen Massenpunkt gleich Null. Mit einer solchen Platte bringen wir nun eine begrenzte Platte von derselben magnetischen Dichte so zur Deckung,

daß die entgegengesetzten Magnetismen aufeinanderfallen (Fig. 27). Die Wirkung dieses Systems auf den Punkt M ist natürlich gerade so wie die der begrenzten Platte allein, da ja die unendliche Platte keine Wirkung hervorbringt. Das System selbst stellt jetzt aber eine unendliche magnetische Platte mit einem Loch von der Größe und Form der begrenzten Platte dar, da sich die zusammenfallenden positiven und negativen Magnetismen in ihrer Wirkung aufheben. Es kann somit eine magnetische endliche Platte durch eine unendliche mit einem Loch von der Form, Größe und Flächendichte σ der endlichen Platte ersetzt werden, wenn gleichzeitig das Vorzeichen der Flächenbelegungen in das entgegengesetzte verwandelt wird.

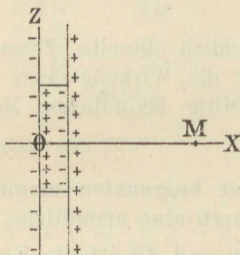


Fig. 27.

Durch diesen Satz sind wir in der Lage, auch dann einen geschlossenen Strom durch eine magnetische Platte zu ersetzen, wenn wir die Wirkung auf einen Punkt wissen wollen, der in der Platte selbst hineinfallen würde. Wir brauchen die begrenzte Platte dann nur mit einer unendlichen zu vertauschen, so daß der Punkt ins Loch zu liegen kommt.

§ 45. Das Solenoid.

Eine Reihe paralleler, gleich großer und in gleichen Abständen voneinander befindlicher Kreisströme, wie man sie angenähert in einer Drahtspule besitzt, nennt man ein Solenoid. Wollen wir die Wirkung eines solchen Solenoids auf einen außerhalb liegenden Punkt kennen lernen, so brauchen wir jede Drahtwindung nur durch eine kreisförmige magnetische Platte zu ersetzen. Gehen n Windungen auf die Längeneinheit, so hat eine solche Platte die Dicke $\delta = \frac{1}{n}$ und somit nach § 42 eine Flächendichte

$$\sigma = \frac{i}{\delta} = ni.$$

Da im Innern des Solenoids die zusammenfallenden positiven und negativen Magnetismen sich in ihrer Wirkung nach außen aufheben, so wirkt das Solenoid auf einen äußeren Punkt wie ein gleich großer Zylinder, dessen Endflächen von der Dichte ni bez. $-ni$ belegt sind.

Wollen wir die Wirkung auf einen Punkt im Innern kennen, so brauchen wir nach § 44 jeden Kreisstrom nur durch eine unendliche ebene magnetische Platte mit einem kreisförmigen Loch zu ersetzen. Auf jener Seite, von welcher besehen der Strom im Sinne des Uhrzeigers fließt, hat nach dem Früheren die positive Belegung $\sigma = ni$ zu sein. Es heben sich dann wieder sämtliche Magnetismen mit Ausnahme jener der beiden Endflächen auf. Die Achse des Solenoids falle mit der x -Achse eines Koordinatensystems zusammen, von rechts besehen fließe der Strom im Sinne des Uhrzeigers. Es haben dann unsere unendlichen Flächen rechts positiven, links negativen Magnetismus. Die Wirkung

einer solchen unendlichen Platte auf einen Punkt in der Achse des Solenoids läßt sich ersetzen durch eine unendliche Platte ohne Loch, welche eine Kraft $2\pi\sigma$ ausübt, und eine Kreisscheibe, die mit dem Loch zusammenfällt und mit Magnetismen von gleicher Dichte, aber entgegengesetztem Vorzeichen belegt ist.

Denken wir uns ein sehr langes Solenoid, so kann die Wirkung der Kreisscheiben auf einen Punkt im Innern, der weit von den Endflächen entfernt ist, vernachlässigt werden, und es bleiben nur die Kräfte der beiden unendlichen Ebenen. Diese suchen die positive Masseneinheit nach links zu bewegen, jede mit der Kraft $2\pi\sigma$. Die Kraft im Solenoid ist demnach

$$X = -4\pi\sigma = -4\pi ni.$$

Es ist somit die Kraft unabhängig von der Lage des Punkts, und die Kraftlinien müssen parallel zur x-Achse verlaufen. Das Solenoid ist demnach ein bequemes Mittel, um ein homogenes magnetisches Feld herzustellen, dessen Stärke direkt proportional der Windungszahl per Längeneinheit und der Stromstärke ist.

§ 46. Der Stokessche Satz.

Wir werden im folgenden den von Stokes gefundenen Satz

$$\int \left(X \frac{da}{ds} + Y \frac{db}{ds} + Z \frac{dc}{ds} \right) ds = \iint \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b} \right) \cos \gamma \right] dS$$

benötigen. X, Y, Z sind Funktionen der Koordinaten a, b, c einer Fläche, deren Randkurve s ist, während α, β, γ Winkel sind, welche die Normale zum

Flächenelement dS mit den drei Achsen einschließt. Wir wollen den Beweis dafür mit Zuhilfenahme der Mechanik erbringen. X, Y, Z seien die Kraftkomponenten, welche auf einen Punkt wirken. Beschreibt der Punkt eine geschlossene Kurve, so ist die Arbeit, welche dabei die Kräfte leisten,

$$\int (X da + Y db + Z dc).$$

Wir wollen nun zuerst die Formel für die Arbeit aufstellen, welche die Kräfte leisten, wenn ein Punkt in der yz -Ebene (Fig. 28) das unendlich kleine Recht-

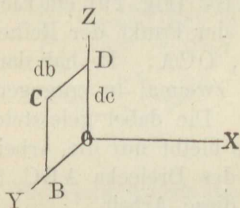


Fig. 28.

eck OBCD umkreist. Auf dem Weg von O nach B leistet die Kraft Y die Arbeit $Y db$, von B bis C wirkt die Kraft $Z + \frac{\partial Z}{\partial b} db$, und die Arbeit ist $\left(Z + \frac{\partial Z}{\partial b} db\right) dc$, hingegen haben wir von C nach D analog die Arbeit $-\left(Y + \frac{\partial Y}{\partial c} dc\right) db$ und von D nach O $-Z dc$. Die Gesamtarbeit beim Umkreisen der Fläche $db dc$ ist also

$$\begin{aligned} & Y db + \left(Z + \frac{\partial Z}{\partial b} db\right) dc - \left(Y + \frac{\partial Y}{\partial c} dc\right) db - Z dc \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right) db dc = \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right) dS_x = F \cdot dS_x. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$G \cdot dS_y = \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a} \right) dS_y,$$

$$H \cdot dS_z = \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b} \right) dS_z,$$

wenn wir mit dS_x , dS_y , dS_z Flächenelemente senkrecht zur x - bez. y - und z -Achse verstehen, während F , G , H die Arbeiten sind, welche zur Umkreisung der Flächeneinheit einer Ebene benötigt werden, die zur x - bzw. y - oder z -Achse senkrecht steht.

Es sei nun $OABC$ (Fig. 29) ein Elementartetraeder, und es durchlaufe der Punkt der Reihe nach die Dreiecke OAB , OBC , OCA . Er hat dann die Strecken OA , OB und OC zweimal in entgegengesetzter Richtung zurückgelegt. Die dabei geleistete Arbeit ist also gleich Null, und es bleibt nur die Arbeit übrig, welche vom Durchlaufen des Dreiecks ABC herrührt. Nach dem Früheren ist diese Arbeit

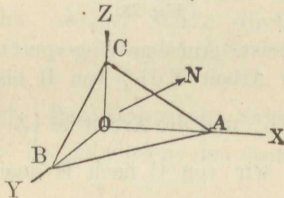


Fig. 29.

$$\begin{aligned} & F dS_x + G dS_y + H dS_z \\ &= F dS \cos \alpha + G dS \cos \beta + H dS \cos \gamma \\ &= (F \cos \alpha + G \cos \beta + H \cos \gamma) dS = J dS, \end{aligned}$$

wenn wir mit α , β , γ die Winkel bezeichnen, welche die Normale N zur Fläche ABC mit den Koordinatenachsen einschließt.

$$J = F \cos \alpha + G \cos \beta + H \cos \gamma$$

ist somit die Arbeit, welche beim Umkreisen der Flächeneinheit der Fläche $ABC = dS$ geleistet wird.

Eine geschlossene Kurve sei gleichzeitig die Randkurve einer beliebigen Fläche (Fig. 30), die wir in ihre Elemente auflösen wollen. Ein Punkt umkreise in derselben Richtung ein jedes Flächenelement. Er durch-

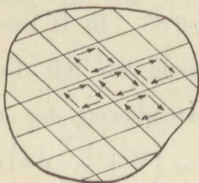


Fig. 30.

läuft dann jede Begrenzungslinie eines Flächenelements im Innern der Fläche zweimal in entgegengesetzter Richtung, so daß die dabei geleistete Gesamtarbeit Null ist. Es bleibt somit nur die Arbeit übrig, welche beim Umkreisen der Randkurve geleistet wird. Dieselbe ist also

$$\begin{aligned} \iint J dS &= \iint (F \cos \alpha + G \cos \beta + H \cos \gamma) dS \\ &= \int (X da + Y db + Z dc), \end{aligned}$$

und wir können nach dem Früheren diese Gleichung umwandeln in

$$\begin{aligned} \int (X da + Y db + Z dc) &= \iiint \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c} \cos \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b} \right) \cos \gamma \right] dS. \end{aligned}$$

Das ist aber der Satz von Stokes, den wir somit bewiesen haben.

§ 47. Die Wirkung elektrischer Ströme aufeinander.

Zwei geschlossene Ströme A und B (Fig. 31) können als zwei magnetische Lamellen (§ 42) angesehen werden. Eine Gerade CDE soll die Lamelle B in C und D senkrecht durchschneiden. CD ist also die Dicke der Lamelle. In C sei das Potential, welches A entwirft, V , und ein Flächenelement dS' in C besitze die magnetische Masse $\sigma dS'$. Der Arbeitswert (§ 37) dieser Masse ist daher $V\sigma dS'$. In D haben wir das Potential $V + \frac{\partial V}{\partial \nu} d\nu$, wenn wir mit $d\nu$ die Strecke CD bezeichnen. Der Arbeitswert der zugehörigen Masse $-\sigma dS'$ ist daher $-\left(V + \frac{\partial V}{\partial \nu} d\nu\right)\sigma dS'$, folglich der Gesamtarbeitswert $-\frac{\partial V}{\partial \nu} d\nu \sigma dS'$.

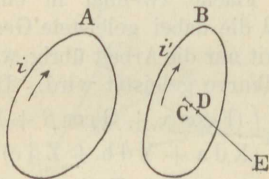


Fig. 31.

Beachten wir, daß $\sigma d\nu = i'$ die Stromstärke ist (§ 42), so wird der Arbeitswert für die ganze Lamelle

$$W = -i' \iint \frac{\partial V}{\partial \nu} \cdot dS'.$$

$-\frac{\partial V}{\partial \nu}$ ist nun nichts anderes als die Kraft, welche in

der Richtung CD wirkt. Wir können deren Komponenten X, Y, Z bestimmen und erhalten, wenn α, β, γ die Winkel der Richtung der Kraft mit den Koordinatenachsen sind,

$$W = i' \iint (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) dS',$$

wobei also nach § 41

$$X = i \left[\frac{\partial}{\partial c} \int \frac{dy}{r} - \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{dz}{r} \right],$$

$$Y = i \left[\frac{\partial}{\partial a} \int \frac{dz}{r} - \frac{\partial}{\partial c} \int \frac{dx}{r} \right],$$

$$Z = i \left[\frac{\partial}{\partial b} \int \frac{dx}{r} - \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{dy}{r} \right].$$

ist, so daß wir schließlich erhalten

$$\begin{aligned} W = & -ii' \iiint \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dz}{ds} - \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dy}{ds} \right] \cos \alpha \right. \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx}{ds} - \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dz}{ds} \right] \cos \beta \\ & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx}{ds} \right] \cos \gamma \right\} ds ds'. \end{aligned}$$

Nach dem Stokesschen Satz (§ 46) können wir diese Gleichung aber umformen in

$$W = -ii' \iint \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{da}{ds'} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{db}{ds'} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dc}{ds'} \right) ds ds'.$$

Wenn wir unter ε den Winkel verstehen, welchen die beiden Stromelemente ds und ds' miteinander einschließen, erhalten wir schließlich die Gleichung

$$W = -ii' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds',$$

und wir nennen W das elektrodynamische Potential der beiden geschlossenen Ströme i und i' aufeinander.

Man kann dieses Potential auch für die Wirkung eines Stroms auf sich selbst bilden. Es wird dann den Wert

$$U = -\frac{i^2}{2} \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'$$

erhalten. Hier sind ds und ds' zwei beliebige Stromelemente des geschlossenen Stroms i . Es wird somit bei der Integration jedes Element zweimal in Rechnung gesetzt, weshalb wir auch von der gewöhnlichen Potentialformel nur die Hälfte nehmen dürfen.

§ 48. Die Gesetze von Ohm und Joule — Arbeit des Stroms.

Wir erfuhren im § 38, daß ein elektrischer Strom entsteht, wenn zwei Punkte eines Leiters sich auf verschiedenem elektrischen Potential befinden. Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Stromstärke i proportional dem Potentialunterschied e ist, den man deshalb auch die elektromotorische Kraft nennt. Ferner wird sie auch durch die Gestalt und Natur des Leiters bedingt, weshalb Ohm die Beziehung der Stromstärke zur elektromotorischen Kraft in die Formel

$$i = \frac{e}{w}$$

zusammenfaßt, wobei die Konstante w der Widerstand genannt wird.

Hat der Strom keine Arbeit zu leisten, so findet er ein Äquivalent in der Erwärmung des Leiters,

und es ist nach den Versüchen von Joule die im Leiter in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge

$$W = wi^2 = ei.$$

Das Produkt aus Stromstärke und elektromotorischer Kraft ist somit eine auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit, ein Effekt.

Haben wir in die Strombahn eine Zersetzungszelle eingeschaltet, so muß der Strom chemische Arbeit leisten. Diese ist erfahrungsgemäß wiederum pro Sekunde proportional der Stromstärke. Der gesamte Effekt kann daher dargestellt werden durch

$$ei = wi^2 + pi,$$

wobei p ein entsprechender Proportionalitätsfaktor ist. Daraus folgt

$$e - p = wi.$$

p hat also ebenfalls die Dimension einer elektromotorischen Kraft. Man nennt es die elektromotorische Gegenkraft der Zersetzungszelle oder die galvanische Polarisation.

Wird der Strom durch eine galvanische Kette hervorgerufen, so wird die ganze Arbeit des Stroms durch den Verbrauch von chemischer Energie in den Elementen erzeugt. Die verbrauchte chemische Energie ist somit immer gleich ei , wobei e die elektromotorische Kraft der Batterie ist.

§ 49. Der Induktionsstrom.

Verändern wir die Lage eines Magnets zu einem Stromleiter, so wird das Potential des Stroms auf den Magnet ein anderes, d. h. wir haben bei der Veränderung Arbeit zu leisten. Diese Arbeit findet ihr Äqui-

valent in einer vorübergehenden Änderung des Stroms im Leiter. Derartig entstehende Ströme nennt man Induktionsströme.

Wir können auf veränderliche Ströme die Gleichung des vorhergehenden Paragraphen anwenden, wenn wir sie auf eine unendlich kleine Zeit beziehen. Wir erhalten sonach

$$e i dt = w i^2 dt + p i dt.$$

$p i dt$ ist die Arbeit des Stroms. Besteht sie in magnetischer Arbeit, so können wir sie dA schreiben, und unsere Gleichung wird

$$e i dt = w i^2 dt + dA,$$

wobei dA die Änderung des Potentials bedeutet. Dieses ist gegeben durch

$$U = iV$$

(§ 42), also

$$dA = -dU = -i dV$$

und

$$e i dt = w i^2 dt - i dV,$$

was wir wieder in die Form des Ohmschen Gesetzes kleiden können:

$$e + \frac{dV}{dt} = w i, \quad (19)$$

wobei $\frac{dV}{dt}$ also nichts anderes ist als die elektromotorische Kraft, welche durch die Veränderung der gegenseitigen Lage von Strom und Magnet erzeugt wird. Ist in unserem Stromkreis ursprünglich keine elektromotorische Kraft da, so wird in Gleichung (19) $e = 0$, also

$$\frac{dV}{dt} = w i,$$

was integriert

$$V_1 - V_0 = w \int_0^t i dt$$

ergibt. Damit lassen sich alle Fälle der Induktion darstellen, ob sie nun von bewegten Magneten oder Stromleitern ausgeht.

§ 50. Das ballistische Galvanometer.

Die Stärke der Induktionsströme mißt man mit Galvanometern von sehr geringer Dämpfung und großer Schwingungsdauer, sogenannten ballistischen Galvanometern. Die Kräfte, welche auf die Magnetnadel vom magnetischen Moment M einwirken, sind der Erdmagnetismus und der Strom. Jener liefert das Drehungsmoment $-HM \sin \varphi$, wenn H die Horizontalkomponente ist (§§ 25 und 27); der Strom hingegen erzeugt das Moment $GM \cos \varphi$, wobei wir G die Galvanometerkonstante nennen. Der Drehungswinkel φ ist also durch die Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -HM \sin \varphi + GM \cos \varphi$$

gegeben. K ist das Trägheitsmoment der Nadel (Bd. I, § 28).

Der Induktionsstrom sei von so kurzer Dauer, daß die Nadel während dieser Zeit ihre Ruhelage kaum verläßt, so daß wir $\varphi = 0$ setzen können. Es vereinfacht sich dann die Gleichung in

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = GM i.$$

Durch Integration erhalten wir

$$K \left[\frac{d\varphi}{dt} \right]_0^T = G M \int_0^T i dt.$$

Für die Zeit $t = 0$ ist die Geschwindigkeit der Nadel ebenfalls Null, wir haben also $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = 0$; hingegen nach der Zeit T , nach welcher der Strom wieder aufhört, soll die Nadel die Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_T = \alpha$ haben. Somit ist

$$K \alpha = G M \int_0^T i dt.$$

Sind die Ausschläge der Nadel nicht groß, so folgt für deren Bewegung nach Verlauf des Induktionsstroms die Gleichung

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MH\varphi$$

(§ 27). Diese Gleichung läßt sich genau so wie die Pendelgleichung (Bd. I, § 9) behandeln. Wir erhalten als Lösung

$$\varphi = A \sin \gamma t,$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\gamma \cos \gamma t.$$

Dabei ist

$$\gamma = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{MH}{K}}.$$

Nun ist für $t = 0$ $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha$, also

$$\alpha = \gamma A$$

und

$$\varphi = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma t,$$

folglich der größte Ausschlag der Nadel

$$\varphi_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{GM}{K} \int_0^T i dt.$$

Damit ist uns aber alles gegeben, das $\int_0^T i dt$ auszuwerten.

§ 51. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand.

Der Erdinduktor besteht seinem Wesen nach aus einer kreisförmigen Drahtrolle, welche um einen Durchmesser drehbar ist. Wird sie gedreht, so wird das magnetische Feld der Erde Ströme induzieren, die wir, wenn die Drehung rasch erfolgt und nur kurze Zeit andauert, nach der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methode messen können. Für das Potential eines Kreisstroms auf einen Magnetpol m fanden wir (§ 42)

$$U = iV = \frac{ifam}{R^3}.$$

Dabei ist

$$\frac{a}{R} = \cos \alpha,$$

wenn wir unter α den Winkel der Normalen zur

Stromebene mit der Verbindungsgeraden Strom-Magnetpol verstehen. $\frac{m}{R^2}$ ist aber nichts anderes als die magnetische Intensität J an der Stelle des Stromkreises. Wir können daher das Potential auch schreiben

$$U = iV = iJf \cos \alpha$$

oder

$$V = Jf \cos \alpha .$$

Diese Formel können wir nun für das Potential des Erdmagnetismus auf den Erdinduktor anwenden. Derselbe sei um eine vertikale Achse drehbar. Die Fläche des Induktors sei F und ψ der Winkel, welchen die Normale zur Fläche F mit der Richtung der Horizontalkomponenten H einschließt. Dann ist

$$V = FH \cos \psi ,$$

folglich

$$\frac{dV}{dt} = wi = -FH \sin \psi \frac{d\psi}{dt} ;$$

wenn w der Widerstand der Induktorrolle ist. Diese Gleichung ergibt durch Integration

$$V_1 - V_0 = w \int i dt = FH (\cos \psi_1 - \cos \psi_0) .$$

Wählen wir nun ψ_1 und ψ_0 so, daß der Induktor eine halbe Drehung macht und daß zu Beginn als auch zum Schluß der Bewegung die Ebene des Induktors senkrecht zum magnetischen Meridian steht, so ist $\psi_1 = 0$, $\psi_0 = \pi$, folglich $\cos \psi_1 - \cos \psi_0 = 2$ und

$$w \int i dt = 2FH .$$

Stellen wir die Drehungsachse des Induktors horizontal, so erhalten wir auf gleiche Weise

$$w \int i' dt = 2FV' ,$$

wenn V' die Vertikalkomponente der gesamten magnetischen Intensität ist. Wir erhalten nun durch ein ballistisches Galvanometer Ausschläge, welche den Werten $\int i dt$ und $\int i' dt$ proportional sind. Sie seien φ_1 und φ_2 . Dann wird

$$2 FH = C \varphi_1, \quad 2 FV' = C \varphi_2$$

und

$$\frac{V'}{H} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \operatorname{tg} J',$$

wenn wir unter J' die Inklination verstehen (§ 25).

Nach den vorhergehenden Paragraphen ist der größte Ausschlag des ballistischen Galvanometers

$$\varphi_1 = \frac{GM}{\gamma K} \int i dt = \frac{2 \pi G}{H \tau} \int i dt,$$

da ja

$$\gamma = \frac{2 \pi}{\tau} = \sqrt{\frac{HM}{K}}$$

ist. Wir haben somit

$$\int i dt = \frac{H \tau}{2 \pi G} \varphi_1;$$

nach dem Obigen aber auch

$$\int i dt = \frac{2 FH}{w},$$

folglich

$$\frac{2 FH}{w} = \frac{H \tau}{2 \pi G} \varphi_1,$$

$$w = \frac{4 \pi FG}{\varphi_1 \tau}.$$

In dieser Formel können wir alle Größen der rechten Seite in absolutem Maß bestimmen. Wir haben somit hier ein Mittel, den elektrischen Widerstand einer Leitung in absolutem Maß auszudrücken.

§ 52. Das elektrostatische und elektromagnetische Maßsystem.

Wir sind in der Lage, alle uns aufstoßenden physikalischen Größen durch die absoluten Einheiten der Länge, Masse und Zeit auszudrücken, und wir nennen dann die so erhaltenen neuen Einheiten die abgeleiteten. Die Formel, welche uns die Zusammensetzung einer abgeleiteten Einheit aus den absoluten ergibt, nennen wir die Dimension der abgeleiteten Einheit. So wird z. B. eine Kraft dargestellt durch das Produkt aus einer Masse $[M]$ und einer Beschleunigung. Die Beschleunigung ist aber eine Geschwindigkeit, dividiert durch eine Zeit $[T]$, die Geschwindigkeit wiederum eine Länge $[L]$, geteilt durch eine Zeit. Die Dimension der Kraft ist also $\frac{[LM]}{[T^2]}$, was man jedoch gewöhnlich in der Form $[LMT^{-2}]$ schreibt.

Die Kraft, mit welcher sich zwei Elektrizitätsmengen e und e' anziehen, ist gegeben durch

$$F = \frac{e e'}{r^2}$$

(§ 1). Drücken wir dies in Form einer Dimensionsgleichung aus, so haben wir

$$[MLT^{-2}] = \frac{[e^2]}{[L^2]}$$

oder

$$[e] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Das elektromagnetische Potential Ψ hat die Dimension der Größe $\frac{e}{r}$ (§ 2), also

$$[\Psi] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}];$$

hingegen hat die Kapazität $[C]$ die Dimensionen der Größe $\frac{e}{\Psi}$ (§ 13), also

$$[C] = [L].$$

Wir haben diese Dimensionen alle aus dem elektrostatischen Kraftgesetz abgeleitet; wir sagen: wir haben die Größen in elektrostatischem Maß gemessen.

Zwei magnetische Massen ziehen sich nach demselben Gesetz an wie elektrische. Wir haben für die Anziehungskraft

$$F = \frac{m m'}{r^2}.$$

Folglich erhalten wir für die Dimension einer magnetischen Masse ebenfalls den Ausdruck

$$[m] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Wir fanden für die Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol (§ 39) die Kraft

$$S = \frac{m ds \sin \vartheta}{r^2} i,$$

oder

$$i = \frac{S r^2}{m ds \sin \vartheta},$$

daher

$$[i] = \frac{[LMT^{-2} L^2]}{[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} L]} = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$

da $\sin \vartheta$ eine dimensionslose Zahl ist.

Die Stromstärke ist nichts anderes als die Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert. Das Produkt aus Stromstärke und Zeit gibt uns daher die Elektrizitätsmenge an, und wir finden somit für deren Dimensionen

$$[e] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}].$$

Die durch den Strom in der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge wi^2 (§ 48) hat die Dimension einer Energie, dividiert durch eine Zeit, also einer Kraft multipliziert mit einem Weg, geteilt durch eine Zeit, folglich

$$[wi^2] = [L^2 MT^{-3}],$$

woraus folgt

$$[w] = \frac{[L^2 MT^{-3}]}{[LMT^{-2}]} = [LT^{-1}].$$

Für die Dimension der elektromotorischen Kraft E haben wir somit (§ 48)

$$[E] = [wi] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Vergleichen wir die in elektrostatischem und die in elektromagnetischem Maß gemessenen Größen, so zeigt sich die auffallende Erscheinung, daß ein und dieselbe Größe, nach den verschiedenen Systemen gemessen, verschiedene Dimension hat. So fanden wir in elektromagnetischem Maß für die Dimension der Elektrizitätsmenge

$$[e] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}],$$

in elektrostatischem Maß hingegen

$$[e] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Das Verhältnis der letzteren zur ersteren ist

$$V = [LT^{-1}],$$

hat also die Dimension einer Geschwindigkeit. Messen wir eine Elektrizitätsmenge einmal mit der Coulombschen Drehwage, das andere Mal mit dem Galvanometer, so erhalten wir sie in den zwei verschiedenen Systemen gemessen, und es zeigt sich, daß ihr Verhältnis

$$V = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

d. i. gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

Wie die Elektrizitätsmengen stimmen auch die übrigen elektrischen Größen, die Energie ausgenommen, in beiden Systemen gemessen, in ihren Dimensionen nicht überein, und zwar ist das Verhältnis natürlich immer eine Potenz der Lichtgeschwindigkeit V .

§ 53. Absolute und praktische Einheiten.

Für praktische Zwecke sind die absoluten Einheiten in der Regel unbequem, da sie entweder sehr große oder sehr kleine Zahlen ergeben. Man hat daher für die Bedürfnisse des alltäglichen Lebens andere Einheiten gewählt. Es ist uns bereits das praktische Maß der Stromstärke, das Ampère (§ 40), bekannt, welches $\frac{1}{10}$ der absoluten Stromeinheit ist. Die absolute Einheit des Widerstandes ist so klein, daß man das 10^9 fache als praktische Einheit gewählt und mit dem Namen Ohm belegt hat. Analogerweise führt das 10^8 fache der absoluten Einheit der elektromotorischen Kraft den Namen Volt, damit Ampère, Ohm und Volt ebenfalls in solchen Verhältnissen zueinander stehen, daß auch für sie das Ohmsche Gesetz

$$i = \frac{e}{w}$$

aufrecht bleibt.

Für die Energie per Sekunde

$$ei = wi^2$$

haben wir als praktisches Maß das Watt oder Volt-Ampère, welches somit gleich 10^7 absoluten Einheiten ist. Die Elektrizitätsmenge, welche in der Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters von der Stromstärke eines Ampère geschickt wird, nennen wir ein Coulomb.

Leiten wir die eine Belegung eines Kondensators zur Erde ab, und erzielen wir durch die Ladung von einem Coulomb auf der zweiten Belegung gerade die Spannung eines Volts, so hat der Kondensator die

Kapazität von einem Farad. Dieses besitzt also $\frac{10^{-1}}{10^8}$

$= 10^{-9}$ absolute Einheiten. Das Verhältnis der Maßeinheiten in den beiden Systemen ist für die Elektri-

zitätsmenge V (§ 52), für das Potential $\frac{1}{V}$, für die

Kapazität somit V^2 . Ein Farad hat also $\frac{V^2}{10^9}$ elek-

trostatische Einheiten. Es ist dies eine so große Einheit, daß man in der Regel als praktische Einheit den millionten Teil, das Mikrofarad, benützt.

§ 54. Der Extrastrom.

Ein von einem Strom durchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung ein magnetisches Feld, dessen Stärke proportional der Stromstärke i ist (§ 40). Das Potential eines magnetischen Felds auf einen Strom ist der Stromstärke proportional. Das vom Strom i erzeugte magnetische Feld besitzt daher auf den Strom i ein Potential, welches i^2 proportional ist. Wir können es somit

$$U = Ai^2$$

setzen, wenn A eine Konstante ist. Ändert sich die Stromstärke während der Zeit dt , so ändert sich das Potential um

$$A di^2 = 2 A i di,$$

und die Energiegleichung ergibt

$$E i dt = w i^2 dt + 2 A i di,$$

oder

$$E = w i + 2 A \frac{di}{dt}.$$

Der Ausdruck $C = 2 A$ läßt sich, da er nicht nur von der Form der Strombahn, sondern auch von der Umgebung abhängt, in der Regel mathematisch nur sehr schwer, meist gar nicht bestimmen. Um so leichter ist es, ihn mit Zuhilfenahme der Gleichung

$$E = w i + C \frac{di}{dt}$$

experimentell zu finden. Als Lösung dieser Gleichung haben wir

$$i = A + B e^{\alpha t}, \quad (20)$$

wenn wir unter A , B und α Konstanten verstehen. Wir finden dann nämlich

$$E = w A + w B e^{\alpha t} + C B \alpha e^{\alpha t}.$$

Denken wir uns etwa, wir hätten ein konstantes galvanisches Element von der elektromotorischen Kraft E , so ist E natürlich eine konstante Größe, d. h. es muß von der Zeit unabhängig sein. Das ist aber nach unserer Gleichung nur möglich, wenn

$$w B + C B \alpha = 0$$

ist, woraus

$$\alpha = - \frac{w}{C}.$$

folgt. Ferner ist $E = wA$ oder $A = \frac{E}{w}$. Es wird somit nach Gleichung (20) die Stromstärke

$$i = \frac{E}{w} + Be^{-\frac{w}{C}t}.$$

Wir wollen nun zu einer bestimmten Zeit $t = 0$ den Strom schließen. Dann ist für $t = 0$ auch $i = 0$, also auch $\frac{E}{w} + B = 0$ oder $B = -\frac{E}{w}$. Somit ergibt sich

$$i = \frac{E}{w} \left(1 - e^{-\frac{w}{C}t} \right).$$

In dem Augenblick, wo wir den Strom schließen, ist also die Stromstärke Null und steigt dann mit der Zeit an. Da $\frac{w}{C}$ fast immer eine sehr große Zahl ist, so geht das Anwachsen sehr rasch, da dann das Glied $e^{-\frac{w}{C}t}$ sehr rasch Null wird. Es ist dann der Strom konstant $i = \frac{E}{w}$. Wir haben also beim Schließen des Stroms einen Gegenstrom $-\frac{E}{w}e^{-\frac{w}{C}t}$, welchen wir den Extrastrom nennen.

Öffnen wir nun den Strom, so ist unmittelbar nach der Unterbrechung die elektromotorische Kraft nicht mehr vorhanden. Es gilt dann also

$$0 = wi + C \frac{di}{dt}.$$

Wir haben jetzt als Lösung

$$i = Be^{-\frac{w}{C}t}.$$

Für $t = 0$ ist nun $i = \frac{E}{w}$, daher $B = \frac{E}{w}$, folglich

$$i = \frac{E}{w} e^{-\frac{w}{c} t}.$$

Wir haben also auch bei der Öffnung einen Extrastrom, welcher gleich gerichtet ist dem ursprünglich vorhandenen Strom.

Beim Öffnen haben wir die volle Stromstärke im Leiter, beim Schließen ist sie Null. Wir erhalten daher beim Öffnen einen intensiven elektrischen Funken, beim Schließen hingegen nur einen sehr schwachen. Die Größe C nennt man den Koeffizienten der Selbstinduktion.

§ 55. Dämpfung einer schwingenden Magnetnadel.

Die Bewegung einer Magnetnadel besteht in einer Drehung um ihren Aufhängepunkt. Es muß somit ihr Trägheitsmoment K multipliziert mit der Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ gleich der Summe aller Drehungsmomente sein (Bd. I, § 28). Der Erdmagnetismus übt auf die Magnetnadel das Drehungsmoment $-HM \sin\varphi$ aus (§ 25). Die Magnetnadel hänge in der Mitte eines kreisförmigen geschlossenen Stromleiters. Für das Potential eines solchen Stroms auf einen Magnetpol fanden wir (§ 43)

$$U = 2\pi i \left(\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1 \right).$$

Die Entfernung der beiden Pole $+m$ und $-m$ unserer Nadel sei λ , und zwar sei sie so klein, daß wir an-

nehmen können, die Wirkung des Stroms auf die Pole sei gerade so, als lägen sie in der x-Achse (Fig. 32). Die y-Achse habe die Richtung des magnetischen Meridians. Für den Südpol S ist dann die Abszisse

$$x = \frac{\lambda}{2} \sin \varphi ,$$

für den Nordpol

$$x = -\frac{\lambda}{2} \sin \varphi .$$

Das Potential des Stroms auf den Magnet wird sich daher zusammensetzen aus dem Potential U_+ auf den

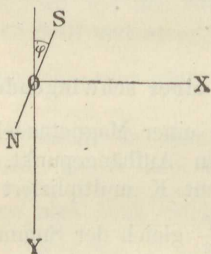


Fig. 32.

Nordpol und U_- auf den Südpol. Nach dem Obigen ist nun

$$U_+ = 2 \pi i \left(\frac{-\frac{\lambda}{2} \sin \varphi}{h} - 1 \right) m ,$$

$$U_- = 2 \pi i \left(\frac{\frac{\lambda}{2} \sin \varphi}{h} - 1 \right) \cdot - m ,$$

folglich

$$W = U_+ + U_- = -\frac{2\pi i M}{h} \sin \varphi,$$

da ja

$$m \lambda = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Nadel ist.

$$-\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{2\pi i M}{h} \cos \varphi$$

ist somit das Drehungsmoment, welches der Strom auf die Nadel ausübt. Somit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -HM \sin \varphi + \frac{2\pi i M}{h} \cos \varphi. \quad (21)$$

Setzen wir $W = Vi$, also

$$V = -\frac{2\pi M}{h} \sin \varphi,$$

so gilt für unsern Leiter, in welchem sonst keine elektromotorische Kraft wirkt (§ 49),

$$0 = wi - \frac{dV}{dt} = wi + \frac{2\pi M}{h} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Daraus folgt

$$i = -\frac{2\pi M}{hw} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Diesen Wert führen wir nun in Gleichung (21) ein und erhalten demnach

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -HM \sin \varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w} \cos^2 \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Wir setzen nun voraus, daß die Ausschlagswinkel φ der Nadel nur klein seien. Dann können wir $\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1$, folglich

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{HM}{K}\varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w K} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

setzen. Das ist aber die Gleichung einer gedämpften schwingenden Bewegung, wie sie etwa ein Pendel im widerstehenden Mittel ausführt (Bd. I, § 10). Da die Größen H , M , K nach bekannten Methoden bestimmbar sind, so haben wir auch hier ein Mittel, aus der Abnahme der Schwingungsweite den Widerstand w unseres Stromleiters in absolutem Maß zu finden.

§ 56. Induktionswirkung zweier Stromleiter aufeinander.

Wir fanden in § 47 als Potential zweier Ströme aufeinander

$$W = -ii' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = -ii' V.$$

Das Potential eines jeden Leiters auf sich selbst ist hingegen

$$-\frac{i^2}{2} \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = -\frac{U i^2}{2}$$

und

$$-\frac{i'^2}{2} \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = -\frac{U' i'^2}{2},$$

wobei aus den Gleichungen ohne weiteres hervorgeht, was wir unter V , U und U' zu verstehen haben.

Wir wollen nun die Stromkreise während der unendlich kleinen Zeit dt beobachten und alle Vorgänge in Rechnung ziehen. Die gesamte Energieänderung wird wiedergegeben sein durch $Ei dt + E'i' dt$, wenn wir unter E und E' die elektromotorischen Kräfte in

den beiden Kreisen verstehen. Diese Energieänderung wird sich erstens als Wärmewirkung zeigen — diese ist $w i^2 dt + w' i'^2 dt$ —, ferner als Änderung des Potentials der Ströme auf sich selbst $d\left(\frac{U i^2}{2}\right) + d\left(\frac{U' i'^2}{2}\right)$ und gegeneinander $d(V i i')$, schließlich als geleistete mechanische Arbeit, wenn die Ströme ihre gegenseitige Lage als auch die Gestalt ändern, was sich darstellen läßt durch $i i' dV + \frac{i^2}{2} dU + \frac{i'^2}{2} dU'$.

Wir erhalten somit die Gleichung

$$E i dt + E' i' dt = w i^2 dt + w' i'^2 dt + d\left(\frac{U i^2}{2}\right) + d\left(\frac{U' i'^2}{2}\right) + d(V i i') + i i' dV + \frac{i^2}{2} dU + \frac{i'^2}{2} dU'.$$

Führen wir die Differentiation durch und dividieren wir alle Glieder durch dt , so bleibt uns

$$E i + E' i' = w i^2 + w' i'^2 + U i \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dU}{dt} + U' i' \frac{di'}{dt} + i'^2 \frac{dU'}{dt} + V i' \frac{di}{dt} + V i \frac{di'}{dt} + 2 i i' \frac{dV}{dt}.$$

Dabei haben wir also gleich die gleichartigen Glieder zusammengezogen. Wegen der vollständigen Symmetrie muß sich diese Gleichung in zwei, eine für $E i$ und eine für $E' i'$, zerlegen lassen, welche der Form nach völlig übereinstimmen. Ein Blick über die Gleichung ergibt, daß dabei das letzte Glied $2 i i' \frac{dV}{dt}$ zu halbieren ist. Das Resultat ist somit

$$Ei = wi^2 + Ui \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dU}{dt} + Vi \frac{di'}{dt} + ii' \frac{dV}{dt},$$

$$E'i' = w'i'^2 + U'i' \frac{di'}{dt} + i'^2 \frac{dU'}{dt} + V'i' \frac{di}{dt} + ii' \frac{dV}{dt}.$$

Dividieren wir die eine dieser Gleichungen durch i , die andere durch i' , so bleibt uns

$$\begin{aligned} E &= wi + \frac{d}{dt}(Ui + Vi'), \\ E' &= w'i' + \frac{d}{dt}(U'i' + Vi). \end{aligned} \tag{22}$$

Man nennt diese Gleichungen auch manchmal die Grundgleichungen der elektrodynamischen Induktion. U , U' und V sind die Induktionskoeffizienten, U und U' die Koeffizienten der Selbstinduktion, V jener der gegenseitigen Induktion.

Haben wir nur einen Stromkreis, ist also

$$E' = i' = V = U' = 0,$$

so bleibt nur

$$E = wi + \frac{d}{dt}(Ui).$$

Wenn sich die Strombahn nicht ändert, so geht diese Gleichung über in

$$E = wi + U \frac{di}{dt}.$$

Wir erhalten also in Übereinstimmung mit § 54 die Gleichung für den Extrastrom, wenn wir dort $C = U$ setzen.

Die eingangs gegebene Form für die Induktionskoeffizienten gilt natürlich nur dann, wenn der um-

gebende Raum frei von magnetisierbaren Körpern ist. Ist dies nicht der Fall, so ändern sich die Gleichungen (22) ihrer Form nach zwar nicht, doch die Werte der Induktionskoeffizienten werden andere.

§ 57. Induktionsapparate — Transformatoren.

Wir denken uns zwei ineinander befindliche Drahtspulen, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert. Es ist dann ihre Selbstinduktion wie auch die gegenseitige von der Zeit unabhängig. In der einen Spule wirke die veränderliche elektromotorische Kraft E . Die Gleichungen (22) werden somit

$$\begin{aligned} E &= w i + U \frac{di}{dt} + V \frac{di'}{dt}, \\ 0 &= w' i' + U' \frac{di'}{dt} + V \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (23)$$

Es wird also der induzierte Strom i' lediglich durch die Änderung des primären Stroms i bestimmt werden.

Ist $\frac{di}{dt} = 0$, so folgt auch $i' = 0$.

Wir nehmen nun an, daß i eine rasche Änderung erfährt und dann wieder konstant bleibt. Es nimmt

also $\frac{di}{dt}$ für kurze Zeit einen positiven oder negativen

Wert an, vorher und nachher ist i konstant, daher

$\frac{di}{dt} = 0$. Über die Zeit τ der Stromänderung wollen

wir unsere Gleichung integrieren, erhalten also

$$\int_0^{\tau} w' i' dt + U' \int_0^{\tau} \frac{di'}{dt} dt = -V \int_0^{\tau} \frac{di}{dt} dt,$$

oder

$$w' \int_0^{\tau} i' dt + U' (i'_{\tau} - i'_0) = -V (i_{\tau} - i_0).$$

Zu Beginn und zu Ende der Zeit τ haben wir keinen Induktionsstrom, es ist daher $i'_{\tau} = i'_0 = 0$, folglich

$$w' \int_0^{\tau} i' dt = -V (i_{\tau} - i_0).$$

Wächst der Strom i , d. h. ist $i_{\tau} > i_0$, so wird der Induktionsstrom i' negativ sein; nimmt i hingegen ab, so ist i' positiv. i' wird um so größer ausfallen, je kleiner τ wird, d. h. je rascher der Strom i sich ändert, und je größer die gegenseitige Induktion V ist. Es ist jetzt auch ein leichtes, den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion experimentell zu bestimmen, da wir ja alle übrigen Größen unserer Gleichung leicht messen können.

Wir nehmen nun an, es sei in der primären Leitung eine periodische elektromotorische Kraft vorhanden, also

$$E = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t.$$

Das heißt, die primäre Leitung wird von einem Wechselstrom durchflossen. Es genügt dann für die Gleichungen (23) die Lösung

$$\begin{aligned} i &= a \sin \alpha t + b \cos \alpha t, \\ i' &= a' \sin \alpha t + b' \cos \alpha t. \end{aligned}$$

Führen wir nämlich diese Werte in die Gleichungen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A \sin \alpha t + B \cos \alpha t &= w a \sin \alpha t + w b \cos \alpha t \\ &+ U a \alpha \cos \alpha t - U b \alpha \sin \alpha t + V a' \alpha \cos \alpha t \\ &- V b' \alpha \sin \alpha t \end{aligned}$$

und

$$0 = w'a' \sin \alpha t + w'b' \cos \alpha t + U'a' \alpha \cos \alpha t \\ - U'b' \alpha \sin \alpha t + Va \alpha \cos \alpha t - Vb \alpha \sin \alpha t .$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn die Glieder mit $\sin \alpha t$ für sich einander gleich sind und ebenso jene mit $\cos \alpha t$. Wir können dann durch $\sin \alpha t$ bez. $\cos \alpha t$ kürzen und erhalten die vier Gleichungen

$$A = wa - Ub \alpha - Vb' \alpha , \\ B = wb + Ua \alpha + Va' \alpha , \\ 0 = w'a' - U'b' \alpha - Vba , \\ 0 = w'b' + U'a' \alpha + Va \alpha .$$

Diese vier Gleichungen reichen hin, um die Größen a , b , a' , b' zu bestimmen, womit auch der Verlauf des primären und sekundären Stroms gegeben ist.

Daraus ergeben sich mehrere wichtige Erscheinungen. Da A , B , a , b , a' , b' im allgemeinen voneinander verschieden sind, so besitzt sowohl der primäre als auch der sekundäre Strom gegenüber der elektromotorischen Kraft eine Phasenverschiebung, während die Stärke beider Ströme auch noch durch die Schwingungszahl, die Widerstände und die Induktionskoeffizienten bestimmt wird, was alles bei der Konstruktion von Induktionsapparaten und Transformatoren in Betracht zu ziehen ist.

§ 58. Oszillierende Entladung eines Kondensators.

Verbinden wir die beiden Belegungen eines Kondensators mit einer Funkenstrecke, zu welcher die Elektrizität durch einen sehr großen Widerstand, etwa eine nasse Schnur, geleitet wird, so sehen wir bei einer

Entladung nur einen einzigen Funken; ist hingegen der Widerstand der Zuleitung klein, so zeigt ein rotierender Spiegel, daß mehrere Funken hintereinander auftreten, daß wir es also mit mehreren aufeinanderfolgenden Entladungen zu tun haben.

Wir setzen nun voraus, die eine Belegung des Kondensators sei zur Erde abgeleitet, die andere befinde sich vor der Entladung auf dem Potential P_0 und enthalte die Elektrizitätsmenge Q_0 . Zu einer beliebigen Zeit t seien diese Größen etwa P und Q . Geht die Entladung vor sich, so entsteht in der Leitung ein Strom i , und es ist die Veränderung der Elektrizitätsmenge Q in der Zeit dt

$$dQ = -i dt$$

(§ 52). Ferner ist nach § 54 die elektromotorische Kraft oder, was dasselbe ist, der Potentialunterschied

$$P = w i + U \frac{di}{dt},$$

wenn U der Koeffizient der Selbstinduktion der Leitung ist. Zwischen P und Q besteht nun die Gleichung

$$Q = CP,$$

wobei C die Kapazität des Kondensators darstellt. Es ist also

$$\frac{Q}{C} = w i + U \frac{di}{dt},$$

woraus durch Differentiation nach der Zeit folgt

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} = w \frac{di}{dt} + U \frac{d^2i}{dt^2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\frac{dQ}{dt} = -i,$$

woraus die Gleichung folgt

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{w}{U} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{UC} = 0. \quad (24)$$

Das ist genau dieselbe Gleichung wie jene für ein Pendel im widerstehenden Mittel (Bd. I, § 10). Wir können also auch hier die Stromstärke

$$i = A e^{\alpha t}$$

setzen, woraus für α folgt

$$\alpha = -\frac{w}{2U} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4U^2} - \frac{1}{UC}}.$$

Ist somit $\frac{w^2}{4U^2} > \frac{1}{UC}$, so haben wir keine periodische Bewegung. Es tritt nur ein einziger Funke auf.

Ist hingegen $\frac{w^2}{4U^2} < \frac{1}{UC}$, so wird die Wurzel imaginär, wir haben eine periodische Bewegung vor uns, es tritt eine oszillierende Entladung ein.

Haben wir einen sehr kleinen Leitungswiderstand, so können wir in Gleichung (24) das Glied $\frac{w}{U} \cdot \frac{di}{dt}$ vernachlässigen, und wir erhalten

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{i}{UC}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine schwingende Bewegung von der Dauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{UC}.$$

§ 59. Elektrische Ströme in einem Dielektrikum.

Leiten wir die eine Belegung eines Plattenkondensators (§ 15) zur Erde ab, und es befindet sich zwischen den beiden Platten bloß Luft, so ladet sich die andere Belegung mit Elektrizität von der Dichte

$$\sigma = \frac{B}{4\pi\delta},$$

wenn wir unter B das Potential dieser Belegung verstehen. Ist zwischen den Platten ein Dielektrikum, so erhalten wir eine andere Dichte der Elektrizität

$$\sigma = \frac{KB}{4\pi\delta},$$

wobei wir die Konstante K die Dielektrizitätskonstante nennen. Die Oberflächendichte σ denken wir uns nun auf die Weise entstanden, daß innerhalb der Molekeln die positive und negative Elektrizität infolge der Einwirkung der elektromotorischen Kraft

$$F = \frac{B}{\delta}$$

getrennt wird. Wenn wir demnach senkrecht zur Richtung der Kraft F eine Fläche legen, so wird per Flächeneinheit, sobald F zu wirken beginnt, eine Elektrizitätsmenge σ hindurchgetrieben. Zerlegen wir demnach die elektromotorische Kraft in die drei Komponenten X, Y, Z, so sind die Elektrizitätsmengen, welche parallel den drei Achsen die Flächeneinheit passieren,

$$f = \frac{K}{4\pi} X, \quad g = \frac{K}{4\pi} Y, \quad h = \frac{K}{4\pi} Z.$$

Man pflegt die Größen f, g, h auch die Komponenten der elektrischen Verschiebung zu nennen. Ist Ψ

das Potential der Elektrizität, so haben wir

$$X = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Wir definierten die Stromstärke (§ 52) als die Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters durchfließt, und die Stromdichte als das Verhältnis zwischen Stromstärke und Querschnitt, d. i. die durch die Flächeneinheit per Zeiteinheit fließende Elektrizitätsmenge. Für eine elektrische Verschiebung in einem Dielektrikum haben wir somit für die Stromdichten parallel zu den drei Achsen

$$\begin{aligned} u &= \frac{df}{dt} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \\ v &= \frac{dg}{dt} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t}, \\ w &= \frac{dh}{dt} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (25)$$

§ 60. Allgemeine Gleichungen der Induktion.

Wir wollen die Beziehung aufstellen, welche zwischen den Komponenten der magnetischen Induktion a , b , c und den Komponenten der magnetischen Kraft α , β , γ besteht. Wie eine elektrische Kraft eine Verschiebung der Elektrizität, so bringt eine magnetische eine Verschiebung des Magnetismus hervor. Wird demnach ein Körper im magnetischen Feld (Fig. 33) von der (yz) -Ebene durchschnitten, so wird auf der linken Seite der Magnetismus von der Dichte

$$\sigma = k \alpha,$$

auf der rechten

$$\sigma = -k \alpha$$

frei. Denken wir uns anstatt der (yz) -Ebene also wirklich einen sehr schmalen Raum, so wird auf einen Punkt von der magnetischen Masse Eins von links die Kraft $2\pi\sigma$ ausgeübt, welche den Punkt in der Richtung der x -Achse zu treiben sucht. Dieselbe Kraft in derselben Richtung übt auch die rechte Seite aus. Der Punkt erfährt somit die Gesamtkraft $4\pi\sigma$. Diese Größe

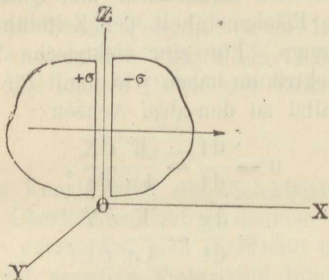


Fig. 33.

ist also auch die Zahl der pro Flächeneinheit induzierten Kraftlinien, welche noch zu den ursprünglich vorhandenen α hinzukommen. Wir haben somit als Zahl der Kraftlinien parallel zur x -Achse

$$a = \alpha + 4\pi\sigma = \alpha + 4\pi k\alpha = (1 + 4\pi k)\alpha = \mu\alpha,$$

wobei demnach

$$\mu = 1 + 4\pi k$$

nichts anderes als die magnetische Induktionskonstante ist. Ganz dieselbe Überlegung können wir natürlich auch für die übrigen Komponenten der Induktion machen, so daß wir die drei Gleichungen

$$\text{erhalten.} \quad a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = \mu\gamma \quad (26)$$

Nennen wir λ , μ , ν die Winkel, welche die Normale des Flächenelements dS mit den Koordinaten-

achsen einschließt, so können wir die Zahl N der Kraftlinien, welche durch die Fläche S gehen, durch

$$N = \iint (a \cos \lambda + b \cos \mu + c \cos \nu) dS \quad (27)$$

darstellen.

Nach den §§ 16 und 51 können wir das Potential eines magnetischen Feldes auf einen geschlossenen Strom durch die Zahl N der magnetischen Kraftlinien definieren, welche die vom Strom umflossene Fläche durchsetzen. Die durch Induktion in dem Leiter erzeugte elektromotorische Kraft E ist dann gegeben durch die Änderung des Potentials oder der Zahl der Kraftlinien nach der Zeit, also

$$E = \frac{dN}{dt}. \quad (28)$$

Diese elektromotorische Kraft in der Randkurve unserer Fläche ist natürlich immer vorhanden, auch wenn die Leitfähigkeit unendlich klein ist, d. h. es läßt sich diese Betrachtung auch unmittelbar auf einen Isolator übertragen.

Dividieren wir die elektromotorische Kraft E durch die Länge der Randkurve, so erhalten wir die elektromotorische Kraft per Längeneinheit. Sind deren Komponenten X , Y , Z , so läßt sie sich darstellen durch

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds};$$

für das Kurvenelement ds wird sie

$$\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds = X dx + Y dy + Z dz.$$

Die gesamte elektromotorische Kraft in der Randkurve läßt sich somit auch darstellen durch

$$E = \int (X dx + Y dy + Z dz) = \iiint \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \mu + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \nu \right] dS, \quad (29)$$

wenn wir den Stokesschen Satz (§ 46) zu Hilfe nehmen. Aus den Gleichungen (27) und (28) folgt nun

$$E = \frac{dN}{dt} = \iiint \left(\frac{da}{dt} \cos \lambda + \frac{db}{dt} \cos \mu + \frac{dc}{dt} \cos \nu \right) dS.$$

Bringen wir diese Gleichung in Übereinstimmung mit Gleichung (29), so folgt, wenn wir noch überlegen, daß nach den Gleichungen (26)

$$a = \mu \alpha, \quad b = \mu \beta, \quad c = \mu \gamma$$

ist,

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ \mu \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \quad (30)$$

§ 61. Die Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren.

Die Gleichungen für die Beziehung zwischen den Komponenten der Stromdichte und den von ihnen erzeugten magnetischen Kräften, welche wir in § 41 fanden, lassen sich, wenn wir die Koordinaten anstatt mit a, b, c mit x, y, z bezeichnen, leicht in die Form bringen:

$$\begin{aligned}
 -4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\
 -4\pi v &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\
 -4\pi w &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Diese ergeben mit den Gleichungen (25)

$$\begin{aligned}
 -K \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\
 -K \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\
 -K \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Durch partielle Differentiation der ersten dieser Gleichungen nach der Zeit erhalten wir

$$-K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right).$$

Die Werte für $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ können wir nun den Gleichungen (30) entnehmen und erhalten so

$$\mu K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}.$$

Addieren und subtrahieren wir gleichzeitig $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, so können wir unsere Gleichung schließlich in die Form bringen:

$$\begin{aligned}
 \mu K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right).
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Das letzte Glied dieser Gleichung wird aber gleich Null, wenn von vornherein keine elektrischen Ladungen im Raum vorhanden sind, da dann auch weiterhin keine freie Elektrizität im Innern des Isolators auftreten kann (§ 20). Es bleibt somit nur

$$\mu K \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}.$$

Aus § 52 wissen wir, daß die Stromstärke, in elektrostatischem Maß gemessen, V mal größer ist als in elektromagnetischem. Bei der elektromotorischen Kraft ist es umgekehrt. Wir wollen die elektromotorischen Kräfte X , Y , Z und ebenso die Komponenten u , v , w der Stromdichte von nun an in elektrostatischem Maß ausdrücken. Die magnetischen Kräfte α , β , γ messen wir in elektromagnetischen Einheiten. Die Gleichungen (31) haben demnach zu lauten:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi u}{V} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ -\frac{4\pi v}{V} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ -\frac{4\pi w}{V} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise haben wir die Gleichungen (30) umzuformen in

$$\begin{aligned} V \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) &= \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ V \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) &= \mu \frac{\partial \beta}{\partial t}, \\ V \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) &= \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Es wird dann Gleichung (33) und analog noch die zwei zugehörigen für die Elektrizitätsbewegung parallel zur y- und z-Achse:

$$\begin{aligned}\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \\ \frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}, \\ \frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (34)$$

Dieselben Gleichungen, welche wir hier für die elektrischen Kräfte erhalten haben, ergeben sich auch für die magnetischen Wirkungen. Wir brauchen ja nur die Gleichungen (30) nach der Zeit t partiell zu differenzieren und die Werte für $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$ aus den Gleichungen (32) einzuführen. Es ergeben sich dann, wenn wir wieder, wie es gewöhnlich geschieht, die elektrischen Größen in elektrostatischen Einheiten, die magnetischen Größen in elektromagnetischem Maß messen, nach demselben Vorgehen wie bei den elektrischen Kräften für die magnetischen Kräfte die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}, \\ \frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}, \\ \frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2},\end{aligned}\quad (35)$$

indem wir ja auch hier

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

setzen können (§ 28), da wir von vornherein keine magnetischen Massen in dem von uns betrachteten Raum voraussetzen.

§ 62. Elektrische Wellen.

Zur Erläuterung der im vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Grundgleichungen für die Elektrizitätsbewegung in Isolatoren wollen wir folgenden speziellen Fall betrachten. Wir nehmen an, es sei in unserem Isolator eine elektrische Störung vorhanden, indem etwa irgendwo eine elektrische Entladung stattfindet. Diese Störung sei nun derart, daß sie in allen Punkten einer zur yz -Ebene parallelen Ebene einen konstanten Wert besitzt. Das heißt, von den Ordinaten y und z sind alle vorkommenden Größen unabhängig. Es vereinfachen sich daher die Gleichungen (34) in folgende:

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.$$

Aus dem vorhergehenden Paragraphen wissen wir nun weiter, daß

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

ist, und nach dem Obigen muß

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

folglich auch

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

sein, so daß sich die erste unserer drei Bewegungsgleichungen auf

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

reduziert. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $X = 0$ ist, d. h. parallel zur x -Achse keine elektrische Kraft wirkt.

Die Richtung der elektrischen Krafrichtung erfolgt also parallel zur yz -Ebene. Wir werden somit unser Koordinatensystem immer so drehen können, daß die y -Achse mit der Richtung der Kraftwirkung zusammenfällt. Wir haben dann keine elektrische Wirkung parallel zur z -Achse. Es ist also auch $Z = 0$, und es bleibt uns nur die Gleichung

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{V^2}{\mu K} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (36)$$

Das ist aber genau dieselbe Gleichung wie jene für die Transversalschwingungen von Saiten (Bd. I, § 78), wenn wir die Größe

$$\frac{V^2}{\mu K} = a^2$$

setzen. Als allgemeine Lösung für die Gleichung (36) fanden wir (Bd. I, § 68)

$$Y = f(x - at),$$

woraus ohne weiteres folgt, daß sich die elektrische Störung mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{V}{\sqrt{\mu K}},$$

parallel zur x-Achse fortpflanzt. Wir haben es also hier wie bei den Transversalschwingungen der Saiten mit Transversalwellen zu tun. Während die elektrische Bewegung parallel zur y-Achse stattfindet, erfolgt die Fortpflanzung des elektrischen Zustands parallel zur x-Achse. Für den leeren Raum und nahezu auch für den luffterfüllten ist $\mu = K = 1$, daher

$$a = V.$$

Das heißt: es pflanzen sich hier die elektrischen Wellen mit der Geschwindigkeit V fort.

§ 63. Magnetische Wellen.

Nach den von uns im vorhergehenden Paragraphen gemachten Voraussetzungen vereinfachen sich auch die Gleichungen (35) für die magnetischen Kräfte. Wir erhalten vorerst

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

folglich nach der Gleichung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

auch

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

und wir genügen mit dem Wert $\alpha = 0$ unseren Gleichungen. Nach der zweiten der Gleichungen (30) wird $\beta = 0$, da ja X und Z ebenfalls Null sind. Es bleibt uns somit nur die dritte der Gleichungen (30) in der Form

$$\frac{\mu}{V} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

für Y fanden wir aber im vorhergehenden Paragraphen die Lösung

$$Y = f(x - at),$$

woraus folgt

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = f'(x - at),$$

somit

$$\frac{\mu}{V} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} = f'(x - at),$$

was nach t integriert ergibt

$$\frac{\mu}{V} \gamma = -\frac{1}{a} f(x - at),$$

oder wegen $a = \frac{V}{\sqrt{\mu K}}$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{K}{\mu}} f(x - at).$$

Es gilt also für die magnetische Kraftwirkung dieselbe Funktion wie für die elektrische, nur erfolgt sie parallel zur z-Achse. Es ist die Richtung der magnetischen Kraft senkrecht auf der Richtung der elektrischen, und beide sind wieder senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der elektrischen bez. magnetischen Veränderungen.

§ 64. Die elektromagnetische Lichttheorie.

Maxwell nahm an, daß die Lichtschwingungen nichts anderes als elektrische Schwingungen seien, weshalb man die von ihm begründete Theorie des Lichts die elektromagnetische nennt. Aus der Gleichung (36) geht unmittelbar hervor, daß auch eine periodische Funktion der Zeit, wie sie für die Lichtschwingungen gilt, als Lösung angesehen werden kann. Für alle durchsichtigen Körper kann die magnetische Induktionskonstante $\mu = 1$ gesetzt werden. Es ist somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener elektrischer Wellen durch

$$a = \frac{V}{\sqrt{K}}$$

gegeben. Für das Licht fanden wir jedoch (Bd. II, § 12)

$$a = \frac{V}{n},$$

wobei wir unter V die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen im leeren Raum verstehen, die mit der Lichtgeschwindigkeit daselbst identisch ist (§ 52). Es folgt somit, daß

$$K = n^2$$

sein muß, d. h. die Dielektrizitätskonstante ist gleich

dem Quadrat des Brechungsexponenten, was tatsächlich für viele Körper experimentell nachgewiesen wurde.

Diese Beziehung und der Umstand, daß das Verhältnis der in elektrostatischen Einheiten gemessenen Elektrizitätsmenge zu jener in elektromagnetischen Einheiten gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, veranlaßte Maxwell zur Aufstellung seiner so epochemachenden Theorie, welche bereits auf die meisten optischen Erscheinungen, wie Polarisation, Doppelbrechung, Dispersion usw., Anwendung gefunden hat.

Als Lehrbücher zu ausführlicheren Studien sind zu empfehlen:

- V. von Lang, Einleitung in die theoretische Physik.
 C. Christiansen, Elemente der theoretischen Physik.
 R. Clausius, Die Potentialfunktion und das Potential.
 B. Riemann, Schwere, Elektrizität und Magnetismus.
 F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.
 — — Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion.
 — — Vorlesungen über elektrische Ströme.
 E. Mascart et J. Joubert, Leçons sur l'électricité et le magnétisme.
 J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus.
 L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes.
 H. v. Helmholtz, Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes.



==== Im gleichen Verlage erschienen ferner: ====

Physikalische Aufgabensammlung

Von

G. Mahler,

Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm.

Mit den Resultaten.

Preis: in Leinwand gebunden 80 Pfennige.

(Sammlung Göschen Nr. 243.)



Bei dem engen Rahmen eines Bändchens der „Sammlung Göschen“ war eine sehr sorgfältige Auswahl aus dem großen physikalischen Übungsmaterial geboten; nur Aufgaben über tatsächliche und rein physikalische Verhältnisse konnten aufgenommen werden, während alle Beispiele mit mehr mathematischem Charakter ausgeschlossen werden mußten. Ganz einfache Aufgaben und Fragen, wie sie der Übungsstoff eines jeden Lehrbuches enthält und wie solche der ersten Einführung in die Physik dienen, wurden ebenfalls übergangen. Die größere Zahl der dargebotenen Aufgaben findet ihre Erledigung durch Rechnung; jedoch finden sich auch Beispiele für die Konstruktion und die graphische Behandlung. Die Lösung sämtlicher Beispiele setzt die Kenntnis der wichtigsten physikalischen Gesetze und Prinzipien voraus, wie auch eine gewisse Gewandtheit im elementaren und mathematischen Rechnen. Die Resultate der Aufgaben enthalten nur in schwierigeren Fällen Andeutungen zur Lösung. Im Text ist stets auf klare, anschauliche Darstellung, zuverlässiges Zahlenmaterial und streng wissenschaftliche Grundlage gehalten worden.

Da sich ein erfolgreicher physikalischer Unterricht nicht bloß auf den Vortrag und das Experiment beschränken darf, sondern von Übungen begleitet sein muß, in denen die physikalischen Gesetze in den verschiedensten Kombinationen zur Anwendung gelangen, so dürfte die vorliegende Sammlung der Schule und dem Privatstudium ein wesentliches und brauchbares Hilfsmittel zur sicheren Einführung in das große Gebiet der Physik sein.

Physikalische Formelsammlung

Von

G. Mahler,

Professor am Gymnasium in Ulm.

Zweite, verbesserte Auflage. Mit 65 Figuren.

(Sammlung Göschen Nr. 136.)



Diese Formelsammlung enthält die Hauptgesetze der Experimentalphysik und diejenigen Formeln, die sich mit den Hilfsmitteln der niederen Mathematik ableiten lassen. Dabei ist deren Herleitung in den meisten Fällen kurz angedeutet. Letztere Einrichtung ermöglicht es, das Bändchen nicht bloß als Nachschlagemittel, sondern auch bei der Durchnahme und Wiederholung des physikalischen Lehrstoffs mit Erfolg zu benützen.



G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Kleine Chemische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

Jedes Bändchen in Leinwand gebunden 80 Pfennige

- Allgemeine und physikalische Chemie** von Dr. Max Rudolphi, Dozent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- Stereochemie** von Dr. E. Wedekind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
- Anorganische Chemie** von Dr. Johs. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- Metalloide (Anorganische Chemie I)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
- Metalle (Organische Chemie II)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
- Organische Chemie** von Dr. Johs. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- Chemie der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart **I. II:** Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.
- — **III:** Karbocyclische Verbindungen. Nr. 193.
- — **IV:** Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- Maßanalyse** von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.
- Chemisch-technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schulè in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
- Physiologische Chemie** von Dr. med. A. Legahn in Berlin **I:** Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
- — **II:** Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.
- Allgemeine chemische Technologie** von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Anorganische chemische Industrie** von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg **I:** Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- — **II:** Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
- — **III:** Anorganische chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.
- Die Teerfarbstoffe** mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Professor an der Königl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.
- Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gustav Rauter **I:** Glas- und keramische Industrie Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
- — **II:** Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Sammlung Götschen

Je in elegantem
Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Murner, Thomas.** Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.
- Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen,** von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121.
- Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre)** v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.
- Musikgeschichte des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.
- Musiklehre, Allgemeine,** v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.
- Mythologie, Deutsche,** von Dr. Friedrich Kauffmann, Professor an der Universität Kiel. Nr. 15.
— siehe auch: Götter- u. Heldensage. — Heldensage.
- Nautik.** Kurzer Abriss des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Theils der Schifffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.
- Nibelunge, Der, Nöt** in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.
— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.
- Hubpflanzen** von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftlichen Versuchsanstalt Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.
- Pädagogik im Grundriß** von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität Jena. Nr. 12.
— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
- Paläontologie** v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.
- Perspektive** nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Frenberger, Sachlehrer an der Kunstgewerbeschule in Magdeburg. Mit 88 Abbildungen. Nr. 57.
- Petrographie** von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.
- Pflanze, Die,** ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.
- Pflanzenbiologie** von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
- Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie** von Dr. W. Migula, Professor an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.
- Pflanzenreich, Das.** Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und befanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Professor an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Figuren. Nr. 122.
- Pflanzenwelt, Die, der Gewässer** von Dr. W. Migula, Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.
- Philosophie, Einführung in die.** Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Photographie.** Von Prof. H. Kefler, Sachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbild. Nr. 94.
- Physik, Theoretische,** I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.
— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.
— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

- Plastik, Die, des Abendlandes** von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.
- Poetik, Deutsche**, von Dr. K. Borinski, Dozent a. d. Univ. München. Nr. 40.
- Posamentiererei**. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Psychologie und Logik** zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Psychophysik, Grundriss der**, von Dr. G. S. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.
- Rechnen, Kaufmännisches**, von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.
- Rechtslehre, Allgemeine**, von Dr. Th. Sternberg in Charlottenburg. I: Die Methode. Nr. 169.
— II: Das System. Nr. 170.
- Redelehre, Deutsche**, v. Hans Probst, Gymnasiallehrer in München. Mit einer Tafel. Nr. 61.
- Religionsgeschichte, Indische**, von Professor Dr. Edmund Hardy in Bonn. Nr. 83.
— — siehe auch Buddha.
- Religionswissenschaft, Abriss der vergleichenden**, von Prof. Dr. Th. Achelt in Bremen. Nr. 208.
- Roman**. Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.
- Russisch-Deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.
- Russisches Lesebuch** mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 67.
— — siehe auch: Grammatik.
- Sachs, Hans, u. Johann Fischart**, nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
- Schattenkonstruktionen** v. Prof. J. Vonderlinn in Breslau. Mit 114 Fig. Nr. 236.
- Schmaroher u. Schmaroherthum in der Tierwelt**. Erste Einführung in die tierische Schmaroherkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Gießen. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.
- Schulpraxis**. Methodik der Volksschule von Dr. R. Senfert, Schuldirektor in Olsnitz i. V. Nr. 50.
- Simplicius Simplicissimus** von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. S. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.
- Sociologie** von Prof. Dr. Thomas Achelt in Bremen. Nr. 101.
- Spitzenfabrikation**. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- Sprachdenkmäler, Gotische**, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen in Breslau. Nr. 79.
- Sprachwissenschaft, Indogermanische**, v. Dr. R. Meringer, Prof. a. d. Univ. Graz. Mit einer Tafel. Nr. 59.
— **Romanische**, von Dr. Adolf Zauner, k. k. Realschulprof. in Wien. Nr. 128.
- Stammeskunde, Deutsche**, von Dr. Rudolf Much, Privatdozent an d. Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.
- Statik, I. Teil**: Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, diplom. Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.
— — II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.
- Stenographie**. Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungs-system Stolze-Schren) nebst Schlüssel, Lesestücke u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer d. Kadettenhauses in Oranienstein. Nr. 86.

Sammlung Götschen

Je in elegantem
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Stereochemie** von Dr. E. Wedekind, Privatdozent an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.
- Stereometrie** von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.
- Stilkunde** von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.
- Technologie, Allgemeine chemische**, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Teerfarbstoffe, Die**, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Privatdozent an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.
- Telegraphie, Die elektrische**, von Dr. Lud. Kellstab. M. 19 Fig. Nr. 172.
- Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerel, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur** von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.
- II: Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
- Tiergeographie**, von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.
- Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner**, Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.
- Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle**, von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
- Trigonometrie, Ebene und Sphärische**, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Figuren. Nr. 99.
- Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart** von Dr. Paul Stöžner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.
- Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moriz Hoernes**, Prof. an der Univ. Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 42.
- Versicherungsmathematik** von Dr. Alfred Coewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.
- Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.
- Volkslied, Das deutsche**, ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.
- Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs**, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 133.
- Volkswirtschaftspolitik** von Geh. Regierungsrat Dr. R. van der Borgh, vortr. Rat im Reichsamt des Innern in Berlin. Nr. 177.
- Waltherlied, Das**, im Versmaße der Urdrift überfetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.
- Walther von der Vogelweide** mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Guntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.
- Warenkunde**, von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie. 1. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
- Wärme. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme.** Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.
- Wäscherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Sammlung Göschens

Je in elegantem
Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschens'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Webererei. Textil-Industrie II: Webererei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Wechselkunde von Dr. Georg Funt in Mannheim. Mit vielen Formularen. Nr. 103.

Wirkerei. Textil-Industrie II: Webererei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Strazburg. Auswahl aus dem hof. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskolleg. 3. Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch, nach der neuen deutsch. Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** v. Dr. Ferd. Dettler, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck u. 135 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an d. Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearb. v. Prof. J. Vonderlinn, diplom. und staatl. gepr. Ingenieur in Breslau. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Göschens Kaufmännische Bibliothek

Sammlung praktischer kaufmännischer Handbücher, die nach ihrer ganzen Anlage berufen sein sollen, sowohl im kaufmännischen Unterricht als in der Praxis wertvolle Dienste zu leisten.

Bd. 1: Deutsche Handelskorrespondenz von Robert Stern, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Dozent an der Handelshochschule zu Leipzig. Geb. M. 1.80.

Bd. 2: Deutsch-Französische Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Geb. M. 3.—.

Bd. 3: Deutsch-Englische Handelskorrespondenz von John Montgomery, Director, and Hon Secy, City of Liverpool School of Commerce, University College in Liverpool. Geb. M. 3.—.

Bd. 4: Deutsch-Italienische Handelskorrespondenz von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Geb. M. 3.—.

Bd. 5: Deutsch-Portugiesische Handelskorrespondenz von Carlos Helbling, Professor am Nationalkolleg und am polytechn. Liceum in Lissabon. Geb. M. 3.—.

Sammlung Schubert.

Sammlung mathematischer Lehrbücher,
die, auf wissenschaftlicher Grundlage beruhend, den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und zugleich durch eine leicht faßliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände:

- 1 Elementare Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.
- 2 Elementare Planimetrie von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.
- 3 Ebene und sphärische Trigonometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.—.
- 4 Elementare Stereometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.40.
- 5 Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.60.
- 6 Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.
- 7 Ebene Geometrie der Lage von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.
- 8 Analytische Geometrie der Ebene von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.
- 9 Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.
- 10 Differentialrechnung von Prof. Dr. Frz. Meyer in Königsberg. M. 9.—.
- 11 Elemente der darstellenden Geometrie von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.
- 12 Differentialgleichungen von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Auflage. M. 8.—.
- 13 Praxis der Gleichungen von Professor C. Runge in Hannover. M. 5.20.
- 14 Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungs-Rechnung von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.
- 15 Versicherungsmathematik von Dr. W. Grossmann in Wien. M. 5.—.
- 16 Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.
- 17 Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen von Professor Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.
- 18 Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80.
- 19 Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 8.50.

Sammlung Schubert.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- | | |
|--|---|
| 32 Theorie und Praxis der Reihen von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—. | 42 Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—. |
| 34 Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—. | 44 Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen u. Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80. |
| 35 Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—. | 45 Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80. |
| 39 Thermodynamik I. Teil von Professor Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—. | 46 Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50. |
| 40 Mathematische Optik von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—. | 48 Thermodynamik II. Teil von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—. |
| 41 Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—. | |

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

- | | |
|--|--|
| Integralrechnung von Professor Dr. Franz Meyer in Königsberg. | Allgem. Formen- u. Invariantentheorie v. Prof. Dr. Jos. Wellstein in Gießen. |
| Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg. | Mehrdimensionale Geometrie II. Teil von Professor Dr. P. H. Schoute in Groningen. |
| Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg. | Liniengeometrie II. Teil von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. |
| Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie von Professor Erich Geyger in Kassel. | Kinematik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe. |
| Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. von Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München. | Angewandte Potentialtheorie von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg. |
| Dynamik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe. | Elektromagnet. Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. |
| Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe. | Gruppen- u. Substitutionentheorie von Prof. Dr. E. Netto in Gießen. |
| Geodäsie von Professor Dr. A. Galle in Potsdam. | Theorie der Flächen dritter Ordnung. |
| Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg. | Mathematische Potentialtheorie. |
| Räumliche projektive Geometrie. | Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin. |
| Geometrische Transformationen II. Teil von Professor Dr. Karl Doehle- mann in München. | Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin. |
| Theorie d. höh. algebraischen Kurven v. Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. | Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Prag. |
| Elliptische Funktionen. | Höhere Differentialgleichungen von Prof. J. Horn in Clausthal. |
| | Nicht-Euklidische Geometrie von Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. |

25.01
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
in Leipzig.

Elemente der Stereometrie

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller.

- I. Band: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis broschirt M. 6.—, gebunden M. 6.60.
- II. Band: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit 156 Figuren. Preis broschirt M. 10.—, gebunden M. 10.80.
- III. Band: **Die Untersuchung und Konstruktion schwierigerer Raumgebilde.** Mit 126 Figuren. Preis broschirt M. 9.—, gebunden M. 9.80.
- IV. Band: **Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen.** Mit 89 Figuren. Preis broschirt M. 9.—, gebunden M. 9.80.

Dieses Werk dürfte wohl einzig in seiner Art dastehen, denn in so umfassender und gründlicher Weise ist die Stereometrie noch nicht behandelt worden. Das Wort „elementar“ ist dabei so zu nehmen, daß die höhere Analysis und im allgemeinen auch die analytische Raumgeometrie ausgeschlossen bleiben, während die synthetische neuere Geometrie in den Kreis der Betrachtungen hineingezogen wird, soweit es die Methoden der darstellenden Geometrie erfordern.

Alle Figuren, auf die ganz besondere Sorgfalt verwendet worden ist, sind streng konstruiert und fast jede ist ein Beispiel der darstellenden Geometrie.

Trotz des elementaren Charakters geht diese neue Stereometrie weit über das übliche Ziel hinaus, gibt neben den Lehrsätzen umfangreiches Übungsmaterial, betont die Konstruktion und die Berechnung gleichmäßig und wird somit an Vielseitigkeit und Gediegenheit des Inhalts wohl von keinem der hervorragenderen Lehrbücher erreicht.

Biblioteka Główna
Zachodniopomorskiego Uniwersytetu
Technologicznego w Szczecinie

CZ-I.209/3



100-000209-03-0

ARCHIWALIA

ARCHIWALIA