

Sammlung Göschen

Theoretische Physik

II

VON

Dr. Gustav Jäger

ammlung Götschen.

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen.

Jede Nummer in elegantem Leinwandband 80 Pf. +

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“ ist, dem gebildeten Laien eine klare, leichtverständliche Einführung in Gebiete zu verschaffen, die seinen besonderen Studien, seinem eigentlichen Berufe ferner liegen. Bei dem Streben nach allgemeiner Bildung einerseits, dem Mangel an Zeit, sich intensiver mit Nebenbeschäftigungen abzugeben andererseits, wird es heutzutage jedem, der sich unterrichten und vorwärts kommen will, schwer, den rechten Weg zu finden: hier setzt nun die „Sammlung Götschen“ ein und bietet in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und den neuesten Fortschritten und Forschungen beruhend, aber dabei doch in einer jedermann leicht verständlichen Form, zuverlässige Belehrung. Jedes einzelne Gebiet ist vollständig selbständig vertreten, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es erst einmal vollendet vorliegt, eine große, einheitliche, systematisch sich entwickelnde Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Dem Fachmann aber sind die Bändchen praktische Repetitorien und Nachschlagebücher, die in übersichtlicher, alle Meinungen und Richtungen zusammenfassender, völlig objektiver Weise den modernsten allgemeinen Stand der betreffenden Wissenschaft etc. wiedergeben und somit auch ihm von Nutzen sind.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Akustik siehe: Physik, Theoret., I.

Algebra siehe: Arithmetik.

Alpen, Die, von Prof. Dr. Rob. Sieger. Mit vielen Abbildungen. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, von Dr. Franz Fuhse. Mit vielen Abbildungen. Nr. 124.

Altertumskunde, Griech., von Prof. Dr. Rich. Maiß und Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Holzbildern. Nr. 16.

Altertumskunde, Römische, von Dr. Leo Bloch. Mit 7 Holzbildern. Nr. 45.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junfer. Mit 63 Fig. Nr. 87.

— — **II:** Integralrechnung. Von Dr. Frdr. Junfer. Mit 87 Fig. Nr. 88.

— **Niedere**, v. Dr. Bened. Sporer. Mit 6 Figuren. Nr. 53.

Anthropologie siehe: Menschliche Körper, Der.

Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. F. Schubert. Nr. 47.

— **Beispielsammlung** von Prof. Dr. F. Schubert. Nr. 48.

Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Prof. Dr. W. Wislicenus. Mit 36 Abbild. u. einer Sternkarte. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper. Von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. Mit 11 Abbildungen. Nr. 91.

Aufsatz-Entwürfe v. Prof. Dr. L. W. Straub. Nr. 17.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. R. Schäfer. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.

Bewegungsspiele v. Prof. Dr. E. Kohlrausch. Mit 14 Abbild. Nr. 96.

Botanik siehe: Nutzpflanzen, — Pflanze, — Pflanzenbiologie, — Pflanzenreich.

Brant siehe: Sachs.

Buchführung. Lehrgang der einfachen und doppelten Buchhaltung von Oberlehrer Robert Stern. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Burgenkunde von Hofrat Dr. D. Piper. Mit 29 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi. Nr. 71.

— **Anorganische**, von Dr. Jos. Klein. Nr. 37.

— **Organische**, v. Dr. Jos. Klein. Nr. 38.

Cid, Der, siehe: Herber.

Dichtkunst siehe: Poetik.

Dietrichen siehe: Rudrun.

Differentialrechnung siehe: Analysis, Höhere, I.

Elektrizität siehe: Physik, Theoretische, III.

Ethik von Prof. Dr. Th. Achelis. Nr. 90.

Fischart, Johann, siehe: Sachs

Formelsammlung, Mathe-

matische, und Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathemat. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von Prof. D. Th. Bülken. Mit 18 Figuren. Nr. 51

Forstwissenschaft von Prof. Dr. Ad. Schwappach. Nr. 106.

Fremdwort, D., i. Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul. Nr. 55.

Theoretische Physik

II

Licht und Wärme

V 386

von

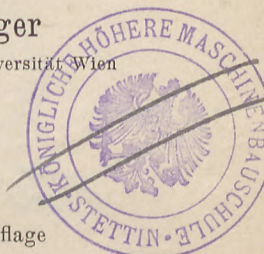
Dr. Gustav Jäger

Professor der Physik an der Universität Wien



Mit 47 Figuren

Zweite, verbesserte Auflage



Incl. B. 24.

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1901



535/6



208/2

Alle Rechte, insbesondere das Uebersetzungsrecht
von der Verlagshandlung vorbehalten.



CZ-I.208/2

Meinem guten Kameraden

Hertha

gewidmet.

I n h a l t.

Seite

Die Lehre vom Licht.

1.	Geradlinige Fortpflanzung — Beleuchtung — Photometrie	9
2.	Reflexionsgesetz — ebener Spiegel	11
3.	Kugelspiegel — Gegenstands- und Bildweite — Brennpunkt	13
4.	Bilder von Kugelspiegeln mit kleiner Oeffnung	16
5.	Brechungsgesetz — Brechungs exponent — geometrische Optik — Katoptrik — Dioptrik	17
6.	Der Regenbogen	19
7.	Abbildung eines Punkts durch eine brechende Kugelfläche — Brennpunkte — Brennweiten	24
8.	Bildgrösse	26
9.	System zweier brechender, centrierter Kugelflächen — Linsen	27
10.	Hauptebenen — Hauptpunkte	30
11.	Biconvexe Linse	34
12.	Huyghens'sches Prinzip	36
13.	Fermats Satz	37
14.	Interferenz	40
15.	Fresnels Spiegelversuch	40
16.	Farben dünner Blättchen	44
17.	Newtons Farbenglas	51
18.	Wirkung dünner Blättchen bei schief auffallendem Licht — Talbot's Linien	52
19.	Beugung des Lichts	54
20.	Beugung durch eine Spalte	57
21.	Beugung durch zwei Spalten — Interferenzversuche von Young und Arago	59
22.	Frauenhofers Gitter	62
23.	Polarisation des Lichts bei der Reflexion — Gleichungen von Fresnel	64
24.	Doppelbrechung	74
25.	Elliptische und zirkuläre Polarisation	77
26.	Polarisationsapparat — Turmalinzange — senkrecht einfallendes Licht	80
27.	Schief einfallendes Licht	83
28.	Totale Reflexion	85
29.	Elliptische Polarisation durch totale Reflexion	88

Die Lehre von der Wärme.

Wärmeleitung.

§ 30.	Wärmemenge — Temperatur — spezifische Wärme — Wärmekapazität	91
§ 31.	Gleichung der Wärmeleitung in einem Stab	93
§ 32.	Stationärer Zustand	97
§ 33.	Wärmeleitung in einem Ring	99
§ 34.	Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung unter der Erdoberfläche	101
§ 35.	Gleichung der Wärmeleitung in einem isotropen Körper — Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeits- strömung	104
§ 36.	Gleichung der Wärmeleitung in einer Kugel	105
§ 37.	Das Temperaturgefälle in der Erdrinde	106
§ 38.	Abkühlung der Erde	110

Mechanische Wärmetheorie.

§ 39.	Zustand eines Körpers — Zustandsgleichung idealer Gase — absolute Temperatur	112
§ 40.	Umwandelbarkeit der Wärme in Arbeit und der Arbeit in Wärme — mechanisches Wärmeäquivalent — äussere und innere Arbeit — erster Hauptsatz	113
§ 41.	Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck	114
§ 42.	Adiabatische Zustandsänderungen	116
§ 43.	Kreisprozess	118
§ 44.	Entropie — zweiter Hauptsatz	121
§ 45.	Unabhängigkeit des zweiten Hauptsatzes von der Natur der Körper — thermisches perpetuum mobile	123
§ 46.	Anwendung der beiden Hauptsätze	125
§ 47.	Verdampfungswärme — Schmelzwärme — gesättigter Dampf — Schmelzpunkt	128
§ 48.	Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Körpers	129
§ 49.	Temperaturänderung durch Dehnung	130

Die kinetische Theorie der Gase.

§ 50.	Die Wärmebewegung in Gasen	132
§ 51.	Boyle-Charles'sches Gesetz	133
§ 52.	Regel von Avogadro-Gesetze von Gay-Lussac und Dalton- Geschwindigkeit der Molekeln	136
§ 53.	Abweichungen vom Boyle-Charles'schen Gesetz — Zustands- gleichung von van der Waals	138
§ 54.	Kritische Temperatur — kritischer Druck — kritisches Volumen	141
§ 55.	Spannungs- und Ausdehnungskoeffizient	144
§ 56.	Spezifische Wärme	146
§ 57.	Stosszahl und mittlere Weglänge der Molekeln	148
§ 58.	Innere Reibung	151
§ 59.	Wärmeleitung	155
§ 60.	Grösse der Molekeln	156

Die Lehre vom Licht.

§ 1. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts — Beleuchtung — Photometrie.

In der Lehre vom Licht, der Optik, behandeln wir die ausserhalb unseres Auges liegenden Ursachen der Lichterscheinungen. Es ist hier ähnlich wie bei den Schallerscheinungen (Bd. I.). Wie wir dort als die Ursache des Schalls einen schwingenden Körper annahmen, der seine Bewegungen auf die Luft überträgt, die sie dann an unser Ohr abgibt, so müssen wir hier die Ursache des Lichts ebenfalls in Bewegungszuständen der kleinsten Teilchen eines Körpers suchen. Damit diese Bewegung fortgepflanzt werden kann, ist es aber nötig, die Voraussetzung zu machen, dass der ganze Raum mit einem sehr feinen Stoff, dem sogenannten Lichtäther angefüllt ist, den wir als Träger des Lichts ansehen. Auf diese Weise gelangt das Licht in unser Auge und bewirkt die Gesichtsempfindungen.

Aus dieser Auffassungsweise ergibt sich sofort, dass sich das Licht ebenso wie der Schall, wenn das Fortpflanzungsmedium überall gleichartig beschaffen ist,

wegen der allseitigen Symmetrie nur geradlinig fortpflanzen kann, wie es ja auch die Erfahrung bestätigt.

Die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit eines Körpers von einem leuchtenden Körper erfährt, können wir die Beleuchtungsstärke nennen. Ist die Lichtquelle punktförmig, so wird jede Kugelfläche, welche wir um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt schlagen, gleich viel Licht empfangen. Daraus geht ohne weiteres hervor, dass die Beleuchtungsstärke verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des beleuchteten Körpers von der Lichtquelle sein muss.

Aber es ist auch nicht gleichgiltig, ob das Licht senkrecht oder schief die Oberfläche des beleuchteten Körpers trifft. Nennen wir den Winkel der Flächennormale mit dem auffallenden Lichtstrahl α , so ist leicht ersichtlich, dass die Beleuchtungsstärke dem $\cos \alpha$ proportional ist, da sich ja das Licht auf einen umso kleineren Raum zusammendrängt, je kleiner der Winkel α ist. Wir können demnach für die Beleuchtungsstärke B einer ebenen Fläche die Formel

$$B = \frac{C \cos \alpha}{r^2}$$

aufstellen, wenn r die Entfernung der Lichtquelle von der beleuchteten Fläche ist.

Die Grösse C hängt nur von der Natur der Lichtquelle ab. Hiefür lehrt nun die Erfahrung, dass auch die Menge des ausgesandten Lichts dem Cosinus des Winkels β proportional ist, welchen der ausgesandte Strahl mit der Normalen jenes Flächenstücks einschliesst, von wo er seinen Ausgang nimmt. Die Beleuchtungsstärke wird sich daher durch folgende Gleichung

chung darstellen lassen

$$B = \frac{L \cos \alpha \cos \beta}{r^2},$$

wobei wir L die Lichtstärke der Flächeneinheit des leuchtenden Körpers nennen können.

Durch die Wahl der Entfernung der Lichtquelle und der Neigung des auffallenden Lichts ist es leicht, eine Beleuchtung von bestimmter Stärke herzustellen. Es beruht darauf die Vergleichung der Intensitäten verschiedener Lichtquellen, die Photometrie.

§ 2. Reflexionsgesetze ebener Spiegel.

Einen sehr dünnen Lichtkegel nennt man ein Strahlenbündel. Denken wir uns den Lichtkegel unendlich dünn, so haben wir einen Lichtstrahl. Es ist vorteilhaft, diese Begriffe zur bequemen Darstellung des Gangs des Lichts einzuführen.

Trifft ein Lichtstrahl auf eine glatte Fläche, so wird er nach bestimmten Gesetzen, den Reflexionsgesetzen zurückgeworfen. Es sei AB (Fig. 1) eine Ebene.

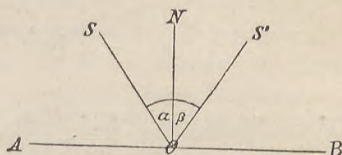


Fig. 1.

Im Punkt O treffe ein Lichtstrahl SO auf. Wir nennen ihn den einfallenden Strahl, O den Einfallspunkt. Im Einfallspunkt errichten wir die Normale ON zur Ebene AB . Sie heisst das Einfallslot. Der Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot sei α , es ist der Einfallswinkel.

Der Reflexionswinkel β ist der Winkel zwischen dem Einfallslot und dem reflektierten Strahl OS' .

Es gelten nun für die Reflexion folgende Gesetze:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

2. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel,

$$\alpha = \beta.$$

Treffen demnach von einem leuchtenden Punkt S (Fig. 2) Strahlen auf eine glatte ebene Fläche AB , so

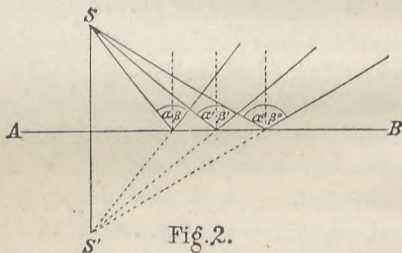


Fig. 2.

werden sie so zurückgeworfen, dass sie nach rückwärts verlängert sich alle im Punkt S' vereinigen würden. Für ein beobachtendes Auge scheinen demnach die reflektierten Strahlen aus dem Punkt S' zu kommen, es ist S' ein Bild von S . AB ist also eine spiegelnde Fläche, ein ebener Spiegel. Ein solcher entwirft Bilder, welche dieselbe Grösse wie der Gegenstand haben und zu ihm symmetrisch liegen. Die Spiegelfläche bildet dabei die Symmetrieebene.

§ 3. Kugelspiegel — Gegenstands- und Bildweite — Brennpunkt.

Der leuchtende Punkt S (Fig. 3) sende Strahlen auf eine polierte Kugelfläche KK' . Den Strahl SA,

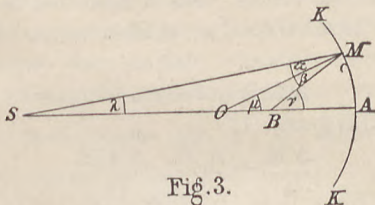


Fig. 3.

welcher durch den Mittelpunkt O der Kugel geht, nennen wir den Hauptstrahl. Jedes Loth auf die Spiegelfläche geht durch O . Es ist daher OM das Einfallslot für den Strahl SM . Der reflektierte Strahl MB schneidet den Hauptstrahl in B . Dort muss ein Bild des Punktes S entstehen, da alle Strahlen, welche in einem Kreis um A herum vom Radius AM auftreffen, sich im Punkt B vereinigen. In B ist demnach wiederum die Ausgangsstelle von unendlich vielen Strahlen.

Wir wollen den Einfalls- und Reflexionswinkel mit den gewohnten Buchstaben α bezgl. β bezeichnen. Ferner seien die Winkel

$$ASM = \lambda, \quad AOM = \mu, \quad ABM = \nu$$

und die Strecken

$$AS = a, \quad AB = b, \quad AO = OM = r.$$

a nennen wir die Gegenstandsweite, b die Bildweite. r ist der Radius der Kugel. Es gelten nun folgende Beziehungen

$$\alpha = \mu - \lambda,$$

$$\beta = \nu - \mu$$

$$\alpha = \beta = \mu - \lambda = \nu - \mu,$$

daher

$$\lambda + \nu = 2\mu. \quad (1)$$

Wir setzen voraus, dass M nahe bei A liege, dass also die Winkel $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu$ klein seien. Wir haben dann

$$AM = a\lambda = r\mu = b\nu$$

und nach Gleichung (1)

$$\frac{AM}{a} + \frac{AM}{b} = \frac{2AM}{r},$$

oder

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}. \quad (2)$$

Diese Gleichung drückt die Beziehung zwischen Gegenstands- und Bildweite aus.

Kommen die Strahlen aus dem Unendlichen, d. h. fallen auf unsern Spiegel parallele Strahlen, so wird für $a = \infty$, $b = \frac{r}{2}$. Als parallele Strahlen können wir die Sonnenstrahlen auffassen. Da dieselben gleichzeitig wärmen, so wird im Punkt

$$p = \frac{r}{2}$$

eine hohe Temperatur erzeugt, weshalb dieser Punkt auch der Brennpunkt genannt wird, während p die Brennweite heisst. Mit Benutzung dieser Grösse können wir Gleichung (2) auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$$

schreiben. Liegt der leuchtende Punkt im Mittelpunkt

der Kugelfläche, so wird $a = r$, mithin auch $b = r$. Gegenstand und Bild fallen zusammen. Für $a < r$ ist $b > r$, und es wird $b = \infty$ für $a = p$. Befindet sich also eine Lichtquelle im Brennpunkt, so sendet der Spiegel parallele Strahlen aus. Eine solche Anordnung eignet sich dazu, das Licht auf weite Strecken hinauszusenden, ohne dass es sich erheblich zerstreut, wie es bei den grossen elektrischen Scheinwerfern geschieht.

Wird a noch kleiner als $\frac{r}{2}$, so muss b negativ werden, das heisst: es liegt der Bildpunkt hinter dem Spiegel. Die Strahlen vereinigen sich nicht wirklich sondern nur scheinbar. Wir haben kein reelles Bild mehr, sondern ein imaginäres, virtuelles, ähnlich, wie wir es bereits beim ebenen Spiegel kennen gelernt haben. Wir können übrigens ohne weiteres vom Kugelspiegel zum ebenen übergehen, wenn wir $r = \infty$ setzen. Es wird dann b negativ und ebenso gross wie a , in Uebereinstimmung mit dem Resultat des § 2.

Liegt der Kugelmittelpunkt wie bisher auf der Seite des Gegenstands, so nennen wir den Spiegel einen Hohlspiegel, einen concaven Spiegel, im entgegengesetzten Fall hingegen einen erhabenen oder Convexspiegel. Dafür haben wir r also negativ zu wählen. Es wird daher auch die Bildweite negativ, das Bild liegt hinter dem Spiegel, d. h. es ist nur scheinbar vorhanden, ein virtuelles Bild. Die grösste Bildweite ist $b = \frac{r}{2}$ für $a = \infty$. Sie ist also gleich der Brennweite eines Hohlspiegels vom selben Krümmungsradius.

§ 4. Bilder von Kugelspiegeln mit kleiner Oeffnung.

Wir denken uns eine leuchtende Linie ST (Fig 4). Der Punkt S hat sein Bild in B , der Punkt T in B' .

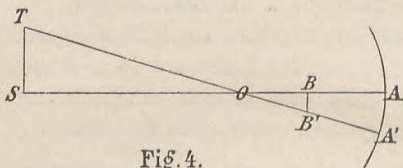


Fig. 4.

Wir erhalten ein verkehrtes Bild BB' des Gegenstands ST . Das Verhältniss der Bildgrösse BB' zur Gegenstandsgrösse ST können wir nun leicht finden, da ja

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{OB}{OS} = \frac{r-b}{a-r}$$

ist. Nach Gleichung (2) haben wir

$$b = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} = \frac{ar}{2a-r},$$

folglich

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{r - \frac{ar}{2a-r}}{a-r} = \frac{r}{2a-r}.$$

Das Bild wird also je nach der Wahl der Gegenstandsweite sehr verschieden ausfallen.

Für einen unendlich weiten Gegenstand ist es unendlich klein. Es wächst mit der Annäherung des Gegenstands. Wird $a = r$, so ist Bild und Gegenstand gleich gross. Für $a < r$ ist das Bild grösser als der Gegenstand. Es wird unendlich gross und rückt in

unendliche Entfernung, d. h. es verschwindet für $a = \frac{r}{2}$. Wird $a < \frac{r}{2}$, so wird $\frac{B B'}{S T}$ negativ, das Bild kehrt sich um. Während wir also früher ein verkehrtes Bild hatten, haben wir jetzt ein aufrechtes. Aber es ist kein reelles Bild mehr, da auch b negativ wird, es liegt hinter dem Spiegel. Das Bild ist aber grösser als der Gegenstand, wir haben einen Vergrößerungsspiegel. Setzen wir $r = \infty$ so wird $\frac{B B'}{S T} = -1$, wir haben wieder den Fall des ebenen Spiegels, für welchen Gegenstand und Bild gleich gross ist.

Wird r negativ, so liefert unsere Formel die Bildgrösse in einem erhabenen Spiegel. Das Bild steht aufrecht und ist immer kleiner, als der Gegenstand.

§ 5. Brechungsgesetz — Brechungsexponent — geometrische Optik — Katoptrik — Dioptrik.

Fällt ein Lichtstrahl auf einen durchsichtigen Körper von glatter Oberfläche, so dringt er in den Körper ein, wird aber dabei im Allgemeinen von seinem Wege abgelenkt, er wird gebrochen. Nennen wir analog dem Vorgang bei Spiegeln SO (Fig. 5) den einfallenden Strahl, welcher im Einfallspunkt O die Oberfläche AB des durchsichtigen



Körpers trifft, OS' den gebrochenen Strahl, α den Einfallswinkel, β den Brechungswinkel, während CD das Einfallslot ist, so gelten folgende Gesetze:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl liegen in einer Ebene.
2. Das Verhältniß der Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels ist eine konstante Grösse, also

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Die Konstante n nennen wir den Brechungsquotienten oder Brechungsexponenten.

3. Nimmt das Licht seinen Ausgang auf der entgegengesetzten Seite und in entgegengesetzter Richtung, so macht es genau denselben Weg. Das heisst: wird der Strahl SO nach S' gebrochen, so wird ein Strahl $S'O$ nach S abgelenkt.

Die Lehre vom Strahlengang bei Vorhandensein reflektierender und brechender Flächen nennt man die geometrische Optik. Diese teilt man wieder in die Katoptrik und Dioptrik ein, je nachdem man es nur mit reflektierenden oder nur mit brechenden Flächen zu thun hat.

Setzen wir den Brechungsexponenten gleich Eins, den Brechungswinkel jedoch gleich dem Supplement des Einfallswinkels, so erhalten wir das Reflexionsgesetz. Wir werden demnach alle Resultate, welche wir für brechende Flächen erhalten, nach obigen Annahmen auf reflektierende Flächen beziehen können. Es gelten so die Gesetze der Dioptrik auch in der Katoptrik.

§ 6. Der Regenbogen.

Bekanntlich hängt der Wert des Brechungsexponenten nicht nur von der Natur der brechenden Substanz, sondern auch von der Art des Lichts ab. Er ist für verschiedene Farben verschieden. In der Regel nehmen die Brechungsexponenten mit der Farbe in folgender Reihenfolge zu: rot, orange, gelb, grün, blau, violett. Es wird daher jeder Lichtstrahl, der durch Brechung eine Ablenkung erleidet, gleichzeitig in seine Farben zerlegt. Eine teilweise hierher gehörige Erscheinung ist der Regenbogen, welchen wir im folgenden näher untersuchen wollen.

Der Kreis (Fig. 6) stelle einen Regentropfen dar. Ein Sonnenstrahl SA treffe in A unter dem Einfallswinkel α den Tropfen. Er wird nach B gebrochen, wo er teilweise nach C reflektiert, teilweise nach B' gebrochen wird. In C er-

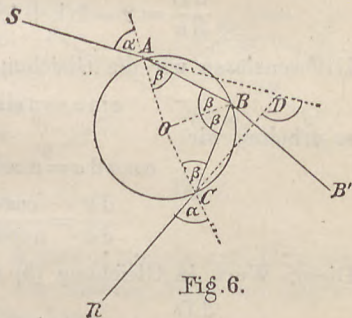


Fig. 6.

leidet er wieder eine teilweise Brechung nach R und Reflexion u. s. w. Der Strahl BB' erfährt die Ablenkung

$$D_1 = 2\alpha - 2\beta,$$

der Strahl CR die Ablenkung

$$D_2 = 2\alpha - 2\beta + \pi - 2\beta,$$

da die Ablenkung in B, wie aus der Zeichnung leicht zu

ersehen, $\pi - 2\beta$ ist. Ueberhaupt wächst bei jeder Reflexion im Innern des Tropfens die Ablenkung um $\pi - 2\beta$, so dass ein Strahl, der nach k maliger Reflexion wieder austritt, die Deviation

$D = 2\alpha - 2\beta + k(\pi - 2\beta) = 2\alpha - 2(k+1)\beta + k\pi$ erfährt.

Je stärker ein Sonnenstrahl gebrochen wird, desto mehr wird auch seine Farbe zerstreut. Wir werden daher das intensivste Licht im Minimum der Ablenkung haben. Wir wollen deshalb den Einfallswinkel für's Ablenkungsminimum suchen. Wir haben dafür die Gleichung

$$\frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1) \frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \quad (3)$$

Differenzieren wir die Gleichung

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

so erhalten wir

$$\cos \alpha d\alpha = n \cos \beta d\beta,$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta}.$$

Dieser Wert, in Gleichung (3) eingesetzt, ergibt

$$\frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1) \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} = 0,$$

was wir noch folgendermassen umformen können

$$n \cos \beta = (k+1) \cos \alpha.$$

Diese Gleichung quadriert, ergibt

$$n^2 - n^2 \sin^2 \beta = (k+1)^2 - (k+1)^2 \sin^2 \alpha$$

und wegen $\sin \alpha = n \sin \beta$

$$\begin{aligned} \left[\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2 - n^2} \right] \sin^2 \alpha &= \frac{(k+1)^2 - n^2}{(k+1)^2 - 1}, \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{(k+1)^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Setzen wir $k=0$, so erhalten wir für $\sin \alpha$ einen unmöglichen Wert, jedoch für $k=1, 2, 3 \dots$ wird der Wurzel Ausdruck für Wasser kleiner als Eins, da $n < 2$ ist. Wir werden demnach eine Reihe von Regenbogen erhalten, deren lichtstärkster der erste für $k=1$ sein wird, da der Lichtstrahl umso mehr geschwächt wird, je öfter die Reflexionen stattfinden.

Wir fragen nun nach der Form des Regenbogens und wollen uns in unserer Untersuchung auf den ersten, den Hauptregenbogen beschränken, da sie für die weiteren, die Nebenregenbogen, ganz analog durchgeführt werden kann. Zu bemerken ist höchstens, dass für die einzelnen Regenbogen der das Ablenkungsminimum liefernde Sonnenstrahl auch auf der unteren Seite des Regentropfens (Fig. 7) auffallen kann.

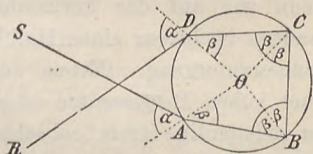


Fig. 7.

Ist AB (Fig. 8) die Erdoberfläche, und bildet der Sonnenstrahl SP mit ihr den Winkel σ , der gebrochene Strahl jedoch den Winkel ϵ ,

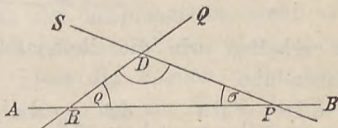


Fig. 8.

so ist bei einer einmaligen Reflexion D die Deviation, und es muss

$$D + \varrho + \sigma = \pi$$

sein. Da aber

$$D = 2\alpha - 4\beta + \pi,$$

so ist

$$\varrho + \sigma = \pi - D = 4\beta - 2\alpha.$$

Setzen wir $\sigma = 0$, d. h. steht die Sonne im Horizont, oder sehen wir davon ab, dass AB die Erdoberfläche sei, sondern eine zu den Sonnenstrahlen parallele Gerade, so wird um AB herum alles symmetrisch. Der Regenbogen wird also ein Kreis sein vom Oeffnungswinkel $2(\varrho + \sigma)$. Den vollständigen Kreis können wir nie sehen, wenn wir auf der horizontalen Erdoberfläche stehen, sondern höchstens einen Halbkreis bei Sonnenauf- oder Sonnenuntergang. Etwas anderes ist es jedoch auf einer hohen Bergesspitze oder vom Luftballon aus, wo der vollständige Kreis beobachtet wurde. Die Möglichkeit dazu ist auch vorhanden, wenn nicht die Sonne direkt, sondern ihr Spiegelbild in einem ruhigen Gewässer den Regenbogen erzeugt. Die Winkelsumme $\varrho + \sigma$ beträgt ungefähr 42° Grad.

Bilden wir den Ausdruck

$$\frac{d\varrho}{dn} = - \frac{dD}{dn},$$

so erhalten wir die Reihenfolge der Farben. Wir haben nun

$$\frac{dD}{dn} = 2 \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{d\beta}{dn} = 2 \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{\partial \beta}{\partial n},$$

indem wir β als abhängige Veränderliche von α und n einführen. Von früher her kennen wir als Bedingung

des Deviationsminimums

$$2 - 4 \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

daher wird

$$\frac{dD}{dn} = -4 \frac{\partial \beta}{\partial n}.$$

Den Differentialquotienten $\frac{\partial \beta}{\partial n}$ gewinnen wir aus der Gleichung

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n},$$

welche differenziert

$$\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial n} = -\frac{\sin \alpha}{n^2},$$

ergibt. Demnach ist

$$\frac{d\varrho}{dn} = -\frac{dD}{dn} = -\frac{4 \sin \alpha}{n^2 \cos \beta}.$$

Der Differentialquotient $\frac{d\varrho}{dn}$ ist negativ, d. h. mit wachsendem n nimmt ϱ ab. Es wird also die rote Farbe den äussersten Rand des Regenbogens bilden, gegen die Mitte zu folgen dann die übrigen Farben.

Die hier gegebene Theorie trifft strenge nur für unendlich grosse Regentropfen zu, indem die Entstehung der Farben von der Tropfengrösse nicht unabhängig ist, was jedoch an dieser Stelle nicht näher erörtert werden kann. Dass die Farben nicht bloss durch Lichtbrechung entstehen, hat zur Folge, dass der Regenbogen nicht aus dem gewöhnlich genannten siebenfarbigen Band besteht, sondern wir können bei manchem Regenbogen eine ganz andere Farbenfolge beobachten.

§ 7. Abbildung eines Punkts durch eine brechende Kugelfläche — Brennpunkte — Brennweiten.

KK' (Fig. 9) sei eine brechende Kugelfläche. Es ist dies der Fall, wenn sich links von ihr etwa Luft,

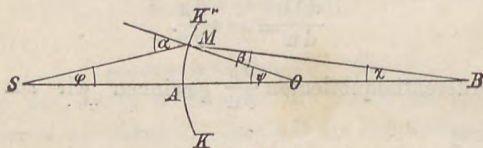


Fig. 9

rechts Glas befindet. Der Strahl SA, welcher gegen den Krümmungsmittelpunkt O der Kugelfläche gerichtet ist, wird nicht gebrochen, da er mit dem Einfallslot zusammenfällt. Wir nennen ihn den Hauptstrahl. Ein Strahl SM wird nach dem Gesetz $\sin \alpha = n \sin \beta$ gebrochen und schneidet den Hauptstrahl in B. Wir wollen unsere Untersuchung nur auf kleine Einfallswinkel ausdehnen, können dann den Sinus mit dem Bogen vertauschen und schreiben

$$\alpha = n \beta.$$

Wir haben nun

$$\alpha = \varphi + \psi, \quad \beta = \psi - \chi,$$

mithin

$$\varphi + \psi = n \psi - n \chi,$$

$$\varphi + n \chi = (n - 1) \psi. \quad (4)$$

Die verschiedenen Winkel können wir folgendermassen darstellen:

$$\varphi = \frac{MA}{SA}, \quad \psi = \frac{MA}{OA}, \quad \chi = \frac{MA}{BA}.$$

Wir setzen ferner

$$SA = a, \quad OA = r, \quad BA = b.$$

und nennen a die Gegenstandsweite, r den Krümmungsradius, b die Bildweite. Wir erhalten dann aus Gleichung (4) ohne weiteres

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r}.$$

Es vereinigen sich also in der That alle Strahlen, welche von S ausgehen, in B . Wir haben hier ein reelles Bild.

Lassen wir S in's Unendliche rücken, d. h. lassen wir parallele Strahlen auffallen, so vereinigen sie sich in einem Punkt, den wir F_1 nennen wollen. Es ist der hintere Brennpunkt und

$$F = b = \frac{nr}{n-1}$$

die hintere Brennweite. Das ist auch gleichzeitig die kleinste mögliche Bildweite. Lassen wir S näher rücken, so wird b grösser und wir erreichen schliesslich einen Punkt f_1 , für welchen b unendlich wird. Die Gegenstandsweite ist dann

$$f = a = \frac{r}{n-1}.$$

Wir nennen f die vordere Brennweite, f_1 den vorderen Brennpunkt. Die beiden Brennweiten stehen also in der Beziehung

$$F = nf.$$

Wird nun a noch kleiner, so wird b negativ, d. h. die Strahlen vereinigen sich nicht mehr, wohl aber ihre rückwärtigen Verlängerungen in einem Punkt, welcher vor der Kugelfläche liegt. Wir erhalten ein imaginäres Bild.

Lassen wir r unendlich werden, so erhalten wir

eine ebene brechende Fläche. Es wird dann

$$b = -n a.$$

Wird r negativ, haben wir also den Krümmungsmittelpunkt O links von der brechenden Fläche, so wird auch die Brennweite negativ. Es vereinigen sich dann die Strahlen nur virtuell. Wir erhalten kein reelles Bild mehr.

§ 8. Bildgrösse.

Gleicherweise wie der Punkt S (Fig. 10) in B , bildet sich T in B' ab. Wir erhalten von dem Gegen-

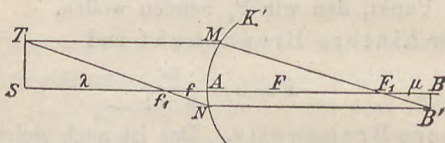


Fig. 10.

stand ST das verkehrte Bild BB' , dessen Grösse wir leicht finden können. Wir wollen die Bezeichnungen

$$Sf_1 = \lambda, F_1 B = \mu$$

einführen und haben dann

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{ST}{AN} = \frac{\lambda}{f},$$

aber auch

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{AM}{BB'} = \frac{F}{\mu}.$$

Rückt also der Gegenstand aus dem Unendlichen bis in die vordere Brennweite, so wächst das Bild von der Grösse Null bis zur Grösse Unendlich. Es ist reell und umgekehrt. Rückt der Gegenstand noch näher, so wird λ negativ, wir erhalten ein aufrechtes ver-

grössertes virtuelles Bild. Für eine concave brechende Fläche wird r negativ. Es wird dann auch f negativ und für alle Fälle $\lambda > f$. Wir haben also dann immer ein virtuelles aufrechtes verkleinertes Bild.

§ 9. System zweier brechender centrierter Kugelflächen — Linsen.

Liegen zwei brechende Kugelflächen A und A' (Fig. 11) so, dass der Hauptstrahl der ersten durch

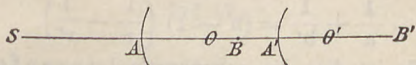


Fig. 11.

den Mittelpunkt der zweiten geht, so nennt man sie centriert. Das Bild B des Punkts S , welches die erste brechende Fläche entwirft, wird für die zweite brechende Fläche zum leuchtenden Punkt und sie entwirft davon ein Bild in B' . Für die brechende Fläche A gilt nun die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r}, \quad (5)$$

für die zweite A' analog

$$\frac{1}{a'} + \frac{n'}{b'} = \frac{n'-1}{r'}.$$

Ist nun das Medium rechts von A' gleich jenem links von A , so ist $n' = \frac{1}{n}$. Ferner ist

$$a' = AA' - AB = e - b,$$

wenn e die Entfernung der beiden Kugelflächen ist. Darnach wird die Gleichung für den Strahlengang in

der zweiten Fläche

$$\frac{n}{e-b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'}.$$

Wir nehmen noch an, e sei so klein, dass wir es gegenüber den anderen vorhandenen Grössen vernachlässigen können. Wir haben dann eine dünne Linse vor uns. Unsere letzte Gleichung wird jetzt

$$-\frac{n}{b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'},$$

was zur Gleichung (5) addiert

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

ergibt. Es ist dies die sogenannte Linsenformel.

Ist $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$ positiv, so haben wir eine Sammellinse, im entgegengesetzten Fall eine Zerstreuungslinse. Im ersten Fall vereinigen sich parallel auffallende Strahlen für welche $a = \infty$ ist, in der Entfernung p hinter der Linse nach der Gleichung

$$\frac{1}{p} = (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right),$$

und es ist p die Brennweite der Linse, weshalb wir die Linsenformel auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{p}$$

schreiben können. Diese Gleichung hat dieselbe Form wie jene für den Kugelspiegel (§ 3), weshalb wir uns hier ihre weitere Diskussion ersparen können.

Im vorhergehenden Paragraphen fanden wir für das Verhältniss des Gegenstands zum Bild die Gleichung

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F}{\mu}.$$

Es gilt demnach für eine brechende Fläche die Beziehung

$$\lambda \mu = f F, \quad (6)$$

welche wir auch auf mehrere brechende Flächen ausdehnen können. Für die beiden Kugelflächen A und A' (Fig. 12) haben wir also die Gleichung (6) nebst der zweiten

$$\lambda' \mu' = f' F', \quad (7)$$

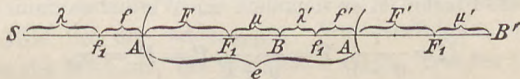


Fig. 12.

wenn wir das Bild B zum Gegenstand für die zweite brechende Fläche werden lassen. Die Entfernung beider Flächen ist also

$$e = F + \mu + \lambda' + f'. \quad (8)$$

Wir finden den vorderen Brennpunkt des Systems, wenn nach der zweiten Brechung die Strahlen parallel laufen, also $\mu' = \infty$ wird. Dann muss nach Gleichung (7) $\lambda' = 0$ werden, während aus Gleichung (8)

$$\mu = e - F - f'$$

und aus Gleichung (6)

$$\lambda = \frac{f F}{e - F - f'}$$

folgt.

Wir rechnen die vordere Brennweite φ von der ersten Kugelfläche aus. Sie wird also

$$\varphi = \lambda + f = \frac{f F}{e - F - f'} + f = f \frac{e - f'}{e - F - f'}.$$

Und in ganz derselben Weise finden wir für die hintere Brennweite unseres Systems

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'},$$

wobei diese Brennweite von der hinteren Linsenfläche aus gezählt ist.

Wir wollen als ein Beispiel für die gewonnenen Gleichungen die planconvexe Linse behandeln. Der Krümmungsradius der vorderen Fläche sei r , für die hintere Fläche ist er demnach ∞ . Wir haben dann (§ 7)

$$f = \frac{r}{n-1}, F = \frac{nr}{n-1}, f' = F' = \infty,$$

daher

$$\varphi = f \frac{e - f'}{e - F - f'} = f \cdot \frac{-f'}{-f'} = f,$$

da ja e und F gegen ∞ wegfällt. Ferner haben wir

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'} = n' f' \frac{e - F}{-f'} = \frac{F - e}{n} = f - \frac{e}{n} = \varphi - \frac{e}{n}.$$

Die hintere Brennweite ist also um $\frac{e}{n}$ kleiner als die vordere.

§ 10. Hauptebenen — Hauptpunkte.

Durch die Einführung der Brennweiten φ und Φ können wir wiederum zwei brechende Flächen wie eine einzige behandeln, und es ist leicht einzusehen, dass wir auf dieselbe Weise jetzt drei, vier u. s. w. brechende Flächen kombinieren können, vorausgesetzt, dass sie ein zentriertes System sind, d. h. dass die Krümmungsmittelpunkte der Kugelflächen alle in einer Geraden liegen. Nicht so einfach wie bei einer unendlich dünnen Linse ist aber jetzt die Konstruktion der Bilder. Zu dem Zweck führen wir den Begriff der zwei Hauptebenen ein. Diese haben die Eigenschaft, dass jeder Strahl,

welcher durch die erste geht, in derselben Höhe auch die zweite passiert. Wir sehen wegen der allseitigen Symmetrie sofort ein, dass diese beiden Ebenen senkrecht auf dem Hauptstrahl stehen müssen. Ihre Schnittpunkte mit ihm nennen wir die Hauptpunkte.

Wir haben also zwei Ebenen von der Eigenschaft zu suchen, dass der Gegenstand in der einen congruent dem Bild in der andern ist. Wir verfolgen dabei wieder die Methode, die gestellte Aufgabe erst für zwei brechende Flächen zu lösen, da ja die Rechnung für mehrere Flächen nach demselben Schema vor sich geht. Wir haben nach dem vorhergehenden Paragraphen für das Verhältniss des Gegenstands G zum Bild B bei der ersten Brechung

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F}{\mu},$$

für die zweite

$$\frac{G'}{B'} = \frac{\lambda'}{f'} = \frac{F'}{\mu'}.$$

Nun ist aber der Gegenstand bei der zweiten Brechung das von der ersten Brechung gelieferte Bild, also

$$G' = B,$$

folglich

$$\frac{G}{B'} = \frac{\lambda \lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu \mu'}.$$

Da das Bild sich bei jeder Brechung umkehrt, so ist das zweite wieder aufrecht. Soll es daher mit dem Gegenstand kongruent sein, so muss Gegenstand und Bild im Verhältniss Eins stehen. Wir haben also

$$\frac{\lambda \lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu \mu'} = 1. \quad (9)$$

Aus Gleichung (8) ergibt sich

$$\mu + \lambda' = e - F - f' = \delta. \quad (10)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit λ , so erhalten wir mit Zuziehung der Gleichungen (6) und (9)

$$f F + f f' = \delta \lambda,$$

$$\lambda = \frac{f F + f f'}{\delta}.$$

Ganz analog ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung (10) mit μ'

$$F F' + f' F' = \delta \mu',$$

$$\mu' = \frac{F F' + f' F'}{\delta}.$$

Damit ist die Lage der beiden Hauptebenen bestimmt, doch ist es bequemer, ihren Abstand von der ersten bezgl. zweiten brechenden Fläche zu wissen. Für die erste Hauptebene ist er

$$h = \lambda + f = f \left(\frac{F + f'}{\delta} + 1 \right) = \frac{f}{\delta} (F + f' + e - F - f') = \frac{e f}{\delta}.$$

Für den Abstand der zweiten Hauptebene von der zweiten brechenden Fläche findet sich gleicherweise

$$H = \frac{e F'}{\delta}.$$

Es ist noch angezeigt, die Brennweiten von den

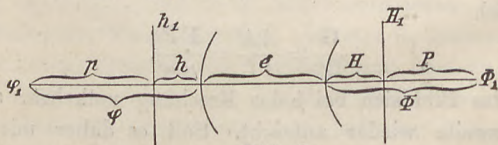


Fig. 13.

Hauptpunkten an zu zählen. Wir haben dann (Fig. 13) die vordere Brennweite

$$p = \varphi - h = f \frac{e - f'}{\delta} - h = - \frac{ff'}{\delta},$$

für die hintere

$$P = \varphi - H = F \frac{e - F'}{\delta} - H = - \frac{FF'}{\delta}.$$

Da nun

$$F = n f, F' = n' f',$$

so

$$P = - \frac{n n' f f'}{\delta} = n n' p.$$

Ist links und rechts vom optischen System dasselbe Medium, so $n' = \frac{1}{n}$, folglich

$$P = p.$$

Die Konstruktion des Bilds ist nun sehr einfach. Wir errichten in den beiden Hauptpunkten h_1 und H_1

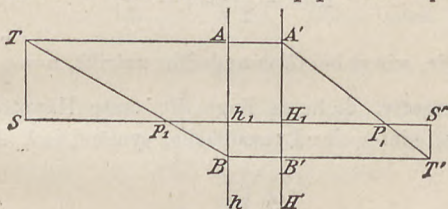


Fig. 14.

(Fig. 14) die beiden senkrechten Ebenen h und H . Ein Strahl, welcher parallel zum Hauptstrahl von T ausgeht und die erste Hauptebene in A trifft, muss in gleicher Höhe bei A' die zweite Hauptebene verlassen und dann durch den hintern Brennpunkt P_1 gehen. Ein Strahl, welcher durch den vorderen Brennpunkt p_1 geht und

in B die erste Hauptebene trifft, verlässt ebenfalls in gleicher Höhe in B' die zweite und geht dann parallel zum Hauptstrahl weiter. In T' schneiden sich beide Strahlen; es ist dort das Bild des Punkts T.

§ 11. Biconvexe Linse.

Die beiden brechenden Flächen einer biconvexen Linse sollen denselben Krümmungsradius haben. Es gilt also die Beziehung

$$f' = F = n f.$$

Die Lage der ersten Hauptebene ist daher gegeben durch

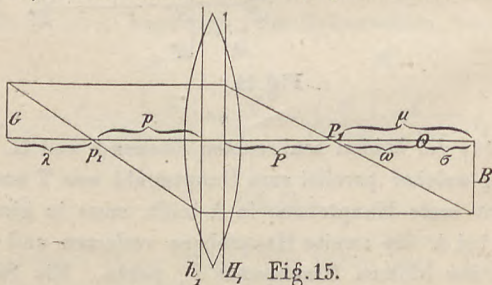
$$h = \frac{e f}{e - F - f'} = \frac{e f}{e - 2 n f}.$$

Ist die Linse nicht sehr dick, so können wir e gegen $2 n f$ vernachlässigen und erhalten

$$h = -\frac{e}{2 n} = -\frac{e}{3},$$

wenn wir, wie es bei Glas ungefähr zutrifft, $n = \frac{3}{2}$ setzen.

h ist negativ, d. h. es liegt die erste Hauptebene h_1 (Fig. 15) hinter der Linsenfläche, symmetrisch dazu die



h_1 H, Fig. 15.

zweite Hauptebene H_1 . Die beiden Brennweiten p und P sind einander gleich. Für das Verhältniss des Gegenstands zum Bild haben wir daher

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{p} = \frac{p}{\mu},$$

woraus folgt

$$\lambda \mu = p^2.$$

Wir versetzen nun unser Auge in den Punkt O , welcher die Strecke μ so teilt, dass

$$\mu = \omega + \sigma.$$

Wir wollen die Linse als Lupe benützen. Die Entfernung des Bilds vom Auge muss also in der deutlichen Sehweite s und negativ sein. Wir haben demnach

$$\sigma = -s$$

zu setzen. Darnach wird

$$\mu = \omega - s,$$

wobei $s > \omega$, μ also negativ ist. Desgl. wird

$$\lambda = -\frac{p^2}{s - \omega}$$

negativ, d. h. der Gegenstand muss innerhalb der Brennweite p liegen. Unter der Vergrösserung verstehen wir das Verhältniss des Bilds zum Gegenstand

$$V = \frac{B}{G} = \frac{p}{\lambda}.$$

In unserm gegebenen Fall wird somit

$$V = -\frac{s - \omega}{p}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass wir ein aufrechtes Bild erhalten. Je weiter wir das Auge von der Linse entfernen, desto grösser wird ω , desto kleiner das Bild. Denken wir uns das Auge in der zweiten

Hauptebene, so $\omega = -p$ und

$$V = -\frac{s+p}{p} = -\left(\frac{s}{p} + 1\right),$$

was die gewöhnlich in Verwendung kommende Vergrößerungsformel ist.

§ 12. Huyghens'sches Princip.

Wir haben das Licht nach Huyghens' Theorie als Wellenbewegung aufgefasst. Von Huyghens rührt folgendes Princip her: Einen jeden Punkt einer Welle kann man als einen Erregungspunkt neuer Wellen betrachten. Die gemeinschaftliche Umhüllende dieser Wellen, der Elementarwellen, stellt die wirkliche Welle, die Hauptwelle, dar. Denken wir uns z. B. eine Kugelwelle, welche von einem leuchtenden Punkt ausgeht. Werden alle Punkte der Kugelfläche als Erregungspunkte neuer Wellen aufgefasst, so entstehen unendlich viele congruente Kugelwellen, deren umhüllende thatsächlich die Hauptwelle darstellt.

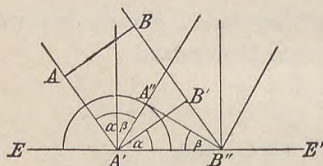


Fig. 16.

Aus diesem Princip lässt sich leicht das Gesetz der Reflexion und Brechung ableiten. Es falle ein paralleles Strahlenbündel AB (Fig. 16) auf die Ebene EE' unter dem Einfallswinkel α . Im

Punkt A' entsteht eine Elementarwelle der Planwelle A'B' und so der Reihe nach in allen Punkten der Strecke A'B''. Kommt schliesslich der Punkt B' in

B'' an, so haben wir als Hauptwelle $A''B''$. Da nun $A'A'' \perp A''B''$, $A'B' \perp B'B''$, $A'A'' = B'B''$, so muss auch $\alpha = \beta$ sein, womit das Reflexionsgesetz als eine Folge der Wellentheorie erscheint.

Das Brechungsgesetz können wir folgendermassen erhalten. AB (Fig. 17) sei die Trennungsfläche zweier Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit c , im unteren c' , und es sei $c > c'$. Trifft die ebene Welle CD in C' auf, so entsteht da eine Elementarwelle mit der

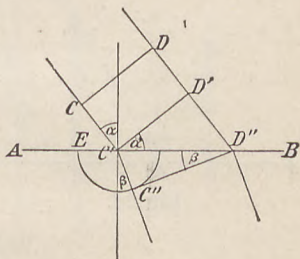


Fig. 17.

Geschwindigkeit c' . Dasselbe geschieht der Reihe nach in allen übrigen Punkten der Strecke $C'D''$. Während C nach C'' gelangt, kommt D' nach D'' . Es ist daher $C''D''$ die neue Welle. Nun ist

$$\overline{C'D''} \cdot \sin \alpha = D'D'', \quad \overline{C'D''} \cdot \sin \beta = C'C'',$$

folglich

$$\frac{D'D''}{C'C''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n.$$

Damit ist das Brechungsgesetz abgeleitet, und es zeigt sich, dass der Brechungsexponent nichts anderes als das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien ist.

§ 13. Fermat's Satz.

Fermat stellte folgendes Prinzip auf: Jeder Lichtstrahl pflanzt sich so fort, dass die zur

Zurücklegung des Wegs erforderliche Zeit ein Minimum wird. Auch dieses Princip ergibt das Reflexions- und Brechungsgesetz in derselben Form wie das Huygens'sche. Soll das Licht vom Punkt A

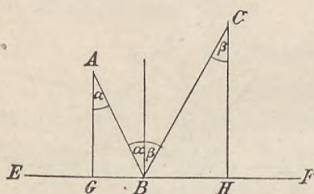


Fig. 18.

(Fig. 18) ausgehend von der Fläche EF in B nach C reflektiert werden, so wird die Reflexion so von statten gehen, dass die Zeit der Fortpflanzung folglich auch der Weg ABC ein Minimum wird. Nach unserer Zeichnung

ist

$$GH = \overline{AG} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \overline{HC} \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

was durch Differentiation ergibt

$$\frac{\overline{AG} \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha} = - \frac{\overline{HC} \cdot d\beta}{\cos^2 \beta}. \quad (11)$$

Soll der Weg

$$AB + BC = \frac{\overline{AG}}{\cos \alpha} + \frac{\overline{HC}}{\cos \beta}$$

ein Minimum werden, so muss sein Differential Null sein. Das ergibt

$$\frac{\overline{AG} \cdot \sin \alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha} = - \frac{\overline{HC} \cdot \sin \beta d\beta}{\cos^2 \beta}. \quad (12)$$

Dividieren wir Gleichung (12) durch (11), so resultiert $\sin \alpha = \sin \beta$ oder $\alpha = \beta$. Wir erhalten also in der That das Reflexionsgesetz.

Auf ganz demselben Weg ergibt sich auch das Brechungsgesetz. ABC (Fig. 19) stelle uns den

Strahlengang durch die brechende Ebene EF dar. Oben sei die Lichtgeschwindigkeit c , unten c' . Die Zeit

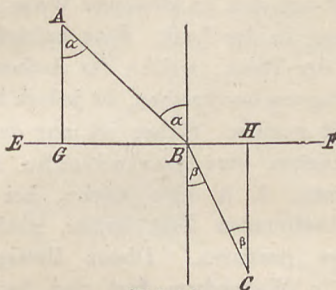


Fig. 19.

$$t = \frac{AB}{c} + \frac{BC}{c'} = \frac{AG}{c \cos \alpha} + \frac{HC}{c' \cos \beta}$$

soll ein Minimum werden, d. h. es muss das Differential $dt = 0$ sein, was

$$\frac{AG \cdot \sin \alpha \, d\alpha}{c \cos^2 \alpha} = - \frac{HC \cdot \sin \beta \, d\beta}{c' \cos^2 \beta} \quad (13)$$

ergibt. Ferner folgt wiederum aus dem Differential der konstanten Strecke GH die Gleichung (11). Gleichung (13) durch (11) dividiert, ergibt sodann

$$\frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin \beta}{c'},$$

oder

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n$$

das Brechungsgesetz. Es stimmen also die Folgerungen aus dem Huyghens'schen und dem Fermat'schen Prinzip vollständig überein.

§ 14. Interferenz.

Nach dem Früheren müssen wir das Licht als eine schwingende Bewegung des Aethers auffassen. Diese Bewegung pflanzt sich in ähnlicher Weise fort wie die Schallbewegung in der Luft. Eine befriedigende Vorstellung von der Bahn, welche die Aetherteilchen bei der Lichtbewegung beschreiben, ist jedoch bis jetzt noch nicht geliefert worden. Sicher ist nur das eine, dass die Aetherteilchen eine periodische Bewegung machen müssen, d. h. eine solche, bei welcher sie nach einer bestimmten Zeit immer wieder eine bestimmte Lage passieren. Dieser Bewegungszustand pflanzt sich in Wellenform fort und hat die Eigenschaft, dass er nach Verlauf einer halben Wellenlänge gerade entgegengesetzte Bewegungen darstellt. Zwei gleichartige Strahlen, welche um eine halbe Wellenlänge gegen einander verschoben sind, werden daher die Aetherteilchen gar nicht in Bewegung setzen können, da die Kräfte, welche von den beiden Lichtstrahlen ausgeübt werden, gleich und entgegengesetzt sind. Das Licht muss verschwinden. Die beiden Strahlen werden sich aber in ihrer Wirkung unterstützen, wenn sie ohne Phasenverschiebung den Aetherteilchen begegnen. Wir haben hier also ganz analoge Vorgänge wie bei der Interferenz des Schalls (I. Bd. § 73) und belegen sie daher auch mit dem Namen „Interferenz des Lichts“.

§ 15. Fresnel's Spiegelversuch.

Strahlen, welche mit Phasenunterschied in einem Punkt ankommen sollen, müssen ihren Weg in ver-

schiedenen Zeiten zurücklegen. Dies ermöglicht eine Anordnung von Spiegeln, welche von Fresnel, dem hervorragendsten Pfadfinder auf dem Gebiet der Optik, gefunden wurde. Zwei ebene Spiegel AB und AC (Fig. 20) stossen unter einem sehr spitzigen Winkel φ

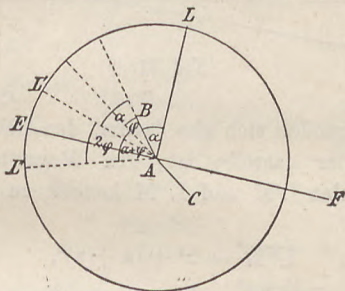


Fig. 20.

in A zusammen. Der leuchtende Punkt L liege so, dass AL mit der Spiegelfläche AB den Winkel α einschliesst. Beschreiben wir daher mit dem Radius AL um A als Mittelpunkt einen Kreis, so liegen auf dem Kreisumfang die beiden Bilder L' und L'', welche die Spiegel AB und AC von L entwerfen. Halbieren wir L'L'' in E, so ist die Gerade EAF eine Symmetrielinie zwischen L' und L''. Die Strahlen, welche von den beiden Bildern L' und L'' ausgehen, werden daher Interferenzerscheinungen liefern, welche zu EF symmetrisch liegen.

Wir stellen in F (Fig. 21) einen Schirm auf und fragen nun, welche Lichterscheinungen sich in einem

beliebigen Punkt M zeigen werden. Wir wollen die Strecken

$$L'L'' = 2a, EF = b, FM = y$$

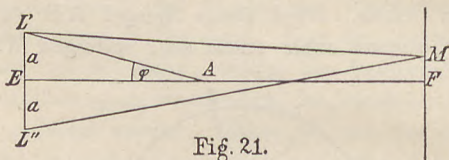


Fig. 21.

setzen. Es handelt sich also darum, den Zeitunterschied, oder was hier dasselbe ist, den Wegunterschied der beiden Strahlen $L'M$ und $L''M$ kennen zu lernen. Wir haben

$$\overline{L''M}^2 = b^2 + (a + y)^2,$$

$$\overline{L'M}^2 = b^2 + (a - y)^2,$$

daher

$$\overline{L''M}^2 - \overline{L'M}^2 = (L''M - L'M)(L''M + L'M) = 4ay.$$

Wir können nun mit sehr kleiner Vernachlässigung

$$L''M + L'M = 2b$$

setzen und erhalten so

$$L''M - L'M = \frac{2ay}{b}.$$

Haben wir Licht von der Wellenlänge λ , so wird für alle y , wo der Gangunterschied der beiden Strahlen $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \dots$ ist, Dunkelheit eintreten, da sich dort beide Strahlen infolge der Interferenz auslöschen. Es ist dies also für

$$y = \pm \frac{(2k + 1)b\lambda}{4a} \quad (14)$$

der Fall, wenn $k = 0, 1, 2 \dots$ ist.

In Wirklichkeit steht uns nun ein mathematischer Lichtpunkt nicht zur Verfügung, sondern wir müssen eine schmale Spalte LL_1 (Fig. 22) anwenden, durch welche wir das Licht eintreten lassen. Die Folge davon

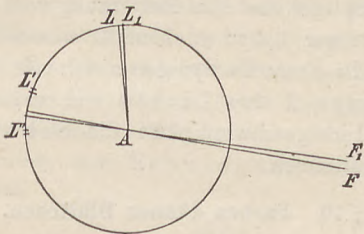


Fig 22.

ist, dass die beiden Spiegelbilder ebenfalls eine gewisse Ausdehnung haben, so dass die Bilder des Punkts L die Gerade AF , hingegen die Bilder von L_1 die Gerade AF_1 zur Symmetrielinie haben. Es kann daher vorkommen, dass auf eine dunkle Stelle des Schirms, die von L herrührt, gerade eine lichte, durch L_1 erzeugt, zu fallen kommt, so dass wir keine Interferenzstreifen wahrnehmen können. Es darf somit die Spalte LL_1 eine gewisse Breite nicht übersteigen. Unsere Aufgabe läuft darauf hinaus FF_1 möglichst klein zu machen. Es ist $FF_1 = \overline{AF} \cdot \beta$, wenn wir den $\sphericalangle LAL_1 = \beta$, setzen.

Wir haben somit $\beta = \frac{LL_1}{AL}$, folglich

$$FF_1 = \frac{\overline{AF} \cdot \overline{LL_1}}{AL}.$$

Wir erzielen also eine möglichst gute Wirkung, wenn

wir die Spiegel möglichst weit von der Spalte aufstellen und diese selbst sehr schmal machen, während wir den Winkel φ der beiden Spiegel sehr klein wählen.

Die Grösse a in der Gleichung (14) ist durch den Winkel der beiden Spiegel und ihre Entfernung vom Lichtpunkt gegeben. Da wir b und y ebenfalls messen können, so haben wir in Fresnel's Spiegelversuch ein Mittel, die Wellenlänge λ des Lichts und sodann aus der bekannten Lichtgeschwindigkeit die Schwingungszahl zu bestimmen.

§ 16. Farben dünner Blättchen.

Von dem leuchtenden Punkt S (Fig. 23) falle ein Strahl SA auf die planparallele Platte PP' . Im Punkt

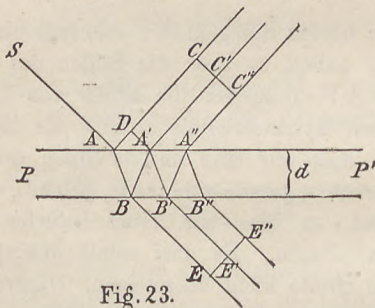


Fig. 23.

A wird er teilweise nach C reflektiert, teilweise nach B gebrochen. Dort findet ebenfalls Reflexion und Brechung statt; ein Teil geht nach E , der andere nach A' , und das geht so fort, so dass eine Reihe von Strahlen nach oben, eine andere nach unten von der Platte weggeht. Das Auge wird daher sowohl von oben

als von unten in der Platte Interferenzerscheinungen der nebeneinander verlaufenden Strahlen sehen können, welche man mit dem Namen „Farben dünner Blättchen“ belegt, da für den Fall, als vom Punkt S weisses Licht, oder sonst eine Mischfarbe ausgeht, an einer bestimmten Stelle der Platte nur Licht von bestimmter Wellenlänge, d. h. von bestimmter Farbe verlöschen wird, so dass wir dann die Mischfarbe des übrigen Lichts in der Platte sehen.

Wir wollen den Schwingungszustand des Aethers durch

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

darstellen. Welcher Art von periodischer Bewegung dieser Schwingungszustand σ ist, wissen wir bekanntlich nicht, doch ist das für die folgenden Untersuchungen auch nicht nötig. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei ausserhalb der Platte c , innerhalb c' . Der Schwingungszustand σ in A wird daher nach der Zeit $\frac{AC}{c}$ in C sein, nur mit dem Unterschied, dass er dort mit geringerer Stärke auftritt, da er ja nur teilweise reflektiert wird. Wir können daher den Bewegungszustand in C

$$\sigma_1 = \alpha a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{AC}{c} \right)$$

nennen, wobei α ein echter Bruch ist, der die Verminderung der Stärke des Schwingungszustands andeutet, oder wenn wir wollen, der das Verhältnis zwischen der neuen und alten Amplitude der Schwingung darstellt. In ähnlicher Weise können wir nun

weiter schliessen. Wir werden in C' den Zustand

$$\sigma_2 = \alpha' \beta' \beta a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{AB}{c'} - \frac{BA'}{c'} - \frac{A'C'}{c} \right) =$$

$$= \alpha' \beta' \beta a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{2AB}{c'} - \frac{A'C'}{c} \right)$$

haben. Wir haben hier durch α' dem Lichtverlust bei der Brechung in A, durch β jenem bei der Reflexion in B, durch β' dem bei der Brechung in A' Rechnung getragen. Auf ganz dieselbe Weise finden wir nun weiter

$$\sigma_3 = \alpha' \beta^3 \beta' a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{4AB}{c'} - \frac{A''C''}{c} \right),$$

$$\sigma_4 = \alpha' \beta^5 \beta' a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{6AB}{c'} - \frac{A'''C'''}{c} \right),$$

.

Es ist nun

$$A'C' = AC - AD,$$

$$A''C'' = AC - 2AD$$

.

wenn A'D das Loth auf AC ist. Wir setzen jetzt

$$\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{AC}{c} \right) = \varphi,$$

$$\frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{2AB}{c'} - \frac{AD}{c} \right) = \psi$$

und erhalten dann für die Summe sämtlicher σ den Ausdruck

$$\Sigma = a [\alpha \sin \varphi + \alpha' \beta' \beta \sin (\varphi - \psi) + \alpha' \beta' \beta^3 \sin (\varphi - 2\psi) +$$

$$+ \alpha' \beta' \beta^5 \sin (\varphi - 3\psi) + \dots].$$

Diese Summe wird uns also das Resultat darstellen für die Lichterscheinung, welche unser Auge in der dünnen Platte PP' im reflektierten Licht erblickt. Um die

Summierung durchführen zu können, führen wir folgende Hilfssummen ein:

$$\begin{aligned} S &= \sin(\varphi - \psi) + \beta^2 \sin(\varphi - 2\psi) + \beta^4 \sin(\varphi - 3\psi) + \dots, \\ R &= \cos(\varphi - \psi) + \beta^2 \cos(\varphi - 2\psi) + \beta^4 \cos(\varphi - 3\psi) + \dots \end{aligned}$$

und bilden

$$\begin{aligned} R + Si &= e^{(\varphi - \psi)i} + \beta^2 e^{(\varphi - 2\psi)i} + \beta^4 e^{(\varphi - 3\psi)i} + \dots = \\ &= e^{(\varphi - \psi)i} (1 + \beta^2 e^{-\psi i} + \beta^4 e^{-2\psi i} + \beta^6 e^{-3\psi i} + \dots) = \\ &= e^{(\varphi - \psi)i} (1 + n + n^2 + n^3 + \dots), \end{aligned}$$

wenn wir $\beta^2 e^{-\psi i} = n$ setzen. Die geometrische Reihe hat nun eine bekannte Summenformel, wornach wir erhalten

$$\begin{aligned} R + Si &= e^{(\varphi - \psi)i} \cdot \frac{1}{1 - n} = \frac{e^{(\varphi - \psi)i}}{1 - \beta^2 e^{-\psi i}} \cdot \frac{1 - \beta^2 e^{\psi i}}{1 - \beta^2 e^{\psi i}} = \\ &= e^{(\varphi - \psi)i} \frac{1 - \beta^2 e^{\psi i}}{1 - 2\beta^2 \cos \psi + \beta^4} = \frac{e^{(\varphi - \psi)i} - \beta^2 e^{\varphi i}}{N} = \\ &= \frac{\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \cos \varphi - i \beta^2 \sin \varphi}{N}, \end{aligned}$$

wobei wir

$$1 - 2\beta^2 \cos \psi + \beta^4 = N$$

gesetzt haben. Der imaginäre Teil der Summe ergibt

$$S = \frac{\sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \sin \varphi}{N},$$

somit

$$\Sigma = \alpha a \sin \varphi + \alpha' \beta' \beta a \frac{\sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \sin \varphi}{N}.$$

Wir wollen hier die Glieder mit den Faktoren $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ noch trennen, erhalten somit

$$\Sigma = a \sin \varphi \left(\alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right) - a \cos \varphi \cdot \alpha' \beta' \beta \frac{\sin \psi}{N}.$$

Es ist also das Resultat wiederum eine schwingende

Bewegung von derselben Schwingungsdauer, aber von verschiedener Amplitude und Phase.

Wir finden das Quadrat der Amplitude der resultierenden Schwingung aus der Gleichung

$$A^2 = a^2 \left(\alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right)^2 + a^2 \alpha'^2 \beta'^2 \beta^2 \frac{\sin^2 \psi}{N^2}.$$

(Siehe Bd. I § 73). Dieser Grösse setzen wir die Lichtstärke proportional. Sie giebt uns also ohne weiters Aufschluss über die Intensität des reflektierten Lichts.

In ganz derselben Weise wie für das reflektierte können wir nun die Rechnung auch für das durchgehende Licht machen. Wir erhalten in E den Schwingungszustand

$$\sigma' = \alpha' \beta' a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c} \right),$$

in E'

$$\sigma'' = \alpha' \beta' \beta^2 a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{3AB}{c'} - \frac{B'E'}{c} \right)$$

u. s. w. Wir führen

$$\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c} \right) = \chi$$

ein und können so für die Summe sämtlicher σ schreiben

$$\Sigma' = \alpha' \beta' a \sin \chi + \alpha' \beta' \beta^2 a \sin (\chi - \psi) + \\ + \alpha' \beta' \beta^4 a \sin (\chi - 2\psi) + \dots,$$

was nach dem früheren Vorgang

$$\Sigma' = \alpha' \beta' a \frac{\sin \chi - \beta^2 \sin (\chi + \psi)}{N}$$

ergiebt.

Es handelt sich uns jetzt darum, die Beziehung zwischen α , α' , β und β' zu ermitteln. Wir benützen

dazu die Erfahrungsthatſache, daſs von einem unendlich dünnen Blättchen kein Licht reflektiert wird, ſondern alles durchgeht. Für ein ſolches wird $\psi = 0$, folglich

$$\Sigma = 0 = a \sin \varphi \left(\alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4} \right),$$

$$\Sigma' = a \sin \chi = a \alpha' \beta' \sin \chi \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4}.$$

Es muſs ſomit

$$\alpha + \frac{\alpha' \beta' \beta}{1 - \beta^2} = 0,$$

$$\alpha' \beta' \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4} = \frac{\alpha' \beta'}{1 - \beta^2} = 1$$

ſein. Darnach reduziert ſich die vorletzte Gleichung auf $\alpha + \beta = 0$ oder

$$\alpha = -\beta.$$

Das beſagt, daſs ſich die Amplitude bei einer Reflexion umkehren muſs. Es bleibt jedoch unentſchieden, ob dies bei der äuſſeren oder bei der inneren Reflexion geſchieht.

Jetzt können wir uns auch eine Vorſtellung von dem Quadrat der reſultierenden Amplitude im reflektierten und durchgehenden Licht machen. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right)^2 &= \left[-\beta + (1 - \beta^2) \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right]^2 = \\ &= \frac{\beta^2 (1 + \beta^2)^2 (1 - \cos \psi)^2}{N^2}, \end{aligned}$$

was ſich durch Ausmultiplizieren leicht finden läſst. Wir haben ſomit

$$\frac{A^2}{a^2 \beta^2} = \frac{(1 + \beta^2)^2 (1 - \cos \psi)^2 + (1 - \beta^2)^2 \sin^2 \psi}{N^2} =$$

$$= \frac{2(1 - \cos \psi)}{N}.$$

Wird demnach $\cos \psi = 1$, d. i. für $\psi = 0, 2\pi, \dots$, so wird kein Licht reflektiert, für $\psi = \pi, 3\pi, \dots$ werden wir hingegen das Maximum der Lichtstärke erhalten.

Verfahren wir mit dem durchgelassenen Licht Σ' genau so wie mit dem reflektierten, so finden wir für das Quadrat der Amplitude

$$B^2 = \frac{a^2 (1 - \beta^2)^2}{N}.$$

Hier kann also nie völlige Dunkelheit eintreten, wohl giebt es aber auch ein Minimum der Lichtstärke, d. i. für $\cos \psi = 0$, also für $\psi = \pi, 3\pi, \dots$. Haben wir also im reflektierten Licht das Maximum der Intensität, so ist im durchgelassenen das Minimum und umgekehrt. Man sagt, die Erscheinungen im reflektierten und durchgelassenen Licht sind zu einander complementär. Beide Intensitäten geben zusammen die ursprüngliche; denn es ist

$$A^2 + B^2 = a^2.$$

Wir haben noch zu erklären, weshalb wir die Lichtintensität proportional dem Quadrat der Amplitude der schwingenden Bewegung setzen. Die Lichtstärke ist offenbar proportional der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung. Aendert sich nun der Schwingungszustand nach der Gleichung

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau},$$

so wird die jeweilige Geschwindigkeit der sich be-

wegenden Teilchen dem Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} a \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

proportional sein. Die lebendige Kraft ist demnach der Grösse $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ und damit a^2 proportional. Da wir die Schwingungsdauer als unabhängig von der Intensität halten, so ändert sich der Mittelwert der lebendigen Kraft thatsächlich nur mit dem Quadrat der Amplitude.

§ 17. Newton's Farbenglas.

Legen wir auf eine planparallele Glasplatte eine sehr flache convexe Linse (Fig. 24), so begrenzen wir damit eine Luftschicht von veränderlicher Dicke, welche

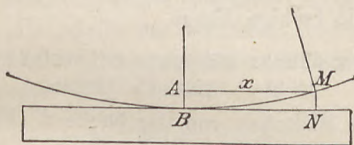


Fig. 24.

in der Mitte unendlich dünn wird. Man nennt diese Anordnung „Newton's Farbenglas“. Eine solche Luftschicht muss nach dem vorhergehenden Paragraphen sowohl im durchgehenden als reflektierten Licht Interferenzerscheinungen zeigen. An einer bestimmten Stelle vom Radius x hat die Luftschicht die Dicke

$$MN = AB = R - \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x^2}{2R},$$

wenn wir den Krümmungsradius R der Linse gegen-

über x sehr gross annehmen. Wir erhalten nach § 16 für $\psi = 0,2\pi \dots$ im reflektierten Licht Dunkelheit. Lassen wir das Licht senkrecht auffallen, so wird $AB = d$ (Fig. 23), wenn wir unter d die Dicke der Schicht verstehen, $AD = 0$. Mithin ist

$$\psi = \frac{4\pi^2}{c'\tau}.$$

Es ist aber $c'\tau = \lambda'$ die Wellenlänge des Lichts in der Platte. Wir haben demnach Dunkelheit für $d = 0, \frac{\lambda'}{2}, \frac{2\lambda'}{2}, \frac{3\lambda'}{2} \dots$, das ist für $x^2 = 0, \lambda'R, 2\lambda'R, \dots$. Wir erhalten demnach in unserm Farbglass dunkle Kreise, deren Radien sich der Reihe nach wie $0:1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ verhalten. Bei Licht, welches aus mehreren Farben zusammengesetzt ist, entstehen natürlich entsprechende farbige Ringe.

§ 18. Wirkung dünner Blättchen bei schief auffallendem Licht — Talbot's Linien.

Auf ein Blättchen von der Dicke d (Fig. 25) falle

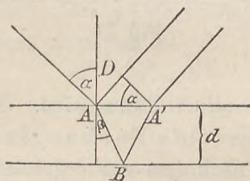


Fig. 25.

Licht unter dem Winkel α auf, welches unter dem Winkel β im Blättchen weitergeht. In der Formel

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{2AB}{c'} - \frac{AD}{c} \right)$$

(§ 16) wollen wir AB und AD durch Blättchendicke, Einfallswinkel und Brechungswinkel ausdrücken. Wir haben

$$d = \overline{AB} \cdot \cos \beta,$$

ferner

$$AD = \overline{AA'} \cdot \sin \alpha = 2 \overline{AB} \cdot \sin \beta \sin \alpha = \frac{2 d \sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta},$$

folglich

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{2d}{c' \cos \beta} - \frac{2d \sin \alpha \sin \beta}{c \cos \beta} \right) = \frac{4\pi d}{c' \tau \cos \beta} \left(1 - \frac{c'}{c} \sin \alpha \sin \beta \right) = \frac{4\pi d}{\lambda' \cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4\pi d}{\lambda'} \cos \beta,$$

indem ja $\frac{c'}{c} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{n} = \sin \beta$ ist. Für $\psi = 0, 2\pi, \dots$

haben wir wiederum Dunkelheit im reflektierten Licht. Indem die Strahlen schief auffallen, erzielen wir also den Effekt, als würde das Blättchen dünner.

Wir setzen nun voraus, unser Blättchen sei so dick, dass die Formel

$$\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos \beta = 2m\pi,$$

nach welcher wir Dunkelheit erhalten, erst für ein grösseres m erfüllt ist. Gehen wir vom roten zum violetten Licht über, so wird die Wellenlänge etwa halb so gross. Es muss daher wiederum für den Fall der Dunkelheit m sich etwa verdoppeln. Haben wir daher weisses Licht, so werden durch unser Blättchen in demselben alle jene Lichtsorten verlöschen, deren Wellenlängen obige Gleichung erfüllen, wenn wir der Reihe nach anstatt m die Werte $m+1, m+2, \dots, 2m$ einsetzen. Wir können dies dadurch nachweisen, dass wir

das Licht nach der Reflexion durch ein Prisma gehen lassen. Wir erhalten dann ein Spektrum mit m dunklen Streifen, welche nach ihrem Entdecker den Namen Talbot'sche Linien führen.

§ 19. Beugung des Lichts.

Fresnel machte vom Huyghens'schen Prinzip folgende Anwendung. Er sagt: von allen Punkten einer Kugelwelle (Fig. 26) gelangt Licht nach dem Punkt B.

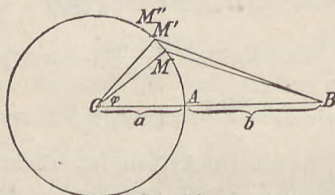


Fig. 26.

Derselbe erscheint aber nur deshalb nicht heller, als würde er von einem geraden Strahl von O aus getroffen, weil die Strahlen MB, M'B u. s. w. verschiedene Wege zurücklegen, sich infolgedessen durch Interferenz gegenseitig auslöschen.

Wir denken uns auf der Kugel durch M einen Kreis gezogen, indem wir die Kugel einfach um OB rotieren lassen. Die Fläche der Kugelcalotte zwischen A und M ist dann

$$F = 2\pi a^2 (1 - \cos \varphi).$$

Ferner ist

$$\overline{BM}^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b)\cos \varphi = b^2 + 2a(a + b)(1 - \cos \varphi),$$

folglich

$$1 - \cos \varphi = \frac{\overline{BM}^2 - b^2}{2a(a + b)}.$$

Wir erhalten sonach

$$F = \frac{\pi a}{a+b} (\overline{BM^2} - b^2)$$

und analog

$$F' = \frac{\pi a}{a+b} (\overline{BM'^2} - b^2)$$

u. s. w. Wir setzen nun

$$F' - F = f = \frac{\pi a}{a+b} (\overline{BM'^2} - \overline{BM^2}),$$

$$f' = \frac{\pi a}{a+b} (\overline{BM''^2} - \overline{BM'^2})$$

u. s. f. Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass $BM' - BM = BM'' - BM' = BM''' - BM'' = \dots = p$ ist. Dann wird

$$f = \frac{\pi a p}{a+b} (BM' + BM),$$

$$f' = \frac{\pi a p}{a+b} (BM'' + BM'),$$

$$f'' = \frac{\pi a p}{a+b} (BM''' + BM''),$$

.

Daraus folgt nun

$$f - 2f' + f'' = 0.$$

Die Fläche einer jeden derartigen Kugelzone ist also gleich der halben Flächensumme der beiden benachbarten Zonen, oder es wird vom Punkt O aus durch jede Zone gerade halb so viel Licht gehen als durch ihre beiden Nachbarzonen zusammen.

Wählen wir nun die Punkte M, M', . . . so, dass

$$MB - AB = M'B - MB = \dots = \frac{\lambda}{2},$$

so wird sämtliches Licht, welches durch MM' (Fig. 27) geht, durch jenes, welches bei MN und $M'N'$ passiert, aufgehoben; und so geht es über die ganze Kugelfläche

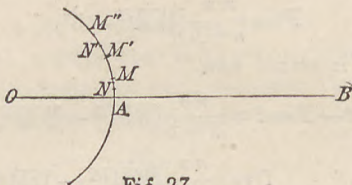


Fig. 27.

fort. Also nur jenes Licht, welches durch den kleinen Kreis AN geht, wird in B nicht vernichtet.

Der Punkt B wird also bei voller Beleuchtung nicht heller erscheinen, als wenn wir in A einen Schirm mit einer Oeffnung vom Radius AN anbringen. Vergrössern wir jetzt die Oeffnung, so wird B noch heller werden. Die Helligkeit wird jedoch bei weiterer Vergrösserung wieder schwächer, und wir werden die schwächste Beleuchtung haben, wenn die Oeffnung den Radius AM' hat. Dann wird das Licht wieder heller u. s. w. Ebenso können wir aber auch nach A einen kleinen kreisförmigen Schirm bringen. Hat er den Radius AN , so wird in B kein Licht sein, wird er grösser, so wird es in B hell. Bei weiterer Vergrösserung wird B wieder dunkel u. s. f. Die Lichtstrahlen erleiden also eine Ablenkung, so oft sie nahe an der Kante eines Schirms vorübergehen. Man nennt diese Erscheinung „Beugung des Lichts.“

§ 20. Beugung durch eine Spalte.

Der Schirm $O X$ (Fig. 28) besitze eine Spalte $A A'$, auf welche unter dem Winkel α eine Planwelle $A B$ fällt. Der Schirm sei gleichzeitig die Grenze

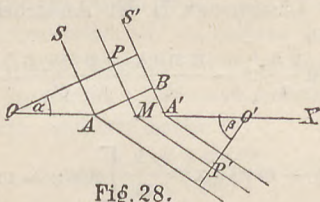


Fig. 28.

zweier verschiedener Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit c , im unteren c' . Bei P haben wir den Schwingungszustand.

$$\sigma = \sin \frac{2\pi}{\tau} t.$$

In P' haben wir dann

$$\sigma' = \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'} \right).$$

Dorthin gelangt das Licht unter dem Winkel β zum Loth, und die gesammte Lichtmenge wird sich darstellen lassen durch

$$I = \gamma \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'} \right) df,$$

wenn wir unter df ein Flächenelement der Spalte im Punkt M verstehen, während γ jener Bruchteil des Lichts ist, der in das untere Medium eindringt. Wir setzen nun $OM = x$, also

$$PM = x \sin \alpha, \quad MP' = (p - x) \sin \beta,$$

wobei $OO' = p$ ist. Ferner sei noch $df = dx dy$, dann

$$I = \gamma \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \alpha}{c} - \frac{p \sin \beta}{c'} + \frac{x \sin \beta}{c'} \right) dx dy.$$

Integrieren wir über den ganzen Spalt, so wird aus dy einfach die Höhe h des Spalts, und es bleibt uns für die gesammte Lichtmenge L der Ausdruck

$$\begin{aligned} L &= \gamma h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \alpha}{c} - \frac{p \sin \beta}{c'} + \frac{x \sin \beta}{c'} \right) dx = \\ &= \gamma h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin (\varphi - m x) dx = \frac{\gamma h}{m} \left[\cos (\varphi - m x_0 - m b) - \right. \\ &\quad \left. - \cos (\varphi - m x_0) \right] = \frac{2 \gamma h}{m} \sin \left(\varphi - m x_0 - \frac{m b}{2} \right) \sin \frac{m b}{2} = \\ &= \gamma b h \sin \left(\varphi - m x_0 - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}, \quad (15) \end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{p \sin \beta}{c'} \right) = \varphi, \quad \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{\sin \alpha}{c} - \frac{\sin \beta}{c'} \right) = m$$

gesetzt haben und unter $b = AA'$ die Breite des Spalts verstehen. Die Amplitude der neuen Lichtbewegung ist also

$$A = \gamma b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}.$$

Sie ist eine periodische Funktion von m . Ihr Maximum hat sie für $m=0$. Das ist der Fall, wenn

$$\frac{\sin \alpha}{c} - \frac{\sin \beta}{c'} = 0,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n$$

wird. Das Maximum der Beleuchtung haben wir demnach dort, wohin der Strahl nach dem Brechungsgesetz zu fallen hat.

Für die Folge wollen wir annehmen, dass auf beiden Seiten des Schirms dasselbe Medium, also $c = c'$ ist. Ferner sollen die Strahlen senkrecht einfallen. Es muss somit $\alpha = 0$ sein, und wir haben

$$m = - \frac{2 \pi \sin \beta}{\lambda}.$$

Was nun die Lichtintensität für verschiedene β betrifft, so handelt es sich um den Faktor

$$\frac{\sin \frac{(b \pi \sin \beta)}{\lambda}}{\frac{b \pi \sin \beta}{\lambda}}.$$

Das Licht wird also durch unsere Spalte so gebeugt, dass für $\beta = 0$ die grösste Lichtintensität vorhanden ist. Nach links und rechts nimmt sie sodann ab, bis für

$$\sin \beta = \frac{\lambda}{b}$$

Dunkelheit eintritt. Für grössere β haben wir dann wieder Licht, hierauf wieder Dunkelheit u. s. w., doch da der Bogen gegenüber dem Sinus rasch wächst, so nimmt mit wachsendem β auch die Intensität der Maxima bald ab.

§ 21. Beugung durch zwei Spalten — Interferenzversuche von Young und Arago.

Der Schirm OO' (Fig. 29) besitze zwei parallele Spalten AA' und BB' von gleicher Breite b und

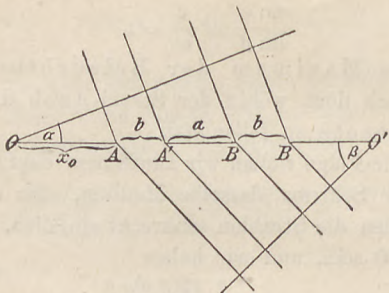


Fig. 29.

gleicher Höhe h . Der Zwischenraum beider Spalten habe die Breite a . Das Licht falle unter dem Winkel α auf, und wir fragen nach der Lichtmenge, welche unter dem Winkel β unterhalb des Schirms austritt. Wir brauchen also für die beiden Spalten bloss die Formel des vorigen Paragraphs anzuwenden und zu addieren. Demnach haben wir für die erste Spalte

$$\sigma = \gamma b h \sin \left(\varphi - m x_0 - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

für die zweite

$$\sigma' = \gamma b h \sin \left(\varphi - m x_0 - m a - m b - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

indem wir bei der zweiten anstatt x_0 den Wert $x_0 + a + b$ zu setzen haben. Die Summe beider Lichtmengen ist also

$$\sigma + \sigma' = \gamma b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cdot 2 \sin \left(\varphi - m x_0 - \frac{m a + m b}{2} - \frac{m b}{2} \right) \times \\ \times \cos \frac{m a + m b}{2}.$$

für die resultierende Amplitude erhalten wir

$$A = 2 \gamma b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cos \frac{m a + m b}{2}.$$

Wiederum sei oben und unten dasselbe Medium und der Einfallswinkel $\alpha = 0$, also $m = -\frac{2 \pi \sin \beta}{\lambda}$.

Mit wachsendem Winkel β erhalten wir wieder Maxima und

Minimader Beleuchtung. Jene, welche von dem Factor $\frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}$

herrühren, nennt man die Maxima bezgl. Minima

erster Klasse, jene des Factors $\frac{m a + m b}{2}$ die

zweiter Klasse. Die Minima zweiter Klasse werden also eintreten für

$$\frac{m a + m b}{2} = +\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, \dots,$$

das ist für

$$\sin \beta = +\frac{\lambda}{2(a+b)}, +\frac{3\lambda}{2(a+b)}, \dots$$

Man nennt diese Erscheinung „Young's Interferenzversuch“, welche Arago dahin abgeändert hat, dass

er vor die eine Spalte ein dünnes Blättchen gab. Dadurch wird der Strahlengang verzögert, und die Folge ist, dass die Symmetrielinie der Erscheinung gegen die Symmetrielinie der beiden Spalten verschoben ist.

§ 22. Fraunhofer's Gitter.

Bringen wir auf einem Schirm eine Reihe gleichweit von einander abstehender Spalten an, so erhalten wir ein Fraunhofer'sches Gitter. Dieses zeigt Interferenzerscheinungen, welche wir nach derselben Methode wie den Young'schen Versuch im vorhergehenden Paragraphen herleiten können. Das Gitter soll n Spalten besitzen. Wir haben somit n Gleichungen von der Form der Gleichung (15) zu addieren, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass wir in der zweiten anstatt x_0 die Grösse $x_0 + a + b$, in der dritten $x_0 + 2(a + b)$ u. s. w. zu setzen haben. Ferner führen wir noch die Grössen

$$\psi = \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2}, \quad \eta = m(a + b)$$

ein und erhalten somit schliesslich das Resultat

$$\Sigma = \gamma b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \left\{ \sin \psi + \sin(\psi - \eta) + \sin(\psi - 2\eta) + \right. \\ \left. + \dots + \sin[\psi - (n-1)\eta] \right\}.$$

Die Summierung dieser Reihe geschieht auf dieselbe Weise wie in § 16. Wir können schreiben

$$R + Si = e^{\psi i} + e^{(\psi - \eta)i} + e^{(\psi - 2\eta)i} + \dots$$

$$\begin{aligned}
+ e^{[\psi - (n-1)\eta]i} &= e^{\psi i} \frac{1 - e^{-n\eta i}}{1 - e^{-\eta i}} = \\
&= \frac{e^{\psi i} (1 - e^{-n\eta i}) (1 - e^{\eta i})}{2(1 - \cos \eta)} = \\
&= \frac{e^{\psi i} \cdot e^{-\frac{n\eta i}{2}} \left(e^{\frac{n\eta i}{2}} - e^{-\frac{n\eta i}{2}} \right) e^{\frac{\eta i}{2}} \left(e^{-\frac{\eta i}{2}} - e^{\frac{\eta i}{2}} \right)}{2(1 - \cos \eta)} = \\
&= \frac{e^{\left(\psi - \frac{n\eta}{2} + \frac{\eta}{2}\right)i} \cdot 2i \sin \frac{n\eta}{2} \cdot -2i \sin \frac{\eta}{2}}{2(1 - \cos \eta)}.
\end{aligned}$$

Darnach erhalten wir

$$S = \sin \left(\psi - \frac{n\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \frac{2 \sin \frac{n\eta}{2} \sin \frac{\eta}{2}}{1 - \cos \eta}.$$

Die Amplitude des resultierenden Lichts wird nun

$$A = \gamma b h \frac{\sin \frac{mb}{2}}{\frac{mb}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{nm(a+b)}{2}}{\sin \frac{m(a+b)}{2}}.$$

Es ergeben sich somit wiederum Maxima und Minima erster und zweiter Klasse. Was die Sichtbarkeit anbelangt, so wird die Intensität der Maxima zweiter Klasse um so grösser werden, je grösser n ist. Für diese Maxima haben wir nämlich

$$\sin \frac{m(a+b)}{2} = 0,$$

also

$$\frac{m(a+b)}{2} = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

Es wird dann

$$\frac{\sin \frac{nm(a+b)}{2}}{\sin \frac{m(a+b)}{2}} = n.$$

Ist demnach n gross genug, so werden die Maxima erster Klasse gegenüber jenen zweiter ganz verschwinden.

Erinnern wir uns, dass $m = -\frac{2\pi \sin \beta}{\lambda}$ ist, so finden wir ohne weiteres für die Maxima zweiter Klasse

$$\sin \beta = \pm \frac{\lambda}{a+b}, \pm \frac{2\lambda}{a+b}, \dots$$

$$n(a+b) = B$$

ist die Gesamtbreite unseres Gitters. Kennen wir daher die Zahl der Linien, so finden wir aus der Breite des Gitters leicht die Grösse $a+b$. Damit ist uns die Möglichkeit gegeben, die Wellenlänge des Lichts aufs Genaueste zu bestimmen. Die Winkel, bei welchen die einzelnen Maxima auftreten, werden um so grösser sein, je grösser die Zahl der Spalten auf der Längeneinheit des Gitters ist. Ist das Licht eine Mischfarbe, so wird es durch das Gitter in die einzelnen Farben infolge der verschiedenen Wellenlängen λ zerlegt. Wir erhalten ein Gitterspectrum.

§ 23. Polarisation des Lichts bei der Reflexion — Gleichungen von Fresnel.

Malus machte die Beobachtung, dass Licht, durch einen Turmalin betrachtet, verschiedene Erscheinungen hervorruft, je nachdem es direkt oder erst nach vorhergegangener Reflexion an einer ebenen Fläche den Turmalin passiert. Das Licht erfährt also durch die Reflexion eine Veränderung, die man Polarisation nennt. Fresnel wusste diese Erscheinung in mathematische Formeln zu fassen; ersah sich jedoch dabei genötigt anzunehmen, dass die Aethertheilchen Schwing-

ungen vollführen, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts stattfinden. Wir können von dieser kühnen Hypothese jedoch absehen, wenn wir anstatt der Schwingung eines Teilchens den Bewegungszustand der Aetherteilchen einführen. Welche Bewegung die einzelnen Aetherteilchen dabei machen, brauchen wir gar nicht zu wissen, wenn sich nur der ganze Bewegungszustand durch einen Vector darstellen lässt, welcher senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung ist. Auch bei dieser Annahme können wir den Weg Fresnel's zur Herleitung der Polarisationsgleichungen einschlagen. Nach ihm gelten folgende Sätze:

1. Es muss die lebendige Kraft des einfallenden Strahls gleich der Summe der lebendigen Kräfte des reflektierten und gebrochenen Strahls sein.
2. In der Trennungsebene beider Medien muss Continuität vorhanden sein. Das heisst: in der Trennungsebene muss die Summe der Bewegung im ersten Medium gleich der Bewegung im zweiten sein.

Wir wollen nun daran gehen, die lebendige Kraft einer Welle aufzusuchen. Wir setzen voraus, dass unsere Lichtwelle eine Planwelle parallel zur yz -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 30) sei. Ihre Breite sei g , ihre Höhe h . Der Bewegungszustand im Anfangspunkt sei gegeben durch

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Dann haben wir in der Entfernung x die Bewegung

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

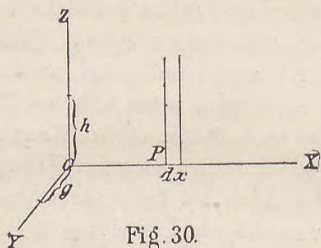


Fig. 30.

wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts ist. Im Punkt P denken wir uns zwei parallele Ebenen senkrecht zur x -Achse, welche um dx von einander entfernt sind. Diese schneiden aus der Lichtwelle ein Volumen $gh dx$ von der Masse $\rho gh dx$. Wir nehmen also an, die Dichte des Aethers sei ρ . Die Lichtbewegung wird daher in diesem Volumen eine lebendige Kraft

$$dL = \frac{1}{2} k \rho gh dx \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2$$

besitzen, wobei k der entsprechende Proportionalitätsfaktor ist. Integrieren wir diesen Ausdruck von 0 bis λ , so erhalten wir die gesamte lebendige Kraft einer Welle. Sie ist somit

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} k \rho gh \int_0^{\lambda} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 dx = \frac{2\pi^2 k \rho gh a^2}{\tau^2} \int_0^{\lambda} \cos^2 \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{c} \right) dx = \\ &= \frac{2\pi^2 k \rho gh a^2}{\tau^2} \int_0^{\lambda} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^2 k \varrho g h a^2 \lambda}{\tau^2}.$$

Für die lebendige Kraft einer Welle im reflektierten Licht ändert sich in dem ganzen Ausdruck nichts als die Grösse a . Wir wollen sie für dieses Licht a' nennen. Im gebrochenen Licht haben wir jedoch auch eine andere Dichte ϱ , ein anderes h und λ . Wir wollen hier analog a_1 , ϱ_1 , h_1 und λ_1 einführen. Somit muss folgende Gleichung gelten

$$\frac{\pi^2 k \varrho g h a^2 \lambda}{\tau^2} = \frac{\pi^2 k \varrho g h a'^2 \lambda}{\tau^2} + \frac{\pi^2 k \varrho_1 g h_1 a_1^2 \lambda_1}{\tau^2}$$

oder

$$\varrho h a^2 \lambda = \varrho h a'^2 \lambda + \varrho_1 h_1 a_1^2 \lambda_1. \quad (16)$$

Es ist nun nach Fig. 31

$$h : h_1 = \cos \alpha : \cos \beta,$$

ferner

$$\lambda = c \tau, \lambda_1 = c_1 \tau,$$

wenn c und c_1 die Lichtgeschwindigkeiten oben und unten sind. Daraus folgt

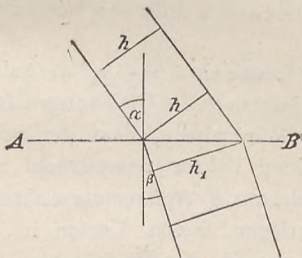


Fig. 31.

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{c}{c_1} = n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Demnach können wir die Gleichung (16) schreiben

$$\varrho (a^2 - a'^2) \sin \alpha \cos \alpha = \varrho_1 a_1^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Fresnel macht nun weiter die Annahme, dass sich die Grösse der Lichtgeschwindigkeit aus ähnlichen Elementen wie die Schallgeschwindigkeit zusammensetzt. Er schreibt daher

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

wobei wir unter E die Elasticität des Aethers verstehen können. Mit der Annahme, E sei für alle Körper gleich, folgt

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho_1}},$$

wonach

$$\frac{c^2}{c_1^2} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$$

gesetzt werden kann. Obige Gleichung der lebendigen Kraft wird somit

$$(a^2 - a'^2) \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta = a_1^2 \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha$$

oder

$$(a^2 - a'^2) \cos \alpha \sin \beta = + a_1^2 \cos \beta \sin \alpha. \quad (17)$$

Wir haben jetzt noch die Gleichungen der Continuität zu entwickeln. Wir wissen, dass der Schwingungszustand durch einen Vektor ausgedrückt werden kann, welcher senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts steht. Wir zerlegen diesen Vector in zwei Componenten, deren eine in der Einfallsebene, während die andere senkrecht dazu ist. Diese wollen wir zuerst betrachten. Sie fällt in die Trennungsebene selbst hinein, und es muss zur Aufrechterhaltung der Continuität der Zustand σ_1 im unteren Medium gleich der

Summe $\sigma + \sigma'$ im oberen sein. Daraus folgt

$$a + a' = a_1, \quad (18)$$

was in Gleichung (17) eingesetzt

$$(a - a') \cos \alpha \sin \beta - (a + a') \cos \beta \sin \alpha = 0$$

ergiebt, was sich weiter umwandeln lässt in

$$a (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = a \sin (\beta - \alpha) = a' \sin (\alpha + \beta),$$

$$a' = -a \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}. \quad (19)$$

Es kehrt sich also die Amplitude im reflektierten Licht um. Für die Amplitude im gebrochenen Strahl finden wir aus den Gleichungen (17) und (18)

$$a_1 = a \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}. \quad (20)$$

Für die Komponente in der Einfallsebene haben wir eine bestimmte Richtung als positiv anzunehmen. Es sei jene des Vektors a (Fig. 32). Diesen Vektor

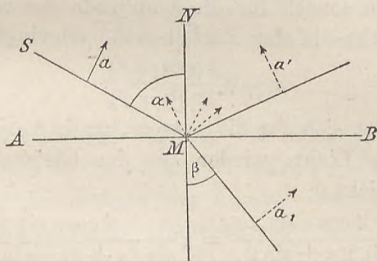


Fig. 32.

wollen wir im Punkt M abermals in eine Komponente in der Trennungsebene AB und eine im Einfallslot MN zerlegen. Es muss also dann der Kontinuität halber

$$a \cos \alpha - a' \cos \alpha = a_1 \cos \beta, \quad (21)$$

ferner

$$a \sin \alpha + a' \sin \alpha = a_1 \sin \beta \quad (22)$$

sein. Wenn wir die Gleichungen (21) und (22) mit einander multiplizieren, so gelangen wir in Widerspruch mit der Gleichung (17). Fresnel nahm daher an, dass die Gleichung (22) den Vorgängen in der Wirklichkeit nicht entspricht.

Dividieren wir Gleichung (17) durch Gleichung (21), so erhalten wir

$$(a + a') \sin \beta = a_1 \sin \alpha.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\cos \beta$, hingegen die Gleichung (21) mit $\sin \alpha$ und subtrahieren beide von einander. Es bleibt dann

$$(a + a') \sin \beta \cos \beta - (a - a') \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

woraus weiter folgt

$$a' = a \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = a \frac{\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Wir erhalten sonach für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt

$$a' = a \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}. \quad (23)$$

Ferner findet sich für die entsprechende Amplitude des gebrochenen Lichts wieder aus den Gleichungen (17) und (21) leicht

$$a_1 = a \frac{4 \cos \alpha \sin \beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = a \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \quad (24)$$

Wird $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, so wird $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \infty$, also $a' = 0$.

Wenn wir demzufolge Licht so einfallen lassen, dass

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ist, so werden parallel zur Einfalls-

ebene gehende Schwingungen überhaupt nicht reflektiert. Es ist für Glas dieser Winkel α etwa 57° . Man nennt ihn den Polarisationswinkel. Für den Polarisationswinkel ist also $\sin \beta = \cos \alpha$, daher

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

es ist die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungsexponenten.

In Fig. 33 sei EE die Einfallsebene des Lichts, PP liege in der Trennungsebene der beiden Medien

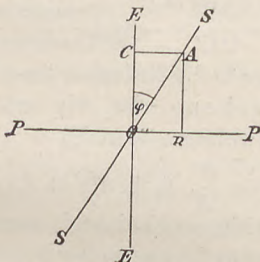


Fig. 33.

und stehe senkrecht auf EE. Die Schwingungen des Lichts finden in der Geraden SS statt. OA sei die Amplitude des einfallenden Lichts. Wir zerlegen sie in die Komponenten OB senkrecht und OC parallel zur Einfallsebene. Wir haben somit

$$OB = \overline{OA} \sin \varphi, \quad OC = \overline{OA} \cos \varphi.$$

Nach der Reflexion verwandelt sich OB nach Gleichung (19) in

$$OB' = -OB \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und nach Gleichung (23) OC in

$$OC' = \overline{OC} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Es ist nun

$$\frac{OB'}{OC'} = - \frac{OB}{OC} \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es werden sich nach der Reflexion die Komponenten sonach zu einer Schwingungsrichtung φ' zusammensetzen, welche von der früheren abweicht. Wir haben nämlich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{OB'}{OC'} = - \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es wird also durch die Reflexion eine Drehung der Schwingungsebene oder, wie man auch sagt, der Polarisationssebene bewirkt.

Wird $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, d. h. fällt das Licht unter dem Polarisationswinkel auf, so wird $\operatorname{tg} \varphi' = -\infty$, das reflektierte Licht schwingt parallel zur Trennungsebene beider Medien. Das natürliche Licht, dessen Schwingungen nach allen Richtungen in einer zum Lichtstrahl senkrechten Ebene gehen, wird daher, wenn es unter dem Polarisationswinkel reflektiert wird, nur noch Schwingungen in einer Richtung, nämlich parallel zur Trennungsebene machen, es ist vollkommen polarisiert. Lassen wir nun solches Licht unter dem Polarisationswinkel auf einen Spiegel fallen, aber so, dass es parallel zur Einfallsebene schwingt, so wird es überhaupt nicht mehr reflektiert.

Wir wollen jetzt eine ähnliche Betrachtung für

das gebrochene Licht anstellen. Für dieses seien die Komponenten OB_1 und OC_1 , und wir haben nach den Gleichungen (20) und (24)

$$OB_1 = \overline{OB} \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad OC_1 = \overline{OC} \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)},$$

folglich

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OB}{OC} \cdot \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \varphi \cos(\alpha - \beta).$$

Also auch bei der Brechung haben wir eine Aenderung der Schwingungsrichtung. Lassen wir Licht durch eine planparallele Platte fallen, so haben wir bei der ersten Brechung

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\alpha - \beta),$$

bei der zweiten

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^2(\alpha - \beta).$$

Fällt das Licht durch n Platten, so haben wir

$$\operatorname{tg} \varphi_{2n} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^{2n}(\alpha - \beta).$$

Da nun $\cos(\alpha - \beta) < 1$, so nähert sich mit wachsender Zahl der Platten jedes φ mehr jenem Winkel, für welchen $\operatorname{tg} \varphi_{2n} = 0$ ist, d. i. dem Winkel $\varphi_{2n} = 0$. Man nennt eine solche Reihe aufeinander geschichteter planparalleler Platten einen Plattensatz, welcher ebenfalls die Fähigkeit hat, natürliches Licht in teilweise polarisiertes zu verwandeln, jedoch schwingt das polarisierte Licht dann in der Einfallsebene.

Neumann ging nun von der Anschauung aus, dass die Dichte des Aethers in allen Körpern gleich, die Elastizität jedoch verschieden ist. Man erhält sodann aus der Gleichung (16)

$$(a^2 - a'^2) \sin \alpha \cos \alpha = a_1^2 \sin \beta \cos \beta,$$

und es stimmt dann auch die Gleichung (22) mit den

anderen überein. Führen wir unter dieser Annahme in ganz derselben Weise wie früher die Berechnung der verschiedenen Amplituden durch, so erhalten wir zwar dieselben Formeln, doch erscheinen sie bezüglich der beiden Komponenten der Lichtschwingung vertauscht. Das heisst, nach Neumann gelten die Gleichungen (19) und (20) für das Licht, welches in der Einfallsebene schwingt, die Gleichungen (23) und (24) für jenes senkrecht zur Einfallsebene.

§ 24. Doppelbrechung.

Geht ein Lichtstrahl durch eine Kalkspathplatte, so wird er im Allgemeinen in zwei polarisierte Lichtstrahlen zerlegt, deren Schwingungsebenen senkrecht zu einander liegen. Huyghens erklärte diese Erscheinung wieder mit Hilfe der Elementarwellen. Diese sind im Kalkspath jedoch nicht Kugelwellen, sondern jeder vom Lichtstrahl getroffene Punkt des Kalkspaths wird zum Erregungspunkt neuer Elementarwellen, deren eine eine Kugel, die andere ein Rotationsellipsoid darstellt, deren Rotationsachse die kleine Achse der

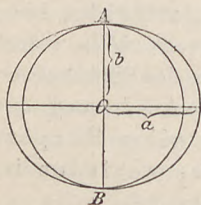


Fig. 34.

Ellipse ist und die Grösse des Durchmessers der Kugelwelle hat. Es liegt somit die Kugelwelle innerhalb des Ellipsoids und berührt es in zwei Punkten A und B (Fig. 34). Die Richtung AB nennt man die optische Achse. Sie fällt beim Kalkspath mit der Verbindungsge-

raden der stumpfen Rhomboederecken zusammen. Die Ebene, welche von der optischen Achse und dem Lichtstrahl gebildet wird, nennen wir den Hauptschnitt.

Wir denken uns den Kalkspath senkrecht zur optischen Achse ox (Fig. 35) geschliffen. Das

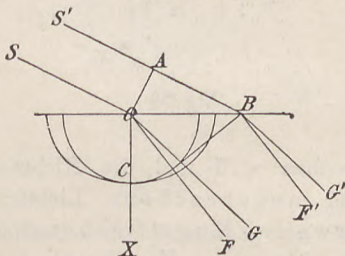


Fig. 35

Lichtbündel SS' falle schief auf. In O entstehen sodann die zwei Elementarwellen, welche den Durchmesser, bezüglich die kleine Achse OC erreicht haben, wenn der Punkt A der Lichtwelle nach B kommt. Die Tangenten von B an die Kugel bezügl. Ellipsoidfläche ergeben dann die zwei neuen Planwellen, welche in den Richtungen F und G ihren Weg fortsetzen. Das Licht hat also thatsächlich eine Doppelbrechung erlitten. Würde es anstatt schief, senkrecht einfallen, so wäre keine Brechung vorhanden.

Dies ist nicht mehr der Fall, wenn wir den Kalkspath schief zur optischen Achse schleifen. Es ergibt dann Fig. 36, in welcher ox die optische Achse sein soll, zwei Wellen, deren eine ungebrochen in der Richtung AB durch den Kalkspath geht, während die

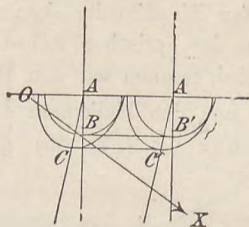


Fig. 36

andere gebrochen wird und die Richtung AC einschlägt. Der ungebrochene Lichtstrahl, dessen Elementarwellen Kugelflächen sind, heisst der ordentliche Strahl. Er ist immer senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert. Der andere jedoch, der ausserordentliche Strahl, rührt von den Ellipsoiden her, und sein Licht schwingt parallel zum Hauptschnitt. Drehen wir den Kalkspath um den einfallenden Strahl als Achse, so behält der ordentliche Strahl seine Lage bei, während der ausserordentliche sich um jenen herumdreht. Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahls hat einen ganz bestimmten Wert, jener des ausserordentlichen ändert sich mit dem Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der optischen Achse bildet. Man gibt jedoch in der Regel als Brechungsexponenten für den ausserordentlichen Strahl seinen kleinsten Wert an. Dieser tritt ein, wenn die optische Achse in der brechenden Fläche selbst liegt und senkrecht zur Einfallsebene ist. Wir erhalten dann den ordentlichen und

ausserordentlichen Strahl nach der Konstruktion Fig. 37, wo der kleinere Kreis der Kugelfläche angehört, wäh-

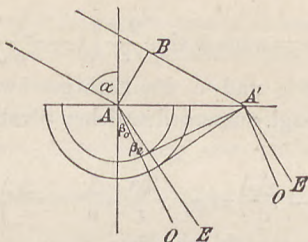


Fig. 37.

rend der grössere der Aequator des Rotationsellipsoids ist.

§ 25. Elliptische und cirkulare Polarisation.

Wir nehmen an, ein polarisierter Lichtstrahl falle senkrecht auf eine planparallele Kalkspathplatte, deren optische Achse HH (Fig. 38) senkrecht zum Einfallslot liegt, während die Schwingungen in der Richtung PP vor sich gehen. HH versinnlicht also gleichzeitig die Lage des Hauptschnitts. Die Dicke der Platte sei Δ ; der Bewegungszustand beim Einfallspunkt sei gegeben durch

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Dieser wird zerlegt in den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl. Ersterer ist beim Austritt aus der Platte

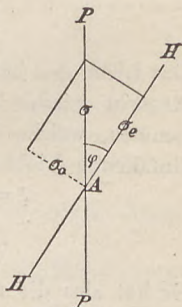


Fig. 38.

$$\sigma_o = a \sin \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\Delta}{o} \right),$$

letzterer

$$\sigma_e = a \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\Delta}{e} \right),$$

wenn wir mit o und e die Lichtgeschwindigkeit des ordentlichen bezgl. ausserordentlichen Strahls bezeichnen.

Wir wollen

$$\frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{\Delta}{o} \right) = \psi, \quad \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} \right) = \vartheta$$

setzen, können sonach schreiben

$$\sigma_o = \eta = a \sin \varphi \sin \psi, \quad \sigma_e = \xi = a \cos \varphi \sin (\psi + \vartheta);$$

führen wir noch

$$a \cos \varphi = p, \quad a \sin \varphi = q$$

ein, so erhalten wir schliesslich

$$\xi = p \sin (\psi + \vartheta), \quad \eta = q \sin \psi.$$

Betrachten wir diese Grössen als rechtwinkelige Koordinaten einer ebenen Kurve, so erhalten wir für $\vartheta = 2\pi$

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{q}{p} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Das Licht der beiden Strahlen setzt sich also nach dem Austritt wieder zu einer geradlinigen Bewegung zusammen, welche dieselbe Schwingungsrichtung wie das einfallende Licht hat. Ist $\vartheta = \pi$, so wird

$$\xi = -p \sin \psi, \quad \eta = q \sin \psi,$$

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{q}{p} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Es hat also die neue Schwingungsebene zur alten eine Drehung von 2φ erhalten. Es sei nun $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dann

$$\xi = p \cos \psi, \quad \eta = q \sin \psi,$$

$$\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\eta^2}{q^2} = 1.$$

Wir haben somit als resultierenden Schwingungszustand eine Bewegung, die uns bis jetzt noch nicht vorgekommen ist. Die von uns erhaltene Kurve ist eine Ellipse, weshalb wir das Licht elliptisch polarisiert nennen. Ist die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts durch $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gegeben, d. h. bildet die Schwingungsrichtung mit dem Hauptschnitt einen Winkel von 45° , so wird $p = q$ und wir haben die Gleichung eines Kreises. Licht von einem derartigen Bewegungszustand nennt man daher zirkular polarisiertes Licht. Ist $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, so erhalten wir dieselbe Ellipse bezgl. denselben Kreis, nur geht jetzt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung vor sich.

Wir wissen, dass

$$\vartheta = \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} \right)$$

ist. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wird demnach

$$\frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} = \frac{\tau}{4}.$$

Nun ist aber $\frac{\Delta}{o}$ die Zeit, welche der ordentliche Strahl braucht, um die Platte zu passieren, $\frac{\Delta}{e}$ die Durchgangszeit für den ausserordentlichen Strahl. Wir erhalten somit elliptisch bezgl. zirkular polarisiertes

Licht, wenn sich die Durchgangszeiten beider Strahlen um $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer von einander unterscheiden. Glimmer lässt sich in dünne Blätter spalten, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Man nennt ein solches Glimmerblättchen $\frac{1}{4}$ -Undulationsglimmer.

§ 26. **Polarisationsapparat — Turmalinzange -- senkrecht einfallendes Licht.**

Um zu erkennen, in welcher Weise polarisiertes Licht beim Durchgang durch Kristallplatten geändert wird, benutzt man einen sogenannten Polarisationsapparat. Ein solcher besteht aus zwei Hauptteilen, dem Polarisator und dem Analysator. Ersterer verwandelt das natürliche Licht in geradlinig polarisiertes. Dieses Licht lässt man dann durch die zu untersuchende Krystallplatte und sodann durch den Analysator gehen, aus welchem ebenfalls linear polarisiertes Licht austritt. Der einfachste derartige Apparat ist die sogenannte Turmalinzange. Der Turmalin hat die Eigenschaft, nur Licht von bestimmter Schwingungsrichtung durchzulassen. Bringen wir daher zwischen zwei Turmalinplatten einen Krystall, so kann durch Verdrehung der Turmaline gegen einander alles erzielt werden, was man von einem Polarisationsapparat verlangt.

Es seien nun $\sigma_0 = A M$ (Fig. 39) und $\sigma_0 = A M'$, die beiden Schwingungen nach dem Passieren der Krystallplatte. Die Strahlen gelangen sodann durch den Analysator, der sie nur Schwingungen in der Richtung

Q Q ausführen lässt. Es könnte dies z. B. ein Spiegel sein, auf welchen die Strahlen unter dem Polarisationswinkel auffallen.

Wir haben nun nach dem früheren

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= a \sin \varphi \sin \psi, \quad \sigma_e = \\ &= a \cos \varphi \sin (\psi + \vartheta).\end{aligned}$$

Vom ordentlichen Strahl entfällt sodann auf die Richtung Q Q die Komponente $\sigma_0 \sin (\omega - \varphi)$, wenn $\omega - \varphi$ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt der Krystallplatte und der Schwingungsebene des Analysators ist. Der ausserordentliche Strahl liefert $\sigma_e \cos (\omega - \varphi)$, und wir haben als resultierende Schwingung

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma_e \cos (\omega - \varphi) - \sigma_0 \sin (\omega - \varphi) = \\ &= a \cos \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin (\psi + \vartheta) - a \sin \varphi \sin (\omega - \varphi) \sin \psi.\end{aligned}$$

Wir wollen hier die Glieder mit $\cos \psi$ bezgl. $\sin \psi$ als Faktoren herausheben, erhalten somit

$$\begin{aligned}\sigma' &= [a \cos \varphi \cos (\omega - \varphi) \cos \vartheta - a \sin \varphi \sin (\omega - \varphi)] \sin \psi + \\ &\quad + a \cos \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin \vartheta \cos \psi.\end{aligned}$$

Wir haben also eine schwingende Bewegung von der Form

$$\sigma' = A \sin \psi + B \cos \psi.$$

Die Amplitude J dieser Bewegung ist gegeben durch

$$J^2 = A^2 + B^2,$$

woraus für unsern speziellen Fall folgt

$$\begin{aligned}J^2 &= a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 (\omega - \varphi) + a^2 \sin^2 \varphi \sin^2 (\omega - \varphi) - \\ &\quad - 2 a^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin (\omega - \varphi) \cos (\omega - \varphi) \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Fügen wir der zweiten Seite dieser Gleichung noch

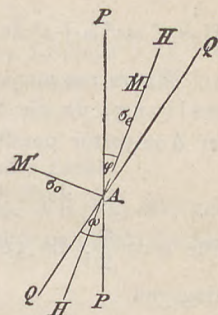


Fig. 39.

$$- 2 a^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin (\omega - \varphi) + \\ + 2 a^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos (\omega - \varphi) \sin (\omega - \varphi)$$

hinzu, so können wir leicht finden

$$J^2 = a^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin 2 \varphi \sin (2 \omega - 2 \varphi) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (25)$$

Wir setzen nun $\omega = 0$. Man nennt das die Parallelstellung, da die Schwingungen im Polarisator jenen im Analysator parallel sind. Wir haben dann

$$J_0^2 = a^2 - a^2 \sin^2 2 \varphi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$, die gekreuzte Stellung, erhalten wir hingegen

$$J_{\frac{\pi}{2}}^2 = a^2 \sin^2 2 \varphi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Es ist somit

$$J_0^2 + J_{\frac{\pi}{2}}^2 = a^2.$$

Das heisst, die Erscheinungen der Parallelstellung und der gekreuzten sind einander complementär. Verändern wir die Lage des Hauptschnitts, so wird für die Kreuzstellung

$$J^2 = 0,$$

wenn

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$$

wird. In diesem Fall erhalten wir also ein dunkles Gesichtsfeld. Hat der Krystall die Eigenschaft, das Licht zirkular zu polarisieren, so geschieht dies für

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{4}. \text{ Dann wird}$$

$$J^2 = a^2 \cos^2 \omega - a^2 \cos 2\omega \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos 2\omega - \frac{a^2}{2} \cos 2\omega = \frac{a^2}{2}.$$

Es ist hier die Intensität des Lichts von der Stellung des Polarisationsapparats ganz unabhängig.

§ 27. Schief einfallendes Licht.

Durch eine planparallele Platte AB (Fig. 40.) gehe ein Lichtstrahl SCD und parallel dazu durch die Luft

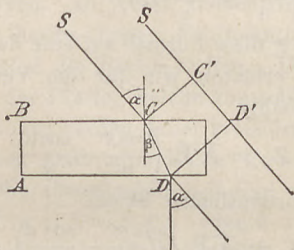


Fig. 40.

der Strahl $S'C'D'$. Der Strahl SCD erleidet dabei gegen $S'C'D'$ eine Verzögerung

$$Z = \frac{CD}{u} - \frac{C'D'}{v},$$

wenn u die Lichtgeschwindigkeit in der Platte, v jene in der Luft ist. Wir können diese Verzögerung auch so darstellen

$$Z = \frac{CD}{u} - \frac{\overline{CD} \cdot \cos(\alpha - \beta)}{v} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{AB}{u \cos \beta} - \frac{\overline{AB} \cdot \cos(\alpha - \beta)}{v \cos \beta} = \\
&= \frac{AB}{v} \left[\frac{v}{u \cos \beta} - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \right] = \\
&= \frac{AB}{v} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \beta} - \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) = \\
&= \frac{AB}{v} \left[\frac{\sin \alpha (1 - \sin^2 \beta)}{\sin \beta \cos \beta} - \cos \alpha \right] = \\
&= \frac{AB}{v} \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} - \cos \alpha \right) = \\
&= \overline{AB} \left(\frac{\cos \beta}{u} - \frac{\cos \alpha}{v} \right).
\end{aligned}$$

Wenden wir diese Formel auf eine doppelbrechende Platte an, so erhalten wir für die Verzögerung des ordentlichen Strahls

$$Z_0 = \overline{AB} \left(\frac{\cos \beta}{o} - \frac{\cos \alpha}{v} \right),$$

für den ausserordentlichen Strahl

$$Z_e = \overline{AB} \left(\frac{\cos \beta'}{u} - \frac{\cos \alpha}{v} \right),$$

mithin für den Zeitunterschied beider Strahlen

$$Z_e - Z_0 = \overline{AB} \left(\frac{\cos \beta'}{u} - \frac{\cos \beta}{o} \right).$$

Wir haben hier die Geschwindigkeit des ausserordentlichen Strahls u genannt. Diese ist gegeben, sobald der Winkel des Strahls mit der optischen Achse bekannt ist. Es lässt sich nun $\cos \beta$ und $\cos \beta'$ als Funktion von α , sowie den Geschwindigkeiten v , o und u darstellen, wobei u wieder eine Funktion von α , e , o und v ist, sodass $Z_e - Z_0$ für eine bestimmte Krystallplatte lediglich eine Funktion des Einfallswinkels ist, da ja

die Geschwindigkeiten v , o und e konstante Grössen sind. Somit ist auch $\vartheta = \frac{2\pi}{\tau}(Z_0 - Z_0)$ eine Funktion von α . Führen wir daher jetzt unser ϑ in die Gleichung (25) ein, so werden wir mit wechselndem α auch wechselnde Intensitäten des Lichts erhalten. Blickt daher das Auge durch einen Polarisationsapparat, in welchem sich eine Kalkspathplatte befindet, so wird es eine Sehlinie geben, welche den Kalkspath senkrecht zu seinen Begrenzungsflächen durchsetzt. In dieser Richtung sehen wir dann die im vorhergehenden Paragraphen behandelten Erscheinungen. In jedem konzentrischen Kreis um diese Sehlinie herum liegen Sehlinien, welche unter demselben Winkel die Platte treffen. Die Interferenzerscheinungen der Platte, welche von schief auffallenden Strahlen herrühren, werden daher kreisförmig angeordnet sein. Wir sehen somit eine Reihe konzentrischer Kreise, welche abwechselnd hell und dunkel sind, je nachdem wir $\vartheta = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$ oder $\vartheta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$ haben. Diese Kreise werden infolge der durch den Winkel φ bedingten Interferenzen von einem rechtwinkligen Kreuz radial geschnitten, welches je nach der Wahl der Winkel ω und φ hell oder dunkel sein kann.

§ 28. Totale Reflexion.

Für die Brechung des Lichts fanden wir die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'},$$

welche immer einen Sinn hat, falls $c > c'$ ist. Geht jedoch der Strahl von einem optisch dichteren in ein

dünneres Medium, d. h. ist $c < c'$, so gelangen wir schliesslich zu einem Einfallswinkel α , für welchen $\sin \beta = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ wird. Der Strahl tritt dann nicht mehr in das zweite Medium ein, sondern er wird für alle Winkel, welche grösser als dieser Grenzwinkel sind, vollständig reflektiert, weshalb wir diesen Vorgang „totale Reflexion“ und den Grenzwinkel α , für welchen $\beta = \frac{\pi}{2}$ wird, den Grenzwinkel der totalen Reflexion nennen.

Wir fanden für die Grösse der Amplitude des reflektierten Lichts, welches senkrecht zur Einfallsebene schwingt nach Gleichung (19)

$$\frac{a'}{a} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}.$$

Wir wollen die Substitution

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}$$

einführen. Dann haben wir

$$\frac{a'}{a} = \frac{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}}{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}} = \frac{f - gi}{f + gi} = h + ki.$$

Wir erhalten somit bei der totalen Reflexion für die Amplitude der reflektierten Welle eine komplexe Zahl. Dies deutet nun Fresnel in sehr sonderbarer Weise. Er sagt: Multiplizieren wir den Schwingungszustand mit -1 , so bedeutet das eine Verzögerung um eine halbe Schwingungsdauer. Ebenso können wir die Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ als eine Verzögerung um $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer auffassen. Es wird dann der Schwingungszustand nach der Reflexion

$$\begin{aligned} \sigma' &= a' \sin \frac{2\pi t}{\tau} = a(h + ki) \sin \frac{2\pi t}{\tau} = \\ &= a \left(h \sin \frac{2\pi t}{\tau} - k \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta), \end{aligned}$$

wenn wir

$$h = \cos \frac{2\pi \vartheta}{\tau}, \quad k = \sin \frac{2\pi \vartheta}{\tau}$$

setzen. Es folgt somit, dass

$$a' = a$$

ist, da ja jetzt die neue Amplitude durch

$$a'^2 = a^2 (h^2 + k^2)$$

bestimmt ist.

Für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt, haben wir nach Gleichung (23)

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \\ &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \\ &= (h + ki) \cdot -\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \quad (26) \\ &= (h + ki) \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}}{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}} = \\ &= (h + ki) \frac{1 - mi}{1 + mi} = \\ &= (h + ki)(r + si). \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz der Lichtkomponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene ist daher durch $r + si$ bestimmt. Nennen wir sie δ , so wird

$$r = \cos \frac{2\pi \delta}{\tau}, \quad s = \sin \frac{2\pi \delta}{\tau}.$$

Auch hier folgt wie oben

$$a' = a.$$

Es entsprechen also unsere Formeln insofern thatsächlich der Wirklichkeit, als aus ihnen die Totalreflexion folgt, doch werden wir sofort noch weitere Konsequenzen kennen lernen, die alle durch das Experiment erhärtet sind.

§ 29. Elliptische Polarisation durch totale Reflexion.

Wir wollen annehmen, dass die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

mit der Einfallsebene den Winkel φ bildet. Dann sind die beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene

$$\xi = \sigma \sin \varphi, \quad \eta = \sigma \cos \varphi,$$

folglich, wie wir im vorhergehenden Paragraphen erfahren haben, nach der Reflexion

$$\xi' = a \sin \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta),$$

$$\eta' = a \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta - \delta).$$

Wird $\delta = \frac{\tau}{4}$, so setzen sich die beiden Komponenten zu einer Schwingung zusammen, welcher die Gleichung

$$\frac{\xi'^2}{a^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\eta'^2}{a^2 \cos^2 \varphi} = 1$$

entspricht. Wir haben somit elliptisch polarisiertes Licht. Dies wird zu cirkular polarisiertem, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist.

Wird nun $\delta = \frac{\tau}{4}$, so wird $r = \cos \frac{2\pi\delta}{\tau} = 0$. Aus der Gleichung

$$\frac{1 - m i}{1 + m i} = r + si$$

finden wir

$$r = \frac{l^2 - m^2}{l^2 + m^2}.$$

Soll demnach $r = 0$ werden, so muss $l = m$ sein. Wir finden daher nach Gleichung (26)

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \beta - 1}$$

oder

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha (\sin^2 \beta - 1).$$

Hier können wir $\sin \beta$ durch α und den Brechungsexponenten n aus der Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$$

ersetzen, wenn wir den Brechungsexponenten beim Gang des Lichts aus dem dünneren in's dichtere Medium n nennen.

Es lässt sich nun leicht die Gleichung

$$\sin^4 \alpha - \frac{n^2 + 1}{2n^2} \sin^2 \alpha = - \frac{1}{2n^2}$$

und somit auch

$$\sin^2 \alpha = \frac{n^2 + 1}{4n^2} \pm \sqrt{\frac{(n^2 + 1)^2}{16n^4} - \frac{1}{2n^2}}$$

herleiten. Soll also α einen reellen Wert haben, so

muss $\frac{(n^2 + 1)^2}{16n^4} > \frac{1}{2n^2}$ sein. Daraus folgt aber ein

Brechungsexponent, welcher so gross ist, dass nur beim Diamant durch eine einmalige Totalreflexion elliptisch polarisiertes Licht zu erhalten wäre. Wir können aber die Phasendifferenzen summieren. Lassen wir daher einen Lichtstrahl anstatt einmal, zweimal total reflektieren, so dass jedesmal eine Phasendifferenz $\delta = \frac{\tau}{8}$ entsteht, dann erhalten wir ebenfalls elliptisch polarisiertes Licht. Dies geschieht im Fresnel'schen Parallelepiped ABCD (Fig. 41), dessen Winkel α

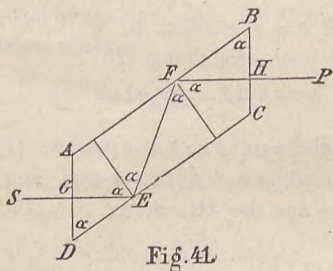


Fig. 41

so geschliffen sind, dass sie einer Phasendifferenz $\delta = \frac{\tau}{8}$ entsprechen. Ein bei G senkrecht eintretender geradlinig polarisierter Lichtstrahl wird daher bei H in der Richtung HP als elliptisch polarisierter austreten. Geht die ursprüngliche Schwingung unter einem Winkel von 45° zur Einfallsebene GEF vor sich, so erhalten wir einen cirkular polarisierten Strahl.

Es eignet sich ein derartiges Parallelepiped viel besser zur Erzeugung cirkular polarisierten Lichts, als der sogenannte $\frac{1}{4}$ -Undulationsglimmer. Da in letzterem

der Gangunterschied des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer ausmachen soll, so lässt sich die Cirkularpolarisation nur für eine bestimmte Farbe genau herstellen, indem ja die Wellenlänge mit der Farbe sich erheblich verändert, während die Aenderung des Brechungsexponenten eine verhältnismässig geringe ist.

Die Lehre von der Wärme.

Wärmeleitung.

§ 30. Wärmemenge — Temperatur — spezifische Wärme — Wärmekapazität.

Wie wir die Schall- und Lichterscheinungen auf blosse Bewegungserscheinungen zurückgeführt haben, so thun wir es auch mit den Erscheinungen der Wärme. Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen eines Körpers, als Molekularbewegung auf. Für die Bahnen der Molekeln gibt es keine bevorzugte Richtung, sie sind nach allen Richtungen gleichförmig verteilt. Der Schwerpunkt des Körpers bleibt also in Ruhe, und da die Bewegung der einzelnen Molekeln sinnlich nicht wahrnehmbar ist, so ist für die Sinnesorgane auch der ganze Körper in Ruhe. Die Gesamtenergie der Molekeln nennen wir seine Wärmemenge. Bringen wir zwei Körper zur Berührung, so wird ein Energieaustausch stattfinden. Von jenem Körper, welcher Energie an den andern abgibt, sagen wir, er besitze

die höhere Temperatur. Nach willkürlichem Mass messen wir die Temperatur mit dem Thermometer und nennen die Masseinheit einen Temperaturgrad. Die Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit eines Körpers um einen Grad erhöht, ist dessen specifische Wärme c . Diese kann sich mit der Temperatur ändern, wir werden sie daher besser durch

$$c = \frac{dQ}{du}$$

definieren, wenn wir unter Q die Wärmemenge und unter u die Temperatur verstehen. Die Wärmemenge, welche wir demnach einem Körper zuführen, wird gleich dem Produkt aus seinem Gewicht, spezifischer Wärme und Temperaturerhöhung sein. Das Produkt aus der spezifischen Wärme und dem Gewicht ist die Wärmekapazität des Körpers.

Die Erfahrung lehrt, dass verschieden temperierte Körper, sich selbst überlassen, ihre Temperaturen ausgleichen. Dies geschieht entweder durch Leitung oder durch Strahlung der Wärme. Im erstern Fall müssen die Körper einander berühren, und es gibt direkt der eine Energie an den andern ab. Es ist dies die Regel, wenn verschiedene Punkte ein und desselben Körpers verschiedene Temperatur besitzen. Im zweiten Fall ist der Träger der Wärme der hypothetische Lichtäther, und es lehrten die Untersuchungen, dass Licht- und Wärmestrahlen sich physikalisch von einander gar nicht unterscheiden.

Die im folgenden gegebene Theorie der Wärmeleitung wurde von Fourier begründet und ausgearbeitet.

§ 31. Gleichung der Wärmeleitung in einem Stab.

Wir halten das eine Ende eines dünnen Stabs beständig auf der Temperatur a , das andere auf der niedrigeren Temperatur b . Es strömt dann durch den Stab Wärme von a nach b . Je grösser der Temperaturunterschied $a - b$ ist, desto mehr Wärme wird in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Stabs fliessen. Machen wir die Voraussetzung, der Stab gebe nach aussen keine Wärme ab, was freilich in Wirklichkeit nur angenähert erreicht werden kann, so muss durch jeden Querschnitt des Stabs in derselben Zeit dieselbe Wärmemenge W gehen. Wir wollen sie daher proportional der Zeit und dem Temperaturunterschied setzen. Sie wird ferner noch proportional dem Querschnitt des Stabs q und schliesslich von der Länge l des Stabs abhängig sein, so dass wir für die durch den Querschnitt gehende Wärmemenge

$$W = q t (a - b) f(l)$$

erhalten.

Teilen wir unsern Stab in gleiche Teile von der Länge λ und sei in der Entfernung λ von a die Temperatur a_1 , in der Entfernung 2λ a_2 u. s. w., so muss die Gleichung

$$W = q t (a - a_1) f(\lambda) = q t (a_1 - a_2) f(\lambda) = \dots$$

gelten, woraus folgt

$$a - a_1 = a_1 - a_2 = \dots$$

Es fällt also von a nach b die Temperatur linear ab. Wir können daher ganz allgemein schreiben

$$W = q t (M N - M' N') f(M M')$$

(Fig. 42). Da aber

$$\frac{MN - M'N'}{MM'} = \frac{a - b}{l} = G$$

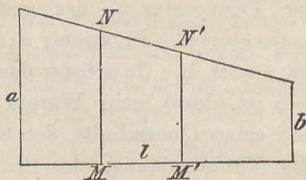


Fig. 42.

ist, so wird

$$W = q t G \cdot \overline{MM'} f(\overline{MM'}) = q t G y f(y),$$

wenn wir $\overline{MM'} = y$ einführen. Wir können nun $y f(y) = k$, also

$$f(y) = \frac{k}{y}$$

setzen, wornach

$$W = q t k \frac{a - b}{l}$$

wird. Die Constante k nennen wir die Wärmeleitungsfähigkeit; es ist die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit beim Temperaturgefälle Eins geht, wobei wir unter dem Temperaturgefälle die Grösse $\frac{a - b}{l}$ verstehen.

Das lineare Temperaturgefälle in unserm Stab ist nur für den Fall eines stationären Zustands vorhanden. In allen andern Fällen können wir daher unsere Gleichung nur für ein sehr kurzes Stück dx des Stabs benützen, für welches wir das Gefälle als linear an-

nehmen. Auf der Strecke dx soll die Temperatur um du fallen. Anstatt $\frac{a-b}{l}$ haben wir demnach $-\frac{du}{dx}$ zu setzen. Das negative Vorzeichen rührt davon her, dass die Wärme immer entgegen der Richtung der Temperaturzunahme fließt. Das Temperaturgefälle $\frac{du}{dx}$ wird ferner nur für eine kurze Zeit τ als konstant anzusehen sein. Während dieser Zeit fließt dann durch den Querschnitt des Stabs die Wärmemenge

$$W = -q \tau k \frac{du}{dx}. \quad (27)$$

Ein sehr kurzes Stabstück von der Länge ξ sei durch die Querschnitte M und M' begrenzt. Es strömt dann in der Zeit τ durch den Querschnitt M die Wärmemenge, welche durch Gleichung (27) gefunden wird, ein, durch M' die Menge

$$W' = -q \tau k \left(\frac{du}{dx} \right)'$$

aus. Es bleibt daher in unserm Stabelement die Wärme $W - W'$ zurück und erhöht die Temperatur um δ . Das Volumen des Stabelements ist $q \xi$, das spezifische Gewicht sei s , die spezifische Wärme c . Dann ist sein Gewicht $q \xi s$ und seine Wärmekapazität $q \xi s c$. Es besteht somit die Gleichung

$$W - W' = q \xi s c \delta.$$

Die Temperaturerhöhung per Zeiteinheit könnten wir $\frac{\partial u}{\partial t}$ schreiben, daher für die Zeit τ

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial t} \tau.$$

mithin

$$W - W' = q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau.$$

Für einen Zeitpunkt oder für eine unendlich kleine Zeit τ können wir die Wärmemenge W als eine Funktion von x ansehen, wenn wir mit x die Entfernung eines Punkts des Stabs vom Anfangspunkt bezeichnen. Dann ist

$$W' = W + \frac{\partial W}{\partial x} \xi,$$

folglich

$$W - W' = - \frac{\partial W}{\partial x} \xi = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{s c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wir lassen jetzt die Bedingung, dass der Stab nach aussen keine Wärme abgibt, fallen und nehmen an, dass die abgegebene Wärme der Temperaturdifferenz zwischen Stab und Umgebung und der Oberfläche proportional sei. Ist p der Umfang, so ist $p \xi$ die Oberfläche des Stabelements und $h p \xi (u - a) \tau$ die nach aussen abgegebene Wärme, wenn wir a die Temperatur der Umgebung nennen. Da es nun ganz gleichgiltig ist, wo wir den Nullpunkt der Temperaturscala anbringen, so können wir von Fall zu Fall

$$a = 0$$

annehmen. Es bleibt uns dann für die nach aussen abgegebene Wärmemenge der Ausdruck $h p \xi u \tau$. Die im Stabelement verbleibende Wärme ist daher

$$W - W' - h p \xi u \tau,$$

was uns die Gleichung

$$q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h p \xi u \tau$$

ergiebt, welche sich reduciert auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{s c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h p}{q s c} u$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n u. \quad (28)$$

Die Grösse $m = \frac{k}{s c}$ nennt man die Temperaturleitfähigkeit oder auch das thermometrische Leitungsvermögen, h die äussere Wärmeleitfähigkeit.

Es darf also das Temperaturleitungsvermögen nicht mit dem Wärmeleitungsvermögen verwechselt werden. Während z. B. die Wärmeleitfähigkeit der Gase gegenüber jener der Metalle sehr klein ist, haben sie doch ziemlich dasselbe Temperaturleitungsvermögen. Das heisst, es gleichen sich verschiedene Temperaturen in Gasen ebenso rasch aus wie in Metallen.

§ 32. Stationärer Zustand.

Bleibt jeder Punkt unseres Stabs auf konstanter Temperatur, so nennen wir diesen Zustand stationär. Es ist also dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

und Gleichung (28) wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{n}{m} u = 0.$$

Eine Lösung dafür ist

$$u = e^{\beta x}$$

Darnach wird unsere Gleichung

$$\beta^2 e^{\beta x} - \frac{n}{m} e^{\beta x} = 0,$$

folglich

$$\beta^2 = \frac{n}{m}, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Wir erhalten also zwei Werte für β , welche wir zusammenfassen können in

$$u = A e^{-x \sqrt{\frac{n}{m}}} + B e^{x \sqrt{\frac{n}{m}}}.$$

Unser Stab sei nun sehr lang. Die Temperatur soll aber für ein unendlich grosses x nicht unendlich werden. Dann ist $B = 0$ zu setzen, und es bleibt

$$u = A e^{-x \sqrt{\frac{n}{m}}}.$$

Für $x = 0$ sei $u = u_0$. Folglich wird $A = u_0$. Haben wir zwei Stäbe mit derselben Anfangstemperatur, so ist für den einen

$$u = u_0 e^{-x \sqrt{\frac{n}{m}}}$$

für den andern

$$u' = u_0 e^{-x' \sqrt{\frac{n'}{m'}}}.$$

Für zwei Punkte gleicher Temperatur muss somit

$$x \sqrt{\frac{n}{m}} = x' \sqrt{\frac{n'}{m'}}$$

sein. Es ist nun

$$\frac{n}{m} = \frac{h p}{q k}, \quad \frac{n'}{m'} = \frac{h' p'}{q' k'}.$$

Geben wir daher den Stäben kongruente Form und gleiche Oberflächenbeschaffenheit, so ist

$$\frac{h p}{q} = \frac{h' p'}{q'},$$

und wir erhalten

$$\frac{k'}{k} = \frac{x'^2}{x^2},$$

was uns die Möglichkeit liefert, die Wärmeleitungsfähigkeiten von Stäben verschiedenen Materials zu vergleichen.

§ 33. Wärmeleitung in einem Ring.

Setzen wir in Gleichung (28)

$$u = y e^{-nt},$$

so nimmt sie, wie leicht zu finden, die Form

$$\frac{\partial y}{\partial t} = m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

an. Das ist aber die Form der Wärmeleitungsgleichung ohne Wärmeabgabe nach aussen, welche wir schreiben können.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (29)$$

Es wird demnach in vielen Fällen genügen, die Lösung für die Gleichung (29) zu kennen, weil diese mit e^{-nt} multipliziert, sodann die Lösung für (28) ergibt. Eine Lösung der Gleichung (29) ist

$$u = e^{\alpha t + \beta x}. \quad (30)$$

Dieser Wert, in die Gleichung eingesetzt, gibt

$$\alpha = m \beta^2.$$

Soll die Temperatur mit der Zeit nicht ins Unendliche

wachsen, so muss α negativ sein. Wir wollen $\alpha = -\gamma$ schreiben, wonach wir

$$\beta \sqrt{m} = \pm i \sqrt{\gamma}$$

erhalten, was sich in das partikuläre Integral

$$u = e^{-\gamma t} \left(A \cos x \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin x \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right)$$

zusammenfassen lässt. (Bd. I § 10.)

Wenden wir diese Formel auf einen Stab an, welcher zu einem Ring zusammengebogen ist, so dass sich Anfangs- und Endpunkt berühren und legen wir in eine beliebige Stelle des Rings den Anfangspunkt der Abscissen, so muss in den Punkten $x, x+l, x+2l, \dots$ die Temperatur ein und dieselbe Grösse haben, wenn l der Umfang des Rings ist. Daraus folgt, dass

$$l \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 2\pi, 4\pi, 6\pi \dots$$

sein muss, wonach

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m}{l^2}, \frac{16\pi^2 m}{l^2}, \frac{36\pi^2 m}{l^2}, \dots$$

wird. Wir haben somit als allgemeine Lösung

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{4k^2\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_k \cos \frac{2k\pi x}{l} + B_k \sin \frac{2k\pi x}{l} \right).$$

Die Konstanten A und B lassen sich berechnen, sobald für $t=0$ die Temperatur durch $u=f(x)$ gegeben ist (Bd. I § 85). Die höheren Glieder unserer Summe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab. In der Praxis genügt es daher, sich auf

$$u = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right)$$

zu beschränken. Es ist dies die Temperatur der Ab-

scisse x . Gegenüber liegt der Punkt $x + \frac{1}{2}$ mit der Temperatur

$$u' = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(-A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} - B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Die Summe beider liefert

$$u + u' = 2 A_0,$$

die Differenz

$$u - u' = 2 e^{-\frac{4\pi^2 m t}{l^2}} \left(A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right)$$

Es nimmt also die Differenz der Temperaturen zweier gegenüber liegender Punkte geometrisch mit der Zeit ab, woraus wir die Grösse des Exponenten, somit auch die Temperatur- und Wärmeleitungsfähigkeit bestimmen können.

§ 34. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung unter der Erdoberfläche.

In der Lösung der Gleichung (29), welche durch Gleichung (30) gegeben ist, ist eine der beiden Konstanten α und β vollständig willkürlich. Wir wollen deshalb α imaginär, also $\alpha = a i$ wählen. Wir haben dann

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{a i}{m}},$$

ferner

$$\sqrt{a i} = \sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}}$$

und

$$\begin{aligned} u &= A e^{a i t + \frac{x}{\sqrt{m}} \left(\sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}} \right)} + B e^{a i t - \frac{x}{\sqrt{m}} \left(\sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}} \right)} = \\ &= A e^{x \sqrt{\frac{a}{2m}} + i \left(a t + x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right)} + B e^{-x \sqrt{\frac{a}{2m}} + i \left(a t - x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right)}. \end{aligned}$$

Es lässt sich also u als periodische Funktion bei richtiger Wahl der Anfangszeit in folgender Weise darstellen

$$u = C e^{-x\sqrt{\frac{a}{2m}}} \sin\left(at - x\sqrt{\frac{a}{2m}}\right).$$

Für den Anfangspunkt $x = 0$ erhalten wir somit

$$u_0 = C \sin at.$$

Unsere Lösung gilt also für einen Stab, der nach aussen keine Wärme abgibt und an dessen Anfangspunkt die Temperaturänderung eine harmonische Schwingung darstellt.

Denken wir uns ein Prisma, welches von der Erdoberfläche senkrecht in die Tiefe geht, so haben wir den Fall verwirklicht, dass nach aussen keine Wärme abgegeben wird, da wegen der gleichen Verteilung der Temperatur in einer horizontalen Ebene keine Wärmebewegung stattfindet. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung an der Erdoberfläche können wir in erster Annäherung als eine harmonische auffassen, können daher unsere Lösung auf die Temperaturänderung unter der Erdoberfläche beziehen. Wir finden in jeder Tiefe eine periodische Temperaturänderung, jedoch wird die Amplitude mit wachsender Tiefe immer kleiner, so dass wir etwa 28 m tief unter der Erdoberfläche die Temperaturschwankung überhaupt nicht mehr wahrnehmen, sondern jahraus jahrein eine konstante Temperatur, nämlich die mittlere Jahrestemperatur haben. Hat zu einer bestimmten Zeit t die Temperatur an der Erdoberfläche den Wert Null, so muss $at = n\pi$ sein. In der Tiefe x wird diese Temperatur erst nach der

Zeit δ eintreten, welche sich daraus bestimmt, dass dann $a(t + \delta) - x \sqrt{\frac{a}{2m}} = n\pi$ ist. Wir finden somit $a\delta = x \sqrt{\frac{a}{2m}}$ oder

$$\frac{x}{\delta} = \sqrt{2ma}.$$

Das können wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmewelle nennen. Nennen wir analog die Schwingungsdauer τ , so haben wir $a = \frac{2\pi}{\tau}$, folglich

$$u = C e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}} \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau} - x \sqrt{\frac{\pi}{m\tau}} \right). \quad (31)$$

$$\frac{x}{\delta} = \sqrt{\frac{4m\pi}{\tau}}.$$

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Funktion der Schwingungsdauer, und zwar wird sie um so grösser, je kleiner die Schwingungsdauer ist. Es pflanzen sich deshalb die täglichen Aenderungen viel rascher in die Tiefe fort als die jährlichen. Dafür nimmt aber die Amplitude der letzteren mit der Tiefe viel langsamer ab.

Die Gleichung (31) gibt uns die Mittel an die Hand, nach zwei Methoden die Wärmeleitungsfähigkeit der Erde zu bestimmen, einmal aus der Abnahme der Amplitude mit der Tiefe, das zweite Mal aus der Verzögerung des Maximums bezgl. des Minimums der Temperatur. In der Tiefe x' ist die Schwankung der Temperatur

$$\delta' = 2C e^{-x' \sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}},$$

in der Tiefe x''

$$\delta'' = 2 C e^{-x'' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

folglich

$$\frac{\delta'}{\delta''} = e^{(x'' - x') \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

woraus sich m bestimmen lässt.

Das Maximum der Temperatur haben wir in x' zur Zeit t' , wenn

$$\frac{2 \pi t'}{\tau} - x' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}} = \frac{\pi}{2}$$

desgl. in x'' nach der Zeit t'' für

$$\frac{2 \pi t''}{\tau} - x'' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}} = \frac{\pi}{2},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{2 \pi}{\tau} (t'' - t') = (x'' - x') \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}.$$

Dieselbe Formel erhalten wir für die Wanderung des Minimums, und wiederum ist es leicht, aus dieser Gleichung die Temperaturleitungsfähigkeit m und somit auch die Wärmeleitungsfähigkeit der Erde zu finden.

§ 35. Gleichung der Wärmeleitung in einem isotropen Körper — Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeitsströmung.

Denken wir uns aus einem isotropen Körper ein Volumelement $\xi \eta \zeta$ herausgeschnitten, so können wir für die drei Richtungen parallel zu den Koordinatenachsen dieselbe Ueberlegung machen, welche wir über die Wärmeströmung nach einer Richtung (§ 31) anstellten. Der Unterschied ist dann nur der, dass dem Volumelement nicht nur von einer Seite, sondern von

drei Wärme zu- und gleicherweise abgeführt wird. Die Gleichung (29) erweitert sich daher auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (32)$$

Für den stationären Zustand wird sie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Dieselbe Gleichung fanden wir (I. Bd. § 62) für die stationäre Strömung einer Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitspotential u . Wir können daher alle speziellen Fälle stationärer Wärmeströmung in einem isotropen Körper, der nach aussen keine Wärme abgibt, auf die stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit und umgekehrt übertragen, wenn wir Temperatur und Geschwindigkeitspotential, Temperaturgefälle und Strömungsgeschwindigkeit mit einander vertauschen.

§ 36. Gleichung der Wärmeleitung in einer Kugel.

Wenden wir die Gleichung (32) auf eine Kugel an, in welcher die Wärmeströmung nur radial vor sich gehen soll, so muss in jeder konzentrischen Kugelschale die Temperatur konstant sein. Verlegen wir den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte der Kugel, so wird $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ die Gleichung einer konzentrischen Kugeloberfläche, ferner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

(Bd. I. § 67.) Wir können daher Gleichung (32) schreiben

$$\frac{\partial (ru)}{\partial t} = m \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \quad (33)$$

da ja bei der partiellen Differentiation von $r u$ nach t r als konstant anzusehen ist. Wir erhalten also für die Kugel dieselbe Gleichung der Wärmeleitung wie für den Stab, der nach aussen keine Wärme abgibt, wenn wir u durch $r u$ und x durch r ersetzen. Es tritt hier dieselbe Analogie auf wie für die Fortpflanzung einer ebenen und einer Kugelwelle (Bd. I. §§ 68 u. 69).

§ 37. Das Temperaturgefälle in der Erdrinde.

Als eine Lösung der Gleichung (33) fanden wir im § 33

$$r u = e^{-\gamma t} \left(A \cos r \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right).$$

Für $r=0$ soll die Temperatur einen endlichen Wert behalten. Dann muss $A=0$ sein, und es bleibt uns

$$u = B e^{-\gamma t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r}. \quad (34)$$

Die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit der Kugeloberfläche in der Zeiteinheit geht, können wir auf zweierlei Art ausdrücken. Sie ist erstens gleich

$-k \frac{\partial u}{\partial r}$, ferner gleich $h u$ (§ 31). Wir haben somit

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} = h u$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial r} + n u = 0, \quad (35)$$

wenn wir

$$\frac{h}{k} = n$$

setzen. Doch gilt diese Gleichung nur für die Ober-

fläche der Kugel, d. h. für $r = \varrho$, wobei also ϱ der Kugelradius ist. Wir können $\frac{\partial u}{\partial r}$ aus Gleichung (34) finden. Wir erhalten dafür

$$\frac{\partial u}{\partial r} = B e^{-\gamma t} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \frac{\cos r}{r} \sqrt{\frac{\gamma}{m}} - \frac{\sin r}{r^2} \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right).$$

Setzen wir hier, sowie in der Gleichung (34) $r = \varrho$, so gestaltet sich Gleichung (35) folgendermassen

$$B e^{-\gamma t} \left(\frac{\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho} - \frac{\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho^2} \right) + \\ + n B e^{-\gamma t} \frac{\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho} = 0,$$

welche sich leicht verwandeln lässt in

$$\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} (n \varrho - 1) + \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = \frac{\varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{1 - n \varrho}.$$

Setzen wir $\varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = x$, so vereinfacht sie sich noch zu

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - n \varrho}. \quad (36)$$

Diese letzte Gleichung können wir nun sehr leicht auf graphischem Weg lösen, wenn wir sowohl $\operatorname{tg} x$ als auch

$\frac{x}{1 - n \varrho}$ in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eintragen.

Wir wollen eine Anwendung davon auf unsere Erde machen. Es wird somit ϱ sehr gross, also $\frac{1}{1-n\varrho}$ eine kleine negative Zahl. Es ist daher die Kurve

$$y = \frac{x}{1-n\varrho}$$

eine Gerade, welche vom Ursprung 0 (Fig. 43) aus-

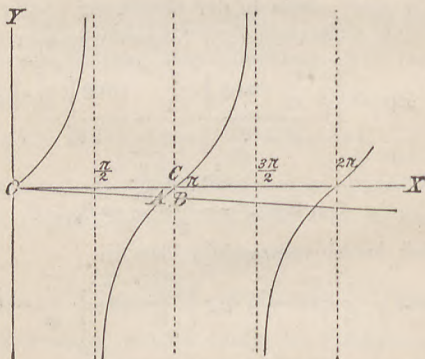


Fig. 43.

geht, mit der x -Achse einen sehr kleinen Winkel bildet und für positive x unterhalb der x -Achse liegt. Wo diese Gerade die zweite Kurve

$$y = \operatorname{tg} x$$

schneidet, dort ist immer eine Wurzel der Gleichung (36). Wir erhalten somit unendlich viel Werte für x und somit auch für γ . Die Gleichung (34) verwandelt sich daher in eine unendliche Reihe. Das erste Glied fällt ganz weg, weil dafür $x=0$, also auch $\gamma=0$ ist. Die nächste Wurzel von x liegt nahe bei π , die zweit-

nächste nahe bei 2π u. s. w. Sie werden sich also nahezu verhalten wie $1:2:3\dots$, folglich die Werte der γ nahezu wie $1:4:9\dots$. Das heisst, die höheren Glieder unserer unendlichen Reihe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab, so dass wir uns nach einiger Zeit lediglich auf die Gleichung

$$u = B_1 e^{-\gamma_1 t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r}$$

beschränken können.

Wir wollen nun $x_1 = \pi - \varepsilon$ setzen, wobei ε sehr klein ist. Aus dieser Ursache können wir aber dann ABC (Fig. 43) als ein rechtwinkeliges Dreieck auffassen und

$$AB = BC = \varepsilon = \frac{\pi}{1 - n\varrho} = \frac{\pi}{n\varrho}$$

setzen. Somit wird

$$x_1 = \pi \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right),$$

$$\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = \frac{x_1}{\varrho} = \frac{\pi}{\varrho} \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right)$$

und

$$\gamma_1 = m \frac{\pi^2}{\varrho^2},$$

indem wir die anderen Glieder vernachlässigen können. Führen wir die Tiefe z ein, so wird

$$r = \varrho - z,$$

und es soll z gegen ϱ ebenfalls eine kleine Grösse sein. Wir haben dann

$$\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = \sin \frac{\pi}{\varrho} (\varrho - z) \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \pi \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{1}{n \varrho}\right) = \sin \left(\pi - \frac{\pi z}{\varrho} - \frac{\pi}{n \varrho}\right) = \\
 &= \sin \frac{\pi}{\varrho} \left(z + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\varrho} \left(z + \frac{1}{n}\right),
 \end{aligned}$$

da wir wegen der Kleinheit von $\frac{\pi}{\varrho}$ den Sinus mit dem Bogen vertauschen können. Wir erhalten demnach weiter

$$\frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r} = \frac{\pi}{\varrho^2} \left(z + \frac{1}{n}\right),$$

wenn wir z gegen ϱ vernachlässigen, was hier erlaubt ist. Somit wird schliesslich

$$u = \frac{B_1 \pi}{n \varrho^2} e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t} (1 + n z).$$

Es muss also die Temperatur von der Oberfläche gegen das Erdinnere mit der Tiefe linear zunehmen. Die Erfahrung lehrt, dass die Temperaturzunahme für 30 m etwa 1° C. beträgt.

§ 38. Abkühlung der Erde.

Für ein konstantes r wird nach Gleichung (34) die Temperatur lediglich eine Funktion der Zeit, welche für unsere Erde die Form

$$u = A e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t}$$

annimmt. Setzen wir für die Zeit $t=0$ die Temperatur $u=u_0$, so wird $A=u_0$ und

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t}, \\
 \frac{du}{dt} &= -\frac{m \pi^2 u_0}{\varrho^2}
 \end{aligned}$$

da wir wegen des grossen $e^2 e^{-\frac{m\pi^2}{e^2}t} = 1$ setzen können. Die Temperatur unter der Erdoberfläche muss demnach mit der Zeit abnehmen, doch geschieht dies ungemein langsam.

Da u_0 der Ueberschuss über die Temperatur der Umgebung der Erde ist, so müssten wir, um $\frac{du}{dt}$ berechnen zu können, die Temperatur des Weltraums kennen. Aber selbst wenn diese den absoluten Nullpunkt, d. h. -273°C. erreicht hätte, würde $\frac{du}{dt}$ so klein, dass die Temperatur der Erdrinde erst in vielen Millionen Jahren um 1° sinkt.

Die Wärmemenge, welche durch die Oberflächeneinheit der Erde in der Zeiteinheit ausgestrahlt wird, ist $-k \frac{du}{dr}$. Wir können dieselbe berechnen, da wir sowohl $\frac{du}{dr}$ kennen, als auch die Wärmeleitungsfähigkeit k der Erde (§ 34) bestimmbar ist. Es ergibt sich daraus, dass jährlich eine Wärmemenge aus dem Innern der Erde zur Oberfläche strömt, welche imstand ist, eine neun Millimeter dicke Eisschicht zu schmelzen. Es kommt diese Wärmemenge somit im Vergleich zu der von der Sonne gespendeten Wärme gar nicht in Betracht. Ob es daher im Innern der Erde kalt oder heiss ist, für die Lebensbedingungen auf der Oberfläche ist das völlig belanglos.

Mechanische Wärmetheorie.

§ 39. Zustand eines Körpers — Zustandsgleichung idealer Gase — absolute Temperatur.

Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen der Körper auf. Zu einem gegebenen Zeitpunkt wird daher jedes Teilchen eine bestimmte Lage und eine bestimmte Geschwindigkeit besitzen. Wir nennen dies den Zustand des Körpers. Um ihn zu kennen ist es nicht nötig, den Zustand jedes einzelnen Körperteilchens zu wissen, sondern bloss die Mittelwerte der den Zustand bestimmenden Grössen, da ja die thermischen Erscheinungen, welche wir an einem Körper wahrnehmen, durch das Zusammenwirken der kleinsten Teilchen hervorgebracht werden. Der Zustand eines Körpers ist sonach in unserem Sinn bestimmt durch seine Temperatur, sein Volumen, seine Gestalt und die auf ihn wirkenden äusseren und inneren Kräfte. Soweit diese verschiedenen Grössen voneinander abhängig sind, lassen sie sich in Gleichungen fassen; und jene Gleichung, welche alle den Zustand bestimmenden Grössen untereinander verbindet, nennen wir die Zustandsgleichung des Körpers.

Diese ist z. B. für ideale Gase durch das Boyle-Charles'sche Gesetz

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

gegeben. Das heisst, der Zustand eines Gases ist vollständig durch sein Volumen v , seine Temperatur t und den Druck p , unter dem es sich befindet, gegeben. Benutzen wir das hundertteilige Thermometer, so ist

$\alpha = \frac{1}{273}$. Verlegen wir daher den Nullpunkt auf -273° C. , so wird

$$p v = p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 v_0 \alpha T = R T.$$

In der Form

$$p v = R T \quad (37)$$

wollen wir das Boyle-Charles'sche Gesetz künftig benutzen und

$$T = t + \frac{1}{\alpha}$$

die absolute Temperatur nennen.

§ 40. Umwandelbarkeit der Wärme in Arbeit und der Arbeit in Wärme — mechanisches Wärmeäquivalent — äussere und innere Arbeit. — erster Hauptsatz.

R. Mayer hat zuerst bestimmt ausgesprochen, dass Arbeit in Wärme und Wärme in Arbeit verwandelt werden kann und dass einer Calorie — d. i. jene Wärmemenge, welche ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1° C. erhöht — ein ganz bestimmter Arbeitswert zukommt. Die experimentellen Untersuchungen haben gelehrt, dass einer Calorie rund 427 mkg entsprechen, welche Zahl man daher das mechanische Wärmeäquivalent nennt. Da das Gewicht eines Kilogramms sich mit dem Breitengrad ändert, so ist es für praktische Arbeiten manchmal angezeigt, den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents in absolutem Mass anzugeben.

Führen wir einem Körper Wärme zu, so wird im Allgemeinen seine Temperatur und seine Gestalt verändert. Es muss daher eine Arbeit aufgewandt werden,

um die inneren Kräfte zu überwinden und die Energie der kleinsten Teilchen zu erhöhen. Man nennt dies die *innere Arbeit* oder die Vermehrung der *inneren Energie*, welche auf Kosten der Wärme erzeugt wird. Ferner ist Arbeit zur Ueberwindung der äusseren Kräfte notwendig, welche wir analog die *äussere Arbeit* nennen. Es wird sich daher die unendlich kleine Wärmemenge dQ , welche wir einem Körper zuführen, in einen Teil dU zerlegen lassen, welcher die Temperaturerhöhung und die innere Arbeit bewirkt, und einen zweiten, der die äussere Arbeit dK leistet. Um diese Arbeit in Wärmemass zu bekommen, haben wir sie durch das mechanische Wärmeäquivalent E zu dividieren oder mit dem reciproken Wert desselben, dem *calorischen Arbeitsäquivalent* $A = \frac{1}{E}$ zu multiplizieren. Sonach erhalten wir nach dem Satz von der Erhaltung der Energie die Gleichung

$$dQ = dU + A dK, \quad (38)$$

welche man gewöhnlich den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie nennt.

§ 41. Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck.

Steht ein Körper unter keiner äusseren Kraft als einem konstanten, senkrecht zu seiner Oberfläche wirkenden Druck p , wie es etwa der Luftdruck ist, so wird die zugeführte Wärmemenge dQ lediglich eine kleine Volumsänderung hervorbringen. Jedes Oberflächenelement $d\omega$ legt dabei einen Weg δn zurück. Die äussere Arbeit, welche geleistet wird, ist sonach

gleich dem Produkt aus der Kraft $p d\omega$ in den Weg δn , die Gesamtarbeit also

$$dK = \int p \delta n d\omega = p \int \delta n d\omega = p dv,$$

da ja $\int \delta n d\omega$ nichts anderes als die Volumszunahme dv des Körpers ist. Es verwandelt sich daher die Gleichung (38) in

$$dQ = dU + A p dv. \quad (39)$$

Die innere Arbeit wird im Allgemeinen ebenfalls eine Funktion der Temperatur, des Drucks und des Volumens sein. Da aber eine dieser drei Grössen wegen der Gleichung (37) immer durch die beiden andern bestimmt werden kann, so genügt es

$$U = f(v, T)$$

zu setzen, wonach

$$dU = \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial T} dT$$

wird.

Es hat nun schon Gay-Lussac gezeigt, dass ein Gas, wenn es sich ohne äussere Arbeitsleistung ausdehnt, seine Temperatur nicht ändert. Es leistet daher ein Gas bei der Volumsveränderung auch keine innere Arbeit, d. h. es muss die Grösse

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

sein. Setzen wir $\frac{\partial f}{\partial T} = c$, so können wir Gleichung (39) schreiben

$$dQ = c dT + A p dv. \quad (40)$$

Wir wollen voraussetzen, dass sich unsere Gleichung auf die Masseneinheit Gas bezieht. Führen wir die Wärme bei konstantem Volumen zu, so ist $dv = 0$,

folglich $\frac{dQ}{dT} = c$ die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

Die Differentiation der Zustandsgleichung (37) ergibt

$$p dv + v dp = R dT. \quad (41)$$

Dadurch können wir Gleichung (40) in

$$dQ = (c + AR) dT - A v dp$$

verwandeln. Nehmen wir eine Wärmeausdehnung bei konstantem Druck vor, so wird $dp = 0$, folglich

$$\frac{dQ}{dT} = c + AR = C.$$

Dies ist also die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck.

§ 42. Adiabatische Zustandsänderungen.

Verändern wir den Zustand eines Körpers, ohne dass ihm Wärme zu- oder abgeführt wird, so nennen wir dies eine adiabatische Zustandsänderung. Für eine solche muss also in Gleichung (40)

$$dQ = 0$$

werden. Dividieren wir dann die Gleichung noch durch $p v = R T$, so ergibt dies

$$0 = \frac{c dT}{R T} + \frac{A dv}{v} \quad \text{oder}$$

$$0 = \frac{c dT}{T} + \frac{A R dv}{v}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$c \ln T + A R \ln v = G.$$

Zu Beginn des Prozesses sei diese Gleichung

$$c \ln T_0 + A R \ln v_0 = G.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt

$$c \ln \frac{T}{T_0} + A R \ln \frac{v}{v_0} = 0,$$

was wir schliesslich noch umwandeln können in

$$1\left(\frac{T}{T_0}\right)^c + 1\left(\frac{v}{v_0}\right)^{AR} = 0$$

oder

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^c \left(\frac{v}{v_0}\right)^{AR} = 1.$$

Beachten wir noch, dass

$$C - c = AR,$$

so bleibt uns schliesslich

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\frac{C}{c}} - 1 = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\kappa - 1}, \quad (42)$$

wenn wir das Verhältniss der spezifischen Wärmen κ nennen. Diese Gleichung besagt somit, dass durch Kompression eines Gases seine Temperatur erhöht, durch Ausdehnung erniedrigt wird.

Auf ähnliche Weise können wir auch die Beziehung zwischen Druck und Volumen bei einer adiabatischen Zustandsänderung eines Gases finden. Er-

setzen wir in Gleichung (40) dT durch $\frac{p dv + v dp}{R}$ aus der Gleichung (41), so wird

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{c}{R} (p dv + v dp) + A p dv = \\ &= \frac{(c + AR) p dv + c v dp}{R} = \frac{C p dv + c v dp}{R}. \end{aligned}$$

Für eine adiabatische Aenderung muss wieder $dQ = 0$, also

$$C p dv + c v dp = 0$$

sein, was durch $p v$ dividiert

$$C \frac{dv}{v} + c \frac{dp}{p} = 0$$

ergibt. Durch Integration finden wir wie früher

$$Cl \frac{v}{v_0} + cl \frac{p}{p_0} = 0.$$

oder

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^\kappa = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\kappa,$$

wenn wir ϱ die Dichte des Gases nennen. Diese Formel mussten wir benutzen, um die Schallgeschwindigkeit in der Luft zu finden (Bd. I § 66).

§ 43. Kreisprozess.

Lassen wir den Zustand eines Körpers verschiedene Aenderungen durchmachen, bis er wieder den Anfangszustand erreicht,

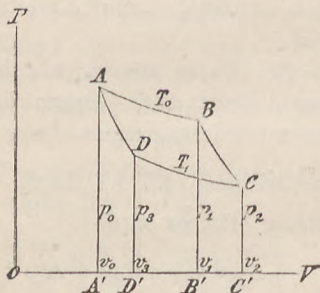


Fig. 44.

so nennen wir das einen Kreisprozess. Können die Veränderungen auch in entgegengesetzter Richtung ablaufen, so ist es ein umkehrbarer Kreisprozess. Einen solchen wollen wir an einem idealen Gas vornehmen. Wir stellen

den Zustand der Masseneinheit des Gases durch einen Punkt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar (Fig. 44), dessen Abscisse das Volumen, während die Ordinate den Druck darstellt. Die Kurve, welche wir für eine konstante Temperatur dabei erhalten, nennen wir eine Isotherme. Bei einem idealen Gas ist sie

$$p v = \text{konst.},$$

also eine gleichseitige Hyperbel.

Der Punkt A sei der Anfangszustand des Gases bei der Temperatur T_0 , dem Druck p_0 und dem Volumen v_0 . Das Gas dehne sich jetzt isotherm, d. h. bei konstanter Temperatur T_0 aus bis zum Zustand B mit den zugehörigen Grössen T_0 , p_1 , v_1 . Für diesen Vorgang ist also $dT=0$, daher nach Gleichung (40)

$$dQ = A p dv.$$

Die gesamte Wärme Q_0 , welche wir auf dem Weg von A nach B in unser Gas hineinstecken, wird also nur zur Arbeitsleistung verwendet, und es ist

$$Q_0 = A \int_{v_0}^{v_1} p dv = AR T_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = ART_0 \ln \frac{v_1}{v_0}, \quad (43)$$

da ja $p v = RT_0$ ist.

Wir nehmen nun eine adiabatische Ausdehnung vor. Bei dieser wird somit der Zustand von B längs einer adiabatischen Kurve bis C vorrücken. Wir führen also Wärme weder zu noch ab. Das Gas kühlt sich daher von der Temperatur T_0 auf T_1 ab, und wir haben nach Gleichung (42)

$$v_1^{\kappa-1} T_0 = v_2^{\kappa-1} T_1. \quad (44)$$

Wir komprimieren nun das Gas isotherm, haben somit eine Wärmemenge

$$Q_1 = ART_1 \ln \frac{v_3}{v_2}$$

zuzuführen. Diese Wärmemenge erscheint aber, da $v_3 < v_2$, negativ, es wird in Wirklichkeit dem Gas Wärme entzogen. Die Kompression wird längs CD so lang fortgesetzt, bis die Isotherme die durch den Punkt A gezogene Adiabate in D schneidet. Von dort aus komprimieren wir dann weiter adiabatisch, langen also wieder beim Ausgangspunkt in A an. Für den letzten Vorgang gilt die Gleichung

$$v_3^{\kappa-1} T_1 = v_0^{\kappa-1} T_0. \quad (45)$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (44) und (45) miteinander, so finden wir $v_1 v_3 = v_0 v_2$ oder

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_3}.$$

Daher ist

$$Q_1 = ART_1 \ln \frac{v_3}{v_2} = - ART_1 \ln \frac{v_1}{v_0},$$

was mit Gleichung (43) vereinigt ergibt

$$\frac{Q_0}{T_0} = - \frac{Q_1}{T_1},$$

wo also das negative Vorzeichen sagt, dass Q_1 eine dem Gas entzogene Wärmemenge ist. Rechnen wir hingegen jede Menge positiv, so ist die in Arbeit umgewandelte Wärme $Q_0 - Q_1$. Sie entspricht in Fig. 44 der Fläche ABCD, da ja die Flächen ABB'A', BCC'B' u. s. w. die geleistete bezgl. aufgewendete Arbeit bei den einzelnen Vorgängen des Kreisprozesses darstellen.

Von der Wärmemenge Q_0 , welche bei der Temperatur T_0 in das Gas hineingesteckt wird, wird also nur der Teil $Q_0 - Q_1$ in Arbeit verwandelt, während die Wärmemenge Q_1 bei der Temperatur T_1 wieder abgegeben wird. Da sich der Kreisprozess beliebig wiederholen lässt, so haben wir hier eine sogenannte kalorische Maschine vor uns, welche Wärme in Arbeit verwandelt. Doch ist es nur der Bruchteil

$$\frac{Q_0 - Q_1}{Q_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_0},$$

welcher wirklich von der gesamten aufgewendeten Wärme in Arbeit verwandelt wird. Je grösser dieser Bruch ist, desto besser wird die Wärme ausgenützt.

Man nennt daher die Grösse $\frac{T_0 - T_1}{T_0}$ den ökonomischen Koeffizienten der Maschine. Diese arbeitet mithin umso ökonomischer, je grösser der Temperaturunterschied $T_0 - T_1$ ist.

§ 44. Entropie — zweiter Hauptsatz.

Es ist nicht nötig, einen Kreisprozess einfach längs der früher gewählten Isothermen und Adiabaten vor sich gehen zu lassen, sondern es kann dies längs jeder beliebigen geschlossenen Kurve geschehen, indem die Gleichung (40) ja nichts anderes als die Summe aus einem adiabatischen und einem isothermen Vorgang enthält, welche bei der graphischen Darstellung eine geometrische Summe wird. Je nach der Fläche der geschlossenen Kurve wird daher das Integral der Gleichung (40) verschiedene

Werte annehmen können. Dividieren wir die gesamte Gleichung durch die absolute Temperatur T , so erhalten wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{cdT}{T} + \frac{ARdv}{v}.$$

Integrieren wir nun diese Gleichung zwischen zwei Punkten der Kurve, welche den Grössen T_0, v_0 und T_1, v_1 entsprechen, so wird

$$\int_0^1 \frac{dQ}{T} = cl \frac{T_1}{T_0} + ARl \frac{v_1}{v_0}.$$

Es ist also ganz gleichgiltig, auf welchem Weg wir von dem einen zum andern Punkt gelangen, da das Integral nur vom Anfangs- und Endwert abhängig ist. Für jede geschlossene Kurve ist daher

$$\int \frac{dQ}{T} = 0. \quad (46)$$

Man pflegt daher $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential zu nennen. Wir wollen

$$\frac{dQ}{T} = dS$$

setzen, wonach wir erhalten

$$\int \frac{dQ}{T} = S + C.$$

Clausius nennt S die Entropie des Gases. Wir werden später sehen, dass wir dieselben Ueberlegungen auf jeden beliebigen Körper anwenden können.

Die Gleichung (46) ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, den wir etwa folgendermassen formulieren können:

Rechnen wir die zugeführte Wärme positiv, die entzogene negativ, so ist die Summe aller unendlich kleinen Wärmemengen, jede dividiert durch ihre jeweilige Temperatur für einen umkehrbaren Kreisprozess gleich Null.

Bei jeder adiabatischen Zustandsänderung ist $dQ=0$, es wird daher

$$\int \frac{dQ}{T} = C,$$

d. h. die Entropie bleibt constant, weshalb man die adiabatischen Vorgänge auch isentropische nennt.

§ 45. Unabhängigkeit des zweiten Hauptsatzes von der Natur der Körper — thermisches perpetuum mobile.

Wie wir durch einen umkehrbaren Kreisprozess Wärme in Arbeit verwandeln können, so lässt sich auch Arbeit in Wärme umsetzen, sobald wir den Prozess entgegengesetzt durchlaufen. Gleichzeitig wird eine gewisse Wärmemenge auf höhere Temperatur gebracht. Wie ein Gas können wir auch jeden anderen beliebigen Körper zwei isotherme und zwei adiabatische Kurven durchlaufen lassen und somit einen umkehrbaren Kreisprozess herstellen. Umgrenzen die Kurven eine Fläche von derselben Grösse wie der Kreislauf eines Gases, so leisten beide Prozesse dieselbe Arbeit. Lassen wir sie daher entgegengesetzt vor sich gehen, so heben sie sich in ihrer Wirkung auf. Aber es wäre noch die Möglichkeit vorhanden, dass die Wärmemengen, welche von tieferer auf höhere Temperatur und umgekehrt be-

fördert werden, verschieden sind. Das widerspricht aber dem Erfahrungssatz, dass es noch niemals in der Natur beobachtet wurde, dass Wärme ohne vorhandene anderweitige Energieänderung von selbst zu höherer Temperatur aufsteigen kann. Es muss daher auch für unsern zweiten Kreisprozess wie für das Gas die Gleichung

$$\frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}$$

gelten. Schon Carnot sprach aus, dass bei der durch die Wärme hervorgebrachten Arbeit nur die Temperaturen, nicht aber die dazu verwendeten Körper massgebend sind.

Wäre es möglich, dass Wärme von selbst zu höherer Temperatur aufsteigt, so könnte ein beständiger Wärmekreislauf ohne Arbeitsleistung hergestellt werden, indem ja durch Leitung oder Strahlung die Wärme wieder auf ihre ursprüngliche Temperatur sinken würde. Man hätte dann ein sogenanntes thermisches perpetuum mobile. Aber dieses ist ebenso unmöglich wie ein mechanisches.

Der zweite Hauptsatz hat in der von uns gegebenen Form die Voraussetzung einer willkürlichen Temperatur, indem wir ein ideales Gas als thermometrische Substanz benützten. Hätten wir ein anderes Temperaturmass gewählt, so würden wir auch eine andere Form des zweiten Hauptsatzes erhalten haben. W. Thomson machte daher den Vorschlag, den zweiten Hauptsatz direkt zur Temperaturdefinition zu benützen, da dann das Temperaturmass von einer thermometrischen Substanz

völlig unabhängig wird. Willkürlich bleibt jedoch wiederum die Wahl der Form der Temperaturfunktion, und es darf die Annahme der sogenannten absoluten Temperatur nur als eine Folge der Gewohnheit angesehen werden.

§ 46. Anwendung der beiden Hauptsätze.

Wir lernten den ersten Hauptsatz in der Form

$$dQ = dU + A p dv$$

kennen. Hier ist die Grösse dU ebenso ein vollständiges Differential wie das Differential der Entropie

$\frac{dQ}{T}$. Es zeigt sich nämlich in der Erfahrung, dass

die Wärmemenge, welche wir einem Körper lediglich zur Aenderung seines Zustands abgesehen von der äusseren Arbeitsleistung zuführen müssen, nur vom Anfangs- und Endwert des Zustands abhängig ist, hingegen völlig unabhängig von den Zwischenzuständen.

Wir machen nun die Annahme, der Zustand eines Körpers sei durch die Temperatur T und das Volumen v vollständig bestimmt. Die beiden Differentiale der inneren Energie und der Entropie sind sonach Funktionen von T und v und ebenso die dem Körper zugeführte Wärmemenge dQ . Wir wollen deshalb

$$dQ = \alpha dT + \beta dv$$

setzen, wobei α und β Funktionen von T und v sind. Betrachten wir die Gewichtseinheit des Körpers, so ergibt sich ohne weiters, dass α die spezifische Wärme bei constantem Volumen ist, da dann $dv=0$ wird. Jedes vollständige Differential dF , das eine Funktion von T und v ist, können wir schreiben

$$dF = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial v} dv = M dT + N dv$$

und es folgt

$$\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial N}{\partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial v}.$$

Demnach können wir aus

$$dU = dQ - A p dv = \alpha dT + (\beta - A p) dv$$

die Folgerung ziehen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial (\beta - A p)}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} - A \frac{\partial p}{\partial T}. \quad (47)$$

Ferner haben wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\alpha}{T} dT + \frac{\beta}{T} dv,$$

und wiederum gilt

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\alpha}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\beta}{T} \right)$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= \frac{1}{T} \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T^2}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} &= \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T}. \end{aligned} \quad (48)$$

Aus den Gleichungen (47) und (48) erhalten wir

$$\beta = A T \frac{\partial p}{\partial T},$$

folglich

$$dQ = \alpha dT + A T \frac{\partial p}{\partial T} dv. \quad (49)$$

Stellen wir den Zustand als Funktion der Temperatur und des Drucks, also durch T und p dar, so können wir

$$dQ = \gamma dT + \eta dp$$

setzen, wobei also γ die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist. Wir haben dann

$$dU = dQ - A p dv = dQ - A p \left(\frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp \right),$$

da wir jetzt v als Funktion von T und p auffassen müssen. Aus

$$dU = \left(\gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T} \right) dT + \left(\eta - A p \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp$$

finden wir

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\eta - A p \frac{\partial v}{\partial p} \right).$$

führen wir die Differentiation durch, so ergibt sich

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial T},$$

oder

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T}, \quad (50)$$

Wir haben nun weiter

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\gamma}{T} dT + \frac{\eta}{T} dp,$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\gamma}{T} \right) &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\eta}{T} \right), \\ \frac{1}{T} \frac{\partial \gamma}{\partial p} &= \frac{1}{T} \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T^2}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial p} &= \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T} \end{aligned} \quad (51)$$

und aus den Gleichungen (50) und (51)

$$\eta = - A T \frac{\partial v}{\partial T},$$

$$dQ = \gamma dT - A T \frac{\partial v}{\partial T} dp. \quad (52)$$

Analog diesem Vorgang ist es nicht schwer für be-

liebige Variable, welche den Zustand bestimmen, die entsprechende Gleichung herzuleiten.

§ 47. Verdampfungswärme — Schmelzwärme — gesättigter Dampf — Schmelzpunkt.

Wir haben in einem geschlossenen Gefäss die Masseneinheit eines Körpers teilweise in flüssigem, teilweise in dampfförmigem Zustand. Das Gewicht des Dampfs sei x , das der Flüssigkeit also $1 - x$. Das Volumen v des Gefässes ist demnach

$$v = \frac{1-x}{s} + \frac{x}{\sigma} = \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{s} \right) x = u' + (u - u') x,$$

wenn s und σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bezgl. ihres gesättigten Dampfes ist. Es ist u' also das sogenannte spezifische Volumen der Flüssigkeit, u jenes des Dampfes. Wir wollen nun eine Verdampfung der Flüssigkeit bei konstanter Temperatur vornehmen. Dann wird $dT = 0$ und Gleichung (49)

$$dQ = A T \frac{\partial p}{\partial T} (u - u') dx.$$

Nennen wir die Verdampfungswärme r , so wird

$$dQ = r dx,$$

daher

$$r = A T \frac{\partial p}{\partial T} (u - u'). \quad (53)$$

Diese Formel können wir benützen, um z. B. die Dichte des gesättigten Dampfes $\frac{1}{u}$ zu finden, wenn die übrigen Grössen bekannt sind.

Diese Gleichung gilt nun ebenso für einen festen Körper und seinen Dampf, wie etwa für

Eis und dem dabei befindlichen Wasserdampf. Sie gilt für die Schmelzwärme eines Körpers, wenn wir r damit bezeichnen, unter p den Flüssigkeitsdruck beim Schmelzpunkt, unter u und u' das spezifische Volumen des flüssigen bezgl. festen Körpers verstehen. Schreiben wir z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{A T(u - u')},$$

und bedenken wir, dass das Volumen des Wassers kleiner als jenes des Eises ist, so finden wir $\frac{\partial p}{\partial T}$ negativ. Das heisst, mit wachsendem Druck erniedrigt sich der Schmelzpunkt und umgekehrt. Wir können die Gleichung (53) auch anwenden, wenn sich ein Körper durch Temperaturerhöhung bezgl. Druckverminderung in seine chemischen Bestandteile zerlegt. Es ist dann p einfach der Dissociationsdruck, r die Dissociationswärme u. s. w.

§ 48. Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Körpers.

Nehmen wir eine adiabatische Zustandsänderung durch Aenderung des Drucks vor, so können wir die Gleichung (52) benützen, wenn wir $dQ = 0$ setzen. Es bleibt dann

$$\gamma dT = A T \frac{\partial v}{\partial T} dp.$$

Es ist nun $\frac{\partial v}{\partial T}$ nichts anderes als $v\delta$, wenn wir unter δ den Ausdehnungscoefficienten des Körpers verstehen. Wir können daher schreiben

$$\gamma dT = A T v \delta dp.$$

γ , A , T v sind ihrer Natur nach positive Grössen, δ kann jedoch sowohl positiv als auch, wie z. B. beim Wasser zwischen 0° und 4° C. negativ sein. Im ersteren Fall wird sich daher mit wachsendem Druck die Temperatur erhöhen, im andern jedoch erniedrigen.

§ 49. Temperaturänderung durch Dehnung.

Ein Stab von der Masse Eins und der Länge l wird durch ein angehängtes Gewicht P gedehnt. Führen wir dem Stab die Wärme dQ zu, so verlängert er sich um dl . Das Gewicht sinkt und leistet dabei die Arbeit $P dl$. Die Wärme wirkt also diesmal nicht einer äusseren Kraft entgegen, sondern im selben Sinn. Wir haben deshalb nach dem ersten Hauptsatz

$$dU = dQ + A P dl.$$

Die Wärmemenge Q werde als Funktion von T und P dargestellt. Es ist sonach

$$dQ = \gamma dT + \eta dP.$$

Benützen wir nun die Eigenschaft der vollständigen Differentiale dU und $\frac{dQ}{T}$ wie früher, indem wir

$$dl = \frac{\partial l}{\partial T} dT + \frac{\partial l}{\partial P} dP \quad (54)$$

setzen, so finden wir leicht

$$\eta = A T \frac{\partial l}{\partial T}.$$

für eine adiabatische Dehnung erhalten wir somit

$$0 = \gamma dT + A T \frac{\partial l}{\partial T} dP$$

γ ist die spezifische Wärme bei konstantem Zug $\frac{\partial l}{\partial T} = \lambda l$,

wenn wir mit λ den Ausdehnungskoeffizienten bezeichnen. Wir haben somit

$$dT = - \frac{A T \lambda l}{\gamma} dP$$

Da in der Regel λ positiv ist, so kühlt sich bei der Dehnung der Stab ab. Bei gespanntem Kautschuk ist λ negativ. In der That erwärmt sich eine Kautschukschnur bei der Dehnung und kühlt sich mit abnehmender Spannung ab.

Aus Gleichung (54) erhalten wir

$$dP = \frac{dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT}{\frac{\partial l}{\partial P}},$$

folglich

$$dQ = \gamma dT + \frac{\eta}{\frac{\partial l}{\partial P}} \left(dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT \right).$$

Bei konstanter Länge wird $dl = 0$ und

$$dQ = \left(\gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\frac{\partial l}{\partial P}} \right) dT.$$

Es ist daher die spezifische Wärme bei konstanter Länge

$$\gamma' = \gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\frac{\partial l}{\partial P}} = \gamma - \frac{A T \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)^2}{\frac{\partial l}{\partial P}} = \gamma - A T \lambda^2 E l q,$$

indem $\frac{\partial l}{\partial P} = \frac{l}{E q}$ (Bd. I § 86), wenn q der Querschnitt

des Stabs und E der Elasticitätsmodul ist. Bei Metalldrähten und vielen anderen Körpern zeigt sich, dass das Produkt $A T \lambda^2 E l q$ so klein ist, dass man es in der Regel gegen γ vernachlässigen, das Verhältniss der spezifischen Wärmen also gleich Eins setzen kann.

Die kinetische Theorie der Gase.

§ 50. Die Wärmebewegung in Gasen.

D. Bernoulli, vorzüglich aber R. Clausius entwickelten eine Theorie, welche direkt eine Vorstellung jener Bewegung der kleinsten Theilchen gibt, die wir Wärme nennen. Vollständig entwickelt ist diese Hypothese für Gase, und man fasst die ganze Anschauungsweise unter dem Namen „mechanische“ oder „dynamische“, in der Regel aber „kinetische“ Theorie der Gase zusammen. Nach ihr stellt man sich im gasförmigen Zustand die Molekeln vollständig von einander getrennt und in geradliniger Bewegung begriffen vor. „Die Bewegungsrichtungen sind für ein ruhendes Gas über die Gesamtheit der Gasmolekeln im Raum gleichmässig verteilt, so dass sich nach jeder Richtung des Raums gleich viel Molekeln bewegen. Da man den Molekeln eine gewisse Ausdehnung zuschreiben muss, so sind natürlich Zusammenstösse derselben nicht ausgeschlossen. Damit aber der Zustand des Gases unverändert bleibt, ist erforderlich, dass die Molekeln infolge der Zusammenstösse weder in ihrer Durchschnittsgeschwindigkeit noch in ihrer Durchschnittsbewegungsrichtung eine Aenderung er-

fahren. Um dieser Bedingung Genüge zu thun, ist es am bequemsten, die Molekeln als vollkommen elastische Kugeln von gleicher Grösse und gleicher Masse anzusehen. Für deren Zusammenstoss gilt dann das Gesetz von der Erhaltung der gemeinsamen Bewegungsgrösse als auch der kinetischen Energie, und entsprechend dem Zustand vor dem Stoss ist auch nachher die Bewegung der Molekeln nach jeder Richtung des Raums gleich wahrscheinlich.

Es genügt in den meisten Fällen, und es vereinfacht die mathematische Behandlung bedeutend — thatsächlich wurde es anfangs von Seite der Forscher auch stets so gepflogen, und wir werden uns im folgenden ihnen darin anschliessen — wenn man allen Molekeln eine bestimmte Geschwindigkeit zuschreibt. Dies ist aber nur ein Mittelwert aus allen möglichen Geschwindigkeiten, welche nach einem bestimmten Gesetz über die Molekeln verteilt sein müssen.“

§ 51. Boyle-Charles'sches Gesetz.

Ein Gas, welches sich in keinem Gefäss befindet und keiner äusseren Kraft, wie etwa der Schwere unterworfen ist, muss sich nach der kinetischen Theorie immer weiter zerstreuen. Befindet es sich aber in einem allseits geschlossenen Gefäss, so ist die Folge davon, dass von den Molekeln beständig Stösse auf die Gefässwand ausgeübt werden. Indem diese wegen der grossen Zahl der Molekeln sehr rasch auf einander folgen, bewirken sie den Eindruck eines kontinuierlichen Drucks. Damit dieser, sowie der ganze Zustand des Gases konstant bleibt, ist es nötig, dass ebensoviel

Molekeln von der Wand in das Gas zurückfliegen als gegen die Wand stossen. Es wird dies am leichtesten erfüllt, wenn wir annehmen, die Gasmolekeln werden von der Wand nach den Reflexionsgesetzen zurückgeworfen, was ja bei vollkommen elastischen Kugeln und einer absolut starren Wand thatsächlich der Fall ist.

„Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so ist das Mass derselben die Bewegungsgrösse, welche in der Zeiteinheit auf den Körper übertragen wird. Stösst eine Molekel von der Masse m mit einer Geschwindigkeitskomponente u senkrecht gegen die Wand, so hat sie nach dem Stoss ebenfalls senkrecht gegen die Wand die Geschwindigkeit $-u$. Es muss also während des Stosses auf die Molekel ein Gegendruck ausgeübt werden, welcher sie vollständig zur Ruhe bringt, ferner muss ein weiterer Gegendruck vorhanden sein, welcher ihr die Geschwindigkeit $-u$ erteilt. Die Molekel empfängt also von der Wand die Bewegungsgrösse $2mu$. Dieselbe Bewegungsgrösse, nur entgegengesetzt gerichtet, hat aber auch die Wand nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung von der Molekel erhalten.“

Eine Molekel besitze die Geschwindigkeit c mit den Komponenten ξ , η , ζ . Es ist also

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2.$$

In der Volumeneinheit seien N_1 Molekeln vorhanden von der Geschwindigkeitskomponente ξ . Es werden daher $N_1 \xi$ solcher Molekeln gegen die Flächeneinheit einer Wand fliegen, welche senkrecht zur x -Achse steht. $N_1 \xi$ Stösse erhält davon die Wand in der Sekunde und

$$N_1 \xi \cdot 2 m \xi = 2 N_1 m \xi^2$$

ist daher die Bewegungsgrösse, welche die Wand empfängt. Bilden wir die Summe über sämtliche Molekeln, so erhalten wir den Druck

$p = \sum 2 N_1 m \xi^2 = \sum 2 N_1 m \eta^2 = \sum 2 N_1 m \zeta^2$, da wegen der gleichen Verteilung es ebensoviel gleich grosse η und ζ als ξ geben muss. Es ist demnach

$$p = \frac{\sum 2 N_1 m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{3} = \frac{2 m c^2}{3} \sum N_1.$$

Ueberlegen wir nun, dass die Hälfte der Molekeln positive, die andere negative ξ u. s. w. besitzt, so fliegen gegen die Wand, wenn N die Zahl sämtlicher Molekeln in der Volumeinheit ist, $\frac{N}{2}$ Molekeln. Es ist daher

$$\sum N_1 = \frac{N}{2}, \text{ folglich}$$

$$p = \frac{N m c^2}{3}. \quad (55)$$

Enthält unser Gefäss vom Volumen v n Molekeln, so ist $N = \frac{n}{v}$, folglich

$$p v = \frac{n m c^2}{3}. \quad (56)$$

Dies ist der Inbegriff des Boyle-Charles'schen Gesetzes, welches wir nach Gleichung (37) in der Form

$$p v = R T$$

kennen gelernt haben. Da für eine bestimmte Gasmenge die Zahl n der Molekeln, als auch die Masse m einer Molekel konstant ist, so muss c^2 proportional der absoluten Temperatur sein. $\frac{m c^2}{2}$ ist die kinetische Energie

einer Molekel und $\frac{n m c^2}{2}$ jene des ganzen Gases. Das ist gleichzeitig die im Gas enthaltene Wärmemenge.

§ 52. Regel von Avogadro — Gesetze von Gay-Lussac und Dalton — Geschwindigkeit der Molekeln.

Es lässt sich zeigen, dass für Gase von gleicher Temperatur die lebendige Kraft der Molekeln gleich ist. Wir haben deshalb die Gleichung

$$\frac{m c^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} = k,$$

wenn m und c dem einen, m_1 und c_1 dem andern Gas angehören. Stehen daher Gase von gleicher Temperatur auch unter demselben Druck, so muss

$$p = \frac{N m c^2}{3} = \frac{N_1 m_1 c_1^2}{3} = \dots,$$

daher

$$N = N_1 = \dots$$

sein. Gase unter gleichem Druck haben bei derselben Temperatur in gleichen Räumen gleich viel Molekeln. Es ist dies Avogadro's Regel, welche hier als eine Folge der kinetischen Gastheorie erscheint.

Nach Gay-Lussac stehen zwei eine chemische Verbindung eingehende Gasmengen, bezogen auf gleichen Druck und gleiche Temperatur, untereinander sowie zur Menge der Verbindung in Verhältnissen, welche durch einfache ganze Zahlen dargestellt werden. Es folgt dies unmittelbar aus Avogadros Regel und Daltons Theorie, nach welcher die Molekeln

einer chemischen Verbindung aus ganzen Zahlen von Atomen der sie bildenden Elemente bestehen.

Haben wir mehrere Gase in einem Gefäß, deren Molekelzahlen in der Volumeinheit N_1, N_2, \dots sind, so ist die Gesamtzahl der Molekeln in der Volumeinheit $N = N_1 + N_2 + \dots$ und der Druck

$$p = \frac{2}{3} N k = \frac{2}{3} N_1 k + \frac{2}{3} N_2 k + \dots = p_1 + p_2 + \dots,$$

wenn wir mit $p_1, p_2 \dots$ die Drucke bezeichnen, welche die einzelnen Gase für sich im Gefäß erzeugen würden. Es ist der Gesamtdruck eines Gasgemenges gleich der Summe der Partialdrucke der einzelnen Gase, ein Gesetz, welches Dalton fand.

Setzen wir $Nm = \rho$, so haben wir unter ρ die Masse der Volumeinheit, d. i. die Dichte des Gases zu verstehen. Wir haben sonach $p = \frac{\rho c^2}{3}$ oder

$$c^2 = \frac{3 p}{\rho}.$$

Da aber Druck und Dichte eines Gases bestimmbar ist, so ist uns damit auch die Geschwindigkeit der Gasmolekeln gegeben. Wir finden so für Sauerstoff 461 m, Stickstoff 492 m, Wasserstoff 1844 m. Diese Zahlen gelten für die Temperatur des schmelzenden Eises, und sie wachsen proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur. Wir haben es sonach mit Geschwindigkeiten zu thun, welche jene der Geschosse unserer modernen Feuerwaffen zum Teil weit übertreffen.

§ 53. Abweichungen vom Boyle-Charles'schen Gesetz — Zustandsgleichung von van der Waals.

Nach dem Boyle-Charles'schen Gesetz muss mit wachsendem Druck das Volumen des Gases beständig kleiner werden, bis es bei unendlich hohen Drucken schliesslich Null wird. Dasselbe musste man auch bei endlichen Drucken erreichen, wenn die Temperatur bis zum absoluten Nullpunkt sinkt. Die Erfahrung lehrt jedoch, dass man Gase nur bis zu einer gewissen Grenze komprimieren kann, wie gross man auch den Druck wählt. Wir erklären uns das so, dass wir uns die Molekeln nicht als Massenpunkte, sondern, wie wir bereits früher annahmen, als kleine vollkommen elastische Kugeln vorstellen. Ist nun das Gas so stark komprimiert, dass die Molekeln einander berühren, so füllen sie den ihnen zu Gebote stehenden Raum aus und lassen sich nicht weiter zusammendrücken. Das besagt, dass infolge des Volumens der Molekeln, der Bewegung einer einzelnen nicht der ganze Gefässraum zur Verfügung steht. Der Einfluss des Molekular-Volumens auf das Boyle-Charles'sche Gesetz konnte bis jetzt strenge noch nicht ermittelt werden. Es genügt jedoch, für nicht zu hohe Drucke das Volumen v um eine konstante Grösse b zu vermindern, welche sich als das vierfache Molekularvolumen ergibt. Das heisst: das Volumen, welches die Molekeln wirklich mit Materie ausfüllen, entspricht in seinem vierfachen Wert der Grösse b . Die Zustandsgleichung verändert sich dadurch in

$$p(v - b) = \frac{n m c^2}{3}. \quad (57)$$

Wir müssen aber noch einen zweiten Einfluss in Rechnung ziehen. Bisher nahmen wir nämlich an, dass die Molekeln gar keine Kräfte auf einander ausüben. Diese Annahme ist jedoch sehr willkürlich. Es liegt im Gegenteil nahe, den Molekeln Anziehungskräfte zuzuschreiben, da ja sonst ein Verflüssigen der Gase und ein Ueberführen in den festen Zustand bei abnehmender Temperatur kaum denkbar wäre. Wir haben von den Kräften anzunehmen, dass sie nur dann wirksam sind, wenn die Molekeln einander sehr nahe kommen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, dass bei einem Zusammentreffen von mehr als zwei Molekeln eine Konstellation eintritt, bei welcher zwei Molekeln dauernd zusammen bleiben und eine sogenannte Doppelmolekel bilden. Durch die Anziehungskräfte wird also die Gesamtzahl der sich als Einzelindividuen bewegendenden Molekeln verringert, was nach Gleichung (56) einer Verminderung des Drucks gleich kommt. Auch diese Abweichung vom Boyle-Charles'schen Gesetz ist erfahrungsgemäss vom Volumen abhängig. Sie verschwindet bei sehr grosser Verdünnung des Gases. Für diesen Fall haben wir also anzunehmen, dass nur einfache Molekeln vorhanden sind. Das gilt auch für sehr hohe Temperaturen, was ohne weiteres verständlich ist. Mit wachsender Temperatur nimmt die Energie der Molekeln zu und erschwert so die Vereinigung zu Doppelmolekeln. Die Zahl der Molekeln in einem verdünnten Gas von hoher Temperatur sei n_0 . Verdichten wir es allmählich, so treten die Abweichungen auf, welche mit abnehmendem

Volumen und sinkender Temperatur immer stärker ins Gewicht fallen. Wir werden daher die Zahl der jeweilig vorhandenen Molekeln durch

$$n = n_0 \left(1 - \frac{k}{vT} \right)$$

darstellen können. Wird v und T genügend gross, so kann $\frac{k}{vT}$ gegen Eins vernachlässigt werden, d. h. wir merken keine Abweichung vom Boyle-Charles'schen Gesetz, während mit abnehmendem v und T auch n , wie es die Erfahrung verlangt, immer kleiner wird. Demnach erhalten wir aus Gleichung (57)

$$p(v - b) = \frac{n_0 m c^2}{3} \left(1 - \frac{k}{vT} \right).$$

Es ist zu bemerken, dass sowohl b gegen v als auch $\frac{k}{vT}$ gegen Eins klein sein muss, da wir sonst nicht so einfache Funktionen voraussetzen können. Es ist somit die Annahme

$$p = \frac{n_0 m c^2}{3(v - b)} - \frac{k n_0 m c^2}{3 v^2 T}$$

erlaubt, wobei wir höhere Glieder nicht in Betracht ziehen. $\frac{c^2}{T}$ ist eine konstante Grösse; wir können daher

$$\frac{k n_0 m c^2}{3 T} = a$$

setzen und die Gleichung in die Form

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = R' T \quad (58)$$

bringen. Dies ist die Zustandsgleichung der Gase, welche zuerst von van der Waals, jedoch mittels

anderer Erklärungsweise aufgestellt wurde. Sie ist umso wertvoller, als sie noch für viel höhere Drucke, als man nach der theoretischen Betrachtung glauben sollte, gültig ist, ja von van der Waals selbst auch für die Verflüssigung der Gase angewandt wurde. Sie zeichnet sich durch Einfachheit aus, da sie in die Zustandsgleichung idealer Gase nur die zwei neuen Konstanten a und b einführt.

§ 54. Kritische Temperatur — kritischer Druck — kritisches Volumen.

Wir können die Gleichung (58) in die Form

$$pv^3 - (pb + RT)v^2 + av - ab = 0$$

bringen. Sie ist somit bezüglich des Volumens v eine Gleichung 3. Grads. Eine solche hat drei Wurzeln, von welchen entweder alle reell, oder eine reell und die beiden andern imaginär sein können.

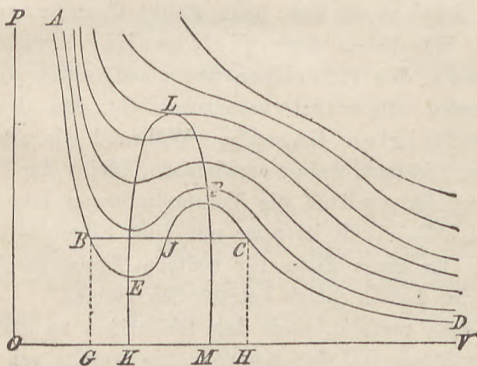


Fig. 45.

Wir veranschaulichen uns dies am besten durch die graphische Darstellung (Fig. 45), indem wir die Volumina als Abscissen, die Drucke als Ordinaten in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eintragen. Thun wir das bei verschiedenen Temperaturen, so erhalten wir eine Schar von Isothermen. Bei tiefen Temperaturen, für welche die Kurven ein Minimum bei E und ein Maximum bei F haben, erhalten wir drei mögliche Werte des Volumens, wenn wir innerhalb des Druckunterschieds EF eine zur v -Achse parallele Gerade ziehen. Diese schneidet die Kurve in drei Punkten, welche die drei Wurzeln der Gleichung ergeben. Es lassen sich aber nicht alle drei Wurzeln realisieren. Zwischen E und F haben wir nämlich einen labilen Zustand, indem bei wachsendem Druck auch das Volumen wachsen soll, was nicht ausführbar ist. Sondern, wenn wir das Gas komprimieren, beginnt es sich beim Punkt C zu verflüssigen. Wir haben dann gleichzeitig zweierlei Zustände, den flüssigen und gasförmigen, und die Strecke $BG = CH$ veranschaulicht den Druck des gesättigten Dampfs. Während wir also von C an das Volumen weiter verkleinern, bleibt der Druck konstant. Es verläuft die Volumsänderung längs der Geraden CB. In B ist aber nur noch Flüssigkeit vorhanden. Es muss dann für weitere Volumsvermindernungen der Druck gleich beträchtlich steigen.

Es wäre verfehlt, nach dem Bisherigen zu glauben, dass das Stück BC der Kurve völlig wertlos sei. Bei der nötigen Vorsicht ist es möglich, den Punkt C zu passieren, ohne dass Verflüssigung eintritt. Wir haben

dann einen übersättigten Dampf. Dasselbe geschieht beim umgekehrten Durchlaufen der Kurve im Punkt B. Wir sprechen dann von einer überhitzten Flüssigkeit.

Je höher die Temperatur wird, desto mehr nähern sich die Punkte B, J und C, bis sie schliesslich zusammenfallen. Für diesen Punkt sind somit alle drei Wurzeln der Gleichung gleich gross. Steigern wir die Temperatur noch mehr, so erscheint nur noch eine reelle Wurzel. Die Temperatur der drei gleichen Wurzeln nennt man die kritische Temperatur. Sie ist nämlich die Grenztemperatur, für welche die Verflüssigung eines Gases noch möglich ist. Gleicherweise nennen wir auch das Volumen und den Druck, welcher dem Punkt der drei gleichen Wurzeln entspricht, das kritische Volumen und den kritischen Druck.

Die Maxima und Minima der Kurven sind durch die Gleichung $\frac{dp}{dv} = 0$ gegeben. Nach Gleichung (58) haben wir also

$$p + \frac{a}{v^2} - \frac{2a(v-b)}{v^3} = 0. \quad (59)$$

Es ist das die Gleichung der Kurve KE LFM, welche die Minima bezgl. Maxima der Isothermen verbindet. Sie hat wieder ein Maximum, welches gleichzeitig der kritische Punkt ist. Wir erhalten sonach das kritische Volumen v_1 , wenn wir für Gleichung (59) $\frac{dp}{dv} = 0$ setzen. Dies ergibt

$$\frac{6a(v_1 - b)}{v_1^4} - \frac{4a}{v_1^3} = 0,$$

daher $v_1 = 3b$.

Die Gleichungen (58) und (59) lassen jetzt mit Hilfe des Werts v_1 auch den kritischen Druck

$$p_1 = \frac{a}{27b^2}$$

und die kritische Temperatur

$$T_1 = \frac{8a}{27bR}$$

ermitteln.

Machen wir die kritischen Werte zur Einheit, d. h. setzen wir

$$v = \omega v_1 = 3b\omega,$$

$$p = \pi p_1 = \frac{a}{27b^2} \pi,$$

$$T = \tau T_1 = \frac{8a}{27bR} \tau,$$

so verwandelt sich die Zustandsgleichung in

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right) (3\omega - 1) = 8\tau.$$

Es haben alle Körper dieselben Isothermen, wenn wir als Masseinheiten des Drucks, des Volumens und der Temperatur deren kritische Werte nehmen.

§ 55. Spannungs- und Ausdehnungskoeffizient.

Schreiben wir das Boyle-Charles'sche Gesetz in der Form

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t),$$

so wird bei konstantem Volumen v_0

$$p = p_0 (1 + \alpha t),$$

und wir nennen α den Spannungskoeffizienten.

Lassen wir hingegen den Druck konstant, so heisst analog in der Gleichung

$$v = v_0 (1 + \alpha t)$$

α der Ausdehnungskoeffizient. Für ideale Gase sind somit diese beiden Koeffizienten identisch, nicht aber für wirkliche Gase. Wir

wollen daher den Spannungscoeffizienten mit $\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t}$,

den Ausdehnungskoeffizienten mit $\alpha_v = \frac{v - v_0}{v_0 t}$ bezeichnen. Nach Gleichung (58) ist

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = R T = R_1 (1 + \alpha t),$$

wenn wir $R_1 = 273 R$ setzen. Gleicherweise ist

$$(p_0 + \frac{a}{v^2})(v - b) = R_1.$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, so

$$(p - p_0)(v - b) = R_1 \alpha t = (p_0 + \frac{a}{v^2})(v - b) \alpha t,$$

daher

$$\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t} = (1 + \frac{a}{p_0 v^2}) \alpha.$$

Für ein bestimmtes Volumen ist also der Spannungscoeffizient eine konstante Grösse, doch ist er immer grösser als sein idealer Wert. Erst wenn das Volumen v gross wird, kann

$\frac{a}{p_0 v^2}$ vernachlässigt werden und wir erhalten $\alpha_p = \alpha$.

Der Umstand, dass für Wasserstoffgas a verschwindend klein ist, macht dieses Gas geeignet zur Bestimmung des idealen Spannungscoeffizienten α .

Nicht so einfach wie der Spannungskoeffizient lässt sich der Ausdehnungskoeffizient α_v finden. Wir müssten zu diesem Zweck v und v_0 aus Gleichungen vom 3. Grad bestimmen und würden so zu sehr komplizierten, unübersichtlichen Ausdrücken kommen. Für bestimmte Grenzen der Temperatur und des Drucks lassen sich jedoch Vereinfachungen einführen, so dass die Ausdrücke handlicher werden. Für Wasserstoff z. B. wird, da $a=0$ gesetzt werden kann

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{b}{v_0}\right) \alpha,$$

mithin $\alpha_v < \alpha_p$. Bei anderen Gasen findet das Gegenteil statt.

§ 56. Spezifische Wärme.

Die in einem Gas enthaltene Wärmemenge ist die gesamte kinetische Energie der Molekeln. Wir betrachten die Masseneinheit des Gases, für welche $nm=1$ ist. Sonach wird nach Gleichung (56)

$$p v = \frac{c^2}{3}$$

und die im Gas enthaltene kinetische Energie

$$\frac{c^2}{2} = \frac{3}{2} p v.$$

Bekanntlich ist

$$c^2 = c_0^2 (1 + \alpha t),$$

daher $\frac{c_0^2 \alpha}{2}$ die Zunahme der gesamten Energie des Gases bei einer Temperaturerhöhung um 1°C . Lassen wir dabei keine Volumsänderung eintreten, so ist

$$\gamma = \frac{c_0^2 \alpha}{2} A.$$

die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, wenn A das kalorische Aequivalent der Arbeit ist. Bei konstantem Druck gilt für das Gas

$$v = v_0 (1 + \alpha t).$$

Die Zunahme für einen Grad ist $v_0 \alpha$, wobei die äussere Arbeit $p v_0 \alpha$ zu leisten ist. Das entspricht der Wärmemenge $A p v_0 \alpha$. Um diesen Wert ist also die spezifische Wärme bei konstantem Druck Γ grösser als jene bei konstantem Volumen. Es ist somit

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + A p v_0 \alpha = \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + \frac{A c_0^2 \alpha}{3} = \\ &= \frac{5}{3} A \alpha \frac{c_0^2}{2} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{5}{3}.$$

In Wirklichkeit ist aber nur für wenige Gase, die sogenannten einatomigen, wie z. B. für den Quecksilberdampf das Verhältniss der spezifischen Wärmen $\frac{5}{3}$. Das rührt davon her, dass wir bei den meisten Gasen die Molekeln nicht als Kugeln von vollkommen glatter Oberfläche auffassen dürfen, sondern als kompliziertere Gebilde. Demzufolge besitzen sie nicht nur eine fortschreitende Bewegung, sondern auch eine drehende, sowie eine innere Bewegung, wie z. B. Schwingungen der die Molekeln bildenden Atome. Wir haben daher einen Unterschied zwischen der Gesamtenergie H und der Energie der fortschreitenden Bewegung K der Molekeln zu machen. Für die Masseneinheit des Gases ist

$$K = A \alpha \frac{c_0^2}{2},$$

hingegen

$$H = A \alpha \frac{c_0^2}{2} + k = \gamma,$$

wobei k von jenem Teil der Energie herrührt, der nicht in der fortschreitenden Bewegung liegt. Ferner ist

$$\Gamma = \gamma + A p v_0 \alpha = \frac{5}{3} \frac{A \alpha c_0^2}{2} + k.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = 1 + \frac{2}{3} \frac{K}{H}.$$

Ueberlegen wir, dass $\frac{K}{H}$ zwischen Null und Eins liegen muss, so folgt

$$1 < \frac{\Gamma}{\gamma} < \frac{5}{3},$$

was sich ausnahmslos in der Erfahrung bestätigt.

§ 57. Stosszahl und mittlere Weglänge der Molekeln.

Wir betrachten die Molekeln als kleine Kugeln vom Durchmesser σ . Alle sind nach den verschiedensten Richtungen des Raums in geradliniger Bewegung begriffen. Es muss sich folglich ereignen, dass eine Molekel mit anderen zusammenstösst. Die Zahl der Zusammenstösse, welche eine Molekel in der Sekunde erfährt, wollen wir berechnen. Wir denken uns zu dem Zweck erst alle Molekeln in Ruhe bis auf eine, welche sich mit der Geschwindigkeit c bewegt. Stösst sie mit einer anderen zusammen, so ist die Entfernung der Mittelpunkte beider gleich dem

Durchmesser σ einer Molekel. Wir werden also denselben Effekt erreichen, wenn wir uns die ruhende Molekel als Punkt, hingegen die sich bewegende als eine Kugel vom Radius σ denken. Eine solche Kugel hinterlässt als Spur einen Cylinder vom Querschnitt $\pi \sigma^2$ und der Länge c per Sekunde. In der Sekunde fegt unsere Kugel also einen Raum $\pi \sigma^2 c$ ab. In diesem Raum befinden sich $N \pi \sigma^2 c$ Gasmolekeln, falls N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit ist.

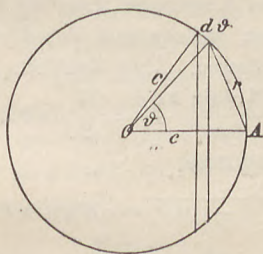


Fig. 46.

$$Z = N \pi \sigma^2 c$$

ist daher die Zahl der Zusammenstösse, welche die wandernde Molekel erfährt.

Dieselbe Betrachtungsweise können wir für den Fall festhalten, dass alle Molekeln in Bewegung sind, nur haben wir dann anstatt c die mittlere relative Geschwindigkeit r einzusetzen, welche eine Molekel gegenüber den andern hat. Bilden die Bewegungsrichtungen zweier Molekeln den Winkel ϑ

(Fig. 46), so ist die relative Geschwindigkeit r gegeben durch

$$r^2 = c^2 + c^2 - 2 c^2 \cos \vartheta = 2 c^2 (1 - \cos \vartheta).$$

Die Zahl sämtlicher Geschwindigkeiten sei N . Sie verteilen sich gleichmässig nach allen Richtungen des Raums. Wir können sie uns zum Zweck der Rechnung als Radien einer Kugel vorstellen, welche gleichmässig verteilt die Kugeloberfläche treffen. Auf die Flächeneinheit der Kugel gehen demnach $\frac{N}{4 \pi c^2}$ solcher Radien. Auf einer Kugelzone $2 \pi c^2 \sin \vartheta d \vartheta$ liegen die Geschwindigkeiten, welche mit der Richtung OA den Winkel ϑ einschliessen. Ihre Zahl ist

$$\frac{2 \pi N c^2 \sin \vartheta d \vartheta}{4 \pi c^2} = \frac{N}{2} \sin \vartheta d \vartheta$$

und ihre Gesamtsumme

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} \sin \vartheta d \vartheta \sqrt{2 c^2 (1 - \cos \vartheta)} &= c N \sin \vartheta d \vartheta \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}} = \\ &= c N \sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} d \vartheta = 4 c N \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Bilden wir nun durch Integration die Summe über die ganze Kugelfläche und dividieren wir durch die Gesamtzahl N der Geschwindigkeiten, so erhalten wir die mittlere relative Geschwindigkeit. Diese ist somit

$$r = 4 c \int_0^\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2} = 4 c \left[\frac{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}{3} \right]_0^\pi = \frac{4 c}{3}.$$

Es ist demnach die Zahl der Zusammenstösse einer Molekel in der Sekunde

$$Z = \frac{4}{3} N \pi \sigma^2 c.$$

Dividieren wir den Weg c , welchen die Molekel in der Sekunde zurücklegt, durch die Zahl der Zusammenstösse, so erhalten wir die mittlere Weglänge, d. i. den Weg, welchen die Molekel im Durchschnitt zwischen zwei Zusammenstössen zurücklegt,

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}.$$

§ 58. Innere Reibung.

Bewegen sich zwei einander berührende parallele Gasschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so übt die schnellere auf die langsamere eine Beschleunigung, diese auf jene eine Verzögerung aus. Es wird somit Bewegungsgrösse von der schnelleren an die langsamere Schichte abgegeben, u. z. wird durch die Flächeneinheit der Schichte die Bewegungsgrösse

$$R = - \eta \frac{d u}{d z} \quad (60)$$

per Sekunde getragen. Das heisst, R ist die Kraft, welche die schnellere Schichte auf die Flächeneinheit der langsameren ausübt. Wir bezeichnen diese Kraft mit dem Namen „innere Reibung“ (Siehe Bd. I. § 64).

η nennen wir den Reibungskoeffizienten, $\frac{d u}{d z}$ ist das Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Bewegungsrichtung der Gasschichte. Verstehen wir unter z die eine der Koordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so bewegen sich die Schichten parallel zur xy -Ebene. Den Vorgang der inneren Reibung der Gase nach der kinetischen Theorie zu erklären läuft also darauf hinaus,

die Möglichkeit des Transports von Bewegungsgrösse parallel zur z -Achse nachzuweisen.

Die Bewegungsrichtung der Gasschichten sei parallel zur x -Achse. In der Volumeinheit des Gases seien n Molekeln von der Geschwindigkeit ξ' parallel zur x -Achse und ζ parallel zur z -Achse. Durch die Flächeneinheit der xy -Ebene wird sonach in der Sekunde die Bewegungsgrösse

$$R = \sum n m \xi' \zeta$$

getragen, wobei sich die Summe über alle möglichen Werte von ξ' und ζ erstreckt. Die Molekeln, welche die xy -Ebene mit der Geschwindigkeit ζ passieren, kommen aus verschiedenen Schichten. Die aus der Schichte mit der Ordinate z stammen, haben die Geschwindigkeit

$$\xi' = \xi + u + \frac{du}{dz} z,$$

wobei sich ξ auf die Wärmebewegung, $u + \frac{du}{dz} z$ auf die Bewegung der Schichte als Ganzes bezieht. Es ist somit u die Geschwindigkeit der Schichte in der xy -Ebene. Für die Reibung haben wir also

$$R = \sum n m \left(\xi + u + \frac{du}{dz} z \right) \zeta.$$

Die Summen $\sum n m \xi \zeta$ und $\sum n m u \zeta$ verschwinden wegen der gleich grossen Anzahl positiver und negativer ξ und ζ . Es bleibt also nur

$$R = \frac{du}{dz} \sum n m \zeta z,$$

wobei wir $\frac{du}{dz}$ als konstant ansehen. Ist der Weg, welchen die Molekel nach ihrem letzten Zusammenstoss in m

(Fig. 47) bis zum Passieren der xy -Ebene zurücklegt, r , so besteht die Proportion

$$\zeta : c = -z : r,$$

daher

$$z = -\frac{\zeta r}{c}.$$

Darnach können wir schreiben

$$R = -\frac{1}{c} \frac{du}{dz} \sum n m \zeta^2 r.$$

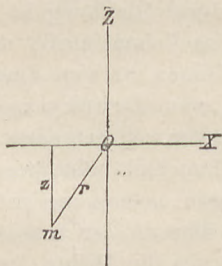


Fig. 47.

Der Mittelwert von r ist aber für alle ζ eine konstante Grösse und zwar gleich der mittleren Weglänge λ , weshalb

$$R = -\frac{\lambda}{c} \frac{du}{dz} \sum n m \zeta^2$$

gesetzt werden kann. Nun ist

$$\sum n m \zeta^2 = p$$

gleich dem Druck des Gases, so dass wir leicht nach Gleichung (60) für die Grösse des Reibungskoeffizienten

$$\eta = \frac{p \lambda}{c} = \frac{N m c \lambda}{3} \quad (61)$$

erhalten, wenn wir den Wert von p aus Gleichung (55) benützen.

Führen wir in Gleichung (61) den Wert der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}$$

ein, so ergibt dies

$$\eta = \frac{m c}{4 \pi \sigma^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist frei von der Zahl der Molekeln in der Volumeinheit, d. h. die innere Reibung eines Gases ist von dessen Dichte oder, was dasselbe ist, vom Druck unabhängig. Dieses überraschende von Maxwell gefundene Resultat bestätigt sich thatsächlich innerhalb sehr grosser Druckgrenzen.

Aber noch einen anderen merkwürdigen Aufschluss gewährt uns die Theorie der inneren Reibung. Wir wissen, dass $N m = \rho$ die Dichte des Gases ist, somit finden wir nach Gleichung (61)

$$\lambda = \frac{3 \eta}{\rho c}.$$

Die Geschwindigkeit der Molekeln ist uns bereits bekannt (§ 52), der Reibungskoeffizient und die Dichte sind experimentell bestimmbare Grössen. Wir können somit den Zahlenwert der mittleren Weglänge angeben und damit auch die Stosszahl einer Molekel.

So finden wir für

	Weglänge	Stosszahl
Wasserstoff	0 000 1855 cm	9480 Millionen.
Sauerstoff	1059 "	4065 "
Stickstoff	959 "	4735 "
Kohlensäure	680 "	5510 "

Es beziehen sich diese Zahlen auf den Druck einer Atmosphäre und die Temperatur 0°C .

§ 59. Wärmeleitung.

Haben wir parallel zur z -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ein Temperaturgefälle $\frac{dT}{dz}$, so fließt beständig von oben nach unten Wärme durch die xy -Ebene. Für die Flächen- und Zeiteinheit ist diese Wärmemenge

$$W = -k \frac{dT}{dz},$$

wenn wir k die Wärmeleitungsfähigkeit nennen. Nach unserer Auffassung ist nun W nichts anderes als eine Energiemenge, welche von oben nach unten getragen wird, und wir können deren Grösse genau so finden, wie den Wert der transportierten Bewegungsgrösse im vorhergehenden Paragraphen. Es trägt jede passierende Molekel durch die xy -Ebene die Wärmemenge $m\gamma\left(T_0 + \frac{dT}{dz}z\right)$, indem m die Masse einer Molekel, γ die spezifische Wärme bei konstanten Volumen und z die Höhe jener Schichte bedeutet, aus welcher die Molekel kommt. Dabei haben wir vorausgesetzt, dass die Temperatur

$$T = T_0 + \frac{dT}{dz}z$$

sei. T_0 ist also die Temperatur in der xy -Ebene. Wir brauchen somit in den Formeln für die innere Reibung nur m durch $m\gamma$ und u durch T zu ersetzen und haben unmittelbar die Formel für die Wärmeleitung

$$k = \frac{c N m \lambda \gamma}{3} = \frac{\rho c \lambda \gamma}{3}.$$

Es besteht demnach zwischen dem Reibungskoeffizienten und der Wärmeleitungsfähigkeit die enge Beziehung

$$k = \eta \gamma.$$

Ferner folgt, dass auch die Wärmeleitungsfähigkeit vom Druck des Gases unabhängig ist, und schliesslich haben wir auch in der Wärmeleitung ein Mittel den Zahlenwert der mittleren Weglänge kennen zu lernen.

§ 60. Grösse der Molekeln.

Komprimieren wir ein Gas durch sehr grosse Druckkräfte auf das kleinste mögliche Volumen, so können wir annehmen, dass die Molekeln den Raum V der ihnen zur Verfügung steht, völlig mit Materie ausfüllen. Ist das ursprüngliche Volumen Eins, die darin enthaltene Molekelzahl N , so wird, da $\frac{4}{3} N \pi \sigma^3$ das achtfache Molekularvolumen ist

$$V = \frac{1}{6} N \pi \sigma^3.$$

Diese Gleichung erlaubt mit Hilfe des Werts der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2},$$

den Durchmesser einer Molekel

$$\sigma = 8 V \lambda$$

zu finden. Dieses überraschende Resultat verdanken wir Loschmidt. Er fand auf diesem Weg für

$$\begin{array}{ll} \sigma & \\ \text{Wasser} & 44.10^{-9} \text{ cm} \end{array}$$

$$\text{Kohlensäure} \quad 114 \quad \quad \quad \sigma$$

Für ausgedehntere Studien der optischen Erscheinungen sind folgende Werke zu erwähnen.

V. v. Lang: Einleitung in die theoretische Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1891.

A. Beer: Einleitung in die höhere Optik. 2. Aufl. Bearbeitet von V. v. Lang. Braunschweig 1882.

E. Verdet: Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von R. Exner. Braunschweig 1881.

F. Neumann: Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgegeben von E. Dorn. Leipzig 1885.

H. Poincaré: Mathematische Theorie des Lichts. Deutsch von E. Gamlich und W. Jäger. Berlin 1894.

~~~~~  
Für tiefere Studien in der Wärmelehre und kinetischen Gastheorie sind folgende Werke zu nennen:

V. v. Lang: Einleitung in die theoretische Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1891.

C Christiansen: Elemente der theoretischen Physik. Leipzig 1894.

B. Riemann: Partielle Differentialgleichungen, angewendet auf physikalische Fragen. Herausgegeben von Hattendorf. Braunschweig 1876.

R. Clausius: Die mechanische Wärmetheorie. Braunschweig 1876.

— — Die kinetische Theorie der Gase. Herausgegeben von M. Planck und C. Pulfrich. Braunschweig 1889—1891.

H. Poincaré: Thermodynamik. Deutsch von W. Jäger und E. Gumlich. Berlin 1893.

O. E. Meyer: Die kinetische Theorie der Gase. 2. Aufl. Breslau 1895.

L. Boltzmann: Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig 1895.

J. D. van der Waals: Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. 2. Aufl. Leipzig 1899.

P. P.

Gestatten Sie uns, Ihre Aufmerksamkeit auf eine Publikation unseres Verlages zu lenken, die unter dem Namen

## „Sammlung Schubert“

im Sommer 1899 zu erscheinen begonnen hat.

Der ungeahnte Aufschwung, den in den letzten Jahrzehnten Technik und Naturwissenschaften genommen haben, hat die naturgemässe Folge gehabt, dass sich von Jahr zu Jahr ein lebhafteres Interesse der

## Mathematik

zugewendet und das Bedürfnis nach gründlicher mathematischer Bildung mehr und mehr gesteigert hat. Giebt doch die Mathematik für alle technischen Fächer die theoretische Grundlage und für jede tiefere Auffassung der Naturgesetze die fein gegliederte Ausdrucksweise her. Dazu kommt die immer mehr um sich greifende Erkenntnis, dass die Mathematik das beste Mittel zu einer formalen Ausbildung des Verstandes ist, dass man an derselben am besten denken lernen und den Geist befähigen kann, **jeden** gebotenen Stoff in sich aufzunehmen und zu einem verwendbaren Eigentume zu verarbeiten.

Wenngleich für jedes der einzelnen Gebiete der Mathematik Lehrbücher genug vorhanden sind, so fehlte es doch bisher an einem auf dem heutigen Standpunkt der Wissenschaft und der Lehrmethoden stehenden Lehrgange der gesamten Mathematik, welcher, **einheitlich angelegt, in systematisch sich entwickelnden Einzel-Darstellungen** alle Gebiete der Mathematik umfasste.

Dieser Umstand bewog uns, die „Sammlung Schubert“ ins Leben zu rufen, eine

## Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die erstens auf wissenschaftlicher Grundlage beruhen, zweitens den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen, und

drittens durch eine leicht fassliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

So hoffen wir, dass diese Bücher in doppelter Weise sich brauchbar und nützlich erweisen werden: einerseits für den Mathematiker, der in Fächern, die nicht zu seiner Spe-

zialität gehören, sich unterrichten oder auch nur nachschlagen will, anderseits für den Techniker und Naturwissenschaftler, dem in leicht fasslicher Sprache alles geboten wird, was er von der Mathematik für seine besonderen Zwecke wissen muss. Die Form der Darstellung ist so gewählt, dass die einzelnen Bände in gleicher Weise für den Unterricht, wie für den Selbstunterricht oder zur Repetition geeignet sind.

## Verzeichnis der erschienenen und projektierten Bände der „Sammlung Schubert“.

Erschienen sind bis Herbst 1900:

- |      |                                                                                              |          |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Band | I: Elementare Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg.              | M. 2.80. |
| "    | II: Elementare Planimetrie von Prof. W. Pflieger in Münster i. E.                            | M. 4.80. |
| "    | III: Ebene und sphärische Trigonometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg.                       | M. 2.—.  |
| "    | VI: Algebra mit Einschluss d. elementaren Zahlentheorie von Dr. Otto Pund in Altona.         | M. 4.40. |
| "    | VII: Ebene Geometrie der Lage von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg.                           | M. 5.—.  |
| "    | VIII: Analytische Geometrie der Ebene von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg.                 | M. 6.—.  |
| "    | IX: Analytische Geometrie des Raumes von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg.                  | M. 4.—.  |
| "    | XII: Elemente der darstellenden Geometrie von Dr. John Schröder in Hamburg.                  | M. 5.—.  |
| "    | XIII: Differentialgleichungen von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg.                   | M. 8.—.  |
| "    | XIV: Praxis der Gleichungen von Prof. C. Runge in Hannover.                                  | M. 5.20. |
| "    | XIX: Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung von Dr. Norbert Herz in Wien.            | M. 8.—.  |
| "    | XXV: Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. | M. 4.40. |

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

- |      |                                                                |
|------|----------------------------------------------------------------|
| Band | IV: Elementare Stereometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg.     |
| "    | V: Niedere Analysis von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. |



- Band X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.
- „ XI: **Integralrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.
- „ XV: **Elemente der Astronomie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
- „ XVI: **Mathematische Geographie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
- „ XVII: **Anwendung der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg.
- „ XVIII: **Geschichte der Mathematik** von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther.
- „ XX: **Versicherungsmathematik** von Ferd. Paul in Budapest.
- „ XXI: **Dynamik** von Dr. Karl Heun in Berlin.
- „ XXII: **Technische Mechanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.
- „ XXIII: **Geodäsie** von Prof. Dr. C. Reinhertz.
- „ XXIV: **Allgemeine Funktionentheorie** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.
- „ XXVI: **Räumliche projektive Geometrie.**
- „ XXVII: **Geometrische Transformationen** von Dr. Karl Doehlemann in München.
- „ XXVIII: **Theorie der höheren algebraischen Kurven.**
- „ XXIX: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.
- „ XXX: **Elliptische Funktionen** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.
- „ XXXI: **Hyperelliptische und Abelsche Funktionen** von E. Landfried in Strassburg.
- „ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen.**
- „ XXXIII: **Invariantentheorie** von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.
- „ XXXIV: **Liniengeometrie** von Dr. Konrad Zindler in Wien.
- „ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie.**
- „ XXXVII: **Kinematik** von Dr. Karl Heun in Berlin.
- „ XXXVIII: **Potentialtheorie** von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg.
- „ XXXIX: **Wärmelehre** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen.
- „ XL: **Theoretische Optik** von Dr. J. Classen in Hamburg.

- Kartenkunde** von Dir. E. Geleisch, Prof. F. Sauter und Dr. Paul Dinsie. Mit 70 Abbild. Nr. 80.
- Kirchenlied, Das, des 16. Jahrhunderts** siehe: Luther.
- Klimalehre** von Prof. Dr. R. Köppen. Mit 7 Tafeln u. 2 Fig. Nr. 114.
- Kudrun und Dietrichepen.** Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. S. Jiriczek. Nr. 10.
- — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.
- Kulturgeschichte, Deutsche,** von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56
- Kurzschrift.** Lehrbuch der vereinfachten deutschen Stenographie (System Stolze-Schrey), nebst Schlüssel, Befestücken und einem Anhang von Dr. Umsel. Nr. 86.
- Länderkunde von Europa** von Prof. Dr. Franz Heiderich. Mit 14 Textkärtchen u. Diagrammen und einer Karte der Alpen-einteilung Nr. 62.
- **der außereuropäischen Erdteile** von Prof. Dr. Franz Heiderich. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.
- Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.** Kulturhistor. Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher. Mit 1 Tafel und 30 Abbild. Nr. 93.
- Lessing, Antiquarische und epigrammat. Abhandlungen.** Mit Anmerkungen v. Rektor Dr. Werther. Nr. 9.
- **Litterarische u. dramaturg. Abhandlungen.** Mit Anmerkungen von Rektor Dr. Werther. Nr. 8.
- **Emilia Galotti.** Mit Einleitung und Anmerkungen v. Oberlehrer Dr. Wolsch. Nr. 2.
- Lessing, Fabeln,** nebst Abhandlungen mit dieser Dichtungsart verwandten Inhalts. Mit Einleitung von Karl Goedeke. Nr. 3.
- **Laokoön.** Mit Einleitung v. Karl Goedeke. Nr. 4.
- **Minna von Barnhelm.** Mit Anmerkungen von Dr. Tomajewski. Nr. 5.
- **Nathan der Weise.** Mit Anmerkungen von Prof. Denzel und Kraz. Nr. 6.
- **Philotas** und die Poesie des 7jährigen Krieges in Auswahl u. mit Anmerkungen von Prof. O. Günther. Nr. 21.
- Sicht** siehe: Physik, Theoretische, II.
- Litteratur, Althochdeutsche,** mit Grammatik, Uebersetzung und Erläuterungen von Prof. Th. Schaffler. Nr. 28.
- Litteraturgesch., Deutsche,** v. Prof. Dr. Max Koch. Nr. 31.
- **Englische,** von Prof. Dr. Karl Weiser. Nr. 69.
- **Griechische,** von Prof. Dr. Alfred Gerke. Nr. 70.
- **Italienische,** von Dr. Karl Voßler. Nr. 125.
- **Römische,** von Herm. Joachim. Nr. 52.
- Logarithmentafeln, Vierstellige,** von Prof. Dr. Herm. Schubert. In zweifarbig. Druck. Nr. 81.
- Logik** siehe: Psychologie.
- Luther, Martin, Thomas Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhund.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit. Nr. 7.
- Magnetismus** siehe: Physik, Theoretische, III.
- Malerei, Geschichte der,** v. Prof. Dr. Rich. Wuthen. I. II. III. IV. V. Nr. 107, 108, 109, 110, 111.

# Sammlung Götschen. Je in elegantem 80 Pf. Leinwandband

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Mechanik** siehe: Physik, Theoret., I.  
**Menschliche Körper, Der,** sein Bau und seine Thätigkeiten von Oberrealschuldirektor E. Rebmann, und Gesundheitslehre von Dr. H. Seiler. Mit 47 Abbild. und 1 Tafel. Nr. 18.  
**Meteorologie** v. Dr. W. Traber. Mit 49 Abbildungen u. 7 Tafeln. Nr. 54.  
**Mineralogie** von Prof. Dr. R. Brauns. Mit 130 Abbild. Nr. 29.  
**Minnesang** siehe: Walther von der Vogelweibe.  
**Murner, Thomas,** siehe: Luther.  
**Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen,** von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. Nr. 121.  
**Mythologie, Deutsche,** von Prof. Dr. Friedrich Kauffmann. Nr. 15.  
— **Griechische u. römische,** v. Prof. Dr. Herm. Steuding. Nr. 27.  
— siehe auch: Helldensage.  
**Nautik** von Direktor Dr. Franz Schulze. Mit 56 Abbild. Nr. 84.  
**Nibelunge, Der, Nöt** und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Prof. Dr. W. Goltzer. Nr. 1.  
— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.  
**Auspflanzen** v. Dr. J. Behrens. Mit 53 Abbildungen. Nr. 123.  
**Pädagogik** im Grundriß v. Prof. Dr. W. Rein. Nr. 12.  
— siehe auch: Schulpraxis.  
**Paläontologie.** Von Prof. Dr. Rud. Hoernes. Mit 87 Abbild. Nr. 95.  
**Perspektive** nebst einem Anhang über Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Hans Freyberger. Mit 88 Figuren. Nr. 57.  
**Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben** von Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.  
**Pflanzenbiologie** v. Prof. Dr. W. Wigula. Nr. 127.  
**Pflanzenreich, Das.** Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten u. bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke und Prof. Dr. W. Wigula. Mit 50 Figuren. Nr. 122.  
**Philosophie, Einführung in die,** siehe: Psychologie und Logik.  
**Photographie.** Von H. Kessler. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.  
**Physik, Theoretische, I. Teil:** Mechanik und Akustik. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 19 Abbild. Nr. 76.  
— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.  
— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 33 Abbild. Nr. 78.  
**Plastik, Die, des Abendlandes** von Dr. Hans Stegmann. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.  
**Poesie des 21. Jahrh. Krieges** siehe: Lessings Philotas.  
**Poetik, Deutsche,** von Dr. Karl Borinski. Nr. 40.  
**Psychologie und Logik** zur Einführung in die Philosophie v. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.  
**Psychophysik, Grundriß der,** von Dr. G. F. Sipp. Mit 3 Fig. Nr. 98.  
**Redelehre, Deutsche,** v. Hans Probst. Mit 1 Tafel. Nr. 61.  
**Religionsgeschichte, Indische,** von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.



**Russisches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berner. Nr. 68.

— **Lesebuch** von Dr. Erich Berner. Nr. 67.

— — siehe auch: Grammatik.

**Sachs, Hans, u. Johann Fischart** nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

**Schattenkonstruktion** siehe: Perspektive.

**Schulpraxis.** Methodik der Volksschule von Schuldirektor R. Sehfert. Nr. 50.

— siehe auch: Pädagogik.

**Sociologie** von Prof. Dr. Th. Nchelis. Nr. 101.

**Sprachdenkmäler, Gotische,** mit Grammatik, Uebersetzung und Erläuterungen von Dr. Hermann Jansen. Nr. 79.

**Sprachwissenschaft, Indogermanische,** von Prof. Dr. R. Meringer. Mit einer Tafel. Nr. 59.

— **Romanische,** von Dr. Adolf Bauner. Nr. 128.

**Spruchdichtung** siehe: Walther von der Vogelweide.

**Stammeskunde, Deutsche,** von Dr. Rud. Much. Nr. 126.

**Stenographie** siehe: Kuzschrift.

**Stereometrie** von Dr. Glaser. Mit 44 Figuren. Nr. 97.

**Stilkunde** von Karl Otto Hartmann. Mit 12 Holzbildern und 179 Text-Illustrationen Nr. 80.

**Tierkunde** von Dr. Franz von Wagner. Mit 78 Abbild. Nr. 60.

**Trigonometrie, Ebene und sphärische,** von Dr. Gerh. Hesseberg. Mit 69 ein- u. zweifarbigen Fig. Nr. 99.

**Urgeschichte der Menschheit** von Dr. M. Hoernes. Mit 48 Abbildungen. Nr. 42.

**Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt. Mit 56 Abb. Nr. 78.

**Waltharilied, Das,** im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. G. Althof. Nr. 46.

**Walther v. der Vogelweide** mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch. Von Prof. D. Guntter. Nr. 23.

**Wärme** siehe: Physik, Theoret. II

**Wechselkunde** von Dr. Georg Runt. Mit vielen Formeln. Nr. 103.

**Wolfram von Eschenbach** siehe: Hartmann von Aue.

**Wörterbuch, Deutsches,** von Dr. Ferd. Dettler. Nr. 64.

**Zeichenschule** von R. Kimmich. Mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 135 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

**Zeichnen, Geometrisches,** von Hugo Beder. Mit 282 Abbild. Nr. 58.

**Zoologie** siehe: Tierkunde.