

Sammlung Göschen

# Theoretische Physik

III

Von

Prof. Dr. Gustav Jäger

Mit 35 Figuren



# Sammlung

# Götschen

Unser heutiges Wissen  
in kurzen, klaren,  
allgemeinverständlichen  
Einzeldarstellungen

Jeder Band gebunden **1 Mark**

---

G. J. Götschen'sche Verlags-handlung  
G. m. b. H. Berlin W 10 und Leipzig

---

**Z**weck und Ziel der „Sammlung Götschen“ ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

---

Ausführliche Verzeichnisse der bisher erschienenen  
Nummern umsonst und postfrei

000179257

# Bibliothek zur Physik

aus der Sammlung Götschen

Jeder Band gebunden 1 Mark

---

**Kristallographie** von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbildungen. Nr. 210.

**Einführung in die Kristalloptik** von Dr. Eberhard Buchwald in München. Mit 124 Abbildungen. Nr. 619.

**Theoretische Physik** von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abbildungen. Nr. 76.

**Dasselbe.** II: Licht und Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

**Dasselbe.** III: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

**Dasselbe.** IV: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Abbildungen. Nr. 374.

**Experimentalphysik** von Robert Lang, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Stuttgart. I: Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper. Mit 12 Figuren im Text. Nr. 611.

**Dasselbe.** II: Wellenlehre und Akustik. Mit 69 Figuren. Nr. 612.

**Geschichte der Physik** von A. Kistner, Professor an der Großherzoglichen Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.

**Dasselbe.** II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

**Radioaktivität** von Dipl.-Ing. Wilh. Frommel. Mit 21 Figuren. Nr. 317.

**Physikalische Messungsmethoden** von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Berlin-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

**Physikalische Aufgabensammlung** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Wenden!

**Physikalische Formelsammlung** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

**Physikalische Tabellen** von Dr. A. Leick. Nr. 650.

**Luftelektrizität** von Dr. Karl Kähler. Mit 18 Abbildungen. Nr. 649.

**Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben** von Professor Dr. R. Abegg und Prof. Dr. O. Sackur. Nr. 445.

**Allgemeine und physikalische Chemie** von Prof. Dr. Hugo Kauffmann in Stuttgart. 2 Teile. Mit 15 Figuren. Nr. 71 u. 698.

**Vektoranalysis** von Dr. Siegfr. Valentiner, Professor an der Bergakademie in Clausthal. Mit 16 Figuren. Nr. 354.

---

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sammlung Götschen

# Theoretische Physik

III

## Elektrizität und Magnetismus

Von

**Dr. Gustav Jäger**

Professor der Physik an der Technischen Hochschule Wien

Mit 33 Figuren

Vierte, verbesserte Auflage

Neudruck



*Gutzeit, 21.5.17*

Berlin und Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.

1917



I 40087



2001

Alle Rechte, namentlich das Übersetzungsrecht,  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Nr. inv. I 40088

**Biblioteka Główna**  
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny  
**Księgozbiór Przyrodniczy**

I-40087/3



520-000072267



Druck  
der Spamerschen  
Buchdruckerei in Leipzig.

1964 D. 166

# Inhaltsverzeichnis.

## Elektrostatik.

	Seite
§ 1. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz . . . . .	5
§ 2. Komponenten der elektrischen Kraft — Potential . . . . .	6
§ 3. Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektrizität gleichmäßig verteilt ist . . . . .	8
§ 4. Potential einer Vollkugel . . . . .	10
§ 5. Die Laplacesche Gleichung . . . . .	11
§ 6. Die Poissonsche Gleichung . . . . .	13
§ 7. Potential einer Kreisscheibe . . . . .	14
§ 8. Der Gaußsche Satz . . . . .	16
§ 9. Wirkung einer homogenen Zylinderfläche . . . . .	18
§ 10. Wirkung einer unendlichen Ebene . . . . .	18
§ 11. Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter . . . . .	19
§ 12. Verteilung der Elektrizität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel . . . . .	20
§ 13. Allgemeine Beziehung zwischen Elektrizitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde . . . . .	21
§ 14. Der Kugelkondensator . . . . .	23
§ 15. Der Plattenkondensator . . . . .	26
§ 16. Kraftlinien — Niveauflächen . . . . .	28
§ 17. Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte . . . . .	30
§ 18. Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel . . . . .	33
§ 19. Theorie der Dielektrika . . . . .	35
§ 20. Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektrizität . . . . .	36
§ 21. Kapazität eines Leiters, der von einem Dielektrikum um- geben ist . . . . .	41
§ 22. Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator . . . . .	43
§ 23. Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik, Brechung der Kraftlinien . . . . .	44

## Magnetismus.

§ 24. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz . . . . .	47
§ 25. Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — In- klination — magnetisches Moment . . . . .	48
§ 26. Potential eines Magnets . . . . .	52
§ 27. Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments . . . . .	56
§ 28. Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch indu- zierten Körpers . . . . .	58

§ 29. Die homogen magnetisierte Kugel . . . . .	61
§ 30. Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld . . . . .	67
§ 31. Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien . . . . .	69
§ 32. Transversal magnetisierter Zylinder im homogen magnetischen Feld . . . . .	70
§ 33. Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld . . . . .	76
§ 34. Die magnetische Kraft auf einen langen Zylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet . . . . .	78
§ 35. Kraftfunktion und Potential der magnetischen Kräfte . . . . .	80
§ 36. Die magnetische Molekularkraft . . . . .	81
§ 37. Magnetische Energie . . . . .	82

### Elektromagnetismus.

§ 38. Der elektrische Strom — Oersteds Entdeckung — Ampères Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart . . . . .	86
§ 39. Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol . . . . .	87
§ 40. Die Tangentenbussole — Maß der Stromstärke . . . . .	88
§ 41. Potential eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol — Vektorpotential . . . . .	91
§ 42. Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte . . . . .	96
§ 43. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol . . . . .	99
§ 44. Ersatz einer begrenzten magnetischen Platte durch eine unendliche — magnetische Arbeit . . . . .	101
§ 45. Das Solenoid . . . . .	104
§ 46. Der Stokessche Satz — der curl . . . . .	105
§ 47. Unterschied zwischen geschlossenem Strom und magnetischer Platte — magnetische Arbeit bei einer Umkreisung des Stroms. . . . .	109
§ 48. Die Wirkung elektrischer Ströme aufeinander . . . . .	110
§ 49. Die Gesetze von Ohm und Joule — Arbeit des Stroms . . . . .	112
§ 50. Der Induktionsstrom . . . . .	113
§ 51. Das ballistische Galvanometer . . . . .	115
§ 52. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand . . . . .	117
§ 53. Das elektrostatische und elektromagnetische Maßsystem . . . . .	120
§ 54. Absolute und praktische Einheiten . . . . .	123
§ 55. Der Extrastrom . . . . .	124
§ 56. Dämpfung einer schwingenden Magnetnadel . . . . .	127
§ 57. Induktionswirkung zweier Stromleiter aufeinander . . . . .	130
§ 58. Induktionsapparate — Transformatoren . . . . .	134
§ 59. Oszillierende Entladung eines Kondensators . . . . .	136
§ 60. Elektrische Ströme in einem Dielektrikum . . . . .	139
§ 61. Allgemeine Gleichungen der Induktion . . . . .	140
§ 62. Die Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren . . . . .	143

## Elektrostatik.

---

### § 1. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz.

An Seide geriebenes Glas oder an Wolle geriebene Harze ziehen leicht bewegliche Körper an und stoßen sie nach der Anziehung wieder ab. Als Ursache dieser Erscheinung sieht man die Elektrizität an, welche durch Reiben auf der Oberfläche des Glases oder Harzes entsteht und deshalb Reibungselektrizität genannt wird. Bringen wir einen Körper mit einem elektrischen in Berührung, so wird er in der Regel ebenfalls elektrisch. Es wird ihm Elektrizität mitgeteilt. Geschieht dies leicht und verteilt sich die Elektrizität sofort über den ganzen Körper, so nennen wir diesen einen Leiter, im entgegengesetzten Fall einen Nichtleiter der Elektrizität oder Isolator.

Zwei kleine Kugeln, welche durch einen Glasstab elektrisiert worden sind, stoßen sich ab, ebenso durch Harzstäbe elektrisierte Kugeln. Enthält aber die eine Glaselektrizität, die andere Harzelektrizität, so ziehen sie einander an. Glas- und Harzelektrizität haben entgegengesetzte Eigenschaften. Wir nennen die Glaselektrizität positiv, die Harzelektrizität negativ. Gleichnamige Elektrizitäten stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Befindet sich auf einer sehr kleinen Kugel die Elektrizitätsmenge  $m$ , auf einer zweiten  $m'$ , so stoßen sie sich mit einer Kraft

$$K = \varepsilon \frac{m m'}{r^2} \quad (1)$$

ab, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte  $r$  ist. Der Proportionalitätsfaktor  $\varepsilon$  hängt von der Einheit ab, mit welcher wir Elektrizitätsmengen messen. Wir wollen künftig

$$\varepsilon = 1$$

setzen. Wählen wir für die Kraft und Länge die gewohnten (C-G-S)-Einheiten, so messen wir die Elektrizitätsmengen im absoluten elektrostatischen Maß. Das in der Gleichung (1) ausgesprochene Kraftgesetz wurde von Coulomb entdeckt.

## § 2. Komponenten der elektrischen Kraft — Potential.

Aus der mathematischen Formulierung des Coulomb'schen Gesetzes geht hervor, daß wir eine abstoßende Kraft als positiv, eine anziehende als negativ auffassen. Die Kraft wirkt in der Richtung der Verbindungslinie  $r'$  zweier elektrischer Punkte, welche die Koordinaten  $x, y, z$  bez.  $x', y', z'$  besitzen. Wir können sie daher in drei Komponenten nach den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems zerlegen. Diese sind

$$X' = K \cos \alpha = \frac{m m'}{r'^2} \cdot \frac{x - x'}{r'} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m m'}{r'} \right)$$

und ebenso

$$Y' = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{m m'}{r'} \right),$$

$$Z' = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{m m'}{r'} \right).$$

Ist ein dritter elektrischer Punkt von der Menge  $m''$  in der Entfernung  $r''$  von  $m$  vorhanden, so übt er auf  $m$  die Kraft  $\frac{mm''}{r''^2}$  aus. Diese gibt parallel zur  $x$ -Achse eine Komponente

$$X'' = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{mm''}{r''} \right).$$

Wir haben daher als Gesamtkraft parallel zur  $x$ -Achse

$$\begin{aligned} X = X' + X'' &= - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{mm'}{r'} + \frac{mm''}{r''} \right) \\ &= - m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} \right). \end{aligned}$$

Wir können diese Überlegung ohne weiteres auf beliebig viel elektrische Punkte ausdehnen und erhalten so, wenn wir  $m = 1$  setzen,

$$X = - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \frac{m}{r},$$

$$Y = - \frac{\partial}{\partial y} \Sigma \frac{m}{r},$$

$$Z = - \frac{\partial}{\partial z} \Sigma \frac{m}{r}.$$

Die Größe  $\Sigma \frac{m}{r}$  ist also nichts anderes als das Potential der Kräfte  $X, Y, Z$  (Bd. I, § 14). Man nennt daher  $\Sigma \frac{m}{r}$  das elektrische Potential, die Potentialfunktion oder auch die Spannung der Elektrizität.

### § 3. Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektrizität gleichmäßig verteilt ist.

Auf einer Kugelfläche vom Radius  $a$  (Fig. 1) befinde sich gleichmäßig verteilt die Elektrizitätsmenge  $M$ . Auf der Flächeneinheit ist somit die Menge

$$\sigma = \frac{M}{4 \pi a^2},$$

und wir nennen  $\sigma$  die Flächendichte der Elektrizität. Auf dem Flächenelement  $\omega$  sitzt daher die Menge  $\omega \sigma$ .

Ihr Potential im Punkt  $A$  ist  $\frac{\omega \sigma}{u}$ . Das Potential der gesamten Elektrizität ist daher  $\sum \frac{\omega \sigma}{u}$ . Lassen wir  $\omega$  um  $OA$  rotieren, so erhalten wir eine unendlich schmale

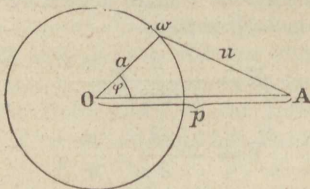


Fig. 1.

Kugelzone, deren Punkte sämtlich von  $A$  gleichweit entfernt sind. Ihre Fläche ist  $2 \pi a^2 \sin \varphi d\varphi$  und ihr Potential  $\frac{2 \pi a^2 \sigma \sin \varphi d\varphi}{u}$ . Das Potential der Kugel-  
fläche ist daher

$$V = 2 \pi a^2 \sigma \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{u}. \quad (2)$$

Aus  $u^2 = a^2 + p^2 - 2ap \cos \varphi$   
erhalten wir leicht

$$u \, du = ap \sin \varphi \, d\varphi$$

oder

$$\sin \varphi \, d\varphi = \frac{u \, du}{ap},$$

was in Gleichung (2) eingesetzt

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} \int_{u_0}^{u_\pi} du = \frac{2\pi a \sigma}{p} (u_\pi - u_0)$$

ergibt. Dabei ist  $u_0$  der Wert von  $u$  für  $\varphi = 0$ , also

$$u_0 = p - a,$$

während

$$u_\pi = p + a$$

der Wert von  $u$  für  $\varphi = \pi$  ist. Danach wird

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} (a + p - p + a) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{p}.$$

Nun ist aber

$$4\pi a^2 \sigma = M,$$

folglich

$$V = \frac{M}{p}.$$

Das heißt, die auf einer Kugelfläche gleichmäßig verteilte Elektrizität wirkt auf einen Punkt außerhalb der Kugel so, als wäre sie im Mittelpunkt vereinigt.

Liegt der Punkt innerhalb der Kugel, so ist

$$u_0 = a - p, \quad u_\pi = a + p;$$

daher

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} (a + p - a + p) = 4\pi a \sigma.$$

Wir haben also wohl zu unterscheiden zwischen dem Wert des Potentials in einem Punkt außerhalb und in einem Punkt innerhalb der Kugelfläche. Für einen Punkt auf der Fläche selbst, d. h. für  $p = a$  gehen natürlich beide Formeln ineinander über. Innerhalb der Kugel haben wir also ein konstantes Potential, wo immer der Punkt A liegt. Die Kraft, welche auf den Punkt wirkt, ist daher Null.

#### § 4. Potential einer Vollkugel.

Die Elektrizitätsmenge  $M$  sei im Innern einer Vollkugel gleichmäßig verteilt. Wir können uns das in einer Kugel, welche aus einem Isolator besteht, realisiert denken. Wir haben dann in der Volumeinheit die Menge

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi a^3}$$

und nennen  $\varrho$  die Dichte der Elektrizität. Wir denken uns die Kugel in unendlich viel dünne konzentrische Schalen zerlegt. Eine jede Schale wirkt dann auf einen Punkt außerhalb so, als wäre die gesamte Elektrizität im Mittelpunkt vereinigt. Wir haben daher auch für die Vollkugel als Potential auf einen außerhalb liegenden Punkt

$$V = \frac{M}{p} = \frac{\frac{4}{3} \pi a^3 \varrho}{p}.$$

Liegt jedoch der Punkt im Innern der Kugel, so setzt sich das Potential aus zwei Teilen zusammen. Der eine rührt von Kugelschalen her, welche innerhalb der Kugel vom Radius  $p$  liegen. Sie wirken wie auf einen außerhalb liegenden Punkt. Ihr Potential ist

$$V_1 = \frac{\frac{4}{3} \pi p^3 \varrho}{p} = \frac{4 \pi p^2 \varrho}{3}.$$

Für die übrigen Kugelschalen ist jedoch der Punkt ein innerhalb liegender. Wir haben für eine solche Schale als Potential  $4 \pi a \sigma$ . In unserem Fall ist nun

$$\sigma = \varrho \, dr$$

zu setzen, und es wird der zweite Teil des Potentials

$$V_2 = 4 \pi \varrho \int_p^a r \, dr = 2 \pi \varrho (a^2 - p^2),$$

indem eine Schale den Anteil  $4 \pi \varrho r \, dr$  liefert. Es ist somit

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \frac{4 \pi \varrho p^2}{3} + 2 \pi \varrho (a^2 - p^2) \\ &= 2 \pi \varrho a^2 - \frac{2 \pi \varrho}{3} p^2. \end{aligned}$$

### § 5. Die Laplacesche Gleichung.

Zwei Punkte in der Entfernung  $r$  haben die Koordinaten  $x, y, z$  bez.  $x', y', z'$ . Es ist dann

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2. \quad (3)$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

ist. Wir haben nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \frac{x' - x}{r} = \frac{x' - x}{r^3},$$

da nach Gleichung (3)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{x' - x}{r}$$



ist. Wir erhalten nun durch weitere Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x' - x}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} - \frac{3(x' - x)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x' - x)^2}{r^5}.\end{aligned}$$

Gleicherweise ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y' - y)^2}{r^5}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z' - z)^2}{r^5}.$$

Addieren wir die drei letzten Gleichungen, so erhalten wir tatsächlich

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0.$$

Haben wir anstatt zwei mehrere Punkte, so ist natürlich für einen bestimmten Punkt ebenfalls

$$\Sigma \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = \Delta \Sigma \left( \frac{1}{r} \right) = 0.$$

Daran wird nichts geändert, wenn in jedem Punkt eine elektrische Masse sitzt und wir  $\Delta \Sigma \frac{m}{r}$  bilden. Auch diese Größe muß gleich Null sein. Nun ist aber

$$\Sigma \frac{m}{r} = V$$

das Potential der elektrischen Massen auf einen Punkt.

Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = 0,$$

welche nach ihrem Entdecker die Laplacesche Gleichung genannt wird.

### § 6. Die Poissonsche Gleichung.

Wir fanden für das Potential einer Vollkugel auf einen außerhalb liegenden Punkt (§ 4)

$$V_e = \frac{4 \pi a^3 \rho}{3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{4 \pi a^3 \rho}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

wenn wir uns den Mittelpunkt der Kugel zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen. Es gilt für diesen Fall auch die im vorigen Paragraphen gefundene Gleichung  $\Delta V_e = 0$ .

Anders verhält es sich jedoch, wenn der Punkt im Innern der Vollkugel liegt. Wir haben dann

$$V_i = 2 \pi \rho a^2 - \frac{2 \pi \rho}{3} p^2,$$

wobei  $p^2 = x^2 + y^2 + z^2$  ist.

Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -\frac{4 \pi \rho}{3}$$

oder

$$\Delta V_i = -4 \pi \rho. \quad (4)$$

Diese Gleichung stimmt mit der Laplaceschen nicht überein. Das rührt daher, weil der Raum rings um unsern Punkt, für welchen wir das Potential bestimmt haben, von Massen erfüllt ist, während wir die Gleichung von Laplace unter der Bedingung ableiteten, daß der Punkt von den übrigen Massen getrennt ist.

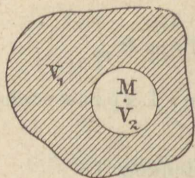


Fig. 2.

Was wir für die Kugel fanden, gilt aber für jeden mit Masse erfüllten Körper. Immer besteht für einen Punkt innerhalb zusammenhängender Massen die Gleichung (4). Wir können uns nämlich immer um diesen Punkt eine kleine Kugel geschlagen (Fig. 2) und uns das Potential des ganzen Körpers aus den zwei Teilen  $V_1$ , von den Massen außerhalb der Kugel herrührend, und dem Potential  $V_2$  der Kugel bestehend denken. Es gilt dann

$$\Delta V_1 = 0, \quad \Delta V_2 = -4\pi\rho,$$

also auch, da

$$\Delta V = \Delta(V_1 + V_2) = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

ist,

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Das ist die Poissonsche Gleichung.

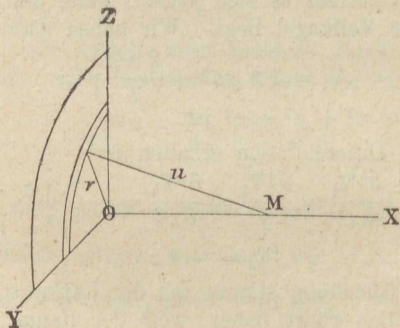


Fig. 3.

### § 7. Potential einer Kreisscheibe.

Eine Kreisscheibe (Fig. 3) liege in der  $(yz)$ -Ebene mit ihrem Mittelpunkt  $O$  im Ursprung des Koordinaten-

systems. Sie sei mit Masse von der Flächendichte  $\sigma$  gleichmäßig belegt. Wir suchen ihr Potential auf den Punkt M in der x-Achse. Sämtliche Punkte des Flächenelements  $2\pi r dr$  liegen in der Entfernung u von M,

liefern daher das Potential  $\frac{2\pi r dr \sigma}{u}$ , und da

$$u^2 = r^2 + x^2,$$

so ist das Potential der gesamten Scheibe

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \frac{2\pi r dr \sigma}{u} = 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= 2\pi\sigma \left[ \sqrt{r^2 + x^2} \right]_0^R = 2\pi\sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x). \end{aligned}$$

Für die Kraft auf den Punkt finden wir

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\sigma \left( \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1 \right).$$

Rückt der Punkt sehr nahe an die Scheibe, so konvergiert  $\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$  gegen Null, und wir erhalten für die Kraft in unmittelbarer Nähe der Scheibe

$$X = 2\pi\sigma.$$

Denselben Wert hat natürlich die Kraft auf der andern Seite der Scheibe, nur ist sie hier entgegengesetzt gerichtet. Geht man also von der positiven Seite durch die Scheibe auf die negative, so ändert sich die Kraft um  $4\pi\sigma$ . Nennen wir das Potential auf der positiven Seite  $V_+$ , auf der negativen  $V_-$ , so ist

$$-\frac{\partial V_+}{\partial x} + \frac{\partial V_-}{\partial x} = 4\pi\sigma.$$

Diese Gleichung gilt aber für jede Fläche. Wir können nämlich aus einer beliebigen Fläche (Fig. 4) eine kleine kreisförmige Scheibe herausschneiden. Nennen wir dann das zum Punkt M gehörige Potential  $V_+$ , das zum Punkt M' gehörige  $V_-$ , so ändert sich die Kraft,

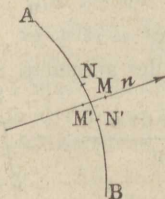


Fig. 4.

welche von der Scheibe NN' herrührt, beim Durchgang sprungweise, hingegen jener Teil, der von den übrigen Teilen der Fläche stammt, stetig. Es bleibt daher für den Durchgang wiederum

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma, \quad (5)$$

wenn wir unter  $n$  die Normale zur Fläche verstehen.

### § 8. Der Gaußsche Satz.

Von Gauß wurde folgender Satz gefunden: Bezeichnen wir mit  $m$  die Menge Elektrizität in einem Punkt, dessen Entfernung von einem beliebigen Flächenelement  $dS$  mit  $r$ , mit  $N$  die Normalkraft, welche  $m$  in  $dS$  erzeugt, und mit  $\omega$  den Raumwinkel, welchen die ganze Fläche  $S$  von  $m$  aus betrachtet bildet, so gilt die Gleichung

$$\int N dS = m \omega.$$

Die Kraft von  $m$  in  $dS$  ist  $\frac{m}{r^2}$ . Bildet die Normale zu  $dS$  mit  $r$  den Winkel  $\alpha$ , so ist

$$N = \frac{m}{r^2} \cos \alpha$$

und

$$N dS = m \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = m d\omega.$$

Ziehen wir nämlich von  $m$  aus Gerade an die Umgrenzung von  $dS$ , so bilden sie einen Kegel, der aus einer Kugelfläche vom Radius Eins, die wir um  $m$  als Mittelpunkt schlagen, die Fläche  $d\omega$  herausschneidet. Das ist aber gleichzeitig die Definition des Raumwinkels, welchen  $dS$  von  $m$  aus betrachtet bildet. Es ist damit der Gaußsche Satz

$$\int N dS = m \omega$$

bewiesen.

Spezielle Fälle erhalten wir für eine geschlossene Fläche. Liegt  $m$  innerhalb derselben, so ist  $\omega = 4\pi$ , also

$$\int N dS = 4\pi m.$$

Ist  $m$  außerhalb, so  $\omega = 0$ , da jedes Raumwinkel-element einmal positiv und einmal negativ in Rechnung kommt, daher

$$\int N dS = 0.$$

Liegen mehrere Punkte  $m, m', m'' \dots$  zum Teil innerhalb, zum Teil außerhalb der geschlossenen Fläche, so

$$\int N dS = 4\pi \sum m_i,$$

wobei  $\sum m_i$  die Summe aller wirksamen Punkte im Innern der Fläche bezeichnet.

### § 9. Wirkung einer homogenen Zylinderfläche.

Ein unendlich langer Kreiszylinder vom Radius  $R$  sei gleichförmig mit wirksamer Masse von der Dichte  $\sigma$  belegt. Die Anschauung ergibt, daß die Kraft senkrecht zur Zylinderachse gerichtet sein muß. Legen wir durch einen Punkt in der Entfernung  $r$  von der Achse eine konzentrische Zylinderfläche, und begrenzen wir sie außerdem durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen im Abstand Eins, so liegt innerhalb dieses Zylinders die Masse  $2\pi R\sigma$ , und es ist nach dem Gauß'schen Satz

$$\int N_a dS = 2\pi r N_a = 4\pi \cdot 2\pi R\sigma$$

und somit die Kraft des Zylinders auf einen äußeren Punkt

$$N_a = \frac{4\pi R\sigma}{r}.$$

Für einen inneren Punkt ist

$$\begin{aligned} \int N_i dS &= 2\pi r N_i = 0, \\ \text{also} \quad N_i &= 0. \end{aligned}$$

### § 10. Wirkung einer Ebene.

Haben wir eine unendliche Ebene mit Masse von der Dichte  $\sigma$  belegt, so steht die Krafrichtung natürlich senkrecht auf der Ebene und ist symmetrisch zu beiden Seiten der Ebene. Wir legen durch einen Punkt in der Entfernung  $x$  eine parallele Ebene und eine zweite symmetrisch dazu. Diese beiden Ebenen sollen einen mit seiner Achse zu ihnen senkrechten Zylinder vom Querschnitt Eins begrenzen. Für diesen Zylinder ergibt nun der Gauß'sche Satz

$$\begin{aligned} \int N dS &= 2N = 4\pi\sigma, \\ \text{daher} \quad N &= 2\pi\sigma, \end{aligned}$$

wie wir bereits S. 15 auf anderm Weg gefunden haben.

## § 11. Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter.

Im § 1 lernten wir zweierlei Elektrizitäten kennen, die positive und die negative. Laden wir einen Körper positiv mit einer bestimmten Elektrizitätsmenge und geben dann so viel negative Elektrizität noch hinzu, bis der Körper wieder unelektrisch ist, so können wir sagen: er enthält gleichviel positive und negative Elektrizität. Jeder unelektrische Körper kann als mit gleichviel positiver und negativer Elektrizität geladen angesehen werden. Beide Elektrizitäten sind in derselben Weise verteilt, können daher keine Wirkung nach außen ausüben. Bringen wir nun einen elektrischen Körper in die Nähe, so wird er die gleichnamige Elektrizität abstoßen, die ungleichnamige anziehen. Es erweist sich der ursprünglich unelektrische Körper sodann elektrisch. Wir nennen diesen Vorgang Elektrizitätserregung durch Verteilung.

Laden wir einen Leiter mit Elektrizität, so wird sie sich auf ihm in bestimmter Weise anordnen. Es befindet sich die Elektrizität im Gleichgewicht, wenn alle Kräfte, welche die einzelnen elektrischen Teilchen aufeinander ausüben, im Gleichgewicht sind. Für alle Punkte im Innern des Leiters muß daher die Kraft gleich Null, folglich das Potential eine konstante Größe sein. Es ist dann aber im Innern des Körpers

$$\Delta V = 0 ,$$

das heißt, es muß die Dichte der Elektrizität  $\rho = 0$  sein; denn wäre dies nicht der Fall, so hätten wir ja nach Poisson

$$\Delta V = -4\pi\rho .$$

Ist demnach die Elektrizität auf einem Leiter im Gleichgewicht, so befindet sie sich nur an der Oberfläche des Leiters.

## § 12. Verteilung der Elektrizität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel.

Aus der allseitigen Symmetrie einer Kugel geht ohne weiteres hervor, daß die Elektrizität sich auf ihr gleichmäßig verteilen muß, so daß die Dichte an allen Punkten der Kugeloberfläche gleich groß ist. Das Potential auf einen inneren Punkt ist dann nach § 3

$$V = 4 \pi a \sigma = \frac{4 \pi a^2 \sigma}{a} = \frac{E}{a},$$

wenn wir mit  $E$  die gesamte Elektrizitätsmenge auf der Kugel bezeichnen. Die Elektrizitätsmenge ist also

$$E = V a.$$

Die Größe  $a$ , mit welcher das Potential multipliziert werden muß, damit man die Elektrizitätsmenge erhält, nennen wir die Kapazität der Kugel.

Sind zwei Kugeln sehr weit voneinander entfernt, so können wir den Einfluß, welchen die Elektrizitätsmengen dieser Kugeln aufeinander ausüben, vernachlässigen. Die Radien der beiden Kugeln seien  $a$  und  $a'$ , ihre Elektrizitätsmengen  $E$  beziehungsweise  $E'$ . Die Kugeln besitzen dann das Potential

$$V = \frac{E}{a}, \quad V' = \frac{E'}{a'}.$$

Wir verbinden nun beide Kugeln durch einen dünnen Draht. Demzufolge werden die Kugeln das gemeinschaftliche Potential  $P$  annehmen, da wir sie ja

jetzt als einen einzigen Körper betrachten können. Es muß jetzt

$$P = \frac{e}{a} = \frac{e'}{a'}$$

sein, wenn wir mit  $e$  und  $e'$  die Elektrizitätsmengen bezeichnen, welche nunmehr auf den Kugeln sitzen. Es ist also auch

$$P = \frac{e + e'}{a + a'} = \frac{E + E'}{a + a'}.$$

Daraus folgt

$$e = a \frac{E + E'}{a + a'}, \quad e' = a' \frac{E + E'}{a + a'}.$$

### § 13. Allgemeine Beziehung zwischen Elektrizitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde.

Bestimmen wir für einen beliebigen Körper (Fig. 5) das Potential auf einen innerhalb liegenden Punkt  $M$ , so haben wir jedes Flächenelement  $\omega$  mit der zuge-

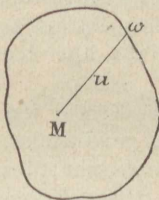


Fig. 5.

hörigen Flächendichte zu multiplizieren, durch die Entfernung  $u$  zu dividieren und über die ganze Oberfläche zu summieren. Das Potential ist also

$$V = \sum \frac{\omega \sigma}{u},$$

u. z. muß es im Innern des Körpers einen konstanten Wert haben. Wächst nun in allen Punkten des Körpers die Dichte der Elektrizität proportional, so wird das Gleichgewicht nicht gestört. Es besteht somit auch die Gleichung

$$n V = \sum \frac{\omega n \sigma}{u}.$$

$$\sum \omega n \sigma = n E$$

ist nun die auf dem Körper vorhandene Elektrizitätsmenge, welche früher den Wert

$$E = \sum \omega \sigma$$

hatte. Es wächst daher die Elektrizitätsmenge mit dem Potential proportional, so daß immer die Gleichung

$$E = \alpha V$$

besteht, wobei  $\alpha$  eine konstante Größe ist, die wir die Kapazität des Körpers nennen. Für die Kugel fanden wir sie gleich dem Radius  $a$ . Wir können daher sagen: Die Kapazität hat die Dimension einer Länge.

Haben wir mehrere Körper von verschiedener Kapazität, die sehr weit voneinander entfernt sind, und verbinden wir sie durch sehr dünne Drähte, so werden sie ein gemeinsames Potential annehmen, während sich in diesem Fall die Kapazitäten einfach summieren. Die Kapazität ändert sich jedoch, wenn sich die Körper einander nähern. Die Elektrizitätsmengen auf den einzelnen Körpern können wir ebenso finden wie im vorhergehenden Paragraphen für die Kugeln, nur haben wir jetzt anstatt  $a$  die Kapazität  $\alpha$  usw. zu setzen.

Bringen wir einen Körper mit der Erde in Verbindung, so nimmt er ihr Potential an. Wir setzen dies gewöhnlich gleich Null, doch ist das nicht notwendig; denn die Größe, welche wir das Potential eines Körpers nennen, ist immer nur die Differenz zum Potential der Erde. Es liegt sogar nahe, der Erde auch ein Potential zu geben. Die positiv und negativ elektrischen Körper weichen dann in verschiedenem Sinn vom Potential der Erde ab. Wir befolgen hier dieselbe Anschauungsweise wie bei der Wärme, wenn wir die Temperatur unter Null durch Kältegrade, die über Null durch Wärmegrade messen, obwohl wir beide, wie wir es nach Einführung des absoluten Nullpunkts ja auch getan haben (Bd. II, § 39), auch als gleichbezeichnete Größen ansehen können.

#### § 14. Der Kugelkondensator.

Wir betrachten zwei konzentrische leitende Hohlkugeln (Fig. 6). Die Oberflächen der inneren Hohlkugel haben die Radien  $a_1$  und  $a_2$ , die der äußeren

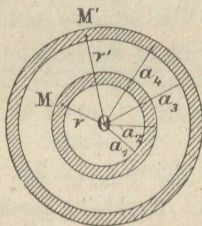


Fig. 6.

$a_3$  und  $a_4$ . Durch einen sehr dünnen Draht sei die innere Hohlkugel mit einem Körper vom konstanten Potential A verbunden, die äußere werde auf dem

Potential B gehalten. Wir nehmen nun an, auf den Kugelflächen sitzen entsprechend den Radien  $a_1, a_2$  usw. die Elektrizitätsmengen  $E_1, E_2, E_3, E_4$ . Für einen innerhalb der inneren Hohlkugel liegenden Punkt M, der sich in der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt 0 befindet, kann also das Potential nur den Wert A, hingegen in einem Punkt M' der äußeren Hohlkugel in der Entfernung  $r'$  den Wert B haben. Die Elektrizitätsmengen  $E_1, E_2$  usw. haben wir uns wegen der allseitigen Symmetrie auf den zugehörigen Kugelflächen gleichmäßig verteilt zu denken.  $E_1$  wirkt daher auf M, als wäre die gesamte Menge im Punkt 0 vereinigt. Für die übrigen Kugelflächen ist M ein innerhalb liegender Punkt. Das Potential A setzt sich daher folgendermaßen zusammen:

$$A = \frac{E_1}{r} + \frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Für den Punkt M' liefern die Elektrizitätsmengen  $E_1, E_2, E_3$  ein Potential, als wären sie in 0 vereinigt. Nur für die äußerste Kugelfläche ist M' ein innerhalb liegender Punkt. Wir erhalten somit

$$B = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{r'} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Wir müssen nun

$$E_1 = 0$$

setzen, da A für alle Punkte der inneren Hohlkugel konstant sein muß. Es bleibt somit

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} + \frac{E_4}{a_4} &= A, \\ \frac{E_2 + E_3}{r'} + \frac{E_4}{a_4} &= B. \end{aligned} \tag{6}$$

Das Potential  $B$  muß wiederum für alle Punkte der äußeren Hohlkugel konstant sein. Daraus folgt

$$E_2 + E_3 = 0.$$

Es sitzt demnach auf den zwei einander zugekehrten Kugelflächen gleich viel, aber entgegengesetzte Elektrizität. Somit bleibt uns nur

$$B = \frac{E_4}{a_4}, \quad (7)$$

d. h. derselbe Potentialwert, als wäre nur eine einzige leitende Kugel vom Radius  $a_4$  vorhanden. Die Gleichungen (6) und (7) ergeben

$$\frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} = A - B,$$

und da

$$E_2 = -E_3,$$

so

$$E_2 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) = A - B,$$

oder

$$E_2 = \frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} (A - B).$$

Wir nehmen nun an, die innere Kugelschale sei isoliert und die äußere werde geladen. Dann muß  $E_1 + E_2 = 0$ , oder da  $E_1 = 0$ , so muß auch  $E_2 = 0$  und damit auch  $E_3 = 0$  sein. Es befindet sich also dann Elektrizität nur auf der äußeren Oberfläche, deren Menge die Gleichung

$$E_4 = a_4 B$$

angibt. Verbinden wir jetzt die innere Kugel mit der Erde, so daß  $A = 0$  wird, so folgt

$$E_2 = -\frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \quad E_3 = \frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \quad E_4 = a_4 B.$$

$E_2$  und  $E_3$  sind also um so größer, je kleiner  $a_3 - a_2$  ist, d. h. je näher die beiden inneren Kugelflächen aneinander rücken. Wir können dann in erster Annäherung

$$a_2 = a_3 = a, \quad a_3 - a_2 = \delta$$

setzen, hingegen sei

Es wird jetzt

$$E_3 = \frac{a^2}{\delta} B = \frac{4 \pi a^2}{4 \pi \delta} B.$$

Da aber  $4 \pi a^2$  die Oberfläche der Kugel ist, so heißt das, daß die angesammelte Elektrizitätsmenge  $E_3$  proportional der Kugelfläche und verkehrt proportional dem Abstand  $\delta$  der beiden Kugelflächen ist. Ein derartiges System von leitenden Flächen kann also als Elektrizitätssammler oder Kondensator benützt werden, und man nennt speziell den von uns untersuchten Apparat einen Kugelkondensator.

### § 15. Der Plattenkondensator.

Zwei gleichgestaltete Platten (Fig. 7) liegen parallel zueinander in der kleinen Entfernung  $\delta$ . Die linke

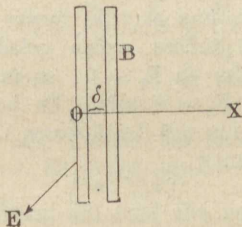


Fig. 7.

sei zur Erde E abgeleitet, die Rechte werde auf dem konstanten Potential P gehalten. In erster Annäherung

können wir annehmen, das Potential steige zwischen den beiden Platten linear an. Wir haben daher

$$\frac{dV_+}{dx} = \frac{P}{\delta};$$

für das Innere der linken Platte gilt

$$\frac{dV_-}{dx} = 0.$$

Somit ist nach Gleichung (5)

$$\frac{P}{\delta} = -4\pi\alpha,$$

oder

$$\sigma = -\frac{P}{4\pi\delta}.$$

Wir haben also auf der ganzen inneren Seite der linken Platte eine Elektrizitätsmenge von der Dichte

$$-\frac{P}{4\pi\delta} \text{ sitzen. Für die innere Seite der rechten Platte}$$

haben wir analog

$$\frac{dV_+}{dx} = 0,$$

hingegen

$$\frac{dV_-}{dx} = \frac{P}{\delta},$$

mithin

$$\sigma = \frac{P}{4\pi\delta}.$$

Die Elektrizitätsmenge, welche sich auf der rechten Platte ansammelt, ist somit

$$E = \frac{FP}{4\pi\delta},$$

wenn wir mit  $F$  die Fläche der Platte bezeichnen. Wir erhalten somit auch für diesen Kondensator dieselbe Formel wie für den Kugelkondensator, doch ist nicht zu vergessen, daß jetzt die Formel nur annähernd gilt, daß der wahre Wert sich dem von uns berechneten jedoch um so mehr nähert, je kleiner die Entfernung  $\delta$  ist.

### § 16. Kraftlinien — Niveauflächen.

Für ein ruhendes System von Leitern können wir das Potential als Funktion der Koordinaten  $x, y, z$  auffassen, also

$$V = f(x, y, z)$$

setzen. Halten wir das Potential  $V$  konstant, so stellt die letztere Gleichung eine Fläche dar, welche wir wegen der Konstanz des Potentials auf ihr eine Äquipotential- oder Niveaufläche nennen. In einer solchen Fläche liegt also keine Kraftkomponente. Die Kraft ist somit senkrecht darauf gerichtet. Erteilen wir nun dem  $V$  einen stetig wachsenden Wert, so erhalten wir eine Schar von Flächen, deren orthogonale Trajektorien die jeweilige Richtung der Kraft angeben. Diese Linien nennt man deshalb auch Kraftlinien.

Für einen einzigen Massenpunkt  $m$  ist das Potential

$$V = \frac{m}{r}.$$

Die Niveauflächen sind daher Kugelflächen mit  $m$  als Mittelpunkt, während die Kraftlinien die Radien sind. Nehmen wir an, es gehen  $N$  Kraftlinien vom

Punkt  $m$  aus, so ist deren Dichte auf einer Niveaufläche vom Radius  $r$

$$\sigma = \frac{N}{4 \pi r^2},$$

und setzen wir

$$N = 4 \pi m,$$

so

$$\sigma = \frac{m}{r^2}.$$

Es gibt dann die Dichte der Kraftlinien unmittelbar auch die Größe der Kraft an. Es empfiehlt sich daher anzunehmen, daß jede Masse  $m$   $4 \pi m$  Kraftlinien aussendet. Es ist dann durch die Kraftlinien Richtung und Größe der Kraft vollständig bestimmt, da letztere gleich der Anzahl der Kraftlinien ist, welche die Flächeneinheit passieren. Einen von elektrischen Kraftlinien erfüllten Raum nennen wir ein elektrisches Feld und die Größe der oben definierten Kraft die Feldstärke oder Feldintensität.

Die Einführung der Kraftlinien ergibt auch eine bequeme Erläuterung der Sätze von Laplace und Poisson. Haben wir nämlich ein Elementarparallelepiped mit den Kanten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , so ist die Zahl der Kraftlinien, welche durch die linke Fläche  $dy \, dz$  eintreten, gleich  $-\frac{\partial V}{\partial x} dy \, dz$ , während auf der rechten

Seite, wie man mit Zuhilfenahme der Entwicklung von  $\frac{\partial V}{\partial x}$  nach der Taylorschen Reihe leicht erkennt, die

Zahl  $-\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\right) dy \, dz$  austritt. Die Differenz gibt den Überschuß der austretenden Kraftlinien über die eintretenden an, also  $-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx \, dy \, dz$ . Gleicher-

weise erhalten wir für die beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems  $-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx dy dz$  und  $-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx dy dz$ . Für den Fall, daß in unserem Volumelement keine elektrischen Massen vorhanden sind, muß die Zahl der eintretenden und austretenden Kraftlinien gleich sein. Wir erhalten daher durch Addition der letzten drei Ausdrücke die Gleichung von Laplace:

$$\Delta V = 0.$$

Ist hingegen in dem Volumelement die elektrische Masse  $m$  vorhanden, so ist der Überschuß der austretenden Kraftlinien über die eintretenden  $4\pi m$ , und wir haben

$$-\Delta V dx dy dz = 4\pi m = 4\pi \rho dx dy dz,$$

falls wir voraussetzen, daß die Massen gleichförmig im Volumelement verteilt seien und die Dichte  $\rho$  besitzen. Diese letzte Gleichung ergibt dann den Satz von Poisson:

$$\Delta V = -4\pi \rho.$$

Es ergibt sich auch leicht der unmittelbare Zusammenhang dieser Sätze mit dem Gaußschen Satz (8).

### § 17. Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte.

Der elektrische Massenpunkt  $m$  befinde sich in einem Raum vom Potential  $V$ . Der Punkt bewege sich auf dem Weg  $s$ . Die Kraft, welche in der Richtung des Wegs auf ihn wirkt, ist also  $-m \frac{dV}{ds}$  und es leistet auf dem Weg  $ds$  die Kraft die Arbeit

$$dL = -m \frac{dV}{ds} ds.$$

Gelangt der Punkt von einer Stelle mit dem Potential  $V_1$  zu einer andern vom Potential  $V_2$ , so haben die elektrischen Kräfte dabei die Gesamtarbeit

$$\int dL = -mV_2 + mV_1 = m(V_1 - V_2)$$

geleistet. Diese Arbeit ist von der Form der Bahn vollständig unabhängig. Sie ist nur durch den Anfangs- und Endwert des Potentials bedingt. Ist der Endpunkt unendlich weit weg, und haben wir im Unendlichen das Potential

$$V_2 = 0,$$

so stellt das Produkt  $mV_1$  die Arbeit dar, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn der Punkt ins Unendliche gebracht wird. Dieselbe Arbeit muß aufgewendet werden, wenn wir den Punkt aus dem Unendlichen in den Raum vom Potential  $V_1$  bringen wollen. Es ist daher das Potential nichts anderes als der mechanische Wert oder der Arbeitswert der Masseneinheit.

Bringen wir einen Massenpunkt  $m_2$  aus dem Unendlichen in die Entfernung  $r_{12}$  von der Masse  $m_1$ , so haben wir dabei die Arbeit  $\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$  zu leisten. Bringen wir nun noch die dritte Masse  $m_3$  aus dem Unendlichen dazu, so haben wir noch die Arbeit  $\frac{m_1 m_3}{r_{13}}$  bezüglich  $\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$  aufzuwenden, wenn  $r_{13}$  die Entfernung zwischen  $m_1$  und  $m_3$ ,  $r_{23}$  jene zwischen  $m_2$  und  $m_3$  ist. Um daher diese Anordnung zu bewerkstelligen, muß die Arbeit

$$A = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

geleistet werden.  $A$  ist daher der Arbeitswert dieses Systems.

Es sollen nun auf dieselbe Weise beliebig viel Punkte einander genähert werden. Der Gesamtarbeitswert  $A$  wird dann durch folgende Gleichung bestimmt sein:

$$\begin{aligned}
 2 A = & m_1 \left( \frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_4}{r_{14}} + \dots \right) \\
 & + m_2 \left( \frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{24}} + \dots \right) \\
 & + m_3 \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{34}} + \dots \right) \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Summe auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem doppelten Arbeitswert ist, da wir jede Arbeit, welche bei der Zuführung eines Massenpunkts aus dem Unendlichen zu leisten ist, doppelt gezählt haben. So finden wir z. B. die Arbeit, welche wir bei der Annäherung von  $m_2$  an  $m_1$  zu leisten haben, einmal im ersten Summanden, dann noch einmal im zweiten usw. Der Faktor von  $m_1$  ist nun nichts anderes als das Potential aller Massenpunkte auf den Punkt  $m_1$ . Wir wollen es  $V_1$  nennen. Desgleichen sei

$$V_2 = \frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \dots$$

usw. Danach erhalten wir

$$2 A = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots$$

Befinden sich alle elektrischen Massen auf einem leitenden Körper, so muß

$$V_1 = V_2 = \dots = V$$

sein, wobei also  $V$  das konstante Potential im Innern des Körpers vorstellt. Es ist dann

$$2 A = (m_1 + m_2 + \dots) V = M V$$

oder

$$A = \frac{M V}{2},$$

wobei  $M$  die gesamte Elektrizität auf dem Körper ist. Überlegen wir, daß

$$V = \frac{M}{C}$$

ist, wenn wir unter  $C$  die Kapazität des Körpers verstehen, so können wir den Arbeitswert auch durch die Gleichung

$$A = \frac{M^2}{2 C}$$

darstellen.

Haben wir mehrere Leiter mit den Potentialen  $V, V', V'' \dots$ , so ist der Arbeitswert des gesamten Systems

$$A = \frac{M V}{2} + \frac{M' V'}{2} + \dots,$$

wenn  $M, M' \dots$  die Elektrizitätsmengen auf den zugehörigen Körpern sind.

### § 18. Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel.

Eine leitende Kugel sei auf das Potential  $V$  geladen. Ist  $E$  die Elektrizitätsmenge und  $a$  der Radius der Kugel, so besteht die Gleichung

$$V = \frac{E}{a}.$$

Der Arbeitswert ist somit

$$A = \frac{E V}{2} = \frac{E^2}{2 a}.$$

Wir nehmen nun an, die Kugel habe eine bewegliche Oberfläche, wie es etwa für eine Seifenblase gelten würde, und wir suchen nun die Arbeit, welche die Elektrizität bei der Ausdehnung der Kugel leistet. Sie muß der Verkleinerung des Arbeitswerts entsprechen, ist daher durch die Gleichung

$$- d A = \frac{E^2}{2 a^2} d a$$

bestimmt, wenn sich der Radius um  $d a$  vergrößert.

$\frac{E^2}{2 a^2}$  ist somit nichts anderes als die Gesamtkraft, welche senkrecht zur Kugeloberfläche nach außen wirkt. Ihre Größe sei für die Flächeneinheit  $P$ . Es muß also

$$4 \pi a^2 P = \frac{E^2}{2 a^2}$$

oder

$$P = \frac{E^2}{8 \pi a^4}$$

sein. Ist die Dichte der Elektrizität  $\sigma$ , so

$$E = 4 \pi a^2 \sigma,$$

mithin

$$P = \frac{16 \pi^2 a^4 \sigma^2}{8 \pi a^4} = 2 \pi \sigma^2.$$

Dieses Resultat gilt übrigens für jeden elektrisch geladenen Leiter, wie man leicht durch folgende Überlegung erkennt. Da sich eine unendlich große Raumdichte der Elektrizität praktisch nicht herstellen läßt,

so müssen wir annehmen, daß die über die Oberfläche eines Leiters verteilte Elektrizität eine gewisse Schichtdicke besitzt. Diese Schicht teilen wir in unendlich viele parallele Schichten von der Dichte  $d\sigma$ , deren jede für sich im Gleichgewicht ist. Es erfährt jede Schicht von den sie umschließenden Schichten keine Kraftwirkung, hingegen von den eingeschlossenen die Kraft  $4\pi\sigma d\sigma$  senkrecht nach außen. Die gesamte Elektrizität steht somit unter einem Druck nach außen von der Größe

$$4\pi \int_0^a \sigma d\sigma = 2\pi\sigma^2.$$

### § 19. Theorie der Dielektrika.

Wir fanden für die Kapazität eines Kugelkondensators (§ 14) aus der Formel

$$E_g = \frac{a^2}{\delta} B$$

die Größe

$$C = \frac{a^2}{\delta},$$

da ja die angesammelte Elektrizität gleich dem Produkt aus Kapazität und Spannung sein muß. Diese Gleichung gilt aber nur dann, wenn wir den Zwischenraum zwischen den beiden Hohlkugeln mit Luft ausgefüllt haben. Bringen wir jedoch eine andere Substanz, etwa eine nicht leitende Flüssigkeit oder einen festen Isolator hinein, so ändert sich die Kapazität, sie wird größer. Wir haben daher unsere Formel in

$$C = \varepsilon \frac{a^2}{\delta}$$

abzuändern, wobei  $\varepsilon$  eine Konstante ist, welche nur

von der Natur des isolierenden Zwischenmittels abhängig ist. Da Faraday die Isolatoren Dielektrika nannte, so gab er der Größe  $\epsilon$  den Namen „Dielektrizitätskonstante“.

Man kann sich vorstellen, daß die Dielektrika aus Molekeln bestehen, welche zwar die Elektrizität sehr gut leiten, die aber untereinander isoliert sind. Bringen wir deshalb einen Isolator in ein elektrisches Feld, so tritt in jeder Molekel eine elektrische Verteilung ein, indem die positive Elektrizität das Bestreben hat, sich in der Richtung der Kraftlinien zu bewegen, die nega-

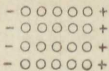


Fig. 8.

tive aber entgegengesetzt. Denken wir uns deshalb die Molekeln wie in Fig. 8 angeordnet, und es gehen die Kraftlinien von links nach rechts, so wird die linke Seite der Molekeln negativ, die rechte positiv elektrisch. Im Innern des Körpers heben sich die Elektrizitäten der benachbarten Molekeln wieder auf, und es bleibt nur an der Oberfläche links eine negative, rechts eine positive Schicht freier Elektrizität übrig.

## § 20. Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektrizität.

Wir bringen in ein homogenes elektrisches Feld (Fig. 9), das ist ein solches, in welchem die Kraftlinien gerade, parallel und von konstanter Dichte sind, zwei elektrische Massen  $+e$  und  $-e$ , welche starr miteinander verbunden sind. Ihre Ent-

fernung sei  $a$ , die Feldstärke  $N$ . Es wirkt dann auf  $+e$  eine Kraft  $Ne$  in der Richtung der Kraftlinien, auf  $-e$  in entgegengesetzter Richtung dieselbe Kraft,

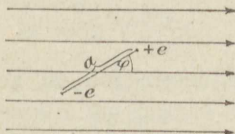


Fig. 9.

also  $-Ne$ . Unser System erfährt daher ein Drehungsmoment  $Nea \sin \varphi$ , und man nennt speziell die Größe  $ea$  das elektrische Moment der beiden getrennten elektrischen Massen  $+e$  und  $-e$ .

Wir denken uns nun ein Dielektrikum in einem elektrischen Feld. Überall wirke dieselbe elektrische Kraft, d. h. wir haben ein homogenes Feld. Es werden also alle Molekeln des Dielektrikums gleichmäßig polarisiert werden. Wir schneiden nun aus dem Dielektrikum ein Parallelepiped so heraus, daß eine Kante in die Richtung der Kraftlinien fällt. Es zeigt sich dann nach dem Früheren nur auf jenen Flächen, welche senkrecht zu den Kraftlinien stehen, freie Elektrizität. Ihre Dichte sei  $\sigma$ , und wir machen nun die Annahme, daß  $\sigma$  proportional der verteilenden elektrischen Kraft ist. Die Elektrizitätsmengen, welche auf den Endflächen sitzen, sind somit  $q\sigma$  bez.  $-q\sigma$ , wenn wir mit  $q$  den Querschnitt des Parallelepipeds bezeichnen. Wir können nun

$$m = q\sigma l$$

das elektrische Moment des Parallelepipeds nennen, vorausgesetzt, daß wir unter  $l$  seine Länge verstehen. Man pflegt nun den Quotienten aus dem elektrischen

Moment und dem Volumen des Körpers das elektrische Moment der Volumeinheit zu nennen, welches somit durch die Formel

$$\mu = \frac{q l \sigma}{v}$$

gegeben ist. Für unsern Fall ist aber das Volumen

$$v = q l,$$

daher

$$\mu = \sigma.$$

Das heißt: das elektrische Moment der Volumeinheit ist gleich der Flächendichte der freien Elektrizität.

Die elektrischen Kräfte können wir in drei Komponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  zerlegen. Für die Endflächen eines Elementarparallelepipeds in einem Isolator seien die Flächendichten durch  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  gegeben, wobei sich  $\alpha$  auf die Fläche senkrecht zur  $x$ -Achse bezieht, usw. Wir machen dann die Annahme, daß

$$\alpha = k X, \quad \beta = k Y, \quad \gamma = k Z$$

ist, und geben der Konstanten  $k$  den Namen „Elektrisierungszahl“. Ändert sich der Wert von  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  mit den Koordinaten nicht, so sind auch die Flächendichten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  konstante Größen und, wie bereits früher bemerkt, kann demnach im Innern eines Isolators, der von einem homogenen Feld beeinflusst wird, keine freie Elektrizität vorhanden sein. Wächst aber die elektrische Kraft  $X$  längs der Strecke  $dx$ , so daß wir auf der rechten Seite des Elementarprismas die Kraft  $X'$  haben, dann befindet sich dort die Flächendichte

$$\alpha' = k X'.$$

Während wir also links etwa die freie Elektrizität  $-\alpha dy dz$  haben, haben wir dann rechts  $\alpha' dy dz$ , und wir können schreiben

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx.$$

Ändert sich nun  $\alpha$  längs der  $x$ -Achse von Molekel zu Molekel, so können sich die durch Verteilung erzeugten Elektrizitätsmengen im Innern des Körpers nicht mehr vollständig aufheben, sondern es wird zwischen je zwei Molekeln eine freie Elektrizitätsmenge übrig bleiben, welche gleich der algebraischen Summe der beiden zusammenstoßenden Mengen ist. Für das ganze Volumenelement erhalten wir daher unter dem Einfluß der veränderlichen Kraft  $X$  eine freie Elektrizitätsmenge

$$-(\alpha' - \alpha) dy dz = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx dy dz,$$

indem ja der Zuwachs der Flächendichte multipliziert mit der Fläche selbst die Menge der freien Elektrizität

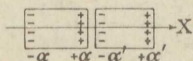


Fig. 10.

angibt. Die frei werdende Elektrizität ist negativ, wenn wir (Fig. 10) die Kraft  $X$  mit der Abszisse  $x$  wachsen lassen. Die Kräfte  $Y$  und  $Z$  erzeugen analog die freien Elektrizitätsmengen  $-\frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy dz$  und  $-\frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy dz$ . Die im Volumenelement vorhandene freie Elektrizität ist also gleich  $-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dx dy dz$ ,

wir können somit die Größe

$$\varrho = - \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)$$

die Menge in der Volumeinheit oder die Dichte der freien Elektrizität nennen, wobei unter  $\varrho$  zum Unterschied von der Flächendichte  $\sigma$  eine Raumdichte zu verstehen ist.

Wir setzen nun voraus, die elektrischen Kräfte haben ein Potential  $V$ . Wir haben dann

$$\alpha = k X = -k \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\beta = k Y = -k \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\gamma = k Z = -k \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Es läßt sich nun unter der Annahme, die Elektrisierungszahl  $k$  sei eine konstante Größe, leicht folgende Gleichung bilden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{k} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = \frac{\varrho}{k}.$$

Von früher her (§ 6) wissen wir aber, daß

$$\Delta V = -4\pi\varrho$$

ist. Wir erhalten somit

$$-4\pi\varrho = \frac{\varrho}{k}$$

oder

$$(1 + 4\pi k)\varrho = 0$$

Da  $k$  einen endlichen positiven Wert hat, so folgt

$$\varrho = 0.$$

Das heißt: im Innern eines Dielektrikums entsteht unter dem Einfluß äußerer elektrischer Kräfte keine freie Elektrizität.

### § 21. Kapazität eines Leiters, der von einem Dielektrikum umgeben ist.

Ein Leiter (Fig. 11) besitze die Elektrizitätsmenge  $E$  und befinde sich in der Mitte eines sehr großen kugelförmigen Dielektrikums. Die Menge  $E$  wirkt vertheilend auf das Dielektrikum. Es wird daher auf der

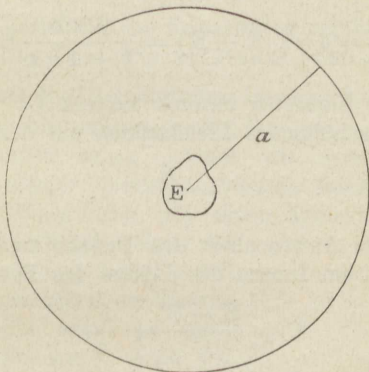


Fig. 11.

Oberfläche der Kugel eine Elektrizitätsmenge  $E'$  frei und ebenso an der Oberfläche des Leiters die Menge  $-E'$ , da wir annehmen, daß die Elektrisierungszahl  $k$  an allen Punkten des Isolators dieselbe Größe hat. Der Radius der Kugel sei  $a$ . Die Kraft, welche daher an der Oberfläche der Kugel wirkt, ist  $\frac{E - E'}{a^2}$ , da wir bei sehr großem  $a$  annehmen können, die gesamte Elek-

trizitätsmenge  $E$  und damit auch  $-E'$  sei im Mittelpunkt der Kugel vereinigt. Auf der Oberfläche haben wir daher die Dichte

$$\sigma = k \frac{E - E'}{a^2}.$$

Da aber

$$E' = 4 \pi a^2 \sigma$$

so folgt weiter

$$\frac{E'}{4 \pi a^2} = k \frac{E - E'}{a^2}$$

oder

$$E' = 4 \pi k (E - E') = \frac{4 \pi k}{1 + 4 \pi k} E.$$

Es sei die Kapazität unseres Leiters  $C$ . Er stände also ohne umhüllendes Dielektrikum auf dem Potential

$$V = \frac{E}{C},$$

hingegen bei Anwesenheit des Dielektrikums gilt für jeden Punkt im Innern des Leiters das Potential

$$V' = \frac{E - E'}{C} + \frac{E'}{a}$$

was allerdings nur unter der Voraussetzung gültig ist, daß  $a$  gegenüber den Dimensionen des Leiters sehr groß ist; denn nur dann haben wir eine gleichförmige Verteilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche der Kugel. Ist aber  $a$  sehr groß, so können wir  $\frac{E'}{a}$  vernachlässigen und erhalten

$$V' = \frac{E - E'}{C}.$$

Um daher das alte Potential  $V$  wiederzuerhalten, haben wir unserm Leiter noch weiter Elektrizität zuzuführen. Das besagt aber nichts anderes, als: die Kapazität eines Leiters wird durch das Umhüllen mit einem Dielektrikum erhöht. Ist der umhüllende Isolator genügend ausgedehnt, so verhalten sich die Kapazitäten

$$C' : C = E : E - E',$$

oder

$$C' = (1 + 4 \pi k) C.$$

Die Zahl

$$1 + 4 \pi k = \varepsilon,$$

welche das Verhältniß der Kapazitäten angibt, ist nichts anderes als die Dielektrizitätskonstante.

## § 22. Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator.

Was wir im vorhergehenden Paragraphen für einen Leiter gefunden haben, können wir unmittelbar auf einen Kondensator übertragen, dessen Raum zwischen den beiden Belegungen mit einem Dielektrikum ausgefüllt ist. Die Kraft, welche von der einen Belegung  $AB$  (Fig. 12) auf die Mengeneinheit der Elektrizität ausgeübt wird, ist ohne Zwischenmittel  $4 \pi \sigma$ , wenn wir unter  $\sigma$  wieder die Flächendichte der Elektrizität auf  $AB$  verstehen.

Ist ein Dielektrikum vorhanden, so wird sich an  $AB$  eine Elektrizitätsmenge von der Dichte  $-\delta$  ausscheiden, welche wir nach der Gleichung

$$\delta = 4 \pi k(\sigma - \delta)$$

finden, da ja dann  $4 \pi(\sigma - \delta)$  die auf das Dielektrikum wirkende Kraft ist. Die neue Dichte ist somit, wie leicht zu finden,

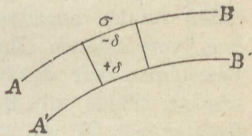


Fig. 12.

$$\sigma' = \sigma - \delta = \sigma \left( 1 - \frac{4 \pi k}{1 + 4 \pi k} \right) = \frac{\sigma}{1 + 4 \pi k}.$$

Danach erhalten wir auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Paragraphen, daß bei Vorhandensein des ausfüllenden Dielektrikums die Kapazität des Kondensators  $1 + 4 \pi k = \epsilon$  mal größer ist. Aus diesem Beispiel erkennen wir also unmittelbar, daß  $1 + 4 \pi k$  als die Dielektrizitätskonstante anzusehen ist.

Wir können uns die Sache auch folgendermaßen zu recht legen. Bringen wir in einen leeren Raum, der ein elektrisches Feld darstellt, einen Isolator, so zeigt sich, daß die Dichte der Kraftlinien im Isolator größer ist als im leeren Raum. Man kann sich dies nach § 19 so vorstellen, daß in den kleinsten Teilchen des Isolators unter dem Einfluß der elektrischen Kräfte eine Elektrisierung durch Verteilung entsteht, derart, daß sich positive Elektrizität in der Richtung der Kraftlinien, negative entgegengesetzt verschiebt. Von Teilchen zu Teilchen werden nun von den positiven Massen Kraftlinien zu den negativen führen, und so die ursprünglich vorhandenen Kraftlinien des Feldes vermehren. Bezeichnen wir die ursprüngliche Intensität des elektrischen Felds mit  $\mathfrak{E}$ , die Dichte der Kraftlinien im Isolator mit  $\mathfrak{D}$ , so ist nach dem obigen

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}.$$

Der Größe  $\mathfrak{D}$  hat man die Namen dielektrische Polarisierung, dielektrische Verschiebung und elektrische Erregung gegeben.

### §23. Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik, Brechung der Kraftlinien.

Für einen stationären Zustand der Wärmeströmung gilt die Gleichung (Bd. II, § 35)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

vorausgesetzt, daß wir es mit einem isotropen Körper zu tun haben. Für die Grenzfläche zweier verschiedener Körper haben wir jedoch

$$k \frac{du}{dn} = k' \frac{du'}{dn},$$

wenn wir unter  $u$  die Temperatur,  $k$  die Wärmeleitungsfähigkeit,  $\frac{du}{dn}$  das Temperaturgefälle in der Richtung der

Normalen der Trennungsfläche verstehen. Die erste Gleichung gilt nun ohne weiteres auch für die Elektrostatik in allen Punkten eines elektrischen Feldes, wo keine freien Massen vorhanden sind, wenn wir unter  $u$  das Potential verstehen. Aber auch die zweite Gleichung findet ihr Analogon. Denken wir uns, es stoßen zwei verschiedene Isolatoren I und II von den Elektrisierungszahlen  $k$  und  $k'$  in einer Fläche  $A'B'$  (Fig. 13) zusammen, und es wirken in ihnen

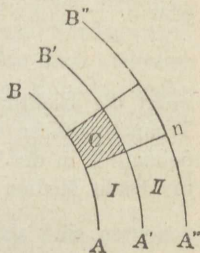


Fig. 13.

elektrische Kräfte. Zerlegen wir diese für einen Punkt der Grenzfläche in Komponenten senkrecht zur Fläche und in derselben, so rufen natürlich die in die Fläche selbst fallenden Komponenten keine freie Elektrizität in dem betrachteten Punkt hervor. Die senkrechten Kraftkomponenten sind für die verschiedenen Medien  $-\frac{\partial V}{\partial n}$  und  $-\frac{\partial V'}{\partial n}$ . In der Grenzfläche werden daher nach

§ 20 Elektrizitätsmengen von den Dichten

$$\sigma = -k \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{und} \quad \sigma' = k' \frac{\partial V'}{\partial n}$$

frei. Die freie Elektrizität in dem betrachteten Punkt der Grenzfläche hat somit die Dichte

$$\sigma + \sigma' = -k \frac{\partial V}{\partial n} + k' \frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Nun ist nach § 7

$$\frac{\partial V'}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi(\sigma + \sigma') = 4\pi \left( k \frac{\partial V}{\partial n} - k' \frac{\partial V'}{\partial n} \right),$$

woraus folgt

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial V}{\partial n} = (1 + 4\pi k') \frac{\partial V'}{\partial n}$$

oder

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} = \varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Steht die Richtung der Kraftlinien nicht senkrecht zur Trennungsfläche der beiden Medien, so muß die Komponente  $T$  in der Trennungsfläche wegen der Kontinuität für beide Medien dieselbe sein. Die senkrechten Komponenten sind aber  $-\frac{\partial V}{\partial n}$  und  $-\frac{\partial V'}{\partial n}$ . Schließt die Richtung der Kraft mit der Normalen die (spitzen) Winkel  $\vartheta$  bezüglich  $\vartheta'$  ein, so ist

$$T = -\frac{\partial V}{\partial n} \operatorname{tg} \vartheta = -\frac{\partial V'}{\partial n} \operatorname{tg} \vartheta'.$$

Da aber nach dem Früheren

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} = \varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial n},$$

so

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Diese Gleichung können wir das Brechungsgesetz der Kraftlinien nennen.

Die Gleichungen der Elektrostatik gelten also auch für die Wärmeleitung, wenn wir, wie wir oben sahen, unter  $\epsilon$  die Wärmeleitungsfähigkeit und unter  $V$  die Temperatur verstehen. Wir können somit ohne weiteres Probleme der Wärmeleitung auf die Elektrostatik und umgekehrt übertragen. Die Leiter der Elektrizität sind dabei als Dielektrika von unendlich großen Dielektrizitätskonstanten aufzufassen. Wie also in einem Leiter das Potential in allen Punkten gleich groß ist, so ist in einem Körper von unendlich großer Wärmeleitungsfähigkeit auch die Temperatur konstant. Für die Rechnung sind Äquipotentialflächen und Flächen gleicher Temperatur, Kraftlinien und Strömungslinien gleichbedeutend. Wir fanden auch zwischen der Flüssigkeits- und Wärmeströmung formale Analogien (Bd. II, § 35). Sie bestehen natürlich gleicherweise zwischen den Erscheinungen der Flüssigkeitsströmung und der Elektrostatik.

---

## Magnetismus.

### § 24. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz.

Wir erkennen die magnetischen Kräfte an ihrer anziehenden Wirkung auf Eisen. Zwei Stellen eines Magnets pflegen in der Regel besonders kräftig zu wirken, wir nennen sie die Pole, weil sie entgegengesetzte Eigenschaften besitzen. Hängen wir nämlich den Magneten frei beweglich auf, so stellt sich die Verbindungslinie der beiden Pole immer in der Rich-

tung Nord-Süd ein, und wir nennen den nach Norden zeigenden Pol den Nordpol, den andern den Südpol. Der Nordpol eines Magnets stößt den Nordpol eines andern ab, zieht aber den Südpol an; gleicherweise stößt auch der Südpol des einen den Südpol des andern ab. Gleichnamige Pole stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Lange Stahlnadeln lassen sich so magnetisieren, daß fast nur die Enden Magnetismus zeigen. Mit solchen Nadeln fand Coulomb das Gesetz, daß sich zwei gleichnamige Magnetpole mit einer Kraft abstoßen, welche verkehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist und direkt proportional dem Produkt der magnetischen Massen beider Pole. Wir haben somit genau dasselbe Gesetz wie bei elektrostatischen Kraftwirkungen (§ 1), können es deshalb auch in die Form

$$K = \frac{m m'}{r^2}$$

kleiden. In diesem Fall messen wir dann die magnetischen Massen im absoluten elektromagnetischen Maß.

## § 25. Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — Inklinat ion — magnetisches Moment.

Aus der Übereinstimmung des Kraftgesetzes zwischen zwei magnetischen Massen mit jenem für die Elektrizität läßt sich leicht erkennen, daß man viele Begriffe der Elektrostatik ohne weiteres auf den Magnetismus übertragen kann. Jede magnetische Masse erzeugt ein Kraftfeld, welches wir durch magnetische Kraftlinien darstellen können, deren Zahl pro Flächeneinheit die Größe der magnetischen Kraft gibt. Von jeder Masse  $m$  gehen  $4\pi m$  Kraftlinien aus. Positive magne-

tische Massen suchen sich in der Richtung der Kraftlinien, negative entgegengesetzt zu bewegen.

Da jeder Magnet sich in der Richtung von Nord nach Süd einzustellen sucht, müssen wir den uns umgebenden Raum selbst als ein magnetisches Feld ansehen, und zwar zeigt sich, daß bei möglichster Fernhaltung von Eisen und ähnlichen Substanzen, die vom Magneten stark angezogen werden, wir es mit einem homogenen Feld zu tun haben. Das Vorhandensein dieses großen magnetischen Feldes schreiben wir dem Erdmagnetismus zu. Die Vertikalebene, in welche sich ein nach allen Richtungen frei beweglicher, im Schwerpunkt aufgehängter Magnet einstellt, nennen wir den magnetischen Meridian, den Winkel, welchen dieser mit dem astronomischen Meridian einschließt, die Deklination, den Neigungswinkel der Nadel zum Horizont die Inklinatation.

Da sich in einem magnetischen Feld der positive und negative Magnetismus in entgegengesetzter Richtung zu bewegen sucht, müßte sich ein Körper, welcher die eine Art Magnetismus im Überschuß besitzt, nach der entsprechenden Richtung bewegen. Eine solche Bewegung konnte aber bisher noch an keinem Magneten nachgewiesen werden. Wir müssen deshalb annehmen, daß in jedem Magneten ebensoviel positiver als negativer Magnetismus vorhanden ist.

Wir wollen nun die Stärke des magnetischen Felds der Erde mit  $E$  bezeichnen. Wir können  $E$  in eine vertikale und eine horizontale Komponente zerlegen. Erstere ist

$$V = E \sin i,$$

letztere

$$H = E \cos i,$$

wenn wir unter  $i$  den Inklinationswinkel verstehen. Auf den Magnetpol  $m$  (Fig. 14) wirkt daher vertikal die Kraft  $mV$ , horizontal  $mH$ . Dieselben Kräfte, nur

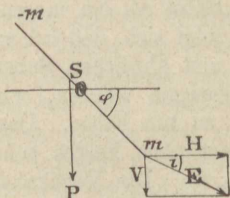


Fig. 14.

in entgegengesetzter Richtung, greifen in  $-m$  an. Ist der Magnet um  $O$  drehbar, so erzeugen die Kräfte das Drehungsmoment (Bd. I, § 28)

$$mVl \cos \varphi - mHl \sin \varphi,$$

wenn wir  $l$  die Entfernung der beiden Magnetpole nennen. Der Schwerpunkt des Magnets sei in  $S$  in der Entfernung  $d$  von  $O$ . Das Gewicht des Magnets sei  $P$ . Dann erzeugt dieses das Drehungsmoment  $-Pd \cos \varphi$ , wenn  $\varphi$  der Winkel der magnetischen Achse, d. i. der Geraden  $mm'$ , mit dem Horizont ist. Soll sich der Magnet somit im Gleichgewicht befinden, so muß

$$mVl \cos \varphi - mHl \sin \varphi - Pd \cos \varphi = 0$$

sein. Dabei ist also vorausgesetzt, daß die Drehachse des Magnets senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht. Die Größe

$$ml = M$$

nennt man das Moment des Magnets oder kurz

das magnetische Moment. Aus der letzten Gleichung erhalten wir leicht

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M V - P d}{M H}$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H} - \frac{P d}{M H} = \frac{E \sin i}{E \cos i} - \frac{P d}{M H} = \operatorname{tg} i - \frac{P d}{M H}.$$

Wenn wir nun die Nadel ummagnetisieren, so werden die Pole vertauscht. Dann wirkt das Moment des Schwerpunkts entgegengesetzt, und wir bekommen

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} i + \frac{P d}{M H},$$

folglich

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{2}.$$

Auf diese Weise bestimmt man mit Hilfe der Inklinationsnadel die Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Steht die Drehachse nicht senkrecht zum magnetischen Meridian, sondern schließt die Schwingungsebene mit dem Meridian den Winkel  $\psi$  ein, so kann, vorausgesetzt, daß die Achse horizontal steht, nicht mehr die gesamte Horizontalkraft  $H$  wirken, sondern nur die Komponente  $H \cos \psi$ , und die Gleichgewichtsbedingung wird

$$M V \cos \varphi - M H \cos \psi \sin \varphi - P d \cos \varphi = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M V - P d}{M H \cos \psi}.$$

Für  $\psi = \frac{\pi}{2}$  wird  $\cos \psi = 0$ , demnach  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$  oder  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Die Magnethnadel stellt sich somit vertikal, wenn die Schwingungsebene des Magnets senkrecht zum Meridian steht. Auf diese Weise kann man also auch ohne Deklinationsnadel die Richtung des magnetischen Meridians auffinden.

### § 26. Potential eines Magnets.

Wir nahmen bisher immer an, ein Magnet bestehe aus zwei punktförmigen magnetischen Massen. In einem homogenen magnetischen Feld ist dies immer gestattet,

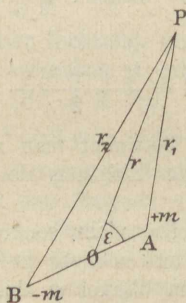


Fig. 15.

da ja dann sämtliche Massen im Massenmittelpunkt vereinigt gedacht werden können (Bd. I, § 21). Wir können daher den Magnet immer durch zwei punktförmige Massen, welche gleich groß, aber entgegengesetzt sind, ersetzen. Diese Massen  $+m$  und  $-m$  (Fig. 15) seien vom Punkt P um  $r_1$  bezüglich  $r_2$  entfernt. Wie bei elektrischen Massen können wir nun auch hier vom

Potential der magnetischen Massen auf den Punkt P sprechen. Es wird

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$$

sein; denn es wäre ja die Kraft, welche  $m$  auf die positive magnetische Masseneinheit in P ausübt, gleich  $\frac{m}{r_1^2}$  und ebenso die Kraft von  $-m$  gleich  $-\frac{m}{r_2^2}$ . Die zugehörigen Potentiale sind also  $\frac{m}{r_1}$  und  $-\frac{m}{r_2}$ , und die Summe beider ist das Potential  $V$  des Magneten auf den Punkt P.

Halbieren wir die Strecke  $AB = \lambda$  in O und setzen wir  $OP = r$ , so folgt

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} - r\lambda \cos \varepsilon,$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} + r\lambda \cos \varepsilon.$$

Es ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \left( r^2 - \lambda r \cos \varepsilon + \frac{\lambda^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\lambda}{r} \cos \varepsilon + \frac{\lambda^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\lambda}{2r} \cos \varepsilon \right), \end{aligned}$$

wenn wir voraussetzen, daß  $\lambda$  gegen  $r$  eine kleine Größe ist, so daß wir nur die erste Potenz von  $\frac{\lambda}{r}$  zu berücksichtigen brauchen. Gleicherweise erhalten wir

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\lambda}{2r} \cos \varepsilon \right),$$

mithin

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda \cos \varepsilon}{r^2}$$

und

$$V = \frac{m \lambda \cos \varepsilon}{r^2} = \frac{M \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Der Punkt P habe nun die Koordinaten  $x, y, z$ , der Punkt O gleicherweise  $a, b, c$ . Ferner schließe die Gerade AB mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel  $f, g, h$  ein. Dann gilt

$$\cos \varepsilon = \frac{x-a}{r} \cos f + \frac{y-b}{r} \cos g + \frac{z-c}{r} \cos h,$$

und es wird

$$V = \frac{M(x-a) \cos f + M(y-b) \cos g + M(z-c) \cos h}{r^3}.$$

Die Größe  $AB = \lambda$  können wir nun auf die drei Koordinatenachsen projizieren und erhalten so die Längen  $\lambda \cos f, \lambda \cos g, \lambda \cos h$ . Folglich ist es erlaubt,

$$m \lambda \cos f = M \cos f = A,$$

$$m \lambda \cos g = M \cos g = B,$$

$$m \lambda \cos h = M \cos h = C$$

die Komponenten des magnetischen Moments bezüglich der drei Achsen zu nennen, und es wird so das Potential

$$V = \frac{A(x-a) + B(y-b) + C(z-c)}{r^3}. \quad (8)$$

Wir wollen dieses Potential jetzt benützen, um die magnetischen Kräfte zu berechnen, welche ein Magnet, der im Ursprung eines Koordinatensystems (Fig. 16) so

liegt, daß seine beiden Pole in der  $x$ -Achse und gleichweit vom Ursprung entfernt sind, in einem Punkt A

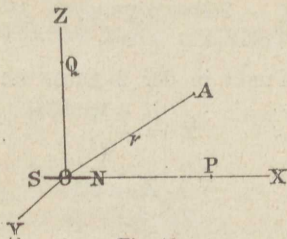


Fig. 16.

äußert. Es sind dann die Momente  $B = C = 0$ , während  $A = M$  das Gesamtmoment bedeutet. Es ist weiter  $a = b = c = 0$ , mithin

$$V = \frac{M x}{r^3}.$$

Für die magnetischen Kräfte erhalten wir sonach

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{M}{r^3} + \frac{3 M x^2}{r^5},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3 M x y}{r^5},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{3 M x z}{r^5},$$

was ohne weiteres verständlich ist, wenn wir überlegen, daß

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

also

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ist. Befindet sich der Punkt in der  $x$ -Achse, etwa in  $P$ , so wird  $x = r$ , also

$$X = \frac{2M}{r^3}, \quad Y = Z = 0.$$

Für einen Punkt in der  $z$ -Achse ist  $z = r$ , somit

$$X = -\frac{M}{r^3}$$

und wieder

$$Y = Z = 0.$$

### § 27. Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments.

Wir legen einen Magnet (Fig. 17) so, daß er senkrecht zum magnetischen Meridian  $MN$  ist. Er erzeugt dann im Punkt  $P$  in der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt

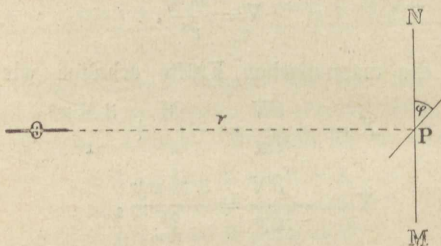


Fig. 17.

O des Magnets ein magnetisches Feld von der Stärke  $\frac{2M}{r^3}$ . Er wird daher eine kleine Magnetnadel im Punkt  $P$  um den Winkel  $\varphi$  ablenken, indem er auf sie ein Drehungsmoment  $\frac{2M}{r^3} M' \cos \varphi$  ausübt, wenn  $M'$  das magnetische Moment der Nadel und  $\varphi$  der

Winkel der Nadel mit dem magnetischen Meridian ist. Gleichzeitig erzeugt die Horizontalintensität  $H$  des Erdmagnetismus das Drehungsmoment  $-M'H \sin \varphi$ . Für das Gleichgewicht der Nadel gilt somit

$$-M'H \sin \varphi + M' \frac{2M}{r^3} \cos \varphi = 0$$

oder

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir sind also in der Lage, den Quotienten  $\frac{M}{H}$  zu bestimmen, erhalten aber keinen Aufschluß über den wahren Wert der Größen  $M$  und  $H$ . Dies erreichen wir erst durch einen sogenannten Schwingungsversuch. Wir wollen zu dem Zweck unsern Magnet an einem langen Faden aufhängen, so daß er leicht in einer Horizontalebene schwingen kann. Schließt er mit dem magnetischen Meridian den Winkel  $\varphi$  ein, so gibt ihm der Erdmagnetismus ein Drehungsmoment  $-MH \sin \varphi$ , und wir erhalten für seine Bewegung die Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -MH \sin \varphi$$

(Bd. I, § 28), wenn wir unter  $K$  sein Trägheitsmoment verstehen. Sind die Schwingungen nicht groß, so können wir  $\sin \varphi = \varphi$  setzen, und die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K} \varphi.$$

Das ist aber dieselbe Gleichung wie jene für die Schwingungen eines Pendels (Bd. I, § 9), und wir erhalten für die Schwingungsdauer

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}},$$

woraus folgt, daß

$$MH = \frac{\pi^2 K}{\tau^2}$$

ist. Wir können also nach der von Gauß angegebenen Methode sowohl den Quotienten  $\frac{M}{H}$ , als das Produkt  $MH$  experimentell bestimmen und sind jetzt in der Lage, sowohl die Größe des magnetischen Moments  $M$ , als auch die der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus anzugeben.

## § 28. Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch induzierten Körpers.

Bringen wir Eisen in die Nähe eines Magnets, so wird es selbst magnetisch. Wir können diese Erscheinung so auffassen wie die Elektrisierung eines Dielektrikums, welches wir in ein elektrisches Feld bringen (§ 19). Wir können annehmen, in jeder Molekel werde gleichviel positiver und negativer Magnetismus ausgeschieden usw., und nennen diesen Vorgang „magnetische Induktion“. Wir werden als magnetisches Moment der Volumeinheit

$$\mu = k P$$

erhalten, wenn wir unter  $P$  die magnetisierende Kraft verstehen, während jetzt  $k$  die Magnetisie-

rungszahl heißt. Die Komponenten des Moments  $\mu$  sind

$$\alpha = k X, \quad \beta = k Y, \quad \gamma = k Z,$$

während  $X, Y, Z$  die Komponenten von  $P$  bedeuten. Das Potential des ganzen Körpers werden wir finden, wenn wir das Potential eines Volumelements suchen und dann über das ganze Volumen des Körpers integrieren. Das Potential eines Volumelements  $da db dc$  erhalten wir aber leicht nach Gleichung (8). Als magnetisches Moment des Volumelements bezüglich der drei Achsen haben wir

$$\begin{aligned} A &= \alpha da db dc, \\ B &= \beta da db dc, \\ C &= \gamma da db dc, \end{aligned}$$

folglich als Potential

$$dV = \frac{\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)}{r^3} da db dc. \quad (9)$$

Dabei ist

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach  $a$ , so finden wir leicht

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r},$$

was wir weiter benützen können, um folgende Gleichung zu bilden:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{x-a}{r^3}.$$

Auf ganz dieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{y-b}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{z-c}{r^3}.$$

Diese Größen können wir nun in die Gleichung (9) einsetzen und erhalten dann durch Integration das Potential des gesamten Körpers

$$V = \iiint \left[ \alpha \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{r} \right) \right] da db dc.$$

Es ergibt sich nun weiter

$$\iiint \alpha \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) da db dc = \iint db dc \left[ \frac{\alpha}{r} - \int \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial a} da \right].$$

Fassen wir ein Oberflächenelement  $dO$  unseres Körpers ins Auge, dessen Normale mit den Koordinatenachsen die Winkel  $f, g, h$  einschließt, so können wir

$$dO \cos f = db dc$$

setzen, gleicherweise

$$dO \cos g = da dc, \quad dO \cos h = da db.$$

Das erlaubt uns, unser Potential folgendermaßen umzuändern:

$$V = \iint \frac{\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h}{r} dO - \iiint \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} \right) da db dc.$$

Es zerfällt also im allgemeinen in zwei Teile, deren einer sich bloß auf die Oberfläche, der andere bloß auf das Volumen des Körpers bezieht. Es ist auch unmittelbar klar, daß

$$\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h = \sigma$$

sein muß, wenn wir unter  $\sigma$  die Oberflächendichte des Magnetismus verstehen, während

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right) = \varrho$$

die Dichte des freien Magnetismus im Innern des Körpers ist (§ 20). Unser Potential wird sonach

$$V = \iint \frac{\sigma dO}{r} + \iiint \frac{\varrho}{r} da db dc.$$

Diesen Ausdruck hätten wir ohne weiteres bilden können, wenn wir von vornherein die Begriffe des freien Magnetismus in der Oberfläche und im Innern eines Körpers aufgestellt hätten, indem er ja nichts anderes besagt als die gewöhnliche Definition des Potentials, daß es gleich ist der Summe sämtlicher vorhandenen Massen, jede einzelne dividiert durch ihre Entfernung von jenem Punkt, für welchen das Potential bestimmt wird.

### § 29. Die homogen magnetisierte Kugel.

Ist eine Kugel homogen magnetisiert, so heißt das, das magnetische Moment der Volumeinheit ist in allen ihren Punkten gleich groß und gleich gerichtet. Wir wollen es mit der Richtung der  $x$ -Achse eines Koordinatensystems zusammenfallen lassen. Für das magnetische Moment der Volumeinheit gilt also

$$\alpha = \text{konst.}, \quad \beta = \gamma = 0.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist nun

$$V = \iiint \frac{\alpha (x - a)}{r^3} da db dc,$$

wobei wir

$$\frac{x - a}{r^3} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right)$$

oder auch

$$\frac{x - a}{r^3} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right)$$

setzen können. Sonach wird

$$\begin{aligned} V &= - \iiint \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) da db dc \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \iiint \frac{\alpha}{r} da db dc. \end{aligned}$$

Es ist dies erlaubt, weil ja nach der Variablen  $x$  keine Integration vorkommt. Für die Vollkugel haben wir nun, wenn der Punkt, auf welchen das Potential sich bezieht, außerhalb gelegen ist (§ 4),

$$\iiint \frac{\alpha}{r} da db dc = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{p^3 \alpha}{R},$$

wenn  $p$  der Radius der Kugel und  $R$  die Entfernung des Kugelmittelpunkts von dem außerhalb gelegenen Punkt ist. Danach finden wir

$$V = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{4\pi \alpha p^3}{3R} = \frac{4\pi \alpha p^3}{3} \frac{x}{R^3},$$

wenn wir den Kugelmittelpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems verlegen, indem dann

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) = - \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} = - \frac{x}{R^3}$$

ist. Da  $\alpha$  das magnetische Moment der Volumeinheit,  $\frac{4\pi p^3}{3}$  das Volumen der Kugel ist, so ist

$$\frac{4\pi p^3 \alpha}{3} = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Kugel. Damit wird das Potential

$$V = \frac{M x}{R^3}.$$

Dasselbe Resultat haben wir aber für einen kleinen Magnet vom Moment  $M$  (§ 26) erhalten, dessen Pole in der  $x$ -Achse zu beiden Seiten des Ursprungs liegen. Es kann daher die Wirkung einer homogen magnetisierten Kugel durch einen kleinen Magnet vom selben magnetischen Moment ersetzt werden.

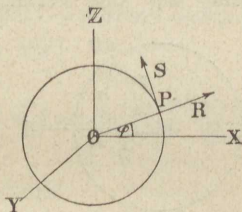


Fig. 18.

Suchen wir die magnetische Kraft in einem Punkt  $P$  (Fig. 18) der Kugeloberfläche, so haben wir

$$x = R \cos \varphi$$

zu setzen, das Potential wird also

$$V = \frac{M}{R^2} \cos \varphi.$$

Die Kraft im Punkt P wollen wir in eine Komponente in der Richtung des Radius und eine senkrecht darauf zerlegen. Erstere wird demnach sein

$$-\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2M}{R^3} \cos \varphi,$$

letztere

$$-\frac{\partial V}{R \partial \varphi} = \frac{M \sin \varphi}{R^3}.$$

Für die  $x$ -Achse selbst ist  $\varphi = 0$ . Wir haben daher nur eine Kraft in der Richtung des Radius. Eine Magnetnadel würde sich also dort senkrecht zur Kugeloberfläche stellen. In der  $yz$ -Ebene hingegen ist  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Dort haben wir also nur eine Kraft parallel zur Kugeloberfläche. Ein ähnliches Verhalten zeigt unsere Erde, wenn wir die Verbindungslinie ihrer

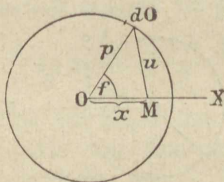


Fig. 19.

beiden magnetischen Pole als die  $x$ -Achse auffassen. An den beiden magnetischen Polen steht tatsächlich die Magnetnadel senkrecht, am Äquator horizontal. Doch trifft dies nur annähernd zu. Wir können demnach aus den Beobachtungen auf der Erdoberfläche nicht ohne weiteres auf die Verteilung des Erdmagnetismus schließen, kann ja doch ein kleiner starker Magnet eine homogen magnetisierte Kugel vollständig ersetzen.

Wir wollen nun das Potential unserer homogen magnetisierten Kugel auf einen innerhalb liegenden Punkt M (Fig. 19) berechnen, der vorerst in der x-Achse liegen soll. Da wir im Innern keinen freien Magnetismus haben, so ist  $\varrho = 0$ , und es wird

$$V = \iiint \frac{\sigma dO}{u}.$$

Es ist ferner

$$\sigma = \alpha \cos f,$$

daher

$$V = \alpha \iiint \frac{\cos f}{u} dO.$$

Da um die x-Achse alles symmetrisch ist, so können wir

$$dO = p df \cdot 2\pi p \sin f = 2\pi p^2 \sin f df$$

setzen. Danach wird

$$V = 2\pi p^2 \alpha \int_0^\pi \frac{\cos f \sin f df}{u}. \quad (10)$$

Wir haben ferner

$$u^2 = p^2 + x^2 - 2px \cos f$$

und durch Differentiation

$$u du = px \sin f df,$$

während aus der Gleichung für  $u^2$

$$\cos f = \frac{p^2 + x^2 - u^2}{2px}$$

folgt. Führen wir diese Größen für  $\cos f$  und  $\sin f df$  in die Gleichung (10) ein, so bleibt uns

$$V = \frac{2 \pi p^2 \alpha}{2 p^2 x^2} \int_{p-x}^{p+x} (p^2 + x^2 - u^2) du$$

$$= \frac{\pi \alpha}{x^2} \left[ (p^2 + x^2) u - \frac{u^3}{3} \right]_{p-x}^{p+x} = \frac{4 \pi \alpha x}{3},$$

was durch Einsetzen der Grenzen  $p - x$  und  $p + x$  leicht gefunden wird. Diese sind die Werte des  $u$  für die Winkel  $f = 0$  und  $f = \pi$ . Unser Potential ist also der Abszisse  $x$  proportional. Die Kraft parallel zur  $x$ -Achse wird daher

$$- \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{4 \pi \alpha}{3},$$

während sie senkrecht darauf Null ist. Wenn wir aber eine konstante Kraft parallel und keine senkrecht zur  $x$ -Achse haben, so heißt das: Die Kraftlinien sind parallel. Es gilt daher der Ausdruck unseres Potentials nicht nur für Punkte in der  $x$ -Achse, sondern überhaupt für jeden Punkt im Innern unserer Kugel. Für einen Punkt in der Oberfläche wird

$$x = p \cos f.$$

Ferner wissen wir von früher, daß

$$\frac{4 \pi p^3 \alpha}{3} = M$$

das magnetische Moment der Kugel ist. Wir können daher

$$4 \pi \alpha = \frac{3 M}{p^3}$$

setzen und die Gleichung bilden:

$$V = \frac{4 \pi \alpha x}{3} = \frac{M p \cos f}{p^3} = \frac{M \cos f}{p^2}.$$

Dieselbe Formel fanden wir aber schon oben, nur ersetzten wir dort  $p$  durch  $R$  und  $f$  durch  $\varphi$ . Die Werte der beiden Ausdrücke für das Potential auf einen Punkt innerhalb und außerhalb werden also, wie es ja auch sein muß, für die Oberfläche der Kugel gleich.

### § 30. Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld.

Bringen wir einen Körper in ein magnetisches Feld, so wird in ihm Magnetismus induziert, an seiner Oberfläche wird Magnetismus frei. Dieser freie Magnetismus wirkt nun abermals induzierend auf den Körper ein und verändert daher die Lage der magnetischen Kraftlinien sowohl im Innern des Körpers als auch außerhalb. Diese neuen, infolge der Induktion erzeugten Kraftlinien pflegt man daher auch häufig die magnetischen Induktionslinien zu nennen.

Bringen wir eine Kugel in ein homogenes magnetisches Feld, so ist die erste Erscheinung eine homogene Magnetisierung. Von einer solchen Kugel wissen wir aber, daß in ihrem Innern die Kraftlinien parallel laufen. Folglich können auch die frei gewordenen Magnetismen das homogene Feld im Innern der Kugel nur seiner Stärke nach verändern.

Die ursprüngliche Feldstärke sei  $P$ . Diese ruft das magnetische Moment der Volumeinheit

$$\alpha = k P \quad (11)$$

hervor, was das Potential

$$V = \frac{4 \pi \alpha x}{3}$$

und die Kraft

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4 \pi \alpha}{3}$$

auf einen Punkt im Innern der Kugel zur Folge hat. Den wahren Wert des  $\alpha$  finden wir also nicht aus der Gleichung (11), sondern aus der Formel

$$\alpha = k(P + X),$$

wobei  $X$  jene magnetische Kraft ist, welche vom induzierten freien Magnetismus ausgeht. Daraus folgt

$$\frac{\alpha}{k} = P - \frac{4 \pi \alpha}{3},$$

was wir weiter umformen können in

$$\alpha \left( \frac{1}{k} + \frac{4 \pi}{3} \right) = P,$$

$$\alpha = \frac{P}{\frac{1}{k} + \frac{4 \pi}{3}}.$$

Für Substanzen wie Eisen, Nickel usw. ist nun  $k$  so groß, daß wir  $\frac{1}{k}$  gegenüber  $\frac{4 \pi}{3}$  vernachlässigen können. Es wird dann

$$\alpha = \frac{3 P}{4 \pi}.$$

Das magnetische Moment einer Kugel vom Radius  $p$  ist nun

$$M = \frac{4 \pi}{3} p^3 \alpha = p^3 P.$$

Es ist also gleich dem Produkt aus der 3. Potenz des Radius und der Feldstärke, wenn nur der Körper eine große Magnetisierungszahl besitzt. Ist hingegen die Magnetisierungszahl wie bei den meisten Körpern sehr klein, so kann  $\frac{4\pi}{3}$  gegen  $\frac{1}{k}$  vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$\alpha = k P.$$

### § 31. Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien.

Bezeichnen wir das Potential im Innern eines Körpers mit  $V_-$ , außerhalb mit  $V_+$ , die Dichte des freien Magnetismus an der Oberfläche mit  $\sigma$ , so gilt für die Oberfläche die Gleichung (5)

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma.$$

Für die Komponenten des magnetischen Moments der Volumeinheit haben wir

$$\alpha = -k \frac{\partial V_-}{\partial x}, \quad \beta = -k \frac{\partial V_-}{\partial y}, \quad \gamma = -k \frac{\partial V_-}{\partial z}.$$

Ferner ist

$$\sigma = -k \frac{\partial V_-}{\partial n}.$$

Obige Gleichung kann daher geschrieben werden

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = 4\pi k \frac{\partial V_-}{\partial n}$$

oder

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial V_-}{\partial n} = \frac{\partial V_+}{\partial n},$$

eine Gleichung, die zuerst von Thomson aufgestellt wurde. Auch diese Gleichung ist uns schon aus der Theorie der Dielektrika bekannt. Sie existiert ja für die Oberfläche eines Dielektrikums, welches mit dem freien Raum in Berührung steht; nur ist dort die Größe  $1 + 4\pi k$  die Dielektrizitätskonstante, während wir sie hier die magnetische Induktionskonstante oder magnetische Permeabilität  $\mu$  nennen.

Wir können nach Analogie des Vorgangs in § 22 auch folgende Darstellungsform wählen. Ist die Intensität des magnetischen Feldes  $\mathfrak{H}$ , die Dichte der Kraftlinien in einem ins Feld gebrachten Körper  $\mathfrak{B}$ , so ist

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{B}$  nennt man die magnetische Induktion oder magnetische Erregung.

Stoßen zwei Körper zusammen mit den Magnetisierungszahlen  $k$  und  $k'$ , so gilt natürlich analog

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial V}{\partial n} = (1 + 4\pi k') \frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Diese Gleichung führt uns aber wiederum zur Analogie mit der Wärmeleitung und der Flüssigkeitsströmung (§ 23).

### § 32. Transversal magnetisierter Zylinder im homogen magnetischen Feld.

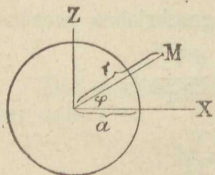


Fig. 20.

Wir haben einen unendlich langen Kreiszylinder aus Eisen (Fig. 20), dessen Achse die y-Achse eines Koordinatensystems bilden soll. Der Zylinder befinde sich in einem ursprünglich homogenen magnetischen Feld, dessen Kraftlinien parallel zur x-Achse laufen.

Durch die auf dem Zylinder frei werdenden magnetischen Massen wird das homogene Feld gestört; wir wollen die auf diese Weise entstandenen magnetischen Induktionslinien kennen lernen. Die Anschauung ergibt unmittelbar, daß längs einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden das Potential einen konstanten Wert haben muß. Nennen wir das Potential im Innern des Zylinders  $V_i$ , außerhalb  $V_e$ , so wird sonach

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial V_e}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = 0$$

sein. Außerhalb und innerhalb des Zylinders gilt

$$\Delta V = 0,$$

da nur an der Oberfläche freie magnetische Massen vorhanden sind. Dies führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = 0.$$

Jede Funktion von  $x + zi$  ist eine Lösung dieser Gleichung. Wir werden in der Folge sehen, daß die Gleichungen

$$V_e = A(x + zi) + \frac{B}{x + zi},$$

$$V_i = A'(x + zi) + \frac{B'}{x + zi}$$

sich mit den von uns gestellten Bedingungen vertragen, also als Lösungen unserer Aufgabe angesehen werden

können. Es muß nun der reelle Teil der von uns aufgestellten Lösung für sich wieder eine Lösung sein, wodurch wir

$$V_e = A x + \frac{B x}{x^2 + z^2},$$

$$V_i = A' x + \frac{B' x}{x^2 + z^2}$$

erhalten.

Betrachten wir das Potential in einem von unserm Zylinder sehr weit entfernten Punkt, so wird  $x^2 + z^2$

sehr groß,  $\frac{B x}{x^2 + z^2}$  sehr klein, daher

$$V_e = A x$$

und die Kraft

$$-\frac{\partial V_e}{\partial x} = -A.$$

Wir haben also tatsächlich, wie wir es voraussetzten, in weiter Entfernung vom Zylinder ein homogenes magnetisches Feld. Für die Achse des Zylinders wird  $x^2 + z^2 = 0$ . Da aber  $V_i$  nicht unendlich werden kann, so muß  $B' = 0$  sein, und es bleibt

$$V_i = A' x, \quad -\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A'.$$

Also auch im Innern des Zylinders existiert ein homogenes magnetisches Feld. Der Zylinder ist transversal magnetisiert, und zwar laufen die magnetischen Induktionslinien parallel zur  $x$ -Achse.

Setzen wir nun

$$x = r \cos \varphi,$$

so wird

$$V_e = \left( A r + \frac{B}{r} \right) \cos \varphi, \quad V_i = A' r \cos \varphi.$$

Für die Oberfläche des Zylinders muß

$$V_e = V_i$$

werden, das heißt, es muß

$$A a + \frac{B}{a} = A' a \quad (12)$$

sein, wenn wir unter  $a$  den Radius des Zylinders verstehen. Ferner muß

$$(1 + 4 \pi k) \frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial n}$$

sein, woraus folgt

$$(1 + 4 \pi k) A' = A - \frac{B}{a^2}. \quad (13)$$

Gleichung (12) können wir nun auch noch so schreiben:

$$A + \frac{B}{a^2} = A'.$$

Eliminieren wir aus den beiden letzten Gleichungen

$\frac{B}{a^2}$ , so ergibt sich leicht

$$A' = \frac{A}{1 + 2 \pi k}, \quad \frac{B}{a^2} = - \frac{2 \pi k}{1 + 2 \pi k} A.$$

Das magnetische Moment der Volumeinheit des Zylinders ist

$$\alpha = -k \frac{\partial V_i}{\partial x} = -k A' = - \frac{k A}{1 + 2 \pi k} = - \frac{A}{\frac{1}{k} + 2 \pi}.$$

Wir erhalten also eine ähnliche Formel wie für die Kugel (§ 30).

Ist eine Veränderliche durch eine Gleichung mit komplexen Zahlen gegeben und trennen wir sie in zwei

Gleichungen, deren eine nur den reellen, die andere nur den imaginären Bestandteil enthält, so entsprechen diesen Gleichungen Kurvenscharen, deren eine die orthogonalen Trajektorien der andern darstellt. Während also

$$V_i = A' x, \quad V_e = A x + \frac{B x}{r^2}$$

uns die Niveaulächen des Potentials geben, liefern uns die imaginären Bestandteile

$$U_i = A' z, \quad U_e = A z - \frac{B z}{r^2}$$

die magnetischen Kraftlinien.

In großer Entfernung vom Zylinder laufen die Kraftlinien parallel zur  $x$ -Achse. Wir wollen eine her-

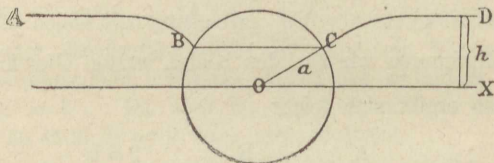


Fig. 21.

ausheben (Fig. 21), für welche  $z = h$  ist. Wir haben dann, da  $\frac{B h}{r^2}$  als sehr klein zu betrachten ist,

$$U_e = A h.$$

Die allgemeine Gleichung der Induktionslinien außerhalb des Zylinders wird daher

$$A h = A z - \frac{B z}{r^2} = A z + \frac{2 \pi k a^2}{(1 + 2 \pi k) r^2} A z,$$

wenn wir den Wert von  $B$  dem Obigen entnehmen. Durch Kürzung ergibt sich schließlich

$$h = z + \frac{2 \pi k a^2}{1 + 2 \pi k} \cdot \frac{z}{x^2 + z^2}.$$

Es sind die magnetischen Induktionslinien somit Kurven dritten Grads. Der Punkt  $C$ , in welchem die Induktionslinie die Oberfläche des Zylinders trifft, hat die Ordinate  $z_1$ . Für diese ist  $x^2 + z^2 = a^2$ . Unsere Gleichung wird

$$h = z_1 + \frac{2 \pi k}{1 + 2 \pi k} z_1.$$

Bei einem Eisenzylinder ist  $k$  so groß, daß wir Eins gegen  $2 \pi k$  vernachlässigen können, woraus folgt

$$z_1 = \frac{h}{2}.$$

Alle Kraftlinien, welche also im Unendlichen eine Ordinate kleiner als  $2a$  haben, gehen durch unsern Zylinder. Das Eisen zieht sozusagen die Kraftlinien gegen sich.

Auf ganz dieselbe Weise könnten wir die Strömungslinien der Wärme finden, wenn wir in einen Raum von konstantem Temperaturgefälle einen Zylinder brächten. Wäre dessen Wärmeleitungsfähigkeit gegenüber jener des umgebenden Raumes sehr groß, so würden die Strömungslinien genau so wie die magnetischen Induktionslinien des Eisens verlaufen.

Wie ein Vollzylinder läßt sich auch ein Hohlzylinder berechnen. Es zeigt sich da, daß im Innern des Hohlraums ein homogenes magnetisches Feld vorhanden ist, welches um so schwächer wird, je stärker die Wände

des Zylinders sind. Man nennt diese Erscheinung die magnetische Schirmwirkung des Eisens.

### § 33. Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld.

Bei Körpern von sehr kleiner Magnetisierungszahl können wir die Rückwirkung der induzierten Magnetismen gegenüber den induzierenden Kräften vollständig

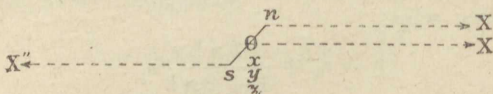


Fig. 22.

vernachlässigen. Durch die Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  würden sonach die magnetischen Momente

$$\alpha = k X = -k \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = k Y = -k \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\gamma = k Z = -k \frac{\partial V}{\partial z}$$

erzeugt. Die Wirkung der Kraft  $X$  auf einen kleinen Magnet  $ns$  (Fig. 22) läßt sich folgendermaßen darstellen. Haben wir im Punkt  $O$  mit den Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Kraft  $X$ , so finden wir in  $n$  die Kraft

$$X' = X + \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \zeta,$$

wobei

$$\xi = \frac{\lambda}{2} \cos f, \quad \eta = \frac{\lambda}{2} \cos g, \quad \zeta = \frac{\lambda}{2} \cos h$$

ist. Unter  $\lambda$  ist also die Länge des Magnets, unter

$f, g, h$  sind die Winkel, welche er mit den Achsen einschließt, zu verstehen. In  $s$  haben wir analog die Kraft

$$X'' = X - \frac{\partial X}{\partial x} \xi - \frac{\partial X}{\partial y} \eta - \frac{\partial X}{\partial z} \zeta.$$

Unser Magnet habe in  $n$  die magnetische Masse  $+m$ , in  $s$  die Masse  $-m$ . Als Kraft auf unsern Magnet haben wir also

$$\begin{aligned} m X' - m X'' &= 2m \left( \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \zeta \right) \\ &= m \lambda \left( \frac{\partial X}{\partial x} \cos f + \frac{\partial X}{\partial y} \cos g + \frac{\partial X}{\partial z} \cos h \right). \end{aligned}$$

Wir denken uns ein Volumelement  $dx dy dz$  unseres Körpers im magnetischen Feld. Sein magnetisches Moment ist  $\mu dx dy dz$ . Darauf wird die magnetische Kraft gerade so wirken wie auf unseren kleinen Magnet, dessen magnetisches Moment  $m \lambda$  ist. Wir können daher als Kraft auf das Volumelement

$$\begin{aligned} dK &= \mu dx dy dz \left( \frac{\partial X}{\partial x} \cos f + \frac{\partial X}{\partial y} \cos g + \frac{\partial X}{\partial z} \cos h \right) \\ &= dx dy dz \left( \frac{\partial X}{\partial x} \alpha + \frac{\partial X}{\partial y} \beta + \frac{\partial X}{\partial z} \gamma \right) \end{aligned}$$

annehmen, da ja

$$\alpha = \mu \cos f$$

usw. ist.

Setzen wir nun für  $X$  den Wert  $-\frac{\partial V}{\partial x}$  usf., desgleichen für  $\alpha, \beta, \gamma$  die Werte aus den eingangs er-

wählten Gleichungen, so finden wir für die Kraft

$$\begin{aligned}
 & k \, dx \, dy \, dz \left( \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \\
 &= \frac{k}{2} \, dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{k}{2} \, dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} (X^2 + Y^2 + Z^2) \\
 &= dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k R^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Gleicherweise finden wir für die Kräfte nach der y- und z-Achse

$$dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k R^2}{2} \right)$$

und

$$dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k R^2}{2} \right).$$

### § 34. Die magnetische Kraft auf einen langen Zylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet.

Wir nehmen an, wir hätten das eine Ende eines Zylinders in einem magnetischen Feld, etwa zwischen den zwei Polen eines Hufeisenmagnets (Fig. 23). Für die Kraft, welche der Magnet auf unseren Zylinder parallel zur x-Achse ausübt, erhalten wir nach den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen

$$\iiint dx \, dy \, dz \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k R^2}{2} \right) = \iint dy \, dz \left( \frac{k R_1^2}{2} - \frac{k R_0^2}{2} \right).$$

Da wir aber zur yz-Ebene alles symmetrisch haben, so sind auch die magnetischen Kräfte  $R_0$  und  $R_1$  einander gleich. Daher wirkt in der Richtung der x-Achse auf

unseren Zylinder keine mechanische Kraft, ebenso in der Richtung der  $y$ -Achse. Für die Kraft in der Richtung der  $z$ -Achse haben wir jedoch

$$\iint dx dy \left( \frac{k R''^2}{2} - \frac{k R'^2}{2} \right).$$

Dabei ist  $R'$  die magnetische Kraft, d. i. die Feldstärke, am Ende des Zylinders zwischen den Magnetpolen,  $R''$  jene am entgegengesetzten Ende. Diese sei gleich Null. Es bleibt dann bloß

$$- \iint \frac{k R'^2}{2} dx dy = - \frac{q k R'^2}{2},$$

wenn  $q$  der Querschnitt des Zylinders ist. Wir setzen hier voraus, daß das magnetische Feld am Ende des

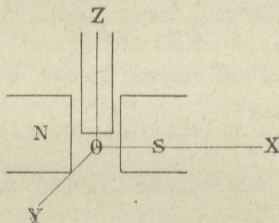


Fig. 23.

Zylinders an allen Punkten den konstanten Wert  $R'$  hat.  $\frac{q k R'^2}{2}$  ist also die mechanische Kraft, mit welcher

unser Zylinder in das Feld hineingezogen wird. Diese Kraft läßt sich mit der Wage bestimmen, so daß wir hier eine Methode haben, bei bekannter magnetischer Kraft  $R'$  die Magnetisierungszahl  $k$ , oder bei bekannter Magnetisierungszahl die Feldstärke  $R'$  zu finden.

### § 35. Kraftfunktion und Potential der magnetischen Kräfte.

Wir fanden (§. 33) für die Kraftkomponenten, welche ein magnetisches Feld auf ein Volumelement ausübt,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k R^2}{2} dx dy dz \right)$  usw. Wir können daher  $\frac{k R^2}{2} dx dy dz$  als die Kraftfunktion für ein Volumelement ansehen. Gleicherweise wie die Kraftfunktion können wir nun auch das Potential finden. Wir suchen es erst wieder für einen kleinen Magnet  $sn$  (Fig. 22). Das Potential im Punkt  $O$  sei  $V$ , dann haben wir in  $n$

$$V' = V + \frac{\partial V}{\partial x} \xi + \frac{\partial V}{\partial y} \eta + \frac{\partial V}{\partial z} \zeta,$$

in  $s$

$$V'' = V - \frac{\partial V}{\partial x} \xi - \frac{\partial V}{\partial y} \eta - \frac{\partial V}{\partial z} \zeta.$$

Das Potential auf unseren kleinen Magnet wird also

$$m V' - m V'' = \frac{\partial V}{\partial x} m \lambda \cos f + \frac{\partial V}{\partial y} m \lambda \cos g + \frac{\partial V}{\partial z} m \lambda \cos h$$

sein. Für das magnetische Moment  $m \lambda$  können wir nun wieder das Moment des Volumelements  $\mu dx dy dz$  einsetzen und erhalten so

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x} \mu \cos f + \frac{\partial V}{\partial y} \mu \cos g + \frac{\partial V}{\partial z} \mu \cos h \right) dx dy dz$$

$$= \left( \frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz$$

$$= -k \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

$$= -k R^2 dx dy dz.$$

Wir erhalten also das paradoxe Resultat, daß das Potential doppelt so groß ist als die Kraftfunktion. Das rührt daher, weil wir bei der Bildung der Kraftfunktion die Massen als konstant ansehen, was jedoch tatsächlich nicht der Fall ist, indem ja das magnetische Moment durch die Kraft selbst bedingt wird und sich mit dieser ändert. Während uns die Änderung der Kraftfunktion die Größe der mechanischen Kraft angibt, liefert uns die Änderung des Potentials die Änderung der gesamten Energie. Diese besteht in unserm Fall aber nicht bloß in Erzeugung kinetischer Energie, sondern es wird gleichzeitig Arbeit zur Erzeugung des magnetischen Moments in dem induzierten Körper benötigt. Diese Arbeit ist, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, ebenso groß wie die Änderung der kinetischen Energie des Körpers, weshalb das Potential auch doppelt so groß als die Kraftfunktion ausfallen muß.

### § 36. Die magnetische Molekularkraft.

Werden in einem Körper die ursprünglich vereinigten magnetischen Massen  $+m$  und  $-m$  durch die magnetische Kraft  $R$  getrennt, so wirkt auf  $+m$  die Kraft  $+mR$ , auf  $-m$  gleicherweise  $-mR$ . Ist die Entfernung, welche die beiden Massen dadurch erlangt haben,  $\lambda$ , so ist  $m\lambda R$  die Arbeit, welche bei der Trennung geleistet werden mußte. Das Differential der Arbeit bei konstanter Kraft ist also  $R d(m\lambda)$ . Für ein Volumelement ergibt dies (§ 28)

$$R d(m\lambda) = R d\mu dx dy dz.$$

Da

$$R = \frac{\mu}{k},$$

so

$$R d\mu dx dy dz = \frac{\mu d\mu}{k} dx dy dz.$$

Für die Volumeinheit ist daher die zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft nötige Arbeit

$$\int_0^{\mu} \frac{\mu d\mu}{k} = \frac{\mu^2}{2k}$$

und für das Volumelement

$$\frac{\mu^2}{2k} dx dy dz = \frac{k R^2}{2} dx dy dz,$$

da ja  $\mu = kR$  ist. Wir erhalten also in der Tat die Arbeit zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft genau so groß wie die Kraftfunktion.

### § 37. Magnetische Energie.

Wir fanden für den Arbeitswert  $A$  eines Systems elektrischer Punkte (§ 17) die Gleichung

$$A = \sum \frac{mV}{2},$$

wobei wir unter  $m$  eine elektrische Masse verstanden, unter  $V$  das Potential, unter welchem sie steht. Diesen Ausdruck können wir unmittelbar auf den Magnetismus übertragen und so den Arbeitswert oder die Energie eines magnetischen Systems bestimmen. Wir nehmen an, daß wir es mit einem System von permanenten Magneten und verschiedenen anderen Körpern zu

tun haben, in welchen die Magnete freie magnetische Massen hervorrufen. Unter permanenten Magneten verstehen wir dabei magnetische Massen, welche bei einer Änderung des Systems ihre Größe nicht ändern, wie es etwa bei Stahlmagneten annähernd der Fall ist. Wir können sonach die gesamte magnetische Energie in drei Teile zerlegen. Den ersten liefert die Wirkung der fixen Magnete auf die freien magnetischen Massen der Körper. Der zweite besteht in der Wirkung der freien Massen auf sich selbst. Der dritte Teil ist jene Arbeit, welche zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft in den Körpern erforderlich ist.

Freie magnetische Massen haben wir nur an der Oberfläche der Körper. Ihre Dichte nennen wir  $\sigma$ . Ist das Potential, welches die fixen Magnete erzeugen,  $V$ , so gibt uns

$$\iint V \sigma \, dO = \iiint \left( \frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx \, dy \, dz$$

den ersten Teil des magnetischen Arbeitswerts. Daß diese Gleichung wirklich besteht, können wir leicht ermitteln. Die partielle Integration ergibt nämlich

$$\begin{aligned} & \iiint \left( \frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx \, dy \, dz \\ &= \iint (V \alpha \, dy \, dz + V \beta \, dx \, dz + V \gamma \, dx \, dy) \\ & - \iiint V \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß wir nur auf der Oberfläche freie magnetische Massen haben, wird

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Das zweite Glied unseres Integralausdrucks fällt also weg, und es bleibt nur

$$\begin{aligned} & \iint (V \alpha \, dy \, dz + V \beta \, dx \, dz + V \gamma \, dx \, dy) \\ &= \iint V (\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h) \, dO = \iint V \sigma \, dO \\ & (\S 28), \text{ womit unsere Behauptung bewiesen ist.} \end{aligned}$$

Wir haben nun als zweiten Bestandteil der magnetischen Energie das Potential der freien magnetischen Massen auf sich selbst, multipliziert mit der jeweiligen freien Masse, zu nehmen. Dieses Potential sei  $U$ . Wir erhalten somit für die Energie

$$\frac{1}{2} \iint U \sigma \, dO = \frac{1}{2} \iiint \left( \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma \right) dx \, dy \, dz.$$

Hier muß der Faktor  $\frac{1}{2}$  stehen, weil wir bei der Bildung des Arbeitswerts gerade so wie beim Arbeitswert eines elektrischen Systems jede Masse zweimal in Rechnung gezogen haben. Beim ersten Teil war der Faktor  $\frac{1}{2}$  nicht nötig, weil wir dort das Potential der fixen Massen auf die freien, aber nicht umgekehrt einführen.

Die zur Überwindung der magnetischen Molekularkraft nötige Arbeit ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\iiint \frac{\mu^2}{2k} \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2k} \iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Dabei ist

$$\frac{\alpha}{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

und  $-\frac{\partial V}{\partial x}$  die Kraft der fixen Magnete,  $-\frac{\partial U}{\partial x}$  die rückwirkende Kraft der freien Magnetismen. Die Summe der drei maßgebenden Bestandteile liefert uns nun die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= \iiint \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{2k} \right) \alpha \right. \\ &\quad + \left( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\beta}{2k} \right) \beta \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\gamma}{2k} \right) \gamma \right] dx dy dz \\ &= \iiint \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \alpha + \dots \right] dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint \left( \frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Es ist somit die Gesamtenergie nichts anderes als die Hälfte der Energie, welche die Wirkung der fixen Magnete auf die freien magnetischen Massen erzeugt.

Bei der Erzeugung der Momente  $\alpha, \beta, \gamma$  sind in erster Linie die Kräfte  $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$  maßgebend. Moment und erzeugende Kraft haben immer das-

selbe Vorzeichen, folglich ist die Größe  $\frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma$  und damit die gesamte Energie negativ.

Bringen wir die Körper in unendliche Entfernung von den permanenten Magneten, so wird das Potential und damit der magnetische Arbeitswert  $E$  Null. Nähern sich nun die Körper, so muß Energie gewonnen werden. Es ist dies die kinetische Energie, welche die Körper durch die Anziehung der Magnete erlangen. Tatsächlich ist auch der Differentialausdruck für die Energie

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma \right) dx dy dz$$

nichts anderes als die von uns bereits früher (§§ 33, 35) gefundene Kraftfunktion.

---

## Elektromagnetismus.

### § 38. Der elektrische Strom — Oersteds Entdeckung — Ampères Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart.

Halten wir zwei Punkte eines Leiters auf konstantem elektrischen Potential, so strömt beständig Elektrizität von dem Punkt höheren Potentials zu jenem tieferen, wir haben einen konstanten elektrischen Strom.

Oersted machte die Entdeckung, daß eine Magnetenadel durch einen nahe vorüberfließenden elektrischen Strom abgelenkt wird. Die Ablenkung befolgt nach Ampère folgende Regel: Denken wir uns im Strom schwimmend, das Gesicht der Nadel zugewendet, so weicht der Nordpol nach links ab.

Befindet sich unter einem unendlich langen geradlinigen Strom eine Magnetnadel, so wird sie mit einer Kraft abgelenkt, welche verkehrt proportional ihrer Entfernung vom Strom ist. Dieses Gesetz fanden Biot und Savart. Die nähere Untersuchung ergibt, daß das magnetische Feld, welches von einem geradlinigen Strom erzeugt wird, kreisförmige Kraftlinien besitzt, die mit ihrer Ebene senkrecht auf dem Strom stehen, während ihr Mittelpunkt im Strom selbst liegt. Zwei Ströme, welche also unendlich nahe, aber in entgegengesetzter Richtung und mit gleicher Stärke nebeneinander laufen, werden auf eine Magnetnadel keine Kraft ausüben, da sie sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben müssen.

### § 39. Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol.

Wir machen die Annahme, daß sich die Wirkung eines Stroms aus der Wirkung der einzelnen Stromelemente berechnen läßt. Stellen wir den Lauf des Stroms durch eine Kurve dar, das heißt, haben wir einen linearen Stromleiter, so können wir ein Kurvenelement als die Lage eines Stromelements ansehen. Denken wir uns einen Kreisstrom, in dessen Mitte sich eine kleine Magnetnadel befindet. Die Wirkung eines Stromelements wird nun proportional seiner Länge  $ds$  sein und einer Funktion des Radius  $r$  des Kreises. Wir können letztere durch  $f(r)$  darstellen. Da alle Stromelemente vom Magnet gleichweit entfernt sind, so ist  $f(r)$  konstant, und die Wirkung des gesamten Kreisstroms auf die Nadel wird  $2\pi r f(r)$ , da  $2\pi r$  der Umfang des Kreises ist. Die Messung ergibt nun, daß diese Kraft

$$2 \pi r f(r) = \frac{k}{r}$$

ist, wobei  $k$  eine Konstante bedeutet. Es ist somit

$$f(r) = \frac{k}{2 \pi} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

In unserm Fall steht jedes Stromelement senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen Magnetpol und Strom. Ist das nicht der Fall, sondern schließt diese Gerade mit dem Stromelement im allgemeinen den Winkel  $\vartheta$  ein, so kommt nur die Wirkung der senkrechten Stromkomponente  $ds \sin \vartheta$  in Betracht. Die Kraft, welche somit von einem Stromelement auf einen Magnetpol ausgeübt wird, wird erstens der Masse des Magnetpols  $m$ , ferner der Länge der senkrechten Komponente des Stromelements  $ds \sin \vartheta$ , der Stärke des Stroms  $i$  direkt und dem Quadrat der Entfernung des Elements vom Pol  $r$  verkehrt proportional sein. Die Kraft ist somit

$$dS = K \frac{m ds \sin \vartheta}{r^2} i,$$

wobei unter  $K$  die entsprechende Proportionalitätskonstante zu verstehen ist.

Die Stromstärke bestimmt sich durch die Menge der Elektrizität, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert.

#### § 40. Die Tangentenbussole — Maß der Stromstärke.

Wir bringen einen kreisförmigen Stromleiter in den magnetischen Meridian; in die Mitte des Kreises eine in einer Horizontalebene bewegliche Magnetnadel. Wird der Leiter von keinem Strom durchflossen, so stellt sich die Nadel in die Richtung des magnetischen Meridians  $AB$  (Fig. 24). Fließt ein Strom, so sucht

er die beiden Pole in entgegengesetzter Richtung senkrecht zur Strombahn zu bewegen. Es wirkt also auf die Nadel ein Drehungsmoment, und es wird Gleichgewicht sein, wenn dieses Drehungsmoment gleich jenem des Erdmagnetismus wird. Letzteres ist  $HM \sin \varphi$ , unter  $H$  die Horizontalintensität des Erdmagnetismus und unter  $M$  das magnetische Moment der Nadel verstanden. Ersteres ist  $S \lambda \cos \varphi$ , wenn  $S$  die magnetische Kraft des Stromkreises auf einen Pol ist. Im Fall des Gleichgewichts der Nadel muß nun

$$HM \sin \varphi = S \lambda \cos \varphi$$

oder

$$S = \frac{HM}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi$$

sein. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber die ablenkende Kraft des Stroms

$$S = K m i \int \frac{\sin \vartheta}{r^2} ds.$$

Für unsern Fall ist für alle Stromelemente  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , also  $\sin \vartheta = 1$ . Ebenso ist der Radius des Kreises  $r$  konstant, und es bleibt

$$S = \frac{K m i}{r^2} \int ds,$$

wobei

$$\int ds = 2 \pi r$$

der Umfang des Kreises ist. Es ergibt sich somit

$$S = K \frac{2 \pi m i}{r} = \frac{HM}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi$$

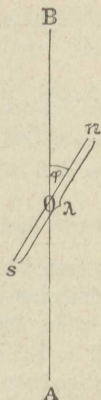


Fig. 24.

oder

$$i = \frac{H M r}{2 \pi m \lambda K} \operatorname{tg} \varphi .$$

Es ist nun das magnetische Moment der Nadel

$$M = m \lambda ,$$

so daß wir

$$i = \frac{H r}{2 \pi K} \operatorname{tg} \varphi$$

setzen können. Falls wir uns also über die Konstante  $K$  einigen, haben wir in unserm Fall eine Methode, die Größe der Stromstärke  $i$  zu bestimmen. Wählen wir  $K = 1$ , so sagen wir, wir haben die Stromstärke in absolutem Maß angegeben. Für die Praxis ist diese Einheit zu groß, man hat deshalb den 10. Teil davon als Einheit angenommen und sie ein Ampère genannt. Ein Strom von 10 Ampère entspricht somit der absoluten Stromeinheit. Um die Stromstärke in Ampère auszudrücken, haben wir also  $K = \frac{1}{10}$  zu setzen.

Der von uns zur Bestimmung der Stromstärke benützte Apparat besteht also aus einem kreisförmigen Draht, in dessen Mitte sich eine kleine Magnetnadel befindet. Die Größe

$$\frac{H r}{2 \pi K} = A$$

ist eine Konstante. Die Stromstärke ist sonach durch

$$i = A \operatorname{tg} \varphi$$

bestimmt, d. h. sie ist proportional der Tangente des Ausschlagwinkels der Nadel. Man nennt daher einen derartigen Apparat auch eine Tangentenbussole und  $A$  ihren Reduktionsfaktor. Führen wir den Strom

zweimal im Kreis herum, so wird die ablenkende Kraft die doppelte, bei  $n$  maligem Umlauf die  $n$  fache. Der Reduktionsfaktor ist dann natürlich  $\frac{A}{n}$ . Wir können so die Empfindlichkeit einer Tangentenbussole bedeutend steigern.

#### § 41. Potential eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol — Vektorpotential.

Wir fanden für die Kraft, welche ein Stromelement auf einen Magnetpol ausübt (§ 39), die Größe

$$dS = \frac{i m \sin \vartheta \, ds}{r^2}.$$

Die Richtung der Kraft ist senkrecht auf der Ebene, in welcher das Stromelement und der Magnetpol liegen. Sie bilde mit den Achsen eines Koordinatensystems die Winkel  $\lambda, \mu, \nu$ . Es sind dann die Komponenten der Kraft  $dS$

$$d\alpha = \frac{i m \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \lambda,$$

$$d\beta = \frac{i m \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \mu,$$

$$d\gamma = \frac{i m \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \nu.$$

Verbinden wir die Endpunkte des Stromelements mit dem Magnetpol, so erhalten wir ein Dreieck von der Grundlinie  $r$  und der Höhe  $ds \sin \vartheta$ .

$$r \, ds \sin \vartheta = 2 \Delta$$

ist daher der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Wir können somit auch

$$d\alpha = \frac{im}{r^3} \cdot 2\Delta \cos\lambda$$

schreiben, wobei  $2\Delta \cos\lambda$  der doppelte Flächeninhalt der Projektion unseres Dreiecks auf die  $yz$ -Ebene ist. Wir wollen die Koordinaten des Magnetpols  $a, b, c$  nennen, die des Anfangspunkts unseres Elements  $x, y, z$ ; die des Endpunkts sind somit  $x + dx, y + dy, z + dz$ . Die doppelte Fläche der Projektion des Dreiecks auf die  $yz$ -Ebene ist daher

$$2\Delta \cos\lambda = (b - y) dz - (c - z) dy,$$

und es wird

$$d\alpha = \frac{im}{r^3} [(b - y) dz - (c - z) dy].$$

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben finden wir ferner

$$d\beta = \frac{im}{r^3} [(c - z) dx - (a - x) dz],$$

$$d\gamma = \frac{im}{r^3} [(a - x) dy - (b - y) dx].$$

Da

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2, \quad (14)$$

so ist

$$\frac{b - y}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right)$$

usw. Unsere Gleichungen werden daher

$$d\alpha = -im \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right) dz + im \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{r} \right) dy$$

usw. Durch Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= -im \int \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right) dz + im \int \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{r} \right) dy \\ &= -im \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{dz}{r} + im \frac{\partial}{\partial c} \int \frac{dy}{r}\end{aligned}$$

Wir wollen nun

$$i \int \frac{dx}{r} = A, \quad i \int \frac{dy}{r} = B, \quad i \int \frac{dz}{r} = C \quad (15)$$

eingeführen und anstatt  $m$  die Masseneinheit setzen. Es bestehen dann die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b}, \quad \beta = \frac{\partial C}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial c}, \quad \gamma = \frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a}. \quad (16)$$

Existiert ein Potential  $V$ , so daß  $\alpha = -\frac{\partial V}{\partial a}$  usw. wird, dann muß

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial b} = 0 \quad (17)$$

sein usw. Wir haben nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial b} &= \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial c} - \frac{\partial^2 B}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} \\ &= \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} - \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} \right).\end{aligned}$$

Nach der Bedeutung von  $C = i \int \frac{dz}{r}$  ist die Summe

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = 0,$$

wenn der Magnetpol nicht im Strom selbst liegt, da dann (§ 5)

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

ist. Die Summe

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} \\ &= i \int \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) dx + \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right) dy + \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{r} \right) dz \right] \\ &= -i \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dz \right] \\ &= -i \int d \left( \frac{1}{r} \right) = i \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung (17) wird also nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{konst.}$$

ist. Da nach der Erfahrung jeder konstante Strom ein geschlossener ist, für welchen wegen des mit dem Anfangswert zusammenfallenden Endwerts von  $r$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0$$

ist, so ist obige Bedingung immer erfüllt, d. h. es existiert immer ein Potential.

Liegt der Magnetpol im Strom selbst, so können wir unseren Leiter nicht mehr als linear auffassen. Die Stromstärke wird dann

$$i = q D,$$

wenn wir  $D$  die Dichte des Stroms,  $q$  den Querschnitt des Leiters nennen. Ferner wird

$$C = i \int \frac{dz}{r} = \int \frac{D q dz}{r} = \int \frac{D q}{r} \cdot \frac{dz}{ds} ds.$$

Wir können

$$D \frac{dz}{ds} = w$$

die Komponente der Stromdichte parallel zur z-Achse nennen. Ebenso haben wir parallel zur x- und y-Achse die Komponenten der Stromdichte

$$u = D \frac{dx}{ds}, \quad v = D \frac{dy}{ds}.$$

Ferner kann das Volumelement  $q ds$  durch  $dx dy dz$  ersetzt werden. Es wird daher

$$C = \iiint \frac{w}{r} dx dy dz.$$

Dieser Ausdruck hat die Form des Potentials für Kräfte, welche verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirken, und wir wissen (§ 6), daß dann

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = -4\pi w$$

ist. Daher werden für diesen Fall auch unsere obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial \beta}{\partial c} - \frac{\partial \gamma}{\partial b}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial \gamma}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial c}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial \alpha}{\partial b} - \frac{\partial \beta}{\partial a}. \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichungen geben also die Beziehung zwischen den Stromkomponenten und den magnetischen Kräften, welche auf den Magnetpol wirken.

Es sei noch erwähnt, daß man die Ausdrücke A, B, C als die Komponenten einer Größe auffassen kann, die den Namen Vektorpotential führt.

## § 42. Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte.

Ein kleiner ebener geschlossener Strom liege um den Anfangspunkt eines Koordinatensystems in der  $yz$ -Ebene. Seine Koordinaten seien  $x, y, z$ , die eines Magnetpols  $a, b, c$ . Folglich ist

$$r^2 = a^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

da ja  $x = 0$  ist. Die Entfernung des Magnetpols vom Ursprung  $O$  sei  $R$ , also

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Wir wollen nun die Ausdrücke für  $A, B, C$  nach den Gleichungen (15) bilden. Dabei haben wir den Vorteil, daß wir  $\frac{1}{r}$  nach dem Taylorschen Lehrsatz

in eine Reihe entwickeln können, von welcher wir nur die ersten Glieder in Betracht zu ziehen brauchen, da wir ja  $y$  und  $z$  als sehr klein annehmen. Wir haben daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) y + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \right) z \\ &= \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{R} \right) y - \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{R} \right) z. \end{aligned}$$

Alle höheren Glieder können wir vernachlässigen. Daraus folgt

$$A = i \int \frac{dx}{r} = 0,$$

weil  $x = 0$  ist, ferner

$$B = \frac{i}{R} \int dy - i \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{R} \right) \int y dy - i \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{R} \right) \int z dy.$$

Da wir über einen geschlossenen Strom integrieren, so ist

$$\int dy = \int y dy = 0;$$

hingegen ist

$$\int z \, dy = -f,$$

wenn wir unter  $f$  die von unserem Strom umflossene Fläche verstehen, indem wir den im Sinn des Uhrzeigers fließenden Strom, von der positiven  $x$ -Richtung aus betrachtet, als positiv ansehen. Wir erhalten daher

$$B = if \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{R} \right), \quad C = -if \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{R} \right),$$

wobei  $C$  gerade so wie  $B$  gebildet wird. Diese Ausdrücke wollen wir nun in die Gleichungen (16) einsetzen. Es ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = if \left[ \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left( \frac{1}{R} \right) \right] \\ &= -if \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( \frac{1}{R} \right), \end{aligned}$$

da ja

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left( \frac{1}{R} \right) = 0$$

ist. Gleicherweise ergibt sich

$$\beta = -if \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \left( \frac{1}{R} \right), \quad \gamma = -if \frac{\partial^2}{\partial a \partial c} \left( \frac{1}{R} \right).$$

Setzen wir nun

$$if \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{R} \right) = V,$$

so wird

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial a}, \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial b}, \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial c}.$$

Wir können sonach  $V$  als das Potential des Kreisstroms auf den Magnetpol auffassen. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{R} \right) = - \frac{a}{R^3},$$

daher

$$V = - \frac{if a}{R^3}.$$

Dieselbe Formel haben wir nun auch für das Potential eines kleinen Magnets (§ 26) erhalten, welcher in der  $x$ -Achse im Ursprung  $O$  liegt. Nur haben wir dort

$$-if = M$$

gesetzt. Wenn wir also unseren kleinen geschlossenen Strom durch eine magnetische Platte vom magnetischen Moment  $M = -if$  ersetzen, so haben wir in der Wirkung auf den Magnetpol gar nichts geändert. Das negative Vorzeichen ist nur durch die entgegengesetzte Lage der Pole bedingt. Hat die Platte die Dicke  $\delta$  und die Flächendichte  $\sigma$ , so ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\sigma \delta f = if$$

das magnetische Moment. Daraus folgt also

$$i = \sigma \delta.$$

Dieses Resultat läßt sich nun auf einen beliebigen geschlossenen Strom übertragen. Wir können uns nämlich die von einem Strom umschlossene Fläche in sehr viele kleine Flächen zerlegt denken. Alle diese kleinen Flächen sollen von einem Strom  $i$  in derselben Richtung umflossen werden. Man sieht dann ohne weiteres, daß sich die Ströme im Innern der Fläche aufheben, da die Grenze von je zwei benachbarten Flächenstücken

zweimal vom Strom, und zwar in entgegengesetzter Richtung, durchlaufen wird. Es bleibt also nur der Randstrom übrig. Die kleinen umströmten Flächen können wir aber alle durch magnetische Platten von der Flächendichte  $\sigma$  und der Dicke  $\delta$  ersetzen, was so zu wählen ist, daß  $\sigma \delta = i$  wird. Welche Gestalt wir dabei der vom Strom begrenzten Fläche geben, ist völlig gleichgültig.

### § 43. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol.

Wir denken uns eine kreisförmige Scheibe (Fig. 25) in der  $yz$ -Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung

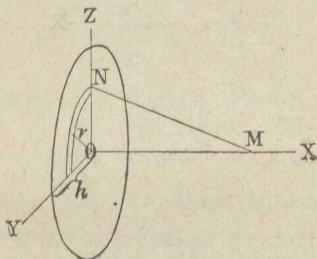


Fig. 25.

des Koordinatensystems. Ihre Flächendichte sei  $\sigma$ , der Radius  $h$ . Im Punkt  $M$  der  $x$ -Achse befinde sich ein Magnetpol. Das Potential auf ihn wird sein (§ 7)

$$V = \int_0^h \frac{2\pi\sigma r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \left[ 2\pi\sigma \sqrt{x^2 + r^2} \right]_0^h \\ = 2\pi\sigma (\sqrt{x^2 + h^2} - x).$$

Dieses Resultat wollen wir nun auf eine magnetische Platte von der Dicke  $\delta$  ausdehnen, welche wir so lagern, daß sie mit der negativen Seite in der  $yz$ -Ebene (Fig. 26), mit der positiven links davon ist. Das Potential der rechten Seite auf  $M$  ist also

$$V_- = -2\pi\sigma[\sqrt{h^2 + x^2} - x],$$

das der linken

$$V_+ = 2\pi\sigma[\sqrt{h^2 + (x + \delta)^2} - (x + \delta)],$$

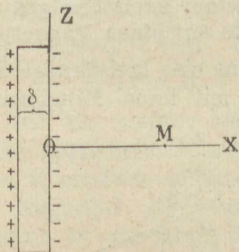


Fig. 26.

das Gesamtpotential somit

$$\begin{aligned} V &= V_+ + V_- \\ &= 2\pi\sigma[\sqrt{h^2 + (x + \delta)^2} - x - \delta - \sqrt{h^2 + x^2} + x] \\ &= 2\pi\sigma\delta\left[\frac{\sqrt{h^2 + (x + \delta)^2} - \sqrt{h^2 + x^2}}{\delta} - 1\right]. \end{aligned}$$

Da  $\delta$  eigentlich unendlich klein ist, so können wir den ersten Teil in der Klammer als den Differentialquotienten

$$\frac{d\sqrt{h^2 + x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

ansehen. Wir erhalten somit

$$V = 2 \pi \sigma \delta \left( \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1 \right).$$

Setzen wir hier  $\sigma \delta = i$ , so haben wir das Potential eines Kreisstroms auf den Punkt M. Die Kraft wird nun

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= -2 \pi i \left[ \frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{x^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= -\frac{2 \pi i h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun  $x = 0$ , so wird

$$X = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2 \pi i}{h}.$$

Das ist tatsächlich dieselbe Formel, welche wir bereits früher für die Wirkung eines Kreisstroms auf einen in seiner Mitte befindlichen Magnetpol fanden (§ 40).

#### § 44. Ersatz einer begrenzten magnetischen Platte durch eine unendliche — magnetische Arbeit.

Nach §§ 7, 10 und 43 ist die Kraft, welche eine unendliche Ebene mit der Flächendichte  $\sigma$  auf die Masseneinheit ausübt, unabhängig von der Entfernung des Punktes von der Ebene gleich  $2 \pi \sigma$ . Haben wir demnach eine unendliche ebene magnetische Platte mit den Belegungen  $+\sigma$  und  $-\sigma$ , so ist ihre Wirkung auf einen magnetischen Massenpunkt gleich Null. Mit einer solchen Platte bringen wir nun eine begrenzte Platte von derselben magnetischen Dichte so zur Deckung,

daß die entgegengesetzten Magnetismen aufeinanderfallen (Fig. 27). Die Wirkung dieses Systems auf den Punkt  $M$  ist natürlich gerade so wie die der begrenzten Platte allein, da ja die unendliche Platte keine Wirkung hervorbringt. Das System selbst stellt jetzt aber eine unendliche magnetische Platte mit einem Loch von der Größe und Form der begrenzten Platte dar, da sich die zusammenfallenden positiven und negativen Magnetismen in ihrer Wirkung aufheben. Es kann somit eine magnetische endliche Platte durch eine unendliche mit einem Loch von der Form, Größe und Flächendichte  $\sigma$  der endlichen Platte ersetzt werden, wenn gleichzeitig das Vorzeichen der Flächenbelegungen in das entgegengesetzte verwandelt wird.

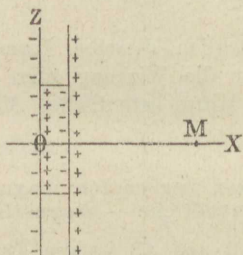


Fig. 27.

Durch diesen Satz sind wir in der Lage, auch dann einen geschlossenen Strom durch eine magnetische Platte zu ersetzen, wenn wir die Wirkung auf einen Punkt wissen wollen, der in die Platte selbst hineinfallen würde. Wir brauchen die begrenzte Platte dann nur mit einer unendlichen zu vertauschen, so daß der Punkt ins Loch zu liegen kommt.

Führen wir eine magnetische Masse durch ein magnetisches Feld, so müssen die magnetischen Kräfte Arbeit leisten. Beschreibt die magnetische Masse eine geschlossene Bahn, so ist die Gesamtarbeit gleich Null, da die Masse dabei ja wieder auf den Anfangswert ihrer potentiellen Energie zurückgebracht wird (§ 17). Teilen wir demnach irgendeine geschlossene Bahn in zwei Teile, so muß die Arbeit der magnetischen Kräfte in dem einen Teil gleich groß, aber entgegengesetzt bezeichnet der Arbeit im anderen Teil sein.

Wir bringen nun in unmittelbare Nähe der positiven Oberfläche unserer magnetischen Platte, durch welche wir einen geschlossenen Strom ersetzen, die magnetische Masseneinheit und gehen mit ihr um den Rand der Platte herum bis auf die negative Seite, so werden die magnetischen Kräfte dieselbe Arbeit leisten, als wenn wir mit der Masseneinheit direkt durch die Platte hindurch von der positiven zur negativen Seite gehen. Letztere Arbeit ist aber leicht zu bestimmen. Von der positiven Flächeneinheit werden nämlich im ganzen  $4\pi\sigma$  Kraftlinien ausgehen (§ 16). Der Symmetrie halber werden  $2\pi\sigma$  Kraftlinien nach außen, ebensoviel nach innen gerichtet sein. Dasselbe ist bei der negativen Seite der Platte der Fall; da dort die Kraftlinien aber negativ zu zählen sind, so addieren sie sich zu den positiven im Innern der Platte und ergeben eine Liniendichte oder, was dasselbe ist, eine Kraft  $4\pi\sigma$ , die von der positiven zur negativen Fläche gerichtet ist. Der Abstand beider Flächen ist  $\delta$ . Bringen wir somit die Masseneinheit von der positiven zur negativen Seite, so leisten die magnetischen Kräfte die Arbeit  $4\pi\sigma\delta$ . Dieselbe Arbeit müssen sie aber auch leisten, wenn wir die magnetische Masseneinheit von der einen Seite der Platte um deren Rand herum nach der anderen führen.

## § 45. Das Solenoid.

Eine Reihe paralleler, gleich groß und in gleichen Abständen voneinander befindlicher Kreisströme, wie man sie angenähert in einer Drahtspule besitzt, nennt man ein Solenoid. Wollen wir die Wirkung eines solchen Solenoids auf einen außerhalb liegenden Punkt kennen lernen, so brauchen wir jede Drahtwindung nur durch eine kreisförmige magnetische Platte zu ersetzen. Gehen  $n$  Windungen auf die Längeneinheit, so hat eine solche Platte die Dicke  $\delta = \frac{1}{n}$  und somit nach § 42 eine Flächendichte

$$\sigma = \frac{i}{\delta} = n i.$$

Da im Innern des Solenoids die zusammenfallenden positiven und negativen Magnetismen sich in ihrer Wirkung nach außen aufheben, so wirkt das Solenoid auf einen äußeren Punkt wie ein gleich großer Zylinder, dessen Endflächen mit magnetischer Masse von der Dichte  $n i$  bez.  $-n i$  belegt sind.

Wollen wir die Wirkung auf einen Punkt im Innern kennen, so brauchen wir nach § 44 jeden Kreisstrom nur durch eine unendliche ebene magnetische Platte mit einem kreisförmigen Loch zu ersetzen. Auf jener Seite, von welcher besehen der Strom im Sinne des Uhrzeigers fließt, hat nach dem Früheren die positive Belegung  $\sigma = n i$  zu sein. Es heben sich dann wieder sämtliche Magnetismen mit Ausnahme jener der beiden Endflächen auf. Die Achse des Solenoids falle mit der  $x$ -Achse eines Koordinatensystems zusammen, von rechts besehen fließe der Strom im Sinne des Uhrzeigers. Es haben dann unsere unendlichen Flächen rechts positiven, links negativen Magnetismus. Die Wirkung

einer solchen unendlichen Platte auf einen Punkt in der Achse des Solenoids läßt sich ersetzen durch eine unendliche Platte ohne Loch, welche eine Kraft  $2\pi\sigma$  ausübt, und eine Kreisscheibe, die mit dem Loch zusammenfällt und mit Magnetismen von gleicher Dichte, aber entgegengesetztem Vorzeichen belegt ist.

Denken wir uns ein sehr langes Solenoid, so kann die Wirkung der Kreisscheiben auf einen Punkt im Innern, der weit von den Endflächen entfernt ist, vernachlässigt werden, und es bleiben nur die Kräfte der beiden unendlichen Ebenen. Diese suchen die positive Masseneinheit nach links zu bewegen, jede mit der Kraft  $2\pi\sigma$ . Die Kraft im Solenoid ist demnach

$$X = -4\pi\sigma = -4\pi ni.$$

Es ist somit die Kraft unabhängig von der Lage des Punkts, und die Kraftlinien müssen parallel zur x-Achse verlaufen. Das Solenoid ist demnach ein bequemes Mittel, um ein homogenes magnetisches Feld herzustellen, dessen Stärke direkt proportional der Windungszahl per Längeneinheit und der Stromstärke ist.

#### § 46. Der Stokes'sche Satz — der curl.

Wir werden im folgenden den von Stokes gefundenen Satz

$$\begin{aligned} \int \left( X \frac{da}{ds} + Y \frac{db}{ds} + Z \frac{dc}{ds} \right) ds &= \iint \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c} \right) \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b} \right) \cos \gamma \right] dS \end{aligned}$$

benötigen. Die Komponenten  $X, Y, Z$  einer Vektorgröße  $K$  sind Funktionen der Koordinaten  $a, b, c$  einer Fläche, deren Randkurve  $s$  ist, während  $\alpha, \beta, \gamma$  Winkel sind, welche die Normale zum Flächenelement  $dS$

mit den drei Achsen einschließt. Wir wollen den Beweis dafür mit Zuhilfenahme der Mechanik erbringen.  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  seien die Kraftkomponenten, welche auf einen Punkt wirken. Beschreibt der Punkt eine geschlossene Kurve, so ist die Arbeit, welche dabei die Kräfte leisten,

$$\int K \cos \vartheta ds = \int (X da + Y db + Z dc).$$

Wir wollen nun zuerst die Formel für die Arbeit aufstellen, welche die Kräfte leisten, wenn ein Punkt

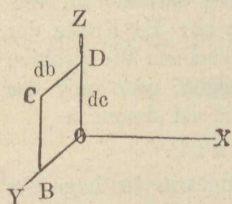


Fig. 28.

in der  $yz$ -Ebene (Fig. 28) das unendlich kleine Rechteck OBCD umkreist. In irgendeinem Punkt von der Ordinate  $b$  der unendlich kleinen Strecke OB ist die Kraft

$$Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial b} b, \text{ wenn sie im Ur-}$$

sprung O den Wert  $Y_0$  hat. Auf

der Strecke BC haben wir analog  $Z = Z'_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c$ . Es

läßt sich aber die Kraft  $Z'_0$  im Punkte B darstellen durch  $Z'_0 = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} db$ , folglich  $Z = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} db + \frac{\partial Z}{\partial c} c$ ,

wobei es gleichgültig ist, ob wir das zur Strecke BC oder OD gehörige  $\frac{\partial Z}{\partial c}$  einführen, da wegen des unend-

lich kleinen  $c$  wir hierbei nur unendlich Kleines höherer Ordnung vernachlässigen. In gleicher Weise finden wir, daß auf der Strecke von D nach C die Kraft

$$Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial c} dc + \frac{\partial Y}{\partial b} b \text{ und auf der Strecke OD die}$$

Kraft  $Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c$  wirkt. Legt nun der Punkt den Weg

OBCDO zurück, so leisten die ihn angreifenden Kräfte die Arbeit

$$\begin{aligned} dA = & \int_0^{db} \left( Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial b} b \right) db + \int_0^{dc} \left( Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} db + \frac{\partial Z}{\partial c} c \right) dc \\ & - \int_0^{db} \left( Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial c} dc + \frac{\partial Y}{\partial b} b \right) db - \int_0^{dc} \left( Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c \right) dc. \end{aligned}$$

Die einfache Auswertung der Integrale ergibt das Resultat

$$dA = \left( \frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c} \right) db dc = \left( \frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c} \right) dS_x = F \cdot dS_x.$$

Analog ergibt sich

$$G \cdot dS_y = \left( \frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a} \right) dS_y,$$

$$H \cdot dS_z = \left( \frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b} \right) dS_z,$$

wenn wir mit  $dS_x$ ,  $dS_y$ ,  $dS_z$  Flächenelemente senkrecht zur x- bez. y- und z-Achse verstehen, während  $F$ ,  $G$ ,  $H$  die Arbeiten sind, welche zur Umkreisung der Flächeneinheit einer Ebene benötigt werden, die zur x- bzw. y- oder z-Achse senkrecht steht.

Es sei nun OABC (Fig. 29) ein Elementartetraeder, und es durchlaufe der Punkt der

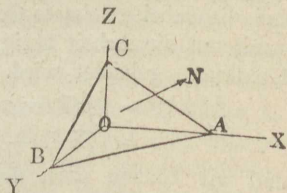


Fig. 29.

Reihe nach die Dreiecke OAB, OBC, OCA. Er hat dann die Strecken OA, OB und OC zweimal in entgegengesetzter Richtung zurückgelegt. Die dabei geleistete Arbeit ist also gleich Null, und es bleibt nur

die Arbeit übrig, welche vom Durchlaufen des Dreiecks ABC herrührt. Nach dem Früheren ist diese Arbeit

$$\begin{aligned} & F dS_x + G dS_y + H dS_z \\ &= F dS \cos \alpha + G dS \cos \beta + H dS \cos \gamma \\ &= (F \cos \alpha + G \cos \beta + H \cos \gamma) dS = J dS, \end{aligned}$$

wenn wir mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Winkel bezeichnen, welche die Normale  $N$  zur Fläche ABC mit den Koordinatenachsen einschließt.

$$J = F \cos \alpha + G \cos \beta + H \cos \gamma$$

ist somit die Arbeit, welche beim Umkreisen der Flächeneinheit der Fläche ABC  $= dS$  geleistet wird.

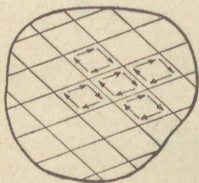


Fig. 30.

Eine geschlossene Kurve sei gleichzeitig die Randkurve einer beliebigen Fläche (Fig. 30), die wir in ihre Elemente auflösen wollen. Ein Punkt umkreise in derselben Richtung ein jedes Flächenelement. Er durchläuft dann jede Begrenzungsline eines Flächenelements im Innern

der Fläche zweimal in entgegengesetzter Richtung, so daß die dabei geleistete Gesamtarbeit Null ist. Es bleibt somit nur die Arbeit übrig, welche beim Umkreisen der Randkurve geleistet wird. Dieselbe ist also

$$\begin{aligned} \iint J dS &= \iint (F \cos \alpha + G \cos \beta + H \cos \gamma) dS \\ &= \int (X da + Y db + Z dc), \end{aligned}$$

und wir können nach dem Früheren diese Gleichung umwandeln in

$$\begin{aligned} \int (X da + Y db + Z dc) &= \iiint \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b} \right) \cos \gamma \right] dS. \end{aligned}$$

Das ist aber der Satz von Stokes, den wir somit bewiesen haben. Wir können ihn mit den von uns gebrauchten Bezeichnungen am kürzesten in der Form

$$\int K \cos \vartheta \, ds = \iint J \, dS$$

schreiben. Die Größe  $J$  mit den Komponenten  $F, G, H$  ist eine Funktion der Komponenten  $X, Y, Z$  der Größe  $K$  und somit in letzter Linie eine Funktion dieser Größe  $K$  selbst. Man hat daher der Funktion  $J$  auch einen bestimmten Namen gegeben und sie mit „rot  $K$ “ (Rotation, Rotor) oder, wie dies jetzt fast ausschließlich geschieht, mit „curl  $K$ “ bezeichnet. Das Wort curl läßt sich mit „Locke“ und „Quirl“ wiedergeben.

#### § 47. Unterschied zwischen geschlossenem Strom und magnetischer Platte — magnetische Arbeit bei einer Umkreisung des Stroms.

Dieselbe Arbeit, welche die magnetischen Kräfte leisten, wenn die Masseneinheit sich von der positiven zur negativen Seite einer magnetischen Platte begibt, leisten auch die magnetischen Kräfte eines geschlossenen Stroms. Während jedoch beim Durchsetzen der Platte die Arbeit wieder vollkommen aufgehoben wird, ist dies im magnetischen Feld des Stroms nicht der Fall. Wir haben nämlich zu beachten, daß ein geschlossener Strom durch eine magnetische Platte nur insofern ersetzt werden kann, als wir den Raum außerhalb der Platte in Betracht ziehen. Führen wir demnach die magnetische Masseneinheit einmal vollständig um den Stromleiter herum, so leisten die magnetischen Kräfte des Stroms dabei immer die Arbeit  $4\pi\sigma\delta$  oder, da jetzt  $\sigma\delta = i$  gesetzt werden kann, so ist die Arbeit bei einem Umlauf immer gleich  $4\pi i$ . Selbstverständlich hat der Umlauf in dem Sinne zu geschehen, in welchem die Kraftlinien den Leiter umkreisen. Denken wir uns den Strom gegen

uns fließend, so umkreisen die magnetischen Kraftlinien, von uns aus betrachtet, in entgegengesetztem Sinn der Uhrzeigerbewegung den Leiter. Die Gestalt der geschlossenen Bahn, in welcher wir die magnetische Masseneinheit um den elektrischen Strom herumführen, ist nach dem Früheren natürlich ganz gleichgültig.

Nennen wir die Stärke des magnetischen Feldes  $\mathfrak{H}$ , so ist nach § 46 die Arbeit bei einem Umlauf

$$\int \mathfrak{H} \cos \vartheta ds = \iint \text{curl} \mathfrak{H} \cdot dS.$$

Für unsern speziellen Fall ergibt sich also die Gleichung

$$-4\pi i = \iint \text{curl} \mathfrak{H} \cdot dS.$$

Das negative Vorzeichen führen wir ein, weil wir den Strom positiv rechnen, wenn er uns entgegenfließt, und einen Umlauf positiv ansehen, wenn er im Sinn des Uhrzeigers erfolgt.

#### § 48. Die Wirkung elektrischer Ströme aufeinander.

Zwei geschlossene Ströme A und B (Fig. 31) können

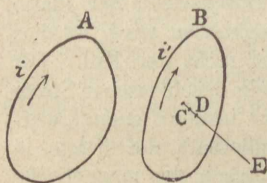


Fig. 31.

als zwei magnetische Lamellen (§ 42) angesehen werden. Eine Gerade CDE soll die Lamelle B in C und D senkrecht durchschneiden. CD ist also die Dicke der Lamelle. In C sei das Potential, welches A entwirft,  $V$ , und ein Flächenelement  $dS'$  in C besitze die

magnetische Masse  $\sigma dS'$ . Der Arbeitswert (§ 37) dieser Masse ist daher  $V \sigma dS'$ . In D haben wir das Potential

$V + \frac{\partial V}{\partial \nu} d\nu$ , wenn wir mit  $d\nu$  die Strecke CD bezeichnen.

Der Arbeitswert der zugehörigen Masse  $-\sigma dS'$  ist

daher —  $\left(V + \frac{\partial V}{\partial \nu} d\nu\right) \sigma dS'$ , folglich der Gesamtarbeitswert —  $\frac{\partial V}{\partial \nu} d\nu \sigma dS'$ .

Beachten wir, daß  $\sigma d\nu = i'$  die Stromstärke ist (§ 42), so wird der Arbeitswert für die ganze Lamelle

$$W = -i' \iint \frac{\partial V}{\partial \nu} \cdot dS'.$$

—  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  ist nun nichts anderes als die Kraft, welche in der Richtung CD wirkt. Wir können deren Komponenten X, Y, Z bestimmen und erhalten, wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel der Richtung der Kraft mit den Koordinatenachsen sind,

$$W = i' \iint (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) dS',$$

wobei also nach § 41

$$X = i \left[ \frac{\partial}{\partial c} \int \frac{dy}{r} - \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{dz}{r} \right],$$

$$Y = i \left[ \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{dz}{r} - \frac{\partial}{\partial c} \int \frac{dx}{r} \right],$$

$$Z = i \left[ \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{dx}{r} - \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{dy}{r} \right]$$

ist, so daß wir schließlich erhalten

$$\begin{aligned} W = & -ii' \iiint \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dz}{ds} - \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dy}{ds} \right] \cos \alpha \right. \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dx}{ds} - \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dz}{ds} \right] \cos \beta \\ & \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dx}{ds} \right] \cos \gamma \right\} ds dS'. \end{aligned}$$

Nach dem Stokesschen Satz (§ 46) können wir diese Gleichung aber umformen in

$$W = -ii' \iint \frac{1}{r} \left( \frac{dx}{ds} \cdot \frac{da}{ds'} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{db}{ds'} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dc}{ds'} \right) ds ds'.$$

Wenn wir unter  $\varepsilon$  den Winkel verstehen, welchen die beiden Stromelemente  $ds$  und  $ds'$  miteinander einschließen, erhalten wir schließlich die Gleichung

$$W = -ii' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds',$$

und wir nennen  $W$  das elektrodynamische Potential der beiden geschlossenen Ströme  $i$  und  $i'$  aufeinander.

Man kann dieses Potential auch für die Wirkung eines Stroms auf sich selbst bilden. Es wird dann den Wert

$$U = -\frac{i^2}{2} \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'$$

erhalten. Hier sind  $ds$  und  $ds'$  zwei beliebige Stromelemente des geschlossenen Stroms  $i$ . Es wird somit bei der Integration jedes Element zweimal in Rechnung gesetzt, weshalb wir auch von der gewöhnlichen Potentialformel nur die Hälfte nehmen dürfen.

#### § 49. Die Gesetze von Ohm und Joule — Arbeit des Stroms.

Wir erfuhren im § 38, daß ein elektrischer Strom entsteht, wenn zwei Punkte eines Leiters sich auf verschiedenem elektrischen Potential befinden. Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Stromstärke  $i$  proportional dem Potentialunterschied  $e$  ist, den man deshalb auch die elektromotorische Kraft nennt. Ferner wird sie auch durch die Gestalt und Natur des Leiters bedingt, weshalb Ohm die Beziehung der Stromstärke zur elektromotorischen Kraft in die Formel

$$i = \frac{e}{w}$$

zusammenfaßt, wobei die Konstante  $w$  der Widerstand genannt wird.

Hat der Strom keine Arbeit zu leisten, so findet er ein Äquivalent in der Erwärmung des Leiters, und es ist nach den Versuchen von Joule die im Leiter in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge

$$W = w i^2 = e i.$$

Das Produkt aus Stromstärke und elektromotorischer Kraft ist somit eine auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit, ein Effekt.

Haben wir in die Strombahn eine Zersetzungszelle eingeschaltet, so muß der Strom chemische Arbeit leisten. Diese ist erfahrungsgemäß wiederum pro Sekunde proportional der Stromstärke. Der gesamte Effekt kann daher dargestellt werden durch

$$e i = w i^2 + p i,$$

wobei  $p$  ein entsprechender Proportionalitätsfaktor ist. Daraus folgt

$$e - p = w i.$$

$p$  hat also ebenfalls die Dimension einer elektromotorischen Kraft. Man nennt es die elektromotorische Gegenkraft der Zersetzungszelle oder die galvanische Polarisierung.

Wird der Strom durch eine galvanische Kette hervorgerufen, so wird die ganze Arbeit des Stroms durch den Verbrauch von chemischer Energie in den Elementen erzeugt. Die verbrauchte chemische Energie ist somit immer gleich  $e i$ , wobei  $e$  die elektromotorische Kraft der Batterie ist.

### § 50. Der Induktionsstrom.

Verändern wir die Lage eines Magnets zu einem Stromleiter, so wird das Potential des Stroms auf den Magnet ein anderes, d. h. wir haben bei der Veränderung Arbeit zu leisten. Diese Arbeit findet ihr Äqui-

vaient in einer vorübergehenden Änderung des Stroms im Leiter. Derartig entstehende Ströme nennt man Induktionsströme.

Wir können auf veränderliche Ströme die Gleichung des vorhergehenden Paragraphen anwenden, wenn wir sie auf eine unendlich kleine Zeit beziehen. Wir erhalten sonach

$$e i dt = w i^2 dt + p i dt.$$

$p i dt$  ist die Arbeit des Stroms. Besteht sie in magnetischer Arbeit, so können wir sie  $dA$  schreiben, und unsere Gleichung wird

$$e i dt = w i^2 dt + dA,$$

wobei  $dA$  die Änderung des Potentials bedeutet. Dieses ist gegeben durch

$$U = iV$$

(§ 42), also

$$dA = -dU = -i dV$$

und

$$e i dt = w i^2 dt - i dV,$$

was wir wieder in die Form des Ohmschen Gesetzes kleiden können:

$$e + \frac{dV}{dt} = w i, \quad (19)$$

wobei  $\frac{dV}{dt}$  also nichts anderes ist als die elektromotorische Kraft, welche durch die Veränderung der gegenseitigen Lage von Strom und Magnet erzeugt wird. Ist in unserem Stromkreis ursprünglich keine elektromotorische Kraft da, so wird in Gleichung (19)  $e = 0$ , also

$$\frac{dV}{dt} = w i,$$

was integriert

$$V_1 - V_0 = w \int_0^t i \, dt$$

ergibt. Damit lassen sich alle Fälle der Induktion darstellen, ob sie nun von bewegten Magneten oder Stromleitern ausgeht.

### § 51. Das ballistische Galvanometer.

Die Stärke der Induktionsströme mißt man mit Galvanometern von sehr geringer Dämpfung und großer Schwingungsdauer, sogenannten ballistischen Galvanometern. Die Kräfte, welche auf die Magnetnadel vom magnetischen Moment  $M$  einwirken, sind der Erdmagnetismus und der Strom. Jener liefert das Drehungsmoment  $-HM \sin \varphi$ , wenn  $H$  die Horizontalkomponente ist (§§ 25 und 27); der Strom hingegen erzeugt das Moment  $G M i \cos \varphi$ , wobei wir  $G$  die Galvanometerkonstante nennen. Der Drehungswinkel  $\varphi$  ist also durch die Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -HM \sin \varphi + G M i \cos \varphi$$

gegeben.  $K$  ist das Trägheitsmoment der Nadel (Bd. I, § 28).

Der Induktionsstrom sei von so kurzer Dauer, daß die Nadel während dieser Zeit ihre Ruhelage kaum verläßt, so daß wir  $\varphi = 0$  setzen können. Es vereinfacht sich dann die Gleichung in

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = G M i.$$

Durch Integration erhalten wir

$$K \left[ \frac{d\varphi}{dt} \right]_0^T = G M \int_0^T i dt.$$

Für die Zeit  $t = 0$  ist die Geschwindigkeit der Nadel ebenfalls Null, wir haben also  $\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = 0$ ; hingegen nach der Zeit  $T$ , nach welcher der Strom wieder aufhört, soll die Nadel die Winkelgeschwindigkeit  $\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_T = \alpha$  haben. Somit ist

$$K \alpha = G M \int_0^T i dt$$

Sind die Ausschläge der Nadel nicht groß, so folgt für deren Bewegung nach Verlauf des Induktionsstroms die Gleichung

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MH\varphi$$

(§ 27). Diese Gleichung läßt sich genau so wie die Pendelgleichung (Bd. I, § 9) behandeln. Wir erhalten als Lösung

$$\varphi = A \sin \gamma t,$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{dt} = A \gamma \cos \gamma t.$$

Dabei ist

$$\gamma = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{MH}{K}}.$$

Nun ist für  $t = 0$   $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha$ , also

$$\alpha = \gamma A$$

und

$$\varphi = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma t,$$

folglich der größte Ausschlag der Nadel

$$\varphi_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{GM}{K} \int_0^T i dt.$$

Damit ist uns aber alles gegeben, das  $\int_0^T i dt$  auszuwerten.

## § 52. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand.

Der Erdinduktor besteht seinem Wesen nach aus einer kreisförmigen Drahtrolle, welche um einen Durchmesser drehbar ist. Wird sie gedreht, so wird das magnetische Feld der Erde Ströme induzieren, die wir, wenn die Drehung rasch erfolgt und nur kurze Zeit andauert, nach der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methode messen können. Für das Potential eines Kreisstroms auf einen Magnetpol  $m$  fanden wir (§ 42)

$$U = iV = \frac{ifam}{R^3}.$$

Dabei ist

$$\frac{a}{R} = \cos \alpha,$$

wenn wir unter  $\alpha$  den Winkel der Normalen zur

Stromebene mit der Verbindungsgeraden Strom-Magnetpol verstehen.  $\frac{m}{R^2}$  ist aber nichts anderes als die magnetische Intensität  $J$  an der Stelle des Stromkreises. Wir können daher das Potential auch schreiben

$$U = iV = iJf \cos \alpha$$

oder

$$V = Jf \cos \alpha .$$

Diese Formel können wir nun für das Potential des Erdmagnetismus auf den Erdinduktor anwenden. Derselbe sei um eine vertikale Achse drehbar. Die Fläche des Induktors sei  $F$  und  $\psi$  der Winkel, welchen die Normale zur Fläche  $F$  mit der Richtung der Horizontalkomponenten  $H$  einschließt. Dann ist

$$V = FH \cos \psi ,$$

folglich

$$\frac{dV}{dt} = wi = -FH \sin \psi \frac{d\psi}{dt} ,$$

wenn  $w$  der Widerstand der Induktorrolle ist. Diese Gleichung ergibt durch Integration

$$V_1 - V_0 = w \int i dt = FH (\cos \psi_1 - \cos \psi_0) .$$

Wählen wir nun  $\psi_1$  und  $\psi_0$  so, daß der Induktor eine halbe Drehung macht und daß zu Beginn als auch zum Schluß der Bewegung die Ebene des Induktors senkrecht zum magnetischen Meridian steht, so ist  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_0 = \pi$ , folglich  $\cos \psi_1 - \cos \psi_0 = 2$  und

$$w \int i dt = 2FH .$$

Stellen wir die Drehungsachse des Induktors horizontal, so erhalten wir auf gleiche Weise

$$w \int i' dt = 2FV' ,$$

wenn  $V'$  die Vertikalkomponente der gesamten magnetischen Intensität ist. Wir erhalten nun durch ein ballistisches Galvanometer Ausschläge, welche den Werten  $\int i dt$  und  $\int i' dt$  proportional sind. Sie seien  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Dann wird

$$2 FH = C \varphi_1, \quad 2 FV' = C \varphi_2$$

und

$$\frac{V'}{H} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \operatorname{tg} J',$$

wenn wir unter  $J'$  die Inklination verstehen (§ 25).

Nach den vorhergehenden Paragraphen ist der größte Ausschlag des ballistischen Galvanometers

$$\varphi_1 = \frac{GM}{\gamma K} \int i dt = \frac{2 \pi G}{H \tau} \int i dt,$$

da ja

$$\gamma = \frac{2 \pi}{\tau} = \sqrt{\frac{HM}{K}}$$

ist. Wir haben somit

$$\int i dt = \frac{H \tau}{2 \pi G} \varphi_1;$$

nach dem Obigen aber auch

$$\int i dt = \frac{2 FH}{w},$$

folglich

$$\frac{2 FH}{w} = \frac{H \tau}{2 \pi G} \varphi_1,$$

$$w = \frac{4 \pi FG}{\varphi_1 \tau}.$$

In dieser Formel können wir alle Größen der rechten Seite in absolutem Maß bestimmen. Wir haben somit hier ein Mittel, den elektrischen Widerstand einer Leitung in absolutem Maß auszudrücken.

### § 53. Das elektrostatische und elektromagnetische Maßsystem.

Wir sind in der Lage, alle uns aufstoßenden physikalischen Größen durch die absoluten Einheiten der Länge, Masse und Zeit auszudrücken, und wir nennen dann die so erhaltenen neuen Einheiten die abgeleiteten. Die Formel, welche uns die Zusammensetzung einer abgeleiteten Einheit aus den absoluten ergibt, nennen wir die Dimension der abgeleiteten Einheit. So wird z. B. eine Kraft dargestellt durch das Produkt aus einer Masse  $[M]$  und einer Beschleunigung. Die Beschleunigung ist aber eine Geschwindigkeit, dividiert durch eine Zeit  $[T]$ , die Geschwindigkeit wiederum eine Länge  $[L]$ , geteilt durch eine Zeit. Die Dimension der Kraft ist also  $\frac{[LM]}{[T^2]}$ , was man jedoch gewöhnlich in der Form  $[LMT^{-2}]$  schreibt.

Die Kraft, mit welcher sich zwei Elektrizitätsmengen  $e$  und  $e'$  anziehen, ist gegeben durch

$$K = \frac{ee'}{r^2}$$

(§ 1). Drücken wir dies in Form einer Dimensionsgleichung aus, so haben wir

$$[LMT^{-2}] = \frac{[e^2]}{[L^2]}$$

oder

$$[e] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

Das elektrostatische Potential  $\Psi$  hat die Dimension der Größe  $\frac{e}{r}$  (§ 2), also

$$[\Psi] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}];$$

hingegen hat die Kapazität  $[C]$  die Dimensionen der Größe  $\frac{e}{\Psi}$  (§ 13), also

$$[C] = [L].$$

Wir haben diese Dimensionen alle aus dem elektrostatischen Kraftgesetz abgeleitet; wir sagen: wir haben die Größen in elektrostatischem Maß gemessen.

Zwei magnetische Massen ziehen sich nach demselben Gesetz an wie elektrische. Wir haben für die Anziehungskraft

$$K = \frac{m m'}{r^2}.$$

Folglich erhalten wir für die Dimension einer magnetischen Masse ebenfalls den Ausdruck

$$[m] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Wir fanden für die Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol (§ 39) die Kraft

$$dS = \frac{m ds \sin \vartheta}{r^2} i,$$

oder

$$i = \frac{dS r^2}{m ds \sin \vartheta},$$

daher

$$[i] = \frac{[L M T^{-2} L^2]}{[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} L]} = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$

da  $\sin \vartheta$  eine dimensionslose Zahl ist.

Die Stromstärke ist nichts anderes als die Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert. Das Produkt aus Stromstärke und Zeit gibt uns daher die Elektrizitätsmenge an, und wir finden somit für deren Dimensionen

$$[e] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}].$$

Die durch den Strom in der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge  $w i^2$  (§ 49) hat die Dimension einer Energie, dividiert durch eine Zeit, also einer Kraft multipliziert mit einem Weg, geteilt durch eine Zeit, folglich

$$[w i^2] = [L^2 M T^{-3}],$$

woraus folgt

$$[w] = \frac{[L^2 M T^{-3}]}{[L M T^{-2}]} = [L T^{-1}].$$

Für die Dimension der elektromotorischen Kraft  $E$  haben wir somit (§ 48)

$$[E] = [w i] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Vergleichen wir die in elektrostatischem und die in elektromagnetischem Maß gemessenen Größen, so zeigt sich die auffallende Erscheinung, daß ein und dieselbe Größe, nach den verschiedenen Systemen gemessen, verschiedene Dimension hat. So fanden wir in elektromagnetischem Maß für die Dimension der Elektrizitätsmenge

$$[e] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}],$$

in elektrostatischem Maß hingegen

$$[e] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Das Verhältnis der letzteren zur ersteren ist

$$V = [L T^{-1}],$$

hat also die Dimension einer Geschwindigkeit. Messen wir eine Elektrizitätsmenge einmal mit der Coulombschen Drehwage, das andere Mal mit dem Galvanometer, so erhalten wir sie in den zwei verschiedenen Systemen gemessen, und es zeigt sich, daß ihr Verhältnis

$$V = 3.10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

d. i. gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

Wie die Elektrizitätsmengen stimmen auch die übrigen elektrischen Größen, die Energie ausgenommen, in beiden Systemen gemessen, in ihren Dimensionen nicht überein, und zwar ist das Verhältnis natürlich immer eine Potenz der Lichtgeschwindigkeit  $V$ .

#### § 54. Absolute und praktische Einheiten.

Für praktische Zwecke sind die absoluten Einheiten in der Regel unbequem, da sie entweder sehr große oder sehr kleine Zahlen ergeben. Man hat daher für die Bedürfnisse des alltäglichen Lebens andere Einheiten gewählt. Es ist uns bereits das praktische Maß der Stromstärke, das Ampère (§ 40), bekannt, welches  $\frac{1}{10}$  der absoluten Stromeinheit ist. Die absolute Einheit des Widerstandes ist so klein, daß man das  $10^9$ fache als praktische Einheit gewählt und mit dem Namen Ohm belegt hat. Analogerweise führt das  $10^8$ fache der absoluten Einheit der elektromotorischen Kraft den Namen Volt, damit Ampère, Ohm und Volt ebenfalls in solchen Verhältnissen zueinander stehen, daß auch für sie das Ohm'sche Gesetz

$$i = \frac{e}{w}$$

aufrecht bleibt.

Für die Energie per Sekunde

$$ei = wi^2$$

haben wir als praktisches Maß das Watt oder Volt-Ampère, welches somit gleich  $10^7$  absoluten Einheiten ist. Die Elektrizitätsmenge, welche in der Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters von der Stromstärke eines Ampère geschickt wird, nennen wir ein Coulomb.

Leiten wir die eine Belegung eines Kondensators zur Erde ab, und erzielen wir durch die Ladung von einem Coulomb auf der zweiten Belegung gerade die Spannung eines Volts, so hat der Kondensator die Kapazität von einem Farad. Dieses besitzt also  $\frac{10^{-1}}{10^8} = 10^{-9}$  absolute Einheiten. Das Verhältnis der Maßeinheiten in den beiden Systemen ist für die Elektrizitätsmenge  $V$  (§ 53), für das Potential  $\frac{1}{V}$ , für die Kapazität somit  $V^2$ . Ein Farad hat also  $\frac{V^2}{10^9}$  elektrostatische Einheiten. Es ist dies eine so große Einheit, daß man in der Regel als praktische Einheit den millionten Teil, das Mikrofarad, benützt.

### § 55. Der Extrastrom.

Ein von einem Strom durchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung ein magnetisches Feld, dessen Stärke proportional der Stromstärke  $i$  ist (§ 40). Das Potential eines magnetischen Felds auf einen Strom ist der Stromstärke proportional. Das vom Strom  $i$  erzeugte magnetische Feld besitzt daher auf den Strom  $i$  ein Potential, welches  $i^2$  proportional ist. Wir können es somit

$$U = Ai^2$$

setzen, wenn  $A$  eine Konstante ist. Ändert sich die Stromstärke während der Zeit  $dt$ , so ändert sich das Potential um

$$A di^2 = 2 A i di,$$

und die Energiegleichung ergibt

$$E i dt = w i^2 dt + 2 A i di,$$

oder

$$E = w i + 2 A \frac{di}{dt}.$$

Der Ausdruck  $C = 2 A$  läßt sich, da er nicht nur von der Form der Strombahn, sondern auch von der Umgebung abhängt, in der Regel mathematisch nur sehr schwer, meist gar nicht bestimmen. Um so leichter ist es, ihn mit Zuhilfenahme der Gleichung

$$E = w i + C \frac{di}{dt}$$

experimentell zu finden. Als Lösung dieser Gleichung haben wir

$$i = A + B e^{\alpha t}, \quad (20)$$

wenn wir unter  $A$ ,  $B$  und  $\alpha$  Konstanten verstehen. Wir finden dann nämlich

$$E = w A + w B e^{\alpha t} + C B \alpha e^{\alpha t}.$$

Denken wir uns etwa, wir hätten ein konstantes galvanisches Element von der elektromotorischen Kraft  $E$ , so ist  $E$  natürlich eine konstante Größe, d. h. es muß von der Zeit unabhängig sein. Das ist aber nach unserer Gleichung nur möglich, wenn

$$w B + C B \alpha = 0$$

ist, woraus

$$\alpha = -\frac{w}{C}$$

folgt. Ferner ist  $E = wA$  oder  $A = \frac{E}{w}$ . Es wird somit nach Gleichung (20) die Stromstärke

$$i = \frac{E}{w} + Be^{-\frac{w}{C}t}.$$

Wir wollen nun zu einer bestimmten Zeit  $t = 0$  den Strom schließen. Dann ist für  $t = 0$  auch  $i = 0$ , also auch  $\frac{E}{w} + B = 0$  oder  $B = -\frac{E}{w}$ . Somit ergibt sich

$$i = \frac{E}{w} \left( 1 - e^{-\frac{w}{C}t} \right).$$

In dem Augenblick, wo wir den Strom schließen, ist also die Stromstärke Null und steigt dann mit der Zeit an. Da  $\frac{w}{C}$  fast immer eine sehr große Zahl ist, so geht

das Anwachsen sehr rasch, da dann das Glied  $e^{-\frac{w}{C}t}$  sehr rasch Null wird. Es ist dann der Strom konstant

$i = \frac{E}{w}$ . Wir haben also beim Schließen des Stroms

einen Gegenstrom  $-\frac{E}{w}e^{-\frac{w}{C}t}$ , welchen wir den Extrastrom nennen.

Öffnen wir nun den Strom, so ist unmittelbar nach der Unterbrechung die elektromotorische Kraft nicht mehr vorhanden. Es gilt dann also

$$0 = wi + C \frac{di}{dt}.$$

Wir haben jetzt als Lösung

$$i = Be^{-\frac{w}{C}t}.$$

Für  $t = 0$  ist nun  $i = \frac{E}{w}$ , daher  $B = \frac{E}{w}$ , folglich

$$i = \frac{E}{w} e^{-\frac{w}{C} t}.$$

Wir haben also auch bei der Öffnung einen Extrastrom, welcher gleich gerichtet ist dem ursprünglich vorhandenen Strom.

Beim Öffnen haben wir die volle Stromstärke im Leiter, beim Schließen ist sie Null. Wir erhalten daher beim Öffnen einen intensiven elektrischen Funken, beim Schließen hingegen nur einen sehr schwachen. Die Größe  $C$  nennt man den Koeffizienten der Selbstinduktion.

## § 56. Dämpfung einer schwingenden Magnetnadel.

Die Bewegung einer Magnetnadel besteht in einer Drehung um ihren Aufhängepunkt. Es muß somit ihr Trägheitsmoment  $K$  multipliziert mit der Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  gleich der Summe aller Drehungsmomente sein (Bd. I, § 28). Der Erdmagnetismus übt auf die Magnetnadel das Drehungsmoment  $-HM \sin\varphi$  aus (§ 25). Die Magnetnadel hänge in der Mitte eines kreisförmigen geschlossenen Stromleiters. Für das Potential eines solchen Stroms auf einen Magnetpol fanden wir (§ 43)

$$U = 2\pi i \left( \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1 \right).$$

Die Entfernung der beiden Pole  $+m$  und  $-m$  unserer Nadel sei  $\lambda$ , und zwar sei sie so klein, daß wir an-

nehmen können, die Wirkung des Stroms auf die Pole sei gerade so, als lägen sie in der x-Achse (Fig. 32). Die y-Achse habe die Richtung des magnetischen Meridians. Für den Südpol S ist dann die Abszisse

$$x = \frac{\lambda}{2} \sin \varphi ,$$

für den Nordpol

$$x = -\frac{\lambda}{2} \sin \varphi .$$

Das Potential des Stroms auf den Magnet wird sich daher zusammensetzen aus dem Potential  $U_+$  auf den

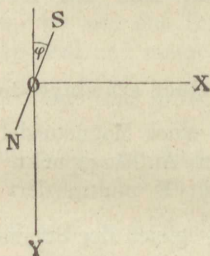


Fig. 32.

Nordpol und  $U_-$  auf den Südpol. Nach dem Obigen ist nun

$$U_+ = 2 \pi i \left( \frac{-\frac{\lambda}{2} \sin \varphi}{h} - 1 \right) m ,$$

$$U_- = 2 \pi i \left( \frac{\frac{\lambda}{2} \sin \varphi}{h} - 1 \right) \cdot -m ,$$

folglich

$$W = U_+ + U_- = -\frac{2\pi i M}{h} \sin \varphi,$$

da ja

$$m\lambda = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Nadel ist.

$$-\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{2\pi i M}{h} \cos \varphi$$

ist somit das Drehungsmoment, welches der Strom auf die Nadel ausübt. Somit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -HM \sin \varphi + \frac{2\pi i M}{h} \cos \varphi. \quad (21)$$

Setzen wir  $W = Vi$ , also

$$V = -\frac{2\pi M}{h} \sin \varphi$$

so gilt für unsern Leiter, in welchem sonst keine elektromotorische Kraft wirkt (§ 50),

$$0 = wi - \frac{dV}{dt} = wi + \frac{2\pi M}{h} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Daraus folgt

$$i = -\frac{2\pi M}{hw} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Diesen Wert führen wir nun in Gleichung (21) ein und erhalten demnach

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -HM \sin \varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w} \cos^2 \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Wir setzen nun voraus, daß die Ausschlagswinkel  $\varphi$  der Nadel nur klein seien. Dann können wir  $\sin \varphi = \varphi$ ,  $\cos \varphi = 1$ , folglich

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{HM}{K} \varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w K} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

setzen. Das ist aber die Gleichung einer gedämpften schwingenden Bewegung, wie sie etwa ein Pendel im widerstehenden Mittel ausführt (Bd. I, § 10). Da die Größen  $H$ ,  $M$ ,  $K$  nach bekannten Methoden bestimmbar sind, so haben wir auch hier ein Mittel, aus der Abnahme der Schwingungsweite den Widerstand  $w$  unseres Stromleiters in absolutem Maß zu finden.

### § 57. Induktionswirkung zweier Stromleiter aufeinander.

Wir fanden in § 48 als Potential zweier Ströme aufeinander

$$W = -ii' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = -ii' V.$$

Das Potential eines jeden Leiters auf sich selbst ist hingegen

$$-\frac{i^2}{2} \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = -\frac{U i^2}{2}$$

und

$$-\frac{i'^2}{2} \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = -\frac{U' i'^2}{2},$$

wobei aus den Gleichungen ohne weiteres hervorgeht, was wir unter  $V$ ,  $U$  und  $U'$  zu verstehen haben.

Wir wollen nun die Stromkreise während der unendlich kleinen Zeit  $dt$  beobachten und alle Vorgänge in Rechnung ziehen. Die gesamte Energieänderung wird wiedergegeben sein durch  $Ei dt + E'i' dt$ , wenn wir unter  $E$  und  $E'$  die elektromotorischen Kräfte in

den beiden Kreisen verstehen. Diese Energieänderung wird sich erstens als Wärmewirkung zeigen — diese ist  $w i^2 dt + w' i'^2 dt$  —, ferner als Änderung des Potentials der Ströme auf sich selbst  $d\left(\frac{U i^2}{2}\right) + d\left(\frac{U' i'^2}{2}\right)$  und gegeneinander  $d(V i i')$ , schließlich als geleistete mechanische Arbeit, wenn die Ströme ihre gegenseitige Lage als auch die Gestalt ändern, was sich darstellen läßt durch  $i i' dV + \frac{i^2}{2} dU + \frac{i'^2}{2} dU'$ .

Wir erhalten somit die Gleichung

$$E i dt + E' i' dt = w i^2 dt + w' i'^2 dt + d\left(\frac{U i^2}{2}\right) + d\left(\frac{U' i'^2}{2}\right) + d(V i i') + i i' dV + \frac{i^2}{2} dU + \frac{i'^2}{2} dU'.$$

Führen wir die Differentiation durch und dividieren wir alle Glieder durch  $dt$ , so bleibt uns

$$E i + E' i' = w i^2 + w' i'^2 + U i \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dU}{dt} + U' i' \frac{di'}{dt} + i'^2 \frac{dU'}{dt} + V i' \frac{di}{dt} + V i \frac{di'}{dt} + 2 i i' \frac{dV}{dt}.$$

Dabei haben wir also gleich die gleichartigen Glieder zusammengezogen. Wegen der vollständigen Symmetrie muß sich diese Gleichung in zwei, eine für  $E i$  und eine für  $E' i'$ , zerlegen lassen, welche der Form nach völlig übereinstimmen. Ein Blick über die Gleichung ergibt, daß dabei das letzte Glied  $2 i i' \frac{dV}{dt}$  zu halbieren ist. Das Resultat ist somit

$$Ei = wi^2 + Ui \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dU}{dt} + Vi \frac{di'}{dt} + ii' \frac{dV}{dt},$$

$$E'i' = w'i'^2 + U'i' \frac{di'}{dt} + i'^2 \frac{dU}{dt} + Vi' \frac{di}{dt} + ii' \frac{dV}{dt}.$$

Dividieren wir die eine dieser Gleichungen durch  $i$ , die andere durch  $i'$ , so bleibt uns

$$E = wi + \frac{d}{dt}(Ui + Vi'), \quad (22)$$

$$E' = w'i' + \frac{d}{dt}(U'i' + Vi).$$

Man nennt diese Gleichungen auch manchmal die Grundgleichungen der elektrodynamischen Induktion.  $U$ ,  $U'$  und  $V$  sind die Induktionskoeffizienten,  $U$  und  $U'$  die Koeffizienten der Selbstinduktion,  $V$  jener der gegenseitigen Induktion.

Die Gleichungen (22) lassen sich in einfacher Weise durch folgende Überlegung gewinnen. Nach den §§ 16 und 52 können wir das Potential eines magnetischen Feldes auf einen geschlossenen Strom durch die Zahl  $N$  der magnetischen Kraftlinien definieren, welche die vom Strom umflossene Fläche durchsetzen. Die durch Induktion in dem Leiter erzeugte elektromotorische Kraft  $E$  ist dann gegeben durch die Änderung des Potentials oder der Zahl der Kraftlinien nach der Zeit, also

$$E = \frac{dN}{dt} = \frac{d(Ui)}{dt},$$

indem  $N$  proportional  $i$  ist. Werden durch einen zweiten Strom  $i'$  in der Fläche des ersten Stroms ebenfalls magnetische Kraftlinien erzeugt, so läßt sich deren Zahl analog durch  $V i'$  darstellen. Die Gesamtzahl der vom Strom  $i$  umschlossenen Kraftlinien ist also  $U i + V i'$ , ihre Änderung mit der Zeit daher

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} (U i + V i').$$

Die gesamte elektromotorische Kraft ist somit in Übereinstimmung mit den Gleichungen (22)

$$E = w i + \frac{d}{dt} (U i + V i').$$

Haben wir nur einen Stromkreis, ist also

$$E' = i' = V = U' = 0,$$

so bleibt nur

$$E = w i + \frac{d}{dt} (U i).$$

wenn sich die Strombahn nicht ändert, so geht diese Gleichung über in

$$E = w i + U \frac{di}{dt}.$$

Wir erhalten also in Übereinstimmung mit § 55 die Gleichung für den Extrastrom, wenn wir dort  $C = U$  setzen.

Die eingangs gegebene Form für die Induktionskoeffizienten gilt natürlich nur dann, wenn der um-

gebende Raum frei von magnetisierbaren Körpern ist. Ist dies nicht der Fall, so ändern sich die Gleichungen (22) ihrer Form nach zwar nicht, doch die Werte der Induktionskoeffizienten werden andere.

### § 58. Induktionsapparate — Transformatoren.

Wir denken uns zwei ineinander befindliche Drahtspulen, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert. Es ist dann ihre Selbstinduktion wie auch die gegenseitige von der Zeit unabhängig. In der einen Spule wirke die veränderliche elektromotorische Kraft  $E$ . Die Gleichungen (22) werden somit

$$\begin{aligned} E &= w i + U \frac{di}{dt} + V \frac{di'}{dt}, \\ 0 &= w' i' + U' \frac{di'}{dt} + V \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (23)$$

Es wird also der induzierte Strom  $i'$  lediglich durch die Änderung des primären Stroms  $i$  bestimmt werden.

Ist  $\frac{di}{dt} = 0$ , so folgt auch  $i' = 0$ .

Wir nehmen nun an, daß  $i$  eine rasche Änderung erfährt und dann wieder konstant bleibt. Es nimmt

also  $\frac{di}{dt}$  für kurze Zeit einen positiven oder negativen

Wert an, vorher und nachher ist  $i$  konstant, daher

$\frac{di}{dt} = 0$ . Über die Zeit  $\tau$  der Stromänderung wollen

wir unsere Gleichung integrieren, erhalten also

$$\int_0^{\tau} w' i' dt + U' \int_0^{\tau} \frac{di'}{dt} dt = -V \int_0^{\tau} \frac{di}{dt} dt,$$

oder

$$w' \int_0^{\tau} i' dt + U' (i'_{\tau} - i'_0) = -V (i_{\tau} - i_0).$$

Zu Beginn und zu Ende der Zeit  $\tau$  haben wir keinen Induktionsstrom, es ist daher  $i'_{\tau} = i'_0 = 0$ , folglich

$$w' \int_0^{\tau} i' dt = -V (i_{\tau} - i_0).$$

Wächst der Strom  $i$ , d. h. ist  $i_{\tau} > i_0$ , so wird der Induktionsstrom  $i'$  negativ sein; nimmt  $i$  hingegen ab, so ist  $i'$  positiv.  $i'$  wird um so größer ausfallen, je kleiner  $\tau$  wird, d. h. je rascher der Strom  $i$  sich ändert, und je größer die gegenseitige Induktion  $V$  ist. Es ist jetzt auch ein leichtes, den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion experimentell zu bestimmen, da wir ja alle übrigen Größen unserer Gleichung leicht messen können.

Wir nehmen nun an, es sei in der primären Leitung eine periodische elektromotorische Kraft vorhanden, also

$$E = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t.$$

Das heißt, die primäre Leitung wird von einem Wechselstrom durchflossen. Es genügt dann für die Gleichungen (23) die Lösung

$$i = a \sin \alpha t + b \cos \alpha t,$$

$$i' = a' \sin \alpha t + b' \cos \alpha t.$$

Führen wir nämlich diese Werte in die Gleichungen ein, so erhalten wir

$$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t = w a \sin \alpha t + w b \cos \alpha t$$

$$+ U a \alpha \cos \alpha t - U b \alpha \sin \alpha t + V a' \alpha \cos \alpha t$$

$$- V b' \alpha \sin \alpha t$$

und

$$0 = w'a' \sin \alpha t + w'b' \cos \alpha t + U'a' \alpha \cos \alpha t \\ - U'b' \alpha \sin \alpha t + Va \alpha \cos \alpha t - Vb \alpha \sin \alpha t.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn die Glieder mit  $\sin \alpha t$  für sich einander gleich sind und ebenso jene mit  $\cos \alpha t$ . Wir können dann durch  $\sin \alpha t$  bez.  $\cos \alpha t$  kürzen und erhalten die vier Gleichungen

$$A = wa - Ub \alpha - Vb' \alpha, \\ B = wb + Ua \alpha + Va' \alpha, \\ 0 = w'a' - U'b' \alpha - Vb \alpha, \\ 0 = w'b' + U'a' \alpha + Va \alpha.$$

Diese vier Gleichungen reichen hin, um die Größen  $a, b, a', b'$  zu bestimmen, womit auch der Verlauf des primären und sekundären Stroms gegeben ist.

Daraus ergeben sich mehrere wichtige Erscheinungen. Da  $A, B, a, b, a', b'$  im allgemeinen voneinander verschieden sind, so besitzt sowohl der primäre als auch der sekundäre Strom gegenüber der elektromotorischen Kraft eine Phasenverschiebung, während die Stärke beider Ströme auch noch durch die Schwingungszahl, die Widerstände und die Induktionskoeffizienten bestimmt wird, was alles bei der Konstruktion von Induktionsapparaten und Transformatoren in Betracht zu ziehen ist.

### § 59. Oszillierende Entladung eines Kondensators.

Verbinden wir die beiden Belegungen eines Kondensators mit einer Funkenstrecke, zu welcher die Elektrizität durch einen sehr großen Widerstand, etwa eine nasse Schnur, geleitet wird, so sehen wir bei einer

Entladung nur einen einzigen Funken; ist hingegen der Widerstand der Zuleitung klein, so zeigt ein rotierender Spiegel, daß mehrere Funken hintereinander auftreten, daß wir es also mit mehreren aufeinanderfolgenden Entladungen zu tun haben.

Wir setzen nun voraus, die eine Belegung des Kondensators sei zur Erde abgeleitet, die andere befinde sich vor der Entladung auf dem Potential  $P_0$  und enthalte die Elektrizitätsmenge  $Q_0$ . Zu einer beliebigen Zeit  $t$  seien diese Größen etwa  $P$  und  $Q$ . Geht die Entladung vor sich, so entsteht in der Leitung ein Strom  $i$ , und es ist die Veränderung der Elektrizitätsmenge  $Q$  in der Zeit  $dt$

$$dQ = -i dt$$

(§ 39). Ferner ist nach § 55 die elektromotorische Kraft oder, was dasselbe ist, der Potentialunterschied

$$P = w i + U \frac{di}{dt},$$

wenn  $U$  der Koeffizient der Selbstinduktion der Leitung ist. Zwischen  $P$  und  $Q$  besteht nun die Gleichung

$$Q = CP,$$

wobei  $C$  die Kapazität des Kondensators darstellt. Es ist also

$$\frac{Q}{C} = w i + U \frac{di}{dt},$$

woraus durch Differentiation nach der Zeit folgt

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt} = w \frac{di}{dt} + U \frac{d^2 i}{dt^2}$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\frac{dQ}{dt} = -i,$$

woraus die Gleichung folgt

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{w}{U} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{UC} = 0. \quad (24)$$

Das ist genau dieselbe Gleichung wie jene für ein Pendel im widerstehenden Mittel (Bd. I, § 10). Wir können also auch hier die Stromstärke

$$i = A e^{\alpha t}$$

setzen, woraus für  $\alpha$  folgt

$$\alpha = -\frac{w}{2U} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4U^2} - \frac{1}{UC}}.$$

Ist somit  $\frac{w^2}{4U^2} > \frac{1}{UC}$ , so haben wir keine periodische Bewegung. Es tritt nur ein einziger Funken auf. Ist hingegen  $\frac{w^2}{4U^2} < \frac{1}{UC}$ , so wird die Wurzel imaginär, wir haben eine periodische Bewegung vor uns, es tritt eine oszillierende Entladung ein.

Haben wir einen sehr kleinen Leitungswiderstand, so können wir in Gleichung (24) das Glied  $\frac{w}{U} \cdot \frac{di}{dt}$  vernachlässigen, und wir erhalten

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{i}{UC}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine schwingende Bewegung von der Dauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{UC}.$$

## § 60. Elektrische Ströme in einem Dielektrikum.

Leiten wir die eine Belegung eines Plattenkondensators (§ 15) zur Erde ab, und es befindet sich zwischen den beiden Platten bloß Luft, so ladet sich die andere Belegung mit Elektrizität von der Dichte

$$\sigma = \frac{P}{4\pi\delta},$$

wenn wir unter  $P$  das Potential dieser Belegung verstehen. Ist zwischen den Platten ein Dielektrikum, so erhalten wir eine andere Dichte der Elektrizität

$$\sigma = \frac{\varepsilon P}{4\pi\delta},$$

wobei wir die Konstante  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante nennen. Die Oberflächendichte  $\sigma$  denken wir uns nun auf die Weise entstanden, daß innerhalb der Molekeln die positive und negative Elektrizität infolge der Einwirkung des Potentialgefälles, d. i. der elektromotorischen Kraft per Längeneinheit

$$\mathfrak{E} = \frac{P}{\delta}$$

getrennt wird. Wenn wir also senkrecht zur Richtung der Kraft  $\mathfrak{E}$  eine Fläche legen, so wird per Flächeneinheit, sobald  $\mathfrak{E}$  zu wirken beginnt, eine Elektrizitätsmenge  $\sigma$  hindurchgetrieben. Zerlegen wir demnach die elektromotorische Kraft in die drei Komponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , so sind die Elektrizitätsmengen, welche parallel den drei Achsen die Flächeneinheit passieren,

$$f = \frac{\varepsilon}{4\pi} X, \quad g = \frac{\varepsilon}{4\pi} Y, \quad h = \frac{\varepsilon}{4\pi} Z.$$

Man pflegt die Größen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  auch die Komponenten der elektrischen Verschiebung zu nennen.

Wir definieren die Stromstärke (§ 39) als die Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters durchfließt, und die Stromdichte als das Verhältnis zwischen Stromstärke und Querschnitt, d. i. die durch die Flächeneinheit per Zeiteinheit fließende Elektrizitätsmenge. Wir haben somit für die Stromdichten parallel zu den drei Achsen

$$\begin{aligned} u &= \frac{df}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \\ v &= \frac{dg}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t}, \\ w &= \frac{dh}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t}, \end{aligned} \quad (25)$$

während die resultierende Stromdichte nach den Bezeichnungen des § 22

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

gesetzt werden kann, wobei auch  $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$  häufig die dielektrische Verschiebung genannt wird, obwohl wir diese Bezeichnung auch für  $\mathfrak{D}$  kennen lernten (§ 22). Der durch die Änderung von  $\mathfrak{D}$  entstehende Strom heißt Verschiebungsstrom.

### § 61. Allgemeine Gleichungen der Induktion.

Wir wollen die Beziehung aufstellen, welche zwischen den Komponenten der magnetischen Induktion  $a, b, c$  und den Komponenten der magnetischen Kraft  $\alpha, \beta, \gamma$  besteht. Wie eine elektrische Kraft eine Verschiebung der Elektrizität, so bringt eine magnetische eine Verschiebung des Magnetismus hervor. Wird demnach ein Körper im magnetischen Feld (Fig. 33)

von der  $(yz)$ -Ebene durchschnitten, so wird auf der linken Seite der Magnetismus von der Dichte

$$\sigma = k \alpha ,$$

auf der rechten

$$\sigma = -k \alpha$$

frei. Denken wir uns anstatt der  $(yz)$ -Ebene also wirklich einen sehr schmalen Raum, so wird auf einen Punkt von der magnetischen Masse Eins von links die Kraft  $2 \pi \sigma$  ausgeübt, welche den Punkt in der Richtung der  $x$ -Achse zu treiben sucht. Dieselbe Kraft in derselben Richtung übt auch die rechte Seite aus. Der Punkt erfährt somit die Gesamtkraft  $4 \pi \sigma$ . Diese Größe ist also auch die Zahl der pro Flächeneinheit induzierten Kraftlinien, welche noch zu den ursprünglich vorhandenen

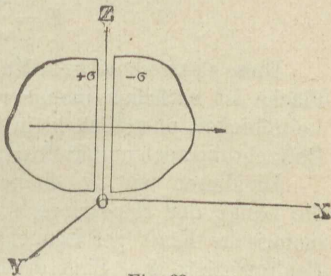


Fig. 33.

$\alpha$  hinzukommen. Wir haben somit als Zahl der Kraftlinien parallel zur  $x$ -Achse

$$a = \alpha + 4 \pi \sigma = \alpha + 4 \pi k \alpha = (1 + 4 \pi k) \alpha = \mu \alpha ,$$

wobei demnach

$$\mu = 1 + 4 \pi k$$

nichts anderes als die magnetische Induktionskonstante ist. Ganz dieselbe Überlegung können wir natürlich auch für die übrigen Komponenten der Induktion machen, so daß wir die drei Gleichungen

$$a = \mu \alpha , \quad b = \mu \beta , \quad c = \mu \gamma \quad (26)$$

erhalten.

Nennen wir  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  die Winkel, welche die Normale des Flächenelements  $dS$  mit den Koordinaten-

achsen einschließt, so können wir die Zahl  $N$  der Kraftlinien, welche durch die Fläche  $S$  gehen, durch

$$N = \iint (a \cos \lambda + b \cos \mu + c \cos \nu) dS \quad (27)$$

darstellen.

Nach § 57 ist die durch Induktion in einem Leiter erzeugte elektromotorische Kraft  $E$  gegeben durch die Änderung des Potentials oder der Zahl der Kraftlinien nach der Zeit, also

$$E = \frac{dN}{dt}. \quad (28)$$

Diese elektromotorische Kraft in der Randkurve unserer Fläche ist natürlich immer vorhanden, auch wenn die Leitfähigkeit unendlich klein ist, d. h. es läßt sich diese Betrachtung auch unmittelbar auf einen Isolator übertragen.

Dividieren wir die elektromotorische Kraft  $E$  durch die Länge der Randkurve, so erhalten wir die elektromotorische Kraft per Längeneinheit oder die elektrische Feldintensität  $\mathcal{E}$ . Sind deren Komponenten  $X, Y, Z$ , so läßt sie sich darstellen durch

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds};$$

für das Kurvenelement  $ds$  wird sie

$$\left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds = X dx + Y dy + Z dz.$$

Die gesamte elektromotorische Kraft in der Randkurve läßt sich somit auch darstellen durch

$$E = \int (X dx + Y dy + Z dz) = \iint \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \mu + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \nu \right] dS, \quad (29)$$

wenn wir den Stokesschen Satz (§ 46) zu Hilfe nehmen. Aus den Gleichungen (27) und (28) folgt nun

$$E = \frac{dN}{dt} = \iiint \left( \frac{da}{dt} \cos \lambda + \frac{db}{dt} \cos \mu + \frac{dc}{dt} \cos \nu \right) dS.$$

Bringen wir diese Gleichung in Übereinstimmung mit Gleichung (29), so folgt, wenn wir noch überlegen, daß nach den Gleichungen (26)

$$a = \mu \alpha, \quad b = \mu \beta, \quad c = \mu \gamma$$

ist,

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ \mu \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \tag{30}$$

Führen wir an Stelle der Kraftliniendichte die magnetische Feldintensität  $\mathfrak{H}$  ein, so können wir nach § 46 die Gleichungen (30) als die Komponenten der Gleichung

$$\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \text{curl } \mathfrak{E}$$

ansehen.

## § 62. Die Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren.

Die Gleichungen für die Beziehung zwischen den Komponenten der Stromdichte und den von ihnen erzeugten magnetischen Kräften, welche wir in § 41 fanden, lassen sich, wenn wir die Koordinaten anstatt mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bezeichnen, leicht in die Form bringen:

$$\begin{aligned}
 -4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\
 -4\pi v &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\
 -4\pi w &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Diese ergeben mit den Gleichungen (25)

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\
 -\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\
 -\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Wegen der Wichtigkeit dieser Gleichungen sei noch darauf hingewiesen, daß wir sie auch leicht aus der Schlußgleichung des § 47

$$4\pi i = - \int \int \text{curl} \mathfrak{H} \cdot dS$$

gewinnen können. Nennen wir nämlich die Stromdichte  $D$  und den Querschnitt des Stroms  $S$ , so ist

$$i = \int \int D dS$$

oder

$$di = D dS.$$

Die Differentiation der obigen Gleichung ergibt daher

$$4\pi di = 4\pi D dS = - \text{curl} \mathfrak{H} \cdot dS$$

oder

$$4\pi D = - \text{curl} \mathfrak{H},$$

was (§ 46) mit den Gleichungen (31) identisch ist.

Da wir nach § 60

$$D = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

setzen können, so gilt auch

$$\varepsilon \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -\text{curl} \mathfrak{H},$$

was für die einzelnen Komponenten das Gleichungssystem (32) ergibt. Nach ganz analoger Schlußweise hätten wir auch die Schlußgleichung des § 61

$$\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \text{curl} \mathfrak{E}$$

gewinnen können.

Aus § 53 wissen wir, daß die Stromstärke, in elektrostatischem Maß gemessen,  $V$ mal größer ist als in elektromagnetischem. Wir wollen die elektrischen Kräfte  $X, Y, Z$  und ebenso die Komponenten  $u, v, w$  der Stromdichte von nun an in elektrostatischem Maß ausdrücken. Die magnetischen Kräfte  $\alpha, \beta, \gamma$  messen wir in elektromagnetischen Einheiten. Die Gleichungen (31) haben demnach zu lauten:

$$-\frac{4\pi u}{V} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$-\frac{4\pi v}{V} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$-\frac{4\pi w}{V} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

In ähnlicher Weise haben wir die Gleichungen (30) umzuformen in

$$V \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

$$V \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

$$V \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Wie aus dem Obigen leicht zu ersehen ist, können wir diese sechs letzten Gleichungen in zwei symmetrische Gruppen folgendermaßen zusammenfassen:

$$-\frac{\varepsilon}{V} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$-\frac{\varepsilon}{V} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$-\frac{\varepsilon}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y};$$

$$\frac{\mu}{V} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$\frac{\mu}{V} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$\frac{\mu}{V} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Nach anderer Schreibweise läßt sich dieses Gleichungssystem durch die zwei Gleichungen

$$\frac{\varepsilon}{V} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -\text{curl}\mathfrak{H}$$

und

$$\frac{\mu}{V} \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \text{curl}\mathfrak{E}$$

wiedergeben. Das sind die Grundgleichungen für die Bewegung der Elektrizität und des Magnetismus in Isolatoren, welche zuerst von J. Cl. Maxwell aufgestellt und sowohl zur Darstellung der elektromagnetischen als auch der Lichterscheinungen in den Nichtleitern der Elektrizität benutzt wurden, womit wir uns im Band IV ausführlicher beschäftigen werden.

---

**Als Lehrbücher zu ausführlicheren Studien sind zu empfehlen:**

V. von Lang, Einleitung in die theoretische Physik.

C. Christiansen, Elemente der theoretischen Physik.

R. Clausius, Die Potentialfunktion und das Potential.

B. Riemann, Schwere, Elektrizität und Magnetismus.

F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.

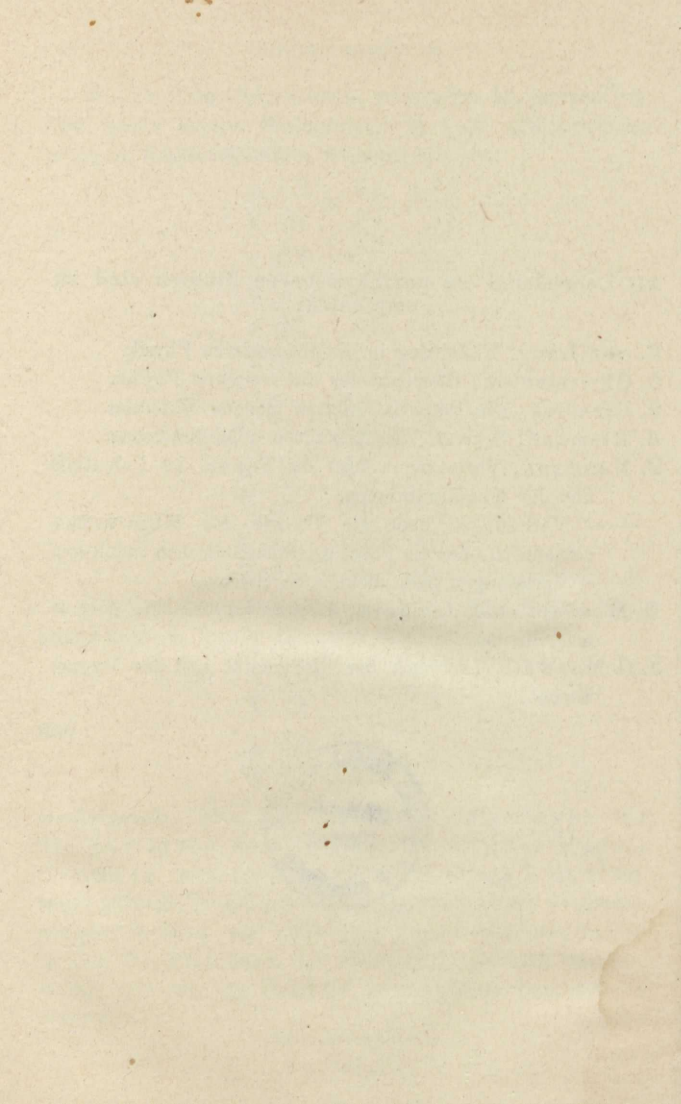
— — Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion.

— — Vorlesungen über elektrische Ströme.

E. Mascart et J. Joubert, Leçons sur l'électricité et le magnétisme.

J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus.











106-

Biblioteka Główna  
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny  
Księgozbiór Przyrodniczy

I-40087/3



520-000072267

