214243

Vorträge

über

Mechanik

als Grundlage für das

Bau- und Maschinenwesen.

SZKOŁA INŻYNIERSKA
BIBLIOTEKA
w Szczecinie

Von

Wilh. Keck,
Geh. Regierungsrath,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Zweiter Theil:

Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper.

Mit 364 Holzschnitten.

KÖNIGLICHE HÖHERE MASCHINENBAUSCHULE · STETTIN ·

Hannover.
Helwing'sche Verlagsbuchhandlung.
1897.

539.3 : 532

Biblioteka Szkoły Inżynierskiej w Szczecinie

2302/2

Druck von Th. Schäfer, Hannover.

Vorwort.

Der vorliegende zweite Band der „Vorträge über Mechanik“ behandelt die Mechanik der elastisch-festen und der flüssigen Körper. Der Inhalt des Buches weicht von dem Lehrgang an der Technischen Hochschule zu Hannover etwas ab; es wird nämlich im Sommer des ersten Studienjahres ausser der Mechanik elastisch-fester Körper noch das Gleichgewicht flüssiger Körper etwa in der Behandlungsweise des Buches erledigt, von der Bewegung flüssiger Körper können aber in der für das erste Studienjahr verfügbaren Zeit nur die einfachsten Fälle vorgetragen werden, und die eingehendere Behandlung erfolgt dann erst im Sommer des zweiten Studienjahres. Bei der Bearbeitung des Buches habe ich aber vorgezogen, die Mechanik flüssiger (und auch gasförmiger) Körper im Zusammenhange durchzuführen.

Auch in diesem Bande wurde auf die Beigabe zahlreicher vollständig durchgerechneter Beispiele besonderer Werth gelegt; denn den Studirenden der Technischen Hochschule wird die Mechanik, wenigstens soweit sie im ersten Jahre vorkommt, nur zum Zwecke der Anwendung gelehrt, und nur an gut gewählten Übungsaufgaben kann der Studirende diejenige Sicherheit erwerben, die erforderlich ist, wenn er nicht in den späteren Studienjahren bei der Berechnung seiner Entwürfe in Schwierigkeiten gerathen und kostbare Zeit verlieren soll. Den Fehlern, die von den Anfängern am häufigsten begangen werden, muss schon vom ersten Studienjahr an mit allen Mitteln vorgebeugt werden. Die Kenntnis dieser besonders häufigen Fehler kann man natürlich nur gewinnen und ihnen entgegenarbeiten, wenn man in besonderen Übungsstunden einfache Zahlenaufgaben rechnen lässt und daneben mit den Professoren

derjenigen Fächer, die sich auf die Mechanik stützen, stets in Fühlung bleibt und den auf das Fach bezüglichen Wünschen und Rathschlägen derselben nach Möglichkeit entgegenkommt.

Bei der Abfassung dieses Theiles wurden besonders folgende Werke benutzt: Lehrbücher der technischen Mechanik und der Ingenieur-Mechanik von A. Ritter; Elasticität und Festigkeit von C. Bach; Hydromechanik von M. Rühlmann; Theoretische Maschinenlehre von F. Grashof, 1. Band; Mechanik von Jul. Weisbach und die Berichte desselben Verfassers über seine Untersuchungen aus dem Gebiete der Hydraulik. Der Berechnung des Winddrucks und des Luftwiderstandes wurden die neuesten werthvollen Versuche von v. Loessl zu Grunde gelegt.

Zur Erleichterung der Übersicht und des Verständnisses der Formeln ist auch diesem Theil ein alphabetisches Verzeichnis der benutzten Buchstaben-Bezeichnungen und ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis beigefügt.

Keck.

Es wird gebeten, die am Schlusse des Buches angegebenen Berichtigungen zu beachten.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Mechanik der elastisch-festen Körper.

Seite

Einleitung. Nichtstarre Körper und Massengruppen. Elastisch-feste Körper 1

A. Gleichgewicht elastisch-fester Körper.

1. Allgemeines 9
2. Zugfestigkeit hängender Stangen; Druckfestigkeit stehender Säulen . 11
3. Schub- oder Scherfestigkeit 15
4. Biegungsfestigkeit 17
   a) Grundgleichungen 17
   b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte 22
   c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegungsmomentes . . . 25
   d) Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast 27
   e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten 29
   f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässig vertheilter Last . . 32
   g) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässiger Belastung und mit Einzellasten 35
   h) Balken überall gleicher Sicherheit 37
5. Biegungslinie 40
   a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken . . . 41
   b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen 45
   c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit 47
   d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmässig belasteter Balken. . 49
   e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen 55
6. Knickfestigkeit 59
7. Drehungsfestigkeit 64
   a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte . 64
   b) Stab von rechteckigem Querschnitte 66
8) Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen 71
   a) Art der Berechnung der Spannkräfte 71
   b) Dachträger 74
   c) Ungünstigste Belastungsart 81
   d) Parabolischer Fachwerkträger 85
   e) Parallel-Fachwerkträger 88

B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungs-Zuständen.

Seite
1. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper 90
2. Gleichmässige Drehung um eine feste Achse 93
Spannung der Ringe eines Mühlsteins 96
3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse 97

C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

1. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe 99
a) Einwirkung plötzlicher Belastung 104
b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte 108
2. Biegungs-Arbeit 110
a) Prismatischer Stab 110
b) Stab überall gleicher Sicherheit und gleicher Höhe 113
c) Tragfedern der Fuhrwerke 115
3. Drehungs-Arbeit 120
Verdrehungs-Federn 122

D. Stoss elastisch-fester Körper.

1. Gerader centraler Stoss 126
a) Festsetzung der Stossziffer k 130
b) Unelastischer Stoss 132
c) Anwendung des Stosses; Einrammen von Pfählen 133
d) Hämmer zum Schmieden oder Nieten 136
e) Biegung durch den Stoss eines Körpers 137
f) Vollkommen elastischer Stoss 140
2. Stoss sich drehender Körper 141
Ballistisches Pendel 142
3. Excentrischer Stoss 144
Mittelpunkt des Stosses 147
4. Schiefer centraler Stoss 149
5. Einige besondere Fälle des Stosses 152

Zweite Abtheilung.

Mechanik der flüssigen Körper.

Allgemeine Eigenschaften der flüssigen Körper; tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige Körper 156

A. Gleichgewicht flüssiger Körper.

1. Gleichgewicht flüssiger Körper ohne Einwirkung der Schwere 159
a) Druckkräfte eines flüssigen Körpers gegen verschiebbare Kolben 160
b) Wasserdruck-Presse 162
c) Druckkraft auf ein beliebiges Stück der Gefässwand 164
d) Wandstärke von Gefässen und Röhren 165

Seite
2. Gleichgewicht tropfbar-flüssiger Körper unter Einwirkung der Schwere 166
a) Wasserspiegel. Druck in der Flüssigkeit 166
b) Druckkraft gegen eine ebene Seitenwand. Druckmittelpunkt . 169
c) Druckkraft gegen eine rechteckige Seitenwand 171
d) Druckkraft gegen eine ebene Mauerfläche oder Bohlwand. . . 172
e) Berechnung der Riegel des Stemmthores einer Schleuse . . . 175
f) Druckmittelpunkt eines Dreiecks, eines Kreises, eines Viertelkreises 178
g) Druckkräfte gegen krumme Flächen 181
h) Riegel eines gekrümmten Schleusenthores. 182
i) Gesammtdruck auf die Gefässwände. Auftrieb einer Flüssigkeit 183
k) Gleichgewicht schwimmender Körper. 188
l) Tropfbar-flüssige Körper in scheinbarer Ruhe in Bezug auf ein beschleunigt fortschreitendes Gefäss 194
m) Tropfbar-flüssige Körper in gleichmässiger Drehung um eine Achse 196
3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten 202
a) Der Boyle-Mariotte'sche Satz 202
b) Druckverhältnisse der Atmosphäre bei überall gleicher Temperatur 203
c) Auftrieb der Luft. Luftballon 206
d) Satz von Gay-Lussac. Zustandsgleichung der vollkommenen Gase 208
e) Barometrisches Höhenmessen 211
4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten . . 215
a) Barometer. Druckmesser. 215
b) Saugpumpe. Kreiselpumpe. Heber 219
c) Taucherglocke 219
5. Gleichförmige Drehung gasförmiger Körper um eine Achse 223
Flügelgebläse 223
6. Allgemeine Gleichgewichts-Bedingung für Flüssigkeiten, von L. Euler . 225

B. Bewegung flüssiger Körper.

1. Ausfluss des Wassers aus Gefässen 227
a) Ideelle Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge einer Bodenöffnung 229
b) Ideelle Ausflussmenge einer Seitenöffnung 233
c) Wirkliche Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge 237
d) Widerstandshöhen und Widerstandsziffern. 243
e) Druckhöhenverlust in Folge plötzlicher Querschnittsänderung . 245
f) Ausfluss aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe 248
g) Ausfluss aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe 254
h) Ausgleichung des Wassers in Schleusenkammern. 255
i) Hydraulischer Druck. 259
k) Gesammtdruck ausströmenden Wassers auf die Gefässwände. . 264
l) Druck eines Wasserstrahles gegen eine denselben auffangende Fläche. 269
m) L. Euler's Grundgleichungen für die Bewegung tropfbar-flüssiger Körper ohne Reibung 272

Seite

2. Bewegung des Wassers in Röhren 276
   a) Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren 276
   b) Benutzung der Druckmesser (Piëzometer) 281
   c) Widerstand von Knieröhren und gekrümmten Röhren 283
   d) Widerstand beim Durchgange durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile 284
   e) Wasserleitung mit Verzweigung 285
   f) Widerstand eines kegelförmigen Rohres 288
   g) Steighöhe springender Strahlen 289
3. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen 291
   a) Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen 291
   b) Querschnittsform kleinsten Widerstandes 299
   c) Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts 302
   d) Eintritt des Wassers in einen Kanal 305
   e) Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen 306
   f) Stauhöhe von Wehren und Brückenpfeilern 310
   g) Staukurve und Stauweite 314
4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper 325
5. Ausfluss der Gase aus Gefässen, bei geringem Überdruck 331
6. Specifische Wärme; Zustandsänderungen der Gase 333
7. Ausfluss der Gase aus Gefässen 342
8. Bewegung der Luft in Röhren 346
9. Wirkung der Schornsteine 348
10. Widerstand der Luft gegen bewegte fremde Körper; Druck des Windes gegen fremde Körper 350

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln vorkommenden Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches 360
Alphabetisches Verzeichnis der behandelten Gegenstände 364
Berichtigungen 367

Erste Abtheilung.

Mechanik der elastisch-festen Körper.

Einleitung.

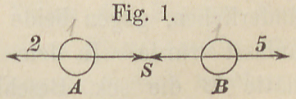
Nichtstarre Körper und Massengruppen. Elastisch-feste Körper.

Die Möglichkeit, Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten an einem Körper zusammenzusetzen und zu zerlegen, d. h. durch andere ohne Abänderung der Bewegung des Körpers zu ersetzen, ist im 1. Theile dieses Buches nur für völlig starre Körper bewiesen. Für diese benutzten wir (1. Theil, S. 96) den Erfahrungs-Grundsatz, dass zwei gleiche, in derselben Richtungslinie wirkende Kräfte entgegengesetzten Sinnes sich in ihrer Wirkung auf die Bewegung eines starren Körpers aufheben; daraus folgte die Zulässigkeit der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft längs ihrer Richtungslinie. Auf diese Betrachtungen gründete sich die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare (1. Theil, S. 113), sowie die Lehre vom Gleichgewichte und den sechs Bedingungen für dasselbe (1. Theil, S. 146).

Eine Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft hat stets Änderungen der inneren Kräfte des Körpers zur Folge. Auf diese kommt es aber in der Mechanik starrer Körper nicht an, weil starren Körpern eine unbegrenzte Festigkeit beigelegt wird und weil mit dem Auftreten innerer Kräfte keine Formänderungen, keine sichtbaren Wirkungen verbunden sind. Anders ist es mit Körpern oder Massengruppen, welche nicht starr sind.

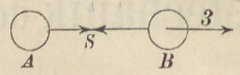
Sind z. B. zwei Massenpunkte A und B, deren Masse je $= 1$ ist, durch eine starre Linie verbunden (Fig. 1) und wirken in A und B die beiden in der Richtungslinie AB liegenden Kräfte von 2 und 5 kg mit dem Sinne nach links bezw. rechts, so bringen

Fig. 1.



diese an der starren Massengruppe eine sekundliche Beschleunigung $3:2 = 1{,}5^{\,m}$ hervor (1. Theil, S. 142). Daraus bestimmt sich die Spannkraft S der starren Linie, denn am Punkte B muss $5 - S = 1 \cdot 1{,}5$, am Punkte A ebenso $S - 2 = 1 \cdot 1{,}5$ sein. Aus beiden folgt die Zugkraft $S = 3{,}5^{\,kg}$. Verlegt man die Kraft $2^{\,kg}$ von A nach B (Fig. 2), so dass nun in B eine Kraft von $3^{\,kg}$ wirkt, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Verhalten der Massengruppe nichts; die sekundl. Beschleunigung bleibt $3 : 2 = 1{,}5^{\,m}$ nach rechts. Es wird nun aber die Zugkraft S der Verbindungsgeraden $1{,}5^{\,kg}$. Eine Verlegung der Kraft $5^{\,kg}$ (Fig. 1) von B nach A bedingt, wie man leicht erkennt, das Auftreten einer inneren Druckkraft $S = 1{,}5^{\,kg}$ in der Verbindungsgeraden.

Fig. 2.



Sind die beiden Masseneinheiten A und B aber nachgiebig, etwa durch eine elastische Feder, mit einander verbunden, die vor dem Auftreten der äusseren Kräfte völlig ohne Spannkraft war, so wird mit dem Beginne der Wirkung der äusseren Kräfte eine Verlängerung der Feder und erst in Verbindung damit das Auftreten einer veränderlichen Spannkraft S erfolgen. Im ersten Augenblicke ist die Spannkraft noch Null; somit erfährt B eine sekundliche Beschleunigung $= 5^{\,m}$ nach rechts, A eine solche von $2^{\,m}$ nach links. Mit diesen Beschleunigungen gehen die Massenpunkte aus einander, und mit der Verlängerung der Verbindungsgeraden entsteht dann eine (meist sehr schnell) anwachsende Zugkraft S in der Feder. In dem Augenblicke, wo $S = 1^{\,kg}$ geworden ist, hat B die sekundliche Beschleunigung $= 4^{\,m}$ nach rechts, A eine solche von $1^{\,m}$ nach links. Würde man die Kraft $= 5^{\,kg}$ von B nach A verlegen (Fig. 4), so erführe A zu Anfang eine sekundliche Beschleunigung $= 3^{\,m}$ nach rechts, B keine Beschleunigung; A würde nach B hingedrängt, so dass die Feder zusammengedrückt und zur Äusserung einer veränderlichen, gegen beide Massenpunkte gerichteten Druckkraft veranlasst würde. In dem Augenblicke, wo die Druckkraft $S = 1^{\,kg}$, hätte B die sek. Beschleunigung $= 1^{\,m}$ nach rechts, A die sek. Beschleunigung $= 2^{\,m}$ ebenfalls nach rechts; A würde also noch nach B hingedrängt. Erst wenn die Druckkraft S auf $1{,}5^{\,kg}$

Fig. 3.

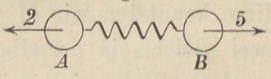
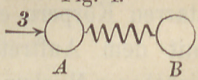


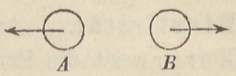
Fig. 4.



angewachsen ist, haben beide Punkte die übereinstimmende Beschleunigung = 1,5 m wie bei starrer Verbindung. Man erkennt hieraus, dass eine Verlegung der einen Kraft von B nach A in der Bewegung der Punkte eine Änderung hervorbringt, dass also eine Zusammensetzung der beiden Kräfte, d. h. ihre Ersetzung durch eine einzige Kraft, nicht zulässig ist.

Es giebt auch Massengruppen, deren Punkte einer Vergrösserung des Abstandes von einander keinen Widerstand entgegensetzen. Dies ist z. B. annähernd der Fall bei flüssigen Körpern. Diese lassen sich ohne nennenswerthen Widerstand von einander trennen. Man kann sich solche Massengruppen grobsinnlich vorstellen durch einzelne Kugeln ohne Verbindung. Jede derselben wird nur durch die an ihr angreifenden äusseren Kräfte beschleunigt. Gleiche Kräfte, an A und B (nach Fig. 5) angebracht, bewirken beschleunigte Trennung der Punkte, aber keineswegs Gleichgewicht.

Fig. 5.



Gleiche Zugkräfte, an den Enden einer biegsamen, aber undehnbaren Kette angebracht, heben sich auf, während bei einer Umkehrung der Kräfte zu Druckkräften ein Zusammenballen der Kette zu einem Knäuel, also keinenfalls Gleichgewicht der ursprünglich ausgestreckten Kette, entsteht.

Dennoch sind die Lehren von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte der äusseren Kräfte an starren Körpern auch für nicht starre Körper und Massengruppen von grosser Bedeutung, weil der Satz von d'Alembert (1. Theil, S. 139) und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Theil, S. 141) nicht allein für starre Körper, sondern allgemein für jede beliebige Massengruppe gelten. Fügt man also zu den äusseren Kräften $[K]$ einer Massengruppe die Gruppe der Ergänzungskräfte $[-mp]$ hinzu, so genügen diese Kräftegruppen zusammen den Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper. Der Schwerpunkt einer beliebigen Massengruppe aber bewegt sich so, als ob die gesammte Masse in ihm zu einem Punkte vereinigt wäre und sämmliche äusseren Kräfte, parallel verschoben, an ihm angriffen. In den Fällen der Figuren 1—4 hat der Schwerpunkt der Gruppe der beiden Massenpunkte übereinstimmend die sekundliche Beschleunigung 1,5 m nach rechts.

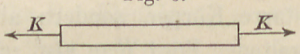
Eine beliebige Massengruppe ist im Gleichgewichte, wenn jeder einzelne Punkt derselben ruht oder eine gleichförmig

geradlinige Bewegung ausführt, d. h. wenn an jedem einzelnen Massenpunkte die Beschleunigung gleich Null ist. Dann fallen die Ergänzungskräfte sämmtlich fort, und es müssen die äusseren Kräfte der Massengruppe allein den Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper genügen. Hiernach gelten die Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper (1. Theil, S. 146) in unveränderter Weise auch für das Gleichgewicht nicht starrer Körper oder beliebiger Massengruppen.

Die festen Körper sind nicht starr, vielmehr erfahren sie unter Einwirkung äusserer Kräfte Formänderungen, die bei genügendem Anwachsen der Kräfte zur Zerstörung des Zusammenhanges führen können. Die Eigenschaft der festen Körper, unter Einwirkung äusserer Kräfte eine entsprechende Formänderung zu zeigen, die mit dem Aufhören der Kräftewirkung mehr oder minder wieder verschwindet, heisst **Elasticität.** Aufgabe der Mechanik elastisch-fester Körper ist die Ermittelung der inneren Spannungen und der Formänderung, welche an einem Körper durch äussere Kräfte hervorgebracht werden.

Zug- und Druck-Elasticität. Der einfachste Fall der elastischen Formänderung ist die Verlängerung eines geraden prismatischen Stabes durch eine in der Mittellinie des Stabes wirkende Zugkraft. Ist l die Länge des Stabes, F sein Querschnitt (beide im ungespannten Zustande gemessen), und wirken an den Endflächen, genau in der Mittellinie des Stabes, gleiche Zugkräfte K (Fig. 6), deren Grösse aber zunächst ganz allmählich, von Null beginnend, anwachsen soll, so kann man in den meisten Fällen annehmen, dass sich die Kraft K annähernd gleichmässig über den Querschnitt F vertheilt, so dass

Fig. 6.



$$1) \qquad \sigma = \frac{K}{F}$$

die auf die Flächeneinheit kommende Zugkraft ist. Diese Grösse σ heisst die **Zugspannung.** Ihrem Auftreten entspricht eine gewisse Verlängerung Δl des Stabes. (Das Zeichen Δ dient zur Bezeichnung kleiner Änderungen, so auch derjenigen Formänderungen, die mit der Anspannung der festen Körper verbunden sind.) Solange die Spannung σ gewisse, von der Art des Stoffes abhängige Grenzen nicht überschreitet,

kann man Verlängerung und Spannung einander verhältnisgleich annehmen. In dieser Proportionalität zwischen Spannung und Formänderung besteht das Wesen der vollkommenen Elasticität.

Der Quotient $\frac{\Delta l}{l}$, das Verlängerung-Verhältnis, oder die auf die Längeneinheit kommende Verlängerung heisst die **Dehnung** (specifische Verlängerung) ε, und man kann jene Proportionalität schreiben:

$$2) \qquad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Die Grösse E ist von dem Stoffe abhängig und heisst **Elasticitätsmafs** (Elasticitätsmodul). Für eine Spannung $\sigma = 1$ wird die Dehnung $\varepsilon = \frac{1}{E}$. Mithin ist das Elasticitätsmafs E der reciproke Werth der Dehnung für eine Spannung $\sigma = 1$. Weil Δl und l gleichartige Grössen (Längengrössen) sind, so ist ihr Verhältnis, die Dehnung ε, eine unbenannte Verhältniszahl; daher müssen σ und E (in Gl. 2) ebenfalls gleichartige Grössen sein. D. h. E hat die Bedeutung einer Spannung für die Flächeneinheit. Für $\sigma = E$ wird $\varepsilon = 1$ und $\Delta l = l$. Daher kann man auch sagen: das Elasticitätsmafs E ist diejenige Spannung, unter deren Einflusse der Stab sich um seine ursprüngliche Länge, d. h. auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge dehnen würde, wenn der Stoff bei einer solchen Dehnung noch vollkommen elastisch bliebe. In Wirklichkeit trifft das höchstens bei Kautschuk zu; andere Stoffe ertragen eine so bedeutende Dehnung bei weitem nicht.

Die Grenze der Spannung σ, bis zu welcher die Gleichung 2 der vollkommen elastischen Dehnung gilt, heisst die Elasticitätsgrenze für Zug; ihr Zahlenwerth soll mit z bezeichnet werden. Lässt man die Spannung allmählich wieder verschwinden, so verschwindet auch die Dehnung wieder; es tritt keine bleibende Formänderung ein.

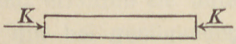
Überschreitet die Spannung σ die Elasticitätsgrenze z, so wächst die Formänderung schneller als die Spannung, auch nimmt der Stab mit dem Verschwinden der Spannung nicht genau wieder die ursprüngliche Länge an; er hat vielmehr eine bleibende Verlängerung erfahren, er verhält sich nicht mehr vollkommen

elastisch. Bei weiterer Zunahme der Spannung tritt schliesslich ein Zerreissen des Stabes ein. Diejenige Spannung, bei der dies erfolgt, heisst die **Zugfestigkeit** und soll mit Z bezeichnet werden.

Kehren die Kräfte K ihre Pfeilrichtung um, so werden sie zu Druckkräften (Fig. 7) und ertheilen dem Stabe, falls seine Länge nicht bedeutend im Verhältnisse zu den Querschnitts-Abmessungen ist, eine gleichmässige Druckspannung

1 a) $$\sigma = \frac{K}{F},$$

Fig. 7.

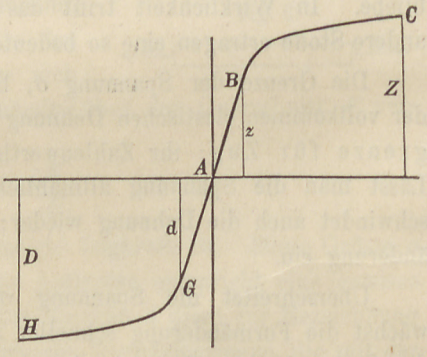


mit deren Auftreten eine Verkürzung verbunden ist. (Bei grösserer Länge erfolgt eine seitliche Ausbiegung mit verwickelteren Verhältnissen, die unter „Knickfestigkeit" (S. 59) behandelt werden.) Innerhalb gewisser Grenzen kann die für Verlängerung gegebene Gl. 2 auch für die Verkürzung durch Druck benutzt werden; es ist

2 a) $$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Darin ist dann Δl eine negative Verlängerung, ε eine negative Dehnung, σ eine negative Spannung. (Es empfiehlt sich, in der Regel Druckspannungen als negative, Zugspannungen als positive Spannungen zu bezeichnen.) Zug- und Druckspannungen fasst man in der gemeinsamen Bezeichnung Längsspannung (Normalspannung) zusammen. Das Elasticitätsmafs E kann man für Zug und Druck gleich gross annehmen. Derjenige Spannungswerth, bis zu welchem die Verkürzung nach der Gleichung 2 a folgt, ist die Elasticitätsgrenze für Druck und werde mit d bezeichnet. Die Druckspannung, bei der die Zerstörung erfolgt, ist die Druckfestigkeit D.

Fig. 8.



Trägt man die zusammengehörigen Spannungen und Dehnungen, wie sie sich bei Versuchen ergeben, als Ordinaten und Abscissen auf, so erhält man eine Schaulinie (Fig. 8), die Dehnungslinie, die für

Schmiedeisen ungefähr die Form $HGABC$ hat. Innerhalb des mittleren geraden Theiles gilt die Gleichung 2.

Mit dem Auftreten der Zugspannungen sind neben den besprochenen Längsdehnungen auch noch Einschnürungen (Verminderungen des Querschnittes) verbunden. Ebenso sind Verkürzungen in der Längsrichtung durch Druck von Stauchungen (Querschnitts-Vergrösserungen) begleitet. Diese Erscheinungen haben für die erste Einführung in das Verhalten der elastischen Körper keine besondere Wichtigkeit, finden aber in Keck's Vorträgen über Elasticitätslehre gebührende Berücksichtigung.

Diejenige Grenze, bis zu welcher die Dehnungen mit den Spannungen verhältnisgleich sind, wurde vorstehend Elasticitätsgrenze genannt und zugleich als Grenze bezeichnet, bis zu welcher bleibende Formänderungen nicht auftreten. In Wirklichkeit weicht das Verhalten der Körper von diesem ideellen Bilde mehr oder weniger ab, insofern jene beiden Grenzen nicht zusammenfallen. Hält man sich strenger an die Wirklichkeit, so bezeichnet man zweckmässig die erstere Grenze als Proportionalitätsgrenze, die zweite als Elasticitätsgrenze. Über diese Verhältnisse ist nachzulesen in C. Bach's Elasticität und Festigkeit. Das genannte Buch enthält auch Mittheilungen über den Einfluss der Zeit auf die Formänderung und das Verschwinden derselben, über die s. g. elastische Nachwirkung, auf welche wir hier auch nicht eingehen wollen.

Was die Mafseinheiten anlangt, so behalten wir für die Kräfte das Kilogramm bei, wie im ersten Theile. Als Längeneinheit benützen wir in der Mechanik der elastischen Körper zweckmässig nicht das Meter, weil Elasticitäts- und Festigkeitsgrenzen für das Quadratmeter unbequem grosse Zahlen ergeben. Vielmehr wählen wir das Centimeter zur Einheit. Im Maschinenbau wird auch vielfach nach Millimetern gerechnet. Umrechnungen von Centimetern auf Millimeter oder auf Meter sind so einfach, dass es nur geringer Aufmerksamkeit bedarf, sich in dieser Beziehung vor Fehlern zu schützen. Freilich muss man sich zur Regel machen, in einem gegebenen Falle sämmtliche Mafse, also neben den Querschnitten besonders auch die Längen, durch dieselbe Einheit auszudrücken. In dieser Beziehung machen Anfänger häufig Fehler. Als Spannung hat eine Zahl nur Bedeutung, wenn die zugehörige Kraft- und Flächeneinheit bekannt sind. Eine Spannung von 700 $^{kg}/_{qcm}$ (d. h. 700 ^{lg} für das Quadratcentimeter) ist gleichbedeutend mit 7 $^{kg}/_{qmm}$, mit 7 000 000 $^{kg}/_{qm}$.

Die freie Luft übt auf die von ihr berührten Körper einen Druck aus, welcher auf 1 ^{qm} in der Höhe des Meeresspiegels etwa

10333 kg, auf 1 qcm mithin etwa 1,0333 kg beträgt. Da der Luftdruck mit zunehmender Höhe kleiner wird, so ist auch leicht eine Höhe zu finden (etwa 264 m über dem Meere), in welcher der Luftdruck im Mittel 1 kg/qcm beträgt, und man hat es zweckmässig gefunden, diesen Druck als Atmosphäre (1 at) im Maschinenwesen allgemein einzuführen. Der Kürze wegen wollen wir auch die Spannungseinheit (1 kg/qcm) als Atmosphäre bezeichnen, also die Werthe σ, z, d, Z, D und E in Atmosphären mit der Bedeutung Kilogramme für 1 qcm ausdrücken.

Die für eine Stoffgattung geltenden Elasticitäts- und Festigkeitszahlen E, z, d, Z und D sind natürlich je nach der Güte des gerade vorliegenden Körpers schwankend. In folgender Tabelle geben wir einige Mittelwerthe für die in den Beispielen vorkommenden Fälle.

Elasticitäts- und Festigkeitszahlen in at.

	Elasticitätsgrenze		Festigkeit		Elasticitätsmafs
	Zug z	Druck d	Zug Z	Druck D	E
Gusseisen	600	1600	1300	7000	1 000 000
Stabeisen	1600	1600	3500	3500	2 000 000
Stahl	3000	3000	5000	6000	2 200 000
Gussstahl	4500	4500	7000	8000	2 200 000
Holz	250	170	800	500	120 000
Glas	340	1450	340	1450	1 000 000
Kautschuk	20	—	30	—	10

Bei Glas fallen Elasticitäts- und Festigkeitsgrenzen zusammen, d. h. Glas bleibt bis zur Zerstörung vollkommen elastisch. Bekanntlich kommen ja auch beim Glase bleibende Formänderungen, z. B. Verbiegungen, nicht vor.

Die Kräfte, welche auf einen Körper oder einen Theil desselben wirken, unterscheidet man in **Massenkräfte** und **Flächenkräfte**. Unter ersteren verteht man solche, die unmittelbar auf die Massentheilchen übertragen werden und auch der Masse verhältnisgleich sind; dazu gehören die Schwerkräfte, auch magnetische und elektrische Kräfte, sowie die Ergänzungskräfte ($-mp$, $-mr\omega^2$). Die Flächenkräfte werden durch unmittelbare Berührung mittels der Flächen

übertragen und sind von der Form: Flächengrösse mal Kraft für die Flächeneinheit. Zu diesen gehören namentlich die inneren Kräfte fester und flüssiger Körper.

A. Gleichgewicht elastisch-fester Körper.

I. Allgemeines.

Ein elastisch-fester Körper ist im Gleichgewichte, wenn seine sämmtlichen Punkte sich im Gleichgewichte befinden, und dies verlangt, wie bei starrren Körpern, dass der Körper entweder ruht oder eine gleichförmige geradlinige Verschiebung ausführt; auch darf der Körper keine Formänderungen mehr erfahren, vielmehr muss die den inneren Spannungen entsprechende Form bereits vorhanden sein.

Liegt ein solcher Gleichgewichtszustand vor, so ist die Bedingung dafür nach S. 4, dass die äusseren Kräfte des Körpers den Gleichgewichtsgleichungen für starre Körper genügen müssen. Diese Gleichgewichts-Bedingungen werden auch zur Ermittelung der inneren Spannkräfte benutzt, indem man durch den Körper einen Schnitt führt und für einen der erhaltenen Abschnitte die Gleichgewichts-Bedingungen aufstellt. Denn es muss ja, wenn der ganze Körper sich im Gleichgewichte befindet, auch jeder Theil desselben im Gleichgewichte sein. Bei dieser Untersuchung muss man an der Schnittstelle den vorherigen Zusammenhang durch Spannkräfte ersetzen. Diese Spannkräfte, die für den unzertrennten Körper innere Kräfte bedeuteten, gelten für die Betrachtung eines Abschnittes als äussere Kräfte und sind in den Gleichgewichts-Gleichungen mit aufzuführen.

Das Gleichgewicht ist nur möglich, wenn der Körper durch die äusseren Kräfte nicht zerstört wird, d. h. wenn die Spannung an keiner Stelle die Grenze der Festigkeit erreicht. Soll ein Körper aber dauernd im Gleichgewichte bleiben, so darf seine Spannung die Elasticitätsgrenze keinenfalls überschreiten. Es würden sonst bleibende Formänderungen entstehen, die gewöhnlich nicht

zulässig sind. In den meisten Fällen der Anwendung ist die Belastung eines Körpers mehr oder weniger veränderlich. Die Erfahrung lehrt, dass, wenn ein Körper häufig über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet wird, die Formänderungen allmählich wachsen und endlich zur Zerstörung führen.

Bei der Berechnung der zulässigen Belastung eines Körpers oder der erforderlichen Abmessungen bei gegebener Belastung darf man aber noch nicht einmal die Spannung an der Elasticitätsgrenze zu Grunde legen, sondern muss als zulässige Spannung einen kleineren Werth einführen, der meist nur aus der Erfahrung gewonnen werden kann. Einerseits sind nämlich die Stoffe der Körper der Abnutzung, dem Rosten, der Fäulnis u. dgl. unterworfen und erleiden deshalb Einbusse an ihrer Festigkeit. Sodann aber sind die Theile eines Bauwerkes oder einer Maschine häufig Erschütterungen und Stössen ausgesetzt, welche Schwingungen der elastischen Körper zur Folge haben. Derartige Schwingungsbewegungen sind nun stets ungleichförmig, bedeuten daher Abweichungen vom Gleichgewichtszustande. Viele Maschinentheile führen auch planmässig beschleunigte Bewegungen aus. Die Spannungen, die in solchen Körpern wirklich auftreten, lassen sich häufig nur sehr schwer ermitteln. Man führt daher eine Berechnung unter Annahme des Gleichgewichts (eine statische Berechnung) aus, welche die Spannungen kleiner angiebt, als sie wirklich sind, welche also bei Zugrundelegung der Elasticitätsgrenze als zulässiger Spannung zu geringe Querschnitts-Abmessungen liefern würde. Den auf diese Weise entstehenden Fehler kann man dadurch wieder ausgleichen, dass man als die in die Rechnung einzuführende Spannung σ nicht die Elasticitätsgrenze, sondern nur den $n$ten Theil derselben annimmt. Die Zahl n nennt man dann die Sicherheit gegen Überschreitung der Elasticitätsgrenze. Wäre die auf solche $n$fach kleinere Spannung gegründete Rechnung richtig, so würde thatsächlich nur $^1/_n$ der Spannung an der Elasticitätsgrenze erreicht werden. In Wirklichkeit aber bezeichnet die Zahl $^1/_n$ nur den Grad der Genauigkeit der Rechnungsgrundlagen für eine Gruppe von Fällen. Die Zahl n ist durch die Erfahrung an die Hand gegeben und beträgt je nach der Art des Bau- oder Maschinentheiles 1,6, 2, 2,5, 3, 4 u. dgl. Rechnet man mit diesen Sicherheitsverhältnissen, so kann man annehmen, dass die wirkliche Spannung im ungünstigsten Falle

bis nahe an die Elasticitätsgrenze herantreten wird. Je genauer man einen Fall zu berechnen vermag, desto mehr kann sich die Zahl n der Einheit nähern. So pflegt man für Bauverbände aus Stabeisen, dessen Spannung an der Elasticitätsgrenze etwa 1600^{at} beträgt, 700 bis 1000^{at} als zulässige Spannung σ einzuführen, indem man annimmt, dass die wahren Spannungen 1,6 bis 2,3 Mal so gross ausfallen werden, wie die durch statische Berechnung gefundenen. In der Wahl dieser kleinen Spannung σ liegt also keineswegs eine übermässige Ängstlichkeit, die als Verschwendung getadelt werden könnte, sondern eine durch die Erfahrung als nothwendig erkannte, gebotene Vorsicht, wenn man dem fraglichen Bauwerk einen langjährigen Bestand sichern will.

Wie gross die zulässige Spannung bei den verschiedenen Bau- und Maschinentheilen und den entsprechenden Stoffen gewählt werden darf, gehört weniger in den Rahmen der Mechanik, als in den der Lehre von den Bauverbänden und Maschinentheilen.

Beispiel 1: Eine Stange aus Stabeisen von 2^{m} Länge und $2^{cm} \times 10^{cm} = 20^{qcm}$ Querschnitt kann bei $\sigma = 700^{at}$ zulässiger Spannung eine Zugkraft von $20 \cdot 700 = 14000^{kg}$ aufnehmen. Die entsprechende Dehnung beträgt $\varepsilon = 700 : 2000000 = 7 : 20000 = 0{,}000035$. Will man die Verlängerung Δl in ^{cm} haben, so drücke man die Länge l in Centimetern $= 200^{cm}$ aus, um zu erhalten

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon = 200 \cdot 0{,}000035 = 0{,}07^{cm}.$$

Bis zur Elasticitätsgrenze würde der Stab durch eine Zugkraft $K = 20 \cdot 1600 = 32000^{kg}$ gespannt werden mit einer Verlängerung $\Delta l = 0{,}07 \cdot 16/7 = 0{,}16^{cm}$. Zum Zerreissen würde eine Kraft von $20 \cdot 3500 = 70000^{kg}$ erforderlich sein.

Beispiel 2: Eine ursprünglich spannungslose runde Eisenstange von 2^{cm} Durchmesser wird an den Enden festgehalten und sodann um 20° C. abgekühlt. Wäre die Stange frei, so würde sie bei einer Ausdehnungsziffer von $1/80000$ f. 1° C. eine verhältnismässige Verkürzung $= 20 : 80000 = 1 : 4000$ erfahren; Diese wird durch eine gleiche elastische Dehnung $\varepsilon = 1 : 4000$ in Folge der Befestigung aufgehoben. Daraus entsteht eine Spannung

$$\sigma = E\varepsilon = 2000000 : 4000 = 500^{at}$$

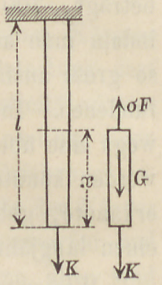
und eine Spannkraft $K = \sigma F = 500 \cdot \pi = 1570^{kg}$.

2. Zugfestigkeit hängender Stangen. Druckfestigkeit stehender Säulen.

Bei lothrecht hängenden, oben befestigten Stangen wird die Spannung σ vom Eigengewichte beeinflusst. Wirkt an der Stange

(Fig. 9) von überall gleichem Querschnitt F unten eine Zugkraft K, so wird die Stange erst im Gleichgewichte sein können, nachdem eine gewisse Verlängerung stattgefunden hat, die für die Rechnung aber ohne Wichtigkeit ist. Durchschneidet man die Stange in dem Abstande x vom unteren Ende und bringt an der Schnittstelle die Spannkraft σF an, so müssen K, σF und das Gewicht G des unteren Stangentheiles im Gleichgewicht sein. Ist γ die Dichte des Stoffes, so wird $G = \gamma F x$, mithin

Fig. 9.



$$\sigma F = K + \gamma F x, \text{ oder}$$

$$1) \qquad \sigma = \frac{K}{F} + \gamma x.$$

Die stärkste Spannung findet sich am oberen Ende zu

$$2) \qquad \sigma_1 = \frac{K}{F} + \gamma l.$$

Die Verlängerung kann, weil die Spannung σ veränderlich, durch Integration oder Flächenberechnung gefunden werden. An der beliebigen Schnittstelle beträgt die Dehnung $\varepsilon = \sigma : E$, daher die elastische Verlängerung des Theiles dx:

$$\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$$

und die Verlängerung der ganzen Stange

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma\, dx = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma}{E}\int_0^l x\, dx$$

$$3) \qquad = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{l}{E}\left(\frac{K}{F} + \frac{\gamma l}{2}\right).$$

Bei mässigen Längen kann das zweite Glied vernachlässigt werden.

Beispiel: An einem Bergwerks-Gestänge von $l = 200\,\text{m} = 20\,000\,\text{cm}$ Länge (Stabeisen) wirke unten eine Zugkraft $K = 40\,000\,\text{kg}$. Wegen der Bewegung des Gestänges möge die zulässige Spannung nur $\sigma_1 = 400\,\text{at}$ betragen dürfen. Es soll der erforderliche Querschnitt F berechnet werden. Wenn $1\,\text{cbm}$ Stabeisen $7800\,\text{kg}$ wiegt, so ist für Centimeter $\gamma = 7800 : 100^3 = 0{,}0078$ zu setzen. Es wird nach Gleichung 2

$$400 F = 40\,000 + 0{,}0078 \cdot 20\,000 F, \text{ also}$$

$$F = \frac{40\,000}{400 - 156} = 164\,\text{qcm}.$$

Die Verlängerung beträgt (Gleichung 3)

$$\Delta l = \frac{40000 \cdot 20000}{2000000 \cdot 164} + \frac{0{,}0078 \cdot 20000^2}{2 \cdot 2000000} = 2{,}44 + 0{,}78 = 3{,}22 \text{ cm}.$$

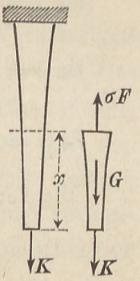
Am unteren Ende beträgt die Spannung nur

$$\sigma_0 = \frac{K}{F} = \frac{40000}{164} = 244 \text{ at}.$$

Die Festigkeit wird daher nur ungleichmässig ausgenutzt.

Soll die Festigkeit eines Gestänges völlig ausgenutzt werden, so muss der Querschnitt nach oben hin zunehmen. Das Gesetz für die Veränderlichkeit des Querschnittes eines Gestänges überall gleicher Sicherheit findet man nach Fig. 10. Am unteren Ende wirke eine Kraft K; diese verlangt bei einer überall gleichen Spannung σ einen Querschnitt $F_0 = K : \sigma$. In der Höhe x sei der Querschnitt F, mithin die Spannkraft σF. Für das Stück von der Länge x gilt dann die Gleichgewichts-Bedingung

Fig. 10.



$$\sigma F = G + K.$$

Hierin ist G unbekannt. Die Aufgabe wird aber lösbar, wenn man obige Gleichung auf beiden Seiten nach x differentiirt. σ und K sind unveränderlich; F ändert sich um dF, G um dG, u. zw. ist dG das Gewicht eines Längentheilchens an der Schnittstelle, d. h. $dG = \gamma F dx$. Mithin wird

$$\sigma dF = \gamma F dx.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung muss man die Veränderlichen trennen, d. h. dF und F auf der linken Seite vereinigen, während dx auf der rechten bleibt. $\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} dx$. Das giebt

$$\mathrm{l}\, F = \frac{\gamma}{\sigma} x + C.$$ Für $x = 0$ muss $F = F_0$ sein, mithin $\log F_0 = C$.

Durch Abziehen folgt:

$$\mathrm{l}\left(\frac{F}{F_0}\right) = \frac{\gamma}{\sigma} x \text{ und}$$

4)
$$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}.$$

Nimmt man von beiden Seiten die Briggischen Logarithmen, so wird

$$5) \qquad \log \frac{F}{F_0} = \log e \cdot \frac{\gamma}{\sigma} x = 0{,}434 \frac{\gamma}{\sigma} x .$$

Wegen der Gleichheit der Spannung ist auch die Dehnung überall dieselbe, daher die Verlängerung einfach $\Delta l = l\sigma : E$.

Beispiel 1: Für dasselbe Gestänge, das S. 12 behandelt wurde, wird $F_0 = 100$ qcm. Es ist $\gamma : \sigma = 0{,}0078 : 400 = 0{,}000\,019\,5$, wofür wir rund $0{,}000\,02$ setzen. Für

$x = 5\,000$ cm wird $\log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}1$, $\frac{F}{F_0} = 1{,}105$, $F = 110{,}5$;

für $x = 10\,000$ cm wird $\log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}2$, $\frac{F}{F_0} = 1{,}221$, $F = 122{,}1$;

für $x = 15\,000$ cm wird $\log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}3$, $\frac{F}{F_0} = 1{,}35$, $F = 135$;

für $x = 20\,000$ cm wird $\log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}4$, $\frac{F}{F_0} = 1{,}49$, $F = 149$ qcm.

Die Verlängerung wird

$$\Delta l = \frac{20\,000 \cdot 400}{2\,000\,000} = 4 \text{ cm}.$$

Leicht ergiebt sich hiernach auch das Gewicht des Gestänges, weil die Spannkraft an dem oberen Querschnitte von 149 qcm den Werth $400 \cdot 149 = 59\,600$ kg hat, was $= G + 40\,000$ kg sein muss. Daher wird das Gewicht $G = 19\,600$ kg, während das Gestänge überall gleichen Querschnitts (S. 12)

$$164 \cdot 0{,}0078 \quad 20\,000 = 25\,584 \text{ kg}$$ wiegt.

Alles für die Zugfestigkeit Gesagte gilt sinngemäss auch für die Druckfestigkeit.

Beispiel 2: Wie hoch darf ein prismatischer Steinpfeiler werden, wenn 1 cbm 2000 kg wiegt und die Spannung nicht über 20 at betragen soll? Ist die Höhe x cm, die Grundfläche F in qcm ausgedrückt, so wird mit $\gamma = 0{,}002$ für 1 ccm das Gesammtgewicht

$$G = \gamma F x = 0{,}002 \cdot Fx$$

und die ebenso grosse Spannkraft an der Grundfläche $K = 20\,F$, mithin wird, unabhängig von der Grösse der Grundfläche F,

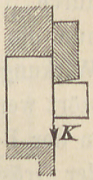
$$x = 10\,000 \text{ cm} = 100 \text{ m}.$$

Die Grundfläche muss so gross gemacht werden, dass die Gefahr einer seitlichen Ausbiegung nicht entsteht. Der hierdurch bedingte Querschnitt hängt aber von manchen Umständen ab, die sich nicht sämmtlich rechnungsmässig verfolgen lassen.

3. Schub- oder Scherfestigkeit.

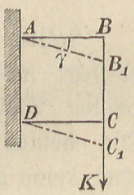
Ist ein Körper fest eingespannt und wird auf den vorspringenden Theil (Zapfen) mittels eines scherblattartigen Körpers eine Kraft K ausgeübt (Fig. 10), so hat diese das Bestreben, den vorspringenden Zapfen von dem linksseitigen Theile des Körpers im Sinne der Kraft abzuschieben oder abzuscheren. Der Widerstand gegen Abscherung ist annähernd mit der abzuscherenden Fläche F proportional und bei Eisen 0,6 bis 0,8 Mal so gross wie der gegen Zerreissen oder gegen Zerdrücken, wenn man von diesen Widerständen den kleineren einführt. Dem entsprechend nimmt man auch die zulässige Belastung = 0,6 bis 0,8 von der zulässigen Zug- oder Druckbelastung; bei Holz längs der Fasern nur $^1/_6$ bis $^1/_8$.

Fig. 10.



Wirkt die Kraft nicht dicht an der Anhaftungsfläche, sondern in einem geringen Abstande l davon, so ist mit den Schubspannungen, die wir für die Flächeneinheit mit τ (tangential wirkend) bezeichnen wollen, eine Formänderung verbunden, welche darin besteht, dass die zur Anhaftungsfläche ursprünglich rechtwinkligen Geraden sich um den Winkel γ schiefwinklig stellen (Fig. 12), so dass das Rechteck $ABCD$ in das Rhomboid AB_1C_1D übergeht. Dieser Winkel γ heisst die **Gleitung**, indem man sich vorstellt, dass die einzelnen Querschichten $\parallel AD$ an einander entlang gleiten. Die Gleitung γ hat eine ähnliche Bedeutung wie die Dehnung ε bei der Wirkung von Zug und Druckspannungen. Wie $\varepsilon = \sigma : E$, so ist

Fig. 12.



$$1) \qquad \gamma = \tau : G,$$

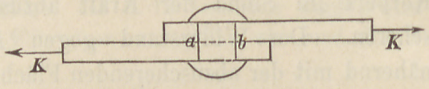
also auch verhältnisgleich mit der Spannung τ. G ist wie E eine von dem Stoff abhängige Grösse, die auch mit E in einfacher Beziehung steht; es ist nämlich für isotrope Körper etwa

$$G = 0{,}4\ E$$

anzunehmen, u. zw. heisst G das **Gleitmafs** oder der Gleitmodul. Die Beziehungen zwischen Schubspannungen und Längsspannungen nebst den entsprechenden Formänderungen werden eingehender behandelt in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre.

Die Scherfestigkeit kommt besonders bei den Nietverbindungen in Frage. Will man zwei Stäbe, in denen Längszugkräfte K wirken sollen, in der einfachsten Weise durch Niete verbinden, so versieht man jeden Stab mit einem cylindrischen Loche, legt sie so auf einander, dass die Löcher zusammenfallen und zieht einen Nietbolzen vom Durchmesser d hindurch (Fig. 13). Sollte nun die Vernietung durch Wirkung der Kräfte K zerstört werden, so müsste die in der Berührungsebene der Stäbe liegende Querschnittsfläche ab von der Grösse $F = {}^1/_4\, d^2\pi$ abgeschert werden. Man kann daher setzen:

Fig. 13.



$$K = \tau F = \tau \cdot \frac{d^2\pi}{4}.$$

Die Schubspannungen vertheilen sich nicht gleichmässig über die Abscherungsfläche; τ ist also nur eine mittlere Schubspannung. Die Erfahrung lehrt aber, dass man bei Nieten $\tau = 0{,}8\,\sigma$ setzen darf, wenn σ die kleinere der zulässigen Längsspannungen bedeutet. Ist für Stabeisen $\sigma = 700^{\text{at}}$, so kann $\tau = 560^{\text{at}}$ gesetzt werden.

$$d = 2^{\text{cm}};\quad \tau = 560^{\text{at}} \text{ giebt } K = 1759{,}3^{\text{kg}}.$$

Sollen die zu verbindenden Stäbe in gleicher Flucht liegen, so legt man auf beide eine sog. Lasche und verbindet diese mit beiden Stäben (Fig. 14). Die beiden Niete liefern aber keine grössere Festigkeit als das eine Niet in Fig. 13. Jeder Nietbolzen hat die Kraft K für sich allein aufzunehmen. Günstiger ist der Fall, wenn man die zu verbindenden Stäbe beiderseits mit Laschen versieht, sog. doppelte Verlaschung anwendet (Fig. 15). In diesem Falle widersteht jedes Niet gleichzeitig mit der Scherfestigkeit zweier Querschnitte; z. B. ab und cd. Denn um den linksseitigen Stab aus der Verlaschung herauszureissen,

Fig. 14.

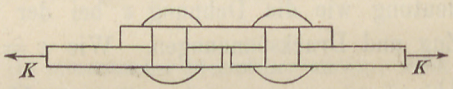
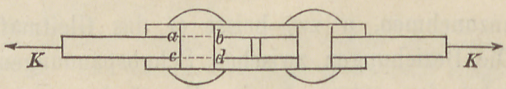


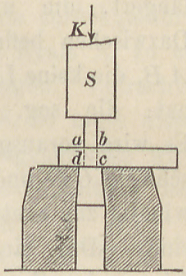
Fig. 15.



muss das linksseitige Niet an beiden Berührungsflächen zwischen dem Stabe und den Laschen abgeschert werden; bei einer solchen Zerstörung würde dann der mittlere Theil des Nietbolzens in dem herausgerissenen Stabe, seine äusseren Theile in den Laschen verbleiben. Ein solcher Nietbolzen, der mit der Festigkeit zweier Querschnittsflächen widersteht, heisst ein zweischnittiges Niet. Für Fig. 15 gilt also die Gleichung

$$K = 2 \cdot \tau \cdot {}^1/_4 d^2 \pi.$$

Fig. 16.



Die Scherfestigkeit kommt auch in Frage bei dem Kraftaufwande zum Durchstossen, Durchlochen oder Durchpunzen eines Stabes oder einer Platte, behufs Herstellung (Stanzen) von Nietlöchern. Es wird dann durch Maschinenkraft der Stahlstempel S (Fig. 16) niedergedrückt, so dass er den cylindrischen Körper $abcd$ aus dem Stabe oder der Platte herausdrängt. Ist die Längsfestigkeit der Platte $Z = D = 3500^{\text{at}}$, so ist die Scheerfestigkeit $0{,}8 \cdot 3500 = 2800^{\text{at}}$. Um ein Loch von $d = 2^{\text{cm}}$ Durchmesser durch die $h = 2^{\text{cm}}$ dicke Platte zu drücken, ist, weil die cylindrische Trennungsfläche $d\pi h = 2 \cdot \pi \cdot 2$, die Kraft

$$K = 4\pi \cdot 2800 = 35\,186^{\text{kg}} \text{ erforderlich.}$$

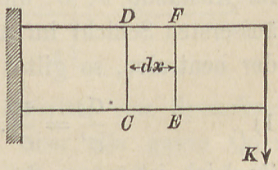
Genauere Untersuchungen zeigen, dass bei dem Widerstande der Niete wie auch beim Stanzen von Löchern noch verwickeltere Spannungsvorgänge auftreten, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

4. Biegungsfestigkeit.

a) Grundgleichungen.

Ein Stab sei an dem einen (linken) Ende (Fig. 17) in einer Wand oder dergl. unwandelbar befestigt (eingespannt); am äusseren Ende wirke eine Kraft K, welche die Längenachse des Stabes (d. h. die Verbindungsgrade der Schwerpunkte der Querschnitte) rechtwinklig schneidet. Die durch K und die Längenachse bestimmte Ebene sei für den Stab oder Balken eine Symmetrie-Ebene.

Fig. 17.



Biblioteka Szkoły Inżynierskiej w Szczecinie

Die Erfahrung lehrt, dass der Stab unter der Last K sich biegt; zwei ursprünglich parallele Querschnitte CD und EF im Abstande dx von einander, verdrehen sich gegen einander und schneiden sich in der Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 18). Die oberen Schichten des Stabes haben sich verlängert, die unteren sich verkürzt. Dazwischen befindet sich eine Schicht AB, die keine Längenänderung erlitten hat, die sog. neutrale Schicht. Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnitte CD und EF eben und rechtwinklig zur neutralen Schicht geblieben sind. Die einzelnen Schichten erfahren im Zusammenhange mit den Längenänderungen Zug- und Druckspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze den Dehnungen verhältnisgleich sind. Zeichnet man das Längentheilchen $CDFE$ des Stabes besonders heraus (Fig. 19) und legt durch N eine Ebene $JK \parallel CD$, so stellen die Keile zwischen EF und JK die Längenänderungen der einzelnen Schichten des Stabtheilchens dar. Da nun die Schichten ursprünglich die übereinstimmende Länge $GN = dx$ hatten, so sind die Dehnungen, also auch die Spannungen der einzelnen Schichten, verhältnisgleich dem Abstande u derselben von der neutralen Schicht. Ist daher σ die Spannung im Abstande u, σ' die Spannung der äussersten Schicht im Abstande e' von der neutralen, so gilt

Fig. 18.

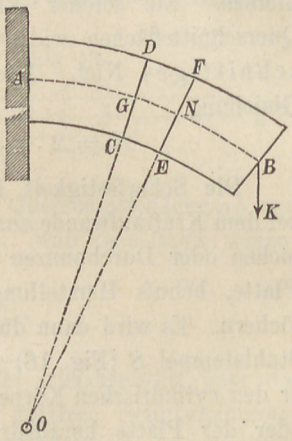
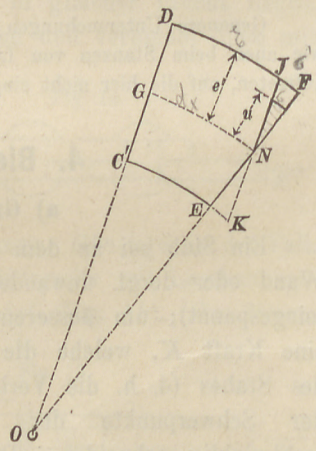


Fig. 19.



$$1) \qquad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{u}{e'}.$$

Zugleich ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke JFN und GNO

$$JF : GN = JN : GO.$$

$JF : GN$ ist aber ($= JF : DJ$) die Dehnung $\sigma' : E$ der obersten Schicht. Setzt man $GO = \varrho$, so wird

$$\sigma' : E = e' : \varrho \quad \text{oder}$$

$$2) \qquad \varrho = \frac{Ee'}{\sigma'}.$$

Durch Gl. 1 sind die Spannungen an den verschiedenen Stellen eines Querschnitts auf diejenige am oberen Rande zurückgeführt; es kommt nun darauf an, σ' aus der gegebenen Kraft K zu ermitteln. Dazu dienen die Gleichgewichts-Bedingungen. Betrachtet man das Stück rechts vom Schnitt EF in Fig. 18, so muss dieses den Gleichgewichts-Bedingungen genügen, wobei angenommen wird, dass die Kraft K ihre ursprüngliche (lothrechte) Richtung beibehält und im Punkte B angreift (Fig. 20). Da man die Form des gebogenen Balkens nicht kennt, so ist auch die Richtung der am Schnitt EF auftretenden Spannkräfte unbekannt. Weil aber in den meisten Fällen der Wirklichkeit die innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Biegung nur gering sein wird, so vernachlässigen wir die Formänderung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen und nehmen die Lage und Richtung der einzelnen Kräfte so, wie sie am ungebogenen Balken sich ergeben würde. In Fig. 21 stellt also der linke Theil das Stück des Balkens oder Stabes dar, welches im Gleichgewichte sein soll. Der rechte Theil ist der Querschnitt.

Fig. 20.

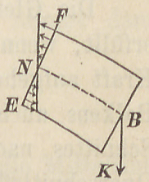
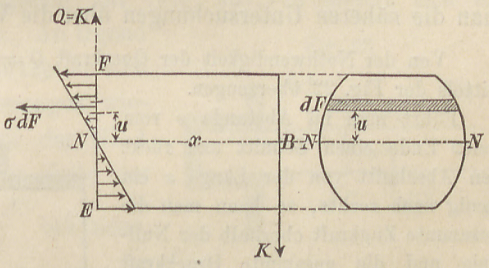


Fig. 21.



Nehmen wir aus dem Querschnitt im Abstande u von der neutralen Schicht NN einen Flächenstreifen dF heraus, so erfährt dieser, weil an ihm durchweg die Spannung σ auftritt, eine Spannkraft $\sigma \cdot dF$. Derartige Spannkräfte kommen über die ganze Querschnittshöhe vor, sind oben Zug-, unten Druckkräfte, und ihre Summe muss nach der Gleichung der wagerechten Kräfte Null sein.

Also $\int \sigma dF = 0$. Weil nun nach Gleichung 1, S. 18, $\sigma = u \cdot \sigma' : e'$, σ' und e' aber von u nicht abhängig sind, so ergiebt sich

$$\frac{\sigma'}{e'} \int dF \cdot u = 0, \text{ also } \int dF \cdot u = 0.$$

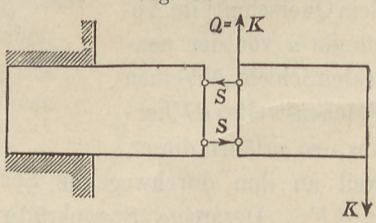
Dies bedeutet (1. Theil, S. 126), dass die Gerade NN im Querschnitt, von welcher aus die Abstände u gemessen sind, durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen muss. Die Gerade NN, in welcher die neutrale Schicht einen Querschnitt schneidet, heisst die neutrale Achse oder die Spannungs-Nulllinie (weil an ihr die Spannung $\sigma = 0$) oder kürzer die Nulllinie des Querschnitts. Die Gleichung der wagerechten Kräfte bedingt also, dass die Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Die Mittellinie des Stabes liegt also in der neutralen Schicht desselben.

Die Gleichung der lothrechten Kräfte ist aber in Fig. 21 erst erfüllt, wenn die Kraft K durch eine gleiche, aufwärts gerichtete Kraft aufgehoben wird. Die Kraft K hat ausser der Biegung des Balkens auch das Bestreben, das abgeschnittene Stück längs des Schnittes nach unten gleiten zu lassen; dem setzt sich an der Querschnittsfläche ein Schubwiderstand, eine sog. innere Querkraft $Q = K$, entgegen. Die aus Q sich ergebenden Schubspannungen sind in den einfacheren Fällen, wie sie in diesem Buche nur behandelt werden sollen, unbedeutend, weshalb wir uns um diese Querkraft Q hier nicht weiter kümmern werden. In Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik findet man die näheren Untersuchungen über die Vertheilung der Querkraft.

Von der Nothwendigkeit der Querkraft $Q = K$ kann man sich auch noch mittels der Fig. 22 überzeugen.

Führt man im Abstande x vom freien Ende einen Schnitt und rückt den Abschnitt von der Länge x ein wenig nach rechts, so kann man die gesammte Zugkraft oberhalb der Nulllinie und die gesammte Druckkraft unterhalb derselben durch die Spannkräfte S zweier wagerechten Gelenkstangen ersetzen. Hierdurch sind aber die beiden Abschnitte noch nicht steif mit einander verbunden; die Gelenkstangen verhindern nur eine Drehung des rechtsseitigen Theiles, nicht aber

Fig. 22.



eine Parallelverschiebung nach unten; hierzu ist noch eine nach oben gerichtete Querkraft $Q = K$ erforderlich.

In der Gleichung der Momente in Bezug auf die Nulllinie NN (Fig. 21) haben wir dann Kx als äusseres Moment; die innere Spannkraft σdF eines Querschnitts-Theilchens hat den Hebelarm u, daher muss $0 = Kx - \int \sigma dF u$ oder nach Gl. 1, S. 18,

$$\frac{\sigma'}{e'} \int dF u^2 = Kx \quad \text{sein.}$$

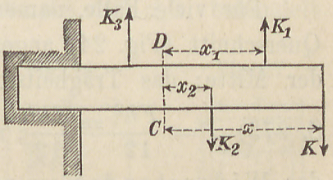
Die linke Seite dieser Gleichung ist die Momentensumme der an einem Querschnitt auftretenden inneren Spannkräfte oder das innere Widerstandsmoment, während die rechte Seite das Moment der äusseren biegenden Kraft in Bezug auf die Nulllinie des Querschnitts ist. Dieses heisst das Biegungsmoment und wird mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\int dF u^2$ bedeutet nach Theil 1, S. 267 und 273 das geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Nulllinie. Die Momentgleichung nimmt dann die Form an:

$$3) \qquad \frac{\sigma'}{e'} J = \mathfrak{M}.$$

Die durch die Richtungslinie der Kraft K und die Mittellinie des Stabes bestimmte Ebene, welche der Voraussetzung zufolge eine Symmetrie-Ebene des Stabes sein soll, heisst die Biegungsebene, weil die Mittellinie des Stabes auch nach der Biegung in ihr verbleibt. Die Nulllinie steht auf der Biegungsebene rechtwinklig.

Treten in der Biegungsebene mehrere, zur Mittellinie des Stabes rechtwinklige Kräfte zugleich auf (Fig. 23), so ändert sich dadurch nichts wesentliches. An irgend einer Schnittstelle CD vertheilen sich die Zug- und Druckspannungen wiederum nach dem Gesetze der Gl. 1 (S. 18), so dass die linke Seite der Gl. 3 dieselbe Form $\frac{\sigma' J}{e'}$ bekommt.

Fig. 23.



Die Querkraft Q an der Schnittstelle wird nunmehr entgegengesetzt der algebraischen Summe der rechts vom Schnitte liegenden äusseren Kräfte:

$$Q = K - K_1 + K_2 = \Sigma K.$$

Das Biegungsmoment aber wird $\mathfrak{M} = Kx - K_1 x_1 + K_2 x_2$. Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ ist die Momentensumme der am abgeschnittenen Stücke des Stabes wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die Nulllinie des Schnittes.

Nennt man die stärkste Druckspannung am unteren Rande σ'' und den Abstand von der Nulllinie e'', so ist wegen der Gl. 1 (S. 18)

4) $$\frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{e''}{e'},$$

mithin kann auch geschrieben werden nach Gl. 3

5) $$\frac{\sigma''}{e''} J = \mathfrak{M}.$$

Die linke Seite der Gl. 3: $\frac{\sigma'}{e'} J$, das sog. Spannungsmoment, enthält einen physikalischen Faktor σ', während der andere Faktor $J : e'$ nur von der Form und Grösse des Querschnitts abhängt. Diesen Faktor $\frac{J}{e'} = \mathfrak{W}'$ nennt man kurz das Widerstandsmoment des Querschnitts, u. zw. für die Zugspannung σ', während $\frac{J}{e''}$, ebenso das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}''$ des Querschnitts für die Druckspannung σ'' ist. In den meisten Fällen der Anwendung liegt der Schwerpunkt des Querschnitts und damit die Nulllinie in halber Höhe; dann ist $e' = e''$, wofür wir dann einfach e setzen, ebenso $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'' = \mathfrak{W}$. Es werden dann die Randspannungen $\sigma' = \sigma''$ (wofür wir σ schreiben), und man hat

$$\text{Randspannung} = \frac{\text{Biegungsmoment } \mathfrak{M}}{\text{Widerstandsmoment } \mathfrak{W}}.$$

b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte.

Für viele Fälle, namentlich für Holzbalken ist der rechteckige Querschnitt (Fig. 24) angezeigt. Bei diesem liegt die Nulllinie in der Mitte; das Trägheitsmoment ist (nach Theil 1, S. 273) $J = \frac{Fh^2}{12} = \frac{dh^3}{12}$; mithin ist, wegen $e = {}^1/_2 h$, das Widerstandsmoment des Rechtecks

Fig. 24.



6) $$\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{Fh}{6} = \frac{d \cdot h^2}{6}.$$

Da nun der Aufwand an Stoff durch den Querschnitt F bedingt wird, so sind die Widerstandsmomente von Rechtecken gleichen Inhalts

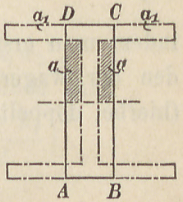
ihren Höhen h verhältnisgleich. Daher empfiehlt es sich, Balken, von denen man bestimmt annehmen kann, dass sie stets nur in lothrechtem Sinne belastet werden, möglichst hochkantig zu stellen, d. h. h gegen d gross zu nehmen.

Für $d = 12$, $h = 24$ ist $\mathfrak{W} = 1/6 \cdot 12 \; 24^2 = 1152$; legt man denselben Balken aber flach, so ist $d = 24$, $h = 12$ und $\mathfrak{W} = 1/6 \cdot 24 \cdot 12^2 = 576$, d. h. halb so gross wie vorher, dem entsprechend auch die Tragfähigkeit nur halb so gross.

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist vom vierten Grade (^{cm4}), das Widerstandsmoment also vom dritten Grade (^{cm3} oder ^{ccm}).

Bei gegebener Höhe $h = 2e$ liefert ein Flächentheil dF im Abstande u von der Nulllinie zum Widerstandsmomente den Beitrag $dFu^2 : e$. Die Flächentheile in der Nähe der Nulllinie geben daher nur wenig Beitrag; mithin ist es bei der Verwendung von Eisen, wo man in der Wahl der Form nicht sehr beschränkt ist, vortheilhaft, diese Flächentheile fortzunehmen und in möglichst weitem Abstande von der Nulllinie anzubringen. Vom hochkantigen Rechteck $ABCD$ (Fig. 25) gelangt man dann durch Verlegung der Flächentheile a nach a_1 zu dem I-förmigen Querschnitte.

Fig. 25.



Bevor diese Form gewalzt wurde, hatte man schon Eisen der Form T, die man T-Eisen nannte; indem man sodann die I-Form als die Vereinigung zweier T-Eisen $\left(\begin{matrix}\mathrm{T}\\ \perp\end{matrix}\right)$ ansah, führte man dafür den Namen Doppelt-T-Eisen ein, verwendet dafür aber in der Schrift stets das Zeichen I-Eisen.

Zur Berechnung des Trägheitsmoments kann der I-Querschnitt (Fig. 26) als Unterschied zweier Rechtecke dh und d_1h_1 behandelt werden, wenn man die Stärke der zur Verbindung der äusseren Theile dienenden Mittelwand $= d - d_1$ setzt. Daher ist

Fig. 26.

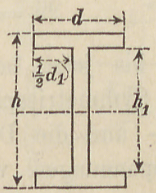
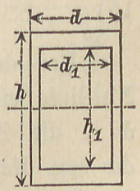


Fig. 27.



7) $\quad J = 1/12\,(dh^3 - d_1h_1^3)$

und weil $e = 1/2\,h$:

8) $\quad \mathfrak{W} = \dfrac{J}{e} = \dfrac{1}{6}\,\dfrac{dh^3 - d_1h_1^3}{h}$.

Die gleiche Formel gilt auch für das hohle Rechteck (Fig. 27).

Soll der Stab oder Balken gegen wagerechte Kräfte ebenso widerstandsfähig sein wie gegen lothrechte, so ist das Quadrat oder noch besser das hohle Quadrat (Fig. 28) angezeigt, mit

Fig. 28.

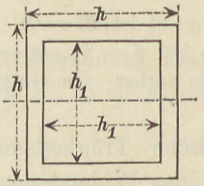
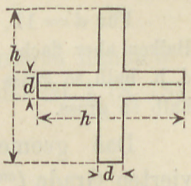


Fig. 29.



9) $$\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{h^3}{6} \quad \text{bezw.}$$

10) $$\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6}\,\frac{h^4 - h_1{}^4}{h}.$$

Zieht man in solchem Falle Querschnitte ohne Höhlungen vor, um den Farbenanstrich (als Schutz gegen Rost) leicht erneuern zu können, so kommt der kreuzförmige Querschnitt (Fig. 29) in Frage. Es ist dann

11) $$J = \frac{1}{12}(dh^3 + hd^3 - d^4),$$

indem man erst den Beitrag der lothrechten Rippe anschreibt, dann den der wagerechten Rippe voll hinzufügt und den Beitrag des (hierbei doppelt gerechneten) Quadrates $d \cdot d$ abzieht. Es wird dann

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{6}\,\frac{dh^3 + hd^3 - d^4}{h}.$$

Für gleichen Widerstand nach allen Richtungen eignen sich der Kreis und der Kreisring.

Für den Kreis vom Halbmesser r ist (Theil 1, S. 273)

12) $$J = \frac{Fr^2}{4} = \frac{r^4\pi}{4} \quad \text{und}$$

13) $$\mathfrak{W} = \frac{r^3\pi}{4}.$$

Für den Ring von den Halbmessern R und r ist

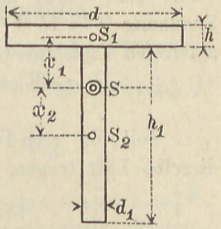
14) $$J = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)\,\pi,$$

15) $$\mathfrak{W} = \frac{1}{4}\,\frac{(R^4 - r^4)\,\pi}{R}.$$

Bei den bis jetzt betrachteten Querschnittsformen war die Nulllinie eine Symmetrieachse, daher $e' = e''$ und auch $\sigma' = \sigma''$, d. h. die Zug- und die Druckspannung in den äussersten Lagen, die sog. Randspannungen, von gleicher Grösse. Bei Gusseisen, wo die Spannungen an der Elasticitätsgrenze $z : d$ sich verhalten wie $3 : 8$, ist es angemessen, den Querschnitt so anzuordnen, dass die

Sicherheit in der gezogenen Randschicht ebenso gross wird wie in der gedrückten, dass also $\sigma' : \sigma'' = 3 : 8$, also auch $e' : e'' = 3 : 8$. Das führt auf unsymmetrische Formen, von denen wir beispielsweise den ⊤-Querschnitt (Fig. 30) betrachten wollen. Die breite Seite muss die gezogene (konvexe) werden.

Fig. 30.



Sind x_1 und x_2 die Abstände der Theilschwerpunkte S_1 und S_2 der Rechtecke $d \cdot h$ und $d_1 h_1$ vom Gesammt-Schwerpunkte S, so ist $d \cdot h x_1 = d_1 h_1 x_2$ und $x_1 + x_2 = {}^1/_2 (h + h_1)$; daraus

$$16) \quad x_1 = \frac{d_1 h_1 (h + h_1)}{2 (d \cdot h + d_1 h_1)} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{d \cdot h (h + h_1)}{2 (d \cdot h + d_1 h_1)}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Nulllinie wird dann als Summe der Beiträge der beiden Rechtecke

$$J = {}^1/_{12} d \cdot h^3 + d \cdot h x_1^2 + {}^1/_{12} d_1 h_1^3 + d_1 h_1 x_2^2,$$

wofür man (nach Theil 1, S. 275, Gl. 25) auch schreiben kann

$$17) \quad J = \frac{1}{12} (d \cdot h^3 + d_1 h_1^3) + \frac{d \cdot h \cdot d_1 h_1}{d \cdot h + d_1 h_1} \left(\frac{h + h_1}{2} \right)^2.$$

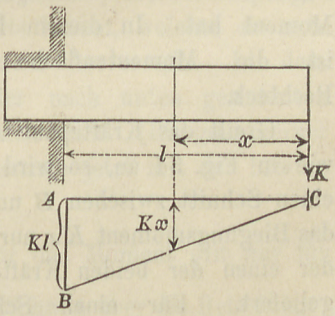
$$18) \qquad \mathfrak{W}' = J : e' \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}'' = J : e''$$

sind hier ungleich gross.

c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegungsmomentes.

Für Balken oder Stäbe überall gleichen Querschnitts ist auch $\mathfrak{W}$ überall gleich, mithin die stärkste Spannung σ an verschiedenen Schnitten verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente. Die Veränderlichkeit des letzteren pflegt man bildlich darzustellen.

Fig. 31.



Wird der eingespannte Balken (Fig. 31) am freien Ende von einer Last K ergriffen, so ist für einen beliebigen Schnitt im Abstande x von K das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Kx$, dargestellt durch die Gerade CB. Die Figur ACB heisst Momentenfläche. Das grösste Moment gilt daher für die Einspannungsstelle

$$\mathfrak{M}_1 = Kl.$$

Beispiel: Für einen Holzbalken von rechteckigem Querschnitte sei $l = 2^{m} = 200^{cm}$, $d = 12$, $h = 24^{cm}$; für Holz ist wegen der Spannungen an der Elasticitätsgrenze, Zug 250, Druck 170^{at}, die letztere massgebend; wählt man etwas mehr als zweifache Sicherheit, indem man als zulässige Spannung $\sigma = 75^{at}$ ($< 1/2 \cdot 170$) einführt, so gilt für die zulässige Belastung am freien Ende die Gleichung

$$\sigma \cdot \mathfrak{W} = Kl, \quad \text{mithin, da nach S. 22 } \mathfrak{W} = 1152,$$
$$K = 75 \cdot 1152 : 200 = 432^{kg}.$$

Soll ein runder Schmiedeisenstab bei 700^{at} stärkster Spannung dieselbe Last tragen, so gilt für seinen Halbmesser r die Gleichung

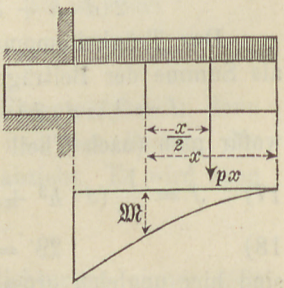
$$432 \cdot 200 = 700 \frac{r^3 \pi}{4}, \quad \text{woraus } r = 5{,}4^{cm}.$$

Ist der Stab oder Balken gleichmässig über seine Länge belastet mit p für die Längeneinheit (Fig. 32), und führt man im Abstande x vom Ende einen Schnitt, so hat die Gesammtlast der Länge x die Grösse px im Abstand $1/2\,x$ vom Schnitte; mithin wird

$$\mathfrak{M} = px \cdot 1/2\,x = 1/2\,px^2.$$

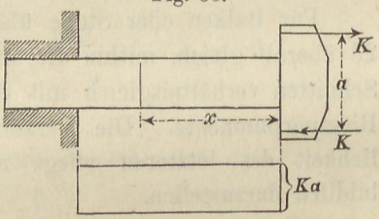
Die Darstellung davon ist eine Parabel mit lothrechter Achse, die am freien Ende des Stabes liegt. Der Parameter ist $1 : p$.

Fig. 32.



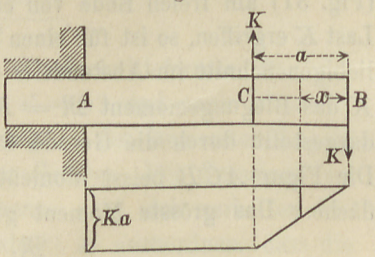
Greift am freien Ende des Stabes ein Kräftepaar vom Momente Ka (Fig. 33) an, so ist dieses auch für jeden Schnitt des Stabes das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$, weil ein Kräftepaar in Bezug auf jeden Punkt seiner Ebene das gleiche Moment hat. In diesem Falle ist die Momentenfläche ein Rechteck.

Fig. 33.



Greift das Kräftepaar $K \cdot a$ wie in Fig. 34 an, so wird für einen Schnitt zwischen B und C das Biegungsmoment Kx nur von der einen der beiden Kräfte K geliefert. Für einen Schnitt zwischen A und C aber liegen beide Kräfte K an dem abge-

Fig. 34.

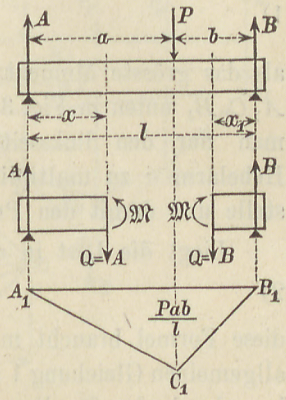


schnittenen Stücke und bilden ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = Ka$. Die Momentenfläche hat daher die unten in Fig. 34 gezeichnete Form.

d) Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast.

Ein Balken auf 2 Stützen im Abstande l von einander (Fig. 35) sei in den Abständen a und b von den Stützen durch ein Gewicht P belastet. Es entstehen an den Auflagern Widerstände A und B, die man (nach Theil I, S. 162) leicht findet, indem man die Momenten-Gleichung in Bezug auf B bezw. A aufstellt.

Fig. 35.



Es wird

$$A = P\frac{b}{l};\quad B = P\frac{a}{l}.$$

Unter Einwirkung der Kräfte P, A und B muss der Balken im gebogenen Zustande im Gleichgewichte sein. Nach S. 19 vernachlässigen wir aber die Biegung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen. Führen wir im Abstande x von A einen Schnitt, so müssen beide Theile des Balkens im Gleichgewichte sein. Welches der beiden Stücke wir betrachten, ist im Grunde gleichgültig; der Einfachheit wegen wählt man meist dasjenige, an dem die wenigsten Kräfte vorkommen, in vorliegendem Falle das linksseitige, welches in der Figur besonders herausgezeichnet ist. Die Kraft A verlangt eine innere Querkraft $Q = A$ (abwärts); diese bildet mit A ein Kräftepaar, das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Ax$ mit dem Sinne rechts herum, welches ein entgegengesetzt drehendes Spannungsmoment hervorruft. In dem Balken liegen also, wie schon aus der nach unten gerichteten Durchbiegung folgt, die gezogenen Schichten unten. (Ein gusseiserner Balken unsymmetrischen Querschnitts müsste jetzt mit der breiten Seite nach unten liegen ⊥.)

Die Formel $\mathfrak{M} = Ax = P\frac{b}{l}x$ für das Moment gilt nur für Schnitte links von der Last. Sobald der Schnitt über die Belastungsstelle hinaus rückt, kommt plötzlich die Last P links vom Schnitte zu liegen, wodurch sich eine Unstetigkeit in der Veränderlichkeit

des Momentes ergiebt. Für einen Schnitt rechts von der Last (im Abstande x_1 von B) betrachtet man einfacher das Stück rechts vom Schnitte. Dann wird $\mathfrak{M} = Bx_1 = P\frac{a}{l}x_1$. Die Momente werden für beide Seiten des Balkens durch Gerade dargestellt. Für die Belastungsstelle ($x = a$; $x_1 = b$) ergiebt sich von beiden Seiten der übereinstimmende Werth

$$1) \qquad \mathfrak{M}_1 = \frac{Pab}{l}$$

als das grösste Moment. Die Momentenfläche ist also das Dreieck $A_1 C_1 B_1$ unten in Fig. 34. Zur Bestimmung dieses Dreiecks braucht man nur den linksseitigen Auflagerdruck $A = Pb : l$ mit dem Hebelarm a zu multipliciren, um das Moment an der Belastungsstelle und damit den Punkt C_1 der Momentenfläche zu erhalten.

Liegt die Last in der Mitte, so ist $a = b = {}^1/_2 l$ und

$$2) \qquad \mathfrak{M}_1 = {}^1/_4 Pl;$$

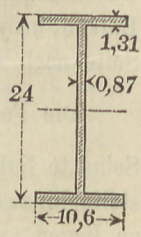
diese Formel braucht man aber für die Anwendung nicht aus der allgemeinen Gleichung 1 abzuleiten, sondern kann unmittelbar den Auflagerdruck, der für diesen Fall offenbar $= {}^1/_2 P$ sein muss, mit dem Abstande von der Last (der Balkenmitte) ${}^1/_2 l$ multipliciren.

Beispiel 1: Es sollen die Querschnitts-Abmessungen eines Holzbalkens bestimmt werden, der bei 3 m = 300 cm Spannweite und 75 at zulässiger Spannung eine Last von 2000 kg in der Mitte zu tragen hat. Es muss $75 \times \frac{d \cdot h^2}{6} = \frac{2000 \cdot 300}{4}$, also $d \cdot h^2 = 12\,000$ cm³ sein. Setzt man nun etwa noch das Verhältnis $h : d = 2$ fest, so wird $h^3 = 24\,000$, mithin

$$h = 28{,}8 \text{ cm}; \quad d = 14{,}4 \text{ cm}.$$

Beispiel 2: Ein Balken, dessen Querschnitt in Fig. 36 gegeben, liege auf zwei Stützen in 4 m Abstand. Es soll für eine stärkste Spannung $\sigma = 700$ at die zulässige Einzellast in der Mitte berechnet werden. Die Maſse in Fig. 36 sind cm. (Würde man versäumen, die Spannweite von 4 m in 400 cm umzuwandeln, so erhielte man die Tragfähigkeit 100 mal zu gross; dieser Fehler kommt erfahrungsmässig bei Anfängern häufig vor.) Es ist

Fig. 36.



$$J = {}^1/_{12}\,(10{,}6 \cdot 24^3 - 9{,}73 \cdot 21{,}38^3)$$
$$= 4287; \quad \mathfrak{W} = 357.$$

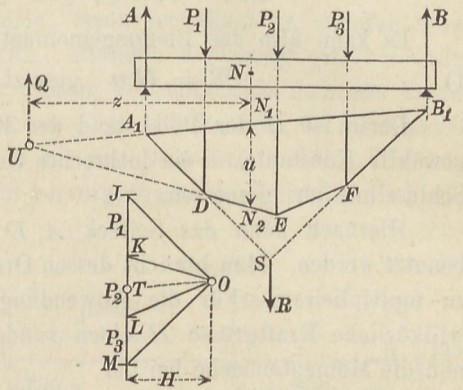
Mithin $P \cdot 100 = 700 \cdot 357$ oder $P = 2499$ kg.

e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten.

Für mehrere Einzellasten (Fig. 37) eignet sich besonders das zeichnerische Verfahren, namentlich für die Herleitung.

In Theil 1, S. 120, wurde gezeigt, wie man die Mittelkraft R der gegebenen Lasten finden kann. Man setzt die Lasten P_1, P_2, P_3 nach beliebigem Maßstabe zu einem Krafteck JM zusammen, wählt einen beliebigen Pol O und zeichnet, in einem beliebigen Punkte A_1 der linksseitigen Auflager-Lothrechten beginnend, ein Seileck $A_1 DEFB_1$, welches die rechtsseitige Auflager-Lothrechte in B_1 schneidet. Durch den Schnittpunkt S der Verlängerungen der äussersten Seileckseiten $A_1 D$ und $B_1 F$ geht dann die Mittelkraft R der Lasten. Um nun die Auflagerdrücke A und B so zu bestimmen, dass sie R das Gleichgewicht halten, hat man (nach Theil 1, S. 121) nur zu $A_1 B_1$, der Schlusslinie des Seilecks, einen Parallelstrahl OT im Krafteck zu ziehen, dann ist T der Theilpunkt der Lasten; es ist TJ der Auflagerdruck A, MT der Auflagerdruck B.

Fig. 37.



Will man nun für einen beliebigen, etwa zwischen P_1 und P_2 liegenden Schnitt N das Biegungsmoment bestimmen, so hat man zu bedenken, dass das Biegungsmoment die Summe der Momente der beiden Kräfte A und P_1 (links vom Schnitt) in Bezug auf N ist. Zu diesen beiden Kräften findet man aber leicht die Mittelkraft $Q = A - P_1 = TK$ im Krafteck mit dem Sinne aufwärts. Die Lage wird bestimmt durch den Schnittpunkt der einschliessenden Seileckseiten. Die einschliessenden Polstrahlen sind OT und OK, die hierzu parallelen Seiten des Seilecks $B_1 A_1$ und ED, welche sich in U schneiden. Nach dem Satze der Momente (Theil 1, S. 103) kann für die Momentensumme von A und P_1 das Moment der Mittelkraft Q gesetzt werden, d. h. es ist

$$\mathfrak{M} = Qz.$$

Nun ist das Dreieck $UN_1N_2 \sim OKT$. Nennt man den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie JM den Polabstand H, so gilt in den ähnlichen Dreieken, dass die wagerechten und lothrechten Abmessungen einander verhältnisgleich sind. Oder $z : N_1N_2 = H : KT$, mithin, wenn man $N_1N_2 = u$ setzt und KT mit Q vertauscht:

$$z : u = H : Q, \text{ oder } Qz = Hu.$$

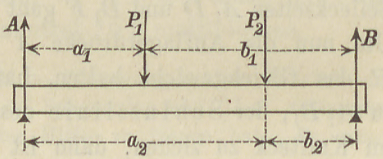
Es kann also das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Qz$ auch

1) $$\mathfrak{M} = Hu \text{ gesetzt werden.}$$

Darin ist H der Polabstand des Kraftecks, d. h. eine beliebig gewählte Konstante, u die lothrechte Ordinate des Seilecks, von der Schlusslinie aus gemessen.

Hiernach kann das Seileck A_1DEFB_1 als Momentenfläche benutzt werden. Man braucht dessen Ordinaten nur mit der Kraft H zu multipliciren. Für die Anwendung empfiehlt es sich, für die willkürliche Kraftgrösse H einen runden Werth zu wählen. Weil nun die Momentenfläche bei der Wirkung von Einzellasten ein Vieleck ist, so muss das überhaupt grösste Biegungsmoment, das an dem Balken auftritt, stets an einem Eckpunkte des Vielecks, d. h. unter einer Last, vorkommen.

Fig. 38.



Sind nur zwei Lasten P_1 und P_2 auf dem Balken (Fig. 38), so führt die Rechnung rascher zum Ziele. Die Auflagerdrücke werden:

$$A = \frac{P_1 b_1}{l} + \frac{P_2 b_2}{l}; \quad B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}.$$

An der Last P_1 wird dann das Biegungsmoment

$$\mathfrak{M}_1 = A a_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l} + \frac{P_2 a_1 b_2}{l},$$

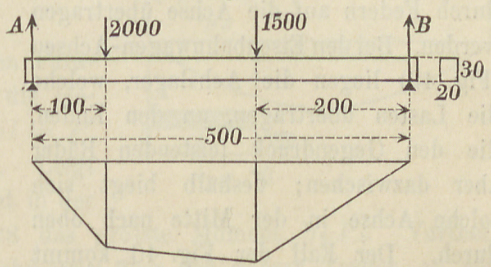
an der Last P_2 aber

$$\mathfrak{M}_2 = B b_2 = \frac{P_1 a_1 b_2}{l} + \frac{P_2 a_2 b_2}{l}.$$

Jedes dieser Momente besteht aus 2 von einander unabhängigen Beiträgen, von je einer der Lasten herrührend, und da die

Beziehungen für die Momente durch Einzellasten rein geradlinige sind, so muss diese Eigenschaft, die wir für die Momente an den Laststellen gefunden haben, auch für jeden anderen Schnitt gelten, wovon man sich auch leicht unmittelbar überzeugen kann. Bringt also irgend eine an bestimmter Stelle eines Balkens liegende Last an irgend einem Schnitte des Balkens ein Moment $\mathfrak{M}'$ hervor, so bildet dieses Moment $\mathfrak{M}'$ auch die Vergrösserung des Gesamtmoments des Balkens an demselben Schnitte, wenn jene Last zu anderen schon vorhandenen Lasten hinzutritt. Dieselbe Beziehung gilt also auch für die inneren Spannungen. Beim Vorhandensein mehrerer Lasten ist die Spannung an irgend einer Stelle des Balkens die algebraische Summe der Spannungen, die an der betreffenden Stelle von jeder einzelnen Last für sich allein hervorgebracht werden würde. Später werden wir noch sehen, dass Entsprechendes auch bezüglich der Formänderungen gilt. Dies Verhalten wird die Übereinander-Lagerung oder Summirung der Wirkungen genannt.

Fig. 39.



Beispiel: Bedeuten in Fig. 39 die Längenzahlen Centimeter, die Kräftezahlen Kilogramme, und soll das grösste Moment und danach die stärkste Spannung des Balkens berechnet werden, so braucht man die Momente nur für die beiden Laststellen zu ermitteln, da an diesen das grösste Moment allein zu suchen ist. Es ist

$$A = 2000 \cdot 0{,}8 + 1500 \cdot 0{,}4 = 2200 \text{ kg};$$
$$B = 3500 - 2200 = 1300 \text{ kg}.$$

Das Moment an der linksseitigen Last ist

$$\mathfrak{M}_1 = 2200 \cdot 100 = 220\,000 \text{ cmkg},$$

das andere $\mathfrak{M}_2 = 1300 \cdot 200 = 260\,000 \text{ cmkg}$.

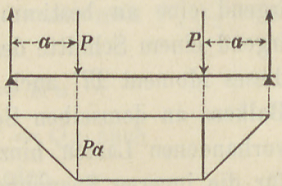
Letzteres ist mithin das grössere. Leicht kann man die so bestimmte Momentenfläche auch durch Zeichnung finden, wenn man als Längenmafsstab 1 : 50 wählt, die Kräfte im Mafsstabe 1000 kg = 2 cm aufträgt und den Polabstand $H = 2000 \text{ kg} = 4 \text{ cm}$ benutzt. Die Ordinaten des Seilecks sind dann auf dem Längenmafsstabe zu messen. Das Widerstandsmoment des Querschnitts ist $\frac{1}{6} 20 \cdot 30^2 = 3000$, mithin

$$\sigma = 260\,000 : 3000 = 86\frac{2}{3} \text{ at}.$$

Über den Einfluss des Eigengewichtes s. S. 33.

Trägt ein Stab oder Balken auf zwei Stützen zwei gleiche Lasten P in symmetrischer Lage, wobei jede Last um a von dem nächsten Auflager absteht (Fig. 40), so muss jeder Stützendruck $= P$ sein. An einer Laststelle ist dann das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_1 = Pa$, und die Momentenfläche ein Trapez; zwischen den beiden Laststellen hat das Moment durchweg den gleichen Werth Pa, und die Länge des Stabes ist ganz ohne Einfluss auf das grösste Moment.

Fig. 40.



Solche Belastungsart kommt vor bei jeder Wagenachse. Bei der Achse eines Strassenfuhrwerks (Fig. 41) liefern die aussen liegenden Räder die aufwärts gerichteten Gegendrücke, während die Lasten P durch Federn auf die Achse übertragen werden. Bei den Eisenbahnwagen-Achsen (Fig. 42) liegen die Achslager, welche die Lasten übertragen, an den Enden, die den Gegendruck leistenden Räder aber dazwischen; deshalb biegt sich solche Achse in der Mitte nach oben durch. Der Fall der Fig. 40 kommt auch vor bei den Querträgern eiserner eingleisiger Eisenbahn-Brücken. Die Lasten P werden durch die Schienen übertragen; der Querträger stützt sich mit seinen Enden auf die beiden Hauptträger der Brücke. In allen diesen Fällen ist anzustreben, den Abstand a möglichst klein zu machen, damit das grösste Moment Pa klein werde.

Fig. 41.

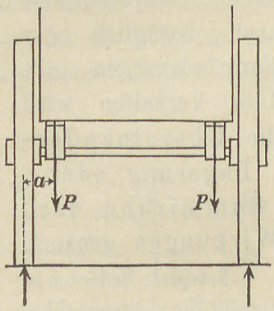
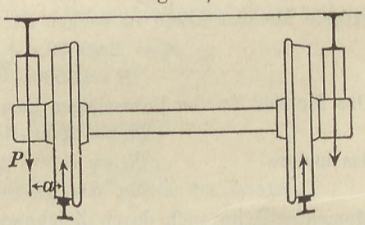


Fig. 42,



f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässig vertheilter Last.

Eine gleichmässig vertheilte Belastung erfährt schon jeder Balken durch sein Eigengewicht. Bei der Berechnung wird ein Balken an und für sich als gewichtlos betrachtet und sein

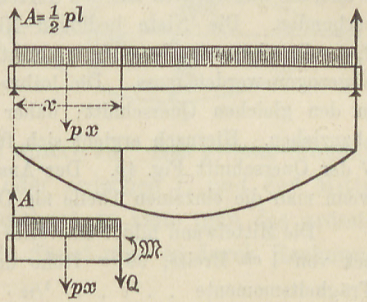
Eigengewicht wie eine fremde Last behandelt. In vielen Fällen ist dieses so unbedeutend gegenüber den sonstigen Lasten, dass es vernachlässigt werden darf, wie bisher geschehen ist.

Ist die Belastung der Längeneinheit p, die Spannweite l (Fig. 43), so wird jeder Auflagerdruck $\frac{1}{2} p l$; für eine Schnittstelle im Abstande x von dem Auflager ist dann das Moment

$$1) \qquad \mathfrak{M} = \frac{p l x}{2} - p x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p x (l - x)}{2}.$$

Eine Funktion, in der das Veränderliche in der Form $x (l - x)$ erscheint, wird (nach Theil 1, S. 183) dargestellt durch ein Parabelsegment, das symmetrisch die Weite l überspannt.

Fig. 43.



Das grösste Moment ergiebt sich für die Mitte, $x = \frac{1}{2} l$, zu

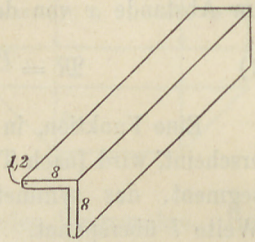
$$2) \qquad \mathfrak{M}_{max} = \frac{p l^2}{8}.$$

Die Parabel hat den Parameter $\frac{1}{p}$. Setzt man die Gesammtlast des Balkens $p l = P$, so wird $\mathfrak{M}_{max} = \frac{1}{8} P l$. Liegt die Last als Einzelgewicht in der Mitte, so ist nach S. 28 das grösste Moment $\frac{1}{4} P l$. Vertheilt man also die Last gleichmässig über den ganzen Träger, so vermindert sich das grösste Moment auf die Hälfte, d. h. ein Balken kann doppelt so viel Last tragen, wenn dieselbe gleichmässig vertheilt ist, als wenn sie in der Mitte vereinigt wäre.

Solche gleichmässige Belastung kommt vor bei den Strassenbrücken mit unmittelbar aufliegender Fahrbahn. Die ungünstigste Belastung wird häufig durch sog. Menschengedränge gebildet, wobei die ganze Brückenbahn mit Menschen erfüllt ist. Bei Eisenbahnbrücken ist die Belastung freilich keine gleichmässig vertheilte, weil die stark belasteten Lokomotivräder die Brückenbahn in einzelnen Punkten berühren, die auch keineswegs sich in gleichen Abständen befinden. Gleichwohl werden auch Eisenbahnbrücken oft, wenigstens annäherungsweise, auf gleichmässige Belastung berechnet. Wir wollen nun ermitteln, welche Last ein Brückenträger von 10 m Spannweite bei gegebenem Querschnitte erfahren darf. Der Balken oder Träger bekomme eine Höhe $= \frac{1}{10}$ der Weite, d. h. $h = 1\text{ m} = 100\text{ cm}$, und werde als sog. Blechträger ausgebildet, da man so grosse Träger nicht gut mehr aus einem Stücke walzen kann. Man sucht den

Querschnitt des Balkens der I-Form zu nähern (Fig. 45). Die lothrechte Wand möge 1 cm stark, 96 cm hoch sein. Darauf und darunter legt man sog. Gurten aus Flacheisen von 25 cm Breite und 2 cm Dicke. Um aber diese drei, eine I-Form bildenden Theile fest mit einander zu verbinden, verwendet man sog. Winkeleisen in der Form der Fig. 44, welche zum Zusammennieten rechtwinklig an einander stossender Platten dienen. Der Querschnitt des hier zu verwendenden Winkeleisens ist durch die Mafse 8 cm, 8 cm und 1,2 cm bestimmt; bei der Bezeichnung schreibt man diese kennzeichnenden Mafse wie Faktoren hinter einander (L 8 · 8 · 1,2 cm), womit aber selbstverständlich keine Multiplikation angedeutet werden soll. Die lothrechten Schenkel der beiden Winkeleisen werden mit der lothrechten Wand, die wagerechten mit den Gurten durch Niete verbunden. Die Niete bedingen Nietlöcher von 2,2 cm Durchmesser, deren Querschnitt bei der Berechnung des Trägheitsmomentes abgezogen werden muss. Die lothrechten und wagerechten Niete fallen nicht in den gleichen Querschnitt; daher brauchen wir nur die lothrechten Löcher abzuziehen. Hiernach ergiebt sich für die Berechnung des Trägheitsmomentes J der Querschnitt Fig. 45. Der Ansatz macht sich verhältnismässig bequem, wenn man die einzelnen Theile als Differenzen von Rechtecken ansieht.

Fig. 44.



Die Mittelwand bildet ein volles Rechteck von 1 cm Breite, 96 cm Höhe und dem Trägheitsmomente . . . . . $^1/_{12} \cdot 1 \cdot 96^3 = 73\,728.$

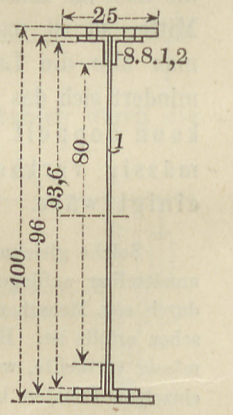
Die lothrechten Schenkel denken wir uns bis zu den Gurten reichend und an einander geschoben; von dem Rechteck von 2,4 cm Breite und 96 cm Höhe denken wir uns ein solches von 80 cm Höhe abgezogen; mithin ist der Beitrag $^1/_{12}\ 2{,}4\ (96^3 - 80^3) = 74\,547.$

Von jedem wagerechten Schenkel bleibt dann noch $8 - 1{,}2 - 2{,}2 = 4{,}6$ cm Breite mit den Höhen 96 bezw. 93,6 cm, mithin ist der Beitrag . . . . . $^1/_{12}\ 9{,}2\ (96^3 - 93{,}6^3) = 49\,611.$

Die Gurten endlich liefern $^1/_{12}\ (25 - 4{,}4)\ (100^3 - 96^3) = 197\,870.$

Das gesammte Trägheitsmoment ist 395 756.

Fig. 45.



Das Widerstandsmoment demnach

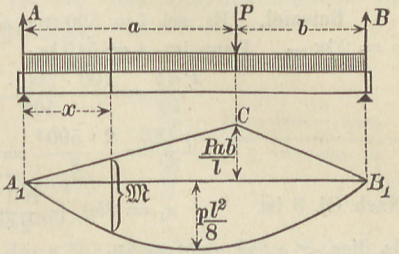
$$\mathfrak{W} = 395\,756 : 50 = 7915.$$

Ist p die zulässige Belastung auf 1 cm Länge, so wird mit $\sigma = 700$ at: $p\,\frac{1000^2}{8} = 7915 \cdot 700$, mithin $p = 44$; die zulässige Gesammtlast pl einschliesslich des eigenen Gewichts ist also 44 000 kg.

g) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässiger Belastung und mit Einzellasten.

Bei dem Zusammenwirken einer Einzellast mit stetiger Belastung addiren sich die für jeden Einzelfall bestimmten Momente. Man vereinigt sie am einfachsten, indem man die Momentenflächen der beiden Einzelfälle nach verschiedenen Seiten von der Achse $A_1 B_1$ (Fig. 46) aufträgt; die Gesammt-Ordinate ist dann $\mathfrak{M}$. Die Figur lässt ohne Weiteres erkennen, dass, wenn $a > b$, das grösste Moment nicht auf der Strecke b liegen kann; denn von B_1 bis nach der Stelle C der Einzellast wachsen beide Momenten-Ordinaten. Geht man über C hinaus weiter nach links, so nimmt die obere Ordinate ab, die untere zu. Das grösste Moment liegt also entweder im Punkte C, oder zwischen C und der Mitte. Sind die Momentenflächen genau gezeichnet, so kann man das grösste Moment leicht abgreifen. Allgemein findet man es durch Rechnung in folgender Weise:

Fig. 46.



Für irgend einen Schnitt der Strecke a (im Abstande x von A) ist das Moment

1) $$\mathfrak{M} = Ax - {}^1/_2 p x^2 .$$

Diese Funktion erreicht einen Grösstwerth für

$$d\mathfrak{M} : dx = A - px = 0 , \text{ d. h. für}$$

2) $$x = x_1 = \frac{A}{p} .$$

Da nun $$A = \frac{pl}{2} + P\frac{b}{l} , \text{ so ist}$$

3) $$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{Pb}{pl} ,$$

also $x_1 > {}^1/_2 l$. Setzt man den Werth der Gl. 2 in Gl. 1 ein, so entsteht

4) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{p} - \frac{A^2}{2p} = \frac{A^2}{2p} .$$

Diese Grösse ist aber nur gültig, so lange $x_1 \leqq a$, weil rechts von C die Momentengleichung 1 nicht mehr gilt.

Gl. 4 ist also nur benutzbar für $A/p \leqq a$, d. h. für $A \leqq pa$ oder

5) $$\frac{Pb}{pl} \leqq a - \frac{l}{2}.$$

Ist die Bedingung 5 nicht erfüllt, so giebt es für $\mathfrak{M}$ kein analytisches Maximum (mit einer Abgeleiteten = Null), sondern einen grössten absoluten Werth bei $x = a$, nämlich

6) $$\mathfrak{M}_1 = Aa - \frac{pa^2}{2} = ab\left(\frac{p}{2} + \frac{P}{l}\right).$$

Beispiel. Es sei $l = 500$ cm; $a = 300$ cm; $b = 200$ cm; $P = 100$ kg; $p = 2$ kg/cm. Dann ist $A = 540$ kg;

$$\frac{Pab}{l} = \frac{100 \cdot 300 \cdot 200}{500} = 12\,000 \text{ cmkg}.$$

$$\frac{pl^2}{8} = \frac{2 \cdot 500^2}{8} = 62\,500 \text{ cmkg}.$$

Nach Gl. 3 ist $$x_1 = 250 + \frac{100 \cdot 200}{2 \cdot 500} = 270 \text{ cm};$$

da dies $< a$, so giebt es ein

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{2p} = \frac{540^2}{4} = 72\,900 \text{ cmkg}.$$

Ist aber unter sonst gleichen Verhältnissen $P = 1000$ kg, so wird

$$A = 900 \text{ kg}; \quad \frac{Pab}{l} = 120\,000 \text{ cmkg}.$$

$$x_1 = 250 + \frac{1000 \cdot 200}{2 \cdot 500} = 450;$$

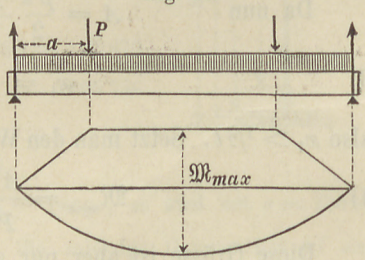
da dies $> a$, so findet sich das grösste Moment an der Stelle der Einzellast und beträgt nach Gl. 6:

$$\mathfrak{M}_1 = 300 \cdot 200 \left(1 + \frac{1000}{500}\right) = 180\,000 \text{ cmkg}.$$

Durch Skizzirung der Momentenflächen erkennt man ebenfalls leicht die Stelle des grössten Momentes.

Sind zwei gleiche, symmetrisch liegende Lasten P nebst einer gleichförmig vertheilten Last p vorhanden (Fig. 47), so liefern die Einzellasten ein Trapez von der Höhe Pa, die gleichförmig vertheilte Last eine Parabel von der Pfeilhöhe $\frac{1}{8}pl^2$ als Momentenfläche. Das grösste Moment liegt dann in der Mitte und hat den Werth

Fig. 47.

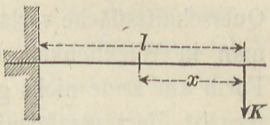


7) $$\mathfrak{M}_{max} = Pa + \tfrac{1}{8}pl^2.$$

h) Balken überall gleicher Sicherheit.

Bei einem prismatischen Balken ist die stärkste Spannung σ eines Querschnitts verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente; ist letzteres also veränderlich, so wird die Festigkeit nur ungleichmässig ausgenutzt. Soll die stärkste Spannung σ eines Querschnitts an allen Stellen des Stabes die gleiche sein, so muss das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}$ des Querschnitts verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ sich ändern. Ist $\mathfrak{M}_1$ das Biegungsmoment an einer bestimmten Stelle (etwa das grösste), $\mathfrak{W}_1$ das Widerstandsmoment an dieser Stelle, so muss

Fig. 48.



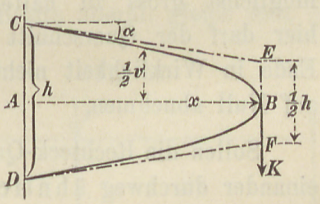
1) $$\mathfrak{W} : \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 .$$

Ist der Balken eingespannt (Fig. 48) und am freien Ende durch K belastet, so ist $\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = x : l$, mithin muss dann für überall gleiche Sicherheit

2) $$\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}_1} = \frac{x}{l} \quad \text{sein.}$$

Je nach der Anordnung der Querschnitte sind aber unendlich viele Lösungen der Aufgabe möglich. Soll der Querschnitt ein Rechteck sein von der Breite u, der Höhe v an beliebiger Stelle, von der Breite d und der Höhe h an der Stelle $x = l$, so ist $\mathfrak{W} = {}^1/_6\, u v^2$; $\mathfrak{W}_1 = {}^1/_6\, d h^2$, mithin nach Gl. 2

Fig. 49.



3) $$\frac{u v^2}{d \cdot h^2} = \frac{x}{l} .$$

Bei überall gleicher Breite $u = d$ wird dann

4) $$v^2 : h^2 = x : l .$$

Trägt man von der Mitte aus ${}^1/_2\, v$ nach oben und nach unten hin auf, so ergiebt sich ein parabolischer Aufriss CDB (Fig. 49). Die Neigung der Parabel an beliebiger Stelle ist $\operatorname{tg} \varphi = {}^1/_2\, dv : dx$.

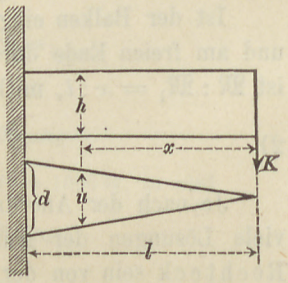
Nach Gl. 4 wird

$$2 v\, dv = \frac{h^2\, dx}{l}, \quad \text{mithin}$$

$${}^1/_2 \frac{dv}{dx} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{vl} = \operatorname{tg} \varphi .$$

Für $x = l$ und $v = h$ wird dann $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \frac{h}{l}$. Legt man also in C, B und D Berührungsgeraden an die Parabel, so bekommt man das Trapez $CEFD$, wobei $EF = h - 2\,l \operatorname{tg} \alpha = {}^1/_2\,CD$. Bei überall gleichem Querschnitte $d \cdot h$ ist der Rauminhalt des Balkens $d \cdot h \cdot l$, bei der parabolischen Begrenzung ${}^2/_3\,d \cdot h \cdot l$, während die Umschliessungsform $CEFD$ den Inhalt ${}^3/_4\,d \cdot h \cdot l$ hat. Die parabolische Form genügt wohl den Zug- und Druckspannungen, nicht aber den Schubspannungen. Denn auch an dem Ende B, wo der Querschnitt $= 0$ ist, herrscht eine Querkraft K, die eine gewisse Querschnittsfläche verlangt. Daher kann man in Wirklichkeit der parabolischen Form am Ende nicht ganz folgen. In so fern ist die trapezförmige Umschliessung besser als die Parabelgestalt.

Fig. 50.

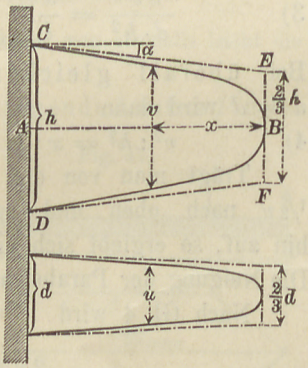


Giebt man dem Balken überall gleiche Höhe $v = h$, so wird aus Gl. 3:

5) $$u : d = x : l,$$

d. h. der Grundriss wird nunmehr ein Dreieck (Fig. 50), der Rauminhalt ${}^1/_2\,d \cdot h \cdot l$. Diese Form ist also günstiger als die parabolische; es ist vortheilhaft, die Höhe überall möglichst gross zu halten. Auch hier darf der Querschnitt am freien Ende in Wirklichkeit nicht ganz bis auf Null abnehmen.

Fig. 51.



Sollen die Rechteck-Querschnitte einander durchweg ähnlich bleiben, d. h. $u : v = d : h$, so wird aus Gl. 3:

6) $$\begin{cases} v^3 : h^3 = x : l \quad \text{und} \\ u^3 : d^3 = x : l. \end{cases}$$

Trägt man hiernach die Höhen und Breiten auf (Fig. 51), so erhält man (vergl. Theil 1, S. 186) als Begrenzungen im Aufriss und Grundriss Zweige von kubischen Parabeln.

Für den Aufriss gilt

$$3v^2 dv = \frac{h^3 dx}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = \frac{h^3}{6v^2 l}$$

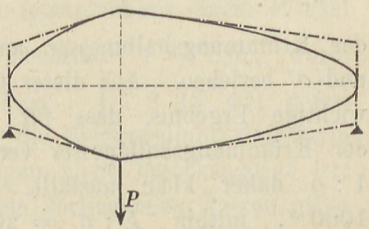
und die Neigung der Tangente im Punkt C (Fig. 51) $(x = l;\ v = h)$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{6l}.$$

Legt man um die kubischen Parabeln geradlinige Umschliessungsformen, so wird die Höhe und Breite am freien Ende $^2/_3\,h$ bezw. $^2/_3\,d$.

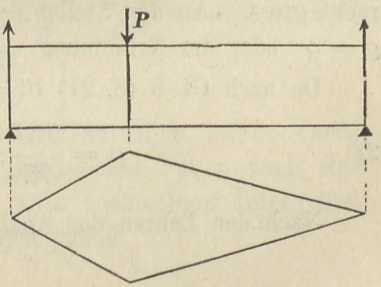
Ist bei kreisförmigem Querschnitte der Halbmesser an beliebiger Stelle v, an der Einspannungsstelle r, so wird nach Gl. 2: $^1/_4\,v^3\pi : {}^1/_4\,r^3\pi = x : l$, oder $v^3 : r^3 = x : l$. Diese Gleichung entspricht der Gl. 6. Die Form des Stabes oder Balkens wird also ein Umdrehungskörper, dessen Meridianlinie ein Zweig einer kubischen Parabel ist.

Fig. 52.



Diese Formen von Balken überall gleicher Sicherheit gelten in allen Fällen, in denen das Biegungsmoment sich nach geradlinigem Gesetz ändert; also auch, wenn ein Balken auf zwei Stützen eine Einzellast trägt. Genügt dann an der Laststelle ein rechteckiger Querschnitt $d \cdot h$, und soll die Breite überall gleich sein, so erhält man (Fig. 52) leicht die Umschliessungsform, wenn man an beiden Auflagern die Höhe $= {}^1/_2\,h$ macht. In diese lassen sich die Parabeln leicht einzeichnen. Die Unstetigkeit der Momentenfläche an der Belastungsstelle (s. Fig. 35, S. 27) hat zur Folge, dass auch die Begrenzung der Balkenform hier Knicke zeigt.

Fig. 53.



Bei gleich bleibender Höhe würde der Balken die Form der Fig. 53 (im Grundriss aus zwei Dreiecken bestehend) erhalten.

Bei kreisförmigem Querschnitte würde die Umschliessungsform an den Auflagern $^2/_3 r$ als Halbmesser zeigen. Dies findet Anwendung bei Achsen, die durch das Gewicht eines schweren Rades belastet sind.

Auch für gleichförmig belastete Balken auf zwei Stützen lassen sich leicht Formen gleicher Sicherheit entwickeln. Bei rechteckigem Querschnitte überall gleicher Breite wird der Aufriss eine Ellipse.

5. Biegungslinie.

Die Linie, nach der sich die ursprünglich gerade Achse des Stabes oder Balkens krümmt, heisst die Biegungslinie. In Fig. 19 (S. 18) ist O der Krümmungsmittelpunkt der Biegungslinie für die Stelle G derselben. Gemäss Gl. 2, S. 19 ist mithin

1) $$\varrho = \frac{E e'}{\sigma'}$$

der Krümmungshalbmesser an einer Stelle, auf welche sich e' und σ' beziehen. Aus dieser Gleichung folgt das für das Weitere wichtige Ergebnis, dass für die meisten Fälle der Anwendung der Krümmungshalbmesser verhältnismässig gross, die Krümmung $1 : \varrho$ daher klein ausfällt. Bei Stabeisen wird σ' höchstens 1000^{at}, mithin $E : \sigma' = 2000$ und $\varrho = 2000\, e'$ oder für $e' = {}^1/_2 h$, $\varrho = 1000\, h$; an allen Stellen, an denen σ kleiner ist, wird ϱ noch grösser. Ein I-Träger von $0{,}2^{m}$ Höhe biegt sich also nach Krümmungshalbmessern von mindestens 200^{m}. Für Holz ist σ' höchstens 100^{at}, mithin $\varrho = 1200\, e' = 600\, h$, d. h. ebenfalls recht gross. An den Stellen, wo die Biegungsspannnng Null, ist $\varrho = \infty$ oder die Krümmung $= 0$.

Da nach Gl. 3 (S. 21) $\sigma' = \mathfrak{M} e' : J$, so wird auch

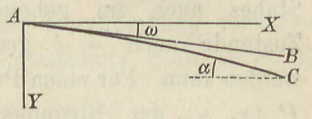
2) $$\varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Nach den Lehren der Analytischen Geometrie ist aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Setzt man dies $= \frac{\mathfrak{M}}{EJ}$, so hat man, weil $\frac{\mathfrak{M}}{J}$ eine Funktion von x, eine Gleichung, in welcher die erste und die zweite Abgeleitete der Gleichung der Biegungslinie vorkommen. Eine solche Gleichung heisst Differentialgleichung; sie ist in dem vorliegenden Falle meist nicht in geschlossener Form lösbar. Für die meisten Fälle der Anwendung ist aber daraus eine Annäherungsgleichung von genügender Genauigkeit abzuleiten. Lässt sich die x-Achse so legen, dass sie mit der Mittellinie AB des ungebogenen Stabes entweder parallel ist, oder nur einen sehr kleinen Winkel ω bildet (Fig. 54), so wird auch die Neigung der meist nur schwach gekrümmten Biegungslinie AC gegen die x-Achse, d. h. $dy : dx$, durchweg nur klein sein. Daher kann man in solchen Fällen $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ mit der Einheit vertauschen. Würde z. B. der grösste Werth von $dy : dx = 0{,}1$ (entsprechend einem Winkel $\alpha = 6^0$) so würde doch $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ höchstens $1 + 0{,}01$, worin man 0,01 gegen 1 vernachlässigen kann. Gl. 2 (S. 40) liefert nämlich nicht sehr genaue Werthe für die Biegungslinie, weil darin z. B. der Einfluss der Schubspannungen nicht berücksichtigt ist; auch kennt man die Zahl E für einen vorliegenden Balken meist nicht auf 1 % genau. Die sehr runden Zahlen der Tabelle (S. 8) lassen darauf schliessen, dass sie nur Mittelwerthe sein können, von denen die wahren Zahlen zuweilen nicht unbeträchtlich abweichen. Solch grosse Werthe von $dy : dx$ kommen aber bei guten Bauträgern selten vor; man kann also unbedenklich $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ setzen; dann wird

Fig. 54.



$$3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

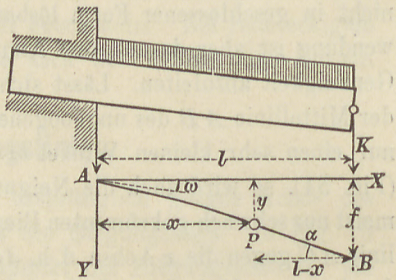
Diese im Jahre 1826 von Navier (! 1785 Dijon, † 1836 Paris) angegebene Gleichung führt in den einfacheren Fällen nach einmaliger Integration zu $dy : dx$ und nach nochmaliger Integration zu $y = f(x)$, der Gleichung der Biegungslinie.

a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken.

Ein prismatischer Stab oder Balken sei an der linken Seite unwandelbar eingespannt, u. zw, der Allgemeinheit wegen, nicht

völlig wagerecht, sondern mit einer kleinen Neigung ω abwärts (Fig. 55); der Balken sei gleichmässig mit p für die Längeneinheit der Horizontalprojektion und am Ende durch eine Kraft K lothrecht belastet. In dem unteren Theile der Fig. 54 ist die Kurve AB die Biegungslinie, AX wagrecht, AY lothrecht nach unten. Die Biegung sei so gering angenommen, dass die wagerechte Länge des Stabes auch im gebogenen Zustande noch $= l$ gesetzt werden kann. Für einen Punkt P (x, y) der Biegungslinie ist das Biegungsmoment, wenn man das Stück rechts von P betrachtet,

Fig. 55.



$$\mathfrak{M} = K(l - x) + \frac{p(l-x)^2}{2}.$$

Dann wird, wenn man in Gl. 3 alle Glieder mit $EJ\,dx$ multiplicirt,

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = K(l-x)\,dx + \frac{p}{2}(l^2 - 2lx + x^2)\,dx.$$

Integrirt man beide Seiten der Gleichung, so entsteht

$$4) \qquad EJ\frac{dy}{dx} = K\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Die Integrations-Konstante C muss so bestimmt werden, dass für $x = 0$ $dy : dx = \omega$ wird (entsprechend der Einspannung und indem man $\operatorname{tg}\omega$ mit ω vertauscht). Daraus folgt $EJ\omega = C$. Für das Neigungsverhältnis $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$ am freien Ende ergiebt sich (mit $x = l$) $EJ\alpha = {}^1/_2 Kl^2 + {}^1/_6 pl^3 + EJ\omega$, also

$$5) \qquad \alpha = \frac{Kl^2}{2EJ} + \frac{pl^3}{6EJ} + \omega.$$

Multiplicirt man aber Gl. 4 mit dx und integrirt wiederum, so ergiebt sich

$$EJy = K({}^1/_2 lx^2 - {}^1/_6 x^3) + {}^1/_2 p({}^1/_2 l^2x^2 - {}^1/_3 lx^3 + {}^1/_{12} x^4) + EJ\omega x + C_1.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, weil der Anfangspunkt der Koordinaten in der Biegungslinie liegt, so wird $C_1 = 0$. Bezeichnet

man die Ordinate des Endpunktes B der Biegungslinie (für $x = l$) mit f, so wird

$$EJf = {}^1/_3 Kl^3 + {}^1/_8 pl^4 + EJ\omega l, \quad \text{mithin}$$

$$6) \qquad f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} + \omega l.$$

Aus den Gl. 5 und 6 erkennen wir, dass auch bezüglich der Neigungen und der Ordinaten der Biegungslinie die Wirkungen der einzelnen Ursachen (K, p und ω) sich unabhängig von einander über einander lagern und summiren, wie S. 31 für die Biegungsmomente gezeigt wurde. (Es gilt dies aber nur, solange man bei der Aufstellung des Biegungsmomentes die Durchbiegung vernachlässigen darf.) Ist der wagerecht eingespannte Stab ($\omega = 0$) nur durch K belastet ($p = 0$), so wird

$$7) \qquad a = \frac{Kl^2}{2EJ}, \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ};$$

ist er nur gleichmässig belastet ($K = 0$), so wird

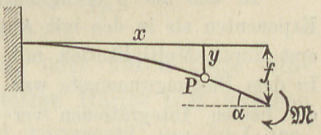
$$8) \qquad a = \frac{pl^3}{6EJ}, \quad f = \frac{pl^4}{8EJ}.$$

Ist der Stab gar nicht belastet, aber schräg eingespannt, so ist (selbstverständlich)

$$a = \omega; \quad f = \omega l.$$

Vor weiterer Anwendung der Ergebnisse möge noch die biegende Wirkung eines am freien Ende des wagerecht eingespannten Stabes wirkenden Kräftepaares $\mathfrak{M}$ untersucht werden (Fig. 56). Es ist

Fig 56.



$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M};$$

$$EJ\frac{dy}{dx} = \mathfrak{M}x + C \text{ mit } C = 0;$$

$$9) \qquad a = \frac{\mathfrak{M}l}{EJ}.$$

$$10) \qquad EJy = {}^1/_2 \mathfrak{M}x^2 + C_1 \text{ (mit } C_1 = 0);$$

$$11) \qquad f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}.$$

Um diese Grössen für a und f würden sich die in Gl. 5 und 6 gegebenen vergrössern, wenn in Fig. 55 noch das Kräftepaar $\mathfrak{M}$

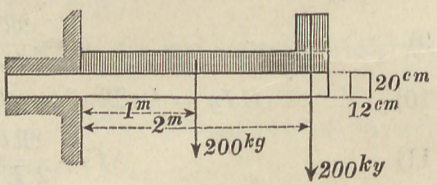
am freien Ende hinzugefügt würde. Gl. 10 bedeutet eine Parabel vom Parameter $\frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ als Biegungslinie des Falles der Fig. 56. Die etwas genauere Gleichung $\varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ (S. 40) würde für unveränderliches $\mathfrak{M}$ ein unveränderliches ϱ, d. h. eine kreisförmige Biegungslinie ergeben. Die Vertauschung von $\frac{1}{\varrho}$ mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ hat also denselben Erfolg wie die Vertauschung eines Kreises von grossem Halbmesser ϱ mit einer Parabel vom Parameter ϱ.

Die einzelnen Einflüsse von K, p, $\mathfrak{M}$ und ω auf a und f stellen wir (nach A. Ritter, Technische Mechanik) wegen der häufigen Anwendbarkeit tabellarisch zusammen:

Einfluss von	auf a	auf f
K	$\frac{Kl^2}{2EJ}$	$\frac{Kl^3}{3EJ}$
p	$\frac{pl^3}{6EJ}$	$\frac{pl^4}{8EJ}$
$\mathfrak{M}$	$\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}$	$\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}$
ω	ω	$l\omega$

In den auf p bezüglichen Gliedern erscheint l mit einem um 1 höheren Exponenten als in den mit K behafteten, weil p noch keine Kraft ist, sondern erst durch Multiplikation mit einer Länge denselben Rang bekommt wie K. In dem Biegungsmomente war K mit einer linearen Grösse multiplicirt; durch die beiden Integrationen verwandelte sich diese lineare Grösse in eine Grösse zweiten und dritten Grades. Daraus erklären sich die Exponenten von l in den Formeln. Diese Bemerkungen erleichtern das sichere Einprägen der Tabellenwerthe.

Fig. 57.



Beispiel: Ein Balkonträger rage aus einer Hauswand auf $l = 2\,\text{m} = 200\,\text{cm}$ wagerecht hervor (Fig. 57). Am freien Ende befinde sich eine Einzellast

$K = 200$ kg, und ausserdem seien $pl = 200$ kg gleichmässig über die Balkenlänge l vertheilt. Wie gross sind die stärkste Spannung σ und die Durchbiegung f des hölzernen Balkens ($E = 120000$ at) vom Querschnitte $d = 12$ cm, $h = 20$ cm?

Das grösste Moment an der Wand beträgt

$$\mathfrak{M} = 200 \cdot 200 + 200 \cdot 100 = 60000 \text{ cmkg};$$

das Widerstandsmoment

$$\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 12 \cdot 20^2 = 800, \quad \text{daher}$$

$$\sigma = 60000 : 800 = 75 \text{ at}.$$

Das Trägheitsmoment ist $J = \mathfrak{W} \cdot 10 = 8000$, daher

$$f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{200 \cdot 200^3}{3 \cdot 120000 \cdot 8000} + \frac{200 \cdot 200^3}{8 \cdot 120000 \cdot 8000}$$

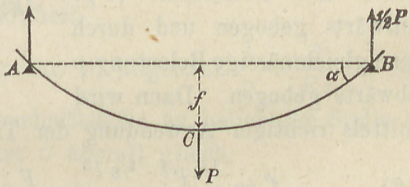
$$= 0{,}76 \text{ cm} = 1 : 263 \text{ der Länge.}$$

In vielen Fällen der Anwendung wirken die einzelnen Ursachen einander entgegen (indem vielleicht K aufwärts, p abwärts gerichtet ist), dann hat man die einzelnen Einflüsse mit theilweise entgegengesetzten Vorzeichen sinngemäss zu verbinden.

b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen.

Trägt ein prismatischer Balken auf zwei Stützen in der Mitte eine Einzellast (Fig. 58), so muss die Biegungslinie zu einer Lothrechten durch die Mitte symmetrisch, d. h. in der Mitte bei C wagerecht sein. Für die Spannungen und Formänderungen ist es nun gleichgültig, durch welche Mittel die wagerechte Richtung bei C erzwungen wird; ob durch den Zusammenhang mit einer anderen Hälfte, oder durch feste Einspannung. Daher kann man die rechtsseitige Hälfte CB ansehen als bei C aus einer einspannenden Wand wagerecht um $^1/_2 l$ hervorragend und am freien Ende durch eine Kraft $^1/_2 P$ aufwärts gebogen, in Folge dessen der Punkt B um f höher liegt als der Punkt C. Man kann daher für f die Grundformel $\frac{Kl^3}{3EJ}$ anwenden, muss nur K mit $^1/_2 P$, l mit $^1/_2 l$ vertauschen. Dann wird

(Fig. 58.)



12) $$f = \frac{{}^1/_2 P \cdot {}^1/_8 l^3}{3EJ} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Ebenso gilt für die Neigung α am Ende nach der Formel $\frac{Kl^2}{2EJ}$.

13) $$\alpha = \frac{{}^1/_2 P \cdot {}^1/_4 l^2}{2EJ} = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Für Zahlenrechnungen ist es in solchen Fällen meist bequemer, die stärkste Spannung σ einzuführen. Für diese gilt nach S. 21 und 28:

$$\sigma \frac{J}{e} = \frac{Pl}{4}, \text{ also } \frac{Pl}{4J} = \frac{\sigma}{e}.$$

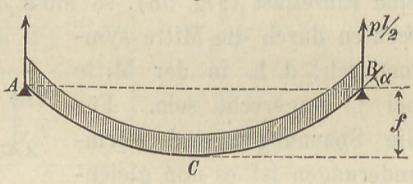
Hiermit wird aus Gl. 12 und 13: $f = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e}$, oder, um überall Verhältnisse gleichartiger Grössen zu haben:

14) $$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e} \text{ und}$$

15) $$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Einen gleichmässig über die ganze Länge belasteten Balken (Fig. 59) kann man ansehen als bei C wagerecht eingespannt, im Abstande ${}^1/_2 l$ durch eine Einzelkraft ${}^1/_2 pl$ aufwärts gebogen und durch eine gleichmässige Belastung p abwärts gebogen. Dann wird mittels richtiger Anwendung der Tabelle auf S. 44:

Fig. 59.



16) $$f = \frac{{}^1/_2 pl \cdot {}^1/_8 l^3}{3EJ} - \frac{p \cdot {}^1/_{16} l^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}.$$

17) $$\alpha = \frac{{}^1/_2 pl \cdot {}^1/_4 l^2}{2EJ} - \frac{p \cdot {}^1/_8 l^3}{6EJ} = \frac{pl^3}{24EJ}.$$

Für die stärkste Spannung gilt wieder nach S. 33: $\sigma \frac{J}{e} = \frac{pl^2}{8}$; setzt man also $\frac{pl^2}{8J} = \frac{\sigma}{e}$ in den Gl. 16 und 17 ein, so wird

18) $$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

19) $$\alpha = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Beispiel: Sind die Verhältnisse so gewählt, dass $\sigma = 700$ at; $l : e = 20$, so wird im Falle der Einzellast (Gl. 14 und 15):

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00175 = 0^0\,6'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00058.$$

Im Falle der gleichmässigen Belastung ist (Gl. 18 und 19):

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00233 = 0^0\,8'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00072.$$

Bei gleichen stärksten Spannungen und gleicher Spannweite verhalten sich hiernach die Durchbiegungen bei gleichförmiger Belastung und bei Einzellast zu einander wie $5 : 4 = 1{,}25 : 1$. Die Ursache hiervon liegt darin, dass die Momentenflächen in beiden Fällen gleiche Pfeilhöhe haben, die eine aber parabolisch, die andere dreieckig gestaltet ist. Die aus dem Inhalte der Momentenflächen abgeleiteten Mittelwerthe der Momente sind also $^2/_3$ bezw. $^1/_2\,\mathfrak{M}_{max}$, verhalten sich demnach wie $4 : 3 = 1{,}33 : 1$.

Bei sehr dünnwandigen I-Trägern wird die Durchbiegung wegen des Auftretens der Gleitung durch die Schubspannungen etwas grösser.

c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit.

Die Krümmung der Biegungslinie ist allgemein $\frac{1}{\varrho} = \frac{\sigma}{Ee}$ (S. 40, Gl. 1). Setzt man nun die Querschnittshöhe an beliebiger Stelle v und $e = {}^1/_2\,v$, so wird, weil jetzt σ überall gleich,

$$20) \qquad \frac{E}{2\sigma}\,\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v}.$$

a) Wird dem Balken überall gleicher Sicherheit auch überall gleiche Höhe $v = h$ gegeben, so wird nach Gl. 20 auch ϱ überall gleich, d. h. die Biegungslinie ein Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{Eh}{2\sigma}$ (wie in dem besonderen Falle der Fig. 56, S. 43), wofür man auch eine Parabel setzen kann.

Die Durchbiegung findet man am einfachsten, indem man in Gl. 20 für $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ setzt und 2 mal integrirt.

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h};\quad \frac{E}{2\sigma}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{h} + C \text{ mit } C = 0;$$

$$\frac{E}{2\sigma}y = \frac{x^2}{2h} + C_1 \text{ mit } C_1 = 0;\quad \frac{E}{\sigma}f = \frac{l^2}{h};$$

$$\frac{f}{l} = \frac{\sigma}{E}\frac{l}{h} \text{ oder, wegen } \sigma = \frac{\mathfrak{M}_1}{J_1}\frac{h}{2},$$

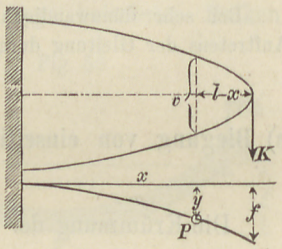
wenn $\mathfrak{M}_1$ und J_1 sich auf irgend einen, z. B. den Befestigungsquerschnitt, beziehen: $f = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ_1}$.

Erfolgt die Biegung durch eine am äusseren Ende wirkende Kraft K, so ist $\mathfrak{M}_1 = Kl$ und

21) $$f = \frac{Kl^3}{2EJ_1}.$$

Die Durchbiegung ist also wegen der dreieckigen Zuschärfung im Grundrisse (Fig. 50) $1\frac{1}{2}$ mal so gross wie bei prismatischen Balken (Gl. 7, S. 43).

Fig. 60.



β) Ist die Höhe v nach parabolischem Gesetze veränderlich (Fig. 49, S. 37), so wird $v^2 : h^2 = (l - x) : l$ und aus Gl. 20:

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{l}}{h}(l-x)^{-1/2} \text{ (Fig. 60).}$$

Multiplicirt man mit $dx = -d(l-x)$, so wird nach der ersten Integration

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{l}}{h}2\sqrt{l-x} + C$$

und, weil für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist,

$$C = \frac{2l}{h}, \text{ daher}$$

$$\frac{h}{4}\frac{E}{\sigma}\frac{dy}{dx} = l - \sqrt{l}\sqrt{l-x}.$$

Nochmalige Integration liefert

$$\frac{h}{4}\frac{E}{\sigma}y = l\cdot x + \frac{2}{3}\sqrt{l}(l-x)^{3/2} + C_1$$

mit $C_1 = -\frac{2}{3}l^2$ wegen $y = 0$ für $x = 0$.

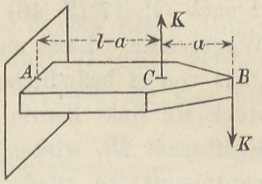
$y = f$ für $x = l$ giebt sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{E}\frac{l}{h}, \quad \text{oder wegen} \quad \sigma = \frac{Kl}{J_1}\frac{h}{2}:$$

22) $$f = \frac{2}{3}\frac{Kl^3}{EJ_1}.$$

In diesem Falle wird also (wegen der nach dem Ende abnehmenden Höhe) die Durchbiegung doppelt so gross wie bei prismatischen Balken (vgl. S. 44).

Fig. 61.



γ) Eine kreisförmige Biegung nach einem Halbmesser

$$\varrho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{EJ_1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{EJ_1}{Ka}$$

(vergl. S. 47) wird auch bei einem durch ein Kräftepaar Ka belasteten Balken von der Form der Fig. 61 eintreten. Setzt man dafür eine Parabel vom Parameter ϱ, so wird die Durchbiegung des Endpunktes B werden

$$f = \frac{l^2}{2\varrho} = \frac{Kal^2}{2EJ_1},$$

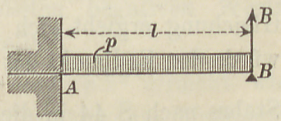
wenn J_1 das Trägheitsmoment des Einspannungs-Querschnittes.

Ist $h = 2$ cm, $\sigma = 700$ at, $E = 2\,000\,000$ at, so wird der Krümmungshalbmesser $\rho = \frac{2\,000\,000 \cdot 2}{2 \cdot 700} = 2857$ cm $= 28{,}57$ m.

d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmässig belasteter Balken.

Der Balken rage bei A (Fig. 62) aus der einspannenden Wand hervor; der Endpunkt B liege genau in der Richtungslinie der Verlängerung des eingespannten Theiles. Dann ist, wie wir sehen werden, der Auflagerdruck B mit alleiniger Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen nicht zu bestimmen, somit sind denn auch Biegungsmoment und Spannungen unbestimmt. Es liegt eine sog. statisch unbestimmte Aufgabe vor. In solchen Fällen führen nun die Ergebnisse der Biegungslehre zur Lösung.

Fig. 62.



Um uns von der Unbestimmtheit der Aufgabe zu überzeugen, müssen wir uns zunächst die Wirkung der Einspannung klar machen, indem wir uns einmal bei A den oberen Theil der einspannenden Wand fortdenken. Dann findet sich (Fig. 63) bei A nur eine unterstützende Kante; der Balken ist ein einfacher Träger auf zwei Stützen, biegt sich in der Mitte um die Grösse f nach Gl. 16 (S. 46) durch und hat an beiden Enden eine Neigung α nach Gl. 17 (S. 46) gegen die Wagerechte. Lässt man an dem links von A befindlichen Balkenstück ein links herum drehendes Kräftepaar $\mathfrak{M}_1$ wirken, welches sich, von Null beginnend, allmählich vergrössert, so wird dieses Balkenstück mehr und mehr niedergedrückt, und bei einer bestimmten Grösse von $\mathfrak{M}_1$ wird die Biegungslinie bei A genau wagerecht sein. Man kann daraus schliessen, dass die wagerecht einspannende Wand neben dem Auflagerdruck A noch ein Einspannungsmoment $\mathfrak{M}_1$ auf den Balken ausübt. Für das Gleichgewicht eines Balkens, an dem neben Kräftepaaren nur lothrechte, nicht schräge Kräfte wirken, lassen sich nicht mehr als zwei von einander unabhängige Gleichgewichts-Gleichungen aufstellen, da zu der Gleichung der wagerechten Kräfte sich keine Glieder ergeben. Zur Bestimmung der Auflagerkräfte A, B und des Momentes $\mathfrak{M}_1$ (Fig. 64) hat man also nur zwei Gleichgewichts-Bedingungen zur Verfügung; die eine fehlende dritte Gleichung muss aus der Biegungslehre genommen werden; man nennt daher diesen Fall: einfach statisch unbestimmt. Die dritte Gleichung ergiebt sich in diesem Falle sehr einfach. Die Kraft B würde den Endpunkt des bei A wagerecht eingespannten, unbelasteten Stabes nach S. 44 in die Höhe biegen um $\frac{Bl^3}{3EJ}$. Wäre die Stütze B nicht vorhanden, so würde die Belastung den Endpunkt um $\frac{pl^4}{8EJ}$

Fig. 63.

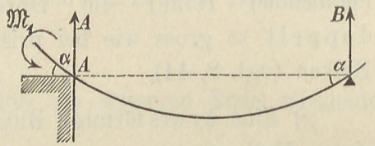
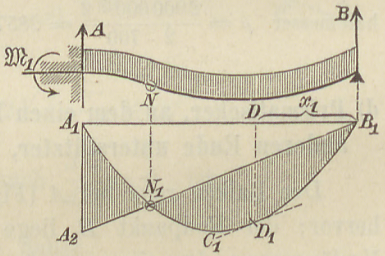


Fig. 64.



abwärts biegen. Da in Wirklichkeit der Endpunkt B in gleicher Höhe mit A liegt, so heben sich beide Durchbiegungen gegenseitig auf; es wird

$$\frac{Bl^3}{3EJ} = \frac{pl^4}{8EJ} \quad \text{oder}$$

1) $$B = \frac{3}{8}pl; \quad \text{somit}$$

2) $$A = {}^5/_8 pl \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_1 = {}^1/_2 pl^2 - {}^3/_8 pl^2 = {}^1/_8 pl^2.$$

Diese Werthe gelten aber nur, wenn die an die Biegungslinie bei A gelegte Tangente genau durch den Punkt B geht; geringe Abweichungen von dieser Bedingung haben grossen Einfluss auf die Auflagerkräfte.

In einem Abstande x von B ist das Biegungsmoment

3) $$\mathfrak{M} = Bx - {}^1/_2 px^2 = {}^3/_8 plx - {}^1/_2 px^2.$$

Fügt man ${}^1/_8 plx$ mit + und — hinzu, so kann man auch schreiben:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2 plx - {}^1/_2 px^2 - {}^1/_8 plx$$

4) $$= {}^1/_2 px\,(l - x) - {}^1/_8 plx.$$

Das erste Glied der rechten Seite entspricht (nach Gl. 1 S. 33) einem auf beiden Seiten gestützten (nicht eingespannten) Balken; die entsprechende Momentenfläche ist eine Parabel $A_1 C_1 B_1$ (Fig. 64) von der Pfeilhöhe ${}^1/_8 pl^2$. Das zweite Glied wird durch die Gerade $A_2 B_1$ dargestellt, wenn $A_1 A_2 = {}^1/_8 pl^2$. Von den Ordinaten der Parabel muss man diejenigen der Geraden abziehen, um $\mathfrak{M}$ zu erhalten. Die lothrechte Schraffirung giebt die Veränderlichkeit des Momentes an.

Von B_1 (wo $\mathfrak{M} = 0$) beginnend, nimmt das Moment zunächst zu, erreicht an der Stelle D_1, wo die Parabel $\parallel$ der Geraden $A_2 B_1$, ein analytisches Maximum $\mathfrak{M}_{max}$, nimmt dann wieder ab, wird bei N_1, wo Parabel und Gerade sich schneiden, zu Null, geht dann ins Negative über und erreicht den grössten negativen Werth $-\mathfrak{M}_1 = -{}^1/_8 pl^2$ an der Einspannungsstelle.

Die Funktion von der Form $\mathfrak{M} = Bx - {}^1/_2 px^2$ erreicht, wie schon S. 35 gefunden (dort war A statt B gesetzt), das Maximum

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p} \quad \text{für} \quad x_1 = \frac{B}{p};$$

das giebt für $B = {}^3/_8\, p\, l$ (Punkt D_1):

5) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{9}{128}\, p\, l^2 \text{ und } x_1 = {}^3/_8\, l.$$

$Bx - {}^1/_2\, p\, x^2$ wird aber zu Null für $x = 0$ (Punkt B_1) und für $x = \dfrac{2\,B}{p} = {}^3/_4\, l$ (Punkt N_1).

Es findet sich also $\mathfrak{M}_{max}$ mitten zwischen den beiden Momenten-Nullpunkten. Einem Momente $= 0$ entspricht bei einem Balken, dessen Querschnitt ein Trägheitsmoment $J > 0$ hat, eine Krümmung $= 0$, und ein Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$ der Biegungslinie. N_1 entspricht daher einem Wendepunkte N der Biegungslinie. Rechts von N kehrt die Biegungslinie ihre konvexe Seite nach unten ⌣, wie bei einem Balken auf zwei Stützen; links von N ist die Krümmung ⌢ und damit auch das Moment entgegengesetzt.

Solche Querschnitte, an denen das Biegungsmoment grösser ist als zu beiden Seiten daneben, heissen gefährliche Querschnitte. Hier giebt es deren zwei, nämlich D und A. Beide sind aber nicht in gleichem Maſse gefährlich; denn die entsprechenden Momente ${}^9/_{128}\, p\, l^2$ und ${}^1/_8\, p\, l^2 = {}^{16}/_{128}\, p\, l^2$ verhalten sich wie 9 : 16. An der Einspannungsstelle herrscht also das grösste Moment, und dies ist auch ebenso gross, als wenn der Balken an beiden Enden einfach gestützt wäre; das grösste Moment hat sich daher in Folge der Einspannung nicht vermindert, sondern nur von der Mitte nach dem Ende A verschoben.

Eine Verminderung des grössten Momentes lässt sich aber erreichen, wenn man die Stütze B um ein gewisses Maſs nach oben schiebt. Durch dieses Aufwärtsbiegen vergrössert man den Stützendruck B; in Folge dessen wird in $\mathfrak{M}$ (Gl. 3, S. 51) das positive Glied vergrössert, hierdurch das bisher kleinere Moment $\mathfrak{M}_{max}$ vergrössert und der absolute Werth des negativen Momentes $\mathfrak{M}_1$ vermindert. Man erkennt dies deutlicher, wenn man zu dem allgemeinen Ausdrucke für $\mathfrak{M}$, der von der Höhenlage des Punktes B noch unabhängig ist, $\mathfrak{M} = Bx - {}^1/_2\, p\, x^2$, die Grösse ${}^1/_2\, p\, l\, x$ mit + und — hinzufügt, dann kann man ordnen:

6) $$\mathfrak{M} = {}^1/_2\, p\, x\, (l - x) - ({}^1/_2\, p\, l - B)\, x.$$

Darin bezeichnet wieder das erste Glied der rechten Seite die unveränderte Parabel $A_1 C_1 B_1$ (Fig. 64), während das letzte Glied wiederum durch eine Gerade dargestellt wird, deren Endordinate $A_1 A_2$ nun aber $= (\frac{1}{2} pl - B) l$, d. h. von B abhängig ist, und zwar bedeutet $A_1 A_2$ wiederum den absoluten Werth $\mathfrak{M}_1$ des Einspannungsmomentes. Die günstigste Momentenfläche, d. h. diejenige, in welcher das absolut grösste Moment so klein wie möglich ist, könnte man nun schon zeichnerisch durch Probiren finden, indem man die Gerade $B_1 A_2$ solange um B_1 drehte, bis die beiden lothrecht gemessenen Abstände zwischen der Geraden und der Parabel, welche $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ entsprechen, gleich geworden wären. Eine günstigere Momentenfläche ist nicht mehr denkbar, denn jede Änderung der Richtung von $B_1 A_2$ würde wohl das eine der beiden Momente verkleinern, das andere aber vergrössern. Hier, wie in den meisten derartigen Fällen, wo mehrere gefährliche Querschnitte vorhanden sind, kommt es darauf an, die Momente dieser Querschnitte auszugleichen, wenn man den günstigsten Zustand herbeiführen will. Hat man die Ausgleichung zeichnerisch gefunden, so braucht man nur $A_1 A_2 = (\frac{1}{2} pl - B) l$ zu setzen und hat damit B bestimmt. Der Weg der Rechnung bedingt, dass man das analytische Maximum von $\mathfrak{M}$, nämlich $\frac{B^2}{2p} = \mathfrak{M}_1 = \frac{pl^2}{2} - Bl$ setzt. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Lösungen $B = pl(-1 \pm \sqrt{2})$, von denen nur der positive Werth

7) $$B = pl(-1 + 1{,}414) = 0{,}414\, pl$$

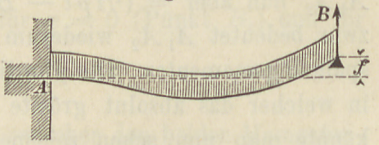
möglichst kleine Werthe der Grösstmomente liefern kann, denn der negative Werth würde $\frac{B^2}{2p}$ sehr gross machen. Da nun für diesen Auflagerdruck $B = 0{,}414\, pl$ die Momente $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ gleich werden, so berechnet man den Werth beider am einfachsten mittels der Formel für $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} pl^2 - Bl = pl^2 (0{,}5 - 0{,}414)$ $= 0{,}086\, pl^2$. Diesem Auflagerdrucke $B = 0{,}414\, pl$ entspricht also ein überhaupt grösstes Moment

8) $$\mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0{,}086\, pl^2,$$

während bei $B = \frac{3}{8} pl$ sich $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{8} pl^2 = 0{,}125\, pl^2$ ergab. Das grösste Moment ist also bei gegebener Balkenlänge und Last

im Verhältnis von 125 auf 86 vermindert, die Tragfähigkeit also auf das 125 : 86 = 1,45fache gestiegen. Um nun diejenige Hebung f des Punktes B gegen die Einspannungsstelle A zu finden, welche dieser Verbesserung entspricht, bringt man an die Biegungslinie die Kraft $B = 0{,}414\,pl$ (Fig. 65) und bekommt dann durch denselben Gedankengang, der auf S. 50/51 zur Bestimmung von B für $f = 0$ führte, jetzt

Fig. 65.



$$f = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{pl^4}{EJ}\left(\frac{0{,}414}{3} - \frac{1}{8}\right).$$

9) $$f = 0{,}013\,\frac{pl^4}{EJ}.$$

Um die verhältnismässige Grösse dieser Hebung einigermafsen übersehen zu können, führen wir wieder die stärkste Spannung σ ein, indem wir bedenken, dass das grösste Moment jetzt $0{,}086\,pl^2 = \sigma\frac{J}{e}$, also $\frac{pl^2}{J} = \frac{\sigma}{0{,}086\,e}$ sein muss. Führt man dies in Gl. 9 ein, so wird

10) $$\frac{f}{l} = 0{,}151\,\frac{\sigma}{E}\,\frac{l}{e}.$$

Setzt man wieder, wie in anderen Beispielen (S. 47)

$$\sigma = 700;\quad E = 2\,000\,000;\quad {}^{l}/_{e} = 20,$$

so wird $\frac{f}{l} = 0{,}001057$, d. h. rund $^1/_{1000}$. Eine Hebung der Stütze B um $^1/_{1000}$ der Spannweite l genügt also schon, um die Tragfähigkeit des Balkens auf das 1,45fache zu erhöhen. Von diesem günstigen Ergebnisse würde man gewiss mit Vortheil Gebrauch machen, wenn man sicher wäre, den erstrebten Zustand des Balkens genau erreichen und auf die Dauer erhalten zu können. Wenn man aber die Mittel erwägt, die man zu einer derartig genauen Auflagerung eines Balkens anwenden müsste, so überzeugt man sich leicht, dass eine Balken-Anordnung, deren Spannungszustand von solchen Feinheiten abhängt, trotz der Möglichkeit, rechnungsmässig sehr günstige Verhältnisse zu liefern, wenig Vertrauen verdient, da durch Abweichungen von der gewünschten Stützenlage leicht eine Vergrösserung

der Momente eintreten kann, ohne dass man es wahrzunehmen vermag. Dies ist ein Übelstand, der den meisten statisch unbestimmten Anordnungen anhaftet.

e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen.

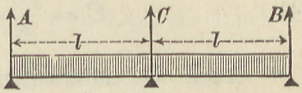
Wir betrachten nur den Fall, dass die 3 Stützen gleiche Entfernung l haben. Für einen solchen Balken (Fig. 66) kann man nur die beiden Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

1) $A + C + B = 2pl$

und in Bezug auf C: $Al - Bl = 0$ oder

2) $A = B.$

Fig. 66.



Die noch fehlende dritte Gleichung muss wieder aus der Biegungslehre geschöpft werden; die Anordnung ist einfach statisch unbestimmt. Bei dieser dritten Gleichung kommt es nun wieder wesentlich auf die gegenseitige Höhenlage der Stützen an. Deshalb machen wir gleich von Anfang an die Annahme, die Mittelstütze C liege um c unter der Verbindungsgeraden der Endstützen, wobei dann c beliebig $\gtrless 0$ gesetzt werden kann. Geht man mit der Mittelstütze weit genug herunter, so wird der Balken sich endlich nur auf die Enden stützen (Fig. 67), es wird $A = B = pl$, $C = 0$ sein. Schiebt man aber den Punkt C weit genug in die Höhe (Fig. 68), so wird der Balken endlich nur auf C schweben, es wird $C = 2pl$, und $A = B = 0$ sein. Die Biegungslinie muss in allen Fällen zur lothrechten Mittellinie symmetrisch, d. h. in der Mitte wagerecht sein (Fig. 69).

Fig. 67.

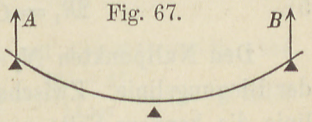


Fig. 68.

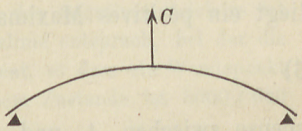
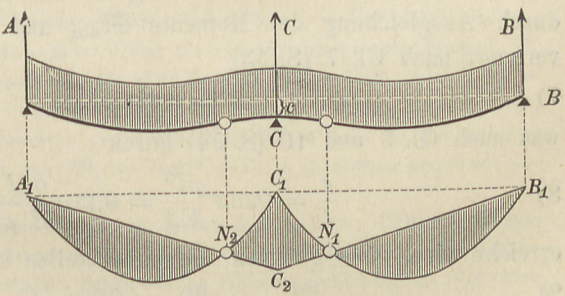


Fig. 69.



Wenn man sich nun, wie bei Fig. 58 (S. 45) die linke Hälfte

wagerecht eingespannt denkt, so gleicht die rechtsseitige Hälfte CB in Fig. 69 der Fig. 65 (S. 54), so dass die sämmtlichen Untersuchungen von S. 52—54 sich hier verwerthen lassen. Es wird

$$c = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ}, \quad \text{mithin}$$

3) $$B = \frac{3}{8}pl + \frac{3EJc}{l^3} = A \quad \text{und}$$

4) $$C = \frac{10}{8}pl - \frac{6EJc}{l^3}.$$

Auch die Momentenfläche wird für die rechtsseitige Hälfte ebenso, wie in Fig. 64 (S. 50) gezeigt, und für die linksseitige Hälfte dazu symmetrisch. $\mathfrak{M}_1$ wird hier das Moment über der Mittelstütze

5) $$\mathfrak{M}_1 = C_1 C_2 = (1/2\, pl - B)\, l.$$

Den Nullpunkten N_1 und N_2 entsprechen wieder Wendepunkte der Biegungslinie. Zwischen den Wendepunkten kehrt die Biegungslinie die konvexe Seite nach oben (die Zugspannungen liegen oben), ausserhalb derselben ist es umgekehrt. Mitten zwischen B_1 und N_1 liegt ein positives Maximalmoment

6) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p},$$

ebenso zwischen A_1 und N_2.

Für $c = 0$, d. h. für Stützen in einer Flucht, wird $B = 3/8\, pl$. $\mathfrak{M}_{max} = 9/128\, pl^2$; $\mathfrak{M}_1 = 1/8\, pl^2$. Eine Senkung der Mittelstütze um c vergrössert B, vergrössert $\mathfrak{M}_{max}$ und verkleinert gleichzeitig $\mathfrak{M}_1$.

Die günstigste Anordnung für den Balken wird wieder durch Ausgleichung der Momente $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ erreicht. Dies verlangt nach Gl. 7 (S. 53)

7) $$B = 0{,}414\, pl,$$

was nach Gl. 9 und 10 (S. 54) durch

8) $$\frac{c}{l} = 0{,}013\, \frac{pl^3}{EJ} = 0{,}151\, \frac{\sigma}{E}\, \frac{l}{e}$$

erreicht wird. Die grössten Momente stellen sich dann auf

9) $$\mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0{,}086\, pl^2,$$

während bei Stützen in gleicher Flucht $\mathfrak{M}_1 = 0{,}125\, pl^2$ sein würde.

Beispiel: Ein Holzbalken von $2\,l = 10^{\,m} = 1000^{\,cm}$ Länge, im Querschnitte $15^{\,cm}$ breit und $16^{\,cm}$ hoch, werde von drei Arbeitern A, C und B getragen. Es soll die Gewichtsvertheilung berechnet werden für verschiedene Höhenlagen der tragenden Schultern. Der Balken hat $10 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}15 = 0{,}24^{\,cbm}$ Inhalt; wiegt $1^{\,cbm}$ $600^{\,kg}$, so wird das Gesammtgewicht $2\,pl = 144^{\,kg}$; $p = 0{,}144^{\,kg/cm}$. Es ist $J = {}^1/_{12}\,15 \cdot 16^3 = 5120$; $\mathfrak{W} = 640$; $E = 120\,000^{\,at}$, $l = 500^{\,cm}$.

Es wird
$$A = B = \frac{3}{8} \cdot 72 + \frac{3\,EJc}{l^3} = 27 + 14{,}746\,c\,;$$
$$C = \frac{10}{8} \cdot 72 - \frac{6\,EJc}{l^3} = 90 - 29{,}492\,c\,.$$

Fehlt die Mittelstütze, so wird $A = B = 72^{\,kg}$; $C = 0$ und die Durchbiegung in der Mitte
$$c = 90 : 29{,}492 = 3{,}05^{\,cm}\,.$$

Hält der mittlere Arbeiter also seine Schulter um dies Mafs niedriger als die beiden anderen, so bekommt er gar keine Last. In diesem Falle ist das grösste Moment in der Mitte
$${}^1/_8\,p\,(2\,l)^2 = {}^1/_2\,pl^2 = {}^1/_2 \cdot 72 \cdot 500 = 18\,000^{\,cmkg}$$
und die Spannung $\sigma = 18\,000 : 640 = 28{,}1^{\,at}$.

Sollen alle drei Schultern gleich stark tragen, soll $A = B = C = {}^1/_3 \cdot 144 = 48^{\,kg}$ sein, so muss die mittlere Schulter um $c = \dfrac{48 - 27}{14{,}746} = 1{,}42^{\,cm}$ tiefer liegen als die anderen. In diesem Falle wird $\mathfrak{M}_{max} = \dfrac{48^2}{2 \cdot 0{,}144} = 8000$, $\mathfrak{M}_1 = ({}^1/_2\,72 - 48)\,500 = -6000$, d. h. wegen des negativen Zeichens ist $\mathfrak{M}_1$, welches mit positivem Zeichen einer Biegungslinie entsprach, bei der die konvexe Seite oben lag, hier ein umgekehrtes Moment, so dass ein Wendepunkt nicht vorkommt. Die stärkste Spannung in diesem Zustande ist $8000 : 640 = 12{,}5^{\,at}$.

Die Spannung wird am kleinsten für
$$c = 0{,}013\,\frac{pl^4}{EJ} = \frac{0{,}013 \cdot 72 \cdot 500^3}{120\,000 \cdot 5120} = 0{,}19^{\,cm}\,.$$

Dabei ist $A = B = 0{,}414\,pl = 29{,}8^{\,kg}$; $C = 144 - 2 \cdot 29{,}8 = 84{,}4^{\,kg}$, so dass die mittlere Schulter jetzt erheblich mehr belastet ist. Das grösste Moment wird $0{,}086\,pl^2 = 3096$, die Spannung $3096 : 640 = 4{,}8^{\,at}$. — Für gleiche Höhenlage der Schultern wird $A = B = 27^{\,kg}$; $C = 90^{\,kg}$; das grösste Moment $\mathfrak{M}_1 = {}^1/_8\,pl^2$, d. h. ${}^1/_4$ so gross wie für $C = 0$, also $\mathfrak{M}_1 = 4500$, $\sigma = 7^{\,at}$. — Dagegen wird $A = B = 0$ und $C = 144^{\,kg}$ für $c = -27 : 14{,}746 = -1{,}83^{\,cm}$, d. h. wenn die mittlere Schulter um dieses Mafs höher liegt als die anderen. Das grösste Moment wird nun $\mathfrak{M}_1 = {}^1/_2\,pl^2 - 0$, d. h. ebenso gross wie für $C = 0$, nämlich 18000 mit $\sigma = 28{,}1^{\,at}$.

Die Spannung schwankt also in diesen betrachteten Fällen zwischen $4{,}8$ und $28{,}1^{\,at}$. Dem entsprechen freilich, weil ein biegsamer Holzbalken angenommen war, auch ziemlich beträchtliche Höhenverschiebungen; für einen steiferen Eisenträger würden ähnliche Spannungsunterschiede durch viel geringere Verschiebungen bewirkt werden. Solche Balken auf mehr als zwei

Stützen sind hiernach sehr empfindlich gegen Höhenverschiebungen einzelner Stützpunkte und deshalb nur mit Vorsicht zu verwenden.

Soll eine Balkenbrücke mit zwei Oeffnungen gebaut werden, so hat man die Wahl, ob man (Fig. 70) Balken verwenden will, die über beide Öffnungen durchgehen, oder ob man auf dem Mittelpfeiler neben einander zwei Auflager anbringen und die Balken dort unterbrechen will (Fig. 71). Letzterer Fall hat den Vorzug, statisch bestimmt zu sein; wenn einer der Pfeiler sich etwas senkt, so werden dadurch die Brückenbalken nicht in Spannung gerathen, vielmehr werden sie widerstandslos dem Pfeiler folgen.

Fig. 70.

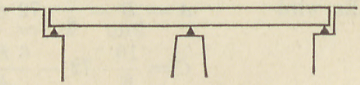
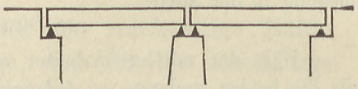
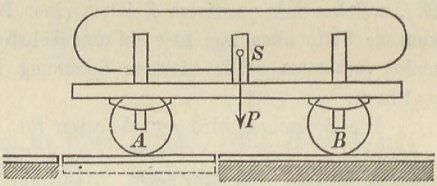


Fig. 71.



Mit der statisch bestimmten Auflagerung eines Trägers auf zwei Stützen hängt auch ein Verfahren zusammen, das Gewicht eines sehr langen, auf einem zweiachsigen Wagen befestigten Dampfkessels zu bestimmen, ohne dass eine zur Aufnahme des ganzen Wagens hinreichende Brückenwaage verfügbar ist. Man fährt in diesem Falle mit der einen Achse auf die Waage (Fig. 72) und ermittelt die Last A, verfährt dann mit der anderen Achse B in derselben Weise und erhält in der Summe $A + B$ das Gesammtgewicht P des belasteten Wagens. Für die Zulässigkeit dieses Verfahrens ist nur erforderlich, dass die Fahrbahn zu beiden Seiten der Waage nicht gar zu uneben sei, damit sich der wagerechte Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von den Achsen nicht merklich ändere. Bei der Verwendung eines dreiachsigen Wagens würde dieses Vorgehen nicht brauchbar sein, weil man nicht wissen kann, ob die Achse, nachdem sie die Waage verlassen hat, noch dieselbe Last trägt wie bei ihrer Stellung auf der Waage.

Fig. 72.



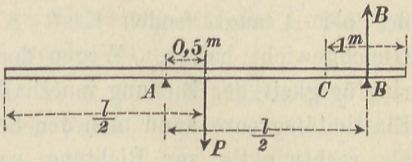
Bei dieser Gelegenheit möge noch ein Verfahreu angegeben werden, wie man das Gewicht eines Längenmeters von einer Eisenbahnschiene oder einem gewalzten Träger bestimmen kann, wenn die vorhandene Waage zur Wägung des ganzen Stabes nicht ausreicht, der Stab aber auch nicht zerschnitten werden soll. Es sei l die Länge des ganzen Stabes oder Balkens; von dem rechtsseitigen Ende aus messe man eine Länge $= 1$ m ab (Fig. 73) und bringe unter der Mitte B dieser Länge eine schneidenartige Stütze an. In der Mitte A

der übrigen Länge $l - 1^{m}$ werde in gleicher Weise eine Schneide A angebracht. Der Schwerpunkt der ganzen Schiene liegt dann um $^1/_2{}^{m}$, die Schneide B um $^1/_2 l$ von der Schneide A entfernt; der Stützendruck B wird daher

$$B = \frac{P \cdot 0{,}5}{^1/_2 l} = \frac{P}{l},$$

d. h. das gewünschte Gewicht von einem Längenmeter der Schiene. Dieses Gewicht kann man ermitteln, indem man die Schneide B auf die Brücke einer Waage stützt. — Zur Erklärung diene noch Folgendes: Denkt man sich das Stück von 1^{m} Länge thatsächlich abgeschnitten, so befindet sich dieses auf der Schneide B im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte, ebenso der lange Abschnitt auf der Schneide A. Verbindet man die Theile nun an der Schnittstelle C mit einander, so treten in der Verbindung keine Spannkräfte auf; ebenso wenig wird dies daher in der ungetrennten Schiene vorkommen. Die Schneide B trägt also nur das abgemessene (aber nicht abgetrennte Schienenstück von 1^{m} Länge. (Dieses Beispiel gehört eigentlich nicht zur Biegungslehre, sondern in Theil 1, S. 162.)

Fig. 73.



6. Knickfestigkeit.

Wird ein ursprünglich völlig gerader und gleichmässiger Stab an den Enden durch Druckkräfte K belastet (Fig. 74), die genau in die Mittellinie des Stabes fallen, so ist nur eine geradlinige Verkürzung des Stabes möglich. Dies zeigt sich auch in Wirklichkeit, solange die Länge des Stabes im Verhältnisse zur Querschnittsbreite nicht erheblich ist. Bei grösserer Länge aber ist mit der Wirkung der Kräfte K eine seitliche Ausbiegung verbunden, die offenbar daher rührt, dass die vorstehend genannten Bedingungen der völligen Geradlinigkeit und Gleichmässigkeit und des vollkommenen Zusammenfallens der Druckkräfte mit der Mittellinie des Stabes in aller Schärfe nicht zu erfüllen sind. Bei allmählichem Anwachsen der Kräfte erfolgt schliesslich eine Zerstörung durch gleichzeitige Zusammendrückung und Biegung, und man nennt diesen Vorgang Knickung.

Wir nehmen an, der Stab habe sich um ein gewisses Mafs gebogen und befinde sich im Gleichgewichte; seine Spannungen seien noch innerhalb der Elasticitätsgrenze. Die beiden Kräfte K sollen in ihrer ursprünglichen Richtung und Lage verblieben sein (Fig. 75).

Führt man an irgend einer Stelle, wo die Ausbiegung y beträgt, einen Querschnitt durch den Stab und betrachtet das Stück unterhalb des Schnittes (Fig. 76), so müssen an dem Schnitte innere Kräfte auftreten, die der bei A angreifenden Kraft K das Gleichgewicht halten. Wegen der Geringfügigkeit der Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze kann man den Schnitt als rechtwinklig zur Richtung von K annehmen. Die Richtungslinie von K geht um y an dem Schwerpunkte der Querschnittsfigur vorbei. Zur Erleichterung der Spannungsberechnung denken wir uns an einem Punkte des unteren Stabtheils 2 mit K gleiche und parallele, aber einander entgegengesetzte Kräfte so hinzugefügt, dass sie durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen; hierdurch wird an dem Gleichgewichtszustande nichts geändert. Die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte Kraft K bilden ein Kräftepaar vom Momente Ky, welches an der rechten, konkaven Seite eine Druckspannung $\sigma = \frac{Kye}{J}$ hervorbringt. Die zweite hinzugefügte Kraft K aber ist eine durch den Schwerpunkt des Schnittes gehende Druckkraft und erzeugt eine gleichmässig über die Schnittfläche vertheilte Druckspannung $\frac{K}{F}$. Diese vereinigt sich mit der aus dem Biegungsmomente hervorgehenden Druckspannung zu der an dem Schnitt überhaupt vorkommenden grössten Druckspannung

Fig. 74. Fig. 75.

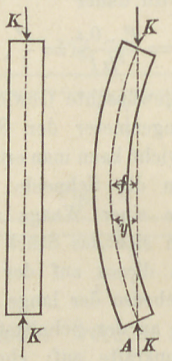
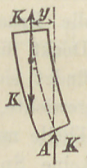


Fig. 76.



$$\sigma'' = \frac{Kye}{J} + \frac{K}{F}.$$

Nennt man f die stärkste Durchbiegung, welche in der Mitte der Länge l auftreten muss, so wird die überhaupt grösste an dem Stabe vorkommende Spannung die Druckspannung σ'', deren absoluter Werth

1) $$\sigma'' = \frac{Kfe}{J} + \frac{K}{F}.$$

Man könnte erwarten, dass die unbekannte Durchbiegung f mit Hülfe der Gleichung der Biegungslinie zu ermitteln sein würde;

doch gelingt ein derartiger Versuch nicht, wie in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, ausführlich entwickelt wird. Der Grund des Misserfolges liegt in dem Umstande, dass die Biegung nur eine Folge zufälliger Abweichungen ist, deren Grösse nicht zahlenmässig feststeht, sondern nur aus der Erfahrung und den Umständen eines bestimmten Falles ermittelt werden kann.

Bei den Belastungsfällen Fig. 58 u. 59 nun haben wir die Durchbiegung f eines Stabes auf die Form

$$f = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e} \quad \text{bezw.} \quad \frac{5}{48} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e}$$

(Gl. 14 und 18, S. 46) gebracht, und auf ähnliche Form lässt sie sich auch in den einfachen, in der Tabelle auf S. 44 behandelten Fällen bringen; es hat nur die Ziffer vor $\frac{\sigma}{E}$ in jedem Fall ihren besonderen Werth. Daher können wir auch bei der jetzt vorliegenden Aufgabe mit einiger Berechtigung fe verhältnisgleich mit l^2, also etwa

$$fe = \alpha l^2 \quad \text{setzen.}$$

Da bei einem nachgiebigen, wenig steifen Stoffe eine starke Durchbiegung eher erwartet werden darf als bei einem verhältnismässig starren Körper, so ist die Ziffer α eine in erster Linie von dem Material abhängige Verhältniszahl, und zwar darf der Erfahrung zufolge etwa gesetzt werden: für Stabeisen $\alpha = 0{,}0001$, für Gusseisen und Holz $\alpha = 0{,}0002$. Natürlich sind dies nur rohe Mittelwerthe; eingehendere Versuche haben gezeigt, dass α nicht ganz allein von dem Stoffe, sondern auch in nicht ganz einfacher Weise noch von dem Längenverhältnis abhängt, doch können wir darauf in diesem Buche nicht näher eingehen.

Hiernach wird dann aus Gl. 1:

$$\sigma'' = K \left(\frac{\alpha l^2}{J} + \frac{1}{F} \right).$$

Da der Stab die Freiheit hat, sich nach irgend einer Richtung auszubiegen, so muss man für vorstehende Gleichung den ungünstigsten Fall, d. h. für J den kleinstmöglichen Werth annehmen. Ist der Querschnitt z. B. ein Rechteck, d die kleinere, h die grössere Seite, so ist $J = {}^1/_{12} h d^3$ zu setzen in Bezug auf die zur Kante h parallele Schwerpunktsachse. In der Richtung der

kleineren Seite d ist dann die Ausbiegung zu erwarten. Führt man noch den zu J gehörigen kleinstmöglichen Trägheitshalbmesser i ein, indem man $J = Fi^2$ setzt, so wird

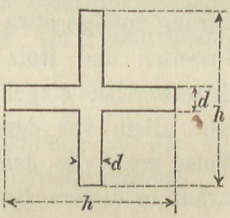
$$2) \quad \sigma'' = \frac{K}{F}\left(a\frac{l^2}{i^2} + 1\right), \quad \text{oder auch mit} \quad n = \left(a\frac{l^2}{i^2} + 1\right)$$

$$3) \quad F = \frac{K}{\sigma''} \cdot n \quad \text{und} \quad K = \frac{F\sigma''}{n}.$$

Der Klammerausdruck n wird für $l = 0$ zu Eins und wächst mit zunehmender Stablänge. Ist σ'' die zulässige Druckspannung, so würde $K : \sigma''$ der bei einer Berechnung auf reine Druckfestigkeit erforderliche Querschnitt sein. Der Zerknickungsfaktor $n = a\frac{l^2}{i^2} + 1$ giebt an, in welchem Verhältnisse der Querschnitt wegen der Möglichkeit des Zerknickens vergrössert werden muss.

Bei einem auf Knicken beanspruchten Stabe muss die Querschnittsform zweckmässig so gewählt werden, dass bei gegebener Fläche F das Quadrat des kleinsten Trägheitshalbmessers i möglichst gross werde. Man muss den Querschnitt so anordnen, dass zwei zu einander rechtwinklige Symmetrieachsen gleich grosses Trägheitsmoment liefern. Jede Abweichung von dieser Form würde wohl in einer Richtung die Steifigkeit vergrössern, aber nur zum Schaden der Steifigkeit in anderer Richtung. Von allen rechteckigen Querschnitten verdient also das Quadrat den Vorzug. Der Kreis kommt bei den natürlichen Baumstämmen zur Anwendung. Für die Verwendung von Eisen wird man hohlen Querschnittsformen (Ring, hohlem Quadrat) und gerippten Formen, z. B. dem Kreuzquerschnitte mit gleichen Rippen (Fig. 77) den Vorzug geben.

Fig. 77.



Beispiele: Für einen Schmiedeisenstab von 100 cm Länge, dessen Querschnitt ein Quadrat von 2 cm Seite, ist $i^2 = 2^2 : 12$, und der Zerknickungsfaktor

$$n = 0{,}0001 \cdot \frac{100^2}{2^2} \cdot 12 + 1 = 4.$$

Bei 700 at zulässiger Druckspannung wird daher die zulässige Belastung

$$K = 2^2 \cdot 700 : 4 = 700 \text{ kg}.$$

Für einen kreuzförmigen Querschnitt (Fig. 77) ist nach S. 24

$$J = {}^1/_{12}\, d h^3 \left(1 + \frac{d^2}{h^2} - \frac{d^3}{h^3}\right),$$

$$F = 2\,d \cdot h - d^2 = d \cdot h \left(2 - \frac{d}{h}\right).$$

Bei der Berechnung des Zerknickungsfaktors kann man (im Hinblick auf die Unsicherheit des Werthes α) wegen der Kleinheit von $d : h$ annähernd

$$i^2 = \frac{d \cdot h^3}{12 \cdot 2\,d \cdot h} = \frac{h^2}{24} \quad \text{setzen.}$$

Es wird dann $$n = \alpha\ 24\ \frac{l^2}{h^2} + 1\,;$$

für Schmiedeisen und $l = 20\ h$ ist $n = 0{,}96 + 1$ oder rund $n = 2$. (Abrundungen sind bei der Berechnung von n sehr angebracht.) Die Fläche F ist, z. B. für $d = 2{,}5$ cm, $h = 20$, also $l = 400$ cm,

$$F = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 20 - 2{,}5^2 = 93{,}75 \text{ qcm},$$

mit $\sigma'' = 700$ wird dann die zulässige Belastung

$$K = \frac{700 \cdot 93{,}75}{2} = 32\,813 \text{ kg}.$$

Ist der Stab von Gusseisen, so wird α doppelt so gross, daher

$$n = 1{,}92 + 1 = 2{,}92, \text{ rund } 3.$$

Nimmt man wiederum $\sigma'' = 700$, so wird

$$K = \frac{700 \cdot 93{,}75}{3} = 21\,875 \text{ kg}. \quad -$$

Für eine hohle Gusseisensäule von dem äusseren und inneren Halbmesser R bezw. r ist

$$J = {}^1/_4\,(R^4 - r^4)\,\pi\,; \quad F = (R^2 - r^2)\,\pi,$$

mithin $i^2 = {}^1/_4\,(R^2 + r^2)$, daher

$$n = 0{,}000\,2 \cdot 4\ \frac{l^2}{R^2 + r^2} + 1\,;$$

mit $r = 0{,}9\ R$ wird dann

$$n = 0{,}000\,44\ \frac{l^2}{R^2} + 1\,.$$

Ist dann noch $l = 40\ R$, so wird $n = 1{,}7$.

$R = 10$ cm, $l = 400$ cm und $\sigma'' = 700$ at liefert dann wegen $F = 59{,}69$ qcm

$$K = \frac{700 \cdot 59{,}69}{1{,}7} = 24\,576 \text{ kg}.$$

Weiteres über Knickfestigkeit findet man in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre.

7. Drehungsfestigkeit.

a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte.

Wird ein Cylinder an beiden Enden durch gleiche Kräftepaare von entgegengesetztem Drehsinn ergriffen, deren Ebenen rechtwinklig zur Cylinderachse sind, so heben sich diese Paare am starren Körper bekanntlich ohne Weiteres auf (Theil 1, S. 108); am elastisch-festen Körper aber nur, wenn seine Widerstandsfähigkeit hinreicht und auch dann erst, nachdem eine entsprechende Formänderung stattgefunden hat. Diese Formänderung besteht in einer Verdrehung; die einzelnen Querschnittsebenen verdrehen sich derartig gegen einander, dass die ursprünglich geraden Cylinderseiten (z. B. AB) in sehr steile Schraubenlinien (z. B. AC) übergehen. (In Fig. 78 ist das linksseitige Ende des Cylinders festgehalten gedacht.) Die Verdrehungen der Querschnitte gegen einander sind als Gleitungen der einzelnen Querschnittstheile aufzufassen, mit denen das Auftreten entsprechender Schubspannungen verbunden ist. Versuche haben ferner gezeigt, dass Halbmesser eines Querschnitts auch nach der Formänderung noch geradlinig sind. Daraus folgt, dass die Gleitung in der Achse bei O (Fig. 79) Null ist und verhältnisgleich mit dem Abstande ϱ von O nach aussen zunimmt. Da nun nach Gl. 1, S. 15

Fig. 78.

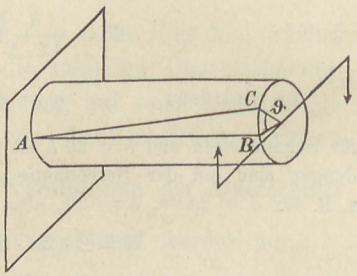
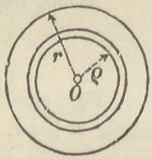


Fig. 79.



$$1) \qquad \gamma = \frac{\tau}{G},$$

d. h. die Gleitung verhältnisgleich mit der Schubspannung ist, so muss auch die Schubspannung mit ϱ verhältnisgleich sein. Nennt man also die Schubspannung in den Abständen ϱ und r von der Mitte τ_ϱ bezw. τ, so ist (ähnlich wie für die Biegungsspannungen Gl. 1, S. 18)

$$2) \qquad \tau_\varrho : \tau = \varrho : r.$$

Nimmt man aus dem kreisförmigen Querschnitt einen dünnen Ring vom Halbmesser ϱ und von der Fläche dF heraus, so tritt an diesem durchweg die gleiche Schubspannung τ_ϱ in tangentialer Richtung, d. h. rechtwinklig zum Halbmesser ϱ auf; das giebt für die Ringfläche dF eine gesammte innere Tangentialkraft $dF\tau_\varrho$, welche in Bezug auf die Cylinderachse ein Moment

$$d\mathfrak{M} = \tau_\varrho dF\varrho \quad \text{liefert.}$$

Dies ist das der weiteren Verdrehung entgegenwirkende Moment des Ringes. Summirt man über den ganzen Querschnitt, so ist das gesammte Spannungsmoment mit Rücksicht auf Gl. 2

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau}{r}\int dF\cdot\varrho^2,$$

welches dem verdrehenden Kräftepaare gleich sein muss. Wir können daher $\mathfrak{M}$ unmittelbar als das Verdrehungsmoment bezeichnen. Der Werth $\int dF\cdot\varrho^2$ bedeutet (nach Theil 1, S. 270) das polare Trägheitsmoment J_0 des Querschnitts in Bezug auf die Achse O des Stabes. Sonach wird

$$3) \qquad \frac{\tau J_0}{r} = \mathfrak{M}.$$

Diese Formel ist ähnlich gestaltet wie die Gl. 3, S. 21, für die Biegungsspannung. Nur kommt hier das polare Trägheitsmoment in Frage.

Der Winkel ϑ, um den sich der eine Querschnitt gegen einen um l davon entfernten verdreht, heisst der Verdrehungswinkel. Die Berechnung desselben folgt leicht aus Fig. 78. Die Abweichung der Schraubenlinie AC von der Geraden AB ist die der Schubspannung τ der äusseren Mantelfläche entsprechende Gleitung; daher wird der Verdrehungsbogen $BC = \gamma l$. Weil aber auch $BC = r\vartheta$, so wird $r\vartheta = \gamma l$ oder

$$4) \qquad \vartheta = \frac{\tau}{G}\frac{l}{r} = \frac{\mathfrak{M}l}{GJ_0}$$

(entsprechend Gl. 9, S. 43).

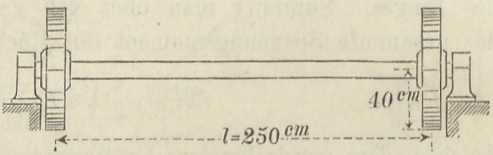
Diese Gleichungen gelten für kreis- und kreisringförmige Querschnitte. Für Vollkreise ist (nach Theil 1, S. 273) $J_0 = {}^1/_2 r^4\pi$, für einen Ring von den Halbmessern R und r

$$J_0 = {}^1/_2 (R^4 - r^4)\pi.$$

Die Formeln 2—4 sind nicht nur für den ruhenden Cylinder, sondern auch für den gleichförmig um seine Achse sich drehenden Cylinder verwendbar, weil die dieser Drehung entsprechenden Ergänzungskräfte (Centrifugalkräfte) in den einzelnen Theilen des Körpers nur (meist unbedeutende) Zugspannungen hervorrufen.

Beispiel: Auf einer Maschinenwelle (Fig. 80) befinden sich zwei Zahnräder im Abstande $l = 250$ cm von einander. Am Umfange des rechtsseitigen vom Halbmesser $= 40$ cm wirke eine Kraft $K = 1000$ kg. Dadurch entsteht ein Drehmoment $\mathfrak{M} = 40\,000$ cmkg, welches durch ein gleiches Widerstandsmoment am anderen Zahnrade aufgehoben werden möge. Die zulässige Schubspannung möge mit Rücksicht auf mögliche Unregelmässigkeiten der Bewegung nur zu $\tau = 200$ at angenommen werden, dann gilt für den erforderlichen Wellenhalbmesser r

Fig. 80.



$$200 \cdot {}^1/_2 r^3 \pi = 40\,000 \quad \text{oder} \quad r = 5 \text{ cm}.$$

Die elastische Verdrehung der beiden Zahnräder gegen einander beträgt (Gl. 4)

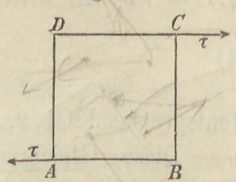
$$\vartheta = \frac{200}{800\,000} \frac{250}{5} = \frac{1}{80},$$

oder in Graden $0^0 43'$.

b) Stab von rechteckigem Querschnitte.

So einfach die Drehungsfestigkeit eines cylindrischen Stabes zu berechnen war, so verwickelt werden ihre Verhältnisse bei Stäben anderer Querschnittsform. Ein für diese Untersuchung wichtiges Ergebnis folgt aus einer Eigenschaft der Schubspannungen an einem würfelförmigen Körper. Denkt man sich aus einem Körper, der durch schiebende, parallel der Bildebene wirkende Kräfte angegriffen ist, einen Würfel von der Seite $= 1$ herausgeschnitten (Fig. 81) und nimmt an, dass an der oberen Fläche DC eine wagerecht nach rechts gerichtete Schubspannung τ auftritt, der an AB eine gleiche nach links gerichtete entgegen wirkt, so fordert das Gleichgewicht gegen Drehung, dass dieses Kräftepaar durch ein gleiches entgegengesetztes aufgehoben werde. Die ersten beiden

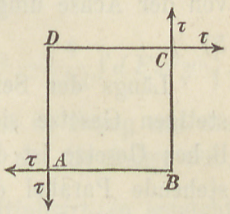
Fig. 81.



Schubspannungen bedingen also das Auftreten gleich grosser an den Flächen AD und BC (Fig. 82).

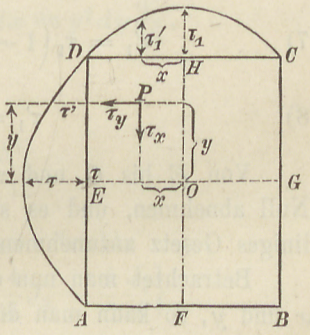
An den vier zu einer Ebene rechtwinkligen Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipedes treten in den Richtungen parallel zu jener Ebene stets gleiche Schubspannungen auf.

Fig. 82.



Gehört nun die Seitenfläche AD etwa der freien Mantelfläche eines auf Drehung beanspruchten Körpers an, so kann an dieser keine Schubspannung auftreten, und damit wird auch die in AB rechtwinklig zu der Mantelfläche gerichtete Schubspannung Null. Hiernach müssen an einem solchen Körper die am äusseren Rande eines Querschnitts auftretenden Schubspannungen nothwendig parallel der Begrenzung des Querschnittes sein. Ist aber $ABCD$ (Fig. 83) der rechteckige Querschnitt des Stabes mit den Seiten $AB = d$, $BC = h$, wobei $h \geq d$, so kann an einer Kante, z. B. bei D gar keine Schubspannung auftreten, weil sowohl die zu AD, wie auch die zu CD rechtwinklige Schubspannung verschwinden muss. Es folgt also das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis, dass die von der Achse des Stabes am weitesten entfernten Querschnittstheile an den vier Ecken spannungslos sind.

Fig. 83.



Über die Veränderlichkeit der längs des Randes eines Querschnittes auftretenden Schubspannungen giebt die Grösse der Gleitung an den verschiedenen Stellen der Mantelfläche des Stabes Auskunft (s. C. Bach, Elasticität und Festigkeit). Versieht man die Mantelfläche des Stabes mit einem Netze von Quadraten und beobachtet diese, nachdem die Verdrehung stattgefunden hat, so findet man, dass die Quadrate sich im Allgemeinen in Rhomben verwandelt haben. Die Abweichung der Rhomben von den Quadraten kennzeichnet unmittelbar die Gleitung an den verschiedenen Stellen. Dabei bestätigt sich zunächst, dass an den Kanten $ABCD$ die Figuren quadratisch

geblieben sind. Ferner ergiebt sich, dass die Gleitungen in denjenigen Punkten E und G des Umfanges, welche der Achse am nächsten liegen, am stärksten, in den Mittelpunkten F und H der kurzen Seiten weniger stark sind. Die Spannungen sind mit den Gleitungen verhältnisgleich. Sind τ und τ_1 die Schubspannungen an den Punkten E und H, so kann man diese den Entfernungen von der Achse umgekehrt proportional annehmen, d. h.

5) $$\tau_1 : \tau = d : h .$$

Längs der Seitenfläche AD muss die Spannung nach einem stetigen Gesetze sich ändern; das einfachste der hier wahrscheinlichen Gesetze ist das parabolische, durch die über der Sehne AB stehende Parabel dargestellt. Nimmt man dies als gültig an, so wird für die Spannung τ' im Abstande y von der Mitte:

$$y^2 : {}^1/_4 h^2 = (\tau - \tau') : \tau \quad \text{oder}$$

6) $$\tau' = \tau\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Ebenso wird in einem Abstande x von der Mitte H der kürzeren Seite die Spannung

7) $$\tau'_1 = \tau_1\left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right), \quad \text{oder wegen Gl. 5:}$$

8) $$\tau'_1 = \tau\frac{d}{h}\left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right).$$

Von E bis O und von H bis O muss die Spannung bis auf Null abnehmen, und es steht nichts im Wege, dafür ein geradliniges Gesetz anzunehmen.

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt P der Koordinaten x und y, so kann man die dort herrschende Spannung zerlegen in τ_x und τ_y rechtwinklig zu x und y. Man kann dann mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit annehmen, dass τ_x und τ_y in geradliniger Beziehung zu τ' bezw. τ_1' stehen, d. h.

9) $$\tau_x : \tau' = x : {}^1/_2 d \quad \text{und}$$

10) $$\tau_y : \tau_1' = y : {}^1/_2 h, \quad \text{oder}$$

11) $$\tau_x = \frac{2\tau}{d} x\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \quad \text{und}$$

12) $$\tau_y = 2\tau\frac{d}{h^2} y\left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right).$$

An einem Flächentheilchen $dF = dx \cdot dy$ bei P wirken dann die inneren Kräfte $\tau_x dF$ und $\tau_y dF$ und liefern in Bezug auf die Achse O des Stabes das innere Moment $(\tau_x x + \tau_y y) dF$. Daher gilt für das Verdrehungsmoment

$\mathfrak{M} = \int (\tau_x x + \tau_y y) dF$ oder

$$\mathfrak{M} = 2\tau \int \frac{1}{d} \left\{ x^2 \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) + \frac{d}{h^2} y^2 \left(1 - \frac{4x^2}{d^2}\right) \right\} dF$$

$$= 2\tau \left\{ \frac{1}{d} \int dF x^2 - \frac{4}{h^2 d} \int dF x^2 y^2 + \frac{d}{h^2} \int dF y^2 - \frac{4}{h^2 d} \int dF x^2 y^2 \right\}.$$

Nun ist $\int dF x^2 = J_2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse OH; $\int dF y^2 = J_1$ das Trägheitsmoment auf die Achse OE; wird aber $\int dF y^2 = \frac{1}{12} dh^3$ noch mit $\frac{d}{h^2}$ multiplicirt, so entsteht daraus $\frac{1}{12} d^2 h = \frac{1}{d} J_2$. Endlich ist noch zu lösen

$$\int dF x^2 y^2 = \int dx\, dy\, x^2 y^2.$$

Ein wagerechter Flächenstreifen liefert hierzu den Beitrag

$$y^2 dy \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} x^2 dx = 2 y^2 dy \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 dx = y^2 dy \frac{d^3}{12},$$

die ganze Fläche also

$$\frac{2 d^3}{12} \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{d^3 h^3}{12 \cdot 12}.$$

Setzt man diese Werthe oben ein, so entsteht:

$$\mathfrak{M} = \tau \left\{ \frac{4}{d} J_2 - \frac{16}{h^2 d} \frac{d^3 h^3}{144} \right\} = \tau \left\{ \frac{4}{d} J_2 - \frac{4}{3} \frac{J_2}{d} \right\}$$

$$\mathfrak{M} = 4\tau \frac{J_2}{d} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

13) $$\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{d} = \frac{4}{3} \tau \frac{J_2}{\frac{1}{2} d} \text{ und ebenso } \mathfrak{M} = \frac{4}{3} \tau_1 \frac{J_1}{\frac{1}{2} h}, \text{ oder}$$

14) $$\tau = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M} d}{J_2}; \quad \tau_1 = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M} h}{J_1}, \text{ d. h.:}$$

Bei einem auf seine Drehungsfestigkeit beanspruchten Stabe von rechteckigem Querschnitte tritt die stärkste Schubspannung τ an denjenigen Punkten

der Umfangslinie auf, welche der Stabachse am nächsten liegen, nämlich in dem Abstande $\frac{1}{2}d$. Für die Drehungsfestigkeit ist das auf die längere Mittellinie bezogene (kleinere) Trägheitsmoment $J_2 = \frac{1}{12}hd^3$ massgebend.

Beispiel: Bei einem Quadrate von der Seite d als Querschnitt ist

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3}\tau\frac{Fd}{12} = \frac{2}{9}Fd\tau = 0{,}222\,d^3\tau;$$

beim Kreise vom Durchmesser d:

$$\mathfrak{M} = \frac{Fr}{2}\tau = \frac{1}{4}Fd\tau = \frac{1}{16}d^3\pi\tau = 0{,}2\,d^3\tau.$$

Bei gleichem Querschnitt F ist also der Kreis, bei gleicher Breite (Durchmesser = Quadratseite) das Quadrat gegen $\mathfrak{M}$ widerstandsfähiger.

Der Verdrehungswinkel ϑ eines Stabes von rechteckigem Querschnitte wäre nach der im Querschnittspunkte E (Fig. 83) herrschenden Spannung τ und der daraus folgenden Gleitung $\gamma = \tau : G$ zu $\frac{\tau}{G}\frac{l}{\frac{1}{2}d}$, d. h. mittels Gl. 13, S. 69, zu $\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{M}l}{GJ_2}$ zu erwarten, nach der im Punkte H herrschenden Spannung $\tau_1 = \tau\frac{d}{h}$ aber zu

$$\frac{\tau_1}{G}\frac{l}{\frac{1}{2}h} = \frac{3}{4}\frac{\mathfrak{M}l}{GJ_1}.$$

In Wirklichkeit verdrehen sich die beiden Symmetrieachsen des Querschnitts annähernd um das arithmetische Mittel dieser beiden Werthe, d. h. es ist ungefähr

15) $$\vartheta = \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{M}l}{G}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1}\right).$$

Die beiden Symmetrieachsen bleiben zu einander rechtwinklig; die übrigen vom Mittelpunkte aus gezogenen Radien verdrehen sich um verschiedene Winkel und treten aus der ursprünglichen Querschnittsebene heraus, so dass diese in eine krumme Fläche übergeht. Bessere Übereinstimmung mit Bauschinger's Versuchen (Civilingenieur 1881, S. 115 u. f.) ergiebt sich noch, wenn man $\frac{3}{8} = 0{,}375$ mit 0,3 vertauscht, also setzt:

$$\vartheta = 0{,}3\frac{\mathfrak{M}}{G}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1}\right)l.$$

Nach Einführung von $\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{d}$ (Gl. 13) wird hieraus

16) $$\vartheta = 0{,}8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{d} \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) = 0{,}8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{d} \left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right).$$

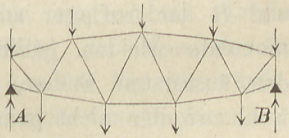
8. Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

a) Art der Berechnung der Spannkräfte.

An Stelle der S. 23 und 28 behandelten Balken, die entweder aus einem Stücke bestanden, oder, wenn auch aus Theilen zusammengesetzt, doch einen möglichst stetig zusammenhängenden Körper bildeten (S. 34), kann man auch gegliederte Stabanordnungen verwenden, zu deren Grundgedanken schon die Betrachtung der Gelenkstangen-Verbindungen (Theil 1, S. 185) geführt hatte; es sind dies die einfachen Fachwerke.

Ein einfaches Fachwerk besteht meist in einer Aneinanderreihung (Verbindung) von Gelenkstangen-Dreiecken, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemeinsam haben. Wird ein solches Fachwerk auf Stützen gelegt, deren eine nur in einer bestimmten (lothrechten) Richtung Widerstände leisten kann, so bildet es einen Fachwerkbalken oder Fachwerkträger (Fig. 84).

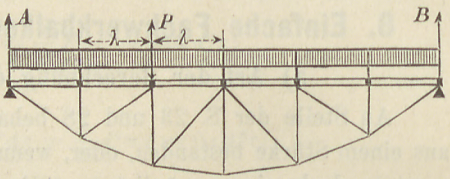
Fig. 84.



Eine Stange, welche durch zwei reibungslose Gelenke mit anderen verbunden ist, erfährt, wenn die äusseren Kräfte nur in diesen Gelenkpunkten angreifen, (nach Theil 1, S. 172) eine Spannkraft, deren Richtungslinie in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte fällt. Ist diese Verbindungsgerade dann zugleich die Mittellinie des Stabes, so wird letzterer nur auf reinen Zug oder Druck beansprucht, wobei sich die Spannung in günstigster Weise gleichmässig über den ganzen Stab vertheilt. Die gedrückten Stäbe müssen freilich auf Knickfestigkeit berechnet werden. Bei einem Fachwerke mit reibungslosen Gelenken und mit Kraftangriff in den Gelenkpunkten liegen somit die inneren Spannkräfte der Stäbe nach Richtung und Lage fest, nur ihre Grösse muss noch ermittelt werden.

Besteht die Belastung nicht ohne Weiteres aus Kräften, die durch die Gelenkpunkte gehen, soll etwa ein Fachwerkträger eine Brückenbahn tragen, die durch Menschengedränge gleichmässig belastet wird, so ordnet man besondere Zwischenbalken an, welche die unmittelbare Belastung aufnehmen und auf Gelenkpunkte des Fachwerks übertragen. Diese Zwischenbalken, welche in Fig. 85 oberhalb des Fachwerks gezeichnet sind, wiewohl sie häufig nicht in dieser Höhe liegen, werden, wenn sie auch in Wirklichkeit meist mit einander in Verbindung stehen, doch für die Rechnung stets als einfache, nur von Gelenkpunkt zu Gelenkpunkt durchgehende kleine Balkenstücke behandelt. Sind diese Zwischenbalken von übereinstimmender Länge λ und auf die Längeneinheit mit p belastet, so erfährt der belastete Gelenkpunkt einen Druck $P = p\lambda$. Diese Kräfte P erzeugen die Stabspannungen des Fachwerks, wobei die Zwischenbalken nicht mehr in Betracht kommen.

Fig. 85.



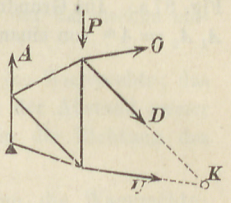
Die Gelenkpunkte heissen auch Knotenpunkte oder Knoten des Fachwerks. In solchen Knoten müssen auch die Widerstände A und B der Auflager angreifen, damit die Stäbe keine Biegungsmomente erleiden. (Eine derartige Anbringung der Auflager an den äussersten Enden, wie in Fig. 85, erscheint dem Anfänger wohl zuweilen nicht genügend sicher; jedoch ist zu bemerken, dass die hier benutzten Figuren nur das Netz der Mittellinien des Fachwerks geben; bei der körperlichen Ausbildung des Balkens wird derartig verfahren, dass zu Bedenken dieser Art kein Grund mehr vorliegt, dass aber die Auflagerkräfte dennoch durch die Endknoten gehen.)

Die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, heissen seine Gurten (Obergurt bezw. Untergurt) mit den Spannkräften O u. U, die dazwischen angebrachten Stäbe allgemein Wandglieder (weil sie eine volle Blechwand zwischen den Gurten ersetzen); lothrechte Wandglieder heissen Ständer, Pfosten, Vertikalen mit den Spannkräften V, schräg gerichtete Wandglieder werden Streben oder Diagonalen genannt mit den Spannkräften D. Es ist rathsam, diese Kräfte

in der Figur als Zugkräfte einzuführen. Liefert dann die Rechnung positive bezw. negative Werthe für diese Kräfte, so kennzeichnen sich dadurch wirkliche Zugkräfte bezw. Druckkräfte.

Die Berechnung der Auflagerdrücke A und B geschieht ganz so wie bei vollen Balken auf zwei Stützen mittels der Momentengleichungen, da nach S. 4 auch für beliebige Körpergruppen die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper Gültigkeit haben.

Fig. 86.



Zur Auffindung der einzelnen Stabkräfte zerlegt man durch einen Schnitt das Fachwerk in zwei Theile, bringt an den Schnittstellen der Stäbe die Spannkräfte derselben an und stellt für einen der beiden Theile, z. B. für den linksseitigen (Fig. 86), die Gleichgewichtsbedingungen auf. Bei Kräften in der Ebene kann man drei von einander unabhängige Gleichungen anschreiben, kann also für einen Schnitt auch drei Spannkräfte, die nicht durch einen Punkt gehen, daraus berechnen. Bei dem hier nur zu behandelnden einfachen Dreiecks-Fachwerke lassen sich sämmtliche Stäbe durch Schnitte erreichen, die im Ganzen nicht mehr als drei Stäbe treffen, so dass die Spannkräfte statisch bestimmbar sind.

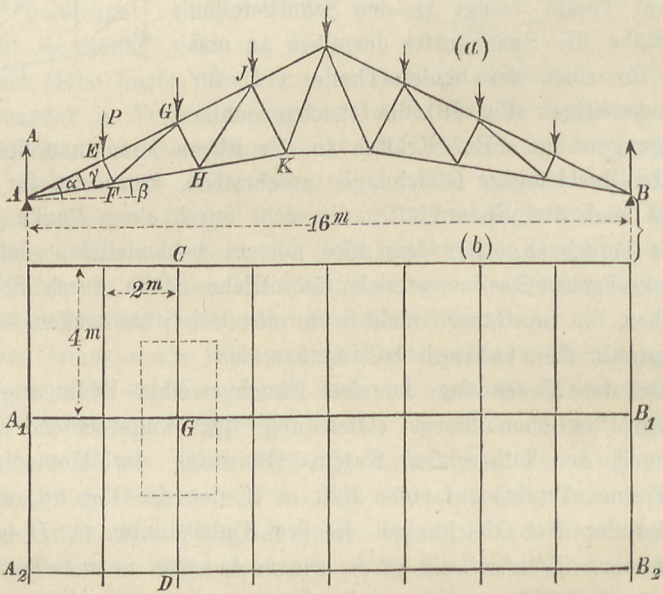
Bei der Anwendung der drei Gleichgewichts-Bedingungen in der ursprünglichen Form (Gleichung der wagerechten Kräfte, Gleichung der lothrechten Kräfte, Gleichung der Momente für irgend einen Punkt) auf einen Fall, z. B. den der Fig. 86, würden in jeder der drei Gleichungen die drei Unbekannten O, D und U vorkommen. Zweckmässig ist es, wie auch schon in anderen Fällen (Theil 1, S. 160) geschehen, die Rechnung so einzurichten, dass man für jede Unbekannte nur eine Gleichung bekommt. Dies wird in solchen Fällen, wo O, D und U verschiedene Richtungen haben, erreicht, wenn man nur Momentengleichungen anschreibt und zum Drehpunkte jedes Mal den Schnittpunkt derjenigen beiden Stäbe wählt, deren Spannkraft vorläufig nicht verlangt wird. Dies ist der Grundgedanke des Verfahrens von A. Ritter (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1861, S. 412). Zur Berechnung der Spannkraft O (Fig. 86) stellt man für die am linksseitigen Trägerstücke wirkenden Kräfte die Momentengleichung in Bezug auf den Schnittpunkt K von D und U auf; dann kommen

D und U in dieser Gleichung nicht vor, weil sie beide das Moment Null haben, und man hat für O eine einzige Gleichung ersten Grades.

b) Dachträger.

Beispiel 1: Berechnung der Spannkräfte eines belgischen Dachträgers von 16 m Spannweite. Die Anordnung des Trägers zeigt Fig. 87a. Im Grundrisse (Fig. 87b) mögen die Träger $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ um $A_1 A_2 = 4$ m von einander abstehen. Die Spannweite werde durch sog. Pfetten,

Fig. 87.



die über den Knotenpunkten des Obergurts liegen, in acht gleiche Theile von 2 m getheilt. Da die gleichmässige Belastung des Grundrisses der Dachfläche sich gleichmässig über die Pfetten vertheilt, und da die Pfetten für die Berechnung als Einzelträger (nur von Dachträger zu Dachträger reichend) angesehen werden, so erkennt man leicht, dass ein beliebiger Knoten G des Obergurts die Last zu tragen hat, welche auf das im Grundrisse punktirte Rechteck von $2\,\text{m} \times 4\,\text{m} = 8\,\text{qm}$ entfällt. Rechnet man als Gesammtlast (einschl. Schnee- und Winddruck) 180 kg für 1 qm Grundfläche, so ergiebt sich $P = 180 \cdot 8 = 1440$ kg als Last jedes Knotens des Obergurts. Die halb so grosse Belastung, welche auf die Endpunkte A und B kommt, beeinflusst wohl den Druck auf die stützenden Wände, bringt aber, weil sie unmittelbar auf die Stützpunkte übertragen wird, in den Fachwerkstäben keine Spannkraft

hervor und bleibt deshalb bei der Berechnung der Stabkräfte am besten ganz ausser Betracht. Hiernach befinden sich auf dem Träger sieben gleiche Lasten P in gleichen Abständen, so dass jeder Auflagerdruck $A = B = 7/2\,P$ wird. Es ist zweckmässig, die Knotenlast im Laufe der Rechnung noch allgemein mit P zu bezeichnen. Am Schlusse kann dann dafür der Zahlenwerth 1440 kg eingeführt werden.

Die beiden Gurte sind durch Stäbe, rechtwinklig zum Obergurt, mit einander verbunden, deren Spannkräfte wir, wenn sie auch nicht lothrecht stehen, doch mit V bezeichnen wollen. Die Spannkräfte der dazwischen eingelegten Streben mögen D heissen.

Der Obergurt habe eine Neigung $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ gegen die Wagerechte; das giebt $\alpha = 26^0\,34'$, $\cos\alpha = 0{,}894$, $\sec\alpha = 1{,}119$; dann ist der Abstand zweier Lastpunkte, welcher wagerecht gemessen 2 m beträgt, in der Richtung des Obergurts $AE = 2 \cdot 1{,}119 = 2{,}238$ m.

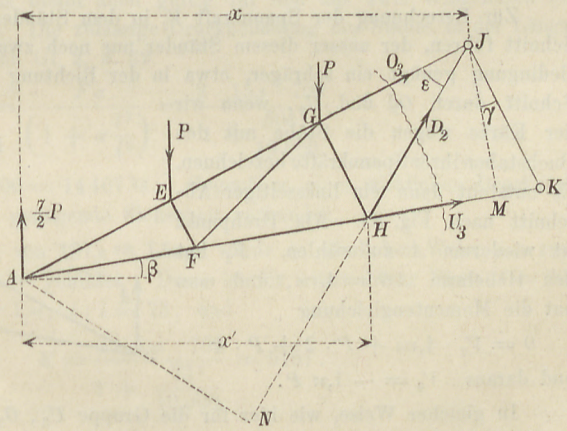
Der Untergurt habe eine Neigung $\operatorname{tg}\beta = 1/6$ gegen die Wagerechte; dies giebt $\beta = 9^0\,28'$, $\sin\beta = 0{,}1645$, $\cos\beta = 0{,}9864$, $\sec\beta = 1{,}014$. Der Winkel $\gamma = EAF$ zwischen beiden Gurten beträgt hiernach $17^0\,6'$ mit $\cos\gamma = 0{,}9558$, $\sec\gamma = 1{,}046$, $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}3076$.

Hieraus bestimmt sich $EF = AE \cdot \operatorname{tg}\gamma = 2{,}238 \cdot 0{,}3076 = 0{,}688$ m, mithin $GH = 2 \cdot 0{,}688 = 1{,}376$ und $JK = 3 \cdot 0{,}688 = 2{,}064$.

Für die Theile des Untergurts gilt dann: $AF = AE \sec\gamma = 2{,}238 \cdot 1{,}046 = 2{,}341$.

Die Ermittelung der Spannkräfte soll an dem dritten Fache von links, $GJKH$, gezeigt werden. Führt man einen Schnitt durch dasselbe, welcher das Obergurtstück GJ, die Strebe HJ und das Untergurtstück HK trifft, so betrachtet man das links vom Schnitte verbleibende Stück (Fig. 88), bringt an den Schnittstellen die als Zugkräfte gedachten Spannkräfte O_3, D_2 und U_3 an und stellt für das Gleichgewicht des linksseitigen Abschnittes drei Momenten-Gleichungen auf.

Fig. 88.



Zur Berechnung von U_3 dient der Schnittpunkt J von O_3 und D_2 zum Drehpunkte. Dann ist $JM \perp AK$ der Hebelarm von U_3, und zwar ist

$JM = JK \cos\gamma = 2{,}061 \cdot 0{,}955\,8 = 1{,}973$ m. Der wagerechte Abstand der Knotenpunkte des Obergurts beträgt 2 m, daher ist $x = 6$ m, während die Lasten bei E und G die Hebelarme 4 bezw. 2 m haben. Es ist empfehlenswerth, beim Aufschreiben der Momenten-Gleichungen eine bestimmte Reihenfolge festzusetzen, um sich vor Auslassungen zu bewahren. Wir schreiben stets zuerst das Moment der gesuchten Spannkraft, dann dasjenige des Auflagerdrucks und schliesslich diejenigen der am betrachteten Trägerstücke vorhandenen Lasten Also

$$0 = -U_3 \cdot 1{,}973 + 3{,}5\,P \cdot 6 - P \cdot 4 - P \cdot 2,$$

woraus man leicht

$$U_3 = +7{,}60\,P$$

findet; das positive Zeichen bedeutet eine Zugkraft.

Zur Berechnung von O_3 dient der Schnittpunkt H von U_3 und D_2 als Drehpunkt. Es ist $AH = 2\,AF = 4{,}682$. Der wagerechte Abstand x' des Drehpunktes vom linksseitigen Auflager ist dann

$$x' = 4{,}682 \cdot \cos\beta = 4{,}682 \cdot 0{,}986\,4 = 4{,}62,$$

der Hebelarm von O_3 aber $GH = 1{,}376$; mithin

$$0 = O_3 \cdot 1{,}376 + 3{,}5\,P \cdot 4{,}62 - P \cdot 0{,}62 - P \cdot 2{,}62 \quad \text{und daraus}$$

$$O_3 = -9{,}40\,P.$$

Zur Berechnung von D_2 dient der Punkt A als Drehpunkt. Fällt man von A eine Winkelrechte AN auf die Richtung von D_2, so ist $AN = AJ \sin\varepsilon$. Nun ist $AJ = 3\,AE = 6{,}714$; $\operatorname{tg}\varepsilon = GH : GJ = GH : AE = 1{,}376 : 2{,}238 = 0{,}615$, dem ein Werth $\sin\varepsilon = 0{,}524$ entspricht, mithin

$$AN = 6{,}714 \cdot 0{,}524 = 3{,}517.$$

Dann wird, weil der Auflagerdruck den Hebelarm Null hat:

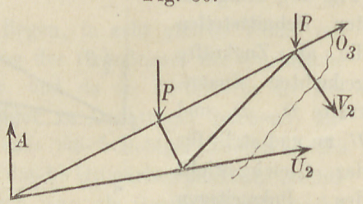
$$0 = -D_2 \cdot 3{,}517 + P \cdot 2 + P \cdot 4,$$

mithin

$$D_2 = 1{,}7058\,P.$$

Zur Berechnung der Spannkraft V_2 in dem Ständer GH muss man einen Schnitt führen, der ausser diesem Ständer nur noch zwei Stäbe trifft. Dieser Bedingung genügt ein schräger, etwa in der Richtung der Streben geführter Schnitt durch O_3 und U_2, wenn wir der Kürze wegen die Stäbe mit den Buchstaben ihrer Spannkräfte bezeichnen. Es entsteht dann ein linksseitiger Abschnitt nach Fig. 89. Als Drehpunkt ist wiederum A zu wählen. V_2 hat den Hebelarm $AG = 4{,}476$, und man hat die Momentengleichung

Fig. 89.



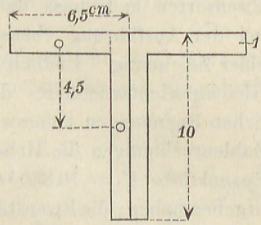
$$0 = V_2 \cdot 4{,}476 + P \cdot 2 + P \cdot 4$$

und daraus $V_2 = -1{,}37\,P$.

In gleicher Weise, wie hier für die Gruppe U_3, O_3, D_2 und V_2 gezeigt, hat man die Berechnung der übrigen Spannkräfte der linksseitigen Hälfte des Trägers durchzuführen; die Spannkräfte der rechten sind dann der linken symmetrisch.

Führt man schliesslich $P = 1440\,\text{kg}$ ein, so wird $U_3 = 10\,944\,\text{kg}$; $O_3 = -\,13\,536\,\text{kg}$; $D_2 = +\,2458\,\text{kg}$; $V_2 = -\,1973\,\text{kg}$. Will man die Stäbe aus Schmiedeisen herstellen, so erfordert, bei $700\,\text{at}$ zulässiger Spannung, U_3 einen Querschnitt von $10\,944 : 700 = 15{,}63\,\text{qcm}$, D_2 einen solchen von $2458 : 700 = 3{,}51\,\text{qcm}$, wofür man rund $16\,\text{qcm}$ bezw. $4\,\text{qcm}$ wählen wird; dabei ist die Querschnittsform gleichgültig. Bei den gedrückten Theilen aber, die auf Knickfestigkeit zu berechnen sind, sind auch die Länge und die Querschnittsform von Bedeutung.

Fig. 90.



Der Stab O_3 hat eine Länge $l = 223{,}8\,\text{cm}$. Er werde gebildet aus zwei ungleichschenkligen Winkeleisen $10 \cdot 6{,}5 \cdot 1\,\text{cm}$ (Fig. 90). Theilt man den Querschnitt des einen Winkeleisens durch eine lothrechte Gerade in die beiden Flächentheile 5,5 und $10\,\text{qcm}$, deren Schwerpunkte um $4.5\,\text{cm}$ in lothrechtem Sinne von einander abstehen, so ist nach Gl. 14, S. 25, das Trägheitsmoment des einen Winkeleisens in Bezug auf eine wagerechte Schwerpunktsachse

$$J = \frac{1}{12}\,5{,}5 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 10^3 + \frac{5{,}5 \cdot 10}{5{,}5 + 10} \cdot 4{,}5^2 = 156\,,$$

mithin ist das Quadrat des Trägheitshalbmessers

$$i^2 = J : F = 156 : 15{,}5 = 10\,,$$

$$i = 3{,}16\,;\quad \frac{l}{i} = \frac{223{,}8}{3{,}16} = 71\,,$$

$$\left(\frac{l}{i}\right)^2 = 5041\,.$$

Dieses Verhältnis bleibt auch gültig für den aus zwei Winkeleisen bestehenden Querschnitt. Die zulässige Druckbelastung des Stabes in der Längsrichtung ist daher nach Gl. 2, S. 62

$$K = \frac{F\sigma}{\left(1 + \alpha\,\frac{l^2}{i^2}\right)} = \frac{2 \cdot 15{,}5 \cdot 700}{1 + \frac{5041}{10\,000}}\,,\quad \text{d. h.}$$

rund $K = {}^2/_3 \cdot 31 \cdot 700 = 14\,467\,\text{kg}$. Gegenüber einer wirklichen Druckkraft von $13\,522\,\text{kg}$ ist also genügende Sicherheit vorhanden.

Der Ständer V_2 von $137{,}6\,\text{cm}$ Länge werde in ähnlicher Weise aus zwei Winkeleisen $6 \cdot 4 \cdot 0{,}6\,\text{cm}$ gebildet. Dann ist für eines dieser Eisen $J = 20$; $F = 5{,}64$, daher $i = 1{,}88$, $l : i = 73$, und

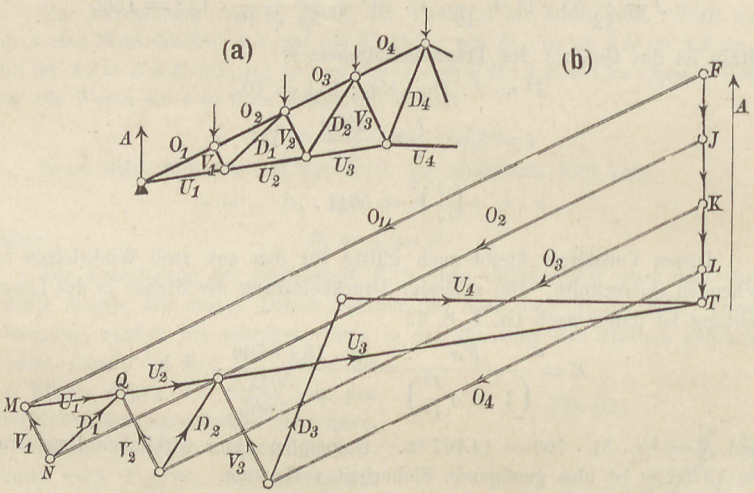
$$K = \frac{2 \cdot 5{,}64 \cdot 700}{1 + \frac{73^2}{10\,000}} = 5151\,.$$

Diese zulässige Druckbelastung ist, gegenüber der wirklichen Belastung mit $1930\,\text{kg}$ reichlich gross; man wird aber wegen der Nietverbindungen einen kleineren Querschnitt nicht wählen.

Bei der obigen Berechnung der Spannkräfte war die Ermittelung der Stablängen und Hebelarme die zeitraubendste Arbeit. In den meisten Fällen wird man diese Längen aus einer genauen Zeichnung des Trägernetzes abgreifen und dadurch viel Zeit ersparen können Es ist nicht zu empfehlen, bei derartigen Rechnungen eine weitgehende ziffermässige Genauigkeit anzustreben. Denn bei der schliesslichen Bestimmung der Stabquerschnitte richtet man sich nach den vorhandenen Eisensorten und muss daher häufig nach oben hin abrunden. Auch kommen bei der Ausführung ebenso leicht kleine Fehler vor wie beim Abgreifen von einer Zeichnung. Endlich aber ist die ganze Berechnung unter Annahme eines Gleichgewichtszustandes doch nur eine Annäherung, mit der man die wirklichen Spannungen keineswegs genau ermitteln kann. Hätte man in den obigen Zahlenrechnungen die Hebelarme auf Decimeter abgerundet, so würden sich die Spannkräfte $U_3 = 10\,800$ kg; $O_3 = -13\,168$ kg; $D_2 = 2469$ kg; $V_2 = -1920$ kg ergeben haben; die Eisenstärken würden eine Änderung nicht zu erfahren brauchen.

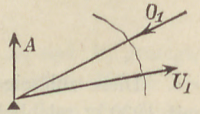
Am schnellsten ergeben sich die Spannkräfte solcher einfach geformten Dachträger mittels eines rein zeichnerisch hergestellten Kräfteplanes

Fig. 91.



(Fig. 91 b). Bezeichnet man, wie auf S. 75 die Knotenlast mit P, so ist der Auflagerdruck $A = 3{,}5\,P$. Diese $3^1/_2$ Lasten P sind durch $TF = A$ dargestellt, mit den Theilen $FJ = JK = KL = P$ und $LT = {}^1/_2\,P$. Man muss nun mit den Schnitten im ersten Fache am Auflager A beginnen, indem man (Fig. 92) O_1 und U_1 durchschneidet, dann müssen A, O_1 und U_1 im Gleichgewichte sein, also ein geschlossenes Krafteck bilden. Zieht man durch T (Fig. 91 b) eine Parallele zum Untergurtstab U_1, durch F eine Parallele

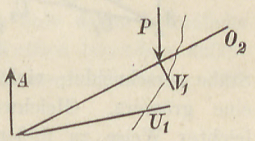
Fig. 92.



zum Obergurtstab O_1, so schneiden sich beide in M; TFM ist das geschlossene Krafteck, mithin ist FM die Grösse von O_1, MT die Grösse von U_1, beide nach dem Maßstabe gemessen, in welchem $P = FJ$ ist. In dem Krafteck TFM müssen die Kräfte übereinstimmenden Umfahrungssinn haben. Da nun die Pfeilspitze des Auflagerdrucks A von T nach F weist, so muss O_1 von F nach M, U_1 von M nach T weisen. Diesem entsprechend sind die Pfeile bei O_1 und U_1 angebracht. Überträgt man diese Pfeilrichtungen nun nach Fig. 92 an die Schnittstellen, so erkennt man, dass O_1 ein Druck, U_1 ein Zug ist.

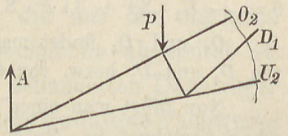
Nachdem so die Spannkräfte des ersten Faches bestimmt sind, führt man einen weiteren Schnitt, doch so, dass nur zwei neue unbekannte Spannkräfte auftreten. Man legt daher den Schnitt durch den soeben behandelten Stab U_1 und ausserdem durch V_1 und O_2 (Fig. 93). Dann müssen die neuen unbekannten Kräfte V_1 und O_2 den bekannten: U_1, A, P, das Gleichgewicht halten, also mit ihnen wieder ein geschlossenes Krafteck bilden. Wir betrachten M (Fig. 91 b) als Anfangspunkt mit $MT = U_1$, $TF = A$, $FJ = P$, ziehen von J aus eine Parallele zu O_2, von M aus eine Parallele zu V_1, welche beiden sich in N schneiden. Dann ist $JN = O_2$, $NM = V_1$. Der Umfahrungssinn ist: $MTFJNM$. Überträgt man die so bestimmten Pfeilrichtungen von O_2 und V_1 an die Schnittstellen in Fig. 93, so erkennt man beide als Druckkräfte.

Fig. 93.



Für den nächsten Schnitt behält man nun O_2 bei und führt ihn ausserdem durch D_1 und U_2 (Fig. 94). Die bekannten Theile des jetzt zu benutzenden Kraftecks sind $A = TF$, $P = FJ$, $O_2 = JN$. Zwischen die Punkte N und T sind nun die neuen Kräfte D_1 und U_2 einzulegen. Eine von T aus gezogene Parallele zu U_2 fällt mit TM zusammen, $NQ \parallel D_1$ bestimmt daher den Punkt Q, und es ist $NQ = D_1$, $QT = U_2$; beide erkennt man als Zugkräfte.

Fig. 94.



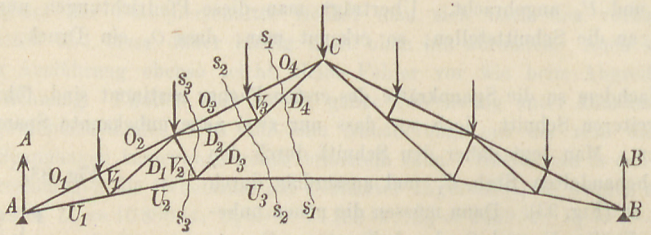
Die der Reihe nach zu führenden Schnitte sind im Zickzack derartig anzuordnen, dass jeder neue Schnitt ein vorher schon untersuchtes Gurtstück nochmals trifft und ausserdem zwei neue Stäbe. Hiernach setzt sich der leicht verständliche Kräfteplan (Fig. 91 b) fort. Zu beachten ist nur, dass U_1, U_2 und U_3 theilweise auf einander fallen, d. h. verschiedene Anfangspunkte, aber gemeinsame Endpunkte T haben. Die Druckkräfte sind im Kräfteplane durch Doppellinien hervorgehoben.

Weiteres über Kräftepläne für Fachwerk findet sich in Keck, Vorträge über Graphische Statik, S. 65 u. ff.

Beispiel 2: Berechnung der Spannkräfte eines Wiegmann'schen Dachträgers von 16 m Spannweite (Fig. 95). Die Berechnung der Spannkräfte O_1, U_1, V_1, O_2, D_1 und U_2 erfolgt ganz in derselben Weise wie beim belgischen Dachträger, und wenn, wie wir annehmen, die Neigungen

von O_1, O_2, U_1 und U_2 dieselben sind wie bei jenem (Fig. 87), so werden bei gleichen Lasten P auch die Spannkräfte für die genannten Stäbe dieselben sein. Bei den Stäben V_2, O_3, D_2, D_3 und V_3 ist es aber nicht möglich, von oben bis unten Schnitte so zu führen, dass der Schnitt nur drei

Fig. 95.



Stäbe zerschneidet; vielmehr ist die Zahl der vom Schnitte getroffenen Stäbe eine grössere. Gleichwohl sind die Spannkräfte auch dieses Trägers in leichter Weise zu finden; nur muss der Vorgang etwas abgeändert werden.

Man legt zunächst einen Schnitt $s_1 s_1$ durch O_4, D_4 und U_3 und wählt den Schnittpunkt C der beiden ersteren zum Drehpunkte. Der Hebelarm von U_3 lässt sich leicht abgreifen oder berechnen und beträgt, auf Grund der Bemerkung auf S. 78 nach Decimetern abgerundet, $3{,}2^{\,\mathrm{m}}$. Dann gilt: $0 = -U_3 \cdot 3{,}2 + 3{,}5\,P \cdot 8 - P \cdot 2 - P \cdot 4 - P \cdot 6$ oder $U_3 = 5\,P$.

O_4 und D_4 findet man in gleicher Weise, indem man den Schnittpunkt von D_4 und U_3 bezw. von O_4 und U_3 zum Drehpunkte wählt.

Nun führt man einen Schnitt $s_2 s_2$ durch O_3, D_2, D_3 und U_3. Weil U_3 schon berechnet ist, treten an diesem Schnitte nun drei unbekannte Spannkräfte auf. Um beispielsweise D_2 zu berechnen, benutzt man den Schnittpunkt C von O_3 und D_3 als Drehpunkt und behandelt die schon bekannte Spannkraft U_3 in der Momentengleichung wie eine gegebene Kraft. Der Hebelarm von D_2 wird 1,3, und es gilt:

$$0 = -D_2 \cdot 1{,}3 - U_3 \cdot 3{,}2 + 3{,}5\,P \cdot 8 - P \cdot 4 - P \cdot 6, \quad \text{mithin}$$

$$D_2 = 1{,}54\,P.$$

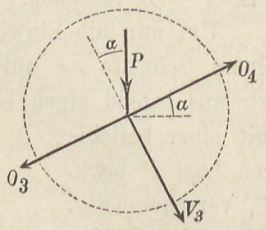
Für die Berechnung von O_3 dient der Schnittpunkt von D_2 und D_3, für die von D_3 der Schnittpunkt von D_2 und O_3 zum Drehpunkte.

An dem Schnitte $s_3 s_3$ kommen die Spannkräfte O_3, D_2, V_2 und U_2 vor, von denen nur noch V_2 unbekannt; wählt man A zum Drehpunkte, so verschwinden O_3 und U_3 aus der Momentengleichung, und die bekannte D_2 wird wie eine gegebene Kraft behandelt.

Ein schräger Schnitt durch O_3, V_3, D_4 und U_3 und die Wahl des Punktes C zum Drehpunkte führt nun auch leicht zu der einzigen noch fehlenden Spannkraft V_3, jedoch erkennt man leicht, dass V_3, ebenso wie V_1, gleich $-P \cos \alpha$ sein muss. Führt man nämlich um den oberen Endpunkt von V_3 einen kreisförmigen Schnitt, so trennt man dadurch das in Fig. 96 besonders

gezeichnete Stück aus dem Träger heraus. Dieses muss unter Einwirkung der Kräfte P, O_3, O_4 und V_3 im Gleichgewichte sein. Zerlegt man aber P nach der Richtung von V_3 und rechtwinklig dazu in $P \cos \alpha$ bezw. $P \sin \alpha$, so muss in ersterer Richtung stattfinden:

Fig. 96.



$$P \cos \alpha + V_3 = 0 \quad \text{oder}$$

$$V_3 = - P \cos \alpha .$$

(Für V_1 gilt dieselbe Figur.) Nach diesen Angaben kann es dem Leser keine Schwierigkeiten machen, die sämmtlichen Spannkräfte der linken Hälfte des Wiegmannschen Dachträgers zahlenmässig auszurechnen. Dem Anfänger ist dringend zu rathen, nach Führung eines Schnittes das links davon befindliche Trägerstück jedes Mal mit den daran auftretenden Kräften besonders aufzuzeichnen, weil dadurch die sichere Aufstellung der Momentengleichung sehr erleichtert wird.

c) Ungünstigste Belastungsart.

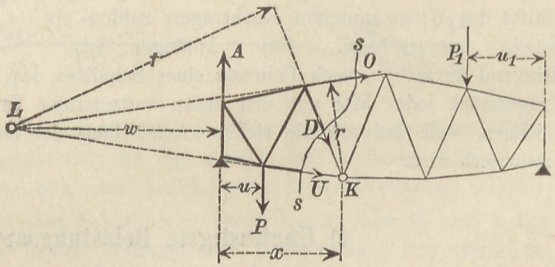
In den vorstehend berechneten Beispielen wurde nur eine bestimmte Belastungsart vorausgesetzt, es wurde angenommen, dass jeder Belastungspunkt eine Last P trage, die aus der stärksten überhaupt vorkommenden Belastung der Dachfläche abgeleitet ist. Diese Voraussetzung trifft für die zwei eben behandelten Dachträger zu, wie S. 84/85 sich erweisen wird. Für anders gestaltete Fachwerke trifft sie aber nicht allgemein zu, vielmehr wird sich zeigen, dass in manchen Stäben des Fachwerks die Entlastung gewisser Knotenpunkte eine Vergrösserung der Spannkräfte herbeiführen kann.

Es muss deshalb unterschieden werden zwischen der ständigen Belastung, die von dem Eigengewichte des Bauwerks und aller damit fest verbundenen Theile herrührt, und der beweglichen Belastung, die bei Dachträgern aus dem Gewichte einer Schneelage und dem Drucke des Windes, bei Brückenträgern aus dem Gewichte der die Brückenbahn befahrenden Lokomotiven, Wagen u. dergl. oder von dem Gewichte der auf der Brücke Platz findenden Menschen (Menschengedränge) und Thiere besteht. Beide Arten von Belastungen sollen annäherungsweise als gleichförmig vertheilt angesehen werden; die ständige Last werde mit g, die bewegliche Last mit p für die Längeneinheit des Trägers bezeichnet, so dass, wenn der wagerechte Abstand der Lastpunkte $= \lambda$ ist, die ständige

Knotenlast $G = g\lambda$, die bewegliche Knotenlast $P = p\lambda$ wird. Die Lasten G sind stets vorhanden, die Lasten P können auch fehlen. Jede Knotenlast kann daher entweder nur aus G, oder aus $G + P$ bestehen.

Um nun die Einwirkung beweglicher Lasten auf die an irgend einem Schnitte ss auftretenden Spannkräfte zu erkennen, denken wir uns irgend einen Knotenpunkt links bezw. rechts vom Schnitte mit einer beliebigen Last P bezw. P_1 versehen (Fig. 97). Diese beiden Lasten treten in den Momentengleichungen, die man etwa für das links vom Schnitte liegende Trägerstück aufstellt, in verschiedener Weise auf: beide liefern einen Beitrag zu dem Auflagerdrucke A und haben hierdurch mittelbar Einfluss auf die Spannkräfte des Schnittes; die linksseitige Last P gehört aber zu den am betrachteten Trägerstücke wirkenden Kräften und erscheint als solche auch noch unmittelbar in der Momentengleichung, während dies für P_1 nicht zutrifft. Aus diesem Grunde müssen Lasten links und rechts vom Schnitte bestimmt aus einander gehalten werden. Die beliebigen Knotenlasten P und P_1 zu beiden Seiten des Schnittes seien um u und u_1 vom linken bezw. rechten Auflager entfernt. Dann ist der linksseitige Auflagerdruck

Fig. 97.



$$1) \qquad A = P\frac{l-u}{l} + P_1\frac{u_1}{l} = P - P\frac{u}{l} + \frac{P_1 u_1}{l}.$$

Zur Berechnung der Spannkraft O im Obergurt dient der Punkt K des Untergurtes im Abstande x von der linksseitigen Auflager-Lothrechten als Drehpunkt, und es gilt die Momentengleichung

$$0 = Or + Ax - P(x-u) \quad \text{oder nach Gl. 1:}$$

$$-Or = Px - P\frac{u}{l}x + P_1\frac{u_1}{l}x - Px + Pu,$$

woraus sich

$$-Or = Pu\left(1 - \frac{x}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{x}{l}$$

ergiebt. Da nun $x \leqq l$, so haben die beiden Glieder der rechten Seite übereinstimmende Vorzeichen. Zu der Druckkraft $-O$ in irgend einem Theile des Obergurtes tragen also Lasten links und rechts vom Schnitt in übereinstimmender Weise bei. Gleiches findet man leicht bezüglich der Zugkraft U im Untergurt. Die Zugkräfte im Obergurt und die Druckkräfte im Untergurt werden daher am grössten, wenn alle Lastpunkte möglichst stark belastet sind.

Für die Strebe D liegt der Drehpunkt L im Schnittpunkte der Richtungen der vom Schnitte mitgetroffenen Gurtstücke. Die Momentengleichung lautet:

$$0 = Dt - Aw + P(w + u), \quad \text{mithin}$$

$$Dt = Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1 u_1}{l}w - Pw - Pu$$

$$= -Pu\left(1 + \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}.$$

Hiernach liefern die Lasten P und P_1 zu D Beiträge von entgegengesetztem Vorzeichen. Eine Last rechts vom Schnitt erzeugt in der Strebe Zugkraft und umgekehrt. Belastungen links und rechts vom Schnitte vermindern sich also gegenseitig in ihrer Wirkung. Soll nun die Zugkraft in den Streben so gross wie möglich werden, so muss man die Lasten von positivem Einflusse, d. h. die rechtsseitigen, möglichst gross machen, und umgekehrt. Rechts vom Schnitte wird man daher die Lastpunkte durchweg mit ständiger und beweglicher, $G + P$, links vom Schnitte nur mit ständiger Last G versehen. Die Druckkraft in den Streben wird am grössten bei entgegengesetzter Belastung, d. h. wenn links vom Schnitte volle Lasten $G + P$, rechts nur ständige Lasten G wirken. Solche Anordnung der Lasten nennen wir einseitige Belastungen. Dies gilt für eine von links nach rechts fallende Strebe; für eine nach rechts ansteigende ist alles entgegengesetzt, weil das Moment einer solchen Strebe entgegengesetzten Drehsinn zeigt. Liegt der Schnitt näher an dem rechtsseitigen Auflager, so kann der Drehpunkt L rechts von der Spannweite liegen. Dies ändert aber, wie

man leicht findet, nichts an den vorstehenden Ergebnissen; diese bleiben gültig, so lange der Drehpunkt ausserhalb der Spannweite AB liegt.

Anders verhält sich die Sache, wenn der Drehpunkt L für eine Strebe im Innern der Spannweite liegt (Fig. 98). Dann ist

$$0 = -Dt + Aw + P(u - w),$$

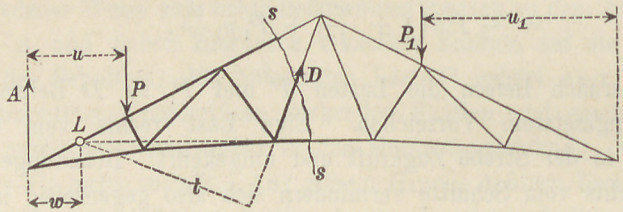
oder mit Benutzung von Gl. 1:

$$Dt = Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1 u_1}{l}w + Pu - Pw$$

$$= Pu\left(1 - \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}.$$

Weil bei der jetzt angenommenen Lage von L die Länge w stets $\leqq l$, so werden in der letzten Gleichung beide Glieder der rechten Seite positiv, so dass nun, wie bei den Gurtstäben, Lasten

Fig. 98.



links und rechts vom Schnitte Wirkungen von übereinstimmendem Vorzeichen hervorbringen. Ob eine bestimmte Last in einer bestimmten Strebe gerade Zug oder Druck erzeugt, ist für deren Abmessung nicht entscheidend. Es kommt nur darauf an, zu wissen, ob ein Stab auf volle oder auf einseitige Belastung berechnet werden muss. Im letzteren Falle sind dann in der Regel zwei Belastungsfälle zu untersuchen: in dem einen befindet sich bewegliche Belastung nur auf der linken Seite, im anderen nur auf der rechten Seite. Für Ständer, die nur besondere Fälle von Streben sind, gelten dieselben Gesetze.

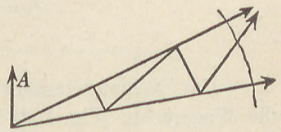
Bei den meisten Fachwerkformen liegt der für die Wandglieder (Streben und Ständer) massgebende Drehpunkt ausserhalb der Spannweite; der andere Fall kommt seltener vor.

Daher hat man den Satz:

Die Spannkräfte der Wandglieder eines einfachen Fachwerkträgers auf zwei Stützen sind, wenn der massgebende Drehpunkt **ausserhalb** der Spannweite liegt, auf einseitige Belastung (das eine Mal rechts, das andere Mal links vom Schnitte) zu berechnen; wenn aber der Drehpunkt zwischen die Auflager-Lothrechten fällt, so muss die Berechnung (wie bei den Gurten) für volle Belastung erfolgen.

Fällt der Drehpunkt in die linksseitige Auflager-Lothrechte, so ist dies ein Grenzfall, der nach Belieben zu der einen oder anderen Gruppe von Fällen gerechnet werden kann. Man würde hiernach die betreffende Strebe auf einseitige oder auch auf volle Belastung berechnen dürfen. Beide Berechnungen führen nämlich zu dem gleichen Ergebnisse. Irgend eine Last P_1 rechts vom Schnitt wirkt auf den linksseitigen Abschnitt nur mittelbar durch seinen Beitrag zu dem Auflagerdruck A ein (s. S. 82). Da aber der Auflagerdruck A in Bezug auf den in seiner Richtungslinie liegenden Drehpunkt das Moment Null hat, so haben rechtsseitige Lasten auf die betreffende Strebe D überhaupt keinen Einfluss (Fig. 99); eine einseitige Belastung links vom Schnitte hat deshalb dieselbe Wirkung, wie eine volle Belastung; und da die Rechnung mit voller Belastung bequemer ist, so kann man diese, die für die Gurtkräfte massgebend war, auch für Ständer und Streben verwenden. Die für volle Belastung durchgeführte Berechnung des in Fig. 87, S. 74 und Fig. 95, S. 80 dargestellten Dachträgers war daher richtig. Für die Streben des Mittelfaches aber musste volle Belastung vorgenommen werden, weil für diese der Drehpunkt zwischen den Auflager-Lothrechten liegt. Über schiefe Belastungen durch Winddruck s. Keck, Graphische Statik, S. 70.

Fig. 99.



d) Parabolischer Fachwerkträger.

Beispiel: Parabolischer Fachwerkträger von $l = 24\,\text{m}$ Spannweite und $h_m = 3\,\text{m}$ Höhe in der Mitte. Der Obergurt sei gerade, der Untergurt einer Parabel eingeschrieben. Die Spannweite sei durch Ständer in sechs

gleiche Fache von der Länge $\lambda = 4\,^{m}$ getheilt (Fig. 100). Für die Ständerhöhen h gilt dann die Parabelgleichung (s. Theil 1, S. 183)

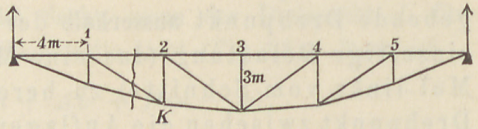
$$h = \frac{4\,h_m}{l^2}\,x\,(l - x),$$

wenn x der Abstand eines Ständers von einem Auflager.

Für $x = 4 \quad 8 \quad 12$

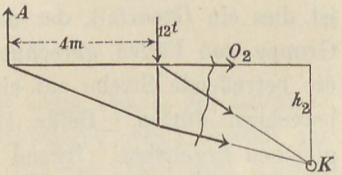
wird $h = 1^2/_3 \quad 2^2/_3 \quad 3$.

Fig. 100.



Für jeden der fünf Lastpunkte des Obergurts sei die ständige Last $G = 2000\,^{kg} = 2\,^{t}$, die bewegliche $P = 10\,000\,^{kg} = 10\,^{t}$. Es sollen beispielsweise die Spannkräfte des zweiten Faches berechnet werden (Fig. 101). Für die Gurtkräfte ist volle Belastung aller Lastpunkte mit $2 + 10 = 12\,^{t}$ anzunehmen; dann wird der Auflagerdruck $A = {}^5/_2 \cdot 12 = 30\,^{t}$. Für den Obergurt O_2 ist K der Drehpunkt, $h_2 = 2^2/_3\,^{m}$ der Hebelarm; mithin wird aus

Fig. 101.



$$0 = O_2 \cdot {}^8/_3 + A \cdot 8 - 12 \cdot 4,$$

$$O_2 = -72\,^{t}.$$

Das Neigungsverhältnis des zweiten Stückes U_2 des Untergurts gegen die Wagerechte (Fig. 102) ist

$$(h_2 - h_1) : 4 = {}^1/_4 = \operatorname{tg}\nu,$$

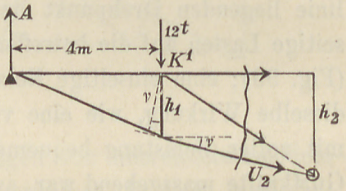
dann ist $\cos\nu = 0{,}9701$, $\sec\nu = 1{,}031$.

Der Drehpunkt für U_2 ist K', der Hebelarm daher $h_1 \cos\nu$; mithin wird aus

$$0 = -U_2 \cdot {}^5/_3 \cos\nu + A \cdot 4:$$

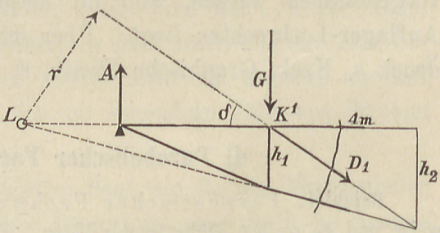
$$U_2 = 72 : \cos\nu = 72 \cdot \sec\nu = 74{,}23\,^{t}.$$

Fig. 102.



Für die Strebe D_1 liegt der Drehpunkt L links von der Spannweite (Fig. 103), u. zw., weil die Neigung von U_2, d. h. $\operatorname{tg}\nu = {}^1/_4$, um $4\,h_1 = 6^2/_3 = L\,K'$ links von K', oder um $2^2/_3\,^{m}$ links von A. Ist δ der Neigungswinkel von D_1, so gilt dafür $\operatorname{tg}\delta = h_2 : 4 = {}^2/_3$ und $\sin\delta = 0{,}5546$. Der Hebelarm von D_2 wird $r = L\,K' \sin\delta = 3{,}697\,^{m}$. Die Strebe ist auf zwei verschiedene Belastungsarten zu berechnen: Bei einseitiger Belastung rechts vom Schnitte tragen sämmtliche Lastpunkte die ständige Last $G = 2\,^{t}$, während

Fig. 103.



nur die Punkte 2 bis 5 (Fig. 100) mit beweglicher Last $P = 10$ t bedeckt sind. Erstere liefern zu A den Beitrag $^5/_2 \cdot 2 = 5$ t, letztere den Beitrag

$$(^1/_6 + {}^2/_6 + {}^3/_6 + {}^4/_6)\, 10 = 16^2/_3 \text{ t}, \quad \text{so dass}$$

$$A = 5 + 16^2/_3 = 21^2/_3 \text{ t}$$

wird. Mithin wird aus

$$0 = D_1 \cdot 3{,}697 - A \cdot 2^2/_3 + G \cdot 6^2/_3$$

$$D_1 = 12{,}02 \text{ t}.$$

Bei einseitiger Belastung links vom Schnitt wird

$$A' = 5 + 10 \cdot {}^5/_6 = 13^1/_3 \text{ t}, \quad \text{mithin aus}$$

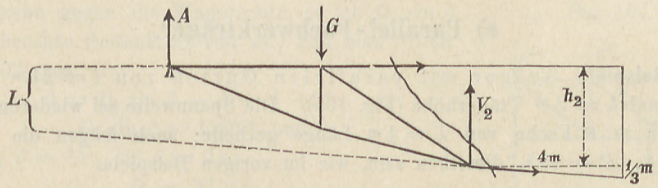
$$0 = D_1' \cdot 3{,}697 - A' \cdot 2^2/_3 + (G + P) \cdot 6^2/_3$$

$$D_1' = -12{,}02 \text{ t}.$$

Die Strebe D_1 erfährt also, wenn die Lastengruppe P sich über den Träger bewegt, Spannkräfte, die zwischen einer Zugkraft von 12,05 t und einer Druckkraft von derselben Grösse schwanken.

Die gleichen Belastungsarten gelten auch für den Ständer V_2 (Fig. 104).

Fig. 104.



Der Drehpunkt liegt um $x = h_2 \frac{4}{1/3} = 32$ m links von V_2, um 24 m links von A. Daher gilt für rechtsseitige Last

$$0 = -V_2\, 32 - A \cdot 24 + G \cdot 28 \quad \text{mit} \quad A = 21^2/_3 \text{ t}, \text{ wie vorhin},$$

$$\text{also} \quad V_2 = -14{,}5 \text{ t}.$$

Für linksseitige:

$$0 = -V_2' \cdot 32 - A' \cdot 24 + (G + P) \cdot 28 \quad \text{mit} \quad A' = 13^1/_3 \text{ t}, \text{ wie vorhin},$$

$$\text{also} \quad V_2' = 0{,}5 \text{ t}.$$

Die Spannkraft des Ständers schwankt demnach zwischen 0,5 t Zug und 14,5 t Druck.

Dieses Beispiel des parabolischen Trägers ist besonders geeignet, zu zeigen, welchen Fehler man begehen würde, wollte man die Wandglieder auf volle Belastung berechnen. Es wäre dann $A = 30$ t, und es würde nach Fig. 103, wenn man darin die Einzellast G durch $G + P = 12$ ersetzt, aus

$$0 = D_1 \cdot 3{,}697 - 30 \cdot 2^2/_3 + 12 \cdot 6^2/_3:$$

$$D_1 = 0; \text{ und nach Fig. 104 aus}$$

$$0 = -V_2 \cdot 32 - 30 \cdot 24 + 12 \cdot 28:$$

$$V_2 = -12 \text{ t}.$$

Für volle Belastung ist also die Strebe D_1 spannungslos, und dasselbe erhält man für sämmtliche Streben des parabolischen Trägers. In Theil 1, S. 185, wurde schon gezeigt, dass der parabolische Träger ohne Streben für volle Belastnng im Gleichgewicht ist, dass diese Stäbe nur durch eine ungleichmässige Belastung bedingt werden. Demgemäss werden nun die vorhandenen Streben bei voller Belastung spannungslos; auch haben dann die Ständer nur die Knotenlasten von oben nach den Knotenpunkten des geknickten Untergurtes zu übertragen; daraus erklärt sich der obige Werth $V_2 = -12$ t für volle Belastung, den man in gleicher Weise für sämmtliche Ständer findet. Nach Theil 1, S. 184, ist $H = \frac{p\,l^2}{8\,f} = \frac{p\,l \cdot l}{8\,f}$ die wagerechte Spannkraft einer solchen Stangenverbindung; dies giebt hier, wo auf 4 m Länge 12 t, auf $l = 24$ m also 72 t kommen:

$$H = \frac{72 \cdot 24}{8 \cdot 3} = 72 \text{ t}.$$

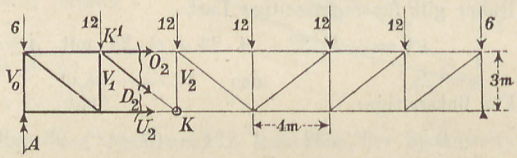
Dieser Werth gilt für die Druckkräfte in sämmtlichen Stäben des Obergurtes und ist zugleich die wagerechte Seitenkraft der Zugkräfte im Untergurte.

e) Parallel-Fachwerkträger.

Beispiel: Träger mit parallelen Gurten von $l = 24$ m Spannweite und $h = 3$ m Trägerhöhe (Fig. 105). Die Spannweite sei wiederum durch Ständer in 6 Fache von $\lambda = 4$ m Länge getheilt; auch mögen die Lasten, $G = 2$ t, $P = 10$ t, dieselben sein, wie im vorigen Beispiele.

Für die Berechnung der Gurten ist volle Belastung sämmtlicher Lastpunkte anzunehmen, und zwar sind die Endpunkte des Obergurtes je mit der halben Last eines Faches, d. h. mit 1 t bezw. 5 t zu belasten. Dann ist $A = 3 \cdot 12 = 36$ t.

Fig. 105.



Für O_2 ist K der Drehpunkt, und man findet aus der Momentengleichung

$$0 = O_2 \cdot 3 + (A - 6) \cdot 8 - 12 \cdot 4:$$

$$O_2 = -64 \text{ t}.$$

Für U_2 ist K' der Drehpunkt, und man findet aus:

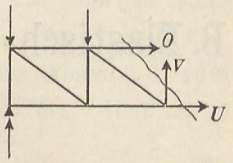
$$0 = -U_2 \cdot 3 + (A - 6)\,4$$

$$U_2 = 40 \text{ t}.$$

Übrigens braucht man bei einem derartigen Parallelfachwerke mit Streben, die nach der Mitte hin abfallen, nur die Spannkräfte des Obergurtes zu berechnen und kann darnach diejenigen des Untergurtes ohne Weiteres

angeben. Führt mun nämlich durch den Träger einen Schnitt in der Richtung der Streben (Fig. 106), so muss nach der Gleichung der wagerechten Kräfte $O + U = 0$, mithin $U = -O$ sein, oder in einem Parallel-Fachwerke mit Ständern haben zwei Stäbe des Ober- und Untergurtes, welche zwischen demselben Strebepaare liegen, gleiche aber entgegengesetzte Spannkraft; mithin ist $O_1 = -U_2$; $O_2 = -U_3$ u. s. f.

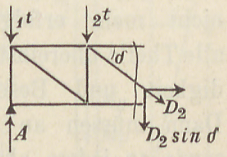
Fig. 106.



Da der Schnittpunkt der Gurten in unendlicher Ferne liegt, so verwendet man für die Berechnung der Wandglieder eines Parallelträgers an Stelle der Momentengleichung zweckmässig die Gleichung der lothrechten Kräfte. In dieser kommen die Gurtkräfte, weil sie wagerecht sind, nicht vor; mithin erreicht man dasselbe, was sonst mit der Momentengleichung erzielt wurde, nämlich dass man für die gesuchte Spannkraft nur mit einer einzigen Gleichung zu thun hat.

Ordnet man zur Berechnung von D_2 zunächst eine Belastung rechts vom Schnitt an, so wird der linke Auflagerdruck leicht zu $22^2/_3$ t gefunden (nämlich um die ständige Last (1 t) des Endknotenpunktes mehr als auf S. 87 zur Berechnung von D_1). Ist δ der Neigungswinkel der Strebe gegen die Wagerechte, so ist $D_2 \sin \delta$ die lothrechte Seitenkraft von D_2, und man erhält (Fig. 107) aus

Fig. 107.



$$0 = D_2 \sin \delta - A + 1 + 2:$$
$$D_2 \sin \delta = 19^2/_3 \text{ t} \text{ und,}$$

weil $\text{tg } \delta = {}^3/_4$, $\sin \delta = 0{,}6$,

$$D_2 = 32{,}78 \text{ t}.$$

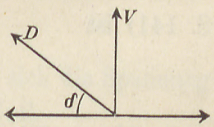
Für einseitige Belastung links vom Schnitt ist $A' = 19^1/_3$ t; und aus $0 = D_2' \sin \delta - A + 6 + 12$ findet man leicht

$$D_2' \sin \delta = 1^1/_3 \text{ t}; \quad D_2' = 2{,}22 \text{ t}.$$

Die Spannkraft der Strebe D_2 schwankt also zwischen den Zugkräften 2,22 und 32,78 t; Druckkraft erfährt sie nicht.

Die Spannkräfte der Ständer lassen sich beim Parallel-Fachwerk auf die der Streben zurückführen. Führt man nämlich um einen Knoten des unbelasteten Gurtes (hier also des unteren) einen kreisförmigen Schnitt (Fig. 108) und wendet auf den herausgeschnittenen Theil die Gleichung der lothrechten Kräfte an, so kommen in dieser nur V und D vor, und es muss

Fig. 108.



$$V + D \sin \delta = 0 \quad \text{oder} \quad V = -D \sin \delta \text{ sein.}$$

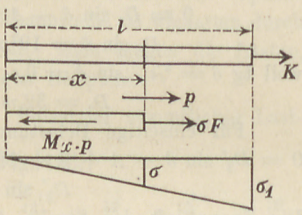
Am Knotenpunkte K des Untergurtes (Fig. 105) treffen D_2 und V_2 zusammen, mithin wird $V_2 = -D_2 \sin \delta = -19^2/_3$ t, $V_2' = -1^1/_3$ t. Der Ständer V_2 erfährt also eine Druckkraft, die zwischen $1^1/_3$ und $19^2/_3$ t schwankt. Eine eingehendere Behandlung erfahren die Fachwerke in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik.

B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungs-Zuständen.

I. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper.

Einem geraden Stabe werde durch eine im Schwerpunkte der vorderen Stirnfläche angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p ertheilt (Fig. 109). Hierdurch entstehen Spannungen und Formänderungen (elastische Verlängerungen). Es wird die Annahme gemacht, die Formänderungen seien bereits derartig eingetreten, dass gegenseitige Bewegungen der einzelnen Punkte des Stabes nicht mehr erfolgen, dass vielmehr alle Theile übereinstimmende Geschwindigkeit und Beschleunigung haben. Dann müssen an dem ganzen Stabe, sowie an jedem abgeschnittenen Theile desselben nach S. 3 die Ergänzungskräfte $[-mp]$ den wirklichen Kräften das Gleichgewicht halten, und es muss der Stab sich bei der Bewegung wie ein starrer Körper verhalten. Nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes (Theil 1, S. 141) ist

Fig. 109.



$$p = \frac{K}{M},$$

wenn $M = \gamma F l : g$ die Masse des ganzen Stabes bedeutet (s. Theil 1, S. 126).

Macht man auch hier die Voraussetzung, dass die an einem Querschnitte auftretende Spannkraft sich gleichmässig über dessen Fläche F vertheile, so ist die Spannung an der Angriffsstelle der Kraft K

1) $$\sigma_1 = \frac{K}{F} = \frac{M}{F} p = \frac{\gamma}{g} l p = \gamma l \frac{p}{g},$$

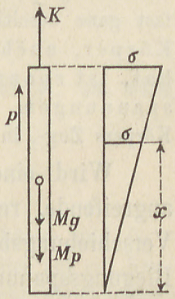
wenn l die Länge des Stabes, γ das Gewicht der Körpereinheit desselben ist. Will man σ_1 in Atmosphären ($^{kg}/_{qcm}$) erhalten, so drücke man l in ^{cm} aus, und es ist dann γ das Gewicht eines Kubikcentimeters in ^{kg}.

Ist σ die Spannung eines Querschnittes im Abstand x vom freien Ende, M_x die Masse des Abschnittes von der Länge x, so muss $\sigma F = M_x p = {}^{\gamma}/_{g} F x p$ sein, mithin

$$2) \qquad \sigma = \gamma \frac{p}{g} \cdot x.$$

Diese mit x verhältnisgleich sich ändernde Spannung ist in Fig. 109 dargestellt. Hierbei ist die Einwirkung der Schwere nicht berücksichtigt, vielmehr angenommen, dass die Verschiebung etwa auf einer wagerechten, glatten Unterlage erfolge.

Fig. 110.



Es möge nun die in lothrechter Richtung befindliche Stange der Schwere unterliegen und durch eine oben angreifende Zugkraft K eine Beschleunigung p lothrecht aufwärts erfahren (Fig. 110). Dann ist die gesammte wirkliche Kraft in der Richtung aufwärts $K - Mg = K - \gamma Fl$, die gesammte Ergänzungskraft mit dem Sinne abwärts $Mp = {}^{\gamma}/_{g} Flp$, mithin

$$K = M(g + p) = \gamma Fl\left(1 + \frac{p}{g}\right)$$

und die Spannung am oberen Ende

$$3) \qquad \sigma_1 = \gamma l\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Nach dem unteren Ende des Stabes vermindert sich die Spannung σ wiederum nach geradlinigem Gesetze bis auf Null.

Ist die Beschleunigung p des Stabes abwärts, K aber wie vorher aufwärts gerichtet, mithin $p \leqq g$, so kehrt in den vorstehenden Formeln p sein Vorzeichen um, es wird

$$K = \gamma Fl\left(1 - \frac{p}{g}\right),$$

$$\sigma_1 = \gamma l\left(1 - \frac{p}{g}\right)$$

und im Abstande x vom unteren Ende

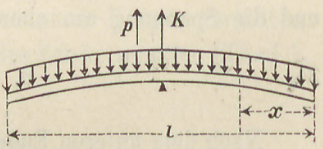
4) $$\sigma = \gamma x\left(1 - \frac{p}{g}\right).$$

Für $p = g$ mit $K = 0$, d. h. für einen frei fallenden Stab, wird $\sigma = 0$, also ist ein frei fallender Stab spannungslos.

Dies gilt freilich nur unter der Voraussetzung, dass sich in der Stange keine von der Herstellung durch Giessen, Schmieden, Walzen, Ziehen (Drahtziehen), Drücken u. dergl. herrührende Spannungen vorfinden, die man auch wohl falsche Spannungen nennt, und die auch vorhanden sind, wenn der Stab äusseren Kräften völlig entzogen ist. In einem mit derartigen Spannungen behafteten Stabe tritt beim freien Falle derselbe Spannungszustand ein, als ob er von äusseren Kräften frei wäre; an jedem Querschnitt ist die gesammte Spannkraft Null, doch können an der Schnittfläche dann gleichwohl innere Zugkräfte und in ihrer Summe ebenso grosse Druckkräfte vorkommen. Solche Herstellungsspannungen lassen sich durch Ausglühen und langsames Abkühlen fast ganz beseitigen. Jeder frei (ohne Luftwiderstand) fallende Körper, auch wenn er nicht die Form eines geraden Stabes hat, ist spannungslos, abgesehen von etwaigen Herstellungsspannungen. Die Herstellungsspannungen sind in der Regel im Innern des Körpers Zug-, in der Nähe der Oberfläche aber Druckspannungen.

Wird einem prismatischen Stabe durch eine in seiner Mitte angreifende, rechtwinklig zur Stabrichtung wirkende Kraft K eine Verschiebungsbeschleunigung p ertheilt (Fig. 111), so entstehen Biegungsspannungen. Unter der Voraussetzung, dass die diesen Spannungen entsprechenden Durchbiegungen bereits eingetreten seien, dass also Formänderungen nicht mehr vorkommen, haben sämmtliche Massentheilchen des Stabes die gleiche Beschleunigung p. Die Ergänzungskräfte $[-mp]$, welche mit K im Gleichgewichte sein müssen, bilden eine gleichmässig über die Länge vertheilte Belastung. Ist F der Querschnitt des Stabes, γ wiederum das Gewicht der Körpereinheit, so kommt auf die Längeneinheit das Gewicht γF, die Masse $\gamma/g F$, die Ergänzungskraft $\gamma F p : g$ (dem Sinne der Beschleunigung p entgegengesetzt). An einer Schnittstelle im Abstande x vom freien Ende entsteht dann ein Biegungsmoment

Fig. 111.



$$\mathfrak{M} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{x^2}{2}.$$

Das grösste Moment findet sich an der Angriffsstelle der Kraft K mit $x = {}^1/_2\, l$ zu

5) $$\mathfrak{M}_{max} = \gamma F \frac{p}{g} \frac{l^2}{8}.$$

Ist die Beschleunigung lothrecht aufwärts gerichtet und wirkt auch die Schwere auf den Stab, so ist, wie auf S. 91 statt $p : g$ nunmehr $1 + \frac{p}{g}$ einzuführen. Ist $\mathfrak{W} = J : e$ das Widerstandsmoment des Stab-Querschnitts, so wird die stärkste Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{\mathfrak{W}} = \frac{\gamma F l^2}{8\,\mathfrak{W}} \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Mit $\gamma F l = P$ (Gewicht des Stabes) wird

$$\sigma = \frac{P l}{8\,\mathfrak{W}} \left(1 + \frac{p}{g}\right);$$

ist noch der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so wird $\mathfrak{W} = {}^1/_4\, r^3 \pi$ und

6) $$\sigma = \frac{P l}{2\, r^3 \pi} = \frac{\gamma l^2}{2\, r} \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Beispiel: Ein nahezu cylindrischer Baum von 12 m Länge und 0,1 m Halbmesser soll mittels eines in seiner Mitte befestigten Seiles auf ein Baugerüst gezogen werden. Das Hinaufziehen erfolge aber nicht gleichmässig, sondern mit einer Beschleunigung $p = {}^1/_2\, g$. Ein Kubikmeter des Holzes wiege 600 kg, dann ergiebt sich, wenn man diese Zahlen in Gl. 6 einführt, die Spannung natürlich in kg/qm, nämlich

$$\sigma = \frac{600 \cdot 12^2}{2 \cdot 0{,}1} \cdot 1{,}5 = 648\,000,$$

oder, durch 10 000 getheilt,

$$\sigma = 64{,}8 \text{ at}.$$

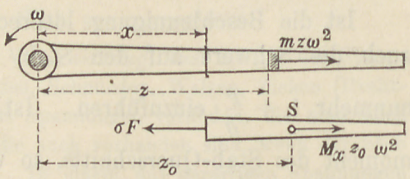
Will man σ unmittelbar in at erhalten, so muss man γ als Gewicht eines Kubikcentimeters $= 600 : 100^3$, $l = 1200$ cm, $r = 10$ cm einführen. Die Formel gilt auch, wenn bei etwaigem Hinablassen eine Verzögerung p, vielleicht durch Bremsung der Windevorrichtung, eintritt. Für gleichmässige Bewegung ($p = 0$) wird die Spannung nur ${}^2/_3 \cdot 64{,}8 = 43{,}2$ at.

2. Gleichmässige Drehung um eine feste Achse.

Bei gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 112) erfährt ein Massentheilchen m im Abstande z von der

Drehachse die Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ (Theil 1, S. 88); dem entspricht als Ergänzungskraft die Centrifugalkraft $mz\omega^2$. Führt man im Abstand x von der Drehachse einen Schnitt, bezeichnet die entsprechende Querschnittsfläche mit F, die daran auftretende Spannung mit σ, so muss die innere Spannkraft σF den Centrifugalkräften des Stabtheiles zwischen der Schnittstelle und dem freien Ende das Gleichgewicht halten, oder es muss sein

Fig. 112.



$$1) \qquad \sigma F = \omega^2 \Sigma m z = \omega^2 M_x z_0,$$

wenn M_x die Masse des abgeschnittenen Stabtheiles, z_0 der Abstand seines Schwerpunkts von der Drehachse bedeuten. Sind Form und Massenvertheilung des Stabes bekannt, so kann man für jede Schnittstelle σ berechnen.

Ein **prismatischer** Stab von der Länge l und dem Querschnitt F, ergiebt hiernach

$$M_x = \gamma F(l - x) : g, \quad z_0 = {}^1/_2 (l + x) \text{ und}$$

$$\sigma = \frac{\omega^2 \gamma}{g} (l - x) \frac{(l + x)}{2} = \frac{\omega^2 \gamma}{g} \frac{l^2 - x^2}{2}.$$

Führt man dann die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ des Stabes ein, so wird

$$2) \qquad \sigma = \gamma \frac{c^2}{2g} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

worin $\frac{c^2}{2g}$ die der Umfangsgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe bedeutet. Diese Spannung wird am grössten für $x = 0$, d. h. dicht an der Achse, nämlich

$$3) \qquad \sigma_{max} = \gamma \frac{c^2}{2g}.$$

Dieselbe Spannung erfährt an der Aufhängestelle ein lothrecht herabhängender prismatischer Stab oder Draht von der Dichte γ, wenn seine Länge $= \frac{c^2}{2g}$ ist.

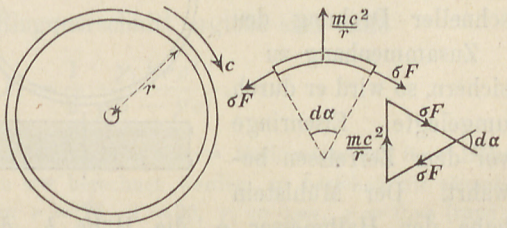
Beispiel: Bei welcher sekundlichen Umfsngsgeschwindigkeit erhält ein um seinen Endpunkt sich drehender prismatischer Schmiedeisenstab eine Spannung von 700 at? 1 cbm Schmiedeeisen wiegt 7800 kg $= \gamma$. Da hier c in m/sek. verlangt wird, so müssen auch σ, γ und g auf Meter bezogen werden. Dann ist $\sigma = 7\,000\,000$ kg/qm, $\frac{c^2}{2g} = \frac{7\,000\,000}{7800} =$ rund 900 m und $c = 133$ m/sek.

Will man mit $\sigma = 700$ kg/qcm rechnen, so muss man $\gamma = 0{,}0078$, dem Gewichte eines Kubikcentimeters und $g = 981$ cm/sck.² setzen, dann wird $\frac{c^2}{2g} = \frac{700}{0{,}0078} = 90\,000$ cm, $c = 13\,300$ cm/sek..

Ein Bleistab von der Dichte $\gamma = 11\,400$ kg/cbm und einer Zugfestigkeit $= 130$ at erreicht diese Grenze der Festigkeit bei $\frac{c^2}{2g} = \frac{1\,300\,000}{11\,400} = 114$ m und $c = 47$ m/sek..

Ein **Ring** vom Halbmesser r, der mit der Geschwindigkeit c gleichmässig umläuft (Fig. 113), erfährt ebenfalls Spannungen. Schneidet man aus dem Ringe ein Theilchen vom Mittelpunktswinkel $d\alpha$ heraus und nimmt an, dass sich die Spannkraft gleichmässig über den Querschnitt F des Ringes vertheile (was bei geringer Wandstärke zulässig ist), so entstehen an den Schnittstellen die Spannkräfte σF, welche mit der Centrifugalkraft $\frac{mc^2}{r}$ im Gleichgewicht sein müssen. Dann folgt aus dem Krafteck

Fig. 113.



$$2\sigma F \sin\frac{d\alpha}{2} = \sigma F d\alpha = \frac{mc^2}{r} \quad \text{und, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} r d\alpha F,$$

4) $$\sigma = \gamma\frac{c^2}{g} = 2\gamma\frac{c^2}{2g},$$

d. i. das Doppelte von σ_{max} in Gl. 3 für den geraden Stab.

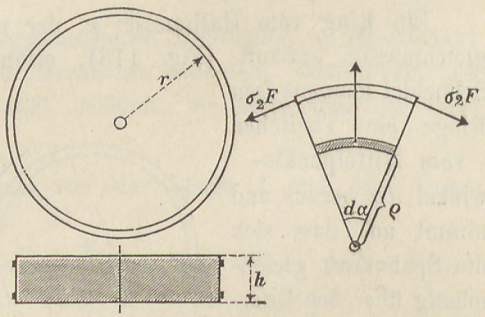
Beispiel: Soll ein dünner Schmiedeeisenring auf die Spannung $\sigma = 700$ at gebracht werden, so ist dazu eine Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g} = \frac{7\,000\,000}{2 \cdot 7800}$ $= 450$ m, eine Umfangsgeschwindigkeit

$$c = 94 \text{ m/sek.}$$

erforderlich. Diese darf von einem schmiedeeisernen Schwungrade nicht überschritten werden. Ein Bleiring gelangt schon bei $c = 47\sqrt{0{,}5} = 47 \cdot 0{,}707$ $= 33$ m/sek. (vgl. das vorige Beispiel) an die Grenze der Festigkeit.

Spannungen der Ringe eines Mühlsteins. Einen Mühlstein pflegt man, um die wünschenswerthe Gleichmässigkeit seines Gefüges zu erzielen, wie sie bei einem natürlichen Steine solcher Grösse nicht leicht vorkommt, aus einzelnen Stücken zusammenzukitten. Da die Zugfestigkeit des zusammengesetzten Steines nicht genügt, um bei schneller Drehung den Zusammenhang zu sichern, so wird er durch umgelegte Eisenringe vor dem Zerreissen bewahrt. Der Mühlstein habe den Halbmesser r, die Höhe h, die Dichte γ_1; es sei F der Gesammtquerschnitt der Ringe, γ die Dichte derselben. Bei der Berechnung der Ringspannungen setzen wir voraus, dass die Festigkeit des Steines unerheblich sei, dass allein die Ringe den Zusammenhalt sichern. Die Spannung σ der Ringe rührt mit dem Betrage $\sigma_1 = \gamma \frac{c^2}{g}$ (Gl. 4) von der eigenen Masse her; es soll jetzt nur der Betrag σ_2, der durch die Masse des Steines bedingt ist, berechnet werden. Trennt man aus dem Stein einen Ausschnitt vom Mittelpunktswinkel da ab, so entspricht einem unendlich kleinen Ringtheilchen vom Halbmesser ϱ eine Centrifugalkraft $dm\varrho\omega^2$, mithin dem ganzen Ausschnitte eine solche von der Grösse $\omega^2 \varrho_0 \Sigma dm$, worin $\varrho_0 = {}^2/_3 r$, $\Sigma dm = \frac{\gamma_1}{g} \frac{r^2 da}{2} h = m$ (Masse des Ausschnittes).

Fig. 114.



Mithin muss die Centrifugalkraft

$$m\varrho_0\omega^2 = \frac{\gamma_1}{g}\frac{r^2 da}{2}h\frac{2}{3}r\omega^2$$

$$= \frac{\gamma_1}{g}\frac{h\,da}{3}rc^2$$

von den Spannkräften $\sigma_2 F$ im Gleichgewichte gehalten werden. Dies führt mittels eines ähnlichen Krafteeks wie in Fig. 113 zu der Gleichung

$$\sigma_2 F da = m\varrho_0\omega^2 = \frac{\gamma_1}{g}\frac{h\,da}{3}rc^2 \quad \text{mit}$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma_1}{g}\frac{hr}{3F}c^2,$$

so dass die Gesammtspannung der Ringe wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{c^2}{g}\left(\gamma + \gamma_1\frac{hr}{3F}\right).$$

Für den erforderlichen Ringquerschnitt ergiebt sich dann

$$F = \frac{1}{3}\frac{\gamma_1 hrc^2}{g\sigma - \gamma c^2}.$$

Beispiel: Soll für einen Mühlstein von 0,7 m Halbmesser und 0,3 m Höhe der Querschnitt der Ringe in qcm berechnet werden, so beziehen wir sämmtliche Zahlen auf cm, setzen $r = 70$, $h = 30$, $\gamma_1 = 0{,}002$, $\gamma = 0{,}008$ (rund), $g = 981$, die sekundliche Umfangsgeschwindigkeit $c = 9$ m $= 900$ cm, die zulässige Spannung $\sigma = 200$ at (so gering, weil ein Maschinentheil vorliegt, der nicht in fortwährender gleichmässiger Bewegung ist, sondern bald ruht, bald umläuft, so dass auch die Spannung und somit die elastische Dehnung häufigem Wechsel unterworfen ist). Dann wird

$$F = \frac{1}{3}\frac{0{,}002 \cdot 30 \cdot 70 \cdot 900^2}{981 \cdot 200 - 0{,}008 \cdot 900^2} = 6 \text{ qcm}$$

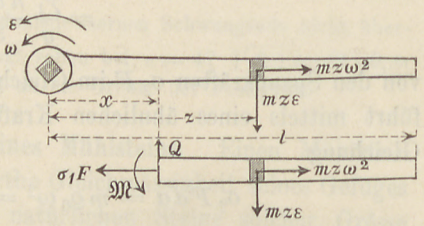
Dieser Gesammtquerschnitt ist auf mehrere, zweckmässig angeordnete Ringe zu vertheilen.

3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse.

Die Drehachse möge mittels eines Vierkants dem Stabe eine Winkelbeschleunigung ε (Fig. 115) etwa links herum ertheilen; dann hat ein Massentheilchen m im Abstande z von der Achse

ausser der von der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω herrührenden Centripetalbeschleunigung $z\omega^2$ noch eine Umfangsbeschleunigung $z\varepsilon$; als Ergänzungskraft tritt daher ausser der Centrifugalkraft noch eine Kraft $mz\varepsilon$ auf, welche rechtwinklig zur Stabrichtung, in Fig. 115 abwärts gerichtet ist. Die Spannkräfte einer Schnittstelle haben daher nicht nur einer Längskraft, sondern auch quer gerichteten Kräften das Gleichgewicht zu halten; letztere bilden ein Biegungsmoment und rufen an der Schnittfläche ein Spannungsmoment hervor. Die Centrifugalkräfte bedingen eine über die Schnittfläche gleichmässig ausgedehnte Spannung σ_1, welche nach Gl. 1, S. 94 zu berechnen ist. Ist σ_2 die stärkste Biegungsspannung an der Schnittstelle und ist $\mathfrak{W}$ das Widerstandsmoment der Querschnittsfigur, so ist $\sigma_2 \mathfrak{W}$ das Spannungsmoment. Zum Biegungsmomente liefert das eine Massentheilchen m den Beitrag $mz\varepsilon(z - x)$. Dies ist von $z = x$ bis $z = l$ zu integrieren. Daher wird

Fig. 115.



$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \mathfrak{M} = \varepsilon \int_{z=x}^{z=l} mz(z - x).$$

Darin ist $m = \frac{\gamma}{g} F_z dz$, wenn F_z der Querschnitt im Abstande z von der Drehachse.

Gehen wir nun wieder zu einem **prismatischen** Stabe mit $F_z = F$ und mit $m = \frac{\gamma}{g} F dz$ über, so wird

$$\sigma_2 \mathfrak{W} = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \int_x^l (z^2 - xz) dz = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right).$$

Führt man die Umfangsgeschwindigkeit $c = l\omega$ und die Umfangsbeschleunigung $p = l\varepsilon$ ein, so wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{p}{g} \frac{F}{\mathfrak{W} l} \left(\frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right) \right\}.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt (wie bei gleichförmiger Drehung) dicht an der Achse mit $x = 0$, und es wird

$$\sigma_{max} = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} \right\}.$$

Beispiel: Solchen Spannungen sind besonders Degenklingen ausgesetzt, wenn ihnen durch die Hand des Fechters eine heftige Drehbeschleunigung in der Richtung quer zur Schärfe ertheilt wird. Nimmt man den Querschnitt annähernd als Rechteck, die Breite $b = 1{,}5$ cm die Dicke $d = 0{,}2$ cm, die Länge $l = 80$ cm an, so wird $\mathfrak{W} = {}^1/_6 Fd$. Die Spannung σ_1 ist in solchen Fällen unbedeutend, da die einzelnen Bewegungen viel zu kurze Dauer haben, als dass bedeutende Umfangsgeschwindigkeiten c entstehen könnten. Es sind hier nur die Umfangsbeschleunigungen wichtig. Wir setzen daher

$$\sigma = \sigma_2 = \gamma \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{W}} = \gamma \frac{p}{g} \frac{2l^2}{d} = 0{,}003 \cdot \frac{p}{g} \frac{2 \cdot 80^2}{0{,}2} = 512 \frac{p}{g}.$$

Es erfordert dies ein Kraftmoment der Hand

$$\mathfrak{M} = \varepsilon J = \frac{1}{3} M l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} p M l = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \gamma F l^2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot 15{,}36 \text{ cmkg}.$$

Ist in einem besonderen Falle $p = 3g$, so wird die stärkste Spannung $\sigma = 1536$ at, das Kraftmoment der Hand $\mathfrak{M} = 15{,}4$ cmkg. Die Faust eines geübten Fechters kann wohl das 10fache leisten, daher die Klinge durch einen Lutthieb zerbrechen.

C. Formänderungs-Arbeit elastisch-fester Körper.

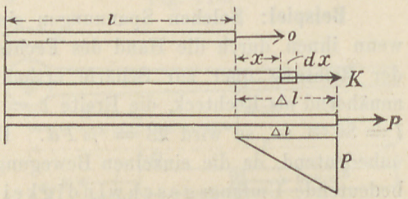
Während bisher das Vorhandensein eines bestimmten Spannungszustandes angenommen wurde, sollen nun die Vorgänge beim Entstehen der Spannungen und Formänderungen untersucht werden. Es kommt hierbei vor Allem auf die Bestimmung der bei der Formänderung von den äusseren und inneren Kräften verrichteten Arbeit, der sog. Formänderungs-Arbeit, an.

I. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt F sei an dem einen Ende (links in Fig. 116) befestigt; am anderen freien Ende wirke eine im Schwerpunkte der Endfläche angreifende Zugkraft K. Diese Kraft soll aber der Grösse nach nicht gleichbleibend sein, sondern sie soll langsam und stetig von Null bis zu

einem Werthe P anwachsen. Dann wird mit jeder kleinen Zunahme der Kraft eine kleine Zunahme der Verlängerung verbunden sein. Die Zunahme der Kraft möge langsam vor sich gehen, damit auch die Verlängerung langsam erfolge, daher kein Theil des Stabes ein nennenswerthes Arbeitsvermögen erfahre, so dass man in jedem Augenblicke den Stab als in Ruhe, im Gleichgewichte, betrachten kann. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der veränderlichen Kraft entspreche eine Verlängerung x, mithin ein Verlängerungs-Verhältnis oder eine Dehnung $\varepsilon_x = x : l$ (s. S. 5), während dem Endwerthe P der Kraft eine Verlängerung Δl, also eine Dehnung $\varepsilon = \Delta l : l$ zugehöre. Bei einer unendlich kleinen Zunahme der Verlängerung x um dx verrichtet K die Arbeit $d\mathfrak{A} = K dx$. Setzt man nun $K = F\sigma_x$, $P = F\sigma$, so wird auch

Fig. 116.



$$d\mathfrak{A} = F\sigma_x l \cdot d\varepsilon_x$$

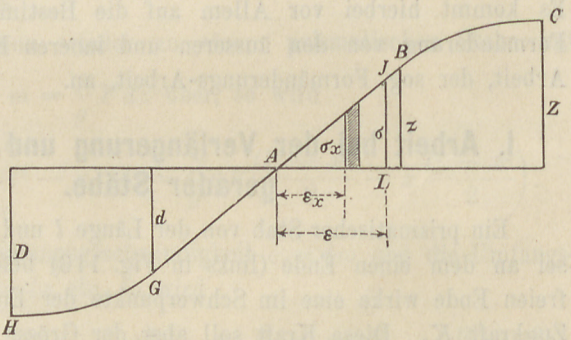
und die Gesammtarbeit bei der Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$:

1) $$\mathfrak{A} = Fl \int_0^{\varepsilon} \sigma_x d\varepsilon_x.$$

KÖNIGLICHE HÖHERE MASCHINENBAUSCHULE STETTIN

Die Beziehung zwischen σ_x und ε_x wird mittels der Dehnungslinie (s. S. 6) zum Ausdrucke gebracht. Hat diese für den vorliegenden Körper die Form $HGABC$ (Fig. 117), wobei die von A aus gemessenen Abscissen die Dehnungen ε_x, die entsprechenden Ordinaten die Spannungen σ_x bedeuten, so ist $\sigma_x d\varepsilon_x$ in der letzten Gleichung ein Flächenstreifen der Dehnungslinie,

Fig. 117.



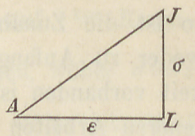
mithin das Integral die ganze Fläche von A bis zu dem Endwerthe $\varepsilon = AL$ der erzeugten Dehnung, d. h. die Fläche AJL, so dass die zur Verlängerung um $\Delta l = l\varepsilon$ erforderliche Arbeit wird:

2) $$\mathfrak{A} = F \cdot l \cdot AJL.$$

Ist die Dehnungslinie bekannt, so kann man die Fläche AJL stets ermitteln.

Für die weiteren Entwickelungen nehmen wir ein gleich bleibendes Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung an, setzen also voraus, dass die Spannung z an der Elasticitäts- oder Proportionalitätsgrenze nicht überschritten werde (vergl. S. 5/6). Dann ist AJL ein Dreieck von der Fläche $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ (Fig. 118), so dass

Fig. 118.



3) $$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} Fl\sigma\varepsilon = \tfrac{1}{2} P \cdot \Delta l$$

wird, wofür man wegen $\varepsilon = \sigma : E$ auch schreiben kann

4) $$\mathfrak{A} = \frac{Fl\sigma^2}{2E}.$$

Bezeichnet man den Rauminhalt Fl des Stabes mit V, so wird noch einfacher

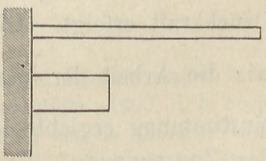
5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Dies ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen prismatischen Stab vom Rauminhalt V aus dem spannungslosen Zustande in den Zustand einer überall gleichen Spannung σ zu versetzen.

Am leichtesten zu merken ist die Form $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l$, Inhalt des Dreiecks in Fig. 116, unten; $\frac{1}{2} P$ ist die mittlere Kraft, Δl der Weg des Angriffspunktes.

Bei Gl. 5 ist zunächst auffällig, dass die Verlängerungsarbeit nicht von dem Querschnitt und der Länge des Stabes im Einzelnen, sondern nur von seinem Inhalte V abhängt, dass also ein langer Stab von kleinem Querschnitte dieselbe Arbeit zur Erzeugung der Spannung σ erfordert wie ein kurzer, dicker Stab (Fig. 119), wenn beide nur gleichen Rauminhalt haben. Es erklärt sich dies (abgesehen von der vorstehenden Ableitung) daraus, dass die Arbeit ein Produkt aus

Fig. 119.



dem Wege $\Delta l = l\sigma : E$ und dem Mittelwerthe der gleichmässig von 0 bis P anwachsenden Kraft, d. h. $\frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \sigma F$ ist. Bei dem dünnen, langen Stabe ist $\frac{1}{2} P$ verhältnismässig klein, aber Δl gross; bei dem dicken Stabe dagegen ist $\frac{1}{2} P$ gross und Δl entsprechend kleiner, so dass das Produkt in beiden Fällen den gleichen Werth erhält.

Wendet man auf diesen Vorgang der langsamen Verlängerung das allgemeine Gesetz der Arbeit (1. Theil, S. 143, Gl. 1) an:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i ,$$

so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens = Null zu setzen, da weder zu Anfang noch zu Ende eine nennenswerthe Geschwindigkeit vorhanden ist. Daher muss die Summe der äusseren und der inneren Arbeiten Null sein. Da nun die Arbeit der äusseren Kraft $\mathfrak{A}_k = \frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E}$ gefunden wurde, so muss die Arbeit der inneren Spannkräfte

$$6) \qquad \mathfrak{A}_i = -\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E} = -\frac{P}{2} \Delta l$$

sein.

Kehrt der Stab aus dem Zustande der Spannung σ langsam in den spannungslosen Zustand zurück, so hat die Richtung der Bewegung des Angriffspunktes der Zugkraft entgegengesetzten Sinn im Vergleiche mit dem Sinne der Kraft, mithin kehrt sich das Vorzeichen von $\mathfrak{A}_k$ um, es wird $\mathfrak{A}_k = -\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E}$; zugleich wird dann $\mathfrak{A}_i = +\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E}$.

Wird ein Stab durch eine allmählich anwachsende Druckkraft um Δl verkürzt, so verrichtet die Kraft eine positive Arbeit, weil bei der Verkürzung eine Bewegung des Stabendes im Sinne der Druckkraft erfolgt. Diese Arbeit berechnet man in gleicher Weise wie die Arbeit der Verlängerung zu $\mathfrak{A} = +\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E}$. Die Übereinstimmung ergiebt sich auch schon daraus, dass die Vertauschung der Zugspannung $+\sigma$ mit der Druckspannung $-\sigma$ in σ^2 keine Änderung herbeiführt.

Bei der Verlängerung wie bei der Verkürzung ist, wenn man vom spannungslosen Zustande ausgeht, die äussere Arbeit positiv, die innere negativ, für die Rückkehr in den spannungslosen Zustand gilt das Entgegengesetzte. Der absolute Werth dieser Arbeiten ist

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Es ist nützlich, die Verlängerungs- und Verkürzungs-Arbeit, welche prismatische Stäbe aus verschiedenem Stoff innerhalb der Elasticitätsgrenze ertragen können, vergleichend zusammenzustellen. Man bezieht diese Arbeiten zweckmässig auf 1 ccm Rauminhalt, hat also mit $V = 1$ nur $\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ zu berechnen, wobei $\sigma = z$ bezw. d (Spannungen von der Elasticitätsgrenze) zu setzen ist. Auf Grund der Zahlenwerthe der Tabelle S. 8 ergeben sich dann folgende Arbeitswerthe in $^{cmkg}/_{ccm}$:

Formänderungs-Arbeit bis zur Elasticitätsgrenze für 1 ccm.

Stoff	Verlängerungs-Arbeit	Verkürzungs-Arbeit
Gusseisen	$\frac{1}{2}\frac{600^2}{1\,000\,000} = 0{,}18$	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{1\,000\,000} = 1{,}28$
Stabeisen	$\frac{1}{2}\frac{1600^2}{2\,000\,000} = 0{,}64$	$\frac{1}{2}\frac{1600^3}{2\,000\,000} = 0{,}64$
Gussstahl	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$	$\frac{1}{2}\frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4{,}6$
Holz	$\frac{1}{2}\frac{250^2}{120\,000} = 0{,}26$	$\frac{1}{2}\frac{170^2}{120\,000} = 0{,}12$
Glas	$\frac{1}{2}\frac{340^2}{1\,000\,000} = 0{,}058$	$\frac{1}{2}\frac{1450^2}{1\,000\,000} = 1{,}05$
Kautschuk	$\frac{1}{2}\frac{20^2}{10} = 20$	

Hierbei ist zu beachten, dass Gussstahl 7 Mal so viel Arbeit ertragen kann wie Stabeisen, während er gegenüber ruhender Last nur 4500 : 1600, d. h. noch nicht 3 Mal so widerstandsfähig ist. Wo es sich daher um die Aufnahme von Arbeiten handelt, kann der kostspielige Gussstahl vortheilhafter sein als Stabeisen. Holz ergiebt grössere Verlängerungsarbeit als Gusseisen; es ist in

dieser Beziehung der kleine Werth von E, d. h. die grössere Nachgiebigkeit von Nutzen. In erheblichem Maſse günstig ist dieser Umstand beim Kautschuk. Dieser Stoff ist bei gleichem Rauminhalte dem Gussstahl etwa 4,3 Mal überlegen. Kautschuk würde daher für Feder-Anordnungen, bei denen es sich um die Aufnahme von Arbeit handelt, der vortheilhafteste Stoff sein, wenn er eine grössere Dauer hätte. In früherer Zeit hat man bei den Eisenbahn-Fuhrwerken die Kautschukfedern in grossem Umfange verwandt, hat aber gefunden, dass Kautschuk seine guten Eigenschaften zu bald verliert. Guter Kautschuk bleibt freilich im spannungslosen Zustande unter Umständen 30 Jahre lang gut elastisch, im gespannten Zustande aber wird er bald brüchig und hart.

a) Einwirkung plötzlicher Belastung. Hängt ein Körper vom Gewichte Q ruhend am unteren Ende eines lothrechten, oben befestigten Stabes vom Querschnitt F und der Länge l, so herrscht in dem Stabe, dessen Eigengewicht wir vernachlässigen, die Spannung

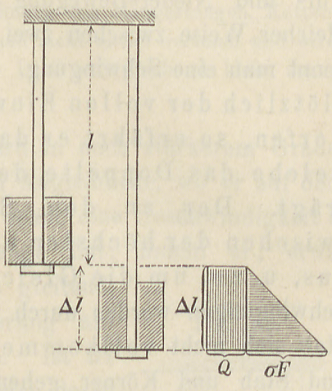
7) $$\sigma_0 = Q : F,$$

und seine elastische Verlängerung beträgt $\Delta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$.

Wird aber der zu Anfang in geeigneter Weise unterstützte Körper mit dem unteren Ende des spannungslosen Stabes verbunden und dann seiner Unterstützung plötzlich beraubt, so übt der Stab im nächsten Augenblicke noch keine Kraft auf den Körper aus, weil er noch die Länge l des spannungslosen Zustandes hat. Der Körper steht also anfänglich unter alleiniger Wirkung der Schwere und wird eine lothrechte Bewegung mit der Fallbeschleunigung beginnen (Fig. 120, linke Seite). Hierbei erfährt der Stab eine zunehmende Verlängerung, also auch eine wachsende Spannkraft, die dem Gewichte Q entgegenwirkt. Aber erst, wenn der Körper um die Grösse $\Delta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$ gesunken ist, hat die Spannkraft die Grösse Q erreicht, so dass in diesem Augenblicke die Beschleunigung des Körpers Null beträgt. Da bis hierher die Bewegung eine beschleunigte war, so wird der Körper eine gewisse Geschwindigkeit c erlangt haben, die erst bei weiterer Verlängerung des Stabes, bei weiterem Anwachsen seiner Spannkraft allmählich zu Null gemacht werden kann. Der Stab wird also eine grösste Verlängerung $\Delta l > \Delta l_0$, daher auch eine stärkste Spannung $\sigma > \sigma_0$ erfahren. Diese Werthe Δl und σ lassen sich mittels des Satzes der Arbeit berechnen.

Zu Anfang hatte der Körper die Geschwindigkeit Null, das gleiche findet statt in dem Augenblicke der stärksten Verlängerung der Stange (Fig. 120, rechte Seite); denn wenn im nächsten Zeittheilchen dt die Weglänge ds Null betragen soll, so muss $v = ds : dt =$ Null sein. In dem Verlaufe der Abwärts-Bewegung ist daher die gesammte Änderung des Arbeitsvermögens des Körpers Null, somit auch die gesammte Arbeit. Nun verrichtet das Gewicht Q die Arbeit $Q\Delta l$, dargestellt durch ein Rechteck. Die Arbeit der inneren Kräfte aber beträgt, wenn der Stab vollkommen elastisch bleibt, längs eines Weges Δl (nach Gl. 6, S. 102): $-\frac{P}{2}\Delta l$, dargestellt durch ein Dreieck, wenn P den (grössten) Endwerth der Spannkraft $= \sigma F$ bedeutet. Die absoluten Werthe beider Arbeiten, d. h. die Inhalte der beiden Figuren müssen einander gleich sein, damit die Arbeitssumme Null werde. Also wird

Fig. 120.



$$^1/_2\sigma F\Delta l = Q\Delta l, \quad \text{oder}$$

9) $$\sigma = 2Q : F = 2\sigma_0 \quad \text{und ebenso}$$

10) $$\Delta l = 2\Delta l_0.$$

In der tiefsten Lage beträgt die Spannkraft des Stabes $\sigma F = 2Q$; der Körper steht augenblicklich unter Einwirkung einer aufwärts gerichteten Mittelkraft $2Q - Q = Q$ und erfährt dadurch eine aufwärts gerichtete Beschleunigung g. Die Spannkraft wird so lange über die Schwere das Uebergewicht haben, bis wieder die Gleichgewichtslage erreicht ist. Der Körper wird aber erst wieder die Geschwindigkeit Null haben, wenn er um h gestiegen ist, wenn die positive Arbeit des sich verkürzenden Körpers gleich dem absoluten Werthe der negativen Arbeit der Schwere, wenn also

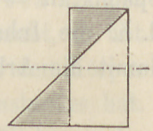
$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh$$

geworden ist. Setzt man hierin $V = Fl$, $\sigma = 2Q : F$ ein, so

entsteht $h = 2\frac{Ql}{EF} = 2\Delta l_0 = \Delta l$, d. h. der Körper kommt auf die ursprüngliche Höhe zurück, und nun kehren die Vorgänge der ersten Auf- und Nieder-Bewegung fortgesetzt wieder. Eine solche, in gleicher Weise zwischen zwei Orten hin und her gehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Also: Wird ein elastischer Stab plötzlich der vollen Einwirkung eines Gewichtes unterworfen, so erfährt er dadurch eine stärkste Spannung, welche das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt. Der an dem Stabe hängende Körper führt zwischen der höchsten und tiefsten Lage Schwingungen aus, u. zw. um die Gleichgewichtslage als Mitte. Diese Schwingungen werden durch Luftwiderstand und dadurch, dass der Stab sich nicht vollkommen elastisch verhält, allmählich kleiner, und Stab und Körper gehen endlich in die Ruhe- oder Gleichgewichtslage über.

Die veränderliche, auf den Körper wirkende Gesammtkraft bringt man am deutlichsten zur Anschauung, wenn man die beiden Arbeitsfiguren entgegengesetzter Vorzeichen in einander zeichnet, so dass man den Unterschied der beiden Kräfte unmittelbar abmessen kann.

Fig. 121.



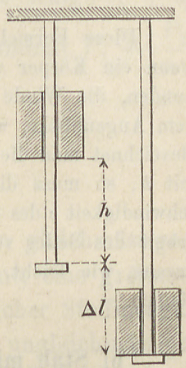
Derartige Fälle plötzlicher Belastung kommen in der Anwendung sehr häufig vor. Und dieser Umstand ist einer der Gründe dafür, dass man (s. S. 10) bei einer statischen Berechnung die zulässige Spannung σ_0 erheblich kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze wählt. Denn bemisst man den Querschnitt F des Stabes unter Annahme des Gleichgewichts nach einer Spannung $0{,}5\,z$, so wird bei plötzlicher Belastung die wahre Spannung $= z$ (Elasticitätsgrenze) werden.

Will man ein kleines Gewicht an einen Kautschukfaden, oder ein grosses an eine Hängstange, eine Kette, einen Krahn derartig anhängen, dass in den genannten elastischen Körpern die stärkste Spannung nur wenig grösser als die Gleichgewichts-Spannung werde, so muss man dem Körper die anfängliche Unterstützung nicht plötzlich nehmen, sondern muss die unterstützenden Vorrichtungen (bei einem kleinen Gewichte vielleicht die Hand, bei einem grösseren eine Windevorrichtung) langsam senken. Dabei wird dann das Gewicht des Körpers allmählich auf den Faden, die Stange oder Kette übertragen, während die Stützvorrichtung in demselben Mafse entlastet wird. Auf diese Weise erfährt

der Körper keine nennenswerthe Geschwindigkeit und wird in dem Augenblicke, wo die Spannkraft des Fadens, der Stange oder Kette gleich dem Gewichte des Körpers geworden ist, seine Senkung beenden und im Gleichgewichte verbleiben. Bei verhältnismässig grossen Lasten ist dieses Verfahren schwer anzuwenden, deshalb darf man bei der Berechnung von Hängestangen, Ketten, Krahnen u. dergl. auf diesen günstigen Umstand nicht sicher rechnen und wird daher die zulässige Spannung (für ruhende Last) entsprechend klein anzusetzen haben.

Die Gleichgewichtsspannung σ_0 wird in noch stärkerem Grade überschritten, wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er auf den spannungslosen Stab zu wirken beginnt, schon eine Geschwindigkeit c im Sinne der Verlängerung der Stange hat, indem er, etwa mittels einer Bohrung auf dem Stabe gleitend, von einer Höhe h auf einen Vorsprung am unteren Stabende herabfällt (Fig. 122). Ist Δl die grösste Verlängerung des Stabes, nach deren Entstehung der fallende Körper die Geschwindigkeit Null erreicht, so ist zwischen der höchsten und tiefsten Lage des Körpers wiederum die Änderung des Arbeitsvermögens Null, mithin, da der Körper um $h + \Delta l$ sinkt:

Fig. 122.



$$11) \qquad \frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Q(h + \Delta l),$$

oder, mit $\Delta l = \frac{\sigma l}{E}$:

$$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh + \frac{Q\sigma l}{E}.$$

Diese Gleichung giebt, nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{Ql}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2 l^2}{V^2} + \frac{2Qh\,E}{V}},$$

oder, wenn man $V = Fl$, $Q : F = \sigma_0$ setzt:

$$12) \qquad \sigma = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2\sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

(Ein negatives Zeichen vor dem Wurzelausdrucke hat für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung, da es sich nur um einen positiven Werth σ handeln kann.)

Beispiel: Der Eisenstab habe $F = 4$ qcm Querschnitt und $l = 5$ m $= 500$ cm Länge, der Körper $Q = 100$ kg Gewicht und nur $h = 10$ cm Fallhöhe; dann ist die Gleichgewichts-Spannung $\sigma_0 = 25$ at, d. h. ganz unerheblich. Es wird aber

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439 \text{ at}.$$

In Folge der Fallhöhe von 10 cm entsteht also eine im Vergleiche mit der Gleichgewichts-Spannung sehr erhebliche Anstrengung des Stabes. Die entsprechende Verlängerung beträgt

$$\Delta l = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0{,}36 \text{ cm},$$

ist also gegen $h = 10$ cm unerheblich. Für die meisten Fälle kann man Δl gegen h vernachlässigen; dann wird aus Gl. 11:

13) $$\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E} = Qh,$$

mithin, erheblich einfacher,

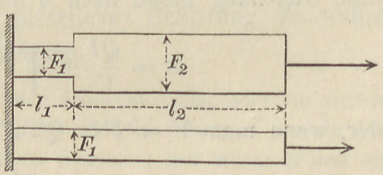
14) $$\sigma = \sqrt{2\sigma_0 \frac{h}{l} E} = 1414 \text{ at}.$$

Diese Formel gilt auch für die Spannung des Seiles einer Dampfwinde, wenn ein Körper vom Gewichte Q mit dem anfänglich schlaffen Seile verbunden, die Winde nun aber derartig in Gang gesetzt wird, dass das Seil in dem Augenblicke, wo es straff wird, sich mit einer Geschwindigkeit c bewegt. Bezeichnet man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe mit h, so muss die Arbeit Qh, welche nöthig ist, um der Last Q die Geschwindigkeit c des Seiles mitzutheilen, durch Vermittelung der Formänderungsarbeit des Seiles von der Winde auf die Last übertragen werden. Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können.

b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte.

Der Stab möge auf eine Länge l_1 den Querschnitt F_1, auf eine Länge l_2 den grösseren Querschnitt F_2 haben (Fig. 123). Bringt man ihn dann in ähnlicher Weise, wie auf S. 100 beschrieben, durch eine allmählich anwachsende Zugkraft in Spannung, so werden die Spannungen in den verschiedenen Querschnitten σ_1 und σ_2 betragen, zwischen denen die Beziehung $\sigma_2 F_2 = \sigma_1 F_1$, mithin

Fig. 123.



$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{n}$$

besteht, wenn man $F_2 = nF_1$ setzt. Bei der Erzeugung dieser

Spannungen muss die wirkende Zugkraft eine Arbeit verrichten, welche nach Gl. 5, S. 101 beträgt:

$$\mathfrak{A} = \frac{V_1}{2}\frac{\sigma_1^2}{E} + \frac{V_2}{2}\frac{\sigma_2^2}{E},$$

oder, auf σ_1 zurückgeführt:

15) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E}\left\{V_1 + \frac{V_2}{n^2}\right\}.$$

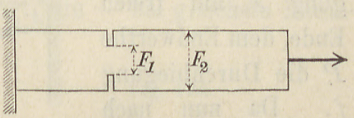
Für die Sicherheit des Stabes im Gleichgewichtszustande kommt nur der kleinste Querschnitt in Frage. Der Rauminhalt $(F_2 - F_1)\,l_2$, den der vorliegende Stab mehr enthält als ein solcher mit überall gleichem Querschnitt F_1, ist für den Ruhezustand eine Verschwendung. Für die mögliche Arbeitsleistung ist diese Verschwendung an Stoff aber sogar schädlich; denn ein Stab von der Länge $l_1 + l_2$ und dem einheitlichen Querschnitt F_1 hat einen Rauminhalt $V_1 + \frac{V_2}{n}$ und nimmt bis zur Spannung σ_1 eine Arbeit auf

16) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}\left(V_1 + \frac{V_2}{n}\right).$$

Da $n > 1$, so ist $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}$, d. h. der Stab von gleichmässiger Stärke erträgt, bis er auf eine Spannung σ_1 kommt, eine grössere Arbeit als der ungleichmässig starke Stab von gleicher Stoffmenge. Gegen Arbeitswirkung verstärkt wird daher der ungleichmässige Stab durch Fortnahme des für den Ruhezustand nur Ueberflüssigen (nach A. Ritter, Technische Mechanik).

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf einen Stab, dessen Querschnitt F_2 auf eine geringe Länge l_1 durch Einsägen, Einschneiden oder auf irgend andere Weise eine Schwächung auf die Querschnittsgrösse F_1 erfahren hat. Es ist dann V_1 gegen V_2 zu vernachlässigen und es wird, wenn man V_2 als Gesammtinhalt nunmehr V nennt,

Fig. 124.



17) $$\mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E}\frac{V}{n^2},$$

während für den gleichmässig auf den Querschnitt F_1 und den Inhalt $V : n$ gebrachten Stab

18) $$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E}\frac{V}{n}$$

wird, so dass wird $\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A} = n$.

Die Widerstandsfähigkeit eines Stabes gegen Arbeit wird durch Einsägen auf halben Querschnitt auf $^1/_4$ vermindert, aber auf $^1/_2$ des ursprünglichen Werthes wieder erhöht, wenn man durch Wegnahme der Hälfte des Stoffes in zweckmässiger Weise überall den gleichen Querschnitt $F_1 = {}^1/_2 F_2$ herstellt. Noch mehrfach wird sich das Ergebnis zeigen, dass Körper überall gleicher Sicherheit hinsichtlich der Arbeitsleistung überraschend vortheilhaft sind. Der innere Grund liegt darin, dass der zulässige Endwerth P der Zugkraft durch F_1 bedingt ist, dass der übermässig grosse Querschnitt F_2 aber die Verlängerung Δl vermindert, wodurch auch das Produkt $^1/_2 P \Delta l = \mathfrak{A}$ eine Verminderung erfährt. Grosse Formänderungen sind für die Aufnahme von Arbeit vortheilhaft. Bei Ankertauen und Ankerketten, die das Arbeitsvermögen bewegter Schiffe durch die Arbeit ihrer Spannkräfte zu vernichten haben, sind Fehlstellen besonders verhängnisvoll.

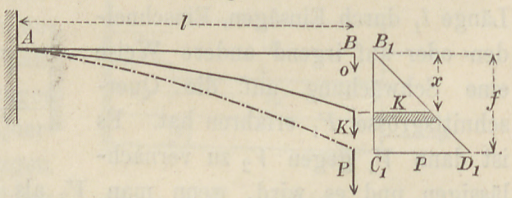
2. Biegungs-Arbeit.

a) Prismatischer Stab.

Ein prismatischer, bei A (Fig. 125) wagerecht eingespannter Stab werde am freien Ende durch eine von Null ab allmählich bis P anwachsende Kraft gebogen. Dem beliebigen Zwischenwerthe K der Kraft entspricht eine Biegung x am freien Ende, dem Endwerthe P die Durchbiegung f. Da nun nach Gl. 7, S. 43:

$$x = \frac{Kl^3}{3EJ},$$

Fig. 125.



d. h. K mit x verhältnisgleich, so ist die Beziehung zwischen beiden Grössen wiederum ein Dreieck $B_1 C_1 D_1$ mit $B_1 C_1 = f$, $C_1 D_1 = P$.

Das Arbeitstheilchen von K ist $K dx$, gleich einem Flächenstreifen des Dreiecks, die Gesammtarbeit daher gleich dem Inhalte des ganzen Dreiecks, d. h.

1) $$\mathfrak{A} = {}^1/_2 Pf;$$

es ist wieder $^1/_2 P$ der Mittelwerth der veränderlichen Kraft, f die Wegeslänge. Weil nun

2) $$f = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

so wird zunächst $$\mathfrak{A} = \frac{P^2 l^3}{6EJ}$$

und weil ferner $$Pl = \sigma \frac{J}{e}, \text{ so ergiebt sich}$$

3) $$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} \frac{Jl}{e^2} \frac{\sigma^2}{E},$$

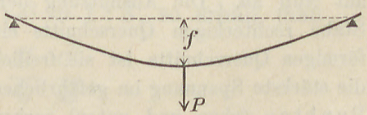
wenn σ die stärkste Biegungsspannung ist, J und e die bekannte Bedeutung (S. 22) haben. Setzt man $J = Fi^2$ (s. S. 62), wo i der Trägheitshalbmesser, so entsteht

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} Fl \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E} \quad \text{oder}$$

4) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{6} \frac{i^2}{e^2} \frac{\sigma^2}{E}$$

wenn wiederum $Fl = V$ bedeutet. Das Verhältnis $i : e$ ist nur von der Form, nicht aber von der Grösse des Querschnitts abhängig. Mithin ist bei bestimmter Querschnittsform die zur Erzeugung einer bestimmten Biegungsspannung σ erforderliche Arbeit nur noch von dem Rauminhalte V des Stabes abhängig. Mag also ein Stab mit rechteckigem Querschnitte lang oder kurz sein, mag er hochkantig oder flachliegend befestigt sein — bei gleichem Rauminhalte wird die Biegungsarbeit in allen diesen Fällen die gleiche sein.

Fig. 126.



Die Gültigkeit der Gl. 4 ist auch nicht auf die Befestigungsart nach Fig. 125 beschränkt, vielmehr ergiebt sich, wenn man den Stab an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet (Fig. 126), derselbe Werth.

Es ist nämlich wiederum $\mathfrak{A} = {}^1/_2 Pf$, ferner $f = \frac{Pl^3}{48 EJ}$ (S. 45), $\frac{Pl}{4} = \sigma \frac{J}{e}$; setzt man diese Werthe ein, so entsteht Gl. 3.

Aus denselben Gründen, die auf S. 102 entwickelt wurden, ist $\mathfrak{A}_i = -\mathfrak{A}$ die Arbeit der inneren Spannkräfte des gebogenen Stabes. Ebenso kehrt sich, wenn die Rückkehr zum spannungslosen Zustande erfolgt, das Zeichen von $\mathfrak{A}$ und somit auch dasjenige von $\mathfrak{A}_i$ um.

Hinsichtlich der Einwirkung einer plötzlichen Belastung ergiebt sich in ähnlicher Weise, wie auf S. 104—106 entwickelt wurde, dass die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt und dass der Stab Schwingungen um die Gleichgewichtslage als Mitte ausführen wird.

Für **rechteckigen** Querschnitt ist $J = {}^1/_{12} Fh^2$ (S. 22), mithin $i^2 = {}^1/_{12} h^2$, $e^2 = {}^1/_4 h^2$, $i^2 : e^2 = 1 : 3$, folglich

$$5) \qquad \mathfrak{A} = \frac{V}{18} \frac{\sigma^2}{E}.$$

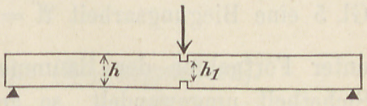
Für **kreisförmigen** Querschnitt ist $J = {}^1/_4 Fr^2$ (S. 24), $i^2 = {}^1/_4 r^2$, $e^2 = r^2$, daher

$$6) \qquad \mathfrak{A} = \frac{V}{24} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Die Biegungsarbeit ergiebt sich in diesen beiden Fällen (Gl. 5 und 6) 9 bezw. 12 Mal kleiner als die Arbeit der Längenänderung (S. 101, Gl. 5). Es erklärt sich dies folgendermassen: Bei der Verlängerung herrscht an allen Stellen aller Querschnitte die gleiche Spannung σ, mithin wird bei einem gezogenen Stabe die Festigkeit bis zu dem gewünschten Grade vollständig ausgenutzt, während beim gebogenen Stabe die stärkste Spannung nur in dem einen Querschnitte, wo das Moment den grössten Werth erreicht, vorkommt, sich aber in der Längenrichtung bis auf Null vermindert. Aber auch in dem Querschnitte des grössten Momentes kommt die stärkste Spannung nur im grössten Abstande von der Nulllinie vor, nimmt aber nach dieser hin ebenfalls auf Null ab. Die Ausnutzung der Festigkeit ist daher bei dem gebogenen Stabe rechteckigen Querschnitts eine recht ungünstige. Beim Stabe kreisförmigen Querschnitts ist sie freilich noch etwas ungünstiger, weil bei diesem die stärkste Spannung im gefährlichen Querschnitte nur an den beiden äussersten Punkten (oben und unten) vorkommt beim rechteckigem Querschnitte aber doch wenigstens über zwei geraden Linien (Oberkante und Unterkante des Querschnitts) sich erstreckt.

Der Einfluss einer Verschwächung ergiebt sich in ähnlicher Weise wie beim gezogenen Stabe, ist aber noch erheblicher als dort, wenn die Einkerbung an den Stellen der stärksten Spannung (oben und unten) erfolgt. Für einen Stab von rechteckigem Querschnitt ist $\mathfrak{A} = \frac{V}{18}\frac{\sigma^2}{E}$. Wird der Stab in der Mitte (Fig. 127) oben und unten eingekerbt, so dass von der Höhe h nur der Theil h_1 widerstandsfähig bleibt, das Widerstandsmoment also von $^1/_6\, d h^2$ auf $^1/_6\, d h_1^2$ abnimmt, so wird die stärkste Spannung an der Einkerbung $\sigma_1 = \sigma \frac{h^2}{h_1^2}$. Weil nun V und auch die Spannungsverhältnisse des Stabes, abgesehen von der Einkerbung, dieselben geblieben sind, so kann geschrieben werden

Fig. 127.



7) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{18}\frac{\sigma_1^2}{E}\frac{h_1^4}{h^4}.$$

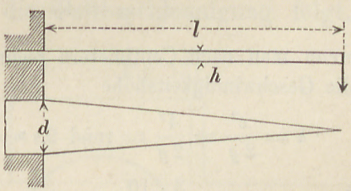
Wird also durch Einkerbung in der Mitte $h_1 = 0{,}8\, h$, so ist $h_1^4 = 0{,}41\, h^4$, und es vermindert sich die der Spannung σ_1 entsprechende Biegungsarbeit auf das 0,41 fache.

Von diesem Umstande wird z. B. in Eisenhütten vielfache Anwendung gemacht, wenn man Eisenstäbe durch das Arbeitsvermögen von Hammerschlägen zerbrechen will. Man kerbt den Stab an der gewünschten Bruchstelle mittels eines sog. Schrotmeissels ein, wonach dann der hohl gelegte Stab unter dem Hammerschlage verhältnismässig leicht zerbricht.

b) Stab überall gleicher Sicherheit und gleicher Höhe.

Ist der Stab im Grundrisse (rechtwinklig zur Richtung der biegenden Kraft) dreieckig zugeschärft (Fig. 128), so wird die Durchbiegung $f = \frac{Pl^3}{2EJ}$ (S. 48, Gl. 21), somit

Fig. 128.



$$\mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{P^2 l^3}{4EJ}, \quad Pl = \sigma\frac{J}{e}$$

und $$\mathfrak{A} = \frac{1}{4}\frac{Jl}{e^2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{4}Fl\frac{i^2}{e^2}\frac{\sigma^2}{E}.$$

Jetzt ist aber, wegen der Zuschärfung, der Rauminhalt $V = {}^1/_2\, Fl$, oder $Fl = 2V$, und weil wieder $i^2 : e^2 = 1 : 3$, so erhält man

8) $$\mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E},$$

d. h. 3 Mal so gross wie bei überall gleichem Querschnitte, weil beim Stabe gleicher Sicherheit die stärkste Spannung σ nicht nur

in zwei geraden Querlinien von der Länge d, sondern längs der ganzen oberen und unteren Fläche vorkommt.

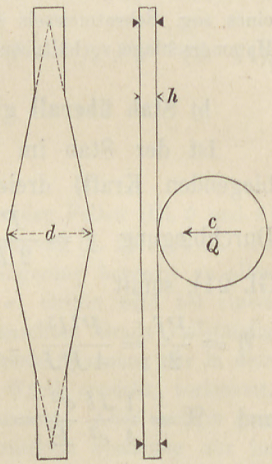
Ein prismatischer Stab vom Rauminhalte $V = ldh$ kann nach Gl. 5 eine Biegungsarbeit $\mathfrak{A} = \frac{ldh}{18}\frac{\sigma^2}{E}$ aufnehmen. Wird derselbe unter Fortnahme der Raummenge $\frac{1}{2}V$ zu einem Stabe gleicher Sicherheit umgewandelt, so ändert dies an seiner Tragfähigkeit im Gleichgewichtszustande nichts. Seine Arbeitsfähigkeit aber wird nun, weil sein Rauminhalt $\frac{1}{2}ldh$ ist,

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{ldh}{12}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{3}{2}\mathfrak{A}.$$

Die Fortnahme der Raummenge $\frac{1}{2}V$ hat also die Widerstandsfähigkeit gegen Arbeit auf das $1\frac{1}{2}$fache vergrössert (vergl. den gesperrt gedruckten Satz auf S. 110).

Beispiel: Eine Kugel von $Q = 10$ kg Gewicht, die sich mit $c = 4$ m/sek. Geschwindigkeit bewegt, soll durch eine Gussstahl-Feder überall gleicher Sicherheit aufgefangen werden. Welche Abmessungen muss die Feder erhalten, wenn sie bis zur Elasticitätsgrenze (4500 at) gespannt werden soll?

Fig. 159.



Es muss nach dem Satze der Arbeit

$$0 - \frac{Q}{g}\frac{c^2}{2} = -\frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E}, \quad \text{mithin}$$

$$V = \frac{6E}{\sigma^2}Q\frac{c^2}{2g} \quad \text{sein.}$$

Für Gussstahl ist nach der Tabelle (S. 103)

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = 4{,}6,$$

wenn man nach Centimetern rechnet. Nun ist die Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{4^2}{2g} = \text{rund } 0{,}8 \text{ m} = 80 \text{ cm},$$

daher $V = \frac{3 \cdot 10}{4{,}6}80 = 522$ ccm.

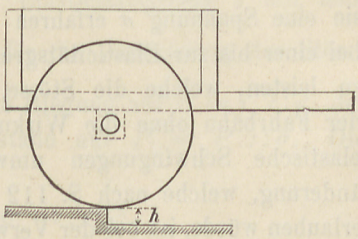
Wählt man vielleicht die Spannweite $l = 100$ cm, die Dicke $h = 1$ cm, so muss für die grösste Breite d die Gleichung gelten $100 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}d = 522$, mithin $d = 10{,}44$ cm. An den Enden verlangt die Sicherheit gegen Abscherung und die sichere Auflagerung eine kleine Abweichung von der ideellen Rautenform. Das Gewicht der federnden Platte beträgt etwa 4 kg. Die Masse derselben wurde bei der bisherigen Betrachtung gegenüber der Masse der Kugel vernachlässigt. Der dabei begangene Fehler kann erst auf Grund der Lehre vom

Stosse (S. 139) beurtheilt werden. Ohne Rücksicht auf diesen Umstand würde man zu dem Schlusse kommen, dass die Federplatte beim Zurückschwingen die Kugel mit der Geschwindigkeit c wieder forttreiben werde; in Wirklichkeit fällt die Geschwindigkeit des Rücklaufs geringer aus.

c) Tragfedern der Fuhrwerke (Biegungsfedern).

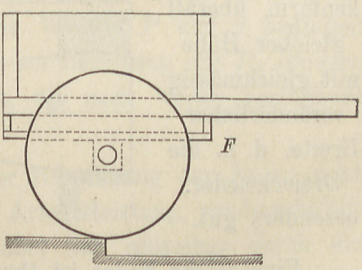
Die Federn, welche die Wagenkasten der Fuhrwerke tragen, haben den Zweck, die Erschütterungen zu vermindern, welche durch Unregelmässigkeiten der Fahrbahn verursacht werden. Fällt ein Fuhrwerk ohne Federn, dessen Gewicht $= Q$, in eine Vertiefung h, so muss die Arbeit der Schwere Qh beim Aufschlagen auf den Boden der Vertiefung durch die Arbeit des Widerstandes der Fahrbahn, sowie der lothrechten Kräfte, mit denen die einzelnen Theile des Fuhrwerks auf einander drücken, aufgehoben werden. Ist nun der Boden wenig nachgiebig, sind die Räder und das ganze Fuhrwerk sehr steif gebaut, so dass nur geringe Formänderungen entstehen, so werden die Kräfte, deren Arbeit $= Qh$ sein muss, in Folge geringer Wegeslängen sehr gross. Daraus entsteht eine örtliche Zerstörung der Fahrbahn, eine starke Anspannung der tragenden Theile des Fuhrwerks; auch wird durch den harten Aufschlag, d. h. die starke Verzögerung, welche auf die Fallbeschleunigung folgt, die Lockerung der Verbindungen (Schrauben, Nägel) erleichtert.

Fig. 130.



Wird zwischen Achse und Wagenkasten eine biegsame Feder F eingeschaltet (Figur 131), so wird beim Hinunterfallen nur noch die (geringere) Masse der Räder und der Achse hart aufschlagen. Der Wagenkasten mit der Last wird aber längs einer grösseren Wegeslänge aufgefangen, weil die Feder nach dem Aufschlagen der Räder sich durchbiegt und durch ihre Biegungsarbeit die Arbeit

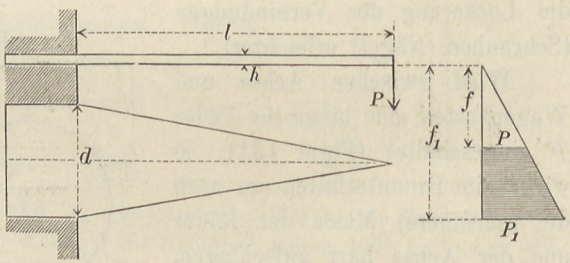
Fig. 131.



der Schwere aufzehrt. In Folge der beträchtlichen Vergrösserung des lothrechten Weges des Wagenkastens nach dem Aufschlagen der Räder wird nun die Grösse der verzögernden Kraft so erheblich vermindert, dass an Stelle des zerstörenden, unangenehm fühlbaren und lärmenden Stosses eine sanfte lothrechte Schwingung entsteht. Gute Federn schonen also die Fahrbahn und das Fuhrwerk, sowie die Nerven der betheiligten Menschen. Die zuweilen benutzten Kautschukreifen sind eine Fortsetzung dieser Bestrebungen, indem durch sie auch der Stoss der Räder und Achsen zu einem elastischen gemacht wird.

Die Tragfedern haben eine zweifache Aufgabe: sie müssen das Gewicht des Wagenkastens im Gleichgewichtszustande tragen, wobei sie eine Spannung σ erfahren und müssen ferner im Stande sein, bei einer bis zur Elasticitätsgrenze wachsenden Spannung eine Arbeit zu leisten, welche die Stösse, die durch die Unregelmässigkeiten der Fahrbahn ohne die Wirkung der Federn entstehen würden, in elastische Schwingungen umwandelt. Die Arbeit der Längenänderung, welche nach S. 112 eine günstige Ausnutzung des Stoffes erlauben würde, ist bei der Verwendung von Stahl nicht gut verwendbar, weil die Längenänderung zu gering ausfällt. Die Verkürzungsarbeit von Kautschuk-Blöcken hat man bei Strassenbahn-Fuhrwerken früher benutzt, aber aus den S. 104 angeführten Gründen aufgeben müssen. Daher verwendet man die Biegungsarbeit des Stahles, bei der eine beträchtliche Formänderung möglich ist. Hierzu eignet sich nun nach S. 113 die Balkenform überall gleicher Höhe mit gleichmässig veränderlicher Breite, d. h. die Dreiecksfeder, besonders gut.

Fig. 132.



Eine solche Feder ist thatsächlich in der Mitte unterstützt und an beiden Enden durch gleiche Lasten belastet; wegen der vollkommen symmetrischen Anordnung betrachten wir zunächst nur die

eine Hälfte, die an dem einen Ende als wagerecht eingespannt betrachtet werden kann (Fig. 132). Für den Ruhezustand gilt

$$1) \qquad \sigma \frac{J}{e} = \sigma \frac{d_1 h^2}{6} = Pl.$$

Mit der Ruhelast ist nach S. 48 eine Durchbiegung

$$2) \qquad f = \frac{Pl^3}{2EJ} = \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{h}$$

($h = 2e$) verbunden. Diese Gleichgewichts-Biegung f ist für spätere Arbeitsleistung nicht mehr zu verwerthen, denn sie entsteht ebenso wie die Spaunnng σ schon bei dem Aufbringen der Last. Nur der Spannungs-Spielraum von σ bis zur Elasticitätsgrenze z mit dem Arbeitswerthe $\frac{V}{6} \frac{z^2 - \sigma^2}{E}$ ist noch für die Vernichtung der Stösse verfügbar. Dabei vergrössert sich die Biegung auf $f_1 = f \cdot z : \sigma$, der am Ende auftretende Biegungswiderstand auf $P_1 = P \cdot z : \sigma$. Die noch auszunutzende Biegungsarbeit

$$3) \qquad \frac{P_1 f_1 - Pf}{2} = \frac{V}{6} \frac{z^2 - \sigma^2}{E}$$

wird in der Figur durch das schraffirte Trapez dargestellt.

Welchen Anforderungen die Feder zu genügen hat, ist vorwiegend durch die Erfahrung ermittelt worden, und diese hat man in der Weise zum Ausdrucke gebracht, dass eine einem bestimmten Zwecke angemesse Feder eine gewisse Länge l haben muss, unter der Ruhelast P nur bis zu einer gewissen Spannung σ beansprucht werden darf und dass mit der Ruhelast eine bestimmte Durchbiegung f verbunden sein muss. Die Werthe P und f bedingen dann nicht allein die Arbeit $\frac{1}{2} Pf$ bis zur Belastung mit P, sondern auch zugleich, weil man $z : \sigma$ kennt, die noch weiter verfügbare Arbeit (nach Gl. 3).

Man kümmert sich also bei der Berechnung der Feder nicht unmittelbar um die ihr zuzumuthende Arbeitsleistung, sondern bringt diese (zur Vereinfachung der Aufgabe) nur mittelbar durch die der Ruhelast entsprechende Biegung f zum Ausdrucke. Jedoch ist hiermit die Fähigkeit der Feder, die Last zu tragen und darüber hinaus noch Arbeit zu leisten, vollkommen gekennzeichnet.

Die Querschnittshöhe bestimmt sich aus Gl. 2 zu

$$4) \qquad h = \frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{f},$$

die Breite hiernach aus Gl. 1 zu

$$5) \qquad d = \frac{6Pl}{\sigma h^2}.$$

Der Rauminhalt $V = {}^1/_2\, dhl$ ergiebt sich hiernach, wie es nach Gl. 8, S. 113, sein muss, zu $3Pf\frac{E}{\sigma^2}$.

Beispiel: Es seien gegeben:

$P = 1900$ kg; $f = 5$ cm; $\sigma = 4500$ at;

$E = 2\,500\,000$ at; $l = 60$ cm. Dann wird nach Gl. 4 u. 5:

$$h = \frac{4500}{2\,500\,000}\,\frac{60^2}{5} = 1{,}3 \text{ cm};$$

$$d = \frac{6 \cdot 1900 \cdot 60}{4500 \cdot 1{,}69} = 90 \text{ cm}.$$

Eine Feder von so grosser Breite d ist für die Anwendung nicht geeignet. Sie wird daher in solcher Weise umgestaltet, dass eine zusammengesetzte Feder von geringerer Breite entsteht, die aber die gleiche Tragfähigkeit und Biegsamkeit hat wie die soeben berechnete. Man theilt die Federplatte nach Fig. 133 in eine gerade Anzahl $2n$ (z. B. 8) parallele Streifen, vereinigt je zwei mit gleichen Ziffern bezeichnete Theile zu einem Stück und legt die so erhaltenen Streifen nach Fig. 134 auf einander, wobei man zunächst über dem Ende jedes Streifens ein Klötzchen angebracht denkt, so dass die einzelnen Streifen nur dort Kräfte auf einander ausüben können. Diese Kräfte werden mit K_1, K_2, K_3 bezeichnet. Fig. 135 zeigt die untere Ansicht der Feder, deren Breite $\frac{d}{n}$ beträgt. Die unterste Schicht AB von der Länge $\frac{l}{n}$ biegt sich bei B um

Fig. 133.

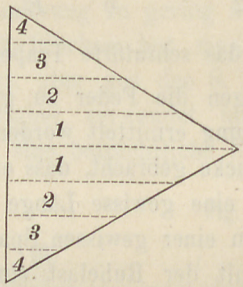


Fig. 134.

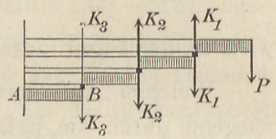
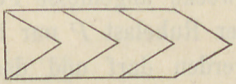


Fig. 135.

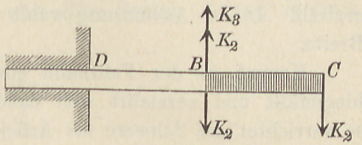


$$6) \qquad f_3 = \frac{K_3\left(\frac{l}{n}\right)^3}{2\,E\frac{J}{n}},$$

weil der Breite ${}^1/_n\, d$ ein Trägheitsmoment ${}^1/_n\, J$ entspricht. Die darüber

liegende Schicht muss bei B die gleiche Durchbiegung f_3 zeigen, weil die zwischengelegten Klötzchen gleiche Biegung erzwingen. An dieser Schicht greift (Fig. 136) bei C die Kraft K_2, bei B die Kraft K_3 an. Fügt man in B zwei gleiche entgegengesetzte K_2 hinzu, so bilden die gegebene Kraft K_2 bei C und die bei B entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = K_2 \cdot {}^1/_n\, l$, welches dem von D bis B prismatischen Stabe nach S. 43 bei B eine Biegung um $\frac{K_2\,({}^1/_n\, l)^3}{2\,E \cdot {}^1/_n\, J}$ ertheilt. Ausserdem wirkt bei B nach abwärts die Kraft $K_2 - K_3$, die nach S. 43 bei B eine Biegung $\frac{(K_2 - K_3)\,({}^1/_n\, l)^3}{3\,E \cdot {}^1/_n\, J}$ erzeugt. Setzt man die Summe beider Biegungen gleich f_3 (Gl. 6), so entsteht

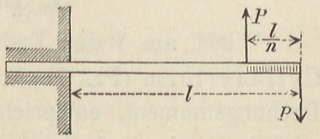
Fig. 136.



$$\frac{K_2}{2} + \frac{K_2}{3} - \frac{K_3}{3} = \frac{K_3}{2}, \quad \text{d. h. } K_3 = K_2.$$

In gleicher Weise erhält man $K_2 = K_1$ und $K_1 = P$; d. h. die an den Klötzchen übertragenen Kräfte sind sämmtlich gleich der Last P. Die oberste Lage bildet (Fig. 137) einen Balken überall gleicher Sicherheit, dessen Spannung

Fig. 137.



$$\sigma = \frac{P \cdot {}^1/_n\, l\, e}{{}^1/_n\, J} = \frac{P l e}{J} = \frac{P l h}{2\,J}$$

dieselbe ist, wie diejenige der Platte (s. Gl. 1, S. 117); sie biegt sich nach S. 49, Fig. 61 nach einem Kreisbogen vom Halbmesser

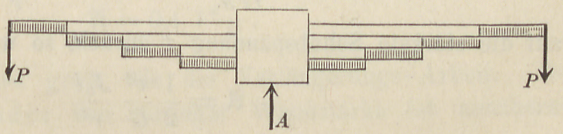
$$\rho = \frac{E h}{2\,\sigma} = \frac{2\,500\,000 \cdot 1{,}3}{2 \cdot 4500} = 361 \text{ cm},$$

und die Durchbiegung des freien Endes beträgt

$$f = \frac{l^2}{2\,\rho} = \frac{\sigma}{E}\,\frac{l^2}{h}$$

wie bei der Platte (Gl. 2, S. 117). Von den übrigen Lagen gilt dasselbe. Werden die Klötzchen auf die Höhe Null vermindert, so ändert sich in der Wirkung der Federlagen nichts Wesentliches. Setzt man diese Schichtenfeder an der gedachten Einspannungsstelle mit einer symmetrisch gestellten zusammen (Fig. 138), so entsteht eine an beiden Enden je mit P belastete Tragfeder, die sich bei A auf ein Achslager stützt. Dass man an den freien Enden geeignete Anordnungen trifft, um die Last P sicher auflagern

Fig. 138.



zu können und dass man aus Zweckmässigkeitsgründen den einzelnen Lagen schon im spannungslosen Zustande eine Krümmung giebt, hat auf die Wirkung keinen erheblichen Einfluss.

Der Einfachheit wegen haben wir eine Feder von nur 4 Schichten dargestellt. In der Ausführung wählt man statt dessen 10 Schichten von je 9 cm Breite.

Kommt in der Fahrbahn eine Vertiefung um h vor, in die das Rad hineinfällt und vermehrt sich dabei die Durchbiegung der Feder um $f_1 - f$, so verrichtet die Schwere die Arbeit $P(h + f_1 - f)$. Wird hierbei die Feder bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, so ist nach Gl 3 (S. 117):

$$P(h + f_1 - f) = \tfrac{1}{2}(P_1 f_1 - P f).$$

Bei gutem Federstahl kann man die Elasticitätsgrenze etwa zu $z = 8000$ annehmen. Dann wird wegen $f = 5$ cm:

$$f_1 = 5 \cdot \frac{8000}{4500} = 5 \cdot 1{,}78 = 8{,}9 \text{ cm};$$

$$P_1 = 1900 \cdot 1{,}78 = 3382 \text{ kg};$$

und man findet $h = 1{,}5$ cm. Um diese Höhe nur darf die Achse fallen, damit die Feder nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werde.

3. Drehungs-Arbeit.

Wirkt am freien Ende eines einerseits befestigten Stabes von Cylinderform (Fig. 78, S. 64) ein von 0 bis $\mathfrak{M}$ stetig anwachsendes Drehungsmoment, entspricht dem Endwerthe $\mathfrak{M}$ ein Verdrehungswinkel ϑ, einem beliebigen Zwischenwerthe $\mathfrak{M}'$ der Verdrehungswinkel φ, so ist für eine Zunahme dieses Winkels um $d\varphi$ die Arbeit (nach Theil 1, S. 221)

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{M}' d\varphi.$$

Weil nun nach S. 65, Gl. 4 $\mathfrak{M}'$ mit φ verhältnisgleich wächst, so wird wie in den früheren ähnlichen Fällen die Gesammtarbeit

1) $$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\vartheta.$$

Führt man dies mit

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \frac{\tau J_0}{r}$$

auf die stärkste Schubspannung τ zurück, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}\frac{J_0 l}{r^2}$$

oder, wenn man $J_0 = F i_0^2$ und $Fl = V$ setzt,

2) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\frac{\tau^2}{G}\frac{i_0^2}{r^2}.$$

Da nun für kreisförmigen Querschnitt $i_0^2 = {}^1/_2 r^2$, so entsteht

3) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{4}\frac{\tau^2}{G}.$$

Für rechteckigen Querschnitt von den Seiten d und h (mit $d \leqq h$) war (S. 69, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3}\tau\frac{J_2}{d}$$

und nach S. 71, Gl. 16

$$\vartheta = 0{,}8\frac{\tau}{G}\frac{l}{d}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right),$$

worin $J_1 = {}^1/_{12} F h^2$ und $J_2 = {}^1/_{12} F d^2$. Daher wird

$$\mathfrak{A} = {}^1/_2\,\mathfrak{M}\vartheta = 1{,}07\frac{\tau^2}{G}\frac{J_2 l}{d^2}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) \quad \text{oder}$$

4) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{11}\frac{\tau^2}{G}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) = \frac{V}{11}\frac{\tau^2}{G}\left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right).$$

Im günstigsten Falle, für $d = h$, giebt dies

5) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{5{,}5}\frac{\tau^2}{G};$$

im ungünstigsten Falle aber, für $d : h = 0$:

6) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{11}\frac{\tau^2}{G}.$$

Um die Drehungs-Arbeit mit der Verlängerungs-Arbeit vergleichen zu können, bedenke man, dass nach S. 15 bei gleicher Sicherheit etwa $\tau = 0{,}8\,\sigma$ zu setzen, dass ferner $G = 0{,}4\,E$ ist dann wird $\frac{\tau^2}{G} = 1{,}6\frac{\sigma^2}{E}$.

Für den Vollcylinder ergiebt sich nach Gl. 3

7) $$\mathfrak{A} = 0{,}4\,V\frac{\sigma^2}{E},$$

d. h. beinahe ebenso gross wie die Verlängerungs-Arbeit. Bei einem Hohlcylinder von geringer Wandstärke ist annähernd $i_0 = r$, daher (nach Gl. 2)

8) $$\mathfrak{A} = \frac{V}{2}\frac{\tau^2}{g} = 0{,}8\,V\frac{\sigma^2}{E},$$

also noch erheblich günstiger als bei der Verlängerung. Die Drehungsarbeit eines Hohlcylinders ist hiernach die günstigste Art, unter der ein Stab Arbeit aufzunehmen vermag.

Verdrehungs-Federn.

Gerade Verdrehungsfedern werden wohl als Thürschliesser an eisernen Pforten benutzt. Wählt man einen Stahlstab mit quadratischem Querschnitte von $d = 0{,}4^{\text{cm}}$ Seite und $l = 120^{\text{cm}}$ Länge, so erträgt derselbe bei einer zulässigen Schubspannung $\tau = 3600^{\text{at}}$ ein Drehmoment (nach S. 69, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \cdot 3600 \, \frac{0{,}4^3}{12} = 51^{\text{cmkg}},$$

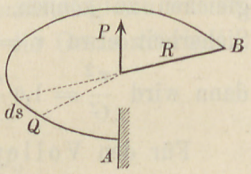
welches, wenn die Thürklinke 50^{cm} von der Drehachse entfernt ist, durch einen Kraftaufwand von $51 : 50 =$ rund 1^{kg} zum Öffnen der Pforte überwunden wird. Der entsprechende Verdrehungswinkel beträgt (nach Gl. 16, S. 71)

$$\vartheta = \frac{0{,}8 \cdot 3600}{880000} \cdot 300 \cdot 2 = \text{rund } 2, \text{ d. h. } \frac{2 \cdot 180}{\pi} = 115 \text{ Grad},$$

als Winkel, um den die Thür gedreht werden darf.

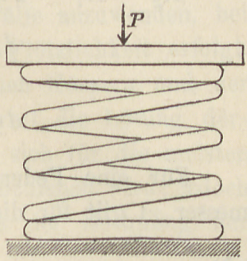
Gewundene Verdrehungsfedern dienen in feiner Ausführung als Federwaagen, in grösserem Maßstabe als Tragfedern bei Strassenbahn-Fuhrwerken und als Bufferfedern bei Eisenbahn-Fuhrwerken. Ein nach einem Kreise vom Halbmesser R gekrümmter Stab (Fig. 139) sei bei A fest eingespannt (auch gegen Verdrehung), bei B mit einem nach dem Mittelpunkte führenden steifen Arme von der Länge R versehen, an dessen Ende eine rechtwinklig zur Ebene des Kreises stehende Kraft P wirkt. Die Kraft P übt dann auf alle Querschnitte des Stabes einen Verdrehungsmoment PR aus, erzeugt an einem Bogentheilchen ds einen Verdrehungswinkel, der aus Gl. 4, S. 65, bezw. Gl. 16, S. 71, folgt, wenn man l mit ds vertauscht. Bei einem Mittelpunktswinkel α des Ringes hat man l mit $R\alpha$ zu vertauschen, um den Verdrehungswinkel ϑ zu erhalten, und $R\vartheta$ ist dann angenähert die Verschiebung f des Angriffspunktes der Kraft P, solange es sich um kleine ϑ bandelt.

Fig. 139.



Bei einer **cylindrischen Schraubenfeder** von n frei liegenden Windungen (Fig. 140) hat man dann l mit $2n\pi R$ zu vertauschen. Hiernach gilt für eine Feder, deren Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, nach S. 65:

Fig. 140.



$$9) \qquad \mathfrak{M} = PR = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2};$$

$$10) \quad \begin{cases} f = R\vartheta = \dfrac{P \cdot 2n\pi R^3}{GJ_0} = P\dfrac{4nR^3}{Gr^4} \\ \qquad = \dfrac{\tau}{G} 2n\pi \dfrac{R^2}{r}. \end{cases}$$

Bei der Benutzung solcher Federn zu Waagen und Kraftmessern bedingt die Verhältnis-Gleichheit von f und P eine gleichmässige Theilung.

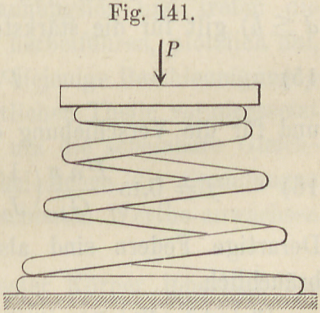
Für eine Feder von rechteckigem Querschnitte ist nach S. 69:

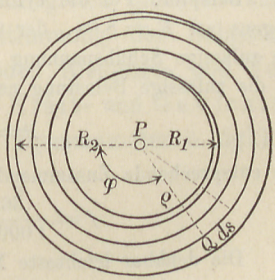
$$11) \qquad \mathfrak{M} = PR = \frac{8}{3}\tau\frac{J_2}{d} = \frac{2}{9}\tau h d^2;$$

$$12) \qquad f = 1{,}6\frac{\tau}{G}\frac{n\pi R^2}{d}\left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) = 1{,}6\frac{\tau}{G}\frac{n\pi R^2}{d}\left(1 + \frac{d^2}{h^2}\right).$$

Eine **kegelförmige Schraubenfeder** (Fig. 141) bildet im Grundrisse eine Spirale. Für einen Punkt Q im Abstande ϱ von der Achse ist das Moment $P\varrho$, wechselnd von PR_1 bis PR_2. Ein Bogentheilchen ds giebt einen Verdrehungswinkel

Fig. 141.





$$\frac{\vartheta}{l} ds = \frac{\vartheta}{l} \varrho\, d\varphi$$

(wenn ϑ der Verdrehungswinkel für eine Länge l ist) und eine Verschiebung des Angriffspunktes von P um

$$df = \varrho \frac{\vartheta}{l} \varrho\, d\varphi.$$

Die Gesammtverschiebung ist also

$$f = \frac{1}{l} \int_0^{2n\pi} \vartheta \varrho^2 d\varphi.$$

Man kann annehmen, dass ϱ sich nach einem Geradlinien-Gesetze ändert, d. h.

$$\frac{R_2 - \varrho}{R_2 - R_1} = \frac{\varphi}{2n\pi} \quad \text{also} \quad \varrho = R_2 - \frac{R_2 - R_1}{2n\pi}\varphi, \quad \text{mit}$$

$$d\varrho = -\frac{R_2 - R_1}{2n\pi} d\varphi \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = -\frac{2n\pi}{R_2 - R_1} d\varrho .$$

Für eine Feder von kreisförmigem Querschnitte (Halbmesser r) gilt für die stärkste Spannung τ die Gleichung

13) $$PR_2 = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2} .$$

Ferner ist $$\vartheta = \frac{P\varrho}{GJ_0} l, \quad \text{daher}$$

$$f = -\frac{P}{GJ_0}\frac{2n\pi}{R_2 - R_1}\int_{R_2}^{R_1} \varrho^3 d\varrho = \frac{Pn\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2GJ_0(R_2 - R_1)}$$

14) $$f = \frac{Pn\pi}{2GJ_0}(R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1) .$$

Für eine Feder von rechteckigem Querschnitte ($d \cdot h$ mit $d \leqq h$) gilt für die stärkste Spannung τ die Gleichung:

15) $$PR_2 = \frac{8}{3}\tau\frac{J_2}{d},$$

und für die Verschiebung erhält man leicht

16) $$f = 0{,}15\frac{Pn\pi}{G}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1}\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)\left(R_2 + R_1\right).$$

Derartige Federn sind als Bufferfedern der Eisenbahnwagen gebräuchlich.

Beispiel: Für die cylindrische Schrauben-Tragfeder eines Strassenbahnwagens sei $R = 8$ cm, der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser $r = 1$ cm, die zulässige Schubspannung $\tau = 3600$ at; $G = 1\,000\,000$ at; $n = 8$. Dann ist die zulässige Belastung nach Gl. 9

$$P = \frac{3600 \cdot 1 \cdot \pi}{2 \cdot 8} = 707 \text{ kg},$$

die entsprechende Zusammendrückung nach Gl. 10

$$f = \frac{3600}{1\,000\,000} 2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot 64 = 11{,}_6 \text{ cm} .$$

Die denkbar leichteste Metallfeder würde eine aus einer dünnwandigen Röhre gewundene cylindrische Schraubenfeder sein.

Schlussbemerkung: Bei sämmtlichen vorstehenden Untersuchungen über Formänderungs-Arbeit und ihre Anwendung wurde die Masse des elastischen Körpers vernachlässigt. Auf Grund dieser Vernachlässigung war es zulässig, die für eine langsame stetige Formänderung hergeleitete Arbeit auch auf Fälle anzuwenden, bei denen die Formänderung mit einer gewissen Plötzlichkeit erfolgt. Die Berücksichtigung der Masse des elastischen Körpers und der Beschleunigung seiner einzelnen Theile erschwert die Lösung derartiger Aufgaben in solchem Grade, dass man sich für die meisten Fälle der vorstehend entwickelten Gleichungen bedienen wird; jedoch darf man nicht übersehen, dass das Ergebnis der Rechnung nur annähernd richtig sein kann.

Eine plötzliche Belastung, jedoch ohne Stoss, hat stets Schwingungen zur Folge, bei denen die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichts-Spannung beträgt. Dieses Ergebnis findet auch Anwendung auf die verschiedenen Fälle der Beschleunigungs-Zustände elastischer Körper. Auf S. 90 wurde ausdrücklich vorausgesetzt, dass sämmtliche Theile des Körpers übereinstimmende Bewegung haben. Der Körper befindet sich dann in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen Raum, der dieselbe Bewegung ausführt. War der Körper vorher spannungslos und treten die Kräfte, die den Beschleunigungs-Zustand herbeiführen, plötzlich auf, so wird nur der Schwerpunkt des Körpers diejenige Beschleunigung p haben, welche S. 90 u. ff. für seine sämmtlichen Theile vorausgesetzt war. Die einzelnen Theile aber werden um die scheinbare Gleichgewichtslage Schwingungen ausführen, bei denen die Spannungen auf das Doppelte der auf S. 90 u. ff. berechneten Werthe anwachsen können.

Da die Formänderungen elastisch-fester Körper innerhalb der Elasticitätsgrenze den Belastungen verhältnisgleich sind, so kann die Messung der Formänderung zur Bestimmung der Belastung benutzt werden. Aus diesem Grunde finden Biegungs- und Verdrehungsfedern ausgedehnte Anwendung bei Kraft- und Gewichtsmessern (Federwaagen, Federmanometer, Dynamometer u. dgl.)

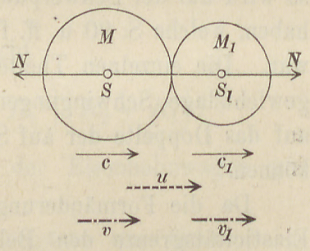
D. Stoss elastisch-fester Körper.

Treten zwei Körper während der Bewegung mit einander in Berührung und haben sie an der Berührungsstelle verschiedene Geschwindigkeit, so werden sie im Allgemeinen gegenseitig auf ihre Bewegung einwirken, d. h. gegenseitige Kräfte auf einander ausüben. Die hiermit zusammenhängenden Bewegungs-Erscheinungen nennt man Stoss. Die Richtungslinie des gegenseitigen Normaldrucks zwischen den Körpern heisst die Stosslinie. Geht die Stosslinie durch die Schwerpunkte beider Körper, so heisst der Stoss central, sonst excentrisch. Bewegen sich beide Körper rein fortschreitend, u. zw. in der Richtung der Stosslinie, so heisst der Stoss ein gerader.

I. Gerader centraler Stoss.

Der stossende Köper habe die Masse M und im Augenblicke des Zusammentreffens die Geschwindigkeit c, der getroffene Körper von der Masse M_1 die kleinere Geschwindigkeit c_1. Die Körper üben nun an der Berührungsstelle gegenseitige gleiche Normalkräfte N auf einander aus und drücken sich gegenseitig zusammen, bis der Abstand der Schwerpunkte S und S_1 beider Körper den kleinsten Werth erreicht hat. Bis zu diesem Augenblicke hat sich die Kraft N, von Null beginnend, stetig vergrössert. Diese Erscheinungen bilden den ersten Abschnitt der Stossdauer. Darnach erfolgt dann im zweiten Abschnitte des Stosses eine Wiederausdehnung der Körper, wobei die Schwerpunkte sich wieder von einander entfernen. In dem Augenblicke der stärksten Formänderung, welcher zwischen beiden Abschnitten des Stosses liegt, haben die Schwerpunkte aufgehört, sich zu nähern und beginnen, sich von einander zu entfernen. In diesem Zeitpunkte ist also die scheinbare (relative) Geschwindigkeit der beiden Schwerpunkte gegen

Fig. 142.



einander Null, d. h. beide haben eine gemeinsame Geschwindigkeit u. Im zweiten Abschnitte wirkt die Kraft im Allgemeinen noch fort, verzögert M noch weiter bis auf die Geschwindigkeit v und beschleunigt gleichzeitig M_1 bis zur Geschwindigkeit v_1. Mit dem Eintritte dieser Geschwindigkeiten mag die gegenseitige Einwirkung (N) aufhören und damit auch der Stoss beendet sein.

Es kommt darauf an, aus den Geschwindigkeiten c und c_1 vor dem Stosse die Geschwindigkeiten v und v_1 nach dem Stosse zu ermitteln.

In den Figuren sind die Geschwindigkeiten vor dem Stosse mit vollen Linien, die Geschwiedigkeiten im Augenblicke der stärksten Formänderung gestrichelt, die Geschwindigkeiten nach dem Stosse strichpunktirt.

Sehr einfach ist die Bestimmung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u im Augenblicke der stärksten Formänderung. Die Verzögerung p des Schwerpunktes der stossenden Masse M und die Beschleunigung p_1 des Schwerpunktes der gestossenen Masse M_1 sind $p = \frac{N}{M}$; $p_1 = \frac{N}{M_1}$, ihr Verhältnis

$$1) \qquad p : p_1 = M_1 : M,$$

d. h. umgekehrt wie die Massen. Die Geschwindigkeits-Änderungen von S bezw. S_1 während eines Zeittheilchens sind $p\,dt$ und $p_1\,dt$ und stehen in demselben Verhältnisse $M_1 : M$. Da dieses Verhältnis ganz unabhängig von der (sehr veränderlichen) Grösse der Kraft N ist, so müssen in demselben unveränderlichen Verhältnis auch die Geschwindigkeits-Änderungen der beiden Massen für jeden beliebigen Theil des Stosses, sowie auch für die ganze Stossdauer stehen. Daher für den ersten Abschnittt des Stosses:

$$2) \qquad \frac{c - u}{u - c_1} = \frac{M_1}{M};$$

für den zweiten Abschnitt:

$$3) \qquad \frac{u - v}{v_1 - u} = \frac{M_1}{M};$$

für den ganzen Stoss:

$$4) \qquad \frac{c - v}{v_1 - c_1} = \frac{M_1}{M}.$$

Aus Gl. 2 findet man leicht die Unbekannte

$$5) \qquad u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}.$$

Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeits-Aenderungen der beiden Massen im ersten Abschnitte des Stosses, wenn man in $c - u$ und $u - c_1$ den Werth von u nach Gl. 5 einsetzt und möglichst zusammenzieht, zu

$$6) \qquad c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} \quad \text{und}$$

$$7) \qquad u - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Diese Vorgänge im ersten Abschnitte des Stosses sind von der Beschaffenheit der Körper und von der Heftigkeit des Stosses ganz unabhängig. Anders ist es mit den Vorgängen im zweiten Abschnitte; diese lassen sich nicht mehr mit gleicher Schärfe bestimmen, da sie wesentlich von dem Grade des elastischen Verhaltens der Körper abhängig sind, zu dessen Kennzeichnung eine Erfahrungsgrösse eingeführt werden muss. Die Geschwindigkeits-Änderung $u - v$ der Masse M während des zweiten Abschnittes werde nämlich auf die Geschwindigkeits-Änderung $c - u$ derselben Masse im ersten Abschnitte bezogen durch die Festsetzung

$$u - v = k\,(c - u).$$

Dieses selbe Verhältnis gilt dann wegen Gl. 2 u. 3 auch für die Masse M_1, d. h.

$$v_1 - u = k\,(u - c_1).$$

Die Verhältniszahl k heisst der Koëfficient der Stoss-Elasticität, wofür wir kürzer Stossziffer sagen. Wenn die Geschwindigkeits-Abnahme der Masse M im zweiten Abschnitte k mal so gross ist wie im ersten, so muss sie während beider Abschnitte das $(1 + k)$ fache derjenigen des ersten Abschnittes betragen, daher

$$c - v = (c - u)\,(1 + k)$$

und ebenso die Geschwindigkeit-Zunahme vom M:

$$v_1 - c_1 = (u - c_1\,(1 + k),$$

oder mit Hülfe der Gl. 6 u. 7:

8) $$c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k).$$

9) $$v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k).$$

Der Zähler der rechten Seiten ist der Geschwindigkeits-Unterschied der beiden Massen beim Zusammentreffen, den wir kurz die Stossgeschwindigkeit nennen wollen. Von dieser ist die Heftigkeit des Stosses abhängig. Die Nenner in Gl. 8 u. 9 haben die Form 1 + Verhältnis der beiden Massen, wobei diejenige Masse zuerst geschrieben wird, um deren Geschwindigkeit es sich gerade handelt.

Für die Grösse k ergiebt sich noch eine andere Bedeutung, wenn man die Gl. 8 u. 9 zusammenzählt und bedenkt, dass

$$\frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}} + \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}} = 1 \text{ wird,}$$

$$c - v + v_1 - c_1 = (c - c_1)(1 + k) \text{ oder}$$

$$v_1 - v = (c - c_1)\, k, \text{ daher ist}$$

10) $$k = \frac{v_1 - v}{c - c_1} = \frac{\text{Geschwindigkeits-Unterschied nach dem Stosse}}{\text{Geschwindigkeits-Unterschied vor dem Stosse}}.$$

Vergleicht man das gesammte Arbeitsvermögen beider Massen vor dem Stosse mit demjenigen nach dem Stosse, so ergiebt sich in Allgemeinen ein Unterschied, u. zw. von der Grösse

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} (M c^2 + M_1 c_1^2 - M_1 v^2 - M_1 v_1^2)$$

oder anders geordnet

$$2\,\mathfrak{A} = M (c^2 - v^2) - M_1 (v_1^2 - c_1^2)$$

$$= M (c - v)(c + v) - M_1 (v_1 - c_1)(v_1 + c_1).$$

Weil nun nach Gl. 4: $M_1 (v_1 - c_1) = M (c - v)$ ist, so wird auch

$$2\,\mathfrak{A} = M (c - v)\{c + v - (v_1 + c_1)\} = M (c - v)\{c - c_1 - (v_1 - v)\}.$$

Setzt man hierin die Beziehung $v_1 - v = (c - c_1)\,k$ (Gl. 10) ein, so wird $2\,\mathfrak{A} = M(c - v)\,(c - c_1)\,(1 - k)$, und es entsteht schliesslich, wenn man noch nach Gl. 8 $c - v$ auf $c - c_1$ zurückführt:

$$\mathfrak{A} = \frac{M}{2}\,\frac{(c - c_1)^2}{1 + \frac{M}{M_1}}\,(1 - k^2) \text{ oder}$$

$$11) \qquad \mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1}\,\frac{(c - c_1)^2}{2}\,(1 - k^2).$$

a) Festsetzung der Stossziffer k.

1) Verhalten sich die Körper beim Stosse vollkommen elastisch, so werden sie nach Beendigung des Stosses keine bleibende Formänderung zeigen. Die negative Arbeit der inneren Spannkräfte bei der Zusammendrückung wird dann durch die positive Arbeit bei der Rückkehr in den spannungslosen Zustand vollständig aufgehoben. Da nun, wenn man beide Massen als eine Gruppe auffasst, N eine innere Kraft ist und äussere Kräfte nicht vorhanden sind, so muss das Arbeitsvermögen nach dem Stosse dieselbe Grösse haben wie vor dem Stosse. Es bedingt dies, dass in Gl. 11) $1 - k^2 = 0$, mithin $k = 1$ werde. Beim vollkommen elastischen Stoss ist also die Stossziffer $k = 1$.

2) Der Gegensatz hierzu ist, dass die Körper beim Stosse sich gar nicht elastisch, sondern vielmehr vollkommen bildsam oder plastisch verhalten, dass sie nach dem Eintreten der stärksten Formänderung gar kein Bestreben haben, zur ursprünglichen Form zurückzukehren. In diesem Falle kommt der zweite Abschnitt des Stosses gar nicht zu Stande; es ist sonach $k = 0$; die Geschwindigkeiten v und v_1 werden beide $= u$, d. h. die beiden Körper gehen nach dem Stosse mit gleicher Geschwindigkeit u weiter. In diesem Falle besteht die Arbeitsverrichtung nur in der negativen Zusammendrückungs-Arbeit, die den Verlust an Arbeitsvermögen hervorruft

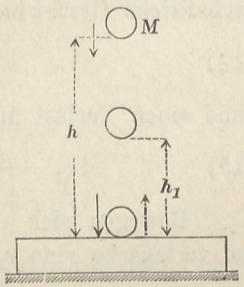
$$12) \qquad \mathfrak{A} = \frac{M M_1}{M + M_1}\,\frac{(c - c_1)^2}{2};$$

man erhält diesen Werth, indem man in Gl. 11 $k = 0$ setzt. Also: beim vollkommen unelastischen Stosse ist die Stossziffer $k = 0$.

3) Streng genommen giebt es weder einen vollkommen elastischen, noch vollkommen unelastischen Stoss; vielmehr sind die wirklichen Stösse unvollkommen elastisch, und es liegt k zwischen 0 und 1. Ob ein Stoss mehr oder weniger elastisch ausfällt, hängt nicht allein von der Beschaffenheit der Körper ab, sondern auch von der Heftigkeit des Stosses, von der Stossgeschwindigkeit $c - c_1$. Die Stossziffer nähert sich um so mehr der Einheit, je elastischer die Körper sind (Elfenbein, Glas, Kautschuk) und je geringer die Heftigkeit des Stosses ist; sie nähert sich um so mehr der Null, je bildsamer die Körper sind (Wachs, Blei, ungebrannter Thon) und je heftiger der Stoss erfolgt.

Für einen gegebenen Fall kann man die Stossziffer k durch Versuche ermitteln. Auf einen festen Boden (Fig. 143) legt man eine Platte aus bestimmtem Stoffe, lässt eine Kugel M von ebenfalls bestimmtem Stoffe aus einer Höhe h herabfallen und beobachtet, bis zu welcher Höhe h_1 sie wieder emporspringt. Um auf diesen Fall die Gl. 8 und 9 anwenden zu können, muss man zunächst beachten, dass die in diese Gleichungen einzuführende Masse M_1 nicht gleich der Masse der Platte ist, dass vielmehr die Platte, weil sie auf dem unnachgiebigen Erdboden gelagert ist, für den Stoss gewissermassen mit der ganzen Erde zusammen eine Masse M_1 bildet, so dass $M_1 : M = \infty$ oder $M : M_1 = 0$ zu setzen ist. In allen Fällen, wo ein durch einen Stoss getroffener Körper in irgend einer Weise unbeweglich gemacht ist, kommt dieser Umstand dadurch zum Ausdrucke, dass man $M : M_1 = 0$ setzt, weil nur hierdurch in Gl. 9 die Geschwindigkeits-Änderung $v_1 - c_1$ zu Null gemacht wird.

Fig. 143.



Da die Platte die Geschwindigkeit $c_1 = 0$ hatte, so wird (Gl. 8)

$$c - v = c(1 + k) = c + ck,$$

also $v = -ck$. Nun ist $c = \sqrt{2gh}$; das negative Zeichen von ck bedeutet, dass die Geschwindigkeit nach dem Stosse aufwärts gerichtet ist. Es wird v gemessen durch die Steighöhe

$$h_1 = \frac{v^2}{2g} = k^2 \frac{c^2}{2g} = k^2 h,$$

mithin ist

13) $$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Für vollkommen elastischen Stoss müsste $h_1 = h$ werden; für $k = 0$ wird $h_1 = 0$. Die Ergebnisse eines solchen Versuches können natürlich nur auf solche Fälle angewandt werden, wo dieselben Stoffe vorliegen wie beim Versuch und auch die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ etwa $= \sqrt{2gh}$ ist. Der Luftwiderstand ist für kleine c zu vernachlässigen.

Für Geschwindigkeiten, wie sie auf dem Billard vorkommen, ist bei Elfenbein $k = 8/9$. Für geringe Geschwindigkeiten ist bei Glas $k = 15/16$, für Stahl und Kork $5/9$. Für Holz ist bei etwa $0{,}4$ m Fallhöhe $k = 1/2$.

b) Unelastischer Stoss.

Für $k = 0$ haben beide Körper nach dem Stosse die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

14) $$v = v_1 = u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}$$

und einen Verlust an Arbeitsvermögen (Gl. 11, S. 130)

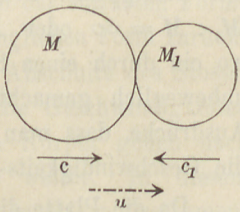
15) $$\mathfrak{A} = \frac{MM_1}{M + M_1} \frac{(c - c_1)^2}{2}.$$

Bewegen sich die beiden Körper gegen einander (Fig. 144), so vertausche man c_1 mit $-c_1$; dann wird

16) $$v = v_1 = u = \frac{Mc - M_1 c_1}{M + M_1}$$ und

17) $$\mathfrak{A} = \frac{MM_1}{M + M_1} \frac{(c + c_1)^2}{2}.$$

Fig. 144.



Sind noch beide Massen und deren Geschwindigkeiten einander gleich, so wird $v = v_1 = 0$ und

18) $$\mathfrak{A} = \frac{M}{2} \frac{4c^2}{2} = 2 \frac{Mc^2}{2},$$

d. h. in diesem Falle geht das gesammte durch die Geschwindigkeiten der Körper bedingte Arbeitsvermögen für die äussere Bewegung verloren. Freilich verschwindet das Arbeitsvermögen nicht spurlos, vielmehr wird es zum grössten Theile, wie die Arbeitsverluste durch Reibung (Theil 1, S. 265) in Wärme, zum kleineren Theil in Schallschwingungen umgewandelt.

c) Anwendung des Stosses; Einrammen von Pfählen.

Da die Geschwindigkeits-Aenderungen beim Stosse sehr schnell erfolgen, so wird die entsprechende Kraft N häufig sehr gross. Die technische Verwendung des Stosses hat meist den Zweck, mit vergleichsweise einfachen Mitteln grosse Kräfte auszuüben, z. B. beim Eintreiben von Nägeln und Pfählen, beim Schmieden u. dgl. Man könnte einen Nagel auch durch Belastung ins Holz eindrücken; jedoch ist dies zu umständlich; die zum Eindrücken erforderliche Kraft lässt sich mittels eines Hammerschlages in einfachster Weise hervorbringen.

Beim Eintreiben von Nägeln und dem Einrammen von Pfählen sind die Verhältnisse so beschaffen, dass man den Stoss als annähernd unelastisch ($k = 0$) annehmen kann. Auch hat der getroffene Körper M_1 vor dem Stosse die Geschwindigkeit $c_1 = 0$; daher wird

$$19) \qquad v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + M_1},$$

der Verlust an (äusserem) Arbeitsvermögen

$$20) \qquad \mathfrak{A} = \frac{MM_1}{M + M_1} \frac{c^2}{2} = \frac{Mc^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Bei letzterer Schreibweise von $\mathfrak{A}$ ist $^1/_2 Mc^2$ das vor dem Stosse vorhandene Arbeitsvermögen; der zugehörige Faktor ist die Verhältniszahl, welche angiebt, der wievielte Theil des ursprünglichen Arbeitsvermögens verloren geht. Während der sehr kurzen Stossdauer erfolgt noch keine erhebliche Bewegung der Masse M_1; nach dem Stosse aber gehen die Massen M und M_1 mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u weiter; der ihnen verbliebene Rest an äusserem Arbeitsvermögen

$$21) \qquad \mathfrak{A}_1 = \frac{Mc^2}{2} - \mathfrak{A} = \frac{Mc^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

wird nun dazu verwandt, den Widerstand W, der sich dem Eindringen des Nagels oder Pfahles entgegensetzt, längs eines Weges s, der Eindringungstiefe, zu überwinden. Hiernach ist $\mathfrak{A}_1$ gewissermassen die Nutzarbeit des Stosses, während $^1/_2 Mc^2$ durch Arbeitsaufwand erzeugt werden musste. Man kann daher bei Stössen, die

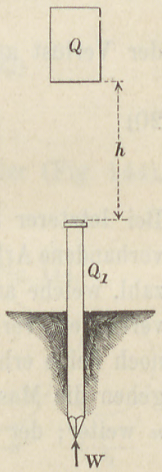
das Eintreiben eines Nagels oder Pfahles zum Zwecke haben, $\mathfrak{A}_1 : (1/2\, Mc^2)$ den Wirkungsgrad des Stosses

22) $$\eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

nennen. Dieser wird um so grösser, je kleiner $M_1 : M$, oder je grösser $M : M_1$ ist. Es muss daher der treibende Körper möglichst schwer im Verhältnisse zum getriebenen Körper sein. Würde der Hammer nur ebenso schwer sein wie der einzutreibende Nagel, so wäre η nur 0,5, d. h. von der zum Hammerschlag aufgewandten Muskelarbeit würde nur die Hälfte nutzbar, während die andere Hälfte in schädlicher Weise unter Erzeugung von Wärme und Schall dem Nagelkopfe bleibende Formänderungen ertheilte.

Beim Einrammen von Pfählen lässt man einen Rammklotz vom Gewicht $Q = Mg$ von einer Höhe h auf den Kopf des Pfahles vom Gewichte $Q_1 = M_1 g$ herabfallen (Fig. 145). Die für einen Schlag zum Heben des Rammklotzes aufgewandte Arbeit Qh setzt sich beim Fallen in äusseres Arbeitsvermögen $1/2\, Mc^2$ um; davon geht der Theil $\mathfrak{A}$ für den Zweck verloren, während mit dem Reste (Gl. 21)

Fig. 145.



$$\mathfrak{A}_1 = Qh \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}$$

beide Körper nach dem Stosse sich abwärts bewegen. Ist s die Wegeslänge dieser Weiterbewegung, so verrichtet die Schwere noch die Arbeit $(Q + Q_1)s$, während der Widerstand W des Erdreiches die Arbeit $-Ws$ leistet. Sonach ist

23) $$Ws = (Q + Q_1)s + Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}.$$

Hieraus kann man W berechnen, wenn s beobachtet wurde.

Beispiel: Ist $Q = 1200$ kg, $Q_1 = 600$ kg, $h = 80$ cm und $s = 0{,}5$ cm, so wird

$$W \cdot 0{,}5 = 1800 \cdot 0{,}5 + \frac{1200 \cdot 80}{1{,}5}$$

$$= 900 + 64000, \quad \text{daher}$$

$$W = 129800 \text{ kg}.$$

Das Glied $(Q + Q_1)s$ hat so unbedeutenden Einfluss, dass man genau genug

24) $$Ws = Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} \quad \text{setzt, mit}$$

$$W = 128000 \text{ kg}.$$

Bis zu diesem Werthe dürfte die Belastung des Pfahles steigen, ohne dass der Pfahl einsänke. Da aber diese Rechnung ziemlich roh ist, erfahrungsmässig auch der Widerstand des Erdreiches mit der Zeit abnimmt, so nimmt man von dem nach Gl. 24 berechneten Werthe von W nur etwa $^1/_{18}$ als mit Sicherheit zulässige Belastung, d. h. rund 7000 kg.

Berücksichtigung der Elasticität des Pfahles. Nach den Gleichungen 23 und 24 würde jeder Schlag von noch so geringer Fallhöhe h eine gewisse, wenn auch kleine Eindringungstiefe s des Pfahles zur Folge haben, da erst für $h = 0$ auch $s = 0$ wird. Dies trifft aber in Wirklichkeit nicht zu. Bis zu einem gewissen Grenzwerthe h_0 bringen Fallhöhen des Rammklotzes gar keine Eindringung des Pfahles hervor, sondern pressen nur den Pfahl elastisch zusammen, worauf er sich dann wieder ausdehnt. Soll sich nämlich der Pfahl vom Querschnitt F und der Länge l durch Einwirkung von oben unter Überwindung des Widerstandes W abwärts bewegen, so muss an dem unteren Ende des Pfahles eine Spannung $\sigma = W : F$ hervorgebracht sein, und man kann mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass nahezu der ganze Pfahl auf diese Spannung gebracht werden muss, bevor er einsinken wird. Dazu ist aber nach S. 101 eine Arbeit $\frac{V}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ erforderlich. Diese muss man von dem Arbeitsvermögen des Pfahles und des Rammklotzes abziehen, und erst der Rest ist $= Ws$ zu setzen. Mithin wird, weil $V = Fl$,

Fig. 146



25) $$Ws = \frac{Qh}{1 + \frac{Q_1}{Q}} - \frac{W^2 l}{2EF}.$$

Die unwirksame Fallhöhe h_0 erhält man, wenn man $s = 0$ und $h = h_0$ setzt, d. h.

26) $$\frac{Q h_0}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{W^2 l}{2 E F}.$$

Von der Höhe h wird also nur $h - h_0$ wirksam. Dieser Einfluss wird besonders bei langen Pfählen bedeutend.

Beispiel: Ist wiederum $Q = 1200$ kg, $Q_1 = 600$ kg, $h = 80$ cm, Pfahldicke $d = 30$ cm, $F = 700$ qcm, $l = 10$ m $= 1000$ cm, $E = 120000$ at, $s = 0{,}5$ cm, so wird

$$W \cdot 0{,}5 = \frac{1200 \cdot 80}{1{,}5} - \frac{W^2 1000}{2 \cdot 120000 \cdot 700}.$$

Dies giebt rund $W = 70000$ kg, wovon man etwa $^1/_{10}$, d. h. 7000 kg, als sicher zulässige Belastung des Pfahles nimmt. Für die unwirksame Fallhöhe wird $\frac{1200 \cdot h_0}{1{,}5} = \frac{70000^2 \cdot 1000}{2 \cdot 120000 \cdot 700}$ mit $h_0 =$ etwa 36 cm. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes wird dann der Wirkungsgrad der Ramme (statt nach Gl. 22) nur sein:

$$\eta_1 = \frac{Q(h - h_0)}{Q h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{Q(h - h_0)}{(Q + Q_1) h} = \frac{80 - 36}{1{,}5 \cdot 80} = 0{,}37.$$

Durch Vergrösserung von h würde derselbe erhöht werden. — Grossen praktischen Werth haben vorstehende Formeln leider nicht.

d) Hämmer zum Schmieden oder Nieten.

Die für die äussere Bewegung verloren gehende Arbeit $\mathfrak{A}$, welche unter Erwärmung eine bleibende Formänderung erzeugt, war beim Eintreiben von Nägeln, Pfählen u. dgl. ein Verlust, ist aber beim Schmieden oder Nieten gerade das Nützliche. Hierfür ist nach Gl. 20 (S. 133) der Wirkungsgrad

27) $$\eta = \frac{\mathfrak{A}}{^1/_2 M c^2} = \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Dieser wird gross, wenn $M_1 : M$ gross wird, d. h. wenn die getroffene Masse gross ist im Verhältnisse zur stossenden Masse. Zu diesem Zwecke legt man das Schmiedestück auf einen schweren Amboss und unterstützt diesen durch einen noch schwereren Körper, die Chabotte, welche bei Dampfhämmern tief in den Erdboden reicht. Amboss und Chabotte bilden dann in Bezug auf die Wirkung des Stosses mit dem Schmiedestück eine einzige Masse M_1. Ist z. B. $M_1 = 10 M$, so wird $\eta = 1 : 1{,}1 = 0{,}91$, d. h. es werden 91 %

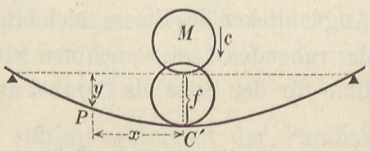
der aufgewandten Arbeit zur Formänderung verwandt, während 9 % der Arbeit die Chabotte allmählich tiefer in den Erdboden eintreiben.

Beim Nieten muss das Niet durch einen möglichst schweren Vorhalt-Hammer von der Masse M_1 gegen Fortbewegung durch den Schlag des Niethammers thunlichst geschützt werden.

e) Biegung durch den Stoss eines Körpers.

Dieser Fall wurde auf S. 114 unter der Voraussetzung behandelt, dass die Masse des getroffenen, auf Biegung beanspruchten Körpers vernachlässigt werden könne, Mit Rücksicht auf diese Masse kann man die Aufgabe in folgender Weise behandeln. Die bisherigen Gleichungen für den Stoss setzten voraus, dass sämmtliche Punkte des gestossenen Körpers sich im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung mit übereinstimmender Geschwindigkeit u weiter bewegten. Wird aber ein an beiden Enden unterstützter Stab von der Masse M_1 in seiner Mitte durch eine mit der Geschwindigkeit c dagegen stossende Masse M getroffen (Fig. 147), so wird der Stab sich biegen, und die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte werden in jedem Augenblick unter einander verschieden sein; an den Auflagern bleiben die Geschwindigkeiten Null, während sie nach der Mitte hin zunehmen. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte giebt das Verhältniss der Ordinaten der betreffenden Stellen einen Anhalt. Da die Wegeslängen y und f in gleichen Zeiten durchlaufen werden, so müssen die Geschwindigkeiten und ebenso auch die Beschleunigungen p_y nnd p_1 der Punkte P und C sich verhalten wie $y : f$, d. h. es ist

Fig. 147.



$$p_y = p_1 \frac{y}{f}.$$

Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (Theil I., S. 141) ist

$$\Sigma m p_y = \Sigma Y.$$

Darin bedeutet ΣY die Summe sämmtlicher äusseren Kräfte der Richtung der p_y. In irgend einem Augenblicke während des Stosses

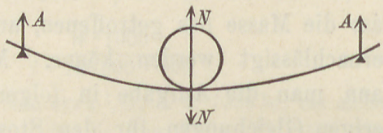
wirkt nun an dem getroffenen Stabe im Sinne der p_y die Kraft $N - 2A$ (Fig. 148), mithin wird

$$\Sigma m p_y = \frac{p_1}{f} \Sigma m y = N - 2A.$$

Darin ist m die Masse eines Längentheilchens, d. h. bei überall gleichem Querschnitte, den wir hier annehmen wollen,

$$m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dx.$$

Fig. 148.



Daher entsteht

$$\frac{p_1}{f} \frac{\gamma}{g} F \int y\, dx = N - 2A.$$

Man könnte nun $y : f$ aus der Gleichung der Biegungslinie für den Fall einer ruhigen Belastung ableiten. Da es aber zweifelhaft ist, ob die verschiedenen Biegungslinien, die in den verschiedenen Augenblicken des Stosses sich bilden, dieselbe Form haben wie diejenige der ruhenden Last, so nehmen wir der Einfachheit wegen die Biegungslinie für den Stoss als Parabel an. Dann wird $\int y\, dx = {}^2/_3 f l$, mithin

$$p_1 \frac{\gamma}{g} F l \frac{2}{3} = N - 2A, \text{ oder,}$$

weil $\gamma F l = M_1 g$ ist,

$$p_1 \cdot \frac{2}{3} M_1 = N - 2A.$$

Für den stossenden Körper ist $Mp = N$, mithin

$$p_1 \frac{2}{3} M_1 = Mp - 2A.$$

Es ist nun nicht etwa, wie im Gleichgewichtszustande $2A = N$; vielmehr ist $2A$ erheblich kleiner als N. Ist der Stoss sehr heftig, so pflanzt sich seine Wirkung nicht einmal bis zu den Stützpunkten fort; es bleibt (unter Vernachlässigung der Schwere) $A = 0$; der Druck N wirkt nur ausserordentlich kurze Zeit, wächst dabei zu einem verhältnismässig grossen Werth und bringt an dem Stab eine nur örtliche zerstörende Wirkung hervor, wie man z. B. mit einer Gewehrkugel versuchen kann. In solchem Fall ist von der Ausbildung einer Biegungslinie keine Rede. Aber auch bei weniger

heftigem Stosse kann doch meist $2A$ gegenüber N vernachlässigt werden, so dass

$$p : p_1 = {}^2/_3 M_1 : M \text{ ist.}$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. 1, S. 127, so findet man, dass an Stelle von M_1 nunmehr ${}^2/_3 M$ getreten ist. Es folgt dann in gleicher Weise wie dort (mit $c_1 =$ Null)

1) $$u = \frac{Mc}{M + {}^2/_3 M_1}$$

für die Geschwindigkeit des Stosspunktes im Augenblicke der stärksten Formänderung, während der Punkt P eine Geschwindigkeit

$$u_y = u \frac{y}{f} \quad \text{hat.}$$

Nehmen wir den Stoss, wie es in solchen Fällen meistens geschieht, als unelastisch an, so ist das gesammte Arbeitsvermögen beider Körper nach dem Stosse

$${}^1/_2 M u^2 + {}^1/_2 \Sigma m u_y^2,$$

wofür sich in ähnlicher Weise wie oben mit $m = \frac{M_1}{l} \cdot dx$

$$\frac{u^2}{2}\left(M + \frac{M_1}{f^2 l} \int y^2 \, dx\right)$$

ergiebt. Nun ist ${}^1/_2 \int y dx \cdot y$ das statische Moment der Parabelfläche in Bezug auf die Sehne, $= {}^2/_3 f l \cdot {}^2/_5 f$ (Theil 1, S. 133), mithin $\int y^2 \, dx = {}^8/_{15} f^2 l$; also wird das Arbeitsvermögen

2) $$\frac{u^2}{2}(M + {}^8/_{15} M_1)$$

oder, wenn man den obigen Werth für u (Gl. 1) einsetzt, und bedenkt, dass das Arbeitsvermögen in Biegungsarbeit (S. 111) umgewandelt wird,

3) $$\frac{Mc^2}{2} \frac{1 + \frac{8}{15}\frac{M_1}{M}}{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{M_1}{M}\right)^2} = \frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E}\frac{i^2}{e^2}.$$

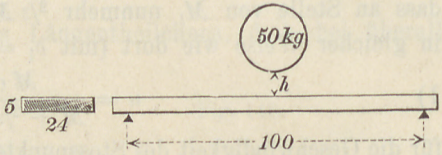
Die Umständlichkeit dieser Formel steht nicht im Verhältnisse zur Sicherheit ihrer Grundlagen. Innerhalb ziemlich weiter Grenzen ($M_1 : M = {}^1/_{10}$ bis 10) kann man dafür annäherungsweise einfacher schreiben

4) $$\frac{Mc^2}{2} \frac{1}{\left(1 + 0{,}8\frac{M_1}{M}\right)} = \frac{V}{6}\frac{\sigma^2}{E}\frac{i^2}{e^2}.$$

Beispiel: Auf die Mitte einer Bohle von 1 m Spannweite, 24 cm Breite, 5 cm Stärke (Fig. 149) falle ein Gewicht von 50 kg. Wie gross darf die Fallhöhe h sein, damit die Bohle nicht über 170 at gespannt werde? Wiegt ein 1 cbm Holz 600 kg, so wird das Gewicht der Bohle

$$Q_1 = 1 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}05 \cdot 600 = 7{,}2 \text{ kg}.$$

Fig. 149.



Es wird $\frac{1}{2} M c^2 = Q h$.

Die obigen Gleichungen gelten für einen Stoss in wagerechter Richtung, bei dem die Schwere keine Arbeit verrichtet. Beim lothrecht abwärts erfolgenden Stoss aber verrichtet die Schwere eine Arbeit, während die Bohle sich um f durchbiegt. Das Gewicht Q leistet die Arbeit Qf, das Gewicht Q_1 der Bohle aber $\frac{2}{3} Qf$, weil ein beliebiges Theilchen der Bohle nur um y sinkt (vergl. S. 137, Fig. 147). Nun beträgt die Durchbiegung der Bohle bei $\sigma = 170$ at nach S. 46, Gl. 14:

$$f = \frac{1}{12} \frac{170}{120000} \frac{100^2}{2{,}5} = 0{,}47 \text{ cm},$$

daher wird nach Gl. 4 (mit $i^2 : e^2 = 1/3$, vgl. S. 112)

$$\frac{50\,h}{1 + 0{,}8 \cdot \frac{7{,}2}{50}} + 0{,}47 \left(50 + \frac{2}{3} 7{,}2\right) = \frac{12000}{18} \frac{170^2}{120000}$$

oder $h = 3$ cm.

Im Ruhezustande entspricht der Belastung mit 50 kg nur eine Spannung

$$\sigma = \frac{50 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 24 \cdot 5^2} = 12{,}5 \text{ at},$$

und schon durch einen Fall der Last von 3 cm Höhe steigt die Spannung auf das 13,6fache. Hiernach ist es begreiflich, dass man die in Gleichgewichts-Berechnungen einzusetzenden Spannungen oft nur sehr gering annehmen darf, wenn Stösse der Last zu erwarten sind.

f) Vollkommen elastischer Stoss.

Je kleiner die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ und je elastischer die Körper sind, um so mehr wird sich k dem Werth 1 nähern. Für $k = 1$ wird nach Gl 8), S. 129

1) $$c - v = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}}; \quad v_1 - c_1 = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

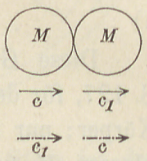
Sind die Massen einander gleich, wie es bei Billardkugeln annähernd zutrifft (Fig. 150), so wird

$$c - v = c - c_1, \quad \text{d. h. } v = c_1,$$

$$v_1 - c_1 = c - c_1, \quad \text{d. h. } v_1 = c;$$

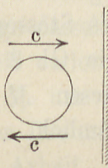
d h. es vertauschen die Massen ihre Geschwindigkeiten. Sind die Kugeln im Aussehen nicht verschieden, so sieht man die Wirkung des Stosses kaum. Denn mit der Geschwindigkeit c, die vorher die eine Kugel hatte, bewegt sich auch nach dem Stoss eine Kugel weiter, ebenso mit der Geschwindigkeit c_1 die andere, gerade wie wenn sich die Kugeln durchdrungen hätten.

Fig. 150.



Dieser Fall findet auch Anwendung auf Eisenbahnwagen, wenn dieselben beim Verschieben mit geringer Stossgeschwindigkeit auf einander treffen; denn bei geringer Heftigkeit des Stosses verhalten sich die Bufferfedern ziemlich elastisch. Bei ungleichen Massen sind die Gl. 1) anzuwenden.

Fig 151.



Stösst ein Körper gegen eine ruhende und unbewegliche elastische Wand, so muss (wie S. 131) $M_1 : M = \infty$ gesetzt werden. Dann wird

$$c - v = \frac{2c}{1+0}, \quad \text{d. h. } v = -c.$$

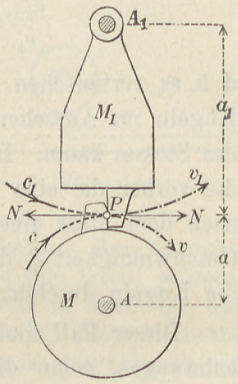
Der Körper wird also mit der gleichen Geschwindigkeit von der Wand zurückgeworfen, mit der er dieselbe traf.

2. Stoss sich drehender Körper.

Zwei Körper drehen sich um feste Parallelachsen A u. A_1 und treffen derartig zusammen, dass zwischen ihnen ein gegenseitiger Druck N auftritt, der rechtwinklig zu der Ebene beider Drehachsen steht und diese Ebene in P schneidet. Dann ist P der Stosspunkt; er sei von A u. A_1 um a bezw. a_1 entfernt. Die Umfangsgeschwindigkeiten beider Körper am Stosspunkte mögen c bezw. c_1 betragen. Diese Geschwindigkeiten sind der Unterscheidung wegen auf dem Drehungskreise angedeutet, ebenso die Geschwindigkeiten v und v_1 nach dem Stoss (an der rechten Seite der Figur). Der Druck N

ertheilt der stossenden Masse eine im Stosspunkte gemessene Umfangs-Verzögerung $p = \frac{N}{\mu}$ und der gestossenen Masse an derselben Stelle eine Umfangs-Beschleunigung $p_1 = \frac{N}{\mu_1}$, wenn μ und μ_1 die auf den Stosspunkt bezogenen Massen der beiden Körper sind (Theil 1, S. 268). Hiernach ist

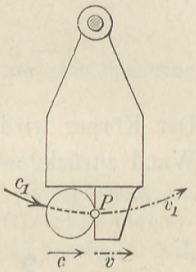
Fig. 152.



1) $$p : p_1 = \mu_1 : \mu .$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. 1, S. 127, für den geraden centralen Stoss freier Körper; nur treten an die Stelle der wahren Massen M_1 und M hier die auf P bezogenen Massen μ_1 und μ, welche den Bedingungen $J = \mu a^2$, $J_1 = \mu_1 a_1^2$ genügen, wenn J und J_1 die Trägheitsmomente der Körper in Bezug auf die Drehachsen sind. Hiernach ergeben sich auch für die Geschwindigkeits-Änderungen während des Stosses die Gleichungen in derselben Weise wie Gl. 8 und 9, S. 129, wenn man auch in diesen M und M_1 mit μ und μ_1 vertauscht; nämlich

Fig. 153.



2) $$c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu}{\mu_1}} (1 + k)$$

3) $$v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{\mu}} (1 + k) .$$

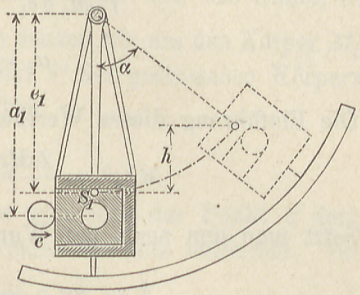
Ist der stossende Körper aber ein freier Körper, der sich in der Richtung der Stosslinie fortschreitend bewegt und dessen Schwerpunkt auf der Stosslinie liegt (Fig. 153), so gelten obige Gleichungen mit der Abänderung, dass für μ wieder die wahre Masse M eintritt.

Ballistisches Pendel.

Diese Vorrichtung hat Ähnlichkeit mit Fig. 154 und ist in früherer Zeit benutzt worden, um aus der Bewegung des Pendels nach dem Stosse die Geschwindigkeit c des dagegen abgefeuerten

Geschosses M zu berechnen. Diese Einrichtung ist ein so vorzügliches Beispiel zu den hier behandelten Vorgängen, dass sie hier besprochen werden soll, wiewohl sie jetzt in der Anwendung durch vollkommenere Vorrichtungen ersetzt ist.

Fig. 154.



Das Pendel hat an der Stelle, gegen die das Geschoss abgefeuert wird, einen vorn offenen, eisernen Kasten, der mit trockenem Thon, weichem Holz u. dgl. gefüllt ist, so dass das Geschoss darin stecken bleibt und der Stoss als unelastisch ($k = 0$) angesehen werden kann. Vor dem Stoss ist das Pendel in Ruhe. Daher wird nach Gl. 2 und 3, S. 142 oder nach Gl. 5, S. 128

$$4) \qquad v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + \mu_1}.$$

Bei der Drehbewegung des Pendels nach dem Stosse möge dasselbe einen Winkel α beschreiben, bis es seine Geschwindigkeit verloren hat und zurückschwingt. Ist nun sein Schwerpunkt S_1 um e_1 von der Drehachse entfernt, so hebt sich dieser bei der Drehung um $h = e_1 (1 - \cos \alpha)$. Dann ist nach dem Satze der Arbeit

$$5) \qquad (M + \mu_1) \frac{{v_1}^2}{2} = (Mga_1 + M_1 g e_1)(1 - \cos \alpha);$$

die linke Seite ist das Arbeitsvermögen von Pendel und Geschoss nach dem Stosse, die rechte Seite der absolute Werth der Arbeit der Schwerkraft beim Ausschlage des Pendels.

Bei der Ausführung musste das Pendel stets sehr schwer sein im Verhältnisse zum Geschosse, so dass M gegen M_1 und μ_1 zu vernachlässigen ist. Zur Vereinfachung der Formeln empfiehlt es sich, schon jetzt diese Vernachlässigung vorzunehmen. Dann wird aus Gl. 4 und 5:

$$6) \qquad M^2 c^2 = 2 M_1 \mu_1 g e_1 (1 - \cos \alpha).$$

Die auf den Abstand a_1 bezogene Masse μ_1 kann nun ebenfalls durch einen Versuch ermittelt werden, indem man das Pendel

schwingen lässt und seine Schwingungsdauer t beobachtet. Für diese gilt (nach Theil 1, S. 279)

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_1}{M_1 g e_1}} = \pi \sqrt{\frac{\mu_1 a_1^2}{M_1 g e_1}}, \quad \text{so dass}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1 g e_1 t^2}{a_1^2 \pi^2}.$$

Die Einführung dieses Werthes in Gl. 6 liefert

$$M^2 c^2 = \frac{2 M_1^2 g^2 e_1^2 t^2 (1 - \cos \alpha)}{a_1^2 \pi^2}.$$

Setzt man nun noch, um Wurzelausdrücke zu vermeiden,

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \text{so wird}$$

7) $$c = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{g t}{\pi} \frac{M_1}{M} \frac{e_1}{a_1}.$$

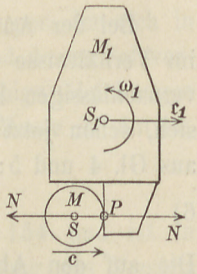
Beispiel: Es sei $M_1 = 500 M$, $t = 1{,}6$ sek.; $M_1 e_1$ kann nach Theil 1, S. 283, Fig. 352 gemessen werden; es sei $e_1 = 2{,}2$ m. Der untere Zeiger des Pendels bewegt sich in einem geschlitzten Gradbogen, der vor dem Versuche mit Talg ausgestrichen wurde, so dass man, wenn das Pendel wieder zur Ruhe gekommen ist, α bequem ablesen kann; es sei $\alpha = 18°$. Die Stelle, wo das Geschoss eingedrungen, sei um $a_1 = 2{,}7$ m von der Drehachse entfernt. Dann wird

$$c = 2 \sin 9^0 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1{,}6}{\pi} 500 \cdot \frac{2{,}2}{2{,}7} = 637 \text{ m}.$$

3. Excentrischer Stoss.

Die Masse M stosse derartig gegen die Masse M_1, dass der Stossdruck N wohl durch den Schwerpunkt S von M, nicht aber durch den Schwerpunkt S_1 von M_1 gehe, sondern von diesem einen Abstand a_1 habe (Fig. 155). Dann wird M_1 durch N eine Winkelbeschleunigung erfahren; aus diesem Grunde wollen wir annehmen, dass M_1 vor dem Stosse schon eine Drehbewegung habe. Eine Achse durch S_1, rechtwinklig zur Bildebene, sei für M_1 eine freie Achse; um diese drehe sich der Körper vor dem Stosse mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1. Die Bildebene sei eine Ebene E, welche durch den Schwerpunkt S_1 rechtwinklig zu jener Achse S_1 gelegt ist; in

Fig. 155.



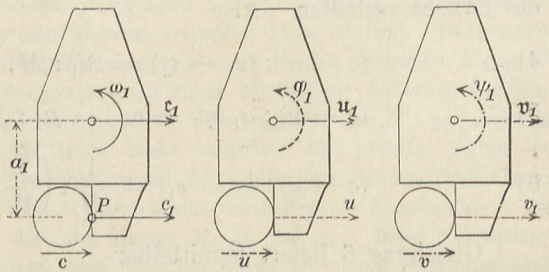
ihr befinde sich der Stosspunkt P und auch der Stossdruck N. Der Körper M_1 habe vor dem Stosse noch eine Verschiebungs-Geschwindigkeit c_1, parallel mit N. Für den Körper M sei der Stoss gerade und central; seine Geschwindigkeit sei, wie früher, c.

Der leichteren Vorstellung wegen denken wir uns den Körper M_1 starr und nur M elastisch. Der Punkt P des gestossenen Körpers hat vor dem Stosse die Geschwindigkeit

$$c_1 = c_1 + a_1 \omega_1 .$$

Im ersten Abschnitte des Stosses wird sich der Punkt S dem Punkte P nähern, im zweiten sich wieder von ihm entfernen. Im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung haben P und S gleiche Geschwindigkeit u. In diesem Zeitpunkte habe M_1 die Verschiebungsgeschwindigkeit u_1, die Winkelgeschwindigkeit φ_1 (Fig. 156), so dass $u = u_1 + a_1 \varphi_1$ sein muss. Nach dem Stosse habe M die Geschwindigkeit v, M_1 die Verschiebungsgeschwindigkeit v_1, die Winkelgeschwindigkeit ψ_1, die Geschwindigkeit am Stosspunkte $v_1 = v_1 + a_1 \psi_1$.

Fig. 156.



In irgend einem Augenblicke des Stosses hat M die Verzögerung

$$1) \qquad p = \frac{N}{M},$$

der Schwerpunkt S_1 die Beschleunigung

$$2) \qquad p_1 = \frac{N}{M_1},$$

M_1 (nach Theil 1, S. 276 mit $\mathfrak{M} = N a_1$) die Winkelbeschleunigung

$$3) \qquad \varepsilon_1 = \frac{N}{\mu_1 a_1}$$

(wenn $J_1 = \mu_1 a_1^2$ das Trägheitsmoment der Masse M_1 in Bezug

auf die Schwerpunktsachse S_1 ist), der Punkt P der Masse M_1, mithin die Gesammtbeschleunigung

$$p_1 = \mathfrak{p}_1 + a_1\varepsilon_1 = N\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Hieraus ergeben sich die Verhältnisse

$$p : \mathfrak{p}_1 = M_1 : M,$$

$$p : a_1\varepsilon_1 = \mu_1 : M,$$

$$p : p_1 = \frac{1}{M} : \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Ebenso wie diese Beschleunigungen müssen sich auch die entsprechenden Geschwindigkeits-Änderungen im ersten Abschnitte des Stosses verhalten. Also

4) $$(c - u) : (\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{c}_1) = M_1 : M,$$

5) $$(c - u) : a_1(\varphi_1 - \omega_1) = \mu_1 : M,$$

6) $$(c - u) : (u - c_1) = \frac{1}{M} : \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Gleichung 6 liefert unmittelbar

$$u = \frac{c\left(\frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}\right) + c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}}$$ und darnach wird

7) $$c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}}.$$

In Verbindung mit Gl. 4 ensteht dann

8) $$\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{c}_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M} + \frac{M_1}{\mu_1}},$$

während Gl. 5 und 7 ergeben

9) $$a_1(\varphi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}}.$$

Die Geschwindigkeits-Änderungen innerhalb der ganzen Dauer des Stosses erhält man nun, indem man die des ersten Abschnittes noch mit $1 + k$ multiplicirt. Daher

$$10) \qquad c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}} (1 + k),$$

$$11) \qquad v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M} + \frac{M_1}{\mu_1}} (1 + k),$$

$$12) \qquad a_1 (\psi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}} (1 + k).$$

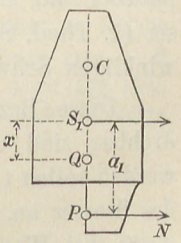
Das Bildungsgesetz dieser Gleichungen 10—12 ist fast ebenso einfach wie das der Gleichungen für den geraden centralen Stoss (S. 129). Es kommen hier drei Geschwindigkeits-Änderungen in Frage: die der stossenden Masse M, die des Schwerpunktes der gestossenen Masse M_1 und die Änderung der Umfangsgeschwindigkeit der Drehung um die Schwerpunktsachse S_1, gemessen am Stosspunkte, wobei μ_1 als träge Masse auftritt. Die rechten Seiten der Gleichungen enthalten übereinstimmend im Zähler die Stossgeschwindigkeit $c - c_1$ und den Faktor $1 + k$. Die Nenner enthalten als Summanden 1 und zwei Verhältnisse unter den drei Massen M, M_1 und μ_1. Diese Verhältnisse sind derartig geordnet, dass stets diejenige Masse, um deren Geschwindigkeit sich's gerade handelt, in diesem Verhältnisse den Zähler bildet, während die beiden andern Massen die Nenner darstellen Wenn man in diesem Sinne die entstehenden Gleichungen überblickt, kann man sie leicht aus dem Kopfe anschreiben.

Mittelpunkt des Stosses.

Ein beliebiger, zwischen S_1 und P im Abstand x von S_1 befindlicher Punkt Q der Masse M_1 erfährt eine gesammte Tangential-Beschleunigung p_x, welche sich aus der Verschiebungs-Beschleunigung $\mathfrak{p}_1$ und der Drehungs-Beschleunigung $x\varepsilon_1$ zusammensetzt; es ist $p_x = \mathfrak{p}_1 + x\varepsilon_1$, oder nach Gl. 2 und 3, S. 145:

$$p_x = N\left(\frac{1}{M_1} + \frac{x}{\mu_1 a_1}\right).$$

Fig. 157.



Zwischen P und S_1 ist $p_x > \mathfrak{p}_1$, in S_1 ist $p_x = \mathfrak{p}_1$, während die Punkte der über S_1 hinaus verlängerten Geraden PS_1 einem negativen x entsprechen, so dass

$p_x < \mathfrak{p}_1$ wird. Für einen Punkt C heben sich die Beschleunigungen $\mathfrak{p}_1$ und $CS_1 \cdot \varepsilon_1$ gerade auf, wenn nämlich

$$\frac{N}{M_1} = \frac{N}{\mu_1} \frac{\overline{CS_1}}{a_1} \quad \text{oder}$$

$$CS_1 = \frac{\mu_1 a_1}{M_1}, \quad \text{mithin}$$

$$CP = \frac{\mu_1 a_1}{M_1} + a_1 = \frac{\mu_1 a_1^2 + M_1 a_1^2}{M_1 a_1} \quad \text{ist.}$$

Da nun $\mu_1 a_1^2$ das Trägheitsmoment für die Schwerpunkts-Achse, so ist der Zähler der letzten Gleichung das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse P, rechtwinklig zur Bildebene, der Nenner das statische Moment für dieselbe Achse. Somit ist (Theil 1, S. 279)

13) $$CP = l = \frac{J_P}{M_1 a_1}$$

die Schwingungslänge für den an der Achse P als Pendel aufgehängten Körper oder wegen der Vertauschbarkeit von Drehachse und Schwingungsachse auch für ein bei C aufgehängtes Pendel mit der Schwingungsachse P. Sämmtliche Punkte der rechtwinklig zur Bildebene durch C gelegten Geraden erfahren übereinstimmend die Beschleunigung Null. War die Masse M_1 nun vor dem Stoss in Ruhe, so werden die Punkte der Geraden C auch durch den Stoss nicht aus der Ruhe gebracht werden, während alle anderen Punkte in Beschleunigung gerathen. Befestigt man daher den Körper an der Achse C, so wird diese durch einen Stoss bei P keine Einwirkung erfahren. Aus diesem Grunde nennt man dann P den Mittelpunkt des Stosses in Bezug auf die Achse C. Dabei wurde vorausgesetzt, dass die rechtwinklig zur Bildebene, d. h. parallel mit C liegende Schwerpunktsachse S_1 eine freie Achse sei (1. Theil, S. 289) und dass P in der zu dieser Achse rechtwinkligen Schwerpunkts-Ebene liege.

Diese Beziehung ist wichtig für Körper, welche um Achsen drehbar sind und durch den Stoss von Daumen oder dgl. bewegt werden sollen (Aufwerfhämmer); greift der Daumen im Mittelpunkte des Stosses an, so wird die Achse durch den Stoss nicht beeinflusst. Auch bei Werkzeugen, die durch einen Schlag getroffen, oder mit denen Schläge ausgeübt werden, ist es vortheilhaft, die führende

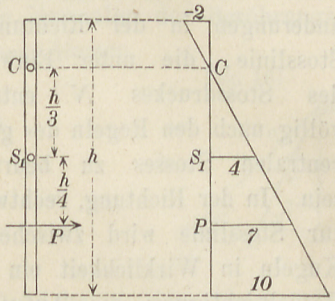
Hand bei C angreifen zu lassen, wenn bei P der Schlag erfolgt, damit die Hand keine Erschütterung (Prellung) empfinde.

Beispiel: Der Körper sei ein gerader Stab; zu dem im unteren Viertelpunkte gegebenen Stosspunkte P soll die unempfindliche Achse C gesucht werden. Es wird nach Gl. 13

$$l = \frac{J_P}{M_1 a_1} = \frac{M_1 {}^1/_{12} h^2 + M_1 {}^1/_{16} h^2}{M_1 \cdot {}^1/_4 h} = \frac{7}{12} h,$$

d. h. C liegt um $({}^7/_{12} - {}^1/_4)\, h = {}^1/_3 h$ über C. Fasst man die Stange bei C mit der Hand, so wird ein bei P geführter Stoss der Hand nicht fühlbar werden. Das Gleiche gilt, wenn man den Stab bei P erfasst und der Schlag bei C erfolgt.

Fig. 158.



Es sollen nun auch die Geschwindigkeits-Änderungen berechnet werden, welche entstehen, wenn gegen die ruhende Stange bei P eine kugelförmige Masse M mit der Geschwindigkeit c stösst. Der Stoss werde als unelastisch und die Masse M gleich der Masse M_1 vorausgesetzt. Dann ist

$$k = 0, \qquad \omega_1 = 0,$$
$$c_1 = 0, \qquad M_1 = M,$$
$$c_1 = 0, \qquad \mu_1 = {}^4/_3 M_1$$

und nach den Gl. 10—12 (S. 147)

$$c - v = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c; \quad v = \frac{7}{11} c.$$

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c,$$

$$a_1 \psi_1 = \frac{c}{1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{3}{11} c.$$

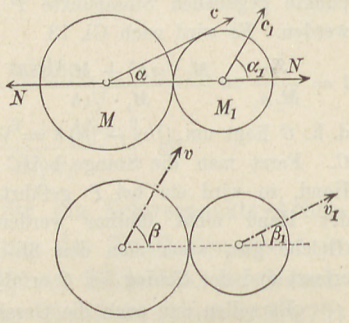
Da die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung an den verschiedenen Stellen mit dem Abstande x vom Schwerpunkte verhältnisgleich, so ist die Darstellung der Gesammt-Geschwindigkeiten eine Gerade. Trägt man in P und S_1 die Geschwindigkeiten v und $\mathfrak{v}_1$ durch Ordinaten 7 und 4 auf (Fig. 158), so ergiebt sich eine Gerade, die die Stange in dem Unempfindlichkeitspunkte C schneidet.

4. Schiefer centraler Stoss.

Die Schwerpunkte der beiden Körper mögen im Augenblicke des Zusammentreffens Geschwindigkeiten c und c_1 haben, die mit

der durch beide Schwerpunkte gehenden Stosslinie die Winkel α und α_1 bilden (Fig. 159). Man kann die Geschwindigkeiten zerlegen in $c \cos \alpha$ und $c_1 \cos \alpha_1$ nach der Richtung der Stosslinie und $c \sin \alpha$ bezw. $c_1 \sin \alpha_1$ rechtwinklig dazu. Dann werden die Geschwindigkeitsänderungen in der Richtung der Stosslinie, die unter Einwirkung des Stossdruckes N entstehen, völlig nach den Regeln des geraden centralen Stosses zu beurtheilen sein. In der Richtung, rechtwinklig zur Stosslinie wird zwischen den Kugeln in Wirklichkeit ein Reibungswiderstand auftreten, dessen Berücksichtigung die Aufgabe ziemlich verwickelt macht. Wir wollen auf diesen jedoch hier keine Rücksicht nehmen, die Körper als völlig glatt betrachten. Unter dieser Voraussetzung tritt dann rechtwinklig zur Stosslinie keine Kraft auf, so dass die Seitengeschwindigkeiten $c \sin \alpha$ und $c_1 \sin \alpha_1$ unverändert verbleiben. Nennt man v und v_1 die Geschwindigkeiten nach dem Stosse mit den Neigungswinkeln β und β_1 gegen die Stosslinie, so wird nunmehr nach Gl. 8 und 9, S. 129

Fig. 159.



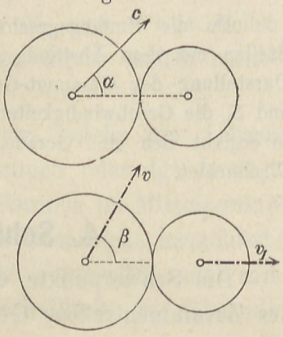
$$1) \qquad c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

$$2) \qquad v_1 \cos \beta_1 - c_1 \cos \alpha_1 = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k).$$

$$3) \qquad v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$4) \qquad v_1 \sin \beta_1 = c_1 \sin \alpha_1.$$

Fig. 160.



Stoss gegen eine ruhende Kugel. War M_1 zu Anfang in Ruhe, d. h. $c_1 = 0$, so wird

$$c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

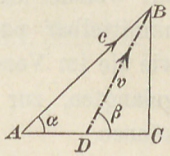
$$v_1 \cos \beta_1 = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k),$$

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$v_1 \sin \beta_1 = 0, \quad \beta_1 = 0,$$

$v_1 = v_1 \cos \beta_1$. Die getroffene Kugel bewegt sich nach dem Stoss in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen der Berührungsstelle. Sind die Kugeln von gleichen Massen, so wird

Fig. 161.



5) $v \cos \beta = \frac{1}{2} c \cos \alpha (1 - k)$,

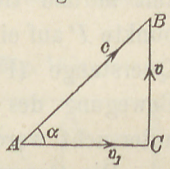
6) $v \sin \beta = c \sin \alpha$, daher

7) $$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - k},$$

8) $v_1 = \frac{1}{2} c \cos \alpha (1 + k)$.

Bei unelastischem Stosse wird $k = 0$, daher $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$. Ist (Fig. 161) $AB = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $AC = c \cos \alpha$, so wird, wenn man $AD = DC$ macht, $DB = v$, $DC = v_1$ nach Richtung und Grösse.

Fig. 162.



Bei elastischem Stosse aber wird $k = 1$, daher $v \cdot \cos \beta = 0$, $\beta = 90^0$, $v = c \sin \alpha$, $v_1 = c \cos \alpha$, $v = CB$, $v_1 = AC$ (Fig. 162) nach Grösse und Richtung. Beide Kugeln bewegen sich also nach dem Stosse unter rechtem Winkel aus einander.

Stoss einer Kugel gegen eine feste Wand ($c_1 = 0$, $M_1 = \infty$). Es wird

$$c \cos \alpha - v \cos \beta = c \cos \alpha (1 + k),$$

d. h. $v \cos \beta = - c \cos \alpha \cdot k$,

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

mithin $$\operatorname{tg} (- \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k}.$$

Fig. 163.

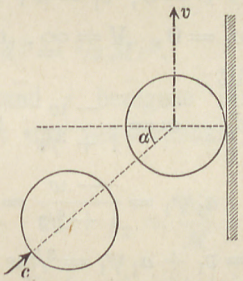
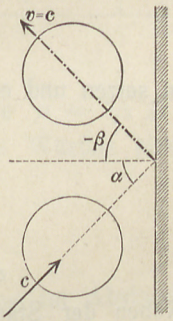


Fig. 164.



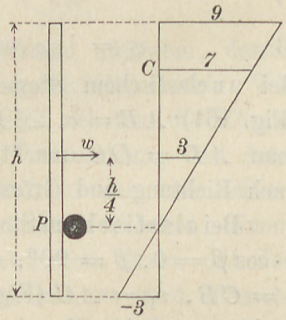
Für unelastischen Stoss ergiebt sich (mit $k = 0$) $v \cos \beta = 0$, $v = c \sin \alpha$, $- \beta = 90^0$, d. h. die Seitengeschwindigkeit, rechtwinklich zur Wand, geht verloren, es bleibt nur die Seitengeschwindigkeit in der Richtung der Wand erhalten (Fig. 163).

Für elastischen Stoss wird (mit $k = 1$): $v \cos \beta - c \cos \alpha$, $v = c$, $-\beta = \alpha$, d. h. die Kugel wird von der festen Wand ohne Verlust an Geschwindigkeit so zurückgeworfen wie ein Lichtstrahl von einem Spiegel (Fig. 164); Ausfall- und Einfallwinkel sind einander gleich.

5. Einige besondere Fälle des Stosses.

Es mögen hier noch einige Fälle des Stosses betrachtet werden, auf welche die entwickelten Formeln scheinbar nicht, oder nicht unmittelbar passen, die aber doch durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im Vorstehenden zur Anwendung gelangten, zur Lösung geführt werden können.

Fig. 165.



1. Ein fortschreitender Stab stösst gegen ein festes Hindernis. Ein Stab von der Länge h bewege sich mit der überall gleichen Geschwindigkeit w und treffe im unteren Viertelpunkte P auf eine unwandelbar befestigte Querstange (Fig. 165). Es soll die Bewegung des Stabes nach dem Stoss untersucht werden.

Die Querstange ist wegen ihrer Unbeweglichkeit als eine unendlich grosse Masse aufzufassen. Die Gleichungen 11 und 12, S. 147, sind auf diesen Fall anwendbar; man hat darin

$$c = 0, \quad c_1 = w, \quad \mathfrak{c}_1 = w,$$
$$\omega_1 = 0, \quad M = \infty, \quad \mu_1 = {}^4/_3 M_1$$

zu setzen und erhält

$$\mathfrak{v}_1 - w = \frac{-w}{1 + {}^3/_4}, \quad \mathfrak{v}_1 = {}^3/_7 w;$$

$$a_1 \psi_1 = \frac{-w}{1 + {}^4/_3} = -{}^3/_7 w;$$

$$v_1 = \mathfrak{v}_1 + a_1 \psi_1 = {}^3/_7 w - {}^3/_7 w = 0.$$

Neben der Stange sind die Geschwindigkeiten als Vielfache von $^1/_7 w$ dargestellt.

Man kann diese Aufgabe auch lösen, indem man die Bewegung des Stabes auffasst als scheinbare Ruhe in Bezug auf einen mit

der Geschwindigkeit w fortschreitenden Raum. Die Masse $M = \infty$ bewegt sich dann mit der Geschwindigkeit w gegen den ruhenden Stab. Mit den hiernach erhaltenen Geschwindigkeiten hat man dann die Geschwindigkeit w des Raumes in geeigneter Weise wieder zu verbinden.

2. Ein fortschreitend gleitender Würfel stösst mit seiner vorderen unteren Kante gegen ein Hindernis (Fig. 166). Der Körper muss dann eine Drehung um die Kante A ausführen; diese betrachten wir aber als das Ergebnis einer Verschiebung des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit v und einer Drehung um die zur Bildebene rechtwinklige Schwerpunktsachse S mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Fig. 167), wodurch mit $r\omega = v$ der Punkt A die Geschwindigkeit Null bekommt. Wir zerlegen v in die Seitengeschwindigkeiten v_1 und v_2, die hier offenbar gleich sein müssen. Da nun die Geschwindigkeit v_2 durch den Stoss neu entsteht, so muss neben der Kraft N_1 auch noch eine Kraft N_2 auftreten (Fig. 166). Das Gewicht des Würfels wird gegenüber den Kräften N_1 und N_2 vernachlässigt. Die Würfelseite werde $d = 2e$ genannt. Das Trägheitsmoment des Würfels in Bezug auf die Achse S findet man nach Theil 1, S. 271 leicht zu

Fig. 166.

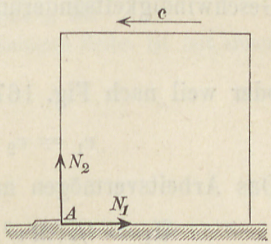
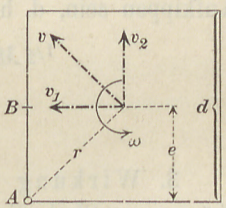


Fig. 167.



$$^1/_6\, Md^2 = {}^2/_3\, Me^2,$$

also ist die auf den Abstand e bezogene Masse $\mu = {}^2/_3\, M$. Während des Stosses erfährt der Schwerpunkt des Würfels eine Beschleunigung

$$p_1 = \frac{N_1}{M} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{N_2}{M}$$

im Sinne dieser Kräfte, eine Umfangsbeschleunigung im Abstand e von S in der Grösse

$$e\varepsilon = \frac{N_1 - N_2}{\mu} = \frac{3}{2}\,\frac{N_1 - N_2}{M}.$$

Diese Beschleunigungen stehen in den Verhältnissen

$$p_1 : p_2 = N_1 : N_2,$$
$$p_2 : e\varepsilon = 2N_2 : 3(N_1 - N_2).$$

Da der Punkt B aber in lothrechter Richtung die Beschleunigung $p_2 - e\varepsilon$ erfährt, welche (annähernd) $= 0$ sein muss, so ergiebt sich $2N_2 = 3(N_1 - N_2)$, d. h. $N_2 = {}^3/_5 N_1$. Hiernach wird

$$p_1 : p_2 = 5 : 3, \quad p_2 = e\varepsilon.$$

Setzt man nun an Stelle der Beschleunigungen die entsprechenden Geschwindigkeitsänderungen, so erhält man

$$c - v_1 : v_2 = 5 : 3,$$

oder weil nach Fig. 167 $v_2 = v_1$ sein muss,

$$v_1 = v_2 = {}^3/_8 c = e\omega; \quad v = v_1\sqrt{2}.$$

Das Arbeitsvermögen nach dem Stosse beträgt

$$\mathfrak{A}_1 = {}^1/_2(Mv^2 + \mu e^2\omega^2) = {}^1/_2 M(2v_1^2 + {}^2/_3 v_1^2)$$
$$= {}^1/_2 Mc^2 \cdot {}^3/_8.$$

Soll der Würfel nach dem Stosse sich überschlagen, nicht wieder zurückfallen, so muss $\mathfrak{A}_1 \geqq$ Arbeit der Schwere beim völligen Aufkippen sein, d. h.

$${}^1/_2 Mc^2 \cdot {}^3/_8 \geqq Mge(\sqrt{2} - 1) \quad \text{oder}$$

$$\frac{c^2}{2g} \geqq 1{,}1\, e.$$

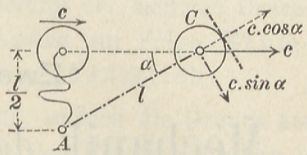
3. Wirkung von Fäden statt einer Berührung der Körper. Sind die Körper durch einen anfangs schlaffen Faden verbunden, so werden in dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, durch seine Spannkraft ähnliche Wirkungen auf die Körper ausgeübt wie durch unmittelbare Berührung. Daher gelten in dem Falle der Fig. 168 für v und v_1 die Gleichungen 8 und 9, S. 129. Ist der Faden mit einem Körper M in Verbindung, am anderen Ende aber unwandelbar befestigt, so wirkt die Befestigung wie eine feste Wand ($M_1 = \infty$). Für unelastischen Faden ist $k = 0$, für vollkommen elastischen Faden $k = 1$ zu setzen.

Fig. 168.



Beispiel: Ein Körper bewegt sich fortschreitend mit der Geschwindigkeit c auf einer Geraden (Fig. 169). Ein undehnbarer Faden von der Länge l sei mit dem Körper verbunden und bei A in einem Abstand $\frac{1}{2}l$ von der Geraden befestigt. In dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, vernichtet seine Spannkraft die Seitengeschwindigkeit $c \cos \alpha$, und mit der Geschwindigkeit $c \sin \alpha = \frac{1}{2}c$ bewegt sich der Körper in einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt A weiter. Der Faden wirkt im Augenblicke des Straffwerdens ebenso, als ob der Körper bei C unelästisch gegen eine feste Wand stiesse, welche zu $l = AC$ rechtwinklig ist.

Fig. 169.



Jedes ruckweise Anziehen mittels eines undehnbaren Seiles ist mit einem Arbeitsverluste verbunden.

Zweite Abtheilung.

Mechanik der flüssigen Körper.

Allgemeine Eigenschaften der flüssigen Körper; tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige Körper.

Ein fester Körper hat im spannungslosen Zustand eine bestimmte Form, und jeder Änderung derselben setzen sich innere Widerstandskräfte entgegen. Ein flüssiger Körper aber setzt weder einer Trennung noch einer Verschiebung seiner Theile einen merklichen Widerstand entgegen; es kommen in ihm Zug- und Schubspannungen nicht vor, auch besteht zwischen den einzelnen Theilen des flüssigen Körpers oder zwischen flüssigen und festen Körpern, wenigstens im gegenseitigen Ruhezustande, keine merkliche Reibung. Vollkommen flüssig nennen wir solche Körper, bei denen diese Kräfte überhaupt nicht vorhanden sind. Wohl aber zeigen die flüssigen Körper einen Widerstand gegen Verkleinerung des Rauminhaltes, ihre einzelnen Theile vermögen daher Druckkräfte auszuüben und aufzunehmen.

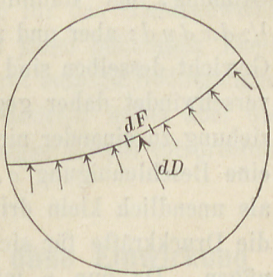
Die flüssigen Körper zerfallen in tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige. Ein tropfbar-flüssiger Körper hat, wenn er der Einwirkung äusserer Kräfte entzogen ist, einen bestimmten endlichen Rauminhalt, ohne das Bestreben, sich auszudehnen. Ein gasförmiger Körper aber hat im Allgemeinen das Bestreben, sich unbegrenzt auszudehnen und kann nur durch äussere Druckkräfte auf einen endlichen Rauminhalt beschränkt werden.

Ein verschiedenes Verhalten zeigen die beiden Arten flüssiger Körper gegenüber einer Vergrösserung der äusseren Druckkräfte. Ein tropfbar-flüssiger Körper erleidet dabei eine nur sehr kleine

Verminderung seines Rauminhaltes, so dass man ihn als einen Körper von unveränderlichem Rauminhalt, also auch von unveränderlicher Dichte ansehen kann. Bei einem gasförmigen Körper aber hat eine merkliche Vergrösserung der äusseren Druckkräfte auch eine merkliche Zusammendrückung zur Folge, Rauminhalt und Dichte sind durchaus veränderlich.

Der Satz d'Alemberts (Theil 1, S. 139), wonach die Gruppe der äusseren Kräfte $[K]$ und die Gruppe der, den Beschleunigungen p der einzelnen Theilchen entsprechenden Ergänzungskräfte $[-mp]$ zusammen den Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper unterworfen sind, gilt auch für flüssige Körper.

Fig. 170.

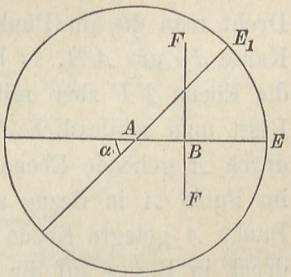


Trennt man einen flüssigen Körper durch eine Schnittfläche in zwei Theile, so werden letztere längs der Schnittfläche gegenseitig Normaldrücke auf einander ausüben (Fig. 170). Auf ein Flächentheilchen dF komme die Druckkraft dD, dann ist

$$\frac{dD}{dF} = p$$

der Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit. Es lässt sich zeigen, dass dieser Druck in einem Punkte A des Körpers in Bezug auf alle durch den Punkt gelegten Schnittebenen dieselbe Grösse hat, oder dass in einem Punkt einer Flüssigkeit der Druck für die Flächeneinheit nach allen Richtungen derselbe ist.

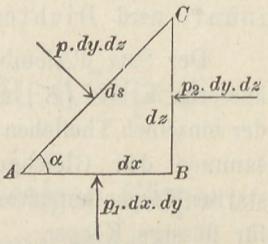
Fig. 171.



Man lege durch den Punkt A (Fig. 171) zwei Ebenen E und E_1, die den Winkel α mit einander bilden. Im Abstande dx von A fügt man noch eine dritte zu E rechtwinklige Ebene FF hinzu. Dann wird dadurch ein dreiseitiges Prisma herausgeschnitten; die Bildebene und eine dazu im Abstande dy parallel gelegte Ebene trennen davon ein Theilchen ab (Fig. 172), dessen drei bei B rechtwinklig zu einander stehende

Kanten sind: dx, dy und dz. An der Fläche AB von der Grösse $dx \cdot dy$ herrsche ein Einheitsdruck p_1, also eine Druckkraft $p_1 \cdot dx \cdot dy$; an BC ein Einheitsdruck p_2, eine Druckkraft $p_2 \cdot dy \cdot dz$; an der Fläche AC von der Grösse $dy \cdot ds$ ein Einheitsdruck p, eine Druckkraft $p \cdot dy \cdot ds$. Die Druckkräfte an den beiden der Bildebene parallelen Schnittebenen kommen nicht in Betracht, da wir nur die Seitenkräfte in den Richtungen dx und dz untersuchen wollen. Diese Druckkräfte sind unendlich klein zweiter Ordnung; der Rauminhalt des Prismas $\frac{1}{2} dx\, dy\, dz$ aber und zugleich Masse und Gewicht desselben sind unendlich klein dritter Ordnung, das Gewicht verschwindet daher gegen die Druckkräfte und kann auf deren Beziehung zu einander nicht einwirken. Hat das Flüssigkeits-Theilchen eine Beschleunigung q, so bleibt auch seine Ergänzugskraft $-mq$ als unendlich klein dritter Ordnung ausser Betracht; daher müssen die Druckkräfte für sich allein den Gleichgewichts-Bedingungen genügen. Da nun p mit p_1 den Winkel α bildet, so entstehen die Bedingungen:

Fig. 172.



$$p\, dy\, ds \sin \alpha = p_2\, dy\, dz$$

$$p\, dy\, ds \cos \alpha = p_1\, dx\, dy,$$

mithin, weil $dz = ds \sin \alpha$, $dx = ds \cos \alpha$,

1) $$p = p_2 = p_1.$$

Dreht man die im Punkte A rechtwinklig zur Bildebene stehende Kante dy um AB, so bekommt das Prisma eine andere Richtung, die Ebene FF aber mit dem Einheitsdrucke p_2 behält ihre Lage. Lässt man schliesslich dx zu Null werden, so ist F eine ebenfalls durch A gehende Ebene, und es gilt dann, dass der Einheitsdruck im Punkt A in Bezug auf eine ganz beliebig gewählte, durch den Punkt A gelegte Ebene E_1 dieselbe Grösse hat, wie der Einheitsdruck in Bezug auf die Ebene F von bestimmter Richtung.

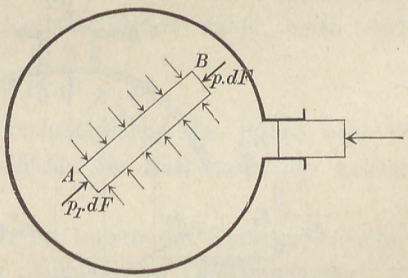
A. Gleichgewicht flüssiger Körper.

Man bezeichnet einen flüssigen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämmtlichen Theilchen entweder in wirklicher Ruhe sind, oder doch in scheinbarer Ruhe in Bezug auf einen gleichförmig geradlinig fortschreitenden Raum, womit also eine gegenseitige Bewegung der Flüssigkeitstheilchen, d. h. eine Formänderung des Körpers ausgeschlossen ist. Sämmtliche Theilchen haben übereinstimmend die Beschleunigung Null, somit verschwinden sämmtliche Ergänzungskräfte $[-mp]$, und es müssen die äusseren Kräfte denselben Bedingungen genügen, wie für das Gleichgewicht eines starren Körpers, d. h. man kann sich jeden beliebigen Theil eines flüssigen Körpers, für dessen Gleichgewicht man die Bedingungen sucht, in einen starren Körper verwandelt denken, wobei aber die anzubringenden Kräfte den Eigenschaften flüssiger Körper entsprechen müssen.

I. Gleichgewicht flüssiger Körper ohne Einwirkung der Schwere.

Ist ein im Gleichgewichte befindlicher tropfbar flüssiger oder gasförmiger Körper ringsum von Gefässwänden umschlossen, die auf ihn Druckkräfte ausüben, so hat das Eigengewicht des flüssigen Körpers auf seine Druckverhältnisse in vielen Fällen der Anwendung einen so unbedeutenden Einfluss, dass es der Vereinfachung wegen gerathen ist, diesen Einfluss ganz zu vernachlässigen.

Fig. 173.



In dem Gefässe (Fig. 173) befinde sich Flüssigkeit im Gleichgewicht. Um eine Beziehung zwischen den Einheitsdrücken p_1 und p bei A und B zu finden, denken wir uns ein von A nach B reichendes gerades Prisma vom Querschnitte dF erstarrt. Das umgebende Wasser übt auf alle Flächen rechtwinklige Druckkräfte aus, u. zw. auf

die Endflächen die Kräfte $p_1 dF$ bezw. $p dF$. Bilden wir die Gleichung der Kräftesumme in der Richtung AB, so kommen dabei die Druckkräfte gegen die Seitenflächen des Prismas nicht in Betracht, und da keine Massenkraft wirkt, so muss einfach

$$p_1 dF = p dF,$$

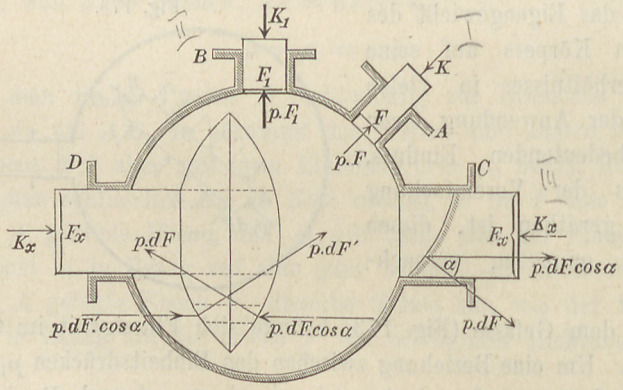
d. h. $p_1 = p$ sein. Da nun A und B beliebig gelegene Punkte des flüssigen Körpers sind, so gilt, zugleich mit Rücksicht auf den Satz S. 157:

In einem flüssigen Körper, der ohne Einwirkung von Massenkräften im Gleichgewicht ist, hat der Einheitsdruck an allen Stellen im Innern und an der Oberfläche und nach allen Richtungen gleiche Grösse. Statt des Wortes Einheitsdruck, d. h. Druck auf die Flächeneinheit, soll künftig kürzer Druck gesagt werden, während die auf irgend eine Flächengrösse kommende Kraft mit dem Worte Druckkraft bezeichnet werden möge; in ähnlicher Weise wurden in der Mechanik elastisch-fester Körper die Worte Spannung und Spannkraft unterschieden. Man nennt diesen Druck auch wohl hydrostatischen Druck.

a) Druckkräfte eines flüssigen Körpers gegen verschiebbare Kolben.

An einem Gefässe (Fig. 174) seien cylindrische Ansatzröhren angebracht, welche von genau passenden, aber reibungslos beweglich

Fig. 174.



gedachten Kolben abgeschlossen werden. Wird durch Druckkraft gegen einen Kolben in dem flüssigen Körper ein Druck p erzeugt

und soll der flüssige Körper im Gleichgewichte verbleiben, muss p überall gleich sein. Dann bekommt der Kolben A von einer Querschnittfläche F eine Druckkraft pF, der Kolben B eine Druckkraft pF_1. Die Druckkräfte auf die Kolben verhalten sich also wie die Querschnittsflächen der Kolben, und ebenso grosse, aber nach dem Inneren des Gefässes gerichtete Kräfte $K = pF$ und $K_1 = pF_1$ müssen von aussen auf die Kolben wirken.

Ist der Kolben C an der der Flüssigkeit zugekehrten Seite von einer krummen Fläche begrenzt, so hat der Umstand, dass diese grösser ist als die rechtwinklige Querschnittsfläche des Kolbens und des Ansatzrohres keinen Einfluss auf die Grösse der wirksamen Kolbenkraft. Betrachten wir die Mittellinie des Rohres als x-Achse, so möge die Druckkraft gegen ein Flächentheilchen dF mit der x-Richtung den Winkel α bilden. Es lässt sich $p \cdot dF$ zerlegen in eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos\alpha$ in der x-Richtung, und in eine dazu rechtwinklige. Die letztere drückt den Kolben gegen die Wand der Ansatzröhre und wird durch deren Festigkeit aufgehoben. Wirksam gegen den Kolben, d. h. eine mögliche Bewegung anstrebend, ist nur die Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos\alpha$. Derselbe Winkel α, den die Normale zu dF mit der x-Richtung bildet, findet sich auch zwischen der Fläche dF und der yz-Ebene, die rechtwinklig zur Achsenrichtung des Rohres steht. Daher ist $dF \cdot \cos\alpha$ die rechtwinklige Projektion von dF auf die Querschnitts-Ebene des Rohres, oder, wie man auch sagen kann, die rechtwinklige Projektion in der x-Richtung, welche wir $dF \cdot \cos\alpha = dF_x$ nennen wollen. Die gesammte Endfläche des Kolbens liefert daher einen wirksamen Druck

$$K_x = p \int dF_x = p \cdot F_x ,$$

wenn F_x die rechtwinklige Querschnittsfläche der Röhre oder die rechtwinklige Projektion der Endfläche des Kolbens in der Achsenrichtung der Röhre bezeichnet.

Auch wenn der Kolben sich im Innern des Gefässes erweitert, so dass er stellenweise über den cylindrischen Theil hinausragt, wie bei D, wird dadurch seine wirksame Kraft nicht geändert. Ein Flächentheilchen dF dieses überstehenden Theiles liefert in der x-Richtung eine Seitenkraft $p \cdot dF \cdot \cos\alpha = p \cdot dF_x$. Die projicirenden Linien aber, welche in der Richtung des Ansatzrohres von dem Umfange des Flächentheilchens dF ausgehen, treffen die Oberfläche

der Kolbenerweiterung noch ein Mal und schneiden aus ihr ein Flächentheilchen dF' heraus, welches eine Druckkraft $p \cdot dF'$ und eine Seitenkraft in der Richtung des Rohres $p \cdot dF' \cdot \cos \alpha' = p \cdot dF_x$ erfährt. Diese Seitenkraft ist der von dF gelieferten gleich und entgegengesetzt und hebt sich damit auf. In gleicher Weise liefern sämmtliche der Flüssigkeit ausgesetzte Oberflächentheile des Kolbens, die beim rechtwinkligen Projiciren in der Längenrichtung des Ansatzrohres paarweise auf einander fallen, keinen Beitrag zur wirksamen Kolbenkraft. Es bleibt als wirksame Druckfläche des Kolbens nur dessen rechtwinklige Querschnittsfläche F_x mit der wirksamen Kolbenkraft

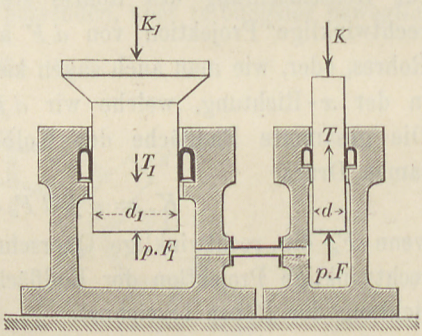
1) $$K_x = p \cdot F_x$$

übrig, auch geht K_x durch den Schwerpunkt von F_x, gerade so, als ob der Kolben dem Wasser eine rechtwinklige Querschnittsfläche F_x als Endfläche zukehrte.

b) Wasserdruck-Presse.

Dieselbe hat den Zweck, mittels einer Triebkraft K einen bedeutend grösseren Widerstand K_1 zu überwinden. In die beiden mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten, durch ein Rohr verbundenen Cylinder (Fig. 175) reichen Kolben von den Durchmessern d und d_1 dicht schliessend hinein. Der dichte Schluss, die sog. Dichtung, wird durch je einen Lederstulp, einen Ring von hufeisenförmigem Querschnitte (Fig. 176) bewirkt, der sich mit den beiden Schenkeln an die Cylinderwand bezw. den Kolben legt und der in dem Hohlraume von dem Wasserdruck ergriffen wird, welcher die Schenkel auseinander zu treiben sucht. Je stärker der Wasserdruck, um so fester legt sich der Stulp an die zu dichtenden Theile.

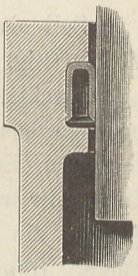
Fig. 175.



Bei dem Arbeiten der Presse bleibt nun der flüssige Körper nicht ganz im Gleichgewichte, da beim Niederdrücken des kleinen

Kolbens Flüssigkeit aus dem kleinen Cylinder in den grossen hinübertritt. Wenn wir aber annehmen, dass die Bewegung nur langsam erfolge, können wir annähernd mit den Gleichgewichts-Bedingungen rechnen.

Fig. 176.



Während der Kolben vom Durchmesser d an dem Stulp von der Höhe h abwärts gleitet, wird der letztere mit Kräften gegen den Kolben gedrückt, deren Summe $p \cdot d\pi h$ beträgt, also eine Reibung $T = fpd\pi h$ hervorruft, wenn p der Druck in der Presse ist. Für das Gleichgewicht dieses Kolbens gilt dann

$$K = p \cdot {}^1/_4 d^2\pi + fpd\pi h.$$

An dem grösseren Kolben vom Durchmesser d_1 sei die Stulphöhe h_1, dann beträgt die hier abwärts gerichtete Reibung $T_1 = fp d_1 \pi h_1$, und es gilt für diesen Kolben

$$K_1 = p\, {}^1/_4 d_1{}^2\pi - fp d_1 \pi h_1. \quad \text{Sonach wird}$$

1) $$\frac{K_1}{K} = \frac{d_1{}^2}{d^2} \cdot \frac{1 - 4f\frac{h_1}{d_1}}{1 + 4f\frac{h}{d}}.$$

Bewegt sich der kleine Kolben um v abwärts, so muss eine Raummenge Wasser $= {}^1/_4 d^2\pi v$ in den grossen Cylinder übertreten und $= {}^1/_4 d_1{}^2\pi c$ sein, wenn c die Bewegung des grossen Kolbens. Mithin ist die Geschwindigkeits-Übersetzung $v : c = d_1{}^2 : d^2$. Der Wirkungsgrad wird hiernach

$$\eta = \frac{K_1 c}{Kv} = \frac{1 - 4f\frac{h_1}{d_1}}{1 + 4f\frac{h}{d}} = \frac{K_0}{K},$$

wenn $K_0 = K_1 \frac{d^2}{d_1{}^2}$ die für eine vollkommene Presse ohne Reibung ($f = 0$) erforderliche Triebkraft wäre.

Beispiel: Für $h : d = h_1 : d_1 = 0{,}2$, $d_1 : d = 18$ und $f = 0{,}15$ ist

$$\eta = \frac{1 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2}{1 + 4 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2} = 0{,}79;$$

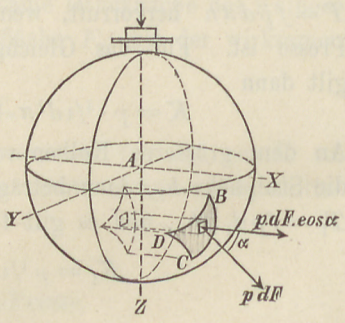
die Wasserdruckpresse arbeitet also erheblich günstiger als Keil- und Schraubenpressen (Theil 1, S. 215 und 264). Es wird $K_1 : K = 18^2 \cdot 0{,}79 = 256$. Die

Übersetzung ist eine sehr erhebliche und kann durch Wahl von $d_1 : d$ beliebig festgesetzt werden. Hier würde mit einer Triebkraft $K = 100$ kg eine Nutzkraft $K_1 = 25600$ kg erreicht werden.

c) Druckkraft auf ein beliebiges Stück der Gefässwand.

Soll das Gesammt-Ergebnis der Druckkräfte auf ein Stück BCD (Fig. 177) der Wandung eines Gefässes, in dem der Druck p herrscht, bestimmt werden, so bedenke man, dass ein Flächentheilchen die Druckkraft pdF erfährt, die mit drei rechtwinkligen Achsen die Winkel α, β, γ bilden möge. Dann bekommt man gerade so, als ob BCD die Endfläche eines in der x-Richtung verschiebbaren Kolbens wäre, in dieser Achsenrichtung eine gesammte Kraft

Fig. 177.



$$1)\quad D_x = p\,\Sigma dF \cdot \cos\alpha = p \cdot F_x,$$

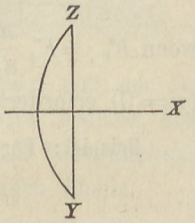
ebenso in den beiden anderen Achsenrichtungen

$$2)\quad D_y = p\,\Sigma dF \cdot \cos\beta = p \cdot F_y,$$

$$D_z = p\,\Sigma dF \cdot \cos\gamma = p \cdot F_z.$$

Darin bezeichnen F_x, F_y und F_z die Projektionen der gedrückten Flächen auf die yz-, die xz- und die xy-Ebene, oder die rechtwinkligen Projektionen in den Richtungen der x-, der y- und der z-Achse, wobei die etwa paarweise aufeinander fallenden Projektionen von Flächentheilchen fortzulassen sind. Die Seitenkräfte gehen durch die Schwerpunkte der entsprechenden Projectionsflächen F_x, F_y und F_z hindurch und werden sich im Allgemeinen nicht zn einer Einzelkraft zusammensetzen lassen, sondern daneben noch ein Achsenmoment liefern. Gehört die Fläche freilich einer Kugel an, so gehen die einzelnen Kräfte $p \cdot dF$ sämmtlich durch deren Mittelpunkt und liefern eine durch denselben Punkt gehende Einzelkraft.

Fig. 178.



Auch noch in solchen Fällen lassen sich die Druckkräfte zu einer Einzelkraft D zusammensetzen, wo die Begrenzungslinie des Flächenstückes eine ebene Kurve

ist. Legt man dann nämlich die yz-Ebene in die Ebene dieser Kurve (Fig. 178), so heben sich beim Projiciren in der y- und in der z-Richtung die Flächen gegenseitig auf, weil sie sämmtlich paarweise auf einander fallen. Es ist $F_y = F_z = 0$, daher auch $D_y = D_z = 0$, mithin der Gesammtdruck

4) $$D = D_x = p F_x.$$

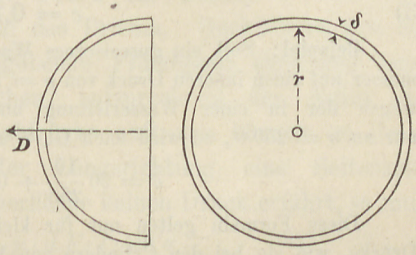
Darin ist F_x die ebene Fläche der Umgrenzungslinie, und D geht durch deren Schwerpunkt.

d) Wandstärke von Gefässen und Röhren.

Wird ein kugelförmiges Gefäss (Fig. 179) vom Halbmesser r und der Wandstärke δ nach einem grössten Kreise durchschnitten, so übt die Flüssigkeit bei einem Drucke p für die Flächeneinheit auf die eine Halbkugelfläche eine Kraft D aus, welche nach vorstehender Gl. 4 mit $F_x = r^2\pi$ sein muss:

$$D = p r^2 \pi.$$

Fig. 179.



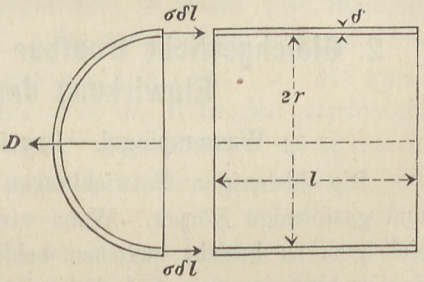
Diese Kraft muss durch die Spannkräfte der ringförmigen Schnittfläche im Gleichgewichte gehalten werden.

Hinsichtlich der Spannungen in der Wand werde hier die vereinfachende Annahme gemacht, dass sie sich gleichmässig über die Dicke δ vertheilen, überall den Werth σ haben. Da nun die Schnittfläche $= 2r\pi\delta$, so muss

$$2r\pi \cdot \delta \cdot \sigma = p \cdot r^2\pi \quad \text{oder}$$

1) $$\delta = \frac{r}{2}\frac{p}{\sigma}.$$

Fig. 180.



Eine cylindrische Röhre (Fig. 180) vom Halbmesser r, der Wandstärke δ, dem innern Drucke p, der Länge l erfährt die stärksten Spannungen an irgend einer durch die Achse gelegten Schnittebene. Für die

gesammte Druckkraft gegen die eine Hälfte ist die Fläche $F_x = 2rl$ massgebend mit $D = 2prl$. Unter der auch hier gemachten Voraussetzung überall gleicher Spannung σ (vgl. weiter unten) ergiebt sich an jeder der beiden Schnittflächen die Spannkraft $\sigma\delta l$, daher wird

$$2\sigma \cdot \delta \cdot l = 2p \cdot r \cdot l, \quad \text{mithin}$$

$$2) \qquad \delta = r\frac{p}{\sigma},$$

d. h. doppelt so gross wie beim kugelförmigen Gefässe. Gl. 2 ist wahrscheinlich zuerst von Mariotte angegeben worden.

Die Formeln 1 und 2 geben für kleine Werthe von p so geringe Wandstärken, wie sie aus Gründen der Herstellung und Handhabung nicht zulässig sind. Daher fügt man jenen noch einen Zusatzwerth $+ c$ bei, der sich nur nach Ausführungs-Rücksichten bestimmt. Bei Gefässen und Röhren aus Gusseisen beträgt etwa

$$3) \qquad c = 0{,}7\ ^{\text{cm}}.$$

Beispiel: Soll ein gusseisernes Wasserleitungsrohr von $r = 20$ cm Halbmesser auf einen inneren Druck von $p = 10$ at berechnet werden und wählt man wegen der in einer Wasserleitung unvermeidlichen Stösse die Spannung nur zu $\sigma = 250$ at, so wird nach Gl. 2 und 3

$$\delta = 20\frac{10}{250} + 0{,}7 = 1{,}5\ ^{\text{cm}}.$$

Diese Formeln gelten nur für kleine Werthe von $p : \sigma$. Für grössere Drücke, wie sie bei den Cylindern von Wasserdruckpressen und besonders bei Kanonenrohren vorkommen, ist die Voraussetzung überall gleicher Spannung selbst annäherungsweise nicht mehr zutreffend, vielmehr ergeben genauere Rechnungen, dass die Spannung an der Innenseite des Rohres stets grösser ist als an den übrigen Stellen. Kanonenrohre erleiden denn auch die ersten Risse stets an der Innenwandung, und man untersucht sie darauf hin mittels eines Spiegels, um sie rechtzeitig ausser Gebrauch setzen zu können.

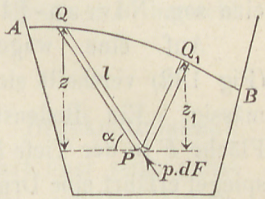
2. Gleichgewicht tropfbar flüssiger Körper unter Einwirkung der Schwere.

a) Wasserspiegel. Druck in der Flüssigkeit.

Die bisherigen Entwicklungen galten vereint für tropfbare und gasförmige Körper. Wenn wir nun aber die Schwere berücksichtigen, so besteht zwischen beiden der wesentliche Unterschied, dass erstere eine unveränderliche, letztere aber eine sehr veränderliche Dichte haben, so dass die tropfbaren Körper hier erst besonders behandelt werden sollen.

Soll die in einem oben offenen Gefässe befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere als einziger Massenkraft im Gleichgewichte sein, so muss die obere freie Fläche, der Wasserspiegel, eine wagerechte Ebene bilden, d. h. rechtwinklig zu der herrschenden Massenkraft stehen. Um dies zu beweisen, nehmen wir (Fig. 181) den Gleichgewichtszustand bei beliebiger, noch unbestimmter Oberfläche AB an und erhalten Beziehungen, die eine ebene Oberfläche bedingen.

Fig. 181.



Von einem beliebigen Punkte P im Innern ausgehend, umgrenzen wir ein Wasserprisma PQ, dessen Länge l eine Neigung α gegen die Wagerechte bildet. Der Querschnitt des Prismas sei dF, sein Gewicht $\gamma \cdot dF \cdot l$. Ist p der Druck im Punkte P, so wirkt hier eine Längskraft $p \cdot dF$ auf das Prisma. Denkt man sich das Prisma erstarrt, und die umgebende Flüssigkeit ihrerseits auch, wobei aber an den Langflächen, entsprechend der Natur der flüssigen Körper, nur Normaldrücke auftreten können, so liefert das Gewicht $\gamma \cdot dF \cdot l$ in der Längsrichtung eine Seitenkraft $\gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin\alpha$, und wenn die Oberfläche keinen Druck erfährt, so muss

$$p \cdot dF = \gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin\alpha$$

sein. Wird der Höhenunterschied der beiden Punkte P und Q, d. h. $l \sin\alpha = z$ gesetzt, so folgt

1) $$p = \gamma z.$$

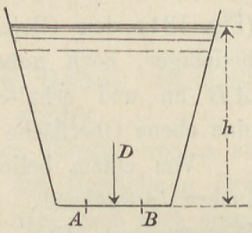
Wird von P aus ebenso nach einem anderen Punkte Q_1 der Oberfläche ein Prisma PQ_1 abgetrennt, so erhält man für dessen Gleichgewicht ebenso $p = \gamma z_1$. Da nun nach S. 157 der Druck im Punkte P nach allen Richtungen PQ, PQ_1 . . . der gleiche ist, so muss auch $z = z_1$ sein; d. h. die Höhe der verschiedenen Punkte der Oberfläche über irgend einem Punkte im Innern der Flüssigkeit muss die gleiche sein, d. h. der Wasserspiegel muss eine wagerechte Ebene bilden.

Gl. 1 enthält das Gesetz des Druckes für eine im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere. Eine Flüssigkeitssäule von der Grundfläche $= 1$ qm und der Höhe $= z$ Meter hat ein Gewicht γz und bringt dadurch den Druck

$p = \gamma z$ hervor. Man nennt deshalb auch $z = p:\gamma$ die auf eine Flüssigkeit von der Dichte γ bezogene Druckhöhe.

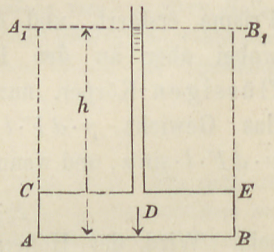
Eine wagerechte Ebene im Innern der Flüssigkeit hat an allen Stellen dieselbe Tiefe unter dem Wasserspiegel, ist daher eine Fläche überall gleichen Druckes, eine sog. Niveau-Fläche.

Fig. 182.



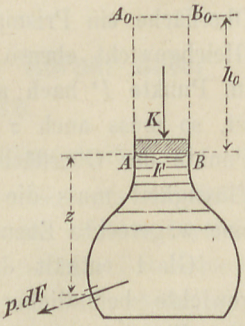
Auf eine wagerechte Bodenfläche (Fig 182) vertheilt sich der Druck gleichmässig. Ein Bodenstück AB von der Fläche F in der Tiefe h unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft D, die durch den Schwerpunkt der Fläche F hindurchgeht. Diese Kraft ist unabhängig von der Form des Gefässes und der Menge des Wassers in demselben, nur abhängig von der Höhenlage des Wasserspiegels. Mittels eines engen Rohres (Fig. 183), welches sich an die Decke eines Gefässes anschliesst, kann man, wenn man Gefäss und Rohr mit Wasser füllt, gegen den Boden AB eine Druckkraft $D = \gamma \cdot F \cdot h$ ausüben, d. h. gleich dem Gewichte eines Wasserkörpers ABB_1A_1. Die Decke CD des Gefässes erfährt nämlich eine aufwärts gerichtete Druckkraft D_1 = dem Gewichte eines Wasserprismas, das, über der Decke stehend, bis zur Höhe A_1B_1 reicht. Der Druck D_1 hat das Bestreben, Decke und Seitenwände des Gefässes von der Bodenwand nach oben hin abzureissen. Die Mittelkraft von D und D_1 ist dann das Gewicht der wirklich vorhandenen Wassermenge.

Fig. 183.



Ist (Fig. 184) der Wasserspiegel von dem Flächeninhalte F nicht frei, sondern wird auf ihn, vielleicht mittels eines Kolbens, eine Kraft K übertragen, entsprechend einem Drucke $p_0 = K:F$ und einer Druckhöhe $h_0 = p_0:\gamma$, so kann man, weil es für die Wirkung einer Kraft gleichgültig ist, ob sie durch einen Kolben

Fig. 184.

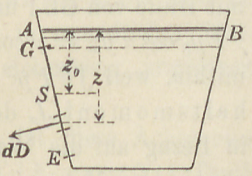


oder durch das Gewicht einer Wassermasse erzeugt wird, die Wirkung des Kolbens auch ersetzen durch Höherlegung des Wasserspiegels um die Grösse h_0. Man denkt sich also die wahre Oberfläche AB mit dem darauf lastenden Kolben ersetzt durch die ideelle freie Oberfläche A_0B_0 und kann alle Druckverhältnisse im Gefäss auf diese beziehen. In einer Tiefe z unter AB herrscht dann ein Druck $p = \gamma(z + h_0)$.

b) Druckkraft gegen eine ebene Seitenwand. Druckmittelpunkt.

Das ebene Wandstück GE (Fig. 185) erfährt über seine ganze Fläche F stetig, aber ungleichmässig vertheilte, parallele Druckkräfte. Auf ein Flächentheilchen dF in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel kommt die Kraft

Fig. 185.



1) $$dD = \gamma \cdot dF \cdot z,$$

mithin wird die gesammte Druckkraft

$$D = \gamma \Sigma dF \cdot z,$$

wofür man nach der Lehre vom Schwerpunkte (Theil 1, S. 128, Gl. 6) schreiben kann

2) $$D = \gamma F z_0,$$

wenn z_0 die Tiefe des Schwerpunktes S von F unter dem Wasserspiegel bedeutet. Die Druckhöhe z_0 des Schwerpunktes von F ist also die mittlere Druckhöhe für die ganze Fläche, nach welcher die Grösse der gesammten Druckkraft D berechnet werden kann.

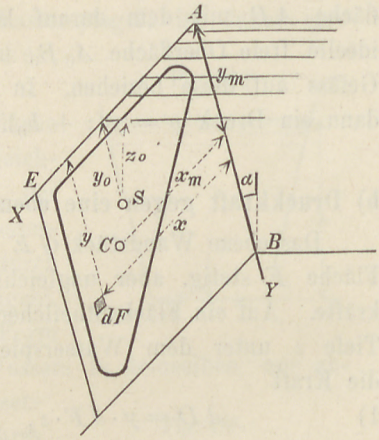
Vertheilten sich die Kräfte gleichmässig über F, so ginge D durch den Schwerpunkt S der Fläche, da aber der Druck p nach unten hin zunimmt, so muss die Mittelkraft D tiefer liegen als der Schwerpunkt; derjenige Punkt C, in welchem die Druckkraft D die Fläche F schneidet, heisst der **Druckmittelpunkt.**

Um ihn zu finden, benutzen wir Fig. 186. In der Seitenwand ABE ist ein Flächenstück F abgegrenzt. Der Wasserspiegel schneide die Wand in der wagerechten Geraden AX; rechtwinklig dazu liegt in der Fläche die Achse AY, welche mit der Lothrechten den Winkel α bilde. Ein Flächentheilchen dF habe die Koordinaten x und y, dann ist seine lothrechte Tiefe unter Wasser

$z = y \cos \alpha$. Ebenso gilt für die lothrechte Tiefe z_0 des Schwerpunktes S unter Wasser, wenn y_0 seine parallel mit AY gemessene Ordinate ist,

$$z_0 = y_0 \cos \alpha .$$

Fig. 186.



Der gesuchte Druckmittelpunkt C habe die Koordinaten x_m und y_m. Es muss nun nach Theil 1, S. 122 in Bezug auf irgend eine Achse das Moment der Mittelkraft D gleich der Momentensumme der Einzelkräfte dD sein. Dies giebt für die Achse AX: $Dy_m = \int dD \cdot y$ oder mit Hülfe von Gl. 1 und 2, S. 169: $\gamma F y_0 \cos \alpha \, y_m = \gamma \cos \alpha \int dF \cdot y^2$, mithin, weil $\int dF y^2$ das Trägheitsmoment J_x der Fläche F in Bezug auf die Wasserspiegelachse AX bedeutet, Fy_0 aber das statische Moment S_x derselben Fläche auf dieselbe Achse:

$$3) \qquad y_m = \frac{J_x}{S_x} = \frac{\int dF \cdot y^2}{F y_0} .$$

Dies ist (1. Theil, S. 279) die Schwingungslänge der Fläche F, falls sie als eine materielle Fläche um die Achse AX als Pendel schwingend gedacht wird. Für die Achse AY ergiebt sich

$$D x_m = \int dD \cdot x \quad \text{oder}$$

$$\gamma F y_0 \cos \alpha \, x_m = \gamma \cos \alpha \int dF \cdot xy ,$$

mithin, wenn man bedenkt, das $\int dF \cdot xy$ das Centrifugalmoment C der Fläche F ist (1. Theil, S. 288)

$$4) \qquad x_m = \frac{C}{S} = \frac{\int dF \cdot xy}{F y_0} .$$

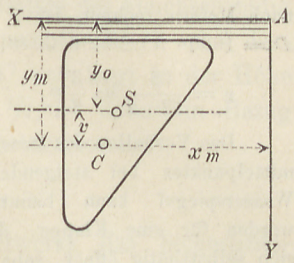
In den Gl. 3 und 4 kommt der Winkel α nicht vor; wenn sich daher die Seitenwand um die Wasserspiegelachse AX dreht, so behält der Druckmittelpunkt C in ihr seine Lage bei. Wir nehmen daher im Folgenden den Winkel $\alpha = 0$ an, betrachten also die Seitenwand als lothrecht.

Legt man durch den Schwerpunkt S eine wagerechte Achse (Fig. 187) und nennt v den rechtwinkligen Abstand des Druckmittelpunktes von der Schwerpunktsachse, so ergiebt sich aus Gl. 3, weil $J_x = J_S + Fy_0^2$ (1. Theil, S. 268)

$$y_0 + v = \frac{J_S + Fy_0^2}{Fy_0} = \frac{J_S}{Fy_0} + y_0,$$

$$5) \qquad \text{also} \quad v = \frac{J_S}{Fy_0}.$$

Fig. 187.



Erleidet nun der Wasserspiegel eine Parallelverschiebung nach oben, so bleibt J_S unverändert; mit zunehmendem y_0 wird aber v kleiner und kleiner; für $y_0 = \infty$ wird $v = 0$. Dies ist auch selbstverständlich, da, wenn die Fläche in unendlicher Tiefe liegt, die Druckvertheilung an ihr als gleichmässig angesehen werden kann.

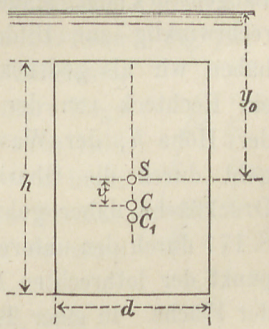
Die Lage der AY war bisher beliebig. Ist diese Achse eine Symmetrieachse für die Figur F, so wird $C = \int dF \cdot xy = 0$ (1. Theil, S. 290) und damit auch $x_m = 0$. Es liegt dann der Druckmittelpunkt auf dieser Symmetrie-Achse.

c) Druckkraft gegen eine rechteckige Seitenwand.

Für das Rechteck (Fig. 188) ist (Theil 1, S. 273) $J_S = {}^1/_{12} Fh^2$, daher nach Gl. 5

$$1) \qquad v = \frac{h^2}{12\, y_0}.$$

Fig. 188.



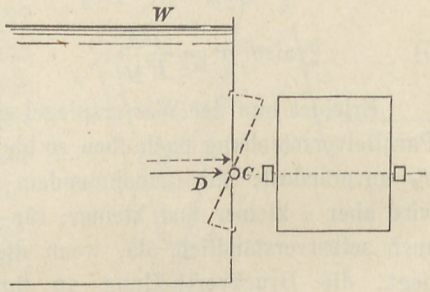
Der Druckmittelpunkt liegt auf der lothrechten Mittellinie des Rechtecks. Wird $y_0 = \infty$, so wird $v = 0$; rückt der Wasserspiegel aber abwärts, und zwar so weit, dass er die Oberkante des Rechtecks trifft, so ist $y_{0\,min} = {}^1/_2 h$, dafür wird $v_{max} = {}^1/_6 h$, d. h. der Druckmittelpunkt liegt dann bei C_1 im unteren Drittelpunkte der lothrechten Mittellinie. Wasserspiegel und Druckmittelpunkt bewegen sich hiernach stets in demselben Sinne; beide nach oben oder beide nach unten. Während

aber der Wasserspiegel, von der Oberkante der Figur ausgehend, bis zu $y_0 = \infty$ nach oben rückt, verschiebt sich c nur um $^1/_6 h$ von der tiefsten Lage nach dem Schwerpunkte.

Beispiel: $d = 1$ m, $h = 3$ m, $y_0 = 2$ m, gibt $F = 3$ qm, und, wenn man nach Metern rechnet, ist γ das Gewicht von 1 cbm Wasser $= 1000$ kg, daher $D = 1000 \cdot 3 \cdot 2 = 6000$ kg,

$$v = \frac{9}{12 \cdot 2} = \frac{3}{8} \text{ m}.$$

Fig. 189.

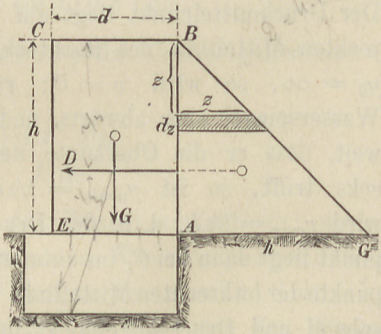


Das Verhalten des Druckmittelpunktes bei steigendem Wasserspiegel kann benutzt werden für eine Klappe, die sich selbstthätig öffnet, sobald der Wasserspiegel eine bestimmte Höhenlage überschreitet (Fig. 189). Durch den zu der Grenzlage W des Wasserspiegels gehörigen Druckmittelpunkt C legt man eine wagerechte Drehachse für die rechtwinklige Klappe. So lange der Wasserspiegel unterhalb W liegt, geht die Druckkraft D unterhalb der Achse C vorbei und drückt die Klappe gegen die obere und untere Anschlagfläche. Überschreitet der Wasserstand aber die Grenze W, so liegt D in der punktirten Lage oberhalb C, öffnet die Klappe und lässt das Wasser abfliessen.

d) Druck gegen eine ebene Mauerfläche oder Bohlwand.

Ist die Mauer $ABCE$ (Fig. 190) auf der rechten Seite bis zur Oberkante mit Wasser in Berührung und betrachtet man ein Längenstück der Mauer $= 1$ m, rechtwinklig zur Bildebene, so haben wir als gedrückte Fläche ein Rechteck von der Breite 1, der Höhe h; der Wasserspiegel geht durch die Oberkante der Druckfläche, daher geht D nach S. 171 durch den unteren Drittelpunkt der lothrechten Mittellinie der Fläche. In einer Tiefe z beträgt die auf die Einheit der Höhe kommende Kraft $p \times$ Breite $1 = \gamma z$. Setzt man noch $\gamma = 1^{\text{t}} = 1$, so wird die Darstellung des

Fig. 190.



veränderlichen $p \cdot 1 = z$ eine unter 45^0 geneigte Gerade BG. Die Druckkraft auf ein Höhentheilchen dz wird

$$dD = z\,dz,$$

dargestellt durch den wagerechten Flächenstreifen des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks ABG. Die Gesammtkraft D wird dargestellt durch die Fläche des Dreiecks $1/2\,h^2$ und liegt in der Höhe des Schwerpunktes dieser Fläche. $D = 1/2\gamma h^2$ liefert in Bezug auf die Aussenkante E der Mauer das Umsturzmoment

$$D \cdot 1/3\,h = 1/6\gamma h^3,$$

während bei einer Dichte γ_1 des Mauerwerks das Sicherheitsmoment (1. Theil, S. 167) beträgt $G \cdot 1/2\,d = 1/2\gamma_1 d^2 h$. Die Sicherheit der Mauer gegen Kanten erfordert:

$$1/2\gamma_1 d^2 h > 1/6\gamma h^3 \quad \text{oder}$$

$$1) \qquad \frac{d}{h} > \sqrt{\frac{1}{3}\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

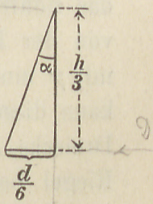
Der Verschiebung der Mauer durch D setzt sich die Reibung $f \cdot G$ entgegen (f = Reibungsziffer), mithin muss auch

$$f\gamma_1 d \cdot h > 1/2\gamma h^2, \quad \text{d. h.}$$

$$2) \qquad \frac{d}{h} > \frac{1}{2f}\frac{\gamma}{\gamma_1}$$

sein. Hat das Mauerwerk keine erhebliche Zugfestigkeit und soll gleichwohl ein Öffnen der Fugen vollständig vermieden werden, so muss, was hier allerdings nicht bewiesen werden kann, (s. Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, S. 301), die Mittelkraft aus D und G die untere Fuge AE in einem Punkte schneiden, der nicht ausserhalb des mittleren Drittels der Mauerstärke $AE = d$ liegt. Soll er gerade an der Grenze des mittleren Drittels, d. h. um $1/6\,d$ von der Mitte entfernt liegen, so muss (Fig. 191)

Fig. 191.



$$1/6\,d : 1/3\,h = \operatorname{tg}\alpha = D : G \quad \text{sein, oder}$$

$$3) \qquad \frac{d}{h} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Beispiel: Für $\gamma_1 = 2\gamma$ und $f = 0{,}6$ geben die Gleichungen der Reihe nach

1) $d > h\sqrt{1/6}$, oder $d > 0{,}41\,h$;

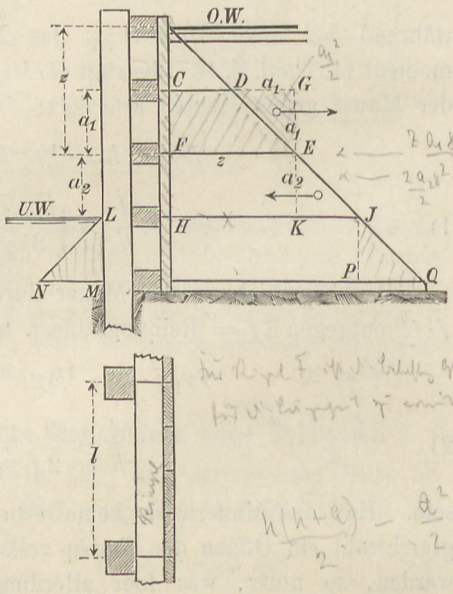
2) $d > 0{,}42\,h$;

3) $d = 0{,}7\,h$.

Die letztere Bedingung erfordert also eine bedeutende Stärke.

Eine Bohlenwand (Fig. 192) stütze sich gegen wagerechte Balken, sog. Riegel, die, auf eine Spannweite l frei liegend, sich wiederum gegen lothrechte Pfähle legen. Die mit Bohlen überdeckten Riegel werden gleichmässig über ihre Länge belastet, und zwar soll für einen um z unter Wasser liegenden Riegel F die Belastung q für die Längeneinheit ermittelt werden. Die beiden benachbarten Riegel mögen von dem betrachteten um a_1 und a_2 abstehen. Hinsichtlich der Kraftübertragung denken wir uns die Bohlen an jedem Riegel durchschnitten; sie wirken dann als statisch bestimmte Träger auf zwei Stützen. Für das Bohlenstück $CF = a_1$ von der Länge Eins, rechtwinklig zur Aufrissfigur, bildet die noch mit γ multiplicirte Trapezfläche $CDEF$ die Belastungsfigur. Man kann diese ansehen als Unterschied des Rechtecks $CGEF$ und des Dreiecks DGE. Ersteres, von dem Inhalte za_1, bringt nach dem Riegel bei F den Auflagerdruck $1/2\gamma z a_1$, letzteres, vom Inhalte $1/2\,a_1^2$, kommt aber nur zu einem Drittel auf F, u. zw. abzüglich, d. h. mit $-1/6\gamma a_1^2$. Für das Bohlenstück FH ist $FEJH$ die Belastungsfigur, deren Inhalt in die beiden Theile zerfällt $za_2 + 1/2\,a_2^2$. Hieraus ergiebt sich für das Bohlenstück FH bei F ein Auflagerdruck $1/2\gamma z a_2 + 1/6\gamma a_2^2$,

Fig. 192.



Daher kommt auf die Längeneinheit des Riegels die Druckkraft

$$q = {}^1/_2 \gamma z a_1 - {}^1/_6 \gamma a_1^2 + {}^1/_2 \gamma z a_2 + {}^1/_6 \gamma a_2^2,$$

1) $$q = {}^1/_2 \gamma (a_1 + a_2) \left\{ z - {}^1/_3 (a_1 - a_2) \right\}.$$

Sind die Riegel in gleichen Abständen $a_2 = a_1 = a$, so wird

2) $$q = \gamma a z.$$

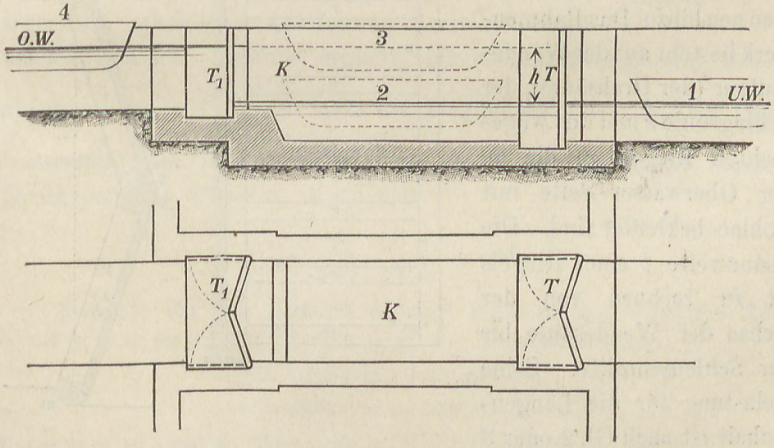
Ist der untere Theil der Wand, von L beginnend, auch auf der linken Seite der Figur 192 mit Wasser in Berührung, so übt dieses einen Druck aus, dessen Vertheilung durch das Dreieck LMN dargestellt wird. Dieser Gegendruck des Unterwassers lässt sich von dem Drucke des Oberwassers leicht abziehen, da $LMN = JPQ$ ist. Unterhalb des Unterwasser-Spiegels (UW) ist also der Überdruck $p = \gamma h$, wenn h der Höhenunterschied der beiden Wasserspiegel, und es wird für einen unter UW liegenden Riegel

3) $$q = \gamma a h.$$

e) Berechnung der Riegel des Stemmthores einer Schleuse.

Eine Schiffschleuse dient zum Hinüberführen eines Schiffes aus einer Kanalstrecke in eine solche mit höherem Wasserstande, oder umgekehrt. Zwischen beide Strecken mit dem Unterwasser UW und dem Oberwasser OW ist die Schleusenkammer K (Fig. 193) eingebaut, mit UW und OW durch Thore

Fig. 193.



verbunden, die geöffnet und geschlossen werden können. Die Schleusenkammer steht auch noch durch Schützenöffnungen oder dgl. mit UW und OW in Ver-

bindung, so dass man ihren Wasserstand nach Bedürfnis auf die Höhe von $U\,W$ oder $O\,W$ bringen kann. Soll nun ein Schiff (Lage 1) aus $U\,W$ nach $O\,W$ befördert werden, so bringt man den Wasserstand der Kammer K auf die Höhe von $U\,W$, kann nun das Unterthor T leicht öffnen, da es von beiden Seiten gleichen Wasserdruck bekommt, und führt das Schiff in die Kammer (punktirte Lage 2). Dann schliesst man das Unterthor und jede Verbindung der Kammer mit dem $U\,W$, öffnet aber die Schützen der Verbindung mit dem $O\,W$, in Folge dessen Wasser in die Kammer einströmt, bis der Wasserstand der Kammer in gleicher Höhe mit $O\,W$ steht. Hierbei wird das schwimmende Schiff mit dem Wasserspiegel um h gehoben (punktirte Lage 3). Jetzt kann das Oberthor T_1 leicht geöffnet und das Schiff in der Lage 4 ($O\,W$) übergeführt werden. Die Thore sind zweiflüglig; jeder Flügel dreht sich um eine lothrechte, an einer Seitenwand der Kammer liegende Achse; seine Länge ist etwas grösser als die halbe Weite der Kammer. Beide Flügel fallen daher, wenn sie sich in der Mitte der Schleuse berühren, nicht in dieselbe Ebene, sondern bilden mit einander einen stumpfen, nach dem Oberwasser gekehrten Winkel. Ein höherer Wasserstand auf der $O\,W$-Seite presst daher die Flügel selbstthätig zusammen; die Flügel stemmen sich gegen einander und heissen deshalb Stemmthore. Im Grundrisse der Fig. 193 sind die Thore in geschlossenem Zustande ausgezogen, im offenen punktirt; die Kreisbogen bezeichnen die Drehungswege der Flügelenden.

Der Flügel eines hölzernen Stemmthores (Fig. 194 Ansicht, Fig. 195 Grundriss) hat nun hinsichtlich der Kraftleistung einige Verwandtschaft mit einem Fach einer Bohlwand; nur tritt das Aneinanderstemmen neu hinzu. Das Rahmenwerk besteht aus der Wendesäule w (der Drehsäule), der Schlagsäule s und den wagerechten Riegeln r, die an der Oberwasser-Seite mit Bohlen bekleidet sind. Die Spannweite l eines Riegels ist zu rechnen von der Achse der Wendesäule bis zur Schleusenmitte. Seine Belastung für die Längeneinheit ist nach Gl. 2 oder 3 (S. 175) zu bemessen. Die gegenseitige Druckkraft K, die die Riegel durch Vermittelung der Schlagsäule auf einander ausüben,

Fig. 194.

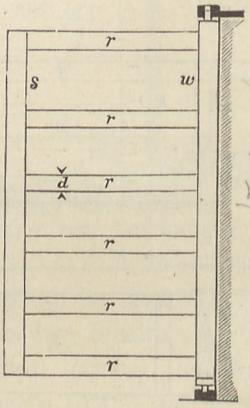
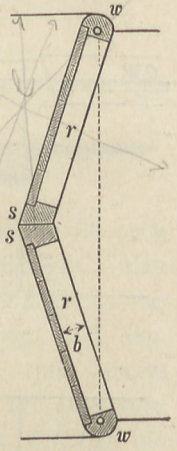


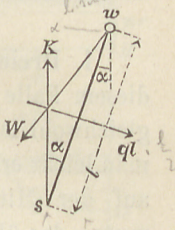
Fig. 195.



muss rechtwinklig zur lothrechten Mittelebene der Schleuse sein (Fig. 196). Ausserdem wirkt an dem Riegel die Last ql und der Widerstand W der Wendesäule. Diese drei Kräfte müssen sich im Gleichgewichte halten, also durch einen Punkt gehen.

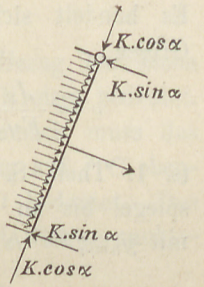
In Bezug auf die Wendesäule wird $Kl \sin\alpha = {}^1/_2 ql^2$, mithin $K = \frac{ql}{2 \sin\alpha}$, und ebenso gross ist auch W, weil K und W symmetrisch zur Mitte des Riegels sind.

Fig. 196.



Man kann nun (Fig. 197) K zerlegen in $K \cos\alpha$ und $K \sin\alpha$. Letztere Seitenkraft, gleich ${}^1/_2 ql$, entspricht dem Auflagerdruck eines einfachen Balkens mit der Belastung q, erzeugt mit ihr ein grösstes Biegungsmoment in der Mitte $= {}^1/_8 ql^2$, und eine Biegungsspannung

Fig. 197.



$$\sigma_1 = \frac{{}^1/_8 ql^2}{{}^1/_6 db^2} = \frac{3}{4}\frac{ql^2}{db^2},$$

wenn d die lothrechte, b die wagerechte Abmessung des rechtwinkligen Riegelquerschnitts ist. Die Kraft $K \cos\alpha = {}^1/_2 ql \cot\alpha$ kann für den Riegel als einfache Druckkraft längs seiner Mittellinie angesehen werden, da wegen der ziemlich starken Querschnitts-Abmessungen der Riegel eine irgendwie erhebliche Ausbiegung derselben nicht anzunehmen ist. Hieraus ergiebt sich eine überall gleiche Druckspannung $\sigma_2 = \frac{ql \cot\alpha}{2db}$. Da die Biegungsspannung auf der Oberwasserseite als Druck auftritt, so wird die überhaupt stärkste Druckspannung $\sigma'' = \sigma_1 + \sigma_2$ oder

$$\sigma'' = \frac{ql}{2db}\left(\frac{3}{2}\frac{l}{b} + \cot\alpha\right).$$

Beispiel: Für eine Schleuse von 6,3 m Weite sei $\operatorname{tg}\alpha = {}^1/_8$, $l = 3{,}2$ m, $h = 2$ m, $a = 0{,}9$ m, $d = 20$ cm, $b = 40$ cm. Dann ist zunächst

$$q = 1000 \cdot 0{,}9 \cdot 2 = 1800 \text{ kg/m},$$
$$ql = 1800 \cdot 3{,}2 = 5760 \text{ kg}.$$

Um σ in at zu erhalten, führen wir d, b und l in cm ein:

$$\sigma = \frac{5760}{2 \cdot 20 \cdot 40}\left(\frac{3}{2}\frac{320}{40} + 6\right) = 3{,}6\,(12 + 6) = 64{,}8 \text{ at}.$$

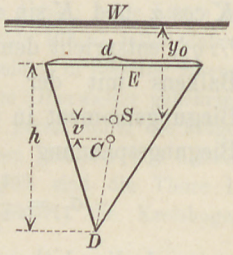
Die Spannungsvertheilung ist freilich eine sehr ungleichmässige. In demselben Querschnitte beträgt die stärkste Zugspannung (an der Unterwasser-Seite) nur

$$\sigma' = 3{,}6\,(12 - 6) = 21{,}6 \text{ at}.$$

f) Druckmittelpunkt eines Dreiecks, eines Kreises, eines Viertelkreises.

1. Dreieck. α) Grundlinie oben und $\parallel$ dem Wasserspiegel. In diesem Falle giebt es im Allgemeinen keine Symmetrie-Achse, aber gleichwohl ist Gl. 4 (S. 170) entbehrlich, weil man leicht erkennt, dass der Druckmittelpunkt auf der Mittellinie DE (Fig. 198) liegen muss, da über jeden wagerechten Streifen des Dreiecks eine gleichmässige Kraftvertheilung stattfindet, so dass der Druckmittelpunkt jedes Streifens in seiner Mitte liegt. Es handelt sich also nur noch um die Grösse

Figi 198.



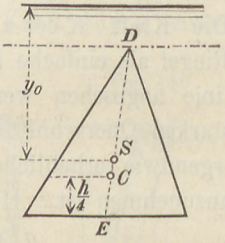
$$v = \frac{J_S}{F y_0} = \frac{F h^2}{18\,F y_0} = \frac{h^2}{18\,y_0}$$

(s. 1. Theil, S. 274). Sinkt der Wasserspiegel bis an die Oberkante des Dreiecks mit $y_{0\,min} = {}^1/_3 h$, so wird

$$v_{max} = {}^1/_6 h,$$

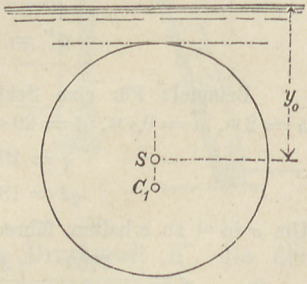
d. h. es liegt der Druckmittelpunkt dann in der Mitte der Mittellinie DE.

Fig. 199.



β) Liegt die Spitze des Dreiecks oben (Fig. 199), so wird in gleicher Weise $v = \frac{h^2}{18\,y_0}$. Rückt aber der Wasserspiegel bis zur Spitze herab, so ist $y_{0\,min} = {}^2/_3 h$, daher $v_{max} = {}^1/_{12} h$ mit C im unteren Viertelpunkte von ED.

Fig. 200.



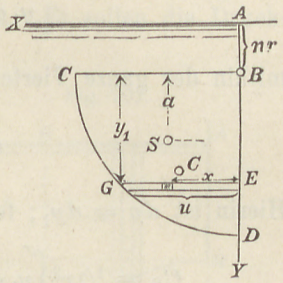
2. Kreis. Es ist (Fig. 200)

$$v = \frac{J_S}{F y_0} = \frac{r^2}{4\,y_0}.$$

Für $y_{0\,min} = r$ wird $v_{max} = {}^1/_4 r$ (Punkt C_1).

3. Viertelkreis. Um auch die Anwendung der Gl. 4 (S. 170) zu zeigen, wählen wir nun den Viertelkreis, (Fig. 201), dessen Druckmittelpunkt etwas mehr Rechnung erfordert als die obigen einfachen Beispiele.

Fig. 201.



Der Wasserspiegel liege parallel mit dem oberen begrenzenden Halbmesser BC in einer Höhe nr darüber. Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche liegt (nach 1. Theil, S. 132) um

$$\frac{4}{3\pi}r = a = 0{,}424\,r$$

vom Mittelpunkte entfernt. In dem gleichen Abstande von BC und BD muss auch der Schwerpunkt der Viertelkreisfläche liegen. Mithin ist

$$y_0 = a + nr = r\left(\frac{4}{3\pi} + n\right).$$

Das Trägheitsmoment einer Kreisfläche in Bezug auf einen Durchmesser ist $^1/_4 F_1 r^2$, wenn F_1 die Fläche des Kreises bedeutet. Dazu liefern die 4 Viertelkreise je ein Viertel; sonach muss das Trägheitsmoment des Viertelkreises BCD in Bezug auf BC ebenfalls $^1/_4 Fr^2$ sein, wenn F nun die Fläche BCD bedeutet. Das Trägheitsmoment J_S in Bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse ist sonach

$$J_S = F\left(\frac{r^2}{4} - a^2\right) = Fr^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right).$$

Daher wird

1) $$v = r\,\frac{\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}}{\frac{4}{3\pi} + n}.$$

Zur Ermittelung von x_m nach Gl. 4 (S. 170) wollen wir vorerst das Centrifugalmoment C berechnen. Es empfiehlt sich, dasselbe auszudrücken durch das etwas bequemere Centrifugalmoment C_B in Bezug auf BC und BD. Mit $y = y_1 + nr$ wird

$$C = \int dF x y = \int dF x (y_1 + nr)$$
$$= \int dF x y_1 + nr \int dF x, \quad \text{somit}$$

2) $$C = C_B + nrFx_0 = C_B + Fn\frac{4}{3\pi}r^2.$$

Ein Flächentheilchen $dF = dx\,dy$ liefert zu C_B den Beitrag $dx\,dy\,x y_1$. Sämmtliche Flächentheilchen des Streifens EG von der Breite u haben übereinstimmende y_1 und dy, liefern also zusammen den Beitrag

$$y_1\,dy\int_0^u x\,dx = {}^1/_2 y_1\,dy\,u^2,$$

mithin der ganze Viertelkreis

$$C_B = {}^1/_2\int_0^r y_1\,dy\,u^2.$$

Hierin ist $dy = dy_1$; ferner $u^2 = r^2 - y_1{}^2$, wodurch

$$C_B = {}^1/_2 r^2\int_0^r y_1\,dy_1 - {}^1/_2\int_0^r y_1{}^3\,dy_1 = {}^1/_8 r^4, \quad \text{oder}$$

3) $$C_B = \frac{F\cdot r^2}{2\pi}. \quad \text{Also}$$

$$C = Fr^2\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3}\frac{n}{\pi}\right). \quad \text{Hiermit wird}$$

4) $$x_m = \frac{C}{Fy_0} = r\,\frac{\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3}\frac{n}{\pi}}{\frac{4}{3\pi} + n} = r\,\frac{3 + 8n}{8 + 6n\pi}$$

oder, wenn in Zähler und Nenner durch n getheilt wird:

5) $$x_m = r\,\frac{\frac{3}{n} + 8}{\frac{8}{n} + 6\pi}.$$

Für $n = \infty$ wird $v = 0$ (Gl. 1)

$$x_m = \frac{4}{3\pi}r = 0{,}424\,r$$

(Gl. 5), d. h. Punkt C fällt mit S zusammen, wie es sein musste.

Für $n = 0$ wird

$$v = \left(\frac{3}{16}\pi - \frac{4}{3\pi}\right)r = 0{,}165\,r;$$

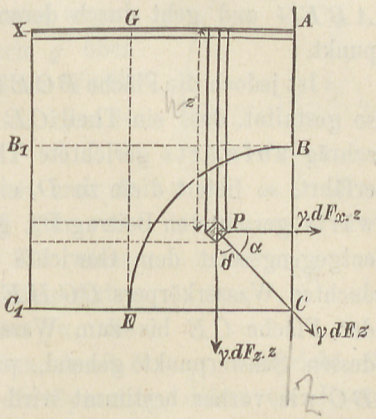
$$x_m = \frac{3}{8}r = 0{,}375\,r$$

(Gl. 4); (Punkt C in Fig. 201.)

g) Druckkräfte gegen krumme Flächen.

Durch den freien Wasserspiegel sei die Ebene AXY gelegt (Fig. 202), die AZ gehe lothrecht abwärts. Es sollen die Druckkräfte des Wassers gegen die gekrümmte Fläche BEC (etwa Kugeloktant mit dem Mittelpunkte C) bestimmt werden. Ein Flächentheilchen dF bei P in der Tiefe z unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft $\gamma \cdot dF \cdot z$, welche mit den Achsen die Winkel α, β und δ bilden möge. Durch rechtwinklige Zerlegung erhält man

Fig. 202.



$$dD_x = \gamma dF \cos\alpha \cdot z = \gamma dF_x z,$$

$$dD_y = \gamma dF \cos\beta \cdot z = \gamma dF_y z,$$

$$dD_z = \gamma dF \cos\delta \cdot z = \gamma dF_z z,$$

worin dF_x, dF_y, dF_z die rechtwinkligen Projektionen von dF in der Richtung der x, der y bezw. z bedeuten. Da die Projektion dF_x in derselben Tiefe z unter Wasser liegt wie dF, so bedeutet dD_x auch die Druckkraft gegen die Projektionsfläche, demnach ist die ganze Kraft in der x-Richtung

$$D_x = \gamma \int dF_x z$$

die gesammte Druckkraft, die auf die ebene Projektion $F_x = B_1 C_1$ der gekrümmten Fläche kommen würde und deren nähere Bestimmung nach Grösse und Lage nach S. 169—180 zu geschehen hat. Gleiches gilt bezüglich der Seitenkraft

$$D_y = \gamma \int dF_y z.$$

Dabei ist noch zu bemerken, dass diejenigen Flächen, welche beim Projiciren in einer der beiden wagerechten Richtungen paarweise auf einander fallen, nicht mit in Betracht kommen.

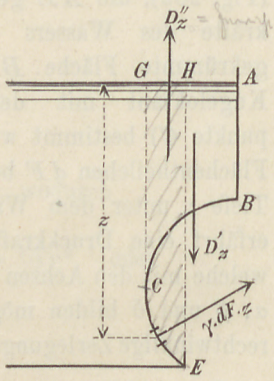
Anders verhält es sich mit der Seitenkraft dD_z, weil beim Projiciren von dF auf eine beliebige wagerechte Ebene die Höhenlage des Flächentheilchens dF nicht mit der seiner Projektion dF_z

übereinstimmt. Wohl aber bedeutet $\gamma \cdot dF_z \cdot z$ das Gewicht derjenigen Flüssigkeitssäule, die vom Flächentheilchen dF bis zum Wasserspiegel reicht. Daher ist auch

$$D_z = \gamma \int dF_z \cdot z$$

das Gewicht der lothrecht über der gedrückten Fläche stehenden Wassermasse $ABEG$ und geht durch deren Schwerpunkt.

Fig. 203.

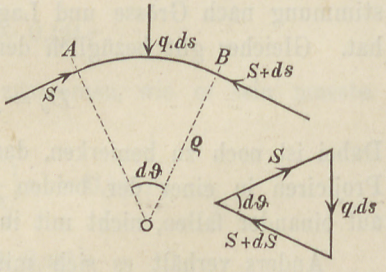


Ist jedoch die Fläche BCE (Fig. 203) so gestaltet, dass ein Theil CE derselben schräg aufwärts gerichtete Theildrücke erfährt, so liefert diese zu D_z einen aufwärts gerichteten Beitrag D''_z, gleich und entgegengesetzt dem Gewichte eines gedachten Wasserkörpers $CGHE$, der von der Fläche CE bis zum Wasserspiegel reichen würde, und durch dessen Schwerpunkt gehend, während der Beitrag D'_z der Fläche BC wie vorher bestimmt wird.

h) Riegel eines gekrümmten Schleusenthores.

Die Riegel eines ebenen Schleusenthores (S. 176) wurden sehr ungleichmässig gespannt. Geht man für grössere Schleusenbreiten zu eisernen Thoren über, so kann man durch die Wahl gekrümmter Riegel und Thore eine bessere Ausnutzung der Festigkeit, d. h. eine gleichmässigere Spannung, erreichen. Es soll die Bedingung gesucht werden, unter welcher ein Riegel in wagerechter Ebene überall eine gleichmässig über den Querschnitt vertheilte Druckkraft erfährt.

Fig. 204.



Ist (Fig. 204) $AB = ds$ ein Theilchen des Riegels mit dem Krümmungshalbmesser ϱ und dem Mittelpunktswinkel $d\vartheta$ und q die auf die Längeneinheit kommende, nach S. 175 zu bemessende Belastung, so müssen nach obiger Bedingung an den Schnittstellen die centrischen Druck-Spannkräfte S und $S + dS$ auftreten. Das

Gleichgewicht erfordert dann $S = S + dS$, d. h. $dS = 0$, S überall gleich. Ferner gemäss dem Krafteck in Fig. 204:

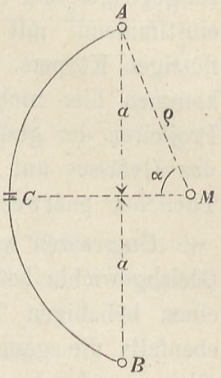
$$S \sin {}^1/_2 d\vartheta = {}^1/_2 q\, ds \quad \text{oder,}$$

wegen $\sin d\vartheta = d\vartheta$,

$$S d\vartheta = q\, ds = q\varrho\, d\vartheta, \quad \text{daher}$$

$$1) \qquad S = q\varrho.$$

Fig. 205.



Da nun S überall gleich war, so muss wegen der Unveränderlichkeit von q auch ϱ über die ganze Länge des Riegels denselben Werth haben, d. h. der Riegel muss kreisförmig sein.

Zwischen den Wendesäulen A und B (Fig. 205) im Abstande $2a$ sind nun verschiedene Kreisbögen möglich. Für einen Halbmesser ϱ und einen halben Mittelpunktswinkel α ist die Bogenlänge $AC = \varrho\alpha$, die halbe Weite $a = \varrho \sin\alpha$. Einer Spannkraft $S = q\varrho$ entspricht ein Querschnitt $F = q\varrho : \sigma$, wenn δ die Spannung, daher ein Rauminhalt des Riegels eines Flügels

$$V = F\varrho\alpha = \frac{q}{\sigma}\varrho^2\alpha = \frac{q}{\sigma}a^2\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Soll V möglichst klein werden, so muss nach der Regel vom Minimum

$$0 = \sin^2\alpha - \alpha \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha \quad \text{oder}$$

$$2) \qquad \operatorname{tg}\alpha = 2\alpha \quad \text{sein.}$$

Dieser Bedingung genügt ein Winkel $\alpha = 66^\circ 47'$ mit $\sin\alpha = 0{,}919$; dafür wird $\rho = a : 0{,}919 = 1{,}088\, a$,

$$F = \frac{q}{\sigma}\rho = 1{,}088\, a \frac{q}{\sigma}.$$

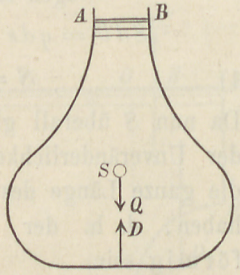
Praktischen Gebrauch macht man von dieser Untersuchung nicht; sie ist nur eine Übungsaufgabe der angewandten Mathematik.

i) Gesammtdruck auf die Gefässwände. Auftrieb einer Flüssigkeit.

Befindet sich in einem Gefässe (Fig. 206) ein flüssiger Körper mit freiem Wasserspiegel im Gleichgewichte, so wirkt an der Flüssigkeit als Massenkraft das Gewicht $Q = \gamma V$, lothrecht abwärts durch den Schwerpunkt S der Flüssigkeit gehend. Ist D der Gesammtdruck der Gefässwände gegen die Flüssigkeit, d. h. die gesammte Oberflächenkraft, so muss D mit Q im Gleichgewichte

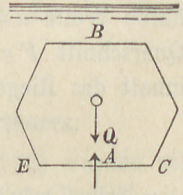
sein, d. h. es ist $D = Q = \gamma V$, lothrecht aufwärts durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit gehend. Der Gesammtdruck des flüssigen Körpers auf die Gefässwände ist nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Entgegengesetzte von D, d. h. völlig übereinstimmend mit dem Gewichte Q des flüssigen Körpers. Seitendrücke D_x und D_y kommen hier nicht in Betracht, weil beim Projiciren der gesammten inneren Oberfläche des Gefässes auf eine lothrechte Ebene die Theilchen paarweise auf einander fallen.

Fig. 206.



Umgrenzen wir in einem grösseren, im Gleichgewichte befindlichen flüssigen Körper einen beliebigen Theil BCE (Fig. 207), so müssen an diesem ebenfalls die gesammte Massenkraft Q und der Gesammtdruck A aller umgebenden Flüssigkeitstheilchen sich aufheben. D. h. es muss $A = Q = \gamma V$, aufwärts gerichtet sein und durch den Schwerpunkt des Körpers V gehen. Vertauscht man nun den Flüssigkeitstheil BCE mit einem anderen Körper, dessen Oberfläche genau mit der Umgrenzung BCE übereinstimmt, so übt die umgebende Flüssigkeit auf den fremden Körper ganz dieselben Kräfte aus, wie auf den etwa erstarrt gedachten Theil BCE des flüssigen Körpers, mithin ist der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen einen in sie eingetauchten Körper

Fig. 207.



$$1) \qquad A = \gamma V.$$

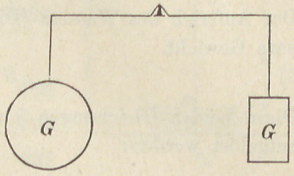
Diese Kraft heisst der **Auftrieb.** Sie ist ganz unabhängig von der Massenvertheilung des eingetauchten Körpers, lediglich bedingt durch den Flüssigkeitskörper, dessen Stelle der feste Körper einnimmt, also durch die von dem festen Körper verdrängte Flüssigkeit.

Der Auftrieb einer Flüssigkeit gegen einen in dieselbe eingetauchten Körper ist lothrecht aufwärts gerichtet, gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit und geht durch deren Schwerpunkt.

Diese Regel gilt sowohl für einen völlig, als auch für einen nur theilweise eingetauchten Körper. In letzterem Falle bedeutet V

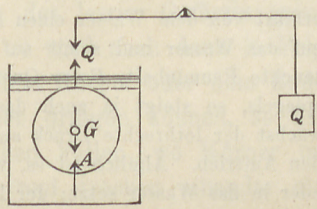
den Rauminhalt des unter Wasser befindlichen Theiles des eingetauchten Körpers. Befindet sich der eingetauchte Körper ganz unter Wasser und ist er nicht zusammendrückbar, so ist der Auftrieb unabhängig von der Tiefe des Körpers unter Wasser, weil nach S. 157 die Dichte γ unveränderlich ist.

Fig. 208.



Hängt man einen Körper vom Gewichte G an eine gleicharmige Waage (Fig. 208), so muss an der anderen Seite derselben ein Gewichtstück G angebracht werden, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Ist aber (Fig. 209) der an der Waage hängende Körper vom Rauminhalte V ganz in eine Flüssigkeit von der Dichte γ eingetaucht und ist sein Gewicht G grösser als der Auftrieb γV, so ist nur eine aufwärts gerichtete Kraft

Fig. 209.



$$2) \qquad Q = G - A$$

nöthig, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Diese Kraft Q heisst das scheinbare oder relative Gewicht des Körpers in Bezug auf die Flüssigkeit. Die Wägung eines Körpers im eingetauchten Zustande ersetzt in manchen Fällen eine Bestimmung des Rauminhaltes. Kennt man nämlich V, so ist damit auch der Auftrieb $A = \gamma V$ gegeben, d. h. der Unterschied von G und Q. Ist es aber nicht thunlich, V durch Messung zu bestimmen, so führt die Ermittelung des wahren und des scheinbaren Gewichtes (G und Q) zum Ziele, denn es ist nun

$$3) \qquad V = (G - Q) : \gamma .$$

Damit hat man denn auch die mittlere Dichte γ_1 des eingetauchten Körpers, nämlich

$$4) \qquad \gamma_1 = \frac{G}{V} = \gamma \frac{G}{G - Q},$$

oder, wenn er homogen ist, seine wahre Dichte.

Bekanntlich verwandte schon Archimedes (281—212 vor Chr.), der das Wesen des Auftriebes beim Baden erkannte, die doppelte Wägung, um fest-

zustellen, wie viel Gold und wie viel Silber in der Krone des Hiero von Syrakus enthalten sei. Ist V_1 die Raummenge Goldes von der Dichte γ_1, V_2 die Raummenge Silbers von der Dichte γ_2 in der Krone, so ist deren wahres Gewicht

5) $$G = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 .$$

Der Auftrieb des Wassers (Dichte γ) ist $A = \gamma (V_1 + V_2)$, mithin das scheinbare Gewicht.

6) $$G - Q = \gamma (V_1 + V_2) .$$

Diese beiden Gleichungen 5 und 6 können nach den Unbekannten V_1 und V_2 aufgelöst werden:

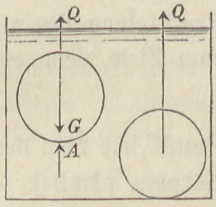
7) $$V_1 = \frac{G\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma}\right) + \frac{\gamma_2}{\gamma} Q}{\gamma_1 - \gamma_2} .$$

Um V_2 zu erhalten, braucht man in Gl. 7 nur die Indices 1 und 2 mit einander zu vertauschen.

Steht ein Gefäss mit Wasser auf einer Waagschale und taucht man mit dem Finger in das Wasser, so muss die Waagschale sich senken. Der Finger erfährt von dem Wasser einen Auftrieb A, und dieselbe Kraft übt der Finger auf das Wasser und somit auf das Gefäss nach unten aus. Ist V der eingetauchte Rauminhalt, F der Querschnitt des Gefässes in der Höhe des Wasserspiegels, so steigt ja auch das Wasser im Gefässe um $\Delta h = V : F$, dadurch wächst der lothrechte Druck auf das Gefäss um $\gamma F \Delta h = \gamma V$, d. h. genau um den Auftrieb. Ähnlich ist es, wenn man ein Stück Holz oder einen Fisch auf oder in das Wasser setzt; der lothrechte Druck auf das Gefäss ist dann, wenn wieder Gleichgewicht herrscht, genau um das Gewicht des Holzes oder Fisches gewachsen.

Die Kraft $Q = G - A = G - \gamma V$, die einen unter Wasser befindlichen Körper in der Schwebe hält (Fig. 210), genügt auch, denselben langsam und gleichmässig im Wasser aufwärts zu bewegen (bei schneller Bewegung entstehen Bewegungswiderstände, die von der Geschwindigkeit abhängig sind). Auch wenn der Körper auf dem Boden des Gefässes liegt, ihn aber nur in einzelnen Punkten oder Linien, nicht in Flächen, berührt, wird eine aufwärts gerichtete, die Grösse $Q = G - \gamma V$ nicht wesentlich überschreitende Kraft hinreichen, den Körper vom Boden empor zu heben.

Fig. 210.



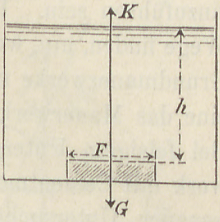
Zweifelhaft kann man über die Grösse der zum Emporheben vom Boden erforderlichen Kraft K sein, wenn der Körper den Boden des Gefässes mittels einer grösseren Fläche berührt. In dem

Falle der Fig. 211 lastet auf der oberen Fläche des Körpers eine Druckkraft $\gamma F h$, und es muss

8) $$K \geqq G + \gamma \cdot F \cdot h$$

sein, um den Körper vom Boden abzuheben, wenn an der unteren Fläche des Körpers kein Wasserdruck wirkt.

Fig. 211.



Letztere Annahme wird aber in den meisten Fällen nicht zutreffen. Befand sich in dem Gefässe schon Wasser, bevor der Körper auf den Boden gesenkt wurde, so wird unter ihm eine dünne Wasserschicht verbleiben, die den Wasserdruck auf die untere Fläche überträgt, so dass nur

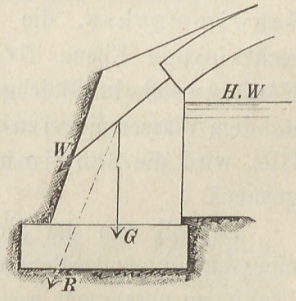
9) $$K \geqq G - \gamma V$$

zum Heben erforderlich sein wird.

Wird der Körper auf den Boden des leeren Gefässes gelegt und dann erst mit Wasser übergossen, so wird auch dann in Folge kleiner Unebenheiten, Poren u. dgl. an dem Körper oder dem Boden in der Regel Wasser unter den Körper dringen können, so dass Formel 9 gültig bleibt. Nur in solchen Fällen, wo Körper und Boden ohne Poren, sauber bearbeitet und trocken einander aufgeschliffen sind, wird das nachträglich eingeführte Wasser vielleicht nicht unter den Körper dringen können, so dass Formel 8 anzuwenden wäre.

Derartige Erwägungen sind erforderlich, wenn es sich um die Standsicherheit des Widerlagers einer gewölbten Brücke handelt. Steht das Widerlager im Trocknen, so hat man das wahre Gewicht G desselben mit dem Kämpferdrucke W des Gewölbes und dem etwaigen Enddrucke zusammenzusetzen, um daraus die für die Sicherheit des Widerlagers massgebende Mittelkraft R zu erhalten. Ist das Bauwerk aber einem Hochwasser $H \cdot W$ ausgesetzt, so hat man zu erwägen, ob es wahrscheinlich ist, dass das Wasser in die Fugen oder unter die Grundfläche des Mauerwerks dringen kann. In diesem Falle würde, wenn auch die Hinterfüllungserde

Fig. 212.

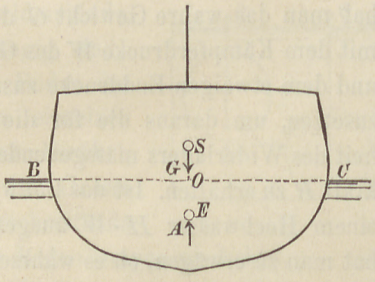


vom Wasser durchzogen ist, der unter Wasser befindliche Theil des Mauerwerks nur mit seinem scheinbaren Gewichte $Q = G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$, d. h. bei $\gamma_1 = 2\gamma$ nur mit der Hälfte seines Gewichtes einzuführen sein. Ist der Boden kiesig, so dürfte das Wasser wohl Wege finden, um, wenn auch nicht sofort, doch mit der Zeit, unter dem Grundmauerwerke mit seinem vollen Drucke zu wirken, wogegen auch eine das Mauerwerk umschliessende Spundwand nicht schützen würde. Bei felsigem Untergrunde könnte es vielleicht gelingen, das Mauerwerk mit Cementmörtel dem Felsen wasserdicht anzuschliessen. Von genauer Untersuchung des Grundes und sorgfältiger Ausführung ist es abhängig, ob man in solchem Falle den Wasserdruck ausser Acht lassen darf.

k) Gleichgewicht schwimmender Körper.

Ist die mittlere Dichte γ_1 eines Körpers kleiner als diejenige des Wassers, so fällt sein scheinbares Gewicht Q für Wasser $= G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma) V$ negativ aus. Der Körper wird daher, wenn er nicht durch eine besondere abwärts gerichtete Kraft Q niedergehalten wird, sich aus dem Wasser erheben, auf dem Wasser *schwimmen* und wird im Gleichgewichte sein, wenn der Auftrieb γV des eingetauchten Theiles V, der *Verdrängung* (des Deplacement), sich mit dem wahren Gewichte G des Körpers im Gleichgewichte hält. Dazu ist erforderlich, dass $\gamma V = G$ sei und dass der Schwerpunkt S des Körpers mit dem Schwerpunkt E der verdrängten Wassermasse V in derselben Lothrechte liege. Die Gerade SE im Körper heisst die *Schwimmachse*, die zu ihr rechtwinklige Ebene BOC des Körpers, welche im Gleichgewichte mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, wird die *Schwimmebene* genannt.

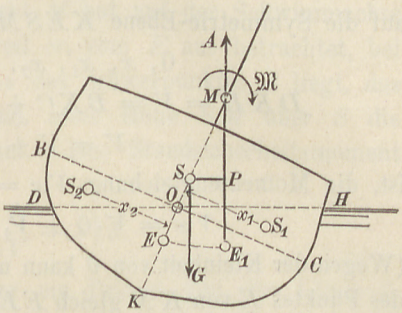
Fig. 213.



Es soll nun die Sicherheit eines schwimmenden Schiffes gegen Umkippen untersucht werden. Das Schiff habe eine Symmetrieebene, die durch die Schwimmachse SE geht.

Es werde in irgend einer Weise, etwa mittels zweier wagerechten Taue ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$ auf den Körper ausgeübt, dessen Achse rechtwinklig zur Querschnitts-Ebene steht, und dadurch eine Schiefstellung um den kleinen Winkel ϑ bewirkt. Hierdurch ändert sich die Form der Verdrängung und damit die Lage des Auftriebes A. Ist nun auch in dieser schrägen Lage (Fig. 214) Gleichgewicht, bilden G und A ein Kräftepaar, welches das Umsturzmoment $\mathfrak{M}$ aufhebt, so befand sich das Schiff in der aufrechten Lage (vor Einwirkung des Momentes $\mathfrak{M}$) im sicheren Gleichgewichte; nach einer Störung desselben kehrt es unter Einwirkung von G und A selbstthätig in die aufrechte Lage zurück. Nach Fig. 214 ist dazu erforderlich, dass die neue Lage von A (durch den Schwerpunkt E_1 der jetzigen Verdrängung DKH) rechts von G, d. h. rechts von S liege, dass A die Schwimmachse in einem Punkte M schneide, der oberhalb des Schwerpunktes S liegt. Das Standsicherheits-Moment ist dann

Fig. 214.



$$\mathfrak{M} = G \cdot SP = \gamma V \cdot \overline{SM} \sin \vartheta,$$

oder bei kleinem Winkel ϑ

1) $$\mathfrak{M} = G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = \gamma V \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta.$$

Die Länge SM ist für die Standsicherheit massgebend. Nennt man die seitliche Verschiebung des Schwerpunktes der Verdrängung

$$EE_1 = x,$$

so kann EE_1 bei kleinem ϑ auch als Kreisbogen um M aufgefasst und $EE_1 = x = EM \cdot \vartheta$ gesetzt werden. Mit $ES = e$ wird

2) $$SM = ME - e = \frac{x}{\vartheta} - e.$$

Da die Störung der aufrechten Lage durch ein Kräftepaar hervorgerufen wurde, so bleibt stets $A = G$, d. h. die Verdrängung V der Grösse nach unverändert; mithin muss das eintauchende

Keilstück $V_1 = COH$ mit dem Schwerpunkte S_1 gleich dem austauchenden Keilstücke $V_2 = BOD$ mit dem Schwerpunkte S_2 sein. Bezieht man nun die Schwerpunkte

$$E \; E_1 \; S_1 \; S_2$$

auf die Symmetrie-Ebene $KESM$ mit den Abständen

$$0, \; x, \; x_1, \; x_2, \quad \text{so gilt, weil}$$

$$DKH = V = BKC + OCH - OBD, \quad \text{d. h.}$$

$$V = V + V_1 - V_2$$

ist, die Momentengleichung $Vx = \Sigma(Vx)$ (Theil 1, S. 126):

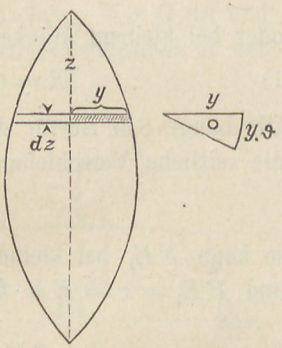
$$Vx = V \cdot 0 + V_1 x_1 - V_2 (- x_2).$$

(Wegen der Kleinheit von ϑ kann nämlich der rechtwinklige Abstand des Punktes E von KM gleich $EE_1 = x$ gesetzt werden; auch wollen wir voraussetzen, dass BC und DH sich auf der Schwimmachse in O schneiden und dass $x_1 = x_2$ gesetzt werden darf. Der Abstand des Punktes S_2 ist als $-x_2$ eingeführt, da S_2 links von KM liegt.) Hiernach wird

3) $$x = \frac{2 V_1 x_1}{V} \quad \text{und} \quad SM = \frac{2 V_1 x_1}{V \vartheta} - e.$$

Die Grösse $V_1 x_1$ ist von der Gestalt der Wasserlinie (Fig. 215) abhängig. Ist in einem Abstande z von der Vorderkante die halbe Breite in der Schwimmebene y, so liefert ein Längentheilchen dz zu V_1 einen Beitrag $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot dz$ und zu $V_1 x_1$ annähernd einen Beitrag $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot \frac{2}{3} y \cdot dz = \frac{1}{3} y^3 \cdot \vartheta \cdot dz$, so dass

Fig. 215.



$$V_1 x_1 = \tfrac{1}{3} \vartheta \int y^3 \cdot dz$$

wird. Nun ist aber $\frac{1}{3} y \, dz \cdot y^2$ das Trägheitsmoment des in Fig. 215 schraffirten Theilchens der Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längsachse (Theil 1, S. 271). Also ist das Trägheitsmoment der ganzen Schwimmfläche in Bezug auf ihre Längsachse

4) $$\mathfrak{J} = \frac{2}{3} \int y^3 \cdot dz, \quad \text{so dass}$$

$$2 V_1 \cdot x_1 = \mathfrak{J} \cdot \vartheta \quad \text{wird.}$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so ergiebt sich

5) $$SM = \frac{\mathfrak{J}}{V} - e.$$

Diese Länge ist hiernach bei kleinem Neigungswinkel ϑ von diesem Winkel unabhängig, oder der Punkt M hat auf der Schwimmachse eine bestimmte Lage und wird, weil er, vom E aus betrachtet, bei sicherem Gleichgewichte jenseits des Schwerpunktes S liegt, das Metacentrum ($\mu\varepsilon\tau\alpha$ = jenseits), seine Höhe SM über S die metacentrische Höhe genannt. Das Standsicherheitsmoment ist sonach

6) $$\mathfrak{M} = \gamma V\left(\frac{\mathfrak{J}}{V} - e\right)\vartheta.$$

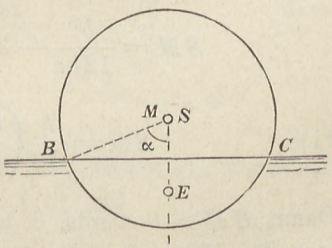
Ist der schwimmende Körper ein Prisma von der Länge l, ist F der Querschnitt der Verdrängung $V = Fl$ und b die Breite in der Schwimmebene, so wird $\mathfrak{J} = {}^1/_{12}\, l b^3$, daher

7) $$SM = \frac{b^3}{12\,F} - e.$$

Die Länge SM ist jedoch nur für geringe Neigungswinkel von deren Grösse unabhängig. Für die stärkeren Bewegungen der Seeschiffe darf ein festes Metacentrum nicht angenommen werden.

Hat der eingetauchte Raum, die Verdrängung V, die Gestalt eines Cylinder- oder Kugelabschnittes, so ändert eine Drehung die Form von V gar nicht; es geht der Auftrieb stets durch die Achse des Cylinders bezw. den Mittelpunkt der Kugel. Ist der Körper ein Cylinder oder eine Kugel überall gleicher Dichte γ_1, so fallen Schwerpunkt S und Metacentrum M zusammen; ein derartiger Körper schwimmt also in unentschiedenem Gleichgewichte; er setzt einer Drehung keinen Widerstand entgegen und kehrt auch nicht in die ursprüngliche Lage zurück.

Fig. 216.



Für die Eintauchung eines Cylinders (Fig. 216) gilt die Gleichung $r^2\pi\gamma_1 = r^2(\alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha)\gamma$. Diese Gleichung lässt sich nach α nur durch Probiren auflösen, nach $\gamma_1 : \gamma$ aber mit:

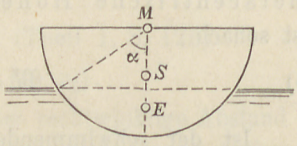
8) $$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\pi}.$$

Soll $\alpha = 60^0 = {}^1/_3\pi$ werden, so muss

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{{}^2/_3\pi - 0{,}866}{2\pi} = 0{,}195 \text{ sein.}$$

Für einen homogenen Halbcylinder (Fig. 217) ist die metacentrische Höhe $SM = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$ (Theil 1, S. 132.) Die Eintauchungstiefe ist bedingt durch

Fig. 217.



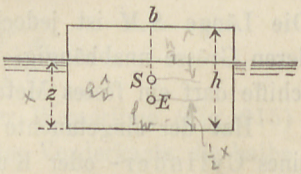
${}^1/_2 r^2 \pi \gamma_1 = r^2(\alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha)\gamma$ oder

$$9) \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi}.$$

Soll jetzt $\alpha = 60^0$ werden, so muss $\gamma_1 : \gamma = 2 \cdot 0{,}195 = 0{,}39$ sein.

Für ein homogenes rechtwinkliges Parallelepiped von der Höhe h, der Breite b, der Dichte γ_1 (Fig. 218) gilt für die Eintauchungstiefe z die Gleichung

Fig. 218.



$$\gamma z b = \gamma_1 h b, \quad \text{d. h.}$$

$$10) \qquad z = h\frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Der Schwerpunkt S des Körpers liegt um ${}^1/_2 h$, der Schwerpunkt E der Verdrängung um ${}^1/_2 z$ vom Boden entfernt, mithin ist

$$e = ES = \frac{1}{2}(h - z) = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Dann wird nach Gl. 7 (S. 191), weil $F = bz$,

$$SM = \frac{b^3}{12bz} - e = \frac{b^2}{12h}\frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right),$$

$$11) \qquad SM = \frac{h}{12}\left(\frac{b^2}{h^2}\frac{\gamma}{\gamma_1} - 6\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)\right).$$

Damit $SM > 0$ werde, d. h. Standsicherheit vorhanden sei, muss etwa für Holz mit $\gamma_1 = 0{,}6\,\gamma$

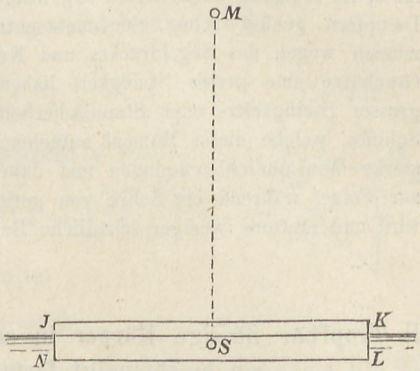
$$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 1{,}2 \quad \text{sein.}$$

Ist aber (Fig. 219) $b = 8h$ und wiederum $\gamma_1 = 0{,}6\,\gamma$, so wird

$$SM = \frac{h}{12}\left(\frac{64}{0{,}6} - 6 \cdot 0{,}4\right) = 8{,}7\,h.$$

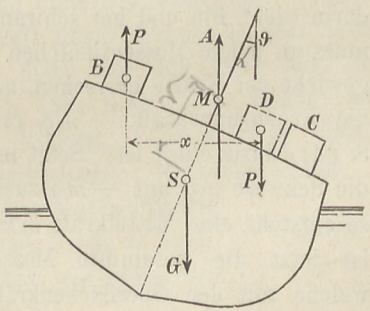
Ein solcher flossartiger Körper hat also eine grosse metacentrische Höhe und bedeutende Standsicherheit. Jedoch gilt dies nur, so lange von den Oberkanten J und K keine unter Wasser, von den Unterkanten N und L keine über Wasser liegt. Bei stärkeren Neigungen, wie sie in unruhigem Wasser leicht vorkommen, ist die Standsicherheit geringer.

Fig. 219.



Bei neu gebauten Schiffen wird die metacentrische Höhe SM zuweilen durch einen Krängungs-(Neigungs-)Versuch ermittelt. Das Schiff möge anfänglich gerade geschwommen haben. Wird nun eine schwere Last P von B etwa nach D verschoben um die Entfernung x, so ist die Fortnahme von B gleichbedeutend mit der Anbringung einer dort aufwärts gerichteten Kraft P, während bei D eine gleiche abwärts gerichtete Kraft auftritt. Die Verschiebung bewirkt demnach ein Kräftepaar Px. Entsteht dabei eine Schrägstellung um den Winkel ϑ, der mittels eines Lothes am Mastbaum abgelesen werden kann, so ist nach Gl. 1, S. 189

Fig. 220.



$$G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = P \cdot x, \quad \text{mithin}$$

$$SM = \frac{P}{G}\,\frac{x}{\vartheta}.$$

Beispiel: Für ein Seeschiff betrage die Verdrängung $V = 10\,000\,^{\text{cbm}}$, dann ist, weil für Seewasser $\gamma = 1025\,^{\text{kg/cbm}}$, $G = 10\,250\,^{\text{t}}$. Wird eine schwere Last (etwa ein Geschütz) von $P = 20\,^{\text{t}}$ um $5\,^{\text{m}}$ seitwärts verschoben und entsteht dadurch eine Neigung $\vartheta = {}^1/_2{}^0 = 0{,}0087$, so folgt

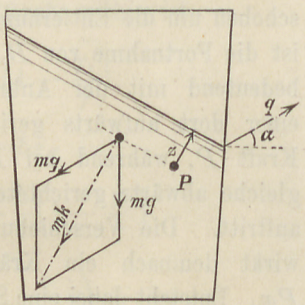
$$SM = \frac{20}{10\,250}\,\frac{5}{0{,}0087} = 1{,}11\,^{\text{m}}.$$

Wie gross die metacentrische Höhe für Schiffe verschiedenen Zweckes sein muss, ist lediglich durch Erfahrung festgestellt worden. Bei transatlantischen Dampfern genügt schon eine metacentrische Höhe von $0{,}3\,^{\text{m}}$; Segelschiffe müssen wegen des Segeldruckes und Kriegsschiffe wegen des Abfeuerns der Geschütze eine grosse Steifigkeit haben, daher etwa $SM = 1\,^{\text{m}}$. Ein zu grosses Steifigkeits- oder Standsicherheits-Moment ist für die Festigkeit des Schiffes, welche dieses Moment aufnehmen muss, nicht vortheilhaft, hat auch starke Winkelbeschleunigungen und daher heftige, unangenehme Bewegungen zur Folge, während ein Schiff von geringerer Steifigkeit weniger angegriffen wird und sanftere, weniger schädliche Bewegungen ausführt.

l) Tropfbar flüssige Körper in scheinbarer Ruhe in Bezug auf ein beschleunigt fortschreitendes Gefäss.

Das Gefäss (Fig. 221) möge eine gleichbleibende Beschleunigung q mit der Neigung α aufwärts haben, Soll nun eine Flüssigkeit darin in scheinbarer Ruhe verbleiben, darin nicht hin und her schwanken, so muss an jedem Massentheilchen Gleichgewicht der Kräfte herrschen, nachdem die Ergänzungskraft $-mq$ (1. Theil, S. 84) hinzugefügt ist. Setzt man nun die Schwere mg mit $-mq$ zusammen, so entsteht eine Mittelkraft mk. Dies ist jetzt die gesammte Massenkraft, welche mit den Oberflächenkräften im Gleichgewichte sein muss. An die Stelle der einzigen Massenkraft mg im wirklichen Ruhezustande tritt nun in jeder Beziehung mk. Der Wasserspiegel muss daher jetzt rechtwinklig zur Richtung von k stehen. Für den Druck p in einem rechtwinkligen Abstande z vom Wasserspiegel gilt $p \cdot dF = \frac{\gamma}{g} dF \cdot zk$, weil ein Prisma von

Fig. 221.



der Höhe z und der Grundfläche dF die Masse $\frac{\gamma}{g} dF \cdot z$ hat; also

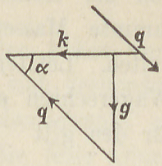
1) $$p = \frac{\gamma}{g} k z .$$

Ist q schräg nach unten gerichtet (Fig. 222), so kann k auch wagerecht, der Wasserspiegel also lothrecht werden. Dazu ist erforderlich, dass $q \sin \alpha = g$.

Bei lothrecht aufwärts gerichtetem q wird

$$k = g + q; \quad p = \gamma \left(1 + \frac{q}{g}\right) z .$$

Fig. 222.



Bei lothrecht abwärts gerichtetem q wird

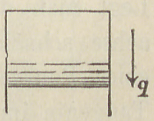
$$k = g - q; \quad p = \gamma \left(1 - \frac{q}{g}\right) z .$$

Für $q = g$ wird in diesem Falle

$$k = 0 \quad \text{und} \quad p = 0 .$$

Wenn also ein Gefäss mit Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so übt das Wasser keinen Druck auf die Gefässwände aus. Lassen wir deshalb das Gefäss ganz fort, so dass das Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so ist auch jetzt unter den bisherigen Voraussetzungen das Wasser drucklos und ohne Bestreben, eine bestimmte Form anzunehmen. In Wirklichkeit aber herrscht in dem Wasser eine sog. Oberflächen-Spannung; diese hat das Bestreben, einen Körper kleinster Oberfläche, d. h. eine Kugel, zu bilden; unter ihrer Einwirkung entsteht die Bildung kugelförmiger Tropfen. Allerdings würde auch die gegenseitige Massenanziehung der Theilchen eines flüssigen Körpers eine Tropfenbildung herbeiführen, doch ist diese (1. Theil, S. 54) so klein, dass sie bei Körpern geringer Grösse gegenüber der Oberflächenspannung verschwindet.

Fig. 223.

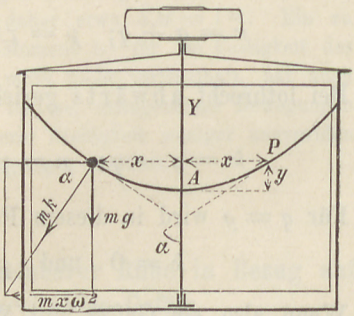


Ist die Beschleunigung $q > g$ und lothrecht abwärts gerichtet, so hat jedes Theilchen das Bestreben, mit der Beschleunigung $k = q - g$ gegen die obere Fläche des Gefässes zu fallen (1. Theil, S. 86). Scheinbare Ruhe ist dann nur möglich bei oben befindlichem Boden und unten befindlichem wagerechten Wasserspiegel (Fig. 223).

m) Tropfbar flüssige Körper in gleichmässiger Drehung um eine Achse.

Die in einem cylindrischen Gefässe befindliche Flüssigkeit werde durch eine mit Flügeln versehene Welle mittels einer oben angebrachten Riemenscheibe in gleichmässiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω erhalten (Fig. 224). Dann hat man an jedem Massentheilchen m zu der wirklichen Massenkraft mg nach Theil 1, S. 88 noch die Centrifugalkraft $m x \omega^2$ hinzuzufügen, (wenn x der Abstand des Massentheilchens von der Achse ist), um die gesammte Massenkraft mk zu erhalten. Letztere schliesst mit der Wagerechten einen Winkel α ein, für den gilt

Fig. 224.



$$1) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{x\omega^2}.$$

Liegt das Massentheilchen an der Oberfläche und denkt man sich die übrige Masse ausser jenem Theilchen zu einem festen, völlig glatten Körper erstarrt, so muss die Fläche, damit das Theilchen auf ihr in scheinbarer Ruhe verbleibe, rechtwinklig zu der Massenkraft mk stehen, d. h. jenen Winkel α mit der Lothrechten einschliessen. Da die Verhältnisse für alle Punkte einer wagerechten Ebene, die in dem gleichen Abstande x von der Achse sich befinden, dieselben sind, so muss die Oberfläche eine Umdrehungsfläche sein, deren Meridianlinie im Abstande x von der Achse eine Neigung α gegen die Drehachse hat. Für $x = 0$ ist (nach Gl. 1) $\alpha = 90^0$; mit wachsendem x verkleinert sich α, wird die Kurve steiler. Legt man durch den Punkt A, in welchem die Kurve die Drehachse schneidet, ein Achsenkreuz, sind x und y die Koordinaten eines Punktes P der Kurve, so ist das Neigungsverhältnis der Tangente im Punkte P gegen die Lothrechte $A\,Y$

$$\operatorname{tg}\alpha = dx : dy.$$

Verbindet man hiermit Gl. 1, so wird

$$\omega^2 x\,dx = g\,dy \quad \text{oder}$$
$$d(1/2\,\omega^2 \cdot x^2) = d(g \cdot y).$$

Sind nun die Differentiale zweier Grössen einander gleich, so unterscheiden sich die Grössen selbst um eine von den Veränderlichen unabhängige Grösse C; mithin wird

2) $$\tfrac{1}{2}\omega^2 \cdot x^2 = g \cdot y + C.$$

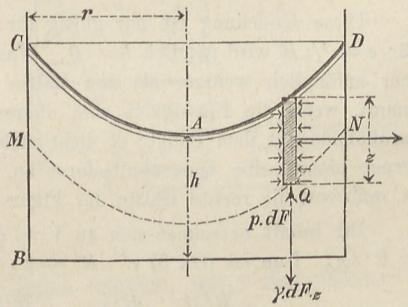
Die Grösse C ist abhängig von der willkürlichen Lage des Anfangspunktes A. Hier ist A so gelegt, dass er mit $x = 0$ und $y = 0$ der gesuchten Kurve angehört. Die allgemeine Gleichung 2 muss also für $x = 0$ und $y = 0$ gültig bleiben. Daraus entsteht die Bedingung $0 = 0 + C$, d. h. $C = 0$ und

3) $$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y \quad \text{oder} \quad y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit lothrechter Achse vom Parameter $a : \omega^2$, übereinstimmend mit der Form des sich drehenden Armes (1. Theil, S. 91, Fig. 90), auf dem ein Massenpunkt an jeder Stelle in scheinbarer Ruhe verbleiben soll; die freie Oberfläche ist sonach ein Umdrehungs-Paraboloid. Je grösser ω ist, desto kleiner wird der Parameter, desto steiler stellt sich die Parabel in einem gewissen Abstande von der Achse. Da $\omega x = v$ die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung an der Stelle P, so ist die Höhe y dieses Punktes über dem tiefsten Punkt A nach der zweiten Fassung der Gl. 3 gleich der Geschwindigkeitshöhe der Drehgeschwindigkeit des Punktes.

Um den Druck p an irgend einem Punkte Q der sich drehenden Flüssigkeit zu ermitteln, trennen wir (Fig. 225) ein lothrechtes, von Q bis zur Oberfläche reichendes Prisma heraus. An dessen Grundfläche dF wirkt die Druckkraft $p \cdot dF$ aufwärts; diese muss gleich dem Gewichte $\gamma \cdot dF \cdot z$ des Prismas sein, wenn Q in der lothrechten Tiefe z unter der Oberfläche liegt. Die Centrifugalkraft des Prismas kommt in der Gleichung der lothrechten Kräfte nicht vor. Also

Fig. 225.



4) $$p = \gamma z.$$

Für überall gleiche z bekommt auch p überall denselben Werth. Flächen gleichen Druckes haben also in allen Punkten gleiche lothrechte Tiefe unter der Oberfläche, d. h. dieselbe Form MN wie die Oberfläche CD, sind nur in lothrechtem Sinne dagegen verschoben.

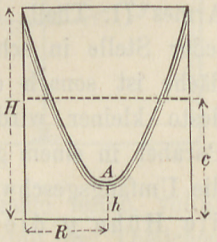
Liegt der tiefste Punkt A der Oberfläche um h über dem Boden, so ist der stärkste Druck im Gefässe, nämlich bei B, von der Grösse

$$5) \qquad p_1 = \gamma \cdot \overline{BC} = \gamma\left(h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right),$$

wenn r der Drehungshalbmesser von B oder C.

Beispiel: Ein cylindrisches Gefäss (Fig. 226) von der Weite $2R$ und der Tiefe H sei ursprünglich auf eine Höhe c mit ruhender Flüssigkeit gefüllt. Wie gross muss die Drehungsgeschwindigkeit $v = \omega R$ am Umfange werden, damit die Flüssigkeit bis zum Rande steige? Bildet sich bei der Drehung im Gefäss ein vollständiges Paraboloid als Oberfläche, liegt also der tiefste Punkt A des Paraboloides noch um h über dem Boden, so ist, weil der Inhalt eines Paraboloides nach Theil 1, S. 138 halb so gross wie der des umschriebenen Cylinders, die Flüssigkeitsmenge im Gefässe

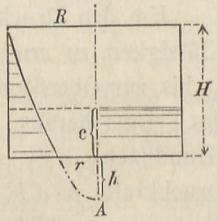
Fig. 226.



$$R^2\pi\left(H - {}^1/_2(H-h)\right) = {}^1/_2 R^2\pi(H+h).$$

Dies muss $= R^2\pi c$ sein, d. h. $H + h = 2c$. Nach Gl. 3 (S. 197) ist aber

Fig. 227.



$$H - h = \frac{v^2}{2g}; \quad \text{mithin}$$

$$2H = 2c + \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$6) \qquad \frac{v^2}{2g} = 2(H - c).$$

Diese Gleichung ist nur gültig für $c \geqq {}^1/_2 H$. Für $c = {}^1/_2 H$ wird nämlich $h = 0$. War das Gefäss aber anfänglich weniger als zur Hälfte gefüllt, so kommt, wenn die Flüssigkeit zum oberen Rande steigt, der untere Theil des Paraboloids mit dem Punkte A nicht mehr zur Ausbildung. Der Flüssigkeitskörper nimmt eine Querschnittsform an, wie sie in Fig. 227 links gezeichnet ist, während die rechte Hälfte der Figur den Ruhezustand darstellt.

Ihr Inhalt berechnet sich zu $V = R^2\pi H - {}^1/_2 R^2\pi(H+h) + {}^1/_2 r^2\pi h = R^2\pi c$. Nun ist (Gl. 3) $r^2 : R^2 = h : (H+h)$, also

$$\frac{R^2 H}{2} - \frac{R^2 h}{2} + \frac{R^2 h^2}{2(H+h)} = R^2 c \quad \text{oder}$$

$$H^2 = 2c(H+h), \quad \text{mithin,}$$

$$\text{weil } \frac{v^2}{2g} = H + h \text{ ist,}$$

$$7) \qquad \frac{v^2}{2g} = \frac{H^2}{2c}; \qquad h = \frac{v^2}{2g} - H.$$

Für $c > {}^1/_2 H$ gilt Gl. 6, für $c < {}^1/_2 H$ Gl. 7, für $c = {}^1/_2 H$ geben beide übereinstimmend $\frac{v^2}{2g} = H$.

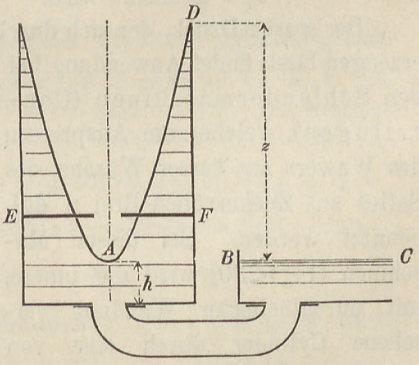
Für $c = {}^2/_3 H$ giebt Gl. 6: $\frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3} H$; der Punkt A (Fig. 226) bleibt um $h = {}^1/_3 H$ über dem Boden.

Für $c = {}^1/_3 H$ giebt Gl. 7: $\frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2} H$; der tiefste Punkt A des nach unten fortgesetzten Paraboloides liegt (Fig. 227) um ${}^1/_2 H$ unter dem Boden. ferner wird $r^2 : R^2 = {}^1/_3$, oder $r = 0{,}577\, R$.

Befinden sich im Gefässe keine Flügel, setzt man aber das Gefäss selbst in Drehung um seine lothrechte Achse, so nimmt der flüssige Körper nicht sofort an der Drehung Theil. Bei dem Fehlen jedes Reibungswiderstandes zwischen Gefäss und Flüssigkeit würde letztere durch Drehung des Gefässes überhaupt nicht mitgenommen werden, würde vielmehr in Ruhe verbleiben. Da aber in Wirklichkeit Reibung stattfindet, so wird durch schnelle Drehung des Gefässes auch die Flüssigkeit bald in nahezu die gleiche Drehgeschwindigkeit versetzt.

In den vorstehenden Beispielen wurde eine bestimmte Flüssigkeitsmenge in dem Gefässe angenommen, so dass das Steigen am Umfange eine Senkung in der Mitte zur Folge haben musste. Steht aber (Fig. 228) die Mitte des Bodens des cylindrischen Gefässes, in welchem das Wasser durch Flügel in Drehung um die lothrechte Achse des Gefässes versetzt wird (die Flügel sind in der Figur fortgelassen), durch eine Röhre mit einem grösseren Gefässe in Verbindung, so wird der Punkt A mit dem Wasserspiegel BC in gleicher Höhe liegen müssen, wenn das Wasser im Verbindungsrohr in Ruhe bleiben soll. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit v des Wassers am Rande wird dann dessen höchster Punkt D

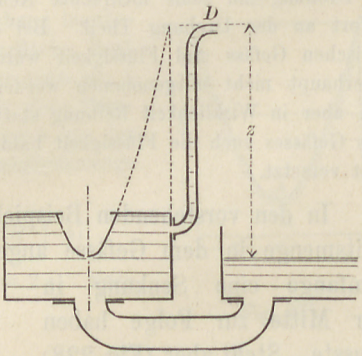
Fig. 228.



um $z = \frac{v^2}{2g}$ über BC liegen, so dass die Vorrichtung ein Mittel darstellt, Wasser zu heben. Bringt man etwas unterhalb D einen Überlauf an, so hat man eine Art von Kreiselpumpe. Doch genügt die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ noch nicht zu deren Betriebe, d. h. zur Bewegung des Wassers durch die Pumpe hindurch, sondern nur zum Halten des Wassers im gehobenen Zustande. Für den Betrieb, für wirkliche Wasserförderung würde eine grössere Geschwindigkeit v erforderlich sein, deren Entwickelung aber über den Rahmen dieses Buches hinausgeht.

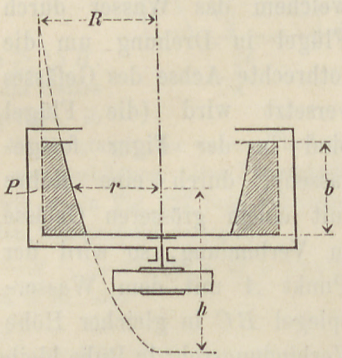
In den Druckverhältnissen des flüssigen Körpers wird dadurch nichts geändert, dass man in Fig. 228 bei EF eine Platte einschiebt, sie mit dem Gefässmantel fest verbindet und den darüber befindlichen Theil des Gefässes und der Flüssigkeit fortnimmt. Es entsteht dann eine Vorrichtung (Fig. 229), bei welcher der am Umfange herrschende Druck sich dadurch bemerkbar machen wird, dass das Wasser in einem seitlichen Rohre sich bis D über das Unterwasser erheben wird, wenn $v = \sqrt{2gz}$ gemacht wird.

Fig. 229.



Der starke Druck, der sich durch grosse Umfangsgeschwindigkeit erzeugen lässt, findet Anwendung bei den Schleudermaschinen (Centrifugen), welche zum Auspressen des Wassers aus nasser Wäsche, des Saftes aus Zuckerrüben-Brei u. dgl. benutzt werden. Bei diesen Maschinen (Fig. 230) wird der innere, mit durchlöcherter Wandung versehene Cylinder durch eine von unten mit ihm verbundene Welle in so schnelle Drehung gesetzt, dass von der paraboloidischen Oberfläche nur ein kleines, sehr steil ansteigendes Stück zur Ausbildung

Fig. 230.



gelangt. Als flüssigen Körper wollen wir uns Rübenmasse denken, welche den schraffirten ringförmigen Körper bildet, der annäherungsweise als ein Ring von der Wandstärke $R - r$ angesehen werden kann. Der drehbare Cylinder ist von einem festen Gehäuse umgeben, in welches der Saft durch die Öffnungen des Mantels eintritt. Der Druck an dem Punkte P beträgt

$$p = \gamma\left(\frac{v^2}{2g} - h\right) \quad \text{oder}$$

weil (nach Gl. 3, S. 197) $h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\frac{r^2}{R^2}$,

$$p = \gamma \frac{v^2}{2g}\frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Der stärkste Druck am unteren Rande ist noch um $^1/_2 \gamma b$ grösser. Doch ist dieser Unterschied unbedeutend.

Ist b die Höhe der Trommel, so beträgt das Gewicht der eingefüllten Rübenmasse $Q = \gamma (R^2 - r^2)\pi b$, so dass

$$p = \frac{Q}{R^2 \pi b}\frac{v^2}{2g}$$

geschrieben werden kann, oder, wenn man den Inhalt der ganzen Trommel $R^2 \pi b = V$ setzt,

8) $$p = \frac{Q}{V}\frac{v^2}{2g}.$$

Der Druck ist also mit der Ladung Q der Trommel verhältnisgleich.

Beispiel: Für eine Schleudermaschine sei $R = 0{,}5$ m, $b = 0{,}5$ m, die Ladung $Q = 160$ kg, der Rauminhalt $V = 0{,}5^2 \pi \cdot 0{,}5 = 0{,}393$ cbm. Die Maschine mache 1000 Umdrehungen in der Minute, dann ist $v = {}^1/_6 \cdot 314 = 52{,}3$ m/sek. mit $\frac{v^2}{2g} = 140$ m und $p = \frac{160}{0{,}393} \cdot 140 = 57\,000$ kg/qm $= 5{,}7$ kg/qcm $= 5{,}7$ at. Die Wandung der Trommel muss also einen inneren Druck von 5,7 at aushalten. Das Mantelblech erfährt eine Spannung $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, worin $\sigma_1 = 2\gamma_1 \frac{v^2}{2g}$ (s. S. 95, Gl. 4) durch die eigene Masse des Bleches, $\sigma_2 = p\frac{R}{\delta}$ (s. S. 166, Gl. 2) durch den innern Druck p entsteht. Ist $\gamma_1 = 7800$ kg/cbm, $\delta = 5$ mm $= 0{,}005$ m, so wird

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \cdot 7800 \cdot 140 = 2\,184\,000 \\ \sigma_2 &= 57\,000 \cdot 100 = 5\,700\,000 \\ \sigma &= \qquad\qquad 7\,884\,000 \text{ kg/qm} \end{aligned}$$

oder $\sigma = 788$ at. Diese erhebliche Anspannung macht es erklärlich, dass derartige Schleudermaschinen in ähnlicher Weise wie Dampfkessel einer sorgfältigen Überwachung unterliegen; besonders muss mit Rücksicht auf Gl. 8 eine Überladung (zu grosses Q) vermieden werden.

3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten.

Während tropfbar flüssige Körper nahezu unveränderlichen Rauminhalt zeigen, ist der Rauminhalt der Gase in hohem Maſse veränderlich. Wie man das Verhalten elastisch-fester Körper mit Hülfe von Elasticitätsgesetzen beurtheilen konnte, so giebt es für Gase einfache Gesetze, denen ihr äusseres Verhalten unterworfen ist. Eine Änderung des Rauminhaltes einer Gasmenge kann erfolgen durch eine Änderung seiner Temperatur oder seines Druckes (oder beider); die Beziehung zwischen diesen Grössen heisst die Zustandsgleichung.

Es empfiehlt sich, die allgemeinen Gesetze über die Raumänderung auf eine bestimmte Menge eines Gases, nämlich auf 1 kg zu beziehen. Der Rauminhalt, den 1 kg eines Gases in irgend einem Zustande einnimmt, heisst der Einheitsraum oder das specifische Volumen und wird mit v bezeichnet. Die Dichte, d. h. das Gewicht von 1 cbm wird auch hier mit γ bezeichnet. Da nun Dichte mal Rauminhalt gleich dem Gewichte ist, so wird das Gewicht des Einheitsraumes v sein γv, und dies muss $= 1$ kg sein, weil v ja die Raummenge von 1 kg war. Somit ist

$$1) \qquad \gamma v = 1; \quad v = 1 : \gamma.$$

a) Der Boyle-Mariotte'sche Satz.

Bei gleichbleibender Temperatur ändert sich die Dichte eines Gases verhältnisgleich mit dem Drucke, der Einheitsraum also umgekehrt verhältnisgleich mit dem Drucke.

Beziehen sich p_1, v_1, γ_1 auf einen Anfangszustand, p, v, γ auf einen anderen Zustand, so ist zufolge der Erfahrung

$$2) \qquad \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v},$$

oder es ist $pv = \frac{p}{\gamma}$ eine unveränderliche Grösse, solange die Temperatur unverändert erhalten wird.

Dies Verhalten der Gase ist vom Engländer Boyle (geb. 1626 zu Lismore (Irland), gest. 1691 zu London) im Jahre 1662 entdeckt, 1679 von dem Franzosen Mariotte (geb. 1620 zu Bourgogne, gest. zu Paris 1684) durch viele Versuche bestätigt worden und wird meist nach Letzterem benannt.

Wird also ein Gas auf $^1/_5$ seines ursprünglichen Raumes zusammengedrückt, mithin seine Dichte um das Fünffache vergrössert, so erhöht sich sein Druck ebenfalls auf das Fünffache — jedoch nur unter der Voraussetzung, dass das Gas nachher dieselbe Temperatur zeigt wie vorher. In den meisten Fällen findet beim Zusammendrücken eine Temperatur-Erhöhung statt, in Folge dessen der Satz dann nicht gültig ist. Nur wenn man durch besondere Vorkehrungen die Temperatur-Änderung verhindert, darf der Satz zur Anwendung gebracht werden.

b) Druckverhältnisse der Atmosphäre bei überall gleicher Temperatur.

Die Atmosphäre übt auf alle mit ihr in Berührung befindlichen Körper einen Druck aus, der in der Höhe des Meeresspiegels im Mittel $p_0 = 10333\,^{kg}/_{qm}$ beträgt. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man (Fig. 231) einen Kolben in einem Cylinder vom Querschnitt F bei geöffnetem Hahne h abwärts schiebt, bis sämmtliche Luft unter dem Kolben entfernt ist und dann nach Schliessung des Hahnes den Kolben in die Höhe zu ziehen versucht. Es setzt sich dem, abgesehen von Reibungswiderständen, ein Widerstand $K = p_0 F$ entgegen, der nur von der Wirkung der Luft auf die obere Kolbenfläche herrühren kann. 1 cbm Luft hat bei diesem Drucke p_0 und bei 0^0 C. ein Gewicht $\gamma_0 = 1{,}293\,^{kg}$.

Fig. 231.

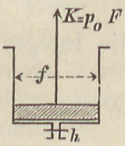
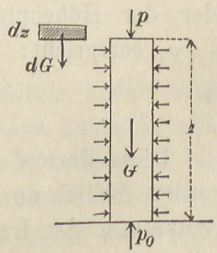


Fig. 232.



Ebenso wie im Wasser muss auch in der Luft der Druck nach oben hin abnehmen, allerdings nach einem anderen Verhältnisse, weil die Dichte der Luft veränderlich ist. Betrachten wir eine Luftsäule von 1 qm Querschnitt, die vom Meeresspiegel lothrecht in die Höhe sich erstreckt, so kann man nach S. 159 auch auf diese (Fig. 232) die Gleichgewichts-Bedingungen für starre Körper

anwenden. Ist p der Luftdruck in einer Höhe z über dem Meeresspiegel, so wirken an der Luftsäule von der Höhe z die lothrechten Kräfte p_0, p und das Gewicht G; die Seitendrücke kommen nicht in Frage, wenn wir p berechnen wollen. Es ist demnach

1) $$p = p_0 - G.$$

Wäre die Dichte überall γ_0, so könnte man $G = \gamma_0 z$ setzen; dies ist aber hier nicht zulässig, weil mit p auch γ nach oben hin abnimmt. Die Differentiation der Gl. 1 nach z giebt

$$\frac{dp}{dz} = 0 - \frac{dG}{dz}.$$

Nennt man γ die Dichte der Luft in der Höhe z, so ist dG das Gewicht eines Höhentheilchens dz der Säule, daher $dG = \gamma dz$. Hiernach wird

2) $$dp = -\gamma dz.$$

Weil nun nach dem Boyle'schen Satze $\gamma : \gamma_0 = p : p_0$, so folgt

$$dp = -\frac{\gamma_0}{p_0} p\, dz, \quad \text{oder}$$

wenn man behufs der Integration p mit dp auf dieselbe Seite der Gleichung bringt,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz.$$

Die Integration dieser Gleichung ergiebt:

$$l(p) = -\frac{\gamma_0}{p_0} z + C.$$

Nennt man p_1 und p_2 die Atmosphärendrücke in den Höhen z_1 und z_2 über dem Meeresspiegel, so wird

$$l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0}(z_1 - z_2) = \frac{\gamma_0}{p_0}(z_2 - z_1),$$

oder der Höhenunterschied $h = z_2 - z_1$, der dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ entspricht:

3) $$h = \frac{p_0}{\gamma_0} l\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Diese Formel kann zum barometrischen Höhenmessen benutzt werden, freilich nur als erste Annäherung, weil darin überall gleiche Temperatur der Luftsäule angenommen ist. Für 0° C. ist

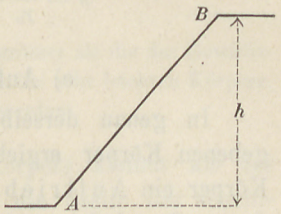
$$p_0 : \gamma_0 = 10333 : 1{,}293 = 7992^{\text{m}},$$

wofür man mit genügender Annäherung 8000 m schreiben darf. Will man sich Briggischer Logarithmen bedienen, so hat man, weil der natürliche Log. grösser ist als der Briggische, auf der rechten Seite noch den Faktor 2,30259 = l 10 hinzuzufügen nnd erhält rund

$$4) \qquad h = 18400 \,(\log p_1 - \log p_2)\,.$$

Es ist für die Anwendung der Gleichung nicht erforderlich, dass die beiden Punkte, deren Höhenunterschied man ermitteln will, in einer Lothrechten liegen. Die Gleichung ist ebenso gut auf die Punkte A und B (Fig. 233) anwendbar, wenn nur zwischen beiden ein schräges Luftprisma gleicher Temperatur im Ruhezustande sich befindet. Der Luftdruck wird bekanntlich mittels Barometers durch eine Quecksilbersäule ausgedrückt. Da der Luftdruck mit jener Säule verhältnisgleich ist, so kann man in dem Verhältnisse $p_1 : p_2$ unmittelbar die Barometer-Ablesungen anstatt der Drücke benutzen.

Fig. 233.



Beispiel 1: Es sei $p_1 = 749{,}2$ mm, $p_2 = 692{,}7$ mm Quecksilbersäule, dann ist

$$h = 18400\,(\log 749{,}2 - \log 692{,}7) = 628\text{ m},$$

Später (S. 214) werden wir dasselbe Beispiel mit Rücksicht auf verschiedene Temperaturen in A und B behandeln.

Beispiel 2: Auf S. 8 wurde für die Atmosphäre der runde Werth 1 kg/qcm = 10000 kg/qm eingeführt. Es soll mittels der Gl. 4 berechnet werden, in welcher Höhe über dem Meere dieser Druck bei 0° C. etwa stattfindet.

$$h = 18400\,(\log 10333 - \log 10000) = 264\text{ m},$$

d. i. etwa die Höhe von Ilsenburg am Fusse des Brockens (s. 1. Theil, S. 94).

Zu einem Höhenunterschiede $h = 100$ m gehört nach Gl. 4 ein Werth

$$\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{100}{18400} = 0{,}0054348\,.$$

oder $p_1 : p_2 = 1{,}01259$. In dem gleichen Verhältnis ändert sich auch die Dichte, d. h. etwa nur um 1/80. Man kann daher für alle Fälle, bei denen es nicht auf grosse Genauigkeit ankommt, für Luftsäulen bis zu 100 m die Dichte als überall gleich betrachten.

Mit überall gleicher Dichte $\gamma = 1{,}293$ gerechnet, würde auf 100 m Höhe ein Unterschied des Luftdrucks von 129,3 kg/qm sich ergeben, also, wenn

$p_1 = 10333$, würde $p_2 = 10204$, mit einem Verhältnisse 1,012 64, welches von dem obigen genaueren Werthe nur sehr wenig abweicht. Diese Übereinstimmung hängt auch damit zusammen, dass in der Reihe

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots$$

für kleine x einfach $l(1 + x) = x$, also, wenn $p_1 : p_2$ nur wenig von 1 verschieden,

$$l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{p_1 - p_2}{p_2}$$

gesetzt werden kann, womit dann, wenn man $p_1 = p_0$ setzt, Gl. 3 wird

$$h = \frac{p_0}{\gamma_0} \frac{p_0 - p_2}{p_2} = \frac{p_0 - p_2}{\gamma_2} \quad \text{(annähernd)}.$$

c) Auftrieb der Luft. Luftballon.

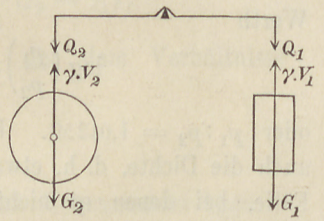
In genau derselben Weise wie bei einem von Wasser umgebenen Körper ergiebt sich auch für die von der Luft umhüllten Körper ein Auftrieb der Luft, gleich und entgegengesetzt dem Gewichte der verdrängten Luftmasse. Genau genommen, muss bei der Ermittelung des Gewichtes und des Schwerpunktes der verdrängten Luftmasse auf die Veränderlichkeit der Dichte Rücksicht genommen werden. Hat aber der verdrängende Körper keine sehr grosse Höhenausdehnung, so kann man nach S. 205 für seinen Bereich die Dichte γ der Luft meist als überall gleich ansehen und den Auftrieb

1) $$A = \gamma V$$

setzen, wenn V der Rauminhalt ist.

Wägt man also von Luft umgebene Körper (Fig. 234), so wird, wenn der Zeiger der Waage auf Null steht, dadurch nicht die Gleicheit der wahren Gewichte und somit der Massen beider Körper, sondern die Gleichheit der scheinbaren Gewichte (s. S. 185) bewiesen. Auf der rechten Seite wirkt auf die Waage $Q_1 = G_1 - \gamma V_1$, auf der linken Seite $Q_2 = G_2 - \gamma V_2$. Ist $V_2 > V_1$, so muss $G_2 > G_1$ sein, wenn $Q_1 = Q_2$ ist. Bringt man die Waage unter die Glocke einer Luftpumpe und vermindert durch allmähliches Auspumpen der Luft die Dichte γ, so wird Q_2 schneller zunehmen

Fig. 234.



als Q_1, der Körper von grösserem Rauminhalt und geringerer Dichte also sinken.

Beispiel: Ein Körper von Holz ($\gamma_2 = 750$ kg/cbm) werde in der Luft mit einem Gewichtstücke von Eisen ($\gamma_1 = 7500$) so abgewogen, dass der Zeiger der Waage auf Null zeigt. Welches ist das Verhältnis der beiden Massen? Die Waage beweist

$$V_1 (7500 - 1{,}3) = V_2 (750 - 1{,}3),$$

wenn man die Luftdichte $\gamma = 1{,}3$ setzt. Daher ist

$$\frac{V_2 750}{V_1 7500} = \frac{7500 - 1{,}3}{(750 - 1{,}3)\,10} = 1{,}00156.$$

In diesem Verhältnis ist die Masse des Holzkörpers grösser als die des Gewichtstückes. Bei feinen Wägungen muss daher, besonders bei sehr leichten Körpern, die augenblickliche Dichte der Luft berücksichtigt werden.

Luftballon. Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als der Auftrieb der umgebenden Luft, so tritt an die Stelle des scheinbaren Gewichtes eine Steigkraft $K = \gamma V - G$. Bedeutet V den Rauminhalt eines mit leichtem Gase von der Dichte γ' (bei 0° C. und mittlerem Atmosphärendrucke $p_0 = 10\,333$ kg/qm) gefüllten Ballons, so wird, wenn das Gewicht der Gasfüllung $\gamma' V$ besonders eingeführt und Q das Gewicht aller übrigen Theile (Hülle, Tauwerk, Gondel, Ausrüstung, Besatzung, Ballast) ist, deren Rauminhalt gegenüber V vernachlässigt werden darf, die Steigkraft bei der Stellung dicht über dem Erdboden

$$K_0 = V(\gamma - \gamma') - Q.$$

Beim Steigen nimmt der Druck und die Dichte der Luft ab. Wäre der Ballon fest geschlossen und undehnbar, so würde die Dichte γ' des Gases unverändert erhalten. Es bliebe dann aber, wenn wir überall gleiche Temperatur in der Luft annehmen, der innere Druck so gross wie zu Anfang, d. h. grösser als der verminderte äussere Luftdruck. Einem solchen inneren Überdrucke darf man aber wegen der Gefahr des Zerreissens den Ballon nicht aussetzen. Deshalb wird an der Hülle des Ballons ein Sicherheits-Ventil angebracht, welches so eingerichtet ist, dass es den Druck im Inneren nicht erheblich über den Aussendruck steigen lässt. In Folge dessen wird dann auch die Dichte des Gases sich in gleichem Verhältnisse mit dem äusseren Druck ändern.

Beträgt der Luftdruck am Boden p_1, in einer Höhe h aber p_2, so wird in dieser Höhe die Steigkraft noch sein:

3) $$K = V(\gamma - \gamma')\frac{p_2}{p_1} - Q.$$

Die Steigkraft hört auf, wenn

$$V(\gamma - \gamma')\frac{p_2}{p_1} = Q \quad \text{oder}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma - \gamma')}{Q}$$

geworden ist. Dem entspricht bei einer überall gleichen Temperatur von 0^0 C. eine Steighöhe (Gl. 4, S. 205)

$$h = 18400 \log\left(\frac{V(\gamma - \gamma')}{Q}\right).$$

Beispiel: Ein Ballon von 700 cbm Rauminhalt werde mit Leuchtgas von der Dichte $\gamma' = 0{,}45$ gefüllt. Das Gewicht der Hülle, des Tauwerks, der Gondel, der Ausrüstung, des Ballastes und der Besatzung betrage $Q = 500$ kg, dann ergiebt sich die Steigkraft über dem Erdboden zu

$$K_0 = 700\,(1{,}29 - 0{,}45) - 500 = 88 \text{ kg}.$$

Diese Grösse hat die Spannkraft des Haltetaues, welches den Ballon am Boden festhält. Die Steighöhe des Ballons wird

$$h = 18400 \log \frac{V(\gamma - \gamma')}{Q}$$

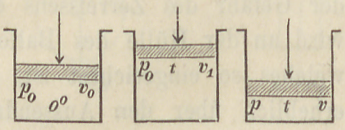
$$= 18400 \log 1{,}176 = 1295 \text{ m}.$$

Bei Füllung mit Wasserstoff ($\gamma' = 0{,}09$) wird $K_0 = 340$ kg, $h = 4146$ m. (Vgl. a. S. 215.)

d) Satz von Gay-Lussac. Zustandsgleichung der vollkommenen Gase.

Der Satz des französischen Physikers Gay-Lussac (geb. 1778 zu Leonard, gest. 1850 zu Paris), aufgestellt im Jahre 1802, bezieht sich auf die Ausdehnung der Gase durch Temperatur-Erhöhung bei gleichbleibendem Drucke.

Fig. 235.



Wird 1 kg Gas von 0^0 C. Temperatur, vom Rauminhalte v_0 und dem Drucke p_0 (Fig. 235) auf t^0 C. unter gleichbleibender Kolbenbelastung, d. h. gleichbleibendem Drucke p_0 erwärmt, so erfolgt eine

Ausdehnung auf den Einheitsraum v_1, und es ist das Ausdehnungs-Verhältnis

1) $$\frac{v_1 - v_0}{v_0} = \alpha t \quad \text{oder} \quad v_1 = v_0(1 + \alpha t),$$

worin α, die Ausdehnungsziffer, nicht allein für ein bestimmtes Gas unveränderlich ist, sondern sogar für alle Gase denselben Zahlenwerth

$$\alpha = 0{,}003665 = 1 : 273$$

hat. In der Gleichung 1 liegt der Satz von Gay-Lussac, dass die Ausdehnung eines Gases verhältnisgleich der Temperatur-Erhöhung ist. Verstärkt man nun den Druck des Gases durch Erhöhung der Kolbenbelastung auf p, so wird der Einheitsraum sich auf v vermindern, und wenn man diese Änderung künstlich so regelt, dass bei ihr keine Änderung der Temperatur des Gases erfolgt, so gilt für sie der Boyle'sche Satz

2) $$v : v_1 = p_0 : p.$$

Verbindet man die Gl. 1 und 2, so entsteht

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right),$$

oder mit Einführung des Zahlenwerthes für α

$$pv = \frac{p_0 v_0}{273}(273 + t).$$

Bei einem bestimmten Drucke p_0 und einer Temperatur von 0^0 C. hat nun 1^{kg} eines Gases einen bestimmten Raum v_0, daher ist $p_0 v_0 : 273$ für ein bestimmtes Gas eine gegebene Grösse, die mit R bezeichnet wird, so. dass

3) $$pv = R(273 + t).$$

Für $t = -273$ wird die rechte Seite und somit $pv = 0$, also, da der Raum von 1^{kg} Gas nicht wohl Null werden kann, $p = 0$; d. h. bei einer Temperatur von -273^0 C. würde der Druck p und somit das Ausdehnungs-Bestreben des Gases aufhören, wenn die Erfahrungssätze von Boyle und Gay-Lussac noch für Wärmegrade, die von den Temperaturen der Versuche so weit entfernt liegen, gültig wären. Diese Temperatur -273^0 C. nennt man den absoluten

Nullpunkt und bezeichnet die nach Celsius-Graden von diesem Nullpunkt aus gezählte Temperatur

4) $$273 + t = T$$

als die absolute Temperatur. Man erhält die absolute Temperatur eines Körpers in Celsius-Graden, indem man zu seiner vom Gefrierpunkte des Wassers aus gezählten Temperatur t in Celsius-Graden 273 hinzuzählt. Dem Gefrierpunkte des Wassers $t = 0^0$ entspricht die absolute Temperatur $T = 273^0$.

Mit Gl. 4 erhält nun Gl. 3 die überraschend einfache Form

5) $$pv = RT.$$

Diese Gleichung heisst die Zustandsgleichung der Gase. Sie gilt für die Gase ziemlich genau, so lange sich dieselben weit vom Verflüssigungspunkte befinden, während in der Nähe desselben sich erhebliche Abweichungen zeigen. In den folgenden Anwendungen auf Luft und andere Gase setzen wir eine vollkommene Gültigkeit der Gl. 5 voraus und nennen die Gase in diesem Sinne vollkommene Gase, indem wir uns vorstellen, das Gas sei unendlich weit von der Verflüssigung entfernt.

Den Festwerth R findet man, indem man Gl. 5 auf einen bestimmten Zustand p, v, T anwendet. Da nun trockene atmosphärische Luft bei $t = 0^0$ C. oder $T = 273^0$ und bei einem Drucke $p_0 = 10333\ ^{kg}/_{qm}$ eine Dichte $\gamma_0 = 1{,}293$, daher einen Einheitsraum $v_0 = 1 : 1{,}293$ hat, so wird für trockene Luft

$$R = \frac{10333}{1{,}293 \cdot 273} = 29{,}27.$$

Wird eine Luftmenge fest eingeschlossen, so dass sie sich nicht ausdehnen kann, so muss v unverändert bleiben. Erhöht man nun die Temperatur, so muss nach Gl. 5 der Druck p verhältnisgleich der absoluten Temperatur sich ändern.

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1}.$$

War zu Anfang $T_1 = 0 + 273$, nachher $T = 100 + 273 = 373$, so wird

$$\frac{p}{p_1} = \frac{373}{273} = 1{,}366.$$

Hatte die Luft ursprünglich den Atmosphärendruck, so wird sie nach Erhöhung der Temperatur um 100^0 einen Druck von 1,366 Atmosphären ausüben. Hierauf beruht die Heissluftmaschine.

Bleibt die Luftmenge aber demselben Druck unterworfen, so wird sie bei einer Temperaturerhöhung sich ausdehnen, u. zw. wird nach Gl. 5 der Einheitsraum mit der absoluten Temperatur verhältnisgleich sich ändern.

$$\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Bei einer Temperatur-Erhöhung von $0 + 273$ auf $100 + 273$ wird also v auf das 1,366fache wachsen. Betrug die Dichte ursprünglich $\gamma_1 = 1{,}293$, so wird sie abnehmen auf $\gamma = 1{,}293 : 1{,}366 = 0{,}9466$. Auf dieser Verdünnung der Luft durch Erwärmung beruht bekanntlich der Luftballon von Mongolfier (1783), sowie das Aufsteigen warmer Luft in kalter.

e) Barometrisches Höhenmessen.

Der Grundgedanke davon ist schon auf S. 205 behandelt worden. Die dort entwickelten Gleichungen setzen überall gleiche Temperatur von $0^0 C$ voraus. Hier soll nun auch der Einfluss einer veränderlichen Temperatur berücksichtigt werden.

Für ein Lufttheilchen von der Höhe dz galt die Gleichgewichts-Bedingung (S. 204, Gl. 2, Fig. 232)

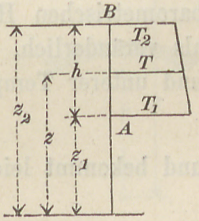
$$dp = -\gamma dz, \quad \text{oder, wegen}$$

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}$$

(Gl. 1, S. 202 und Gl. 5, S. 210)

1) $$dp = -\frac{p}{RT} dz.$$

Fig. 236.



Das Gesetz, nach welchem die Lufttemperatur T zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 236) sich ändert, ist nicht genau bekannt; wir nehmen dafür als genügende Annäherung eine lineare Gleichung

2) $$T_1 - T = \tau(z - z_1)$$

an; darin bedeutet

3) $$\tau = \frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}$$

die Temperaturabnahme nach oben auf 1 m Höhe. Es wird nach Gl. 2

$$dT = -\tau dz, \quad dz = -\frac{dT}{\tau}.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R\tau}\frac{dT}{T};$$

mithin wenn man zwischen den Grenzen p_2 und p_1 bezw. T_2 und T_1 integrirt:

4) $$l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{1}{R\tau} l\left(\frac{T_1}{T_2}\right),$$

oder nach Gl. 3 und 4:

$$h = z_2 - z_1 = \frac{T_1 - T_2}{\tau} = R(T_1 - T_2)\frac{lp_1 - lp_2}{lT_1 - lT_2}.$$

Für das Verhältnis der natürlichen Logarithmen kann man das der Briggischen setzen, also

5) $$h = R(T_1 - T_2)\frac{\log p_1 - \log p_2}{\log T_1 - \log T_2}.$$

Für trockene Luft wurde auf S. 210 der Festwerth $R = 29{,}27$ angegeben. Für feuchte Luft bleibt diese Zahl nicht mehr gültig. Für mittlere Verhältnisse Deutschlands kann man in obiger Formel $R = 29{,}37$ setzen.

Annäherungs-Rechnung: Gewöhnlich behandelt man behufs barometrischen Höhenmessens die Temperatur der Luftsäule nicht als veränderlich, sondern als überall gleich dem Mittel aus oberer und unterer Temperatur, setzt in Gl. 1 (S. 211)

$$T = {}^1/_2(T_1 + T_2)$$

und bekommt leicht

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{RT}dz, \quad \text{mithin}$$

6) $$h = RT\,l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = RT \cdot 2{,}302\,585\,(\log p_1 - \log p_2)$$

und mit $R = 29{,}37$

7) $$h = 67{,}63\,T(\log p_1 - \log p_2).$$

Die Logarithmen kann man nach Babinet in folgender Weise aus der Formel entfernen: Man setzt

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2p_1}{2p_2} = \frac{2p_1 + p_2 - p_2}{2p_2 + p_1 - p_1} = \frac{p_1 + p_2 + p_1 - p_2}{p_1 + p_2 - p_1 + p_2} = \frac{1 + \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}{1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$$

oder, wenn man nur das erste Glied benutzt, $= 2x$. Sonach wird annähernd

$$l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 2\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}, \text{ oder}$$

$$h = 2RT\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} = 58{,}74\,T\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Führt man statt T die gewöhnliche Temperatur $273 + t$ ein, so ergiebt sich auch

$$h = 58{,}74\,(273 + t)\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}, \text{ oder}$$

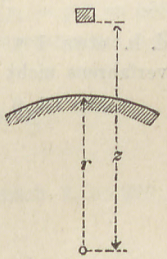
$$h = 16\,036\,(1 + 0{,}003\,665\,t)\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$$

und abgerundet, mit genügender Genauigkeit

8) $$h = 16\,000\,(1 + 0{,}004\,t)\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwere. Während in der Nähe der Erdoberfläche das Gewicht von 1^{cbm} Luft $\gamma = \frac{p}{RT}$ ist, beträgt es in grosser Höhe, wenn man seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde z und den Erdhalbmesser r nennt (Fig. 237), $\gamma = \frac{p}{RT}\frac{r^2}{z^2}$ (s. Theil 1, S. 57). Daher wird aus Gl. 1, S. 211:

Fig. 237.



$$dp = -\frac{p}{RT}r^2\frac{dz}{z^2}, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{r^2}{RT}\frac{dz}{z^2}, \text{ also}$$

$$l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{RT}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{r^2}{RT}\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}.$$

Ist nun $z_1 = r$, $z_2 - z_1 = h$, so folgt

$$l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{RT}\frac{h}{r(r+h)} = \frac{h}{1 + \frac{h}{r}}\frac{1}{RT}, \text{ also}$$

9) $$\frac{h}{1 + \frac{h}{r}} = RT\,l\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Der Vergleich mit Gl. 6 (S. 212) zeigt, dass die rechten Seiten übereinstimmen, dass nur links h durch $\frac{h}{1 + \frac{h}{r}}$ ersetzt ist, was aber wegen $r = 6\,370\,000$ meist von h nicht wesentlich abweicht.

Beispiel 1: Es sei wie in dem Beispiel auf S. 205: am unteren Punkte $p_1 = 749{,}2$ mm, am oberen $p_2 = 692{,}7$ mm, ausserdem aber die Temperaturen

$$\text{unten } t_1 = 14{,}4,\quad T_1 = 287{,}4,$$
$$\text{oben } t_2 = 10{,}6,\quad T_2 = 283{,}6;\quad T_1 - T_2 = 3{,}8;$$

dann wird nach Gl. 5

$$h = 29{,}37 \cdot 3{,}8 \frac{\log 749{,}2 - \log 692{,}7}{\log 287{,}4 - \log 283{,}6} = 657{,}4 \text{ m}$$

(gegen 628 m für $t_1 = t_2 = 0$).

Gl. 7 (S. 212) liefert mit

$$T = {}^1/_2 (287{,}4 + 283{,}6) = 285{,}5,$$
$$h = 67{,}63 \cdot 285{,}5 (\log 749{,}2 - \log 692{,}7) = 657{,}5 \text{ m},$$

mithin fast dasselbe wie vorstehend.

Gl. 8 liefert mit $t = 12{,}5^0$:

$$h = 16\,000 (1 + 0{,}05) \frac{749{,}2 - 692{,}7}{749{,}2 + 692{,}7} = 658{,}3 \text{ m},$$

d. h. etwa 1 m zu viel, was aber bei der sonstigen Unsicherheit dieses Messverfahrens nicht erheblich ist.

Aus Gl. 9 endlich wird in Verbindung mit dem Ergebnisse der Gl. 7:

$$\frac{h}{1 + \frac{h}{6\,370\,000}} = 657{,}5, \quad \text{oder}$$

$$h \left(1 - \frac{657{,}5}{6\,370\,000}\right) = 657{,}5, \quad \text{d. h.}$$

$$h = 657{,}6 \text{ m}.$$

Beispiel 2: Steighöhe eines Luftballons mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Temperatur. Sind γ_1 und γ_1' die Dichten der Aussenluft und der Füllung am Erdboden, wo der Druck und die Temperatur p_1 und T_1 betragen und beziehen sich γ_2, γ_2', p_2 und T_2 auf die Grenze der Steighöhe h, so gilt für letztere die Bedingung

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = Q.$$

Wir nehmen an, dass im Ballon dieselbe Temperatur und derselbe Druck herrsche wie aussen. Dann ist nach der Zustandsgleichung (S. 210) wegen $\gamma = 1 : v$, wenn R' der Festwerth für die Gasfüllung,

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{R T_1}, \quad \gamma_1' = \frac{p_1}{R' T_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R T_2}, \quad \gamma_2' = \frac{p_2}{R' T_2}, \quad \text{daher}$$

$$\gamma_2 - \gamma_2' = (\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2}, \quad \text{und}$$

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = V(\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = Q;$$

daraus
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} \frac{T_1}{T_2}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 4 (S. 212) ein, so entsteht

$$l\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} \frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{R\tau} l\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

Daraus folgt
$$\log \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q} = \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{1}{R\tau} - 1\right) \quad \text{oder}$$

10)
$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{R\tau} - 1} \log\left(\frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{Q}\right).$$

Hierdurch ist das Verhältnis der Temperaturen unten und an der Grenze der Steighöhe bestimmt. Kennt man nun die Temperaturabnahme τ auf 1 m Höhe, so ist

11)
$$h = \frac{T_1 - T_2}{\tau}$$

Ist nach S. 208 $V = 700$, $\gamma_1 = 1{,}29$, $\gamma_1' = 0{,}45$, $V(\gamma_1 - \gamma_1') = 588$, $Q = 500$ und nimmt man auf 100 m eine Abnahme der Temperatur um $0{,}5^0$, d. h. $\tau = 0{,}005$, $R = 29{,}37$ an, so wird

$$\log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{1}{\frac{200}{29{,}37} - 1} \log 1{,}176 \quad \text{und} \quad T_2 = 0{,}972\, T_1.$$

Beträgt nun die Temperatur unten $T_1 = 283$, so wird hiernach $T_2 = 275{,}1$, $T_1 - T_2 = 7{,}9^0$, mithin

$$h = 7{,}9 \cdot 200 = 1580 \text{ m}.$$

Eine etwas unrichtige Schätzung von τ beeinflusst das Ergebnis nicht sehr, weil τ sowohl in Gl. 10, als auch in Gl. 11 vorkommt. Mit $\tau = 0{,}006$ wird z. B. $h = 1608$ m, also wenig verschieden. — Zur Erleichterung derartiger Rechnungen dienen Jordan's Barometrische Höhentafeln. (Hannover 1896. Helwing).

4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

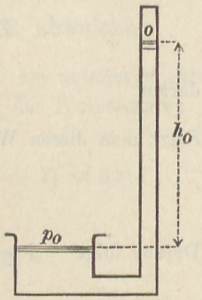
a) Barometer. Druckmesser.

Die Atmosphäre übt in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck $p_0 = 10333\ ^{kg}/_{qm}$ aus, also auch auf die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Dieser Druck p_0 kann durch das Gewicht

einer Flüssigkeitssäule von der Höhe $h_0 = p_0 : \gamma$ ersetzt werden, worin γ die Dichte der Flüssigkeit ist. Für Wasser ist $\gamma = 1000$, daher

$$h_0 = 10{,}333^{\,m};$$

Fig. 238.



d. h. eine Wassersäule von $10{,}333^{\,m}$ Höhe drückt durch ihr Gewicht ebenso stark wie die Atmosphäre.

Wird in dem rechtsseitigen, oben geschlossenen Rohre (Fig. 238) der Wasserspiegel um h_0 erhöht und die darüber befindliche Luft entfernt, so wird Gleichgewicht in der Flüssigkeit herrschen, dem Atmosphärendrucke p_0 links wird durch die Flüssigkeitssäule h_0 das Gleichgewicht gehalten. Besteht die Flüssigkeit aus Quecksilber mit $\gamma = 13\,600$, so wird

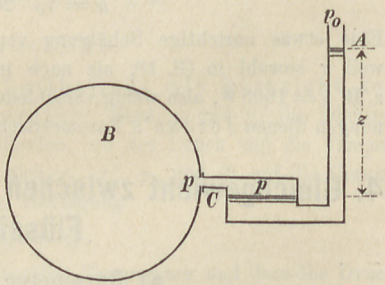
$$h_0 = \frac{10333}{13600} = 0{,}76^{\,m} \text{ bei } 0^0 \text{ C.}$$

Der mittlere Atmosphärendruck am Meeresspiegel entspricht also einer Quecksilbersäule von $760^{\,mm}$. Jede Änderung des Luftdruckes giebt sich durch Änderung von h_0 zu erkennen. Darauf beruht das **Barometer** (von $\beta\alpha\varrho\acute{\upsilon}\varsigma$, schwer).

Die im Maschinenwesen eingeführte Atmosphäre von $10\,000\,{}^{kg}/_{qm}$ entspricht $10\,000 : 13\,600 = 0{,}735^{\,m} = 735^{\,mm}$ Quecksilbersäule.

An der Wettersäule zu Hannover, welche $57^{\,m}$ über dem Meere liegt, ist bei überall gleicher Temperatur von 10^0 C. der Druck p_2 nach Gl. 7 (S. 212) zu berechnen. Setzt man darin $h = 57$, $T = 283$, $p_1 = 760$, so wird

Fig. 239.



$$\log p_2 = \log 760 - \frac{57}{67{,}63 \cdot 283}$$

und daraus $p_2 = 754{,}8^{\,mm}$.

Druckmesser (Manometer, von $\mu\alpha\nu\acute{o}\varsigma$, dünn). Wie man den Atmosphärendruck durch eine Flüssigkeitssäule misst, so kann man auch die Pressungen anderer (tropfbarer oder gasförmiger) Flüssigkeiten durch im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeitssäulen messen oder mit dem Atmosphärendrucke vergleichen.

Soll der Druck p des in dem Behälter B (Fig. 239) befindlichen Dampfes oder Gases gemessen werden, so verbindet man mit dem Behälter einen oben bei A offenen Druckmesser. Dann wirkt bei A der Atmosphärendruck p_0, und bei C, in einer Tiefe z unter dem Flüssigkeitsspiegel bei A, ist der Druck

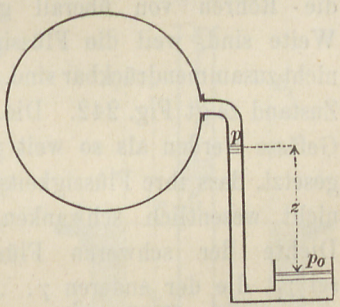
$$p = p_0 + \gamma z,$$

wenn γ die Dichte der Messflüssigkeit ist. Setzt man noch $p_0 = \gamma h_0$, so kommt

1) $$p - p_0 = \gamma z \quad \text{oder} \quad \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{z}{h_0}.$$

Nun ist $p - p_0$ der Überdruck im Behälter B gegen die Atmosphäre und $(p - p_0) : p_0$ der in Atmosphären ausgedrückte Überdruck. Jede Atmosphäre Überdruck (10000 $^{kg}/_{qm}$) entspricht einer Quecksilbersäule von 735 ^{mm}; zum Messen von 10 Atmosphären ist daher eine Säule von 7,35 ^{m} erforderlich. Derartige Druckmesser eignen sich deshalb nicht für bewegliche, sondern nur für feststehende Dampfkessel. Bei ersteren benutzt man Federmanometer, die den Druck aus der elastischen Formänderung einer Gefässwand erkennen lassen. Die Theilung solcher Federmanometer lässt sich aber nicht berechnen, sondern muss vielmehr durch Vergleichung mit einem offenen Quecksilber-Druckmesser gefunden werden. Das Quecksilber befindet sich in einer Eisenröhre; ein auf ihm schwimmendes Eisenstück ist durch eine über eine Rolle laufende Schnur mit einem in bequemer Höhe befindlichen Zeiger verbunden, so dass man Hebung und Senkung des Quecksilberspiegels aus der Bewegung des Zeigers zu erkennen vermag.

Fig. 240.



Für geringen Überdruck, wie er z. B. in den Röhren für Leuchtgas herrscht, benutzt man Wasser als Messflüssigkeit und drückt auch den Überdruck nicht in ^{at}, sondern in ^{mm} Wassersäule aus; 1 ^{mm} Wassersäule ist gleichbedeutend mit $\frac{1}{10000}$ Atmosphäre, da 1 ^{at} mit 10 ^{m} Wassersäule gleichbedeutend ist; 25 ^{mm} Wassersäule bedeutet daher $\frac{1}{400}$ ^{at}.

Zum Messen von Drücken in Kondensatoren, Feuerzügen, Schornsteinen u. dgl., welche kleiner sind als der Atmosphärendruck, dienen Minderdruck-Messer (Vakuummeter) (Fig. 240). Es ist

$$p + \gamma z = p_0, \quad \text{oder}$$

$$p_0 - p = \gamma z \quad \text{und}$$

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{z}{h_0};$$

letzteres ist der Minderdruck in Atmosphären.

Zusammengesetzter Druckmesser geringerer Höhe. Die mehrfach auf und nieder gebogenen Röhren (Fig. 241) sind im unteren Theile (unter AB) mit Quecksilber, im oberen Theile mit einer leichteren Flüssigkeit, etwa Wasser oder Glycerin, gefüllt. Bei gleichen Drücken in beiden oberen Gefässen steht das Quecksilber in allen Röhren bis zu der Wagerechten AB. Wächst der Druck auf der linken Seite von p_0 auf p, während rechts der Atmosphärendruck p_0 wirksam bleibt, so senkt sich bei B das Quecksilber um z, steigt bei C und bei A, sinkt bei D um das gleiche Maſs z, wenn die Röhren von überall gleicher Weite sind, weil die Flüssigkeiten nicht zusammendrückbar sind. Diesen Zustand zeigt Fig. 242. Die oberen Gefässe werden als so weit vorausgesetzt, dass ihre Flüssigkeitsspiegel nicht wesentlich schwanken. Die Dichte der schweren Flüssigkeit sei γ_1, die der anderen γ.

Fig. 241.

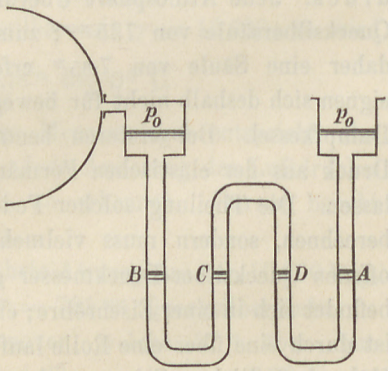
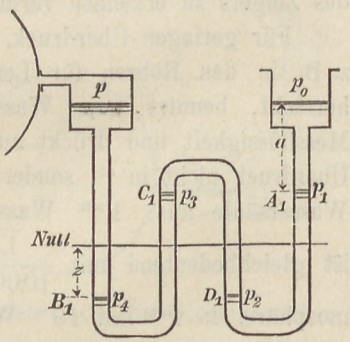


Fig. 242.



Bei A_1 ist der Druck $p_1 = p_0 + \gamma a$, bei D_1 der Druck $p_2 = p_0 + \gamma a + 2\gamma_1 z$, bei C_1 der Druck $p_3 = p_2 - 2\gamma z = p_0 + \gamma a + 2(\gamma_1 - \gamma) z$, bei B_1 der Druck

$p_4 = p_3 + 2\gamma_1 z$, im oberen, linksseitigen Gefässe der Druck $p = p_4 - \gamma(a + 2z) = p_0 + 4(\gamma_1 - \gamma)z$; mithin ist der Überdruck in at:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{4(\gamma_1 - \gamma)z}{\gamma_1 h_0} = 4\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)\frac{z}{h_0},$$

wenn h_0 die Atmosphärenhöhe für die Flüssigkeit der grösseren Dichte γ_1 ist. Man erkennt leicht, dass, wenn $2n$ Röhren statt 4 in entsprechender Weise hinter einander geschaltet sind,

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)\frac{z}{h_0} \quad \text{wird.}$$

Für $\gamma_1 = 13600$ (Quecksilber), $\gamma = 1000$ (Wasser), $h_0 = 735$ mm wird

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n\left(1 - \frac{1}{13{,}6}\right)\frac{z}{735} = 2n\,\frac{z}{793}.$$

Mit $2n = 8$ wird dann

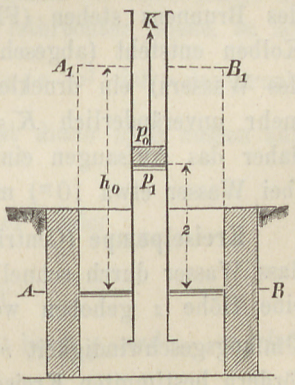
$$z = \frac{p - p_0}{p_0} \cdot 99 \text{ mm};$$

hier erfordert also 1 at nur 99 mm Theilungshöhe gegen 735 mm beim einfachen Druckmesser.

b) Saugpumpe. Kreiselpumpe. Heber.

AB (Fig. 243) sei der Wasserspiegel eines Brunnens. In einem cylindrischen Rohre, dessen unteres Ende ins Wasser taucht, befindet sich ein beweglicher dicht schliessender Kolben. Der Druck des Wassers im Brunnen und in dem unterhalb des Kolbens befindlichen Theile des Rohres ist am einfachsten zu berechnen, wenn man sich in der Höhe h_0 über dem wahren Wasserspiegel einen Wasserspiegel $A_1 B_1$ denkt, auf den kein Atmosphärendruck wirkt. Ist durch das Spiel der in der Figur nicht gezeichneten Ventile nach einer gewissen Zahl von Kolbenhüben die Luft unter dem Kolben entfernt, so herrscht hier,

Fig. 243.



in der Höhe z über AB, in der Tiefe $h_0 - z$ unter $A_1 B_1$ ein Druck

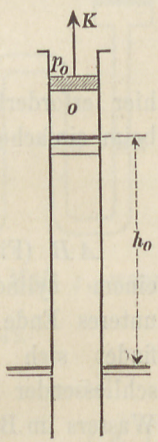
1) $$p_1 = \gamma (h_0 - z).$$

Befindet sich oberhalb des Kolbens noch kein Wasser, so wirkt dort der Druck p_0. Ist F der Querschnitt der Röhre, so ist an dem Kolben eine aufwärts gerichtete Kraft

2) $$K = (p_0 - p_1) F = \gamma F z$$

für den Ruhezustand, sowie für langsame gleichmässige Aufwärts-Bewegung erforderlich, gerade so, als ob die Wassersäule von der Höhe z nicht unterhalb des Kolbens von dem Atmosphärendrucke in der Schwebe erhalten würde, sondern auf dem Kolben lastete. Die Gl. 2 für K gilt aber nur so lange, wie Gl. 1 für p_1 einen positiven Werth ergiebt, d. h. für $z \leqq h_0$, oder so lange sich die untere Kolbenfläche höchstens um h_0 über dem Wasserspiegel AB befindet. Für $z > h_0$ würde nach Gl. 1 der Druck p_1 negativ. Negative Flüssigkeitsdrücke giebt es aber nicht, da Flüssigkeiten keine nennenswerthe Zugfestigkeit haben. Mithin hört bei wachsendem z die Gültigkeit der Gl. 1 mit $z = h_0$ auf. Für $z > h_0$ bleibt der Druck unter dem Kolben Null, das Wasser drückt nicht mehr gegen den Kolben, folgt ihm nicht mehr bei seiner Aufwärts-Bewegung, sondern verbleibt in der Höhe h_0 über dem Wasserspiegel des Brunnens stehen (Fig. 244), und unter dem Kolben entsteht (abgesehen von der Verdampfung des Wassers) ein druckloser Raum, so dass nunmehr unveränderlich $K = \gamma F h_0$ bleibt. Es ist daher das Aufsaugen einer Flüssigkeit nur bis zu einer Höhe h_0 (bei Wasser etwa 10^m) möglich.

Fig. 244.



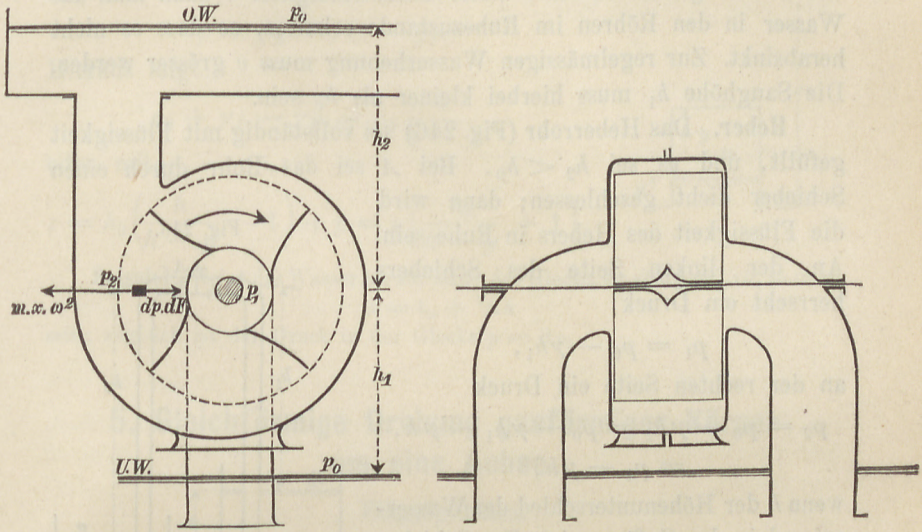
Kreiselpumpe (Centrifugalpumpe) Auf S. 200 wurde gezeigt, dass Wasser durch schnelle Drehung um eine lothrechte Achse auf eine Höhe z gehoben werden konnte und dass die erforderliche Umfangsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ sein müsse. Bei den zum Wasserfördern bestimmten Kreiselpumpen erfolgt die Drehung meist um eine wagerechte Achse, die oberhalb des Unterwassers liegt, so dass

das Wasser auf eine gewisse Höhe angesogen und dann weiter emporgedrückt wird. Es lässt sich zeigen, dass die Beziehung $v = \sqrt{2gz}$ auch bei dieser Anordnung (Fig. 245) gültig bleibt.

Die wagerechte Drehachse liege um h_1 über dem Unterwasser, um h_2 unter dem Oberwasser.

Betrachtet man ein Theilchen m der in gleichmässiger Drehung begriffenen Wassermasse, welches auf dem wagerechten Halbmesser

Fig. 245.



im Abstand x von der Drehachse liegt, nennt dx seine Länge in der Richtung x, dF den Querschnitt in lothrechter Ebene, so ist die Ergänzungskraft $m \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{\gamma}{g} dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2$. Ist p der Druck im Abstande x von der Achse, so wächst dieser nach aussen auf die Länge dx um dp. Daher muss

$$dp \cdot dF = \frac{\gamma}{g} \cdot dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2 \quad \text{oder}$$

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx$$

sein. Sind die Drücke für $x = r$ und $x = 0$ bezw. p_2 und p_1, so wird

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g} r^2 \omega^2.$$

Nun ist

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1, \quad p_2 = p_0 + \gamma h_2,$$

daher (mit $r\omega = v$)

$$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g},$$

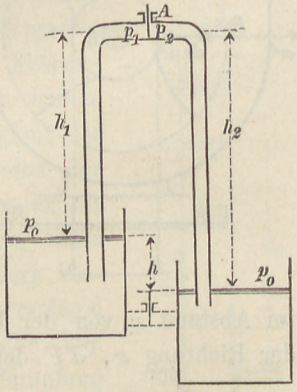
oder wenn man den Höhenunterschied zwischen Unter- und Oberwasser $h_1 + h_2 = h$ setzt,

$$v^2 = 2gh; \quad v = \sqrt{2gh},$$

wie S. 200 gefunden. Mit dieser Geschwindigkeit v kann man das Wasser in den Röhren im Ruhezustande erhalten, so dass es nicht herabsinkt. Zur regelmässigen Wasserhebung muss v grösser werden. Die Saughöhe h_1 muss hierbei kleiner als h_0 sein.

Heber. Das Heberrohr (Fig. 246) sei vollständig mit Flüssigkeit gefüllt, und es sei $h_2 < h_0$. Bei A sei das Rohr durch einen Schieber dicht geschlossen; dann wird die Flüssigkeit des Hebers in Ruhe sein. An der linken Seite des Schiebers herrscht ein Druck

Fig. 246.



$$p_1 = p_0 - \gamma h_1,$$

an der rechten Seite ein Druck

$$p_2 = p_0 - \gamma h_2 = p_0 - \gamma h_1 - \gamma h,$$
$$= p_1 - \gamma h,$$

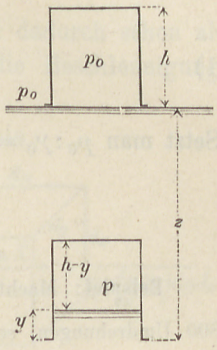
wenn h der Höhenunterschied der Wasserspiegel in den Gefässen ist. Der Schieber erfährt daher einen Überdruck $p_1 - p_2 = \gamma h$ von links nach rechts, gerade so, wie in dem punktirt angedeuteten, die Gefässe unmittelbar verbindenden Rohre der Fall sein würde. Wird der Schieber im Heber entfernt, so muss Wasser von links nach rechts hinüberfliessen. Ist $h_1 < h_0$, h_2 aber $> h_0$, so wird $p_2 = 0$, der Überdruck $p_1 - p_2 = p_0 - \gamma h_1 = \gamma(h_0 - h_1) < \gamma h$; auch in diesem Falle wird noch das Wasser hindurchfliessen; erst für $h_1 \geqq h_0$ wird dies nicht mehr stattfinden.

c) Taucherglocke.

Ein oben geschlossenes, unten offenes Gefäss (Fig. 247), welches mit Luft gefüllt ist, werde um die Tiefe z im Wasser niedergesenkt;

dann wird Wasser von unten auf eine Höhe y in dem Gefässe, der Glocke, emporsteigen, und man wird aus der Höhe y auf die Tiefe z schliessen können. Die Luft wird durch das eintretende Wasser von dem Drucke p_0 auf p zusammengedrückt, und wenn man annimmt, dass die Temperatur der Luft sich nicht ändert, so gilt nach dem Boyle'schen Satze

Fig. 247.



$$p : p_0 = h : (h - y).$$

Ausserdem ist aber (wegen der Tiefe z unter Wasser)

$$p = p_0 + \gamma(z - y).$$

Hieraus folgt:

$$p_0 + \gamma z - \gamma y = p_0 \frac{h}{h - y},$$

oder, mit $p_0 = \gamma h_0$:

$$z = h_0\left(\frac{h}{h - y} - 1\right) + y = y\left(\frac{h_0}{h - y} + 1\right).$$

Beispiel: Steigt das Wasser bis zur Mitte der Glocke, ist also $y = {}^1/_2 h$, so muss

$$z = h_0 + {}^1/_2 h$$

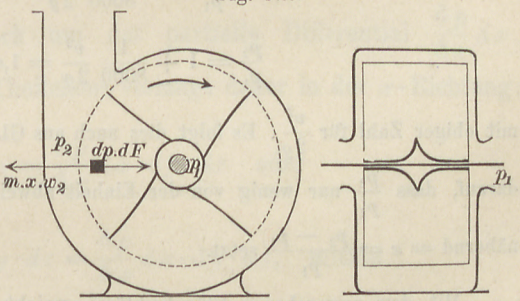
sein; zugleich ist der Druck in der Glocke $p = 2 p_0$.

5. Gleichförmige Drehung gasförmiger Körper um eine Achse.

Flügelgebläse.

Ein Flügelgebläse (Fig. 248) hat in seinem Wesen grosse Ähnlichkeit mit der Kreiselpumpe (S. 220). An der Drehachse herrsche durch freie Verbindung mit der Aussenluft der Druck p_1, am äusseren Umfange betrage der Druck p_2. Für ein Massentheilchen m im Abstande x von der Achse gilt wieder wie auf S. 221

Fig. 348.



$$dp = \frac{\gamma}{g}\omega^2 x\, dx.$$

Für die weitere Behandlung ist jetzt nur die Veränderlichkeit von γ zu berücksichtigen. Auf Grund des Boyle'schen Satzes ist $\gamma : \gamma_0 = p : p_0$, daher

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{\omega^2}{g} x\,dx, \quad \text{mithin}$$

1) $$\mathrm{l}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{v^2}{2g}.$$

Setzt man $p_0 : \gamma_0 = 8000^{\,\mathrm{m}}$ nach S. 204/5, so wird

$$\mathrm{l}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g}.$$

Beispiel: Macht das Flügelrad von $r = 0{,}5^{\,\mathrm{m}}$ Halbmesser in der Minute 800 Umdrehungen, so ist $v = \frac{800 \cdot 0{,}5 \cdot 2\pi}{60} = 41{,}89^{\,\mathrm{m/s}}$; dem entspricht als Geschwindigkeitshöhe rund $90^{\,\mathrm{m}}$; sonach wird

$$\mathrm{l}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{90}{8000} = 0{,}01125.$$

Hierzu gehört die Zahl $\frac{p_2}{p_1} = 1{,}0113$. Weil aber der Druck in dem Flügelrade sich nur um etwa $^1/_{89}$ ändert, so kann auch die Dichte annähernd als gleichbleibend betrachtet werden, so dass man für die meisten Fälle mit genügender Annäherung schreiben kann

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder mit} \quad \frac{p_1}{\gamma_1} = 8000$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g}, \quad \text{also}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g} = 1{,}011\,25$$

mit obiger Zahl für $\frac{v^2}{2g}$. Es folgt dies auch aus Gl. 1, wenn man mit Rücksicht darauf, dass $\frac{p_2}{p_1}$ nur wenig von der Einheit abweicht, $\mathrm{l}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \mathrm{l}(1 + x)$ annähernd $= x = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$ setzt.

Mit dem angegebenen Flügelgebläse erreicht man also nur einen Überdruck von rund $^1/_{89}$ Atmosphäre, gemessen durch $\frac{10000}{89} = 113^{\,\mathrm{mm}}$ Wassersäule. Dieser Druck genügt für Schmiedefeuer.

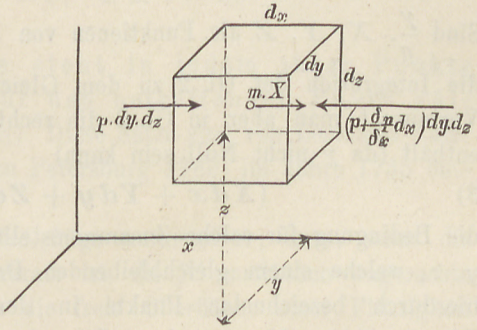
6. Allgemeine Gleichgewichts-Bedingung für Flüssigkeiten, von L. Euler.

Auf ein Massentheilchen $m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz$ wirke eine Massenkraft, welche in der Form $R \cdot m$ geschrieben und dadurch schon als eine Massenkraft gekennzeichnet wird; R ist die Beschleunigung, welche das Theilchen durch die Kraft erfahren würde. Der Druck p betrage an der Stelle x, y, z, wo das Theilchen sich befindet, p; dann ist

1) $p = f(x, y, z)$,

da der Druck in der Flüssigkeit im Allgemeinen von Punkt zu Punkt wechseln wird.

Fig. 249.



Die Beschleunigung R der Massenkraft werde nach den Achsenrichtungen in X, Y, Z zerlegt; dann wirkt auf das Theilchen in der x-Richtung die Massenkraft $X \cdot m$. An der linken Seitenfläche von der Grösse $dy \cdot dz$ wirkt die Oberflächenkraft $p \cdot dy \cdot dz$ (Fig. 249). Beim Übergange von der linken nach der rechten Seitenfläche ändert sich x um dx, während y und z dieselben bleiben; somit wächst auch der Druck um das partielle Differential $\frac{\delta p}{\delta x} dx$. Das Gleichgewicht des Theilchens verlangt daher in der x-Richtung:

$$X \cdot m = \frac{\delta p}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{oder}$$

$$X \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\delta p}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{\gamma}{g} X dx = \frac{\delta p}{\delta x} dx.$$

In gleicher Weise gilt für die anderen Achsenrichtungen

$$\frac{\gamma}{g} Y dy = \frac{\delta p}{\delta y} dy,$$

$$\frac{\gamma}{g} Z dz = \frac{\delta p}{\delta z} dz.$$

Durch Zusammenzählen der 3 Gleichungen entsteht auf der rechten Seite das vollständige Differential dp des Druckes, nämlich

$$2) \qquad \frac{\gamma}{g} (X dx + Y dy + Z dz) = dp.$$

Sind $\frac{\gamma}{g}$, X, Y, Z als Funktionen von x, y, z gegeben, so führt die Integration der Gl. 2 zu dem Gleichgewichtsdrucke p (Gl. 1). Vertauscht man aber in Gl. 2 die rechte Seite dp mit Null, so enthält (da γ nicht Null sein kann)

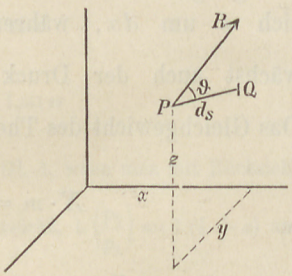
$$3) \qquad (X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

die Bedingung für solche Zusammenstellungen der Koordinaten x, y, z, welche einem gleichbleibenden Drucke p entsprechen. Die hierdurch bezeichneten Punkte in der Flüssigkeit bilden eine Fläche überall gleichen Druckes, oder eine **Niveaufläche**, deren Gleichung durch Integration von Gl. 3 erhalten und

$$4) \qquad f(x, y, z) = \text{Const.}$$

geschrieben werden kann. Die Funktion hat dieselbe Form wie in Gl. 1. Jedem anderen Werthe der Const. entspricht eine andere Niveaufläche mit einem anderen Drucke.

Fig. 250.



Die Niveauflächen stehen in einer einfachen Beziehung zur Richtung der Massenkraft $R \cdot m$. An einem Punkte P innerhalb einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit (Fig. 250) bilde R mit den Achsen die Richtungswinkel α, β, δ. PQ sei ein beliebiges Kurventheilchen ds, welches in einer durch P gelegten Niveaufläche liegen soll; ds habe die Richtungswinkel α_1, β_1, δ_1. Dann gilt für den Winkel ϑ zwischen R und ds die Gleichung

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \delta \cdot \cos \delta_1.$$

Nun sind X, Y, Z die Projektionen von R; dx, dy, dz diejenigen von ds auf die 3 Achsen, mithin ist

$$R\cos\alpha = X;\quad R\cos\beta = Y;\quad R\cos\delta = Z;$$

$$ds\cos\alpha_1 = dx;\quad ds\cos\beta_1 = dy;\quad ds\cos\delta_1 = dz.$$

Daher wird

$$Rds\cos\vartheta = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Weil nun für Kurventheilchen innerhalb einer Niveaufläche die Gl. 3 gilt, so muss

5) $$Rds\cos\vartheta = 0,\quad \text{d. h. } \vartheta = 90^0$$

sein. Oder:

Eine Niveaufläche steht in jedem ihrer Punkte rechtwinklig zu der für den betreffenden Punkt gültigen Massenkraft $R \cdot m$. Diese Sätze sind von Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) im Jahre 1755 entwickelt worden.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, dass, wenn die Schwere die einzige Massenkraft ist, die Niveauflächen wagerechte Ebenen sind (S. 168). Da die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ebenfalls eine Niveaufläche sein muss, so finden auch die Entwickelungen über die Gestalt der freien Oberfläche (S. 194 und 196) hier noch eine festere Begründung.

B. Bewegung flüssiger Körper.

I. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

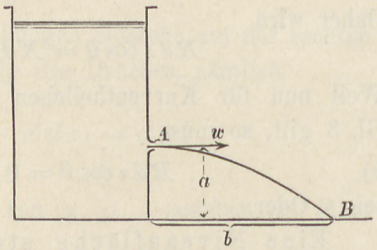
Wird in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefässes (Fig. 251) bei A eine kleine Öffnung frei gemacht, so entsteht ein ausfliessender Wasserstrahl. Die einzelnen Wassertheilchen führen eine parabolische Wurfbewegung aus (Theil 1, S. 49). Ist w die wagerechte Geschwindigkeit, mit der ein Wassertheilchen bei A

das Gefäss verlässt, a die Höhe von A über dem Boden, t die Zeit der Bewegung von A bis B, so wird unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes $a = \frac{1}{2} g t^2$; $b = wt$, mithin

$$1) \qquad \frac{b}{w} = \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

so dass bei bekanntem a aus der Sprungweite b des Strahles die Ausflussgeschwindigkeit w berechnet werden kann.

Fig. 251.



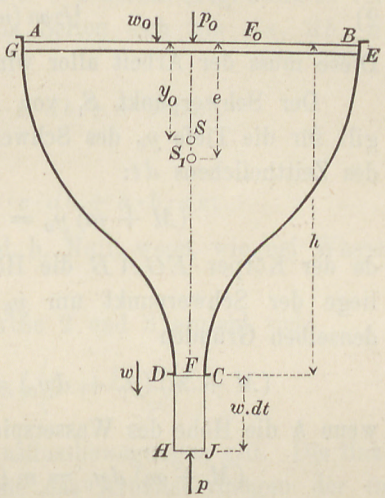
War die Öffnung geschlossen, demnach alles im Gefässe befindliche Wasser in Ruhe, und macht man die Öffnung plötzlich frei, so wird die ganze im Gefässe befindliche Wassermasse in Beschleunigung gerathen; die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen, auf einander folgenden Wassertropfen aus der Öffnung treten, ist nicht die gleiche, sondern eine allmählich wachsende; daher wächst auch die Sprungweite b. Jedoch lehrt die Erfahrung, dass die Veränderung von b und w sehr schnell erfolgt, dass sich schon nach sehr kurzer Zeit (meist schon nach 1 Sekunde) eine bestimmte Sprungweite b und somit eine bestimmte Geschwindigkeit w gebildet hat, die nun unverändert dieselbe bleibt, wenn der Wasserspiegel im Gefässe durch Zufluss stets auf gleicher Höhe erhalten wird. Gleichzeitig hiermit werden sich nun an allen Stellen des Gefässes dauernde Bewegungs- und Druckverhältnisse gebildet haben. Diesen Zustand nennt man **Beharrungszustand.** In allen nachfolgenden Untersuchungen nehmen wir an, dass der Beharrungszustand eingetreten sei und lassen die höchst verwickelten Verhältnisse vor dem Eintritte desselben, die meist noch nicht einmal 1 Sekunde währen, ausser Acht.

Zunächst wird das Wasser als eine vollkommen reibungslose Flüssigkeit angesehen, auch wird angenommen, dass das Gefäss an allen Stellen zwischen Wasserspiegel und Öffnung von Wasser erfüllt sei, keine leeren Räume enthalte. Unter welchen Bedingungen letztere vorkommen, wird später (S. 263) erörtert. Auch sollen plötzliche Querschnittsänderungen im Gefässe vorläufig noch nicht angenommen werden.

a) Ideelle Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge einer Bodenöffnung.

Das Wasser ergiesse sich (Fig. 252) durch eine in wagerechter Ebene liegende Öffnung $DC = F$. Das Gefäss habe von der Mitte des Wasserspiegels bis zur Mitte der Ausflussöffnung eine ziemlich bestimmt ausgesprochene Mittellinie und verenge sich nach der Öffnung hin allmählich. Dann wird man annehmen können, dass die durch die Öffnung F austretenden Wassertheilchen mit gleichen Geschwindigkeiten durch den Öffnungs-Querschnitt hindurchgehen. Es tritt während eines Zeittheilchens dt ein prismatischer Wasserkörper $F \cdot w \cdot dt$ unten aus. Dessen Masse sei das Massentheilchen

Fig. 252.



$$1) \qquad m = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot w \cdot dt$$
$$= \frac{\gamma}{g} \cdot F_0 \cdot w_0 \cdot dt.$$

Das gleiche Massentheilchen muss nämlich oben verschwinden. Ist daher F_0 der Wasserspiegel, w_0 die Geschwindigkeit, mit der er sinkt, so muss offenbar $F_0 \cdot w_0 \cdot dt = F \cdot w \cdot dt$ sein.

Wir wollen nun den Satz der Arbeit (1. Theil, S. 143) auf die im Gefässe befindliche Wassermasse, u. zw. für ein Zeittheilchen dt anwenden. Hinsichtlich des Zuflusses im Wasserspiegel werde angenommen, dass der Spiegel zuerst während der Zeit dt um $w_0 \cdot dt$, d. h. von AB nach EG sinkt und dass dann plötzlich eine Wasserschicht $ABEG$ zum Ersatze wieder aufgebracht werde. Der Wasserkörper $EGDC$, der zu Anfang und zu Ende des Zeittheilchens vorhanden war, habe die Masse M und wegen des Beharrungszustandes ein unveränderliches Arbeitsvermögen E. Die gesammte Wassermasse im Gefäss ist dann $M + m$, von denen m sich zu Anfang oben vorfindet, nach der Zeit dt aber unten. Die-

selbe Stelle des Gefässes wird nach einander von verschiedenen Massentheilchen eingenommen, die an dieser Stelle stets die gleiche Geschwindigkeit haben, nur durch andere vertauscht sind.

Zu Ende des Zeittheilchens dt ist das gesammte Arbeitsvermögen der Wassermasse $M + m$ offenbar $E + {}^1/_2 m w^2$, zu Anfang aber, wo die Masse m mit der Geschwindigkeit w_0 sich oben befand: $E + {}^1/_2 m w_0^2$. Daher entsteht in dem Zeittheilchen dt eine Zunahme an Arbeitsvermögen

2) $$ {}^1/_2 m (w^2 - w_0^2). $$

Diese muss der Arbeit aller wirkenden Kräfte gleich sein.

Der Schwerpunkt S_1 von M liege um e unter AB. Dann gilt für die Tiefe y_0 des Schwerpunktes S von $M + m$ zu Anfang des Zeittheilchens dt:

$$ (M + m) y_0 = Me + m \cdot {}^1/_2 w_0 dt, $$

da der Körper $EGAB$ die Höhe $w_0 dt$ hat. Nach der Zeit dt liege der Schwerpunkt um $y_0 + dy_0$ unter AB, dann ist aus denselben Gründen

$$ (M + m)(y_0 + dy_0) = Me + m (h + {}^1/_2 w dt), $$

wenn h die Höhe des Wasserspiegels über der Öffnung. Daher wird

$$ (M + m) dy_0 = m (h + {}^1/_2 w dt - {}^1/_2 w_0 dt) $$

und, wenn man rechts die unendlich kleinen Grössen gegen h vernachlässigt, $(M + m) dy_0 = mh$. Das Gewicht von $M + m$ verrichtet also in der Zeit dt die Arbeit (1. Theil, S. 139)

$$ (M + m) g dy_0 = mgh. $$

Steht nun der Wasserspiegel unter einem Drucke p_0, die Öffnung unter dem Drucke p, so verrichten die Kräfte $p_0 F_0$ uud pF während der Zeit dt die Arbeiten

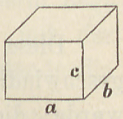
$$ p_0 F_0 w_0 dt - pFw dt, $$

was wegen Gl. 1 zu schreiben ist $mg \frac{p_0 - p}{\gamma}$. Die Schwerkraft und die Drücke p_0 und p leisten daher während der Zeit dt die Arbeit

3) $$ mg\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right). $$

Die Druckkräfte des Gefässes gegen die Wassermasse verrichten keine Arbeit, da sie überall rechtwinklig zur Bewegungsrichtung stehen. Die inneren Kräfte im Wasser leisten aber ebenfalls keine Arbeit, denn sie sind reine Normalkräfte, die einem Gleiten keinen Widerstand entgegensetzen und nur bei einer Änderung des Rauminhaltes Arbeit verrichten könnten. Trennt man nämlich an einer Stelle, wo der Druck p' herrscht, ein kleines Parallelepiped $a \cdot b \cdot c$ heraus (Fig. 253), so verrichten die Druckkräfte, wenn die Seiten sich um da, db, dc vergrössern, die Arbeit

Fig. 253.



$$-p'(b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc).$$

Weil aber $V = a \cdot b \cdot c$, so ist

$$dV = b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc;$$

mithin die Arbeit $= -p' dV$, d. h. Null, wenn, wie bei Wasser $dV = 0$ ist.

Durch Gleichsetzung der Werthe 2 und 3 ergiebt sich

$$\text{I)} \qquad m\left(\frac{w^2}{2} - \frac{{w_0}^2}{2}\right) = mg\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right);$$

welche als Grundgleichung aller Ausflussbewegungen gilt. Die linke Seite enthält die Zunahme, welche das Arbeitsvermögen der im Gefäss enthaltenen Wassermasse in der Zeit dt erleidet, die rechte Seite die gleichzeitig verrichtete Arbeit. Dabei bezeichnet m das Massentheilchen, welches während der Zeit dt unten ausströmt und gleichzeitig auch durch alle Querschnitte des Gefässes hindurchgeht. Später etwa zu berücksichtigende Widerstandsarbeiten oder Arbeits-Verluste können in Gl. I leicht angebracht werden; aus diesem besonderen Grunde ist der gemeinsame Faktor m noch nicht gestrichen worden.

Will man nun aber w berechnen, so bedenke man, dass nach Gl. 1.

$$F_0 w_0 = Fw, \quad \text{daher} \quad w_0 = w\frac{F}{F_0}.$$

Dann entsteht nach Gl. I

$$w^2\left(1 - \frac{F^2}{{F_0}^2}\right) = 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right),$$

4) oder $$w = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

Diese Geschwindigkeit bezeichnen wir als ideelle Ausflussgeschwindigkeit, weil bei ihrer Berechnung die Reibung vernachlässigt wurde; die wirkliche Geschwindigkeit ist kleiner (s. S. 237). Es ist $p_0 - p$ der Druckunterschied zwischen Wasserspiegel und Öffnung, $\frac{p_0 - p}{\gamma}$ die entsprechende Wassersäule; diese tritt zu h hinzu und bildet mit ihr die gesammte wirksame Druckhöhe. In den weitaus meisten Fällen ist $p = p_0$. Da es sich nun nicht empfiehlt, wegen der selten vorkommenden Fälle ungleicher Drücke stets mit einer unbequemen Formel zu rechnen, wollen wir $\frac{p_0 - p}{\gamma}$ als mit in h steckend betrachten, so dass in Zukunft h die ganze wirksame Druckhöhe bedeuten soll. Dann wird einfacher

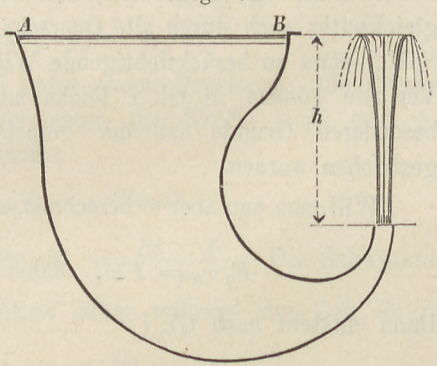
5) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$

Da diese Formel nur eine ideelle ist und noch der Berichtigung bedarf, so kommt es bei ihrer Ausrechnung nicht auf grosse Genauigkeit an. Ist daher, wie in den meisten Fällen, die Öffnung F klein gegen den Wasserspiegel F_0, so kann in Gl. 1 w_0^2 gegen w^2 oder in Gl. 5 die Grösse $F^2 : F_0^2$ gegen 1 vernachlässigt und einfach

6) $$w = \sqrt{2gh}$$

gesetzt werden. Hiernach ist die ideelle Ausflussgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit, welche einer Fallhöhe gleich der wirksamen Druckhöhe entspricht; oder die Geschwindig-

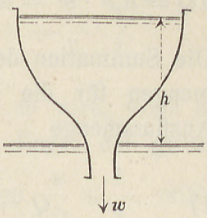
Fig. 254.



keitshöhe des Ausflusses ist gleich der wirksamen Druckhöhe h.

Die vorstehenden Formeln gelten auch noch für den Fall der Fig. 254, wo der Strahl lothrecht aufwärts austritt. Hierin liegt auch eine einfache Prüfung der Rechnung; denn der mit der Geschwindigkeit w austretende Strahl muss ohne Widerstände die Höhe $\frac{w^2}{2g} = h$ erreichen, d. h. zur Höhe des Wasserspiegels AB ansteigen. Reibung des Wassers im Gefäss und Luftwiderstand ausserhalb desselben vermindern die Steighöhe (s. S. 289).

Fig. 255.



Taucht das Gefäss nach Fig. 255 in ein Unterwasser ein, so ist die Eintauchungstiefe als eine Gegendruckhöhe aufzufassen, so dass als wirksame Druckhöhe nur der Höhenunterschied h der beiden Wasserspiegel gilt.

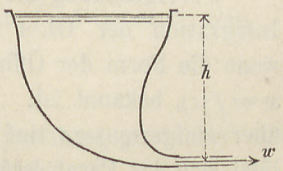
Da in jedem Zeittheilchen dt eine Raummenge $F \cdot w \cdot dt$ austritt, so ist die ideelle sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten (cbm)

7) $$Q = F \cdot w = F\sqrt{2gh}.$$

b) Ideelle Ausflussmenge einer Seitenöffnung.

Befindet sich die Öffnung in lothrechter Ebene, so gelten die vorstehenden Gleichungen auch für diesen Fall, wenn die Öffnung so geringe Höhenerstreckung hat (Fig. 256), dass man für alle Punkte der Öffnung die gleiche Ausflussgeschwindigkeit w annehmen darf, so dass der ausfliessende Wasserkörper wiederum ein Prisma bildet. Es passt für diesen Fall die Entwickelung der Gl. I (S. 231) vollständig, wenn man dabei die Höhe h vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkte der Öffnung rechnet.

Fig. 256.

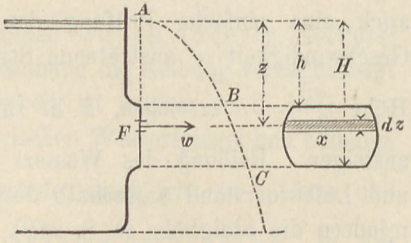


Hat die Öffnung aber eine grössere Höhenerstreckung, so ist die Annahme einer überall gleichen Geschwindigkeit nicht mehr

zulässig. Man denkt sich nun (Fig 257) aus der Öffnung F einen wagerechten Streifen von der Höhe dz, der Breite x und der Fläche $dF = x \cdot dz$, welcher um z unter dem Wasserspiegel liegt, herausgenommen, berechnet für diesen Streifen die Ausflussgeschwindigkeit $w = \sqrt{2gz}$ und die sekundliche Ausflussmenge in Raumeinheiten (cbm)

$$dQ = dF \cdot w = dF \cdot \sqrt{2gz}.$$

Fig. 257.

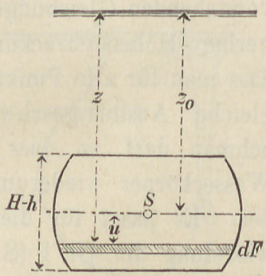


Die Summation der Ausflussmengen für die sämmtlichen Streifen giebt dann die gesammte Ausflussmenge

$$1) \qquad Q = \sqrt{2g} \int dF \sqrt{z} = \sqrt{2g} \int_{z=h}^{z=H} x \sqrt{z}\, dz,$$

wenn Ober- und Unterkante der Öffnung um h bezw. H unter dem Wasserspiegel liegen. Die Geschwindigkeit $w = \sqrt{2gz}$ lässt sich durch eine Parabel ABC mit lothrechter Achse und vom Parameter g darstellen. Die sekundliche Wassermenge ist offenbar ein prismatischer Wasserkörper, dessen Querschnitt die Ausflussöffnung, der aber aussen nicht rechtwinklig, sondern durch eine parabolische Cylinderfläche BC, rechtwinklig zur Bildebene, begrenzt ist.

Fig. 258.



Vereinfachung der Berechnung. Die Integration der Gl. 1 ist nur möglich, wenn die Form der Öffnung gegeben, also $x = f(z)$, bekannt ist. Liegt die Öffnung aber einigermassen tief unter Wasser, so lässt sich das Parabelstück BC annähernd mit einer Geraden vertauschen, eine mittlere Geschwindigkeit, eine mittlere Druckhöhe z_0, nämlich diejenige des Schwerpunktes S der Öffnung einführen.

Liegt nämlich (Fig. 258) der Schwerpunkt S um z_0 unter dem Wasserspiegel, so entspricht dem Streifen dF in der Tiefe u unter dem Schwerpunkte eine Druckhöhe $z = z_0 + u$. Dann ist dessen Ausflussmenge

$$dQ = dF\sqrt{2gz} = dF\sqrt{2g(z_0 + u)}$$

$$= dF\sqrt{2gz_0}\left(1 + \frac{u}{z_0}\right)^{1/2}$$

oder, nach der binomischen Reihe

$$dQ = dF\sqrt{2gz_0}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{u}{z_0} - \frac{1}{8}\frac{u^2}{z_0^2} + - \cdots\right\}.$$

Ist nun die Höhe der Öffnnng $H - h \leqq {}^1/_2 z_0$, so wird, wenn der Schwerpunkt ziemlich in der Mitte der Höhe liegt, der grösste Werth von $u \leqq {}^1/_4 z_0$, daher im Allgemeinen $\frac{u}{z_0} \leqq \frac{1}{4}$, mithin

$$\frac{1}{8}\frac{u^2}{z_0^2} \leqq \frac{1}{128},$$

also so klein, dass man das dritte Glied der Reihe vernachlässigen kann. Benutzt man daher von der binomischen Reihe nur die beiden ersten Glieder, so wird

$$dQ = \sqrt{2gz_0}\left\{dF + \frac{1}{2}\frac{dF \cdot u}{z_0}\right\} \quad \text{und}$$

$$Q = \sqrt{2gz_0}\left\{F + \frac{1}{2z_0}\int dF \cdot u\right\}.$$

Es ist aber in Bezug auf den Schwerpunkt $\int dF \cdot u = 0$, also

2) $$Q = F\sqrt{2gz_0}.$$

Diese von der Form der Öffnung ganz unabhängige, daher sehr bequeme Gleichung ist also anwendbar, wenn

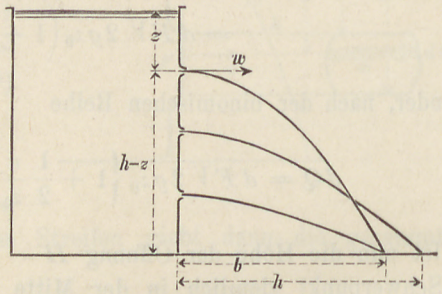
$$2(H - h) \leqq z_0,$$

d. h. wenn die Tiefe des Schwerpunktes unter Wasser mindestens gleich der doppelten Höhe der Öffnung ist.

Beispiel: Ein prismatisches Gefäss stehe auf wagerechtem Boden und sei bis zu einer Höhe h mit Wasser gefüllt. In welcher Tiefe z unter Wasser muss eine kleine Öffnung angebracht werden, damit der Strahl möglichst grosse Sprungweite b habe? Je tiefer man die Öffnung legt, um so grösser wird w, um so kleiner aber die Höhenentwickelung der Parabel, und umgekehrt. Mit $w = \sqrt{2gz}$ wird Gl. 1, S. 228:

$$b = 2\sqrt{(h - z)z}.$$

Fig. 259.



Hierin sind z und $h - z$ vertauschbar. Eine Öffnung in der Tiefe $z = {}^1/_4 h$ giebt also dieselbe Sprungweite wie eine solche in $z = {}^3/_4 h$. Seinen grössten Werth erreicht aber b für $z = {}^1/_2 h$. Denn $(h - z)z$ ist der Inhalt eines Rechtecks vom Umfange $2h$. Ein Rechteck von gegebenem Umfange hat aber als Quadrat (von der Seite ${}^1/_2 h$) den grössten Inhalt, nämlich ${}^1/_4 h^2$, mithin ergiebt $z = {}^1/_2 h$, $b_{max} = h$. Es entsteht dann die Wurfparabel grösster Wurfweite (1. Theil, S. 51), welche den Boden unter 45° schneidet.

Rechteckige Öffnung. Mit unveränderlichem $x = b$ wird Gl. 1, S. 234:

$$3) \qquad Q = b\sqrt{2g}\int_h^H z^{1/2}\,dz = {}^2/_3 b\sqrt{2g}\left\{H^{3/2} - h^{3/2}\right\}.$$

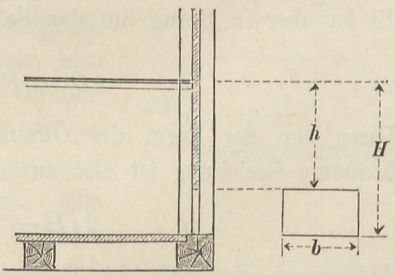
Reicht die Öffnung bis zum Wasserspiegel, so hat man einen freien Überfall, und es wird mit $h = 0$

$$4) \qquad Q = {}^2/_3 b\sqrt{2g}\,H^{3/2} = {}^2/_3 bH\sqrt{2gH}.$$

Beispiel: Für die Schützenöffnung eines Gerinnes (Fig. 260) sei $b = 1\,\text{m}$, $h = 1{,}4\,\text{m}$, $H = 2\,\text{m}$, dann ist nach Gl. 3:

$$Q = {}^2/_3 \cdot 1 \cdot 4{,}43\left\{2{,}83 - 1{,}66\right\}$$
$$= 3{,}455\ \text{cbm/s}.$$

Fig. 260.



Es ist in diesem Falle $2(H - h) = 1{,}2\,\text{m}$, $z_0 = 1{,}7\,\text{m}$, und die Annäherungsformel Gl. 2, S. 235 liefert:

$$Q = 0{,}6 \cdot 4{,}43 \cdot \sqrt{1{,}7} = 3{,}466\ \text{cbm/s}.$$

der Unterschied beider Rechnungen ist nur unerheblich.

Sogar beim freien Überfalle, wo die Anwendung der Gl. 2 gar keine Berechtigung mehr hat, liefert letztere

$Q = b H \sqrt{2g \cdot 0{,}5 H} = 0{,}707\, b H \sqrt{2gH}$, während Gleichung 4 ergiebt:

$$0{,}667\, b H \sqrt{2gH}.$$

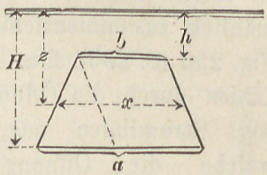
Also auch in diesem äussersten Falle beträgt der Unterschied nur 6 %.

Trapezförmige Öffnung. Nach Fig. 261 ist

$$\frac{x - b}{a - b} = \frac{z - h}{H - h}, \quad \text{oder}$$

$$x = b + \frac{a - b}{H - h}(z - h),$$

Fig. 261.



daher nach Gl. 1, S. 234

$$Q = \sqrt{2g} \int_h^H \left\{ b + \frac{a - b}{H - h}(z - h) \right\} z^{1/2}\, dz$$

$$= \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} \frac{bH - ah}{H - h}(H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{2}{5} \frac{a - b}{H - h}(H^{5/2} - h^{5/2}) \right\} \text{ oder}$$

$$5) \quad Q = \frac{2\sqrt{2g}}{H - h} \left\{ \frac{bH - ah}{3}(H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{a - b}{5}(H^{5/2} - h^{5/2}) \right\}.$$

Diese Formel ist so verwickelt, dass man meist Gl. 2, S. 235 vorziehen wird.

e) Wirkliche Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge.

Geschwindigkeits-Ziffer (Geschwindigkeits-Koëfficient). Die bisherigen Formeln wurden entwickelt unter der Annahme reibungsloser Flüssigkeit. Für eine kleine Öffnung ergab sich

$$w = \sqrt{2gh}.$$

Die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit ist wegen der Reibungswiderstände, die im Gefäss auftreten, kleiner und wird erhalten, indem man den ideellen Werth noch mit einer Berichtigungsziffer φ multiplicirt. Dann ist in Wirklichkeit

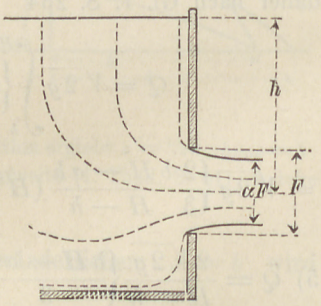
$$1) \qquad w = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Die Geschwindigkeitsziffer φ weicht nur wenig von der Einheit ab, beträgt bei kleiner Druckhöhe $\varphi = 0{,}96$, wächst aber nach Versuchen von Weisbach (Freiberg i. S.) mit zunehmender Druckhöhe bis auf 0,99 an. Wir werden in den weiteren Beispielen stets mit

2) $\varphi = 0{,}96$ rechnen.

Einschnürung (Kontraktion). **Ausflussziffer** (Ausflusskoëfficient). In einem Gefässe, welches sich nach der Ausflussöffnung hin allmählich zusammenzieht, wie Fig. 252 (S. 229), Fig. 254 (S. 232), Fig. 256 (S. 233), fliessen die einzelnen Wassertheilchen in parallelen Linien durch die Öffnung und bilden sog. Stromlinien oder Wasserfäden, welche die Öffnung rechtwinklig schneiden, so dass die sekundliche Ausflussmenge $Q = F \cdot w$ als ein Prisma vom Querschnitte F angesehen werden kann. Befindet sich aber die Öffnung in einer ebenen Wand (Fig. 262), so fliessen die Wassertheilchen in ganz verschiedenen Richtungen der Öffnung zu, wie in der Figur durch Stromlinien angedeutet ist. Diejenigen Theilchen, welche an der Wand entlang strömen, können ihre Bewegungsrichtung nicht plötzlich um 90^0 ändern (weil jeder Knick in der Bahnlinie eine unendliche grosse Normalbeschleunigung, d. h. unendlich grosse Kräfte erfordern würde), sondern gehen in gekrümmten Bahnlinien um die Innenkante der Öffnung herum. Erst ausserhalb des Gefässes in einer gewissen Entfernung von dem Öffnungs-Querschnitte F haben sich die Wasserfäden wieder parallel gelagert und bilden einen Strahlquerschnitt αF von der Geschwindigkeit $w = \varphi \sqrt{2gh}$, dessen sek. Wassermenge zu $Q = \alpha F w = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}$ berechnet werden kann.

Fig. 262.

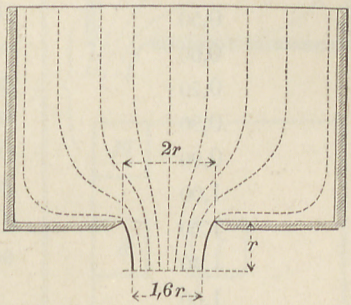


Diese Erscheinung heisst die **Einschnürung** (Kontraktion) des Strahles, und die Grösse α, mit der die Öffnung F multiplicirt werden muss, um den Querschnitt αF des zusammengezogenen Strahles zu liefern, heisst **Einschnürungs-Ziffer** (Kontraktions-Koëfficient). Da aber in der letzten Gleichung für Q das Produkt

$\alpha\varphi$ zweier Berichtigungsziffern vorkommt, so kann man dieses Produkt zu einer Grösse $\mu = \alpha\varphi$ vereinigen. Da nun die ideelle Ausflussmenge $F\sqrt{2gh}$ (S. 233) noch mit μ multiplicirt werden muss, um die wirkliche zu liefern, so nennt man μ die **Ausfluss-Ziffer** (Ausfluss-Koëfficient).

Während die Geschwindigkeitsziffer nur wenig schwankt, auch nur wenig von der Einheit abweicht, ist die Einschnürungsziffer α und somit auch die Ausflussziffer $\mu = \alpha\varphi$ von vielen Umständen abhängig, z. B. auch von der Dicke und Beschaffenheit der Wandung, in welche die Öffnung eingeschnitten ist. Bestimmte Erscheinungen treten auf, wenn die Öffnung sich in dünner Wand befindet, oder wenn der Einfluss des Öffnungsrandes durch Zuschärfung nach Fig. 263 nahezu beseitigt ist. Befindet sich dann ausserdem die Öffnung verhältnismässig weit von anschliessenden Wänden entfernt, so kann man für diesen Grundfall der Einschnürung ziemlich bestimmt

Fig. 263.



$$\alpha = 0{,}64 \text{ und } \mu = 0{,}96 \cdot 0{,}64 = 0{,}61$$

setzen. Ist die Öffnung ein Kreis vom Halbmesser r, so erfolgt eine Einschnürung auf $0{,}8\,r$, u. zw. befindet sich dieselbe im Abstande r von der Mündung.

Über die **Ausflussziffern für rechteckige Seitenöffnungen** in dünner Wand haben die französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros 1828—1834 Versuche angestellt. Dabei wurde die Höhe des Wasserspiegels in einer solchen Entfernung von der Wand gemessen, wo der Spiegel noch wagerecht war, während er nach der Wand hin sich etwas senkte. Es kommt dabei wesentlich auf die Grösse der kleinsten Seite b der Öffnung an, gleichgültig, ob dieselbe lothrecht oder wagerecht gerichtet ist. Einige Ergebnisse der Versuche enthält folgende Tabelle.

Ausflussziffer μ für rechtwinklige Seitenöffnungen in dünner Wand.

Höhe h des Wasserspiegels über der Oberkante der Öffnung	Kleinste Seite der Öffnung		
	0,05 m	0,1 m	0,2 m
0,10	0,631	0,615	0,600
0,15	0,631	0,616	0,600
0,20	0,630	0,617	0,601
0,30	0,630	0,618	0,602
0,40	0,629	0,618	0,603
0,50	0,628	0,617	0,604
0,60	0,628	0,617	0,604
0,70	0,627	0,617	0,605
0,80	0,627	0,616	0,605
0,90	0,626	0,616	0,605
1,00	0,626	0,615	0,605
1,20	0,624	0,614	0,604
1,40	0,621	0,612	0,603
1,60	0,618	0,611	0,602
1,80	0,615	0,609	0,602
2,00	0,613	0,607	0,601
3,00	0,606	0,603	0,601

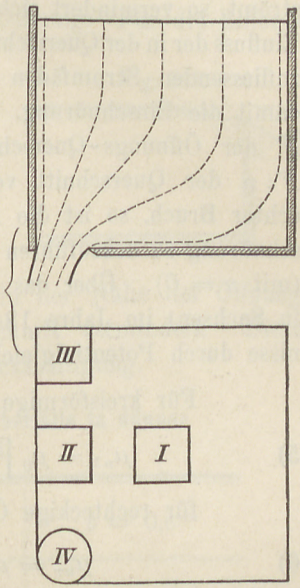
Mit diesen Ziffern ist $\frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left\{ H^{3/2} - h^{3/2} \right\}$ (Gl. 3, S. 236) zu multipliciren. Ausführlichere Angaben findet man in Rühlmann's Hydromechanik.

Schützenöffnungen. Befindet sich die Öffnung nicht in dünner Wand, wird sie vielmehr, wie bei Schützen, durch rechtwinklig zugeschnittene Bretter gebildet, so kann man, wenn die Unterkante der Öffnung hoch über der Sohle liegt, $\mu = 0{,}6$, wenn sie mit dieser in gleicher Höhe liegt (Fig. 260), $\mu = 0{,}68$ im Mittel setzen. Für das Beispiel auf S. 236 würde also mit $\mu = 0{,}68$ die wirkliche sekundl. Ausflussmenge werden $Q = 0{,}68 \cdot 3{,}455 = 2{,}35$ cbm.

Unvollständige Einschnürung (partielle Kontraktion) findet statt, wenn die Öffnung an einem Theil ihres Umfanges von Wänden eingeschlossen wird, so dass an diesen Stellen ein seitliches Zuströmen von Wasserfäden nicht vorkommt, also die Ursache

der Einschnürung theilweise fortfällt. Der Strahl bekommt in Folge dieser Ungleichmässigkeit eine abweichende Richtung, und die Ausflussmenge, also auch die Ausflussziffer wird grösser. In Figur 264 findet der Zufluss in der Querrichtung von der rechten Seite statt, nicht aber von der linken Seite. Ist u der ganze Umfang der Öffnung, $m \cdot u$ der Theil des Umfanges, an welchem die Öffnung eingefasst ist, so ist nach Versuchen von Bidone (1831) und Weisbach die für solche Fälle anzuwendende Ausflussziffer μ_p von der Grösse m abhängig. Ist μ_0 die Ausflussziffer unter sonst gleichen Verhältnissen für den Grundfall (dass die Wände nach allen Richtungen weit genug entfernt sind), d. h. für eine Öffnung I im Grundrisse (Fig. 264), so gilt

Fig. 264.



für rechteckige Öffnungen

3) $$\mu_{pr} = \mu_0 (1 + 0{,}155\, m),$$

für kreisförmige Öffnungen

4) $$\mu_{pk} = \mu_0 (1 + 0{,}128\, m).$$

Für die Öffnung II würde $m = 1/4$, daher

$$\mu_p = 1{,}039\, \mu_0;$$

für die Öffnung III mit $m = 1/2$

$$\mu_p = 1{,}078\, \mu_0;$$

für die Öffnung IV mit $m = 1/4$

$$\mu_p = 1{,}032\, \mu_0.$$

Unvollkommene Einschnürung. Auch wenn die Wandungen nicht ganz an den Rand der Öffnung herantreten, sondern sich von allen Seiten der Öffnung nur nähern, kann eine Verminderung der Einschnürung entstehen. Für den Grundfall war vorausgesetzt, dass die Öffnung von allen Wänden verhältnismässig weit entfernt sei, so dass binnenseits der Öffnung sich ein grosser Querschnitt,

daher eine geringe Geschwindigkeit fand (Fig. 265). Verengt sich aber das Gefäss nach der Mündung hin, so dass das Wasser der Öffnung mit nicht ganz geringer Geschwindigkeit zuströmt, so vermindert sich der Einfluss der in der Querrichtung zufliessenden Stromfäden und damit die Einschnürung. Ist F der Öffnungs-Querschnitt, $F : n$ der Querschnitt vor der Öffnung (Fig. 266), worin n ein echter Bruch, so ist die Ausflussziffer μ_u bei unvollkommener Einschnürung zurückzuführen auf μ_0 in dem entsprechenden Grundfalle (mit $n = 0$). Über das Verhältnis $\mu_u : \mu_0$ hat Weisbach (Freiberg in Sachsen) im Jahre 1842 Versuche angestellt und deren Ergebnisse durch Potentialgleichungen dargestellt.

Fig. 265.

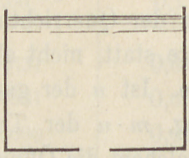
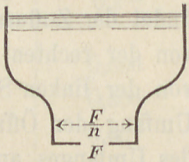


Fig. 266.



Für kreisförmige Öffnung ist nach Weisbach

5) $$\mu_{uk} = \mu_0 \left[1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)\right],$$

für rechteckige Öffnung

6) $$\mu_{ur} = \mu_0 \left[1 + 0{,}076\,(9^n - 1)\right].$$

Dafür kann man annähernd setzen

bei kreisförmiger Öffnung

7) $$\mu_{uk} = \mu_0\,(1 + 0{,}126n + 0{,}06n^2 + 0{,}427n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$n =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\mu_{uk}}{\mu_0} =$	1,014	1,031	1,055	1,087	1,131	1,189	1,264	1,358	1,473	1,613;

bei rechteckiger Öffnung

8) $$\mu_{ur} = \mu_0\,(1 + 0{,}175n + 0{,}06n^2 + 0{,}373n^3)$$

mit den Ergebnissen:

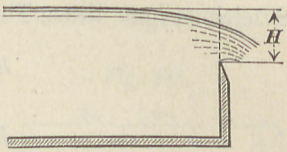
$n =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\mu_{ur}}{\mu_0} =$	1,019	1,040	1,068	1,104	1,149	1,207	1,279	1,369	1,478	1,608.

Ausflussziffer μ für rechteckige Überfälle. Aus Gl. 4, S. 236 wird

9) $$Q = {}^2/_3 \mu b H \sqrt{2gH}.$$

Darin bedeutet b die Breite des Überfalles, H die Höhe des Wasserspiegels über der Unterkante der Öffnung. Für die Ziffer μ gilt nach Versuchen der französischen Artillerie-Offiziere Poncelet und Lesbros folgende Tabelle, wobei zu bemerken ist, dass die Öffnung sich in dünner lothrechter Wand befand und dass die Höhe H in mindestens 1 m Abstand von der Öffnung gemessen wurde. Der Spiegel senkt sich nämlich (Fig. 267) in der Nähe der Öffnung; in Folge dessen wird der Strahlquerschnitt vermindert. Dieser Einfluss findet in der Zahl μ seine Berücksichtigung.

Fig. 267.



Ausflussziffer μ für rechteckige Überfälle in dünner lothrechter Wand.

H	$b = 0{,}2$ m	$b = 0{,}6$ m
0,02 m	0,626	
0,04	0,611	
0,06	0,602	0,618
0,08	0,596	
0,10	0,593	0,606
0,15	0,590	0,600
0,20	0,585	0,593
0,30		0,587
0,40		0,587
0,50		0,587
0,60		0,585

d) Widerstandshöhen und Widerstandsziffern.

Auf S. 237 wurde die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit $w = \varphi \sqrt{2gh}$ aus der ideellen $= \sqrt{2gh}$ abgeleitet durch Multiplikation der letzteren mit einer Geschwindigkeitsziffer $\varphi < 1$.

Mit Rücksicht darauf aber, dass bei der ideellen Ausflussbewegung die wirksame Druckhöhe h sich einfach in eine gleiche Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$ umsetzte, kann man die Beziehung zwischen den beiden Geschwindigkeiten auch so auffassen, als ob ein gewisser Theil der wirksamen Druckhöhe h durch Reibung aufgezehrt und für die Erzeugung von Geschwindigkeit unbrauchbar gemacht würde. Bezeichnet man diesen Theil der wirksamen Druckhöhe mit z_0, so muss

$$h - z_0 = \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$h = \frac{w^2}{2g} + z_0 \quad \text{sein.}$$

Da nun der Erfahrung zufolge

$$w = \varphi \sqrt{2gh}, \quad \text{also } h = \frac{1}{\varphi^2} \frac{w^2}{2g} \text{ ist, so wird}$$

$$z_0 = \frac{w^2}{2g} \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1 \right).$$

Man setzt nun

1) $$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = \zeta_0$$

und bezeichnet ζ_0 als **Widerstandsziffer für die Reibung im Gefässe.** Mit $\varphi = 0{,}96$ wird

2) $$\zeta_0 = 0{,}085.$$

Der durch Reibung verursachte Druckhöhen-Verlust

3) $$z_0 = \zeta_0 \frac{w^2}{2g}$$

heisst die **Widerstandshöhe in Folge der Reibung im Gefässe.** Mit Benutzung dieser Hülfsgrösse kann man nun schreiben

$$h = \frac{w^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g},$$

indem man die gesammte wirksame Druckhöhe h zerlegt in denjenigen Theil $\frac{w^2}{2g}$, der zur Erzeugung der Geschwindigkeit w zur Verwerthung kommt, und die Widerstandshöhe der Gefässreibung. Daraus wird dann

4) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0}},$$

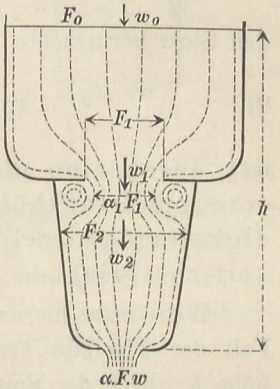
was mit $w = \varphi \sqrt{2gh}$ gleichbedeutend ist.

Die Benutzung der Widerstandshöhen wird besonders nützlich, wenn man mit einer verwickelteren Wasserbewegung zu thun hat, bei der verschiedene Druckhöhenverluste in Frage kommen.

e) Druckhöhenverlust in Folge plötzlicher Querschnittsänderung.

α) **Plötzliche Erweiterung.** In einem Gefässe sei (Fig. 268) im Wasserspiegel der Querschnitt F_0. die Geschwindigkeit w_0; in einer Zwischenwand befinde sich eine Öffnung F_1, unterhalb derselben finde eine Einschnürung auf $\alpha_1 F_1$ mit einer Geschwindigkeit w_1 statt, dann folge eine plötzliche Erweiterung des Gefässes auf F_2 mit einer (kleineren) Geschwindigkeit w_2; die Ausflussöffnung habe die Grösse F, der unterhalb derselben eingeschnürte Strahl den Querschnitt αF mit der Geschwindigkeit w. An den Seiten des eingeschnürten Strahles $\alpha_1 F_1$ im Innern befindet sich Wasser, welches nur Wirbelbewegungen ausführt, an der regelmässig strömenden Bewegung aber nicht theilnimmt. Da während einer Zeiteinheit durch alle Querschnitte die gleiche Wassermenge hindurchströmt, so muss

Fig. 268.



$$1) \qquad F_0 w_0 = \alpha_1 F_1 w_1 = F_2 w_2 = \alpha F w$$

sein und da $\alpha_1 F_1 < F_2$, so muss $w_1 > w_2$ sein. Es trifft somit unterhalb der Zwischenwand das mit der Geschwindigkeit w_1 strömende Wasser auf eine mit geringerer Geschwindigkeit w_2 vorausgehende Wassermasse, womit ein Verlust an Arbeitsvermögen durch Stoss verbunden ist.

In der Hauptgleichung I, S. 231, war mg das während eines Zeittheilchens dt durch irgend einen (d. h. jeden) Querschnitt strömende Wassergewicht, mgh die während derselben Zeit von dem Gewichte der gesammten im Gefässe befindlichen Wassermasse verrichtete Arbeit. Im Anschluss an die betreffende Entwickelung (S. 230) soll nun der während der Zeit dt durch Stoss erfolgende Verlust an Arbeitsvermögen berechnet werden. Man stellt sich die

Sache so vor, als ob die Masse m mit der Geschwindigkeit w_1 auf eine mit der Geschwindigkeit w_2 vorausgehende Masse M_2 stiesse; da nun Wasser nahezu unzusammendrückbar ist, so beträgt der Verlust an Arbeitsvermögen während der Zeit dt nach Gl. 11, S. 130 mit $k = 0$

$$\frac{m \cdot M_2}{m + M_2} \frac{(w_1 - w_2)^2}{2},$$

was mit Rücksicht darauf, das m gegen M_2 unendlich klein ist, in $m \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}$ übergeht; setzt man dies $= mgz_1$, so ist z_1 der durch den Stoss verursachte Druckhöhenverlust, u. zw.

2) $$z_1 = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}, \quad \text{d, h.}$$

der durch eine plötzliche Querschnittsvergrösserung erzeugte Druckhöhenverlust ist gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der relativen Stossgeschwindigkeit entspricht.

Will man hiernach die Ausflussgeschwindigkeit w für den Fall der Fig. 268 berechnen, so setzt man die wirksame Druckhöhe h gleich der Summe der einzelnen Theile, in welche sie sich zerlegt. Will man die Geschwindigkeit w_0 im Wasserspiegel auch berücksichtigen, so ist $\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$ der zur Erzeugung von Geschwindigkeit verwerthete Theil; $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$ wird durch Reibung, $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$ durch Stoss aufgezehrt. Also ist

3) $$h = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}.$$

Nach Gl. 1 ist nun $w_0 = w \frac{\alpha F}{F_0}$, $w_1 = w \frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}$, $w_2 = w \frac{\alpha F}{F_2}$,

mithin $h = \frac{w^2}{2g}\left\{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2\right\}$, oder

4) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2}}.$$

Befinden sich die Öffnungen F_1 und F in dünner Wand, so darf man meist $\alpha = \alpha_1 = 0{,}64$ setzen.

Fig. 269.

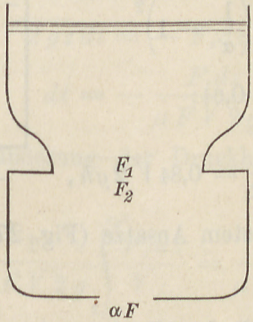
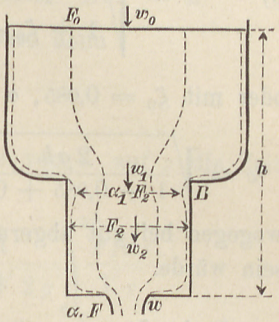


Fig. 270.



In dem Falle der Fig. 269 wäre $\alpha_1 = 1$, $\alpha = 0{,}64$ zu setzen. Würde auch die Öffnung F durch allmähliche Verengung wie in Fig. 252 gebildet, so hätte man auch $\alpha = 1$ zu setzen.

β) **Plötzliche Verengung** würde einen Stossverlust nicht erzeugen, wenn nicht dicht unter der Verengung eine Einschnürung und sogleich daneben wieder eine Ausdehnung des Strahles auf den vollen Gefässquerschnitt erfolgte. An der Verengung auf F_2 bei B (Fig. 270) ist der Strahlquerschnitt $\alpha_1 F_2$, die Geschwindigkeit w_1, unmittelbar darunter F_2 bezw. w_2, daher der Stossverlust

$$\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2,$$

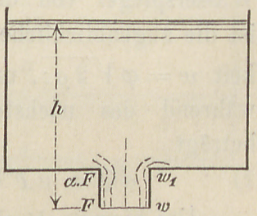
weil $\alpha_1 w_1 = w_2$. Sonach wird

5) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \frac{\alpha^2 F^2}{F_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2}}.$$

Mit $\alpha_1 = 0{,}64$ wird

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 = 0{,}32.$$

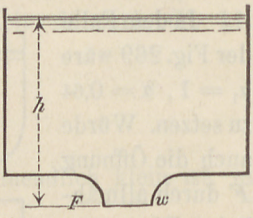
Fig. 271.



Schliesst sich an ein Gefäss unten ein kurzes cylindrisches Ansatzrohr (Fig. 271) ohne Abrundung oder Abschrägung beim Anschlusse, so entsteht beim Eintritt in das Rohr eine Einschnürung auf αF mit sogleich folgender

Ausweitung auf den Querschnitt F; somit wird, wenn F_0 sehr gross gegen F:

Fig. 272.



6) $$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$$

oder mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha = 0{,}64$:

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}085 + 0{,}32}} = 0{,}84\sqrt{2gh},$$

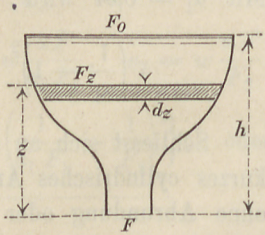
wogegen bei gut abgerundetem Ansatze (Fig. 272) $w = 0{,}96\sqrt{2gh}$ sein würde.

f) Ausfluss aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe.

Die Formel $w = \varphi\sqrt{2gh}$ gilt unter der Voraussetzung, dass die Bodenöffnung klein ist und dass genügender Zufluss erfolgt, um die Druckhöhe unveränderlich zu erhalten, sowie unter der Annahme, dass der Beharrungszustand bereits eingetreten sei. Findet der Zufluss nun nicht in richtiger Menge oder gar nicht statt, so ändert sich die Höhenlage des Wasserspiegels und damit die Druckhöhe. Annäherungsweise verwendet man für die nun veränderliche Ausflussgeschwindigkeit w dieselbe Gleichung wie für den Beharrungszustand, indem man mit veränderlicher Druckhöhe z einfach $w = \varphi\sqrt{2gz}$ setzt.

α) **Allmähliche Entleerung ohne Zufluss.** Zu Anfang, zur Zeit $t = 0$, sei F_0 der Wasserspiegel in der Höhe h über der Öffnung (Fig. 273); nach t Zeiteinheiten sei die Druckhöhe auf z vermindert, der Wasserspiegel von der Grösse F_z; dann ist die augenblickliche Ausflussgeschwindigkeit $w = \varphi\sqrt{2gz}$, und die Ausflussmenge während des nächsten Zeittheilchens dt beträgt

Fig. 273.



1) $$dQ = \mu F\sqrt{2gz}\cdot dt.$$

Um hieraus dt als Differentialfunktion von z finden zu können, bedenke man, dass in dem Zeittheilchen dt

der Wasserspiegel um dz sinkt, dass dieses dz aber mit negativem Zeichen zu schreiben ist, weil z mit wachsendem t abnimmt. Der sinkende Wasserspiegel beschreibt in der Zeit dt den Raum $-F_z \cdot dz$, und diese Grösse muss $= dQ$ sein. Aus

2) $$\mu F\sqrt{2gz}\,dt = -F_z dz \quad \text{wird dann}$$

3) $$dt = -\frac{F_z dz}{\mu F\sqrt{2gz}}.$$

Daher ist zur Veränderung der Druckhöhe von h auf z die Zeit erforderlich

4) $$t = -\frac{1}{\mu F\sqrt{2g}}\int_h^z \frac{F_z dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu F\sqrt{2g}}\int_z^h \frac{F_z dz}{\sqrt{z}},$$

weil den Zeitwerthen $t = 0$ und $t = t$ bezw. die Werthe $z = h$ und $z = z$ entsprechen.

Entleerung eines prismatischen Gefässes (Fig. 274). Mit $F_z = F_0$ wird

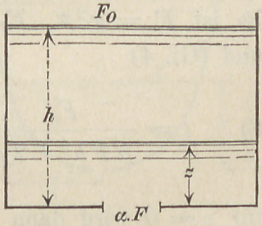
5) $$t = \frac{F_0}{\mu F\sqrt{2g}}\int_z^h z^{-1/2} dz = \frac{2F_0}{\mu F\sqrt{2g}}(\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

Für völlige Entleerung wird mit $z = 0$

6) $$t = \frac{2F_0\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}.$$

Multiplicirt man nun in Zähler und Nenner mit $\sqrt{h}$, so kann man im Zähler den ursprünglichen Gefässinhalt $V = F_0 h$, im Nenner die dem anfänglichen Zustand entsprechende sekundliche Ausflussmenge $Q_0 = \mu F\sqrt{2gh}$ einführen und erhält

Fig. 274.



7) $$t = 2\frac{V}{Q_0}.$$

Behielte die Druckhöhe den ursprünglichen Werth h, so würde der Ausfluss einer dem Gefässinhalte V gleichen Wassermenge die Zeit $V : Q_0$ erfordern; wegen der kleiner werdenden Druckhöhe erfordert die Entleerung das Doppelte jener Zeit.

Wasseruhr mit cylindrischem Gefässe. Ein Cylinder von $0{,}391^{\text{m}}$ Weite und 1^{m} Höhe habe im Boden eine kreisförmige Öffnung von $0{,}002^{\text{m}}$ Durchmesser mit gut abgerundetem kurzen Mundstücke, so dass $\alpha = 1$ und $\mu = \alpha\varphi = 0{,}96$ gesetzt werden kann. Die allmähliche Senkung des Wasserspiegels soll zur Zeitmessung benutzt werden. Gl. 5 wird in diesem Falle

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}391^2}{0{,}96 \cdot 0{,}002^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) = 18000 (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

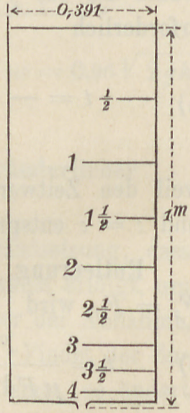
Ist die ursprüngliche Höhe des Wasserspiegels über der Mündung $h = 1^{\text{m}}$, so wird für eine beliebige Zeit t

$$\sqrt{z} = 1 - \frac{t}{18000}.$$

Hiernach kann man für Werthe von t, die je um $1/2$ Stunde abnehmen, leicht z berechnen.

$t =$	$1/2$ Stunde $= 1800$ s.	giebt	$z = 0{,}81^{\text{m}}$
$t = 1$	„ $= 3600$ s.	„	$z = 0{,}64$
$t = 1\,1/2$	„		$z = 0{,}49$
$t = 2$	„		$z = 0{,}36$
$t = 2\,1/2$	„		$z = 0{,}25$
$t = 3$	„		$z = 0{,}16$
$t = 3\,1/2$	„		$z = 0{,}09$
$t = 4$	„		$z = 0{,}04$

Fig. 275.



Für die letzten Theile der Entleerung trifft übrigens Gl. 5 nicht mehr zu, hat nur ideellen Werth, weil sich zuletzt um die Öffnung ein Strudel und in der Mitte der Öffnung ein von Wasser nicht erfüllter Trichter bildet, so dass der Ausfluss verlangsamt wird.

Entleerung eines trichterförmigen Gefässes. Das untere Ende des kegelförmigen Gefässes (Fig. 276) sei zu einer Öffnung erweitert, die in der Höhe der geometrischen Spitze des Kegels liegt. Es ist $F_z = x^2\pi$, $F_0 = r^2\pi$, $x : r = z : h$, also $F_z = F_0 \cdot z^2 : h^2$ und (Gl. 4)

$$8) \qquad t = \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} \int_z^h z^{3/2} dz = \frac{2}{5} \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} (h^{5/2} - z^{5/2});$$

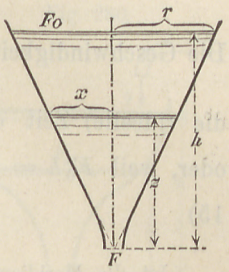
für $z = 0$ wird dann mit $V = 1/3 r^2 \pi h$ und $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$:

$$9) \qquad t = \frac{6}{5} \frac{V}{Q_0} = 1{,}2 \frac{V}{Q_0}.$$

Für die Entleerung eines halbkugelförmigen oder halbellipsoidischen (bis zum grössten Querschnitte gefüllten) Beckens findet man

10) $$t = \frac{7}{5}\frac{V}{Q_0} = 1{,}4\,\frac{V}{Q_0},$$

Fig. 276.



für die Entleerung eines paraboloidischen Gefässes

11) $$t = \frac{4}{3}\frac{V}{Q_0} = 1{,}33\,\frac{V}{Q_0}.$$

Der Zahlenfaktor auf der rechten Seite dieser Gleichungen war $= 2$ für ein prismatisches Gefäss; er ist < 2 für jedes nach unten verengte Gefäss und umgekehrt; er nähert sich um so mehr der Einheit, je schneller sich das Gefäss nach unten verengt. Beim Beginne des Ausflusses sinkt nämlich der Wasserspiegel schnell; mit abnehmender Druckhöhe und Geschwindigkeit geht aber der weitere Ausfluss langsamer von statten, u. zw. um so mehr, wenn das Gefäss unten noch verhältnismässig weit ist, so dass noch ziemlich viel Wasser bei der geringen Geschwindigkeit ausfliessen muss.

Gefässform für gleichmässige Senkung des Wasserspiegels. Die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel sinkt, ist

12) $$v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F\sqrt{2gz}}{F_z}\ \text{(Gl. 3)};$$

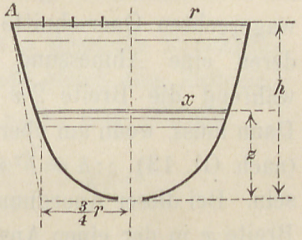
soll diese sich nicht ändern, sondern gleich dem Anfangswerthe

$$\frac{\mu F\sqrt{2gh}}{F_0} = \frac{Q_0}{F_0}$$

bleiben, so muss

13) $\sqrt{z} : \sqrt{h} = F_z : F_0$ sein.

Fig. 277.



Soll die Innenfläche des Gefässes eine Umdrehungsfläche sein, so wird mit

$F_z = x^2\pi$ und $x^2 : r^2 = \sqrt{z} : \sqrt{h}$,

14) $$x^4 : r^4 = z : h.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Meridianlinie, die man eine Parabel vierten Grades nennt. Eine bei A (Fig. 277) an die

Meridianlinie gelegte Tangente hat gegen die lothrechte Achse ein Neigungsverhältnis $^1/_4 r : h$, Der Inhalt des Gefässes ist

$$V = \pi \int_0^h x^2 dz = \frac{\pi r^2}{\sqrt{h}} \int_0^h \sqrt{z}\, dz = \frac{2}{3} F_0 h .$$

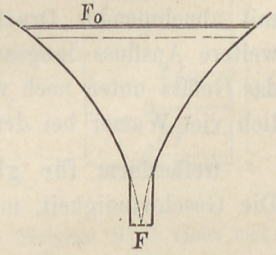
Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels beträgt $v = \frac{Q_0}{F_0}$, die (ideelle) Zeit der vollständigen Entleerung $t = h : v = \frac{F_0 h}{Q_0}$, oder, weil $F_0 h = {}^3/_2 V$:

15) $$t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0} = 1{,}5 \frac{V}{Q_0}.$$

Ist die Meridianlinie der Innenwand eines Gefässes eine Parabel $n$ten Grades mit $x^n : r^n = z : h$, so ist das Neigungsverhältnis einer bei A angelegten Tangente gegen die Achse $^1/_n r : h$, der Inhalt des Gefässes

16) $$V = \frac{F_0 h}{\frac{2}{n} + 1},$$

Fig. 278.



die (ideelle) Zeit der Entleerung

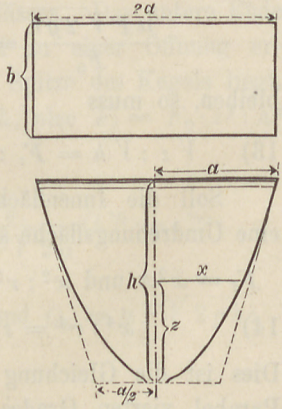
17) $$t = \frac{4 + 2n}{4 + n} \frac{V}{Q_0}.$$

$n = \frac{1}{2}$ (Fig. 278) giebt

18) $$t = \frac{10}{9} \frac{V}{Q_0} = 1{,}1 \frac{V}{Q_0}.$$

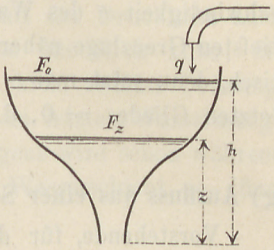
Will man ein Gefäss mit gleichförmig sinkendem Wasserspiegel als Wasseruhr benutzen und für die Anbringung der Theilung eine ebene Wand zur Verfügung haben, so kann man die Gefässform auch derartig anordnen, dass die wagerechten Querschnitte Rechtecke sind, deren eine Abmessung durchweg $= b$, während die Breite $2x$ veränderlich ist. Dann muss, wenn am oberen Rande $x = a$, (nach Gl. 13) $z : h = b^2 x^2 : b^2 a^2 = x^2 : a^2$ sein. Bei dieser Anordnung folgt die halbe Breite x in der einen Ansicht dem Gesetze einer gewöhnlichen (quadratischen) Parabel mit $V = {}^2/_3 F_0 h$ und $t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0}$.

Fig. 269.



β) Ausfluss unter veränderlicher Druckhöhe bei Zufluss von oben. Erfolgt ein Zufluss von $q^{cbm}/_{s.}$ (Fig. 280), so besteht die Ausflussmenge $dQ = \mu F\sqrt{2gz}\,dt$ während der Zeit dt aus dem der Senkung des Wasserspiegels F_z um $-dz$ entsprechenden Wasserkörper $-F_z dz$ und dem Zuflusse $q\,dt$; sonach ist statt Gl. 2, S. 249, zu setzen:

Fig. 280.



$$\mu F\sqrt{2gz}\,dt = -F_z dz + q\,dt;$$

die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels wird

19) $$v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F\sqrt{2gz} - q}{F_z},$$

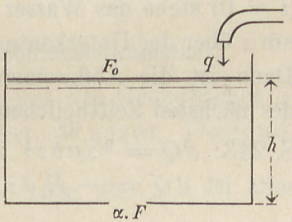
$$dt = -\frac{F_z dz}{\mu F\sqrt{2gz} - q} \quad \text{und}$$

20) $$t = -\int_h^z \frac{F_z dz}{\mu F\sqrt{2gz} - q} = \int_z^h \frac{F_z dz}{\mu F\sqrt{2gz} - q}.$$

Für ein prismatisches Gefäss mit $F_z = F_0$ (Fig. 281) wird

$$t = \frac{F_0}{\mu F\sqrt{2g}} \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{z} - \frac{q}{\mu F\sqrt{2g}}}.$$

Fig. 281.



Behufs der Integration setze man

$$\frac{q}{\mu F\sqrt{2g}} = \sqrt{a}, \quad \sqrt{z} = y,$$

dann ist wegen $q = \mu F\sqrt{2ga}$ die Grösse a diejenige Druckhöhe, bei welcher die sekundl. Ausflussmenge gerade gleich dem Zuflusse q sein würde; es ist ferner $z = y^2$, $dz = 2y\,dy$; man schreibe

$$2\int \frac{y\,dy}{y - \sqrt{a}} = 2\int \frac{y - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{y - \sqrt{a}}\,dy =$$

$$2\int dy + 2\sqrt{a}\int \frac{dy}{y - \sqrt{a}} = 2y + 2\sqrt{a}\,l(y - \sqrt{a})$$

$$= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{a}\,l(\sqrt{z} - \sqrt{a}), \quad \text{daher}$$

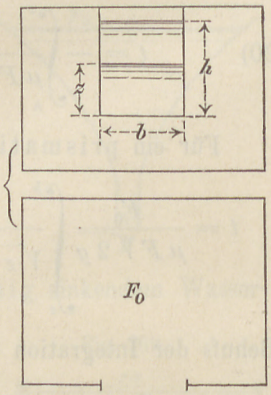
21) $$t = \frac{2F_0}{\mu F\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h} - \sqrt{z} + \sqrt{a}\,l\frac{\sqrt{h}-\sqrt{a}}{\sqrt{z}-\sqrt{a}}\right\}.$$

In diesem Fall ist wegen des Zuflusses eine völlige Entleerung unmöglich, denn für $z = a$, d. h. $\mu F\sqrt{2gz} = q$ würde nach Gl. 19 die Geschwindigkeit v des Wasserspiegels Null. Der hierdurch bedingten tiefsten Grenzlage nähert sich aber der Wasserspiegel nur asymptotisch, denn setzt man $z = a$ in Gl. 21 ein, so wird der Nenner des letzten Gliedes $= 0$, d. h. $t = \infty$.

g) Ausfluss aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe.

Vorstehende, für den Ausfluss aus Bodenöffnungen entwickelte Gleichungen für theilweise Entleerung gelten annähernd auch für den Ausfluss aus niedrigen Seitenöffnungen, solange der Wasserspiegel oberhalb der Öffnung verbleibt.

Fig. 282.



Wir betrachten nun einen rechteckigen Kasten (Fig. 282) von der Grundfläche F_0 der sich, ohne Zufluss zu erhalten, durch einen rechteckigen Ausschnitt einer Seitenwand entleeren möge. Zu Anfang ($t = 0$) stehe das Wasser um h, zur Zeit t um z über der Unterkante des Ausschnittes. Dann ist die Abflussmenge dQ während des nächsten Zeittheilchens dt nach Gl. 9, S. 243: $dQ = {}^2/_3\mu bz\sqrt{2gz}\,dt$; andererseits ist $dQ = -F_0\,dz$, somit

$$dt = -\frac{3}{2}\frac{F_0}{\mu b\sqrt{2g}}\frac{dz}{z\sqrt{z}} \quad \text{und}$$

$$t = -\frac{3}{2}\frac{F_0}{\mu b\sqrt{2g}}\int_h^z \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{3F_0}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

$z = 0$ verlangt $t = \infty$. Hiernach ist also eine Entleerung bis zur Unterkante des Einschnittes in endlicher Zeit nicht möglich, der Wasserspiegel nähert sich nur asymptotisch der Unterkante. Beim Ausflusse durch eine Bodenöffnung ergab sich für völlige Entleerung

ein endlicher Zeitwerth. Der Grund der Verschiedenheit beider Fälle ist folgender: Bei einer Bodenöffnung ist gegen das Ende des Ausflusses die Druckhöhe unendlich klein, die Öffnung endlich, die sekundl. Ausflussmenge unendlich klein; daher kann die unendlich kleine noch vorhandene Wassermenge in endlicher Zeit ausfliessen. Bei der Seitenöffnung aber wird mit der Druckhöhe auch der Querschnitt des ausfliessenden Strahles unendlich klein, die sekundliche Ausflussmenge daher unendlich klein zweiter Ordnung, so dass zum Ausfliessen der unendlich kleinen letzten Wassermenge eine unendlich grosse Zeit nöthig ist. Übrigens wird schon während einer endlichen Zeit die noch vorhandene Wasserschicht so dünn, dass sie thatsächlich nicht mehr fliesst.

Beispiel: Es sei die Grundfläche des Gefässes $F_0 = 3$ qm, die Breite des Einschnittes $b = 0{,}1$ m, die ursprüngliche Wasserhöhe $h = 1$ m, $\mu = 0{,}6$. Dann wird

$$t = \frac{3 \cdot 3}{0{,}6 \cdot 0{,}1 \cdot 4{,}43}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1\right) = 33{,}9\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1\right).$$

Für $z = \frac{1}{4}$ m ist $t = 33{,}9$ s.;

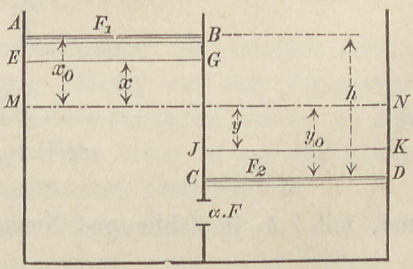
für $z = 0{,}01$ m ist $t = 9 \cdot 33{,}9 = 305{,}1$ s.;

für $z = 0{,}0001$ m ist $t = 99 \cdot 33{,}9 = 3356$ s..

h) Ausgleichung des Wassers in Schleusenkammern.

Sind 2 Schleusenkammern (Fig. 283) mit den Grundflächen F_1 und F_2 durch eine beiderseits unter Wasser liegende Schützenöffnung F verbunden, so wird, wenn die Wasserstände AB und CD der Kammern zu Anfang einen Höhenunterschied h hatten, nach einer gewissen Zeit in beiden Kammern sich ein Ausgleichswasserspiegel MN bilden, der von den ursprünglichen Wasserspiegeln um x_0 bezw. y_0 absteht. Nach t Sekunden seien die beiden Wasserspiegel EG und JK um x bezw. y vom Ausgleich entfernt; dann ist im

Fig. 283.



Zeitpunkte t die wirksame Druckhöhe $x + y$, daher die Durchflussgeschwindigkeit der Schützenöffnung

$$w = \varphi \sqrt{2g(x + y)}$$

und die Durchflussmenge während der Zeit dt:

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2g(x + y)}.$$

Nun ist offenbar

$$F_1 x = F_2 y \quad \text{und} \quad F_1 x_0 = F_2 y_0,$$

1) $$x + y = y\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right); \quad h = x_0 + y_0 = y_0\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right);$$

ferner, weil in der Zeit dt die Tiefe sich um $-dy$ ändert,

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2gy\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right)} = -F_2 dy; \quad \text{mithin}$$

2) $$dt = \frac{-F_2 dy}{\mu F \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1} \sqrt{y}}.$$

Für $t = 0$ ist $y = y_0$; für $t = t_1$ ist $y = 0$, wenn t_1 die Zeit bis zur Ausgleichung bedeutet. Also

$$t_1 = \frac{F_2}{\mu F \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}} \int_0^{y_0} y^{-1/2} dy = \frac{2 F_2 \sqrt{y_0}}{\mu F \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}}$$

oder wegen $$y_0 = \frac{h}{\frac{F_2}{F_1} + 1}:$$

4) $$t_1 = \frac{2 F_2 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right)}$$

und, mit $\sqrt{h}$ in Zähler und Nenner multiplicirt:

5) $$t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh}\left(\frac{F_2}{F_1} + 1\right)}.$$

Multiplicirt man in Zähler und Nenner mit $F_1 : F_2$, so kann man auch schreiben:

6) $$t_1 = \frac{2 F_1 h}{\mu F \sqrt{2gh}\left(1 + \frac{F_1}{F_2}\right)}.$$

Die ganze überströmende Wassermenge beträgt

$$V = F_2 y_0 = \frac{F_2 h}{\frac{F_2}{F_1} + 1},$$

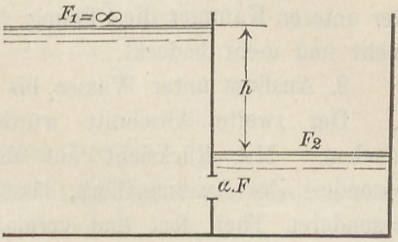
und da die sekundl. Durchflussmenge zu Anfang

$$Q_0 = \mu F \sqrt{2gh},$$

so ist, wie Gl. 7, S. 249:

7) $$t_1 = 2\frac{V}{Q_0}.$$

Fig. 284.



Füllt sich die Schleusenkammer aus einem ausgedehnten Oberwasser für welches $F_1 = \infty$ zu setzen ist (Fig. 284), so wird $V = F_2 h$ und

8) $$t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh}}.$$

Ähnliches gilt bei der Entleerung einer Schleusenkammer in ein ausgedehntes Unterwasser.

Beispiel: Es sei (Fig. 283) $F_1 = F_2 = 400$ qm; $F = 0{,}5$ qm, $h = 2$ m; μ kann im Mittel $= 0{,}6$ gesetzt werden. Dann ist $y_0 = {}^1/_2 h = 1$ m, also $V = 400$ cbm; $Q_0 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 1{,}88$, und nach Gl. 7:

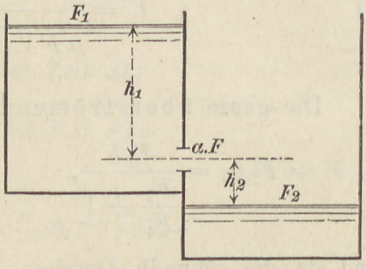
$$t_1 = 426 \text{ s.} = 7{,}1 \text{ min.}.$$

Ist nur eine einzelne Schleusenkammer von derselben Grösse vorhanden, so wird die Zeit einer Füllung aus dem Oberwasser doppelt so gross sein, wie die oben berechnete Zeit, ebenso die Zeit der Entleerung. Die Berechnung dieser Zeiten ist von Bedeutung für die Beurtheilung der Leistungsfähigkeit eines Kanales.

Ausgleichungszeit des Wasserstandes in den Kammern gekuppelter Schleusen, wenn die Öffnung zu Anfang nicht beiderseitig unter Wasser liegt (Fig. 285). Der Schwerpunkt der Öffnung F liege anfangs um h_1

unter dem Oberwasser, um h_2 über dem Unterwasser. Dann sind drei Abschnitte des Durchflusses zu unterscheiden:

Fig. 285.



1. Ausfluss ins Freie durch die niedrige Seitenöffnung, bis das Wasser der unteren Kammer die Unterkante der Öffnung erreicht.

2. Ausfluss, theils frei, theils unter Wasser, während das Wasser der unteren Kammer die Öffnung mehr und mehr bedeckt.

3. Ausfluss unter Wasser bis zur Ausgleichung.

Der zweite Abschnitt würde die Berechnung umständlich machen. Mit Rücksicht auf die Unsicherheit dieser Formeln, besonders der Ausflussziffern, lässt man daher diesen Abschnitt als besonderen Theil fort und vereinigt ihn mit den anderen beiden, indem man den ersten mit Ausfluss ins Freie bis zu dem Augenblicke rechnet, wo das Wasser der unteren Kammer den Schwerpunkt der Öffnung erreicht, den übrigen Theil des Durchflusses als Ausfluss unter Wasser behandelt.

Während das Wasser der unteren Kammer um h_2 steigt, muss dasjenige der oberen Kammer um $h_2 F_2 : F_1$ sinken. Es erfolgt also während des freien Ausflusses aus der als niedrig vorausgesetzen Öffnung eine Verminderung der Druckhöhe von h_1 auf $h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}$, wozu nach Gl. 5, S. 249 eine Zeit

$$t_1 = \frac{2 F_1}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}} \right)$$

erforderlich ist. Für die nun beginnende Ausgleichung durch eine Öffnung unter Wasser gilt Gl. 6, S. 257, wenn darin h durch den jetzt bestehenden Höhenunterschied $h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}$ ersetzt wird. Die entsprechende Zeit ist also

$$t_2 = \frac{2 F_1 \sqrt{h_1 - h_2 \frac{F_2}{F_1}}}{\mu F \sqrt{2g} \left(\frac{F_1}{F_2} + 1 \right)}.$$

Die Gesammtzeit $t_1 + t_2$ wird also

$$t = \frac{2F_1}{\mu F\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h_1} - \left(1 - \frac{1}{\frac{F_1}{F_2}+1}\right)\sqrt{h_1 - h_2\frac{F_2}{F_1}}\right\} \quad \text{oder}$$

$$9) \qquad t = \frac{2F_1}{\mu F\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{h_1} - \frac{F_1}{F_1+F_2}\sqrt{h_1 - h_2\frac{F_2}{F_1}}\right\}.$$

Beispiel: Es sei wiederum $F_1 = F_2 = 400$ qm; $h_1 = 1{,}5$ m; $h_2 = 0{,}5$ m; $F = 0{,}5$ qm, $\mu = 0{,}6$, dann wird $\mu F\sqrt{2g} = 1{,}329$ und

$$t = 433 \text{ s.} = 7{,}2 \text{ min.},$$

nicht viel mehr als auf S. 257.

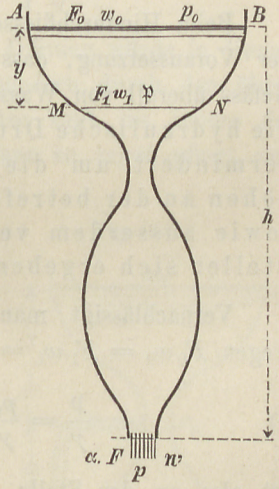
i) Hydraulischer Druck.

Ist das in Fig. 286 dargestellte Gefäss unten geschlossen, oben dem Drucke p_0, etwa dem Atmosphärendruck ausgesetzt, so beträgt in einem Querschnitte MN, der um y unter dem Wasserspiegel liegt, der hydrostatische Druck nach S. 168

$$p_1 = p_0 + \gamma y,$$

wenn γ das Gewicht der Körpereinheit (eines Kubikmeters) Wasser ist. Findet aber eine Ausflussbewegung statt, so tritt eine bedeutende Änderung in den Druckverhältnissen ein. Der im Bewegungszustande herrschende Druck wird der hydrodynamische oder hydraulische Druck genannt und möge mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet werden. Wir berechnen denselben unter der Annahme, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, dass also für die Geschwindigkeiten und die Druckhöhe Gl. I, S. 231 gelte, aber mit Berücksichtigung der Widerstände.

Fig. 286.



Für das ganze Gefäss besteht daher die Beziehung

$$1) \qquad h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} - \frac{{w_0}^2}{2g} + z_h;$$

darin soll z_h die gesammte Widerstandshöhe oder den gesammten Druckhöhenverlust zwischen Wasserspiegel und Mündung bedeuten.

Sind (wie in Fig. 286) keine plötzlichen Querschnittsänderungen vorhanden, so ist $z_h = z_0$ (Gl. 3, S. 244), anderenfalls wären noch entsprechende z_1 (Gl. 2, S. 246) hinzuzufügen.

Betrachtet man aber nur die Wassermenge zwischen AB und MN, so ist w_1 die Ausflussgeschwindigkeit, $\mathfrak{p}$ der Gegendruck; nennt man dann z_y die auf die Höhe y kommende Widerstandshöhe, so wird, entsprechend der Gl. 1:

$$2) \qquad y + \frac{p_0 - \mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{{w_1}^2}{2g} - \frac{{w_0}^2}{2g} + z_y \quad \text{oder}$$

$$3) \qquad \frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left(\frac{{w_1}^2}{2g} - \frac{{w_0}^2}{2g}\right) - z_y .$$

Mit $\mathfrak{p}$ als hydraulischem Druck ist $\mathfrak{p} : \gamma$ die hydraulische Druckhöhe bei MN, $\frac{p_0}{\gamma} + y$ die hydrostatische Druckhöhe daselbst, und man hat den Satz:

Beim Hindurchfliessen des Wassers durch ein Gefäss ist unter der Voraussetzung, dass der Beharrungszustand besteht und das Gefäss überall von Wasser erfüllt ist, in irgend einem Querschnitte die hydraulische Druckhöhe gleich der hydrostatischen, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen an der betreffenden Stelle und im Wasserspiegel, sowie ausserdem vermindert um die zwischen beiden Stellen sich ergebende Widerstandshöhe.

Vernachlässigt man die Widerstandshöhe z_y, so kann man wegen $F_0 w_0 = F_1 w_1 = \alpha F w$ auch schreiben

$$4) \qquad \frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \frac{{w_0}^2}{2g}\left(\frac{{F_0}^2}{{F_1}^2} - 1\right).$$

Ist also an der Stelle MN der Querschnitt $F_1 < F_0$, so ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen positiv, mithin die hydraulische Druckhöhe kleiner als die hydrostatische, u. zw. um so mehr, je kleiner der Querschnitt F_1 ist. Dadurch also, dass man die vorher geschlossene Öffnung frei macht, vermindert man den Druck auf die Gefässwände in allen den Querschnitten des Gefässes, die kleiner sind als der Wasserspiegel-Querschnitt, und umgekehrt An

einem Querschnitte, der mit dem Wasserspiegel-Querschnitte gleiche Grösse hat, entsteht durch Eintritt der Bewegung keine Änderung des Druckes. Sind die Querschnitte F und F_1 klein gegen F_0 und ist $p = p_0$, so kann man

$$\frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2} = h \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2}$$

setzen, und wenn man noch annimmt, dass an der Mündung keine Einschnürung vorkommt,

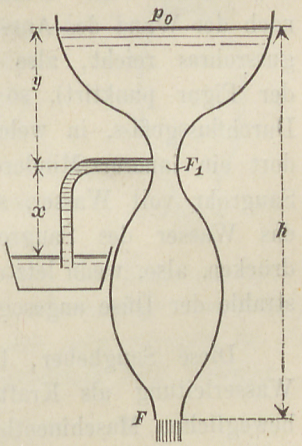
$$5) \qquad \frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Eine Verkleinerung des Querschnittes F_1 kann eine bemerkenswerthe Verminderung des hydraulischen Druckes hervorbringen. Es wird $\mathfrak{p} < p_0$, d. h. der innere Druck kleiner als der äussere Luftdruck, wenn

$$6) \qquad y < h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y}}.$$

Durch eine in der Wand angebrachte Öffnung würde in diesem Falle nicht etwa Wasser herausfliessen, sondern durch den überwiegenden Druck der äusseren Atmosphäre Luft ins Innere des Gefässes hineingedrückt oder, wie man dann zu sagen pflegt, von dem strömenden Wasser angesogen werden. Der Überschuss des äusseren Druckes gegen den inneren kann durch einen etwa mit Wasser gefüllten Minderdruckmesser (s. Fig. 240, S. 217) kenntlich gemacht werden. Wenn der äussere Überdruck die Wassersäule x im Gleichgewichte hält, so ist

Fig. 287.



$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - x,$$

also nach Gl. 5:

$$-x = y - h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder}$$

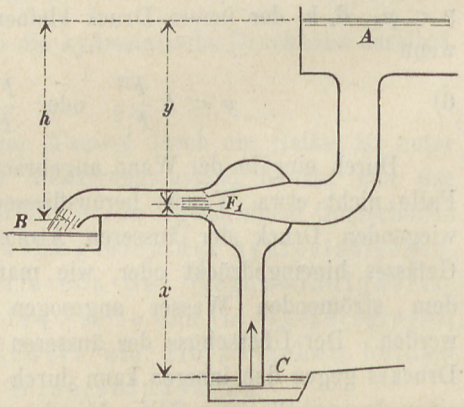
$$x + y = h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Ist aber $x + y < h \frac{F^2}{F_1^2}$ (Fig. 287), so wird der äussere Atmosphärendruck das Wasser in dem seitlichen Messrohr aufwärts und in das Gefäss drücken, oder der innere Minderdruck das Wasser aus dem kleinen Nebengefäss ansaugen und mit fortführen. Dieses Ansaugen findet statt, wenn

8) $$\frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{x+y}} \quad \text{ist.}$$

Auf diesem Verhalten beruht die Wirkungsweise des **Saughebers** oder der Saugstrahlpumpe (Fig. 288). Das zum Betriebe dienende Wasser fliesst aus dem Gerinne A abwärts durch eine Röhre, welche sich zu einer engen Düse F_1 zusammenzieht. Diese wird von einem Gehäuse umschlossen, an welches sich nach unten das Saugrohr, nach links das Ausgussrohr anschliesst. Denkt man sich zunächst bei F_1 eine Wand, welche von dem Rande der Düse nach der Wand des Ausgussrohres reicht, also das Saugrohr von letzterem trennt (in der Figur punktirt), so hat man ein von A bis B reichendes Durchflussgefäss, in welchem F_1 eine enge Stelle bildet, so dass dort ein innerer Minderdruck entsteht. Denkt man sich nun das Saugrohr voll Wasser, so wird, wenn die Bedingung 8 erfüllt ist, das Wasser des Saugrohres gegen die gedachte Abschlusswand drücken, also, wenn letztere nun fortgedacht wird, von dem Wasserstrahle der Düse angesogen und nach B mitgenommen werden.

Fig. 288.



Diese Saugheber, bei denen nicht selten das Wasser einer Wasserleitung als Kraftquelle dient, haben den Vortheil, keine beweglichen Maschinentheile zu enthalten und deshalb keiner besonderen Wartung zu bedürfen.

Nach Gl. 5, S. 261 kann man durch fortgesetzte Verkleinerung des Querschnittes F_1 die hydraulische Druckhöhe selbst bis auf Null vermindern; es ist dazu erforderlich, dass

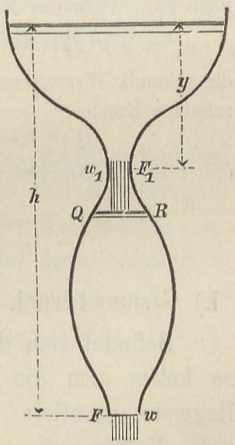
$$9) \qquad \frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

sei. Macht man aber F_1 noch kleiner als Gl. 9 entspricht, so würde der hydraulische Druck rechnungsmässig negativ werden. Weil aber negative Drücke in vollkommen flüssigen Körpern unmöglich sind, so hört für

$$10) \qquad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

die Gültigkeit der Gl. 5, S. 261 und damit auch die Gültigkeit der Hauptgleichung I, S. 231 für die Ausflussgeschwindigkeit, aus welcher die Gleichung für den hydraulischen Druck entstand, auf. Innerhalb desjenigen Gefässtheiles, der der Bedingung 10 entspricht, herrscht ein Druck Null; die Wassertheilchen pressen sich nicht gegen die Wandung, füllen daher das Gefäss nicht vollkommen aus, sondern fallen in dem drucklosen Raume frei herunter. An derjenigen Stelle des Gefässes, wo der Druck p wieder positiv zu werden beginnt, bildet sich ein neuer Wasserspiegel QR (Fig. 289). Man sagt in solchem Falle „die Wassersäule reisst ab“. Denkt man sich das Gefäss aus einem biegsamen Stoffe, etwa Blei, so kann man durch Zusammendrücken leicht einen so kleinen Querschnitt F_1 hervorbringen, dass die Trennung stattfindet. Dadurch wird aber zugleich die Ausflussmenge vermindert. An dem engen Querschnitt F_1 ergiebt sich jetzt nämlich für die Geschwindigkeit w_1, weil bei F_1 der Gegendruck Null herrscht,

Fig. 289.



$$w_1 = \sqrt{2g\left(y + \frac{p_0}{\gamma}\right)};$$

sonach wird an der unteren Öffnung

$$w = w_1 \frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{F} \sqrt{2g\left(y + \frac{p_0}{\gamma}\right)}.$$

Dieser Werth ist $\leqq \sqrt{2gh}$, wenn die Bedingung 10 erfüllt ist.

Die Hauptgleichung für die ideelle Ausflussgeschwindigkeit auf S. 231 gilt demnach nur, wenn der nach S. 260, Gl. 3 berechnete Druck $\mathfrak{p}$ an allen Stellen des Gefässes sich positiv ergiebt.

Beispiel: Schliesst sich an ein weites Gefäss von 1 m Wassertiefe scharfkantig ein lothrechtes Rohr von 12 m Länge (Fig. 290), so gilt in einer Tiefe $y > 1$ m für den hydraulischen Druck $\mathfrak{p}$ (Gl. 5) wegen $F_1 = F$:

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h,$$

$$\text{also } \mathfrak{p} \gtreqless 0 \quad \text{für } y \gtreqless h - \frac{p_0}{\gamma},$$

d. h. in diesem Falle ($h = 13$ m) für $y \gtreqless 3$ m. Die Röhre wird daher nur auf die untere Länge $h_0 = 10$ m ausgefüllt; oben, wo das Rohr sich dem Gefäss anschliesst, reisst die Wassersäule ab; die Geschwindigkeit beim Eintritt in das Rohr wird

$$w_1 = \varphi \sqrt{2g(1 + h_0)} = 0{,}96 \sqrt{2g \cdot 11} = 14{,}1;$$

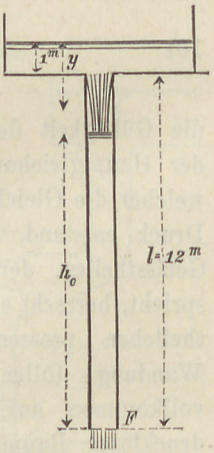
die sekundl. Wassermenge wegen der Einschnürung am scharfen Rande

$$Q = 0{,}64 \cdot 14{,}1 \cdot F = 9{,}02\, F;$$

daher ist die Geschwindigkeit am unteren Ende

$$w = \frac{Q}{F} = 9{,}02 \text{ m/s}.$$

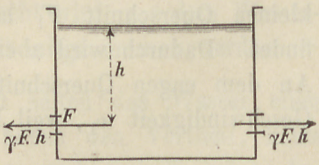
Fig. 290.



k) Gesammtdruck ausströmenden Wassers auf die Gefässwände.

Befindet sich das Wasser in einem Gefäss in Ruhe (Fig. 291), so heben sich die Druckkräfte $\gamma F h$ auf zwei einander gegenüber liegende parallele Wandflächenstücke auf. Entfernt man plötzlich das linksseitige Flächenstück F, so wird nun die nach rechts gerichtete Kraft $\gamma F h$ nicht mehr aufgehoben, so dass das Gefäss jetzt einen überschüssigen Seitendruck nach rechts erfährt, während links das Wasser auszuströmen beginnt. Mit der Ausbildung des

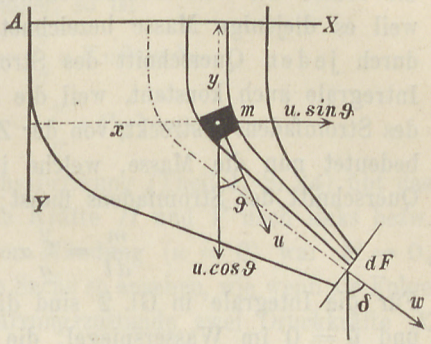
Fig. 291.



Beharrungszustandes der Ausflussbewegung vergrössert sich aber, wie gezeigt werden soll, der einseitige Druck fast auf das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft.

Zur Entwickelung benutzen wir ein Gefäss (Fig. 292) mit einer ziemlich bestimmt erkennbaren einfach gekrümmten Mittellinie; diese sei oben lothrecht, bilde aber an der Mündung mit der Lothrechten einen Winkel δ. Man trenne aus der Wassermenge des Gefässes einen Stromfaden heraus, der an der Öffnung F den Querschnitt dF hat und alle diejenigen Wassertheilchen enthält, welche demnächst in Folge gegenseitiger Verdrängung durch den Öffnungstheil dF ausfliessen werden.

Fig. 292.



Diejenige Wassermasse, welche durch dF während der Zeit dt ausströmt, welche daher gleichzeitig auch durch jeden anderen Querschnitt des Wasserfadens fliessen muss, sei das Massentheilchen

$$1) \qquad m = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w \cdot dt.$$

Hierin ist w die mittlere Geschwindigkeit des Ausflussstrahles. Ein solches Massentheilchen des Stromfadens mit den Koordinaten x und y habe die Geschwindigkeit u, die mit der Lothrechten den Winkel ϑ bilde. Die Seitengeschwindigkeiten des Massentheilchen sind dann

$$\frac{dx}{dt} = u \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = u \cos \vartheta,$$

die entsprechenden Beschleunigungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(u \cos \vartheta)}{dt}.$$

Die entsprechenden Ergänzungskräfte sind

$$\frac{m\, d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{m\, d(u \cos \vartheta)}{dt}$$

mit dem Sinne nach links, bezw. nach oben.

Für die ganze Masse des Stromfadens ergeben sich dann die Ergänzungskräfte

$$2) \qquad dX = \frac{m}{dt}\int_{w_0,\,0}^{w,\,\delta} d(u \sin\vartheta) \quad \text{bezw.} \quad dY = \frac{m}{dt}\int_{w_0,\,0}^{w,\,\delta} d(u \cos\vartheta).$$

Diese Ergänzungskräfte bezeichnen wir noch als Differentiale, weil die Masse des Stromfadens unendlich klein ist; m ist konstant, weil es diejenige Masse bezeichnet, die in einem Zeittheilchen dt durch jeden Querschnitt des Stromfadens geht; dt ist für obige Intregrale auch konstant, weil die Integration sich über die Länge des Stromfadens erstreckt, von der Zeit aber unabhängig ist. $m : dt$ bedeutet nun die Masse, welche in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt des Stromfadens fliesst; nach Gl. 1 ist

$$\frac{m}{dt} = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w.$$

Für die Integrale in Gl. 2 sind die unteren Grenzwerthe $u = w_0$ und $\vartheta = 0$ im Wasserspiegel, die oberen: $u = w$ und $\vartheta = \delta$ an der Mündung. Bei Herstellung der unbestimmten Integrale heben sich Integral- und Differentialzeichen auf; daher wird

$$dX = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w\,(w \cdot \sin\delta - 0)$$

$$dY = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF w\,(w \cos\delta - w_0).$$

Nehmen wir, für die meisten Fälle zutreffend, w_0 als sehr klein an, so werden die Ergänzungskräfte für die ganze Wassermenge im Gefäss erhalten, indem man dF mit F vertauscht, nämlich

$$3) \quad \begin{cases} X = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \sin\delta, \\ Y = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \cos\delta. \end{cases}$$

Die Lage dieser beiden Kräfte hängt von der Form des Gefässes ab und hat gewöhnlich kein besonderes Interesse. An irgend einem Punkt angreifend gedacht, lassen sie sich zu einer Mittelkraft

$$4) \qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2$$

zusammensetzen, die mit der Lothrechten einen Winkel ε bildet, mit

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{X}{Y} = \operatorname{tg}\delta.$$

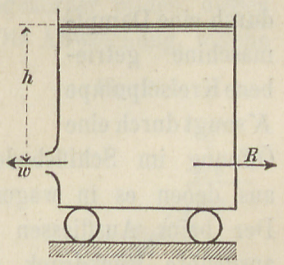
Die gesammte Ergänzungskraft R hat hiernach mit w gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Sinn. Mit ihr müssen die äusseren Kräfte, die auf die Wassermasse im Gefässe wirken, im Gleichgewichte sein; es sind dies die Schwere Mg und der Druck der Gefässwände gegen das Wasser. Nennt man H den wagerechten nach rechts gerichteten, V den lothrechten aufwärts gerichteten Druck der Gefässwände gegen das Wasser, so ist

$$5)\quad \begin{cases} H = X = \dfrac{\gamma}{g}\,\alpha F w^2 \sin\delta, \\ V = Mg - \dfrac{\gamma}{g}\,\alpha F w^2 \cos\delta. \end{cases}$$

Nach dem Satze der Wechselwirkung (Theil 1, S. 34) übt das Wasser auf die Gefässwände die Kräfte H und V nach links bezw. abwärts aus. Bei geschlossener Mündung ($w = 0$) war $H = 0$, $V = Mg$; mithin kann man die Sache so ansehen, wie wenn als Folge der Ausflussbewegung im Beharrungszustande zwei Druckkräfte X und Y entstehen, die von dem strömenden Wasser auf das Gefäss ausgeübt werden und zu den im Ruhezustande wirkenden Druckkräften hinzukommen. X hat entgegengesetzten Sinn mit $w \sin\delta$, Y bildet eine Verminderung des Bodendruckes. Die Gesammtkraft R, entgegengesetzten Sinnes mit w, heisst die Reaktion des ausfliessenden Wassers. Man kann auch schreiben

$$6)\quad R = 2\gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \frac{w^2}{2g},$$

Fig. 293.



und wenn man noch $w^2 = \varphi^2 \cdot 2gh$ setzt,

$$7)\quad \begin{aligned} R &= 2 \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \varphi^2 \cdot h \\ &= 2 \cdot \varphi \cdot \mu\gamma \cdot F \cdot h, \end{aligned}$$

oder mit $Q = \alpha F w$ als sekundl. Ausflussmenge

$$8)\quad R = \frac{\gamma}{g} Q w.$$

Findet (wie in Fig. 292) an der Mündung keine Einschnürung statt, so dass $\mu = \varphi$, so ist, weil φ^2 nicht viel von der Einheit abweicht, R fast das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft $\gamma F h$ gegen die Mündung, wie S. 265 gesagt wurde.

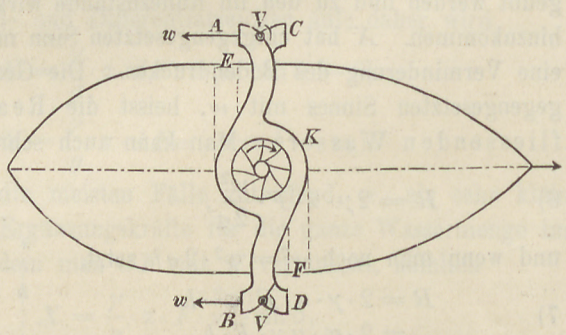
Hat w wagerechte Richtung, so wird, mit $\delta = 90^0$, $R = 2\varphi \cdot \mu \cdot \gamma \cdot F \cdot h$ ebenfalls wagerecht (Fig. 293).

Eine gleichförmige Verschiebung des Gefässes ändert an den Kräften nichts. Es wird $w = \varphi \sqrt{2gh}$ die scheinbare (relative) Ausflussgeschwindigkeit des Wassers in Bezug auf das Gefäss; macht man daher das Gefäss leicht beweglich, so wird der Seitendruck R des ausfliessenden Wassers einen ebenso grossen Widerstand überwinden können.

Beispiel: Auf einem Eisenbahnwagen sei ein Wasserbehälter angebracht, der unten eine Seitenöffnung mit gut abgerundetem Mundstücke von $0{,}12^{\,m}$ Durchmesser enthält. Der Wasserspiegel liege um $h = 2^{\,m}$ über der Öffnung. Das ausfliessende Wasser erzeugt eine wagerechte Druckkraft gegen das Gefäss und somit gegen den Wagen von $2 \cdot 1000 \cdot 0{,}12^2 \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}96^2 \cdot 2 =$ rund $42^{\,kg}$. Rechnet man die Widerstandsziffer des Eisenbahnwagens $= 1/400$ (s. 1. Theil, S. 255), so darf der Wagen ein Gesammtgewicht $= 400 \cdot 42 = 16\,800^{\,kg}$ haben, wenn er durch den Wasserausfluss in langsamer Bewegung erhalten werden soll.

Vorstehendes Beispiel entspricht keinem wirklichen Gebrauche, stützt sich vielmehr nur auf künstliche Annahmen. Thatsächliche Anwendung aber findet der Wasserstrahl zum Betriebe von Schiffen, sog. Strahlschiffen (Reaktionsschiffen) (Fig. 294). Eine durch eine Dampfmaschine getriebene Kreiselpumpe K saugt durch eine Öffnung im Schiffsboden Wasser an und presst dies in Röhren, aus denen es in wagerechter Richtung zur Ausströmung gelangt. Der beim Ausfliessen auf die Röhren und somit auf das Schiff ausgeübte Rückdruck dient zum Forttreiben des Schiffes. Beim Vorwärtsfahren (nach rechts) strömt das Wasser nach rückwärts aus den Öffnungen A und B. Durch Umstellung von Klappen V kann man den Ausfluss auch bei C und D bewirken, um das Schiff zeitweise rückwärts zu treiben. Ausfluss bei A und D bewirkt Rechtsdrehung, bei B und C Linksdrehung des Schiffes ohne Zuhülfenahme des Steuers. Die hieraus ersichtliche gute

Fig. 294.

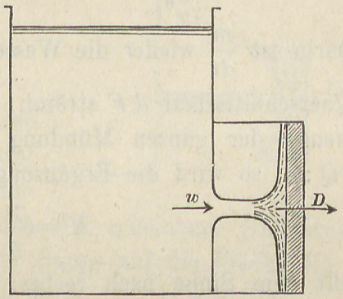


Steuerfähigkeit des Strahlschiffes hat zur Folge gehabt, dass diese Schiffsanordnung, welche sich für den gewöhnlichen Schiffsverkehr nicht vortheilhaft erwies, in neuerer Zeit für Rettungsboote Anwendung gefunden hat (s. Génie civil, 11. September 1892, S. 332 und 27. April 1895, S. 407; Engineering 11. Oktober 1895, S. 411). Ausflussrohre E und F (punktirt) geben die Möglichkeit, auch in der Querrichtung Triebkräfte wirksam zu machen, was in der Nähe eines hülfsbedürftigen Schiffes von Wichtigkeit sein kann.

l) Druck eines Wasserstrahles gegen eine denselben auffangende Fläche.

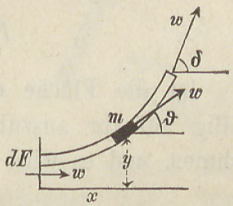
Trifft ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit w in der Nähe der Mündung auf eine feste Fläche (Fig. 295), so erfährt der Strahl eine Änderung seiner Form, indem die einzelnen Stromfäden abgelenkt werden; da nun zu jeder Grössen- oder Richtungsänderung der Geschwindigkeit eine Kraft erforderlich ist, so muss die feste Fläche auf den Wasserstrahl Kräfte ausüben.

Fig. 295.



Die Fläche sei zunächst rechtwinklig zu w, dann wird der Strahl sich nach allen Seiten auf der Fläche ausbreiten und wird nahezu einen Umdrehungskörper bilden, dessen Achse in der Mittellinie des Strahles liegt. Die Abweichung, welche durch die Einwirkung der Schwere herbeigeführt wird, kann meist vernachlässigt werden; dann darf man annehmen, dass die Wassertheilchen ihre Geschwindigkeit nur der Richtung nach ändern. Dort, wo die Achse des Strahles die Fläche trifft, entstehen Wirbelbewegungen, die keine besondere Beachtung erfordern.

Fig. 296.



Ein Längentheilchen eines Stromfadens (Fig. 296) habe wieder, wie auf S. 265, die Masse

$$m = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w\,dt$$

und die Koordinaten x und y, dann wird

$$\frac{dx}{dt} = w\cos\vartheta, \quad \frac{dy}{dt} = w\sin\vartheta;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(w\cos\vartheta)}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(w\sin\vartheta)}{dt},$$

mit den Ergänzungskräften

$$-m\cdot\frac{d(w\cos\vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad -m\frac{d(w\sin\vartheta)}{dt}.$$

Letztere wird durch den Beitrag eines anderen Stromfadens, der zum betrachteten symmetrisch ist, aufgehoben; die Ergänzungskraft in der x-Richtung wird für den ganzen Stromfaden, wenn derselbe eine gesammte Ablenkung δ erfährt,

$$dX = -\frac{m}{dt}\int_0^{\delta} d(w\cos\vartheta) = -\frac{m}{dt}w(\cos\delta - 1) = \frac{m}{dt}w(1-\cos\delta).$$

Darin ist $\frac{m}{dt}$ wieder die Wassermasse, welche sekundlich durch den Querschnittstheil dF strömt. Ist nun Q die sekundliche Wassermenge der ganzen Mündung in ^{cbm}, die sekundliche Masse also $\gamma Q : g$, so wird die Ergänzungskraft für den ganzen Strahl

$$X = \frac{\gamma}{g}Qw(1-\cos\delta)$$

mit dem Sinne nach rechts; ebenso gross, aber dem Strahl entgegen gerichtet, ist die äussere Kraft, die die Fläche auf den Strahl behufs der Ablenkung ausübt, während die Kraft D, mit welcher der Strahl auf die Fläche wirkt, nach dem Satze der Wechselwirkung wieder mit X völlig übereinstimmt, d. h.

1) $$D = \frac{\gamma}{g}\cdot Q\cdot w(1-\cos\delta).$$

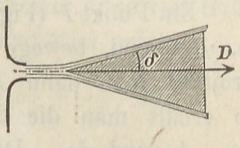
Ist die Fläche eben und gross genug, dass der Strahl sich völlig auf ihr auszubreiten vermag, so kann man $\delta = 90^0$ annehmen, und es wird dann

2) $$\boldsymbol{D = \frac{\gamma}{g}Qw},$$

d. h. ebenso gross wie (nach Gl. 8, S. 267) der Rückdruck des ausfliessenden Wassers auf das Gefäss. Befestigt man daher die Platte an dem Gefässe, so geben der Rückdruck auf das Gefäss und der

Druck des Strahles gegen die Platte die Summe Null, so dass das Ganze, in wagerechtem Sinne leicht beweglich gemacht, nicht in Bewegung gerathen wird. Der Druck D des im Beharrungszustande befindlichen Strahles gegen die Platte ist (S. 267) fast doppelt so gross wie der Druck auf die Platte sein würde, wenn sie die Mündung verschlösse.

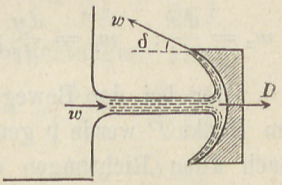
Fig. 297.



Wird der Strahl nach Fig. 297 gegen die Spitze eines Kegels geführt, so ist in Gl. 1 für δ etwa der Neigungswinkel der Kegelseiten gegen die Achse zu setzen.

Ist dem Strahl aber die hohle Seite einer Umdrehungsfläche entgegen gestellt (Fig. 298), so hat man in Gl. 1 $\cos\delta$ mit $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$ zu vertauschen, weil die Stromfäden im Ganzen um $\pi - \delta$ abgelenkt werden, und es ist

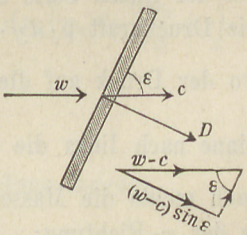
Fig. 298.



$$3) \qquad D = \frac{\gamma}{g} Q w (1 + \cos\delta).$$

Weicht die Fläche mit der Geschwindigkeit c im Sinne des Strahles aus, so ist an Stelle von w in den vorstehenden Gleichungen selbstverständlich die scheinbare (relative) Geschwindigkeit $w - c$ des Strahles in Bezug auf die Fläche einzuführen, es wird aus Gl. 1:

Fig. 299.



$$4) \qquad D = \frac{\gamma}{g} Q (w - c) (1 - \cos\delta).$$

Ist die den Strahl auffangende, mit der Geschwindigkeit c ($\parallel w$) ausweichende Ebene gegen die Richtungen von w und c um den Winkel ε geneigt, so zerlegt man die scheinbare Geschwindigkeit $w - c$ in die Seitengeschwindigkeiten $(w - c)\cos\varepsilon$ parallel der Ebene und $(w - c)\sin\varepsilon$ rechtwinklig dazu. Erstere hat, abgesehen von der Reibung, die wir vernachlässigen, keine Einwirkung auf die Ebene, und letztere bewirkt, da vollkommene Flüssigkeiten nur rechtwinklige Druckkräfte ausüben, einen Normaldruck

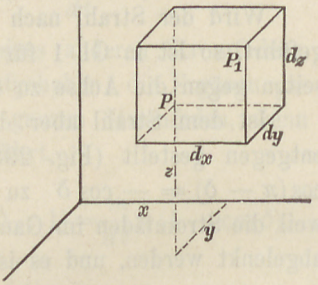
$$5) \qquad D = \frac{\gamma}{g} Q (w - c) \sin\varepsilon.$$

m) L. Eulers Grundgleichungen für die Bewegung tropfbar-flüssiger Körper ohne Reibung.

Ein Punkt P (Fig. 300) des flüssigen Körpers, dessen Koordinaten x, y, z sind, bewege sich während des Zeittheilchens dt nach P_1: projizirt man dann $PP_1 = ds$ in der Richtung der drei Achsen, so erhält man die drei Projektionen dx, dy und dz. Das Parallelepiped dieser drei Seiten enthalte das Massentheilchen

$$m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Fig. 300.



Die Geschwindigkeit desselben sei

$$w = \frac{ds}{dt}, \text{ zerlegt in}$$

$$w_x = \frac{dx}{dt}; \quad w_y = \frac{dy}{dt}; \quad w_z = \frac{dz}{dt}.$$

Der bei der Bewegung herrschende (also hydraulische) Druck im Punkt P werde $\mathfrak{p}$ genannt. Dieser Druck $\mathfrak{p}$ ist an einer Stelle P nach allen Richtungen derselbe (vergl. S. 157), wechselt aber in dem flüssigen Körper von Ort zu Ort und ist auch im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Auf das Massentheilchen wirke eine Massenkraft $m \cdot R$ mit den Seitenkräften $m \cdot X$, $m \cdot Y$ und $m \cdot Z$.

In der Richtung der x-Achse wirkt auf das Massentheilchen m auf der linken Seite des Parallelepipeds mit dem Sinne nach rechts die Druckkraft $\mathfrak{p} \cdot dy \cdot dz$, auf der rechten Seite des Parallelepipeds, wo der Druck auf die Flächeneinheit $\mathfrak{p} + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx$ beträgt, mit dem Sinne nach links die Kraft $\left(\mathfrak{p} + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx\right) dy \cdot dz$. Endlich wirkt nach rechts die Massenkraft $m \cdot X$. Daher wird die Beschleunigung in der x-Richtung:

$$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{m} \quad \text{oder, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz:$$

1) $$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} \frac{g}{\gamma}.$$

Die Geschwindigkeit w in dem Punkte P des flüssigen Körpers ist nun im Allgemeinen eine Funktion von x, y, z und t, und weil bei der Bewegung von P nach P_1 sich alle diese vier Grössen ändern, so ist dw_x in Gl. 1 ein totales Differential, mithin

$$dw_x = \frac{\delta w_x}{\delta x} dx + \frac{\delta w_x}{\delta y} dy + \frac{\delta w_x}{\delta z} dz + \frac{\delta w_x}{\delta t} dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 1:

$$\frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} = X - \left\{ \frac{\delta w_x}{\delta x} \frac{dx}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta y} \frac{dy}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta z} \frac{dz}{dt} + \frac{\delta w_x}{\delta t} \right\}$$

oder auch, weil

$$\frac{dx}{dt} = w_x; \qquad \frac{dy}{dt} = w_y; \qquad \frac{dz}{dt} = w_z:$$

2) $$\frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} = X - \left\{ w_x \frac{\delta w_x}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_x}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_x}{\delta z} + \frac{\delta w_x}{\delta t} \right\}$$

und ebenso für die beiden anderen Achsenrichtungen:

3) $$\frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta y} = Y - \left\{ w_x \frac{\delta w_y}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_y}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_y}{\delta z} + \frac{\delta w_y}{\delta t} \right\},$$

4) $$\frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta z} = Z - \left\{ w_x \frac{\delta w_z}{\delta x} + w_y \frac{\delta w_z}{\delta y} + w_z \frac{\delta w_z}{\delta z} + \frac{\delta w_z}{\delta t} \right\}.$$

In den Raum des Parallelepipeds PP_1 tritt während der Zeit dt links durch den Querschnitt $dy \cdot dz$ mit der Geschwindigkeit w_x die Raummenge ein: $dy \cdot dz \cdot w_x \cdot dt$, rechts aber wegen der Geschwindigkeit $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$ die Menge $dy \cdot dz \cdot \left(w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx \right) \cdot dt$ aus; der Überschuss des Abflusses ist also

$$dy \cdot dz \cdot \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt.$$

Der Überschuss des Abflusses in der y-Richtung beträgt

$$dx \cdot dz \cdot \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt,$$

in der z-Richtung:

$$dx \cdot dy \cdot \frac{\delta w_z}{\delta z} \cdot dz \cdot dt.$$

Der Gesammt-Überschuss beträgt mithin:

$$dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot \left(\frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} \right).$$

Unter der Annahme nun, dass sich innerhalb des flüssigen Körpers kein leerer Raum befinde und dass die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar sei, muss der das Massentheilchen enthaltende Raum unveränderlich, d. h. vorstehender Gesammt-Überschuss Null sein, oder

$$5) \qquad \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} = 0.$$

Diese Gleichung heisst die Kontinuitäts-Gleichung.

Man kann letztere Gleichung auch noch in anderer Weise ableiten: Der Rauminhalt des Massentheilchens m ist $dx \cdot dy \cdot dz$; soll dieser mit der Zeit sich nicht ändern, so muss

$$6) \qquad \frac{\delta(dx \cdot dy \cdot dz)}{\delta t} = 0 \text{ sein; oder}$$

$$7) \qquad dy \cdot dz \frac{\delta dx}{\delta t} + dx \cdot dz \cdot \frac{\delta dy}{\delta t} + dx \cdot dy \cdot \frac{\delta dz}{\delta t} = 0.$$

Darin bedeutet δdx die Zunahme der Länge dx während der Zeit dt. Da nun die Geschwindigkeit in der x-Richtung im Punkte P mit den Koordinaten x, y, z die Grösse w_x, im Punkte P_1 aber die Grösse $w_x + \frac{\delta w_x}{\delta x} dx$ hat, so muss sich die Kante dx während der Zeit dt um $\frac{\delta w_x}{\delta x} dx \cdot dt$ vergrössern, mithin ist obiges

$$\delta dx = \frac{\delta w_x}{\delta x} \cdot dx \cdot dt; \text{ ebenso}$$

$$\delta dy = \frac{\delta w_y}{\delta y} \cdot dy \cdot dt \text{ und}$$

$$\delta dz = \frac{\delta w_z}{dz} \cdot dz \cdot dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 7:

$$dx \cdot dy \cdot dz \left(\frac{\delta w_x}{\delta x} + \frac{\delta w_y}{\delta y} + \frac{\delta w_z}{\delta z} \right) = 0,$$

was ebenfalls zu Gl. 5 führt.

Gleichungen 2—7 sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser tropfbar-flüssiger Körper, welche Leonhard Euler (geb. 1707 zu Basel, gest. 1783 zu Petersburg) im Jahre 1755 aufgestellt hat.

Es soll nun angenommen werden, dass der Beharrungszustand eingetreten sei, d. h., dass an jeder Stelle des Gefässes oder Raumes, in dem die Flüssigkeit sich bewegt, die Geschwindigkeit w und der Druck $\mathfrak{p}$ von der Zeit unabhängig, dass also w und $\mathfrak{p}$ nur Funktionen von x, y und z seien. Ebenso sollen auch die Beschleunigungen X, Y und Z nur Funktionen des Ortes sein.

Multiplicirt man Gl. 1 mit $w_x dt = dx$, so wird

$$w_x \cdot dw_x = X \cdot dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(w_x^2)}{2} = X dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx.$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d(w_y^2)}{2} = Y dy - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta y} dy \quad \text{und}$$

$$\frac{d(w_z^2)}{2} = Z dz - \frac{g}{\gamma} \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta z} dz.$$

Weil nun $\mathfrak{p}$ eine $f(x, y, z)$, so ist

$$\frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta x} dx + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta y} dy + \frac{\delta \mathfrak{p}}{\delta z} dz = d\mathfrak{p};$$

mithin ergiebt die Addition obiger drei Geichungen, weil

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + z_z^2:$$

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} d\mathfrak{p}.$$

Ist nun an einer Stelle mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 die Geschwindigkeit w_0, der Druck $\mathfrak{p}_0$, so ergiebt die Integration

$$8) \quad \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma} (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0).$$

In dem besonderen Falle des Ruhezustandes wäre $w = w_0$, auch ginge der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ über in den hydrostatischen Druck p, und man hätte, in Übereinstimmung mit Gl. 2, S. 226:

$$0 = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

Hiernach kann man

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} X dx - Y dy + Z dz$$

vertauschen mit $\frac{g}{\gamma}(p - p_0)$, wenn p und p_0 die hydrostatischen Drücke an den Stellen x, y, z und x_0, y_0, z_0 sind, die den

gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen würden. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0}{\gamma}.$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit w_0 auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck $\mathfrak{p}_0$ gleich dem hydrostatischen Drucke p_0, mithin

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - \mathfrak{p}}{\gamma} \quad \text{oder}$$

9) $$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 260) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzige wirkende Wasserkraft und richtet man die positive y-Achse lothrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{\mathfrak{p}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right).$$

Hat man also ein Gefäss, aus dem das Wasser durch eine um h unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit w ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck p_m, so ist auch der hydraulische Druck $\mathfrak{p}$ dort $= p_m$, und man erhält für $y = h$:

$$\frac{p_m}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 259)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}.$$

An die Stelle der Kontinuitätsgleichung (Gl. 5, S. 274) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w.$$

2. Bewegung des Wassers in Röhren.

a) Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren.

Beim Durchfliessen einer längeren Röhre vom Querschnitt F und der Länge l zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe z. Dieser

von der Reibung herrührende Widerstand folgt wesentlich anderen Gesetzen als der Reibungswiderstand fester Körper (Theil 1, S. 189). Er ist nämlich ganz unabhängig von dem Drucke des Wassers, nahezu verhältnisgleich mit der Berührungsfläche und mit dem Quadrate der Geschwindigkeit w, also auch mit der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$. Ist u der innere Umfang des Röhrenquerschnittes, so berühren sich in einer Röhre von der Länge l das Wasser und die Wandung in einer Fläche $u \cdot l$. Die Summe W der Reibungswiderstände längs der Röhre lässt sich daher schreiben

1) $$W = \varkappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Um die entsprechende Widerstandshöhe z zu finden, berechnen wir (nach S. 245/6) die während eines Zeittheilchens dt verrichtete Widerstandsarbeit $d\mathfrak{A}$ und setzen diese $= mgz$, wenn m wieder diejenige Wassermasse bedeutet, welche während der Zeit dt jeden Querschnitt durchströmt. Bei einer Geschwindigkeit w ist $w \cdot dt$ der Gleitweg des Wassers in der Röhre während der Zeit dt, mithin $d\mathfrak{A} = W \cdot w \cdot dt$. Ferner ist $mg = \gamma \cdot F \cdot w \cdot dt$ und

$$z = \frac{d\mathfrak{A}}{mg} = \varkappa \cdot u \cdot l \frac{w^2}{2g} \frac{w\,dt}{\gamma \cdot F \cdot w \cdot dt}$$

2) $$z = \frac{\varkappa}{\gamma} \frac{ul}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Setzt man $\varkappa = \gamma\beta$, so wird

3) $$z = \beta \frac{ul}{F} \frac{w^2}{2g}$$

mit β als Widerstandsziffer für Wasser in Röhren beliebiger Querschnittsform. Für cylindrische Röhren vom inneren Durchmesser d ist im Besonderen $u = d\pi$, $F = {}^1/_4 d^2\pi$, mithin

$$\frac{u}{F} = \frac{4}{d} \quad \text{und} \quad z = \beta 4 \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$$

oder, wenn man für diesen besonders häufigen Fall

4) $$4\beta = \lambda$$

setzt und λ als Widerstandsziffer cylindrischer Wasserleitungsröhren bezeichnet,

5) $$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Als erste Annäherung ist nach Dupuit

6) $$\lambda = 0{,}03 \text{ zu setzen.}$$

Eingehendere Versuche haben aber gezeigt, dass λ nicht nur mit dem Grade der Rauhigkeit der inneren Röhrenfläche sich ändert, sondern auch noch in gewisser Weise von der Röhrenweite d und der Geschwindigkeit w abhängt, dass also die vorläufig angegebene Proportionalität des Widerstandes mit der Fläche $u \cdot l$ und dem Quadrate der Geschwindigkeit nicht genau zutrifft.

Nach ausgedehnten Versuchen des französischen Ingenieurs Darcy vom Jahre 1857 ist für neue eiserne oder bleierne Röhren nach Fortlassung entbehrlicher Ziffern:

7) $$\lambda = \left(0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d}\right).$$

Hiernach würde also λ von w nicht abhängig sein.

G. Hagen (Berlin) hat aus eigenen und Darcy's Versuchen eine Formel abgeleitet, die auf die Temperatur des Wassers Rücksicht nimmt. Es möge hier nur der abgerundete Werth für eine Temperatur von 10^0 C. angegeben werden:

8) $$\lambda = 0{,}0236 + \frac{0{,}00008}{dw}.$$

Innerhalb der gewöhnlich vorkommenden Grenzen für d und w schwankt λ nach Gl. 8 nur zwischen 0,024 und 0,027, so dass man (nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd., S. 483), wenn man wegen geringer Unreinigkeit der Röhren die Zahl noch mit etwa 1,2 multiplicirt, wieder zu dem runden Mittelwerthe $\lambda = 0{,}03$ gelangt.

Für Holzröhren, wie sie im Gebirge noch vorkommen, hat man etwa $\lambda = 0{,}035$, für Röhren, die durch feste Niederschläge aus dem Wasser stark verunreinigt sind, $\lambda = 0{,}04$ zu setzen; ausserdem pflegt man im letzteren Fall eine Querschnittsverminderung in Folge der Niederschläge auf etwa $^4/_5$ zu berücksichtigen.

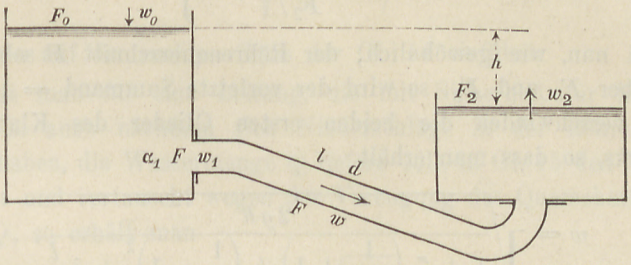
Es sei noch erwähnt, dass der franz. Ing. Flamant (s. Annales des ponts et chaussées 1892, Sept., S. 301)

9) $$\lambda = \frac{m}{\sqrt[4]{dw}}$$

entwickelt hat, wobei für glatte Röhren aus Blei, Glas, Schmiedeisen $m = 0{,}0102$ bis $0{,}0122$, für neue Gusseisenröhren $m = 0{,}0145$, für gebrauchte Gusseisenröhren $m = 0{,}0181$ zu setzen ist.

Sind nun 2 Gefässe nach Fig. 301 durch eine Röhre von der Weite d, der Länge l, dem Querschnitt F mit einander verbunden, so ermittelt man die Geschwindigkeit w in der Röhre, indem man wieder wie auf S. 246 die wirksame Druckhöhe in die einzelnen Theile zerlegt, wozu sie verwendet wird. Dabei verfolgt man die

Fig. 301.



Wasserbewegung vom Ober- bis zum Unterwasser, um keine Widerstandshöhe zu übersehen. Das Unterwasser ist als Mündung zu betrachten; daher ist an Stelle der beiden ersten Glieder der rechten Seite von Gl. 3, S. 246 zu schreiben: $\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$. An Widerstandshöhen kommt zuerst der Reibungsverlust im Obergefässe mit $\zeta_0 \frac{w_1^2}{2g}$ in Betracht; sodann der Stossverlust bei scharfkantigem Anschlusse der Röhre (S. 247) mit $\frac{(w_1 - w)^2}{2g}$; dann der Reibungsverlust in der Röhre mit $\lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$. Beim Übertritte des Wassers aus der engen Röhre in das Untergefäss erfolgt ein Stossverlust $\frac{(w - w_2)^2}{2g}$, endlich im Untergefäss ein Reibungsverlust wie bei umgekehrter Bewegung, d. h. mit $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$. Sonach wird

$$h = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} + \frac{(w - w_2)^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g}. \quad 10)$$

Um die verschiedenen Geschwindigkeiten auf w zurückzuführen, setze man $w_2 = \frac{wF}{F_2}$; $w_0 = w\frac{F}{F_0}$; $w_1 = \frac{w}{\alpha}$, dann wird

$$11) \quad 2gh = w^2\left\{\frac{F^2}{F_2^2} - \frac{F^2}{F_0^2} + \zeta_0\frac{1}{\alpha_1^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda\frac{l}{d} + \left(1 - \frac{F}{F_2}\right)^2 + \zeta_0\right\}.$$

Ist nun, wie gewöhnlich, der Röhrenquerschnitt F sehr klein gegenüber F_0 und F_2, so wird der vorletzte Summand $= 1$; hiergegen verschwinden die beiden ersten Glieder des Klammernausdrucks, so dass man erhält

$$12) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0\left(\frac{1}{\alpha_1^2} + 1\right) + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda\frac{l}{d}}}.$$

Mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha_1 = 0{,}64$ wird dann (rund)

$$13) \quad \boldsymbol{w = \sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda\frac{l}{d}}}}.$$

Beispiel: $h = 2$ m, $l = 20$ m, $d = 0{,}1$ m und $\lambda = 0{,}03$ giebt

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 2}{1{,}6 + 0{,}03 \cdot 200}} = 2{,}27 \text{ m},$$

$$Q = {}^1/_4 d^2\pi \cdot w \qquad 0{,}018 \text{ cbm}.$$

$\sqrt{2g \cdot 2} = 6{,}3$ lässt im Vergleiche mit w den Einfluss der Widerstände erkennen.

Soll die erforderliche Röhrenweite d bei gegebener sekundl. Wassermenge Q, gegebenen h und l berechnet werden, so bedenke man, dass

$$Q = \frac{d^2\pi}{4}w = \frac{d^2\pi}{4}\sqrt{\frac{2gh}{1{,}6 + \lambda\frac{l}{d}}},$$

woraus sich

$$14) \quad d^5 = \frac{16Q^2}{\pi^2 2gh}(1{,}6d + \lambda l)$$

ergiebt. Man löst diese Gleichung nach d auf, indem man vorläufig auf

der rechten Seite das Glied $1{,}6\,d$ vernachlässigt, hiermit einen Annäherungswerth für d erhält, nämlich

$$15) \qquad d = \sqrt[5]{\frac{16\,Q^2\,\lambda\,l}{\pi^2\,2\,g\,h}},$$

oder für $\lambda = 0{,}03$

$$16) \qquad d = 0{,}3\,\sqrt[5]{\frac{Q^2\,l}{h}},$$

und diesen auf der rechten Seite der Gl. 14 einführt.

Setzt man für eine Leitung, die mit Sicherheit für längere Zeit, d. h. auch nachdem sich Niederschläge in der Röhre festgesetzt haben, die Wassermenge Q liefern soll, in Gl. 15 den Werth $\lambda = 0{,}04$ und vertauscht wegen der Verengung des Querschnittes Q mit $^5/_4 Q$, so erhält man

$$17) \qquad d = 0{,}35\,\sqrt[5]{\frac{Q^2\,l}{h}}.$$

Beispiel: Eine Röhre soll $Q = 0{,}01$ cbm/s. liefern bei einer Länge $l = 100$ m und einer verfügbaren Druckhöhe $h = 2$ m. Dann ist vorläufig nach Gl. 16:

$$d = 0{,}3\,\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}104 \text{ m}.$$

Hiermit wird aus Gl. 14

$$d^5 = \frac{16 \cdot 0{,}01^2}{\pi^2 \cdot 2g \cdot 2}\,(1{,}6 \cdot 0{,}104 + 0{,}03 \cdot 100)$$

und $d = 0{,}105$ m, d. h. nur wenig mehr als der vorläufige Werth. Wählt man unter Vernachlässigung von $1{,}6\,d$ die Gl. 17, so erhält man

$$d = 0{,}35\,\sqrt[5]{\frac{0{,}01^2 \cdot 100}{2}} = 0{,}121 \text{ m}.$$

Für die meisten Fälle der Anwendung wird diese Gl. 17 zu wählen sein.

b) Benutzung der Druckmesser (Piëzometer).

Bringt man an den Stellen A und B (Fig. 302) eines Leitungsrohres lothrechte Wasserröhren an, so wird in diesen das Wasser bis zu einer Höhe x_1 bezw. x_2 sich erheben und in dieser, dem hydraulischen Druck an den Stellen A und B entsprechenden Höhe in Ruhe verbleiben. Bezeichnet p_1 den hydraulichen Druck bei A,

so ist $p_1 = \gamma x_1$. Nach Gl. 3, S. 260 ist dann für die Stelle A welche um y_1 unter dem Oberwasser liegt,

$$x_1 = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y_1\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{{w_0}^2}{2g}\right) - z_1,$$

wenn w die Geschwindigkeit in der Röhre und z_1 die Summe der Widerstandshöhen zwischen dem Oberwasser und der Stelle A. Ebenso gilt dann für die Stelle B

$$x_2 = \left(\frac{p_0}{\gamma} + y_2\right) - \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{{w_0}^2}{2g}\right) - z_2.$$

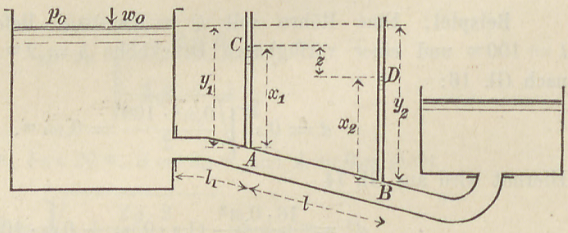
Zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, so entsteht:

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - (z_2 - z_1) \text{ oder}$$

$$(y_2 - x_2) - (y_1 - x_1) = (z_2 - z_1).$$

Nun ist $(y_2 - x_2)$ die Tiefe des Druckwasserstandes D, $(y_1 - x_1)$ diejenige des Druckwasserstandes C unter dem Oberwasser. Der Unterschied beider ist also der unmittelbare Höhenunterschied z der Druckmesser-Wasserspiegel C und D; und nach letzterer Gleichung ist diese Höhe $z = z_2 - z_1$. Es bedeutet aber $z_2 - z_1$ die auf die Strecke $AB = l$ entfallende Widerstandshöhe, mithin wird die zwischen zwei Stellen A und B einer Röhrenleitung auftretende Widerstandshöhe unmittelbar gemessen durch den Höhenunterschied der Wasserspiegel zweier in A und B angebrachten Druckmesser oder Piëzometer. (Letzterer Name kommt von dem griechischen Worte $\pi\iota\acute{\varepsilon}\zeta\omega$ = drücken.) Für den Fall der Figur 302 würde

Fig. 302.



$$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

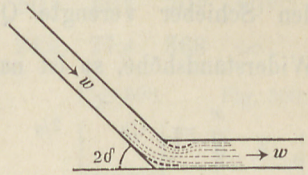
wenn l die Entfernung der beiden Stellen A und B von einander bezeichnet.

Solche Druckmesser sind benutzt worden zur Ermittelung der Ziffer λ; ebenso aber auch zur Messung anderer Widerstandshöhen, die durch Richtungsänderungen, Abstellvorrichtungen (Schieber, Hähne, Ventile) u. dgl. verursacht werden.

c) Widerstand von Knieröhren und gekrümmten Röhren.

Erfährt eine Röhre einen scharfen Knick um einen Winkel 2δ (Fig. 303), wie solches bei Holzröhren vorkommt, so kann das Wasser dieser plötzlichen Richtungsänderung nicht folgen; vielmehr wird unmittelbar nach dem Knick eine Einschnürung und Wiederausbreitung vorkommen, was nach S. 247 einen Stossverlust erzeugt. Versuche, welche Weisbach darüber angestellt hat, sind durch die Formel

Fig. 303.



$$1) \qquad \zeta_2 = 0{,}9457 \sin^2\delta + 2{,}047 \sin^4\delta$$

zum Ausdrucke gebracht, wenn die Widerstandshöhe $\zeta_2 \frac{w^2}{2g}$ bedeutet.

$\delta = 10^0$ giebt $\zeta_2 = 0{,}046$,
„ $= 20^0$ „ „ $= 0{,}139$,
„ $= 30^0$ „ „ $= 0{,}364$,
„ $= 40^0$ „ „ $= 0{,}740$,
„ $= 45^0$ „ „ $= 0{,}984$.

Für Kropfröhren (Krümmer), deren Mittellinie nach einem Viertelkreise vom Halbmesser ϱ geformt ist, gilt mit derselben Bedeutung

$$2) \qquad \zeta_2 = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{1/2\, d}{\varrho}\right)^{3{,}5}.$$

Für $\frac{1/2\, d}{\varrho} =$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
wird $\zeta_2 =$	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440.

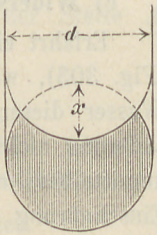
Entspricht die Krümmung nicht einem Viertelkreise, sondern einem Mittelpunktswinkel von δ Graden, so setzt man die Widerstandshöhe

$$3) \qquad z = \zeta_2 \frac{\delta}{90} \frac{w^2}{2g}.$$

d) Widerstand beim Durchgange durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile.

Diese Widerstände beruhen sämmtlich auf innerer Einschnürung. Weisbach's Versuche vom Jahre 1842 haben zu folgenden Ergebnissen geführt.

Fig. 304.

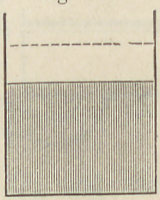


Schieber in kreisförmigem Rohre:

Ist F der Querschnitt des unverengten Rohres, w die Geschwindigkeit in demselben, F_1 der durch den Schieber verengte Querschnitt, $\zeta_3 \frac{w^2}{2g}$ die Widerstandshöhe, so ist nach Fig. 304 bei

$\frac{x}{d} =$	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
$\frac{F_1}{F} =$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta_3 =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8.

Fig. 305.



Schieber im Rohre von rechteckigem Querschnitte (Fig. 305):

$\frac{F_1}{F} =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\zeta_3 =$	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193.

Hahn mit kreisförmiger Durchgangsöffnung; Stellwinkel δ (Fig. 306):

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	65^0	82^0
$\frac{F_1}{F} =$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	0
$\zeta_3 =$	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	∞.

Hahn mit rechteckiger Durchgangsöffnung:

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	67^0
$\frac{F_1}{F} =$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	0
$\zeta_3 =$	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	∞.

Drosselklappe (Fig. 307) in kreisförmigem Rohre:

Fig. 306.

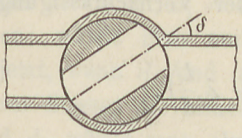
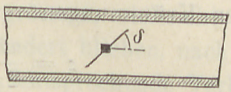


Fig. 307.



Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	90^0
$\zeta_3 =$	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞.

Drosselklappe in rechteckigem Rohre:

Stellwinkel $\delta =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	90^0
$\zeta_3 =$	0,45	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	∞.

Für Kegelventile (Fig. 308) ist

$$\zeta_3 = \left(1{,}537\,\frac{F}{F_1} - 1\right)^2,$$

wenn F_1 der kleinste Durchflussquerschnitt.

Fig. 308.

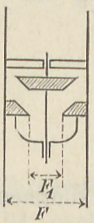
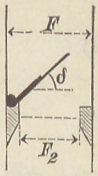


Fig. 309.



Für Klappenventile (Fig. 309) ist, wenn die Öffnung im Ventilsitz

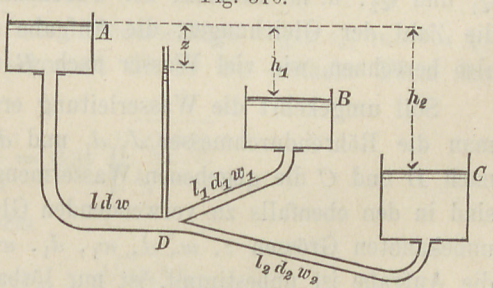
$$F_2 = 0{,}535\,F,$$

für $\delta =$	70^0	60^0	50^0	45^0	40^0	35^0	30^0	25^0	20^0	15^0
$\zeta_3 =$	1,7	3,2	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90.

e) Wasserleitung mit Verzweigung.

Von einem Hauptbehälter A (Fig. 310) werde nach zwei Stellen B und C die sekundl. Wassermenge Q_1 bezw. Q_2 geliefert. Von A nach D führe ein Hauptrohr von der Weite d, der Länge l. Hier theile sich das Rohr in die Zweige von den Abmessungen d_1, l_1 bezw. d_2, l_2. Zur Berechnung von Q_1 und Q_2 denke man sich an der Verzweigungsstelle D einen

Fig. 310.



Druckmesser (Piëzometer) angebracht, dessen Wasserspiegel um z unter dem Oberwasser liegen möge. Dann ist z die wirksame Druckhöhe von A bis D, d. h. unter Vernachlässigung der unbedeutenden Krümmungen:

1) $$z = \frac{w^2}{2g}\left(1{,}6 + \lambda\frac{l}{d}\right).$$

Wenn man annimmt, dass der Übergang aus dem Hauptrohr in die beiden Zweige allmählich erfolge, braucht ein Verlust dort nicht angenommen zu werden. Auch wollen wir voraussetzen, der Unterschied zwischen w, w_1 und w_2 sei so gering, dass zur Erzeugung der letzteren beiden Geschwindigkeiten aus der ersteren keine nennenswerthe Druckhöhe nöthig werde. Von D bis B ist $h_1 - z$ die wirksame Druckhöhe, welche zur Überwindung der Röhrenreibung und der Gefässreibung bei B dient, daher

2) $$h_1 - z = \frac{{w_1}^2}{2g}\left(\zeta_0 + \lambda\frac{l_1}{d_1}\right);$$ ebenso

3) $$h_2 - z = \frac{{w_2}^2}{2g}\left(\zeta_0 + \lambda\frac{l_2}{d_2}\right).$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen:

4) $$Q_1 = \frac{{d_1}^2\pi}{4}\cdot w_1;$$

5) $$Q_2 = \frac{{d_2}^2\pi}{4}\cdot w_2;$$

6) $$Q_1 + Q_2 = \frac{d^2\pi}{4}\cdot w.$$

In diesen sechs Gleichungen sind unbekannt: z, w, w_1, w_2, Q_1 und Q_2; d. h. die Zahl der Unbekannten ist ebenso gross, wie die Zahl der Gleichungen, die Aufgabe somit lösbar. Man kann also berechnen, wie viel Wasser nach B und C fliesst.

Soll umgekehrt die Wasserleitung erst entworfen werden, will man die Röhrendurchmesser d, d_1 und d_2 so bestimmen, dass sie nach B und C die gegebenen Wassermengen Q_1 und Q_2 liefern, so sind in den ebenfalls zu verwendenden Gleichungen 1—6 die sieben unbekannten Grössen z, w, d, w_1, d_1, w_2 und d_2 enthalten, d. h. die Aufgabe ist unbestimmt, ist nur lösbar, wenn man für eine der Grössen einen Werth willkürlich annimmt, etwa $w = 1$ bis $1{,}3^{\,m}$.

Dass die Aufgabe verschiedene Lösungen zulässt, erkennt man auch unmittelbar durch folgende Überlegung: Nehmen wir an, die Röhrenweiten $d = 0{,}3^{\,m}$; $d_1 = 0{,}2$, $d_2 = 0{,}1^{\,m}$ genügen den gestellten Bedingungen; würde man nun d vergrössern, vielleicht auf $0{,}4^{\,m}$, so würde jetzt, wenn d_1 und d_2 unverändert blieben, nach B und C mehr Wasser fliessen als bisher; durch entsprechende Verkleinerung von d_1 und d_2 würde man aber diesen Überschuss wieder in Wegfall bringen können und erhielte somit drei andere Weiten d, d_1 und d_2, die ebenfalls die Aufgabe zu erfüllen vermöchten.

Für längere Röhrenleitungen kann man in Gl. 1 den Summanden 1,6, in Gl. 2 und 3 die Summanden ζ_0 vernachlässigen und erhält statt der Gl. 1—3:

7) $$z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

8) $$h_1 - z = \lambda \frac{l_1}{d_1} \frac{{w_1}^2}{2g},$$

9) $$h_2 - z = \lambda \frac{l_2}{d_2} \frac{{w_2}^2}{2g}.$$

Wenn man nun zur Bestimmung der Röhrenweite die Geschwindigkeit w im Hauptrohr annimmt, so ist nach Gl. 7 der Werth z ermittelt, ebenso die Weite des Hauptrohres nach Gl. 6. Da nun auch $h_1 - z$ und $h_2 - z$ bekannt sind, so liefern Gl. 4 u. 8:

10) $$d_1 = \sqrt[5]{\frac{16\,{Q_1}^2 \lambda\, l_1}{\pi^2\, 2g\,(h_1 - z)}};$$ ebenso wird

11) $$d_2 = \sqrt[5]{\frac{16\,{Q_2}^2 \lambda\, l_2}{\pi^2\, 2g\,(h_2 - z)}}.$$

Vertauscht man der festen Niederschläge wegen Q_1 mit $^5/_4\, Q_1$ und setzt $\lambda = 0{,}04$, so bekommt Gl. 10 die einfache Form der Gl. 17, S 281

12) $$d_1 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{{Q_1}^2 l_1}{h_1 - z}}$$

und Gl. 11 ebenso die Form

13) $$d_2 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{{Q_2}^2 l_2}{h_2 - z}}.$$

Beispiel: Es sei $Q_1 = 0{,}1\ \text{cbm/s}$, $Q_2 = 0{,}03\ \text{cbm/s}$, $l = 300\ \text{m}$, $l_1 = 200\ \text{m}$, $l_2 = 500\ \text{m}$, $h_1 = 12\ \text{m}$, $h_2 = 6\ \text{m}$; ferner werde $w = 1\ \text{m}$ angenommen.

Dann wird

$$\frac{d^2\pi}{4} = 0{,}13 \cdot \frac{5}{4} = 0{,}16 \text{ und } d = 0{,}45\ \text{m}$$

und mit $\lambda = 0{,}04$:

$$z = 0{,}04 \frac{300}{0{,}45} \frac{1}{2g} = 1{,}36\ \text{m}.$$

$$d_1 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{0{,}1^2 \cdot 200}{10{,}64}} = 0{,}25\ \text{m};$$

$$d_2 = 0{,}35 \sqrt[5]{\frac{0{,}03^2 \cdot 500}{4{,}64}} = 0{,}22\ \text{m}.$$

f) Widerstand eines kegelförmigen Rohres.

Verengt sich ein Rohr der Länge l_1 von der der Geschwindigkeit w entsprechenden Weite d kegelförmig auf die Weite d_1 (Fig. 311), so gilt in einem Abstand x von der weitesten Stelle für die Weite y die Beziehung

$$d - y = \frac{d - d_1}{l_1} x \quad \text{mit} \quad -dy = \frac{d - d_1}{l_1} dx;$$

für die Geschwindigkeit

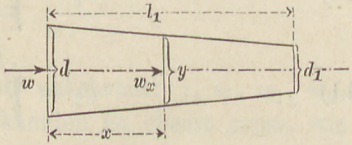
$$w_x = w \frac{d^2}{x^2}.$$

Auf ein Längentheilchen dx kommt (Gl. 5, S. 277) die Widerstandshöhe

$$dz = \lambda \frac{dx}{y} \frac{w_x^2}{2g} = \lambda dx \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{y^5}$$

$$= -\frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 y^{-5} dy,$$

Fig. 311.



daher auf die ganze Länge

$$z = -\frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} d^4 \int_d^{d_1} y^{-5} dy$$

$$= \frac{\lambda l_1}{d - d_1} \frac{w^2}{2g} \frac{d^4}{4} \left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d^4} \right)$$

$$= \lambda \frac{w^2}{2g} \frac{l_1}{d} \left(\frac{1}{4} \frac{\frac{d^4}{d_1^4} - 1}{1 - \frac{d_1}{d}} \right).$$

Der letzte Klammernausdruck giebt an, in welchem Verhältnisse der Widerstand sich vergrössert im Vergleiche mit einem cylindrischen Rohre von der Weite d und der Länge l_1.

$$\frac{d_1}{d} = \frac{1}{2} \text{ giebt } z = \lambda \frac{w^2}{2g} 7{,}5 \frac{l_1}{d}$$

$$\frac{d_1}{d} = \frac{1}{5} \quad „ \quad z = \lambda \frac{w^2}{2g} 195 \frac{l_1}{d}.$$

g) Steighöhe springender Strahlen.

Ein Strahl, der mit der Geschwindigkeit w aus einer Mündung lothrecht emporsteigt, würde im luftleeren Raum eine Höhe $h_s = \frac{w^2}{2g}$ erreichen.

In Folge des Luftwiderstandes vermindert sich die erreichbare Höhe auf $\eta \frac{w^2}{2g}$. Die Ziffer η hängt theils von der Form des Mundstücks ab, weil diese Einfluss darauf hat, ob der Strahl gut geschlossen bleibt oder sich zertheilt; theils aber ist η auch noch von w^2 abhängig.

Es soll hier auf das Verhalten der springenden Strahlen nicht näher eingegangen, nur angeführt werden, dass man als rohe Annäherung an Versuche von Weisbach

1) $$\eta = 1 - 0{,}01 \frac{w^2}{2g} \text{ setzen kann.}$$

Beispiel: Von einem Behälter führe (Fig. 312) ein Rohr von 20 m Länge und 0,02 m Weite zu einem lothrechten kegelförmigen Mundstücke von 0,15 m Länge; es soll die Steighöhe des Springstrahls berechnet werden. Die wirksame Druckhöhe sei 8 m.

Es ist allgemein (vergl. Gl. 10, S. 279 mit $w_0 = 0$ und mit Fortlassung der beiden letzten Glieder)

$$h = \frac{w_2^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{w^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

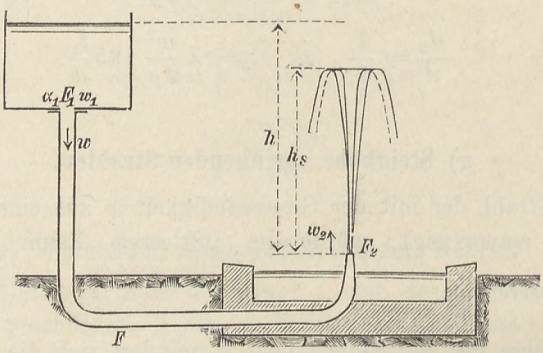
wenn in l zugleich die ideelle (vergrösserte) Länge des Mundstücks enthalten ist. Es ist dann die Geschwindigkeit in der Hauptröhre

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{F^2}{F_2^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}$$

und die Geschwindigkeit des Springstrahls (mit $\zeta_0 = 0{,}085$, $\alpha_1 = 0{,}64$, $\lambda = 0{,}03$)

$$w_2 = \frac{F}{F_2} w = \frac{F}{F_2} \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{F}{F_2^2}\right)^2 + 0{,}21 + 0{,}32 + 0{,}03 \frac{l}{d}}}.$$

Fig. 312.



Ist $d_2 = 0{,}01$ m der Durchmesser des Mundstücks, so wird für $d_2 = 0{,}5\, d$:

$$l = 20 + 7{,}5 \cdot 0{,}15 = 21{,}125 \text{ m}$$

$$w_2 = 4 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{16 + 0{,}53 + 0{,}03 \cdot 1056}} = 7{,}2 \text{ m}.$$

Dann ist $$\frac{w_2^2}{2g} = 2{,}64 \text{ m},$$

$$\eta = 1 - 0{,}026 = 0{,}974,$$

also die Steighöhe $$h_s = 0{,}974 \cdot 2{,}64 = 2{,}57 \text{ m}.$$

Der sekundliche Wasserverbrauch ist

$$Q = 0{,}01^2 \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}2 = 0{,}000565 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0{,}565 \frac{\text{l}}{\text{s.}}.$$

Verengt sich aber das Mundstück auf $d_2 = 0{,}2\, d = 4$ mm, so wird

$$l = 20 + 0{,}15 \cdot 195 = 49 \text{ m};$$

$$w_2 = 25 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{625 + 0{,}53 + 0{,}03 \cdot 2450}} = 11{,}84;$$

$$\frac{w_2^2}{2g} = 7{,}1 \text{ m}; \quad \eta = 1 - 0{,}071 = 0{,}93,$$

also die Steighöhe $$h_s = 0{,}93 \cdot 7{,}1 = 6{,}6 \text{ m},$$

der sekundliche Wasserverbrauch

$$Q = 0{,}004^2 \frac{\pi}{4} \cdot 11{,}84 = 0{,}0001487 \frac{\text{cbm}}{\text{s.}} = 0{,}1487 \frac{\text{l}}{\text{s.}}.$$

Die stärkere Verengung des Mundstücks hat also die Sprunghöhe erheblich vergrössert, den Wasserverbrauch aber bedeutend vermindert.

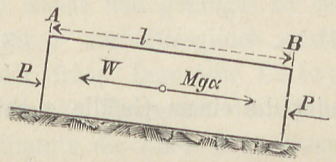
3. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen.

a) Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen.

Soll die beständige (d. h. im Beharrungszustande begriffene) Wasserbewegung gleichförmig, soll die Geschwindigkeit w in allen Querschnitten von gleicher Grösse sein, so muss auch der vom Wasser erfüllte Querschnitt F überall dieselbe Grösse haben. Bei überall gleicher Querschnittsform des Kanalbettes giebt sich also eine gleichförmige Bewegung durch überall gleiche Tiefe in einem Längenschnitte zu erkennen.

In einer ganz von Wasser erfüllten Röhre ist die Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit der Bewegung allein dadurch bedingt, ob der Röhrenquerschnitt überall gleich ist oder nicht; ein oben offenes Kanalbett aber kann vom Wasser auf verschiedene Höhe erfüllt werden, und nur unter bestimmten Bedingungen wird die Bewegung gleichförmig erfolgen.

Fig. 313.



Nehmen wir den Widerstand W, den das Wasser bei seiner Fortbewegung zu überwinden hat, einstweilen wieder, wie bei den Röhren, proportional mit der Berührungsfläche und mit der Geschwindigkeitshöhe an, so ergiebt sich, wenn man (Fig. 313) einen Wasserkörper vom Querschnitt F und der Länge l betrachtet, und u der benetzte Umfang des Querschnitts ist (Gl. 1, S. 277)

$$1) \qquad W = \varkappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Da nun die Druckkräfte P an den beiden Querschnitten A und B sich offenbar aufheben, so muss, wenn man wegen der Kleinheit des Neigungswinkels α dessen Sinus gleich dem Bogen setzt, die Seitenkraft der Schwere

$$Mg\alpha = W, \quad \text{d. h.}$$

$$\gamma F l \alpha = \varkappa u l \frac{w^2}{2g},$$

also, wenn man, wie auf S. 277, $\varkappa = \gamma\beta$ setzt,

2) $$\alpha = \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

sein, mit β als Widerstandsziffer für Wasser in dem Kanale. Bei einem Querschnitte von sehr grosser Breite b im Verhältnisse zur Tiefe ist annähernd $u = b$ und $\frac{F}{u}$ gleich der mittleren Tiefe. Wegen der massgebenden Bedeutung dieses Quotienten $F : u$ in Gl. 2 nennt man daher allgemein

3) $$\frac{F}{u} = r$$

die mittlere hydraulische Tiefe oder den mittleren Radius; hiermit wird das für gleichmässige Bewegung nöthige Gefällverhältnis

4) $$\alpha = \frac{\beta}{r} \frac{w^2}{2g},$$

oder die einem Gefälle α entsprechende Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{\frac{2g\alpha r}{\beta}}, \quad \text{wofür man mit}$$

5) $$\sqrt{\frac{2g}{\beta}} = k \quad \text{zu setzen pflegt}$$

6) $$w = k\sqrt{\alpha r}.$$

Ebenso wie bei der Bewegung in Röhren (S. 278) ist aber auch hier die einfache Annahme für W (Gl. 1) nicht genau zutreffend und deshalb auch β und das daraus folgende k keine völlig konstante oder etwa nur von der Regelmässigkeit des Bettes abhängige Grösse.

Bei der Berechnung von Röhrenweiten hatte die Veränderlichkeit von $\lambda = 4\beta$ keine sehr grosse Wichtigkeit. Man musste sich nur hüten, die Widerstände zu unterschätzen, während eine Überschätzung nur eine etwas reichliche Weite lieferte, deren Einfluss auf die Kosten meist nicht erheblich war, die Leistungsfähigkeit der Röhrenleitung aber für eine um so längere Zeit sicherte. Bei einer Röhrenleitung hat man das Wasser mittels

Abstellvorrichtungen stets in der Gewalt, bei einem oben offenen Kanal oder Fluss aber nicht.

Ist bei einem Kanal oder Flusse das Gefällverhältnis α zu gross, so entsteht eine Geschwindigkeit, die grösser ist, als beabsichtigt oder erwartet war. In Folge dessen kann möglicherweise das Kanalbett beschädigt und auch die Wassertiefe vielleicht für etwaige Schifffahrt oder für Rücksichten der Landwirthschaft zu klein werden, während der entgegengesetzte Fall eine Überschwemmung herbeiführen kann. Während man eine Wasserleitung mit Gewalt im Zaume hält, kann man Kanäle und Flüsse nur durch die Mittel der Wissenschaft beherrschen. Aus diesem Grunde hat man seit etwa 150 Jahren mit Aufwendung grosser Kosten sich bemüht, für die Ziffer k befriedigende Gesetze aufzufinden.

Der ostfriesische Baubeamte Brahms erkannte zuerst 1753, wie es möglich sei, dass das Wasser beim Abwärtsfliessen eine gleichförmige Bewegung ausführen könne und gelangte zu der Formel 6, indem er den Widerstand mit w^2 verhältnisgleich setzte. Zu gleichem Ergebnisse kam 1775 der franz. Ingenieur Chézy. Eytelwein (geb. 1764, gest. 1848), der 21 Jahre an der Spitze des preussischen Bauwesens stand, bestimmte die Ziffer k zu einem Werthe, der, auf Metermafs umgerechnet, zu

$$k = 50$$

abgerundet werden kann.

Mit bedeutenden Mitteln wurden dann 1850—60 in Nordamerika unter Leitung der Ingenieure Humphreys und Abbot umfassende Versuche am Mississippi und seinen Nebenflüssen angestellt. Diese Flüsse verursachten nämlich fast alljährlich verheerende Überschwemmungen, und zur Verbesserung der Wasserläufe bedurfte man vor Allem der Kenntnis der Bewegungsgesetze. Die von den amerikanischen Ingenieuren aufgestellte Formel ist sehr verwickelt, sie lautet

$$7) \qquad w = \left\{ \sqrt{0{,}0025\, m + \sqrt{68{,}72\, r_1 \sqrt{\alpha}} - 0{,}05 \sqrt{m}} \right\}^2$$

$$\text{mit} \quad m = \frac{0{,}933}{\sqrt{r} + 0{,}457}; \quad r_1 = \frac{F}{u + b},$$

wenn b die Breite des Wasserspiegels bedeutet. Humphreys und Abbot glaubten nämlich auch einen verzögernden Einfluss der über dem Wasserspiegel befindlichen Luft annehmen zu sollen, weshalb in der Hülfsgrösse r_1 der Gesammtumfang $u + b$ vorkommt.

Sehr umfassende Versuche wurden auch im Auftrage der französischen Regierung in den Jahren 1856—64 unter der Leitung von Darcy und nach dessen Tode von Bazin angestellt. Diese Versuche erstreckten sich auf Gerinne, Kanäle und Flüsse der verschiedensten Art. Bazin fasste die Ergebnisse in die Formel zusammen:

8) $$w = \sqrt{\frac{ra}{m + \frac{n}{r}}},$$

oder, wenn man die Grundform der Gl. 6 beibehält, also $w = k\sqrt{ra}$ setzt:

9) $$k = \frac{1}{\sqrt{m + \frac{n}{r}}}$$

und wegen Gl. 5 die Widerstandsziffer

10) $$\beta = \frac{2g}{k^2} = 2g\left(m + \frac{n}{r}\right).$$

Hierin bedeuten m und n Ziffern, die von der Beschaffenheit der Kanalwand, bezw. des Flussbettes abhängen. Es gelten:

1. für Kanäle aus gehobeltem Holz oder aus Cement:

$$m = 0{,}000\,15;\ n = 0{,}000\,004\,5;$$

2. für Kanäle aus ungehobeltem Holz, aus Quadern oder Ziegeln:

$$m = 0{,}000\,19;\ n = 0{,}000\,013\,3;$$

3. für Kanäle aus Bruchsteinmauerwerk:

$$m = 0{,}000\,24;\ n = 0{,}000\,06;$$

4. für Kanäle in Erde:

$$m = 0{,}000\,28;\ n = 0{,}000\,35.$$

Diese Formeln sagen aus, der Widerstand sei wohl mit dem Quadrate der Geschwindigkeit verhältnisgleich, nicht aber einfach mit der Grösse der Berührungsfläche, sondern stehe zu dieser in einer verwickelbaren Beziehung, im wesentlichen übereinstimmend mit der Darcy'schen Formel für λ bei Röhren (Gl. 7, S. 278).

Die Formeln von Humphreys und Abbot und die von Bazin ergänzen sich und schliessen sich auch gegenseitig aus. Erstere ist aus den Messungen an grossen Strömen gewonnen, in denen sich das Wasser trotz geringen Gefälles wegen grosser Tiefe r mit grosser Geschwindigkeit bewegt und passt auch nur für solche, während dagegen Bazin's Formel für kleinere Gewässer ($r < 6^m$) mit stärkerem Gefälle geeignet ist.

Im Jahre 1869 haben sich nun die schweizerischen Ingenieure Ganguillet und Kutter mit gutem Erfolge der schwierigen Aufgabe unterzogen, die Ergebnisse der Messungen in Nordamerika und in Frankreich in eine einzige Formel von allgemeiner Gültigkeit zusammenzufassen. Danach ist, wenn man die Form $w = k\sqrt{r\alpha}$ beibehält,

$$11) \qquad k = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{\alpha}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}.$$

Hierin ist n von der Rauhigkeit des Bettes abhängig; man hat zu setzen:

1. für Kanäle aus gehobeltem Holz oder aus Cement: $n = 0{,}010$;
2. für Kanäle aus ungehobeltem Holz: $n = 0{,}012$;
3. für Kanäle aus Quadern oder Ziegeln: $n = 0{,}0013$;
4. für Kanäle aus Bruchsteinen: $n = 0{,}0017$;
5. für Kanäle in Erde: $n = 0{,}025$;
6. für Gewässer mit gröberen Geschieben oder mit Wasserpflanzen: $n = 0{,}030$.

Bazin selbst hat sich in anerkennendster Weise über die Formel von Ganguillet und Kutter ausgesprochen, und sie kann als die beste allgemeine Formel bezeichnet werden.

Bei den meisten einschlägigen Aufgaben des Wasserbaues handelt es sich (besonders in Deutschland) um kleinere und mittlere Wasserläufe, d. h. auf Fälle des Anwendungsgebietes der Bazin'schen Formel; da nun letztere einfacher ist als die schweizerische, so ist für diese Fälle die Bazin'sche Formel zu empfehlen. Für Kanäle in Erde ergeben sich für verschiedene Grössen r die Werthe k und $\beta = 2g : k^2$, wie folgende Tabelle zeigt:

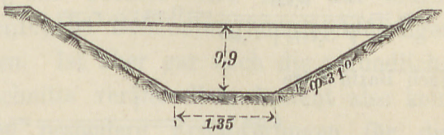
Werthe k und β nach der Bazin'schen Formel für Kanäle in Erde.

r	k	β
0,1	16,3	0,0742
0,2	22,2	0,0397
0,3	26,3	0,0284
0,4	29,4	0,0226
0,5	31,9	0,0192
0,6	34,0	0,0169
0,7	35,8	0,0153
0,8	37,3	0,0141
0,9	38,7	0,0131
1,0	39,8	0,0124
1,1	40,9	0,0117
1,2	41,8	0,0112
1,3	42,7	0,0108
1,4	43,4	0,0104
1,5	44,1	0,0101
1,6	44,3	0,0098
1,7	45,4	0,0095
1,8	45,9	0,0093
1,9	46,4	0,0091
2,0	46,9	0,0089
2,5	48,8	0,0082
3,0	50,2	0,0078
4,0	52,2	0,0072
5,0	53,5	0,0069
6,0	54,4	0,0066

Beispiel 1: Ein Graben von einem Querschnitte nach Fig. 314 habe ein Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}000\,441$ Bei dem Böschungswinkel $\varphi = 31^0$ ist $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}6$, $\sec\varphi = 1{,}17$, $\sin\varphi = 0{,}515$, $\operatorname{cosec}\varphi = 1{,}942$. Dann ist die mittlere Breite

$$1{,}35 + \frac{0{,}9}{0{,}6} = 2{,}85\ \text{m},$$

Fig. 314.



der Querschnitt

$$F = 2{,}85 \cdot 0{,}9 = 2{,}565\ \text{qm};$$

der benetzte Umfang $u = 1{,}35 + 2 \cdot 0{,}9 \cdot \operatorname{cosec}\varphi = 4{,}35$ m, daher $r = 2{,}565 : 4{,}35 = 0{,}529$ m. Nach Messungs-Ergebnissen war die wirkliche Geschwindigkeit $w = 0{,}467$ m. Es sollen damit die Ergebnisse der vorstehenden Formeln verglichen werden. Es ist

$$\sqrt{r\alpha} = \sqrt{0{,}529 \cdot 0{,}000\,441} = 0{,}015\,27.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50; \quad w = 0{,}763.$$

Nach Humphreys und Abbot:

$$m = \frac{0{,}933}{\sqrt{0{,}529} + 0{,}457} = 0{,}94; \quad r_1 = \frac{2{,}565}{4{,}35 + 4{,}35} = 0{,}279; \quad w = 0{,}563.$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0{,}000\,28 + \frac{0{,}000\,35}{0{,}528}}} = 32{,}57 \quad \text{und} \quad w = 0{,}497.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,441}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,441}\right)\frac{0{,}025}{\sqrt{0{,}529}}} = 34{,}80 \quad \text{und} \quad w = 0{,}531.$$

Hiernach geben die Formeln sämmtlich zu grosse Werthe für die Geschwindigkeit; die Bazin'sche schliesst sich dem Ergebnisse der Messung am besten an, dann folgt die schweizerische, dann die amerikanische Formel, während die Eytelwein'sche Formel am meisten abweicht.

Beispiel 2: Die Elbe hatte bei Altengamm oberhalb Hamburg bei Hochwasser im März 1881 eine Wasserspiegelbreite $b = 587{,}4$ m, einen benetzten Umfang $u = 591{,}4$ m, einen Flächeninhalt $F = 3132{,}7$ qm, mithin $r = 5{,}297$ m. Das Gefällverhältnis betrug $\alpha = 0{,}000\,152$. Die Geschwindigkeit wurde zu $w = 1{,}17$ m gemessen. Es ist

$$\sqrt{r\alpha} = \sqrt{5{,}297 \cdot 0{,}000\,152} = 0{,}028\,38.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50; \quad w = 1{,}42\ \text{m}.$$

Nach Humphreys und Abbot wäre

$$m = \frac{0{,}933}{\sqrt{5{,}297} + 0{,}457} = 0{,}389; \qquad r_1 = \frac{3132{,}7}{591{,}4 + 587{,}4} = 2{,}658\ \text{m}; \quad w = 1{,}42.$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0{,}000\,28 + \frac{0{,}000\,35}{5{,}297}}} = 53{,}8; \quad w = 1{,}53.$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}001\,55}{0{,}000\,152}\right)\frac{0{,}025}{\sqrt{5{,}297}}} = 53{,}8; \quad w = 1{,}53.$$

Auch in diesem Falle liefern die Formeln sämmtlich zu grosse Werthe; die amerikanische und die Eytelwein'sche stimmen überein und schliessen sich der Messung am nächsten an, während die Bazin'sche und die schweizerische Formel am meisten, und zwar ebenfalls um gleich viel abweichen.

In beiden Fällen stimmen die Ergebnisse der Messung mit denen der Formeln, selbst der am besten passenden, nicht sehr befriedigend überein. Es hat eben jeder Bach, jeder Kanal, jeder grössere Theil eines langgestreckten Flusses seine besondere Eigenthümlichkeit, seinen besonderen Rauhigkeitsgrad, d. h. seine besonderen Ziffern m und n (nach Bazin) bezw. n (nach Ganguillet und Kutter), die der Wasserbaubeamte, der sich mit dem Gewässer zu beschäftigen hat, entweder durch Messungen feststellen oder nach dem Augenschein auf Grund genauerer Kenntnis anderer Wasserläufe abschätzen muss. Die Eigenthümlichkeiten eines Flusses lassen sich nicht wohl in allgemeine Formeln zwängen. Wenn man dies erwägt, wird man sich bezüglich allgemeiner Formeln mit dem bisher Erreichten begnügen können. Auch ist zu bedenken, dass Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Wassers, Wirbel u. dgl. häufig die Messung erschweren und ihre Richtigkeit beeinträchtigen, so dass zuweilen auch deren Ergebnisse von der Wirklichkeit nicht unerheblich abweichen können Schliesslich aber muss betont werden, dass die vorstehenden Formeln sich nur auf eine **gleichförmige** Bewegung beziehen. d. h. an die Bedingung geknüpft

sind, dass der vom Wasser eingenommene Querschnitt F sich auf eine gewisse Länge des Flusses nicht erheblich ändere. Diese Bedingung wird sehr häufig nicht erfüllt sein, und manche Abweichung zwischen Messung und Formel wird man auf diesen Umstand zurückführen können. Die Behandlung ungleichförmiger Bewegung erfolgt weiter unten. Ist aber gar noch die sekundliche Wassermenge Q eines Querschnitts veränderlich, besteht also kein Beharrungszustand, so treten besondere Erschwerungen für die Berechnung ein, weshalb solche Fälle hier nicht behandelt werden können.

b) Querschnittsform kleinsten Widerstandes.

Hat ein Kanal den Zweck, einer Wasserkraftmaschine (Wasserrad oder Turbine) das Betriebswasser zuzuführen, so kann es darauf ankommen, von dem ganzen zur Verfügung stehenden Gefälle für den Zuleitungskanal möglichst wenig zu verbrauchen, damit für die Kraftmaschine möglichst viel übrig bleibe. Da nun nach Gl. 4, S. 292 das erforderliche Gefällverhältnis mit $r = F : u$ umgekehrt proportional ist, so wird diejenige Form des vom Wasser erfüllten Kanalquerschnitts am günstigsten sein, bei welcher r möglichst gross, d. h. bei gegebener Querschnittsfläche F der vom Wasser benetzte Umfang u möglichst klein ist.

Da von allen Figuren gegebenen Flächeninhalts der Kreis den geringsten Gesammtumfang hat, so wird, weil bei einem Kanale nur der vom Wasser benetzte Umfang in Frage kommt, der Halbkreis die Kanalform kleinsten Widerstandes sein (Fig. 315), welche annähernd für den unteren Theil des Querschnitts gemauerter Entwässerungskanäle Anwendung findet.

Fig. 315.

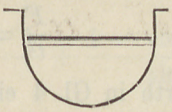
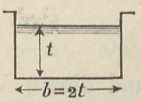


Fig. 316.

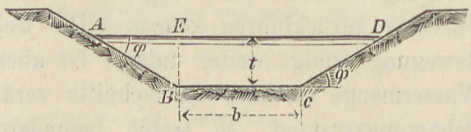


Für rechteckig zu formende Holzgerinne liefert das halbe Quadrat (Fig. 316) den kleinsten Widerstand, da das ganze Quadrat von allen Rechtecken gegebener Fläche den kleinsten Umfang hat.

Für Kanäle in Erde ist der Böschungswinkel φ der Seitenwände durch die Beschaffenheit des Erdreichs bedingt; Bodenbreite b

und Wassertiefe t sind so zu wählen, dass bei gegebener Fläche F der benetzte Umfang u möglichst klein werde. Da nun (Fig. 317) der Grundriss AE der Seitenwand AB die Grösse $t \cdot \cot \varphi$ hat, so ist die mittlere Breite $b + t \cdot \cot \varphi$, daher

Fig. 317.



1) $F = t(b + t \cot \varphi)$

und, weil $AB = t : \sin \varphi$, der benetzte Umfang

2) $$u = b + \frac{2t}{\sin \varphi}.$$

Durch Gl. 1 ist die Bodenbreite bedingt zu

$$b = \frac{F}{t} - t \cot \varphi; \text{ hiermit wird}$$

3) $$u = \frac{F}{t} - t \cot \varphi + \frac{2t}{\sin \varphi} = \frac{F}{t} + t \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Damit nun u als $f(t)$ ein Minimum werde, muss

4) $$\frac{du}{dt} = -\frac{F}{t^2} + \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = 0, \text{ d. h.}$$

5) $$t = \sqrt{\frac{F \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}$$

sein. Dass dieser Werth u zu einem Minimum und nicht zu einem Maximum macht, ist unmittelbar daraus ersichtlich, dass für $t = 0$ der Umfang u nach Gl. 3 unendlich gross wird.

Ein einfaches Verhältnis zwischen Bodenbreite b und Wassertiefe t ergiebt sich, wenn man aus Gl. 1 bildet

$$\frac{F}{t^2} = \frac{b}{t} + \cot \varphi$$

und diesen Werth in Gl. 4 einsetzt; dann wird

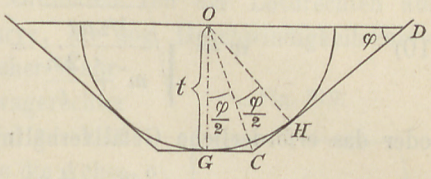
$$\frac{b}{t} + \cot \varphi = \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{b}{t} = 2 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = 2 \frac{2 \sin^2(1/2\,\varphi)}{2 \sin 1/2\,\varphi \cdot \cos 1/2\,\varphi}, \quad \text{d. h.}$$

6) $$\frac{b}{t} = 2 \operatorname{tg}(1/2\,\varphi).$$

Diese Gleichung bedeutet, dass der vom Wasser erfüllte Querschnitt ein einem Halbkreise vom Halbmesser t umschriebenes Trapez sein muss. Denn bei einem solchen (Fig. 318) ist

Fig. 318.



$$\sphericalangle GOH = \varphi,$$

$$\sphericalangle GOC = {}^1/_2\,\varphi, \text{ d. h.}$$

$$\frac{{}^1/_2\,b}{t} = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

übereinstimmend mit Gl. 6.

Für $\varphi = 90^0$ entsteht wieder das halbe Quadrat. Die Rechnung führt also darauf, dass man sich der überhaupt günstigsten Halbkreisform so weit zu nähern habe, wie die vorhandenen Bedingungen es zulassen.

Aus Gl. 5 ergiebt sich:

$$7) \qquad \frac{F}{t^2} = \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Setzt man aber in Gl. 2 für b den Werth $2\,t\operatorname{tg}({}^1/_2\,\varphi)$ nach Gl. 6 ein, so entsteht

$$u = 2\,t \cdot \operatorname{tg}({}^1/_2\,\varphi) + \frac{2\,t}{\sin\varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{u}{2\,t} = \frac{\sin({}^1/_2\,\varphi)}{\cos({}^1/_2\,\varphi)} + \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{2\sin^2({}^1/_2\,\varphi)\cos({}^1/_2\,\varphi) + \cos({}^1/_2\,\varphi)}{\cos({}^1/_2\,\varphi)\sin\varphi}$$

$$= \frac{2\sin^2({}^1/_2\,\varphi) + 1}{\sin\varphi} + \frac{1 - \cos\varphi + 1}{\sin\varphi} \quad \text{also}$$

$$8) \qquad \frac{u}{2\,t} = \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Aus Gl. 7 und 8 folgt:

$$\frac{F}{t^2} = \frac{u}{2\,t} \quad \text{oder} \quad \frac{F}{u} = \frac{t}{2}.$$

Also ist bei der günstigsten Kanalform die mittlere hydraulische Tiefe

9) $$r = \frac{F}{u} = \frac{t}{2}$$

unabhängig von φ. Somit wird nach der Bazin'schen Formel

10) $$w = \sqrt{\frac{1/2\,\alpha t}{m + \frac{2n}{t}}} = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1/2\,mt + n}}$$

oder das erforderliche Gefällverhältnis

11) $$\alpha = w^2\left(\frac{2m}{t} + \frac{4n}{t^2}\right) = w^2\left(\frac{m}{r} + \frac{n}{r^2}\right).$$

Beispiel: Ein Zuleitungskanal soll in der Sekunde $Q = 2$ cbm Wasser liefern; die Geschwindigkeit werde, damit einerseits keine Beschädigung der Kanalwände, andererseits keine Absetzung von Sinkstoffen erfolge, zu $w = 0{,}5$ m gewählt, so dass $F = 4$ qm werden muss. Es soll hiernach die Querschnittsform kleinsten Widerstandes bestimmt werden unter Annahme eines Böschungswinkels $\varphi = 30^0$.

Gl. 6 bestimmt $\frac{b}{t} = 2 \cdot \operatorname{tg} 15^0 = 0{,}536$. — Nach Gl. 5 wird

$$b = \sqrt{\frac{4 \cdot \sin 30^0}{2 - \cos 30^0}} = 1{,}33 \text{ m}, \quad \text{also}$$

$$t = 0{,}536 \cdot 1{,}33 = 0{,}71 \text{ m}.$$

Nach Gl. 9 ist dann $r = 0{,}355$ und nach Gl. 11 das erforderliche Gefällverhältnis

$$\alpha = 0{,}25\left(\frac{0{,}000\,28}{0{,}355} + \frac{0{,}000\,35}{0{,}355^2}\right) = 0{,}000\,891 = 1 : 1122.$$

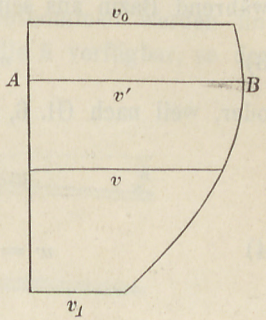
Grosser Werth ist dieser Rechnung nicht beizulegen, da in Wirklichkeit auch die ebenfalls von Breite und Tiefe abhängigen Kosten des Kanals mit in Frage kommen.

c) Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts.

Im Vorstehenden wurde die Bewegung des Wassers in einem Kanale so aufgefasst, als ob die Wassermasse wie ein starrer prismatischer Körper in dem Kanal abwärts glitte, als ob alle Theile dieses Körpers die gleiche Geschwindigkeit w hätten. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, vielmehr ist die Geschwindigkeit der Wassertheilchen an verschiedenen Stellen des Querschnitts eine verschiedene. In Folge der Reibung werden die nahe den Kanalwandungen befindlichen Wassertheilchen zurückgehalten und fliessen

langsamer als die entfernteren. Im Wasserspiegel giebt sich bei Messungen ein sog. Stromstrich zu erkennen, wo die Geschwindigkeit grösser ist als zu beiden Seiten. In einer Lothrechten sind die Geschwindigkeiten ebenfalls von Punkt zu Punkt verschieden. Stellt man diese durch wagerechte Ordinaten von der Lothrechten aus dar, so ergiebt sich eine Kurve, die sog. Geschwindigkeitskurve, (Fig. 319). Diese ist mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit eine Parabel mit wagerechter Achse. Würde am Wasserspiegel gar kein Widerstand auftreten, so müsste die Achse AB der Parabel wohl im Wasserspiegel liegen. Bei ruhiger Luft bietet diese aber dem Wasser einen, wenn auch geringen, Widerstand, der bewirkt, dass die grösste Geschwindigkeit v' einer Lothrechten sich etwas unter Wasser findet. Stromaufwärts wehender Wind schiebt die Achse der Parabel nach unten, und umgekehrt. Die Höhenlage der Achse ist daher schwankend. Kennt man die Geschwindigkeit v an drei verschiedenen Stellen einer Lothrechten, so ist damit die Parabel bestimmt, weil man aus diesen den Parameter der Parabel, die Höhenlage ihrer Achse und den Abstand $AB = v'$ ihres Scheitels von der Lothrechten berechnen kann.

Fig. 319.



Ist dF ein Theilchen der Querschnittsfläche, v die zugehörige Geschwindigkeit, so ist $dQ = dF \cdot v$ die zugehörige sekundliche Wassermenge, dargestellt durch ein wagerechtes Prisma vom Querschnitte dF und der Länge v. Denkt man sich zu allen Flächentheilchen die entsprechende Geschwindigkeit rechtwinklig aufgetragen, so entsteht ein Körper, dessen lothrechte in der Stromrichtung geführte Schnitte die Geschwindigkeitsflächen (Fig. 319) sind und dessen Inhalt die sekundliche Gesammtwassermenge Q darstellt. Verwandelt man diesen Körper in ein gerade abgeschnittenes Prisma vom Querschnitt F, so ist seine Länge

$$1) \qquad w = \frac{Q}{F}$$

die mittlere Geschwindigkeit des Querschnitts, auf welche sich die Erörterungen S. 291 bis 302 durchweg beziehen.

Werthvoll ist die Beziehung zwischen der grössten Oberflächengeschwindigkeit $v_{0\,max}$ im Stromstrich und der mittleren Geschwindigkeit w des ganzen Querschnittes, weil sie gestattet, aus der alleinigen Messung von $v_{0\,max}$ die ganze Wassermenge Q, wenn auch nur roh, zu bestimmen. Die einfachste, wenn auch sehr unverlässliche Formel ist

2) $$w = {}^3/_4 v_{0\,max},$$

während Bazin aus seinen Versuchen abgeleitet hat

3) $$w = v_{0\,max} - 14\sqrt{r\alpha},$$

oder, weil nach Gl. 6, S. 292, $k\sqrt{r\alpha} = w$,

$$w = v_{0\,max} - 14\frac{w}{k}, \quad \text{d. h.}$$

4) $$w = \frac{v_{0\,max}}{1 + \frac{14}{k}} = v_{0\,max}\frac{k}{k + 14}.$$

Für Kanäle in Erde gilt für verschiedene Werthe von r:

r (Meter)	$\frac{w}{v_{0\,max}}$	r (Meter)	$\frac{w}{v_{0\,max}}$
0,1	0,537	1,2	0,749
0,2	0,613	1,3	0,753
0,3	0,653	1,4	0,756
0,4	0,678	1,6	0,762
0.5	0,695	1,8	0,766
0,6	0,709	2,0	0,770
0,7	0,719	2,5	0,777
0,8	0,727	3,0	0.782
0,9	0,734	4,0	0,788
1,0	0,740	5,0	0,792
1,1	0,745	6,0	0,795

Beispiel: In dem ersten Beispiel auf S. 297 war $r = 0{,}528$, k nach Bazin $= 32{,}57$, daher wird

$$w : v_{0\,max} = \frac{32{,}6}{32{,}6 + 14} = 0{,}7.$$

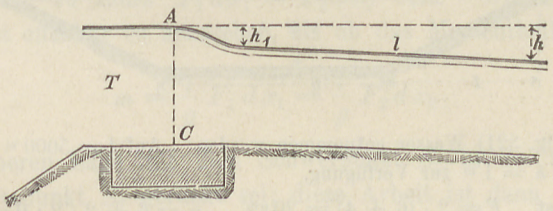
In dem zweiten Beispiele auf S. 297 mit $r = 5{,}297$ war nach Bazin $k = 53{,}8$, daher wird

$$w : v_{0\,max} = \frac{53{,}8}{53{,}8 + 14} = 0{,}79\,.$$

d) Eintritt des Wassers in einen Kanal.

Soll aus einem Teiche T (Fig. 320) oder sonstigem Wasserbehälter durch einen Ufereinschnitt AC und einen anschliessenden Kanal eine sekundliche Wassermenge Q entnommen werden und ist auf eine Länge l ein Wasserspiegel-Gefälle h verfügbar, so darf

Fig. 320.



man nicht etwa voraussetzen, dass das Wasser im Kanal eine Tiefe AC annehmen werde. Vielmehr wird ein Theil h_1 des Gefälles beim Eintritte des Wassers in den Kanal dazu verbraucht, dem Wasser, das im Teiche fast in Ruhe war, die Kanalgeschwindigkeit w zu ertheilen; es ist $h_1 = \frac{w^2}{2g}$, und erst der Rest $h - h_1$ dient zur Überwindung der Reibung im Kanal und darf, wenn durch gleichmässiges Kanalprofil eine gleichförmige Bewegung erzielt wird, gleichmässig auf die Länge l vertheilt werden. Da w noch unbekannt, so kann man, wenn r die mittlere hydraulische Tiefe des Kanals ist, folgendermassen rechnen: Das ganze Gefälle h zerlegt sich in $h_1 = \frac{w^2}{2g}$ und den Theil $\alpha l = \beta \frac{w^2}{2g} \frac{l}{r}$ (s. S. 292, Gl. 4); es ist also

$$1) \qquad h = \frac{w^2}{2g} + \beta \frac{l}{r} \frac{w^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}\left(1 + \beta \frac{l}{r}\right).$$

Da aber für gleichförmige Bewegung

$$\alpha r = \beta \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder} \quad \frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha r}{\beta},$$

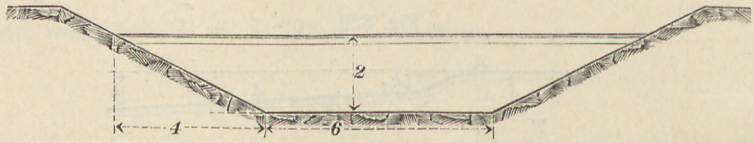
so ergiebt die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 1:

$$h = \frac{\alpha r}{\beta}\left(1 + \beta\frac{l}{r}\right) = \alpha\left(\frac{r}{\beta} + l\right), \quad \text{d. h.}$$

$$2) \qquad \alpha = \frac{\beta h}{r + \beta l}.$$

Beispiel: Aus einem Behälter soll mittels eines Kanales von 6 m Bodenbreite, 2 m Tiefe und einem Böschungswinkel $\varphi = 26{,}5^0$ (tg $\varphi = 0{,}5$, sin φ

Fig. 321.



$= 0{,}447$) (Fig. 321) Wasser entnommen werden. Auf $l = 5000$ m Länge steht ein Gefälle $h = 1$ m zur Verfügung.

Es ist $F = 2 \cdot (6 + 4) = 20$ qm, $u = 6 + 2 \cdot 2 : 0{,}447 = 14{,}95$ m, $r = 20 : 14{,}95 =$ rund $1{,}3$ m. Dann wird nach Bazin (vergl. S. 296)

$$\beta = 2g\left(0{,}00028 + \frac{0{,}00035}{1{,}3}\right) = 0{,}0108 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{0{,}0108}{1{,}3 + 54} = \frac{1}{5120}.$$

Dann ist $\alpha \cdot 5000 = 0{,}977$ m das auf den Kanal zu vertheilende Gefälle, während $h_1 = 0{,}023$ m zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit $w = 0{,}68$ m/s. dient. Der Kanal wird daher in der Sekunde $20 \cdot 0{,}67 = 13{,}6$ cbm Wasser liefern.

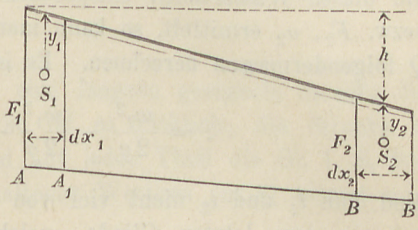
e) Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Das äussere Kennzeichen einer beständigen (im Beharrungszustande begriffenen) ungleichförmigen Bewegung ist, dass der Wasserquerschnitt F an derselben Stelle sich nicht ändert, an verschiedenen Stellen aber eine ungleiche Grösse zeigt. Bei regelmässiger Form des Wasserlaufes wird dann an verschiedenen Stellen eines Längenschnittes die Wassertiefe t verschieden gross, der Wasserspiegel also der Kanalsohle nicht parallel sein.

Es lässt sich zeigen, dass in diesem Falle das Gefälle der **Oberfläche** das für die Arbeit der Schwere massgebende, das **wirksame** Gefälle sei.

Wir betrachten die zwischen den Schnitten A und B (Fig. 322) befindliche Wassermenge, die nach einem Zeittheilchen die Lage $A_1 B_1$ einnimmt. Es möge die an diesem Wasserkörper während der Bewegung von AB nach $A_1 B_1$ verrichtete Arbeit der Schwere und des Wasserdrucks berechnet werden. Ist der obere Querschnitt F_1, der untere F_2 und nennt man $AA_1 = dx_1$, $BB_1 = dx_2$, so muss $F_1 dx_1 = F_2 dx_2$ sein. Die Arbeit der Schwere ist offenbar so anzusehen, als ob das Massentheilchen

Fig. 322.



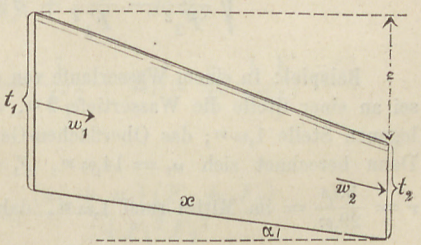
$$m = \frac{\gamma}{g} F_1 dx_1 = \frac{\gamma}{g} F_2 dx_2$$

aus der oberen Lage mit dem Schwerpunkt S_1 in die untere mit dem Schwerpunkt S_2 gerückt sei; diese Arbeit ist dann

$$mg(h + y_2 - y_1).$$

Die Vertheilung des Druckes über einen Querschnitt erfolgt nahezu nach den Regeln für einen im Gleichgewichte befindlichen Wasserkörper, da der nach S. 260 zu beurtheilende vermindernde Einfluss der Beschleunigung gewöhnlich ausserordentlich unbedeutend ist. Dann treten am oberen und unteren Schnitte die Druckkräfte $\gamma F_1 y_1$ bezw. $\gamma F_2 y_2$ auf mit den Arbeiten $\gamma F_1 y_1 dx_1$ bezw. $-\gamma F_2 y_2 dx_2$, deren Arbeitssumme sich wegen $mg = \gamma F_1 dx_1 = \gamma F_2 dx_2$ auch schreiben lässt $mg(y_1 - y_2)$. Verbindet man dies mit obiger Arbeit der Schwerkraft, so entsteht als Ergebnis

Fig. 323.



$$mgh,$$

entsprechend einem wirksamen Gefälle h.

Bei ungleichförmiger Bewegung zerfällt nun das Gefälle in einen Theil, der zur Geschwindigkeits-Änderung dient, und einen zweiten zur Überwindung der Kanalwiderstände.

Hat man für eine nicht sehr lange Strecke x eines Wasserlaufes (Fig. 323) das Gefälle z der Oberfläche, die Neigung α des Bodens, die Wassertiefen t_1 und t_2, oben und unten gemessen, und die diesen Wassertiefen entsprechenden Querschnittswerthe F_1, u_1 bezw. F_2, u_2 ermittelt, so kann man die sekundliche Wassermenge Q folgendermassen berechnen. Es ist annähernd

$$z = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Sind nun t_1 und t_2 nicht viel von einander abweichend, so kann man in dem letzten Gliede, welches das zur Überwindung der Widerstände nöthige Gefälle bedeutet, für die eigentlich veränderlichen Werthe u, F und w die arithmetischen Mittel setzen, d. h.

$$u = {}^1/_2 (u_1 + u_2); \quad F = {}^1/_2 (F_1 + F_2); \quad w = {}^1/_2 (w_1 + w_2).$$

Bedenkt man schliesslich noch, dass

$$Q = F_1 w_1 = F_2 w_2, \quad \text{also} \quad w_1 = \frac{Q}{F_1}, \quad w_2 = \frac{Q}{F_2}, \quad \text{so wird}$$

$$z = \frac{Q^2}{2g F_2^2} - \frac{Q^2}{2g F_1^2} + \beta x \frac{u_1 + u_2}{F_1 + F_2} \left(\frac{Q}{F_1} + \frac{Q}{F_2} \right)^2 \frac{1}{8g}$$

$$= \frac{Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2} \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich

1) $$Q = \frac{\sqrt{2gz}}{\sqrt{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}}}.$$

Beispiel: In einem Wasserlaufe von dem Bettquerschnitte Fig. 321, S. 306, sei an einer Stelle die Wassertiefe 2 m, an einer um 200 m stromabwärts gelegenen Stelle 1,95 m; das Oberflächen-Gefälle betrage für diese Strecke 0,1 m. Dann berechnet sich $u_1 = 14{,}95$ m, $F_1 = 20$ qm; $u_2 = 14{,}72$, $F_2 = 19{,}3$ qm; $r = \frac{39{,}3}{29{,}67} =$ im Mittel rund $1{,}33$ m, daher $\beta = 0{,}0106$;

$$Q = \frac{\sqrt{2g \cdot 0{,}1}}{\sqrt{\frac{1}{19{,}3^2} - \frac{1}{20^2} + 0{,}0106 \cdot 200 \cdot \frac{28{,}67 \cdot 39{,}3}{4 \cdot 20^2 \cdot 19{,}3^2}}} = 21{,}62 \text{ cbm}.$$

Hätte man nur den oberen Querschnitt F_1 berücksichtigt, die Bewegung als eine gleichmässige mit dem Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}1 : 200 = 0{,}0005$ behandelt, so hätte sich nach S. 294

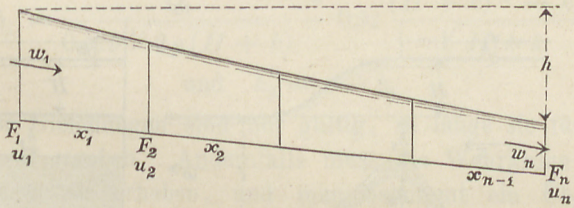
$$w = 42{,}9 \sqrt{1{,}33 \cdot 0{,}0005} = 1{,}109 \quad \text{und} \quad Q = 20 \cdot 1{,}109 = 22{,}18 \text{ cbm}$$

ergeben.

Steht für die Messungen eine längere geeignete Strecke des Wasserlaufes zur Verfügung, so ist es räthlich, die Strecke in mehrere Theile zu zerlegen und auf jeden Theil die Gl. 1, S. 308 anzuwenden. Aus den so erhaltenen Werthen für Q nimmt man dann das arithmetische Mittel.

Ist aber das Gefälle nicht für jeden einzelnen Theil, sondern nur für die ganze eingetheilte Strecke bekannt (Fig. 324), so kann

Fig. 324.



man auch nur eine einzige Gleichung aufstellen, in welche die Summe der nach obiger Weise berechneten Widerstandshöhen der einzelnen Theile eingeführt wird:

$$h = \frac{{w_n}^2}{2g} - \frac{{w_1}^2}{2g} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

$$h = \frac{Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{{F_n}^2} - \frac{1}{{F_1}^2} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} \right\};$$

darin bedeutet

$$\Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} = \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 {F_1}^2 {F_2}^2}$$

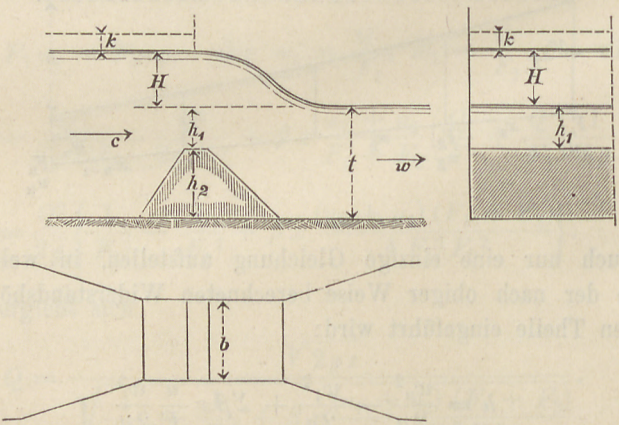
$$+ \beta_2 x_2 \frac{(u_2 + u_3)(F_2 + F_3)}{4 {F_2}^2 {F_3}^2} + \cdots$$

f) Stauhöhe von Wehren und Brückenpfeilern.

Der Zweck eines Wehres ist, die Wasseroberfläche oberhalb des Wehres zu heben (anzustauen). In den meisten Fällen wird dann ein Theil Q_2 des angestauten Wassers mittels eines Kanales abgeleitet, so dass von der ganzen sekundlichen Wassermenge Q des Flusses nur noch $Q_1 = Q - Q_2$ über das Wehr fliesst. Das Wehr ist ein durch die ganze Breite reichender, aus dem Boden des Flusses sich erhebender Einbau. Liegt die Wehrkrone tiefer als die Wasseroberfläche unterhalb des Wehres, so heisst dieses ein Grundwehr, im anderen Fall ein Überfallwehr.

α) **Grundwehr.** Am Wehre sei der Durchflussquerschnitt zu einem Rechtecke von der Breite b zusammengezogen (Fig. 325). Die Wehrkrone liege um h_1 unter dem Unterwasser, dessen Tiefe

Fig. 325.



dicht unter dem Wehre t betrage. h_2 sei die Höhe des Wehrkörpers, so dass $h_1 + h_2 = t$. Das Wasser sei durch den Einbau des Wehres um die Stauhöhe H gehoben. Die Geschwindigkeit des ungestauten Wassers sei w, die des gestauten Wassers oberhalb des Wehres betrage c. Den Einfluss dieser Zuflussgeschwindigkeit c auf die Durchflussmenge berücksichtigt man dadurch, dass man das Oberwasser um $k = \frac{c^2}{2g}$ gehoben denkt. Da die Wehrkrone beiderseitig unter Wasser liegt, so theilt man die

Höhe der Durchflussöffnung in zwei Theile, nämlich H und h_1. Für ersteren Theil betrachtet man den Durchfluss als einen Ausfluss ins Freie, für den anderen als einen Ausfluss unter Wasser. Dann ist die sekundl. Durchflussmenge für den oberen Theil nach Gl. 3, S. 236 und nach S. 240

1) $$Q_1' = \frac{2}{3}\mu_1 b\sqrt{2g}\left\{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}\right\},$$

für den unteren Theil

2) $$Q_1'' = \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H+k)},$$

weil die Höhe dieses Theiles h_1 beträgt, alle Punkte desselben aber unter der gemeinsamen Druckhöhe $H + k$ stehen. Für die gesammte Durchflussmenge $Q_1 = Q_1' + Q_1''$ gilt also:

3) $$Q_1 = \frac{2}{3}\mu_1 b\sqrt{2g}\left\{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}\right\} + \mu_2 b h_1\sqrt{2g(H+k)}.$$

Gewöhnlich nimmt man $^2/_3\mu_1 = 0{,}57$ und $\mu_2 = 0{,}62$; dann wird

4) $$h_1 = \frac{Q_1}{0{,}62\, b\sqrt{2g(H+k)}} - 0{,}92\,\frac{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}}{\sqrt{H+k}}$$

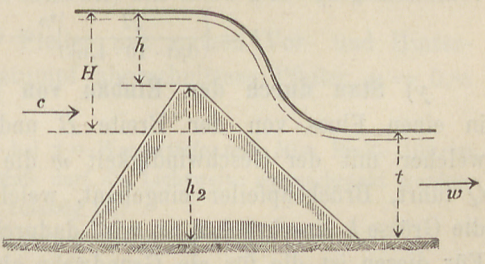
5) und $h_2 = t - h_1$.

Diese Gleichungen sind nur gültig, so lange sie für h_1 einen Werth > 0 ergeben. Andernfalls muss die Wehrkrone sich über das Unterwasser erheben, und man bekommt ein Überfallwehr, für welches eine besondere Rechnung angestellt werden muss. Bei der vorläufigen Untersuchung darüber, ob das herzustellende Wehr ein Grundwehr sein muss oder nicht, pflegt man k zu vernachlässigen und hat dann

6) $$Q_1 \gtrless 0{,}57\, b H\sqrt{2gH}$$

als Bedingung für ein Grundwehr bezw. Überfallwehr.

Fig. 326.



β). **Überfallwehr** (Fig. 326). Nennt man die Strahldicke über dem Wehre h, so muss, weil nun der Durchfluss ins Freie erfolgt,

$$Q_1 = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left\{(h+k)^{3/2} - k^{3/2}\right\}, \quad \text{also}$$

7) $$h = \left\{\frac{^3/_2 Q_1}{\mu b_1 \sqrt{2g}} + k^{3/2}\right\}^{2/3} - k$$

sein, wobei wieder $^2/_3\mu = 0{,}57$. Hiernach bestimmt sich dann

8) $$h_2 = H + t - h.$$

Beispiel: Für einen Fluss sei $w = 1\,^{m}/_{s.}$, $t = 2\,^{m}$, $F = 24\,^{qm}$, $Q = 24\,^{cbm}$. Mittels eines Wehres soll ein Aufstau um $H = 0{,}5\,^{m}$ herbeigeführt werden, das Wehr soll $10\,^{m}$ Breite erhalten, auch sollen oberhalb des Wehres $2\,^{cbm}$ abgeleitet werden, so dass nur noch $Q_1 = 22\,^{cbm}$ über das Wehr fliessen. Die Bedingung 6 wird:

$$22 > 0{,}57 \cdot 10 \cdot 0{,}5\sqrt{2g \cdot 0{,}5} = 8{,}92,$$

d. h. es muss ein Grundwehr erbaut werden.

Für die Geschwindigkeit c oberhalb des Wehres gilt annähernd:

$$c = \frac{1 \cdot 2}{2{,}5} \cdot \frac{24}{22} = 0{,}9, \quad k = 0{,}04\,^{m}.$$

Dann wird nach Gl. 4:

$$h_1 = \frac{22}{0{,}62 \cdot 10\sqrt{2g \cdot 0{,}54}} - 0{,}92\,\frac{0{,}54^{3/2} - 0{,}04^{3/2}}{\sqrt{0{,}54}} = 0{,}6\,^{m}.$$

Der Wehrkörper muss also $h_2 = t - h_1 = 1{,}4\,^{m}$ Höhe erhalten.

Bei Vernachlässigung von k würde sich $h_1 = 0{,}67\,^{m}$ ergeben.

Soll unter sonst gleich bleibenden Verhältnissen eine Stauhöhe $H = 2\,^{m}$ erreicht werden, so wird Bedingung 6:

$$22 < 0{,}57 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{2g \cdot 2} = 71{,}4,$$

d. h. das Wehr wird ein Überfallwehr. Es ist

$$c = \frac{w \cdot 2}{2 + 2} \cdot \frac{24}{22} = 0{,}55, \quad k = 0{,}015\,^{m}.$$

Gleichung 7 liefert:

$$h = \left\{\frac{22}{0{,}57 \cdot 10 \cdot 4{,}429} + 0{,}015^{3/2}\right\}^{2/3} - 0{,}015 = 0{,}9\,^{m}.$$

Die Höhe des Wehrkörpers wird dann $h_2 = 2 + 2 - 0{,}9 = 3{,}1\,^{m}$. Bei Vernachlässigung von k würde sich (erheblich einfacher)

$$h = \left(\frac{22}{0{,}57 \cdot 10 \cdot 4{,}429}\right)^{2/3} = 0{,}912\,^{m} \quad \text{ergeben.}$$

γ) **Stau durch den Einbau von Brückenpfeilern.** Werden in einen Fluss von der Breite B und der Tiefe t (Fig. 327), welcher mit der Geschwindigkeit w die sekundliche Wassermenge Q führt, Brückenpfeiler eingebaut, welche die Durchflussbreite auf die Grösse b einschränken, so wird dadurch ein Anstau H verursacht. Für diesen ist die für ein Grundwehr abgeleitete Gl. 3 (S. 311) zu benutzen, wenn man nur die Höhe des Wehrkörpers Null, d. h. $h_1 = t$ und zugleich $Q_1 = Q$ setzt. Es wird

9) $$Q = \frac{2}{3}\mu_1 b\sqrt{2g}\left\{(H + k)^{3/2} - k^{3/2}\right\} + \mu_2 b t\sqrt{2g(H + k)}.$$

Hierin ist

$$k = \frac{c^2}{2g}; \quad c = \frac{Q}{B(H+t)}.$$

Ist die zulässige Stauhöhe H gegeben, so kann man aus obiger Gleichung leicht die erforderliche lichte Weite b berechnen, nämlich, wenn man wegen übereinstimmender Durchflussverhältnisse $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ setzt:

10) $$b = \frac{Q}{\mu\sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}(H+k)^{3/2} - \frac{2}{3}k^{3/2} + t\sqrt{H+k}\right\}}.$$

Die Auflösung der Gl. 9 nach H ist umständlich. Jedoch hat Prof. Dr. Mehmke (Stuttgart) in der Zeitschrift Civilingenieur 1889, S. 623, angegeben, dass, wenn man

$$\frac{Q}{B\sqrt{2g}} = \alpha,$$

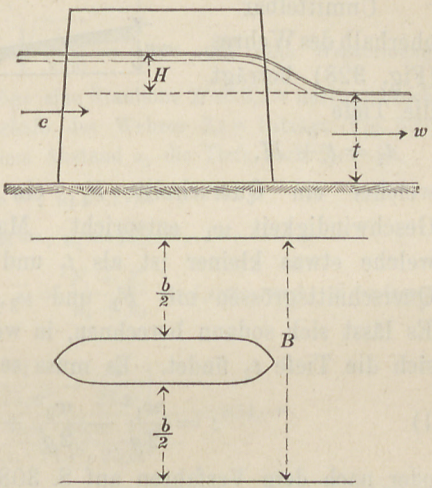
$$\frac{Q}{\mu b\sqrt{2g}} = \beta$$

setzt, die Annäherungsgleichung

11) $$\frac{2}{3}H + t = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\sqrt{H}}$$

benutzt werden kann. Für Pfeiler mit spitzen Vor- und Hinterköpfen ist $\mu = 0{,}95$, für stumpf abgeschnittene Pfeiler $\mu = 0{,}85$ zu setzen.

Fig. 327.



Beispiel: Ein Fluss führe bei 2 m Wassertiefe und 50 m Breite 100 cbm in der Sekunde. Auf welches Mafs darf die Lichtweite eingeschränkt werden, wenn eine Stauhöhe $H = 0{,}02$ m zulässig ist?

Es ist dann die Geschwindigkeit oberhalb der Pfeiler

$$c = \frac{100}{50 \cdot 2{,}02} = 0{,}99 \text{ m}, \quad k = 0{,}05 \text{ m};$$

Gleichung 10 giebt:

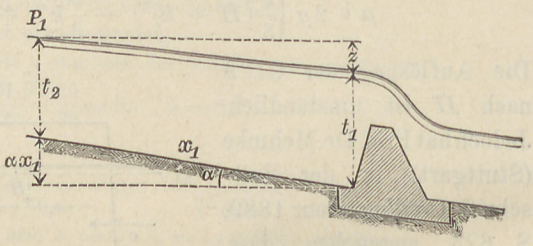
$$b = \frac{100}{0{,}95 \cdot 4{,}429\left\{\frac{2}{3}\,0{,}07^{3/2} - \frac{2}{3}\,0{,}05^{3/2} + 2\sqrt{0{,}07}\right\}} = 44{,}5 \text{ m}.$$

Berechnet man hiernach die Hülfsgrössen α und β, so liefert die linke Seite von Gl. 11: 2,013, die rechte Seite 2,015; der Unterschied ist also unbedeutend.

g) Staukurve und Stauweite.

Will man erfahren in welcher Weise der Stau oberhalb eines Wehres allmählich abnimmt, so benutzt man für die verzögerte Bewegung, welche oberhalb des Wehres stattfindet, einen ähnlichen Rechnungsgang wie auf S. 308.

Fig. 328.



Unmittelbar oberhalb des Wehres (Fig. 328) beträgt die Tiefe

$$t_1 = t + H,$$

welcher ein Querschnitt F_1, ein benetzter Umfang u_1, eine Geschwindigkeit w_1 entspricht Man wählt nun eine Tiefe t_2, welche etwas kleiner ist als t_1 und bezeichnet die entsprechenden Querschnittsgrössen mit F_2 und u_2, die Geschwindigkeit mit w_2. Es lässt sich sodann berechnen, in welchem Abstand x_1 vom Wehre sich die Tiefe t_2 findet. Es muss sein

$$1) \qquad z = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g} + \beta_1 x_1 \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

oder nach dem Verfahren auf S. 308:

$$2) \qquad z = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_2^2}\right) + \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2} \frac{Q^2}{2g}.$$

Ist aber α die Neigung der Sohle des Wasserlaufes, so muss auch

$$3) \qquad z = \alpha x_1 - (t_1 - t_2) \quad \text{sein.}$$

Vereinigt man diese Gleichung mit der vorstehenden und löst nach x_1 auf, so ergiebt sich:

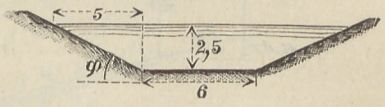
$$4) \qquad x_1 = \frac{t_1 - t_2 - \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)}{\alpha - \beta_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2) Q^2}{8 g F_1^2 F_2^2}}.$$

Hierdurch liegt der Punkt P_1 der Staukurve fest.

Man wählt nun eine wiederum etwas kleinere Wassertiefe t_3 und sucht den zugehörigen Abstand x_2 von der Stelle mit der Wassertiefe t_2, indem man aus Gl. 4 eine neue Gleichung bildet, deren Indices durchweg um eine Einheit grösser sind.

Beispiel: Das Bett eines Wasserlaufes habe 6 m Bodenbreite und einen trapezförmigen Querschnitt nach Fig. 321, S. 306, mit einem Böschungswinkel $\varphi = 26{,}5^0$ ($\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$, $\sin\varphi = 0{,}447$). Die Neigung der Sohle betrage $\alpha = 1 : 5000$. Bei der ursprünglich gleichmässigen Bewegung möge die Wassertiefe $t = 2$ m gewesen sein; dem entspricht $F = 20$ qm, $u = 14{,}95$ m, $r = 1{,}3$ m, $\beta = 0{,}0103$, $k = 42{,}7$,

Fig. 329.



daher eine Geschwindigkeit $w = 42{,}7\sqrt{\frac{1{,}3}{5000}} = 0{,}69$ m und eine Wassermenge $Q = 13{,}8$ cbm. Durch ein Wehr möge eine Stauhöhe $H = 0{,}5$ m hervorgebracht sein, so dass die Wassertiefe oberhalb des Wehres 2,5 m beträgt (Fig. 329). Es soll berechnet werden, in welchem Abstand x_1 die Tiefe noch 2,4 m ist.

Für $t_1 = 2{,}5$ m wird $F_1 = 27{,}5$ qm, $u_1 = 17{,}20$ m.

Für $t_2 = 2{,}4$ m wird $F_2 = 25{,}92$ qm, $u_2 = 16{,}75$ m.

Für diese Strecke ist dann $r_1 = \frac{F_1 + F_2}{u_1 + u_2} = 1{,}6$ m und $\beta = 0{,}0098$. Hiernach folgt aus Gl. 4:

$$x_1 = \frac{0{,}1 - \frac{13{,}8^2}{19{,}62}\left(\frac{1}{25{,}92^2} - \frac{1}{27{,}5^2}\right)}{0{,}0002 - \frac{0{,}0098 \cdot 33{,}95 \cdot 53{,}42 \cdot 13{,}8^2}{8 \cdot 9{,}81 \cdot 27{,}5^2 \cdot 25{,}92^2}} = 854{,}7 \text{ m}.$$

Setzt man sodann $t_3 = 2{,}3$ m, so wird $F_3 = 24{,}38$ qm, $u_3 = 16{,}29$ m, $r_2 = \frac{F_2 + F_3}{u_2 + u_3} = 1{,}5$ und $\beta_2 = 0{,}0101$.

Gleichung 4 ergiebt nunmehr

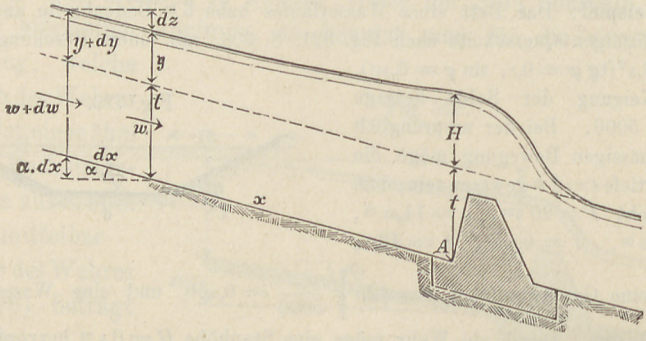
$$x_2 = \frac{0{,}1 - \frac{13{,}8^2}{19{,}62}\left(\frac{1}{24{,}38^2} - \frac{1}{25{,}92^2}\right)}{0{,}0002 - \frac{0{,}0101 \cdot 33{,}04 \cdot 50{,}3 \cdot 13{,}8^2}{8 \cdot 9{,}81 \cdot 24{,}38^2 \cdot 25{,}92^2}} = 1001 \text{ m}.$$

In gleicher Weise kann man weitere Punkte der Staukurve bestimmen.

Gleichung der Staukurve für einen Kanal von grosser Breite und geringer Wassertiefe. Denkt man sich den Querschnitt annäherungsweise als Rechteck von grosser Breite, so lässt sich die

Gleichung der Staukurve entwickeln. Es sei t die Tiefe des ungestauten Wassers, also annähernd $t = F : u$ (vergl. S. 292), H die Stauhöhe am Wehre bei A (Fig. 330), y die Stauhöhe, w die

Fig. 330.



mittlere Geschwindigkeit im Abstand x vom Wehre; im weiteren Abstande dx sei die Stauhöhe $y + dy$ (wo dy negativ), die Geschwindigkeit $w + dw$. Kommt auf die Strecke dx ein Höhenunterschied dz des Wasserspiegels, ein Gefälle $\alpha \cdot dx$ des Bodens, so ist

$$dz = \frac{w^2}{2g} - \frac{(w + dw)^2}{2g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx$$

$$= - \frac{w\,dw}{g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx,$$

weil $(w + dw)^2 - w^2 = d(w^2)$.

Ferner ist nach Fig. 330

$$dz = dy + \alpha \cdot dx, \quad \text{also}$$

$$dy + dx\left(\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}\right) = - \frac{w\,dw}{g} \quad \text{oder}$$

1) $$dx = - \frac{dy + \frac{w\,dw}{g}}{\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}}.$$

Aus dieser Gleichung kann dw entfernt werden; es ist bei kleinem α

$$w = \frac{Q}{b(t + y)}; \quad dw = - \frac{Q\,dy}{b(t + y)^2}$$

und durch Multiplikation

$$w\,dw = -\frac{Q^2\,dy}{b^2(t+y)^3}, \quad \text{also, weil}$$

$$\frac{Q^2}{b^2(t+y)^2} = w^2,$$

$$w\,dw = -\frac{w^2}{t+y}\,dy.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

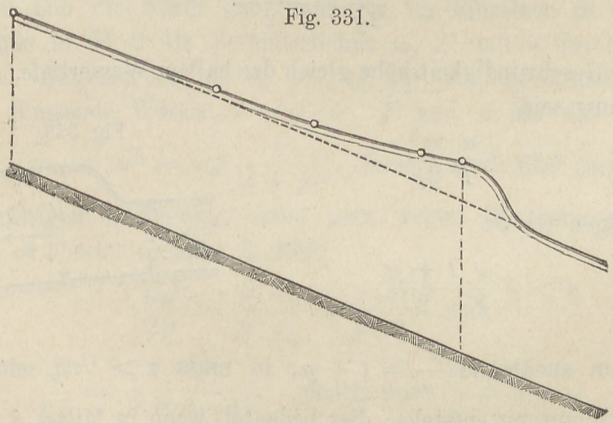
$$2) \qquad dx = -\frac{1 - \dfrac{w^2}{g(t+y)}}{\alpha - \beta\dfrac{u}{F}\dfrac{w^2}{2g}}\,dy.$$

Mit wachsendem x nimmt die Wassertiefe $t+y$ allmählich ab, die Geschwindigkeit w daher allmählich zu; somit verkleinern sich auf der rechten Seite der Gl. 2 mit zunehmendem x sowohl der Zähler wie der Nenner. Wird der Nenner zu Null, während der Zähler noch grösser ist als Null, so geschieht dies für

$$\alpha = \beta\frac{u}{F}\frac{w^2}{2g},$$

d. h. für diejenige Stelle, wo die Bewegung eine gleichförmige ist; es ist dort $\frac{dy}{dx} = 0$, d. h. die Staukurve hat sich dem ungestauten Wasser wieder angeschmiegt. Es bedeutet dies den gewöhnlichen

Fig. 331.



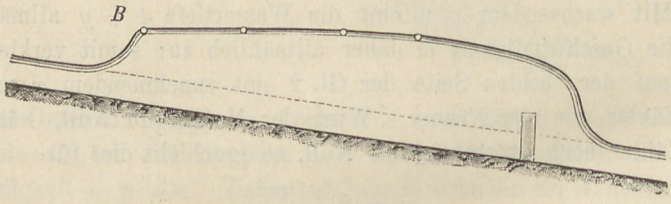
Fall, dass der Stau sich nach oben hin allmählich verliert, wobei die Staukurve ihre konvexe Seite nach unten kehrt (Fig. 331).

Wird aber für irgend eine Stelle der Zähler der Gl. 2 zu Null, während der Nenner noch > 0 ist, wird

$$\frac{dx}{dy} = -0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\infty,$$

so steht der Wasserspiegel an dieser Stelle (nahezu) lothrecht, es bildet sich ein Wassersprung oder eine Wasserschwelle. Dieser Fall ist zuerst von dem Italiener Bidone 1820, später aber auch von Jul. Weisbach (Freiberg in Sachsen) in Kanälen mit

Fig. 332.



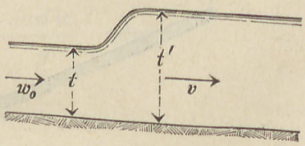
grossem Gefällverhältnisse beobachtet. Es verschwindet dann der Stau nicht allmählich, sondern bei B (Fig. 332) plötzlich. Damit dies eintrete, muss an der betreffenden Stelle der Zähler in Gl. 2 Null sein, d. h.

$$3) \qquad \frac{w^2}{2g} = \frac{t+y}{2}$$

oder die Geschwindigkeitshöhe gleich der halben Wassertiefe. Gleichzeitig muss sein

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g},$$

Fig. 333.



d. h. wegen Gl. 3:

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{t+y}{2}.$$

Weil nun annähernd $\frac{F}{u} = t + y$, so muss $\alpha > \frac{1}{2}\beta$ sein, damit ein Wassersprung entstehe; dies bedeutet, wenn in Mittel $\beta = 0{,}008$ gesetzt wird, $\alpha > 0{,}004 = 1 : 250$, d. h. ein ungewöhnlich grosses Gefällverhältnis.

Die Höhe $t' - t$ des Sprunges lässt sich nach Fig. 333 in folgender Weise berechnen: Es ist

4) $$v t' = w_0 t, \quad \text{ferner}$$

5) $$t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \frac{(w_0 - v)^2}{2g},$$

worin das letzte Glied den sog. Stossverlust bezeichnet (S. 246). Sonach wird aus beiden Gleichungen

6) $$t' = w_0 \sqrt{\frac{t}{g}} = t \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}.$$

Nach Bidone's Versuchen ist die Höhe des Sprunges in Wirklichkeit grösser, als diese Formel 6 ergiebt. Nehmen wir daher den Sprung weniger plötzlich an und vernachlässigen deshalb den Stossverlust in Gl. 5, so entsteht aus $v t' = w_0 t$ und

$$t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \quad \text{leicht}$$

7) $$t' = \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{2g} + \sqrt{\frac{w_0^2}{2g} t + \frac{1}{4}\left(\frac{w_0^2}{2g}\right)^2}.$$

Aus der Entwickelung der beiden Gleichungen 6 und 7 folgt weiter, dass ein Wassersprung mit $t' > t$ nur dann entsteht, wenn $\frac{w_0^2}{2g} > \frac{t}{2}$; es stimmt dies seiner Bedeutung nach mit Gl. 3 überein.

Um nun die Form der Staukurve im Einzelnen zu erfahren, muss man in Gl 2 die Veränderlichen w, F und u durch y ausdrücken. Beziehen sich t, w_0, F_0, u_0 auf das ungestaute, gleichmässig fliessende Wasser, $t + y$, w, F und u auf das gestaute Wasser, so ist $w^2 = w_0^2 \frac{t^2}{(t+y)^2}$, ferner nach den Regeln der gleichmässigen Bewegung, wenn man wegen der grossen Breite $u = u_0 = b$ setzt (gemäss S. 292),

$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{F_0}{u_0} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{bt}{b} \quad \text{und}$$

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{t^3}{(t+y)^2}, \quad \text{sonach mit} \quad \frac{F}{u} = t + y$$

$$\beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} = \alpha \frac{t^3}{(t+y)^3}.$$

Hiermit wird aus Gl. 2, S. 317

$$dx = -dy \frac{1 - 2\frac{\alpha}{\beta}\frac{t^3}{(t+y)^3}}{\alpha\left(1 - \frac{t^3}{(t+y)^3}\right)} \quad \text{oder}$$

$$-\alpha\, dx = dy \frac{(t+y)^3 - 2\frac{\alpha}{\beta}t^3}{(t+y)^3 - t^3}.$$

Behufs der Integration ist auf der rechten Seite eine Zerlegung in Theilbrüche erforderlich, jedoch muss, weil der Zähler nach y von demselben Grade ist wie der Nenner, durch theilweise Division erreicht werden, dass der Zähler von geringerem Grade wird. Fügt man im Zähler $+ t^3 - t^3$ hinzu, so entsteht nach einmaliger Division:

$$-\alpha\, dx = dy\left\{1 + \frac{t^3\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)}{(t+y)^3 - t^3}\right\} \quad \text{oder}$$

8) $$-\alpha\, dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)\frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3}\, dy.$$

Weil $(t+y)^3 - t^3 = 3t^2y + 3ty^2 + y^3 = y(3t^2 + 3ty + y^2)$ ist, so kann der letzte Bruch geschrieben werden

$$\frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3} = \frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)}.$$

Die Zerlegung dieser gebrochenen Funktion in Theilbrüche muss, weil die Gleichung $3t^2 + 3ty + y^2 = 0$ imaginäre Wurzeln hat, in der Form geschehen:

$$\frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{Py + Q}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nach Fortschaffung der Nenner wird hieraus

9) $$t^3 = 3t^2A + 3tAy + Ay^2 + Py^2 + Qy.$$

Soll diese Gleichung für jeden Werth von y bestehen, so muss zunächst stattfinden für $y = 0$: $t^3 = 3t^2A$, d. h. $A = {}^1/_3 t$. Ebenso ergiebt die erste Abgeleitete der Gl. 9 nach y: $0 = 3tA + 2Ay + 2Py + Q$ und für $y = 0$: $Q = -3tA = -t^2$. Die zweite Abgeleitete $0 = 2A + 2P$ giebt schliesslich $P = -A = -{}^1/_3 t$. Hiernach wird

$$\frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{t}{3}\frac{1}{y} - \frac{{}^1/_3 ty + t^2}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nun kann man Gl. 8 schreiben:

$$-\alpha\, dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t\left\{\frac{1}{3}\frac{dy}{y} - \frac{1}{6}\frac{2y + 6t}{3t^2 + 3ty + y^2}\, dy\right\}.$$

Das Differential des letzten Nenners ist aber $(3t + 2y)\,dy$, daher zerlegen wir den letzten Zähler in $2y + 3t$ und $3t$, um zu erhalten:

$$10)\quad -\alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ \frac{1}{3}\frac{dy}{y} - \frac{1}{6}\frac{d(3t^2+3ty+y^2)}{3t^2+3ty+y^2} dy - \frac{t}{2}\frac{dy}{3t^2+3ty+y^2} \right\}.$$

Setzt man zur Integration des letzten Gliedes vorübergehend $y = z + a$, so wird $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 + 3tz + 3ta + z^2 + 2az + a^2$; sollen nun die Glieder mit dem Faktor z verschwinden, so muss $3t + 2a = 0$, d. h. $a = -\frac{3}{2}t$; $z = y + \frac{3}{2}t$ sein. Dann wird $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + z^2 = \frac{3}{4}t^2 + z^2$ und

$$11)\quad \frac{dy}{3t^2+3ty^2+y^2} = \frac{dz}{\frac{3}{4}t^2+z^2} = \frac{2}{t\sqrt{3}}\, d\left(\text{arc tg}\,\frac{2z}{t\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{t\sqrt{3}}\, d\left(\text{arc tg}\left(\frac{2y}{t\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\right) \quad \text{mit} \quad z = y + \frac{3}{2}t.$$

Die Integration der Gl. 10 ergiebt dann mit Benutzung von Gl. 11:

$$\alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ -\frac{1}{3}\,\text{l}\, y + \frac{1}{6}\,\text{l}\left(3t^2+3ty+y^2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y}{t} + \sqrt{3}\right)\right\} + \text{Const.}$$

Vereinigt man in dem Klammerausdrucke die beiden Logarithmen, indem man

$$-\frac{1}{3}\,\text{l}\, y = -\frac{1}{6}\,\text{l}\, y^2 = +\frac{1}{6}\,\text{l}\,\frac{1}{y^2}$$

setzt und führt zur Abkürzung die Bezeichnung

$$12)\quad \frac{1}{6}\,\text{l}\left(3\frac{t^2}{y^2} + 3\frac{t}{y} + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y}{t} + \sqrt{3}\right) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

ein (s. die Tabelle S. 323), so wird

$$\alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{y}{t}\right) + \text{Const.}$$

Weil nun der Abstand x vom Wehr aus gemessen ist, wo $y = H$, so wird

$$0 = -H + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \cdot f\left(\frac{H}{t}\right) + \text{Const.}$$

sonach schliesslich durch Abziehen

$$13)\quad \alpha x = H - y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) t \left\{ f\left(\frac{y}{t}\right) - f\left(\frac{H}{t}\right)\right\}.$$

Kommt oberhalb des Wehres kein Wassersprung vor, ist also $\alpha < \frac{1}{2}\beta$ und daher in Gl. 13 der Faktor $1 - \frac{2\alpha}{\beta} > 0$, so ergiebt sich, weil für $\frac{y}{t} = 0$ die $f\left(\frac{y}{t}\right) = \infty$ wird (nach Gl. 12), für $y = 0$ die

Strecke $x = \infty$; d. h. in diesem meist vorkommenden Falle erstreckt sich die Wirkung des Staues nach oben hin ins Unendliche: die Staukurve schmiegt sich nach oben hin dem ungestauten Wasserspiegel asymptotisch an. In diesem Falle hat Gl. 13 unbeschränkte Gültigkeit für die Staukurve oberhalb des Wehres, d. h. für $y \leq H$ (der Stauhöhe am Wehre).

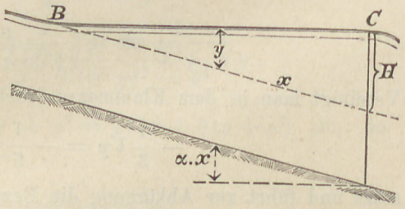
Kommt aber wegen $\alpha > 1/2\beta$ ein Wassersprung vor, steigt also an einer Stelle das Wasser plötzlich von der Tiefe t auf die grössere Tiefe t' an, welche nach Gl. 7 (S. 319) zu berechnen ist, so gilt Gl. 13 nur von dem Wehr aufwärts bis zum Wassersprunge, dessen Lage man mittels Gl. 13 berechnen kann, indem man $y = t' - t$ setzt.

In dem Grenzfalle $\alpha = 1/2\beta$ zwischen den beiden vorstehend genannten verschiedenen Fällen wird in Gl. 13 der Faktor $1 - \frac{2\alpha}{\beta} = 0$, daher einfach

14) $\qquad \alpha x = H - y;$

die Staulinie wird eine wagerechte Gerade BC (Fig. 334), geht in den ungestauten Wasserspiegel nicht durch allmähliche Anschmiegung, sondern mittels eines (ein wenig ausgerundeten) Knickes bei B über.

Fig. 334.



Die Grössen $f\left(\frac{y}{t}\right)$ können aus der Tabelle S. 323 entnommen werden. Die Berechnung der Tabellenwerthe möge an einem Beispiel, etwa für $\frac{y}{t} = \frac{1}{4}$ gezeigt werden.

Hierfür ist (Gl. 12)

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6} l\,(3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{4} + \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2{,}302\,585 \cdot \log 61 + 0{,}577\,35 \operatorname{arc\,tg} 2{,}0207\,.$$

Der Tangente $2{,}0207$ entspricht ein Winkel von $63^0\,40'$, ein Bogen $= 1{,}111\,193$. Daher wird, weil $\log 61 = 1{,}785\,330$:

$$f(1/4) = 0{,}685\,145\,7 + 0{,}577\,35 \cdot 1{,}111\,193 = 1{,}3267\,.$$

Tabelle zur Berechnung von Staukurven.

$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$	$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$
0	∞	$1/5$	1,3866
0,01	2,3261	$1/4$	1,3267
0,02	2,0983	$1/3$	1,2539
0,03	1,9664	$1/2$	1,1616
0,04	1,8738	$2/3$	1,1050
0,05	1,8026	1	1,0387
0,06	1,7451	1,5	0,9890
0,07	1,6970	2	0,9632
0,08	1,6556	2,5	0,9482
0,09	1,6196	3	0,9384
0,10	1,5875	3,5	0,9317
0,13	1,5092	4	0,9270
$1/6$	1,4538		

Beispiel 1: Die Breite eines nahezu rechtwinkligen Wasserlaufes sei $b = 100\,\text{m}$, die Tiefe des ungestauten Wassers $t = 2\,\text{m}$, die Stauhöhe am Wehre $H = 0{,}5\,\text{m}$, das Gefällverhältnis $\alpha = 0{,}0002$. Die mittlere Tiefe oberhalb des Wehres beträgt $(2 + 2{,}5) \cdot 0{,}5 = 2{,}25\,\text{m}$, daher ist im Mittel $r = 225 : 104{,}5 = 2{,}15\,\text{m}$; das giebt rund $\beta = 0{,}009$ (vergl. S. 296).

Es ist $\frac{H}{t} = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{H}{t}\right) = 1{,}3267$.

Ferner wird $1 - \frac{2\,\alpha}{\beta} = 1 - \frac{0{,}0004}{0{,}009} = 0{,}9556$.

Setzt man nun $y_1 = 0{,}4\,\text{m} = 0{,}2\,t = 1/5\,t$, so ergiebt sich nach vorstehender Tabelle $f(0{,}2) = 1{,}3866$, mithin nach Gl. 13:

$$x_1 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}9556\,(1{,}3866 - 1{,}3267)\right\} = 1072\,\text{m}.$$

Da die Tabelle zwischen $\frac{y}{t} = 0$ und $\frac{y}{t} = 0{,}25$ 13 Werthe enthält, so kann man aus ihr 13 Punkte, also ausser dem soeben berechneten (x_1, y_1) noch 12, leicht ableiten.

Geringe Stauhöhen, die nicht grösser sind als die Wellenbewegungen des Wassers, pflegt man unbeachtet zu lassen. Die Wellenbewegungen wachsen mit der Tiefe; demgemäss pflegt man eine Stauhöhe von $y_0 = 0{,}01\,t$ zu vernachlässigen, so dass sich dann statt der ideellen Stauweite $= \infty$ eine endliche,

dem Werthe $y_0 = 0{,}01\, t$ entsprechende, begrenzte Stauweite x_0 ergiebt. Für diese gilt mit $y_0 = 0{,}02$ m:

$$x_0 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}02 + 1{,}9111\,(2{,}3261 - 1{,}3267)\right\} = 11950 \text{ m}.$$

Zwischen $y_1 = 0{,}4$ und $y_0 = 0{,}02$ m sollen hier nur noch $y_2 = 0{,}2$ m und $y_3 = 0{,}1$ m berücksichtigt werden. Dann ist

$$x_2 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}2 + 1{,}9111\,(1{,}5875 - 1{,}3267)\right\} = 3992 \text{ m}.$$

$$x_3 = 5000\left\{0{,}5 - 0{,}1 + 1{,}9111\,(1{,}8026 - 1{,}3267)\right\} = 6547 \text{ m}.$$

Diese Staukurve ist in Fig. 331, S. 317 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 200 000, die Höhen in 1 : 100 dargestellt.

Beispiel 2: Ein gemauerter rechteckiger Kanal von $b = 0{,}325$ m Breite habe eine Bodenneigung $\alpha = 0{,}023$. Es bewege sich darin Wasser gleichförmig mit einer Wassertiefe $t = 0{,}064$ m und einer sekundlichen Wassermenge $Q = 0{,}0351$ cbm; dann ist mit $F = 0{,}325 \cdot 0{,}064 = 0{,}0208$ qm

$$w_0 = 0{,}0351 : 0{,}0208 = 1{,}688 \text{ m} \quad \text{und}$$

$$\frac{{w_0}^2}{2g} = 0{,}145 \text{ m},$$

d. h. bedeutend grösser als die halbe Wassertiefe; mithin ist als Folge einer weiter unten bewirkten Aufstauung ein Sprung zu erwarten. Für dessen Höhe liefert Gl. 6, S. 319:

$$t' = 1{,}688\sqrt{\frac{0{,}064}{9{,}81}} = 0{,}136 \text{ m},$$

Gl. 7, S. 319 aber

$$t' = 0{,}073 + \sqrt{0{,}145 \cdot 0{,}064 + 0{,}073^2} = 0{,}194 \text{ m}.$$

In Wirklichkeit war nach der Messung Bidone's, der an diesem Kanale Versuche anstellte, $t' = 0{,}189$, was mit dem letzteren Werthe gut übereinstimmt. Es werde für die weitere Rechnung $t' = 0{,}19$, also die Stauhöhe dort zu $y_0 = 0{,}19 - 0{,}064 = 0{,}126$ m genommen.

Die grösste Stauhöhe wurde zu $H = 0{,}216$ m gemessen. Dann kann man die Entfernung x_0 des Sprunges von dem Orte der grössten Stauhöhe nach Gl. 13, S. 321 berechnen. Es ist

$$\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{{w_0}^2}{gt} = \frac{0{,}145 \cdot 2}{0{,}064} = 4{,}5,$$

$$\frac{H}{t} = \frac{0{,}216}{0{,}064} = 3{,}375\,; \quad \frac{y_0}{t} = \frac{0{,}126}{0{,}064} = \text{rund } 2.$$

$f\left(\frac{H}{t}\right) = f(3{,}375)$ wird durch Interpolation in der Tabelle S. 323 erhalten zu 0,9334, mithin

$$0{,}023\, x_0 = 0{,}216 - 0{,}126 - 3{,}5 \cdot 0{,}064\,(0{,}9632 - 0{,}9334)$$

und $x_0 = 3{,}6$ m, während Bidone's Messung etwa $x_0 = 3{,}5$ m ergab.

Für $\frac{y_1}{t} = 3$ oder $y_1 = 0{,}192$ wird

$$0{,}023 \cdot x_1 = 0{,}216 - 0{,}192 - 0{,}224\,(0{,}9384 - 0{,}9334)$$

mit $x_1 = 1$ m.

Für $\frac{y_2}{t} = 2{,}5$ oder $y_2 = 0{,}16$ m wird

$$0{,}023\, x_2 = 0{,}216 - 0{,}16 - 0{,}224\,(0{,}9482 - 0{,}9334)$$

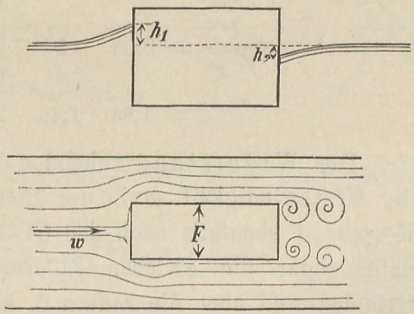
mit $x_2 = 2{,}3$ m.

Dieser Wassersprung ist in Fig. 332, S. 318 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 100, die Höhen in 1 : 20 dargestellt.

4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper.

Bei scheinbarer (relativer) Ruhe des Wassers gegen einen in denselben eingetauchten festen Körper heben sich die wagerechten Seitenkräfte des Wasserdrucks gegen den Körper auf. Strömt aber das Wasser mit einer Geschwindigkeit w gegen den ruhenden Körper, so werden die einzelnen, ohne Anwesenheit des Körpers parallel verlaufenden Stromfäden gezwungen, den Körper zu umfliessen, sich in gekrümmten Bahnen zu bewegen, wozu Kräfte erforderlich sind; das Wasser staut sich an der Vorderseite auf, während an der Rückseite eine Vertiefung entsteht (Fig. 335). Es erfolgt daher auf der Vorderseite eine Vergrösserung, auf der Rückseite eine Verminderung des Druckes gegenüber dem Ruhezustande um P_1 bezw. P_2. Die Gesammtwirkung der Strömung besteht daher in einer Kraft D im Sinne der Geschwindigkeit w, und zwar ist

Fig. 335.



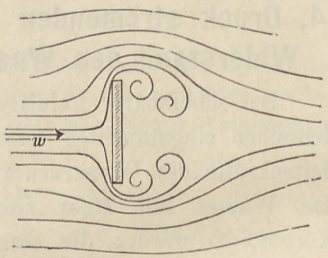
1) $$D = P_1 + P_2.$$

Der Verlauf der Stromfäden ist theoretisch nicht festzustellen. In Anlehnung aber an die Formel für den Druck eines Wasserstrahls gegen einen fremden Körper (S. 269) darf man mit einiger Wahrscheinlichkeit setzen:

2) $$P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g}; \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

wenn γ die Dichte der Flüssigkeit, F der grösste Querschnitt des eingetauchten Theiles des festen Körpers, rechtwinklig zur Geschwindigkeit w gemessen. Für ein Prisma mit ebenen, rechtwinklig zu w stehenden Endflächen kann mit einiger Wahrscheinlichkeit $\zeta_1 = 1$ gesetzt, d. h. angenommen werden, dass die Druckvermehrung P_1 an der Vorderseite einer Druckhöhe $h_1 = \frac{w^2}{2g}$ entspricht, während ζ_2 von der Länge des Prismas abhängig ist. Bei einer dünnen Platte (Fig. 336) ist die Druckverminderung an der Rückseite am stärksten; man setze, wenn l die Länge des Prismas in der Stromrichtung, für

Fig. 336.



$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta_2 = 0{,}86 \quad 0{,}46 \quad 0{,}35 \quad 0{,}33 \quad 0{,}34$$

Die Gesammtwirkung der Strömung auf den Körper ist

3) $$D = \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

mit $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, dann wird für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta = 1{,}86 \quad 1{,}46 \quad 1{,}35 \quad 1{,}33 \quad 1{,}34.$$

Der Widerstand ruhenden Wassers gegen prismatische, mit der Geschwindigkeit w in der Richtung der Prismenachse bewegte Körper ist ebenfalls nach den Gl. 1 — 3 zu beurtheilen. Es wären dafür sogar die gleichen Ziffern zu erwarten; aus unbekannten Gründen sind aber die Ziffern ζ_2 kleiner, während ζ_1 ebenfalls $= 1$ gesetzt werden kann. Es ist für

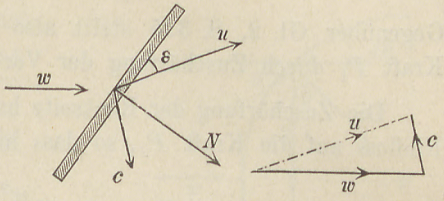
$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0{,}03 \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta_2 = 0{,}43 \quad 0{,}17 \quad 0{,}10 \quad 0{,}10$$

$$\zeta = 1{,}43 \quad 1{,}17 \quad 1{,}10 \quad 1{,}10.$$

Hat die vom Wasser getroffene Platte selbst eine Geschwindigkeit c, so kommt für den Druck N gegen die Platte, der bei Vernachlässigung von Reibung und Adhäsion nur rechtwinklig zur Platte sein kann, die scheinbare (relative) Geschwindigkeit u des Wassers gegen die Platte in Frage. Bildet diese mit der Platte den Winkel ε, so hat die Seitengeschwindigkeit $u \cos \varepsilon$ des Wassers parallel zur Platte keinen Einfluss; es wird der Druck N nur durch die Seitengeschwindigkeit $u \sin \varepsilon$ rechtwinklig zur Platte bedingt. Ist wiederum F die Grösse der Platte, γ die Dichte der Flüssigkeit, so wird auf Grund von Gl. 3 (S. 326)

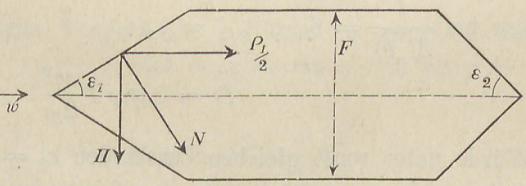
Fig. 337.



$$4) \qquad N = \zeta \gamma F \frac{u^2 \sin^2 \varepsilon}{2g}.$$

Ist ein prismatischer Körper vorn und hinten durch je einen Keil mit lothrechten Seitenebenen und den halben Keilwinkeln ε_1 bezw. ε_2 zugeschärft (Fig. 338), so wird, weil die eine Fläche des Vorderkeils die Grösse $\frac{F}{2 \sin \varepsilon_1}$ hat, der Normaldruck gegen diese

Fig. 338.



$$N = \zeta_1 \gamma \cdot \frac{F}{2 \sin \varepsilon_1} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 .$$

Diese Kraft kann man zerlegen in eine Querkraft H, die durch eine entgegengesetzte, von der anderen Keilfläche herrührende, aufgehoben wird, und eine Längskraft

$$N \sin \varepsilon_1 = \zeta_1 \gamma \frac{F}{2} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 ,$$

die $= \frac{1}{2} P_1$ zu setzen ist, weil die zweite Fläche des Vorderkeils eine ebenso grosse, gleichgerichtete Kraft liefert und beide zusammen

die Druckvergrösserung P_1 der Vorderseite (in Folge der Strömung) bilden. Sonach ist

5) $$P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 .$$

Gegenüber Gl. 2, S. 325 stellt also $\sin^2 \varepsilon_1$ die Verminderung der Kraft P_1 durch Zuschärfung der Vorderseite aus.

Die Zuschärfung der Rückseite hat einen ähnlich verkleinernden Einfluss auf die Kraft P_2, so dass man

6) $$P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_2 ,$$

mithin den Gesammtdruck des bewegten Wassers gegen den Körper

7) $$D = (\zeta_1 \sin^2 \varepsilon_2 + \zeta_2 \sin^2 \varepsilon_2) \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

setzen kann.

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 45^0$ wird z. B.

$$D = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) \gamma F \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{2} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

also bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 6$, mit $\zeta = 1{,}1$:

$$D = 0{,}55 \gamma F \frac{w^2}{2g}.$$

Würde unter sonst gleichen Umständen $\varepsilon_2 = 90^0$, der Körper also hinten nicht zugeschärft sein, so erhielte man

$$D = (0{,}5 + 0{,}1) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 0{,}6 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während $\varepsilon_1 = 90^0$, $\varepsilon_2 = 45^0$, d. h. Zuschärfung nur am hinteren Ende,

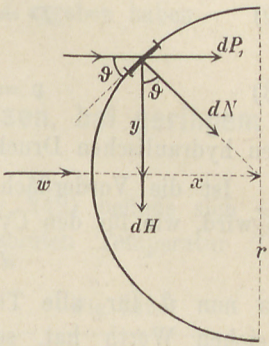
$$D = (1 + 0{,}055) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 1{,}055 \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

liefern würde.

Sind Vorder- und Hinterfläche des Körpers gekrümmt, so wendet man die vorstehenden Rechnungen auf ein als eben betrachtetes Flächentheilchen an und findet den Gesammtdruck D durch Integration.

Ist die Vorderfläche eine Cylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe h, so wird (Fig. 339) für ein Flächentheilchen $dF = ds \cdot h$ derselben, welches mit w den Winkel ϑ bildet und die Mittelpunkts-Koordinaten x und y hat:

Fig. 339.



8) $$dN = \zeta_1 \gamma dF \frac{w^2 \sin^2\vartheta}{2g},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

9) $$\zeta_1 \gamma \frac{w^2}{2g} = \mathfrak{p}_1 \quad \text{setzt:}$$

10) $$dN = \mathfrak{p}_1 dF \sin^2\vartheta.$$

Die Seitenkraft in der Richtung von w wird dann:

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1 dF \sin^3\vartheta,$$

während die andere Seitenkraft dH ohne Bedeutung ist. Weil nun $dF = h \cdot ds$, $\sin\vartheta = \frac{x}{r} = \frac{dy}{ds}$ und $x^2 = r^2 - y^2$, so wird

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1 h \frac{x^2}{r^2} dy = \mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2}(r^2 - y^2) dy.$$

Für die halbcylindrische Vorderfläche hat man y zwischen den Grenzen $y = -r$ und $y = +r$ oder doppelt von $y = 0$ bis $y = r$ zu nehmen, mithin

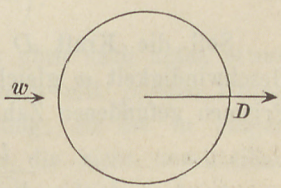
$$P_1 = 2\mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2} \int_0^r (r^2 - y^2) dy = 2\mathfrak{p}_1 \frac{h}{r^2} \frac{2}{3} r^3.$$

Da nun die Querschnittsfläche des Körpers $F = 2rh$, so wird

$$P_1 = {}^2/_3 \mathfrak{p}_1 F,$$

d. h. es wird in Folge der halbcylindrischen Abrundung der Überdruck P_1 gegenüber dem auf eine ebene Fläche F auf $^2/_3$ verkleinert. Für einen **Vollcylinder** ist dann an der Rückseite ebenso der Minderdruck

Fig. 340.



$$P_2 = \frac{2}{3} \mathfrak{p}_2 F, \quad \text{wenn}$$

$$\mathfrak{p}_2 = \zeta_2 \gamma \frac{w^2}{2g} \quad \text{bedeutet,}$$

daher der gesammte Druck

11) $$D = \frac{2}{3}\zeta\gamma F\frac{w^2}{2g}$$ oder auch

12) $$D = \frac{2}{3}\mathfrak{p}F,$$ wenn

13) $$\mathfrak{p} = \zeta\gamma\frac{w^2}{2g}$$

den hydraulischen Druck für 1^{qm} ebene Fläche bedeutet.

Ist die Vorderfläche des Körpers eine Halbkugelfläche, so wird, wie für den Cylinder

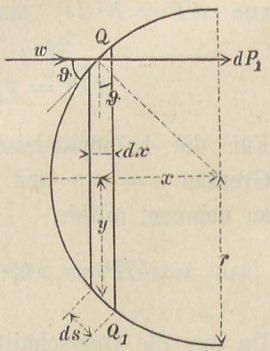
$$dP_1 = \mathfrak{p}_1 dF\sin^3\vartheta.$$

Da nun ϑ für alle Theile der Kugelzone QQ_1 (Fig. 341) den gleichen Werth hat, so kann als dF sogleich die ganze Zone

$$dF = 2\pi y\,ds = 2r\pi dx$$

eingeführt werden. Dann wird mit

Fig. 341.



$$\sin\vartheta = \frac{x}{r}:$$

$$dP_1 = \mathfrak{p}_1\frac{2r\pi}{r^3}x^3dx.$$

Dies giebt, für die Halbkugel zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = r$ integrirt:

$$P_1 = \mathfrak{p}_1\cdot\frac{2\pi}{r^2}\int_0^r x^3dx = \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 r^2\pi = \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 F.$$

Die halbkugelförmige Abrundung vermindert also den Überdruck P_1 gegenüber dem für eine ebene Fläche auf die Hälfte. Für eine **Kugel** ist dann an der Rückseite ebenso $P_2 = {}^1/_2\mathfrak{p}_2 F$, daher der gesammte Druck

14) $$D = \frac{1}{2}\mathfrak{p}F = \frac{1}{2}\zeta\gamma F\frac{w^2}{2g}.$$

Soll die Kraft D die Kugel in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit w gleichmässig bewegen, so ist, wenn man die für Prismen gefundenen Zahlen auch hier anwendet, nach S. 326, mit

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = \frac{2r}{r\sqrt{\pi}} = 1{,}128,$$

$\zeta = 1{,}16$ zu wählen. Hiernach wird dann

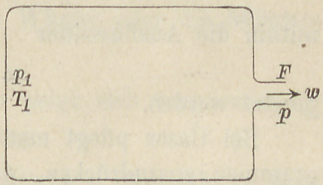
$$D = 0{,}58\,\gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während Versuche im Mittel die Ziffer 0,54 ergeben haben.

5. Ausfluss der Gase aus Gefässen, bei geringem Überdruck.

Innerhalb eines grossen Gefässes (Fig. 342) befinde sich ein Gas unter dem Drucke p_1 und der absoluten Temperatur T_1, wonach dann auf Grund der Zustandsgleichung (Gl. 5, S. 210) auch die Dichte

Fig. 342.



1) $$\gamma_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p_1}{RT_1}$$

bestimmt ist. Ausserhalb des Gefässes herrsche der Druck p. Dann kann man, falls $p_1 : p$ nicht viel grösser als 1 ist, annehmen, dass das aus einer kleinen Öffnung F strömende Gas beim Ausströmen den Druck p annimmt. Mit dieser Druckverminderung ist nicht allein eine Verminderung der Dichte, sondern auch eine Verminderung der Temperatur verbunden. Bei nur geringem Unterschiede der Drücke p und p_1 möge aber die Dichte-Verminderung einstweilen unberücksichtigt bleiben, also angenommen werden, dass das Gas mit der Dichte γ_1 auch zum Ausflusse gelange. Unter dieser Annahme verschwindet der wesentliche Unterschied zwischen Gasen und tropfbar-flüssigen Körpern, und es kann nun die Gleichung für den Ausfluss des Wassers (Gl. 4, S. 232) auch auf Gase angewandt werden, d. h. (für kleine Öffnung)

$$w = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma_1}\right)}.$$

Der Druck p_1 nimmt im Gefässe von oben nach unten etwas zu, jedoch sehr unbedeutend. Bezeichnet man mit p_1 den Druck des Gases in der Höhe der Ausflussöffnung, so ist in obiger Gleichung $h = 0$ zu setzen. Sodann muss die nicht unmittelbar zu messende Dichte γ_1 nach Gl. 1 eingeführt, endlich auch, ebenso

wie beim Ausflusse von Wasser, eine Geschwindigkeitsziffer φ hinzugefügt werden, welche nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Band, S. 585, auf Grund Weisbach'scher Versuche zu etwa

2) $$\varphi = 0{,}98$$

angenommen werden kann. Hiernach wird

3) $$w = \varphi \sqrt{2gRT_1\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Bei der Berechnung der sekundlichen Ausflussmenge ist zu berücksichtigen, dass beim Ausflusse von Gasen aus denselben Gründen wie bei Wasser im Allgemeinen eine Einschnürung vorkommt, dass der Strahlquerschnitt also $= \alpha F$ zu setzen ist. Bei kreisförmiger Öffnung in dünner Wand kann

$$\alpha = 0{,}65,$$

mithin die Ausflussziffer

$$\mu = \varphi \cdot \alpha = 0{,}64$$

gesetzt werden.

Bei Gasen pflegt man die sekundliche Ausflussmenge in Kilogrammen auszudrücken, weil bei der Angabe nach Kubikmetern stets noch die Dichte ausserdem anzugeben wäre, um die Ausflussmenge bestimmt zu kennzeichnen. Die sekundlich ausfliessende Gewichtsmenge ist dann

$$G = \gamma_1 \alpha \cdot F \cdot w \quad \text{oder}$$

4) $$G = \frac{p_1}{RT_1} \mu F \sqrt{2gRT_1\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Diese Gleichung gilt aber nur für sehr geringen Überdruck.

Beispiel: Der Aussendruck betrage 1 at, entsprechend einer Quecksilbersäule von 735 mm. In einem Gefässe befinde sich Luft von $t_1 = 10^\circ$ C. oder $T_1 = 283^\circ$ und einem Drucke von 765 mm Quecksilbersäule. In der Gefässwand befinde sich ein rundes Loch von 1 qcm $= 0{,}0001$ qm Grösse; es sollen sekundliche Geschwindigkeit und Gewichtsmenge der ausströmenden Luft berechnet werden. Mit $R = 29{,}27$ und $\varphi = 0{,}98$ wird Gl. 3:

$$w = 0{,}98 \sqrt{2g \cdot 29{,}27 \cdot 283\left(1 - \frac{735}{765}\right)} = 78 \text{ m/s}.$$

Es ist

$$\gamma_1 = \frac{10\,000}{29{,}27 \cdot 283} = 1{,}2,$$

daher mit $\alpha = 0{,}65$:

$$G = 1{,}2 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}0001 \cdot 78 = 0{,}0061 \text{ kg/s}.$$

6. Specifische Wärme; Zustandsänderungen der Gase.

Die Temperatur eines Körpers, also auch eines Gases, kann man erhöhen, indem man dem Körper, etwa mittels einer Heizung, Wärme zuführt. Die Menge der Wärme wird gemessen nach Wärmeeinheiten. Unter einer **Wärmeeinheit** (WE) versteht man diejenige Wärmemenge, welche nöthig ist, um die Temperatur von 1^{kg} Wasser von 0^0 C. auf 1^0 C. zu erhöhen. Die nach diesen Wärmeeinheiten gemessene Wärmemenge wird mit Q (bedeutet Quantum) bezeichnet.

Die Anzahl der Wärmeeinheiten, welche man einem Kilogramm irgend eines Stoffes mittheilen muss, um dessen Temperatur um 1^0 C. zu erhöhen, heisst die **specifische Wärme** oder die **Wärmekapacität** dieses Stoffes.

Die specifische Wärme eines Gases zeigt sich verschieden, je nachdem das Gas bei der Wärmezuführung

1. in einem Gefässe von unveränderlichem Rauminhalte festgehalten wird, oder aber

2. sich unter einem unveränderlichen Drucke p (etwa dem eines belasteten, reibungslosen Kolbens) auszudehnen vermag.

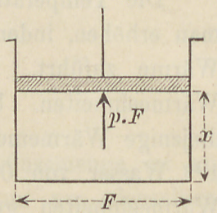
Die specifische Wärme für unveränderliches specifisches Volumen v, also auch unveränderliche Dichte $\gamma = 1 : v$, werde mit c, diejenige für unveränderlichen Druck mit c_1 bezeichnet. Beide sind für ein bestimmtes Gas feste Werthe, unabhängig von der Temperatur.

Die Ermittelung der Grössen c und c_1 für ein bestimmtes Gas durch Versuche hat nun ergeben, dass stets $c_1 > c$ ist. So ist z. B. für atmosphärische Luft $c = 0{,}1684$; $c_1 = 0{,}2375$. Man erklärt diese Erscheinung daraus, dass bei der Temperaturerhöhung unter gleichzeitiger Ausdehnung des Gases, etwa unter Verschiebung eines das Gas abschliessenden, belasteten Kolbens, von dem Gase auf diesen Kolben eine mechanische Arbeit übertragen wird, dass diese Ausdehnungs-Arbeit einen Theil der zugeführten Wärmemenge erfordert, während der noch verbleibende Rest der zugeführten Wärmemenge zur Erhöhung der Temperatur, d. h. zur Vermehrung des inneren Arbeitsvermögens des Gases verwendet wird.

Befindet sich 1 kg Gas in einem Cylinder (Fig. 343) vom Querschnitt F und nimmt in diesem eine Länge x des Raumes ein, so ist

$$v = F \cdot x.$$

Fig. 343.



Das Gas übt auf den Kolben eine Kraft $p \cdot F$ aus. Bei einer Verschiebung des Kolbens um dx nach aussen überträgt das Gas eine Arbeit an den Kolben

$$d\mathfrak{A} = p \cdot F \cdot dx,$$

oder, weil $F \cdot dx = dv$:

1) $$d\mathfrak{A} = p \cdot dv.$$

Dies ist die Ausdehnungsarbeit bei einer unendlich kleinen Vergrösserung des specifischen Volumens. Zwischen dieser Arbeit und der auf sie verwendeten Wärmemenge dQ besteht nach den Lehren der Physik ein festes Verhältnis. Überhaupt sind Wärme und Arbeit gleichwerthig. Mag Wärme Q in Arbeit $\mathfrak{A}$ umgewandelt werden, wie bei der Dampfmaschine, der Heissluft- und Gaskraftmaschine, oder mag äusseres Arbeitsvermögen $\mathfrak{A}$ in Wärme Q übergehen, wie z. B. bei der Reibung (1. Theil, S. 265) oder beim Stosse (s. S. 132), — immer besteht zwischen beiden ein festes Verhältnis, es ist

2) $$Q = A \cdot \mathfrak{A}.$$

Der Festwerth A heisst der Wärmewerth der Arbeitseinheit, d. h. die Anzahl der Wärmeeinheiten, die durch 1 mkg erzeugt werden können, der reciproke Werth $1 : A$ heisst der Arbeitswerth der Wärmeeinheit, d. i. die Anzahl der Meterkilogramme, die einer Wärmeeinheit gleichwerthig sind. Messungen der verschiedensten Art haben auf die Zahl

3) $$\frac{1}{A} = 424 \text{ mkg}; \quad A = \frac{1}{424} WE \text{ geführt.}$$

Der Wärmezustand oder innere Zustand eines Theilchens eines Körpers, insbesondere eines Gases, ist bedingt durch seine Temperatur T, seinem Druck p und sein specifisches Volumen v, von denen aber zwei die dritte bestimmen, weil zwischen ihnen eine feste Beziehung, die Zustandsgleichung $T = f(p, v)$ besteht, welche für Gase nach S. 210 die einfache Form

4) $$T = \frac{p \cdot v}{R}$$

hat, worin T die sog. absolute Temperatur $= 273 + t$ bedeutet. R ist für jedes Gas ein besonderer Festwerth, für atmosphärische Luft $= 29{,}27$. Weil $R = \frac{p \cdot v}{T}$, so ist, wenn man verschiedene Gase auf gleiche Temperatur, z. B. den Gefrierpunkt $t_0 = 0$, $T_0 = 273$, und auf gleichen Druck, z. B. den Atmosphärendruck p_0 bringt, R verhältnisgleich mit dem für diesen Zustand gültigen specifischen Volumen v_0, oder umgekehrt verhältnisgleich mit der Dichte γ_0 der verschiedenen Gase. So ist für Wasserstoff, dessen Dichte bei dem Atmosphärendruck von 760 mm Quecksilbersäule und der Temperatur des Gefrierpunktes $\gamma_0 = 0{,}089\,57$ beträgt, die Grösse

$$R = \frac{29{,}27 \cdot 1{,}2932}{0{,}089\,57} = 422{,}6.$$

Nach dem Vorstehenden, besonders nach Gl. 4, bestimmen p und v schon den Wärmezustand eines Gastheilchens vollständig. Es soll nun die Wärmemenge berechnet werden, die man einem Kilogramm Gas von überall gleichem Wärmezustande zuführen muss, damit das Gas eine unendlich kleine Zustandsänderung erfahre.

In Gleichung 4 erscheint T als Funktion zweier Veränderlichen p und v. Die theilweisen Differentiale von T sind

$$5) \qquad \frac{\delta T}{\delta p} dp = \frac{v}{R} dp; \quad \frac{\delta T}{\delta v} dv = \frac{p}{R} dv.$$

Die vollständige Differential von T bei gleichzeitiger Änderung von p und v ist

$$6) \qquad dT = \frac{v}{R} dp + \frac{p}{R} dv.$$

In Figur 344 ist eine unendlich kleine aber totale Zustandsänderung angedeutet, welche durch Zuführung der Wärmemenge dQ

Fig. 344.

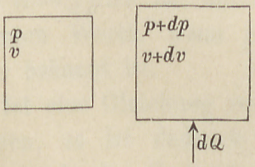
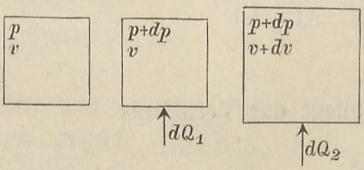


Fig. 345.



bewirkt wird. Diese kann in zwei auf einander folgende partielle Änderungen nach Fig. 345 zerlegt werden. Die erste Änderung

bei gleichbleibendem v erfordere die Wärmemenge dQ_1; bei dieser ändert sich T nur partiell nach p um

$$\frac{\delta T}{\delta p} dp = \frac{v}{R} dp,$$

wobei die specifische Wärme c in Frage kommt; und es ist nach der Bedeutung von c

$$dQ_1 = c \frac{\delta T}{\delta p} dp = \frac{cv}{R} dp.$$

Die zweite Änderung bei nun gleichbleibendem $p + dp$ erfordere die Wärmemenge dQ_2; für diese gilt offenbar

$$dQ_2 = c_1 \frac{\delta T}{\delta v} dv = c_1 \frac{p}{R} dv.$$

Die ganze erforderliche Wärmemenge ist dann

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 \quad \text{oder}$$

7) $$dQ = \frac{cv}{R} dp + c_1 \frac{p}{R} dv.$$

Da nach Gl. 6 $$\frac{v}{R} dp = dT - \frac{p}{R} dv,$$

so kann man Gl. 7 auch schreiben:

8) $$dQ = c \cdot dT + (c_1 - c) \frac{p}{R} dv.$$

Hierin bedeutet $c \cdot dT$ diejenige Wärmemenge, welche zur Erhöhung der Temperatur verwendet wird, während $(c_1 - c) \frac{p}{R} dv$ diejenige Wärmemenge bezeichnet, die zur Ausdehnungs-Arbeit $d\mathfrak{A} = p\,dv$ nöthig ist. Hiernach ergiebt sich $\frac{c_1 - c}{R}$ als diejenige Grösse A (Gl. 2, S. 334), mit der die Arbeit $p \cdot dv$ zu multipliciren ist, um die entsprechende, d. h. gleichwerthige Wärmemenge zu liefern. Also ist

9) $$A = \frac{c_1 - c}{R}.$$

Man pflegt das Verhältnis

10) $$\frac{c_1}{c} = n$$

einzuführen. Für Luft ist $n = 1{,}405$ (nahezu $= \sqrt{2}$), für Sauerstoff 1,40, für Stickstoff, Wasserstoff und Kohlenoxyd ebenfalls

$= 1{,}405$, d. h. für diejenigen Gase, die unter gewöhnlichen Umständen weit von dem Flüssigkeitszustande entfernt sind, ist ziemlich übereinstimmend $n = 1{,}41$ zu setzen, so dass

11) $$A = \frac{c(n-1)}{R} \quad \text{wird.}$$

Für Luft kann man $c_1 = 0{,}2375$ annehmen; daraus folgt mit $n = 1{,}41$ und $R = 29{,}27$:

$$c = 0{,}1684; \quad A = \frac{1}{424}.$$

Gl. 8 kann auch geschrieben werden:

12) $$dQ = c \cdot dT + A \cdot p \cdot dv = c \cdot dT + A \cdot d\mathfrak{A}.$$

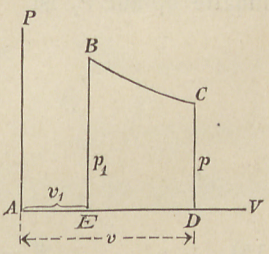
Hat nun ein Gas zu Anfang den Druck p_1, den Einheitsraum v_1, die absolute Temperatur T_1 und gehen diese Werthe auf irgend eine Weise über in p_2, v_2 und T_2, so ist dazu eine Wärmezuführung

13) $$Q = c(T_2 - T_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = c(T_2 - T_1) + A \cdot \mathfrak{A}$$

erforderlich. Sind die Temperaturen zu Anfang und zu Ende gleich, so entspricht die zuzuführende Wärme Q genau der geleisteten Ausdehnungs-Arbeit $\mathfrak{A}$, d. h. man erhält in diesem Falle Q in Wärmeeinheiten, indem man die Arbeit $\mathfrak{A}$ in Meterkilogrammen durch 424 theilt.

Die während einer Zustandsänderung, d. h. einer Änderung der Grössen p und v von dem Gase geleistete Ausdehnungs-Arbeit $\mathfrak{A}$ und die zuzuführende Wärmemenge Q hängen aber nicht nur von den Anfangs- und Endwerthen der Grössen p und v ab, sondern werden noch im Besonderen durch die Art bedingt, in welcher die gleichzeitige Änderung von p und v vor sich geht, denn $\mathfrak{A} = \int p\,dv$ hat nur dann einen bestimmten Werth, wenn p als Funktion von v bekannt ist.

Fig. 346.



Ist eine Gleichung zwischen p und v gegeben, so ist dadurch p auf v und somit nach der Zustandsgleichung auch T auf v zurückgeführt. Trägt man v als Abscisse, p als Ordinate auf, so erhält man als Darstellung

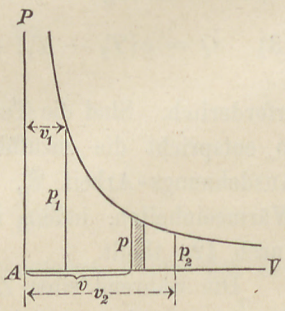
der Zustandsänderung die sog. Zustandskurve (Fig. 346). Die Arbeit $\mathfrak{A} = \int p\,dv$ wird dann gemessen durch die Fläche $BCDE$ der Zustandskurve.

Zustandsänderung bei gleichbleibender Temperatur (isothermische Zustandsänderung). Wird der Vorgang so geregelt, dass bei veränderlichem v die Temperatur T unverändert $= T_1$ bleibt, so wird, weil anfänglich $T_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$ war und später $T_1 = \frac{pv}{R}$ ist,

14) $$p \cdot v = p_1 \cdot v_1 .$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten. Diese Zustandskurve ist die Darstellung des Boyle-Mariotte'schen Satzes, der ja (S. 202) für gleichbleibende Temperatur gilt. Jedem Punkte p_1, v_1 der Ebene APV entspricht ein bestimmter Werth $p_1 v_1 = RT_1$, eine bestimmte Hyperbel, eine bestimmte Zustandsänderung bei einer Temperatur T_1 (Fig. 347).

Fig. 347.



Trägt man behufs Darstellung der Zustandsgleichung $p \cdot v = RT$ die Grössen T lothrecht auf, während die Achsen AV und AP in einer wagerechten Ebene liegen, so erhält man die durch den Festwerth R bestimmte Zustandsfläche des Gases; ein wagerechter Schnitt in der Höhe T_1 liefert dann die isothermische Zustandskurve.

Die Ausdehnungsarbeit für 1 kg des Gases von dem Rauminhalte v_1 auf v_2 ist

$$\mathfrak{A} = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv \quad \text{oder mit}$$

$$p = \frac{p_1 \cdot v_1}{v}:$$

15) $$\mathfrak{A} = p_1 \cdot v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \, l\left(\frac{v_2}{v_1}\right),$$

wofür man auch schreiben kann

16) $$\mathfrak{A} = p_1 v_1 l\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = p_2 v_2 l\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = R T_1 l\left(\frac{v_2}{v_1}\right).$$

Diese Zustandsänderung mit gleichbleibendem $T = T_1$ wird nur dann erfolgen, wenn für jede unendlich kleine Ausdehnung dv dem Gase die der Arbeit $p\,dv$ entsprechende Wärmemenge $dQ = A \cdot d\mathfrak{A}$ zugeführt wird (nach Gl. 12 mit $dT = 0$). Aus der Figur 347 ist ersichtlich, dass bei gleichmässiger Änderung von v die Wärmezuführung zu Anfang stärker sein muss als später.

Bei einer Zusammendrückung von v_2 auf v_1 muss die Arbeit $\mathfrak{A}$ als Verdichtungsarbeit von aussen auf das Gas übertragen werden, es ist die Arbeit $\mathfrak{A}$, welche der Gasdruck auf den Kolben überträgt, und somit auch Q, negativ, d. h. es muss dem Gase die Wärmemenge Q entzogen werden (etwa durch Kühlwasser).

Beispiel: Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur $t_1 = 10^0$ mit $T_1 = 283^0$, den Druck $p_1 = 50\,000$ kg/qm $= 5$ at, also den Rauminhalt $v_1 = R T_1 : p_1 = 0{,}16567$ cbm. Bei der Ausdehnung auf $v_2 = 5 v_1$, wobei unter Gleicherhaltung der Temperatur $T = T_1$ der Druck auf $^1/_5 p_1$ abnimmt, wird von dem Gase die Arbeit

$$\mathfrak{A} = 50\,000 \cdot 0{,}16567\, l\,(5) = 13\,323 \text{ mkg}$$

geleistet, d. h. eigentlich nur übertragen, denn geliefert wird die Arbeit aus der zuzuführenden Wärme

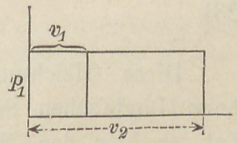
$$Q = \frac{13\,323}{424} = 31{,}42\ WE.$$

Presst man das Gas wieder zusammen und entzieht fortwährend so viel Wärme, dass die absolute Temperatur stets 283^0 verbleibt, so muss man obige 13 323 mkg Arbeit aufwenden, die aber in Form von 31,42 *WE* an das etwaige Kühlwasser übergeht.

Zustandsänderung bei gleichbleibendem Druck. Bei gleichbleibendem $p = p_1$ wird die Zustandskurve eine der v-Achse parallele Gerade (Fig. 348), daher

17) $$\mathfrak{A} = p_1 (v_2 - v_1) = R (T_2 - T_1).$$

Fig. 348.



Die Temperaturänderung folgt der Gleichung

18) $$\frac{T}{T_1} = \frac{v}{v_1}$$

(Satz von Gay-Lussac, S. 208). Es ist nach Gl. 13 die zuzuführende Wärmemenge

$$Q = c T_1 \left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) + A p_1 (v_2 - v_1) = (v_2 - v_1) p_1 \left(\frac{c}{R} + A\right).$$

Dies wird wegen $A = \frac{c_1 - c}{R}$ (Gl. 9):

19) $$Q = (v_2 - v_1) p_1 \frac{c_1}{R} \quad \text{oder auch}$$

20) $$Q = c_1 (T_2 - T_1),$$

wie nach der Bedeutung von c_1 selbstverständlich ist.

Die Zustandsänderung bei gleichbleibendem Raume wird selbstverständlich durch eine zur p-Achse parallele Gerade dargestellt. Es ist

21) $$\frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1}; \quad \mathfrak{A} = 0 \text{ und nach Gl. 13}$$

22) $$Q = c(T_2 - T_1) = \frac{c v_1}{R}(p_2 - p_1);$$

wie der Bedeutung von c entspricht.

Zustandsänderung ohne Zuführung oder Entziehung von Wärme. Denkt man sich das Gas in einem Behälter, etwa einem Cylinder mit beweglichem Kolben befindlich, dessen Wandungen für Wärme undurchlässig sind, und den Kolben nach aussen verschoben, so ändert sich unmittelbar v und als Folge davon p und T. Dieser Vorgang heisst nach dem schottischen Ingenieur und Professor Rankine (geb. 1820 zu Edinburg, gest. 1872 zu Glasgow) **adiabatische** Zustandsänderung (von $\dot{\alpha}\delta\iota\acute{\alpha}\beta\alpha\tau o\varsigma$ = undurchdringlich). Die Bedingung für diese Zustandsänderung ist, dass die zugeführte Wärmemenge für jedes Zeittheilchen Null sei, d. h. nach Gl. 7 und 10

$$0 = \frac{cv}{R} dp + c_1 \frac{p}{R} dv. \quad \text{Daraus wird}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{c_1}{c} \frac{dv}{v} = -n \frac{dv}{v} \quad \text{und}$$

23) $$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n.$$

Diese Gleichung heisst der Poisson'sche Satz. Während beim Boyle'schen Satze der Exponent der rechten Seite = 1 ist, hat er hier den Werth $n = 1{,}41$. Da nun $p_1 v_1 = R T_1$ und $pv = RT$, also $\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1} \frac{v_1}{v}$, so wird für die Temperaturänderung

24) $$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Gl. 13 giebt mit $Q = 0$:

25) $$\mathfrak{A} = \frac{c}{A}(T_1 - T_2).$$

Für $v_2 > v_1$ ist $p_2 < p_1$ und $T_2 < T_1$, es erfolgt eine Temperaturabnahme; die Ausdehnungsarbeit wird hier auf Kosten des inneren Arbeitsvermögens, d. h. der Temperatur, verrichtet. Bei der Zusammendrückung auf einen kleineren Raum erfolgt eine Erhöhung des Druckes sowie der Temperatur. Die von aussen zur Zusammendrückung aufgewandte Arbeit setzt sich vollständig in inneres Arbeitsvermögen, Erhöhung der Temperatur, um.

Die Bedingungen für eine adiabatische Zustandsänderung sind annähernd erfüllt, wenn ohne besondere Vorkehrungen eine Raumänderung schnell erfolgt. Dann ist keine Zeit zur Wärmemittheilung, und das Gas ist bei Leistung einer Arbeit auf sein eigenes Arbeitsvermögen, d. h. seine eigene Wärme angewiesen, muss andererseits eine empfangene äussere Arbeit in Wärme umsetzen. Geht eine Zustandsänderung aber in einem nicht besonders geschützten dünnwandigen Metallgefässe sehr langsam vor sich, so kann man annehmen, das eingeschlossene Gas habe stets annähernd die Temperatur der äusseren Luft. Diese bewirkt dann die erforderliche Zuführung oder Entziehung von Wärmemenge.

Beispiel 1: Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur $t_1 = 10^0$, $T_1 = 283^0$, den Druck $p_1 = 50\,000$ kg/qm, also den Rauminhalt $v_1 = 0{,}165\,67$ cbm. Bei einer adiabatischen Ausdehnung auf $v_2 = 3v_1$ vermindert sich der Druck auf $p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}41} = 0{,}2125\, p_1 = 10\,623$ kg/qm, die Temperatur auf $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0{,}41}$ $= 0{,}6373\, T_1 = 180^0$, entsprechend $t_2 = -93^0$. Es entsteht also eine überraschend grosse Abkühlung um 103^0 C. Die Ausdehnungsarbeit beträgt (Gl. 25)

$$\mathfrak{A} = 0{,}1684 \cdot 424 \cdot 103 = 7354 \text{ mkg}.$$

Beispiel 2: Hatte 1 kg Luft anfänglich den Druck $p_1 = 10\,000$ kg/qm und die Temperatur $t_1 = 15^0$, $T_1 = 288^0$ und wird diese Luftmenge ohne Wärmeentziehung auf $^1/_5$ ihres Rauminhalts verdichtet, so wird

$$\frac{p_2}{p_1} = 5^{1{,}41} = 9{,}67 \quad \text{mit} \quad p_2 = 96\,700,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 5^{0{,}41} = 1{,}93 \quad \text{mit} \quad T_2 = 557^0,$$

$t_2 = 284^0$. (Zinn kommt schon bei 230^0 zum Schmelzen, Blei erst bei 330^0.)

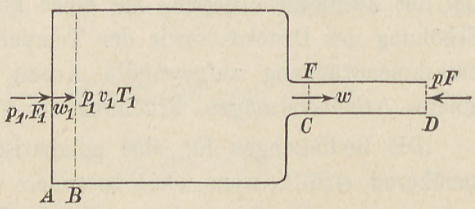
Die Zusammendrückungsarbeit ergiebt sich zu

$$\mathfrak{A} = 0{,}1684 \cdot 424 \cdot 269 = 19\,207 \text{ mkg}.$$

7. Ausfluss von Gasen aus Gefässen.

In einem grossen Gefässe (Fig. 349) befinde sich Gas von dem Zustande p_1, v_1, T_1. Bei C finde aus der Öffnung F ein Ausfluss mit der Geschwindigkeit w statt. Zur Erhaltung des Beharrungszustandes denken wir uns die Rückwand des Gefässes durch einen Kolben von der Grösse F_1 ersetzt, der mit der sehr kleinen Geschwindigkeit w_1 vorrückt, also in der Zeit dt um $AB = w_1 \cdot dt$. Auch nehmen wir an der Öffnung eine Röhre von der Länge $CD = w \cdot dt$ an, in der ein Kolben unter einer Gegenkraft $p \cdot F$ zurückweicht. Der Zustand des Gases sei in der Öffnung p, v, T. Zwischen A und B findet sich das Massentheilchen m von dem Gewichte

Fig. 349.



$$mg = \gamma_1 F_1 w_1 dt = \frac{F_1 w_1 dt}{v_1},$$

ebenso zwischen C und D mit

$$mg = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v}.$$

Während der Zeit dt erfolgt die Zunahme an Arbeitsvermögen, weil w_1 sehr klein ist: $\frac{mw^2}{2}$. Die Kräfte $p_1 \cdot F_1$ und $p \cdot F$ leisten die Arbeit

$$p_1 \cdot F_1 \cdot w_1 \cdot dt - p \cdot F \cdot w \cdot dt = mg(p_1 v_1 - p v) = mg \cdot R(T_1 - T).$$

In der Zeit dt erfährt das Gasgewicht mg eine Temperatur-Verminderung $T_1 - T$, für welche man die Gleichungen der adiabatischen Zustandsänderung annehmen kann, also

$$1) \qquad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Die dieser Temperatur-Verminderung entsprechende Wärmemenge beträgt für 1^{kg} $c(T_1 - T)$, für das Gewicht mg also

$mg \cdot c(T_1 - T)$, und kommt dem Arbeitsvermögen der Ausströmung mit $mg \frac{c}{A}(T_1 - T)$ zu Gute. Daher wird

$$\frac{mw^2}{2} = mg \cdot R(T_1 - T) + mg \frac{c}{A}(T_1 - T) \quad \text{und}$$

$$\frac{w^2}{2g} = (T_1 - T)\left(R + \frac{c}{A}\right).$$

Weil nun nach Gl. 11, S. 337,

$$\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}, \quad \text{so wird}$$

$$R + \frac{c}{A} = R\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = R\frac{n}{n-1},$$

mithin bei Vernachlässigung der Reibung

$$2) \quad \frac{w^2}{2g} = (T_1 - T) R \frac{n}{n-1} = R \frac{n}{n-1} T_1 \left\{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist als die wirksame Druckhöhe zu bezeichnen, welche sich bei der Abwesenheit von Widerstandshöhen in die Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$ umsetzt.

Die sekundliche Gewichtsmenge des ausströmenden Gases ist wegen $\gamma = 1 : v$ nunmehr

$$G = \alpha \cdot F \cdot \frac{w}{v}.$$

Führt man hierin für w den Werth aus Gl. 2, und nach Gl. 23, S. 340 $v = v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$ ein, so wird mit $\varphi \cdot \alpha = \mu$ (vgl. S. 345)

$$3) \quad G = \mu \cdot F \sqrt{2g R \frac{n}{n-1} \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{{v_1}^2}}.$$

Hiernach ist G^2 verhältnisgleich mit

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{(n+1)}{n}},$$

ein Ausdruck, der zu einem Maximum wird für

$$4) \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}; \quad \text{hiermit ergiebt sich}$$

$$5) \quad G_{max} = \mu F \sqrt{2g \frac{n}{n+1} \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}} \frac{p_1}{v_1}},$$

worin noch $\frac{p_1}{v_1} = \frac{{p_1}^2}{R T_1}$ gesetzt werden kann.

Mit $n = 1{,}41$, $\frac{1}{n} = 0{,}709$, $\frac{n-1}{n} = 0{,}291$, $\frac{n}{n-1} = 3{,}44$ wird

6) $$\frac{p}{p_1} = 0{,}5265$$

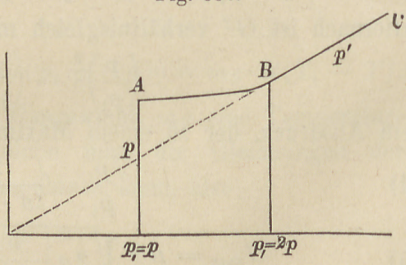
und für Luft mit $R = 29{,}27$:

7) $$G_{max} = \mu F\, 0{,}3972 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

Stellt man sich also vor, der Druck im Gefässe bliebe unverändert p_1, der Aussendruck p aber nehme ab, so wird nach Gl. 1 auch die Temperatur T der ausströmenden Luft abnehmen, die Geschwindigkeit w zunehmen. Da aber zugleich nach Gl. 23, S. 340, v zunimmt, die Dichte sich vermindert, so wird, trotz des Wachsens der sekundlich ausssströmenden Raummenge, das ausströmende Gewicht G nur zunehmen, solange $\frac{p}{p_1} > 0{,}5265$. Bei noch weiterer Abnahme von p wird aber G wieder kleiner, und es würde für $p = 0$, d. h. für die Ausströmung in einen leeren Raum nach Gl. 3 $G = 0$ werden, weil für $p = 0$, $v = \infty$, $\gamma = 0$ wird.

In Wirklichkeit trifft dies nicht zu. Einestheils würde für $p = 0$, nach Gl. 23 und 24, S. 340, $v = \infty$ und $T = 0$, und so weit reicht die Gültigkeit der Zustandsgleichung der Gase nicht; auch trifft die Annahme nicht zu, dass in demjenigen Querschnitt, in welchem die Geschwindigkeit w herrscht, der Druck des ausströmenden Gases gleich dem im Aussenraume stattfindenden Drucke p sei; vielmehr herrscht dort ein Druck $p' > p$. Über diesen Druck p' hat Professor Fliegner (Zürich) nach dem Civilingenieur 1874 Versuche angestellt. Nimmt der Druck p_1 im Gefässe von p beginnend allmählich zu, so ist anfangs $p' = p$, nimmt für $p_1 = 2p$ den Werth $p' = 0{,}5767\, p_1$ an, und es bleibt für weiter wachsendes p_1 unverändert $p' = 0{,}5767\, p_1$. Das Gesetz der Veränderlichkeit von p' folgt dem Zuge ABC (Fig. 350).

Fig. 350.



Für die schwach gekrümmte Kurve AB kann man annähernd eine Gerade AB setzen. Hiernach ist

8) $p' = p + 0{,}1534\,(p_1 - p)$ für $p_1 = p$ bis $p_1 = 2p$,

9) $p' = 0{,}5767\,p_1$ für $p_1 > 2p$.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit w hat man sonach in Gl. 1 und 2, S. 342/3 statt p den Druck p' nach Gl. 8 und 9 einzuführen.

Zugleich fand Fliegner, dass die Reibungswiderstände in einem grossen Gefässe verschwindend klein sind, so dass $\varphi = 1$, $\mu = \alpha$ gesetzt werden kann.

Für die sekundlich ausfliessende Gewichtsmenge kann nach Fliegner's Versuchen gesetzt werden:

10) $$\begin{cases} \text{Für } p_1 < 2p\text{:} & G = \alpha F \cdot 0{,}790 \sqrt{\dfrac{p\,(p_1 - p)}{T_1}}\,. \\ \text{Für } p_1 > 2p\text{:} & G = \alpha F \cdot 0{,}395\, \dfrac{p_1}{\sqrt{T_1}}\,, \end{cases}$$

wenn p und p_1 in $^{kg}/_{qm}$ verstanden wird.

Beispiel: Es sei, wie auf S. 332: p entsprechend einer Quecksilbersäule von 735^{mm}, d. h. $p = 735 \cdot 13{,}6 = 9996$, $p_1 = 765 \cdot 13{,}6 = 10404$, $T_1 = 283$, $F = 0{,}0001^{qm}$; dann wird nach Gl. 8:

$$p' = 10059{,}\quad \frac{p'}{p_1} = 0{,}9668\,.$$

Hiernach wird (Gl. 1, S. 342 mit p' statt p)

$$\frac{T}{T_1} = 0{,}9668^{0{,}291} \text{ und } T = 280{,}2,\quad T_1 - T = 2{,}8\,.$$

$$w = \sqrt{2g \cdot 29{,}27 \cdot 3{,}44 \cdot 2{,}8} = 74{,}4^{m}$$

gegen 78^{m} nach S. 332. Die sekundliche Gewichtsmenge ist nach Gl. 10 mit $\alpha = 0{,}65$:

$$G = 0{,}65 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}79 \sqrt{\frac{9996 \cdot 408}{283}} = 0{,}0063^{kg/s}.$$

gegen $0{,}0061^{kg/s}$ auf S. 332.

Die unter Umständen sehr bedeutende Temperatur-Verminderung, welche Luft bei einer adiabatischen Druckverminderung erleidet (s. Beispiel 1, S. 341), kann zur Kühlung von Räumen nur verwerthet werden, wenn die Luft unter Verrichtung von Arbeit in dem Cylinder einer Kaltluftmaschine den geringeren Druck angenommen hat. Die Temperatur-Verminderung aber, welche Luft beim freien Ausströmen aus einem Gefässe (Gl. 1, S. 342) erfährt, lässt sich nicht benutzen. Es wird nämlich die mit grosser Geschwindigkeit ausströmende Luft in dem Aussenraume schliesslich in Folge von Reibung wieder zur Ruhe kommen, und dabei wird das der Geschwindigkeit w entsprechende Arbeitsvermögen wieder in Wärme umgesetzt.

8. Bewegung der Luft in Röhren.

In Folge des Reibungswiderstandes beim Durchströmen einer Röhre erfährt die Luft eine Verminderung ihres Druckes um Δp. Wie man bei Wasser eine Widerstandshöhe $z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$ einführte (S. 277), so setzt man hier die Druckverminderung

$$\Delta p = \gamma \cdot z = \gamma \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

wenn γ die Dichte der Luft bedeutet. Man kann dann auch wegen $\frac{1}{\gamma} = v = \frac{RT}{p}$ schreiben:

1) $$\Delta p = \frac{p}{RT} \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Nach Versuchen von Prof. Ledoux (Annales des mines 1892, Nov., S. 541) kann im Mittel $\lambda = 0{,}0179$ gesetzt werden, wofür wir

2) $$\lambda = 0{,}018$$

schreiben wollen.

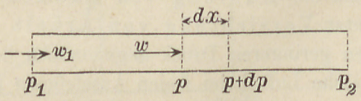
Beispiel: Eine Leitung von $d = 0{,}25$ m Weite und $l = 1000$ m Länge führe Luft von im Mittel 20° C. ($T = 293$) mit einer Geschwindigkeit $w = 6$ m/s, aus einem Behälter mit einem Drucke $p_1 = 60\,000$ kg/qm in einen Tunnel zum Betriebe von Bohrmaschinen. Es soll der Druckverlust der Leitung berechnet werden. Es ist

$$\Delta p = \frac{60\,000}{29{,}27 \cdot 293} 0{,}018 \cdot \frac{1000}{0{,}25} \frac{6^2}{2g} = 924 \text{ kg/qm};$$

am Ende der Leitung beträgt der Druck also noch 59 076 kg/qm.

Mit der Druckabnahme ist, wenn man voraussetzt, dass in Folge von Wärmeleitung durch die Röhrenwand eine Temperaturveränderung der Luft nicht vorkommt, eine Vergrösserung des Einheitsraumes v der Luft nach dem Boyle'schen Satze verbunden. Im Beharrungszustande muss nun sekundlich das gleiche Luftgewicht $\gamma F w = \frac{Fw}{v}$ durch alle Querschnitte der Röhren hindurchströmen. Gelten daher (Fig. 351)

Fig. 351.



p_1, v_1, w_1 für den Anfang, p_2, v_2, w_2 für das Ende, p, v, w für eine beliebige Stelle der Röhre, so muss

$$\frac{w}{v} = \frac{w_1}{v_1} \text{ und wegen } \frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p}, \quad w = \frac{w_1 p_1}{p}$$

sein. Ferner nach Gl. 1, weil p mit wachsendem x abnimmt,

3) $$-dp = \frac{p}{RT}\lambda\frac{dx}{d}\frac{w^2}{2g} = \frac{p}{RT}\frac{\lambda}{d}dx\frac{w_1^2}{2g}\frac{p_1^2}{p^2} \text{ also}$$

$$-p\,dp = \frac{\lambda}{d}\frac{p_1^2}{RT}\frac{w_1^2}{2g}dx. \text{ Dies giebt}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 2\frac{\lambda l}{d}\frac{p_1^2}{RT}\frac{w_1^2}{2g} \text{ oder}$$

4) $$p_2 = p_1\sqrt{1 - \frac{2\lambda}{RT}\frac{l}{d}\frac{w_1^2}{2g}}.$$

Ist der Unterschied zwischen p_1 und p_2 gering, so kann man für den Wurzelausdruck die beiden ersten Glieder der binomischen Reihe setzen und erhält

$$p_2 = p_1\left(1 - \frac{\lambda}{RT}\frac{l}{d}\frac{w_1^2}{2g}\right);$$

dies stimmt, wenn $\Delta p = p_1 - p_2$ gesetzt wird, mit Gl. 1 überein.

Streng genommen, müsste auch noch die zur Vergrösserung der Geschwindigkeit erforderliche Druckhöhe berücksichtigt werden. Dann erhält man, weil einem negativen dp eine negative Druckhöhe dz entspricht,

$$-dz = -v\cdot dp = \lambda\frac{dx}{d}\frac{w^2}{2g} + \frac{d(w^2)}{2g} \text{ oder wegen } w = w_1\frac{p_1}{p}:$$

$$-dp = \frac{\lambda p}{RT}\frac{dx}{d}\frac{w_1^2}{2g}\frac{p_1^2}{p^2} - \frac{w_1^2}{g}p_1^2\frac{dp}{p^3}\frac{p}{RT}, \text{ mithin}$$

$$-p\,dp = \frac{\lambda}{RT}\frac{p_1^2}{d}\frac{w_1^2}{2g}dx - \frac{w_1^2 p_1^2}{gRT}\frac{dp}{p} \text{ und}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 2\lambda\frac{l}{d}\frac{p_1^2}{RT}\frac{w_1^2}{2g} + 4\frac{p_1^2}{RT}\frac{w_1^2}{2g}\,l\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \text{ Hieraus}$$

5) $$\frac{p_2^2}{p_1^2} = 1 - \frac{w_1^2}{2g}\frac{1}{RT_1}\left(2\lambda\frac{l}{d} + 4\,l\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right).$$

Der letzte Summand ist aber meist gegen den ersteren verschwindend klein; so wird bei den Werthen des Beispiels auf S. 346

$$\frac{p_1}{p_2} = \text{rund } \frac{60}{59} = 1{,}017, \quad \mathfrak{l}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 0{,}017,$$

daher der Klammerausdruck in Gl. 5:

$$2 \cdot 0{,}018 \cdot \frac{1000}{0{,}25} + 4 \cdot 0{,}017 = 144 + 0{,}068.$$

Gl. 5 dürfte daher praktischen Werth kaum haben.

Gl. 4 liefert mit den Zahlen des Beispiels auf S. 346:

$$p_2 = 59070 \text{ statt } 59076 \text{ nach Gl. 1.}$$

Letztere genügt daher für die meisten Fälle.

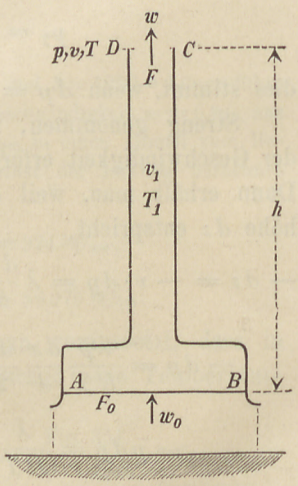
9. Wirkung der Schornsteine.

Die Wirkung der Schornsteine beruht auf der Verminderung der Dichte der Luft oder der Gase durch Erwärmung. Am oberen Ende des Schornsteins (Fig. 352) habe die Aussenluft den Zustand p, v, T. In dem Raume $ABCD$ sei durch Heizung oder dgl. die Temperatur auf den Mittelwerth T_1 gebracht. Die Dichte $\gamma = 1/v$ der äusseren Luft gelte auf die Schornsteinhöhe als überall gleich, dann ist ebenso im Schornsteine der Einheitsraum durchschnittlich $v_1 = v\frac{T_1}{T}$, der Druck der äusseren Luft in der Höhe AB:

$$p + \frac{h}{v}.$$

Der Raum unterhalb AB stehe mit der äusseren Luft in freier Verbindung.

Fig. 352.



Bezeichnen wir wieder mit mg das Luftgewicht, welches in der Zeit dt durch jeden Querschnitt des Schornsteins geht, so ist

1) $$mg = \frac{F_0 \cdot w_0 \cdot dt}{v_1} = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v_1}.$$

Die Zunahme an Arbeitsvermögen während der Zeit dt beträgt (ähnlich wie auf S. 230) $m\frac{w^2}{2} - m\frac{{w_0}^2}{2}$, wovon ${w_0}^2$ vernachlässigt werden kann. Die Arbeit der Schwere ist in diesem Falle negativ $= -mgh$, weil die Masse m unten verschwindet, oben aus dem Schornsteine tritt. Der Druck gegen AB leistet die Arbeit

$$\left(p + \frac{h}{v}\right) F_0 \cdot w_0 \cdot dt = \left(p + \frac{h}{v}\right) \cdot mg \cdot v_1,$$

der Druck gegen CD die Arbeit

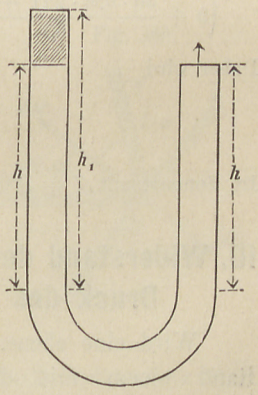
$$-p \cdot F \cdot w \cdot dt = -p \cdot mg \cdot v_1. \quad \text{Daher ist}$$

$$m\frac{w^2}{2} = -mg \cdot h + \left(p + \frac{h}{v}\right) mg \cdot v_1 - p\,mg \cdot v_1 \quad \text{oder}$$

$$2) \qquad \frac{w^2}{2g} = h\left(\frac{v_1}{v} - 1\right) = h\left(\frac{T_1}{T} - 1\right).$$

Dies ist die wirksame Saughöhe des Schornsteins. Man kann sich von ihr leicht eine Vorstellung machen: Betrachtet man eine Luftsäule von der Temperatur T und der Höhe h und dehnt diese durch Erwärmung auf T_1 der Höhe nach aus, so bekommt sie die Höhe $h_1 = h\frac{T_1}{T}$ (Fig. 353). Es ist dann $h_1 - h$ die wirksame Saughöhe.

Fig. 353.



Ist l die Länge des Schornsteins, so entsteht durch Reibung eine Widerstandshöhe $\lambda\frac{l}{d}\frac{w^2}{2g}$. Darin ist für gemauerte Röhren von kreisförmigem Querschnitte $\lambda = 0{,}03$, für berusste Schornsteinröhren aber $\lambda = 0{,}04$ zu setzen. Ist der Schornstein oder der anschliessende Kanal nicht kreisförmig, so hat man zu bedenken, dass allgemein die Widerstandshöhe der Röhrenreibung $\beta\frac{u}{F}l\frac{w^2}{2g}$ ist, wenn u der von der Flüssigkeit berührte Umfang, F die Fläche des Querschnitts. Für kreisförmige Röhren wurde $\beta\frac{u}{F} = \frac{4\beta}{d} = \frac{\lambda}{d}$ gesetzt; es ist daher $\beta = {}^1/_4\lambda$,

d. h. $\beta = 0{,}0075$ für unberusstes Mauerwerk, $\beta = 0{,}01$ für berusstes Mauerwerk.

Für Richtungsänderungen in den Feuerkanälen, die an den Schornstein anschliessen, gelten nach Rietschel*) folgende Widerstandsziffern:

Für ein scharfes rechtwinkliges Knie: $\zeta = 1{,}5$; für ein abgerundetes rechtwinkliges Knie: $\zeta = 1{,}0$; für ein Knie von 135^0 ⌋: $\zeta = 0{,}6$; für plötzliche Richtungsänderungen um 180^0: $\zeta = 1{,}5$ bis $2{,}5$.

Der Rost mit der Brennstoffschicht liefert eine bedeutende Widerstandsziffer $\zeta = 6$ bis 12, je nach der Art des Rostes und des Brennstoffes.

Beispiel: Ein cylindrischer Schornstein von kreisförmigem Querschnitte habe $d = 0{,}6$ m Weite und $h = 30$ m Höhe. An den Schornstein schliessen sich 30 m lange Feuerkanäle vom Querschnitt $1 \text{ m} \times 0{,}3$ m, in denen zwei abgerundete Umbiegungen von 180^0 ($\zeta = 1{,}5$) und ein scharfes rechtwinkliges Knie ($\zeta = 1{,}5$) vorkommen. Die Widerstandsziffer des Rostes sei 9. Die mittlere innere Temperatur betrage $T_1 = 200 + 273 = 473$, die äussere $T = 10 + 273 = 283^0$. Es soll die Ausströmungsgeschwindigkeit berechnet werden. Die wirksame Saughöhe beträgt

$$30 \left(\frac{473}{283} - 1\right) = 20{,}14 \text{ m},$$

die Widerstandshöhe mit $\beta = 0{,}01$:

$$\left(9 + \frac{30 \cdot 0{,}01 \cdot 2\,(1 + 0{,}3)}{0{,}3} + 2 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 + 0{,}04 \cdot \frac{30}{0{,}6}\right) \frac{w^2}{2g} = 18{,}1 \frac{w^2}{2g}.$$

Daher wird $$20{,}14 = \frac{w^2}{2g}(1 + 18{,}1) \quad \text{und}$$

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 20{,}14}{19{,}1}} = 4{,}5 \text{ m}.$$

Im Sommer mit $T = 300^0$ wird $w = 4{,}3$ m.

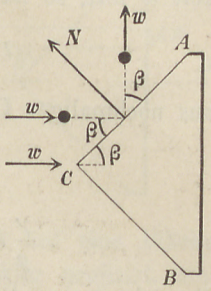
10. Widerstand der Luft gegen bewegte fremde Körper; Druck des Windes gegen fremde Körper.

Wird eine ebene, etwa kreisförmige Fläche AB mit niedrigem Rand einem mit der Geschwindigkeit w rechtwinklig dagegen strömenden Wind ausgesetzt (Fig. 354), so bildet sich, wie Ober-Ingenieur Friedr. Ritter von Loessl nach seinem Werk über „Die Luftwiderstands-Gesetze“ (Wien 1896) in überzeugender Weise durch Versuche gefunden hat, vor der Platte ein ruhender Luftkörper, der sog. Stauhügel ABC. Die Seitenflächen desselben bilden mit

*) Vergl. G. Lang „Der Schornsteinbau“.

der Plattenebene an allen Stellen Winkel $90^0 - \beta$. Der Stauhügel hat bei kreisförmiger Platte die Form eines Kegels, bei quadratischer Platte die Form einer Pyramide, bei rechteckiger Platte diejenige eines Walmdaches, kurz in allen Fällen diejenige Form, in welcher ein Sandkörper mit dem Böschungswinkel (Reibungswinkel) $90^0 - \beta$ auf der wagerecht liegenden Platte verbleiben würde, wenn Sand in Übermafs darauf geschüttet wird, bis er nach allen Seiten abfliesst.

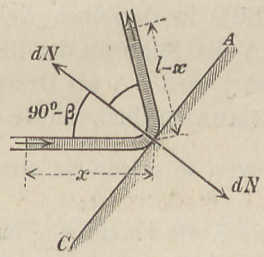
Fig. 354.



v. Loessl hat gefunden, dass der Winkel $\beta = 45^0$ ist. Der Lufthügel bildet vor der Platte einen ruhenden Körper, an dessen Mantelfläche die bewegten Lufttheilchen elastisch abprallen. Nach der Lehre vom schiefen Stosse (s. S. 152) prallen die Lufttheilchen mit derselben Geschwindigkeit w zurück, mit der sie dagegen strömten, und in einer Richtung, die von der Rechtwinkligen zur Stauhügelfläche um den Winkel $90^0 - \beta$ abweicht. Für $\beta = 45^0$ prallen die Lufttheilchen parallel zur Platte von dem Stauhügel ab.

Der Druck, der bei diesem Abprallen auf den Stauhügel ausgeübt wird, lässt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Theil, S. 141) berechnen.

Fig. 355.



In einem Knierohre (Fig. 355) vom Querschnitte dF, dessen Schenkel in der Richtung der zuströmenden und abprallenden Lufttheilchen liegen, befinde sich eine Flüssigkeit, welche in der Röhre eine Länge l einnimmt, mit den Längen x und $l - x$ auf die beiden Schenkel vertheilt. Bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Schwerpunktes dieser Flüssigkeit von der Fläche AC mit y_0, so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$y_0 \cdot l = x \cdot \frac{x}{2} \sin\beta + (l - x) \frac{l - x}{2} \sin\beta$$

$$= \sin\beta \left(x^2 + \frac{l^2}{2} - lx \right).$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt

$$l \cdot dy_0 = \sin\beta(2x \cdot dx - l \cdot dx).$$

Schreitet aber die Flüssigkeit in der Röhre mit der Geschwindigkeit w fort, so ist $w\,dt = -dx$, mithin $dx = -w \cdot dt$, also

$$l \cdot \frac{dy_0}{dt} = -\sin\beta(2xw - lw);$$

aus nochmaliger Differentiation folgt

$$l \cdot \frac{d^2y_0}{dt^2} = 2\sin\beta \cdot w^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2y_0}{dt^2} = 2\frac{\gamma}{g} dF \sin\beta \cdot w^2.$$

Bezeichnet man die in jeder Sekunde durch einen Röhrenquerschnitt strömende Flüssigkeits-Masse $\frac{\gamma}{g} dF \cdot w$ mit m, so wird

1) $$\frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2y_0}{dt^2} = 2m\sin\beta \cdot w.$$

Die linke Seite der Gl. 1 enthält die Masse der gesammten betrachteten Flüssigkeit, multiplicirt mit der Seitenbeschleunigung ihres Schwerpunktes in der Richtung rechtwinklig zur Fläche AC. Dies ist (nach 1. Theil, S. 142) gleich der Summe aller äusseren Kräfte in derselben Achsenrichtung, d. h. gleich dem Widerstande dN der Röhre in der Richtung rechtwinklig zur Fläche AC. Umgekehrt wird dN als Druck auf die Fläche AC übertragen. Würde die Röhre vom Querschnitte dF sich geradlinig durch die Fläche AC fortsetzen, so würde sie aus der Fläche ein Stück $\frac{dF}{\sin\beta}$ herausschneiden. Die Kraft $2m\sin\beta \cdot w$ nach Gl. 1, welche auf die Fläche $\frac{dF}{\sin\beta}$ kommt, erzeugt einen Druck für die Flächeneinheit

2) $$\mathfrak{p} = \frac{2m\sin^2\beta \cdot w}{dF} = 2\frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2\beta.$$

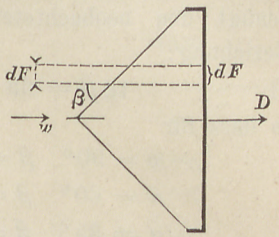
Dieser Druck herrscht an allen Stellen des in Ruhe befindlichen Stauhügels; mithin überträgt der Stauhügel auf die Platte von der Grösse F (Fig. 356) eine Druckkraft

3) $$D = 2\frac{\gamma}{g} \sin^2\beta \cdot w^2 \cdot F.$$

Weil nun für den vorliegenden Fall $\beta = 45^0$ gefunden wurde, so ist $\sin^2\beta = 1/2$ und

4) $$D = \frac{\gamma}{g} F w^2.$$

Fig. 356.



Diese Formel hat v. Loessl bei seinen Versuchen bestätigt gefunden für ebene Platten, die mit einem erhöhten Rande umgeben sind, sowie auch für gekrümmte Flächen, z. B. halbe Hohlkugeln, deren hohle Seite dem Winde zugekehrt ist. Gl. 4 giebt den grössten möglichen Winddruck auf eine Fläche, welche, in der Richtung des Windes rechtwinklig projizirt, eine Projektion F hat.

Für eine ebene Kreisfläche ohne Rand ergab sich

5) $$D = 0{,}83 \frac{\gamma}{g} F w^2;$$

für eine ebene quadratische Fläche ohne Rand

6) $$D = 0{,}86 \frac{\gamma}{g} F w^2;$$

für eine ebene Rechteckfläche ohne Rand, vom Seitenverhältnisse 2 : 1:

7) $$D = 0{,}92 \frac{\gamma}{g} F w^2;$$

desgl. beim Seitenverhältnisse 4 : 1:

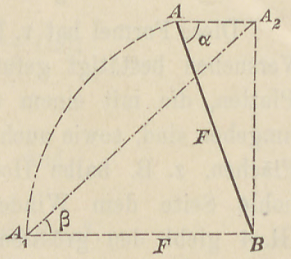
8) $$D = 0{,}94 \frac{\gamma}{g} F w^2.$$

Eine Druckverminderung oder eine Saugwirkung an der Rückseite der Fläche hat sich nicht ergeben. Wird der Winddruck von der Grundfläche F eines geraden, nicht sehr langen, prismatischen Körpers anstatt einer Platte F aufgenommen, so gelten für den Druck ebenfalls die Formeln 5 — 8.

Druck gegen schief gestellte Flächen. Bildet die Platte mit der Windrichtung den Winkel α, so entsteht nach v. Loessl's Versuchen ebenfalls ein Stauhügel, dessen Neigungswinkel β gegen die Windrichtung nun aber nicht in allen Fällen gleich ist, sondern von α abhängt. Es hat sich gezeigt, dass bei einer bestimmten

Neigung α der Platte die Neigung β der Seitenflächen des Stauhügels gegen die Windrichtung ringsum dieselbe ist (Fig. 358), dass β mit α zu- und abnimmt, u. zw. genügt den beobachteten Werthen die Beziehung:

Fig. 357.



9) $$\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha,$$

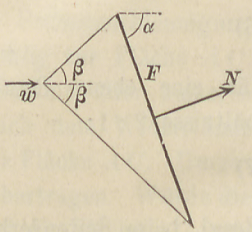
so dass für

$\alpha = 90^0 \quad \beta = 45^0$
$\alpha = 60^0 \quad \beta = 41^0$
$\alpha = 35^0 \quad \beta = 30^0$
$\alpha = 30^0 \quad \beta = 26^1/_2{}^0$
$\alpha = 0^0 \quad \beta = 0^0$

wird. Nach Fig. 357 ist β leicht zu konstruiren.

Ist nun F die Grösse der schief gestellten Fläche, so ist ihre Projektion in der Richtung des Windes $F\sin\alpha$. Wendet man daher auf diesen Fall die vorstehende Entwickelung sinngemäss an, so ergiebt sich für den Druck p im Stauhügel (Fig. 358) wiederum der Werth der Gl. 2:

Fig. 358.



10) $$p = 2\frac{\gamma}{g}w^2\sin^2\beta;$$

daraus entsteht für die Platte F die rechtwinklige Druckkraft

11) $$N = 2\frac{\gamma}{g}Fw^2\sin^2\beta.$$

Da nun $$\sin^2\beta = \operatorname{tg}^2\beta\cos^2\beta = \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta},$$

so wird mit $\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha$ nach Gl. 9:

12) $$N = 2\frac{\gamma}{g}\frac{Fw^2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

v. Loessl entwickelt freilich in anderer Weise $\sin\alpha$ statt $2\frac{\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ und schreibt einfach

13) $$N = \frac{\gamma}{g}Fw^2\sin\alpha.$$

Für verschiedene Werthe von α liefern die Formeln 12 und 13 folgende Ergebnisse:

	$\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$	$\sin \alpha$
$\alpha = 90^0$	1	1
$\alpha = 60^0$	0,857	0,866
$\alpha = 45^0$	0,667	0,707
$\alpha = 35^0$	0,494	0,574
$\alpha = 30^0$	0,4	0,5
$\alpha = 20^0$	0,210	0,342
$\alpha = 10^0$	0,059	0,174
$\alpha = 0^0$	0	0

Die Unterschiede sind hiernach nur erheblich bei kleinem Winkel α; wir empfehlen daher ohne Bedenken die einfachere Formel 11 von v. Loessl.

Der Winddruck gegen einen Schornstein oder Pfeiler, dessen Grundrisss ein Quadrat von der Seite a und dessen Höhe h ist,

Fig. 359.

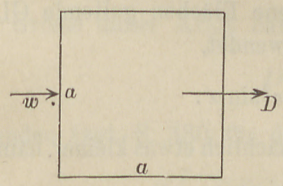
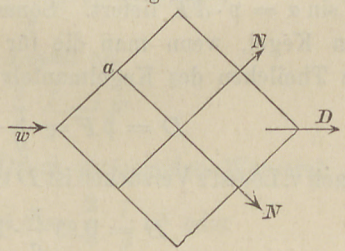


Fig. 360.



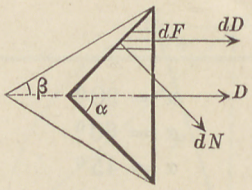
beträgt daher, wenn der Wind die eine Seitenfläche rechtwinklig trifft (Fig. 359): $D = \frac{\gamma}{g} a h w^2$, und wenn er in der Richtung der Diagonale weht (Fig. 360):

$$D = N\sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2 0{,}707 \cdot \sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2,$$

ist also derselbe wie im ersten Falle, denn jede der beiden getroffenen Seitenflächen $a \cdot h$ bekommt einen nach Gl. 13 zu bestimmenden Normaldruck N, und beide N geben die Mittelkraft D.

Druck gegen eine kegelförmige Fläche. Weht der Wind in der Achsenrichtung des Kegels gegen dessen Spitze und ist α der Winkel der Kegelseiten gegen die Achse (Fig. 361), so bildet sich vor dem Kegel ebenfalls ein Staukegel mit dem halben Winkel an der Spitze $= \beta$. Der Druck in diesem Staukegel wird dann wie auf S. 352 gefunden zu

Fig. 361.



$$\mathfrak{p} = 2\frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2\beta .$$

Die Vergleichung der Gl. 11 und 13 führt zu $2\sin^2\beta = \sin\alpha$, so dass für ebene Flächen

14) $$\mathfrak{p} = \frac{\gamma}{g} w^2 \sin\alpha$$

wird. Ist nun F die Grundfläche des Kegels, so entspricht einem Theilchen $\frac{dF}{\sin\alpha}$ der Mantelfläche eine Projektion dF in der Grundfläche. Auf die Mantelfläche $\frac{dF}{\sin\alpha}$ kommt dann ein Normaldruck $dN = \mathfrak{p} \cdot \frac{dF}{\sin\alpha}$, der in der Windrichtung die Seitenkraft $dD = dN\sin\alpha = \mathfrak{p} \cdot dF$ liefert. Sonach ist der gesammte Winddruck auf den Kegel, wenn man die für ebene Flächen geltende Gl. 14 auf die Theilchen des Kegelmantels anwendet,

15) $$D = \mathfrak{p}F = \frac{\gamma}{g} \cdot F w^2 \sin\alpha .$$

Nach v. Loessl's Versuchen ist D thatsächlich etwas kleiner, nämlich

16) $$D = 0.83\frac{\gamma}{g} \cdot F w^2 \sin\alpha .$$

Diese Formel gilt auch für ein cylindrisches Geschoss mit kegelförmiger Zuspitzung.

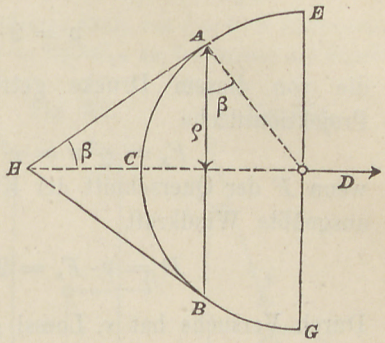
Freilich führt die obige Annahme $2\sin^2\beta = \sin\alpha$ für $\alpha < 30^0$ zu dem widersinnigen Ergebnisse $\beta > \alpha$.

Druck gegen eine Cylinderfläche. Für diesen Fall hat v. Loessl die Form des Stauhügels nicht untersucht. Da aber aus der Neigung β der Seitenfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung der Druck im Stauhügel zu $\mathfrak{p} = 2\frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2\beta$ folgt und $\mathfrak{p}$

an allen Stellen des Hügels den gleichen Werth haben muss, so muss auch die Neigung der Oberfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung an allen Stellen die gleiche sein.

Denkt man sich den Cylinder von der Höhe h mit lothrechter Achse, so stellt sich im Grundrisse der Stauhügel nach Fig. 362 vor den Cylinder; derjenige Theil der Mantelfläche des Cylinders, gegen welche der Stauhügel drückt, hat dann in der Windrichtung eine rechtwinkliche Projektion, welche annähernd (mit Vernachlässigung der an den Grundflächen des Cylinders entstehenden Unregelmässigkeit) gleich $F_x = AB \cdot h = 2\varrho \cdot h = 2r\cos\beta \cdot h = F \cdot \cos\beta$ gesetzt werden kann, wenn $F = 2r \cdot h$ den Achsenschnitt des Cylinders bezeichnet. Es wird dann die Druckkraft in der Windrichtung (nach S. 356)

Fig. 362.



$$D = \mathfrak{p} \cdot F_x = 2\frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2\beta F \cos\beta .$$

Die Grösse dieser Kraft hat v. Loessl zu

17) $$D = \frac{2}{3}\frac{\gamma}{g} w^2 F$$

gefunden (vgl. S. 330 für den Druck strömenden Wassers), so dass

$$2\frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2\beta \cos\beta = \frac{2}{3}\frac{\gamma}{g} w^2 \text{ oder}$$

$$\sin^2\beta \cos\beta = 1/3$$

sein muss. Dieser Gleichung entspricht rund.

18) $$\beta = 45^0,$$

weil für diesen Winkel

$$\sin^2\beta \cos\beta = 1/2 \cdot 0{,}707 = 0{,}3535$$

ist, was von $1/3$ nur wenig abweicht.

Die Seitenflächen AE und BG, die von dem Winde unmittelbar getroffen werden, liefern zu D einen so geringen Beitrag, dass er vernachlässigt werden kann.

Ein Halbcylinder wird, mit der krummen Fläche dem Winde entgegengestellt, nur etwa $^2/_3$ so viel Druckkraft erfahren, als wenn er mit der ebenen Fläche dem Winde rechtwinklig zugekehrt ist.

Druck gegen eine Kugelfläche. In diesem Falle bildet sich an der Kugel ein Staukegel (Fig. 362) mit dem Drucke

$$\mathfrak{p} = 2\frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2\beta;$$

die von diesem Drucke getroffene Kugelhaube ACB hat die Projektionsfläche

$$F_x = \varrho^2\pi = r^2\cos^2\beta\,\pi = F\cdot\cos^2\beta,$$

wenn F der Querschnitt der Kugel. Daher wird die auf die Kugel ausgeübte Windkraft

$$D = \mathfrak{p}\cdot F_x = 2\frac{\gamma}{g} F w^2 \sin^2\beta\cdot\cos^2\beta.$$

Durch Versuche hat v. Loessl gefunden

19) $$D = \frac{1}{3}\frac{\gamma}{g} F w^2, \text{ so dass}$$

$$\sin^2\beta\cos^2\beta = \frac{1}{6}, \quad \text{also} \quad \sin 2\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

sein muss. Dies giebt $\beta = 27^0\,22'$. Die Schlankheit dieses Kegels ist überraschend; $\beta = 45^0$ würde $D = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} F w^2$ liefern wie bei strömendem Wasser (S. 330). Eine Halbkugel erfährt, mit der gewölbten Fläche dem Wind entgegengestellt, nur etwa $^1/_3$ so viel Windkraft, als wenn sie mit der ebenen (oder auch hohlen) Fläche dem Winde rechtwinklig zugekehrt ist. Dieselbe Windkraft wie eine Kugel vom Halbmesser r liefert nach Gl. 16 ein Kegel vom Halbmesser r, dessen Winkel $\alpha = 23^0\,41'$ ist.

Beispiel 1: Für eine ebene, dem Winde rechtwinklig entgegenstehende Platte von der Fläche $F = 1$ qm wird nach Gl. 4, S. 353 der Winddruck $\mathfrak{p} = \frac{\gamma}{g} w^2$. Bei 10° C. ist $\gamma = 1{,}29\cdot\frac{273}{283} = 1{,}24$, $\frac{\gamma}{g} = 0{,}127$, also rund

$$\mathfrak{p} = 0{,}13\cdot w^2.$$

Bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten wird dann $\mathfrak{p}$ folgendermassen:

$w =$	1 m, kaum merkbar,	$\mathfrak{p} = 0{,}13$ kg/qm,
$w =$	2 m, gelinder Wind,	$\mathfrak{p} = 0{,}52$,
$w =$	15 m, Sturm,	$\mathfrak{p} = 29$ kg,
$w =$	36 m, Orkan,	$\mathfrak{p} = 168$,
$w =$	50 m, stärkster Orkan,	$\mathfrak{p} = 325$.

Bei der Berechnung der Standsicherheit von Bauwerken kommt in Frage, welchen Windstärken das fragliche Bauwerk wahrscheinlich ausgesetzt sein wird. Als Mittelwerth kann für Mitteleuropa

$$\mathfrak{p} = \frac{\gamma}{g} \cdot 39{,}2^2 = 200 \text{ kg/qm}$$

angenommen werden, in der Nähe der Meeresküste bis 325 kg/qm.

Beispiel 2: Wie hoch darf eine hölzerne Säule von $r = 0{,}3$ m Halbmesser sein, damit sie bei einem Winddrucke $\mathfrak{p} = 200$ kg/qm an der Grenze der Standsicherheit sei (Fig. 363). Es ist

$$F = 2\,r \cdot h = 0{,}6 \cdot h,$$

die Windkraft

$$D = \frac{2}{3} \cdot 200 \cdot 0{,}6\,h,$$

das Gewicht der Säule bei einer Dichte $\gamma_1 = 750$:

$$G = 0{,}3^2\,\pi \cdot h \cdot 750.$$

Für den Grenzzustand der Ruhe ist (nach 1. Theil, S. 167)

$$D \cdot \frac{h}{2} = G \cdot 0{,}3, \quad \text{also}$$

$$h = \frac{0{,}6\,G}{D} = 1{,}575 \text{ m}.$$

Fig. 362.

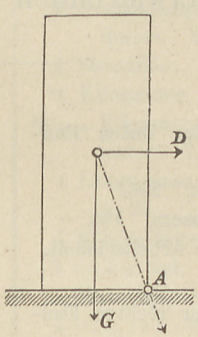
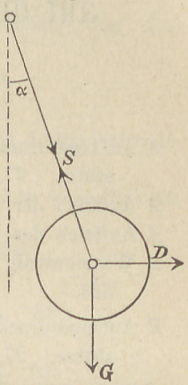


Fig. 364.



Beispiel 3: Eine Holzkugel vom Halbmesser $r = 0{,}2$ m und der Dichte $\gamma_1 = 750$ sei an einem Faden aufgehängt (Fig. 364). Bei welcher Neigung α des Fadens gegen die Lothrechte wird Gleichgewicht herrschen, wenn die Kugel ausser ihrem Gewicht einen Winddruck $\mathfrak{p} = 200$ kg/qm erfährt?

Es ist

$$D = \frac{1}{3} \cdot 200 \cdot 0{,}2^2\,\pi, \quad G = 750 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0{,}2^3\,\pi \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{D}{G} = \frac{1}{3}.$$

Biblioteka Szkoły Inżynierskiej w Szczecinie

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

A Auflagerdruck der linken Endstütze. 27.

A Auftrieb der Luft. 206.

A Auftrieb des Wassers. 184.

A Wärmewerth der Arbeitseinheit. 334.

B Auflagerdruck der rechten Endstütze. 27.

C Auflagerdruck der Mittelstütze. 55.

D Druck eines Wasserstrahles. 270.

D Druckfestigkeit. 6.

D Druck strömenden Wassers. 325.

D Spannkraft einer Strebe eines Fachwerkes. 73.

D Winddruck. 352.

E Elasticitätsmafs. 6.

F Ausflussöffnung. 229.

F mit Flüssigkeit erfüllter Querschnitt einer Röhre oder eines Kanales. 277, 292.

F Querschnitt eines Stabes. 6.

F_0 Wasserspiegelfläche eines Gefässes. 229.

F_1 und F_2 Wasserspiegelfläche im Ober- und Unterwasser bei verbundenen Gefässen. 255.

G Eigengewicht eines Körpers oder Körpertheiles. 13.

G Gleitmafs. 15.

H Höhe des Wasserspiegels über der Unterkante einer Seitenöffnung. 234.

H Polabstand des Kraftecks. 30.

H Stauhöhe. 310.

J Trägheitsmoment eines Querschnitts. 21.

J_0 polares Trägheitsmoment eines Querschnitts. 65.

K äussere Kraft. 4.

M Masse eines Körpers. 90.

O Spannkraft im Obergurt eines Fachwerks. 73.

P Einzellast. 27.

Q Gewicht. 104.

Q Querkraft. 20.

Q scheinbares Gewicht eines von Flüssigkeit umgebenen Körpers. 185.

Q sekundliche Ausflussmenge in cbm. 233, 234, 238.

Q Wärmemenge. 334.

R Massenkraft der Masseneinheit. 225.

R Reaktion ausfliessenden Wassers. 266.

R Ziffer der Zustandsgleichung der Gase. 209, 335.

S innere Spannkraft. 2.

T absolute Temperatur. 210.

T_1 absolute Temperatur des Gases in einem Gefässe. 331.

T_1 absolute Temperatur in einem Schornstein. 348.

U Spannkraft im Untergurt eines Fachwerks. 73.

V Rauminhalt eines Stabes. 101.

V Spannkraft eines Ständers eines Fachwerks. 72.

WE Wärmeeinheit. 33.

X, Y, Z Massenkraft der Masseneinheit. 225.

Z Zugfestigkeit. 6.

a Abstand einer Last vom linken Auflager eines Balkens. 27.

at Atmosphäre $= 1$ kg/qcm. 8.

b Abstand einer Last vom rechten Auflager eines Balkens. 27.

b Bodenbreite eines Kanals. 300.

b Breite eines Körpers. 192.

b Durchflussbreite. 310, 313.

c Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers. 310.

c specifische Wärme bei unveränderlichem Rauminhalte. 333.

c und c_1 Geschwindigkeiten vor dem Stosse. 126.

c_1 specifische Wärme bei gleichbleibendem Drucke. 333.

cm Centimeter. 7.

d Breite. 22.

d Druckspannung an der Elasticitätsgrenze. 6.

d Durchmesser eines Kolbens. 162.

d Durchmesser eines Nietes. 16.

d Röhrenweite. 277.

e Abstand der am stärksten gespannten Stelle eines Querschnitts von der Nulllinie. 18.

e Abstand des Schwerpunkts eines Schiffes von dem Schwerpunkte seiner Verdrängung. 189.

e Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse. 143.

f Biegung. 43.

f Reibungsziffer. 173.

g Fallbeschleunigung. 90.

h Höhe eisne Körpers. 192.

h Höhe eines Querschnitts. 22.

h Höhe des Wasserspiegels über der Oberkante einer Seitenöffnung. 234.

h Schornsteinhöhe. 349.

h wirksame Druckhöhe. 232.

h_0 dem Atmosphärendruck gleichwerthige Flüssigkeitssäule. 216.

h_2 Wehrhöhe. 310.

k Geschwindigkeitshöhe des Zuflusses. 310.

k Stossziffer. 128.

kg Kilogramm. 7.

kg/qcm Kilogramm für 1 Quadratcentimeter. 7.

l Länge eines Stabes, eines Balkens. 4, 25.

l Röhrenlänge. 276.

$\mathrm{l} = \log$ nat.

m Massentheilchen. 229.

$n = c_1 : c$. 336.

n Knickungsfaktor. 62.

p Belastung der Längeneinheit. 26.

p Beschleunigung eines Körpers. 90.

p Druck an der Mündung eines Gefässes. 230, 331.

p Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit. 157.

p_0 Atmosphärendruck. 215.

p_0 Druck am Wasserspiegel eines Gefässes. 230.

p_1 Druck des Gases in einem Gefässe. 331.

p' Druck eines Gases an der Ausflussmündung. 344.

q Beschleunigung eines Gefässes mit Wasser. 194.

qcm Quadratcentimeter. 7.

r Halbmesser eines Kreises. 24.

r mittlere hydraulische Tiefe. 292.

t Hebelarm einer Strebenkraft. 83.

t Schwingungsdauer eines Pendels. 144.

t Temperatur. 208.
t Wassertiefe. 300.
t Zeit der Entleerung eines Gefässes. 249.
t_1 Zeit der Füllung und Entleerung von Schleusen. 256.
u Abstand einer Last vom linken Auflager eines Trägers. 82.
u Geschwindigkeit beim Stosse im Augenblick der stärksten Formänderung. 127.
u lothrechte Ordinate des Seilecks. 29.
u veränderliche Querschnittsbreite. 37.
u von der Flüssigkeit berührter Umfang des Röhren- oder Kanal-Querschnitts. 277, 291.
u_1 Abstand einer Last vom rechten Auflager eines Trägers. 82.
v Einheitsraum (spec. Volumen). 202.
v veränderliche Querschnittshöhe. 37.
v_0 Geschwindigkeit im Wasserspiegel eines Flusses. 303.
v und v_1 Geschwindigkeiten nach dem Stosse. 127.
w Abstand des Schnittpunktes der Gurtrichtungen (an einer Schnittstelle eines Trägers) von der linken Auflager-Lothrechten. 82.
w Ausflussgeschwindigkeit. 227.
y Stauhöhe. 316.
z Eintauchungstiefe. 192.
z Widerstandshöhe von Röhren und Kanälen. 277, 307.
z Zugspannung an der Elasticitätsgrenze. 5.
z_0 Druckhöhe des Schwerpunkts einer Seitenöffnung. 234.

Δl elastische Verlängerung. 4.
α Ausdehnungsziffer der Gase. 209.
α Biegungswinkel. 42.
α Einschnürungsziffer. 238, 332.
α Gefällverhältnis einer Kanal- oder Flussstrecke. 291.
α Knickziffer. 61.
β Widerstandsziffer von Röhren und Kanälen. 277, 292.
γ Dichte eines Gases. 202.
γ Dichte eines Körpers. 91.
γ Gleitung. 15.
ε Dehnung. 5.
ε Neigung einer Ebene gegen einen Wasserstrahl oder Wasserstrom. 271, 327.
ε Winkelbeschleunigung. 98, 145.
ζ_0 Widerstandsziffer für Reibung des Wassers im Gefässe. 244.
η und η_1 Wirkungsgrad des Stosses. 134, 136.
ϑ Neigungswinkel. 193.
ϑ Verdrehungswinkel. 65.
λ Länge eines Faches im Fachwerk. 72.
λ Widerstandsziffer kreisförmiger Röhren. 277, 346.
μ auf einen Abstand a bezogene Masse. 142.
μ Ausflussziffer. 239, 343.
μ_{pk} Ausflussziffer bei unvollständiger Einschnürung für kreisförmige Öffnung. 241.
μ_{pr} desgl. für rechteckige Öffnung. 241.
μ_{uk} Ausflussziffer bei unvollkommener Einschnürung für kreisförmige Öffnung. 242.
μ_{ur} desgl. für rechteckige Öffnung. 242.
ρ Krümmungshalbmesser der Biegungslinie. 19, 40.
σ Längsspannung. 4, 6.
σ' und σ'' stärkste Zug- und Druckspannung an einem Querschnitte. 22.
τ Schubspannung. 15.
φ Böschungswinkel einer Kanalwand. 300.

φ Geschwindigkeitsziffer. 238, 332.
ψ_1 Winkelgeschwindigkeit nach dem Stosse. 145.
ω Einspannungswinkel. 41.
ω Winkelgeschwindigkeit. 94, 196.
ω_1 Winkelgeschwindigkeit vor dem Stosse. 145.

$\mathfrak{A}$ Arbeit. 101.
$\mathfrak{J}$ geometrisches Trägheitsmoment einer Schwimmfläche. 190.
$\mathfrak{M}$ Biegungsmoment. 21.
$\mathfrak{M}$ Standsicherheitsmoment. 189.
$\mathfrak{M}$ Verdrehungsmoment. 65.
$\mathfrak{M}_1$ Einspannungsmoment. 50.
$\mathfrak{W}$ Widerstandsmoment eines Querschnitts. 22.

c_1 Geschwindigkeit des Schwerpunkts vor dem Stosse. 145.
$\mathfrak{p}$ hydraulischer Druck. 260.
$\mathfrak{p}$ Winddruck auf 1 qm. 352.
v_1 Geschwindigkeit des Schwerpunkts nach dem Stosse. 145.

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)

Arbeit $\mathfrak{A}$ bei der Längenänderung eines Stabes. 49.
Arbeitswerth der Wärmeeinheit $^1/_A$. 334.
Atmosphäre at als Spannungsmafs. 8.
Atmosphärendruck, Veränderlichkeit desselben. 203.
Auftrieb der Luft. 206.
Auftrieb des Wassers. 183.
Ausdehnungsziffer α der Gase. 209.
Ausfluss der Gase. 331, 342.
Ausfluss des Wassers. 227.
Ausflussgeschwindigkeit w. 229.
Ausflussmenge Q (sekundliche). 233.
Ausflussziffer μ. 239.

Balken auf drei Stützen. 55.
Balken auf zwei Stützen. 27.
Balken überall gleicher Sicherheit. 37.
Ballistisches Pendel. 142.
Barometer. 215.
Barometrisches Höhenmessen. 204, 211.
Beharrungszustand. 228.
Belastung, plötzliche. 104.
Bewegung, beschleunigte, elastisch-fester Körper. 90.
Bewegung der Luft in Röhren. 346.
Bewegung des Wassers in Kanälen. 291.
Bewegung des Wassers in Röhren. 276.
Bewegung, ungleichförmige, des Wassers. 306.
Biegung f. 43.
Biegungsarbeit. 110.
Biegungsfedern. 115.
Biegungsfestigkeit. 17.
Biegungslinie. 40.
Biegungsmoment $\mathfrak{M}$. 21, 25.
Biegungsspannung σ, σ', σ''. 18, 21, 22.
Boyle-Mariotte'scher Satz. 202.
Brückenpfeiler, Stau derselben. 313.

Centrifuge. 200.

Dachträger. 74.
Dehnung ε. 5.
Dehnungslinie. 6.
Dichte γ der Gase. 203.
Drehungsarbeit. 120.
Drehung elastisch-fester Körper. 93, 97.
Drehung flüssiger Körper. 196.
Drehungsfestigkeit. 64.
Drosselklappe. 285.
Druck D strömenden Wassers. 325.
Druckfestigkeit D. 6.
Druckhöhenverlust z_1 in Folge plötzlicher Querschnittsänderung. 245.
Druck, hydraulischer, $\mathfrak{p}$. 259.
Druck, hydrostatischer, p. 160.
Druckkraft auf eine Gefässwand. 164, 169.

Druckkraft ruhenden Wassers gegen krumme Flächen. 164, 181.
Druckmesser. 215, 281.
Druckmittelpunkt. 169.
Druckspannung σ. 6.

Eingespannter, am Ende unterstützter Balken. 49.
Einheitsraum v der Gase. 202.
Einschnürung (Kontraktion). 238.
Einschnürung, unvollkommene. 241.
Einschnürung, unvollständige. 240.
Elasticität. 4.
Elasticitätsgrenze für Zug und Druck, z bez. d. 5, 6.
Elasticitäts- und Festigkeitszahlen. 8.
Elasticitätsmafs E. 5.
Elastisch-feste Körper. 4.
Entleerung eines Gefässes. 248.
Euler's Gleichgewichts-Bedingungen für Flüssigkeiten. 225.
Euler's Gleichungen für die Bewegung von Flüssigkeiten. 272.

Fachwerkbalken. 71.
Federn. 115, 122.
Festigkeitszahlen. 8.
Fläche gleichen Druckes. 168, 226.
Flächenkräfte. 8.
Flügelgebläse. 223.
Flüsse. 291.
Flüssigkeiten, Mechanik der. 156.
Formänderungs-Arbeit. 99.

Gase, Gleichgewicht derselben. 202.
Gase, Einheitsraum v derselben. 202.
Gase, Zustandsgleichung. 210.
Gay-Lussac'scher Satz. 208.
Gebläse, Flügel-. 223.
Gefäss-Wandstärke. 165.
Geschwindigkeitskurve. 303.
Geschwindigkeitsziffer φ. 238, 332.
Gestänge überall gleicher Sicherheit. 13.
Gewicht, scheinbares, in Bezug auf Wasser. 185.
Gleichgewicht der Gase. 202.
Gleichgewicht elastisch-fester Körper. 9.
Gleichgewicht flüssiger Körper. 159.
Gleitung γ. 15.
Gleitmafs G. 15.

Hähne, 284.
Heber. 222.
Höhenmessen, barometrisches. 204, 211.

Kanäle, Bewegung des Wassers in Kanälen. 291.
Kanalquerschnitt kleinsten Widerstandes. 299.
Knickfestigkeit. 59.
Knickungsfaktor n. 62.
Knickziffer α. 62.
Knieröhren. 283.
Kontraktion (Einschnürung). 238.
Kräfteplan eines Fachwerks. 78.
Kreiselpumpe. 220.
Kropfröhren. 283.
Kühlung von Räumen. 345.

Lochen. 17.
Luftballon. 206, 214.
Luft, Bewegung in Röhren. 346.
Luft, Dichte derselben. 203.
Luftwiderstand D. 350.

Mariotte'scher Satz. 202.
Massenkräfte. 8.
Metacentrum. 191.
Mittelpunkt des Stosses. 147.
Mittelpunkt des Wasserdrucks. 169.
Manometer. 215.
Momentenfläche. 26.
Mühlstein, Spannung der Ringe um einen. 96.

Nachwirkung, elastische. 7.
Niveaufläche. 168, 226.
Nulllinie. 20.

Parabel-Träger. 85.
Parallel-Fachwerkträger. 88.
Pendel, ballistisches. 142.
Pfähle, Einrammen derselben. 133.
Pfeiler, Stau derselben. 313.
Piëzometer. 281.
Presse, Wasserdruck-. 162.
Proportionalitätsgrenze. 7.
Pumpe, Kreisel-. 220.
Pumpe, Saug-. 219.
Pumpe, Saugstrahl-. 262.
Punzen. 17.

Querkraft Q. 20.
Querträger. 32.

Rammen. 133.
Reaktion ausfliessenden Wassers. 267.
Reaktionsschiff. 268.
Röhren, Bewegung der Luft in. 346.
Röhren, Bewegung des Wassers in. 276.
Röhren, Knie- und Kropf-. 283.
Röhren-Wandstärke. 165.

Saugheber. 262.
Saugpumpe. 219.
Saugstrahlpumpe. 262.
Scherfestigkeit. 15.
Schieber. 284.
Schleudermaschine. 200.
Schleusenkammern, Füllung und Entleerung derselben. 255.
Schleusenthore, Riegel derselben. 175.
Schornstein. 348.
Schubfestigkeit. 15
Schubspannung τ. 15.
Schwache Stellen. 109, 113.
Schwimmachse. 188.
Schwimmende Körper. 188.
Seileck als Momentenfläche. 29.
Specifisches Volumen v der Gase. 202.
Specifische Wärme c und c_1. 333.
Springbrunnen. 290.
Springstrahl. 290.
Standsicherheit schwimmender Körper. 188.
Statisch unbestimmte Aufgaben. 49.
Stauhöhe. 310.
Staukurve. 314.
Stauweite x_0. 323.
Stossbelastung. 107, 137.
Stoss, elastischer. 140.
Stoss, excentrischer. 144.
Stoss, gerader, centraler. 126.
Stosslinie. 126.
Stossmittelpunkt. 147.
Stoss, schiefer. 149.
Stoss sich drehender Körper. 141.
Stoss, unelastischer. 132.
Stossverlust. 246.
Stossziffer k. 130.
Strahlschiff. 268.
Strömendes Wasser, Druck desselben. 325.

Taucherglocke. 222.
Temperatur, absolute, T. 210.
Trägerquerschnitt I. 23, 34.
Tragfedern. 115.
Trägheitsmoment eines Querschnitts J. 22.

Ventile. 285.
Verdrängung V. 188.
Verdrehungs-Federn. 122.
Verdrehungswinkel ϑ. 65.
Verlängerung, elastische, Δl. 5.
Vernietung. 16.

Wagenachse. 32.
Wägung eines langen Stabes. 58.
Wägung eines zweiachsigen Wagens. 58.
Wandstärke. 165.
Wärmeeinheit WE. 33.
Wärmekapacität c und c_1. 333.
Wärmemenge Q. 333.
Wärmewerth A der Arbeitseinheit. 334.
Wärme, specifische, c und c_1. 333.
Wasserdruck-Presse. 162.
Wasserleitung mit Verzweigung. 285.

Wasserschwelle. 318.
Wasserspiegel. 168, 194, 196.
Wassersprung. 318.
Wasserstrahl, Druck eines, gegen eine Fläche. 269.
Wasseruhr. 250.
Wehre. 310.
Widerstandsmoment $\mathfrak{W} = J : e$ eines Querschnitts. 22.
Widerstandsziffer ζ_0 für Reibung des Wassers im Gefäss. 244.
Wiegmannscher Dachträger. 79.
Winddruck D. 350.
Winkeleisen. 34.

Zugfestigkeit Z. 6, 11.
Zugspannung σ. 4.
Zustandsänderung, adiabatische. 340.
Zustandsänderung eines Gases. 333.
Zustandsänderung, isothermische. 338.
Zustandsgleichung der Gase. 210, 334.

Berichtigungen.

Auf S. 13, Zeile 4 von unten soll es statt $\log F_0$ heissen: $\mathrm{l}F_0$.
Auf S. 69 ist in Gl. 13 nachzufügen:

$$\text{oder } \mathfrak{M} = \frac{2}{9}\tau F d.$$

Berichtigungen zum **ersten** Theile:

S. 16: In Gl. 3 sind zu streichen die Worte: „= Fläche RQQ_1R_1 der Fig. 13“; dieselben sind bei der Drucklegung irrthümlich hinzugefügt worden.
S. 139, Z. 10 von unten, fehlt hinter dem Worte „wäre“ ein Komma.
S. 196: In dem Krafteck der Fig. 248 sollen mit δ die Winkel bezeichnet werden, welche die Kräfte N mit der Wagerechten (nicht mit der Lothrechten) bilden.
S. 255: In Fig. 316 soll das Gewicht des Körpers 400 t sein (statt 40 t).