

Vorträge
über
Mechanik

als Grundlage für das
Bau- und Maschinenwesen.

Von

Wilh. Keck,

weil. Geh. Regierungsrat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Erster Teil:

Mechanik starrer Körper.

Vierte Auflage,

bearbeitet von

Dr. Ing. **Ludwig Hotopp,**

Baurat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Mit 433 Holzschnitten.

~~IV. 1086.~~



~~3. u. IV, 294-I~~

Hannover.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.
1913.



531

Biblioteka
Szczecińska
Technologiczna

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

[Redacted]

C2-2303/1

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen dasjenige, was als die erste Hälfte des Lehrfaches „Mechanik“ im Winter des ersten Studienjahres an der Technischen Hochschule zu Hannover vorgelesen wird. Der Studienplan der Hochschule ist so eingerichtet, daß die Vorträge über Mechanik erst beginnen, nachdem die Studierenden etwa 2½ Monate lang Differential- und Integralrechnung gehört haben. Auf Grund dieser Anordnung kann in den Vorträgen über Mechanik von den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung Anwendung gemacht werden. Dieser Vorgang kommt nicht nur der Mechanik, sondern auch dem mathematischen Unterrichte zu statten, weil dessen Ergebnisse durch die Anwendungen, die sie in der Mechanik finden, geübt und befestigt werden.

Besonderes Gewicht wurde auf Einfachheit und Anschaulichkeit gelegt, sowie auf allmählichen Uebergang vom Leichten zum Verwickelteren. Allen wichtigen Sätzen sind erläuternde Beispiele aus dem praktischen Leben und aus der Technik in kleinerem Drucke beigelegt.

Der vorliegende erste Teil der Vorträge über Mechanik behandelt die Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Die Mechanik der elastischen und der flüssigen Körper soll einen zweiten Teil, die allgemeine (analytische) Mechanik einen dritten Teil bilden, während eine eingehendere Elektrizitätslehre vom Verfasser bereits 1892/93 herausgegeben wurde.

Bei der Abfassung des Buches ist auf Angabe der Quellen, auch der geschichtlichen, größtenteils verzichtet worden; doch sei hervorgehoben, daß mir das Lehrbuch der technischen Mechanik von A. Ritter in Aachen, meinem hochverehrten Lehrer, in vielen Beziehungen ein Vorbild gewesen ist. Diejenigen Stellen, an denen ich Ritters Werk unmittelbar benutzte, sind im Buche angegeben.

Auch dem Lehrbuche der technischen Mechanik von Oscar Hoppe in Clausthal verdanke ich wertvolle Anregung.

Den Schluß des Buches bildet ein alphabetisches Verzeichnis der in den Formeln benutzten Buchstaben, sowie ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

Hannover, im Januar 1896.

Keck.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Mit Rücksicht auf die freundliche Aufnahme, welche diesem Buche bei seinem ersten Erscheinen zuteil geworden ist, habe ich bei der Bearbeitung der zweiten Auflage den Hauptplan der ersten Ausgabe beibehalten.

Die Einfachheit und Anschaulichkeit der Behandlung des Stoffes habe ich zu verbessern gesucht durch Hinzufügung einiger neuen Holzschnitte, durch Verbesserung solcher Figuren, die nicht nach Wunsch ausgefallen waren, sowie durch zahlreiche kleine Aenderungen und Ergänzungen im Texte. Auch die Zahl der erläuternden Beispiele wurde vermehrt durch die Vorführung der Steinzange und des Bremsberges.

Den in dankenswerter Weise mir erteilten Winken und Ratschlägen zur Verbesserung des Buches habe ich nach Möglichkeit Rechnung getragen.

Hannover, im Januar 1900.

Keck.

Vorwort zur dritten Auflage.

Nachdem mit Ablauf weniger Jahre wiederum eine Neuauflage dieses Buches erforderlich geworden, habe ich auf Ersuchen der Verlagsbuchhandlung und im Einvernehmen mit den Erben des

leider zu früh verstorbenen Verfassers die Durchsicht und Bearbeitung derselben übernommen. In Rücksicht auf den regen Zuspruch, welchen das Buch in seinem jetzigen Bestande seit seinem ersten Erscheinen im Jahre 1896 gefunden hat, und insbesondere gegenüber den darin niedergelegten, einer langjährigen erfolgreichen Lehrtätigkeit entsprungenen Erfahrungen des Verfassers im Bereiche des behandelten Lehrgebietes habe ich, selbst erst seit einigen Jahren der Lehrtätigkeit obliegend, mir die weitgehendste Zurückhaltung bei vorliegender Bearbeitung auferlegen zu sollen geglaubt. Aus demselben Grunde ist auch davon abgesehen, den veränderten Lehrplänen, welche sich aus der Einführung gesonderter Vorlesungen über Mechanik bezw. Statik für Architekten, Bauingenieure und Maschineningenieure an der Technischen Hochschule zu Hannover im Oktober 1901 ergeben haben, im einzelnen Rechnung zu tragen.

In den Kapiteln über Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene, Ermittlung der Momente von Kräften usw. sind, entsprechend der Stoffanordnung in den Vorträgen, die graphischen Methoden etwas eingehender als in den vorhergehenden Auflagen und in unmittelbarer Nebeneinanderstellung mit der analytischen Behandlung des Gegenstandes berücksichtigt. Auch sind im Anschluß daran einige weitere wichtige graphostatische Sätze und Regeln hinzugefügt. — Die theoretische Behandlung der Schraube hat eine geringe Ergänzung erfahren und ist als Beispiel für die Anwendung nicht sperrenden Gewindes die sogenannte „Stützspindel“ aufgenommen. —

Im übrigen haben wesentliche Aenderungen nicht stattgefunden, so daß das Buch auch in seiner neuen Auflage in der Hauptsache noch als Werk seines Urhebers gelten muß.

Hannover, im Herbst 1904.

L. Hotopp.

Vorwort zur vierten Auflage.

Bei Bearbeitung der hier vorliegenden vierten Auflage des ersten Teiles des bewährten Keckschen Lehrbuches über technische Mechanik habe ich mich, wie bei der dritten Auflage, hinsichtlich der Umgrenzung, Anordnung und Behandlung des Lehrstoffes wiederum an die vom Verfasser bei Herausgabe des Werkes betätigten Grundsätze gehalten.

Eine geringe Erweiterung des Rahmens ist nur insofern eingetreten, als in den Abschnitt über das Gleichgewicht starrer Körper eine allgemeinere Behandlung des Problems der Stützung starrer Körper aufgenommen wurde. Hierbei ist besonderer Wert darauf gelegt, dem Anfänger möglichst anschauliche Merkmale für die Beurteilung des Gleichgewichtes eines gestützten starren Körpers an die Hand zu geben; ihn zu befähigen, den Stützzustand des Körpers als statisch bestimmt oder statisch unbestimmt, oder in bezug auf mögliche Angriffe aktiver Kräfte, als einen solchen unbedingten oder bedingten Gleichgewichtes zu erkennen.

Die Betrachtungen über den „Hebel“ als Beispiel eines im Stützzustande bedingten Gleichgewichtes befindlichen Körpers sind durch Vorführung des zwei- und dreifachen Hebels erweitert.

Bei Behandlung der beschleunigten Bewegung von Massenpunkten, Massengruppen oder starren Körpern schien es mir geboten, um das Wesenhafte des Kampfes zwischen den beschleunigenden Kräften und der Trägheit der Massen im Sinne des d'Alembertschen Prinzips im Ausdruck mehr hervortreten zu lassen, den Widerstand, den ein Körper oder Massenpunkt ihrer trägen Natur zufolge einer Beschleunigung entgegensetzen, seiner Herkunft entsprechend als „Trägheitswiderstand“ zu bezeichnen und zu bewerten. Daneben ist einstweilen in Rücksicht auf die noch stattfindende Benutzung älterer Auflagen des Werkes neben der neuen meist auch die bisherige weniger treffende Bezeichnung als „Ergänzungskräfte“ hinzugefügt. An sich könnte es scheinen, als ob die Wahl der einen oder anderen Bezeichnung desselben Begriffes nur von geringem Belang sein möchte. Das

trifft aber in vorliegendem Falle um deswillen nicht zu, weil es sich hier um die Bezeichnung eines wirklichen mechanischen Wertes handelt, der im Kampfe zwischen Kraft und Masse eine aktuelle Rolle spielt und dessen Wesenheit durch eine möglichst treffende Bezeichnung dem mechanischen Gefühl des angehenden Ingenieurs näher zu bringen immerhin wichtig erscheinen muß.

Hannover, im Juli 1912.

L. Hotopp.

Inhalt.

	Seite
Allgemeines	1
Erste Abteilung.	
Mechanik des Massenpunktes.	
1. Darstellung des Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.	3
a) Gleichförmige Bewegung eines Punktes; Geschwindigkeit	5
b) Ungleichförmige Bewegung eines Punktes	6
2. Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes	10
a) Gleichförmig veränderte Bewegung; Beschleunigung	11
b) Ungleichförmig veränderte Bewegung	14
3. Zusammensetzung mehrerer gleichzeitigen Bewegungen eines Punktes	17
a) Zusammensetzung der Geschwindigkeiten	19
b) Zusammensetzung der Beschleunigungen	23
c) Zusammensetzung krummliniger Seitenbewegungen	25
d) Zerlegung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen	27
4. Physikalische Grundgesetze der Mechanik	30
Maßeinheiten der Physik	35
5. Geradlinige Bewegung eines Massenpunktes unter alleiniger Einwirkung der Schwere	36
6. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte	39
7. Mechanische Arbeit einer Kraft	43
8. Arbeitsvermögen (kinetische Energie oder lebendige Kraft) eines Massenpunktes	46
9. Parabolische Wurfbewegung	52
10. Gesetz der allgemeinen Massenanziehung	58
11. Parabolische Bewegung im allgemeinen	63
12. Tangential- und Normalbeschleunigung	64
13. Gleichgewicht eines Massenpunktes	68
14. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn	70
15. Vorgeschriebene Bewegung in wagerechtem Kreise	73
16. Vorgeschriebene Bewegung in lotrechtem Halbkreise	77
17. Einfaches (mathematisches) Pendel	81
18. Scheinbare (relative) Bewegung in bezug auf einen fortschreitenden Raum	84
19. Ruhe in bezug auf einen sich gleichmäßig drehenden Raum	92
20. Einfluß der Drehung der Erde auf das scheinbare Gewicht	97

Zweite Abteilung.

Mechanik starrer Körper.

	Seite
1. Einleitung	101
2. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte	102
3. Satz der Drehmomente	104
4. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in einer Ebene	108
a) Zeichnerisches (graphisches) Verfahren	108
b) Rechnerisches (analytisches) Verfahren	115
5. Zerlegung einer Kraft in Seitenkräfte (zeichnerisch und rechnerisch)	120
6. Zeichnerische Ermittlung des Momentes einer beliebigen Kräftegruppe in einer Ebene	126
7. Polarachse zweier mit verschiedenen Polen zu einer Kräftegruppe gezeichneter Seilecke	129
8. Graphische Merkmale für das Gleichgewicht einer Kräftegruppe . .	131
9. Zeichnung eines Seilecks durch gegebene Punkte	133
10. Zusammensetzung von Kräftepaaren	136
11. Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenen Angriffs- punkten	141
12. Zentralachse einer Kräftegruppe	145
13. Zusammensetzung von Parallelkräften gleichen Sinnes im Raume . .	148
14. Mittelpunkt der Massen (Schwerpunkt) eines starren Körpers . . .	150
15. Zeichnerische Ermittlung des Schwerpunktes einer ebenen Fläche .	166
16. Arbeit der Schwerkkräfte an einer beliebigen Massengruppe	168
17. Der Satz d'Alemberts	169
18. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes	172
19. Satz der Arbeit	174

A. Gleichgewicht starrer Körper.

1. Gleichgewichtsbedingungen	177
2. Gleichgewicht festgehaltener oder gestützter Körper	180
a) Das räumliche Stützproblem	181
b) Das ebene Stützproblem	187
3. Der um eine feste Achse drehbare Körper (Hebel)	197
4. Anwendung auf Hebelwagen	201
5. Auf wagerechter Ebene ruhender Körper	207
6. Gleichgewicht einer Verbindung von Gelenkstangen	215
7. Kettenlinien	226
8. Brücken- und Tafelwagen	231
9. Reibung	234
a) Reibungsziffer, Reibungswinkel und Reibungskegel	234
b) Schiefe Ebene	237
c) Bewegung in Keilnuten	241
d) Stabförmiger Körper, von zwei Ebenen gestützt	243
e) Gleichförmiges Heben eines Pochstempels	249

	Seite
f) Festklemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen	250
g) Steinzange zum Heben und Versetzen schwerer Werksteine . .	252
h) Keil in dem Spalt eines Baumstammes oder dergl.	254
i) Gleichförmige Bewegung zweier sich berührenden Keile . . .	255
k) Wirkung der Keilpresse	259
l) Wirkungsgrad einer Maschine	260
m) Drucklinie eines Gewölbes	263
10. Wirkung der Reibung bei gleichmäßig sich drehenden Körpern . .	265
a) Reibungsmoment eines Tragzapfens	267
b) Reibungsmoment eines Stützzapfens	272
c) Reibungswage von Hirn	275
d) Bremszaum von Prony	276
e) Reibungsräder	277
f) Seilreibung	279
g) Bandbremse	282
h) Riemenscheiben	283
i) Seilrollen und Flaschenzüge	285
11. Rollwiderstand der Walzen und Räder. Gleichmäßige Bewegung der Fuhrwerke	294
12. Die Schraube	303
Schlußbemerkung über Reibung	314

B. Beschleunigte Bewegung starrer Körper.

1. Größe des Arbeitsvermögens eines Körpers bei einer Verschiebung bzw. einer Drehung um eine feste Achse	315
2. Trägheitsmomente	316
3. Winkelbeschleunigung	324
4. Physisches Pendel	326
5. Beschleunigte Bewegung einer Seilrolle	333
6. Widerstände der festen Drehachse eines Körpers	336
Freie Achsen	338
7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers	344
a) Arbeitsvermögen	344
b) Bewegung eines freien Körpers	345
c) Rollbewegung auf schiefer Ebene. Fuhrwerke	347
d) Das Anhalten der Wagen einer selbstwirkenden Seilbahn, eines sog. Bremsberges	353
e) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene . .	359
f) Beschleunigte Schraubenbewegung	365

Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches .	369
Alphabetisches Verzeichnis der behandelten Gegenstände	371

Allgemeines.

Die Mechanik ist die Lehre von der Bewegung der Körper und von den Ursachen der Bewegung, den Kräften.

Während ein Körper sich bewegt, führt jeder Punkt desselben seine besondere Bewegung aus, und es ist die Bewegung des ganzen Körpers erst dann völlig bekannt, wenn sie für jeden einzelnen seiner Punkte angegeben werden kann.

Die Bahn eines sich bewegenden Körpers ist die stetige Folge der Örter, welche er nacheinander einnimmt.

Ein Punkt beschreibt bei seiner Bewegung eine ununterbrochene Bahnlinie, während zugleich eine gewisse Zeit verfließt. Zur Kenntniss der Bewegung eines Punktes ist daher erforderlich, daß man die Form der Bahnlinie kennt und außerdem anzugeben vermag, an welcher Stelle seiner Bahn der bewegliche Punkt sich in jedem Augenblicke befindet.

Soll die Bewegung eines Körpers aus ihren Ursachen hergeleitet werden, so muß man außer der geometrischen Form und Größe der Körper auch noch gewisse physikalische Eigenschaften derselben, zunächst ihre Stoffmenge, ihren Gehalt an träger Materie, berücksichtigen, weil diese von wesentlichem Einfluß auf die Bewegung ist. Die Menge der trägen Materie wird kurz die *M a s s e* des Körpers genannt.

Je kleiner die räumliche Ausdehnung eines Körpers ist im Verhältnisse zur Längenerstreckung der Bahnlinien seiner einzelnen Punkte, desto näher werden diese einzelnen Bahnlinien aneinander rücken, desto weniger werden sie sich also räumlich voneinander unterscheiden. Betrachtet man z. B. die Bewegung einer geworfenen Kugel aus einiger Entfernung, so wird man in vielen Fällen nicht mehr die verschiedenen Bahnlinien der einzelnen Punkte getrennt auffassen, sondern man wird diese sämtlichen Bahnlinien als zu einer einzigen (etwa der des Mittelpunktes) zusammengeschrunpft ansehen und nur von einer Bahnlinie der geworfenen Kugel sprechen. Dabei wird also die räumliche Ausdehnung der Kugel völlig vernachlässigt, sie wird hinsichtlich der *g e o m e t r i s c h e n* Untersuchung als zu einem Punkte verdichtet angesehen; jedoch denkt man sich diesen Punkt als behaftet mit der Masse des entsprechenden Körpers und bezeichnet ihn als einen *M a s s e n p u n k t* (materiellen Punkt).

Wenn man z. B. sagt, die Erde bewege sich in einer Ellipse um die Sonne, so faßt man damit unseren ganzen Planeten als einen einzigen Massenpunkt auf, indem man sich die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte vereinigt denkt. Wir wissen freilich, daß, wegen der gleichzeitigen Drehung der Erde um ihre Achse, die einzelnen Punkte der Erde durchaus nicht sämtlich Ellipsen, sondern verschiedene cykloidenartige Kurven beschreiben, aber dennoch ist die Auffassung der Erde als einfacher Massenpunkt bei solchen Untersuchungen zulässig, bei denen es auf die Verschiedenartigkeit der Bewegungen der einzelnen Punkte nicht ankommt, während dagegen bei anderen Untersuchungen gerade die verschiedene Lage der einzelnen Punkte der Erde von Wichtigkeit sein kann, so daß dann natürlich die räumliche Ausdehnung der Erde nicht vernachlässigt werden darf.

In Fällen dieser Art, wo die Form und Größe eines Körpers nicht unberücksichtigt bleiben darf, betrachtet man ihn als aus Massenpunkten zusammengesetzt und bezeichnet ihn als eine *Gr u p p e v o n M a s s e n p u n k t e n*.

Ob man also in einem gegebenen Falle den sich bewegenden Körper als einfachen Massenpunkt, oder aber als eine Massengruppe zu behandeln hat, hängt nicht so sehr von der Größe des Körpers, sondern vielmehr von der Art der vorliegenden Aufgabe ab. Übrigens wird später gezeigt werden, daß die Ergebnisse der Untersuchungen, bei denen ein sich bewegendes Körper als zu einem Punkte verdichtet angesehen wurde, nicht etwa ungenau, oder nur annähernd richtig sind, sondern für einen bestimmten Punkt des Körpers (den Schwerpunkt) vollständige Gültigkeit haben.

Es kann daher eine Untersuchung, bei welcher ein Körper als Massenpunkt angesehen wurde, jederzeit weiter ausgeführt und eingehender behandelt werden, indem man dazu übergeht, den betreffenden Körper nunmehr als eine Massengruppe aufzufassen. Es ist dann nur eine Vervollständigung, nicht aber eine Verbesserung oder Berichtigung der ersten einfacheren Untersuchung nötig.

Wir werden uns nun zunächst mit der Bewegung eines einfachen Massenpunktes beschäftigen und erst später zu der Behandlung von Massengruppen übergehen.

Erste Abteilung.

Mechanik des Massenpunktes.

Die Bewegung eines Massenpunktes heißt geradlinig oder krummlinig, je nachdem dessen Bahnlinie eine Gerade oder eine Kurve ist. Unter der „Richtung der Bewegung“ versteht man die Richtung der Bahnlinie an derjenigen Stelle, wo der Massenpunkt sich augenblicklich befindet. Bei der geradlinigen Bewegung ist also die Bewegungsrichtung dauernd dieselbe; bei der krummlinigen Bewegung ändert sie sich fortwährend.

1. Darstellung des Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Geraden, so kann der Ort P desselben in irgendeinem Augenblick durch seinen Abstand s von einem festen Punkte A der Bahnlinie AM (Fig. 1) angegeben werden. Die während der Bewegung verfließende Zeit wird von irgendeinem Zeitpunkt an nach Zeiteinheiten (etwa Sekunden) gezählt und mit t (von *tempus*) bezeichnet, während s (von *spatium*) in Längeneinheiten (etwa Metern) ausgedrückt wird. Ist nun zwischen den beiden veränderlichen Größen s und t eine Beziehung bekannt, etwa

$$s = f(t),$$

so ist damit die Bewegung mit allen ihren Eigentümlichkeiten gegeben. Es wird daher die Gleichung $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz der geradlinigen Bewegung des Massenpunktes genannt. Sie ermöglicht, für jeden Zeitpunkt t die zugehörige Größe s und damit die Lage des Punktes zu bestimmen.

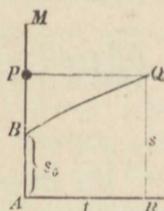
Ein solches Bewegungsgesetz wird am besten anschaulich gemacht durch eine bildliche Darstellung, indem man die Zeitgrößen t nach einem beliebigen gewählten Maßstab als Abszissen, die Längen s ebenso als Ordinaten aufträgt. Die Bahnlinie AM kann dann unmittelbar als Ordinatenachse benutzt werden. Die so erhaltene

Fig. 1.



Linie BQ (Fig. 2) nennen wir die Wegeslängen-Kurve (die man aber ja nicht als Bahnlinie auffassen darf). Aus Fig. 2 erkennt man, daß der Massenpunkt zu Anfang der Betrachtung, d. h. für $t = 0$, schon in einem Abstand $AB = s_0$ von dem Festpunkt A sich befand, und daß dieser Abstand s sich mit wachsender Zeit vergrößert, daß der Massenpunkt sich also in der Richtung von A nach M bewegen wird. Nach $t = AR$ Zeiteinheiten ist $s = QR$; zieht man nun durch Q eine Parallele zur Zeitachse, so bestimmt diese den augenblicklichen Ort P auf der Bahnlinie AM .

Fig. 2.

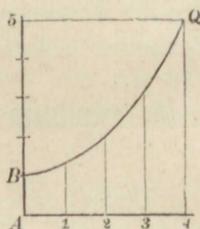


Beispiel: Das Bewegungsgesetz $s = 1 + \frac{1}{4} t^2$ liefert für angenommene Werte 0, 1, 2, ... folgende zugehörige Werte von s :

$t = 0$	1	2	3	4
$s = 1$	$1\frac{1}{4}$	2	$3\frac{1}{4}$	5.

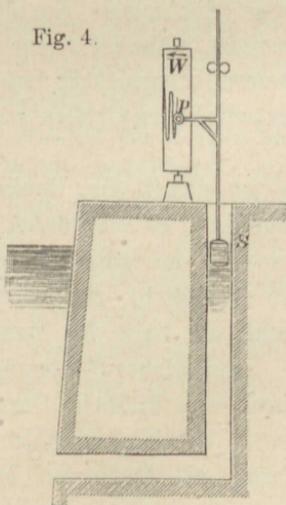
Das Bewegungsgesetz läßt sich auch schreiben $t^2 = 2 \cdot 2 (s - 1)$; dies ist die Gleichung einer Parabel mit lotrechter Achse und dem Scheitel B (Fig. 3).

Fig. 3.



In manchen Fällen, wo das Gesetz einer Bewegung nicht bekannt ist, verschafft man sich dadurch eine möglichst genaue Kenntnis desselben, daß man den als Massenpunkt zu betrachtenden beweglichen Körper mit einem Schreibstifte versieht, der auf einer durch ein Uhrwerk gleichmäßig gedrehten Papierwalze W die bildliche Darstellung des Bewegungsgesetzes selbsttätig aufzeichnet. So kann z. B. ein veränderlicher Wasserstand durch Schwimmer sich selbsttätig auftragen, indem ein mit dem Schwimmer S verbundener Schreibstift P die entsprechende Kurve (Flutkurve) beschreibt (Fig. 4). Gewöhnlich ist der Wechsel der Wasserstandshöhe zur unmittelbaren Auftragung zu groß; alsdann ist die lotrechte Bewegung durch geeignetes Räderwerk in verkleinertem Maßstab (etwa 1 : 25) zur Darstellung zu bringen.

Fig. 4.



a) Gleichförmige Bewegung eines Punktes. Geschwindigkeit.

Der einfachste Fall eines Bewegungsgesetzes ist offenbar die gradlinige (lineare) Form

$$1) \quad s = s_0 + ct$$

(mit s_0 und c als unveränderlichen Größen), welche durch die Gerade BQ (Fig. 5) dargestellt wird. Für $t = AR$ ist $s = RQ = AP$. Gibt man t einen anderen, etwa größeren Wert $t_1 = AR_1$, so wird

$$s_1 = s_0 + ct = R_1Q_1 = AP_1.$$

Durch Abziehen der ersten Gleichung von der letzten entsteht

$$s_1 - s = c(t_1 - t) \text{ oder } c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{entsprechende Zeit}}$$

Die unveränderliche Größe c der Gl. 1 ist also das Verhältnis der zurückgelegten Wegeslänge zu der Anzahl der dazu verbrauchten Zeiteinheiten. Eine Bewegung, bei der dieses Verhältnis des Weges zur Zeit sich nicht ändert, bei der also in gleichen Zeiträumen stets gleiche Wegeslängen zurückgelegt werden, heißt eine gleichförmige.

Wählt man den beliebigen Zeitraum $t_1 - t$ gleich der Zeiteinheit, so bedeutet $c = s_1 - s$ die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge, und dieses Verhältnis: Weg durch Zeit, oder die in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge heißt die Geschwindigkeit c (von *celeritas*) der gleichförmigen Bewegung.

In der Darstellung des Bewegungsgesetzes (Fig. 5) erscheint die Geschwindigkeit $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{Q_1N}{QN} = \text{tg } \alpha$ als das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängen-Kurve BQ .

Ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden BQ negativ (Fig. 6), so erhalten wir das Gesetz $s = s_0 - ct$ mit negativer Geschwindigkeit c ; es bedeutet dies eine rückläufige Bewegung von B nach dem Festpunkt A hin.

Ist BQ der Zeitachse parallel, d. h. ist $\text{tg } \alpha$ und damit die Geschwindigkeit $c = 0$, so bleibt s unverändert $= s_0$; der Massenpunkt ruht also.

Fig. 5.

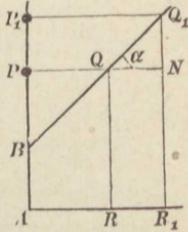
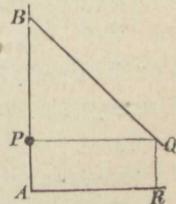


Fig. 6.



b) Ungleichförmige Bewegung eines Punktes.

Hat das Bewegungsgesetz $s = f(t)$ nicht die einfach lineare Form, ist die Wegeslängen-Kurve also eine krumme Linie (Fig. 7), so ist das Verhältnis von $s_1 - s$ zu $t_1 - t$ veränderlich; man nennt dann die Bewegung eine ungleichförmige. Während des Zeitraumes $RR_1 = t_1 - t = \Delta t$ wird eine Wegeslänge $PP_1 = s_1 - s = \Delta s$ zurückgelegt. Stellt man sich nun vor, daß diese Strecke Δs statt nach dem gegebenen Bewegungsgesetze von dem Massenpunkte gleichförmig durchlaufen würde, so wäre

$$1) \quad \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m$$

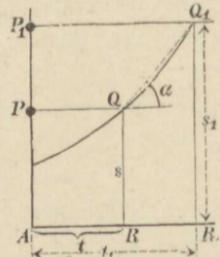
die Geschwindigkeit dieser gedachten gleichförmigen Bewegung; die Sehne QQ_1 gäbe die Darstellung des Gesetzes derselben, und das Ansteigungsverhältnis dieser Sehne das Maß der Geschwindigkeit v_m . Die Geschwindigkeit v_m (von *velocitas*) dieser gleichförmigen Bewegung, vermöge deren der sich bewegendende Punkt in dem Zeitraume $t_1 - t$ dieselbe Wegeslänge $s_1 - s$ zurücklegen würde wie nach dem wirklichen Bewegungsgesetze, nennt man die **mittlere Geschwindigkeit** für den Zeitraum $t_1 - t$.

Die stellvertretende gleichförmige Bewegung, dargestellt durch die Sehne QQ_1 , wird sich nun der gegebenen Bewegung, dargestellt durch die Kurve QQ_1 , in der Nähe des Zeitpunktes t um so mehr anschmiegen, also von ihr um so weniger abweichen, je kleiner man den Zeitraum $t_1 - t = \Delta t$ und mithin auch die Sehne QQ_1 wählt. Läßt man den Zeitraum Δt im Sinne der Differentialrechnung zu einem unendlich kleinen Zeiteilchen dt werden, so rückt auch der Kurvenpunkt Q_1 dem Punkte Q unendlich nahe, und aus der Sehne QQ_1 wird dann eine Berührungsgerade der Kurve im Punkte Q . Die für das unendlich kleine Zeiteilchen dt berechnete mittlere Geschwindigkeit

$$2) \quad v = ds : dt$$

bezeichnet man als die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung im Zeitpunkte t . Sie erscheint als das Ansteigungsverhältnis der entsprechenden Berührungsgeraden der Wegeslängen-Kurve oder (was dasselbe ist) als das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängen-Kurve selbst. Man bestimmt

Fig. 7.



die Geschwindigkeit im Zeitpunkte t als die erste Abgeleitete oder den ersten Differential-Quotienten $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ des gegebenen Bewegungs-Gesetzes $s = f(t)$.

Die Form $v = \frac{ds}{dt}$, in welcher bei ungleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, entspricht der Form $c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ bei der gleichförmigen Bewegung; man betrachtet aber nur ein unendlich kleines Teilchen der Bewegung und denkt sich dieses durch eine gleichförmige mit derselben Wegeslänge ds ersetzt.

Beispiel: Dem Bewegungsgesetz $s = 1 + \frac{1}{4}t^2$ (S. 4) entspricht hiernach eine von der Zeit t abhängige Geschwindigkeit, ein Geschwindigkeitsgesetz

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}t$$

Für $t = 0$ ist $v = 0$; mit fortlaufender Zeit nimmt die Geschwindigkeit v gleichmäßig zu. Man ersieht auch aus Fig. 3, daß das Ansteigungsverhältnis der Kurve BQ bei B gleich Null ist und nach rechts fortwährend zunimmt.

Da die Geschwindigkeit die auf eine Zeiteinheit bezogene Wegeslänge bezeichnet, so müssen bei einer Geschwindigkeits-Zahl selbstverständlich auch die Längeneinheit und die Zeiteinheit bekannt sein, auf welche sich die Zahl bezieht. Rechnet man nach Metern und Sekunden, so schreibt man z. B. $v = 3 \text{ m/sek}$, wenn die sekundliche Geschwindigkeit 3 Meter beträgt, während $v = 10 \text{ km/std}$ eine Geschwindigkeit von 10 Kilometern in einer Stunde bedeutet.

Kilometer, Meter, Centimeter und Millimeter werden durch km, m, cm und mm bezeichnet, während Stunde, Minute und Sekunde durch std, min und sek ausgedrückt werden sollen.

Zuweilen kennt man von einer Bewegung nur die in einzelnen größeren Zeiträumen zurückgelegten Wegeslängen, kann daraus dann die mittlere Geschwindigkeit für jeden dieser Zeiträume berechnen und betrachtet diese annäherungsweise als wahre Geschwindigkeiten, indem man jeden Bewegungsteil als einen gleichförmigen ansieht.

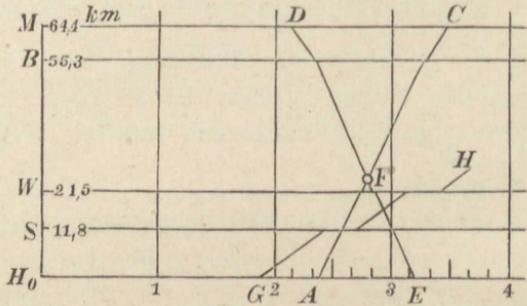
Beispiel 1: Letzteres findet Anwendung bei der zeichnerischen Darstellung der Fahrpläne der Eisenbahnzüge. Ein Eisenbahnzug ist freilich eine vielfältig zusammengesetzte Körpergruppe, deren einzelne Teile die verschiedenartigsten Bewegungen ausführen. Für den Zweck der Fahrpläne kommen aber diese verwickelten Verhältnisse nicht in Betracht. Vielmehr denkt man sich den

ganzen Zug zu einem Punkte zusammengedrängt, denkt sich die Mittellinie des Gleises geradlinig gestreckt und längs dieser Mittellinie den Punkt sich verschiebend. Als Wegeslängen trägt man die Strecken von Mitte zu Mitte der Stationen auf. Die Bewegungen von Station zu Station, welche in Wirklichkeit zum Teil ungleichförmige sind, betrachtet man annähernd als gleichförmig, indem man die Bewegungsgesetze nach mittleren Geschwindigkeiten durch gerade Linien darstellt. Auf der

wagerechten Grundlinie (Fig 8) sind die Zeiten, von Mitternacht beginnend, aufgetragen, und zwar bedeuten die kleinen Teile je 10 Minuten. Auf der lotrechten Achse sind die Strecken der Bahnlinie, nach Kilometern angegeben, abgeteilt, und z. B. mit *H* (Hannover), *S* (Seelze), *W* (Wunstorf), *B* (Bückeburg) und *M*

(Minden) bezeichnet. Ein Nachtschnellzug, um 2 Uhr 25 Min. von Hannover abfahrend, trifft 2 Uhr 45 Min. in Wunstorf ein, fährt nach 1 Minute Aufenthalt weiter, ist 3 Uhr 16 Minuten in Bückeburg, hat 1 Minute Aufenthalt und langt 3 Uhr 37 Min. in Minden an. Dieser Zug ist durch die gebrochene Linie *AC* dargestellt. Den Stationsaufenthalt bezeichnet ein kurzer wagerechter Strich oder Absatz. Der Linienzug *DE* bezieht sich auf einen Gegenzug, der um 2 Uhr 11 Min. in Minden abfährt und 3 Uhr 12 Min. in Hannover eintrifft. Der Schnittpunkt *F* beider Linien kennzeichnet den Zeitpunkt und die Stelle (zwischen *B* und *W*), wo beide Züge aneinander vorbeifahren. Da die Eisenbahn doppelgleisig ist, kann dies auf freier Strecke (zwischen 2 Bahnhöfen) geschehen, wogegen es bei eingleisigen Bahnen nur auf einer Station möglich wäre. Der Linienzug *GH* bezeichnet einen Güterzug, dessen erheblich geringere Geschwindigkeit aus der schwächeren Ansteigung hervorgeht. Dieser Güterzug hält längere Zeit in Seelze und wird hier von dem ohne Aufenthalt durchfahrenden Schnellzug überholt. Linien, die nach derselben Seite hin ansteigen, bezeichnen Züge in derselben Richtung, die auf demselben Gleise fahren, sich daher nur auf Stationen überholen können. Dieserhalb dürfen Linien, die nach derselben Seite hin ansteigen, sich nur auf Stationslinien durchschneiden. Solche Fahrpläne enthalten in Wirklichkeit sämtliche Züge zu einem Bilde vereinigt und sind ein unentbehrliches Hilfsmittel des Betriebes, wenn es sich um Einlegung von Sonderzügen, um Ausführung von Gleisarbeiten u. dergl. handelt, weil man daraus klar erkennen kann, zu welchen Zeiten die Gleise für neue Züge oder für Arbeiten frei sind. In der wirklichen Ausführung liegt freilich die Zeitachse lotrecht, die Längsachse wagerecht, doch lediglich aus äußeren Zweckmäßigkeits-Rücksichten, die mit dem Wesen der Sache nichts zu tun haben.

Fig 8.



Die 33,8 km zwischen Wunstorf und Bückeburg werden in 30 Minuten zurückgelegt, d. h. mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1,127 Kilometern in der Minute

$$= 1,127 \text{ km/min} = 60 \cdot 1,127 \text{ km/60 min} = 67,62 \text{ km/std} \text{ oder}$$

$$1127 \text{ m/60 sek} = \frac{1127}{60} \text{ m/sek} = 18,8 \text{ m/sek}.$$

Eine sekundliche Geschwindigkeit von 20 m würde gleichbedeutend sein mit

$$20 \cdot \frac{3600}{3600} \text{ m/sek} = 72000 \text{ m/std} = 72 \text{ km/std},$$

d. h. mit einer stündlichen Geschwindigkeit von 72 km, während

$$100 \text{ km/std} = \frac{100000}{3600} \text{ m/sek} = 27,78 \text{ m/sek}$$

bedeuten.

Beispiel 2: Hat ein Radfahrer eine sekundliche Geschwindigkeit von 5 m, so legt er in der Stunde $5 \cdot 3600 \text{ m} = 18 \text{ km}$ zurück, oder es ist

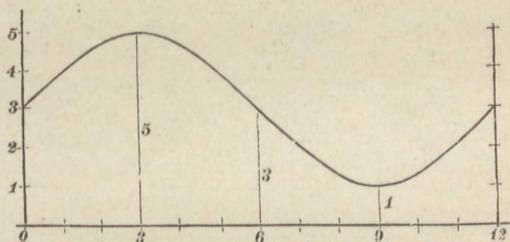
$$5 \text{ m/sek} = \frac{5 \cdot 3600}{3600} \text{ m/sek} = 18000 \text{ m/std} = 18 \text{ km/std}.$$

Beispiel 3: Die lotrechte Auf- und Abwärts-Bewegung eines der Ebbe und Flut unterworfenen Wasserspiegels erfolge nach dem Bewegungsgesetze $s = 3 + 2 \sin \frac{1}{6} \pi t$, wobei die Zeiten t in Stunden (abgekürzt std), die Wege s in Metern zu verstehen sind. Die Darstellung dieses Gesetzes (die Flutkurve) hat dann die Form der

Fig. 9. Für $t = 3$ Stunden erreicht $\sin \frac{1}{6} \pi t$ seinen größten Wert $\sin \frac{1}{2} \pi = 1$, für $t = 9$ std seinen kleinsten Wert $\sin \frac{3}{2} \pi = -1$, so daß s zwischen dem größten Werte 5 m und dem kleinsten Wert 1 m schwankt. Das Geschwindigkeits-Gesetz ist

$v = \frac{1}{3} \pi \cos \frac{1}{6} \pi t = 1,047 \cdot \cos \frac{1}{6} \pi t$. Für $t = 0$, $t = 12$ und ganze Vielfache davon hat v seinen größten Wert, nämlich $v_{max} = 1,047 \text{ m/std}$. Für $t = 6$, $t = 18$, 30 usw. hat v seinen größten negativen oder seinen Minimalwert, nämlich $v_{min} = -1,047 \text{ m/std}$. Die Geschwindigkeit v ist positiv, solange die Wegeslängenkurve nach rechts ansteigt, und umgekehrt; sie ist Null, wenn das Steigen in Fallen übergeht, und umgekehrt, d. h. an den höchsten und tiefsten Punkten der Kurve, nämlich für $t = 3, 9, 15$ usw. — Fig. 9 stellt eine ideelle Flutkurve dar. Die wahren Flutkurven weichen davon zunächst grundsätzlich in der Weise ab, daß wegen der Bewegung des Mondes um die Erde die Zeit zwischen zwei höchsten Wasserständen nicht 12 Stunden, sondern mehr, nämlich 12 Stunden 25 Minuten beträgt. Außerdem enthalten die wirklichen Flutkurven Unregelmäßigkeiten, die von der örtlichen Gestaltung der Flußbetten, des Meerbodens, der Ufer, den Windverhältnissen usw. abhängen.

Fig. 9.



2. Darstellung des Geschwindigkeits-Gesetzes der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Wie s eine $f(t)$ war, so ist die Abgeleitete davon, nämlich v , ebenfalls eine $\varphi(t) = f'(t)$, welche das Geschwindigkeits-Gesetz heißen möge und ebenfalls zeichnerisch dargestellt werden kann.

Während man aus der Darstellung des Bewegungsgesetzes die in einem beliebigen Zeitraume zurückgelegte Wegeslänge unmittelbar abgreifen konnte, ist dies aus dem Geschwindigkeits-Gesetze nicht ohne weiteres möglich. Da aber die Geschwindigkeit v aus dem Bewegungsgesetz $s = f(t)$ durch Differentiation $v = ds : dt$ zu finden war, so muß man durch das umgekehrte Verfahren, d. h. durch Integration, auch von v zu s gelangen können. Es ist nämlich $ds = v \cdot dt$, folglich mittels sog. unbestimmter Integration

$$s = \int v \cdot dt + C.$$

Die im allgemeinen unbestimmte Integrations-Konstante C läßt sich feststellen, wenn zu einem bestimmten Werte von t der zugehörige Wert von s bekannt ist, etwa für den Anfang der Beobachtung $t = 0$ der Wert $s = s_0$.

Beispiel: Für die Bewegung eines Massenpunktes sei das Geschwindigkeitsgesetz $v = 3 t^2$ gegeben; der Massenpunkt habe zu Anfang schon eine Entfernung $s_0 = 3 \text{ m}$ von dem gewählten Festpunkte der Bahnlinie. Dann ist

$$s = \int 3 t^2 dt + C = t^3 + C.$$

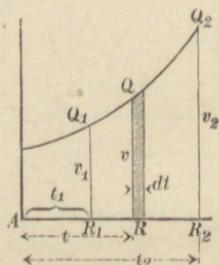
Die Größe C ist nun an die Bedingung gebunden, daß die Gleichung für $t = 0$ den Wert $s = 3$ liefern muß. Setzt man demnach diese beiden Größen in die Gleichung ein, also $3 = 0 + C$, so bestimmt sich $C = 3$, und das Bewegungsgesetz lautet

$$s = 3 + t^3.$$

Als Probe erhält man hieraus wieder $v = ds : dt = 3 t^2$.)

Die Gleichung $ds = v \cdot dt$ hat übrigens auch eine geometrische Bedeutung, indem $v \cdot dt$ den Inhalt des unmittelbar rechts neben $v = RQ$ (Fig. 10) liegenden lotrechten Flächenstreifens der Geschwindigkeitskurve darstellt (mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Größe höherer Ordnung). Daher muß die endliche Wegeslänge $s_2 - s_1$, die zwischen den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ zurückgelegt wird, durch die Summe aller zwischenliegenden Flächenstreifen,

Fig. 10.



d. h. durch die endliche Fläche $Q_1 Q_2 R_2 R_1$ ausgedrückt sein. Oder: die während einer gewissen Zeit, d. h. zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten, zurückgelegte Wegeslänge wird dargestellt durch den Inhalt derjenigen Fläche, welche von der Geschwindigkeitskurve, der Zeitachse und den, jenen beiden Zeitpunkten entsprechenden Geschwindigkeits-Ordinaten eingeschlossen ist.

Analytisch bedeutet dies $s_2 - s_1 = \int_{t=t_1}^{t=t_2} v \cdot dt$, also das bestimmte

Integral der Gleichung $ds = v \cdot dt$, zwischen den Zeitgrenzen t_1 und t_2 genommen.

Läßt man den auf der Bahnlinie (Fig. 2) zu wählenden Festpunkt mit der Anfangslage des beweglichen Punktes zusammenfallen, d. h. $s_0 = 0$ werden, so ergibt sich für die Wegeslänge von $t = 0$ bis $t = t$ (indem man $s_1 = s_0 = 0$, $t_1 = 0$ setzt und statt t_2 und s_2

einfach t und s schreibt): $s = \int_{t=0}^{t=t} v \cdot dt$. (1)

a) Gleichförmig veränderte Bewegung. Beschleunigung.

Der einfachste Fall einer ungleichförmigen (mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgenden) Bewegung ist offenbar ein solcher, wobei die ganze Geschwindigkeitsänderung während eines bestimmten Zeitraumes t sich gleichmäßig über letzteren verteilt. Ist also c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach t Zeiteinheiten, so beträgt die ganze Geschwindigkeitsänderung $v - c$ während des Zeitraumes t . Soll diese Änderung sich gleichmäßig über die Zeit t erstrecken, so muß sie für jede Zeiteinheit $(v - c) : t$ betragen. Setzt man diese gleichbleibende Geschwindigkeitsänderung für jede Zeiteinheit $= p$, so wird die Gesamtänderung $v - c = pt$ oder

$$v = c + pt. \quad (2)$$

Eine solche Bewegung, bei welcher die Änderung der Geschwindigkeit verhältnismäßig mit der entsprechenden Zeit erfolgt, heißt eine gleichförmig veränderte Bewegung, und Gl. 2 ist ihr Geschwindigkeitsgesetz.

Ist die in jeder Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeitsänderung p positiv, d. h. eine Zunahme, so heißt sie **Beschleunigung**, und die Bewegung wird eine gleichförmig beschleunigte

genannt. Im entgegengesetzten Falle hat der Massenpunkt eine gleichförmig verzögerte Bewegung, und die dann negativ werdende Geschwindigkeits-Änderung in der Zeiteinheit heißt **Verzögerung**; das entsprechende Geschwindigkeitsgesetz ist

$$3) \quad v = c - pt.$$

Offenbar kann eine Verzögerung einfach wie eine negative Beschleunigung behandelt werden.

Das Geschwindigkeitsgesetz $v = c + pt$, in welchem v und t veränderlich, c und p unveränderlich sind, wird durch eine ansteigende Gerade BQ (Fig. 11) dargestellt.

Fig. 11.

Die Beschleunigung

$$p = \frac{v - c}{t} = \frac{NQ}{BN} = \operatorname{tg} \alpha$$

erscheint dabei als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie BQ .

Die zufolge einer gleichförmig beschleunigten Bewegung während des Zeitraumes $t = AR$ zurückgelegte Wegeslänge s ist (nach dem allgemeinen Satze auf S. 11) gleich der Flächenzahl der Figur $ARQB$, d. h.

$$4) \quad s = \frac{1}{2}(v + c)t.$$

Soll s aber durch c , p und t ausgedrückt werden, so zerlege man das Trapez in das Rechteck $ABNR = ct$ und das Dreieck $BNQ = \frac{1}{2}t \cdot NQ = \frac{1}{2}t \cdot pt = \frac{1}{2}pt^2$, so daß

$$5) \quad s = ct + \frac{1}{2}pt^2$$

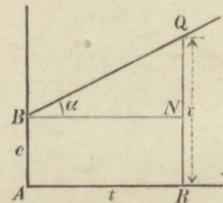
entsteht. Das Rechteck zeigt hierbei den Einfluß der Anfangsgeschwindigkeit, das Dreieck $\frac{1}{2}pt^2$ dagegen den Einfluß der Beschleunigung auf die Wegeslänge. Will man endlich noch s durch c , v und p ausdrücken, so ersetze man in Gl. 4 die Größe t durch

$$\frac{v - c}{p}, \text{ um zu erhalten}$$

$$6) \quad s = \frac{v + c}{2} \frac{v - c}{p} = \frac{v^2 - c^2}{2p}.$$

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung, bei der $c > v$, gelten die Gleichungen 3, 5 und 6 ebenfalls, sobald darin $+p$ mit $-p$ vertauscht wird.

Legt man Meter und Sekunden zu Grunde, so kann eine Geschwindigkeit geschrieben werden: $v \text{ m/sek.}$ Die Beschleunigung ist



aber eine Geschwindigkeitszunahme, geteilt durch eine Zeit oder die auf die Zeiteinheit bezogene Geschwindigkeitszunahme, ist daher zu schreiben $p \text{ m/sek}^2$ und zu sprechen: p Meter in der Quadratsekunde. (Vorschlag von A. Hasselblatt, Petersburg.)

Beispiel 1: Ein Eisenbahnzug setze sich vom Bahnhof aus in Bewegung und habe, nachdem 180 Sekunden seit der Abfahrt verstrichen sind, seine volle Geschwindigkeit von 25 m/sek erreicht; es soll unter der Annahme, daß die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte sei, die Größe der Beschleunigung, sowie die während der Anfahrt (d. h. der 180 sek) zurückgelegte Wegeslänge berechnet werden.

Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes (Fig. 12) ist in diesem Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit = 0, ein Dreieck. Die Beschleunigung ist das Ansteigungsverhältnis der Geraden AQ , mithin

$$p = \frac{25}{180} = \frac{1}{7,2} = 0,14 \text{ m/sek}^2,$$

oder es wächst die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um $0,14 \text{ m/sek}$.

In km/std^2 , d. h. in Kilometern für die Quadrats t u n d e, ausgedrückt, wird

$$p = \frac{1 \cdot 3600 \cdot 3600 \text{ m}}{7,2 (3600 \text{ sek})^2} = 1800000 \text{ m/std}^2 = 1800 \text{ km/std}^2,$$

wovon man sich auch leicht überzeugt, wenn man die Aufgabe mit

$$v = 90 \text{ km/std} \text{ und } t = 180 \text{ sek} = \frac{1 \text{ std}}{20} \text{ durchführt.}$$

Die Wegeslänge während der Anfahrt wird gemessen durch den Inhalt des Dreiecks AQR , d. h. es ist

$$s = \frac{180 \cdot 25}{2} = 2250 \text{ m.}$$

Wenn der Zug auf freier Strecke die soeben erlangte Geschwindigkeit unverändert beibehält, so ist die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes dieser nun gleichförmigen Bewegung eine durch den Punkt Q gezogene Wagerechte.

Soll der Zug nun auf der nächsten Haltestelle zum Stillstande kommen, so muß er durch geeignete Mittel (Widerstände, Bremsen, unter Abstellung des Dampfes der Lokomotive) verzögert werden. Es seien diese Mittel so beschaffen, daß sie dem Zug eine gleichbleibende Verzögerung von $0,4 \text{ m/sek}^2$ erteilen; wie lange wird diese gleichförmig verzögerte Bewegung bis zum Stillstande währen, und wie groß wird ihre Wegeslänge sein, d. h. in welcher Entfernung vor der Haltestelle muß sie beginnen (müssen die Bremsen angezogen werden)?

Die Darstellung des Geschwindigkeitsgesetzes sei Q_1B (Fig. 12a). Da die Geschwindigkeit von 25 m/sek während jeder Sekunde um $0,4 \text{ m/sek}$ sich vermindert, so sind $25 : 0,4 = 62,5 \text{ sek} = R_1B$ zur

Fig. 12.

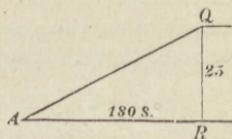
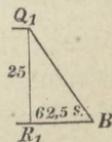


Fig. 12 a.



völligen Aufzehrung der Geschwindigkeit erforderlich. Die Wegeslänge in diesen $62,5 \text{ sek}$ beträgt nach der Figur $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 62,5 = 781,25 \text{ m}$; d. h. etwa 781 m vor der Haltestelle muß die Verzögerung beginnen.

Die Wegeslängen der gleichförmig beschleunigten und verzögerten Bewegungen würden bei gleichbleibender Geschwindigkeit von 25 m/sek je in der Hälfte der Zeit zurückgelegt sein. Durch Anhalten und Wiederauffahren gehen daher, im Vergleiche zum einfachen Durchfahren, $90 + 31,25 = 121,25 \text{ sek}$ oder rund 2 Minuten verloren. Mit Einschluß von einer Minute Aufenthalt kostet also jeder Haltepunkt einem Schnellzuge 3 Minuten Mehraufwand an Zeit.

Die Annahme, daß die Anfahrt und das Anhalten gleichförmig veränderte Bewegungen seien, ist eine vereinfachende Voraussetzung; das wahre Geschwindigkeitsgesetz wird sich nicht durch gerade Linien darstellen, ist vielmehr schwieriger zu ermitteln und hängt von vielen Umständen ab, die hier nicht berücksichtigt werden können.

Beispiel 2: Ein Gewehrgechoß verlasse den $0,8 \text{ m}$ langen Gewehrlauf mit einer sekundlichen Geschwindigkeit von 400 m . Wenn man nun die im Augenblicke des Abfeuerns mit der Geschwindigkeit Null beginnende beschleunigte Bewegung des Geschosses im Rohre wieder annähernd als gleichförmig beschleunigt betrachtet, wie lange dauert sodann die Bewegung im Rohr und wie groß ist die Beschleunigung?

Die Geschwindigkeitsfigur ist wiederum ein Dreieck, dessen Inhalt $= 0,8$ (Wegeslänge) sein muß. Nennt man die Zeit t , so ist $\frac{400}{2} t = 0,8$, d. h.

$$t = \frac{0,8}{200} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} \text{ sek.}$$

In dieser geringen Zeit wächst die sekundliche Geschwindigkeit von Null auf 400 m ; die Beschleunigung beträgt also $400 : \frac{1}{250} = 400 \cdot 250 = 100\,000 \text{ m/sek}^2$.

Diese überraschend große Zahl ist so zu verstehen, daß, wenn die gleichförmig beschleunigte Bewegung unter Einwirkung der Pulvergase 1 Sekunde lang in unveränderter Weise fort dauerte, eine Geschwindigkeit von $100\,000 \text{ m/sek}$ entstehen würde. Die beschleunigte Bewegung in dem Rohre währt aber nur $\frac{1}{250} \text{ sek}$ und bringt daher nur 400 m/sek Geschwindigkeit hervor.

b) Ungleichförmig veränderte Bewegung.

Ändert sich die Geschwindigkeit einer Bewegung nicht verhältnismäßig mit der Zeit, so heißt die Bewegung eine ungleichförmig veränderte; das Geschwindigkeitsgesetz ist dann nicht mehr einfach geradlinig, sondern von der allgemeinen Form $v = \varphi(t)$, oder die Geschwindigkeitslinie ist irgendeine Kurve.

In derselben Weise nun, wie auf S. 6 der Begriff der Geschwindigkeit, ausgehend von der gleichförmigen Bewegung, durch

Verallgemeinerung auf beliebige Bewegungen ausgedehnt wurde, findet auch hinsichtlich der Beschleunigung der geradlinigen Bewegung eine allgemeinere Fassung des Begriffes statt.

Ist BQ_1 (Fig. 13) die Geschwindigkeitslinie, so erfolgt in dem Zeitraume $RR_1 = \Delta t$ eine Geschwindigkeitszunahme $NQ_1 = \Delta v$. Zieht man nun die Sehne QQ_1 , so ist diese die Geschwindigkeitslinie einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, vermöge welcher die Geschwindigkeit in dem Zeitraume Δt von v auf $v + \Delta v$, also um die gleiche Größe, wächst wie

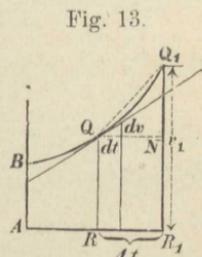


Fig. 13.

bei der gegebenen Bewegung. $p_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist dann die mittlere

Beschleunigung für diesen bestimmten Zeitraum RR_1 . Wenn der beliebige Zeitraum Δt zur Grenze Null herabsinkt, nähert sich diese mittlere Beschleunigung p_m einem bestimmten Grenzwerte p , und

diesen Grenzwert $p = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$ oder

$$1) \quad p = \frac{dv}{dt}$$

nennt man die **Beschleunigung** zur Zeit t . Die Beschleunigung p ist die Abgeleitete der Geschwindigkeit v nach der Zeit t , oder die zweite Abgeleitete der Wegeslänge s nach der Zeit t .

$$2) \quad v = \varphi(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t); \quad p = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

Die Beschleunigung erscheint wegen $p = dv:dt$ als das Ansteigungsverhältnis der Geschwindigkeitslinie, ebenso wie die Geschwindigkeit das Ansteigungsverhältnis der Wegeslängenkurve (S. 6) war.

Beispiel: Zu dem Bewegungsgesetz $s = 3 + 2 \sin \frac{1}{6} \pi t$ (S. 9) gehörte das Geschwindigkeitsgesetz $v = \frac{1}{3} \pi \cos \frac{1}{6} \pi t = 1,047 \cos \frac{1}{6} \pi t$. Hieraus ergibt sich die veränderliche Beschleunigung

$$p = -\frac{1}{18} \pi^2 \sin \frac{1}{6} \pi t = -0,548 \sin \frac{1}{6} \pi t.$$

Indem man $p = dv:dt$ oder $dv = p dt$ schreibt, betrachtet man die Geschwindigkeitsänderung dv als verhältnismäßig mit der

Zeit dt , betrachtet, also ein Teilchen der beliebigen Bewegung als gleichförmig verändert. Für einen endlichen Zeitraum $t_1 - t$ ist dann die Geschwindigkeitszunahme

$$3) \quad v_1 - v = \int_t^{t_1} p \cdot dt;$$

oder man kann auch die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t in Form eines unbestimmten Integrals

$$4) \quad v = \int p dt + C$$

schreiben, worin der Wert C bestimmt werden kann, wenn für irgendeinen Zeitpunkt die Geschwindigkeit bekannt ist.

Beispiel 1: Das gegebene Bewegungsgesetz sei (auf Meter und Sekunden bezogen)

$$s = 2 + 6t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3;$$

dann ergibt sich die Geschwindigkeit

$$v = ds : dt = 6 - 4t + t^2,$$

die Beschleunigung

$$p = dv : dt = -4 + 2t.$$

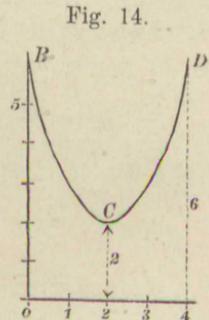
Man erkennt, daß hier eine ungleichförmig veränderte Bewegung vorliegt, da p mit der Zeit t veränderlich. Zu Anfang, d. h. für $t = 0$ ist $p = -4 \text{ m/sek}^2$, die Bewegung ist also eine verzögerte; die Geschwindigkeit, welche zu Anfang 6 m/sek betrug, nimmt zunächst ab. Es ist aber $p \leq 0$ für $t \leq 2 \text{ sek}$. Die Geschwindigkeits-Abnahme hört also auf nach 2 Sekunden, und es beginnt dann eine beschleunigte Bewegung, und zwar wächst nun auch die Beschleunigung verhältnismäßig mit der Zeit. Der Zeitpunkt $t = 2 \text{ sek}$, wo die Geschwindigkeit aufhört abzunehmen und zu wachsen beginnt, gibt für v einen Kleinstwert $v_{\min} = 2 \text{ m/sek}$. Die Geschwindigkeitslinie ist eine Parabel mit lotrecht aufwärts gerichteter Achse; der Scheitel entspricht dem Zeitwerte $t = 2$ Sekunden. Die während der ersten 4 Sekunden zurückgelegte Wegeslänge $s - s_0$ ist leicht als die unterhalb der Parabel BCD (Fig. 14) befindliche Fläche zu berechnen. Da man weiß, daß die Parabelfläche $BCD = \frac{2}{3}$ des umschriebenen Rechtecks ist, so wird

$$s - s_0 = 6 \cdot 4 - \frac{2}{3} (7 - 2) 4 = 13\frac{1}{3} \text{ m.}$$

Zur Prüfung liefert das Bewegungsgesetz

$$\text{für } t = 4 \quad s = 15\frac{1}{3},$$

$$\text{für } t = 0 \quad s_0 = 2, \quad \text{mithin } s - s_0 = 13\frac{1}{3} \text{ m.}$$



Beispiel 2: Eine geradlinige Bewegung erfolge mit der Beschleunigung $p = 2 + 3t^2$, und es sei für $t = 0$: $v = c = 1$, $s_0 = 0$. Dann wird aus

$$dv = (2 + 3t^2) dt$$

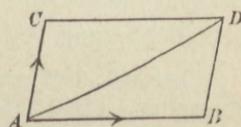
$$v - 1 = \int_0^t (2 + 3t^2) dt = 2t + t^3 \text{ oder } v = 1 + 2t + t^3 \text{ und}$$

$$s = \int_0^t (1 + 2t + t^3) dt = t + t^2 + \frac{1}{4}t^4.$$

3. Zusammensetzung mehrerer gleichzeitigen Bewegungen eines Punktes.

Ein Massenpunkt durchlaufe während der Zeit t die Bahnlinie AB (Fig. 15), und zwar in der Richtung von A nach B ; diese Bahnlinie gehöre aber einem Körper an, welcher sich derartig parallel verschiebt, daß der Punkt A der Linie AB während der Zeit t die Bewegung AC ausführt und die ganze Bahnlinie AB in die parallele Lage CD kommt. Dann wird der Massenpunkt infolge der beiden gleichzeitigen Bewegungen aus der Anfangslage A in irgendeiner Bahnlinie nach D gelangen, und man nennt diese wirkliche Bewegung AD die Mittelbewegung oder Resultierende aus den beiden Seitenbewegungen AB und AC .

Fig. 15.



Anstatt diese wirkliche Bewegung AD als das Ergebnis der Bewegungen AB und AC zu bezeichnen, sagt man auch wohl kürzer, der Massenpunkt führe zwei gleichzeitige Seitenbewegungen aus, womit aber stets nur der beschriebene Vorgang gemeint sein soll. Da die Figur $ABDC$ ein Parallelogramm ist, so ergibt sich ohne weiteres der **Satz vom Parallelogramm der Bewegungen**:

Führt ein Massenpunkt gleichzeitig zwei Seitenbewegungen aus, so ist der dem Anfangspunkt A gegenüberliegende Eckpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gezeichneten Parallelogrammes der wahre Ort des Punktes.

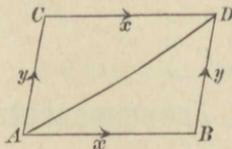
Man denke sich auf dem Stabe AB ein Sonnenkäferchen entlang laufend, während man den Stab parallel nach CD verschiebt; dann gelangt das Sonnenkäferchen in Wirklichkeit von A nach D .

Eine Gerade AB von bestimmter Richtung, bestimmter Größe und einem Pfeile, der einen bestimmten Bewegungssinn angibt,



nennt man eine Strecke. AB sei die Strecke x , AC die Strecke y . Zur Bestimmung des Punktes D ist offenbar nicht die Zeichnung des ganzen Parallelogramms erforderlich; vielmehr genügt es, an den Endpunkt B der Strecke x die parallel verschobene Strecke $BD = y$ anzutragen (Fig. 16). Beide bilden dann einen sog. „Streckenzug“, und man kann sagen: Der wahre Ort D des Punktes ist der Endpunkt des aus den beiden Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges. Die Reihenfolge der Zusammensetzung ist offenbar gleichgültig. Der Streckenzug $AC = y$ und $CD = x$ führt zu demselben Endpunkte D .

Fig. 16.



Sind die Gesetze der beiden Seitenbewegungen bekannt, so daß man für den Zeitpunkt t die Strecken x und y berechnen kann, so ist auch der Ort des beweglichen Punktes für jeden Zeitwert t bekannt und damit auch die Bahnlinie der Mittelbewegung AD völlig bestimmt.

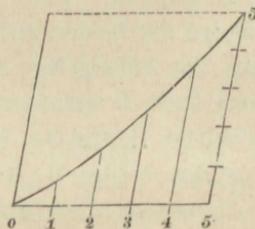
Fig. 17.

Beispiel: Die eine Seitenbewegung folge dem Gesetze $x = t$ (in Metern und Sekunden), sei also gleichförmig, die andere dem Gesetz

$$y = \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{10} t^2$$

(also gleichförmig beschleunigt). Dann ist für

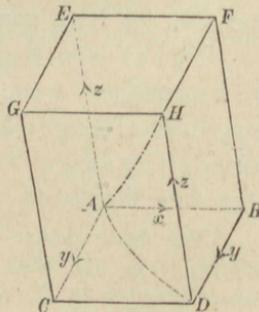
$t = 0$	1	2	3	4	5
$x = 0$	1	2	3	4	5
$y = 0$	0,6	1,4	2,4	3,6	5.



Die Gleichung der Bahnlinie findet man, indem man $t = x$ in die Gleichung für y einsetzt, $y = \frac{1}{2} x = \frac{1}{10} x^2$. Dies bedeutet eine Parabel als Bahnlinie des Punktes.

Fig. 18.

Erleidet, während die Seitenbewegungen AB und AC erfolgen, die ganze Ebene derselben eine Parallelverschiebung z in der Richtung von A nach E (Fig. 18), so wird der Massenpunkt, der infolge der beiden Bewegungen x und y nach D gelangen würde, sich nunmehr nach H bewegen, und es folgt **der Satz vom Parallelepiped der Bewegungen:**



Hat ein Massenpunkt drei gleichzeitige Seitenbewegungen, so ist der dem Anfangspunkt A gegenüber-

liegende Eckpunkt H des aus den drei Seitenbewegungen bestimmten Parallelepipeds, oder der Endpunkt des aus den Seitenbewegungen x , y und z gebildeten Streckenzuges $ABDH$ der wahre Ort des Punktes.

Als Beispiel könnten die Bewegungsgesetze: $x = t$; $y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{10}t^2$; $z = 3t$ benutzt werden.

Im allgemeinen ist die wahre Bahnlinie eine räumliche Kurve.

a) Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmige, geradlinige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w bzw. u ; dann sind die Wegeslängen nach t Zeiteinheiten (Fig. 19)

$AB = x = wt$ und $AC = y = ut$;
innerhalb eines anderen, etwa kleineren
Zeitraumes t_1 :

$$AB_1 = x_1 = wt_1 \text{ und} \\ AC_1 = y_1 = ut_1.$$

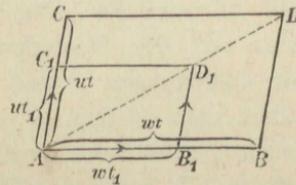
Der wahre Ort nach t bzw. t_1 Zeiteinheiten ergibt sich durch den Streckenzug ABD bzw. AB_1D_1 zu D bzw. D_1 . Es findet aber statt:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}; \quad \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{t}{t_1}, \text{ also } \frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1},$$

mithin sind die Dreiecke ABD und AB_1D_1 ähnlich, so daß A , D_1 und D auf derselben Geraden liegen müssen. Da dies für alle Werte für t und t_1 gilt, so muß die wahre oder Mittelbewegung geradlinig erfolgen. Zugleich ist aber auch wegen der Ähnlichkeit $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t}{t_1}$, oder die Wegeslängen AD

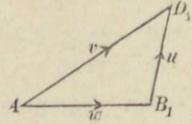
und AD_1 sind den entsprechenden Zeiten t und t_1 verhältnismäßig. Die Mittelbewegung aus zwei geradlinigen und gleichförmigen Seitenbewegungen ist hiernach ebenfalls geradlinig und gleichförmig. Ihre Geschwindigkeit v erhält man, indem man den willkürlichen Zeitraum t_1 zur Zeiteinheit werden läßt. Dann wird $AB_1 = w$; $B_1D_1 = u$ und $AD_1 = v$, oder die Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung erscheint als die Schlußseite eines aus den

Fig. 19.



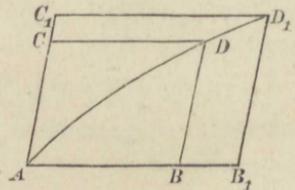
Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen gebildeten Streckenzuges (Fig. 20). Der Pfeil der Schlußseite eines Streckenzuges wird stets von dem Anfange nach dem Ende des Streckenzuges verstanden, wie es sich hier bezüglich der Geschwindigkeit v als notwendig ergibt. Die in dieser Weise verstandene Schlußstrecke eines Streckenzuges heißt auch die geometrische Summe der Einzelstrecken.

Fig. 20.



2) Sind die beiden Seitenbewegungen nicht gleichförmig, erfolgen sie vielmehr nach beliebigen Bewegungsgesetzen $AB = x = f(t)$ und $AC = y = \varphi(t)$ (Fig. 21), so ändern sich AB und AC im allgemeinen nicht verhältnismäßig; es wird daher die Mittelbewegung krummlinig ausfallen.

Fig. 21.



Gleichwohl läßt sich für jeden Zeitpunkt t der wahre Ort des Massenpunktes aus den Seitenbewegungen x und y konstruieren. Ändert sich t um dt , so werden in diesem Zeiteilchen die Seitenbewegungen $BB_1 = dx$, $CC_1 = dy$ zurückgelegt, und der Massenpunkt gelangt von D nach D_1 . Nun sind aber die Geschwindigkeiten der beiden Seitenbewegungen

im Zeitpunkte t : $w = \frac{dx}{dt}$ bzw. $u = \frac{dy}{dt}$. Setzt man hiernach

$dx = w dt$ und $dy = u dt$, so betrachtet man für die Dauer eines Zeiteilchens dt die Seitenbewegungen als gleichförmig, so daß für die augenblickliche Geschwindigkeit v der wahren oder Mittelbewegung die für gleichförmige Bewegungen abgeleitete Fig. 20 gültig bleibt. Die Richtung der Geschwindigkeit v fällt hiernach mit der Sehne DD_1 , also, da diese unendlich klein, mit der Richtung der Bahnlinie, d. h. mit der Bewegungsrichtung zusammen. Auch ist, wie bei der geradlinigen Bewegung

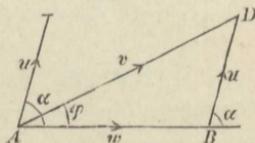
$v = \frac{DD_1}{dt} = \frac{ds}{dt}$. Die Geschwindigkeiten w und u der

Seitenbewegungen nennt man kürzer die Seitengeschwindigkeiten des Massenpunktes, v die wahre oder Mittelgeschwindigkeit. Es gilt also für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen der Satz vom Parallelogramm oder vom Dreieck der Geschwindigkeiten: Die Mittelgeschwindigkeit ist die

Diagonale eines Parallelogrammes aus den Seitengeschwindigkeiten, oder die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten.

Hiernach kann die Mittelgeschwindigkeit, die wahre oder resultierende Geschwindigkeit durch Zeichnung gefunden werden; will man aber ihre Größe und Richtung durch Rechnung bestimmen, so bedenke man, daß in dem Dreieck ABD (Fig. 22)

Fig. 22.



$$v^2 = w^2 + u^2 - 2wu \cos ABD, \text{ oder}$$

weil $\cos ABD = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$,

$$1) \quad v = \sqrt{w^2 + u^2 + 2wu \cos \alpha};$$

ebenso gilt $\sin \varphi : \sin ABD = u : v$, also, weil $\sin ABD = \sin \alpha$,

$$2) \quad \sin \varphi = \sin \alpha \frac{u}{v}.$$

Gl. 1 liefert die Größe, Gl. 2 sodann die Richtung von v . Dabei ist zu bemerken, daß die Strecken w und u stets in der Weise aneinander zu setzen sind, daß die Pfeile in dem Zuge ABD übereinstimmenden Umfassungssinn haben, und daß dann der Pfeil von v stets vom Anfang A nach dem Endpunkte D des Streckenzuges gerichtet ist.

Je kleiner der Winkel α wird, desto mehr nähert sich u der Richtung von AB , desto näher fällt also auch v der Richtung von w . Fallen schließlich w und u in dieselbe Richtung, so wird $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$, und man erhält $v = w + u$; $\varphi = 0$. In diesem Falle wird die Mittelgeschwindigkeit v , welche allgemein die geometrische Summe von w und u , auch arithmetisch gleich der Summe von w und u .

Je mehr sich der Winkel α dem Winkel π nähert, desto niedriger wird wiederum das Geschwindigkeits-Dreieck, desto kleiner wird die Schlußseite v . Ist $\alpha = \pi$, so wird $\cos \alpha = -1$, $\sin \alpha = 0$, mithin, wenn $w > u$ gedacht ist, $v = w - u$; $\varphi = 0$.

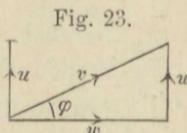
In beiden Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ wird v die algebraische Summe von w und u , nämlich $w + u$ bzw. $w - u$.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Fall, wo die beiden Seitengeschwindigkeiten zueinander rechtwinklig stehen (Fig. 23). Es ist dann

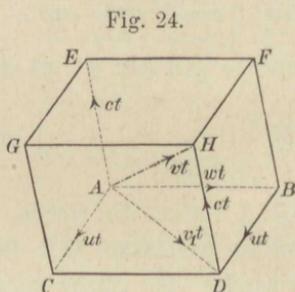
$$v = \sqrt{w^2 + u^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = u : w.$$

Ist z. B., bezogen auf Sekunden und Meter, $w = 2$, $u = 1$, so wird

$$v = \sqrt{5} = 2,236; \quad \operatorname{tg} \varphi = 1/2, \quad \varphi = 26^\circ 34'.$$



3) Hat man drei, nicht in derselben Ebene liegende, gleichförmige Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten w , u und c zusammensetzen (Fig. 24), so liefern zunächst zwei derselben, AB und AC , als Mittelbewegung wiederum eine geradlinige gleichförmige Bewegung AD mit der Geschwindigkeit v_1 , welche aus dem Streckenzuge AB und BD als AD gefunden wird. Fügt man nun zu der Bewegung AD noch die dritte Seitenbewegung AE hinzu, so hat man wiederum zwei geradlinige, gleichförmige Bewegungen zusammensetzen; man verlegt daher ct parallel an den Endpunkt D von AD und erhält H als Endpunkt der wahren oder Mittelbewegung, welche geradlinig und gleichförmig von A nach H erfolgen muß.



Läßt man in Fig. 24 $t = 1$ werden, so erscheint die wahre oder Mittelgeschwindigkeit v als Diagonale eines Parallelepipeds aus den drei Seitengeschwindigkeiten, oder als die Schlußseite eines räumlichen, aus den drei Seitengeschwindigkeiten gebildeten Streckenzuges, welche man auch wiederum die geometrische Summe der Seitengeschwindigkeiten nennen kann.

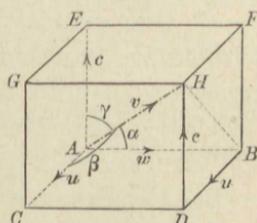
Dieser Satz vom Parallelepipед oder (räumlichen) Viereck der Geschwindigkeiten erhält auch Gültigkeit für ungleichförmige Seitenbewegungen, wenn man dieselben Betrachtungen anstellt, wie auf S. 20 bezüglich zweier Seitenbewegungen geschah.

Stehen die 3 Seitengeschwindigkeiten rechtwinklig zueinander (Fig. 25), so wird die wahre (resultierende) oder Mittelgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{w^2 + u^2 + c^2},$$

und für die Neigungswinkel α , β und γ der Geschwindigkeit v gegen die Richtungen w , u und c ergibt sich, weil die Seitenfläche $BDHF$ rechtwinklig zu w steht, also auch $\sphericalangle ABH$ ein Rechter, $\cos \alpha = w : v$; ebenso $\cos \beta = u : v$ und $\cos \gamma = c : v$.

Fig. 25.



b) Zusammensetzung der Beschleunigungen.

1) Ein Massenpunkt habe zwei gleichförmig beschleunigte Seitenbewegungen AB und AC , welche beide mit den Geschwindigkeiten Null beginnen. Die Beschleunigungen seien p und q (Fig. 26); dann ist in t Zeiteinheiten (nach Gl. 5, S. 12):

$$AB = \frac{1}{2} p t^2; \quad BD = \frac{1}{2} q t^2,$$

in t_1 Zeiteinheiten:

$$AB_1 = \frac{1}{2} p t_1^2; \quad B_1 D_1 = \frac{1}{2} q t_1^2.$$

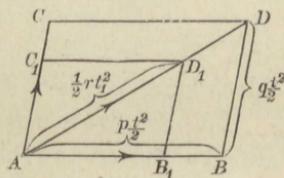
Die wahren Orte des Massenpunktes sind

D bzw. D_1 . Somit ist $\frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{BD}{B_1 D_1}$; es sind also die

Dreiecke ABD und $AB_1 D_1$ ähnlich, daher die wahre Bewegung geradlinig. Für die Wegeslängen gilt aber $\frac{AD}{AD_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{t^2}{t_1^2}$,

oder sie sind mit den Quadraten der entsprechenden Zeiten verhältnismäßig. Für ein solches Bewegungsgesetz $s = at^2$ gilt aber $v = 2at$, d. h. die Mittelbewegung ist wiederum eine gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Nennt man sodann die Beschleunigung dieser Bewegung r , so kann $AD = \frac{1}{2} r t^2$ $AD_1 = \frac{1}{2} r t_1^2$ gesetzt werden. Wählt man endlich den beliebigen Zeitraum t_1 so, daß $\frac{1}{2} r t_1^2 = 1$ wird, so werden AB_1 , $B_1 D_1$ und AD_1 bzw. zu p , q und r , und es erscheint die Beschleunigung der wahren oder Mittelbewegung, welche kürzer die Mittelbeschleunigung genannt wird, ebenso wie die Geschwindigkeit, als Schlußlinie eines aus den Seitenbeschleunigungen

Fig. 26.



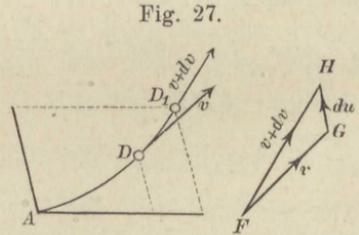
gebildeten Streckenzuges, als geometrische Summe der Seitenbeschleunigungen, oder als Diagonale eines Parallelogramms aus den Seitenbeschleunigungen.

2) Dies gilt einstweilen nur, wenn die beiden Seitenbewegungen gleichförmig beschleunigt sind und mit der Geschwindigkeit Null beginnen, so daß die Mittelbewegung geradlinig wird. Erfolgen die Seitenbewegungen aber nach beliebigen Bewegungsgesetzen, so entsteht eine krummlinige Bewegung, und für diese muß der Begriff der Beschleunigung erst eine Verallgemeinerung erfahren.

Die Richtung der Geschwindigkeit fällt nach Seite 20 mit der Bewegungsrichtung zusammen. Bei einer geradlinigen Bewegung bleibt also die Richtung der Geschwindigkeit dieselbe, es ändert sich nur deren Größe, und zwar während des Zeiteilchens dt um $dv = p dt$. Diese Vergrößerung von v kann man nun auch so auffassen, als ob zu der früheren Geschwindigkeit v eine neue Geschwindigkeit $dv = p dt$ hinzugetreten wäre, und man nennt diese letztere die Elementarbeschleunigung, welche mittels Teilung durch das Zeiteilchen dt die (auf die Zeiteinheit bezogene) Beschleunigung $p = dv : dt$ liefert.

Bei der krummlinigen Bewegung ändert sich während eines Zeiteilchens dt sowohl die Größe, wie auch die Richtung der Geschwindigkeit (Fig. 27); diejenige Geschwindigkeit nun, welche mit der im Zeitpunkte t vorhandenen Geschwindigkeit v zusammengesetzt werden muß, um mit ihr die für den Zeitpunkt $t + dt$ geltende Geschwindigkeit $v + dv$ nach Größe und Richtung zu ergeben, heißt wiederum die Elementarbeschleunigung, welche dann, durch dt geteilt, die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung im Zeitpunkte t nach Größe und Richtung liefert.

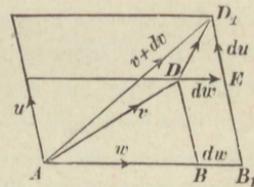
Stellt also in Fig. 27 FG die Geschwindigkeit v im Zeitpunkte t , FH die Geschwindigkeit $v + dv$ im Zeitpunkte $t + dt$ dar, so ist GH die Elementarbeschleunigung $= du$. Letztere kann offenbar als die geometrische Differenz zwischen $v + dv$ und v , oder weil sie unendlich klein, als das geometrische Differential von v bezeichnet werden.



Die Beschleunigung p der krummlinigen Bewegung $AD D_1$ im Zeitpunkte t bezeichnet man nun als $p = du : dt$, d. h. als die geometrische Abgeleitete von v nach t und als mit der Richtung von du übereinstimmend. Die Beschleunigung weicht hier nach bei krummliniger Bewegung stets von der Bewegungsrichtung (v) ab.

Bei der Zusammensetzung zweier beliebigen geradlinigen Seitenbewegungen ist nun die Geschwindigkeit $v = AD$ im Zeitpunkte t (Fig. 28) die Mittelgeschwindigkeit aus w und u , die Geschwindigkeit $v + dv = AD_1$ im Zeitpunkte $t + dt$ die Mittelgeschwindigkeit aus $w + dw$ und $u + du$. Legt man beide Streckenzüge so aufeinander, daß v und $v + dv$ gemeinsamen Anfangspunkt A haben, so ist DD_1 die geometrische Differenz von $v + dv$ und v , oder die Elementarbeschleunigung $= r \cdot dt$, wenn r die Beschleunigung. DD_1 ist aber die Schlußseite eines aus $dw = p \cdot dt$ und $du = q \cdot dt$ gebildeten Streckenzuges DED_1 . Dasselbe Verhältnis muß also auch zwischen r , p und q bestehen; mithin gilt auch für zwei beliebige geradlinige Seitenbewegungen das auf S. 23 unter 1 ausgesprochene Gesetz für die Beschleunigung.

Fig. 28.



Für die Berechnung der Größe und Richtung der Mittelbeschleunigung r gelten dieselben Formeln wie für die Geschwindigkeit (S. 21); man braucht in denselben nur w , u und v mit p , q und r zu vertauschen.

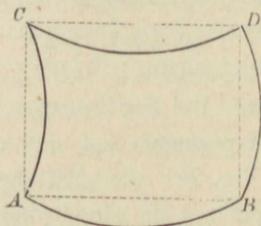
Ähnliche Betrachtungen, wie solche bezüglich der Geschwindigkeiten (S. 22 und 23) angestellt wurden, führen auch leicht zum Satze vom Parallelepiped oder Viereck der Beschleunigungen.

c) Zusammensetzung krummliniger Seitenbewegungen.

Die im vorstehenden ausführlich entwickelten Gesetze für die Zusammensetzung von zwei oder drei Bewegungen, von deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bleiben auch noch gültig, wenn die Seitenbewegungen nicht geradlinig, sondern krummlinig erfolgen. Unerläßliche Bedingung hierfür ist aber, daß die bewegliche Bahnlinie eine reine Parallelverschiebung erfahre.

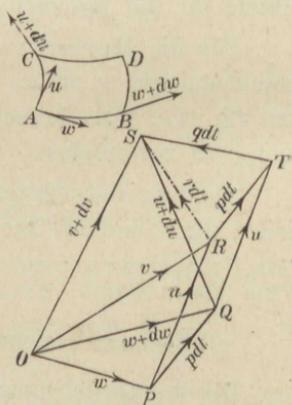
Bewegt sich der Massenpunkt in der Bahnlinie AB (Fig. 29), während diese eine Verschiebung in die Lage CD erfährt, so erkennt man leicht, daß D der Ort des Massenpunktes nach der Bewegung sein muß, und daß es gleichgültig ist, ob man den Punkt D mittels der wahren Bewegungslinien AB , AC und BD festlegt, oder ob man die Sehnen AB , AC und BD benutzt und aus ihnen ein Parallelogramm oder einen Streckenzug ABD bildet. Auch für die Geschwindigkeit v der wahren Bewegung in irgendeinem Zeitpunkte t muß der früher (S. 21) bewiesene Satz aus dem Grunde gültig bleiben, weil mit dem Begriffe der Geschwindigkeit grundsätzlich die Vorstellung verbunden ist, daß man jede krummlinige Bewegung für ein unendlich kleines Zeitteilchen als geradlinig und gleichförmig betrachten darf, so daß man es in jedem Zeitpunkte nur mit der Zusammensetzung der Geschwindigkeit solcher einfachen Bewegungen zu tun hat.

Fig. 29.



Daß auch bezüglich der Beschleunigungen das Entsprechende gilt, ergibt sich durch folgende Betrachtung; AB und AC (Fig. 30) seien die Seitenbewegungen während eines Zeitteilchens: w und $w + dw$ bzw. u und $u + du$ die Seitengeschwindigkeiten zu Anfang und zu Ende desselben. Man trage w und $w + dw$ von einem Punkte O aus auf. Setze daran die Strecken $PR = u$ bzw. $QS = u + du$. Dann ist $OR = v$ die wahre Geschwindigkeit im Zeitpunkte t , $OS = v + dv$ diejenige im Zeitpunkte $t + dt$. Danach wird dann $RS = r \cdot dt$ die Elementarbeschleunigung und $r = RS : dt$ die Beschleunigung der Mittelbewegung; $PQ = p \cdot dt$ ist die Elementarbeschleunigung der ersten Seitenbewegung. Macht man nun $QT =$ und $\parallel PR = u$, so wird $TS = q \cdot dt$ die zweite Elementarbeschleunigung, und weil

Fig. 30.



$$RT \neq PQ = p \cdot dt,$$

so erscheint $RS = r \cdot dt$ als Schlußlinie eines Streckenzuges aus

$RT = p \cdot dt$ und $TS = q \cdot dt$. Mithin muß auch r die Schlußlinie eines Streckenzuges aus p und q sein. Damit ist der Satz vom Dreieck oder Parallelogramm der Beschleunigungen allgemein bewiesen. Die Erweiterung zum Satze vom Parallelepiped bezw. räumlichen Viereck der Beschleunigungen hat keine Schwierigkeit.

Erfährt aber die Bahnlinie AB nicht eine einfache Parallelverschiebung, sondern eine allgemeinere Bewegung, so werden die Beziehungen der wahren oder Mittelbewegung verwickelter; dieser schwierige Fall wird erst später in der Allgemeinen Mechanik behandelt.

d) Zerlegung von Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

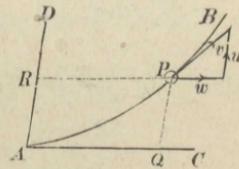
Wie man aus zwei bezw. drei gleichzeitigen Seitenbewegungen mit Hilfe der Gesetze vom Dreieck bezw. Viereck der Bewegungen die Mittelbewegung finden konnte, wie ferner die Seitengeschwindigkeiten und Beschleunigungen zu den Mittel-Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sich zusammensetzen ließen, so kann auch umgekehrt jede Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene oder im Raum in zwei bezw. drei geradlinige Seitenbewegungen zerlegt oder durch diese ersetzt werden, und das Gleiche gilt auch bezüglich der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ist z. B. die Bewegung eines Massenpunktes in einer ebenen Kurve AB gegeben (Fig. 31), kennen wir also für jeden Zeitwert t den Ort P des Punktes in der Kurve,

so kann man durch A zwei mit der Kurve in derselben Ebene liegende Gerade AC und AD legen und nach deren Richtungen die gegebene Bewegung zerlegen. Sind PQ und PR parallel zu AC und AD , so kann die gegebene Bewegung AP vollständig

durch diese Seitenbewegungen ersetzt werden, sobald nur deren Bewegungsgesetze so geregelt sind, daß für jeden Zeitpunkt t die Orte P , Q und R der fraglichen Bewegungen einem solchen Parallelogramm $AQPR$ angehören. Wird aus der Geschwindigkeit v der gegebenen Bewegung und den Seitenrichtungen AC und AD ein Dreieck gezeichnet, so sind die zu AC und AD parallelen Seiten zugleich die Geschwindigkeiten w und u der

Fig. 31.



Seitenbewegungen, oder es ist v in die Seitengeschwindigkeiten w und u zerlegt.

Für die Behandlung krummliniger Bewegungen bietet eine solche Zerlegung außerordentliche Erleichterung; sie schließt sich auch unmittelbar dem Verfahren der analytischen Geometrie an, welche ja auch einen Punkt P in einer Ebene durch zwei Koordinaten x und y gegen zwei Achsenrichtungen festlegt. In den meisten Fällen legt man die Achsen rechtwinklig zueinander.

Soll die Bewegung des Punktes P (Fig. 32) in der xy -Ebene völlig bekannt sein, so muß man für jeden Zeitpunkt t sowohl x als auch y kennen, oder es müssen x und y als Funktionen von t gegeben sein. Jede der Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ kann aber für sich allein als das Gesetz einer geradlinigen Seitenbewegung aufgefaßt werden, und zwar würden für den Zeitpunkt t die Seitenbewegungen $AQ = x$ und $PQ = y$ sein, deren Vereinigung den Massenpunkt richtig nach seinem Orte P führt. Diese beiden Bewegungsgleichungen bestimmen die Bewegung des Massenpunktes vollständig und in einfachster Weise. Bezeichnet man die Seitengeschwindigkeiten in den beiden Achsenrichtungen mit v_x und v_y , ebenso die Seitenbeschleunigungen mit p_x und p_y , so ist nach S. 6

$v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$. Für die wahre Geschwindigkeit gilt dann

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt},$$

also, wie bei der geradlinigen Bewegung $v = \frac{ds}{dt}$. Ferner ist

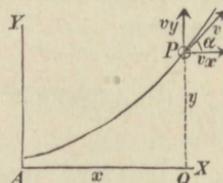
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx},$$

d. h. die Richtung der Geschwindigkeit v stimmt mit der Richtung der Bewegung überein.

Nach S. 15 ist

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};$$

Fig. 32.



für die wahre Beschleunigung gilt

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Da dieser Wert im allgemeinen von $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ verschieden ist, so fallen, wie bereits S. 25 besprochen, die Richtungen der Beschleunigung und der Bewegung im allgemeinen nicht zusammen.

Erfolgt die Bewegung des Massenpunktes nicht in einer Ebene, sondern in einer räumlichen Kurve, so sind die drei rechtwinkligen Koordinaten des Ortes P als Funktionen der Zeit auszudrücken, und es können dann wieder die Gleichungen $x = f(t)$; $y = \varphi(t)$; $z = \psi(t)$ als Gesetze dreier Seitenbewegungen aufgefaßt werden, deren Zusammenwirken die räumliche Bewegung des Massenpunktes vollständig wiedergibt. Es entsteht in ähnlicher Weise

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{ds}{dt};$$

ferner nach S. 23

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v} = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{dz}{ds}.$$

Für die Beschleunigungen ergibt sich das Entsprechende.

Beispiel: Für eine ebene Bewegung sind gegeben die Gleichungen
 $x = a(1 - \cos t)$; $y = b \sin t$.

Um hieraus die Gleichung der Bahnlinie zu finden, entferne man t . Es wird

$$\cos t = \frac{a - x}{a}; \quad \sin t = \frac{y}{b},$$

mithin durch Quadrieren und Zusammenzählen:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = \frac{(a - x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse (Fig. 33), aber nicht bezogen auf den Mittelpunkt M , sondern auf den Endpunkt A der Halbachse a . Denn sobald man $a - x = x_1$ setzt, wird

$$\text{aus obiger Gleichung die bekannte Formel } 1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

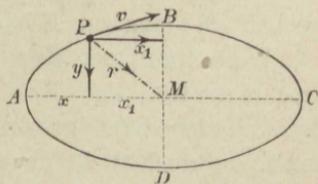


Fig. 33.

Die Seitengeschwindigkeiten sind:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \sin t = \frac{a}{b} y$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b \cos t = b \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Für $t = 0$ ist $x = y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = b$ (entsprechend dem Punkte A);

für $t = \frac{1}{2} \pi = 1,57$ Sek. ist $\sin t = 1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = b$; $v_x = a$; $v_y = 0$, entsprechend dem Punkte B ;

für $t = \pi = 3,14$ Sek. ist $\sin t = 0$, $\cos t = -1$,

$x = 2a$; $y = 0$; $v_x = 0$; $v_y = -b$, entsprechend dem Punkte C ;

für $t = \frac{3}{2} \pi$ ist $\sin t = -1$, $\cos t = 0$,

$x = a$; $y = -b$; $v_x = -a$; $v_y = 0$; entsprechend dem Punkte D .

Für fortlaufende Zeit nehmen x und y immer wieder dieselben Werte an, so oft sich t um 2π geändert hat. Die Ellipse wird hiernach fortwährend in derselben Richtung durchlaufen, und ein Umlauf erfordert 2π Sekunden. Für die Beschleunigungen gilt

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \cos t = a - x = x_1$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = -b \sin t = -y.$$

Die Seitenbeschleunigungen werden also der Größe nach gemessen durch die Mittelpunkts-Koordinaten des Punktes P ; u. zw. ist $p_x = a - x = x_1$ nach rechts, $p_y = -y$ aber, wegen des negativen Zeichens, nach unten gerichtet. Es wird

$p = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = r =$ dem Mittelpunkts-Fahrstrahle PM
u. zw. ist der Sinn von p stets nach dem Mittelpunkte M gerichtet.

4. Physikalische Grundgesetze der Mechanik.

In dem vorstehenden haben wir die Bewegungen als gegeben angesehen und gewisse kennzeichnende Merkmale und Eigenschaften derselben aufgeführt. Die Betrachtungen waren rein mathematische; wenn auch das Bewegliche als Massenpunkt bezeichnet wurde, so geschah dies nur zur Erleichterung der Vorstellung.

Wollen wir nun aber die Bewegung eines Massenpunktes aus ihren Ursachen, den Kräften herleiten, so bedürfen wir gewisser physikalischer Grundgesetze, die sich nicht mathematisch beweisen lassen, die auch nicht ohne weiteres selbstverständlich sind, deren Richtigkeit aber dadurch genügend sichergestellt ist, daß alle Ergebnisse, welche daraus gezogen werden, mit der Beobachtung übereinstimmen (Erfahrungsgesetze).

Der erste Grundsatz ist das von Galilei im Jahre 1638 ausgesprochene Gesetz der Trägheit: Jeder Massenpunkt bleibt im Zustande der Ruhe oder der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung, solange er nicht durch äußere Einwirkungen zu einer Änderung dieses Zustandes veranlaßt wird.

Hiernach bedarf ein Massenpunkt zur Fortsetzung einer Bewegung mit gleichbleibender Richtung und Geschwindigkeit keiner äußeren Einwirkung. Zu einer Abweichung aber von der geradlinig-gleichförmigen Bewegung ist eine Ursache, eine Kraft erforderlich. Eine solche Kraftwirkung, der ein Massenpunkt ausgesetzt ist, geht aber, so lehrt die Erfahrung, stets wieder von einem anderen Massenpunkt aus; man kann daher sagen: Unter „Kraft“ versteht man die Einwirkung eines Massenpunktes auf die Bewegung eines anderen. — Die Wirkung einer Kraft besteht in einer Größen- oder Richtungs-Änderung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes.

Eine nach Größe und Richtung gleichbleibende Beschleunigung, wie sie bei der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung eines Massenpunktes vorkommt, wird als die Wirkung einer ebenfalls nach Größe und Richtung gleichbleibenden Kraft angesehen. Richtung und Sinn der Kraft werden als übereinstimmend mit denen der entsprechenden Beschleunigung bezeichnet. Derjenige Massenpunkt aber, von dem die Kraftwirkung ausgeht, ist auf der Richtungslinie der Kraft zu suchen.

Wenn auf denselben Massenpunkt zu verschiedenen Zeiten zwei Kräfte K und K_1 wirken und die Beschleunigungen p bzw. p_1 hervorbringen, so bezeichnet man die Größen der Kräfte als verhältnismäßig mit den Beschleunigungen, setzt also $\frac{K}{K_1} = \frac{p}{p_1}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{K}{K_1}$. Wenn aber die gleiche Kraftwirkung, auf verschiedene Massenpunkte ausgeübt, die verschiedenen Beschleunigungen p und p_1 hervorbringt, so erklärt man diese abweichende Wirkung aus der verschiedenen Massengröße der beiden Punkte, und zwar bezeichnet man diejenige Masse als die größere, welche durch die gegebene Kraft die kleinere Beschleunigung erfährt,

und setzt die Massen m und m_1 in umgekehrtes Verhältnis zu den entstehenden Beschleunigungen p und p_1 , also $\frac{m}{m_1} = \frac{p_1}{p}$ oder $\frac{p}{p_1} = \frac{m_1}{m}$. Die Masse eines Körpers ist unveränderlich, wird sogar durch chemische Umwandlung nicht beeinflusst. Die Beschleunigung aber, die ein Massenpunkt erfährt, ist, wie die Erfahrung lehrt, nur von ihrer Ursache, der Kraftgröße, und von der Masse des Punktes abhängig. Da nun nach dem vorstehenden die Beschleunigung einmal in gleichem Verhältnisse zu der Kraft, ein anderes Mal im umgekehrten Verhältnisse zu der Masse steht, so gelangt man zu dem zweiten Grundgesetze, dem Beschleunigungsgesetze: Jede Kraft K , die auf einen Punkt von der Masse m wirkt, erteilt diesem eine Beschleunigung p , welche verhältnismäßig der Kraft und umgekehrt verhältnismäßig der Masse ist.

Man kann hiernach setzen $p = a \cdot \frac{K}{m}$. Darin bedeutet a eine Zahl, die sich offenbar nach den für Beschleunigung, Kraft und Masse gewählten Einheiten richtet. Umgekehrt kann man aber auch den Wert a willkürlich annehmen, wenn man zugleich auf die freie Wahl einer der drei Einheiten, z. B. der Masseneinheit, verzichtet. Man hat es nun zweckmäßig gefunden, $a = 1$ zu setzen, so daß einfach

$$1) \quad p = \frac{K}{m},$$

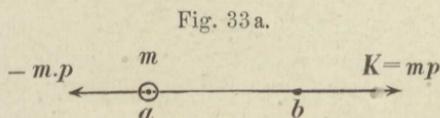
Beschleunigung = $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ sich ergibt. Dies Grundgesetz ist 1687 von Newton ausgesprochen.

Die Beschleunigung messen wir in der Regel nach $\frac{m}{\text{sek}^2}$; wenn später in einzelnen Fällen es zweckmäßig wird, diese Größe in $\frac{cm}{\text{sek}^2}$ auszudrücken, so ergibt sich leicht, welche sonstige Änderung damit verbunden ist.

Wie man die Kräfteinheit zweckmäßig wählt und wie daraus dann die Masseneinheit sich von selbst ergibt (infolge der willkürlichen Setzung $a = 1$), kann erst mit Hilfe des folgenden Grundgesetzes erklärt werden.

Nach dem vorstehend ausgesprochenen zweiten Grundgesetz (Gl. 1) ist also die Kraft, die einem Massenpunkte die Beschleunigung p zu erteilen vermag $K = m \cdot p$. Der eigentliche Vorgang der Beschleunigung besteht darin, daß die Kraft K die Trägheit des Massenpunktes (Grundgesetz 1), d. h. den Widerstand überwindet, den er seiner Beschleunigung entgegengesetzt, und den man seinem Ursprunge und seinem Wesen nach als „Trägheitswiderstand“ bezeichnen kann; mit der Bedeutung indes, daß dieser Widerstand kein absoluter, sondern nur ein relativer ist, der erst mit der Beschleunigung auftritt und deren Entstehung daher nicht hindern kann. Die Größe dieses Widerstandes allein bedingt die Größe der beschleunigenden Kraft. Er ist, wie diese selbst, in seiner absoluten Größe gleich $m \cdot p$, ihr aber gerade entgegengesetzt gerichtet, also gleich $-m \cdot p$. Im Kampfe zwischen beiden siegt stets die Kraft und der Massenpunkt folgt ihr gleichsam unter dauerndem Protest ($-m \cdot p$). Sobald die Kraft zu wirken aufhört und damit die Beschleunigung verschwindet, hört auch der Widerstand auf, den der Massenpunkt seiner trägen Natur zufolge einer Änderung seiner Geschwindigkeit entgegengesetzt. Bisher wurde die Größe $-m \cdot p$ vielfach als „Ergänzungskraft“ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist indes insofern nicht recht treffend, als sie das Wesen der tatsächlich vorhandenen, in der Trägheit der Masse begründeten Gegenwirkung ($-m \cdot p$) nicht ausdrückt, diese auch von dem, was wir sonst als Kraft bezeichnen, völlig verschieden ist.

Von dem tatsächlichen Vorhandensein einer solchen, die Bezeichnung „Trägheitswiderstand“ rechtfertigenden Gegenwirkung überzeugt man sich leicht, wenn man sich die Kraft K vermittels eines masselosen Fadens auf den Massenpunkt wirkend denkt (Fig. 33a). — Bei hinreichender Größe der Kraft K und damit also auch der Beschleunigung p bzw. des Wertes $m \cdot p$, wird der Faden zerreißen. Das ist aber ersichtlich nur möglich, wenn sowohl der Widerstand ($-m \cdot p$), der den Faden an seinem einen Ende (a) zurückzuhalten strebt, als die Kraft (K), die ihn am andern Ende (b) forsbewegen möchte, beide gleich der Festigkeit des Fadens, d. h. gleich dem bestimmten



Widerstände sind, den dieser im äußersten Falle seinem Zerreißen entgegenzusetzen vermag.

Drittes Grundgesetz, Gesetz der Schwere: Die Erde übt auf jeden Massenpunkt an ihrer Oberfläche eine Kraft aus, welche lotrecht abwärts gerichtet ist und jedem Massenpunkte die gleiche Beschleunigung erteilt. Diese Kraft heißt die Schwerkraft oder das Gewicht des Massenpunktes, und die völlig gleiche Beschleunigung g heißt die Beschleunigung der Schwere oder die Fallbeschleunigung.

Ist also Q das Gewicht einer Masse m , so ergibt sich hiernach $g = Q:m$, oder — weil g für alle Massen gleich — es ist das Gewicht eines Massenpunktes seiner Masse verhältnismäßig und umgekehrt.

2)

$$Q = mg.$$

Die Fallbeschleunigung g ist für verschiedene Punkte der Erdoberfläche allerdings etwas verschieden, aus Gründen, die später erläutert werden sollen; es ändert das aber an dem vorstehenden Gesetze nichts; denn dieses soll zunächst nur ausdrücken, daß an derselben Stelle der Erdoberfläche verschiedene Massenpunkte übereinstimmende Fallbeschleunigung g erfahren, daß die auf die Massen ausgeübten Schwerkraften verhältnismäßig ihren Massen sind.

Unter 45° geographischer Breite und in der Höhe des Meeresspiegels beträgt die Fallbeschleunigung $g_{45} = 9,806 \text{ m/sek}^2$. In Berlin ist $g = 9,813$, in Hannover ebenfalls $= 9,813$ (S. 96).

Das Gewicht eines Liters Wasser im Zustande der größten Dichte (bei etwa 4° C.) heißt das Kilogramm und dient als Gewichtseinheit. Da dieser Wasserkörper eine ganz bestimmte Masse enthält, so ist seine Schwere Q wegen der Veränderlichkeit von g an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche etwas verschieden. Das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4° C.) an denjenigen Stellen der Erde, wo $g = 9,806 \text{ m/sek}^2$ beträgt, wählen wir zur Kräfteinheit und bezeichnen es als Kilogramm (kg). — An anderen Stellen der Erde wird das Gewicht eines Liters Wasser dann von 1 kg etwas verschieden ausfallen, sich nämlich verhältnismäßig mit g ändern. Für technische Anwendungen kann diese Veränderlichkeit meist unberücksichtigt bleiben, indem man für die

meisten Fälle einfach $g = 9,81$ setzt. Nur grundsätzlich muß die Stelle der Erde bezeichnet werden, wo das Gewicht von 1^l Wasser gleich unserer technischen Krafteinheit, dem Kilogramm, ist.

Um nun die Masseneinheit kennen zu lernen, brauchen wir in der Gleichung $Q = m g_{45}$ nur $m = 1$ zu setzen, dann wird das Gewicht dieser Masseneinheit $Q_1 = g_{45} = 9,806 \text{ kg}$.

Die Masseneinheit ist also die Masse eines Körpers, der unter 45° geographischer Breite $9,806 \text{ kg}$ wiegt, oder die in $9,806$ Litern Wasser von 4° C . enthaltene Masse.

Maßeinheiten der Physik. Da die Masse eines Körpers unveränderlich ist, so liegt es eigentlich näher, einen Wasserkörper von abgerundeten Maßen als Masseneinheit zu Grunde zu legen, wonach dann infolge der Gleichung 1 (S. 32) mit $K = 1$ und $m = 1$ auch $p = 1$ werden, d. h. diejenige Kraft zur Krafteinheit werden würde, welche der Masseneinheit eine Beschleunigung 1 erteilt. So bezeichnet die neuere Physik die Masse eines Kubikcentimeters Wasser als Masseneinheit und nennt diese Masseneinheit das Gramm. Als Längeneinheit dient das Centimeter, als Zeiteinheit die Sekunde, so daß die Beschleunigung nach cm/sek^2 gemessen wird. Die Krafteinheit der Physik, die Dyne, ist diejenige Kraft, welche einem Kubikcentimeter Wasser eine Beschleunigung $= 1 \text{ cm}/\text{sek}^2$ erteilt. Das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser, d. h. $\frac{1}{1000}$ unserer Krafteinheit, erteilt diesem Körper die Beschleunigung $g = 981 \text{ cm}/\text{sek}^2$, ist also gleich 981 Dynen; unsere Krafteinheit, das Kilogramm, daher gleich 981 000 Dynen. Für die technische Anwendung der Mechanik ist die Wahl dieser Krafteinheit, wenngleich sie wissenschaftlich große Vorzüge besitzt, nicht recht zweckmäßig. Bei den Aufgaben des Technikers kommt es meist darauf an, Schwerkkräfte zu benutzen, oder ihnen entgegenzuwirken. Diese Schwerkkräfte sind dann unmittelbar in Kilogrammen gegeben, und die Endergebnisse müssen für die Ausführung auch meist Gewichte oder sonstige Kräfte in Kilogrammen ausdrücken. Es würden daher bei den Aufgaben häufig Umwandlungen von Kilogrammen in Dyne und umgekehrt erforderlich werden. Ähnliche Umwandlungen müssen, streng genommen, freilich auch bei der Wahl unserer Krafteinheit ausgeführt werden, wenn die fraglichen Körper sich nicht unter 45° geographischer Breite befinden, sondern an einem Orte, wo g von $9,806$ abweicht. Doch sind diese Abweichungen meist so gering, daß sie für die Anwendung keine Bedeutung haben.

Viertes Grundgesetz: Gesetz der Wechselwirkung. Die Kräfte, mit denen zwei Massenpunkte aufeinander wirken, treten stets paarweise in gleicher Größe, aber entgegengesetztem Sinn auf. Es wurde schon erwähnt (S. 31), daß eine Kraft K , die auf einen Massenpunkt m wirkt, von irgendeinem anderen, in der Richtungslinie der Kraft befindlichen

Massenpunkt m_1 ausgehen müsse. Die Erfahrung lehrt nun aber, daß dann m auf m_1 dieselbe Kraft K , nur in entgegengesetztem Sinne (mit entgegengesetztem Pfeil), ausübt.

Die Fähigkeit eines Massenpunktes, die Kraft, die ein anderer auf ihn ausübt, in gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung auf diesen auszuüben, besteht ebenso, wenn die Punkte aus einer gewissen Entfernung dem gegenseitigen Einflusse unterliegen, als wenn dies durch unmittelbare Berührung geschieht. Ihre letzte Ursache hat diese Wechselwirkung zwischen zwei Massenpunkten wiederum in der Trägheit derselben.

Dies Gesetz wurde schon von Galilei (geb. 1564 zu Pisa, gest. 1642 zu Arcetri) und Huyghens (geb. 1629 im Haag, gest. 1695 daselbst) angewandt, ist aber erst von Newton (geb. 1643 zu Woolsthorpe, gest. 1726 zu Kensington) im Jahre 1687 bestimmt ausgesprochen worden.

Beispiel 1: Der auf S. 13 behandelte Eisenbahnzug erfuhr bei der sog. Anfahrt eine Beschleunigung $p = 0,14 \text{ m/sek}^2$. Wenn nun das Gewicht des ganzen Eisenbahnzuges 200 000 kg beträgt, wie groß ist dann die zur Beschleunigung erforderliche Kraft K ? Die Masse des Zuges ist $m = 200\,000 : g$ Masseneinheiten, mithin ist $K = mp = 200\,000 p : g$. Für solche Stellen der Erde, für welche $g = 9,81$ gesetzt werden kann, ist $1/g = 0,102$, mithin

$$K = 200\,000 \cdot 0,14 \cdot 0,102 = 2856 \text{ kg.}$$

Setzt man annähernd $g = 10$, $1/g = 0,1$, was für überschlägliche Rechnungen zulässig, so wird $K = 2800 \text{ kg}$.

Beispiel 2: Das auf S. 16 behandelte Geschoß erfuhr eine Beschleunigung $p = 100\,000 \text{ m/sek}^2$. Wie groß ist die Ausdehnungskraft der Pulvergase, wenn das Geschoß $20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$ wiegt? Es ist $m = 0,02 : 9,81 = 2 : 981$, mithin $K = 2 \cdot 100\,000 : 981 = 204 \text{ kg}$; für $g = 10$ wird $K = 200 \text{ kg}$.

5. Geradlinige Bewegung unter alleiniger Einwirkung der Schwere.

Hält man einen Punkt von der Masse m ruhend zwischen den Fingern, so wird die Schwerkraft durch die Muskelkraft der Finger aufgehoben, indem die Kraftwirkungen der Finger auf den Massenpunkt eine Gesamtkraft ausüben, welche dem Gewichte mg genau gleich und entgegengesetzt ist. Öffnet man aber die Finger der

Hand nach unten, so kommt die Schwere zur alleinigen Wirkung und erteilt dem Massenpunkte die Beschleunigung g . Der Punkt hatte vorher keine Bewegung, d. h. die Geschwindigkeit $c = 0$; es entsteht nun eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Richtung der Schwere, also lotrecht abwärts. Nach t Sekunden ist die Geschwindigkeit im Punkte P (Fig. 34) nach Gl. 2, S. 11:

Fig. 34.



$$1) \quad v = gt,$$

die zurückgelegte Wegeslänge

$$2) \quad s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (nach Gl. 4, S. 12).}$$

Wenn man aus Gl. 1 $t = v:g$ entnimmt und in Gl. 2 einsetzt, so entsteht auch

$$3) \quad s = \frac{g}{2} \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g} \text{ oder } v = \sqrt{2gs}.$$

Die lotrechte Wegeslänge, welche ein Massenpunkt durchfallen muß, um ganz allein durch die Wirkung der Schwere die Geschwindigkeit v zu erreichen, d. h. den Wert $s = \frac{v^2}{2g}$ nennt man die der Geschwindigkeit v entsprechende **Geschwindigkeitshöhe**.

Für $g = 9,81$ wird

$$\frac{1}{2g} = 0,051 = \text{rund } 0,05 \text{ und } \sqrt{2g} = 4,429, = \text{rund } 4,4, \text{ mithin}$$

$$s = 0,05 v^2; \quad v = 4,4 \sqrt{s}.$$

Beispiel: Durchsinkt ein Massenpunkt in freiem Fall eine Höhe $s = 4 \text{ m}$, so erreicht er eine Fallgeschwindigkeit $v = 4,4 \sqrt{4} = 8,8 \text{ m/sek}$. Die dazu erforderliche Zeit ist

$$t = 8,8 : 9,81 = 8,8 \cdot 0,1 = 0,88 \text{ sek.}$$

Bei der gradlinigen Bewegung stimmen die Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung überein, bei der krummlinigen aber nicht; mithin kann eine geradlinige Bewegung nur entstehen, wenn die Richtung der wirkenden Kraft mit derjenigen der Anfangsgeschwindigkeit übereinstimmt und sich während der Bewegung nicht ändert. Erteilt man also einem Massenpunkte mit der Hand eine derartige Bewegung, daß er in dem Augenblicke, wo die Hand den Punkt freiläßt, eine Geschwindigkeit c hat, so ist diese die Anfangsgeschwindigkeit für die unter alleiniger Wirkung der

Schwere erfolgende Wurfbewegung, und letztere kann nur geradlinig werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit c lotrecht gerichtet ist.

Ist c lotrecht nach unten gerichtet, so entsteht wiederum eine beschleunigte Bewegung; es wird (Fig. 34) nach t Sekunden

$$v = c + gt; \quad s = ct + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{(v+c)t}{2} = \frac{v^2 - c^2}{2g},$$

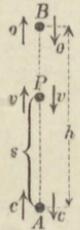
$$\text{also auch } v = \sqrt{c^2 + 2gs}.$$

Bei aufwärts gerichtetem Wurf aber (Fig. 35) entsteht eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Nach

t Sekunden ist $v = c - gt; \quad s = ct - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{c^2 - v^2}{2g},$

$$v = \sqrt{c^2 - 2gs}.$$

Fig. 35.



Nach $t_1 = c/g$ Sekunden ist die Geschwindigkeit c durch die Verzögerung aufgezehrt; es ist $v = 0$ und damit die größte mögliche Höhe, die Steighöhe $AB = h = \frac{c^2}{2g}$ erreicht. Die

Steighöhe ist hiernach gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der Anfangsgeschwindigkeit c entspricht. Ist der Massenpunkt an der höchsten Stelle B (Fig. 35) mit der Geschwindigkeit Null angelangt, so geht er nun sofort in eine Fallbewegung über; die Geschwindigkeit v_1 , mit der der Massenpunkt die Anfangsstelle A wieder erreicht, ist $v_1 = \sqrt{2gh}$ und weil $h = \frac{c^2}{2g}$ war, $v_1 = c$, mithin gleich der

aufwärts gerichteten Anfangsgeschwindigkeit, nur jetzt abwärts gerichtet. Auch die Zeit des Niederfallens $t_2 = c/g$ ist gleich der Dauer $t_1 = c/g$ des Steigens; überhaupt erfolgen Abwärts- und Aufwärtsbewegung ganz symmetrisch zu der Höchstlage, insofern jeder Punkt P die Bahnlinie beim Fallen mit derselben Geschwindigkeit v durchlaufen wird wie beim Steigen.

Beispiel: Ein Massenpunkt werde mit der Geschwindigkeit $c = 9 \text{ m/sek}$ aufwärts geworfen. Dann ist die Steighöhe $h = \frac{c^2}{2g} = 81 \cdot 0,05 = 4,05 \text{ m}$; die Steigdauer $t_1 = c/g = 9 \cdot 0,1 = 0,9 \text{ sek}$. Ebsolange währt das Herabfallen; mit der Geschwindigkeit $c = 9 \text{ m/sek}$ trifft der Punkt unten wieder ein. — Wurfgeschwindigkeiten, die man einem Massenpunkt erteilt, lassen sich schwer unmittelbar abmessen oder beurteilen. Dazu kann aber ein aufwärts gerich-

teter Wurf dienen, indem man die Dauer der Steig- und Fallbewegung zusammen beobachtet. Nennt man diese t_3 , so ist $t_3 = 2c/g$, mithin $c = 1/2 g t_3$.

Ein Massenpunkt werde lotrecht aufwärts geworfen und lange nach $t_3 = 6$ Sek. unten wieder an. Dann war seine Anfangsgeschwindigkeit $c = 1/2 g \cdot 6 = \text{rund } 30$, die erreichte Höhe

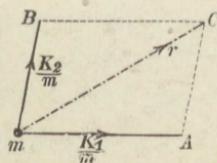
$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{4} \frac{g^2 t_3^2}{2g} = \frac{1}{8} g t_3^2 = 45 \text{ m.}$$

Bei all diesen Betrachtungen war vorausgesetzt, daß auf den Massenpunkt nur die Schwere als Kraft wirke. Bei Fall- und Wurfbewegungen in freier Luft tritt aber ein Luftwiderstand der Bewegung entgegen, der an dieser Stelle noch nicht berücksichtigt werden kann. Es sei nur bemerkt, daß dieser Widerstand unbedeutenden Einfluß hat bei Massenpunkten aus dichtem Stoff und bei kleinen Geschwindigkeiten. Wirft man eine Blei- oder Eisenkugel mit der Hand, so kann der Luftwiderstand meist vernachlässigt werden, während lockere Massen einen verhältnismäßig großen Luftwiderstand erfahren. Auch bei den großen Geschwindigkeiten der Geschosse hat der (mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsende) Luftwiderstand so bedeutenden Einfluß, daß vorstehende einfache Gleichungen für solche Fälle durchaus nicht mehr verwendbar sind.

6. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

Auf einen Massenpunkt m (Fig. 36) mögen gleichzeitig 2 Kräfte K_1 und K_2 wirken; dann bringt nach dem Satz auf S. 32 jede von ihnen eine entsprechende Beschleunigung $p_1 = K_1 : m$; $p_2 = K_2 : m$ hervor. Denken wir uns diese Beschleunigungen, denen der Punkt m gleichzeitig unterworfen ist, durch mA und mB dargestellt, so lassen sich beide nach dem Satz auf S. 23 durch eine Mittelbeschleunigung r ersetzen, die man erhält, indem man die Seitenbeschleunigungen zu einem Streckenzug mAC zusammensetzt; die Schlußlinie mC ist dann die wahre oder Mittelbeschleunigung des Punktes m unter der Einwirkung der Kräfte K_1 und K_2 . Dieselbe Beschleunigung r würde aber auch entstehen, wenn in der Richtung mC auf den Punkt m eine Kraft $R = mr$ wirkte. Zeichnet man daher einen Streckenzug aus den Kräften K_1 und K_2 (statt aus den Beschleunigungen), so wird die Schlußlinie die Größe $R = mr$ bekommen und nach Richtung

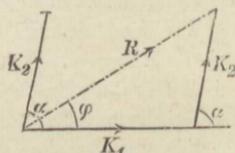
Fig. 36.



und Sinn mit r übereinstimmen. Die so erhaltene Kraft R ist dann den gegebenen Kräften K_1 und K_2 völlig gleichwertig und heißt ihre Mittelkraft oder Resultierende. Es folgt also der Satz vom Dreieck (oder vom Parallelogramm) der Kräfte: Die Mittelkraft zweier gegebenen Kräfte wird nach Größe, Richtung und Sinn durch die Schlußseite des aus den gegebenen Kräften gebildeten Streckenzuges, also durch die geometrische Summe der Seitenkräfte, (oder durch die Diagonale des aus ihnen gezeichneten Parallelogramms) dargestellt.

Für die Berechnung ergeben sich (Fig. 37), wie bei der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 21) gezeigt wurde, die Formeln:

Fig. 37.



$$1) \quad R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos \alpha}$$

$$2) \quad \sin \varphi = \sin \alpha \frac{K_2}{R}.$$

Wird $\alpha = 0$, d. h. haben die beiden Kräfte übereinstimmende Richtung und gleichen Sinn, so wird die Mittelkraft die wirkliche Summe; haben sie aber (für $\alpha = \pi$) entgegengesetzten Sinn, so wird die Mittelkraft gleich dem Unterschiede der gegebenen Kräfte und bekommt den Sinn der größeren von beiden. In diesen beiden Fällen stimmt die geometrische Summe mit der algebraischen Summe überein. Werden in letzterem Falle noch die beiden entgegengesetzten Kräfte K einander gleich, so ergibt sich die Mittelkraft zu Null; es bewegt sich dann der Massenpunkt ebenso, als ob gar keine Kraft auf ihn einwirkte, man sagt daher:

Zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte heben sich an einem Massenpunkte vollständig auf oder halten einander das Gleichgewicht.

Stehen die beiden Kräfte rechtwinklig zueinander, so wird $R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = K_2 : K_1$.

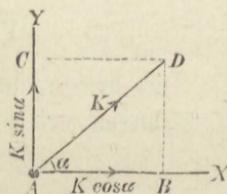
Kommt zu den Kräften K_1 und K_2 noch eine dritte K_3 hinzu, die mit K_1 und K_2 nicht in derselben Ebene liegt, so hat man diese mit der Mittelkraft der beiden ersteren zusammenzusetzen, um die Mittelkraft R aller dreier Kräfte zu erhalten. Wie bei der

Zusammensetzung der Geschwindigkeiten (S. 22) ausführlich erläutert, ergibt sich dann die Mittelkraft als Diagonale eines Parallelepipedes aus den drei Seitenkräften, oder als die Schlußseite eines räumlichen Streckenzuges der Seitenkräfte oder wiederum als deren geometrische Summe.

Wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen lassen sich selbstverständlich auch Kräfte in zwei bzw. drei Seitenkräfte zerlegen und durch diese völlig ersetzen. Hierbei sei indes bemerkt, daß die Zerlegung einer Kraft in drei an demselben Massenpunkte angreifende Seitenkräfte nach gegebenen Richtungen nur dann einen bestimmten Sinn hat, wenn die drei Richtungen nicht in einer Ebene liegen.

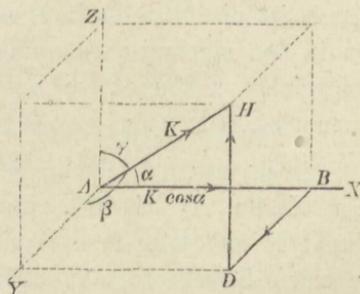
Soll eine Kraft K nach zwei rechtwinklig aufeinander stehenden, mit ihr in derselben Ebene liegenden Achsenrichtungen zerlegt werden (Fig. 38), so zieht man durch den Endpunkt D der Kraftstrecke AD eine Parallele DB zu AY ; dann ist ABD der Streckenzug der Seitenkräfte. Schließt K mit der x -Achse den Winkel α ein, so erhält man $K \cos \alpha$ und $K \sin \alpha$ als die Seitenkräfte.

Fig. 38.



Soll die Zerlegung aber nach drei rechtwinklig zueinander stehenden Richtungen erfolgen (Fig. 39), welche mit der Kraft K bzw. die Winkel α , β und γ einschließen, so fällt man von H ein Lot HD auf die xy -Ebene und hat damit die in die z -Achse fallende Seitenkraft $K \cos \gamma$ mit dem Sinne von D nach H . Eine Parallele durch D zur y -Achse liefert die Seitenkraft $BD = K \cos \beta$ für die y -Richtung, und endlich ist $AB = K \cos \alpha$ die Seitenkraft in der x -Richtung (vergleiche S. 23, Fig. 25).

Fig. 39.



Greifen nun an einem Massenpunkte beliebig viele Kräfte $K_1, K_2 \dots K_n$ mit beliebigen Richtungen an und will man deren Mittelkraft R nach Größe und

Richtung finden, so legt man durch den Massenpunkt ein dreiachsiges Koordinatenkreuz, dessen Achsen mit den gegebenen Kräften die als bekannt zu betrachtenden Richtungswinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ einschließen. Sodann zerlegt man jede der gegebenen Kräfte in drei Seitenkräfte, welche mit den Achsenrichtungen zusammenfallen, ersetzt also K_1 durch $K_1 \cos \alpha_1, K_1 \cos \beta_1, K_1 \cos \gamma_1$ u. s. f. Dadurch erhält man freilich die dreifache Anzahl der Kräfte, die aber nun in drei ganz bestimmten Richtungen liegen. Dann können die in die x -Richtung fallenden Seitenkräfte $K_1 \cos \alpha, K_2 \cos \alpha_2 \dots K_n \cos \alpha_n$ durch eine einzige in derselben Richtung wirkende Kraft X gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte

$$3) \quad X = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \dots + K_n \cos \alpha_n,$$

was man kürzer schreibt $X = \sum K \cos \alpha$, ersetzt werden, während sich in den anderen Richtungen in gleicher Weise ergibt:

$$Y = \sum K \cos \beta; \quad Z = \sum K \cos \gamma.$$

Die drei rechtwinklig zueinander stehenden Seitenkräfte X, Y, Z lassen sich nun durch ihre geometrische Summe

$$4) \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ersetzen, welche mit den drei Achsenrichtungen die Winkel α, β und γ einschließt. Da nun X die Seitenkraft von R in der x -Richtung, also $X = R \cos \alpha$, so wird

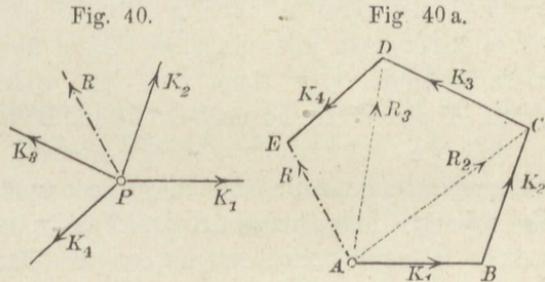
$$5) \quad \cos \alpha = \frac{X}{R}; \quad \text{ebenso} \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Damit ist die Mittelkraft R nach Größe und Richtung bestimmt. Da in den algebraischen Summen auf die Reihenfolge der Summanden nichts ankommt, so ist die Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte gleichgültig.

Auch durch Zeichnung kann man beliebig viele, beispielsweise vier Kräfte K_1 bis K_4 , zusammensetzen. Von einem beliebigen Punkt A aus setze man in einer Hilfsfigur 40a zuerst K_1 und K_2 zu einem Streckenzuge zusammen; dann ist die Schlußlinie $AC = R_2$ die Mittelkraft beider. Mit dieser fügt man in gleicher Weise K_3 zusammen, indem man den Streckenzug R_2, K_3 mit der Mittelkraft $R_3 = AD$ bildet. Daran schließt sich in gleicher Weise K_4 .

Die Strecke AE , welche dann den gesamten Streckenzug der Kräfte K_1 bis K_4 schließt, ist offenbar die Mittelkraft R der gegebenen Kräfte und ergibt sich wiederum als die geometrische Summe der Kräfte. Verlegt man diese nach Größe, Richtung und Sinn bestimmte Mittelkraft an den Massenpunkt m bei P (Fig. 40), so ist die Aufgabe gelöst. Die Hilfsfigur 40a bezeichnet man

(nach G. Lang) als **Krafteck**. Beim Zeichnen des Kraftecks hat man die zusammzusetzenden Kräfte in solcher Weise aneinander zu reihen, daß in dem Streckenzug $ABCDE$ die



Pfeile übereinstimmenden Umfassungssinn zeigen. — Diese Figur ist leicht zu zeichnen, wenn die gegebenen Kräfte in derselben Ebene, der Zeichenebene, liegen. Man erkennt aber leicht, daß, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, das Krafteck grundsätzlich seine Bedeutung beibehält; nur bildet der Streckenzug der Kräfte dann ein räumliches Krafteck; aber immerhin stellt die Schlußlinie, d. h. die geometrische Summe der Kräfte, auch in solchen Fällen ihre Mittelkraft dar, deren zeichnerische Bestimmung dann freilich die Auftragung in Grundriß und Aufriß nach den Lehren der darstellenden Geometrie erfordert. Ist die Schlußlinie = Null, so halten sich die Kräfte im Gleichgewichte. Weiteres s. S. 67.

7. Mechanische Arbeit einer Kraft.

Führt ein Massenpunkt unter der Einwirkung einer nach Richtung und Größe unveränderlichen Kraft K in deren Richtung eine Bewegung aus, so ist die Wirkung der Kraft auf den Bewegungszustand des Massenpunktes verhältnismäßig der Größe der Kraft und der Weglänge s , die der Massenpunkt während der Einwirkung der Kraft zurücklegt, also auch verhältnismäßig dem Produkte aus beiden. Dieses für die Beurteilung der Wirkung der Kraft auf den Massenpunkt, d. h. für die Leistung der Kraft maß-

gebende Produkt aus der Kraft K und Wegeslänge s , bezeichnet man als **mechanische Arbeit** der Kraft.

Diese Deutung des Begriffes der mechanischen Arbeit einer Kraft muß indes zunächst noch eine Erweiterung erfahren, wenn gleichzeitig mehrere beliebige Kräfte auf einen Massenpunkt einwirken und dessen Bewegungsrichtung also nicht gleichzeitig mit den verschiedenen Richtungen aller einzelnen Kräfte übereinstimmen kann. Ist dann eine der wirkenden Kräfte K gleichbleibend nach Größe und Richtung, so daß sie während der Bewegung stets ihrer Anfangsrichtung parallel bleibt, so kann man sich die beliebige Bewegung AB des Massenpunktes (Fig. 41) zerlegt denken in zwei Seitenbewegungen, von denen eine AC in die Richtung der Kraft K fällt, während die andere CB senkrecht dazu ist. Die Wirkung der Kraft vollzieht sich dann ausschließlich in der Richtung der Seitenbewegung AC . Die mechanische Arbeit der Kraft K ist jetzt gleich dem Produkte aus der Kraft und in der ihrer Richtung zurückgelegten Wegeslänge AC .

Die in der Kraftrichtung zurückgelegte Wegeslänge AC gilt als positiv, wenn ihr Sinn mit dem der Kraft übereinstimmt (Fig. 41) und umgekehrt. Bei dem Vorgange nach Fig. 42 ist AC negativ einzuführen und auch die Arbeit von K negativ, nämlich $\mathfrak{A} = -K \cdot AC$.

Eine weitere Verallgemeinerung des Begriffes der mechanischen Arbeit einer Kraft wird notwendig, wenn diese Kraft während der Bewegung des Punktes, auf den sie wirkt, fortlaufend ihre Größe und Richtung ändert. Man kann dann während eines unendlich kleinen Wegeelementes $ds = PQ$ (Fig. 43) die Kraft K nach Richtung und Größe als konstant ansehen und erhält

Fig. 41.

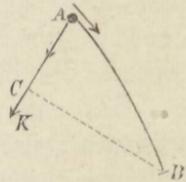


Fig. 42.

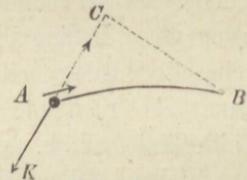
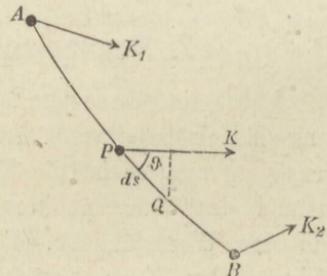


Fig. 43.



den Arbeitsbetrag $d\mathcal{A}$, den die Kraft leistet, während der Massenpunkt das Bahnelement ds durchläuft zu $d\mathcal{A} = ds \cdot \cos \vartheta \cdot K$. Ähnliche kleine Arbeitsbeträge entstehen beim Durchlaufen aller übrigen Bahnelemente ds , und die Summe aller dieser Arbeitsbeträge $\int ds \cdot \cos \vartheta \cdot K = \mathcal{A}$ ist die mechanische Arbeit der Kraft, während der Massenpunkt die Bahn AB durchläuft.

Steht die Kraft während eines beliebigen Teiles der Bewegung rechtwinklig zur Bahnlinie, so ist $\cos \vartheta = 0$, also auch $d\mathcal{A}$ und \mathcal{A} während dieses Bewegungsstückes Null; oder: eine Kraft verrichtet keine mechanische Arbeit, solange sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung steht.

Ein Massenpunkt möge sich nun unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte $K_1, K_2 \dots K_n$ bewegen, von denen in Figur 44 nur zwei gezeichnet sind; während der Bewegung von A nach B seien die Kräfte gleichbleibend nach Größe und Richtung (welche Annahme auch für veränderliche Kräfte zulässig ist, sobald man für solchen Fall AB als unendlich klein betrachtet). Es sei R die Mittelkraft von $K_1, K_2 \dots K_n$. Dann ist für diese (nach S. 40, Gl. 5)

$$1) \quad R \cos \alpha = X = \sum K \cos \alpha.$$

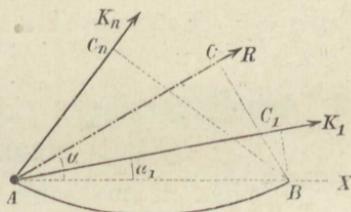
Fällt man aber von B Rechtwinklige auf die Krafrichtungen, so ist $\cos \alpha = AC : AB$; $\cos \alpha_1 = AC : AB$; \dots $\cos \alpha_n = AC_n : AB$; mithin wird aus Gl. 1 (nach Multiplikation mit AB)

$$2) \quad R \cdot AC = K_1 \cdot AC_1 + K_2 \cdot AC_2 + \dots K_n \cdot AC_n.$$

Da aber $AC, AC_1 \dots AC_n$ die rechtwinkligen Projektionen der Bahnlinie AB auf die Krafrichtungen sind, so ist die Bedeutung der Gl. 2:

Die mechanische Arbeit, welche sich bei der Bewegung eines Massenpunktes für die Mittelkraft mehrerer auf ihn wirkenden Kräfte ergibt, ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten dieser Einzelkräfte bei derselben Bewegung.

Fig. 44.



(Bei veränderlichen Kräften gilt dieser Satz zunächst für ein unendlich kleines Bewegungsteilchen; weil aber als Arbeit einer veränderlichen Kraft die Summe ihrer Arbeitsteilchen bezeichnet ist, so gilt der obige Satz der mechanischen Arbeit ganz allgemein für Kräfte, die an demselben Massenpunkt angreifen.)

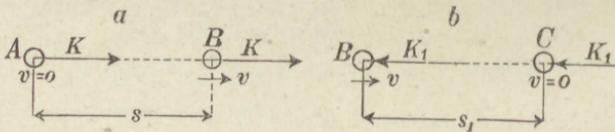
Der Ausdruck für das Arbeitsteilchen $d\mathcal{A} = K \cdot ds \cdot \cos \vartheta$ (S. 45) läßt sich jetzt auch noch anders deuten als oben geschehen. Man kann nämlich (Fig. 43) K zerlegen in die Seitenkräfte $K \cos \vartheta$ (in der Bewegungsrichtung) und $K \sin \vartheta$ (rechtwinklig dazu). Erstere liefert die Arbeit $K \cdot \cos \vartheta \cdot ds$, während die andere nach S. 43 die Arbeit Null verrichtet. Die Arbeit von K ergibt sich daher wiederum zu $d\mathcal{A} = K \cos \vartheta \cdot ds$.

Wird die Kraft $K = 1 \text{ kg}$, die Wegeslänge in ihrer Richtung $= 1 \text{ m}$, so wird die Arbeit $\mathcal{A} = K \cdot s = 1 \cdot 1 = 1$, also gleich der Arbeitseinheit. Diese Arbeit, welche von 1 kg längs eines Weges $= 1 \text{ m}$ verrichtet wird, heißt **Meterkilogramm** (mkg); $n \text{ kg}$ längs eines Weges $= 1/n$ Meter verrichten aber ebenfalls die Arbeit $n \cdot \frac{1}{n} = 1 \text{ mkr}$.

8. Arbeitsvermögen (kinetische Energie oder lebendige Kraft) eines Massenpunktes.

1) Wirkt auf einen ruhenden Massenpunkt von der Masse m eine nach Richtung und Größe unveränderliche Kraft K ein (Fig. 45a),

Fig. 45.



so setzt diese in ihrer Richtung den Massenpunkt in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung von der Beschleunigung $p = K : m$ (Gl. 1 S. 32). Die Geschwindigkeit nach t Sekunden ist $v = t \cdot p = t \cdot (K : m)$ und der durchlaufene Weg $s = \int v \cdot dt = \int p \cdot t \cdot dt = \frac{p t^2}{2}$, oder mit $t = v : p$ auch $s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2(K : m)}$, woraus folgt

$$1) \quad K \cdot s = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Linksseits der Gl. 1 steht die von der Kraft K bei Erzeugung der Geschwindigkeit v geleistete Arbeit, rechtsseits das Quadrat dieser Geschwindigkeit, multipliziert mit der halben Masse.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Arbeit $K \cdot s$, indem sie den Massenpunkt bis zur Geschwindigkeit v beschleunigt, derart in seine Masse übergegangen ist, daß sie den Massenpunkt befähigt, seinerseits eine gleich große Arbeit zu leisten. Läßt man nämlich auf den mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Massenpunkt nun eine der Bewegung gerade entgegengerichtete Kraft K_1 (Fig. 45 b) von gleichbleibender Größe wirken, so entsteht eine gleichförmig verzögerte Bewegung mit der negativen Beschleunigung (Verzögerung) $p_1 = -K_1 : m$. Nach $t_1 = v : p_1 = v : (K_1 : m)$ Sekunden ist der Massenpunkt wieder zur Ruhe gekommen und der von ihm dabei durchlaufene Weg ist $s_1 = \frac{v \cdot t_1}{2} = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2(K_1 : m)}$, woraus folgt

$$2) \quad K_1 \cdot s_1 = \frac{m v^2}{2}.$$

Indem sich also die Geschwindigkeit des Massenpunktes von v auf Null verminderte, vermochte dieser die seiner Bewegung entgegengesetzte Kraft K_1 auf der Wegeslänge s_1 zu überwinden und dabei die Arbeit $K_1 \cdot s_1 = \frac{m v^2}{2}$ zu leisten, bezw. die gleich große Negativarbeit der widerstehenden Kraft K_1 auszugleichen.

Diese nun vom Massenpunkt unter dem Verlust seiner Geschwindigkeit geleistete Arbeit ist genau so groß, als die zur Erzeugung eben dieser Geschwindigkeit v durch die Kraft K ihm mitgeteilte Arbeit $K \cdot s$, denn nach Gl. 1 und 2 ist $K \cdot s = \frac{m v^2}{2} = K \cdot s_1$.

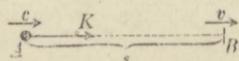
Die Fähigkeit des Massenpunktes zur Leistung bezw. Abgabe von Arbeit hängt also lediglich von seiner Masse und seiner Geschwindigkeit ab, wobei es ersichtlich einerlei ist, wie letztere entstanden sein mag. Die Größe $\frac{m v^2}{2}$ ist die Menge der Arbeit, die der Massenpunkt zu leisten vermag, sein **Arbeitsvermögen**.

Leibniz (geb. 1646 zu Leipzig, gest. 1716 zu Hannover) bezeichnet die Größe $\frac{m v^2}{2}$ als „vis viva“ (lebendige Kraft). Da der Ausdruck indes mit dem,

was wir sonst als Kraft bezeichnen, nichts gemein hat, so erscheint diese Bezeichnung wenig zweckmäßig. Treffender ist die sonst wohl übliche Bezeichnung „kinetische Energie“. Deutschsprachlich richtiger und das Wesen des mechanischen Wertes der Größe am besten treffend ist die von Franz Grashof (geb. 1. Juli 1826 in Düsseldorf, gest. 30. Oktober 1893 in Karlsruhe) eingeführte Bezeichnung „Arbeitsvermögen“. Daß der Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ wirklich als Produkt aus einer Länge und einer Kraft, also als mechanische Arbeit anzusehen ist, erkennt man, wenn man ihn mit irgendeiner als Beschleunigung gedachten Länge p multipliziert und dividiert. Es wird dann $\frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2p} \cdot mp$, worin $\frac{v^2}{2p} = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{p} = \frac{v}{2} \cdot t$ eine Wegeslänge und $m \cdot p$ eine Kraft ist.

Besitzt der Massenpunkt in dem Augenblicke, wo die nach Richtung und Größe gleichbleibende Kraft K auf ihn zu wirken anfängt, in deren Richtung schon eine Geschwindigkeit c (Fig. 46), also ein Arbeitsvermögen $\frac{mc^2}{2}$, und findet die Wirkung der

Fig. 46.



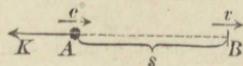
Kraft auf den Massenpunkt auf der Wegeslänge s statt, so teilt sie ihm noch einen Arbeitsbetrag $K \cdot s$ mit, wodurch seine Geschwindigkeit von c auf ein bestimmtes Maß v steigt. Sein Arbeitsvermögen steigt damit von $\frac{mc^2}{2}$ auf $\frac{mv^2}{2}$. Daraus ergibt sich die

Beziehung $\frac{mc^2}{2} + K \cdot s = \frac{mv^2}{2}$ oder

$$3) \quad K \cdot s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}.$$

Linksseits der Gl. 3 steht die Arbeit der Kraft K , rechtsseits die Zunahme des Massenpunktes an Arbeitsvermögen. Die Beziehung in Gl. 3 läßt sich also in Worten ausdrücken: Die Zunahme eines Massenpunktes an Arbeitsvermögen während einer bestimmten Bewegung ist gleich der dabei an ihm verrichteten Arbeit.

Fig. 47.



Wirkt die Kraft K der vorhandenen Bewegung des Massenpunktes entgegen (Fig. 47), so leistet sie Negativarbeit, entzieht dem Punkte Arbeitsvermögen, vermindert seine Geschwindigkeit. Gibt man der Kraft K

in Gl. 3 das negative Vorzeichen, so nimmt die Gleichung die Form an

$$-Ks = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \text{ oder}$$

$$4) \quad Ks = \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2}.$$

Der oben ausgesprochene, in den Gl. 1 bis 4 analytisch dargestellte Satz vom Arbeitsvermögen gibt eine Beziehung zwischen der Endgeschwindigkeit v , dem durchlaufenen Wege s und der dabei wirkenden Kraft K und ist besonders für die Lösung solcher Aufgaben geeignet, bei denen es sich wesentlich um die Bestimmung irgendeiner dieser drei Größen aus den beiden anderen handelt. Für die Lösung von Aufgaben, bei denen eine der Größen, Weg, Kraft und Zeit aus den beiden anderen zu berechnen ist, ist die Anwendung des Satzes nicht zu empfehlen.

Man erhält aus Gl. 3, wenn K und s gegeben, die Endgeschwindigkeit

$$5) \quad v = \sqrt{\frac{2Ks}{m} + c^2},$$

wenn s und v gegeben die erforderliche Kraft

$$6) \quad K = \frac{m}{2s} (v^2 - c^2),$$

und wenn K und v gegeben, die erforderliche Wegeslänge

$$7) \quad s = \frac{m}{2K} (v^2 - c^2).$$

Anwendungen: Beispiel 1. Ein Eisenbahnzug von 300 000 kg Gewicht bewegt sich auf wagerechtem Gleis mit einer Geschwindigkeit von $c = 10 \text{ m/sek.}$

a) Zur Steigerung der Geschwindigkeit ist auf einer Strecke $s = 1000 \text{ m}$ eine Zugkraft $K = 2000 \text{ kg}$ tätig; welche Endgeschwindigkeit entsteht, wenn die der Bewegung des Zuges entgegenwirkenden Reibungs- und Luftwiderstände außer Acht bleiben?

Das Arbeitsvermögen des Zuges zu Anfang der Beschleunigungsperiode ist gleich $\frac{mc^2}{2} = \frac{300\,000}{9,81 \cdot 2} \cdot 10^2 = 1\,530\,000 \text{ m/kg.}$ Die Zugkraft leistet eine Arbeit von $2000 \cdot 1000 = 2\,000\,000 \text{ m/kg.}$ Es ist also das Arbeitsvermögen des Zuges am Ende der Beschleunigungsperiode $\frac{mv^2}{2} = \frac{300\,000 \cdot v^2}{9,81 \cdot 2} = 1\,530\,000 + 2\,000\,000 = 3\,530\,000$ und demnach $v = 15,2 \text{ m.}$ Dasselbe erhält man aus Gl. 5, wenn man die Werte für K , s , c und m einfügt.

b) Es soll mit derselben Zugkraft die Geschwindigkeit auf 20 m/sek gesteigert werden; auf welcher Strecke s muß die Zugkraft tätig sein? Das Arbeitsvermögen des Zuges muß erhöht werden von $\frac{mc^2}{2} = 1530000 \text{ m/kg}$ auf $\frac{mv^2}{2} = 6100000 \text{ m/kg}$, also um $6100000 - 1530000 = 4570000 \text{ m/kg}$. Dazu muß die Kraft $K = 2000 \text{ kg}$ auf einer Wegestrecke $s = \frac{4570000}{2000} = 2285 \text{ m}$ wirken.

c) Wie groß müßte die Zugkraft K sein, damit die Steigerung der Geschwindigkeit von $c = 10 \text{ m/sek}$ auf $v = 20 \text{ m/sek}$, also des Arbeitsvermögens von 1530000 auf 6100000 m/kg , auf der Wegeslänge $s = 1000 \text{ m}$ erfolge? Man erhält $K = \frac{6100000 - 1530000}{1000} = 4570 \text{ kg}$.

d) Der mit $c = 10 \text{ m/sek}$ sich bewegende Zug soll durch eine Bremskraft $-K_1 = -4000 \text{ kg}$ still gestellt werden; auf welcher Wegeslänge s_1 kann das geschehen? Die Negativarbeit der Kraft $-K_1$ muß das Arbeitsvermögen $\frac{mc^2}{2} = 1530000 \text{ m/kg}$ des Zuges vernichten; es muß sein $1530000 - K_1 s_1 = 0$, woraus folgt $s_1 = \frac{1530000}{4000} = 382,5 \text{ m}$.

Beispiel 2: Auch die freie Fallbewegung kann mit Hilfe des Satzes vom Arbeitsvermögen sehr bequem verfolgt werden, soweit es sich um den Zusammenhang zwischen der Fallhöhe und Fallgeschwindigkeit handelt. (Fig. 34, S. 35.) Ist die Strecke s durchfallen, so hat die Schwere die Arbeit $+mg \cdot s$ verrichtet. Die Zunahme an Arbeitsvermögen ist daher

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mc^2 = mg \cdot s, \text{ mithin}$$

$$v^2 - c^2 = 2gs \text{ oder } v = \sqrt{c^2 + 2gs}.$$

Für die Aufwärtsbewegung (Fig. 35) ist die Arbeit negativ, nämlich $-mg \cdot s$, mithin

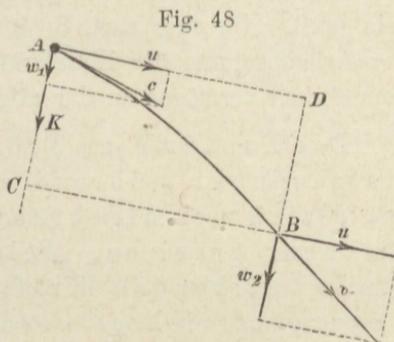
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mc^2 = -mg \cdot s$$

$$\text{oder } v^2 - c^2 = -2gs, \text{ mithin } v = \sqrt{c^2 - 2gs}.$$

Faßt man die Bewegung von Punkt P aus zur höchsten Stelle B und wieder zurück nach P zusammen, so ist die ganze Arbeit der Schwere Null, weil aufwärts $-mg \cdot s$, abwärts $+mg \cdot s$ verrichtet wurde. Daher kann auch bei der Bewegung von P über B und nach P zurück keine Zunahme an Arbeitsvermögen entstehen, oder die Geschwindigkeit an einem beliebigen Punkte P muß für Abwärts- und Aufwärtsbewegung die gleiche sein.

2) Es soll nun der Satz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegung bewiesen werden. Ein Massenpunkt bewege sich unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft K , die aber nicht mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c zusammenfallen

möge (Fig. 48); dann erteilt die Kraft dem Punkt eine Elementarbeschleunigung $p \cdot dt$ in der Richtung der Kraft. Anfangsgeschwindigkeit und Elementarbeschleunigung liegen in der durch die Richtungen von c und K bestimmten Ebene, daher müssen auch die ferneren Geschwindigkeiten in dieser Ebene verbleiben. Die unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft entstehende Bahnlinie ist demnach eine ebene Kurve. Daher kann man die Bewegung



AB in zwei Seitenbewegungen AC (in der Richtung der Kraft K) und AD (rechtwinklig zur Kraft) zerlegen. Zerlegt man Geschwindigkeiten und Kraft nach denselben Richtungen, so erhält man die Seitengeschwindigkeiten und Seitenkräfte. In der Richtung AD wirkt keine Kraft; in dieser ist daher die Geschwindigkeit dauernd gleich u ; in der Richtung AC aber vergrößert sich die Geschwindigkeit von w_1 auf w_2 . Für die Seitenbewegung $AC = s$ ist das Gesetz vom Arbeitsvermögen bereits bewiesen, daher

$$3) \quad \frac{1}{2} m w_2^2 - \frac{1}{2} m w_1^2 = Ks.$$

Weil aber

$$v^2 = u^2 + w_2^2 \text{ und}$$

$$c^2 = u^2 + w_1^2,$$

so wird $v^2 - c^2 = w_2^2 - w_1^2$, so daß man aus Gl. 1 erhält

$$4) \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = Ks.$$

Ks ist auch für die krummlinige Bewegung AB die Arbeit von K , so daß hiermit das Gesetz vom Arbeitsvermögen auch für krummlinige Bewegungen unter Einwirkung einer gleichbleibenden Kraft nachgewiesen ist.

3) Wird nun der soeben betrachtete Fall noch verallgemeinert, indem man K als veränderlich annimmt, so kann man auf Grund der auf Seite 45 gepflogenen Erörterungen behaupten, daß während eines Bewegungsteilchens die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich dem Arbeitsteilchen, also $d(\frac{1}{2} m v^2) = d\mathcal{A}$ sein muß. Eine Summierung auf beiden Seiten ergibt dann auch für die endliche Bewegung $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = \mathcal{A}$.

Steht der Massenpunkt unter Einwirkung beliebig vieler Kräfte, so kann man diese für jeden Augenblick durch ihre Mittelkraft ersetzen, deren Arbeit dann gleich der Zunahme an Arbeitsvermögen sein muß. Da aber nach S. 45 die Arbeit der Mittelkraft gleich der Arbeitssumme der Einzelkräfte ist, so hat man nun den Satz vom Arbeitsvermögen in der allgemeinen Form:

Die Zunahme an Arbeitsvermögen, welche ein Massenpunkt während einer Bewegung erfährt, ist gleich der algebraischen Summe der mechanischen Arbeiten, welche von allen auf den Punkt wirkenden Kräften während dieser Bewegung verrichtet werden.

9. Parabolische Wurfbewegung.

Wird ein Massenpunkt mit der Geschwindigkeit c unter dem Neigungswinkel α gegen die Wagerechte schräg aufwärts geworfen und der alleinigen Einwirkung der Schwere überlassen, so entsteht, wie bei Fig. 48 erläutert, eine krummlinige Bewegung in einer durch c und die lotrechte Richtung der Schwere bestimmten Ebene.

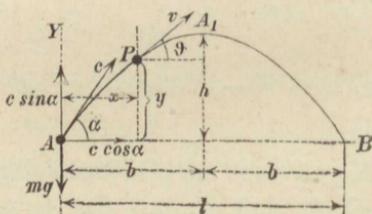
Zerlegt man (Fig. 49) die krummlinige Bewegung in zwei Seitenbewegungen nach der Richtung der Lotrechten AY und rechtwinklig dazu nach AB , so muß der letztere offenbar gleichförmig sein, weil in ihr keine Kraft auftritt. Sie erfolgt demnach mit der Geschwindigkeit $c \cos \alpha$, welche sich durch Zerlegung von c ergibt. Es ist mithin

$$1) \quad v_x = c \cos \alpha \quad \text{und} \quad v_y = c \sin \alpha - gt,$$

da die lotrechte Seitenbewegung wegen der Fallbeschleunigung gleichförmig verzögert wird. Die Neigung von v gegen die Wagerechte ist

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gt}{c \cos \alpha}.$$

Fig. 49.



Die Wegeslängen in beiden Seitenbewegungen sind

$$x = c \cos \alpha t \text{ und } y = c \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Entfernt man t aus diesen beiden Gleichungen, indem man

$t = \frac{x}{c \cos \alpha}$ aus der ersten in die zweite einführt, so entsteht als

Gleichung der Bahnlinie

$$2) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha},$$

welche nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie als Parabel erkannt wird.

Da die lotrechte Seitenbewegung aufwärts und abwärts ganz symmetrisch, die wagerechte aber gleichförmig erfolgt, so schließt man leicht, daß der ansteigende Teil der Bahnlinie dem abfallenden Teile symmetrisch sein muß, daß also eine lotrechte durch den höchsten Punkt A_1 der Bahnlinie die Hauptachse der Parabel sein muß. Bestimmter überzeugt man sich davon noch, indem man die Kurve auf ein durch A_1 gelegtes Achsenkreuz (wagerecht und lotrecht) bezieht. Die Höhe des höchsten Punktes A_1 ist offenbar

$$3) \quad h = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

da in der lotrechten Seitenbewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \sin \alpha$ nur diese Höhe erstiegen werden kann. Die dazu gehörige Zeit, nach welcher $v_y = c \sin \alpha - g t = 0$ wird, ist $t_1 = \frac{c \sin \alpha}{g}$, und während dieser erfolgt eine wagerechte Seitenbewegung

$$4) \quad b = v_x t_1 = c \cos \alpha \cdot \frac{c \sin \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Hierdurch liegt der höchste Punkt A_1 fest. Setzt man nun

$$x = b - x_1 = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - x_1 \text{ und}$$

$$y = h - y_1 = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g} - y_1 \text{ in Gl. 2 ein,}$$

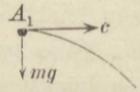
so ergibt sich nach einfacher Zusammenziehung

$$5) \quad x_1^2 = 2 \frac{(c \cos \alpha)^2}{g} y_1.$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel mit lotrechter Achse und dem Scheitel A_1 dar, und zwar ist der Parameter $\frac{c^2 \cos^2 \alpha}{g}$; es ist demnach diese Größe, welche die Form der Bahnlinie allein bedingt, nur von der wagerechten Seitengeschwindigkeit $c \cos \alpha$, nicht aber von der lotrechten anfänglichen Seitengeschwindigkeit $c \sin \alpha$ abhängig. Letztere bestimmt aber, weil sie in den Gleichungen 3 und 4 vorkommt, die Lage des Scheitelpunktes A_1 der Wurflinie gegen den Anfangspunkt A .

Besondere Fälle: 1. Ist $\alpha = 0$, wird der Punkt also wagerecht fortgeworfen (Fig. 50), so ist $c \cos \alpha = c$, $c \sin \alpha = 0$, daher werden h und b beide zu Null, und der Anfangspunkt A ist gleichzeitig der höchste Punkt A_1 . Der Parameter der Parabel wird $c^2 : g$.

Fig. 50.

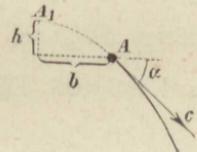


2. Erfolgt aber der Wurf schräg abwärts (Fig. 51), so wird $c \sin \alpha$, den früheren Betrachtungen gegenüber, negativ; es ist dann

$$b = -\frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}; \quad h = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g};$$

mithin liegt dann der Scheitel A_1 in der nach rückwärts verlängerten Bahnlinie, wird also von dem Massenpunkte, der seine Bewegung in A beginnt, nicht mehr durchlaufen.

Fig. 51.



Der zuerst betrachtete Fall (Fig. 49) ist offenbar der vollständigere, da in ihm die abwärts gerichtete Bewegung mit vorkommt.

Die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte P der Bahnlinie ergibt sich am einfachsten nach dem Satze vom Arbeitsvermögen. Während der Bewegung von A nach P verrichtet nämlich die Schwerkraft die Arbeit $-mgy$, daher wird nach Gl. 4, S. 50

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}.$$

Solange der Punkt steigt, solange also y wächst, vermindert sich die Geschwindigkeit, und im Scheitel ist sie am kleinsten, indem sie dort lediglich aus der wagerechten Seitengeschwindigkeit $c \cos \alpha$ besteht. Ist der Scheitel überschritten, sinkt der Massenpunkt, so

nimmt v fortgesetzt wieder zu, ist im Punkte B für $y = 0$ wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit c und wird dann immer größer. Die Entfernung $AB = l$, in welcher der Massenpunkt wieder dieselbe wagerechte Ebene erreicht, von der er ausging, heißt die Wurfweite und ist offenbar $= 2b = \frac{c^2 2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ oder

$$6) \quad l = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Die Dauer t_2 dieseswurfes beträgt, da $l = c \cos \alpha t_2$ ist,

$$7) \quad t_2 = 2t_1 = \frac{2c \sin \alpha}{g}.$$

2) Bei einer Wurf-, Schieß- oder Schleudervorrichtung ist die Geschwindigkeit c , welche dem Massenpunkt erteilt wird, meist gegeben, der Winkel α aber beliebig wählbar. Will man eine bestimmte Wurfweite l erreichen, so zeigt Gleichung 6, daß diese mit $\sin 2\alpha$ verhältnismäßig ist. Es haben aber zwei Winkel, die sich zu 180° ergänzen, die man etwa $90 + \varphi$ und $90 - \varphi$ nennen kann, gleichen Sinus; jeder von beiden liefert daher, gleich 2α gesetzt, den gleichen Wert von $\sin 2\alpha$. Sonach geben 2 Steigungswinkel α , welche sich zu 90° ergänzen und welche man $45^\circ + 1/2\varphi$ und $45^\circ - 1/2\varphi$ nennen kann, dieselbe Wurfweite. Bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten c läßt sich also ein gegebenes Ziel sowohl durch einen hohen, wie durch einen flachen Wurf erreichen. Beide fallen aber zu einem einzigen zusammen für $\alpha = 45^\circ$, und dieser Steigungswinkel liefert den Größtwert der Wurfweite, nämlich

$$8) \quad l_{max} = \frac{c^2}{g}.$$

Die größte erreichbare Höhe entsteht bei $\alpha = 90^\circ$ und wird $h_{max} = \frac{c^2}{2g}$; die mit einer Geschwindigkeit c erreichbare größte Wurfweite ist mithin doppelt so groß wie die größte erreichbare Wurfhöhe.

Bei $\alpha = 45^\circ$ wird (nach Gl. 3) $h = \frac{c^2}{4g}$, d. h. die Pfeilhöhe dieser Wurflinie beträgt $1/4$ der Wurfweite (der Sehne).

Beispiel 1: Eine gespannte Armbrust (eine geladene Windbüchse, ein Blasrohr oder dergl.) erteile dem Geschoß eine Geschwindigkeit $c = 25 \text{ m/sek.}$ Mit welchem Steigungswinkel ist eine Wurfweite von $l = 40 \text{ m}$ zu erreichen? (Fig. 52.) Nach Gl. 6 ist $40 = \frac{25^2 \sin 2\alpha}{9,81}$, mithin ist

$\sin 2\alpha = 0,628$; diesem entspricht ein Winkel $2\alpha = 39^\circ$, zugleich aber auch $2\alpha = 141^\circ$. Also sind die beiden Steigungswinkel $\alpha = 19,5^\circ$ und $70,5^\circ$ verwendbar. Dann ist $\sin \alpha = 0,334$ bzw. $0,943$, sonach beträgt $c \sin \alpha = 8,4$ bzw. $23,6$ und die Wurfhöhe nach Gl. 3: $h = 3,5$ bzw. $28,3 \text{ m}$, die Wurfdauer aber (Gl. 7): $t_2 = 1,7$ bzw. $4,81$ Sekunden. Die größte erreichbare Höhe bei $\alpha = 90^\circ$ beträgt $c^2 : (2g) = 31,9 \text{ m}$, die größte mögliche Wurfweite bei $\alpha = 45^\circ$: doppelt soviel, nämlich $63,8 \text{ m} = AB_2$.

Soll ein Ziel getroffen werden, welches nicht in gleicher Höhe mit A liegt, sondern die Koordinaten x und y hat, so findet man den erforderlichen Steigungswinkel, indem man Gl. 2 nach α auflöst. Führt man zur Abkürzung die Geschwindigkeitshöhe $k = \frac{c^2}{2g}$ ein, so wird Gl. 2: $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4k \cos^2 \alpha}$. Bedenkt man, daß $1 : \cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, so ergibt sich leicht

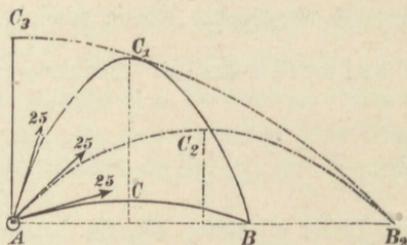
$$10) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2k}{x} \pm \sqrt{\frac{4k(k-y)}{x^2} - 1}.$$

Bei gegebenem k , d. h. gegebener Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses gibt es bezüglich der Punkte, die für das Geschoß erreichbar sind, eine bestimmte Grenze. Für gewisse Wertpaare von x und y wird nämlich die Wurzel in Gl. 10 reell, für andere aber imaginär. Letztere Wertpaare entsprechen den unerreichbaren Punkten. Die Grenzlinie zwischen den erreichbaren und unerreichbaren Punkten erhält man, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich Null gesetzt wird, d. h. $4k^2 - 4ky = x^2$ oder

$$11) \quad y = k - \frac{x^2}{4k} = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} x^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel in der Höhe $k = c^2 : (2g)$ lotrecht über dem Anfangspunkt A liegt, und deren halbe Sehne gleich der größten Wurfweite $l = 2k = c^2 : g$ ist. Sie ist in Fig. 52 durch die Strichpunktierte C_3B_2 dargestellt. Gibt man α alle möglichen Werte, so bezeichnet Gl. 2 (S. 53) eine Schar von unendlich vielen verschiedenen Wurfparabeln, die sämtlich von A ausgehen. Umschließt man diese unendlich vielen für eine gespannte oder geladene Wurf- oder Schießvorrichtung möglichen Parabeln durch eine sie sämtlich berührende Kurve, so nennt man diese die Umhüllungsline, und die Parabel C_3B_2 der Gl. 11 ist eben diese Umhüllungsline.

Fig. 52.



Ihre Gleichung kann auch noch auf andere Weise, als eben geschehen, gefunden werden, indem man nach der Lehre von den Umhüllungslinien die Abgeleitete der Gleichung 2 (S. 53) der Kurvenschar nach dem für die Kurvenschar veränderlichen $\text{tg } \alpha$ gleich Null setzt, diese Gleichung mit Gleichung 2 verbindet und aus beiden $\text{tg } \alpha$ entfernt. Es wird Gleichung 2, wenn man darin $1 : \cos^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$ setzt:

$$12) \quad y = x \text{tg } \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2} - \frac{g x^2}{2 c^2} \text{tg}^2 \alpha.$$

Mithin

$$13) \quad \frac{dy}{d(\text{tg } \alpha)} = 0 = x - \frac{g x^2}{c^2} \text{tg } \alpha.$$

Hieraus $\text{tg } \alpha = \frac{c^2}{g x}$ gibt, in Gleichung 12 eingesetzt:

$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g}{2 c^2} x^2 - \frac{c^2}{2 g} \text{ oder}$$

$$y = \frac{c^2}{2 g} - \frac{g}{2 c^2} x^2, \text{ wie in Gleichung 11.}$$

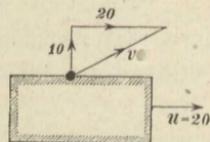
Beispiel 2: Hat ein Eisenbahnwagen eine Geschwindigkeit u in gerader Bahnlinie, so nehmen alle Körper, die in demselben in scheinbarer Ruhe sich befinden, an der Geschwindigkeit u teil. Läßt man also in einem solchen Wagen einen Massenpunkt aus der ruhenden Hand fallen, so ist seine scheinbare Bewegung freilich eine lotrechte Fallbewegung, die wahre Bewegung aber eine parabolische Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit u beginnt. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn man einen Massenpunkt aus dem Fenster eines Eisenbahnwagens fallen läßt. Ein außerhalb des Zuges auf dem Erdboden befindlicher Beobachter erblickt in solchem Falle eine parabolische Bahnlinie nach Fig. 49, wenn darin c mit u vertauscht wird. Für $u = 20 \text{ m/sek}$ wird der Parameter der Parabel $20^2 : 9,81 = 400 \cdot 0,102 = 40,8 \text{ m}$.

Erteilt man aber dem Massenpunkte, statt ihn aus der ruhenden Hand vom Eisenbahnwagen aus fallen zu lassen, mittels Wurfes eine wagerechte Geschwindigkeit $w = 10 \text{ m/sek}$ rechtwinklig zur Fahr- richtung (Fig. 53, Grundriß), so ist diese nur eine Seitengeschwindigkeit; die wahre Geschwindigkeit v aber in bezug auf den festen Erdboden ist die Mittelgeschwindigkeit aus $w = 10$ und $u = 20$, mithin

$$v = \sqrt{w^2 + u^2} = 10 \sqrt{5} = 22,361.$$

Für den außen stehenden Beobachter entsteht eine Wurfbewegung, die mit der wagerechten Geschwindigkeit $v = 10 \sqrt{5}$ beginnt und in der lotrechten Ebene durch v erfolgt. Würde der Beobachter von diesem Wurf etwa getroffen, so würde, wenn man nur die wagerechte Seitenbewegung berücksichtigt und die Vergrößerung der wahren Geschwindigkeit in schräger Richtung durch die Wirkung der Schwere außer Acht läßt, die Wirkung des Wurfes nach dem Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2 \cdot 5$ zu

Fig. 53.



beurteilen sein. Der Werfende hat nur die Arbeit $\frac{1}{2} m 10^2$ auf den Massenpunkt übertragen; die durch die Kraft der Lokomotive erzeugte Zuggeschwindigkeit hat aber zur Folge, daß das Arbeitsvermögen (oder die Gewalt, die Wucht) des Wurfes auf das 5fache gewachsen ist. Die aufgewendete Wurfgeschwindigkeit w entsprach nur einer Fallhöhe $w^2 : 2g = 5,1^m$, während die Wirkung dieselbe ist, als fielen der Punkt aus der Höhe $5 \cdot 5,1 = 25,5^m$. Hiernach kann man beurteilen, wie gefährlich das Hinauswerfen fester Körper aus fahrenden Eisenbahnzügen werden kann.

Bei den bisherigen Untersuchungen über Fall- und Wurfbewegungen wurde vorausgesetzt, daß auf den Massenpunkt allein die Schwere einwirke. Auf S. 37 wurde aber schon bemerkt, daß bei Körpern von verhältnismäßig großem Rauminhalt und bei großen Geschwindigkeiten der Luftwiderstand eine bedeutende Rolle spielt. Es sei hier nur bemerkt, daß ein Gewehrsgeschöß schon bei etwa 50 m/sek Geschwindigkeit einen Luftwiderstand erfährt, der gleich dem Gewichte des Geschosses ist, so daß ein mit dieser Geschwindigkeit abwärts geworfenes Geschöß sich gleichförmig bewegen würde, da der Luftwiderstand die Schwere aufhebt. Weil der Luftwiderstand aber etwa verhältnismäßig dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst, so wird er bei einer Schußgeschwindigkeit von 400 m/sek das 64fache des Gewichts betragen. Hieraus ergibt sich klar, daß die Bewegung eines solchen Geschosses mit den hier entwickelten Formeln wenig Ähnlichkeit haben wird. Aus diesem Grunde haben wir auch in dem Beispiel auf S. 52 nicht ein Gewehrsgeschöß, sondern ein Geschöß mit geringerer Geschwindigkeit der Rechnung unterzogen.

Ferner wurde bisher die Fallbeschleunigung als gleichbleibend nach Größe und Richtung vorausgesetzt. Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Fallbeschleunigung mit der Veränderung des Ortes ändert, woraus sich dann freilich zeigen wird, daß dieser Einfluß bei den vorkommenden Fällen der Wurfbewegung verschwindend klein ist.

10. Gesetz der allgemeinen Massenanziehung.

Das Gesetz der Schwere (S. 33) ist nur ein besonderer Fall des Gesetzes der allgemeinen Massenanziehung, welches von Newton 1685 aufgestellt wurde. Dasselbe lautet:

Je 2 Massenpunkte m und m_1 , die sich in der Entfernung l voneinander befinden, üben aufeinander eine gegenseitige Anziehungskraft aus, die proportional dem Produkte der Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist.

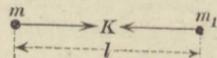


Fig. 54.

Es ist hiernach (Fig. 54)

$$1) \quad K = k \frac{m m_1}{l^2},$$

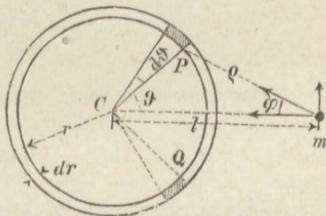
worin k offenbar die Anziehungskraft zwischen 2 Massen einheiten in dem Abstand $l = 1$ bedeutet. Für Kilogramme als Kräfte, für

Meter und Sekunden ist $k = 0,0000000064 = \frac{64}{10^{11}}$.

Diese Formel 1 gilt einstweilen nur für Massenpunkte ohne räumliche Ausdehnung; wir wollen darnach feststellen, wie eine dünne gleichartige Kugelschale auf einen Massenpunkt einwirkt.

Die Kugelschale (Fig. 55) habe den Halbmesser r , die Wandstärke dr ; der Massenpunkt m sei vom Mittelpunkte der Kugel um l entfernt. Man ziehe einen Halbmesser CP , der mit Cm den Winkel ϑ einschließt und ziehe in dem Abstände $d\vartheta$ einen zweiten Halbmesser. Beide lasse man sich um Cm als Achse drehen, dann schneiden sie aus der Hohlkugel eine kleine Zone heraus.

Fig. 55.



Von der Umfangslänge der Zone denkt man sich bei P ein Bogenteilchen ds rechtwinklig zur Bildebene herausgenommen, dann hat man bei P ein Massenteilchen, welches nach allen drei Richtungen unendlich klein ist. Der Stoff der Hohlkugel habe für 1 cbm das Gewicht γ (unter 45° geographischer Breite gewogen). Das Gewicht eines Kubikmeters in Kilogrammen (unter 45° geogr. Br.) nennen wir die **Dichte** des Körpers. Das Körperteilchen hat dann die Masse $\frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r \cdot d\vartheta \cdot ds$ und übt auf m die Anziehungskraft aus $k \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot \frac{m}{\rho^2}$. Diese Kraft kann zerlegt werden in eine mit der Richtung mC und eine, welche im Punkte m rechtwinklig zu mC nach oben gerichtet ist. Die erstere beträgt

$$k \frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot \frac{m}{\rho^2} \cos \varphi,$$

während die zweite durch die Einwirkung eines gleichen bei Q befindlichen Massenteilchens aufgehoben wird. Sämtliche Massenteilchen der Zone wirken in übereinstimmender Weise auf m ein, da für sie alle $d\vartheta$, ρ und φ dieselben sind. Wir können daher die Gesamtanziehung der ganzen Kugelzone erhalten, wenn wir statt ds den Umfang $2\pi r \sin \vartheta$ einsetzen. Dann entsteht die Anziehung

$$dK = k \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot dr \cdot r \cdot d\vartheta \cdot 2\pi r \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{m}{\rho^2} \cdot \cos \varphi.$$

Nun ist aber die Masse der ganzen Hohlkugel $M = \frac{\gamma}{g} 4r^2 \pi \cdot dr$; wird dies in dK eingeführt, so entsteht

$$1) \quad dK = \frac{k M m}{2} \frac{\sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot \cos \varphi}{\rho^2}.$$

Die Veränderlichen ϑ und φ sollen auf ρ zurückgeführt werden. Es ist nämlich in dem Dreiecke CPm : $r^2 = l^2 + \rho^2 - 2l\rho \cos \varphi$ mithin $\cos \varphi = \frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2l\rho}$; ebenso $\cos \vartheta = \frac{l^2 + r^2 - \rho^2}{2lr}$ und durch Differentiation $-\sin \vartheta \cdot d\vartheta = -\frac{\rho \cdot d\rho}{lr}$. Hiernach wird

$$2) \quad dK = \frac{kMm}{2} \frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{2l^2 r \rho^2} d\rho = \frac{kMm}{4r l^2} \frac{l^2 - r^2 + \rho^2}{\rho^2} d\rho.$$

Um nun die Anziehungskraft K der ganzen Hohlkugel zu erhalten, muß man vorstehenden Ausdruck integrieren. Liegt der Punkt m außerhalb der Hohlkugel, so sind ihre nächsten Teile im Abstand $l - r$, die fernsten im Abstand $l + r$ vom Massenpunkte, so daß diese Werte als Grenzen für ρ einzusetzen sind. Daher wird

$$K = \frac{kMm}{4r l^2} \int_{l-r}^{l+r} \left[(l^2 - r^2) \frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho \right].$$

Das unbestimmte Integral aber ist

$$3) \quad \int \left[(l^2 - r^2) \frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho \right] = -\frac{l^2 - r^2}{\rho} + \rho.$$

Dies wird mit Rücksicht auf obige Grenzen

$$-\frac{l^2 - r^2}{l+r} + l+r + \frac{l^2 - r^2}{l-r} - (l-r) = -(l-r) + l+r + l+r - (l-r) = 4r,$$

mithin wird

$$4) \quad K = k \frac{Mm}{l^2}.$$

Diese Anziehungskraft ist (nach Gl. 1) dieselbe, als ob die Masse M der Kugelschale in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Hieraus folgt weiter, daß eine Hohlkugel von endlicher Wandstärke oder auch eine Vollkugel, die aus lauter gleichartigen Kugelschalen besteht, bezüglich der Anziehungskraft gegen einen außerhalb befindlichen Massenpunkt ebenso wirkt, als ob die ganze Masse der Hohlkugel oder Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Dabei ist nicht erforderlich, daß die verschiedenen Kugelschalen dieselbe Dichte haben, wenn nur jede Schale für sich gleichartig an Dichte ist. Auch für die gegenseitige Anziehungskraft zweier Kugeln ergibt sich leicht, daß man die Masse einer jeden in ihrem Mittelpunkte vereinigt ansehen kann.

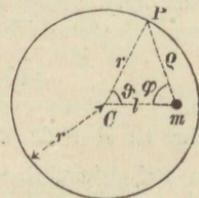
Liegt der Massenpunkt im Innern der Kugelschale (Fig. 56), so ergibt sich für die Anziehung einer Zone bei P dieselbe Gleichung 1, daher auch dieselbe Gleichung 2; nur sind jetzt die Grenzen $r+l$ und $r-l$ als größte und kleinste Entfernung des Massenpunktes von der Schale. Die Einsetzung dieser Grenzen in Gl. 3 gibt:

$$-\frac{l^2 - r^2}{r+l} + r+l + \frac{l^2 - r^2}{r-l} - (r-l)$$

$$= r-l + r+l - r-l - r+l = 0,$$

so daß auch $K = 0$ wird. Die Anziehungskraft einer dünnen, gleichartigen

Fig. 56.



Kugelschale gegen einen in ihrem Innern befindlichen Punkt ist also Null.

Die Anziehung einer aus gleichartigen dünnen Kugelschalen bestehenden Hohlkugel von endlicher Wandstärke auf einen in ihrem Hohlraume gelegenen Punkt ist demnach ebenfalls Null.

Betrachten wir nun die Erde als Kugel, aus unendlich vielen Schalen bestehend, von denen jede für sich gleichartig ist, so ist ihre Anziehungskraft für einen außerhalb gelegenen Massenpunkt m ebenso zu berechnen, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Für einen Massenpunkt an der Erdoberfläche, d. h. in dem Abstand r (Erddhalbmesser) vom Mittelpunkte M ist nun die Anziehungskraft gleich mg , mithin

$$\frac{k M m}{r^2} = mg \quad \text{oder}$$

$$4) \quad k M = g r^2.$$

Nennen wir aber die Anziehungsbeschleunigung (Fallbeschleunigung) eines in größerem Abstand x vom Erdmittelpunkte befindlichen Punktes g_x (Fig. 57), so wird auch

$$k M = g_x x^2, \quad \text{mithin}$$

$$5) \quad g_x : g = r^2 : x^2.$$

Die Darstellung dieser Gleichung ist eine Kurve BQ , welche, nach beiden Seiten verlängert gedacht, sich ähnlich wie eine gleichseitige Hyperbel beiden Achsen asymptotisch nähert, jedoch keine Symmetrieachse hat. (Kämen auf der rechten Seite der Gl. 5 die ersten Potenzen statt der Quadrate vor, so würde eine Hyperbel die Darstellung sein.) Für $x = 2r$ und $3r$ ist g_x nur noch $1/4 g$ bzw. $1/9 g$.

Für die Veränderlichkeit der Fallbeschleunigung im Innern der Erde wäre das Gesetz einfach, wenn man annehmen dürfte, daß die Dichte der Erde überall gleich sei. Unter dieser Voraussetzung würde man für ein Masseteilchen im Abstand x von dem Mittelpunkte die Erde zerlegen in eine Vollkugel vom Halbmesser x und eine äußere Hohlkugel von der Wandstärke $r - x$. Letztere würde keine Einwirkung ausüben, erstere aber ebenso wirken, als ob ihre Masse in der Mitte vereinigt wäre. Danach wird nach Gl. 4:

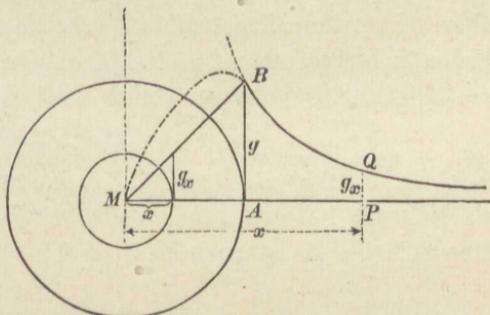
$$k M_x = g_x x^2,$$

wenn M_x die Masse der Kugel vom Halbmesser x . Da nun für $x = r$ wiederum

$$k M = g r^2, \quad \text{so wird}$$

$$6) \quad g_x = g \frac{r^2 M_x}{x^2 M} \quad \text{oder, weil}$$

Fig. 57.



$$M_x : M = x^3 : r^3 :$$

$$7) \quad g_x = g \frac{x}{r},$$

dargestellt durch eine in Fig. 57 gezogene Gerade MB . Die Erde ist aber durchaus nicht von überall gleicher Dichte, vielmehr sind die tieferen Schichten bedeutend dichter als die uns bekannten, in der Nähe der Oberfläche gelegenen. Daher ist $M_x : M > x^3 : r^3$ und es wird $g_x > g x/r$. Statt der Geraden MB ist daher eine oberhalb derselben liegende Kurve MB der wahre Ausdruck des Gesetzes, welches wir aber nicht entwickeln können, da das Gesetz der Veränderlichkeit der Dichte nicht bekannt ist.

Nehmen wir nun an, daß die dem Menschen zugänglichen oder auch durch Wurf zu erreichenden Höhen sich um höchstens 10000 m über die mittlere Erdoberfläche erheben, so würde, weil der mittlere Erdhalbmesser etwa 6370000 m beträgt, für diese Grenze $x = 6380000$ m betragen, daher nach Gl. 5:

$$g_x : g = 637^2 : 638^2 \text{ sein;}$$

dies ist etwa = 1000 : 1003, d. h. sehr wenig von der Einheit abweichend. Nennt man h die Höhe eines Punktes über der Meeresfläche, so ist nach Gl. 5 mit $x = r + h$:

$$\frac{g_x}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{r}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{h}{r}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2\right]^2} = \frac{1 - 2\frac{h}{r} + \left(\frac{h}{r}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \left(\frac{h}{r}\right)^4}.$$

Wenn man dann $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ und $\left(\frac{h}{r}\right)^4$ gegen 1 vernachlässigt, so entsteht annähernd

$$8) \quad g_x = g \left(1 - 2\frac{h}{r}\right).$$

Für die weitaus meisten technischen Anwendungen kann diese Veränderlichkeit von g_x mit der Höhe vernachlässigt werden.

Die Erde übt nun aber auch auf den Mond eine Anziehungskraft aus, und die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung g_x ergibt sich, da die Entfernung des Mondes von dem Erdmittelpunkt etwa 60 Erdhalbmesser ausmacht, zu

$$g_x = g \left(\frac{r}{60 \cdot r}\right)^2 = \frac{1}{3600} g = 9,81 : 3600 = 0,0027.$$

Hörte die Umlaufbewegung des Mondes um die Erde für einen Augenblick auf, so würde der Mond eine beschleunigte Fallbewegung

nach der Erde hin ausführen; die Beschleunigung würde anfänglich nur $0,0027 \text{ m/sek}^2$ betragen, würde aber mit der Annäherung an die Erde wachsen und sich allmählich dem Werte 9,81 nähern. Daß diese Fallbewegung nicht zustande kommt, rührt von der Geschwindigkeit des Mondes rechtwinklig zur Richtung der Anziehungskraft her, wie weiter unten noch besprochen werden wird.

Die Gl. 4 (S. 59) kann auch dazu dienen, die **Massenzahl M der Erde** zu bestimmen. Es ist $M = gr^2 : k$ also $M = 9,81 \cdot 6370000^2 : 10^{11} : 64 = 622 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten. Die Erde hat etwa $1083 \cdot 10^{18}$ Kubikmeter Inhalt; bestände sie aus Wasser (von 4^0 C), so würde ihr Massengehalt $1083 \cdot 10^{18} \cdot 1000 : 9,81 = 110 \cdot 10^{21}$ Masseneinheiten.

Mithin ist die Erde durchschnittlich $622 : 110 = 5,65$ mal dichter als Wasser.

Fallbeschleunigung an der Oberfläche anderer Himmelskörper. Die Gleichung 4, S. 59, für die Fallbeschleunigung g an der Erdoberfläche

$$g = Mk : r^2$$

gilt, ihrer Entwicklung nach, allgemein für die Zeitbeschleunigung an der Oberfläche eines beliebigen Himmelskörpers von der Masse M und dem Halbmesser r . Gehen M und r in M_1 und r_1 über, so wird

$$g_1 = M_1 k : r_1^2,$$

mithin ist das Verhältnis

$$\frac{g_1}{g} = \frac{M_1}{M} \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Ist die Masse der Sonne 327000 mal so groß wie die der Erde, während die Halbmesser in dem Verhältnis 108 : 1 stehen, so wird das Verhältnis der Fallbeschleunigungen

$$g_1 : g = 327000 : 108^2 = \text{rund } 28.$$

An der Oberfläche der Sonne beträgt also die Fallbeschleunigung ungefähr 275 m/sek^2 ; an der Oberfläche des Mondes etwa nur $1/6 \cdot 9,81 = 1,64 \text{ m/sek}^2$.

11. Parabolische Bewegung im allgemeinen.

Die alleinige Einwirkung der als gleichbleibend betrachteten Schwere bewirkte eine Bewegung des Massenpunktes in einer Parabel, deren Achse lotrecht abwärts, d. h. übereinstimmend mit der Kraft gerichtet, deren Parameter $c^2 \cos^2 \alpha : g$ betrug.

Wirken nun auf den Massenpunkt beliebig viele nach Größe und Richtung gleichbleibende Kräfte, so können diese zu einer ebenfalls gleichbleibenden Mittelkraft K zusammengesetzt werden. Wählt man die Krafrichtung dann zur negativen y -Richtung, die x -Achse rechtwinklig dazu in der durch K und die

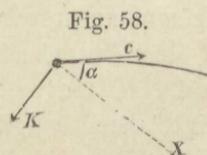


Fig. 58.

Anfangsgeschwindigkeit c bestimmten Ebene, so ist wiederum (Fig. 58) $c \cos \alpha$

die gleichbleibende Geschwindigkeit v_x , während in der y -Richtung die gesamte Verzögerung $K : m$ auftritt. Es entstehen daraus die Seitenbewegungen

$$x = c \cos \alpha t;$$

$$y = c \sin \alpha t - \frac{K}{m} \frac{t^2}{2}, \text{ und aus beiden}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{K}{m} \frac{x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha}.$$

Die Verhältnisse sind also gerade so wie bei der Wurfbewegung; statt der lotrechten Richtung kommt aber hier die Richtung der Mittelkraft, statt der Fallbeschleunigung g der Wert $K : m$ in Frage. Es folgt hieraus: Ein Massenpunkt bewegt sich unter Einwirkung gleichbleibender Kräfte in einer Parabel, deren Achse mit der Mittelkraft K aller wirkenden Kräfte gleichgerichtet, deren Parameter $= \frac{m c^2 \cos^2 \alpha}{K}$ ist.

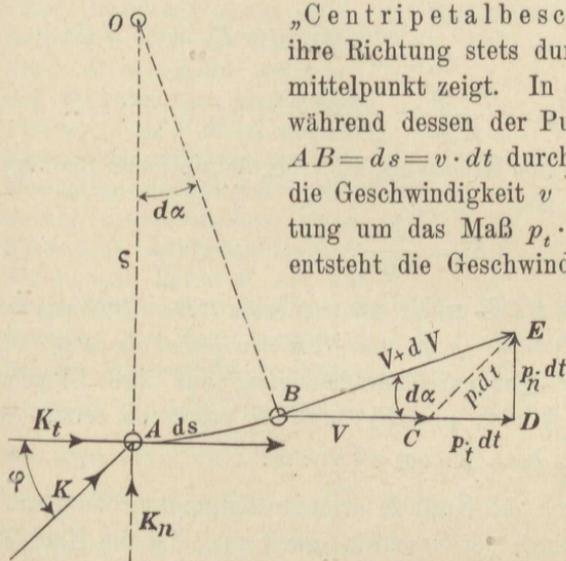
12. Krümmung der Bahnlinie eines Massenpunktes, Tangential- und Normalbeschleunigung.

Ein Massenpunkt bewege sich zu irgendeiner Zeit mit einer nach Richtung und Größe beliebigen Geschwindigkeit v und werde von einer Kraft K ergriffen, die mit der augenblicklichen Bewegungsrichtung irgendeinen Winkel α einschließt. Die Bahn des Punktes wird dann im allgemeinen eine krumme Linie sein. Bleibt die Kraft K bei sonst beliebigem Wechsel ihrer Richtung und Größe während der Bewegung des Massenpunktes mit der Richtungslinie seiner Geschwindigkeit dauernd in ein und derselben Ebene, so muß in dieser auch die Bahnlinie des Punktes liegen, also eine ebene Kurve sein. Die Krümmung derselben in jedem Punkte ist abhängig von der Masse und augenblicklichen Geschwindigkeit des Punktes, der Größe der Kraft und dem Richtungswinkel α , den diese mit der augenblicklichen Bewegungsrichtung einschließt.

Um das Maß der Krümmung, den Krümmungsradius, aus der Krümmungsursache der Kraft abzuleiten, denken wir uns die Kraft in dem betreffenden Punkte der Bahnlinie zerlegt in zwei Seitenkräfte K_t tangential und K_n senkrecht zu dieser. $K_t = K \cdot \cos \alpha$ wirkt dann lediglich auf Vergrößerung der Geschwindigkeit v und $K_n = K \sin \alpha$ lediglich auf den Richtungswechsel der Bewegung, d. h. die Krümmung der Bahnlinie hin.

Die Kraft K_t erzeugt eine momentane Beschleunigung $p_t = K_t : m$ tangential zur Bahnlinie, „Tangentialbeschleunigung“, und K_n eine solche $p_n = K_n : m$ senkrecht dazu, „Normalbeschleunigung“ oder auch „Centripetalbeschleunigung“, weil ihre Richtung stets durch den Krümmungsmittelpunkt zeigt. In einem Zeitelement dt , während dessen der Punkt das Bahnelement $AB = ds = v \cdot dt$ durchläuft, vergrößert sich die Geschwindigkeit v in tangentieller Richtung um das Maß $p_t \cdot dt$ und normal dazu entsteht die Geschwindigkeit $p_n \cdot dt$.

Fig. 59.



In B besitzt also der Massenpunkt die zu einander senkrechten Geschwindigkeiten $v + p_t \cdot dt$ und $p_n \cdot dt$. Die Schlußlinie BE des aus beiden gebildeten Streckenzuges

stellt also die wirkliche Geschwindigkeit $v + dv$ in B nach der Zeit dt dar. Sie ist tangential gerichtet zur Bahnlinie in B (vergl. S. 28 unten) und schließt mit der Tangente in A einen Winkel $d\alpha$ ein. Die Krümmungsradien der Bahn in A und B sind senkrecht zu v in A bzw. $v + dv$ in B. Sie legen in ihrem Schnittpunkte O den Krümmungsmittelpunkt der Bahnlinie in A, bzw. des Bahnelementes ds fest und schließen gleichfalls den Winkel $d\alpha$ miteinander ein. In der Richtung CE findet die wirkliche Beschleunigung p des Punktes statt und die im Zeitelement dt entstehende Geschwindigkeit ist $p \cdot dt$, liefert mit v wieder $v + dv = BE$. Aus vorstehendem folgt auch, daß CE parallel der Richtung von K sein muß. Aus dem Dreieck BDE hat man nun $DE = BE \sin d\alpha = BE d\alpha$ oder mit $DE = p_n \cdot dt$ und $BE = v + dv$, $p_n \cdot dt = (v + dv) d\alpha$, d. i. bei Vernachlässigung des unendlich kleinen Gliedes zweiter Ordnung $dv \cdot d\alpha$ und Lösung für p_n

$$1) \quad p_n = v \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

Aus dem Elementarsektor AOB erhält man ferner mit $AO = OB = \rho$ $\rho d\alpha = ds = v \cdot dt$, also

$$2) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{\rho} \quad \text{und aus Gl. 1 und 2.}$$

$$3) \quad \rho = \frac{v^2}{p_n}, \quad \text{oder mit } p_n = K_n : m = K \sin \varphi : m$$

$$4) \quad \rho = \frac{v^2 \cdot m}{K_n} = \frac{v^2 \cdot m}{K \cdot \sin \varphi}.$$

Die Kraft K_n , welche eine Krümmung von vorgeschriebenem Radius ρ zu erzeugen vermag, ist

$$5) \quad K_n = \frac{v^2 m}{\rho}.$$

Aus dem Dreieck BDE erhält man weiterhin $BD = BE \cdot \cos \alpha = BE$ und mit $BD = v + p_t dt$ und $BE = v + dv$, $dv = p_t \cdot dt$, oder wenn man die Tangentialbeschleunigung auf ihre Ursache $K_t = K \cdot \cos \varphi$ zurückführt, $p_t = K_t : m = K \cdot \cos \varphi : m$ setzt,

$$5a) \quad dv = K \cdot \cos \varphi \cdot dt : m.$$

Gl. 4 drückt die durch die Kraft K erzeugte Krümmung der Bahnlinie, Gl. 5a die Zunahme der Geschwindigkeit aus. Ist die Kraft K immer von gleicher Größe und senkrecht zur Bahnlinie, also durch den Krümmungsmittelpunkt gerichtet, der Winkel φ dauernd gleich $\pi/2$, also $\sin \varphi = 1$ und $\cos \varphi = 0$, so ist nach Gl. 4 der Krümmungsradius $\rho = \frac{v^2 \cdot m}{K}$ konstant, die Bahnlinie ein Kreisbogen und nach

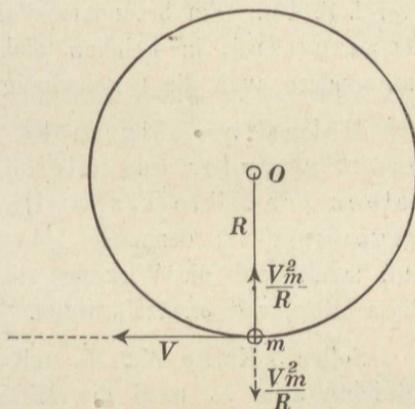
Gl. 5a $dv = 0$, die Geschwindigkeit v ihrer Größe nach unveränderlich. Mit $\varphi = 0$ wird $\sin \varphi = 0$ und $K_n = 0$, also nach Gl. 4 $\rho = \infty$ die Bahnlinie eine Gerade, die Bewegung eine geradlinig gleichförmig Beschleunigte.

Die stets durch den Krümmungsmittelpunkt gerichtete Kraft K_n , die nach Maßgabe der Gl. 4 die Krümmung der Bahnlinie erzeugt, wird als Zentripetalkraft bezeichnet. Nach den Ausführungen auf Seite 33 setzt jeder Massenpunkt irgendeiner Beschleunigung p , deren Erzeugung eine Kraft $p \cdot m$ erfordert, zufolge seines Beharrungsvermögens oder seiner Trägheit einen gleich großen Trägheitswiderstand $-pm$ entgegen. Auch der die Normalbeschleunigung p_n erzeugenden Zentripetalkraft $K_n = \frac{v^2 \cdot m}{\rho}$ tritt ein

gleich großer Trägheitswiderstand entgegen, den man als Zentrifugal- oder Fliehkraft bezeichnet, der aber eine eigentliche Kraft im aktiven Sinne nicht ist.

Denkt man sich einen Massenpunkt m reibungslos auf einer wagerechten Ebene (Bildfläche) ruhend, durch einen gewichtslosen Faden Om (Fig 60) von der Länge R derart mit einem Punkt O der Ebene verbunden, daß der Faden eine gerade Linie zwischen O und m bildet, und teilt dem Punkte senkrecht zu jener Geraden eine Geschwindigkeit v mit, so wird er sich mit dieser gleichbleibenden Geschwindigkeit in einem Kreise vom Radius R auf der stützenden Ebene um den Punkt O bewegen. Der Faden hat dabei auf den Massenpunkt die Zentripetalkraft $K_n = \frac{m v^2}{R}$ zu leisten; der Massenpunkt wirkt dabei mit einer gleich großen Kraft $-\frac{m v^2}{R}$ ziehend auf den Faden ein. Würde der Faden nach seiner Festigkeit nur eine bestimmte Kraft $K = Z$ auf den Massenpunkt m ausüben können, so müßte er zerreißen, wenn die Geschwindigkeit v ein solches Maß erreichte, daß $\frac{m v^2}{R} > Z$ würde. Mit dem Zerreißen des Fadens hört die Kraft K_n zu wirken auf und der Massenpunkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nunmehr geradlinig und tangential zu seiner bisherigen Kreisbahn weiter.

Fig. 60.



Beispiel: Astronomischen Beobachtungen zufolge ist die Bewegung des Mondes um die Erde nahezu eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = 1020$ m/sek in einem Kreise, dessen Halbmesser etwa 60 Erdhalbmessern gleich ist (vergl. S. 62). Die Beschleunigung des Mondes, wenn man denselben als Massenpunkt auffaßt, besteht daher in einer stets nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Beschleunigung $\frac{v^2}{\rho} = \frac{1020^2}{60 \cdot 6370000} = 0,0027$ m/sek². Der Umstand, daß diese Beschleunigung und die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche sich wie 1 zu $3600 = 1 : 60^2$, mithin umgekehrt wie die Quadrate der Abstände von dem Erdmittelpunkte, verhalten (s. S. 62), hat Newton zuerst veranlaßt, die Anziehungskraft zwischen zwei Massenpunkten als umgekehrt verhältnismäßig dem Quadrat ihrer Entfernung anzunehmen, welche Annahme dann, nachdem sie sich auch für die Planeten als zutreffend erwiesen hatte, zu dem allgemeinen Gesetze der Massenanziehung (S. 58) führte.

13. Gleichgewicht eines Massenpunktes.

Liefere die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte eine Mittelkraft $R = 0$, so bewegt sich der Punkt gerade so, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte; seine Geschwindigkeit erfährt dann weder der Größe noch der Richtung nach eine Änderung, er bewegt sich geradlinig und gleichförmig, und man sagt, die Kräfte halten sich an dem Massenpunkt im Gleichgewichte (vergl. S. 40). Ein besonderer Fall einer solchen Bewegung ist der Ruhezustand, in welchem nicht allein die Beschleunigung Null ist, sondern auch die Geschwindigkeit.

Halten beliebig viele Kräfte an einem Massenpunkt einander das Gleichgewicht, so ist jede derselben der Mittelkraft aller übrigen gleich und entgegengesetzt; denn sie hebt in diesem Falle jene Mittelkraft auf, somit auch die Wirkung aller derjenigen Kräfte, die durch diese Mittelkraft ersetzt wurden.

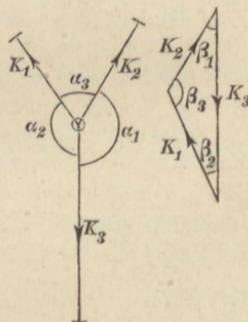
Sollen 3 Kräfte K_1 , K_2 und K_3 an einem Punkte im Gleichgewichte sein, so muß die Mittelkraft von irgend zweien dieser Kräfte durch die dritte aufgehoben werden. Da aber (nach S. 40) die Mittelkraft zweier Kräfte mit beiden in derselben Ebene liegt, so müssen für den Gleichgewichtszustand die Richtungen der 3 Kräfte in derselben Ebene liegen. Bezeichnet man noch die den Kräften gegenüberliegenden Richtungswinkel mit α_1 , α_2 und α_3 (Fig. 61) und bedenkt, daß nach S. 39 der Streckenzug der drei Kräfte ein geschlossenes Dreieck bilden muß, so läßt sich aus diesem das Verhältnis der drei Kräfte berechnen. Man erkennt leicht, daß die Dreieckswinkel β die Nebenwinkel der den Kräften gegenüberliegenden Richtungswinkel α sind. Die Sinus der Winkel β sind daher gleich den Sinus der entsprechenden Winkel α . Man erhält sonach aus

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \beta_1 : \sin \beta_2 : \sin \beta_3$$

die Gleichung

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3.$$

Fig. 61.



Die Größen von drei an einem Massenpunkte sich im Gleichgewichte haltenden Kräften verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Richtungswinkel. Aus der Figur folgt sofort: Fallen von den drei Kräften zwei in dieselbe Richtungslinie, so muß die dritte Null sein, wenn sie nicht ebenfalls in derselben Geraden liegt.

Beispiel: Ein Massenpunkt sei an zwei Fäden AB und AC aufgehängt (Fig. 62) und befinde sich in Ruhe; es sollen die in den Fäden herrschenden Spannkraften S_1 und S_2 ermittelt werden.

Die Spannkraft der Fäden, die wir einstweilen als gewichtlos, aber vollkommen biegsam und undehnbar voraussetzen, fällt mit den Richtungen der Fäden zusammen. Dies Zusammenfallen ist eben der Begriff der Biegsamkeit. Durch die Lage der Befestigungspunkte B und C , sowie durch die Fadenlängen ist das Dreieck BAC bestimmt. Auf den Massenpunkt wirkt die Schwere mg ; dann müssen die Strecken mg , S_1 und S_2 ein geschlossenes Dreieck bilden, mithin, weil mg lotrecht ist, in einer lotrechten Ebene liegen. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, wenn der Massenpunkt sich in der durch B und C gelegten lotrechten Ebene befindet. (Andernfalls wird der Punkt an den Fäden als ein Pendel so lange schwingen, bis infolge von Luft- und anderen Widerständen endlich in lotrechter Ebene Ruhe eintritt.) Schließen BA und CA mit der Lotrechten die spitzen Winkel β_2 und β_1 ein, so wird aus dem Kräfteck

$$S_1 : S_2 : mg = \sin \beta_1 : \sin \beta_2 : \sin (\beta_1 + \beta_2).$$

Ist z. B. $mg = 10$ kg, $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$, so wird aus der Figur

$$S_1 = S_2 = 10 \cdot \sqrt{1/2} = 7,07 \text{ kg.}$$

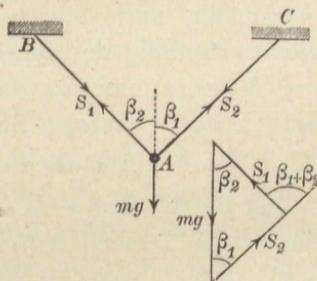
Zu beliebig vielen Kräften K_1, K_2, \dots, K_n , welche nicht in derselben Ebene liegen, wurde (auf S. 42) die Mittelkraft in der Form

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \text{ gefunden,}$$

worin $X = \sum K \cos \alpha$; $Y = \sum K \cos \beta$; $Z = \sum K \cos \gamma$ bedeuten. Soll nun Gleichgewicht herrschen, so muß $R=0$, also auch $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ werden; da nun die Kräfte, somit auch X, Y und Z stets reelle Größen (wodurch negative Werte der Quadrate ausgeschlossen sind), so muß jeder der Summanden Null sein, oder es muß stattfinden:

$$\sum K \cos \alpha = 0; \quad \sum K \cos \beta = 0; \quad \sum K \cos \gamma = 0.$$

Fig. 62.



Also: An einem Massenpunkte halten sich beliebig viele Kräfte im Gleichgewichte, wenn in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung in jede Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte gleich Null ist.

Da die Mittelkraft gegebener Kräfte (nach S. 43) auch durch die Schlußlinie eines ebenen oder räumlichen Kraftecks gefunden wird, so ist klar, daß die Schlußseite Null werden muß, wenn die Kräfte im Gleichgewichte sein sollen. Im Gleichgewichtszustande müssen also die Kräfte ein geschlossenes Krafteck mit übereinstimmendem Umfahrungssinne der Pfeile bilden.

Liegen die Kräfte in einer gemeinsamen Ebene, so legt man zweckmäßig auch die x - und y -Achse in diese Ebene. Dann werden die Neigungswinkel γ gegen die z -Achse sämtlich zu 90° und $K \cos \gamma$ durchweg Null. Außerdem wird dann $\cos \beta = \sin \alpha$, und die Gleichgewichts-Bedingungen beschränken sich auf

$$\sum K \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \sum K \sin \alpha = 0.$$

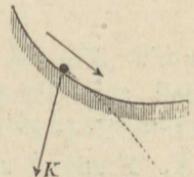
Liegen die x - und y -Achse bezw. wagerecht und lotrecht, so sagt man auch: Die Summe aller wagerechten Seitenkräfte muß Null sein und die Summe aller lotrechten Seitenkräfte ebenfalls.

14. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine gegebene Kraft K ein, so wird er bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c eine bestimmte Bewegung ausführen müssen, die z. B. parabolisch ist, wenn K gleichbleibend nach Größe und Richtung.

Ist aber der Punkt nicht völlig frei, sondern in Berührung mit der Oberfläche eines unbeweglichen festen Körpers (Fig. 62), welcher derartig geformt ist, daß er den Massenpunkt verhindert, sich so (in der punktierten Bahn) zu bewegen, wie es unter alleiniger Wirkung von K geschehen müßte, so übt die feste Oberfläche einen Einfluß auf die Bewegung

Fig. 62.



des Massenpunktes aus, und einen solchen Einfluß haben wir (nach S. 32) als eine Kraft aufzufassen, welche als zweite Kraft zu K hinzutritt und ihrer Größe nach von K in gewisser Weise abhängig ist.

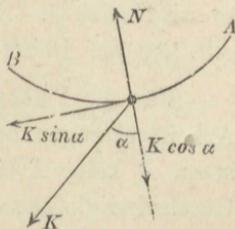
Wir benutzen den Erfahrungssatz: Vollkommen glatte Körper, die sich ohne ein Bindemittel berühren, können an jeder Berührungsstelle nur einen gegenseitigen Druck, dessen Richtung rechtwinklig zur Berührungsebene steht, also einen gegenseitigen Normaldruck, aufeinander ausüben. Völlig glatte Körper gibt es freilich nicht; obiger Satz trifft aber um so mehr zu, je größer der Grad der Glätte ist, und umgekehrt. Die bezeichnete Kraft heißt der Normalwiderstand der vorgeschriebenen Fläche und wird mit N bezeichnet.

Noch enger beschränkt ist die Bewegung des Massenpunktes, wenn ihm eine bestimmte Linie als Bahn vorgeschrieben wird, z. B. durch eine Röhre, welche den als Massenpunkt gedachten Körper derartig umschließt, daß er sich nur längs der Mittellinie der Röhre bewegen kann, oder durch einen steifen glatten Draht, auf dem der Massenpunkt mittels einer Bohrung geführt wird. Beide Vorrichtungen sind geeignet, nach allen Richtungen innerhalb einer Normalebene zur vorgeschriebenen Bahnlinie den Widerstand N zu leisten. Die Kraft N tritt stets in derjenigen Richtung und Größe auf, die erforderlich sind, um den Massenpunkt an dem Verlassen der vorgeschriebenen Bahnlinie zu hindern. N ist hiernach eine bedingte oder eine Bedingungskraft.

Der Normalwiderstand N kann bestimmt werden mit Hilfe der Formel für die Zentripetalbeschleunigung (S. 66).

Ein Punkt bewege sich auf der vorgeschriebenen ebenen Bahnlinie (Fig. 66) von A nach B unter Einwirkung einer gegebenen, in der Ebene der Kurve liegenden Kraft K , zu der die unbekannte Kraft N hinzutritt. Ob man N anfänglich nach innen oder nach außen gerichtet annimmt, ist grundsätzlich gleichgültig. Ist das Endergebnis positiv, so war der angenommene Sinn richtig, andern-

Fig. 63.



falls ist er umzukehren. Schließt K mit der Normalen den Winkel α ein, so zerlegt man K in $K \sin \alpha$ (in der Bewegungsrichtung) und $K \cos \alpha$ rechtwinklig dazu. Dann wird $K \sin \alpha$ als einzige Tangentialkraft die Tangentialbeschleunigung erzeugen, so daß $dv : dt = K \sin \alpha : m$ wird. In der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt ergibt sich als Gesamtkraft $N - K \cos \alpha$. Diese muß die Zentripetalbeschleunigung hervorbringen, daher ist

$$1) \quad \frac{v^2}{\rho} = \frac{N - K \cos \alpha}{m} \quad \text{oder}$$

$$2) \quad N = \frac{m v^2}{\rho} + K \cos \alpha.$$

Ist K so gerichtet, daß die Pfeilspitze von $K \cos \alpha$ nach dem Krümmungsmittelpunkte hinweist, so wird

$$3) \quad N = \frac{m v^2}{\rho} - K \cos \alpha.$$

Dem Anfänger ist dringend zu empfehlen, in jedem vorliegenden Falle dieser Art die Gleichung 1 für die Zentripetalbeschleunigung anzusetzen und daraus erst N zu berechnen, nicht aber zu versuchen, die Formeln 2 oder 3 für N unmittelbar anzuschreiben, weil dabei erfahrungsmäßig leicht Irrtümer begangen werden.

Ist in Gleichung 3 die Seitenkraft $K \cos \alpha$ allein schon imstande, die Zentripetalbeschleunigung zu erzeugen, ist nämlich

$$K \cos \alpha = \frac{m v^2}{\rho},$$

so wird $N = 0$. An einer Stelle der Bahnlinie, für welche dies gilt, ist die Röhrenwandung bzw. der Führungsdraht überflüssig.

Für die Fälle der vorgeschriebenen Bewegung ist der Satz vom Arbeitsvermögen besonders vorteilhaft, weil der unbekannte Widerstand N keine Arbeit verrichtet, daher auch keinen Einfluß auf die Geschwindigkeitsgröße hat.

Von besonderer Wichtigkeit sind solche Fälle der vorgeschriebenen Bewegung, bei denen als bewegende Kraft nur die Schwere auftritt. Denkt man sich zwei wagerechte Ebenen im

Abstände h voneinander (Fig. 64), die durch beliebig, aber stetig gekrümmte Röhren als vorgeschriebene Bahnlinie miteinander verbunden sind, so wird ein Massenpunkt, der oben mit einer Geschwindigkeit c in eine Röhre geworfen wird, sie unten mit der Geschwindigkeit v

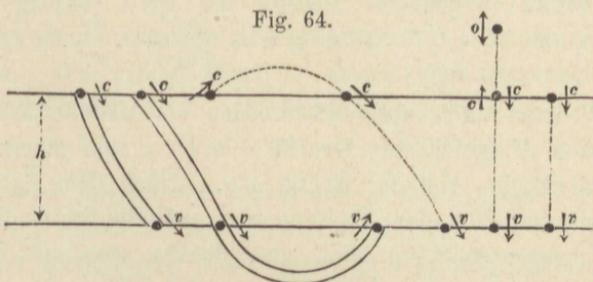


Fig. 64.

verlassen, und es gilt, weil nur die Schwere Arbeit verrichtet,

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2 = m g h \quad \text{oder}$$

$$v^2 = c^2 + 2 g h,$$

ganz wie bei der freien Fallbewegung. Ob der Punkt in freier (gerader oder parabolischer) Bahnlinie oder in beliebig gekrümmter vorgeschriebener Bahnlinie sich bewegt, ist für die Geschwindigkeitsgröße gleichgültig. Jedesmal, wenn er um h sich gesenkt hat, wird das Quadrat der Geschwindigkeit um $2 g h$ gewachsen sein. Bei aufwärts gerichteter Bewegung gilt $v^2 = c^2 - 2 g h$.

15. Vorgeschriebene Bewegung in wagrechtem Kreise.

Die vorgeschriebene Bahn, etwa aus einem kreisförmig gebogenen Drahte gebildet (Fig. 65), liege in wagrechter Ebene; r sei der Halbmesser. Als Kraft wirke die Schwere $m g$. Die Bewegung kann nur eine gleichförmige sein, weil die Schwere hier keine Arbeit verrichtet. Für diese Bewegung ist eine Zentripetalkraft $m v^2 : r$, von P nach M gerichtet, erforderlich; folglich muß zu $m g$ ein derartiger Normalwiderstand N hinzutreten, daß die Mittelkraft beider $PR = m v^2 : r$ wird. Ist $PT = m g$, so wird die Strecke TR das gesuchte N darstellen. Selbstverständlich ist dann N an den

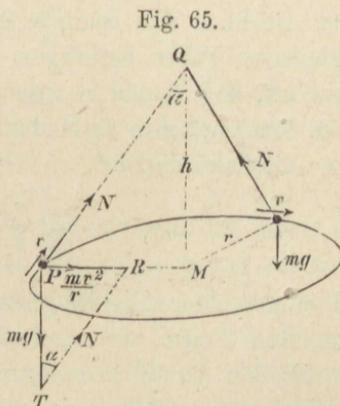


Fig. 65.

Punkt P parallel zu verschieben. N weicht von der Lotrechten um einen Winkel α ab, für welchen gilt

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{m v^2}{r m g} = \frac{v^2}{g r}.$$

N kann auch aufgefaßt werden als Mittelkraft aus einem von P nach M gerichteten Drucke $= m v^2 : r$ und einem lotrecht aufwärts gerichteten von der Größe $m g$. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung übt der Massenpunkt auf die Bahn dieselben Kräfte in entgegengesetztem Sinn aus, drückt also mit der Kraft $m v^2 : r$ nach außen, mit der Kraft $m g$ lotrecht nach unten. Die Kräftefigur PTR liegt stets in einer lotrechten Ebene, läuft aber mit dem Massenpunkt um und dreht sich dabei um eine Lotrechte durch M als Achse. Die Richtungslinie von N geht dann durch den festen Punkt Q dieser Achse, dessen Höhe h dadurch bestimmt ist, daß bei Q der Winkel α sich wiederfindet. Es muß dann sein (mit Rücksicht auf Gleichung 1):

$$2) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{h} = \frac{v^2}{g r}, \quad \text{mithin}$$

$$3) \quad h = \frac{g r^2}{v^2}.$$

Die Kraft N können wir nun, nachdem wir ihre Bedingungen erkannt haben, auch noch in anderer Weise ausüben als durch den Draht. Wir können in Q einen völlig biegsamen und undehnbaren Faden befestigen, diesen in solcher Weise gerade ausspannen, daß h und r seine Projektionen sind, und bei P ihn mit dem Massenpunkte verbinden. Erteilen wir dann dem Massenpunkt eine Geschwindigkeit

$$4) \quad v = r \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{g r \operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{nach Gl. 2 und 3})$$

in wagerechter Richtung und zugleich rechtwinklig zum ausgespannten Faden, so sind die Bedingungen, welche ursprünglich durch den Draht erzwungen wurden, auch mittels dieser Fadenaufhängung erfüllt; es wird also der wagerechte Kreis vom Halbmesser r gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v durchlaufen werden.

Der Draht erzwingt auch bei anderer, etwa größerer, Geschwindigkeit v_1 eine gleichförmige Kreisbewegung, doch wird dann α (nach Gl. 1) größer. Bei der weniger bestimmten Fadenaufhängung ist aber genau diejenige Geschwindigkeit v erforderlich, die Gl. 4 entspricht. Was erfolgt, wenn die abweichende Geschwindigkeit v_1 dem Punkt erteilt wird, soll weiter unten (S. 95) noch erörtert werden.

Da der Faden eine Kegelfläche beschreibt, so heißt diese Vorrichtung ein **Kegelpendel**. Bei einem Umlaufe muß der Punkt die Wegeslänge $2r\pi$ zurücklegen, wozu eine Zeit t erforderlich ist, welche sich mit Hilfe von Gl. 4 zu

$$5) \quad t = \frac{2r\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ergibt. Hiernach ist die Umlaufszeit t eines Kegelpendels nur von seiner Vertikalprojektion, der Höhe h , abhängig. Mehrere in Q befestigte Kegelpendel gleicher Höhe h (Fig. 66) werden mithin dieselbe Umlaufszeit haben. Es rührt dies daher, daß bei gleichem h die erforderlichen Geschwindigkeiten v nach Gl. 4 in gleichem Verhältnisse mit r , also auch mit den Wegeslängen eines Umlaufes wachsen.

Beispiel: Ist $r = 1$ m; $h = 1$ m, so muß

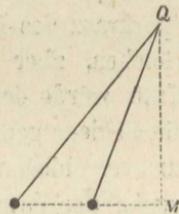
$$v = 1\sqrt{\frac{9,81}{1}} = 3,13 \text{ m/sek,}$$

entsprechend einer Fallhöhe $r^2 : 2h = 1/2$ m, gemacht werden. Es ist dann

$$\text{die Umlaufszeit } t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,81}} = 2,01 \text{ Sekunden.}$$

Anstatt durch die Spannkraft eines Fadens kann die Kraft N auch durch den Gegendruck einer festen Fläche ausgeübt werden; letztere muß an der Stelle der Berührung mit dem Massenpunkte rechtwinklig zur Richtung von N stehen, mithin von der Waagrechten um den durch Gleichung 1 bestimmten Winkel abweichen. Dieser Bedingung würde genügt werden durch eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkte Q (Fig. 64) und dem Halbmesser QP , welche der unmittelbarste Ersatz des Fadens QP sein würde. Eine Kegel-

Fig. 66.

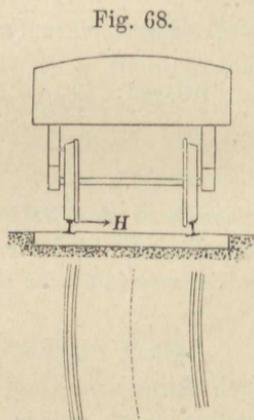
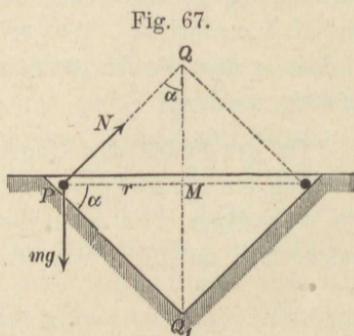


fläche mit der Spitze in Q_1 (Fig. 67) erfüllt die Bedingung aber ebenfalls, sobald ihre Seiten mit der Wagerechten den Winkel α bilden. Soll der Massenpunkt in solchem Trichter eine wagerechte Kreisbewegung vom Halbmesser r ausführen, so muß ihm eine wagerechte Anfangsgeschwindigkeit rechtwinklig zu MP von der Größe $v = \sqrt{gr \operatorname{tg} \alpha}$ (Gl. 4) erteilt werden.

Einer solchen Kegelfläche müssen auch die Oberkanten der beiden Schienen eines Eisenbahngleises angehören, wenn die Mittellinie desselben in einem wagerechten Kreisbogen vom Halbmesser r liegt.

Würden die Schienen nämlich in gleicher Höhe liegen (Fig. 68), so könnte die erforderliche Zentripetalkraft $\cdot mv^2 : r$ nur von dem seitlichen Gegendrucke $H = mv^2 : r$ der äußeren Schiene gegen den Spurkranz des Rades geliefert und mit einer gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft würde der Spurkranz des Rades gegen die Schiene gepreßt werden, ein Zustand, der aus verschiedenen Gründen, namentlich auch wegen der damit verknüpften Entgleisungsgefahr, vermieden werden muß.

Hebt man nun die äußere Schiene um h gegen die innere (Fig. 69), so daß die Oberfläche des Schienengleises um α gegen die Wagerechte geneigt ist, so leistet das Gleis einen Normalwiderstand N , der um α von der Lotrechten abweicht, und mit dem Gewicht mg die nötige Zentripetalkraft $mv^2 : r$ liefert. Ein Seitendruck der Schienen gegen die Spurkränze tritt nun nicht ein, wenn die Geschwindigkeit v dem Winkel α entspricht, d. h. wenn $v = \sqrt{gr \operatorname{tg} \alpha}$ ist.



Ist b die Entfernung der beiden Schienen eines Gleises (Fig. 69), so beträgt die erforderliche Überhöhung der äußeren Kurvenschiene

$$h = b \sin \alpha, \text{ wobei } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gr}.$$

In den vorkommenden Fällen der Anwendung ist α stets so klein, daß $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt werden kann, so daß

$$6) \quad h = b \frac{v^2}{gr} \text{ wird.}$$

Beispiel: Für eine Eisenbahnkurve von 600 m Halbmesser, $b = 1,5$ m Schienenentfernung ergibt sich für 20 m sekundl. Geschwindigkeit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20^2}{9,81 \cdot 600} = 0,068; \quad \alpha = 3^\circ 54'; \quad \sin \alpha = 0,068; \quad h = 1,5 \cdot 0,068 = 0,102 \text{ m.}$$

Diese Formel ist beim Eisenbahnbau lange benutzt worden; in neuerer Zeit hat man statt ihrer eine einfache Erfahrungsformel gewählt, was darin seine Begründung findet, daß die Schienenüberhöhung nicht allein dem hier besprochenen Zwecke dienen, sondern zugleich noch andere Verhältnisse berücksichtigen muß.

Beispiel: Auf demselben Grunde beruht die Notwendigkeit der Schrägstellung eines Kunstreiters (Fig. 70), welcher, auf dem Pferde stehend oder sitzend, im Kreise vom Halbmesser r mit einer Geschwindigkeit v sich bewegt.

$$\text{Für } r = 5 \text{ m, } v = 3 \text{ m/sek wird } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3^2}{9,81 \cdot 5} = 0,18;$$

α etwa $= 10^\circ$. Wächst aber die Geschwindigkeit auf $v = 5$, so wird $\operatorname{tg} \alpha = 0,51$; $\alpha = 27^\circ$.

Fig. 69.

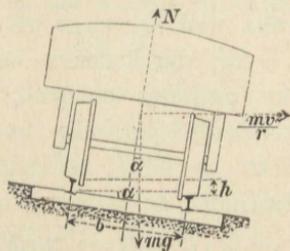
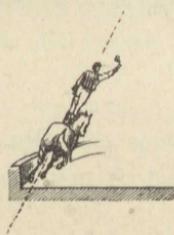


Fig. 70.



16. Vorgeschriebene Bewegung in lotrechttem Halbkreise.

BPC (Fig. 71) sei eine nach einem Halbkreise vom Halbmesser r gebogene Röhre in lotrechter Ebene. Bei B schließe sich tangential eine Röhre AB von beliebiger Form an; A liege um h über dem Punkte C . Läßt man nun bei A einen Massen-

punkt mit der Geschwindigkeit Null in die Röhre gelangen und gleitet er darin ohne Reibung und ohne Klemmen, so tritt er bei B mit einer Geschwindigkeit

$v_{max} = \sqrt{2g(h+2r)}$ in den Halbkreis, weil er von A bis B die Höhe $h+2r$ durchsunken hat. Von B aus aufwärts steigend, verliert er an Geschwindigkeit, und zwar ist diese an einer beliebigen Stelle P (bestimmt durch den Winkel α) noch

$v = \sqrt{2g(h+y)} = \sqrt{2g(h+r-r\cos\alpha)}$. Der Normalwiderstand der Röhre sei N (nach innen gerichtet); dann zerlegt sich mg in $mg \sin \alpha$ (tangential und verzögernd) und $mg \cos \alpha$ (zentripetal). Es wird

$$\frac{v^2}{r} = \frac{N + mg \cos \alpha}{m}, \text{ mithin}$$

$$1) \quad N = \frac{mv^2}{r} - mg \cos \alpha = mg \left(\frac{2h}{r} + 2 - 3 \cos \alpha \right).$$

Für $\alpha = 0$ (Punkt C) wird $\cos \alpha$ möglichst groß, nämlich $= 1$, daher N möglichst klein, nämlich

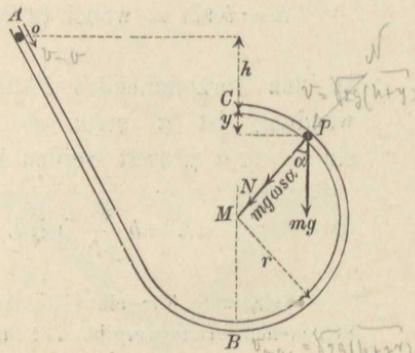
$$2) \quad N_{min} = mg \left(\frac{2h}{r} - 1 \right);$$

für $\alpha = \pi$ (Punkt B) wird $\cos \alpha$ möglichst klein, nämlich $= -1$ und N möglichst groß, nämlich

$$3) \quad N_{max} = mg \left(\frac{2h}{r} + 5 \right).$$

Im allgemeinen kann N positiv oder negativ werden. Ein positives N bedeutet einen nach innen gerichteten Widerstand, der von der äußeren Wand der Röhre zu leisten ist, und umgekehrt. Überall wo $N > 0$, muß die äußere Wandung wirken; gegen diese legt sich der Massenpunkt, während die innere Wand überflüssig ist. Soll an allen Stellen $N \geq 0$ sein, so muß nach Gl. 2 $h \geq 1/2r$ sein. In diesem Fall ist, statt einer völligen Röhre, eine einfache Rinne oder ein äußerer Zylindermantel hinreichend, welcher den Massen-

Fig. 71

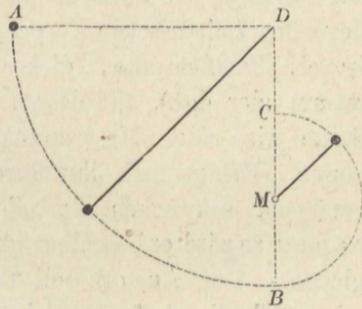


punkt hindert, sich von der Kreisbahn tangential nach außen hin zu entfernen.

Beispiel: Ein stetes positives N , welches den Punkt nur hindert, nach außen aus der vorgeschriebenen Bahn hinauszutreten, kann durch einen einfachen Faden geleistet werden. Damit N auch an der höchsten Stelle noch > 0 bleibe, muß $h > \frac{1}{2} r$ sein. Es möge etwa $h = r$ gemacht werden. Dazu benutze man einen Faden von der Länge $3r$ (Fig. 72) und befestige diesen in D .

Der Faden wird in der Lage DA waagrecht ausgestreckt; läßt man nun den Massenpunkt los, so beschreibt er den Viertelkreis AB . In M muß nun ein vorstehender dünner Stift sich befinden, damit die oberen zwei Drittel der Fadenslänge in der Lage DM zur Ruhe kommen, das untere Drittel r des Fadens aber sich um M drehe und den Punkt zur Bewegung BC zwingt. Ist der Massenpunkt unmittelbar rechts von B , so wird die Fadenspannkraft $N_{max} = mg(2 + 5) = 7mg$, d. h. 7 mal so groß, als wenn der Punkt ruhend auf dem Faden hänge. Bei der Bewegung nach C hin vermindert sich die Spannkraft auf $N_{min} = mg(2 - 1) = mg$. Der Massenpunkt wird sich, nachdem er C erreicht hat, in dem kleineren Kreise weiter bewegen (symmetrisch zu CB), und es würde sich der Faden allmählich auf dem Stift bei M aufwickeln. Wenn man aber in dem Augenblicke, wo der Massenpunkt zum ersten Male wieder in B angelangt ist, den Stift M entfernt oder den Faden vom Stift abschiebt, so wird der Massenpunkt symmetrisch zu BA einen Viertelkreis vom Halbmesser $3r$ beschreiben und auf der rechten Seite sich bis zur Höhe des Punktes A wieder erheben.

Fig. 72.



Liegt (Fig. 73) der Anfangspunkt A der Bewegung in gleicher Höhe mit C , ist die Überhöhung $h = 0$, so wird nach Gl. 1, 2 und 3 (S. 78)

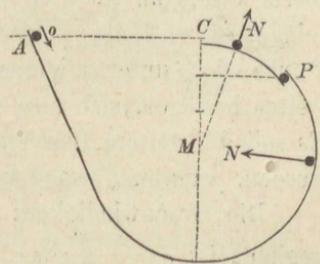
$$N = mg(2 - 3 \cos \alpha);$$

$$N_{max} = mg \cdot 5; \quad N_{min} = -mg.$$

Mithin wird im oberen Teile des Kreises N negativ, nach außen gerichtet, d. h. der Massenpunkt drückt gegen die innere Wandung der Röhre. Der Übergang aus dem Positiven ins Negative erfolgt bei $\cos \alpha = \frac{2}{3}$;

$\alpha = 48^\circ$; hier ist $N = 0$. Diese Stelle P ist am einfachsten durch Zeichnung zu finden; man teile MC in drei gleiche Teile

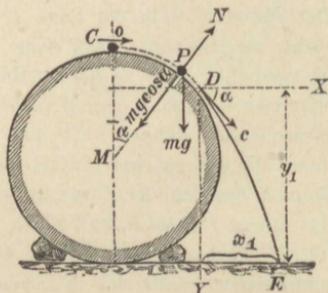
Fig. 73.



und ziehe durch den oberen Teilpunkt eine Wagerechte, so bestimmt diese den Punkt P . Unterhalb derselben ist ein äußerer, oberhalb ein innerer Mantel erforderlich.

Diese Betrachtungen finden auch auf einen solchen Fall teilweise Anwendung, wo nur ein innerer Mantel vorhanden ist (Fig 74), auf welchem der Massenpunkt gleitet. Man denke sich einen ruhigen liegenden zylindrischen Körper (Dampfkessel, Straßenwalze, dicker Baumstamm oder dgl.), auf dessen höchster Stelle wir einen Massenpunkt ruhen lassen. Bringt man ihn durch einen genügend schwachen Anstoß in Bewegung, so wird er beschleunigt abwärts gleiten. Der Anstoß soll so gering sein, daß die Anfangsgeschwindigkeit bei C annähernd = Null gesetzt werden kann. An einer Stelle P ist dann die

Fig. 74.



Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gy} = \sqrt{g(r - r \cos \alpha)}$. Der Normalwiderstand N kann unter den vorliegenden Umständen nur nach außen gerichtet auftreten. Daher muß jetzt $\frac{v^2}{r} = \frac{mg \cos \alpha - N}{m}$,

mithin $N = mg \cos \alpha - \frac{mv^2}{r} = mg(3 \cos \alpha - 2)$ sein. Für $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ oder $\alpha = 48^\circ$ wird wiederum $N = 0$; an dieser Stelle drückt der Punkt nicht mehr gegen den zylindrischen Körper. Für $\alpha > 48^\circ$ oder $\cos \alpha < \frac{2}{3}$ müßte zur Fortsetzung der kreisförmigen Bewegung ein nach innen gerichteter Druck N auftreten; da dieser aber nicht geleistet werden kann, so wird der Punkt von dieser Stelle an ($\alpha = 48^\circ$) der kreisförmigen Bahnlinie nicht mehr folgen, es wird der Normalwiderstand zu wirken aufhören und der Punkt sich unter alleiniger Einwirkung der Schwere parabolisch weiter bewegen, sich also von dem walzenförmigen Körper trennen. Es soll die weitere Bewegung untersucht und namentlich festgestellt werden, wann und wo der Punkt bei E den Boden erreicht.

Die Geschwindigkeit, mit der diese Bewegung im Punkte D beginnt, ist $c = \sqrt{2g \frac{2}{3} r}$ mit den Seitengeschwindigkeiten

$$c \cos \alpha = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} gr} = \sqrt{\frac{8}{27} gr} = 1,7 \sqrt{gr}$$

$$c \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \sqrt{\frac{2}{3} gr} = \sqrt{\frac{10}{27} gr} = 1,9 \sqrt{gr}.$$

Nach t Sekunden ist (von D als Anfangspunkt gerechnet)

$$x = t c \cos \alpha = t \sqrt[8]{27 g r}$$

$$y = t c \sin \alpha + \frac{1}{2} g t^2 = t \sqrt[10]{27 g r} + \frac{1}{2} g t^2.$$

Für den Endpunkt E gilt $y_1 = \frac{5}{3} r$ oder

$$y_1 = \frac{5}{3} r = t_1 \sqrt[10]{27 g r} + \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Daraus erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{27g}} (10 - \sqrt{10}) = 0,42 \sqrt{r}$$

$$\text{und hiermit } x_1 = (10 - \sqrt{10}) \sqrt{\frac{r}{27g}} \frac{8}{27} g r = 0,716 r.$$

Der Abstand des Endpunktes E von der Lotrechten CM wird dann

$$r \sqrt[5]{9} + x_1 = 1,46 r.$$

Der vorgeschriebenen kreisförmigen Bewegung und der freien parabolischen Bewegung entsprechen im Punkte D dieselben Kräfte. Daraus folgt, daß Parabel und Kreis an der Stelle D nicht allein den Punkt D und die Berührungsgerade gemein haben, sondern daß bei D auch der Krümmungshalbmesser ϱ der Parabel gleich demjenigen der Kreislinie, nämlich $\varrho = r$ sein muß. Berechnet man nach den Formeln der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie den Krümmungshalbmesser der parabolischen Bahnlinie DE und setzt in der betreffenden Formel $x = 0$ (Punkt D), so ergibt sich auch tatsächlich $\varrho = r$.

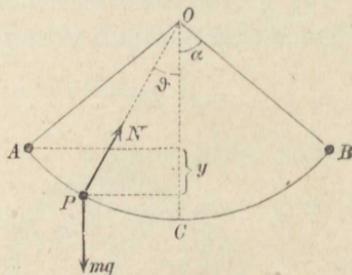
In ähnlicher Weise würde, wenn in Fig. 73 zwischen P und C die innere Röhrenwandung fehlte, der Massenpunkt bei P in eine parabolische Bewegung übergehen, die sich nicht bis zur Höhe des Punktes C erheben würde.

17. Einfaches (mathematisches) Pendel.

Wiederum möge ein Massenpunkt auf einen kreisförmig gebogenen Draht in lotrechter Ebene unter Einwirkung der Schwere sich bewegen, jedoch möge der höchste Punkt, wo die Geschwindigkeit Null ist, im unteren Halbkreise liegen (Fig. 75).

Der Halbmesser des Kreisbogens sei l . Die Anfangslage A sei durch den Winkel α , eine beliebige Zwischenlage P durch den Winkel ϑ bezeichnet. Der Massenpunkt wird an der Stelle B , die mit A in gleicher Höhe liegt, wieder die Geschwindigkeit Null haben, wird nach A zurückgehen und den Bogen AB und BA fortgesetzt durchlaufen symmetrisch zur tiefsten Lage C . Solche Bewegung heißt Schwingung. In der beliebigen Lage P ist die Geschwindigkeit

Fig. 75.



$$1) \quad v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gl(\cos \vartheta - \cos \alpha)}.$$

Es muß also nach Gl. 1, S. 72 sein:

$$\frac{v^2}{l} = 2g(\cos \vartheta - \cos \alpha) = \frac{N - mg \cos \vartheta}{m} \quad \text{oder}$$

$$2) \quad N = mg(3 \cos \vartheta - 2 \cos \alpha).$$

Da ϑ und α beide kleiner als $1/2 \pi$ sind, so wird für $\vartheta = \alpha$ $N_{min} = mg \cos \alpha$, für $\vartheta = 0$ aber $N_{max} = mg(3 - 2 \cos \alpha)$.

Für $\alpha = 48^\circ$ und $\cos \alpha = 2/3$ wird z. B. $N_{min} = 2/3 mg$; $N_{max} = 5/3 mg$.

Da N stets positiv ist, kann es durch die Spannkraft eines in O befestigten Fadens, an dem der Massenpunkt hängt, geleistet werden. In dieser Form heißt die Vorrichtung ein Pendel, und zwar ein einfaches oder mathematisches, wenn man die Masse des Fadens vernachlässigt und einen einfachen Massenpunkt annimmt. Ein wirkliches (physisches) Pendel mit Rücksicht auf die körperliche Ausdehnung wird später untersucht werden. Betrachten wir die Bewegung von A aus, so ist die Wegelänge in t Zeiteinheiten $s = AP = l(\alpha - \vartheta)$, daher

$$ds = -l d\vartheta = v dt = dt \sqrt{2gl(\cos \vartheta - \cos \alpha)};$$

hieraus folgt

$$3) \quad dt = -\frac{ld\vartheta}{v} = -\frac{ld\vartheta}{\sqrt{2gl(\cos \vartheta - \cos \alpha)}} = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \alpha)}}.$$

Dies ist die Zeit für die Zunahme des Winkels ϑ um $d\vartheta$. Wird nun in der Zeit t der Bogen AP zurückgelegt, so muß

$$4) \quad t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \alpha)}} \text{ sein.}$$

Für $t = 0$ ist nämlich $\vartheta = \alpha$, für $t = t$ aber $\vartheta = \vartheta$. Die Integration läßt sich in geschlossener Form nur ausführen, wenn man sich mit der Annäherung begnügt, indem man nur kleine Winkel α berücksichtigt. Es ist $\cos \vartheta = 1 - 2 \sin^2(1/2 \vartheta)$, und wenn man den Sinus von $1/2 \vartheta$ mit dem Bogen $1/2 \vartheta$ vertauscht,

$$\cos \vartheta = 1 - 2 (1/4 \vartheta^2) = 1 - 1/2 \vartheta^2;$$

ebenso $\cos \alpha = 1 - 1/2 \alpha^2$, mithin $2(\cos \vartheta - \cos \alpha) = \alpha^2 - \vartheta^2$. Also, wenn man noch in Gl. 4 die Grenzen vertauscht und daher gleichzeitig das Zeichen $-$ durch $+$ ersetzt,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\vartheta}^{\alpha} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}. \text{ Dies gibt aber}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\arcsin \frac{\vartheta}{\alpha} \right]_{\vartheta}^{\alpha}$$

und weil $\arcsin 1 = 1/2 \pi$ ist,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1/2 \pi - \arcsin \frac{\vartheta}{\alpha} \right\}.$$

Dies ist die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AP .

Um zu ermesen, wie groß der Fehler der Annäherung ist, nehme man $\vartheta = 5^\circ$ an, dann ist $\cos \vartheta = \cos 5^\circ = 0,996195$. Es ist aber $\vartheta = \arcsin 5^\circ = \frac{5 \cdot \pi}{180} = 0,087266$, daher $1 - 1/2 \vartheta^2 = 0,996192$; es kommt also erst in der 6^{ten} Dezimale eine Abweichung vor.

Die Dauer der Schwingung von A nach B ist offenbar doppelt so groß wie die von A nach C (für $\vartheta = 0$), mithin wird die Dauer t_1 einer einfachen Schwingung von A nach B

$$5) \quad t_1 = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} (1/2 \pi) = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

was man auch erhält, wenn man zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ integriert. Es ist für Meter und Sekunden und für

$$g = 9,81: \frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1,003, \text{ mithin}$$

$$t_1 = 1,003 \sqrt{l} \text{ oder annähernd } t_1 = \sqrt{l}.$$

Für $l = 1 \text{ m}$ wird $t_1 = 1,003$ Sekunden, oder ein Pendel von 1 m Länge macht in der Stunde 3589 einfache Schwingungen.

$t_1 = 1$ gibt $l = \frac{g}{\pi^2} = 0,994 \text{ m}$ als Länge des Sekundenpendels.

Da die Länge des Sekundenpendels mit g verhältnismäßig ist, so muß diese Länge an der Oberfläche der Sonne bzw. des Mondes (nach S. 61) 28 bzw. $\frac{1}{6}$ mal so lang sein.

Man kann die Gleichung 5 auch schreiben $g = l \frac{\pi^2}{t_1^2}$, kann also mit Hilfe von Pendelschwingungen aus der gemessenen Pendellänge l und der beobachteten Dauer t_1 einer Schwingung die Fallbeschleunigung an der betreffenden Stelle der Erde berechnen.

18. Scheinbare (relative) Bewegung eines Massenpunktes in bezug auf einen fortschreitenden Raum.

Die Bewegung eines körperlichen Gebildes, eines Raumes, heißt fortschreitend, wenn alle Teile desselben stets parallel ihrer Anfangslage bleiben (Fig. 76); hiermit ist notwendig verknüpft, daß dann alle Punkte des Körpers völlig übereinstimmende, nur parallel gegen einander verschobene Bahnlinien $A_1 A_2 A_3$ u. $B_1 B_2 B_3$ beschreiben, daher in einem bestimmten Augenblicke

völlig übereinstimmende Geschwindigkeiten haben. Die Bahnlinien

brauchen dabei nicht geradlinig zu sein. Solche fortschreitenden Bewegungen werden auch Verschiebungen genannt, während

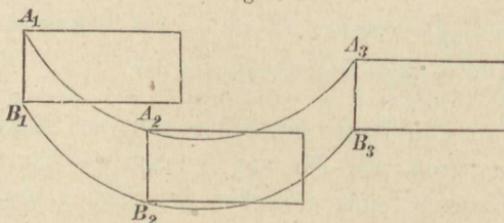


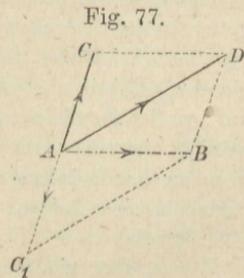
Fig. 76.

man eine beliebige Bewegung, bei welcher der Körper der Anfangslage nicht parallel bleibt, als Verrückung bezeichnet.

Verschiebungen mit geraden Bahnlinsen hommen sehr häufig vor; ein Eisenbahnwagen, ein Schiff führt solche auf geraden Strecken aus. Wenn aber der Wagen oder das Schiff einen krummlinigen Weg beschreibt, so erfährt der Eisenbahnwagen stets, das Schiff meistens eine Veränderung seiner Richtung, d. h. nicht mehr eine einfache Verschiebung. Eine parallele Verschiebung des Raumes wird im folgenden angenommen.

Wenn nun ein Massenpunkt während der Zeit t eine Bahnlinie AB (Fig. 77) beschreibt, diese Bahnlinie aber einem sich verschiebenden Raume angehört und daher der Punkt A gleichzeitig in dem Zeitraume t die Strecke AC zurücklegt, so wird nach S. 17 die wahre Bewegung des Punktes gefunden, indem man aus AB und AC ein Parallelogramm zeichnet, dessen vierter Eckpunkt D dann der wahre Ort des Punktes ist. Die Bewegung AB in dem fortschreitenden Raume heißt die scheinbare Bewegung des Punktes, weil ein in dem Raume befindlicher Beobachter, der die Bewegung des Raumes mitmacht, nur diese Bewegung wahrnimmt, oder die relative Bewegung in bezug auf den Raum. Alle Bewegungen, die die Fahrgäste eines fahrenden Eisenbahnwagens in demselben ausführen, sind solche scheinbaren Bewegungen. Die wahre oder absolute Bewegung AD ist die Resultierende aus beiden Seitenbewegungen.

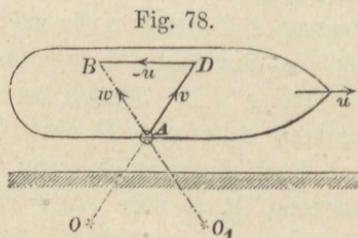
Häufig liegt die Aufgabe vor, aus der wahren Bewegung AD und der Verschiebung des Raumes AC die scheinbare Bewegung AB zu bestimmen. Dies kann nach den früheren Regeln (S. 27) geschehen, indem man die wahre Bewegung AD zerlegt in die eine Seitenbewegung AC (des Raumes) und die gesuchte scheinbare Bewegung AB , nämlich zu den drei Eckpunkten A , C und D den vierten Eckpunkt des Parallelogrammes sucht. Für die Anwendung ist es aber häufig vorteilhafter, das Verfahren so einzurichten, daß die gesuchte Bewegung AB nicht als geometrische Differenz, sondern als geometrische Summe erscheint, d. h. das Parallelogramm



so anzuordnen, daß B dem Punkt A diagonal gegenüber liegt. Dies geschieht, indem man die Verschiebung AC des Raumes in entgegengesetztem Sinne, nämlich als AC_1 , aufträgt und aus AD und AC_1 ein Parallelogramm zeichnet, in dem dann B der vierte Eckpunkt des Parallelogramms wird. Ob die Bewegungen AB , AC und AD geradlinig sind oder nicht, ist für das Verfahren der Zusammensetzung und Zerlegung (wie Seite 26 gezeigt wurde) völlig gleichgültig. Bei den Bewegungen kommt es nur auf die Orte nach t Zeiteinheiten an, welche man für die Konstruktion durch Gerade verbinden kann. Dabei ist wieder nicht das ganze Parallelogramm erforderlich; vielmehr genügt es, der Strecke AD der wahren Bewegung die Strecke DB als Entgegengesetztes der Verschiebung des Raumes anzufügen, um in der Schlußstrecke AB die scheinbare Bewegung zu erhalten. Wie früher gezeigt, gelten für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieselben Gesetze wie für die Bewegungen; daher haben wir die Sätze:

Die scheinbare Bewegung in einem fortschreitenden Raum ist die geometrische Summe aus der wahren Bewegung und dem Entgegengesetzten der Bewegung des Raumes. Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung der scheinbaren Bewegung ist die geometrische Summe aus der wahren Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung und dem Entgegengesetzten der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Raumes.

Beispiel 1: Ein Schiff bewege sich gleichförmig, geradlinig fortschreitend mit der Geschwindigkeit u nach rechts (Fig. 78). Vom Ufer aus werde ein Stein in der Richtung OA über das Verdeck hinweg geworfen. Von der Wurfbewegung wollen wir nur die geradlinige gleichförmige Seitenbewegung im Grundrisse berücksichtigen, die mit der wahren Geschwindigkeit v erfolgen möge. Ein auf dem Schiffe mitfahrender Beobachter erblickt nicht die wahre Bewegung, sondern nur die scheinbare, deren Geschwindigkeit w wir erhalten, indem wir in A die Strecke $v = AD$ auftragen und $DB = n$, aber nicht nach rechts, sondern mit entgegengesetztem Sinn, anfügen, dann ist AB die geometrische Summe von v und $-u$, d. h. die gesuchte scheinbare Geschwindigkeit w . In



dieser Richtung AB wird der Stein über das Schiff hinwegstreichen, als ob der Wurf etwa von einem Ursprung O_1 herrührte. Ist der Stein vielleicht ein Stück Kreide, so wird er die Bahnlinie AB selbsttätig aufzeichnen können. Als Probe der Richtigkeit dient die Betrachtung, daß die Geschwindigkeit w , verbunden mit der wirklichen Geschwindigkeit $BD = +u$ des Schiffes, als geometrische Summe wieder die wahre Geschwindigkeit $AD = v$ des Steines liefert. Ist das Verdeck vielleicht mit Tonnen, Ballen u. dergl. besetzt, so wird die Bewegung des Steines über dasselbe sich ungehindert nur dann entwickeln können, wenn längs AB zufällig eine Gasse frei geblieben ist. Diese Gasse ist dann gewissermaßen ein Kanal, eine Röhre, in welcher das fahrende Schiff den Stein so auffängt, daß er, ohne seitlich gestört zu werden, über das Verdeck hinwegleiten kann.

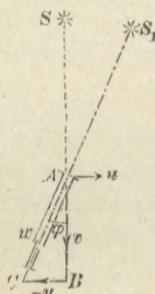
Beispiel 2: Nach dem vorstehenden sind die Bedingungen zu beurteilen, unter denen ein Fixstern in der Mitte des Gesichtsfeldes eines Fernrohres erscheinen kann. Es findet dies statt, wenn der von dem Stern ausgehende Lichtstrahl sich in der Richtung der Mittellinie des Rohres fortpflanzt. Stände nun die Erde mit dem Fernrohre fest, so müßte das Rohr genau in die Richtung nach dem Sterne gestellt werden. Da aber die Erde mit dem Fernrohr eine Bewegung um die Sonne ausführt, so kommt die scheinbare Bewegung des Lichtes in bezug auf die fortschreitende Erde in Frage. Ist (Fig. 79) u die Geschwindigkeit der fortschreitenden Erde und ist die Richtung nach dem zu betrachtenden Sterne rechtwinklig zu u , so hat man an die Geschwindigkeit des Lichtes $v = AB$ das Entgegengesetzte BC der Geschwindigkeit u der Erde anzutragen, um in AC die scheinbare Geschwindigkeit w des Lichtes gegen das Fernrohr zu erhalten. Diese Richtung AC muß das Rohr haben, damit der vom Stern S ausgehende Strahl das Fernrohr ungehindert durchlaufen kann, damit also der Stern S in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheine. Da man nun gewohnt ist, einen im Fernrohr erblickten Gegenstand als in der Richtung des Fernrohres befindlich anzunehmen, so vermutet man S vielleicht an der Stelle S_1 . Der Winkel φ , um den die scheinbare Richtung des Sternes von der wahren abweicht, heißt die Aberration des Lichtes. Die sekundl. Geschwindigkeit der Erde beträgt 29,7 km, die des Lichtes 308 000 km, daher ist

$$\operatorname{tg} \varphi = 29,7 : 308\,000 = 0,000096.$$

Dieser Tangente entspricht ein Winkel von etwa 20".

Beispiel 3: Abschreiten eines vorüberfahrenden Baumstammes. Sieht man einen Baumstamm langsam und gleichmäßig auf einer Straße fahren, so kann man dessen Länge durch Abschreiten schätzen, indem man den Stamm einmal, ihn überholend, in der Fahrtrichtung abschreitet, ein zweites Mal gegen die Fahrtrichtung schreitet und für beide Fälle die Schritte zählt. Es empfiehlt sich hierbei, die Zeit eines Schrittes als Zeit-

Fig. 79.



einheit zu wählen, dann ist die Schrittlänge zugleich die Geschwindigkeit v des Schreitenden. Mit u werde diejenige Strecke bezeichnet, welche der Stamm während eines Schrittes zurücklegt. Beim Überholen ist die scheinbare Geschwindigkeit des Schreitenden gegen den Stamm offenbar $v - u$. Ist nun t die Anzahl der Schritte beim Überholen, so muß die Länge l des Stammes betragen $l = (v - u)t$. Beim Entgegenschreiten wird die scheinbare Geschwindigkeit $v + u$, daher $l = (v + u)t_1$, wenn t_1 die entsprechende Schrittzahl. Aus diesen beiden Gleichungen können u und l ermittelt werden, nämlich zu

$$u = v \frac{t - t_1}{t + t_1}; \quad l = v \frac{t t_1}{\frac{1}{2}(t + t_1)}.$$

Der Schreitende mache in jeder Sekunde 2 Schritte von je 0,8 m. Zum Überholen des Stammes gebrauche er $t = 100$ Schritte, zum Kreuzen nur $t_0 = 20$ Schritte, dann ist $\frac{u}{v} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$; während eines Schrittes von 0,8 m legt mithin der Baumstamm die Strecke $u = 0,8 \cdot \frac{2}{3} = 0,533$ m zurück. Die Länge des Stammes beträgt $l = 0,8 \cdot \frac{100 \cdot 20}{60} = 26,67$ m.

Fährt der Stamm schneller, als der Wanderer schreitet, so ist letzterer nicht imstande, den Stamm schreitend zu überholen, läßt sich vielmehr von dem Stamme während der Dauer von t Schritten überholen, kehrt dann laufend an das Vorderende des Stammes zurück und läßt ihn in entgegengesetzter Richtung während der Dauer von t_1 Schritten an sich vorbeifahren. In diesem Falle wird leicht gefunden:

$$\frac{u}{v} = \frac{t + t_1}{t - t_1}; \quad l = v \frac{t t_1}{\frac{1}{2}(t - t_1)}.$$

Es sei jetzt $v = 0,75$ m; $t = 300$, $t_1 = 20$; dann wird $\frac{u}{v} = \frac{320}{280} = \frac{8}{7}$, mithin

$$u = 0,857 \text{ m}; \quad l = 0,75 \cdot \frac{300 \cdot 20}{140} = 32,14 \text{ m}.$$

Beispiel 4: Ein Stein werde mit der geringen Geschwindigkeit $v = 10$ m/sek senkrecht zur Fahrtrichtung gegen einen mit 20 m/sek fahrenden Eisenbahnzug geworfen; dann ist die scheinbare Geschwindigkeit des Steines gegen den Zug

$$w = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5} = 22,361 \text{ m/sek}.$$

Diese Geschwindigkeit ist maßgebend für die Wirkung des Wurfes gegen einen etwa getroffenen Fahrgast, und zwar ist das hierfür in Frage kommende Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2 \cdot 5$, d. h. das 5fache der von dem Werfenden geleisteten Arbeit $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2$ (S. 55).

In noch viel höherem Grade aber vervielfacht sich die Wirkung, wenn 2 Züge mit je 20 m/sek aneinander vorbeifahren und der Stein aus dem einen Zuge gegen den anderen geworfen wird. Dann ist die wahre Geschwindigkeit des Steines die geometrische Summe aus der Seitengeschwindigkeit $c = 10$ m/sek,

welche der Fahrgast dem Stein erteilt hat, und der Geschw. 20 m/sek des ersten Zuges, d. h. $v = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5} = 22,361 \text{ m/sek}$. Diesem v ist nun noch, wenn der zweite Zug nach links fährt (Fig. 80), dessen Geschwindigkeit 20 m/sek nach rechts hinzuzufügen. Dann wird w offenbar die Hypotenuse eines Dreiecks, dessen eine Kathete 10 , dessen andere aber $20 + 20 = 40$ beträgt, also

$$w = \sqrt{10^2 + 40^2} = 10\sqrt{1 + 16} = 10\sqrt{17} = 41,23.$$

Ein in dem zweiten Zuge befindlicher, etwa getroffener Fahrgast verspürt also eine Wurfwirkung von der Größe $\frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}m10^2 \cdot 17$; d. h. durch die Bewegung der beiden Eisenbahnzüge ist die Stoßwirkung auf das 17fache gewachsen, gegenüber dem Falle, wo der Stein aus einem stillstehenden Zug auf einen ebenfalls stillstehenden Zug geworfen würde. Die Geschwindigkeit von 10 m/sek entspricht einer Fallhöhe von $100 \cdot 0,051 = 5,1 \text{ m}$; ein Wurf mit solcher Geschwindigkeit ist daher als verhältnismäßig harmlos zu bezeichnen. $41,23 \text{ m/sek}$ entsprechen aber einer Fallhöhe von $17 \cdot 5,1 = 86,7 \text{ m}$, also einer Turmhöhe.

Beispiel 5: Fällt von einer über eine Eisenbahn führenden Brücke ein Stein lotrecht herab, so ist dessen wahre Bewegung eine lotrechte, gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit Null. Für einen vorbeifahrenden Zug aber wird die scheinbare Bewegung eine parabolische Wurfbewegung, deren wagerechte Seitengeschwindigkeit das Entgegengesetzte der Geschwindigkeit des Eisenbahnzuges ist. Diese parabolische Bahnlinie wird ein im Zuge fahrender Beobachter wahrnehmen. Ähnlich ist es auch mit Regentropfen, die, lotrecht fallend, einen Zug treffen. Die Spuren derselben an den Fenstern und Wänden der Wagen werden von der Lotrechten abweichen. — Kann man, Kopf oder Hand aus einem Eisenbahnzuge hinaus haltend, keinen Luftzug wahrnehmen, so muß die umgebende Luft die gleiche Bewegung wie der Zug haben, es muß also ein in der Fahrrichtung wehender Sturm herrschen.

Beispiel 6: Stellung der Windfahne auf einem Schiff. Eine leicht bewegliche Windfahne, deren Stange ruht, wird durch die Luftbewegung in die Richtung des Windes gestellt. Ist die Stange aber nicht in Ruhe, so kommt für die Stellung der Fahne die scheinbare oder relative Geschwindigkeit der Luft in bezug auf die Fahnenstange in Frage. Bewegt sich ein Dampfschiff mit 5 m/sek und weht rechtwinklig dazu ein Wind von gleicher Geschwindigkeit (Fig. 81), so ist die scheinbare Geschwindigkeit $w = 5\sqrt{2}$ und um 45°

Fig. 80.

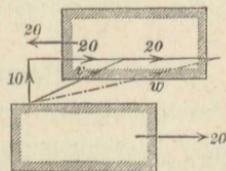
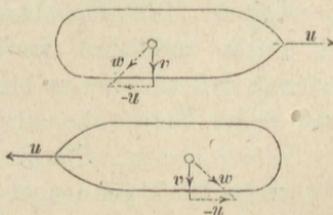


Fig. 81.



geneigt gegen die wahre Windrichtung. In der Richtung von w wird die Fahne sich einstellen. Man kann daher auf einem fahrenden Schiff aus der Richtung der Windfahne nicht ohne weiteres auf die Windrichtung schließen. Bei einem entgegengesetzt fahrenden Schiffe würde die Abweichung nach der anderen Seite erfolgen, und unter den bezüglich der Geschwindigkeiten gemachten Annahmen würden die Fahnen auf den beiden sich begegnenden Schiffen rechtwinklig zueinander stehen.

Beschleunigung der scheinbaren Bewegung. Ist q die wahre Beschleunigung eines Punktes (Fig. 82), so ergibt sich die scheinbare Beschleunigung r als geometrische Summe von q und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung p des betreffenden Raumes.

Die wahre Beschleunigung q ist die Wirkung einer wahren Kraft $K = mq$; die scheinbare Beschleunigung r kann als die Wirkung einer scheinbaren Kraft mr angesehen werden, die man offenbar erhält als geometrische Summe der wahren Kraft K und einer Kraft $(-mp)$, welche dem Entgegengesetzten der Beschleunigung des Raumes entspricht. Diese Kraft, welche man zu der wirklichen hinzufügen muß, um die scheinbare Kraft zu erhalten, nennt man **Ergänzungskraft der scheinbaren Bewegung**.

Bewegt sich der Massenpunkt unter Einwirkung der Schwere in einem Raume (Kasten), der selbst eine Beschleunigung p (Fig. 83) lotrecht aufwärts erfährt, so ist g die wahre Beschleunigung des Punktes; zu dieser muß man p abwärts hinzufügen, um als Summe beider die scheinbare Beschleunigung $r = g + p$ zu erhalten. Die scheinbare Kraft ist $R = m(g + p)$. Soll aber der Punkt verhindert werden, in dem Raume zu fallen, etwa dadurch, daß man ihn an einem Faden aufhängt, so muß die Spannkraft S des Fadens die scheinbare Kraft R aufheben, es muß also $S = m(g + p)$ sein. (Ebenso groß würde der Gegendruck des Bodens sein, wenn der Massenpunkt auf dem Boden des Kastens läge.) Ist die Beschleunigung p des Kastens Null, so ist S einfach gleich dem Gewichte des Punktes. Die Beschleunigung des Kastens hat auf die scheinbare Bewegung denselben Einfluß, als ob die Fall-

Fig. 82.

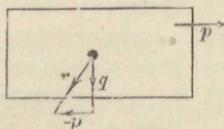
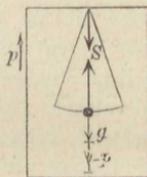


Fig. 83.



beschleunigung von g auf $r = g + p$ erhöht wäre. Wird der an dem Faden hängende Punkt durch eine seitliche Bewegung aus der scheinbaren Ruhelage gebracht, so führt er Pendelschwingungen aus, und die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung berechnet sich, indem man in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (S. 83) g mit $g + p$ vertauscht, zu

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g+p}}.$$

Die Schwingungen erfolgen also wegen der stärkeren Beschleunigung in kürzerer Zeit.

Ist die Beschleunigung p des Kastens nach unten gerichtet, so wird $r = g - p$; $R = m(g - p)$ und ein etwaiger Bodendruck oder eine etwaige Fadenspannung ebenfalls $m(g - p)$. Die Schwingungsdauer des Pendels wird jetzt

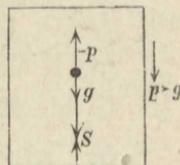
$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g-p}}.$$

Bewegt sich der Kasten mit der Fallbeschleunigung $p = g$ abwärts, so wird $r = 0$; $R = 0$; der Punkt hat keine scheinbare Beschleunigung gegen den Kasten (da beide gleiche Beschleunigung g haben). Bodendruck oder Fadenspannung werden Null; der Punkt drückt nicht mehr auf den Boden. Ein in dem Kasten befindlicher Mensch würde den Boden unter den Füßen verlieren. Da die Fadenspannung Null wird, ist auch ein Pendel nicht möglich; die Schwingungsdauer wird dann auch $t = \infty$, d. h. es kommt eine Schwingung nicht zustande.

Ist aber die abwärts gerichtete Beschleunigung des Kastens $p > g$, so wird (Fig. 84) die scheinbare Beschleunigung $r = p - g$ nach aufwärts gerichtet; der Massenpunkt fällt in dem Kasten nach oben. Ein etwaiger Deckendruck bzw. eine Fadenspannung S wird $m(p - g)$, wobei der Faden an dem Boden befestigt sein muß. Bei einem seitlichen Anstoß entstehen Schwingungen um den unteren Befestigungspunkt, und zwar von der Dauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{p-g}}.$$

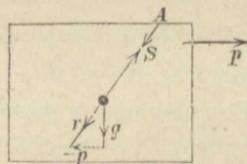
Fig. 84.



Das in diesen verschiedenen Fällen über die Spannkraft S des Fadens Gesagte gilt auch, wenn ein Kasten gar nicht vorhanden ist, wenn man vielmehr etwa mit der Hand das eine Ende des Fadens erfaßt, während an dem andern Ende ein Massenpunkt angeschlossen ist. Bewegt man die Hand nach irgendeiner Richtung gleichförmig und geradlinig, so ist die Spannkraft des stets lotrechten Fadens gleich dem Gewichte des angehängten Massenpunktes. Bewegt man die Hand aber mit aufwärts gerichteter Beschleunigung, so vergrößert sich die Spannkraft, und es kann infolge dieser Beschleunigung der Faden möglicherweise reißen. Will man in solchen Fällen das Reißen eines etwas schwachen Fadens oder Seiles vermeiden, so muß die Bewegung eine vorsichtige sein, d. h. eine solche ohne wesentliche Beschleunigung.

Ist der Kasten ein in wagerechtem Sinne beschleunigter Eisenbahnwagen mit der Beschleunigung p , so wird die scheinbare Beschleunigung $r = \sqrt{g^2 + p^2}$ schräg gerichtet; ebenso die scheinbare Kraft $R = mr$ (Fig. 85). Soll der Massenpunkt durch einen aufhängenden Faden in scheinbarer Ruhe in dem Wagen erhalten werden, so muß die Fadenspannkraft $S = m\sqrt{g^2 + p^2}$ in die Richtung von r fallen. Um diese scheinbare Gleichgewichtslage als Mitte würden bei einem Anstoße Pendelschwingungen von der Dauer $t = \pi \sqrt{\frac{l}{r}}$ entstehen. Die Richtung von r gibt zugleich die Stellung an, welche ein Fahrgast annehmen muß, um nicht umzufallen, wenn der Wagen eine nach rechts gerichtete beschleunigte Bewegung hat, oder wenn der nach links fahrende Wagen beim Anhalten eine Verzögerung p erfährt.

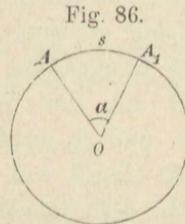
Fig. 85.



19. Ruhe in bezug auf einen sich gleichmäßig drehenden Raum.

Dreht sich ein Körper um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene, Fig. 86), so ist die Bewegungsart schon durch die Bewegung eines einzigen Punktes oder auch eines beliebigen Drehungshalbmessers OA bestimmt. Der beliebige Punkt muß

sich in einer Kreislinie bewegen, und wenn $AA_1 = s$ die während der Zeit t zurückgelegte Wegeslänge ist, so wird $s = f(t)$ das Bewegungsgesetz sein, welches die Kreisbewegung des Punktes A im Abstand $OA = r$ von der Drehachse und damit auch die Drehbewegung des Körpers völlig bestimmt. Es ist dann $v = ds : dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A . Setzt man nun $s = AA_1 = r\alpha$, so wird $\alpha = 1/r \cdot f(t)$ oder $\alpha = \varphi(t)$ das Gesetz der Drehbewegung des Halbmessers OA . Ebenso wie man $v = ds : dt$ die Geschwindigkeit des Punktes A nennt, heißt $\omega = d\alpha : dt = \varphi'(t)$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, d. h. der auf die Zeiteinheit (Sekunde) bezogene Drehungswinkel oder die Umfangsgeschwindigkeit im Abstand Eins von der Drehachse. Wie $s = r\alpha$ ist auch $v = r\omega$ und $\omega = v : r$.



Beispiel: Dreht sich ein Körper in jeder Sekunde einmal gleichförmig um seine Achse, so beschreibt ein Punkt im Abstand r von der Achse den Weg $2r\pi$ in jeder Sekunde, mithin ist $v = 2r\pi$; ein Punkt im Abstand $r = 1$ also hat die Geschwindigkeit $\omega = v : r = 2\pi$; oder man kann auch sagen: Der Winkel 2π einer ganzen Umdrehung wird in jeder Sekunde zurückgelegt, daher ist $\omega = 2\pi$. Die Gradzahl eines Winkels ist nicht ein natürliches, sondern ein künstliches, willkürliches Maß für die Größe desselben. Die natürliche Einheit des Winkels ist derjenige Winkel α , dem bei einem Halbmesser Eins eine Bogenlänge Eins entspricht. Da nun einem Winkel von 180° nach dem meist üblichen Gradmaß eine halbe Umdrehung, d. h. ein Bogen π entspricht, so wird der Bogeneinheit eine Gradzahl $180 : \pi = 57,3$ entsprechen. Daß dieser Winkel etwas unter 60° liegen muß, ergibt sich daraus, daß beim Winkel von 60° die Sehne gleich dem Halbmesser, der Bogen also etwas größer als der Halbmesser ist.

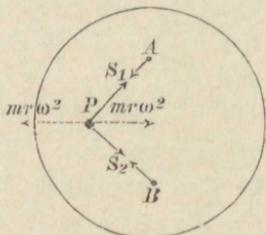
Dreht sich ein Raum gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse und befindet sich in dem Raum ein Massenpunkt, und zwar in dem Abstand r von der Achse, in scheinbarer (relativer) Ruhe gegen den Raum, so macht er die Bewegung des Raumes tatsächlich mit, führt mithin eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ aus, wobei er eine Zentripetalbeschleunigung

$$1) \quad \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 \omega^2}{r} = r\omega^2$$

erfährt. Dazu ist dann eine Zentripetalkraft von der Größe $mr\omega^2$

erforderlich. Liegt z. B. auf einer wagerechten Scheibe, die sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre lotrechte Achse dreht (Fig. 87), ein Massenpunkt, etwa eine kleine Kugel, so wird diese zur scheinbaren Ruhe gegen die Scheibe nur durch Kräfte gezwungen werden können, etwa durch die Spannkraften S_1 und S_2 zweier bei A und B mit der Scheibe verbundenen Fäden. S_1 und S_2 werden dann so groß, daß ihre Mittelkraft von der Größe $mr\omega^2$ und nach dem Mittelpunkt O gerichtet ist. Hierdurch sind S_1 und S_2 völlig bestimmt.

Fig. 87.



Zu dieser Bedingung für die scheinbare Ruhe gelangt man auch durch folgende Überlegung: Der Massenpunkt folgt der Zentripetalbeschleunigung $r\omega^2$ mit dem Trägheitswiderstand $-mr\omega^2$. Dieser muß überwunden werden durch die Spannkraften S_1 und S_2 ; die Mittelkraft beider muß also entgegengesetzt gleich $-mr\omega^2$, d. h. gleich $mr\omega^2$ sein. Durch den Trägheitswiderstand $-mr\omega^2$ kommen die Spannkraften S_1 und S_2 gleichsam erst zustande; sie erfüllen mit ihm ersichtlich die Bedingungen für das Gleichgewicht von drei an einem Massenpunkte angreifenden Kräften und sind schon dadurch bestimmt.

Würden die Fäden durchgeschnitten und damit sowohl die Spannkraften S_1 und S_2 , als auch die Zentripetalbeschleunigung $mr\omega^2$ verschwinden, so würde der Punkt ohne jeden Zwang und also auch ohne jeden Widerstand, frei seiner natürlichen Trägheit folgend, seinen Weg geradlinig in seiner augenblicklichen Bewegungsrichtung, d. h. tangential zu seiner bisherigen Kreisbahn mit der Geschwindigkeit v fortsetzen.

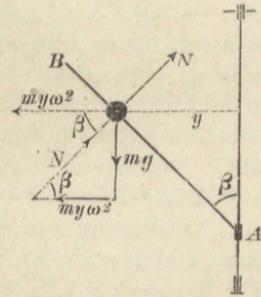
Von einer zum Schleifen dienenden, schnell umlaufenden Schmirgelscheibe fliegen die abgelösten, glühenden Metallteilchen in tangentialer Richtung fort. Läßt man die Schnur einer Schleuder los, so fliegt der Stein aus derselben in tangentialer Richtung weiter.

Soll ein Massenpunkt gegen einen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig drehenden Raum bei einem Abstand r von der Drehachse in scheinbarer Ruhe verbleiben, so müssen die auf ihn

wirkenden Kräfte den seiner Zentripetalbeschleunigung entgegengesetzten, also radikal nach außen gerichteten Trägheitswiderstand $m r \omega^2$ überwinden, mit ihm zusammen die Bedingungen für das Gleichgewicht erfüllen.

Beispiel: An einer lotrechten Achse (Fig. 88) befindet sich ein schräger Arm AB aus Draht, auf welchem eine kleine Kugel reibungslos verschiebbar sei. Wirkt auf die Kugel die Schwere mg , so übt der Draht den Normalwiderstand N aus. Beide können sich aber allein nicht im Gleichgewichte halten, sondern es wird unter ihrer Einwirkung die Kugel auf dem Drahte beschleunigt abwärts gleiten. Erteilt man jedoch der Achse und damit auch dem Arm eine Winkelgeschwindigkeit ω , so ist es nun möglich, daß die Kugel auf dem Arme sich nicht verschiebe. Die Bedingung dafür besteht darin, daß der nach außen gerichtete Trägheitswiderstand $m y \omega^2$ mit den Kräften mg und N die Gleichgewichtsbedingungen erfülle. Diese drei Kräfte bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse rechtwinklig zum Arme steht, also mit der Wagerechten den Winkel β bildet.

Fig. 88.



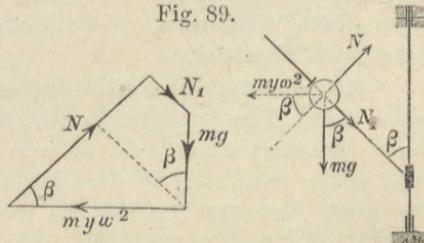
Daher muß $\text{tg } \beta = mg : m y \omega^2$ oder

$$2) \quad \text{tg } \beta = \frac{g}{y \omega^2} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{y \text{tg } \beta}} \quad \text{oder} \quad y = \frac{g}{\omega^2 \text{tg } \beta} \quad \text{sein.}$$

Ist z. B. $\beta = 45^\circ$, $\text{tg } \beta = 1$, $\omega = 2 \pi$ (1 Umdrehung in der Sekunde), so ergibt sich $y = \frac{9,81}{1 \cdot 4 \pi^2} = 0,25 \text{ m}$; d. h. in 0,25 m Abstand von der Achse würde die Kugel nunmehr auf dem Arm in scheinbarer Ruhe verbleiben. Zu jedem anderen Wert y gehört aber auch ein anderes ω bei sonst gleich bleibenden Verhältnissen.

Um zu erkennen, wie die Kugel sich bei größerer Winkelgeschwindigkeit als Gl. 2 entspricht, bewegen würde, denken wir uns (Fig. 89) dicht oberhalb der Kugel einen Vorsteckstift angebracht, der eine Vergrößerung von y verhindert. Dieser Stift übt dann einen Widerstand N_1 in der Richtung des Armes nach

Fig. 89.



unten aus, und es müssen sich nun die Kräfte N , N_1 , mg und $m y \omega^2$ aufheben. Zerlegt man sämtliche Kräfte in solche, welche in die Richtung

des Armes fallen bzw. dazu rechtwinklig stehen, so muß die Kräfte summe in der Armrichtung Null sein, d. h.

$$N_1 + mg \cos \beta - m y \omega^2 \sin \beta = 0,$$

mithin

$$\begin{aligned} N_1 &= m y \omega^2 \sin \beta - m g \cos \beta \\ &= m g \cos \beta \left(\frac{y \omega^2 \operatorname{tg} \beta}{g} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ist nun $\omega^2 > \frac{g}{y \operatorname{tg} \beta}$, so wird $y \omega^2 \operatorname{tg} \beta > g$ und $N_1 > 0$; d. h. der

Stift leistet der Kugel tatsächlich einen Gegendruck; mithin drückt die Kugel nach dem Gesetze der Wechselwirkung auch gegen den Stift, würde also, falls der Stift fehlte, auf dem Arme nach oben gleiten. Der Stiftdruck wird Null, wenn $y \omega^2 \operatorname{tg} \beta = g$, während ein kleineres ω ein negatives N_1 , d. h. den nach oben gerichteten Widerstand eines unterhalb der Kugel angebrachten Stiftes verlangt, entsprechend der Neigung der Kugel, abwärts zu gleiten. Hiermit ist zugleich bewiesen, daß sich beim Kegelpendel (S. 75) der Neigungswinkel gegen die Lotrechte vergrößern wird, wenn man dem Massenpunkt eine zu große Geschwindigkeit v gibt, und umgekehrt. Denn die jetzt betrachtete Anordnung ist dem Wesen nach auch ein Kegelpendel.

Tritt an Stelle des geraden Armes ein nach einem Kreisbogen vom Halbmesser l geformter (Fig. 90), so behält Gl. 2 ihre Gültigkeit; es ist

$$\operatorname{tg} \beta \cdot y \omega^2 = g, \text{ oder weil}$$

$$y = l \cos \beta \text{ und } \beta = 90^\circ - \alpha,$$

$$\sin \beta l \omega^2 = h \omega^2 = g \text{ und } h = g : \omega^2,$$

worin h die Tiefe der Kugel unter O bedeutet; h ändert sich im umgekehrten Verhältnisse mit ω^2 . Diese Vorrichtung wird als Schwungkugel-Kegler (Zentrifugal-Regulator) zur Regelung des Ganges von Maschinen benutzt. An der lotrechten Achse werden bei O zwei Gelenkstangen von der Länge l befestigt, welche die Kugeln tragen und ihnen zugleich die Kreisbahn $CB C_1$ vorschreiben. Bei einer Winkelgeschwindigkeit ω wird sich dann die Höhe $h = g : \omega^2$ bilden. Bei größerer Drehgeschwindigkeit werden die Kugeln steigen, und umgekehrt. Durch geeignetes Gestänge wirkt das Steigen bzw. Sinken der Kugeln auf die Kraftquelle, vermindert bzw. verstärkt dieselbe.

Soll die Kugel bei gleichbleibender Umdrehungsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Armes in scheinbarer Ruhe verbleiben können, so muß die Form des Armes eine solche sein, daß die Gl. 2 S. 95: $\operatorname{tg} \beta \cdot y \omega^2 = g$ für jeden Wert von y Gültigkeit hat. Es muß also offenbar $\operatorname{tg} \beta$ mit y umgekehrt sich ändern. Bezieht man (Fig. 91) die gesuchte Kurve AP auf den Punkt A als Anfangspunkt, so ist $\operatorname{tg} \beta = dy : dx$, mithin $y \omega^2 \cdot dy : dx = g$ oder $2 \omega^2 y dy = 2 g \cdot dx$. Sind zwei Differentiale

Fig. 90.

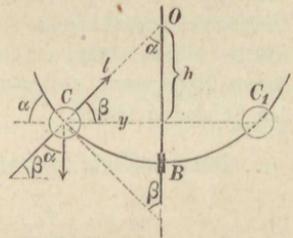
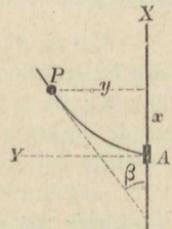


Fig. 91.



einander gleich, so dürfen sich deren unbestimmte Integrale nur um eine Konstante C unterscheiden, und man erhält

$$\omega^2 y^2 = 2gx + C.$$

Weil aber der Punkt A mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ auch der Kurve angehört, so muß die Konstante in obiger Gleichung so bestimmt worden, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Das gibt

$$0 = 0 + C \text{ oder } C = 0, \text{ und nach } y^2 \text{ aufgelöst: } y^2 = 2 \left(\frac{g}{\omega^2} \right) x.$$

Diese Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Achse mit der x -Achse zusammenfällt und deren Parameter $g : \omega^2$ ist. Für ein bestimmtes g entspricht jeder Drehgeschwindigkeit ω eine bestimmte Parabel als Gleichgewichtsform. Ist die der Form entsprechende Drehgeschwindigkeit vorhanden, so kann die Kugel an jeder Stelle des Drahtes in scheinbarer Ruhe verbleiben, ist die Geschwindigkeit $> \omega$, so strebt die Kugel fortgesetzt nach außen, und umgekehrt.

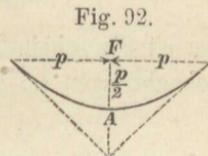


Fig. 92.

Dreht sich die Achse mit dem Arm in jeder Sekunde 1 mal um, so ist $\omega = 2\pi$ und der Parameter der Parabel $p = 9,81 : (4\pi^2) = 0,25 \text{ m}$ (Fig. 92).

20. Einfluß der Drehung der Erde um ihre Achse auf das scheinbare Gewicht bezw. die scheinbare Fallbeschleunigung.

Denken wir uns die Erde vorläufig als Kugel vom Halbmesser $r = 6370000 \text{ m}$ und betrachten wir einen Massenpunkt, der am Äquator auf der Erdoberfläche ruht, so ist dieser Zustand nur ein scheinbarer Ruhezustand in bezug auf die sich drehende Erde (Fig. 93). Zu der Anziehungskraft mg der Erde und dem nach außen gerichteten Normalwiderstand N der Erdoberfläche kommt noch der der Bahnkrümmung entsprechende radial nach außen gerichtete Trägheitswiderstand, der mit beiden die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Daher ist $N = mg - mr\omega^2$. Nun wird aber das Gewicht eines Körpers nach dem Drucke beurteilt, den er im

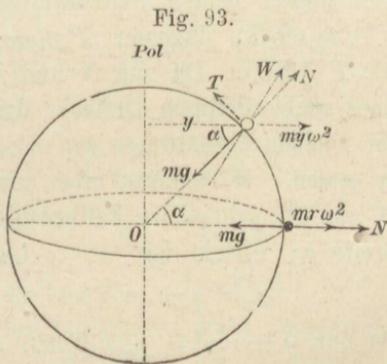


Fig. 93.

Ruhezustand auf eine wagerechte Unterlage (die Wagschale) ausübt, so daß N als das scheinbare Gewicht und $N:m$ als die scheinbare Fallbeschleunigung g_0 in der geographischen Breite Null zu bezeichnen ist, also

$$g_0 = g - r\omega^2.$$

Die Zeit einer Umdrehung der Erde beträgt

$$23^{\text{std}} 56^{\text{min}} 4^{\text{sek}} = 86\,164^{\text{sek}};$$

daher $\omega = 2\pi : 86\,164 = 0,000073$, hiernach wird

$$r\omega^2 = 6\,370\,000 \cdot 0,000073^2 = 0,034.$$

Nun ist die scheinbare Fallbeschleunigung am Äquator durch Pendelbeobachtungen (s. S. 84) zu $g_0 = 9,780 \text{ m/sek}^2$ beobachtet, daher wird

$$g = 9,780 + 0,034 = 9,814$$

die wahre Beschleunigung der Schwere am Äquator, welche bei kugelförmiger Erde für alle Punkte der Erdoberfläche gelten würde.

In einer geographischen Breite α halten sich nun an dem Massenpunkte die Schwere mg , der Trägheitswiderstand $m r \omega^2$ mit dem Gegendrucke W der Erdoberfläche im Gleichgewichte, woraus folgt, daß W im allgemeinen nicht durch den Erdmittelpunkt O geht. Zerlegt man W in einen Normalwiderstand N und einen Tangentialwiderstand T , so wird, weil $y = r \cos \alpha$,

$$N = mg - m r \omega^2 \cos^2 \alpha = m (g - r \omega^2 \cos^2 \alpha) \text{ und}$$

$$T = m r \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Von diesen beiden Seitenkräften ist $N \geq m (9,814 - 0,034)$ oder $N \geq m \cdot 9,78$, dagegen $T \leq m \cdot 0,034 \cdot \frac{1}{2}$ (für $\alpha = 45^\circ$), daher $N : T \geq 575$. Da nun N und T die Katheten, W die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, so ist die Hypotenuse W bei solchem Verhältnisse von $N : T$ mit großer Annäherung gleich N zu setzen. W bedeutet aber wiederum die scheinbare Schwere und $W : m$ die scheinbare Fallbeschleunigung g_α in der geographischen Breite α ; mithin ist

$$g_\alpha = g - r \omega^2 \cos^2 \alpha = g - r \omega^2 + r \omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Da nun $g - r \omega^2 = g_0 = 9,780$, so wird

$$2) \quad g_\alpha = 9,780 + 0,034 \sin^2 \alpha = 9,797 - 0,017 \cos 2\alpha,$$

wenn man die Beziehung $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$ benutzt.

Die scheinbare Schwere W würde auch nach Richtung und Größe die Spannkraft eines Fadens bilden, an welchem ein Massenpunkt etwa als Lot aufgehängt wäre. Da nun W im allgemeinen nicht mit der Normalen N zusammenfällt, so geht auch die Richtung des Lotes im allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt der Erde, nur am Äquator und an den Polen, wo $T = m r \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha = 0$ ist, findet dies statt.

Für den Winkel δ , um den das Lot von den Geraden nach dem Mittelpunkte der Erde abweicht, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{T}{N} = \frac{m r \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{m g_{\alpha}} \\ &= \frac{0,034 \sin \alpha \cos \alpha}{9,797 - 0,017 \cos 2\alpha} = \frac{0,017 \sin 2\alpha}{9,797 - 0,017 \cos 2\alpha} \end{aligned}$$

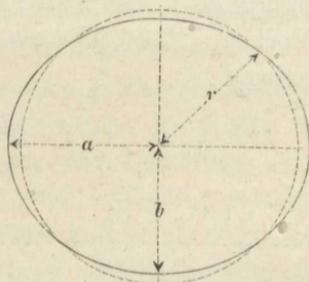
Will man wissen, in welcher Breite α dieses ein Maximum wird, so setzt man die Abgeleitete von $\operatorname{tg} \delta$ gleich Null, mithin

$$0 = (9,797 - 0,017 \cos 2\alpha) \cdot 0,034 \cos 2\alpha - 0,017 \sin 2\alpha \cdot 0,034 \sin 2\alpha, \text{ oder} \\ 9,797 - 0,017 \cos 2\alpha = 0,017 \sin 2\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$$

und daraus $\cos 2\alpha = \frac{0,017}{9,797} = 0,001735$. Das gibt $2\alpha = 89^{\circ} 54'$ und $\alpha = 44^{\circ} 52'$.

Wäre die Erde vollkommen kugelförmig, so könnte ihre Oberfläche einen von der Normalen abweichenden Widerstand W gar nicht leisten; die Seitenkraft T , welche für den scheinbaren Ruhezustand erforderlich wäre, könnte von ihr nicht ausgeübt werden; es würden daher alle leicht beweglichen Körper, namentlich die Wasserteilchen des Meeres nach dem Äquator fortgleiten, bis die Kugelform sich so geändert haben würde, daß W rechtwinklig zur Oberfläche steht. Diese Formänderung findet aber nicht mehr statt, weil die Gestalt der Erde eben keine Kugel ist, sondern ein Ellipsoid, welches jener Bedingung, daß die Richtung des Lotes rechtwinklig zur Oberfläche steht, entspricht (Fig. 94). Der Erdhalbmesser $a = 6377000 \text{ m}$ am Äquator ist etwa 21 km größer als der Polradius $b = 6356000 \text{ m}$. Infolge dieses Umstandes wird ein Massenpunkt, wenn man ihn vom Äquator her

Fig. 94.



nach dem Pole verschiebt, dem Mittelpunkte der Erde näher kommen, woraus allein schon eine Zunahme der Anziehung folgt, deren Einfluß jene andere Zunahme noch verstärkt, die infolge der Abnahme des Trägheitswiderstandes der Bahnkrümmung sich ergibt. Pendelversuche haben ergeben, daß man in Gl. 2 (S. 98) die Zahlenwerte ändern muß, um sie mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bringen; es ist nämlich tatsächlich

$$3) \quad g_{\alpha} = 9,780 + 0,052 \sin^2 \alpha = 9,806 - 0,026 \cos 2 \alpha.$$

$$\alpha = 0 \quad \text{gibt } g_0 = 9,780$$

$$\alpha = 45^{\circ} \quad \text{,, } g_{45} = 9,806$$

$$\alpha = 90^{\circ} \quad \text{,, } g_p = 9,832 \text{ (am Pole).}$$

Für Hannover ist $\alpha = 52^{\circ} 23'$, daher $g_{\alpha} = 9,813$.

Da wir das Gewicht eines Liters Wasser (bei 4° C.) unter 45° geographischer Breite als Kräfteinheit (Kilogramm) bezeichnet haben, so beträgt das Gewicht dieses Körpers am Äquator

$$9,780 : 9,806 = 0,997 \text{ kg, am Pole } 9,832 : 9,806 = 1,003 \text{ kg.}$$

Vorstehende Formeln und Zahlen gelten für die Höhe des Meeresspiegels. Die Fallbeschleunigung in einer Höhe von h Metern über dem Meeresspiegel wird dann genau genug gefunden, indem man nach S. 60 die vorstehenden Werte noch mit $(1 - 2h : r)$, oder, wenn man $r = 6370000 \text{ m}$ setzt, mit $1 - 0,00000032 h$ multipliziert. Dann wird (genau genug) $g_{\alpha} = 9,806 - 0,026 \cos \alpha - 0,000003 h$. Auf dem Brocken unter $51^{\circ} 50'$ geographischer Breite und in etwa 1140 m Meereshöhe ist $g_{\alpha} = 9,809$, in Ilsenburg am Fuße des Brockens (260 m Meereshöhe) $9,811$. Der Unterschied ist also nur gering.

Zweite Abteilung.

Mechanik starrer Körper.

1. Einleitung.

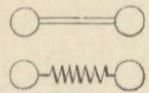
Einen Körper denken wir uns als aus sehr vielen Massenpunkten zusammengesetzt, die so miteinander in Verbindung stehen, daß sie gegenseitig auf ihre Bewegung einwirken können, daß sie also gegenseitig Kräfte aufeinander ausüben können. Diese Kräfte, mit welchen die einzelnen Massenpunkte eines Körpers gegenseitig aufeinander einwirken, heißen innere Kräfte des Körpers, im Gegensatze zu den äußeren Kräften, welche von anderen Körpern herrühren.

Die Verbindung zwischen den einzelnen Massenpunkten ist bei verschiedenen Körpern eine verschiedenartige. Wir haben zunächst feste Körper zu unterscheiden von nicht festen Körpern. Bei den festen Körpern setzen die einzelnen Massenpunkte einer jeden Änderung der Form des Körpers einen Widerstand entgegen. Die nicht festen Körper heißen flüssige Körper, zu denen im besonderen auch die gasförmigen Flüssigkeiten zu rechnen sind. Bei diesen zeigen die Massenpunkte keinen Widerstand gegen Formänderung im allgemeinen, sondern im wesentlichen nur einen solchen gegen Zusammendrängung auf einen kleineren Rauminhalt.

Denkt man sich die Massenpunkte eines festen Körpers derartig miteinander verbunden, daß die inneren Kräfte jede, auch noch so geringe Formänderung, um so mehr also gar eine Zerstörung, verhindern, so gelangt man zu dem Begriffe vollkommen fester oder starrer Körper. Solche starren Körper gibt es in Wirklichkeit nicht; vielmehr erleidet jeder wirkliche feste Körper unter Einwirkung äußerer Kräfte eine gewisse Formänderung, deren Art und Größe von den äußeren Kräften und von der Beschaffenheit des Körpers abhängt. Die inneren Kräfte treten bei äußeren Einwirkungen in Wirklichkeit mit allmählich zunehmender Größe auf,

und erst nach dem Eintreten einer gewissen Formänderung sind sie zu solcher Größe angewachsen, daß sie nun eine weitere Änderung verhindern können. Überschreitet aber die Größe der äußeren Kräfte gewisse Grenzen, so tritt eine Zerstörung des Körpers ein. Diese wirklich vorkommenden festen Körper nennt man, im Gegensatz zu den nur gedachten starren Körpern, elastisch feste Körper. Den Unterschied beider kann man sich grobsinnlich vorstellen, indem man (Fig. 95) zwei Kugeln das eine Mal durch eine steife Stange, das andere Mal durch eine nachgiebige Schraubenfeder verbunden denkt. Sucht man mit den Händen die Entfernung der beiden Kugeln zu verändern, so wird dies in dem ersten Falle durch die inneren Kräfte verhindert, in dem zweiten nur in gewissem Grade erschwert.

Fig. 95.



Bei sehr vielen Anwendungen der Mechanik hat nun die Ermittlung der Formänderung eines Körpers oder die Frage nach seiner Festigkeit keinen Wert. In solchen Fällen kann man daher zur Vereinfachung der Aufgaben die Körper als starre betrachten. In anderen Fällen aber wird gerade nach der Festigkeit und der Formänderung der Körper gefragt; dann muß man sie als elastisch fest behandeln. Es wird sich aber zeigen, daß man sehr viele Ergebnisse der Mechanik starrer Körper in der Mechanik elastisch fester Körper verwerten kann.

2. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte.

Die Zusammensetzung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkte ist bereits in Abteilung I Ziffer 6 erörtert. Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich die dort angegebenen Regeln auch dann anwenden, wenn die zu einer Mittelkraft zu vereinigenden Kräfte nicht unmittelbar einen gemeinsamen Angriffspunkt haben. Wir stützen uns dann auf folgenden, ohne weiteres einleuchtenden und mit der Erfahrung völlig übereinstimmenden.

Grundsatz: Zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte, deren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen, und die in zwei beliebigen Punkten dieser Geraden an

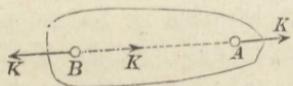
einem starren Körper angreifen, haben auf die Bewegung des Körpers keinen Einfluß, heben sich gegenseitig auf, halten sich im Gleichgewicht und umgekehrt, sollen zwei Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen, so müssen sie gleich und entgegengesetzt gerichtet sein und mit ihren Richtungslinien in dieselbe Gerade fallen. (Fig. 96.)

Fig. 96.



In der Mechanik des Massenpunktes war eine Kraft durch Größe und Richtung gegeben; jetzt kommt aber auch noch diejenige Stelle des Körpers in Betracht, an welcher die Kraft angreift. Bei Kräften am starren Körper genügt statt dessen schon die Kenntnis irgendeines Punktes der Richtungslinie einer Kraft, oder ihre Lage, zur Beurteilung ihrer Wirkung, da man jeden Punkt der Richtungslinie einer Kraft als ihren Angriffspunkt behandeln kann. Denn: greift eine Kraft

Fig. 97.

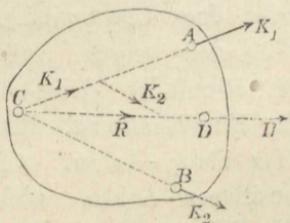


K (Fig. 97) an dem Punkt A eines Körpers an und ist B ein beliebiger, demselben starren Körper angehöriger Punkt der Richtungslinie von K , so kann man an dem Massenpunkte B zwei in die Gerade AB fallende, entgegengesetzte Kräfte K anbringen, ohne im Bewegungszustande des Körpers etwas zu ändern. Da aber nach dem vorstehenden Satze die in A angreifende Kraft K mit der entgegengesetzten im Punkte B sich aufhebt, so bleibt als gleichwertig mit der ursprünglich gegebenen die in B angreifende Kraft gleicher Größe und Richtung übrig.

Zusammensetzung zweier Kräfte mit sich schneidenden Richtungslinien.

Die gegebenen Kräfte K_1 und K_2 (Fig. 98) mit den Angriffspunkten A und B lassen sich nach vorstehendem Satz an den Schnittpunkt C der Richtungslinien verlegen und lassen sich hier durch eine Mittelkraft R nach der Lehre über die

Fig. 98.



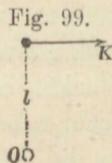
Zusammensetzung der Kräfte am einfachen Punkt ersetzen. Diese

Mittelkraft R darf dann aber wiederum als in irgendeinem Punkte D ihrer Linie eingreifend gedacht werden. Dabei ist es gleichgültig, ob der Schnittpunkt C der Kraftlinien dem Körper angehört oder nicht, weil die in D angreifende Kraft R den gegebenen K_1 und K_2 in A und B völlig gleichwertig ist.

Ist aber der Schnittpunkt C der Kraftlinien wegen ungünstiger Lage nicht benutzbar, so kann man Größe, Richtung und Sinn der Mittelkraft R leicht finden, indem man das vorhin bei C gezeichnete Krafteck in A , in B oder an einer beliebigen Stelle zeichnet; zur Auffindung der richtigen Lage von R , die oben durch C bestimmt war, kann man entweder geometrische Beziehungen benutzen, oder mit besonderem Vorteil einen Satz der Mechanik, den wir jetzt entwickeln wollen, nämlich den Satz der statischen Momente von Kräften.

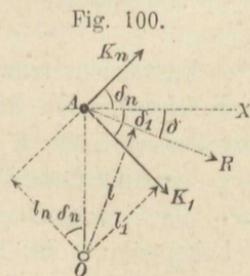
3. Satz der Drehmomente der Kräfte.

Ist K eine in der Bildebene wirkende Kraft, O eine Achse rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 99), so daß also Kraftlinie und Achse sich im Raume rechtwinklig kreuzen; dann nennt man das Produkt Kraft mal Hebelarm oder Kl das Drehmoment oder statische Moment der Kraft in bezug auf die Achse O . Der Hebelarm ist die rechtwinklige Entfernung der Kraft von der Achse.



Momentum ist (wahrscheinlich) eine Abkürzung von Movimentum und bedeutet Bewegungsmittel: Drehmoment bedeutet also „Mittel zur Erzeugung einer Drehbewegung“.

Greifen an demselben Massenpunkt A mehrere in der Bildebene liegende Kräfte K_1 und K_n an, deren Mittelkraft R ist (Fig. 100), und sind l_1 , l_n , l die bezüglichen Hebelarme, von der Achse oder dem Drehpunkt O aus gemessen, so läßt sich zeigen, daß das Moment der Mittelkraft R gleich der Momentensumme der Einzelkräfte ist. Betrachtet man nämlich AO als y -Achse, AX nach rechts als positive x -Achse, welche mit den Kräften die Neigungswinkel δ_1 , δ_n und δ bildet, so ist nach der Figur $l_n = OA \cos \delta_n$, ebenso $l_1 = OA \cos \delta_1$, $l = OA \cos \delta$, so daß



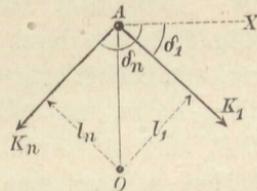
man die Momente auch schreiben kann: $K_1 \cdot OA \cos \delta_1$, $K_n \cdot OA \cos \delta_n$ und $R \cdot OA \cos \delta$. Da aber nach der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte (S. 40)

$$R \cos \delta = K_1 \cos \delta_1 + \dots + K_n \cos \delta_n,$$

so folgt, wenn man allen Gliedern dieser Gleichung den Faktor OA hinzufügt, ohne weiteres, daß das Moment von R gleich ist der Summe der Momente der Kräfte K .

In Figur 99 waren sämtliche $\cos \delta$ positiv. In Figur 101 aber haben $\cos \delta_1$ und $\cos \delta_n$ verschiedene Vorzeichen, so daß in der Gleichung $R \cos \delta \cdot AO = \sum K \cos \delta \cdot AO$

Fig. 101.



auf der rechten Seite Summanden von verschiedenen Vorzeichen sich ergeben. Die Bedeutung dieses Unterschiedes ist aus der ursprünglichen Erklärung des Momentes Kl nicht ohne weiteres ersichtlich; sie tritt aber hervor, wenn man die drehende Wirkung der Kräfte, auf die es beim Momente wesentlich ankommt, ins Auge faßt. Denkt man sich den Punkt A mit der Achse O in starrer Verbindung und O als feste Drehachse, so haben in Fig. 100 die Kräfte K_1 und K_n übereinstimmend einen Drehsinn  rechts herum, im Sinne der Drehung des Uhrzeigers, während in Figur 101 der Drehsinn der Kräfte verschieden ist. Den Drehsinn rechts herum  pflegt man als positiv zu bezeichnen, die entsprechenden Momente ebenfalls positiv zu setzen, und umgekehrt, doch ist diese Festsetzung eine willkürliche; man könnte auch das Entgegengesetzte wählen. Verschiedener Drehsinn kennzeichnet verschiedene Vorzeichen der Momente, aber welche Richtung man positiv einführen will, steht frei. Es ist jedoch nützlich, sich an vorstehende feste Regel zu binden, damit man bei der Aufschreibung einer Momentensumme nicht unnötig zu überlegen braucht. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ist dann bei beliebig vielen Kräften in einer Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkte

$$Rl = \pm K_1 l_1 \pm K_2 l_2 + \dots \pm K_n l_n$$

oder kürzer geschrieben

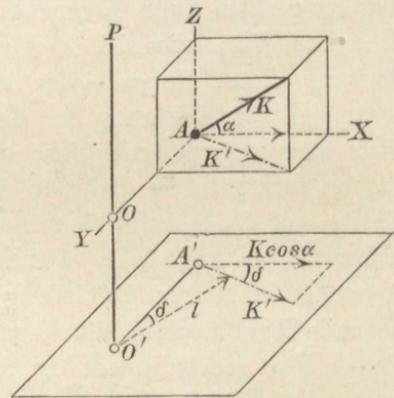
$$1) \quad Rl = \sum Kl.$$

Liegen die an einem Punkt A angreifenden Kräfte nicht in einer zur Achse OP (Fig. 102) rechtwinkligen Ebene, so ist die bisherige

Deutung des Momentes nicht mehr brauchbar. Mit Rücksicht darauf aber, daß das Drehmoment ein Maß für die drehende Wirkung der Kräfte sein soll, was allerdings erst später, gelegentlich der Betrachtung der Drehbewegung um eine feste Achse näher erläutert werden kann, bezeichnet man als Moment einer Kraft K in bezug auf eine beliebige Achse OP das Moment derjenigen Kraft K' , welche sich als Projektion von K auf eine zur Achse OP rechtwinklige Ebene ergibt. Es läßt sich zeigen, daß auch in dieser allgemeineren Bedeutung das Moment der Mittelkraft gleich der Momentensumme der Einzelkräfte ist.

Betrachtet man nämlich (Fig. 102) die durch A winkelrecht zu OP gelegte Gerade AO als y -Achse, legt AZ parallel zu OP , und AX winkelrecht zu beiden, so kann man K mittels eines Parallelepipeds in bekannter Weise zerlegen in $K \cos \alpha$, $K \cos \beta$, $K \cos \gamma$, von denen die beiden ersteren unten in der Projektionsebene in voller Größe erscheinen. K' bedeutet die Mittelkraft dieser

Fig. 102.



beiden. In der Projektionsebene aber kann das Moment $K'l$ von K' auch in der Form $K' \cdot OA' \cdot \cos \delta$ (Fig. 102) geschrieben werden, oder, weil $K' \cos \delta$ die Seitenkraft in der Richtung AX , $= K \cos \alpha$ bedeutet, auch in der Form $K \cdot \cos \alpha \cdot OA$. Greifen nun im Punkt A beliebig viele Kräfte K an, deren Mittelkraft R ist, so kann man in gleicher Weise das Moment von R in bezug auf OP in die Form $R \cos \alpha \cdot OA$ bringen. Weil nun noch $R \cos \alpha = \sum K \cos \alpha$, so wird auch

$$R \cos \alpha \cdot OA = \sum K \cos \alpha \cdot OA,$$

und man hat den Satz:

Für Kräfte an einem Punkt ist das Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente der Einzelkräfte.

Da das Moment der Kraft K zu $M = K \cos \alpha \cdot OA$ gefunden wurde, so wird es gleich Null, wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, d. h. wenn K

rechtwinklig zu AX steht, sich also in der yz -Ebene befindet, der auch die Achse OP angehört. Das Moment einer Kraft wird also Null in bezug auf eine Achse, die mit ihr in derselben Ebene liegt, d. h. sie schneidet oder ihr parallel ist.

Eine Kraft, deren Projektion auf die Drehungsebene $= 1 \text{ kg}$, gibt mit einem Hebelarme $= 1 \text{ m}$ das Moment Eins. Diese Momenteneinheit nennt man, wie die Arbeitseinheit, Meterkilogramm; in ihrer Bedeutung aber ist sie von der Arbeitseinheit verschieden.

Für Momentengrößen wählen wir den deutschen Buchstaben \mathfrak{M} , weil der lateinische Buchstabe M für die Masse eines Körpers vorbehalten werden muß.

Zusatz: Der Satz der Drehmomente ist aus dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte hergeleitet. Da ein entsprechender Parallelepiped-Satz auch von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gilt (S. 21 und 23), so ist der Satz der Drehmomente nicht nur für Kräfte, sondern auch für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gültig.

Nummehr kann die Lage der Mittelkraft R von zwei in der Zeichenebene liegenden Kräften auch gefunden werden, wenn der Schnittpunkt C in Fig. 98 S. 103 nicht benutzbar ist.

Man ermittelt zunächst (Fig. 103) Größe, Richtung und Sinn von R , indem man an beliebiger Stelle, z. B. in einer Hilfsfigur aus K_1 und K_2 einen Kräftezug bildet, dessen Schlußseite $= R$. Sodann wählt man eine beliebige Achse O , rechtwinklig zur Zeichenebene, oder, was gleichbedeutend ist, einen Drehpunkt O in derselben, ermittelt die rechtwinklig gemessenen Hebelarme l_1 und l_2 der Kräfte und bedenkt, daß

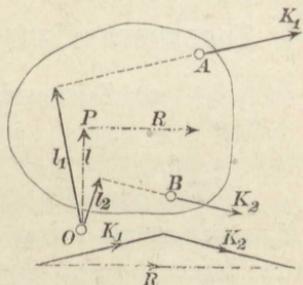
$$Rl = K_1 l_1 + K_2 l_2 \text{ sein muß.}$$

In der Figur haben K_1 und K_2 beide den Drehsinn rechts herum, weshalb ihre Momente positiv angesetzt wurden. R muß dann an dem Hebelarm

$$l = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2}{R}$$

ebenfalls rechts herum drehen. Legt man daher durch O eine Rechtwinklige zur Schlußseite R des Kräftezuges und trägt auf ihr

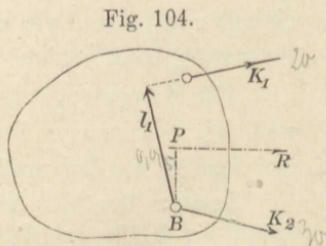
Fig. 103.



die Länge $l = OP$ ab, so muß die endgültige Lage von R durch P gehen, denn es dreht dann R an dem Arm OP , und zwar rechts herum, wie erforderlich war. Da man aber O ganz beliebig wählen kann, so wird man ihm eine solche Lage geben, daß die Bestimmung der Lage von R möglichst einfach wird. Man wähle (Fig. 104) irgendeinen Punkt der Richtungslinie von K_2 , z. B. B zum Drehpunkte, dann hat K_2 den Hebelarm $l_2 = 0$, und es wird

$$l = \frac{K_1 l_1}{R} = BP,$$

womit die Lage von R bestimmt ist. Für einen Drehpunkt auf der Richtungslinie der Mittelkraft R wird deren Moment und folglich auch die Summe der Momenten von K_1 und K_2 gleich Null, d. h. in bezug auf Punkte der Mittelkraft stehen die Einzelkräfte im Drehungsgleichgewicht.



Beispiel: $K_1 = 20$ kg; $K_2 = 30$ kg (dargestellt durch 2 bzw. 3 cm); sie schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$; $l_1 = 1,5$ cm = $0,015$ m. Dann wird

$$R = \sqrt{400 + 900 + 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 0,866} = 10 \sqrt{23,4} = 48,4 \text{ kg.}$$

$$l = 20 \cdot 0,015 : 48,4 = 0,0062 \text{ m} = 6,2 \text{ mm.}$$

4. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in einer Ebene.

a) Zeichnerisches (graphisches) Verfahren.

Kräfte verschiedener Richtung.

Die zu einer Mittelkraft zu vereinigenden Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 usw. mögen ohne gemeinsamen Angriffspunkt zerstreut in einer Ebene liegen. (Fig. 105 u. 105a.) Man verschiebe zunächst zwei derselben K_1 und K_2 in ihrer Richtung bis zum Schnittpunkte a ihrer Richtungslinien, vereinige sie hier zu einer Mittelkraft R_1 , verschiebe diese und die folgende Kraft K_3 in ihren Richtungen bis zum Schnittpunkte b und setze sie hier zu einer Mittelkraft R_2 zusammen. In gleicher Weise setze man R_2 mit K_4 zu einer Mittelkraft R_3 usw. zusammen. — Größe und Richtung der Mittelkräfte R_1, R_2, R_3 usw. lassen sich auch

und zwar bequemer, in einer Hilfsfigur 105a ermitteln, indem man sie durch Parallelverschiebung zu einem Krafteck aneinander reiht, so daß die Pfeilrichtungen einander folgen. (Vergl. S. 41.)

Die Linien ef , eg und eh stellen die Mittelkräfte R_1 , R_2 und R_3 nach Größe und Richtung dar. Um ihre Lage zu finden, braucht man nur zu beachten, daß R_1 durch den Schnittpunkt a von K_1 und K_2 , R_2 durch den Schnittpunkt b von K_3 und R_1 usw. gehen muß. Man zieht von a aus $ab \parallel ef$, $bc \parallel eg$ und $R_3 \parallel eh$, so erhält man Lage und Richtungslinien der Mittelkräfte.

Kehrt man die Mittelkraft R_3 um, so hält sie sich mit den gegebenen Kräften K_1 , K_2 , K_3 und K_4 an dem Körper im Gleichgewicht. Denkt man sich die Punkte a , b , c , d

durch ein Seil verbunden, so würde auch durch Vermittlung desselben die Kraft $-R_3$ die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht halten. Den Linienzug abc nennt man daher ein Seileck (Seilpolygon) der Kräftegruppe $K_1 K_2 K_3$ usw., oder auch deren Mittelkraftpolygon. Die Anwendbarkeit des vorbeschriebenen Verfahrens hat zur Voraussetzung, daß die Schnittpunkte a , b , c usw. der Kräfte K_1 und K_2 , K_3 und R_1 usw. auf die Zeichentafel fallen. Vielfach wird dies nicht, oder doch nicht bei allen Punkten zutreffen. Für diesen allgemeinen Fall ist das Verfahren wie folgt umzugestalten; vergl. Fig. 106 und 106a:

Wir zerlegen K_1 im Punkte a in beliebig gerichtete Seitenkräfte I und II . Im Schnittpunkte b der Kraftlinien II und K_2 zerlegen wir K_2 in Seitenkräfte $-II$ und III ; ebenso im Schnitt-

Fig. 105.

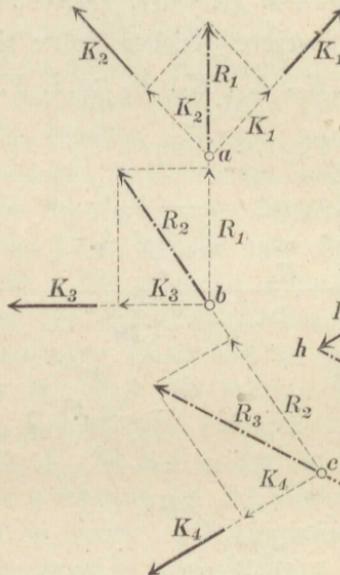
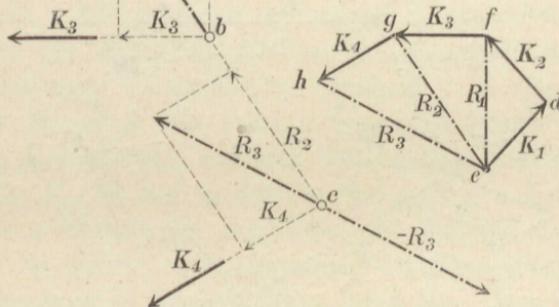


Fig. 105 a.



punkte e der Kraftlinien III und K_3 letztere Kraft in die Seitenkräfte $-III$ und IV usw. Dann ist

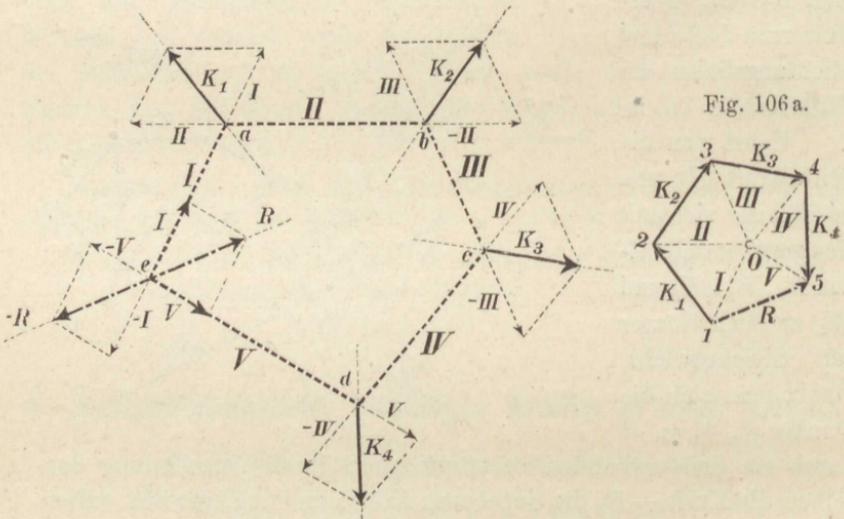
$$\begin{aligned} K_1 &\equiv I, II, \\ K_2 &\equiv -II, III, \\ K_3 &\equiv -III, IV, \\ K_4 &\equiv -IV, V \text{ usw.} \end{aligned}$$

und im Zusammenwirken aller Kräfte

$K_1, K_2, K_3, K_4 \equiv I, II, -II, III, -III, IV, -IV, V$,
oder, da die entgegengesetzt gleichen Kräfte sich aufheben

$$K_1, K_2, K_3, K_4 \equiv I, V.$$

Fig. 106.



Der Linienzug $abcde$ ist bestimmt durch die Wahl des Punktes a und der Richtungen der ersten beiden Seitenkräfte I und II . Bei zweckmäßiger Wahl dieser Bestimmungsstücke ist es unter allen Umständen leicht zu erreichen, daß die der gegebenen Kräftegruppe gleichwertigen, sie völlig ersetzenden Kräfte I und V in ihren Richtungslinien sich in einem auf die Zeichentafel fallenden Punkte e schneiden. Setzt man sie hier zu ihrer Mittelkraft R zusammen, so ist diese zugleich die Mittelkraft der gegebenen Kräftegruppe. Kehrt man diese um, so hält sie der gegebenen Kräftegruppe das Gleichgewicht, und diese Wirkung kommt auch zu

stande, wenn man die Kräfte, statt an einem Körper, an einem die Punkte a, b, c, d, e verbindenden Seile angreifen läßt. Der Linienzug $abcde$ verdient danach wieder die Bezeichnung Seileck.

Bei dem hier gewählten Richtungssinn der Kräfte K_1, K_2 usw. streben diese die Eckpunkte a, b, c, d, e des Seilecks voneinander zu entfernen, die Seilecksseiten zu zerreißen. — Kehrt man den Richtungssinn der gegebenen Kräfte um, so bleibt der Linienzug $abcde$ derselbe. Jetzt aber streben die Kräfte, die Punkte a, b, c, d, e einander zu nähern, die Seilecksseiten zu zerdrücken. Demgegenüber können die Punkte nicht mehr durch ein Seil, sondern nur durch steife, in den Punkten a, b, c, d, e durch Gelenke miteinander verbundene Stangen in ihrer Lage erhalten werden. Für diesen Fall würde daher die Bezeichnung Gelenkviereck zutreffender sein, doch hat sich der Name Seileck auch für beliebige Kraftrichtungen eingebürgert. Die materiell gedachten Seilecksseiten haben dabei allgemein den Zweck zu erfüllen, die Eckpunkte in unveränderlichen Entfernungen voneinander zu erhalten.

Die unmittelbare Zeichnung des Seilecks zwecks Zusammensetzung der gegebenen Kräftegruppe zu ihrer Mittelkraft erfordert die Zerlegung der Kräfte K_1, K_2 usw. in den Punkten a, b, c und d nicht; sie ist hier nur geschehen, um das Wesen der Methode um so klarer hervortreten zu lassen. Bei Anwendung derselben führt man die Zerlegung bequemer in einer Hilfsfigur 106a aus. Durch Parallelverschiebung werden die Kräfte zu einem ununterbrochenen Linienzuge, dem Krafteck 1, 2, 3, 4, 5 vereinigt. Zieht man jetzt durch die Endpunkte 1 und 2 der Kraft K_1 in geeigneten Richtungen die Linien 1-0 und 0-2, so kann man diese als die Seitenkräfte I und II der Kraft K_1 ansehen. Verbindet man weiter den Punkt 0 mit 3, so stellen die Linien 2-0 = $-II$ und 0-3 = III die Seitenkräfte der Kraft K_2 usw. dar. In den Linien 0-2 und 2-0, 0-3 und 3-0 usw. erhält man die in den Seilecksseiten ab, bc usw. sich aufhebenden Kräfte II und $-II, III$ und $-III$ usw. Die Linien 1-0 und 0-5 drücken die allein zurückbleibenden, der gegebenen Kräftegruppe gleichwertigen Hilfskräfte I und V aus. Ihre Mittelkraft 1-5 = R , die Schlußlinie des Kraftecks, ist auch die Mittelkraft der gegebenen Kräftegruppe. Den Punkt 0 nennt man den Pol des Kraftecks, die Linien 0-1, 0-2 usw. die Pol-

strahlen; sie stellen, wie bemerkt, in ihrer Richtung und Größe die Hilfskräfte (Seilkräfte) I , II usw. dar.

Durch die Wahl der Richtungen der ersten beiden Seitenkräfte I und II ergab sich im Schnittpunkt beider der Pol O . Durch eine geeignete Wahl des Poles O wird umgekehrt Richtung und Größe sämtlicher Polstrahlen bezw. Hilfskräfte I , II , III usw. festgelegt.

Die unmittelbare Anwendung der Methode gestaltet sich danach einfach wie folgt:

Man zeichnet das Krafteck 1-2-3-4-5 und erhält in der Schlußlinie 1-5 desselben die Mittelkraft R nach Größe und Richtung. Zur Bestimmung ihrer Lage zeichnet man das Seileck, indem man einen geeigneten Pol O wählt, die Polstrahlen I bis V zeichnet und von irgendeinem Punkte a einer der Kraftlinien, z. B. K_1 ausgehend, die Seilecksseite I parallel dem Polstrahl I , die Seilecksseite II parallel dem Polstrahl II bis zum Schnittpunkte a mit K_2 usw. alle Seilecksseiten parallel den zugehörigen Polstrahlen zieht. Durch den Schnittpunkt e der ersten und letzten Seilecksseite I und V geht die Mittelkraft, und damit ist auch ihre Lage bestimmt.

Das einmal gezeichnete Krafteck und Seileck setzen uns ohne weiteres auch in die Lage, für einzelne Kräfte der Gesamtgruppe die Mittelkraft zu bestimmen. Beispielsweise ist die Mittelkraft der Kräfte K_2 und K_3 nach Richtung und Größe gleich der Linie 2-4 bestimmt. Der Lage nach muß sie durch den Schnittpunkt der die Kräfte K_2 und K_3 einschließenden Seilecksseiten II und IV gehen.

Bei Anwendung des vorstehend beschriebenen Verfahrens erscheinen die Kräfte in ihrer Lage (im Seileck) nur in ihren Richtungslinien, im Krafteck dagegen nach Richtung und Größe.

Parallelkräfte.

Das vorbeschriebene Verfahren läßt sich ohne weiteres auch auf Parallelkräfte anwenden. Das Krafteck nimmt in diesem Falle die Form einer geraden Linie an. Haben alle Kräfte gleichen Richtungssinn, so reihen sie sich in derselben Richtung aneinander

und die Schlußlinie des Kräftecks, die Mittelkraft, stellt sich als Summe der Einzelkräfte dar. (Fig. 107 und 107a.)

Fig. 107.

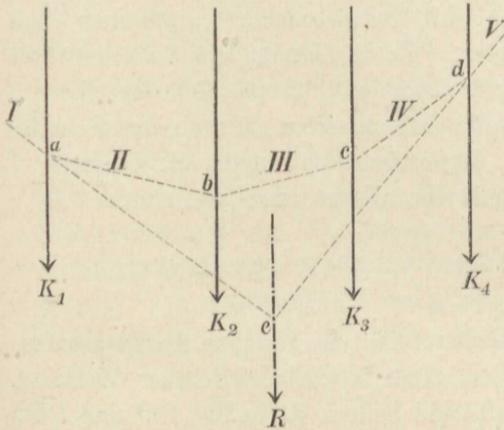
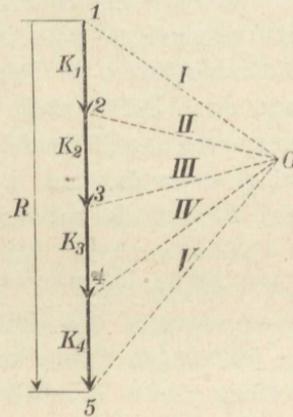


Fig. 107a



Haben die Kräfte teils entgegengesetzten Richtungssinn (Fig. 108 und 108a), so decken sie sich im Kräfteck teilweise; die Beiträge der Einzelkräfte zur Mittelkraft fallen z. T. negativ aus. In der Fig. 108a ist beispielsweise die Kraft K_1 , im Kräfteck durch die Strecke 1-2 dargestellt, abwärts, die Kraft K_2 , durch die Strecke 3-4

Fig. 108.

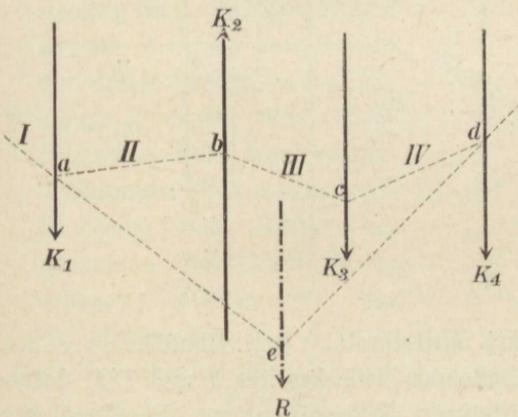
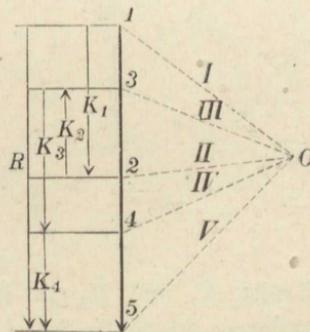


Fig. 108a.



dargestellt, aufwärts gerichtet. Die Mittelkraft beider, die Strecke 1-3, ist gleich ihrer Differenz. Die abwärts gerichteten Kräfte K_3 und K_4 reihen sich in den Strecken 3-4 und 4-5 an und die Schluß-

linie 1-5 ist die Mittelkraft der ganzen Gruppe. Bei der Zeichnung des Seilecks Fig. 108 ist auf die Reihenfolge der Polstrahlen zu achten. Der besseren Übersicht wegen empfiehlt es sich, die einzelnen Kraftstrecken im Krafteck begrenzenden Punkte und die zugehörigen Polstrahlen mit entsprechenden arabischen und römischen Ziffern zu bezeichnen. Zur Zeichnung des Seilecks wählt man einen Pol O , zieht die Polstrahlen und parallel denselben in entsprechender Reihenfolge die Seilecksseiten. Durch den Schnittpunkt e der äußeren, d. h. der ersten und letzten Seilecksseite I und IV , ist die Mittelkraft R ihrer Lage nach bestimmt.

✓ Zwei Parallelkräfte von entgegengesetztem Richtungssinn — Kräftepaar.

Besondere Aufmerksamkeit verdient das Ergebnis der Zusammensetzung zweier Parallelkräfte. Das in vorbeschriebener Weise zu den Kräften gezeichnete Kraft- und Seileck ist in Fig. 109 und 109a dargestellt. Die Schlußlinie 1-3 des Kraftecks, die Differenz der

Fig. 109.

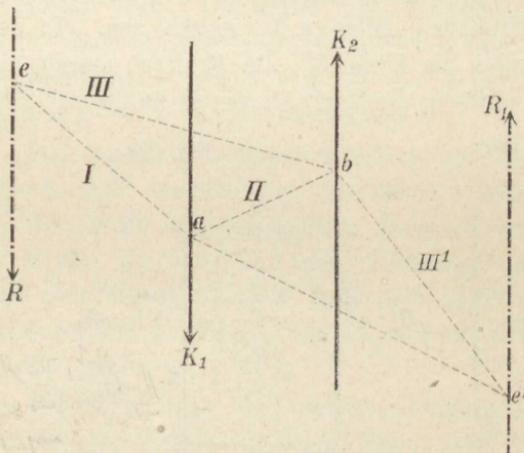
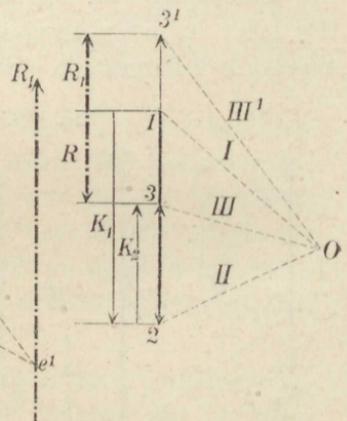


Fig. 109a.



Kräfte K_1 und K_2 ist ihre Mittelkraft. Der Schnittpunkt e der äußeren, die Kräfte einschließenden Seilecksseiten I und III , durch welchen die Lage der Mittelkraft R bestimmt ist, liegt auf der Seite der größeren Kraft K_1 . Denken wir uns K_2 allmählich größer und endlich gleich K_1 werdend, so nähert sich im Krafteck der Punkt 3 allmählich dem Punkte 1 und fällt endlich mit 1 zusammen:

ebenso der Polstrahl 0-3 mit 0-1. Die Schlußlinie 1-3, die Mittelkraft, wird 0, die äußeren Seilecksseiten *I* und *III* werden parallel, ihr Schnittpunkt *e* rückt in unendliche Ferne und mit ihnen die Mittelkraft. In diesem Grenzfall, gekennzeichnet durch eine Mittelkraft $R = 0$ in unendlicher Ferne, nennen wir die beiden Kräfte ein „Kräftepaar“. Die mechanischen Eigentümlichkeiten eines solchen werden weiter unten erörtert werden.

Lassen wir K_2 noch weiter wachsen und größer werden als K_1 , so rückt der Punkt 3 im Kräfteck über 1 hinaus nach 3', die Mittelkraft 1-3 wechselt ihr Vorzeichen, der Schnittpunkt *e* der Seilecksseiten *I* und *III* bewegt sich durch die Unendlichkeit und tritt auf die rechte Seite der Kraft K_2 , der nun größeren beider Kräfte. Die Mittelkraft zweier Parallelkräfte entgegengesetzten Richtungssinnes liegt also stets außerhalb beider Kräfte und zwar auf der Seite der größeren derselben.

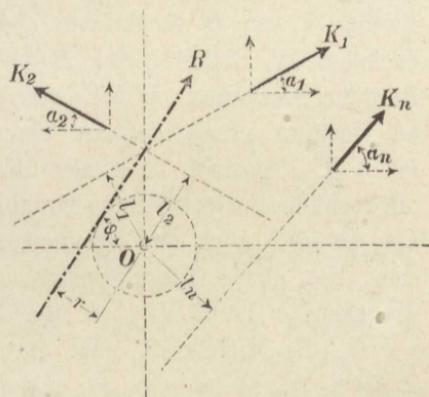
b) Rechnerisches (analytisches) Verfahren.

Kräfte verschiedener Richtung.

Wir beziehen die gegebene Kräftegruppe auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Fig. 110). Die Lage der Einzelkräfte K_1, K_2 usw. sei gegeben durch die Neigungswinkel α_1, α_2 usw., welche ihre Richtungslinien mit der *X*-Achse einschließen und durch die senkrechten Abstände l_1, l_2 usw. dieser Richtungslinie vom Koordinaten-Nullpunkte. Um zunächst die Richtung und Größe der gesuchten Mittelkraft R zu erhalten, denken wir uns die Einzelkräfte K_1, K_2 usw. in Seitenkräfte X_1, X_2 usw. parallel zur *X*-Achse und Y_1, Y_2 usw. parallel zur *Y*-Achse zerlegt, so daß

$$\begin{aligned} X_1 &= K_1 \cos \alpha, & X_2 &= K_2 \cos \alpha_2 \text{ usw. und} \\ Y_1 &= K_1 \sin \alpha, & Y_2 &= K_2 \sin \alpha_2 \text{ usw. wird.} \end{aligned}$$

Fig. 110.



Ist dann X die Mittelkraft der horizontalen und Y diejenige der vertikalen Seitenkräfte, so muß sein

$$X = X_1 + X_2 + \dots = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \dots = \sum K \cos \alpha$$

und $Y = Y_1 + Y_2 + \dots = K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2 + \dots = \sum K \sin \alpha$.

Die Mittelkraft R der zueinander senkrechten Kräfte X und Y ist zugleich die Mittelkraft der gegebenen Kräftegruppe. Ihrer Größe nach ergibt sich dieselbe zu

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\sum K \cos \alpha)^2 + (\sum K \sin \alpha)^2}$$

und für ihren Richtungswinkel φ gegen die X -Achse gilt die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum K \sin \alpha}{\sum K \cos \alpha}.$$

Es bleibt die Lage von R zu bestimmen. Dieses soll mit Hilfe des Satzes von den statischen Momenten geschehen. Ist r der senkrechte Abstand der Mittelkraft R vom Koordinaten-Nullpunkte, so muß in bezug auf diesen als Drehpunkt die Momentengleichung bestehen

$$5) \quad R \cdot r = K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + K_4 l_4 + \dots = \sum K l$$

und daraus

$$6) \quad r = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + K_4 l_4 + \dots}{R} = \frac{\sum K l}{\sqrt{(\sum K \cos \alpha)^2 + (\sum K \sin \alpha)^2}}.$$

Die Mittelkraft R muß also ihrer Lage nach einen Kreis vom Radius r , um O beschrieben, berühren. Diese Berührung kann, nachdem die Richtung von R oben bereits festgelegt ist, in zwei Punkten geschehen. Welche von beiden Tangentenlagen die richtige ist, darüber entscheidet das Vorzeichen von $\sum K l$ in Gleichung 5. Ist $\sum K \cdot l$ positiv, üben also die Kräfte K_1, K_2 usw. insgesamt ein rechtsherum gerichtetes Drehbestreben in bezug auf den Punkt O aus, so muß auch das Drehbestreben von R rechtsherum gerichtet sein; die obere Tangentenlage stellt die Lage von R dar und umgekehrt. Ist $\sum K l = 0$ und $R > 0$, so wird nach Gleichung 6 $r = 0$, die Mittelkraft geht durch O . Ist dagegen $R = 0$, aber $\sum K l > 0$, so ist $r = \infty$; die Gleichung 5 nimmt die Form an $0 \cdot \infty = \sum K l$. Die Kräftegruppe hat die Wirkung eines Kräftepaares. Der mechanische Wert der Kräftegruppe besteht in diesem Falle lediglich in einem Drehmoment. Wird gleichzeitig

$$R = \sqrt{(\sum K \cos \alpha)^2 + (\sum K \sin \alpha)^2} = 0$$

und $\sum Kl = 0$, so verschwindet auch das Moment und die Kräftegruppe hat keinerlei mechanische Wirkung auf den Körper, die Kräfte stehen miteinander im Gleichgewicht. Damit aber $R = 0$ sei, muß $\sum K \cos \alpha = 0$ und $\sum K \sin \alpha = 0$ sein.

Die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften in einer Ebene lauten also:

$$\sum K \cos \alpha = 0, \quad \sum K \sin \alpha = 0, \quad \sum K \cdot l = 0,$$

oder, wenn die X -Achse wagerecht, die Y -Achse lotrecht angenommen wird, in Worten:

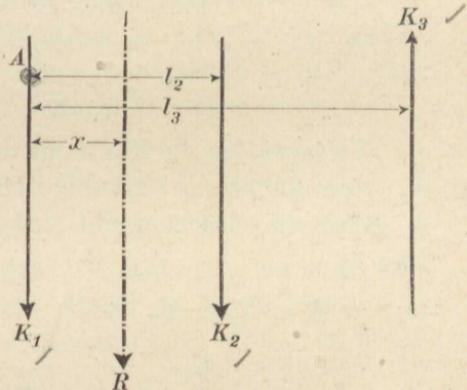
Die algebraischen Summen aller wagerechten und aller lotrechten Seitenkräfte je für sich genommen und die algebraische Summe aller Momente der Kräftegruppe in bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

✓ Parallelkräfte.

Es soll jetzt eine beliebige Anzahl von Parallelkräften K_1, K_2, K_3 usw. verschiedenen Richtungssinnes (verschiedener Pfeilrichtung) zu ihrer Mittelkraft vereinigt werden. (Fig. 111).

Die Größe der Mittelkraft R ist nach den bezüglichen Ausführungen unter a gleich der algebraischen Summe der Kräfte und ihre Richtung parallel denselben.

Fig. 111.



1)
$$R = K_1 + K_2 - K_3 + \dots = \sum K.$$

Die Lage von R ergibt sich aus dem Satz der Drehmomente. Beziehen wir die diesem Satze entsprechende Momentengleichung, welche für jeden Punkt der Kraftebene gültig ist, der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber auf einen der Richtungslinie einer der Kräfte z. B. K_1 angehörigen Punkt A als Drehpunkt und bezeichnen den noch unbekanntenen senkrechten Abstand der Mittelkraft R von A mit x , siehe Fig. 111, so folgt

2)
$$R \cdot x = K_1 \cdot 0 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + \dots = \sum K \cdot l$$

R.a. = $\sum K \cdot l$

und daraus weiterhin

$$3) \quad x = \frac{K_1 \cdot 0 + K_2 l_2 - K_3 l_3 + \dots}{K_1 + K_2 - K_3 + \dots} = \frac{\Sigma \cdot K \cdot l}{\Sigma \cdot K}.$$

Je nach dem Vorzeichen von $\Sigma K \cdot l$ und $\Sigma \cdot K$ fällt x positiv oder negativ aus; liegt also R rechts oder links vom angenommenen Drehpunkte A .

Eine völlige Umkehrung des Richtungssinnes der Kräfte, mit welcher eine gleichzeitige Umkehrung des Drehsinnes der Einzelkräfte verknüpft ist, würde den Abstand x und also die Lage der Mittelkraft nicht ändern, sondern nur ihren Richtungssinn umkehren.

Für einen Drehpunkt auf der Richtung von R würde $x = 0$ und folglich auch $R \cdot x = \Sigma K \cdot l = 0$, d. h. die Kräfte halten sich also in bezug auf einen solchen Punkt das Drehungsgleichgewicht.

Beispiel: Für $K_1 = 300$ kg, $K_2 = 200$ kg, $K_3 = -100$ kg und $l_2 = 1,0$ m, $l_3 = 1,5$ m wird

$$x = \frac{300 \cdot 0 + 200 \cdot 1,0 - 100 \cdot 1,5}{300 + 200 - 100} = \frac{+ 50}{+ 400} = + 0,125 \text{ m.}$$

Für $l_2 = 0,5$ m und im übrigen dieselben Werte wird

$$x = \frac{- 50}{400} = - 0,125 \text{ m.}$$

Verschwanden die Kräfte bis auf zwei gleich gerichtete K_1 und K_2 , deren Entfernung l sei (Fig. 112), so gehen die Gleichungen 1 und 3 über in

$$4) \quad R = K_1 + K_2 \quad \text{und}$$

$$5) \quad x = \frac{K_2 l}{K_1 + K_2}.$$

Da der Quotient $\frac{K_2}{K_1 + K_2}$

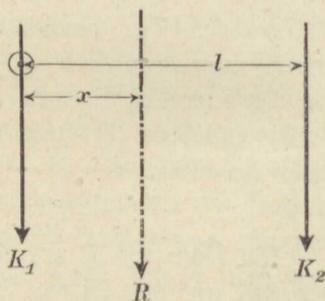
bei der Gleichsinnigkeit von K_1 und

K_2 stets positiv und kleiner als eins sein muß, so ist x stets positiv und kleiner als l , d. h. die Mittelkraft zweier gleichsinniger Parallelkräfte liegt stets zwischen denselben. Für $K_1 \geq K_2$ ist

$\frac{l \cdot K_2}{K_1 + K_2} \leq \frac{l}{2}$, d. h. die Mittelkraft liegt näher der größeren

Seitenkraft und in der Mitte beider, wenn sie einander gleich sind.

Fig. 112.



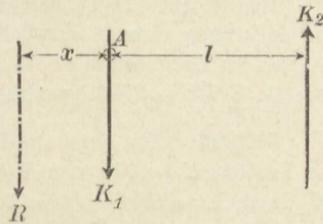
Keht die Kraft K_2 ihren Richtungssinn um (Fig. 113), so wird

$$6) \quad R = K_1 - K_2,$$

Fig. 113.

$$7) \quad x = \frac{-K_2 l}{K_1 - K_2}.$$

Ist dabei $K_1 > K_2$, so wird x negativ, d. h. die Mittelkraft R liegt außerhalb beider Kräfte und zwar auf der Seite der größeren. R ist gleichsinnig mit K_1 .



Ist $K_2 > K_1$, so wird nach Gleichung 6 R negativ, und gleichsinnig mit K_2 und nach Gleichung 7

$$x = \frac{-K_2 l}{-(K_2 - K_1)} = \frac{K_2 l}{K_2 - K_1}.$$

Da $\frac{K_2}{K_2 - K_1}$ positiv und größer als eins, so muß x stets positiv und größer als l sein, d. h. auch in diesem Falle liegt die Mittelkraft R außerhalb beider Kräfte und wiederum auf der Seite der größeren.

Denkt man sich den Fall $K_1 > K_2$ durch allmähliches Wachsen, von K_2 in den Fall $K_2 > K_1$ übergehend, so wird in dem Maße als K_2 sich der Größe von K_1 nähert, x im negativen Sinne immer größer und die Mittelkraft $R = K_1 - K_2$ rückt nach links in immer größere Ferne.

Für $K_1 = K_2$ wird nach den Gleichungen 6 und 7

$$R = 0, \quad x = \mp \infty;$$

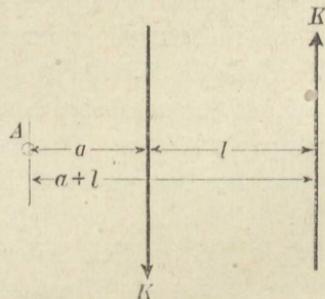
beide Kräfte bilden ein Kräftepaar. Sobald K_2 nur um ein Geringes größer wird als K_1 , rückt R auf die rechte Seite der Kräfte, bewegt sich also durch die Unendlichkeit. (Vergl. S. 115)

Für den Grenzfall $K_1 = K_2$ folgt aus Gleichung 7

Fig. 114.

$$(K_1 - K_2) x = 0 \cdot \infty = K_2 l.$$

Die Mittelkraft $R = 0$ am Hebelarm $x = \infty$ hat also das bestimmte endliche Moment $K_2 l$. Das gleiche Moment hat das Kräftepaar in bezug auf jeden Drehpunkt der Ebene, z. B. in bezug auf den Punkt A (Fig. 114)



$$M = K \cdot (a + l) - K \cdot a = K \cdot l.$$

Jedes Kräftepaar hat also eine Mittelkraft $= 0$, und der einzige mechanische Wert desselben ist sein Moment $K \cdot l$.

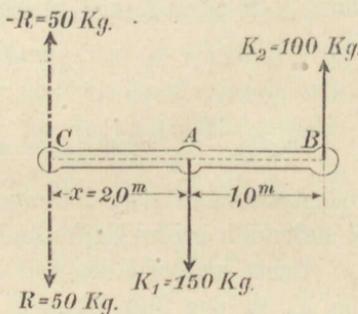
Der wesentliche Unterschied zwischen der Wirkung eines Kräftepaares und derjenigen anderer Parallelkräfte besteht darin, daß ein Kräftepaar, weil es keine im Endlichen liegende Mittelkraft hat, auch durch keine im Endlichen liegende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden kann.

Beispiel: Ein etwa stabförmiger Körper (Fig. 115) werde wie skizziert von Kräften $K_1 = 150 \text{ kg}$ und $K_2 = 100 \text{ kg}$ ergriffen. Die Mittelkraft beider ist dann $R = 150 - 100 = 50 \text{ kg}$ und deren Lage im Abstände

$$x = \frac{100 \cdot 1,0}{50} = 2,0 \text{ m}$$

links von A zu finden. Eine hier im Punkte C angebrachte Kraft -50 kg hält die Kräfte K_1 und K_2 im Gleichgewicht. Wird der Körper in C , wenn auch nur drehbar, festgehalten, so bleibt er in Ruhe. Die Momente der Kräfte K_1 und K_2 heben sich in bezug auf C als Drehpunkt auf ($-2 \cdot 150 + 3 \cdot 100 = 0$) und C hat einen Widerstand von -50 kg zu leisten. Für $K_1 = K_2 = 100 \text{ kg}$ rückt R in unendliche Ferne und wird gleich Null. Hält man den Körper jetzt in C oder in irgendeinem anderen im Endlichen liegenden Punkte lediglich drehbar fest, so üben die Kräfte K_1 und K_2 ein Moment $-2 \cdot 100 + 3 \cdot 100 = 100 \text{ mkg}$ auf ihn aus und werden ihm daher eine Drehbewegung mitteilen. Gleichgewicht ist nicht möglich.

Fig. 115.



5. Zerlegung einer Kraft in Seitenkräfte.

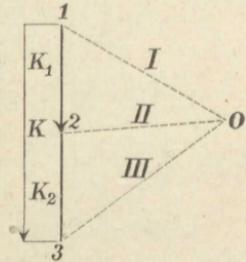
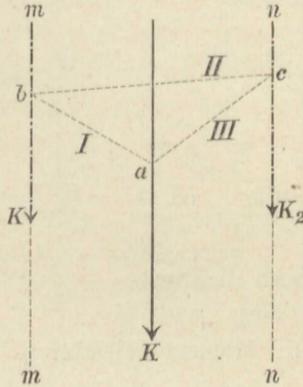
Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte.

Die Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte von gegebenen Richtungslinien ist nur möglich, wenn der Schnittpunkt dieser letzteren auf die Richtungslinie der zu zerlegenden Kraft fällt, denn andernfalls würde die Mittelkraft der gesuchten Seitenkräfte ihrer Lage nach nicht mit der gegebenen Kraft zusammenfallen, ihr also nicht gleichwertig sein können. Der Fall, wo die Richtungslinien der gesuchten Seitenkräfte der gegebenen Kraft nicht parallel sind, ist bereits unter Ziffer 6 Seite 39 behandelt. Hier bleibt noch die Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Seitenkräfte nachzuholen. Dies möge zunächst auf zeichnerischem Wege geschehen.

Gegeben seien die Kraft K und die Richtungslinien mm und nn (Fig. 116 und 116a) ihrer gesuchten Seitenkräfte. Man denke sich die zu zerlegende Kraft K als Schlußlinie 1-3 eines Kraftecks, wähle einen Pol O und ziehe die Polstrahlen $O-1$ u. $O-3$ und durch einen beliebigen Punkt a der gegebenen Kraft K Parallelen I und III dazu, so können diese als die die gesuchten Kräfte einschließenden Seilecksseiten angesehen werden. Die mittlere Seite des Seilecks ergibt sich in der Verbindungslinie der Schnittpunkte b und c der Seiten I und III mit den gegebenen Kraftlinien mm und nn . Eine Parallele dazu durch den Pol O im Krafteck ergibt den zugehörigen Polstrahl $O-2$, und in den Strecken 1-2 und 2-3 findet man die gesuchten Seitenkräfte. Ihre Zusammensetzung führt wieder auf die Mittelkraft K .

Fig. 116.

Fig. 116 a.

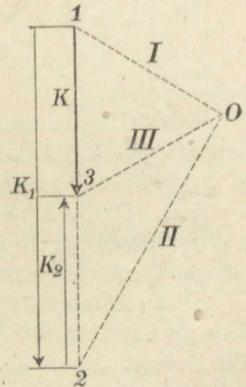
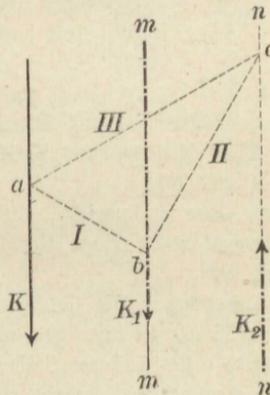


Die mittlere Seite des Seilecks ergibt sich in der Verbindungslinie der Schnittpunkte b und c der Seiten I und III mit den gegebenen Kraftlinien mm und nn . Eine Parallele dazu durch den Pol O im Krafteck ergibt den zugehörigen Polstrahl $O-2$, und in den Strecken 1-2 und 2-3 findet man die gesuchten Seitenkräfte. Ihre Zusammensetzung führt wieder auf die Mittelkraft K .

Liegen die Richtungslinien der gesuchten Seitenkräfte auf derselben Seite der zu zerlegenden Kraft, so bleibt die Konstruktion grundsätzlich dieselbe. (Fig. 117 und 117 a). Der Teilpunkt 2 fällt dann außerhalb der Strecke 1-3. Die K am nächsten gelegene Seitenkraft $K_1 = 1-2$ ist dann größer als K und $K_2 = 2-3$ zeigt entgegengesetzten Richtungssinn $K = K_1 - K_2$.

Fig. 117.

Fig. 117 a.



entgegengesetzten Richtungssinn $K = K_1 - K_2$.

Rechnerisch gestaltet sich die Zerlegung wie folgt: In bezug auf irgendeinen Drehpunkt muß die Summe der Momente der

gesuchten Kräfte gleich dem Moment der gegebenen Kraft K sein. Wählt man einen Punkt A auf der Richtungslinie mm (Fig. 118), so ergibt sich die Momentengleichung

$$K_2 \cdot (a + b) = K \cdot a$$

und daraus

$$K_2 = \frac{K \cdot a}{a + b}.$$

Zufolge $K_1 + K_2 = K$ ist

$$K_1 = K - K_2 = K - \frac{K \cdot a}{a + b} = \frac{K \cdot b}{a + b}.$$

Liegen die gegebenen Richtungslinien auf derselben Seite von K (Fig. 119), so lautet die Momentengleichung

$$K_2 (b - a) = -K \cdot a \quad \text{und daraus} \quad K_2 = \frac{-K \cdot a}{b - a}.$$

K_2 wird also negativ, nimmt entgegengesetzte Richtung an.

Daher wird

$$K_1 - K_2 = K,$$

$$K_1 = K + K_2 = K + \frac{K \cdot a}{b - a} = \frac{b \cdot K}{b - a}.$$

Da $b > a$, so folgt wieder

$$K_1 > K_2.$$

Fig. 118.

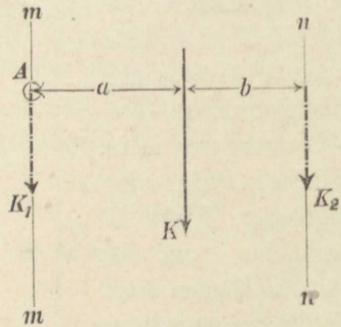
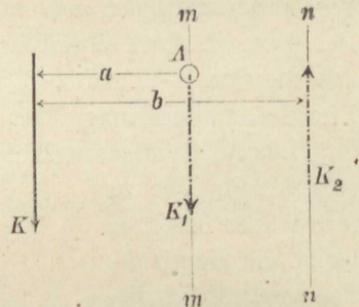


Fig. 119.



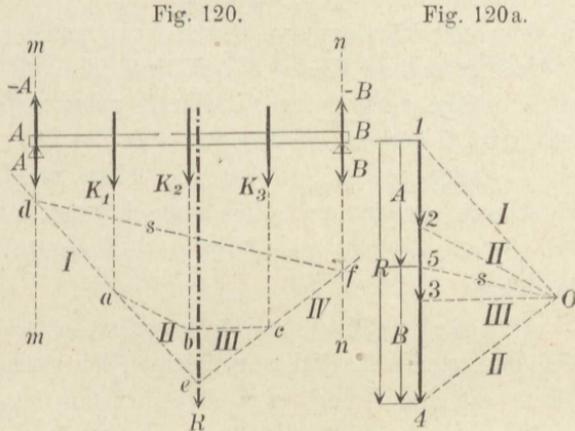
Beispiel: Ein auf zwei Stützen A und B ruhender Balken trägt die Vertikallasten K_1 , K_2 und K_3 . Mit welchen Kräften A und B drückt er auf die Stützen (Auflager) A und B ?

Man setzt, zeichnerisch oder rechnerisch, die Lasten K_1 , K_2 und K_3 zu ihrer Mittelkraft R zusammen und zerlegt diese nach den Richtungen der Auflager-Vertikalen mm und nn .

a) Zeichnerische Lösung: Die Größe von R wird in bekannter Weise als Schlußlinie 1-4 des Kräftecks Fig. 120a erhalten, und der Lage nach geht R durch den Schnittpunkt e der äußeren Seilecksseiten I und IV. Verbindet man die Schnittpunkte d und f der letzteren und der Stützvertikalen mm und nn miteinander und zieht im Kräfteck 0-5 $\parallel df$, dann ist 1-5 = A und 5-4 = B . Die in die Richtung der Stützvertikalen mm und nn fallenden Seitenkräfte von R sind völlig gleichwirkend mit den Lasten K_1 , K_2 und K_3 . A und B stellen also die Kräfte dar, mit welchen der Balken auf seine Stützen

drückt. Nach dem Grundsatz von der Wirkung und Gegenwirkung geben die Stützen *A* und *B* entgegengesetzte gleiche Kräfte $-A$ und $-B$ zurück und diese halten den Lasten K_1, K_2 usw. das Gleichgewicht.

b) Rechnerische Lösung (Fig. 121): Wie bekannt, ist die Mittelkraft $R = K_1 + K_2 + K_3$ und ihr Abstand x von *B*, letzteren Punkt als Drehpunkt angenommen,



$$x = \frac{K_1 \cdot l_1 + K_2 \cdot l_2 + K_3 \cdot l_3}{K_1 + K_2 + K_3}$$

Für die Zerlegung nach den Stützvertikalen *mm* und *nn* gilt in bezug auf *B* die Momentengleichung $Al = R \cdot x$, woraus $A = \frac{R \cdot x}{l}$ und, für x und R obige Werte eingesetzt

$$A = K_1 + K_2 + K_3 \cdot \frac{(K_1 l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3)}{l(K_1 + K_2 + K_3)} = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3}{l}$$

Überlegt man, daß die aufwärts gerichteten Kräfte *A* und *B* den Lasten gegenüber Gleichgewicht herstellen und mit ihnen zusammen in bezug auf irgendeinen Drehpunkt die Momentensumme Null liefern müssen, so ergibt sich für *B* als Drehpunkt die Momentengleichung $Al - K_1 l_1 - K_2 l_2 - K_3 l_3 = 0$ und daraus, wie oben

$$A = \frac{K_1 l_1 + K_2 l_2 + K_3 l_3}{l}$$

Der letztere Weg zur rechnerischen Lösung ist der kürzere und daher übliche.

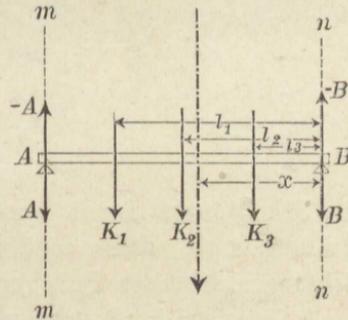
Die Kraft *B* findet man ebenso, wenn man *A* als Drehpunkt annimmt. Wenn *A* schon bekannt, findet man kürzer aus der Gleichung

$$\begin{aligned} A + B &= K_1 + K_2 + K_3 \\ B &= K_1 + K_2 + K_3 - A. \end{aligned}$$

Zerlegung einer Kraft in drei Seitenkräfte.

Die Zerlegung einer Kraft nach drei in ihren Richtungslinien gegebenen Seitenkräfte ist nur möglich, bezw. hat nur einen be-

Fig. 121.



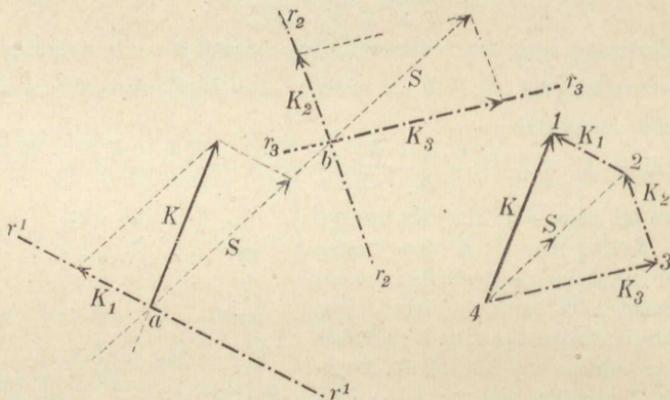
stimmten Sinn, wenn die drei Richtungslinien keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Die Wahrheit dieser Behauptung ergibt sich aus folgender Überlegung: Durch einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei gesuchten Kräfte K_1 , K_2 und K_3 außerhalb der Richtung von K müßte auch deren Mittelkraft gehen und könnte sich daher nicht mit K decken. Schneiden sich die drei Richtungslinien auf der Richtung von K , so ist, wie leicht ersichtlich, die Aufgabe unbestimmt, es sind unendlich viele Lösungen möglich.

Ist obige Bedingung erfüllt, so gestaltet sich die Lösung wie folgt:

a) Zeichnerische Lösung. r_1-r_1 , r_2-r_2 , r_3-r_3 Fig. 122 seien die gegebenen Richtungslinien. Wir bringen eine derselben, z. B. r_1-r_1 zum Schnitt mit der Richtung von K und verbinden

Fig. 122.

Fig. 122 a.



den Schnittpunkt a mit dem Schnittpunkt b der beiden anderen Richtungslinien, dann muß die Mittelkraft S der in letztere Richtungen fallenden Seitenkräfte K_2 und K_3 in der Richtung ab liegen, denn sie muß zusammen mit K_1 die Mittelkraft K liefern. Zerlegt man nun K in a nach den Richtungen r_1-r_1 und ab in die Seitenkräfte K_1 und S , letztere im Punkte b in die Seitenkräfte K_2 und K_3 , so sind K_1 , K_2 und K_3 die gesuchten Kräfte, denn ihre Mittelkraft wird wieder K .

Die Zerlegung geschieht zweckmäßig in einem besonderen Krafteck, Fig. 122a, indem man zunächst K nach Richtung und Größe aufträgt, durch deren Endpunkt 1 und 4 die Linien 1-2 $\parallel r_1-r_1$

und $2-4 \parallel ab$ und ferner durch die Punkte 2 und 4 die Linien $2-3 \parallel r_2 r_2$ und $3-4 \parallel r_3 r_3$ zieht.

b) Rechnerische Lösung. Die rechnerische Lösung stützt sich wieder auf den Satz von den statischen Momenten.

Wir wählen den Schnittpunkt zweier gegebenen Richtungslinien, z. B. b als Drehpunkt, Fig. 123. Es entsteht dann eine Momentengleichung, in welcher nur eine der gesuchten Seitenkräfte K_1 vorkommt.

$$K \cdot l = K_1 \cdot l_1$$

und daraus

$$K_1 = \frac{K \cdot l}{l_1}.$$

Wählt man nun weiterhin c und ein drittes Mal d als Drehpunkt, so berechnen sich in gleicher Weise die Seitenkräfte K_2 und K_3 .

Beispiel: Eine Scheibe $abcd$ wird, wie aus Fig. 124 ersichtlich, in ihrer Ebene von Parallelkräften A , K_1 und K_2 ergriffen. In den Punkten

Fig. 123.

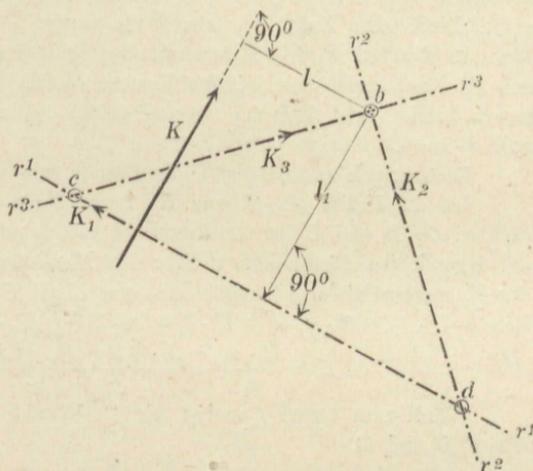


Fig. 124.

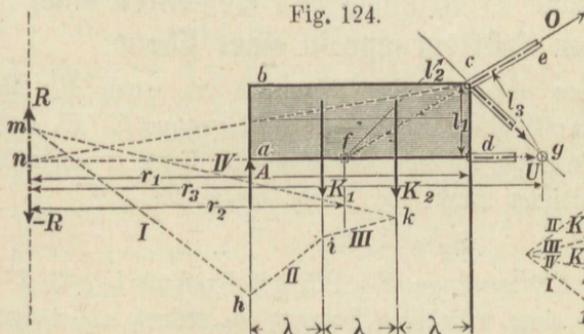
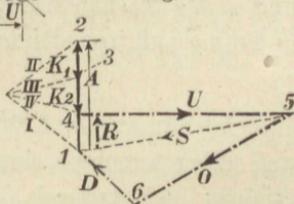


Fig. 124 a.



e und d sind in den angegebenen Richtungen Stäbe ce , cf und dg drehbar befestigt. Es sind die in den Mittellinien dieser Stäbe anzubringenden Kräfte

O , D und U zu bestimmen, welche den gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten.

Mit Hilfe eines Kraft- und Seilecks, Fig. 124 und 124a, werden zunächst in bekannter Weise Größe, Richtung und Lage der Mittelkraft R der Kräfte A , K_1 und K_2 bestimmt. Die Bedingung des Gleichgewichts zwischen A , K_1 und K_2 und O , D und U erfordert, daß die Mittelkraft der letzteren Kräfte derjenigen der erstgenannten entgegengesetzt gleich ist und mit ihr in eine gerade Linie fällt. Kehrt man also R um, so muß $-R$ gleichwertig O , D und U sein. Im Krafteck wird $-R$ durch die Strecke 4-1 ausgedrückt. Verlängert man nun gh bis n , zieht nc und im Krafteck durch 4 und 1 4-5 $\parallel dg$ 1-5 $\parallel nc$, ferner durch 1 und 5 5-6 $\parallel ce$ und 1-6 $\parallel cg$, so sind 4-5 = U , 5-6 = O und 6-1 = D die gesuchten Kräfte.

Rechnerisch gestaltet sich die Lösung wie folgt:

Da die Kräfte A , K_1 und K_2 bezw. deren Mittelkraft R mit den gesuchten O , D und U im Gleichgewicht stehen sollen, so müssen sie in bezug auf irgendeinen Drehpunkt, z. B. c die Momentensumme Null aufweisen. In der Momentengleichung kommt dann nur U als Unbekannte vor und es ergibt sich $-U \cdot l_1 + R \cdot r_1 = -U \cdot l_1 + A \cdot 3\lambda - K_1 \cdot 2\lambda - K_2 \cdot \lambda = 0$ und daraus

$$U = \frac{R \cdot r_1}{c_1} = \frac{A \cdot 2\lambda - K_1 \cdot 2\lambda - K_2 \cdot \lambda}{l_1}.$$

Wählt man ferner f und g als Drehpunkt, so ergibt sich in gleicher Weise D und O .

$$Dl_2 + R \cdot r_2 = 0 \quad D = -\frac{R \cdot r_2}{l_2}$$

$$O \cdot l_3 + R \cdot r_3 = 0 \quad O = -\frac{R \cdot r_3}{l_3}.$$

Die negativen Vorzeichen von D und O deuten an, daß der in der Figur vorläufig angenommene Richtungssinn der Kräfte D und O in Wirklichkeit entgegengesetzt zu nehmen ist.

6. Zeichnerische Ermittlung des Momentes einer beliebigen Kräftegruppe in einer Ebene.

Nach dem Satz der statischen Momente ist, wenn M_R das Moment der Mittelkraft einer gegebenen Kräftegruppe K_1 K_2 usw. und $\sum M_K$ die algebraische Summe der Momente dieser Einzelkräfte in bezug auf irgendeinen Punkt der Ebene bezeichnet

$$1) \quad M_R = \sum M_K.$$

Ist nun zu der Kräftegruppe (Fig. 125) ein Krafteck 1-2-3-4-5 und unter Annahme eines beliebigen Poles O ein Seileck $abcde$ gezeichnet und dadurch die Mittelkraft R nach Größe, Richtung und Lage bekannt geworden, so ist in bezug auf A als Drehpunkt

$$2) \quad M_R = R \cdot r.$$

Ziehen wir nun durch A eine Parallele zu R bis zu den Schnittpunkten f und g mit den die Kräftegruppe einschließenden

Fig. 125.

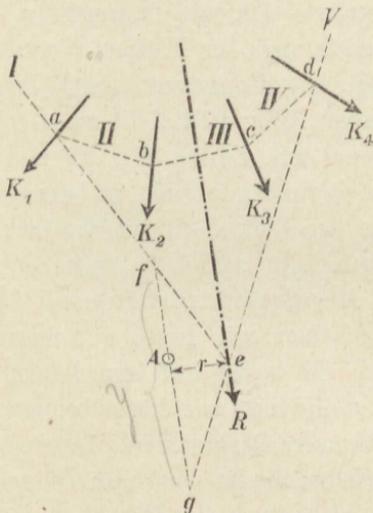
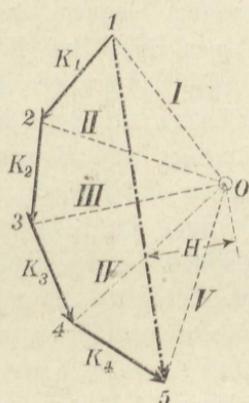


Fig. 125 a.



Seilecksseiten I und V , so ist das entstehende Dreieck efg ähnlich dem Dreieck $1-0-5$ und demnach, wenn man fg mit u bezeichnet,

$$\frac{u}{r} = \frac{R}{H}, \text{ oder } R \cdot r = H \cdot u$$

und unter Beachtung der Gleichung 1

3)
$$\Sigma M_K = H \cdot u.$$

Daraus ergibt sich der Satz:

Das statische Moment einer beliebigen Kräftegruppe in der Ebene ist gleich dem Produkte aus der Polweite H ihrer Mittelkraft (senkrechter Abstand des Poles von der Mittelkraft) und der Strecke, welche die äußeren, die Kräftegruppe einschließenden Seilecksseiten auf einer durch den Drehpunkt zur Mittelkraft gezogenen Parallelen abschneiden.

Das Vorzeichen des Momentes läßt sich aus dem Drehungssinn der Mittelkraft leicht bestimmen. In Fig. 125 dreht R rechts herum, das Moment ist also positiv zu nehmen. Die Strecke u und folglich auch das Moment $M = \Sigma M_K$ nimmt mit dem Abstände r des Drehpunktes A von der Mittelkraft verhältnismäßig

ab und zu. Fällt A auf die Richtung von R , so wird u und somit auch $M=0$. Bewegt sich A von der einen auf die andere Seite von R , so wechseln u und M ihre Vorzeichen

Besonders bequem gestaltet sich die Anwendung der vorbeschriebenen Regel bei Ermittlung der Momente von Parallelkräften, beispielsweise der sog. Angriffsmomente von Balken, welche vertikale Lasten zu tragen haben. Fig. 126 stellt einen solchen auf zwei Stützen A und B ruhend mit Lasten K_1 , K_2 und K_3 dar. Das Krafteck und Seileck zu denselben werden in bekannter Weise gezeichnet und durch Ziehen der Linie $0-5$ im Krafteck parallel zur Schlußseite s des Seilecks die aufwärts gegen den Balken wirkenden Stützkkräfte A und B gefunden. Letztere, mit den Lasten im Gleichgewicht stehend, erscheinen mit diesen gemeinsam in das Seileck $abcde$ eingeschlossen. In bezug auf irgendeinen Punkt C der Mittellinie des Balkens üben die links von demselben angreifenden Kräfte A , K_1 und K_2 ein bestimmtes Drehmoment, das sog. Angriffsmoment aus. Die Größe desselben findet man nach Obigem, indem man durch C eine Vertikale zieht und die Strecke u , welche die die Kräfte einschließenden Seilecksseiten s und III auf derselben abschneiden, mit der Polweite H multipliziert $M = u \cdot H$. Es empfiehlt sich aus Bequemlichkeitsrücksichten für H eine runde Zahl zu wählen. Macht man $H=1$, so wird $M = u$. Das Moment wird, wie auch der Drehpunkt C gewählt werden möge, wie leicht ersichtlich, immer rechts herumdrehend wirken. Die rechts von C wirkenden Kräfte K_3 und B üben in bezug auf den Punkt ein gleich großes links drehendes Moment aus. Unter der Wirkung beider bleibt der Balken im Drehungsgleichgewicht.

Um die Momente der Einzelkräfte hervortreten zu lassen, bringen wir die Seilecksseiten I bis IV und s zum Schnitt mit tt und bezeichnen die entsprechenden Schnittpunkte mit $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ und $5'$. Die die einzelnen Kräfte A , K_1 usw. einschließenden Seilecksseiten s und I , I und II , II und III usw. schneiden dann auf tt die Strecke $1'-5'$, $1'-2'$, $2'-3'$ usw. ab. Die Momente der Einzelkräfte links von tt sind also unter Beachtung ihrer Vorzeichen

$$M_A = H \cdot \overline{1'5'}, \quad M_{K_1} = -H \cdot \overline{2'1'}, \quad M_{K_2} = -H \cdot \overline{3'2'}$$

und ihre Summe

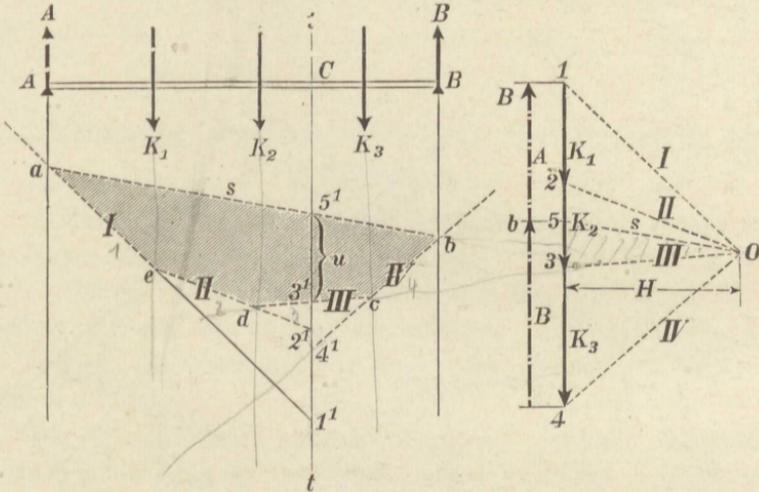
$$M = H(\overline{1'5'} - \overline{2'1'} - \overline{3'2'}) = H \cdot \overline{3'5'} = H \cdot u.$$

Ebenso die Momente der Kräfte rechts von tt

$$M = -H \cdot 5' - 4' + H \cdot 4' - 3' = H(4' - 3' - 5' - 4') = -H \cdot u.$$

Fig. 126.

Fig. 126a.



Je nach der Lage des Drehpunktes C fällt die Strecke u und somit auch das Angriffsmoment M verschieden groß aus. Fällt C mit A zusammen, so wird u und $M = 0$. Bewegt sich C in der Richtung von A nach B , so nimmt sowohl u als M zunächst bis zu einem Größtwert zu, um dann wieder bis auf Null abzunehmen.

Im Falle der Fig. 126 liegt u_{max} in der Richtungslinie der Kraft K_2 und wird, wie leicht ersichtlich, immer mit der Richtung einer der Kräfte zusammenfallen. Die Fläche $abcde$, deren Umfassungslinien in jeder Lage von C auf der Linie tt die Strecke u abschneiden, nennt man die der Belastung entsprechende Momentenfläche des Balkens.

7. Polarachse zweier mit verschiedenen Polen zu einer Kräftegruppe gezeichneter Seilecke.

Die einander entsprechenden Seiten zweier mit verschiedenen Polen zu einer Kräftegruppe gezeichneten Seilecke schneiden sich auf einer Geraden, welche parallel ist zur Verbindungslinie beider Pole und welche die Polarachse beider Seilecke genannt wird. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich wie folgt beweisen:

Die Linienzüge I, II, III, IV und I', II', III', IV' , Fig. 127, seien zwei mit den Polen O und O' (Fig. 127a), zu den Kräften K_1, K_2, K_3 usw. gezeichnete Seilecke. Denken wir uns

Fig. 127.

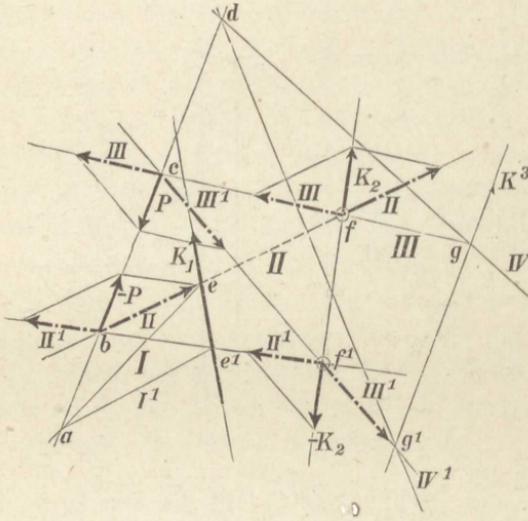
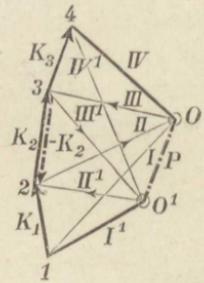


Fig. 127a.



eine der Kräfte, beispielsweise K_2 in ihrer Richtungslinie im Punkte f aufwärts und im Punkte f' als $-K_2$ abwärts wirkend, so stehen K_2 und $-K_2$ miteinander im Gleichgewicht. Ersetzen wir beide durch ihre Seitenkräfte in den Richtungen der sie einschließenden Seilecksseiten II und III bzw. II' und III' , so müssen auch diese vier Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen. Im Krafteck erscheinen die Seitenkräfte II und III der Kraft K_2 (Strecke 2-3) in den Polstrahlen 2- O und O -3 und die Seitenkräfte II' und III' der Kraft $-K_2$ (Strecke 3-2) in den Polstrahlen 3- O' und O' -2. Vereinigen wir nun die Seitenkräfte II und II' im Schnittpunkte b und ebenso III und III' im Schnittpunkte c ihrer Richtungslinien je zu einer Mittelkraft P , so müssen auch diese miteinander im Gleichgewicht stehen, d. h. einander entgegengesetzt gleich sein und in derselben geraden Linie (bc) liegen. Im Krafteck wird die Mittelkraft von II und II' ausgedrückt durch die Linie $O-O' = P$ und die Mittelkraft von III und III' , ebenso durch die Linie $O'-O = -P$. Die Linie bc , Fig. 127, muß also parallel sein der Verbindungslinie $O-O'$ beider

Pole (Fig. 127a). In völlig gleicher Weise läßt sich beweisen, daß auch die Linien ab und cd parallel $O-O'$ sein und daß also die Schnittpunkte a, b, c und d der einander entsprechenden Seilecksseiten I und I', II und II' usw. in der geraden Linie $abcd$ liegen müssen.

8. Graphische Merkmale für das Gleichgewicht einer Kräftegruppe.

Wie weiter oben bereits dargelegt, ist das Gleichgewicht, d. h., die gegenseitige Aufhebung einer Gruppe von Kräften in einer Ebene bedingt dadurch, daß gleichzeitig die Mittelkraft R der Kräftegruppe und die Summe der Momente aller Einzelkräfte, oder das Moment der Mittelkraft in bezug auf irgendeinen Drehpunkt gleich Null sei.

Da die Mittelkraft einer Kräftegruppe graphisch als Schlußlinie eines aus den Kräften gezeichneten Kraftecks erhalten wird, so entspricht der ersten Bedingung $R = 0$ graphisch die Bedingung, daß das Krafteck zum Schluß kommt, also die Länge seiner Schlußlinie $= 0$ wird.

In Fig. 128a bilden die Kräfte K_1 bis K_4 ein schließendes Krafteck. Der Endpunkt 5 des Streckenzuges 1-2-3-4-5 fällt mit dem Anfangspunkte 1 zusammen; die Schlußlinie 1-5 ist $= 0$.

Fig. 128.

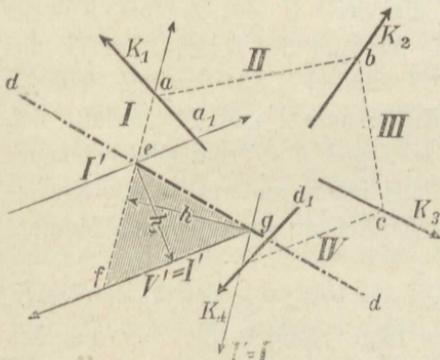
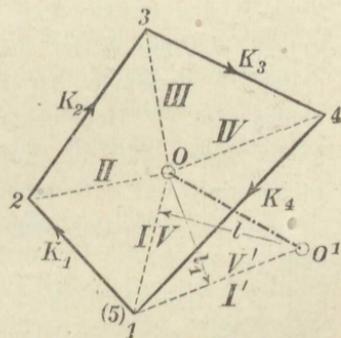


Fig. 128a.



Um beurteilen zu können, ob auch das Gesamtmoment der Kräftegruppe $= 0$ ist, werde mit einem beliebigen Pole O ein Seileck

I, II, III, IV, V, Fig. 128, gezeichnet. Dabei müssen die erste und letzte Seilecksseite *I* und *V* den im schließenden Krafteck zusammenfallenden Polstrahlen *O-1* und *O-5* und also auch unter sich parallel sein. Wie weiter oben dargelegt, haben wir uns in den Seilecksseiten Kräfte wirkend zu denken, welche ihrer Größe nach durch die entsprechenden Polstrahlen im Krafteck ausgedrückt sind und welche die gegebene Kräftegruppe in ihrer Wirkung völlig ersetzen. Diese Kräfte heben sich in den einzelnen Seilecksseiten mit Ausschluß der ersten und letzten, hier *I* und *V*, gegenseitig auf. Die allein zurückbleibenden Kräfte *I* und *V* sind also gleichfalls der gegebenen Kräftegruppe gleichwertig. Sie sind ihrer Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet; fallen sie also in eine gerade Linie zusammen, d. h., schließt auch das Seileck, so heben sie sich gleichfalls auf und es besteht Gleichgewicht. Fallen sie, wie in Fig. 128, nicht in eine gerade Linie, so bilden sie ein Kräftepaar mit einem bestimmten, von Null verschiedenen Moment und es kann daher Gleichgewicht nicht bestehen. Es ist nun die Frage, ob nicht etwa ein mit irgendeinem anderen Pole *O'* gezeichnetes Seileck zum Schluß kommen und eine Aufhebung sämtlicher Seilkräfte würde eintreten können. Um diese Frage beurteilen zu können, ist es nur nötig, die erste und letzte Seite *I'* und *V'* dieses zweiten Seilecks zu zeichnen, was mit Hilfe der Polarachse leicht geschehen kann. Gibt man der ersten Seite *I'* die Lage ea_1 , so ist dd , parallel zu *O-O'* durch *e* gezogen, die Polarachse beider Seilecke, und durch den Schnittpunkt *g* derselben mit der Seite *V* des ersten muß auch die Seite *V'* des zweiten Seilecks gehen. Ist nun *h* der senkrechte Abstand der Seiten *I* und *V* des ersten, *h'* derjenige der Seiten *I'* und *V'* des zweiten Seilecks, beides also die Hebelarme der Kräftepaare *I* und *I'*, so läßt sich leicht zeigen, daß die Momente $h \cdot I$ und $h' \cdot I'$ derselben einander gleich sind und daß daher auch bei jedem anderen zu der Kräftegruppe gezeichneten Seileck ein Kräftepaar von gleichem Moment sich ergibt.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *efg*, Fig. 128, und *O-1-O'*, Fig. 128a, mit parallelen Seiten folgt nämlich bei den aus den Figuren ersichtlichen Bezeichnungen

$$1) \quad \frac{h}{h_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Ferner ist der Flächeninhalt des Dreiecks $O-1-O'$

$$2) \quad \frac{I \cdot l}{2} = \frac{I' \cdot l'}{2} \quad \text{und daraus} \quad \frac{l}{l_1} = \frac{I'}{I}.$$

Aus Gleichung 1 und 2 aber folgt

$$\frac{h}{h_1} = \frac{I'}{I} \quad \text{und demnach} \quad h \cdot I = h_1 \cdot I'.$$

Da nun I und I' stets endliche, von Null verschiedene Größen sind, so muß auch, wenn $h > 0$ stets $h' > 0$ sein, d. h., wenn irgendein mit einem beliebigen Pole zu einer Kräftegruppe gezeichnetes Seileck nicht schließt, kann auch kein mit einem anderen Pole gezeichnetes Seileck zum Schluß kommen. Der mechanische Wert der Kräftegruppe ist dann gleich einem von Null verschiedenen Momente und Gleichgewicht kann nicht bestehen. Umgekehrt: schließt ein mit irgendeinem Pole gezeichnetes Seileck, so schließt auch jedes andere; der mechanische Wert der Kräftegruppe ist gleich Null, die Kräfte befinden sich im Gleichgewicht.

Hieraus folgt: Läßt sich irgendeine Kräftegruppe zu einem schließenden Krafteck vereinigen und kommt auch ein zu derselben gezeichnetes Seileck zum Schluß, so halten die Kräfte einander das Gleichgewicht und umgekehrt; ist eines der beiden Merkmale nicht vorhanden, so besteht auch zwischen den Kräften kein Gleichgewicht.

9. Zeichnung eines Seilecks durch gegebene Punkte.

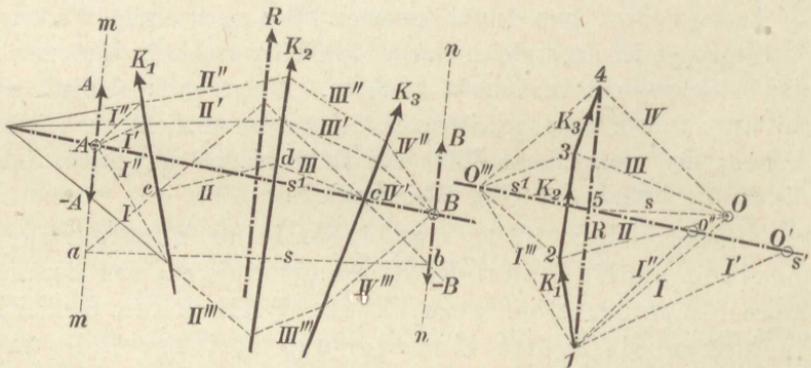
Ein Seileck zu einer gegebenen Kräftegruppe ist völlig bestimmt, wenn der Pol O und die Lage irgendeiner Seilecksseite, bzw. ein Punkt derselben gegeben ist. Der Pol selbst kann durch zwei Bestimmungsstücke, z. B. durch die Richtung und Länge eines Polstrahles, oder durch die Richtung zweier Polstrahlen, oder durch die Länge zweier Polstrahlen usw. als gegeben angesehen werden. Zur Festlegung eines Seilecks sind also im ganzen drei Bestimmungsstücke erforderlich. Anstatt des durch zwei Stücke bestimmten Poles können auch zwei weitere Punkte des Seilecks gegeben sein, so daß also ein Seileck wie ein Kreis durch drei Punkte bestimmt erscheint. Sind nur zwei Punkte gegeben, so lassen sich beliebig viele Seilecke durch dieselben zeichnen.

Bestimmung des geometrischen Ortes für den Pol eines durch zwei Punkte gehenden Seilecks.

Man zeichne zu der gegebenen Kräftegruppe K_1, K_2 und K_3 (Fig. 129 und 129a) ein Krafteck und mit beliebigem Pol O ein Seileck I, II, III, IV . Dadurch wird in bekannter Weise Größe, Richtung und Lage der Mittelkraft R bestimmt. Sind nun A und B die Punkte, durch welche das gesuchte Seileck gehen soll, so ziehe man durch sie Parallelen mm und nn zur Mittelkraft R , verbinde die Schnittpunkte a und b derselben und der äußeren Seilecksseiten I und IV

Fig. 129.

Fig. 129 a.



miteinander und ziehe im Krafteck den Polstrahl $O-5 \parallel ab$. Dadurch erscheint R zerlegt nach den Richtungslinien mm und nn in Seitenkräfte A und B , welche im Krafteck durch die Strecken $1-5$ und $5-4$ dargestellt werden. Wie R , so sind auch die Seitenkräfte A und B der gegebenen Kräftegruppe mechanisch gleichwertig, und die ihnen entgegengesetzt gleichen Kräfte $-A$ und $-B$ stehen daher mit der Kräftegruppe im Gleichgewicht. Sie bilden mit ihr das geschlossene Krafteck $1-2-3-4-5-1$, und auch das zugehörige Seileck $abcde$ ist unter Hinzutritt der Schlußlinie $ab = s$ ebenfalls zum Schluß gekommen.

Wie weiter oben nachgewiesen, muß nun aber auch jedes andere zu den Kräften gezeichnete Seileck schließen. Legt man daher die die Kräfte A und B verbindende Seite s' in die Richtung AB , so muß das Seileck durch die Punkte A und B gehen. Der der Seite s' entsprechende Polstrahl s' muß parallel sein zu AB und der Pol O' daher auf einer durch den Punkt 5 im Krafteck gezogenen Parallelen $s_1 s_1$ zu AB liegen; diese ist somit der geometrische Ort des Poles für alle durch die Punkte A und B

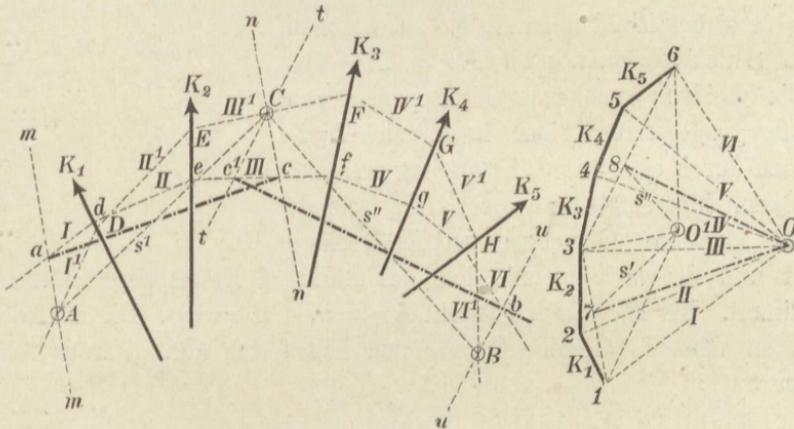
zu den Kräften K_1 , K_2 und K_3 , — A und — B und mithin auch zu den Kräften K_1 , K_2 und K_3 gezeichneten Seilecke s' , I' , II' , III' , IV' , s' , I'' , II'' , III'' , IV'' usw.

Zeichnung eines Seilecks durch drei Punkte A , B und C

K_1 , K_2 , K_3 , K_4 und K_5 (Fig. 130) sei die gegebene Kräftegruppe. Durch die drei Punkte A , B und C ist das Seileck völlig bestimmt und es kommt nur darauf an, den zugehörigen Pol zu ermitteln. Dies geschieht, indem man in vorbeschriebener Weise je den

Fig. 130.

Fig. 130 a.



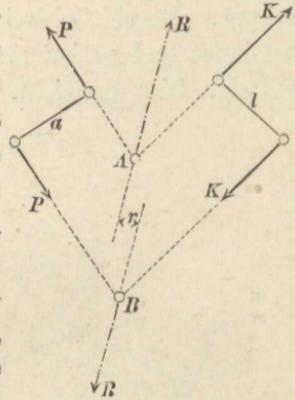
geometrischen Ort zeichnet für den Pol der Seilecke, welche durch die Punkte A und C , und den Pol der Seilecke, welche durch die Punkte B und C gehen. Der Schnittpunkt beider (O') ist dann der gesuchte Pol. Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich dann wie folgt:

Man füge die Kräfte zu einem Krafteck 1-2-3-4-5-6 zusammen und zeichne zunächst mit beliebigem Pol O ein Seileck $I-II-III-IV-V-VI$, verbinde im Krafteck 1 mit 3 und 3 mit 6, ziehe durch A und B Parallelen mm und nn zu 1-3, ferner durch B und C Parallelen uu und tt zu 3-6. Nun verbinde man im Seileck die Schnittpunkte a und c , sowie c' und b miteinander und ziehe im Krafteck $O-7 \parallel ac$ und $O-8 \parallel c'b$, verbinde endlich A mit C und B mit C und ziehe im Krafteck durch den Punkt 7 $s' \parallel AC$ und durch den Punkt 8 $s'' \parallel BC$. Die Geraden s' und s'' sind die geometrischen Orte des Poles, und ihr Schnittpunkt O' ist der gesuchte Pol. Der Linienzug $ADECFGHGB$ ist das gesuchte Seileck.

10. Zusammensetzung von Kräftepaaren.

Sind in einer Ebene zwei Kräftepaare von den Momenten Kl und $-Pa$ gegeben (Fig. 131), so kann man die im Punkt A sich schneidenden Kräfte K und P durch eine Mittelkraft R ersetzen und ebenso die anderen beiden, welche sich in B schneiden. Die beiden Kräfte R sind gleich und entgegengesetzt, bilden daher im allgemeinen ein Kräftepaar vom Moment Rr . Wendet man den Satz der Drehmomente auf die in A sich schneidenden Kräfte an, bezogen auf B als Drehpunkt, so wird $Rr = Kl - Pa$. Die beiden gegebenen Kräftepaare von entgegengesetztem Sinne lassen sich hier nach durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich dem Unterschiede der Momente der gegebenen Kräftepaare ist und dessen Sinn mit dem des stärkeren Kräftepaares übereinstimmt. Für $Kl = Pa$ entsteht $Rr = 0$, d. h. $r = 0$. Die Kräfte R fallen dann in dieselbe Gerade und heben sich auf. Daraus folgt der Satz:

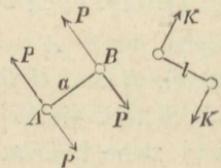
Fig. 131.



Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und entgegengesetztem Sinne heben sich auf.

Ist nun ein Kräftepaar Kl gegeben (Fig. 132), so kann man in derselben Ebene an einem beliebigen Punkt A zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte P hinzufügen, ebenso im Punkte B . Wählt man die Lage der Punkte A und B so, daß $Pa = Kl$ ist, so hebt das Kräftepaar Pa mit negativem Drehsinne das gegebene Kl auf, und es bleibt ein Kräftepaar $Pa = Kl$ mit positivem Drehsinn übrig, welches mit dem gegebenen Kl gleichwertig ist, und man hat den Satz:

Fig. 132.



Zwei in derselben Ebene wirkende Kräftepaare von gleichen Momenten und gleichem Drehsinne haben gleiche Wirkung.

Hiernach ist die Wirkung des Kräftepaars gar nicht von der Größe der Kräfte K , von ihrer Richtung und Lage, sondern nur von dem Momente, dem Drehsinne und der Wirkungsebene abhängig; ein Kräftepaar in einer bestimmten Ebene ist daher durch einen Drehungspfeil  und die Momentengröße \mathfrak{M} genügend gekennzeichnet. Sind nun in der Zeichenebene mehrere Kräftepaare gegeben, etwa \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 von positivem, \mathfrak{M}_3 von negativem Sinne (Fig. 133), so kann man sie zu einem einzigen Paare vereinigen; hierzu wählt man einen Arm $l = AB$, macht $K_1 = \mathfrak{M}_1 : l$ und stellt \mathfrak{M}_1 durch zwei Kräfte K_1 dar, die an den Punkten A und B angreifen. An denselben Punkten und mit denselben Richtungen kann man zwei Kräfte $K_2 = \mathfrak{M}_2 : l$ anbringen als Darstellung von \mathfrak{M}_2 , ebenso zwei Kräfte $K_3 = \mathfrak{M}_3 : l$ mit entgegengesetzten Richtungen. In A kann man die drei Kräfte K_1 , K_2 und K_3 zu einer Mittelkraft $R = K_1 + K_2 - K_3$ zusammensetzen, ebenso an B . R und R bilden ein Kräftepaar von dem Moment:

$$\mathfrak{M} = Rl = K_1 l + K_2 l - K_3 l = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3,$$

woraus sich ergibt:

Mehrere in derselben Ebene wirkende Kräftepaare können zu einem einzigen Paar in derselben Ebene zusammengesetzt werden, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Einzelmomente ist.

War $\mathfrak{M}_1 = 12 \text{ mkg}$; $\mathfrak{M}_2 = 24 \text{ mkg}$; $\mathfrak{M}_3 = -20 \text{ mkg}$ und wählt man $l = 1 \text{ m}$, so wird $K_1 = 12 \text{ kg}$; $K_2 = 24 \text{ kg}$; $K_3 = -20 \text{ kg}$, mithin $R = 12 + 24 - 20 = 16 \text{ kg}$ und das daraus entstehende Kräftepaar $\mathfrak{M} = 16 \text{ mkg}$.

Sind an einem Holzklotze (Fig. 134) die vortretenden Griffe A und B in $0,16 \text{ m}$ Entfernung angebracht, ebenso C und D in $0,2 \text{ m}$ Abstand, und übt man an A und B mit den Händen die Kräfte 10 kg aus, also das Moment $10 \cdot 0,16 = 1,6 \text{ mkg}$, so kann man ganz dieselbe Wirkung erreichen, wenn man an C und D ein Kräftepaar, bestehend aus zwei Kräften von 8 kg , angreifen läßt. Das zweite Kräftepaar würde, in entgegengesetzter Richtung angebracht, die Wirkung des ersteren völlig aufheben, so daß der Körper sich so verhalten würde, als ob die Kräftepaare gar nicht vorhanden wären. In diesen Beziehungen wird nichts

Fig. 133.

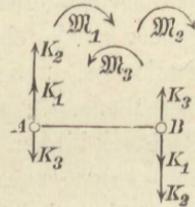
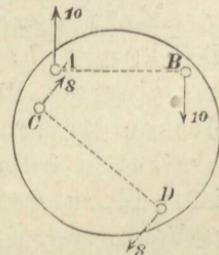


Fig. 134.



geändert, wenn man dem Klotze etwa eine feste Drehachse, rechtwinklig zur Bildebene, gibt. Wo die Achse auch liegen mag, — gleichwertige Kräftepaare werden um diese Achse stets dasselbe Drehungsbestreben haben, während gleiche entgegengesetzte Kräftepaare sich stets gegenseitig tilgen werden.

Auch in eine Parallelebene kann man ein Kräftepaar verschieben, ohne in der Wirkung etwas zu ändern. An einem starren Paralleloiped (Fig. 135) seien die in den Punkten A und B der rechtsseitigen Stirnebene angreifenden Kräfte K gegeben, welche ein Paar bilden. In den Punkten C und D der linksseitigen Stirnebene, welche mit A und B ein Rechteck bilden, füge man je 2 gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte K hinzu, dann haben die jetzt vorhandenen 6 Kräfte die gleiche Wirkung, wie die beiden gegebenen. Die beiden Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ halbieren sich gegenseitig in E . Die in A und C angreifenden aufwärts gerichteten Kräfte K kann man durch ihre Mittelkraft $2K$ in Punkt E ersetzen, ebenso die beiden in B und D angreifenden abwärts gerichteten. Da nun die beiden durch E gehenden Kräfte $2K$ sich aufheben, so bleiben nur noch die in der linksseitigen Stirnebene, bei D aufwärts, bei C abwärts wirkenden Kräfte übrig, welche dem gegebenen Kräftepaare gleichwertig sind.

Hat ein Körper 2 Arme AB und CD (Fig. 136), so ist es für die Bewegung von gleicher Wirkung, ob man mit den Händen in A und B oder in C und D angreift.

Diese Betrachtung führt dann mit den früheren Sätzen zu dem Ergebnisse:

Kräftepaare mit parallelen Drehungsebenen können durch ein einziges Paar ersetzt werden, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Paare ist und zu dessen Drehungsebene irgendeine den gegebenen parallele Ebene gewählt wird.

Hiernach gehört eine bestimmte Drehungsebene gar nicht zu den kennzeichnenden Eigenschaften eines Kräftepaars, sondern die

Fig. 135.

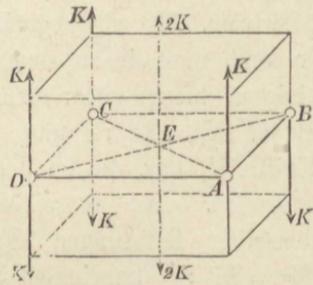
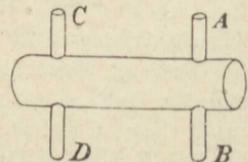
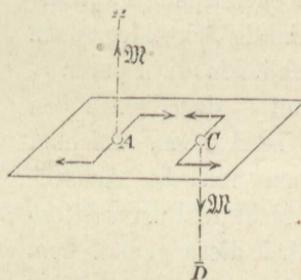


Fig. 136.



Richtung seiner Drehungsebene. Zwei andere Merkmale sind die Größe des Momentes und der Drehungssinn. Diese drei lassen sich geometrisch mittels einer einzigen Geraden darstellen. Man errichtet eine Rechtwinklige zu der gegebenen Drehungsebene und bezeichnet sie als Achse des Kräftepaares. Jede zur Achse rechtwinklige Ebene kann dann zur Drehungsebene gewählt werden. Die Größe des Momentes läßt sich nach irgendeinem Maßstab als Länge auf der Achse abtragen (Fig. 137). Diese Länge werde von

Fig. 137.



der Ebene aus auf der Achse in solchem Sinne aufgetragen, daß wenn man von dem Endpunkt auf die Ebene blickt, der Drehsinn als rechts herum erscheint. Der Endpunkt aber läßt sich kennzeichnen, indem man auf der Achse eine nach dem Endpunkte weisende Pfeilspitze anbringt. Das bei A wirkende Kräftepaar (Fig. 137) erscheint, von oben betrachtet, rechts drehend, von der Unterseite der Ebene aber erblickt man das Spiegelbild mit der Drehung links herum (ebenso wie das Spiegelbild einer Uhr oder eine Uhr mit durchscheinendem Zifferblatte, von der Rückseite betrachtet, eine Linksdrehung der Zeiger erkennen läßt). Daher muß der Endpunkt B der Achse AB oberhalb A liegen, durch eine aufwärts weisende Pfeilspitze also B als Endpunkt gekennzeichnet werden, während es für das bei C wirkende Paar gerade umgekehrt ist. Diese mit bestimmten Pfeilrichtungen versehenen Linien AB und CD nennt man die Achsenstrecken der betr. Kräftepaare. Es läßt sich nun weiter zeigen, daß die Zusammensetzung von Kräftepaaren auch in sich schneidenden Ebenen mit Hilfe ihrer Achsenstrecken nach denselben Regeln wie die Zusammensetzung von Einzelkräften erfolgen kann. Dabei bietet sich noch die Erleichterung, daß, während eine Einzelkraft eine bestimmte Lage hat, die Achsenstrecke an irgendeinem Punkte der Drehungsebene errichtet werden konnte, sich also auch beliebig parallel verschieben läßt.

Es seien nun in zwei sich in der Geraden AB unter dem Winkel α schneidenden Ebenen E_1 und E_2 (Fig. 138) die Kräftepaare \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 mit den durch die Drehungspfeile bezeichneten Drehungssinnen gegeben. Man führe sie beide auf den Arm $AB = l$ zurück,

so daß $K_1 l = \mathfrak{M}_1$; $K_2 l = \mathfrak{M}_2$. In A kann man K_1 und K_2 zur Mittelkraft R zusammensetzen, welche mit K_1 den Winkel φ bildet. In B erscheint dann die gleiche entgegengesetzte Parallelkraft R , und man hat an Stelle der beiden gegebenen Paare ein einziges mit dem Moment Rl .

Wendet man aber auf die Achsenstrecken der Kräftepaare die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte an, so gelangt man zu dem gleichen Ergebnisse. Eine

Grundrißebene möge die Ebenen E_1 und E_2 rechtwinklig schneiden, dann schließen die Spuren s_1 und s_2 der Ebenen den Winkel α ein. Zeichnet man nun die Achsenstrecke des Paares \mathfrak{M}_1 , so wird diese gemäß dem früheren von C nach E gerichtet sein müssen: man mache $CE = \mathfrak{M}_1$. Ebenso ist $CD = \mathfrak{M}_2$ die Achse

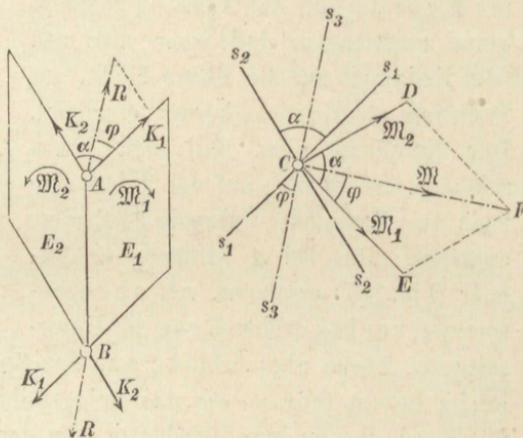


Fig. 138.

des zweiten Paares. Behandelt man $CE = \mathfrak{M}_1$ und $CD = \mathfrak{M}_2$ wie zwei Einzelkräfte, zeichnet aus ihnen ein Parallelogramm mit CF als Mittelkraft, so ist dieses Parallelogramm ähnlich dem aus K_1 und K_2 gezeichneten; seine Seiten haben die l fache Länge des letzteren und stehen zu ihnen rechtwinklig, Daher ist auch $CF = Rl$, d. h. gleich dem Momente des resultierenden Kräftepaares, und steht rechtwinklig auf der Ebene desselben. Von F aus betrachtet erscheint das Paar Rl rechts drehend; mithin hat CF alle Eigenschaften der Achsenstrecke des resultierenden Paares \mathfrak{M} , und eine Ebene mit der Spur s_3 , rechtwinklig zu CF , würde als Wirkungsebene von \mathfrak{M} gewählt werden können.

Da das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte unmittelbar zum Parallelepiped-Gesetze führte, so muß letzteres auch für Kräftepaar-Achsen gelten. Danach sind auch die zur Zusammensetzung von Kräften an einem Punkt auf S. 38 angegebenen Verfahren unmittelbar auf solche Achsen zu übertragen. Oder:

Kräftepaare in beliebigen Ebenen lassen sich wie Kräfte, die an einem Punkt angreifen, mit Hilfe ihrer

Achsenstrecken zusammensetzen, indem man letztere parallel an einen gemeinsamen Schnittpunkt verschiebt und wie Einzelkräfte behandelt.

Parallelverschiebung einer Kraft. Greift in einem Punkt A eine Kraft K an (Fig. 139), so kann man zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K in B hinzufügen; von den drei Kräften bilden nun die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = Kl$, und außerdem bleibt eine mit der gegebenen gleichsinnige Kraft K übrig, welche um l gegen die ursprüngliche Lage verschoben ist. Die Parallelverschiebung einer Kraft K um die Entfernung l bedingt also die Hinzufügung eines Paares Kl .

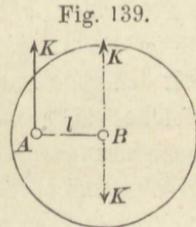


Fig. 139.

Sind aber in einer Ebene eines starren Körpers eine Einzelkraft K in A mit dem Sinn aufwärts und ein Kräftepaar \mathfrak{M} gegeben (Fig. 140), so bringe man \mathfrak{M} auf die Form $\mathfrak{M} = Kl$, lege die eine Kraft K des Paares so durch A , daß sie mit der gegebenen entgegengesetzten Sinn hat, sich also damit aufhebt, und die andere in den Abstand $AB = l = \mathfrak{M} : K$; dann bleibt letztere, durch B gehende Kraft K allein übrig.

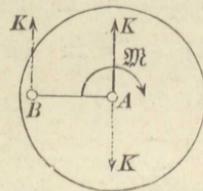


Fig. 140.

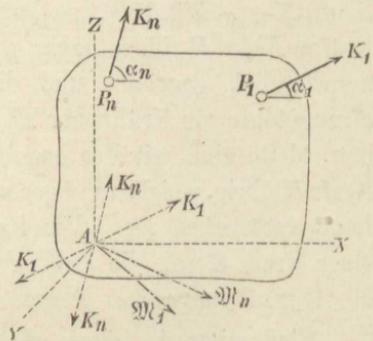
Ein Kräftepaar \mathfrak{M} setzt sich also in derselben Ebene mit einer Einzelkraft K zusammen zu einer Kraft K , welche um $l = \mathfrak{M} : K$ gegen die gegebene Kraft K verschoben ist.

11. Zusammensetzung von Kräften im Raume mit verschiedenen Angriffspunkten.

Greifen an einem starren Körper beliebige Kräfte $K_1 \dots K_n$ an (Fig. 141), von denen der Einfachheit wegen nur K_1 und K_n gezeichnet werden sollen, so wähle man zum Zwecke möglicher Vereinigung derselben einen beliebigen Punkt A und füge in diesem zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K_1 hinzu; dann bilden die gegebene K_1 und die entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar, dessen Drehungsebene durch K_1 in P_1 und den Punkt A gegeben

ist, und dessen Hebelarm l_1 der rechtwinklige Abstand der in P_1 wirkenden Kraft K_1 vom Punkt A ist. Dieses Paar läßt sich durch seine Achsenstrecke \mathfrak{M}_1 darstellen, welche wir durch A legen können. Ebenso verfährt man mit allen übrigen gegebenen Kräften, zuletzt mit K_n . Dann erhält man statt der gegebenen, am Körper zerstreut angreifenden n Kräfte: n Kräfte, deren Richtung, Größe und Sinn mit den gegebenen übereinstimmen, welche aber sämtlich in dem gemeinsamen Schnittpunkt A angreifen, und ebensoviele Kräftepaar-Achsenstrecken, die man sämtlich von A ausgehen lassen kann.

Fig. 141.



Die Einzelkräfte K lassen sich wie auf S. 40 zusammensetzen. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ die Neigungswinkel der gegebenen Kräfte gegen die positive x -Richtung, $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ und $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ diejenigen gegen die y -Richtung, bezw. z -Richtung, so ergibt sich

- 1) in der Linie AX eine Kraft $X = \sum K \cos \alpha$,
- 2) in AY „ „ $Y = \sum K \cos \beta$,
- 3) in AZ „ „ $Z = \sum K \cos \gamma$,

welche sich zu

$$4) \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

$$5) \quad \cos \alpha = X : R; \quad \cos \beta = Y : R; \quad \cos \gamma = Z : R$$

zusammensetzen.

Sind die Richtungswinkel der Kräftepaar-Achsen bezw. $\delta_1, \epsilon_1, \eta_1 \dots \delta_n, \epsilon_n, \eta_n$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\text{in } AX \text{ eine Achse } \mathfrak{M}_x = \sum \mathfrak{M} \cos \delta, \\ &\text{in } AY \text{ „ „ } \mathfrak{M}_y = \sum \mathfrak{M} \cos \epsilon, \\ &\text{in } AZ \text{ „ „ } \mathfrak{M}_z = \sum \mathfrak{M} \cos \eta, \end{aligned}$$

welche sich zu einer resultierenden Achsenstrecke

$$6) \quad \mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$$

mit den Richtungs-Kosinussen

$$7) \quad \cos \delta = \mathfrak{M}_x : \mathfrak{M}; \quad \cos \varepsilon = \mathfrak{M}_y : \mathfrak{M}; \quad \cos \eta = \mathfrak{M}_z : \mathfrak{M}$$

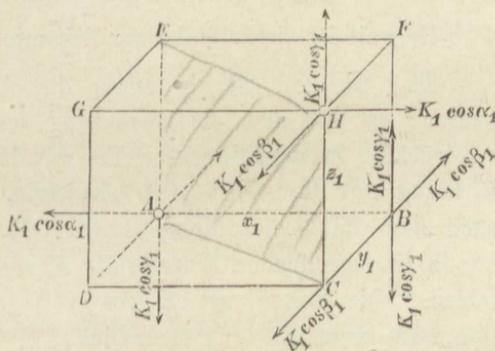
zusammensetzen. Somit haben wir die beliebigen Kräfte zurückgeführt auf eine resultierende, durch A gehende Einzelkraft R und ein resultierendes Kräftepaar vom Momente \mathfrak{M} .

Die Kraft R ist aus den gegebenen Einzelkräften K völlig bestimmt; die Achsenstrecke \mathfrak{M} ist aber noch nicht auf unmittelbar gegebene Größen zurückgeführt. Es soll daher der Beitrag einer der gegebenen Kräfte, etwa K_1 , zu der Achsenstrecke \mathfrak{M}_x näher bestimmt werden.

Der Angriffspunkt H von K_1 (Fig. 142) habe die Koordinaten x_1, y_1, z_1 , aus denen wir ein rechtwinkliges Parallelepiped zeichnen.

Zerlegen wir K_1 in seine drei rechtwinkligen Seitenkräfte und bringen auch in A dieselben Kräfte entgegengesetzten Sinnes an, so bilden die beiden Kräfte $K_1 \cos \gamma_1$ ein Paar, welches in einer Diagonalebene $ACHE$ wirkt. Zur Vereinfachung fügen wir im Punkt B noch zwei solche sich aufhebende Kräfte hinzu; die in A abwärts,

Fig. 142.



und die in B aufwärts wirkende Kraft bilden ein in der xz -Ebene wirkendes Paar, dessen Achse in AY fällt, mithin zu \mathfrak{M}_x keinen Beitrag liefert. Die in H aufwärts, in B abwärts wirkenden $K_1 \cos \gamma_1$ liegen aber in der Seitenebene $BCHF$, haben, von rechts aus betrachtet, positiven Drehsinn, so daß ihre Achsenstrecke in der Größe $K_1 \cos \gamma_1 y_1$ auf der AX aufzutragen ist.

Auch zu den beiden $K_1 \cos \beta_1$ fügen wir in B und C noch zwei sich aufhebende hinzu. Die eine hiervon bildet mit der in A angreifenden ein Kräftepaar in der Ebene $ABCD$, dessen Achse in die AZ fällt, also zu \mathfrak{M}_x keinen Beitrag liefert; die in H und B angreifenden aber bilden mit dem Abstände z_1 ein Kräftepaar.

dessen Drehsinn von rechts betrachtet negativ ist, dessen Beitrag zu \mathfrak{M}_x also ebenfalls negativ sein muß, nämlich $-K_1 \cos \beta_1 z_1$.

Die beiden in A und H angreifenden Kräfte $K_1 \cos \alpha$ liefern zu \mathfrak{M}_x keinen Beitrag, denn ihre Wirkungsebene ist die Diagonalebene $AGHB$, so daß die Achse in der yz -Ebene, mithin rechtwinklig zu AX liegt.

Der gesamte Beitrag der Kraft K_1 zu \mathfrak{M}_x ist also

$$K_1 \cos \gamma_1 y_1 - K_1 \cos \beta_1 z_1.$$

Die Beiträge der übrigen Kräfte ergeben sich in entsprechender Form, so daß im ganzen

$$8) \quad \mathfrak{M}_x = \Sigma K \cos \gamma y - \Sigma K \cos \beta z \text{ wird.}$$

In gleicher Weise erhält man für die anderen Richtungen

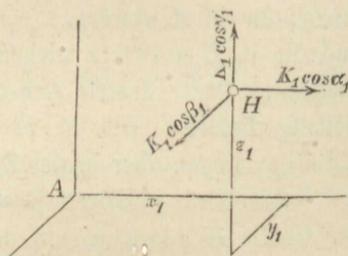
$$9) \quad \mathfrak{M}_y = \Sigma K \cos \alpha z - \Sigma K \cos \gamma x \text{ und}$$

$$10) \quad \mathfrak{M}_z = \Sigma K \cos \beta x - \Sigma K \cos \alpha y.$$

Hiermit ist die Aufgabe der Zusammensetzung der Kräfte gelöst.

\mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y und \mathfrak{M}_z bedeuten die Achsenstrecken von Kräftepaaren; es läßt sich die Bedeutung derselben aber noch einfacher ausdrücken. Zu dem Zwecke wollen wir das Drehmoment der Kraft K_1 in bezug auf die Achse AX ermitteln. Wir können für dasselbe nach dem Satze der Momente (S. 104) die Summe der Momente der in H angreifenden Einzelkräfte $K_1 \cos \gamma$, $K_1 \cos \beta_1$ und $K_1 \cos \alpha_1$ setzen. Die Seitenkraft $K_1 \cos \gamma_1$ (Fig. 143) kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstand y_1 , hat daher das Moment $K_1 \cos \gamma_1 y_1$, und zwar, von rechts gesehen, positiv drehend; $K_1 \cos \beta_1$ kreuzt die AX rechtwinklig in einem Abstände z_1 , und zwar, von rechts gesehen, negativ drehend, hat daher das Moment $-K_1 \cos \beta_1 z_1$; $K_1 \cos \alpha_1$ aber ist mit AX parallel, hat also (nach S. 107) in bezug auf AX kein Moment. Das Moment der ursprünglich gegebenen Kraft K_1 in bezug auf AX ist demnach $K_1 \cos \gamma_1 y_1 - K_1 \cos \beta_1 z_1$, stimmt also mit dem Beitrage der Kraft K_1 zu der Achsenstrecke \mathfrak{M}_x

Fig. 143.



überein. Hiernach können die Kräftepaar-Achsenstrecken \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y und \mathfrak{M}_z gedeutet werden als die Momentensummen der ursprünglich gegebenen Kräfte K in bezug auf die Achsen AX , AY und AZ .

Führt die Zusammensetzung einer zweiten an einem starren Körper etwa angreifenden Kräftegruppe unter Benutzung desselben Koordinaten-Ursprunges A auf dieselbe Einzelkraft R und dasselbe Kräftepaar-Moment \mathfrak{M} wie die Zusammensetzung der ersten Kräftegruppe, so sind beide Kräftegruppen einander gleichwertig, also miteinander vertauschbar; sie bringen die gleiche Bewegungswirkung an dem starren Körper hervor.

Aus dem vorstehenden ergeben sich als **Bedingungen für die Gleichwertigkeit zweier Kräftegruppen**, daß in bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz

1) die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung parallel zu jeder Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte für beide Kräftegruppen die gleiche ist, und daß zugleich

2) die algebraische Summe der Momente der Kräfte in bezug auf jede der Achsen für beide Kräftegruppen denselben Wert ergibt.

12. Zentralachse einer Kräftegruppe.

Die Zusammensetzung einer beliebigen räumlichen Kräftegruppe hat (S. 142) auf R und \mathfrak{M} geführt. R ist einfach die Mittelkraft, die sich bei Parallelverschiebung aller Kräfte an einen Punkt ergab, mithin unabhängig von der Wahl des beliebig angenommenen Punktes A . \mathfrak{M} dagegen (S. 142 und 144) ist von den Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in bezug auf ein durch A gelegtes Achsenkreuz abhängig, wird daher mit einer Verschiebung des Sammelpunktes A sich ändern. Hat man für einen angenommenen Sammelpunkt A die Mittelkraft R gefunden, so wird eine Verschiebung von A auf der Richtungslinie von R keine Änderung von \mathfrak{M} zur Folge haben, weil man ja jeden Punkt dieser Richtungslinie als Angriffspunkt von R behandeln kann. Verschiebt man

aber A nach einer außerhalb R gelegenen Stelle, entsprechend einer Parallelverschiebung von R selbst, so muß das zugehörige Achsenmoment \mathfrak{M} eine Änderung erfahren.

Um diese Veränderung möglichst einfach zu übersehen, wählen wir die Richtungslinie der im Punkt A erhaltenen Kraft R zur z -Achse (Fig. 144) und legen durch R und die zugehörige von A aus gezogene Momentenachse \mathfrak{M} eine xz -Ebene. \mathfrak{M} bilde mit R den Winkel λ . Will man nun die durch A gehende Kraft R mit der gleichen Kraft R vertauschen, welche die xy -Ebene in einem Punkte P mit dem Abstand $AP = r$ schneidet, so bringe man in P zunächst zwei sich aufhebende Kräfte R und $-R$ an. Dann bilden R in A und $-R$ in P ein Kräftepaar, dessen Achsenstrecke Rr in der xy -Ebene liegt und von AY um den Winkel α nach links abweicht, wenn AP mit AX den Winkel α bildet. Diese Achsenstrecke Rr muß nun mit \mathfrak{M} zusammengesetzt werden. Zu dem Zwecke zerlegen wir \mathfrak{M} und Rr nach den drei Achsen und erhalten

$$\text{in der } x\text{-Achse: } \mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin \alpha,$$

$$\text{in der } y\text{-Achse: } Rr \cos \alpha,$$

$$\text{in der } z\text{-Achse: } \mathfrak{M} \cos \lambda.$$

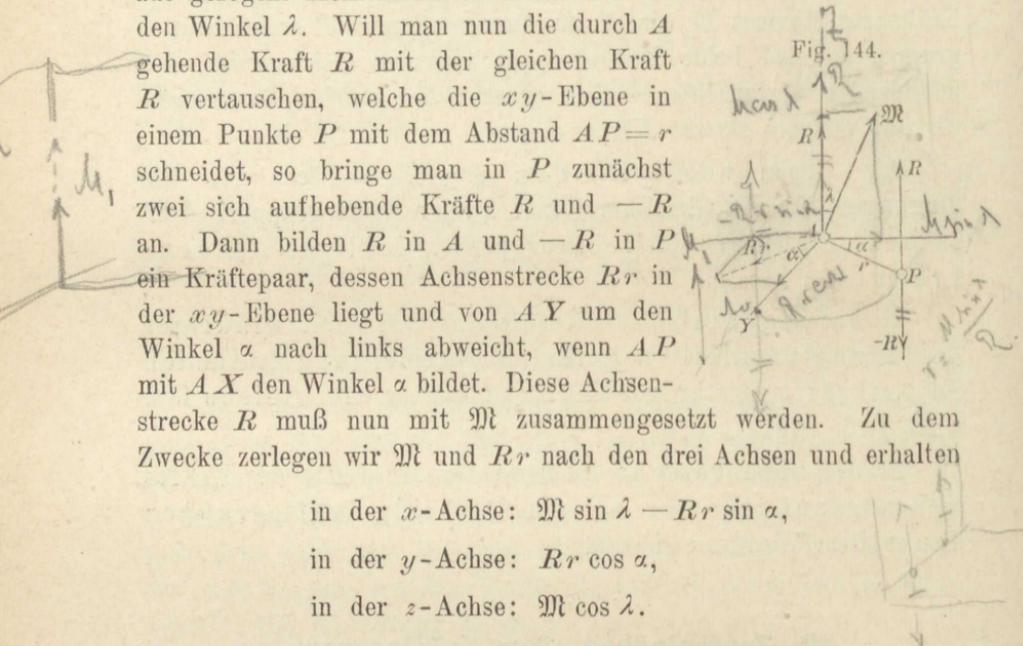
Aus diesen Einzelmomenten entsteht dann das neue Gesamtmoment

$$\mathfrak{M}_1 = \sqrt{(\mathfrak{M} \sin \lambda - Rr \sin \alpha)^2 + (Rr \cos \alpha)^2 + (\mathfrak{M} \cos \lambda)^2}.$$

Hiernach ist $\mathfrak{M}_1 \geq \mathfrak{M} \cos \lambda$. Es ist aber eine solche Verschiebung von R , d. h. eine solche Wahl des Punktes P möglich, daß $\alpha = 90^\circ$ und zugleich $Rr \sin \alpha = \mathfrak{M} \sin \lambda$ wird. Dann fallen in der letzten Gleichung die von r und α abhängigen Summanden fort, und es wird einfach

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda.$$

Weil nun allgemein $\mathfrak{M}_1 \geq \mathfrak{M} \cos \lambda$ war, bei der angegebenen Wahl von r und α aber $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda$ wird, so ist unter diesen Umständen das sich ergebende Achsenmoment \mathfrak{M}_1 so klein wie



möglich; und weil \mathfrak{M}_1 gleichbedeutend ist mit dem in die z -Achse fallenden Momente, während die in AX und AY fallenden Momente aufgehoben werden, so ist \mathfrak{M}_1 nunmehr parallel der AZ , fällt also mit der Richtung von R zusammen. $\alpha = 90^\circ$ bedeutet, daß P , der Punkt der neuen Lage von R , auf AY liegen muß, in einem Punkte A_0 (Fig. 145), und zwar muß wegen $Rr \sin \alpha = \mathfrak{M} \sin \lambda$, die Parallelverschiebung der Kraft R , nämlich der Abstand $AA_0 = r = \mathfrak{M} \sin \lambda : R$ sein. Die durch A_0 gelegte Richtungslinie von R heißt die Zentralachse der gegebenen Kräftegruppe. Das Ergebnis dieser Untersuchung fassen wir noch wie folgt zusammen:

Eine an einem starren Körper wirkende Kräftegruppe läßt sich auf unendlich viele Arten zu einer Mittelkraft R und einem Kräftepaar oder Achsenmoment \mathfrak{M} zusammenfassen. Bei allen diesen Arten ist R nach Größe, Richtung und Sinn dieselbe; nur ihre Lage ist verschieden: das Moment \mathfrak{M} ist im allgemeinen nach Größe, Richtung und Sinn verschieden. Unter den verschiedenen Lagen von R gibt es eine, die **Zentralachse** der Kräftegruppe, bei welcher das Achsenmoment so klein wie möglich wird und mit der Richtung von R zusammenfällt.

Steht die ursprünglich gefundene Momentenachse \mathfrak{M} rechtwinklig zu R , ist also $\lambda = 90^\circ$, so wird $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \lambda = 0$ und $r = \mathfrak{M} : R$; d. h. in diesem Falle verschwindet das Achsenmoment \mathfrak{M}_1 , und die gegebene Kräftegruppe hat sich auf eine Einzelkraft R zurückführen lassen. (Vergl. S. 141, Fig. 139.)

Eine beliebige Kräftegruppe läßt sich auch stets auf zwei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte zurückführen. Ist nämlich das Ergebnis der ersten Zusammenfassung etwa R und \mathfrak{M} im Punkt A (Fig. 146), so kann man \mathfrak{M} in die Faktoren $P \cdot r$ zerlegen, wobei man die eine Kraft P durch A legt, $AB = r$ macht und $-P$ durch B gehen läßt. P und R kann man nun

Fig. 145.

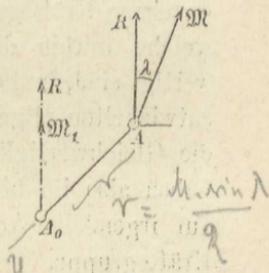
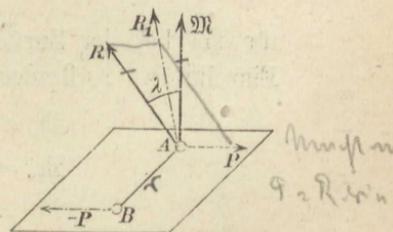


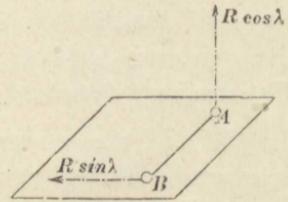
Fig. 146.



zu R_1 zusammensetzen, so daß R_1 und $-P$ der gegebenen Kräftegruppe gleichwertig sind. Dabei war die Größe P beliebig gewählt. Macht man aber $P = R \sin \lambda$, so fällt die Kraft R_1 in die Richtung von \mathfrak{M} und bekommt die Größe $R \cos \lambda$ (Fig. 147), während die durch B gelegte Kraft $P = R \sin \lambda$ ist. Hiernach ist die Zurückführung einer Kräftegruppe auf zwei im Raume sich rechtwinklig kreuzende Kräfte möglich.

Diese Kräfte, auf welche sich eine gegebene Kräftegruppe zurückführen läßt, welche mithin der Kräftegruppe gleichwertig sind, entsprechen den auf S. 145 entwickelten allgemeinen Bedingungen für die Gleichwertigkeit von Kräftegruppen, haben also im besonderen auch in bezug auf irgendeine Achse die gleiche Momentensumme wie die gegebene Kräftegruppe.

Fig. 147.



13. Zusammensetzung von Parallelkräften gleichen Sinnes im Raume.

Ist (Fig. 148) $\alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_n = \alpha,$

$$\beta_1 = \beta_2 \dots = \beta_n = \beta,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \dots = \gamma_n = \gamma,$$

so wird nach S. 142

$$X = \cos \alpha \sum K; \quad Y = \cos \beta \sum K; \quad Z = \cos \gamma \sum K,$$

mithin $R = \sum K$

für die bei der Zurückführung auf den Punkt A sich ergebende Einzelkraft. Außerdem entstehen nach S. 142 die Achsenstrecken:

$$\mathfrak{M}_x = \cos \gamma \sum K y - \cos \beta \sum K z,$$

$$\mathfrak{M}_y = \cos \alpha \sum K z - \cos \gamma \sum K x,$$

$$\mathfrak{M}_z = \cos \beta \sum K x - \cos \alpha \sum K y.$$

Die Parallelkräfte müssen sich aber auch auf eine Kraft $R = \sum K$ ohne Achsenmoment zurückführen lassen; denn wenn man die Parallelkräfte der Reihe nach vereinigt, gelangt man stets

zu einer Einzelkraft; es kommt nur noch darauf an, deren Lage aufzufinden. Ein Punkt S derselben werde durch die unbekanntenen Koordinaten x_0, y_0, z_0 bezeichnet. Diese durch den Punkt S gehende Einzelkraft R muß nun gleichwertig sein mit dem Ergebnisse der ersten Zusammensetzung mit Hilfe des Punktes A , oder, weil die Achsenmomente nach S. 142 gleichbedeutend sind mit den statischen Momenten der Kräfte in bezug auf die Koordinatenachsen, so muß die in S angreifende Kraft R , welche in die Seitenkräfte $R \cos \alpha, R \cos \beta, R \cos \gamma$ zerlegt werden kann, die statischen Momente $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ haben. In bezug auf AX hat $R \cos \gamma$ das Moment $R \cos \gamma y_0, R \cos \beta$ das Moment $-R \cos \beta z_0, R \cos \alpha$ das Moment Null. Daher muß sein:

$$\begin{aligned} R \cos \gamma y_0 - R \cos \beta z_0 &= \cos \gamma \sum K y - \cos \beta \sum K z; \\ R \cos \alpha z_0 - R \cos \gamma x_0 &= \cos \alpha \sum K z - \cos \gamma \sum K x; \\ R \cos \beta x_0 - R \cos \alpha y_0 &= \cos \beta \sum K x - \cos \alpha \sum K y. \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen wird genügt durch $R x_0 = \sum K x; R y_0 = \sum K y; R z_0 = \sum K z$; denn durch Einsetzung dieser Werte werden beide Seiten der drei Gleichungen einander gleich. Die Koordinaten des Punktes S werden hiernach

$$1) \quad x_0 = \frac{\sum K x}{\sum K}; \quad y_0 = \frac{\sum K y}{\sum K}; \quad z_0 = \frac{\sum K z}{\sum K}.$$

Da diese Werte ganz unabhängig von den Richtungswinkeln α, β, γ der gegebenen Kräfte, nur abhängig sind von den Kraftgrößen K und von den auf ihren Richtungslinien gewählten Angriffspunkten P (der Koordinaten x, y, z), so bleibt S unverändert, wenn die Parallelkräfte K sich um die Angriffspunkte P drehen. Während einer solchen Drehung der gegebenen Parallelkräfte (Fig. 149) dreht sich also die Mittelkraft $R = \sum K$

Fig. 148.

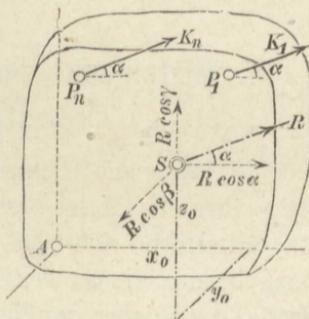
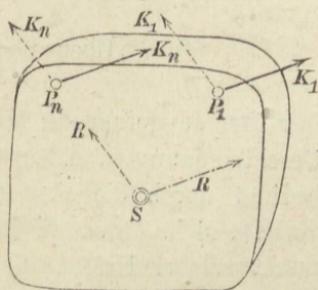


Fig. 149.



um den Punkt S , welcher aus diesem Grunde der Mittelpunkt der in den Punkten P angreifenden Parallelkräfte heißt.

In Gemäßheit mit S. 145 muß in bezug auf irgendeine Achse das Moment der Mittelkraft gleich der Momentensumme der Einzelkräfte sein.

14. Mittelpunkt der Massen (Schwerpunkt) eines starren Körpers.

Es möge die Gruppe der Parallelkräfte gleichen Sinnes derartig über die Masse des Körpers verteilt sein, daß an jedem Massenteilchen eine der Masse verhältnismäßige Kraft angreife. Dann können die an den Massenteilchen $m_1, m_2 \dots m_n$ auftretenden Kräfte geschrieben werden: $m_1 p, m_2 p \dots m_n p$. Es würde dann p die gemeinsame Beschleunigung sein, welche die Massenteilchen durch die Kräfte erfahren würden.

Die Abscisse des Mittelpunktes S dieser Parallelkräfte ist dann $x_0 = \frac{\sum m p x}{\sum m p}$; die Bedeutung der Σ -Zeichen erhält aus der Form:

$$x_0 = \frac{m_1 p x_1 + m_2 p x_2 + \dots + m_n p x_n}{m_1 p + m_2 p + \dots + m_n p};$$

hierin hebt sich dann p als gemeinsamer Faktor im Zähler und Nenner fort, und es bleibt:

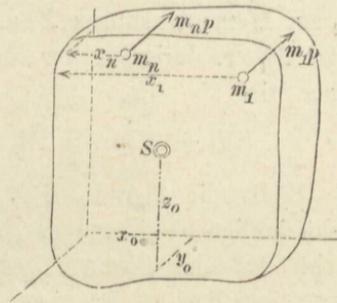
$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m x}{\sum m}.$$

$$\text{Ebenso } y_0 = \frac{\sum m y}{\sum m}; \quad z_0 = \frac{\sum m z}{\sum m}.$$

Der so gefundene Mittelpunkt S ist ganz unabhängig von der Beschleunigung p , d. h. von der Größe der Kräfte, er wird lediglich bedingt durch die Massen der einzelnen Teilchen und ihre Koordinaten, d. h. durch die Massenverteilung des Körpers. Der Mittelpunkt solcher Kräfte, die sich gleichmäßig über die Masse eines Körpers verteilen, heißt deshalb der Massenmittelpunkt des Körpers.

Einen besonderen Fall solcher Kräfte bilden z. B. die Schwerkkräfte. Bei solchen ist $p = g$ und die Richtung lotrecht abwärts. Der Massenmittelpunkt eines Körpers ist daher auch der Mittelpunkt der Schwerkkräfte und heißt deshalb auch der Schwerpunkt. Wird der mit dem Achsenkreuz fest verbundene Körper gegen die Richtung des Lotes verdreht, so bleiben für jeden Massenpunkt die Werte m , x , y und z unverändert, die Richtungen der Kräfte aber bleiben lotrecht und verdrehen sich dabei gegen das Achsenkreuz.

Fig. 150.



Diese Verdrehung hat aber auf den Schwerpunkt S keinen Einfluß.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Durchschnittspunkt der verschiedenen Richtungslinien des Gesamtgewichtes des Körpers bei verschiedenen Drehlagen desselben.

Nennt man die Gesamtmasse Σm des Körpers einfach M , so ist das Gesamtgewicht Mg , und dieses geht immer durch den Schwerpunkt S hindurch, wie auch der Körper bewegt werden mag.

Die Gleichungen für die Koordinaten des Schwerpunktes kann man auch schreiben:

$$1) \quad \Sigma m x = M x_0; \quad \Sigma m y = M y_0; \quad \Sigma m z = M z_0.$$

Der Ausdruck $\Sigma m x$ wird erhalten, indem man jedes Massenteilchen m mit seinem Abstände von der yz -Ebene multipliziert und diese Produkte zusammenzählt. Ein Produkt dieser Art, $m x$, heißt das statische Moment der Masse m in bezug auf die yz -Ebene; $M x_0$, bei dem man sich die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte vereinigt denkt, heißt das statische Moment der ganzen Masse. Dieselben Beziehungen, welche für die yz -Ebene gelten, sind auch für die anderen Koordinaten-Ebenen gültig, und weil die Koordinaten-Ebenen ganz willkürlich angenommen werden können, so gelten sie überhaupt für jede Ebene. Daher folgt der Satz:

Das statische Moment der ganzen Masse eines Körpers ist gleich der Momentensumme der einzelnen Teile in bezug auf irgendeine Ebene.

Kann man die Masse eines Körpers in zwei Teile M_1 und M_2 zerlegen, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 schon bekannt sind, und sind deren Koordinaten x_1, y_1, z_1 bzw. x_2, y_2, z_2 (Fig. 151), so ist der Beitrag der Masse M_1 zur Momentensumme Σmx nach vorstehendem Satze $M_1 x_1$, derjenige der Masse M_2 aber $M_2 x_2$; daher wird

$$2) \quad (M_1 + M_2) x_0 = M_1 x_1 + M_2 x_2.$$

Stellt die Gerade YZ die zur Bildebene rechtwinklige yz -Ebene dar, so ergibt sich ferner leicht, daß der Gesamtschwerpunkt S auf der Geraden $S_1 S_2$ liegen muß. Denn denken wir uns die Richtung der Schwere rechtwinklig zur Zeichenebene, so bilden $M_1 g$ und $M_2 g$ zwei Parallelkräfte, deren Mittelkraft in ihrer Ebene (mit der Spur $S_1 S_2$) liegen muß. Dreht sich die Richtung der Schwere, so drehen sich $M_1 g$ und $M_2 g$ um S_1 und S_2 , ihre gemeinsame Ebene dreht sich um $S_1 S_2$, daher muß S in $S_1 S_2$ liegen. Ist also der Körper in zwei Massenteile M_1 und M_2 zerlegt, so genügt schon die eine Gleichung für x_0 zur Bestimmung von S auf $S_1 S_2$. Da bei der Zusammensetzung zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes die Mittelkraft zwischen beiden liegt, und ihre Abstände von den beiden Kräften sich umgekehrt verhalten wie die Kräfte, so ist das Verhältnis dieser Abstände:

$$SS_1 : SS_2 = M_2 g : M_1 g = M_2 : M_1.$$

Hiernach kann man S leicht finden, indem man (Fig. 152) durch S_1 und S_2 beliebige Parallelen zieht und auf ihnen die Größen M_2 bzw. M_1 (d. h. die vertauschten Massen) als Längen nach entgegengesetzten Seiten aufträgt. Die Verbindungsgerade der Endpunkte schneidet dann $S_1 S_2$ in S .

Legt man die yz -Ebene so, daß die Teilschwerpunkte zu beiden Seiten der Ebene liegen (Fig. 153), so haben x_1 und x_2 verschiedene Vorzeichen, und es ist $Mx_0 = M_2 x_2 - M_1 x_1 = \Sigma mx$. Ist die yz -Ebene dann noch so gelegt, daß $M_1 x_1 = M_2 x_2$, so wird $Mx_0 = \Sigma mx = 0$, mithin $x_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt

Fig. 151.

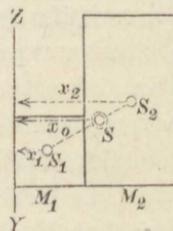
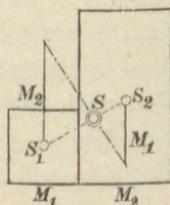


Fig. 152.



liegt in der xy -Ebene. Ebenso wird allgemein nach Gl. 1, wenn $\Sigma m x = 0$ ist, auch $x_0 = 0$; somit hat man den vielfach angewendeten Satz:

In bezug auf eine den Schwerpunkt eines Körpers enthaltende Ebene ist die Momentensumme seiner Massenteile gleich Null, und umgekehrt.

Ein Körper, dessen Masse M sich gleichförmig über seinen Rauminhalt V (*Volumen*) verteilt, heißt homogen. Das Gewicht γ der Raumeinheit (des Kubikmeters) heißt (S. 57) die **Dichte** des Körpers; diese ist bei einem homogenen Körper überall gleich. Das Gewicht des ganzen Körpers ist $Mg = \gamma V$, das eines Raunteilchens dV ebenso $mg = \gamma \cdot dV$; mithin sind die Massen $M = V \cdot \gamma : g$ bzw. $m = dV \cdot \gamma : g$. In den Gleichungen für den Schwerpunkt heben sich dann die allen Gliedern gemeinsamen Faktoren $\gamma : g$ fort, und es bleibt

$$3) \quad V x_0 = \int dV \cdot x,$$

indem statt des Zeichens Σ hier das gleichbedeutende \int -Zeichen gesetzt ist.

Eine Ebene, die einen homogenen Körper in zwei symmetrische Hälften teilt, enthält den Schwerpunkt, weil in bezug auf sie $\int dV \cdot x = 0$ ist.

Schwerpunkte von Linien. Hat der homogene Körper die Gestalt eines dünnen Stabes von überall gleichem Querschnitt F , so ist, wenn die Länge des Stabes s , diejenige eines Teilchens ds , $V = Fs$, $dV = F \cdot ds$. Es hebt sich dann der gemeinsame Querschnitt F in allen Gliedern fort, und man hat für einen solchen Stab, den man materielle Linie nennt:

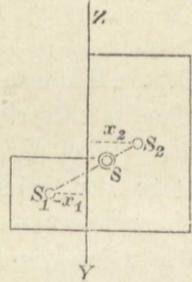
$$4) \quad s x_0 = \int ds \cdot x;$$

und für die anderen Richtungen entsprechende Gleichungen.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt selbstverständlich in der Mitte.

Bei einer gebrochenen Linie kennt man die Schwerpunkte S_1, S_2, \dots der einzelnen Teile und deren Koordinaten. Es ist dann $(s_1 + s_2 + \dots) x_0 = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots$

Fig. 153.



Der Schwerpunkt eines Kreisbogens vom Halbmesser r und dem Zentriwinkel 2α liegt auf der Mittellinie (Fig. 154), zu suchen ist nur $AS = x_0$. Das Teilchen $ds = r \cdot d\vartheta$, bei P gelegen, hat von der durch A gelegten lotrechten yz -Ebene den Abstand $x = A Q = r \cos \vartheta$. Es ist $s = 2r\alpha$, und es gilt die Gleichung

$$2r\alpha x_0 = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Denn zählt man den positiven Winkel ϑ nach oben, so entspricht dem unteren Endpunkte D der Winkel $\vartheta = -\alpha$. Jedoch sind die Beiträge der beiden Hälften des Bogens zur Momentensumme gleich groß, so daß man zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \alpha$ integrieren und das Ganze mit 2 multiplizieren kann. Weil aber $d \sin \vartheta = \cos \vartheta \cdot d\vartheta$, so ist $\int \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \sin \vartheta$, also

$$2r\alpha x_0 = 2r^2 \left[\sin \vartheta \right]_0^\alpha = 2r^2 \sin \alpha, \text{ oder}$$

$$5) \quad x_0 = r \frac{\sin \alpha}{\alpha} = r \frac{2r \sin \alpha}{2r\alpha}.$$

Weil nun $2r \sin \alpha =$ der Sehne \overline{BD} , $2r\alpha =$ dem Bogen \widehat{BD} , so kann das Ergebnis auch geschrieben werden:

$$x_0 : r = \text{Sehne} : \text{Bogen}.$$

Für einen sehr kleinen Bogen ist die Sehne gleich dem Bogen, daher $x_0 = r$; für einen Halbkreisbogen aber $\alpha = 1/2 \pi$; $\sin \alpha = 1$, mithin $x_0 = \frac{2}{\pi} r = 0,637 r$ (annähernd $2/3 r$).

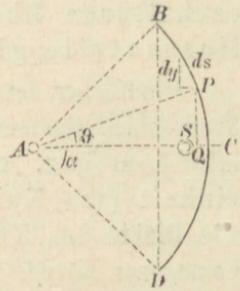
Schwerpunkte von Flächen. Hat der homogene Körper die Gestalt einer ebenen oder gekrümmten Platte F von überallgleicher Dicke δ , so wird $V = \delta \cdot F$, $dV = \delta \cdot dF$, mithin

$$6) \quad F x_0 = \int dF \cdot x.$$

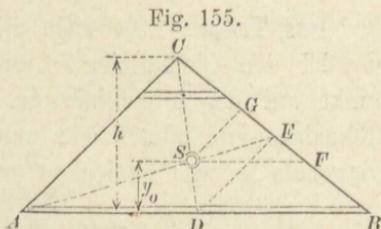
Eine solche Platte nennt man eine materielle Fläche.

Der Schwerpunkt der Fläche eines regelmäßigen Vielecks liegt natürlich im Mittelpunkte.

Fig. 154.



Eine **Dreiecksfläche** (Fig. 155) läßt sich in sehr viele Streifen, parallel zur Grundlinie AB , zerlegen. Weil deren Schwerpunkte sämtlich auf der Mittellinie CD liegen, so muß diese auch den Schwerpunkt S der ganzen Fläche enthalten. Mit demselben Rechte gilt dieses von der Mittellinie AE . Folglich muß der Schnittpunkt der Mittellinien der Schwerpunkt S sein.



Da das Dreieck nur einen Schwerpunkt haben kann, so liegt hierin nebenbei der Beweis des geometrischen Satzes, daß die 3 Mittellinien eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Wegen der innigen Beziehungen zwischen Geometrie und Mechanik kommt es nicht selten vor, daß Sätze der Mechanik in einfacher Weise zur Lösung geometrischer Aufgaben benutzt werden können.

Zieht man DE , so findet man leicht, daß $DE \parallel AC$ und $DE = \frac{1}{2} AC$, daher in den ähnlichen Dreiecken SAC und SED :

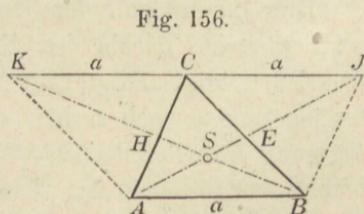
$$SC : SD = AC : DE = 2 : 1,$$

oder es liegt S im unteren Drittelpunkte der Mittellinie CD . Nennt man h das Höhenlot von C auf AB , y_0 das Lot von S , so wird offenbar

$$y_0 = \frac{1}{3} h.$$

Zieht man $SF \parallel AB$, so muß auch $BF = \frac{1}{3} BC$ sein, und ebenso, wenn $SG \parallel AC$, auch $CG = \frac{1}{3} BC$. Man kann daher S auch bestimmen, indem man BC in 3 gleiche Teile zerlegt, durch den Teilpunkt F eine Parallele zur nächsten Seite AB , durch den Teilpunkt G eine Parallele zur nächsten Seite CA zieht. Beide schneiden sich dann in S .

Zwei Mittellinien des Dreiecks, z. B. AE und BH (Fig. 156) kann man auch ohne Hilfe eines Zirkels finden, indem man durch C eine Parallele zu AB zieht und auf dieser durch $BJ \parallel AC$ und $AK \parallel BC$ die Punkte J und K so bestimmt, daß $CJ = CK = AB$ ist. Zieht man dann AJ , so sind AJ und BC die Diagonalen eines Parallelogramms $ABJC$ und halbieren sich gegenseitig im Punkt E ; entsprechendes gilt von



BK und AC . Mithin sind AE und BH zwei Mittellinien des Dreiecks ABC .

Das Trapez läßt sich, wie das Dreieck, in lauter Streifen, parallel den Grundlinien a und b zerlegen, weshalb der Schwerpunkt auf der Mittellinie des Trapezes liegen muß. Um seine Höhenlage zu finden, teile man das Trapez (Fig. 157) durch eine Diagonale in zwei Dreiecke

$$ACD = F_1, \quad ABC = F_2.$$

Von $AB = a$ aus gemessen, sind dann die Höhenabstände der Teilschwerpunkte $y_1 = 2/3 h$; $y_2 = 1/3 h$. Nach der Gleichung

$$F y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

wird also

$$1/2 (a + b) h y_0 = 1/2 b h \cdot 2/3 h + 1/2 a h \cdot 1/3 h \text{ oder}$$

$$8) \quad (a + b) y_0 = \frac{h}{3} (2b + a) \text{ und } y_0 = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Zur geometrischen Konstruktion (Fig. 158) verlängert man die Seite b um a , die Seite a nach der anderen Richtung um b . Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Verlängerungen schneidet dann die Mittellinie in S . Es ist nämlich in den ähnlichen Dreiecken SEG und SFH

$SF : SE = FH : EG = (b + 1/2 a) : (a + 1/2 b) = (a + 2b) : (2a + b)$,
ferner $SF : EF = SF : (SE + SF)$ oder

$$SF : EF = (a + 2b) : (a + 2b + 2a + b) = (2b + a) : 3(a + b).$$

Dies stimmt mit dem Verhältnis $y_0 : h$ überein, mithin ist die Konstruktion richtig. Trägt man aber die Verlängerung a nach rechts, die Verlängerung b nach links auf (Fig. 159), so muß das Ergebnis das gleiche sein. Man braucht daher die Mittellinie gar nicht, sondern verlängert b nach beiden

Fig. 157.

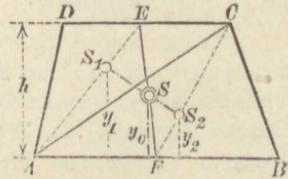


Fig. 158.

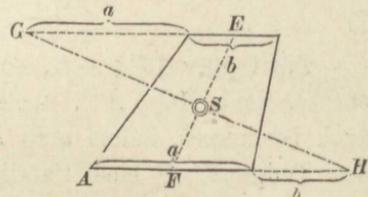
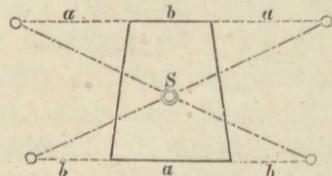


Fig. 159.



Seiten um a , a nach beiden

Seiten um b , verbindet die Endpunkte der Verlängerungen kreuzweise, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in S .

Obige sehr einfache Konstruktion beansprucht viel seitlichen Raum. Sollen die Konstruktionslinien ganz innerhalb des Trapezes bleiben, so kann man folgende Eigenschaft des Schwerpunktes S benutzen: Nach obigem liegt S auf der Halbierungslinie, und zwar ist $SF:EF = (2b + a) : 3(a + b)$. Man ziehe (Fig. 160) die Diagonale AC und dazu durch S eine Parallele SH . Zieht man dann noch $CG \parallel EF$, so ist $\triangle HSF \sim \triangle ACG$. Mithin $HF:AG = SF:CG$ und wegen $CG = EF$:

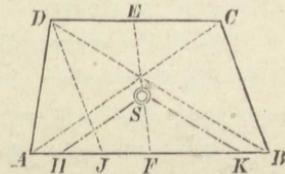
$$\frac{HF}{AG} = \frac{SF}{EF} = \frac{2b + a}{3(a + b)}.$$

Weiter aber $AG = \frac{1}{2}(a + b)$, so wird

$$HF = \frac{2b + a}{3(a + b)} \frac{a + b}{2} = \frac{2b + a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{2} - \frac{a - b}{3}.$$

Da nun $AF = \frac{1}{2}a$, so muß $AH = \frac{1}{3}(a - b)$ sein. Man ziehe also (Fig. 161) $DJ \parallel CB$, so daß $AJ = a - b$, teile dieses in 3 gleiche Teile, dann ist $AH = \frac{1}{3}(a - b)$. Nun ziehe man durch H eine Parallele zur Diagonale AC , so schneidet diese Parallele die Mittellinie EF in S . Macht man $BK = AH = \frac{1}{3}(a - b)$, so muß eine durch K gezogene Parallele zur anderen Diagonale BD aus demselben Grunde durch S gehen. Zieht man also diese Parallele KS durch K , so kann man die Mittellinie entbehren.

Fig. 161.



Dieses Verfahren rührt von Prof. G. Lang (Rigaische Industrie-Ztg. 1883, S. 126) und Prof. Rob. Land (Zentralblatt der Bauverwaltung 1894, S. 458) her. Vergl. auch Zeitschrift des Hannov. Arch.- und Ing.-Vereins 1895, S. 115–117.

Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks. Man teilt das Viereck (Fig. 162) durch die Diagonale BD in 2 Dreiecke, halbiert die Diagonale in M , zieht AM und CM , so liegen auf diesen die Teilschwerpunkte S_1 und S_2 mit $MS_1 = \frac{1}{3}MA$; $MS_2 = \frac{1}{3}MC$.

Aus diesen Verhältnissen folgt, daß $S_1 S_2 \parallel AC$ sein muß. Teilt man das Viereck ein zweites Mal durch die Diagonale AC , so ergeben sich die Teilschwerpunkte S_3 und S_4 , und zwar muß die Verbindungsgerade $S_3 S_4 \parallel BD$ sein, gerade so wie $S_1 S_2 \parallel AC$ war. Der Gesamtschwerpunkt S des Vierecks muß nun im Schnitte von $S_1 S_2$ mit $S_3 S_4$ liegen. Zieht man nun durch D und C Parallelen zu AC bzw. BD , und schneiden sich diese in F , so muß die Verbindungsgerade EF durch S gehen, und es muß $ES = \frac{1}{3} EF$ sein, da $ES_1 = \frac{1}{3} ED$, $ES_4 = \frac{1}{3} EC$, $S_1 S \parallel DF$, $S_4 S \parallel CF$.

Denkt man sich aber AF und BF gezogen, so würde der Schwerpunkt eines Dreiecks ABF im unteren Drittelpunkte von EF liegen, d. h. mit S zusammenfallen. Hiernach ist der Schwerpunkt des Vierecks $ABCD$ gleichbedeutend mit demjenigen des Dreiecks ABF . Um ihn zu finden, ist es in diesem Falle wohl am einfachsten, die Seite AB in drei gleiche Stücke zu teilen (Fig. 163), $DF \parallel AC$, $CF \parallel BD$, $GS \parallel AF$, $HS \parallel BF$ zu ziehen.

Die Teilschwerpunkte S_1 bis S_4 in Fig. 162 haben also nur zur Herleitung des Verfahrens gedient, sind aber für die Ausführung unnötig.

Dies Verfahren rührt von Prof. Rob. Land (Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1895, S. 451) her und kann auch für Trapeze angewendet werden, da es ebenso einfach ist, wie die in Fig. 160 und 161 (S. 157) angegebenen Verfahren.

Die Dreiteilung von AB in Fig. 163 läßt sich auch entbehren, wenn man den Schwerpunkt S des Dreiecks ABF nach Fig. 156 bestimmt.

Fig. 162.

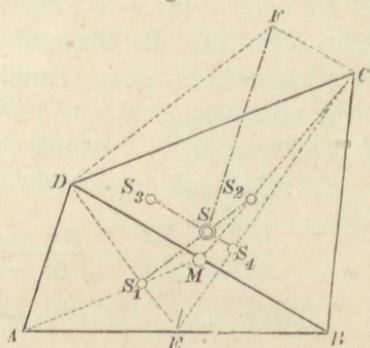
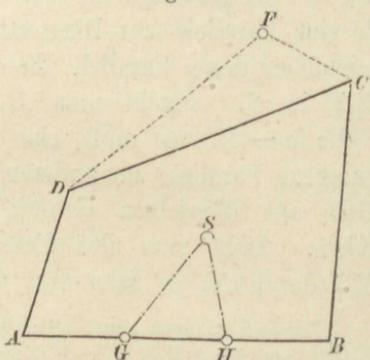
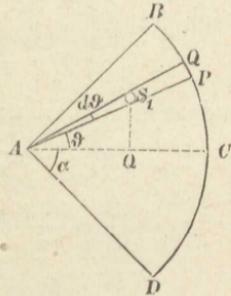


Fig. 163.



Schwerpunkt des Kreisabschnittes. Schließt der beliebige Halbmesser AP (Fig. 164) mit der Mittellinie AC den Winkel ϑ ein und ist PQA ein unendlich kleiner Abschnitt vom Zentriwinkel $d\vartheta$, so ist dessen Fläche $dF = \frac{1}{2}r \cdot r d\vartheta$; der Teilschwerpunkt S_1 liegt um $\frac{2}{3}r$ von A entfernt und hat die Abszisse $AQ = \frac{2}{3}r \cos \vartheta$. In Gleichung 6, S. 154 bedeutet dF freilich ein nach zwei Richtungen unendlich kleines Flächenteilchen, doch kann man als Beitrag des Sektors PQA zu dem statischen Momente schreiben $PQA \cdot AQ$. Dann ist

Fig. 164.



$$F x_0 = \frac{2}{3} r^3 \int_0^\alpha \cos \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$$

und, weil $F = 2 \frac{r^2 \alpha}{2} = r^2 \alpha$,

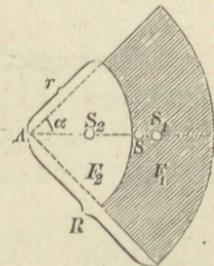
$$9) \quad x_0 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Für sehr kleines α ist $x_0 = \frac{2}{3}r$, für die Halbkreisfläche mit $\alpha = \frac{1}{2}\pi$:

$$10) \quad x_0 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,424 r \text{ (rund } \frac{2}{5}r \text{)}.$$

Schwerpunkt des Ringabschnittes. Der Ringabschnitt ist als Unterschied zweier Kreisabschnitte der Halbmesser R und r anzusehen. Ist S der Schwerpunkt des großen Abschnittes von der Fläche F , so ist $AS = x_0$; S_2 sei der Schwerpunkt des kleinen Abschnittes von der Fläche F_2 mit $AS_2 = x_2$; F_1 sei der Ringabschnitt mit $AS_1 = x_1$. Dann wird

Fig. 165.



$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2$, und zwar

$$F = R^2 \alpha; \quad F_2 = r^2 \alpha; \quad F_1 = (R^2 - r^2) \alpha.$$

$$x_0 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad x_2 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \text{ und}$$

$$11) \quad x_1 = \frac{2}{3} \frac{R^2 R \sin \alpha - r^2 r \sin \alpha}{(R^2 - r^2) \alpha} = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3 \sin \alpha}{R^2 - r^2 \alpha}.$$

Schwerpunkt der Kreisabschnittfläche. Der Abschnitt F_1 bildet mit dem Dreieck $ABD = F_2$ den Ausschnitt $ABCD = F$. Die entsprechenden Schwerpunkts-Abscissen seien $AS_1 = x_1$, $AS_2 = x_2$; $AS = x_0$. Dann ist

$$F x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2,$$

und zwar $F = r^2 \alpha$; $F_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$;

$$F_1 = r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha);$$

$$x_0 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad x_2 = \frac{2}{3} r \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$x_1 = \frac{r^2 \alpha \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - r^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2}{3} r \cos \alpha}{r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{r^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}.$$

Es ist aber die Sehne $BD = l = 2r \sin \alpha$, also $r \sin \alpha = \frac{1}{2} l$ mithin $x_1 = \frac{2}{3} \frac{l^3}{8 F_1} = \frac{l^3}{12 F_1}$, wenn F_1 die Fläche des Abschnittes.

Man kann auch schreiben

$$12) \quad x_1 = \frac{2}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Für $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ wird der Abschnitt wieder zur Halbkreisfläche und $x_1 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$, wie vom Ausschnitte aus abgeleitet.

Schwerpunkt der halben Parabelfläche. (Fig. 167) habe die Gleichung $y^2 = 2px$. Für die Koordinaten des Endpunktes C wird dann $b^2 = 2pa$, und durch Division entsteht

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

Die unendlich kleinen Teilchen des Streifens $PQ = y \cdot dx$ haben gemeinsamen Abstand x

Fig. 166.

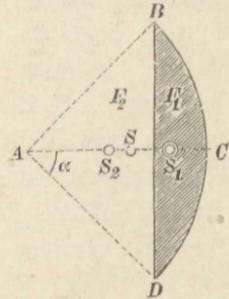
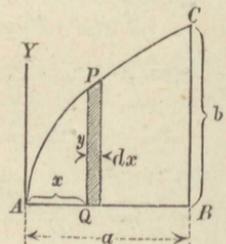


Fig. 167.



von der AY , können daher zu dem Beitrage $y \cdot dx \cdot x$ zusammengefaßt werden. Die Fläche $ABC = F$ ist

$$\int_0^a y \cdot dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{1/2} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} a^{3/2} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} ab,$$

d. h. $2/3$ von der Fläche des umschriebenen Rechtecks ab . Hier-nach wird

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} abx_0 &= \int_0^a y \cdot dx \cdot x = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{5} \frac{b}{\sqrt{a}} a^{5/2} = \frac{2}{5} ba^2 \end{aligned}$$

13) also $x_0 = 3/5 a$, unabhängig von b .

Zur Auffindung der Ordinate y_0 des Schwerpunktes trenne man einen Streifen ab, dessen Teilchen den gleichen Abstand y von AB haben (Fig. 168). Dann wird

$$\frac{2}{3} abx_0 = \int_0^b (a-x) dy \cdot y;$$

dies wird wegen $x : a = y^2 : b^2$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} aby_0 &= \frac{a}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) y \cdot dy \\ &= \frac{a}{b^2} \left\{ b^2 \int_0^b y \cdot dy - \int_0^b y^3 dy \right\} \\ &= \frac{a}{b^2} \left\{ \frac{b^4}{2} - \frac{b^4}{4} \right\} = \frac{ab^2}{4}, \text{ mithin} \end{aligned}$$

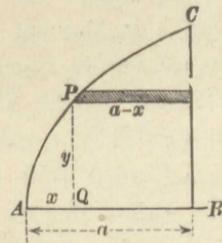
14) $y_0 = \frac{3}{8} b$.

Man hätte auch als Beitrag des Streifens $y \cdot dx$ (Fig. 167) zum statischen Moment in bezug auf AB die Fläche des Streifens mit der Schwerpunkthöhe $1/2 y$ multipliziert einführen können, dann wäre

$$\frac{2}{3} aby_0 = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \int_0^a x \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \frac{a^2}{2} = \frac{ab^2}{4}$$

entstanden.

Fig. 168.



Die Koordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunktes S_1 der Ergänzungsfigur, welche die Parabelfläche zum Rechteck $ABCD$ ergänzt (Fig. 169), findet man leicht, weil das Rechteck die Schwerpunktskoordinaten $x_0 = 1/2 a$; $y_0 = 1/2 b$ hat:

$$x_1 \cdot \frac{1}{3} ab + \frac{3}{5} a \cdot \frac{2}{3} ab = \frac{1}{2} a \cdot ab$$

$$15) \quad x_1 = \frac{3}{10} a.$$

$$y_1 \cdot \frac{1}{3} ab + \frac{3}{8} b \cdot \frac{2}{3} ab = \frac{1}{2} b \cdot ab$$

$$16) \quad y_1 = \frac{3}{4} b.$$

S_1 , S und S_2 liegen auf einer Geraden, und es ist $SS_1 = 2 \cdot SS_2$.

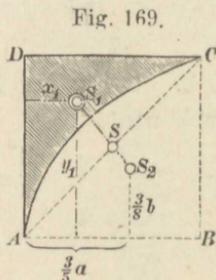


Fig. 169.

Schwerpunkt einer Kugelzonen-Oberfläche. Der unendlich kleine Teil der Oberfläche bei PQ (Fig. 170), entsprechend einem Bogenteilchen ds des äußeren Kreises, hat die Größe $dF = ds \cdot 2\pi x$. Nun bildet ds mit dy denselben Winkel ϑ wie $AP = r$ mit $AR = x$. Daraus folgt $ds = dy : \cos \vartheta = dy \cdot r : x$ und $dF = 2r\pi dy$, gleich einer Zylinderfläche vom Halbmesser r und der Höhe dy . Diese Zylinderfläche bei P_1Q_1 hat dann dasselbe statische Moment wie die Kugelzonenfläche. Daher muß auch die ganze Zonenfläche $BCDE$ gleiche Fläche, gleiches Moment und gleiche Schwerpunktslage haben mit dem entsprechenden Teile der die Kugel umschließenden Zylinderfläche. Da der Schwerpunkt der Zylinderfläche in der Mitte der Mittellinie liegt, so liegt auch derjenige der Kugelzone in der Mitte von GH . Die Rechnung führt zu gleichem Ergebnisse:

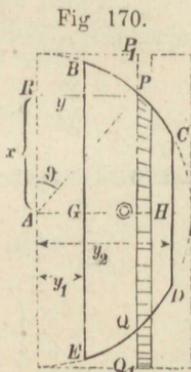


Fig. 170.

$$2r\pi (y_2 - y_1) y_0 = 2r\pi \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dy = r\pi (y_2^2 - y_1^2);$$

$$17) \quad y_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Gleiches gilt von der Oberfläche der Kugelhaube.

Schwerpunkt des Körpers der dreiseitigen Pyramide. Durch Schnitte, parallel mit der Grundfläche ABC (Fig. 171) läßt sich die

Pyramide in dreieckige Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte durchweg auf der Verbindungsgeraden zwischen der Spitze D und dem Schwerpunkte G der Grundfläche liegen. Die Linie DG enthält daher den Gesamtschwerpunkt S . Der Punkt G wird erhalten, indem man BC in E halbiert, AE zieht und $EG = \frac{1}{3} EA$ macht. Betrachtet man in gleicher Weise BCD als Grundfläche, zieht DE mit $EH = \frac{1}{3} DE$, so muß der Schwerpunkt auch auf AH liegen. DG und AH schneiden sich in S . Weil $EG = \frac{1}{3} EA$, $EH = \frac{1}{3} ED$, ist $GH \parallel AD$ und $= \frac{1}{3} AD$. Daher ist $SGH \sim SDA$, $SG = \frac{1}{3} SD = \frac{1}{4} GD$. Teilt man also die Gerade von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche in 4 gleiche Teile, so ist der der Grundfläche zunächst liegende Teilpunkt der Schwerpunkt S . In demselben Verhältnis 1:4 wie $SG:GD$ stehen auch die Höhenlote y_0 und h , von dem Schwerpunkte S und der Spitze D auf die Grundfläche gefällt:

$$18) \quad y_0 = \frac{1}{4} h.$$

Auf analytischem Wege läßt sich die Lage des Schwerpunktes einer beliebig vielseitigen Pyramide, also auch eines Kegels, wie folgt bestimmen.

Die Verbindungsgerade der Spitze E mit dem Schwerpunkte G der Grundfläche enthält den Körperschwerpunkt S , dessen Abstand y_0' von der Spitze zu bestimmen ist.

In bezug auf eine durch die Spitze der Pyramide gelegte wagerechte Gerade als Momentenachse gilt die Momentengleichung

$$V \cdot y_0' = \int_0^h dV \cdot y,$$

worin y_0' den lotrecht zur Grundfläche gemessenen Abstand des Schwerpunktes von der Spitze, dV den Inhalt einer Elementarscheibe von der Dicke dy parallel der Grundfläche und y deren Abstand von der Spitze der Pyramide bezeichnet.

Fig. 171.

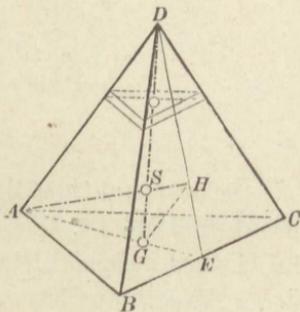
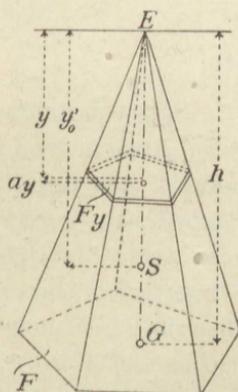


Fig. 172.



Man erhält mit den sonst aus der Fig. 172 ersichtlichen Bezeichnungen

$$dV = F_y \cdot dy = \frac{y^2 F}{h^2} \cdot dy, \quad \text{also } V = \frac{F}{h^2} \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy = \frac{F \cdot h}{3},$$

und damit aus obiger Momentengleichung

$$y_0^1 = \int_0^h \frac{dV \cdot y}{V} = \left(\frac{F}{h^2} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy \right) : \frac{Fh}{3} = \frac{3}{4} \cdot h \quad \text{oder}$$

$$y_0 = h - \frac{3}{4} h = \frac{1}{4} h.$$

Schwerpunkt des Halbkugelkörpers. Schneidet man eine zylindrische Scheibe PQ (Fig. 173) vom Halbmesser y im Abstand x vom Mittelpunkt A heraus, so haben deren Teilchen durchweg den gleichen Abstand x von der durch A gelegten yz -Ebene. Man kann daher den Inhalt der Scheibe zu $dV = y^2 \pi \cdot dx$ zusammenfassen mit dem Momente $dV \cdot x = y^2 \pi \cdot dx \cdot x$, und hat:

$$\frac{2}{3} r^3 \pi x_0 = \pi \int_0^r y^2 x \cdot dx.$$

Um unter den Integralzeichen eine Differentialfunktion von x zu erhalten, muß man $y^2 = r^2 - x^2$ setzen, dann wird

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} r^3 \pi x_0 &= \pi \int_0^r (r^2 - x^2) x \cdot dx = r^2 \pi \int_0^r x \cdot dx - \pi \int_0^r x^3 dx \\ &= \frac{1}{2} r^4 \pi - \frac{1}{4} r^4 \pi = \frac{1}{4} r^4 \pi, \quad \text{also} \end{aligned}$$

19)

$$x_0 = \frac{3}{8} r.$$

Satz von Pappus und Guldin. Die Lehre vom Schwerpunkte war schon Archimedes (287–212 v. Chr.) bekannt. Der alexandrinische Gelehrte Pappus benutzte gegen Ende des dritten oder vierten Jahrhunderts n. Chr. die Schwerpunkte ebener Kurven und Flächen zur Berechnung von Umdrehungsflächen und -Körpern. Der betreffende Satz wurde vom Jesuitenpater Guldin aus St. Gallen 1635 n. Chr. weiter verwertet und heißt danach der Satz von Pappus und Guldin.

Fig. 173.

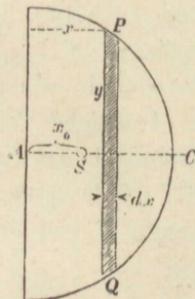
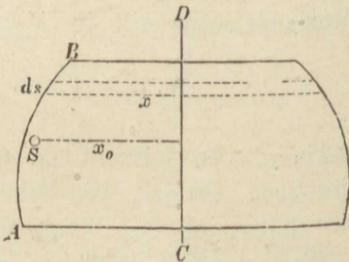


Fig. 174.



1. Dreht sich eine ebene Kurve AB (Fig. 174) um eine in ihrer Ebene liegende Achse CD , so entsteht eine Umdrehungsfläche. Ein Bogenteilchen ds mit dem Drehungshalbmesser x erzeugt eine Fläche $dF = ds \cdot 2\pi x$. Der Inhalt der ganzen erzeugten Umdrehungsfläche ist daher

$$F = 2\pi \int ds \cdot x.$$

Weil nun nach der Lehre vom Schwerpunkte (S. 153, Gl. 4) $\int ds \cdot x = s x_0$, so wird

$$20) \quad F = 2\pi x_0 s.$$

Darin bedeutet x_0 den Drehungshalbmesser des Schwerpunktes S der erzeugenden Kurve von der Länge $AB = s$.

2. Dreht sich aber eine ebene Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse (Fig. 175), so erzeugt ein Flächenteilchen

$dF = dx \cdot dy$ mit dem Halbmesser x einen Kreisring vom Inhalte

$$\begin{aligned} dV &= \left\{ (x + dx)^2 - x^2 \right\} \pi \cdot dy \\ &= 2x \cdot dx \cdot \pi \cdot dy = 2\pi x \cdot dx \cdot dy = 2\pi x \cdot dF. \end{aligned}$$

Der ganze Umdrehungskörper wird sonach $V = 2\pi \int dF \cdot x$, oder, weil (S. 154, Gl. 6) $\int dF \cdot x = F x_0$,

$$21) \quad V = F 2\pi x_0,$$

daher der Pappus-Guldin'sche Satz:

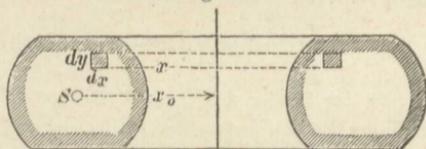
Der Inhalt einer Fläche, welche durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse entsteht, ist gleich der Länge der Kurve mal dem Drehungswege $2\pi x_0$ ihres Schwerpunktes. — Der Inhalt eines Körpers, welcher durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse entsteht, ist gleich der Fläche mal dem Drehungswege ihres Schwerpunktes.

Beispiel 1: Dreht sich nach Fig. 176 ein Halbkreisbogen um die Achse CD , so ist nach S. 154

$$x_0 = a + 2 \frac{r}{\pi}, \text{ mithin } F = r\pi \left(a + 2 \frac{r}{\pi} \right) 2\pi = 2ra\pi^2 + 4r^2\pi.$$

Der letzte Summand ist die Kugeloberfläche, welche für $a = 0$ entsteht.

Fig. 175.

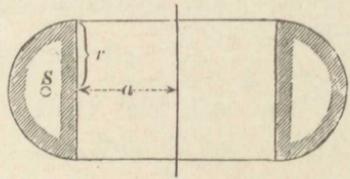
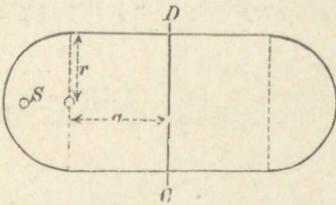


Durch Drehung der Halbkreisfläche entsteht ein Körper (Fig. 177)

$$V = \frac{1}{2} r^2 \pi 2 \pi \left(a + \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \right) = r^2 \pi^2 a + \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Fig. 176.

Fig. 177.



Der letzte Summand bezeichnet den Inhalt des Kugelkörpers, welcher für $a = 0$ entsteht.

Fig. 178.

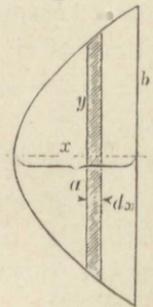
Beispiel 2: Der Inhalt eines Umdrehungs-Paraboloides (Fig. 178) ist leicht zu finden zu

$$V = \int y^2 \pi dx = \pi \frac{b^2}{a} \int_0^a x dx = \frac{\pi b^2 a}{2},$$

gleich der Hälfte des umschließenden Zylinders. Daraus läßt sich nun die Schwerpunkts-Ordinate y_0 der halben Parabelfläche berechnen:

$$\frac{1}{2} b^2 a \pi = \frac{2}{3} a b 2 \pi y_0,$$

mithin $y_0 = \frac{3}{8} b$, wie auf S. 161 gefunden.



15. Zeichnerische Ermittlung des Schwerpunktes einer ebenen Fläche.

Man zerlegt die gegebene Fläche in Teile, deren Inhalte und Schwerpunkte sich leicht bestimmen lassen, denkt sich in den einzelnen Schwerpunkten angreifend die Einzelflächen als parallele Kräfte, einmal in einer, sodann in einer anderen (etwa zur ersten senkrechten) Richtung wirkend und bestimmt vermittels je eines Kraft- und Seilecks für beide Kraftrichtungen die Richtungslinien der Mittelkraft. Beide müssen den Schwerpunkt der Gesamtfläche enthalten, der damit gefunden ist.

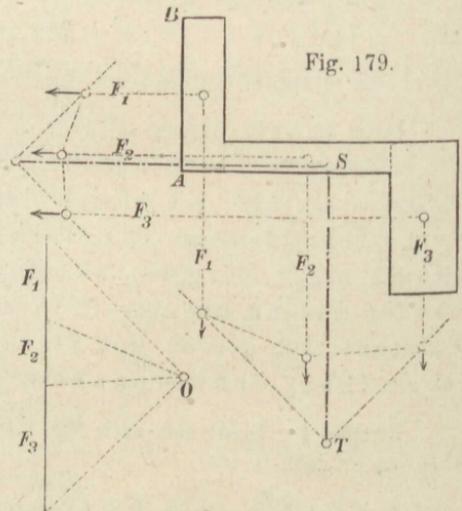
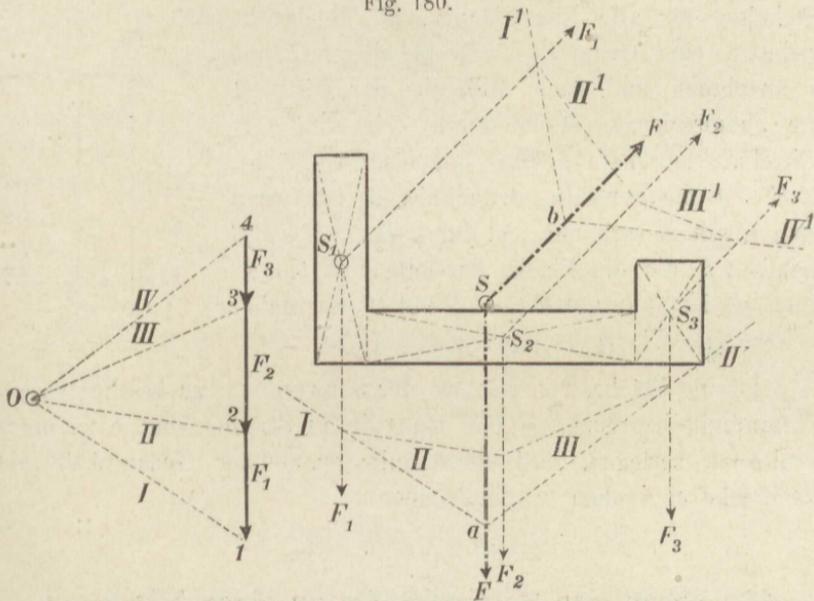


Fig. 179.

In Fig. 179 und 180 ist die in der beschriebenen Weise erfolgte Ermittlung des Schwerpunktes je einer aus einzelnen Rechtecken bestehenden Fläche (etwa Profilflächen eiserner Träger) dargestellt. Die Schwerpunkte der Einzelflächen werden in den Schnittpunkten der Diagonalen erhalten.

In Fig. 179 sind die als Kräfte gedachten Einzelflächen F_1 , F_2 und F_3 in den Teilschwerpunkten einmal senkrecht und einmal wagerecht angenommen. In Fig. 180 dagegen sind wegen des geringen

Fig. 180.



senkrechten Abstandes der Teilschwerpunkte S_2 und S_3 , um eine klarere Figur zu erhalten, die Kräfte F_1 , F_2 und F_3 einmal senkrecht und einmal in zweckentsprechender Neigung angenommen. In beiden Fällen ist die Zeichnung eines Kräftecks nur für die senkrechte Richtung der Kräfte F_1 , F_2 und F_3 erforderlich, wenn man die der zweiten wagerechten oder geneigten Krafrichtung entsprechenden Seileckseiten unter gleichem Winkel gegen die Polstrahlen richtet, wie ihn die beiden Krafrichtungen miteinander einschließen, etwa 90° oder 45° .

In den Kräftecken erscheinen die Flächen als Kräfte durch gerade Linien ausgedrückt. Man hat sich daher bei Darstellung derselben zunächst über einen entsprechenden Maßstab zu entscheiden,

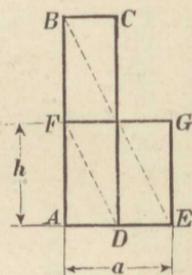
indem man festsetzt, wieviel Flächeneinheiten durch eine Längeneinheit ausgedrückt werden sollen. Drückt man beispielsweise 5 Flächeneinheiten durch eine Längeneinheit aus, so würde ein Rechteck von 10 cm Länge und 2 cm Breite durch eine Linie von $\frac{10 \cdot 2}{5} = 4$ cm Länge darzustellen sein, d. h. alle Flächen sind in

Rechtecke von derselben Grundlinie 5 cm zu verwandeln und als Kräfte durch die entsprechenden Höhen darzustellen. Bei der zeichnerischen Behandlung kann man ohne Rücksicht auf bestimmte Einheiten für alle Einzelflächen, als Rechtecke gedacht, eine Grundlinie von beliebiger Länge a annehmen und nach Maßgabe der Fig. 181 die entsprechende Höhe durch Zeichnung ermitteln. Ist $ABCD$ die gegebene Teilfläche, $AE = a$ die gewählte Grundlinie, so ist, wenn man E mit B verbindet und durch D $DF \parallel EB$ zieht, AF die die Fläche darstellende Höhe h , denn es ist $AD : AE = AF : AB$ und daher

$$AD \cdot AB = AE \cdot AF = a \cdot h.$$

Ist die Fläche, von welcher der Schwerpunkt zu bestimmen ist, krummlinig begrenzt, so hat man sie in Streifen von so geringer Breite zu zerlegen, daß diese mit genügender Genauigkeit als Rechtecke angesehen werden können

Fig. 181.



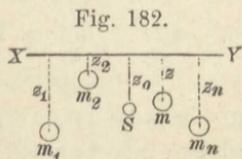
16. Arbeit der Schwerkraft an einer beliebigen Massengruppe.

Der Schwerpunkt wurde im vorhergehenden als der Mittelpunkt der Schwerkraft eines starren Körpers oder sonstiger, über die Masse eines starren Körpers gleichmäßig verteilter Massenkräfte gleichen Sinnes bezeichnet. Aber auch für Körper veränderlicher Form, ja selbst für beliebige Gruppen von Massen (mit oder ohne gegenseitige Verbindung) nennt man den irgendeiner gegenseitigen Lage der Massenteilchen entsprechenden Punkt mit der Eigenschaft:

$$x_0 = \frac{\sum m x}{\sum m}, \quad y_0 = \frac{\sum m y}{\sum m}; \quad z_0 = \frac{\sum m z}{\sum m}$$

den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

Sind m_1, m_2, \dots, m_n (Fig. 182) einzelne Massenpunkte oder einzelne starre Körper, die zusammen einen starren, oder einen der Form nach veränderlichen Körper oder eine beliebige Massengruppe bilden, und wirkt auf diese die Schwere in der Richtung der z -Achse, so verrichtet die Schwere bei einer unendlich kleinen Verrückung, bei der sich ein Massenteil m so bewegt, daß z und dz zunimmt, eine Arbeit $mg \cdot dz$. Die Arbeitssumme der Schwerkraft an allen Massenteilchen ist dann



$$d\mathcal{A} = g (m_1 dz_1 + m_2 dz_2 + \dots + m dz) = g \Sigma m \cdot dz.$$

Nun ist aber $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m z = \Sigma m z = z_0 \Sigma m$, also, weil bei einer Verrückung die Massen m unveränderlich, die z -Werte aber veränderlich, $\Sigma m \cdot dz = dz_0 \Sigma m$; mithin ist

$$22) \quad d\mathcal{A} = g \cdot dz_0 \Sigma m = dz_0 \Sigma mg.$$

Die Arbeitsumme der Schwerkraft an einer beliebigen Massengruppe berechnet sich gerade so, als ob die ganze Masse Σm der Gruppe in ihrem Schwerpunkte zu einem Massenpunkte vereinigt wäre.

17. Der Satz d'Alemberts.

Auf Seite 33 wurde dargetan, daß ein Massenpunkt m , der einer Beschleunigung p unterliegt, dieser, seiner trägen Natur zufolge, einen „Trägheitswiderstand“ $-m \cdot p$ entgegengesetzt und daß die zur Erzeugung der Beschleunigung p erforderliche Kraft K jenen Widerstand überwinden, ihm also entgegengesetzt gleich sein muß, $K = m \cdot p$. Beide, die beschleunigende Kraft K und der zu überwindende Trägheitswiderstand $-m \cdot p$, erfüllen also in ihrer Wirkung und Gegenwirkung die Bedingung für das Gleichgewicht von Kräften an einem Punkte. Tritt an Stelle des einzelnen Massenpunktes eine Gruppe von Massenpunkten, die starr miteinander verbunden, oder gegeneinander beweglich sein mögen; und führt ein solcher „starrer Körper“ oder eine bewegliche „Massengruppe“ unter der Wirkung von unter sich nicht im Gleichgewicht stehenden

äußeren Kräften irgendeine Bewegung aus, so wird jeder der Massenpunkte in jedem Augenblicke eine bestimmte Beschleunigung erfahren. Richtung und Größe derselben werden für die einzelnen Massenpunkte im allgemeinen verschieden sein; jeder derselben aber setzt seiner Beschleunigung einen Trägheitswiderstand $-mp$ entgegen. Und es läßt sich der Satz nachweisen:

Die Gesamtheit oder die Gruppe aller Trägheitswiderstände (Ergänzungskräfte) an einem starren Körper oder einer Massengruppe erfüllt mit der Gesamtheit oder der Gruppe aller angreifenden Kräfte die Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften an einem starren Körper.

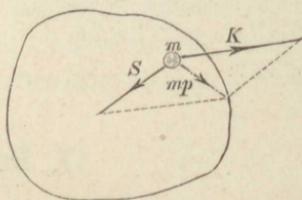
Der Nachweis dieses von d'Alembert (1717—1783) im Jahre 1743 in etwas anderer Fassung aufgestellten Satzes läßt sich wie folgt führen:

Greift an einem Punkt m des starren Körpers oder der Massengruppe (Fig. 183) eine äußere Kraft K an, so würde der Punkt, wenn er frei wäre, im Sinne von K eine Beschleunigung $K:m$ erfahren. Die übrigen Punkte der Massengruppe werden aber ebenfalls auf die Bewegung von m einwirken, also Kräfte, die sog. inneren Kräfte, auf m ausüben, deren Mittelkraft S sein möge. Durch S ist der Einfluß der übrigen Punkte völlig ausgedrückt; nach Anbringung dieser Kraft verhält sich also der Punkt m wie ein freier. Nennt man daher p die wirkliche Beschleunigung des Punktes m , so muß die dazu erforderliche Kraft mp die Mittelkraft aus K und S darstellen, oder man kann schreiben

$$mp \equiv K, S.$$

Der Trägheitswiderstand (Ergänzungskraft) $-mp$ des Massenpunktes erfüllt mit der Kraft mp oder ihren Seitenkräften K und S die Bedingung für das Gleichgewicht von Kräften an einem Punkte, ausgedrückt durch die Beziehung $K, S, (-mp) \equiv 0$. Eine gleiche Beziehung gilt für jeden Punkt der Massengruppe.

Fig. 183.



Die Gruppe der sämtlichen Trägheitswiderstände (Ergänzungskräfte) $[-mp]$ (mit der eckigen Klammer als Gruppenzeichen) erfüllt mit den beiden Gruppen der äußeren Kräfte $[K]$ und der inneren Kräfte $[S]$ die Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften an starren Körpern.

Wenn man also die drei Kräftegruppen $[-mp]$, $[K]$, $[S]$ nach den Lehren über die Zusammensetzung der Kräfte an starren Körpern zu einer Mittelkraft R und einem Achsenmoment \mathfrak{M} vereinigt, so müssen R und \mathfrak{M} gleichzeitig Null werden. Die inneren Kräfte (Spannkräfte) S wirken aber zwischen je zwei Punkten nach dem Gesetze der Wechselwirkung gleich und entgegengesetzt und heben sich daher bei der Zusammensetzung aller Kräfte zu je zweien auf, so daß die Gruppe der inneren Kräfte $[S]$ überhaupt verschwindet und $[K]$, $[-mp] \equiv 0$ ist.

Es mag hier aber ausdrücklich hervorgehoben werden, daß es sich dabei lediglich um die nachgewiesene Wechselwirkung zwischen der Trägheit des Körpers oder der Massengruppe und den angreifenden Kräften handelt, die dauernd einander entgegengesetzt gleich sind; eine Tatsache, die nicht mit dem Gleichgewicht des Körpers verwechselt werden darf.

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes läßt sich leicht die Frage beantworten, unter welcher Bedingung ein starrer Körper eine rein fortschreitende Bewegung, sog. Verschiebung, ausführen kann. Bei einer Verschiebung haben alle Punkte des Körpers in jedem Augenblicke gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung; nennt man die gemeinsame Beschleunigung p , so verteilen sich die Trägheitswiderstände (Ergänzungskräfte) $[-mp]$ gleichmäßig über die Masse des Körpers. Ihre Mittelkraft $-M \cdot p$ muß durch den Schwerpunkt des Körpers gehen und nach dem d'Alembertschen Satze muß auch die Mittelkraft der angreifenden Kräfte durch diesen Punkt gerichtet sein.

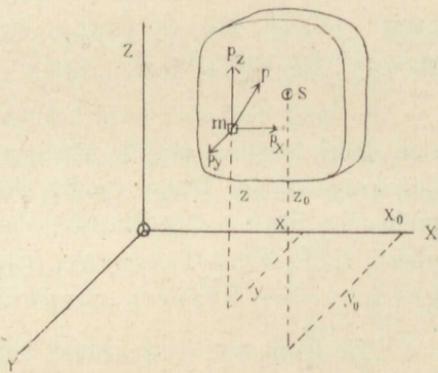
Erkennt man also, daß ein Körper eine reine Verschiebung erfährt, so kann man daraus schließen, daß die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden äußeren Kräfte durch den Schwerpunkt gehen und von der Größe $+M \cdot p$ sein muß. Umgekehrt genügt aber das Wirken dieser Kraft noch nicht zur Erzeugung einer Verschiebung,

sondern es ist dazu noch erforderlich, daß der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte.

18. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Der in beschleunigter Bewegung begriffene Körper oder die Massengruppe werde auf ein dreiachsiges räumliches Koordinatensystem bezogen (Fig. 184). Ein Massenpunkt m von den augenblicklichen Koordinaten x , y und z erfahre in irgendeiner Richtung eine Beschleunigung p , die man sich durch ihre Seitenbeschleunigungen p_x , p_y und p_z in den drei Achsrichtungen ausgedrückt denken kann. Der Massenpunkt setzt dann in den drei Achsrichtungen seiner Beschleunigung die Trägheitswiderstände $-p_x m$, $-p_y m$ und $-p_z m$ entgegen, wobei man nach S. 15 $p_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$, $p_y = \frac{d^2 y}{dt^2}$ und $p_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$ setzen

Fig. 184.



kann. Die Summen der Trägheitswiderstände in den drei Achsrichtungen sind daher

$$1) \quad \sum \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot m, \quad \sum \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot m, \quad \sum \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot m.$$

Sind $X = \sum K \cdot \cos \alpha$, $Y = \sum K \cdot \cos \beta$ und $Z = \sum K \cdot \cos \gamma$ die Summen der Komponenten der äußeren Kräfte in den drei Achsrichtungen, so führt nach d'Alembert die Gleichheit der Wirkung der äußeren Kräfte und der Gegenwirkung der Trägheitswiderstände zu den Gleichungen

$$2) \quad \sum \frac{d^2 x}{dt^2} m = X, \quad \sum \frac{d^2 y}{dt^2} m = Y \quad \text{und} \quad \sum \frac{d^2 z}{dt^2} m = Z.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist ferner

$$3) \quad M \cdot x_0 = \sum m \cdot x, \quad M \cdot y_0 = \sum m \cdot y \quad \text{und} \quad M \cdot z_0 = \sum m \cdot z,$$

worin M die Masse des ganzen Körpers oder der Massengruppe, x_0 , y_0 und z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes derselben sind.

Durch zweimalige Differentiation beider Seiten der Gleichungen 3 in bezug auf die mit der Zeit veränderlichen Koordinaten nach der Zeit folgt

$$4) \quad M \cdot \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \sum m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad M \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \sum \frac{d^2 y}{dt^2} m \quad \text{und} \quad M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \sum m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Die Gleichungen 2 und 4 endlich ergeben, wenn man beachtet, daß

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = p_{x_0}, \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = p_{y_0} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = p_{z_0}$$

die Seitenbeschleunigungen des Schwerpunktes eines Körpers in den drei Achsrichtungen sind,

$$5) \quad M \cdot p_{x_0} = X, \quad M \cdot p_{y_0} = Y \quad \text{und} \quad M \cdot p_{z_0} = Z.$$

Also: Der Schwerpunkt eines Körpers oder einer beliebigen Massengruppe wird gerade so beschleunigt und bewegt sich genau so, als ob die ganze Masse des Körpers oder der Gruppe in ihm vereinigt wäre und als ob sämtliche äußere Kräfte (parallel verschoben) an ihm wirkten. Die inneren Kräfte haben hiernach auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluß.

Durch diesen Satz bekommt die Mechanik des Massenpunktes eigentlich erst ihr großes Anwendungsgebiet. Da es einen einzelnen Massenpunkt von verschwindend kleinen Abmessungen in aller Strenge nicht gibt, so konnte es bisher scheinen, als ob die Lehren von der Bewegung des Massenpunktes für die Anwendung ziemlich wertlos seien. Aus vorstehendem Satz aber erkennt man, daß die Lehre von der Bewegung des Massenpunktes auch für Körper ihre Bedeutung hat, insofern sie die Bewegung des Schwerpunktes richtig darstellt. Eine außerdem etwa noch vorkommende Drehung um den Schwerpunkt kann dann noch

besonders untersucht werden und bildet eine Ergänzung oder Vervollständigung der ganzen Aufgabe, nicht aber eine Berichtigung. In vielen Fällen kann man auch auf diese (häufig schwierige) Ergänzung der Lösung verzichten und sich mit der Kenntnis der Bewegung des Schwerpunktes begnügen.

Ein Kräftepaar wird bei der Verschiebung der Kräfte an den Schwerpunkt zwei Kräfte liefern, die sich aufheben. Kräftepaare haben hiernach keine Einwirkung auf die Bewegung des Schwerpunktes, sondern beeinflussen nur die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt.

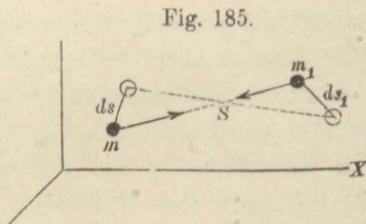
19. Satz der Arbeit.

Auf einen Massenpunkt eines Körpers wirkt außer der äußeren Kraft K eine innere Kraft S . Diese verrichten bei einer Bewegung des Körpers die Arbeiten \mathcal{A}_k und \mathcal{A}_i . Sind c und v Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Punktes, so gilt für den Massenpunkt $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mc^2 = \mathcal{A}_k + \mathcal{A}_i$, denn an dem Massenpunkt m kann (nach S. 45) für die Arbeit der Mittelkraft aus K und S ohne weiteres die Arbeitssumme der Einzelkräfte gesetzt werden. Stellt man diese Gleichung für sämtliche Massenpunkte auf, so ergibt sich durch Zusammenzählen:

$$1) \quad \sum \frac{1}{2}mv^2 - \sum \frac{1}{2}mc^2 = \sum \mathcal{A}_k + \sum \mathcal{A}_i.$$

Oder die Zunahme des ganzen Körpers an Arbeitsvermögen ist gleich der Arbeitssumme der äußeren und der inneren Kräfte. Es läßt sich zeigen, daß die Arbeit der inneren Kräfte für einen starren Körper Null ist.

Die inneren Kräfte treten zwischen je zwei Massenpunkten paarweise gleich und entgegengesetzt auf. Betrachten wir ein Paar solcher Massenpunkte m und m_1 (Fig. 185) mit den inneren Kräften S , welche beispielsweise



gegenseitige Anziehungskräfte sein mögen, und nehmen wir an, daß

sich die Punkte um ds bzw. ds_1 bewegen. Zerlegen wir dann die Kräfte S in X, Y, Z ; ds in die Projektionen dx, dy, dz ; ds_1 in dx_1, dy_1, dz_1 , so wird an m die Arbeit verrichtet: $Xdx + Ydy + Zdz$, an m_1 aber $-(Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1)$. Die Arbeitssumme an beiden Punkten ist also

$$d\mathcal{A}_i = -\{X \cdot d(x_1 - x) + Y \cdot d(y_1 - y) + Z \cdot d(z_1 - z)\}.$$

Bildet aber S mit den Achsenrichtungen die Winkel α, β, γ , so ist, wenn x, y, z bzw. x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von m und m_1 , a ihre Entfernung:

$$X = S \cos \alpha = S \frac{x_1 - x}{a},$$

$$Y = S \cos \beta = S \frac{y_1 - y}{a},$$

$$Z = S \cos \gamma = S \frac{z_1 - z}{a}.$$

Daher kann man schreiben:

$$d\mathcal{A}_i = -\frac{S}{2a} d\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\}, \text{ oder,}$$

weil $x_1 - x, y_1 - y$ und $z_1 - z$ die drei Projektionen von a :

$$d\mathcal{A}_i = -\frac{S}{2a} d(a^2) = -\frac{S}{2a} 2a \cdot da = -S \cdot da.$$

Ist also der Abstand a der beiden Punkte veränderlich, so verrichten die inneren Kräfte S eine Arbeit; dies wird gelten für elastisch-feste Körper, die während der Betrachtung ihre Form ändern. Für starre Körper aber ist $da = 0$, mithin auch $d\mathcal{A}_i = 0$. Also:

Bei **starren** Körpern ist die Zunahme an Arbeitsvermögen gleich der Arbeitssumme der **äußeren** Kräfte

$$2) \quad \Sigma^{1/2} m v^2 - \Sigma^{1/2} m c^2 = \Sigma \mathcal{A}_k.$$

Hatte ein starrer Körper zu Anfang keine Bewegung, war die Geschwindigkeit aller Punkte Null und überläßt man ihn der alleinigen Einwirkung der Schwere, so führt er (nach S. 173) eine lotrechte Verschiebung aus, bei welcher der Schwerpunkt und somit

auch jeder andere Punkt eine lotrechte, gleichförmig beschleunigte Fallbewegung hat. Die Arbeit der Schwerkkräfte richtet sich (S. 169) allein nach der Senkung h des Schwerpunktes und beträgt Mgh . Da in einem Augenblicke sämtliche Punkte dieselbe Geschwindigkeit haben, so ist einfach $\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mc^2 = Mgh$, genau wie beim Massenpunkte.

Wird der Körper aber in schräger Richtung so fortgeworfen, daß zu Anfang die Bewegung ebenfalls ohne jede Drehung erfolgt, daß also sämtliche Punkte die gleiche Geschwindigkeit c haben, so muß (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes) die weitere Bewegung ebenfalls eine Verschiebung sein, und zwar wird der Schwerpunkt, und damit jeder andere Punkt, die Wurfparabel (S. 50) beschreiben, genau wie ein einfacher Massenpunkt.

II. A. Gleichgewicht starrer Körper.

1. Gleichgewichtsbedingungen.

Man bezeichnet einen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämtlichen Massenpunkte im Gleichgewichte sind, d. h. eine geradlinig-gleichförmige Bewegung ausführen, oder (als Sonderfall) in Ruhe sind; in letzterem Falle haben sie weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung. Solcher Gleichgewichtszustand besteht offenbar, wenn der Körper eine gleichförmige und geradlinige Verschiebung erleidet, und zwar ist eine derartige Verschiebung auch die einzige Möglichkeit des Gleichgewichtes. Man könnte vielleicht meinen, daß die Punkte eines Körpers sich auch geradlinig bewegen könnten, ohne daß diese Bahnlinien notwendig einander parallel sein müßten, doch läßt sich zeigen, daß dies bei starren Körpern nicht möglich ist.

Denkt man sich den Punkt B (Fig. 186) längs einer Geraden AY , den Punkt C längs einer Geraden AX geführt und haben B und C eine unveränderliche Entfernung, so wird ein beliebiger Punkt P der Verbindungsgeraden, der von B und C um a bzw. b absteht, eine Ellipse beschreiben.

Nennt man nämlich die auf AX und AY bezogenen schiefwinkligen Koordinaten des Punktes P x und y , setzt $AB - y = u$, $AC - x = v$, so ist in dem Dreiecke BPQ ,

$$a^2 = u^2 + x^2 - 2ux \cos \alpha.$$

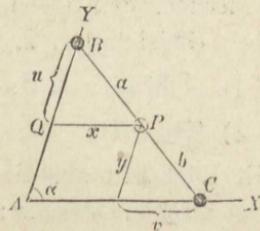
Ferner ist nach der Figur $u : y = a : b$; setzt man dies ein, so wird

$$a^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 + x^2 - 2 \frac{a}{b} y x \cos \alpha,$$

oder
$$1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y}{b} \frac{x}{a} \cos \alpha.$$

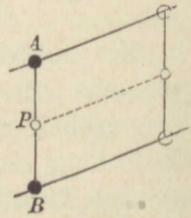
Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Führt man also 2 Punkte A und B eines starren Körpers in nicht parallelen Geraden, so

Fig. 186.



bewegen sich die sonstigen Punkte der Geraden AB nicht in geraden Linien. Nur wenn die Führungslinien der Punkte A und B parallele Gerade sind (Fig. 187), beschreibt auch jeder andere Punkt der AB eine Gerade. Ein Körper ist also nur im Gleichgewichte bei einer gleichförmig-geradlinigen Verschiebung oder beim Ruhezustande (Verschiebung mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung Null). Hierbei haben alle Massenpunkte die Beschleunigung Null, es sind mithin alle Ergänzungskräfte Null. Nach dem Satze d'Alemberts (S. 169) müssen sich also sämtliche äußere Kräfte schon unter sich allein aufheben.

Fig. 187.



Umgekehrt folgt aber aus dem gegenseitigen Aufheben der äußeren Kräfte noch nicht, daß der Körper im Gleichgewichte sei; vielmehr muß dazu außerdem noch die Bedingung erfüllt sein, daß der Körper auch zu Anfang keine Drehbewegung hatte. Ist im Anfange Ruhe oder gleichförmige geradlinige Verschiebung, also Gleichgewicht, vorhanden, so wird dieses andauern, solange sich die äußeren Kräfte aufheben. Etwaige äußere Kräfte lassen sich am starren Körper auf eine Mittelkraft R und ein Achsenmoment \mathfrak{M} zurückführen; und weil R und \mathfrak{M} im allgemeinen nicht vereinigt werden können, so ist zum Aufheben der gegebenen Kräfte erforderlich, daß gleichzeitig $R = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ sei, und dies ist nach Gleichung 1, 2, 3, 4, 6 (S. 142) nur möglich, wenn

- 1) $\sum K \cos \alpha = 0$; 2) $\sum K \cos \beta = 0$; 3) $\sum K \cos \gamma = 0$;
 4) $\mathfrak{M}_x = 0$; 5) $\mathfrak{M}_y = 0$; 6) $\mathfrak{M}_z = 0$.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von \mathfrak{M}_x usw. nach S. 144 kann man also aussprechen:

Die an einem starren Körper wirkenden Kräfte heben sich auf, wenn in bezug auf ein beliebiges Achsenkreuz

1. die algebraische Summe der bei rechtwinkliger Zerlegung parallel zu jeder Achsenrichtung fallenden Seitenkräfte Null ist, und wenn zugleich

2. die algebraische Summe der Momente der Kräfte in bezug auf jede der Achsen Null ist.

Handelt es sich um eine Gruppe von Parallelkräften, so vermindert sich die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen von sechs

auf drei. Legt man nämlich eine der Koordinatenachsen, etwa die Z -Achse, in die Richtung der Kräfte, so treten die Seitenkräfte in den Richtungen der beiden anderen Achsen nicht auf; zwei der Gleichungen 1 bis 3, etwa Gl. 1 und 2, verschwinden. Gleichzeitig haben die Kräfte in bezug auf die ihnen parallele Achse kein Moment. Es verschwindet eine der Gleichungen 4 bis 6.

Die Gleichgewichtsbedingungen für Parallelkräfte im Raume lauten danach: Es müssen die Summe der Kräfte Null und die Summe ihrer Momente in bezug auf zwei die Kraftlinie rechtwinklig kreuzenden Achsen je gleich Null sein.

Liegen die Kräfte durchweg in derselben Ebene und wählt man diese zur xy -Ebene, so fällt die Gleichung 3 (S. 142) aus, weil in der z -Richtung überhaupt keine Seitenkräfte sich ergeben; auch die Momentengleichungen 4 und 5 fallen fort, weil die in der xy -Ebene liegenden Kräfte in bezug auf die x - und y -Achsen, welche mit ihnen in derselben Ebene liegen, keine Momente haben (S. 107). \mathfrak{M}_z bedeutet dann die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Kräfteebene. Außerdem wird noch $\cos \beta = \sin \alpha$, und es verbleiben die drei Bedingungen (vergl. auch S. 117):

$$7) \quad \sum K \cos \alpha = 0; \quad \sum K \sin \alpha = 0; \quad \mathfrak{M}_z = \sum K l = 0.$$

Liegt die x -Achse wagerecht, die y -Achse lotrecht, so heißen die Bedingungen in Worten:

Die algebraische Summe aller wagerechten Seitenkräfte, die algebraische Summe aller lotrechten Seitenkräfte und die Momentensumme für einen beliebigen Punkt der Ebene müssen Null sein.

Die graphischen Merkmale für das Gleichgewicht sind nach S. 133 ein schließendes Krafteck und ein schließendes Seileck.

Sind die in einer Ebene liegenden Kräfte einander parallel und wählt man die X -Achse in der Richtung der Kräfte, so entstehen in der Y -Richtung keine Seitenkräfte, die zweite der Gleichungen fällt aus und es bleiben nur zwei Gleichgewichtsbedingungen, nämlich: Es müssen die Summe aller Kräfte und die Summe ihrer Momente in bezug auf irgendeinen Punkt der Kräfteebene gleich Null sein.

2. Gleichgewicht festgehaltener oder gestützter Körper.

Wird ein starrer Körper, auf den miteinander nicht im Gleichgewicht stehende Kräfte einwirken, in irgendeiner Weise festgehalten oder gestützt, so hat die Befestigung bezw. haben die Stützen Widerstandskräfte oder „Widerstände“ auf den Körper auszuüben, die den angreifenden Kräften gegenüber das Gleichgewicht aufrecht erhalten, mit ihnen zusammen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Zur Bestimmung der von den Stützen zu leistenden Widerstände, der „Stützwiderstände“, werden die Gleichgewichtsbedingungen bezw. die diese ausdrückenden Gleichungen benutzt. Ist die Befestigung des Körpers derart, daß die eindeutige Bestimmung der Stützwiderstände mit Hilfe der statischen Gleichgewichtsbedingungen geschehen kann, so sagt man, der Körper befindet sich im statisch bestimmten Gleichgewichts- oder Stützzustande. Gelingt die Bestimmung der Stützwiderstände mit Hilfe der statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht, so nennt man den Stützzustand statisch unbestimmt. Damit also der Stützzustand eines Körpers statisch bestimmt sei, darf die Zahl der Unbekannten, durch welche die Stützwiderstände bestimmt sind, nicht größer sein, als die Zahl der verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen oder Bestimmungsgleichungen. Bei beliebigem Kraftangriff im Raume nicht größer als sechs, bei solchem in der Ebene nicht größer als drei. Ist die Zahl der Unbekannten größer, so ist der Stützzustand des Körpers statisch unbestimmt, und zwar je nachdem die Zahl der Unbekannten diejenige der verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen um eins, zwei oder mehr übertrifft, ein-, zwei- oder mehrfach statisch unbestimmt.

Ist die Stützung des Körpers derart, daß die Zahl der die Stützkkräfte bestimmenden Unbekannten kleiner ist, als diejenige der zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen, so können letztere durch die Stützwiderstände nicht alle erfüllt werden. Der Körper befindet sich nun im Stützzustande des bedingten Gleichgewichts, insofern nämlich, als jetzt nur Gleichgewicht möglich ist, wenn die angreifenden Kräfte unter sich gewisse Bedingungen des durch die Stützen nicht gesicherten Gleichgewichtes erfüllen. Damit also der Gleichgewichtszustand eines gestützten Körpers jedem beliebigen

Kraftangriff gegenüber ein unbedingter und gleichzeitig ein statisch bestimmter sei, darf die Zahl der Stützunbekannten weder kleiner, noch größer sein als die Zahl der zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen.

Es läßt sich aber zeigen, daß auch, wenn beide einander gleich sind, dennoch unter gewissen, von der Art der Stützung abhängenden Umständen der gestützte Körper gleichzeitig im Zustande nur bedingten und statisch unbestimmten Gleichgewichtes sich befinden kann.

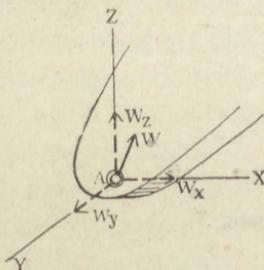
Bevor auf diese Verhältnisse weiter eingegangen wird, mögen in folgendem zunächst die hauptsächlich in Frage kommenden Stützarten besprochen werden.

a) Das räumliche Stützproblem.

Wird der zu stützende Körper von beliebig im Raume gelegenen Kräften angegriffen, so kommen im einzelnen folgende Stützarten oder Stützelemente in Betracht:

1. Das räumliche feste Stützgelenk. Es entsteht, wenn ein Körper in einem Punkte A (Fig. 185) unverschieblich drehbar festgehalten wird. Der Widerstand W , den es zu leisten vermag, kann beliebig gerichtet und von beliebiger Größe sein. Er ist wie eine durch einen gegebenen Punkt gehende Kraft durch drei Stücke, nämlich durch zwei Winkel und seine Größe oder durch seine Seitenkräfte W_x , W_y und W_z in drei Achsrichtungen bestimmt. — Das räumliche feste Stützgelenk vermag drei Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen, weil es Widerstände W_x , W_y und W_z in drei Achsrichtungen leisten kann. Es soll daher als statisch dreiwertig bezeichnet und hinfort durch Angabe der drei Widerstände und durch doppelte Umkreisung des Punktes $[⊙]$ (Fig. 185) figürlich dargestellt werden.

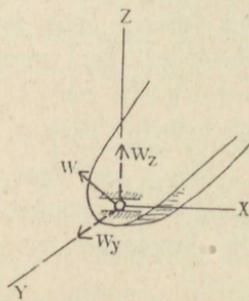
Fig. 185.



2. Das nach einer Geraden verschiebbliche räumliche Stützgelenk. Es entsteht, wenn ein Körper in einem

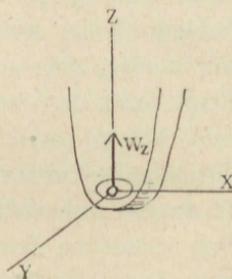
Punkte derart drehbar festgehalten wird, daß er sich nur in einer Richtung fortschreitend bewegen kann (Fig. 186). Der Widerstand, den es zu leisten vermag, kann nur in einer Ebene liegen, die senkrecht zu der Richtung seiner Verschieblichkeit ist. Fällt diese z. B. wie in Figur 186 angenommen, mit der X -Richtung zusammen, so kann der Stützwiderstand nur in der ZY -Ebene liegen. Er ist hier durch zwei Stücke, einen Richtungswinkel und seine Größe oder durch zwei Seitenkräfte W_y und W_z bestimmt. Das nach einer Geraden verschiebbliche räumliche Stützgelenk vermag zwei Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen; es ist statisch zweiwertig und soll durch Angabe der Widerstände, die es in zwei Richtungen leisten kann und sonst wie in Fig. 186 dargestellt werden.

Fig. 186.



3. Das nach einer Ebene verschiebbliche räumliche Stützgelenk (Fig. 187). Es kann einen Stützwiderstand nur in einer Richtung, nämlich senkrecht zu seiner Verschiebungsebene leisten. Fällt diese z. B. mit der XY -Ebene zusammen, so ist nur ein Widerstand W_z in der Z -Richtung möglich. Dieses Stützgelenk kann nur eine Gleichgewichtsbedingung erfüllen, es ist statisch einwertig und soll durch Angabe eines Widerstandes, den es leisten kann, wie in Fig. 187 dargestellt werden.

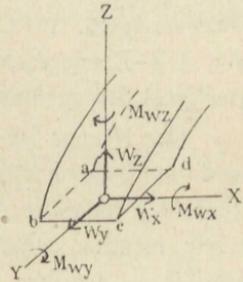
Fig. 187.



4. Die räumliche feste Einspannung (Fig. 188). Sie entsteht, wenn ein Körper in einer Ebene (a, b, c, d) unverschieblich und gegen jede Drehung festgehalten wird. Eine solche Befestigung schließt jede Bewegungsmöglichkeit aus, hält den Körper gegen jeden Kraftangriff im Gleichgewicht; sie ist statisch sechswertig. Die sechs Stützwerte sind je ein Widerstand W_x, W_y und W_z in drei Achsrichtungen und je ein widerstehendes Moment M_{wx}, M_{wy} und M_{wz} in bezug auf drei Achsen.

Durch geeignete Auswahl und Anordnung der unter 1 bis 4 bezeichneten Stützelemente läßt sich für jeden Körper immer ein Stützzustand unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewichtes herbeiführen. Damit ein solches entstehe, muß die Summe der von den angewandten Stützelementen geleisteten Einzelstützwerte gleich sechs und müssen die Stützen außerdem so angeordnet sein, daß jeder Stützwert für sich selbständig eine bestimmte Bewegungsmöglichkeit des Körpers verhindert, derart, daß ohne sein Vorhandensein die eine bestimmte Bewegung eintreten würde. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus der Erwägung, daß die Größe eines jeden der sechs Stützwerte durch die bezeichnete selbständige Zweckerfüllung direkt und eindeutig bestimmbar ist.

Fig. 188.



Die nach vorstehendem für jeden Stützwert sich ergebende selbständige statische Zweckerfüllung liegt auch dann vor, wenn eine Bewegungsmöglichkeit zwar von zwei Stützwerten gemeinsam verhindert wird, einer derselben aber schon durch eine anderweite Zweckerfüllung eindeutig festgelegt ist.

Die Tatsache einer selbständigen Zweckerfüllung der einzelnen Stützwerte ist freilich nicht für jede statisch bestimmte Stützung immer ohne weiteres leicht erkennbar. Je klarer aber die bauliche Anordnung der Stützen getroffen ist, um so leichter wird das der Fall sein.

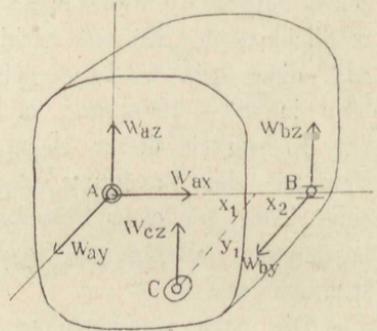
Gelingt es nicht, nach vorstehendem unmittelbar aus der Wirkungsweise der einzelnen Stützen den vorliegenden Stützzustand eines Körpers als einen solchen unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewichtes zu erkennen, so läßt sich mit Hilfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf analytischem Wege immer ein sicheres Urteil gewinnen. Ist die eindeutige Lösung der den Gleichgewichtsbedingungen entnommenen Gleichungen möglich und ergibt sie für jeden einzelnen Stützwert eine endliche Größe, so ist stets unbedingtes und statisch bestimmtes Gleichgewicht vorhanden. Gelingt dagegen eine solche eindeutige Lösung nicht, oder ergibt sich irgend-einer der Stützwerte als unendlich groß, so ist der Stützzustand

statisch unbestimmt und gleichzeitig ist nur für einen bedingten Kraftangriff Gleichgewicht möglich.

In folgendem mögen nun beispielsweise einige Unterstützungsarten starrer Körper besprochen werden.

Der in Fig. 189 dargestellte Körper ist in A durch ein festes (dreiwertiges), in B durch ein in der X -Richtung verschiebliches (zweiwertiges), in C durch ein in der XY -Ebene verschiebliches (einwertiges) Stützgelenk festgehalten.

Fig. 189.



Der Körper ist im unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewicht; denn die einzelnen Stützwerte erfüllen selbständig folgende statischen Zwecke: Es verhindert W_{ax} Verschiebung in der X -Richtung, W_{ay} Drehung um die Lotrechte durch B , W_{az} Drehung um die Gerade BC , W_{by} Drehung um die Z -Achse, W_{bz} Drehung um die Gerade AC , W_{cx} Drehung um die X -Achse.

Sind X , Y und Z die Summen der Komponenten der angreifenden Kräfte in drei Achsrichtungen, M_x , M_y und M_z deren Momente in bezug auf die drei Achsen, so erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen folgende sechs Gleichungen:

- 1) $W_{ax} + X = 0$;
- 2) $W_{ay} + W_{by} + Y = 0$;
- 3) $W_{az} + W_{bz} + W_{cz} + Z = 0$;
- 4) $W_{cz} \cdot y_1 + M_x = 0$;
- 5) $-W_{bz} \cdot x_2 - W_{cx} \cdot x_1 + M_y = 0$;
- 6) $W_{by} \cdot x_2 + M_z = 0$.

Daraus resultiert die eindeutige Lösung:

$$W_{ax} = -X; \quad W_{ay} = -Y + \frac{M_z}{x_2};$$

$$W_{az} = -Z - \frac{M_x}{y_1} \left(\frac{x_1}{x_2} \right) + l - \frac{M_y}{x_2}; \quad W_{by} = -\frac{M_z}{x_2};$$

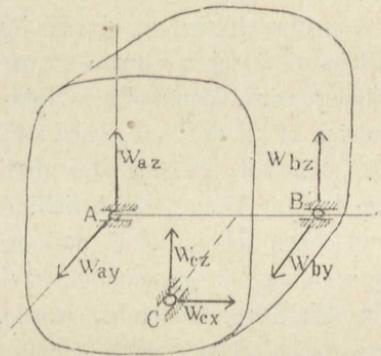
$$W_{bz} = \frac{M_y}{x_2} + \frac{M_x}{y_1} \cdot \frac{x_1}{x_2}; \quad W_{cx} = -\frac{M_x}{y_1}.$$

Würde an Stelle des lotrechten Stützwiderstandes W_{cz} in C (Fig. 189) der Punkt B in der X -Richtung noch durch ein W_{bx} widerstands-

fähig gemacht, so würde zwar auch die erforderliche Zahl von 6 Stützwerten vorhanden, der Körper aber einerseits gegen Drehung um die X -Achse nicht gesichert, also nur in bedingtem Gleichgewichtszustand sein und andererseits würden die 6 unbekannt Stützwerte aus den verfügbaren 6 Gleichungen nicht eindeutig bestimmt werden können, weil in einer derselben, der Momentengleichung, in bezug auf die X -Achse ein unbekannter Stützwert nicht auftritt.

Fig. 190.

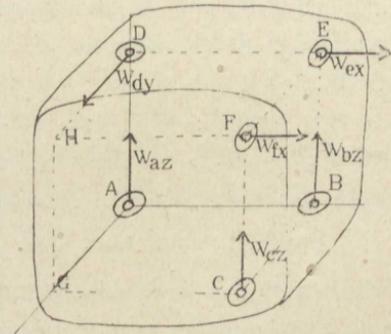
Der in Fig. 190 dargestellte Stützzustand läßt sich wiederum leicht als ein solcher unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewichtes erkennen. Es verhindert nämlich: W_{cx} Verschiebung in der X -Richtung, W_{ay} Drehung um die Lotrechte durch den Schnittpunkt von W_{cx} und W_{by} , W_{by} um die Lotrechte durch den Schnittpunkt von W_{ay} und W_{cx} , W_{cz} um die X -Achse, W_{az} um die Gerade BC und W_{bz} um die Gerade AC . Dadurch ist jeder der Stützwerte eindeutig bestimmt.



Auch die Stützung in den 6 Punkten A, B, C, D, E und F durch je ein einwertiges Stützgelenk (Fig. 191) erkennt man als eine solche unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewichtes. Es verhindert selbständig: W_{az} die Drehung um EF , W_{bz} um DF , W_{cz} um DE , W_{ex} um GH , W_{fx} um die Z -Achse, W_{dy} Verschiebung in der Y -Richtung.

Fig. 191.

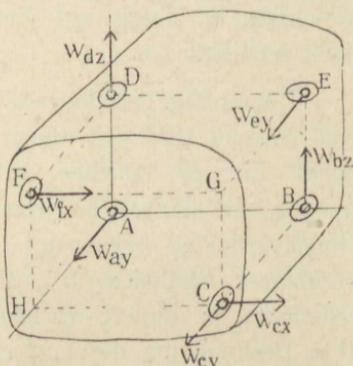
Die in Fig. 192 beispielsweise dargestellte Stützung dagegen ermöglicht trotz der vorhandenen sechs Stützwerte (der nur punktiert ange deutete Stützwert W_{cy} bleibt zunächst außer acht) weder unbedingtes Gleichgewicht, noch ist das bedingte Gleichgewicht ein statisch bestimmtes. Man erkennt, daß der Stützwiderstand W_{ey} sowohl die



Man erkennt, daß der Stützwiderstand W_{ey} sowohl die

Drehung um FH , als um die X -Achse allein verhindern müsste. Da er durch eine der Aufgaben schon eindeutig bestimmt ist, würde nur Gleichgewicht möglich sein, wenn der Kraftangriff so erfolgt, daß der in seiner Größe schon durch eine seiner beiden Aufgaben bestimmte Stützwert W_{ey} mit den angreifenden Kräften zusammen die andere erfüllen kann. Von den übrigen fünf Stützwerten erfüllt nur noch W_{ay} selbständig einen statischen Zweck, indem durch ihn allein die Drehung um CG verhindert wird. Von den vier Stützwerten W_{bz} , W_{dz} , W_{cx} und W_{fx} ist das bei keinem der Fall. In der Tat könnte ein beliebiger von ihnen fehlen, ohne daß dadurch eine Bewegungsmöglichkeit

Fig. 192.



für den Körper entstehen würde. Sobald aber irgendeine von ihnen ausgeschaltet wird, erkennt man, daß nun jeder von den übrigen dreien für sich allein einen statischen Zweck erfüllt. Unter der oben bezeichneten Bedingung für den Kraftangriff würde nun statisch bestimmtes Gleichgewicht bestehen. Die Unmöglichkeit einer eindeutigen Bestimmung der sechs unbekannt Stützwerte (Fig. 192) aus den Gleichgewichtsbedingungen bestätigt den nur bedingten und statisch unbestimmten Gleichgewichtszustand. Drücken wieder X , Y und Z und M_x , M_y und M_z die geordneten mechanischen Werte der angreifenden Kräfte aus, so lauten die sechs Gleichungen:

- 1) $W_{cx} + W_{fx} + X = 0$; 2) $W_{ay} + W_{ey} + Y = 0$;
 - 3) $W_{bz} + W_{dz} + Z = 0$; 4) $-W_{ey} \cdot c + M_x = 0$;
 - 5) $W_{fx} \cdot c - W_{bz} \cdot a + M_y = 0$; 6) $W_{ey} \cdot a - W_{cx} \cdot b - W_{fx} \cdot b + M_z = 0$,
- worin $a = AB$, $b = AH$ und $c = BE = FH$ ist.

Beachtet man nun, daß W_{ey} aus Gleichung 4 bekannt ist, nämlich $W_{ey} = \frac{M_x}{c}$, so erkennt man die Gleichungen 1 und 6 als identisch; beide enthalten die Summe der Unbekannten $W_{cx} + W_{fx}$. Nach Gl. 1 ist $W_{cx} + W_{fx} = -X$ und nach Gleichungen 4 und 6

$$W_{cx} + W_{fx} + \frac{M_z}{b} + \frac{M_x}{b} \cdot \frac{a}{c}.$$

Die sechs Gleichungen ermöglichen also die eindeutige Bestimmung der sechs Unbekannten nicht und daneben ist nur Gleichgewicht möglich, wenn die angreifenden Kräfte unter sich die Bedingung erfüllen

$$-X = \frac{M_z}{b} + \frac{M_x}{b} \cdot \frac{a}{c}.$$

Ändert man irgend einen der in den Punkten B , C , D und F angreifenden statisch unbestimmten Stützwerte W_{bz} , W_{dz} , W_{cx} und W_{fx} so, daß er in bezug auf die X -Achse oder die Gerade FH einen Hebelsarm bekommt, also in bezug auf diese ein widerstehendes Moment leisten kann, so geht der Gleichgewichtszustand sofort in einen unbedingten und statisch bestimmten über. Tritt beispielsweise an die Stelle von W_{cx} ein W_{cy} , so geht Gl. 1 über in $W_{fx} + X = 0$, Gl. 2 in $W_{ay} + W_{cy} + W_{ey} + Y = 0$ und Gl. 6 in $W_{ey} \cdot a + W_{cy} \cdot a - W_{fx} \cdot b + M_z = 0$.

Die Lösung der Gleichungen ergibt nun eindeutig:

$$W_{fx} = -X; \quad W_{ey} = \frac{M_x}{c}; \quad W_{ay} = -Y + \frac{M_z}{a} + \frac{X \cdot b}{a};$$

$$W_{cy} = -\frac{X \cdot b}{a} - \frac{M_x}{c} - \frac{M_z}{a}; \quad W_{bz} = \frac{M_y}{a} - X \cdot \frac{c}{a};$$

$$W_{dz} = -\frac{M_y}{a} + \frac{X \cdot c}{a}.$$

Auch läßt sich leicht erkennen, daß nunmehr jeder der sechs Stützwerte einen selbständigen statischen Zweck erfüllt.

Mit Hilfe der auf Seite 180 besprochenen Merkmale für eine Stützung unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewichts erkennt man, daß ein solcher Stützzustand nicht möglich ist, wenn von den vorhandenen sechs Stützwiderständen beliebige vier einander parallel sind oder in einer Ebene liegen oder wenn drei in einer Ebene liegende unter sich parallel sind, oder endlich, wenn zwei in eine Gerade fallen.

b) Das ebene Stützproblem.

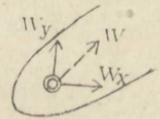
Wird der zu stützende Körper von Kräften ergriffen, die alle in einer Ebene liegen, und ordnet man seine Stützung so an, daß auch die auftretenden Stützwiderstände in dieser Kraftebene liegen müssen, so gelten für die Beurteilung des Stützzustandes die drei

Bedingungen für Kräfte in einer Ebene. Die Form des Körpers, der die gegenseitige Aufhebung der angreifenden Kräfte und der Stützwiderstände zu vermitteln hat, kommt dabei nicht in Betracht. Man kann sich daher beim ebenen Stützproblem den Körper als eine starre materielle ebene Scheibe vorstellen, deren Mittelebene mit der Kraftebene zusammenfällt.

An Stützelementen treten hier auf:

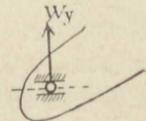
1. Das feste ebene Stützgelenk. Es entsteht, wenn der Körper oder die starre Scheibe in einer Geraden senkrecht zu der Kraftebene bzw. in einem Punkte der letzteren drehbar festgehalten wird (Fig. 193). Der Widerstand W des festen ebenen Stützgelenkes ist durch zwei Stücke, seinen Richtungswinkel und seine Größe, oder durch seine beiden Komponenten W_x und W_y in zwei Richtungen bestimmt. Dieses Stützgelenk ist statisch zweiwertig.

Fig. 193.



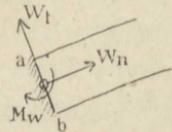
2. Das verschiebliche ebene Stützgelenk entsteht, wenn der Körper in einem Punkte der Kraftebene drehbar und in einer Richtung verschieblich festgehalten wird (Fig. 194). Der Widerstand kann jetzt nur senkrecht zur Verschiebungsrichtung auftreten und ist nur seiner Größe nach unbekannt. Dieses Stützgelenk ist statisch einwertig.

Fig. 194.



3. Die ebene feste Einspannung (Fig. 195). Wird der Körper oder die starre Scheibe in einer in der Kraftebene liegenden Geraden ab , gegen Verschiebung und Drehung festgehalten, so entsteht die feste ebene Einspannung. Sie vermag den Körper gegen jeden Kraftangriff innerhalb der Kraftebene festzuhalten, alle drei Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen; sie ist statisch dreiwertig. Die drei Stützwerte sind ein W_n normal, ein W_t tangential zu der festgehaltenen Geraden ab und ein widerstehendes Moment M_w .

Fig. 195.

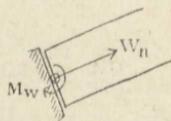


4. Die verschiebliche ebene Einspannung (Fig. 196). Sie entsteht, wenn der Körper in einer Geraden ab der Kraftebene so festgehalten wird, daß er sich nur in der Richtung der Geraden

verschieben, aber nicht in der Ebene drehen kann. Eine solche Stütze ist statisch zweiwertig; ihre Stützwerte sind ein W_n normal zu der Verschiebungsrichtung und ein M_w .

Während beim räumlichen Stützproblem durch geeignete Auswahl und Anordnung der Stützelemente sich eine sehr große Zahl von Stützungen statisch bestimmten und unbedingten Gleichgewichtes ermöglicht, sind beim ebenen Stützproblem nur vier Stützungsarten statisch bestimmten und unbedingten Gleichgewichtes möglich. Die Zahl der Stützwerte muß dabei gleich drei sein.

Fig. 196.



Zu den vier statisch bestimmten Stützungsarten gelangt man durch folgende Anordnungen der Stützelemente: Ein festes und ein verschiebliches Stützgelenk (Fig. 197), drei verschiebliche Stützgelenke (Fig. 198), eine feste Einspannung (Fig. 195) und eine verschiebliche Einspannung, vereinigt mit einem verschieblichen Stützgelenk (Fig. 199).

Die Vereinigung eines festen und eines verschieblichen ebenen Stützgelenkes führt immer dann, aber auch nur dann zu einem Stützzustande unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewichtes, wenn die Verschiebungsrichtung des verschieblichen Stützgelenkes nicht senkrecht auf der Verbindungsgeraden beider Stützgelenke steht, der Stützwiderstand also nicht durch das feste Stützgelenk gerichtet wird.

Wäre das nämlich der Fall, so würde das Drehungsgleichgewicht in bezug auf das feste Stützgelenk (A) nicht gegen jeden Kraftangriff gesichert, also nur bedingtes Gleichgewicht möglich sein, und zwar nur unter der Bedingung, daß die Mittelkraft R der angreifenden Kräfte auch durch A gerichtet ist. Dann aber würde auch gleichzeitig statisch unbestimmtes Gleichgewicht herrschen, weil für das Gleichgewicht der nun alle durch einen Punkt gerichteten Kräfte nur zwei Gleichgewichtsbedingungen gelten, die zur Bestimmung der drei Unbekannten nicht ausreichen.

Sind die Stützen wie in Fig. 197 angeordnet und die angreifenden Kräfte schon zu einer Mittelkraft R vereinigt, so lauten

bei den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$1) W_{ax} - W_b \cos \alpha - R \cdot \cos \beta = 0;$$

$$2) W_{ay} + W_b \sin \alpha - R \sin \beta = 0;$$

$$3) W_{ay} \cdot l - R \sin \beta \cdot b = 0.$$

Die Lösung ergibt:

$$W_{ax} = R \cos \beta + \left(1 - \frac{b}{l}\right) \sin \beta \cdot \cotg \alpha,$$

$$W_{ay} = R \sin \beta \frac{b}{l}, \quad W_b = R \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \left(1 - \frac{b}{l}\right).$$

Für eine graphische Bestimmung der Stützwiderstände W_a und W_b beachte man, daß W_b seiner Richtung nach bekannt ist und daß durch den Schnittpunkt C von W_b und R auch W_a gehen muß, in C also gewissermaßen der Kampf der angreifenden Kraft R mit den Widerständen W_a und W_b zum Ausgleich kommt. Das schließende Kräfteck 145 (Fig. 197 b) ergibt in den Strecken $\overline{51}$ und $\overline{45}$ die Widerstände W_a und W_b .

Fig. 197 a.

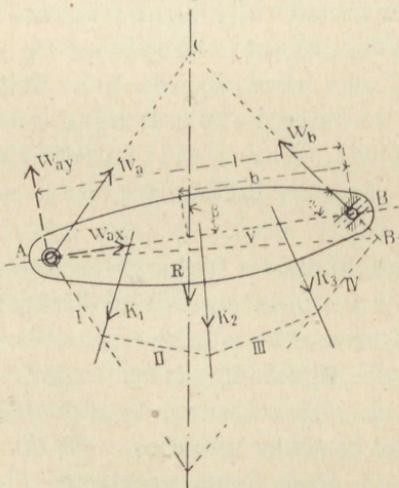
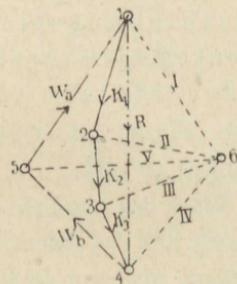


Fig. 197 b.



Diese zeichnerische Methode zur Bestimmung von W_a und W_b läßt im Stich, wenn die als gegeben anzuschenden Richtungslinien von W_b und R sich unter einem so kleinen Winkel schneiden, daß ihr Schnittpunkt C nicht mehr auf die Zeichenfläche fällt. In allen

Fällen aber lassen sich unter Benutzung der graphischen Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften in einer Ebene, daß sie nämlich ein schließendes Krafteck bilden und jedes zu ihnen gezeichnete Seileck zum Schluß kommen muß, die Stützwiderstände W_a und W_b wie folgt graphisch bestimmen:

Man trägt die Kräfte K_1, K_2, K_3 (Fig. 197 a) zu einem Krafteck 1 2 3 4 (Fig. 197 b) zusammen, zeichnet mit irgendeinem Pol O zu den Kräften ein Seileck I, II, III, IV , so daß die Seileckseite I durch das feste Stützgelenk A geht, A also der dem Stützwiderstande W_a entsprechende Eckpunkt des Seilecks wird. Der W_b entsprechende Eckpunkt B_1 wird durch den Schnitt der Seilecksseite IV mit der bekannten Richtungslinie von W_b festgelegt. AB_1 ist die Schlußlinie V des Seilecks. Der ihr parallele Polstrahl V schneidet auf der durch den Punkt 4 im Krafteck parallel zur Richtungslinie von W_b gezogenen Geraden die Größe von $W_b = 4\bar{5}$ ab. Die Strecke $\bar{5}1$, die das Krafteck schließt, stellt dann W_a nach Richtung und Größe dar.

Die Vereinigung dreier verschieblicher Stützgelenke führt immer dann, aber auch nur dann zu einem Stützzustande unbedingten und statisch bestimmten Gleichgewichtes, wenn die rechtwinklig auf den Verschiebungsrichtungen der Stützgelenke stehenden Richtungslinien der drei Stützwiderstände sich nicht in einem Punkte schneiden, also auch nicht einander parallel sind.

Wäre dies nämlich der Fall, so könnte keiner von den Stützwiderständen die Drehung um den gemeinsamen Schnittpunkt ihrer Richtungslinien hindern. Gleichgewicht könnte also nur unter der Bedingung bestehen, daß die angreifenden Kräfte in bezug auf jenen Punkt kein Drehmoment haben, d. h. ihre Mittelkraft durch den gemeinsamen Schnittpunkt gerichtet wäre. Für das dann aber bestehende (bedingte) Gleichgewicht von Kräften, die durch einen Punkt gehen, würden nur zwei Gleichgewichtsbedingungen gelten und daraus die drei unbekanntenen Stützwiderstände nicht bestimmt werden können. Dieser Fall würde auch vorliegen, wenn die Verschiebungsrichtungen der drei Stützgelenke und somit auch die dazu rechtwinkligen drei Stützwiderstände einander parallel sind.

Letztere schneiden sich dann in ihrem gemeinsamen unendlich fernen Punkte und der Angriff der äußeren Kräfte muß die Bedingung erfüllen, daß durch diesen Punkt auch die Mittelkraft der angreifenden Kräfte gerichtet, also den Stützwiderständen parallel ist. Ein Balken, auf drei in gleicher Höhe liegenden Stützen wagerecht verschieblich gelagert, würde nur unter der Bedingung lotrechter Belastung im Gleichgewicht sein können. Aber für die lotrechten, also einander parallelen drei Stützwiderstände und Lasten gelten nur zwei Gleichgewichtsbedingungen, die zur Bestimmung der ersteren nicht ausreichen; der Stützzustand ist mithin ein solcher nur bedingten und statisch unbestimmten Gleichgewichtes.

Fig. 198 a.

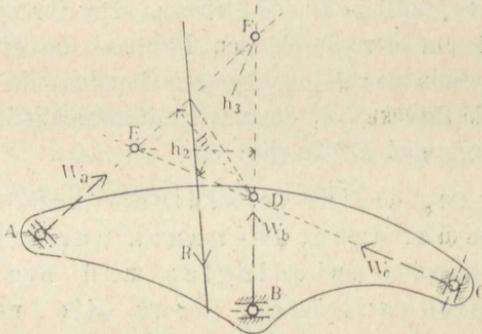
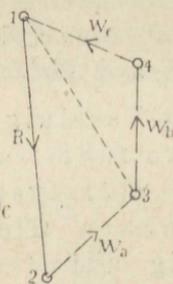


Fig. 198 b.



Schneiden die drei Stützwiderstände sich nicht in einem Punkte (Fig. 198), so geschieht ihre rechnerische Bestimmung am einfachsten aus drei Momentengleichungen, die man wechselweise auf die drei Schnittpunkte D , E und F bezieht (Rittersche Momentenmethode). Sind M_a , M_e und M_f die rechts drehend positiv angenommenen Momente der angreifenden Kräfte in bezug auf jene Punkte, so erhält man aus den drei Gleichungen $W_a \cdot h_1 + M_a = 0$, $-W_b \cdot h_2 + M_e = 0$ und $W_c \cdot h_3 + M_f = 0$, $W_a = -M_a : h_1$, $W_b = M_e : h_2$ und $W_c = -M_f : h_3$.

Die zeichnerische Lösung gestaltet sich, wenn die Mittelkraft R der angreifenden Kräfte bereits bekannt ist, wie folgt: Man erwäge, daß jeder der Stützwiderstände mit R und der Mittelkraft der beiden anderen ein schließendes Krafteck bilden muß, z. B. W_a mit R und der Mittelkraft S aus W_b und W_c . Macht

man im Krafteck $1\ 2\ 3$ (Fig. 198) $\overline{12}$ parallel und gleich R , zieht $\overline{23} \parallel W_a$ und $\overline{31} \parallel GD$, so ist $\overline{23} = W_a$ und $\overline{31} = S$. Zieht man noch durch 3 und 1 je eine Parallele zu W_b und W_c , so erhält man in den Strecken $\overline{34}$ und $\overline{41}$ diese Stützwiderstände selbst.

Die Vereinigung einer verschieblichen Einspannung mit einem verschieblichen Stützgelenk (Fig. 199) ergibt nur dann, aber auch immer dann unbedingtes und statisch bestimmtes Gleichgewicht, wenn die Verschiebungsrichtungen beider einander nicht parallel sind. Denn wäre dies der Fall, so würde die Verschiebung in jener Richtung nicht verhindert und daher Gleichgewicht nur unter der Bedingung möglich sein, daß die Mittelkraft aller angreifenden Kräfte rechtwinklig zur Verschiebungsrichtung gerichtet wäre. Das bedingte Gleichgewicht ist nun gleichzeitig ein statisch unbestimmtes, weil für Parallelkräfte in einer Ebene nur zwei Gleichgewichtsbedingungen gelten, diese aber zur Bestimmung von drei unbekanntem Stützwerten nicht ausreichen.

Fig. 199 a.

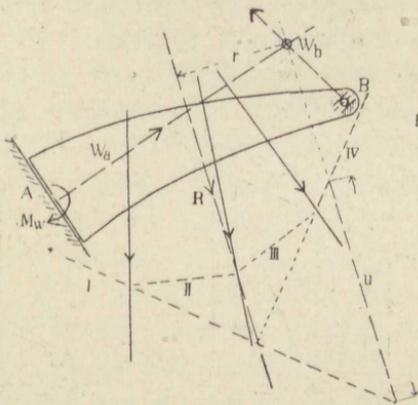
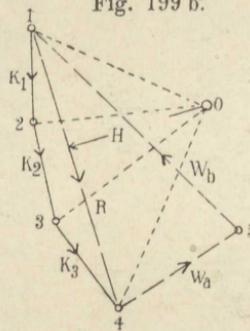


Fig. 199 b.



Sind, wie in Fig. 199 angenommen, die Verschiebungsrichtungen der Einspannung bei A und des Stützgelenkes bei B nicht parallel, so erhält man die Stützwiderstände W_a und W_b , indem man den Streckenzug $1\ 2\ 3\ 4$ der angreifenden Kräfte mit W_a und W_b zu einem schließenden Krafteck $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1$ gestaltet. Es ist dann $\overline{45} = W_a$ und $\overline{51} = W_b$. Das Stützmoment M_w , muß gegenüber den angreifenden Kräften oder deren Mittelkraft R Drehungsgleichgewicht halten.

Aus der Momentgleichung in bezug auf den Schnittpunkt von W_u und W_b , $M_w - Rr = 0$ erhält man $M_w = R \cdot r$, oder mit Hilfe eines Seilecks *I, II, III, IV* aus der Figur zu $M_w = H \cdot u$.

Einige einfache Beispiele statisch bestimmter Unterstützung mit einem festen und einem verschieblichen Stützgelenk sind in den Figuren 200 bis 207 dargestellt.

In den Figuren 200 bis 204 sind die Stützen bei *B* als feste, diejenigen bei *A* als verschiebliche Stützgelenke anzusehen, während in Fig. 205 und 206 das umgekehrte der Fall ist. In allen diesen Beispielen ist das Gewicht *Q* des Körpers die einzig angreifende Kraft. Die Ermittlung der Stützwiderstände *W* und W_1 ist in Fig. 201 angedeutet.

Fig. 200.

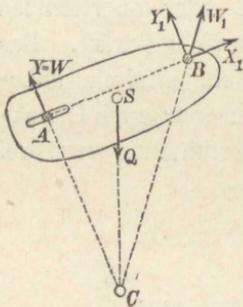


Fig. 201.

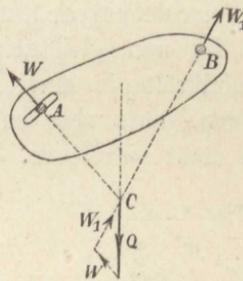


Fig. 202.

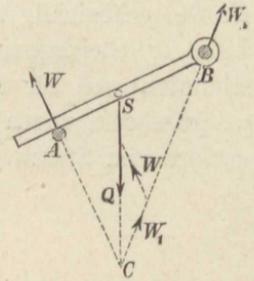


Fig. 203.

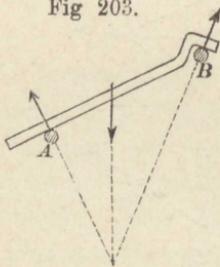


Fig. 204.

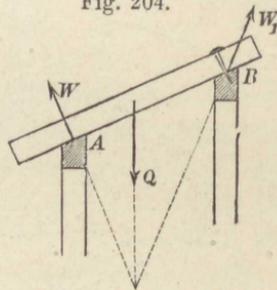
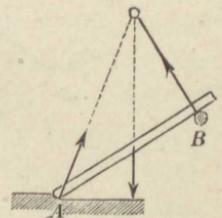


Fig. 205.



In Fig. 206 schneiden sich *Q* und W_1 im Unendlichen und es muß daher auch *W* durch den unendlich fernen Punkt gehen, d. h. *W*, W_1 und *Q* müssen parallel sein.

Fig. 208 zeigt die Stützung eines Drehkranes, der oben durch ein lotrecht verschiebliches und unten bei *B* durch ein festes Stützgelenk gehalten ist. Ersteres leistet einen wagerechten Widerstand *Y*, der sich aus der Wirkung der Lasten $Q = 3000$ und $Q_1 = 2000$ in bezug auf den Stützpunkt *B* als Drehpunkt aus der Momentengleichung $-Y \cdot 4 + 3000 \cdot 4 + 2000 \cdot 1,5 = 0$ zu $Y = 3750$ kg ergibt.

Aus der Gleichung der wagerechten Kräfte folgt, daß der wagerechte Stützwiderstand bei B gleich $-Y = -3750$ kg sein muß und die Gleichung der lotrechten Kräfte $X - 3000 - 2000 = 0$ liefert $X = 5000$ kg. Die graphische Lösung der Aufgabe ist aus der Fig. 208 ersichtlich. Der Gesamtwiderstand W in B muß durch den Schnittpunkt C von R und Y gehen. Aus dem schließenden Krafteck EDF erhält man $W = DF$ und $Y = FE$.

Fig. 206.

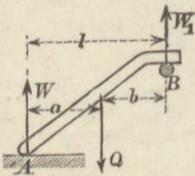


Fig. 207.

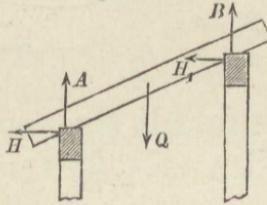
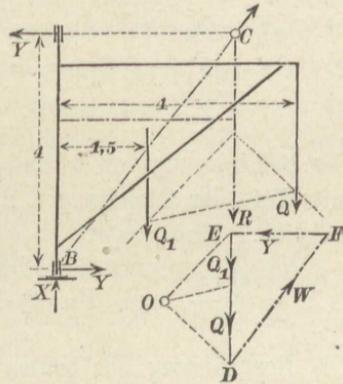
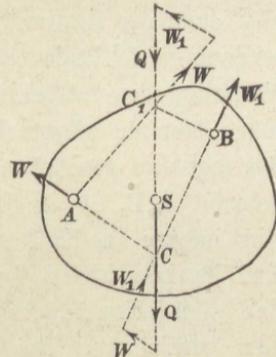


Fig. 208.



Ist ein Körper in zwei Punkten A und B (Fig. 209) durch feste ebene Stützgelenke gehalten, so befindet er sich im unbedingten Gleichgewicht, aber sein Stützzustand ist statisch unbestimmt. Ist Q die Mittelkraft aller mit AB in einer Ebene liegenden Kräfte, etwa das Gewicht des Körpers, so weiß man zwar, daß die in A und B auftretenden Widerstände W und W_1 sich in irgendeinem Punkte C mit der Richtungslinie von Q schneiden müssen, aber die Lage des Punktes C ist unbekannt. Sobald letztere in C oder C_1 und damit auch die Richtung von W und W_1 bekannt sind, würde die Bestimmung von W und W_1 in der in Figur 209 angedeuteten Weise graphisch geschehen können.

Fig. 209.



Analytisch würden zur Bestimmung von W und W_1 , die beide nach Richtung und Größe, also in vier Werten unbekannt sind, nur die drei Gewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene zur Verfügung stehen, also eine Gleichung fehlen; der Stützzustand stellt sich also als einfach statisch unbestimmt dar. Zerlegt

man (Fig. 210) die Widerstände W und W_1 je in zwei Seitenkräfte X und X_1 in der Richtung AB und Y und Y_1 senkrecht dazu, so ergeben die Gleichgewichtsbedingungen folgende drei Gleichungen:

- 1) $X + X_1 - Q \cdot \sin \alpha = 0$,
- 2) $Y + Y_1 - Q \cdot \cos \alpha = 0$ und
- 3) $-Y_1 l + Q a = 0$.

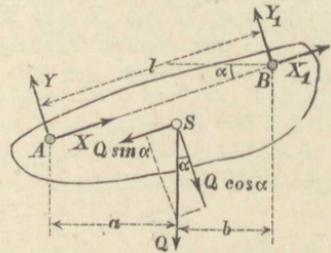
Die Bestimmung von Y und Y_1 ist mit Hilfe der Gleichungen 2 und 3 möglich. Man erhält

$$Y_1 = \frac{Q \cdot a}{l} \quad \text{und} \quad Y = Q \cdot \cos \alpha - Y_1 = Q \cos \alpha - \frac{Q a}{l} = \frac{Q \cdot b}{l}.$$

Die Bestimmung der beiden Unbekannten X und X_1 aus Gl. 1 ist aber nicht möglich. Wäre einer der Punkte A oder B etwa in der Richtung AB verschieblich, so würde damit einer der Widerstände X oder X_1 verschwinden und der andere aus Gl. 1 bestimmbar sein.

In der Anwendung kommen nun allerdings Stützungen von Bauteilen durch zwei feste Stützgelenke vor und man kann sich dann der Bestimmung der Stützwiderstände nicht entziehen. Es ist dann die fehlende vierte Bestimmungsgleichung aus dem elastischen Verhalten des tatsächlich nicht starren Körpers zu gewinnen. Es möge hier nur allgemein kurz der Weg angedeutet werden, auf dem das meist zu geschehen pflegt. Wird eines der beiden festen Stützgelenke, z. B. A in der Richtung AB verschieblich gestaltet, so wird infolge des Kraftangriffs und der Elastizität des Körpers wirklich eine gewisse kleine Verschiebung des Punktes A erfolgen, sei es, daß sich seine Entfernung l von B um ein Maß Δl vergrößere oder verkleinere. Bei der in Fig. 210 gezeichneten Anordnung der Stützen und dem dort gekennzeichneten Kraftangriff würde der verschieblich angenommene Punkt A sich um ein Δl von dem festen Punkte B weiter entfernen. Um diese Bewegung des Punktes A wieder rückgängig zu machen, würde es einer bestimmten Kraft X in der Richtung AB bedürfen und das ist der Widerstand, den der feste Punkt A in derselben Richtung zu leisten hätte. Sofern

Fig. 210.

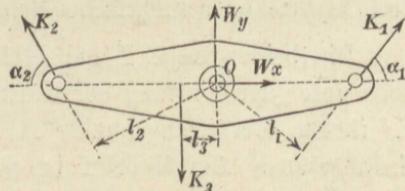


sich also Δl aus dem gegebenen Kraftangriff und dem elastischen Verhalten des Körpers berechnen und aus letzterem die Kraft X ermitteln läßt, die jene Längenänderung Δl rückgängig zu machen vermöchte, ist das statisch unbestimmte Stützproblem als gelöst anzusehen. Kennzeichnend für eine derart statisch unbestimmte Stützung ist auch der Umstand, daß ohne jeden Kraftangriff lediglich infolge der durch Temperaturschwankungen angestrebten Längenänderungen Δl die festen Stützgelenke A und B Widerstände X und $-X$ in der Längsrichtung des Stabes zu leisten haben würden.

3. Der um eine feste Achse drehbare Körper (Hebel).

Wird ein fester Körper in einer Geraden als Achse drehbar gestützt (festes ebenes Stützgelenk) und von Kräften in einer Ebene rechtwinklig zur Drehachse ergriffen, so kann er nur in bedingtem Gleichgewicht sein, weil das fast ebene Stützgelenk nur zwei von den drei Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte in einer Ebene erfüllen kann. Die Bedingung für das Drehungsgleichgewicht um die Drehachse müssen die angreifenden Kräfte, wozu auch das im Schwerpunkte angreifende Gewicht des Körpers zu rechnen ist, unter sich erfüllen, d. h. es muß ihre Mittelkraft durch die Drehachse gerichtet sein. Einen derart gestützten Körper, einerlei, welche Form er besitzt, pflegt man im allgemeinen Sinne einen Hebel zu nennen. Unter einem Hebel im engeren Sinne versteht man allerdings meist einen stabförmigen, drehbar festgehaltenen Körper (Fig. 211). Denkt man sich den nach Größe und Richtung unbekanntem Widerstand W , den die Achse zu leisten hat, durch seine beiden Seitenkräfte W_x und W_y ausgedrückt, so lauten die drei Gleichgewichtsbedingungen

Fig. 211.



- 1) $W_x + K_1 \cos \alpha_1 - K_2 \cos \alpha_2 = 0;$
- 2) $W_y + K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2 - K_3 = 0;$
- 3) $-K_1 l_1 + K_2 l_2 - K_3 l_3 = 0.$

Aus den Gl. 1 und 2 können W_x und W_y und damit auch W bestimmt werden. Die Gl. 3 wird lediglich von den angreifenden Kräften erfüllt. Sie allein kommt in Betracht, wenn es sich um die Beurteilung der mechanischen Wirkung des Hebels als einfache Maschine handelt. Die für die Momente in Frage kommenden Hebelarme sind im allgemeinen nicht die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Drehachse, sondern die rechtwinkligen Abstände der Kräfte von derselben.

Fig. 212.

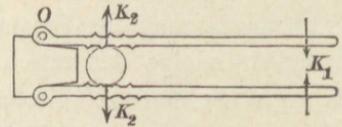
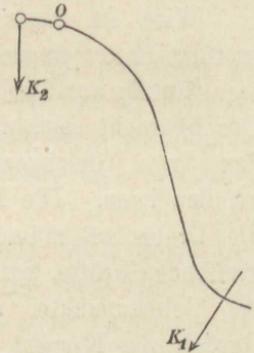


Fig. 212 zeigt die Vereinigung zweier einfacher Hebel zu einem Nutknacker; Fig. 213 einen um O drehbaren Pumpenschwengel; K_1 ist die Triebkraft, K_2 der Widerstand der Nuß bezw. der Pumpenstange.

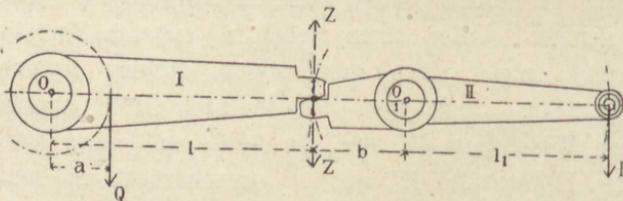
Fig. 213.



Sind zwei oder mehrere um verschiedene Achsen O, O_1 usw. drehbare Hebel im Sinne der Fig. 214 und 215 so miteinander verbunden, daß sie nur gemeinsam im Gleichgewicht sich befinden können, so entsteht der Doppel- oder mehrfache Hebel.

Die beiden Hebel *I* und *II* in Fig. 114 üben unter der Wirkung der Kräfte Q und P in ihrem Berührungspunkte A wechselweise die Kraft Z aufeinander aus. Am Hebel *I* ist $Q \cdot a - Zl = 0$ und am Hebel *II*

Fig. 214.

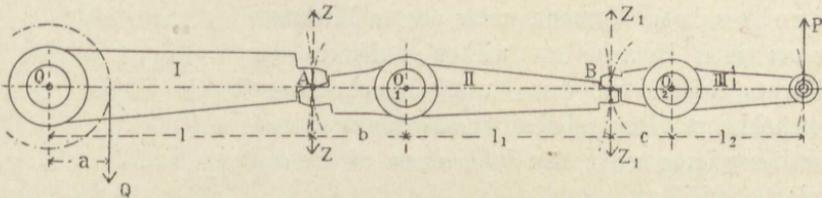


$P \cdot l_1 - Z \cdot b = 0$. Löst man beide Gleichungen für Z auf und setzt die erhaltenen Werte einander gleich, so erhält man

$$\frac{Q}{P} = \frac{l}{a} \cdot \frac{l_1}{b}.$$

In Fig. 215 stehen drei Hebel *I*, *II* und *III* in gemeinsamem Gleichgewicht. Hebel *I* und *II* üben in *A* wieder wechselweise eine Kraft *Z*, Hebel *II* und *III* in *B* gegenseitig eine solche Z_1

Fig. 215.



aufeinander aus. Das Drehungsgleichgewicht an den einzelnen Hebeln bedingt folgende drei Gleichungen $Q \cdot a - Z \cdot l = 0$, $-Z \cdot b + Z_1 l_1 = 0$, $Z_1 \cdot c - P \cdot l_2 = 0$, woraus folgt

$$\frac{Q}{Z} = \frac{l}{a}, \quad \frac{Z}{Z_1} = \frac{l_1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{Z_1}{P} = \frac{l_2}{c}.$$

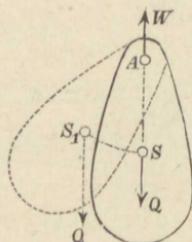
Die Multiplikation dieser drei Proportionen liefert $\frac{Q}{P} = \frac{l \cdot l_1 \cdot l_2}{a \cdot b \cdot c}$.

In ähnlicher Weise läßt sich an einem beliebig vielfachen Hebel, an dem die Kräfte *Q* und *P* miteinander im Gleichgewicht stehen, das Verhältnis beider, das man als „Übersetzungsverhältnis“ bezeichnet, berechnen. Wäre am zweifachen Hebel (Fig. 214) $\frac{l}{a} = 10$ und ebenso $\frac{l_1}{b} = 10$, so würde sein $Q:P = 10 \cdot 10 = 100$. Kommt am dreifachen Hebel (Fig. 215) für den Hebel *III* noch hinzu $\frac{l_2}{c} = 10$, so hat man $Q:P = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. In gleicher Weise ist das Zusammenwirken der Zahnräder in einem sogen. Rädervorgeläge zu beurteilen.

Unterliegt der um eine wagerechte feste Achse drehbare Körper nur der Wirkung seines Eigengewichtes, so erfordert die Bedingung für das Drehungsgleichgewicht, daß der Schwerpunkt in einer Lotrechten durch die Drehungsachse liege. Je nachdem nun der Schwerpunkt lotrecht unter oder über der Drehungsachse oder in derselben liegt, zeigt der Gleichgewichtszustand wesentlich verschiedene Eigentümlichkeiten. In allen drei Fällen hat die Achse einen lotrecht aufwärts gerichteten Widerstand *W* zu leisten, der gleich dem Gewichte *Q* ist.

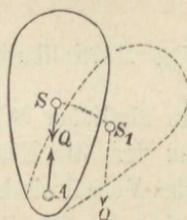
Liegt der Schwerpunkt lotrecht unter der Drehachse (Fig. 216) und wird der Körper durch eine vorübergehend wirkende Ursache aus seiner Lage gedreht, so daß W und G nicht mehr in einer Lotrechten liegen, so bilden beide ein Kräftepaar von rückdrehendem Moment, unter dessen Wirkung, wenn jene Ursache zu wirken aufhört, der Körper wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Den Gleichgewichtszustand in dieser Lage nennt man daher einen sicheren oder stabilen.

Fig. 216.



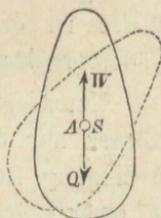
Liegt dagegen der Schwerpunkt lotrecht über der Drehachse (Fig. 217) und wird der Körper durch eine vorübergehend wirkende Ursache nur um ein geringes aus dieser Lage gedreht, so bilden W und G wiederum ein Kräftepaar, das nun aber nicht rückwärts in die Anfangslage zurück, sondern weiter aus dieser heraus drehend wirkt und erst verschwindet, wenn der Schwerpunkt des Körpers wieder lotrecht unter der Drehachse angekommen ist. Der anfängliche Gleichgewichtszustand wird in diesem Falle als ein unsicherer labiler bezeichnet.

Fig. 217.



Liegt endlich der Schwerpunkt in der Drehachse (Fig. 218), so bleiben bei jeder Drehlage des Körpers W und G in einer Lotrechten und der Körper im Gleichgewicht, das nun als unentschieden oder indifferent bezeichnet wird.

Fig. 218.



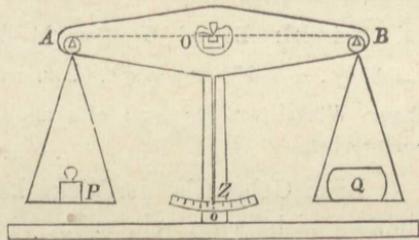
Zu beachten ist noch, daß im sicheren Gleichgewichtszustande der Schwerpunkt so tief wie möglich liegt, daß bei einer Drehung des Körpers sein Schwerpunkt gehoben, also Arbeit geleistet werden muß. Beim unsicheren Gleichgewichtszustande liegt der Schwerpunkt so hoch wie möglich, bei jeder Drehung des Körpers sinkt sein Schwerpunkt tiefer, die Schwerkraft verrichtet Arbeit und erzeugt Geschwindigkeit. Jetzt verlangt die Rückdrehung des Körpers Hebung des Schwerpunktes, Leistung von Arbeit. Beim unentschiedenen Gleich-

gewicht ist zu einer Drehung des Körpers um den Schwerpunkt weder positive noch negative Arbeit erforderlich.

4. Anwendung auf Hebelwägen.

Gleicharmige Hebelwaage. Der Wagebalken ist mit einer wagerechten Drehachse O versehen (Fig. 219), welche zur Verminderung der Reibung durch eine auf eine sog. Pfanne sich stützende Stahl-schneide gebildet wird. Bei A und B sind in gleichen Abständen l von O ebenfalls Schneiden angeordnet, an denen gleich schwere Wagschalen aufgehängt sind. Die geometrischen Drehachsen A , O und B mögen in einer Flucht liegen. Es ist zunächst erforderlich, daß der Wagebalken unter der Last der beiden gleich schweren Schalen sich wagerecht stelle und diese Stellung durch einen Zeiger Z markiere. Diese Bedingung wird, wie sich aus dem Folgenden ergibt, erfüllt, wenn

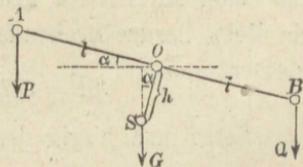
Fig. 219.



der Wagebalken für sich allein, d. h. ohne die Wagschalen in sicherem Gleichgewicht ist, wenn also sein Schwerpunkt S um eine Größe h unterhalb der Drehachse O liegt. Im Ruhezustand üben die bei A und B angehängten Wagschalen auch gleiche Kräfte auf den Balken aus und halten ihn im Gleichgewichte. Dasselbe gilt, wenn die Wagschalen mit Körpern von gleichem Gewichte belastet werden. Ist aber der Körper vom Gewichte Q auf der rechten Seite schwerer als das Gewichtsstück P auf der linken (Fig. 220), so entsteht eine Drehung des Balkens, bei der die rechtseitige Schale sinkt; weil aber S

unterhalb O liegt, so tritt nun das Gewicht G des Balkens auf die linke Seite und kommt mit seinem

Fig. 220.



Momente dem der kleineren Belastung zu Hilfe, so daß bei einem bestimmten Ausschlagwinkel α wieder sicheres Gleichgewicht eintritt. Die Beziehung zwischen dem

Gewichtsunterschiede $Q - P$ und dem Winkel α ist sehr einfach, wenn A , O und B in einer Geraden liegen, ist aber auch nicht schwierig, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Hier soll nur der einfachste Fall betrachtet werden. Da es nur auf den Gewichtsunterschied ankommt, so mögen die Gewichte der Schalen und Ketten in P und Q mit enthalten sein. Dann entsteht die Momentengleichung $Ql \cos \alpha = Pl \cos \alpha + Gh \sin \alpha$, oder

$$1) \quad Q - P = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha.$$

Bei der vorausgesetzten einfachen Anordnung ist der Gewichtsunterschied $Q - P$ mit der Tangente des Ausschlagwinkels verhältnismäßig, so daß aus der Beobachtung von α der Unterschied $Q - P$ ersehen werden kann.

Beispiel: Es sei G (Gewicht des Wagebalkens) = 2 kg, $h = 1,5$ cm, $l = 30$ cm, $\alpha = 6^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$, dann ist $Q - P = 2 \frac{1,5}{30} \cdot 0,1 = \frac{1}{100}$ kg = 10 g. Einem Winkel von 6° muß also an der Zeigerteilung die Bezeichnung 10 g entsprechen.

Beim Gebrauche der Wage kann natürlich die Gleichgewichtstellung nicht sofort eintreten; es muß aber dann ein Moment vorhanden sein, welches die Wage zum Einspielen bringt. Unter Einspielen versteht man das Schwingen um eine sichere Gleichgewichtslage, das Bestreben, dieselbe einzunehmen.

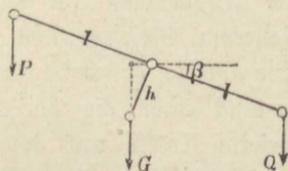
Einem Gewichtsunterschiede $Q - P$ möge ein Ausschlagwinkel α entsprechen, so daß $Gh = (Q - P)l : \operatorname{tg} \alpha$. Beträgt dann der augenblickliche Abweichungswinkel von der Wagerechten β und hält man die Wage für einen Augenblick fest, so entsteht, wenn $\beta > \alpha$ gedacht wird, ein links herum drehendes, nach der Gleichgewichtslage treibendes Moment

$$\mathfrak{M} = Gh \sin \beta - (Q - P) l \cos \beta.$$

Setzt man hierin den vorstehenden Wert für Gh ein, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{(Q - P)l}{\operatorname{tg} \alpha} \sin \beta - (Q - P) l \cos \beta \\ &= (Q - P) l \cos \beta \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right). \end{aligned}$$

Fig. 221.



Hiernach ist $\mathfrak{M} \geq 0$, wenn $\beta \geq \alpha$. \mathfrak{M} nennen wir das Einspielungs-
moment.

Da $Q - P$ für Gleichgewicht verhältnismäßig mit $\operatorname{tg} \alpha$, wobei $\operatorname{tg} \alpha$ zwischen 0 und ∞ jeden Wert haben kann, so kann man theoretisch jeden beliebig großen Gewichtsunterschied $Q - P$ mit Hilfe des Ausschlagwinkels α messen, kann also ein Gewichtsstück P ganz entbehren, Q allein durch α ermitteln. Nach diesem Grundgedanken ist eingerichtet die

Zeigerwage, welche zum Wägen von Briefen, Garnen, Papieren bestimmt ist. Fig. 222 entspricht einer Garnwage, bei welcher keine Schale benutzt, sondern das Garn unmittelbar an den rechtsseitigen Haken aufgehängt wird. Die Fig. 222 stellt den unbelasteten Zustand dar, wobei der Zeiger auf Null steht; der Schwerpunkt S des Wagebalkens muß entsprechend um h lotrecht unter der Drehachse O liegen.

Wird bei A ein Gewicht Q eingehängt, so bildet sich eine neue Gleichgewichtslage mit einem Ausschlagwinkel α , um den sich der ganze Hebel AOB verdreht und der an der Teilung meßbar wird. Für die Momentengleichung ist nur die Lage der Punkte A , O und S (Fig. 223) maßgebend, und es wird $Ql \cos \alpha = Gh \sin \alpha$ oder

$$Q = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha,$$

entsprechend Gl. 1, S. 202 für $P = 0$.

$Gh : l$ ist ein unveränderlicher Festwert für eine bestimmte Wage. Auf dem Kreisbogen wird man bei den Teilstrichen nicht Zahlen für die Winkel α , sondern sogleich für die entsprechenden Gewichte Q einritzen. Die Teilung ist dann selbstverständlich nicht gleichmäßig, da mit wachsendem Winkel die Tangente immer schneller wächst. Die Gewichtsteilung wird daher mit zunehmendem α enger und enger werden; darin findet dann die Anwendbarkeit der Wage ihre Grenze.

Fig. 222.

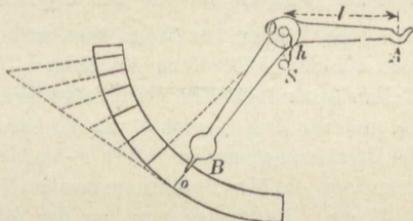
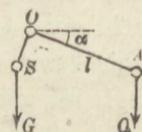


Fig. 223.



Beispiel: Entspricht z. B. einem Gewichte von 10 g ein Ausschlag von 10^0 , so ist

$$10 = G \frac{h}{l} \operatorname{tg} 10^0 = 0,176 G \frac{h}{l}.$$

Will man nun die Ausschlagwinkel für Vielfache von 10 g haben, so hat man zu bedenken, daß $\operatorname{tg} \alpha$ mit Q verhältnismäßig wächst.

Für 20 g	ist	$\operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot 0,176 = 0,352$; $\alpha = 19^0 24'$,
„ 100 g	„	$\operatorname{tg} \alpha = 1,76$; $\alpha = 60^0 24'$,
„ 200 g	„	$\operatorname{tg} \alpha = 3,52$; $\alpha = 74^0 9'$,
„ 300 g	„	$\operatorname{tg} \alpha = 5,28$; $\alpha = 79^0 17'$,
„ 400 g	„	$\operatorname{tg} \alpha = 7,04$; $\alpha = 81^0 55'$,
„ 500 g	„	$\operatorname{tg} \alpha = 8,80$; $\alpha = 83^0 31'$,
„ 1000 g	„	$\operatorname{tg} \alpha = 17,60$; $\alpha = 86^0 45'$.

Während also die Teilstriche für Null und für 100 g um 60^0 voneinander abstehen, sind die für 500 und 1000 g nur 3^0 voneinander entfernt.

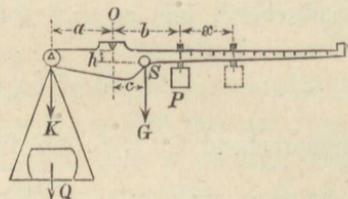
Die Teilung der Wage kann man leicht durch Zeichnung finden, indem man bei der Nullstellung des Zeigers OB eine Tangente an den Teilkreis vom Halbmesser r legt (Fig. 222). Trägt man von OB aus den Winkel von 10 Graden ab, welcher dem Gewichte von 10 Gramm entsprach, so bekommt man auf der Berührungsgeraden sofort $r \cdot \operatorname{tg} 10^0$. Dieses Maß $r \operatorname{tg} 10^0 = 0,176 r$ hat man dann auf der Berührungsgeraden 100 mal abzutragen bis zu einer Länge $= 17,6 r$. Zieht man nun von der Achse O aus Strahlen nach diesen Teilpunkten, so bekommt man auf dem Teilkreise die Striche, welche den Gewichten bis zu 1000 g zugehören.

Bei der Schnellwage (Fig. 224) wird nicht der Ausschlagwinkel α benutzt, vielmehr dient zum Abwägen ein der Größe nach unveränderliches, auf dem wgerecht einzustellenden Hebel aber verschiebbares, sog. Laufgewicht. Es liegt bei dieser Wage der Schwerpunkt S des unbelasteten Wagebalkens nicht lotrecht unter der Drehschneide O , sondern um c nach rechts und um h nach unten. Die Größe h ist, wie sich zeigen wird, für das Einspielen maßgebend. Ist K das Gewicht der leeren Schale, so gilt für das Gleichgewicht mit angehängter leerer Schale

$$1) \quad K a = G c + P b.$$

Legt man dann noch die Last Q auf die Schale, so muß das Laufgewicht P um x nach rechts verschoben werden, und wenn

Fig. 224.



dann wieder eine wagerechte Ruhestellung des Hebels erreicht ist, so gilt dafür

$$2) \quad (K + Q) a = Gc + P(b + x);$$

nach Abziehen der früheren Gleichung bleibt

$$3) \quad Qa = Px, \text{ mithin } Q = Px : a.$$

$P : a$ ist der Festwert der Wage, Q mit x verhältnissgleich, die Teilung des Laufhebels also gleichmäßig.

Bringt man die für wagerechte Ruhestellung belastete Wage durch Rechtsdrehung um den Winkel α aus dem Gleichgewichte, so ist dazu ein Moment \mathfrak{M} aufzuwenden, welches man leicht findet zu

$$\mathfrak{M} = (K + Q) a \cos \alpha - P(b + x) \cos \alpha - Gc \cos \alpha + Gh \sin \alpha.$$

Führt man hierin Gl. 2 ein, so bleibt $\mathfrak{M} = Gh \sin \alpha$ als Einspielungsmoment, welches also ein positives h bedingt, aber von c unabhängig ist.

Alle diese Wagen, bei denen zur Ausführung der Wägung Gewichtstücke oder das eigene Gewicht eines Teiles der Wage (des Balkens) benutzt werden, liefern nicht eigentlich das wirkliche Gewicht des vorliegenden Körpers, d. h. die Größe der Anziehungskraft, welche der Körper von der Erde erfährt, sondern nur das Verhältnis seines Gewichtes zu dem Gewichte eines anderen Körpers an derselben Stelle der Erdoberfläche. Ein Körper, welcher eine richtige gleicharmige Hebelwage mit einem Gewichtstücke von der Bezeichnung „1 Kilogramm“ auf der anderen Seite wagerecht (bezw. auf Null) stellt, erfährt am Meeresspiegel unter 45° geogr. Breite von der Erde eine Anziehungskraft = 1 kg , am Aequator aber beträgt die Schwerkraft des Körpers sowohl wie des Gewichtstückes nach S. 100 nur $0,997 \text{ kg}$. Eine solche Wägung stellt also eigentlich die Masse eines Körpers fest; so ist die Masse des eben beschriebenen Körpers ebenso wie diejenige des Gewichtstückes auf Grund der in diesem Buche gewählten Einheiten (S. 35) $1 : g = 1 : 9,806$ Masseneinheiten, und zwar unveränderlich an jeder Stelle der Erde und des Weltenraumes.

Federwagen dagegen, welche durch bestimmte Kräfte eine bestimmte, ablesbare Formänderung erleiden, zeigen die auf einen

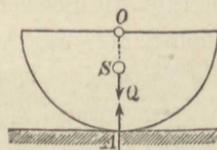
Körper ausgeübte Schwerkraft. Eine Federwaage, deren Teilung an einem Orte angefertigt war, wo die Fallbeschleunigung $9,806$ beträgt, wird an diesem Orte unter einer Belastung mit einem Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm“ oder mit 1^l Wasser die Schwerkraft zu 1^{kg} angeben, wird aber am Aequator unter derselben Last nur $0,997^{kg}$ zeigen. Beim Kauf und Verkaufe kommt es im Grunde genommen auf die Masse eines Körpers an. Für den Käufer sind daher solche Federwagen nachteilig, die an einem Orte geteilt wurden, wo die Fallbeschleunigung kleiner ist als an dem Gebrauchsorte. Eine Federwaage, deren Teilung am Aequator angefertigt wurde, die also dort unter Belastung mit 1^l Wasser von 4^0 C. oder einem ebenso schweren Gewichtstücke der Bezeichnung „1 Kilogramm“ die Schwerkraft mit 1^{kg} ablesen ließ, wird unter Belastung mit dem gleichen Körper oder einem Körper gleicher Masse unter 45^0 geogr. Breite die Schwerkraft zu $1,003^{kg}$ angeben, also schon durch eine Last von $0,997^l$ Wasser zu einer Gewichtsangabe von 1^{kg} gebracht werden.

5. Auf wagerechter Ebene ruhender Körper.

Stützt sich ein Körper gegen die wagerechte Oberfläche einer ruhenden anderen, so kann letztere an den Berührungsstellen beider unter der Voraussetzung völliger Glätte der sich hier berührenden Flächen nur lotrecht aufwärts gerichtete Stützwiderstände leisten. Gleichgewicht des gestützten Körpers ist daher nur möglich, wenn auch die angreifenden Kräfte lotrecht gerichtet sind, oder doch wenigstens deren Mittelkraft lotrechte Richtung aufweist.

Erfolgt die Berührung des Körpers mit der stützenden Ebene in einem Punkte oder in einer Geraden, so muß die lotrechte Mittelkraft durch den Berührungspunkt oder die Gerade gerichtet und der zu leistende Stützwiderstand ihr entgegengesetzt gleich sein und in derselben lotrechten Geraden liegen (Fig. 225).

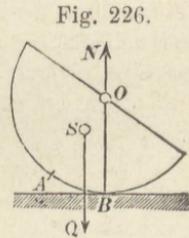
Fig. 225.



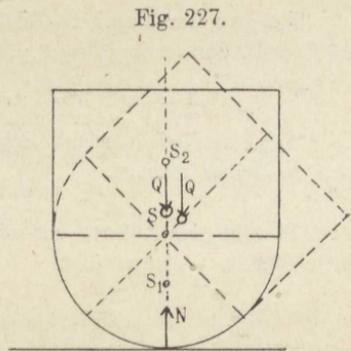
Unterliegt der Körper nur der Wirkung seines Gewichtes und ist seine Oberfläche an der Berührungsstelle mit der stützenden Ebene eine kugelförmige oder zylindrische, so ist der lotrechte Stütz-

widerstand durch den Kugelmittelpunkt oder die Achse des Zylinders gerichtet und in einer Lotrechten durch diese muß daher auch der Schwerpunkt des Körpers liegen. Je nachdem nun der Schwerpunkt lotrecht unterhalb oder oberhalb des Kugelmittelpunktes oder der Zylinderachse liegt oder damit zusammenfällt, zeigt der Gleichgewichtszustand wieder wesentlich verschiedene Eigentümlichkeiten, ähnlich wie bei dem in einer wagerechten Achse drehbar festgehaltenen Körper (S. 200).

In ersterem Falle, der z. B. vorliegt, wenn der Körper homogen ist und die Form einer Halbkugel oder eines Halbzylinders hat, ist das Gleichgewicht ein sicheres (stabiles), denn der Körper kehrt, ein wenig aus seiner Lage gerollt, unter der Wirkung des Kräftepaares Q und $N = -Q$ in dieselbe zurück (Fig. 226).



Liegt der Schwerpunkt des Körpers dagegen lotrecht oberhalb des Kugelmittelpunktes oder der Zylinderachse, wie das z. B. durch Verbindung eines Kegels oder eines Zylinders mit einer Halbkugel im Sinne der Figur 227 oder eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit einem Halbzylinder sich ergeben könnte, so erkennt man den Gleichgewichtszustand als „unsicher“ (labil), denn der Körper wird, ein wenig aus seiner Lage gerollt, unter der Wirkung des entstehenden Kräftepaares Q und $N = -Q$ sich weiter aus derselben entfernen.



Fällt, wie bei einer homogenen Vollkugel oder einem Vollzylinder der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte bzw. der Achse zusammen, oder wird durch geeignete Verbindung eines Körpers mit einem Kugel- oder Zylinderabschnitt im Sinne der Figur 227 diese Schwerpunktslage herbeigeführt, so kann der Gesamtkörper in jeder Lage, in der sich die Kugel- oder Zylinderoberfläche mit der wagerechten Ebene berührt, im Gleichgewicht sein, das jetzt ein unentschiedenes ist.

Beispiel: Wie hoch muß in Fig. 228 der Kegel sein, damit der aus Halbkugel und Kegel bestehende Körper im unentschiedenen Gleichgewichte sei? Der Gesamtschwerpunkt S muß in O liegen, und dazu ist erforderlichlich (S. 152).

$$M_1 \cdot SS_1 = M_2 \cdot SS_2.$$

Die Dichte des Kegels sei γ_1 , die der Halbkugel γ_2 , dann kann man statt des Verhältnisses der Massen das Verhältnis der Gewichte setzen, und weil $SS_1 = \frac{1}{4}h$, $SS_2 = \frac{3}{8}r$ (S. 163 u. 164), so wird

$$\gamma_1 \frac{r^2 \pi h}{3} \frac{h}{4} = \gamma_2 \frac{2}{3} r^3 \pi \frac{3}{8}.$$

Daraus folgt $h^2 = \frac{3\gamma_2}{\gamma_1} r^2$.

Sind die Einzelkörper aus demselben Stoffe, so wird $h^2 = 3r^2$. Die entsprechende Kegelseite wird dann $= 2r$; die Projektion des Kegels also ein gleichseitiges Dreieck (wie in Fig. 228 und 229 gezeichnet).

Ist aber der Kegel aus Holz, die Halbkugel aus Metall, etwa mit $\gamma_2 = 9\gamma_1$, so wird

$$h = 3r\sqrt{3} = 5,20r.$$

Soll das Gleichgewicht sicher sein, so muß man h kleiner machen.

Besteht der Aufsatz aus einem Zylinder, so ist die Bedingung für unentschiedenes Gleichgewicht

$$h^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{r^2}{2}.$$

Fig. 230 zeigt den sicheren Gleichgewichtszustand einer Halbkugelschale. Ist bei einer solchen die Wandstärke gering, so liegt der Schwerpunkt nach S. 162 im Abstand $\frac{1}{2}r$ vom Mittelpunkt O .

Fig. 231 (aus Ritters Mechanik entnommen) zeigt, wie der obere Körper mit hoch liegendem Schwerpunkt S_1 durch starre Verbindung mit einer tiefer liegenden Kugel S_2 zu einem zusammengesetzten Körper mit dem Schwerpunkte S und mit sicherem Gleichgewicht umgeändert werden kann.

Fig. 228.

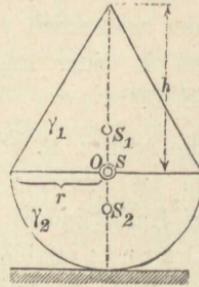


Fig. 229.

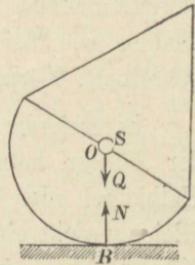


Fig. 230.

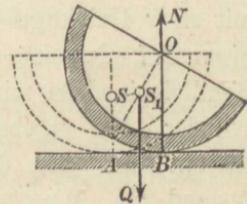
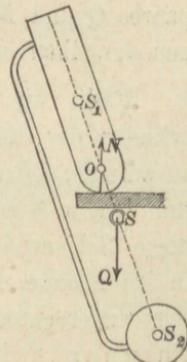


Fig. 231.



Stützt sich ein Körper in drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten unter der Wirkung einer lotrechten Last Q (Fig. 232) auf die wagerechte Ebene, so gelten nach S. 179 für die mit der Kraft Q parallelen drei Stützwiderstände A , B und C die Gleichungen 3, 4 und 5 S. 178 und diese genügen zur Bestimmung der 3 Unbekannten; doch wendet man zur Ermittlung derselben vorteilhaft nur Momenten-Gleichungen an in bezug auf Drehachsen durch je zwei Stützpunkte. Die lotrechten Widerstände A , B und C sind zu berechnen. Die Richtungslinie des Gewichtes Q des belasteten Tisches schneide die Unterstüzungsebene in D (Fig. 232). Für die Achse AB gilt

$$0 = -C \cdot CF + Q \cdot DE, \text{ also}$$

$$1) \quad C = Q \cdot \overline{DE} : \overline{CF}.$$

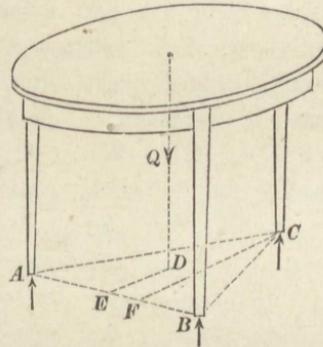
In entsprechender Weise findet man A und B .

Ruht der Körper einfach auf der wagerechten Ebene ohne Bindemittel und ohne Verklammerung, so können die Widerstände nicht negativ werden. Es wird aber $C = 0$, wenn $DE = 0$, d. h. wenn Q durch die Seite AB des Unterstützungsdreiecks geht. Liegt D außerhalb dieses Dreiecks, so ist Gleichgewicht nicht möglich, vielmehr kippt der Tisch dann um eine der Seiten des Dreiecks ABC .

Fällt D in den Schwerpunkt des Dreiecks ABC , so wird $C = \frac{1}{3}Q$, und ebenso groß werden A und B , so daß in diesem Falle das Gewicht sich gleichmäßig auf die drei Stützpunkte verteilt.

Tritt zu dem Gewichte Q noch eine wagerechte Kraft K (Fig. 233), so vermögen die lotrechten Widerstände nicht mehr, Gleichgewicht herbeizuführen, sondern es müssen an den Auflagerstellen noch waggerrechte Widerstände hinzutreten. Diese werden in Wirklichkeit bis zu einem gewissen Grade durch die Reibung geliefert; wir wollen statt dessen hier annehmen, daß

Fig. 232.



eine vorgelegte Leiste die Verschiebung hindere. Es ist dann außer dem Ruhezustande nur ein Kippen um die Leistenkante möglich.

Ersetzt man Q und K durch ihre Mittelkraft R , welche rechts von A im Abstand r vorbeigeht, so wird

$$Cc = Rr \text{ oder } C = Rr : c.$$

Gleichgewicht ist nur möglich, solange r positiv ist, d. h. solange R innerhalb des Unterstützungsdreiecks durch die Grundebene hindurchgeht. Zugleich ist aber auch $Rr = Qa - Kh$. Es ist also Gleichgewicht nur möglich, solange $Qa \geq Kh$. Qa heißt das Standsicherheitsmoment (Stabilitätsmoment) in bezug auf die Kante A , Kh das Umsturzmoment. Der Körper ist nur in gesichertem Gleichgewichte, solange das Standsicherheitsmoment größer ist als das Umsturzmoment.

Stützt sich ein Körper an mehr als drei Stellen auf eine wagerechte Ebene, so sind die Widerstände der Stützpunkte mit Hilfe der statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr zu ermitteln. Der Gleichgewichtszustand des Körpers ist statisch unbestimmt. In geometrischer Beziehung ist dann die Ebene, in welcher der Körper die Unterstützungsfläche berührt, durch mehr als drei Punkte bestimmt, also überbestimmt, während, wenn die Unterstützungsstellen nicht genau eine Ebene bilden, ein Wackeln des Körpers bei Verschiebung der Last eintreten kann. Ein dreibeiniger Tisch kann nicht wackeln, ein mehrbeiniger aber bekanntlich sehr leicht; es hängt damit die Unbestimmtheit der Druckverteilung zusammen.

Bezüglich der Sicherheit gegen ein Umsturzmoment gilt für einen vierbeinigen Tisch das Gleiche wie für einen dreibeinigen.

Ruht ein Körper unter Einwirkung seines Gewichtes Q mittels ebener Fläche auf wagerechter Ebene (Fig 234), so müssen die lotrecht aufwärts

Fig. 233.

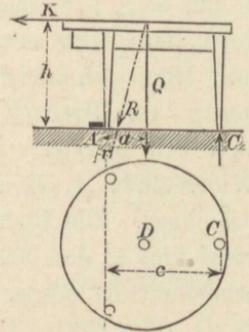
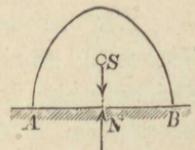
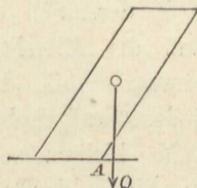


Fig. 234.



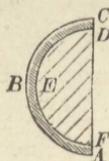
gerichteten Widerstände der Flächenteilchen eine Mittelkraft N liefern, die durch den Schwerpunkt S des Körpers geht. Nach welchem Gesetze sich aber N auf die Berührungsfläche verteilt, ist statisch unbestimmt. Da nun die Mittelkraft zweier Parallelkräfte gleichen Sinnes nach S. 118 zwischen den Parallelkräften liegt, so kann auch die Mittelkraft N nur innerhalb des Bereiches der Grundfläche liegen, oder es ist für Gleichgewicht erforderlich, daß die Schwerpunktslotrechte innerhalb des Bereiches der Grundfläche bleibe; andernfalls tritt ein Kippen um eine Drehkante ein, z. B. in Fig. 235 um A .

Fig. 235.



Hat aber der Umfang der Grundfläche einspringende Teile (Fig. 236), so ist nicht erforderlich, daß die Schwerpunktslotrechte durch die wirkliche (eng schraffierte) Berührungsfläche hindurchgehe; vielmehr erhält man den für die Standsicherheit maßgebenden Bereich der Grundfläche, indem man die wirkliche Berührungsfläche so weit ergänzt, daß einspringende Winkel fortfallen. Denn eine Seite oder Tangente der Grundfläche kann nur dann zu einer Drehkante werden, wenn ihre Verlängerung die Berührungsfläche nicht mehr durchschneidet. Sämtliche Tangenten, die man an den einspringenden Bogen FED der Figur legt, sind keine möglichen Drehkanten. Es muß daher die leicht schraffierte Halbkreisfläche FED mit zu dem Bereiche der Grundfläche gerechnet werden, aus dem die Schwerpunktslotrechte nicht hinaustreten darf. Der Bereich der Grundfläche ist diejenige ebene Fläche, welche umschlossen wird von einer beweglichen Geraden, die die Unterstützungsfläche umhüllt, d. h. sich so um dieselbe bewegt, daß sie sie stets berührt, ohne sie aber zu schneiden.

Fig. 236.



Bekanntlich kann ein zusammengebogenes Papier- oder Kartenblatt auf einem Tische sicher stehen, wiewohl die Schwerlinie nicht durch die schmale Auflagerfläche hindurch geht. Ebenso bildet bei dem Tische (Fig 232, S. 209) die gesamte Dreiecksfläche ABC den Bereich der Grundfläche.

Geht die Schwerpunktslotrechte gerade durch eine mögliche Drehkante (Fig. 237), so ist der Ruhezustand unsicher. Der Widerstand des Bodens verteilt sich nicht mehr über die Berührungsfäche, sondern wird nur noch von der Drehkante geleistet.

Tritt zu dem Gewicht Q des Körpers noch eine beliebige gerichtete Kraft K hinzu, die mit Q in derselben Ebene liegt (Fig. 238), so kann man die Mittelkraft R beider bestimmen, und letztere muß durch den Widerstand W des Bodens aufgehoben werden, wenn der Körper in Ruhe bleiben soll. Die seitliche Verschiebung im Sinne der wagerechten Seitenkraft von K sei durch einen Vorsprung am Boden verhindert; dann kommt nur noch die Möglichkeit der Drehung um die Kante in Frage, deren Verschiebung durch den Vorsprung gehindert ist. Der Boden kann innerhalb des Bereiches der Grundfläche jeden beliebigen Normalwiderstand N leisten, der Vorsprung einen seitlichen Widerstand von beliebiger Größe; der aus beiden sich zusammensetzende Gesamtwiderstand W kann daher innerhalb des Bereiches der Grundfläche jede beliebige Größe und Richtung haben, kann aber nicht aus diesem Bereiche heraustrreten. Es muß daher die Lage von R die Unterstüzungsebene gleichfalls im Bereiche der Grundfläche schneiden, wenn der Körper soll in Ruhe bleiben können. Ist der Hebelarm von Q in bezug auf die Drehkante A (rechtwinklig zur Bildebene gedacht) wieder a , der der Kraft K aber l , so ist wieder Standicherheit vorhanden, wenn $Qa > Kl$, d. h. wenn das Stand sicherheitsmoment größer als das Umstürzmoment. Für $Kl = Qa$ geht die Mittelkraft R aus K und Q durch die Drehkante, und der Körper ist im unsicheren Gleichgewichte. Wird Kl im geringsten größer als Qa , so wird der Körper sich um die Kante A drehen.

Erfolgt diese Drehung, so beschreibt der Schwerpunkt S (Fig. 239) einen Kreisbogen um A , die Richtungslinie des Gewichtes Q rückt der Kante immer näher, das Moment von Q wird

Fig. 237.

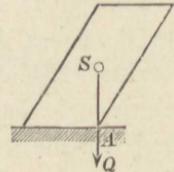
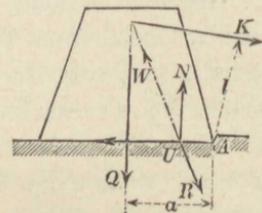


Fig. 238.



immer kleiner und endlich zu Null, sobald der Schwerpunkt in S_1 lotrecht über A liegt. Setzen wir voraus, die umstürzende Kraft K nehme in der Weise ab, daß ihr Moment stets gleich dem Momente von Q in bezug auf A sei, so wird das Moment der Mittelkraft R beider stets Null sein, R also stets durch A gehen. Es wird dann ein langsames, allmähliches Aufkippen des Körpers möglich sein. Die hierzu von der Kraft K zu leistende Arbeit kann man leicht berechnen. Die Bewegung erfolge so langsam, daß bei der höchsten Lage des Schwerpunktes die Geschwindigkeit aller Punkte des Körpers Null sei. Dann ist, von der sicheren Ruhelage aus gerechnet, die Zunahme an Arbeitsvermögen Null. Mithin muß auch die Arbeitssumme Null sein. Nach S. 174 verrichten aber die inneren Kräfte die Arbeit Null, der in der Drehkante A auftretende Widerstand W verrichtet ebenfalls die Arbeit Null, weil sein Angriffspunkt sich nicht bewegt; mithin muß die Arbeit von Q und K zusammen Null sein. Bei einer Hebung des Schwerpunktes um h_1 ist aber (nach S. 44) die Arbeit der Schwerkraft $-Qh_1$, folglich ist die zum völligen Aufkippen des Körpers erforderliche Arbeit

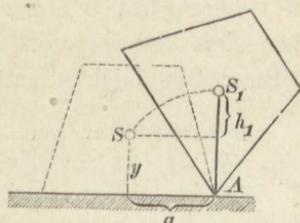
$$1) \quad \mathfrak{A} = Qh_1.$$

Diese Arbeit heißt die dynamische Standsicherheit. Sie kommt in Frage, wenn es sich darum handelt, ob ein Körper durch einen Stoß oder Wurf umzustürzen ist. In einem geworfenen Körper steckt ein bestimmtes Arbeitsvermögen; trifft er einen aufgestellten Körper, so kann ein gewisser Teil des Arbeitsvermögens zum Umstürzen wirksam werden.

Das Standsicherheitsmoment war das zum ersten Anheben erforderliche Moment und unabhängig von der Höhenlage des Schwerpunktes. Die zum völligen Aufkippen erforderliche Arbeit \mathfrak{A} aber ist auch von der Höhe y des Schwerpunktes abhängig. Es ist nämlich (Fig. 239)

$$AS = AS_1 = \sqrt{a^2 + y^2}; \quad h_1 = AS_1 - y = \sqrt{a^2 + y^2} - y,$$

Fig. 239.



was man aber, wenn man mit $\sqrt{a^2 + y^2} + y$ multipliziert und dividiert, auch schreiben kann

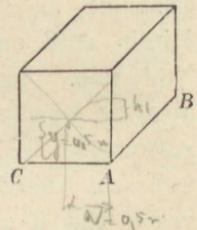
$$h_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}, \text{ oder}$$

$$2) \quad \mathfrak{A} = Qa \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2} + y}.$$

Man erkennt, daß bei gleich bleibendem a die Arbeit \mathfrak{A} um so kleiner wird, je höher der Schwerpunkt liegt. Körper mit hoch liegendem Schwerpunkte lassen sich also durch einen Stoß verhältnismäßig leicht umstürzen.

Beispiel: Ein parallelepipedischer Steinkörper (Fig. 240) von $1 \times 1 \times 2$ m wiegt, wenn $\gamma = 2000$ kg/cbm, $Q = 4000$ kg. Liegt er mit einer Langseite auf dem Boden, so ist $a = 0,5$ m, $y = 0,5$ m, daher das Moment zum ersten Aufkippen $\mathfrak{M} = Qa = 4000 \cdot 0,5 = 2000$ mkg. Oder es muß unter der linksseitigen Steinkante eine Hubkraft $K = 2000$ kg wirksam sein. Die Arbeit zum völligen Aufkippen, so daß er dann von selbst weiter umkippt, ist

Fig. 240.

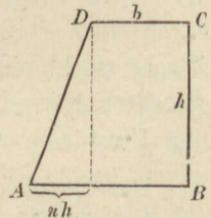


$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= Qa \frac{0,5}{\sqrt{0,5^2 + 0,5^2} + 0,5} = \frac{2000}{\sqrt{2} + 1} = 2000 (\sqrt{2} - 1) \\ &= 2000 \cdot 0,414 = 828 \text{ mkg}. \end{aligned}$$

Steht aber der Körper hochkantig, so ist $a = 0,5$ m, $y = 1$ m, mithin \mathfrak{M} ebenso groß wie vorher, dagegen $\mathfrak{A} = Qa (\sqrt{1 + 4} - 2) = 2000 \cdot 0,36 = 472$ mkg, also erheblich kleiner.

Eine Mauer von trapezförmigem Querschnitt (Fig. 241) habe eine Höhe h , eine obere Breite b ; der Grundriß der geneigten Seite AD betrage nh ; dann setzt sich das Standsicherheitsmoment aus den Beiträgen des rechteckigen und des dreieckigen Teiles zusammen, in welche man den Querschnitt zerlegen kann. Für eine Länge $= 1$ rechtwinklig zur Zeichenebene ist dann in bezug auf die Kante A das Standsicherheitsmoment \mathfrak{M}_a :

Fig. 241.



$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_a &= \gamma h \left\{ b \left(\frac{1}{2} b + nh \right) + \frac{1}{2} nh \cdot \frac{2}{3} nh \right\} \\ &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + bnh + \frac{1}{3} n^2 h^2 \right\}. \end{aligned}$$

In bezug auf die Kante B :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_b &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} n h (b + \frac{1}{3} n h) \right\} \\ &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} b n h + \frac{1}{6} n^2 h^2 \right\}, \end{aligned}$$

mithin $\mathfrak{M}_a > \mathfrak{M}_b$, weil der Gesamtschwerpunkt näher an B als an A liegt. Würde man das Trapez mit einem flächengleichen Rechtecke von der Höhe h und der Breite $b + \frac{1}{2} n h$ vertauschen, so betrüge das Standsicherheitsmoment nur

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \gamma h \frac{1}{2} (b + \frac{1}{2} n h)^2 \\ &= \gamma h \left\{ \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} b n h + \frac{1}{8} n^2 h^2 \right\}, \end{aligned}$$

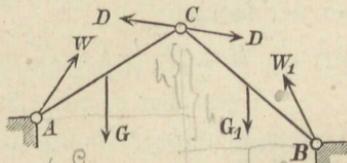
also wiederum weniger als \mathfrak{M}_b .

6. Gleichgewicht einer Verbindung von Gelenkstangen.

Unter einer Gelenkstange verstehen wir einen starren Körper, der an zwei Stellen mit sog. Augen versehen ist, in welchen zylindrische, einander parallele Bolzen angebracht sind. Mittels dieser Bolzen sind die Körper miteinander, bezw. mit festen, unbeweglichen Widerlagern derartig verbunden, daß in den Gelenken nur Kräfte auftreten können, welche durch die Achsen der Gelenkbolzen hindurch gehen und zu diesen rechtwinklig stehen. Die Form der Körper ist im übrigen gleichgültig, dieselben können die Gestalt von geraden oder einfach gekrümmten Stäben haben; der Einfachheit wegen mögen sie geradlinig gezeichnet werden. Die Reibung an den Bolzen wird vernachlässigt.

Verbindung zweier Gelenkstäbe. In A und B (Fig. 242) seien die Stäbe mit Widerlagergelenken verbunden, bei C greifen sie gelenkartig ineinander. G und G_1 seien die Gesamtlasten der linken bzw. rechten Stange mit den wagerechten Abständen c und c_1 von A bzw. B . Es seien b und b_1 die wagerechten, h und h_1 die senkrechten Projektionen der Stangen. Den Widerstand W des Widerlagergelenkes A zerlegen wir in zwei Seitenkräfte A (senkrecht) und X (wagerecht); ebenso den Widerstand W_1 des Gelenkes B in B bzw. X_1 , während die

Fig. 242.



gegenseitige Kraft D , welche die Gelenkstangen bei C aufeinander ausüben, in V (senkrecht) und H (wagerecht) zerfallen möge.

Soll die Verbindung im Gleichgewichte sein, so muß jede Stange für sich den Gleichgewichtsbedingungen genügen. Da nun für Kräfte in einer Ebene drei Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen sind, so stehen im ganzen sechs Gleichungen zur Verfügung, mittels deren die Unbekannten A , X , B , X_1 , H und V bestimmt werden können.

Zuerst sollen die gegenseitigen Kräfte im Gelenke C berechnet werden. Daß an der linksseitigen Stange die Kraft H nach links wirken muß, erkennt man leicht; der Sinn von V ist vorläufig unbestimmt; wir nehmen ihn nach oben an. Bei der Momentengleichung in bezug auf A (Fig. 243) fallen A und X aus, und man erhält einfach: $0 = -Hh - Vb + Gc$. An der rechtsseitigen Stange (Fig. 244) müssen H und V entgegengesetzt angebracht werden, und man erhält:

$$0 = Hh_1 - Vb_1 - G_1c_1.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$1) \quad H = \frac{Gc b_1 + G_1 c_1 b}{b h_1 + b_1 h}$$

$$2) \quad V = \frac{Gc h_1 - G_1 c_1 h}{b h_1 + b_1 h}.$$

Wird hierbei V negativ, so ist es in Fig. 243 abwärts, in Fig. 244 aufwärts gerichtet.

Weiter folgt dann leicht an der linken Stange:

$$3) \quad A = G - V; \quad X = H;$$

an der rechten:

$$4) \quad B = G_1 + V; \quad X_1 = H.$$

Wirken aber an jeder Stange zwei Lasten P und Q bzw. P_1 und Q_1 (Fig. 245), so kann man P und Q durch ihre Mittelkraft G , ebenso P_1 und Q_1 durch ihre Mittelkraft G_1 ersetzen, und zwar ist dann einfach

$$Gc = Pd + Qe; \quad G_1c_1 = P_1d_1 + Q_1e_1.$$

Fig. 243.

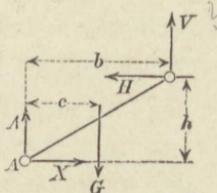


Fig. 244.

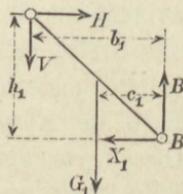
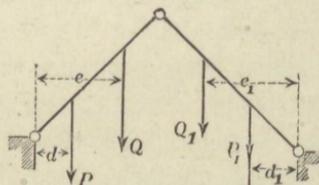


Fig. 245.



Führt man dies in die Gleichungen 1 und 2 ein, so entsteht:

$$5) \quad H = \frac{Pdb_1 + Qeb_1 + P_1d_1b + Q_1e_1b}{bh_1 + b_1h} \quad \text{und}$$

$$6) \quad V = \frac{Pdh_1 + Qeh_1 - P_1d_1h - Q_1e_1h}{bh_1 + b_1h}.$$

In diesen Gleichungen ist jede der vier Lasten durch ein besonderes, von den anderen unabhängiges Glied vertreten; fallen z. B. die Lasten Q , Q_1 und P_1 fort, bleibt also nur P , so wird

$$H = \frac{Pdb_1}{bh_1 + b_1h}; \quad V = \frac{Pdh_1}{bh_1 + b_1h}.$$

Jede der Lasten liefert hiernach zu den Kräften H und V ihren bestimmten, unabhängigen Beitrag; man kann daher beim gleichzeitigen Vorhandensein beliebig vieler Lasten den Einfluß jeder einzelnen Last auf H und V besonders ermitteln und braucht die einzelnen Beträge dann nur mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen zu summieren. Das eigene Gewicht der Stangen wird ebenso wie jede Last behandelt; man kann daher die Stangen als an und für sich gewichtlos betrachten.

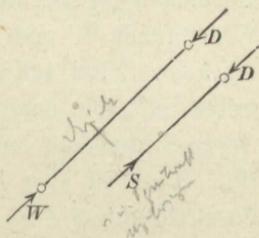
Eine unbelastete und gewichtlos gedachte Gelenkstange hat aber Eigenschaften, die für die Berechnung der Stangenverbindungen sehr wichtig sind (A. Ritter, Technische Mechanik).

An einer solchen Stange müssen die Gelenkdrücke W und D sich allein im Gleichgewichte halten, also gleich und entgegengesetzt sein und in dieselbe Gerade fallen (Fig. 246), d. h. in die gerade Verbindungslinie beider Gelenke. Oder es gilt der Satz:

Eine gewichtlose unbelastete Gelenkstange kann nur Widerstände in der Richtung der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke ausüben.

Sind die Pfeilspitzen der an beiden Gelenken auftretenden Kräfte einander zugewandt, wie in Fig. 246, so erfährt die Stange Druck. Denken wir uns die Stange an irgendeiner Stelle zwischen den Gelenken durchschnitten, so haben wir an der Schnittstelle eine innere Spannkraft S anzubringen, welche die Wirkung des

Fig. 246.



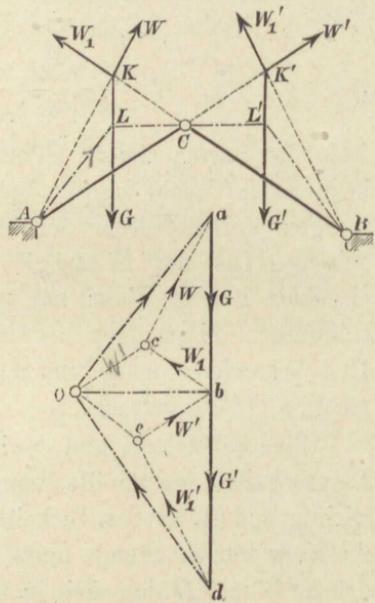
abgeschnittenen Stückes ersetzt; diese Spannkraft ist ebenfalls $= D$ und ihr entgegengesetzt, oder:

Die Spannkraft einer unbelasteten Stange fällt in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte.

Ist nun (Fig. 247) die linke der beiden Stangen mit G belastet, die rechte einstweilen unbelastet (man betrachte G' einstweilen als nicht vorhanden), so übt letztere einen Gegendruck $D = W_1$ in der Richtung BC , welche sich mit G im Punkte K schneidet; durch K muß dann auch der Widerstand W des Gelenkes A hindurchgehen, weil an der Stange AC die drei Kräfte: D , G und W sich im Gleichgewichte halten müssen. Nachdem hierdurch die Richtungen von W und W_1 gefunden sind, läßt sich leicht ein Kräfteck abc dieser drei Kräfte zeichnen, aus welchen dann die Größen W und $D = W_1$ abgegriffen werden können.

Für eine Belastung der rechten Stange mit G' findet man in entsprechender Weise die zugehörigen Widerstände W' und W'_1 im Kräfteck bdc . Sind nun die Lasten G und G' gleichzeitig vorhanden, so treten auch die entsprechenden Widerstände gleichzeitig auf. Der Gesamtwiderstand im Punkte A ist dann die Mittelkraft aus W und W' . Diese ist aber leicht zu finden, wenn man aus bc und eb ein Parallelogramm $Ocbe$ zeichnet; dann finden sich $Oc = W'$ und $ca = W$ aneinander gereiht, und ihre geometrische Summe Oa ist der Gesamtdruck W_a in A . Ebenso ist dO der Gesamtdruck W_b in B . Bringt man diese Gesamtkräfte in A und B an, so schneiden sie G und G' in Punkten L und L' , durch welche auch der Gesamtdruck des Gelenkes C hindurch gehen muß, die deshalb mit C in einer Geraden liegen müssen, und zwar muß diese Gerade $LCL' \parallel Ob$ sein, weil Ob den Gesamtdruck des Gelenkes C nach Richtung und Größe darstellt.

Fig. 247.



Rückt die Last G (Fig. 248) dem Widerlagergelenk A näher und näher, so verschiebt sich der Schnittpunkt K der drei Kräfte auf der Verlängerung von BC mehr und mehr nach oben, und die Richtung von W nähert sich mehr und mehr der Lotrechten. Im Grenzfalle, wo G mit A zusammenfällt, wird W lotrecht, fällt also mit G in dieselbe Richtung; aus diesem Grunde wird die dritte Kraft $D = W_1$ (nach S. 69) = Null; die Last G wird unmittelbar von dem festen Gelenkpunkte A auf das Widerlager übertragen; im Gelenke C tritt gar keine Kraft auf, und die Stangenverbindung bleibt ohne innere Spannkraft. Also:

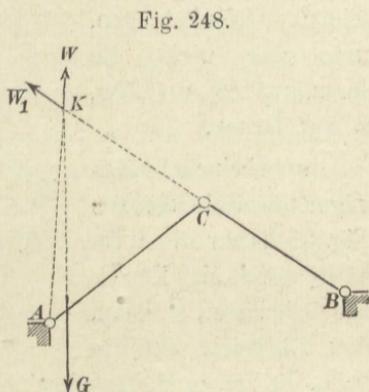


Fig. 248.

Eine Last, die an einem Widerlagergelenk einer Stangenverbindung angreift, bringt in der Stangenverbindung selbst keine Spannkraft hervor.

Rückt aber die Last G der linken Stange nach C hin (Fig. 249), so nähert sich der Punkt K mehr und mehr dem Punkte C und fällt mit ihm zusammen, wenn die Last durch C geht. Denkt man sich nun die Stangen durchgeschnitten, so müssen ihre Spannkraften beide in die Richtungen AC und BC fallen. Oder:

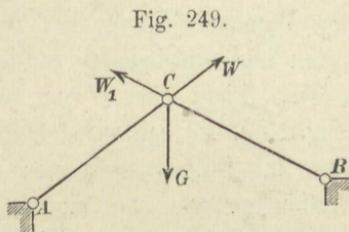


Fig. 249.

Greifen die Lasten nur in dem gemeinsamen Gelenkpunkt einer Stangenverbindung an, so fallen die Spannkraften der Stangen in die Verbindungsgeraden der Gelenkpunkte (die Stangenrichtungen).

Die beiden vorstehenden Sätze gelten, wie man leicht erkennt, auch für eine Verbindung von beliebig vielen Stangen.

Die Bestimmung der Widerstände der festen Gelenke geschieht in derselben Weise, wie auf S. 218 beschrieben, wenn auch die

einzige vorhandene Last K an der Verlängerung einer Gelenkstange angreift und etwa von der lotrechten Richtung abweicht (Fig. 250).

In Fig. 251 ergeben sich leicht die Spannkraft S und S_1 der beiden Gelenkstangen, und zwar wirkt die Spannkraft S auf Zug, S_1 auf Druck.

Ist bei einem Bogen-träger mit drei Gelenken (Fig. 252) nur die linke Hälfte durch eine Einzel-last G belastet, so kann, ohne Rücksicht auf die

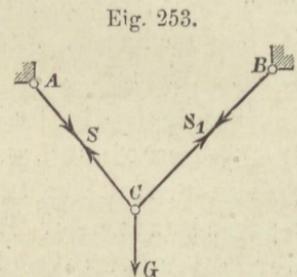
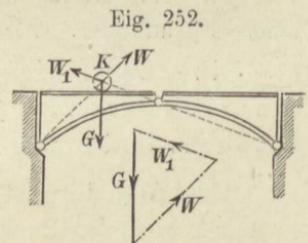
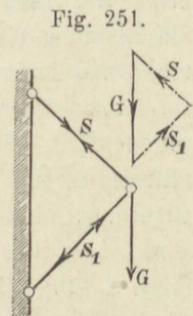
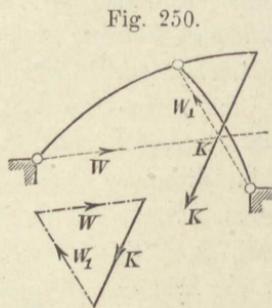
Form, die rechte Hälfte wie eine gewichtlose Stange behandelt werden, so daß die Richtungen der Widerlagerdrücke W und W_1 in einfacher Weise bestimmt sind und daher die Zeichnung des Kräftecks aus G , W und W_1 ermöglicht ist.

Liegt das gemeinsame Gelenk C oberhalb der Geraden AB , so erfordert eine Last G (Fig. 249, S. 219) schräg aufwärts gerichtete Widerstände W und W_1 ; diese Kräfte haben nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Bestreben, die Widerlager schräg nach unten und auseinander zu drängen; die Stangen erfahren Druckkräfte. Liegt aber C unterhalb AB (Fig. 253), so kehren sich alle Verhältnisse ins Entgegengesetzte: die Stangen werden gezogen und suchen die Widerlager nach innen zu ziehen.

Solche innere Zugkräfte, deren Richtung mit der Verbindungsgeraden zweier Gelenke zusammenfällt, können auch durch ein Seil aufgenommen werden.

An Stelle der Gelenke hat man sich dann Seilknöten zu denken,

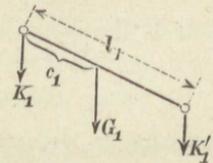
Verbindung von mehr als zwei Stangen. Eine Verbindung von zwei Gelenkstangen wie Fig. 253 bildet eine bestimmte Figur,



nämlich ein durch drei Seiten bestimmtes Dreieck ABC , weil die festen Punkte A und B die Seite AB festlegen. Eine Verbindung von mehr als zwei Stangen bildet aber eine veränderliche Figur, weil ein Vieleck von mehr als drei Seiten nicht mehr durch die Seiten allein bestimmt ist. Sind die Längen der Stangen, deren Lasten und die Widerlagergelenkpunkte A und B gegeben, so gibt es nur eine gesicherte Gleichgewichtslage, welche sich allmählich von selbst einstellt, wenn man die Stangenverbindung der Wirkung der Lasten überläßt. Diese Ruhelage muß zunächst ermittelt werden, bevor man die Widerstände der Befestigungspunkte und die Spannkraften der Stangen bestimmen kann.

Betrachten wir eine Verbindung von drei Stangen, so sind deren Neigungswinkel α_1 , α_2 , α_3 in der Gleichgewichtslage unbekannt. Greifen die Lasten irgendwo zwischen den Gelenkpunkten an, so ist es zur Vereinfachung empfehlenswert, jede Last G durch zwei parallele Seitenkräfte K zu ersetzen, die je in einem Gelenk

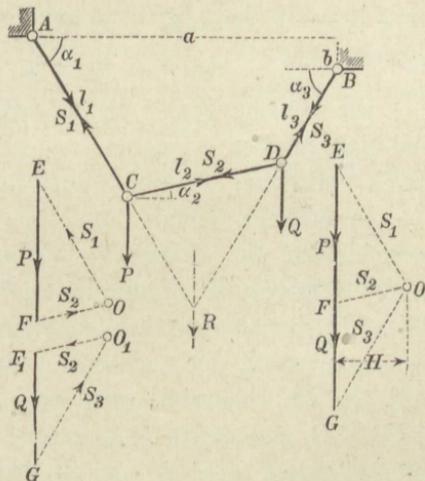
Fig. 254.



angreifen. Es ist dann (Fig. 254) $K_1 = G_1 \left(1 - \frac{c_1}{l_1}\right)$; $K'_1 = G_1 \frac{c_1}{l_1}$.

Verfährt man mit den Lasten der anderen Stangen ebenso, so werden die auf die Widerlagergelenke entfallenden Seitenkräfte, z. B. K_1 , unmittelbar von diesen aufgenommen und kommen für das Gleichgewicht der Stangenverbindung nicht weiter in Betracht. An jedem Zwischen-

Fig. 255.



gelenk aber summieren sich die von links und rechts herührenden Seitenkräfte und geben zusammen die Gelenkpunktlast. Wir haben dann nur mit Gelenkpunktlasten P und Q zu tun (Fig. 255), und die Spannkraften der Stäbe können nach dieser Aenderung mit Rücksicht auf den Satz S. 217 als in die Stabrichtungen fallend angesehen werden.

An dem Gelenkbolzen C hängt die Last P ; die anschließenden Stäbe üben auf ihn die Kräfte S_1 und S_2 aus, und diese drei Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten, weil der Bolzen in Ruhe sein soll. Es müssen daher diese Kräfte ein geschlossenes Krafteck OEF bilden (Fig. 255, links). Da nun S_1 mit der Wagerechten den Winkel α_1 bildet, ist $90^\circ - \alpha_1$ der Winkel FEO zwischen S_1 und P ; der Winkel bei O im Krafteck beträgt aber für die angenommenen Neigungen $\alpha_1 + \alpha_2$, derjenige bei F ist $90^\circ - \alpha_2$. Mithin wird nach dem Sinus-Satze:

$$P : S_2 = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) : \cos \alpha_1.$$

Ebenso müssen die in D angreifenden Kräfte S_2 , Q und S_3 ein geschlossenes Dreieck O_1F_1G bilden, für welches die Gleichung gilt:

$$Q : S_2 = \sin(\alpha_3 + \alpha_2) : \cos \alpha_3.$$

Durch Division ergeben diese beiden Gleichungen:

$$1) \quad \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2) \cos \alpha_1} = \frac{P}{Q}.$$

Dies ist die einzige Beziehung, welche zwischen den gegebenen Lasten und den Gleichgewichts-Neigungen α_1 , α_2 und α_3 aufgestellt werden kann. Haben aber die Punkte A und B einen gegebenen wagerechten Abstand a , einen Höhenunterschied b , so müssen diese Werte gleich sein der algebraischen Summe der wagerechten bzw. senkrechten Projektionen der Stangen, oder

$$2) \quad l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 = a;$$

$$3) \quad l_1 \sin \alpha_1 - l_2 \sin \alpha_2 - l_3 \sin \alpha_3 = b.$$

Die Gleichungen 1 bis 3 enthalten die Bedingungen für die drei Unbekannten α_1 , α_2 und α_3 , sind aber nach diesen Größen nur durch mühsames Probieren auflösbar.

In anderer Gestalt läßt sich die Bedingung für die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung aussprechen, wenn man die beiden Kraftecke so zusammenschiebt, daß O_1F_1 mit OF zusammenfällt. In der so entstehenden Figur (Fig. 255, rechts) bildet EFG den Streckenzug der gegebenen parallelen Lasten, O den Pol, OE , OF , OG die Polstrahlen, und, wenn man nun bedenkt, daß $OE \parallel AC$, $OF \parallel CD$ und $OG \parallel DB$ gezeichnet waren, so erkennt man, daß der Linienzug $ACDB$ ein zu den Lasten P und Q gezeichnetes Seileck ist. Die Polstrahlen des Kraftecks geben Größe und Richtung der Stabspannkraft.

Nach der Bedeutung der Seileckseiten ist DB die Richtungslinie einer Kraft S_3 mit dem Sinne von B nach D , welche die Mittelkraft von S_1 (aufwärts), P und Q darstellt. Nach den Lehren über die Zusammensetzung und das Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper würden daher die an einem starren Körper wirkenden Kräfte S_1 , P und Q mittels eines Seilecks zu einer Mittelkraft S_3 vereinigt werden können; und eine entgegengesetzt gerichtete Kraft S_3 (mit dem Sinne von D nach B) würde den Kräften S_1 , P und Q das Gleichgewicht halten. Bei der Stangenverbindung haben wir nun gezeigt, daß sie unter Einwirkung der Stabkräfte S_1 und S_3 und den Gelenkpunktlasten P und Q im Gleichgewichte sei. Da sich dieselben Kräfte auch am starren Körper im Gleichgewichte halten, so folgt daraus, daß, wenn eine Gelenkverbindung im Gleichgewicht ist, in dem Gleichgewichts- und Kräftezustande nichts geändert wird, wenn man den Gelenken die Beweglichkeit nimmt, also z. B. sie zu einem starren Körper zusammengeschweißt denkt.

Nach der Eigenschaft des Seilecks schneiden sich die Richtungen von S_1 und S_3 auf der Mittelkraft R der Lasten P und Q . Die Spannkkräfte S_1 , S_2 und S_3 haben im Krafteck übereinstimmende wagerechte Projektion, d. h. übereinstimmende wagerechte Seitenkraft H , gemessen durch den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie EFG .

Man erkennt leicht, daß das vorstehend für drei Stangen entwickelte im wesentlichen auch für beliebig viele, nur in den Gelenkpunkten belastete Stangen gilt; wir fassen dies unter Annahme reibungsloser Gelenke zu folgenden Sätzen zusammen:

1. Die Spannkraft einer jeden Stange fällt mit ihrer Richtung, d. h. mit der Verbindungsgeraden ihrer Gelenke zusammen.

2. An jedem Gelenkpunkte halten die Spannkkräfte der beiden benachbarten Stangen der Last des Gelenkpunktes das Gleichgewicht.

3. Die Gleichgewichtsform der Stangenverbindung ist ein zu den Lasten gezeichnetes Seileck.

4. Die Spannkkräfte irgend zweier Stangen halten den an den zwischenliegenden Gelenkpunkten angreifenden Lasten das Gleichgewicht (d. h. genügen den Bedingungen für das Gleichgewicht starrer Körper). Die Mittelkraft dieser Lasten geht durch den Schnittpunkt der beiden Spannkkräfte.

Die vorstehenden Sätze gelten auch, wenn die Gelenkpunktlasten nicht lotrecht, sondern beliebig gerichtet sind. Werden die Lasten aber ausschließlich durch lotrechte Kräfte gebildet, so ist noch

5. die wagerechte Seitenkraft aller Spannkkräfte von der gleichen Größe H .

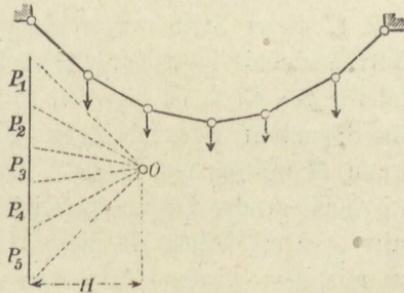
Sind nun n Stangen der Längen $l_1, l_2 \dots l_n$ und $n-1$ Gelenklasten gegeben, so kann man damit unendlich viele Gleichgewichtsformen herstellen. Bei drei Stangen ließ sich aus den Gleichgewichtsbedingungen nur eine Gleichung (Gl. 1, S. 222) mit den drei Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ entwickeln; die beiden anderen Gleichungen waren geometrische Bedingungen. Aehnlich ist es auch bei n Stängen: Sind die Abstände a und b der Befestigungspunkte in wagerechtem und lotrechtem Sinne gegeben, so lassen sich außer den geometrischen Bedingungen nach Art der Gl. 2 und 3, S. 222, in derselben Weise wie bei drei Stangen noch $n-2$ Gleichgewichtsbedingungen herleiten. Die Auflösung der Gleichungen nach den unbekanntem Winkeln $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ ist aber nur durch umständliches Probieren möglich. Viel leichter wird die Aufgabe, wenn statt der gegenseitigen Lage der Befestigungspunkte zwei andere Stücke gegeben sind. Die Neigungswinkel α sind sofort bestimmt, wenn im Kräfteck (Fig. 255, rechts, S. 221) die Lage des Poles gegen den Streckenzug der Lasten gegeben ist. Sind also von irgendeiner Spannkraft, z. B. von S_1 , wagerechte und senkrechte Seitenkraft gegeben, so steht S_1 nach Größe und Richtung fest und bestimmt damit den Pol O . Auch die Neigungen zweier Stäbe (d. h. ihrer Spannkkräfte) legen den Schnittpunkt der beiden Polstrahlen, d. h. den Pol fest.

In Fig. 255 können die Spannkkräfte S_1, S_2, S_3 der Gelenkstangen ebenso gut durch Seilstücke aufgenommen werden. Ein Seil kann wegen seiner Biegsamkeit nur eine in seine Längenrichtung fallende Zugkraft aufnehmen (vergl. S. 69). Das zwischen zwei Knoten befindliche Stück eines gewichtlosen Seiles hat daher dieselbe Grundeigenschaft wie eine gewichtlose und unbelastete Gelenkstange, jedoch mit der noch hinzutretenden Beschränkung, daß im Seile nur Zugkräfte möglich sind. Das Viereck $ACDB$ ist also die Gleichgewichtsform einer in den Knoten C und D belasteten Seilverbindung. Hiermit erklärt sich die S. 109 (nach dem Vorschlage von G. Lang) eingeführte Bezeichnung Seileck.

Würde im Krafteck (Fig. 255, rechts) der Pol O nach der linken Seite von EG symmetrisch verlegt, so erhielten S_1 , S_2 und S_3 dieselben Größen wie bisher, S_1 würde dann aber im Seileck von A aus nach rechts ansteigen mit dem Anstiegswinkel α_1 gegen die Wagerechte. Das in solcher Weise zu den Lasten P und Q erhaltene Seileck würde eine Figur sein, in welcher die Knickpunkte C und D oberhalb AB liegen; S_1 , S_2 , S_3 würden wie in Figur 249 (S. 219) Druckkräfte werden. Diese Figur ist als Gleichgewichtsform eines Seiles nicht möglich, gleichwohl hat man den Namen Seileck auch für solche Fälle beibehalten, während man eigentlich richtiger Gelenkstabvieleck sagen würde. Ein solches Gelenkstabvieleck aus mehr als zwei Gelenkstangen mit hochliegenden Zwischengelenken (nach oben gekehrten Knien), in welchen durch abwärts gerichtete Lasten Druckkräfte entstehen, ist nur in unsicherem Gleichgewichte, kann nur künstlich gehalten werden und gerät bei der geringsten Veränderung in beschleunigte Abwärtsbewegung; in bezug auf die Ermittlung der Gleichgewichtsform und der entsprechenden Kräfte ist sonst kein Unterschied zwischen der unsicheren und der sicheren Gleichgewichtsform, ebensowenig wie zwischen Fig. 249 und 253.

Beispiel: Sechs Stangen mögen die Längen: $l_1 = 0,98$ m; $l_2 = 0,87$ m; $l_3 = 0,84$ m; $l_4 = 0,69$ m; $l_5 = 1,01$ m; $l_6 = 0,86$ m haben; die Lasten seien $P_1 = 62$ kg; $P_2 = 54$ kg; $P_3 = 44$ kg; $P_4 = 60$ kg; $P_5 = 62$ kg. Die äußersten Seiten des Seilecks mögen je unter 45° gegen die Wagerechte geneigt sein. Trägt man die Lasten zu einem Streckenzuge zusammen (im Maßstabe $1 \text{ mm} = 10 \text{ kg}$) (Fig. 256), so wird die Gesamtlast 282 kg, und weil die äußersten Strahlen davon je um 45° abweichen, so ist der Polabstand $H = \frac{1}{2} \Sigma P = 141$ kg die wagerechte Kraft, die durch die ganze Verbindung hindurchgeht. Die Stäbe sind der Reihe nach parallel den Polstrahlen in den gegebenen Längen (im Maßstab $1:100$) aufgetragen. Die Längen der Polstrahlen geben die Größe der Spannkkräfte der entsprechenden Stäbe.

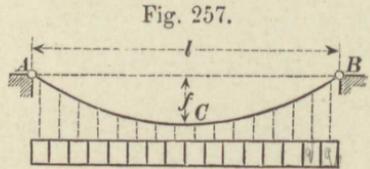
Fig. 256.



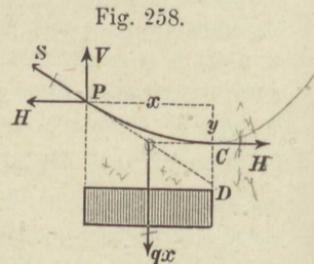
7. Kettenlinien.

Wird die Zahl der Gelenkstangen immer größer, ihre Länge immer kleiner, so nähert sich die vieleckige Gleichgewichts-Figur mehr und mehr einer stetig gekrümmten Kurve. Immer aber bleiben dieselben Gesetze gültig: namentlich also fällt die Richtung der Spannkraft einer Stange mit der Richtung der Stange zusammen. Werden die einzelnen Stangen unendlich klein, so kommt man zu einer an jeder Stelle völlig biegsamen Kette oder einem biegsamen Faden mit stetiger Belastung. Die Spannkraft an irgendeiner Stelle ist dann tangential gerichtet. Die Belastung der einzelnen Bogen-teilchen der Kette kann überall gleich oder verschieden sein; danach wird die Gleichgewichtsform der Kette, die Kettenlinie, eine verschiedene.

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, daß die Belastung sich gleichförmig über die wagerechte Projektion der Kette verteile, daß also jede Längeneinheit (jedes Meter) dieser Projektion ein bestimmtes Gewicht q zu tragen habe. Dies können wir uns vorstellen durch einen prismatischen Belastungskörper mit dem Gewichte q für die Längeneinheit, der durch lotrechte Schnitte in unendlich viele Scheiben geschnitten ist, welche mittels gewichtloser Fäden oder Hängestangen an der selbst gewichtlosen Kette aufgehängt sind (Fig. 257).



Im tiefsten Punkte C ist die Kette und daher auch die Spannkraft H dieser Stelle wagerecht gerichtet. Durchschneiden wir die Kette nochmals in einem wagerechten Abstand x von C , so ist hier, bei P (Fig. 258) eine Spannkraft S anzubringen. Die Kräfte S und H müssen nun (nach S. 223, 4) den zwischenliegenden Lasten das Gleichgewicht halten. Die Mittelkraft dieser Lasten ist qx mit dem Abstand $\frac{1}{2}x$ von P . Die Momentengleichung in bezug auf P liefert dann: $0 = -Hy + \frac{1}{2}qx^2$, also:



$$1) \quad y = \frac{qx^2}{2H} \quad \text{oder} \quad x^2 = 2 \left(\frac{H}{q} \right) y.$$

Die Gleichgewichtsform der Kette ist also eine Parabel mit lotrechter Achse und vom Parameter $H : q$.

Für $x = \frac{1}{2} l$ wird $y = f$, daher nach Gleichung 1:

$$2) \quad f = \frac{q l^2}{8 H};$$

durch Division beider Gleichungen entsteht dann:

$$3) \quad \frac{y}{f} = \frac{4 x^2}{l^2} \quad \checkmark$$

Bemerkenswert ist auch, daß der Schnitt der drei Kräfte S , H und $q x$ in der Mitte der Strecke x liegt, so daß, wenn man die Richtung der Tangente S bis zur Lotrechten durch C verlängert, der hier entstehende Schnittpunkt D in der Tiefe y unter C , d. h. in der Tiefe $2 y$ unter P liegt. Dies ist eine kennzeichnende Eigenschaft der Parabel.

Die wagerechte Seitenkraft oder Projektion von S ist $= H$, die lotrechte $V = q x$.

Zu einer gegebenen Last q sind unendlich viele parabolische Kettenlinien möglich, je nachdem H größer oder kleiner gewählt wird. Es läßt sich diese bestimmende Größe aber auf die Pfeilhöhe f der Parabel zurückführen; denn aus Gleichung 2 folgt:

$$4) \quad H = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Vergrößerung von H bedingt also Verkleinerung der Pfeilhöhe f , und umgekehrt. Der Parameter $\frac{H}{q}$ kann also auch $\frac{l^2}{8 f}$ geschrieben werden.

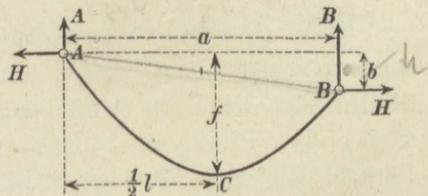
Liegen die Befestigungspunkte A und B in einem wagerechten Abstand a , befindet sich aber B um b tiefer als A , so liegt der tiefste Punkt C nicht in der Mitte (Fig. 259). Seine wagerechte Entfernung $\frac{1}{2} l$ von A soll berechnet werden. Die Widerstände A und H bei A und die Spannkraft H bei C müssen den Lasten zwischen A und C das Gleichgewicht halten, d. h. $A = \frac{1}{2} q l$;

$$H f = \frac{1}{8} q l^2 \quad \text{also} \quad H = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Entsprechendes gilt für das Stück rechts von C , wo statt $\frac{1}{2} l$ zu setzen

$$\text{ist } a - \frac{1}{2} l, \text{ statt } f \text{ aber } f - b. \quad \text{Mithin } H = \frac{q}{8} \frac{(2 a - l)^2}{f - b}.$$

Fig. 259.



Die beiden Werte H sind aber, wie bei jeder lotrecht belasteten Stangenverbindung, dieselben, mithin

$$\frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{f-b}{f} = 1 - \frac{b}{f}$$

$$\text{oder } \frac{b}{f} = 1 - \frac{(2a-l)^2}{l^2} = \frac{-4a^2 + 4al}{l^2}$$

$$\text{Weil aber } f = \frac{ql^2}{2H}, \text{ so wird } \frac{b}{f} = \frac{8bH}{ql^2} = \frac{4al - 4a^2}{l^2}$$

$$\text{oder } a(l-a) = \frac{2bH}{q}$$

$$\text{und } l = a + \frac{2b}{a} \frac{H}{q} \text{ oder } \frac{l}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{a} \frac{H}{q}$$

Wichtig ist auch die Gleichung der parabolischen Kettenlinie, bezogen auf den Anfangspunkt A . Man kann dieselbe entwickeln, indem man von der Gleichung 1 (S. 226) ausgeht, kann sie aber ebenso leicht unmittelbar ableiten: Im Punkt A (Fig. 259 und 260) wirken die Widerstände $A = \frac{1}{2}ql$ und $H = \frac{ql^2}{8f}$, und in bezug auf den Punkt P (Fig. 260) gilt die Momentengleichung:

$$0 = \frac{1}{2}qlx - Hy - \frac{1}{2}qx^2, \text{ oder}$$

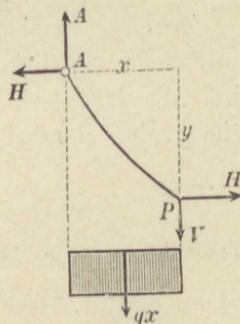
$$5) \quad y = \frac{q}{2H} x(l-x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

Dies ist also eine andere Form der Gleichung einer Parabel vom Parameter $\frac{H}{q} = \frac{l^2}{8f}$.

Auch künftig werden wir öfter auf eine Gleichung der Form $y = Cx(l-x)$ kommen; diese bedeutet stets eine Parabel vom Parameter $\frac{1}{2C}$, deren Achse parallel der y -Achse ist und welche die in der x -Richtung liegende Sehne l symmetrisch überspannt.

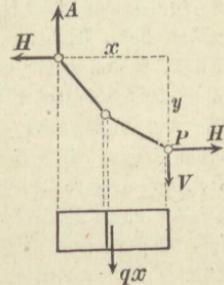
Ist der prismatische Lastkörper nicht an unendlich vielen Stellen, sondern nur an einzelnen Punkten zerschnitten und an diesen Stellen mit der Kette verbunden, so wird die Gleichgewichtsform wieder ein Vieleck, ein Seileck, und zwar ist dies Seileck ein der Parabel (Gleichung 5) eingeschriebenes Vieleck. Durchschneidet man (Fig. 261) die Stangenverbindung im Gelenkpunkte P (der Koordinaten x und y), so müssen die hier auftretenden Spannkraft H und V nebst den in A auftretenden Widerständen $A = \frac{1}{2}ql$ und H

Fig. 260.



wieder den zwischenliegenden Lasten qx das Gleichgewicht halten. Es entsteht dann ganz dieselbe Momentengleichung wie auf S. 228, und für irgendeinen Knotenpunkt P gilt die Gleichung 5. Liegen nämlich die Befestigungspunkte A und B in gleicher Höhe und in dem Abstand l , so ergibt sich leicht, daß $A = B = \frac{1}{2}ql$ sein muß, wie auch die Schnittstellen liegen mögen. Also:

Fig. 261.

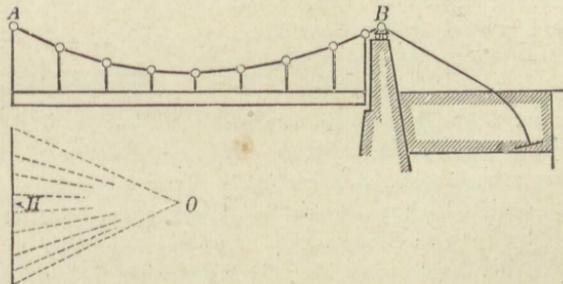


Ist eine Stangenverbindung derartig belastet, daß die Last sich gleichförmig über die wagerechte Projektion verteilt, aber nur in einzelnen, den Teillinien der Last entsprechenden Gelenkpunkten auf die Stangenverbindung übertragen wird, so ist die Gleichgewichtsform ein Sehnenvieleck einer Parabel mit lotrechter Achse; die wagerechte Spannkraft beträgt $H = \frac{ql^2}{8f}$, wenn l die Spannweite, f die Pfeilhöhe der Parabel.

Sind die einzelnen Teile des prismatischen Lastkörpers nicht an den Schnittstellen, sondern je in der Mitte durch Hängestangen an der Gelenkstangenverbindung befestigt, so bildet die Gleichgewichtsform der letzteren, wie sich aus einer Betrachtung der Figur 258 ergibt, ein der Parabel umschriebenes Seileck.

Beispiel: Die Kette einer Hängebrücke habe 40 m Spannweite und 5 m Pfeilhöhe (Fig. 262). Ihre Belastung verteile sich nahezu gleichmäßig über die wagerechte Projektion und betrage $q = 1000$ kg für das Meter Länge. Die Kettenglieder werden demnach einer Parabel eingeschrieben sein. Die wage-

Fig. 262.

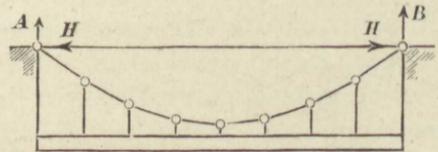


rechte Spannkraft wird $H = \frac{ql^2}{8f} = \frac{1000 \cdot 40 \cdot 40}{8 \cdot 5} = 40\,000$ kg. Die ganze Spannweite sei durch Hängestangen in acht gleiche Fache von je 5 m Länge

geteilt. Dann hat jede Stange das Gewicht zweier halben Fache = 5000 kg auf die Kette zu übertragen. Da sieben mittlere Knotenpunkte vorhanden sind, so kann man das entsprechende Kräfteck zeichnen, indem man die sieben Lasten von je 5000 kg auf einer Lotrechten aufträgt ($5000 \text{ kg} = 2\frac{1}{2} \text{ mm}$). Der Mitte der Lasten gegenüber wählt man in einem Abstand $H = 40\,000 \text{ kg} = 20 \text{ mm}$ den Pol O . Die Polstrahlen nach den Teilpunkten der Lastlinie geben dann Richtung und Größe der Spannkkräfte der einzelnen Stäbe. Ein Punkt P der Kette in einem Abstand $x = \frac{1}{4} l$ von der Mitte hat eine Höhe y über dem Scheitel C (nach Gl. 3): $y = f \cdot 4x^2$; $P = f \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ m}$. Würde man die Aufhängepunkte A und B an den Pfeilern befestigen, so würden diese einen Druck $A = B = \frac{1}{2} ql$ nach unten, zugleich aber eine nach innen gerichtete wagerechte Kraft $H = 40\,000 \text{ kg}$ erfahren. Letzterer würde ein hoher Pfeiler nicht leicht widerstehen können, daher führt man die Kette jenseits des Pfeilers fort und verankert sie in tiefer liegendem Mauerwerk, so daß der Pfeiler im wesentlichen nur lotrechten Druck erfährt. Die Breite der Pfeiler macht es unmöglich, die Endpunkte A und B als Aufhängepunkte der Last zu benutzen. Die hierdurch veranlaßte Abweichung ist auf der rechten Seite, bei B , berücksichtigt (auch im Kräfteck), während auf der linken, bei A , der ideelle Zustand beibehalten wurde.

Die nach außen gerichtete Kraft H kann auf die beiden Punkte A und B auch durch eine steife gerade Verbindungsstange ausgeübt werden, welche diese Kraft H als Druckkraft auszuhalten hat (Fig. 263). Als dann brauchen die Stützen nur noch lotrecht aufwärts gerichtete Widerstände A und B zu leisten. Die Fahrbahn, welche bei Hängebrücken unter der Kette sich befindet, kann nun auch in die Höhe der Stange AB gelegt

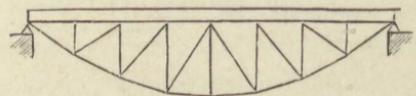
Fig. 263.



und durch Druckstangen auf die Gelenke der Kette gestützt werden. Das Sehnen-Vieleck der Parabel bleibt aber nur im Gleichgewichte, solange die Last gleichförmig verteilt ist.

Kommt eine fremde Last hinzu, so wird die Stangenverbindung eine Verrückung erfahren; es treten Schwankungen ein, die bei Kettenbrücken bekannt sind, und erst nach längerer Zeit kann sich

Fig. 264.



ein neuer Gleichgewichtszustand bilden, wenn keine fernere Änderung der Last erfolgt. Diese Bewegungen kann man mehr oder weniger verhindern, indem man die einzelnen, in Fig. 264 befindlichen Trapeze durch Einfügung je einer Diagonale oder Strebe zu geometrisch bestimmten Figuren umwandelt. Auf diese Weise entsteht ein parabolischer Fachwerkträger. Dreht man die Figur um eine wagerechte Achse, bis das parabolische Vieleck oberhalb

der Sehne AB liegt, so hat man einen parabolischen Träger anderer Art. Die Stäbe des Vielecks erfahren dann Druck, die Sehne AB aber Zug. (S. A. Ritter, Techn. Mechanik, 2. Aufl., S. 244.)

Kettenlinie für gleichförmig veränderte Belastung. Besteht der Belastungskörper aus zwei symmetrischen Keilen (Fig. 265), so ist die Belastung q der Längeneinheit veränderlich, nämlich

$$q = q_1 \frac{x}{1/2 l},$$

wenn q_1 die Einheitsbelastung an den äußeren Enden ist. Zwischen C und P befindet sich dann eine Gesamtlast $1/2 qx$ mit dem Hebelarm $1/3 x$ in

bezug auf P . Daraus folgt die Momentengleichung

$$0 = Hy - \frac{qx}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

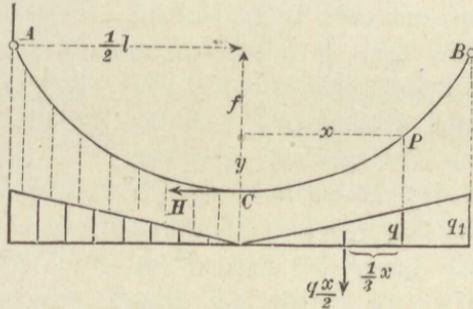
$$6) \quad y = \frac{qx^2}{6H} = \frac{q_1 x^3}{3Hl}.$$

Wird wiederum $y = f$ für $x = 1/2 l$, so ergibt sich auch leicht

$$7) \quad y : f = 8x^3 : l^3.$$

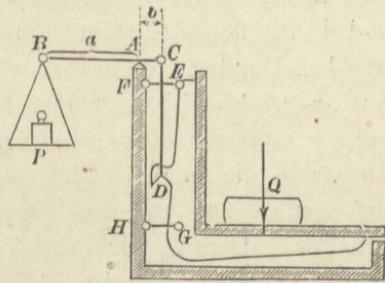
Die Kettenlinie bildet also von C bis B einen Zweig einer kubischen Parabel; CA ist dazu symmetrisch.

Fig. 265.



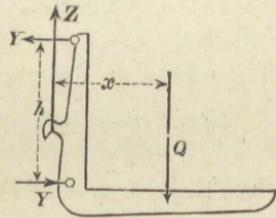
Brückenwage von George (Paris), 1840. Die Brücke (Fig. 267) wird von einem L-förmigen Rahmen getragen. Dieser hängt im Punkte D mittels einer Hängestange DC an dem oberen Hebel CAB . Damit die durch Q belastete Brücke wegen ihrer seitlichen Unterstützung nicht umkippe, wird sie durch zwei parallele Stäbe EF und GH so geführt, daß sie stets parallel ihrer ursprünglichen Lage bleibt.

Fig. 267.



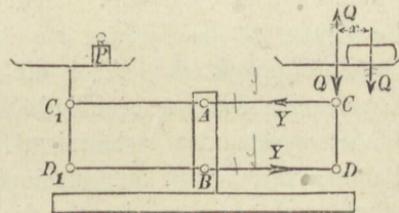
An der Brücke halten sich im Gleichgewichte (Fig. 268) das Gewicht Q , die Kraft Z der Hängestange und die Kräfte Y und Y der Führungsstangen. Daher muß $Yh = Qx$ sein und, was die Hauptsache, $Z = Q$, d. h. die Zugstange CD überträgt auf den obersten Hebel einfach die Last Q . Eine Verschiebung der Last beeinflusst nur die Kraft in den Führungsstangen; es wird also wieder $Pa = Qb$.

Fig. 268.



Tafelwage. Auf demselben Grundgedanken beruhen die Tafelwagen, welche einfach auf jeden Tisch gestellt werden können und bei denen die Schalen oben frei liegen (Fig. 269). Auch hier kann die Last an jede Stelle der Schale gelegt werden. In der Linie CD fügt man zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte Q hinzu, dann wirkt die abwärts gerichtete dieser beiden niederdrückend auf die parallelen Hebel CAC_1 und DBD_1 , während das außerdem wirkende Moment Qx von den in der Längenrichtung dieser Hebel auftretenden, von den festen Drehpunkten A und B aufzunehmenden Kräften Y aufgehoben wird. Die Wage wirkt also wie eine gleicharmige Balkenwage. Wagerechter Stand bedingt Gleichheit zwischen Last Q und Gewichtstück P .

Fig. 269.

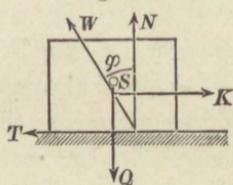


9. Reibung.

a) Reibungsziffer, Reibungswinkel und Reibungskegel.

Bisher haben wir die Körper als vollkommen glatt angenommen, wobei sie infolge einfacher Berührung nur Normalkräfte aufeinander ausüben konnten. Wäre dies wirklich der Fall, so würde ein Körper auf wagerechter Ebene, einmal in Bewegung gesetzt, seine Bewegung stets mit derselben Geschwindigkeit fortsetzen. Die Erfahrung lehrt aber, daß dies nicht zutrifft, daß vielmehr eine gewisse Zugkraft K erforderlich ist, um den Körper in gleichförmiger Bewegung zu erhalten. Daraus folgt das Vorhandensein eines Tangential- oder Reibungswiderstandes $T = K$ (Fig. 270). Die Reibung ist eine Folge der Rauheit der Oberflächen der Körper. Ihre Größe ist in erster Linie von der Größe des Normaldruckes N abhängig, und man nennt das Verhältnis $T : N = f$ (*frictio*) die Reibungsziffer oder den Reibungs-Koeffizienten.

Fig. 270.



Ergibt sich, daß zum gleichmäßigen Fortziehen eines 62 kg schweren Schlittens auf einer wagerechten Eisfläche eine wagerechte Zugkraft $K = 2$ kg erforderlich ist, so beträgt die Reibungsziffer $f = \frac{T}{N} = \frac{K}{Q} = \frac{2}{62} = \frac{1}{31}$.

Die Reibungsziffer zweier Körper hängt wesentlich von der Beschaffenheit der Berührungsflächen ab, also von der Natur der Körper, von der Art der Bearbeitung und der etwaigen Schmierung.

Daneben hat auch die Geschwindigkeit der Gleitbewegung einen Einfluß auf die Reibung. Beim Uebergang aus der Ruhe in die Bewegung ist die Reibung am größten und nimmt mit wachsender Geschwindigkeit ab. Auch die Größe des auf die Flächeneinheit kommenden Druckes beeinflusst die Reibungsziffer. Bei sehr kleinem Einheitsdruck, also verhältnismäßig großer Berührungsfläche ist die Reibungsziffer groß, mit zunehmendem Einheitsdruck nimmt sie anfänglich ab, dann wieder zu, wie durch Versuche erkannt wurde.

Diese Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und der Größe des Einheitsdruckes ist aber nur erst für einige Sonderfälle näher festgestellt. Im allgemeinen müssen wir daher f als nur abhängig von der Beschaffenheit der Berührungsflächen behandeln, und voraussetzen, daß die entsprechende Zahl durch

Versuche, deren Umstände dem zu behandelnden Falle möglichst ähnlich sind, ermittelt wurde.

Gleitet ein Körper auf fester Fläche, so besteht die Einwirkung der letzteren auf den Körper in dem Normalwiderstand N und dem Tangentialwiderstande $T = fN$. Die Mittelkraft W beider heißt der Gesamtwiderstand der festen Fläche und schließt mit der Normalen N einen Winkel φ ein, für den

$$\operatorname{tg} \varphi = T : N = fN : N = f, \text{ d. h.}$$

$$1) \quad \operatorname{tg} \varphi = f.$$

Wegen der festen Beziehung zwischen φ und f nennt man φ den Reibungswinkel.

Der Reibungswiderstand ist stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Da nun die Gleitbewegung alle möglichen Richtungen in der Berührungsebene haben kann, so gilt von fN das gleiche. Setzt man jede dieser Kräfte fN mit N zusammen (Fig. 271), so bekommt man unendlich viele mögliche Richtungen von W , welche eine Kegelfläche mit der Achse N bilden, den sog. Reibungskegel.

Der Reibungskegel ist eine Kegelfläche, deren Spitze im Angriffspunkte von N , deren Achse in der Richtungslinie von N liegt und deren Seiten mit der Achse den Reibungswinkel φ einschließen. Gleitet ein Körper auf einer festen Fläche, so leistet diese einen Gesamtwiderstand W , der in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt.

Die von der Rauigkeit der Körper herrührende Reibung ist nun aber eine Widerstandskraft, welche die relative Gleitbewegung an der Fläche wohl hindern oder verzögern, niemals aber eine solche hervorbringen oder beschleunigen kann. Liegt z. B. (Fig. 272) ein Körper vom Gewichte $Q = 100 \text{ kg}$ auf wagerechter Ebene und ist $f = 0,3$, so ist zum gleichmäßigen Fortziehen des Körpers (etwa mittels eines wagerecht gespannten Seiles) eine Kraft $K = 30 \text{ kg}$ erforderlich. Diese Kräfte werden auch an dem Körper noch im Gleichgewichte sein, wenn die Geschwindigkeit desselben zu Null wird.

Fig. 271.

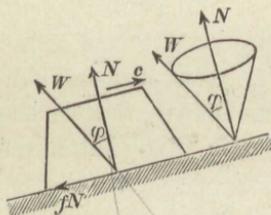
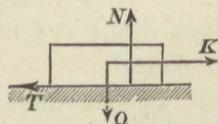


Fig. 272.



Zieht man aber an dem ruhenden Körper mit einer Kraft $K < 30 \text{ kg}$, vielleicht nur mit einer Kraft von 10 kg , so wird nicht etwa der Reibungswiderstand T das Uebergewicht über $K = 10 \text{ kg}$ gewinnen und den Körper beschleunigt nach links bewegen, denn der Reibungswiderstand einer Fläche kann eine Gleitbewegung an derselben nicht erzeugen, vielmehr wird nun die Widerstandskraft T nur $= K = 10 \text{ kg}$ werden. Und läßt man K zu Null werden, so wird auch $T = 0$.

Ist also ein Körper auf einer festen Fläche in Ruhe, so hat der Reibungswiderstand T im allgemeinen nicht den Wert fN , sondern er ist dann $\leq fN$, er tritt nur in derjenigen Größe auf, die erforderlich ist, um den Ruhezustand zu erhalten. Dann ist aber auch der Winkel zwischen W und N (Fig. 274) $\beta \leq \varphi$, und die Richtungslinie von W liegt nicht in der Mantelfläche, sondern im allgemeinen im Innern des Reibungskegels.

Soll ein Körper sich auf einer festen Ebene gleichmäßig und geradlinig verschieben, wobei der Gesamtwiderstand W in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt, so müssen die außer W noch vorhandenen Kräfte eine Mittelkraft R liefern, welche mit der Kraft W im Gleichgewicht ist, also ebenfalls in der Mantelfläche des Reibungskegels liegt (Fig. 273).

Soll der Körper aber auf der festen Fläche in relativer Ruhe verbleiben, wobei W im allgemeinen im Innern des Reibungskegels liegt (Fig. 274), so muß auch R eine solche Richtung und Lage haben. Liegt beim ruhenden Körper R auf der Mantelfläche des Reibungskegels, so genügen die Kräfte sowohl der Bedingung für die Ruhe als auch derjenigen für die Bewegung. Es befindet sich dann der Körper im Grenzzustande der Ruhe. Wird er in richtiger Weise (etwa durch einen Stoß) in Bewegung gesetzt, so verbleibt er auch in dieser.

Der Gesamtwiderstand W kann nur innerhalb des Bereiches der Unterstützungsfläche (s. S. 211) angreifen. Durch diese Unterstützungsfläche muß daher auch R hindurchgehen; andernfalls würde der Körper umkippen (Fig. 275)

Fig. 273.

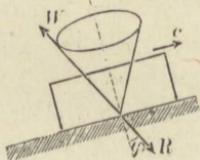


Fig. 274.

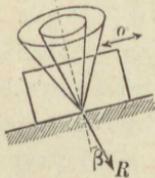
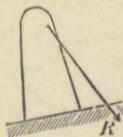


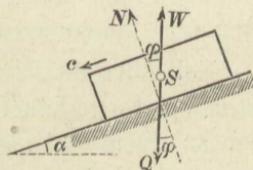
Fig. 275.



b) Schiefe Ebene.

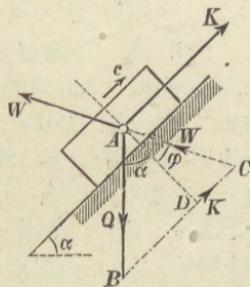
Ist die Unterstüzungsfläche des Körpers unter dem Winkel α gegen die Wagerechte geneigt und hat man diesen Winkel so geregelt, daß der Körper unter alleiniger Wirkung der Schwere eine gleichmäßige, geradlinige Abwärtsverschiebung ausführt, wobei der Gesamtwiderstand W in der Richtung aufwärts von N um den vollen Reibungswinkel φ abweicht, so muß die einzige bewegende Kraft, die Schwere Q des Körpers, das Entgegengesetzte von W sein (Fig. 276). Da aber die Lotrechte mit der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene den Winkel α bildet, so muß $\alpha = \varphi$ sein. Hierin liegt das einfachste Mittel zur Bestimmung des Reibungswinkels φ durch Versuche: Hebt man die schiefe Ebene allmählich höher an, bis der darauf liegende Körper, durch kleine Stöße in Bewegung gebracht, die Bewegung gleichförmig fortsetzt, so ist der entsprechende Neigungswinkel α gleich dem Reibungswinkel φ für die beiden Stoffe, aus denen Körper und Bahn bestehen.

Fig. 276.



Es möge nun auf den Körper vom Gewichte Q noch eine, parallel zur schiefen Ebene, aufwärts gerichtete Zugkraft K wirken (Fig. 277). K möge sich mit der Richtungslinie von Q im Punkt A schneiden. Soll der Körper gleichförmig aufwärts gezogen werden, so übt die Ebene auf ihn einen Widerstand W aus, der von der (punktirten) Normalen zur Ebene um den vollen Reibungswinkel φ nach unten abweicht. Diese drei Kräfte Q , K und W müssen sich nun im Gleichgewichte halten, d. h. sie müssen sich in dem Punkt A schneiden und außerdem ein geschlossenes Kräfteck bilden. Man trage also AB als Q auf, verlängere W nach unten und ziehe durch B eine Parallele zu K , d. h. zur Ebene, so ist ABC das Kräfteck und BC die Größe K . Ohne Reibung wäre $W = N = DA$, mithin zeigt BD denjenigen Betrag, den K auf reibungsloser Ebene haben

Fig. 277.



müßte ($= Q \sin \alpha$), während DC wegen der Reibung hinzukommt. Da nun der Winkel $BAC = \alpha + \varphi$, $\sphericalangle BCA$ aber $= 90^\circ - \varphi$, so wird nach dem Sinus-Satze $K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : (90^\circ - \varphi)$, oder:

$$1) \quad K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \cos \varphi,$$

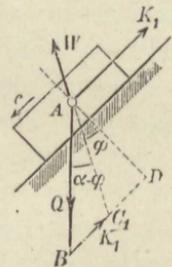
oder auch, bequemer für die Rechnung:

$$2) \quad K : Q = \sin \alpha + f \cos \alpha,$$

wenn man $\sin \varphi : \cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi$ mit f vertauscht.

Soll aber der Körper nicht hinauf gezogen, sondern durch die aufwärts gerichtete Kraft, die nun K_1 genannt werden möge, etwa an einem Seile, gleichmäßig hinabgelassen werden (Fig. 278), so kehrt sich, wegen der entgegengesetzten Bewegung, die Reibung um, und der Widerstand W rückt in die zum ersten Falle symmetrische Lage, indem er von der Normalen nach oben hin abweicht. Die erforderliche Kraft K_1 wird nun durch das erheblich kleinere Stück BC_1 dargestellt.

Fig. 278.



$\sphericalangle BAC_1 = \alpha - \varphi$; $\sphericalangle BC_1A = 90^\circ + \varphi$,
mithin

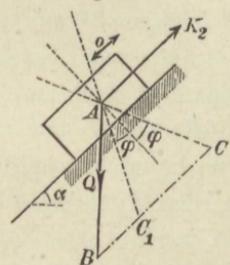
$$3) \quad K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(90^\circ + \varphi) \\ = \sin(\alpha - \varphi) : \cos \varphi$$

$$4) \quad = \sin \alpha - f \cos \alpha.$$

(Für $\varphi > \alpha$ müßte K_1 abwärts gerichtet sein.)

Soll die Kraft K aber den Körper weder hinaufziehen noch hinunterlassen, soll sie vielmehr den in Ruhe befindlichen Körper in Ruhe erhalten, so hat man zur Bestimmung ihre Größe K_2 zu beachten, daß im Ruhezustande der Widerstand W irgend eine Richtung innerhalb des Reibungskegels, also hier innerhalb des doppelten Reibungswinkels einnehmen kann (Fig. 279), daß daher der Endpunkt der Kraft K_2 im Kräfteck irgendwo zwischen C_1 und C liegen muß, so daß

Fig. 279.



$$K_2 \geq K_1 \text{ und zugleich } K_2 \leq K$$

sein muß, innerhalb dieser Grenzen aber völlig willkürlich gewählt werden kann.

Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen in die einzige Gleichung:

$$5) \quad K = Q (\sin \alpha \pm f \cos \alpha).$$

Darin bezieht sich das obere Vorzeichen auf die größere, zum Hinaufziehen erforderliche Zugkraft, welche neben der Seitenkraft der Schwere ($Q \sin \alpha$) noch die Reibung ($f Q \cos \alpha$) überwinden muß; das untere Vorzeichen auf die kleinere, zum Hinablassen erforderliche Kraft. Der Einfluß der entgegengesetzten Bewegung macht sich in der Formel durch Umkehrung der Vorzeichen von φ oder f geltend, wie auch in allen späteren Fällen sich zeigen wird. Diese beiden Werte K und K_1 bilden dann zugleich die Grenzen für die zum Festhalten erforderliche Kraft K_2 . Wäre nämlich $K_2 < K_1$, so würde der Körper beschleunigt abwärts gleiten, wäre $K_2 > K$, so würde der Körper eine Beschleunigung nach oben erfahren. Soll weder das Eine noch das Andere erfolgen, so muß K_2 zwischen K_1 und K bleiben, ist im übrigen aber beliebig. Das Ergebnis, daß die für den Ruhezustand erforderliche Kraft zwischen den beiden, für die abwärts bzw. aufwärts gerichtete Bewegung erforderlichen Kräften bleiben muß, gilt auch für alle anderen nachstehend behandelten Fälle dieser Art.

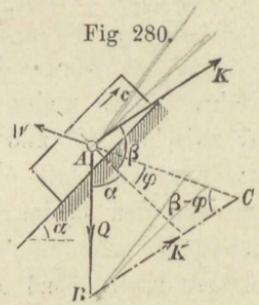
Beispiel: Eine Holzkiste von 100 kg Gewicht soll auf einer unter 45° geneigten Ebene mittels eines, parallel mit der Ebene gespannten Seiles aufwärts gezogen werden. Die Reibungsziffer betrage unter der Annahme einer hölzernen Bahn $f = 0,3$, entsprechend einem Reibungswinkel $\varphi = 17^\circ$. Für $\alpha = 45^\circ$ ist $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{1/2} = 0,707$. Mithin (Gl. 5)

$$K = 100 \cdot 0,707 (1 \pm 0,3) = 70,7 \pm 21,2 = 91,9 \text{ kg bzw. } 49,5 \text{ kg.}$$

Darin ist 70,7 der zur Ueberwindung der schräg abwärts gerichteten Seitenkraft der Schwere erforderliche Teil, 21,2 der Reibungswiderstand. Zum Hinaufziehen muß an dem Seile mit 91,9 kg gezogen werden, zum Hinablassen sind nur 49,5 kg erforderlich. Ist die Kiste in Ruhe und soll sie auch mittels des Seiles in Ruhe gehalten werden, so muß man an dem Seile mit einer Kraft K_2 ziehen, welche zwischen 49,5 und 91,9 kg liegt. Uebt man nur die kleinste zulässige Kraft von 49,5 kg aus, so muß die Reibung mit ihrem vollen Betrage von 21,2 kg dem Arbeiter zu Hilfe kommen, um die Seitenkraft der Schwere von 70,7 kg aufzuheben. Es erfordert diese Verwendung der kleinsten Kraft aber ein gewisses Maß von Aufmerksamkeit; denn läßt die ausgeübte Kraft nur im geringsten nach, so erfolgt eine beschleunigte Abwärtsbewegung,

die dann nur mit größerer Anstrengung wieder aufzuheben ist. Uebt man an dem Seile, der Sicherheit wegen, eine größere Kraft aus als 49,5 kg, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Ruhestande nichts; die Reibung tritt dann nur mit entsprechend geringerm Betrag auf. Hat die Spannkraft den Wert 70,7 kg, so kommt gar keine Reibung zur Wirkung, denn diese tritt im Ruhezustande stets nur in derjenigen Größe auf, die nötig ist, um das Gleiten zu verhindern. In diesem Falle würde auch bei völlig glatten Körpern kein Gleiten eintreten. Wächst die Spannkraft über 70,7 kg hinaus, so würde bei glatten Körpern schon ein beschleunigtes Gleiten nach oben eintreten; in Wirklichkeit wird der Ueberschuß einstweilen noch durch Reibung vernichtet, die nun aber sich nach unten richtet und der Schwere zu Hilfe kommt. Bei 91,9 kg Kraft nimmt diese Reibung den größten möglichen Wert an. Würde der Körper nun durch einen kleinen Anstoß nach oben in Bewegung gesetzt, so würde er diese Bewegung auch fortsetzen. Erschütterungen können den Eingriff der Unebenheiten der Körper zeitweise aufheben oder vermindern und deshalb auch die Reibung teilweise aufheben.

Ist die Zugkraft K nicht parallel der Ebene, sondern weicht sie von der Normalen zur Ebene um einen Winkel β ab (Fig. 280), so verfährt man im übrigen wie oben. K und Q mögen sich in A schneiden. Von A aus trage man $Q = AB$ auf, zeichne W wie in Figur 277, ziehe $BC \parallel K$, so ist $BC = K$ für die Aufwärtsbewegung. Und zwar ist



$$6) \quad K : Q = \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\beta - \varphi).$$

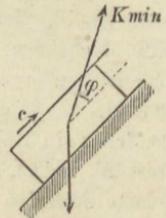
Für gleichförmige Abwärtsbewegung ist wiederum nur $+\varphi$ mit $-\varphi$ und umgekehrt zu vertauschen, also

$$7) \quad K_1 : Q = \sin(\alpha - \varphi) : \sin(\beta + \varphi).$$

Für Ruhezustand ist erforderlich, daß K_2 zwischen K_1 und K verbleibe.

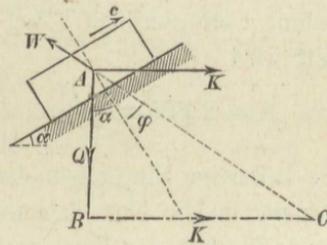
Denkt man sich die Richtung der Zugkraft K , etwa des Zugseiles, veränderlich, so ändert sich auch die Größe von K . In dem Dreieck ABC (Fig. 280) wird $K = BC$ offenbar am kleinsten, wenn BC rechtwinklig zu AC ist, wenn also $\sphericalangle ACB = \beta - \varphi = 90^\circ$, oder $\beta = 90^\circ + \varphi$; es weicht dann die Kraft K von der Parallelen zur Ebene um den Reibungswinkel nach oben hin ab, und es ist (Fig. 281) $K_{min} = Q \sin(\alpha + \varphi)$. Dagegen wird

Fig. 281.



$K = BC$ (Fig. 280) immer größer, wenn der Winkel ACB abnimmt; ist endlich $BC \parallel W$, d. h. $\beta = \varphi$, so wird $K = \infty$. Für diese Richtung einer zunächst endlich gedachten Kraft K fällt nämlich die Mittelkraft R aus K und Q in das Innere des Reibungskegels, wobei eine gleichförmige Gleitbewegung nicht möglich ist. Nur für $K = \infty$ würde Q gegen K verschwinden und R mit K und W zusammenfallen.

Fig. 282.



Ist K wagerecht, so wird $\beta = 90^\circ - \alpha$. Dieser einfache Fall ist aber ebenso leicht unmittelbar zu entwickeln wie aus Gleichung 6. Es ist (Fig. 282)

$$K : Q = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

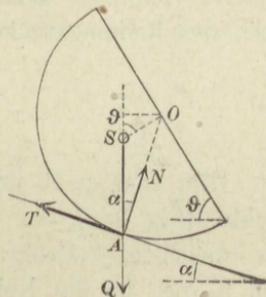
Schreibt man

$$8) \quad K = Q \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi),$$

so hat man in dem kleineren Werte wieder K_1 zum Hinablassen und in K und K_1 die Grenzen für den Ruhezustand.

Halbkugel auf schiefer Ebene. Eine Kugel kann unter alleiniger Einwirkung der Schwere auf schiefer Ebene nicht in Ruhe sein, wohl aber eine Halbkugel (Fig. 283). Der Gesamtwiderstand des Berührungspunktes A muß das Gewicht Q aufheben. Der Normalwiderstand N geht stets durch den Mittelpunkt O . Es muß stattfinden $N = Q \cos \alpha$, die Reibung $T = Q \sin \alpha$, und in bezug auf O :

Fig. 283.



$$0 = +Tr - Q \cdot \overline{SO} \sin \vartheta,$$

mithin, weil nach S. 164 $\overline{SO} = \frac{3}{8} r$:

$$\sin \vartheta = \frac{8}{3} \sin \alpha.$$

Die Grenzbedingungen für die Ruhe sind $\sin \alpha \leq \frac{3}{8}$, weil ϑ höchstens $= 90^\circ$ werden kann, und außerdem $\alpha \leq \varphi$, weil die Halbkugel sonst ins Gleiten kommt.

c) Bewegung in Keilnuten.

Liegt ein Körper, statt auf wagerechter Ebene, in einer wagerechten keilförmigen Rinne oder Keilnut mit dem Keilwinkel 2δ

(Fig. 284), so müssen in der Querschnittsebene die Gegenkräfte N der Seitenflächen dem Gewichte Q das Gleichgewicht halten. Es wird

$$Q = 2 N \sin \delta \quad \text{oder} \quad 2 N = Q : \sin \delta.$$

Der Bewegung setzt sich an jeder Seitenfläche ein Reibungswiderstand fN entgegen, so daß die in der Längsrichtung der Keilnut erforderliche Zugkraft wird

$$9) \quad K = 2 f N = \frac{Q f}{\sin \delta}.$$

Das keilartige Einpressen des Körpers in die Nut hat im Vergleiche mit der Bewegung auf ebener Fläche denselben Einfluß, als wäre die Rauigkeit verstärkt, die Reibungsziffer f auf $f : \sin \delta$ vergrößert (A. Ritter, Technische Mechanik). Dasselbe Ergebnis findet man auch in anderen Fällen, wenn man aus dem Falle der Bewegung eines Körpers auf einer ebenen oder krummen Fläche zu demjenigen übergeht, wo in die Fläche keilförmige Rinnen eingearbeitet sind, in die der Körper keilartig eingreift und längs deren der Körper gleitet. Man hat dann stets f zu vertauschen mit $f : \sin \delta$, oder auch den Reibungswinkel φ mit einem größeren Werte ψ , für den

$$10) \quad \text{tg } \psi = \frac{f}{\sin \delta} \text{ ist.}$$

Gibt man z. B. der Rinne eine Neigung α gegen die Waagrechte (Fig. 285), so ergibt sich $Q \cos \alpha$ als diejenige Seitenkraft von Q , welche den Körper in die Keilnut eindrückt. In vorstehender Figur 284 ist dann Q mit $Q \cos \alpha$ zu vertauschen; daher wird

$$2 N = Q \cos \alpha : \sin \delta$$

und der gesamte Reibungswiderstand

$$2 f N = Q \cos \alpha \cdot f : \sin \delta.$$

Setzt man diesen Wert $= Q \sin \alpha$, so erhält man die Bedingung

Fig. 284.

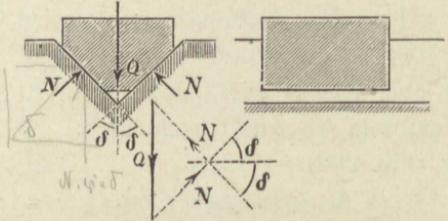
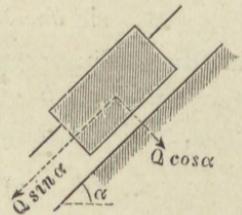


Fig. 285.



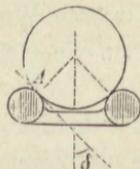
für gleichförmige Abwärtsbewegung durch die Schwere, nämlich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{\sin \delta} = \operatorname{tg} \psi, \quad \text{oder} \quad \alpha = \psi.$$

Es ist hierzu nicht erforderlich, daß eine wirkliche Keilnut vorhanden sei; gleiche Wirkungen treten auch auf, wenn der Körper sich etwa zwischen zwei runde Bäume einkeilt, wenn also die von den bewegenden Kräften herrührende Seitenkraft (in der Richtung rechtwinklig zur Bewegung) von zwei Kräften N aufgehoben wird, die mit ihr in einer Ebene liegen, aber nicht parallel sind.

Soll ein runder Körper zwischen den Bäumen einer sog. Streichleiter gleiten (Fig. 286) und ist $\delta = 45^\circ$ der Winkel der Tangente bei A mit der Mittelebene, so wird $f : \sin \delta = 1,414 f$ als Reibungsziffer einzuführen sein, also wenn, wie in dem Beispiele auf S. 239, $f = 0,3$ ist, statt dessen $0,42$. Bei $\alpha = 45^\circ$ wird dann $K = 100,4$, $K_1 = 41 \text{ kg}$.

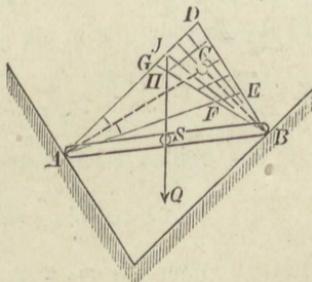
Fig. 286.



d) Stabförmiger Körper, von zwei Ebenen gestützt.

Der Körper mit dem Schwerpunkte S möge die Ebenen in den Punkten A und B berühren (Fig. 287), und zwar sollen A , B und S in einer lotrechten Ebene liegen, zu welcher die beiden Stützebenen rechtwinklig sind. Wären die Körper völlig glatt, so könnten in A und B nur Normaldrücke N und N_1 entstehen, durch deren Schnittpunkt C die Schwerlinie des Stabes gehen müßte, wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Bei vorhandener Rauhgigkeit aber hat man in A und B die Reibungskegel zu zeichnen; die Mittelschnitte derselben haben ein Viereck $DEFG$ gemeinsam, und dies Reibungsviereck ist der Bereich aller möglichen Schnittpunkte der Widerstände W und W_1 der Stützpunkte A und B . Da nun für Gleichgewicht die Kraft Q mit W und W_1 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben muß, so erfordert der Ruhezustand, daß die Schwerlinie des Stabes durch das Viereck hindurchgehen muß. Schneidet

Fig. 287.



die Schwerlinie das Viereck aber vielleicht in HJ , so sind längs dieser Strecke HJ unendlich viele Schnittpunkte von W , W_1 und Q möglich, daher sind auch W und W_1 nach Richtung und Größe unbestimmt. Nur wenn Q durch einen der Grenzpunkte E und G des Vierecks geht, ist die Richtung (und dann auch die Größe) von W und W_1 bestimmt. In diesen Fällen befindet sich der Stab im Grenzzustande der Ruhe; W und W_1 liegen auf den Mantelflächen der Reibungskegel, es treten in A und B die vollen Reibungswerte auf, und bei dem geringsten Anstoß gerät der Stab ins Gleiten.

Ruhestand einer Leiter. Eine Leiter AB von der Länge l stütze sich bei A gegen den Boden und lehne sich bei B gegen eine lotrechte Wand (Fig. 288). Die Reibungsziffern für beide Ebenen seien die gleichen. Der Schwerpunkt S der (etwa belasteten) Leiter liege um $AS = nl$ von A entfernt. Gesucht wird der Neigungswinkel α , unter dem die Leiter an der Grenze des Ruhezustandes ist.

Wird die Leiter in gewöhnlicher Weise durch Besteigung belastet, so kann die Schwerlinie nur zwischen A und B hindurchgehen; es interessiert dann von dem Viereck $DEFG$ der Schnittpunkte (Fig. 287) nur der rechtsseitige Endpunkt E , bis zu dem die Schwerlinie nach rechts sich bewegen darf, wenn noch Ruhe möglich sein soll. Dreieck AEB ist bei E rechtwinklig, ferner ist $\sphericalangle ASE = 90^\circ + \alpha$, $\sphericalangle EBA = \alpha + \varphi$. Daher ist im $\triangle AES$:

$$AS : AE = \sin \varphi : \sin (90^\circ + \alpha) = \sin \varphi : \cos \alpha;$$

im Dreieck ABE :

$$AB : AE = 1 : \sin (\alpha + \varphi),$$

und aus beiden Gleichungen durch Teilung:

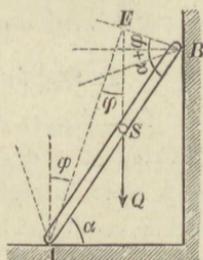
$$AS : AB = nl : l = n = \frac{\sin \varphi \cdot \sin (\alpha + \varphi)}{\cos \alpha}$$

$$\text{oder } n \cos \alpha = \sin \varphi (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi).$$

Teilt man auf beiden Seiten durch $\cos \alpha \cdot \cos^2 \varphi$ und vertauscht $\operatorname{tg} \varphi$ mit f , $\cos^2 \varphi$ aber mit $1 : (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 1 : (1 + f^2)$, so ergibt sich:

$$n (1 + f^2) = f (\operatorname{tg} \alpha + f),$$

Fig. 288.



oder, nach $\operatorname{tg} \alpha$ aufgelöst:

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = n \left(\frac{1}{f} + f \right) - f.$$

Ist also n gegeben, d. h. bekannt, wie weit das Gesamtgewicht der Leiter sich von dem unteren Endpunkte entfernen kann, so steht damit der Winkel α fest, welcher dem Grenzzustande der Ruhe entspricht.

Soll bei gegebener Schwerpunktslage-Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sein, so muß die wirkliche Schwerlinie links von E bleiben, oder es muß das nach dem Punkt E berechnete n der Gleichung 1 größer sein als das wirkliche n_1 : d. h. das wirkliche $n_1 < \frac{f(\operatorname{tg} \alpha + f)}{1 + f^2}$, mithin

$$2) \quad \operatorname{tg} \alpha > n_1 \left(\frac{1}{f} + f \right) - f.$$

Man kann vorstehende Aufgabe, die wir hier geometrisch gelöst haben, auch rechnerisch auf Grund der drei Gleichgewichtsbedingungen behandeln. Im Grenzzustande treten an den Berührungstellen zu den Normaldrücken N und N_1 die vollen Reibungen fN und fN_1 hinzu, und zwar entgegengesetzt der Richtung des möglichen Ausgleitens, d. h. nach rechts, bezw. nach oben (Fig. 289). Die Gleichung der wagerechten Kräfte heißt:

$$3) \quad fN = N_1;$$

die Gleichung der lotrechten Kräfte:

$$4) \quad N + fN_1 = Q;$$

die Momentengleichung in bezug auf A :

$$5) \quad 0 = Qn \cos \alpha - N_1 l \sin \alpha - fN_1 l \cos \alpha.$$

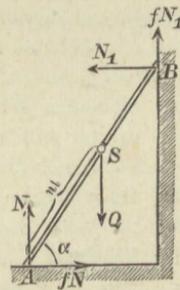
Letztere Gleichung gibt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Qn - fN_1}{N_1}.$$

Aus den Gleichungen 3 und 4 ergibt sich aber:

$$N_1 = \frac{Q}{\frac{1}{f} + f},$$

Fig. 289.



mithin wird wiederum:

$$\operatorname{tg} \alpha = n \left(\frac{1}{f} + f \right) - f.$$

Beispiel: Die Reibungsziffer betrage $f = 0,4 = \operatorname{tg} 22^\circ$. Ist zunächst die Leiter durch ihr eigenes, in der Mitte angreifendes Gewicht belastet, d. h. $n = 1/2$, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (2,5 + 0,4) - 0,4 = 1,05; \quad \alpha = 46\frac{1}{2}^\circ.$$

Bis zu diesem Werte dürfte α abnehmen, ohne daß die Leiter ausglitte. Wird sie sodann bestiegen und hat der Besteigende dasselbe Gewicht wie die Leiter, so ist, wenn der Besteigende noch auf der untersten Sprosse steht, annähernd $n = 1/4$, und

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/4 (2,5 + 0,4) - 0,4 = 0,325; \quad \alpha = 18^\circ.$$

Diese geringe Neigung darf aber nicht gewählt werden, wenn die Leiter höher hinauf bestiegen werden soll. Ist sie nämlich bis zur Mitte erstiegen, so ist wieder $n = 1/2$. Wird sie aber bis oben bestiegen, so ist zuletzt $n = 3/4$ und

$$\operatorname{tg} \alpha = 3/4 (2,5 + 0,4) - 0,4 = 1,78; \quad \alpha = 60^\circ 40'.$$

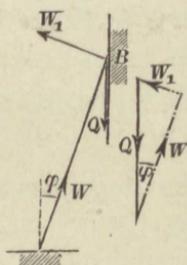
Will man also eine Leiter bis zur höchsten Sprosse besteigen, so genügt es nicht, den Sicherheitszustand der unbelasteten Leiter zu prüfen; vielmehr ist eine steilere Stellung erforderlich. Zur Vermeidung jeder Gefahr befestige man an der obersten Sprosse ein Seil und hänge sich zur Probe an dieses, um denselben Belastungsfall zu haben wie beim Besteigen der Leiter bis zur höchsten Sprosse. — Ist die hierdurch bedingte steile Lage aus irgendwelchen Gründen nicht gut ausführbar, so läßt sich auch bei kleinerem Winkel α die Sicherheit erhöhen, wenn ein zweiter Arbeiter seine Füße entweder vor die Leiter setzt oder sich auf die unterste Sprosse stellt. Letzteres hat einen besseren Erfolg als das Davorstellen, wenn f für die Leiter vielleicht größer ist als für die Sohlen des Arbeiters.

Ist die Leiter sehr leicht, so wird, wenn ein Mensch sie bis oben erstiegen hat, annähernd $n = 1$, mithin

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{f} + f - f = \frac{1}{f}, \quad \text{d. h. } \alpha = 90^\circ - \varphi;$$

d. h. in diesem Falle darf die Leiter höchstens um den Reibungswinkel von der Lotrechten abweichen (Fig. 290). Für $\varphi = 22^\circ$ wäre $\alpha = 68^\circ$. Die Gesamtwiderstände W und W_1 schneiden sich mit Q in B , es wird $W = Q \cos \varphi$; $W_1 = Q \sin \varphi$.

Fig. 290.

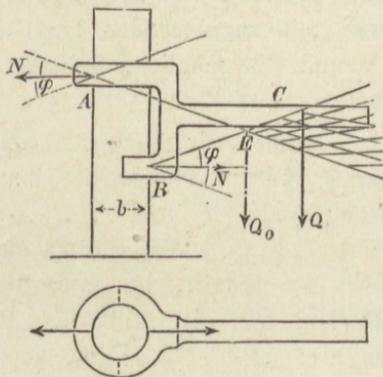


Reibungshülsen und Reibungsringe zur Aufhängung von Lasten.

Soll an einer Säule ohne Vorsprünge eine Last nur durch Reibung sicher aufgehängt werden, so schiebe man (Fig. 291) über die

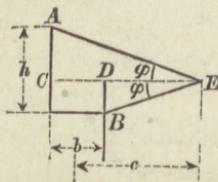
Säule eine Hülse, welche erstere bei A und B berührt, bei A also einen geschlossenen Ring bildet, während bei B nur ein Ringsegment erforderlich ist. Zuerst stützt man die Hülse gegen Hinabgleiten, etwa bei A , übt dann an dem seitlichen Arme C einen Druck nach unten aus und bewirkt dadurch ein Drehungsbestreben rechts herum, welchem sich bei A und B gleiche und entgegengesetzte Drücke N der Säule entgegenstellen. Mit Einschluß der Reibung bilden sich nun in A und B Gesamtwiderstände W und W_1 innerhalb der Reibungskegel der Punkte A und B .

Fig. 291.



Die Mittelschnitte der Reibungskegel treffen sich zunächst im Punkte E ; rechts von E aber liegt der Bereich der möglichen Schnittpunkte von W und W_1 . Geht daher das Gesamtgewicht Q der Hülse einschließlich des belasteten Armes durch E , so befindet sich die Hülse im Grenzzustande der Ruhe, weil die Drücke N dann noch so gering sind, daß nur die volle Reibung fN an beiden Stellen hinreicht, um das Abwärtsgleiten zu verhindern. Geht aber das Gesamtgewicht Q rechts von E vorbei, so ist das Gleichgewicht der Hülse gesichert, und zwar um so mehr, je weiter rechts Q liegt. Ist b die Breite der Säule, h der Höhenabstand der Punkte A und B , c die gesuchte Entfernung des Punktes E von der Mitte der Säule (Fig. 292), so findet man leicht

Fig. 292.



$$h = AC + DB = \left(c + \frac{b}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi + \left(c - \frac{b}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi$$

$$h = 2c \operatorname{tg} \varphi \quad \text{oder} \quad c = \frac{h}{2 \operatorname{tg} \varphi}$$

Ist x der Abstand der Gesamtlast Q von der Säulenmitte, so ist die Bedingung für Ruhe:

6)
$$x \geq c \quad \text{d. h.} \quad x \geq \frac{h}{2 \operatorname{tg} \varphi}$$

Die Größe der Last Q ist ganz ohne Einfluß auf die Sicherheit des Gleichgewichtes. Wenn also Säule und Hülse nur stark genug sind, so daß sie annähernd als starre Körper gelten können, so kann man an dem Seitenarme jede beliebig große Last aufhängen, weil mit zunehmender Last auch N und die mögliche Reibung fN zunehmen.

Nennen wir die bei A und B zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände T und T_1 , so ist $T + T_1 = Q$. Wie sich Q auf T und T_1 verteilt, ist unbestimmt. Machen wir die willkürliche Annahme: $T = T_1 = \frac{1}{2}Q$, so können auch N und N_1 berechnet werden. In bezug auf O (Fig. 293) ist dann, weil die Momente von T und T_1 sich aufheben, $Nh = Qx$. Die Summe der größten möglichen Reibungswiderstände wäre

$$2fN = 2fQ \frac{x}{h} \quad \text{oder, weil } h = 2fc \text{ war,}$$

$$2fN = Qx : c;$$

weil nun von der Reibung nur der Teil Q beansprucht wird, so ist die gesamte mögliche Reibung $x : c$ mal so groß wie die nötige; $x : c$ kann mithin als der Sicherheitsgrad bezeichnet werden.

Die Reibungshülse kann durch den einfachen Reibungsring (Fig. 294) (mit der gleichen Wirkung) ersetzt werden. Der etwa aus Rundeisen geschmiedete Ring hat eine Weite d , welche größer ist als die Breite der Säule, so daß der Ring erst in schräger Lage die Säule bei A und B berührt. Die Reibungskegel bei A und B haben dann die gleiche Bedeutung wie in Figur 291.

Beispiel: Es sei $b = 0,2$ m die Breite der Säule, $d = 0,21$ m die Weite des Ringes; dann wird $h = \sqrt{d^2 - b^2} = 0,064$ m. Ist nun für Holz und Schmiedeeisen (ohne Schmierung) $f = 0,5$, so wird $c = 0,064 : (2 \cdot 0,5) = 0,064$ m.

Fig. 293.

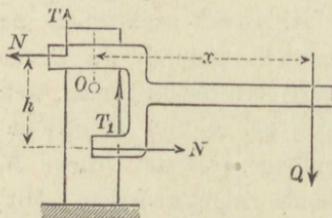
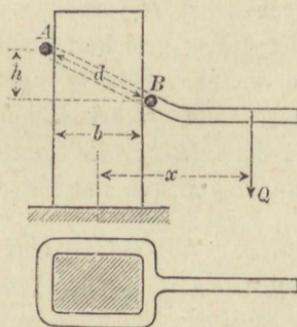


Fig. 294.



Macht man nun $x = 0,2 \text{ m}$, so ist die Sicherheit gegen Gleiten eine $0,2 : 0,064 = 3$ fache (rund). Ist also die Gesamtlast $Q = 100 \text{ kg}$, so ist die gesamte mögliche Reibung 300 kg , von der aber nur 100 kg zur Wirkung kommen. Oder man kann die Sicherheit auch so auffassen, daß die Reibungsziffer $0,5$ auf $1/3$ ihres Wertes sich vermindern darf, bevor Gleiten eintritt. Für $f = 1/6$ würde nämlich $c = 0,064 \cdot 3 = 0,192$, d. h. fast $= x$.

e) Gleichförmige Hebung eines Pochstempels.

Ein zum Zerkleinern von Erzen oder dergl. dienender Stempel vom Gewichte Q (Fig. 295) wird durch den Daumen einer sich drehenden Daumenwelle erfaßt und mittels einer Kraft K gehoben, bis er, nachdem der Daumen an dem Hubarme vorbeigekommen ist, frei herabfällt und die von ihm getroffenen Körper zerstampft. Da K und Q einen wagerechten Abstand b haben, so würde der Stempel umfallen, wenn er nicht durch Führungen in lotrechter Lage gehalten würde. Von den Führungshölzern werden beim Heben nur die schraffierten wirksam und liefern gleiche Normaldrücke N , denen beim Aufwärtsgleiten abwärts gerichtete Reibungen fN entsprechen. Es ist nach der Gleichung der lotrechten Kräfte

$$1) \quad K = Q + 2fN.$$

Die Momentengleichung in bezug auf einen Punkt O der Mitte des Stempels lautet:

$$2) \quad Nh = Kb.$$

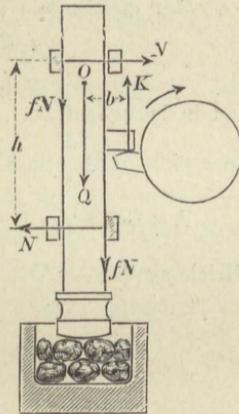
Setzt man den hieraus erhaltenen Wert von N in Gleichung 1 ein, so wird

$$K = Q + 2f \frac{Kb}{h}, \text{ mithin}$$

$$3) \quad K = \frac{Q}{1 - 2f \cdot \frac{b}{h}}.$$

Soll K klein werden, so muß $fb : h$ klein ausfallen; durch Glättung und Schmierung der Reibungsflächen muß hiernach f klein gemacht

Fig. 295.



werden; der Arm b muß so kurz sein, wie es die Rücksichten der Ausführung und des Betriebes gestatten, und der Abstand h der Führungen muß möglichst groß sein.

Beispiel: Ist $Q = 150 \text{ kg}$, $f = 1/8$, $b : h = 1 : 8$, so wird $K = 155 \text{ kg}$. In der vorstehenden Ableitung ist angenommen, daß der Daumen auf den Arm b nur eine lotrechte Kraft ausübe; bei der Drehung der Welle gleitet aber der Daumen unter dem Arme nach rechts fort und wirkt durch Reibung nach rechts ziehend auf den Arm, so daß zu der Kraft K noch die nach rechts wirkende Reibung $f_1 K$ hinzukommt. Dies ändert die sonstigen Kräfte, z. B. wird nun der Druck N an beiden Führungen nicht mehr der gleiche sein können (Fig. 296). Es wird

$$1) \quad f_1 K = N_1 - N;$$

$$2) \quad K = Q + f(N + N_1),$$

und in bezug auf B :

$$3) \quad 0 = -Q \frac{d}{2} + Nh - fNd - K \left(b - \frac{d}{2}\right) + f_1 Kc.$$

Aus Gleichung 1 und 2 wird $N = \frac{K(1 - ff_1) - Q}{2f}$ und sodann aus

$$\text{Gleichung 3} \quad K = \frac{Q}{1 - ff_1 + \frac{d}{h} f^2 f_1 - 2 \frac{b}{h} f + \frac{2c}{h} ff_1}$$

$$\text{oder} \quad K = \frac{Q}{1 - 2 \frac{b}{h} f - ff_1 \left(1 - \frac{d}{h} f - \frac{2c}{h}\right)}$$

$Q = 150$; $f = f_1 = 1/8$; $b : h = 1/8$; $d : h = 1/10$; $c : h = 1/2$ gibt dann $K = 155 \text{ kg}$. Der Unterschied gegenüber obiger Vernachlässigung von f_1 ist verschwindend klein.

f) Festklemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen.

Sind die beiden Ebenen, zwischen denen eine Stange sich befindet, nicht fest, sondern gehören sie zwei Körpern an, die durch seitliche Kräfte einander genähert werden können (Fig. 297), so ist das Verhalten der Stange gegenüber dem Versuche, die stützenden Körper zusammenzuschieben, ein verschiedenes, je nachdem

1. die Stange nicht in die beiden Reibungskegel der Punkte A und B fällt, oder aber
2. dieser Bedingung genügt.

Fig. 296.

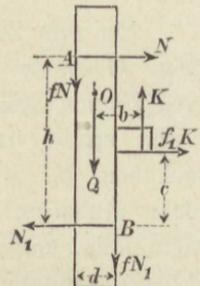
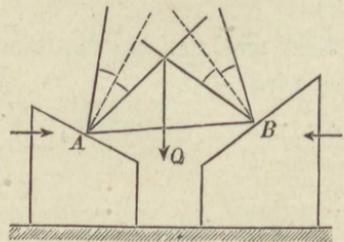


Fig. 297.



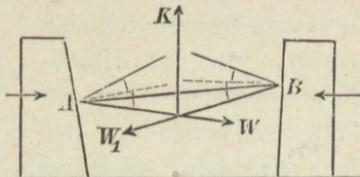
Im ersten Falle können die Gesamtdrücke W und W_1 in A und B niemals in dieselbe Gerade (nämlich AB) fallen, können also auch niemals sich allein gegenseitig aufheben, sondern es können W und W_1 nur einer dritten Kraft, etwa dem Gewichte Q der Stange das Gleichgewicht halten. Ist nun die Stange sehr leicht, so daß man annähernd $Q = 0$ annehmen darf, so werden auch W und W_1 zu Null, d. h. die Stange übt auf die seitlichen Körper keine nennenswerten Drücke aus. Versucht man, die Körper zusammenschieben, so kann die Stange dies nicht hindern, sondern sie weicht nach oben aus, indem sie sich entweder an beiden Stellen A und B oder nur an einer derselben längs der Ebene in die Höhe schiebt. An der Gleitstelle tritt dann der volle Reibungswiderstand auf, so daß dort W oder W_1 die tiefste mögliche Lage einnimmt, falls Q nicht ganz gleich Null angenommen wird.

Liegt aber die Gerade AB innerhalb beider Reibungskegel (Fig. 298), so können W und W_1 auch beide in die Gerade AB fallen und sich dann allein, ohne Hinzutreten einer dritten Kraft, gegenseitig aufheben. Sie können nun in jeder beliebigen Größe auftreten, wenn die Stange zwischen den Ebenen ruht. Versucht man

wieder, die Seitenkörper zusammenzuschieben, so wird die Stange dies vollständig verhindern. Je stärker man auf die Seitenkörper drückt, desto größer werden auch die Widerstände $W = W_1$. Soll die Stange aber, um Raum zu geben, bei A

und B nach oben ausweichen, so kommen die tiefsten Richtungen von W und W_1 zur Geltung, und um unter deren Einwirkung eine Bewegung der Stange nach oben zu ermöglichen, muß eine den Kräften W und W_1 das Gleichgewicht haltende, d. h. nach oben gerichtete Kraft K aufgewendet werden, und zwar ist die erforderliche Größe dieser Kraft K abhängig von der Größe der Pressung, die man vorher durch Zusammenschieben der Seitenkörper hervorgebracht hatte. Die Befreiung der Stange erfordert daher unter Umständen ein kräftiges Herausreißen nach oben hin. Der Zustand, in dem sich die Stange in solchem Falle befand, nennt man ein Festklemmen zwischen den Seitenkörpern. Es ist ein solches Festklemmen möglich, wenn AB innerhalb der beiden Reibungskegel liegt.

Fig. 298.



g) Steinzange zum Heben und Versetzen schwerer Werksteine.

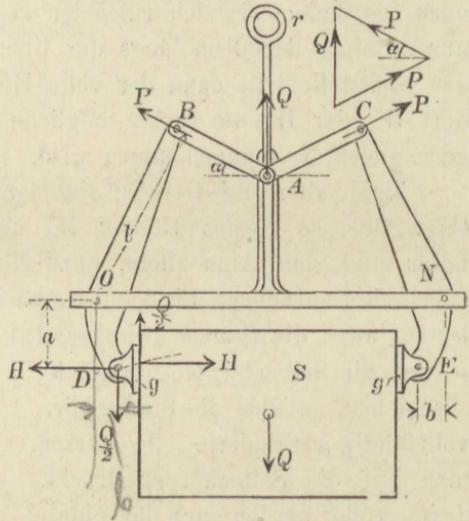
Soll der Werkstein S (Fig. 299) vom Gewichte Q , der vorläufig auf dem Boden ruhen möge, von der Zange ergriffen werden, so öffnet man diese durch Hinunterschieben des Kniegelenkes A so weit, daß der Abstand der unten befindlichen Greifer g und g größer ist als die Breite des Steines S . Die Greifer werden nun durch die Hände der Arbeiter an dem Stein in die gewünschte Lage gebracht und durch Emporziehen des Kniegelenkes A mittels einer an dem obersten Ringe r angreifenden

Windevorrichtung einander genähert, so daß sie den Stein zwischen sich fassen und auf ihn bei weiterem Emporziehen des Ringes r so große wagerechte Druckkräfte H ausüben, daß die hierdurch erzeugte Reibung genügt, um das Hinabgleiten des Steines aus den Greifern zu verhindern. Der

Stein wird daher bei langsamer, gleichmäßiger Bewegung der Winde von den Greifern durch Vermittelung der Reibung getragen werden, also, je nach der Bewegung des an der Winde hängenden Ringes r , sich aufwärts oder abwärts bewegen, oder auch in beliebiger Höhe ruhig hängen bleiben.

Die Bedingungen, unter denen der Stein S von den beiden Greifern g mit Sicherheit gehalten wird, ergeben sich in folgender Weise: Jeder Greifer hat auf den Stein vom Gewichte Q außer der wagerechten Druckkraft H , noch eine lotrecht aufwärts gerichtete Kraft $\frac{1}{2} Q$ auszuüben (wie in Fig. 299 an dem linksseitigen Greifer angegeben). Die Mittelkraft beider überträgt sich von der Angriffsfläche des Greifers auf das untere Ende D des Hebels DOB , so daß nach dem Satze der Wechselwirkung bei D auf den Hebel

Fig. 299.



die nach außen gerichtete Kraft H und die abwärts gerichtete Kraft $\frac{1}{2}Q$ wirken. Wenn der Stein zwischen den Greifern hängt, so übt die Winde auf das Kniegelenk A eine aufwärts gerichtete Zugkraft aus, die, wenn man das Gewicht der Steinzange gegenüber dem des Werksteines vernachlässigt, von der Größe Q sein muß. Diese Kraft Q zerlegt sich an dem Kniegelenk A derartig in die beiden von den Gelenkstangen AB und AC aufzunehmenden Kräfte P , daß nach dem in der Figur (oben rechts) gezeichneten Krafteck

$$1) \quad P = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$$

ist. Diese Kräfte P drücken die oberen Enden B und C der um O und N drehbaren Hebel BOD und CNE auseinander und pressen hierdurch die Greifer an den Stein. Für das Gleichgewicht des Hebels DOB gilt nach (S. 197) in bezug auf den Drehpunkt O die Momentengleichung

$$0 = -Pl + Ha + \frac{1}{2}Qb \quad \text{oder wegen Gleichung 1:}$$

$$\frac{Q}{2} \left(\frac{l}{\sin \alpha} - b \right) = Ha, \quad \text{woraus folgt}$$

$$2) \quad H = \frac{Q}{2} \left(\frac{l}{a \sin \alpha} - \frac{b}{a} \right).$$

Soll nun an den Greifern kein Gleiten eintreten, so muß die zum Festhalten des Steines erforderliche Reibungskraft $\frac{1}{2}Q$ kleiner als die größte mögliche Reibung fH , d. h.

$$3) \quad f > \frac{1}{\frac{l}{a \sin \alpha} - \frac{b}{a}} \quad \text{sein.}$$

$$f > \frac{Q/2}{Q/2 \left(\frac{l}{a \sin \alpha} - \frac{b}{a} \right)} = \frac{1}{\frac{l}{a \sin \alpha} - \frac{b}{a}}$$

Beispiel: Ist etwa $l = 1,00 \text{ m}$; $a = 0,33 \text{ m}$; $b = 0,14 \text{ m}$; $\sin \alpha = 0,46$; $f = 0,5$; so muß für sicheres Festhalten

$$f > \frac{1}{\frac{1}{0,33 \cdot 0,46} - \frac{0,14}{0,33}} = 0,16$$

sein. Würde also f auf diesen Wert herabsinken, so wäre keine Sicherheit gegen das Herausgleiten des Steines aus den Greifern mehr vorhanden. Kann man aber nach der Beschaffenheit der Berührungsflächen zwischen Stein und Greifer $f = 0,5$ annehmen, so ist der Grad der Sicherheit gegen das Abgleiten

$$0,5 : 0,16 = \text{etwa 3fach.}$$

h) Keil in dem Spalt eines Baumstammes oder dergl.

Ein zur Mittelebene symmetrischer Keil vom Keilwinkel 2δ (Fig. 300) soll durch eine Kraft K gleichmäßig in dem Spalte weiterschoben werden. Zu den Normaldrücken N kommen die in die Keilflächen fallenden, nach oben gerichteten Reibungswiderstände $f \cdot N$ hinzu. N schließt den Winkel δ mit der Querrichtung des Keiles, fN denselben Winkel mit der Kraft K ein. Für Gleichgewicht wird daher (Fig. 285 a)

$$K = 2N \sin \delta + 2fN \cos \delta$$

$$1) \quad = 2N (\sin \delta + f \cos \delta).$$

$$\text{Oder auch } K = 2W \sin (\delta + \varphi)$$

$$\text{mit } W = N : \cos \varphi.$$

Für die rückgängige Bewegung des Keiles gilt (ebenfalls mit dem Sinne der Kraft nach unten, Fig. 300b)

$$2) \quad K_1 = 2N (\sin \delta - f \cos \delta).$$

Die Kraft K_2 aber, welche für den Ruhezustand des Keiles erforderlich ist, muß zwischen den Werten K_1 und K bleiben.

Ist $\delta > \varphi$, d. h. $\text{tg } \delta > f$ oder $\sin \delta > f \cos \delta$, so ist $K_1 > 0$. In diesem Falle muß auch bei der Aufwärtsbewegung noch eine abwärts gerichtete Kraft K_1 wirken, damit die Bewegung nicht beschleunigt, sondern gleichförmig erfolge. Die Drücke N würden trotz der Reibung noch im stande sein, den Keil beschleunigt aus dem Spalte hinauszutreiben; oder der zu stumpfe Keil wird, sobald die treibende Kraft aufhört, zurückspringen. Für $\delta < \varphi$ aber wird $K_1 < 0$, d. h. in diesem Falle ist ein Herausziehen des Keiles durch eine aufwärts gerichtete Kraft ($-K_1$) nötig. Der Keil wird durch die Reibung im Spalte festgehalten; je größer die Seitendrücke N werden, um so fester steckt er; es findet hier also ähnliches statt, wie beim Festklemmen einer Stange (S. 251), und zwar erfolgt dies Klemmen ebenfalls, wenn der Keilwinkel $2\delta < 2\varphi$. Auch hier können in solchem Falle die Gesamtdrücke W und W_1 der beiden Seitenflächen in dieselbe Linie fallen und sich allein gegenseitig aufheben.

Fig. 300.

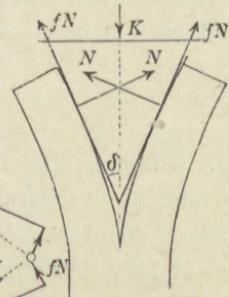


Fig. 300 a.

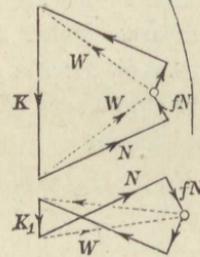
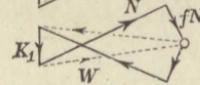


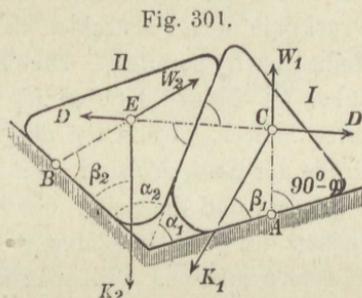
Fig. 300 b.



Bei der gewöhnlichen Anwendung des Keiles zum Spalten ist die Wirkung der Triebkraft eine unterbrochene. Wäre nun $\delta > \varphi$, so würde der Keil in den Pausen zwischen zwei Schlägen zurückspringen. Damit dies nicht geschehe, muß $\delta < \varphi$ gemacht werden, der Keil muß sich gegen Zurückspringen festklemmen. Ein solcher Keil heißt selbstsperrend.

i) Gleichförmige Bewegung zweier sich berührender Keile.

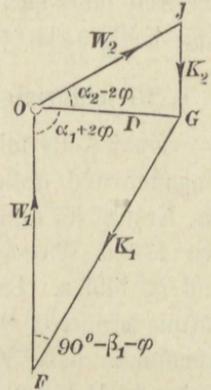
Zwei Keile mit den Keilwinkeln α_1 und α_2 (Fig. 301) berühren einander und außerdem zwei Seitenebenen. Auf die Keile wirken die Kräfte K_1 und K_2 , welche mit den festen Ebenen die Winkel β_1 und β_2 bilden. Es soll deren Verhältnis ermittelt werden, unter der Annahme, daß Keil I der vorrückende, II der zurückgetriebene sei.



Die rechtsseitige Ebene übt einen Gesamtdruck W_1 aus, der von der Normalen zur Ebene um den Reibungswinkel φ nach rechts abweichen muß, wenn Keil I nach links vorrückt. Der Angriffspunkt von W_1 ist unbestimmt, werde daher in A willkürlich angenommen. W_1 bildet mit dem oberen Teile der rechtsseitigen Unterstützungsebene, an der er abwärts gleitet, den spitzen Winkel $90^\circ - \varphi$ (mit dem unteren Teile den stumpfen Winkel $90^\circ + \varphi$). Durch den Punkt C , in welchem W_1 die Kraft K_1 schneidet, muß nun auch der gegenseitige Druck D zwischen beiden Keilen hindurchgehen, weil drei sich im Gleichwichte haltende Kräfte einen gemeinsamen Schnittpunkt haben müssen. D muß die Berührungsebene beider Keile wieder so schneiden, daß der spitze Winkel $90^\circ - \varphi$ im Keile I auf der oberen Seite erscheint. (Die Winkel $90^\circ - \varphi$ sind in der Figur durch kleine Kreisbögen hervorgehoben.) Der gegenseitige Druck D schneidet K_2 im Punkt E , durch welchen auch W_2 hindurchgehen muß. Bei B aber, wo W_2 die linksseitige feste Ebene trifft, muß der spitze Winkel $90^\circ - \varphi$ an der unteren Seite erscheinen, da der Keil II nach oben gleitet. Hiermit stehen die Richtungen der Drücke an den Keilflächen fest; die Lagen ebenfalls, nachdem der Punkt A willkürlich angenommen

war. Trägt man nun die Kraft K_1 nach einem beliebigen Maßstab als GF im Kräfteck (Fig. 302) auf, setzt daran die Richtungen von W_1 und D , so schneiden sich beide in O und schließen das Krätedreieck GFO , wie es der Gleichgewichtszustand fordert. Zieht man $OJ \parallel W_2$, $GJ \parallel K_2$, so stehen nun auch die Kraftgrößen W_2 und K_2 fest. Der Linienzug $ACEB$, dessen Seiten die Richtungslinien der Drücke an den drei Keilflächen darstellen, heißt die Drucklinie der beiden Keile. Betrachtet man O als den Pol des Kräftecks, so sind die Seiten der Drucklinie den Polstrahlen OF , OG , OJ der Reihe nach parallel. Die Drucklinie bildet daher ein zu den Kräften K_1 und K_2 gezeichnetes Seileck. Die Lage des Poles O und die Größe der Kraft K_2 sind aber an die Bedingung

Fig. 302.



gebunden, daß die Seiten des Seilecks, d. h. der Drucklinie, die Keilflächen in ganz bestimmter Weise unter den Winkeln $90^\circ - \varphi$ schneiden müssen. Will man nun die Kräfte aus dem Kräfteck auch berechnen, so muß man die Winkel des Kräftecks bestimmen.

Der spitze Winkel zwischen K_1 und W_1 würde $90^\circ - \beta_1$ betragen, wenn W_1 ein Normaldruck wäre. Durch die Abweichung um φ wird jener Winkel noch um dieses Maß kleiner, d. h. es wird $\sphericalangle OFG = 90^\circ - \beta_1 - \varphi = 90^\circ - (\beta_1 + \varphi)$. Die Kräfte D und W_1 würden, wenn sie beide Normaldrücke wären, denselben Winkel α_1 miteinander bilden wie die entsprechenden Keilflächen; durch die Abweichung einer jeden um φ vergrößert sich dieser Winkel um 2φ ; daher ist $\sphericalangle FOG = \alpha_1 + 2\varphi$. Entsprechend findet man $\sphericalangle OJG = 90^\circ - (\beta_2 - \varphi)$, $\sphericalangle JOG = \alpha_2 - 2\varphi$. Sonach ergibt sich

$$K_1 : D = \sin(\alpha_1 + 2\varphi) : \cos(\beta_1 + \varphi);$$

$$K_2 : D = \sin(\alpha_2 - 2\varphi) : \cos(\beta_2 - \varphi).$$

Durch Teilung beider Gleichungen entsteht dann

$$1) \quad \frac{K_1}{K_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\varphi) \cos(\beta_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - 2\varphi) \cos(\beta_1 + \varphi)}.$$

Für $\alpha_2 = 2\varphi$ würde $\sphericalangle JOG = 0$ und $K_2 = 0$ oder $K_1 : K_2 = \infty$, in der Drucklinie würde BE mit CE zusammenfallen, d. h. der

Keil II würde zwischen Keil I und der linksseitigen Ebene sich festklemmen. Die vorausgesetzte Bewegung würde ferner unmöglich werden für $\beta_1 = 90^\circ - \varphi$, weil dann $\sphericalangle OFG = 0$ werden würde. In diesem Falle würde K_1 schon durch W_1 allein aufgehoben und es entstände durch die Kraft K_1 gar kein Druck D gegen den zweiten Keil, also auch keine Möglichkeit, die Kraft K_2 an dem Keile II zu überwinden.

Soll die Bewegung der Keile umgekehrt erfolgen (Fig. 303), soll Keil II vorrücken und Keil I zurückweichen, so findet man, im einen Punkt A am Keile I beginnend, in gleicher Weise die Drucklinie; ihre einzelnen Seiten verdrehen sich aber, gegenüber der Figur 301, je um 2φ . Die spitzen Winkel $90^\circ - \varphi$ liegen jetzt durchweg an der anderen Seite als in Fig. 301. Im Krafteck (Fig. 304) wird,

wenn K_1 zu derselben Größe angenommen wird wie vorher, K_2 nun viel größer als vorher. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ergibt sich leicht, wenn man in Gleichung 1 durchweg die Vorzeichen von φ umkehrt.

Sind endlich beide Keile in Ruhe, so liegt die Richtung des Widerstandes W_1 irgendwo innerhalb des doppelten Reibungswinkels, und dasselbe gilt für die Richtungen der Drücke D und W_2 . Bei gegebenem K_1 hat nun der Pol O des Kraftecks keine bestimmte Lage mehr, weil W_1 und D innerhalb des doppelten Reibungswinkels jede Richtung haben können; ebenso wird die Richtung von W_2 unbestimmt und damit auch die Größe K_2 . Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ist jetzt nur durch die beiden Grenzen bestimmt, welche sich aus den beiden untersuchten Bewegungsfällen ergeben haben und welche man auch leicht rechnerisch findet, indem man Gleichung 1 das eine Mal mit den angegebenen Vorzeichen von φ , das andere Mal mit den entgegengesetzten dieser Zeichen ausrechnet.

Man erkennt hieraus, daß es für die beiden ruhenden Keile im allgemeinen unendlich viele mögliche Drucklinien gibt. Jede derselben ist ein zu den Kräften K_2 und K_1 gezeichnetes Seileck,

Fig. 303.

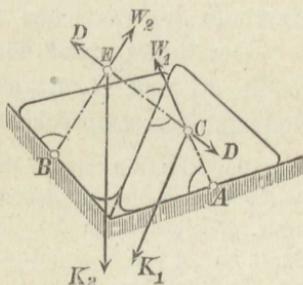
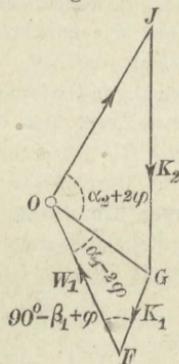


Fig. 304.



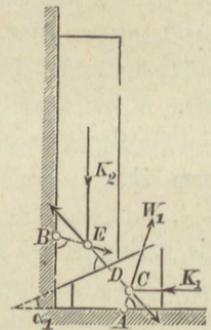
zu dessen Konstruktion der Pol O und der Anfangspunkt A der Drucklinie innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden können. Da aber die Seiten der Drucklinie die Richtung und Lage der Drücke an Keilflächen darstellen, so müssen sie zwei einschränkenden Bedingungen genügen:

1. darf eine Seite der Drucklinie höchstens um den Reibungswinkel von der Normalen zu der entsprechenden Keilfläche abweichen;
2. muß eine Seite der Drucklinie die zugehörige Keilfläche innerhalb des Bereiches der Berührung (vgl. S. 211) schneiden.

Der Ruhezustand der beiden Keile unter Einwirkung gegebener Kräfte K_1 und K_2 ist nur möglich, wenn wenigstens eine, diesen Bedingungen entsprechende Drucklinie nachweisbar ist.

Beispiel: Ein mit K_2 belasteter Pfosten (Fig. 305) soll mittels des untergeschobenen Keiles, an dem eine wagerechte Kraft K_1 wirkt, gleichmäßig in die Höhe gekeilt werden. Die Drucklinie $ACEB$ ergibt sich leicht unter Annahme eines willkürlichen Punktes A . (Die spitzen Winkel $90^\circ - \varphi$ sind in Figur 305 wieder durch kleine Bögen bezeichnet.) Der Druck D würde, wenn er ein Normaldruck wäre, mit der Lotrechten den Winkel α_1 bilden; wegen der Reibung wird dieser Winkel (s. das Kräfteck Fig. 306) $OGJ = \alpha_1 + \varphi$. Das Verhältnis $K_1 : K_2$ ließe sich leicht aus Gleichung 1 berechnen, indem man dort die Sonderwerte dieses Falles einsetzte. Wir ziehen aber eine unmittelbare Berechnung vor. Man erkennt leicht, daß W_1 und W_2 von den zueinander rechtwinkligen Gleitebenen nach derselben Seite um $90^\circ - \varphi$

Fig. 305.

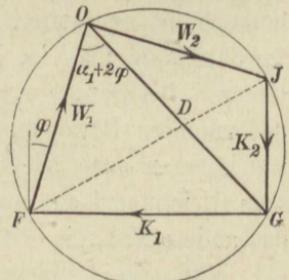


abweichen, also ebenfalls zueinander winkelrecht sein müssen. Das Viereck $GFOJ$ ist darnach bei G und bei O rechtwinklig, ist also ein in einem Kreise vom Durchmesser FJ eingeschriebenes. Der Winkel $FOG = \alpha_1 + 2\varphi$ steht über dem Bogen \widehat{FJ} ; demselben Bogen entspricht aber auch der Umfangswinkel FJG , der somit dieselbe Größe $\alpha_1 + 2\varphi$ hat. Daher ist

$$K_1 : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi).$$

Für $\alpha_1 + 2\varphi = 90^\circ$ oder $\alpha_1 = 90^\circ - 2\varphi$ mithin $\alpha_2 = 2\varphi$ wird $K_1 : K_2 = \infty$, oder das Hinaufkeilen unmöglich. Es fallen dann nämlich D und W_2 zusammen und klemmen den als zweiten Keil geltenden Pfosten fest.

Fig. 306.

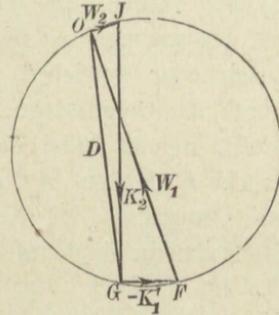


Für die entgegengesetzte Bewegung, d. h. für gleichmäßiges Hinablassen des Pfostens, gilt selbstverständlich

$$K_1' : K_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi).$$

Für die meisten Fälle ist es wünschenswert, daß der untere Keil selbstsperrend sei, d. h. daß für den Rückgang $K_1' < 0$ werde. Mithin muß $\alpha_1 < 2\varphi$ sein. Für diesen Fall gilt das Krafteck Figur 307, in welchem die den unteren Keil zurückziehende Kraft $-K_1' = GF$ ist. Der Druck D zwischen beiden Keilen bildet mit der Lotrechten den Winkel $OGJ = \alpha_1 - \varphi$. Würde dieser wegen $\alpha_1 = \varphi$ zu Null, so ergäbe sich D lotrecht und $OJ = W_2 = 0$. Unter diesen Umständen und ebenso für $\alpha_1 < \varphi$ würde sich der Pfosten beim Zurückziehen des unteren Keiles nicht mehr gegen die lotrechte Wand stützen; er würde vielmehr wegen des lotrechten D , welches dann $= K_2$ ist, durch den unteren Keil von der Wand abgezogen werden, würde auf dem Keile nicht abwärts gleiten, also auch nicht sinken; es würde also der Zweck der Rückwärtsbewegung nicht erreicht werden. Für $\alpha_1 < \varphi$ würde W_2 sogar negativ werden, d. h. es müßte der Pfosten durch eine besondere Kraft gegen die Wand gedrückt werden, um sich nicht von ihr zu entfernen. Daraus folgt, daß der Keilwinkel α_1 zwischen den Werten φ und 2φ liegen muß, damit die Vorrichtung ihren Zweck erfülle.

Fig. 307.



Zahlenbeispiel: Bei $f = 0,2$ oder $\varphi = 11^\circ$ und $\alpha_1 = 17^\circ$ mit $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,3$ wird $\operatorname{tg}(\alpha_1 + 2\varphi) = \operatorname{tg} 39^\circ = 0,8$, mithin $K_1 = 0,8 K_2$ für Hinaufkeilen; $\operatorname{tg}(\alpha_1 - 2\varphi) = -\operatorname{tg}(5^\circ) = -0,09$, d. h. $-K_1' = 0,09 K_2$ für Hinunterlassen.

k) Wirkung der Keilpresse.

Dieselben Grundgedanken wie bei zwei Keilen gelten auch, wenn die Zahl der Keile größer ist. Gleiten die Keile, so tritt an jeder Keilfläche ein Druck auf, der von der Normalen zur Keilfläche um den Reibungswinkel abweicht. An jedem Keile halten sich die Flächendrücke mit einer dritten Kraft K im Gleichgewichte, schneiden sich daher in einem Punkte. Bei gleichmäßiger Bewegung bilden die drei Kräfte jedes Keiles einen geschlossenen Streckenzug. Das ganze Krafteck aber bildet wiederum ein Krafteck der gegebenen Kräfte K mit seitwärts liegendem Pole. Die Polstrahlen sind die Drücke der Keilflächen; die dazu parallelen Richtungslinien dieser Kräfte bilden daher ein zu den Kräften K gezeichnetes Seileck. Letzteres gilt auch für den Ruhezustand der Keile, nur liegt dann der Pol nicht mehr bestimmt fest, sondern ist innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Für die Seileckseiten gelten dann dieselben Beschränkungen wie auf S. 258 angegeben.

Bei einer Keilpresse etwa zum Auspressen von Oel aus zerstampftem Oelsamen (Fig. 308) wirkt K_1 als Triebkraft auf den mittleren Keil vom Keilwinkel 2δ . Durch Niederdrücken dieses Keiles werden die Seitenkeile auf den wagerechten Gleitflächen auseinander getrieben und dadurch die Oelgutsäcke S, S gepreßt, welche dabei die Gegenkräfte K_2 leisten. $ACEFB$ ist die Drucklinie der Keilgruppe. Stellt man die Triebkraft K_1 durch

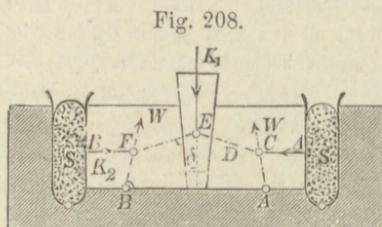


Fig. 208.

GJ im Krafteck (Fig. 309) dar, so sind JO und GO die Gegenkräfte D der beiden Seitenkeile, welche von der Wagerechten um $\delta + \varphi$ abweichen. Dadurch ist der Pol O bestimmt. Die Widerstände W der wagerechten Gleitflächen bilden mit der Lotrechten die Winkel φ und legen dann mit den Wagerechten durch G und J die Punkte L und M fest, wodurch $JL = GM = K_2$ bestimmt werden. Es ist dann im Dreieck OGJ :

$$K_1 : D = 2 \cdot \sin(\delta + \varphi),$$

im Dreieck OGM aber, weil $\sphericalangle GOM = 90^\circ - (\delta + 2\varphi)$:

$$K_2 : D = \cos(\delta + 2\varphi) : \cos \varphi,$$

mithin wird

$$1) \quad \frac{K_1}{K_2} = 2 \frac{\sin(\delta + \varphi) \cos \varphi}{\cos(\delta + 2\varphi)}.$$

Weil beim Keile gewöhnlich $\operatorname{tg} \delta$ gegeben ist, kann man vorstehende Formel zur bequemeren Berechnung (ohne trigonometrische Tabellen) umformen, indem man die zusammengesetzten Funktionen auflöst und in Zähler und Nenner mit $\cos \delta \cdot \cos^2 \varphi$ teilt:

$$2) \quad \frac{K_1}{K_2} = 2 \frac{\operatorname{tg} \delta + f}{1 - f^2 - 2f \operatorname{tg} \delta}.$$

1) Wirkungsgrad einer Maschine.

Zur Beurteilung der Güte einer Maschine dient die Vergleichung der Arbeiten, welche von der Maschine übertragen bzw. aufgenommen werden. Der Zweck der Keilpresse z. B. besteht in

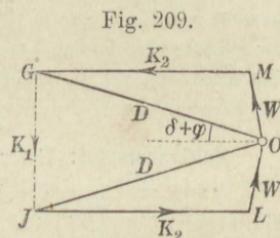


Fig. 209.

dem Zusammenpressen des Gutes bei S . Rückt nun jeder Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ nach außen, während der Treibkeil sich um c abwärts bewegt, so verrichten die auf das Gut übertragenen Kräfte K_2 zusammen eine Arbeit $K_2 v$. Dies ist die Nutzarbeit; $K_1 c$ ist aber der Arbeitsaufwand. Das Verhältnis beider, nämlich

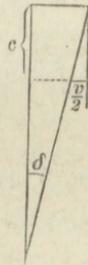
$$3) \quad \eta = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Arbeitsaufwand}} = \frac{K_2 v}{K_1 c},$$

nennt man den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Maschine.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten v und c findet man aus dem geometrischen Zusammenhange der Maschine (Fig. 310). Rückt der Treibkeil um c abwärts, so drängt er jeden Seitenkeil um $\frac{1}{2}v$ zur Seite, wo $\frac{1}{2}v = c \operatorname{tg} \delta$. Daher ist hier

$$4) \quad \eta = \frac{2 K_2}{K_1} \operatorname{tg} \delta.$$

Fig. 310.



Einen anderen Ausdruck kann man noch für den Wirkungsgrad η finden, wenn man sich die Maschine einmal ohne schädliche Reibungswiderstände, als eine ideelle, vollkommene Maschine vorstellt. Nennt man die für eine solche nötige Betriebskraft die ideelle Triebkraft $= K_0$, so wird, indem man in Gl. 2 $f = 0$ setzt,

$$5) \quad \frac{K_0}{K_2} = 2 \operatorname{tg} \delta = \frac{v}{c}.$$

Führt man dies in Gleichung 3 ein, so erhält man

$$6) \quad \eta = \frac{K_0}{K_1} = \frac{\text{ideelle Triebkraft}}{\text{wirkliche Triebkraft}}.$$

Nach Gleichung 5 ist $K_0 c = K_2 v$, d. h. bei einer vollkommenen Maschine würden Arbeitsaufwand und Nutzarbeit einander gleich oder der Wirkungsgrad gleich Eins sein. Eine Maschine ist mechanisch um so vollkommener, je mehr sie sich diesem ideellen Zustande nähert. Die Beziehung $K_0 c = K_2 v$ haben wir nur für den besonderen Fall der Keilpresse bewiesen; sie gilt aber allgemein. Bewegen sich nämlich alle Teile einer Maschine gleichförmig, so findet keine Zunahme des Arbeitsvermögens statt, also muß auch die gesamte Arbeit Null sein. Die inneren Spannkräfte einer vollkommenen Maschine verrichten aber nach Seite 176 keine Arbeit. Die Widerstände völlig glatter Flächen, mit denen die einzelnen Maschinenteile ineinander

greifen und aneinander gleiten, ebensowenig. Die Nutzlast wirkt in bezug auf die Maschine stets der Bewegung ihres Angriffspunktes entgegen, verrichtet daher eine negative Arbeit, die im absoluten Sinne der Arbeit der Triebkraft gleich sein muß. Also

$$7) \quad v : c = K_0 : K_2.$$

Dies ist der schon von Galilei ausgesprochene Satz: „Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit (oder an Weg) verloren.“ Man kann also den Wirkungsgrad nach Willkür auf Grund der Gleichung 3 oder der Gleichung 6 berechnen.

Beispiel: Die Reibungsflächen der Keilpresse seien gut geglättet und geschmiert, daher $f = 0,1$. Auch in diesem Fall ist es nützlich, den Treibkeil selbstsperrend anzuordnen; dies ist erfüllt, wenn wir etwa $\operatorname{tg} \delta = 1/20$ annehmen. In Gleichung 2 werden dann die Größen f^2 und $2f \operatorname{tg} \delta$ nur je $1/100$ und können zur Vereinfachung gegen 1 vernachlässigt werden. Es ist nämlich zu bedenken, daß die Reibungsziffern in Wirklichkeit schwanken werden und selten mit großer Genauigkeit zu schätzen sind. Daher ist in Gleichung 2 der Zähler doch kaum auf 2% genau zu berechnen, so daß die Vernachlässigung im Nenner durchaus zulässig erscheint. Ähnliches gilt in allen Fällen, in denen Reibungswiderstände eine wichtige Rolle spielen. Dann wird

$$K_1 = 2 \cdot (0,05 + 0,1) K_2 = 0,3 K_2; \quad v = 2c \cdot 0,05 = 0,1 \cdot c.$$

Der Wirkungsgrad $\eta = \frac{K_2 v}{K_2 c} = \frac{0,1}{0,3} = 1/3$. Es würde ohne Reibung

$$K_0 = 2 K_2 \operatorname{tg} \delta = 0,1 K_2,$$

$$\text{also auch} \quad \eta = \frac{K_0}{K_1} = \frac{0,1 K_2}{0,3 K_2} = 1/3, \quad \text{wie vorstehend.}$$

Bei dieser Maschine wird also von der aufgewandten Arbeit nur ein Drittel nützlich verwertet, während zwei Drittel durch Reibung aufgezehrt werden. Die Keilpresse ist daher eine wenig vollkommene Maschine; Wasserdruckpressen z. B. arbeiten erheblich vorteilhafter. Die soeben besprochene Maschine hat aber Einfachheit und Billigkeit als Vorzüge.

Der Wirkungsgrad dieser Maschine nach Gleichung 6 läßt sich, wenn man in Gleichung 2 die erwähnte Vereinfachung

$$K_1 = 2 K_2 (\operatorname{tg} \delta + f)$$

einführt, auch schreiben, weil $K_0 = 2 K_2 \operatorname{tg} \delta$ ist,

$$8) \quad \eta = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta + f} = \frac{1}{1 + \frac{f}{\operatorname{tg} \delta}}.$$

Vergrößert man $\operatorname{tg} \delta$, so verkleinert sich der Nenner; mithin wächst η . Macht man z. B. $\operatorname{tg} \delta = f$, so würde schon $\eta = 1/2$ werden. Die beabsichtigte Selbstsperrung des Treibkeiles hat also den geringen Wirkungsgrad herbeigeführt. Es läßt sich zeigen, daß bei jeder Maschine, die selbstsperrend

sein soll, der Wirkungsgrad unter $0,5$ liegen muß. Man kann nämlich setzen: $K_1 = K_0 + F$, wenn F der durch die Reibungswiderstände aufgezehrte Teil der Betriebskraft ist. Nimmt man nun an, daß beim Beginne der rückgängigen Bewegung der Reibungswiderstand annähernd noch dieselbe Größe F behält, so gilt für den Rückgang $K_1' = K_0 - F$. Soll also die Maschine selbst sperren, so muß $K_1' \leq 0$, mithin $K \geq K_0$ oder

$$K_1 \geq 2 K_0 \text{ sein, d. h. } \gamma = \frac{K_0}{K_1} \leq \frac{1}{2}.$$

m) Drucklinie eines Gewölbes.

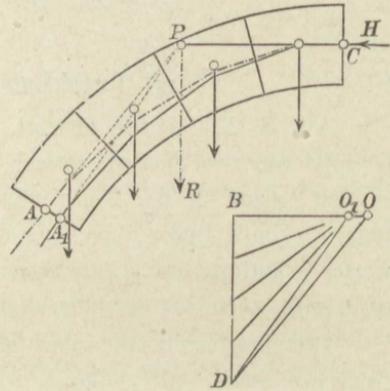
Auf S. 257 wurde gezeigt, daß die Drucklinie einer ruhenden Gruppe von zwei Keilen statisch unbestimmt ist, daß sie ein Seileck zu den Lasten K der Keile sein muß und daß ihre Seiten an zwei beschränkende Bedingungen gebunden sind. Auf S. 259 wurde dann weiter erläutert, daß diese Sätze von der Zahl der Keile unabhängig sind, also auch bei beliebigen vielen Keilen Gültigkeit behalten.

Die einzelnen Steine eines (ohne Mörtel gedachten) Gewölbogens sind nun auch keilförmige Körper. Soll ein Gewölbogen in Ruhe sein können, so muß eine dem Ruhezustand entsprechende Drucklinie nachweisbar sein. Die Drucklinie ist ein zu den Gewichten der Gewölbteile gezeichnetes Seileck. Die einzelnen Seiten desselben dürfen höchstens um den Reibungswinkel von den Normalen zu den Fugen abweichen und müssen die Fugen auch innerhalb des Bereiches der Berührung, d. h. innerhalb des Gewölbogens schneiden.

Das Gewölbe möge symmetrisch zu einer lotrechten Mittelebene sein (auch bezüglich seiner Belastung). Betrachten wir diese Ebene als eine Schnittebene, so wird in ihr eine wagerechte Druckkraft, der Seitenschub H , wirken. Denn ein schräg gerichteter Scheiteldruck würde an der einen Hälfte nach oben, an der anderen aber zufolge des Gesetzes der Wechselwirkung nach unten gerichtet sein, was jedoch der Symmetrie widerspricht. Teilt man nun den halben Bogen (Fig. 311) durch Fugen in eine beliebige Zahl von Teilen, deren Gewichte Q_1, Q_2, \dots durch die Schwerpunkte der Teile hindurchgehen, so ist das Krafteck der Lasten Q leicht gezeichnet, indem man sie nach irgendeinem Kräftemaßstab aneinander reiht. Wäre nun der Seitenschub H bekannt, so würde man den Pol O in dem Abstände H dem oberen Endpunkte der Lasten gegenüber annehmen und hätte damit sämtliche Polstrahlen. Wäre außerdem noch der Angriffspunkt C des Scheiteldruckes gegeben, so hätte man die Seileckseiten nur den

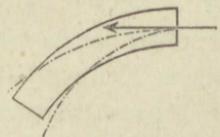
Polstrahlen der Reihe nach parallel zu ziehen und hätte damit das Seileck, d. h. die Drucklinie des Gewölbes. Den Punkt C wollen wir in der Mitte der Scheitelfuge annehmen. Die letzte Seite des Seilecks könnte nun vielleicht aus der inneren Leibung des Gewölbes treten; dann erkennt man, daß dieses Seileck eine mögliche Drucklinie nicht ist. Um aber ein flacher verlaufendes Seileck zu erhalten, braucht man nur den Polabstand H zu vergrößern, und zwar kann man leicht H so bestimmen, daß die letzte Seite die Kämpferfuge an einer bestimmten Stelle A , etwa in ihrer Mitte, schneide. In Figur 311 ist nach willkürlicher Annahme des Poles O_1 das Seileck CA_1

Fig. 311.



gezeichnet. Verlängert man nun die letzte Seite des ersten Seilecks bis zum Schnitte P mit der Richtungslinie von H , so muß nach S. 112 das Gesamtgewicht R der Gewölbbälfte durch P gehen. Die Lage von R ist nur von der Form des Gewölbes abhängig, nicht aber von der willkürlich angenommenen Lage des Poles O . Für ein größeres H und für ein wiederum durch C gehendes Seileck muß daher die letzte Seite ebenfalls durch P gehen. Zieht man also PA , so ist dies die Richtung der letzten Seite durch den gewünschten Punkt A . Eine Parallele zu AP durch D bestimmt den neuen Pol O , und OB ist nun der Scheitel Schub, welcher einem durch C und A gehenden Seileck entspricht. Daß die Seiten des Seilecks von den Normalen zu den Fugen nicht zu viel abweichen, läßt sich ja nötigenfalls durch Aenderung der Fugenrichtung leicht erreichen. Wichtiger ist, daß die Drucklinie überall im Gewölbobogen verbleiben muß. Nur wenn sich eine solche Drucklinie finden läßt, ist der Ruhezustand möglich.

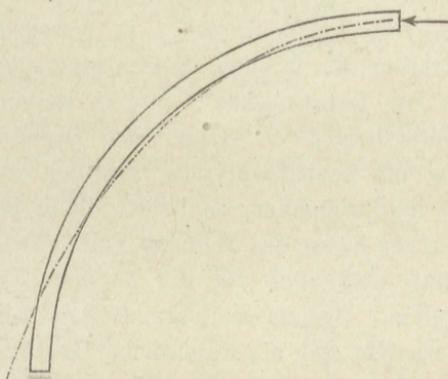
Fig. 312.



Wie schon gesagt, hat man, wenn das erste Seileck die innere Wölbfläche schneidet, H zu vergrößern, oder C nach oben zu ver-

schieben, und umgekehrt. In Figur 312 sind zwei vorläufige Seilecke eingezeichnet, die den Bedingungen einer Drucklinie noch nicht entsprechen, aber durch Veränderung von H zu möglichen Drucklinien umgewandelt werden können. Schneidet jedoch ein Seileck (Fig. 313) erst die innere Wölblinie, kehrt dann durch dieselbe in das Gewölbe zurück und geht bei weiterem Verlaufe noch einmal durch die äußere Wölblinie, so ist Gleichgewicht unmöglich. Denn jede Aenderung von H und C , die an der einen Stelle das Hinaustreten beseitigen könnte, müßte das Hinaustreten an der anderen Stelle noch verstärken; in solchem Falle kann nur eine Vergrößerung der Gewölbstärke oder eine Aenderung der Gewölbform zum Ziele führen.

Eig. 313.

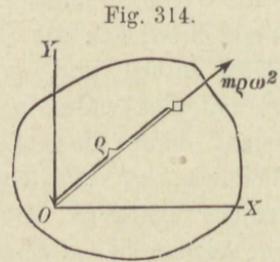


Auf diese Andeutungen über die Drucklinie in Gewölben müssen wir uns hier beschränken. Die wirkliche Lage des Scheitelschubes H und des Widerlagerdrucks W folgt aus dem elastischen Verhalten der Gewölbsteine und findet sich besprochen in Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre, zweite Auflage, S. 183 u. ff. Hat man aber die richtige Drucklinie gefunden, so geben die Polstrahlen des Kraftecks die Größe der Druckkräfte in den einzelnen Fugen an.

10. Wirkung der Reibung bei gleichmäßig sich drehenden Körpern.

Ein starrer Körper, der sich gleichförmig um eine feste Achse dreht, ist nicht im Gleichgewichte, weil die einzelnen Massenteilchen nicht geradlinige, sondern kreisförmige Bewegungen ausführen. Die Bedingungen für eine gleichförmige Drehbewegung lassen sich aber mit Hilfe des Satzes auf Seite 170 aufstellen, wonach die Ergänzungskräfte den an dem Körper wirkenden äußeren Kräften das Gleichgewicht halten müssen.

Dreht sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 314), so erfährt ein Massenteilchen m im Abstände ϱ von der Achse nach Seite 93, Gleichung 1 die Zentripetalbeschleunigung $\varrho\omega^2$; daher müssen sämtliche Zentrifugalkräfte $m\varrho\omega^2$ den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Die äußeren Kräfte bestehen in bewegenden Kräften K , in den Normalwiderständen N der festen Achse O und in Reibungswiderständen der Lager der Drehachse. Da die Zentrifugalkräfte sämtlich durch O hindurchgehen, so haben sie in bezug auf die Achse das Moment Null. Gleiches muß also auch für die äußeren Kräfte gelten. Da nun die Normalwiderstände N ebenfalls durch O gehen, so ergibt sich als wesentliche Bedingung der gleichförmigen Drehung, daß die Momentensumme der bewegenden Kräfte K und der Reibungswiderstände $f \cdot N$ in bezug auf O zusammen Null betrage.



Die Normalwiderstände N der festen Drehachse sind im allgemeinen von der Massenverteilung des Körpers abhängig und werden erst weiter unten eingehend bestimmt werden. Jetzt wollen wir nur solche Fälle betrachten, bei denen die Masse derartig symmetrisch um die Achse verteilt ist, daß jedem Massenteilchen im Abstände ϱ auf der einen Seite der Achse ein gleiches Massenteilchen in demselben Abstände auf der anderen Seite entspricht, so daß die Zentrifugalkräfte dieser Massenteilchen sich gegenseitig aufheben, weshalb dann auch die sämtlichen äußeren Kräfte sich vollständig aufheben, d. h. den Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen. Aus diesem Grunde können die Fälle der gleichmäßigen Drehung solcher Körper mit symmetrischer Massenverteilung schon an dieser Stelle, d. h. in der Gleichgewichtslehre, behandelt werden.

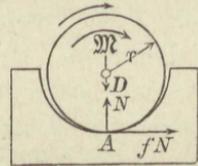
In den obigen Bedingungen wird nichts geändert, wenn zu der Drehung um die Achse O noch eine geradlinige und gleichmäßige Verschiebung des Körpers mit seiner Achse kommt. Denn eine derartige Verschiebung bedingt keine Beschleunigung, also auch keine Ergänzungskräfte.

a) Reibungsmoment eines Tragzapfens.

Eine Achse sei rechtwinklig zu ihrer Mittellinie belastet und stütze sich mittels zylindrischer Zapfen auf zylindrische Lager, welche die Zapfen mit geringem Spielraum umschließen. Auf einen Zapfen vom Halbmesser r komme ein durch die Zapfenmitte gehender Zapfendruck D , der rechtwinklig zur Längsenachse des Zapfens steht, so daß die Zylinderfläche des Zapfens den Druck bekommt. Ein derartiger Zapfen heißt Tragzapfen.

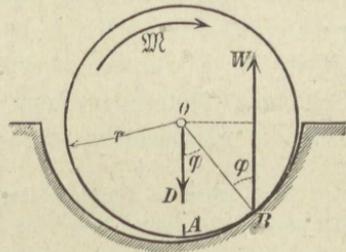
Wir betrachten zuerst einen sog. eingelaufenen Tragzapfen (Fig. 315), der mit merklichem Spielraum im Lager liegt und bei dem man annäherungsweise annehmen kann, die Berührung mit dem Lager finde nicht in einer größeren Fläche, sondern in einer Seite des Zylinders (in der Figur durch einen Punkt dargestellt) statt. Im Ruhezustande würde A die Berührungsstelle sein. Dreht sich nun aber der Zapfen rechts herum, so gleitet bei A der Zapfen nach links; dem setzt sich der Widerstand fN nach rechts entgegen.

Fig. 315.



Das Moment $fN \cdot r$ macht ein treibendes, die Reibung überwindendes Kräftepaar $\mathfrak{M} = fN \cdot r$ im Sinne der Drehung nötig. Aber auch nach Anbringung desselben ist den Gleichgewichtsbedingungen noch nicht genügt, weil die Summe der wagerechten Kräfte nicht Null ist. Es kann daher im Zustande der Bewegung die Berührung nicht in A stattfinden; vielmehr verschiebt sich die Berührungsstelle nach rechts bis zu einem Punkte B (Fig. 316), der so liegt, daß dort die Mittelkraft W aus N und fN lotrecht gerichtet ist. Dies findet statt für $\sphericalangle AOB = \varphi$. Es wird dann $W = D$, und beide bilden ein dem treibenden Moment \mathfrak{M} widerstehendes Kräftepaar $D r \sin \varphi = \mathfrak{M}$.

Fig. 316.



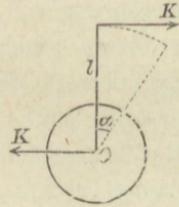
Nun ist $\operatorname{tg} \varphi = f$; weil aber bei geschmierten Drehzapfen, wie wir sie hier voraussetzen, fast stets $f \leq 0,1$ also $\varphi \leq 6^\circ$ und $\cos \varphi \geq 0,995$, so ist bei derartig kleinen Winkeln $\sin \varphi$ mit

genügender Annäherung gleich $\operatorname{tg} \varphi = f$ zu setzen, so daß das für die gleichförmige Drehung erforderliche Kraftmoment, welches zugleich das Reibungsmoment bezeichnet, gesetzt werden darf

$$1) \quad \mathfrak{M} = Dfr.$$

Es entspricht z. B. $f = 0,1$ dem Werte $\sin \varphi = 0,0995$. Unmittelbar ergibt sich Gleichung 1 aus Figur 315, wenn man daselbst, ohne Rücksicht auf den kleinen Verstoß gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte, $N = D$ also $fN = fD$ einführt. Man denke sich also, um die Gleichung 1 leicht zu merken, daß der Zapfendruck D eine Reibung fD und mit dem Hebelarm r ein Moment Dfr bedingt. Bringt man das Moment \mathfrak{M} auf die Form Kl (Fig. 317), legt die eine Kraft durch O , die andere ans Ende eines Halbmessers l und läßt sich die Kräfte K bei der Drehung stets mitdrehen, so verrichtet die in O angreifende Kraft keine Arbeit; die am Endpunkte des Armes l aber während eines Drehungswinkels α die Arbeit $Kl\alpha = \mathfrak{M}\alpha$. Es ist also die Arbeit eines Kräftepaares gleich seinem Momente mal dem Drehungswinkel. Die Zapfenreibung erfordert hiernach einen sekundlichen Arbeitsaufwand $= \mathfrak{M} \cdot \omega = Dfr\omega$.

Fig. 317.



Als Arbeitseinheit dient das Meterkilogramm. Bei regelmäßig umlaufenden Maschinen pflegt man aber die in jeder Sekunde geleistete Arbeit in mkg als Leistung, Arbeitsstärke oder Effekt $= E$ zu bezeichnen. Die Einheit der Leistung ist das Sekunden-Meterkilogramm $= 1 \text{ mkg/sek}$. Als größere Einheit hat man die Pferdestärke (PS) $= 75 \text{ mkg/sek}$ eingeführt.

Ein lebendes Pferd leistet freilich eine sekundliche Arbeit von 75 mkg nur unter günstigen Umständen. Als aber James Watt im Jahre 1782 Dampfmaschinen für Londoner Brauereien zu bauen hatte, kam es darauf an, diejenige Arbeit, die bisher von Pferden am Göpel verrichtet wurde, durch die Maschine leisten zu lassen. Watt maß daher die von den Pferden geleistete Arbeit, und eine Dampfmaschine, welche die Leistung von 10 Pferden ersetzte, wurde eine 10pferdige Maschine genannt. Die dort benutzten Pferde waren sehr kräftig; auch wird Watt der Sicherheit wegen, damit seine Dampfmaschine keinen Mißerfolg erleide, die Arbeit der Pferde eher zu hoch als zu niedrig geschätzt haben. Auf diese Weise hat sich als Maschinen-Pferdestärke die Leistung von 75 mkg/sek eingebürgert. Es wird dafür auch nicht selten

Pferdekraft gesagt; doch ist diese Bezeichnung wenig passend, da man mit dem Ausdrucke doch nicht eine Kraft, sondern eine sekundliche Arbeit bezeichnen will.

Für die Anzahl der Pferdestärken wird das Zeichen N benutzt, während n die Zahl der Umdrehungen in einer Minute bedeutet.

Beispiel: Ein Wasserrad wiege einschl. des darin befindlichen Wassers 10000 kg; seine Achse werde durch zwei Zapfen von $r = 0,1$ m Halbmesser getragen und mache 10 Umdrehungen in der Minute. Nimmt man $f = 0,1$ an, so ist, da die Summe der Zapfendrucke an beiden Tragzapfen 10000 kg beträgt, das gesamte Reibungsmoment $\mathfrak{M} = 10000 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 100$ mkg. Bei $n = 10$ ist der Drehungswinkel in der Minute 20π , in der Sekunde also $20\pi : 60 = \frac{1}{3}\pi = 1,047$, daher die sekundl. Reibungsarbeit $E = 104,7$ mkg/sek und der Reibungsverlust in Pferdestärken $N = 104,7 : 75 = 1,396$ PS.

Bei einem neuen Tragzapfen findet die Berührung längs einer größeren, dem Mittelpunktswinkel 2α entsprechenden Fläche ACB statt (Fig. 318). Ist l die Länge des Zapfens und p der Druck für die Flächeneinheit an irgendeiner Stelle, so kommt auf ein Teilchen $l \cdot ds$ der Zylinderfläche die Druckkraft $p l \cdot ds$ und die Reibung $f p l \cdot ds$. Das treibende Moment muß dann betragen

$$\mathfrak{M} = f l r \int p \cdot ds.$$

Macht man die Voraussetzung, daß der Zapfen überall gleich stark anliege, so wird

$$\mathfrak{M} = f p l r \int ds = f p l r^2 \alpha.$$

Nun muß aber $D = p l \int \cos \vartheta \cdot ds$ sein, oder, weil $ds \cos \vartheta = dx$

$$D = p l \int dx.$$

Darin ist $\int dx$ die Sehne $AB = 2r \sin \alpha$, mithin

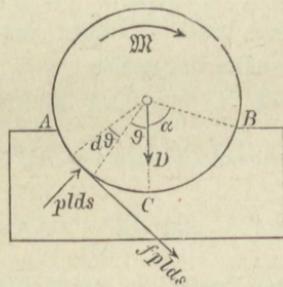
$$D = 2 p l r \sin \alpha.$$

Dann wird $\frac{\mathfrak{M}}{D} = f r \frac{\alpha}{\sin \alpha}$ oder

$$2) \quad \mathfrak{M} = f D r \frac{\alpha}{\sin \alpha} = f D r \frac{\widehat{AB}}{AB}.$$

Hiernach ist beim neuen Zapfen, weil wegen des teilweise keilförmigen Einpressens die Summe der Normaldrücke größer ist als D ,

Fig. 318.



auch die Reibung größer als beim eingelaufenen Zapfen, und zwar im Verhältnis des Bogens zur Sehne.

$$\alpha = 0 \text{ gibt wieder } \mathfrak{M} = Dfr;$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi \text{ aber } \mathfrak{M} = Dfr \frac{1}{2}\pi = 1,57 Dfr.$$

Die Reibungswiderstände geben, nach senkrechter oder wagerechter Richtung zerlegt, Seitenkräfte, die in senkrechter Richtung die Summe Null liefern, in wagerechter Richtung aber nicht. Daher besteht bei vorstehender Ableitung ein ähnlicher kleiner Verstoß gegen die Gleichung der wagerechten Kräfte wie bei Benutzung der Figur 315 zur schnellen Entwicklung der Gleichung 1.

Eine diesen Umstand berücksichtigende schärfere, aber umständlichere Behandlung ergibt wiederum, daß für f eigentlich $\sin \varphi$ gesetzt werden müßte.

Beim Tragzapfen im Keillager (Fig. 319) werden die beiden Reibungswiderstände fN und fN_1 wiederum die Zapfen einseitig nach rechts hinüber drücken, infolgedessen N_1 etwas $> N$ sein muß. Nimmt man aber trotzdem annäherungsweise $N_1 = N$ an, so ergibt sich in lotrechter Richtung

$$2N \sin \delta = D, \text{ also } 2N = \frac{D}{\sin \delta},$$

$$3) \quad \text{und } \mathfrak{M} = 2fNr = \frac{Dfr}{\sin \delta}.$$

Der Ersatz des eingelaufenen zylindrischen Lagers (Gl. 1) durch das Keillager bewirkt daher, daß wegen des keilförmigen Einpressens \mathfrak{M} größer wird als beim zylindrischen Lager, daß man aber, wie bei der Bewegung in Keilnuten (S. 241), statt f einfach den größeren Wert $f : \sin \delta$ zu setzen hat. $\delta = 30^\circ$ gibt $f : \sin \delta = 2f$, entsprechend einer Verdoppelung des Reibungsmomentes.

Mit Rücksicht auf den Unterschied zwischen N und N_1 muß stattfinden

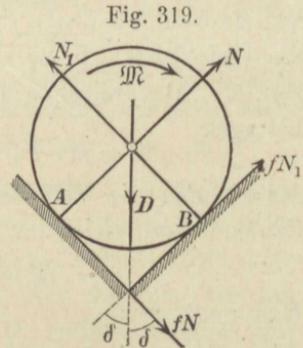
1. in wagerechter Richtung

$$0 = N \cos \delta + fN \sin \delta - N_1 \cos \delta + fN_1 \sin \delta;$$

2. in senkrechter Richtung

$$D = N \sin \delta - fN \cos \delta + N_1 \sin \delta + fN_1 \cos \delta;$$

3. $\mathfrak{M} = f(N + N_1)r.$



Die ersten beiden Gleichungen lassen sich ordnen:

$$0 = -(N_1 - N) \cos \delta + (N + N_1) f \sin \delta$$

$$D = (N_1 - N) f \cos \delta + (N + N_1) \sin \delta.$$

Multipliziert man die erstere dieser Gleichungen mit f , so entsteht durch Zusammenzählen

$$D = (N + N_1) (1 + f^2) \sin \delta \text{ und nach Gleichung 3}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Dfr}{\sin \delta (1 + f^2)}.$$

$$\text{Darin ist } \frac{f}{1 + f^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sec^2 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \varphi = \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2 \varphi}{2},$$

$$\text{also } \mathfrak{M} = Dr \frac{\sin 2 \varphi}{2 \sin \delta}.$$

Bei $f = 0,1$ kann aber f^2 gegen 1 vernachlässigt oder $\sin 2 \varphi = 2 \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt werden, so daß dann wieder als Annäherung Gleichung 3 entsteht.

Dem Nachteile der Vergrößerung der Reibung durch Benutzung des Keillagers steht der Vorteil gegenüber, daß der Zapfen im Keillager auch nach erfolgter Abnutzung immer noch eine genaue Führung findet, während er im eingelaufenen zylindrischen Lager um das Maß des Spielraumes hin und her schleudern kann. Das Keillager wird deshalb besonders bei Meßinstrumenten angewandt, bei denen es mehr auf sichere Lage als auf Kleinheit der Reibung ankommt.

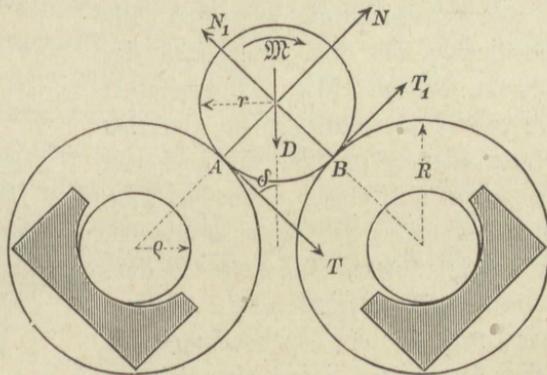
Die Lagerung auf Reibungsrollen (Fig. 320) von möglichst großem Halbmesser R , welche sich um Zapfen vom Halbmesser ϱ drehen, hat den Zweck der Verminderung des Reibungsmomentes.

Der obere Zapfen vom Halbmesser r erfährt von den Rollen bei A und B die Normaldrücke N und N_1 . An den Berührungsstellen A und B findet aber kein Gleiten statt, vielmehr haben die Rollen dort dieselbe Umfangsgeschwindigkeit wie die Zapfen; daher treten an diesen

Stellen nicht die Gleitwiderstände fN und fN_1 auf, sondern Reibungswiderstände T und T_1 , die im allgemeinen kleiner sind. Es wird

$$\mathfrak{M} = (T + T_1) r.$$

Fig. 320.



Die Kräfte T und T_1 wirken auf die Rollen in entgegengesetztem Sinne wie auf den Zapfen und bewirken die gleichmäßige Drehung der Rollen, haben also deren Zapfenreibung zu überwinden.

Die tatsächliche Ungleichheit von N und N_1 würde in derselben Weise sich geltend machen wie im vorigen Falle; sie hat auf das wirkliche Ergebnis keinen nennenswerten Einfluß, soll daher der Einfachheit wegen vernachlässigt werden.

Die Kräfte $N = N_1$ bilden (ebenfalls umgekehrt) die Zapfen drücke in den Lagern der Rollen, erzeugen dort die Reibungsmomente $Nf\varrho$ und müssen durch die Momente der Umfangskräfte $T = T_1$ überwunden werden. Daher wird $TR = Nf\varrho$, $T = Nf\frac{\varrho}{R}$ und $\mathfrak{M} = 2 Nf\frac{\varrho}{R}r$. Am Zapfen liefert aber die Gleichung der lotrechten Kräfte wieder $D = 2 N \sin \delta$, wenn δ der Winkel ist, den die Tangenten in A und B mit der lotrechten Mittellinie bilden; hiernach wird

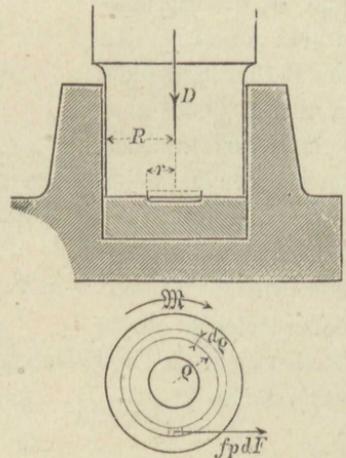
$$4) \quad \mathfrak{M} = \frac{Dfr}{\sin \delta} \frac{\varrho}{R}.$$

Damit dies kleiner werde als Dfr , muß $\varrho : R < \sin \delta$ sein. $\sin \delta = \frac{1}{2}$ und $\frac{\varrho}{R} = \frac{1}{6}$ geben beispielsweise $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} Dfr$.

b) Reibungsmoment eines Stützzapfens.

Beim Stütz- oder Spurzapfen (Fig. 321) wirkt der Druck D in der Achsenrichtung desselben. Die Berührung mit der Spurplatte des Lagers erfolge (der Allgemeinheit wegen) in einer Ringfläche von den Halbmessern r und R . Zeichnet man im Grundriß einen schmalen Ring vom Halbmesser ϱ und der Breite $d\varrho$, so kommt auf ein Teilchen dF desselben eine Druckkraft $p \cdot dF$, wenn p der Druck für die Flächeneinheit ist. Diese Druckkraft liefert eine Reibung $f p \cdot dF$ und ein Reibungsmoment $d\mathfrak{M} = f p \cdot dF \cdot \varrho$. Da man annehmen darf, daß im ganzen Umkreise dieses Ringes der Einheitsdruck p denselben

Fig. 321.



Wert haben wird, so kann man dF sogleich als die Ringfläche $2\varrho\pi \cdot d\varrho$ einführen und erhält als gesamtes Reibungsmoment

$$1) \quad \mathfrak{M} = 2\pi f \int_r^R p \varrho^2 d\varrho.$$

Außerdem muß, da der schmale Ring den Druck $p 2\pi\varrho \cdot d\varrho$ aufnimmt,

$$2) \quad D = 2\pi \int_r^R p \varrho \cdot d\varrho \text{ sein.}$$

Beim neuen Zapfen nimmt man den Druck p überall gleich an,

daher $p = \frac{D}{(R^2 - r^2)\pi}$ und

$$3) \quad \mathfrak{M} = \frac{2Df}{R^2 - r^2} \int_r^R \varrho^2 d\varrho = \frac{2}{3} Df \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Ist die Berührungsfläche ein voller Kreis ($r = 0$), so wird

$$4) \quad \mathfrak{M} = \frac{2}{3} DfR,$$

also kleiner als beim Tragzapfen. Es kommt dies daher, daß, während beim Tragzapfen die ganze Reibung Df an dem vollen Halbmesser als Hebelarm wirkt, hier die Hebelarme der Reibungswiderstände im allgemeinen kleiner sind als der äußere Halbmesser.

Beim eingelaufenen Zapfen sind die Verhältnisse noch günstiger. Mit der gleitenden Bewegung des Zapfens ist nämlich eine Abnutzung, ein fortwährendes Abschleifen, verbunden, und, da die Gleitgeschwindigkeit nach dem äußeren Umfange hin zunimmt, so wird auch hier die Abnutzung am größten ausfallen; infolgedessen wird das Aufliegen des Zapfens auf der Spurplatte nach einiger Zeit nicht mehr ein gleichmäßiges sein; es wird der Einheitsdruck von innen nach außen hin abnehmen. Ueber die Veränderlichkeit von p wird die Annahme gemacht, daß p mit ϱ umgekehrt proportional sei, daß man

$$5) \quad p = \frac{p_1}{\varrho}$$

setzen könne, worin p_1 der Einheitsdruck im Abstand Eins von der Drehachse ist. Dann wird aus Gleichung 2:

$$D = 2\pi p_1 \int_r^R d\varrho = 2\pi p_1 (R - r),$$

aus Gleichung 1 aber:

$$\mathfrak{M} = 2\pi f p_1 \int_r^R \varrho \cdot d\varrho = \pi f p_1 (R^2 - r^2).$$

Teilt man diese Gleichung durch die vorhergehende, so wird

$$\mathfrak{M} : D = 1/2 f (R + r) \text{ also}$$

$$6) \quad \mathfrak{M} = 1/2 D f (R + r).$$

Es ist jetzt offenbar $1/2 (R + r)$ der mittlere Hebelarm der Reibung. Für volle Kreisfläche ($r = 0$) wird

$$7) \quad \mathfrak{M} = 1/2 D f R.$$

Beim kegelförmigen Stützapfen (Fig. 322) möge die Berührungsfläche sich von C bis B erstrecken. Ist dF ein Flächenteilchen derselben mit dem Einheitsdrucke p , so wird $\mathfrak{M} = f \int p \cdot dF \cdot \varrho$. Da aber $p \cdot dF$ mit der Wagerechten den Winkel δ bildet, so ist

$$D = \sin \delta \int p \cdot dF.$$

Das Flächenteilchen dF bildet mit der wagerechten Grundrißebene den Winkel $90^\circ - \delta$; nennt man dF' den Grundriß von dF , so wird $dF' = dF \cos (90^\circ - \delta) = dF \sin \delta$. Hiernach wird

$$D = \int p \cdot dF' \quad \text{und}$$

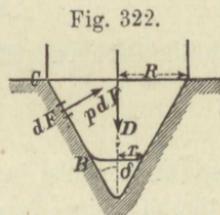
$$\mathfrak{M} = \frac{f}{\sin \delta} \int p \cdot dF' \varrho.$$

Da nun dF' mit $2\varrho \pi \cdot d\varrho$ eingeführt werden kann, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi f}{\sin \delta} \int_r^R p \varrho^2 p \varrho \quad \text{und}$$

$$D = 2\pi \int_r^R p \varrho \cdot d\varrho.$$

Vergleicht man diese Werte mit den Gleichungen 1 und 2, so erkennt man, daß der Ausdruck für D völlig mit Gleichung 2 übereinstimmt, während in dem Werte für \mathfrak{M} nur f mit $f : \sin \delta$ vertauscht ist als Folge des kegelförmigen Einpressens, wie in allen ähnlichen Fällen. Daher muß sowohl in den Gleichungen 3 und 4 für einen neuen Zapfen, sowie auch in den Gleichungen 6 und 7 für den eingelaufenen Zapfen f vertauscht werden mit $f : \sin \delta$.

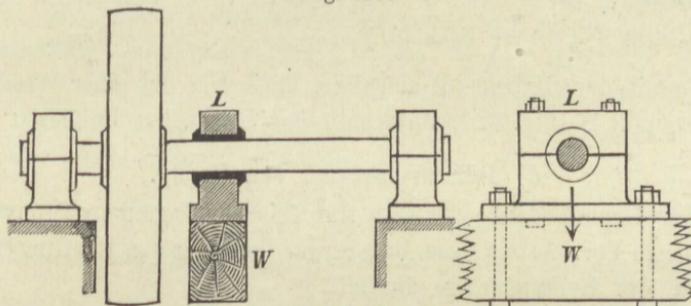


Der kegelförmige Zapfen verursacht also mehr Reibung als der zylindrische Stützzapfen, gewährt aber auch, wie das Keillager, den Vorteil einer genauen Führung, die der Stützzapfen mit ebener Reibungsfläche nicht bietet, weil an der zylindrischen Seitenwand des Lagers sich Spielraum befindet oder bilden muß.

c) Hirnsche Reibungswage.

Die vom elsässischen Ingenieur Adolf Hirn im Jahre 1854 ersonnene Vorrichtung (Fig. 323 und 324) dient zur Ermittlung

Fig. 323.



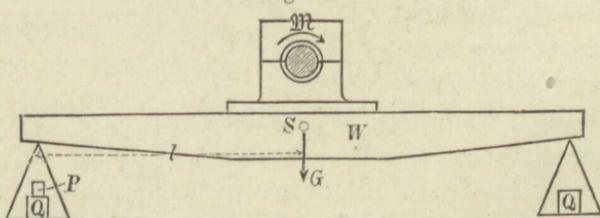
der Reibungsziffer f eines Zapfenlagers durch Abwägen. Auf einer Welle, die von einer Maschine etwa mittels Riemenscheiben in gleichmäßige Drehung versetzt wird, befindet sich der zu untersuchende Lagerkörper L , der aber nicht etwa zur Stützung der Welle dient, sondern an der Welle hängt. Unten an dem Lagerkörper ist ein Wagebalken W befestigt, an dessen gleichen Armen Wagschalen hängen. Die Wagschalen werden mit Gewichten beschwert, so daß der für die Versuche gewünschte Zapfendruck D entsteht, welcher das Reibungsmoment $\mathfrak{M} = Dfr$ erzeugt. Dieses Moment, welches

vom Lager auf den Zapfen als ein der Drehung entgegengerichtetes Moment ausgeübt wird,

hat nach dem

Gesetze der Wechselwirkung das Bestreben, den Lagerkörper bei der Drehung

Fig. 324.



mitzunehmen, den Wagebalken also schräg zu stellen. Diesem Bestreben wirkt man entgegen, indem man in der linksseitigen Wagschale ein Uebergewicht P anbringt (Fig. 324) und dieses so regelt, daß der Balken wagerecht einspielt. Der Zapfendruck beträgt $D = 2Q + P + G$, wenn G das Eigengewicht des Lagers mit dem Balken bezeichnet. Das Reibungsmoment beträgt also $\mathfrak{M} = (2Q + P + G)fr$ und wird gemessen durch das Moment des Uebergewichtes P , d. h. $\mathfrak{M} = Pl$. Dies ergibt

$$f = \frac{Pl}{(2Q + P + G)r}.$$

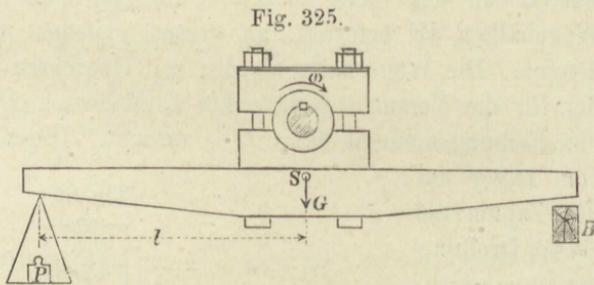
Beispiel: Bei $l = 1$ m, $r = 0,05$ m, $G = 100$ kg, $Q = 2000$ kg sei das Uebergewicht $P = 10$ kg; dann ist $f = \frac{10 \cdot 1}{(4000 + 110) 0,05} = 0,049$.

Damit der Balken gut einspiele, muß, wie bei einer Wage, der Schwerpunkt S (Fig. 324) unterhalb der Drehachse liegen.

d) Der Bremszaum von Prony.

Der Grundgedanke der vom französischen Ingenieur Prony 1821 ersonnenen Vorrichtung zum Messen der Leistung von Kraftmaschinen ist dem der Reibungswage ähnlich.

Man hebt nämlich die Triebkraft der zu untersuchenden Maschine durch einen Reibungswiderstand auf und mißt diesen mittels einer Wage. Da es in diesem Falle nur darauf ankommt, den ganzen Betrag der Reibung zu messen, es aber nicht nötig ist, diese, wie bei der Reibungswage, nachträglich in die Faktoren f und D zu zerlegen, so ist es auch nicht erforderlich, die Reibung durch eine Belastung zu erzeugen; vielmehr kann man sie einfacher durch Zusammenschrauben zweier Brems-



klötze hervorbringen (Fig. 325). Auf der Welle der Kraftmaschine befestigt man eine Bremscheibe und bringt auf dieser den Bremszaum an, dessen Schrauben vorläufig schwach angezogen werden. Dann setzt man die Kraftmaschine, etwa eine Dampfmaschine, allmählich in Gang und zieht die Schrauben stärker an; die an dem

Umfange der Scheibe entstehende Reibung hat nun das Bestreben, den Zaum mitzunehmen, infolgedessen sich der Wagebalken unten rechts auf eine als Hindernis dienende Schwelle B legt. Man bringt sodann die Dampfmaschine in den Zustand, in welchem sie beim regelrechten Betrieb arbeiten soll, zieht also die Bremschrauben stärker an, wenn die Welle zu schnell läuft, und umgekehrt. Hat man auf diese Weise erreicht, daß die Welle die vorgeschriebene Zahl von n Umdrehungen in der Minute ausführt, so wird jetzt offenbar, weil ein regelmäßiger Gang stattfindet, die ganze Arbeit der Maschine durch den Bremszaum in Reibung umgewandelt. Belastet man nun die linksseitige Wagschale mit einem Gewichte P (einschließlich der Wagschale) in dem Maße, daß der Balken sich rechts von der Schwelle abhebt und wagerecht einspielt, so ist Pl das Maß des an der Scheibe wirkenden Reibungsmomentes \mathfrak{M} . Die sekundliche Arbeit desselben beträgt mithin (nach S. 268)

$\mathfrak{M}\omega = Pl\omega$, oder, weil $\omega = \frac{2n\pi}{60}$ ist und 75 mkg/sek eine Pferdestärke ausmachen, ist die Anzahl N der Pferdestärken der Maschine

$$N = Pl \frac{n\pi}{30 \cdot 75}.$$

Beispiel: Ist $l = 2,5 \text{ m}$; $P = 200 \text{ kg}$; $n = 30$, so wird

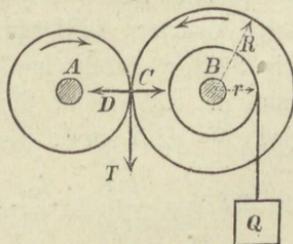
$$N = \frac{200 \cdot 2,5 \cdot 30 \cdot \pi}{30 \cdot 75} = 20,9 \text{ PS}.$$

Auch bei dieser Vorrichtung ist es wünschenswert, dem Wagebalken Standsicherheit zu geben, d. h. den Schwerpunkt S unterhalb der Achse anzuordnen, was hier erreicht ist, indem der schwere Balken sich unterhalb der Bremsklötze befindet.

e) Reibungsräder.

Die Reibung zwischen zwei gegeneinander gepreßten Scheiben kann benutzt werden, um die Drehung der einen auf die andere zu übertragen. A (Fig. 326) sei die treibende, B die mitzunehmende Welle. Auf beiden bringt man Scheiden an, die sich bei C berühren. Ließe man die Scheiben mittels zahnartiger Vorsprünge ineinander greifen, so würde dadurch eine Mitnahme der Welle B erzwungen. Läßt man aber

Fig. 326.



die Vorsprünge fort, so kann auch die Reibung die Wirkung der Zähne ersetzen.

An der Welle B möge ein Widerstandsmoment \mathfrak{M} der Drehung entgegenwirken; diese kann man durch eine Last Q , welche an einer Trommel vom Halbmesser r emporgewunden wird, zur Darstellung bringen, indem man $\mathfrak{M} = Qr$ setzt. Zur Ueberwindung des Momentes ist eine Umfangskraft T bei C erforderlich, für welche $TR = Qr$ also $T = Qr : R$ wird. Ist nun D der Druck zwischen den Scheiben, so würde demselben beim Gleiten die Reibung fD entsprechen. Hier soll aber kein Gleiten stattfinden, vielmehr sollen die Scheiben stets gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben. Unter diesen Umständen ist dann die zur Wirkung kommende Reibung $T \leq fD$, mithin

$$1) \quad Q \frac{r}{R} \leq fD \quad \text{oder} \quad D \geq \frac{Q}{f} \frac{r}{R}.$$

Das Zeichen $=$ in Gleichung 1 würde auch noch für ein Gleiten der Scheiben aufeinander gelten; soll dies ausgeschlossen sein, also ein sicheres Mitnehmen der Welle B erfolgen, so muß für D das Zeichen $>$ angewendet werden.

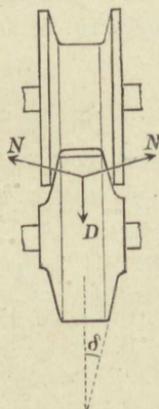
Beispiel: Ist das Widerstandsmoment $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0,2 = 20$ mkg, $R = 0,6$ m, $f = 0,1$ für Gußeisen auf Gußeisen, so wird $D > \frac{20}{0,1 \cdot 0,6} = 333$ kg. Bei $D = 333$ kg würde leicht noch ein Gleiten eintreten können, so daß die Last Q abwärts gehen könnte; man muß D um ein gewisses Maß > 333 kg nehmen, damit man Sicherheit gegen Zufälligkeiten hat.

Der Druck D kann nur durch die Zapfenlager auf die Räder übertragen werden, erzeugt daher Zapfenreibung, deren Ueberwindung Arbeit kostet. Man muß suchen, das erforderliche D klein zu machen; dies wird erreicht, indem man die Reibungsräder nicht einfach zylindrisch gestaltet, sondern keilförmig ineinander greifen läßt (Fig. 327), wodurch eine Vergrößerung der Reibung entsteht. Ist wieder der halbe Keilwinkel δ , so wird $D = 2N \sin \delta$, die mögliche Reibung

$$2) \quad 2fN = \frac{Df}{\sin \delta} > \frac{Qr}{R} \quad \text{oder} \quad D > Q \frac{\sin \delta}{f} \frac{r}{R},$$

d. h. kleiner als nach Gleichung 1. Daß man bei der jetzigen

Fig. 327



Anwendung der sog. Keilnutenräder mehrere Keilnuten nebeneinander anordnet, hat mit der Wirkung nichts zu tun.

Beispiel: Macht man $2\delta = 30^\circ$, so ist $\sin \delta = 0,26$, und es wird mit den sonstigen Zahlen des vorhergehenden Beispiels der untere Grenzwert von D : $333 \cdot 0,26 = 87 \text{ kg}$, also nur etwas mehr als $\frac{1}{4}$ des vorigen.

f) Seilreibung.

1. Ueber einen Zylinder vom Halbmesser r , der sich gleichförmig um eine Achse O dreht (Fig. 328), sei ein biegsames Seil, ein biegsamer Faden, Riemen oder dergl. gelegt, bei A befestigt und bei B am freien Ende mit einer Kraft S_1 gespannt, dann drückt das Seil gegen den Zylinderumfang; an einem Bogenstückchen $ds = r \cdot d\vartheta$ entsteht eine Normalkraft dN und ein Gleitwiderstand $f \cdot dN$, der auf den sich rechts drehenden Zylinder nach links, auf das Seil aber nach rechts wirkt, das Seil also mitzunehmen strebt. In dem bei A befestigten Seilstücke möge eine Spannkraft S_2 herrschen, dann befindet sich das Seil unter Einwirkung der an ihm auftretenden Kräfte S_1, S_2 , Gruppe $[dN]$ und Gruppe $[f \cdot dN]$ im Gleichgewichte, so daß die Momentengleichung in bezug auf O liefert (weil die dN -Kräfte durch O gehen): $S_1 r + r f \sum dN = S_2 r$, d. h. die gesamte Seilreibung $f \sum dN$ wird gemessen durch den Unterschied der Seilkräfte $S_2 - S_1$. Um also die gesamte Seilreibung zu finden, müssen wir $S_2 - S_1$ zu ermitteln suchen.

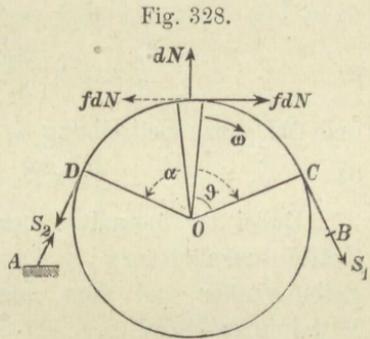


Fig. 328.

Schneiden wir aus dem Seile das Bogenstückchen $ds = r \cdot d\vartheta$ heraus (Fig. 329), so wirken außer den Kräften dN und $f \cdot dN$ noch die Spannkraften S und $S + dS$. Zerlegt man sämtliche Kräfte \parallel und \perp zu dN , so verlangt das Gleichgewicht

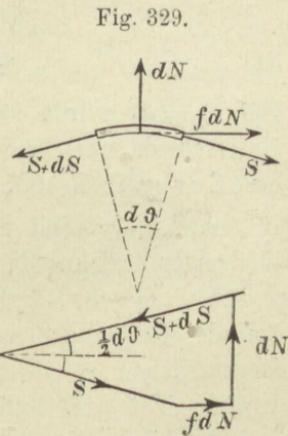


Fig. 329.

$$dN = (S + S + dS) \sin \frac{1}{2} d\vartheta \quad \text{und} \\ f \cdot dN = dS \cos \frac{1}{2} d\vartheta,$$

oder, weil $\sin^{1/2} d\vartheta = 1/2 d\vartheta$, $\cos^{1/2} d\vartheta = 1$ und $dS \cdot d\vartheta$ unendlich klein zweiter Ordnung ist:

$$\begin{aligned} dN &= S \cdot d\vartheta \quad \text{und} \\ f \cdot dN &= dS, \quad \text{mithin} \\ f \cdot d\vartheta &= dS : S. \end{aligned}$$

Durch Integration entsteht:

$$f \cdot \vartheta = \ln S + C.$$

$\vartheta = 0$ entspreche dem Punkte C (Fig. 328) und der Spannkraft S_1 , $\vartheta = \alpha$ dem Punkte D und der Spannkraft S_2 , dann wird $f\alpha = \ln S_2 + C$; $0 = \ln S_1 + C$, mithin aus beiden:

$$2) \quad f\alpha = \ln \left(\frac{S_2}{S_1} \right) \quad \text{oder} \quad \frac{S_2}{S_1} = e^{f\alpha},$$

und die ganze Seilreibung

$$3) \quad S_2 - S_1 = S_1 (e^{f\alpha} - 1).$$

Dabei ist besonders bemerkenswert, daß das Verhältnis der Kräfte unabhängig ist von r , nur abhängig von der Reibungsziffer und dem dem umspannten Bogen entsprechenden Mittelpunktswinkel α .

Wenn der Zylinder ruht, so wird die Summe aller zur Wirkung kommenden Reibungswiderstände $\int dT$ ebenfalls durch $S_2 - S_1$ gemessen; es ist dann aber

$$S_2 : S_1 < e^{f\alpha} \quad \text{und auch}$$

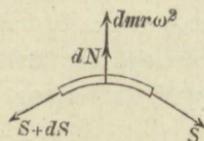
$$4) \quad S_2 - S_1 < S_1 (e^{f\alpha} - 1).$$

Für $S_2 = S_1$ würde keine Reibung ausgeübt werden. Bei einem Unterschiede zwischen S_1 und S_2 bezeichnen wir mit S_2 stets die größere der Kräfte.

2. Ist das Seil nicht in Ruhe, sondern wird es mit gleichbleibender Geschwindigkeit $v = r\omega$ über den ruhenden oder mit anderer Geschwindigkeit sich drehenden Zylinder fortgezogen, so heben sich an einem Bogenteilchen $r \cdot d\vartheta$ die normal gerichteten Kräfte nicht auf, sondern es geschieht dies erst, nachdem die Zentrifugalkraft $dm \cdot r\omega^2$ hinzugefügt ist (Fig. 330). Es wird dann

$$dN = S \cdot d\vartheta - dm \cdot r\omega^2.$$

Fig. 330.



Darin ist $dm = \frac{\gamma}{g} Fr \cdot d\vartheta$, wenn F der Querschnitt, γ die Dichte des Fadens, Riemens oder Seiles. Die andere Gleichung $f \cdot dN = dS$ bleibt unverändert; weil nun

$$d\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) = dS,$$

so wird

$$f \cdot d\vartheta = \frac{d\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right)}{S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2},$$

$$\text{also } f\vartheta = \ln\left(S - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) + C,$$

oder zwischen Grenzen genommen:

$$f\alpha = \ln\left(\frac{S_2 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2}{S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2}\right).$$

Daraus entsteht:

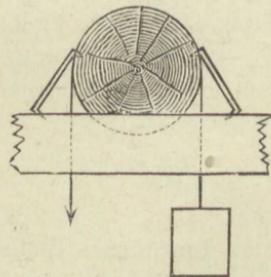
$$S_2 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) e^{f\alpha}, \text{ oder}$$

$$5) \quad S_2 - S_1 = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2\right) (e^{f\alpha} - 1).$$

In den meisten Fällen ist der Einfluß des Gliedes $\frac{\gamma}{g} Fr^2 \omega^2$ unbedeutend; nur bei großen Geschwindigkeiten $r\omega$ verdient er Berücksichtigung (vgl. S. 285).

Fig. :31.

Beispiel: Ein runder Baum sei auf einer Schwelle festgelegt (Fig. 31) und außerdem durch Zimmermannshaken gehalten. Ein Seil sei derartig hinübergeschlungen, daß $\alpha = \pi$. An der rechten Seite hänge eine Last von 1000 kg. Es soll berechnet werden, mit welcher Kraft links gezogen werden muß, um die Last hinauf zu ziehen. Da außer der Last noch die Reibung überwunden werden muß, so wird links die größere Kraft S_2 wirken, während rechts $S_1 = 1000$ kg ist. Die Reibungsziffer werde für ein Hanfseil auf Holz zu $f = 1/3$ angenommen.



$$S_2 : S_1 = e^{1/3 \pi}.$$

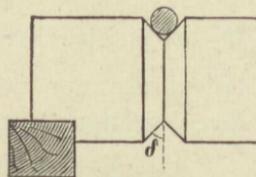
Nimmt man von beiden Seiten der Gleichung die Briggschen Logarithmen, so wird $\log \left(\frac{S_2}{S_1} \right) = \frac{1}{3} \pi \log e = 1,047 \cdot 0,434 = 0,4544$. Dazu gehört eine Zahl $2,85 = S_2 : S_1$. Mithin wird $S_2 = 2850 \text{ kg}$; die Seilreibung beträgt 1850 kg , ist also sehr groß. Diese Vorrichtung eignet sich daher nicht als Aufzugmaschine, um so besser aber zum Hinablassen einer Last, wobei die Reibung günstig wirkt. Beim Hinablassen wirkt die kleinere Kraft S_1 auf der linken Seite, während die Last jetzt $S_2 = 1000 \text{ kg}$ wird. Wiederum ist $e^f \alpha = 2,85$, daher $S_1 = 1000 : 2,85 = 351 \text{ kg}$. Jetzt kommt also die Seilreibung im Betrage von $1000 - 351 = 649 \text{ kg}$ der Hinablassenden Kraft zu Hilfe. Die Zugkraft an der linken Seite darf zwischen den weiten Grenzen 351 und 2850 kg sich bewegen, ohne daß ein vorhandener Ruhezustand gestört werden würde. Da die Reibung das Bestreben hat, den Balken zu drehen, so muß er hiergegen sicher befestigt werden.

Zum Festhalten oder bequemen Hinablassen schwerer Lasten findet eine derartige Vorrichtung vielfache Anwendung. Die Reibung wird noch bedeutend vergrößert, wenn man den Winkel α des umspannten Bogens vergrößert. Man kann dadurch jedes beliebige Verhältnis $S_2 : S_1$ erreichen. Wir wollen berechnen, wie groß α werden muß, wenn $S_2 : S_1 = 1000$ sein soll, d. h. wenn man durch Anwendung von $S_1 = 1 \text{ kg}$ die Last von 1000 kg hinablassen will. Es muß $e^{1/3 \alpha} = 1000$, d. h. in Logarithmen $1/3 \alpha \cdot 0,434 = 3$; oder $\alpha = 9 : 0,434 = 20,7$ sein. Da nun eine Umwicklung einem Winkel 2π entspricht, so muß die Zahl der Umwickelungen $n = 20,7 : 2\pi = 3,3$ betragen. Wenn man also das Seil 3mal und dann noch $1/3$ oder vielleicht $1/2$ mal umgelegt, so wird das Ziel erreicht sein. Bei öfterem Umschlagen genügt schließlich das Gewicht des überhängenden Seilendes zum Festhalten der Last.

Es ist für die Wirkung gleichgültig, ob der umspannte Bogen α sich auf einem Zylinder befindet, oder ob das Seil nacheinander um mehrere Zylinder geschlungen ist; in letzterem Falle ist α die Summe der umspannten Bögen. Auf diesem Grundgedanken beruhen die Rettungsvorrichtungen bei Feuersgefahr, mittels deren Menschen aus einem brennenden Hause hinabgelassen werden können.

Erheblich vergrößert wird die Seilreibung noch, wenn man das (runde) Seil in einer Keilrinne (Fig. 332) legt, weil dann $f : \sin \delta$ an Stelle von f zu setzen ist.

Fig. 332.



g) Bandbremse.

Ein dünnes Bandeisen, welches man um einen Zylinder spannt, um an diesem einen Reibungswiderstand zu erzeugen, heißt Bandbremse und findet als Bandbremse bei Winden vielfache Anwendung zum gleichmäßigen Hinablassen von Lasten. An einer Windetrommel

vom Halbmesser r (Fig. 333) hänge das Gewicht Q . Mit der Trommel fest verbunden ist die Bremscheibe vom Halbmesser R . Das umgelegte Bremsband sei mit dem einen Ende am Gestelle befestigt, z. B. an dem Drehpunkte A des Bremshebels, das andere Ende des Bandes sei mit dem Hebel verbunden. Am Ende des Hebels wirke aufwärts die Kraft K , welche in dem Band eine Spannkraft S_1 auf der rechten Seite hervorruft. Bei der Drehung links herum entsteht an der Scheibe eine der Drehung entgegen wirkende Bandreibung $S_2 - S_1 = S_1 (e^{f\alpha} - 1)$, welche, mit R multipliziert, dem Momente Qr der Last gleich sein muß. Ist nun b der Hebelarm von S_1 (aber nicht als Länge am Hebel, sondern rechtwinklig zu S_1 gemessen), so wird $Ka = S_1 b$

$$\text{mithin } K = \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1} \frac{r}{R} \frac{b}{a}.$$

Beispiel: Der Winkel des umspannten Bogens sei $\alpha = 0,7 \cdot 2\pi$, die Reibungsziffer für Bandeseisen auf gußeiserner Scheibe $f = 0,18$, $r : R = 1/2$, $a : b = 10$; dann wird $e^{\alpha f} = 2,21$ und

$$K = \frac{Q}{2,21 - 1} \frac{1}{2} \frac{1}{10} = \frac{Q}{24,2},$$

d. h. mit einer Kraft $K = 10 \text{ kg}$ kann man eine Last $Q = 242 \text{ kg}$ hinablassen.

Es ist rätlich, von den beiden Kräften des Bandes die kleinere S_1 auf den Hebel wirken, die größere S_2 aber vom festen Gestell aufnehmen zu lassen.

h) Riemenscheiben.

Nützliche Anwendung findet die Seilreibung auch bei den Riemenscheiben, welche zur Uebertragung der Bewegung von einer Welle auf eine ihr parallele Welle dienen, wenn die Entfernung der Wellen so groß ist, daß eine unmittelbare Uebertragung mittels Reibungsräder oder Zahnräder nicht zweckmäßig erscheint (Fig. 334). Der biegsame

Fig. 333.

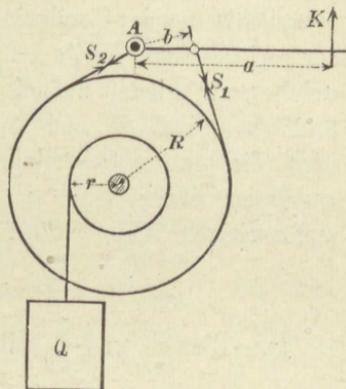
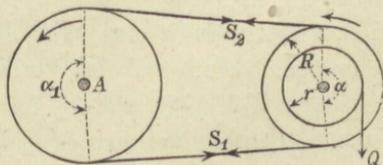


Fig. 334.



Körper, der um die Umfänge der Scheiben gelegt wird, ist hier meist ein Lederriemen. Die Welle A drehe sich links herum; der Riemen sei genügend angespannt, so daß er auf den Scheiben nicht gleitet, daß vielmehr beide Scheibenumfänge und der Riemen die übereinstimmende Geschwindigkeit v haben müssen. Der Drehung der rechtsseitigen Welle setze sich ein Widerstandsmoment entgegen, welches wir wieder auf die Form $\mathfrak{M} = Qr$ bringen wollen (vergl. S. 278). Sind S_2 und S_1 die Spannkraften der Riementeile, so wird die ganze Seilreibung an der rechtsseitigen Scheibe stets gemessen durch $S_2 - S_1$, und für gleichmäßige Drehung der rechtsseitigen Welle ist erforderlich

$$1) \quad S_2 - S_1 = Qr : R.$$

Da nun Riemen und Scheibe nicht aufeinander gleiten, so ist

$$2) \quad S_2 - S_1 \leq S_1 (e^{f\alpha} - 1),$$

oder durch Verbindung von Gleichung 1 und 2:

$$S_1 \geq Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1}, \quad \text{wofür wir schreiben wollen:}$$

$$3) \quad S_1 = Q \frac{r}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + \Delta S;$$

darin ist ΔS der Ueberschuß an Spannkraft, der wegen der Sicherheit gegen Gleiten nötig ist, dessen Größe aber nur durch Erfahrung bestimmt wird. Aus Gleichung 3 und 1 wird dann

$$S_2 = S_1 + \frac{Qr}{R} = \frac{Qr}{R} \left(\frac{1}{e^{f\alpha} - 1} + 1 \right) + \Delta S \text{ oder}$$

$$4) \quad S_2 = \frac{Qr}{R} \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} + \Delta S.$$

Die Größe α des Winkels des umspannten Bogens wirkt in günstigem Sinn auf die Verhinderung des Gleitens. Da nun die gleichen Kräfte S_1 und S_2 an beiden Scheiben wirken, die Winkel α und α_1 aber bei beiden Scheiben im allgemeinen ungleich sind, so muß von den beiden Winkeln α und α_1 stets der kleinere in Rechnung geführt werden.

Beispiel: Für Lederriemen auf Gußeisenscheiben setzt man $f = 0,28$, sind ferner die beiden Scheiben gleich und daher $\alpha = \pi$, so wird

$$e^{f\alpha} = e^{0,28\pi} = 2,41.$$

Ist nun $R = 0,6 \text{ m}$, $\mathfrak{M} = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ mkg}$, so wird

$$S_1 = \frac{20}{0,6} \frac{1}{1,41} + \Delta S = 23,64 \text{ kg} + \Delta S;$$

$$S_2 = 23,64 \cdot 2,41 + \Delta S = 56,97 \text{ kg} + \Delta S.$$

Wie bei den Reibungsrädern der Druck D , so verursachen hier die Spannkkräfte S_1 und S_2 Zapfenreibungswiderstände in den Lagern. In ähnlicher Weise wie dort D , können hier S_1 und S_2 vermindert werden, wenn man den Riemen durch eine runde Schnur ersetzt und die Scheibe mit einer keilförmigen Rinne versieht (Fig. 335), so daß infolge der Keilwirkung wiederum f mit $f : \sin \delta$ zu vertauschen ist. Man wähle δ so groß, daß das Seil sich in der Rinne nicht festklemme, mache also $\delta > \varphi$, damit das Seil beim Ablauen sich ohne erheblichen Widerstand aus der Rinne entfernt, nicht aber gewaltsam herausgezerrt werden muß.

Fig. 335.



Ist für Hanfseile in gußeisernen Rinnen $f = 1/3$, $\varphi = 18^\circ$, so ist $\delta = 30^\circ$ zulässig.

In den vorstehenden Rechnungen ist der Einfluß der Geschwindigkeit des Riemens auf Verminderung der Reibung nicht berücksichtigt. Für schnelllaufende Riemen ist an Stelle der Gleichung 4 auf S. 280 zu setzen (nach Gleichung 5, S. 281)

$$\left(S_1 - \frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2 \right) \left(\frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} \right) \geq S_2 - S_1 = Q \frac{r}{R}.$$

Dadurch kommt dann zu den Werten S_1 und S_2 nach Gleichung 3 und 4, S. 284 noch der Summand $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2$ hinzu.

Hat z. B. ein Riemen von $0,5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 3 \text{ qcm} = 0,0003 \text{ qm}$ Querschnitt eine Dichte von 900, so ist $\gamma F = 0,27 \text{ kg/m}$. Bei 15 m sekundl. Umfangsgeschwindigkeit wird dann $\frac{\gamma}{g} F r^2 \omega^2 = \frac{0,27 \cdot 15^2}{9,81} = 6,2 \text{ kg}$. Aus den Zahlen des vorstehenden Beispiels wird dann $S_1 = 23,64 + 6,2 + \Delta S$ und $S_2 = 57,37 + 6,2 + \Delta S$.

i) Seilrollen und Flaschenzüge.

Ist über eine Rolle (Fig. 336) ein völlig biegsamer Faden gelegt, der die Last Q trägt, so würde, wenn sich der Drehung der Rolle kein Widerstand entgegensetzte, zur gleichmäßigen Drehung kein Moment, also auch keine Seilreibung erforderlich sein, es

würde dann $K = Q$ hinreichen zum Hinaufziehen der Last. Nun findet aber ein Zapfendruck $D = Q + K$ statt, also ein Reibungsmoment $M = Df \frac{d}{2}$ (wenn d der Zapfendurchmesser), zu dessen Ueberwindung eine am Umfange der Rolle angreifende Kraft $\frac{M}{r} = Df \frac{d}{2r} = \frac{Q + K}{2r} fd$ nötig ist. Dies ist die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung Z . Diese Kraft kann von dem Seile nur durch die Seilreibung auf die Rolle übertragen werden, oder es ist $K - Q = \frac{K + Q}{2r} fd$. Daraus entsteht

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + \frac{fd}{2r}}{1 - f \frac{d}{2r}}$$

Zur Vereinfachung multiplizieren wir in Zähler und Nenner mit dem Zähler, erhalten

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + f \frac{d}{r} + \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}{1 - \left(\frac{fd}{2r}\right)^2}$$

und vernachlässigen nun den kleinen Wert $\left(\frac{fd}{2r}\right)^2$ gegen die Einheit, so daß genau genug

$$1) \quad \frac{K}{Q} = 1 + f \frac{d}{r} \text{ wird.}$$

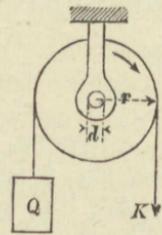
Man kann auch schreiben $K = Q + Z$, wo

$$2) \quad Z = Qf \frac{d}{r}$$

die auf den Rollenumfang bezogene Zapfenreibung, d. h. man kann (nach A. Ritter, Lehrbuch der technischen Mechanik, 2. Aufl., S. 386) die Sache so ansehen, als ob zu der Kraft $K_0 = Q$, die bei einer ideellen Rolle hinreichen würde, noch der Betrag Z hinzutreten muß.

Außer der Zapfenreibung muß aber auch noch der Seilbiegungswiderstand berücksichtigt werden. Wir haben bisher ein Seil angenommen, dessen Richtung stets mit der Richtung seiner

Fig. 336.



Spannkraft übereinstimmt, welches daher zu beiden Seiten der Rolle sich völlig tangential an diese legt. Wird aber ein wirkliches Seil aus der geraden Form in eine Krümmung übergeführt (Fig. 337), so müssen wegen der Längenverschiedenheit am inneren und äußeren Umfange die einzelnen Fasern, aus denen das Seil besteht, sich gegeneinander verschieben, und dieser Verschiebung setzt sich ein Widerstand entgegen. Auch beim Uebergang aus dem gekrümmten Zustand in den geraden ergeben sich die gleichen Widerstände.

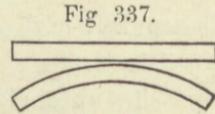
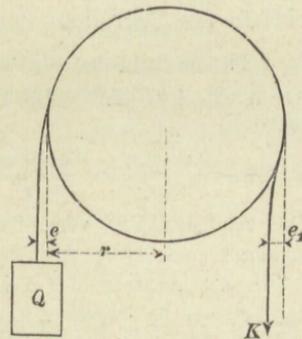


Fig. 337.

Soll nun an der linken Seite der Rolle die Last Q aufgewunden werden, so geht das Seil nicht plötzlich aus der geraden Tangente in die Krümmung $1:r$ über, sondern es verteilt sich diese Krümmungsänderung auf eine gewisse Länge, und die Folge davon ist, daß die Mittellinie des unteren Teils des Seiles um eine gewisse Größe e von der Tangente nach außen abweicht (Fig. 338). Auf der Ablaufseite erfolgt der Uebergang aus der Krümmung $1:r$ in die Krümmung Null ebenfalls allmählich mittels einer Gegenkrümmung, und es folgt daraus eine Abweichung der Kraft K von der Tangente um die Größe e_1 nach innen.

Fig. 338.



Die Biegungswiderstände haben dann dieselbe Einwirkung auf die Drehung der Rolle, als ob die Last Q an dem größeren Hebelarm $r + e$, die treibende Kraft K aber an dem kleineren Hebelarm $r - e_1$ angreift, wobei man die Abstände e und e_1 gleich annehmen darf; daher wird

$$K(r - e) = Q(r + e) \quad \text{oder}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{r + e}{r - e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}},$$

wofür man, weil $e:r$ wieder ein kleiner Wert ist, schreiben kann (vergl. S. 286)

$$\frac{K}{Q} = 1 + \frac{2e}{r}.$$

Nennt man $Q \cdot 2e : r = B$ den auf den Rollenumfang bezogenen Biegungswiderstand, so kann man den Einfluß dieses Umstandes wieder so auffassen, als ob zu $K_0 = Q$ wegen der unvollkommenen Biegsamkeit noch der Betrag B hinzutreten muß.

Die Größe e in Metern ist von der Dicke und Beschaffenheit des Seiles abhängig. Nach Versuchen ist für Seile von der Dicke δ (in Metern)

$$3) \quad e = 6,5 \delta^2, \quad \text{oder} \quad B = Q \frac{13 \delta^2}{r}.$$

Werden nun durch die Wirkung der Zugkraft K bei gleichförmiger Drehung der Rolle Zapfenreibung und Biegungswiderstand zugleich überwunden, so kann man

$$4) \quad K = Q + Z + B = Q \left(1 + f \frac{d}{r} + \frac{13 \delta^2}{r} \right) \quad \text{setzen, oder}$$

$$5) \quad K = Qw,$$

wenn $w = 1 + f \frac{d}{r} + \frac{13 \delta^2}{r}$ ist; w heißt dann die Widerstandsziffer für Seilrollen.

Ist die Seildicke $\delta = 0,02 \text{ m}$, der Rollenhalbmesser $r = 0,09 \text{ m}$, der Zapfendurchmesser $d = 0,03 \text{ m}$, $f = 0,12$, so wird

$$w = 1 + \frac{0,12 \cdot 0,03}{0,09} + \frac{13 \cdot 0,0004}{0,09} = 1 + 0,04 + 0,06 = 1,10.$$

Die Zapfenreibung vergrößert also die erforderliche Zugkraft um 4%, der Seilbiegungswiderstand um 6%; der Abstand der Seilmitte von der Tangente beträgt $e = 6,5 \cdot 0,0004 = 0,0026 \text{ m} = 2,6 \text{ mm}$. ✓

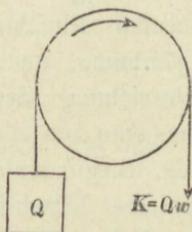
Um eine Last von 100 kg mittels einer solchen Rolle und eines solchen Seiles gleichmäßig emporzuziehen, ist eine Kraft $K = 110 \text{ kg}$ erforderlich (Fig. 339). Beim Hinablassen der Last vertauschen Q und K ihre Rollen; das Verhältnis beider bleibt aber w , daher wird dann

$$K = Q : w = 100 : 1,1 = 90,9 \text{ kg}.$$

Bei einem über eine Rolle geführten Seil ist die Spannkraft in dem sich abwickelnden Seilstücke die größere; das Verhältnis beider Spannkraften beträgt stets w .

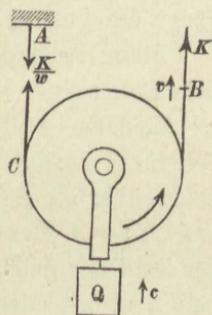
Streng genommen muß für jede gegebene Rolle mit Seil der Ausdruck w besonders berechnet werden. Da die Verhältnisse zwischen d , r und δ aber meist nicht sehr schwanken, wollen wir für fernere Beispiele mit Seilrollen $w = 1,1$ wählen.

Fig. 339.



Lose Rolle. Bei der sog. losen Rolle ist die Drehachse nicht fest gelagert; vielmehr ist das eine Ende des Seiles bei A (Fig. 340) befestigt; an dem anderen wird bei B gezogen, und die Last hängt an der Achse der Rolle. Beim gleichmäßigen Aufwärtsziehen erfährt die Rolle eine aufwärts gerichtete Verschiebung mit der Geschwindigkeit c , welche sich mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ im Punkte C derartig vereinigt, daß dort die Geschwindigkeit Null entsteht. Denn das Seil AC ruht, und da es auf der Rolle nicht gleitet, so muß auch der Punkt C der Rolle die Geschwindigkeit Null haben. Mithin ist $c = r\omega$. An der rechten Seite der Rolle addieren sich c und $r\omega$ zu der Geschwindigkeit $v = c + r\omega = 2c$, mit welcher der Punkt B des Seiles sich aufwärts bewegen muß. Die lose Rolle wälzt sich an dem Seile AC empor; die Bewegung ist eine Rollenbewegung, bei der die einzelnen Punkte der Rolle Zykloiden beschreiben.

Fig. 340.



Das Verhältnis der Spannkraften des Seiles muß wieder w betragen; ist also rechts im ablaufenden Stücke die Spannkraft K , so muß sie links $K:w$ sein. Nach S. 266 müssen auch bei dieser zusammengesetzten Bewegung die Kräfte K und $K:w$ der Last Q das Gleichgewicht halten. Mithin wird

$$Q = K \left(1 + \frac{1}{w} \right) = K (1 + 0,91) = 1,91 K.$$

Für eine ideelle Rolle ohne Widerstände ist $w = 1$, mithin $Q = 2K_0$. Der Wirkungsgrad (s. S. 261) ist, weil $v = 2c$:

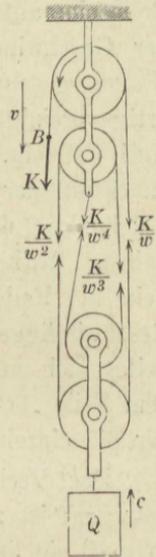
$$\eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{Q}{2K} = \frac{2K_0}{2K} = \frac{K_0}{K} = \frac{1,91}{2} = 0,955.$$

Flaschenzug. Ein Achsgestell mit einer oder mehreren Rollen heißt ein Kloben — auch eine Flasche (weil früher die Form der Kloben mit einer Flasche einige Ähnlichkeit hatte). Aus einer durch ein umgeschlungenes Seil oder Kette hergestellten Verbindung von festen und losen Kloben besteht der Flaschenzug. Sind mehrere Rollen in einem Kloben angeordnet, so bringt man diese jetzt meistens auf dieselbe Achse. In der Fig. 341 sind aber der Deutlichkeit wegen die Rollen untereinander gezeichnet.

Die in Wirklichkeit gleichen Rollen zeigen hier etwas verschiedene Größe. Die Zahl der Rollen in jedem Kloben beträgt in der Zeichnung 2, allgemein sei sie n . Der obere Kloben ist in dem Deckenbalken befestigt, an dem unteren Kloben hängt die Last Q .

Beim Aufwinden drehen sich (Fig. 341) sämtliche Rollen links herum. Die bei B angreifende Kraft sei K , dann ist die Spannkraft in dem rechtsseitigen Seilstücke $K:w$, sie vermindert sich nach dem Uebergange über die Rollen schrittweise auf $K:w^2$, $K:w^3$ und $K:w^4$. Das Verhältnis $v:c$ ist offenbar gleich der Zahl der Seilstücke, an denen der untere Kloben hängt, also 4 oder allgemein $2n$. Die Seile werden als sämtlich lotrecht angenommen, da die geringen Abweichungen keine Bedeutung haben. Rückt die Last um c aufwärts, so verkürzen sich die Seilstücke je um c , zusammen also um $4c$ bzw. $2nc$. Die gleiche Länge $v = 4c$ bzw. $v = 2nc$ muß daher bei B abwärts gezogen sein. Macht man durch einen Schnitt zwischen beiden Kloben den unteren frei, so verlangt dessen Gleichgewicht, daß die Last Q gleich der Summe der Kräfte der durchschnittenen Seile sei. Ohne Widerstände wären die Seilkräfte durchweg K_0 , daher $Q = 4K_0$ bzw. $= 2nK_0$, mithin ist wieder $v:c = Q:K_0$.

Fig. 341.



In Wirklichkeit ist

$$Q = K \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^4} \right) = \frac{K}{w^4} (w^3 + w^2 + w + 1)$$

$$6) \quad = \frac{K}{w^4} \frac{w^4 - 1}{w - 1} \text{ und ebenso (allgemein)}$$

$$7) \quad Q = \frac{K}{w^{2n}} \frac{w^{2n} - 1}{w - 1} : \text{mithin}$$

$$8) \quad \eta = \frac{Qc}{Kv} = \frac{w^{2n} - 1}{2n \cdot w^{2n} (w - 1)}$$

Beispiel: Es sei wieder $w = 1,1$, dann wird

$$\text{für } n = 2: \quad Q = 3,16 K, \quad \eta = 0,79,$$

$$\text{für } n = 4: \quad Q = 5,34 K, \quad \eta = 0,67.$$

Im ersten Falle werden 79% der aufgewendeten Arbeit nützlich verwertet, im zweiten nur 67%, während 21 bzw. 33% verloren gehen. Mit wachsender

Rollenzahl nimmt also der Wirkungsgrad ab. Es ist daher besser, eine schwere Last an zwei Flaschenzügen zu je 4 Rollen aufzuwinden, als an einem Flaschenzuge mit 8 Rollen.

Für das Hinablassen der Last ist durchweg w mit $1:w$ zu vertauschen.

Differenz-Flaschenzug. Der Differenz-Flaschenzug (Fig. 342) gestattet, mit nur 3 Rollen ein bedeutendes Uebersetzungsverhältnis $v:c$ zu erreichen. Die beiden Rollen des oberen Klobens bilden zusammen ein Stück, haben daher gleichen Drehungswinkel. Statt eines Seiles dient eine Kette. Wird bei B eine Kettenlänge v abwärts gezogen, so findet bei C ein Aufwärtswinden um v , bei D ein Abwärtswinden um $vr:R$, also zusammen eine Verkürzung der Kette zwischen beiden Kloben um $v\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ statt; da sich diese auf zwei Stücke verteilt, so hebt sich der untere Kloben um $c = \frac{v}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ mithin ist

$$9) \quad \frac{v}{c} = \frac{2}{1 - \frac{r}{R}}$$

Der Name des Flaschenzuges erklärt sich daraus, daß das Heben infolge der Differenz zwischen Aufwinden und Abwinden zustande kommt.

Ohne Widerstände würde in jedem Kettenstücke des unteren Klobens eine Kraft $\frac{1}{2}Q$ herrschen; dann ergibt (wenn K_0 die ideelle Triebkraft) die Momentengleichung des oberen Klobens $0 = K_0 R + \frac{1}{2}Qr - \frac{1}{2}QR$ oder $K_0 R = \frac{1}{2}Q(R - r)$, d. h.

$$10) \quad Q : K_0 = 2 : (1 - r : R) = v : c.$$

Macht man z. B. $r : R = 14 : 15$, so wird $Q : K_0 = v : c = 30$.

An der linken Seite der kleineren Rolle des oberen Klobens ist die Kette ohne Spannkraft, während auf der rechten Seite eine Spannkraft $= \frac{1}{2}Q$ herrscht; ebenso ist der Unterschied der Spannkraften der großen Rolle ein so erheblicher, daß die Seilreibung nicht genügen würde, um ein Gleiten zu verhindern. Aus diesem Grunde hat man statt des Seiles eine Kette gewählt, die zwischen zahnartige seitliche Vorsprünge der oberen Rollenkörper (Fig. 343) eingreift und dadurch

Fig. 342.

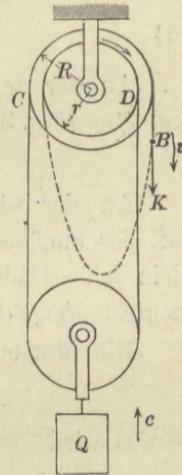


Fig. 343.



ein Gleiten unmöglich macht. Eine solche Kette hat nur geringe Steifigkeit, weshalb man die Widerstandsziffer der Kettenrolle zu $w = 1,05$ annehmen kann.

Betrachtet man die Verhältnisse annäherungsweise so, als ob der Widerstand ganz allein von der Zapfenreibung gebildet würde, so wäre nach Gleichung 4, S. 288

$$11) \quad w = 1 + f \frac{d}{R}.$$

An der unteren Rolle wirken Kettenkräfte S und Sw (Fig. 344), und es ist

$$Q = S(1 + w).$$

An der oberen Rolle tritt ein Zapfendruck auf, der annähernd gleich Q , da K nur ziemlich klein ist. Dadurch entsteht ein Zapfenreibungsmoment $\frac{1}{2}Qfd$.

Die Momentengleichung für den oberen Rollenkörper lautet:

$$0 = KR + Sr - SwR - \frac{1}{2}Qfd.$$

Daraus wird

$$K = S \left(w - \frac{r}{R} \right) + Qf \frac{d}{2R}$$

$$= \frac{Q}{1+w} \left(w - \frac{r}{R} \right) + Qf \frac{d}{2R} \text{ oder,}$$

$$12) \quad \text{weil } f \frac{d}{R} = w - 1 \text{ (Gl. 11),}$$

$$K = \frac{Q}{1+w} \left(w - \frac{r}{R} + \frac{w^2 - 1}{2} \right).$$

$$\text{Es ist aber } w + \frac{w^2 - 1}{2} = w^2 - \frac{w^2 - 2w + 1}{2} = w^2 - \frac{(w - 1)^2}{2}.$$

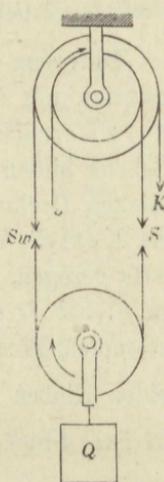
Da nun $w^2 = 1,05^2 = 1,1$, $(w - 1)^2$ aber nur $= 0,0025$, so ist $\frac{(w - 1)^2}{2}$ gegen w^2 zu vernachlässigen, daher annähernd

$$13) \quad K = \frac{Q}{1+w} \left(w^2 - \frac{r}{R} \right) \text{ zu schreiben.}$$

Für gleichmäßiges Hinablassen ist w durch $1:w$ zu ersetzen; es wird dann an Stelle von K die Kraft K_1 nötig mit

$$14) \quad K_1 = \frac{Q}{1 + \frac{1}{w}} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{r}{R} \right).$$

Fig. 344.



Da nun $1:w^2$ ein echter Bruch und $r:R$ ebenfalls, so könnte man $r:R$ beispielsweise $= 1:w^2$ wählen. Dann wird $K_1 = 0$, d. h. die Last geht gleichmäßig abwärts, ohne daß eine hemmende Kraft K_1 nötig ist; oder die Last Q wird durch die Widerstände eben im Gleichgewichte gehalten. Unter diesen Verhältnissen ($r:R = 1:w^2$) wird für Aufwinden

$$K = Q \frac{\left(w^2 - \frac{1}{w^2}\right)}{1 + w} = \frac{0,2}{2,05} Q,$$

ohne Widerstände aber

$$K_0 = Q \frac{\left(1 - \frac{1}{w^2}\right)}{2} = \frac{0,1}{2} Q,$$

mithin ist der Wirkungsgrad $\eta = \frac{0,1 \cdot 2,05}{2 \cdot 0,2} = 0,51$. Bei völlig genauer Rechnung müßte in Uebereinstimmung mit S. 263 $\eta = 1/2$ werden.

Soll der Flaschenzug sich aber mit Sicherheit bremsen, so muß rechnermäßig $K_1 < 0$, d. h. $1:w^2 < r:R$, oder

15) $r:R > 1:w^2$ sein.

Diese Eigenschaft der Selbstsperrung wird bei dem Differenz-Flaschenzuge gewünscht. Weil nun ein negativer Zug K_1 an der Kette nicht ausgeübt werden kann, so muß die Drehung linksherum durch einen Zug K_2 an dem bisher nicht benutzten Kettenstücke bewirkt werden (Fig. 345). Da der Zapfendruck am oberen Zapfen wieder annähernd Q beträgt, das Reibungsmoment daher $Qf^{1/2}d$, so lautet die Momentengleichung der oberen Rolle

$$K_2 r + SR = Swr + Qf^{1/2}d.$$

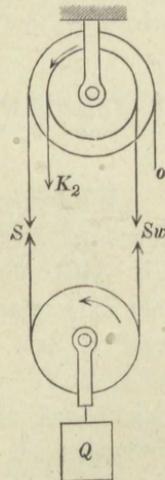
Wegen des geringen Unterschiedes zwischen r und R kann aber $fd = (w - 1)R$ (Gl. 12) annähernd auch $= (w - 1)r$ gesetzt werden, so daß

$$K_2 = S \left(w - \frac{R}{r}\right) + Q \frac{(w - 1)}{2} \text{ wird,}$$

oder, weil wieder $Q = S(1 + w)$

$$K_2 = \frac{Q}{1 + w} \left(w - \frac{R}{r}\right) + \frac{Q}{2} (w - 1) = \frac{Q}{1 + w} \left(w - \frac{R}{r} + \frac{w^2 - 1}{2}\right).$$

Fig. 345.



Es ist aber wieder $w + \frac{w^2 - 1}{2} = w^2 - \frac{(w - 1)^2}{2}$ oder annähernd $= w^2$, mithin

$$16) \quad K_2 = \frac{Q}{1 + w} \left(w^2 - \frac{R}{r} \right),$$

was für $w^2 > R : r$ (Gl. 15) positiv wird.

Beispiel: Für $w = 1,05$ ist $w^2 = 1,1$, $1 : w^2 = 0,909$. Wählt man nun $r : R = 14 : 15$, so ist $\frac{14}{15} = 0,93 > 0,909$, d. h. die Bedingung (15) der Selbstsperrung erfüllt. Es ist ferner (nach Gl. 10) $v : c = 30 = Q : K_0$. Für das Aufwinden wird (nach Gl. 13) $K = \frac{Q}{2,05} \left(1,1 - \frac{14}{15} \right) = \frac{Q}{12,1}$. Da nun $K_0 = \frac{Q}{30}$, so ist

$$\eta = \frac{12,1}{30} = 0,40.$$

Zum Hinabwinden ist die Kraft $K_2 = \frac{Q}{2,05} \left(1,1 - \frac{15}{14} \right) = \frac{Q}{71}$ aufzuwenden.

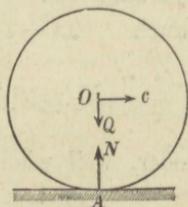
Also mit Aufwand von $K = 10$ kg kann man $Q = 121$ kg heben, während zum Hinabwinden $K_2 = 1,7$ kg hinreicht.

Der Differenz-Flaschenzug ist offenbar keine vorteilhafte Aufzugsmaschine, da sein Wirkungsgrad nur 0,4 beträgt. Angenehm sind aber seine Einfachheit und die Bequemlichkeit der Handhabung. Beim Einspannen einer schweren Achse in eine Drehbank oder beim Versetzen eines schweren Steines ist die Selbstsperrung sehr wertvoll. Der ihn handhabende Arbeiter braucht ihn nicht vorsichtig festzuhalten, sondern kann seine volle Aufmerksamkeit auf die genaue Einstellung der Last richten, indem er durch Ziehen an der einen oder anderen Kette die Last bald hebt, bald senkt, wie es erwünscht ist.

11. Rollwiderstand der Walzen und Räder. Gleichmäßige Bewegung der Fuhrwerke.

Wird eine starre zylindrische Walze auf eine starre wagerechte Ebene gelegt, so findet die Berührung längs einer Zylinderseite statt (Fig. 346). Das Gewicht Q der Walze wird von dem Widerstand N der Ebene aufgehoben, und, versetzt man die Walze in eine Rollbewegung, wobei die Geschwindigkeit c des Mittelpunktes O gleich der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega$ der Drehbewegung ist, so ist an der Berührungsstelle A die Gesamtgeschwindigkeit $v = c - r\omega = \text{Null}$, d. h. es findet kein Gleiten statt, und, da die onstigen Kräfte Q und N sich aufheben, so kommt keine Reibung

Fig. 346.



zur Wirkung. Daher sind die Bedingungen der gleichmäßigen Drehbewegung und der gleichmäßigen Verschiebung, mithin auch der gleichmäßigen Rollbewegung erfüllt, d. h. es ist bei vollkommener Starrheit zur Unterhaltung der Rollbewegung keine weitere Kraft erforderlich.

Bei den wirklichen festen Körpern kann aber der Druck N nicht von einer Linie aufgenommen werden, sondern er verteilt sich auf eine Fläche, indem sowohl die Walze wie die Unterlage ihre Form ändern, sich gegenseitig zusammendrücken. Diejenigen Teile der Bahn, welche die Walze schon überrollt hat, kehren in den meisten Fällen nicht ganz in den früheren Zustand zurück; sie sind um ein gewisses Maß dauernd niedergewalzt. Infolgedessen liegt der vor der Walze befindliche Teil der Unterlage höher als der andere; der Druck N verteilt sich nicht gleichmäßig zu beiden Seiten der Walzenmitte, vielmehr überwiegt der Gegendruck auf der Vorderseite. Dadurch verschiebt sich dann der Gesamtdruck N nach vorn, so daß er nicht mehr mit Q zusammenfällt, sondern mit Q ein Kräftepaar $N \cdot e$ bildet (Fig. 347), das Moment des Rollwiderstandes. Zur Unterhaltung der gleichmäßigen Rollbewegung ist daher ein treibendes Moment

$$1) \quad M = Ne \text{ erforderlich.}$$

Zur Beurteilung der Verteilung des Druckes N auf die Unterstü-
 tzungsfäche darf man wohl für die meisten Fälle die vereinfachende Annahme machen, daß nur die Unterlage eine Formänderung erfährt, während die Walze ihre runde Form behält. Zuerst werde der Fall betrachtet, daß der von der Walze niedergedrückte Teil der Unterlage sich gar nicht wieder elastisch hinter ihr hebt, sondern niedergedrückt verbleibt (Fig. 348), wie es bei einem tonigen oder sandigen Wege etwa stattfinden wird. Den Gegendruck solcher Stoffe pflegt man mit der Eindrückungstiefe y verhältnismäßig zu nehmen. Ist ψ der Gegendruck der Längeneinheit der Horizontalprojektion für eine Tiefe gleich Eins, so hat er bei der Tiefe y den Wert ψy , und es ist dann der Gegendruck einer Breite dx : $\psi y dx$ und der gesamte Druck

$$N = \psi \int y dx = \psi \cdot ABC.$$

Selbstverständlich geht dann auch N durch den Schwerpunkt der Fläche ABC .

Fig. 347.

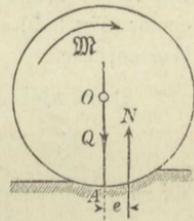
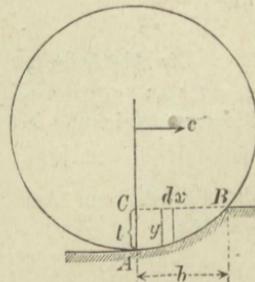


Fig. 348.



Weil nun AB in den wichtigeren Fällen ein kleiner Bogen ist, so kann er annähernd als ein Parabelstück vom Parameter r (= dem Halbmesser des Rollkreises) betrachtet werden. Dann wird, wenn b und t die beiden Projektionen von AB , $b^2 = 2rt$, $t = b^2 : (2r)$ und

$$2) \quad N = \psi \cdot \frac{2}{3} b t = \frac{1}{3} \psi \frac{b^3}{r},$$

$$\text{daher } b^3 = \frac{3Nr}{\psi}.$$

Der Abstand e der Kraft N von dem Mittelpunkt ist (S. 161)

$$3) \quad e = \frac{3}{8} b = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3Nr}{\psi}}.$$

Ist die Unterlage aber nicht so vollkommen bildsam oder plastisch, daß jeder erzeugte Eindruck in voller Größe bleibt; kann vielmehr ein gewisser Grad von Elastizität vorausgesetzt werden, so hebt sich die um die Tiefe t_1 eingedrückte Unterlage hinter der Walze um t_2 wieder empor (Fig. 349) und leistet dann entsprechende Gegendrücke.

Dann wird der Druck auf der Vorderseite

$$N_1 = \psi \frac{2}{3} b_1 t_1 = \frac{1}{3} \psi \frac{b_1^3}{r},$$

der auf der Rückseite

$$N_2 = \frac{1}{3} \psi \frac{b_2^3}{r}.$$

Ferner ist $b_1^3 = \frac{3N_1 r}{\psi}$; $b_2^3 = \frac{3N_2 r}{\psi}$.

4) Setzt man $b_2 = n b_1$,

so ist n von dem Grade der Elastizität der Unterlage abhängig. Dann kann

man $N_2 = \frac{1}{3} \psi n^3 \frac{b_1^3}{r}$ schreiben. Somit wird der Gesamtdruck

5) $N = N_1 + N_2 = \frac{1}{2} \psi \frac{b_1^3}{r} (1 + n^3)$ und

6) $\bar{b}_1 = \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi(1+n^3)}}.$

Die Abstände der Kräfte N_1 und N_2 von dem Mittelpunkt O betragen $e_1 = \frac{3}{8} b_1$; $e_2 = \frac{3}{8} b_2 = \frac{3}{8} n b_1$. Für die Mittelkraft N gilt dann die Momentengleichung in bezug auf O

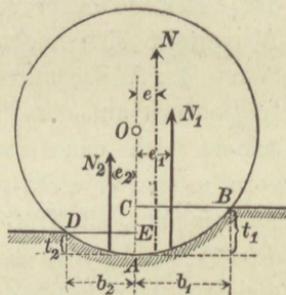
$$-Ne = -N_1 e_1 + N_2 e_2 = -\frac{3}{8} b_1 (N_1 - n N_2),$$

daher wird, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{3} \psi : r$ in allen Gliedern fortläßt,

$$7) \quad e = \frac{3}{8} b_1 \frac{1-n^4}{1+n^3} = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{3Nr}{\psi(1+n^3)}} \frac{1-n^4}{1+n^3}.$$

Für $n = 0$ entsteht wieder der Wert der Gleichung 3.

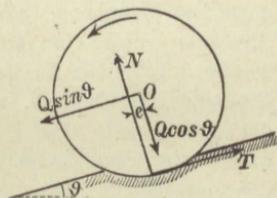
Fig. 349.



Hiernach ist e in verwickelter Weise von φ und n , d. h. von der Beschaffenheit der Unterlage, oder, weil die Zusammendrückung in Wirklichkeit eine gegenseitige ist, von den Stoffen der Walze und der Unterlage abhängig, außerdem aber auch von der Größe des Druckes N und von dem Halbmesser r des Rollkreises. Hat man aber e für einen Wert von N und r durch unmittelbare Messung oder auf mittelbarem Wege gefunden, so bringt eine Aenderung von N oder von r nur geringe Aenderung von e hervor, da Nr schon auf das Achtfache wachsen muß, wenn e sich verdoppeln soll. Daher zieht man es vor, für eine Gruppe praktisch wichtiger Fälle bei Mittelwerten von N und r die Größe e einmal zu bestimmen und diese Länge e dann für andere ähnliche Fälle innerhalb gewisser Grenzen unverändert beizubehalten.

Die Ermittlung der Größe e kann durch Versuche in ähnlicher Weise erfolgen, wie man die Reibungsziffer mittels der schiefen Ebene (S. 237) feststellt. Gibt man der Rollbahn eine veränderliche Neigung, oder hat man eine genügende Anzahl von Strecken mit verschiedenen Neigungen, legt die Walze auf und stellt durch Versuche denjenigen Neigungswinkel ϑ der Bahn fest, bei welchem sich eine gleichmäßige Rollbewegung der Walze erhält, so läßt sich mittels dieses Rollwinkels ϑ die Größe e berechnen (Fig. 350).

Fig. 350.



Das Gewicht Q der Walze zerlegt sich in $Q \sin \vartheta$ und $Q \cos \vartheta$. Der Druck N der Bahn geht um e an O vorbei. Außerdem tritt nun noch die Reibung T an der Bahn auf. Diese vier Kräfte müssen den Gleichgewichtsbedingungen genügen, daher

$$N = Q \cos \vartheta; \quad T = Q \sin \vartheta.$$

Die beiden auftretenden Kräftepaare müssen sich aufheben, daher

$$Q \cos \vartheta e = Q \sin \vartheta r \quad \text{oder} \quad e = r \operatorname{tg} \vartheta,$$

wofür man wegen der Kleinheit des Winkels ϑ auch

8)
$$e = r \vartheta \quad \text{schreiben kann}$$

Für Walzen und Bahn aus nicht sehr hartem

- Holz ist etwa $e = 0,001 \text{ m}$,
- bei sehr hartem Holz $e = 0,0005 \text{ m}$,
- bei Eisenbahnwagenrädern auf Schienen . . . $e = 0,0005 \text{ m}$.

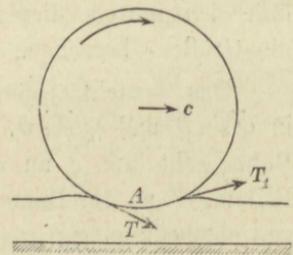
Danach beträgt der Rollwinkel im letzteren Falle, wenn $r = 0,5 \text{ m}$, $\vartheta = 0,0005 : 0,5 = 0,001 = 1 : 1000$, d. h. auf einem Gefälle von 1 : 1000 kann eine Eisenbahnwagenachse durch ihr Gewicht gleichmäßig rollen.

Nach den vorstehenden Betrachtungen würde der Rollwiderstand verschwinden, wenn die zusammendrückbare Fahrbahn sehr elastisch, annähernd $n = 1$ wäre, indem dann $e = \text{Null}$ entsteht. Man könnte glauben, daß eine Kautschukplatte oder auch eine Unterlage von Stahl in solchem Maße elastisch wäre, daß dafür nahezu $n = 1$ gesetzt werden müßte. Damit steht nun freilich die Erfahrung im Widerspruche, denn bei dem Rollen einer eisernen Walze auf einer Kautschukplatte zeigt sich ein ziemlich erheblicher Widerstand, oder es ist eine ziemlich erhebliche Neigung ϑ erforderlich, damit ein gleichmäßiges Rollen auf schiefer Ebene stattfinden kann.

Diese Erscheinung erklärt sich in folgender Weise. Wenn auch die Bahn von Kautschuk bezw. von Stahl so elastisch ist, daß nach einiger Zeit keine Spur des Hinüberrollens mehr bemerkt wird, so erfolgt die Rückkehr in die ursprüngliche Form niemals sofort, sie erfordert vielmehr immer eine gewisse Zeit. Daher wird die Oberfläche der Fahrbahn dicht hinter der Walze immer etwas tiefer liegen als vor derselben und erst später, wenn die Walze sich von der Stelle entfernt hat, zur ursprünglichen Höhe zurückkehren.

Auch ist die Rollbewegung nach Versuchen von Prof. Osborne Reynolds im Jahre 1875 (Philosophical transactions, Bd. 166; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1877, S. 417) stets mit einem Gleiten verbunden. Die Strecke s , welche eine eiserne Walze vom Halbmesser r auf einer Kautschukplatte bei einer Umdrehung zurücklegt, zeigt sich kleiner als der Umfangsweg $2r\pi$. Mit dem Zusammendrücken der Kautschukplatte ist vor und hinter der Zusammendrückung eine wulstartige Erhebung verbunden (Fig. 351). In der Nähe des Punktes A wird vielleicht kein Gleiten stattfinden, wohl aber zu beiden Seiten; aus dem Gleiten entstehen dann Reibungswiderstände T und T_1 , die ein Widerstandsmoment liefern. Hiernach darf auch für elastische Bahnen die Formel I (S. 295) für den Rollwiderstand beibehalten werden, solange eine bessere nicht gefunden ist.

Fig. 351.

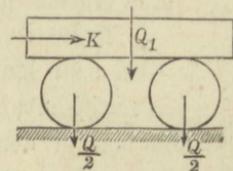


Wird eine Last Q_1 auf Walzen vom Gesamtgewichte Q fortgeschoben (Fig. 352), so tritt unten wie oben an den Walzen ein Rollwiderstand auf; die erforderliche Kraft ist dann

$$9) \quad K = \{Q_1 e_1 + (Q + Q_1) e\} : (2r):$$

denn die Kraft K überträgt sich durch Reibung auf die oberen Teile der Walzen und bildet mit den unten an den Walzen auftretenden Reibungswiderständen ein Kräftepaar vom Hebelarme $2r$; e und e_1 sind die Arme der Rollwiderstände unten bezw. oben.

Fig. 352.



Sind alle in Frage kommenden Teile aus sehr hartem Holz, ist $Q_1 = 1000 \text{ kg}$, $Q = 50 \text{ kg}$, $r = 0,1 \text{ m}$, so wird

$$K = \frac{1000 \cdot 0,0005 + 1050 \cdot 0,0005}{0,2} = 5,1 \text{ kg}.$$

Hieraus erkennt man die Zweckmäßigkeit der Walzen zum Fortschaffen schwerer Körper (eiserner oder steinerner Bauteile).

Bei den Fuhrwerken nun ist die Last des Wagenkastens mittels Achslager auf die Achsen der Räder gestützt, und da der Wagenkasten wohl an der Verschiebung, nicht aber an der Drehung der Walze teilnimmt, so findet an den Zapfen vom Durchmesser d eine Zapfenreibung statt. Wir wollen zunächst eine einzige Wagenachse von dem Gewichte Q betrachten und an ihr eine Last Q_1 aufgehängt denken (Fig. 353). (Das Gehänge stellt sich dann wegen des Zapfenreibungsmomentes $\frac{1}{2}fQ_1d$ etwas schief.) Der Bodendruck beträgt $Q + Q_1$, daher das Moment des Rollwiderstandes $(Q + Q_1)e$. Die Zugkraft K auf wagerechter Ebene veranlaßt, daß der Zapfendruck etwas größer wird, doch hat dieser Umstand keine Bedeutung. An der Fahrbahn entsteht eine Reibung T , welche mit K das treibende Kräftepaar liefert; es ist dann mit R als Radhalbmesser:

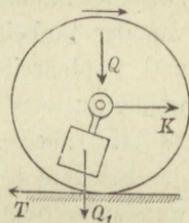
$$KR = \frac{1}{2}Q_1fd + (Q + Q_1)e, \text{ so daß}$$

$$10) \quad K = \frac{\frac{1}{2}Q_1fd + (Q + Q_1)e}{R} \text{ wird.}$$

Diese Formel bleibt auch gültig, wenn die Last des Wagenkastens Q_1 auf mehrere Achsen vom Gesamtgewichte Q verteilt ist. Genauer bedeutet Q das Gewicht der rollenden, Q_1 dasjenige der nur fortschreitenden Teile. Bei gewöhnlichen Straßenfuhrwerken bezieht sich Q nur auf die Räder, während die Achsen zu Q_1 gehören; bei den gewöhnlichen Eisenbahnfuhrwerken dagegen ist die Achse mit den Rädern fest verbunden, so daß Q das Gewicht der Achsen und Räder bedeutet.

Nach Gleichung 10 steht die erforderliche Zugkraft K im umgekehrten Verhältnisse zu dem Radhalbmesser R ; zur Verminderung von K muß man daher R so groß machen, wie die sonstigen Umstände und Rücksichten gestatten.

Fig. 353.



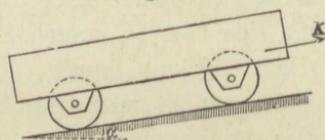
Beispiel: An einem zweiachsigen Eisenbahnwagen wiegen die beiden Achsen mit den Rädern $Q = 2000$ kg, die übrigen Teile nebst der Last $Q_1 = 8000$ kg; der Radhalbmesser sei $R = 0,5$ m, der Zapfendurchmesser $d = 0,1$ m, die Reibungsziffer $f = 0,06$, die Größe $e = 0,0005$ m, dann ist die auf wagerechter gerader Bahn erforderliche Zugkraft

$$K = \frac{4000 \cdot 0,06 \cdot 0,1}{0,5} + 10000 \cdot \frac{0,0005}{0,5} = 48 + 10 = 58 \text{ kg,}$$

wovon 48 kg durch Zapfenreibung, 10 kg durch Rollwiderstand erfordert werden.

Soll das Fuhrwerk gleichmäßig eine Steigung unter dem Winkel α hinan gezogen werden (Fig. 354), so bleibt der ganze Zapfendruck $= Q_1$, der Normalwiderstand N beträgt aber nur $(Q_1 + Q) \cos \alpha$; doch ist $\cos \alpha$ bei allen Bahnen und Wegen, die frei (ohne Seil oder Zahnstange) befahren werden, von der Einheit so wenig verschieden, daß Zapfenreibung + Rollwiderstand wiederum $= K$ gesetzt werden können.

Fig. 354.



Es tritt aber nun doch die schräg abwärts gerichtete Seitenkraft der Schwere $Q \sin \alpha$ und $Q_1 \sin \alpha$ auf, die beide von K_1 mit überwunden werden müssen. Daher ist die jetzt erforderliche Zugkraft

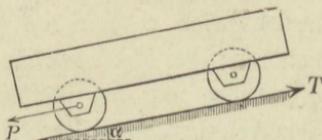
$$K_1 = (Q + Q_1) \sin \alpha + K,$$

worin aber α statt $\sin \alpha$ geschrieben werden kann.

Diese Kräfte K und K_1 müßten nach dem bisherigen (Fig. 355) eigentlich an den Mittellinien der Achsen angreifen. Bringt man sie aber in beliebiger Höhe an dem Fuhrwerk an, so wird durch diese Verschiebung nur die Verteilung der Last Q_1 auf die beiden Achsen etwas geändert, im übrigen bleibt die Wirkung die gleiche.

Bewegt sich das Fuhrwerk gleichmäßig abwärts und wird auf dasselbe (etwa mittels eines Seiles) eine hemmende Kraft K_2 ausgeübt, so ist $(Q + Q_1) \alpha - K_2$ die gesamte treibende Kraft P mit dem Sinn abwärts (Fig. 355). Die Neigung α hat einen gewissen Einfluß auf die Verteilung der Last Q_1 auf die beiden Achsen; davon abgesehen, kann man sich aber die gesamte Kraft P in der Achsenmitte angreifend denken. An den Berührungsstellen der Räder mit der Bahn tritt eine gesamte Reibung $T = P$ auf und

Fig. 355.



bildet mit P das Kräftepaar PR zur Ueberwindung der Widerstandsmomente $\frac{1}{2} Qfd + (Q + Q_1)e$, und da letztere Summe $= KR$ (Gleichung 10), so ist

$$(Q + Q_1) \alpha - K_2 = K,$$

oder die erforderliche Hemmkraft

$$12) \quad K_2 = (Q + Q_1) \alpha - K.$$

Für ein gewisses Gefällverhältnis $\alpha = \alpha_0$ reicht $(Q + Q_1) \alpha_0$ gerade zur Ueberwindung der Widerstände hin, so daß die erforderliche Hemmkraft $K_2 = 0$ wird. Dieses Gefälle heißt die Gleichgewichtsneigung α_0 , und zwar ist

$$13) \quad \alpha_0 = \frac{K}{Q + Q_1}.$$

Zugleich ist dann aber auch

$$14) \quad K = (Q + Q_1) \alpha_0,$$

d. h. die auf wagerechter Ebene erforderliche Zugkraft K gleich dem Gesamtgewichte $(Q + Q_1)$ mal der Gleichgewichtsneigung α_0 .

Durch Vorrichtungen zur Messung der Zugkraft oder durch Ermittlung der Gleichgewichtsneigung kann die für einen Wagen erforderliche Zugkraft K ziemlich scharf gemessen werden; von den beiden Widerständen aber, die von K zu überwinden sind, kann man nur die Zapfenreibung einigermaßen befriedigend berechnen, während der Betrag des Rollwiderstandes bisher nur sehr unvollkommen berechnet werden kann, wie aus der Bemerkung auf S. 298 ersichtlich ist. Man zieht es deshalb vor, nur den Gesamtwiderstand K durch Versuche eingehender zu prüfen und K in ein Verhältnis zu dem Gesamtgewichte $Q + Q_1$ des Fuhrwerkes zu bringen, trotzdem nach Gleichung 10 der Wert K nicht genau verhältnismäßig mit $Q + Q_1$ ist. Diese Verhältniszahl ist nach Gleichung 14 aber die Gleichgewichtsneigung α_0 . Mit deren Einführung wird dann auf einer Steigung α nach Gleichung 11

$$15) \quad K_1 = (Q + Q_1) (\alpha + \alpha_0),$$

auf einem Gefälle α nach Gleichung 12 die Haltkraft

$$16) \quad K_2 = (Q + Q_1) (\alpha - \alpha_0).$$

Auf Grund dieser Vereinfachungen bekommt nun die Gleichgewichtsneigung α_0 eine ähnliche Bedeutung, wie sie der Reibungs-

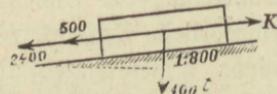
winkel φ bei gleitender Bewegung hat. Da bei Fuhrwerken α_0 stets ein kleiner Bruch, so ist $\sin \alpha_0 = \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$ zu setzen, ebenso wie bei kleinem Reibungswinkel $\sin \varphi = \varphi = \operatorname{tg} \varphi = f$ gesetzt werden konnte. Die Gleichgewichtsneigung α_0 ist zugleich die Widerstandsziffer des Fuhrwerkes, welche man nur mit dessen Gewicht zu multiplizieren braucht, um den Gesamtwiderstand auf wagerechter Bahn zu erhalten. Man braucht daher zur zahlenmäßigen Berechnung der erforderlichen Zug- oder Haltkräfte K_1 und K_2 auf die rollenden Räder und die damit zusammenhängenden Widerstände keine Rücksicht mehr zu nehmen, sondern kann, weil diese Widerstände in dem Wert α_0 stecken, bei gleichmäßiger Bewegung das Fuhrwerk wie einen Schlitten vom Gesamtgewichte $Q + Q_1$ auf sehr glatter Bahn mit einer Reibungsziffer $f = \alpha_0$ betrachten. Die Kraft $(Q + Q_1) \alpha_0$ ist dann stets entgegengesetzt der Bewegung, $(Q + Q_1) \alpha$ stets abwärts anzubringen.

Beispiel: Für den Eisenbahnwagen auf Seite 300 ist $K = 58$, $Q + Q_1 = 10\,000$, daher $\alpha_0 = 0,0058 = 1 : 172$, wofür man $\alpha_0 = 0,006 = 1 : 170$ setzen kann. Ein Zug aus 40 derartigen Wagen hat ein Gewicht $Q + Q_1 = 400\,000$ kg. Es ist dafür auf wagerechter Bahn $K = 400\,000 \cdot 0,006 = 2400$ kg. Auf einer Steigung $\alpha = 1 : 800$ ist dann die Zugkraft nötig (Fig. 356)

$$K_1 = 400\,000 : 800 + 2400 = 2900 \text{ kg};$$

soll der Zug aber auf derselben Rampe abwärts fahren, so wirkt 500 abwärts, der Widerstand = 2400 kg aufwärts; es ist also noch in der Richtung der Bewegung eine Zugkraft $2400 - 500 = 1900$ kg nötig. — Für $\alpha = \alpha_0$ ist bei der Abwärtsbewegung keine bewegende oder hemmende Kraft erforderlich, dagegen ist bei der Aufwärtsbewegung $K_1 = (Q + Q_1) \alpha_0 + K = 2K$, d. h. doppelt so groß wie auf wagerechter Bahn. — Ist $\alpha > \alpha_0$, z. B. $\alpha = 1 : 100$, so wird für Aufwärtsfahrt eine Zugkraft $K_1 = 400\,000 : 100 + 2400 = 6400$ kg, für Abwärtsfahrt eine Hemmkraft (Gl. 16) $K_2 = 400\,000 : 100 - 2400 = 1600$ kg nötig. Diese wird erzeugt, indem man Bremsbacken oder Bremsklötze mit solcher Kraft an die Räder preßt, daß dadurch eine Gesamtreibung an den Umfängen der Räder im Betrage von K_2 entsteht. Diese wirkt mit dem Widerstandsmomente $K_2 R$ an den Achsen wie eine vielfach vergrößerte Zapfenreibung und erfordert in ähnlicher Weise wie diese (Fig. 353) ein im Sinne der Drehung der Achsen wirkendes Kräftepaar $K_2 R$, indem an den Stellen der Berührung der Räder mit den Schienen eine der Bewegung entgegengesetzt wirkende Reibungskraft von der Größe K_2 hervorgerufen wird, welche nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (S. 173) auf die Bewegung des Fuhrwerkes im ganzen gerade so einwirkt, als ob sie im Schwerpunkte

Fig. 356.



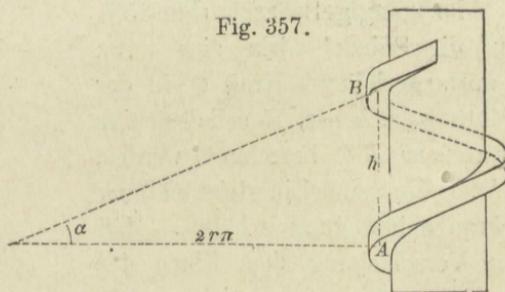
des Fuhrwerkes oder in den Achsmitten oder irgendwo am oberen Teile des Wagenkastens angriffe.

In den bisherigen Betrachtungen und Beispielen sind als Widerstände nur Zapfenreibung und Rollwiderstand berücksichtigt. Dies genügt nur für Bewegung mit geringer Geschwindigkeit. Denn es tritt noch ein Luftwiderstand hinzu, der bei langsamer Bewegung des Zuges gering, bei schneller Bewegung aber sehr bedeutend ist. Auf diesen Widerstand kann hier nicht eingegangen werden; es sei nur erwähnt, daß bei schnell fahrenden Personenzügen die Widerstandsziffer oder Gleichgewichtsneigung α_0 auf 0,01 steigt, daß also der Gesamtwiderstand bei voller Geschwindigkeit um das Mehrfache größer ist wie bei langsamer Bewegung.

Für Straßenfuhrwerke ist die Ziffer α_0 erheblich größer als für Eisenbahnwagen. Einmal sind die Achslager oder Achsbüchsen nicht so vollkommen; namentlich aber ist die Fahrbahn eine viel weniger regelmäßige, so daß der Rollwiderstand ganz bedeutenden Einfluß gewinnt. Auch bei diesen Fuhrwerken kann man nur den Gesamtwiderstand durch α_0 ausdrücken. Für bestes Steinpflaster ist etwa $\alpha_0 = 1 : 80$, für gewöhnliche Landstraßen $\alpha_0 = 1 : 30$. Soll nun auf Landstraßen im Flachlande, wo die gewöhnlichen Fuhrwerke nicht mit Bremsen versehen sind, beim Abwärtsfahren ein Zurückhalten des Wagens durch die Pferde nicht nötig sein, so dürfen die vorkommenden Gefälle nicht stärker als die Gleichgewichtsneigung α_0 sein. Für $\alpha = \alpha_0$ läuft der Wagen abwärts frei, während die zum Aufwärtsziehen erforderliche Kraft doppelt so groß ist wie auf der Wagerechten.

12. Die Schraube.

Die Schraubenspindel kann man betrachten als bestehend aus einem zylindrischen Kern, um den die Schraubengänge als nach einer Schraubenlinie gestaltete vorspringende Leisten herumgelegt sind. Die Schraubengänge bilden mit dem Kern einen festen Körper. Bei der flachgängigen Schraube hat der Schraubengang rechteckigen Querschnitt, bei der scharfgängigen Schraube ist seine Querschnittsform ein gleichschenkeliges (nahezu gleichseitiges) Dreieck. Die Schraubenmutter ist ein fester Körper, der die Schraubenspindel mit geringem Spielraum umschließt.



Wird die Schraubenmutter festgehalten, so kann die Schraubenspindel nur eine sog. Schraubenbewegung ausführen, indem mit der

Drehung um die Achse der Spindel eine Verschiebung längs derselben verbunden ist. Verfolgt man einen Schraubengang, an einem Punkt A (Fig. 357) beginnend, so weit, bis man bei B eine Stelle trifft, die mit A auf einer und derselben Zylinderseite liegt, so ist der Abstand $AB = h$ die Ganghöhe der Schraube; dies ist derjenige Weg, um welchen sich die Schraubenspindel während einer Umdrehung längs der Achse verschiebt. Befindet sich der Punkt A in einem Abstand r von der Achse, so ist die ebene Abwicklung der Schraubenlinie von A bis B eine geneigte Gerade mit den Projektionen h und $2r\pi$, mit einem Neigungsverhältnisse

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = h : (2r\pi).$$

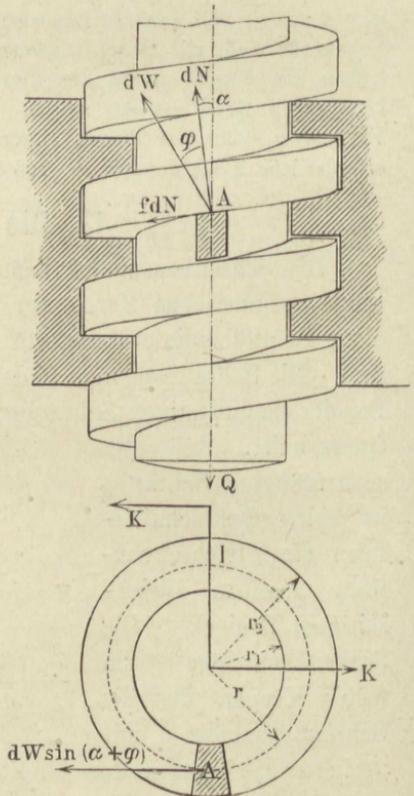
Da nun h der für alle Teile der Spindel gleiche Verschiebungsweg längs der Achse bei einer Umdrehung ist, so werden die Schraubenlinien, auf denen sich die verschiedenen Punkte der Spindel bewegen, verschiedene Anstiegswinkel α haben, und zwar um so kleiner, je größer der Abstand r des Punktes von der Achse ist.

Je nachdem ein Gang oder mehrere Gänge sich um den Kern der Schraube gleichlaufend herumwinden, nennt man die Schraube ein- oder mehrgängig.

Flachgängige Schraube (Fig. 358).

Auf die Spindel wirke eine (etwa abwärts gerichtete) Kraft Q in der Richtung der Achse. Es soll dasjenige Kräftepaar Kl berechnet werden, welches die Spindel in gleichmäßiger Schraubenbewegung erhält, so daß ihre Verschiebung dem Sinne der Kraft Q entgegengesetzt ist. Die Spindel stützt sich auf die Gänge der Schraubemutter, erfährt von diesen Normal- und Reibungswiderstände, die sich zu Gesamtwider-

Fig. 358.



ständen zusammensetzen. Die Widerstände verteilen sich auf die Breite des Schraubenganges, doch machen wir die vereinfachende Voraussetzung, daß sie an dem Halbmesser $v = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ angreifend gedacht werden können. An einem Teilchen des Schraubenganges bei A wirkt ein Normaldruck dN , der gegen die Achse der Spindel um denselben Winkel α geneigt ist, welchen die mittlere Schraubenlinie mit der Querschnittsebene der Spindel bildet. dN setzt sich mit der Reibung $f \cdot dN$ zu dW zusammen, welches von dN um den Reibungswinkel φ abweicht, daher mit der Achsenrichtung der Schraube den Winkel $\alpha + \varphi$ bildet. dW liefert in der Richtung der Drehachse eine Seitenkraft $dW \cos(\alpha + \varphi)$, und die Summe aller dieser Seitenkräfte muß der entgegengesetzten Kraft Q gleich sein, weil die Verschiebung gleichförmig erfolgen soll (s. A. Ritter, Technische Mechanik). Da nun α und φ für die ganze Erstreckung des Schraubenganges dieselben Werte haben, so ist

$$2) \quad Q = \cos(\alpha + \varphi) \Sigma dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte von dW sind Kräfte $dW \sin(\alpha + \varphi)$, welche im Grundrisse sämtlich Tangenten an den Kreis vom Halbmesser r bilden. In bezug auf die Achse der Spindel haben sie eine Momentensumme $r \sin(\alpha + \varphi) \Sigma dW$, welches Widerstandsmoment durch das treibende Kräftepaar Kl überwunden werden muß, also

$$3) \quad Kl = r \sin(\alpha + \varphi) \Sigma dW.$$

Teilt man Gl. 3 durch Gl. 2, so entsteht $\frac{Kl}{Q} = r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ oder

$$4) \quad Kl = Q r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

was sich mit $\operatorname{tg} \varphi = f$, für die Rechnung bequemer, schreiben läßt:

$$5) \quad Kl = Q r \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}.$$

Für gleichmäßige Abwärtsbewegung im Sinne der Kraft Q kehren sich die Vorzeichen von φ und f um:

$$6) \quad K_1 l = Q r \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = Q r \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha}.$$

Alle Kräftepaare $K_2 l$, unter deren Einwirkung die Schraubenspindel im Ruhezustande verbleibt, liegen zwischen den Grenzen Kl und $K_1 l$.

Für $\alpha = \varphi$ ist $K_1 l = 0$, also $K_1 = 0$, d. h. es verhält sich in diesem Falle die Spindel ähnlich wie ein Körper, der auf schiefer

Ebene unter einem Neigungswinkel $\alpha = \varphi$ unter Einwirkung der Schwere ohne Kräfte K gleichmäßig abwärts gleitet (S. 238). Für $\alpha < \varphi$ muß der Körper durch eine abwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch ein Moment ($-K_1 l$) abwärts bewegt werden, da die abwärts treibende Kraft der Schwere oder der Last Q geringer ist als die Reibungswiderstände. Für $\alpha > \varphi$ muß der Körper durch eine aufwärts gerichtete Kraft, die Spindel durch das Moment $K_1 l$ an beschleunigter Abwärtsbewegung verhindert werden. Im ersteren Falle nennt man das Gewinde „selbstsperrend“, in letzterem Falle „nicht selbstsperrend“.

Da die Kraft Q und das Moment Kl mit den Widerständen $[dW]$ im Gleichwichte sind und da die Widerstände $[dW]$ nach dem Gesetze der Wechselwirkung entgegengesetzt auf die Schraubenmutter wirken, so übertragen sich Q und Kl auf die Schraubenmutter; soll nun letztere nicht in Bewegung geraten, so müssen an ihr Widerstände auftreten, welche dem Entgegengesetzten von Q und Kl gleichwertig sind.

Stützt sich die Mutter, ohne weiter festgehalten zu sein, auf eine ebene Unterlage AA (siehe Fig. 359), so muß diese einen der Last Q entgegengesetzt gleichen Gesamtwiderstand N leisten und es muß unter der Wirkung desselben in der Stützebene ein dem Momente $K \cdot l$ entgegengesetzt gleiches Reibungsmoment $N \cdot f_1 \cdot r_1$ zustande kommen. Wird der mittlere Radius r_1 der Stützfläche hinreichend groß bemessen, so läßt sich die letztere Bedingung stets sicher erfüllen. Nötigenfalls kann man das Reibungsmoment auch durch kegelförmige Gestaltung der Stützfläche entsprechend vergrößern.

Soll das Heben der Last Q_1 bzw. die Axialbewegung der Spindel ohne Drehbewegung der letzteren durch Umdrehung der Schraubenmutter herbeigeführt werden, so muß das aufzuwendende Kraftmoment auch das Reibungsmoment der Mutter auf ihrer Unterlage mit überwinden. Für die Aufwärtsbewegung muß daher sein

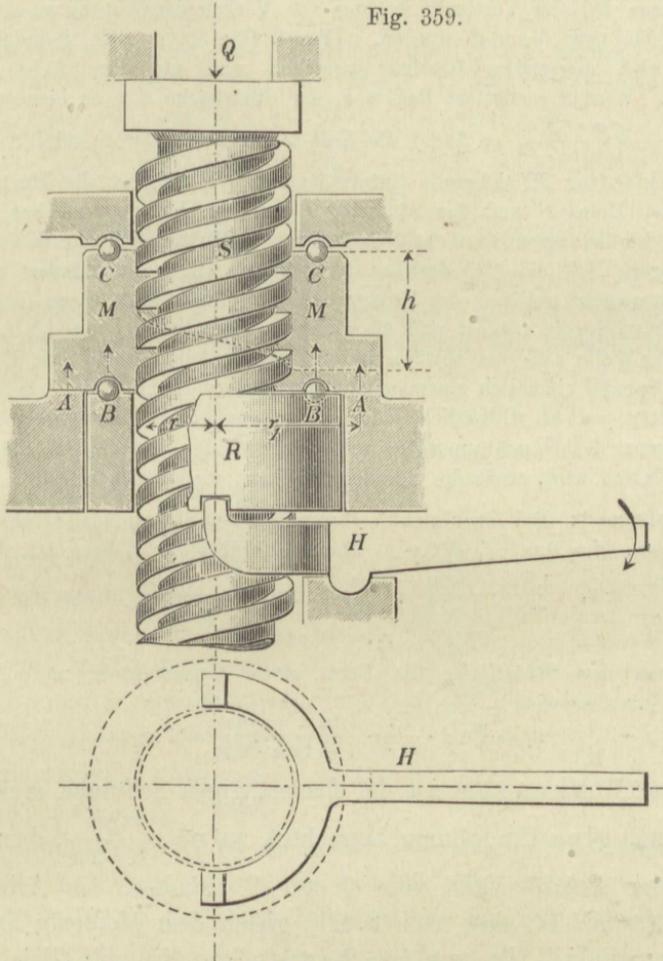
$$7) \quad K \cdot l = Qr \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot f} + Q \cdot f_1 r_1 = Q \left(r \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot f} + f_1 r_1 \right)$$

und ebenso für die Abwärtsbewegung

$$8) \quad K_1 \cdot l = Qr \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot f} - Q \cdot f_1 r_1 = Q \left(r \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot f} - f_1 r_1 \right),$$

worin f_1 die etwa von f verschiedene Reibungsziffer der Schraubennutter auf ihre Unterlage bedeutet.

Fig. 359.



Je nachdem im Falle der Abwärtsbewegung

$$r \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot f} \leq f_1 r_1 \quad \text{oder} \quad r_1 \leq \frac{r}{f_1} \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + \operatorname{tg} \alpha f} \text{ ist,}$$

fällt das für die gleichmäßige Bewegung aufzuwendende Kraftmoment $K_1 l \leq 0$ aus, und ist dementsprechend die Schraubennutter auf ihrer Unterlage selbstsperrend oder nicht selbstsperrend.

Von dieser Beziehung zwischen dem Steigungswinkel α des Gewindes und dem mittleren Radius r_1 der Stützfläche der Schraubenmutter macht man mit Vorteil Anwendung in den sog. „Stützspindeln“, wie sie z. B. als Sicherheitsorgane bei der Vertikalbewegung von Verkehrseinrichtungen, Aufzügen, Hubbrücken usw. benutzt werden. (Vergl. Fig. 359.) Die Spindel S ist mit nicht sperrendem Gewinde versehen und um ihre Achse nicht drehbar. Wird der mittlere Radius r_1 der Stützfläche AA so bemessen, daß

$$r_1 > \frac{r}{f_1} \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot f},$$

so findet die Last Q vermittels der Spindel S und der Schraubenmutter M sicherere Unterstützung. Wird aber die Mutter etwa durch den Hebel H und den Stützring R um ein Geringes gehoben, so daß in AA Berührung nicht mehr stattfindet, die Mutter vielmehr zwischen den Kugellagern BB und CC drehbar festgehalten ist, so vermindert sich das Reibungsmoment zwischen der Mutter und ihrer Unterstützung, so daß erstere ihre Stützfähigkeit verliert und die nicht drehbare Spindel mit der Last Q in beliebiger Weise auf- und abwärts bewegt werden kann, wobei sich die Mutter um die Spindel einmal in einem, einmal im anderen Sinne dreht. Sobald aber die Mutter, sei es willkürlich, oder in automatischer Abhängigkeit von den Bewegungen des Gesamtapparates selbsttätig wieder auf die Stützfläche AA herabgelassen wird, steht die Spindel und Last wieder sicher fest.

Beispiel 1: Bei einer nicht selbstsperrenden Stützspindel sei $h = 15$ cm, $r = 7,5$ cm, $f = 0,10$, $f_1 = 0,10$. Dann erfordert die sichere Stützfähigkeit derselben

$$r_1 = \frac{7,5}{0,10} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - 0,10}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot 0,10}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{2 \cdot 7,5 \cdot \pi} = 0,32,$$

daher

$$r_1 = 16,0 \text{ cm.}$$

Gibt man der Stützfläche die Form eines Kegelmantels mit $\delta = 45^\circ$, $\sin \delta = 0,70$, so wird

$$r_1 = \sin \delta \cdot \frac{7,5}{0,10} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - 0,10}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot 0,10} = 11,2 \text{ cm.}$$

Der Wirkungsgrad der flachgängigen Schraube ergibt sich, wenn man eine Umdrehung betrachtet, zu $\eta = \frac{Qh}{Kl 2\pi}$, denn dabei wird der Angriffspunkt von Q um h gehoben, die Arbeit des Momentes Kl ist aber nach S. 268 gleich dem Momente mal dem Drehungswinkel. Da nun $h = 2r\pi \operatorname{tg} \alpha$, so wird mit Gleichung 4:

$$9) \quad \eta = \frac{Q 2r\pi \operatorname{tg} \alpha}{Qr \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) 2\pi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Beispiel 2: Es sei $f = 0,15$. Wählt man nun $\operatorname{tg} \alpha$ ebenso groß, so wird

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{0,15 + 0,15}{1 - 0,15 \cdot 0,15}, \quad \text{daher } \eta = \frac{0,15 \cdot 0,9775}{0,3} = 0,49.$$

In diesem Falle $\alpha = \varphi$ steht die Schraube an der Grenze der Selbstsperrung; im Zusammenhange damit ist ihr Wirkungsgrad annähernd 0,5 (vergl. S. 263). Bei den meisten Anwendungen der Schraube ist Selbstsperrung

erwünscht; ist z. B. $\operatorname{tg} \alpha = 0,07$, $f = 0,15$, so wird $\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \frac{0,07 + 0,15}{1 - 0,07 \cdot 0,15}$ und $\eta = \frac{0,07 \cdot 0,9895}{0,22} = 0,32$. Der Wirkungsgrad der Schraube ist daher nur ein geringer.

Bei kleinen Werten von f und $\operatorname{tg} \alpha$ kann $f \operatorname{tg} \alpha$ gegen 1 vernachlässigt werden, so daß $\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \operatorname{tg} \alpha + f$; dann ergibt sich einfach $Kl = Qr (\operatorname{tg} \alpha + f)$ und $\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{f + \operatorname{tg} \alpha}$. Dies ergibt z. B.

$$\text{für } f = \operatorname{tg} \alpha = 0,15: \quad \eta = 0,5;$$

$$\text{für } f = 0,15, \operatorname{tg} \alpha = 0,07: \quad \eta = 0,318$$

Scharfgängige Schraube (Fig. 360). Bei dieser ist der Querschnitt des Schraubenganges ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Kantenwinkel $2\beta = 55^\circ$. Der Uebergang von der flachgängigen zur scharfgängigen Schraube ist hinsichtlich des Verhältnisses der wirkenden Kräfte ungefähr so zu beurteilen wie der Uebergang von dem Spurzapfen mit ebener Tragfläche zu dem kegelförmigen Spurzapfen; es findet auch hier ein keilartiges Einpressen der Spindel in die (wenn auch nur annähernd) trichterförmigen Gänge der Schraubenmutter und dadurch eine Vergrößerung der Reibungswiderstände statt, die man am einfachsten berücksichtigt, indem man f , wo es in den Gleichungen der flachgängigen Schraube vorkommt, mit $f : \sin \delta$ oder mit $f : \cos \beta$ vertauscht. Denn δ (der halbe Keilnutenwinkel) ist die Neigung der Kante des Gewindequerschnittes gegen die Achse, mithin $\delta = 90^\circ - \beta$. Behufs kürzester Schreibweise kann man auch den Reibungswinkel φ mit dem Winkel ψ vertauschen, wenn

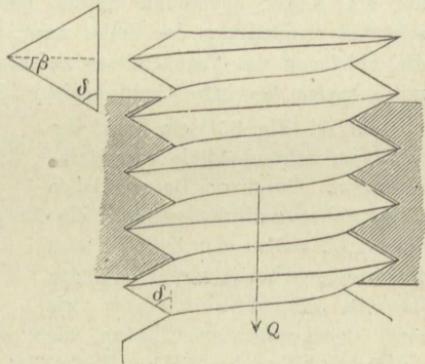
$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi : \cos \beta = f : \cos \beta = f \sec \beta$$

(vergl. S. 242). Dann wird für die scharfgängige Schraube

$$10) \quad Kl = Qr \operatorname{tg} (\alpha + \psi) = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha},$$

$$11) \quad K_1 l = Qr \operatorname{tg} (\alpha - \psi) = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha - f \sec \beta}{1 + f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha}.$$

Fig. 360.



Selbstsperrung tritt jetzt ein für $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \psi = f : \cos \beta$.

$$12) \quad \eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \psi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta} (1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha).$$

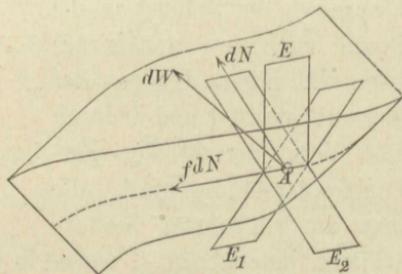
Diese Gleichungen sind die allgemeineren; mit $\cos \beta = 1$ entstehen daraus wieder Gleichung 5, 6 und 7 für flachgängige Schrauben.

Beispiel 3: Für $r = 0,015 \text{ m}$; $h = 0,003 \text{ m}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,003}{2 \cdot 0,015 \cdot \pi} = 0,032$; $f = 0,15$; $\cos \beta = \cos 27^{1/2} = 0,887$; $f \sec \beta = 0,17$ und $l = 0,4 \text{ m}$ wird $Kl = 0,003046 \text{ Q}$; $K = 0,0075 \text{ Q}$; $K_1 l = -0,0020 \text{ Q}$; $K_1 = -0,005 \text{ Q}$; $\eta = 0,16$.

Die vorstehenden Gleichungen für die scharfgängige Schraube sind zur zahlenmäßigen Berechnung völlig ausreichend, können aber in wissenschaftlicher Beziehung nur als Annäherungen gelten, denn der Uebergang von der flachgängigen Schraube zur scharfgängigen, wie er auf S. 309 behandelt wurde, ist nicht ganz zutreffend, da das Gewinde der scharfgängigen Schraube nicht als ein Kegel angesehen werden darf. Wir fügen daher noch folgende schärfere Behandlung des Falles nach, wobei wir der Notiz von Zierold über die Ableitung des Verhältnisses zwischen Kraft und Last bei der Schraube mit scharfem Gewinde (Civilingenieur 1894, S. 155) folgen.

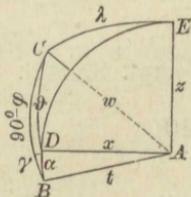
A sei (Fig. 361) ein Punkt der mittleren Schraubenlinie vom Halbmesser r . Durch ein Bogenteilchen dieser Schraubenlinie legen wir eine Ebene E , welche den Zylinder vom Halbmesser r bei A berührt. Durch dasselbe Bogenteilchen legen wir eine Berührungsebene E_1 an die gedrückte Schraubenfläche. Rechtwinklig zu ihr steht der Normaldruck dN ; die Reibung $f \cdot dN$ ist tangential zur mittleren Schraubenlinie; der

Fig. 361.



Gesamtwiderstand dW aus dN und $f \cdot dN$ liegt in einer Ebene E_2 , welche auf E_1 rechtwinklig steht, weil sie durch dN geht und dN winkelrecht zu E_1 ist. Eine durch A gelegte Parallele zur Schraubenachse werde mit z bezeichnet, die Richtung der Kraft $f \cdot dN$ als Tangente an die Schraubenlinie mit t . Ferner legen wir durch A eine Gerade x , welche in der Ebene E liegt, und zwar rechtwinklig zu z . Die Richtung von dW heiße w . Dann bilden w , x und t eine körperliche Ecke, und es entsteht, wenn man um A eine Kugelfläche beschreibt, das Kugeldreieck BCD (Fig. 362). Darin ist die Seite $BC = 90^\circ - \varphi$, weil dW von $f \cdot dN$ um diesen Winkel abweicht, die Seite $BD = \alpha$, dem Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinie. Die Seite CD zwischen w und x werde ϑ , der

Fig. 362.



Winkel bei B an der Kante t aber γ genannt; dies ist der Winkel zwischen den Ebenen E und E_2 . Für das Kugeldreieck gilt dann nach dem Cosinus-Satze, weil ϑ und γ einander gegenüber liegen:

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos (90^\circ - \varphi) + \sin \alpha \sin (90^\circ - \varphi) \cos \gamma$$

$$13) \quad \text{oder } \cos \vartheta = \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \cos \gamma.$$

Die Geraden z , t und w bilden eine räumliche Ecke, der das Kugeldreieck BCE entspricht. Der Bogen BE fällt mit BD teilweise zusammen, da t , x und z in der Ebene E liegen. In BCE ist wieder $BC = 90^\circ - \varphi$, $BE = 90^\circ + \alpha$ (denn x und z bilden miteinander einen rechten Winkel, x und t den Winkel α). Die Seite CE zwischen w und z werde λ genannt. In BCE liegen sich γ und λ gegenüber, daher ist

$$\cos \lambda = \cos (90^\circ + \alpha) \cos (90^\circ - \varphi) + \sin (90^\circ + \alpha) \sin (90^\circ - \varphi) \cos \gamma$$

$$14) \quad \text{oder } \cos \lambda = -\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \gamma.$$

Da dW mit x und z die Winkel ϑ bzw. λ einschließt, so wird, entsprechend den Gleichungen 2 und 3, S. 305:

$$Q = \cos \lambda \Sigma dW;$$

$$Kl = r \cos \vartheta \Sigma dW \quad \text{und}$$

$$Kl = Qr \frac{\cos \vartheta}{\cos \lambda} = Qr \cdot \frac{\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \cos \gamma}{-\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \gamma},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\cos \alpha \cos \varphi$ teilt:

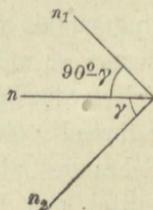
$$15) \quad Kl = Qr \frac{f + \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma}{-f \operatorname{tg} \alpha + \cos \gamma} = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \gamma}{1 - f \sec \gamma \operatorname{tg} \alpha}.$$

Es muß nun noch $\sec \gamma$ ermittelt, bzw. gezeigt werden, daß $\sec \gamma$ sehr annähernd $= \sec \beta$ ist, wodurch Gleichung 15 in Gleichung 10 übergehen würde.

Die drei Ebenen E , E_1 und E_2 gehen sämtlich durch t . E_2 ist rechtwinklig zu E_1 ; da nun der Winkel zwischen E und E_2 γ ist, so schließen deren Normalen n_1 und n_2 ebenfalls diesen Winkel ein, und weil E_1 und E_2 zueinander winkelrecht, so sind es auch deren Normalen n_1 und n_2 . Da die drei Ebenen durch die Tangente t gehen, so stehen die drei Normalen n , n_1 und n_2 (Fig. 363) sämtlich rechtwinklig zur Tangente t , und zwischen den Normalen n und n_1 findet sich der Winkel $90^\circ - \gamma$, so daß die Ebenen E und E_1 ebenfalls den Winkel $90^\circ - \gamma$ miteinander bilden.

Nennt man g die durch A gelegte Erzeugende der Schraubenfläche, welche mit z den Winkel $90^\circ - \beta$ einschließt, so bilden g , t und z eine Ecke entsprechend dem Kugeldreieck FGH (Fig. 364). FH liegt in der Ebene E durch z und t , GH in einer Ebene durch die Schraubenachse, welche zu E rechtwinklig, weshalb der Winkel

Fig. 363.



bei H (an der Kante z) ein Rechter. t ist gegen z um $FH = 90^\circ - \alpha$, g gegen z , wie oben schon gesagt, um $GH = 90^\circ - \beta$ geneigt; nennt man noch die Seite $FG = \eta$, so gibt der Sinus-Satz:

$$\frac{\sin(90^\circ - \gamma)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin \eta} \quad \text{oder}$$

$$16) \quad \cos \gamma = \frac{\cos \beta}{\sin \eta} \quad \text{und} \quad \sec \gamma = \frac{\sin \eta}{\cos \beta};$$

der Cosinus-Satz:

$$\cos \eta = \cos(90^\circ - \beta) \cos(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \beta) \sin(90^\circ - \alpha) \cos 90^\circ$$

$$17) \quad \text{oder} \quad \cos \eta = \sin \beta \sin \alpha$$

$$\text{und} \quad \sin \eta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}, \quad \text{mithin wegen Gleichung 14}$$

$$\sec^2 \gamma = \frac{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = \sec^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \alpha$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha (\sec^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta) = \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta).$$

Hiermit wird (Gl. 13)

$$18) \quad Kl = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 - f \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

Bei den meist kleinen Anstiegswinkeln α ist nun aber der Winkel η zwischen g und t (Fig. 364) nur wenig von einem Rechten verschieden, daher $\sin \eta$ fast = 1 und deshalb (Gl. 16) $\sec \gamma$ nur wenig kleiner als $\sec \beta$, oder, mit anderen Worten, es ist wegen der Kleinheit von α annähernd $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ und

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = 1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \sec^2 \beta,$$

womit Gleichung 18 in Gleichung 10 übergeht.

Für das Beispiel auf S. 310 wird nach Gl. 18 $Kl = 0,00303 Q$ (gegen $0,003046 Q$ nach Gl. 10). Der Unterschied ist daher sehr gering. Es ist hier-nach durchaus zu empfehlen, bei kleinen Winkeln α stets Gl. 8–10 anzuwenden.

Die Reibungswiderstände sind (nach S. 309) bei scharfgängigen Schrauben größer als bei flachgängigen. Soll daher eine Schraube zur Bewegungsübertragung (als einfache Maschine) dienen, so wählt man gewöhnlich eine flachgängige Schraube, während die scharfgängige Schraube als Befestigungsmittel den Vorzug verdient, weil in diesem Falle die großen Reibungswiderstände gerade die Sicherheit gegen unerwünschte Lösung der Befestigung bilden.

Fig. 364.

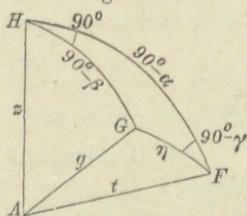
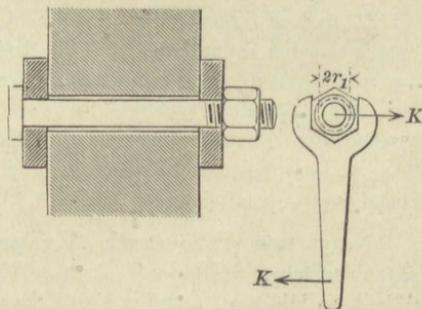


Fig. 365.



Soll durch Drehung der Schraubenmutter mittels des Schraubenschlüssels eine Platte mit einer Kraft Q gegen eine Wand gepreßt werden, so ist außer den Reibungswiderständen im Gewinde noch ein Reibungswiderstand zwischen Schraubenmutter und Platte zu überwinden [vergl. auch S. 306] (Fig. 365). Dieser möge an einem Kreise vom Halbmesser r_1 angreifen, dann ist das ganze erforderliche Kraftmoment

$$Kl = Qr \frac{\operatorname{tg} \alpha + f \sec \beta}{1 - f \sec \beta \operatorname{tg} \alpha} + Qr_1 f_1.$$

Beispiel 4: Es sei wiederum, wie S. 310, $r = 0,015 \text{ m}$; $h = 0,003 \text{ m}$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,032$; $f = 0,15$; $\cos \beta = 0,887$; $f \sec \beta = 0,17$; $l = 0,4 \text{ m}$; $r_1 = 0,02 \text{ m}$; $f_1 = 0,15$; $Q = 1000 \text{ kg}$; dann wird

$$Kl = 0,003 \cdot 1000 + 0,15 \cdot 0,02 \cdot 1000 = 3 + 3 = 6 \text{ mkg, mithin } K = 15 \text{ kg.}$$

Zum Lösen ist erforderlich — $K_1 l = 0,002 \cdot 1000 + 0,003 \cdot 1000 = 5 \text{ mkg}$,
— $K_1 = 12,5 \text{ kg}$; ohne Reibung wäre $K_0 = 0,015 \cdot 1000 \cdot 0,032 : 0,4 = 1,2 \text{ kg}$,
mithin ist $K = 12,5 K_0$ infolge der bedeutenden Reibung.

Beispiel 5: Schraubenpresse (Fig. 366). An den oberen Griffen wirke das Kräftepaar Kl zur Hervorbringung des Druckes Q der flachgängigen Spindel gegen die Preßplatte. Dann entsteht an dem Zapfen, mittels dessen sich die Spindel auf die Preßplatte setzt, noch ein Reibungsmoment, welches wegen geringer Abrundung der Druckfläche (nach S. 274, Gl. 7) zu $1/2 Qf r_1$ angenommen werden möge, wenn r_1 der Zapfenhalbmesser. Daher wird

$$Kl = Q \left\{ r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) + 1/2 f r_1 \right\}.$$

Für $l = 0,4 \text{ m}$; $r = 0,04 \text{ m}$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,07$
 $f = 0,15$; $r_1 = 0,03 \text{ m}$ erhält man

$$\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha} = 0,22 \quad \text{und}$$

$$K \cdot 0,4 = Q \left\{ 0,04 \cdot 0,22 + 1/2 \cdot 0,15 \cdot 0,03 \right\}$$

$$K \cdot 0,4 = 0,0111 Q; \quad K = 0,028 Q.$$

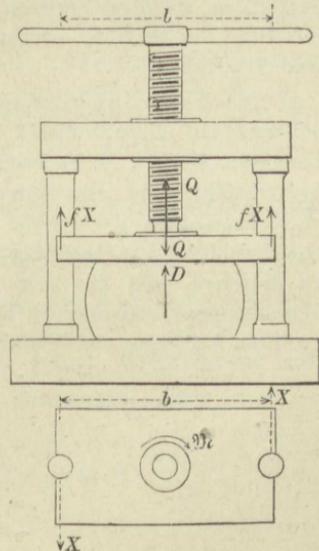
Ohne Reibung wäre

$$K_0 \cdot 0,4 = Qr \operatorname{tg} \alpha; \quad K_0 = 0,007 Q.$$

Der Wirkungsgrad ist darnach $K_0 : K = 1/4$.

Hierbei ist noch ein kleiner Widerstand unberücksichtigt geblieben. Das Zapfenreibungsmoment $\mathfrak{M} = 1/2 f Q r_1$ drückt nämlich die Platte gegen die Führungssäulen mit den Kräften $X = \mathfrak{M} : b$; daraus entsteht an jeder Säule ein Reibungswiderstand fX , der sich dem Abwärtsgleiten der

Fig. 366.



Preßplatte entgegengesetzt. Mithin ist der Druck D der Platte auf den zu pressenden Körper nicht genau $= Q$, sondern

$$D = Q - 2fX = Q \left(1 - 2f \cdot \frac{f r_1}{2b} \right) = Q \left(1 - \frac{f^2 r_1}{b} \right) = Q (1 - 0,0017)$$

für $b = 0,4 \text{ m}$. Der Unterschied zwischen D und Q ist hiernach ohne Bedeutung.

Die Kraftverhältnisse der Schraube sind unabhängig von der Anzahl der Gewindgänge, längs deren Spindel und Schraubenmutter sich berühren. In der Anwendung freilich ist die Berührung längs mehrerer Schraubengänge notwendig, weil sonst wegen des vorhandenen Spielraumes die Sicherheit des Eingriffes leidet, unter Umständen auch der Druck auf die Flächeneinheit zu groß werden würde.

Schlußbemerkung über die Reibung. Ist die Reibung bei Maschinen ein erhebliches Bewegungshindernis, dessen Ueberwindung viel Kosten verursacht, so ist ihr Nutzen doch im gewöhnlichen Leben und in der Technik ein sehr erheblicher. Welche Erleichterung ein großer Reibungswiderstand beim Gehen bietet, erkennt man beim Schreiten auf glattem Eise; ein großer Teil der Befestigungen im Bau- und Maschinenwesen (durch Nägel, Keile, Schrauben) beruht auf der Reibung; die Seilreibung wird beim Hinablassen schwerer Lasten und beim Riemenbetriebe verwertet, mittels der Reibung der Triebräder auf den Schienen setzt die Lokomotive den Zug in Bewegung; mit Hilfe der Reibung bringen wir den Zug oder ein Straßenfuhrwerk wieder zum Stillstande.

Die mechanische Arbeit, welche zur Ueberwindung von Reibungswiderständen dient, mithin keine sichtbare Geschwindigkeitszunahme der bewegten Körper, d. h. keine Zunahme ihres äußeren Arbeitsvermögens hervorbringt, geht aber keineswegs spurlos verloren; vielmehr setzt sie sich nach den Lehren der Physik in inneres Arbeitsvermögen, in Wärme, um. Gleichwohl ist man berechtigt, von einem Arbeitsverluste durch Reibung zu sprechen, weil die beim Gleiten entstehende Wärme dem Zweck einer Maschine gewöhnlich nicht förderlich ist, vielmehr häufig besondere Mittel zu ihrer Ableitung und Verteilung nötig macht.

II. B. Beschleunigte Bewegung starrer Körper.

1. Größe des Arbeitsvermögens eines Körpers bei einer Verschiebung bzw. einer Drehung um eine feste Achse.

Soll ein Körper von der Masse M eine reine Verschiebung erfahren, d. h. sollen seine sämtlichen Punkte in einem Augenblick übereinstimmende Geschwindigkeiten v und Beschleunigungen p haben, so muß nach S. 171 die Mittelkraft R aller äußeren Kräfte K durch den Schwerpunkt gehen. Die Beschleunigung des Schwerpunktes, also auch sämtlicher Punkte des Körpers ist dann

$$1) \quad p = \frac{R}{M}.$$

Will man den Satz der Arbeit auf starre Körper anwenden, so ist zu bemerken, daß nach S. 175 die inneren Kräfte eines starren Körpers keine Arbeit verrichten, daß $\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m c^2}{2} = \mathfrak{A}_k$, gleich der Arbeit der äußeren Kräfte K ist.

Es kommt nun darauf an, den noch unbestimmten, allgemeinen Ausdruck für das Arbeitsvermögen eines Körpers $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ für die einfachen Bewegungsarten in eine bestimmtere Form zu bringen.

Bei einer Verschiebung ist in einem Augenblicke die Geschwindigkeit v allen Massenpunkten gemeinsam, daher

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{v^2}{2} m_1 + \frac{v^2}{2} m_2 + \dots + \frac{v^2}{2} m_n = \frac{M v^2}{2},$$

und der Satz der Arbeit lautet:

$$2) \quad \frac{M v^2}{2} - \frac{M c^2}{2} = \mathfrak{A}_k.$$

Dreht sich der Körper (Fig. 367) aber um eine feste Achse O (rechtwinklig zur Bildebene), so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ω allen seinen Punkten gemeinsam, die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstände ϱ von der Achse beträgt $v = \varrho\omega$. Daher wird

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \Sigma m \varrho^2.$$

Der Ausdruck $\Sigma m \varrho^2$, der nur von der Massenverteilung des Körpers in bezug auf die Achse abhängt, heißt nach L. Euler (1707–1783) das **Trägheitsmoment** des Körpers in bezug auf die Achse O und wird mit J (von *inertia*) bezeichnet. Daher

$$3) \quad J = \Sigma (m \varrho^2) \quad \text{und}$$

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} J, \quad \text{sowie}$$

$$4) \quad \frac{\omega^2}{2} J - \frac{\omega_1^2}{2} J = \mathfrak{A}_k,$$

wenn ω_1 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist. Die Bezeichnung Trägheitsmoment ist ganz treffend, da diese Größe den Einfluß der trägen Masse eines Körpers bei der Drehung um eine Achse angibt.

In gleicher Weise wie S. 150 u. ff. die statischen Momente verschiedener Körper und ebener Flächen ermittelt wurden, soll dies nun auch bezüglich der Trägheitsmomente geschehen.

2. Trägheitsmomente.

Das Trägheitsmoment J wird für solche Körper am einfachsten, deren Massenteilchen sämtlich in gleicher Entfernung r von der Achse sich befinden. Dies findet statt bei einem Ringe von sehr geringer Wandstärke (Fig. 368). Es ist dann

$$J = \Sigma m \varrho^2 = r^2 \Sigma m = M r^2.$$

Für die weitere Anwendung ist es häufig vorteilhaft, das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine Achse gleich zu setzen dem Trägheitsmoment eines dünnen Ringes von einem Halbmesser r .

Fig. 367.

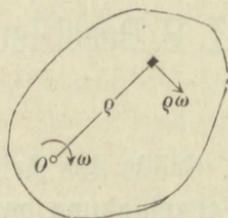
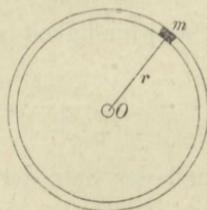


Fig. 368.



Nennt man die Masse des gedachten Ringes μ , so muß

$$1) \quad J = \mu r^2$$

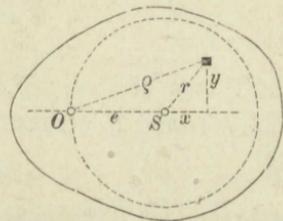
sein. Ist J berechnet, r angenommen, so ist dann auch μ bestimmt. Man nennt μ die auf den Abstand r bezogene Masse des Körpers. Bei gegebenem ω ist dann das Arbeitsvermögen dieses Ringes von der Masse μ ebenso groß wie dasjenige des gegebenen Körpers. In Gleichung 1 kann von den Größen μ und r eine gewählt werden. Setzt man $\mu = M$, d. h. gleich der wahren Masse des Körpers, und den zugehörigen Abstand $r = i$, so wird

$$2) \quad J = M i^2,$$

und man nennt i den **Trägheitsarm** oder **Trägheitshalbmesser** des Körpers für die Achse O . Denkt man sich die wahre Masse M des Körpers in dem Abstand i von der Achse zu einem Ring oder einem Punkte vereinigt, so hat dies Gebilde das gleiche Trägheitsmoment mit dem Körper.

Das statische Moment $M x_0 = \Sigma m x$ bezieht sich auf eine Achse oder eine Ebene. Verschiebt sich die Ebene um eine Größe e , so geht der Schwerpunktsabstand x_0 über in $x_0 \pm e$, mithin ändert sich das statische Moment um $\pm M e$. Das Trägheitsmoment bezieht sich auf eine Achse. Vertauscht man die gegebene Achse aber mit einer Parallelachse im Abstand e , so läßt sich zwischen den Trägheitsmomenten in bezug auf die beiden Parallelachsen auch eine ähnlich einfache Beziehung aufstellen, wenn die eine Achse durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Fig. 369.



Die Schwerpunktsachse S stehe rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 369), ebenso eine Achse durch O . Die entsprechenden Trägheitsmomente seien J_S bzw. J_0 . Dann ist $J_S = \Sigma m r^2$, $J_0 = \Sigma m \varrho^2$. Weil nun $\varrho^2 = (e + x)^2 + y^2$ und $r^2 = x^2 + y^2$, so wird $\varrho^2 = e^2 + 2ex + r^2$, mithin $J_0 = \Sigma m e^2 + \Sigma 2mex + \Sigma m r^2$ oder $J_0 = M e^2 + 2e \Sigma m x + J_S$. Weil aber der Abstand x von einer durch den Schwerpunkt S gehenden Ebene gemessen ist, so wird (nach S. 152) $\Sigma m x = 0$, also

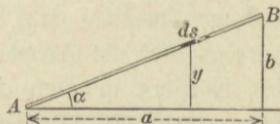
$$3) \quad J_0 = J_S + M e^2.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment in bezug auf die parallele Schwerpunktsachse plus der Masse mal dem Quadrate der Entfernung beider Achsen.

Sämtliche Parallelachsen $O, O_1 \dots$ in demselben Abstand e von S liefern gleiches Trägheitsmoment. Von allen Parallelachsen liefert die durch den Schwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment.

Trägheitsmoment der materiellen geraden Linie. Ein gerader Stab von der Länge s und dem Querschnitt F sei an einem Ende A an der als Drehachse dienenden x -Achse befestigt, während das andere Ende B durch eine masselose Stange b mit der Achse verbunden sei (Fig. 370). Ein

Fig. 370.



Massenteilchen m ist dann nach S. 33

$= \frac{\gamma}{g} F \cdot ds$ und liefert zum Trägheits-

moment J den Beitrag $dJ = \frac{\gamma}{g} F \cdot ds \cdot y^2$; es ist aber $ds : s = dy : b$,

$$\text{mithin} \quad J = \frac{\gamma}{g} \frac{Fs}{b} \int_0^b y^2 dy = \frac{\gamma}{g} \frac{Fs b^2}{3},$$

oder, weil die Masse des Stabes $M = \frac{\gamma}{g} Fs$:

$$4) \quad J = \frac{1}{3} M b^2. \quad \checkmark$$

Setzt man dies $= \mu b^2$, so ist die auf den Endpunkt B oder auf den Abstand b bezogene Masse des Stabes

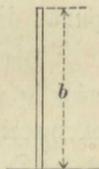
$$5) \quad \mu = \frac{1}{3} M,$$

während der Trägheitshalbmesser

$$6) \quad i = \sqrt{\frac{J}{M}} = \frac{b}{\sqrt{3}} = 0,577 b$$

wird. Dieses Drittel der Masse des Stabes, im Punkte B angebracht, oder die ganze Masse des Stabes zu einem Punkt im Abstände $0,577 b$ von der Achse verdichtet, liefern dasselbe J wie der Stab.

Fig. 371.



Für $\alpha = 90^\circ$ (Fig. 371) gelten dieselben Werte; nur ist b hier gleich der Länge s des Stabes.

Trägheitsmoment einer materiellen ebenen Fläche (Scheibe).

Trägheitsmomente in bezug auf Achsen OX und OY in der Ebene der Figur (Fig. 372) nennen wir Durchmesser-Trägheitsmomente J_x und J_y . Es ist $J_x = \sum m y^2$, $J_y = \sum m x^2$, ihre Summe $J_x + J_y = \sum m (x^2 + y^2) = \sum m \varrho^2$; letzterer Wert ist aber das Trägheitsmoment J_0 in bezug auf die Achse O rechtwinklig zur Fläche und heißt das polare Trägheitsmoment.

$$7) \quad J_0 = J_y + J_x.$$

Es ist in bezug auf einen Pol O das polare Trägheitsmoment einer ebenen Fläche gleich der Summe der beiden Durchmesser-Trägheitsmomente in bezug auf zwei rechtwinklig zueinander stehende, durch den Pol O gelegte Durchmesser. Eine gemeinschaftliche Drehung der Durchmesser um O ändert diese Summe nicht, weil J_0 dadurch nicht beeinflußt wird.

Trägheitsmoment einer materiellen Kreisfläche. Um das polare Trägheitsmoment in bezug auf den Mittelpunkt O (Fig. 373) zu erhalten, nehmen wir einen Ring von dem Halbmesser ϱ und der Dicke $d\varrho$ heraus. Dieser liefert, wenn δ die Dicke der Scheibe, den Beitrag

$$dJ_0 = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot 2\varrho\pi \cdot d\varrho \cdot \varrho^2, \text{ daher ist}$$

$$J_0 = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot 2\pi \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot \pi \frac{r^4}{2},$$

$$8) \quad J_0 = \frac{Mr^2}{2},$$

$$\mu = \frac{1}{2} M \text{ (bezogen auf } r), \quad i = r \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707 r.$$

Da sämtliche Durchmesser = Trägheitsmomente des Kreises gleichwertig sind, so wird hier $J_y = J_x$, mithin $J_x + J_y = 2J_x = J_0$, oder

$$9) \quad J_x = J_y = \frac{Mr^2}{4} = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot \frac{r^4 \pi}{4}.$$

Trägheitsmoment einer materiellen Rechteckfläche. Das Trägheitsmoment des Rechtecks von der Breite d , der Höhe h (Fig. 374) in bezug auf eine Kante $AB = d$ läßt sich unmittelbar aus dem eines Stabes ableiten. Teilt man das Rechteck in lauter gleiche

Fig. 372.

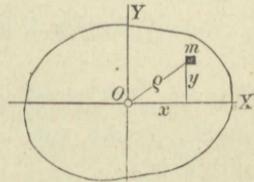
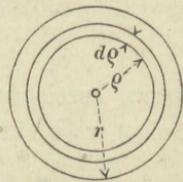


Fig. 373.



Streifen von der Höhe h , so ist, nach Gleichung 5, die auf den Abstand h bezogene Masse jedes Streifens $1/3$ der wahren Masse. Das gleiche Verhältnis gilt dann auch für das ganze Rechteck, und es ist in bezug auf AB :

$$J = 1/3 Mh^2 = 1/3 \frac{\gamma}{g} \delta \cdot d \cdot h^3.$$

Eine zu AB parallele Achse durch den Schwerpunkt S hat von AB den Abstand $e = 1/2 h$, mithin ist

$$10) J_S = 1/3 Mh^2 - 1/4 Mh^2 = 1/12 Mh^2 = \frac{1}{12} \frac{\gamma}{g} \delta \cdot d \cdot h^3.$$

Für das Trägheitsmoment in bezug auf eine Schwerpunktsachse, parallel mit h , würde ebenso $1/12 M d^2$ entstehen, mithin für das polare Trägheitsmoment $J_0 = 1/12 M (d^2 + h^2) = 1/12 M D^2$, wenn D die Diagonale bedeutet.

Trägheitsmoment einer materiellen Dreiecksfläche von der Grundlinie d , der Höhe h (Fig. 375). Zum Trägheitsmomente J_x in bezug auf eine Achse $CX \parallel d$ liefert ein Streifen $x \cdot dy$

$$\text{den Beitrag } dJ = \frac{\gamma}{g} \delta \cdot x \cdot dy \cdot y^2 = \frac{\gamma}{g} \frac{\delta \cdot d}{h} y^3 dy$$

(wegen $x : d = y : h$), daher ist

$$J_x = \frac{\gamma}{g} \frac{\delta \cdot d}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{\gamma}{g} \delta \frac{d \cdot h^3}{4} = \frac{Mh^2}{2};$$

darin bezeichnet δ die Dicke der Platte. In bezug auf eine Schwerpunktsachse $\parallel d$ ist wegen des Abstandes $e = 2/3 h$:

$$11) J_S = J_x - M \frac{4}{9} h^2 = Mh^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9} \right) = \frac{Mh^2}{18} = \frac{\gamma}{g} \delta \frac{d \cdot h^3}{36}.$$

Trägheitsmoment eines materiellen Trapezes.

In bezug auf eine Achse in der Mitte der Höhe (Fig. 376) ist das Trägheitsmoment J_1 offenbar ebenso groß wie dasjenige des gestrichelten flächengleichen Rechtecks, da die von unten nach oben verdrehten Dreiecke in beiden Lagen die gleichen Beiträge liefern; es ist also $J_1 = \frac{M}{12} h^2$.

Der Schwerpunkt liegt, wie man aus Gl. 8, S. 156, leicht findet, um $e = \frac{h}{6} \frac{a-b}{a+b}$

Fig. 374.

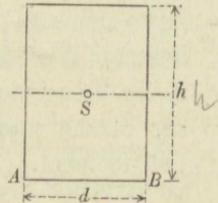


Fig. 375.

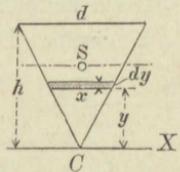
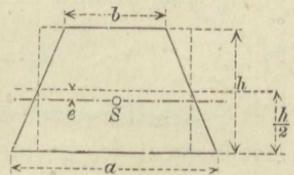


Fig. 376.



unterhalb der Mitte, daher ist in bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse

$$J_S = \frac{Mh^2}{12} - \frac{Mh^2(a-b)^2}{36(a+b)^2}. \text{ Dies läßt sich zusammenziehen zu}$$

$$12) \quad J_S = \frac{Mh^2}{18} \left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \right),$$

in welcher Formel selbstverständlich diejenigen für Rechteck und Dreieck als Sonderfälle enthalten sind.

Trägheitsmoment eines Zylinders überall gleicher Dichte, von der Länge l , bezogen auf seine geometrische Achse. Der Zylinder läßt sich in lauter Scheiben von gleicher Dicke zerlegen, die sämtlich gleich viel zur Masse sowie zum Trägheitsmomente beitragen. Daher muß gelten wie für die materielle Kreisfläche (Gl. 8)

$$13) \quad J_0 = M \frac{r^2}{2} = \frac{\gamma}{g} \frac{r^4 \pi}{2} l \text{ und } \mu = 1/2 M.$$

Für einen Ring von den Halbmessern r und R , der Länge l ist J_0 der Unterschied der Trägheitsmomente der Zylinder der Halbmesser R und r , d. h.

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) l, \text{ und weil}$$

$$M = \frac{\gamma}{g} \pi (R^2 - r^2) l,$$

$$14) \quad J_0 = 1/2 M (R^2 + r^2).$$

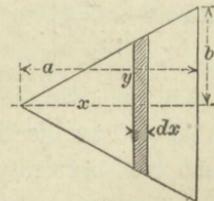
Trägheitsmoment eines Kegels in bezug auf seine geometrische Achse (Fig. 377). Zerlegt man einen Umdrehungskörper in Scheiben, rechtwinklig zur Drehachse, vom Halbmesser y und der Dicke dx , so liefert eine solche Scheibe zum Trägheitsmomente den Beitrag (Gl. 8)

$$dJ = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} y^4 dx, \text{ so daß}$$

$$15) \quad J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \int y^4 dx.$$

Diese Formel gilt für alle Umdrehungskörper. Die Beziehung zwischen y und x richtet sich nach der besonderen Art der Meridianlinie.

Fig. 377.



Beim Kegel ist $y : b = x : a$, daher

$$J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a^4} \int_0^a x^4 dx = \frac{\gamma}{g} \pi \frac{a b^4}{10}.$$

mithin, weil $M = \frac{\gamma}{g} \pi \frac{a b^2}{3}$:

$$16) \quad J = \frac{3}{10} M b^2; \quad i = b \sqrt{0,3} = 0,548 b,$$

und, auf den Abstand b bezogen:

$$\mu = 0,3 M.$$

Für ein Umdrehungsparaboloid wird mit $y^2 = 2 p x$

$$17) \quad J = \frac{1}{3} M b^2; \quad i = 0,577 b; \quad \mu = \frac{1}{3} M.$$

Trägheitsmoment der Halbkugel (Fig. 378). Es ist $y^2 = r^2 - x^2$,

$$\text{daher (Gl. 15)} \quad J = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi}{2} \int_0^r (r^4 - 2r^2 x^2 + x^4) dx = \frac{8}{30} \frac{\gamma}{g} r^5 \pi;$$

oder, weil $M = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} r^3 \pi$:

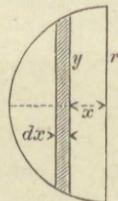
$$18) \quad J = 0,4 M r^2; \quad i = r \sqrt{0,4} = 0,632 r$$

und, auf den Abstand r bezogen:

$$19) \quad \mu = 0,4 M.$$

Für die ganze Kugel ist sowohl J wie M doppelt so groß, daher gelten die gleichen Verhältniszahlen.

Fig. 378.



Geometrische Trägheitsmomente. Setzt man in den Aus-

drücken der Trägheitsmomente für ebene Flächen die Masse der Flächeneinheit $\frac{\gamma}{g} \delta = 1$ und in denen für Körper die Masse der Körpereinheit $\frac{\gamma}{g} = 1$, so erhält man für die Trägheitsmomente Ausdrücke, die nur von der geometrischen Form der Flächen bzw. Körper abhängen. Für die Massen treten dann die Flächen F bzw. Körperinhalte V an die Stelle. Diese Werte der Trägheitsmomente nennt man geometrische Trägheitsmomente. Die Werte sind:

Für die Kreisfläche $J_0 = \frac{1}{2} F r^2 = \frac{1}{2} r^4 \pi$;

$$20) \quad J_x = \frac{1}{4} F r^2 = \frac{1}{4} r^4 \pi.$$

Für das Rechteck in bezug auf eine Mittelachse

$$21) \quad J = \frac{1}{12} d h^3 = \frac{1}{12} F h^2.$$

Für das Dreieck in bezug auf die Schwerpunktsachse

$$22) \quad J = 1/36 d \cdot h^3 = 1/18 F h^2.$$

Für das Trapez in bezug auf die Schwerpunktsachse

$$23) \quad J = \frac{1}{18} F h^2 \left(1 + \frac{2ab}{(a+b)^2} \right) = \frac{h^3}{36} \left(a + b + \frac{2ab}{a+b} \right).$$

Für den Zylinder

$$24) \quad J = 1/2 V r^2 = 1/2 r^4 \pi l \quad \text{usw.}$$

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist wegen der Form $F i^2$ vom vierten Grade, das eines Körpers wegen der Form $V i^2$ vom fünften Grade.

Geometrisches Trägheitsmoment eines ringförmigen Umdrehungskörpers. Ein Teilchen dF der Meridianfigur (Fig. 379)

liefert zum geometrischen Trägheitsmoment J in bezug auf die geometrische Achse den Beitrag

$$dJ = dV \cdot x^2 = 2x\pi \cdot dF \cdot x^2 = 2\pi x^3 dF, \quad \text{daher ist}$$

$$25) \quad J = 2\pi \int x^3 dF.$$

Legt man durch den Schwerpunkt der Meridianfigur eine Achse, parallel der Umdrehungsachse, und hat dF von dieser Achse den Abstand u , so ist

$$x = x_0 + u; \quad x^3 = x_0^3 + 3x_0^2 u + 3x_0 u^2 + u^3,$$

mithin, weil x_0 für die Integration unveränderlich:

$$J = 2\pi \left\{ x_0^3 F + 3x_0^2 \int dF \cdot u + 3x_0 \int dF \cdot u^2 + \int dF \cdot u^3 \right\}.$$

Nach dem Satze von Guldin (S. 364) ist aber der Rauminhalt des Körpers $V = 2\pi x_0 F$; ferner $\int dF \cdot u = 0$ (nach S. 153); endlich $\int dF \cdot u^2$ das geometrische Trägheitsmoment der Meridianfigur in bezug auf die zur Umdrehungsachse parallele Achse durch ihren Schwerpunkt; dieses werde \mathfrak{J} genannt, so daß

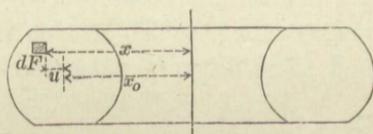
$$26) \quad J = V x_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} + 2\pi \int dF \cdot u^3.$$

Ist die Schwerpunktsachse der Figur eine Symmetrieachse derselben, so wird $\int dF \cdot u^3 = 0$, da $dF \cdot u^3$ in gleich viel positiven und negativen Elementen von derselben Größe auftritt, daher

$$27) \quad J = V x_0^2 + 6\pi x_0 \mathfrak{J} = V \left(x_0^2 + 3 \frac{\mathfrak{J}}{F} \right).$$

(Für einen sehr dünnen Ring wäre bekanntlich nach Gl. 1 $J = V x_0^2$.)

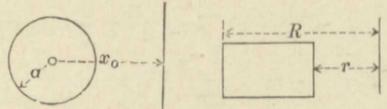
Fig. 379.



Ist die Meridianfigur ein Kreis vom Halbmesser a (Fig. 380), so wird $\mathfrak{S} = \frac{1}{4} F a^2$ (Gl. 20), mithin Fig. 380.

$$J = V(x_0^2 + \frac{3}{4} a^2).$$

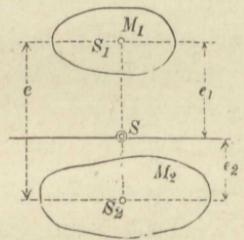
Für ein Rechteck als erzeugende Figur (Fig. 381) ist $\mathfrak{S} = F \cdot \frac{1}{12} (R - r)^2$ (Gl. 21), $x_0 = \frac{1}{2} (R + r)$, somit Fig. 381.



$$\begin{aligned} J &= V \left\{ \frac{1}{4} (R + r)^2 + \frac{1}{4} (R - r)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} V \left\{ R^2 + 2 R r + r^2 + R^2 - 2 R r + r^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} V (R^2 + r^2), \text{ übereinstimmend mit Gl. 14, S. 321.} \end{aligned}$$

Trägheitsmoment eines aus 2 Teilen bestehenden Körpers. Legt man (Fig. 382) durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Teile und durch den Gesamtschwerpunkt S parallele Achsen, sind e_1, e_2 und e die Abstände der Achsen, J_1 und J_2 die Trägheitsmomente der Teile bezüglich der eigenen Schwerpunktsachsen, so ist für den ganzen Körper und seine Schwerpunktsachse (Gl. 3, S. 317)

Fig. 382.



$$J = J_1 + M_1 e_1^2 + J_2 + M_2 e_2^2.$$

Weil aber $M_2 e_2 = M_1 e_1$ und $e_1 + e_2 = e$,

so wird
$$e_1 = e \frac{M_2}{M_1 + M_2}.$$

Man kann daher auch schreiben:

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 + M_1 e_1 e_1 + M_2 e_2 e_2 \\ &= J_1 + J_2 + M_1 e_1 (e_1 + e_2) \\ &= J_1 + J_2 + M_1 \frac{e^2 M_2}{M_1 + M_2} \end{aligned}$$

$$28) \quad J = J_1 + J_2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} e^2.$$

3. Winkelbeschleunigung.

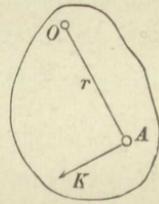
Soll ein Körper sich gleichförmig um eine feste Achse drehen, so muß die Momentensumme der äußeren Kräfte in bezug auf die Achse Null sein (S. 266). Ist die Momentensumme von Null verschieden, so erfolgt die Drehung nicht gleichförmig, sondern mit einer Winkelbeschleunigung ε . Ebenso wie bei der geradlinigen Bewegung die Beschleunigung $p = \frac{dv}{dt}$ (S. 15), so ist

die sekundliche Zunahme der Winkelgeschwindigkeit die Winkelbeschleunigung

$$1) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Die Beziehung zwischen der Winkelbeschleunigung ε und deren Ursachen, den äußeren Kräften, kann man aus dem Satze vom Arbeitsvermögen ableiten, indem man diesen auf ein Zeiteilchen dt anwendet. Die Zunahme an Arbeitsvermögen kann dann nach Gleichung 4 S. 316 geschrieben werden $\frac{1}{2}Jd(\omega^2) = J\omega d\omega$. Die entsprechende Arbeit aber findet man in folgender Weise: Eine der äußeren Kräfte sei P und liege im allgemeinen windschief zur Achse O . Das gemeinsame Lot zwischen der Kraft P und der Achse sei r ; man zerlege die Kraft P im Fußpunkt A von r in eine Seitenkraft Z , parallel mit der Achse O , und eine Seitenkraft K , welche die Achse rechtwinklig kreuzt. Die Kraft Z hat in bezug auf O das Moment Null und verrichtet auch bei der Drehung keine Arbeit, weil sie rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des Punktes A steht. Die Seitenkraft K aber hat das Moment Kr (Fig. 383) und verrichtet bei der unendlich kleinen Drehung um den Winkel $\omega \cdot dt$ die Arbeit $K \cdot r\omega \cdot dt$. Für sämtliche Punkte des Körpers ist in einem Augenblicke die Größe $\omega \cdot dt$ die gleiche. Verfährt man mit allen äußeren Kräften ebenso wie mit P , so wird die Arbeitssumme $d\mathcal{A}_k = \omega \cdot dt \sum Kr$. Darin ist $\sum Kr$ die Momentensumme der äußeren Kräfte in bezug auf die Drehachse, schreiben wir dafür \mathfrak{M} , so wird nunmehr $J\omega \cdot d\omega = \omega \cdot dt \cdot \mathfrak{M}$, mithin

Fig. 383.



$$2) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \frac{\mathfrak{M}}{J}.$$

Ebenso wie bei der Verschiebung die Beschleunigung $p = R : M = \text{Kraft} : \text{träge Masse}$, so ist bei der Drehung um eine feste Achse die Winkelbeschleunigung = Kraftmoment : Trägheitsmoment.

Wählt man einen bestimmten Drehungshalbmesser oder Hebelarm r , so ist an dessen Endpunkte die Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$, die Umfangsbeschleunigung oder Tangentialbeschleunigung

$$3) \quad p_t = r \cdot d\omega : dt = r\varepsilon;$$

Bringt man nun das Kraftmoment \mathfrak{M} auf den Hebelarm r , setzt $\mathfrak{M} = Kr$ und schreibt $J = \mu r^2$, so wird aus Gleichung 2 und 3

$$p_t = r\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}r}{J} = \frac{Kr^2}{\mu r^2} \quad \text{oder}$$

$$4) \quad p_t = \frac{K}{\mu}.$$

d. h. wenn man alles auf den gleichen Abstand oder Drehungshalbmesser r bezieht, hat man wie bei einer Verschiebung:

$$\text{Umfangsbeschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Auch Gleichung 4 (S. 316) für das Arbeitsvermögen kann man entsprechend umformen. Setzt man am Ende des Armes r die Anfangsgeschwindigkeit $r\omega_1 = c$, die Endgeschwindigkeit $r\omega = v$, $J = \mu r^2$, so wird aus $\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_1^2) J = \mathfrak{A}_k$:

$$\frac{1}{2}(v^2 - c^2) \mu = \mathfrak{A}_k \quad \text{oder}$$

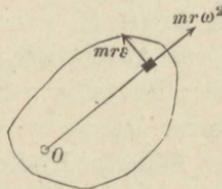
$$5) \quad \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\mu c^2}{2} = \mathfrak{A}_k,$$

wie (S. 315) für die Verschiebung eines Körpers.

Man kann Gleichung 2, $\mathfrak{M} = \varepsilon J$ auch mittels des Satzes von d'Alembert (S. 169) ableiten. Ist in einem Augenblick ω die Winkelgeschwindigkeit, ε die Winkelbeschleunigung, so führt ein Punkt des Körpers im Abstand r von der Achse (Fig. 384) eine ungleichförmige Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ und der Tangentialbeschleunigung $p_t = r\varepsilon$ aus; die Zentripetalbeschleunigung ist $p_n = v^2 : r = r\omega^2$ (Gl. 1, Seite 93). Diesen entsprechen die Trägheitswiderstände oder Ergänzungskräfte $m r \varepsilon$ bzw. $m r \omega^2$. Deren Momentensumme in bezug auf O ist $-\varepsilon \sum m r^2 = -\varepsilon J$. Den gleichen, aber entgegengesetzten Wert muß auch die Momentensumme \mathfrak{M} der äußeren Kräfte haben, d. h.

$$6) \quad \mathfrak{M} = \varepsilon J.$$

Fig. 384.

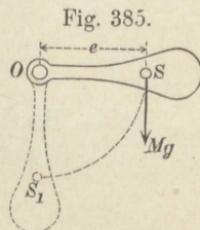


4. Physisches Pendel.

Ein Körper, der um eine nicht durch den Schwerpunkt gehende wagerechte Achse drehbar ist und unter alleiniger Wirkung der Schwere steht, bildet, wenn er in der sicheren Gleichgewichtslage nicht die Geschwindigkeit Null hat, ein Pendel, welches, zum Unterschiede von dem aus einem einzelnen Massenpunkt m mit

gewichtlosem Faden bestehenden, S. 81 behandelten, mathematischen Pendel, physisches Pendel genannt wird.

Der beliebig gestaltete Körper sei zunächst so festgehalten, daß der Schwerpunkt S (Fig. 385) in gleicher Höhe mit der Achse O liegt, und werde nun losgelassen. Es soll die Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, mit der der Drehungshalbmesser $OS = e$ des Schwerpunktes durch die Lotrechte hindurchschwingt.



Wendet man auf die Bewegung SS_1 den Satz der Arbeit an, so ergibt sich (nach S. 174 und 316) $\frac{1}{2}\omega^2 J - 0 = Mge$, mithin

$$1) \quad \omega = \sqrt{2ge \frac{M}{J}} = \sqrt{2g \frac{e}{i^2}} \text{ mit } J = Mi^2 \text{ (S. 317).}$$

Ist der Körper ein Stab, eine materielle Gerade, von der Länge a (Fig. 386), so ist

$$e = \frac{1}{2}a, \quad J = \frac{1}{3}Ma^2 \text{ (S. 317), mithin}$$

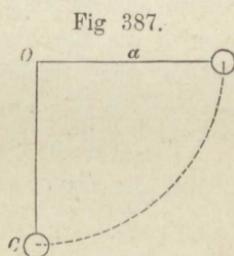
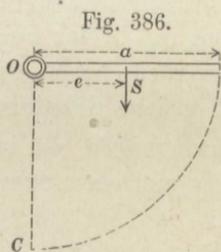
$$2) \quad \omega = \sqrt{\frac{ga \cdot 3}{a^2}} = \sqrt{\frac{3g}{a}}$$

und die Umfangsgeschwindigkeit bei C :

$$3) \quad v = a\omega = \sqrt{3ga},$$

während für einen Massenpunkt am Ende einer gewichtlosen Stange von der Länge a (Fig. 387)

$$4) \quad v = \sqrt{2ga} \text{ (Gl. 1, S. 82) sein würde.}$$

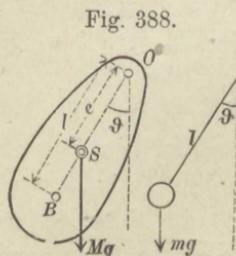


Schwingungsdauer des physischen Pendels. In einer beliebigen Zwischenlage (Fig. 388), in der OS mit der Lotrechten den Winkel ϑ bildet, ist das Moment

$$\mathfrak{M} = Mge \sin \vartheta,$$

daher die Winkelbeschleunigung (Gleichung 2, S. 325)

$$\varepsilon = \frac{Mge \sin \vartheta}{J_0}.$$



Für ein mathematisches Pendel aber von einer Pendellänge l ist bei demselben Abweichungswinkel ϑ , weil $J = ml^2$,

$$\varepsilon_1 = \frac{mgl \sin \vartheta}{ml^2} = \frac{g \sin \vartheta}{l}.$$

Beide Beschleunigungen ε und ε_1 sind verhältnisgleich mit $\sin \vartheta$ und stimmen völlig überein, wenn

$$\frac{Mge}{J_0} = \frac{g}{l}, \text{ d. h. wenn}$$

$$5) \quad l = \frac{J_0}{Me} \text{ ist.}$$

Wählt man die Länge des mathematischen Pendels nach Gleichung 5 und gibt beiden Pendeln einen gleichen Anfangswert von ϑ , bei dem die Geschwindigkeit Null war, läßt also beide Pendel von derselben Anfangsneigung aus sich in Bewegung setzen, so wird die Beschleunigung beider Pendel für jeden Winkel ϑ die gleiche sein, daher werden beide Pendel sich übereinstimmend bewegen, mithin auch gleiche Schwingungsdauer haben müssen

Bei kleinen Schwingungen ist nun für das mathematische Pendel die Dauer einer einfachen Schwingung nach S. 84

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Setzt man hierin den Wert l nach Gleichung 5 ein, so entsteht

$$6) \quad t = \pi \sqrt{\frac{J_0}{Mge}}$$

als Dauer einer einfachen kleinen Schwingung des physischen Pendels.

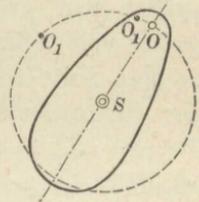
Man nennt die Länge l die Schwingungslänge des physischen Pendels. Trägt man diese Länge von O aus auf der Geraden OS ab, so erhält man mit $OB = l$ einen Punkt B , den man den Schwingungspunkt des physischen Pendels nennt (Fig. 388). Die Achse durch B , rechtwinklig zur Bildebene, heißt Schwingungsachse. Der Punkt B und jeder Punkt der Achse B in dem physischen Pendel schwingt gerade so, als wäre er ein einzelner, mittels eines gewichtlosen Fadens mit O verbundener Massenpunkt.

Denkt man sich durch S eine zu der Drehachse O parallele Achse gelegt und nennt das entsprechende Trägheitsmoment des Körper J_s , so ist $J_0 = J_s = Me^2$, mithin (Gl. 5)

$$7) \quad l = \frac{J_s}{Me} + e.$$

Zeichnet man um S als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser $SO = e$ (Fig. 389) und denkt sich den Körper an einer beliebigen, zur ursprünglichen Achse O parallelen, durch irgend einen Punkt des Kreises gelegten Achse O_1 aufgehängt, so ergibt sich für diese neue Aufhängung die Schwingungslänge nach Gleichung 7 von derselben Größe wie bei der Aufhängung in O . Alle Seiten eines geraden Zylinders, der den genannten Kreis zum Grundkreise hat, sind hiernach Achsen gleicher Schwingungslänge und Schwingungsdauer für den Körper.

Fig. 389.



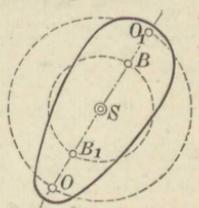
Hängt man den Körper aber an der Schwingungsachse B auf (Fig. 390), so hat man ein physisches Pendel von der Schwingungslänge l_1 , wofür sich nach Gleichung 7 ergibt, indem man e mit $l - e$ vertauscht:

$$l_1 = \frac{J_s}{M(l - e)} + (l - e).$$

Weil aber (nach Gleichung 7) $J_s = Me(l - e)$, so erhält man

$$8) \quad l_1 = \frac{Me(l - e)}{M(l - e)} + l - e = l,$$

Fig. 390.



d. h. das an der Achse B aufgehängte Pendel hat die gleiche Schwingungslänge wie das um die Achse O schwingende. Trägt man $l_1 = l$ von B aus auf BS auf, so erhält man O als Schwingungspunkt und die Achse O (rechtwinklig zur Bildebene) als Schwingungsachse für die Drehachse B . Die Parallelachsen O und B liefern gleiche Schwingungslänge und gleiche Schwingungsdauer, oder sind miteinander vertauschbar. Das Pendel ist bezüglich der Achsen O und B umkehrbar. Ein Kreis um S mit dem Halbmesser SB hat dieselbe Bedeutung wie der Kreis mit dem Halbmesser SO (Fig. 389).

Sämtliche Achsen, rechtwinklig zur Bildebene, welche durch irgend einen Punkt einer der beiden Kreislinien gelegt werden, sind für den Körper Drehachsen mit übereinstimmender Schwingungslänge l .

Nach Gleichung 7 ist die Schwingungslänge l von e abhängig. Faßt man nämlich bei der Vergleichung nur Achsen ins Auge, die zur Bildebene rechtwinklig, d. h. mit der ursprünglichen Drehachse O parallel sind, so ist $J_s : M$ ein konstanter Wert $= i^2$ (wo i der der Achse S entsprechende Trägheitshalbmesser ist). Wird nun e größer und größer, verschiebt sich also die Drehachse immer weiter vom Schwerpunkte, so nähert sich der erste Summand der rechten Seite von Gleichung 7 mehr und mehr der Null, während der zweite fortwährend zunimmt; daher wird für $e = \infty$ auch $l = \infty$ und $t = \infty$. Geht aber umgekehrt e gegen Null, so wird ebenfalls $l = \infty$ und $t = \infty$, d. h. wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht, so ergibt sich, wie auch schon von S. 200 bekannt, kein Drehmoment, so daß auch keine Schwingung zu Stande kommen kann.

Es muß daher einen Wert von e geben, für den l ein Minimum wird.

Schreibt man zur bequemeren Uebersicht $l = y$, $e = x$, und untersucht

$$9) \quad y = \frac{i^2}{x} + x$$

auf Minimum, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{i^2}{x^2} + 1 = 0$ zu setzen. Dies verlangt $x = \pm i$. Eine besondere Untersuchung, ob hierbei ein Maximum oder Minimum vorliege, ist nicht erforderlich; denn den für $x = 0$ und $x = \infty$ eintretenden Größtwert $y = \infty$ kennen wir bereits.

$$10) \quad x = \pm i$$

oder in der früheren Schreibweise $e = \pm i$, worin es wegen der Bedeutung der beiden Kreise in Fig. 390 nur auf den absoluten Wert $e = i$ ankommt, ergibt die Schwingungslänge

$$l = \frac{i^2}{e} + i = 2i, \text{ also } l - e = 2i - i = i.$$

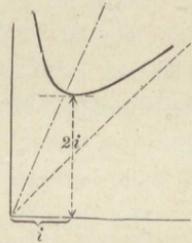
Für eine Drehachse O , welche von S um $i = \sqrt{\frac{J_S}{M}}$ entfernt ist, wird also die Schwingungslänge

$$11) \quad l_{\min} = 2i = 2e,$$

womit die beiden Kreise in Fig. 390 zusammenfallen.

Die Darstellung der Gleichung 9 ist eine Hyperbel, deren eine Asymptote die Ordinatenachse, während die andere, durch den Anfangspunkt gehend, den rechten Winkel der Koordinatenachsen halbiert. $x = i$ und $y_{\min} = 2i$ sind in Fig. 391 angegeben.

Fig. 391.



Bekanntlich werden Pendelversuche benutzt zur Ermittlung der scheinbaren Fallbeschleunigung g an verschiedenen Stellen der Erde; aus $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ wird $g = l\pi^2 : t^2$. Hieraus kann man g berechnen, wenn man für ein Pendel die Schwingungslänge l und die Dauer t einer einfachen Schwingung kennt. Letztere läßt sich durch Zählung der Anzahl der Schwingungen während einer längeren Zeit feststellen. Die Schwingungslänge könnte man wohl nach Gleichung 5, S. 328, berechnen, jedoch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit für feine Messungen, wie sie zur Ermittlung von g nötig sind. Denn kein Körper läßt sich so gleichmäßig herstellen, daß man J_0 und das statische Moment Me mit großer Schärfe durch Messung und Rechnung zu bestimmen vermöchte. Wohl aber dient zur scharfen Bestimmung der Schwingungslänge l die Eigenschaft des Pendels, daß Drehachse und Schwingungsachse miteinander vertauschbar sind. Man stelle also ein Pendel her mit fester Schneide (Drehachse) O , berechne annähernd l , bringe in diesem Abstand $l = OB$ eine Gegenschneide B an und verstelle an dem Körper verschiebbare Gewichte so lange, bis das Pendel, ob in O oder in B aufgehängt, gleiche Schwingungsdauer zeigt. Dann ist, wenn B und O nicht in derselben Entfernung vom Schwerpunkte liegen, wenn also B nicht den Punkt O_1 in Fig. 390 bedeutet, $OB = l$ die Schwingungslänge, die zwischen den Schneiden mit großer Schärfe gemessen werden kann. Ein solches Pendel heißt ein Umkehrungspendel (Reversionspendel).

Ist der Körper ein dünner prismatischer Stab von der Länge a (Fig. 392) und an seinem oberen Ende aufgehängt, so ist $J_0 = \frac{1}{3} M a^2$, $e = \frac{1}{2} a$, mithin die Schwingungslänge (Gl. 5)

$$12) \quad l = \frac{2}{3} \frac{M a^2}{M a} = \frac{2}{3} a.$$

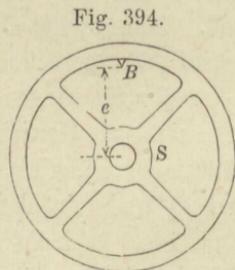
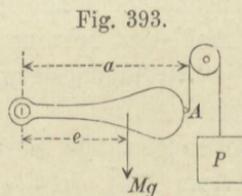
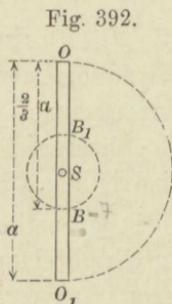
Die Achse O , O_1 , B und B_1 liefern gleiche Schwingungslänge.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer eines als physisches Pendel eingerichteten Körpers kann auch benutzt werden, um dessen Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse zu bestimmen. Gleichung 6 liefert nämlich

$$13) \quad J_0 = M g e t^2 : \pi^2.$$

Hat man (Fig. 393) den Punkt A bestimmt, der in der sicheren Gleichgewichtslage lotrecht unter O liegt, so kann man mittels der Aufhängung des Körpers nach Fig. 393 durch das den Körper im Gleichgewichte haltende Gewicht P das statische Moment $M g e = P a$ finden. Beobachtet man sodann noch t für kleine Schwingungen, so bestimmt sich J_0 nach Gleichung 13.

Soll das Trägheitsmoment J_S eines Körpers in bezug auf eine Schwerpunktsachse bestimmt werden, um welche keine Schwingung entsteht, so läßt man den Körper (Fig. 394), bestimmt $J_B = J_0$ nach Gl. 13 und findet daraus $J_S = J_B - M e^2$. Oder, wenn die Befestigung einer besonderen Achse oder Schneide nicht ausführbar ist, so verbindet man mit dem Körper eine Ergänzungsmasse M_1 derartig, daß sich beide Massen nicht gegeneinander verrücken können. M_1 muß so gewählt sein, daß man dessen Beitrag zu J und $M g e$ leicht bestimmen kann. Bringt man M_1 so an, daß es nunmehr mit dem gegebenen

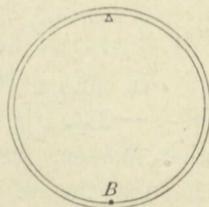


Körper ein mögliches Pendel bildet, so kann man leicht das Gesamt-Trägheitsmoment und daraus das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers berechnen.

Ein dünner Ring vom Halbmesser r , nach Fig. 395 um eine Schneide schwingend, hat, wegen $J_S = Mr^2$, nach Gleichung 7 die Schwingungslänge

$$l = 2r.$$

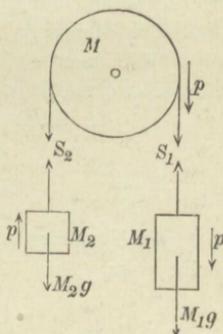
Fig. 395.



5. Beschleunigte Bewegung einer Seilrolle.

Um eine Seilrolle von der Masse M (Fig. 396) sei ein völlig biegsamer Faden geschlungen, an dessen Enden ungleiche Massen M_1 und M_2 hängen. Es soll die Umfangsbeschleunigung p der Rolle berechnet werden ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und Seilbiegungswiderstand und unter der Annahme, daß ein Gleiten des Fadens auf der Rolle nicht stattfindet. Die Masse M_1 erfährt die Beschleunigung p abwärts, die Masse M_2 dieselbe Beschleunigung aufwärts. Die Spannkraften der Seilstücke sind nicht etwa M_1g und M_2g , denn diese Gleichheit findet nach S. 92 nur statt, wenn die Massen keine Beschleunigung erfahren. An der Masse M_1 muß die Mittelkraft $M_1g - S_1 = M_1p$, mithin

Fig. 396.



$$1) \quad S_1 = M_1g - M_1p, \text{ d. h. } < M_1g$$

sein, weil M_1g und S_1 zusammen die Beschleunigung p erzeugen. Ebenso muß an der Masse M_2 die aufwärts gerichtete Beschleunigung p durch die aufwärts gerichtete Kraftsumme $S_2 - M_2g$ hervorgebracht werden; $S_2 - M_2g = M_2p$, mithin

$$2) \quad S_2 = M_2g + M_2p, \text{ d. h. } > M_2g.$$

Kann der Faden als gewichtlos betrachtet werden, so wird die gesamte Seilreibung, welche die Rolle zu beschleunigter Drehbewegung veranlaßt, gemessen durch den Unterschied der Spannkraften S_1 und S_2 , daher wird nach Gleichung 4, S. 326, $\mu p = S_1 - S_2$, wenn μ die auf den Umfang bezogene Masse der Rolle ist.

$$\text{Also} \quad \mu p = M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p,$$

$$p (M_1 + M_2 + \mu) = M_1 g - M_2 g, \quad \text{oder}$$

$$3) \quad p = \frac{M_1 g - M_2 g}{M_1 + M_2 + \mu} = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

In dieser Gleichung erscheint also der Gewichtsunterschied $M_1 g - M_2 g$ als treibende Kraft, als träge Masse aber die Summe aller Massen, die an der Beschleunigung p teilnehmen, d. h. M_1 , M_2 und die auf den Umfang bezogene Masse μ .

Eine Vorrichtung nach Fig. 396 ist die Atwoodsche Fallmaschine, sie dient, da p mit g verhältnismäßig ist, zur Vorführung der Gesetze der Fallbewegung in verkleinertem (verlangsamt) Maßstabe, weil die wirkliche Fallbewegung unbequem schnell erfolgt.

Beispiel: Ist $Mg = 1 \text{ kg}$ und (nach S. 321, Gl. 13) das auf den Umfang bezogene Gewicht der Rolle $\mu g = \frac{1}{2} \text{ kg}$, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3,9 \text{ kg}$, so wird, wenn man in Zähler und Nenner statt der Massen die g mal größeren Gewichte einführt,

$$p = g \frac{4 - 3,9}{4 + 3,9 + 0,5} = g \cdot \frac{0,1}{8,4} = \frac{g}{84}.$$

die Bewegung der angehängten Massen erfolgt daher nur mit $\frac{1}{84}$ der wahren Fallbeschleunigung.

Will man auch die Zapfenreibung mit der Reibungsziffer f und dem Zapfendurchmesser d berücksichtigen, so wird

der Zapfendruck $D = S_1 + S_2 + Mg$; es ist, wie vorher,

$$S_1 = M_1 g - M_1 p$$

$$S_2 = M_2 g + M_2 p \quad \text{und daher}$$

$$D = (M + M_1 + M_2) g - (M_1 - M_2) p$$

mit dem Zapfenreibungs-Momente $\frac{1}{2} D f d$. Sonach wird, wenn r der Rollenhalmmesser

$$\mu p = S_1 - S_2 - D f \frac{d}{2r}$$

$$= M_1 g - M_1 p - M_2 g - M_2 p - (M + M_1 + M_2) g f \frac{d}{2r} + (M_1 - M_2) p f \frac{d}{2r}$$

und daraus

$$4) \quad p = g \frac{M_1 - M_2 - (M + M_1 + M_2) f \frac{d}{2r}}{M_1 + M_2 + \mu - (M_1 - M_2) f \frac{d}{2r}}.$$

Mit $d:r = 1:25$, $f = 0,08$, $M_1 g = 4$, $M_2 g = 3,9$, $Mg = 1$, $\mu g = 0,5 \text{ kg}$ wird

$$p = g \frac{0,1 - 0,014}{8,4 - 0,0016} \quad \text{oder rund} \quad \frac{g}{100}.$$

Hiernach wird $S_1 = 4(1 - 0,01) = 3,96 \text{ kg}$, $S_2 = 3,9(1 + 0,01) = 3,94 \text{ kg}$. Damit kein Gleiten des Fadens entstehe, muß nach S. 280 $\frac{S_1}{S_2} \leq e f_1 \alpha$ sein, worin f_1 die Reibungsziffer des Fadens, $\alpha = \pi$. Dieser Bedingung wird schon für $f_1 \geq 0,0017$ genügt. Der Seilbiegungswiderstand ist hierbei vernachlässigt, da der Faden als sehr dünn angenommen.

Beispiel 2: Gleiche Massen M_1 mögen an zwei miteinander verbundenen Rollen von ungleichen Halbmessern R und r hängen (Fig. 397); es soll die Umfangsbeschleunigung p der größeren Rolle berechnet werden; die der kleinen ist dann $pr : R$. — Die Fadenkräfte sind $S_1 = M_1 g - M_1 p$; $S_2 = M_1 g + M_1 p r : R$; die Winkelbeschleunigung der Rolle ohne Rücksicht auf Reibung (nach S. 325)

$$\epsilon = \frac{S_1 R - S_2 r}{\mu R^2} = \frac{M_1 g R - M_1 p R - M_1 g r - M_1 p \frac{r^2}{R}}{\mu R^2},$$

mithin, weil $R\epsilon = p$,

$$\mu p = M_1 g - M_1 p - M_1 g \frac{r}{R} - M_1 p \frac{r^2}{R^2},$$

$$5) \quad p = g \frac{M_1 \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{M_1 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \mu}.$$

Für $R = 2r$ wird dann $p = g \frac{1/2 M_1}{5/4 M_1 + \mu}$, wobei zu beachten, daß μ auf den Abstand R bezogen ist.

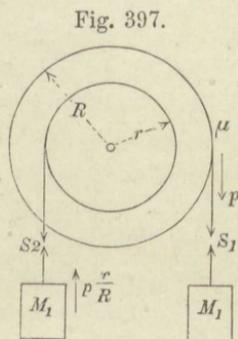


Fig. 397.

Beispiel 3: Hängen die Massen M_1 und M_2 nicht frei herab, sondern gleiten sie mit Reibung auf schiefen Ebenen mit den Neigungswinkeln α_1 u. α_2 (Fig. 398), während an dem Rollenkörper keine Bewegungswiderstände auftreten, so entsteht an der Masse M_1 eine treibende Kraft $M_1 g \sin \alpha_1$ und eine hindernde Reibung, daher ist

$$S_1 = M_1 g \sin \alpha_1 - f M_1 g \cos \alpha_1 - M_1 p;$$

ebenso ist $S_2 = M_2 g \sin \alpha_2 + f M_2 g \cos \alpha_2 + M_2 p \frac{r}{R}$,

wie in Beispiel 2 wird nun $\mu R p = S_1 R - S_2 r$ und demnach

$$6) \quad p = g \frac{M_1 (\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1) - M_2 (\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2) \frac{r}{R}}{M_1 + M_2 \frac{r^2}{R^2} + \mu}.$$

Für $r = R$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ entsteht Gleichung 3; für $M_2 = M_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ entsteht Gleichung 5.

Für $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 0$, $r = R$ (Fig. 399) ergibt sich

$$7) \quad p = g \frac{M_1 - f M_2}{M_1 + M_2 + \mu}.$$

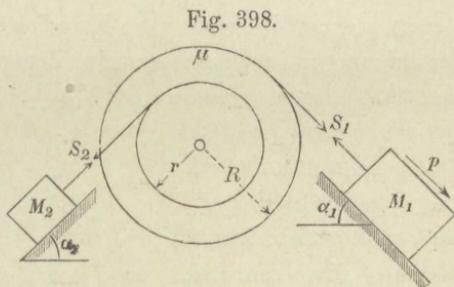


Fig. 398.

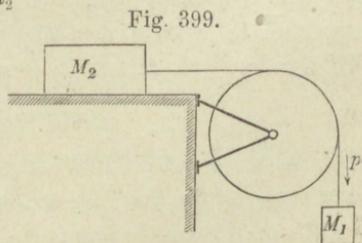


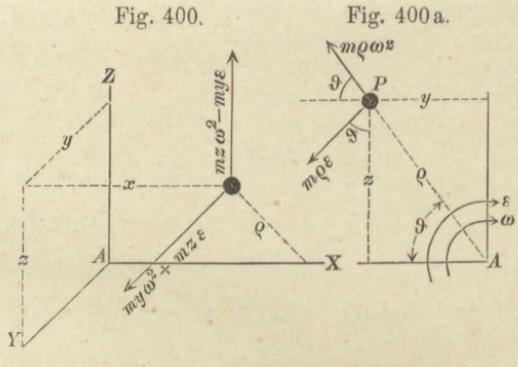
Fig. 399.

6. Widerstände der festen Drehachse eines Körpers bei beschleunigter Drehbewegung.

An der Achse des Körpers mögen an zwei Lagerstellen A und B die Widerstände A und B auftreten, welche die Aufgabe erfüllen, die Achse unbeweglich zu halten. Es mögen an dem Körper bewegendende Kräfte $[K]$ wirken. Sind ω und ε die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit und Beschleunigung, so hat ein Massenpunkt eine daraus zu ermittelnde Beschleunigung p , welcher ein Trägheitswiderstand oder eine Ergänzungskraft $-mp$ entspricht. Es muß nun nach dem Satze von d'Alembert die Gruppe dieser Trägheitswiderstände $[-mp]$ im Gleichgewichte sein mit den Widerständen A und B und der Gruppe der sonstigen äußeren Kräfte $[K]$. Hiernach können A und B gefunden werden, wenn man die Kräftegruppe $[-mp]$ kennt.

Zusammensetzung der Trägheitswiderstände $-mp$ bei ungleichmäßiger Drehbewegung. Ein Massenpunkt im Abstände ρ von der Achse (Fig. 400) führt eine Kreisbewegung aus. Seine Tangentialbeschleunigung ist $p_t = \rho\varepsilon$, seine Zentripetalbeschleunigung $p_n = \rho\omega^2$ (S. 93). Die entsprechenden Trägheitswiderstände

sind (Fig. 400 a) die Kraft $m\rho\varepsilon$ (links herum) und die Zentrifugalkraft $m\rho\omega^2$. Die Drehachse wählen wir zur x -Achse; A sei der Anfangspunkt des Achsenkreuzes (Fig. 400). In der rechts-



seitigen Figur (400 a) ist der Körper in der Richtung der Drehachse, also auf die yz -Ebene projiziert, weil die Beschleunigungen p_t und p_n und ebenso die entsprechenden Kräfte in dieser Projektion am deutlichsten erscheinen. Bildet der Halbmesser $\rho = AP$ mit der AY den Winkel ϑ , so ist

$$\rho \cos \vartheta = y; \quad \rho \sin \vartheta = z.$$

Die Kraft $m\rho\omega^2$ liefert in der positiven y -Richtung die Seitenkraft $m\rho\omega^2 \cos \vartheta = my\omega^2$, in der positiven z -Richtung die Seitenkraft $m\rho\omega^2 \sin \vartheta = mz\omega^2$. Ebenso gibt die Kraft $m\rho\varepsilon$ die

entsprechenden Seitenkräfte $m \varrho \varepsilon \sin \vartheta = m z \varepsilon$ bzw. $-m \varrho \varepsilon \cos \vartheta = -m y \varepsilon$.

Diese Seitenkräfte sind in Figur 400 eingetragen. Denkt man sich solche Kräfte für jeden einzelnen Massenpunkt angebracht und setzt diese Kräftegruppe nach S. 141 zusammen, so erhält man drei durch den Punkt A gehende Seitenkräfte X, Y, Z und drei Kräftepaarachsen $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$. In der x -Richtung ergeben sich keine Seitenkräfte. In der positiven y -Richtung entsteht $Y = \Sigma m y \omega^2 + \Sigma m z \varepsilon$, oder, weil ω und ε für alle Punkte dieselben Werte haben und außerdem $\Sigma m y = M y_0$, $\Sigma m z = M z_0$ (mit y_0 und z_0 als Koordinaten des Schwerpunktes),

$$Y = M y_0 \omega^2 + M z_0 \varepsilon.$$

In gleicher Weise wird $Z = M z_0 \omega^2 - M y_0 \varepsilon$. Zur Ermittlung der Kräftepaar-Achsenstrecke \mathfrak{M}_x gehen wir am einfachsten auf die ursprünglichen Kräfte $m \varrho \omega^2$ und $m \varrho \varepsilon$ zurück, da $m \varrho \omega^2$ in bezug auf AX kein Moment hat, $m \varrho \varepsilon$ aber das Moment $-m \varrho \varepsilon \varrho$, so daß $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon \Sigma m \varrho^2 = -\varepsilon J_x$, was nach Gleichung 2, S. 325 selbstverständlich war. Die in der z -Richtung wirkenden Kräfte gehen an der AY in einem Abstand x vorbei, liefern daher mit Rücksicht auf den Drehungssinn $\mathfrak{M}_y = -\omega^2 \Sigma m x z + \varepsilon \Sigma m x y$; ebenso ist $\mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma m x y + \varepsilon \Sigma m x z$. Das Gesamtergebnis der Trägheitswiderstände (Ergänzungskräfte)

$$[-m p] \text{ ist also } \begin{cases} X = 0 \\ Y = M y_0 \omega^2 + M z_0 \varepsilon \\ Z = M z_0 \omega^2 - M y_0 \varepsilon \\ \mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x \\ \mathfrak{M}_y = -\omega^2 \Sigma m x z + \varepsilon \Sigma m x y \\ \mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma m x y + \varepsilon \Sigma m x z. \end{cases}$$

Hiermit müssen die sämtlichen äußeren Kräfte $[K]$ und die Widerstände A und B an den Lagern im Gleichgewichte sein. In den vorstehenden Gleichungen erscheinen Summenausdrücke $\Sigma m x y$ u. $\Sigma m x z$; um sie zu erhalten, muß man jedes Massenteilchen m mit seinen Koordinaten $x y$ bzw. $x z$ multiplizieren und die Glieder dann summieren. Diese Ausdrücke sind von demselben Grade, derselben Dimension, wie die Trägheitsmomente $J = \Sigma m \varrho^2$ und heißen **Zentrifugalmomente** $= C$. Wir wollen $\Sigma m x y$ und $\Sigma m x z$ von einander unterscheiden, indem wir neben C als Zeiger diejenige Ordinate setzen, welche in den Summen nicht vorkommt, mithin

$$2) \quad \Sigma m x y = C_z; \quad \Sigma m x z = C_y.$$

Im allgemeinen sind die Trägheitswiderstände $[-mp]$ von ω und ε abhängig, so daß auch die Widerstände der festen Achse sich mit ω und ε ändern. Geht aber die Drehachse durch den Schwerpunkt, so daß $y_0 = z_0 = 0$, und sind außerdem die Zentrifugalmomente C_y und C_z gleich Null, so werden außer $X=0$ auch $Y=Z = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0$, und es bilden die Kräfte $[-mp]$ nur ein \mathfrak{M}_x . Aus der Gleichung 1 verschwinden dann, abgesehen von $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$, sämtliche von ω und ε abhängigen Glieder, so daß die Widerstände A und B der festen Achse sich ebenso berechnen lassen wie für den ruhenden Körper. Bilden unter dieser Voraussetzung die bewegenden Kräfte $[K]$ ein Kräftepaar \mathfrak{M} , dessen Achsenstrecke (S. 138) die Richtung AX hat, so ist dies mit dem berechneten $\mathfrak{M}_x = -\varepsilon J_x$ im Gleichgewichte. Weil die Normalwiderstände A und B der Achse zu dem treibenden Momente nichts beitragen, die Kräfte $[-mp]$ sich aber in jeder anderen Beziehung aufheben, so müssen in diesem Falle die Widerstände A und B der festen Achse verschwinden. Die Achse bedarf dann gar keiner Befestigung, der Körper führt seine Drehung um die unbefestigte Achse so aus, als wäre sie fest. Eine solche Achse nennt man deshalb eine **freie Achse**. Da die sämtlichen äußeren Kräfte $[K]$, A und B mit $[-mp]$ im Gleichgewichte sind, so kann man den Satz aussprechen:

Dreht sich ein Körper um eine **freie Achse**, so setzen sich sämtliche äußeren Kräfte an demselben lediglich zu einem Kräftepaare zusammen, dessen Achsenstrecke mit der Drehachse zusammenfällt, heben sich aber in jeder anderen Beziehung auf; die Normalwiderstände der Drehachse sind von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig.

Ist die Drehung eine gleichförmige ($\varepsilon = 0$), so bestehen die Kräfte $[-mp]$ nur in den Zentrifugalkräften, deren Zusammensetzung liefert (Gl. 1)

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = M y_0 \omega^2 \\ Z = M z_0 \omega^2 \\ \mathfrak{M}_x = 0 \\ \mathfrak{M}_y = -\omega^2 C_y \\ \mathfrak{M}_z = \omega^2 C_z. \end{array} \right.$$

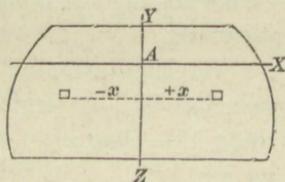
Hiermit müssen wieder die äußeren Kräfte im Gleichgewichte sein.

Weil nun zur Zusammensetzung der Zentrifugalkräfte die Summen C nötig sind, so erhielten diese den Namen „Zentrifugalmomente“.

Ist einem Körper eine Drehbewegung um eine feste Achse erteilt und setzt er diese ohne weitere Einwirkung von Kräften K fort, so müssen die Widerstände A und B mit den Kräften der Gleichung 3 im Gleichgewichte sein. Diese Widerstände sind durch die Winkelgeschwindigkeit bedingt und verschwinden mit dieser. Ist aber die Drehachse eine freie Achse, so heben sich die Zentrifugalkräfte vollständig auf, und es werden auch keine Achswiderstände nötig; die Drehung setzt sich um die unbefestigte Achse fort, als wäre dieselbe festgehalten. Man kann daher sagen, eine freie Achse für einen sich mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit drehenden Körper ist eine solche, in bezug auf welche die Zentrifugalkräfte sich aufheben.

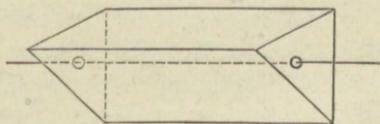
Einige Bedingungen für eine freie Achse. Die Zentrifugalmomente C_y und C_z werden gleich Null, wenn der Körper rechtwinklig zur Drehachse AX eine Symmetrie-Ebene hat; wählt man diese nämlich zur yz -Ebene (Fig. 401), so entspricht jedem Massenteilchen mit positivem x ein gleiches mit negativem x , so daß in $\sum mxy$ und $\sum mxz$ stets je zwei gleiche, sich aufhebende Glieder $+mxy$ und $-mxy$ bzw. $+mxz$ und $-mxz$

Fig. 401.



vorkommen. Geht außerdem noch die Drehachse durch den Schwerpunkt, so ist AX eine freie Achse. Hiernach ist für einen gleichartigen Körper von der Form eines geraden Prismas oder Zylinders die Verbindungsgerade der Schwerpunkte der Endflächen (Fig. 402) eine freie Achse.

Fig. 402.



Ferner ist AX eine freie Achse, wenn man durch sie zwei rechtwinklig zueinander stehende Symmetrie-Ebenen legen kann. Wählt man diese nämlich zur xy -Ebene und zur xz -Ebene, so liegen je zwei Massenteilchen mit $+y$ und mit $-y$ einander gegenüber, deren eines den Beitrag $+mxy$, deren anderes den Beitrag $-mxy$ liefert, so daß $C_z = 0$ wird; ebenso $C_y = 0$.

Eingehendere Rechnungen zeigen, daß jeder noch so unregelmäßige Körper mindestens drei zueinander rechtwinklige freie Achsen hat.

Andere Arten der Zusammensetzung der Kräfte [$-mp$].

Trennt man in Gleichung 1 die durch den Anfangspunkt A gehenden Kräfte Y und Z in diejenigen Teile $Y_1 = My_0\omega^2$ und $Y_2 = Mz_0\varepsilon$ bzw. $Z_1 = Mz_0\omega^2$ und $Z_2 = -My_0\varepsilon$, welche allein von ω , bzw. von ε abhängen (Fig. 403), so lassen sich nunmehr Y_1 und Z_1 wieder zusammensetzen zu einer Mittelkraft

$$R_1 = M\omega^2\sqrt{y_0^2 + z_0^2} = M\omega^2e,$$

wenn e die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet. Diese Kraft ist parallel mit der Richtung jenes rechtwinkligen Abstandes e . Y_2 und Z_2 geben in gleicher Weise eine Mittelkraft $R_2 = M\varepsilon e$, die zu R_1 rechtwinklig und, dem Sinne nach, der Umfangsbeschleunigung des Schwerpunktes entgegengesetzt ist.

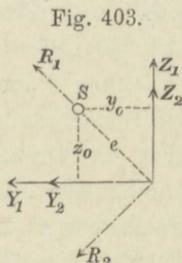


Fig. 403.

Vereinigt man die Kraft Y der Gleichung 1 mit der Kräftepaarachse \mathfrak{M}_z , so ergibt sich aus beiden eine Kraft von derselben Größe $Y = My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon$, welche von A aus um

$$5) \quad u = \frac{\mathfrak{M}_z}{Y} = \frac{\omega^2 C_z + \varepsilon C_y}{My_0\omega^2 + Mz_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x -Richtung parallel verschoben ist (Fig. 404).

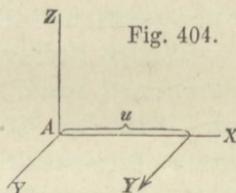


Fig. 404.

Vereinigt man ebenso Z mit \mathfrak{M}_y , so erhält man eine gleiche Kraft

$$6) \quad Z = Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon, \text{ welche um}$$

$$7) \quad v = \frac{-\mathfrak{M}_y}{Z} = \frac{\omega^2 C_y - \varepsilon C_z}{Mz_0\omega^2 - My_0\varepsilon}$$

im Sinne der positiven x -Richtung parallel verschoben ist (Fig. 405). Auf diese beiden im Raume sich rechtwinklig kreuzenden Kräfte ist mithin die Gruppe [$-mp$] auch zurückzuführen.

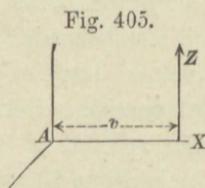


Fig. 405.

Im Falle der gleichförmigen Drehung ($\varepsilon = 0$) vereinfachen sich diese Ergebnisse in der Weise der Figur 406.

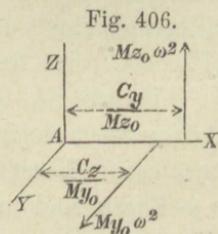


Fig. 406.

Beispiel 1: Eine als materielle Gerade aufzufassende Stange von der Länge a schwinde unter Einwirkung der Schwere um eine durch den Endpunkt A gelegte wagerechte Achse (Fig. 407). Die Bewegung möge von der wagerechten Lage ausgegangen sein. Hier liegt ein Fall vor, wo C_y und C_z Null sind, weil AYZ eine Symmetrieebene für die Stange ist. Die Drehachse ist aber keine freie Achse, weil sie nicht durch den Schwerpunkt geht. In einer beliebigen Zwischenlage ist $y_0 = e \sin \vartheta$; $z_0 = e \cos \vartheta$, wobei $e = \frac{1}{2} a$; ferner ist $J_x = \frac{1}{3} M a^2$; und für die Winkelgeschwindigkeit ω und Beschleunigung ε in der beliebigen Zwischenlage gelten:

$$\text{(nach S. 316)} \quad \frac{1}{2} J_x \omega^2 = M g z_0,$$

$$\omega^2 = \frac{2 M g z_0}{J_x} = \frac{3 g \cos \vartheta}{a},$$

$$\text{(nach S. 325)} \quad \varepsilon = \frac{M g e \sin \vartheta}{J_x} = \frac{3 g \sin \vartheta}{2 a}.$$

Die Kräftegruppe $[-m p]$ liefert hiernach (Gleichung 1, Seite 337)

$$X = 0;$$

$$Y = \frac{M a}{2} \sin \vartheta \frac{3 g \cos \vartheta}{a} + \frac{M a}{2} \cos \vartheta \frac{3 g \sin \vartheta}{2 a}$$

$$= \frac{9}{4} M g \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{9}{8} M g \sin 2 \vartheta;$$

$$Z = \frac{M a}{2} \cos \vartheta \frac{3 g \cos \vartheta}{a} - \frac{M a}{2} \sin \vartheta \frac{3 g \sin \vartheta}{2 a}$$

$$= \frac{M g}{2} (3 - \sin^2 \vartheta - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta) = \frac{M g}{8} (3 + 9 \cos 2 \vartheta);$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{2} M g a \sin \vartheta;$$

$$\mathfrak{M}_y = 0; \quad \mathfrak{M}_z = 0.$$

Mit diesen Kräften müssen die Schwerkraft Mg und die Widerstände der Drehachse im Gleichgewichte sein. Letztere brauchen in diesem Falle, weil \mathfrak{M}_y und $\mathfrak{M}_z = 0$ sind, nur in dem Punkte A der Achse anzugreifen; man zerlege sie in V und H . Dann muß

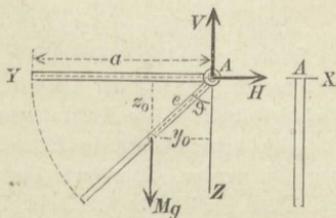
$$H = Y = \frac{9}{8} M g \sin 2 \vartheta \quad \text{sein}$$

$$\text{ebenso} \quad M g - V = -Z = -\frac{1}{8} M g (3 + 9 \cos 2 \vartheta),$$

$$\text{d. h.} \quad V = \frac{1}{8} M g (11 + 9 \cos 2 \vartheta).$$

Der wagerechte Achsenwiderstand H ist für $\vartheta = 90^\circ$, d. h. in der Anfangslage gleich Null, ebenso in der tiefsten Lage für $\vartheta = 0$; am größten wird er für $\vartheta = 45^\circ$, nämlich $H_{\max} = \frac{9}{8} M g$.

Fig. 407.



Der lotrechte Widerstand ist

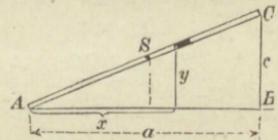
$$\begin{aligned} \text{für } \vartheta = 90^\circ: & V = \frac{1}{4} Mg, \\ \text{für } \vartheta = 45^\circ: & V = \frac{11}{8} Mg, \\ \text{für } \vartheta = 0: & V_{max} = \frac{5}{2} Mg. \end{aligned}$$

Diese Größtwerte von H und V sind im Verhältnis zum Gewicht Mg des Stabes erheblich. Die Kraft H wirkt abwechselnd bald nach links, bald nach rechts, je nach der Lage des schwingenden Körpers. — Von besonderer Wichtigkeit sind diese Kräfte, wenn der schwingende Körper eine schwere Glocke ist. Die Achswiderstände H und V müssen dann von dem sog. Glockenstuhle ausgeübt werden. Der fortwährende Wechsel des Sinnes der Kraft H ist für den Turm besonders gefährlich. Der Rechnungsgang ist im wesentlichen derselbe wie in dem vorliegenden Falle. — Wurde die Stange in der Anfangslage ($\vartheta = 90^\circ$) am linksseitigen Ende etwa unterstützt, so war im Ruhezustande $V = \frac{1}{2} Mg$; durch plötzliches Loslassen des Endes verändert sich V auf $\frac{1}{4} Mg$. — Weitere Beispiele sollen sich auf gleichförmige Drehung beziehen.

Beispiel 2: Eine materielle Gerade AC (Fig. 408) drehe sich gleichförmig um eine Achse AB ; der Punkt A sei unmittelbar, der Punkt C mittels einer gewichtlosen Stange c mit der Achse verbunden.

Die Projektionen der Stange seien a und c . Da der Körper ein ebenes Gebilde, so lege man ACB in die xy -Ebene, dann ist $y_0 = \frac{1}{2} c$; $z_0 = 0$; ferner wird $\Sigma m x z = C_y = 0$, weil sämtliche z -Werte Null sind. Die Zusammensetzung der sämtlichen Zentrifugalkräfte beschränkt sich daher nach Fig. 406 auf eine Einzel-

Fig. 408.



kraft $Y = My_0 \omega^2 = \frac{1}{2} Mc \omega^2$, im Abstand $u = \frac{C_z}{My_0}$ rechts von A liegend.

Ein Massenteilchen von der Länge ds hat die Masse $m = \frac{\gamma}{g} F \cdot ds$, wenn F der Querschnitt des Stabes, γ die Dichte. Man kann aber bei der Berechnung von u die selbstverständlichen Faktoren $F \gamma : g$ fortlassen, wenn man $m = ds$ und ebenso $M = s =$ der Länge der Stange setzt. Das Teilchen liefert zu C_z den Betrag $ds \cdot xy$, was wegen $y = xc : a$ und $ds = dx \cdot s : a$ geschrieben werden kann:

$$mxy = \frac{sc}{a^2} x^2 dx.$$

Daraus folgt
$$C_z = \Sigma mxy = \frac{sc}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} sca.$$

Weil nun nach obigem $My_0 = \frac{1}{2} cs$, so wird $u = \frac{2}{3} a$.

Derartig einfache Fälle kann man auch leicht ohne Anwendung der allgemeinen Formeln unmittelbar behandeln. Dem Teilchen ds entspricht die Zentrifugalkraft $ds \cdot y \omega^2$. Die Mittelkraft R der Zentrifugalkräfte ist die Summe der gleichgerichteten Kräfte $[ds \cdot y \omega^2]$, mithin

$$R = \omega^2 \int ds \cdot y = \omega^2 s y_0 = \omega^2 s \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} M \omega^2 c.$$

Nach dem Satze der Momente wird dann in bezug auf A :

$$Ru = \omega^2 \int ds \cdot xy = \omega^2 s \frac{c}{a^2} \int_0^a x^2 dx,$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{2} sc \omega^2 u = \frac{1}{3} \omega^2 sca, \text{ wonach } u = \frac{2}{3} a.$$

Daß die Kraft $\frac{1}{2} M \omega^2 c$ durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 409) geht, folgt auch daraus, daß man die Teilkraft $ds \cdot y \omega^2$ schreiben kann

$$= \omega^2 \frac{s}{a} y \cdot dx,$$

d. h. proportional dem Flächenstreifen $y \cdot dx$ des Dreiecks.

Wirken nun auf die Stange keine bewegenden Kräfte $[K]$, so müssen die etwa in A und B angreifenden Achsenwiderstände mit R im Gleichgewichte sein. Daher wird

$$A = \frac{1}{3} R = \frac{1}{6} M \omega^2 c; \quad B = \frac{2}{3} R = \frac{1}{3} M \omega^2 c.$$

Steht die Drehachse AB lotrecht und wirkt die Schwere auf die sich drehende Stange (Fig. 410), so müssen die Schwere Mg und die Widerstände A und B zusammen mit $R = \frac{1}{2} M \omega^2 c$ im Gleichgewichte sein. $X=0$ erfordert, daß etwa in A ein lotrecht aufwärts gerichteter Widerstand $A_x = Mg$ wirke. Es ist ferner in bezug auf B :

$$0 = -\frac{1}{2} M \omega^2 c \frac{a}{3} + A_y a - Mg \frac{c}{2},$$

$$\text{d. h. } A_y = Mg \frac{c}{2a} + \frac{M \omega^2 c}{6} = \frac{Mgc}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{\omega^2}{3g} \right)$$

$$\text{und ebenso } B_y = \frac{Mgc}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{g} \right).$$

Es wird der Widerstand $B_y = 0$ für $\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{a}$;

unter dieser Bedingung bewegt sich die Stange als ein physisches Kegelpendel; d. h. nicht durch einen Stab BC , sondern nur infolge der Drehung wird der Winkel α unverändert erhalten. Für das mathematische Kegelpendel (S. 73) war $\omega^2 = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{c} = \frac{gc}{ac} = \frac{g}{a}$.

Beispiel 3: Der sich gleichförmig um die Achse AB drehende Körper sei eine materielle Dreiecksfläche ABC (Fig. 411). Dann ist, wenn man die Masse der Flächeneinheit = 1 setzt, $M = \frac{1}{2} ac$, $y_0 = \frac{1}{3} c$, mithin die gesamte Zentrifugalkraft $R = \frac{1}{3} M c \omega^2$ im Abstand u von A . Um $C_x = \int mxy$ zu bestimmen, bedenke man, daß $C_x = \int dx \cdot dy \cdot xy$. Alle

Fig. 409.

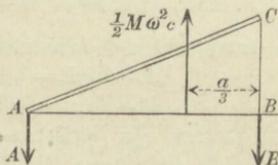


Fig. 410.

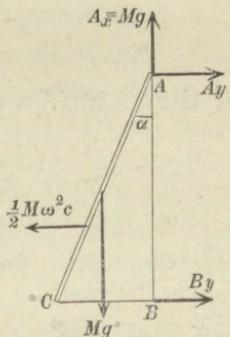
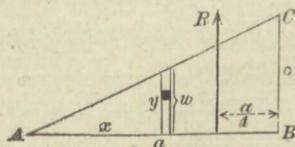


Fig. 411.



Teilchen eines lotrechten Flächenstreifens haben übereinstimmendes x und dx liefern daher zu C_z den Beitrag $x dx \int_0^\omega y \cdot dy = x dx \cdot \frac{1}{2} \omega^2$, wenn ω die Höhe des Streifens; darin ist $\omega = cx : a$, also wird

$$C_z = \frac{1}{2} \frac{c^2}{a^2} \int_0^a x^3 dx = \frac{1}{8} c^2 a^2 = \frac{1}{4} M a c.$$

Mithin nach Fig. 406 $u = \frac{C_z}{M y_0} = \frac{1/4 M a c}{1/3 M c} = 3/4 a$.

Die entsprechenden Achsenwiderstände werden dann

$$A = 1/4 R = 1/12 M c \omega^2 \quad \text{und} \\ B = 3/4 R = 1/4 M c \omega^2.$$

Stellen wir wiederum die Drehachse lotrecht (Fig. 412) und lassen die Schwere wirken, so sind in A und B die wagerechten Widerstände A_y und B_y nötig, für welche gilt:

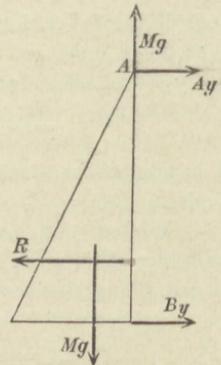
$$1/4 a R = A_y a - M g^{1/3} c,$$

mithin $A_y = 1/4 R + 1/3 M g \frac{c}{a}$ und ebenso $B_y = 3/4 R - 1/3 M g \frac{c}{a}$.

Wiederum wird die Befestigung bei B unnötig, wenn

$$3/4 R = 1/4 M c \omega^2 = 1/3 M g \frac{c}{a}, \quad \text{d. h. für } \omega^2 = \frac{4}{3} \frac{g}{a}.$$

Fig. 412.

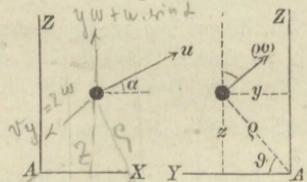


7. Gleichzeitige Verschiebung und Drehung eines Körpers.

a) Arbeitsvermögen.

Ein Körper drehe sich um eine Schwerpunktsachse, die zur x -Achse gewählt werden möge, mit der Winkelgeschwindigkeit ω ; zugleich werde die Achse mit einer der xz -Ebene parallelen Geschwindigkeit u parallel verschoben, und zwar möge u mit der x -Richtung den Winkel α bilden (Fig. 413). Dann setzt sich die gesamte Geschwindigkeit v eines Punktes der Koordinaten x, y, z im Abstände ρ von der Achse aus den Einzelgeschwindigkeiten u und $\rho\omega$ zusammen.

Fig. 413.



Figur 413 stellt das Achsenkreuz in zwei Projektionen dar. Bildet ρ mit AY den Winkel ϑ , so ist $\rho \cos \vartheta = y$, $\rho \sin \vartheta = z$; somit zerlegt sich $\rho\omega$ in $-z\omega$ und $y\omega$. Die Seitengeschwindigkeiten eines Punktes nach den Achsenrichtungen werden dann

$$v_x = u \cos \alpha; \quad v_y = -z\omega; \quad v_z = y\omega + u \sin \alpha.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 \cos^2 \alpha + z^2 \omega^2 + y^2 \omega^2 + 2y\omega u \sin \alpha + u^2 \sin^2 \alpha \\ &= u^2 + \varrho^2 \omega^2 + 2y\omega u \sin \alpha. \end{aligned}$$

Das Arbeitsvermögen des Körpers ergibt sich dann zu

$$\Sigma(1/2 mv^2) = 1/2 Mu^2 + 1/2 \omega^2 \Sigma m \varrho^2 + \omega u \sin \alpha \Sigma m y,$$

weil u , ω und α für alle Teile des Körpers dieselben. Da aber die Ebene AXZ den Schwerpunkt enthält, so ist $\Sigma m y = 0$ (S. 151), mithin das Arbeitsvermögen

$$1/2 Mu^2 + 1/2 J \omega^2,$$

wenn J das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehachse. Das Arbeitsvermögen setzt sich hiernach aus zwei Teilen zusammen, deren einer das Arbeitsvermögen wegen der Verschiebung, deren anderer dasjenige wegen der Drehung bedeutet.

b) Bewegung eines freien Körpers.

Wirken an einem freien starren Körper beliebige äußere Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots$, so füge man im Schwerpunkt S des Körpers je zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte K hinzu. Dann lassen sich im Schwerpunkte die den gegebenen gleichgesinnten Kräfte K zu einer Mittelkraft R vereinigen, während jede gegebene Kraft K mit der entgegengesetzt hinzugefügten ein Kräftepaar bildet, deren Achsenstrecken ein Gesamtmoment \mathfrak{M} (S. 142) liefern. Der Schwerpunkt S bewegt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes nur unter Einwirkung der Kraft R mit der Beschleunigung $p_0 = R : M$. (Wäre etwa R unveränderlich nach Größe und Richtung, so würde der Schwerpunkt eine Parabel beschreiben, S. 61). Das Achsenmoment \mathfrak{M} bewirkt aber noch eine Drehung um den Schwerpunkt. Denkt man sich nun mit dem Schwerpunkt ein Achsenkreuz verbunden, welches dessen Bewegung völlig mitmacht, aber stets der Anfangslage parallel bleibt, so kann man die Drehung des Körpers auffassen als scheinbare Bewegung gegen dieses mit der Beschleunigung p_0 sich verschiebende Achsenkreuz. Diese Bewegung kann dann betrachtet werden wie eine Drehung um den festliegenden Schwerpunkt, wenn man an allen Punkten des Körpers die entsprechenden Ergänzungskräfte $[-mp_0]$ anbringt. Weil diese sich gleichmäßig über die ganze Masse verteilen, so liefern sie eine Mittelkraft $-Mp_0$, die durch den

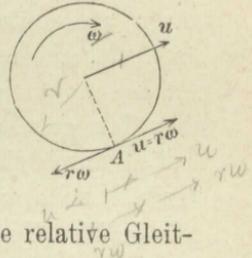
Schwerpunkt geht, daher auf die Drehung um ihn keinen Einfluß haben kann. Die Drehung geschieht also gerade so, als ruhte der Schwerpunkt.

Ist nun die durch den Schwerpunkt gelegte Achsenstrecke des Gesamtkräftepaars \mathfrak{M} eine freie Achse und hat der Körper anfänglich keine Drehung um eine andere Achse, so wird die Drehachse ihre Richtung im Raum und im Körper nicht ändern, und der Körper wird sich um diese Achse des Gesamtkräftepaars \mathfrak{M} gerade so drehen, als wäre sie eine festgehaltene Achse. Denn, hielte man sie tatsächlich fest, so würden die Widerstände des Festhaltens wegen dieser Eigenschaft der freien Achse (S. 338) zu Null werden. Die Drehung um diese Achse erfolgt dann mit der Winkelbeschleunigung $\varepsilon = \mathfrak{M} : J$ (S. 325, Gl. 2). — Dies trifft zu für eine gleichartige Kugel unter Einwirkung beliebiger, aber gleichbleibender Kräfte, wenn sie zu Anfang keine Drehbewegung um eine andere Achse als die Achse des Gesamtmomentes \mathfrak{M} hatte. Der Schwerpunkt beschreibt eine Parabel; die Achse \mathfrak{M} verschiebt sich mit dem Schwerpunkte und bildet, weil jeder Durchmesser eine freie Achse ist, fortwährend die Drehachse für den Körper. — Ist aber die Achse \mathfrak{M} durch den Schwerpunkt keine freie Achse, oder ist zu Anfang schon eine Drehung um eine andere Achse vorhanden, so ändert die Achse, um welche die Drehung geschieht, fortwährend ihre Richtung im Körper und im Raum; es entsteht neben der Bewegung des Schwerpunktes, die hiervon nicht berührt wird, im allgemeinen eine unregelmäßig wirbelnde Bewegung um den Schwerpunkt, die so verwickelt ist, daß sie an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden soll; man kann solche Bewegung beobachten, wenn man einen Stab so fortwirft, daß er eine Drehung um eine schief zu ihm liegende Achse mit auf den Weg bekommt. Wird ein Stab (Speer oder Ger) in der Mitte erfaßt und in wagerechter Lage so fortgeworfen, daß er keine Drehung auf den Weg bekommt, so beschreibt sein Schwerpunkt — abgesehen von der Wirkung des Luftwiderstandes — eine Wurfparabel; die Stange erfährt, weil $\mathfrak{M} = 0$ ist, keine Drehung, sondern bleibt immer ihrer Anfangslage parallel, stellt sich aber nicht etwa tangential zur Wurflinie. Anders ist es mit einem gespitzten und gefiederten Pfeile; dieser wird durch den Luftwiderstand stets so gedreht, daß seine Längenrichtung ziemlich tangential zur Wurflinie sich stellt

e) Rollbewegung auf schiefer Ebene. Fuhrwerke.

Bewegung ohne Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Hat ein Umdrehungskörper eine Winkelgeschwindigkeit ω rechtsherum um seine geometrische Achse und wird er gleichzeitig rechtwinklig zur Achse mit der Geschwindigkeit $u = r\omega$ nach rechts verschoben, so setzen sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte eines Kreises vom Halbmesser r aus den Einzelgeschwindigkeiten $r\omega$ rechtwinklig zum Drehungshalbmesser und $u = r\omega$ zusammen. An dem Punkt A (Fig. 414) ist dann die Gesamtgeschwindigkeit $v = 0$. Bringt man den Körper an dieser Stelle mit einer Ebene in Berührung, welche mit u und der geometrischen Achse des Körpers parallel ist, so wird der Umdrehungskörper sich gegen diese Ebene in der Art bewegen, daß die Berührungsstelle fortwährend wechselt, daß an der Berührungsstelle aber stets die relative Gleitgeschwindigkeit Null ist. Eine solche Bewegung nennt man eine **Rollbewegung**. Andere, ebenfalls aus Drehung und Verschiebung zusammengesetzte Bewegungen, bei denen aber die Bedingung $r\omega = u$ nicht erfüllt ist, erscheinen äußerlich ebenfalls wie Rollbewegungen, sind es aber nicht, sondern sind, weil an der Berührungsstelle die relative Gleitgeschwindigkeit nicht gleich Null, Gleitbewegungen sich drehender Körper auf einer Ebene. Für die Kräfte und damit auch für die Gesetze der Bewegung ist es von maßgebender Bedeutung, ob die Gleitgeschwindigkeit an der Berührungsstelle Null ist oder nicht. Im ersteren Falle kommt nämlich die Reibung im allgemeinen mit einem Betrage $T \leq fN$ zur Wirkung, während, wenn u nur im geringsten von $r\omega$ abweicht, der volle Betrag der Reibung fN wirksam wird.

Fig. 414.



An dieser Stelle behandeln wir die reine Rollbewegung und werden die Gleitbewegung Seite 359 besprechen.

Das Arbeitsvermögen der Rollbewegung ist nach Seite 345 $\frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}\omega^2J$, oder, wenn u die auf den Halbmesser des Rollkreises r bezogene Masse (wegen $r\omega = u$):

$$1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + \mu)u^2.$$

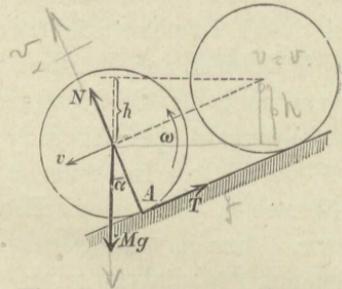
Wird ein Umdrehungskörper (Zylinder, Reif oder Kugel) mit der Geschwindigkeit Null auf eine schiefe Ebene gesetzt und lediglich

$$u^2 / (M + \mu) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu$$

der Einwirkung der Schwere Mg und des Normalwiderstandes N der Ebene überlassen, so würde er unter Annahme völliger Glätte nicht in Drehung geraten können, weil Mg und N beide durch den Schwerpunkt gehen; es würde der Körper also eine beschleunigte, rein fortschreitende Gleitbewegung ausführen. In Wirklichkeit setzt sich ein Reibungswiderstand T dem Gleiten entgegen, und wenn dieser in der erforderlichen Größe zur Wirkung gelangen kann, so wird er das Gleiten verhindern und eine Rollbewegung erzeugen. Unter welchen Bedingungen dies geschieht, bleibt noch zu untersuchen. Daher setzen wir zunächst voraus, daß eine vollkommene Rollbewegung stattfindet, welche entweder durch Reibung erzeugt, oder durch einen um den Rollkreis geschlungenen, von A aus auf der Ebene nach oben hin gerade gestreckten und an ihr befestigten Faden, oder endlich durch eine Verzahnung von Rollkreis und Bahn erzwungen werde. Dann wird durch eines dieser Mittel die für das Rollen erforderliche Umfangskraft T geliefert.

Beginnt die Rollbewegung mit der Geschwindigkeit Null und ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem dieser um h gesunken, v geworden (Fig. 415), so ist die Zunahme an Arbeitsvermögen $\frac{1}{2} (M + \mu) v^2$. Arbeit wird nur von der Schwere im Betrag Mgh verrichtet, denn N und T greifen an der Berührungsstelle A an, deren Geschwindigkeit Null ist. Hiernach muß $\frac{1}{2} (M + \mu) v^2 = Mgh$ sein, oder

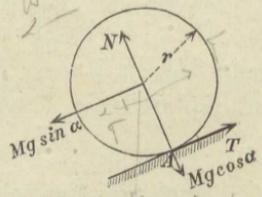
Fig. 415.



$$2) \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}}$$

Will man die Bewegung in ihren Einzelheiten kennen lernen, so muß man die Beschleunigungen beider Einzelbewegungen berechnen. Zerlegt man Mg in $Mg \sin \alpha$ und $Mg \cos \alpha$ (Fig. 416), so muß

Fig. 416.



3) $N = Mg \cos \alpha$ sein, weil der Schwerpunkt sich geradlinig bewegt, d. h. keine Zentripetalbeschleunigung erfährt (S. 71). Die Beschleunigung p des Schwerpunktes erhält man nach Seite 172, indem man T an den

Schwerpunkt verschoben denkt, mithin ist $Mp = Mg \sin \alpha - T$. Weil T noch unbekannt, ist eine zweite Gleichung erforderlich. Da in jedem Augenblick $r\omega = v$, so muß das gleiche Verhältnis auch für die Beschleunigungen gelten, d. h. $r\varepsilon = p$. Weil nun die Umfangsbeschleunigung $r\varepsilon = p$ von T herrührt, so ist nach Gleichung 4, S. 326:

$$4) \quad \mu p = T. \quad \checkmark$$

Führt man dies in obigen Ausdruck für Mp ein, so ergibt sich schließlich

$$5) \quad p = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \mu} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{\mu}{M}},$$

d. h. die treibende Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ist nicht allein durch die Masse M , sondern durch die Summe $M + \mu$ zu teilen, da sie nicht nur die fortschreitende Masse M , sondern zugleich die Schwungmasse μ zu beschleunigen hat (vergl. S. 234).

Hiermit ist auch die Umfangskraft T bestimmt (Gleichung 4) zu

$$6) \quad T = \mu p = \frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu} = \frac{Mg \sin \alpha}{1 + \frac{M}{\mu}}.$$

Soll nun die Rollbewegung allein durch die Reibung, ohne sonstigen Zwang, gesichert sein, so muß $T \leq fN = fMg \cos \alpha$ sein, oder

$$\frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu} \leq fMg \cos \alpha.$$

Das gibt, nach α aufgelöst:

$$7) \quad \operatorname{tg} \alpha \leq f \left(1 + \frac{M}{\mu} \right). \quad \checkmark$$

Genügt die Neigung der schiefen Ebene dieser Bedingung, so ist Rollbewegung möglich. Bei zu großer Neigung ist $fMg \cos \alpha$ zu klein, um die der großen Schwerpunktsbeschleunigung p entsprechende Umfangsbeschleunigung zu erzeugen; es wird dann eine Gleitbewegung entstehen.

Natürlich ist die betrachtete Rollbewegung nur möglich, wenn die Wirkungsebene der Kräfte N und T durch den Schwerpunkt geht. Es findet dies statt beim Zylinder, beim Reif, bei der Kugel; nicht beim Kegel, wohl aber bei einem Doppelkegel und allgemeiner bei jeder Achse, auf der zwei symmetrische Umdrehungskörper als

Räder befestigt sind. Da beim dünnen Reif $\mu = M$, beim Zylinder $\mu = 1/2 M$, bei der Kugel $\mu = 0,4 M$ (S. 321 und 322), so wird für den Reif:

$$v = 0,707 \sqrt{2gh} = \sqrt{gh}; \quad p = 1/2 g \sin \alpha; \quad T = 1/2 Mg \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 2f;$$

für den Zylinder:

$$v = 0,817 \sqrt{2gh}; \quad p = 2/3 g \sin \alpha; \quad T = 1/3 Mg \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 3f;$$

für die Kugel:

$$v = 0,845 \sqrt{2gh}; \quad p = 5/7 g \sin \alpha; \quad T = 2/7 Mg \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 3,5f.$$

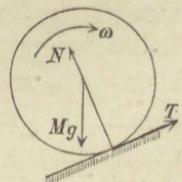
Dagegen würde für reibungsloses Gleiten gelten

$$v = \sqrt{2gh}; \quad p = g \sin \alpha.$$

Reif, Zylinder und Kugel, auf schiefer Ebene nebeneinander losgelassen, bewegen sich hiernach mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Die Kugel eilt am meisten; und zwar sind dabei die Durchmesser ohne Einfluß; nur auf die Form der Körper kommt es an. Hierbei wurde kein Rollwiderstand vorausgesetzt, der natürlich die Ergebnisse ändern muß.

Wird der Körper in eine aufwärts gerichtete Rollbewegung versetzt und der Schwere überlassen, so könnte man auf den ersten Blick vielleicht meinen, der Sinn der Reibung T müßte mit der Umkehrung der Bewegung sich ebenfalls umkehren. Dies wäre jedoch ein Trugschluß, denn an der Berührungsstelle findet ja weder in der Richtung aufwärts, noch abwärts ein Gleiten statt, mag der Körper aufwärts oder abwärts rollen. Daß vielmehr T beim Aufwärtsrollen denselben Sinn behalten muß wie beim Abwärtsrollen, erkennt man aus folgendem: Beim Aufwärtsrollen wird die Arbeit der Schwere negativ, somit muß die Bewegung des Schwerpunktes verzögert sein, und Gleiches folgt hieraus für die Drehbewegung. Damit aber die einzige Drehkraft T beim Aufwärtsrollen eine Verzögerung der Drehung erzeuge, muß sie (Fig. 417) aufwärts gerichtet sein. Da nun die Kräfte jetzt genau dieselben sind wie beim Abwärtsrollen, so gelten auch für p , T und $\operatorname{tg} \alpha$ dieselben Gleichungen wie beim Abwärtsrollen.

Fig. 417.



Geschieht die Rollbewegung nicht auf einer schiefen Ebene, sondern im unteren Teil einer Zylinderfläche vom Halbmesser $R+r$ mit wagerechten Erzeugenden (Fig. 418), so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Zwischenlage P nach der auch hier gültigen Gleichung 2 (Seite 348)

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\mu}{M}}} = \sqrt{\frac{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)}{1 + \frac{\mu}{M}}},$$

wenn die Bewegung bei A mit der Geschwindigkeit Null begann. Bei einem mathematischen Pendel von der Fadenlänge R würde

$$v_1 = \sqrt{2gR(\cos\vartheta - \cos\alpha)} \quad \text{sein.}$$

Die Vertauschung des einfachen Pendels mit einem hin und her rollenden Körper ist also (wegen der Verkleinerung der Beschleunigung des Schwerpunktes, S. 349) gleichbedeutend mit einer Ersetzung der Fallbeschleunigung g durch den kleineren Wert $g : \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)$; mithin wird die Dauer einer kleinen einfachen Schwingung sein

$$s) \quad t = \pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(1 + \frac{\mu}{M}\right)}.$$

Bewegung der Fuhrwerke mit Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Tragen die auf schiefer Ebene rollenden Räder von der Gesamtmasse M ein Fuhrwerk von der Masse M_1 , welches nur an der Verschiebung mit der Beschleunigung p teil nimmt, so denkt man sich zur Berechnung der letzteren die Masse M_1 zunächst an der Achse des rollenden Körpers reibungslos aufgehängt. Die Gelenkstange zur Aufhängung nimmt dann im relativen Ruhezustande gegen die Achse des rollenden Körpers eine Richtung an, welche von der Rechtwinkligen zur schiefen Ebene um einen Winkel β abweicht (Fig. 419). Nennt man die Spannkraft der Stange, die zugleich den Druck auf die Achse bedeutet, D , so müssen D und β so bestimmt werden, daß M_1 die Verschiebungsbeschleunigung p erfahre. Ersetzt man die Stange durch die Kraft D und zerlegt die an M_1 wirkenden D und M_1g

Fig. 418.

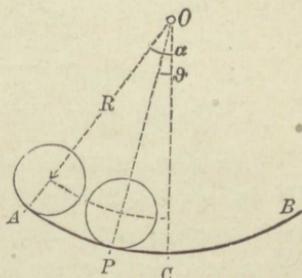
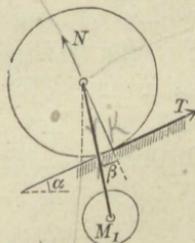


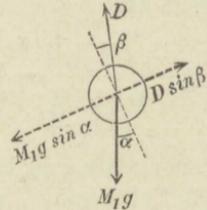
Fig. 419.



parallel zur schiefen Ebene und rechtwinklig dazu (Fig. 420), so wird $D \cos \beta = M_1 g \cos \alpha$, ferner $M_1 p = M_1 g \sin \alpha - D \sin \beta$ oder $D \sin \beta = M_1 g \sin \alpha - M_1 p$. Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{p}{g \cos \alpha};$$

Fig. 420.



$$9) \quad D = M_1 g \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \frac{p}{g} + \left(\frac{p}{g}\right)^2}.$$

An dem rollenden Körper M wirken nun die in Figur 421 angegebenen Kräfte, wo \mathfrak{M} das gesamte, aus Zapfenreibung und Rollwiderstand herrührende Moment bedeutet. Nach S. 299 ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} D f d + N e$, wenn d der Zapfendurchmesser, e der Arm des Rollwiderstandes. Dann gilt für die Beschleunigung p des Schwerpunktes

$$M p = M g \sin \alpha + D \sin \beta - T \quad \text{oder}$$

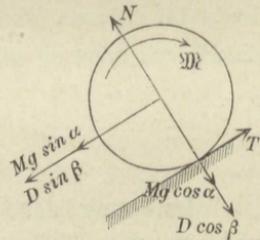
$$10) \quad M p = M g \sin \alpha + M_1 g \sin \alpha - M_1 p - T;$$

und für die Umfangsbeschleunigung der Drehung nach S. 326

$$\mu p = T - \frac{\mathfrak{M}}{R}, \quad \text{oder}$$

$$T = \mu p + \frac{D f d}{2 R} + \frac{N e}{R},$$

Fig. 421.



wenn R der Halbmesser des Rollkreises. Setzt man dies in Gleichung 10 ein, so ergibt sich

$$(M + M_1 + \mu) p = (M g + M_1 g) \sin \alpha - \frac{D f d}{2 R} - \frac{N e}{R}.$$

Diese Gleichung ist nach p nicht ohne weiteres aufzulösen, weil in D nach Gleichung 9 die Größe p ebenfalls noch vorkommt. Für alle wichtigeren Fälle aber, in denen ein Fuhrwerk frei läuft, ist α und daher auch $p : g$ nur klein im Verhältnisse zu Eins, so daß man mit genügender Annäherung $D = M_1 g$ setzen kann. Mithin wird der Zapfenreibungswiderstand $M_1 g f d : (2 R)$, und, weil $N = (M + M_1) g \cos \alpha$, der Rollwiderstand $(M + M_1) g \cos \alpha \cdot e : R$, wobei für schwache Neigungen $\cos \alpha$ mit Eins vertauscht werden darf.

Führt man aber, wie S. 301, wiederum die Gleichgewichts-Neigung α_0 ein, welche so beschaffen, daß, wenn $\alpha = \alpha_0$, $p = 0$ ist, so wird die Summe der beiden Widerstände wieder gleich mit

$(M + M_1) g \sin \alpha_0$, und wenn man dann noch, wie früher (S. 300), $\sin \alpha$ mit α vertauscht, so entsteht

$$11) \quad (M + M_1 + \mu) p = (M + M_1) g (\alpha - \alpha_0),$$

worin auf der linken Seite die Beschleunigung p mit der Summe der drei Massen multipliziert erscheint, welche an der Beschleunigung p teil nehmen (ebenso wie bei der Fallmaschine, S. 334).

Beispiel: Für einen Eisenbahnwagen auf schiefer Ebene sei $Mg = 2000$, $M_1g = 8000$, $\mu g = 1000$ kg, $\alpha = 1 : 200$, $\alpha_0 = 1 : 400$. Dann wird, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung 11 statt der Massen die Gewichte einführt,

$$11\ 000 p = 10\ 000 g \cdot \frac{1}{400} \text{ oder}$$

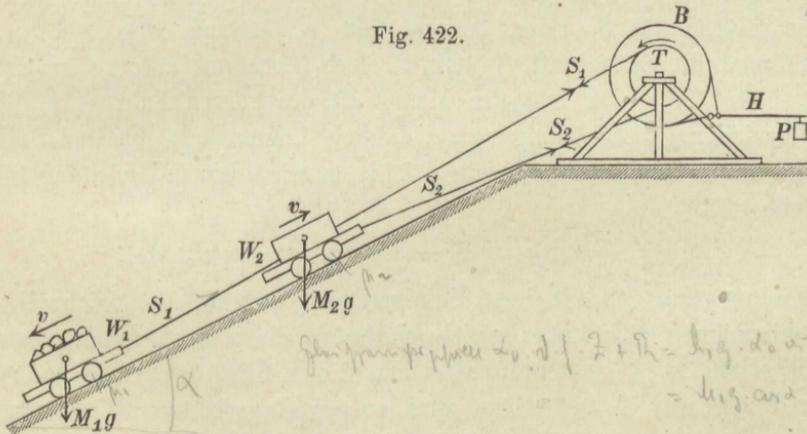
$$p = \frac{g}{400} = 0,023 \text{ m/sek}^2.$$

Ohne Geschwindigkeit losgelassen, wird der Wagen in 10 Sekunden eine Strecke $\frac{1}{2} p t^2 = 1,1$ m zurückgelegt haben, innerhalb einer Minute aber 36 mal soviel, nämlich 39,6 m. Der Wagen läuft auf dem Gefälle 1 : 200 unter Einfluß der Widerstände ganz so, als ob er widerstandslos sich auf einem um α_0 schwächeren Gefälle 1 : 400 bewegte.

d) Das Anhalten der Wagen einer selbstwirkenden Seilbahn, eines sog. Bremsberges.

Hat man beim Bau eines Einschnittes, beim Betrieb eines Steinbruches, Bergwerkes oder dergl. Erd- oder Steinmassen nach

Fig. 422.



einem tiefer gelegenen Orte zu befördern, so kann zu diesem Zweck eine Seilbahn benutzt werden. Auf dem einen Gleise fährt ein

beladener Wagen W_1 hinab und zieht durch das Uebergewicht der Ladung einen leeren Wagen W_2 auf dem anderen Gleise empor (Fig. 422). Jeder Wagen ist zu dem Zweck an einem Drahtseil (S_1 und S_2) befestigt, und beide Seile sind derartig um eine am oberen Ende der Bahn gelegte Seiltrommel T geschlungen, daß die Bewegung in der gewünschten Weise vor sich gehen kann.

Zur Regelung der Geschwindigkeit und zum Anhalten der Wagen dient eine mit der Seiltrommel verbundene Bremse B , deren längerer Hebel H durch ein Gewicht P niedergedrückt wird.

Der Neigungswinkel der schiefen Ebene sei α ; das beladene Fuhrwerk habe das Gewicht $M_1 g$, die Schwungmasse seiner Räder und Achsen, d. h. ihre auf den Rollkreis bezogene Masse, sei μ_1 ; für das leere Fuhrwerk seien die entsprechenden Größen $M_2 g$ und μ_2 . Ein solcher Wagen habe auf einem Gleise, wie es in der Förderbahn liegt, ein Gleichgewichtsgefälle α_0 , d. h. $M_1 g \cdot \alpha_0$ stellt die Summe der Zapfenreibungs- und Rollwiderstände des Wagens vom Gewicht $M_1 g$ dar auf wagerechter Bahn (s. S. 301); dann wird der Gesamtwiderstand des Wagens auf der geneigten Bahn nur $M_1 g \cos \alpha \cdot \alpha_0$ betragen, weil der Wagen nur mit der Seitenkraft $M_1 g \cos \alpha$ auf das Gleis drückt. Soll das bergab laufende Fuhrwerk angehalten werden, so muß man ihm eine Verzögerung erteilen, die einer aufwärts gerichteten Beschleunigung p_1 gleichkommt. Im Sinne dieser Beschleunigung wirken an dem Wagen die Spannkraft S_1 seines Seiles, sein Widerstand $M_1 g \cos \alpha \cdot \alpha_0$, während die Seitenkraft $M_1 g \sin \alpha$ seines Gewichtes entgegengesetzt gerichtet ist. Da nun die Masse M_1 des ganzen Fuhrwerks die Verschiebungsbeschleunigung p_1 , die Schwungmasse μ_1 der Räder die gleiche Umfangsbeschleunigung erfährt, so wird, wie in Gleichung 11, Seite 353

$$1) \quad (M_1 + \mu_1) p_1 = S_1 - M_1 g (\sin \alpha - \alpha_0 \cos \alpha).$$

Das aufwärts gehende leere Fuhrwerk $M_2 g$ erfährt die gleiche Beschleunigung abwärts; gleichwohl möge dieselbe einstweilen zum Unterschiede p_2 genannt werden. In diesem Sinne wirken $M_2 g \sin \alpha$ und der der Aufwärtsbewegung entgegen gerichtete Widerstand $M_2 g \cos \alpha \cdot \alpha_0$; aufwärts wirkt die Spannkraft S_2 des an diesem Wagen befestigten Seiles; daher wird

$$2) \quad (M_2 + \mu_2) p_2 = M_2 g (\sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha) - S_2.$$

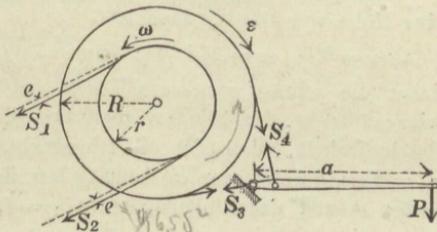
Aus Gleichung 1 und 2 folgen die Seilkräfte

$$3) \quad S_1 = M_1 g (\sin \alpha - \alpha_0 \cos \alpha) + (M_1 + \mu_1) p_1;$$

$$4) \quad S_2 = M_2 g (\sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha) - (M_2 + \mu_2) p_2.$$

Sind S_3 und S_4 (Fig. 423) die Spannkraften des Bremsbandes der mit der Trommel vom Halbmesser r verbundenen Bremscheibe vom Halbmesser R , so erzeugt die Bandreibung an der sich linksherum drehenden Scheibe ein Widerstandsmoment

Fig. 423.



$$5) \quad (S_4 - S_3) R = S_3 (e^{f\alpha} - 1) R = S_4 \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} R$$

(s. S. 280 und 283). An der Trommelachse entsteht ein Zapfenreibungsmoment $Df \cdot \frac{1}{2}d$, wenn D der Zapfendruck, d der Zapfendurchmesser ist. Wegen der Seilsteifigkeit (S. 288) vermindert sich der Hebelarm der Spannkraft S_1 , welche im Sinne der Drehungsrichtung der Trommel wirkt, von r auf $r - e$, während derjenige der Seilkraft S_2 sich von r auf $r + e$ vergrößert. Ist δ der Durchmesser des Seiles, so setze man (nach Gleichung 3, S. 305) $e = 6,5 \delta^2$ (alle Maße in Metern). Die linksherum sich drehende Trommel muß beim Anhalten eine rechtsherum gerichtete Winkelbeschleunigung ϵ erfahren. Wird mit μ_3 die auf den Trommelumfang bezogene Masse der Trommel nebst Bremscheibe, also mit $\mu_3 r^2$ ihr Trägheitsmoment bezeichnet, so ist (nach Gleichung 2, S. 325)

$$6) \quad \mu_3 r^2 \cdot \epsilon = (S_4 - S_3) R - S_1 (r - e) + S_2 (r + e) + Df \cdot \frac{1}{2}d.$$

Bezeichnet man nun die Umfangsbeschleunigung $r \cdot \epsilon$ der Trommel, welche gleich den Beschleunigungen $p_1 = p_2$ der Fuhrwerke sein muß, zunächst mit p_3 , so wird die hierfür erforderliche Bandreibung

$$7) \quad S_4 - S_3 = \frac{r}{R} \left\{ \mu_3 p_3 + S_1 - S_2 - (S_1 + S_2) \frac{e}{r} - Df \frac{d}{2r} \right\}.$$

Mit den Armverhältnissen des Bremshebels (großer Arm a , kleiner Arm b , rechtwinklig zu S_4 gemessen), ergibt sich dann die erforderliche Belastung P am längeren Hebel zu

$$8) \quad P = S_4 \frac{b}{a} = (S_4 - S_3) \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \frac{b}{a}.$$

Beispiel: Ein Bremsberg habe auf eine wagerechte Länge von 200 m eine Höhe von 100 m, dann ist

$\operatorname{tg} \alpha = 0,5$; $\alpha = 26^\circ 34'$; $\sin \alpha = 0,447$; $\cos \alpha = 0,894$; $\sec \alpha = 1,118$, daher die schräg gemessene Länge $200 \cdot 1,118 = 224$ m. Der leere Wagen wiege 2000 kg, der beladene 6000 kg; Gleise und Fuhrwerk seien von solcher Beschaffenheit, daß das Gleichgewichtsgefälle oder die Widerstandsziffer $\alpha_0 = 0,008$ gesetzt werden kann. Das Seil habe den Durchmesser $\delta = 2$ cm $= 0,02$ m und das Einheitsgewicht $q = 1,25$ kg/m, dann ist

$$e = 6,5 \cdot \delta^2 = 6,5 \cdot 0,0026 \text{ m}.$$

Die Seiltrommel habe den Halbmesser $r = 0,75$ m; die Bremsscheibe den Halbmesser $R = 1,25$ m.

Die Wagen sollen sich regelmäßig mit einer Geschwindigkeit von 1 m/sek bewegen; der Sicherheit halber werde vorausgesetzt, es sei die Geschwindigkeit durch einen Zufall auf $v = 2$ m/sek angewachsen und es müsse nun die Bewegung längs eines Weges von $s = 2$ m zum Aufhören gebracht werden. Dann gilt für die dazu erforderliche Zeit t (siehe S. 13):

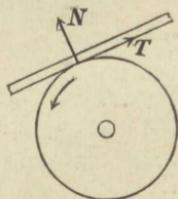
$$s = \frac{v}{2} t \quad \text{oder} \quad t = \frac{2s}{v};$$

somit beträgt die Verzögerung

$$p = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{2s}; \quad \text{also} \quad t = 2 \text{ sek}; \quad p = 1 \text{ m/sek}^2.$$

Die Fallbeschleunigung werde durchweg zu $g = 10$ angenommen; die Schwungmasse der Räder eines Wagens betrage $\mu_1 = \mu_2 = 40$; es wird $\alpha_0 \cdot \cos \alpha = 0,008 \cdot 0,894 = 0,007$. Das Gewicht eines ganz abgewickelten Seiles beträgt $224 \cdot 1,25 = 280$ kg. Versteht man unter S_1 und S_2 die Spannkraften der Seile an Stellen dicht neben der Trommel, so müssen diese den abgewickelten Teilen der Seile die gleiche Beschleunigung erteilen wie den Fuhrwerken; diese Seilgewichte können also den Wagengewichten beigezählt werden, und zwar gilt dies auch bezüglich der Widerstände. Das Seil hängt nämlich nicht auf eine große Länge frei, weil die dazu erforderliche Höhe nicht vorhanden ist, es wird vielmehr, damit es nicht auf dem Boden schleife, durch Reibungsrollen unterstützt, welche es durch Reibung mitnimmt, ohne auf ihren Umfängen zu gleiten (Fig. 424). Zum Mitnehmen ist eine Umfangskraft T erforderlich, für welche gilt (s. S. 271/72) $Nf \cdot \frac{1}{2} d_1 = T \cdot R_1$, wenn d_1 und $2R_1$ Zapfen- und Rollendurchmesser bedeuten.

Fig. 424.



Mit $f = 0,08$ und $2R_1 = 10d_1$ wird dann $T:N = 0,008$, ebenso groß wie α_0 für die Fuhrwerke. Die Wagen sind offenbar am schwersten zu bremsen, wenn der volle unten, der leere oben ist; dann muß man also

$$M_1g = 6000 + 280; \quad M_2g = 2000 \text{ kg, daher}$$

$$M_1 = 628; \quad M_2 = 200 \text{ setzen.}$$

Hiermit wird Gleichung 3

$$S_1 = 6280 (0,447 - 0,007) + (628 + 40) \cdot 1 = 2763 + 668 = 3431 \text{ kg}$$

als stärkste Zugkraft im Seile. Gleichung 4 gibt:

$$S_2 = 2000 (0,447 + 0,007) - (200 + 40) \cdot 1 = 908 - 240 = 668 \text{ kg.}$$

Die Trommel habe mit Einschluß des darauf befindlichen Seiles und der Bremscheibe ein Gewicht von 1600 kg und eine auf den Abstand $r = 0,75$ m bezogene Schwungmasse $\mu_3 = 150$. Der Zapfendruck D der Trommel wird wesentlich durch $S_1 + S_2$ bedingt; die Vergrößerung, welche er noch durch das Gewicht der Trommel einschl. des aufgewickelten Seiles erfährt, kann wohl vernachlässigt werden, da dieser Vergrößerung noch eine Verminderung durch die Bremsbandkräfte S_4 und S_3 gegenübersteht und schließlich der Einfluß der Zapfenreibung höchst unbedeutend ist. Daher werde $D = S_1 + S_2 = 4099$ gesetzt; dann wird mit $f = 0,08$ und $2r = 10d$ aus Gleichung 7:

$$S_4 - S_3 = \frac{0,75}{1,25} \left\{ 150 \cdot 1 + 3431 - 668 - 4099 \cdot \frac{0,0026}{0,75} - \frac{4099 \cdot 0,08}{10} \right\} \\ = 0,6 (150 + 3431 - 668 - 14 - 33).$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die beiden letzten Glieder (Seilbiegungs- und Zapfenreibungs-Widerstand an der Trommel) verschwindend klein sind. Es wird $S_4 - S_3 = 0,6 \cdot 2866 = 1720$ kg.

Ist $f = 0,18$ die Reibungsziffer des Bremsbandes, $\alpha = 0,7 \cdot 2\pi$ der umspannte Bogen, so wird $e^{f\alpha} = 2,21$; sind noch $a = 3,00$ m und $b = 0,05$ m die Arme des Bremshebels, so gibt Gleichung 8:

$$P = 1720 \cdot \frac{2,21}{2,21 - 1} \frac{0,05}{3} = 52,3 \text{ kg.}$$

Für die gleichmäßige Bewegung (mit $p_1 = p_2 = p_3 = 0$), und zwar in dem Augenblicke, wo der volle Wagen oben ist, also $M_1g = 6000$; $M_2g = 2000 + 280$ beträgt, geben die Gleichungen 3, 4, 7 und 8:

$$S_1 = 6000 (0,447 - 0,007) = 2640 \text{ kg;}$$

$$S_2 = 2280 (0,447 + 0,007) = 1035 \text{ kg;}$$

$$S_4 - S_3 = 0,6 \left\{ 2640 - 1035 - (2640 + 1035) \cdot \frac{0,0026}{0,75} - (2640 + 1035) \cdot \frac{0,08}{10} \right\} \\ = 0,6 \left\{ 2640 - 1035 - 13 - 29 \right\} = 938 \text{ kg;}$$

$$P_0 = 938 \frac{2,21}{1,21} \frac{0,05}{3} = 28,5 \text{ kg.}$$

Im vorstehenden ist für die Bremse der ungünstigste Fall angenommen, daß die Drehung der Trommel links herum erfolgt, wobei von den Bremsbandkräften die größere am Hebel angreift und von P hervorgerufen werden muß, während die kleinere vom Gestell aufgenommen wird. Bei Rechtsdrehung aber greift die größere am Gestelle, die kleinere am Hebel an (vergl. S. 283). Bei Rechtsdrehung wird also für das Anhalten

$$P' = \frac{1720}{e^f \alpha - 1} \frac{b}{a} = \frac{1720}{1,21} \cdot \frac{0,05}{3} = \frac{52,3}{2,21} = 24 \text{ kg},$$

für den Beginn der Bewegung

$$P_0' = \frac{938}{1,21} \frac{0,05}{3} = \frac{28,5}{2,21} = 13 \text{ kg}.$$

Es empfiehlt sich nun, ein Gewicht, welches das Mittel aus P_0 und P_0' ist, d. h. rund 21 kg, an dem Hebel dauernd zu befestigen. Soll dann die Trommel sich rechts herum in Bewegung setzen, so hat der Wärter den Hebel mit $21 - 13 = 8$ kg Kraftaufwand zu heben, während er bei der Linksdrehung den Hebel dauernd mit $28,5 - 21 = 7,5$ kg abwärts zu drücken hat. Das Anhalten aus der Rechtsdrehung erfordert ein Niederdrücken mit $24 - 21 = 3$ kg, dasjenige aus der Linksdrehung ein solches mit $52,3 - 21 = 31,3$ kg, die der Wärter mit seinem Körpergewichte leicht auszuüben vermag.

Die Gleichungen 1 bis 7 lassen auch erkennen, was geschehen wird, wenn der Wärter des Bremsberges in dem Bestreben, die Wagen möglichst schnell anzuhalten, den Hebel einmal ungewöhnlich stark belastet. Dann entsteht eine größere Verzögerung an der Trommelwelle, und es kann infolgedessen vorkommen, daß das Seil des leeren Wagens spannungslos wird. Nach Gleichung 2 wird $S_3 = 0$ für

$$p_2 = \frac{M_2 g (\sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha)}{M_2 + \mu_2} = \frac{2000 (0,447 + 0,007)}{240} = 3,8 \text{ m/sek}^2.$$

Bei der gleichen Verzögerung $p_1 = 3,8$ würde nach Gleichung 3

$$S_1 = 6280 (0,447 - 0,007) + 628 \cdot 3,8 = 5153 \text{ kg};$$

sie verlangt nach Gleichung 6 (mit $S_3 = 0$ und $D = S_1$) eine Bandreibung

$$S_4 - S_3 = \frac{0,75}{1,25} \left\{ 150 \cdot 3,8 + 5153 (1 - 0,0035 - 0,003) \right\} = 3400 \text{ kg}$$

und bei Rechtsdrehung der Trommel eine Hebelbelastung

$$P = \frac{3400}{1,21 \cdot 60} = 47 \text{ kg}.$$

Bei dieser Belastung wird das Seil S_2 gerade spannungslos. Belastet man den Hebel aber noch stärker, so wird die Verzögerung noch größer, und Gleichung 4 würde nun für S_2 einen negativen Wert liefern. Da eine negative Spannkraft in einem Seil aber nicht möglich ist, so wird die Kraft $S_2 = 0$ bleiben, das Seil aber nun schlaff werden. Infolgedessen verliert die geometrische Bedingung gleicher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von M_1 und M_2 ihre Gültigkeit; es erfährt nunmehr jeder Wagen seine besondere Bewegung.

Während das beladene Fuhrwerk in kurzer Zeit t_1 längs des Weges s_1 zur Ruhe kommt, läuft der leere Wagen, von dem Augenblicke des stärkeren Bremsens an gerechnet, mit der Verzögerung p_2 um eine längere Strecke s_2 aufwärts, wobei das Seil um den Unterschied $s_2 - s_1$ schlaff wird. Dann kehrt der leere Wagen unter Wirkung seines Gewichtes die Bewegung um, erreicht nach Zurücklegung des Weges $s_2 - s_1$ mit der Beschleunigung p_2 eine Geschwindigkeit v_2 und ein Arbeitsvermögen $(M_2 + \mu_2) \frac{v_2^2}{2}$, welches durch die Arbeit der inneren Kräfte des Seiles zu Null gemacht werden muß.

Fügt der Wärter z. B. der festen Hebelbelastung von 21 kg noch sein ganzes Körpergewicht von 75 kg hinzu, so daß $P = 21 + 75 = 96$ kg ausmacht, so entsteht bei Rechtsdrehung der Trommel eine Bandreibung

$$S_4 - S_3 = \frac{96 \cdot 3}{0,05} (e^{f\alpha} - 1) = 96 \cdot 60_{1,21} = 6970 \text{ kg.}$$

Dann wird nach Gleichung 6 mit $r\varepsilon = p_1$ und $S_2 = 0$:

$$150 p_1 \cdot r = 6970 R - S_1 (r - 0,0026 - 0,08 \cdot 0,1 \cdot r) \quad \text{oder}$$

$$150 p_1 = \frac{6970 \cdot 1,25}{0,75} - S_1 0,9885.$$

Gleichung 1 aber liefert für die Verzögerung p_1 des vollen Wagens:

$$628 p_1 = S_1 - 6280 (0,447 - 0,007).$$

Aus beiden Gleichungen folgt nach Entfernung von S_1 : $p_1 = 11,4 \text{ m/sek}^2$. Mit dieser Verzögerung wird die Geschwindigkeit von 2 m/sek in der Zeit $t_1 = \frac{2}{11,4} = 0,18 \text{ sek}$ längs eines Weges $s_1 = \frac{2}{2} t_1 = 0,18 \text{ m}$ aufgezehrt.

Die Verzögerung p_2 des leeren Wagens folgt aus Gleichung 2 mit $S_2 = 0$; es ist

$$240 p_2 = 2000 (0,447 + 0,007),$$

also $p_2 = 3,78 \text{ m/sek}^2$. Mit ihr wird die Geschwindigkeit von 2 m/sek in der Zeit $t_2 = \frac{2}{3,78} = 0,53 \text{ sek}$ längs eines Weges $s_2 = \frac{2 \cdot 0,53}{2} = 0,53 \text{ m}$ aufgezehrt.

Das Seil des leeren Wagens wird also um $s_2 - s_1 = 0,53 - 0,18 = 0,35 \text{ m}$ schlaff. Beim Abwärtsrollen hat das leere Fuhrwerk eine Beschleunigung

$$p_2' = \frac{M_2 g (\sin \alpha - \alpha_0 \cos \alpha)}{M_2 + \mu_2} = \frac{2000 \cdot 0,44}{240} = 3,67 \text{ m/sek}^2$$

und erreicht mit dieser längs des Weges $s_2 - s_1 = 0,35 \text{ m}$ bis zum Spannen des Seiles eine Geschwindigkeit $v_2 = \sqrt{2 p_2' (s_2 - s_1)} = 1,6 \text{ m/sek}$ und ein Arbeitsvermögen $240 \cdot p_2' (s_2 - s_1) = 308,3 \text{ mkg}$, welches von dem Seil aufgenommen werden muß.

e) Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene.

Beim Rollen, wo die Geschwindigkeit des Körpers gegen die Ebene an der Berührungsstelle Null ist, tritt der Reibungswiderstand

nur in derjenigen Größe auf, die erforderlich ist, um das Gleiten zu verhindern. Ist daher (Gl. 7, S. 349) $\operatorname{tg} \alpha < f \left(1 + \frac{M}{\mu} \right)$, so ist $T < fN$; sind aber die anfänglichen Einzelbewegungen so beschaffen, daß an der Berührungsstelle ein Gleiten stattfindet, so tritt die Reibung in der Größe $fMg \cos \alpha$ auf; doch wird nach einer gewissen Zeit die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergehen, wenn die Bedingung für eine solche (Gl. 7, S. 349) erfüllt ist, und in diesem Augenblicke vermindert sich dann die Reibung plötzlich. Der Umdrehungskörper habe zu Anfang (Stellung I in Fig. 425) eine Drehung mit der Umfangsgeschwindigkeit $r\omega_0$, eine Geschwindigkeit des Schwerpunktes c und werde mit diesen Geschwindigkeiten auf die schiefe Ebene gesetzt, so daß an der Berührungsstelle die Gesamtgeschwindigkeit $c - r\omega_0$ entsteht. Es sei $c > r\omega_0$, dann wirkt in Figur 425 der Reibungswiderstand $fMg \cos \alpha$ abwärts, die Seitenkraft der Schwere $Mg \sin \alpha$ ebenfalls abwärts. Der Schwerpunkt erfährt dadurch eine abwärts gerichtete Beschleunigung

1)
$$p = g (f \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Die Drehung erfährt nach S. 326 und unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Umfangsbeschleunigung

2)
$$r\varepsilon = f \frac{M}{\mu} g \cos \alpha.$$

In t Sekunden entstehen die Geschwindigkeitsänderungen

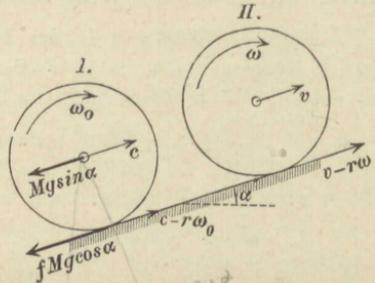
$$c - v = pt \quad \text{und} \quad r(\omega - \omega_0) = r\varepsilon t$$

mit dem Verhältnisse

3)
$$\frac{c - v}{r\omega - r\omega_0} = \frac{p}{r\varepsilon}.$$

Soll nun v diejenige Geschwindigkeit des Schwerpunktes sein, bei der die Rollbewegung beginnt (Stellung II, Fig. 425), so muß $r\omega = v$ eingesetzt werden. Hiermit liefert die letzte Gleichung,

Fig. 425.



nach v aufgelöst: $v = \frac{cr\varepsilon + pr\omega_0}{p + r\varepsilon}$; die Zeit t_1 , nach welcher das Rollen beginnt, ist dann $t_1 = \frac{c-v}{p}$, oder nach Einsetzen von v

$$4) \quad t_1 = \frac{c - r\omega_0}{p + r\varepsilon}.$$

Nach dieser Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit an der Berührungsstelle Null, und die Reibung wechselt ihren Sinn. Ist nun die Bedingung Gleichung 7, S. 349 erfüllt, so wird eine Rollbewegung eintreten. Andernfalls wird die Gleichheit der beiden Geschwindigkeiten v und $r\omega$ nur einen Augenblick wahren, aber sogleich wieder aufhören, weil die Reibung nicht hinreicht, sie zu erhalten. — Für $r\omega_0 > c$ wechselt die Reibung in Figur 425 ihren Sinn, es wird

$$p = g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad r\varepsilon = -f \frac{M}{\mu} g \cos \alpha \quad \text{und}$$

$$t_1 = \frac{r\omega_0 - c}{r\varepsilon - p}, \quad \text{wie man leicht findet.}$$

Beispiel 1: Eine Kugel von $0,1^m$ Halbmesser werde nach Figur 425 mit 8^m sekundlicher Geschwindigkeit des Schwerpunktes und 2^m Umfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung auf eine mit $\alpha = 1/10$ ansteigende Bahn geworfen. Die anfängliche Gleitgeschwindigkeit ist daher $6^m/\text{sek}$. Die Reibungsziffer betrage $f = 0,2$.

In diesem Fall ist $\cos \alpha$ annähernd = 1 zu setzen, $\sin \alpha = 0,1$, $M = 2,5 \mu$ (S. 331), mithin $p = g(0,2 + 0,1) = 0,3g$; $r\varepsilon = g \cdot 2,5 \cdot 0,2 = 0,5g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, ist $v = 5,75^m/\text{sek}$; die entsprechende Zeit

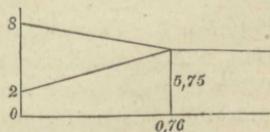
$$t_1 = \frac{8 - 2}{0,8g} = 0,76 \text{ sek.}$$

In diesem Augenblicke vermindert sich die Reibung nach Gleichung 6, S. 349 auf

$$T = \frac{Mg \cdot 0,1}{3,5} = 1/35 Mg,$$

während sie vorher $1/5 Mg$ betrug. Die Verzögerung der Rollbewegung wird nun (Gl. 5, S. 349) $p = 5/7 g \sin \alpha = 0,0714 g = 0,7$. Die Geschwindigkeit wird Null nach weiterem Verlaufe von $5,75 : 0,7 = 8,2^{\text{sek}}$, während dessen (nach Gl. 4, S. 12) $5,75 \cdot 4,1 = 23,6^m$ zurückgelegt werden. Von dieser Stelle an rollt die Kugel mit der Beschleunigung $p = 0,7^m/\text{sek}^2$ rückwärts, soweit die Bahn reicht. — Die Geschwindigkeitsgesetze sind in Figur 426 dargestellt. Die obere Linie bezieht sich auf den Schwerpunkt, die untere auf die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung; beide treffen sich beim Beginne des Rollens.

Fig. 426.



1 a. Hat die Bahn keine nennenswerte Neigung, ist also $\alpha = 0$, so wird während des Gleitens die Verzögerung des Schwerpunktes $p = 0,2g$; die Umfangsbeschleunigung der Drehung $r\varepsilon = 0,5g$. Die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, wird dann $v = 6,3 \text{ m/sek}$, die entsprechende Zeit $t_1 = 0,874 \text{ sek}$. Mit der Geschwindigkeit v setzt die Kugel die Rollbewegung gleichmäßig fort, wenn kein Rollwiderstand sie verzögert.

Berücksichtigung des Rollwiderstandes. Während des Gleitens wird nach Seite 295 und 360

$$5) \quad r\varepsilon = \left(f - \frac{e}{r}\right) \frac{M}{\mu} g \cos \alpha$$

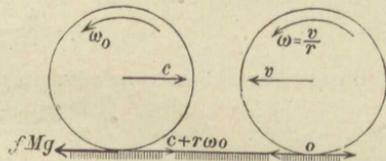
zu setzen sein, während des Rollens

$$6) \quad p = g \frac{\sin \alpha - e/r \cos \alpha}{1 + \frac{\mu}{M}}$$

Letzteres gibt für $\alpha = 0$, $e = 0,5 \text{ mm}$, $r = 100 \text{ mm}$ eine Verzögerung $= \frac{g}{280} = 0,035 \text{ m/sek}^2$.

1 b. Ein Umdrehungskörper, z. B. eine Kugel, kann auch auf wagerechter Bahn so fortgeworfen, fortgeschleudert werden, daß sie nach einer gewissen Zeit zurückrollt (Billardkugel). Gibt man ihr eine große Drehungsgeschwindigkeit ω_0 links herum und wirft sie mit nicht zu großer Geschwindigkeit c nach rechts fort (Fig. 427), so erfährt sie unter Vernachlässigung des Rollwiderstandes eine Verzögerung des Schwerpunktes $p = fg$, eine Umfangsverzögerung $r\varepsilon = fgM : \mu$; also $\mu r\varepsilon = Mp$. Ist v die Geschwindigkeit, mit der das Rollen beginnt, so muß diese negativ, d. h. nach links gerichtet sein, denn während des Rollens auf wagerechter Bahn kann eine Aenderung des Sinnes der Geschwindigkeit nicht mehr vorkommen. Ist t_1 die Zeit, nach der das Zurückrollen beginnt, so wird

Fig. 427.



$$c + v = p t_1, \quad r\omega_0 - v = r\varepsilon t_1,$$

$$\text{mithin } v = \frac{p r \omega_0 - c r \varepsilon}{p + r \varepsilon} \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{c + r \omega_0}{p + r \varepsilon}.$$

Soll nun die Kugel rückläufig, also $v > 0$ sein, so muß $p r \omega_0 > c r \varepsilon$ oder $\mu r \omega_0 > M c$, also bei einer Kugel mit $\mu = 0,4 M$ muß $r \omega_0 > \frac{5}{2} c$ sein. Es läßt sich sogar erreichen, daß $v > c$ wird, d. h. daß die Kugel schneller zurückrollt, als sie fortgeworfen wurde. Dazu ist erforderlich

$$r \omega_0 > c \left(1 + 2 \frac{r \varepsilon}{p}\right), \quad \text{bei einer Kugel } r \omega_0 > 6 c.$$

1 c. Sollen der ursprünglich ruhenden Kugel durch eine große, nur sehr kurze Zeit t_0 wirkende Kraft P solche Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c erteilt werden, daß ein Zurückrollen eintritt, daß also $\mu r\omega_0 > Mc$ wird, so sind dazu Beschleunigungen $r\varepsilon_0$ und p_0 erforderlich, die in der Zeit t_0 die Geschwindigkeiten $r\omega_0$ und c hervorbringen; es muß also auch $\mu r\varepsilon_0 > Mp_0$ sein.

Auf die Kugel wirke die Schwere Mg , der um den Reibungswinkel φ von der Normalen abweichende Gesamtwiderstand W der Bahn und die gesuchte Kraft P . Die Mittelkraft R dieser drei muß wagerecht gerichtet sein, da die Beschleunigung p_0 des Schwerpunktes wagerecht sein soll (Fig. 428), und zwar muß die Lage von R sich unterhalb des Schwerpunktes befinden (etwa um l), dann wird $\mu r\varepsilon_0 = Rl : r$ und $Mp_0 = R$, wobei $l > r$ sein muß, damit $\mu r\varepsilon_0 > Mp_0$ werde. Gegenüber der großen Kraft P möge das Gewicht der Kugel vernachlässigt werden.

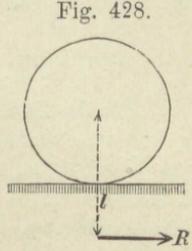


Fig. 428.

Der Punkt B (Fig. 429), an welchem der Druck P auf die Kugel ausgeübt werden soll, möge durch den Mittelpunktswinkel α bestimmt sein. Uebt man die Kraft P aus, indem man mit einem lederbeschlagenen Stabe bei B in der Richtung BC gegen die Kugel stößt, oder indem man mit der Hand an der Kugel (bei B sie berührend) abwärts schlägt, so wird der Stab bzw. die Hand an der Kugel gleiten und die Richtung des Druckes P von der Normalen DB um den Reibungswinkel φ_1 , der für Kugel und stoßenden Körper gilt, abweichen. Soll nun der Schnittpunkt von W und P unterhalb der Kugel liegen, so muß $\alpha - \varphi_1 > \varphi$ und zugleich $\varphi_1 > \frac{1}{2}\alpha$ sein, woraus folgt

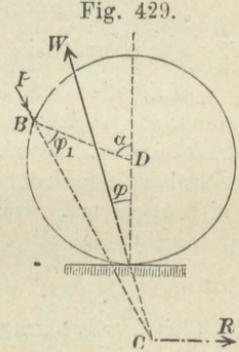


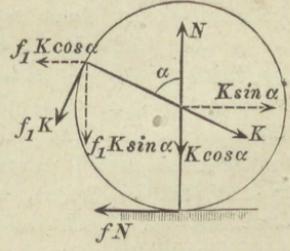
Fig. 429.

$$\alpha > \varphi + \varphi_1 \text{ und } \alpha < 2\varphi_1.$$

Der Winkel α muß also zwischen den Grenzen $\varphi + \varphi_1$ und $2\varphi_1$ liegen, und es muß $\varphi_1 > \varphi$ sein, d. h. der Körper, mit dem der Druck P ausgeübt wird, muß rauher sein als die Unterlage der Kugel. Ist z. B. $f = 0,2$ ($\varphi = 11^\circ$), $f_1 = 0,8$ ($\varphi_1 = 39^\circ$), so muß α zwischen 50 und 78° liegen; es würde daher $\alpha = 60^\circ$ der Bedingung entsprechen.

Fig. 430.

Zerlegt man nun den Druck P in einen Normaldruck K und die Reibung $f_1 K$, den Widerstand W in N und fN , zerlegt ferner K und $f_1 K$ nach wagerechter und lotrechter Richtung, so wird (Fig. 430), da in lotrechtem Sinne keine Verschiebung erfolgt, $N = K(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha)$. Dann ergibt sich als Beschleunigung des Schwerpunktes nach rechts



$$p_0 = \frac{K \sin \alpha - f_1 K \cos \alpha - fN}{M}$$

$$\text{oder } p_0 = \frac{K}{M} (\sin \alpha - f_1 \cos \alpha - f \cos \alpha - f f_1 \sin \alpha)$$

und die Umfangsbeschleunigung der Drehung

$$r \varepsilon_0 = \frac{f_1 K - f N}{\mu} = \frac{K}{\mu} (f_1 - f \cos \alpha - f f_1 \sin \alpha).$$

Für das Zurückrollen besteht nun die Bedingung $\mu r \varepsilon_0 > p_0 M$; weil aber p_0 und $r \varepsilon_0$ beide mit K verhältnismäßig sind, so kommt es auf die Größe von K nicht an, sondern nur auf die Winkel α , φ und φ_1 . Eine Veränderlichkeit die Größe von K , wie sie beim Stoße besteht, bringt keine wesentliche Aenderung.

Es sei $\alpha = 60^\circ$, $f = 0,2$, $f_1 = 0,8$ und beispielsweise $K = 20 M g$, dann wird

$$p_0 = 20 g (0,866 - 0,8 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,866) = 44,5;$$

$$r \varepsilon_0 = 50 g (0,8 - 0,2 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,866) = 275.$$

Wie es sein mußte, ist $r \varepsilon_0 > 2,5 p_0$.

Wirkt die Kraft $K = 20 M g$ nebst der entsprechenden Reibung $f_1 K$ nur $1/20$ Sekunde, so braucht man die Verschiebung ihres Angriffspunktes nicht zu berücksichtigen. Es wird dann $c = 44,5 \cdot 1/20 = 2,23 \cdot r \omega_0 = 13,75$. Mit diesen Geschwindigkeiten wird sich die Kugel nach dem Aufhören der Kräfte K und $f_1 K$ bewegen und wird, da nun $p = 0,2 g$ und $r \varepsilon = 0,5 g$, zurückrollen mit der Geschwindigkeit

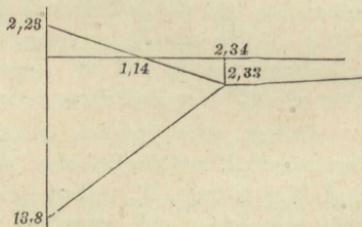
$$v = \frac{0,2 \cdot 13,75 - 2,23 \cdot 0,5}{0,2 + 0,5} = 2,33;$$

das Gleiten währt im ganzen

$$t_1 = \frac{c + r \omega_0}{p + r \varepsilon} = 2,34 \text{ sek.}$$

Die Umkehr der Kugel erfolgt übrigens schon während des Gleitens. Nach der Zeit $t = c : (f g) = 2,23 : 1,962 = 1,14$ sek und, nachdem die Kugel sich um $s' = 2,23 \cdot 1,14 \cdot 0,5 = 1,27$ m nach rechts bewegt hat, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nach rechts Null geworden, kehrt dann während des Restes der Gleitzeit, d. h. während der Zeit $t'' = 2,34 - 1,14 = 1,20$ sek um $s'' = 2,33 \cdot 1,20 \cdot 0,5 = 1,4$ m gleitend nach links zurück. An dem um $0,13$ m links von der Ausgangsstelle gelegenen Punkte beginnt erst das Rollen, welches sich dann mit der Geschwindigkeit $2,33$ m/sek fortsetzt. Figur 431 zeigt die Geschwindigkeitsgesetze der Bewegungen.

Fig. 431.



Beispiel 2: Wirkt auf eine auf wagerechter Ebene anfänglich ruhende Kugel eine wagerechte Kraft K , die um l oberhalb des Schwerpunktes liegt,

nach rechts und soll eine Rollbewegung entstehen, so ist am Auflagerpunkt ein Widerstand T erforderlich, den wir nach links gerichtet annehmen wollen (Fig. 432). Die Beschleunigung des Schwerpunktes p (S. 172) und die Winkelbeschleunigung ε der Drehung (S. 325) werden dann

$$p = \frac{K - T}{M}; \quad \varepsilon = \frac{Kl + Tr}{\mu r^2}.$$

Für Rollbewegung muß nun $r\varepsilon = p$ sein, oder

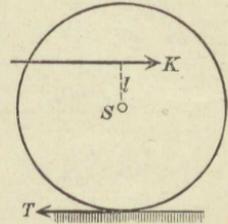
$$K\mu r - T\mu r = KMl + TMr.$$

Hieraus bestimmt sich

$$T = K \frac{\mu r - Ml}{(M + \mu)r}.$$

Für $l = 0$ wird $T = K: \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) = 2/7 K$. Für $l = r$ wird T negativ, nämlich $T = -K \frac{M - \mu}{M + \mu} = -3/7 K$. Soll aber die Kraft K ohne jede Mitwirkung von T , d. h. auf völlig glatter Ebene eine Rollbewegung erzeugen, soll $T = 0$ sein, so muß $l:r = \mu:M = 0,4$ sein, d. h. $l = 2/5 r$. In dieser Höhe darf eine Kugel beliebig heftig gestoßen werden, ohne daß sie unten gleitet; sie wird sofort eine Rollbewegung beginnen.

Fig. 432.



f) Beschleunigte Schraubenbewegung.

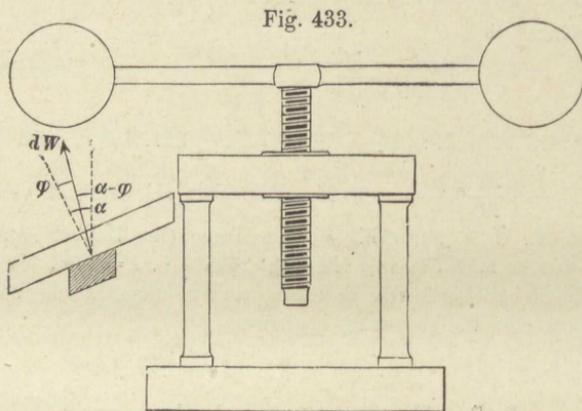
Die Schraubenbewegung besteht aus einer Drehung um die Achse der Schraube und einer gleichzeitigen Verschiebung längs der Achse. Sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ω und u , so ist das Arbeitsvermögen der Schraube $1/2 J \omega^2 + 1/2 M u^2$ (S. 345). Weil aber bei der Schraube vom mittleren Halbmesser r und dem Steigungswinkel α der mittleren Schraubenlinie die Ganghöhe $h = 2r\pi \operatorname{tg} \alpha$, so ist auch $r\omega \operatorname{tg} \alpha = u$, also mit $J = \mu r^2$

$$1) \quad 1/2 (J\omega^2 + Mu^2) = 1/2 \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + M \right) u^2.$$

Hiernach würde man für eine ideelle Schraube leicht den Satz der Arbeit anwenden können. Der bei wirklichen Schrauben sehr bedeutende Einfluß der Reibung kann aber (nach A. Ritter, Techn. Mechanik) am leichtesten berücksichtigt werden, wenn man die Beschleunigungen der Einzelbewegungen berechnet.

Die Schraube sei flachgängig und oben mit Schwungkugelarmen versehen (Fig. 433). Solche Schrauben kommen in Prägewerken und in Hüttenwerken (zum Zerbrechen von Eisenstäben) vor.

Die Schrauben werden durch Arbeiter in die Höhe gedreht und sind nicht selbstsperrend, vielmehr gewinnen sie durch ihr Gewicht (z. T. unter Nachhilfe der Arbeiter) ein gewisses Arbeitsvermögen, welches dann zum Zerschlagen verbraucht wird. Die treibende Kraft sei allein die Schwere Mg . Ein Teilchen der Schraubennutter leistet beim Abwärtsgleiten einen Widerstand dW , der um $\alpha - \varphi$ von der Achsenrichtung abweicht.



Der Schwerpunkt der Schraube kann sich nur geradlinig bewegen; die Beschleunigung p des Schwerpunktes folgt aus der Gleichung

$$2) \quad Mp = Mg - \cos(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Die wagerechten Seitenkräfte $\sin(\alpha - \varphi) dW$ bilden das treibende Kräftepaar für die Drehung; es wird (S. 326, Gl. 4)

$$\mu r \varepsilon = \sin(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Weil aber $r\omega \operatorname{tg} \alpha = u$, so muß auch $r\varepsilon \operatorname{tg} \alpha = p$ sein, mithin

$$3) \quad \mu p = \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha - \varphi) \int dW.$$

Entfernt man aus Gleichung 2 und 3 die Größe $\int dW$, so wird

$$4) \quad p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}}.$$

Ist die Schraube in aufwärts drehende Bewegung versetzt und wird sie dann der Wirkung der Schwere überlassen, so kehrt die

Reibung ihren Sinn um, es ist $-\varphi$ mit $+\varphi$ zu vertauschen, und die Verzögerung der aufwärts gerichteten Bewegung wird

$$5) \quad p = \frac{g}{1 + \frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}}.$$

Bei einer Spindel mit Schwungkugeln wird nun das Trägheitsmoment wesentlich von diesen geliefert, und es ist, wenn die Schwungkugeln zusammen die Masse M_1 haben und im Abstand R von der Mitte sich befinden, annähernd $J = M_1 R^2$; dann wird $\mu r^2 = M_1 R^2$ und, weil $R : r$ meist groß, auch μ sehr groß gegen M . Außerdem sind, wenn auch $\alpha > \varphi$ ist, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} (\alpha - \varphi)$ und $\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$ immer ziemlich kleine Brüche, so daß $\frac{\mu}{M} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}$ gegen die Einheit so groß wird, daß diese dagegen verschwindet. Daher kann man mit großer Annäherung statt der Gleichung 4 und 5 die einfachere Doppelformel

$$6) \quad p = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha \mp \varphi) \quad \text{schreiben.}$$

Beginnt die Bewegung mit der Geschwindigkeit Null, so ist, nachdem die Schraube um h gesunken,

$$7) \quad u^2 = 2 p h.$$

Das Arbeitsvermögen wird dann $\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + M \right) 2 p h$.

Beispiel: Das Gesamtgewicht der Schraube betrage 300 kg, wovon auf die Schwungkugeln 200 kg kommen mögen. Außerdem sei $\operatorname{tg} \varphi = f = 0,1$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$; $R = 20 r$. Dann ist $\operatorname{tg} (\alpha - \varphi) = 0,098$, $\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) = 0,306$. Ferner ist mit genügender Genauigkeit $\mu r^2 = \frac{2}{3} M R^2$, daher $\mu = \frac{2}{3} \cdot 400 M = \frac{800}{3} M$, so daß dagegen M in Gleichung 1 zu vernachlässigen ist. Dann kann auch das Arbeitsvermögen einfacher geschrieben werden $\frac{\mu}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{u^2}{2} = \frac{20\,000 M}{3} \frac{u^2}{2}$. Die Beschleunigung der Abwärtsbewegung wird nach Gleichung 6

$$p = g \frac{3}{800} 0,3 \cdot 0,098 = 0,000\,074 g = 0,000\,72 \text{ m/sek}^2.$$

Nennt man p_0 die Beschleunigung einer reibungslosen Schraube von den gleichen Verhältnissen, so ist nach Gleichung 6 (für $\varphi = 0$)

$$p_0 = g \frac{M}{\mu} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{daher } p = p_0 \frac{\operatorname{tg} (\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$p_0 = \frac{b}{\mu} \dots$$

Da nun nach Gleichung 7 u^2 mit p verhältnismäßig, so ist auch, wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{A}_0 das Arbeitsvermögen der wirklichen bezw. der reibungslosen Schraube,

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$. Will man daher das Arbeitsvermögen der sinkenden

Schraube verwenden, so ist $\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ der Wirkungsgrad der sinkenden

Schraube. Es muß zugleich $\mathfrak{A}_0 = Mgh$ sein, da bei der reibungslos sinkenden Schraube nur die Schwerkraft Arbeit verrichtet. Um aber von der Höhe h sinken zu können, mußte die Schraube um diese Größe gehoben werden, und

weil der Wirkungsgrad der Schraube beim Heben nach S. 308 $\eta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$,

so war zum Heben die Arbeit $\mathfrak{A}_1 = Mgh \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}$ erforderlich. Betrachtet

man nun Auf- und Abwärtsbewegung im Zusammenhange, so ist der Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = 0,32. \quad \checkmark$$

Annähernd kann man auch bei der Kleinheit der Winkel α und φ

$\operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) = \operatorname{tg} \alpha \mp f$ schreiben, dann wird

$$\eta_2 = \frac{0,2 - 0,1}{0,2 + 0,1} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Derartige Vernachlässigungen sind zulässig, weil ja φ und f doch in jedem Falle nur unsicher bekannt sind. Um die Schraube von 300 kg Gewicht um

$h = 0,1$ m zu heben, waren $30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha} =$ annähernd 45 mkg Arbeit aufzu-

wenden. Nach dem Hinabsinken um 0,1 m beträgt das Arbeitsvermögen noch

$30 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha} =$ annähernd 15 mkg.



Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

- | | |
|---|---|
| <p><i>C</i> Zentrifugalmoment. 337.
 <i>D</i> Zapfendruck. 267.
 <i>E</i> Effekt, sekundliche Arbeit. 268.
 <i>F</i> Flächeninhalt. 159.
 <i>G</i> Gewicht eines Wagebalkens. 201.
 <i>H</i> wagerechte Seitenkraft einer Stangenverbindung. 224.
 <i>J</i> Trägheitsmoment. 316.
 <i>K</i> Kraft. 32.
 <i>K</i> Triebkraft. 261. 288.
 <i>K</i> Zugkraft für ein Fuhrwerk auf wagerechter Bahn. 301.
 <i>K</i>₁ Zugkraft für ein Fuhrwerk auf einer Steigung. 301.
 <i>K</i>₂ Haltkraft für ein Fuhrwerk auf einem Gefälle. 301.
 <i>M</i> Masse eines Körpers oder einer Massengruppe. 151.
 <i>M</i> oder <i>M</i> Moment einer Kraft oder einer Kräftegruppe. 106. 127.
 <i>M_w</i> Stützmoment. 182.
 <i>N</i> Normalwiderstand. 71.
 <i>N</i> Normalwiderstand einer Fläche. 234.
 <i>N</i> Anzahl der Pferdestärken. 269.
 <i>P</i> Gewicht. 221.
 <i>PS</i> Pferdestärke. 268.
 <i>Q</i> Gewicht. 33. 237.
 <i>Q</i> Last. 286.
 <i>R</i> Mittelkraft. 39. 103. 109. 142.
 <i>R</i> äußerer Halbmesser eines Ringes. 159.
 <i>R</i> größerer Halbmesser eines Spitzzapfens. 274.
 <i>R</i> Halbmesser eines Wagenrades. 299. 352.
 <i>S</i> Spannkraft einer Stange. 217.
 <i>S</i>₁ und <i>S</i>₂ Spannkraften in einem Seile. 69. 279. 284.</p> | <p><i>T</i> Reibungswiderstand. 234.
 <i>V</i> Rauminhalt eines Körpers. 165.
 <i>W</i> Gesamtwiderstand einer Fläche. 235.
 Stützwiderstand. 181.
 <i>X</i> Kräftesumme in der <i>x</i>-Richtung. 42. 116. 142.
 <i>Y</i> Kräftesumme in der <i>y</i>-Richtung. 42. 116. 142.
 <i>Z</i> Kräftesumme in der <i>z</i>-Richtung. 42. 116. 142.

 <i>a</i> Länge eines schwingenden Körpers. 341.
 <i>c</i> Geschwindigkeit, besonders gleichbleibende. 5.
 <i>c</i> Geschwindigkeit, Anfangs-. 11.
 <i>cm</i> Zentimeter. 7.
 <i>d</i> Zapfendurchmesser. 286.
 <i>e</i> Arm des Seilbiegungswiderstandes. 287.
 <i>e</i> Arm des Rollwiderstandes. 295.
 <i>e</i> Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse. 317.

 <i>f</i> Reibungsziffer. 234.
 <i>g</i> Fallbeschleunigung. 34.
 <i>h</i> Steighöhe. 38.
 <i>h</i> Höhe eines Dreiecks. 155.
 <i>h</i> Höhe eines Trapezes. 156.
 <i>h</i> Höhe einer Pyramide. 163.
 <i>h</i> Ganghöhe der Schraube. 303.
 <i>i</i> Trägheitshalbmesser. 317.
 <i>k</i> Ziffer der Massenanziehung. 59.
 <i>km</i> Kilometer. 7.
 <i>l</i> Wurfweite. 55.
 <i>l</i> Hebelarm. 104.
 <i>l</i> Fadenlänge eines Pendels. 82.
 <i>l</i> Schwingungslänge eines Pendels. 328.</p> |
|---|---|

- m Masse eines Punktes. 33. 35.
 m Meter. 7.
 mkg Meterkilogramm. 45.
 min Minute. 7.
 n minutl. Anzahl der Umdrehungen. 269.
 p Beschleunigung. 11. 32.
 p Druck für die Flächeneinheit. 269. 273.
 p_n Normal- oder Zentripetal-Beschleunigungen. 65.
 p_t Tangentialbeschleunigung. 65.
 p_t Umfangsbeschleunigung. 326.
 q Seitenbeschleunigung. 23.
 r Halbmesser eines Kreises. 159.
 r Erdhalbmesser. 61.
 r innerer Halbmesser eines Ringes. 159.
 r Halbmesser einer Kugel. 162.
 r Zapfenhalbmesser. 267.
 r Halbmesser der mittleren Schraubenlinie. 304.
 r Rollenhalbmesser. 286.
 r Mittelbeschleunigung. 23.
 r scheinbare Beschleunigung. 90.
 s Wegeslänge. 3.
 s Länge einer Linie. 153.
 sek Sekunde. 7.
 std Stunde. 7.
 t Zeit. 3.
 t Schwingungsdauer eines Pendels. 83. 328.
 u Momentenabschnitt. 127.
 u Seitengeschwindigkeit. 19.
 u Geschwindigkeit eines Raumes. 86.
 v Geschwindigkeit, besonders veränderliche. 6.
 v Endgeschwindigkeit. 12.
 v Mittelgeschwindigkeit. 21.
 w Seitengeschwindigkeit. 19.
 w scheinbare Geschwindigkeit. 86.
 w Widerstandsziffer f. Seilrollen. 288.
 x Länge einer Seitenbewegung. 18.
 x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Mittelpunktes von Parallelkräften und Massen. 149.
 x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Schwerpunktes. 151.
 y Länge einer Seitenbewegung. 18.
 z Länge einer Seitenbewegung. 18.
 Δt Zeitraum. 6.
 α Neigungswinkel gegen die Abszissenachse. 5.
 α halber Mittelpunktswinkel. 154.
 α Neigungswinkel der schiefen Ebene. 237.
 α von einem Seil umspannter Bogen. 279.
 α Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie. 303.
 α_0 Gleichgewichtsneigung oder Widerstandsziffer für ein Fuhrwerk. 301.
 α_1, α_2 Keilwinkel. 255.
 β Neigungswinkel gegen die y -Achse. 23.
 β halber Kantenwinkel der scharfgängigen Schraube. 309.
 γ Neigungswinkel gegen die z -Achse. 23.
 γ Dichte, Gewicht der Raumeinheit. 61. 153.
 δ halber Keilwinkel. 254.
 δ halber Keilnutenwinkel. 242.
 δ Dicke einer Platte. 154. 319.
 ε Winkelbeschleunigung. 324.
 η Wirkungsgrad. 261.
 μ auf einem Abstand r bezogene Masse. 317.
 ρ Krümmungshalbmesser. 65.
 φ Reibungswinkel. 235.
 ψ Reibungswinkel für die Bewegung in Keilnuten. 242.
 ω Winkelgeschwindigkeit. 93.
 \mathcal{A} Arbeit. 45.
 \mathcal{A}_i Arbeit der inneren Kräfte. 174.
 \mathcal{A}_k Arbeit der äußeren Kräfte. 174.
 \mathcal{S} geometrisches Trägheitsmoment einer Fläche, wenn dasselbe von dem eines Körpers (J) unterschieden werden muß. 323.
 \mathcal{M} Reibungsmoment. 268.

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)

- A**chsen, freie. 338.
 Achsenstrecke eines Kräftepaars. 139.
 Achswiderstände bei der Drehbewegung. 336.
 d'Alemberts Satz. 169.
 Anziehung der Massen. 58.
 Arbeit M_i der inneren Kräfte. 174.
 Arbeit der Schwerkkräfte einer Massen-
 gruppe. 168.
 Arbeit M einer Kraft. 43.
 Arbeit, sekundliche E . 268.
 Arbeitseinheit. 46.
 Arbeitsvermögen. 46. 174. 344.
 Arbeitsvermögen eines rollenden Kör-
 pers. 347.
 Arbeitsvermögen eines starren Kör-
 pers. 345.

Bandbremse. 282.
 Beschleunigung. 11. 15. 32.
 Beschleunigung der Schwere. 34. 62.
 Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.
 70.
 Bewegung eines freien Körpers. 345.
 Bewegungen, Zusammensetzung der —.
 17.
 Bewegung, fortschreitende. 85.
 Bewegung, geradlinige. 3.
 Bewegung, gleichförmig beschleunigte.
 11.
 Bewegung, gleichförmige. 5.
 Bewegung in Keilnuten. 242.
 Bewegung, krummlinige. 25. 51.
 Bewegung, scheinbare (relative). 84
 Bewegungsgesetz. 3.
 Bewegung, ungleichförmige. 6.
 Bewegung, vorgeschriebene — in lot-
 rechtem Halbkreise. 77.
 Bewegung, zusammengesetzte. 17.
 Bewegung, zusammengesetzte, Ver-
 schiebung und Drehung. 344.
 Bremsberg. 353.
 Bremszaum. 276.
 Brückenwage. 231.

C siehe **Z**.

Dichte γ . 59. 153.
 Differenzflaschenzug. 291.
 Drehachse, Widerstände einer —. 336.
 Drehmomente M . 104.
 Drehung, ungleichförmige. 324.
 Drucklinie einer Keilgruppe. 256.
 Drucklinie eines Gewölbes. 263.
 Dynamische Standsicherheit. 213.

Ebene, schiefe. 237.
 Effekt E . 268.
 Einspannung, räumliche. 182.
 Einspannung, ebene. 188.

- Energie. 46. 175. 344.
 Erdmasse. 63.
 Ergänzungskraft (Trägheitswiderstand). 33. 90. 94. 169.
- F**
 Fahrpläne. 8.
 Fallbeschleunigung g . 34. 62.
 Fallbeschleunigung, scheinbare — an verschiedenen Stellen der Erde. 100.
 Fallbewegung. 36.
 Fallmaschine. 334-
 Festklemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen. 250.
 Flaschenzug. 289.
 Flutkurve. 9.
 Fuhrwerke. 294.
 Fuhrwerke, beschleunigte Bewegung der —. 351.
- G**
 Gelenkstangenverbindung. 215.
 Geschwindigkeit 5. 6.
 Geschwindigkeit, mittlere. 6.
 Geschwindigkeitsgesetz. 10.
 Geschwindigkeitshöhe. 37.
 Gewicht. 33. 100.
 Gewicht, Arbeit des Gewichtes einer Massengruppe. 168.
 Gewölbe. 263.
 Gleichgewicht gestützter Körper. 180.
 Gleichgewicht eines Punktes. 68.
 Gleichgewicht; sicheres, unsicheres und unentschiedenes. 200. 207.
 Gleichgewicht, statisch bestimmtes. 180.
 Gleichgewicht, statisch unbestimmtes. 180.
 Gleichgewicht, unbedingtes. 181.
 Gleichgewicht, bedingtes. 180.
 Gleichgewichtsnegung α_0 für ein Fuhrwerk. 301.
 Gleichgewicht starrer Körper. 177.
 Gleitbewegung sich drehender Körper auf schiefer Ebene. 359.
 Gravitation. 58.
- Guldinsche Regel. 165.
 Güterverhältnis γ . 239. 261.
- H**
 Halbkugel auf schiefer Ebene. 241.
 Hängebrücke. 229.
 Hebel. 197.
 Hebelarm. 104.
 Hebelwage. 201.
- K**
 Kegelpendel. 73. 343.
 Keil. 254.
 Keile, mehrere. 255.
 Keillager. 270.
 Keilnuten, Bewegung in —. 242.
 Keilnutenräder. 278.
 Keilpresse. 259.
 Kettenbrücke. 229.
 Kettenlinie, parabolische. 226.
 Klemmen eines Stabes zwischen zwei Flächen. 250.
 Kraft. 32.
 Kraft, lebendige. 46. 175. 344.
 Kraft, Parallelverschiebung einer —. 141.
 Krafteck. 43. 109. 111. 112.
 Kräftegruppe, Zentralachse einer —. 145.
 Kräftepaar. 114. 115. 119.
 Kräftepaarachse. 139.
 Kräftepaare, Zusammensetzung der —. 136.
 Kräfte, Parallel- — im Raume. 148.
 Kräftezusammensetzung im Raume. 141.
 Kräfte, Zusammensetzung paralleler —. 112. 117.
 Kran, Kräfte an dem Drehzapfen. 195.
- L**
 Lebendige Kraft. 46. 176. 344.
 Leistung E einer Kraft. 268.
- M**
 Masse. 35.
 Masse, auf einen Abstand bezogen, μ . 317.
 Massenanziehung. 58.
 Massengruppe. 168.

- Massenmittelpunkt. 150.
 Massenpunkt m . 1.
 Materieller Punkt m . 1.
 Mechanik des Massenpunktes. 3.
 Mechanik starrer Körper. 101.
 Mechanische Arbeit \mathcal{M} . 43.
 Meterkilogramm ^{m}kg . 46.
 Mittelbewegung. 17.
 Mittelkraft. 39.
 Mittelpunkt der Massen. 150. 169.
 Mittelpunkt von Parallelkräften. 149.
 Moment, Drehmoment oder statisches \mathcal{M} . 104.
 Moment, statisches — einer Masse. 151.

 Normalbeschleunigung p_n . 64.
 Normalwiderstand N . 71. 234.

Pappus-Guldinscher Satz. 164.
 Parabolische Bewegung. 62.
 Parallelepipedgesetz. 18. 22. 41.
 Parallelkräfte im Raume. 148.
 Parallelogrammgesetz. 17. 20. 23. 39.
 Parallelverschiebung einer Kraft. 141.
 Pendel, einfaches. 81.
 Pendel, Kegel- —. 73. 343.
 Pendel, physisches. 326.
 Pferdestärke. 268.
 Pochstempel. 249.
 Pronys Zaum. 276.

Regler, Schwungkugel- —. 96.
 Reibung. 234. 314.
 Reibungskegel. 235.
 Reibungsring. 248.
 Reibungsrollen. 271.
 Reibungswage. 275.
 Reibungswinkel. 235.
 Reibungsziffer. 234.
 Relative Bewegung. 84.
 Reversionspendel. 331.
 Riemenscheiben. 283.
 Rollbewegung auf schiefer Ebene. 347.
 Rollwiderstand. 294.

 Satz der Arbeit. 174.
 Satz von d'Alembert. 169.
 Satz von der Bewegung des Schwerpunktes. 172.
 Scheinbare Bewegung. 84.
 Schiefe Ebene. 237.
 Schnellwage. 204.
 Schraube. 303.
 Schraube, flachgängige. 304.
 Schraubenbewegung. beschleunigte. 365.
 Schraube, scharfgängige. 309.
 Schwerkkräfte, Arbeit der — einer Massengruppe. 168.
 Schwerpunkt. 150. 171.
 Schwerpunktsbewegung. 172.
 Schwingungsdauer eines Pendels. 83.
 Schwingungslänge eines Pendels. 328.
 Schwungkugelregler. 96.
 Seilbiegungswiderstand. 287.
 Seileck. 109. 111. 112.
 Seilpolygon. 109.
 Seilreibung. 279.
 Seilrolle, beschleunigte Bewegung einer —. 333.
 Seilrollen. 285.
 Seitenkraft. 40. 120.
 Spannkraft S einer Stange. 217.
 Spitzzapfen. 274.
 Spurzapfen. 272.
 Stabilität. 193. 213.
 Standsicherheitsmoment. 210.
 Stangenverbindung. 215.
 Statisches Moment \mathcal{M} . 104.
 Statisches Moment einer Masse. 151.
 Steighöhe eines aufwärts geworfenen Körpers. 37.
 Steinzange. 252.
 Stützspindeln. 308.
 Stützgelenk. 181. 188.
 Stützwiderstand. 180.
 Stützproblem, räumliches. 181.
 Stützproblem, ebenes. 187.
 Stützzapfen. 271.
 Stützzustand. 180.

- Tafelwage.** 211. 233.
 Tangentialbeschleunigung p_t . 64.
 Tisch, Gewichtsverteilung. 209.
 Trägheit 31.
 Trägheitswiderstand (Ergänzungskraft). 33. 90. 94. 169.
 Trägheitshalbmesser i . 317.
 Trägheitsmoment J . 316.
- Umkehrungspendel.** 331.
 Unterstützung in einer ebenen Fläche. 210.
- Verrückung.** 85.
 Verschiebung. 85.
 Verzögerung. 12.
- Wage.** 197.
 Walzen. 298.
 Wechselwirkung. 34.
 Wegeslängenkurve. 4.
 Widerstandsziffer α_0 für ein Fuhrwerk. 301.
 Widerstandsziffer w für Seilrollen. 288.
 Winkelbeschleunigung ε . 324.
- Winkelgeschwindigkeit ω . 92.
 Wirkungsgrad η . 261.
 Wurfbewegung. 52.
- Zapfenreibung.** 267.
 Zaum, Pronys. 276.
 Zeichnerische Zusammensetzung von Kräften. 108—114.
 Zeigerwage. 199.
 Zentralachse einer Kräftegruppe. 145.
 Zentrifugalkraft. 67.
 Zentrifugalmoment 337.
 Zentripetalbeschleunigung p_n . 65.
 Zentripetalkraft. 66
 Zerlegung einer Kraft. 120.
 Zusammensetzung der Kräfte. 39. 102.
 Zusammensetzung paralleler Kräfte. 112. 117.
 Zusammensetzung von Bewegungen. 17.
 Zusammensetzung von Kräften im Raume. 141.
 Zusammensetzung von Kräftepaaren. 136.
 Zusammensetzung von Parallelkräften im Raume. 148.
 Zweifach unterstützter Körper. 190.



Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover.

(Gegründet vor 1606.)

In unserem Verlage erschienen folgende weiteren Werke von

Wilh. Keck,

weil. Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen.

Bd. II: **Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper.** Dritte Auflage, bearbeitet von **Dr. Ludw. Hotopp**, Baurat, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover. 1909. Mit 365 Holzschnitten. M. 12.—, gebd. M. 13.50.

Bd. III: **Allgemeine Mechanik.** Mit 206 Holzschnitten. 1898. M. 10.—, gebd. M. 11.50.

Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeits-

rechnung der Bauwerke. Zweite vermehrte Auflage, neu bearbeitet von **Dr. Ludwig Hotopp**, Baurat, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

Erster Teil. 1906. Mit 209 Holzschnitten. Preis M. 8.—, in gefälligem Ganzleinenband M. 9.—.

Zweiter Teil. 1908. Mit 214 Holzschnitten. Preis M. 10.—, in gefälligem Ganzleinenband M. 11.—.

Der Zuspruch, welchen **Kecks Elastizitätslehre** gefunden hat, läßt erkennen, daß der bei seiner Abfassung leitend gewesene Grundgedanke des Verfassers, eine von der Behandlung einfacher Sonderfälle zur Entwicklung allgemeiner Regeln fortschreitende, bequem und sicher leitende **Einführung in die Elastizitäts- und Festigkeitslehre** zu bieten, richtig war und daß das Buch einem vorhandenen Bedürfnisse entspricht. Bei der Neubearbeitung des Buches ist daher in erster Linie dieser Gedanke weiter verfolgt und noch allgemeiner zur Geltung gebracht.

... Das Werk ist in seiner Art so wunderschön, daß ich es als eines der fleißigsten und wertvollsten Werke in der Literatur der Festigkeitslehre begrüße.

Ingenieur F. W. Haase,
Herausg. d. Ztschr. f. Lüftung u. Heizung. (12. 2. 1908.)

Vorträge über graphische Statik mit Anwendung auf die Festigkeits-

rechnung der Bauwerke, als Anhang zu den „**Vorträgen über Elastizitätslehre**“. (Erste Auflage.) Mit 83 Figuren und vier Tafeln. 2. Aufl. 1902. In gefälligem Einbände M. 3.—.

Fragen über die wichtigsten Gegenstände auf dem Gebiete der **Mechanik.** 1901. M. —,50.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover.

(Gegründet vor 1606.)

In Vorbereitung befindet sich folgendes bedeut-
same Werk:

Bewegliche Brücken.

Von

Dr. Ing. L. Hotopp,

Baurat, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

Ein Hand- und Lehrbuch, enthaltend eine vollständige systematisch-kritische Darstellung der verschiedenen Arten beweglicher Brücken nach dem jetzigen Stande ihrer Entwicklung. Das Werk ist mit besonderer Berücksichtigung der Bewegungs- und Sicherungseinrichtungen in ihrer allgemeinen Anordnung und mit allen wichtigen Einzelheiten bearbeitet auf Grund langjähriger eigener Erfahrungen des Herrn Verfassers auf dem Gebiete, sowie seiner örtlichen Studien an den Wasserstraßen des In- und Auslandes.

Mit zahlreichen Abbildungen und Tafeln.

Preis etwa M. 16.—.

Aus dem reichen Inhalt dieses grundlegenden Werkes heben wir hervor:

- Klappbrücken**, a) mit fester Achse und festem Gegengewicht;
b) mit fester Achse und gegen die Klappe zwangsläufig beweglichem Gegengewicht (Zugbrücke);
c) mit wagerecht verschieblicher Achse und festem Gegengewicht (Roll-Klappbrücke).

- Drehbrücken**, a) mit Rollkranz, $\left. \begin{array}{l} \text{einarmig, zweiarmig, zwei-} \\ \text{flügelig (Doppeldrehbrücken).} \end{array} \right\}$
b) mit Stützapfen,

Rollbrücken, Hubbrücken, Brückenfähren (Schwebefähren). Schiffbrücken.

Der erste Teil des Werkes, umfassend die in ihrer neuere Entwicklung mehr und mehr in den Vordergrund getretenen **Klappbrücken**, wird voraussichtlich gegen Jahreschluß 1912 erscheinen.

 Bestellungen werden gern vorgemerkt. 