

# GEODÄTISCHE ÜBUNGEN

FÜR

## LANDMESSER UND INGENIEURE

VON

DR. CH. AUGUST VOGLER,

Professor an der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin.



---

Mit 36 eingedruckten Abbildungen

---

*G. Steinbrück  
Landmesser.*

BERLIN.

VERLAG VON PAUL PAREY.

Verlagshandlung für Landwirtschaft, Gartenbau und Forstwesen.

1890.

526.9



C2 - 11. 2891

# V o r w o r t.

---

Reichhaltige Aufgabensammlungen und Übungsbücher giebt es in fast allen mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern, in der Geodäsie aber noch nicht. Zu einem geodätischen Übungsbuch soll das vorliegende einen Grundstock bilden. Dafs es nur etwa ein halbes Hundert und nicht sogleich die zwei- bis dreifache Anzahl von Übungen enthält, wozu Stoff genug vorhanden wäre, liegt an dem unmittelbaren Zweck, dem es zu dienen bestimmt ist, und der sein beschleunigtes Erscheinen erforderte. Es soll in erster Linie die geodätischen Übungen der an der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin studierenden preussischen Landmesser fördern.

Angesichts der gegenwärtigen Zuhörerzahl des geodätisch-kulturtechnischen Kursus an genannter Anstalt ist die persönliche Unterweisung jedes Einzelnen bei seinen praktischen Übungen unmöglich geworden, trotzdem neben dem Dozenten der Geodäsie noch vier Landmesser der königlichen Generalkommissionen, welche von ihrer Behörde als Assistenten für den geodätischen Unterricht abgeordnet sind, an diesem sich beteiligen. Während der zwanzigtägigen Messübungen des Sommers 1889 waren z. B. 144 Studierende in 25 Arbeitsgruppen gleichzeitig beschäftigt, nächstens wird die Zahl der Teilnehmer voraussichtlich noch höher steigen. Kaum geringere Schwierigkeiten bieten sich der Einzelunterweisung bei den Wintermessübungen, zu welchen die Studierenden allerdings nach Jahrgängen getrennt und innerhalb jedes Jahrganges noch einmal in Abteilungen geschieden sich einfänden.

Der Wunsch nach erläuterten Arbeitsvorbildern erscheint hier nach begreiflich. Ich suchte ihm fürs erste zu begegnen, indem ich eine Reihe von 20 geodätischen Aufgaben nebst Lösungen, ausgeführt von Studierenden der landwirtschaftlichen Hochschule, in den Jahrgängen 1888 und 1889 der Zeitschrift für Vermessungswesen erscheinen liefs und Sonderabdrücke davon meinen Zuhörern zur Verfügung stellte. Da diese Art der Veröffentlichung dem Bedarf aber nicht genügte, so musste ich mich, früher als ich eigentlich wollte, zur Herausgabe einer

Sammlung in Buchform entschließen, indem ich den bereits publizierten Übungen diejenigen hinzufügte, welche mir zunächst als die wichtigsten erschienen.

Während die geodätische Vorpraxis den Landmesser an größeren zusammenhängenden Messungen bestimmter Art ausbildet, hat die Hochschule ihn in alle Gebiete der Mefskunde einzuführen, doch will auch sie wirkliche Leistungen, nicht blofs Kenntnisse erzielen. Das geschieht zweckmäfsig an der Hand kurzer, knapp umrahmter Übungsaufgaben. Sie sollen der Praxis entlehnt, aber so geformt sein, dafs ihre Lösung nicht erst durch Nachmessung von anderer Seite geprüft werden mufs, sondern Mefsproben in sich selber trägt. Sie sollen zu immer erneuter Anwendung der Hauptarbeiten des Geodäten, Längen-, Winkel- und Höhenmessungen führen, aber den Lernenden nach jedem Schritt veranlassen, seine Messung auf ihre Güte und seine Rechnung auf ihre Richtigkeit zu untersuchen. Neben dem Bewusstsein der Verantwortlichkeit für seine Arbeiten sollen sie in dem künftigen Landmesser die Überzeugung wecken, dafs er bei Wahrnehmung aller dargebotenen Mefs- und Rechenproben unbedingt sicher geht. Eine unbefangene Beurteilung der Genauigkeit seiner Messungen mufs dem Geodäten geradezu Bedürfnis werden, sonst ist er zur Ausübung seines Faches in wissenschaftlichem Sinne, d. h. zu urteilsfähigem Abwägen, Anwenden und selbst Vervollkommen der Mefsmethoden nicht im stande.

Nach dieser Richtung haben die vorliegenden Mefs- und Rechenübungen bisher an unserer Anstalt gewirkt und werden es nun auch vielleicht an anderen Hochschulen thun. Wenn nicht alle, so dürfte doch die Mehrzahl der Abschnitte angehenden Ingenieuren dieselbe Anregung bieten, wie unseren jungen Landmessern.

Selten mag ein so kleines Buch so viele Mitarbeiter zählen als dieses. Aufser meinen Zuhörern, deren Ausarbeitungen darin aufgenommen wurden, verdanke ich wertvolle Beiträge den königlichen Landmessern, Herren E. Hegemann, O. Bödecker, G. Friebe und O. Seiffert, welche, zur Zeit Assistenten für den geodätischen Unterricht an der landwirtschaftlichen Hochschule, meine Arbeit in mancher Weise gefördert haben, Herr Seiffert insbesondere durch Übernahme einer Druckbogendurchsicht.

Berlin, im März 1890.

**Der Verfasser.**

# Inhalt.

Seite

## I. Flächenteilung und Grenzregelung.

Vorbemerkung . . . . .	1
Aufg. 1. Grenzregelung parallel zu einer gegebenen Geraden nach dem Verfahren der Näherung. Fig. 1 u. 2 . . . . .	2
Aufg. 2. Teilung eines Fünfecks durch eine Gerade parallel zu seiner längsten Seite. Unmittelbares Verfahren. Fig. 3 . . . . .	4
Aufg. 3. Ein Viereck durch Gerade parallel zu einer Seite in vier gleiche Teile zu teilen. Fig. 4 . . . . .	10
Aufg. 4. Teilung eines Dreiecks durch Gerade parallel zu einer gegebenen Richtung. Fig. 5. . . . .	14
Aufg. 5. Umwandlung eines Dreiecks durch Verlegen einer Seite parallel gegebener Richtung. Fig. 6. . . . .	18
Aufg. 6. Zwischen zwei konvergenten Geraden einen gebrochenen Grenzzug so zu regeln, dafs von der neuen Grenze eine jener Geraden in einem gegebenen Punkt geschnitten wird. Fig. 7 u. 8 . . . . .	20
Aufg. 7. Wiederholung der vorigen . . . . .	21
Aufg. 8. Vorige Aufgabe. Der gegebene Punkt liegt <i>zwischen</i> den bleibenden Grenzen, die Bonitäten der Grundstücke sind ungleich. Fig. 9 . . . . .	24
Aufg. 9. Teilung eines Vierecks nach gleichen Seitenverhältnissen. Fig. 10. . . . .	28
Aufg. 10. Die vorige, mit Einmessen des Schnittpunktes der Diagonalen . . . . .	36

## II. Abstecken von Geraden und Kreisen.

Vorbemerkung . . . . .	39
Aufg. 11. Einschalten eines Punktes in eine Gerade mit unzugänglichen Endpunkten. Fig. 11 . . . . .	40
Aufg. 12. Abstecken einer Parallelen mit dem Theodolit in etwa 100 m Abstand von einer gegebenen Geraden. Fig. 12 . . . . .	43
Aufg. 13. Abstecken der Kleinpunkte eines Kreisbogens von der Sehne aus, Verlängern des Bogens durch Abstecken von der Tangente eines Endpunktes aus. Fig. 13 . . . . .	44
Aufg. 14. Einteilung eines abgesteckten Kreisbogens (Stationieren) . . . . .	47
Aufg. 15. Auf dem Felde gegeben zwei Berührende eines Kreisbogens, dessen Radius bekannt. Fünf Hauptpunkte abzustecken. Fig. 14 . . . . .	49

Aufg. 16. Abstecken eines Kreisbogens von gegebenem Halbmesser, zwei gegebene Gerade berührend. Kleinpunkte mittelst gleicher Peripheriewinkel und Sehnen . . . . .	51
Aufg. 17. Abstecken eines Kreisbogens von gegebenem Halbmesser, zwei gegebene Gerade berührend, deren Schnittpunkt unzugänglich oder für die Winkelmessung ungünstig gelegen ist. Fig. 15. . . . .	54
Aufg. 18. Einen Kreis an drei sich schneidende Gerade berührend zu legen, nach Messung der Brechungswinkel durch den Theodolit. Neun Hauptpunkte abzustecken. Fig. 16 . . . . .	57
Aufg. 19. Einen Kreis an zwei sich schneidende Gerade berührend zu legen, wenn ein Berührungspunkt gegeben. Fig. 17 . . . . .	60
Aufg. 20. Einen Kreis an drei sich schneidende Gerade berührend zu legen, ohne Messung der Brechungswinkel durch den Theodolit. Fig. 18 . . . .	65
Aufg. 21. Von einem Kreis von gegebenem Radius sind zwei zugängliche Punkte abgesteckt, diese aber gegenseitig nicht sichtbar und ihr Abstand direkt nicht meßbar. Einen dritten Kreispunkt einzuschalten. Fig. 19 .	69
Aufg. 22. Auf dem Felde gegeben eine Berührende und ein Punkt eines Kreises, dessen Halbmesser bekannt. Den Berührungspunkt abzustecken. Fig. 20	72
Aufg. 23. An einen abgesteckten Kreisbogen eine Berührende durch einen gegebenen Fernpunkt zu legen. Fig. 21 . . . . .	74

### III. Polygon- und Kleinpunkte.

Aufg. 24. Drei Polygonzüge, von zugänglichen Festpunkten ausgehend, vereinigen sich in einem Knotenpunkt. Fig. 22 . . . . .	81
Aufg. 25. Herablegen eines unzugänglichen Festpunktes. Fig. 23 . . . . .	85

### IV. Triangulation. Punkteinschaltung.

Aufg. 26. Triangulation eines Vierecks mit Diagonalen. Sämtliche acht Winkel durch 6fache Repetition zu messen. Ausgleichung zunächst nur auf grund der Winkelbedingungen. Fig. 24 . . . . .	89
Aufg. 27. Rückwärtseinschneiden nach 3 Punkten. Fig. 25 . . . . .	96
Aufg. 28. Die vorige, auf grund neuer Messungen . . . . .	101
Aufg. 29. Aufgabe der zwei Punktpaare. Fig. 26 . . . . .	102
Aufg. 30. Zwischen zwei gegebene Festpunkte drei Neupunkte durch eine Dreieckskette einzuschalten. Fig. 27 . . . . .	110
Aufg. 31. Centrieren excentrisch gemessener Richtungen. Fig. 28 . . . . .	116

### V. Nivellieren.

Aufg. 32. Einfaches Nivellement zum Einwägen einer Neumarke im Anschluß an einen Bolzen der Landesaufnahme . . . . .	119
Aufg. 33. Nivellement mit Wendelatte unter Abschluß einer Schleife zum Einwägen einiger Neumarken . . . . .	122
Aufg. 34. Einwägen von Neumarken in einer Schleife, mit doppelten Wechselpunkten . . . . .	126
Aufg. 35. Feinnivellement mit Wendelatte, Ablesung an drei Fäden bei einspielender Libelle . . . . .	129

	Seite
Aufg. 36. Die vorige, Beobachtung bei geneigter Libelle . . . . .	138
Aufg. 37. Flussnivellement . . . . .	147

#### VI. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie.

Aufg. 38. Trigonometrische Messung einer Turmhöhe von zwei Standpunkten aus, welche mit dem Ziel in einer Vertikalebene liegen, und Anschluss an eine gegebene Höhenmarke. Fig. 29 . . . . .	152
Aufg. 39. Trigonometrische Messung einer Turmhöhe von drei Standpunkten aus, mit Anschluss an eine gegebene Höhenmarke. Fig. 30 . . . . .	155
Aufg. 40. Punkteinschaltung mit dem Aneroid . . . . .	158
Aufg. 41. Stationieren des tachymetrischen Nivellierinstrumentes . . . . .	160

#### VII. Instrumentenkunde.

Aufg. 42. Die Vergrößerung eines Fernrohrs zu bestimmen. Fig. 31 . . . . .	170
Aufg. 43. Bestimmung des Gesichtsfeldes eines Fernrohrs. Fig. 32 . . . . .	173
Aufg. 44. Bestimmung der Libellenangabe mittelst des Legebrettes. . . . .	174
Aufg. 45. Bestimmung des Spielpunktes einer Setzlibelle. Fig. 33, 34 u. 35 . . . . .	178
Aufg. 46. Untersuchung der Ringe oder Achszapfen . . . . .	182
Aufg. 47. Bestimmung des Indexfehlers am Höhenkreis . . . . .	186
Aufg. 48. Excentricität der Alhidadenachse. Fig. 36 . . . . .	188

#### VIII. Ausgleichsrechnung.

Aufg. 49. Bestimmung der Konstanten eines Legebrettes . . . . .	191
Aufg. 50. Vollendung der stufenweisen Ausgleichung bedingter Beobachtungen aus Aufgabe 26. Fig. 24. . . . .	193
Aufg. 51. Rückwärtseinschnitt. Vereinigung älterer und neuerer Beobachtungen . . . . .	198
Aufg. 52. Rückwärtseinschnitt mit Nachtragsrichtungen . . . . .	204
Aufg. 53. Vorwärtsabschnitte im Anschluss an einen vollzogenen Rückwärtseinschnitt . . . . .	210



## I. Flächenteilung und Grenzregelung.

Wir nehmen den Wert des Quadratmeters der zu teilenden oder zu regelnden Flächen so hoch an, daß die Kosten der Vermessung daneben verschwinden. Dadurch sind wir der Erwägung überhoben, ob im einzelnen Falle die Mühe genauer Arbeit angebracht ist oder statt dessen eine angenäherte Lösung ausreicht. Dem entsprechend gehen wir in der Genauigkeit allemal so weit, als es die technischen Hilfsmittel des Landmessers gestatten.

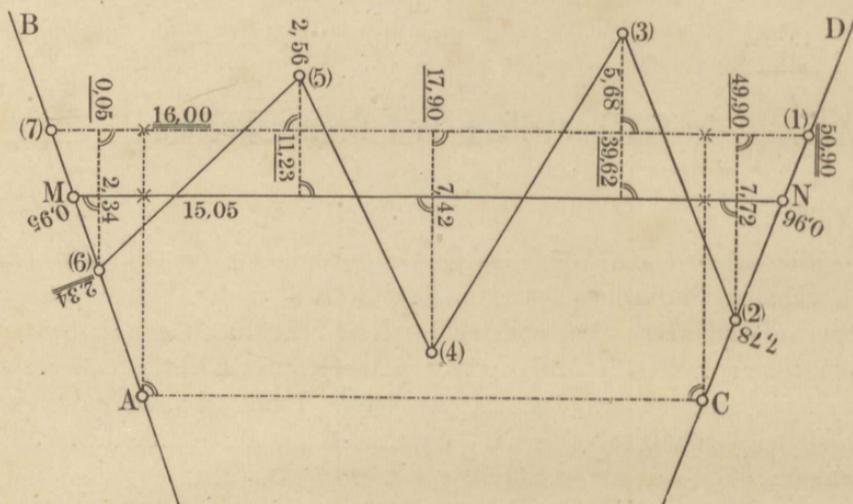
Bei Flächenmessungen können Ordinaten von nicht über 40 m Länge bis auf 2 cm genau abgesetzt und gemessen werden. Also ist der Flächeninhalt bestimmbar bis auf einen Streifen von 2 cm Breite und einer Länge gleich dem Abstand der äußersten Ordinaten; macht auf 50 m Länge 1 qm. Eine Teilungslinie von 50 m Länge muß ebenso den Sollwert der Flächenstücke, welche sie abschneidet, bis auf 1 qm richtig geben, sonst bedarf ihre Lage noch der Verbesserung. Wäre sie um weniger als 2 cm zu verlegen, so könnte sie für „richtig“ gelten, nämlich innerhalb der Grenzen, welche die unvermeidlichen Fehler erreichen dürfen.

Diese Grenzen so eng zu ziehen, wie hier verlangt wird, erfordert beim Winkeln einen berichtigten Winkelspiegel oder ein gutes Prisma, womöglich mit Stab, genaue Lotrechtstellung der Baken, zum mindesten derjenigen in der Messungslinie (Abscissenachse), strenge Deckung der gespiegelten Baken ihrer ganzen Länge nach auf die unmittelbar gesehenen, *schärfstes Einweisen der Ordinatenfußpunkte in die Messungslinie*, endlich sorgfältige Messung mit Latten oder Stahlband unter Rücksicht auf die Bodenneigung. Wer sich an diese Maßregeln bindet, beherrscht sie bald und arbeitet ebenso rasch als des Erfolges sicher.

## Aufgabe I.

*Grenzregelung parallel zu einer gegebenen Geraden nach dem Verfahren der Näherung.* Fig. 1. Parallel der Geraden  $AC$ , welche die gegebene Richtung darstellt, ist in 16 m Abstand die Messungslinie (7)(1) derart abgesetzt, daß sie der endgültigen Grenzlinie nicht fern

Fig. 1.



liegt. Der Inhalt  $f$  des verschränkten Siebenecks (1)(2)⋯(7)(1) ist, wie zu vermuten war, nicht Null geworden. Wir berechnen, wenn  $l = (7)(1)$  die Länge der Messungslinie bedeutet:

$$h = f : l$$

als das seinem Vorzeichen nach zu verstehende Maß, um welches die Messungslinie parallel verschoben werden müßte, um endgültige Grenzlinie zu werden. Vorausgesetzt, daß  $AB \parallel CD$ , muß eine Aufnahme des verschränkten Siebenecks, das von der alten und neuen Grenze ( $MN$ ) gebildet wird, für dessen Inhalt  $f'$  Null ergeben. Auch wenn  $AB$  und  $CD$  konvergieren, ist dies um so näher richtig, je kleiner  $h$ . Nötigenfalls wird, wenn  $MN = l'$ , die Grenze nochmals um

$$h' = f' : l'$$

verschoben. Im vorliegenden Falle erwies sich schon die zweite Annäherung ausreichend.

Wenn man in der Richtung der Messungslinie dorthin blickt, wohinaus die Abscissen wachsen, so wähle man die Ordinaten nach rechts positiv, nach links negativ. Ein verschränktes  $n$ -Eck, zu dem die Messungslinie als Seite gehört, beziffere man so von 1 bis  $n$ , daß die rechts von der Messungslinie gelegenen Flächenteile beim Durchlaufen

der Seiten gemäß der Punktfolge  $1 \dots n$  *rechtläufig*, d. h. in der Richtung des scheinbaren Sonnenlaufs umfahren werden. Berechnet man nun den Inhalt  $f$  des  $n$ -Ecks nach den Gauß'schen Formeln\*) aus:

$$2f = \sum_1^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) = \sum_1^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}),$$

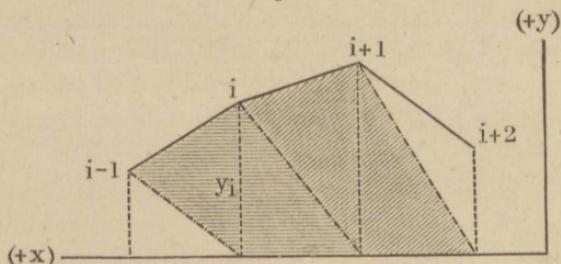
so werden von selbst die Teile des  $n$ -Ecks, welche rechts von der Messungslinie liegen, *positiv*, die übrigen negativ eingeführt, und wenn die ersteren überwiegen, fällt der Gesamthalt  $f$  *positiv* aus. Soll  $f$  verschwinden, so muß die Messungslinie in der Richtung der *positiven*  $y$  parallel verschoben werden.

Berechnung des Inhalts  $f$  des verschränkten Siebenecks (1)  $\dots$  (7) (1).

Zeiger $i$	$y$	$x$	$\Delta y_i =$ $y_{i+1} - y_{i-1}$		$\Delta x_i =$ $x_{i-1} - x_{i+1}$		$y \cdot \Delta x$		$x \cdot \Delta y$	
			+	-	+	-	+	-	+	-
1	0,00	50,90								
2	7,72	49,90		5,68	11,28		87,08			283,43
3	-5,68	39,62		0,30	32,00			181,76		11,70
4	7,42	17,90	3,12		28,39		210,65		55,85	
5	-2,56	11,23		5,08	17,85			45,70		57,05
6	2,34	0,05	2,56		11,23		26,28		0,13	
7	0,00	0,00		2,34		50,85				0,00
1	0,00	50,90	7,72			49,90			392,75	
2	7,72	49,90								
Rechenproben:			13,40	13,40	100,75	100,75	324,01	227,46	448,73	352,18
							+ 96,55		+ 96,55	

\*) Man ziehe von jedem Punkte des  $n$ -Ecks eine Gerade nach dem Fußpunkte der Ordinate des nächsten (Fig. 2). Daraus entstehen Vierecke, in welchen die Ordinaten Diagonalen sind, und deren doppelter Inhalt von der Form wird:

Fig. 2.



$y_i (x_{i-1} - x_{i+1})$  d. h. Diagonale mal Summe der Höhen der anliegenden Dreiecke. Die Summe aller  $n$  Vierecke giebt den  $n$ -Ecksinhalt, und zwar positiv, wenn das (geschlossene)  $n$ -Eck nur rechtläufig, negativ, wenn es nur rückläufig umfahren ward. Verschränkte Polygone betrachte man als aus einfach geschlossenen zusammengesetzt.

Da hiernach  $2f = 96,55$  und  $l = 50,90$ , so ist die neue Grenze noch um

$$\frac{1}{2} \cdot 96,55 : 50,9 = 0,95 \text{ m}$$

in der Richtung (+  $y$ ) zu verlegen. Nachdem dies geschehen und die neue Grenze  $MN$  in die bleibenden  $AB$  und  $CD$  scharf eingebunden ist, erfolgt von  $MN$  als Messungslinie aus die Aufmessung des verschränkten Siebenecks  $N(2)(3) \dots (7)MN$ . Die neuen Mafse sind in die Figur nicht eingetragen, da sie aus den 3 ersten Spalten der nachfolgenden Übersicht hervorgehen.

Das Abstecken von  $MN$  vollzieht sich am besten, wie hier auch geschehen, durch Absetzen der kurzen Strecken (7)  $M$  und (1)  $N$ , welche auf Grund leicht aufstellbarer Proportionen berechnet werden.

Durch die zweite Aufmessung sind zwar die Koordinaten der ersten bestätigt, im allgemeinen aber bedarf man zur Prüfung der Abscissen, weniger der Ordinaten, noch die hier nicht gemessenen Seitenlängen des Siebenecks (2)(3), (3)(4) u. s. w. Denn abgesehen von groben Fehlern können sich Ungenauigkeiten der Abscissen, welche bei der Flächenberechnung unmerkbar sind, bei der Kartierung in grossem Mafsstabe schon geltend machen.

Berechnung des Inhalts  $f'$  des verschränkten Siebenecks  $N(2) \dots MN$ .

$i$	$y$	$x$	$\Delta y_i$		$\Delta x_i$		$y \cdot \Delta x$		$x \cdot \Delta y$	
			+	-	+	-	+	-	+	-
$N$	0,00	50,76								
2	6,77	49,88		6,63	11,16		75,55			330,71
3	-6,63	39,60		0,30	32,00			212,16		11,88
4	6,47	17,88	3,12		28,39		183,68		55,79	
5	-3,51	11,21		5,08	17,85			62,65		56,95
6	1,39	0,03	3,51		11,21		15,58		0,10	
$M$	0,00	0,00		1,39		50,73				0,00
$N$	0,00	50,76	6,77			49,88			343,65	
2	6,77	49,88								
Rechenproben:			13,40	13,40	100,61	100,61	274,81	274,81	399,54	399,54
							0,00		0,00	

Hiernach ist  $2f' = f' = 0$ , daher die neue Messungslinie  $MN$  auch die endgültige Grenze.

## Aufgabe 2.

*Teilung eines Fünfecks durch eine Gerade parallel zu seiner längsten Seite. Unmittelbares Verfahren.* Die Inhaltsberechnung kann auf zweierlei Weise erfolgen, einmal nach Koordinaten, ein zweites Mal nach Dreiecken, deren 3 Seiten gemessen wurden. Bei der Berechnung nach Koordinaten ist zur Vereinfachung des Rechenschemas in beschränkter Weise Gebrauch gemacht von der Umwandlung nega-

tiver dekadischer Zahlen in die Summe zweier Zahlen, von denen die erste die nächst kleinere (weil negative) Potenz von 10 mit ganzem positiven Exponenten, die andere eine positive Zahl ist. Z. B.

$$\begin{aligned} - 283,43 &= - 10^3 + 716,57 \\ - 11,70 &= - 10^2 + 88,30 \\ - 0,15 &= - 10^0 + 0,85 \\ - 0,08 &= - 10^0 + 0,92. \end{aligned}$$

Wir schreiben aber (nach dem Vorgang der preussischen Landesaufnahme) einfacher:

$$- 1000 = \times 000; \quad - 100 = \times 00; \quad - 1,0 = \times,0$$

und vereinigen mit diesen Werten sofort den positiven Teil der obenstehenden Zahlen, also:

$$\begin{aligned} - 283,43 &= \times 716,57; \quad - 11,70 = \times 88,30; \quad - 0,15 = \times,85; \\ - 0,08 &= \quad \times,92. \end{aligned}$$

Das Zeichen ( $\times$ ) kann daher wie eine Ziffer, nämlich wie ( $- 1$ ) aufgefaßt werden und erscheint, wie alle anderen Ziffern dekadischer Zahlen, mit derjenigen Potenz von 10 multipliziert, welche seiner Stelle entspricht. Wie jede andere Ziffer kann es auch in der Stelle, welche es einnimmt, mit anderen Ziffern der gleichen Stelle durch (algebraische) Addition verbunden werden.

Wenn daher eine Reihe positiver und negativer Zahlen zu addieren ist, so ergänze man jede der letzteren zu der nächst kleineren Potenz von 10 mit ganzem positiven Exponenten, addiere die Ergänzungen wie positive Zahlen, ziehe aber von der Summe die betreffenden Potenzen der 10 wieder ab. Diese Subtraktion erfolgt spaltenweise von rechts nach links wie die Addition und mit dieser zugleich. Die Ergänzungen bildet man, wie bei Logarithmen, von links nach rechts, indem man jede Ziffer auf 9 und die letzte auf 10 ergänzt.

Als Beispiel seien die vier letzten Spalten der ersten Tabelle in Aufgabe 1 hier wiederholt und daneben vermöge dekadischer Ergänzung der negativen Zahlen in blofs 2 Spalten zusammengezogen.

$y. \Delta x$		$x. \Delta y$		$y. \Delta x$	$x. \Delta y$
+	-	+	-		
87,08			283,43	87,08	$\times 716,57$
	181,76		11,70	$\times 818,24$	$\times 88,30$
210,65		55,85		210,65	55,85
	45,70		57,05	$\times 54,30$	$\times 42,95$
26,28		0,13		26,28	0,13
			0,00		0,00
		392,75			392,75
324,01	227,46	448,73	352,18	96,55	96,55
	+ 96,55		+ 96,55		

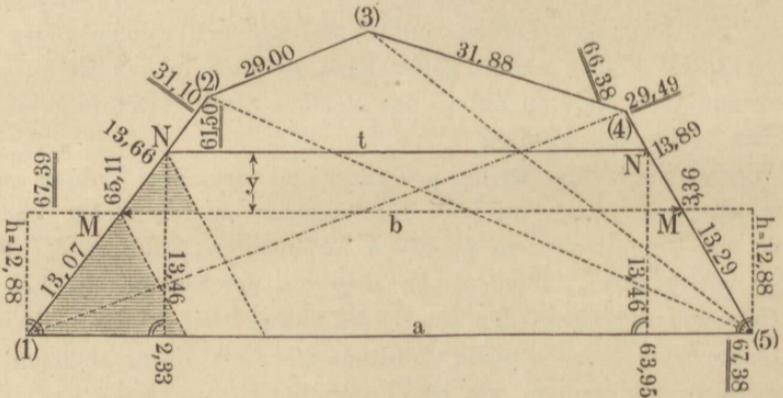
Dieselbe Zusammenziehung hat auch in der nachfolgenden Rechenübersicht stattgefunden.

Erste Berechnung des Fünfecksinhaltes aus den Koordinaten.

Zeiger <i>i</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	$\Delta y_i =$		$\Delta x_i =$		<i>y</i> · $\Delta x$	<i>x</i> · $\Delta y$
			$y_{i+1} - y_{i-1}$	$y_{i+1} - y_{i-1}$	$x_{i-1} - x_{i+1}$	$x_{i-1} - x_{i+1}$		
			+	-	+	-		
1	0,00	0,00						
2	-25,32	17,99		25,33		46,98	1 189,53	× 544,31
3	-25,33	46,98	25,32			48,39	1 225,72	1 189,53
4	0,00	66,38	54,29			13,84	0,00	3 603,77
5	28,96	60,82	0,00		66,38		1 922,36	0,00
1	0,00	0,00		54,28	42,83		0,00	0,00
2	-25,32	17,99						
Rechenproben:			79,61	79,61	109,21	109,21	4 337,61	4 337,61

Um die Figur nicht mit Zahlen und Linien zu überladen, ist nur die Messungslinie (1)(4) eingetragen, aber weder die Koordinaten noch

Fig. 3.



ihre Maße. Der Feldhandrifts enthielt natürlich beides. Hier mögen die drei ersten Spalten vorstehender Übersicht das Fehlende ersetzen.

Zweite Berechnung des Fünfecksinhaltes, aus Dreiecksseiten.

	Dreieck (3)(4)(5)		Dreieck (2)(3)(5)		Dreieck (1)(2)(5)	
<i>a</i>	31,88	(3)(4)	29,00	(2)(3)	31,10	(1)(2)
<i>b</i>	29,49	(4)(5)	56,00	(3)(5)	69,16	(2)(5)
<i>c</i>	56,00	(5)(3)	69,16	(5)(2)	67,38	(5)(1)
2 <i>s</i>	117,37	log	154,16	log	167,64	log
<i>s</i>	58,685	1,768 53	77,08	1,886 94	83,82	1,923 35
<i>s</i> — <i>a</i>	26,805	1,428 21	48,08	1,681 96	52,72	1,721 98
<i>s</i> — <i>b</i>	29,195	1,465 30	21,08	1,323 87	14,66	1,166 13
<i>s</i> — <i>c</i>	2,685	0,428 94	7,92	0,898 73	16,44	1,215 90
<i>D</i> <sup>2</sup>		5,090 98		5,791 50		6,027 36
<i>D</i>	351,15	2,545 49	786,60	2,895 75	1032,00	3,013 68

Die zweite Berechnung stützt sich auf die bekannte Formel für den Dreiecksinhalt  $D$ :

$$D = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}; \quad 2s = a + b + c,$$

worin  $a, b, c$  die Dreiecksseiten. Man prüfe die Rechnung mit den Zahlen durch Aufsummieren der  $s, s-a, s-b, s-c$ . Sie müssen den darüberstehenden Wert  $2s$  liefern. Die logarithmische Rechnung läßt sich, außer durch Wiederholung, ohne Weitläufigkeit nicht prüfen, am einfachsten wohl durch Anschreiben der halben oder der doppelten Zahlen, Aufsuchen der zugehörigen Logarithmen und Berechnen von  $\frac{1}{2}D$  oder  $2D$  aus ihnen. Es ist dies aber hier nicht geschehen, weil die Rechnung von 2 Beobachtern unabhängig vollzogen ward.

In vorstehender Rechenübersicht, und künftig immer, sind die Logarithmen von den Zahlen durch Doppellinien getrennt, von denen die wellige den Logarithmen zugekehrt ist. Dadurch wird eigentlich die Überschrift „log“ überflüssig, ebenso eine Unterscheidung der Logarithmen von den Zahlen durch die Gestalt des Dezimalbruchzeichens. Auch liegt kein Grund vor, vielstellige Logarithmen nach andern Regeln durch Zwischenräume zu trennen, als es nach dem Beschlusse des Bundesrats vom 8. Oktober 1877 für Zahlen vorgeschrieben ist, nämlich durch Anordnung der Zahlen in Gruppen zu je 3 Ziffern, vom Komma aus gerechnet.

Da aus der Übersicht der zweiten Fünfecksberechnung die Maße der Seiten und Diagonalen des Fünfecks zu entnehmen sind, so blieben auch diese zum Teil aus der Figur 3 weg.

Aus den beiden Berechnungen ergibt sich der Fünfecksinhalt:

$$\begin{array}{r} 1) \quad 2\,168,81 \\ 2) \quad 2\,169,75 \\ \hline \text{Mittel} \quad 2\,169,3 \end{array}$$

Hiervon sind  $\frac{2}{5}$  oder 867,7 qm als ein der längsten Seite anliegendes Trapez abzutrennen. Man geht zunächst so vor, als wolle man die Aufgabe wie die vorige durch Versuche lösen, d. h. man dividiert den abzusteckenden Inhalt durch die längste Seite oder Grundlinie  $a$  und erreicht so näherungsweise die Höhe des Trapezes:

$$867,7 : 67,38 = 12,88 = h.$$

Im Abstände  $h$ , den man auch auf 13 hätte abrunden dürfen, wird eine Parallele zur Grundlinie abgesteckt und in die anliegenden Fünfecksseiten in den Punkten  $M$  und  $M'$  scharf eingebunden, darauf  $MM' = b = 61,75$  gemessen. Damit ist die Aufgabe auf die Teilung eines Trapezes zurückgeführt\*). Wenn nämlich  $f$  den Inhalt des Tra-

\*) Vergl. des Verfassers Praktische Geometrie, I, S. 607.

pezes zwischen den Parallelseiten  $a$  und  $b$ ,  $f'$  den zwischen  $a$  und  $t$ , der endgültigen Teilungslinie,  $f'' = f' - f$  den des Trapezes zwischen  $b$  und  $t$  bezeichnet, dessen Höhe  $y$  sei, dann gilt, wie a. a. O. gezeigt wird,

$$t = \sqrt{b^2 - \frac{f''}{f} (a^2 - b^2)} = b \sqrt{1 - \frac{f''}{f} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{b^2}} \quad (1)$$

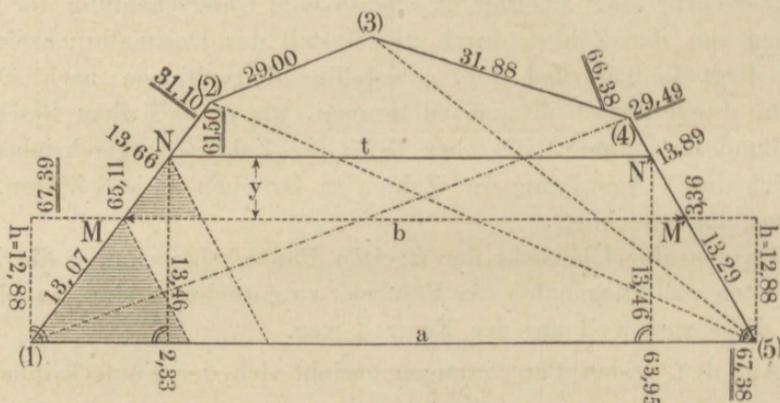
und, wie aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke in Fig. 3 folgt:

$$y : h = \frac{b - t}{a - b} = v \quad (2)$$

oder auch, als Rechenprobe für  $v$ , weil  $y = 2f'' : (b + t)$  ist,

$$y : h = \frac{2f''}{h \cdot (b + t)} = v. \quad (3)$$

Fig. 3.



Die Verhältniszahl  $v$  wird benutzt, um  $MN$  und  $M'N'$  aus  $v \cdot M(1)$  und  $v \cdot M'(5)$  zu berechnen. Diese Strecken werden, wenn positiv, in der Verlängerung von (1)  $M$  und (5)  $M'$  abgetragen, und sie sind positiv, wenn wie hier  $t < b < a$ .

Die Schlussprobe hat zu untersuchen, ob  $NN'$  dem Sollwert  $t$  entspricht, ob die Abstände der Punkte  $N$  und  $N'$  von  $a$  unter sich gleich und gleich  $y + h$  sind, endlich ob das abgeschnittene Trapez den Sollinhalt  $f'$  erreicht. Den Rest des Grundstücks nochmals selbständig aufzumessen ist nur dann unbedingt erforderlich, wenn die Gesamtfläche zuvor nur *einmal* bestimmt worden war.

Wir finden:

$$f = \frac{1}{2} h (a + b) = 6,44 (67,38 + 61,75) = 831,6$$

$$f'' = 867,7 - 831,6 = 36,1$$

$$t = 61,75 \sqrt{1 - \frac{36,1}{831,6} \cdot \frac{5,63 \cdot 129,13}{61,75^2}} = 61,494.$$

Wegen Geringfügigkeit des zweiten Gliedes (es heiße  $\delta$ ) unter dem Wurzelzeichen konnte  $\sqrt{1-\delta} = 1 - \frac{1}{2} \delta$  gesetzt werden, wodurch freilich nur wenig Mühe erspart wird. Dieser Ersatz ist (nach der binomischen Reihe) zulässig, wenn einem Überschlag zufolge  $\frac{1}{4} \delta^2$  eine verschwindend kleine Größe wird. Hier ist näherungsweise  $\delta = \frac{1}{120}$ , also  $61,75 \cdot \frac{1}{4} \delta^2$  nahe gleich  $\frac{1}{960}$  m oder etwa 1 mm. Wir führen beide Rechnungen nebeneinander auf, um die Anordnung zu zeigen, welche sich in solchen Fällen empfiehlt. In der ersten Spalte steht die Formel, in der zweiten die Zahl, in der dritten der Logarithmus, das Zusammengehörige auf gleicher Zeile.

$t = 61,75 \sqrt{1-\delta}$			$t = 61,75 (1 - \frac{1}{2} \delta)$		
$f''$	36,1	1,5575	$f''$	36,1	1,5575
$a-b$	5,63	0,7505	$a-b$	5,63	0,7505
$a+b$	129,13	2,1110	$a+b$	129,13	2,1110
$1:f$	1:831,6	7,0801	$1:f$	1:831,6	7,0801
$1:b^2$	1:61,75 <sup>2</sup>	6,4186	$1:b$	1:61,75	8,2093
$\delta$	0,008 274	7,9177		1:2	9,6990
$1-\delta$	0,991 73	9,996 39	Ergebnis: 0,2555		9,4074
$\sqrt{1-\delta}$		9,998 20	ab von 61,75		
$b$	61,75	1,790 64	$t = 61,494$		
$t$	61,495	1,788 84			

Doppelte Berechnung von  $\log v$  gems Formel (2) und (3).

$b-t$	0,255	9,4065	$2f''$	72,2	1,8585
$\frac{1}{2}a-b$	$\frac{1}{5},63$	9,2495	$1:h$	$\frac{1}{12},88$	8,8901
$v$		8,6560	$\frac{1}{2}b+t$	$\frac{1}{123},24$	7,9093
			$v$		8,6579

Das zweite Ergebnis ist, da  $b-t = 0,255$  in der dritten Stelle unsicher, als das schärfere zu betrachten und zur Berechnung von  $MN$  und  $M'N'$  sowie  $y$  weiter zu verwenden.

$$\begin{array}{r}
 13,07 \left\{ \begin{array}{l} 1,1163 \\ 8,6579 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 9,7742 \\ 9,7814 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,595 = MN \\ 0,605 = M'N' \end{array} \\
 v \\
 13,29 \left\{ \begin{array}{l} 1,1235 \\ 8,6579 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 9,7678 \\ 1,1099 \end{array} \right\} 0,586 = y \\
 v \\
 12,88 \left\{ \begin{array}{l} 1,1099 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

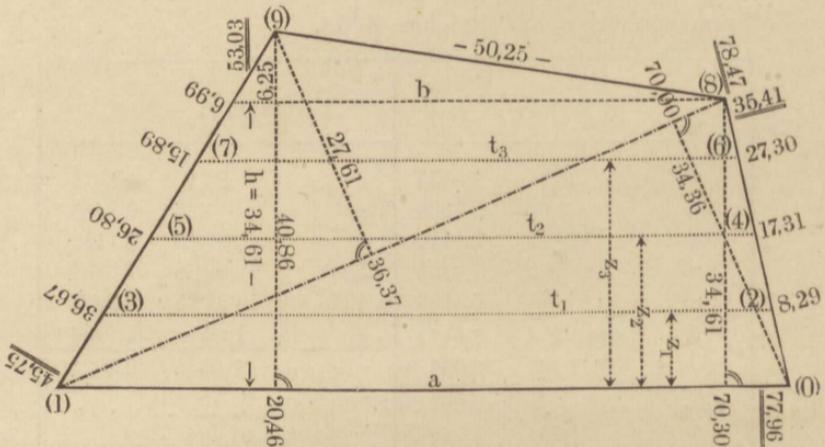
Messproben:

$$\begin{array}{l}
 t = 61,50 \text{ statt } 61,495; h + y = 13,46 \text{ statt } 13,466; \\
 2f'' = 13,46 (67,38 + 61,50) = 867,4 \text{ statt } 867,7.
 \end{array}$$

## Aufgabe 3.

Ein Viereck durch Gerade parallel zu einer Seite in 4 gleiche Teile zu teilen. Es würde zu weit führen, wollte man das Verfahren der Aufgabe 2 auf jeden einzelnen Teil anwenden. Man reicht mit einer Hilfsparallelen  $b$  zur Seite  $a$  aus und wählt diese so, daß der Unterschied  $a - b$  recht groß wird. In Fig. 4 ist sie durch Punkt (8) gelegt.

Fig. 4.



Das Paralleltrapez zwischen  $a$  und  $b$  habe die Höhe  $h$  und den Inhalt  $f$ , das zwischen  $a$  und  $t$  (einer Teilungslinie) die Höhe  $z$  und den Inhalt  $f'$ . Man berechnet dann zweckmäßiger das Verhältnis  $q = z : h$  als Unbekannte, und aus ihr die abzusetzenden Seitenstrecken sowie  $t$  für alle vorgeschriebenen Teile  $f'$ . In unserem Beispiel ist  $f' = \frac{1}{4} F$ ,  $\frac{1}{2} F$  u. s. w., wenn  $F$  der Gesamthalt des gegebenen Vierecks. Diese Aufgabe tritt häufig genug bei Zusammenlegungen im großen auf. Offenbar ist:

$$\frac{a+t}{h} z = \frac{2f'}{h} = q(a+t),$$

dann 
$$\frac{a-t}{a-b} = \frac{z}{h} = q, \text{ oder } z = qh, \quad (1)$$

hieraus 
$$t = a - q(a-b); \quad (2)$$

dies in die erste Formelzeile eingesetzt, giebt die quadratische Gleichung:

$$\frac{a-b}{2} q^2 - aq + \frac{f'}{h} = 0$$

woraus 
$$q = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2f' \frac{a-b}{h}}}{a-b}. \quad (3)$$

Hierzu kommt, nach Berechnung von  $z$  und  $t$  aus (1) und (2), als Rechenprobe:

$$(a + t) z = 2f'. \quad (4)$$

In (3) ist das untere Vorzeichen ( $-$ ) gültig, so lange  $a > b$ , und die Formel dann nur unter der Bedingung brauchbar, daß  $f$  gleich oder kleiner als das Dreieck aus der Basis  $a$  und den verlängerten anliegenden Seiten (1) (9) und (0) (8). Das obere Vorzeichen ( $+$ ) gilt, sobald  $a < b$  und zwar ohne Grenzen für  $f$ . Daher kann  $q$  auch die Einheit überschreiten.

Die abzusetzenden Strecken  $s$  und  $s'$  auf den an  $a$  anliegenden Seiten des Paralleltrapezes  $f$ , welche  $S$  und  $S'$  heißen mögen, also

$$s = q S \text{ und } s' = q S', \quad (5)$$

berechne man doppelt, logarithmisch und mit gemeinen Zahlen, da sie anders nicht geprüft werden, versäume auch nicht, um sich vor Fehlern beim Absetzen zu sichern, die eingeteilten Seiten noch einmal in entgegengesetzter Richtung durchzumessen.

Als Schlußprobe werden die Parallelen und ihre Abstände nachgemessen, oder es erfolgt eine vollständige Neumessung der Figur nach Koordinaten, indem die mittlere Teilungslinie oder, wie in unserem Beispiel, eine Diagonale als Messungslinie dient. Aus der Schlußprobe muß sich die richtige Teilung des Vierecks nachweisen lassen.

Formel (3) formen wir noch in zweierlei Weise um, erstens zur bequemeren Rechnung in:

$$q = \frac{a}{a - b} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{f'}{f} \frac{(a + b)(a - b)}{a^2}} \right), \quad (3^*)$$

zweitens, für den Fall, daß  $a - b$  sehr klein,  $v$  aus (3\*) also nicht scharf genug gerechnet werden könnte, durch Multiplikation und Division mit  $1 \mp \sqrt{1 - \lambda}$ , worin  $\lambda$  das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen in (3\*) darstellt. Daraus wird:

$$q = \frac{f'}{f} \cdot \frac{a + b}{a} : \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{f'}{f} \frac{(a + b)(a - b)}{a^2}} \right). \quad (3^{**})$$

Diese Formel ist auch für vollkommenen Parallelismus der an  $a$  anliegenden Trapezseiten noch brauchbar und geht dann wegen  $a - b = 0$  über in die selbstverständliche:

$$q = \frac{f'}{f}.$$

Unser *Beispiel* gestattet die Ermittlung des Gesamthabes  $F$  des Vierecks auf vier verschiedene Weisen. Entstanden ist dieser Überfluß gelegentlich der Konstruktion und Messung der Parallelen  $b$  zu  $a$ ,

zu welchem Zweck die Normalen auf  $a$  errichtet werden mußten, und dadurch, daß diese zugleich als Ordinaten der Viereckspunkte gewählt wurden. Wir beschränken uns jedoch auf die drei bequemsten Berechnungen von  $F$ . Dem Leser sei es überlassen, die vierte aus Dreiecksseiten nach dem Muster auf Seite 6 beizufügen, wobei ihm die Bemerkung dienen mag, daß sich daraus  $F = 2431,8$  ergibt.

*Erste Berechnung* von  $F$  aus der Diagonale und den Höhen der anliegenden Deiecke:

$$2F = 78,47 (27,61 + 34,36) = 4862,79.$$

*Zweite Berechnung* aus Koordinaten, für  $a$  als Messungslinie:

$$2F = 70,30 \cdot 40,86 + 57,50 \cdot 34,61 = 4862,53.$$

Mittel aus vorstehenden Berechnungen: **4862,7.**

*Dritte Berechnung* aus dem Trapez zwischen  $a$  und  $b$  und dem Dreieck über  $b$ .

$$\text{a) Trapez: } 2f = 34,61 (77,96 + 53,03) = 4533,56$$

$$\text{b) Dreieck: } 2D = 53,03 \cdot 6,25 = 331,44$$

$$2F = 4865,00.$$

Die Summe ist auf das oben gezogene Mittel abgeglichen, daher der verbesserte Wert für  $2f$ :

$$2f = 4532,4.$$

Die Rechnung erfolgte so auf dem Felde, und es lag kein Grund vor, sie um geringer Beträge willen zu Hause abzuändern, zumal die abgesteckten Maße so ermittelt sind. Demnach ist auch  $f'_1 = 1/4 F$  zu berechnen aus

$$2f'_1 = 4862,7 : 4 = 1215,7.$$

$2f'_2$  ist davon das Doppelte,  $2f'_3$  das Dreifache u. s. w.

*Berechnung der Unbekannten  $q$  und der auf sie gestützten Zahlenwerte.*

1) Berechnung von  $\lambda$  nach (3\*).

$a + b$	130,99	2,117 24
$a - b$	24,93	1,396 72
$1 : a^2$	$1 : 77,96^2$	6,216 26
$1 : 2f$	$1 : 4532,4$	6,343 67
$2f'_1$	1215,7	3,084 82
$\lambda_1$	0,144 12	9,158 71
$\lambda_2 = 2 \lambda_1$	0,288 24	
$\lambda_3 = 3 \lambda_1$	0,432 36	

2) Berechnung der  $q$  nach (3\*).

	für $f'_1$		für $f'_2$		für $f'_3$	
$\lambda$	0,144 12		0,28 824		0,432 36	
$1 - \lambda$	0,855 88	9,932 41	0,71 176	9,852 34	0,567 64	9,754 09
$\sqrt{1 - \lambda}$	0,925 12	9,966 20	0,84 366	9,926 17	0,753 44	9,877 04
$1 - \sqrt{\phantom{x}}$	0,074 88	8,874 37	0,15 634	9,194 07	0,246 56	9,991 92
$a$	77,96	1,891 87	}	0,495 15	}	0,495 15
$1/a - b$	1/24,93	8,603 28				
$q$		9,369 52		9,68 922		9,887 07

3) Berechnung der  $s$ ,  $z$  und  $t$  nach (5), (1) und (2).

$S$	38,76	1,588 38		1,588 38		1,588 38
$q$		9,369 52		9,689 22		9,887 07
$S'$	35,41	1,549 13		1,549 13		1,549 13
$s = qS$	9,076	0,957 90	18,951	1,277 60	29,885	1,475 45
$s' = qS'$	8,292	0,918 65	17,312	1,238 35	27,303	1,436 20
$h$	34,61	1,539 20		1,539 20		1,539 20
$q$		9,369 52		9,689 22		9,887 07
$-(a - b)$	-24,93	1,396 72 <sub>n</sub>		1,396 72 <sub>n</sub>		1,396 72 <sub>n</sub>
$z = hq$	8,104	0,908 72	16,921	1,228 42	26,685	1,426 27
$a - t$	×4,162	0,766 24	×87,812	1,085 94	×80,778	1,283 79
$a$	77,96		77,96		77,96	
$t$	72,122		65,772		58,738	

4) Rechenprobe nach (4).

$z$		0,908 72		1,228 42		1,426 27
$a + t$	150,08	2,176 33	143,73	2,157 56	136,70	2,135 76
$2f'$	1216,3	3,085 05	2432,1	3,385 98	3647,8	3,562 03
Soll	1215,7		2431,4		3647,1	
Rechenfehler (doppelt)	-0,6		-0,7		-0,7	

Ganz scharf kann die Rechnung darum nicht stimmen, weil wir nicht folgerichtig verfahren sind. Wir führten für  $f$  als den Inhalt des Trapezes mit den Parallelseiten  $a$  und  $b$  einen verkleinerten Wert ein, ohne  $a$ ,  $b$  oder  $h$  abzuändern. Insofern ist also die auf dem Felde vorgenommene Ausgleichung der Flächenwidersprüche nicht eben ratsam. Nur  $F$ , nicht  $f$  durfte durch Ausgleichung abgeändert werden.

*Messprobe durch Neubilden der Flächeninhalte der einzelnen Teile aus Koordinaten.*

Da Figur 4 nicht alle Linien und Zahlen des Feldhandrisses aufzunehmen vermochte, so folgen hier die Koordinaten aller Punkte im Umfange des Vierecks, bezogen auf die Diagonale (1) (8) als Messungslinie:

Nr.	$y$	$x$	Nr.	$y$	$x$
1	0,00	0,00	0	34,36	70,00
3	— 5,48	7,21	2	26,32	71,98
5	— 11,43	15,03	4	17,56	74,14
7	— 18,02	23,76	6	7,87	76,53
9	— 27,61	36,37	8	0,00	78,47

Auf das Viereck 1320 angewandt, lautet die Gauß'sche Formel (S. 3) für den Inhalt  $V_1$ :

$$2 V_1 = - (y_2 - y_1) (x_0 - x_3) + (y_0 - y_3) (x_2 - x_1).$$

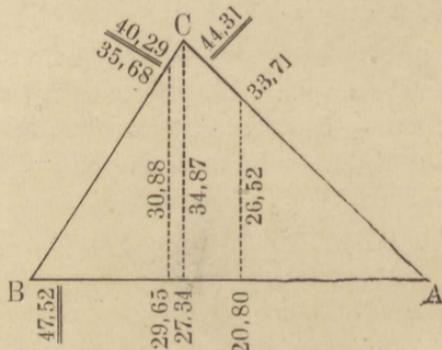
Für die übrigen Vierecke findet man den doppelten Inhalt durch Zeigerverschiebung. In nachstehender Rechenübersicht werden die Produkte der letzten Spalte aus den Faktoren der beiden vorhergehenden übers Kreuz gebildet, das erste derselben jedesmal mit Vorzeichenumkehr.

(Siehe Tabelle auf folgender Seite.)

#### Aufgabe 4.

*Teilung eines Dreiecks durch Gerade parallel zu einer gegebenen Richtung.* Das Dreieck  $ABC$  (Fig. 5) vom Inhalt  $\Delta$  soll normal zu  $AB$  in drei gleiche Teile geteilt werden, weshalb von vornherein das Lot  $CF$  von  $C$  auf  $AB$  gefällt und mit aufgemessen wurde. Die Aufgabe liefse sich auf die vorige zurückführen, indem man z. B. in dem

Fig. 5.



Viereck und Zeigerfolge		$y$	$x$	$y_{i+1} - y_{i-1}$	$x_{i+1} - x_{i-1}$	Produkte
$V_1$	1	0,00	0,00			
	3	— 5,48	7,21	26,32	71,98	×8347,37
	2	26,32	71,98	39,84	62,79	2867,68
	0	34,36	70,00			1215,05
					Soll: Fehler (doppelter)	1215,7 + 0,6
$V_2$	3	— 5,48	7,21			
	5	— 11,43	15,03	23,04	66,93	×8687,91
	4	17,56	74,14	37,75	56,95	2526,61
	2	26,32	71,98			1214,52
					Soll: Fehler (doppelter)	1215,7 + 1,2
$V_3$	5	— 11,43	15,03			
	7	— 18,02	23,76	19,30	61,50	×027,67
	6	7,87	76,53	35,58	50,38	2188,17
	4	17,56	74,14			1215,84
					Soll: Fehler (doppelter)	1215,7 — 0,1
$V_4$	7	— 18,02	23,76			
	9	— 27,61	36,37	18,02	54,71	×276,32
	8	0,00	78,47	35,48	40,16	1941,11
	6	7,87	76,53			1217,43
					Soll: Fehler (doppelter)	1215,7 — 1,7

Kein einfacher Fehler\*) überschreitet 1 qm und die Summe der Fehler verschwindet.

Dreieck  $AFC$  vom Inhalt  $f$  die Seite  $CF = a$ ,  $AF = h$ ,  $b = 0$  setze; dann würde Formel (3\*) für  $q$  übergehen in

$$q = 1 - \sqrt{\frac{f - f'}{f}}, \tag{1}$$

worin  $f - f' = \frac{1}{3} A$ . Wird dagegen  $CF = b$ ,  $AF = h$  und  $a = 0$  gesetzt, so geht Formel (3) der Aufgabe 3, indem wir  $v$  statt  $q$  schreiben, über in

$$v = \sqrt{\frac{f'}{f}}, \tag{2}$$

\*) Das Wort *Fehler* bedeutet dem allgemeinen Sprachgebrauch zufolge das, was der gemessenen Größe zum Sollbetrage noch *fehlt*. Hiernach erklären sich die Vorzeichen der Fehler. Messung + Fehler = Soll.

worin jetzt  $f' = \frac{1}{3} A$  zu setzen ist. Die Formeln (1) und (2) sind daher nicht gleichbedeutend, sie werden es aber, wenn man für die gleichbedeutenden Zähler unter dem Wurzelzeichen allgemein  $\beta A$  setzt; dann ist  $q = 1 - v$  und

$$v = \sqrt{\beta A : f}. \quad (3)$$

Formel (3) ist ein Ausdruck für den bekannten geometrischen Satz, daß sich zwei einander zugeordnete Seiten ähnlicher Dreiecke wie die Wurzeln aus den Flächen derselben verhalten, hätte also unmittelbar aufgestellt werden können.

In unserem Beispiel ist es vor allen Dingen nötig, den rechten Winkel bei  $F$  zu prüfen. Thun wir dies mit Hilfe des Dreiecks  $AF C$ , so findet sich:

$AF^2$	27,34 <sup>2</sup>	747,48	} 1963,40
$FC^2$	34,87 <sup>2</sup>	1215,92	
$AC^2$	44,31 <sup>2</sup>	1963,38	

also Übereinstimmung bis auf 0,02 qm, während der Fehler mehrere Zehntel qm betragen dürfte\*). Nun wird der Dreiecksinhalt  $A$  aus  $AB$  und  $FC$ , dann aus allen drei Seiten, also doppelt berechnet:

1)  $\frac{1}{2} \cdot 47,52 \cdot 34,87 = 828,51 = A$   
 $828,54 = A$  aus 2)  
 Mittelbildung unnötig.  
 $\frac{1}{3} A = 276,2.$

2)

$a$	40,29	$BC$
$b$	44,31	$CA$
$c$	47,52	$AB$
$2s$	132,12	
$s$	66,06	} 1,819 94
$s - a$	25,77	} 1,411 11
$s - b$	21,75	} 1,337 46
$s - c$	18,54	} 1,268 11
$A^2$		} 5,836 62
$A$	828,54	} 2,918 31

\*) Eine unvollständige, d. h. irgendwo abgebrochene Dezimalzahl ist als solche bis zu einer halben Einheit der letzten beibehaltenen Stelle *unsicher*. Als *Beobachtung* kann sie noch unsicherer sein. Das Quadrat einer unvollständigen Zahl ist daher unsicher bis zum Betrage des Produkts aus der Einheit der letzten beibehaltenen Stelle in die Zahl selbst, z. B.  $44,31^2$  unsicher bis zu  $44 \times 0,01 = 0,44$ . Ein Produkt zweier unvollständigen Zahlen ist unsicher bis zum Betrag der Summe der beiden Produkte aus der halben Einheit der letzten Stelle des einen Faktors in die Zahl des anderen, z. B.  $13,2 \cdot 34,87$  unsicher bis zu  $0,05 \cdot 35 + 0,005 \cdot 13$ . Doch sind die wirklichen Fehler meist kleiner als die Unsicherheiten.

Die Inhalte der Dreiecke  $FCA$  und  $FBC$  seien  $f_a$  und  $f_b$ , die entsprechenden Verhältniszahlen  $v$  sollen  $v_a$  und  $v_b$  heißen. Dann ist:

$$f_a = \frac{1}{2} \cdot 34,87 \cdot 27,34 = 476,67$$

$$f_b = \frac{1}{2} \cdot 34,87 \cdot 20,18 = 351,84.$$

Berechnung der  $v$  gemäß (3) und der nach diesen Verhältniszahlen abzusetzenden Strecken.

$\frac{1}{3} A$	276,2	2,441 22	$\frac{1}{3} A$	276,2	2,441 22
$1 : f_a$	$\frac{1}{476,7}$	7,321 75	$1 : f_b$	$\frac{1}{351,8}$	7,453 70
$v_a^2$		9,762 97	$v_b^2$		9,894 92
$AF$	27,34	1,436 80	$BF$	20,18	1,304 92
$v_a$		9,881 48	$v_b$		9,947 46
$AC$	44,31	1,646 50	$BC$	40,29	1,605 20
$v_a \cdot AF$	20,81	1,318 28	$v_b \cdot BF$	17,88	1,252 38
$v_a \cdot AC$	33,73	1,527 98	$v_b \cdot BC$	35,70	1,552 66
$v_a$		9,881 48	$v_b$		9,947 46
$FC$	34,87	1,542 45	$FC$	34,87	1,542 45
$v_a \cdot FC$	26,54	1,423 93	$v_b \cdot FC$	30,89	1,489 91

In der letzten Zeile stehen die Sollwerte der Teilungslinien, daher folgende *Rechenprobe*, welche jedoch die auf  $AC$  und  $BC$  abzusetzenden Strecken nicht vollständig einschließt.

$$\frac{1}{2} \cdot 26,54 \cdot 20,81 = 276,15 \quad \text{Soll: } \frac{1}{3} A = 276,2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 30,89 \cdot 17,88 = 276,16 \quad \text{desgl.}$$

Die Rechnung auf dem Felde hatte die Flächeninhalte auf Ganze abgerundet und infolge davon die in der Figur eingetragenen Zahlen erhalten, welche auch abgesetzt wurden. Ebenso ergab die Nachmessung der Teilungslinien die Zahlen der Figur. Die hieraus entnommene *Messprobe* liefert die Inhalte  $D$  der 3 Teile wie folgt:

$$D_1 = \frac{1}{2} \cdot 30,88 \cdot 17,87 = 275,91 \text{ statt } 276,2$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \cdot 65,75 \cdot 2,31 \left. \begin{array}{l} \\ + \frac{1}{2} \cdot 61,39 \cdot 6,54 \end{array} \right\} = 276,68 \text{ " "}$$

$$D_3 = \frac{1}{2} \cdot 26,52 \cdot 20,80 = 275,81 \text{ " "}$$


---


$$828,40 \text{ statt } 828,54.$$

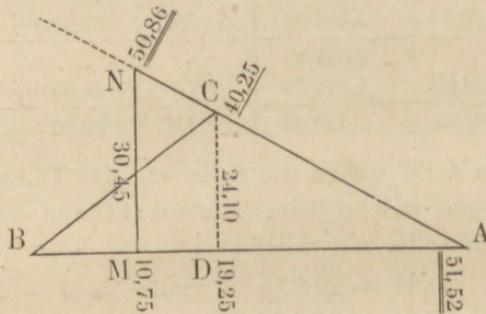
Nun überschreitet zwar keiner der Fehler 0,5 qm, indessen war dies Ergebnis bei so kleinen Dimensionen des Dreiecks  $ABC$  mit derselben Messungs- aber größerer Rechnungsschärfe noch zu überbieten. Denn die erfolgten Abrundungen wirkten auf Verkleinerung von  $D_1$  und  $D_3$  hin. Es mag dies zeigen, wie scharf kleine aber wertvolle Grundstücke, z. B. Bauplätze in Städten, vermessen und geteilt werden können. Die Ausmaße der Figur wurden übrigens nur darum so klein gewählt, weil diese, die folgende und noch eine dritte

Teilungsaufgabe an *einem* Meßtage zu erledigen waren. Bei diesen Aufgaben wurden, wie bei Absteckungen stets, alle Rechnungen, die Schlufsprobe einbegriffen, auf dem Felde selbst vollzogen.

### Aufgabe 5.

*Umwandlung eines Dreiecks durch Verlegen einer Seite parallel gegebener Richtung.* (Fig. 6.) Dreieckige Grundstücke, wie deren beim Zusammenstoß neuer Straßen, Wasserläufe, Eisenbahnen häufig entstehen, haben zumeist eine der Bearbeitung und Bebauung nicht günstige Gestalt. Man strebt dann dahin, die einzige Seite, welche dies zuläßt, so zu verlegen, daß das Dreieck gleichschenkelig oder rechtwinklig wird.

Fig. 6.



Ist  $ABC$  das zu verwandelnde Dreieck,  $DC$  die gegebene Richtung,  $MN$  die neue Grenze, während die Richtungen  $AB$  und  $AC$  für unabänderlich gelten, verhält sich ferner  $AD:AC$ , also auch  $AM:AN = m:n$ , so lautet die Bedingung für Gleichheit der Inhalte von  $ABC$  und  $AMN$ :

$$AB \cdot AC = AM \cdot AN,$$

wozu kommt:

$$m:n = AM:AN.$$

Werden diese beiden Zeilen durch Multiplikation und Division mit einander vereinigt, so folgt:

$$AM = \sqrt{\frac{m}{n} AB \cdot AC}; \quad AN = \sqrt{\frac{n}{m} AB \cdot AC}. \quad (1)$$

Für ein gleichschenkliges Dreieck  $AMN$  ist  $m:n = 1$ . Für andere Fälle *mufs* die neue Richtung nicht eben durch  $C$  gehen, soll dieselbe aber z. B. normal auf  $AB$  stehen, so ist nichts einfacher, als daß das Lot  $CD$  abgesteckt und  $m:n = AD:AC$  durch Streckenmessung ermittelt wird. Führt man das Verhältnis der Strecken selbst in (1) ein, so hat man:

$$AM = \sqrt{AB \cdot AD}; \quad AN = \sqrt{AB \cdot AC^2 : AD}. \quad (2)$$

$AB$	51,52	1,711 98	$AB$	51,52	1,711 98
$AD$	32,27	1,508 80	$AC^2$	40,25 <sup>2</sup>	3,209 53
$AM^2$		3,220 78	$1:AD$	$1/32,27$	8,491 20
$AM$	40,774	1,610 39	$AN^2$		3,412 71
			$AN$	50,857	1,706 36

Rechenprobe:  $AM \cdot AC = AN \cdot AD$

$$40,774 \cdot 40,25 = 1\,641,15$$

$$50,857 \cdot 32,27 = 1\,641,16.$$

Die Mafse  $AM$  und  $AN$  oder vielmehr ihre kürzeren Ergänzungen  $BM$  und  $CN$  wurden abgesetzt, die Verbindungslinie gemessen, die rechtwinklige Stellung auf  $AB$  geprüft und als Schlufsprobe die Dreiecksinhalte  $ABC$  und  $AMN$  berechnet und verglichen.

*Probe des rechten Winkels bei M:*

$AM^2$	40,77 <sup>2</sup>	1662,19	} 2589,39
$MN^2$	30,45 <sup>2</sup>	927,20	
$AN^2$	50,86 <sup>2</sup>	2586,74	

$$\sqrt{AN^2 - MN^2} = \sqrt{1\,659,54} = 40,737.$$

Demnach würde, wenn die Punkte  $M$  und  $N$  als scharf in die Geraden  $AB$  und  $AC$  eingerichtet und genau abgesetzt angenommen werden dürfen, ein Abscissenfehler von 0,033 vorliegen. Dafür spricht, daß sich auch  $AD$  aus  $AC$  und  $CD$  um 0,033 kleiner berechnet, als es gemessen ward. Durch unser Rechen- und Absteckungsverfahren wird aber  $MN$  unbedingt parallel  $DC$ ;  $M$  dürfte also eigentlich um noch ein wenig mehr von dem Fußpunkt des Lotes durch  $N$  abweichen, als es thut. Der Fehler hätte schon bei  $D$  berichtigt werden müssen.

*Prüfung auf Gleichheit der Dreiecksinhalte.*

$$2ABC = 51,52 \cdot 24,10 = 1\,241,63$$

$$2AMN = 40,77 \cdot 30,45 = 1\,241,45.$$

Eine noch schärfere, von der vorausgegangenen Messung unabhängige Probe kann man gewinnen, wenn man das verschränkte Viereck  $MNCB$  auf  $MN$  als Messungslinie aufmißt, also noch ein Lot von  $C$  auf  $MN$  fällt. (Den Abscissenunterschied  $MD = 8,50$  soll man nicht benutzen.) Der Inhalt des Vierecks muß Null werden. Obwohl diese Probe versäumt wurde, wollen wir mit den vorhandenen Mafsen so rechnen, als wäre sie erfolgt.

$$2MNCB = 30,45 \cdot 8,50 - 24,10 \cdot 10,75$$

$$= 258,82 - 259,08 = -0,26.$$

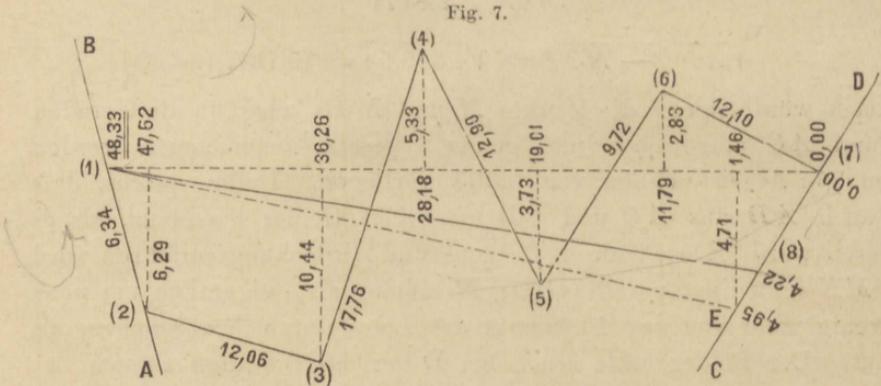
**Aufgabe 6.**

Zwischen zwei konvergenten Geraden *AB* und *CD* einen gebrochenen Grenzzug so zu regeln, daß von der neuen Grenze eine jener Geraden in dem gegebenen Punkt (1) geschnitten wird. (Fig. 7.) Auf eine Messungslinie, welche durch (1) geht, hier (1) (7), wird das verschränkte Siebeneck (1) (2) ... (7) (1) aufgemessen und sein Inhalt *f* berechnet. Die neue gerade Grenze (1) (8) muß mit der Messungslinie und mit *CD* ein Dreieck vom Inhalt *f* einschließen. Um den Punkt (8) zu bestimmen, ist zuvor ein beliebiger Punkt *E* auf *CD* durch seine Koordinaten und seinen Abstand von (7) festgelegt worden. Damit ist auch der Inhalt *F* des Dreiecks (1) (7) *E* bekannt. Die Inhalte *f* und *F* der erwähnten Dreiecke mit gemeinsamer Spitze (1) verhalten sich wie ihre Grundlinien. Also ist (7) (8) = *z* aus (7) *E* = *e* zu berechnen gemäß:

$$z = ef : F.$$

Nachdem *z* abgesetzt worden, wird die neue Grenze (1) (8) als Messungslinie zur Aufmessung des verschränkten Achtecks (1) (2) ... (8) (1) benützt, dessen Inhalt Null sein soll.

Fig. 7.



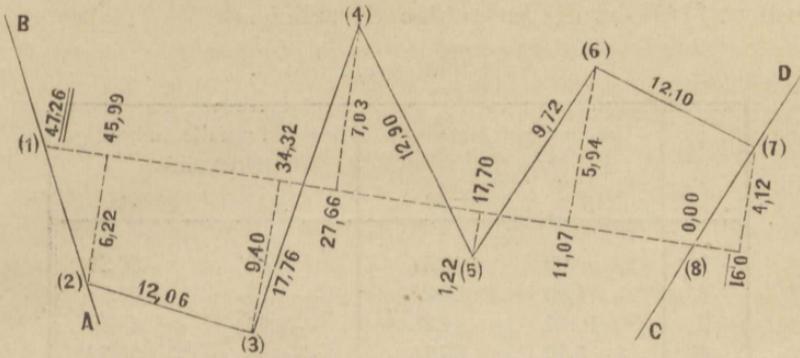
Berechnung des Inhaltes des verschränkten Siebenecks nach den Formeln:

$$2f = \sum y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) \text{ und } 2f = \sum x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

Zeiger <i>i</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y<sub>i+1</sub> - y<sub>i-1</sub></i>		<i>x<sub>i-1</sub> - x<sub>i+1</sub></i>		<i>y<sub>i</sub> (...)</i>	<i>x<sub>i</sub> (...)</i>	
			+	-	+	-			
1	0,00	48,33							
2	— 6,29	47,62		10,44	12,07		×24,08	×502,85	
3	— 10,44	36,26	11,62		19,44		×797,05	421,34	
4	— 5,33	28,18	6,71		17,25		91,94	189,09	
5	— 3,73	19,01		2,50	16,39		×38,87	×52,48	
6	— 2,83	11,79	3,73		19,01		53,80	43,98	
7	0,00	0,00		2,83		36,54	0,00	0,00	
1	0,00	48,33		6,29		47,62	0,00	×696,00	
2	— 6,29	47,62							
			22,06	22,06	84,16	84,16	×805,74	×805,74	
								— 194,26 = 2f	

$$z = 4,95 \frac{194,26}{4,71 \cdot 48,33} = 4,22.$$

Fig. 8.



Berechnung des Inhalts  $f'$  des verschränkten Achtecks als Mefsprobe. (Fig. 8.)

Zeiger $i$	$y$	$x$	$y_{i+1} - y_{i-1}$		$x_{i-1} - x_{i+1}$		$y_i (\dots)$	$x_i (\dots)$
			+	-	+	-		
1	0,00	47,26						
2	- 6,22	45,99		9,40	12,94		×19,51	×567,69
3	- 9,40	34,32	13,25		18,83		×827,70	454,74
4	7,03	27,66	8,18		16,62		116,84	226,26
5	- 1,22	17,70		1,09	16,59		×79,76	×80,71
6	5,94	11,07	5,34		18,61		110,54	59,11
7	4,12	- 0,91		5,94	11,07		45,61	5,41
8	0,00	0,00		4,12	48,17		0,00	0,00
1	0,00	47,26		6,22	45,99		0,00	×706,04
2	- 6,22	45,99						
			26,77	26,77	94,16	94,16	×,96	×,96
							- 0,04 = 2 $f'$	

$f' = - 0,02$  gegen den Sollwert Null.

### Aufgabe 7.

*Wiederholung der vorigen.* Lediglich um noch eine andere Berechnungsweise des Inhalts lang gestreckter Figuren, nämlich die mittelst (verschränkter) Trapeze vorzuführen, folgt hier noch eine Grenzregelung nach Art der vorigen. Die Figuren aber sollen durch ein Koordinatenverzeichnis ersetzt werden, zu dem zu bemerken ist, daß die Punkte (1) und (2) auf der Grenze  $AB$ , die Punkte (7), (8) und  $E$  auf  $CD$  liegen, (7) wieder das Ende des gebrochenen Zuges bezeichnet, (8) aber den Endpunkt der Messungslinie (1)(8), welche also diesmal nicht durch (7) geht. Punkt  $E$  hat dieselbe Bedeutung

wie in Aufgabe 6 und liegt vom Punkt (8) der Messungslinie 10,99 m entfernt. (1)(9) ist die endgültige Grenzlinie.

*Koordinatenverzeichnis.*

	Bezogen auf Messungslinie (1)(8)		Bezogen auf die endgültige Grenzlinie	
	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>
1	0,00	56,57	0,00	56,29
2	— 1,80	56,25	— 1,78	55,78
3	— 10,51	46,28	— 9,94	45,30
4	+ 5,76	35,75	+ 6,88	35,72
5	— 8,84	20,01	— 6,87	19,14
6	+ 7,30	12,92	+ 9,64	13,02
7	— 2,31	0,35	+ 0,71	— 0,08
8	0,00	0,00	.....	.....
<i>E</i>	— 10,84	1,72	.....	.....
9	.....	.....	0,00	0,00

In der folgenden Rechenübersicht ist nur einmal von der Gauß'schen Flächenformel, das zweite Mal aber von der Trapezformel:

$$2f = \sum_1^n (y_i + y_{i+1}) (x_i - x_{i+1}) \quad (1)$$

zur Rechenprobe Gebrauch gemacht. Für diese Rechenweise ist es bequem, negative Ordinaten als dekadisch ergänzt anzuschreiben. Dafs vorstehende Formel nicht nur für eigentliche, sondern auch für verschränkte Trapeze gilt, erkennt man alsbald, wenn man sich die Abscissenachse so gegen (+ *y*) verschoben denkt, dafs aus einem eigentlichen Trapez ein verschränktes wird. Dasselbe ist um ein Rechteck kleiner geworden, dessen Betrag durch die Rechnung nach (1) in Abzug kommt. Vergl. Fig. 2 auf S. 3.

In den Tabellen der folgenden Seite ist, ebenso wie in denen auf S. 20 und 21, welche sich der preussischen Vermessungsanweisung anschließen, nicht logarithmische, sondern Rechnung mit gemeinen Zahlen vorgesehen. Unter Anwendung von Multiplikationstabellen verdient diese in der That den Vorzug. Dazu empfehlen sich in erster Linie Crelle's bekannte und in zahlreichen Auflagen verbreitete Rechentafeln (Berlin), welche die Produkte je zweier dreistelligen Faktoren enthalten. Doch erleichtert auch Zimmermann's handliche Rechentafel (Berlin 1889), für die Produkte je eines zwei- und eines dreistelligen Faktors, die Zahlenrechnung bedeutend und steht z. B. für Produkte aus einem drei- und einem vierstelligen Faktor der Crelle'schen an Bequemlichkeit nicht nach.

$i$	$y$	$x$	$\Delta x_i =$ $x_{i-1} - x_{i+1}$	$y \cdot \Delta x$	$\sigma_i =$ $y_i + y_{i+1}$	$\tau_i =$ $x_i - x_{i+1}$	$\sigma \cdot \tau$
1	0,00	56,57					
2	×8,20	56,25	10,29	×81,48	×87,69	9,97	×877,27
3	×89,49	46,28	20,50	×784,54	×5,25	10,53	×49,98
4	5,76	35,75	26,27	151,32	×6,92	15,74	×51,52
5	×1,16	20,01	22,83	×798,18	×8,46	7,09	×89,08
6	7,30	12,92	19,66	143,52	4,99	12,57	62,72
7	×7,69	0,35	12,92	×70,15	×7,69	0,35	×,19
8	0,00	0,00	×43,78	0,00	0,00	×43,43	0,00
1	0,00	56,57	×43,75	0,00	×8,20	0,32	×,42
2	×8,20	56,25					
	×89,60		0,00	×829,19	×79,20	0,00	×829,18
	$= \sum_1^n y$				$= 2 \sum_1^n y$		$2f = -170,82$

Der freilich nicht sehr erhebliche Gewinn durch die Rechenprobe nach der Trapezformel liegt darin, daß als Faktoren nicht die großen Abscissen, sondern kleinere Abscissen-*Differenzen* auftreten.

Doppelter Inhalt des Dreiecks (1) (8) *E*:

$$- 56,57 \cdot 10,84 = - 613,22 = 2f'$$

$$z = 10,84 \frac{- 170,82}{- 613,22} = 3,06.$$

$z$  ist des positiven Vorzeichens wegen (von (8) in der Messungslinie aus) nach der Richtung abzusetzen, in welcher  $e = (8) E$  abgetragen ward.

Berechnung des Inhalts  $f'$  als Mefprobe.

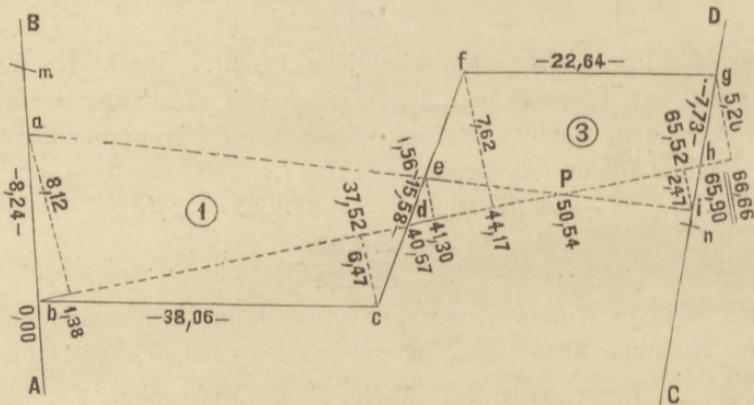
$i$	$y$	$x$	$\Delta x_i =$ $x_{i-1} - x_{i+1}$	$y \cdot \Delta x$	$\sigma_i =$ $y_i + y_{i+1}$	$\tau_i =$ $x_i - x_{i+1}$	$\sigma \cdot \tau$
1	0,00	56,29					
2	×8,22	55,78	10,99	×80,44	×88,28	10,48	×877,17
3	×0,06	45,30	20,06	×800,60	×6,94	9,58	×70,69
4	6,88	35,72	26,16	179,98	0,01	16,58	0,17
5	×3,13	19,14	22,70	×844,05	2,77	6,12	16,95
6	9,64	13,02	19,22	185,28	10,35	13,10	135,58
7	0,71	×,92	13,02	9,24	0,71	×,92	×,94
9	0,00	0,00	×43,63	0,00	0,00	×43,71	0,00
1	0,00	56,29	×44,22	0,00	×8,22	0,51	×,09
2	×8,22	55,78					
	×8,64		0,00	×,59	×7,28	0,00	×9,59
	$= \sum_1^n y$			$= 2f'$	$= 2 \sum_1^n y$		$= 2f'$

$f' = - 0,20$  gegen den Sollwert Null.

## Aufgabe 8.

Vorige Aufgabe. Der gegebene Punkt liegt zwischen den bleibenden Grenzen, die Bonitäten der Grundstücke sind ungleich. Diese Mefübung ist einem wirklich vorgekommenen Falle nachgebildet.  $CD$  bedeutet eine Strafsenfucht,  $P$  den am weitesten gegen das Nachbargrundstück vorspringenden Punkt eines daranliegenden Gebäudes. Der Nachbar wünscht ebenfalls zu bauen und dabei durch Heranrücken an  $P$  seinen Anteil an der Strafsenfucht zu erbreitern. Da der Baugrund an der Strafe mehr wert ist als das dahinterliegende Gartenland, kommt man überein, mittelst einer geradlinigen Grenze durch  $P$  einen Austausch derart zu bewirken, daß die Bonitäten der Grundstücke nach dem Verhältnis 3 : 1 berechnet werden.

Fig. 9.



In der Annahme, daß durch die gerade neue Grenze nur solche Strecken der alten gebrochenen geschnitten werden, welche den bleibenden Grenzen  $AB$  und  $CD$  ungefähr parallel laufen, ist eine Lösung nach Art der folgenden zulässig. Außer den bestehenden Grenzen wird von der Messungslinie  $bh$  aus eine Gerade  $ai$  eingemessen, welche dem Augenmaße nach die neue Grenze darstellt. Dann wird der Inhalt  $p$  des verschränkten Polygons  $abcfgia$  und der Inhalt  $v$  des verschränkten Vierecks  $abhia$ , beide mit Rücksicht auf Bonitäten\*), berechnet. Denkt man sich nun die neue Grenze  $mn$  endgültig gezogen und den Inhalt  $v'$  des verschränkten Vierecks  $mainm$  ebenfalls mit Rücksicht auf Bonitäten berechnet, so muß sein:

$$p + v' = 0 \text{ also } v' = -p.$$

Unter der Voraussetzung  $AB \parallel cf \parallel CD$  gilt außerdem:

$$ma : ab = ni : ih = v' : v.$$

\*) Also eigentlich die Bodenwerte  $p$ ,  $v$  u. s. w.

Näherungsweise gilt dies auch bei schwacher Neigung der aufgeführten Geraden zu einander, so daß wir setzen dürfen:

$$ma = \frac{v'}{v} ab, \quad ni = \frac{v'}{v} ih,$$

und dies um so eher, je kleiner der absolute Wert von  $v'$  ausgefallen ist.

Man wird sich zunächst davon überzeugen, ob die hiernach abgesteckten Punkte  $m$  und  $n$  mit  $P$  in einer Geraden liegen, da sonst die Lösung wieder nur näherungsweise gültig und auf demselben Weg eine nochmalige Annäherung zu versuchen wäre. Trifft aber die Verlängerung von  $mP$  auf  $n$ , dann ist zur endgültigen Probe die ganze Figur in Bezug auf die Messungslinie  $mn$  neu aufzumessen, und zu ermitteln, ob der bonitierte Inhalt, d. h. der Bodenwert des verschränkten Polygons  $mbcfgnm$  gleich Null ist, wie es sein soll.

Um  $p$  und  $v$  nicht ohne Proben zu berechnen, bilden wir zuerst den Bodenwert  $p_0$  des verschränkten Polygons  $bcfghb$  aus

$$p_0 = bcd + 3 \cdot dfgh,$$

wobei auf die Reihenfolge der Buchstaben, somit auf den Drehsinn zu achten ist, in welchem die einzelnen Flächen umlaufen werden. Dann berechnen wir

$$v = abde + 3 \cdot edhi,$$

ferner

$$p = abce + 3 \cdot efgi,$$

worauf zur Probe gefunden werden muß:

$$p_0 + v = p.$$

Die nachfolgende Übersicht der Rechnung fußt auf bekannten Formeln, wie

$$2bcd = (x_d - x_b) y_c$$

$$2abce = (y_c - y_a) (x_e - x_b) - (y_e - y_b) (x_c - x_a)$$

u. s. w. In den mit  $y_{i+1} - y_{i-1}$  und  $x_{i+1} - x_{i-1}$  überschriebenen Spalten werden die Faktoren der beiden Glieder jedes Vierecks bereitgestellt, die Glieder selbst durch kreuzweise Multiplikation gebildet und in die letzte Spalte, und zwar jedes zweite mit Vorzeichenumkehr, also zur *algebraischen Addition* vorbereitet, eingetragen.

(Siehe Tabelle auf folgender Seite.)

Zeiger	$y$	$x$	$y_{i+1} - y_{i-1}$		$x_{i+1} - x_{i-1}$		Produkte, kreuzweise gebildet, zur Addition.
			+	-	+	-	
$b$	0,00	0,00					$2.b.c.d$
$c$	6,47	37,52			40,57		262,5
$d$	0,00	40,57					
$d$	0,00	40,57					$2.d.f.g.h$
$f$	-7,62	44,17		5,20	26,09		×887,0
$g$	-5,20	66,66	7,62		21,73		×801,2
$h$	0,00	65,90					×688,2
$a$	-8,12	1,38					$2.a.b.d.e$
$b$	0,00	0,00	8,12		39,12		335,4
$d$	0,00	40,57		1,56	41,30		61,0
$e$	-1,56	41,30					396,4
$e$	-1,56	41,30					$2.e.d.h.i$
$d$	0,00	40,57	1,56		24,60		38,9
$h$	0,00	65,90	2,47		24,95		×38,7
$i$	2,47	65,52					×77,6
$a$	-8,12	1,38					$2.a.b.c.e$
$b$	0,00	0,00	14,59		36,14		602,6
$c$	6,47	37,52		1,56	41,30		56,4
$e$	-1,56	41,30					659,0
$e$	-1,56	41,30					$2.e.f.g.i$
$f$	-7,62	44,17		3,64	25,36		×22,3
$g$	-5,20	66,66	10,09		21,35		×744,1
$i$	2,47	65,52					×666,4

Gemäß dieser Übersicht berechnet sich:

$$\begin{aligned}
 2 p_o &= 262,5 + \quad \times 064,6 = \quad \times 327,1 \\
 2 v &= 396,4 + \quad \times 32,8 = \quad \underline{329,2} \\
 &\quad \quad \quad \times 656,3 \\
 2 p &= 659,0 + \quad \times 8999,2 = \quad \times 658,2 \\
 2 v' &= - 2 p = 343.
 \end{aligned}$$

Nummehr nach den eingangs angeführten Formeln:

$$\begin{aligned}
 ma &= \frac{343}{329} 8,24 = 8,59 \\
 ni &= \frac{343}{329} 2,48 = 2,58.
 \end{aligned}$$

Durch verschiedene Versehen wurde für  $ma$  nicht das vorstehende Maß, sondern 8,37 m abgesetzt, sodann auf  $mn$  als Messungslinie die gegebene Figur eingemessen und der Bodenwert  $p'$  des verschränkten Sechsecks  $m b c f g n m$ , das sich aus den Vierecken  $m b c k$  und  $k f g n$  zusammensetzt, berechnet, wozu folgende Übersicht diente. Sie kann,

da sie alle aufgemessenen Koordinaten enthält, zugleich den Handriß vertreten.

Zeiger	<i>y</i>	<i>x</i>	$y_{i+1} - y_{i-1}$		$x_{i+1} - x_{i-1}$		Produkte, kreuzweise gebildet, zur Addition.
			+	-	+	-	
<i>m</i>	0,00	0,00					$2 m b c k$
<i>b</i>	16,20	3,66	10,38		41,40		403,5
<i>c</i>	10,38	41,40		16,20	38,87		670,7
<i>k</i>	0,00	42,53					1074,2
<i>k</i>	0,00	42,53					$2 k f g n$
<i>f</i>	- 5,04	43,15		10,08	22,44		×757,3
<i>g</i>	- 10,08	64,97	5,04		24,08		×886,9
<i>n</i>	0,00	67,23					×644,2

Sonach hat man :

$$2 p' = 1074,2 + \times 8932,6 = 6,6$$

anstatt des Sollwertes Null. Setzt man jetzt

$$p' + v'' = 0$$

also  $v'' = -p'$  und berechnet das von *m* aus auf *AB* abzusetzende Maß  $\mu$  gemäß:

$$\mu = \frac{2 v''}{2 v'} 8,59 = \frac{- 6,6}{343} 8,59 = - 0,165,$$

so findet sich noch immer ein nicht unbedeutlicher Betrag, um welchen die neue Grenze wieder zurückzulegen wäre. Daß dies nicht geschehen ist, mag dadurch begründet sein, daß die unausgeglichene Fläche oder der Überschuf  $p' = 3,3$  qm vom Werte des Gartenlandes nur 1,1 qm vom Werte des Baugrundes darstellt. Überdies ist die ganze vorliegende Aufnahme, wie zahlreiche, nicht durchweg mitgeteilte Mefspalten darthun, nicht sorgfältig genug erfolgt, um auf sie eine peinlich strenge Lösung der Aufgabe zu stützen. Es fehlt an der scharfen Einrichtung der Ordinatenfußpunkte in die Messungslinie, eine Arbeit, der manche Landmesser nicht mehr die nötige Beachtung schenken, seitdem Winkelspiegel und Winkelprisma die Kreuzscheibe verdrängt haben\*).

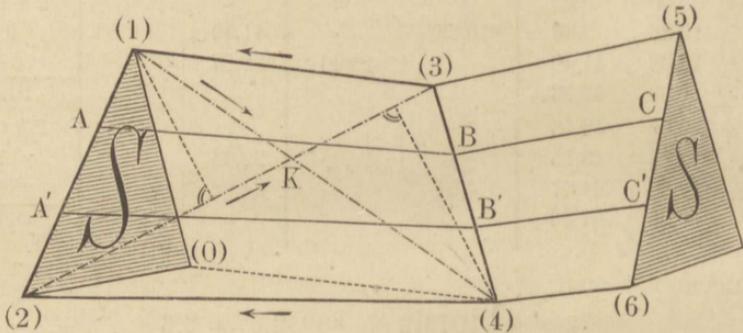
\*) In Süddeutschland erhält sich die Kreuzscheibe in Anwendung, und mit Recht, denn im Gebirgsland ist sie unentbehrlich, da Winkelspiegel und Prisma keine steilen Zielrichtungen gestatten. Aber man hat die Kreuzscheibe wesentlich verbessert, indem man ihr zum raschen Aufsuchen ihres vorläufigen Standpunktes ein Prisma, und zum Lotrechtstellen der Visierspalten und des Stabes eine Dosenlibelle beigab.

## Aufgabe 9.

Teilung eines Vierecks nach gleichen Seitenverhältnissen. (Fig. 10.)

Die (gebrochenen) Teilungslinien wie  $ABC$  sollen in der Viereckskette der Figur je zwei Gegenseiten eines Vierecks nach gleichem

Fig. 10.



(vorerst unbekanntem) Verhältnis  $v : 1$  teilen, während sie von der Gesamtfläche  $F$  Stücke nach gegebenem Verhältnis  $f : F = a$  abtrennen. Also

$$(1) A : (1)(2) = (3) B : (3)(4) = (5) C : (5)(6) = v : 1.$$

Zu jedem Viereck läßt sich ein Dreieck  $S$ , das *Konvergenzdreieck* zeichnen, indem man von einem beliebigen Punkte aus, z. B. (1) im ersten, (5) im zweiten Viereck, Parallele zu den beiden zu teilenden Vierecksseiten zieht, die Längen derselben darauf abträgt und die Endpunkte der abgetragenen Strecken geradlinig verbindet. In jedem Viereck läßt sich zwischen den Größen  $v$ ,  $S_i$ ,  $f_i$ ,  $F_i$ , wobei der Zeiger  $i$  mit dem Viereck wechselt, die Beziehung\*) aufstellen:

$$v^2 S_i + v (F_i - S_i) - f_i = 0.$$

Die Summe aller solcher Gleichungen für eine Viereckskette giebt, da  $v$  für alle gleich:

$$v^2 \Sigma S + v (\Sigma F - \Sigma S) - \Sigma f = 0.$$

Nun ist  $\Sigma f : \Sigma F = a$  gegeben,  $\Sigma S$  kann ermittelt werden. Setzen wir  $\Sigma S : \Sigma F = z$  und dividieren vorstehende Gleichung durch  $\Sigma F$ , so geht sie über in

$$z v^2 + (1 - z) v - a = 0.$$

Die Auflösung nach  $v$  liefert, unter Weglassung des zweiten, nicht verwendbaren Vorzeichens:

$$v = \frac{-(1-z) + \sqrt{(1-z)^2 + 4az}}{2z} \quad (1)$$

\*) S. des Verf. Praktische Geometrie, I, § 199.

Die Subtraktion beider Seiten von 1 und eine kleine Umformung ergibt:

$$1 - v = \frac{1 + z - \sqrt{(1 + z)^2 - 4(1 - a)z}}{2z} \quad (2)$$

Indem man die Zähler von (1) und (2) rational macht, bekommt man:

$$v = \frac{2a}{1 - z + \sqrt{(1 - z)^2 + 4az}} \quad (3)$$

und

$$1 - v = \frac{2(1 - a)}{1 + z + \sqrt{(1 + z)^2 - 4(1 - a)z}} \quad (4)$$

Die Formeln (3) und (4) gestatten scharfe Rechnung, auch wenn  $z$  sehr klein ist. Jedes Formelpaar ergänzt sich zum Zweck der Rechenprobe. Jedoch wird das Ausziehen der Wurzel nicht mitgeprüft, weshalb die Wurzel wieder selbständig quadriert werden sollte. Mit der Zahl  $v$ , dann mit  $1 - v$ , multipliziert man der Reihe nach die Seitenlängen (1)(2), (3)(4) . . . und bekommt die abzusetzenden Strecken (1) $A$ , (3) $B$  . . . , darauf zur Rechenprobe die ergänzenden  $A(2)$ ,  $B(4)$  . . .

Für jedes gegebene Flächenverhältnis  $a$  muß ein besonderes Seitenverhältnis  $v$  berechnet werden, z. B. für  $a' = 1/3$  ein  $v'$ , für  $a'' = 2/3$  ein  $v''$  u. s. w. Die Größen  $v$  werden gleich  $a$ , wenn  $z = 0$  und nahe gleich  $a$ , wenn  $z$  klein; sie werden größer als  $a$ , wenn  $z$  positiv und umgekehrt:

$$\begin{array}{l} > \\ v = a, \text{ wenn } z = 0. \\ < \end{array} \quad (5)$$

Diese Bemerkungen können dienen, um auf Rechenfehler, und beim Abstecken auf Fehlgriffe, wie das Abtragen der Teilstrecken von dem falschen Endpunkte der Seiten aus, rechtzeitig aufmerksam zu machen.

Die Formeln (1) bis (4) gelten somit nur, wenn  $z$  und demnach die  $S$ , welche zur Bildung von  $z$  beitrugen, das richtige Vorzeichen haben, weshalb eine gewisse Ordnung in der Bezeichnung der Figur erforderlich ist, um durch einfache Überlegung oder durch mechanische Rechnung jedesmal die richtigen Vorzeichen einzuführen. Wir bezeichnen denjenigen Rand der Viereckskette, an welchen die abzutrennende Fläche  $f$  grenzen soll und den wir als den *oberen* betrachten, mit den ungeraden Zahlen, den Rand gegenüber mit den geraden, und halten dabei die Reihenfolge von links nach rechts ein. Dann gilt als

*Erste Regel:* Wenn die zu teilenden Seiten eines Vierecks nach dem oberen Rand hin konvergieren, so ist sein Konvergenzdreieck positiv, sonst negativ.

*Zweite Regel:* Von einem der ungerade bezifferten Punkte aus nach der angeführten Vorschrift konstruiert, fällt ein positives Konvergenzdreieck in die Fläche des Vierecks, ein negatives daneben.

Jede Diagonale bildet mit den Vierecksseiten zwei Dreiecke; solcher Diagonaldreiecke gibt es also 4 im Viereck. Die Höhen der beiden, welche an der linken Vierecksseite (1)(2) als Basis anliegen,  $\triangle 142$  und  $132$ , unterscheiden sich um die Höhe von  $S$ . Denn (4) ist ebensoweit und in derselben Richtung von (0) entfernt wie (3) von (1); der Abstand des Punktes (4) von (1)(2) setzt sich also aus den Abständen der Punkte (0) und (3) von (1)(2) zusammen. Und da die drei fraglichen Dreiecke gleiche Basis haben, setzt sich auch der Inhalt von  $\triangle 142$  aus dem von  $\triangle 132$  und  $S$  zusammen.

$$\triangle 142 - \triangle 132 = S. \quad (6)$$

Die linke Seite von (6) ist aber auch wegen des, beiden Dreiecken gemeinsamen Stückes (1)K(2) gleich  $K(4)(2) - K(1)(3)$ , und dies ist offenbar auch die Differenz der beiden Dreiecke, welche der rechten Vierecksseite (3)(4) anliegen,  $\triangle 234$  und  $134$ ; also ist auch

$$\triangle 234 - \triangle 134 = S \quad (7)$$

und man erkennt leicht, daß sich ganz entsprechend geformte Gleichungen für *jedes* Viereck der Kette anschreiben lassen. Daher die

*Dritte Regel:* Jedes Paar Diagonaldreiecke auf der linken oder rechten Vierecksseite als gemeinsamer Grundlinie gibt durch den Unterschied seiner Inhalte die Fläche des Konvergenzdreiecks. Das dem unteren Rande anliegende Diagonaldreieck ist Minuend.

Die Differenz zweier Dreiecke  $K(4)(2) - K(1)(3)$  ist auch der Inhalt eines verschränkten Vierecks 1423, also so umfahren, wie die Pfeile andeuten, wobei bekanntlich der rechtläufig umfahrene Teil positiv, der rückläufig umfahrene negativ wird.

*Vierte Regel:* Das Konvergenzdreieck ist dem verschränkten Viereck flächengleich, welches aus den Diagonalen und dem oberen und unteren Vierecksrand gebildet wird, wenn man dasselbe umfährt wie eine römische X, von links oben nach rechts unten beginnend.

Demnach kann das Konvergenzdreieck *nach Inhalt und Vorzeichen richtig* auf mancherlei Art bestimmt werden:

a) Wenn die Koordinaten der Eckpunkte gegeben sind, nach der folgenden Formel, die aber für sich allein keine Rechenprobe gewährt:

$$2S = (y_1 - y_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4); \quad (8)$$

sie ist eine Anwendung der allgemeinen Gauß'schen Flächenformel (Seite 3) auf das verschränkte Viereck 1423 und wird durch Zeiger-

verschiebung um je 2 Einheiten mühelos auf das Nachbarviereck bezogen\*).

b) Mit einer Mefsprobe nach den Gleichungen (6) und (7), wenn alle 4 Seiten und die Diagonalen des Vierecks gemessen und die Diagonaldreiecke sämtlich aus ihren Seiten berechnet sind, woraus zugleich eine Mefsprobe für das Viereck hervorgeht.

c) Mit einer Mefsprobe, wenn eine Diagonale (2)(3) als Messungslinie dient, um darauf die Punkte (1) und (2) sowie den abgesteckten Schnittpunkt  $K$  der Diagonalen einzumessen; einmal nach (8), das andere Mal gemäß der vierten Regel aus:

$$(2)K \cdot y_4 + K(3) \cdot y_1 = 2S. \quad (9)$$

Wurde  $K$  nicht abgesteckt, so läßt sich durch Berechnen seiner Lage auf (2)(3) nach einer einfachen Proportion eine *Rechenprobe* gewinnen. Und das genügt, wenn für den Inhalt des ganzen Vierecks eine Mefsprobe vorlag. Dieser Fall ist in dem nachfolgenden *Beispiel* vertreten.

d) Wieder doppelt nach (6) und (7), wenn beide Diagonalen, wie eben (2)(3), als Messungslinien dienten,  $K$  aber nicht eingemessen ward, und so fort mit zahlreichen Varianten, worunter auch Lote von  $K$  auf (1)(3) und (2)(4) anwendbar sind, aber wohl nur zur Ermittlung von  $S$  aus Karten; denn zuweilen wird eine diesem Zweck genügende Kartierung bereits vorliegen.

### *Beispiel.*

*Ein einzelnes Viereck 1342 (Fig. 10) soll nach gleichen Seitenverhältnissen in drei gleiche Teile geteilt werden. Gemessen die vier Seiten:*

$$\begin{array}{ll} \overline{12} = 68,42 & \overline{34} = 54,75 \\ \overline{13} = 45,54 & \overline{24} = 99,00. \end{array}$$

Außerdem gemessen die Koordinaten aller vier Eckpunkte, bezogen auf (2)(3) als Messungslinie:

	$y$	$x$
(2)	0,00	0,00
(1)	— 38,82	56,43
(3)	0,00	80,16
(4)	54,73	82,78.

Erste Berechnung von  $F$  aus den Koordinaten:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 80,16 (38,82 + 54,73) = 3749,48.$$

\*) Für mehrere Vierecke in einer Kette bildet sich eine Rechenprobe, Praktische Geometrie I, S. 617.

Zweite Berechnung von  $F$  aus Diagonale und Seiten.

$a$	80,16	$\overline{32}$	80,16	$\overline{23}$
$b$	68,42	$\overline{21}$	54,75	$\overline{34}$
$c$	45,54	$\overline{12}$	99,00	$\overline{42}$
$2s$	194,12		233,91	
$s$	97,06	1,987 04	116,955	2,068 02
$s - a$	16,90	1,227 89	36,795	1,565 79
$s - b$	28,64	1,456 97	62,205	1,793 82
$s - c$	51,52	1,711 98	17,955	1,254 18
$\Delta^2$		6,383 88		6,681 81
$\Delta$	1555,75	3,191 94	2192,35	3,340 91

$$F = 3748,10.$$

Erste Berechnung von  $S$  gemäß Formel (8):

$$2S = 38,82 \cdot 2,62 + 56,43 \cdot 54,73 = 3190,13.$$

Berechnung von (2) $K$  und  $K(3)$  nach:

$$(2)K = x_1 - \frac{x_4 - x_1}{y_4 - y_1} y_1; \quad K(3) = x_3 - (2)K;$$

$$(2)K = 56,43 + \frac{26,35}{93,55} \cdot 38,82 = 67,364; \quad K(3) = 12,796;$$

wie folgende logarithmische Rechnung nachweist:

26,35	⋈	1,420 78
1: 93,55	⋈	8,028 96
38,82	⋈	1,589 06
<hr/>		
10,934	⋈	1,038 80

Zweite Berechnung von  $S$  gemäß Formel (9):

$$2S = 67,364 \cdot 54,73 - 12,796 \cdot 38,82 = 3190,09.$$

Zur *Rechenprobe* waren nämlich die Ordinaten als vollständige Zahlen zu betrachten, die Strecken (2) $K$  und  $K(3)$  aber als unvollständige Zahlen mit 3<sup>e</sup> Dezimalstellen einzuführen, wenn man der Zehntel des Produkts noch sicher sein wollte.

$$\text{Endgültiger Wert von } 2F = 7497,6$$

$$\text{von } 2S = 3190,1$$

Berechnung von  $z$  und seinen Zusammensetzungen:

$2S$	3190,1	⋈	3,503 80
$1: 2F$	1: 7497,6	⋈	6,125 07
$z$	0,425 47	⋈	9,628 87
$1 - z$	0,574 53	⋈	9,759 31
$(1 - z)^2$	0,330 08	⋈	9,518 62
$1 + z$	1,425 47	⋈	0,153 96
$(1 + z)^2$	2,032 00	⋈	0,307 92

Berechnung der Verhältnisse  $v$  und  $1 - v$  gemäß (3) und (4).

$a$	$\frac{1}{3}$		$1 - a$	$\frac{2}{3}$	Bemerkung: $w$ bedeutet die Wurzel, $N$ und $n$ die Nenner.
$4z$	1,701 88		$8z$	3,403 76	
$4z:3$	0,567 29		$8z:3$	1,134 59	
$(1 - z)^2$	0,330 08		$-8z:3$	$\times 8,865 41$	
$w^2$	0,897 37	9,952 98	$(1 + z)^2$	2,032 00	
$w$	0,947 30	9,976 49	$w^2$	0,897 41	
			$w$	0,947 32	} Quadrattafel!
$1 - z$	0,574 53		$1 + z$	1,425 47	
$1:N$	$\frac{1}{\sqrt{1,521 88}}$	9,817 64	$1:n$	$\frac{1}{\sqrt{2,372 79}}$	9,624 74
$2a$	$\frac{2}{3}$	9,823 91	$2(1 - a)$	$\frac{4}{3}$	0,124 94
$v$	0,438 08	9,641 55	$1 - v$	0,561 92	9,749 68
$\overline{12}$	68,42	1,835 18	$\overline{12}$		1,835 18
$\overline{34}$	54,75	1,738 38	$\overline{34}$		1,738 38
$v \cdot \overline{12}$	29,973	1,476 73	$(1 - v) \overline{12}$	38,447	1,584 86
$v \cdot \overline{34}$	23,984	1,379 93	$(1 - v) \overline{34}$	30,765	1,488 06

Die Zahlen  $v$  und  $1 - v$  wurden nur der Rechenprobe halber gesucht; gebraucht werden nur die Zahlen der beiden letzten Zeilen, welche sich zeilenweise zu  $\overline{12}$  und  $\overline{34}$  ergänzen.

Noch etwas bequemer und fehlersicherer gestaltet sich die Rechnung, wenn in den Formeln (3) und (4) die Größen  $1 - z$  und  $1 + z$  als gemeinsame Faktoren der Glieder im Nenner betrachtet werden, also:

$$v = \frac{2a}{1 - z} \cdot R, \quad R = 1 : \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4az}{(1 - z)^2}} \right) \quad (10)$$

$$1 - v = 2 \cdot \frac{1 - a}{1 + z} \cdot r, \quad r = 1 : \left( 1 + \sqrt{1 - 4z \frac{1 - a}{(1 + z)^2}} \right) \quad (11)$$

Nach diesen Formeln, in denen jetzt auch die Wurzelwerte  $W$  und  $w$  zu unterscheiden sind, berechnen wir die Stücke für den zweiten abzutrennenden Flächenteil.

Berechnung der Verhältnisse  $v$  und  $1 - v$  gemäß (10) und (11).

$a$	$\frac{2}{3}$	9,823 91	$1 - a$	$\frac{1}{3}$	9,522 88
$4z$		0,230 93	$4z$		0,230 93
$\frac{1}{(1 - z)^2}$		0,431 38	$\frac{1}{(1 + z)^2}$		9,692 08
Dazu 1!	3,4373	0,536 22	von 1 ab!	0,279 18	9,445 89
$W^2$	4,4373	0,647 12	$w^2$	0,720 82	9,857 82
$W$	2,1065	0,323 56	$w$	0,849 00	9,928 91
$1 + W$	3,1065	0,492 27	$1 + w$	1,849 00	0,266 94
$R$		9,507 73	$r$		9,733 06

Fortsetzung von voriger Seite. (Schlußwerte wiederholt.)

$R$		9,507 73	$r$		9,733 06
$2a$		0,124 94	$2(1-a)$		9,823 91
${}^{1/1-z}$		0,240 69	${}^{1/1+z}$		9,846 04
$v$	<b>0,747 07</b>	9,873 36	$1-v$	<b>0,252 94</b>	9,403 01
$\overline{12}$	68,42	1,835 18	$\overline{12}$		1,835 18
$\overline{34}$	54,75	1,738 38	$\overline{34}$		1,738 38
$v \cdot \overline{12}$	<b>51,114</b>	1,708 54	$(1-v)\overline{12}$	17,306	1,238 19
$v \cdot \overline{34}$	<b>40,902</b>	1,611 74	$(1-v)\overline{34}$	13,848	1,141 39

Bei einer größeren Anzahl von Teilen beachte man, daß die mit dem Faktor  $a$  behafteten Glieder in der Regel leicht zu bildende Vielfache von einander sein werden, ebenso die mit dem Faktor  $1-a$  behafteten.

Nach dem Absetzen der fettgedruckten Strecken auf  $\overline{12}$  und  $\overline{34}$ , wozu indessen, nach dem Feldhandrifs zu urteilen, die Gegenmessung unterlassen zu sein scheint, erfolgte die Aufmessung der Teilpunkte nach Koordinaten, wieder bezogen auf (2)(3) als Messungslinie; endlich die Berechnung der 3 Flächenteile aus den Koordinaten und der Vergleich mit ihrem Sollbetrag. In dem Koordinatenverzeichnis heißen die Teilpunkte  $A, A', B, B'$ , was im Hinblick auf Fig. 10 leicht verständlich ist.

## Koordinatenverzeichnis statt Feldhandrifs.

Punkt	$y$	$x$	Punkt	$y$	$x$
(2)	0,00	0,00	(3)	0,00	80,16
$A'$	— 9,82	14,27	$B$	23,97	81,31
$A$	— 21,82	31,71	$B'$	40,89	82,12
(1)	— 38,82	56,43	(4)	54,73	82,78

Die Teile heißen  $V_1, V_2, V_3$  und werden am bequemsten nach dem Vorbild der S. 15 berechnet. Gegen Rechenfehler schützt man sich so weit möglich durch Addieren des Restes zum Subtrahenden nach jeder Subtraktion und durch Umtausch von Multiplikand und Multiplikator und doppelte Bildung jedes Produktes, was ebensowohl bei gewöhnlicher Rechnung als beim Gebrauche von Produktentafeln, wie die von Crelle und von Zimmermann, möglich ist.

Berechnung der Teilvierecke.

Viereck und Zeigerfolge		$y$	$x$	$y_{i+1} - y_{i-1}$	$x_{i+1} - x_{i-1}$	Produkte*)
$V_1$	A	- 21,82	31,71			
	1	- 38,82	56,43	21,82	48,45	×457,12
	3	0,00	80,16	62,79	24,88	3042,18
	B	23,97	81,31			2499,30
					Soll Fehler (doppelter)	2499,2 - 0,1
$V_2$	A'	- 9,82	14,27			
	A	- 21,82	31,71	33,79	67,04	×8296,65
	B	23,97	81,31	62,71	50,41	4204,08
	B'	40,89	82,12			2500,73
					Soll Fehler (doppelter)	2499,2 - 1,5
$V_3$	2	0,00	0,00			
	A'	- 9,82	14,27	40,89	82,12	×7198,63
	B'	40,89	82,12	64,55	68,51	5300,85
	4	54,73	82,78			2499,48
					Soll Fehler (doppelter)	2499,2 - 0,3

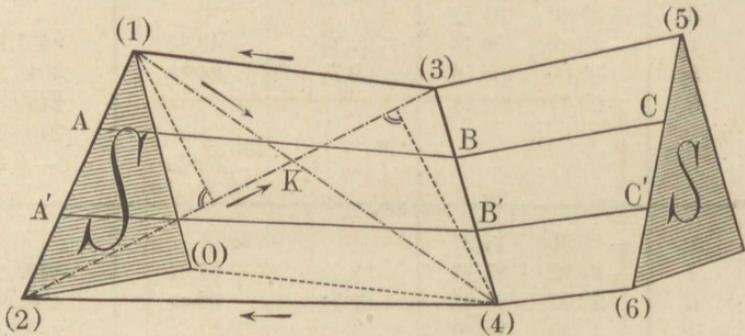
\*) aus den Faktoren der beiden vorhergehenden Spalten übers Kreuz gebildet, das erste Produkt jedesmal mit Vorzeichenumkehr.

Kein einfacher Fehler überschreitet 0,8 qm; sie würden noch kleiner sein und ihre Summe beinahe verschwinden, wenn dem Sollwert der aus den *Koordinaten* des Vierecks 1342 folgende Inhalt ausschliesslich zu Grunde gelegt worden wäre.

## Aufgabe 10.

Die vorige, mit Einmessen des Schnittpunktes der Diagonalen. Statt eines Handrisses werden die Maße des Vierecks mit Anlehnung an Fig. 10 aufgeführt.

Fig. 10.



a) Gemessene Seiten.

$$\begin{array}{ll} \overline{12} = 59,54 & \overline{34} = 47,87 \\ \overline{13} = 66,01 & \overline{24} = 64,37 \end{array}$$

b) Gemessene Koordinaten.

	<i>y</i>	<i>x</i>
(3)	0,00	0,00
(4)	— 27,94	38,82
<i>K</i>	0,00	44,52
(1)	39,84	52,65
(2)	0,00	96,86

Erste Berechnung von  $F$  aus den Koordinaten:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 96,86 \cdot 67,78 = \underline{\underline{3282,59.}}$$

Zweite Berechnung von  $F$  aus Diagonale und Seiten.

<i>a</i>	64,37		66,01	
<i>b</i>	47,87		59,54	
<i>c</i>	96,86		96,86	
1 <i>s</i>	209,10		222,41	
<i>s</i>	104,55	2,019 31	111,205	2,046 12
<i>s</i> — <i>a</i>	40,18	1,753 43	45,195	1,655 09
<i>s</i> — <i>b</i>	56,68	1,604 01	51,665	1,713 20
<i>s</i> — <i>c</i>	7,69	0,885 93	14,345	1,156 70
		6,262 68		6,571 11
	1353,13	3,131 34	1929,94	3,285 56

$$F = 1353,13 + 1929,94 = \underline{\underline{3283,07}}$$

$$2F = \underline{\underline{6565,66}}$$

Erste Berechnung von  $S$  nach Formel (8):

$$2S = 27,94 \cdot 44,21 - 38,82 \cdot 39,84 \\ = 1235,20 - 1546,61 = - 311,41$$

Zweite Berechnung von  $S$  nach Formel (9):

$$2S = 52,34 \cdot 27,94 - 44,52 \cdot 39,84 \\ = 1462,38 - 1773,71 = - 311,33 \\ 2S = - 311,37$$

Berechnung von  $z$  und seinen Zusammensetzungen.

$2S$	- 311,4	2,493 32 $n$
1 : 2 F	1 : 6565,7	6,182 72
$z$	- 0,047 429	8,676 04 $n$
$1 - z$	1,047 43	0,020 13
$(1 - z)^2$		0,040 26
$1 + z$	0,952 57	9,978 90
$(1 + z)^2$		9,957 80

Berechnung der Verhältnisse  $v$  und  $1 - v$  gemäß (10) und (11).

$a$	$\frac{1}{3}$	9,522 88	$1 - a$	$\frac{2}{3}$	9,823 91
$4z$	siehe oben!	9,278 10 $n$	$4z$		9,278 10 $n$
$\frac{1}{1 - z}^2$	$\frac{n}{n}$	9,959 74	$\frac{1}{1 + z}^2$		0,042 20
Dazu 1!	$\times,942 36$	8,760 72 $n$	von 1 ab!	$\times,860 62$	9,144 21 $n$
$W^2$	0,942 36	9,974 22	$w^2$	1,139 38	0,056 66
$W$	0,970 75	9,987 11	$w$	1,067 41	0,028 33
$1 + W$	1,970 75	0,294 64	$1 + w$	2,067 41	0,315 43
$R$		9,705 36	$r$		9,684 57
$2a$	siehe oben!	9,823 91	$2(1 - a)$		0,124 94
$\frac{1}{1 - z}$	$\frac{n}{n}$	9,979 87	$\frac{1}{1 + z}$		0,021 10
$v$	0,322 95	9,509 14	$1 - v$	0,677 03	9,830 61
$\frac{1}{12}$	59,54	1,774 81	$\frac{1}{12}$		1,774 81
$\frac{1}{34}$	47,87	1,680 06	$\frac{1}{34}$		1,680 06
$v \cdot \frac{1}{12}$	19,229	1,283 95	$(1 - v) \frac{1}{12}$	40,311	1,605 42
$v \cdot \frac{1}{34}$	15,460	1,189 20	$(1 - v) \frac{1}{34}$	32,409	1,510 67
$a$	$\frac{2}{3}$	9,823 91	$1 - a$	$\frac{1}{3}$	9,522 88
Dazu 1	$\times,884 72$	von oben, ver- doppelt.	von 1 ab!	$\times,930 31$	von oben, hal- biert.
$W^2$	0,884 72	9,946 81	$w^2$	1,069 69	0,029 26
$W$	0,940 60	9,973 40	$w$	1,034 26	0,014 63
$1 + W$	1,940 60	0,287 94	$1 + w$	2,034 26	0,308 40
$R$		9,712 06	$r$		9,691 60
$2a$	siehe oben!	0,124 94	$2(1 - a)$		9,823 91
$\frac{1}{1 - z}$	$\frac{n}{n}$	9,979 87	$\frac{1}{1 + z}$		0,021 10
$v$	0,655 95	9,816 87	$1 - v$	0,344 04	9,536 61
$\frac{1}{12}$		1,774 81	$\frac{1}{12}$		1,774 81
$\frac{1}{34}$	} wie oben	1,680 06	$\frac{1}{34}$		1,680 06
$v \cdot \frac{1}{12}$	39,055	1,591 68	$(1 - v) \frac{1}{12}$	20,484	1,311 42
$v \cdot \frac{1}{34}$	31,400	1,496 93	$(1 - v) \frac{1}{34}$	16,469	1,216 67

Die fettgedruckten Mafse sind abgesetzt und durch eine Gegenmessung bestätigt worden, welche nirgends um mehr als 1 cm von der ersten abwich. Zum Schlusse ward die ganze Figur samt Teilungspunkten nach Koordinaten neu aufgemessen.

## Koordinatenverzeichnis statt Feldhandriß.

Punkt	$y$	$x$	Punkt	$y$	$x$
(2)	0,00	0,00	(4)	27,94	58,03
$A'$	— 13,70	15,23	$B'$	18,33	71,37
$A$	— 26,98	29,95	$B$	9,03	84,31
(1)	— 39,84	44,21	(3)	0,00	96,86

## Berechnung der Teilvierecke (vergl. S. 35).

Viereck und Zeigerfolge		$y$	$x$	$y_{i+1} - y_{i-1}$	$x_{i+1} - x_{i-1}$	Produkte
$V_1$	$A$	— 26,98	29,95			
	1	— 39,84	44,21	26,98	66,91	×8918,10
	3	0,00	96,86	48,87	40,10	3269,89
	$B$	9,03	84,31			2187,99
					Fehler (doppelter)	2188,6 + 0,6
$V_2$	$A'$	— 13,70	15,23			
	$A$	— 26,98	29,95	22,73	69,08	×058,52
	$B$	9,03	84,31	45,31	41,42	3130,01
	$B'$	18,33	71,37			2188,53
					Fehler (doppelter)	2188,6 + 0,1
$V_3$	2	0,00	0,00			
	$A'$	— 13,70	15,23	18,33	71,37	×215,48
	$B'$	18,33	71,37	41,64	42,80	2971,85
	4	27,94	58,03			2187,33
					Fehler (doppelter)	2188,6 + 1,3

Kein einfacher Fehler überschreitet 0,7 qm und ihre Summe nicht 1 qm.

## II. Abstecken von Geraden und Kreisen.

---

Das Abstecken von *Geraden* ist nur soweit Gegenstand dieser Übungen, als es mit dem Theodolit auszuführen ist und mittelst desselben geprüft werden kann. Beim *Kurvenabstecken* wird auch ein oder das andere Verfahren durchgeführt, bei welchem der Theodolit sich entbehren läßt. Gleichwohl soll durchweg die höchste erreichbare Genauigkeit erstrebt werden, und es ist nicht zuviel verlangt, daß kein abgesteckter Kreispunkt um mehr als 2 cm radial verschoben sein darf. Methoden, welche diese Meßschärfe nicht gewähren, haben für die Absteckung von Eisenbahnkurven jedenfalls keine Berechtigung. Denn es ist ein offener Widerspruch, einerseits zu verlangen, daß durch Übergangskurven die Ablenkung eines Bahnzuges aus der Geraden in den Kreis von vorgeschriebener Krümmung durchaus mit stetiger Radienabnahme erfolge, andererseits aber Messungsfehler hinzunehmen, welche innerhalb der Kurve höchst bedeutende Sprünge von einem Krümmungsradius zum andern und selbst weit unter den kleinstzulässigen Kreishalbmesser erzeugen.

Genauere Absteckung ist bedingt durch scharfe Rechen- und Meßproben. Aus diesem Grunde ist die Rechnung hier nirgends auf Tafelwerke gestützt, welche für das Abstecken von Kurven zahlreich entworfen worden sind, aber ihrer Natur nach durchgreifende Rechenproben nicht darbieten, sodaß also ein und der andere Wert falsch aus der Tafel entnommen sein kann, ohne daß dies bemerkt wird. Außerdem sind Tafeln an gewisse starre Anordnungen gebunden, welche kein Ausschauen der jedesmal besten Lösung einer Aufgabe gestatten\*).

---

\*) Kleinbogen sollen z. B. gleiche Längen haben, der Übersicht, des Punkteinschaltens und der leichten Meßprobe halber, jedoch ist es nicht nötig, daß die konstante Länge auch ein rundes Maß sei. Hiervon ist vielmehr zu gunsten wichtigerer Vorteile abzusehen; aber dafür giebt es keine Tafeln.

Endlich sind die fraglichen Rechnungen nebst Proben sehr leicht, ganz von der Art der auch sonst dem Landmesser geläufigen, und höchst geeignet bei ihm das Bewußtsein der Selbständigkeit und der eignen Verantwortlichkeit für Zahl und Maß zu schärfen, sodafs bei Messübungen schon aus didaktischen Gründen das Selbstrechnen den Vorzug verdient.

### Aufgabe II.

*Einschalten eines Punktes in eine Gerade mit unzugänglichen Endpunkten.* Steht man ungefähr in der Mitte der Geraden und wendet vorläufig das bekannte Verfahren des Einschaltens mittelst zweier Baken oder mittelst des einfachen Winkelprismas oder mit zusammengesetzteren Spiegelinstrumenten an, so befährt man auf jede fehlerhafte Minute im Absetzen des gestreckten Winkels eine Abweichung von der Geraden um 1 : 13 750 ihrer Länge, d. h. fast ein halbes Meter für jede Minute und Meile\*). Man könnte sich nun mit einem Theodolit, dessen Fernrohr durchzuschlagen und dessen Kippachse umlegbar ist, ohne Winkelmessung vollends in die Gerade einschalten, indem man auf einen Endpunkt *A* einstellt, das Fernrohr umlegt und durchschlägt und aus der Abweichung der Visur vom zweiten Endpunkt *B* schätzt, um wieviel der Theodolit zu versetzen sei. Die Erfahrung lehrt aber, daß man auf diese Weise nicht schnell genug die Gerade erreicht, weshalb man die Winkelmessung zu hülfe nimmt.

Von *C* aus wird Winkel *ACB* gemessen und die Höhe *h* des Dreiecks *ABC* berechnet aus:

$$h = \frac{a \cdot b}{c} \sin ACB$$

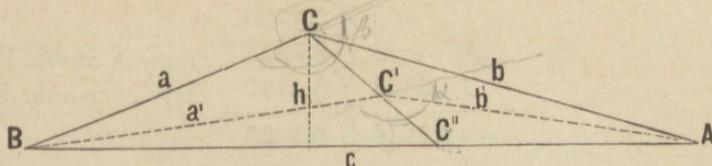
oder mit großer Annäherung aus:

$$h = v(1 - v)c \frac{180 - ACB}{206265}, \quad (1)$$

indem  $a:c = v$ ,  $b:c = 1 - v$  gesetzt und der Zähler in Sekunden ausgedrückt wurde. Die Größen *v* und *c* werden aus einer Karte oder durch Schätzung gewonnen, also voraussichtlich *h* nicht genau genug liefern.

\*) Wer Versuche noch nicht ausgeführt hat, überschätzt gewöhnlich die Genauigkeit und Schnelligkeit des Einschaltens mittelst Baken. Bei etwa 1650 m Abstand der Endpunkte, 80 bis 100 m Abstand der Baken unter sich, peinlichem Einloten und Einrichten derselben haben geübte Beobachter seitliche Fehler bis zu 0,25 m im Einschalten eines Punktes begangen, der ungefähr in der Mitte der Strecke lag, und dazu jedesmal 10 Minuten gebraucht. Es entspricht dies einer Unsicherheit von reichlich 2' im Abstecken des gestreckten Winkels, wie aus Formel (1) hervorgeht. Dieselben Beobachter bedurften zum scharfen Messen eines Winkels mit dem Theodolit keine 5 Minuten Zeit.

Fig. 11.



Man wird zugleich einen Richtungsfehler begehen und statt  $h$  vielleicht  $CC'$  absetzen. Darum wird von  $C'$  aus der Winkel  $AC'B$  gemessen,  $C'C''$  berechnet und in der Verlängerung von  $CC'$  abgesetzt. Betrachtet man nämlich  $C'C'$  und  $C'C''$  als Basen von Dreiecken mit gemeinsamer Höhe (welche letztere man sich von  $A$  einerseits, von  $B$  andererseits gefällt denkt), so kommt man, weil sich die Dreiecksinhalte wie die Basen verhalten, zu der Proportion:

$$C'C'' : C'C' = a'b' \sin AC'B : ab \sin ACB,$$

und da mit großer Annäherung  $a'b' = ab$ , auch der Sinus mit dem Arcus des Nebenwinkels vertauscht werden darf:

$$C'C'' : C'C' = (180 - AC'B) : (180 - ACB),$$

woraus durch Neubilden einer Proportion folgt:

$$C'C'' = \frac{180 - AC'B}{ACB - AC'B} C'C'. \quad \text{Richtungsfehler} \quad (2)$$

Das Vorzeichen von  $C'C''$  entscheidet über die Richtung, in der diese kleine Strecke von  $C'$  aus abzusetzen ist. In  $C''$  wird der Theodolit aufgestellt und die Probe richtiger Absteckung, wie angedeutet, durch Umlegen der Kippachse und Durchschlagen des Fernrohrs, oder durch Winkelmessung vollzogen. Das Verfahren hat auch Berechtigung, wenn die Endpunkte  $A$  und  $B$  nicht unzugänglich, aber sehr weit von einander entfernt und gegenseitig schwer sichtbar sind.

Im nachfolgenden Beispiel betrug die Strecke  $AB$  nur etwa 2 km, und es stand ein Schätzmikroskoptheodolit mit umlegbarer Kippachse zur Verfügung. Die Winkelmessung in 4 Kreis- und 2 Fernrohrlagen ergab auf  $C$ :

$ACB = 179^{\circ} 53,85'$	}	53,82	}	53,94
" 53,80	}	53,82		
" 54,00	}	54,05		
" 54,10	}	54,05		
$15,75 : 4 = 3,94$				

Mittel:  $ACB = 179^{\circ} 53,94'$ .

Geschätzt wurde  $c = 1500$  m,  $v = \frac{2}{5}$ , daher nach (1):

$$h = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 1500 \cdot \frac{6,06}{3438} = 360 \cdot \frac{6,06}{3438}$$

*Man muss  $AC'B - ACB$ ; damit Richtungsfehler ausgeglichen in 2. Fall  
 von  $h$  geht es mit negativem Vorzeichen.*



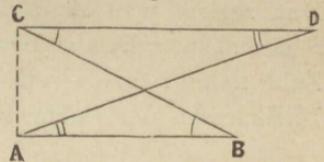
### Aufgabe 12.

Abstecken einer Parallelen mit dem Theodolit in etwa 100 m Abstand von einer gegebenen Geraden. (Figur 12.) Die Absteckung von Parallelen durch Absetzen gleich langer Normalen zu einer gegebenen Geraden  $AB$  ist nicht immer ausführbar, auch die Genauigkeit des Verfahrens von dem Abstand der Parallelen unter sich abhängig. Je größer derselbe, desto mehr wird jener Absteckungsweise die mittelst des Theodolits überlegen sein.

Gewährt ein Endpunkt  $A$  freien Blick in der Richtung nach einem fernen und gut sichtbaren Ziele  $P$ , das in der Verlängerung von  $AC$  liegen möge, so messe man den Winkel  $PAB$ , berechne  $AC = a \operatorname{cosec} PAB$ , wenn  $a$  der vorgeschriebene Abstand der Parallelen, und trage  $AC$  in der Richtung  $AP$  ab, stelle den Theodolit in  $C$  auf und setze den Winkel  $PCD = PAB$  ab, wobei wegen Entfernung des Zieles  $P$  eine kleine Excentricität der Aufstellung des Instruments nicht schadet.

In unsrem Beispiel war ein geeignetes Ziel  $P$  nicht sichtbar, zur Erzielung langer Visuren also ein etwas anderes Verfahren nötig. Vom Punkte  $A$  aus wurde, bloß mit dem Winkelprisma, die Normale  $AC$  errichtet und  $a = 100$  m auf ihr abgetragen, dann in  $B$   $\sphericalangle ABC = 44^\circ 28,12'$  gemessen. Denselben Winkelbetrag legte der Theodolit in  $C$  an  $CB$  so an, daß  $CD$  linker Schenkel und folglich parallel  $AB$  ward. Zur Probe wurden die inneren Wechselwinkel  $ADC$  und  $DAB$  gemessen und übereinstimmend befunden, wie nachfolgende Übersicht zeigt.

Fig. 12.



#### Winkelmessung mit dem Schätzmikroskop-Theodolit von Fennel.

Standp. u. Lage	Ziel	Mikroskop		Mittel	Winkel	Bemerkung
		A	B			
B, 1 te	A	2° 21,8'	22,8'	2° 22,30'	44° 28,00'	Messung
	C	46 49,8	50,8	46 50,30		
2 te	C	226 49,8	50,4	226 50,10	44 28,25	
	A	182 20,9	22,8	182 21,85		
Mittel:					44 28,12	
C, 1 te	B	249 19,5	19,6	249 19,55	44 28,10	Absteckung
	D	204 51,4	51,5	204 51,45		
D, 1 te	A	91 13,1	13,1	91 13,10	45 55,75	} Mefssprobe
	C	137 8,6	9,1	137 8,85		
A, 1 te	D	149 32,0	32,8	149 32,40	45 55,75	
	B	195 27,9	28,4	195 28,15		

Der gebrauchte Theodolit gestattet übrigens Schätzung bis auf Zwanzigstelminuten. Beim Übergang in die zweite Fernrohrlage (auf B) hätte der Limbus um  $90^\circ$  gedreht werden sollen.

### Aufgabe 13.

Abstecken der Kleinpunkte eines Kreisbogens von der Sehne aus, Verlängern des Bogens durch Abstecken von der Tangente eines Endpunktes aus. Die Sehne  $AB$  (Fig. 13) sei auf dem Felde abgesteckt, der Radius  $r$  gegeben. Nachdem  $AB$  gemessen worden, berechnet man den zugehörigen Centriwinkel  $\gamma$  aus

$$^{1/2} \gamma = \arcsin \frac{AB}{2r}, \quad (1)$$

und, wenn mit  $S$  der Scheitel des Bogens über  $AB$  bezeichnet wird, den Bogen  $ASB$  aus

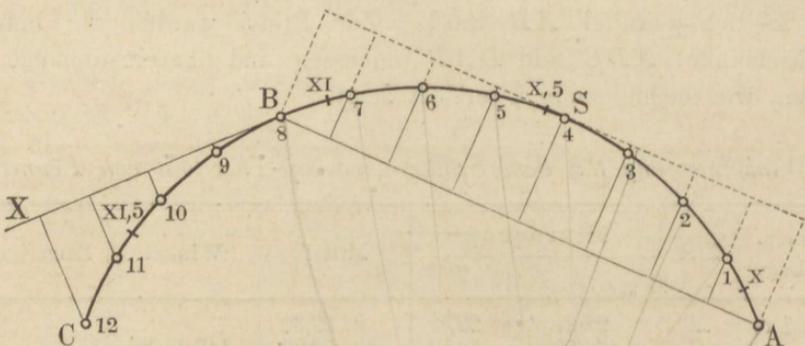
$$ASB = \frac{\gamma \text{ in Graden}}{180} r \pi = \frac{\gamma \text{ in Minuten}}{3437,7} r, \quad (2)$$

wodurch man eine Rechenprobe ermöglicht. Für die richtige Berechnung von  $\gamma$  aus (1) giebt es noch die Probe:

$$4 r \sin ^{1/4} \gamma \cos ^{1/4} \gamma = AB. \quad (3)$$

Nun zerlegt man  $ASB$  in  $m$  oder besser  $2n$  Kleinbogen  $b$ , damit auch  $S$  ein abzusteckender Kurvenpunkt wird;  $b$  soll einer durch 5 teilbaren Zahl nahe liegen, weil dies das Einschalten neuer Punkte, auch das Nachmessen der Sehne zur Prüfung der Absteckung sehr erleichtert.

Fig. 13.



Die zu  $b$  gehörige Sehne heiße  $s$ , der über  $b$  stehende Peripheriewinkel  $\omega$ , dann ist  $s$  aus

$$s = 2r \sin \omega \quad (4)$$

scharf zu berechnen. Die Sehnen des Kurvenzweiges  $BC$  betrachten wir als einen Polygonzug von gleichen Seiten, dessen Koordinaten, bezogen auf die Berührende im Anfangspunkte als Abscissenachse, berechnet werden sollen. Die erste, von  $B$  ausgehende Kleinsehne  $s$  bildet mit der Abscissenachse den Winkel  $\omega$ , die nächsten die Winkel

$3\omega, 5\omega \dots (2n-1)\omega$ . Wenn wir  $n$  Punkte dieses Zweiges abstecken wollen, so genügt es zur Prüfung der sämtlichen Koordinaten, diejenigen des  $n$ ten Punktes noch einmal unabhängig zu berechnen. Denn da, wie bei Zugberechnungen üblich, die Koordinaten aus den Projektionen der Zugseiten auf die beiden Hauptachsen zusammengesetzt werden, so sind sie abhängig von einander, und es übertragen sich die irgendwo begangenen Fehler bis ans Ende des Zuges. Die Koordinaten des  $n$ ten Punktes berechnen sich doppelt aus:

$$y_n = s \sin \omega + s \sin 3\omega + \dots + s \sin (2n-1)\omega = 2r \sin^2 n\omega \quad (5)$$

$$x_n = s \cos \omega + s \cos 3\omega + \dots + s \cos (2n-1)\omega = 2r \sin n\omega \cos n\omega.$$

Stimmen die beiden Wertepaare, dann ist zugleich  $s$  geprüft, das bisher noch ohne Probe war.

Wir könnten auch den Polygonzug der Sehnen im Kurvenzweig  $ASB$  ähnlich behandeln, dabei auf  $AB$  als Abscissenachse beziehen; es ist in unserem Falle aber unnötig, da die Koordinaten zur Absteckung von der Sehne aus mit denen zur Absteckung von der Tangente aus in einfacher, aus Figur 13 erkennbarer Beziehung stehen.

Alle Fußpunkte der Ordinaten müssen mit besonderer Sorgfalt, etwa durch Abschnüren, noch besser durch Einweisen mit dem Theodolitfernrohr, in die Abscissenachse gebracht werden. Da der Winkel  $ABX = 180 - \frac{1}{2}\gamma$  ohnehin mit dem Theodolit abgesteckt wird, so steht derselbe sogleich zum Einweisen bereit. Auf der Sehne  $AB$  trage man die Abscissen von *beiden Endpunkten* gegen die Mitte hin ab.

In unserem *Beispiel* ist  $r = 200$  m,  $AB = 120$  m (letzteres, aus Mißverständnis nach rundem Maß abgesteckt, sollte nur annähernd diese Größe haben).

Rechnung nach (1) bis (4).

$AB$	120,00	2,079 18	$4r$	800	2,903 09
$1:2r$	$1:400$	7,397 94	$\sin \frac{1}{4}\gamma$	$8^\circ 43' 44''$	9,181 15
$\sin \frac{1}{2}\gamma$	$17^\circ 27' 27''$	9,477 12	$\cos \frac{1}{4}\gamma$	$8^\circ 43' 44''$	9,994 94
			$AB$		2,079 18
$\gamma$	$34,915^\circ$	1,543 01	$\gamma$	2094,9	3,321 16
$1:180$		7,744 73	$1:3437,7$		6,463 73
$r$	200	2,301 03	$r$	200	2,301 03
$\pi$		0,497 15	$\omega = \frac{1}{8}\gamma$	$n = 4$	2,085 92
$ASB$	121,88	2,085 92			
$\sin \omega$	$2^\circ 10' 56''$	8,580 67	$\sin^2 \frac{1}{4}\gamma$	S. oben!	8,362 30
$2r$	400	2,602 06	$2r$	400	2,602 06
$s$	15,230	1,182 73	$y_n$	9,212	0,964 36
				Nach Formel (5)	

## Berechnung der Koordinaten.

Zeiger	Richtungswinkel $\varphi$	$\sin \varphi$ $s$ $\cos \varphi$	$s \sin \varphi$ $s \cos \varphi$	Von d. Tangente aus		Von der Sehne aus	
				$s \sin \varphi$ $y$	$s \cos \varphi$ $x$	$y$	$x$
1	2° 10' 56"	8,580 67 1,182 73 9,999 68	9,763 40 1,182 41	0,580	15,220	8,633	44,782
2	6 32 48	9,056 95 1,182 73 9,997 16	0,239 68 1,179 89	1,737 2,317	15,132 30,352	6,896	29,650
3	10 54 40	9,277 12 1,182 73 9,992 08	0,459 85 1,174 81	2,883 5,200	14,957 45,309	4,013	14,693
4	15 16 31	9,420 71 1,182 73 9,984 38	0,603 44 1,167 11	4,013 9,213	14,693 60,002	0,000	0,000
			Soll:	9,212 = $y_n$	60,000 = $x_n$		

*Erste Messprobe.* Alle Kleinsehnern sind nachgemessen worden, und da dies unmittelbar beim Absetzen der Ordinaten geschah, so wurde die Richtung derselben sofort geprüft. Ergebnisse der Sehnernmessung (Sollwert 15,230):

1	15,23	5	15,23	9	15,23
2	15,235	6	15,225	10	15,23
3	15,22	7	15,235	11	15,235
4	15,23	8	15,23	12	15,23

*Zweite Messprobe.* Messung aller Peripheriewinkel über den Kleinsehnern mit dem gemeinsamen Scheitel in  $B$ , durch den daselbst angestellten Theodolit. Angabe seiner Nonien 1'.

Ziel	Nonius I	Nonius II	Mittel	Winkel	Soll	Fehler
A	39° 22' 30"	219° 22' 00"	39° 22' 15"	2° 11' 45"	182° 10' 56"	- 0' 49"
1	37 11 00	217 10 00	37 10 30	2 11 00		- 0 04
2	35 00 00	214 59 00	34 59 30	2 10 00		+ 0 56
3	32 50 00	212 49 00	32 49 30	2 11 00		- 0 04
4	30 39 00	210 38 00	30 38 30	2 10 30		+ 0 26
5	28 28 30	208 27 30	28 28 00	2 10 30		+ 0 26
6	26 18 00	206 17 00	26 17 30	2 11 30		- 0 34
7	24 06 00	204 06 00	24 06 00	182 11 30	182° 10' 56"	- 0 34
X	201 55 00	21 54 00	201 54 30	2 10 45	2° 10' 56"	+ 0 11
9	199 44 00	19 43 30	199 43 45	2 11 45		- 0 49
10	197 32 00	17 32 00	197 32 00	2 10 00		+ 0 56
11	195 21 30	15 22 30	195 22 00	2 10 45		+ 0 11
C	193 11 00	13 11 30	193 11 15			
	38 30	32 00	35 15		206° 11' 12"	+ 0 12

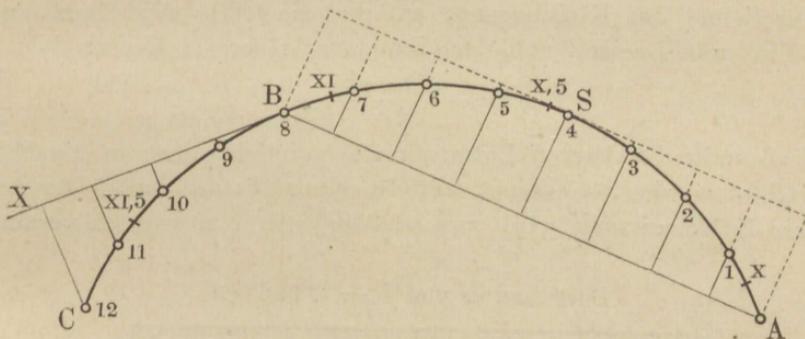
Die Probe für die Mittelbildung ist ohne weiteres verständlich, die für die Winkel- und Fehlerberechnung geschieht so:

Ableseung zur Richtung nach C:	193° 11' 15"
Summe der Sollbeträge der Winkel:	206 11 12
ab die Summe der Fehler " " "	— 12
Ableseung zur Richtung nach A:	399 22 15

### Aufgabe 14.

*Einteilen eines abgesteckten Kreisbogens (Stationieren).* Die Achsen von langgestreckten Erdbauwerken werden bekanntlich in gleiche Stücke von rundem Längenmaß, 100 m, 50 m, eingeteilt und die Endpunkte aller solchen Stücke, *Teilmarken* oder *Stationen* genannt, durch deutlich wahrnehmbare Pfähle besonders bezeichnet, den Hundertermarken außerdem eine eigene römische Bezifferung gegeben. Die Einteilung und Bezifferung läuft auch in den Krümmungen der Achse weiter. In unserem Beispiel liege Teilmarke IX noch in der Geraden, 88,68 m vor dem Anfangspunkte A des Kreisbogens *ASBC* der

Fig. 13.



vorigen Aufgabe (Fig. 13). Dieser Bogen ist  $121,88 \cdot \frac{3}{2} = 182,82$  m lang (Rechenübersicht der Seite 45). Daher folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r}
 IX + 88,68 \text{ Krümmungsanfang,} \\
 182,82 \text{ Kreisbogenlänge,} \\
 \hline
 XI + 71,50 \text{ Krümmungsende.}
 \end{array}$$

Man übersieht sofort, welche Teilmarken in die Krümmung fallen, nämlich X, X,5, XI, XI,5. Die erste wird vom Krümmungsanfang entfernt sein:

$$X \text{ von } A = 100 - 88,68 = 11,32,$$

die folgenden um je 50 m mehr. Die Länge jedes der 12 Kleinbögen der Krümmung beträgt:

$$b = 121,88 : 8 = 15,235.$$

Hierauf gründet sich folgende Übersicht der Bogenabstände der Teilmarken einerseits, der Kleinpunkte andererseits von  $A$  und unter sich.

Teilmarke	Abstand $c$ von $A$	Kleinpunkt	Berechnung des Abstands $d$ von $A$	$\xi = c - d$
X	11,32	$A$	0,00	11,32
X, 5	61,32	4	$4b = 60,94$	0,38
XI	111,32	7	$\frac{60,94}{3b = 45,71}$	4,67
XI, 5	161,32	10	$\frac{106,65}{3b = 45,70}$	8,97
		$C$	$\frac{152,35}{2b = 30,47}$	
			$\frac{182,82}{\text{wie oben!}}$	

Zur Absteckung der Teilmarken sind wir berechtigt, die Bogenabstände  $\xi$  und  $b - \xi$  von den beiden nächstgelegenen Kleinpunkten als geradlinige Strecken zu betrachten. Der Abstand  $\eta$  der Marke von der Sehne des Kleinbogens, auf den sie trifft, wird dann, nach der Lehre vom Dreieck und dem ihm umschriebenen Kreis:

$$\eta = \frac{\xi(b - \xi)}{2r}.$$

Der Fußpunkt des kurzen Lotes  $\eta$  muß peinlich genau in die Sehne eingerichtet werden, vielleicht mittelst einer Richtschnur. Der nachfolgende Zahlenausweis wird zweckmäßig mit dem vorigen vereinigt.

Berechnung von  $b - \xi$  und  $\eta$ .

Teilmarke	$\xi$	15,235 — $\xi$	$p = \xi(b - \xi)$	$\eta = \frac{p}{400}$
X	11,32	3,92	44,4	0,111
X, 5	0,38	14,86	5,6	0,014
XI	4,67	10,56	49,3	0,123
XI, 5	8,97	6,26	56,2	0,140

Viel bequemer und weitaus hinreichend genau werden die Zahlen  $\eta$  mit dem Rechenschieber gewonnen, die Produkte  $p$  dann selbstverständlich übergangen.

In unserem Beispiel sind die Teilmarken vor der Schlußprobe, die durch Winkelmessung erfolgte, eingeschaltet worden, konnten also in die Probe mit aufgenommen werden. Hier das Ergebnis (vergl. Aufg. 13):

Ziel	Nonius I	Nonius II	Mittel	Winkel	Soll	Fehler
A	39° 22' 30"	219° 22' 00"	39° 22' 15"	1° 38' 45"	1° 37' 17"	- 1' 28"
X	37 44 00	217 43 00	37 43 30	7 10 15	7 09 43	- 0 32
X, 5	30 33 00	210 33 30	30 33 15	7 09 15	7 09 43	+ 0 28
XI	23 23 00	203 25 00	23 24 00	187 8 00	187 09 42	+ 1 42
XI, 5	196 16 00	16 16 00	196 16 00	3 4 45	3 4 47	+ 0 02
C	193 11 00	13 11 30	193 11 15			
	29 30	31 00	30 15	206 11 00	206° 11' 12"	+ 0' 12"

Die Sollbeträge berechnet man gemäß den Ansätzen:

$$11,32 \cdot 206\,265 : 200 = 5\,837'';$$

$$21,50 \cdot 206\,265 : 200 = 11\,087'';$$

$$50,00 \cdot 206\,265 : 200 = 25\,783''.$$

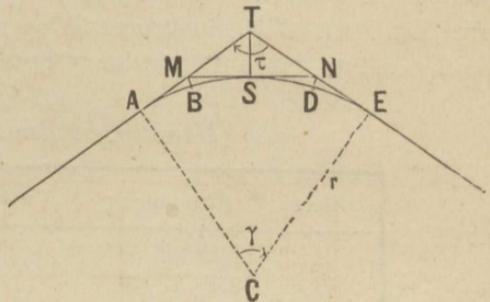
### Aufgabe 15.

Auf dem Felde gegeben zwei Berührende eines Kreisbogens, dessen Radius  $r$  bekannt. Fünf Hauptpunkte abzustecken, nämlich Krümmungsanfang und Ende  $A$  und  $E$ , den Scheitel  $S$  und zwei Zwischenscheitel  $B$  und  $D$ . Im Schnittpunkte  $T$  der Tangenten wird der Theodolit aufgestellt,  $\tau$  gemessen und sofort halbiert, da später  $TS$  auf der abgesteckten Halbierungslinie abzutragen ist. Aus  $\gamma = 180 - \tau$  werden sämtliche abzusetzenden Strecken berechnet, nämlich außer  $TS$  noch  $TM$ ,  $TA$  und  $MB$ , sowie zur Rechenprobe  $AM$ ,  $CM$  und  $CT$ .

Nachdem durch Absetzen von  $TS$ ,  $TM$  und  $TN$  die Scheiteltangente  $MN$  festgelegt, und mit freiem Auge geprüft worden ist, ob  $M$ ,  $S$  und  $N$  in einer Geraden, werden die stumpfen Winkel bei  $M$  und  $N$  durch Abschneiden halbiert und auf den Halbierungslinien die gleichen Strecken  $MB$  und  $ND$  abgetragen.

Proben der Absteckung sind die Rückwärtsmessung der abgesetzten Strecken  $AT$  und  $ET$  (gegen grobe Fehler in  $A$ ,  $M$ ,  $N$  und  $E$ ), die Messung von  $MSN$  (gegen grobe Fehler bei Halbierung von  $\tau$ ), wobei sich  $MS = SN = AM$  ergeben soll. Die Schlussprobe erfolgt durch Aufstellen des Theodolits in  $S$  und Anschneiden der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $D$ ,  $E$ , wobei als Sollbeträge der Winkel zwischen je zwei Visuren  $\frac{1}{2}\gamma$ , beziehungsweise  $180$  zu erzielen wären.

Fig. 14.



In folgender Übersicht, welche auf bekannten Formeln fufst, ist  $r = 220$  m als gegeben und  $\tau = 120^{\circ} 44'$  als gemessen, also  $\gamma = 59^{\circ} 16'$  eingeführt.

Formel	Argument	log	log	Ergebnis	Bedeutung
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$	$29^{\circ} 38'$	9,755 00	2,097 42	125,15	$AT^*$
$r$	220	2,342 42			
$\operatorname{tg} \frac{1}{4} \gamma$	$14^{\circ} 49'$	9,422 46	1,764 88	58,19	$AM^*$
$\operatorname{tg} \frac{1}{8} \gamma$	$7^{\circ} 24' 30''$	9,114 03	0,878 91	7,57	$MB^{**}$
$AM$	berechnet.	1,764 88			
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$	wie oben.	9,755 00	1,519 88	33,10	$TS!$
$TS$	berechnet.	1,519 88	1,825 76	66,95	$MT^*$
$\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \gamma$	$29^{\circ} 38'$	0,305 88			
$\operatorname{sec} \frac{1}{2} \gamma$	$29^{\circ} 38'$	0,060 88	2,403 30	253,10	$TC!$
$r$	220	2,342 42			
$\operatorname{sec} \frac{1}{4} \gamma$	$14^{\circ} 49'$	0,014 69	2,357 11	227,57	$MC^{**}$

$$\begin{aligned} \text{Rechenproben: } AM + MT &= AT \quad (*) \\ TS + r &= TC \quad (!) \\ MB + r &= MC \quad (**) \end{aligned}$$

Von diesen drei Proben könnte die zweite überflüssig erscheinen, da  $\log TS$  schon in (\*) mitgeprüft wird. Aber durch (!) wird einerseits die Zahl  $TS$ , andererseits  $\log r$  geprüft, da bei der Probe die Zahl  $r$  neben deren Logarithmus mitwirkt.

### Hauptprobe der Absteckung.

Ziele	Ablesungen	Unterschiede	Sollbeträge
$A$	$232^{\circ} 32' 30''$		
$B$	239 57 00	$7^{\circ} 24' 30''$	$7^{\circ} 24' 30''$
$M$	247 22 00	7 25 00	7 24 30
$N$	67 22 00	180 00 00	180 00 00
$D$	74 46 00	7 24 00	7 24 30
$E$	82 10 30	7 24 30	7 24 30

Die Abweichungen vom Sollbetrage erreichen höchstens  $30''$  und würden schon durch radiale Absteckungsfehler von 8 mm in  $B$  und  $D$  erklärt sein.

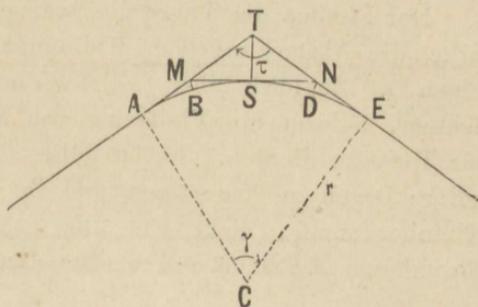
Über den Erfolg der Nachmessung von  $MN$  fehlt Angabe.

**Aufgabe 16.**

*Abstecken eines Kreisbogens vom Halbmesser 250, zwei gegebene Gerade berührend. Kleinpunkte mittelst gleicher Peripheriewinkel und Sehnen.*

Nach dem Aufsuchen des Schnittes  $T$  der Berührenden (Fig. 14) Messung und Halbieren des Winkels  $\tau$  daselbst.

Fig. 14.



Lage	Ziel	Zeiger I	Zeiger II	Mittel	Winkel
1.	$E$	131°03' 15"	311°03' 30"	131°03' 22"	118°35' 53"
	$A$	249 39 30	69 39 00	249 39 15	
2.	$A$	324 37 00	144 37 00	324 37 00	118 36 00
	$E$	206 01 00	26 01 00	206 01 00	
				Mittel:	118 35 56

$$\gamma = 180 - \tau = 61^{\circ} 24' 04''.$$

Berechnung zum Abstecken von 3 Hauptpunkten.

$\text{tg } \frac{1}{2} \gamma$	30° 42' 02"	9,773 62	2,171 56	148,44	$AT^*$
$r$	250	2,397 94	1,836 50	68,63	$AM^*$
$\text{tg } \frac{1}{4} \gamma$	15° 21' 01"	9,438 56			
$AM$	berechnet.	1,836 50	1,610 12	40,75	$TS^{**}$
$\text{tg } \frac{1}{2} \gamma$		9,773 62			
$TS$	berechnet.	1,610 12	1,902 08	79,81	$MT^*$
$\text{cosec } \frac{1}{2} \gamma$		0,291 96			
$r$	250	2,397 94	2,463 52	290,75	$CT^{**}$
$\text{sec } \frac{1}{2} \gamma$		0,065 58			

Rechenproben:  $AM + MT = AT$  \*

$TS + r = CT$  \*\*

Messprobe: Nachmessen von  $MS$  und  $SN$ , nachdem  $S$  von  $T$  aus abgesteckt worden war. Es ergab sich

$MS = 68,62$ ;  $MN = 137,23$ .

Soll:  $68,63$ ;  $137,26$ .

Die Prüfung der Hauptpunkte  $A$  und  $E$  zu unterlassen, war jedenfalls gewagt, da möglicherweise die ganze Kleinabsteckung hätte wiederholt werden müssen. Zudem konnte die Winkelprobe (vergl. vorige

Aufgabe) fast nebenbei vollzogen werden, denn der Theodolit wurde zur Kleinabsteckung ohnehin auf den Scheitelpunkt  $S$  gebracht.

Der Limbus des Theodolits war unmittelbar in  $20'$  geteilt, und es sollte die Absteckung der Kleinpunkte ohne Hülfe des Nonius erfolgen\*). Zugleich aber sollten die Kleinbogen, also auch deren Sehnen, nahezu ein Vielfaches von  $5$  m werden, da Fünfmeterlatten zur Messung dienten. Es ist daher der zum Peripheriewinkel  $20'$  gehörige Bogen zu berechnen und zu vervielfachen, bis ein geeignetes Kleinbogenmaß, nicht viel über  $25$  m, entsteht. Auch die ganze Bogenlänge  $ASB$  müssen wir kennen.

$2 \cdot 20'$	40	1,602 06	$\gamma$ Minuten	3684,07	3,566 33
$1 : \rho'$	$\frac{1}{3437,7}$	6,463 73	$1 : \rho'$		6,463 73
$r$	250	2,397 94	$r$		2,397 94
	2,909	0,463 73		267,92	2,428 00

Indem wir den 7fachen Limbusteil oder  $2^{\circ} 20' = \omega$  als Winkelmaß wählen, bekommen wir als Kleinbogenlänge  $b = 20,363$  m. Da gegen den Scheitelpunkt hin abgesteckt wird, so dividieren wir mit  $b$  in den halben Bogen  $ASE$ , um den Restbogen zwischen  $S$  und dem nächsten Kleinpunkt zu bestimmen.

$$133,96 : 20,363 = 6 + 11,78 : 20,363.$$

Wir berechnen den zum Restbogen gehörigen Peripheriewinkel, der bei der Messprobe gebraucht wird, noch einmal als Rechenprobe für die zuvor gefundenen Bogenwerte. Er soll sein  $\frac{1}{4} \gamma - 6 \cdot 2^{\circ} 20' = 1^{\circ} 21' 01''$ . Ferner hätten wir streng genommen die Sehne für diesen Kleinbogen, und die für den Kleinbogen  $b$  aus

$$s = 2r \sin \omega$$

zu berechnen; letzteres wenigstens ist nötig, da kleine Differenzen sich anhäufen und  $b$  schon merklich länger ist als  $s$ .

Restbogen	11,78	1,071 15	$2r$	500	2,698 97
$1 : 2r$	$\frac{1}{500}$	7,301 03	$\sin \omega$	$2^{\circ} 20'$	8,609 73
$\rho'$	3437,7	3,536 27	$s$	20,356	1,308 70
	80,993'	1,908 45	$b$	20,363	
Soll: $01''$	$= 1^{\circ} 21' 00''$		Differenz	0,007	

Wir runden  $s$  auf  $20,36$  m ab, nehmen aber dafür bei jedem dritten Kleinbogen nur  $20,35$  m. Die Probe durch Nachmessen des Restbogens

\*) In des Verfassers Praktischer Geometrie, I, § 211 sind die Vorteile dieses Verfahrens dargelegt.

soll eben nicht vermeidbare, sondern nur unvermeidliche Fehler nachweisen. Leider ist diese Probe im Feldbuch nur mangelhaft vermerkt worden, da nur angegeben wird, der Sollbetrag des Restbogens sei bis auf wenige Centimeter erreicht. Das ist um so wertloser, als der Sollbetrag auf dem Felde um 5 cm zu groß berechnet worden war. Feldbuch oder Handriß müssen stets die Messergebnisse selbst enthalten, auch dann, wenn die Zahlen sich zu widersprechen scheinen.

Das Abstecken wird außerordentlich beschleunigt, dadurch daß man jeden neuen Punkt, ehe man nach ihm hinmifst, schon näherungsweise bestimmt, und zwar durch Einrücken von der Sekante aus, die man durch die beiden zuletzt abgesteckten Kleinpunkte gelegt und durch Abschreiten um das gehörige Maß verlängert hat. Die Maße  $x$ ,  $y$  (Verlängerung und Punktabstand), um welche es sich dabei handelt, kennt man zwar, sobald die 3 ersten Bogenpunkte stehen, doch lassen sie sich schon vorher bestimmen\*) wie folgt:

$$x = s; \quad y = s \sin 2\omega = s^2 : r.$$

Der Wert für  $x$  und der zweite für  $y$  sind Näherungswerte, aber völlig ausreichende. So würde in unserem Beispiel  $x = 20$  m und  $y = 20^2 : 250 = 1,6$  (statt 1,66) schon genügen, um, wenn man die Kleinsehnern mit Latten absetzt, höchstens noch die letzte ein wenig schwenken zu müssen. Hat man außerdem das Übermaß der Sehne über 20 m in Gestalt eines genau abgeschnittenen Stäbchens zur Verfügung, so ist das Verfahren der Kleinabsteckung mittelst gleicher Peripheriewinkel und Sehnen das schnellste, das sich anwenden läßt, und übertrifft im allgemeinen alle übrigen an Schärfe\*\*).

Der Beobachter am Instrument hat in der Regel Mühe, mit dem Stabträger, den er einwinken soll, Schritt zu halten. Aber auch bei der größten Eile muß seine volle Aufmerksamkeit auf richtiges und scharfes Einstellen des Zeigers gerichtet bleiben. Selbstverständlich — sonst hätte die vorausgegangene Berechnungsweise keinen Sinn — überläßt er die Anfangsablesung nicht dem Zufall, sondern stellt von

\*) Vgl. des Verfassers Praktische Geometrie, I, § 214.

\*\*) Der gewöhnliche Einwand, daß jeder neue Punkt von den vorhergehenden abhängig sei, trifft jedes andere Verfahren mindestens in gleichem Maße und muß wohl noch mit der mißverständlichen Absteckung vom Instrumente weg, statt gegen den Theodolit hin, zusammenhängen. Wenn bei der Absteckung nach Koordinaten von der Sehne aus die Fußpunkte der Ordinaten beim Einmessen noch mit dem Theodolit eingerichtet werden, so glaubt man besonders scharf verfahren zu sein. Dennoch sind dabei die Fußpunkte fast den nämlichen Einweise- und Längenmeßfehlern unterworfen, wie die Kleinpunkte selbst bei der Methode der Peripheriewinkel und Sehnen. Nur daß dort jeder Ordinatenendpunkt noch außerdem seinen besonderen, wenn man will unabhängigen Fehler bekommt.

vornherein den Zeiger auf ein rundes, zweckmässig ausgewähltes Maß. Um sich nicht grob zu irren, schreibt er sich die aufeinanderfolgenden Ablesungen *im voraus* auf und durchstreicht jedesmal die eingestellten. Dafs er beim Einwinken womöglich auf den Pflock selbst zielt, nicht duldet, dafs man diesen nachträglich schief einschlägt oder, im Fall der Pflock unsichtbar, die Bake darüber schief hält, sind Regeln, die ja ebenso beim Einweisen von Punkten in eine Gerade gelten, aber nicht peinlich genug befolgt werden können. Auch auf die Verabredung unzweideutiger Zeichen mit dem Taschentuch sei noch einmal aufmerksam gemacht.

Schlussprobe durch Winkelmessung über Punkt *A*.

Ziel	Nonius I	Winkel	Soll	Fehler
<i>E</i>	237° 49' 30"			
1	235 30 00	2° 19' 30"	2° 20' 00"	+ 0' 30"
2	233 10 00	2 20 00	"	0
3	230 50 00	2 20 00	"	0
4	228 30 00	2 20 00	"	0
5	226 10 00	2 20 00	"	0
6	223 49 30	2 20 30	"	— 0 30
<i>S</i>	222 27 30	1 22 00	1 21 00	— 1 00
7	221 06 30	1 21 00	1 21 00	0
8	218 47 00	2 19 30	2 20 00	+ 0 30
9	216 26 30	2 20 30	"	— 0 30
10	214 07 00	2 19 30	"	+ 0 30
11	211 46 15	2 20 45	"	— 0 45
12	209 26 00	2 20 15	"	— 0 15
			28 22 00	— 1 30

Rechenprobe: Ablesung bei Richtung nach 12: 209° 26' 00"  
 Summe der Sollbeträge: 28 22 00  
 ab Summe der Fehler: + 01 30  
 Ablesung bei Richtung nach *E*: 237 49 30

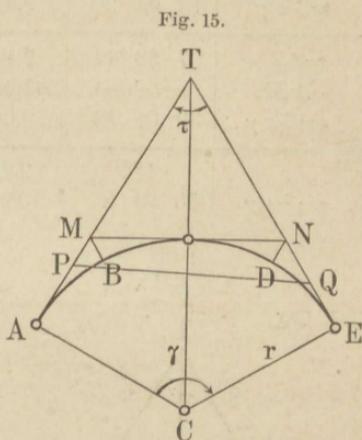
Es hätte auch in die Richtung der Berührenden *TA*, d. h. nach dem Fernpunkt in dieser Richtung, eingestellt werden sollen.

### Aufgabe 17.

*Absteckung eines Kreisbogens vom Halbmesser 180, zwei gegebene Gerade berührend, deren Schnittpunkt unzugänglich oder für die Winkelmessung ungünstig gelegen ist.* Fig. 15. Wenn man doch einmal zwei statt eines Winkels zu messen gezwungen ist, so benutzt man diesen Anlaß zugleich, um wenigstens die abzusetzenden Strecken zu ver-

kürzen. Man legt also die Endpunkte der Hilfslinie  $PQ$ , der zu messenden Grundlinie des Dreieckes  $PTQ$ , zwischen die Punkte  $A$  und  $M$  einer-,  $E$  und  $N$  andererseits, wählt auch  $PQ$  nicht zu kurz, sodafs *kleine* Centrierungsfehler bei Aufstellung des Theodolits und der Ziele in  $P$  und  $Q$  unschädlich werden. Unter Umständen, z. B. wenn  $\tau$  sehr spitz,  $TM$  und  $TN$  sehr lang ausfallen würden, können es Genauigkeitserwägungen geradezu erfordern, dafs man Punkt  $T$  nicht absteckt, obwohl er zugänglich wäre.

In Bezug auf die Absteckung von  $P$  und  $Q$  ist zu bedenken, dafs durch sie die zunächst gelegenen Punkte der Geraden  $TA$  und  $TE$  (jede derselben wird durch zwei Punkte auf dem Felde bezeichnet sein) *ersetzt* werden, man darf also von  $P$  und  $Q$  aus nicht mehr die näher, sondern nur noch die ferngelegenen Punkte der Berührenden als Ziele benützen\*).



In unserem *Beispiel* lieferte die Messung:

- |  |                     |
|--|---------------------|
| 1) $PQ$ zweimal gleichlautend zu 127,60 m. | 3) Winkel $QPA$ zu: |
| 2) Winkel $EQP$ zu:                        | 142° 38' 00"        |
| 157° 4' 15"                                | 37 53               |
| 4 22                                       | 38 15               |
| 3 53                                       | 38 07               |
| 4 00                                       |                     |

Mittel: 157° 4' 08"                      Mittel: 142° 38' 04"

Statt der 4 Winkelmessungen hätten auch deren 2 genügt.

$$\tau = EQP + QPA - 180 = 119^\circ 42' 12''$$

Berechnung von  $PT$  und  $QT$ .

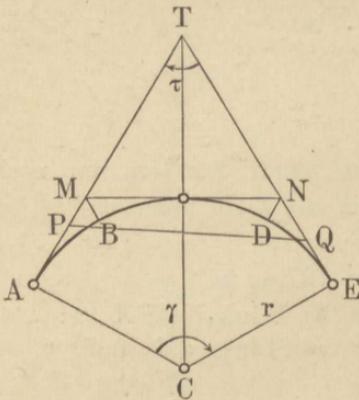
$PQ$	127,60	2,105 85	$PQ \operatorname{cosec} \tau$	berechnet.	2,167 02
$\operatorname{cosec} \tau$	119° 42' 12"	0,061 17	$\sin QPA$	142° 38' 04"	9,783 12
$\sin EQP$	157 04 08	9,590 65			
$PT$	57,24	1,757 67	$QT$	89,15	1,950 14

\*) Verfasser erinnert sich eines Falles, wo zum Einlegen einer wichtigen, etwa 1 km langen Eisenbahnkrümmung zwei Berührende, es seien  $PA$  und  $QE$ , durch ihre gegenseitig sichtbaren Endpunkte abgesteckt waren und bis zu ihrem Schnittpunkt  $T$  verlängert wurden, woselbst die Winkelmessung erfolgte, obgleich man dort nur noch  $P$  und  $Q$ , nicht mehr  $A$  und  $E$  sehen konnte. Offenbar hätte man nicht in  $T$ , sondern in den Punkten  $P$  und  $Q$  Winkel messen sollen.

## Berechnung zum Abstecken von 5 Hauptpunkten.

$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$	30° 08' 54"	9,764 03}	2,019 30	104,54	AT*
$r$	180	2,255 27}			
$\operatorname{tg} \frac{1}{4} \gamma$	15 04 27	9,430 30}			
$\operatorname{tg} \frac{1}{8} \gamma$	7 32 14	9,121 61}	0,807 18	6,42	MB**
AM	berechnet.	1,685 57}			
$\operatorname{sec} \frac{1}{2} \gamma$	30 08 54	0,063 12}			
$r$	180	2,255 27}	2,270 48	186,42	MC**
$\operatorname{sec} \frac{1}{4} \gamma$	15 04 27	0,015 21}			

Fig. 15.



$$\text{Rechenpr.: } AM + MT = AT \quad (*)$$

$$MB + r = MC \quad (**)$$

Zur Absteckung aus vorstehendem berechnet:

$$1) \quad AT - PT = AP = 104,54 - 57,24 = 47,30 \text{ m}$$

$$2) \quad PT - MT = PM = 57,24 - 56,06 = 1,18$$

$$\text{Rechenprobe: } AM = 48,48$$

$$3) \quad AT - QT = EQ = 104,54 - 89,15 = 15,39$$

$$4) \quad QT - MT = QN = 89,15 - 56,06 = 33,09$$

$$\text{Rechenprobe: } EN = 48,48$$

*Erste Messprobe.* Beim Abstecken des Scheitels  $S$  durch Abtragen von  $MS = 48,48$  auf  $MN$  wurde bis zu  $N$  durchgemessen und gefunden:

$$MN = 96,97 \text{ statt } 96,96.$$

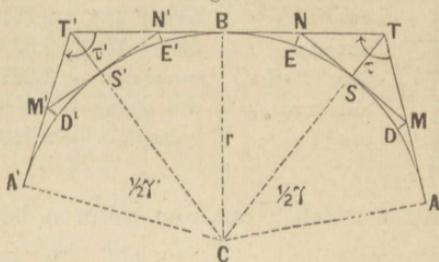
*Schlussprobe.* Messung der Peripheriewinkel im Scheitel  $S$ .

Ziel	Ablesung	Winkel	Soll	Fehler
A	18° 22' 15"			
B	25 54 30	7° 32' 15"	7° 32' 14"	- 0' 01"
M	33 26 30	7 32 00	7 32 13	+ 0 13
N	213 26 15	179 59 45	180 00 00	+ 0 15
D	220 59 00	7 32 45	7 32 13	- 0 32
E	228 31 15	7 32 15	7 32 14	- 0 01
<i>Rechenprobe:</i> Ablesung bei A			210 08 54	- 0 06
davon ab Fehlersumme			18 22 15	
Ablesung bei E			+ 0 06	
			228 31 15	

### Aufgabe 18.

Einen Kreis an drei sich schneidende Gerade berührend zu legen, nach Messung der Brechungswinkel durch den Theodolit. Neun Hauptpunkte abzustecken. Nachdem die Strecke  $TT'$  und die Winkel  $\tau$  und  $\tau'$  gemessen und letztere auf dem Felde halbiert worden sind, findet sich die Lage des Berührungspunktes  $B$  gemäß Figur 16 aus der Proportion:

Fig. 16.



$BT : BT' = \cot \frac{1}{2} \tau : \cot \frac{1}{2} \tau'$ ,  
woraus die Verhältnisse  $BT : TT'$  und  $BT' : TT'$  zu bilden sind. Man bekommt nach einfachen Umformungen:

$$BT = TT' \frac{\cos \frac{1}{2} \tau \sin \frac{1}{2} \tau'}{\sin \frac{1}{2} (\tau + \tau')} ; \quad BT' = TT' \frac{\sin \frac{1}{2} \tau \cos \frac{1}{2} \tau'}{\sin \frac{1}{2} (\tau + \tau')} . \quad (1)$$

Als Rechenprobe dient selbstverständlich:

$$BT + BT' = TT' . \quad (2)$$

Der Kreisradius  $r$  berechnet sich doppelt aus:

$$r = BT \frac{1}{2} \tau = BT' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau' . \quad (3)$$

Mit  $BT = AT$  und  $BT' = A'T'$  sind drei Hauptpunkte des Kreises festgelegt. In jedem seiner beiden Zweige werden jetzt noch fernere 3 Punkte ganz nach dem Vorgang von Aufgabe 15 bestimmt.

Sämtliche Haupt- und Hilfspunkte auf den Berührenden werden bei durchlaufender Längenmessung abgesetzt, und zum Schutz gegen Fehler, namentlich grobe, jede solche Messung in umgekehrter Richtung wiederholt, wobei man nicht versäumen soll, alle Ergebnisse in einen Handriß einzutragen, wie auch im folgenden Beispiel geschehen ist.

Zur Mefprobe überzeugt man sich, ob  $MSN$ ,  $M'S'N'$  je in eine Gerade fallen, untersucht die Gleichheit von  $MS$  und  $S'N$ ,  $M'S'$  und  $S'N'$  und prüft schließlich durch Messung der Peripheriewinkel auf dem Theodolitstandpunkte  $B$ , ob jeder Zweig der Kurve in gleiche Bogen zerlegt wurde.

Gemessen:

$$\left. \begin{array}{l} \tau = 108^{\circ} 16' 42'' ; \quad \frac{1}{2} \tau = 54^{\circ} 8' 21'' \\ \tau' = 118^{\circ} 14' 30'' ; \quad \frac{1}{2} \tau' = 59^{\circ} 7' 15'' \end{array} \right\} \frac{1}{2} (\tau + \tau') = 113^{\circ} 15' 36''$$

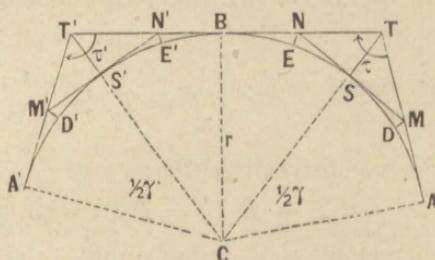
$$TT' = 155,135 \text{ m (aus 2 Messungen).}$$

## Berechnung der drei ersten Hauptpunkte.

Formel	Argument	log	log	Ergebnis	Bedeutung
$TT'$ $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}(\tau + \tau')$	155,135 113° 15' 36"	2,190 71 0,036 82	} 2,227 53	155,137	$BT + BT'$ (Rechenprobe)
$\cos \frac{1}{2} \tau$ $\sin \frac{1}{2} \tau'$ $TT' \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(\tau + \tau')$ $\sin \frac{1}{2} \tau$ $\cos \frac{1}{2} \tau'$	54° 8' 21" 59 7 15 berechnet. wie oben. desgl.	9,767 76 9,933 62 2,227 53 9,908 72 9,710 31	0,140 96 1,928 91 2,069 87 1,846 56 0,223 30	84,900 117,453 70,237	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau$ $AT = BT$ $r$ $A'T' = B'T'$ $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau'$

log  $r$  weicht, aus den unteren beiden Logarithmen gebildet, um eine

Fig. 16.



Einheit der letzten Dezimalstelle ab, was beim Aufschlagen der Zahl berücksichtigt werden kann.

## Berechnung der übrigen sechs Punkte.

Formel	Argument	log	log	Ergebnis	Bedeutung
$r$	berechnet.	2,069 87	} 1,579 85	84,90	$AT^*$
$\operatorname{tg} \frac{1}{4} \gamma$	17° 55' 50"	9,509 98		38,01	$AM^*$
$\operatorname{tg} \frac{1}{8} \gamma$ $AM$	8 57 55 berechnet.	9,198 00 1,579 85	} 1,438 89	6,00	$MD^{**}$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma$	35° 51' 39"	9,859 04		27,47	$TS \dagger$
$TS$ $\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \gamma$	berechnet. wie oben.	1,438 89 0,232 24	} 1,671 13	46,90	$MT^*$
$\sec \frac{1}{2} \gamma$ $r$ $\sec \frac{1}{4} \gamma$	wie oben. berechnet. 17° 55' 50"	0,091 28 2,069 87 0,021 62	} 2,161 15 } 2,091 49	144,93 123,45	$TC \dagger$ $MC^{**}$

Berechnung der übrigen sechs Hauptpunkte. (Fortsetzung.)

Formel	Argument	log	log	Ergebnis	Bedeutung
$r$	berechnet.	2,069 87	} 1,511 07	70,24	$A' T' *$
$\text{tg } 1/4 \gamma'$	$15^\circ 26' 22''$	9,441 20		32,44	$A' M' *$
$\text{tg } 1/8 \gamma'$	7 43 11	9,132 11	} 0,643 18	4,40	$M' D' **$
$A' M'$	berechnet.	1,511 07		1,287 77	19,40
$\text{tg } 1/2 \gamma'$	$30^\circ 52' 45''$	9,776 70			
$T' S'$	berechnet.	1,287 77	} 1,577 46	37,80	$M T' *$
$\text{cosec } 1/2 \gamma'$	wie oben.	0,289 69			
$\text{sec } 1/2 \gamma'$	wie oben.	0,066 38	} 2,136 25	136,85	$T' C \dagger$
$r$	berechnet.	2,069 87		2,085 83	121,85
$\text{sec } 1/4 \gamma'$	$15^\circ 26' 22''$	0,015 96			

Rechenproben:  $A M + M T = A T$ ;  $A' M' + M' T' = A' T' (*)$   
 $117,45 + M D = M C$ ;  $117,45 + M' D' = M' C (**)$   
 $117,45 + T S = T C$ ;  $117,45 + T' S' = T' C (\dagger)$

Messprobe: Peripheriewinkelmessung im Standpunkte B.

Ziel	Ablesung	Winkel	Sollwert	Fehler
A	$93^\circ 22' 00''$	} $8^\circ 56' 30''$	} $8^\circ 57' 55''$	$+ 1' 25''$
D	84 25 30			$- 1 35$
S	75 26 00			$+ 0 25$
E	66 28 30			$- 0 35$
T	57 30 00			$+ 0 15$
$T'$	237 30 15	179 59 45	180 00 00	$+ 2 26$
$E'$	229 49 30	7 40 45	} 7 43 11	$- 1 49$
$S'$	222 4 30	7 45 00		$+ 0 11$
$D'$	214 21 30	7 43 00		$- 0 19$
$A'$	206 38 00	7 43 30		Summe . . .

Rechenprobe: Ablesung beim Einstellen auf  $A'$   $206^\circ 38' 00''$   
 Summe der Sollwerte  $246 44 24$   
 ab die Fehlersumme  $-0 00 24$   
 Ablesung beim Einstellen auf  $A$   $453 22 00$

Die Punkte  $D$  und  $E'$  erscheinen fehlerhaft. Der Fehler in  $D$  entspricht einer radialen Verschiebung um 6 cm, der Fehler in  $E'$  einer solchen von nur 2 cm. Beide sind vermutlich daher entstanden, daß

die Punkte  $M$  und  $N'$  nicht scharf genug in die Kreistangenten eingerichtet waren. In Bezug auf  $M$  zeigt die Nachmessung von  $NM$  übrigens keinen erheblichen Fehler, indem sich  $NS = 37,98$  und  $NM = 76,00$  ergab. Eine Verschiebung von  $D$  in der Richtung der Kurve erscheint ausgeschlossen, da sie 15 cm betragen müßte. Die entsprechende Untersuchung auf dem Felde ist leider unterblieben. — Die Nachmessung von  $M'N'$  ergab  $M'S' = 32,44$  und  $M'N' = 64,87$  fast genau dem Sollwert entsprechend.

### Aufgabe 19.

Einen Kreis an zwei sich schneidende Gerade berührend zu legen, wenn ein Berührungspunkt gegeben. Wenn die Achse eines Erd- oder Wasserbauwerkes untergeordneten Ranges, z. B. eines Feldweges oder Zu- leitungsgrabens, in Gestalt eines gebrochenen Linienzuges vorläufig abgesteckt ist, so kann man bei Abrundung der Winkel die Radien meist

beinahe unbeschränkt wählen. Man wird also berechtigt sein, die Kreise statt durch ihren Radius, durch einen Berührungspunkt (z. B. in der Mitte einer kurzen Zugseite) näher zu bestimmen. Kreisabsteckungen solcher Art erfolgen in der Regel auf Grund, nicht von Winkelmessungen mit dem Theodolit, sondern des im Felde aufgemessenen gleichschenkligen Dreiecks  $ATB$ , dessen gleiche Seiten  $AT$  und  $BT$  der abzusteckende Kreis in  $A$  und  $B$  berühren soll und von dem außer

den drei Seiten auch die Höhe  $TF = h$ , unter scharfer Einrichtung ihres Fußpunktes  $F$ , gemessen wird.

Obwohl nun aus diesen Maßen der Winkel  $\gamma$  abgeleitet und Winkelfunktionen zur ferneren Rechnung verwandt werden könnten, so ist es doch folgerichtiger und kürzer, die gemessenen Strecken unmittelbar in die Rechnung einzuführen. Die gemessene Strecke  $TF = h$  läßt sich zunächst ausdrücken durch:

$$h = TF = r \sin^{1/2} \gamma \operatorname{tg}^{1/2} \gamma,$$

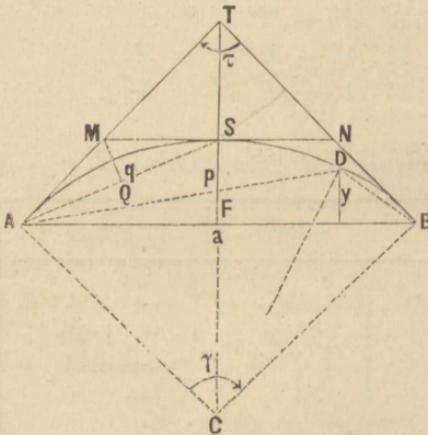
und die abzusetzende Pfeilhöhe  $SF = p$  des Bogens  $ASB$  durch:

$$p = SF = r \sin^{1/2} \gamma \operatorname{tg}^{1/4} \gamma,$$

woraus das Verhältnis  $p : h$  wie

$$p : h = \operatorname{tg}^{1/4} \gamma \cot^{1/2} \gamma = \frac{\cos^2 1/4 \gamma - \sin^2 1/4 \gamma}{2 \cos^2 1/4 \gamma}$$

Fig. 17.



hervorgeht. Hieraus folgt leicht

$$p = \frac{1}{2} h (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} \gamma),$$

und weil  $SAF = \frac{1}{4} \gamma$  und  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} \gamma = p : \frac{1}{2} a$  ist:

$$p = \frac{1}{2} h \left( 1 - \frac{4p^2}{a^2} \right). \quad (1)$$

Für den Fall nun, daß  $\gamma$  also auch  $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} \gamma$  klein ist, können wir als erste Annäherung das zweite Klammernglied schwinden lassen und setzen:

I. Annäherung: 
$$p_1 = \frac{1}{2} h. \quad (2)$$

Als zweite Näherung führen wir in den Klammerausdruck in (1) die Größe  $p_1$  für  $p$  ein und erhalten:

II. Annäherung: 
$$p_2 = \frac{1}{2} h \left( 1 - \frac{h^2}{a^2} \right). \quad (3)$$

In dritter Näherung wird, wie eben  $p_1$ , so nun  $p_2$  rechter Hand in (1) eingeführt, der Bruch  $4p_2^2 : a^2$  im Zähler und Nenner mit  $\left( 1 + 2 \frac{h^2}{a^2} \right)$  multipliziert und dann durch Abwerfen höherer Zählerglieder gefunden:

III. Annäherung: 
$$p_3 = \frac{1}{2} h \left( 1 - \frac{h^2}{a^2 + 2h^2} \right). \quad (4)$$

Durch die Annäherung I vernachlässigt man in  $p_1$  nicht über 0,001  $h$ , so lange  $a$  nicht unter 23  $h$ , oder die Berührenden sich nicht unter spitzerem Winkel als  $170^\circ$  schneiden. Bis zu einem Schnittwinkel von  $148^\circ$  oder dem Verhältnis  $a : h = 7$  kann man mit der Annäherung II herabsteigen, ohne einen größeren Fehler als 0,0005  $h$  zu befahren, und die Näherungsformel III endlich gestattet unter derselben Bedingung bis zu  $110^\circ$  oder  $a : h = 3$  (genauer 2,85) herunterzugehen\*).

Bei noch spitzerem Schnittwinkel der Zugseiten legt man eine Zwischentangente  $MN$  ein, die man so führen wird, daß  $MT = NT$ , falls man die Kurve  $ASB$  mit *einem* Radius zu konstruieren wünscht. Man mache  $AM = MS$ ,  $BN = NS$  und wende auf die Bogen  $AS$  und  $BS$  das zuvor beschriebene Näherungsverfahren an. Statt der Sehne  $AB$  werden dazu die Sehnen  $AS$  und  $BS$ , statt  $FT$  die Höhen der gleichschenkligen Dreiecke  $AMS$  und  $SNB$  gemessen, statt  $p$  wird  $q$  berechnet u. s. w. Für den Fall  $MT = NT$  wird Winkel  $SMA = BNS = 90 + \frac{1}{2} \tau$ , also sobald  $\tau > 40^\circ$  stumpf genug zur Anwendung der Näherungsrechnung.

\*) Formel (3) kann, wenn verwendbar, für logarithmische Rechnung umgeformt werden.

So wurde in dem folgenden *Beispiel* verfahren. Abgetragen war  $TM = TN = 15$  m, gemessen  $MN = 19,88$  m. Der bloße Überschlag ergab für  $TS = \sqrt{225 - 100}$  den Näherungswert 11, also

$$MN < 2TS,$$

sodafs das Einlegen einer Hülfs tangente sich als nötig erwies. Als solche ward  $MN$  sofort halbiert, wozu schon bei der Messung in der Nähe von  $S$  ein Hülfspflock auf die runde Meterzahl 10 abgesetzt worden war, von dem aus 0,06 m rückwärts abgetragen den Punkt  $S$  festlegten. Dann folgte das Absetzen der Strecken  $MA = NB = 9,94$  m, die Messung von  $AS = 18,12$  und  $MQ = 4,09$ . Das Verhältnis  $AS : MQ$  ist sehr nahe 4,5, daher

$$7MQ > AS > 3MQ,$$

wonach nur die Näherungsformel III zur Anwendung kommen darf, also

$$\begin{aligned} q &= 2,045 \left( 1 - \frac{4,09^2}{18,12^2 + 2 \cdot 4,09^2} \right) \\ &= 2,045 \left( 1 - \frac{16,73}{328,34 + 33,46} \right), \end{aligned}$$

wie mittelst Quadrattafel bestimmt wird. Logarithmische Rechnung ergibt für das zweite Glied der rechten Seite:

2,045	0,3107	Geprüft durch Rechnung mit gemeinen Zahlen.
16,73	1,2235	
$\frac{1}{361,8}$	7,4415	
Zweites Glied: 0,0946	8,9757	
ab von: 2,045		
gibt $q = 1,95$		

Statt  $q$  wird bequemer und *schärfer*  $MQ - q = \frac{1}{2}MQ + 0,095 = 2,14$  abgesteckt, weil dies von dem festbestimmten Punkte  $M$  aus und durch Halbieren des Winkels  $M$  mittelst Abschnürens geschehen kann.

Gewöhnlich wird die Berechnung des Radius  $r$  aus

$$r = AT \operatorname{tg} \frac{1}{2} \tau = \frac{a}{2h} \cdot AT \quad (5)$$

oder aus

$$r = (\frac{1}{4}a^2 + p^2) : 2p \quad (6)$$

nicht verlangt, weil schon der Augenschein zeigt, ob die abgesteckte Krümmung zu scharf ist oder nicht. Doch bildet (6) mit (5) zusammen eine bemerkenswerte Rechenprobe für  $p$ . Im Falle unseres Beispiels berechnet sich für  $q$  die Probe aus den Ansätzen:

$$\begin{aligned} r &= \frac{AM \cdot AQ}{MQ} & r &= \frac{AS^2}{8q} + \frac{1}{2}q \\ &= \frac{9,94 \cdot 9,06}{4,09} & &= \frac{18,12^2}{8 \cdot 1,95} + \frac{1}{2} \cdot 1,95 \end{aligned}$$

		18,12	1,2582
	9,94	18,12 <sup>2</sup>	2,5164
	9,06	<sup>1</sup> / <sub>8</sub>	9,0969
	<sup>1</sup> / <sub>4,09</sub>	<sup>1</sup> / <sub>1,95</sub>	9,7100
	$r = 22,02$	21,05	1,3233
	1,3428	+ 0,98	
		$r = 22,03$	

Dieser Radius ist hinreichend groß für einen schmalen Zuleitungsgraben, wie er in dem ausgearbeiteten Feldentwurf vorgesehen war, dem unser Beispiel entnommen ist. Wäre aber ein größerer Radius, etwa  $r' = 30$  m verlangt, so müßte die aufgemessene Figur nur als Versuchsfigur aufgefaßt und ihre sämtlichen Strecken im Verhältnis  $v = r' : r$  vergrößert abgesetzt werden. Dabei ist zu beachten, daß die Versuchsfigur, eben weil sie vergrößert werden muß, eine besonders scharfe Messung fordert.

Die Schlussprobe der Absteckung erfolgt zweckmäßig erst, nachdem zwischen die 3 (oder 5) Hauptpunkte der Kurve noch Zwischenpunkte in gleichen Abständen eingeschaltet wurden, durch Ausspannen einer Schnur über je zwei Nachbarpunkte und Messen ihres Abstandes von dem nächsten abgesteckten Kreispunkte\*). Alle so gemessenen Abstände müssen unter sich gleich und nahe doppelt so groß ausfallen als der Pfeil des Bogens, den je drei Nachbarpunkte begrenzen und halbieren. In unserem Beispiele waren in die Mitte zwischen je 2 der 5 Hauptpunkte noch Zwischenpunkte eingeschaltet, im Ganzen also 9 Kreispunkte abgesteckt, doch fehlt Angabe über den Ausfall der Mefßprobe.

Zum Einschalten von Kreispunkten in die Mitte bereits abgesteckter kann die *Viertelsmethode* dienen, welche bekanntlich darauf beruht, daß der Pfeil des halben Kreisbogens sehr nahe den vierten Teil vom Pfeile des ganzen ausmacht, also z. B. in Figur 17 daß  $q = \frac{1}{4}p$  ist. Hier sei nur darauf hingewiesen, in wie weit bei Absteckungsaufgaben von der Gattung der vorliegenden die Viertelsmethode berechtigt bleibt. Aus der Figur findet sich leicht:

$$p = 2r \sin^2 \frac{1}{4}\gamma; \text{ daher auch } q = 2r \sin^2 \frac{1}{8}\gamma;$$

$$q : p = \sin^2 \frac{1}{8}\gamma : \sin^2 \frac{1}{4}\gamma;$$

während wir ein genähertes  $q'$  berechnen gemäß:

$$q' : p = \frac{\gamma^2}{64} : \frac{\gamma^2}{16} = 1 : 4. \tag{7}$$

\*) Bei richtiger Absteckung müssen auch die Lote von  $S$  auf  $AT$  und  $BT$  gleich  $p$  sein. Vergl. die Mefßproben ohne Theodolit auf S. 66.

Hieraus folgt:

$$q' : q = \sin^2 \frac{1}{4} \gamma : 4 \sin^2 \frac{1}{8} \gamma = \cos^2 \frac{1}{8} \gamma,$$

$$(q - q') : q = \sin^2 \frac{1}{8} \gamma : 1,$$

daher:

$$q - q' = q \sin^2 \frac{1}{8} \gamma \text{ und } < \frac{1}{40} q$$

so lange  $\tau$  nicht kleiner als  $110^\circ$ , also  $\gamma$  nicht größer als  $70^\circ$ , wie hier stets vorausgesetzt wird. Da übrigens  $q - q'$  wie man sieht nur klein und stets positiv, so läßt es sich in einfacher und genügender Weise mit berücksichtigen, indem man statt  $q'$  einen weit schärferen Wert  $q''$  berechnet wie folgt. Wir hatten soeben

$$q' : q = \cos^2 \frac{1}{8} \gamma; \quad q' = \frac{1}{4} p;$$

daher

$$q = q' \sec^2 \frac{1}{8} \gamma = \frac{1}{4} p (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{8} \gamma).$$

Ersetzen wir hierin  $\operatorname{tg} \frac{1}{8} \gamma$  durch  $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{4} \gamma$ , so erhalten wir die gewünschte Näherungsform für  $q$ , nämlich, weil  $\operatorname{tg} \frac{1}{4} \gamma = 2p : a$  ist:

$$q'' = \frac{1}{4} p \left( 1 + \frac{p^2}{a^2} \right), \quad (7^*)$$

worin das zweite Glied nur einen Überschlag kostet. So betrug in unserem Beispiel der Pfeil 1,95 m, die Sehne 18,12 m, wir schätzen  $p : a = \frac{1}{10}$  und fügen zu  $\frac{1}{4} p = 0,488$  noch etwa seinen 100. Teil, also 0,005, wonach  $q'' = 0,493$ .

Formel (7) liefert für den extremen Fall  $\tau = 110^\circ$  den Pfeil  $q$  um etwa seinen 900. Teil zu groß.

Während die *Viertelsmethode* von der Sehne  $AB$  als Messungslinie aus nur den Scheitelpunkt  $S$  des Bogens absteckt, können ebenso wohl beliebige Kreispunkte  $D$  durch ihre Ordinaten  $y$  abgesteckt werden, wenn man  $y$  nach der *strengen* Formel berechnet:

$$y = \frac{AD \cdot DB}{2r}, \quad (8)$$

oder  $y'$  statt  $y$  nach der *Näherungsformel* (einer Parabel vom Parameter  $r$  angehörig):

$$y' = \frac{x(a - x)}{2r}, \quad (9)$$

worin  $x$  einer der Abschnitte, in welche  $a$  durch den Fußpunkt der Ordinate zerlegt wird. Beide Formeln erheischen die Kenntnis des Kreishalbmessers, die strenge erfordert zu ihrer Anwendung eine gewisse Umsicht und Geschicklichkeit im Messen von  $AD$  und  $DB$ , Sehnen mit einem erst abzusteckenden Endpunkte, die Näherungsformel (9) aber ist nur mit Beschränkung anwendbar. Denn wenn in Figur 17 Winkel  $ACD$  mit  $\xi$  bezeichnet wird, dann ist identisch mit (8) die Formel:

$$y = 2r \sin \frac{1}{2} \xi \sin \frac{1}{2} (\gamma - \xi)$$

und identisch mit (9) die Formel:

$$y' = y \cos^{1/2} \xi \cos^{1/2} (\gamma - \xi),$$

woraus

$$y - y' = y (1 - \cos^{1/2} \xi \cos^{1/2} [\gamma - \xi])$$

hervorgeht. Seinen größten Betrag erreicht  $y - y'$  bei gegebenem  $\gamma$  für  $\xi = 1/2 \gamma$ , nämlich

$$y - y' = y \sin^2 1/4 \gamma.$$

Da nun zur Absteckung einer Parabel statt des Kreises bei der vorliegenden Aufgabe immer nur die Hälfte des Bogens in Frage kommt, den wir bei Betrachtung der Viertelmethode mit  $\gamma$  bezeichneten, so erweist sich der Fehler der Kleinabsteckung in der Bogenmitte als gleich groß nach beiden Verfahren. Der Formel (9) ähnlich wie in (7) ein verbesserndes Zusatzglied zu geben, würde zu größeren Umständlichkeiten führen als die Anwendung der strengen Formel (8).

In der vorstehend geschilderten Art läßt sich nach einiger Übung eine ganze Reihe von Kreisabsteckungen untergeordneten Ranges samt Mefspalten in wenigen Stunden erledigen.

### Aufgabe 20.

*Einen Kreis an drei sich schneidende Gerade berührend zu legen, ohne Messung der Brechungswinkel durch den Theodolit.* Diese Aufgabe bedingt eine zweimalige Lösung der vorigen, nachdem der Berührungspunkt  $B$  auf  $TT'$  bestimmt worden ist (Figur 18 auf S. 67). Dazu dienen, wie in Aufgabe 18 die gemessenen Brechungswinkel, so hier die Versuchsdreiecke  $A_o B_o T$  und  $A'_o T' B'_o$  mit ihren Basen  $a_o$  und  $a'_o$  und ihren Höhen  $h_o$  und  $h'_o$ ; denn man findet leicht:

$$TB = \frac{TT' \cdot \frac{h_o}{a_o}}{\frac{h_o}{a_o} + \frac{h'_o}{a'_o}}; \quad T'B = \frac{TT' \cdot \frac{h'_o}{a'_o}}{\frac{h_o}{a_o} + \frac{h'_o}{a'_o}} \quad (1)$$

und als Rechenprobe  $TB + T'B = TT'$ . (2)

Nun denken wir uns die Seiten der Versuchsdreiecke in den Verhältnissen

$$v = \frac{BT}{B_o T}; \quad v' = \frac{BT'}{B'_o T'} \quad (3)$$

vergrößert und berechnen aus den vergrößerten Zahlen die Pfeilhöhen

$$p = 1/2 h \left( 1 - \frac{h^2}{a^2 + 2h^2} \right); \quad p' = 1/2 h' \left( 1 - \frac{h'^2}{a'^2 + 2h'^2} \right); \quad (4)$$

oder wir berechnen in genau derselben Form  $p_o$  und  $p'_o$  aus den Messungszahlen  $h_o h'_o a_o a'_o$  und multiplizieren nun erst mit  $v$  und  $v'$ .

Endlich werden nach Formel (7) der vorigen Aufgabe die Größen  $q$  und  $q'$  gemäfs

$$q = \sqrt[1]{4} p \left( 1 + \frac{p^2}{a^2} \right); \quad q' = \sqrt[1]{4} p' \left( 1 + \frac{p'^2}{a'^2} \right) \quad (5)$$

ermittelt. In (4) und (5) ist es offenbar gleichgültig, ob in die Klammerausdrücke die Messungszahlen unmittelbar oder vergrößert eingeführt werden.

Als Rechenproben dienen, wie in Aufgabe 19, mehrfache Berechnungen des Kreishalbmessers nach den Formeln:

$$r = BT \cdot \frac{a}{2h}; \quad r = BT' \cdot \frac{a'}{2h'}; \quad (6)$$

$$r = \frac{a^2}{8p} + \sqrt[1]{2} p; \quad r = \frac{a'^2}{8p'} + \sqrt[1]{2} p'; \quad (7)$$

diese Proben schliessen jedoch  $q$  und  $q'$  nicht ein.

Beim Abstecken mufs grofse Sorgfalt auf das Einrichten der Pfeilfußpunkte in die Sehnen verwandt werden, weshalb man sich zweckmäfsig einer Richtschnur bedient, mit deren Hülfe man auch die Winkel bei  $T$  und  $T'$  halbiert, um  $h - p$  und  $h' - p'$  auf den Halbierungslinien abzutragen.

Die Hauptprobe der Absteckung erfolgte in unserem Beispiel durch Peripheriewinkelmessung über  $B$  als Scheitel, um namentlich die gemeinsame Berührung beider Kurvenzweige mit  $TT'$  möglichst scharf und dabei bequem zu prüfen, obwohl im Ernstfalle dieses Mittel in der Regel nicht zu Gebote stehen wird. Jener Mefsprobe halber sind auch die Centriwinkel der Bogenzweige berechnet worden.

Doch läfst sich auch ohne Theodolit die Absteckung scharf prüfen, zunächst durch Nachmessen sämtlicher Kleinsehnen, für welche der pythagoräische Lehrsatz die Solllänge liefert; dann durch Nachmessen der Abstände aller Kleinpunkte  $D, E, E', D'$  von den zunächst gelegenen Berührenden des Kreises (Fig. 18). Diese Abstände müssen, wie leicht zu beweisen, gleich  $q$  und  $q'$  sein. Weichen sie davon ab, so ist dies ein Beweis, dafs der betreffende Bogenzweig die Gerade nicht wirklich berührt, wie er soll. Man bilde dann aus der gemessenen Kleinsehne  $s$  oder  $s'$  nochmals den Betrag  $q$  oder  $q'$  nach der strengen Formel:

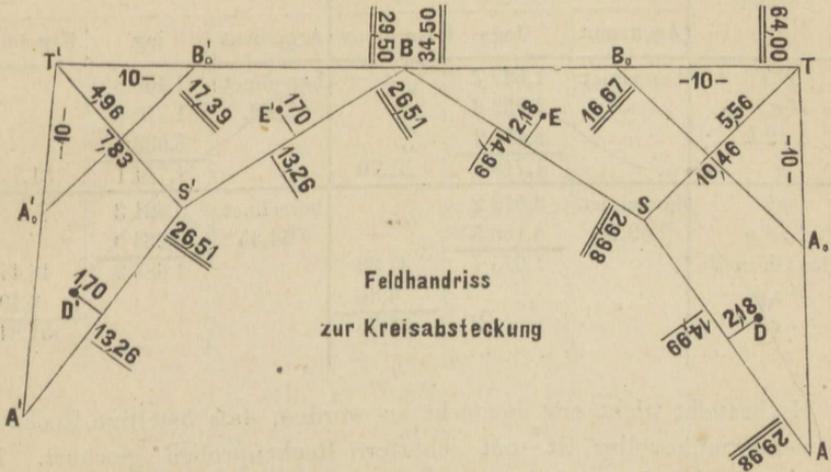
$$q = \frac{s^2}{2r} = \frac{hs^2}{a \cdot AT}; \quad q' = \frac{s'^2}{2r} = \frac{h's'^2}{a' \cdot A'T'} \quad (8)$$

um zu erkennen, ob nicht etwa ein Fehler beim Berechnen von  $q$  oder  $q'$  oder an früherer Stelle eingeschlichen war.

Diese beiden Mefsproben müssen immer zugleich angewandt werden. Man darf nämlich nicht übersehen, dafs die Viertelsmethode, wenn wirklich  $q = \sqrt[1]{4} p$  gemacht wurde, unter allen Umständen, d. h. für

ein beliebiges  $p$ , einen Kreisbogen liefert, dessen 4 Kleinsehnen unter sich gleich sein müssen. Dafs dieser Kreisbogen aber zwei gegebene

Fig. 18.



Gerade berührt, ist erst erwiesen, wenn auch die zweite Mefsprobe stimmt.

Beispiel.

Berechnung der 5 Hauptpunkte  $ASBS'A'$ .

Formel	Kurvenzweig bei $T$ .			Kurvenzweig bei $T'$ .		
	Argument	log	Ergebnis	Argument	log	Ergebnis
$h_0$	5,56	0,745 1		4,96	0,695 5	
$1 : a_0$	$1/16,67$	8,778 1		$1/17,39$	8,759 8	
$a_0 : h_0$		9,523 2	0,333 6		9,455 3	0,285 4
$a'_0 : h'_0$			0,285 4			
$1/\text{Summe}$		0,208 3	0,619 0		0,208 3	
$TT'$	64,00	1,806 2			1,806 2	
$BT$		1,537 7	34,49		1,469 8	29,50
			29,50			
$TT'$ (Probe)	64,00		63,99			
$v = 0,1 BT$	3,449	0,537 7		2,950	0,469 8	
$h = v h_0$		1,282 8	19,18		1,165 3	14,63
$a = v a_0$		1,759 6			1,710 6	
$a^2$		3,519 2	3305		3,421 2	2638
$h^2$		2,565 6	367,8		2,330 6	214,1
$1 : (a^2 + 2h^2)$	$1/4040$	6,393 6		$1/3066$	6,513 5	
$1/2 h$		0,981 8	9,590		0,864 3	7,317
2 tes Gl. in (4)		9,941 0	0,873		9,708 4	0,511
Summe: $h - p$			10,463			7,828
Differenz: $p$			8,717			6,806
Summenprobe			19,180			14,634

Berechnung der 5 Hauptpunkte  $ASBS'A'$ . (Fortsetzung.)

Formel	Kurzweiz bei $T$ .			Kurzweiz bei $T'$ .			
	Argument	log	Ergebnis	Argument	log	Ergebnis	
$BT$	berechnet.	1,537 7	51,70	berechnet.	1,469 8	51,78	
$a$	desgl.	1,759 6		berechnet.	1,710 6		
$1:2h$		8,416 2		berechnet.	8,533 7		
$r$		<u>1,713 5</u>		berechnet.	<u>1,714 1</u>		
$a^2$	berechnet.	3,519 2	47,39	berechnet.	3,421 2	48,44	
$1:8p$	$1/69,74$	8,156 5		berechnet.	$1/54,45$		8,264 0
1 tes Gl. in (7)		<u>1,675 7</u>		berechnet.	<u>1,685 2</u>		3,40
$1/2 p$				berechnet.			<u>3,40</u>
$r$				berechnet.			<u>51,84</u>

Es braucht nicht erst bemerkt zu werden, daß 5stellige Rechnung nur wenig mühevoller ist und schärfere Rechenproben gewährt. Für die Schärfe der Absteckung aber würde in unserem Beispiel augenscheinlich nichts gewonnen.

## Berechnung der 4 Zwischenpunkte.

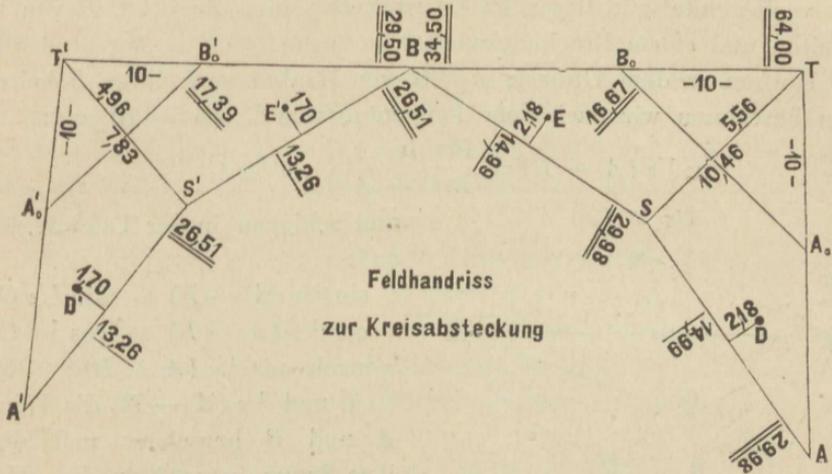
Formel	Kurzweiz bei $T$ .			Kurzweiz bei $T'$ .		
	Argument	log	Ergebnis	Argument	log	Ergebnis
$p$	8,717	0,940 4	0,050	6,806	0,832 9	0,030
$p^2$		1,880 8			1,665 8	
$1:a^2$	berechnet.	6,480 8		berechnet.	6,578 8	
$1/4$	$1/4$	9,397 9		berechnet.	9,397 9	
2 tes Gl. in (5)		<u>8,699 9</u>		berechnet.	<u>8,475 4</u>	
$1/4 p$					1,702	
$q$			<u>2,23</u>		<u>1,73</u>	

Geprüft durch eine Überschlagsrechnung mit gemeinen Zahlen. Bei der Absteckung wurde, wie der Feldhandriß in unserer Figur zeigt, das zweite Glied in (5) durchweg fortgelassen, woraus sich der Vorzeichenwechsel in den Fehlern der Schlußprobe erklärt. Außerdem scheint  $S'$  nicht mit voller Sorgfalt abgesetzt. Aber für viele Zwecke ist die Kurve trotz dieser vermeidbaren Mängel schon hinreichend genau abgesteckt.

In dem nachfolgenden Winkelverzeichnis wurden die Sollbeträge der Peripheriewinkel sehr nahe gleich dem Mittel derjenigen Größen

gewählt, welche sich in mehrfacher Weise bequem aus den Versuchsdreiecken berechnen ließen.

Fig. 18.



Messprobe: *Peripheriewinkelmessung über B.*

Ziel	Abgelesen	Unterschiede	Sollbeträge	Fehler
A'	30° 18' 30''	7° 24' 30''	180 00 00	+ 1' 00''
D'	37 43 00	7 28 00		- 2 30
S'	45 11 00	7 25 30		0 00
E'	52 36 00	7 26 30		- 1 00
T'	60 03 00	179 59 00		+ 1 00
T	240 02 00	8 26 00	8 25 30	- 0 30
E	248 28 00	8 24 00		+ 1 30
S	256 52 00	8 28 00		- 2 30
D	265 20 00	8 24 00		+ 1 30
A	273 44 00			Summe

*Rechenprobe:*

Aufstellung auf A'	30°	18'	30''
Summe der Sollwerte	243	24	00
ab die Fehlersumme	+	1	30
Aufstellung auf A	273	44	00

### Aufgabe 21.

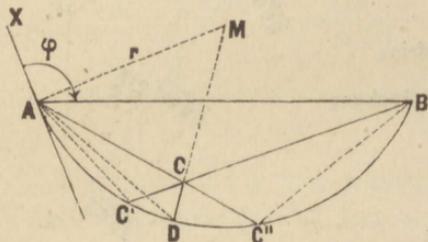
Von einem Kreis von 120 m Radius sind zwei zugängliche Punkte A und B abgesteckt, diese aber gegenseitig nicht sichtbar und ihr Abstand direkt nicht messbar. Einen dritten Kreispunkt C' einzuschalten. Allgemein löst man diese Aufgabe durch einen Polygonzug, welcher

entlang dem Kreis von  $A$  nach  $B$  führt, aus dem sodann  $AB$  berechnet und von dem aus  $C'$  als Schnittpunkt einer Zugseite mit dem Kreis, wohl auch wie  $D$  mittelst eines kurzen radialen Strahls abgesetzt wird. Der vorliegende günstigste Fall gestattet einen Zug  $ACB$  von nur 2 Seiten und *einem* Brechungswinkel zu legen.

Heißen in dem Dreieck  $ACB$  die Winkel nach ihren Scheiteln, dann berechnen wir nach dem Tangentensatze  $\frac{1}{2}(A - B)$  aus:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{BC - AC}{BC + AC} \cot \frac{1}{2}C \quad (1)$$

Fig. 19.



und schlagen in der Tafel zugleich auf:

$$\begin{array}{cc} \sin \frac{1}{2}(A - B) & \sin \frac{1}{2}C \\ \cos \frac{1}{2}(A - B) & \cos \frac{1}{2}C \end{array}$$

wonach aus  $\frac{1}{2}(A + B) = 90 - \frac{1}{2}C$  und  $\frac{1}{2}(A - B)$  die Winkel  $A$  und  $B$  berechnet und durch ihre Summe geprüft werden. Unter

Anwendung der Gauß'schen Formeln wird darauf  $AB$  doppelt aus:

$$AB = \frac{BC + AC}{\cos \frac{1}{2}(A - B)} \sin \frac{1}{2}C = \frac{BC - AC}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} \cos \frac{1}{2}C \quad (2)$$

berechnet, dann, weil  $AX$  eine Berührende,

$$C' = C'' = \varphi = \arcsin \frac{AB}{2r} \quad (3)$$

Aus den Dreiecken  $ACC'$  und  $CBC''$  folgt nach dem Sinussatze:

$$CC' = \frac{AC}{\sin \varphi} \sin(C - \varphi); \quad CC'' = \frac{BC}{\sin \varphi} \sin(C - \varphi) \quad (4)$$

und als *Rechenprobe* aus der Lehre von den Kreissehnen (da  $XAC'' = \varphi + A$  u. s. w.):

$$\begin{array}{l} AC'' = 2r \sin(\varphi + A) = AC + CC''; \\ BC' = 2r \sin(\varphi + B) = BC + CC'. \end{array} \quad (5)$$

Die kurze Strecke  $CC'$  oder  $CC''$  oder beide werden in der Verlängerung von  $BC$  und  $AC$  abgetragen (bei negativen Vorzeichen in entgegengesetzter Richtung) und eine *Messprobe* gewonnen, indem man Winkel  $AC'B$  oder  $AC''B$  oder beide mißt und mit ihrem Sollwert  $\varphi$  vergleicht.

Das Absetzen von  $CD$  in der Richtung des Radius  $MD$  empfiehlt sich für den Fall, daß sich Punkt  $C$  weit außerhalb des Kreises gelegen erweist, demnach die Strecken  $CC'$  und  $CC''$  zu lang werden. Von unserer Figur als dem Normalfall ausgehend haben wir nach Berechnung der Formeln (1) bis (3) das Dreieck  $AMC$  mittelst des Tangentensatzes und der Gauß'schen Formeln aufzulösen, da der Radius  $AM$ , die Seite  $AC$  und der von ihnen eingeschlossene Winkel  $MAC =$

$A + \varphi - 90$  bekannt sind. Aus dem Dreieck  $ACD$ , in welchem  $AC$ , Winkel  $CAD = 180 - (A + \varphi + \frac{1}{2}M)$  und  $DCA$  bekannt, wird mit hülfe des Sinussatzes  $CD$  gefunden und zur *Rechenprobe* mit  $r - MC$  verglichen. Negatives Vorzeichen entspricht der Lage von  $C$  auferhalb des Kreises.

Zur Absteckung von  $D$  stellt man den Theodolit in  $C$  auf, richtet das Fernrohr auf  $A$ , liest die Richtung  $CA$  ab und vermehrt sie um  $ACM$ . Bei solcher Ablesung zielt das Fernrohr auf den Kreismittelpunkt  $M$ , und  $CD$  kann seinem Vorzeichen entsprechend (von  $M$  weg oder gegen  $M$  hin) abgesetzt werden.

Die *Messprobe* erfolgt mit dem Theodolit über  $D$  durch Vergleich des Winkels  $ADB$  mit seinem Sollwert  $\varphi$  wie zuvor.

Im nachstehenden *Beispiel* war  $C$  aus zwei Winkelmessungen bei verschiedenen Fernrohr- und Kreislagen zu  $122^\circ 54'$ ,  $AC$  und  $BC$  aus je zwei Lattenmessungen in entgegengesetzten Richtungen gefunden wie folgt:

$$AC = \frac{1}{2} (106,385 + 106,39) = 106,388$$

$$BC = \frac{1}{2} (128,77 + 128,76) = 128,765$$

Formel	Argument	log	log	Ergebnis	Bedeutung
$BC - AC$	22,377	1,349 80		122° 54' 00"	$C$
$\frac{1}{2} BC + AC$	$\frac{1}{2} 235,153$	7,628 65		57 6 00	$180 - C$
$\cot \frac{1}{2} C$	61° 27'	9,735 67		28° 33' 00"	$\frac{1}{2} (A + B)$
$\text{tg } \frac{1}{2} (A - B)$		8,714 12		2 57 50	$\frac{1}{2} (A - B)$
$BC - AC$		1,349 80		31 30 50	$A$
$\text{cosec } \frac{1}{2} (A - B)$	berechnet.	1,286 45		25 35 10	$B$
$\cos \frac{1}{2} C$	wie oben.	9,679 36			
$AB$		2,315 61			$AB$
$BC + AC$		2,371 35			
$\sec \frac{1}{2} (A - B)$	berechnet.	0,000 58			
$\sin \frac{1}{2} C$	wie oben.	9,943 69			
$AB$		2,315 62			$AB$
$\frac{1}{2} r$	$\frac{1}{2} 240$	7,619 79		122° 54' 00"	$C$
$\sin \varphi$		9,935 41		120 28 45	$\varphi$
$AC$	106,388	2,026 89	} 0,717 19 } 0,800 10	2 25 15	$C - \varphi$
$\sin (C - \varphi)$	2° 25' 15"	8,625 71		5,214	$CC'$
$\text{cosec } \varphi$	berechnet.	0,064 59		6,311	$CC''$
$BC$	128,765	2,109 80			
$\sin (A + \varphi)$	151° 59' 35"	9,671 71	} 2,051 92 } 2,127 04	112,70	$AC''$
$2r$	240	2,380 21		133,98	$BC'$
$\sin (B + \varphi)$	146° 03' 55"	9,746 83			

Rechenprobe:

$$A C'' = 106,388 + 6,311 = 112,699 \text{ wie zuvor.}$$

$$A C' = 128,765 + 5,214 = 133,979 \quad \text{„} \quad \text{„}$$

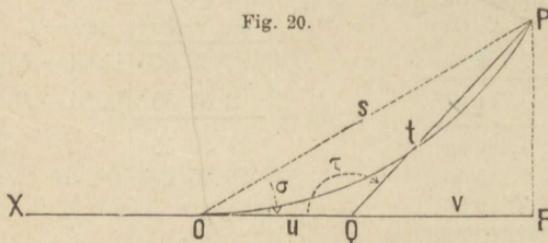
Da in der Richtung  $C'' B$  ein starker Baum stand, so konnte die *Messprobe* nur in  $C'$  erfolgen. Es fand sich  $\angle A C' B = 120^\circ 28'$  gegen  $120^\circ 28' 45'' = q$ . Diesem Unterschied würden, wenn  $C'$  nahe dem Scheitel des Kreisbogens  $A C' B$  läge, etwa  $1\frac{1}{2}$  cm Abstand vom Kreis entsprechen, sonst allenthalben weniger; vorausgesetzt nämlich, daß  $\log A B$  richtig bestimmt war, was selbstverständlich in Strenge nicht zutrifft. In einem besonders wichtigen Falle würde daher zum Schluß noch  $A C'$  zu messen sein, um  $\log A B$ , fast unabhängig von der ersten Messung, zu prüfen.

Die Absteckung eines Kreispunktes  $D$  in radialer Richtung von  $C$  aus unterblieb.

### Aufgabe 22.

Auf dem Felde gegeben eine Berührende  $Q X$  und ein Punkt  $P$  eines Kreises, dessen Radius  $r$  bekannt. Den Berührungspunkt  $O$  abzustecken. Man wählt auf  $Q X$  den Aufstellungspunkt  $Q$  für den Theodolit möglichst nahe dem Berührungspunkt, doch so, daß  $Q P = t$  ohne Schwierigkeit gemessen werden kann, mißt  $\angle X Q P = \tau$  und berechnet  $\sigma$

Fig. 20.



und  $u$  aus den leicht abzuleitenden Formeln:

$$\sin \sigma = \sqrt{\frac{t \sin \tau}{2 r}}, \quad (1)$$

$$u = \frac{\sin(\sigma + \tau)}{\sin \sigma} t. \quad (2)$$

Zur Rechenprobe eignet sich die Ermittlung von  $F O = u - v$ , wobei die Strecken von  $Q$  gegen  $X$  positiv, gegen  $F$  negativ gezählt werden. Die Figur giebt:

$$u - v = t \sin \tau \cot \tau \quad (3)$$

und

$$v = t \cos \tau. \quad (4)$$

Die Werte in (3) und (4) vereinigt müssen  $u$  liefern.

Als Probe der Messung dient nach Aufstellung des Theodolits in  $O$  die Messung des Winkels  $\angle X O P = 180 - \sigma$ , allenfalls auch die Messung der Strecke  $s$ , obwohl diese nicht immer ausführbar sein wird. Aus der Figur folgt:

$$s = t \sin \tau \operatorname{cosec} \sigma. \quad (5)$$

In unsrem *ersten Beispiel* fand sich  $t = 67,80$ ,  $\tau$  durch Messung in zwei Kreis- und zwei Fernrohlagen zu

$$171^{\circ} \quad 26' \quad 8''$$

$$171 \quad 25 \quad 52$$

$$\text{Mittel: } 171 \quad 26 \quad 0 = \tau.$$

Daher folgende Berechnung unter der Annahme  $r = 180$  m:

Formel	Argument	log	log	Ergebnis	Bedeutung
$\cos \tau$	$171^{\circ}26'$	$9,995 \ 13 \ n$	} $1,826 \ 36 \ n$ $1,004 \ 30$	— 67,044 .....	$v$ $t \sin \tau$
$t$	67,80	$1,881 \ 23$			
$\sin \tau$		$9,173 \ 07$			
$\frac{1}{2} r$	$\frac{1}{360}$	$7,443 \ 70$			
$\sin^2 \sigma$		$8,448 \ 00$		$171^{\circ}26' \ 00''$	$\tau$
$\sin \sigma$		$9,224 \ 00$		$9^{\circ}38' \ 32''$	$\sigma$
$\operatorname{cosec} \sigma$		$0,776 \ 00$		$181^{\circ} \ 4' \ 32''$	$\sigma + \tau$
$t$	wie oben!	$1,831 \ 23$			
$\sin(\sigma + \tau)$	$181^{\circ} \ 4' \ 32''$	$8,273 \ 48 \ n$			
$u$		$0,880 \ 71 \ n$		— 7,598	$u$
$\cot \sigma$	$9^{\circ}38' \ 32''$	$0,769 \ 82$	} $1,774 \ 12$ $1,780 \ 30$	59,446 60,297	$u - v$ $s$
$t \sin \tau$	wie oben!	$1,004 \ 30$			
$\operatorname{cosec} \sigma$	desgl.	$0,776 \ 00$			

Da die Rechenprobe stimmt, nämlich

$$59,446 - 67,044 = - 7,598,$$

so wurde dieser Betrag dem Vorzeichen gemäß in der Richtung  $QF$  abgesetzt, der Theodolit in  $O$  aufgestellt und  $XOP = 170^{\circ} \ 21' \ 45''$  anstatt  $170^{\circ} \ 21' \ 18''$ , sodann  $s = 60,30$  anstatt  $60,297$  m gemessen, wodurch auch die Absteckung geprüft ist.

*Zweites Beispiel.* Gemessen  $t = 54,445$ ,  $\tau = 170^{\circ} \ 30' \ 43''$ . Die Rechnung, welche der Leser nach dem vorstehenden Muster selbst ausführen wolle, ergibt:

$$\sigma = 8^{\circ} \ 36' \ 54'',$$

$$u = 5,538, \quad v = - 53,700, \quad u - v = 59,239.$$

Nach dem Absetzen von  $u$ , diesmal in der Richtung  $QX$ , lieferte die Beobachtung des Winkels  $XOP = 171^{\circ} \ 23' \ 08''$  anstatt  $171^{\circ} \ 23' \ 06''$  eine günstig abschließende Mefprobe. Dagegen wurde die Berechnung und Nachmessung von  $s$  leider unterlassen.



und in Metern den Bogen  $TT'$  näherungsweise gleich:

$$r\tau = pr : e,$$

worin  $e$  genau genug aus einer Karte entnommen, oder abgeschritten, oder selbst abgeschätzt werden kann.

Setzt man jetzt mit dem Theodolit über  $A$  von  $AZ$  als Nullrichtung aus den Winkel

$$ZAT' = \frac{1}{2}(\gamma - \tau)$$

ab und von  $A$  aus die Strecke

$$AT' = AT + r\tau,$$

oder auch

$$AT' = 2r \sin \frac{1}{2}(\gamma + \tau),$$

so bekommt man in  $T'$  den gesuchten Berührungspunkt um so genauer, je näher  $A$  demselben gelegen war, nötigenfalls also durch eine Wiederholung des Verfahrens mit dem Theodolit über  $T'$  in aller nur erreichbaren Schärfe.

Jedenfalls prüft man durch Messung des Winkels  $AT'S'$ , welcher gleich  $\arcsin(AT' : 2r)$  werden soll, wenn  $T'S'$  die Richtung nach dem Fernpunkt bezeichnet, den Erfolg der Absteckung. Wenn möglich, stützt sich die Messprobe auch auf die Sehne  $T'B$ , die entweder direkt gemessen, oder mittelst des Sinussatzes aus dem Dreieck  $ABT'$  und dem neugemessenen  $\sphericalangle AT'B$ , oder noch einfacher bloß aus zuvor gemessenen und abgesteckten Stücken berechnet wird.

Das eben geschilderte Verfahren beruht auf dem Gebrauche des Theodolits. Ist aber die Kurve in der Nähe des Berührungspunktes im kleinen schon abgepflocht, z. B. mit gleichen Bogenstücken zwischen den Punkten 1 und 7, so wird der Theodolit entbehrlich. Man wählt 3 Kreispunkte, z. B. 2, 4, 7 aus, von denen der mittlere dem Berührungspunkte nahe, die beiden andern ihm ferner liegen, mißt die Sehne  $\overline{24}$  und  $\overline{47}$  in der Erwartung, daß wegen der Nähe von 4 und  $T$  die *Summe* beider Sehnen von  $s_2 + s_7$  nur wenig verschieden sei, und legt, den Kreis nahezu berührend, eine Gerade  $XS$  nach dem gegebenen Fernpunkte hin, fällt auf sie und mißt mit Schärfe die Lote  $y_2$  und  $y_7$ , deren Fußpunkte deshalb zweckmäÙig mit einem Abloter, und wäre es nur ein Nivellierfernrohr, in die Gerade  $XS$  eingefluchtet werden. Die letztere muß nicht eben Sekante sein, wie in Fig. 21, sondern kann von dem Kreise um  $v$  abstehen, so daß sie, parallel verschoben, in  $T$  berühren würde. Dann ist:

$$y_2 - v = s_2^2 : 2r \quad \text{und} \quad y_7 - v = s_7^2 : 2r,$$

woraus zur Bestimmung von  $T$  die Sehnen  $s_2$  und  $s_7$  und zur Bestimmung von  $T'$  auch  $v$  zu ermitteln nötig ist. Durch Subtraktion vorstehender Gleichungen von einander findet sich nach einer kleinen Umformung:

$$s_2 - s_7 = 2r \frac{y_2 - y_7}{s_2 + s_7}$$

und aus der gemessenen Summe und der berechneten Differenz beider Sehnen jede einzeln.

Man kann nun zu jeder Sehne den Bogen berechnen und darnach  $T$  zwischen die beiden ihm zunächst liegenden Kleinpunkte 3 und 4 einschalten, etwa nach (9) der Aufgabe 19. Es ist aber meist erlaubt, statt der Sehnen  $s$  in vorstehenden Formeln die Bogen  $b$  einzuführen, so daß die vorgedachte Messung von  $s_2 + s_7$  wegfällt und diese Summe durch den Bogenabstand der Punkte 2 und 7 ersetzt werden kann; vorausgesetzt, daß  $b_2$  und  $b_7$  nicht sehr groß und nicht allzu ungleich sind.

Nach Berechnung von  $v$  erfolgt der Übergang von  $T$  zu  $T'$  durch Ermittlung von  $\tau$  und  $r\tau$  wie oben. Als Meßprobe können von  $T'$  aus Sehnen nach anderen als den vorher benutzten Kreispunkten, z. B. 1 und 6 gezogen, die Lote  $y_1$  und  $y_6$  auf die Berührende  $T'S'$  gefällt und gemessen werden, woraus man abermals die Bogenabstände des Berührungspunktes von den Kurvenpföcken ableitet. Sie sollen die Absteckung von  $T'$  bestätigen. Auch muß, aus  $y_1$  und  $y_6$  berechnet,  $v$  verschwinden. Selbstverständlich kann statt dieser Meßprobe, wenn ein Theodolit vorhanden, diejenige der ersten Lösung, oder eine ähnliche angewandt werden.

Im nachfolgenden Beispiel mußte zunächst der Kreis im kleinen abgepföckt werden. Dies geschah von Punkt 1 gegen Punkt 7 hin nach gleichen Peripheriewinkeln von  $3^\circ$  und Sehnen von 20 m Länge, wobei der Theodolit auf Punkt 7 stand und zwischen 6 und 7 sich ein Sehnenabstand von 18,180 m ergab. Eingehende Prüfung erfolgte durch die sog. Sekantenprobe, d. h. durch Verlängerung jeder Kleinsehne mittelst einer Schnur und Messen ihres Abstandes von dem nächsten Kreispunkt, der nie um mehr als 1 cm von dem Sollwert abwich, nämlich von

$$20 \sin 6^\circ = 2,09 \text{ m.}$$

Eine zweite Probe lieferte die Messung der Peripheriewinkel durch den Theodolit über Punkt 4, mit folgendem Ergebnis.

Ziel	Nonius I	Nonius II	Mittel	Winkel	Sollwert
1	302° 33,5'	122° 34,0'	302° 33,75'	0° 0'	
2	305 33,0	125 33,0	305 33,00	2 59,25	3° 0'
3	308 33,5	128 33,0	308 33,25	3 0,25	3 0
5	134 32,5	314 33,0	134 32,75	185 59,5	186 0
6	137 33,0	317 33,0	137 33,00	3 0,25	3 0
7	140 16,0	320 17,0	140 16,50	2 43,5	2 43,6
	181,5	183,0	182,25	197 42,75	

Rechenproben:  $\frac{1}{2} (181,5 + 183,0) = 182,25;$

$$302^\circ 33,75' + 197^\circ 42,75' = 140^\circ 16,50'.$$

Der letzte Sollwert  $\alpha = 2^\circ 43,6'$  folgt aus:

$$\alpha = \arcsin \frac{67}{2r} = \frac{18,18}{2r}$$

und

$$2r = 20 \operatorname{cosec} 3^\circ.$$

Formel u. Zahl	log	Ergebnis
20	1,301 03	
$\operatorname{cosec} 3^\circ$	1,281 20	
$2r$	2,582 23	382,15 m
$1 : 2r$	7,417 77	
18,18	1,259 59	
$\sin \alpha$	8,677 36	$2^\circ 43,6' = \alpha$

Nun erst begann die eigentliche Lösung mit dem Abstecken der Sekante  $XS$  nach dem Fernpunkt hin, dem Fällen und Messen der Lote

$$y_2 = 3,080 \text{ m und } y_7 = 10,510 \text{ m,}$$

deren Fußpunkte mit dem Theodolitfernrohr in die Gerade  $XS$  eingerichtet wurden. Statt die Sehnen  $T_2$  und  $T_7$  zu messen, begnügte man sich dagegen mit Addition der zwischen den Punkten 2 und 7 gelegenen Kleinsehnen, deren Summe für  $s_2 + s_7$  den völlig ausreichenden Näherungswert

$$s_2 + s_7 = 98,18 \text{ m}$$

liefert, während  $s_2 - s_7 = -7,43 \text{ m}$ . Daher folgende Berechnung nach den vorhin aufgeführten Formeln:

Formel	Argument	log	Ergebnis	Bedeutung
$2r$	berechnet	2,582 23	geprüft mit dem Rechenschieber	
$y_2 - y_7$	-7,43	0,870 99 <sub>n</sub>		
$1/s_2 + s_7$	1 : 98,18	8,007 98		98,18
$s_2 - s_7$		1,461 20 <sub>n</sub>	-28,92	$s_2 - s_7$
			34,63	$s_2$
			63,55	$s_7$
$s_2^2$	34,63 <sup>2</sup>	3,078 90	} 3,138	$y_2 - v$
$1 : 2r$	berechnet	7,417 77		
$s_7^2$	63,55 <sup>2</sup>	3,606 24		

Daher findet sich

$$v = 3,080 - 3,138 = 10,510 - 10,568 = -0,058$$

zum Beweise, daß  $XS$  eine Sekante ist. Mit Weglassung des Vor-

zeichens von  $v$  und nach Schätzung des Abstandes  $e$  zwischen Berührungs- und Fernpunkt zu 500 m berechnet sich

$$TT' = \frac{2rv}{1000}$$

$v$	0,058	8,763 4	geprüft mit dem Rechenschieber
$0,002r$	berechnet	9,582 2	
$TT'$		8,345 6	0,022

Die Abstände  $s'_2$  und  $s'_7$  des Punktes  $T'$  von den Punkten 2 und 7 berechnen sich zu

$$s'_2 = s_2 - TT' = 34,63 - 0,022 = 34,61$$

$$s'_7 = s_7 + TT' = 63,55 + 0,022 = 63,57$$

und die Abstände  $s'_3$  und  $s'_4$  von den Nachbarpunkten 3 und 4 aus:

$$s'_4 = 63,57 - 58,18 = 5,39, \quad s'_3 = 34,61 - 20,00 = 14,61,$$

worin die Subtrahenden sich aus den Kleinsehnen zwischen 2 und 3 und zwischen 4 und 7 zusammensetzen. Den Abstand  $\eta$  endlich des Punktes  $T'$  von der Sehne  $\overline{34}$  berechnet man gemäß der Formel auf Seite 48 zu:

$$\eta = \frac{5,39 \cdot 14,61}{2r}$$

$s'_2$	5,39	0,731 8	geprüft mit dem Rechenschieber
$s'_7$	14,61	1,164 6	
$1:2r$	berechnet	7,417 8	
$\eta$		9,314 2	0,206

Nach der Einschaltung des Punktes  $T'$  zwischen 3 und 4 und Aufstellen des Theodolits über  $T'$  konnten zur *Mefsprobe* die Lote  $y_1$  und  $y_6$  auf die abgesteckte Tangente  $T'S'$  gefällt und nach scharfer Einrichtung ihrer Fußpunkte gemessen werden, wobei sich fand:

$$y_1 = 7,805, \quad y_6 = 5,390, \quad y_1 - y_6 = 2,415.$$

Das Maß  $s_1 + s_6 = 100$  m setzt sich genau genug aus den Kleinsehnen zwischen 1 und 6 zusammen. Allerdings hätte die wirkliche Messung von  $s_1$  und  $s_6$  eine noch schärfere und selbständigere Mefsprobe gewährt. Die frühere Rechenweise liefert mit den neu gemessenen Stücken was folgt.

*Berechnung der Mefsprobe.*

Formel	Argument	log	Ergebnis	Bedeutung
$2r$	berechnet	2,582 23	100,00	$s_1 + s_6$
$y_1 - y_6$	2,415	0,382 92		
$1/s_1 + s_6$	0,01	8,000 00		
$s_1 - s_6$		0,965 15	9,229	$s_1 - s_6$
			54,615	$s_1$
			45,385	$s_6$
$s_1^2$	54,615 <sup>2</sup>	3,474 62	} 7,805	$y_1 - v'$
$1:2r$	berechnet	7,417 77		
$s_6^2$	45,385 <sup>2</sup>	3,313 82		
			} 5,390	$y_6 - v'$

$$v' = 7,805 - 7,805 = 5,390 - 5,390 = 0$$

wie es sein soll. Ebenso berechnen sich die Abstände  $s'_3$  und  $s'_4$  neuerdings aus

$$s'_3 = s_1 - 40 = 14,615,$$

$$s'_4 = s_6 - 40 = 5,385,$$

d. h. fast genau wie oben. Hiernach wäre der Berührungspunkt in  $T'$  richtig abgesteckt.

Es wurde jedoch, obwohl diese Art der Absteckung eigentlich den Gebrauch des Theodolits nicht voraussetzt, noch die zweite Mefsprobe mittelst der im Berührungspunkt beobachteten Peripheriewinkel an gestellt, d. h. der Winkel, welche die Berührende  $T'S'$  mit den Sehnen bildet, die den Berührungspunkt  $T'$  mit den abgesteckten Kreispunkten verbinden. Der Sollwert dieser Winkel ist bekannt, sobald erst die Peripheriewinkel  $\alpha_3$  und  $\alpha_4$  für die Sehnen  $s'_3$  und  $s'_4$  aus

$$\sin \alpha_3 = 14,61 : 2r \text{ und } \sin \alpha_4 = 5,39 : 2r$$

berechnet sind, was hier geschieht.

$$\begin{array}{l} 14,61 \\ 1:2r \\ 5,39 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1,164 65 \\ 7,417 77 \\ 0,731 59 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 8,582 42 \\ 8,149 36 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2^\circ 11,5' = \alpha_3 \\ 0^\circ 48,5' = \alpha_4 \end{array} \right\} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 14,61 \\ 1:2r \\ 5,39 \end{array}} \right\} 3^\circ 0'.$$

Somit läßt sich in dem nachfolgenden Winkelverzeichnis die Spalte der Sollwerte leicht ausfüllen, indem man die Richtung  $T'S'$  zur Nullrichtung wählt.

*Richtungsbeobachtungen in T'.*

Ziel	Nonius I	II	Mittel	Richtung	Soll	Fehler
1	134°30,0'	30,0'	134°30,0'	351°48,25'	351°48,5'	+ 0,25'
2	137 29,0	30,0	137 29,5	354 47,75	354 48,5	+ 0,75
3	140 31,0	30,0	140 30,5	357 48,75	357 48,5	- 0,25
S'	142 41,5	42,0	142 41,75	0 0,00	0 0,0	0,00
4	323 30,5	32,0	323 31,25	180 49,50	180 48,5	- 1,00
5	326 31,5	32,0	326 31,75	183 50,00	183 48,5	- 1,50
6	329 30,5	31,0	329 30,75	186 49,00	186 48,5	- 0,50
7	332 14,0	14,5	332 14,25	189 32,50	189 32,1	- 0,40
	238,0	241,5	239,75	325,75	323,1	- 2,65

Rechenproben:

$$\frac{1}{2} (238,0 + 241,5) = 239,75;$$

$$325,75 + 8 \cdot 41,75 = 659,75 = 239,75 + 7 \cdot 60;$$

$$- 325,75 + 323,1 = - 2,65.$$

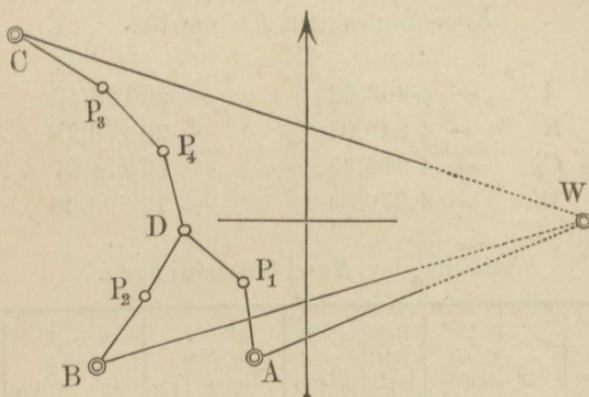
Die Fehler der letzten Spalte deuten darauf hin, daß die Alhidadenachse des Theodolits etwa  $\frac{1}{2}$  cm außerhalb des Kreises und  $\frac{1}{2}$  bis 1 cm zu weit gegen X hin gestanden hat, wie man durch Überschlagsrechnungen mit hülfe graphischer Konstruktion von Strahlenschnitten findet. Wären diese Abweichungen auch bloß Absteckungs- und nicht zum teil Aufstellungsfehler des Theodolits, so kämen sie gleichwohl nicht in Betracht. Bei minder peinlicher Kreisabsteckung hätte das angewandte Verfahren zur Absteckung des Berührungspunktes überhaupt diesen Grad von Schärfe nicht erreichen können.

### III. Polygon- und Kleinpunkte.

#### Aufgabe 24.

Drei Polygonzüge, von zugänglichen Festpunkten ausgehend, vereinigen sich in einem Knotenpunkt. (Fig. 22.) Die Streckenmessung erfolgte mit Fünfmeterlatten, wurde doppelt ausgeführt und ergab beim Hin- und Hermessen gleichlautende Ergebnisse, ausgenommen für  $CP_3$ , welche gleich 122,48 und 122,50 gefunden ward. Die Gesamtlänge des (mit Nr. 1 und 2 bezeichneten) Lattenpaares war untersucht und gleich 9,9997 m. Die Streckenverbesserung für die längste Seite 122,5 hätte demnach nur  $-0,0037$  m betragen, für die Streckensumme 325 des längsten Zuges  $-0,01$  m, was gegenüber den zu erwartenden zufälligen Mefsfehlern verschwindet.

Fig. 22.



Die Winkelmessung geschah mit einem Repetitionstheodolit von  $30''$  Nonienangabe je zweimal. Zwischen beiden Messungen ward das Fernrohr durchgeschlagen und der Kreis um etwa  $90^0$  gedreht\*). Die drei Ausgangspunkte der Züge sind A, B, C, Ziel der Anschlußrichtung war für alle der Punkt W.

Die Feldaufnahme, von einem Beobachter ausgeführt, währte im ganzen  $3\frac{1}{2}$  Stunden.

\*) Weniger der Teilungsfehler wegen, als um bei der zweiten Ablesung ganz neue Strichstellung und Zahlen vor sich zu haben und sich dadurch vor der Wiederholung grober Ablesefehler zu bewahren.

Die Berechnung ermittelte zuerst die Azimute der Anschlufsrichtungen, dann das Azimut ( $DP_4$ ) aus allen 3 Zügen, von denen jeder 3 Brechungswinkel enthält, weshalb das Ergebnis einfach gemittelt werden konnte. Es erfolgte gleichmäßige Verteilung der Differenz zwischen diesem Mittel und dem vorläufig berechneten Azimut auf die Brechungswinkel jedes Zuges, darauf Berechnung der Koordinaten von  $D$  aus allen 3 Zügen, Mittelung mit Gewichten, welche der Gesamtlänge jedes Zuges umgekehrt proportional sind und Verteilung der Differenz zwischen Mittel und Einzelwert auf die Koordinatenunterschiede jedes Zuges proportional diesen selbst.

<i>Gemessene Strecken.</i>		<i>Gemessene Winkel.</i>	
$AP_1 = 98,43$	} 187,59	$WAP_1 = 284^\circ 36' 38''$	
$P_1D = 89,16$		$AP_1D = 140 27 00$	
$BP_2 = 98,74$	} 189,49	$P_1DP_4 = 213 27 46$	
$P_2D = 90,75$		$WBP_2 = 322 25 23$	
$DP_4 = 95,46$	} 325,25	$BP_2D = 174 38 41$	
$P_4P_3 = 107,30$		$P_2DP_4 = 134 38 31$	
$P_3C = 122,49$		$WCP_3 = 15 17 27$	
		$CP_3P_4 = 195 15 08$	
		$P_3P_4D = 206 00 56$	

*Koordinaten der Festpunkte.*

	$y$	$x$
$A$	— 4 663,62	— 20 168,40
$B$	— 4 849,01	— 20 173,25
$C$	— 4 948,35	— 19 774,97
$W$	— 4 270,04	— 19 990,26

*Azimute der Anschlufsrichtungen.*

$P'$	$y'$	$x'$	$\log(y'-y)$	$y'+x'$	$y'-x'$	$\log Z$
$P$	$y$	$x$	$\log^1 x'-x$	$y+x$	$y-x$	$\log^1/N$
	$y'-y$	$x'-x$	$\log \operatorname{tg}(PP')$	$(y'+x')Z$	$-(y'-x')N$	$\log(Z:N)$
			$(PP')$	$-(y+x)Z$	$+(y-x)N$	$(PP') + 45$
$A$	— 4 663,62	— 20 168,40	2,595 04n	— 24 832,02	+ 15 504,78	2,757 18n
$W$	— 4 270,04	— 19 990,26	7,749 24n	— 24 260,30	+ 15 720,22	7,666 67
	— 393,58	— 178,14	0,344 28n	— 571,72	+ 215,44	0,423 85
			245°38' 53''			290°38' 54''
$B$	— 4 849,01	— 20 173,25	2,762 66n	— 25 022,26	+ 15 324,24	2,881 93n
$W$	— 4 270,04	— 19 990,26	7,737 57n	— 24 260,30	+ 15 720,22	7,402 32
	— 578,97	— 182,99	0,500 23	— 761,96	+ 395,98	0,284 25
			252°27' 37''			297°27' 39''
$C$	— 4 948,35	— 19 774,97	2,831 43n	— 24 723,32	+ 14 826,62	2,665 60n'
$W$	— 4 270,04	— 19 990,26	7,666 98	— 24 260,30	+ 15 720,22	7,048 86
	— 678,31	+ 215,29	0,498 41n	— 463,02	+ 893,60	9,714 46
			287°36' 31''			332°36' 31''

## Azimute der Zugseiten.

Zug	Punkt	Anschlußazimut und Brechungswinkel	Azimute	Bezeichnung
I.	<i>W</i>	245° 38' 53''	245° 38' 53''	( <i>W A</i> )
	<i>A</i>	284 36 <sup>-2</sup> 38	350 15 29	( <i>A P</i> <sub>1</sub> )
	<i>P</i> <sub>1</sub>	140 27 <sup>-2</sup> 00	310 42 27	( <i>P</i> <sub>1</sub> <i>D</i> )
	<i>D</i>	213 27 <sup>-2</sup> 46	344 10 11	( <i>D P</i> <sub>4</sub> )
	<i>P</i> <sub>4</sub>	884 10 <sup>-6</sup> 17		
II.	<i>W</i>	252 27 38	252 27 38	( <i>W B</i> )
	<i>B</i>	322 25 <sup>-1</sup> 23	34 53 00	( <i>B P</i> <sub>2</sub> )
	<i>P</i> <sub>2</sub>	174 38 <sup>-1</sup> 41	29 31 40	( <i>P</i> <sub>2</sub> <i>D</i> )
	<i>D</i>	134 38 31	344 10 11	( <i>D P</i> <sub>4</sub> )
	<i>P</i> <sub>4</sub>	884 10 <sup>-2</sup> 13		
III.	<i>W</i>	287 36 32	287 36 32	( <i>W C</i> )
	<i>C</i>	15 17 <sup>+3</sup> 27	122 54 02	( <i>C P</i> <sub>3</sub> )
	<i>P</i> <sub>3</sub>	195 15 <sup>+3</sup> 08	138 09 13	( <i>P</i> <sub>3</sub> <i>P</i> <sub>4</sub> )
	<i>P</i> <sub>4</sub>	206 00 <sup>+2</sup> 56	164 10 11	( <i>P</i> <sub>4</sub> <i>D</i> )
	<i>D</i>	180	344 10 11	( <i>D P</i> <sub>4</sub> )
		884 10 <sup>+8</sup> 03		
		Summe: 33	Mittel: 11	

Der Übergang von Spalte 3 zu Spalte 4 erfolgt nach der Regel: Brechungswinkel der Zeile plus Azimut der vorigen plus oder minus 180 gleich Azimut der Zeile. Die Azimute sollen zwischen Null und 360° bleiben, darum die Wahl zwischen  $\pm 180$ .

Die Summen der Spalte 3 sind in den Graden nicht immer gleich, sondern nur, wenn wie in Zug I und II die Anzahl der Brechungswinkel dieselbe ist. Sonst füge man noch so oft 180 zu, als der am meisten gebrochene Zug Brechpunkte mehr hat, und addiere außerdem, wenn nötig, ein oder mehrmals  $\pm 360$ . — Bei Zug III wurden wegen Umkehr der Richtung der letzten Zugseite 180 addiert.

## Koordinaten.

Punkt $P$ $P'$	Azimut ( $PP'$ )	Strecke $PP'$	$\sin(PP')$ $PP'$ $\cos(PP')$	$PP' \sin(PP')$ $PP' \cos(PP')$	Ordinaten	Abscissen	Punkt $P'$
$A$					$\times 5\ 336,38$	$\times 79\ 831,60$	$A$
$A$ $P_1$	$350^\circ 15' 29''$	98,43	9,228 40 $n$ 1,993 13 9,993 69	1,221 53 $n$ 1,986 82	$\times 83,35$ $\times 5\ 319,73$	$\times 79\ 928,59$	$P_1$
$P_1$ $D$	$310\ 42\ 27$	89,16	9,879 70 $n$ 1,950 17 9,814 38	1,829 87 $n$ 1,764 55	$\times 32,41$ $\times 5\ 252,15$	$\times 79\ 986,73$	$D$
		187,59			$\times 5\ 252,14$	$\times 79\ 986,76$	I
$B$					$\times 5\ 150,99$	$\times 79\ 826,75$	$B$
$B$ $P_2$	$34\ 53\ 00$	98,74	9,757 33 1,994 49 9,913 98	1,751 82 1,908 47	$\times 56,47$ $\times 5\ 207,44$	$\times 79\ 907,76$	$P_2$
$P_2$ $D$	$29\ 31\ 40$	90,75	9,692 71 1,957 85 9,939 58	1,650 56 1,897 43	$\times 44,73$ $\times 5\ 252,15$	$\times 79\ 986,73$	$D$
		189,49			$\times 5\ 252,19$	$\times 79\ 986,71$	II
$C$					$\times 5\ 051,65$	$\times 80\ 225,03$	$C$
$C$ $P_3$	$122\ 54\ 02$	122,49	9,924 08 2,088 10 9,734 95 $n$	2,012 18 1,823 05 $n$	$\times 102,84$ $\times 5\ 154,51$	$\times 33,46$ $\times 80\ 158,49$	$P_3$
$P_3$ $P_4$	$138\ 09\ 13$	107,30	9,824 21 2,030 60 9,872 13 $n$	1,854 81 1,902 73 $n$	$\times 71,58$ $\times 5\ 226,10$	$\times 20,07$ $\times 80\ 078,56$	$P_4$
$P_4$ $D$	$164\ 10\ 11$	95,46	9,435 83 1,979 82 9,983 21 $n$	1,415 65 1,963 03 $n$	$\times 26,04$ $\times 5\ 252,15$	$\times 80,16$ $\times 79\ 986,73$	$D$
		325,25			$\times 5\ 252,11$	$\times 79\ 986,72$	III

Die in den mit I, II, III bezeichneten Zeilen befindlichen Koordinaten sind es, aus welchen Mittel zu bilden waren. Sie selbst wurden durch Addition der Koordinaten des Ausgangspunktes und der sämtlichen Koordinatenunterschiede eines Zuges gefunden. Die Gewichte sollen sich umgekehrt wie die Streckensummen, also näherungsweise

wie  $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$   
 oder wie  $5 : 5 : 3$   
 verhalten. Wir berechnen also die Mittel für die letzten Stellen,  
 welche allein von einander abweichen,

$$\text{für } y: \quad \text{für } x:$$

$$\text{aus: } \frac{5 \cdot 4 + 5 \cdot 9 + 3 \cdot 1}{13} = 5, \quad \frac{5 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{13} = 3.$$

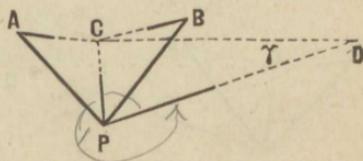
Hiernach wurden die endgültigen Koordinaten in die Zeile der  $D$  eingetragen, die Koordinatenunterschiede jedes Zuges in üblicher Weise auf diese Sollwerte abgeglichen und dann auch für die Zwischenpunkte Koordinaten berechnet, wobei als Rechenprobe der Knotenpunkt in jedem Zuge nochmals mit behandelt ward.

### Aufgabe 25.

*Herablegen eines unzugänglichen Festpunktes.* In der Nähe eines dem Theodolit unzugänglichen Festpunktes  $C$  und als Ersatz für ihn soll ein Standpunkt  $P$  durch Winkel- und Längenmessung festgelegt werden. Es wird dabei angenommen, daß die Strecke  $PC$  direkt nicht meßbar sei. (Fig. 23.)

Soll die Aufgabe mit Schärfe gelöst werden, so muß von  $P$  aus noch ein Fernpunkt  $D$  sichtbar sein, dessen Koordinaten ebenso genau wie die von  $C$  bekannt sind. Dann wird die Strecke  $CP$  mittelbar und der Winkel  $CPD$  unmittelbar mit Sorgfalt gemessen, und weil  $C$  in der Regel eine Turmspitze oder wenigstens ein hochgelegener Punkt sein wird, dabei auf strenge Lotrechtstellung der Alhidadenachse des Theodolits gehalten, auch in 2 Fernrohrlagen beobachtet. Man sucht den Richtungswinkel ( $CP$ ), um die Koordinaten von  $P$  zu berechnen.

Fig. 23.



Aus den Koordinaten von  $C$  und  $D$  findet sich der Richtungswinkel ( $CD$ ) und die Seite  $CD$  gemäß:

$$(CD) = \text{arc tg} \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} = \text{arc tg} \frac{(y_d + x_d) - (y_c + x_c)}{-(y_d - x_d) + (y_c - x_c)} - 45, \quad (1)$$

$$CD = \frac{y_d - y_c}{\sin (CD)} = \frac{x_d - x_c}{\cos (CD)}, \quad (2)$$

worauf  $\gamma$  aus dem Dreieck  $CDP$  zu

$$\gamma = \text{arc sin} \frac{CP \sin CPD}{CD} \quad (3)$$

und der Richtungswinkel ( $CP$ ) zu

$$(CP) = (CD) + 180 - CPD - \gamma \quad (4)$$

berechnet wird. Und zwar gelten diese Formeln allgemein, wenn man, unter Beibehaltung der Reihenfolge der Buchstaben, die Winkel im rechtflüchtigen Drehungssinne als dem positiven durchmessen denkt. Sind die Koordinaten  $y, x$  von  $P$  in der üblichen Weise berechnet, so bildet man als *Rechenprobe* noch den Richtungswinkel ( $PD$ ) und vergleicht ihn mit dem Sollwert ( $CD$ ) —  $\gamma$ . Also:

$$(PD) = \arctg \frac{y_d - y}{x_d - x} = (CD) - \gamma \text{ (Sollwert)}. \quad (5)$$

Eine *Messprobe* kann selten durch unmittelbares Beobachten einer zweiten Richtung  $PE$  nach einem Festpunkte  $E$  hin gewonnen werden. In der Regel ist man auf den Vergleich des ermittelten Richtungswinkels ( $PD$ ) mit einem Werte angewiesen, welcher aus der Übertragung der Azimute mittelst eines Polygonzuges hervorgeht. Um so mehr ist es geboten, den Winkel  $CPD$  mehrmals und in verschiedenen Kreislagen zu messen. Dagegen ist eine *Messprobe* für die Strecke  $CP$  leicht zu gewinnen, indem man dieselbe zur gemeinsamen Seite zweier Dreiecke macht, in welchen die Basen  $PA$  und  $PB$  und die ihnen anliegenden Winkel sorgfältig gemessen werden.

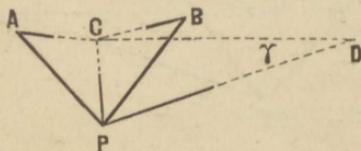
Es entsteht ein Viereck  $ACBP$  mit einer Seitenbedingung:

$$CP = PA \frac{\sin CAP}{\sin(CAP + APC)} = PB \frac{\sin CBP}{\sin(CBP + BPC)}, \quad (6)$$

die aber nicht streng erfüllt zu werden braucht. Es genügt, das Mittel der beiden errechneten Logarithmen von  $CP$  zu nehmen.

Nach den Formeln (1) bis (6) würde sich ohne Zuhilfenahme einer besonderen Figur für den einzelnen Fall rechnen lassen.

Fig. 23.

*Beispiel.*

Gemessene Stücke (Mittel aus je vier Lattenmessungen):

$$PA = 83,515 \text{ m,}$$

$$PB = 97,933 \text{ m.}$$

*Satzbeobachtungen.*

(Mittel aus 4 um je  $45^\circ$  veränderten Kreislagen.)

auf A.		auf B.	
C	0° 00' 00"	C	0° 00' 00"
P	314 51 52	P	36 20 07

## auf P.

C	0° 00' 00"
A	65 18 28
D	226 21 24
B	329 36 09

Gegebene Koordinaten.

	<i>y</i>	<i>x</i>
<i>C</i>	— 9473,662	+ 133,777
<i>D</i>	— 9389,308	— 468,173

Berechnung des Richtungswinkels (*CD*) und der Seite *CD* gemäß (1) und (2).

Formel	Argument und Ergebnis	log	log ( <i>y<sub>d</sub> - y<sub>c</sub></i> ) log cosec ( <i>CD</i> )	log ( <i>x<sub>d</sub> - x<sub>c</sub></i> ) log sec ( <i>CD</i> )
<i>y<sub>d</sub> - y<sub>c</sub></i>	84,354	1,926 106	1,926 106	2,779 560 <sub>n</sub>
$\sqrt{x_d - x_c}$	— 601,950	7,220 440 <sub>n</sub>	0,857 677	0,004 222 <sub>n</sub>
tg ( <i>CD</i> )	172° 01' 22,1"	9,146 546 <sub>n</sub>	2,783 783	2,783 782

Rechenprobe gemäß (1) für (*CD*).

Formel	Zahl	Argument	log	Ergebnis
<i>y<sub>d</sub> + x<sub>d</sub></i>	— 9857,481	} — 517,596	2,713 991 <sub>n</sub>	
— ( <i>y<sub>c</sub> + x<sub>c</sub></i> )	9339,885			
— ( <i>y<sub>d</sub> - x<sub>d</sub></i> )	8921,135	} $\frac{1}{2}$ — 686,304	7,163 484 <sub>n</sub>	
<i>y<sub>c</sub> - x<sub>c</sub></i>	— 9607,439			
tg [45 + ( <i>CD</i> )]		— 1 203,900 = 2 ( <i>x<sub>d</sub> - x<sub>c</sub></i> )	9,877 475	217° 01' 22,3"

Von hier an fünfstellige Rechnung nach (6) und (3).

Formel	Argument	log	Ergebnis	Bedeutung
<i>PA</i>	83,515	1,921 76	} 1,800 51	<i>CP</i> nach Formel (6)
sin <i>CAP</i>	314° 51' 52"	9,850 51 <sub>n</sub>		
cosec ( <i>CAP</i> + <i>APC</i> )	249 33 24	0,028 24 <sub>n</sub>		
<i>PB</i>	97,933	1,990 93	} 1,800 47	<i>CP</i>
sin <i>CBP</i>	36° 20' 07"	9,772 70		
cosec ( <i>CBP</i> + <i>BPC</i> )	66 43 58	0,036 84		
<i>CP</i>	gemittelt	1,800 49	180° 00' 00"	<i>CPD</i> $\gamma$ nach (3)
1 : <i>CD</i>	berechnet	7,216 22	226 21 24	
sin <i>CPD</i>	226° 21' 24"	9,859 53 <sub>n</sub>	— 4° 18' 47"	
sin $\gamma$		8,876 24 <sub>n</sub>	317 57 23	
			172 01 22	180 — <i>CPD</i> — $\gamma$ ( <i>CD</i> )
			129 58 45	( <i>CP</i> ) nach (4)

Berechnung der Koordinaten von  $P$ .

Formel	Argument	log		Ergebnis
$\sin(CP)$	$129^{\circ}58'45''$	9,884 39	} 1,684 88	48,403
$CP$		1,800 49		
$\cos(CP)$		9,807 88 <sub>n</sub>	} 1,608 37 <sub>n</sub>	-40,585
$y_c$	$\times 0\ 526,338$		133,777	$x_c$
$y - y_c$	48,403		$\times 59,415$	$x - x_c$
$y$	$\times 0\ 574,741$	Schlussergebnis. 93,192		$x$

## Rechenprobe gemäß (5); sechsstellig.

Formel	Argument und Ergebnis	log	Winkel	Bedeutung
$y_d - y$	35,951	1,555 711	$172^{\circ}01'22''$	( $CD$ )
$1/x_d - x$	$1/\times 438,635$	7,250 755 <sub>n</sub>	4 18 47	- $\gamma$
$\text{tg}(PD)$	$176^{\circ}20'08,4''$	8,806 466 <sub>n</sub>	$176^{\circ}20'09''$	( $PD$ )

Wie schon erwähnt, ist von  $P$  aus ein zweiter fernegelegener Festpunkt  $E$  nicht sichtbar gewesen, die durchgreifende Mefsprobe durch eine zweite Fernvisur  $PE$  also nicht erfolgt. Dies entspricht der gewöhnlichen Lage beim Herablegen von Festpunkten in Städten und Dörfern. Wohl aber läfst sich oft von einem benachbarten Standpunkte aus, z. B. von  $A$  oder  $B$  oder einem in der Verlängerung von  $PA$ ,  $PB$  gelegenen Punkte  $Q$  aus ein Festpunkt  $E$  beobachten. Zur Festlegung von  $Q$  bedarf es dann nur noch einer Streckenmessung. Der als Mefsprobe zu beobachtende Winkel  $PQE$  muß aber zwei lange Schenkel haben, weshalb man  $PA$  und  $PB$  in die Richtung nach fernem, scharf sichtbaren Zielen legen und gegebenen Falles statt  $PQE$  dessen Nebenwinkel messen wird.

## IV. Triangulation. Punkteinschaltung.

### Aufgabe 26.

*Triangulation eines Vierecks mit Diagonalen. Sämtliche acht Winkel durch sechsfache Repetition zu messen. Ausgleichung zunächst nur auf Grund der Winkelbedingungen.* Das Winkelrepetieren hat für Landesvermessungen im großen keine Bedeutung mehr, weil die heutigen Mikroskoptheodolite mit ihren vorzüglich getheilten Kreisen bei *wiederholten Satzbeobachtungen* mehr leisten, selbst wenn in jedem Satze nur ein Winkel vorkommt. Anders bei Kleintriangulationen mit Theodoliten, deren Kreis klein und deren Nonienangabe grob ist. Jede einzelne Einstellung ihres Fernrohrs erfolgt 5 bis 20 mal so genau als die dazu gehörige Nonienablesung, derart, daß an manchen sog. *einfachen* Theodoliten mit grober Teilung das beigegebene gute Fernrohr wie eine Verschwendung erscheint. Das Verfahren der Winkelrepetition hebt das Mißverhältnis zwischen der Genauigkeit des Zielens und der Ablesung am schnellsten und sichersten auf, muß also dem Landmesser geläufig sein für Fälle, wo ihm feine Winkelmessungen erwünscht und zugleich erreichbar scheinen.

Vorliegende Aufgabe, auf ein Viereck von 3 bis 500 m mittlerer Seitenlänge bezogen, weist den Anfänger auf beides hin, die Notwendigkeit guter Winkelmessungen zur Beseitigung der Widersprüche und die Vorbedingung dazu, welche in der Möglichkeit scharfer Centrierung des Instruments und der Ziele besteht.

Durch die nachfolgende Anordnung der Winkelbeobachtungen wird *nicht jeder* der beim Repetieren auftretenden systematischen Fehler planmäßig getilgt. So müßte, um die Konvergenz oder Kreuzung der

beiden Vertikalachsen (des Limbuskreises und der Alhidade) unschädlich zu machen, nach dem Durchschlagen des Fernrohrs die zweite Hälfte der Wiederholungen eines Winkels nicht recht-, sondern rückläufig (aber stets bei rechtläufiger Alhidadendrehung) beigefügt, also von der ersten allmählich abgezogen werden, derart, daß von den 3 Ableesungen zu Beginn, in der Mitte und am Schluß der Repetition die erste und dritte beinahe zusammenfallen. Bei geringer Wiederholungszahl und flachen Zielstrahlen ist die Wirkung des besagten Instrumentalfehlers jedoch verhältnismäßig zu unbedeutend, um besonders berücksichtigt zu werden. Allerdings würde jenes Verfahren auch den Einfluß der Stativdrehung und des Mitschleppens des Limbus durch die Alhidade zu tilgen geeignet sein; aber für Anfänger wird die Rücksicht auf eine Reihe schwer wahrnehmbarer Messungsfehler neben der ohnehin gebotenen Vorsicht beim Beobachten leicht verwirrend, darum ist im Anfang die einfache Regel der Winkelwiederholung in einerlei Drehungssinne des Limbus am Platze. In Fällen unzureichender Messproben wird dann zu jedem Winkel auch seine Ergänzung auf  $360^{\circ}$  *selbständig* und nach demselben Verfahren gemessen.

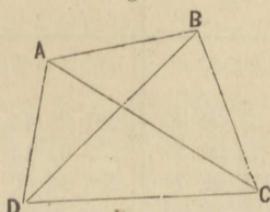
Demnach bestand in unsrem Beispiel jede Winkelmessung aus folgenden Handgriffen: Lotrechtstellen der Achse des Horizontalkreises (nicht der Alhidade), Anschneiden des linken Zieles, dann des rechten, beides mit Ablesen der Nonien am stillstehenden Limbus, Zurückführen der Alhidade samt Limbus aufs linke Ziel und von da an Wiederholung des Hin- und Herganges der Alhidade ohne Ablesung bis zur dritten Einstellung auf das rechte Ziel; jetzt Ablesen der Nonien, Durchschlagen des Fernrohrs und Rückkehr der Alhidade samt Limbus zur Einstellung aufs linke Ziel, worauf sich der Hin- und Hergang der Alhidade bis zur sechsten Einstellung aufs rechte Ziel ganz wie zuvor wiederholt und die Schlußablesung der Nonien erfolgt. Bei geklemmtem Horizontalkreis wird nur an der Alhidade (aber nicht am Fernrohr), bei geklemmter Alhidade nur an den mit dem Horizontalkreis unmittelbar verbundenen Teilen angefaßt\*) und geführt, die Limbusklemme immer scharf, die Alhidadenklemme leicht angezogen und jedesmal beim Öffnen der ersteren die Zahl der eben vollendeten Wiederholungen laut ausgesprochen. Das Kippen des Fernrohrs geschieht aus freier Hand, zuletzt mit leichten Fingerschlägen auf das Objektivrohr; Okular- und

---

\*) Die Regel, beim Drehen um eine Achse nur an solchen Teilen zu führen, welche unmittelbar mit derselben verbunden sind oder zum Bewegungsmechanismus gehören, gilt allgemein und trägt sehr zur Verfeinerung der Beobachtungen und zur Schonung der Instrumente bei.

Auszugrohr werden gar nicht berührt, zur Beseitigung der Parallaxe der Fäden nur der Okulartrieb angefaßt.

Fig. 24.



*Winkelrepetition mit einem Theodolit von 10 cm Durchmesser des Limbus und 1' Angabe der Nonien.*

Angabe der Repetitionen	Zeiger I	Zeiger II	Mittel	n facher Winkel	einfacher Winkel
	0 ' "	0 ' "	0 ' "	0 ' "	0 ' "
<i>BAC</i>					
0	216 50 00	36 51 00	216 50 30		
1	272 26 00	92 26 00	272 26 00	55 35 30	
3	23 38 00	203 38 00	23 38 00	166 47 30	55 35 50
6	190 24 30	10 25 30	190 25 00	166 47 00	55 35 40
	333 34 30	333 34 30	333 34 30		55 35 45
<i>CAD</i>					
0	190 24 00	10 24 30	190 24 15		
1	252 04 30	72 05 00	252 04 45	61 40 30	
3	15 27 00	195 27 00	15 27 00	185 2 45	61 40 55
6	200 30 00	20 31 00	200 30 30	185 3 30	61 41 10
	370 06 00	370 06 30	370 06 15		61 41 02,5
<i>DBA</i>					
0	29 17 00	209 17 00	29 17 00		
1	68 49 00	248 49 00	68 49 00	39 32 00	
3	147 53 30	227 53 30	147 53 30	118 36 30	39 32 10
6	266 29 45	86 29 15	266 29 30	118 36 00	39 32 00
	237 12 45	237 12 15	237 12 30		39 32 05
<i>CBD</i>					
0	282 34 30	102 34 00	282 34 15		
1	345 33 00	165 32 30	345 32 45	62 58 30	
3	111 29 00	291 30 00	111 29 30	188 55 15	62 58 25
6	300 25 00	120 25 00	300 25 00	188 55 30	62 58 30
	377 50 30	377 51 00	377 50 45		62 58 27,5
<i>DCA</i>					
0	328 15 00	148 15 00	328 15 00		
1	5 48 00	185 48 00	5 48 00	37 33 00	
3	80 56 00	260 56 00	80 56 00	112 41 00	37 33 40
6	193 36 30	13 37 00	193 36 45	112 40 45	37 33 35
	225 21 30	225 22 00	225 21 45		37 33 37,5

Fortsetzung der Tabelle von voriger Seite.

Angabe der Repetitionen	Zeiger I	Zeiger II	Mittel	n facher Winkel	einfacher Winkel
	0 / "	0 / "	0 / "	0 / "	0 / "
<i>ACB</i>					
0	231 08 30	51 09 00	231 08 45		
1	253 02 00	73 02 30	253 02 15	21 53 30	
3	296 49 00	116 49 00	296 49 00	65 40 15	21 53 25
6	2 29 00	182 29 00	2 29 00	65 40 00	21 53 20
	131 20 30	131 20 00	131 20 15		21 53 22,5
<i>ADB</i>					
0	177 25 00	357 26 00	177 25 30		
1	200 36 00	20 36 00	200 36 00	23 10 30	
3	246 27 30	66 58 00	246 57 45	69 32 15	23 10 45
6	316 30 30	136 30 30	316 30 30	69 32 45	23 10 55
	139 05 30	139 04 30	139 05 00		23 10 50
<i>BDC</i>					
0	14 05 30	194 05 00	14 05 15		
1	71 40 00	251 39 00	171 39 30	57 34 15	
3	186 48 30	6 48 30	186 48 30	172 43 15	57 34 25
6	359 32 00	179 32 00	359 32 00	172 43 30	57 34 30
	345 26 30	345 27 00	345 26 45		57 34 27,5

Man erkennt leicht, daß die Rechenprobe, die auf dem Felde selbst gemacht werden mußte, in der Subtraktion der Anfangs- von der Schlußablesung besteht, und zwar für beide Nonien. Das Mittel beider Differenzen, durch 6 dividiert, soll dem Mittel aus den beiden Beträgen des einfachen Winkels in der letzten Spalte gleichkommen. — Die Ablesung nach einfacher Messung des Winkels versieht bekanntlich den Doppelzweck einer groben Meßprobe und der Ermittlung der Zahl, wie oft mal  $360^\circ$  überschritten ward.

Da an die Zusammenstellung der Winkel nach Dreiecken sich die Ausgleichung, welche unsere Aufgabe fordert, unmittelbar anschließen läßt, so soll zuvor davon eine kurze Darstellung gegeben werden. Seien  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  die Verbesserungen von bedingten Beobachtungen,  $p_1 \dots p_n$ ,  $q_1 \dots q_n$ ,  $r_1 \dots r_n$  Koeffizienten,  $w_p$ ,  $w_q$ ,  $w_r$  Widersprüche, seien ferner die  $r$  Bedingungsgleichungen der Aufgabe in die Form gebracht:

$$[p \lambda] + w_p = 0; \quad [q \lambda] + w_q = 0; \quad [r \lambda] + w_r = 0; \quad (1)$$

so können wir die  $\lambda$  derart zerlegen, daß jedes  $\lambda = \lambda^0 + \lambda'$ , wobei die  $\lambda^0$  einen Teil der Bedingungsgleichungen erfüllen und zugleich

$[g \lambda^0 \lambda^0]$  ein Minimum ist, unter  $g_1 \dots g_n$  die Gewichte der Beobachtungen verstanden. Führt man die  $\lambda^0$  in die Gleichungen (1) ein, so gehen dieselben über in

$$[p \lambda'] + w'_p = 0; \quad [q \lambda'] + w'_q = 0; \quad [r \lambda'] + w'_r = 0 \quad (2)$$

und von den  $w'$  sind einige Null geworden. Erfüllt man jetzt die Bedingungen (2) so, daß  $[g \lambda' \lambda']$  ein Minimum wird, dann sind auch die Bedingungen (1) erfüllt und zugleich  $[g \lambda \lambda]$  ein Minimum geworden. Denn in

$$[g \lambda \lambda] = [g \lambda^0 \lambda^0] + 2 [g \lambda^0 \lambda'] + [g \lambda' \lambda'] \quad (3)$$

ist das erste Glied konstant und positiv, während das zweite verschwindet, (wie sogleich nachgewiesen werden soll). Also tritt das Minimum der linken Seite mit dem Minimum von  $[g \lambda' \lambda']$  ein; außerdem gilt:

$$[g \lambda' \lambda'] < [g \lambda \lambda]. \quad (4)$$

Um zu zeigen, daß das zweite Glied in (3) verschwindet, nehmen wir an, die  $\lambda^0$  erfüllten die beiden ersten der Gleichungen (1); dann wird  $w'_p = w'_q = 0$ . Die sog. Korrelatengleichungen erhalten die Form:

$$g \lambda^0 = p k_p + q k_q,$$

worin  $k_p$  und  $k_q$  Korrelaten sind. Multiplizieren wir jede dieser Gleichungen mit dem ihr zugeordneten  $\lambda'$  und addieren, so folgt:

$$[g \lambda^0 \lambda'] = [p \lambda'] k_p + [q \lambda'] k_q = 0,$$

weil gemäß (2)  $[p \lambda'] = -w'_p = 0$  u. s. w.

Wenn wir daher statt (3) schreiben:

$$[g \lambda \lambda] = [g \lambda^0 \lambda^0] + [g \lambda' \lambda'], \quad (5)$$

so besagt dies: Nach Erfüllung *eines Teiles* der Bedingungsgleichungen (1) nach der Methode d. kl. Qu. und Einsetzen der vorläufigen Verbesserungen in *alle*, wird die Ausgleichung auf Grund dieser umgeformten Bedingungsgleichungen (2) vervollständigt so als ob sie von neuem begänne. (Vergl. Gerling, Ausgleichungsrechnungen S. 394.)

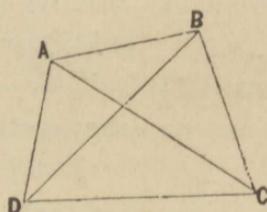
Wenn in einer zweiten Rechnungsstufe wieder nur ein Teil der Bedingungsgleichungen erfüllt wird, so gilt der vorige Satz abermals u. s. w., sodaß sich die ganze Ausgleichung in solcher Art (nach *C. F. Gaußs*) stufenweise vollziehen läßt. Gemäß (4) werden auf jeder neuen Stufe die Quadratsummen derjenigen Verbesserungen, welche noch zu ermitteln bleiben, kleiner als auf der vorigen. Man *nähert* sich also mit jeder Stufe der vollständigen Ausgleichung.

Auf jeder neuen Rechenstufe dürfen die Bedingungsgleichungen neu gruppiert und selbst in neuer Form verwendet werden. In unserem Beispiel machen wir davon vorteilhaften Gebrauch.

Zusammenstellung der Winkel nach Dreiecken und Ausgleichung auf Grund der Winkelbedingungen.

Winkel	Dreiecke	Verbesserungen der Stufe			Verbesserte Winkel	$\lambda^{\circ} \lambda^{\circ}$
	o ' "	I.	II.	I. + II.		
	<u>ABC</u>	"	"	"	o ' "	
BAC	55 35 45	+ 5,0	+ 1,6	+ 6,6	55 35 51,6	43,56
DBA	39 32 05	+ 5,0	+ 1,5	+ 6,5	39 32 11,5	42,25
CBD	62 58 27,5	+ 5,0	- 1,6	+ 3,4	62 58 30,9	11,56
ACB	21 53 22,5	+ 5,0	- 1,5	+ 3,5	21 53 26,0	12,25
Summe	179 59 40	0,0	0,0	20,0	180 00 00,0	
	<u>CDA</u>					
DCA	37 33 37,5	+ 0,6	- 1,6	- 1,0	37 33 36,5	1,00
BDC	57 34 27,5	+ 0,6	- 1,5	- 0,9	57 34 26,6	0,81
ADB	23 10 50	+ 0,6	+ 1,6	+ 2,2	23 10 52,2	4,84
CAD	61 41 02,5	+ 0,7	+ 1,5	+ 2,2	61 41 04,7	4,84
Summe	179 59 57,5	0,0	0,0	2,5	180 00 00,0	121,11
	<u>DAB</u>					
ADB	23 10 50	+ 0,6	+ 1,6			
CAD	61 41 02,5	+ 0,7	+ 1,5			
BAC	55 35 45	+ 5,0	+ 1,6			
DBA	39 32 05	+ 5,0	+ 1,5			
Summe	179 59 42,5	53,8	0,0			
	<u>BCD</u>					
CBD	62 58 27,5	+ 5,0	- 1,6			
ACB	21 53 22,5	+ 5,0	- 1,5			
DCA	37 33 37,5	+ 0,6	- 1,6			
BDC	57 34 27,5	+ 0,6	- 1,5			
Summe	179 59 55	6,2	0,0			

Fig. 24.



In vorstehender Berechnung sind alle vier Dreiecksabschlüsse aufgestellt und zwar so geordnet, daß sich die beiden ersten und die beiden letzten zum Viereck ergänzen. Daher müssen zur Rechenprobe die Summen beider Paare einander gleich sein ( $359^{\circ} 59' 37,5''$ ).

Die erste Rechenstufe erfüllt die ersten beiden Bedingungen, nämlich daß die Winkel in  $ABC$  und  $CDA$  auf  $180^{\circ}$  abschließen. Die Methode der kl. Qu. verlangt gleichmäßige Verteilung der Fehlbeträge auf alle vier Beobachtungsgrößen in jedem Dreieck. Die erteilten Verbesserungen werden auch dem zweiten Dreieckspaar zugeschrieben

und in die Summenzeilen die Sekunden der jetzigen Dreiecksabschlüsse eingetragen.

Die zweite Rechenstufe verteilt die Fehlbeträge im zweiten Dreieckspaar dem eben geschilderten Vorgange entsprechend und schreibt die erteilten Verbesserungen auch dem ersten Paare zu, wodurch sich dessen Abschlüsse nicht verändern. Daher erscheint in den Summenzeilen allenthalben Null als Dreiecksabschluss und die verlangte Ausgleichung ist vollzogen. Der Rest der Rechnung erklärt sich von selbst.

Die Erfahrung lehrt, daß bei Winkelmessungen wie die vorliegenden nach Erfüllung der Winkelbedingungen auch die Seitenbedingungsgleichung bis auf einige Einheiten der fünften Dezimalstelle der Logarithmen erfüllt ist. Um uns davon auch hier zu überzeugen, wählen wir die folgende symmetrische Form\*) der Seitenbedingung:

$$\frac{\sin BAC \cdot \sin DCA \cdot \sin ADB \cdot \sin CBD}{\sin ACB \cdot \sin CAD \cdot \sin DBA \cdot \sin BDC} = 1.$$

Formel	log		
$\sin BAC$	9,916 501	+ 1,5	} Zuwachs der Logarithmen für 1" des Winkels, in Einheiten der 6. Dezimal- stelle.
$\operatorname{cosec} ACB$	0,428 484	- 5,2	
$\sin DCA$	9,785 041	+ 2,7	
$\operatorname{cosec} CAD$	0,055 345	- 1,1	
$\sin ADB$	9,595 099	+ 4,9	
$\operatorname{cosec} DBA$	0,196 154	- 2,6	
$\sin CBD$	9,949 785	+ 1,1	
$\operatorname{cosec} BDC$	0,073 614	- 1,4	
	0,000 023		

Jede Vierecksseite (nicht Diagonale) würde, auf dem Wege, den die Bedingungsgleichung andeutet, aus sich selbst wieder berechnet, in der 6. Dezimalstelle des Logarithmus um 23 Einheiten grösser erscheinen als zuvor; macht für die größte Seite  $CD$ , deren Logarithmus 2,636 39 ist, gerade 23 mm Unterschied, ein Betrag, der unter Umständen vernachlässigt werden könnte, sodafs fernere Ausgleichung überflüssig wäre. In den meisten Fällen aber ist ein solcher Widerspruch in der trigonometrischen Rechnung störend, weil er Willkür veranlaßt, und es wird die Vollendung der Ausgleichung gefordert.

Als Rechenprobe für  $\log \sin \alpha$  beim Aufstellen der Seitenbedingung ist  $\log (2 \sin^{1/2} \alpha \cos^{1/2} \alpha)$  zu empfehlen, da beim bloßen Wieder-

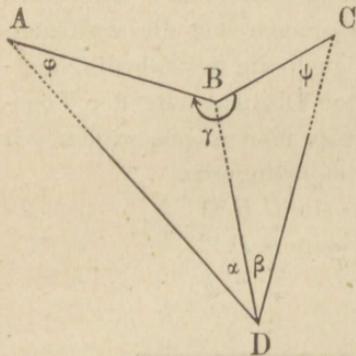
\*) Sie ist durchaus nicht für alle Fälle die geschickteste, sondern nur für den Fall der stufenweisen Ausgleichung, in der dritten und den folgenden Rechenstufen. Hier wird sie gewählt, weil im Abschnitt VIII dasselbe Beispiel zu Ende gerechnet werden soll. Vergl. Aufgabe 50.

holen des Aufschlagens von  $\log \sin \alpha$  nur zu leicht auch die etwa begangenen Fehler wiederholt werden.

### Aufgabe 27.

*Rückwärtseinschneiden nach 3 Punkten (Pothenots Problem, eigentlich Aufgabe des Snellius).* Von drei Festpunkten  $A, B, C$  sind die

Fig. 25.



Koordinaten gegeben, von dem Neupunkt  $D$  werden sie gesucht, nachdem auf  $D$  (Fig. 25) die Winkel  $ADB = \alpha$  und  $BDC = \beta$  gemessen wurden. Dabei müssen, damit nachstehende Formeln allgemein gültig bleiben, die Bezeichnungen  $A, B, C$  für die Festpunkte so gewählt werden, daß  $D$  in dem Winkel  $CBA$  liegt und, was immer möglich, die Winkel  $ADB$  und  $BDC$ , im rechtläufigen Drehungsinne (unter Rück-

sicht auf die Reihenfolge der Buchstaben) genommen, kleiner als  $180^\circ$  sind.

Gegeben, d. h. aus den Koordinaten und zwar mit *Proben* berechenbar sind im Viereck  $ABCD$  noch die Seiten  $BA$  und  $BC$ , die Richtungswinkel  $(BA)$  und  $(BC)$  derselben, und Winkel  $\gamma$  aus

$$\gamma = (BA) - (BC). \quad (1)$$

Von den Winkeln  $\varphi$  und  $\psi$  ist nur die Summe und das Sinusverhältnis bekannt, nämlich aus den Dreiecken  $DAB$  und  $DBC$  mit der gemeinsamen Seite  $DB$ :

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{BA \sin \beta}{BC \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \varrho}{1}. \quad (2)$$

Darin ist  $\varrho$  ein Hilfswinkel, zur kürzeren Darstellung. Denken wir uns den Mittelsatz weg, so bleibt eine Proportion, aus der wir die neue bilden:

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varrho}{1 + \operatorname{tg} \varrho}.$$

Die linke Seite wird durch Übergang zur Summe und Differenz der halben Winkel logarithmisch, die rechte ist gleich  $\operatorname{tg} (45 - \varrho)$ . Nunmehr haben wir zur Berechnung von  $\varphi$  und  $\psi$  die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 180 - \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \operatorname{tg} (45 - \varrho). \quad (4)$$

Als Rechenprobe dient, da man  $\sin \varphi$  und  $\sin \psi$  ohnehin braucht:

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \operatorname{tg} \varrho. \quad (2^*)$$

Nun folgt, aus beiden angegebenen Werten zu rechnen:

$$BD = \frac{BA \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{BC \sin \psi}{\sin \beta}, \quad (5)$$

$$(BD) = (BA) - 180 + \varphi + \alpha = (BC) + 180 - \psi - \beta \quad (6)$$

ferner:

$$y_d = y_b + BD \sin (BD); \quad x_d = x_b + BD \cos (BD) \quad (7)$$

endlich als Schlußprobe der gesamten Rechnung:

$$(DA) = \text{arc tg } \frac{y_a - y_d}{x_a - x_d}; \quad (DC) = \text{arc tg } \frac{y_c - y_d}{x_c - x_d}; \quad (8)$$

$$(DB) - (DA) = \alpha; \quad (DC) - (DB) = \beta. \quad (9)$$

Angenommen man habe schon während der Rechnung alle zuvor erwähnten Proben gemacht, auch sich überzeugt, daß in  $\gamma$  nach (1) kein Subtraktionsfehler steckt, so kann dennoch aus (9) sich ein Rechenfehler ergeben, der weiter zurückliegt als Formel (7). Nicht geprüft ist nämlich der Wert von  $\log \text{tg } \varphi$  aus (2) und man wird ihn daher gemäß:

$$\text{tg } \varphi = \frac{BA \sin^{1/2} \beta \cos^{1/2} \beta}{BC \sin^{1/2} \alpha \cos^{1/2} \alpha} \quad (10)$$

nachträglich neu berechnen, da beim Wiederaufschlagen von  $\log \sin \alpha$  und  $\log \sin \beta$  leicht die nämlichen Fehler begangen würden als zuvor. Ein Mißgriff in der Größe von  $\alpha$  und  $\beta$  oder eine Verwechslung derselben wird auch durch die Schlußprobe nicht aufgedeckt, ebensowenig wie Beobachtungsfehler, denn so, wie hier behandelt, enthält die Aufgabe keine überschüssige Messung.

Auch dadurch, daß wir zwischen denselben drei Richtungen  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  verschiedene Verbindungen zu je zweien beobachten, z. B. die Winkel  $ADB = \alpha$ ,  $BDC = \beta$ ,  $CDA = \sigma$  und ihre Ergänzungen zu  $360^\circ$  selbständig messen, wird die vorstehende einfache Rechenweise nicht verändert, wenn wir zuvor die Winkel für sich ausgeglichen haben und nur das Ergebnis der Ausgleichung, die verbesserten Werte  $\alpha$  und  $\beta$ , in die Rechnung einführen. Da sich auch die Winkelgleichung sehr einfach gestaltet, so ist die Aufgabe in dieser Form besonders geeignet, das Winkelmessen, zumal das Repetierverfahren einzutüben, denn nur die Fehler im Einstellen aufs Ziel, im Ablesen und in der Handhabung des Theodolits, nicht aber Centrierungsfehler kommen dabei in Frage.

Im folgenden *Beispiel* wurden die Winkel ebenso gemessen wie im vorigen, jedoch zehnfach repetiert. Die Nonienangabe des Theodolits betrug  $30''$ . Es ist von Interesse, die Ergebnisse aus beiden Lagen des Fernrohrs, also aus je fünffacher Wiederholung, miteinander zu vergleichen, weshalb wir diese Werte aus dem Feldbuch wiedergeben.

## Zusammenstellung und Ausgleichung der Winkel.

Winkel- bezeichnung u. Lage	Beträge aus 5 facher Repetition	Mittel	Verbesserte Winkel	Fehler
<i>ADB</i> 1	61° 40' 36,0''	61° 40' <sup>+ 0,4</sup> 32,2''	61° 40' <sup>+ 3,1</sup> 32,6''	+ 3,5''
	2	28,5		
<i>BDA</i> 1	298 19 30,0	298 19 <sup>+ 0,4</sup> 27,0		- 2,7
	2	19 24,0		
<i>BDC</i> 1	78 08 52,5	78 08 <sup>+ 0,7</sup> 54,8	78 08 <sup>+ 3,1</sup> 55,5	+ 3,8
	2	57,0		
<i>CDB</i> 1	281 51 01,5	281 51 <sup>+ 0,7</sup> 3,8		- 2,4
	2	06,0		
<i>CDA</i> 1	220 10 21,0	220 10 <sup>- 1,5</sup> 24,0	220 10 <sup>+ 3,2</sup> 22,5	+ 1,7
	2	27,0		
<i>ADC</i> 1	139 49 36,0	139 49 <sup>- 1,5</sup> 39,0		- 4,7
	2	42,0		
Summe	01,5	00,8	359 59 <sup>+ 9,4</sup> 50,6	- 0,8

Was zunächst die Unterschiede der ersten und zweiten Lage betrifft, so bedenke man, daß in denselben die Fehler von zwei Anfangs- und zwei Endablesungen mitwirken, von den viel kleineren Zielfehlern abgesehen. Nimmt man als Höchstbetrag des einzelnen Ablesungsfehlers die halbe Angabe an, so kann ungünstigen Falles sein vierfacher Betrag, also die doppelte Angabe, durch 5 (Anzahl der Repetitionen) dividiert, den Unterschied der ersten und zweiten Lage darstellen. In unserem Falle beträgt die doppelte Angabe 1', der fünfte Teil 12'', und der Unterschied beider Lagen bleibt durchweg innerhalb dieses Maßes.

Die Ausgleichung, zuerst jedes Winkels und seiner Ergänzung, dann der drei Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  auf  $360^\circ$ , ist streng, ein einfacher Fall der Ausgleichung in Stufen, wie gelegentlich der Aufgabe 29 gezeigt werden wird. Will man den mittleren Fehler berechnen, so erhält man, in anbetracht, daß 4 überschüssige Messungen vorliegen und die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler rund 64 beträgt,

$$\mu^2 = 64 : 4 = 16,$$

$$\mu = \pm 4''.$$

Aus Versehen ist in die Rechnung Winkel  $\alpha$  um 0,1'' zu klein eingeführt, was die Ergebnisse indes nicht merklich berührt.

Gegebene Koordinaten:

	$y$	$x$
A	— 8 587,758	— 17 903,756
B	— 4 270,043	— 19 990,258
C	— 1 994,700	— 20 261,018

Gemessene Winkel:  $\alpha = 61^\circ 40' 35,7''$

$\beta = 78\ 08\ 58,6$ .

Berechnung der gegebenen Seiten und ihrer Richtungswinkel\*).

$P'$	$y'$	$x'$	$\log(y' - y)$	$y' + x'$	$y' - x'$	$\log Z$
$P$	$y$	$x$	$\log \frac{1}{x' - x}$	$y + x$	$y - x$	$\log \frac{1}{N}$
	$y' - y$	$x' - x$	$\log \operatorname{tg}(PP')$	$(y' + x') \cdot Z$	$-(y' - x') \cdot N$	$\log(Z : N)$
			$(PP')$	$-(y + x)$	$+(y - x)$	$(PP') + 45$
A	— 8 587,758	— 17 903,756	3,635 254n	— 26 491,514	+ 9 315,998	3,348 541n
B	— 4 270,043	— 19 990,258	6,680 582	— 24 260,301	+ 15 720,215	6,193 534
	— 4 317,715	+ 2 086,502	0,315 836n	— 2 231,213	+ 6 404,217	9,542 075n
			295° 47' 30,4''			340° 47' 30,4''
C	— 1 994,700	— 20 261,018	3,357 047	— 22 255,718	+ 18 266,318	3,302 024
B	— 4 270,043	— 19 990,258	7,567 415n	— 24 260,301	+ 15 720,215	6,594 124n
	+ 2 275,343	— 270,760	0,924 462n	+ 2 004,583	— 2 546,103	9,896 148n
			96° 47' 10,1''			141° 47' 10,2''
A	$y' - y$		3,635 254n	$x' - x$		3,319 418
B	$\operatorname{cosec}(PP')$		0,045 573n	$\operatorname{sec}(PP')$		0,361 409
	$PP'$		3,680 827	$PP'$		3,680 827
C	$y' - y$		3,357 047	$x' - x$		2,432 585n
B	$\operatorname{cosec}(PP')$		0,003 053	$\operatorname{sec}(PP')$		0,927 516n
	$PP'$		3,360 100	$PP'$		0,360 101

Rechnung nach den Formeln (1) bis (4) und (2\*).

(BA)	295° 47' 30,4''	BA	Argument und	3,680 827
360 — (BC)	263 12 49,9	1 : BC	Ergebnis:	6,639 900
360 + $\gamma$	559 00 20,3	$\sin \beta$	78° 08' 58,6''	9,990 644
	360 00 00,0	$\operatorname{cosec} \alpha$	61 40 35,6	0,055 378
ab $\left\{ \begin{array}{l} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{array} \right.$	199 00 20,3	$\operatorname{tg} \varrho$	66 44 33,8	0,366 749
	61 40 35,6	$\operatorname{tg}(45 - \varrho)$	338 15 26,2	9,600 768n
	78 08 58,6	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	10 35 02,8	9,271 511
$\varphi + \psi$	21 10 05,5	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	—4 15 42,7	8,872 279n
		$\operatorname{cosec} \varphi$	6 19 20,1	0,958 134
		$\sin \psi$	14 50 45,5	9,408 615
		$\operatorname{tg} \varrho$	Probe	0,366 749

\*) Vgl. die Bemerkung zu einer ähnlichen Rechenübersicht in Aufgabe 30, S. 114.

Rechnung nach den Formeln (5) bis (7).

$(BA) - 180$	115° 47' 30,4''	$BA$	3,680 827	$BC$	3,360 100
$\varphi$	6 19 20,1	$\sin \varphi$	9,041 866	$\sin \psi$	9,408 615
$\alpha$	61 40 35,6	$\operatorname{cosec} \alpha$	0,055 378	$\operatorname{cosec} \beta$	0,009 356
$(BD)$	183 47 26,1	$BD$	2,778 071	$BD$	2,778 071
		$\sin(BD)$	8,820 265 <sub>n</sub>	$\cos(BD)$	9,999 049 <sub>n</sub>
$(BC) + 180$	276° 47' 10,1''	$y_d - y_b$	1,598 316 <sub>n</sub>	$x_d - x_b$	2,777 120 <sub>n</sub>
ab $\left\{ \begin{array}{l} \psi \\ \beta \end{array} \right.$	14 50 45,5	$y_d - y_b$	— 39,657	$x_d - x_b$	— 598,577
	78 08 58,6	$y_b$	— 4 270,043	$x_b$	— 19 990,258
	$(BD)$	183 47 26,0	$y_d$	— 4 309,700	— 20 588,835

Schlussprobe nach (8) und (9).

	$y$	$x$	$y_a - y_d$	— 4 278,058	3,631 247 <sub>n</sub>
$A$	— 8 587,758	— 17 903,756	$\frac{1}{2}x_a - x_d$	$\frac{1}{2} + 2 685,079$	6,571 043
$D$	— 4 309,700	— 20 588,835	$\operatorname{tg}(DA)$	302° 06' 50,4''	0,202 290 <sub>n</sub>
$C$	— 1 994 700	— 20 261,018	$y_c - y_d$	+ 2 315,000	3,364 551
$(DA)$	302° 06' 50,4''	61° 40' 35,6''	$\frac{1}{2}x_c - x_d$	$\frac{1}{2} + 327,817$	7,484 369
$(DB)$	3 47 26,0	78 08 58,7	$\operatorname{tg}(DC)$	81° 56' 24,7''	0,848 920
$(DC)$	81 56 24,7				

Wenn der Rückwärtseinschnitt, was oft vorkommt, nur die Grundlage einer Ausgleichung von mehr als drei beobachteten Richtungen bildet, dann ist es notwendig, auch noch  $(DB)$  aus den Koordinaten von  $D$  und  $B$  rückwärts zu berechnen, weil die Abrundung derjenigen von  $D$  den Wert des Azimuts gegen den vorher eingeführten ein wenig verändert haben wird. Die Azimute  $(DA)$  und  $(DC)$  dagegen sind, so wie sie zur Schlussprobe dienen, auch zur Ausgleichung zu verwenden.

In unserem Beispiel durfte, da es eine Übung darstellte, noch eine Messprobe aufer der durch Vervielfältigung der Winkelbeobachtung angebracht werden, bestehend in der Messung des Abstandes zwischen  $D$  und einem in der Nähe befindlichen Punkte  $G$ , dessen Koordinaten aus einer feinen Triangulation\*) mit großer Schärfe bestimmt sind. Auch der Winkel  $BDG$  wurde (einmal) gemessen. Im Ernstfalle hätte ein Rückwärtseinschnitt wenige Meter von einem zugänglichen, nicht etwa verschütteten Festpunkt keine Berechtigung, es könnte höchstens nach Aufgabe 25 die Verlegung des Festpunktes in Frage kommen.

\*) 1888 von den Herren Landmessern Hegemann und Bödecker, z. Z. Assistenten für Geodäsie an der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin, mit einem Mikroskoptheodolit ausgeführt.

Es fand sich  $DG = 4,355$  m,  $BDG = 109^\circ 55' 00''$ ; sonach lassen sich die Koordinaten von  $G$ , gestützt auf diejenigen von  $D$ , berechnen, wozu es nicht erst des Ansatzes von Formeln bedarf.

Anschluss des nahegelegenen Punktes  $G$ .

$(DB)$	$3^\circ 47' 26''$	$DG$	$4,355$		
$BDG$	$109 55 00$	$DG$	$0,638 99$	$DG$	$0,638 99$
$(DG)$	$113 42 26$	$\sin(DG)$	$9,961 71$	$\cos(DG)$	$9,604 29_n$
		$y_g - y_d$	$0,600 70$	$x_g - x_d$	$0,243 28_n$
		$y_g - y_d$	$+ 3,988$	$x_g - x_d$	$- 1,751$
		$y_d$	$- 4 309,700$	$x_d$	$- 20 588,835$
		$y_g$	$- 4 305,712$	$x_g$	$- 20 590,586$
		Soll:	$- 4 305,733$	Soll:	$- 20 590,595$

Es zeigt sich Übereinstimmung bis auf 2 und 1 cm, und es darf hinzugefügt werden, daß dieser Erfolg durchaus kein ungewöhnlicher ist; bei sorgfältiger Winkelmessung und der günstigen Lage von  $D$  liefs er sich vielmehr erwarten.

Daß die *Schnittfigur*, d. h. die Figur, welche von den Berührenden der um  $DAB$ ,  $DBC$  und  $DAC$  beschriebenen drei Kreise im Punkte  $D$  gebildet wird, eine günstige Gestalt hat, ergibt zwar die ausgeführte Rechnung unmittelbar noch nicht. Denn aus ihr ist nur der Winkel  $\varphi + \psi = 21^\circ 10' 05,5''$  zu entnehmen, den die beiden ersten Kreise in  $D$  einschließen. An diesen Winkel schließt sich links an  $\sphericalangle BCA + \alpha = 74^\circ 33' 51,3''$  und rechts  $\sphericalangle CAB + \beta = 84^\circ 16' 03,2''$ . Diese drei Winkel bilden, wie es sein muß, zusammen  $180^\circ$ . Um die beiden letzten zu berechnen, bedurfte es noch des Richtungswinkels  $(AC) = 109^\circ 40' 25,8''$ , der aus den Koordinaten leicht zu bestimmen war. Gewöhnlich entwirft man die Schnittfigur übrigens durch Zeichnung, nicht durch Rechnung.

**Aufgabe 28.**

*Die vorige, auf grund neuer Messungen.* Aus den hier mitgeteilten Messungen wolle der Leser an der Hand der Lösung in Aufgabe 27 die Koordinaten von  $D$  selbst berechnen. Bemerkte wird, daß  $D$  mit Punkt  $G$ , dessen Sollkoordinaten soeben erst angegeben worden sind, gleichbedeutend ist und daß die Koordinaten von  $D$  wieder nur wenige Centimeter von den Sollwerten abweichen.

Von der Rechnung wird soviel mitgeteilt, daß der Leser entweder das Ganze bearbeiten, oder nach Belieben die Winkelausgleichung und

Azimutberechnung übergehen und bei der eigentlichen Pothenot'schen Aufgabe, S. 96, nach den Formeln (1) bis (9) anfangen kann. Die Schlufprobe bleibt ihm nicht erspart, doch ist er wenigstens gegen einen folgenschweren Fehler in  $\log \operatorname{tg} \varrho$  gesichert.

Beobachtete Winkel (durch 12fache Repetition).

Bezeichnung und Lage	Beträge aus 6facher Repetition	Bezeichnung und Lage	Beträge aus 6facher Repetition	Bezeichnung und Lage	Beträge aus 6facher Repetition
<i>ADB</i> 1	65° 01' 32,5''	<i>BDC</i> 1	35° 30' 40,0''	<i>CDA</i> 1	259° 27' 50,0''
2	30,0	2	52,5	2	28 02,5
<i>BDA</i> 1	294 58 31,2	<i>CDB</i> 1	324 29 25,0	<i>ADC</i> 1	100 31 57,5
2	25,0	2	25,0	2	32 10,0

Ausgeglichene Winkel.

$$ADB = 65^{\circ} 01' 28,8''$$

$$BDC = 35 \ 30 \ 37,8$$

$$CDA = 259 \ 27 \ 53,4$$

Koordinaten der Festpunkte.

	<i>y</i>	<i>x</i>
<i>A</i>	— 2 435,857	— 19 851,268
<i>B</i>	— 4 270,043	— 19 990,258
<i>C</i>	+ 1 791,998	— 22 103,895

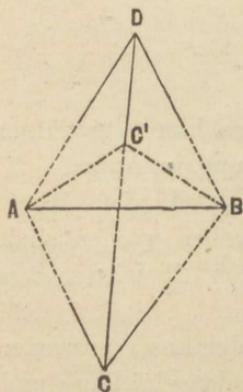
$$(BA) = 265^{\circ} 39' 59,6'' \quad (BC) = 118^{\circ} 02' 56,3''$$

$$\log BA = 3,264 \ 687 \quad \log BC = 3,680 \ 383$$

$$\log \operatorname{tg} \varrho = 9,391 \ 007.$$

Aufgabe 29.

Fig. 26.



*Aufgabe der zwei Punktpaare.* Gegeben zwei Festpunkte *A* und *B* durch ihre Koordinaten. Aufgrund von Winkelmessungen in zwei Neupunkten *C* und *A* sollen die Koordinaten dieses zweiten Paares bestimmt werden.

Die Winkel sind in unserem Beispiel durch Repetition, ganz so wie in Aufgabe 27 und 28 beobachtet worden. Doch bildete man aus den 3 von einem Standpunkt, z. B. *D* aus anzuschneidenden Zielen *A*, *B*, *C* jede mögliche Verbindung zu je zweien, mafs also daselbst 6 Winkel, nämlich *ADB*, *BDC*, *CDA* nebst ihren Ergänzungen zu  $360^{\circ}$ .

Die *logarithmische* Lösung dieser Aufgabe rührt nach *Puissant* von *Delambre* her. Um das Dreieck  $ABC$  (Fig. 26) aufzulösen, brauchen wir aufer der gegebenen Basis  $AB$  und dem beobachteten Winkel  $ACB$  noch das *Verhältnis*  $AC:BC$  der anliegenden Seiten. Dieses findet sich aus den Dreiecken  $ADC$  und  $BCD$  unter Anwendung des Sinussatzes:

$$AC:BC = DC \frac{\sin CDA}{\sin(ACD + CDA)} : DC \frac{\sin BDC}{\sin(BDC + DCB)}$$

Nun liefert der Tangentensatz die Differenz der beiden an  $AB$  liegenden Winkel  $BAC$  und  $CBA$ , nämlich

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BAC - CBA) = \frac{BC - AC}{BC + AC} \cot \frac{1}{2} ACB.$$

Die rechte Seite wird logarithmisch, wenn man Zähler und Nenner des Bruches mit  $BC$  dividiert und  $AC:BC = \operatorname{tg} \Theta$  setzt, worin  $\Theta$  ein Hilfswinkel. Also

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin CDA \sin(BDC + DCB)}{\sin(ACD + CDA) \sin BDC} = \operatorname{tg} \Theta \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (BAC - CBA) = \operatorname{tg} (45 - \Theta) \cot \frac{1}{2} ACB. \quad (2)$$

Man kommt auf ganz dasselbe, wenn man, wie *Hansen* später gethan hat, das Verhältnis der Sinus von  $BAC$  und  $CBA$  gleich  $\operatorname{tg} \Theta$  setzt, darauf das Verhältnis

$$\frac{\sin BAC - \sin CBA}{\sin BAC + \sin CBA}$$

aufstellt und es im Zähler und Nenner durch Übergang zu den halben Winkeln logarithmisch macht. Dieser Übergang ist bei *Delambre* mit Einführung der Tangentenformel bereits vollzogen.

Zu den Formeln (1) und (2) muß man noch, damit sie für jede Lage von  $C$  und  $D$  unverändert anwendbar bleiben, die folgende fügen:

$$\frac{1}{2} (BAC + CBA) = q \cdot 360 + 90 - \frac{1}{2} ACB, \quad (3)$$

worin  $q = 0$  oder  $q = 1$ , je nachdem  $ACB$  kleiner oder größer als  $180^\circ$ . Nun erst können aus (2) und (3) die einzelnen Winkel  $BAC$  und  $CBA$  unfehlbar richtig zusammengesetzt werden. Denn wenn die Spitze  $C$  des Dreiecks  $ABC$  ihre Lage in der Richtung  $CD$  ändert, dabei  $AB$  überschreitet und nach  $C'$  fällt, so werden die Winkel  $ACB$ ,  $BAC$ ,  $CBA$  sämtlich überstumpfe. Nun gilt zwar der Sinussatz und der aus ihm abgeleitete Tangentensatz auch für diese, die Formeln (1) und (2) bleiben somit unbedingt richtig; aber die halbe Summe der Winkel bei  $A$  und  $B$  wäre unter Weglassung des ersten Gliedes von (3) nicht mehr richtig bestimmt.

Somit geben die Formeln (1) bis (3) eine ganz allgemein gültige Lösung des Problems der zwei Punktpaare. Wenn im Winkelverzeichnis die rechtläufige Aufeinanderfolge der Buchstaben innegehalten worden ist, so braucht man nur auf die Buchstabenfolge, aber nicht auf die zufällige Lage von  $C$  und  $D$  zu achten.  $C$  und  $D$  dürfen z. B. in der Figur miteinander vertauscht werden, ohne die Gültigkeit von (1) bis (3) aufzuheben. Auch dem unten folgenden Beispiel liegt eine andere als Fig. 26 zu Grunde. Andererseits können allgemein gültige Formeln auch aus jeder anderen Figur abgeleitet werden\*).

Zur Berechnung der Koordinaten von  $C$  und  $D$  bedarf man noch folgender leicht nachweisbarer Formeln:

$$AC = AB \frac{\sin CBA}{\sin ACB}, \quad BC = AB \frac{\sin BAC}{\sin ACB} \quad (4)$$

und als Rechenprobe (übrigens von beschränkter Wirkung):

$$AC : BC = \operatorname{tg} \Theta.$$

Sodann aus den Dreiecken  $ADC$  und  $BCD$  auf doppelte Weise:

$$CD = AC \frac{\sin (ACD + CDA)}{\sin CDA} = BC \frac{\sin (BDC + DCB)}{\sin BDC} \quad (5)$$

und aus dem soeben benutzten Dreieck  $BCD$ :

$$DB = BC \frac{\sin DCB}{\sin BDC}. \quad (6)$$

Zur Berechnung des Polygonzuges  $ACDB$  bedarf man der Richtungswinkel:

$$(AB) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(y_b + x_b) - (y_a + x_a)}{-(y_b - x_b) + (y_a - x_a)} - 45. \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} (AC) &= (AB) + BAC \\ (CD) &= (CA) + ACD \\ (DB) &= (DC) + CDB \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Aus der Berechnung des Polygonzuges müssen die Koordinaten von  $B$ , gestützt auf diejenigen der Neupunkte, richtig hervorgehen. Statt dieser *Rechenprobe* empfiehlt sich, unter Weglassung von (6), nach Berechnung von  $y_d$  und  $x_d$  die Ermittlung der Richtungswinkel  $(DB)$ ,  $(DA)$  und  $(CB)$  aus den Koordinaten, namentlich dann, wenn eine nachfolgende Ausgleichung ihrer ohnehin bedürfte. Da dies in unsrem Beispiele nicht der Fall, so wurden nur  $(DA)$  und  $(CB)$  aus den Koordinaten berechnet.

\*) In Gleichung (3) wird  $q$  immer Null, wenn man die Punktbezeichnung im voraus so wählt, daß  $ACB < 180^\circ$ . Man nenne zu diesem Zweck von den beiden Neupunkten denjenigen  $C$ , welcher mit den Festpunkten  $A$  und  $B$  ein Dreieck bildet, das auf seinem Umfange in der Buchstabenfolge  $ABC$  rechtläufig umgangen wird. Vgl. Bödecker, Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte, Zeitschr. f. Verm. 1889 S. 671.

Vor Bildung der letzterwähnten Rechenproben werden Fehler der Berechnung von  $\text{tg } \Theta$  gemäß (1) oder von  $AB \operatorname{cosec} ACB$  in den Formeln (4) nicht aufgedeckt.

*Ausgleichung der gemessenen Winkel.*

Auf jedem der Standpunkte  $C$  und  $D$  sind 4 überschüssige Winkel gemessen worden. Die Ausgleichung derselben erfolgt *stufenweise* ganz nach dem in der ersten Meßübung dieses Abschnittes, S. 94 gegebenen Vorbild, wonach zunächst die Bedingungen und ihre Widersprüche untereinandergestellt und von diesen einer nach dem andern getilgt wird, ohne dafs es der Aufstellung von Normalgleichungen bedürfte. In der mit I überschriebenen Spalte sind zunächst die drei ersten, in der mit II bezeichneten die zwei letzten Widersprüche getilgt, wonach die Ausgleichung vollendet ist, da neue Widersprüche nicht mehr auftreten.

*Ausgleichung auf Standpunkt C.*

Winkel		Verbesserungen der Stufe			$\lambda\lambda$ und verbesserte Winkel
Bezeichnung	Gemessen	I	II	I + II	
$ACB$	27° 21' 40,0''	+ 2,5	- 2,5	0,0	0,00 25,00
$BCA$	332 38 15,0	+ 2,5	+ 2,5	+ 5,0	
Summe	359 59 55,0	0,0	0,0	+ 5,0	
$BCD$	28 10 48,8	- 0,7	- 2,5	- 3,2	10,24 3,61
$DCB$	331 49 12,5	- 0,6	+ 2,5	+ 1,9	
Summe	360 00 01,3	0,0	0,0	- 1,3	
$DCA$	304 27 38,8	- 1,9	- 2,5	- 4,4	19,36 0,36
$ACD$	55 32 25,0	- 1,9	+ 2,5	+ 0,6	
Summe	360 00 03,8	0,0	0,0	- 3,8	
					58,57 = $[\lambda\lambda]$
$ACB$	27 21 40,0	+ 2,5	- 2,5	0,0	27° 21' 40,0'' 28 10 45,6 304 27 34,4 360 00 00,0
$BCD$	28 10 48,8	- 0,7	- 2,5	- 3,2	
$DCA$	304 27 38,8	- 1,9	- 2,5	- 4,4	
Summe	360 00 07,6	+ 7,5	0,0	- 7,6	
$BCA$	332 38 15,0	+ 2,5	+ 2,5	+ 5,0	
$DCB$	331 49 12,5	- 0,6	+ 2,5	+ 1,9	
$ACD$	55 32 25,0	- 1,9	+ 2,5	+ 0,6	
Summe	719 59 52,5	- 7,5	0,0	+ 7,5	

Rechenprobe für  $[\lambda\lambda]$  gemäß (5) der Aufgabe 50, Abschnitt VIII:

$$\frac{1}{2} (5^2 + 1,3^2 + 3,8^2) + \frac{2}{3} \cdot 7,5^2 = 58,06.$$

Ausgleichung auf Standpunkt *D*.

Winkel		Verbesserungen der Stufe			$\lambda \lambda$ und verbesserte Winkel
Bezeichnung	Gemessen	I	II	I + II	
<i>ADB</i>	64° 54' 40,0''	+ 5,6	+ 1,9	+ 7,5	56,25
<i>BDA</i>	295 05 08,8	+ 5,6	- 1,9	+ 3,7	13,69
Summe	359 59 48,8	0,0	0,0	+ 11,2	
<i>BDC</i>	239 11 25,0	+ 8,8	+ 1,8	+ 10,6	112,36
<i>CDB</i>	120 48 17,5	+ 8,7	- 1,8	+ 6,9	47,61
Summe	359 59 42,5	0,0	0,0	+ 17,5	
<i>CDA</i>	55 53 35,0	0,0	+ 1,9	+ 1,9	3,61
<i>ADC</i>	304 06 25,0	0,0	- 1,9	- 1,9	3,61
Summe	360 00 00,0	0,0	0,0	0,0	237,13 = $[\lambda \lambda]$
<i>ADB</i>	64 54 40,0	+ 5,6	+ 1,9	+ 7,5	64° 54' 47,5''
<i>BDC</i>	239 11 25,0	+ 8,8	+ 1,8	+ 10,6	239 11 35,6
<i>CDA</i>	55 53 35,0	0,0	+ 1,9	+ 1,9	55 53 36,9
Summe	359 59 40,0	- 5,6	0,0	+ 20,0	360 00 00,0
<i>BDA</i>	295 05 08,8	+ 5,6	- 1,9	+ 3,7	
<i>CDB</i>	120 48 17,5	+ 8,7	- 1,8	+ 6,9	
<i>ADC</i>	304 06 25,0	0,0	- 1,9	- 1,9	
Summe	719 59 51,3	+ 5,6	0,0	+ 8,7	

Rechenprobe für  $[\lambda \lambda]$  wie oben:

$$^{1/2} (11,2^2 + 17,5^2 + 0,0^2) + ^{2/3} \cdot 5,6^2 = 236,75.$$

Der mittlere Fehler  $\mu$  eines gemessenen Winkels ist, bei 8 überschüssigen Beobachtungen für beide Standpunkte zusammengenommen, zu bilden nach:

$$\mu^2 = \frac{58 + 237}{8} = 36,9$$

$$\mu = \pm 6,1''.$$

Der *ausgeglichen*e Winkel hat, wie hier nicht näher dargethan werden soll, das Gewicht 3, wenn dem *gemessenen* Winkel das Gewicht 1 beigelegt wird. Die ausgeglichenen Winkel können angesehen werden als hervorgegangen aus Satzbeobachtungen, deren einzelner Richtung das Gewicht 6 zukommt (das doppelte des ausgeglichenen Winkels), also der mittlere Fehler  $\mu: \sqrt{6} = \pm 2,5''$ . Das Ergebnis könnte noch günstiger lauten, wenn nicht auf Standpunkt *D* sich regelmäßige Fehler aussprächen, welche bei Berechnung von  $\mu$  mitwirkten, durch die Ausgleichung aber zum größten Teil getilgt sein werden.

Zusammenstellung der in den Formeln vorkommenden ausgeglichenen Winkel.

$$\begin{array}{rcl}
 ACD = 55^{\circ} 32' 25,6'' & BDC = 239^{\circ} 11' 35,6'' & \\
 CDA = 55 \quad 53 \quad 36,9 & DCB = 331 \quad 49 \quad 14,4 & \\
 \quad \quad \quad 111 \quad 26 \quad 2,5 & \quad \quad \quad 571 \quad 00 \quad 50,0 & \\
 ACB = 27 \quad 21 \quad 40,0 & CDB = 120 \quad 48 \quad 24,4 & \\
 ACB < 180; & q = 0. & 
 \end{array}$$

Gegebene Koordinaten.

	<i>y</i>	<i>x</i>
A	— 4 270,043	— 19 990,258
B	— 3 727,508	— 20 360,688

Berechnung des Richtungswinkels (AB) gemäßs (7), und der Seite AB.

Formel	Argument und Ergebnis	log	log (yb — ya) log cosec (AB)	log (xb — xa) log sec (AB)
$y_b - y_a$	542,535	2,734 428	2,734 428	2,568 706 <sub>n</sub>
$1/2(x_b - x_a)$	$1/2$ — 370,430	7,431 294 <sub>n</sub>	0,083 094	0,248 816 <sub>n</sub>
tg (AB)	124° 19' 27,6''	0,165 722 <sub>n</sub>	2,817 522	2,817 522

Die Logarithmen von cosec (AB) und sec (AB) werden in der Tafel vor Entnahme des Winkels aufgesucht, unter unmittelbarer Umrechnung der Proportionalteile.

Rechenprobe für (AB).

Formel	Zahl	Argument	log	Ergebnis
$y_b + x_b$	— 24 088,196	} 172,105	2,235 794	
$-(y_a + x_a)$	24 260,301			
$-(y_b - x_b)$	— 16 633,180	} $1/2$ — 912,965	7,039 545 <sub>n</sub>	
$y_a - x_a$	15 720,215			
tg [45 + (AB)]			9,275 339 <sub>n</sub>	169° 19' 27,7''

Der aus der Probe folgende Wert (AB) = 124° 19' 27,7'' wird als der schärfere beibehalten.

Berechnung von  $AC$  und  $BC$  aus (1) bis (4).

Formel	Argument und Ergebnis	log	Winkel oder log	Bedeutung
$\sin CDA$	$55^{\circ}53'36,9''$	9,918 029	0 ' "	
$\sin(BDC+DCB)$	211 00 50,0	9,712 014 <sub>n</sub>		
$\operatorname{cosec}(ACD+CDA)$	111 26 02,5	0,031 125		
$\operatorname{cosec} BDC$	239 11 35,6	0,066 058 <sub>n</sub>		
$\operatorname{tg} \Theta$	28 05 05,8	9,727 226	90 00 00,0	
$\operatorname{tg}(45 - \Theta)$	16 54 54,2	9,483 031	13 40 50,0	$\frac{1}{2} ACB$
$\operatorname{cot} \frac{1}{2} ACB$	13 40 50,0	0,613 654	76 19 10,0	$\frac{1}{2}(BAC+CBA)$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(BAC-CBA)$	51 19 32,6	0,096 685	51 19 32,6	$\frac{1}{2}(BAC-CBA)$
$AB$	berechnet	2,817 522	127 38 42,6	$BAC$
$\operatorname{cosec} ACB$	27 21 40,0	0,337 623	24 59 37,4	$CBA$
$\sin CBA$	24 59 37,4	9,625 846	2,780 991	$AC$
$AB \operatorname{cosec} ACB$		3,155 145		$BC$
$\sin BAC$	127 38 42,6	9,898 620		
$\operatorname{tg} \Theta$	(Rechenprobe)		9,727 226	$AC:BC$

Berechnung von  $CD$  und  $DB$  nach (5) und (6).

Formel	log	Formel	log	Bedeutung	
$AC$	2,780 991	$\sin(BDC+DCB)$	9,712 014 <sub>n</sub>	} 2,831 837 } 2,793 979	
$\operatorname{cosec} CDA$	0,081 971	$BC$	3,053 765		$CD$
$\sin(ACD+CDA)$	9,968 875	$\operatorname{cosec} BDC$	0,066 058 <sub>n</sub>		$DB$
$CD$	2,831 837	$\sin DCB$	9,674 156 <sub>n</sub>		

Alle Winkelfunktionen, ausgenommen für  $DCB = 331^{\circ}49'14,4''$ , sind hier der vorigen Übersicht entnommen.

## Berechnung der Richtungswinkel nach (8).

$(AB)$	$124^{\circ}19'27,7''$	$(CA)$	$71^{\circ}58'10,3''$	$(DC)$	$307^{\circ}30'35,9''$
$BAC$	127 38 42,6	$ACD$	55 32 25,6	$CDB$	120 48 24,4
$(AC)$	251 58 10,3	$(CD)$	127 30 35,9	$(DB)$	68 19 00,3

Berechnung des Zuges ACDB mittelst vorstehender Richtungswinkel und Seiten.

Formel	log		Koordinaten		des Punktes
			y	x	
sin (AC)	9,978 131 <sub>n</sub>	} 2,759 122 <sub>n</sub>	×5 729,957	×80 009,742	A
AC	2,780 991		× 425,722	× 813,068	
cos (AC)	9,490 693 <sub>n</sub>		2,271 684 <sub>n</sub>		
sin (CD)	9,899 409	} 2,731 246	×5 155,679	×79 822,810	C
CD	2,831 837		538,575	× 586,588	
cos (CD)	9,784 546 <sub>n</sub>		2,616 383 <sub>n</sub>		
sin (DB)	9,968 128	} 2,762 107	×5 694,254	×79 409,398	D
DB	2,793 979		578,239	229,913	
cos (DB)	9,567 585		2,361 564		
			×6 272,493	×79 639,311	B

Soll: ×6 272,492      ×79 639,312

Probe durch Richtungswinkel.

Formel	Argument	log	Ergebnis und Probe	Bedeutung
$y_a - y_d$	35,703	1,552 705	307° 30' 35,9"	(DC)
$1/x_a - x_d$	1/600,344	7,221 600	55 53 36,9	CDA
tg (DA)		8,774 305	363 24 12,3	(DA)
$y_b - y_c$	1116,813	3,047 980	127 30 35,9	(CD)
$1/x_b - x_c$	1/-183,498	7,736 369 <sub>n</sub>	331 49 14,4	DCB
tg (CA)		0,784 349 <sub>n</sub>	99 19 50,2	(CA)

Es verdient Erwähnung, daß die Koordinaten der Punkte A und B einer (auf grund der Landesaufnahme) gut angelegten und wohlgelungenen Kleintriangulation der Herren Landmesser Hegemann und Bödecker, z. Z. Assistenten an der hiesigen Landw. Hochschule, vom Sommer 1888 entstammen. Die mittleren Richtungsfehler dieser Triangulation wachsen von den Punkteinschaltungen erster bis zu denen letzter Ordnung von  $\pm 1,3$  bis auf  $\pm 2,5$  Sekunden. D ist ebenfalls ein Punkt dieser Triangulation, und seine Koordinaten lauten

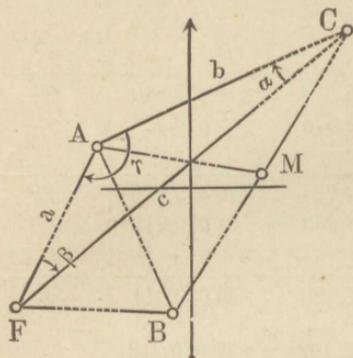
$$y_d = -4\,305,733; \quad x_d = -20\,590,595.$$

Die oben berechneten Koordinaten von D unterscheiden sich von diesen um + 0,013 und + 0,007 m.

## Aufgabe 30.

Zwischen zwei gegebene Festpunkte drei Neupunkte durch eine Dreieckskette einzuschalten. (Fig. 27.) Durch das sog. Einketten geht man von einer gegebenen Dreiecksseite  $FC$  der Landesaufnahme mit

Fig. 27.



einemmal zu Dreiecken von sehr viel kleineren Seiten über. Man legt gewissermaßen einen Polygonzug von  $F$  nach  $C$ , bei dem man sich aber die Längenmessung erspart. Da von vornherein das Verhältnis von  $FC$  zu den Seiten der Kette noch unbekannt, so löst man die letztere einstweilen nach einem willkürlich gewählten Maßstab für die Seiten auf, drückt in demselben auch  $FC$  aus und geht, da nunmehr das fragliche Verhältnis feststeht, zu den richtigen Längen der Ketten-

seiten über. Die Berechnung der Koordinaten hat dann keine Schwierigkeiten mehr. In unserm Beispiel konnte das Dreieck  $ACF$  dazu dienen,  $FC$  als Stück der Kette zu berechnen, nachdem die Dreiecke  $ABF$ ,  $AMB$  und  $ACM$  aufgelöst waren.

Bei den Winkelmessungen, die mit einem Repetitionstheodolit von  $30''$  Nonienangabe erfolgten, wurde auf centrischen Stand des Instruments und der Ziele besondere Sorgfalt verwandt. Es waren *Satzbeobachtungen* in 6 Sätzen oder 3 Doppelsätzen auszuführen (je zwei aufeinanderfolgende sind einander durch entgegengesetzte Lage des Fernrohrs und Reihenfolge der Ziele zugeordnet). Wie es bei so grober Angabe am besten ist, wurde der Kreis bei jedem Übergang in eine andre Fernrohrlage um etwa  $30^\circ$  gedreht, denn sonst pflegen die Ablesungen der ersten und zweiten Lage sich genau zu gleichen und so wird eine der Messungen zwecklos. Die Alhidade bewegte sich auch bei Umkehr der Reihenfolge der Ziele stets rechtläufig. Bekanntlich sind es die Drehbewegungen des Stativs und das Mitschleppen des Limbus durch die Alhidade, welchen diese Anordnung Rechnung trägt\*).

Um einen Einblick in die erreichte Ablesungsgenauigkeit zu gewähren, seien die Ergebnisse der einzelnen Sätze mitgeteilt. Man darf sich darüber wundern, wie aus so widerspruchsvollen Einzelbeobachtungen

\*) Vgl. des Verfassers praktische Geometrie, I, § 132.

so gute Dreiecksabschlüsse zu stande kommen. Es ist dies wohl auch nur so zu erklären, daß durch die vielen Kreisdrehungen zu häufigem Vorzeichenwechsel der Ablesungsfehler Gelegenheit gegeben ist. Man denke sich ein konstantes Maß längs einer Millimeterskala verschiebbar, an der man nur Centimeter ablesen wollte, und beachte, wie sehr die Bestimmung jenes Maßes von der zufälligen Stellung abhängt, in die man es schob. Um ein Centimeter können die Bestimmungen von einander abweichen. Dementsprechend sollten beobachtete Richtungen allerdings nur innerhalb der Nonienangabe schwanken, während es die nachfolgenden im allgemeinen innerhalb der doppelten Angabe thun. Parallaxe und persönliche Auffassung verschiedener Beobachter mögen dabei mitgewirkt haben, und ein Teil dieser Fehler dürfte auch die Messungen ausgelernter Beobachter noch beeinflussen. Parallaxe freilich soll man vermeiden lernen, namentlich nie unterlassen, die Lupe so auf den Nonius einzustellen, daß die sich deckenden Striche in der Mitte des Gesichtsfeldes liegen.

*G. Steinrück  
Landmesser.*

*Satzbeobachtungen in der Dreieckskette.*

Satz No.	Standpunkt <i>F</i>			Standpunkt <i>B</i>		
	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>M</i>
1	0	22° 18' 15"	65° 28' 07,5"	0	62° 45' 00,0"	119° 29' 22,5"
2	0	18 00	28 00,0	0	22,5	30 15,0
3	0		28 37,5	0	30,0	29 15,0
4	0		27 30,0	0	30,0	29 45,0
5	0		28 07,5	0	30,0	30 00,0
6	0		28 22,5	0	00,0	29 30,0
		15	105,0		112,5	127,5
	0	22 18 07,5	65 28 07,5	0	62 45 18,8	119 29 41,2

Standpunkt <i>A</i>				Standpunkt <i>M</i>		
<i>C</i>	<i>M</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
0	35° 38' 30,0"	91 41 30,0	143° 27' 30,0"	0	67° 12' 15,0"	177° 06' 15,0"
0	37 52,5	37,5	28 00,0	0	12 15,0	06 15,0
0	38 15,0	22,5	27 45,0	0	11 22,5	06 22,5
0	37 22,5	00,0	27 15,0	0	12 15,0	06 30,0
0	37 52,5	07,5	27 45,0	0	12 22,5	07 15,0
0	38 15,0	00,0	27 15,0	0	12 37,5	07 22,5
	187,5	97,5	150,0		127,5	120,0
0	35 38 01,2	91 41 16,2	143 27 35,0	0	67 12 11,2	177 06 40,0

Ergänzung der Dreieckswinkelsummen auf  $180^\circ$ .

	Dreieck $ABF$		Dreieck $MBA$		Dreieck $CMA$	
beobachtet	$A$	$51^\circ 46' 18,8''$	$M$	$67^\circ 12' 11,2''$	$C$	nicht beobachtet
	$B$	$62 45 18,7$	$B$	$56 44 22,5$	$M$	$109^\circ 54' 28,8''$
	$F$	$65 28 07,5$	$A$	$56 03 15,0$	$A$	$35 38 01,2$
	Summe Ergänzung	$179 59 45,0$ $+ 5,0$	Summe Ergänzung	$179 59 48,7$ $+ 3,8$	Summe $C$	$145 32 30,0$ $34 27 30,0$
ergänzt	$A$	$51 46 23,8$	$M$	$67 12 15,0$	$C$	$34 27 30,0$
	$B$	$62 45 23,7$	$B$	$56 44 26,2$	$M$	$109 54 28,8$
	$F$	$65 28 12,5$	$A$	$56 03 18,8$	$A$	$35 38 01,2$
log sin	sin $A$	9,895 184	sin $M$	9,964 679	sin $C$	9,752 668
	sin $B$	9,948 936	sin $B$	9,922 308	sin $M$	9,973 239
	sin $F$	9,958 919	sin $A$	9,918 856	sin $A$	9,765 371

Eine flüchtige Messung von  $FB$  ergab 254,8 m, welches Maß der Auflösung der Dreiecke zu Grunde gelegt wird.

Dreieck $ABF$		Dreieck $MBA$		Dreieck $CMA$	
$FB$	2,406 199	$AB$	2,469 934	$AM$	2,427 563
cosec $A$	0,104 816	cosec $M$	0,035 321	cosec $C$	0,247 332
sin $B$	9,948 936	sin $B$	9,922 308	sin $M$	9,973 239
$AF$	2,459 951	$AM$	2,427 563	$AC$	2,648 134
$FB$ cosec $A$	2,511 015	$AB$ cosec $M$	2,505 255	$AM$ cosec $C$	2,674 895
sin $F$	9,958 919	sin $A$	9,918 856	sin $A$	9,765 371
$AB$	2,469 934	$BM$	2,424 111	$MC$	2,440 266

Um Dreieck  $ACF$  (Fig. 27) aufzulösen, kann man nach dem Tangentensatz in Verbindung mit den Gauß'schen Formeln so rechnen:

$$\operatorname{tg}^{1/2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \cot^{1/2} \gamma \quad (1)$$

$$\text{und} \quad c = \frac{a - b}{\sin^{1/2}(\alpha - \beta)} \cos^{1/2} \gamma = \frac{a + b}{\cos^{1/2}(\alpha - \beta)} \sin^{1/2} \gamma, \quad (2)$$

worin  $\gamma = CAF$  ist. Da aber nicht  $a$  und  $b$ , sondern deren Loga-

rithmen vorliegen, so geht man vielleicht lieber mit einem Hülfs-  
winkel  $\varphi$  vor, indem man in dem Bruche in (1) Zähler und Nenner  
mit  $a$  dividiert und

$$b : a = \operatorname{tg} \varphi \tag{3}$$

setzt. Dann ist

$$\operatorname{tg}^{1/2} (\alpha - \beta) = \operatorname{tg} (45 - \varphi) \cot^{1/2} \gamma, \tag{4}$$

und nun müssen folgerichtig nicht die Gauß'schen Formeln, sondern  
der Sinussatz zur Anwendung kommen.

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}, \tag{5}$$

womit allerdings der Vorteil des gleichzeitigen Aufschlagens dreier  
Funktionen von  $^{1/2}(\alpha - \beta)$  sowohl als von  $^{1/2} \gamma$  wieder verloren geht.  
Hier folgen beide Rechnungen:

$\gamma$	143° 27' 43,8''		$a - b$	2,194 231 <sub>n</sub>
$a$	288,371	2,459 951	$\operatorname{cosec}^{1/2}(\alpha - \beta)$	1,153 362 <sub>n</sub>
$b$	444,769	2,648 134	$\cos^{1/2} \gamma$	9,496 206
$a - b$	— 156,398	2,194 231 <sub>n</sub>	$c$	2,843 799
$^{1/2} a + b$	733,140	7,134 813	$a + b$	2,865 187
$\cot^{1/2} \gamma$	71° 43' 51,9''	9,518 668	$\sec^{1/2}(\alpha - \beta)$	0,001 074
$\operatorname{tg}^{1/2}(\alpha - \beta)$	— 4° 01' 41,8''	8,847 712 <sub>n</sub>	$\sin^{1/2} \gamma$	9,977 538

Man sieht, daß  $c$  durch Addition von oben nach unten und von  
unten hinauf gleichlautend gewonnen wird. Die Berechnung von  $\alpha$  und  $\beta$   
unterblieb, da sie in der folgenden Übersicht ohnehin als unentbehrlich  
vorkommt.

$\gamma$	143° 27' 43,8''		$\alpha + \beta$	36° 32' 16,2''
$b$		2,648 134	$^{1/2}(\alpha + \beta)$	18 16 8,1
$1 : a$		7,540 049	$^{1/2}(\alpha - \beta)$	— 4 01 41,8
$\operatorname{tg} \varphi$	57 02 32,0	0,188 183	$\alpha$	14 14 26,3
$\operatorname{tg}(45 - \varphi)$	— 12 02 32,0	9,329 045 <sub>n</sub>	$\beta^*)$	22 17 49,9
$\cot^{1/2} \gamma$	71 43 51,9	9,518 668	$a$	2,459 951
$\operatorname{tg}^{1/2}(\alpha - \beta)$	— 4 01 41,8	8,847 713 <sub>n</sub>	$\operatorname{cosec} \alpha$	0,609 074
$a \operatorname{cosec} \alpha$	Siehe neben!	3,069 025	Rechenprobe	3,069 025
$\sin \gamma$	143 27 43,8	9,774 775	$b$	2,648 134
$c$		2,843 800	$\operatorname{cosec} \beta$	0,420 891

Die „Rechenprobe“ schließt  $\sin \gamma$ , also auch  $c$  nicht ein, während  
sie das Vorhergegangene bestätigt. Der letztgefundene Wert von  $\log c$   
ist besser, weil auf das schärfere  $\log \operatorname{tg}^{1/2}(\alpha - \beta)$  gegründet, und

\*) Dem Winkelverzeichnis entnehmen wir für  $\beta = A'FC$  den Betrag  
22° 18' 07,5''. Diese Beobachtung ist nur nebenbei und ursprünglich zu anderem  
Zweck gemacht worden, kann aber als grobe Mefssprobe dienen.

hätte man dieses in der vorigen Rechnung verwendet (wobei aber bei den Proportionalteilen immer von Logarithmus zu Logarithmus, ohne Benutzung der Zahl oder des Winkels, übergegangen werden muß), so wäre ebenfalls  $\log c = 2,843\ 800$  gefunden worden\*). Man kann die vorige Rechnung übrigens durch Anwendung der Additions- und Subtraktionslogarithmen verschärfen und selbst noch vereinfachen, sodafs sie dann entschieden den Vorzug verdient.

Berechnung des (wahren) Werts von  $FC$  und  $(FC)$ .

$P'$	$y'$	$y' - y = \Delta y$	$\log \Delta y$	$\sigma' - \sigma = Z$	$\log Z$	
	$x'$	$x' - x = \Delta x$	$\log \frac{1}{\Delta x}$	$-\Delta y + \Delta x = N$	$\log \frac{1}{N}$	
$P$	$y$	$y' + x' = \sigma'$	$\log \operatorname{tg} (PP')$	Rechenprobe:	$\log (Z : N)$	
	$x$	$y + x = \sigma$	$(PP')$	$\Delta y + \Delta x = Z$	$(PP') + 45$	
$C$	{	- 4 270,043	536,566	2,729 623	986,293	2,994 006
		- 19 990,258	449,727	7,347 051	- 86,839	8,061 285 <sub>n</sub>
$F$	{	- 4 806,609	- 24 260,301	0,076 674		1,055 291 <sub>n</sub>
		- 20 439,985	- 25 246,594	50° 01' 54,0''		95° 01' 54,1''
$y' - y$	{	2,729 623	$x' - x$	2,652 949	$FC$	2,845 168
$\operatorname{cosec} (PP')$	{	0,115 545	$\operatorname{sec} (PP')$	0,192 219	1 : $c$	7,156 200
$PP'$	{	2,845 168	$PP'$	2,845 168	$FC : c$	0,001 368

Mit der Verhältniszahl  $FC : c$  sind alle früher gefundenen Seiten zu multiplizieren; man schreibt den Logarithmus 0,001 368 auf einen Schiebzettel und hält ihn zur Addition der Reihe nach über alle Seitenlogarithmen. Die endgültigen Seitenlogarithmen sind in nachfolgender Koordinatenberechnung benutzt.

*Bemerkung.* Die vorstehende Rechenübersicht soll ganz wie die auf S. 99 verhüten, daß Fehler in den Differenzen  $y' - y$  und  $x' - x$  unbemerkt bleiben. Denn Anfänger namentlich gehen bei häufigem Vorzeichenwechsel nicht sicher genug, auch wenn sie die bekannten Proben für Subtraktion und Addition\*\*) anwenden (Rest + Subtrahend = Minuend etc.). Darum sind auf S. 99 sowohl  $Z$  als  $N$ , hier aber zur Ersparnis von Mühe nur  $Z$  aus ganz neuen Zahlen gebildet.

\*) In der weiteren Rechnung wird gleichwohl  $c = 2,843\ 799$  beibehalten, weil damit von den Beobachtern die endgültigen Koordinaten schon ermittelt waren und der Unterschied fast ohne Einfluß ist.

\*\*) Selbst in der Wahl dieser beiden Rechnungsarten kommen in der Eile zuweilen Fehlgriffe vor.

Dort konnte man schon vor der logarithmischen Rechnung eine vollständige Zahlenprobe vollziehen, nämlich:

$$(y' - y) + (x' - x) = Z; \quad - (y' - y) + (x' - x) = N;$$

hier jedoch bleibt  $N$  ungeprüft bis nach Berechnung von  $(PP') + 45$ . Aber verborgen kann ein Fehler in  $N$  nicht bleiben. Vergl. dagegen die in Aufg. 53 angewandte Vorprobe durch  $N \pm Z$ .

Koordinaten der Neupunkte.

Punkt $P$ $P'$	Brechungswinkel $\beta$	Richtungswinkel $(PP')$	$\sin(PP')$ $PP'$ $\cos(PP')$	$PP' \sin(PP')$ $PP' \cos(PP')$	Ordinaten	Abscissen	Punkt $P'$
$F$	230°01' 54,1''	230°01' 54,1''			$\times 5\ 193,391$	$\times 79\ 560,015$	$F$
$F$ $A$	337 42 10,0	27 44 04,1	9,667 803 2,461 320 9,946 999	2,129 123 2,408 319	134,624 $\times 5\ 328,015$	256,047 $\times 79\ 816,062$	$A$
$A$ $C$	216 32 16,2	64 16 20,3	9,954 661 2,649 503 9,637 584	2,604 164 2,287 087	401,943 $\times 5\ 729,958$	193,681 $\times 80\ 009,743$	$C$
$C$ $M$	325 32 30,0	209 48 50,3	9,696 518 <sub>n</sub> 2,441 635 9,938 342 <sub>n</sub>	2,138 153 <sub>n</sub> 2,379 977 <sub>n</sub>	$\times 862,547$ $\times 5\ 592,505$	$\times 760,129$ $\times 79\ 769,872$	$M$
$M$ $B$	182 53 16,2	212 42 06,5	9,732 608 <sub>n</sub> 2,425 480 9,925 051 <sub>n</sub>	2,158 088 <sub>n</sub> 2,350 531 <sub>n</sub>	$\times 856,091$ $\times 5\ 448,596$	$\times 775,854$ $\times 79\ 545,726$	$B$
$B$ $F$	240 30 10,1	273 12 16,6	9,999 320 <sub>n</sub> 2,407 568 8,747 426	2,406 888 <sub>n</sub> 1,154 994	$\times 744,796$ $\times 5\ 193,392$	14,289 $\times 79\ 560,015$	$F$
$F$ $C$	316 49 37,5	50 01 54,1			Soll: 1	Soll: 5	

Wie schon bei einigen anderen Aufgaben, können wir auch hier die Koordinaten eines Neupunktes mit denen aus der Triangulation von 1888\*) vergleichen.

	$y$	$x$
Neupunkt $M$	— 4 407,495	— 20 230,128 wie oben.
Sollwerte:	— 4 407,492	— 20 230,126

\*) Siehe Anmerkung auf Seite 100. Es leuchtet ein, daß ein solcher Vergleich nur bei Übungsmessungen Sinn hat, da  $M$  sonst als Fest-, nicht als Neupunkt zu behandeln wäre.

### Aufgabe 31.

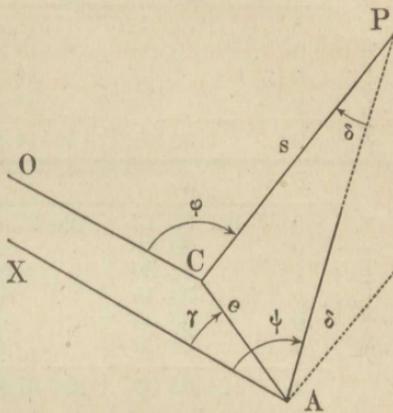
*Centrieren excentrisch gemessener Richtungen.* Von einem Turme aus, in dessen Centrum, dem eigentlichen Dreieckspunkt, nicht beobachtet werden kann, soll eine Reihe von Zielen angeschnitten werden, doch findet sich kein Standpunkt, von dem aus sie alle sichtbar sind. Man wählt daher zwei excentrische Standpunkte, verbindet auf beiden die nicht gemeinsamen Richtungen mit mehreren gemeinsamen durch Winkelmessung und fügt schliesslich allen beobachteten Richtungen Verbesserungen bei, durch welche die Ergebnisse sich so gestalten, als ob auf dem Dreieckspunkt selbst gemessen worden wäre. Durch die Umrechnung darf die Winkelmessung an Genauigkeit nichts einbüßen. Wird dies beachtet, so findet sich eine Mefsprobe in den gemeinsamen Richtungen, welche sich aus beiden Standpunkten übereinstimmend ableiten lassen sollten. Um dieser Probe willen ist die Aufgabe in solcher Form zum ersten Eintüben von Satzbeobachtungen gewählt worden. In der Anwendung natürlich ist nicht die Mefsprobe das Wichtigste, sondern die Verknüpfung der nicht gemeinsamen Richtungen durch die gemeinsamen zu einer zusammenhängenden Winkelmessung.

*Richtungen* sind Horizontalwinkel von gemeinsamem Scheitel und gemeinsamem linken Schenkel, welchen letzteren man willkürlich wählen darf. So ergeben *Satzbeobachtungen*, bei welchen man in *einer* Stellung des Limbus Ziel für Ziel einstellt und jedesmal den Zeiger abliest, unmittelbar Richtungen mit dem Nullradius des Limbus als linkem Schenkel. Ziehen wir sodann von allen Ablesungen die erste ab, so gehen daraus neuerdings Richtungen hervor, als deren linker Schenkel jetzt der Strahl nach dem ersten Ziel hin angesehen werden kann, während die rechten Schenkel durch die übrigen Ziele gehen. In dieser Form werden die Richtungen mit anderen vergleichbar, welche bei veränderter Limbusstellung zwischen denselben Zielen beobachtet worden sind. In unsrem Beispiel wurden auf jedem Standpunkt 4 oder 6 Sätze in 4 oder 6 verschiedenen Limbusstellungen gemessen und alle so umgerechnet, daß auf den Visierstrahl nach einem bestimmten, und zwar nach einem fernen, aber gut sichtbaren Ziel die Richtung Null trifft. Dadurch, daß man ein Ziel wählte, welches beiden Standpunkten *gemeinsam* war, wurden also sämtliche gemessene Richtungen miteinander vergleichbar, diejenigen von verschiedenem Standpunkte aber erst, nachdem sie durch die vorerwähnten Verbesserungen auf das „Centrum des Standortes“, d. h. auf den eigentlichen Dreieckspunkt umgerechnet waren.

$AP$  (Fig. 28) sei der Visierstrahl vom Standpunkte  $A$  nach dem fernen Ziele  $P$ ,  $XAP$  seine *Richtung*, sodafs demnach dem Strahl  $AX$

die Richtung Null beigelegt wird (für die Rechnung ist es gleichgültig, ob  $X$  ein fernes Ziel oder den Nullpunkt des Limbus oder überhaupt einen beliebigen festen Punkt vorstellt), sei ferner  $C$  das Centrum des Standortes,  $AC$ , die sogenannte Excentricität, sorgfältig gemessen und gleich  $e$  gefunden, sowie auch die zugehörige Richtung  $XAC = \gamma$ , wenn auch minder peinlich als die übrigen, beobachtet worden, sei endlich  $CP = s$  auf Meter oder halbe Meter genau bekannt, so wollen wir zunächst aus der Richtung  $XAP = \psi$  die Richtung  $OCP = \varphi$  für  $C$  als gedachten Standpunkt und  $CO \parallel AX$  berechnen\*). Es findet sich

Fig. 28.



$$\varphi = \psi + \delta, \tag{1}$$

$$\sin \delta = \frac{e}{s} \sin CAP, \tag{2}$$

worin  $CAP = \psi - \gamma.$  (3)

Auch darf man rechnen nach der *Näherungsformel*:

$$\delta = (206\,265 \cdot \frac{e}{s} \sin CAP) \text{ Sekunden}, \tag{4}$$

so lange die Vernachlässigung  $t$  infolge dieser Näherungsrechnung, nämlich in Sekunden:

$$t = 34\,377 \left( \frac{e}{s} \sin CAP \right)^3 \tag{5}$$

nicht mehr beträgt als Größen, die man ohnehin abwerfen würde.

Aus (2) oder (4) wird  $\delta$  nach Größe und Vorzeichen bestimmt und gemäß (1) zu  $\psi$  algebraisch addiert. Die Richtungen  $\varphi$  zählen, wie erwähnt, von einem linken Schenkel  $CO \parallel AX$  aus. Man verwandelt sie in Richtungen, welche von dem Strahl  $CP_0$  nach einem fernen Ziele  $P_0$  aus zählen, indem man von ihnen allen  $OCP_0 = \varphi_0$  abzieht; und  $\varphi_0$  wird im allgemeinen auch dann nicht Null sein, wenn  $P_0$  in der Geraden  $AX$  gelegen ist, d. h. wenn dem Strahl  $AP_0$  vorher die Richtung  $\psi = 0$  beigelegt war.

In Bezug auf die Genauigkeit der Messung der sog. Centrierungsstücke dient als Anhalt, daß  $\delta$  um denselben Bruchteil fehlerhaft wird, um den man  $e$  falsch gemessen hatte. Geringen Einfluß übt dagegen ein Fehler von einigen Minuten in der Richtung  $AC$ .

\*) Siehe des Verfassers praktische Geometrie, I, § 168.

Ergebnis der Satzbeobachtungen.  
Theodolit von 30" Nonienangabe.

Standpunkt $A_1$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$C$
	0	1° 38' 00"	11° 13' 45"	24° 01' 30"	44° 24' 30"	241° 01' 00"
	0	00	13 45	30	30	
	0	15	14 15	45	30	01 30
	0	15	14 15	45	45	
	0	1 38 07,5	11 14 00	24 01 37,5	44 24 33,8	241 01 15
Standpunkt $A_3$	$P_5$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$C$	
	0	124 33 15	126 27 00	135 47 30		
	0	33 30	00	47 30		
	0	33 30	00	47 30		
	0	33 15	00	47 30		
	0	33 30	15	47 30	158 34 15	
	0	34 00	00	48 00	34 00	
	0	124 33 30	126 27 02,5	135 47 35	158 34 07,5	

In der folgenden Umrechnung der Richtungen sind die Längen  $s$ , auf Meter abgerundet, einer vorausgegangenen Triangulation entnommen, die als erst vorläufig berechnet anzusehen war. Sorgfältig gemessen sind die Excentricitäten:  $e_1 = 7,223$  m  $e_2 = 11,897$  m.

## Umrechnung der excentrisch beobachteten Richtungen.

Stand $A_1$	$C$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$\psi$	241° 01' 15"	0° 00' 00"	1° 38' 07,5"	11° 14' 00,0"	24° 01' 37,5"	44° 24' 33,8"
$\psi - \gamma$	0 00 00	118 58 45	120 36 52,5	130 12 45,0	143 00 22,5	163 23 18,8
$s$		7496	2011	5638	9224	8243
$\log \varrho''$		5,314 43	6,173 15	6,173 15	6,173 15	6,173 15
$\log e_1$		0,858 72				
$\log \sin(\psi - \gamma)$		9,941 91	9,934 81	9,882 90	9,779 40	9,456 18
$\log(1:s)$		6,125 17	6,696 59	6,248 87	6,035 08	6,083 91
$\log \delta''$		2,240 23	2,304 55	2,304 92	1,987 63	1,713 24
$\delta$		0° 02' 53,9"	0° 10' 37,6"	0° 03' 21,8"	0° 01' 37,2"	0° 00' 51,7"
$\varphi$		0 02 53,9	1 48 45,1	11 17 21,8	24 03 14,7	44 25 25,5
Stand $A_2$	$C$	$P_5$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	
$\psi$	158 34 07,5	0 00 00,0	124 33 30,0	126 27 02,5	135 47 35,0	
$\psi - \gamma$	0 00 00,0	201 25 52,5	325 59 22,5	327 52 55,0	337 13 27,5	
$s$		5055	7496	2011	5638	
$\log \varrho''$		5,314 43	6,389 87	6,389 87	6,389 87	6,389 87
$\log e_2$		1,075 44				
$\log \sin(\psi - \gamma)$		9,562 75n	9,747 68n	9,725 64n	9,587 85n	
$\log(1:s)$		6,296 28	6,125 17	6,696 59	6,248 87	
$\log \delta''$		2,248 90n	2,262 72n	2,812 10n	2,226 59n	
$\delta$		— 02' 57,4"	— 03' 03,1"	— 10' 48,8"	— 02' 48,5"	
$\varphi$		359 57 02,6	124 30 26,9	126 16 13,7	135 44 46,5	

## Endgültige, vergleichbare Richtungen.

Stand	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$A_1$	0° 00' 00,0"	1° 45' 51,2"	11° 14' 27,9"	24° 00' 20,8"	44° 22' 31,6"	
$A_2$	0 00 00,0	1 45 46,8	11 14 19,6			235° 26' 35,7"
Diff.		4,4	8,3			

## V. Nivellieren.

### Aufgabe 32.

*Einfaches Nivellement zum Einwägen einer Neumarke im Anschluß an einen Bolzen der Landesaufnahme, mit Messprobe.* Die Ablesung dekadischer Ergänzungen \*) an der Ziellatte, neben den eigentlichen Zielhöhen, ist von der preussischen Landesaufnahme zur Vermeidung grober Ablesungsfehler eingeführt und von den Landmesserkursen zu Poppelsdorf und Berlin übernommen worden. Sie ist leicht zu erlernen, auch wenn man, wie im allgemeinen zu Berlin üblich, die Bezifferung nach dekadischen Ergänzungen nicht wirklich auf die Lattenskalen schreibt. Von den beiden Ablesungen am Horizontalfaden, Zielhöhe und dekadische Ergänzung, wird hier im Rückblick nur die erstere, im Vorblick nur die letztere diktiert und aufgeschrieben, durch den Schreiber aber im Rückblick die dekadische Ergänzung, im Vorblick die Zielhöhe sogleich selbst gebildet und halblaut vorgelesen, wobei der Beobachter, noch ins Fernrohr blickend, die Richtigkeit des Vorgelesenen prüft. Muß der Beobachter selbst aufschreiben (was auch in der Praxis möglichst zu vermeiden ist, da selbst untergeordnete Kräfte im Niederschreiben von Zahlen und Lesen dekadischer Ergänzungen geübt werden können), so wird die erstmalige Ablesung am Faden und die Prüfung derselben mittelst der zweiten durch das Aufschreiben unterbrochen, womit freilich viel Zeit verloren geht.

Grobe Fehler bis herab zum Centimeter werden durch diese Ablesungsproben in der Regel sofort entdeckt, die Schätzungsfehler aber nicht verbessert, weil das Auge geneigt ist, die nämlichen Schätzungsfehler zu begehen, ob es nun vorwiegend den unteren oder den oberen

---

\*) Vergl. I, Aufgabe 2.

Bruchteil des Skalenintervalls betrachtet, in welchem der Horizontalfaden liegt. Nur bei ungünstigen Nebenumständen, wie Unruhe der Fernrohrbilder oder Zittern des Fernrohrs im Wind, pflegt die zweite Schätzung von der ersten abzuweichen. Deshalb und weil die Einstellungsfehler des Fernrohrs, namentlich etwaige Ausschläge der Libelle beim Beobachten, durch das Verfahren nicht geprüft werden, gilt die doppelte Ablesung der Latte nach Zielhöhen und Ergänzungen niemals so viel als zwei unabhängige Nivellements. Die alte Regel, jede Einwägung einer Neumarke durch Wiederholung in entgegengesetzter Wegrichtung zu prüfen, wird vielmehr unverändert beibehalten.

Im folgenden Beispiel wurde sogar die unabhängige Wiederholung jedes Standes dadurch ermöglicht, daß man die Wechsellpunkte durch eigens geschmiedete stumpfe Nägel mit breiten konischen Köpfen\*) auf der Strafse bezeichnet hatte und mit Hülfe untergelegter Papierblättchen leicht wieder auffinden konnte. Durch dieses Vorgehen gelangt man ohne große Mühe zu einem wertvollen Einblick in die Einzelfehler der Messung.

Was die Einrichtung des Feldbuchs anlangt, so ist sie die übliche mit dem Unterschied, daß die Steigungen, ob positiv oder negativ, in eine und dieselbe Spalte kommen, im letzteren Falle als dekadisch ergänzt anzuschreiben. Jedem eingewogenen Punkt dient eine Zeile, in welche bei Wechsellpunkten unter „Vorwärts“ der darüber genommene Vorblick, unter „Rückwärts“ der Rückblick vom nächsten Stand aus eingetragen wird; bei Nebenpunkten kommt unter „Rückwärts“ als eingebildeter Rückblick die Zielhöhe selbst (aber eingeklammert), unter „Vorwärts“ deren dekadische Ergänzung zu stehen. Der Rückblick des  $n$ ten Punktes zum Vorblick des  $n + 1$ ten addiert giebt die Steigung, diese zur Kote des  $n$ ten addiert die Kote des  $n + 1$ ten; und zwar gilt diese Regel gleichmäßig für Wechsel- und Nebenpunkte, damit die übliche Summenprobe am Schlusse eines Nivellements oder einer Seite des Feldbuchs *alle* Punkte umfaßt.

In unsrem Beispiel diente ein Nivellierinstrument von Sickler mit Dosenlibelle, Kippschraube, in den Lagern verlötetem Fernrohr und unversetzbarer Libelle. Wie es sich bei diesem Instrument gehört, befinden sich Justierschrauben nur an den beiden Libellen. Nach Berichtigung der Dosenlibelle war also noch der Parallelismus von Visier- und Libellenachse, und zwar mit der Justierschraube der Fernrohrlibelle herzustellen.

---

\*) 100 solche Nägel kosten in Berlin 4 Mark. Dieselben sind mehrmals zu verwenden, aber überhaupt nur auf festen Wegen, nicht in lockerem Sande brauchbar.

Es geschah dies in bekannter Weise mittelst dreier Aufstellungen des Instruments gemäß folgendem Eintrag ins Feldbuch:

Ziel	Aufstellung über			
	Mitte	Punkt I.		Punkt II als Probe
vor		nach		
der Justierung				
Punkt I	1,720	1,110	1,110	1,112
Punkt II	1,860	1,207	1,250	1,252
Unterschied	0,140	0,097	0,140	0,140

Abstand der Punkte I und II etwa 100 m. Die Instrumenthöhen 1,110 und 1,252 wurden am Objektiv gemessen, als Mittel der Höhe des oberen und unteren Randes der Fassung.

*Einfaches Nivellement.*

28. Mai 1886, Niv.-Instr. v. Sickler Nr. 563 (neu).

Nr.	Rückwärts	Vorwärts	Steigt	Kote	Bemerkungen
⊙	1,279			58,899	N. B. 2409 der Landesaufnahme.
1	1,647	×8,459	×,738	58,637	
2	1,566	×8,950	0,597	59,234	
3	1,634	×8,931	0,497	59,731	
4	1,725	×,029	0,663	60,394	
5	1,461	×,067	0,792	61,186	
6	1,119	×8,567	0,028	61,214	
7	1,015	×8,494	×,613	60,827	
8	1,166	×8,537	×,552	60,379	
9	1,147	×8,420	×,586	59,965	
10	1,158	×8,422	×,569	59,534	
11	1,132	×8,444	×,602	59,136	
12	1,270	×8,465	×,597	58,733	
13	1,278	×8,482	×,752	58,485	
⊙		×8,778	0,056	58,541	Neumarke.
	18,597	×81,045	×,642	0,358	
	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\times,642}$			58,899	wie oben.

## Wiederholung in umgekehrter Richtung.

Nr.	Rückwärts	Vorwärts	Steigt	Kote	Bemerkungen
⊙	1,204			58,541	Summe der Steigungen:
13	1,506	×8,740	×,944	58,485	0,000
12	1,511	×8,742	0,248	58,733	0,000
11	1,485	×8,893	0,404	59,137	0,001
10	1,580	×8,912	0,397	59,534	×,999
9	1,593	×8,850	0,430	59,964	×,999
8	1,549	×8,821	0,414	60,378	0,000
7	1,464	×8,899	0,448	60,826	0,000
6	1,484	×8,922	0,386	61,212	×,999
5	1,030	×8,489	×,973	61,185	0,001
4	0,950	×8,180	×,210	60,395	0,002
3	1,050	×8,386	×,336	59,731	×,999
2	1,099	×8,452	×,502	59,233	×,999
1	1,610	×8,301	×,400	58,633	×,997
⊙		×8,652	0,262	58,895	0,000
	19,115	×81,239	0,354	×,646	×,996 =
	0,354			58,541	0,354 + ×,642

Die mit „Summe der Steigungen“ überschriebene Zahlenspalte stellt zugleich für jeden Stand des Instruments die Summe der Fehler dar, welche beim Hin- und HERNIVELLIEREN begangen worden sind. Die Wurzel aus der Summe ihrer Quadrate, nämlich  $\sqrt{20} = \pm 4,47$  mm, giebt den mittleren Betrag des Gesamtfehlers beider Einwägungen oder der Abschlusdifferenz bei Rückkehr zum Ausgangspunkt, welche 4 mm beträgt. Demnach ist  $\pm 2,24$  mm =  $\frac{1}{2} \sqrt{20}$  der m. F. des arithmetischen Mittels beider Einwägungen, und es kommt der Neumarke die Kote zu:

$$58,899 + \frac{1}{2} (\times,642 + \times,646) = 58,543 \pm 0,0022$$

unter der Annahme, daß die Kote des Nivellementsbolzens Nr. 2409 fehlerfrei sei. Die doppelte Weglänge zwischen Bolzen und Neumarke betrug etwa 1325 m.

## Aufgabe 33.

*Nivellement mit Wendelatte unter Abschluss einer Schleife zum Einwägen einiger Neumarken.* Unsere Wendelatten ruhen mit flachen Kugelschalen auf schweren, in den Boden eingetretenen Platten mit halbkugeligen Köpfen. Ihre beiden, von Feldhausen in Aachen mit größter Schärfe entworfenen Skalen sind um 3,035 m gegen einander verschoben\*). Die beiden Ablesungen eines Blickes, vor und nach

\*) Gleichheit der Mafseinheiten auf jeder Skala und Schärfe der Unterteilung sind Hauptbedingung für Wendelatten.

dem Wenden, dienen daher zur Probe nicht nur auf grobe Ablesungsfehler, sondern auch auf regelmäßige Schätzungsfehler, da die zweite Ablesung an anderer und häufig symmetrisch entgegengesetzter Stelle eines kleinsten Skalenfeldes erfolgt als die erste. Ein Teil der Schätzungsfehler wird dadurch im Mittel beider Ablesungen getilgt, die Fehler des Nivellierinstrumentes und seiner Einstellung aber selbstverständlich nicht, weshalb auch das Nivellement mit Wendelatte ein doppeltes unabhängiges Einwägen der Neumarken nicht vollzieht, sondern durch ein Gegennivellement oder den Abschluss einer Schleife geprüft werden muß.

In Hinsicht der Ablesung und Aufschreibung wird ähnlich verfahren wie beim einfachen Nivellement. Jede Ablesung wird durch ihre dekadische Ergänzung geprüft, jedoch in den Rückblicken nur die unmittelbare Ablesung, in den Vorblickten nur deren Ergänzung niedergeschrieben.

Das Feldbuch unterscheidet sich von dem für einfaches Nivellement also nur dadurch, daß jedem Punkt eine Doppelzeile gilt, entsprechend den beiden Skalen der Wendelatte, und daß, entweder hinter den Rück- und Vorblickten oder hinter den Knoten eingeschaltet, zwei schmale Spalten zum Eintrag derjenigen Meßprobe dienen, welche der Vergleich der beiden Seiten der Wendelatte liefert. Zum Zweck dieses Vergleichs wird folgender Schiebzettel

Rückwärts	Vorwärts
3,035	×6,965

über die erste Zeile jedes Punktes gehalten. Die Zahlen des Schiebzettels zu denen dieser Zeile addiert sollen die Zahlen der zweiten Zeile ergeben. Was daran fehlt, wird (in Millimetern) in die Spalten der Probe eingetragen.

Die Rechenproben am Schlusse jeder Buchseite oder jedes Nivellements erleiden ebenfalls einige zweckgemäße Änderungen, die aus dem nachfolgenden Beispiel zu ersehen sind. Dasselbe ist ein Jahr später als das vorige, und zwar aus einer Aufnahme der nämlichen Meßgruppe hervorgegangen. Die Gesamtlänge der nivellierten Schleife beträgt etwa 2200 m, die Tagesleistung der Beobachter hat sich demnach merklich gehoben. Nicht selten werden 3,5 und selbst 4 km mit der Wendelatte an einem Tage eingewogen, so einmal die Strecke zwischen zwei Bolzen der Landesaufnahme hin und zurück, mit 4 mm Schlußfehler bei 26 m Höhenunterschied.

## Nivellement mit Wendelatte.

6. Mai 1887, Niv.-Instr. v. Ertel, Nr. 16.

Nr.	Rückwärts	Vorwärts	Probe		Steigt	Kote	Bemerkungen
			R.	V.			
⊙	1,537 4,572		0			58,8990	Niv.-Bolzen Nr. 2409.
1	1,376 4,411	×,033 ×5,999	0	+ 1	0,570 0,571	0,5705 59,4695	
2	1,072 4,107	×8,665 ×5,630	0	0	0,041 0,041	0,041 59,5105	
⊙	(1,095) (4,130)	×8,905 ×5,870	(0)	0	×,977 ×,977	×,977 59,4875	Grenzstein I.
3	1,283 4,318	×8,976 ×5,942	0	+ 1	0,071 0,072	0,0715 59,5590	
⊙	(1,138) (4,172)	×8,862 ×5,828	(- 1)	+ 1	0,145 0,146	0,1455 59,7045	Grenzstein II.
4	1,287 4,322	×8,934 ×5,900	0	+ 1	0,072 0,072	0,072 59,7765	
⊙	(1,248) (4,283)	×8,752 ×5,717	(0)	0	0,039 0,039	0,039 59,8155	Grenzstein III.
5	1,108 4,143	×7,935 ×4,900	0	0	×,183 ×,183	×,183 58,9985	
⊙	(1,190) (4,224)	×8,810 ×5,776	(- 1)	+ 1	×,918 ×,919	×,9185 58,9170	Grenzstein IV.
6	1,335 4,370	×,689 ×6,655	0	+ 1	0,879 0,879	0,879 59,7960	
7	1,712 4,746	×,739 ×6,704	- 1	0	1,074 1,074	1,074 60,8700	
⊙	(1,210) (4,243)	×8,790 ×5,757	(- 2)	+ 2	0,502 0,503	0,5025 61,3725	Grenzstein VI.
8	2,561 5,597	×8,652 ×5,616	+ 1	- 1	×,862 ×,859	×,8605 61,2330	
⊙	(1,837) (4,872)	×8,163 ×5,128	(0)	0	0,724 0,725	0,7245 61,9575	Grenzstein VII.
9	0,743 3,778	×,042 ×6,007	0	0	0,879 0,879	0,879 62,8365	
10	0,350 3,385	×6,989 ×3,954	0	0	×7,732 ×7,732	×7,732 60,5685	
⊙		×,152 ×6,117		0	×,502 ×,502	×,502 60,0705	Grenzstein VIII.
	95,755	×06,588			2,343	×8,8235	
	2,343 : 2 = 1,1715					58,8990	wie oben!

*Nivellement mit Wendelatte.* (Fortsetzung.)

Nr.	Rückwärts	Vorwärts	Probe		Steigt	Kote	Bemerkungen
			R.	V.			
⊙	(0,848) (3,883)		(0)			60,0705	Grenzstein VIII.
11	1,393 4,427	×8,118 ×5,084	− 1	+ 1	×8,966 ×8,967	×8,9665 59,0370	
12	1,240 4,275	×8,652 ×5,617	0	0	0,045 0,044	0,0445 59,0815	
13	1,275 4,310	×8,487 ×5,452	0	0	×,727 ×,727	×,727 58,8085	
14	1,045 4,080	×8,687 ×5,652	0	0	×,962 ×,962	×,962 58,7705	
⊙	(1,172) (4,208)	×8,828 ×5,792	(+ 1)	− 1	×,873 ×,872	×,8725 58,6430	Sockel des Arndtdenkmals.
15	1,589 4,624	×,006 ×5,971	0	0	0,178 0,179	0,1785 58,8215	
16	1,743 4,778	×,117 ×6,082	0	0	0,706 0,706	0,706 59,5275	
17	1,728 4,763	×,120 ×6,085	0	0	0,863 0,863	0,863 60,3905	
18	1,541 4,577	×,154 ×6,119	+ 1	0	0,882 0,882	0,882 61,2725	
19	0,488 3,523	×8,113 ×5,078	0	0	×,654 ×,655	×,6545 60,9270	
20	0,833 3,869	×8,324 ×5,290	+ 1	+ 1	×8,812 ×8,813	×8,8125 59,7395	
⊙		×8,330 ×5,295		0	×,163 ×,164	×,1635 58,9030	N. B. Nr. 2409.
	66,212	×31,453			×7,665	1,1675	
	×7,665 : 2 = ×8,8325					60,0705	wie oben!

Die am Schlusse jeder Seite angegebenen Rechenproben begreifen noch nicht die Mefprobe der vierten und fünften Spalte ein. Addiert man die Proben eines und desselben Standes (also verschiedener Zeilen) zu der ersten Zahl „Steigt“, die aus dem Stande hervorging, so muß die zweite derartige Zahl erscheinen, so in dem Stande

von Punkt 7 auf ⊙ VI:  $(-1 + 2) \text{ mm} + 0,502 = 0,503$

von ⊙ VI auf Punkt 8:  $(-2 - 1) \text{ mm} + \times,862 = \times,859$

u. s. w. Diese Rechenprobe ist in wenig Augenblicken für das ganze

Nivellement erledigt. Die Summe der Spalten 4 und 5 interessiert wenig, eher die Quadratsumme der Proben.

Der Schlußfehler von 4 mm ist proportional der Entfernung vom Ausgangspunkt, nach der Anzahl der zwischenliegenden Stände berechnet, auf die Neumarken zu verteilen. Die betreffende Verbesserung kann rot über die Kote einer jeden gesetzt werden. Folgende Übersicht giebt jedoch ein Bild der Berechnungsweise.

Marke	Unverbesserte Kote	Anzahl Stände vom Ausgangspunkt aus	Verbesserung mm	Verbesserte Kote
N. B. 2409	58,8990	0	0,0	58,899
Stein I.	59,4875	3	— 0,6	59,487
„ II.	59,7045	4	— 0,8	59,704
„ III.	59,8155	5	— 1,0	59,815
„ IV.	58,9170	6	— 1,1	58,916
„ VI.	61,3725	8	— 1,5	61,371
„ VII.	61,9575	9	— 1,7	61,956
„ VIII.	60,0705	11	— 2,1	60,068
Arndtdenkmal	58,6430	15	— 2,9	58 640
N. B. 2409	58,9030	21	— 4,0	58,899

### Aufgabe 34.

*Einwägen von Neumarken in einer Schleife, mit doppelten Wechselpunkten.* Zwei nebeneinander hinlaufende Nivellementszüge I und II, deren Wechselpunkte paarweise beisammen, aber in etwas verschiedener Höhe liegen, werden gleichzeitig und mit nur *einem* Instrument ausgeführt. Da die Instrumenthöhen also beiden Zügen gemeinsam und nur die Lattenablesungen verschieden sind, so prüft sich die Messung nach jedem Standwechsel dadurch, daß der Abstand  $a$  der beiden Fernrohrniveaus im vorigen und im neuen Stande sowohl aus I als auch aus II berechnet wird. Man subtrahiert dazu von den Rückblicken des neuen die Vorblicke des vorigen Standes. Darum sind in dem Feldbuche die Vorblicke negativ, jedoch zur bequemerer Rechnung dekadisch ergänzt eingetragen. In den mit I und II überschriebenen Spalten vereinigt man die Zahlen jeder Doppelzeile und schreibt die Ergebnisse  $a_I$  und  $a_{II}$  untereinander in die Spalte der *Probe*. Ihr Sollwert ist  $a$  und ihr arithmetisches Mittel wird in der fünften Spalte der zuletzt berechneten *Kote* beigelegt. Außer den Koten des Ausgangs-

und des Endpunktes der Nivellementszüge treten daher in dieser Spalte nur Koten der Fernrohrniveaus auf und zwar in derselben Zeile mit den zugehörigen Vorblicken. Um die Koten der Lattenfußpunkte zu berechnen, was jedoch nur bei den Neumarken geschieht, braucht man daher blofs die (negativen) Vorblicke mit der in derselben Zeile stehenden Kote des Fernrohrniveaus zu vereinigen, wie z. B. S. 128 bei Neumarke II geschehen und in die letzte Spalte eingeschrieben ist.

Auch die Neumarke I wäre besser als Wechelpunkt in das durchlaufende Nivellement eingefügt, statt durch einen ungeprüften Seitenblick bestimmt worden. Nach der Grundregel: „Jedem Paar Wechelpunkte eine Doppelzeile“ mußte auch diesem Seitenblick, obwohl er nur einfach beobachtet wurde, eine solche gewidmet, wenn auch nicht ganz ausgefüllt werden. Die Kote des zugeordneten Fernrohrniveaus findet sich darin wiederholt. Zu den Rechenproben darf diese Doppelzeile nicht zugezogen werden, weshalb sie eingeklammert ist.

*Rechenproben.* Die Summe der beiden ersten Spalten giebt den Höhenunterschied des Anfangs- und Endpunktes des Nivellements für jeden der beiden Züge besonders; die Summe dieser Höhenunterschiede liefert die Summe der folgenden Spalte. Die Hälfte der Summe von der Schlufskote abgezogen giebt die Kote des Ausgangspunktes.

Nivellement mit doppelten Wechelpunkten. 3. August 1886.

Seite 1 des Feldbuchs.

Punkt Nr.	I	II	Probe	Kote	Bemerkungen	
⊙	1,676	1,678	1,676 1,678	58,899 1,677	Bolzen 2409	
1	×8,910 1,486	×8,908 1,490	0,396 0,398	60,576 0,397		
2	×8,660 1,580	×8,785 1,457	0,240 0,242	60,973 0,241	59,386 Kote der Neumarke I	
3	×8,686 1,471	×8,789 1,370	0,157 0,159	61,214 0,158		
⊙	×8,172			61,214		
4	×8,701 1,181	×8,685 1,199	×,882 ×,884	61,372 ×,883		
5	×8,400 1,322	×8,474 1,247	×,722 ×,721	61,255 ×,7215		
6	×8,508 1,400	×8,543 1,363	×,908 ×,906	60,9765 ×,907		
7	×8,368 0,723	×8,377 0,715	×,091 ×,092	60,8835 ×,0915		
8	×8,418 1,279	×8,250 1,445	×,697 ×,695	59,975 ×,696		
	0,769	0,775	1,544	59,671 ×,228		Seitenprobe
	1,544 : 2 = 0,772			58,899		wie oben!

## Nivellement mit doppelten Wechsellpunkten. 3. August 1886.

Seite 2 des Feldbuchs.

Punkt Nr.	I	II	Probe	Kote	Bemerkungen	
9	×,965 2,478	×,970 2,472	2,443 2,442	59,671 2,4425	61,848 Kote der Neumarke II	
10	×8,796 1,478	×8,762 1,511	0,274 0,273	62,1135 0,2735		
11 ⊙	×,461 0,735	×,230 0,964	0,196 0,194	62,387 0,195		
12	×,347 0,043	×,292 0,098	×,390 ×,390	62,582 ×,390		
13	×6,770 0,558	×6,783 0,543	×7,328 ×7,326	61,972 ×7,327		
14	×,141 2,900	×,128 2,915	2,041 2,043	59,299 2,042		
15	×8,868 1,062	×8,811 1,119	×,930 ×,930	61,341 ×,930		
16	×7,859 1,281	×7,807 1,331	×,140 ×,138	61,271 ×,139		
17 ⊙	×8,491	×8,491	×8,491 ×8,491	60,410 ×8,491		
	×,233	×,227	×8,460	58,901		Bolzen 2409 Seitenprobe wie oben!
	×8,460 : 2 = ×,230			0,770		
				59,671		

Es ist nicht ohne Interesse nachzusehen, in welchem Verhältnis der Schlufsfehler von 2 mm zu dem mittleren Ablesungsfehler steht. Wir subtrahieren zu dem Zweck je zwei zusammengehörige Zahlen der „Probe“ von einander und erhalten (indem wir die Beobachtungen über dem Bolzen 2409 vereinigen) 17 aus je 4 Ablesungen zusammengesetzte Differenzen, deren Quadratsumme 48 ist, das Millimeter als Einheit gesetzt. Daher ergibt sich der mittlere Ablesefehler  $\mu$  im einzelnen Blick aus:

$$\mu^2 = \frac{48}{4 \cdot 17}; \quad \mu = \pm 0,84 \text{ mm.}$$

Der mittlere Fehler  $M$  des ganzen Nivellementsuges, wie er der durch Mittelbildung berechneten Schlufskote anhaftet, folgt aus

$$M^2 = 34 \mu^2 : 2 = 12; \quad M = \pm 3,46 \text{ mm.}$$

Der Schlußfehler ist also zufällig sehr klein geworden. — Seine Verteilung auf die Zwischenpunkte erfolgt gemäß Aufgabe 33 und wird hier übergangen.

### Aufgabe 35.

*Feinnivellement mit Wendelatte, Ablesung an 3 Fäden bei einspielender Libelle.* Das Nivellement mit Wendelatte, Aufgabe 33, hätte sich noch wesentlich verfeinern lassen durch Ablesen der Latte bis auf  $\frac{1}{20}$  Skalenteil oder halbe Millimeter. In vielen Fällen, z. B. wenn der Faden  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$  des Skalenfeldes abschneidet, greift man sogar leichter nach dem nächstgelegenen halben Millimeter, als man auf Millimeter abrundet. Das gilt schon bei 20facher Vergrößerung am kleinen Ertel'schen Nivellierinstrument. Das Feinnivellierinstrument Nr. 2509 von Bamberg, welches diesmal gebraucht wurde, gewährt 33fache Vergrößerung des Fernrohrs und damit die Aussicht, daß die Genauigkeit der Abschätzung sich noch erhöht. In hinsicht der Libellen sind beide Instrumente gleich ausgerüstet, sie haben 6" Angabe, nur ist die Bamberg'sche noch besser gegen Temperatureinflüsse geschützt; auch die Standfestigkeit des Stativs ist größer. Unter solchen Umständen empfiehlt sich eine weitere Verfeinerung der Beobachtung durch Ablesen dreier Horizontalfäden und Mittelbildung. Der erforderliche Mehraufwand an Zeit ist ganz gering, die Erhöhung der Ablesungsgenauigkeit aber bedeutend, da namentlich auch die regelmäßigen Schätzungsfehler sich teilweise tilgen. Nun bildet der Ablesungsfehler allerdings nur einen Bruchteil des Nivellierfehlers, aber einen sehr erheblichen, den einzuschränken wir ebenso Sorge tragen müssen, als wir z. B. bedacht sind, bei feinen Winkelmessungen die Kreisablesungsfehler so klein als möglich zu machen, damit wir die Leistungsfähigkeit des Fernrohrs und unsrer, die Eigenbewegung des Instruments berücksichtigenden Meßmethode voll ausnützen können.

Der Feineinstellung des Theodolitfernrohrs ist beim Nivellieren die Feineinstellung der Libelle vergleichbar, die besonders peinlich vollzogen werden muß. Die Astronomen Hirsch und Plantamour haben als Leiter des Feinnivellements der Schweiz zuerst\*) an Stelle des *Einspielens* der Libelle das *Ablesen* derselben bei etwas abweichender Luftblase gesetzt, weil *beabsichtigte* Ablesungen nicht so vorurteilsfrei

\*) D. h. zuerst bei Feinnivellements; bei astronomischen Messungen war das Verfahren längst üblich, wie auch das, ebenfalls von Hirsch u. Plantamour übertragene Verfahren der Beobachtung an mehreren Okularfäden. Wie bei astronomischen Instrumenten dürfen die äußeren Fäden nicht zu weit von der Mitte des Gesichtsfelds entfernt und müssen stets auf die Ebene des Fernrohrbildes scharf (ohne Parallaxe) eingestellt sein, um gleich wertvolle Beobachtungen zu liefern wie der mittlere.

hergestellt, als *zufällige* entnommen werden, und weil man beim Ablesen zufälliger Stellungen auch den während der Arbeit eintretenden Veränderungen gerecht werden kann. Zum richtigen Feinwägen wird darum jetzt immer die Libelle *abgelesen*, und zwar vor und nach der Fadenbeobachtung. Beim ersten Einüben jedoch ist das Einstellen der Luftblase vorzuziehen, einmal weil etwas weniger Rechnung damit verbunden, dann aber weil durch Zusammenarbeiten mehrerer Übender Gelegenheit geboten ist, das Geschäft der Fadenablesung und der Libelleneinstellung gleichzeitig zu vollziehen, wodurch immerhin etwas an Messungsschärfe gewonnen wird.

Feinnivellement von der Neumarke  $P_{III}$  zu dem Nivellementsbolzen Nr. 2409 der Landesaufnahme und zurück. Hinweg.

Punkt Nr. Zielweite Fehler	Rückblicke		Vorblicke		Zielweite Fehler	Bemerkungen
	I + 3,0347	} = II	I + 3,0347	} = II		
⊙ 0,1940 0,1965	1,6185 1,7145 1,8125	4,6525 4,7495 4,8490				Eisenplatte $P_{III}$
+ 04	5,1455 1,7152	14,2510 4,7503				
1. 0,2225 0,2215	0,9620 1,0715 1,1845	3,9975 4,1070 4,2190	1,3300 1,4275 1,5275	4,3640 4,4610 4,5605	0,1975 0,1965	
+ 04	3,2180 1,0727	12,3235 4,1078	4,2850 1,4283	13,3855 4,4618	— 12	
2. 0,2320 0,2310	1,2470 1,3615 1,4790	4,2820 4,3955 4,5130	1,4975 1,6170 1,7400	4,5320 4,6515 4,7745	0,2425 0,2425	
— 04	4,0875 1,3625	13,1905 4,3968	4,8545 1,6182	13,9580 4,6527	— 02	
3. 0,2985 0,2995	1,0885 1,2345 1,3870	4,1220 4,2700 4,4215	1,7645 1,8970 2,0320	4,8000 4,9310 5,0675	0,2675 0,2675	
— 02	3,7100 1,2367	12,8135 4,2712	5,6935 1,8978	14,7985 4,9328	+ 03	
4. 0,2415 0,2420	1,0420 1,1620 1,2835	4,0780 4,1975 4,3200	1,5210 1,6700 1,8225	4,5555 4,7040 4,8590	0,3015 0,3035	
+ 13	3,4875 1,1625	12,5955 4,1985	5,0135 1,6712	14,1185 4,7062	+ 03	
5.			1,0410 1,1570 1,2770	4,0750 4,1905 4,3100	0,2360 0,2350	Zwischenmarke
			3,4750 1,1583	12,5755 4,1918	+ 12	
2,3790					2,4900	

Feinnivellement. Hinweg. (Fortsetzung.)

Punkt Nr.	Rückblicke		Vorblicke		Zielweite Fehler	Bemerkungen
	I + 3,0347	} = II	I + 3,0347	} = II		
5.	1,6685	4,7025				Zwischenmarke
0,2455	1,7890	4,8230			Übertrag	
0,2460	1,9130	4,9485			2,4900	
	5,3705	14,4740				
— 02	1,7902	4,8247				
6.	0,6165	3,6500	1,6360	4,6705		
0,2295	0,7290	3,7635	1,7495	4,7850	0,2320	
0,2310	0,8460	3,8810	1,8680	4,9020	0,2315	
	2,1915	11,2945	5,2535	14,3575		
— 04	0,7305	3,7648	1,7512	4,7858	— 01	
7.	0,8305	3,8645	1,7380	4,7720		
0,2395	0,9480	3,9825	1,8525	4,8875	0,2330	
0,2400	1,0700	4,1045	1,9710	5,0060	0,2340	
	2,8485	11,9515	5,5615	14,6655		
— 04	0,9495	3,9838	1,8538	4,8885	00	
8.	1,0940	4,1290	1,6005	4,6350		
0,1315	1,1590	4,1935	1,7035	4,7385	0,2090	
0,1310	1,2255	4,2600	1,8095	4,8445	0,2095	
	3,4785	12,5825	5,1135	14,2180		
00	1,1595	4,1942	1,7045	4,7393	+ 01	
⊙			1,4430	4,4775		Bolzen 2409
Übertrag			1,4995	4,5345	0,1155	
2,3790			1,5585	4,5930	0,1155	
			4,5010	13,6050		
			1,5003	4,5350	00	
4,0730					4,0700	

## Feinnivellement. Rückweg.

Punkt Nr.	Rückblicke		Vorblicke		Zielweite Fehler	Bemerkungen
	I + 3,0347	} = II	I + 3,0347	} = II		
⊙	1,4430	4,4775				Bolzen 2409
0,1150	1,4995	4,5345				
0,1155	1,5580	4,5930				
+ 01	4,5005	13,6050				
	1,5002	4,5350				
1*.	1,5870	4,6215	1,1190	4,1530		
0,1610	1,6665	4,7005	1,1840	4,2190	0,1320	
0,1610	1,7480	4,7825	1,2510	4,2865	0,1335	
— 04	5,0015	14,1045	3,5540	12,6585		
	1,6672	4,7015	1,1847	4,2195	+ 01	
2*.	1,8950	4,9290	1,0775	4,1125		
0,2410	2,0135	5,0480	1,1685	4,2030	0,1845	
0,2415	2,1360	5,1705	1,2620	4,2975	0,1850	
— 03	6,0445	15,1475	3,5080	12,6130		
	2,0148	5,0492	1,1693	4,2043	+ 03	
3*.	1,9195	4,9535	0,9935	4,0285		
0,2000	2,0185	5,0525	1,0760	4,1105	0,1670	
0,2005	2,1195	5,1540	1,1605	4,1950	0,1665	
— 06	6,0575	15,1600	3,2300	12,3340		
	2,0192	5,0533	1,0767	4,1113	— 01	
4*.	0,9390	3,9725	1,0165	4,0505		
0,2045	1,0395	4,0740	1,1130	4,1485	0,1970	
0,2055	1,1435	4,1780	1,2135	4,2490	0,1985	
— 06	3,1220	12,2245	3,3430	12,4480		
	1,0407	4,0748	1,1143	4,1493	+ 03	
5.			1,4880	4,5230		Zwischenmarke.
			1,5150	4,5500	0,0540	
			1,5420	4,5770	0,0540	
			4,5450	13,6500		
			1,5150	4,5500	+ 03	
1,8455					1,4720	

Feinnivellement. Rückweg. (Fortsetzung.)

Punkt Nr. Zielweite Fehler	Rückblicke		Vorblicke		Zielweite Fehler	Bemerkungen
	I + 3,0347	} = II	I + 3,0347	} = II		
5. 0,2010 0,2005	1,0475 1,1460 1,2485	4,0820 4,1810 4,2825			Übertrag 1,4720	Zwischenmarke
— 02	3,4420 1,1473	12,5455 4,1818				
6*. 0,2025 0,2025	1,5730 1,6720 1,7755	4,6080 4,7080 4,8105	1,2305 1,3270 1,4275	4,2655 4,3620 4,4620	0,1970 0,1965	
+ 06	5,0205 1,6735	14,1265 4,7088	3,9850 1,3283	13,0895 4,3632	+ 02	
7*. 0,2320 0,2330	1,4585 1,5720 1,6905	4,4925 4,6075 4,7255	1,1150 1,2195 1,3275	4,1490 4,2540 4,3620	0,2125 0,2130	
+ 01	4,7210 1,5737	13,8255 4,6085	3,6620 1,2207	12,7650 4,2550	— 04	
8*. 0,2545 0,2530	1,6745 1,7995 1,9290	4,7095 4,8350 4,9625	1,1710 1,2755 1,3830	4,2060 4,3105 4,4175	0,2120 0,2115	
00	5,4030 1,8010	14,5070 4,8357	3,8295 1,2765	12,9340 4,3113	+ 01	
9*. 0,2155 0,2150	1,4905 1,5965 1,7060	4,5255 4,6310 4,7405	1,2010 1,3040 1,4105	4,2375 4,3395 4,4460	0,2095 0,2085	
— 01	4,7930 1,5977	13,8970 4,6323	3,9155 1,3052	13,0230 4,3410	+ 11	
10*. 0,1475 0,1470	1,2430 1,3165 1,3905	4,2780 4,3500 4,4250	0,9955 1,0815 1,1715	4,0295 4,1170 4,2070	0,1760 0,1775	
— 04	3,9500 1,3167	13,0530 4,3510	3,2485 1,0828	12,3535 4,1178	+ 03	
Übertrag 1,8455			1,5880 1,6720 1,7605	4,6225 4,7080 4,7955	0,1725 0,1730	Eisenplatte PIII
			5,0205 1,6735	14,1260 4,7087	+ 05	
4,3495					3,8315	

Man übersieht leicht, wie der vorstehende Messungsausweis angeordnet ist. Unter den 3 Fäden eines Blickes findet sich deren Summe und Mittel, welches zur Probe gegen grobe, namentlich Centimeterfehler sofort mit dem Mittelfaden zu vergleichen ist. Zur Seite der Blicke sind noch die Zielweiten durch Subtraktion der oberen Fadenablesung von der unteren vorbereitet und durch Rechnung nach der Formel des Kopfes die Fehler zweier Rück- oder Vorblicke festgestellt. Es ließe sich damit auch eine Berechnung der Koten von Punkt zu Punkt verbinden, wenn man zunächst jeden ersten Rück- oder Vorblick um die Hälfte des Fehlers verbesserte und hiernach die Steigungen von Punkt zu Punkt berechnete und in besonderer Spalte vortrüge. Zu diesem Zweck wären dann besser die Vorblicke dekadisch ergänzt abgelesen worden. Bei Feinnivellements darf man jedoch die Mühe eines Auszugs aus dem Feldbuche nicht scheuen und demgemäß giebt die folgende Übersicht solche Auszüge in der Form des Feldbuches für Nivellement mit Wendelatte, Aufgabe 33. Die Fehler sind dabei nochmals hergestellt und damit geprüft.

Zwischen je 2 Festpunkten soll die Summe der Zielweiten im Rück- und Vorblick gleich sein, anders würden sich die Fehler des Instruments nicht tilgen. Das ist auch auf dem Hinweg gewahrt, auf dem Rückweg dagegen ist der Überschufs  $d$  der Zielweiten im Rückblick, in Metern des Lattenabschnitts ausgedrückt,

$$d = \frac{1}{2} (4,3495 - 3,8315) = 0,26.$$

Ein sehr merklicher Fehler unsres Instruments ist der Abstand des Mittelfadens vom arithmetischen Mittel der 3 Fäden\*). Er beträgt auf 0,26 Zielweite etwa — 1,3 mm, d. h. diesen Betrag hätte man dem arithmetischen Mittel der Rückblicke beizufügen, um die Ablesung auf den Mittelfaden umzurechnen, wenn nämlich der letztere centriert worden wäre. Nun ist aber keine Angabe über die Art der Justierung des Instruments vorhanden, und da möglicherweise dabei auf jenen Abstand des Mittelfadens vom Mittel der drei Fäden Rücksicht genommen ward, so wollen wir den Betrag — 1,3 mm nicht anbringen, aber die Lehre daraus entnehmen, daß man alle Ursache hat, die Zielweiten im Rück- und Vorblick genauer abzugleichen.

Was schliesslich die Berechnung der Zielweiten  $z$  in Metern anlangt, so dient dazu die Formel:

$$z = 0,65 + 200 a,$$

unter  $a$  den Lattenabschnitt zwischen den äusseren Okularfäden verstanden. Also brauchen wir, um die Summe der Zielweiten eines Zuges zu berech-

\*) Vergl. Anmerkung auf Seite 139.

nen, nur die am Schlusse desselben berechneten Summen mit 100 zu multiplizieren und für jeden Stand des Instruments noch 1,3 m beizufügen; z. B. für den Hinweg:

$$100 (4,073 + 4,070) + 9 \cdot 1,3 = 826 \text{ m.}$$

Der Rückweg erweist sich 6 m länger. Die mittlere Länge der Zielweite betrug hin 46 m, zurück 38 m.

Feinnivellement, Auszug aus dem Feldbuch. Hinweg.

Nr.	Rückw. (3,0347)	Vorw. (×6,9653)	Probe		Steigt	Kote	Bemerkungen
			R.	V.			
⊙	1,7152 4,7503		+ 04			62,2980	PIII
1	1,0727 4,1078	×8,5717 ×5,5382	+ 04	+ 12	0,2869 0,2885	0,2877 62,5857	
2	1,3625 4,3968	×8,3818 ×5,3473	— 04	+ 02	×,4545 ×,4551	×,4548 62,0405	
3	1,2367 4,2712	×8,1022 ×5,0672	— 02	— 03	×,4647 ×,4640	×,4644 61,5049	
4	1,1625 4,1985	×8,3288 ×5,2938	+ 13	— 03	×,5655 ×,5650	×,5652 61,0701	
5	1,7902 4,8247	×8,8417 ×5,8082	— 02	+ 12	0,0042 0,0067	0,0054 61,0755	Zwischenmarke
6	0,7305 3,7648	×8,2488 ×5,2142	— 04	+ 01	0,0390 0,0389	0,0390 61,1145	
7	0,9495 3,9838	×8,1462 ×5,1115	— 04	00	×8,8767 ×8,8763	×8,8765 59,9910	
8	1,1595 4,1942	×8,2955 ×5,2607	00	— 01	×,2450 ×,2445	×,2448 59,2358	
⊙		×8,4997 ×5,4650		00	×,6592 ×,6592	×,6592 58,8950	N. B. Nr. 2409 *)
	49,6714 ×3,1939 : 2 = ×6,5970	×43,5225			×3,1939	3,4030	*) S. folg. Seite.

## Feinnivellement, Auszug aus dem Feldbuch, Rückweg.

Nr.	Rückw. (3,0347)	Vorw. (×6,9653)	Probe		Steigt	Kote	Bemerkungen
			R.	V.			
⊙	1,5002 4,5350		+ 01			58,8950	N. B. Nr. 2409 *)
1*	1,6672 4,7015	×8,8153 ×5,7805	— 04	— 01	0,3155 0,3155	0,3155 59,2105	*) Hier nur Re- chenkote, amtl. Angabe: 58,898.
2*	2,0148 5,0492	×8,8307 ×5,7957	— 03	— 03	0,4979 0,4972	0,4976 59,7081	
3*	2,0192 5,0533	×8,9233 ×5,8887	— 06	+ 01	0,9381 0,9379	0,9380 60,6461	
4*	1,0407 4,0748	×8,8857 ×5,8507	— 06	— 03	0,9049 0,9040	0,9044 61,5505	
5	1,1473 4,1818	×8,4850 ×5,4500	— 02	— 03	×,5257 ×,5248	×,5252 61,0757	Zwischenmarke
6*	1,6735 4,7088	×8,6717 ×5,6368	+ 06	— 02	×,8190 ×,8186	×,8188 60,8945	
7*	1,5737 4,6085	×8,7793 ×5,7450	+ 01	+ 04	0,4528 0,4538	0,4533 61,3478	
8*	1,8010 4,8357	×8,7235 ×5,6887	00	— 01	0,2972 0,2972	0,2972 61,6450	
9*	1,5977 4,6323	×8,6948 ×5,6590	— 01	— 11	0,4958 0,4947	0,4952 62,1402	
10*	1,3167 4,3510	×8,9172 ×5,8822	— 04	— 03	0,5149 0,5145	0,5147 62,6549	
⊙		×8,3265 ×5,2913		— 05	×,6432 ×,6423	×,6427 62,2976	PIII
	68,0839	×38,7216			6,8055	×6,5972	
	6,8055 : 2 = 3,4028						

Der Schlufsfehler zeigt sich ganz unbedeutend, er beträgt nur 0,4 mm. Auch Punkt 5 kommt auf beiden Wegen fast gleichlautend zum Vorschein. Hiernach allein aber darf man die Genauigkeit der Arbeit nicht beurteilen. Dazu bieten sich noch die ermittelten Differenzen der „Probe“ dar. Es sind dies die wahren Unterschiede  $\delta$  zweier einander zugeordneten Rück- oder Vorblicke. Wenn  $n$  solcher Gröfsen vorliegen, so ist  $[\delta^2] : n = 2 \mu^2$  das Quadrat ihres mittleren

Betrags,  $\mu$  der mittlere Fehler der einzelnen Ablesung,  $\mu : \sqrt{2}$  der aus dem Mittel je zweier. Das  $\sqrt{n}$ fache davon, also

$$\mu_s = \mu \sqrt{1/2 n}$$

ist der mittlere Betrag des Schlufsfehlers, endlich

$$M = 1/2 \mu_s$$

der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus den Ergebnissen des Hin- und Rückwegs. Wir suchen diese Zahlen auf, aber in dem Bewußtsein, daß sie vermutlich noch nicht alle Fehlerquellen enthalten, namentlich nicht die Fehler, welche aus einer Veränderung am Instrumente selbst, z. B. in seiner Justierung, beim Übergang vom Rückblick zum Vorblick entspringen.

Hin- und Rückweg zusammengenommen ergibt  $n = 40$ , und wenn  $\delta$  und alles Folgende in Millimetern ausgedrückt wird:

$$[\delta^2] = 9,30; \mu = \sqrt{0,116} = \pm 0,34 \text{ oder } 1/3 \text{ mm};$$

$$\mu_s = \sqrt{9,30 : 2} = \pm 1,5 \text{ mm}; M = \pm 0,75 \text{ mm}.$$

Sind auch alle diese Zahlen aus dem angeführten Grunde als zu niedrig anzusehen, so lassen sie doch einen Vergleich mit ähnlich gebildeten zu. Insbesondere können wir untersuchen, welchen Erfolg das Ablesen an 3 statt einem Faden gehabt und ob überhaupt diese Verstärkung der Ablesungsgenauigkeit neben den übrigen Nivellierfehlern noch eine merkliche Wirkung ausgeübt hat. Zu dem Zweck wird der Leser vielleicht selbst die Nivellementsresultate nochmals in der zuletzt gewählten Form zusammenstellen, dabei aber nicht mehr das arithmetische Mittel der 3 Fäden, sondern den Mittelfaden eintragen und die Ablesungsfehler  $\delta$  bilden. Nur diese letzteren führen wir nach der Reihenfolge der Aufnahme hier an.

Hinweg			Rückweg		
Nr.	R.	V.	Nr.	R.	V.
	$\delta$ in mm			$\delta$ in mm	
⊙	+0,3		⊙	+0,3	
1	+0,8	+1,2	1*	-0,7	-0,3
2	-0,7	+0,2	2*	-0,2	+0,2
3	+0,8	+0,7	3*	-0,7	+0,2
4	+0,8	+0,7	4*	-0,2	-0,8
5	-0,7	+1,2	5	+0,3	-0,3
6	-0,2	-0,8	6*	+1,3	-0,3
7	-0,2	-0,3	7*	+0,8	+0,2
8	-0,2	-0,3	8*	+0,8	-0,3
⊙		-0,3	9*	-0,2	-0,3
			10*	-1,2	-0,8
			⊙		-1,3

Die Summen der Steigungen auf dem Hin- und Rückweg lauten:

$$\begin{array}{r} \text{Hinweg:} \quad \times 6,5970 \\ \text{Rückweg:} \quad \underline{3,4020} \\ \text{Zusammen:} \quad \times,9990 \text{ m,} \end{array}$$

sodafs also der Schlufsfehler 1 mm beträgt. Aus vorstehenden Zahlen findet sich ferner, da  $n$  gleich 40 wie zuvor:

$$\begin{aligned} [\delta \delta] &= 17,70; \mu = \sqrt{0,221} = \pm 0,47 \text{ mm;} \\ \mu_s &= \sqrt{17,70} : 2 = \pm 2,1 \text{ mm;} M = \pm 1,05 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Schon der Vergleich der Zahlen  $[\delta \delta]$  giebt uns eine Erhöhung des Gewichts der Messung infolge der Ablesung an 3 Fäden im Verhältnis

$$17,70 : 9,30 = 1,9;$$

doch wird diese Zahl etwas zu hoch sein, da in  $[\delta \delta]$  nicht alle Fehler des Nivellements sich aussprechen und der Vorteil der blofs verstärkten Ablesungsscharfe desto weniger vorwiegt, je mehr Fehler anderer Gattung zu ihm hinzutreten. Je enger dagegen die Messungsfehler im ganzen eingeschränkt werden, desto wertvoller wird jede Mafsregel zur Verfeinerung der Skalenablesung.

### Aufgabe 36.

*Die vorige, Beobachtung bei geneigter Libelle.* Unser Beispiel ist einem Nivellementsnetz entnommen, welches die Herren Landmesser Bödecker und Seiffert, Assistenten der landw. Hochschule, 1889 auf dem Übungsgelände in und um Westend (Charlottenburg) mit demselben Instrument ausgeführt haben, welches in voriger Aufgabe diente. Diesmal ist mit geneigter Libelle, und, was ebenso wichtig, mit 2 Ziellatten zugleich gearbeitet worden, wodurch es möglich war, die Vorblicke der Zeit nach zwischen die Rückblicke einzuschalten. Durch diese Anordnung werden Änderungen am Instrument, welche proportional der Zeit eintreten, vollständig getilgt. So wird die Ablenkung der Luftblase nach dem wärmeren Libellenende hin, Hebungen des Instruments infolge von Ausdehnung der Stativbeine, Sinken desselben infolge Nachgiebigkeit des Bodens, Auftauens desselben u. s. w., insofern keine dieser Änderungen ruckweise erfolgt, grofstenteils unschädlich gemacht, andere Störungen aber, wie starke, jedoch langsame Schwankungen der Lichtkurve, rechtzeitig aufgedeckt, sodafs man durch günstigere Aufstellung des Instruments oder andere Wahl der Beobachtungszeit ihnen entgehen kann.

Das Feldbuch wurde in der Weise geführt, welche seiner Zeit bei dem bayrischen Feinnivellement üblich war, jedoch nach Herrn Seifferts

Vorschlag mit verstärkten Rechenproben, derart, daß die Umrechnung wegen geneigter Libelle wenigstens auf richtige algebraische Addition hin geprüft wird. Es bleibt vorbehalten, die Seiffert'sche Anordnung vorzuführen, aber der Raumersparnis wegen hält sich unser Auszug aus dem Feldbuch an die ältere Schreibweise, giebt auch nicht, wie es noch in voriger Aufgabe geschehen, jedem *Punkt* eine Hauptzeile, sondern jedem *Stand des Instruments*, muß also die *Punktfolge* zu beiden Seiten aufführen, z. B.

Punkt Latte Ziel- weiten Fehler	Rückblicke						Vorblicke						Punkt Latte Ziel- weiten Fehler
	Libelle		Skala 1	Libelle		Skala 2	Libelle		Skala 1	Libelle		Skala 2	
	Okul. -	Obj. +		Okul. -	Obj. +		Okul. -	Obj. +		Okul. -	Obj. +		
29.	134	135	18880	134	134	49230	132	139	19000	137	133	49335	30.
I	136	134	17465	133	136	47820	132	137	17595	136	133	47935	II
		1	16115	3		46460	12		16230		7	46570	
02765		$v_1$	52460	$v_2$		143510	$v_1$		52825		$v_2$	143840	02770
02770		$+0$	17487	$-1$		47837	$-4$		17608		$+3$	47947	02765
-01			17487			47836			17604			47950	-04

Die fünfstelligen Spalten nehmen die Fadenablesungen auf, in den dreistelligen links davon finden sich die Libellenzahlen, oben die *vor*, unten die *nach* der Skalenlesung beobachteten, das Okularende voran, weil immer zuerst abgelesen und diktiert. Der Führer des Feldbuchs zieht die Libellenenden *übers Kreuz* voneinander ab, addiert die Differenzen und trägt deren Summe auf der Seite der kleineren Zahlen ein. Aus der Übereinstimmung der Differenzen erkennt er, daß der Beobachter sich nicht grob verlesen hatte. Dieser letztere prüft die Rechnung durch Bilden der Summen der Libellenspalten, welche paarweise stimmen müssen.

Unter die drei Fadenablesungen wird deren Summe und Mittel sofort eingetragen, dieses zur Vermeidung grober Fehler in den Deci- und Centimetern mit dem Mittelfaden verglichen, außerdem der *Abstand der äußeren Fäden* (als Grundlage der Zielweiten) an den seitlichen Rand geschrieben\*). Dieser Abstand und die aus den Libellen-

\*) Bei unserem Instrument giebt  $\frac{1}{200}$  des Abstandes der äußeren Fäden, zu dem Mittelfaden addiert, das arithm. Mittel der drei Fäden.







Feinnivellement von N. B. 2409 nach P<sub>III</sub>. (Fortsetzung.)

41.	147	136	09260	142	143	39620	142	142	09560	147	137	39905	42.
I	147	137	07880	143	143	38240	143	143	08175	146	137	38515	II
(19145)		21	06540	1		36895	0	0	06825		19	37175	(19005)
02720		+	23680	-		114755			24560		+	115595	02735
02725		8	07893	0		38252	0	0	08187		7	38535	02730
+ 01			07901			38252			08187			38539	+ 02
42.	132	155	21480	140	147	51815	144	142	08800	133	153	39165	43.
II	133	155	20065	140	147	50400	144	142	07390	133	153	37760	I
	45		18695	14		49035		4	06035	40		36395	
02785	-		60240	-		151250		+	22225	-		113320	02765
02780	17		20080	5		50417		1	07408	15		37773	02770
- 01			20063			50412			07409			37758	- 01
43.	145	142	19220	144	141	49565	144	141	11900	146	138	42240	44.
I	145	142	18065	144	142	48420	143	143	10665	146	138	41015	II
		6	16955		5	47300		3	09470		16	39820	
02265		+	54240		+	145285		+	32035		+	123075	02430
02265		2	18080		2	48428		1	10678		5	41025	02420
- 02			18082			48430			10679			41030	+ 01
44.	144	144	14210	143	143	44560	134	152	16565	145	141	47310	45.
II	144	144	13190	143	144	43540	134	152	15960	145	141	46305	I
	0	0	12210	1		42555	36		14985		8	45330	
02000			39610	-		130655	-		47910		+	138945	01980
02005	0	0	13203	0		43552	9		15970		2	46315	01980
- 01			13203			43552			15961			46317	+ 06
Wiederholt	138	148	14220	142	143	44560	135	151	16965	149	137	47305	
	138	148	13200	142	144	43540	135	151	15960	150	137	46300	
	20		12220	3		42555	32		14985		25	45325	
	-		39640	-		130655	-		47910		+	138930	
- 07	5		13213	1		43552	8		15970		7	46310	+ 05
38690			13208			43551			15962			46317	38815

Von den beiden Aufnahmen des letzten Standes darf keine ausgeschlossen werden, sie sind vielmehr bei der Zusammenstellung der Ergebnisse durch Mittelbildung zu vereinigen. Diese Zusammenstellung wolle der Leser nach Anleitung der vorigen Aufgabe selbst ausführen. Sie ergibt als Höhenunterschied

$$\begin{array}{r}
 \text{auf dem Hinweg:} \quad \times 6,595 \ 3 \\
 \text{„ „ Rückweg:} \quad \quad \quad 3,403 \ 4 \\
 \hline
 \text{Zusammengefasst:} \quad \times,998 \ 7
 \end{array}$$

also einen Schlufsfehler von 1,3 mm. Berechnen wir wieder die Gröfsen  $[\delta \delta]$ ,  $\mu$ ,  $\mu_s$  und  $M$  der vorigen Aufgabe, so findet sich aus  $1/2 n = 16$  Ständen und  $n + 2 = 34$  Paar Rück- oder Vorblicken:

$$[\delta \delta] = 3,09; \quad \mu = \sqrt{0,0454} = \pm 0,213 \text{ oder } 1/5 \text{ mm};$$

$$\mu_s = \mu \sqrt{16} = \pm 0,85 \text{ mm}; \quad M = \pm 0,43 \text{ mm}.$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit denen in voriger Aufgabe, so zeigt sich eine nicht geringe Genauigkeitszunahme, hervorgerufen durch das Beobachten bei geneigter Libelle. Aus dem Verhältnis der  $\mu^2$  berechnet sich das  $2^{1/2}$ fache als Gewicht der feineren Messungsweise gegenüber der mit einspielender Libelle.

Recht viel aber hätte man von dieser Gewichtssteigerung wieder eingebüfst, wenn nur an *einem* statt an drei Fäden abgeschätzt worden wäre. Denn wenn wir die Zusammenstellung der Ergebnisse blofs unter Berücksichtigung des Mittelfadens machen — was wieder dem Leser zu seiner Übung dienen könnte — so finden sich folgende Werte  $\delta$ :

Hinweg			Rückweg		
Punkt Nr.	R.	V.	Punkt Nr.	R.	V.
	$\delta$ in mm			$\delta$ in mm	
29	+ 0,4		37	- 0,6	
30	- 0,5	+ 0,3	38	0,0	+ 0,1
31	+ 0,3	+ 0,1	39	+ 0,4	- 0,3
32	+ 0,5	+ 0,5	40	- 0,3	- 0,1
33	- 0,4	+ 0,3	41	+ 0,2	- 0,1
34	- 0,5	+ 0,8	42	- 0,3	+ 0,3
35	- 0,1	- 0,5	43	+ 0,5	- 0,4
36	- 0,6	+ 0,6	44	} 0,0	- 0,4
37		- 0,1			} - 0,6
			45		

Die Höhenunterschiede der Endpunkte des Nivellementsuges sind

$$\text{auf dem Hinweg: } \times 6,5934$$

$$\text{„ „ Rückweg: } \underline{3,4035}$$

$$\text{Zusammen: } \times,9969$$

$$[\delta \delta] = 5,72; \quad \mu = \sqrt{0,0841} = \pm 0,29 \text{ mm};$$

$$\mu_s = \mu \sqrt{16} = \pm 1,16 \text{ mm}; \quad M = 0,58 \text{ mm}.$$

Das Verhältnis der Gewichte der Messung an 3 Fäden und an einem Faden allein ist wie:

$$572 : 309 = 1,9.$$

Das Feinnivellement, aus welchem vorstehendes Beispiel entnommen ist, bot Gelegenheit, 238 Gröfsen  $\delta$  auf zweierlei Art zu ermitteln,

einmal aus dem Mittelfaden ( $\delta'$ ), das andere Mal aus dem Mittel der drei Fäden ( $\delta$ ). Daraus gewinnt man

$$[\delta' \delta'] = 65,01 \text{ (Mittelfaden)} \text{ und } [\delta \delta] = 27,62 \text{ (Mittel aus 3 Fäden)}.$$

Die Gewichtsvermehrung unter Anwendung des Fadenmittels ist also durch das Verhältnis ausgedrückt:

$$65,01 : 27,62 = 2,35.$$

Es berechnen sich aus diesen Zahlen ferner für einen und drei Fäden

$$\mu' = \sqrt{0,1366} = \pm 0,37 \text{ mm und } \mu = \sqrt{0,0580} = \pm 0,24 \text{ mm}$$

als mittlere Fehler des einzelnen Blickes. Wenn man bedenkt, daß am einzelnen Faden nur bis auf halbe Millimeter abgeschätzt wird und daß in  $\mu'$  und  $\mu$  außerdem die Libellenfehler und die während eines Standes eintretenden Änderungen der Standhöhe und Justierung sich äußern, soweit sie der Zeit proportional sind, so könnte man meinen, daß auf 50 m durchschnittliche Zielweite, wie bei dem fraglichen Feinnivellement, eine Verkleinerung des mittleren Fehlers unter  $\mu$  weder möglich, noch vonnöten sei. Feinnivellements zu technischen Zwecken erhalten ohne Frage durch das hier eingeschlagene Verfahren einen völlig genügenden Genauigkeitsgrad bei fast unbedingter Sicherheit gegen grobe Fehler. Von welcher Seite her dagegen wissenschaftlichen Nivellements noch ein höherer Grad der Schärfe gegeben werden könnte, darauf verweisen gerade vorstehende Ergebnisse. Nennen wir  $\sigma$  und  $\sigma'$  die mittleren Fehler der Skalenablesung allein,  $\sigma$  bezogen auf das arithmetische Mittel der 3 Fäden,  $\sigma'$  auf den einzelnen Faden, dann ist  $\sigma^2 = \frac{1}{3} \sigma'^2$ ; sei  $\tau$  der mittlere Betrag aller übrigen Fehler zusammen, so gelten die beiden Gleichungen:

$$\mu^2 = 0,0580 = \sigma^2 + \tau^2,$$

$$\mu'^2 = 0,1366 = 3\sigma^2 + \tau^2,$$

aus welchen  $\sigma^2 = 0,0393$  und  $\tau^2 = 0,0187$  hervorgeht, oder

$$\sigma = \pm 0,20 \text{ mm};$$

$$\tau = \pm 0,14 \text{ mm}.$$

Es ist demnach der Skalenablesungsfehler, von dessen Herabminderung, vielleicht durch eine Beobachtungsweise nach Art von Kathetometermessungen, man noch eine Verfeinerung des Nivellements erwarten dürfte.

Es ist noch die Schreibweise bei dem mehrerwähnten Feinnivellement vom Sommer 1889 nachzutragen. Heißen wie oben  $o_1 m_1 u_1$ ,  $o_2 m_2 u_2$  die Skalenablesungen auf der ersten und zweiten Lattenseite für einen und denselben Blick,  $m'_1$  und  $m'_2$  die um  $v_1$  und  $v_2$  wegen geneigter Libelle verbesserten Fadenmittel, und hat  $\delta$  die oben (S. 140) durch eine Gleichung festgestellte Bedeutung, dann muß sein:

$$\{o_1 + m_1 + u_1 + 3(v_1 + \delta) + 3 \cdot 3,0350\} : 3 = m'_2$$

$$\{o_2 + m_2 + u_2 + 3(v_2 - \delta) - 3 \cdot 3,0350\} : 3 = m'_1.$$

Die Anordnung des Feldbuchs ist nun darauf gerichtet, die Klammerausdrücke recht bequem bilden zu können, so daß die in vorstehenden Gleichungen enthaltene Rechenprobe sich leichter vollziehen läßt als eine nochmalige Berechnung von  $m'_1$  und  $m'_2$  auf dem nächstliegenden Weg.

Um dieses Gewinnes willen erschien eine Vermehrung der Zeilen jedes Standes unbedenklich, zumal mehrere dieser Zeilen nicht erst durch Rechnung, sondern durch Vordruck (hier mit Fettschrift wiedergegeben) ausgefüllt sind. Es genügt, die Rückblicke eines Standes in dieser Schreibweise vorzuführen.

Nr. 30	139	127	1,2705	126	141	4,3080
II	140	126	1,1095	124	142	4,1465
		26	0,9530	33		3,9900
			<b>9,1050</b>			<b>×0,8950</b>
			$3(v_1 + \delta)$			$3(v_2 - \delta) \times 67$
0,3175	$v_1 :$		3,3330	$v_2 :$		12,4445
0,3180	+ 11		1,1110	— 14		4,1482
			1,1121			4,1468
	$\delta :$		<b>3,0350</b>	— $\delta :$		
	— 3		12,4404	+ 3		3,3362

Zwischen den 3 Fäden und dem Additionsstrich stehen noch 2 Zeilen, von denen die erste die Zahlen  $3 \cdot 3,0350$  und  $-3 \cdot 3,0350$  enthält, die zweite aber zur Bildung von  $3(v_1 + \delta)$  und  $3(v_2 - \delta)$  benutzt wird. Unter dem Additionsstrich stehen  $o + m + u$ ,  $\frac{1}{3}(o + m + u)$ ,  $m'$ , darunter, zur Ermittlung von  $\delta$ , im ersten Rückblick die Zahl 3,0350. Jetzt erst erscheint in der letzten Zeile die Summe  $3m'$  gemäß den vorhin gegebenen Formeln gebildet, wovon der dritte Teil dem vorherberechneten Werte von  $m'$  entsprechen muß.

Die Rechenprobe schließt das *Aufsuchen* von  $v_1$  und  $v_2$  in einer Tafel selbstverständlich *nicht* ein, wohl aber die Mittelbildung aus den drei Fäden, sowie das Anbringen der Verbesserungen  $v$ , endlich die Ermittlung von  $\delta$ . Die Größen  $v$  wurden daher, nachdem sie auf dem Felde aus graphischen Tafeln entnommen waren, zu Hause nochmals mittelst Rechenschiebers aufgesucht\*).

\*) Man kann dazu den käuflichen logarithmischen Rechenschieber verwenden, aber es ist zweckmäßiger sich für sein Instrument einen solchen eigens anzufertigen. Die Skalen können dann reichlich groß, die Einteilung geschickter, die Bezifferung bequemer werden. Für das Bamberg'sche Nivellierinstrument hatte Herr Landmesser Seiffert sowohl eine graphische Tafel als einen Rechenschieber selbst entworfen.

### Aufgabe 37.

*Flußnivellement.* Nur bei kleinen Wasserläufen von starkem Gefälle darf das Peilen des Wasserstandes mit dem Längennivellement unmittelbar verbunden werden, jedoch nicht ohne daß die ganze Arbeit in umgekehrter Folge noch einmal wiederholt wird. Je größer der Fluß und je geringer sein Gefälle, desto notwendiger ist es, Nivellement und Peilung zu trennen und die letztere in *einem* Augenblick oder, da dies meist unmöglich, so auszuführen, daß die Gefällermittelung auf einen bestimmten Zeitpunkt bezogen werden kann. In der Annahme, daß innerhalb des untersuchten Flußgebietes und der Beobachtungszeit etwaige Wasserstandänderungen nur allmählich, im ganzen, und der Zeit proportional eintreten, erreicht man das Gewollte, indem man die Peilungen gleich oft und in gleichmäßigem Voranschreiten stromab und stromauf vornimmt, so daß die Peilungszeiten für jeden Strompfahl gegen einen gemeinsamen mittleren Zeitpunkt symmetrisch angeordnet sind. Dem Mittel der Zeiten entspricht dann auch das Mittel der Peilungen. Bei plötzlichen Standänderungen des Wasserspiegels, z. B. durch Öffnen von Schleusen, versagt dies Verfahren freilich seinen Dienst\*).

Im vorliegenden *Beispiel* wurden am linken Ufer der Spree unterhalb Charlottenburg Pfähle in Abständen von je 50 m so eingetrieben, daß sie, obwohl vom Wasser umspült, doch einige Centimeter daraus hervorragten, damit sie auch bei langsamem Steigen des Wasserspiegels noch sichtbar blieben. Das Längennivellement stützte sich nicht bloß auf diese Peilpfähle, deren Köpfe vielmehr durch *Seitenblicke* eingewogen wurden, sondern auf eine Reihe von Wechsellpunkten, die sämtlich durch Pflöcke auf dem Spreadamm bezeichnet waren, sodann auf solide Festpunkte am Anfang und Ende der untersuchten Flußstrecke. Es kommt nämlich vor, daß die Pfähle im Wasser beim Aufsetzen der Ziellatte, wohl auch durch andre Ursachen, nachsinken, was ohne gesicherte Stützpunkte des Nivellements kaum erkannt werden könnte. Selbstverständlich mußten alle Pfähle doppelt, im Hin- und Zurückgehen, eingewogen werden. Das Ergebnis war durchaus befriedigend.

Beim Peilen diente als Marke des Wasserspiegels ein Schwimmer, bestehend in einem dünnen Brettchen, das mit einer Bindfadenschleife an den Pfahl gefesselt wurde. Den vertikalen Abstand zwischen Pfahlkopf und Schwimmer maß man mit einem Gliedermaßstab. Es ist

---

\*) Daß eine einmalige, wenn auch einwurfsfreie Gefällmessung im allgemeinen nicht das *mittlere* Flußgerälle bei dem gegebenen Wasserstand zu liefern vermag, wird als bekannt vorausgesetzt (Flutwelle).

dies wegen der Bewegung des Wasserspiegels eine schwierige Arbeit, zu der auch eine gewisse Umsicht in der Wahl des Zeitpunktes erfordert wird, abgesehen von der oben aufgestellten allgemeinen Regel der Zeiteinteilung. Auf der Spree z. B. erhöhen vorüberziehende Lastkähne den Wasserspiegel um 1 bis 2 cm, ähnlich wie ein Stück Holz den Wasserspiegel einer Wanne, in die es gelegt wird. An schmalen Flußbetten muß man daher warten, bis die Schiffe wieder weit genug entfernt sind. Bei Wind ist ein Wellenbrecher in irgend einer zweckentsprechenden Form, und wären es nur zwei vorgelegte, an einem Ende verbundene schwimmende Stäbe oder ein Korb ohne Boden, anzuwenden.

In dem nachfolgenden Auszuge aus dem Feldbuch sind die Peilpfähle römisch, die Fest- und Wechelpunkte arabisch beziffert. Bei Punkt 3 erlaubte die Ufergestaltung nicht einen Peilpfahl einzutreiben. Die Strecken waren auf der Krone des Uferdammes gemessen, die Peilpfähle von den Teilpunkten aus seitwärts abgesteckt worden. Die hohen Weiden auf den Dammböschungen zwangen zu sehr kurzen Zielweiten.

Nur bei Pfahl VIII kann die Möglichkeit des Nachsinkens in Betracht gezogen werden.

Das Nivellement erfolgte am 10. Mai 1889, bei hohem Wasserstand, mit dem sog. kleinen Nivellierinstrument von Ertel & Sohn.

Stromabwärts.

Strecke	Nr.	Rückw.	Vorw.	Steigt	Kote	Bemerkungen
0	1	1,189			50,000	Festp. oben
0	I	(2,729)	×7,271	×8,460	48,460	
25	2	0,947	×8,876	1,605	50,065	
50	3	1,159	×8,696	×,643	49,708	
100	II	(2,426)	×7,574	×8,733	48,441	
100	4	1,275	×8,954	1,380	49,821	
125	5	1,241	×8,870	0,145	49,966	
150	III	(2,721)	×7,279	×8,520	48,486	
175	6	1,289	×8,758	1,479	49,965	
200	IV	(2,801)	×7,199	×8,488	48,453	
225	7	1,155	×8,678	1,479	49,932	
250	V	(2,627)	×7,373	×8,528	48,460	
275	8	1,288	×8,842	1,469	49,929	
300	VI	(2,755)	×7,245	×8,533	48,462	
325	9		×8,715	1,470	49,932	
		25,602	×74,330	×,932	0,068	
		×,932				

Stromabwärts. (Fortsetzung.)

Strecke	Nr.	Rückw.	Vorw.	Steigt	Kote	Bemerkungen
325	9	1,267			49,932	
350	VII	(2,722)	×7,278	×8,545	48,477	
375	10	1,303	×8,792	1,514	49,991	
400	VIII	(2,785)	×7,215	×8,518	48,509	
425	11	1,319	×8,713	1,498	50,007	
450	IX	(2,851)	×7,149	×8,468	48,475	
475	12	1,163	×8,801	1,652	50,127	
500	X	(2,844)	×7,156	×8,319	48,446	
	13		×8,792	1,636	50,082	Festp. unten
		16,254	×83,896	0,150	×,850	
		0,150				

Stromaufwärts.

Strecke	Nr.	Rückw.	Vorw.	Steigt	Kote	Bemerkungen
	13	1,182			50,082	Festp. unten
500	X	(2,818)	×7,182	×8,364	48,446	
475	12	1,158	×8,865	1,683	50,129	
450	IX	(2,812)	×7,188	×8,346	48,475	
425	11	1,275	×8,719	1,531	50,006	
400	VIII	(2,775)	×7,225	×8,500	48,506	
375	10	1,155	×8,709	1,484	49,990	
350	VII	(2,667)	×7,333	×8,488	48,478	
325	9	1,299	×8,788	1,455	49,935	
300	VI	(2,770)	×7,230	×8,529	48,462	
275	8	1,128	×8,697	1,467	49,929	
250	V	(2,598)	×7,402	×8,530	48,459	
225	7	1,276	×8,874	1,472	49,931	
200	IV	(2,754)	×7,246	×8,522	48,453	
175	6	1,267	×8,756	1,510	49,963	
150	III	(2,745)	×7,255	×8,522	48,485	
125	5	1,267	×8,737	1,482	49,967	
100	4	1,161	×8,588	×,855	49,822	
100	II	(2,541)	×7,459	×8,620	48,442	
50	3	1,330	×8,724	1,265	49,707	
25	2	1,210	×,026	0,356	50,063	
0	I	(2,815)	×7,185	×8,395	48,458	
0	1		×8,726	1,541	49,999	Festp. oben
		42,003	×57,914	×,917	0,083	
		×,917				

Nach vollendetem Nivellement erfolgte die Peilung des Wasserspiegels von den Köpfen der Pfähle I...X aus zweimal in entgegengesetzter Reihenfolge. Die Ergebnisse zeigen, daß der starke Wellenschlag, der an dem Beobachtungstage herrschte, die Arbeit sehr erschwert hat.

Abstände der Pfahlköpfe vom Wasserspiegel.

Nr.	Erste Messung	Zweite Messung	Mittel
I	45 mm	48 mm	46,5 mm
II	31	28	29,5
III	76	75	75,5
IV	46	43	44,5
V	55	51	53,0
VI	56	55	55,5
VII	76	75	75,5
VIII	107	110	108,5
IX	80	78	79,0
X	53	55	54,0
	625	618	621,5 (Probe)

Von einer stetigen Veränderung des Wasserspiegels ist nichts zu bemerken. Wir subtrahieren die mittleren Peilhöhen von den gemittelten Koten der Pfahlköpfe und bekommen die Koten des Wasserspiegels wie folgt:

Ergebnisse, bezogen auf den Zeitpunkt zwischen beiden Peilungen.

Strecke	Nr.	Pfahlkopf- kote	Peilhöhe (—)	Wasser- spiegelkote
0	I	48,4590	×,9535	48,4125
100	II	48,4415	×,9705	48,4120
150	III	48,4855	×,9245	48,4100
200	IV	48,4530	×,9555	48,4085
250	V	48,4595	×,9470	48,4065
300	VI	48,4620	×,9445	48,4065
350	VII	48,4775	×,9245	48,4020
400	VIII	48,5075	×,8915	48,3990
450	IX	48,4750	×,9210	48,3960
500	X	48,4460	×,9460	48,3920
		6665	3785	0450 (Probe)

Es ergibt sich ein durchschnittliches Flußgefälle von 0,04 m auf 1000 m oder 2 mm auf 50 m. Dafs ein so geringes, im kleinen überhaupt schwer nachweisbares Gefälle auf den Einzelstrecken nicht gleichmäfsig verteilt erscheint, liefse sich schon durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, namentlich beim Peilen, erklären. Doch ist es gar nicht ausgeschlossen, dafs Unregelmäfsigkeiten des Flußbettes, trotzdem die Ufer an der Versuchsstelle erst vor wenigen Jahren geregelt wurden, im wesentlichen die hervortretenden Gefällungleichheiten thatsächlich hervorriefen \*).

\*) Das muß man vor Augen haben, wenn man etwa, auf Grund der Annahme gleichmäfsigen Gefälles, dieses nach der Meth. d. kl. Qu. aus den sämtlichen Koten des Wasserspiegels bestimmt, eine an sich nur geringe Arbeit. Aber ihr Wert ist weniger in dem unmittelbaren Ergebnis, als in der Erkenntnis zu suchen, ob man überhaupt zu jener Annahme berechtigt war, oder ob sich in den Verbesserungen der Koten stetige Abweichungen des Wasserspiegels von der schiefen Ebene (oder der Schraubenfläche) aussprechen.

In unserem Falle scheinen solche Abweichungen vorzuliegen, denn die Verbesserungen der Koten, um sie dem gleichmäfsigen Gefälle von 41,9 mm auf 1000 m anzupassen, welches der Rechnung nach der Meth. d. kl. Qu. entspräche, lauten der Reihe nach wie folgt:

I	+ 3,3 mm	VI	- 3,3 mm
II	- 0,4	VII	- 0,9
III	- 0,5	VIII	+ 0,1
IV	- 1,1	IX	+ 1,0
V	- 1,2	X	+ 2,9.

Eine Profilzeichnung würde darthun, dafs eine flache, nach oben gewölbte Kurve sich dem Wasserspiegel enger anschliesse als die Gerade.

## VI. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie.

### Aufgabe 38.

*Trigonometrische Messung einer Turmhöhe von zwei Standpunkten aus, welche mit dem Ziel in einer Vertikalebene liegen, und Anschluss an eine gegebene Höhenmarke.* Diese Aufgabe tritt ein, wenn ein trigonometrisches Nivellement an ein geometrisches oder umgekehrt angeschlossen werden soll und zu dem Turm, der trigonometrischer Höhenpunkt ist oder werden soll, nur schmale Gassen führen, sodass die Situation seiner nächsten Umgebung ein geeignetes Dreieck zu legen nicht zulässt.

In der Richtung nach dem Turm  $T$  wird eine Gerade  $AB$  mit einem Zwischenpunkt  $Z$  abgesteckt, derart dass das vertikale Dreieck  $ATB$  bei  $T$  einen möglichst großen Winkel bekommt. Auf dem Zwischenpunkt  $Z$  wird eine Marke errichtet, welche durch geometrisches oder trigonometrisches Nivellement mit der nächsten zugänglichen Höhenmarke verbunden wird. Über  $A$  und  $B$  stellt man einen Theodolit mit Höhenkreis auf und beobachtet die Zenithdistanzen  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$  der Visuren nach  $T$  einer-, nach  $Z$  andererseits. Endlich misst man die horizontalen Strecken  $d$  zwischen  $A$  und  $B$ ,  $d_1$  zwischen  $A$  und  $Z$ ,  $d_2$  zwischen  $B$  und  $Z$ .

Der Höhenunterschied zwischen  $T$  und  $Z$  sei  $h$ , dann gilt nach der Figur:

$$\left. \begin{aligned} h &= -d_1 \cot \beta_1 + e \cot \alpha_1 \\ \text{ebenso} \quad h &= -d_2 \cot \beta_2 + (d + e) \cot \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

woraus nach Elimination von  $e$  folgt:

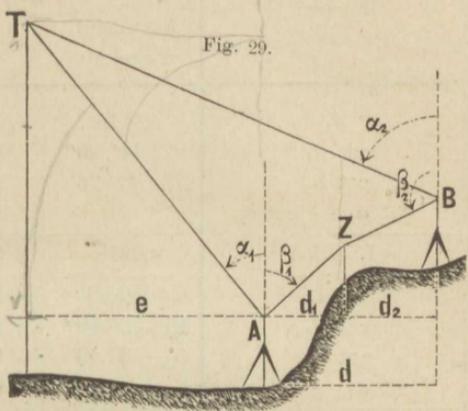
$$h = \frac{d_1 \cot \beta_1 \cot \alpha_2 - d_2 \cot \beta_2 \cot \alpha_1 + d \cot \alpha_1 \cot \alpha_2}{\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2}, \quad (2)$$

oder, indem man Summen und Differenzen von Cotangenten umformt:

$$h = d_1 \frac{\cos \alpha_2 \sin (\beta_1 + \alpha_1)}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \beta_1} + d_2 \frac{\cos \alpha_1 \sin (\beta_2 - \alpha_2)}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \beta_2}. \quad (3)$$

Eine Meßprobe wird durch doppelte Streckenmessung, wie üblich, und durch doppelte Aufstellung des Theodolits in *A* und *B* mit etwas veränderter Höhenlage des Fernrohrs geschaffen. Im vorliegenden

Beispiel wurde auch der Instrumentstand zur Verbindung von *Z* mit der nahegelegenen, durch ein Feinnivellement eingewogenen Höhenmarke *M* mit verschiedener Theodolithhöhe doppelt aufgenommen. Ist  $H_m$  die Kote von *M* und hat man von *C* aus, dem Standpunkt des Theodolits zwischen *M* und *Z*, nach diesen Punkten hin die Zielweiten  $d_m$  und  $d_z$  und die Zenithdistanzen  $\alpha_m$  und  $\alpha_z$  gemessen, so



$$H = H_m - d_m \cot \alpha_m + d_z \cot \alpha_z + h \tag{4}$$

auf doppelte Weise.

In unsrem Beispiel wurde nicht auf die Höhenmarke *M* selbst, deren Kote mit 62,290 gegeben war, sondern auf einen 0,200 m hohen Aufsatz über *M* von *C* aus eingestellt, sodafs in die Schlufsformel noch ein Glied eintritt.

*Zenithdistanzen.*

	1. Messung	2. Messung
$\alpha_1$	57° 3' 49"	57° 7' 42"
$\alpha_2$	73 38 26	73 41 4
$\beta_1$	92 44 26	92 52 49
$\beta_2$	91 52 19	92 2 34

*Berechnung von  $\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2$ .*

Formel	1. Messung		2. Messung	
	log	Zahl	log	Zahl
$\cot \alpha_1$	9,811 544	0,647 954	9,810 404	0,646 255
$\cot \alpha_2$	9,467 770	0,293 609	9,466 509	0,292 758
$\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2$	9,549 426	0,354 345	9,548 385	0,353 497
$1/\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2$	0,450 574		0,451 615	

Berechnung der drei Glieder von  $h$  nach (2).

Formel	1. Messung		2. Messung	
	Argument, Ergebnis	log	Argument, Ergebnis	log
$d_1$	23,15	1,364 55	23,15	1,364 55
$\cot \beta_1$	92° 44' 26"	8,680 04 $n$	92° 52' 49"	8,701 68 $n$
$\cot \alpha_2$	73 38 26	9,467 77	73 41 4	9,466 51
$1/\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2$		0,450 57		0,451 62
I. Glied	×,0818	9,962 93 $n$	×,0354	9,984 36 $n$
$-d_2$	- 25,21	1,401 57 $n$	- 25,21	1,401 57 $n$
$\cot \beta_2$	91° 52' 19"	8,514 32 $n$	92° 2' 34"	8,552 29 $n$
$\cot \alpha_1$	57 3 49	9,811 54	57 7 42	9,810 40
$1/\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2$		0,450 57		0,451 62
II. Glied	1,5066	0,178 00	1,644	0,215 88
$d$	48,36	1,684 49	48,36	1,684 49
$\cot \alpha_1$	57° 3' 49"	9,811 54	57° 7' 42"	9,810 40
$\cot \alpha_2$	73 38 26	9,467 77	73 41 4	9,466 51
$1/\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2$		0,450 57		0,451 62
III. Glied	25,964	1,414 37	25,884	1,413 02
$h$	26,552		26,563	

Die Berechnung von  $h$  gemäß (3) zu prüfen, bleibt dem Leser überlassen. Er wird dabei finden, daß die Mühe der Rechnung nach (2) und nach (3) nahezu die nämliche ist.

Berechnung von  $H$  gemäß der Schlußformel (4).

Formel	1. Messung		2. Messung	
	Argument, Ergebnis	log	Argument, Ergebnis	log
$H_m$ } Aufsatz }	62,300 0,200		62,300 0,200	
$-d_m$	- 12,82	1,107 89 $n$	- 12,82	1,107 89 $n$
$\cot \alpha_m$	94° 35' 04"	8,904 09 $n$	94° 53' 08"	8,931 85 $n$
$-d_m \cot \alpha_m$	1,028	0,011 98	1,096	0,039 74
$d_z$	13,24	1,121 89	13,24	1,121 89
$\cot \alpha_z$	94° 15' 04"	8,871 18 $n$	94° 32' 26"	8,899 90 $n$
$d_z \cot \alpha_z$	×,016	9,993 07 $n$	×8,948	0,021 79 $n$
$h$	26,552		26,563	
$H$	89,096		89,107	

Mittel von  $H = 89,102$

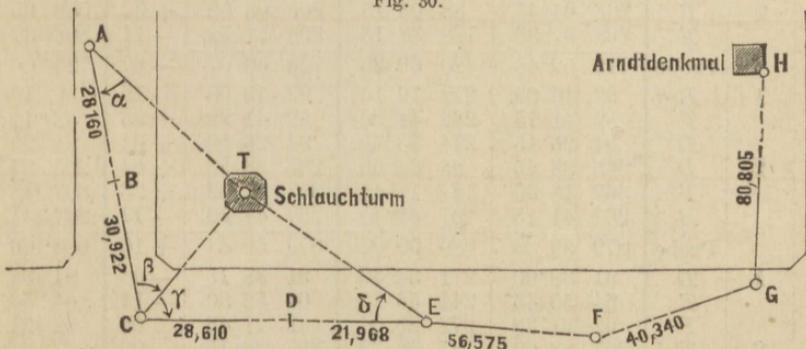
Unsere Aufgabe kann als besonderer Fall der folgenden gelten. Man denke sich in dem Dreieck  $ATC$  (Fig. 30) die Strecken  $AB$  u.  $CB$ , die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , sowie die Zenithdistanzen der Zielrichtungen  $AB$ ,  $AT$ ,  $CB$ ,  $CT$  gemessen und lasse  $\alpha$  bis  $0^\circ$  abnehmen,  $\beta$  bis  $180^\circ$  wachsen, so liegen  $A$ ,  $C$  und  $T$  in *einer* Vertikalebene. Damit zugleich geht eine Meßprobe verloren, da zuvor eine der Zenithdistanzmessungen, in  $A$  oder  $B$ , überschüssig war.

### Aufgabe 39.

*Trigonometrische Messung einer Turmhöhe von drei Standpunkten aus, mit Anschluß an eine gegebene Höhenmarke.* In Fig. 30 sind  $A$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $G$  Standpunkte,  $B$ ,  $D$ ,  $F$  Wechselpunkte des trigonometrischen Nivellements,  $H$  die gegebene Höhenmarke (Arndtdenkmal, vergl. Aufgabe 33),  $T$  die Turmspitze, deren Höhe gesucht wird. Von dem Zuge  $AB \dots H$  sind die Strecken unmittelbar und doppelt gemessen, und da die Wechselpunkte  $B$  und  $D$  in die Geraden  $AC$  und  $CE$  eingeschaltet wurden, so sind auch diese Strecken bekannt, um aus ihnen die übrigen Seiten der horizontalen Dreiecke  $ATC$  und  $CTE$  herzuleiten. Hierzu sind die Horizontalwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  gemessen worden.

Jedem der einerseits punktierten Zielstrahlen der Fig. 30 entspricht eine gemessene Zenithdistanz, wie aus dem nachfolgenden Feldbuch der Winkelaufnahme hervorgeht. Die Höhe von  $T$  wird daher

Fig. 30.



durch 3 Strahlen bestimmt. Aber auch das Nivellement des Zuges  $AB \dots H$  bleibt infolge der Messung jeder Zenithdistanz in zwei Fernrohrlagen nicht ohne Meßprobe, da die Indexverbesserung des Höhenkreises nahezu konstant ausfallen muß. In unserm Beispiel bleibt dieselbe überhaupt innerhalb der Nonienangabe.

Theodolit mit Höhenkreis von *Hildebrand & Schramm*, Nr. 1565.

Westend, 20. Mai 1887. Wetter günstig.

*Horizontalwinkel.*

Standpunkt	Lage	Ziel	Nonius I	Nonius II	Mittel	Richtung
A	1	T	264° 50' 15"	84° 50' 15"	264° 50' 15"	0° 0' 0"
		C	289 06 15	109 06 30	289 06 22	24 16 7
	2	C	19 30 30	199 30 45	19 30 38	24 15 53
		T	355 14 45	175 14 45	355 14 45	130 00
C	1	Probe	101 45	102 15	102 00	162 00
		A	181 39 45	1 39 30	181 39 38	0 0 0
	2	T	205 01 45	25 01 30	205 01 38	23 22 00
		E	288 12 00	108 12 15	288 12 08	106 32 30
	2	E	18 39 00	198 39 00	18 39 00	106 33 08
		T	295 28 30	115 28 30	295 28 30	23 22 38
	2	A	272 05 45	92 06 00	272 05 52	136 30
		Probe	126 45	126 45	126 46	246 46
E	1	C	64 14 45	244 15 15	64 15 00	0 0 0
		T	99 12 45	279 12 30	99 12 38	34 57 38
	2	T	189 45 15	9 45 15	189 45 15	34 57 23
		C	154 48 00	334 47 45	154 47 52	125 44
		Probe	120 45	120 45	120 45	240 45

*Zenithdistanzen.*

Standpunkt	Lage	Ziel	Nonius I	Nonius II	Mittel	Index- verbess.	Zenithdistanz
A	1	T	51° 22' 30"	231° 22' 30"	51° 22' 30"	-11"	51° 22' 19"
		B	91 55 00	271 54 30	91 54 45	+08	91 54 53
	2	B	268 04 45	88 05 15	268 05 00	+07	268 05 07
		T	308 37 30	128 38 15	308 37 52	-11	308 37 41
C	1	Probe	719 59 45	720 00 30	720 00 07	-07	720 00 00
		B	92 19 00	272 19 15	92 19 08	-19	92 18 49
	2	T	52 41 15	232 41 30	52 41 22	+23	52 41 45
		D	94 26 15	274 25 45	94 26 00	+04	94 26 04
	2	D	265 33 45	85 34 00	265 33 52	+04	265 33 56
		T	307 18 00	127 17 45	307 17 52	+23	307 18 15
	2	B	267 41 15	87 41 45	267 41 30	-19	267 41 11
		Probe	079 59 30	080 00 00	079 59 44	+16	080 00 00
E	1	D	91 38 00	271 38 30	91 38 15	-08	91 38 07
		T	64 56 45	244 56 15	64 56 30	-11	64 56 19
	2	F	92 21 30	272 22 00	92 21 45	00	92 21 45
		F	267 38 00	87 38 30	267 38 15	00	267 38 15
	2	T	295 03 45	115 04 00	295 03 52	-11	295 03 41
		D	268 22 00	88 22 00	268 22 00	-07	268 21 53
	1	Probe	080 00 00	080 01 15	080 00 37	-37	080 00 00
		F	90 39 30	270 40 00	90 39 45	+08	90 39 53
G	2	H	90 50 00	270 50 45	90 50 22	-07	90 50 15
		H	269 09 45	89 10 00	269 09 52	-07	269 09 45
	2	F	269 19 45	89 20 15	269 20 00	+07	269 20 07
		Probe	719 59 00	720 01 00	719 59 59	+01	720 00 00

Die „Probe“ bei Berechnung der Horizontalwinkel besteht darin, daß die Summe der dritten Zahlenspalte das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden darstellt. Ferner giebt die  $n$ -fache Summe der ersten und letzten Zahl der Spalte „Mittel“, zur Summe der „Richtungen“ addiert, abermals die Spaltensumme der „Mittel“. Da man sich aber mit den Minuten und Sekunden begnügt, so muß man auf Abweichungen von ein oder mehrmals 60 Minuten gefaßt sein. Unter  $n$  ist die Anzahl der Richtungen zu verstehen, welche auf einem Standpunkte angeschnitten sind.

Die „Probe“ bei Berechnung der Zenithdistanzen entspricht für die drei ersten Zahlenspalten der vorigen. Je zwei einander zugeordnete Fernrohrlagen liefern Ablesungen, welche, durch die beigefügten Indexverbesserungen ergänzt, die Summe  $360^\circ$  bilden. Daher ist die Summe der letzten Zahlenspalte ein Vielfaches von  $360^\circ$  und zugleich Quersumme der beiden vorangehenden Beträge in derselben Zeile.

Die Berechnung des Nivellementszeuges  $HG \dots A$  wird durch die nachfolgende Übersicht hinreichend erläutert. Das Mitführen der Zehntelmillimeter als überzählige Dezimalstelle rechtfertigt der Erfolg, da sich die Beobachtungen als sehr sorgfältige erweisen. Die  $\zeta$  sind Zenithdistanzen.

Formel	Argument	log	Ergebnis	Bedeutung
			58,6430 0,7585	Kote von $H$ Zielpkt. darüber
$-GH$ cot $\zeta$	$-80,805$ $90^\circ 30' 15''$	1,907 44 $n$ 8,164 89 $n$ 0,072 33	59,4015  1,1812	Kote d. Zielpkts.  $-GH$ cot $\zeta$
$GF$ cot $\zeta$	40,340 $90^\circ 39' 53''$	1,605 73 8,064 54 $n$ 9,670 27 $n$	60,5827  $\times,5320$	Kote von $G$  $GF$ cot $\zeta$
$-EF$ cot $\zeta$	$-56,575$ $92^\circ 21' 45''$	1,752 63 $n$ 8,615 49 $n$ 0,368 12	60,1147  2,3341	Kote von $F$  $-EF$ cot $\zeta$
$ED$ cot $\zeta$	21,968 $91^\circ 38' 07''$	1,341 79 8,455 59 $n$ 9,797 38 $n$	62,4488  $\times,3728$	Kote von $E$  $ED$ cot $\zeta$
$-CD$ cot $\zeta$	$-28,610$ $94^\circ 26' 04''$	1,456 52 $n$ 8,889 58 $n$ 0,346 10	61,8216  2,2187	Kote von $D$  $-CD$ cot $\zeta$
$CB$ cot $\zeta$	30,9225 $92^\circ 18' 49''$	1,490 27 8,606 41 $n$ 0,096 68 $n$	64,0403  $\times 8,7507$	Kote von $C$  $CB$ cot $\zeta$
$-AB$ cot $\zeta$	28,160 $91^\circ 54' 53''$	1,449 63 $n$ 8,524 15 $n$ 9,973 78	62,7910  0,9414	Kote von $B$  $-AB$ cot $\zeta$
			63,7324	Kote von $A$

Auflösung der Dreiecke bei  $T$ , Berechnung der Kote  $H$  von  $T$ .

Formel	Argument u. Ergebnis	log	Formel	Argument u. Ergebnis	log
$AC$	29,0825	1,771 46	$CE$	50,578	1,703 96
$\sin \beta$	23° 22' 19"	9,598 46	$\sin \gamma$	83° 10' 30"	9,996 91
$\operatorname{cosec}(\alpha + \beta)$	47 38 19	0,131 41	$\operatorname{cosec}(\gamma + \delta)$	118 08 00	0,054 61
$AT$		1,501 33	$ET$		1,755 48
$\cot \zeta_a$	51 22 19	9,902 60	$\cot \zeta_e$	64 56 19	9,669 89
$h_a$	25,3468	1,403 93	$h_e$	26,6296	1,425 37
Kote von $A$	63,7324		Kote von $E$	62,4488	
$H_a$	89,0792		$H_e$	89,0784	
$AC$	wie oben	1,771 46	$CE$	wie oben	1,703 96
$\sin \alpha$	24° 16' 00"	9,613 82	$\sin \delta$	34° 57' 30"	9,758 14
$\operatorname{cosec}(\alpha + \beta)$	wie oben	0,131 41	$\operatorname{cosec}(\gamma + \delta)$	wie oben	0,054 61
$CT$		1,516 69 <sup>+</sup>	$CT$		1,516 71
$\cot \zeta_c$	52 41 45	9,881 90			
$h_c$	25,0382	1,398 60			
Kote von $C$	65,0403				
$H_c$	89,0785				

Hieraus die Kote der Turmspitze:

$$H = \frac{1}{3} (H_a + H_c + H_e) = 89,079 \text{ m über } N. N.$$

**Aufgabe 40.**

*Punkteinschaltung mit dem Aneroid.* Von dem Keller des Gebäudes der landwirtschaftlichen Hochschule zu dem Turm für geodätische Übungen führt eine Wendeltreppe, für welche die Höhenlage der Podeste sich mit Meßslatten unmittelbar bestimmen ließ. Auf allen geeigneten Absätzen erfolgten Aneroidablesungen, einmal im Ab- und einmal im Aufstieg. Als *gegeben* wurde nur der größte Höhenunterschied 25,67 m betrachtet\*).

\*) Beobachtet wurde mit einem Aneroid von Otto Bohne in Berlin, das für Temperaturunterschiede *nicht* unempfindlich ist. Die geodätische Sammlung besitzt von ihm außerdem ein gegen Temperatur *kompensiertes* Aneroid. Bohne's Aneroiden sind fast die einzigen, welche, wenn so bezeichnet, bis auf geringfügige Beträge ihrer Benennung entsprechen. Das Verfahren der barometrischen Punkteinschaltung setzt jedoch nicht notwendig kompensierte Instrumente voraus.

Standort	Abstieg				Aufstieg			
	Baro- meter	Thermo- meter	Baro- meter- Differenz	Höhen- unter- schied	Baro- meter	Thermo- meter	Baro- meter Differenz	Höhen- unter- schied
Turmsaal	759,70	14,6	0,00	25,67	759,75	17,7	0,00	25,67
1	760,00	14,8	0,30	22,32	760,05	17,6	0,30	22,09
2	760,15	15,1	0,45	20,65	760,20	17,4	0,45	20,30
3	760,45	15,3	0,75	17,30	760,60	17,3	0,85	15,52
4	760,80	15,3	1,10	13,39	760,75	17,2	1,00	13,73
5	761,05	15,6	1,35	10,60	761,05	16,9	1,30	10,15
6	761,40	15,7	1,70	6,70	761,35	16,8	1,60	6,57
7	761,45	15,8	1,95	3,91	761,60	16,7	1,85	3,58
Keller	762,00	16,0	2,30	0,00	761,90	16,5	2,15	0,00

Die Ablesungen des Aneroidthermometers dienten nur um festzustellen, daß eine Umkehr seines Ganges während einer Messungsreihe nicht eingetreten war. Werden die barometrischen Differenzen mit  $d$  bezeichnet, so berechnen sich die Höhenunterschiede  $h$  im Abstieg aus:

$$h = 25,67 - \frac{25,67}{2,30} d = 25,67 - 11,16 d$$

und im Aufstieg aus:

$$h = 25,67 - \frac{25,67}{2,15} d = 25,67 - 11,94 d$$

Die Berechnung der Centimeter hätte unterbleiben können, dagegen durfte erfahrungsgemäß ein wirklicher Gewinn an Genauigkeit durch schärfere Aneroidablesung erwartet werden. Die Bohne'schen Aneroide sind wie die von Naudet bis auf halbe Millimeter (der Quecksilbersäule) geteilt und können durch Schätzung, wenn man Parallaxe vermeidet, ganz gut auf Vierzigstel Millimeter abgelesen werden.

Mittel der be- rechneten	Mit Latten ge- messene	Fehler
Höhenunterschiede		
25,67	25,67	0,00
22,20	22,22	+ 0,02
20,48	20,75	+ 0,27
16,41	16,43	+ 0,02
13,56	13,30	- 0,26
10,38	10,08	- 0,30
6,64	6,80	+ 0,16
3,74	3,40	- 0,34
0,00	0,00	0,00

### Aufgabe 41.

*Stationieren des tachymetrischen Nivellierinstrumentes.* Dies Instrument\*) gestattet das Auf- und Niederkippen des Fernrohrs mittelst einer Schraube im Winkelintervall von etwa  $4^{\circ}$ , ist außerdem mit einem Horizontalkreis nebst Alhidade, die sich mit dem Fernrohr dreht, sowie mit einer Orientierbussole über dem Fernrohr ausgerüstet. Unter dem Fernrohr und fest mit ihm verbunden liegt die justierbare Röhrenlibelle, während eine Dosenlibelle am Fernrohrträger beim Aufstellen des Instruments gute Dienste leistet. Das Okular enthält einen Reichenbach'schen Distanzmesser.

Als Tachymeter kann dies Instrument dienen, indem man bei einspielender Libelle alle 3 Horizontalfäden an der lotrechten Ziellatte und zugleich am Limbus die Stellung der Alhidade abliest. Man erhält so die Zielrichtung, die Zielweite und den Abstand des Lattenfußpunktes vom Niveau des Instruments, kann also Situation und Höhe dieses Punktes bestimmen. Allerdings ist die Tragweite des Instruments von dem Bodenrelief abhängig, denn sie findet da ihre Grenze, wo die Spitze der Ziellatte unter die horizontale Visierachse herabsinkt oder diese in den Boden einschneidet.

Beim *Stationieren* kann man sich des Instruments wie eines Theodolits oder wie einer Bussole bedienen, die geringe zulässige Kippbewegung des Fernrohrs weist aber mehr auf letzteres hin. Denn im Theodolitzug soll die Visierachse stets die Fußpunkte der Ziele (die zuvor Standpunkte waren oder es noch werden) fassen, um die höchst nachteiligen Excentricitätsfehler möglichst zu beschränken; beim Bussolenzug dagegen haben Excentricitätsfehler an den Zielpunkten, die niemals auch Standpunkte sind, nur geringen Einfluß. Man darf also z. B. beim Vorblick nach einem Polygonpunkt den Fuß, beim Rückblick nach demselben Punkt die Spitze der lotrecht gehaltenen Ziellatte anschneiden, ohne aus deren unvermeidlichen Schwankungen wesentliche Nachteile zu befahren. Selbstverständlich gilt auch beim tachymetrischen Stationieren die Regel, den Theodolitzügen lange, den Bussolenzügen kurze Zugseiten zu geben.

Erfahrungsgemäß fällt es Anfängern im Tachymetrieren schwer, ihr Augenmerk zugleich auf die Situation der Standpunkte und auf das Mitführen der Höhen zu richten, und es ereignet sich nur zu oft, daß irgendwo eine Lücke bleibt, die nachträglich nicht mehr ausgefüllt werden kann und die ganze Arbeit wertlos macht. Vorliegende Auf-

\*) Beschrieben in der Zeitschrift f. Vermessungswesen, 1886, S. 473, 481 u. ff.

gabe hat den Zweck, das Verknüpfen der Standpunkte nach Situation und Höhe einzutüben. Eine eigentliche Flächenaufnahme wird daher gar nicht, oder nur von *einem* Standpunkt, hier von Nr. IV aus damit verknüpft, im übrigen beschränkt man sich auf wenige Geländepunkte, die zugleich als Wechsellpunkte für das Nivellement und als Polygonpunkte dienen. Der Meßprobe halber werden sie stets paarweise angeordnet und jeder mit einem bis zum Boden eingetriebenen Grundpflock sowie mit einem hervorragenden, leicht kenntlichen Beipflock bezeichnet, während Punkte, die nur der Flächenaufnahme dienen, keinen Grundpflock erhalten. Die Standpunkte dienen nicht zugleich als Geländepunkte, werden darum auch nicht ausgepflockt, da außerdem der Bussolenzug mit Springständen erfolgt, auf verlassene Standpunkte also nicht zurückgegriffen werden muß.

Der Bussolenzug wird zwischen zwei trigonometrische Festpunkte, das Nivellement (ein gewöhnliches geometrisches Nivellement mit doppelten Wechsellpunkten) zwischen zwei Höhenmarken eingebunden. Die kleine Flächenaufnahme auf Standpunkt IV ist also nach Orientierung und Höhenlage an die Landesaufnahme angeschlossen und der Anschluß geprüft.

Der Landmesser nimmt überhaupt nichts ohne Meßprobe auf, prüft also auch die *einzelnen* Geländepunkte; die Lattenablesungen durch Bilden und Vergleichen der Abstände zwischen dem Mittel- und den äußeren Fäden, die horizontale Richtung durch doppelte Limbusablesung, und zwar bei den Wechsellpunkten an beiden Nonien, bei den Einzelpunkten nur an einem Nonius, aber *unter Hinzuziehen des letzten Striches der Überteilung* als eines Hilfszeigers, dessen Stellung nur geschätzt wird.

Dabei kann es jedoch immer noch vorkommen, daß beim Blick nach einem Wechsellpunkt vergessen wird, zur Lattenablesung die Libelle einspielen zu lassen, oder daß der Horizontalkreis sich während der Arbeit eines Standes etwas dreht, beides Fehler, die in den Anschlüssen sich summarisch aussprechen, aber im besonderen nicht immer und nur schwierig aufzudecken sind. Darum ziehe man die Nivellementsprobe aus den doppelten Wechsellpunkten, wie alle vorgenannten Meßproben, soweit sie sich dazu eignen, sofort auf dem Felde, und versäume nicht, sich von dem Stillstand des Limbus zu überzeugen, indem man eines der zuerst angeschnittenen Ziele am Schlusse des Standes nochmals einstellt. Es kann dazu ein beliebiger, sonst gar nicht zur Aufnahme gehöriger, aber gut sichtbarer Gegenstand gewählt, wohl auch in Ermangelung eines solchen die Magnetnadel nochmals zum Einspielen gebracht werden.

Diese Meßproben werden im Gegensatz zu dem Herkommen ge-  
Meß- und Rechenübungen.

fordert. Bei *tachymetrischen* Aufnahmen ist, seltsam genug, eine große Zahl von Technikern der Meinung, ein gewisser Prozentsatz von Fehlern, den man überdies stets zu gering anschlägt, könne dem Zweck der Aufnahme keinen nennenswerten Eintrag thun. Die große Menge der aufgenommenen Geländepunkte prüfe sich gegenseitig, sodafs unwahrscheinliche Messungsergebnisse zu erkennen und einfach wegzulassen seien. Man nimmt also an, dafs immer mehr Punkte als nötig aufgenommen werden und dafs unentbehrliche Punkte zufällig auch fehlerfrei bleiben. Der Landmesser dagegen, gewohnt für seine Aufnahmen im vollen Umfange verantwortlich zu sein, wird keinen Punkt zuviel, aber dafür auch keinen ungeprüft aufmessen.

Unser *Beispiel*\*) verknüpft die trigonometrischen Festpunkte  $A$  und  $C$  durch einen doppelten Bussolenzug und die Höhenmarken  $M$  und  $N$  durch ein Nivellement mit doppelten Wechsellpunkten, um eine bei Stand IV gelegene Fläche nach Situation und Höhe gegen die Landesaufnahme festzulegen. In dem Feldbuch sind jedem Ziel 2 Zeilen gewidmet. Spalte 2 nimmt die Kreisablesung auf, an Zeiger I in der ersten, an Zeiger II oder dem Hilfszeiger in der zweiten Zeile. Die Spalten 3, 4 und 5 werden in erster Zeile durch die Lattenablesungen ausgefüllt. Die Buchstaben  $m$ ,  $u$ ,  $o$  entsprechen den Ablesungen am mittleren, unteren und oberen Faden. Unter  $u$  und  $o$  wird die dekadische Ergänzung von  $m$  geschrieben, darauf durch *Addition*

$$u - m \quad \text{und} \quad o - m$$

gebildet und erstere Differenz ohne weiteres, letztere nach Vorzeichenumkehr, in Spalte 6 untereinander eingetragen. Man summiert diese Differenzen, welche gleich ausfallen müssen, nunmehr im Kopf und erhält so

$$a = (u - m) + (m - o),$$

woraus man, entsprechend den Konstanten des Instruments,

$$D = 99,50 a + 0,37 = 100 a + (0,37 - \frac{1}{2} a)$$

auf Dezimeter abgerundet bildet. Spalte 8 ist dem Nivellement bestimmt. Man erhält die „Steigung“ von Punkt zu Punkt, indem man unter  $m$  jedes Zieles die dekadische Ergänzung von  $m$  des nächstfolgenden setzt und beide Zahlen summiert. Wie die Koten sich aus der ersten und den Steigungen zusammensetzen, ist bekannt. Die Widersprüche des Nivellements mit doppelten Wechsellpunkten sind hier in leicht ersichtlicher Weise sofort verteilt, doch ist es ebenso

\*) Aufgenommen von den Herren Landmessern Seiffert u. Friebe, Assistenten der Landw. Hochschule, Sommer 1889.

richtig, nur einen der beiden Nivellementszüge selbständig durchzurechnen, die durch den zweiten bedingten Verbesserungen aber, wenn sie überhaupt ins Gewicht fallen, erst zu Hause anzubringen.

Vorgenannte Berechnungen sollen, die von  $D$  und die Ermittlung der Koten vielleicht ausgenommen, schon auf dem Felde vollzogen und kein Stand verlassen werden, ehe nicht die Mefsporen für alle Ziele stimmen.

Es verdient bemerkt zu werden, daß in unsrem Beispiel nicht blofs die Wechsel-, sondern alle Geländepunkte bei einspielender Libelle abgelesen wurden, daß man bei letzteren jedoch ebensogut den Mittelfaden hätte auf die nächste Centimetergrenze einstellen dürfen. Der dadurch zu erzielende Gewinn ist jedoch nicht hoch anzuschlagen.

Tachymetrisches Stationieren, Auszug aus dem Feldbuch.

Ziel	Kreis o ,	Ziellatte			a = u-m m-o	Ziel- weite D	Steigt und Kote	Bemer- kungen
		m	u	o				
Nord	216 32 36 33	Standpunkt A.						
Stumpfer Turm	346 02 166 04	Stand I.						Festpunkt S
Nord	86 20 266 21							
M	76 48	2,080	2,514	1,646	0,434			Höhen- marke
⊙	256 49	×8,932	×7,920	×7,920	0,434	86,7	61,955	
A	164 45 344 45	1,068 ×7,581	1,271 ×8,932	0,863 ×8,932	0,203 0,205		1,012 62,967	Festpunkt
w <sub>1</sub>	23 41 203 42	2,419 ×7,614	2,797 ×7,581	2,040 ×7,581	0,378 0,379		×8,649 61,616	Wechsel- punkt
w <sub>1</sub> '	23 16 203 17	2,386	2,764 ×7,614	2,004 ×7,614	0,378 0,382		0,033 61,649	desgl.

## Tachymetrisches Stationieren, Auszug aus dem Feldbuch. (Fortsetzg.)

Ziel	Kreis o ,	Ziellatte			$a = \left. \begin{matrix} u-m \\ m-o \end{matrix} \right\}$	Ziel- weite $D$	Steigt und Kote	Bemer- kungen
		$m$	$u$	$o$				
Nord	205 31 25 31	Stand II.						
$w_1'$	11 03 191 04	1,157 ×8,811	1,509 ×8,843	0,801 ×8,843	0,352 0,356	70,8	61,649	Wechsel- punkt
$w_1$	10 22 190 23	1,189 ×8,267	1,541 ×8,811	0,834 ×8,811	0,352 0,355	70,7	<sup>-1</sup> ×,968 61,616	desgl.
$w_2$	204 56 24 56	1,733 ×8,204	2,090 ×8,267	1,374 ×8,267	0,357 0,359	71,6	×,456 61,072	desgl.
$w_2'$	204 15 24 15	1,796	2,154 ×8,204	1,437 ×8,204	0,358 0,359	71,7	<sup>-1</sup> ×,937 61,008	desgl.
Nord	12 07 192 08	Stand III.						
$w_2'$	217 45 37 45	0,376 ×,689	0,647 ×,624	0,101 ×,624	0,271 0,275	54,7	61,008	desgl.
$w_2$	216 53 36 53	0,311 ×7,403	0,581 ×,689	0,040 ×,689	0,270 0,271	54,2	<sup>-1</sup> 0,065 61,072	desgl.
$w_3$	0 16 180 17	2,597 ×7,286	2,812 ×7,403	2,380 ×7,403	0,215 0,217	43,4	×7,714 58,786	desgl.
$w_3'$	359 02 179 03	2,714	2,930 ×7,286	2,498 ×7,286	0,216 0,216	43,4	×,883 58,669	desgl.
Nord	21 14 201 14	Stand IV.						
$w_3'$	162 26 342 27	0,407 ×,710	0,670 ×,593	0,141 ×,593	0,263 0,266	53,0	58,669	desgl.
$w_3$	161 34 341 35	0,290 ×7,579	0,556 ×,710	0,022 ×,710	0,266 0,268	53,5	0,117 58,786	desgl.
1	205 36 221 06	2,421 ×7,337	2,613 ×7,579	2,229 ×7,579	0,192 0,192	38,6	×7,869 56,655	Gelände- punkt
2	300 43 316 12	2,663 ×8,180	2,993 ×7,337	2,333 ×7,337	0,330 0,330	66,0	×,758 56,413	desgl.
3	250 44 266 12	1,820 ×,371	2,418 ×8,180	1,218 ×8,180	0,598 0,602	119,8	0,843 57,256	desgl.

Tachymetrisches Stationieren, Auszug aus dem Feldbuch. (Schluss.)

Ziel	Kreis o ,	Ziellatte			a = u-m } m-o }	Ziel- weite D	Steigt und Kote	Bemer- kungen
		m	u	o				
Stand IV, Forts.								
4	348 07	0,629	1,052	0,203	0,423	84,8	57,256	Gelände- punkt
	3 39	×,310	×,371	×,371	0,426		1,191	
w <sub>4</sub>	0 11	0,690	0,998	0,384	0,308	61,5	×,939	Wechsel- punkt
	180 12	×,309	×,310	×,310	0,306		58,386	
w <sub>4</sub> '	359 40	0,691	0,999	0,383	0,308	61,6	+1 ×,999	desgl.
	179 40		×,309	×,309	0,308		58,386	
Stand V.								
Nord	12 57	1,688	1,899	1,474	0,211	42,7	58,386	desgl.
	192 58							
w <sub>4</sub> '	220 15	1,689	1,900	1,476	0,211	42,6	+1 ×,999	desgl.
	40 16						×7,445	
w <sub>4</sub>	219 23	2,555	2,918	2,188	0,363	73,0	×,134	Festpunkt
	39 24							
C	319 39	1,154	1,437	0,871	0,283	56,4	1,401	Höhen- marke
	139 40							
N	116 56	58,921						Sollkote
	132 27							
Standpunkt C.								
Nord	251 01							
	71 01							
Goth. Turm	36 28							Festpunkt G.
	216 30							

*Bestimmung der Mißweisung der Visur.* Unter Mißweisung der Magnetnadel versteht man bekanntlich die Abweichung des magnetischen Meridians vom geographischen. Unter Mißweisung der Visur sei die Abweichung der vertikalen Visierebene von der Richtung der Abscissenachse, oder das Azimut der Visierebene, bei einspielender Magnetnadel verstanden. In unsrer Aufgabe wird die Mißweisung  $\alpha_0$  der Visur zweimal, zu Beginn und am Schluss, und zwar dadurch bestimmt, daß man die Limbusablesung  $\lambda$  bei Einstellung des Fernrohrs in ein be-

kanntes Azimut  $\alpha$ , vermindert um die Limbusablesung  $\lambda_0$  bei einspielender Magnetnadel, von  $\alpha$  subtrahiert:

$$\alpha_0 = \alpha - \lambda + \lambda_0.$$

Standpunkt <i>A</i> .	Standpunkt <i>C</i> .
( <i>AS</i> ) = $\alpha$ = 119° 10,0'	( <i>CG</i> ) = $\alpha$ = 134° 57,5'
360 — $\lambda$ = 13 57,0	360 — $\lambda$ = 323 31,0
$\lambda_0$ = 216 32,5	$\lambda_0$ = 251 01,0
$\alpha_0$ = 349 39,5	$\alpha_0$ = 709 29,5
$= -10 20,5$	$= -10 30,5$

insofern nämlich die Addition von 360° die Bedeutung eines Azimuts nicht ändert. Die Azimute (*AS*) und (*CG*) sind aus den Koordinaten der gegebenen Festpunkte *A*, *S*, *C*, *G* berechnet.

Die Aufnahme erfolgte Ende Juli, also nahe zur Zeit der stärksten täglichen Schwankungen des magnetischen Meridians, welche bis zu 10' betragen können. Es ist demnach nicht undenkbar, daß der Unterschied von 10' in den beiden  $\alpha_0$  sich meteorologisch erklären läßt, obwohl auch Änderungen der gegenseitigen Richtung von Visierachse und Orientierbussole vorgekommen sein können. Auf alle Fälle werden wir, da weitere Anhaltspunkte fehlen, berechtigt sein, jene 10' der Zeitfolge nach gleichmäßig auf die Standpunkte der tachymetrischen Aufnahme zu verteilen. In jedem derselben führt die Mißweisung, von der Limbusablesung bei einspielender Nadel abgezogen, auf die Limbusablesung für das Fernrohrazimut Null. Daher folgende Übersicht:

Stand	Limbusablesung bei einsp. Nadel	minus Mißweisung	Limbusablesung f. d. Azimut Null
I	86° 20,5'	+ 10° 21,5	96° 42,0'
II	205 31,0	+ 10 23,5	215 54,5
III	12 07,5	+ 10 25,5	22 33,0
IV	21 14,0	+ 10 27,5	31 41,5
V	12 57,5	+ 10 29,5	23 27,0

Selbstverständlich kann die vorstehende Berechnung auch in dem Feldbuche selbst vorgenommen werden, wo es an Raum dafür nicht mangelt. Zur letzten Spalte werden die Ergänzungen auf 360° gebildet, auf Schiebzettel geschrieben und je über die Kreisablesungen eines Standes gehalten, mit welchen vereinigt sie die Azimute der einzelnen Zielrichtungen ergeben.

Nummehr kann die Berechnung des doppelten Polygonzuges zwischen *A* und *C* nach bekanntem Rechengeschema vor sich gehen.

(Vergl. S. 84.) Man versäume nicht zu den Azimuten der Rückblicke  $180^{\circ}$  zu addieren.

Punkt <i>P</i> <i>P'</i>	Azimut ( <i>PP'</i> )	Strecke <i>PP'</i>	$\sin(PP')$ <i>PP'</i> $\cos(PP')$	$PP' \sin(PP')$ $PP' \cos(PP')$	Ordinaten	Abfesssen	Punkt <i>P'</i>
<i>A</i>					×5 336,4	×79 831,6	<i>A</i>
<i>A</i>	248° 03,0'	41,0	9,9674 <sub>n</sub>	0,5802 <sub>n</sub>	×62,0	×84,7	
<i>I</i>			0,6128	0,1854 <sub>n</sub>	×5 298,4	×79 816,3	<i>I</i>
			9,5726 <sub>n</sub>				
<i>I</i>	286 59,5	75,7	9,9806 <sub>n</sub>	0,8597 <sub>n</sub>	×27,6	22,1	
<i>w</i> <sub>1</sub>			0,8791	0,3448	×5 226,0	×79 838,4	<i>w</i> <sub>1</sub>
			9,4657				
<i>w</i> <sub>1</sub>	334 28,0	70,7	9,6345 <sub>n</sub>	0,4839 <sub>n</sub>	×69,5	63,8	
<i>II</i>			0,8494	0,8048	×5 195,5	×79 902,2	<i>II</i>
			9,9554				
<i>II</i>	349 01,5	71,6	9,2796 <sub>n</sub>	0,1345 <sub>n</sub>	×86,4	<sup>+1</sup> 70,3	
<i>w</i> <sub>2</sub>			0,8549	0,8468	×5 181,9	×79 972,6	<i>w</i> <sub>2</sub>
			9,9919				
<i>w</i> <sub>2</sub>	14 20,0	54,2	9,3937	0,1277	13,4	52,5	
<i>III</i>			0,7340	0,7203	×5 195,3	×80 025,1	<i>III</i>
			9,9863				
<i>III</i>	337 43,5	43,4	9,5787 <sub>n</sub>	0,2162 <sub>n</sub>	×83,5	<sup>-1</sup> 40,2	
<i>w</i> <sub>3</sub>			0,6375	0,6038	×5 178,8	×80 065,2	<i>w</i> <sub>3</sub>
			9,9663				
<i>w</i> <sub>3</sub>	309 53,0	53,5	9,8850 <sub>n</sub>	0,6134 <sub>n</sub>	×58,9	34,3	
<i>IV</i>			0,7284	0,5355	×5 137,6	×80 099,5	<i>IV</i>
			9,8071				
<i>IV</i>	328 30,0	61,5	9,7181 <sub>n</sub>	0,5070 <sub>n</sub>	×67,9	<sup>-1</sup> 52,4	
<i>w</i> <sub>4</sub>			0,7889	0,7197	×5 105,5	×80 151,8	<i>w</i> <sub>4</sub>
			9,9308				
<i>w</i> <sub>4</sub>	15 56,5	42,6	9,4388	0,0632	11,7	41,0	
<i>V</i>			0,6294	0,6123	×5 117,2	×80 192,8	<i>V</i>
			9,9829				
<i>V</i>	296 12,5	73,0	9,9528 <sub>n</sub>	0,8161 <sub>n</sub>	×34,5	32,2	
<i>C</i>			0,8633	0,5083	×5 051,6	×80 225,0	<i>C</i>
			9,6450				
					×5 051,8	×80 225,1	
					- 0,2	- 0,1	

Punkt <i>P</i> <i>P'</i>	Azimut ( <i>PP'</i> )	Strecke <i>PP'</i>	$\sin(PP')$ <i>PP'</i> $\cos(PP')$	$PP' \sin(PP')$ $PP' \cos(PP')$	Ordinaten	Abfassen	Punkt <i>P'</i>
<i>A</i>					×5 336,4	×79 831,6	<i>A</i>
<i>A</i>	248° 03,0'	41,0	9,9674 <sub>n</sub>	0,5802 <sub>n</sub>	×62,0	×84,7	
<i>I</i>			0,6128	0,1854 <sub>n</sub>	×5 298,4	×79 816,3	<i>I</i>
			9,5726 <sub>n</sub>				
<i>I</i>	286 34,5	76,0	9,9816 <sub>n</sub>	0,8624 <sub>n</sub>	<sup>-3</sup> ×27,2	21,7	
<i>w</i> <sub>1</sub> '			0,8808	0,3360	×5 225,3	×79 838,0	<i>w</i> <sub>1</sub> '
			9,4552				
<i>w</i> <sub>1</sub> '	335 09,0	70,8	9,6235 <sub>n</sub>	0,4735 <sub>n</sub>	×70,2	64,2	
<i>II</i>			0,8500	0,8078	×5 195,5	×79 902,2	<i>II</i>
			9,9578				
<i>II</i>	348 20,5	71,7	9,3055 <sub>n</sub>	0,1610 <sub>n</sub>	×85,5	<sup>-1</sup> 70,2	
<i>w</i> <sub>2</sub> '			0,8555	0,8464	×5 181,0	×79 972,3	<i>w</i> <sub>2</sub> '
			9,9909				
<i>w</i> <sub>2</sub> '	15 12,0	54,7	9,4186	0,1566	14,3	52,8	
<i>III</i>			0,7380	0,7225	×5 195,3	×80 025,1	<i>III</i>
			9,9845				
<i>III</i>	336 29,5	43,4	9,6008 <sub>n</sub>	0,2383 <sub>n</sub>	<sup>-1</sup> ×82,7	39,8	
<i>w</i> <sub>3</sub> '			0,6375	0,5999	×5 177,9	×80 064,9	<i>w</i> <sub>3</sub> '
			9,9624				
<i>w</i> <sub>3</sub> '	310 45,0	53,0	9,8794 <sub>n</sub>	0,6037 <sub>n</sub>	<sup>-1</sup> ×59,8	34,6	
<i>IV</i>			0,7243	0,5391	×5 137,6	×80 099,5	<i>IV</i>
			9,8148				
<i>IV</i>	327 58,5	61,6	9,7245 <sub>n</sub>	0,5141 <sub>n</sub>	×67,3	<sup>+1</sup> 52,2	
<i>w</i> <sub>4</sub> '			0,7896	0,7179	×5 104,9	×80 151,8	<i>w</i> <sub>4</sub> '
			9,9283				
<i>w</i> <sub>4</sub> '	16 48,5	42,7	9,4612	0,0916	12,3	<sup>+1</sup> 40,9	
<i>V</i>			0,6304	0,6115	×5 117,2	×80 192,8	<i>V</i>
			9,9811				
<i>V</i>	296 12,5	73,0	9,9528 <sub>n</sub>	0,8161 <sub>n</sub>	<sup>-1</sup> ×34,5	32,2	
<i>C</i>			0,8633	0,5083	×5 051,6	×80 225,0	<i>C</i>
			9,6450				
					×5 052,2	×80 224,9	
					-0,6	+0,1	

Die Ausgleichung der Widersprüche der beiden Züge erfolgte mit Rücksicht darauf, daß die Koordinaten der Standpunkte I...V übereinstimmen mußten.

Der noch übrige Teil der Lösung besteht im Auftragen der Polygonpunkte nach Koordinaten und der Geländepunkte mit Transporteur und Maßstab, wobei sich als zweckmäßiges Prüfungsverfahren empfiehlt, die Arbeit unabhängig von der ersten auf Pauspapier zu wiederholen und dies zum Vergleich auf die Reinkarte zu legen. Auf diese Geschäfte sowie das Entwerfen von Niveaukurven aus dem kotierten Plan wird hier nicht eingegangen.

---

## VII. Instrumentenkunde.

### Aufgabe 42.

*Die Vergrößerung eines Fernrohrs zu bestimmen.* Stellt man ein Fernrohr auf ein unendlich fernes Ziel, den Mond, einen Stern oder auch einen sehr entfernten irdischen Gegenstand ein, läßt sodann zerstreutes Licht durch das Objektiv in das Fernrohr dringen, so entsteht hinter dem Okular ein scharf begrenzter, heller Kreis, das reelle Bild des Objektivs, entworfen von dem Okular. Man kann dies Bild auf einem fein geteilten Maßstab auffangen und seinen Durchmesser  $d$  ablesen. Wenn  $D$  der Durchmesser des Objektivs, so ergibt sich die Vergrößerung  $v$  des Fernrohrs\*) aus:

$$v = D : d. \quad (1)$$

Nur wenn, was zuweilen unstatthafterweise geschieht, ein Teil des Objektivs durch eine dicht dahinter befindliche Blende außer Wirkung gesetzt ist, hat man von  $D$  noch die doppelte Ringbreite der Blende in Abzug zu bringen, da sonst die Vergrößerung viel stärker berechnet würde, als sie wirklich ist. Man erkennt den Konstruktionsfehler, indem man das *Okular* gegen das Licht richtet, das Auge in einige Entfernung (mindestens günstigste Sehweite) vor das Objektiv bringt und langsam aus der Fernrohrachse nach der Seite bewegt. Verschwindet die Okularöffnung ganz, bevor das Auge dem Rand des Objektivs gegenüber stand, so ist ein Teil des letzteren abgeblendet, und legt man einen Maßstab vor das Objektiv, so läßt sich die Breite des Blendrings ziemlich genau abschätzen. Es muß dies auf beiden Seiten des Objektivs geschehen, da die Blende nicht immer centrisch sitzt.

Blenden bedarf jedes Fernrohr zum Auffangen der gebeugten Randstrahlen, doch soll kein Blendring in den abgestutzten Kegel eingreifen,

---

\*) Des Verfassers praktische Geometrie, I, S. 62.

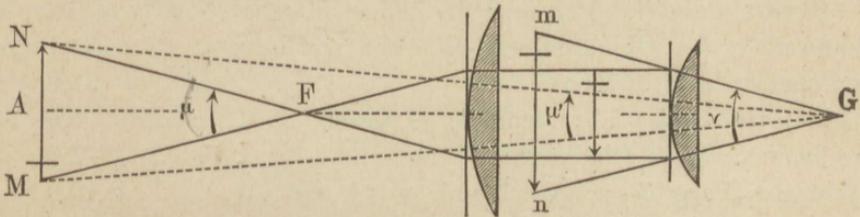
dessen eine Basis das Objektiv, dessen andere das Diaphragma in der Stellung auf unendlich fern ist. Zeigt sich dagegen die vorbeschriebene Erscheinung, so hat der Mechaniker Ursache gefunden, die Öffnung des Objektivs zu verkleinern, weil dasselbe nicht richtig geschliffen ist und die Randstrahlen das Bild im Fernrohr, sei es durch Kugel- oder durch Farbenabweichung, verunstalten. Rechtlich ist dies Verfahren nur dann, wenn er den Abnehmer davon unterrichtet.

Genauer als aus dem Verhältnis der Durchmesser  $D$  und  $d$  läßt sich die Vergrößerung nicht ableiten; dennoch wendet man zur Probe noch das Verfahren der Schätzung mit freiem und bewaffnetem Auge an. Beide Augen, das eine durchs Fernrohr, das andere frei nach einer Skala blickend, suchen einen vergrößerten Skalenteil mit den unvergrößerten zur Deckung zu bringen und zu vergleichen. Deckt jener  $p$  von diesen, so ist  $p$  die scheinbare Vergrößerung und kann auch ausgedrückt werden durch

$$p = v : \mu', \tag{2}$$

wenn  $v = nGm$  (Fig. 31) den Winkel bedeutet, unter dem das virtuelle Bild  $nm$  eines Skalenteils,  $\mu' = MGN$  den Winkel, unter dem

Fig. 31.



der Skalenteil  $MN$  selbst vom Auge in  $G$  gesehen wird. Ein Auge in  $F$ , dem vorderen Brennpunkte des Objektivs, sieht dagegen den Skalenteil unter dem Gesichtswinkel  $MFN = \mu$ , und die eigentliche Vergrößerung  $v$  für sehr ferne Objekte berechnet sich aus\*)

$$v = v : \mu. \tag{3}$$

Daher :

$$v = p \cdot \mu' : \mu.$$

Als Centriwinkel auf gleicher Bogenlänge  $MN$ , aber zwischen ungleichen Radien aufgefaßt, verhalten sich  $\mu'$  und  $\mu$  umgekehrt wie die letzteren, so daß

$$\mu' : \mu = AF : AG = (e - f) : (e + l),$$

worin  $e$  den Abstand des Zieles vom Objektiv,  $f$  die Objektivbrenn-

\*) Des Verfassers praktische Geometrie, I, § 16. Die Strahlen  $Gm$ . und  $Gn$  in Fig. 31 bis zur Vertikalen  $MN$  verlängert, würden von dieser etwa 3 Teile wie  $MN$  übergreifen. Die Figur ist übrigens etwas zusammengeschoben.

weite und  $l$  die Fernrohrlänge (bis zum Augenpunkt  $G$ ) bedeutet. Es folgt daraus:

$$v = p \frac{e-f}{e+l}. \quad (4)$$

*Erstes Beispiel.* Fernrohr des Theodolits Nr. 285 von Fennel.

Brennweite $f$ der Objektivlinse, gemessen gelegentlich des Einstellens auf einen sehr entfernten Punkt . . .	186	mm
Durchmesser $D$ der Objektivlinse . . . . .	23,85	„
Ringbreite der eventuell in Abzug zu bringenden Blende	0,0	„
Durchmesser $d$ des Objektivbildchens . . . . .	1,55	„
Geschätztes Vergrößerungsverhältnis $p$ . . . . .	18,0	
Abstand $e$ des Zieles vom Objektiv . . . . .	3800	mm
Fernrohrlänge $l$ bei Visur nach dem Ziel . . . . .	237	„

*Berechnung:*

$$\text{I. } v = \frac{23,85}{1,55} = 15,4;$$

$$\text{II. } v = 18,0 \cdot \frac{3800 - 186}{3800 + 237} = 18 \cdot 0,895 = 16,1.$$

*Zweites Beispiel.* Fernrohr des Theodolits Nr. 1495 von Bamberg.

Brennweite $f$ der Objektivlinse, gemessen wie oben . . .	150	mm
Durchmesser $D$ derselben . . . . .	21,0	„
Ringbreite des etwa abgeblendeten Teiles . . . . .	0,0	„
Durchmesser $d$ des Objektivbildchens . . . . .	2,10	„
Geschätztes Vergrößerungsverhältnis $p$ . . . . .	10,0	
Abstand $e$ des Zieles vom Objektiv . . . . .	7275	mm
Fernrohrlänge $l$ bei Visur nach dem Ziel . . . . .	176	„

*Berechnung.*

$$\text{I. } v = \frac{21,0}{2,10} = 10,0;$$

$$\text{II. } v = 10,0 \cdot \frac{7275 - 150}{7275 + 176} = 9,6,$$

demnach abgerundet wieder 10.

*Drittes Beispiel.* Fernrohr des Nivellierinstrumentes Nr. 2099.

$$f = 313 \text{ mm} \quad D = 27,5 \text{ mm} \quad e = 6650 \text{ mm}$$

$$p = 28,5 \text{ „} \quad d = 0,95 \text{ „} \quad l = 344 \text{ „}$$

Ringbreite des abgeblendeten Objektivteiles 1,25 mm. Sämtliche Zahlen sind Mittel aus mehreren Beobachtungen.

*Berechnung.*

$$\text{I. } v = \frac{27,5 - 2,5}{0,95} = 26,3;$$

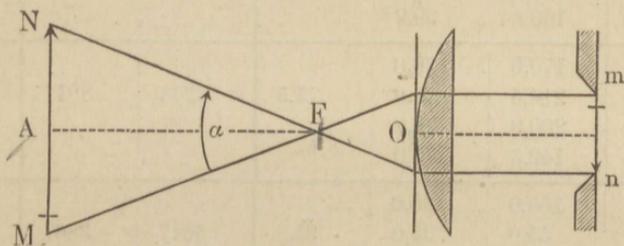
$$\text{II. } v = 28,5 \cdot \frac{6650 - 313}{6650 + 344} = 25,8.$$

Das Fernrohr giebt lichtschwache und gleichsam verschleierte Bilder.

## Aufgabe 43.

*Bestimmung des Gesichtsfeldes eines Fernrohrs.* Gesichtsfeld heißt der Winkel  $\alpha$ , unter welchem in Fig. 32 ein Auge, das wir uns im vorderen Brennpunkt  $F$  des Objektivs denken, den Teil  $MN$  einer Skala erblickt, der im Fernrohr sichtbar wird\*). Sein analytisches Maß ergibt sich gleich  $MN : AF$ , wenn  $MN$  als Bogen vom Radius

Fig. 32.



$AF$  aufgefaßt werden darf. Wir werden  $AF$  aus  $AO - OF$  bestimmen, indem wir den Abstand  $AO$  der Skala vom Objektiv unmittelbar messen und die Brennweite  $OF$  am Fernrohr abgreifen. Den Skalenabschnitt  $MN$  liest man im Fernrohr an zwei sich gegenüberliegenden Punkten  $m$  und  $n$  des Diaphragmas ab, welches das Gesichtsfeld begrenzt.

In unsrem *Beispiel* ist die Bestimmung von  $\alpha$  auf Grund von 5 verschiedenen Zielweiten, und die Messung von  $MN$  jedesmal aus 4 Paar Randablesungen erfolgt. Es wurde zu dem Zweck das Fernrohr immer ein wenig verstellt. Nach Mittelung der vier zusammengehörigen Skalenabschnitte liefert

$$\alpha = 206\,265 \cdot MN : (AO - OF)$$

das Gesichtsfeld in Sekunden. Obwohl die Genauigkeit der Skalenablesung am Rande des Diaphragmas nicht regelmässig mit der Zielweite abnimmt, wurden der Einfachheit halber doch alle 5 Ergebnisse für  $\alpha$  zu einem Mittel vereint. Es ist dies gleichbedeutend mit der Annahme, daß die mittleren Fehler der Skalenabschnitte proportional der Zielweite wachsen.

\*) Des Verfassers praktische Geometrie, I, § 18. Durch diese Definition wird das Gesichtsfeld unabhängig von der Zielweite, ebenso wie Formel (3) der vorigen Aufgabe die Vergrößerung unabhängig von der Zielweite darstellt.

*Beispiel.* Gesichtsfeld des Fernrohrs von Theodolit Nr. 65 von Rosenberg. Brennweite 186 mm.

Ziel	Ablesung in mm		$l =$ $o - u$	$\frac{1}{4} \tilde{l}$	Zielweite in mm vom		Gesichtsfeld in Sekunden
	$o$	$u$			Objektiv aus	vorderen Brenn- punkt aus	
1	92,4	53,1	39,3	39,2	1750	1564	5170
	80,0	40,8	39,2				
	110,0	70,9	39,1				
	140,0	100,8	39,2				
2	246,0	170,0	76,0	75,5	3203	3017	5162
	289,5	214,5	75,0				
	276,0	200,0	76,0				
	224,5	149,5	75,0				
3	196,0	100,0	96,0	95,8	4047	3861	5118
	150,0	55,0	95,0				
	260,0	165,0	95,0				
	227,0	130,0	97,0				
4	261,0	150,0	111,0	111,4	4690	4504	5102
	252,0	140,0	112,0				
	204,0	92,5	111,5				
	165,5	54,5	111,0				
5	251,0	100,0	151,0	150,0	6250	6064	5102
	152,5	3,5	149,0				
	293,0	144,0	149,0				
	261,0	110,0	151,0				
	4131,4	2245,1	1887,3	471,9	19940	19010	25654

Mittelwert des Gesichtsfeldes:  $5131'' = 1^{\circ} 25' 31''$ .

#### Aufgabe 44.

*Bestimmung der Libellenangabe mittelst des Legebrettes.* Die Einrichtung und Behandlung des Legebrettes wird als bekannt vorausgesetzt\*). Man soll die Trommel stets um eine Anzahl ganzer Umdrehungen bewegen, auch wenn dies, wegen Kürze der Libellenskala, nur so geschehen kann, daß die Luftblase, welche durch die Trommelschraube vorwärts bewegt worden war, durch die beiden anderen Stellschrauben mehrmals wieder zur Anfangslage zurückgeführt wird. Auf diese Art vermeidet man im Gesamtergebnis periodische Fehler der

\*) Des Verfassers praktische Geometrie, I, § 35.

Trommelschraube von der Art, wie sie sich in dem Luftblasenlauf für halbe Trommeldrehungen im nachfolgenden Beispiel deutlich genug aussprechen.

Von der Temperatur werden Libellen bekanntlich in mehrfacher Hinsicht beeinflusst. Schon geringe *einseitige* Erwärmung veranlaßt eine Abweichung der Luftblase nach der erwärmten Seite hin, in Folge der daselbst verminderten Adhäsion der Füllung am Glas. Genaue Untersuchung ist daher nur unter Schutz gegen einseitige Erwärmung möglich, indem man die Libelle in ein Glasrohr steckt oder noch besser einen kastenartigen Glassturz darüber stellt. Für dunkle Wärmestrahlen ist Glas nur wenig durchlässig.

Aber auch die *gleichmäßige* Erwärmung der Libelle macht sich bei der Untersuchung geltend, insofern sie die Angabe zu verändern pflegt. In der Regel nimmt bei mittleren Temperaturen der Teilwert der Libelle mit zunehmender Temperatur ab, sie wird empfindlicher. Wenigstens ist dies bei *allen* Libellen, welche Verfasser untersuchte, der Fall gewesen, und diese Erscheinung zeigt sich auch in unserem Beispiel. Verfasser wäre geneigt, darin eine allgemeine Eigenschaft der Libellen zu sehen, doch ist eine physikalische Erklärung dafür nicht zu finden (ungleiche Ausdehnung des Glases nach zwei Richtungen genügt nicht) und überdies kommen in der geodätischen Litteratur mitunter Behauptungen glaubwürdiger Beobachter vor, daß sich die Angabe ihrer Libelle unter dem Einfluß der Temperatur nicht verändert habe.

Libellen endlich, welche durch ihre Fassung irgend einen Zwang erleiden, können schon bei geringem Temperaturwechsel der letzteren sowohl einseitig gehoben oder gesenkt, als auch verbogen werden, so daß sich die Stellung der Luftblase und zugleich die Angabe stark und selbst sprungweise ändert. Solche Libellen geben trotz aller Schutzvorrichtungen bei der Untersuchung ganz widerspruchsvolle Resultate.

Man beachte auch das *Nachziehen der Luftblase*, daraus entstehend, daß die eben noch benetzte Glaswand erst trocknen muß, ehe die Adhäsion an beiden Enden der Luftblase gleich werden und die Füllung der Libelle ganz ins Gleichgewicht treten kann. Man muß also, ehe man abliest, nach jeder Schraubenbewegung ein wenig warten, bis die Luftblase völlig zur Ruhe gekommen ist. Bei manchen Libellen *klebt* die Luftblase, d. h. sie erreicht überhaupt nicht den höchsten Punkt der Röhre, weil in Folge von Rauheiten der Glaswand die Adhäsion zu groß ist. Das Kleben der Luftblase erkennt man in der Regel schon daran, daß dieselbe geringen, ja selbst stärkeren Neigungen des Legebrettes gar nicht folgt. Giebt man, unter Vermeidung toten Ganges der Trommelschraube, dem Legebrett von verschiedenen Seiten her dieselbe Neigung, so zeigt die Luftblase zwei verschiedene Stellungen,

beidemale im Sinne des Zurückbleibens von der höchsten Röhrenstelle. Die Ursachen des Klebens sind zweierlei, einmal Rauheiten im Schliff durch Anwenden zu groben Schmirgels, dann aber auch Auskrystallisieren löslicher Bestandteile des Glases, wenn die Ätherfüllung wasserhaltig war. Die erste Ursache macht eine Libelle überhaupt unbrauchbar, die zweite läßt sich beseitigen, indem man die Libelle öffnet, entleert und einige Wochen lang in ein Spiritusbad legt, in welchem der Krystallniederschlag sich wieder löst. Wird die Libelle darauf mit wasserfreiem Äther gefüllt, so kann man sicher sein, daß die Krystalle sich nicht von neuem bilden.

In unserem *Beispiel* ward eine ungefaste Ertel'sche Libelle (ohne Kammer) unter Glassturz untersucht. Von gewissen Sprüngen in den Spalten „Luftblasenlänge“ und „Lauf“ abgesehen, die ohne nähere Angaben unerklärt bleiben, scheint eine langsame Erwärmung und infolge davon Verkürzung der Luftblase eingetreten zu sein, womit eine Vergrößerung des Laufs, also Verkleinerung des Teilwertes  $p$  verbunden ist.

Trommelstellung $t_0$ $t_1$	Ableseung an den Libellenenden		Luftblasenlänge II — I	Ausschlag $\alpha_0$ $\alpha_1$	Lauf $\alpha_1 - \alpha_0$
	I	II			
0	0,5	32,0	31,5	16,25	
50	16,2	47,5	31,3	31,85	15,60
50	5,2	36,7	31,5	20,95	15,75
100	21,0	52,4	31,4	36,70	
100	4,5	36,2	31,7	20,35	
150	20,25	51,9	31,65	36,08	15,73
150	6,0	37,2	31,2	21,60	
200	22,1	53,05	30,95	37,58	15,98
200	10,0	40,7	30,7	25,35	
250	25,8	56,45	30,65	41,12	15,77
250	4,6	35,05	30,45	19,82	
300	20,5	51,0	30,5	35,75	15,93
300	13,3	43,9	30,6	28,60	
350	29,4	60,0	30,6	44,70	16,10
350	9,05	39,9	30,85	24,48	
400	25,35	55,9	30,55	40,62	16,14
	233,75	729,85	496,10	481,80	127,00

$$p = \frac{nk}{\sum \alpha_1 - \sum \alpha_0} = \frac{4 \cdot 198}{127} = 6,24''.$$

Hierin ist  $n = 4$  die Anzahl der vollzogenen ganzen Trommelumdrehungen,  $k = 198''$  die Neigung des Legebretts bei einem Trommelumfang und als gegeben zu betrachten. Das Ergebnis gilt bei einer mittleren Luftblasenlänge von  $496,1 : 16 = 31,0$  Skalenteilen.

Bei den vorstehenden Beobachtungen sind zwei Punkte, auf die viel ankommt, nicht gleich von vornherein beachtet worden. Mikrometerschrauben, wie die des Legebrettes, dürfen zur Vermeidung toten Ganges nur in *einer* Drehrichtung eingestellt werden. Geriet man über die gewünschte Stellung hinaus, so muß man soweit umkehren als nötig, um der Schraube wieder die vorige Anlage an ihrer Mutter zu sichern. Man wird sich von der Notwendigkeit dieser Maßregel überzeugen, wenn man eine feine Libelle, von der man weiß, daß die Luftblase nicht klebt, auf das Legebrett bringt und die Trommel abwechselnd recht- und rückläufig in ein und dieselbe Stellung führt.

Der zweite zu beachtende Punkt ist die Parallaxe oder scheinbare Verschiebung der Libellenskala. Um sie zu vermeiden, soll man nicht von oben, sondern von der Seite, rechtwinklig zur Achse, auf die Libelle blicken. Man sieht dann die Oberfläche der Luftblase durch total reflektierte Strahlen hellglänzend, scharf begrenzt und der Skala ganz nahe gerückt, dabei selbst mit einer matten Skala (dem Spiegelbild der wirklichen) versehen, deren Striche wie Schatten der oberen Skala erscheinen. Man decke, indem man abliest, jeden Skalenstrich auf seinen Schatten und man ist vor Parallaxe vollkommen sicher.

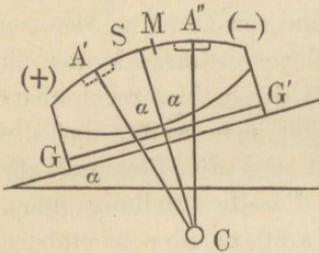
Durch die hier befolgte Beobachtungsweise ist der Einwand nicht zu entkräften, daß die eingetretene Veränderung der Angabe möglicherweise auf eine Veränderung der Unterlage des Legebrettes zurückzuführen sei. Nun stand dieses auf einer der vermauerten und als fest erprobten Steinplatten, mit denen die Fensterbrüstungen im Beobachtungsturm der landwirtschaftlichen Hochschule verkleidet sind. Den Schraubenfüßen waren die gebräuchlichen Metallplättchen untergelegt, sodafs von einem Einbohren der Schraubenspitzen in die Steinplatte nicht die Rede sein konnte. Eine Querlibelle auf dem Legebrett verhütete seitliches Verschwenken seiner Platte und Füße. Dennoch bleibt zu wünschen, daß die Beobachtungsordnung selbst jenen Einwand wiederlegte, was durch Umwenden der Richtung des Libellenlaufes und allmähliche Rückkehr zur Anfangsstellung der Trommel hätte geschehen können.

Zur planmäßigen Untersuchung unter verschiedenen Wärmegraden gehört die Fürsorge für konstante Temperatur der Libelle und ihrer nächsten Umgebung während jeder einzelnen Angabenmessung.

## Aufgabe 45.

*Bestimmung des Spielpunktes einer Setzlibelle.* An der Fassung einer Setzlibelle giebt es immer eine Schar paralleler Linien, deren Richtung nach dem Umsetzen die entgegengesetzte geworden ist, die ihrer ersten Lage also wieder parallel werden. Beim Umsetzen des Längsschnittes der Libelle der Fig. 33 kehrt die Grundlinie des Schnittes genau in ihre Lage zurück, alle zu ihr parallelen Linien gehören also zu jener Schar. Man könnte die Grundlinie  $GG'$  des Längsschnittes auch die *Setzlinie* nennen.

Fig. 33.



In Fig. 34, welche eine mit gabelförmigen Füßen auf Ringen oder Achszapfen ruhende Setzlibelle schematisch darstellt\*), ist die Verbindungslinie  $GG'$  der Scheitel der beiden Fussausschnitte *Setzlinie*, da sie die genau entgegengesetzte Richtung annimmt, wenn nämlich eine seitliche Verschwenkung der Libelle beim Umsetzen nicht erfolgte.

Fig. 34.

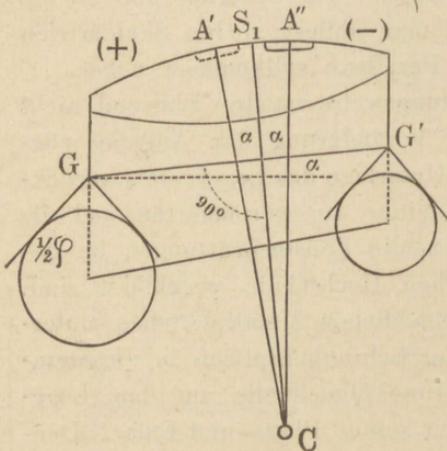
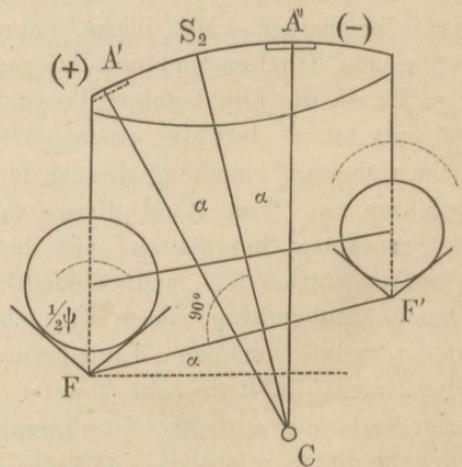


Fig. 35.



Unter der gleichen Voraussetzung ist in Fig. 35 die Verbindungslinie  $FF'$  *Setzlinie*. Die Figur stellt den Fall schematisch dar, daß ein mit einer Libelle fest verbundenes Ringfernrohr in gabelförmigen Lagern liegt. Man erkennt  $GG'$  und  $FF'$  als *Setzlinien* sofort, wenn man sie

\*) Die Ringquerschnitte sind in die Bildebene umgeklappt. Die Vorzeichen beziehen sich in Fig. 33 bis 35 auf die zweite Lage.

sich wagrecht denkt. Alle zu ihnen parallelen Geraden werden nach dem Umsetzen *wieder* wagrecht.

Ein Libellenradius  $CS$ , welcher die Setzlinie normal schneidet oder kreuzt\*), trifft den *Spielpunkt*  $S$  der Libelle. Wenn die Luftblase auf diesem Punkte einspielt, steht der Libellenradius desselben lotrecht und jede Gerade, die ihn rechtwinkelig schneidet oder kreuzt, folglich auch die Setzlinie, wagrecht. Beim Umsetzen der Libelle (ohne seitliches Verschwenken) behält der Radius des Spielpunktes seine vorige Neigung gegen das Lot bei, bleibt also lotrecht, wenn er es zuvor gewesen ist.

Sonach bilden die beiden Libellenradien  $CA'$  und  $CA''$ , welche vor und nach dem Umsetzen lotrecht standen, gleiche Winkel mit  $CS$ . Die Skalenablesung für den Spielpunkt bestimmt sich durch das arithmetische Mittel oder die halbe Summe der Ablesungen in  $A'$  und  $A''$ , die Neigung der Setzlinie gegen den Horizont wird durch die halbe Differenz dieser Ablesungen gemessen. Dabei ist es gleichgültig, ob die Mittelmarke  $M$  oder irgend eine andere als Nullmarke der Skala angenommen wird.

Die Bestimmung des Spielpunktes einer Setzlibelle geht dem Justieren derselben in der Regel voraus und ersetzt sogar häufig die Justierung.

*Erstes Beispiel.* Gegeben eine Setzlibelle nach Fig. 33. Dieselbe soll auf einer festen, schwach geneigten steinernen Fensterbrüstung, einer steinernen Treppenstufe oder dergleichen justiert werden. Es wurde eine günstige Stelle des Steines ausgesucht, die Libelle aufgesetzt, als Richtlinie beim Umsetzen die Kante eines daneben gelegten Lineals benutzt und folgendes abgelesen. Die Libellenskala war für die Dauer der Beobachtung am einen Ende mit  $(-)$ , am andern mit  $(+)$  versehen.

Lage	Ablesung an der Luftblase		Luftblasenlänge	Luftblasenmitte	Spielpunkt $\frac{1}{2}(1.+2.)$	Neigung $\frac{1}{2}(2.-1.)$
	Nordende	Südende				
1.	+ 14,4	- 9,6	24,0	+ 2,4	+ 3,35	+ 0,95
2.	- 7,7	+ 16,3	24,0	+ 4,3		
	+ 6,7	+ 6,7		+ 6,7		

\*) Und in dem Vertikalschnitt durch die Libellenachse liegt. Wir wollen uns der Einfachheit halber denken, es stände immer ein und derselbe durch die Libellenachse gelegte Längsschnitt vertikal, was z. B. durch eine Querlibelle zu erreichen wäre. Sonst müßte der Wortlaut der Erklärung die mögliche Kreuzung der Setzlinie und Libellenachse berücksichtigen.

Die Zahl der letzten Spalte giebt das Vorzeichen der Neigung so an, wie es die Libelle in ihrer zweiten Lage zeigt, entsprechend der Stellung in der Figur. Die Spalte der Luftblasenlänge dient als Meßprobe, die Summenzeile zur Rechenprobe. Im Kopfe bildet man noch die Summe aus den beiden letzten Spalten, welche der Luftblasenmitte in Lage 2 gleich sein muß.

Wäre die Libelle justiert, also die Mittelmarke zugleich Spielpunkt, so müßte die Luftblasenmitte in zweiter Lage auf  $+ 0,95$  stehen und unmittelbar die Neigung der Steinoberfläche messen; ihre Enden müßten die Ablesungen  $+ 0,95 \pm 12,00$  (Neigung  $\pm$  halbe Luftblasenlänge) zeigen. Die Justierung besteht darin, daß bei unveränderter Stellung der Libelle diese Sollablesungen mittelst der Justierschraube erzeugt werden.

Zur Probe des Erfolgs der Justierung wurde die Untersuchung der Libelle an anderer Stelle der Steinplatte, also mit ganz anderen Zahlen wiederholt.

Lage	Ablesung an der Luftblase		Blasenlänge	Blasenmitte	Spielpunkt $\frac{1}{2}(1.+2.)$	Neigung $\frac{1}{2}(2.-1.)$
	Westende	Ostende				
1.	- 18,7	+ 4,4	23,1	- 7,15	+ 0,15	+ 7,30
2.	+ 19,0	- 4,1	23,1	+ 7,45		
	+ 0,3	+ 0,3		+ 0,30		

Hiernach ist der Spielpunkt nicht mehr merklich von der Mittel- oder Nullmarke verschieden.

In diesem ersten Beispiel, wo die Bestimmung des Spielpunktes und der Neigung keine selbständige Bedeutung hat, ist es zwecklos die Ergebnisse anders als in Libellenteilen auszudrücken; die Multiplikation mit der Angabe würde sie sonst in Sekunden verwandeln.

Übrigens sei bemerkt, daß die erwähnten Sollablesungen 12,95 und 11,05 für die Justierung der Libelle, von allen Vorzeichen abgesehen, auch durch Mittelbildung aus den beiden Zahlen der Spalten „Südende“ und „Nordende“ hervorgehen, woraus eine sehr einfache *Justierregel* folgt: Mitteln der absoluten Ablesungen am Nordende oder am Südende der Blase, auszuführen durch die Justierschraube. Fig. 33 erklärt diese Regel.

*Zweites Beispiel.* Den Spielpunkt einer feinen Setzlibelle auf einem Ringferrohr zu bestimmen. Feine Libellen justiert man wohl, aber man weiß auch, daß durch die Körperwärme, durch das Anziehen der Justierschrauben u. dergl. mehr, kleine Verspannungen der Metallteile

und Ungleichheiten der Adhäsion der Libellenfüllung an dem Glas entstanden sein können, welche sich erst nach einiger Zeit ausgleichen. Man wird daher vor dem eigentlichen Gebrauch der Libelle ihren Spielpunkt neu aufsuchen, sie aber nicht wieder justieren, wenn sich keine wesentliche Störung zeigt. Denn mit Hilfe des Spielpunktes können wir jederzeit die Setzlinie der Libelle wagrecht stellen oder die Neigung derselben bestimmen.

In unserem Beispiel wurde die einige Tage zuvor justierte Libelle auf ihren Spielpunkt geprüft, zur Sicherheit bei zwei verschiedenen, wenn auch geringen Neigungen des Ringfernrohrs, welches dabei auf einem Legebrett lag; letzteres nur darum, weil die Arbeit im Zimmer auszuführen und die größte Standfestigkeit erwünscht war.

Lage	Blasenablesung		Blasenlänge	Blasenmitte	Spielpunkt $\frac{1}{2}(1.+2.)$	Neigung $\frac{1}{2}(2.-1.)$
	Nordende	Südende				
1.	17,1	3,1	14,0	10,1	12,75	+ 2,65
2.	8,4	22,4	14,0	15,4		
2.	19,7	5,7	14,0	12,70	13,02	- 0,32
1.	6,4	20,3	13,9	13,35		
	51,6	51,5		51,55	25,77	

Die beiden Spielpunktswerte stimmen nahezu überein. Das Mittel derselben, um 12,5 vermindert und mit der Angabe 4,65" multipliziert, giebt die geringe Verlegung des Spielpunktes um 1,8" von der Mittelmarke, welche hier nicht zugleich Nullmarke ist.

*Drittes Beispiel.* Den Spielpunkt einer Libelle, welche mit einem umsetzbaren Ringfernrohr fest verbunden ist, festzustellen. Wenn man die Luftblase auf den Spielpunkt bringt, so wird zwar zunächst bloß die Setzlinie, nämlich die Verbindungslinie der Lagerscheitel, wagrecht, und nur unter Voraussetzung gleich dicker Fernrohringringe auch die gemeinsame Ringachse. Zu manchen Zwecken reicht es indessen aus zu wissen, daß, wenn die Setzlinie wagrecht liegt, der Ringachse nur noch eine kleine und zudem konstante Neigung gegen den Horizont anhaftet. Man wird dann meist noch die Libelle justieren, d. h. ihre Mittelmarke zum Spielpunkt machen. In unserem Falle sollte nur festgestellt werden, ob das Instrument einer neuen Justierung bedürfte. Die drei Untersuchungen, eine mit nahe einspielender, die beiden andren mit etwas geneigter Libelle beginnend, bieten eine Meßprobe. — Die Aufgaben des zweiten und dritten Beispiels sind nur dann scharf

zu lösen, wenn die Kreuzung der Libellen- und Ringachse beseitigt oder die Libelle gegen Verschwenken gesichert ist.

Lage	Blasenablesung		Blasenlänge	Blasenmitte	Spielpunkt $\frac{1}{2}(1.+2.)$	Neigung $\frac{1}{2}(2.-1.)$
	Ostende	Westende				
1.	+ 11,5	- 11,7	23,2	- 0,1	- 3,75	- 3,65
2.	- 19,0	+ 4,2	23,2	- 7,4		
2.	+ 6,0	- 17,2	23,2	- 5,6	- 3,80	- 1,80
1.	- 13,6	+ 9,6	23,2	- 2,0		
1.	+ 8,8	- 14,3	23,1	- 2,75	- 3,82	- 1,08
2.	- 16,5	+ 6,7	23,2	- 4,90		
	- 22,8	- 22,7		- 22,75	- 11,37	

Mittel der drei gefundenen Spielpunktwerte:  $- 3,79$ . Da die Angabe  $= 5,66''$ , so ist bei einspielender Libelle die Setzlinie um  $21,5''$  geneigt.

### Aufgabe 46.

*Untersuchung der Ringe oder Achszapfen.* An einem Ringfernrohr in gabelförmigen Lagern soll mittelst einer Setzlibelle mit ebensolchen Fufsausschnitten die Konvergenz der Ringachse gegen die Setzlinie der Libelle bestimmt werden. Man will nämlich in der Regel blofs wissen, welche Neigung die Ringachse annimmt, wenn die Setzlinie wagrecht steht\*).

Auch bei dieser Untersuchung mufs die Kreuzung der Libellen- und Ringachse oder ihr Einfluß sorgfältig vermieden werden. Wir wollen zwei Verfahren der Untersuchung vornehmen.

*Erstes Verfahren.* Man möge sich denken, dafs die Figuren 34 und 35 sich auf ein und dasselbe Instrument beziehen. Zuerst werde durch Umsetzen der Libelle auf den Ringen der Spielpunkt  $S_1$  in Bezug auf die Setzlinie  $GG'$  bestimmt. Die Libelle werde jetzt mit den Ringen zugleich umgesetzt, so als wäre sie fest mit diesen verbunden. Dadurch findet sich der Spielpunkt  $S_2$  in Bezug auf die Setzlinie  $FF'$ . Da die Radien  $CS_1$  und  $CS_2$  auf den beiden Setzlinien  $GG'$  und  $FF'$  normal stehen, schliessen sie denselben Winkel wie diese ein. Folglich mißt der Bogen  $S_1S_2$  die Konvergenz der Setzlinien. Die Ablesungs-

\*) Man beachte, dafs cylindrische Fufsausschnitte oder Lager nur einen besonderen Fall der gabelförmigen darstellen.

differenz  $S_2 - S_1$  deutet, wenn positiv, an, daß die Setzlinien gegen das (+)-Ende hin divergieren.

Fig. 34.

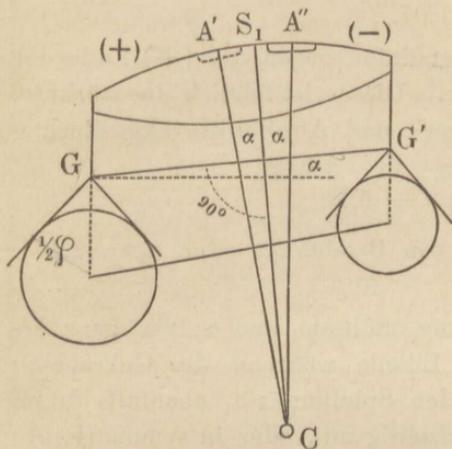
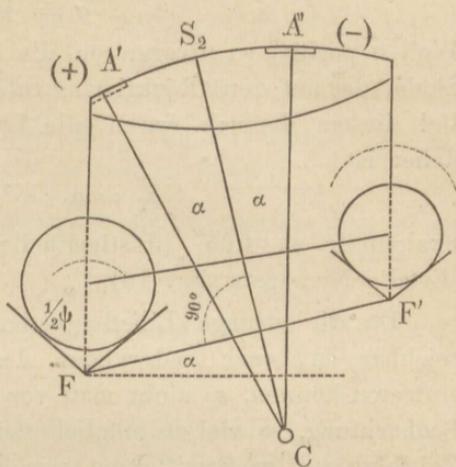


Fig. 35.



Nachdem die Konvergenz  $\sigma$  der *Setzlinien* gefunden ist, werden durch eine einfache Proportion die Konvergenzen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  der *Ringachse* gegen jede derselben berechnet. Heißt\*) der Winkel der Fußauschnitte  $\varphi$ , der der Ringlager  $\psi$ , so gilt:

$$\varrho_1 : \sigma = \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \varphi : (\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \varphi + \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \psi)$$

$$\varrho_2 : \sigma = \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \psi : (\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \varphi + \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \psi).$$

Für den Fall  $\varphi = \psi = 90$  wird z. B.  $\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{1}{2} \sigma$ , für den Fall  $\varphi = 180$  und  $\psi = 90$ , d. h. also, wenn die Libellenfüße cylindrisch ausgeschnitten sind, wird  $\varrho_1 = \sigma \sqrt{2} - \sigma = 0,414 \sigma$ .

In nachfolgendem Beispiel ist zunächst die *Libelle*, deren Skala durchlaufend, d. h. nicht von der Mitte, sondern von einem Ende beginnend, beziffert war, derart justiert worden, daß ihr *Spielpunkt*  $S_1$  auf 12,5 fiel. Darnach erübrigte nur noch der zweite Schritt der Untersuchung, die Bestimmung des Spielpunktes in Bezug auf die Verbindungslinie  $FF'$  der Lagerscheitel, mit folgendem Ergebnis:

Lage	Blasenablesung		Blasenlänge	Blasenmitte	Spielpunkt $S_2$ $\frac{1}{2}(1.+2.)$	Neigung $\alpha$ $\frac{1}{2}(2.-1.)$
	Nordende	Südende				
1.	5,9	19,1	13,2	12,5	13,65	1,15
2.	21,4	8,2	13,2	14,8		
1.	5,8	19,2	13,4	12,5	13,35	0,85
2.	20,9	7,5	13,4	14,2		
1.	5,9	19,3	13,4	12,6	13,70	1,10
2.	21,5	8,1	13,4	14,8		
	81,4	81,4		81,4	40,70	

\*) Vergl. des Verf. Praktische Geometrie, I, §§ 43 und 44.

Es war  $S_1 = 12,5$ , also wird  $\sigma = S_2 - S_1$  der Reihe nach:

$$+ 1,15 \qquad + 0,85 \qquad + 1,20$$

(nicht zu verwechseln mit der Neigung  $\alpha$ ) und im Mittel

$$\sigma = + 1,07.$$

Weil  $\sigma$  positiv, so divergieren die Setzlinien gegen das (+)-Ende der Skala, das auf dem Objektivring ruhte. Dieser ist folglich der stärkere. Bei diesem Versuch waren alle Lager- und Ausschnittwinkel Rechte, daher ist

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{1}{2} \sigma = 0,53$$

Skalenteile zu  $4,65''$  (Justierlibelle von Bamberg), oder  $\varrho_1 = 2,46''$ . (Ertel's Niv.-Instr. Nr. 16).

Da die strenge Libellenjustierung mühsam und selten ganz erreichbar ist, auch Änderungen der Libelle während des Gebrauches eintreten können, so zieht man vor, den Spielpunkt  $S_1$  ebenfalls durch Beobachtung, so viel als möglich gleichzeitig mit, oder in symmetrischer Zeitfolge zu der Ermittlung von  $S_2$  zu bestimmen, wie im folgenden Beispiel. Die benutzte Setzlibelle ist von einem Ende zum andern durchbeziffert.

$S_1$ und $S_2$ Lage	Blasenablesung		Blasenlänge	Blasenmitte	Spielpunkt $\frac{1}{2}(1.+2.)$	Neigung $\frac{1}{2}(2.-1.)$
	Nordende	Südende				
$S_1$	1.	3,5	18,2	14,7	10,85	12,50
	2.	21,5	6,8	14,7	14,15	
$S_2$	1.	0,8	15,4	14,6	8,10	10,72
	2.	20,7	6,0	14,7	13,35	
$S_2$	2.	18,3	3,7	14,6	11,00	14,15
	1.	10,0	24,6	14,6	17,30	
$S_1$	2.	20,5	5,9	14,6	13,20	12,20
	1.	3,9	18,5	14,6	11,20	
		99,2	99,1		99,15	49,57

Vorstehende Versuche beziehen sich auf das Fernrohr eines Nivellierinstrumentes von Wolz. Bei dem ersten Versuchspaar und zwar in Zeile 2 bis 4 stand das (+)-Ende der Libelle gegen das Objektivende gekehrt, bei dem zweiten, und zwar in Zeile 5 bis 7, gegen das Okularende. Die Differenzen  $S_2 - S_1$  ergeben aus dem

1. Versuchspaar:  $S_2 - S_1 = - 1,78$

2. „ „  $S_2 - S_1 = + 1,95$

und sagen demgemäß übereinstimmend aus, daß die Setzlinien gegen das Objektivende konvergieren, gegen das Okularende divergieren, wonach der Okularring der stärkere ist.

Notwendig war die Umstellung der Libelle zwischen den beiden Versuchspaaren nicht; ebensowenig mußte nach und vor der Untersuchung von  $S_1$  das Fernrohr umgelegt werden. Der Beobachter hat dies offenbar nur gethan, um in den mit 1. bezeichneten Lagen ein für allemal das (+)-Ende der Libelle südlich zu haben.

Behalten wir das Vorzeichen des ersten Versuchspaares bei, so ist im Mittel:

$$\sigma = -1,86, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = -0,93$$

oder mit der Angabe der (Rosenberg'schen) Justierlibelle  $4,82''$  multipliziert,  $\varrho_1 = -4,48''$ .

*Zweites Verfahren.* Die Libelle, deren Spielpunkt  $S_1$  ganz unbekannt sein darf, bleibt ein für allemal in derselben Lage, während die Ringe unter ihr gewechselt werden. Auch kann die Anfangsstellung der Luftblase, wie bisher, eine beliebige sein. Der *Lauf* der Luftblase von der ersten bis zur zweiten Ringlage mißt, wie sich leicht beweisen läßt, die doppelte Konvergenz der Setzlinien. Sind  $M_1$  und  $M_2$  die Ablesungen für die Luftblasenmitten vor und nach dem Umsetzen der Ringe, und bildet man

$$\sigma = 1/2 (M_2 - M_1),$$

so deutet das positive Vorzeichen von  $\sigma$  an, daß die Setzlinien in der zweiten Lage gegen das (+)-Ende hin divergieren.

Man kann bei diesem Verfahren noch einfacher als bei dem ersten, z. B. durch einen seitlichen Kontakt, dafür sorgen, daß die Libelle nicht die geringste Seitenschwenkung erleidet. In dieser Weise pflegt man in den mechanischen Werkstätten die Gleichheit der Fernrohrringe und Achszapfen zu prüfen. Die Libelle lehnt sich dabei gegen eine seitlich angebrachte Feinstellschraube\*). Im folgenden Beispiel dient das zweite Verfahren als Mefssprobe für die zuletzt berechneten Ergebnisse des ersten, denn Libelle und Fernrohr blieben dieselben.

\*) Wem die anempfohlene Sorgfalt gegen Verschwenken der Libelle als zu peinlich erscheinen möchte, der beachte, daß für einen Kreuzungswinkel  $\alpha$  zwischen der Libellen- und Ringachse und eine seitliche Schwenkung der zuvor wagrechten Libellenachse um den Winkel  $\vartheta$  die Neigung  $\beta$  der letzteren sich aus

$$\beta = \alpha \sin \vartheta$$

berechnet. Macht auf kaum  $6''$  Kreuzung für  $\vartheta = 1^\circ$  immerhin schon  $0,1'' = \beta$ . Die Bogenmaße aber, welche diesen und selbst größeren Winkeln entsprechen, für Kreuzung die Länge, für Schwenkung die Höhe der Libelle als Radien gerechnet, sind noch fast unmerkbar klein.

Lage	Blasenablesung		Blasenlänge	Blasenmitte $M$	Lauf: $2\sigma = M_2 - \frac{1}{2}(M_1' + M_1'')$
	Ostende	Westende			
1.	4,8	19,3	14,5	12,05	— 4,20
2.	0,9	15,5	14,6	8,20	
1.	5,5	20,0	14,5	12,75	
1.	6,9	21,2	14,3	14,05	— 3,88
2.	3,0	17,4	14,4	10,20	
1.	6,9	21,3	14,4	14,10	
1.	7,9	22,3	14,4	15,10	— 4,32
2.	3,7	18,1	14,4	10,90	
1.	8,2	22,5	14,3	15,35	
1.	9,6	23,9	14,3	16,75	— 4,25
2.	5,7	20,0	14,3	12,85	
1.	10,3	24,6	14,3	17,45	
1.	7,4	21,7	14,3	14,55	— 4,78
2.	2,9	17,1	14,2	10,00	
1.	7,9	22,1	14,2	15,00	
	91,6	307,0	215,4	199,30	— 21,43

In der zweiten Lage war das Objektiv nach Westen gerichtet, das (+)-Ende desgleichen,  $\sigma$  erhält das negative Vorzeichen, demnach konvergieren die Setzlinien gegen das Objektivende hin. Es berechnet sich

$$\sigma = -2,143 \text{ und } \varrho_1 = \varrho_2 = -1,07 \text{ Libellententeile,}$$

ferner  $\varrho_1 = -5,16''$  gegen  $-4,48''$  nach dem ersten Verfahren.

### Aufgabe 47.

*Bestimmung des Indexfehlers am Höhenkreis.* Die Anordnung der Beobachtungen ist nicht wesentlich verschieden von der gewöhnlichen Höhenwinkelmessung, z. B. der in Aufgabe 39 niedergelegten. Nur geschah sie mit dem ausgesprochenen Zweck, die Justierung des Instruments zu untersuchen, das, vor einiger Zeit sorgfältig berichtigt, seitdem zu mehreren Messungen gedient hatte. Da sich die Indexverbesserungen innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler halten (Nonienangabe  $20''$ ), so kann die Alhidade des Höhenkreises noch immer als berichtigt gelten.

Der untersuchte Theodolit von Fennel, Nr. 300, ist mit *Libellenalhidade* ausgerüstet, d. h. einer um die Kippachse des Fernrohrs

drehbaren, mit einer eigenen Libelle versehenen, fein einstellbaren Alhidade. Die Höhenwinkelmessung erfolgt also fast unabhängig von etwaiger Schiefstellung der aufrechten Alhidadenachse des Theodolits, wenn man vor der Ablesung des Höhenkreises die erwähnte Libelle jedesmal einspielen läßt.

Bei der Prüfung wurden drei Ziele in verschiedener Höhenlage genommen, um ganz verschiedene Zahlen abzulesen und etwaige systematische Fehler zu bemerken. Durch die wiederholte Benutzung der drei Ziele in umgekehrter Reihenfolge sollte namentlich eine langsame und stetige Änderung des Indexfehlers infolge einseitiger Erwärmung erkennbar werden. Es hat sich aber, der angewandten Vorsicht halber, nichts derart gezeigt.

Ziel	Lage	Nonius I	Nonius II	Mittel	Index-	Zenithdistanz
		0 ' "	0 ' "	0 ' "	"	0 ' "
A	1	89 14 20	269 14 00	89 14 10	— 2	89 14 08
	2	270 46 20	90 45 30	270 45 55	— 3	270 45 52
B	2	279 58 00	99 57 40	279 57 50	+ 10	279 58 00
	1	80 01 40	260 02 00	80 01 50	+ 10	80 02 00
C	1	117 22 40	297 23 00	117 22 50	+ 10	117 23 00
	2	242 37 00	62 36 40	242 36 50	+ 10	242 37 00
		080 00 00	079 58 50	079 59 25	+ 35	080 00 00
C	2	242 37 00	62 36 50	242 36 55	+ 5	242 37 00
	1	117 22 50	297 23 00	117 22 55	+ 5	117 23 00
B	1	80 01 20	260 02 00	80 01 40	0	80 01 40
	2	279 58 30	99 58 10	279 58 20	0	279 58 20
A	2	270 46 20	90 45 40	270 46 00	— 8	270 45 52
	1	89 14 20	269 14 10	89 14 15	— 7	89 14 08
		080 00 20	079 59 50	080 00 05	— 5	080 00 00

Berechnung und Probe geschehen wie in Aufgabe 39. Für die Änderung der Zenithdistanz für *B* um 20" gegen die erste Bestimmung vermutet der Beobachter als Grund die wechselnde Klarheit und Beleuchtung des Zieles.

## Aufgabe 48.

*Excentricität der Alhidadenachse.* In Fig. 36 bedeutet\*)  $C$  das Centrum des Limbus,  $A$  die Alhidadenachse,  $O$  den Nullpunkt der Teilung,  $\mu$  die Limbusablesung in der Verlängerung von  $AC$ ,  $z'$  die Ablesung am Zeiger  $I$ ,  $x'$  diejenige am Zeiger  $II$ . Wird die Alhidade so gedreht, daß Zeiger  $II$  nunmehr auf die Ablesung  $z'$  trifft, so stehe Zeiger  $I$  auf  $x''$ . Die Limbusablesung  $z'_1$  in der Verlängerung von  $z'A$  wird durch das arithmetische Mittel von  $x'$  und  $x''$  vertreten. Nun gilt:

$$z' + 180 - z'_1 = \gamma' = 2\varepsilon'$$

ebenso für eine beliebige andre, in der Figur nicht angegebene Stellung der Alhidade:

$$z'' + 180 - z''_1 = \gamma'' = 2\varepsilon''$$

u. s. w. Es handelt sich in unsrer Aufgabe, aus einem Werte  $\varepsilon'$  und einem zweiten  $\varepsilon''$ , welche scharf zu beobachten sind, die Maximalgröße  $\varepsilon_m$  der Excentricität und die Stelle des Limbus zu finden, an welcher  $\varepsilon = 0$  ist und der die Ablesung  $\mu$  zukommt. Wenn wir die Beobachtung so einrichten, daß

$$z'' = z' + 90,$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}$$

$$z' - \mu = a' = \text{arc tg}(\varepsilon' : \varepsilon'')$$

$$\mu = z' - a'$$

$$AC = e = r \cdot \varepsilon_m : 206\,265.$$

so gilt:

Die Formel zur Reduktion der Ablesung an *einem* Zeiger lautet schließlic, wenn  $\varrho$  die von dem Einfluß der Excentricität befreite Ablesung darstellt:

$$\varrho = z - \varepsilon = z - \varepsilon_m \sin(z - \mu).$$

Die Aufstellung dieser Formel ist der Hauptzweck der Untersuchung, da es Fälle giebt, z. B. bei Absteckungen, wo die Verwendung zweier Zeiger zu umständlich oder zeitraubend wird.

Die nachfolgenden Beobachtungen enthalten zahlreiche Proben. Zunächst ist bei  $30$  und  $120^\circ$  sowohl  $\gamma'$  als  $\gamma''$  je fünfmal bestimmt

\*) Übereinstimmend mit des Verf. Prakt. Geometrie, I, §§ 58 und 59, auf welche wegen Herleitung der Formeln verwiesen sei.

worden; dann wurde die ganze Beobachtungsreihe noch einmal wiederholt an Kreisstellen, welche um 5° weiter lagen \*).

Der untersuchte Theodolit hat einen Limbus von 12 cm Durchmesser, welcher unmittelbar in 1/3-Grade geteilt ist und mittelst zweier Schätzmikroskope bis auf 1 Minute abgelesen werden kann, während die Schätzung der Mikrometerbruchteile noch Zwanzigstel-Minuten zu berücksichtigen vermag.

Erste Beobachtungsreihe.

$z$	$\alpha'$	$\alpha''$	$z_1$	$\gamma$
30° 40,50'	210° 39,75'	210° 40,15'	210° 39,95'	+ 0,55'
52,20	51,30	51,85	51,575	+ 0,625
49,40	48,70	48,85	48,775	+ 0,625
16,05	15,20	15,70	15,45	+ 0,60
8,30	7,55	7,90	7,725	+ 0,575
166,45	162,50	164,45	163,475	+ 2,975
30° 33'	= $z'$		$\gamma' =$	+ 0,595
120° 33,25'	300° 34,20'	300° 34,25'	300° 34,225'	- 0,975'
24,40	25,30	25,60	25,45	- 1,05
53,40	54,30	54,55	54,425	- 1,025
7,40	8,35	8,60	8,475	- 1,075
6,60	7,45	7,75	7,60	- 1,00
125,05	129,60	130,75	130,175	- 5,125
			$\gamma'' =$	- 1,025

$$2 \epsilon_m = \sqrt{\gamma'^2 + \gamma''^2} = \sqrt{1,4047} = 1,185'$$

$$\epsilon_m = 1,185 \times 30'' = 35,6''$$

$\gamma'$	+ 0,595	9,7745	}	}	$z' = 30^\circ 33'$	
$1 : \gamma''$	$1 : - 1,025$	9,9893 <sub>n</sub>				$\alpha' = 149^\circ 52'$
$\text{tg } \alpha'$	149° 52'	9,7638 <sub>n</sub>				

Schlussformel mit abgerundeten Werten:

$$\rho = z - 35'' \cdot \sin(z - 240^\circ)$$

$$= z + 35'' \cdot \sin(z - 60^\circ).$$

\*) Eine gemeinsame Ausgleichung beider Beobachtungsreihen auf grund der Fehlergleichung

$$\lambda = -\epsilon + \epsilon_m \sin(z - \mu)$$

wird hier nicht beabsichtigt und würde sich auch besser auf Ablesungen  $z$  stützen,

## Zweite Beobachtungsreihe.

$z$	$\alpha'$	$\alpha''$	$z_1$	$\gamma$
35° 14,25'	215° 13,40'	215° 13,85'	215° 13,625'	+ 0,625'
32,45	31,70	32,25	31,975	+ 0,475
37,80	37,20	37,35	37,275	+ 0,525
41,80	41,15	41,55	41,35	+ 0,45
54,65	53,85	54,45	54,15	+ 0,50
180,95	177,30	179,45	178,375	+ 2,575
35° 6'	= $z'$		$\gamma' =$	+ 0,515
125° 11,30'	305° 12,05'	305° 12,60'	305° 12,325'	- 1,025'
28,85	29,70	30,00	29,85	- 1,00
35,20	36,15	36,35	36,25	- 1,05
43,90	44,85	45,00	44,925	- 1,025
53,05	53,85	53,95	53,90	- 0,85
172,30	176,60	177,90	177,250	- 4,950
			$\gamma'' =$	- 0,99

$$2 \varepsilon_m = \sqrt{1,2453} = 1,116'$$

$$\varepsilon_m = 1,116 \times 30'' = 33,5''$$

$\gamma'$	+ 0,515	} 9,7118	$z' = 35^\circ 36'$
1 : $\gamma''$	- 0,990		} 0,0044 <sub>n</sub>
tg $\alpha'$	152° 31'	} 9,7162 <sub>n</sub>	$\mu = 243^\circ 5'$

Nach Abrundung dieser Werte von  $\varepsilon_m$  und  $\mu$  bleibt die Schlusformel wie oben bestehen.

Die lineare Excentricität  $e$  berechnet sich bei  $r = 60$  mm zu 0,01 mm.

Die Beobachtungen geben Gelegenheit, auch den Abstand der Mikroskope zu ermitteln, was dem Leser überlassen bleibt.

die über den Limbus gleichmäßig verteilt sind. — Je zwei Einstellungen auf  $z$  müssen unmittelbar nacheinander, aber nicht peinlich genau an derselben Kreisstelle erfolgen, da  $z$  wie  $z_1$ , aus zwei Ablesungen gemittelt werden darf und diese beiden Mittel mit  $A$  in einer Geraden liegen.

## VIII. Ausgleichsrechnung.

### Aufgabe 49.

*Bestimmung der Konstanten eines Legebretts.* Die Gewinde der feinen Stellschraube eines Legebretts wurden auf Papier abgedrückt, ein in halbe-Millimeter geteilter Elfenbeinmaßstab parallel zur Achse der Schraube angelegt und folgende Reihe von einander zugeordneten Ablesungen  $b$  an den Gewinden,  $l$  am Maßstab, unter Beihülfe einer Lupe genommen:

$b$  (Gewinde): 8      18      26      40      52      74      90

$l$  (Millimeter): 3,60      9,95      15,00      23,95      31,55      45,50      55,65.

Dann schraubte man die drei Stellschrauben gleich hoch, drückte ihre Spitzen auf Papier ab und fällte ein Lot von der Spitze der Feinstellschraube auf die Verbindungslinie der Spitzen der beiden anderen. Das Maß dieses Lots betrug 660,35 mm. Aus diesen Beobachtungen entnehmen wir zunächst die Gewindhöhe der Schraube\*) und dann die Neigung des Legebrettes, welche einem Trommelumgang entspricht.

Dem Gewinde von der Ordnungszahl  $b_0$  entspreche eine noch unbekannte Ablesung  $l_0 = x$ , die Gewindhöhe sei  $y$  Millimeter. Dann muß sein:

$$l - x = (b - b_0) y,$$

und da die Beobachtungen  $l$ , um widerspruchsfrei zu werden, einer Verbesserung  $\lambda$  bedürfen:

$$\lambda = -l + x + (b - b_0) y.$$

Führen wir, was in unsrem Falle vorteilhaft ist, für  $b_0$  das arithmetische Mittel aller  $b$  und für  $y$  und  $x$  Näherungswerte ein, derart daß

$$b_0 = 44, \quad x = 26,5 + \xi, \quad y = 0,635 + \eta,$$

\*) Vgl. des Verfassers Grundzüge der Ausgleichsrechnung, § 9.

so entstehen aus den Beobachtungszahlen die 7 Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{r}
 \lambda_1 = 0,04 + \xi - 36 \eta \\
 \lambda_2 = 0,04 + \xi - 26 \eta \\
 \lambda_3 = 0,07 + \xi - 18 \eta \\
 \lambda_4 = 0,01 + \xi - 4 \eta \\
 \lambda_5 = 0,03 + \xi + 8 \eta \\
 \lambda_6 = 0,05 + \xi + 30 \eta \\
 \lambda_7 = 0,06 + \xi + 46 \eta \\
 \hline
 \text{Summe } 0 = 0,30 + 7 \xi + 0 \cdot \eta
 \end{array}$$

Probe für das richtige Einführen der Näherungswerte:

$$7 \cdot 26,5 - \tilde{l} = 185,5 - 185,2 = 0,3$$

gleich dem Absolutglied der Summe der Fehlergleichungen. Diese ist zugleich die Normalgleichung für  $\xi$  und liefert:

$$\xi = -0,3 : 7 = -0,043.$$

Die Normalgleichung für  $\eta$  folgt aus  $\sum (b - b_0) \lambda = 0$  und lautet:

$$0 = 0,72 + 5392 \eta,$$

woraus sich der sehr kleine Wert für  $\eta$  berechnet:

$$\eta = -0,72 : 5392 = -0,0001335.$$

Wir setzen  $\xi$  und  $\eta$  in die Fehlergleichungen ein und erhalten:

Zeiger	$\lambda$	$10^6 \lambda^2$	Quadrate der Absolutglieder
1	0,002	4	0,0016
2	0,000	0	0,0016
3	0,029	841	0,0049
4	-0,032	1024	0,0001
5	-0,014	196	0,0009
6	0,003	9	0,0025
7	0,011	121	0,0036
	-0,001	2195	0,0152

$$\begin{array}{r}
 \text{Rechenprobe: } 0,0152 + 0,3 \xi + 0,72 \eta = \widetilde{\lambda \lambda} \\
 \times,98714 \\
 \times,99990 \\
 \hline
 0,00224 = \widetilde{\lambda \lambda}
 \end{array}$$

gegen 0,00220 nach der dritten Spalte. Die Übereinstimmung kann mangels schärferer Berechnung der einzelnen  $\lambda$  nicht besser verlangt werden.

Der *mittlere Fehler*  $\mu$  der einzelnen Beobachtung ergibt sich aus

$$\mu^2 = \frac{\widetilde{\lambda \lambda}}{7 - 2} = \frac{0,002\ 24}{5} = 0,000\ 448,$$

$$\mu = \pm 0,021\ \text{mm},$$

und der mittlere Fehler  $\mu_y$  von  $y = 0,634\ 87$  aus:

$$\mu_y^2 = Q \mu^2,$$

worin  $Q$  aus der Gewichtsgleichung:

$$1 = 5392\ Q$$

als ein sehr kleiner Bruch gefunden wird. Es interessiert aber mehr der in der Konstanten des Legebretts, also in dem Winkel (in Sekunden):

$$k = 206\ 265 \cdot 0,634\ 87 : 660,35$$

begangene Fehler  $\mu_k$ , für welchen die Beziehung gilt:

$$\mu_k = 206\ 265\ \mu_y : 660,35.$$

Demnach berechnet sich

$$k = 198,31''$$

$$\mu_k = \pm 0,090''.$$

So günstig dies Ergebnis sich ausnimmt, so ist doch zu beachten, daß ein Fehler von  $\pm 0,1$  im Nenner von  $k$  die Zahl  $k$  schon um  $\mp 0,1\ k : 660 = \mp 0,03$  abändert, und daß es nicht leicht ist, den Abstand der Fußschrauben von einander auf  $1 : 6000$  genau zu messen. Der mittlere Fehler von  $k$  dürfte also noch zu vergrößern sein. Auch ist es in allen Fällen erwünscht, noch einen zweiten Weg der Bestimmung einer Konstanten einzuschlagen, um dadurch auf verborgene Fehler aufmerksam zu werden, die dem gewählten Verfahren vielleicht anhaften. Für die Konstante des Legebretts empfiehlt sich noch der Weg der Bestimmung durch ein aufgelegtes Fernrohr, das nach einer Vertikalskala in verschiedenen Entfernungen gerichtet und mittelst der Feinstellschraube auf- und niedergekippt wird.

### Aufgabe 50.

*Vollendung der stufenweisen Ausgleichung bedingter Beobachtungen* aus Aufgabe 26. Das Verfahren der Annäherung, wie es in vorgenannter Aufgabe angewandt wurde, besteht darin, daß eine Bedingungsgleichung nach der andern, von der Form

$$p_1 \lambda_1 + \dots + p_n \lambda_n + w = 0, \quad (1)$$

behandelt wird als ob sie allein bestände, also, wenn  $k$  eine Korrelate,  $i$  einer der  $n$  Zeiger, erfüllt wird durch Werte von  $\lambda$  entsprechend:

$$\lambda_i = p_i k, \quad (2)$$

worin  $k$  aus

$$0 = w + [p p] k \quad (3)$$

hervorgeht, demnach auch

$$\lambda_i = - \frac{w}{[pp]} p_i \text{ und } p_i \lambda_i = - \frac{w}{[pp]} p_i p_i \quad (4)$$

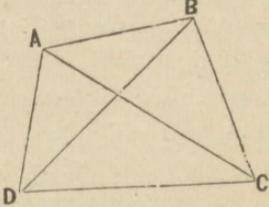
wird. Zur Probe setzt man die Produkte  $p\lambda$  in die Gleichung (1) ein und die Größen  $\lambda$  in alle übrigen Bedingungsgleichungen, deren Widersprüche sich dadurch ändern. Dann beginnt derselbe Vorgang bei einer der anderen Bedingungsgleichungen, oder auch bei mehreren zugleich, wenn von diesen jede in den  $\lambda$ , die sie enthält, sich von den übrigen mitbehandelten unterscheidet. So enthält im ersten Dreieckspaar auf S. 94 jedes der beiden Dreiecke  $ABC$  und  $CDA$  andere Winkel, die beiden Bedingungen des Winkelabschlusses auf  $180^\circ$  betreffen daher jedesmal andere Verbesserungen. Ebenso verhält es sich mit dem zweiten Dreieckspaar daselbst.

Nunmehr tritt auf Seite 195 zu den 4 Winkelbedingungen noch die Seitenbedingung, deren Koeffizienten  $p$  und Absolutglied  $w$  bereits auf S. 95 berechnet wurden. Wie zuvor, sowohl zur Rechenprobe als zur Beschleunigung des Rechnungsganges, 4 statt 3 Winkelbedingungen beigezogen wurden, so wäre es jetzt erwünscht, 2 statt einer Seitenbedingung heranzuziehen. Allein keine der Formen, in welche man die Seitenbedingung bringen kann, enthält weniger als 6 Winkel, je zwei Gleichungen müssen also wenigstens zwei Winkel und deren Verbesserungen  $\lambda$  gemeinsam enthalten. Darum wählt man jene Form, welche alle beobachteten 8 Winkel auf einmal in die Rechnung einführt.

In den beiden ersten Spalten der Seite 195 stehen untereinander die 5 herangezogenen Bedingungsgleichungen, insofern die zweite Spalte deren Koeffizienten und Absolutglieder und die erste die Winkel (statt besonderer Zeiger der  $\lambda$ ) vorführt. Die dritte Spalte enthält die Quadrate der Koeffizienten und in Klammer deren Summen zur Verwendung gemäß Gleichung (4). Die folgenden 3 Spalten, welche mit III, IV, V überschrieben sind, enthalten Produkte von der Form  $p\lambda$ . An dem Verschwinden des Widerspruchs erkennt man sofort, aus welchen Bedingungsgleichungen die Werte der Verbesserungen gerade ermittelt worden sind.

Nachdem alle 5 Bedingungen hierzu je einmal gedient haben, hat sich der Widerspruch der fünften von 23 auf 5 vermindert. Eine Wiederholung der ganzen Arbeit würde, wie aus der Berechnungsweise hervorgeht, den Widerspruch abermals im Verhältnis 5 : 23 verkleinern, und den berechneten Verbesserungen der Winkel neue hinzufügen, welche zu jenen in eben demselben Verhältnis stehen. Es ist daher das einfachste, diese neuen Verbesserungen, wie in Spalte VI geschehen, ohne weiteres aus der Summe der vorigen durch Multiplikation mit 5 : 23 oder nach oben abgerundet 1 : 4 zu berechnen.

Die Produkte  $p\lambda$  sind in den vier ersten Bedingungsgleichungen, weil durchweg  $p = 1$ , zugleich die Verbesserungen selbst. Somit enthält die vorletzte Spalte die Gesamtverbesserungen als Quersummen von III bis VI. Zu den verbesserten Winkeln der S. 94 gefügt, geben sie die endgültigen Winkelwerte der letzten Spalte.

Zu verbessernde Winkel	Koeffizienten		Produkte $p\lambda$			Verbesserungen		Endgültige Winkel
	$p$	$p^2$	III	IV	V	VI	III bis VI	
$BAC$	1	1	×,5	×,6	0,2	×,8	×,1	55°35' 50,7''
$DBA$	1	1	0,8	×,6	0,2	0,1	0,7	39 32 12,2
$CBD$	1	1	×,6	×,6	×,8	×,8	×8,8	62 53 29,7
$ACB$	1	1	1,7	×,6	×,8	0,3	1,4	21 53 27,4
Widerspruch	0,0	(4)	1,6	0,0	0,0	0,0	0,0	180 00 00,0
$DCA$	1	1	×,1	0,4	×,8	×,8	×,1	37 33 35,6
$BDC$	1	1	0,5	0,4	×,8	0,2	0,9	57 34 27,5
$ADB$	1	1	×8,4	0,4	0,2	×,7	×8,7	23 10 50,9
$CAD$	1	1	0,4	0,4	0,2	0,3	1,3	61 41 06,0
Widerspruch	0,0	(4)	×8,4	0,0	0,0	0,0	0,0	180 00 00,0
$ADB$	1	1	×8,4	0,4	0,2	<div style="text-align: center;"> <p>Fig. 24.</p>  </div>		
$CAD$	1	1	0,4	0,4	0,2			
$BAC$	1	1	×,5	×,6	0,2			
$DBA$	1	1	0,8	×,6	0,2			
Widerspruch	0,0	(4)	×,1	×,1	×,9			
$CBD$	1	1	×,6	×,6	×,8			
$ACB$	1	1	1,7	×,6	×,8			
$DCA$	1	1	×,1	0,4	×,8			
$BDC$	1	1	0,5	0,4	×,8			
Widerspruch	0,0	(4)	0,9	0,9	0,1			
$BAC$	+ 1,5	2,25	×,3			×,7		
$ACB$	- 5,2	27,04	×1,3			3,1		
$DCA$	+ 2,7	7,29	×7,7	0,5				
$CAD$	- 1,1	1,21	×,6	×,3				
$ADB$	+ 4,9	24,01	×2,3	2,9				
$DBA$	- 2,6	6,76	×7,8	0,5				
$CBD$	+ 1,1	1,21	×,6	×,3				
$BDC$	- 1,4	1,96	×,4	×,7				
Widerspruch	+ 23,0	(71,73)	0,0	5,0				

Erwähnt sei noch, daß das Einsetzen der  $\lambda$  in die Seitenbedingungsgleichung erst wieder erfolgte, nachdem alle 4-Winkelgleichungen auf den Abschluß Null gebracht worden waren, also erst in Spalte V. Eine Rechenprobe, wie für die Winkelgleichungen, besteht für die Seitengleichung nicht.

In der nachfolgenden Neuaufstellung der Seitenbedingung auf grund der endgültigen Winkelwerte zeigt sich, daß durch die kleinen Ab- rundungen der Rechnung, insbesondere auch die etwas reichliche Ver- größerung des Verhältnisses 5 : 23 in 1 : 4, das Ziel der Ausgleichung ein wenig überholt, aber doch nahe genug getroffen worden ist.

*Aufstellung der Seitenbedingung aus den endgültigen Winkelwerten.*

Formel	Argument	log	
$\sin BAC$	55° 35' 50,7''	9,916 500	Rechenprobe für $\sin \alpha$ durch $2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$ empfehlenswert.
$\operatorname{cosec} ACB$	21 53 27,4	0,428 477	
$\sin DCA$	37 33 35,6	9,785 038	
$\operatorname{cosec} CAD$	61 41 06,0	0,055 343	
$\sin ADB$	23 10 50,9	9,595 092	
$\operatorname{cosec} DBA$	39 32 12,2	0,196 151	
$\sin CBD$	62 58 29,7	9,949 784	
$\operatorname{cosec} BDC$	57 34 27,5	0,073 613	
		9,999 998	

Die stufenweise Ausgleichung bietet auch dann Vorteile, wenn man, nach Erfüllung der Winkelgleichungen durch vorläufige Ver- besserungen  $\lambda^0$ , die Näherungsrechnung verläßt und zur Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen schreitet, aus denen die Korrelaten  $k$  und der zweite Teil  $\lambda'$  der Verbesserungen sich ergeben. Da die Absolutglieder der drei ersten Normalgleichungen Null sind, so erfolgt die Elimination der drei ersten Korrelaten (nach *Gaußs*) sehr bequem, und da es sich nur noch um kleine Werte  $\lambda'$  handelt, rasch und ge- nau genug mit Quadrattafel und Rechenschieber.

*Übersicht der Bedingungs- und der Korrelatengleichungen nebst Rechenproben.*

Winkel	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$t$	$\lambda$	$\lambda' \lambda'$
$BAC$	1	.	1	+ 1,5	- 3,5	- 0,89	0,79
$ACB$	1	.	.	- 5,2	+ 4,2	+ 1,35	1,82
$DCA$	.	1	.	+ 2,7	- 3,7	- 0,88	0,77
$CAD$	.	1	1	- 1,1	- 0,9	+ 1,28	1,64
$ADB$	.	1	1	+ 4,9	- 6,9	- 1,24	1,54
$DBA$	1	.	1	- 2,6	+ 0,6	+ 0,83	0,69
$CBD$	1	.	.	+ 1,1	- 2,1	- 1,29	1,66
$BDC$	.	1	.	- 1,4	+ 0,4	+ 0,84	0,71
Summe	4	4	4	- 0,1	- 11,9	$[\lambda' \lambda'] = 9,62$	
Widersprüche	0	0	0	23		$- [kw] = 9,66$	

*Auflösung der Normalgleichungen.*

0 = .	+ 4	$k_1$	.	+ 2	$k_3$	—	5,2	$k_4$	—	0,8	$t$		
0 = .	.	.	+ 4	$k_2$	+ 2	$k_3$	+	5,1	$k_4$	—	11,1	$t$	
0 = .	2	$k_1$	+ 2	$k_2$	+ 4	$k_3$	+	2,7	$k_4$	—	10,7	$t$	
0 = 23	—	5,2	$k_1$	+ 5,1	$k_2$	+ 2,7	$k_3$	+	71,7	$k_4$	—	74,3	$t$
0 = .	.	.	+ 4	$k_2$	+ 2	$k_3$	+	5,1	$k_4$	—	11,1	$t$	
0 = .	.	.	+ 2	$k_2$	+ 3	$k_3$	+	5,3	$k_4$	—	10,3	$t$	
0 =	23	.	+ 5,1	$k_2$	+ 5,3	$k_3$	+	64,9	$k_4$	—	75,3	$t$	
0 =	.	.	+ 2	$k_3$	+	2,7	$k_4$	—	4,7	$t$			
0 =	23	.	+ 2,7	$k_3$	+	58,4	$k_4$	—	61,1	$t$			
0 =	23	.	+ 54,8	$k_4$	—	54,8	$t$						

$k_1 = -0,83$ ;  $k_2 = 0,25$ ;  $k_3 = 0,57$ ;  $k_4 = -0,42$ ;  $t = 0$

$[\lambda\lambda] = [\lambda^0\lambda^0] + [\lambda'\lambda'] = 121,11 + 9,66 = 130,77$

$\mu^2 = 130,8 : 4 = 32,7$ ;  $\mu = \pm 5,7''$ .

Wie auf S. 195 *untereinander*, so treten auf voriger Seite die Bedingungsgleichungen, aber nur die notwendigen, *nebeneinander* tabellarisch geordnet in den mit  $k$  überschriebenen Spalten auf, welche quer gelesen auch ein Bild der Korrelatengleichungen gewähren, wenn man sich an stelle der Winkel ihre Verbesserungen, und die Koeffizienten mit ihrem zugeordneten  $k$  statt wie zuvor mit  $\lambda$  multipliziert denkt, ferner zwischen Spalte 1 und 2 ein Gleichheitszeichen einschiebt.

Die mit  $t$  überschriebene Spalte enthält die negativen Quersummen aus den vorigen. Mit  $t = 0$  multipliziert treten sie als letzte Glieder zu den Korrelatengleichungen und werden von da an zur Rechenprobe bei der Bildung und Auflösung der Normalgleichungen mitgeführt, so daß als Zeichen richtigen Verfahrens in jeder Zeile die Quersumme sämtlicher Koeffizienten verschwindet.

Von den am Schlusse der Rechnung benutzten Zahlen ist nur noch  $[\lambda^0\lambda^0] = 121,11$  (von Seite 94 her) ungeprüft. Aber auch diese Zahl ist durch

$$\frac{w_{p_1}^2}{[pp]} + \frac{w_{q_2}^2}{[qq]} + \dots$$

worin  $w_{p_1}$ ,  $w_{q_2} \dots$  die Widersprüche in der ersten, zweiten  $\dots$  Rechenstufe bedeuten, in unserm Falle also durch

$$1/4 (20^2 + 2,5^2 + 6,2^2 + 6,2^2) = 120,78$$

zu prüfen. Der Beweis ist leicht. Die Differenz entsteht durch Abrundungen der  $\lambda^0$ .

Zu dem mittleren Beobachtungsfehler  $\mu$  ist zu bemerken, daß in den Verbesserungen  $\lambda$ , aus denen er gebildet ist, auch die systematischen Fehler enthalten sind, welche *darin* zum Ausdruck kommen, daß alle Dreiecksabschlüsse zu klein ausfielen. Wenn nun auch die Ausgleichung jene regelmäßigen Beobachtungsfehler zum größten Teil unschädlich

macht, so ist doch, zwar nicht für Vortübungen aber für die eigentliche Anwendung, das Repetierverfahren so zu gestalten, daß es regelmässige Fehler bis auf kleine Reste tilgt, wie gelegentlich der Aufgabe 26 angegeben. Der Zweck der Repetition, Verkleinerung des mittleren Beobachtungsfehlers weit unter die Nonienangabe, ist aber ohne Frage erreicht und schon bei geringer Übung erreichbar, wie eine Reihe vorliegender Lösungen von Aufgabe 26 durch Studierende beweist.

### Aufgabe 51.

*Rückwärtseinschnitt. Vereinigung älterer und neuerer Beobachtungen.* Aufgaben wie die vorliegende eignen sich darum zum Einüben der Ausgleichung nach Koordinaten, weil nur wenige Beobachtungen neu zu bearbeiten und den älteren, bereits verwerteten, beizufügen sind. Dadurch wird dem Anfänger die Rechenarbeit auf das Geringste beschränkt und doch Gelegenheit geboten, den Gang der Rechnung vollständig zu durchlaufen.

Auf einem Neupunkte  $P$  sei vor Jahresfrist ein Rückwärtseinschnitt mittelst 5 Richtungen ausgeführt worden. Man hält die Bestimmung von  $P$  noch nicht für genügend scharf und ergänzt sie durch drei ebenso genau wie im Vorjahr beobachtete Richtungen nach den Festpunkten  $P_1 P_2 P_3$ , deren Koordinaten gegeben sind. Die vorläufigen Koordinaten von  $P$ , welche der Ausgleichung des Vorjahrs zu grunde lagen, sollen auch in die neuen Fehlergleichungen eingeführt werden. Die zur Berechnung notwendigen Teile der vorjährigen Ausgleichung, sowie die neuen Satzbeobachtungen sind weiter unten mitgeteilt. Man soll daraus die endgültigen Koordinaten von  $P$  und deren mittlere Fehler berechnen.

Im folgenden soll nur auf das unserer Aufgabe Eigentümliche hingewiesen, die allgemeine Behandlung des Rückwärtseinschnitts als Ausgleichungsproblem aber als bekannt vorausgesetzt werden.

Waren die vorjährigen, einmal reduzierten, d. h. von der dritten Unbekannten befreiten Fehlergleichungen von der Form:

$$\lambda = -l + a\xi + b\eta \quad (1)$$

und die daraus hervorgegangenen Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}\lambda &= -\widetilde{a}l + \widetilde{a}a\xi + \widetilde{a}b\eta (= 0) \\ \widetilde{b}\lambda &= -\widetilde{b}l + \widetilde{a}b\xi + \widetilde{b}b\eta (= 0) \end{aligned} \quad (2)$$

und es treten hierzu die diesjährigen, ebenfalls einmal reduzierten Fehlergleichungen in der Gestalt:

$$\lambda' = -l' + a'\xi + b'\eta, \quad (3)$$

so nehmen damit die Summen  $\widetilde{a}\lambda$  und  $\widetilde{b}\lambda$  einen von Null verschiedenen Wert und  $\xi$  und  $\eta$  eine andere Bedeutung an, nämlich als Ver-

besserungen der vorläufigen Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  von  $P$ , wie sie *allen* Beobachtungen entsprechen. Zu ihrer Berechnung dienen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [a \lambda] &= \widetilde{a} \lambda + \widetilde{a}' \lambda' = 0 \\ [b \lambda] &= \widetilde{b} \lambda + \widetilde{b}' \lambda' = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Hierin sind  $\widetilde{a}' \lambda'$  und  $\widetilde{b}' \lambda'$  die Anteile, welche aus der Gruppe der neuen Fehlergleichungen (3) auf gewöhnliche Weise gebildet werden, also:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}' \lambda' &= -\widetilde{a}' \bar{l} + \widetilde{a}' \bar{a}' \xi + \widetilde{a}' \bar{b}' \eta \\ \widetilde{b}' \lambda' &= -\widetilde{b}' \bar{l} + \widetilde{a}' \bar{b}' \xi + \widetilde{b}' \bar{b}' \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Nach Ermittlung von  $\xi$  und  $\eta$  aus (4) prüft man die richtige Bildung und Auflösung der Normalgleichungen durch Berechnen von

$$[\lambda \lambda] = \widetilde{\lambda} \lambda + \lambda' \lambda' \quad (6)$$

auf doppelte Weise. Zunächst wird nämlich  $\lambda' \lambda'$  durch Einführen von  $\xi$  und  $\eta$  in die Fehlergleichungen (3), Quadrieren und Summieren gebildet,  $\widetilde{\lambda} \lambda$  aber aus der leicht abzuleitenden Formel:

$$\widetilde{\lambda} \lambda = \bar{l} \bar{l} + (\widetilde{a} \bar{\lambda} - \widetilde{a} \bar{l}) \xi + (\widetilde{b} \bar{\lambda} - \widetilde{b} \bar{l}) \eta, \quad (7)$$

worin die Beträge  $\widetilde{a} \bar{\lambda}$  und  $\widetilde{b} \bar{\lambda}$  durch Einführen von  $\xi$  und  $\eta$  in (2) gefunden werden. Darnach berechnet man auf grund der vereinigten Normalgleichungen (4) zum zweitenmal

$$[\lambda \lambda] = [l l] - [a l] \xi - [b l] \eta. \quad (8)$$

Darin bedeuten:

$$\begin{aligned} [l l] &= \bar{l} \bar{l} + \bar{l}' \bar{l}', \\ -[a l] &= -\widetilde{a} \bar{l} - \widetilde{a}' \bar{l}' \\ -[b l] &= -\widetilde{b} \bar{l} - \widetilde{b}' \bar{l}'. \end{aligned} \quad (9)$$

Die letzten beiden Ausdrücke sind demnach die Absolutglieder der Normalgleichungen (4), während  $\bar{l} \bar{l}$  und  $\bar{l}' \bar{l}'$  die Quadratsummen der Absolutglieder in (1) und (3) darstellen. Die erste derselben  $\bar{l} \bar{l}$  wird vom Vorjahr her gegeben sein, die letzte  $\bar{l}' \bar{l}'$  wird neu aufgestellt.

Hiermit sind Bildung und Auflösung der Normalgleichungen geprüft. Ob die Fehlergleichungen richtig aufgestellt waren, wird durch doppelte Berechnung der Azimute für die endgültigen *neuen* Richtungen erkannt, da vorausgesetzt werden muß, daß die Aufstellung der vorjährigen Fehlergleichungen bereits durch die frühere Rechnung geprüft war. Aus dem Azimut  $z$  der Nullrichtung, den beobachteten Richtungen  $w$  und deren Verbesserungen  $\lambda'$  zusammengesetzt, müssen die Azimute denselben Wert annehmen, wie aus den endgültigen Koordinaten trigonometrisch berechnet.

Einige Aufmerksamkeit verlangt noch die Form des mittleren Fehlers  $\mu$  der Beobachtung, indem man zu bedenken hat, daß 4 Unbekannte vorliegen, nämlich außer  $x$  und  $y$  je ein Azimut der Nullrichtung für die vor- und diesjährigen Beobachtungen. Hiernach ist in der Formel

$$\mu^2 = \frac{[\lambda \lambda]}{n - m} \quad (10)$$

$n$  gleich der Anzahl sämtlicher ausgeglichenen Richtungen und  $m$  gleich 4 zu setzen.

*Beispiel.*

Berechnung der Absolutglieder der Fehlergleichungen.

Ziel $P_i$	Vorläufige Azimute $\varphi_i = \arctg \frac{y_i - y}{x_i - x}$	Beobachtete Richtungen $w_i$	$\varphi_i - w_i$	Absolutglieder $\varphi_i - w_i - z_0$ $= -v_i$
$P_1$	68° 25' 41,5''	0° 00' 00,0''	68° 25' 41,5''	- 1 - 4,9
$P_2$	302 06 25,5	233 40 48,0	68 25 37,5	- 8,9
$P_3$	3 24 31,2	294 58 30,9	68 26 0,3	+ 13,9
Summe:	373 56 38,2	528 39 18,9	205 17 19,3	0,0
		$z_0 =$	68 25 46,4	

$$\text{Rechenprobe: } \tilde{\varphi}_i - \tilde{w}_i = [\varphi_i - w_i].$$

Bei dem absolut kleinsten der Absolutglieder erfolgte eine Abrundung, um die Summe derselben genau auf Null zu bringen. Die vorläufigen Azimute  $\varphi$  sind als *gegeben* eingeführt, können indessen vom Leser aus den vorläufigen Koordinaten  $y_0$ ,  $x_0$  des Standpunktes  $P$ , nämlich

$$y_0 = - 4\ 305,801 \quad x_0 = - 20\ 590,567$$

und den unten folgenden der Festpunkte nachgerechnet werden. Dasselbe gilt für die Koeffizienten der Unbekannten in den nachfolgenden *Fehlergleichungen*, in welchen, wie schon gesagt,  $\xi$  und  $\eta$  die Verbesserungen der Koordinaten,  $\zeta$  die Verbesserung von  $z_0$  bedeuten, derart daß

$$x_0 + \xi = x, \quad y_0 + \eta = y, \quad z_0 + \zeta = z$$

die endgültigen Werte der gesuchten Größen sind.

$$\lambda'_1 = - 5,0 + 95,4 \xi - 37,8 \eta - \zeta$$

$$\lambda'_2 = - 8,9 + 34,6 \xi - 21,7 \eta - \zeta$$

$$\lambda'_3 = + 13,9 + 20,4 \xi - 342,4 \eta - \zeta$$

$$0 = 0,0 + 81,2 \xi - 401,9 \eta - 3 \zeta$$

Die Summe, mit  $- 1$  multipliziert, ist die Normalgleichung für  $\zeta$ ; dividiert man außerdem mit 3, so folgt:

$$0 = 0,0 - 27,1 \xi + 134,0 \eta + \zeta,$$

welche Gleichung wir zu jeder einzelnen Fehlergleichung addieren.

Auf solche Weise entstehen die einmal reduzierten Fehlergleichungen von der Form (3), deren Absolutglieder, Koeffizienten und Kontrollglieder  $s' = a' + b'$  hierunter tabellarisch geordnet sind. Einzelnen, und zwar jedesmal den absolut kleinsten Zahlen einer Spalte, sind Ergänzungen beigefügt, um die Spaltensumme Null vollständig zu erreichen.

Zeiger	$-l'$	$a'$	$b'$	$s'$
1	- 5,0	+ 68,3	+ 96,1	+ 164,4
2	- 8,9	- 61,7	+ 112,3	+ 50,6
3	+ 13,9	- 6,6	- 208,4	- 215,0
	0,0	0,0	0,0	0,0

Übergang zu den Normalgleichungsanteilen (5).

Zeiger	$l'l'$	$-a'l'$	$-b'l'$	$-s'l'$
1	25,00	- 341,5	- 480,5	- 822,0
2	79,21	+ 549,1	- 999,5	- 450,3
3	139,21	- 91,7	- 2 896,8	- 2 988,5
	297,42	+ 115,9	- 4 376,8	- 4 260,8

Übergang zu den Normalgleichungsanteilen (5). Fortsetzung.

Zeiger	$a'a'$	$a'b'$	$b'b'$	$s's'$
1	4 664,9	6 563,6	9 235,2	27 027,4
2	3 806,9	- 6 928,9	12 611,3	2 560,4
3	43,6	1 375,4	43 430,6	46 225,0
	8 515,4	+ 1 010,1	65,277,1	75 812,8

Die Rechenproben:

$$\begin{aligned} \tilde{s}' &= 0, & -\tilde{a}'\tilde{l}' - \tilde{b}'\tilde{l}' &= -\tilde{s}'\tilde{l}', \\ \tilde{s}'\tilde{s}' &= \tilde{a}'\tilde{a}' + 2\tilde{a}'\tilde{b}' + \tilde{b}'\tilde{b}' \end{aligned}$$

stimmen sämtlich. Daher lauten die Anteile an den Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \tilde{a}'\tilde{\lambda}' &= 115,9 + 8 515 \xi + 1 010 \eta \\ \tilde{b}'\tilde{\lambda}' &= - 4 376,8 + 1 010 \xi + 65 277 \eta \end{aligned} \quad (3^*)$$

Die aus dem Vorjahr stammenden einmal reduzierten Normalgleichungsanteile lauteten:

$$\begin{aligned} \tilde{a}\tilde{\lambda} &= - 550,0 + 7 433 \xi - 1 010 \eta \\ \tilde{b}\tilde{\lambda} &= + 693,6 - 1 010 \xi + 20 812 \eta \end{aligned} \quad (2^*)$$



Punkte	$y$	$x$
$P$	— 4 305,758	— 20 590,540
$P_1$	— 2 435,857	— 19 851,268
$P_2$	— 8 587,758	— 17 903,756
$P_3$	— 4 270,043	— 19 990,258
Summe 1 bis 3:	— 15 293,658	— 57 745,282
ab 3 $y$ und 3 $x$ :	— 12 917,274	— 61 771,620
Reste:	— 2 376,384	+ 4 026,338.

Wir bilden die Differenzen:

	$y_i - y$	$x_i - x$
1.	+ 1 869,901	+ 739,272
2.	— 4 282,000	+ 2 686,784
3.	+ 35,715	+ 600,282
Summe	— 2 376,384	+ 4 026,338

wie oben.

Berechnung der endgültigen Azimute.

$y_1 - y$	3,271 818	$y_2 - y$	3,631 647 <sub>n</sub>	$y_3 - y$	1,552 851
$1/x_1 - x$	7,131 196	$1/x_2 - x$	6,570 768	$1/x_3 - x$	7,221 645
$\text{tg}(PP_1)$	0,403 014	$\text{tg}(PP_2)$	0,202 415 <sub>n</sub>	$\text{tg}(PP_3)$	8,774 496

*Schlussprobe.*

$\varphi_i = z + w_i + \lambda_i$		$\text{arc tg } \frac{y_i - y}{x_i - x}$	Differenz
$z$	68° 25' 41,4"		
$w_1$	0 00 00,0		
$\lambda_1$	+ 1,0		
	68 25 42,4	68° 25' 42,4"	0,0"
$z$	68 25 41,4		
$w_2$	233 40 48,0		
$\lambda_2$	— 5,8		
	302 06 23,6	302 06 23,6	0,0
$z$	68 25 41,4		
$w_3$	294 58 30,9		
$\lambda_3$	+ 4,8		
	363 24 17,1	3 24 17,7	0,6

*Mittlere Fehler.*

Mittlerer Fehler  $\mu$  der einzelnen Beobachtung nach (10):

$$\mu^2 = \frac{197,4}{5 + 3 - 4} = 49,35 \quad \mu = \pm 7,0''$$

Mittlere Fehler  $\mu_y$  und  $\mu_x$  der Koordinaten des Neupunktes:

$$\begin{aligned} \mu_y^2 &= \frac{49,35}{86\,089} & \mu_x^2 &= \frac{49,35}{15\,948} \\ \mu_y &= \pm 0,024 \text{ m} & \mu_x &= \pm 0,056 \text{ m.} \end{aligned}$$

**Aufgabe 52.**

*Rückwärtseinschnitt mit Nachtragsrichtungen.* Mit den Beobachtungen des Vorjahrs (wie in Aufgabe 51) werden nachträglich noch 3 Richtungen nach Festpunkten verbunden. Als Näherungskordinaten  $x_0, y_0$  des Neupunktes  $P$  werden diesmal die *endgültigen* der vorjährigen Ausgleichung eingeführt. Man wird dies zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel so machen. Denn wenn die einmal reduzierten Fehlergleichungen für die alten Beobachtungen wieder von der Form sind:

$$\lambda = -l + ax + by, \quad (1)$$

die entsprechenden Anteile an den künftigen Normalgleichungen aber

$$\begin{aligned} \widetilde{a}\lambda &= -\widetilde{a}l + \widetilde{a}ax + \widetilde{a}by \\ \widetilde{b}\lambda &= -\widetilde{b}l + \widetilde{a}bx + \widetilde{b}by \end{aligned} \quad (2)$$

lauten, und man setzt:

$$\lambda = \lambda_0 + \delta; \quad x = \xi_0 + \xi; \quad y = \eta_0 + \eta, \quad (3)$$

worin  $\delta, \xi, \eta$  die Veränderungen bedeuten, welche die übrigbleibenden Fehler sowie die Unbekannten der zuvor vollendeten Ausgleichung durch Hinzutritt der drei neuen Richtungen erleiden, so sind

$$\lambda_0 = -l + a\xi_0 + b\eta_0 \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= -\widetilde{a}l + \widetilde{a}a\xi_0 + \widetilde{a}b\eta_0 \\ 0 &= -\widetilde{b}l + \widetilde{a}b\xi_0 + \widetilde{b}b\eta_0 \end{aligned} \quad (5)$$

identisch mit den Fehler- und Normalgleichungen der vorjährigen Ausgleichung, und indem man (4) und (5) in (1) und (2) einführt, entstehen die sehr einfachen Formen, für  $\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_0 + a\xi + b\eta \quad (6)$$

und für die Anteile der alten Beobachtungen an den Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}\lambda &= \widetilde{a}a\xi + \widetilde{a}b\eta \\ \widetilde{b}\lambda &= \widetilde{a}b\xi + \widetilde{b}b\eta, \end{aligned} \quad (7)$$

d. h. die Normalgleichungen des Vorjahrs *ohne Absolutglieder* ergeben die Anteile an den neuen Normalgleichungen.

Zu ihnen treten, aus den diesjährigen Beobachtungen  $l'$  und deren einmal reduzierten Fehlergleichungen

$$l' = -l' + a'\xi + b'\eta \quad (8)$$

hervorgehend, die Anteile

$$\begin{aligned} \widetilde{a}l' &= -\widetilde{a}l' + \widetilde{a}a'\xi + \widetilde{a}b'\eta \\ \widetilde{b}l' &= -\widetilde{b}l' + \widetilde{a}b'\xi + \widetilde{b}b'\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Die *vereinigten* Anteile (7) und (9) führen auf die *Normalgleichungen*:

$$\begin{aligned} [a\lambda] = 0 &= -\widetilde{a}l' + [aa]\xi + [ab]\eta \\ [b\lambda] = 0 &= -\widetilde{b}l' + [ab]\xi + [bb]\eta \end{aligned} \quad (10)$$

worin  $[a\lambda] = \widetilde{a}l + \widetilde{a}'l'$ ;  $[aa] = \widetilde{a}a + \widetilde{a}'a'$  u. s. w.

Handelt es sich nach Auflösung dieser Normalgleichungen wieder um die doppelte Bildung von

$$[\lambda\lambda] = \widetilde{\lambda}\lambda + \widetilde{\lambda}'\lambda', \quad (11)$$

so ist als *erster Wert* der kleinsten Quadratsumme

$$[\lambda\lambda] = \widetilde{\lambda}_0\lambda_0 + \widetilde{l}l' - \widetilde{a}l'\xi - \widetilde{b}l'\eta \quad (12)$$

zu berechnen. Die Quadratsummen rechter Hand gehen nach bekannter Regel aus den Absolutgliedern von (6) und (8) hervor. Ein *zweiter Wert* für  $[\lambda\lambda]$  setzt sich gemäß (11) zusammen, und zwar das zweite Glied  $\widetilde{\lambda}'\lambda'$  aus den einzeln zu berechnenden  $\lambda'$ , während das erste  $\widetilde{\lambda}\lambda$  aus folgender Rechnung gewonnen wird:

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}\lambda &= \widetilde{\lambda}_0\lambda_0 + \widetilde{a}a\xi^2 + 2\widetilde{a}b\xi\eta + \widetilde{b}b\eta^2 \\ &= \lambda_0\lambda_0 + \delta\delta. \end{aligned} \quad (13)$$

Diese Formel entspringt aus (6), indem man beiderseits quadriert und berücksichtigt, daß  $\widetilde{a}\lambda_0 = \widetilde{b}\lambda_0 = 0$  und  $\delta = a\xi + b\eta$  ist.

Als *Rechenprobe* für die Bildung und Auflösung der Normalgleichungen dient also, da  $\widetilde{\lambda}_0\lambda_0$  in (12) sowohl als in (13) vorkommt, die Identität:

$$\widetilde{l}l' - \widetilde{a}l'\xi - \widetilde{b}l'\eta = \widetilde{\lambda}'\lambda' + \widetilde{a}a\xi^2 + 2\widetilde{a}b\xi\eta + \widetilde{b}b\eta^2. \quad (14)$$

### Beispiel.

Es mögen die Beobachtungen der Aufgabe 51 nunmehr abermals um 3 neu beobachtete Richtungen nach den Festpunkten  $P_4P_5P_6$  vermehrt erscheinen. Diesmal seien die vorläufigen Azimute  $(P_0P_4)$ ,  $(P_0P_5)$ ,  $(P_0P_6)$  ebenso wie die Koeffizienten von  $\xi$  und  $\eta$  noch zu berechnen, weshalb sofort die Koordinaten der Festpunkte mit den vorläufigen des Neupunktes (den endgültigen der früheren Ausgleichung) zusammengestellt werden:

	<i>y</i>	<i>x</i>
$P_0$	— 4 305,758	— 20 590,540
$P_4$	+ 2 576,849	— 17 621,093
$P_5$	+ 1 207,012	— 19 408,964
$P_6$	+ 1 791,998	— 22 103,895
	+ 5 575,859	— 59 133,952.

Davon ab den dreifachen Betrag der Koordinaten von  $P_0$ :

	— 12 917,274	— 61 771,620
gibt	+ 18 493,133	+ 2 637,668

Die Koordinatendifferenzen führen auf:

<i>i</i>	$y_i - y_0$	$x_i - x_0$
4	+ 6 882,607	+ 2 969,447
5	+ 5 512,770	+ 1 181,576
6	+ 6 097,756	— 1 513,355
	+ 18 493,133	+ 2 637,668

wie oben, sind also geprüft.

Berechnung der vorläufigen Azimute:

	$(P_0 P_4)$	$(P_0 P_5)$	$(P_0 P_6)$
$y_i - y_0$	3,837 753	3,741 370	3,785 170
$1/x_i - x_0$	6,527 324	6,927 539	6,820 059 <sub>n</sub>
tg $(P_0 P_i)$	0,365 077	0,668 909	0,605 229 <sub>n</sub>
sin $(P_0 P_i)$	9,962 9	9,990 2	9,987 0
cos $(P_0 P_i)$	9,597 9	9,321 3	9,381 8 <sub>n</sub>
$(P_0 P_i)$	66° 39' 45,3"	77° 54' 09,3"	103° 56' 17,4"

Rechenprobe für die vorläufigen Azimute:

	$(P_0 P_4) + 45^\circ$	$(P_0 P_5) + 45^\circ$	$(P_0 P_6) + 45^\circ$
$(x_i - x_0) + (y_i - y_0)$	+ 9 852,054	+ 6 694,346	+ 4 584,401
$(x_i - x_0) - (y_i - y_0)$	— 3 913,160	— 4 331,194	— 7 611,111
Zähler	3,993 527	3,825 708	3,661 283
1 : Nenner	6,407 472 <sub>n</sub>	6,363 393 <sub>n</sub>	6,118 552 <sub>n</sub>
tg Winkel	0,400 999 <sub>n</sub>	0,189 101 <sub>n</sub>	9,779 835 <sub>n</sub>
	111° 39' 45,4"	122° 54' 09,1"	148° 56' 17,3"

Seien  $p$  und  $q$  die Koeffizienten der Unbekannten  $\xi$  und  $\eta$  vor der erstmaligen Reduktion der Fehlergleichungen, so gilt:

$$p_i = \varrho'' \frac{\sin^2 (P_0 P_i)}{y_i - y_0}; \quad q_i = -\varrho'' \frac{\cos^2 (P_0 P_i)}{x_i - x_0}. \quad (15)$$

Zur Probe berechnen wir

$$\begin{aligned} 2p_i &= 2\varrho'' \frac{\sin (P_0 P_i) \cos (P_0 P_i)}{x_i - x_0}; \\ 2q_i &= -2\varrho'' \frac{\sin (P_0 P_i) \cos (P_0 P_i)}{y_i - y_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Der Faktor 2 hat den Zweck, uns vor Wiederholung eines etwa begangenen Fehlers beim Aufschlagen des Numerus zu behüten.

$$\varrho'' = 206\,265.$$

Berechnung der Koeffizienten der Unbekannten.

	$(P_0 P_4)$	$(P_0 P_5)$	$(P_0 P_6)$
$\sin^2 (P_0 P_i)$	9,925 8	9,980 4	9,974 0
$\varrho''$	5,314 4	5,314 4	5,314 4
$1/y_i - y_0$	6,162 2	6,258 6	6,214 8
$p$	1,402 4	1,553 4	1,503 2
$-\cos^2 (P_0 P_i)$	9,195 8 <sub>n</sub>	8,642 6 <sub>n</sub>	8,763 6 <sub>n</sub>
$\varrho''$	5,314 4	5,314 4	5,314 4
$1/x_i - x_0$	6,527 3	6,927 5	6,820 1 <sub>n</sub>
$q$	1,037 5 <sub>n</sub>	0,884 5 <sub>n</sub>	0,898 1
Zahlen: $p$	25,3	35,8	31,9
$q$	-10,9	-7,7	7,9

In nachfolgender *Proberechnung* wurde  $\log r = \log [\varrho'' \sin 2 (P_0 P_i)]$  dadurch gewonnen, daß man  $\log 2\varrho'' = 5,6155$  über die Logarithmen von  $\sin$  und  $\cos (P_0 P_i)$  in der Tabelle voriger Seite hielt und summierte.

$1 : (x_i - x_0)$	$\left\{ \begin{array}{l} 6,527\,3 \\ 5,176\,3 \end{array} \right\}^n$	$\left\{ \begin{array}{l} 6,927\,5 \\ 4,927\,0 \end{array} \right\}^n$	$\left\{ \begin{array}{l} 6,820\,1_n \\ 4,984\,3_n \end{array} \right\}^n$
$1 : (y_i - y_0)$			
$2p$	1,703 6	1,854 5	1,804 4
$2q$	1,338 5	1,185 6	1,199 1
Zahlen: $2p$	50,5	71,5	63,7
$2q$	-21,8	-15,3	15,8

## Berechnung der Absolutglieder der Fehlergleichungen.

Richtung nach	Vorläufiges Azimut $\varphi$	Richtungen, auf $P$ beobachtet. $w$	$\varphi - w$	Absolutglieder $\varphi - w - z_0 = -l'$
$P_4$	66° 39' 45,4''	0° 00' 00,0''	66° 39' 45,4''	0,3''
$P_5$	77 54 09,3	11 14 24,8	44,5	-0,6
$P_6$	103 56 17,4	37 16 32,0	45,4	0,3
	72,1	56,8 $z'_0 =$	135,3 66° 39' 45,1''	0,0

## Fehlergleichungen.

$$\lambda'_4 = 0,3 + 25,3 \xi - 10,9 \eta - \zeta$$

$$\lambda'_5 = -0,6 + 35,8 \xi - 7,7 \eta - \zeta$$

$$\lambda'_6 = 0,3 + 31,9 \xi + 7,9 \eta - \zeta$$

$$0 = 0,0 + 93,0 \xi - 10,7 \eta - 3 \zeta$$

$$0 = 0,0 - 31,0 \xi + 3,6 \eta + \zeta$$

Diese Normalgleichung für  $\zeta$  zu den Fehlergleichungen der Reihe nach addiert, giebt die *einmal reduzierten Fehlergleichungen* in der Form (8):

$$\begin{array}{rcl}
 \lambda'_4 = & 0,3 - 5,7 \xi - 7,3 \eta & \frac{s' = a' + b'}{-13,0} \\
 \lambda'_5 = & -0,6 + 4,8 \xi - 4,2 \eta & + 0,6 \\
 \lambda'_6 = & 0,3 + 0,9 \xi + 11,5 \eta & + 12,4 \\
 0 = & 0,0 + 0,0 \xi + 0,0 \eta & 0,0
 \end{array}$$

Bildung des Beitrags zu den einmal reduzierten Normalgleichungen.

Zeiger	$-a'v$	$-b'v$	$-s'v$	$v'v$
4	-1,7	-2,2	-3,9	0,09
5	-2,9	+2,5	-0,4	0,36
6	+0,3	+3,5	+3,7	0,09
Summe:	-4,3	+3,8	-0,6	0,54
Zeiger	$a'a'$	$a'b'$	$b'b'$	$s's'$
4	32,49	+41,61	53,29	169,00
5	23,04	-20,16	17,64	0,36
6	0,81	+10,35	132,25	153,76
Summe:	56,34	+31,80	203,18	323,12

Die Proben stimmen (vergl. Aufg. 51).

Beitrag zu den reduzierten Normalgleichungen:

$$\widetilde{a\lambda'} = -4,3 + 56 \xi + 32 \eta$$

$$\widetilde{b\lambda'} = +3,8 + 32 \xi + 203 \eta.$$

Beitrag der vorjährigen Beobachtungen:

$$\widetilde{a\lambda} = 0 + 15\,948 \xi$$

$$\widetilde{b\lambda} = 0 + 86\,089 \eta$$

Nach Vereinigung beider Beiträge durch Addition entstehen die endgültigen Normalgleichungen gemäß (10):

$$0 = -4,3 + 16\,004 \xi + 32 \eta$$

$$0 = +3,8 + 32 \xi + 86\,292 \eta.$$

Bei der Kleinheit der Absolutglieder sowie der nichtquadratischen Koeffizienten können wir diese letzteren wieder als verschwindend betrachten, wie auch die Probe durch Einsetzen der so errechneten Unbekannten in die Normalgleichungen beweist. Die weitere Rechnung gestaltet sich also ganz wie in Aufgabe 51. Wir finden:

$$\xi = +0,000\,269 \qquad \eta = -0,000\,044$$

$$\lambda'_4 = 0,3 - 0,0015 + 0,0003 = 0,2988$$

$$\lambda'_5 = -0,6 + 0,0013 + 0,0002 = -0,5985$$

$$\lambda'_6 = 0,3 + 0,0002 - 0,0005 = 0,2997.$$

Diese scharfe Berechnung der  $\lambda'$ , an sich ganz bedeutungslos, erfolgte nur zum Zweck der Probe gemäß (14). Wir finden:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{v\lambda} & = & 0,540\,00 \qquad \widetilde{\lambda'\lambda} = 0,537\,30 \\ -\widetilde{a\lambda} \xi & = & -0,001\,16 \qquad \widetilde{aa} \xi^2 = 0,001\,15 \\ -\widetilde{b\lambda} \eta & = & -0,000\,17 \qquad 2\widetilde{ab} \xi \eta = 0,000\,00 \\ & & \underline{0,538\,67} \qquad \widetilde{bb} \eta^2 = 0,000\,17 \\ & & & \underline{0,538\,62.} \end{array}$$

Im allgemeinen braucht man bei 6stelliger Rechnung die  $\lambda$  nur bis auf Zehntelsekunden festzustellen, und nur bei kleinen Beträgen der  $\lambda$  geht man der vorstehenden Probe halber weiter, etwa bis zu den Hundertelsekunden, wie in Aufgabe 51. Der vorstehende Fall gehört zu den Ausnahmen; auch insofern, als eine Neuberechnung der Azimute für den endgültigen Punkt  $P$  überflüssig ist, da die Koordinaten von  $P_0$  durch Beifügen von  $\xi$  und  $\eta$  in den Millimetern nicht geändert werden.

Die Berechnung von  $[\lambda\lambda]$  nach (12) führt auf:

$$[\lambda\lambda] = 197,40 + 0,54 = 197,94$$

Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung berechnet sich darnach unter Rücksicht darauf, daß 3 verschiedene Sätze mit je einer

Orientierungsunbekannten  $\zeta$  vereinigt worden sind, außerdem aber  $\xi$  und  $\eta$ , somit im ganzen 5 Unbekannte neben  $5 + 3 + 3 = 11$  Beobachtungen auftreten. Also

$$\mu^2 = \frac{197,94}{11 - 5} = 33,00$$

$$\mu = \pm 5,74''$$

$$\mu_x^2 = \frac{33}{16\,000} = 0,002\,062$$

$$\mu_x = \pm 0,045\text{ m}$$

$$\mu_y^2 = \frac{33}{86\,300} = 0,000\,382$$

$$\mu_y = \pm 0,020\text{ m.}$$

Die hier und in Aufgabe 51 angewandte einfache Berechnungsweise der Gewichtsreziproken von  $x$  und  $y$  ist selbstverständlich nur gültig für den Fall, daß  $[ab]$  gleich Null ist oder so angenommen werden darf.

Endgültige Koordinaten von  $P$  sind die oben angeführten vorläufigen, mit den vorstehenden mittleren Fehlern.

### Aufgabe 53.

*Vorwärtsabschnitte im Anschluß an einen vollzogenen Rückwärtseinschnitt.* Nachdem im Vorjahr auf dem Neupunkt  $P$  ein Rückwärtseinschnitt stattgefunden hatte, sind jetzt von  $P'$  und  $P''$  aus zwei Vorwärtsvisuren nach  $P$  (und einigen Festpunkten) genommen worden und mit dem Rückwärtseinschnitt, welcher im Vorjahr bereits ausgeglichen ward, zu vereinigen. Als Näherungskordinaten für  $P$  dienen die endgültigen des Vorjahres, nämlich

$$y_0 = -4\,270,043 \quad x_0 = -19\,990,226.$$

In die reduzierten Fehlergleichungen des Rückwärtseinschnittes, von der Form

$$\lambda = -l + ax + by$$

eingeführt, ergaben sie die übrigbleibenden Fehler  $\lambda_0$ . Jetzt aber, da, wie in Aufgabe 52,

$$\lambda = \lambda_0 + \delta \quad x = \xi_0 + \xi \quad y = \eta_0 + \eta$$

zu setzen ist, wird

$$\lambda = \lambda_0 + a\xi + b\eta.$$

Die hieraus hervorgehenden Anteile des Rückwärtseinschnittes an den Normalgleichungen lauten, da  $\widetilde{a\lambda_0} = \widetilde{b\lambda_0} = 0$ , wie folgt:

$$\widetilde{a\lambda} = \widetilde{a}a\xi + \widetilde{a}b\eta$$

$$\widetilde{b\lambda} = \widetilde{a}b\xi + \widetilde{b}b\eta,$$

also ganz wie die Normalgleichungen des Vorjahres, nur *ohne Absolutglieder*. Die Beiträge der Vorwärtsabschnitte zu den Normalgleichungen sollen sogleich berechnet werden, wobei vorausgesetzt wird, daß die Azimute der Richtungen von  $P'$  und  $P''$  nach den anvisierten Festpunkten schon bekannt und nur die Azimute der Richtungen nach dem

Neupunkt, also  $(P' P_0)$  und  $(P'' P_0)$  zu berechnen seien, unter  $P_0$  den Punkt verstanden, auf welchen  $(y_0, x_0)$  sich beziehen. An die Berechnung der Azimute schließt sich diejenige der Koeffizienten  $a$  und  $b$  naturgemäß an:

$$a = \frac{\sin^2 (P_0 P)}{y - y_0} 206\,265; \quad b = \frac{-\cos^2 (P_0 P)}{x - x_0} 206\,265$$

und als Rechenprobe:

$$2a = \frac{2 \sin (P_0 P) \cos (P_0 P)}{x - x_0} 206\,265;$$

$$2b = \frac{-2 \sin (P_0 P) \cos (P_0 P)}{y - y_0} 206\,265.$$

Berechnung der Azimute  $(P_0 P')$  und  $(P_0 P'')$ .

$P$	$y$	$y - y_0$	$-(y - x)$	$\log Z$	$\log (y - y_0)$
	$x$	$x - x_0$	$y_0 - x_0$	$\log (1 : N)$	$\log \sqrt{x - x_0}$
$P_0$	$y_0$	Summe = $Z$	Summe = $N$	$\log (Z : N)$	$\log \operatorname{tg} (P_0 P)$
	$x_0$	$Z + N = 2(x - x_0)$	$Z - N = 2(y - y_0)$	$(P_0 P) + 45$	$(P_0 P)$
$P'$	— 4 305,733	— 35,690	— 16 284,862	2,803 497 <sub>n</sub>	1,552 547 <sub>n</sub>
	— 20 590,595	— 600,369	+ 15 720,183	7,248 199 <sub>n</sub>	7,221 582 <sub>n</sub>
$P_0$	— 4 270,043	— 636,059	— 564,679	0,051 696	8,774 129
	— 19 990,226	— 1 200,738	— 71,380	228° 24' 07,4''	183° 24' 07,4''
$P''$	— 3 727,020	+ 543,023	— 16 634,395	2,235 109	2,734 818
	— 20 361,415	— 371,189	+ 15 720,183	7,038 953 <sub>n</sub>	7,430 405 <sub>n</sub>
$P_0$	— 4 270,043	+ 171,834	— 914,212	9,274 062 <sub>n</sub>	0,165 223 <sub>n</sub>
	— 19 990,226	— 742,378	+ 1 086,046	169° 21' 17,8''	124° 21' 17,8''

Berechnung der Koeffizienten  $a$  und  $b$  mit Probe.

	$(P_0 P')$	$(P_0 P'')$		$(P_0 P')$	$(P_0 P'')$
$\sqrt{y - y_0}$	8,447 5 <sub>n</sub>	7,265 2	$\sqrt{x - x_0}$	7,221 6 <sub>n</sub>	7,430 4 <sub>n</sub>
$\sin^2$	7,546 7	9,833 5	$\sin$	8,773 4 <sub>n</sub>	9,916 7
$\varrho''$	5,314 4	5,314 4	$2 \varrho''$	5,615 4	5,615 4
$-\cos^2$	9,998 5 <sub>n</sub>	9,503 0 <sub>n</sub>	$\cos$	9,999 2 <sub>n</sub>	9,751 5 <sub>n</sub>
$\sqrt{x - x_0}$	7,221 6 <sub>n</sub>	7,430 4 <sub>n</sub>	$\sqrt{y - y_0}$	8,447 5 <sub>n</sub>	7,265 2
$a$	1,308 6 <sub>n</sub>	2,413 1	$2a$	1,609 6 <sub>n</sub>	2,714 0
$b$	2,534 5	2,247 8	$2b$	2,835 5	2,548 8
$a$	— 20,4	258,9	$2a$	— 40,7	517,6
$b$	342,4	176,9	$2b$	684,7	353,8

Bildung der Fehlergleichungen des Vorwärtsabschnittes.

1) auf Standpunkt  $P'$ .

Angeschnitten	Azimute $\varphi$	Richtungen $w$	$\varphi - w$	$\varphi - w - z_0 = -l$
$P$	3° 24' 07,4''	294° 58' 30,9''	68° 25' 36,5''	-0,5''
$A$	66 39 44,0	358 14 06,0	38,0	+1,1
$B$	68 25 36,3	0 00 00,0	36,3	-0,7
$C$	77 54 07,2	9 28 30,8	36,4	-0,6
$D$	302 06 25,1	233 40 48,0	37,1	+0,2
	120,0	115,7	184,3	-0,5

Aus den letzten 4 Richtungen 27,8:4

$$z_0' = 68^\circ 25' 36,95''$$

Fehlergleichung:  $v' = -0,5 - 20,4 \xi + 342,4 \eta$  Gewicht  $4/5$ .2) auf Standpunkt  $P''$ .

Angeschnitten	Azimute $\varphi$	Richtungen $w$	$\varphi - w$	$\varphi - w - z_0 = -l$
$P$	304° 21' 17,8''	225° 16' 42,2''	79° 04' 35,6''	+8,1''
$E$	79 04 27,0	0 00 00,0	27,0	-0,5
$F$	107 31 19,7	28 26 51,0	28,7	+1,2
$G$	166 31 50,1	87 27 23,3	26,8	-0,7
	114,6	116,5	118,1	+8,1

Aus den letzten 3 Richtungen 22,5:3

$$z_0'' = 79^\circ 04' 27,5''$$

Fehlergleichung:  $v'' = +8,1 + 258,9 \xi + 176,9 \eta$  Gewicht  $3/4$ .Bildung der Anteile  $[gav]$  und  $[gbv]$  an den Normalgleichungen.

	$-l$	$a$	$b$	$a+b$ $=s$	$g$	$-gal$	$gaa$
$v'$	-0,5	-20,4	+342,4	+322,0	$4/5$	+8,2	333
$v''$	+8,1	+258,9	+176,9	+435,8	$3/4$	+1572,8	50272
						1581,0	50605
	$gab$	$-gbl$	$gbb$	$-gsl$	$gss$	$gll$	
$v'$	-5588	-137,0	93790	-128,8	82947	0,20	
$v''$	+34350	+1074,7	23470	2647,5	142441	49,21	
	28762	937,7	117260	2518,7	225388	49,41	

Rechenproben:

$$-[gal] - [gbl] = -[gsl]$$

$$[gaa] + 2[gab] + [gbb] = [gss].$$

Anteile der Vorwärtsabschnitte an den Normalgleichungen:

$$[gav] = 1581,0 + 50\ 605\ \xi + 28\ 762\ \eta$$

$$[gbv] = 937,7 + 28\ 762\ \xi + 117\ 260\ \eta.$$

Anteile des vorjährigen Rückwärtseinschnittes an denselben:

$$\widetilde{a\lambda} = 0 + 44\ 270\ \xi - 12\ 324\ \eta$$

$$\widetilde{b\lambda} = 0 - 12\ 324\ \xi + 23\ 140\ \eta.$$

Normalgleichungen, durch Vereinigung der Anteile:

$$0 = 1581,0 + 94\ 875\ \xi + 16\ 438\ \eta$$

$$0 = 937,7 + 16\ 438\ \xi + 140\ 400\ \eta.$$

Auflösen der Normalgleichungen.

$$R = 94\ 875 \cdot 140\ 400 - 16\ 438^2$$

$$R_x = -1581,0 \cdot 140\ 400 + 937,7 \cdot 16\ 438$$

$$R_y = -937,7 \cdot 94\ 875 + 1581,0 \cdot 16\ 438$$

$$\xi = R_x : R, \quad \eta = R_y : R.$$

94 875	4,977 15	- 1 581,0	3,198 93 <sub>n</sub>	- 937,7	2,972 06 <sub>n</sub>
140 400	5,147 37	140 400	5,147 37	94 875	4,977 15
10 <sup>7</sup> . 1 332,06	0,124 52	10 <sup>7</sup> . - 22,197 4	8,346 30 <sub>n</sub>	10 <sup>7</sup> . - 8,898 4	7,949 31 <sub>n</sub>
- 16 438	4,215 85 <sub>n</sub> mal 2	937,7 16 438	2,972 06 4,215 85	1 581,0 16 438	3,198 93 4,215 85
10 <sup>7</sup> . - 27,02	8,431 70 <sub>n</sub>	10 <sup>7</sup> . 1,541 4	7,187 91	10 <sup>7</sup> . 2,598 8	7,414 78
Hieraus R =	log R =	10 <sup>7</sup> . - 20,656 0 1 : R	8,315 05 <sub>n</sub> 9,884 38	10 <sup>7</sup> . - 6,299 6 1 : R	7,799 31 <sub>n</sub> 9,884 38
10 <sup>7</sup> . 1 305,04	0,115 62	- 0,015 83 = ξ	8,199 43 <sub>n</sub>	- 0,004 83 = η	7,688 69 <sub>n</sub>

Das Einsetzen von  $\xi$  und  $\eta$  in die *Normalgleichungen* vollzieht sich sehr leicht und zeigt diese bis auf ein und zwei Einheiten der letzten Stelle der Absolutglieder erfüllt.

In die *Fehlergleichungen* des Vorwärtsabschnitts eingesetzt, liefern  $\xi$  und  $\eta$  die Beträge der übrigbleibenden Fehler:

$$v' = -1,830 \qquad gv'v' = 2,679$$

$$v'' = +3,148 \qquad gv''v'' = 7,433$$


---


$$[gvv] = 10,112$$

Ähnlich wie in (11) der vorigen Aufgabe, ist auch jetzt nach Auflösung der Normalgleichungen doppelt zu bilden:

$$[g\lambda\lambda] = \widetilde{\lambda\lambda} + [gvv]. \quad (1)$$

Als *erster Wert* findet sich:

$$[g\lambda\lambda] = \widetilde{\lambda_0\lambda_0} + [gll] - [gal]\xi - [gbl]\eta. \quad (2)$$

Der *zweite Wert* wird gemäß (1) zusammengesetzt, und zwar das zweite Glied  $[gvv]$  nach Einzelberechnung der  $v$ , während  $\widetilde{\lambda\lambda}$  ganz wie in (13) der Aufgabe 52 gebildet wird, nämlich:

$$\widetilde{\lambda\lambda} = \widetilde{\lambda_0\lambda_0} + \widetilde{a\alpha}\xi^2 + 2\widetilde{a\beta}\xi\eta + \widetilde{b\beta}\eta^2 \quad (3)$$

Der *Rechenprobe* für Bildung und Auflösung der Normalgleichungen in voriger Aufgabe entspricht diesmal die Identität:

$$[gll] - [gal]\xi - [gbl]\eta = [gvv] + \widetilde{a\alpha}\xi^2 + 2\widetilde{a\beta}\xi\eta + \widetilde{b\beta}\eta^2 \quad (4)$$

$-[gal]$	3,198 93	$-[gbl]$	2,972 06
$\xi$	8,199 43 <sub>n</sub>	$\eta$	7,683 69 <sub>n</sub>
$-25,024$	1,398 36 <sub>n</sub>	$-4,526$	0,655 75 <sub>n</sub>

$[gll]$	49,408
$-[gal]\xi$	$-25,024$
$-[gbl]\eta$	$-4,526$
Linke Seite von (4)	19,858

$\widetilde{a\alpha}$	4,646 11	$\widetilde{b\beta}$	4,364 36	$2\widetilde{a\beta}$	4,391 78 <sub>n</sub>
$\xi^2$	6,398 86	$\eta^2$	5,367 38	$\xi$	8,199 43 <sub>n</sub>
11,091	1,044 97	0,539	9,731 74	$\eta$	7,683 69 <sub>n</sub>
				$-1,883$	0,274 90 <sub>n</sub>

$[gvv]$	10,112
$\widetilde{a\alpha}\xi^2$	11,091
$\widetilde{b\beta}\eta^2$	0,539
$2\widetilde{a\beta}\xi\eta$	$\times 8,117$
rechte Seite von (4)	19,859.

Durch den Rückwärtseinschnitt des Vorjahrs ist gegeben:

$$\widetilde{\lambda_0\lambda_0} = 72,54$$

Daher gemäß (2):  $[g\lambda\lambda] = 92,40$ .

Da in dem Rückwärtseinschnitt 7 Richtungen vereinigt waren, zu denen 2 Vorwärtsrichtungen hinzugetreten sind, so dienten 9 Beobachtungen zur Bestimmung von 3 Unbekannten,  $\xi$ ,  $\eta$  und der Orientierungsunbekannten des Rückwärtseinschnitts, die indessen eliminiert, nicht berechnet ward. Demnach findet sich der mittlere Fehler  $\mu$  einer Beobachtung aus

$$\mu^2 = \frac{92,40}{9 - 3} = 15,4,$$

$$\mu = \pm 3,93''.$$

Wir berechnen auf grund der Gewichtsgleichungen

$$Q_x = 140\,400 : R \qquad Q_y = 94\,875 : R$$

als reziproke Gewichte von  $x$  und  $y$ , und zwar zweckmäÙig im Anschluß an die Normalgleichungen; hiernach:

$$\mu_x^2 = Q_x \mu^2 \qquad \mu_y^2 = Q_y \mu^2.$$

140 400	5,147 37	94 875	4,977 15
1 : R	9,884 38	1 : R	9,884 38
$\mu^2$	1,187 52	$\mu^2$	1,187 52
$\mu_x^2$	6,219 27	$\mu_y^2$	6,049 05
$\mu_x = 0,013$	8,109 64	$\mu_y = 0,011$	8,024 52

Demnach lauten die endgültigen Koordinaten:

$$y = -4\,270,048 \pm 0,011; \qquad x = -19\,990,242 \pm 0,013.$$

Um die Aufstellung der Fehlergleichungen nochmals zu prüfen, was durch doppelte Berechnung der endgültigen Azimute geschieht, stellen wir mit  $y$  und  $x$  zusammen (vergl. Aufg. 51 S. 203):

$y'$	= - 4 305,733	$x'$	= - 20 590,595
$y''$	= - 3 727,020	$x''$	= - 20 361,415
Summe	= - 8 032,753	Summe	= - 40 952,010
ab von $2y$	= - 8 540,096	ab von $2x$	= - 39 980,484
Rest	= - 507,343	Rest	= + 971,526

Koordinatendifferenzen:

$y - y'$	+ 35,685	$x - x'$	+ 600,353
$y - y''$	= - 543,028	$x - x''$	+ 371,173
Summe	= - 507,343	Summe	+ 971,526

$\varphi = z_0 + w + v$		Formel	Argument und Ergebnis	log	Differenz
$z_0'$	68° 25' 37,0''	$y - y'$	35,685	1,552 486	
$w'$	294 58 30,9	$1/x - x'$	$1/600,353$	7,221 593	
$v'$	<u>-1,8</u>	tg ( $P'P$ )		8,774 079	
$\varphi'$	3 24 06,1	( $P'P$ )	3° 24' 06,0''		+ 0,1''
$z_0''$	79 04 27,5	$y - y''$	-543,028	2,734 822 <sub>n</sub>	
$w''$	225 16 42,2	$1/x - x''$	$1/371,173$	7,430 423	
$v''$	<u>+3,1</u>	tg ( $P''P$ )		0,165 245 <sub>n</sub>	
$\varphi''$	304 21 12,8	( $P''P$ )	304° 21' 13,0''		- 0,2''

Die etwas genauere Berechnung des mittleren Beobachtungsfehlers aus den übrigbleibenden Fehlern *aller* Richtungen, auch derjenigen nach Festpunkten, wird hier nicht beigelegt, sondern dem Leser überlassen. Vergl. des Verf. Prakt. Geometrie, I, §§ 159 u. 160. Man bedarf dazu der Orientierungsunbekannten  $\zeta'$  und  $\zeta''$  auf  $P'$  und  $P''$ , welche am bequemsten zu berechnen sind aus:

$$\zeta' = v' : n', \quad \zeta'' = v'' : n'',$$

wo  $n' = 5$  und  $n'' = 4$  die Anzahl der auf  $P'$  und  $P''$  beobachteten Richtungen darstellen. Durch Einführen dieser  $\zeta$  in die Fehlergleichungen *aller* Richtungen gelangt man überdies auf folgende bequeme Berechnungsweise für  $\mu$ :

$$\mu^2 = \frac{[g v v] + \widetilde{v v} + \widetilde{v v} + \widetilde{\lambda \lambda}}{(n' - 1) + (n'' - 1) + (7 - 3)}.$$

Hierin beziehen sich die Quadratsummen von der Form  $\widetilde{v v}$  auf die  $n' - 1$  und  $n'' - 1$  Richtungen von  $P'$  und  $P''$  aus nach *Festpunkten* und sind auf grund von Seite 212 ohne weiteres zu bilden.

