



ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE
WYDZIAŁ INFORMATYKI

mgr inż. Marek Kannchen

**Zastosowanie arytmetyki przyrostów do adaptacji
wybranych algorytmów wspomaganie decyzji**

Rozprawa doktorska

Promotor: dr hab. inż. Mariusz Borawski, prof. US
Promotor pomocniczy: dr hab. inż. Paweł Ziemia

Szczecin 2023

Spis treści

Spis treści.....	2
Wprowadzenie	3
Rozdział I. Istota wielokryterialnego podejmowania decyzji.....	7
1.1. Proces podejmowania decyzji.....	7
1.2. Preferencje w podejmowaniu decyzji	18
1.3. Zastosowania metod wspomaganie decyzji	26
Rozdział II. Podstawy metodyczne opracowanej metody	41
2.1. Przesłanki stosowania arytmetyki przyrostów	41
2.2. Przestrzeń wektorowa przyrostów	56
2.3. Metody AHP i PVM.....	61
Rozdział III. Zastosowanie arytmetyki przyrostów na przykładzie wybranej metody wspomagania decyzji.....	84
3.1. Uzasadnienie wyboru metody wspomaganie decyzji PVM.....	84
3.2. Metoda PVM–VSI wykorzystująca arytmetykę przyrostów	85
3.3. Porównanie metody PVM–VSI z wybranymi metodami.....	90
Rozdział IV. Przykłady zastosowania metody PVM–VSI w wielokryterialnym podejmowaniu decyzji	93
4.1. Zastosowanie PVM–VSI w planowaniu budżetu obywatelskiego	93
4.2. Zastosowanie PVM–VSI do wyboru rodzinnego samochodu o napędzie elektrycznym	106
Podsumowanie	135
Literatura.....	139
Spis tabel.....	151
Spis rysunków.....	153
Indeks oznaczeń.....	154
Załączniki.....	158

Wprowadzenie

We współczesnym świecie człowiek na każdym niemal kroku swojego życia podejmuje przeróżne istotniejsze lub mniej istotne – zarówno dla siebie, jak i dla otoczenia (rodziny, współpracowników, podległych mu osób) – decyzje. Podejmowane są one przez niego indywidualnie lub grupowo. Podejmujący decyzję może odczuwać jej skutki w krótszym (zakup produktu związanego z bieżącymi potrzebami) bądź też w dłuższym okresie (kupno domu, samochodu, wybór ścieżki kariery zawodowej itp). Niektóre z decyzji wiążą się z inwestowaniem znacznych środków z budżetu decydenta lub też z budżetu innych podmiotów (własnej firmy, zakładu pracy). Potrzebę wykorzystania w problemach decyzyjnych narzędzia, jakim są wielokryterialne analizy decyzyjne określone również wielokryterialnym podejmowaniem decyzji, zauważył A. Kobryń. Twierdzi on, iż „w różnych dziedzinach życia zachodzi potrzeba podejmowania określonych decyzji lub dokonywania określonych wyborów. Istotnym utrudnieniem w procesie decyzyjnym jest sytuacja, w której konieczne jest dokonywanie oceny czynników jakościowych, trudnych do zmierzenia w kategoriach ilościowych. Ponadto wiele problemów decyzyjnych charakteryzuje się tym, że ich rozwiązanie wymaga uwzględnienia nie jednego, lecz wielu kryteriów decyzyjnych. Metody wielokryterialnego wspomaganie decyzji pozwalają na wyznaczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych, a następnie – na podstawie określonego zbioru kryteriów oceny poszczególnych rozwiązań na poszukiwanie optymalnego rozwiązania” [66].

Większość istniejących metod stosowanych we wspomaganie decyzji, gdy problem decyzyjny dotyczy wielokryterialnego problemu decyzyjnego, w którym – oprócz ocen ilościowych – do porównania wariantów stosuje się oceny jakościowe pozyskane od decydenta, nie uwzględnia w swojej procedurze nieprecyzyjności informacji podanej przez decydenta w procesie obliczeniowym. Nieprecyzyjność ta może wynikać z niespójności ocen, np. przy porównywaniu wariantów parami, lub też może być wynikiem niepewności decydenta odnośnie do ocen poszczególnych wariantów według poszczególnych kryteriów oceny. Istnieje zatem prawdopodobieństwo, że w przypadku jednakowych bądź bardzo zbliżonych ocen dla dwóch lub więcej wariantów powstały w procesie decyzyjnym ranking wariantów nie będzie w pełni odzwierciedlał preferencji decydenta. Pojawia się zatem pytanie, czy można metody nieuwzględniające nieprecyzyjność informacji poddać modyfikacji, która pozwoliłaby w rankingach za pomocą tych metod otrzymanych określić poziom nieprecyzyjności i by w przypadku niewielkiej różnicy w ocenach z

zastosowaniem kryteriów jakościowych, badając poziom nieprecyzyjności/niespójności, można było uwzględnić ją przy ustalaniu miejsc poszczególnych wariantów w rankingu.

W związku z powyższym problemem zdefiniowano cel oraz tezę pracy.

Celem niniejszej pracy jest badanie możliwości wykorzystania arytmetyki przyrostów do modyfikacji wybranych metod podejmowania decyzji.

Główna teza pracy zakłada, że zastosowanie elementów arytmetyki przyrostów w wybranej metodzie pozwoli na uwzględnianie nieprecyzyjności informacji wykorzystywanej w procesie podejmowania decyzji, co skutkuje dokładniejszym odwzorowaniem preferencji decydenta.

W niniejszej pracy zaprezentowano zastosowanie arytmetyki przyrostów do wzbogacenia dotychczas stosowanej metody podejmowania decyzji tak, by uwzględniała ona nieprecyzyjność informacji podanej przez decydenta. Arytmetykę przyrostów zaimplementowano dla wybranej metody wspomaganie decyzji wielokryterialnych PVM, co rozszerzyło jej możliwości w procesie decyzyjnym, w którym wykorzystuje się tylko kryteria jakościowe lub kryteria jakościowe występujące obok kryteriów ilościowych. Dzięki temu ranking utworzony za pomocą metody rozszerzonej o arytmetykę przyrostów jest bardziej wiarygodny, gdyż w przypadku identycznych bądź zbliżonych ocen decydent ma możliwość porównania, który z wariantów jest „lepiej określony” w rankingu.

Niniejsza praca składa się z czterech rozdziałów, w których podjęto tematykę teoretycznych aspektów procesu podejmowania decyzji, roli metod wspomaganie decyzji w procesie wspomaganie decyzji, a także możliwości, jakie dają te metody. Dokonano również krótkiej charakterystyki kilku wybranych metod. Przybliżono też podstawy arytmetyki przyrostów, a następnie dokonano adaptacji arytmetyki przyrostów w wybranym algorytmie wspomaganie decyzji, co pozwoliło na uwzględnienie nieprecyzyjności informacji w procesie jej podejmowania. Uwzględnienie nieprecyzyjności informacji w podejmowaniu decyzji skutkuje dokładniejszym odwzorowaniem preferencji decydenta, czyli pozwala na podjęcie bardziej obiektywnej decyzji w rozpatrywanym procesie decyzyjnym niż w metodach wspomaganie procesu decyzyjnego, nieuwzględniających nieprecyzyjność informacji.

W rozdziale pierwszym rozprawy przedstawiono teorię procesu podejmowania decyzji, istotę wielokryterialnego procesu podejmowania decyzji, zaprezentowano rolę

preferencji decydenta/decydentów w procesie podejmowania decyzji oraz nakreślono zagadnienie dotyczące wspomaganie wielokryterialnego jej podejmowania – zachodzące potrzeby wspomaganie wielokryterialnego podejmowania decyzji, ponadto możliwości, jakie dają decydentowi/decydentom istniejące metody wielokryterialnego wspomaganie decyzji, następnie dokonano klasyfikacji tych metod.

W rozdziale drugim zaprezentowano przesłanki stosowania arytmetyki przyrostów, przybliżono teorię zbiorów rozmytych, arytmetyki przedziałowej, reprezentacji L–R oraz rozszerzonej arytmetyki przedziałowej. Opisano także arytmetykę przyrostów wraz z przestrzenią wektorową przyrostów. Na koniec przybliżono istniejące metody wielokryterialnego wspomaganie decyzji AHP i PVM jako te, które mogą być podstawą opracowania nowej metody uwzględniającej niespójność/nieprecyzyjność ocen decydenta w badanym problemie decyzyjnym.

W rozdziale trzecim natomiast przywołano argumenty uzasadniające wybór metody PVM jako tej, w której zostanie zaimplementowana arytmetyka przyrostów. W rozdziale tym opisano również procedurę metody opartej na metodzie PVM wykorzystującą arytmetykę przyrostów do wyliczenia niespójności/niezgodności ocen decydenta – metodę PVM–VSI. Metodę PVM–VSI porównano następnie z wykorzystywanymi najczęściej we wspomaganie podobnych problemów decyzyjnych metodami wspomaganie decyzji.

W rozdziale czwartym znajdują się przykłady zastosowania autorskiej metody PVM–VSI w problemach decyzyjnych, w których decydent ma do wyboru wiele wariantów, a decyzję musi podjąć na podstawie wielu kryteriów decyzyjnych. Są to kryteria jakościowe (subiektywne) bądź też kryteria jakościowe występują wraz z kryteriami ilościowymi (obiektywnymi).

Pierwszym z przykładów jest wspomaganie decyzji na szczeblu samorządowym, co wiąże się z potrzebą uwzględnienia interesów różnych grup społecznych, tj. w tworzeniu rankingu projektów zgłoszonych w ramach budżetu obywatelskiego, a tym samym wskazanie tych projektów, które będą miały najkorzystniejszy wpływ na zrównoważony rozwój miasta. W przykładzie tym warianty (projekty) zostały ocenione według kryteriów jakościowych. Oprócz metody autorskiej, by porównać ją z innymi wykorzystywanymi z powodzeniem metodami w tego typu problemach decyzyjnych, ranking utworzono również metodą Fuzzy AHP.

Drugi przykład dotyczy problemu decyzyjnego, z jakim spotykają się konsumenci, a który ma związek z poważną inwestycją. Dotyczy on wyboru samochodu elektrycznego, co wiąże się z dużym ryzykiem związanym z nietrafną alokacją dużej ilości środków pieniężnych przez decydenta. W przykładzie tym warianty (modele samochodów) zostały ocenione według kryteriów ilościowych (pierwszy etap badania) oraz według kryteriów ilościowych w połączeniu z kryteriami jakościowymi (drugi etap). Celem wykonania badania w dwóch etapach dla metody PVM–VSI było porównanie, jak kryteria subiektywne wpłyną na jego wynik tj. jak zmieni się końcowy ranking, gdy oprócz kryteriów ilościowych w badaniu wystąpią kryteria jakościowe. Tutaj również, oprócz metody autorskiej do utworzenia rankingów, celem przyrównania wyników otrzymanych metodą autorską z wynikami metod stosowanych dotychczas we wspomaganie decyzji zastosowano badanie innymi metodami. Metodę autorską zestawiono w tym przykładzie z metodami AHP oraz PROMETHEE.

Rozdział I. Istota wielokryterialnego podejmowania decyzji

1.1. Proces podejmowania decyzji

Dokonywanie wyboru, czyli inaczej podejmowanie decyzji, z którym spotkać się możemy dość często zarówno w życiu codziennym, jak i w życiu zawodowym, nie jest łatwym procesem. Stanowi istotny czynnik rozwiązywania wielu bardziej lub mniej ważnych problemów naszego życia. Wybór jednego z wariantów (alternatyw) zawsze nasuwa konkretne pytanie, tj. co możemy zyskać, a co stracimy, podejmując taką czy inną decyzję. Pytanie to jest niebywale ważne, gdyż proces decyzyjny generuje w przyszłości określone konsekwencje. W życiu zawodowym może to być na przykład pozyskanie intratnego kontraktu dla firmy, w której pracujemy, lub utrata kluczowego klienta w przypadku nietrafnie przygotowanej oferty. W życiu prywatnym jako konsumenci dokonujemy wyborów mniej lub bardziej obciążających nasze życie skutkami dokonanego wyboru. Decydujemy o kupnie lub budowie domu (wybór lokalizacji, konkretnego projektu, technologii wykonania itp.), samochodu, co wiąże się z poważniejszym w konsekwencjach ryzykiem nietrafnie podjętej decyzji. Podobnie jest np. podczas robienia codziennych zakupów w sklepie, co również wiąże się z decyzjami obciążonymi mniejszym ryzykiem i jego skutkami.

W literaturze możemy znaleźć przykłady różnych problemów decyzyjnych z wielu dziedzin nauki, takich jak informatyka: ranking algorytmów [71], wybór państwowego systemu zarządzania dokumentacją elektroniczną [127], wybór systemu informatycznego [96]; ekonomia: optymalizacja linii montażowych [142], ustalenie priorytetu modernizacji dróg [4], ocena ścieżek produkcji paliw lotniczych [3]; zarządzanie: dystrybucja premii dla pracowników [57], ocena urządzeń medycznych [94], wybór lokalizacji dla biznesu [90]; a także konsumenckich problemów decyzyjnych: wybór mieszkania [80], wybór ścieżki kariery [12], wybór urządzenia do pracy i rozrywki [143]. Zwykle w momencie wyboru jednego z wariantów decyzyjnych nie jesteśmy w stanie ocenić następstw swojej decyzji. Możliwe jest to dopiero po jakimś czasie od podjęcia decyzji – dłuższym lub krótszym – w zależności od danego problemu decyzyjnego.

Proces podejmowania decyzji niejednokrotnie związany jest z potrzebą spełnienia wymagań, interesów różnych osób (pozostali członkowie rodziny lub – w przypadku decyzji na szczeblu zawodowym – zarządu firmy, działu księgowości itp.), grup społecznych (osób zarządzających danym regionem, jego mieszkańców, przedsiębiorców

prowadzących interesy w tym regionie), które czasem wykluczają się nawzajem. Wiąże się też z potrzebą uwzględnienia wielu czynników/aspektów podejmowanej decyzji i im więcej czynników ma wpływ na jego przebieg, tym bardziej jest on skomplikowany. Jednym z takich czynników jest doświadczenie. Pozwala ono na uwzględnienie przy dokonywaniu wyborów sytuacji, w których znaleźliśmy się w naszym życiu wcześniej. Do takich czynników zaliczyć można również intuicję czy zdrowy rozsądek. Problematyką działania mózgu, mechanizmów ludzkiego myślenia, w tym intuicji i doświadczenia w procesie podejmowania decyzji, zajmowali się między innymi D. Kahneman (laureat nagrody Nobla w 2002 roku) [56] i E. Aronson [6]. Z ich pracy badawczej wynika, „że wybory, decyzje podejmowane przez ludzi, zależą od mechanizmów myślenia, tzw. myślenia szybkiego (nieświadome, automatyczne) oraz myślenia wolnego (kontrolowane)” [88]. Myślenie szybkie oparte na schematach myślowych (doświadczenie życiowe) lub heurystykach (tzw. myślenie na skróty, automatyczna reakcja na bodźce pochodzące z otoczenia) pozwala na prawie natychmiastowe podejmowanie decyzji, nie wymaga wysiłku, lecz obciążone jest ryzykiem mającym związek z brakiem analizy sytuacyjnej. Myślenie wolne – kontrolowane przez człowieka – polega na analizie posiadanych informacji, weryfikowaniu myślenia szybkiego i przejęcia kontroli nad pojawiającymi się wyborami, wiąże się więc ze znacznym wysiłkiem intelektualnym [88].

Zanim przystąpimy do analizy procesu decyzyjnego, należałoby przybliżyć pojęcia z tym terminem związane. Termin „decyzja” pochodzi od łacińskiego *decisio* i oznacza postanowienie, rozstrzygnięcie. Pojęcie decyzji, jej znaczenie rozważane było już w czasach starożytnych przez takich filozofów, jak Arystoteles, Platon, Tomasz z Akwinu. Filozofowie ci rozpatrywali ludzkie możliwości, predyspozycje do podejmowania decyzji. Niektórzy z nich twierdzili, iż możliwość podejmowania decyzji przez człowieka w skomplikowanych sytuacjach jest główną cechą, która odróżnia nas od zwierząt [41]. Podejmowanie decyzji wiąże się ze świadomym, nieprzypadkowym, nielosowym dokonaniem wyboru. Podjęte w wyniku decyzji działanie prowadzi do zmiany rzeczywistości. Końcowym celem tego działania jest decyzja [31,108]. W literaturze podejmowanie decyzji zostało zdefiniowane jako „akt wolnego, nielosowego wyboru jednego z możliwych przyszłych sposobów zachowania decydenta, a w konsekwencji całej organizacji przez niego kierowanej/zarządzanej. Jest to wybór jednego działania z wielu możliwych w danym momencie lub świadome wstrzymanie się od dokonania wyboru – co jest także wyborem, popartym stosowną analizą decyzyjną” [32,82]. Podobną definicję

prezentują w swoich publikacjach Koźmiński [70] i Rudniański [118]. D e c y z j ę można zdefiniować jako formalny lub nieformalny akt, dokonywany świadomie na podstawie dostępnych informacji (lub niedokonany – wstrzymanie się) wybór sposobu działania, którego celem jest rozwiązanie określonego problemu decyzyjnego [131].

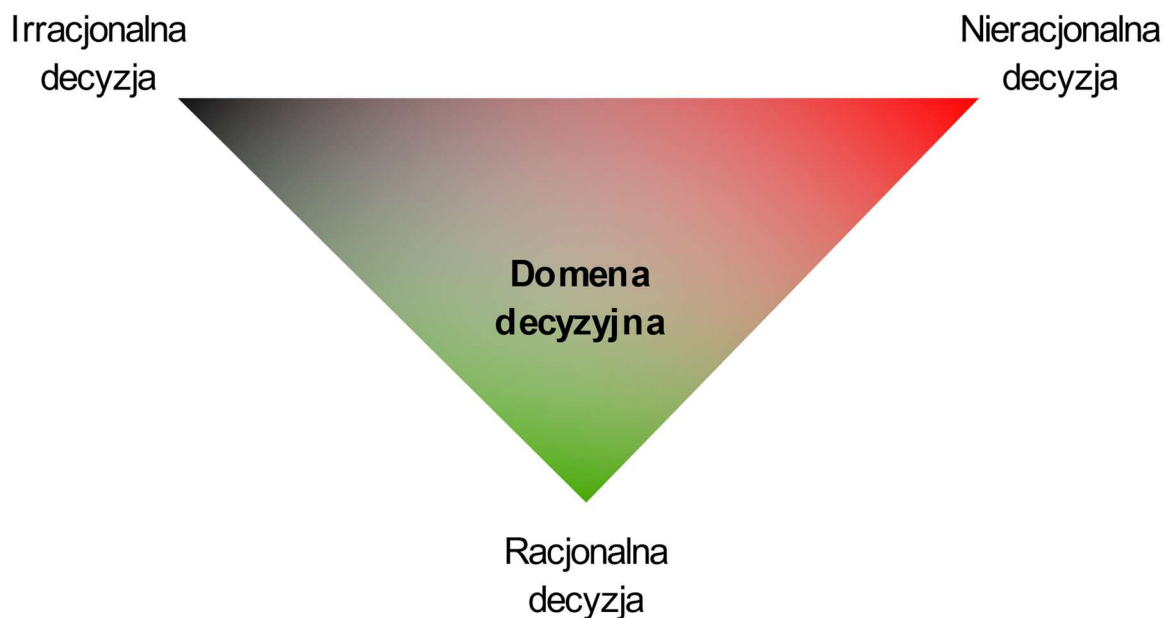
Podjęciem i badaniem decyzji zajmuje się teoria decyzji, pomagająca wybrać działania maksymalizujące wartość użyteczności, wynikającą z konsekwencji danego wyboru [97]. Stosowana teoria decyzji nazywana jest natomiast analizą decyzyjną [53].

Decyzje można podzielić na różne kategorie – w zależności od tego, jakie przyjmie się kryteria. Biorąc pod uwagę środowisko podejmowania decyzji, będzie to podział na decyzje prywatne lub zawodowe. Jeżeli rozpatruje się decyzje w kategoriach czasu namysłu, można podzielić je na impulsywne oraz rzeczowe. Gdy pod uwagę bierze się ich powtarzalność, to można dokonać podziału na rutynowe oraz nie rutynowe. W przypadku horyzontu czasowego jako kryterium podziału możemy dokonać na krótko-, średnio- lub długookresowe. W przypadku podziału ze względu na pozycję hierarchiczną będą to decyzje strategiczne, taktyczne, operacyjne, realizacyjne. Rozpatrując decyzje pod względem stabilności warunków, można je zakwalifikować do grupy podejmowanych w warunkach pewności lub do grupy podejmowanych w warunkach ryzyka. Ze względu na podmiot podejmujący decyzje podziału można dokonać na jednoosobowe lub grupowe. Jeśli pod uwagę bierze się kontekst decyzyjny, decyzje będą jedno- lub wieloetapowe [64,104,106].

Jedną z najczęstszych klasyfikacji jest zaś podział decyzji ze względu na liczbę kryteriów. W takim przypadku decyzje dzieli się na jednokryterialne i wielokryterialne. Częściej spotkać się możemy z drugą grupą decyzji, a dokonując wyboru, uwzględnia się różne punkty widzenia. Decyzja w tym przypadku jest kompromisem uwzględniającym preferencje osoby decyzyjnej oraz korzyści i straty, jakie przyniesie wybór konkretnego wariantu – zgodnie z przyjętymi kryteriami oceny. [88]

W literaturze możemy spotkać się też z określeniem decyzji jako racjonalnej. Każde podejmowane działanie niesie ze sobą określone skutki. Mogą być to zarówno skutki oceniane jako pozytywne, negatywne oraz neutralne, czyli obojętne. Racjonalność decyzji należy rozumieć jako dokonanie wyboru wariantu zapewniającego najlepszy stosunek pomiędzy pozytywnymi i negatywnymi skutkami oceny tego działania. Podjęcie racjonalnej decyzji wymaga więc wiedzy na temat możliwych jej skutków i przewidywania efektów działań [47,88,99,134].

Według Guitouniego, decydent nie zawsze jest konsekwentny i racjonalny, gdy przychodzi czas na przekazanie swoich preferencji. Działa on w kontekście decyzyjnym, który może na niego wpływać i być przez niego kształtowany. Przyjmując, że decyzja jest wynikiem interakcji pomiędzy wieloma aktorami, na które wpływa kontekst, łatwo jest odrzucić koncepcję racjonalnego podejmowania decyzji. Zdaniem Guitouniego, domena decyzji może być rozpatrywana jako trójkątna faseta – rysunek 1.1. W tych ramach decyzja nie jest ani całkowicie racjonalna, ani całkowicie irracjonalna, ani całkowicie nieracjonalna. Decyzja racjonalna polega na ocenie wszystkich alternatyw, a następnie wyborze tej, która maksymalizuje satysfakcję decydenta lub jego funkcję użyteczności. Racjonalność jest więc związana zarówno z procesem (analizą), jak i jego wynikiem (maksymalizacją). Według Simona [129], decydent nie ma ani czasu, ani zdolności do analizowania wszystkich alternatywnych rozwiązań. Więcej, decydent nie maksymalizuje funkcji [150]. Decyzja oparta na doświadczeniach i wiedzy decydenta jest kwalifikowana jako decyzja nieracjonalna. Decyzja nieracjonalna uwzględnia tylko osobiste aspiracje i awersje [49]. Decyzja podjęta przez decydenta, niedająca się uzasadnić ani wyjaśnić za pomocą logicznego rozumowania, jest decyzją z punktu widzenia problemu decyzyjnego decyzją irracjonalną [145].



Rysunek 1.1. Domena decyzyjna

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [49].

Kolejnym z pojęć, jakie należałoby omówić, jest definicja *p r o b l e m u d e c y – z y j n e g o*. Według I. Kaliszewskiego [58], jest on wyborem wariantu, dla którego wektor wartości kryteriów jest najbardziej preferowany, przy założeniu pewności otoczenia decyzyjnego problemu. Problem występuje, gdy pojawia się luka między tym, co faktycznie istnieje, a tym, co istnieć powinno. Rozwiązanie problemu jest wypracowaniem sposobów rozwiązania sytuacji domykających lukę. Cechą problemu jest to, że przeważnie dysponujemy wieloma sposobami na jego rozwiązanie. Rozwiązanie problemu jest powiązane z podjęciem decyzji. Decyzja dotyczy tylko jednego z potencjalnych rozwiązań. W przypadku wybrania innego sposobu rozwiązania problemu decyzje mogą się różnić, co wynika z faktu, że są one podejmowane w warunkach niepewności [88].

Rozwiązanie problemu musi uwzględniać tzw. paradygmat wielokryterialny, czyli takie elementy, jak:

- istnienie wielu kryteriów;
- sytuacje konfliktowe między kryteriami;
- złożony, subiektywny i źle ustrukturyzowany charakter procesu oceny;
- wprowadzenie decydentów finansowych do procesu oceny.

Głównym ograniczeniem badań operacyjnych jest to, że często pomijają one element ludzki w procesie produkcji. Nauka ta jest ukierunkowana na technologię i nie bierze pod uwagę czynników emocjonalnych oraz innych związanych z pracą człowieka [148].

Ze względu na swoją złożoność i wpływ, jaki ma na nasze życie, teoria decyzji stała się obszarem zainteresowania wielu różnych dziedzin nauki. Zaliczyć możemy do nich informatykę, kognitywistykę, psychologię, zarządzanie, ekonomię, socjologię, nauki polityczne, statystykę i inne [17,38,40,52,144]. Każda z tych dziedzin rozpatruje trochę inne aspekty podejmowania decyzji, ale wszystkie one biorą swój początek w procesach, które zachodzą w ludzkim mózgu. Obecnie ukształtowały się dwie grupy teorii decyzji. Różnią się one określeniem warunków, w jakich decyzje te są podejmowane.

Pierwsza grupa to kognitywistyczne teorie decyzji. Poszukuje się w nich rozwiązań wystarczających, czyli skutecznych, choć z punktu widzenia decydenta nie są to rozwiązania najlepsze. Podstawą tej grupy teorii jest założenie, że ludzie, a zwłaszcza grupy społeczne, zazwyczaj nie postępują w sposób optymalny. Często postępują wręcz w sposób trudny do przewidzenia. W związku z tym faktem teorie należące do tej grupy stają się przedmiotem zainteresowania takich dziedzin nauki, jak psychologia, socjologia i kognitywistyka [35,82].

Do drugiej grupy zaliczane są klasyczne (często nazywane też inżynierskimi) teorie decyzji. Należą do nich dziedziny nauk, w których poszukuje się rozwiązań optymalnych, czyli najlepszych możliwych do uzyskania z punktu widzenia decydenta w danej dziedzinie działalności. Klasyczne teorie decyzji zajmują się analizą procesu podejmowania decyzji w celu dokonania optymalnego wyboru lub jeśli dokonany wybór nie był optymalny, ustaleniu czynników, które miały wpływ na dokonanie błędnego wyboru. Przedmiotem zainteresowania tej grupy teorii decyzji jest też wspomaganie procesu decyzyjnego. Zdecydowana większość metod postępowania związanych z klasyczną teorią decyzji ma charakter normatywny – dąży do znalezienia przez decydenta optymalnego rozwiązania. Decydent powinien w możliwie jak najlepszym stopniu wykorzystać posiadane przez siebie informacje i jednocześnie dokonując wyboru, kierować się racjonalnymi przesłankami. Metody te związane są najczęściej z takimi dziedzinami nauk, jak matematyka, statystyka i ekonomia [82].

Na proces podejmowania decyzji w wielokryterialnym problemie decyzyjnym wpływ ma kilka elementów z jego otoczenia (środowiska). Do najważniejszych należą [88,149]:

- podmiot decyzji, decydent (osoba odpowiedzialna za planowanie, mająca wpływ na podejmowanie decyzji);
- cel decyzji (sytuacja, do której zmierza się poprzez rozwiązanie problemu decyzyjnego)
- problem decyzyjny;
- świadomość i autonomiczność (możliwość podejmowania decyzji w zakresie przyjętych zasad i ustalonego obszaru działania);
- wybór (podjęcie decyzji na podstawie określonych kryteriów różnych wariantów realizacji);
- środowisko podejmowania decyzji (otoczenie).

Złożoność procesu decyzyjnego i potrzeba wykonania kilku powiązanych ze sobą czynności przed podjęciem decyzji końcowej wymusza rozłożenie całego procesu na kilka etapów. W literaturze spotkać się można z dużą różnorodnością ich definiowania oraz definiowania ich zawartości. Najbardziej ogólnie podział procesu podejmowania decyzji na etapy wyszczególnia etap przygotowania oraz etap podjęcia decyzji [75]. Według innych autorów, proces ten można podzielić na trzy etapy, tj. faza rozpoznania, czyli opisanie problemu decyzyjnego, faza projektowania, w której dokonuje się zdefiniowania wariantów, oraz faza wyboru – wskazania najlepszych rozwiązań [44,128]. Niektórzy z autorów w procesie podejmowania decyzji wyszczególniają cztery etapy. Pierwszym z nich jest

sformułowanie problemu decyzyjnego, drugim identyfikacja i scharakteryzowanie potencjalnych wariantów, trzeci polega na ocenie poszczególnych wariantów pod względem założonych celów i posiadanych preferencji, natomiast w czwartym etapie następuje wdrożenie decyzji [14,46]. Inne podejście do podziału na cztery etapy obejmuje następujące czynności w każdym z nich. Są to: określenie przedmiotu decyzji i sensu zalecenia lub udziału, analiza konsekwencji i opracowanie kryteriów, modelowanie preferencji globalnych i koncepcję agregacji ocen, procedury badawcze i opracowanie zalecenia.

Często też możemy spotkać się z pięcioletowym podziałem. W tym przypadku w literaturze również występuje różne podejście autorów odnośnie do zdefiniowania zakresu działań dla poszczególnych etapów. Jednym z nich jest podział na etapy następujące: ustalenie problemu decyzyjnego, pozyskanie informacji, określenie możliwości uzyskania odpowiedniego wyniku, ustalenie kryteriów oraz dokonanie wyboru [33]. Inny proponuje się w podejściu PrOACT (ang. *Problem, Objectives, Alternatives, Consequences, Tradeoffs*). Wyróżnia się w nim następujące etapy: zdefiniowanie problemu decyzyjnego, określenie celów, które chcemy osiągnąć, ustalenie wariantów decyzyjnych, czyli sposobów rozwiązania problemu, analizy i oceny skutków wyboru każdego z wariantów, wybór rozwiązania (wariantu decyzyjnego). Czasami w podejściu tym dodaje się trzy inne etapy uwzględniające niepewność (ang. *Uncertainty*), tolerancję ryzyka (ang. *Risk Tolerance*) oraz powiązane decyzje (ang. *Linked Decision*). Najczęściej dzieje się tak w przypadku procesu podejmowania decyzji w warunkach wrażliwych lub podlegających ewolucji [51]. Podejście PrOACT można również wykorzystać w problemach negocjacyjnych [132]. Kolejne z podejść pięcioletowych, jakie można znaleźć w literaturze, składa się z etapów takich, jak: identyfikacja problemu decyzyjnego, ustalenie możliwych wariantów, określenie kryteriów, ocena wariantów pod względem każdego z kryteriów, wybór najlepszego rozwiązania [5,88,106].

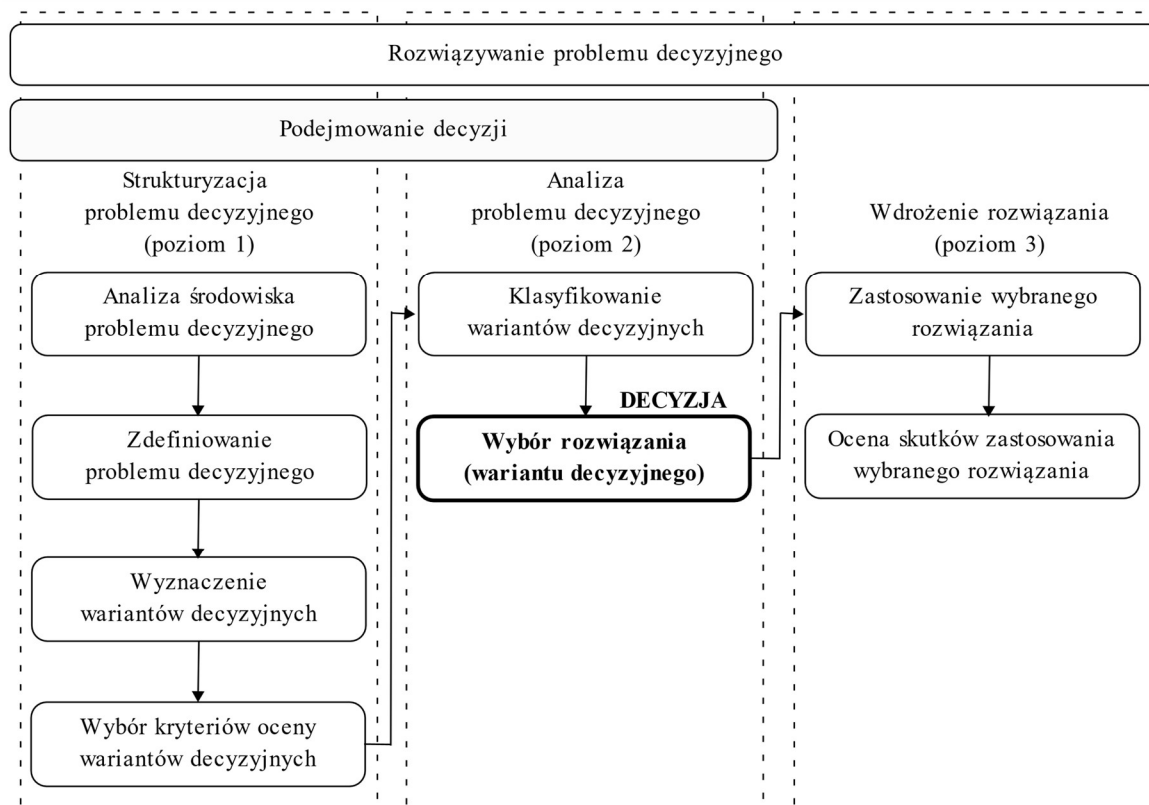
W literaturze spotkać się możemy z kilkoma modelami samego procesu rozwiązywania problemu decyzyjnego. Keeney [63] proponuje w swojej publikacji cztery etapy. Według niego, wyróżnić można podział całego procesu na następujące etapy: strukturyzacja problemu decyzyjnego, ocena możliwych skutków każdego z wariantów, określenie preferencji (wartości) decydentów, ocena i porównanie alternatywnych rozwiązań. Według propozycji Guitouniego [48], wielokryterialne podejście do wspomaganie decyzji to rekurencyjny i nieliniowy proces złożony z pięciu kroków, jak: strukturyzacja DMS (problem), artykulacja i modelowanie preferencji wraz z określeniem informacji międzykryterialnych, agregacja tych preferencji (w celu ustalenia jednego lub więcej globalnych

rozwiązań na zbiorze alternatyw), wykorzystanie agregacji, rekomendacja rozwiązania. Według Roya natomiast, model procesu rozwiązywania problemu decyzyjnego powinien wyglądać następująco: Etap I – Przedmiot decyzji i duch rekomendacji lub uczestnictwa, Etap II – Analiza konsekwencji i opracowanie kryteriów, Etap III – Modelowanie kompleksowych preferencji i operacyjna agregacja świadczenia, Etap IV – Badanie i opracowanie rekomendacji. Te cztery etapy nie powinny być traktowane jako występujące w serii, gdzie jeden etap nie może się rozpocząć, dopóki poprzedni nie zostanie zakończony. Niektóre z opcji na poziomie I lub II mogą zostać podjęte dopiero po zastanowieniu się nad opcjami na poziomie III. Wstępne wyniki na poziomie IV mogą spowodować ponowne rozważenie opcji z poziomu I [112].

Etapy procesu podejmowania decyzji są podstawą każdego procesu rozwiązywania problemu decyzyjnego. W procedurze rozwiązywania problemu decyzyjnego, oprócz wyżej opisanych, zawarte są dwa dodatkowe kroki:

- zastosowanie wybranego rozwiązania;
- ocena skutków zastosowania wybranego rozwiązania oraz ustalenie, czy problem został rozwiązany.

Procedura rozwiązywania problemu decyzyjnego wraz z etapami obejmującymi proces podejmowania decyzji została przedstawiona na rysunku 1.2. Widać na nim dokładnie zależności pomiędzy poszczególnymi etapami podejmowania decyzji oraz dodatkowymi wchodzącymi w skład rozwiązywania problemu decyzyjnego, podział procedury na trzy poziomy, jak również sam moment, w którym decyzja następuje. Procedura przedstawiona na rysunku 1.2 znajduje zastosowanie praktycznie w każdej sytuacji decyzyjnej. A. Prusak i P. Stefanów [106] w swojej publikacji wskazują, że każde działania związane ze wspomaganie podejmowania decyzji wykorzystują algorytmy, które są zwykle połączeniem, kombinacją, uproszczeniem lub też rozszerzeniem przedstawionej na rysunku 1.2 procedury.



Rysunek 1.2. Procedura rozwiązywania problemu decyzyjnego

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [88].

Jak wynika z literatury, w procesie decyzyjnym głównymi uczestnikami są [110,146]:

- interesariusze – podmioty, których dotyczy bezpośrednio proces decyzyjny i efekty tego procesu – włączeni w rozpatrywaną sytuację decyzyjną uczestnicy procesu decyzyjnego. Zazwyczaj w proces decyzyjny zaangażowanych jest kilku interesariuszy (np. zleceniodawcy – klienci, społeczność lokalna lub pracownicy). Prezentują oni różne podejście do rozpatrywanego procesu decyzyjnego, mają wobec niego różne oczekiwania, często też reprezentują przeciwstawne względem siebie interesy społeczne;
- decydent – indywidualny lub zbiorowy. Do jego zadań należy określenie celu (celów) procesu decyzyjnego, wyrażenie swoich preferencji, ocena sytuacji decyzyjnej i ostateczna ocena uzyskanego rozwiązania;
- analityk – zajmuje się badaniem sytuacji decyzyjnej i odpowiada za przebieg procesu decyzyjnego. Podmiot zewnętrzny w stosunku do rozważanego problemu decyzyjnego. Głównymi jego zadaniami są: budowa modelu decyzyjnego oraz dobór metod i narzędzi, które umożliwią otrzymanie rozwiązania dla rozpatrywanego problemu decyzyjnego.

Ponadto musi być przygotowany na pytania ze strony decydenta, które mogą się pojawić w trakcie procesu decyzyjnego, umieć przedstawić decydentowi skutki określonych działań (decyzji) i udzielić decydentowi wsparcia w końcowym etapie procesu decyzyjnego, jakim jest wybór najkorzystniejszego (niekoniecznie najlepszego w otrzymanym rankingu) rozwiązania rozpatrywanego problemu decyzyjnego.

Do podstawowych atrybutów w wielokryterialnych problemach decyzyjnych zaliczamy: zbiór rozwiązań (wariantów) A i spójna rodzina kryteriów oceny F . Zbiór rozwiązań A tworzą obiekty, decyzje, kandydaci, warianty lub czynności, które mają być poddane badaniu i ocenie w trakcie procedury rozwiązywania rozpatrywanego problemu decyzyjnego. W przypadku, gdy zbiór rozwiązań A jest skończony i dostatecznie mały, można go zdefiniować w sposób bezpośredni. Jeżeli natomiast jest nieskończony lub skończony, lecz bardzo liczny, definiuje się go w sposób pośredni. W procesie badawczym możemy operować na zbiorze zdefiniowanym z góry (*a priori*) – stałym lub może on być modyfikowany (ewaluować) podczas przebiegu procedury decyzyjnej, czyli być zbiorem zmiennym [72,146].

B. Roy za spójną rodzinę kryteriów oceny F uważa zbiór kryteriów spełniający określone przez niego poniższe założenia [110], [72]:

- wyczerpywalności oceny – oznacza to, że musi uwzględniać wszystkie możliwe aspekty rozważanego problemu;
- spójności oceny – oznacza to, że każde kryterium musi właściwie kształtować globalne preferencje decydenta;
- brak nadmiarowości – oznacza to, że musi wystąpić niepowtarzalność zakresów znaczeniowych kryteriów.

Kwestią, nad którą należy się zastanowić, jest liczebności zbioru kryteriów oceny F . Warunkiem wielokryterialności, jaki musi być spełniony w wielokryterialnym problemie decyzyjnym, jest minimalna liczba kryteriów wynosząca dwa (problemy bikryterialne). Nasuwa się więc pytanie o wartość maksymalną, którą może przyjąć zbiór kryteriów oceny F . Zakłada się, że wielkość zbioru kryteriów oceny F nie powinna być większa niż 7 ± 2 kryteriów. Większa liczba parametrów oceniających mogłaby mieć negatywny wpływ czynników psychologicznych na racjonalność podejmowanych decyzji. Ponadto uważa się, że taka liczba kryteriów jest adekwatna do możliwości percepcyjnych

przeciętnego decydenta. Przy takiej liczbie kryteriów zaleca się również, by spójna rodzina kryteriów [146,147]:

- uwzględniała interesy wszystkich podmiotów zaangażowanych w proces decyzyjny;
- gwarantowała wszechstronną i kompleksową ocenę rozwiązań procesu decyzyjnego z uwzględnieniem jego różnorodnych aspektów;
- charakteryzowała się przejrzystą i precyzyjną definicją zakresu kryteriów, eliminując jego redundancję.

Wielokryterialny problem decyzyjny możemy opisać wzorem 1.1. Ograniczając się do niektórych elementów modelowania procesu wspomaganie decyzji, uzyskuje się następującą charakterystykę DMS (ang. *decision-making situation*). W kontekście WWD (wielokryterialnego wspomaganie decyzji) zestaw alternatyw musi zostać oceniony według zestawu kryteriów/atributów. Niech A będzie zbiorem rozwiązań alternatywnych, a F/A – rodziną kryteriów/atributów. Wartość i -tej alternatywy według j -tego atrybutu oznaczana jest jako e_{ij} . Ocena każdej z alternatyw A według każdego kryterium/atributu F/A jest zawarta w macierzy wydajności wyników wielokryterialnych E . Układ $(A, F/A, E)$ reprezentuje to, co jest powszechnie znane jako klasyczny model WWD. Model ten opisany jest we wzorze [48]:

$$CM: \left\{ \begin{array}{l} A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_m\} \\ F/A = \{C_1, \dots, C_j, \dots, C_n\} \\ E = \begin{pmatrix} a_1 C_1 & \dots & a_1 C_j & \dots & a_1 C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_i C_1 & \dots & a_i C_j & \dots & a_i C_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_m C_1 & \dots & a_m C_j & \dots & a_m C_n \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

W kontekście metodologii wielokryterialnej znajomość tabeli wyników E może być wystarczająca do zbudowania systemu relacyjnego preferencji na zbiorze alternatyw A . Możliwe jest jednak wprowadzenie innych elementów modelowania w celu wzbogacenia modelu klasycznego $(A, F/A, E)$. Interesujące byłoby na przykład wprowadzenie informacji międzykryterialnych lub dopracowanie kryteriów w celu zniuansowania wyrażania lokalnych preferencji (preferencji wyartykułowanych według każdego kryterium). W ten sposób wymagania informacyjne różnych WWD są odciążane. W rzeczywistości połączenie danych zawartych w tabeli wyników E z elementami modelowania preferencji dostarcza niezbędnych, użytecznych informacji dla WWD [48].

1.2. Preferencje w podejmowaniu decyzji

W wielokryterialnych problemach decyzyjnych między wariantami zachodzą związki, które możemy opisać za pomocą relacji binarnych: symetrycznej, zwrotnej, asymetrycznej, przeciwwzrotnej i przechodniej. Charakterystyki relacji binarnych zostały przedstawione w tabeli 1.1 [110].

Tabela 1.1. Rodzaje relacji

Rodzaj relacji	Opis	Oznaczenie
Symetryczna	zachodzi wtedy (jest spełniona), gdy kolejność zapisu wariantów A_i i A_j jest nieistotna	$A_i I A_j \Uparrow A_j I A_i$
Asymetryczna	zachodzi wtedy (jest spełniona), gdy kolejność zapisu wariantów A_i i A_j jest istotna	$A_i P A_j \Uparrow$ $A_j P A_i$
Zwrotna	zachodzi wtedy (jest spełniona), gdy rozpatrywane warianty są identyczne	$A_i I A_j$
Przeciwwzrotna	zachodzi wtedy (jest spełniona), gdy rozpatrywane warianty są nieidentyczne	$A_i I A_j$
Przechodnia	relacja, która, jeśli zachodzi dla pierwszej (A_i i A_j) oraz drugiej (A_j i A_k) pary wariantów, to zachodzi również dla trzeciej (A_i i A_k) pary wariantów	$A_i I A_j \overset{\circ}{\Uparrow}$ $A_j I A_k \Uparrow$ $A_i I A_k, A_i P A_j$ $\overset{\circ}{\Uparrow} A_j P A_k \Uparrow$ $A_i P A_k$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [110].

Innym podejściem do określenia preferencji jest agregacja preferencji za pomocą relacji przewyższania (tzw. szkoła europejska). Oprócz występujących w tzw. szkole amerykańskiej sytuacji preferencyjnych, wprowadzono w niej możliwość wystąpienia słabej preferencji lub nieporównywalności. Przydają się one w sytuacji, gdy oceniający nie umie lub nie chce wskazać jednoznacznie swoich preferencji odnośnie do konkretnego wariantu. Preferencje te przedstawiono w tabeli 1.2 [110].

Tabela 1.2. Sytuacje preferencyjne

Sytuacja preferencyjna	Opis	Oznaczenie
Równoważność	Wariant A_i jest równoważny wariantowi A_j	A_iIA_j
Silna preferencja	wariant A_i jest silnie pref. nad wariantem A_j	A_iPA_j
	wariant A_j jest silnie pref. nad wariantem A_i	A_jPA_i
Słaba preferencja	wariant A_i jest słabo pref. nad wariantem A_j	A_iQA_j
	wariant A_j jest słabo pref. nad wariantem A_i	A_jQA_i
Nieporównywalność	wariant A_i jest nieporównywalny z wariantem A_j	A_iNA_j

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [110].

Każde z kryteriów należących do zbioru F jest funkcją f zdefiniowaną na zbiorze A , służącą do oceny zbioru A i odzwierciedlającą preferencje decydenta w odniesieniu do określonego aspektu rozpatrywanego problemu decyzyjnego. Kryteria ze zbioru F możemy podzielić na grupy [22,43,117,140]:

- kryterium prawdziwe (ang. *true criterion*) – oparte na strukturze preferencji związanej z preporządkiem zupełnym („model tradycyjny”). Zakłada się, że wszystkie rozwiązania danego problemu są porównywalne, tzn. w sytuacji, w której decydent dokonuje porównania dwóch rozwiązań (wariantów) A_i i A_j , może on preferować pierwsze względem drugiego, co zapisuje się jako A_iPA_j (wariant A_i jest preferowany względem wariantu A_j) lub drugie względem pierwszego – A_jPA_i (wariant A_j jest preferowany względem wariantu A_i) lub ocenić oba jako równoważne, co zapisuje się A_iIA_j (wariant A_i jest równoważny wariantowi A_j) [146]. Preferencje te są związane z wieloatrybutową teorią użyteczności (tzw. szkołą amerykańską).

Funkcję kryterialną $f(x)$ definiuje wzór [110,140]:

$$f_j(A_i) \geq f_j(A_j) = \begin{cases} A_iIA_j & \text{jeśli } f_j(A_i) = f_j(A_j) \\ A_iPA_j & \text{jeśli } f_j(A_i) > f_j(A_j) \end{cases} \quad (1.2)$$

- półkryterium (ang. *semi-criterion*) – oparte na strukturze preferencji związanej z półporządkiem („model progowy”), który zakłada ograniczoną zdolność decydenta do rozróżnienia wariantów. Zasadne jest zatem wprowadzenie pewnej wartości progowej. Poniżej wartości progowej decydent nie dostrzega różnicy między rozpatrywanymi

wariantami lub nie jest w stanie jednoznacznie określić przewagi jednego z rozpatrywanych wariantów nad drugim. Wszystkie wartości różnicy między wariantami wyższe od progu q są uznawane jako wyższość jednego wariantu względem wariantu porównywanego. Zakłada się, że wartość progu q jest stała. Funkcję kryterialną z wprowadzonym dodatnim progiem równoważności q definiuje wzór [110,140]:

$$f_j(A_i) \geq f_j(A_j) = \begin{cases} A_i I A_j & \text{jeśli } |f_j(A_i) - f_j(A_j)| \leq q \\ A_i P A_j & \text{jeśli } f_j(A_i) > f_j(A_j) + q \end{cases} \quad (1.3)$$

Powyższy model ma swoje rozwinięcie. Zamiast stałej wartości progowej q , wprowadzono w nim zmienną wartość progową poprzez zastosowanie funkcji progowej $q(f_j(A_j))$. Funkcja ta wyznacza zakres tolerancji dla którego nie ma różnicy między porównywanymi wariantami, gdy różnica ocen wariantu A_i i wariantu A_j mieści się w granicach tolerancji. Jest to tak zwany model oparty na kryterium przedziałowym. Funkcję kryterialną z funkcją progową definiuje wzór [110,140]:

$$f_j(A_i) \geq f_j(A_j) = \begin{cases} A_i I A_j & \text{jeżeli } |f_j(A_i) - f_j(A_j)| \leq q(f_j(A_j)) \\ A_i P A_j & \text{jeżeli } f_j(A_i) > f_j(A_j) + q(f_j(A_j)) \end{cases} \quad (1.4)$$

- pseudokryterium (ang. *pseudo-criterion*) – oparte na strukturze preferencji związanej z pseudoporządkiem („model podwójnych progów”). Zakłada on istnienie obszaru, w którym dla decydenta rozpatrywane warianty mogą być równoważne jak też jeden z nich może być preferowany względem drugiego. Obszar ten znajduje się między obszarami preferencji a równoważności. Model ten jest oparty na występowaniu dwóch progów: równoważności q i preferencji p . Warianty są dla decydenta równoważne, jeśli znajdują się poniżej progu równoważności. Jeden z wariantów ma przewagę nad drugim z rozpatrywanych wariantów powyżej progu preferencji. Jeden z rozpatrywanych wariantów jest preferowany względem drugiego. Strefa wahań decydenta znajdująca się między progami q i p została przez B. Roya nazwana obszarem słabej preferencji [110]. Występuje w nim relacja słabej preferencji Q charakteryzująca się bardzo małą lub domniemaną wyższością jednego z rozpatrywanych wariantów. Wartości progów q i p mogą być podane jako stałe lub wyrażone za pomocą funkcji. Definicję funkcji kryterialnej w modelu dwuprogowym opisuje wzór [110,140]:

$$f_j(A_i) \geq f_j = \begin{cases} A_i I A_j & \text{jeżeli } |f_j(A_i) - f_j(A_j)| \leq q(f_j(A_j)) \\ A_i Q A_j & \text{jeżeli } f_j(A_j) + p(f_j(A_j)) \geq f_j(A_i) > f_j(A_j) + q(f_j(A_j)) \\ A_i P A_j & \text{jeżeli } f_j(A_i) > f_j(A_j) + q(f_j(A_j)) \end{cases} \quad (1.5)$$

- prekryterium (ang. *precriteria*) – jest to pseudokryterium, dla którego funkcja opisująca próg równoważności $q=0$ lub nie została zdefiniowana [114].

Złożoność problemów decyzyjnych spowodowała, że pierwsze koncepcje wielokryterialnego wspomaganie decyzji (WWD) pojawiły się już w latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku [26]. Za prekursora uznaje się Włocha V. F. D. Pareto (1848–1923). Pareto w pracach dotyczących problemu dystrybucji dochodu narodowego wskazał na mnogość czynników (kryteriów) wpływających na indywidualne wybory. Najważniejszą z jego koncepcji jest optymalizacja, której nazwa pochodzi od jego nazwiska, tj. „Pareto–optymalizacja”. Głównym założeniem tej koncepcji jest fakt, że aby istniało rozwiązanie lepsze, musi istnieć rozwiązanie gorsze. Rozwiązania Pareto–optymalne są nazywane też niezdominowanymi bądź skutecznymi [98]. Koncepcja optymalizacji początkowo stosowana była wyłącznie do zagadnień ekonomicznych. Następnie w latach pięćdziesiątych zaczęto stosować ją w innych dziedzinach wiedzy, w tym również w rozwoju metod wykorzystywanych do wielokryterialnego wspomaganie decyzji [82].

Na upowszechnienie się teorii wielokryterialnego wspomaganie decyzji w znacznym stopniu przyczyniły się też prace z lat pięćdziesiątych T. Koopmansa dotyczące koncepcji wektora sprawnego oraz rozwijających jego badania H. W. Kuhna i A. W. Tuckera [74] dotyczących problemu maksymalizacji wektora oraz warunków występowania rozwiązania sprawnego. Dziesięć lat później prace W. W. Coopera i A. Charnesa dotyczące obszarów programowania celowego stały się podstawą nowoczesnej nauki zarządzania oraz badań operacyjnych [26].

Za początki dynamicznego rozwoju pochodzącej z badań operacyjnych dziedziny wiedzy zwanej wielokryterialnym wspomaganie decyzji (WWD) uważa się lata sześćdziesiąte XX wieku. Wtedy to ukazały się między innymi prace Roy’a [110,111]. Zadaniem wielokryterialnego wspomaganie decyzji jest dostarczenie decydującemu procedur, metod matematyczno-informatycznych oraz narzędzi, które umożliwią mu znalezienie rozwiązania w złożonych problemach decyzyjnych. W problemach tych często w procesie analizy dochodzi do sytuacji, w której to pogodzić należy ze sobą różne punkty widzenia i interesy [146]. WWD B. Roy [110] WWD określa jako pracę analityka, która polega na

pomocy decydentowi w znalezieniu odpowiedzi na pytania związane z poszukiwaniem najbardziej pożądanego rozwiązania. W procesie tym należy uwzględnić wielość celów (kryteriów) branych pod uwagę przez decydenta w trakcie procesu decyzyjnego.

Wspomaganie decyzji należy podzielić na cztery grupy problematyk decyzyjnych [113] wynikające z przyczyny planowanej decyzji i oczekiwanego od wspomaganie tego procesu celu [102,112,130]:

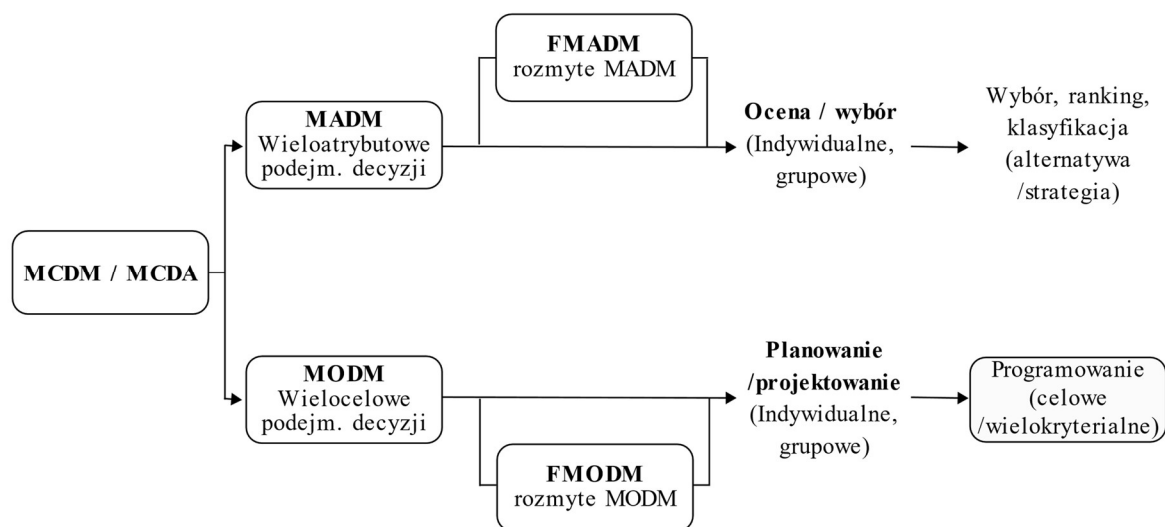
- problematyka opisu – problemem jest sporządzenie opisu wariantów decyzyjnych oraz identyfikacja kryterium lub rodziny kryteriów. Do kategorii tej zaliczyć można problemy takie, jak np.: charakterystykę kondycji finansowej zbioru przedsiębiorstw;
- problematyka wyboru – wspomaganie decydenta polega na wskazaniu mu małej liczby „dobrych” propozycji. Nie jest istotne wybranie optymalnego wariantu. Wybiera się najlepszą opcję z rozważanego podzbioru. Do tej kategorii przyporządkować można problemy takie jak na przykład wybór projektów inwestycyjnych;
- problematyka przyporządkowania – wspomaganie procesu decyzyjnego mające na celu przypisanie alternatywy do jednej z dostępnych kategorii. Zaliczyć do tej kategorii możemy problemy takie, jak predykcja możliwej upadłości przedsiębiorstwa (na podstawie analizy kondycji finansowej);
- problematyka rankingu – której celem jest wspomaganie decydenta w sporządzeniu rankingu wariantów decyzyjnych według zdefiniowanych kryteriów (i określonej relacji przewyższania). Warianty te mogą być wobec siebie wzajemnie „lepsze”, „gorsze”, „nieporównywalne” (lub „nierozróżnialne”). W kategorii tej umieścić można problemy wykonania na przykład: analizy porównawczej i rankingu udziałów lub akcji przedsiębiorstwa na rynku finansowym/giełdzie.

Rozwój teorii analizy wielokryterialnej doprowadził do wyklarowania się pewnych grup metod rozwiązywania problemów decyzyjnych różniących się między sobą odmiennością w podejściu do rozwiązania problemu decyzyjnego. Pierwsza grupa, tak zwana „szkoła amerykańska”, opiera się na maksymalizacji użyteczności przyjętego rozwiązania (optymalizacja wieloatrybutowej funkcji użyteczności), czyli podejmowaniu optymalnej decyzji z uwzględnieniem wielu kryteriów. Według niej, decydent powinien zastosować się do określonego rozwiązania, jako najlepszego możliwego z całego zbioru [82,146]. Druga z nich, tak zwana „szkoła europejska”, koncentruje się na preferencjach decydenta (teoria relacji przewyższania) i skupia się na wspieraniu decydenta w procesie podejmowania decyzji (wyboru), czyli rozwiązywania złożonych, wielokryterialnych

problemów decyzyjnych [147]. Szkoła europejska daje decydentowi możliwość uznania za najlepsze rozwiązanie niekoniecznie optymalne, natomiast spełniające jego oczekiwania w jak największym stopniu [82]. Przyjęto więc zaproponowany przez B. Roya następujący podział metod wielokryterialnego wspomaganie decyzji [110,115,116,151]:

- metody wieloatrybutowej teorii użyteczności, zwane również metodami syntezy do pojedynczego kryterium – wywodzą się one z nurtu amerykańskiego i polegają na optymalizacji jednej, zagregowanej funkcji, tworzącej faktycznie jedno kryterium globalne. Metody te pomijają zagadnienie nieporównywalności jako takie i zakładają, że dla każdej pary atrybutów (kryteriów) decydent wyrazi swoje preferencje w stosunku do jednego z nich lub uzna je za równoważne. Najczęściej wymienianymi reprezentantami tej grupy są metody AHP i UTA [37,135]. W sytuacjach rzeczywistych możemy spotkać się również z rozmytymi problemami decyzyjnymi należącymi do tej grupy;
- metody oparte na relacji przewyższania, nazywane także metodami syntezy przewyższającej – wywodzą się one z europejskiego nurtu i w metodyce rozwiązywania problemów decyzyjnych dopuszczają możliwość występowania nieporównywalności. Oznacza to, że decydent może uznać, iż kryteria są ze sobą nieporównywalne, czyli nie może wskazać wśród nich lepszego. Do grupy tej należą między innymi ELECTRE I–IV oraz PROMETHEE I–II [21,42]. W grupie tej również możemy spotkać działania na liczbach rozmytych;
- metody interaktywne, czyli metody dialogowej oceny lokalnej – wykorzystują one sekwencje prób i błędów podczas dialogu z decydentem. Następuje to poprzez cykliczne powtarzanie fazy obliczeniowej i decyzyjnej. Decydent ma więc możliwość oceny na bieżąco rezultatów procesu decyzyjnego i modyfikację swoich preferencji. Ze względu na ciągle zaangażowanie decydenta w proces decyzyjny pozwalają mu one wniknąć w szczegóły tego procesu, uwzględniać zmieniające się preferencje. Efektem takiego podejścia do procesu decyzyjnego jest większe zaufanie decydenta co do wiarygodności końcowego wyniku. W grupie tej mieszczą się między innymi metody GDF, SWT oraz Pareto–*race* [82].

Klasyfikację problemów WPD (wielokryterialne podejmowanie decyzji) obejmującą metody wieloatrybutowej teorii użyteczności oraz metody oparte na relacji przewyższania dobrze obrazuje rysunek 1.3 [10,61,88,138].



Rysunek 1.3. Klasyfikacja problemów WPD

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [88].

P. Kodikara w swojej pracy proponuje podział metod WWD na pięć kategorii [67]: metody porządkowe, metody ważenia, metody oparte na użyteczności wielu atrybutów, metody szeregowania zewnętrznego oraz inne metody. Według niego, podstawowymi metodami z pierwszej grupy są: metoda Bordy (Black 1958), metoda Condorceta (Condorcet i markiz De 1785), metoda Bowmana i Colantoniego (Bowman i Colantoni 1973) oraz metody leksykograficzne (Fishburn 1974). Wszystkie te metody porządkowe pozwalają uzyskać ostateczny wstępny porządek (tj. ranking) dla zbioru alternatyw. Drugą grupę – metody ważenia – stanowią: metoda sumy ważonej (Kepner i Tregoe 1965) oraz metoda ważonego iloczynu (Pomerol i Barba–Romero 2000). W przypadku metod ważenia wyniki w dużym stopniu zależą od przypisanych kryteriom wag, w przeciwieństwie do metod porządkowych, w których przyjmuje się pewne założenia dotyczące charakteru preferencji. Metody oparte na użyteczności wielu atrybutów oraz metody szeregowania (ang. *outranking*) stanowią znaczną liczbę zastosowań WWD w literaturze. Trzecią grupę stanowią metody oparte na użyteczności wielu atrybutów oceniające i dopasowujące funkcje użyteczności i prawdopodobieństwa do miar wydajności (Keeny i Raiffa 1976). Czwarta obejmuje metody szeregowania oparte na porównywaniu alternatyw (Roy 1968). Pozostałe metody zakwalifikowane przez Kodikarę do grupy piątej zawierają: metody alternatywnego porównywania, metody wykorzystujące odległość od idealnej alternatywy (metody odległościowe) oraz metody permutacji.

Również T. Trzaskalik proponuje podział metod wielokryterialnych na pięć grup [137]: wykorzystujących funkcję użyteczności, opartych na relacjach przewyższania, wykorzystujących punkty odniesienia, opartych na porównaniach parami, interaktywnych.

Jeszcze inny podział proponowany jest w publikacji J. Żaka [146]. Do kryteriów klasyfikacji metod Żak proponuje zaliczyć:

- cel procesu decyzyjnego,
- definiowanie zbioru wariantów decyzyjnych,
- typ dostępnych i przetwarzanych informacji,
- sposób definiowania preferencji lokalnych,
- metodę syntezy preferencji globalnych,
- zmienność czasową rozpatrywanych problemów decyzyjnych,
- dokładność uzyskanych rozwiązań.

Odmienne podejście do podziału metod wielokryterialnego wspomaganie decyzji zaprezentował w swojej publikacji K. Nermend [88]. Podzielił on metody WWD na trzy grupy. Pierwszą grupę stanowią według niego metody oparte na relacji przewyższania takie jak: ELECTRE, REGIME, MELCHIOR, PROMETHEE, TACTIC, ORESTE, NAIADE. Grupę drugą według Nermenda tworzą metody oparte na funkcji użyteczności. W grupie tej znalazły się metody: AHP, ANP, MAUT, SMART, DEMATEL, REMBRANDT, UTA, MACBETH. W trzeciej grupie zaproponowanego przez Nermenda podziału znalazły się metody oparte na miarach agregatowych. Do grupy tej autor zaliczył metody: HELWIG, VMCM, TOPSIS, VMCM-ARI, VIKOR, PVM.

Metody wielokryterialnego wspomaganie decyzji możemy również podzielić na metody deterministyczne i niedeterministyczne (stochastyczne i rozmyte) oraz ze względu na liczbę decydentów zaangażowanych w proces decyzyjny na metody podejmowane jednoosobowo i grupowo [15,16,28]. Te drugie Bana e Costa proponuje podzielić na cztery rodzaje wieloosobowych sytuacji decyzyjnych: indywidualne podejmowanie decyzji w otoczeniu grupowym; hierarchiczne lub biurokratyczne podejmowanie decyzji (scentralizowane i zdecentralizowane); grupowe podejmowanie decyzji lub podejmowanie decyzji przez jedną stronę; oraz wielostronne podejmowanie decyzji [13].

1.3. Zastosowania metod wspomaganie decyzji

O tym, jak popularne jest stosowanie metod wspomaganie decyzji w różnych dziedzinach nauki, świadczyć może liczba artykułów naukowych publikowanych na ten temat. W popularnej wśród naukowców wyszukiwarce artykułów naukowych [159] tylko dla ostatnich kilku lat na hasło „multi-criteria decision making” można znaleźć dziesiątki tysięcy artykułów tematycznie związanych ze wspomaganie decyzji z różnych dziedzin nauki, takich jak inżynieria (ponad 18 tys. artykułów), medycyna i dentystyka (ponad 17 tys.), nauki społeczne (ponad 15 tys.) informatyka (ponad 14 tys.), środowisko (ponad 12 tys.), energetyka (ponad 11 tys.), biznes wraz z zarządzaniem i rachunkowością (ponad 8 tys.) ekonomia z ekonometrią i finansami (ponad 7 tys.), rolnictwo i biologia (ponad 6 tys.). Tematyka problemów decyzyjnych podejmowana w tych publikacjach wskazuje, że wspomaganie problemów decyzyjnych może dotyczyć zarówno problemów, z jakimi człowiek spotyka się na co dzień, jak i ważnych problemów decyzyjnych dotyczących pojedynczego decydenta lub grupy decydentów, jego/ich otoczenia, jak również przedsiębiorstwa, jednostki samorządowej czy państwowej z nim/nimi związanej. Celem pokazania różnorodności podejmowanych problemów decyzyjnych w niniejszej pracy wybrano po kilka przykładów zastosowania metod wspomaganie decyzji z różnych dziedzin nauki, tj. informatyki, ekonomii, zarządzania oraz z konsumenckimi problemami wspomaganie decyzji. Dziedziny te wybrano ze względu na ich bliskość z tematem tejże pracy.

W literaturze spotkać się możemy z takimi problemami decyzyjnymi z informatyki (tabela 1.3) charakterystycznymi dla tej dziedziny wiedzy, jak porównanie i ranking algorytmów [71], zastosowanie algorytmu podejmowania decyzji o wyborze sieci do przekazywania dużej ilości danych [1], wybór lekkiego algorytmu kryptograficznego [34], porównanie języków modelowania procesów biznesowych [50]. Inną grupą decyzji związanych z informatyką są te, które mogą dotyczyć jednostek samorządu terytorialnego na różnych szczeblach, a związane są z wyborem oprogramowania np. systemu informatycznego [96] czy państwowego systemu zarządzania dokumentacją elektroniczną dla polskich gmin [127]. Występują też w informatyce problemy decyzyjne, które mogą dotyczyć zarówno jednostek sektora państwowego, sektora prywatnego (przedsiębiorstw, małych i średnich firm), jak i konsumentów, np. wybór procesora komputerowego [95], wybór dostawcy usług chmurowych [89]. W grupie problemów decyzyjnych związanych z informatyką znaleźć można też takie, które związane są z badaniami wykorzystania

informatyki w społeczeństwie, np. badanie rozwoju społeczeństwa informacyjnego w Polsce [62] czy badanie aktywności w Internecie w pandemii COVID-19 w krajach UE [92].

W ekonomii również występuje duża różnorodność podejmowanych problemów decyzyjnych. W literaturze spotkać się możemy z takimi problemami związanymi z tą dziedziną (tabela 1.4), jak optymalizacja np. optymalizacja linii montażowych dla rzadko powtarzalnych produktów o małych nakładach [142], wybór dostawców i zoptymalizowanie przydziału zamówień w przemyśle bioenergetycznym [126], wybór najlepszego modelu współpracy pomiędzy dwoma podmiotami miejskimi w Krakowie [73]. Drugą grupę problemów związanych z ekonomią, jaką można wyróżnić w problemach decyzyjnych występujących w literaturze, stanowią problemy związane z oceną, np. ocena usług ekosystemowych jezior górskich we Włoszech [45], ocena ścieżek produkcji zrównoważonych paliw lotniczych [3], wpływ technologii przemysłu 4.0 na zrównoważony rozwój [11]. Spotkać się można również z problemami związanymi z ekonomią na szczeblach jednostek samorządowych, instytucji publicznych, np. ustalanie priorytetów modernizacji dróg maksymalizujące dostępność kluczowych udogodnień społecznych i możliwości ekonomicznych w Nigerii [4], zarządzanie konserwacją respiratorów medycznych w szpitalu [101]. Poruszane są też problemy ekonomii w najmniejszych jednostkach społecznych, takich jak rodziny. Jako przykład można tutaj wskazać problem wyboru dostawcy energii dla gospodarstwa domowego w Polsce [81]. Wykonuje się też badania, których celem jest określenie rozwoju ekonomicznego społeczeństwa i inwestycji w społeczeństwo na różnych poziomach, np. klasyfikacja państw członkowskich UE pod kątem ich zarządzania w zakresie promocji technologii pojazdów elektrycznych [79].

Zarządzanie (tabela 1.5) jest również dziedziną, w której wspomaganie problemów decyzyjnych jest często stosowane, a problemy decyzyjne, w których się je stosuje, obejmują różną tematykę i mają różne cele i znaczenie dla decydentów. Stosuje się je zarówno na szczeblach samorządowych: planowanie zasięgu stref zagospodarowania przestrzennego w scenariuszu planowania urbanistycznego [83], ocena jakości szpitali publicznych [109], ocena urzędzeń medycyny nuklearnej do obrazowania [94], wybór modelu drona do wsparcia bezpieczeństwa publicznego [76]; jak i w sektorze prywatnym: wybór lokalizacji centrum dystrybucyjnego [90], ustalenie priorytetów czynników kosztów ogólnych w zwinnym wytwarzaniu oprogramowania [2], dystrybucja premii dla pracowników telefonicznego działu obsługi klienta [57], ocena różnych kombinacji

substrat – membrana filtracyjna do zastosowania na zielonych dachach [23]. W artykułach naukowych z zarządzania również znaleźć można grupę artykułów, których celem jest ogólna ocena społeczeństwa na różnych szczeblach i o różnej tematyce: analiza i ocena rozwoju społeczno-gospodarczego gmin nadmorskich w województwie zachodniopomorskim [133], ocena zasobów rynku pracy jako czynnika atrakcyjności inwestycyjnej regionów na poziomie województw [78].

Dużą grupę w literaturze stanowią problemy decyzyjne dotyczące konsumentów (tabela 1.6). Tutaj znajdziemy zarówno problemy o dużej wadze dla konsumenta (i często też w tym przypadku dla jego rodziny), jak również o mniejszym znaczeniu dla konsumenta i niemających wpływu na jego bliskich. Do przykładowych problemów o dużej wadze (mających wpływ nie tylko na konsumenta, ale i na jego rodzinę, często wiążących się z wydatkowaniem z domowego budżetu dużych środków, często też mających wpływ na konsumenta i jego rodzinę w dłuższym okresie czasowym), o których jest mowa w literaturze, należą: wybór metody budowy budynku mieszkalnego [59], wybór mieszkania [80], wybór materiałów izolacji ścian [30]. Dużą grupę konsumenckich problemów decyzyjnych stanowią też te natury ekonomiczno-ekologicznej: wybór źródła energii [39], wybór systemu ogrzewania wody użytkowej [24], wybór projektów inwestycyjnych w zakresie energii odnawialnej [125], ocena technologii systemów solarnych [25]. Do ciekawych przykładów wspomaganie konsumenckich problemów decyzyjnych, z jakimi możemy się spotkać w literaturze, należy wybór ścieżki kariery [12], który również po części ma wpływ nie tylko na samego konsumenta, ale i na jego bliskich oraz jest związany z dłuższym okresem czasu w życiu decydenta. Jako przykłady wspomaganie decydenta w problemach decyzyjnych o mniejszej wadze wyróżnić można wybór laptopa [143], wspomniane wcześniej wybór procesora do komputera [95], systemu informatycznego [96] do zastosowań domowych czy dostawcy usług w chmurze [89].

Tabela 1.3. Wykorzystanie WWD w problemach decyzyjnych w informatyce

LP	Problem decyzyjny	Zastosowana metoda (metody)	Liczba kryteriów (subkryteriów)	Liczba wariantów	Kryteria	Źródło
1	Badanie rozwoju społeczeństwa informacyjnego w Polsce	AHP	19	10	Finansowe, Kulturowe, Zarządzanie, Jakość	[62]
2	Porównanie i ranking algorytmów	A-TOPSIS	18	21	Wzorce	[71]
3	Wybór procesora	COMET, TOPSIS, VIKOR, PROMETHEE II	9	12	Parametry, Osiągi, Koszt	[95]
4	Zastosowanie algorytmu podejmowania decyzji o wyborze sieci do przekazywania dużej ilości danych	TOPSIS	4	3	Koszt, Parametry, Obciążenie, Siła sygnału	[1]
5	Porównanie języków modelowania procesów biznesowych	AHP	7	5	Ekspresyjność, Czytelność, Użyteczność, Formalność, Obsługa narzędzi, Elastyczność, Łatwość uczenia się	[50]
6	Wybór państwowego systemu zarządzania dokumentacją elektroniczną dla polskich gmin	AHP	5	2	Bariery, Integracja z systemami wewnętrznymi, Osobogodziny w EDMS, Dojrzałość procesowa, Przydatność	[127]

					szkolenia	
7	Wybór systemu informatycznego	COMET, TOPSIS	5	7	Koszt, Czas wdrożenia, Wydajność, Możliwości rozwoju i serwisu, Opinie	[96]
8	Badanie aktywności w Internecie w pandemii COVID-19 w krajach UE	AHP (wagi kryt.), TOPSIS (ranking)	8	36	Podział na poszczególne usługi sieciowe	[92]
9	Wybór lekkiego algorytmu kryptograficznego	PROMETHEE II, TOPSIS, Fuzzy TOPSIS	3(14)	10	Profil algorytmiczny, Profil oprogramowania, Profil sprzętowy	[34]
10	Wybór dostawcy chmury obliczeniowej	AHP	10	5	Liczba usług, Zasięg geograficzny, Zaufanie do dostawcy (bezpieczeństwo), Parametry łącza, Dostępność rozwiązań OS	[89]

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1.4. Wykorzystanie WWD w problemach decyzyjnych w ekonomii

LP	Problem decyzyjny	Zastosowana metoda (metody)	Liczba kryteriów (subkryteriów)	Liczba wariantów	Kryteria	Źródło
1	Optymalizacja linii montażowych dla rzadko powtarzalnych produktów o małych nakładach	AHP, TOPSIS	6	4	Czas, liczba stacji montażowych, Pojemność, Ilość czynności w toku, Liczba pracowników, Bufory	[142]
2	Ocena usług ekosystemowych jezior górskich we Włoszech (Tyrol)	PROMETHEE	5(19)	4	Środowiskowe, Geograficzne, Społeczne, Kulturowe, Ekonomiczne	[45]
3	Wybór dostawców i zoptymalizowanie przydziału zamówień w przemyśle bioenergetycznym	AHP–QFD	28	5	Najważniejsze: długość kontraktu, zapewnienie stałości ceny, koszt, Mechanizm kontroli jakości, Wiarygodność kontrahenta itd.	[126]
4	Wpływ technologii przemysłu 4.0 na zrównoważony rozwój	VIKOR	14	14	Ekonomiczne, Społeczne, Środowiskowe	[11]
5	Zarządzanie konserwacją respiratorów medycznych w szpitalu w Lizbonie (Portugalia)	ELECTRE TRI–NC	5(12)	39	Techniczne, Jakościowe, Użyteczność, Finansowe, Środowiskowe	[101]
6	Ustalanie priorytetów modernizacji dróg maksymalizujące dostępność kluczowych	MAUT	5(8)	59	Socjalne, Ekonomiczne, Demograficzne, Finansowe,	[4]

	udogodnień społecznych i możliwości ekonomicznych w Nigerii				Polityczne	
7	Klasyfikacja 27 państw członkowskich UE pod kątem ich zarządzania w zakresie promocji technologii pojazdów EV	ELECTRE TRI-NC	10	27	Finansowe, Regulacyjne, Infrastruktura	[79]
8	Wybór najlepszego modelu współpracy pomiędzy dwoma podmiotami miejskimi w Krakowie (Polska)	PT-PROMETHEE	6	2	Prawne, Doświadczenie, Gospodarcze, Finansowe, Społeczne, Podatkowe	[73]
9	Ocena ścieżek produkcji zrównoważonych paliw lotniczych	PROMETHEE II	4(24)	11	Społeczne, Środowiskowe, Ekonomiczne, Techniczne	[3]
10	Wybór dostawcy energii dla gospodarstwa domowego w Polsce	AHP	4	4	Koszt, Środowisko, Udział w rynku	[81]

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1.5. Wykorzystanie WWD w problemach decyzyjnych w zarządzaniu

LP	Problem decyzyjny	Zastosowana metoda (metody)	Liczba kryteriów (subkryteriów)	Liczba wariantów	Kryteria	Źródło
1	Wybór lokalizacji centrum dystrybucyjnego prowincji Dong Nai (Vietnam)	ANP (wagi kryt.), TOPSIS (ranking)	5(15)	4	Lokalizacji, Koszt, Usługi, Infrastruktura, Dostępność zasobów ludzkich	[90]
2	Dystrybucja premii dla pracowników telefonicznego działu obsługi klienta	AHP, PROMETHEE II	3	51	Ocena rozmów, Zysk, Dodatkowe zadania	[57]
3	Analiza i ocena rozwoju społeczno-gospodarczego gmin nadmorskich w województwie zachodniopomorskim (Polska)	HELWIG	19	14	Demograficzne, Społeczne, Środowiskowe, Ekonomiczne	[133]
4	Ocena urządzeń medycyny nuklearnej do obrazowania	Fuzzy PROMETHEE	7	5	Parametry, Koszt	[94]
5	Oceny zasobów rynku pracy jako czynnika atrakcyjności inwestycyjnej regionów na poziomie województw (Polska)	TOPSIS	8	16	Demograficzne, Ekonomiczne	[78]
6	Wybór modelu drona do wsparcia bezpieczeństwa publicznego (Brazylia)	PROMETHEE–SAPEVO–M1	5	8	Parametry, Koszty	[76]

7	Ustalenie priorytetów czynników kosztów ogólnych w zwinnym wytwarzaniu oprogramowania	Fuzzy AHP	4(20)	20	Ludzie, Proces, Projekt, Produkt	[2]
8	Ocena jakości szpitali publicznych w Portugalii	ELECTRE TRI-C	5(24)	25	Dostępność, Odpowiedniość opieki, Bezpieczeństwo pacjenta, Efektywność	[109]
9	Ocena różnych kombinacji substrat-membrana filtracyjna do zastosowania na zielonych dachach	PROMETHEE II, TOPSIS, Fuzzy TOPSIS	5	9	Parametry techniczne	[23]
10	Planowanie zasięgu stref zagospodarowania przestrzennego w scenariuszu planowania urbanistycznego w Queensland (Australia)	AHP, Fuzzy AHP	23 (36)	4	Społeczne, Przestrzenne, Techniczne	[83]

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1.6. Wykorzystanie WWD w konsumenckich problemach decyzyjnych

LP	Problem decyzyjny	Zastosowana metoda (metody)	Liczba kryteriów (subkryteriów)	Liczba wariantów	Kryteria	Źródło
1	Wybór metody budowy budynku mieszkalnego	AHP, LCA	8	3	Globalne ocieplenie, Potencjał zakwaszenia, Wpływ na zdrowie ludzi, Potencjał eutrofizacji, Potencjał niszczenia warstwy ozonowej, Potencjał smogu, Zużycie paliw kopalnych, Efekt ekotoksyczności	[59]
2	Wybór mieszkania	Fuzzy game theory	10	8	Materiał (wykorzystany do budowy), Energia (wykorzystana do budowy), Woda (wykorzystana do budowy), Zużycie energii na 50 lat eksploatacji, Straty ciepła, Zużycie CO ₂ na 50 lat eksploatacji, Cena, Koszty pracy, Roczna cena paliwa, Cena zużycia energii na 50-letnią fazę eksploatacji	[80]
3	Wybór materiałów izolacji ścian	VIKOR	6	7	Koszty, Gęstość, Ciepło właściwe, Współczynnik	[30]

					przewodności cieplnej, Współczynnik oporu dyfuzji pary wodnej, Emisja CO2	
4	Wybór źródła energii	ELECTRE III	5 (31)	5	Technologiczne, Techniczne, Ekonomiczne, Środowiskowe, Socjologiczno-polityczne	[39]
5	Wybór systemu ogrzewania wody użytkowej	Delphi	3 (7)	12	Ekonomiczne, Środowiskowe, Społeczne	[24]
6	Ocena technologii systemów solarnych	PROMETHEE	7	12	Koszty inwestycji, Koszty eksploatacji i konserwacji, Koszt energii elektrycznej, Dojrzałość technologii, Wpływ na środowisko, Temperatura, Współczynnik pojemności słonecznej	[25]
7	Wybór projektów inwestycyjnych w zakresie energii odnawialnej	VIKOR, AHP	7	13	Moc, Wskaźnik inwestycji, Okres wdrożenia, Godziny pracy, Okres użytkowania, Koszty eksploatacji i konserwacji, Redukcja emisji CO2	[125]
8	Wybór ścieżki kariery	MACBETH	7	6	Wynagrodzenie, Szacunek, Satysfakcja osobista,	[12]

					Przyjemność, Podróże, Elastyczność lokalizacji	
9	Ocena serwisów bankowości internetowej	TOPSIS	3 (20)	21	Ekonomiczne, Wizualne, Techniczne i bezpieczeństwa	[29]
10	Wybór laptopa	TOPSIS, COPRAS, SPOTIS, COMET, MULTIMOORA MOOSRA	10	7	Parametry, Koszty	[143]

Źródło: opracowanie własne.

Jak wynika z tabel 1.3–1.6, najczęściej wykorzystywanymi metodami WWD w przytoczonych przykładach wspomaganie problemów decyzyjnych są metody AHP oraz TOPSIS. Metodę AHP zastosowano w jedenastu pracach [127], [142], [57], [50], [89], [62], [92], [81], [83], [59], [125]. W dwóch pracach zastosowano jej rozmytą wersję Fuzzy AHP [83], [2], w jednej natomiast jej modyfikację – AHP–QFD [126]. Również w jedenastu pracach zastosowano metodę TOPSIS. Są to prace [96], [142], [90], [143], [1], [34], [95], [92], [23], [78], [29]. Rozmytą wersję TOPSIS – Fuzzy TOPSIS zastosowano w dwóch pracach [34], [23]. Również w jednej pracy zastosowano modyfikację metody TOPSIS – A–TOPSIS [71]. Trochę mniejsza niż liczba prac, w których zastosowano metody z grup AHP i TOPSIS, jest liczba prac, w których wykorzystano do wspomaganie problemów decyzyjnych metody z rodziny PROMETHEE. PROMETHEE II zastosowano w pięciu pracach [3], [57], [34], [95], [23]. W dwóch skorzystano z metody PROMETHEE [45], [25]. W jednej pracy do wspomaganie procesu decyzyjnego posłużyła autorowi metoda rozmyta PROMETHEE – Fuzzy PROMETHEE [94]. W dwóch pracach zastosowano autorskie metody PT–PROMETHEE [73] oraz PROMETHEE–SAPEVO–M1 [76]. W kilku pracach zastosowano metody VIKOR – cztery prace [95], [11], [30], [125] oraz COMET – trzy prace [96], [143], [95]. W dwóch pracach do wspomaganie problemu decyzyjnego użyto metody ELECTRE TRI–NC [101], [79]. Dużą grupę stanowią też prace, w których do wspomaganie problemu decyzyjnego skorzystano z mniej popularnych metod. Po jednym przykładzie wśród zastosowanych w zestawieniu metod stanowią takie metody, jak: MAUT [4], ANP [90], HELWIG [133], ELECTRE TRI–C [109], LCA [59], Fuzzy Game Theory [80], ELECTRE III [39], DELPHI [24], MACBETH [12], COPRAS [143], SPOTIS [143], MULTIMOOR [143], A MOOSRA [143].

Często w literaturze stosowane do wspomaganie problemu decyzyjnego są rozwiązania hybrydowe dwóch lub kilku metod. Łączy się je celem odnalezienia optymalnego rozwiązania. Takie rozwiązanie zastosowali autorzy w artykułach [92] i [90], gdzie jedną metodą ustalono wagi kryteriów, a drugą ranking alternatyw.

Spotkać się też można z podejściem autorów do wspomaganie problemów decyzyjnych wielotorowo, tzn. wykorzystaniem w problemie decyzyjnym dwóch lub więcej metod celem porównania wyników otrzymanych za ich pomocą [96], [142], [57], [143], [34], [95], [83], [23], [59], [125].

Jak wynika z przedstawionych powyżej przykładów zastosowania metod wspomaganie decyzji w wielokryterialnych problemach decyzyjnych, najczęściej we wspomaganie decydenta wykorzystuje się metody AHP, TOPSIS, metody z rodziny metod PROMETHEE lub ich wersje rozmyte Fuzzy AHP, Fuzzy TOPSIS. Wadą wymienionych metod jest nieuwzględnianie w ich procedurze niepewności/niespójności ocen wariantów na poziomie całości badania. Niespójność/niepewność taka może wystąpić przy ich porównywaniu według kryteriów jakościowych, czyli subiektywnych. Może ona być skutkiem błędu decydenta w ocenie poszczególnych wariantów według poszczególnych kryteriów bądź też zamierzonych działań decydenta spowodowanych niekonsekwencją w ocenianiu wariantów decyzyjnych według kryteriów oceny stosowanych w rozpatrywanym problemie decyzyjnym.

W metodzie AHP sprawdza się spójność macierzy ocen osobno dla każdego z kryteriów. Wadą tego rozwiązania jest procedura postępowania w przypadku wystąpienia niespójności macierzy ocen wariantów dla danego kryterium. W przypadku wystąpienia niespójności należy przerwać badanie, dokonać korekt w macierzy ocen dla kryterium, dla którego ta niespójność wystąpiła i ponownie sprawdzić spójność tej macierzy ocen. Wiąże się to z ponownym zaangażowaniem decydenta w proces decyzyjny oraz wydłużeniem czasu całego badania.

Analizując więc powyższe uwagi dotyczące metod najczęściej stosowanych we wspomaganie decydenta w wielokryterialnych problemach decyzyjnych, można wnioskować, że istnieje luka badawcza polegająca na zastosowaniu we wspomaganie decyzji wielokryterialnych metody, która eliminowałaby słabości metod stosowanych dotychczas, mianowicie:

- uwzględniałaby w badaniu niespójność/niepewność ocen dla całości badanego problemu decyzyjnego, wskazując decydentowi miarę ilościową niespójności. Na podstawie miary niespójności decydent na końcu badania, czyli po otrzymaniu rankingu i danych na temat miary niespójności/niepewności, mógłby podjąć decyzję odnośnie do korekt miejsca poszczególnych wariantów w rankingu końcowym badanego problemu decyzyjnego;
- pozwoliłaby na dokończenie badania mimo możliwości wystąpienia niespójności/niepewności ocen bez jego przerywania oraz konieczności dokonania korekt w macierzach ocen;

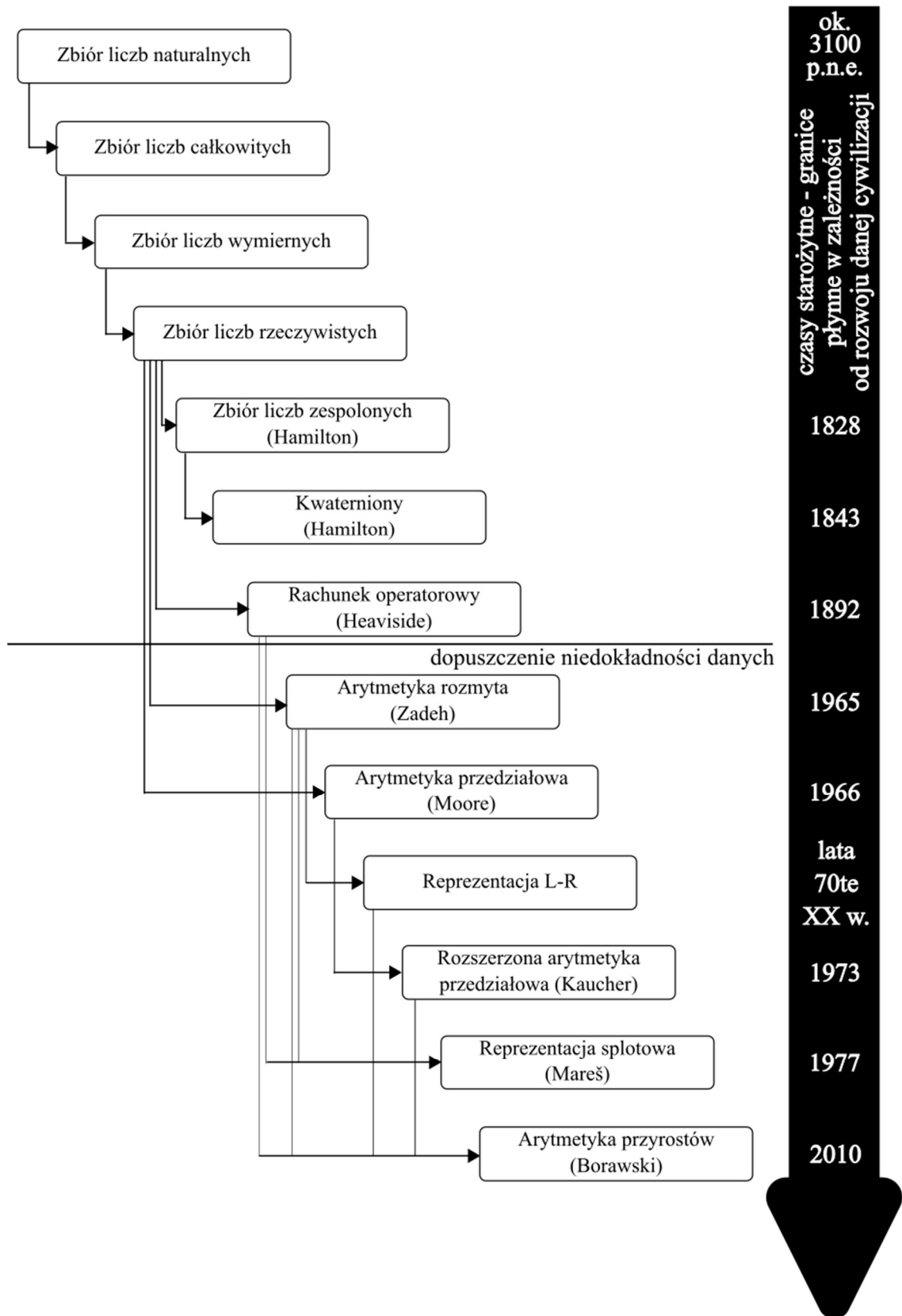
- umożliwiłaby badanie z minimalnym zaangażowaniem decydenta, tzn. tylko na początkowych etapach procedury: podczas formułowania problemu decyzyjnego, określaniu wariantów, kryteriów, ustalaniu wag kryteriów, ocenie wariantów według kryteriów subiektywnych bez późniejszego angażowania decydenta w proces decyzyjny również wtedy, gdy podczas badania wystąpiłaby niespójność/niepewność ocen.

Rozdział II. Podstawy metodyczne opracowanej metody

2.1. Przesłanki stosowania arytmetyki przyrostów

W świecie rzeczywistym informacje często nie są podane za pomocą wartości wyrażonej w konkretnej jednostce miary i nie są możliwe do przetwarzania za pomocą konwencjonalnej matematyki. Dzieje się tak, gdy zamiast wielkości podanych za pomocą precyzyjnych danych, jak na przykład: temperatura, szybkość podana w kilometrach na godzinę czy dochód firmy podany w walucie, posiadamy informacje podane w sposób nieprecyzyjny (na przykład informacje podane w sposób opisowy: wysoka temperatura, niewielka prędkość, niski wzrost). Do niedawna informacje takie nie były brane pod uwagę i nie miały zastosowania, co zmniejszało efektywność różnych metod projektowania, sterowania, prognozowania.

Obliczenia na zbiorach stosowane były już w czasach starożytnych na kilka tysięcy lat przed naszą erą. Ślady zapisu takich obliczeń datowane są w zależności od rozwoju danej kultury, tj. na ok. 3100 lat p.n.e. w Egipcie, ok. 2000 lat p.n.e. w Mezopotamii, ok. 1200 p.n.e. w kulturach Ameryki, ok. 2500 p.n.e. w Indiach, ok. 2000 p.n.e. w Chinach, ok. 1000 p.n.e. w Grecji. Obliczenia te dotyczyły przede wszystkim stanu posiadanych dóbr, takich jak zbiory zdobyte wojennych, gruntów, obliczanie powierzchni budowli, a także miały związek z handlem, podatkami, astronomią itp. [69] Były to obliczenia z wykorzystaniem systemu liczb naturalnych i nie przewidywały niedokładności liczby elementów w zbiorze. Nie przewidywały jej również wywodzące się od nich liczby całkowite uwzględniające występowanie liczb ujemnych i dalej będące ich rozwinięciem liczby wymierne rozszerzające liczby całkowite o wartości ułamkowe (będące w zastosowaniu częściowo już w czasach starożytnych). Liczby niewymierne oraz będące zbiorem liczb wymiernych, i niewymiernych liczby rzeczywiste, jak również będące rozszerzeniem rzeczywistych liczby zespolone także nie uwzględniały tej niedokładności. Dopiero sformułowana w 1965 roku przez Zadeha, wywodząca się ze zbioru liczb rzeczywistych arytmetyka rozmyta (rysunek 2.1) oraz wywodząca się z tego samego zbioru liczb, sformułowana przez Moora arytmetyka przedziałowa (1966), dopuszczają nieprecyzyjność informacji [18]. Od tych dwóch metod pochodzą kolejne: powstała w latach siedemdziesiątych XX w. reprezentacja L–R, opisana przez Kauchera rozszerzona arytmetyka przedziałowa (1973), sformułowana przez Mareša reprezentacja splotowa (1977) oraz zastosowana po raz pierwszy przez Borawskiego arytmetyka przyrostów (2010).



Rysunek 2.1. Historia liczb

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [69] [153] [18].

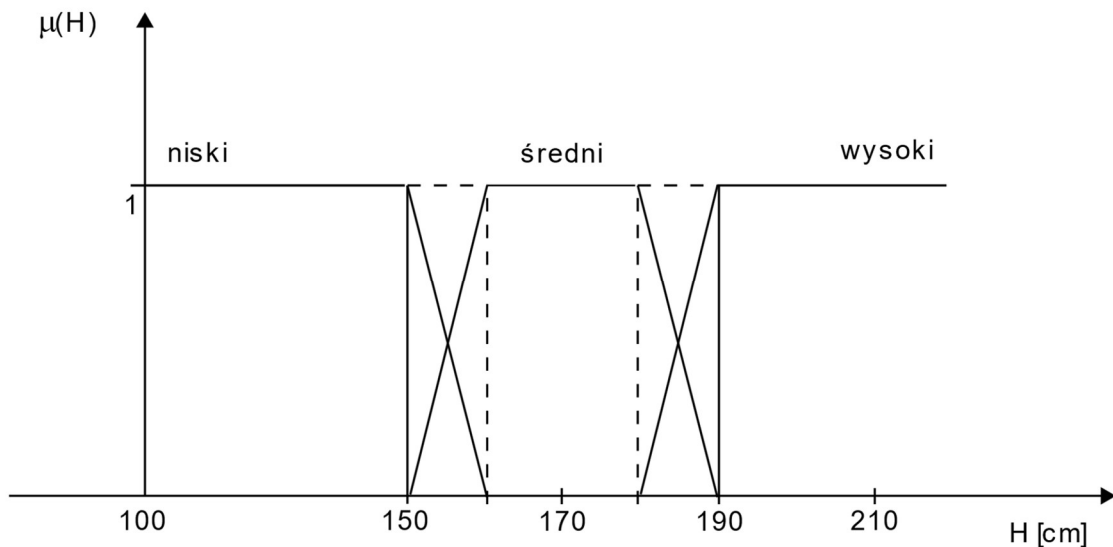
W niektórych przypadkach informacja nieprecyzyjna mogła być jedyną możliwą do pozyskania. Inną kwestią jest, że informacje, które możemy określić jako „precyzyjne”, mogą być obciążone wynikiem z niedoskonałości aparatury lub niedokładności wykonania pomiaru błędem pomiarowym. Te dwie kwestie wpłynęły na ukształtowanie się działu matematyki nazwanego teorią zbiorów rozmytych (TZR). W połączeniu z matematyką konwencjonalną dział ten otwiera nowe perspektywy, umożliwiając wykorzystanie dowolnej informacji. Daje to nowy potencjał do wykorzystania w nauce i technice [100].

Dokonując oceny, człowiek potrafi dostarczyć od 5 do 9 charakterystycznych stanów badanego obiektu [124]. Pojedyncza informacja nazywana jest ziarnem informacji, a liczba ocen – ziarnistością. Informacja dostarczona przez człowieka o ziarnistości skończonej większej od zera określana jest informacją rozmytą (z ang. *Fuzzy*) [100].

Technika komputerowa umożliwia uzyskiwanie modeli o znacznie wyższej dokładności – większej ziarnistości. Praktyka pokazuje jednak, że przekroczenie pewnego progu dokładności jest niewskazane [100].

Rozwój teorii zbiorów rozmytych zapoczątkowany został przez profesora L. Zadeha w latach sześćdziesiątych, jednak największe zainteresowanie nią nastąpiło w latach dziewięćdziesiątych – najpierw w Japonii, a później w innych krajach na świecie. Zainteresowanie nią było zauważalne również w Polsce, w której naukowcy, tacy jak prof. E. Czogała, prof. J. Kacprzyk, prof. W. Pedrycz, wnieśli znaczący wkład w jej rozwój na skalę światową [100].

Ludzie potrafią zastosować zbiory rozmyte w jakościowej ocenie różnych wielkości fizycznych, stanów obiektów, instancji, a także porównania ich między sobą. Nie posiadając urządzeń pomiarowych, potrafimy określić na podstawie własnych odczuć temperaturę, szybkość obserwowanego obiektu, stan nastroju obserwowanej przez nas osoby, jej urodę. Posługując się takimi rozmytymi ocenami, potrafimy radzić sobie doskonale w otaczającym nas świecie. Ocenę jakościową możemy realizować w oparciu o teorię zbiorów rozmytych. Podstawowe pojęcia umożliwiające zrozumienie i zdefiniowanie zbioru rozmytego można znaleźć w monografii prof. A. Piegata [100]. Przykłady takich zbiorów przedstawia rysunek 2.2.



Rysunek 2.2. Możliwa forma zbiorów rozmytych „niski”, „średni”, „wysoki” służących do jakościowej oceny wzrostu dorosłych mężczyzn

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [100].

Na rysunku ocena podana jakościowo jako „średni” reprezentuje zbiór ocen ilościowych od 150 do 190. Oceny „niski” i „wysoki” reprezentują również pewien zbiór ocen ilościowych. Jak więc wynika z rysunku 2.2, ocenom jakościowym określonym w sposób lingwistyczny możemy przypisać pewien zbiór ocen wyrażonych „ilościowo”.

Na zbiorach rozmytych możemy wykonywać operacje arytmetyczne, takie jak w arytmetyce konwencjonalnej: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie. Operacje te są możliwe dzięki ich rozszerzeniu z liczb nierozmytych według zasady rozszerzania sformułowanej przez prof. Zadeha [100].

Przetwarzanie informacji w modelach rozmytych jest procesem wykonania szeregu operacji o charakterze logicznym. Zbiór operacji i pojęć z nimi związanych określany jest jako matematyka zbiorów rozmytych. Do operacji tych należą: operacja przecięcia (iloczynu logicznego) zbiorów rozmytych, operacja połączenia (sumy logicznej) zbiorów rozmytych. Szczegółowo opisane zostały one przez prof. Piegata [100].

Teoria zbiorów rozmytych została wykorzystana z powodzeniem w wielokryterialnych metodach wspomaganie decyzji, takich jak metoda Fuzzy AHP [139] wykorzystana między innymi w pracach [54], [139], [83], [36], [27], [93], metoda Fuzzy ANP [105] czy też wykorzystywana bardzo często metoda Fuzzy TOPSIS [141], [7], [77], [36], [27], [65], [93], [9], [8], [107].

Rejestrując wyniki pomiarów za pomocą urządzenia pomiarowego, zwykle otrzymuje się jedną konkretną wartość. Jeśli pomiar wykonuje się w pewnych odstępach czasu, otrzyma się w zbiór składający się z kilku wartości. Uwzględniając błąd wynikający z niedoskonałości urządzenia pomiarowego oraz tzw. czynnik ludzki, możemy określić przedział, w którym znajduje się lub będzie się zawierać wartość dokładna mierzonej wielkości. Dla przedziałów takich możliwe jest zdefiniowanie działań arytmetycznych.

Definiując działania arytmetyczne na przedziałach, powinno się przyjąć założenia dotyczące zależności tych, na których te działania będą wykonywane. Pod rozważenie należy wziąć dwa przeciwstawne sobie przypadki. Pierwszy przypadek dotyczy sytuacji, gdy wartości w obu rozpatrywanych przedziałach są od siebie zupełnie niezależne. Poddając takie przedziały sumowaniu, mamy możliwość dowolną wartość z pierwszego przedziału zsumować z dowolną wartością z drugiego przedziału. Reguły sumowania muszą być tak dopasowane, by otrzymany w rezultacie sumowania przedział składał się z wszystkich możliwych wyników sumowań wartości z obu przedziałów. Takie działania arytmetyczne związane są z arytmetyką przedziałową. Drugi przypadek dotyczy sytuacji, gdy występuje zależność liniowa między wartościami z obu przedziałów. W tym przypadku sumowanie przeprowadzić należy, sumując pierwszą wartość z pierwszego przedziału z pierwszą wartością z drugiego przedziału, drugą wartość z pierwszego przedziału z drugą wartością z drugiego przedziału itd.

Pierwszy przypadek jest opisem działań arytmetycznych na przedziałach wartości niezależnych liniowo, drugi natomiast na przedziałach wartości zależnych. W rzeczywistości wartości w przedziałach zależne mogą być tylko częściowo. Dlatego też prawdziwy wynik znajduje się pomiędzy wynikami, jakie otrzymamy w obu rozważanych przypadkach. Przedział otrzymany za pomocą arytmetyki przedziałowej obejmuje wynik, jaki uzyskamy w pierwszym przypadku. Jeśli wymagane jest, by poznać przedział zawierający na pewno wartość dokładną bez wskazywania zależności przedziałów, powinno się skorzystać z arytmetyki przedziałowej. Szczegóły dotyczące działań arytmetycznych w arytmetyce przedziałowej zostały opisane m.in. w pracy Borawskiego [18].

W ramach arytmetyki rozmytej zaproponowano natomiast operacje na przedziałach o nazwie reprezentacja L–R. Przedział w reprezentacji L–R nazywa się przedziałem rozmytym, a zapisuje się go w postaci czwórki uporządkowanej, którą przedstawiono wzorem:

$$x \equiv (\underline{m}_x, \bar{m}_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR} \quad (2.1)$$

Gdy funkcja przynależności ma jedno maksimum globalne, założyć można, że \underline{m} i \bar{m} są równe. Przedział $[\underline{m}; \bar{m}]$ redukuje się więc do punktu, a czwórkę uporządkowaną można zastąpić trójką uporządkowaną, jak we wzorze:

$$x \equiv (m_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR}, \quad (2.2)$$

gdzie \underline{m}_x jest punktem centralnym liczby rozmytej.

Opisana przez trójkę uporządkowaną reprezentacja L–R stanowi rozwinięcie mnożenia pomocniczego zdefiniowanego dla rozszerzonej arytmetyki przedziałowej przez E. Kauchera. Działania zdefiniowano w przedziałach z uwzględnieniem liniowej zależności elementów. Granice przedziałów zastąpiono wartością centralną i odległościami od granic przedziałów α oraz β . Uzyskiwane dla obu przypadków wyniki są identyczne. Różnica polega na występowaniu wartości centralnej. Może być nią dowolna wartość z rozpatrywanego przedziału. Dzięki temu możemy – oprócz zachowania się granic przedziałów – śledzić zachowanie się dowolnej wybranej z przedziału wartości. Szczegóły dotyczące działań arytmetycznych zdefiniowanych dla reprezentacji L–R zostały opisane m.in. w pracach Piegata [100] oraz Borawskiego [18].

Wynikiem połączenia arytmetyki przedziałowej ukierunkowanej do operacji na przedziałach i arytmetyki operującej na przedziałach niewłaściwych jest rozszerzona arytmetyka przedziałowa. Między definicjami działań arytmetycznych rozszerzonej arytmetyki przedziałowej a arytmetyki przedziałowej nie ma znaczących różnic. Różnią się definicje przedziału, a w konsekwencji podzbiór zbioru, na którym te arytmetyki funkcjonują. Nie istnieje więc operacja arytmetyczna, która umożliwiłaby przejście między tymi arytmetykami. Można natomiast z pomocą specjalnego operatora przekształcić przedział właściwy w niewłaściwy i odwrotnie. Szczegóły działań arytmetycznych w rozszerzonej arytmetyce przedziałowej zostały opisane m.in. w pracy Borawskiego [18].

Konstrukcja arytmetyki rozszerzonej pozwala na zastosowanie jej do określania zachowania niedokładności w trakcie wykonywania działań oraz analizy zmienności niedokładności. Z uwagi na większą liczbę spełnianych kryteriów dla drugiego przypadku istnieje większy potencjał w postaci skorzystania z większej liczbie metod.

Niestety, nie zawsze mamy możliwość zastosowania arytmetyki rozmytej. W niektórych przypadkach należy zastąpić ją arytmetyką przyrostów. Dzieje się tak dlatego, że w przestrzeni wektorowej niespełnione są aksjomaty przestrzeni wektorowej – brak jest przestrzeni wektorowej.

Zastosowanie w procedurze obliczeniowej obliczeń z wykorzystaniem przyrostów odchyłeń standardowych, wariancji bądź też przedziałów przynosi korzyści w postaci osiągnięcia jednego z dwóch możliwych zamiarów. Pierwszy zamiar możliwy do realizacji przy wykorzystaniu obliczeń z zastosowaniem przestrzeni wektorowej przyrostów to uwzględnienie w końcowym wyniku możliwości wystąpienia błędów podczas przeprowadzania pomiarów i/lub też niedokładności danych początkowych, na których opiera się procedura obliczeniowa będących wynikiem np. niedoskonałości aparatury pomiarowej, błędów mogących być skutkiem operacji niedokładnego przeliczania danych lub też wprowadzania do obliczeń świadomych operacji na danych (przykładem może być zastosowanie filtracji w obrazach), a także innych przyczyn możliwych do oszacowania z wykorzystaniem wariancji, odchylenia standardowego czy też przedziału. Obliczenia te możemy również łączyć ze sobą niezależnie od stopnia zaawansowania etapu obliczeniowego. Stanowi to alternatywę dla arytmetyki rozmytej i arytmetyki przedziałowej. Możemy je wykorzystać w sytuacjach, w których arytmetyki te zastosowane w procedurze obliczeniowej z przyczyn oczywistych być nie mogą. Końcowym wynikiem procedury obliczeniowej jest określona wartość oraz parametr określający wielkość odchylenia od tej wartości otrzymany przy wykorzystaniu w procedurze obliczeniowej przyrostu odchylenia standardowego lub przyrostu przedziału.

Drugim efektem, jaki można osiągnąć, stosując w procedurze obliczeniowej przyrosty odchyłeń standardowych, wariancje bądź przedziały, jest możliwość porównania wyników parametrów, które te miary opisują, np. gdy w proces decyzyjny zaangażowana jest większa liczba ekspertów. W przypadku pojedynczego eksperta zaangażowanego w proces decyzyjny jego oceny są podane za pomocą konkretnych wartości. Kiedy w procesie decyzyjnym uczestniczy więcej niż jeden ekspert, każdy z nich dokonuje oceny, podając konkretne wartości, co powoduje powstanie pewnego zbioru ocen. Wykorzystując przytoczone działania, możemy uchwycić różnice w ocenie ekspertów.

W przypadku wielokryterialnych metod podejmowania decyzji arytmetyka przyrostów może być wykorzystana w procedurze obliczeniowej do kilku celów:

1. uwzględnienie w wyniku końcowym błędów pomiarowych oraz oszacowanie ich wielkości. Błędy pomiarowe mogą być wynikiem niedoskonałości aparatury pomiarowej i/lub wynikać z niedokładności wykonania pomiarów przez człowieka bądź też mogą być związane z ponownym dokonywaniem pomiarów po upływie jakiejś jednostki czasu;
2. wychwycenie stopnia niepewności/niespójności oceny dokonywanej przez decydenta przy porównywaniu parami wytypowanych do badania wariantów w procesie tworzenia rankingu na potrzeby rozpatrywanego problemu decyzyjnego.

Niepewność/niespójność ta może wystąpić z dwóch powodów. Pierwszym z nich jest niezamierzone przez decydenta wprowadzenie niespójności ocen wynikające z dokonywania oceny wariantów za pomocą porównań parami wielu wariantów z uwzględnieniem dużej liczby kryteriów należących do grupy kryteriów subiektywnych, a więc niewyrażonych za pomocą mierzalnych wartości. Oceniając dużą liczbę wariantów według wielu kryteriów, decydent może doprowadzić do niespójności macierzy ocen wariantów, przypisując błędnie oceny poszczególnym z nich. Niespójność ta może zostać niezauważona. W niektórych metodach bada się spójność macierzy ocen (np. AHP) i w przypadku wystąpienia niespójności, jeśli wartość współczynnika niespójności jest wysoka, macierz oceny poddaje się analizie w celu jej wyeliminowania lub odrzuca się dane kryterium. Powoduje to jednak wydłużenie czasu trwania procesu decyzyjnego. Przy zastosowaniu arytmetyki przyrostów w procesie decyzyjnym nie ma potrzeby badania spójności macierzy ocen. Możemy kontynuować proces decyzyjny, a na koniec tego procesu obliczyć wielkość niespójności i ocenić, czy ma ona wpływ na wyniki końcowe procesu decyzyjnego.

Drugim z powodów niepewności/niespójności może być zamierzone przez decydenta wprowadzenie dla danego wariantu według rozpatrywanego kryterium oceny innej przy porównywaniu kryteriów parami, niż wynikałoby to z dokonanych wcześniej porównań wariantów. Na przykład rozpatrzmy proces porównywania trzech wariantów A_1 , A_2 i A_3 według jednego z kryteriów. Jeśli porównując warianty A_1 i A_2 decydent stwierdził, że A_1 ma niewielką przewagę nad A_2 (ocena 2 w pięciostopniowej skali porównań), a A_2 ma dużą przewagę nad A_3 (3), to wariant A_1 powinien mieć analogicznie ogromną przewagę nad A_3 (5). Decydent jednak może nie zgadzać się z tym, iż A_1 ma ogromną przewagę nad wariantem A_3 i porównując ze sobą oba ocenić, że wariant A_1 ma „tylko” dużą (3) lub bardzo dużą (4) przewagę nad A_3 . Wprowadza w ten sposób niespójność, lecz jest to świadomy zabieg

związany z niepewnością ocen przy porównywaniu wariantów. Rozpatrywany przykład obrazuje tabela 2.1. Niespójność ocen wyróżniono pogrubioną czcionką.

Tabela 2.1. Przykład „świadomej” niespójności macierzy ocen

	A_1	A_2	A_3
A_1	1	2	3 (4)
A_2		1	3
A_3			1

Źródło: opracowanie własne.

Zastosowanie arytmetyki przyrostów pozwoli na końcu procedury obliczeniowej ocenić wielkość niespójności i jej wpływ na wyniki końcowe procesu decyzyjnego, a także uwzględnić również niespójność przy tworzeniu rankingu wariantów decyzyjnych w rozpatrywanym procesie decyzyjnym.

Naturalnym punktem odniesienia dla działań arytmetycznych jako działań wywodzących się od operacji na zbiorach jest wartość zero. Gdy określa się liczebność zbiorów, możliwym najmniejszym zbiorem jest zbiór pusty, a zero jest najmniejszą możliwą wartością dla tego zbioru. Podobnie jest przy określaniu takich wielkości, jak wzrost czy wiek. Spotyka się też przypadki, w których możemy przyjąć różne punkty odniesienia. Takim jest na przykład pomiar temperatury. Jeśli podaje się temperaturę w stopniach Kelvina, punktem odniesienia (0 stopni) jest najniższa teoretycznie możliwa temperatura, jaką może mieć ciało – temperatura, w której (według fizyki klasycznej) ustają wszelkie drgania cząsteczek [156]. Gdy temperaturę określa się w stopniach Fahrenheita, jako punkt odniesienia (0 stopni) została ustalona temperatura zamarzania roztworu solanki wykonanej z mieszaniny wody, lodu i chlorku amonu [158], natomiast gdy podaje się temperaturę w odniesieniu do skali Celsjusza, punktem odniesienia (0 stopni) jest temperatura zamarzania wody przy ciśnieniu 1 atmosfery [155].

Wybór punktu odniesienia jest istotny przy podziale liczb na bezwzględne i względne. Zbiór liczb bezwzględnych ma dolną granicę i jest nią zero jako najmniejsza możliwa w tym zbiorze liczba. Liczby bezwzględne służą do opisu wielkości, które nie mogą być ujemne, takie jak na przykład wspomniana temperatura podana w stopniach Kelvina. Zbiór liczb względnych dopuszcza istnienie w nim liczb ujemnych, a zero jest tylko jedną z

wartości zbioru określającą punkt odniesienia. Jako przykład takiego zbioru może posłużyć inflacja, której wartości ujemne są jednym z rodzajów inflacji nazywanym deflacją [154].

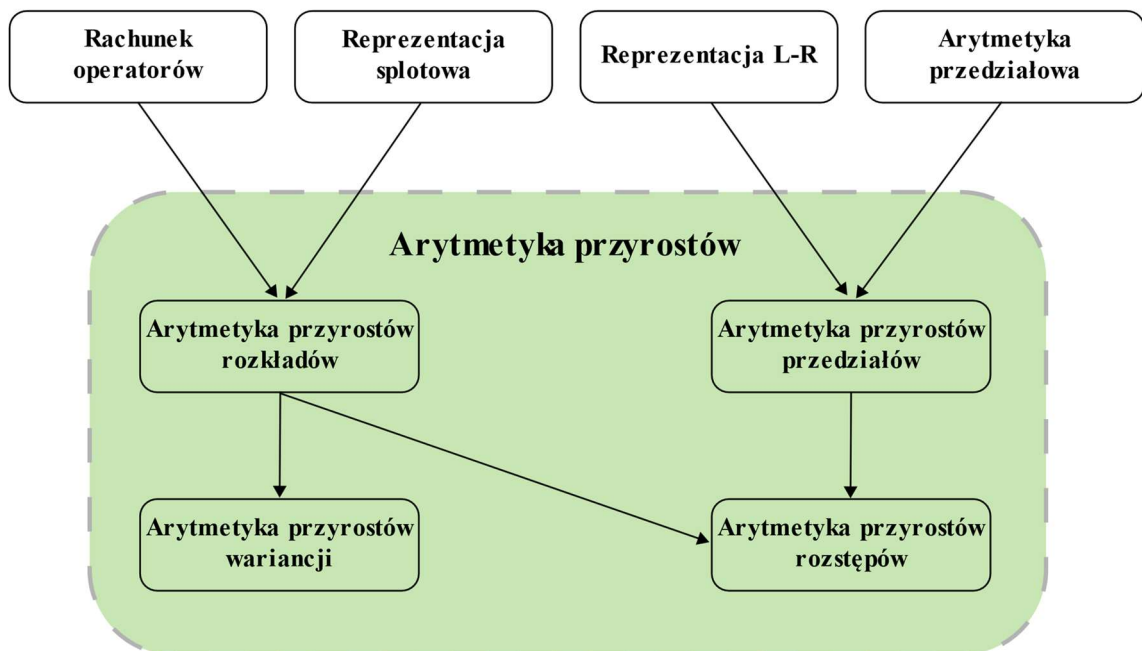
Liczby względne, jeśli nie mają znaku, możemy odróżnić od bezwzględnych na podstawie wielkości przez nie reprezentowanych. Ujemna wartość liczb względnych w niektórych przypadkach może być kwestią umowną. Za przykład takiego przypadku można wziąć wysokość bezwzględną, gdzie tereny depresyjne możemy oznaczyć jako wartości ujemne n.p.m. (nad poziomem morza), ale też przyjąć, że posługujemy się tylko wartościami dodatnimi, oznaczając jako p.p.m. (pod poziomem morza) [157]. W drugim przypadku wysokość bezwzględna wyrażona byłaby za pomocą liczb bezwzględnych.

Kwestia zmiany liczb bezwzględnych w względne w czasie obliczeń wynika z tego, że wiele metod opracowano zakładając istnienie wartości ujemnych, np. definicja elementu przeciwnego w grupie. Wymusza ona istnienie elementów symetrycznych względem neutralnego. Symetrię tę możemy uzyskać na dwa sposoby. Pierwszym jest powiększenie zbioru, na którym wykonuje się działanie wprowadzając do elementy po lewej stronie zera, czyli o ujemnej wartości. Drugim przyjęcie jako punktu wyjścia założenia, iż największy element w zbiorze jest również pierwszym mniejszym od zera.

Arytmetyka przyrostów związana jest z liczbami powstającymi przez obliczenie różnicy między punktem odniesienia a poziomem pewnej wielkości, np. między przyjętą skalą pomiaru temperatury, a wartością aktualnego pomiaru. Z definicji przyrostu bierze się możliwość występowania ujemności. Może być on ujemny nawet wtedy, gdy liczby opisują liczebność zbiorów. Gdy jako punkt odniesienia przyjmie się liczebność zbioru niepustego, możemy otrzymać przyrosty liczebności o ujemnych wartościach. Do określenia liczebności zbiorów należy więc użyć liczb naturalnych, a do przyrostu liczebności liczb całkowitych. Przejście od wartości określających poziomy do wartości określających ich przyrosty w pewnych przypadkach wiąże się więc z rozszerzeniem zbioru liczbowego.

Wartości ujemne definiujące między innymi przyrosty szerokości przedziałów lub wariacji charakteryzuje określona cecha, np. wartość ujemna może opisywać zachowanie się szerokości przedziału. Sama jednak szerokością przedziału nie jest ani nie może nią być. Arytmetyka przyrostów różni się zatem zasadniczo od arytmetyki przedziałowej, jak i rozmytej. Nie można zaliczyć jej więc do obu z wymienionych. W jej obszarze znajdziemy jednak arytmetyki od niej się wywodzące, takie jak na przykład bazująca na definicji działania

dodawania reprezentacji splotowej arytmetyki rozmytej arytmetyka przyrostów rozkładów. Zbiór elementów, na których to działanie jest określone, jest jednak znacznie szerszy ze względu na odmienne rozumienie elementu przeciwnego. Sposób, w jaki definiuje się w niej element przeciwny, jest analogiczny jak w rachunku operatorów przy definiowaniu elementu odwrotnego. Z arytmetyki przyrostów rozkładów można zatem wyprowadzić arytmetykę przyrostów variancji co obrazuje rysunek 2.3.



Rysunek 2.3. Arytmetyka przyrostów

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [18].

Arytmetyka przyrostów sprawdza się w szczególności stosowana wspólnie z rachunkiem wektorowym. Mają tu znaczenie wspólne cechy przyrostów i wektorów. Sformułowanych jest wiele definicji wektorów. Niektóre podobne są do definicji liczb względnych, na przykład „para punktów a i b w przestrzeni P_n , z uwzględnieniem ich kolejności – czyli para uporządkowana [...] nazywa się wektorem o początku a i końcu b ” [20]. P_n jest tu n – wymiarową przestrzenią kartezjańską. Para punktów stanowi dwójkę uporządkowaną. Jej wartością właściwą jest różnica między współrzędnymi punktów końca i początku wektora. Wektor jest więc przyrostem wartości z danego punktu w określonym kierunku. Wektory tworzą osie układów współrzędnych. Rozpatrując układ współrzędnych, możemy więc mówić o przyroście wartości od punktu obranego jako początek układu współrzędnych w kierunku zwrotu osi układu współrzędnych. W

rachunku wektorowym współrzędne należy zatem traktować jako przyrosty. Rachunek wektorowy bazuje więc na arytmetyce przyrostów wartości. W klasycznej arytmetyce operacje na poziomach wartości i na przyrostach nie różnią się, jedynie obiekt reprezentowany przez liczby jest inny. Nie ma więc konieczności wyróżniania arytmetyki przyrostów dla klasycznej arytmetyki. Wyróżnienie arytmetyki przyrostów jest jednak niezbędne, gdy rozpatrywany jest przypadek arytmetyki wykorzystującej operacje na liczbach zawierających wariancję lub szerokość przedziału. Jest to spowodowane odmienną definicją niektórych działań na wartościach bezpośrednich i przyrostach.

Do najważniejszych istotnych cech opisujących rozkład należą wartość średnia i wariancja. Opisując rozkład, korzysta się również z wyliczenia różnicy między największą i najmniejszą uzyskaną wartością, czyli rozstępu. Ma on znaczenie w praktyce. W teorii przyjmuje się najczęściej wartość równą nieskończoności, analogicznie jest natomiast z przyrostami rozkładów. Można je opisać opisaną za pomocą wartości średniej, przyrostu wariancji i przyrostu rozstępu. Wartość średnią i przyrost wariancji rozpatruje się razem. Rozstęp powiązany z jedną z wartości skrajnych osobno. Uwarunkowane jest to odmiennym charakterem działań arytmetycznych.

Jeżeli mamy dwie zmienne losowe x i y oraz zmienną losową z , która stanowi ich sumę, to wartość średnią i wariancję zmiennej z wylicza się ze wzoru [55]:

$$\begin{cases} \eta_z = \eta_x + \eta_y \\ \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2C_{xy} \end{cases} \quad (2.3)$$

gdzie:

η_x, η_y, η_z – wartości średnie zmiennych x, y, z ,

$\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ – wariancje zmiennych x, y, z ,

C_{xy} – kowariancja pomiędzy zmiennymi x, y .

Jeśli zmienna losowa y stanowi iloczyn zmiennych x i y , jej wartość średnią i wariancję wylicza się z następującego wzoru [55]:

$$\begin{cases} \eta_z = \eta_x \eta_y + C_{xy} \\ \sigma_z^2 = \eta_x^2 \sigma_y^2 + \eta_y^2 \sigma_x^2 + 2C_{xy} \eta_x \eta_y \end{cases} \quad (2.4)$$

Wartość kowariancji występującą we wzorach 2.1 i 2.2 wyznacza się na podstawie wzoru [55]:

$$C_{xy} = r_{xy}\sigma_x\sigma_y, \quad (2.5)$$

gdzie r_{xy} – współczynnik korelacji między zmiennymi x i y .

Wartości reprezentowane przez zmienne x i y mogą być liniowo zależne – pierwszy przypadek. Można dla niego przyjąć wartość współczynnika korelacji minus jeden lub jeden. Wartości te mogą być niezależne od siebie – drugi przypadek. Wartość współczynnika korelacji w tym wypadku przyjmie wartość zero. Są to przypadki skrajne, pomiędzy którymi zawierają się wszystkie inne, dla których zmienne są zależne częściowo.

W rozważanym przypadku możemy wybrać dowolną zmienną. Wszystkie pozostałe zmienne natomiast podzielić na skorelowane z nią dodatnio i ujemnie. Wartość odchylenia standardowego jest zawsze wartością dodatnią. Można przypisać jej znak w zależności od tego, czy zmienna znajduje się w grupie zmiennych skorelowanych dodatnio – znak dodatni, czy w grupie zmiennych skorelowanych ujemnie – znak ujemny. Pozwala to na zastąpienie wzoru 2.16 wzorem:

$$\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y \quad (2.6)$$

Wartości odchyłeń będą się dodawać lub odejmować i jest to zależne od grupy, do której należeć będą zmienne. Wartość odchylenia wzrośnie dla zmiennych skorelowanych ze sobą dodatnio, czyli należących do tej samej grupy, a zmaleje dla zmiennych należących do różnych grup. Związane jest to z tym, iż mają one w drugim przypadku przeciwne znaki – dodawanie zmienia się w odejmowanie.

Z tych samych względów jak w przypadku dodawania znak „-” możemy zastąpić znakiem „+” – wzór:

$$\begin{cases} \eta_z = \eta_x\eta_y + \sigma_x\sigma_y \\ \sigma_z = \eta_x\sigma_y + \eta_y\sigma_x \end{cases} \quad (2.7)$$

Należy zaznaczyć, że odchylenie standardowe nie stało się ujemne, mimo wprowadzenia przed nim znaku ujemnego. Znak ten jest tylko dodatkową informacją, która wskazuje na skorelowanie danej zmiennej z pewną inną zmienną dowolnie wybraną. Znak odchylenia standardowego jest zależny od wybranej zmiennej i może być dodatni lub ujemny.

Wychodząc od działań arytmetycznych dla odchyłeń, możemy zdefiniować działania arytmetyczne dla przyrostów odchyłeń. Dodawanie przyrostów odchyłeń można zapisać za pomocą wzoru:

$$\begin{cases} \Delta\eta_z = \Delta\eta_x + \Delta\eta_y \\ \Delta\sigma_z = \Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y \end{cases} \quad (2.8)$$

Zakłada się, że zbiory wartości, reprezentowane przez zsumowane przyrosty wartości średnich i odchylenia standardowego mają korelację równą jeden lub minus jeden. Działanie dodawania dla elementów zbioru $\mathbb{L}(\Delta\eta\Delta\sigma)$:

1. jest łączne,
2. ma dokładnie jeden element neutralny $e = (0;0)$,
3. dla każdego elementu $(\Delta\eta; \Delta\sigma)$ posiada jeden i tylko jeden element odwrotny (przeciwny).

Struktura algebraiczna $(\mathbb{L}(\Delta\eta\Delta\sigma); +)$ stanowi grupę. Działanie dodawania jest przemienne jest to więc grupa abelowa.

Mnożenie przyrostów odchyłeń można zapisać natomiast wzorem:

$$\begin{cases} \Delta\eta_z = \Delta\eta_x\Delta\eta_y + \Delta\sigma_x\Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z = \Delta\eta_x\Delta\sigma_y + \Delta\eta_y\Delta\sigma_x \end{cases} \quad (2.9)$$

Arytmetyka przyrostów odchyłeń standardowych nie różni się od arytmetyki odchyłeń standardowych. Spowodowane jest to wprowadzeniem możliwości występowania ujemnych wartości dla odchyłeń standardowych.

Dla zmiennych o wartościach liniowo niezależnych kowariancja przyjmuje wartość zero. Dodawanie można więc zapisać za pomocą wzorów:

$$\begin{cases} \eta_z = \eta_x + \eta_y \\ \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{cases} \quad (2.10)$$

mnożenie natomiast:

$$\begin{cases} \eta_z = \eta_x\eta_y \\ \sigma_z^2 = \eta_x^2\sigma_y^2 + \eta_y^2\sigma_x^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Mamy tu do czynienia z pozorną sprzecznością. Suma n jednakowych wariacji powinna dać wartość $\eta\sigma^2$, nie zaś jak wynikałoby to ze wzoru 2.11 $\eta^2\sigma^2$. Sprzeczność ta wynika z istnienia dwóch rodzajów mnożeń. W klasycznej arytmetyce ich obliczanie jest

identyczne. Nie ma więc konieczności rozróżniania ich. Pierwszy rodzaj mnożenia wywodzi się z wielokrotnego dodawania. Drugim mnożeniem natomiast jest zmiana skali występująca na przykład przy powiększaniu, zmiany jednostek pomiarowych.

W przypadku wariancji i działań arytmetycznych na niej punktem odniesienia jest wartość średnia, którą należy rozumieć jako całość. Działania arytmetyczne wywodzą się z operacji na zbiorach. Podstawowym sposobem mnożenia jest więc mnożenie przez wielokrotne dodawanie. Stąd wzór 2.11 będzie wyglądał następująco – wzór:

$$\begin{cases} \eta_z = \eta_x \eta_y \\ \tilde{\sigma}_z^2 = \eta_x \tilde{\sigma}_y^2 + \eta_y \tilde{\sigma}_x^2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Użycie w nim zwykłej wariancji prowadziłyby do błędnych wyników, dlatego użyto wariancji przeliczonej do specjalnej postaci i oznaczono $\tilde{\sigma}^2$. Nie odnosi się ona do całej wartości średniej, ale do jej jednostki miary. Jest ona zsumowaną wariancją przypadającą na jednostkę miary wartości średniej – sumowanych jest tyle wariancji, ile jednostek miary przypada na jedną wartość średnią. Wyznacza się ją, dzieląc klasyczną wariancję przez wartość średnią, którą traktuje się jako stałą. Daje to wariancję przypadającą na jedną jednostkę miary wartości średniej, którą mnoży się przez liczbę jednostek miary przypadających na wartość średnią.

W obliczeniach wykorzystuje się wartość bezwzględną wartości średniej, ponieważ jest ona tylko czynnikiem skalującym mającym za zadanie zmniejszenie albo zwiększenie wariancji. W przeciwnym przypadku przy ujemnych wartościach średnich nastąpiłaby zmiana znaku wariancji.

Wariancji w postaci $\tilde{\sigma}^2$ nie można dodawać. Nie ma więc możliwości zamiany mnożenia przez skalowanie na mnożenie przez wielokrotne dodawania przy zachowaniu prostej formy dodawania.

Wychodząc ze wzorów 2.10 oraz 2.11, możemy zdefiniować wzór 2.13 na dodawanie przyrostów wariancji:

$$\begin{cases} \Delta \eta_z = \Delta \eta_x + \Delta \eta_y \\ \Delta \sigma_z^2 = \Delta \sigma_x^2 + \Delta \sigma_y^2 \end{cases} \quad (2.13)$$

oraz wzór 2.14 na mnożenie przez skalowanie:

$$\begin{cases} \Delta\eta_z = \Delta\eta_x\Delta\eta_y \\ \Delta\sigma_z^2 = \Delta\eta_x^2\Delta\sigma_y^2 + \Delta\eta_y^2\Delta\sigma_x^2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Opisują one dodawanie i mnożenie, gdy mamy całkowitą niezależność zmiennych.

Przyrosty wariancji możemy również łączyć z przyrostami liczebności. Wzór na dodawanie będzie w tym przypadku wyglądał jak wzór:

$$\begin{cases} \Delta\kappa_z = \Delta\kappa_x + \Delta\kappa_y \\ \Delta\sigma_z^2 = \Delta\sigma_x^2 + \Delta\sigma_y^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

a na mnożenie przez wielokrotne dodawanie można opisać wzorem:

$$\begin{cases} \Delta\kappa_z = \Delta\kappa_x\Delta\kappa_y \\ \Delta\sigma_z^2 = \Delta\kappa_x\Delta\sigma_y^2 + \Delta\kappa_y\Delta\sigma_x^2 \end{cases} \quad (2.16)$$

gdzie $\Delta\kappa_x, \Delta\kappa_y, \Delta\kappa_z$ – wartości określające przyrosty liczby sumowań.

Zakłada się, że zbiory wartości reprezentowane przez sumowane przyrosty wartości średnich i wariancji mają korelację równą zeru. Działanie dodawania dla elementów zbioru $\mathbb{L}(\Delta\eta\Delta\sigma^2)$:

1. jest łączne,
2. ma dokładnie jeden element neutralny $e = (0;0)$,
3. dla każdego elementu $(\Delta\eta\Delta\sigma^2)$ ma jeden i tylko jeden element odwrotny (przeciwny).

Struktura algebraiczna $((\Delta\eta\Delta\sigma^2);+)$ stanowi grupę. Działanie dodawania jest przemienne. Jest to więc grupa abelowa.

2.2. Przestrzeń wektorowa przyrostów

Gdy w obliczeniach mamy do czynienia ze złożonymi liczbami składającymi się z wielu wartości, największą trudność sprawia oddzielenie w obliczeniach liczb opisujących rzeczywiste wielkości (np. waga, temperatura) od liczb bezpośrednio niezwiązanych z wielkościami rzeczywistymi. Jeśli liczby opisujące rzeczywiste wielkości w sposób bezpośredni mają te same własności co liczby opisujące je pośrednio, z praktycznego punktu widzenia nie zachodzi konieczność dzielenia ich na odrębne klasy. Dąży się do stosowania jednego rodzaju liczb. Związane jest to z trudnościami z dokonaniem podziału i trudnościami metodycznymi, jakie podział wprowadza. Stosowanie jednego rodzaju liczb jest wygodne z racji tego, iż podstawowe zbiory liczb naturalnych, całkowitych,

rzeczywistych oraz zespolonych są swoimi kolejnymi rozszerzeniami. Jeśli zatem używane w obliczeniach wielkości są liczebnościami zbiorów, a opisujące je parametry muszą być wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych, można na potrzeby obliczeń założyć, iż liczebność wyrażana jest za pomocą zbioru liczb rzeczywistych. Wynik po wykonaniu obliczeń będzie się więc sprowadzał do zbioru liczb naturalnych. Jeżeli wartość uzyskana w obliczeniach będzie ujemna, możemy przyjąć ją jako rozwiązanie zerowe lub też brak rozwiązania. Natomiast rozwiązania niecałkowite możemy ustalić, wykorzystując zaokrąglenie liczb sprowadzić do wartości całkowitych.

Ujednolicanie liczb jest uproszczeniem, które w przypadku podstawowych zbiorów liczbowych daje satysfakcjonujące wyniki. Problematiczna jest sytuacja, kiedy w obliczeniach mamy do czynienia z liczbami, których nie da się ujednolicić, ponieważ mają różne właściwości. Należy wtedy poszukiwać metod, w których rozróżnianie jest łatwe do przeprowadzenia. Szczególną przydatnością cechują się metody, w których wykorzystywany jest rachunek wektorowy. Istnieją w nim dwa odrębne elementy, na których wykonuje się obliczenia, tj. wektory i skalary. Gdy mamy przestrzeń jednowymiarową, wektor staje się liczbą względną, której długość wyznacza wartość liczby, natomiast zwrot – znak tej liczby. Z uwagi na to, iż operacje arytmetyczne na wektorach sprowadzają się do dodawania, działania mnożenia nie musimy określać. Możemy zatem wykorzystać jako wektory liczby, dla których mnożenie częściowo lub w ogóle nie jest określone. Co do skalarów wymagania są dużo większe. Muszą być to liczby ze zbiorów liczb wymiernych, rzeczywistych lub zespolonych. Łącznikiem między wektorami i skalarami jest mnożenie wektora przez skalar. Jest to dla wektorów jedyne działanie mnożenia, jakie musi być zdefiniowane.

Można jednak zdefiniować przestrzeń wektorową, opierając się na zbiorze $\mathbb{L}_{\Delta\eta\Delta\sigma^2}$, w którym skalarami są liczebności. Dla elementów, które należą do tego zbioru, można zdefiniować zbiór $\mathbb{L}_{\Delta\eta\Delta\sigma^2 n}$ n -tek uporządkowanych będących wektorami n -elementowymi, co opisać można wzorem:

$$((\Delta\eta_1; \Delta\sigma_1^2); (\Delta\eta_2; \Delta\sigma_2^2); \dots; (\Delta\eta_n; \Delta\sigma_n^2)) \quad (2.17)$$

Wartości przyrostów wariancji będą reprezentowały przyrosty rozkładów brzegowych pewnego przyrostu rozkładu n -wymiarowego.

Zbiór $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2 n}$ wraz z ciałem liczb rzeczywistych spełnia wszystkie aksjomaty przestrzeni wektorowej, stanowi zatem przestrzeń wektorową. Podobne dowody można przedstawić dla zbioru $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2}$. Można wskazać, że jest on również przestrzenią wektorową. Dodawanie wektorów realizuje się poprzez dodawanie odpowiadających sobie elementów wektorów, natomiast dwuargumentowe działanie można opisać wzorem [19]:

$$(x_0; x_1; \dots; x_{m-1}) + (y_0; y_1; \dots; y_{m-1}) = (x_0 + y_0; x_1 + y_1; \dots; x_{m-1} + y_{m-1}) \quad (2.18),$$

gdzie $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{L}_{(\Delta\eta; \Delta\sigma^2)}$.

Zbiór $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2 n}$ ma następujące własności przestrzeni wektorowej:

1. Dodawanie elementów zbioru $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2 n}$ jest wykonywane na odpowiadających sobie elementach n -tek uporządkowanych. Zbiór $\mathbb{L}_{\Delta\eta\Delta\sigma^2}$ z działaniem dodawania stanowi grupę abelową, więc zbiór $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2 n}$ z działaniem dodawania będzie również stanowił grupę abelową.
2. Na zbiorze skalarów, który jest zbiorem liczb rzeczywistych, i na zbiorze $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2 n}$ możemy zdefiniować działanie dwuargumentowe opisane wzorem:

$$a(x_0; x_1; \dots; x_{m-1}) = (ax_0; ax_1; \dots; ax_{m-1}) \quad (2.19),$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, a $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{L}_{(\Delta\eta; \Delta\sigma^2)}$

Zbiór $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2 n}$ wraz z ciałem liczb rzeczywistych spełnia wszystkie aksjomaty przestrzeni wektorowej, stanowi zatem przestrzeń wektorową. Podobne dowody można przedstawić dla zbioru $\mathbb{L}_{\Delta\eta n\Delta\sigma^2}$. Można wskazać, że jest on również przestrzenią wektorową. Dodawanie wektorów realizuje się poprzez dodawanie odpowiadających sobie elementów wektorów.

W przypadku obliczeń, w których jest ważna zależność między współrzędnymi obiektów, istnieje konieczność posłużenia się przestrzenią ze zbiorem wektorów $\mathbb{L}_{(\Delta\eta; \Delta\sigma^2; cov)}$ zawierającym elementy mające w składzie kowariancję opisaną wzorem:

$$\left(\begin{array}{c} \Delta\eta_{x_0}; \Delta\eta_{x_1}; \dots; \Delta\eta_{x_{m-1}}; \Delta\sigma_{x_0,0}; \Delta\sigma_{x_0,1}; \dots; \Delta\sigma_{x_0,m-1}; \\ \Delta\sigma_{x_1,0}; \Delta\sigma_{x_1,1}; \dots; \Delta\sigma_{x_1,m-1}; \dots; \Delta\sigma_{x_{m-1},0}; \Delta\sigma_{x_{m-1},1}; \dots; \Delta\sigma_{x_{m-1},m-1} \end{array} \right) \quad (2.20),$$

gdzie $\Delta\eta_{x_0}; \Delta\eta_{x_1}; \dots; \Delta\eta_{x_{m-1}}$ to przyrost wartości średniej, m to liczba wymiarów przestrzeni, a $\Delta\sigma_{x_i,j}$ to przyrost kowariancji pomiędzy x_i – tą, a x_j .

Przyjmuje się, że korelacja reprezentowanych przez wektory zbiorów wartości równa jest zeru. Dodawanie elementów zbioru $\mathbb{L}_{(\Delta\eta;\Delta\sigma^2;\Delta cov)}$ można zapisać zatem tak:

$$\begin{aligned} & (\Delta\eta_{x_0}; \Delta\eta_{x_1}; \dots; \Delta\eta_{x_{m-1}}; \Delta\sigma_{x_0x_0}; \dots; \Delta\sigma_{x_{m-1},x_{m-1}}) + \\ & + (\Delta\eta_{y_0}; \Delta\eta_{y_1}; \dots; \Delta\eta_{y_{m-1}}; \Delta\sigma_{y_0y_0}; \dots; \Delta\sigma_{y_{m-1},y_{m-1}}) = \\ & = (\Delta\eta_{x_0} + \Delta\eta_{y_0}; \Delta\eta_{x_1} + \Delta\eta_{y_1}; \dots; \Delta\eta_{x_{m-1}} + \Delta\eta_{y_{m-1}}; \\ & \quad \Delta\sigma_{x_0x_0} + \Delta\sigma_{y_0y_0}; \dots; \Delta\sigma_{x_{m-1},x_{m-1}} + \Delta\sigma_{y_{m-1},y_{m-1}}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Mnożenie wektora przez skalar możemy zdefiniować wzorem:

$$\begin{aligned} & a(\Delta\eta_{x_0}; \dots; \Delta\eta_{x_{m-1}}; \Delta\sigma_{x_0x_0}; \dots; \Delta\sigma_{x_{m-1},x_{m-1}}) = \\ & = (a\Delta\eta_{x_0}; \dots; a\Delta\eta_{x_{m-1}}; a\Delta\sigma_{x_0x_0}; \dots; a\Delta\sigma_{x_{m-1},x_{m-1}}) \end{aligned} \quad (2.22),$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Dla zbioru $\mathbb{L}_{\Delta\eta\Delta\sigma}$ możemy również zdefiniować przestrzeń wektorową. Elementy tego zbioru będą tworzyć n -tki uporządkowane, co można opisać wzorem:

$$(x_0; x_1; \dots; x_{m-1}) \quad (2.23),$$

gdzie $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{L}_{(\Delta\eta;\Delta\sigma)}$, a m jest liczbą wymiarów przestrzeni.

W zbiorze tym dodawanie możemy zdefiniować wzorem:

$$\begin{aligned} & (x_0; x_1; \dots; x_{m-1}) + (y_0; y_1; \dots; y_{m-1}) \\ & = (x_0 + y_0; x_1 + y_1; \dots; x_{m-1} + y_{m-1}) \end{aligned} \quad (2.24),$$

gdzie $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{L}_{(\Delta\eta;\Delta\sigma)}$.

Zbiór $\mathbb{L}_{\Delta\eta n \Delta\sigma n}$ nad ciałem liczb rzeczywistych stanowi przestrzeń wektorową. Dowody są analogiczne jak te przedstawione dla zbioru $\mathbb{L}_{\Delta\eta n \Delta\sigma^2 n}$. Działanie dwuargumentowe możemy zdefiniować wzorem:

$$a(x_0; x_1; \dots; x_{m-1}) = (ax_0; ax_1; \dots; ax_{m-1}) \quad (2.25),$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, a $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{L}_{(\Delta\eta;\Delta\sigma^2)}$.

Wektory w przestrzeni możemy poddawać transformacjom. Przykładami takich transformacji są:

- przesunięcie, zmiana skali, obrót,
- transformacja Fouriera,

- transformacje falkowe.

Transformacji możemy dokonać na wektorach opisujących położenie obiektów lub tworzących układy współrzędnych.

Opisy transformacji wykonuje się przy wykorzystaniu kwadratowych macierzy transformacji M mających rozmiar równy wymiarowi przestrzeni. Transformację przyrostów wartości średnich możemy opisać wzorem:

$$\Delta\eta'_i = \sum_{j=0}^{N-1} m_{i,j} \Delta\eta_j \quad (2.26),$$

gdzie $m_{i,j}$ to elementy macierzy transformacji M , a N jest wymiarem przestrzeni.

Transformację przyrostów wariancji i kowariancji możemy opisać wzorem:

$$\Delta\sigma'_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} m_{i,k} m_{j,l} \Delta\sigma_{k,l} \quad (2.27).$$

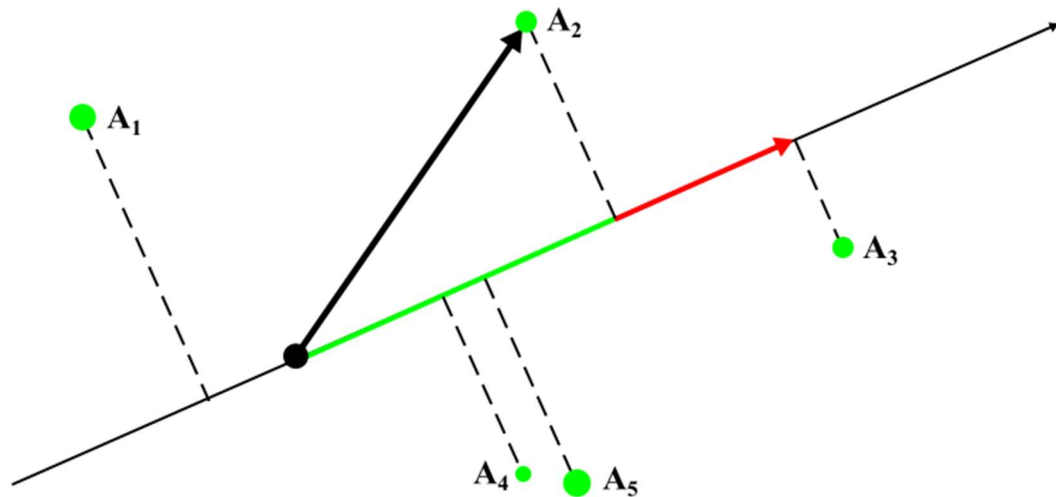
W przestrzeni $\mathbb{X}_{(\Delta\eta;\Delta\sigma;\Delta\text{cov})}$, podobnie jak w przestrzeni $\mathbb{X}_{(\Delta\eta;\Delta\sigma^2;\Delta\text{cov})}$, można dokonywać transformacji. Transformację przyrostów wartości średnich można opisać wzorem:

$$\Delta\eta'_i = \sum_{j=0}^{N-1} m_{i,j} \Delta\eta_j \quad (2.28)$$

Transformację przyrostów wariancji i kowariancji można natomiast opisać wzorem:

$$\Delta\sigma'_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} m_{i,k} m_{j,l} \sigma_{k,l} \quad (2.29)$$

Interpretację geometryczną metody VMCM można przedstawić jak na rysunku 2.4. Na rysunku tym widoczny jest rzut wektora wariantu decyzyjnego A_2 na oś w przestrzeni wielowymiarowej względem początku układu współrzędnych.



Rysunek 2.4. Interpretacja geometryczna metody VMCM

Źródło: opracowanie własne na podstawie [19]

2.3. Metody AHP i PVM

Na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku T. Saaty opracował bazującą na teorii użyteczności metodę rozwiązywania wielokryterialnego problemu decyzyjnego AHP (ang. Analytic Hierarchy Process) [119].

W metodzie tej definiowany jest problem decyzyjny, dla którego tworzy się następnie strukturę hierarchiczną. Problem decyzyjny rozkłada się na podcele – kryteria, które stanowią kolejne poziomy struktury. Na końcu tej struktury umieszcza się pełniące funkcję liści warianty decyzyjne [120].

Po utworzeniu struktury hierarchicznej problemu decyzyjnego decydent, dokonując porównań parami, wyraża swoje preferencje względem kryteriów, podkryteriów i wariantów opracowanej w poprzednim kroku struktury. Swoje preferencje decydent wyraża za pomocą oceny w postaci numerycznej, wykorzystując w tym celu opracowaną przez T. Saatyego fundamentalną skalę porównań (tabela 2.2). Skala ta, jak wynika z tabeli 2.2, zawiera oceny od 1 do 9. Dokonując oceny parami kryteriów, podkryteriów i wariantów, decydent powinien kierować się zasadą, że wartość oceny elementu mniej ważnego (mniej preferowanego) jest odwrotnością wartości oceny elementu ważnego, co można zapisać jako $a_{ij} = 1/a_{ji}$ oraz $a_{ii} = 1$. Ważniejsze elementy powinny otrzymać więc oceny 3, ... 5, ... 9, zależnie od stopnia przewagi pierwszego z porównywanych elementów nad drugim, elementy mniej ważne (niżej preferowane) w ocenianych parach powinny

otrzymać adekwatnie oceny o wartościach $1/3$, $\dots 1/5$, $\dots 1/9$. Elementy określone przez decydenta za równoważne powinny otrzymać ocenę 1.

Tabela 2.2. Fundamentalna skala porównań Saat'ego

Skala ważności	Definicja	Wyjaśnienie znaczenia
1	Równe znaczenie	Równoważność obu porównywanych elementów (oba elementy w równym stopniu przyczyniają się do realizacji żądanego celu).
3	Słaba lub umiarkowana przewaga	Słabe (umiarkowane) znaczenie lub preferencja jednego el. nad drugim (jeden el. ma nieco większe znaczenie niż drugi).
5	Mocna przewaga	Mocna preferencja (znaczenie) jednego elementu nad innym.
7	Bardzo mocna przewaga	Dominujące znaczenie lub bardzo mocna preferencja jednego elementu nad drugim.
9	Ekstremalna lub absolutna przewaga	Absolutne większe znaczenie (preferencja) jednego elementu nad drugim (przewaga jednego elementu nad drugim jest na najwyższym możliwym do określenia poziomie).
2, 4, 6, 8	Dla ocen pośrednich pomiędzy powyższymi wartościami	Czasami istnieje potrzeba interpolacji numerycznej kompromisowych opinii, ponieważ nie ma dobrego słowa do ich opisanie (stosowane są wówczas wartości środkowe z powyższej skali)

Źródło: [119].

Na podstawie wyrażonych przez decydenta w poprzednim kroku preferencji względem kryteriów, podkryteriów i wariantów konstruuje się konsekwentne (zgodne)

kwadratowe macierze porównań parami ($n \times n$) $M = [a_{ij}]$. Dla macierzy tych spełniona jest zależność, którą można opisać wzorem:

$$a_{ij} = a_{ik}/a_{jk}, \text{ dla każdego } i, j, k = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Wszystkie utworzone zgodnie z wcześniej opisaną zasadą macierze powinny być proporcjonalne. Oznacza to, że gdy element a_{ij} zawiera wartość b , element a_{ji} powinien zawierać wartość $1/b$. Z tabeli porównań zawierającej fundamentalną skalę porównań T. Saatyego wynika zaś, że powstałe macierze powinny być dodatnie, a ich elementy a_{ii} powinny zawierać wartości jednostkowe z zakresu 1 do 9 [122,123]. Liczba porównań wariantów decyzyjnych względem kolejnych kryteriów i kryteriów względem siebie w tych macierzach wynosi $n(n - 1)/2$. Wynika ona z tego, że na przekątnej macierzy „ n ” elementów występują jedynki (każde kryterium jest równoważne względem samego siebie), a połowa ocen w konstruowanej macierzy jest odwrotnością. Opisany sposób konstruowania macierzy porównań jest jednym z najczęściej wykorzystywanych sposobów porównań parami. Dzięki konstruowaniu macierzy tym sposobem zmniejsza się liczba porównań. Stosuje się go więc szczególnie w problemach, w których decydent dokonuje oceny dużej liczby kryteriów i/lub dużej liczby wariantów decyzyjnych.

Następnie dla każdej z powstałych w poprzednim kroku macierzy porównań parami tworzy się iloczyn kwadratowej macierzy oraz wektor priorytetów. Wektory priorytetów $w = (w_1, \dots, w_n)$ wylicza się z macierzy porównań parami. Korzysta się przy tym z liczb z opisanej wyżej w niniejszej pracy fundamentalnej skali porównań Saatyego [119,121]. Wektory te przedstawia się następnie w formie macierzy znormalizowanych ocen $M = (w_i/w_j)$ oraz umieszcza w odpowiednich kolumnach macierzy decyzyjnej. Równanie $M_w = c_w$ ma rozwiązanie w , jeżeli c stanowi największą wartość własną macierzy M (λ_{max}). λ_{max} to miara zgodności porównań. Miara zgodności porównań odzwierciedla proporcjonalność preferencji. Można opisać ją następującymi wzorami:

$$M_w = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = c_w \quad (2.32)$$

$$M_w = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = c_w \quad (2.33)$$

Aby zbadać spójność informacji/ocen otrzymanych od decydenta na etapie określania przez niego preferencji odnośnie do kryteriów oceny i wariantów decyzyjnych, dla każdej z otrzymanych macierzy porównań parami wylicza się następnie wskaźnik spójności macierzy. W ten sposób bada się globalną spójność macierzy na każdym poziomie skonstruowanej na początku badania struktury hierarchicznej. Badanie to dotyczy więc określonych przez decydenta preferencji na poziomie kryteriów, podkryteriów i wariantów (alternatyw). W badaniu sprawdza się, jak dalece spójna jest informacja przekazana przez decydenta podczas konstruowania macierzy porównań. Spójność preferencji wiąże się z przechodnością ocen. Porównując między sobą trzy warianty, decydent może uznać wariant A_i za dwa razy lepszy od wariantu A_j i cztery razy lepszy od wariantu A_k . Analogicznie więc względem tego samego kryterium wariant A_j powinien być uznany przez decydenta za dwa razy lepszy od wariantu A_k . Aby to sprawdzić, oblicza się najpierw ze wzoru 2.34 [120] współczynnik spójności CI (ang. *consistency index*):

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \quad (2.34),$$

gdzie:

λ_{max} – największa wielkość własna macierzy.

Następnie współczynnik spójności służy do obliczenia względnego indeksu spójności CR (ang. *consistency ratio*). Korzysta się przy tych obliczeniach ze wzoru [103]:

$$CR = \frac{CI}{R} \quad (2.35)$$

R jest stałą, a jej wartość zależy od wymiaru macierzy porównań. Przykładowe wartości losowego indeksu niezgodności R obliczone na podstawie kilku tysięcy macierzy przedstawiono w tabeli 2.3 [119,136].

Tabela 2.3. Wskaźniki zgodności

Rząd macierzy	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Losowy indeks niezgodności	R	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49

Źródło: [119,136].

Dla macierzy kwadratowej o $n=3$ elementy przyjęto wartość względnego indeksu spójności mniejszą lub równą 5% ($CR \leq 0,05$). Dla większych macierzy przyjęto natomiast wartość nie większą niż 10% ($CR \leq 0,10$) [122]. Dla takich wartości współczynnik niezgodności jest na poziomie akceptowalności, czyli występuje zgodność ocen w pozyskanych od decydenta porównaniach. W przypadku gdy badając spójność macierzy otrzymamy wartość współczynnika CR większą od 10%, zalecane jest przerwanie badania oraz ponowne wykonanie przez decydenta niektórych lub wszystkich porównań w celu usunięcia niezgodności porównań parami. Gdy w badaniu otrzymano współczynniki CI i CR o wartości 0, preferencje/wartości ocen pozyskane od decydenta są idealnie spójne.

W badaniu niekorzystne jest, gdy wartości względnego indeksu spójności są wyższe niż 10% jak również, gdy wynoszą one zero. W pierwszym przypadku występuje niezgodność ocen, a jej wyeliminowanie polega na ponownym porównaniu niektórych lub wszystkich elementów. Występuje więc ponowna potrzeba zaangażowania decydenta w proces decyzyjny. Wydłuża się również czas, a w związku z tym często i koszty procesu decyzyjnego. W drugim przypadku natomiast mamy do czynienia ze zbyt sztywnym utrzymaniem poglądów decydenta. Oznacza to niewielką możliwość zmiany przez niego zdania dotyczącego wyników badania.

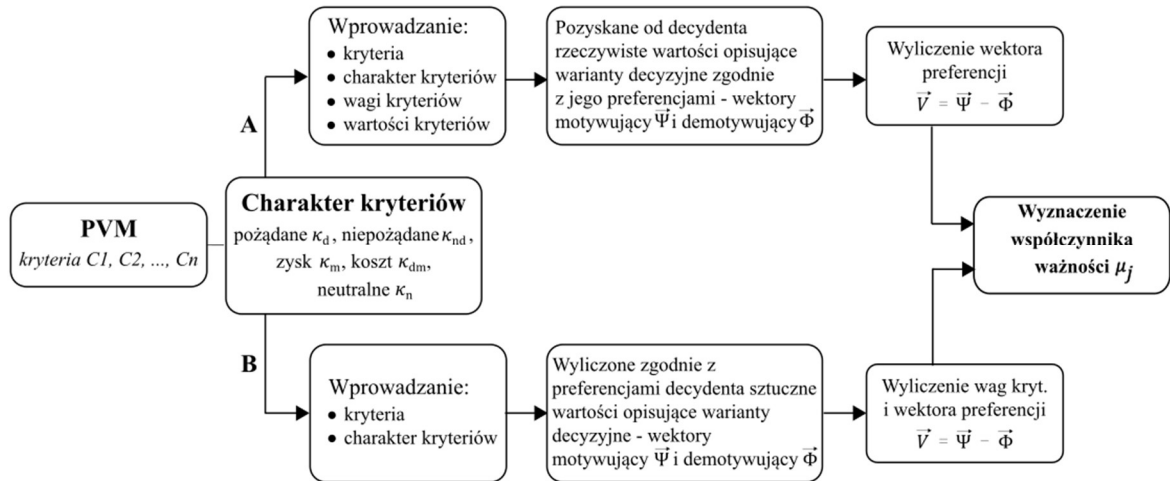
Na końcu procedury AHP dokonuje się syntezy otrzymanych wyników oraz wyłania się wariant najlepszy. Za wariant najlepszy uznawany jest ten, który w największym stopniu pozwoli na osiągnięcie celu, jaki został wyznaczony przez decydenta w rozpatrywanym problemie decyzyjnym. Na tym etapie znormalizowane oceny zestawiane są za pomocą addytywnej funkcji użyteczności U_i . Użyteczność wariantu $i - U_i$ opisuje jego udział w celu globalnym. Jest to syntetyczna ocena określająca pozycję wariantu wśród pozostałych wariantów rozpatrywanych w problemie decyzyjnym. Celem końcowym dla procesu

decyzyjnego w metodzie AHP jest uzyskanie rankingu – zbioru uporządkowanych od najlepszego do najgorszego wariantów decyzyjnych.

PVM (ang. *Preference Vector Method*) jest metodą, która posłużyła za podstawę zaproponowanej w niniejszej rozprawie metody PVM–VSI (ang. *Preference Vector Method – Vector Space Increments*). Dlatego też procedura metody PVM została w niniejszej pracy zaprezentowana szczegółowo.

Metodę wektora preferencji PVM (ang. *Preference Vector Method*) opracowali w 2014 roku K. Nermend i M. Borawski [85,86]. Jest ona rozwinięciem metody VMCM (ang. *Vector Measure Construction Method*) i służy do rozwiązywania wielokryterialnych problemów decyzyjnych. Wykorzystując metodę PVM, decydent ma możliwość wyrażenia swoich preferencji na różne sposoby. Rysunek 2.5 przedstawia przykładowe warianty rozwiązywania problemów decyzyjnych [86]:

- Wariant A. Poprzez zdefiniowanie kryteriów decydent uściśla swoje preferencje, następnie określa charakter kryteriów poprzez przypisanie do jednego ze zbiorów (zysk, koszt, pożądane, niepożądane), wyznacza wagi dla zdefiniowanych kryteriów, podaje poprzez określenie wektorów preferencji motywującego oraz demotywowującego wartości kryteriów. Na podstawie tych dwóch wektorów wyliczany jest wektor preferencji wskazujący na preferencje decydenta.
- Wariant B. Poprzez zdefiniowanie kryteriów decydent uściśla swoje preferencje, następnie określa charakter kryteriów poprzez przypisanie do jednego ze zbiorów (zysk, koszt, pożądane, niepożądane). Dla kryteriów należących do grup kryteriów określonych przez decydenta jako zysk i koszt wylicza się (z I i III kwartyła) wektor preferencji motywujący i demotywowujący. Wykorzystując wartości tych wektorów, określa się automatycznie wagi kryteriów oraz wyznacza sztuczny wektor preferencji. Dla kryteriów pożądanych i niepożądanych wartości wektora preferencji pozyskuje się od decydenta poprzez podanie przez niego konkretnych wartości tych wektorów.



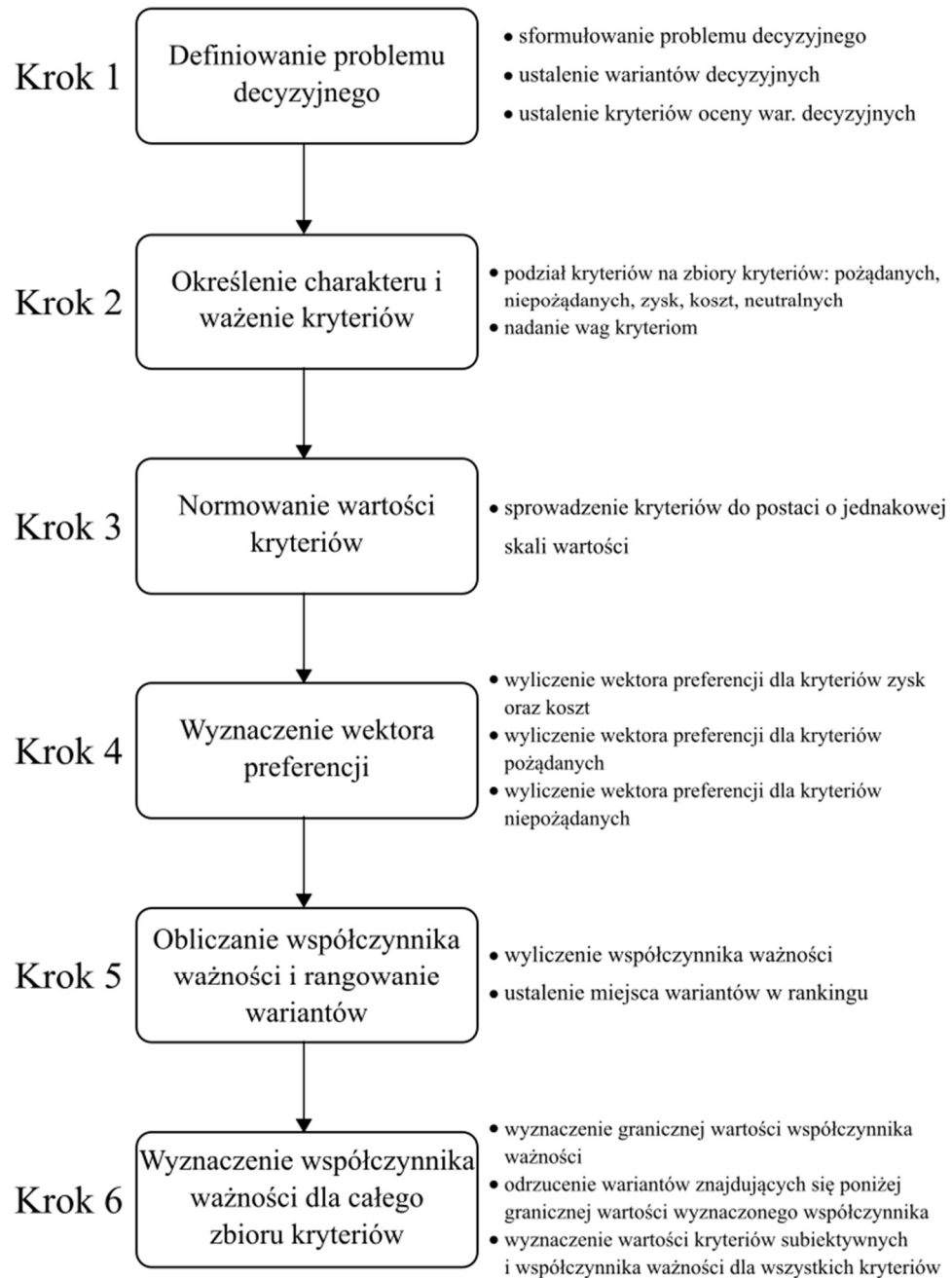
Rysunek 2.5. Możliwe warianty metody PVM

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [88]

Procedura metody PVM składa się z sześciu kroków (rysunek 2.6) [88].

Krok pierwszy w procedurze metody PVM nie różni się od procedur stosowanych w innych metodach. Polega on na sformułowaniu procesu decyzyjnego. W kroku tym ustala się warianty decyzyjne, jakie będą oceniane w analizowanym problemie decyzyjnym, oraz kryteria oceny dla wybranych wariantów decyzyjnych. Na wybór kryteriów ma rozpatrywana sytuacja decyzyjna i preferencje decydenta. Kryteria mogą być wyrażone wartościami a_{ji} (wartość i -tego kryterium j -tego wariantu decyzyjnego) lub mogą być to kryteria jakościowe (subiektywne). Wybrane przez decydenta kryteria są podstawą konstruowania zbioru wartości dla rozpatrywanych wariantów decyzyjnych. W dalszej części niniejszej rozprawy kryteria oznaczano jako C_i (gdzie i oznacza numer kryterium), warianty decyzyjne zaś jako \vec{A}_j (gdzie j oznacza numer wariantu).

W przypadku kryteriów jakościowych (subiektywnych) procedura postępowania z takimi kryteriami różni się od procedury PVM, gdy mamy podane tylko kryteria ilościowe. Zostanie ona opisana w ostatnim „kroku”.



Rysunek 2.6. Procedura obliczeniowa w metodzie PVM

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [88].

Krok drugi – określenie charakteru i ważenie kryteriów. Decydent najczęściej nie jest w stanie sprecyzować swoich preferencji. Potrafi jednak określić warianty możliwe do zaakceptowania przez niego lub te, których nie jest w stanie zaakceptować. Charakter kryteriów powinien być więc zgodny z jego odczuciami. Autorzy metody PVM

zaproponowali dla zbiorów kryteriów następujące nazwy: pożądane, niepożądane, zysk, koszt i neutralne. Podział kryteriów na zbiory wyglądałby więc następująco [85,86]:

- pożądane ($c_i \in \kappa_d$) – w zbiorze tym umieszcza się kryteria, dla których pożądane są określone wartości. Powinny się one mieścić w jakimś akceptowalnym przez decydenta przedziale – nie powinny być ani większe niż górna granica tego przedziału, ani też mniejsze niż jego dolna granica. Przykładem może być tu zakup mieszkania. Decydent oczekuje w tym wypadku, że nie będzie ono większe niż jego potrzeby ani też nie bierze pod uwagę mniejszego niż założony przez niego metraż (kryterium pożądane);
- niepożądane ($c_i \in \kappa_{nd}$) – w zbiorze tym umieszcza się kryteria, dla których niepożądane są określone wartości (kryterium niepożądane);
- zysk ($c_i \in \kappa_m$) – w zbiorze tym umieszcza się kryteria, dla których pożądane są jak najwyższe wartości, motywujące decydenta do wyboru wariantu charakteryzującego się jak największą wartością dla tego kryterium. Przykładem może być wybór inwestycji. Lokując swój kapitał w jakieś przedsięwzięcie, decydent oczekuje maksymalizacji zysków (kryterium zysk);
- koszt ($c_i \in \kappa_{dm}$) – w zbiorze tym umieszcza się kryteria, dla których pożądane są jak najniższe wartości, a im większa wartość charakteryzująca wariant dla tego kryterium, tym bardziej decydent skłania się ku jego odrzuceniu na rzecz innego z rozpatrywanych wariantów. Przykładem może być tu wspomniany zakup mieszkania, a konkretnie cena za metr kwadratowy. Decydent będzie dążył do tego, aby wybrać wariant z jak najniższą wartością tego kryterium (kryterium koszt);
- neutralnych ($c_i \in \kappa_n$) – w zbiorze tym umieszcza się kryteria dla decydenta nieistotne w danym problemie decyzyjnym. Wartości charakteryzujące warianty dla tych kryteriów nie mają wpływu na ostatecznie decyzję w rozpatrywanym problemie decyzyjnym. W praktyce kryteria te nie są brane pod uwagę przy rozwiązaniu problemu decyzyjnego.

W tym kroku wszystkie kryteria należy przypisać do określonej – jednej z wyżej wymienionych grup kryteriów.

Po określeniu charakteru kryteriów w kroku tym nadaje się kryteriom wagi. Często w przypadku procesów wielokryterialnego podejmowania decyzji występuje sytuacja, w której kryteria mają jednakowe znaczenie. Może okazać się jednak, że dla decydenta któreś z kryteriów jest bardziej znaczące od pozostałych. Należy wtedy ustalić wagi kryteriów. Istnieją różne rozwiązania przy ustalaniu wag kryteriów, a wyboru należy dokonać, mając na uwadze cel i zakres prowadzonego badania oraz preferencje decydenta.

Jednym z rozwiązań jest przyjęcie dla wszystkich kryteriów wagi w_i równej 1. Jeżeli decydent uzna jedno z kryteriów za bardziej znaczące dla niego, istnieją dwa rozwiązania, które można zastosować, by uwzględnić tę sytuację. Pierwszym jest zwiększenie wagi dla kryterium wskazanego przez decydenta jako ważniejsze od pozostałych kryteriów. Drugim natomiast jest zmniejszenie wag pozostałym kryteriom. Przykładowo, przypisanie jednemu z kryteriów wagi 2 skutkować będzie tym, że stanie się ono w rozpatrywanym procesie decyzyjnym dwa razy ważniejsze od pozostałych kryteriów branych pod uwagę w badaniu. Przypisanie jednemu z kryteriów wagi o wartości 0,5 skutkować będzie natomiast tym, że stanie się ono dwa razy mniej ważne od pozostałych kryteriów branych pod uwagę w badaniu w rozpatrywanym procesie decyzyjnym.

Innym rozwiązaniem jest ustalenie wag procentowo w zakresie 0 do 100 % lub liczbowo od 0 do 1. Należy przy tym przyjąć, że suma powinna wynosić odpowiednio 100% lub 1. W ten sposób wagi określają ważność kryterium, do którego zostały przypisane.

Wagi powinny następnie zostać poddane normowaniu. Celem normowania jest eliminacja skali wartości, w jakich są one podane. Opisać możemy to wzorem [86,88]:

$$w'_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^m w_j} \quad (2.36),$$

gdzie:

w_i jest wartością wagi dla i -tego kryterium, w'_i – jest wartością unormowanej wagi dla i -tego kryterium, a m – jest liczbą kryteriów.

Lepszą i bardziej polecaną metodą określania wag jest wyliczanie ich wartości, korzystając z porównania kryteriów parami, jak ma to zastosowanie w opisanym już w niniejszej pracy metodzie AHP.

Trzecim krokiem w procedurze metody PVM jest normowanie wartości kryteriów. Normowanie jest niezbędne, a jego celem jest sprowadzenie wartości wariantów do zbliżonego poziomu. Kryteria, według których dokonuje się oceny wariantów decyzyjnych, określają różne ich parametry. Opisanie są one za pomocą różnych jednostek miary. Charakteryzują je też różne skale wartości. Są więc z tego powodu niejednorodne i przeważnie dla decydenta nieporównywalne. Normowanie wartości kryteriów jest operacją, która usuwa różnice spowodowane jednostkami miary, w jakich wyrażone są kryteria oraz zbliża ich skale wartości do podobnego – porównywalnego dla decydenta

poziomu. W przypadku gdy dysponujemy wartościami podanymi przez decydenta dla motywującego wektora preferencji, a nie posiadamy wartości dla demotywowującego wektora preferencji, gdyż decydecnt nie był w stanie ich określić, zalecane jest normowanie za pomocą normy, korzystając ze wzoru [86,88]:

$$a'_{ji} = \frac{A_{ji}}{\|A_j\|} \quad (2.37),$$

gdzie:

$$\|A_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m A_{ji}^2} \quad (2.38)$$

Przez ' (prim) będą oznaczane w niniejszej rozprawie wartości po normowaniu.

Gdy w badaniu występują kryteria oceny wariantów decyzyjnych mające kształt funkcji logarytmicznej lub wykładniczej, zaleca się użycie takich metod normowania, które będą w stanie odwzorować nieliniowość percepcji wartości przez człowieka [88]. Przykładem adekwatnym dla zobrazowania tego typu sytuacji jest kryterium cena produktu. Kwota X przy zakupie drobnego produktu może wynosić 20% ceny tego produktu i mieć dla decydenta duże znaczenie, natomiast przy zakupie produktu o dużej wartości może stanowić 0,02% ceny tego produktu i nie mieć dla decydenta praktycznie żadnego znaczenia. Więcej informacji dotyczących normowania można znaleźć w literaturze [68,84,87,91].

W kroku czwartym wyznacza się wektor preferencji. Jest to wektor definiujący preferencje decydenta w odniesieniu do biorących udział w problemie decyzyjnym wariantów. Sposób jego liczenia jest zależny od charakteru kryteriów. Wektor preferencji wyznacza się odrębnie dla kryteriów zysk i koszt, odrębnie dla kryteriów pożądaných oraz kryteriów niepożądaných. Budowę wektora preferencji należy więc zacząć od podziału kryteriów na trzy grupy. Kryteria neutralne nie są brane pod uwagę przy budowie wektora preferencji.

Podstawą wyliczenia wartości współrzędnych wektora preferencji dla kryteriów zysk i koszt jest różnica między motywującym $\vec{\Psi}$ a demotywowującym $\vec{\Phi}$ wektorem preferencji. Dla wektora motywującego $\vec{\Psi}$ wartości kryteriów pozyskuje się od decydenta i

przeważnie spełniają one jego oczekiwania. Dla wektora demotywuującego $\vec{\Phi}$ wartości kryteriów uznane są przez decydenta za niespełniające jego oczekiwań. Sposób wyliczania wektorów preferencji na podstawie wektorów motywuującego i demotywuującego zależy od wariantu metody PVM wybranego do badania i zostanie opisany w dalszej części pracy.

W przypadku kryteriów pożądaných, jak i kryteriów niepożądaných współrzędne wektora określane są wprost. W trakcie procesu obliczeniowego z wektorem preferencji (pod względem charakteru kryteriów oraz sposobu normowania) postępuje się tak samo jak z innymi wektorami reprezentującymi wariant decyzyjny. Może zaistnieć sytuacja, że pozyskane od decydenta wartości wektorów preferencji (motywuującego i demotywuującego oraz części wektora preferencji związanego z kryteriami o pożądanym i niepożądanym charakterze) są spoza próby badawczej. W takiej sytuacji wykonuje się normowanie wektora preferencji. Korzysta się przy tym z parametrów używanych wcześniej do normowania wartości kryteriów [88]:

$$\tau'_i = \frac{\tau_i}{\|A_j\|} \quad (2.39),$$

gdzie:

τ_i jest wartością i -tej współrzędnej wektora \vec{V} , a τ'_i – jest wartością i -tej współrzędnej unormowanego wektora \vec{V}' , lub wzoru:

$$\tau'_i = \frac{\tau_i - \bar{a}_{ji}}{\|A_j\|} \quad (2.40)$$

Jak już wcześniej wspomniano, sposób liczenia wektorów preferencji motywuującego i demotywuującego związany jest z charakterem kryteriów. Jeśli kryteria należą do grupy kryteriów, zysk oraz koszt obliczane są one z I i III kwartyła (tabela 2.4). Jeśli kryteria należą do grupy kryteriów pożądaných, wektor preferencji \vec{V} wyznacza się na podstawie maksimum. Dla kryteriów należących do grupy kryteriów niepożądaných wektor preferencji \vec{V} wyznacza się natomiast na podstawie minimum (tabela 2.5).

Tabela 2.4. Obliczanie wektorów motywującego i demotyującego w zależności od charakteru kryteriów

Wektor	Kryterium	
	Zysk	Koszt
$\vec{\Psi}$	III kwartył	I kwartył
$\vec{\Phi}$	I kwartył	III kwartył

Źródło: [88].

Tabela 2.5. Obliczanie wektora preferencji dla kryteriów o charakterze pożądanym i niepożądanym

Wektor	Kryterium	
	Pożądane	Niepożądane
\vec{V}	max	min

Źródło: [88]

Jak już wcześniej wspomniano, sposób wyliczania wektorów preferencji na podstawie wektorów motywującego i demotyującego zależy od wariantu metody PVM wybranego do badania. Jeśli do badania wybrano wariant B procedury PVM z rysunku 2.5, od decydenta należy pozyskać kryteria oraz ich charakter. Na podstawie danych wylicza się natomiast wartości wektorów $\vec{\Psi}$ i $\vec{\Phi}$. Charakter kryteriów determinuje procedurę postępowania, co wynika z tabeli 2.4 [88].

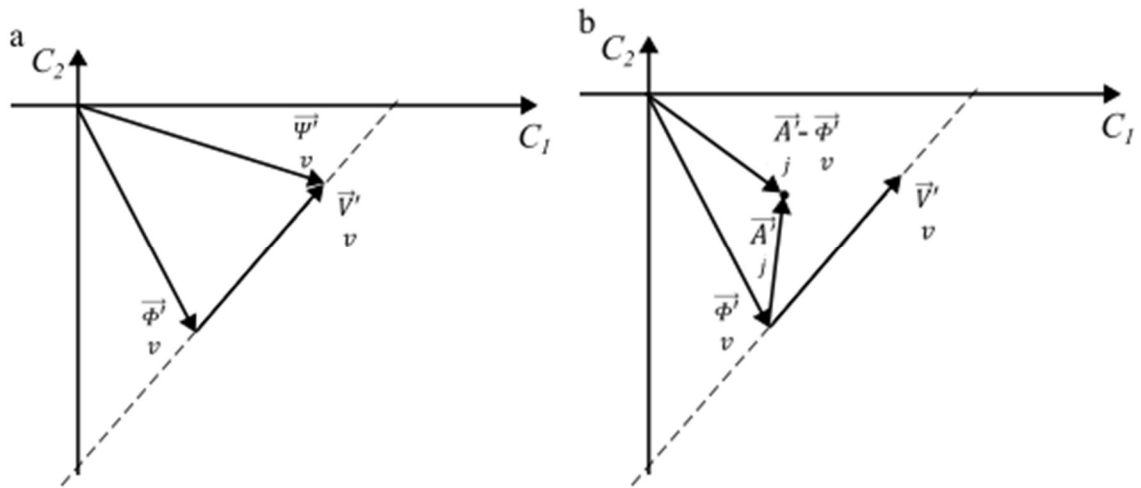
Jeśli do badania wybrano wariant A procedury PVM z rysunku 2.5, od decydenta należy pozyskać kryteria oraz charakter wektorów preferencji motywującego $\vec{\Psi}$ i demotyującego $\vec{\Phi}$. Muszą one mieć postać danych dla dwóch rzeczywistych wariantów decyzyjnych. Warianty te mogą pochodzić z próby badawczej lub spoza niej. Pierwszego z nich musi spełniać wymagania decydenta, natomiast drugi z nich ma nie spełniać jego wymagań [88].

Wektor preferencji w przypadku kryteriów zysk i koszt wektor preferencji wyliczamy poprzez wyznaczenie długości rzutu wektora reprezentującego j -ty wariant decyzyjny na wektor preferencji \vec{V}'_v . Wektor preferencji \vec{V}'_v jest różnicą między wektorami

$$\vec{\Psi}'_v \text{ i } \vec{\Phi}'_v \text{ – wzór [88]:}$$

$$\vec{v}' = \vec{\Psi}' - \vec{\Phi}' \quad (2.41)$$

Kryteria zysk i koszt wektorów są natomiast współrzędnymi wektorów $\vec{\Psi}'$ i $\vec{\Phi}'$. Na rysunku 2.7a przedstawiono jednowymiarowy układ współrzędnych oparty na wektorze \vec{v}' . Wektor $\vec{\Phi}'$ jest wyznacznikiem początku układu współrzędnych, natomiast długość wektora \vec{v}' jest jednostką miary. Od charakteru kryteriów zależny jest znak współrzędnych wektora \vec{v}' . Znak dodatni związany jest z charakterem kryterium zysk. Kryteria o charakterze koszt będą miały więc znak przeciwny, czyli ujemny. Może zdarzyć się sytuacja, że wystąpi tutaj niezgodność z określonym w kroku pierwszym charakterem kryteriów. Powodem tej sytuacji może być pozyskanie od decydenta wartości dla kryteriów koszt wyższe od wartości dla kryteriów zysk. Oznacza to, że decydent nie zadbał o przechodniości preferencyjne i należy dokonać korekty charakteru kryteriów. Korektę tę wprowadza się poprzez zmianę znaku tego konkretnego kryterium we współrzędnych wektora \vec{v}' . Znak dodatni nadaje się współrzędnym związanym z kryterium zysk, a znak ujemny współrzędnym związanym z kryterium koszt. Następną operacją jest określenie położenia wariantów decyzyjnych względem początku układu współrzędnych. Aby określić położenie każdego z wariantów decyzyjnych A'_j względem początku układu współrzędnych, wylicza się różnicę między tym wariantem a wektorem \vec{v}' (rysunek 2.7b). Różnica ta jest podstawą wyznaczenia współrzędnej wariantu decyzyjnego A'_j w układzie współrzędnych \vec{v}' (rysunek 2.8a). Długość wektora \vec{v}' jest natomiast jednostką miary w tym układzie. Od położenia wariantu A'_j względem układu współrzędnych \vec{v}' zależna jest wartość współrzędnej wariantu decyzyjnego A'_j . Zależność tę przedstawiono na rysunku 2.8b [88].

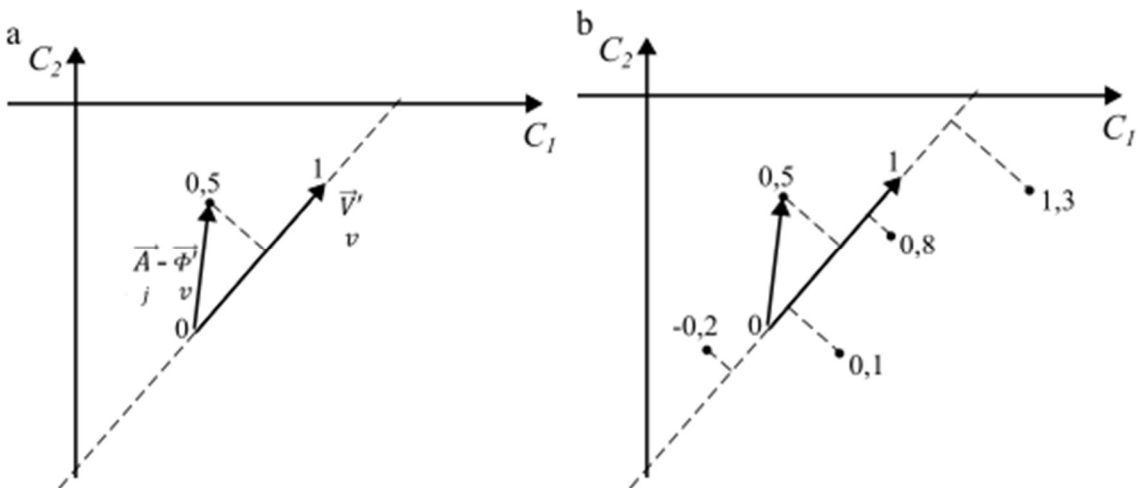


Rysunek 2.7. Jednowymiarowy układ współrzędnych oparty na wektorze \vec{V}'_v :

a – umiejscowienie w układzie współrzędnych kryteriów C_1 i C_2 ;

b – określenie wariantu decyzyjnego względem początku układu współrzędnych

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [88].



Rysunek 2.8. Współrzędne wariantów decyzyjnych w układzie współrzędnych \vec{V}'_v :

a – wyznaczenie współrzędnej wariantu A'_j ;

b – położenie wariantów a ich współrzędne

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [88].

W układzie współrzędnych \vec{V}'_v istnieje inna jednostka miary niż w układzie współrzędnych kryteriów C_1, C_2 . Jeśli zachodzi konieczność zestawienia współrzędnych kryteriów C_1, C_2 z wartościami miary odległościowej liczonej w C_1, C_2 , powstaje problem.

Aby go rozwiązać, należy sprowadzić wektor \vec{V}' do postaci wektora jednostkowego. Posłużyć należy się przy tym wzorem [88]:

$$\vec{V}'' = \frac{\vec{V}'}{\|\vec{V}'\|} \quad (2.42),$$

przy czym w PVM przyjmuje się:

$$\|\vec{V}'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m_v} \tau_i'^2} \quad (2.43),$$

gdzie:

m_v jest to liczba kryteriów zysk i koszt, a τ_i' – i -ta współrzędna wektora \vec{V}' .

W układzie współrzędnych \vec{V}'' współrzędną j -tego wariantu decyzyjnego możemy wyliczyć wzorem [88]:

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{m_v} (A'_{ji} - \phi'_i) \tau_i'' w'_i \quad (2.44),$$

gdzie:

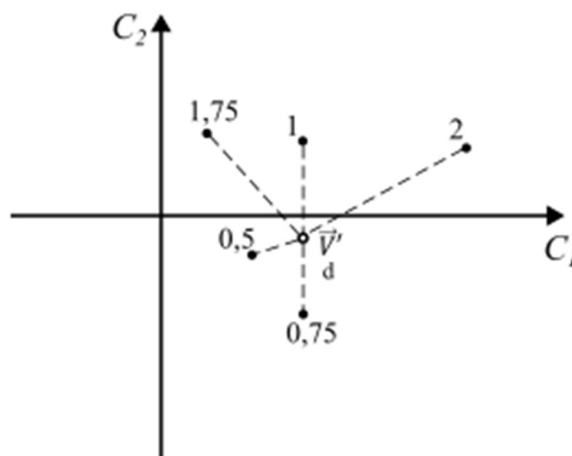
ϕ'_i jest to i -ta współrzędna wektora $\vec{\Phi}'$, a τ_i'' – i -ta współrzędna wektora \vec{V}'' .

Im wartość μ_j jest większa, tym wyższą pozycję w rankingu zajmie j -ty wariant decyzyjny. Do obliczeń w przypadku kryteriów o charakterze pożądanym korzysta się z wektora \vec{V}'_d . Jego współrzędne stanowią kryteria pożądanego wektora \vec{V}' . Wartość wskaźnika wylicza się jako odległość między punktami. Opisać można to wzorem (rysunek 2.9) [85,88]:

$$\mu_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{m_d} w_i'^2 (A'_{ji} - \tau_i')^2} \quad (2.45),$$

gdzie:

m_d jest to liczba kryteriów pożąanych, a τ'_i – i -ta współrzędna wektora \vec{V}'_d .



Rysunek 2.9. Odległość wariantów decyzyjnych wektora dla kryteriów pożąanych

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [88].

Im wartość wskaźnika μ_j jest mniejsza, tym wyższą pozycję w rankingu zajmie j -ty wariant decyzyjny. Wartość wskaźnika dla najlepszych wariantów decyzyjnych jest równa zero.

Do obliczeń w przypadku kryteriów o charakterze niepożądanych korzysta się z wektora \vec{V}'_{nd} . Jego współrzędne stanowią kryteria niepożądane wektora \vec{V}' . Wartość wskaźnika również w tym przypadku wylicza się jako odległość między punktami. Opisać to można za pomocą wzoru [85,88]:

$$\mu_{nd} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m_{nd}} w_i'^2 (A'_{ji} - \tau'_{i,nd})^2} \quad (2.46),$$

gdzie:

m_{nd} jest to liczba kryteriów niepożądanych, a $\tau'_{i,nd}$ – i -ta współrzędna wektora \vec{V}'_{nd} .

Im wartość wskaźnika μ_{nd} jest większa, tym wyższą pozycję w rankingu zajmie j -ty wariant decyzyjny. W tym przypadku wartość wskaźnika dla najgorszych wariantów decyzyjnych jest równa zero.

W kolejnym kroku wykonuje się obliczanie współczynnika ważności dla poszczególnych wariantów decyzyjnych oraz dokonuje się na podstawie współczynnika ważności rangowania wariantów decyzyjnych biorących udział w rozpatrywanym problemie decyzyjnym. Wartość końcową współczynnika ważności μ_j ustalić należy na podstawie wartości wyliczonych wcześniej wskaźników $\frac{\mu_j}{v}$, $\frac{\mu_j}{d}$ i $\frac{\mu_j}{nd}$. Wykorzystuje się w obliczeniach wartości wskaźników, licząc według wzoru ich średnią ważoną [88]:

$$\mu_j = \frac{\frac{\mu_j m_v}{v} - \frac{\mu_j m_d}{d} + \frac{\mu_j m_{nd}}{nd}}{m_v + m_d + m_{nd}} \quad (2.47)$$

Wskaźnik $\frac{\mu_j}{d}$ ma nieco odmienny charakter, stąd przy wartości tego wskaźnika występuje znak minus. Dla wskaźników $\frac{\mu_j}{v}$ i $\frac{\mu_j}{nd}$ wyższa ich wartość oznacza lepszy wariant decyzyjny. Dla wskaźnika $\frac{\mu_j}{d}$ jest odwrotnie – niższa jego wartość oznacza lepszy wariant decyzyjny [88].

Mając ostateczną wartość współczynnika ważności μ_j dla rozpatrywanych w badaniu wariantów decyzyjnych, kolejną operacją jest sporządzenie rankingu tych wariantów w analizowanym problemie decyzyjnym. Dany wariant decyzyjny spełnia w większym stopniu preferencje decydenta im wyższe miejsce zajmuje on w rankingu, czyli im większa jest wartość jego współczynnika ważności w stosunku do pozostałych wariantów decyzyjnych biorących udział w badaniu.

Krok 6 – wyznaczanie współczynnika ważności dla wszystkich kryteriów (włącznie z subiektywnymi)

Ostatnim krokiem jest obliczenie współczynnika ważności z uwzględnieniem subiektywnych kryteriów, jeśli zostały takie określone przez decydenta. Kryteria subiektywne to takie, w których wykorzystano opis słowny. Przykładem może być owoc. Jeśli mamy do wyboru trzy owoce: jabłko, gruszka i śliwka, należy zgodnie z preferencjami decydenta przypisać im wartości. W tym celu można zastosować którąś z dostępnych metod. Jedną z nich jest metoda AHP, w której dokonuje się porównań parami, tworząc tak zwaną macierz porównań parami. Wiersze i kolumny tworzonej macierzy odpowiadają porównywanym aspektom wariantów decyzyjnych. W przypadku owoców decydent powinien określić swoje preferencje, wskazując, o ile dany owoc jest przez niego

preferowany względem drugiego, wykorzystując do tego stosowaną w AHP fundamentalną skalę porównań. Liczba porównań zależy od wielkości zbioru atrybutów opisywanego kryterium. Jeśli w zbiorze jest n owoców, to liczba porównań wyniesie $\frac{n^2-n}{2}$. Gdy zbiór ma wartość $n = 3$, oznacza to, iż mamy $\frac{3^2-3}{2} = 3$ porównania.

W metodzie PVM, dokonując porównania, tworzy się macierz $n \times n$. Jest ona tożsama z macierzą porównań parami tworzoną w metodzie AHP. Metody te różni jedynie stosowana przy porównywaniu skala. W PVM jest ona pięciostopniowa, co zobrazowane zostało w tabeli 2.6 [88].

Przy tworzeniu macierzy porównań musimy pamiętać, iż wartości w macierzy są ze sobą powiązane. Dla każdego elementu macierzy zachodzi zależność, którą opisuje wzór [88]:

$$c_{i,j,k} = \frac{1}{c_{i,k,j}} \quad (2.48)$$

Oznacza to, że jeżeli w pierwszym wierszu drugiej kolumny wpisana jest wartość trzy, to w drugim wierszu pierwszej kolumny wartość powinna wynosić jedna trzecia.

Tabela 2.6. Pięciostopniowa skala porównań kryteriów

Wartość lingwistyczna	Wartość oceny
Ogromna przewaga	5
Bardzo duża przewaga	4
Duża przewaga	3
Niewielka przewaga	2
Porównywalność	1

Źródło: Opracowanie własne.

W przykładowym przypadku dotyczącym owoców mamy więc do czynienia z macierzą 3×3 . Na głównej jej przekątnej wstawia się jedynki. Następnie decydent ma za zadanie określić, jaką przewagę ma wariant decyzyjny wymieniony w wierszu nad wariantem z danej kolumny. Otrzymuje się na tej podstawie macierz porównań parami M podaną wzorem:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{jabłko} & \text{gruszka} & \text{śliwka} \\
 \text{jabłko} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{array} \right] & & \\
 \text{gruszka} & & & \\
 \text{śliwka} & & &
 \end{array} \quad (2.49)$$

W macierzy tej wartość większa od jedynki oznacza, iż wariant decyzyjny wymieniony w wierszu przewyższa wariant decyzyjny z kolumny względem danego kryterium. Wartość mniejsza od jedynki – wariant decyzyjny wymieniony w kolumnie przewyższa wariant decyzyjny z wiersza macierzy. Gdy warianty decyzyjne są porównywalne, wartość w macierzy wynosi jeden.

Czasami decydent, dokonując porównań parami, spowoduje, że dane w macierzy porównań parami są niespójne. W przykładzie 2.37 jabłko ma dużą przewagę nad gruszką i bardzo dużą przewagę nad śliwką, ale śliwka jest porównywalna z gruszką. Mamy więc do czynienia z niekonsekwencją decydenta podczas porównywania rozpatrywanych wariantów decyzyjnych. Dlatego też należy tak jak w przypadku metody AHP zbadać spójność macierzy porównań parami licząc współczynnik spójności. Jeśli otrzymana wartość współczynnika jest zbyt wysoka, mamy dwa rozwiązania. Pierwsze z nich polega na odrzuceniu danej zmiennej. Drugi z nich na zweryfikowaniu ocen decydenta podczas porównywania parami.

Z macierzy porównań parami tworzy się następnie wskaźniki. Podobnie jak w przypadku metody AHP oblicza się w tym celu wektory własne, których wartości stanowią wskaźnik wykorzystywany dalej w obliczeniach [88].

Z opisu wynika, że w przypadku większej liczby obiektów metoda porównań parami jest pracochłonna – wymaga dokonania dużej liczby porównań, dlatego zalecane jest podzielenie obliczeń na dwa etapy. W pierwszym z nich należy wyznaczyć współczynnik ważności, pomijając kryteria subiektywne. W drugim etapie trzeba najpierw usunąć wszystkie obiekty z etapu pierwszego niemające szans na osiągnięcie pierwszego miejsca w rankingu, a dla pozostałych obiektów wyznaczyć wartości kryteriów subiektywnych i ponownie wyznaczyć współczynnik ważności [88].

Proces usunięcia obiektów wymaga wyznaczenia granicznej wartości współczynnika ważności. Obiekty o współczynniku ważności liczonym dla wszystkich kryteriów z pominięciem kryteriów subiektywnych o wartości poniżej wartości granicznej

nie będą miały szans przesunąć się na pierwszą pozycję po uwzględnieniu kryteriów subiektywnych. Ze względu na to, że współczynnik ważności liczony jest na podstawie trzech wskaźników, wartość graniczna musi być wyliczona na ich podstawie [88].

Wartość wskaźnika μ_j dla wszystkich kryteriów łącznie z subiektywnymi można wyliczyć na podstawie wzoru [88]:

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{m_v} \left(A'_{j_i} - \phi'_i \right) \tau''_i w'_i = \sum_{i=1}^{m_v} \left(A'_{j_i} - \phi'_i \right) \tau''_i \frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} \quad (2.50)$$

Wartość wskaźnika μ_j tylko dla kryteriów subiektywnych oblicza się ze wzoru:

$$\mu_j^{ns} = \sum_{i=1}^{m_v - m_{vs}} \left(A'_{j_i} - \phi'_i \right) \tau''_i \frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} \quad (2.51)$$

Przyrost wartości wskaźnika μ_j po dodaniu kryteriów subiektywnych opisuje wzór:

$$\Delta \mu_j = \mu_j - \mu_j^{ns} = \sum_{i=m_v - m_{vs} + 1}^{m_v} \left(A'_{j_i} - \phi'_i \right) \tau''_i \frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} \quad (2.52)$$

Maksymalny możliwy przyrost wartości wskaźnika μ_j po dodaniu kryteriów subiektywnych opisać można wzorem:

$$R = \max_j \left[\Delta \mu_j \right] = \max_j \left[\sum_{i=m_v - m_{vs} + 1}^{m_v} \left(A'_{j_i} - \phi'_i \right) \tau''_i \frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} \right] \quad (2.53)$$

Wartość $\Delta \mu_j$ będzie maksymalna, jeżeli dla każdego kryterium różnica $A'_{j_i} - \phi'_i$ będzie maksymalna dla kryteriów zysk i minimalna dla kryteriów koszt. Jeżeli metoda normowania gwarantuje zakres wartości kryteriów w zakresie od zera do jedności, to $A'_{j_i} \in \langle 0; 1 \rangle$ oraz $\phi'_i \in \langle 0; 1 \rangle$ czyli maksymalna różnica $A'_{j_i} - \phi'_i$ dla kryteriów zysk będzie wynosić jeden, a dla kryteriów koszt zero, stąd wzór:

$$R = \sum_{i=m_v - m_{vs} + 1}^{m_v} \begin{cases} \tau''_i \frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} & \text{dla } c_i \in \kappa_m \\ -\tau''_i \frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} & \text{dla } c_i \in \kappa_{dm} \end{cases} \quad (2.54)$$

W przypadku wskaźnika μ_d^j można przeprowadzić analogiczne wyprowadzenie.

Wartość wskaźnika μ_d^j tylko dla kryteriów subiektywnych określa wzór:

$$\mu_d^{\text{ns}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m_d - m_{\text{ds}}} \left(A'_{j_i} - \tau'_i\right)^2 \left(\frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k}\right)^2} \quad (2.55)$$

Wartość $\Delta\mu_d^j$ będzie jak we wzorze:

$$\Delta\mu_d^j = \mu_d^j - \mu_d^{\text{ns}} = \sqrt{\sum_{i=m_d - m_{\text{ds}} + 1}^{m_d} \left(A'_{j_i} - \tau'_i\right)^2 \left(\frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k}\right)^2} \quad (2.56)$$

W tym przypadku szuka się jednak minimalnej wartości $\Delta\mu_d^j$, gdyż im mniejsza jest wartość μ_d^j tym wyższa jest pozycja obiektu w rankingu, co przedstawiono we wzorze:

$$R_d = \min_j \left[\Delta\mu_d^j \right] = \min_j \left[\sqrt{\sum_{i=m_d - m_{\text{ds}} + 1}^{m_d} \left(A'_{j_i} - \tau'_i\right)^2 \left(\frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k}\right)^2} \right] \quad (2.57)$$

Wartość $\Delta\mu_d^j$ będzie minimalna, gdy dla każdego kryterium $\left(A'_{j_i} - \tau'_i\right)^2$ będzie minimalne. Jeżeli metoda normowania gwarantuje zakres wartości kryteriów w zakresie od zera do jedności, to minimalną wartość $\left(A'_{j_i} - \tau'_i\right)^2$ można opisać wzorem:

$$R_d = \sqrt{\sum_{i=m_d - m_{\text{ds}} + 1}^{m_d} \min \left\{ \left(1 - \tau'_i\right)^2 ; \tau'^2 \right\} \left(\frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k}\right)^2} \quad (2.58)$$

Podobne wyprowadzenie można zrobić dla $\Delta\mu_{nd}^j$ z tą różnicą, że dla każdego kryterium $\left(A'_{j_i} - \tau'_i\right)^2$ musi być maksymalne. Stąd wzór:

$$R_{nd} = \sqrt{\sum_{i=m_{nd}-m_{nds}+1}^{m_{nd}} \max\left\{\left(1 - \frac{\tau'_i}{nd}\right)^2; \frac{\tau_i'^2}{nd}\right\} \left(\frac{w_i}{\sum_{k=1}^m w_k}\right)^2} \quad (2.59)$$

Ostatecznie maksymalny przyrost współczynnika ważności wariantów decyzyjnych R będzie miał wygląd jak we wzorze:

$$R_w = \frac{m_v R - m_d R + m_{nd} R}{m_v + m_d + m_{nd}} \quad (2.60)$$

Wartość graniczna współczynnika ważności, poniżej której należy odrzucić wszystkie obiekty przyjmuje wartość podaną wzorem:

$$B = \max_j (\mu_j) - R_w \quad (2.61)$$

Przedstawione w niniejszym podrozdziale metody charakteryzuje łatwość w użyciu. Możemy stosować je zarówno wtedy, gdy w rozpatrywanym problemie decyzyjnym dysponujemy ocenami wariantów według poszczególnych kryteriów wyrażonymi za pomocą wartości podanych w konkretnych jednostkach miary, czyli ilościowo i/lub gdy decydent dokonuje oceny oceniając warianty za pomocą ocen podanych w sposób jakościowy, porównując je między sobą. Jako zaletę obu metod należy też uznać możliwość określenia wag dla kryteriów. Dzięki możliwości tworzenia struktury hierarchicznej rozpatrywanego problemu decyzyjnego metodę AHP cechuje też skalowalność. Obie metody charakteryzuje też elastyczność – można je zastosować w różnych obszarach do rozwiązywania problemów decyzyjnych różnego typu. W obu metodach niewątpliwą zaletą jest też rezultat końcowy, jakim jest globalne uporządkowanie wariantów decyzyjnych rozpatrywanego problemu decyzyjnego. Stanowią więc one dobrą podstawę do opracowania metody, która wykorzystując zalety powyższych metod, eliminowałaby słabości metod stosowanych dotychczas we wspomaganie problemów wielokryterialnych wskazane w rozdziale pierwszym niniejszej rozprawy; metody, która pozwoliłaby na kontrolę spójności/nieprecyzyjności ocen w przypadku ocen jakościowych wyrażanych przez decydenta dla kryteriów subiektywnych nie tylko w ramach danego kryterium i w początkowych etapach, ale dla całego badania, dostarczając decydentowi danych na temat wielkości niespójności/niepewności ocen. Dane te mogłyby upewnić decydenta odnośnie do wyników badania w postaci końcowego rankingu lub mógłby on na podstawie tych danych dokonać korekty w rankingu końcowym.

Rozdział III. Zastosowanie arytmetyki przyrostów na przykładzie wybranej metody wspomaganie decyzji

3.1. Uzasadnienie wyboru metody wspomaganie decyzji PVM

Autor metody PVM K. Nermend w swojej publikacji [88] porównał najczęściej wykorzystywane w problemach wielokryterialnego wspomaganie decyzji metody z metodą autorską. Z porównania PVM z metodami takimi, jak AHP, ELECTRE, PROMETHEE oraz TOPSIS wynika, że metoda PVM najbardziej zbliżona jest do metody TOPSIS. Różni ją od metody TOPSIS to, że w obliczeniach metodą PVM wykorzystuje się jednowymiarowy układ współrzędnych.

Metodę PVM od innych metod wielokryterialnych wyróżnia prostota, a więc możliwość łatwej interpretacji wyniku i działania metody. Dzięki temu, że zamiast iloczynu skalarnego zdefiniowanego dla przestrzeni euklidesowej, który wykorzystuje metoda PVM, możemy wykorzystać inne iloczyny skalarne, istnieje możliwość łatwej jej modyfikacji. Przykładem takiej modyfikacji może być wykorzystanie liczb wieloelementowych opisujących niedokładność danych, co uczyni tę metodę równoważną metodom wielokryterialnego wspomaganie decyzji z wykorzystaniem liczb rozmytych.

Uniwersalność metody PVM polega również na tym, że w zależności od potrzeb decydenta możemy za jej pomocą wyszukiwać warianty decyzyjne o kryteriach najbardziej zbliżonych do wskazanych przez decydenta lub też warianty o kryteriach lepszych od wskazanych przez niego. Niewykluczone jest też zastosowanie połączenia obu wersji.

Liczba kroków w metodzie PVM jest zawsze stała i zależy od charakteru kryterium. W metodzie możemy wykorzystać zapis w postaci macierzowej, co prowadzi do zrównoleglenia obliczeń, łatwej implementacji sprzętowej, możliwość zastosowania do stworzenia rankingu z wykorzystaniem dużej ilości danych [88].

K. Nermend wykonał badanie porównawcze dla metody autorskiej PVM i metod AHP, ELECTRE I, ELECTRE Iv, ELECTRE II, ELECTRE III, PROMETHEE I, PROMETHEE II, MAUT oraz REMBRAND. Polegało ono na zaimplementowaniu ich w środowisku Matlab i porównaniu czasu obliczeń dla różnej liczby wariantów decyzyjnych. Wykonał łącznie sześć eksperymentów badawczych (odpowiednio dla 2, 10, 20, 30, 40 i 50 wariantów). Wynika z nich, że metoda PVM charakteryzuje się krótszym czasem obliczeń od większości badanych metod w przypadku małej liczby kryteriów i dużej liczby

wariantów decyzyjnych, a przy małej liczbie kryteriów i małej liczbie wariantów plasuje się w środku stawki [88].

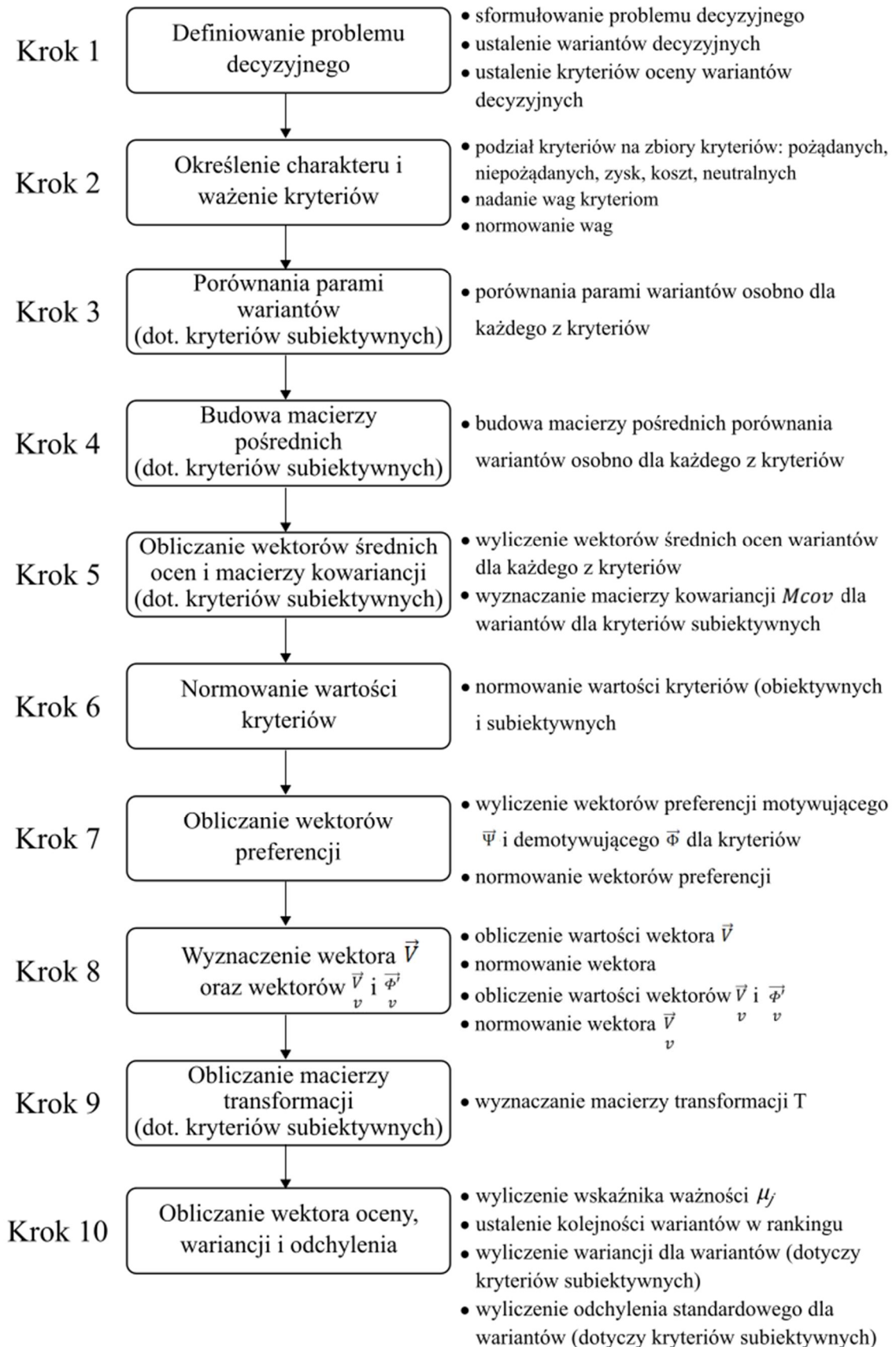
K. Nermend wykonał też badanie wpływu pojawienia się nietypowego wariantu decyzyjnego na pozostałe warianty przy ich dużej liczbie. W badaniu porównał metodę autorską z metodami AHP, ELECTRE II, ELECTRE III, PROMETHEE II, MAUT i REMBRAND. Tutaj również przeprowadził sześć eksperymentów badawczych (dla 2, 10, 20, 30, 40 i 50 wariantów). Wynika z nich, że w metodzie PVM wpływ nietypowego wariantu decyzyjnego na pozostałe warianty przy ich dużej liczbie jest mniejszy niż w większości metod. Lepsze od metody PVM w tym przypadku okazały się tylko metody PROMETHEE II i REMBRANDT. Szczegółowe wyniki badania zostały przedstawione w pracy K. Nermenda [88].

Na podstawie cech metody PVM oraz przytoczonych wyników badań zasadne było wykorzystanie metody PVM jako podstawy i połączenie jej z arytmetyką przyrostów, rozszerzając zalety metody PVM o uwzględnienie niepewności lub niespójności ocen wariantów decyzyjnych, co umożliwi dodatkowe porównanie wariantów w rankingu przy podobnych wartościach uzyskanych ocen.

3.2. Metoda PVM–VSI wykorzystująca arytmetykę przyrostów

Metoda wektora preferencji obliczanego w przestrzeni wektorowej przyrostów PVM–VSI (ang. *Preference Vector Method computed in Vector Space of Increments*) jest modyfikacją opisaną już w niniejszej pracy oryginalnej metody PVM [85,86]. Celem tej metody jest wspomaganie decydenta w podejmowaniu decyzji w wielokryterialnych problemach decyzyjnych poprzez dostarczenie mu rankingu wariantów decyzyjnych. Modyfikacja, jaką zaproponowano w metodzie PVM–VSI względem metody PVM, pozwala na uwzględnienie niepewności/niespójności ocen wariantów dla każdego z kryteriów decyzyjnych wystawionych przez decydenta.

Poszczególne etapy metody PVM–VSI przedstawione są na rysunku 3.1. W dalszej części rozprawy zostaną natomiast przedstawione ramy metodyczne metody PVM–VSI zaproponowane i zastosowane z powodzeniem w autorskim artykule „Use of the PVM method computed in vector space of increments in decision aiding related to urban development” [60] do utworzenia rankingu projektów zgłoszonych w ramach budżetu obywatelskiego. Celem rankingu było wskazanie, które z projektów w większym stopniu mają wpływ na zrównoważony rozwój miasta.



Rysunek 3.1. Etapy procedury metody PVM–VSI

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [60].

Na początku procedury badawczej należy sformułować problem decyzyjny, ustalić warianty decyzyjne, które będą brane pod ocenę w rozpatrywanym problemie decyzyjnym, oraz ustalić kryteria oceny tych wariantów. Kryteria te podzielić należy na zbiory kryteriów pożądaných, niepożądaných, zysk, koszt oraz neutralnych. Należy też określić na tym etapie wagi dla poszczególnych kryteriów, co wymaga zaangażowania decydenta w proces decyzyjny. Po określeniu przez decydenta wag poddaje się je normowaniu.

Po zdefiniowaniu problemu badawczego, ustaleniu wariantów decyzyjnych i kryteriów oceny tych wariantów procedurę badawczą rozpoczyna się od badania metodą ankietową preferencji respondentów względem wariantów według poszczególnych kryteriów. Dotyczy to jednak tylko kryteriów subiektywnych, dla których nie mamy wartości liczbowych dla wariantów dla poszczególnych kryteriów oceny. Preferencje są określane przez decydenta na podstawie porównań parami wg skali ocen przyjętej w badaniu, co wymaga ponownego zaangażowania decydenta w proces decyzyjny. Jest to zarazem ostatni etap, w jakim uczestniczy decydent w badaniu z wykorzystaniem procedury metody PVM–VSI. Kolejne etapy nie wymagają jego zaangażowania w badanie aż do ustalenia rankingu wariantów decyzyjnych i wyliczenia odchylenia standardowego dla wariantów decyzyjnych.

Na podstawie pytań zadawanych respondentom powstają macierze porównań M_l , gdzie l – numer porównywanego kryterium. Elementy tych macierzy są $m_l(i, j)$, gdzie i i j są numerami wariantów decyzyjnych. Informacje w utworzonych na podstawie odpowiedzi respondentów macierzach często są niespójne. Wynika to przeważnie z niespójności odpowiedzi udzielanych przez samego respondenta. W wynikach końcowych rozpatrywanego problemu decyzyjnego należałoby więc w jakiś sposób tę niespójność uwzględnić. W tym celu na podstawie macierzy M_l wyznacza się macierze $M'_l(A_k)$. Macierz $M'_l(A_k)$ to macierz pośrednia porównania w odniesieniu dla wariantu A_k .

W wierszach macierzy $M'_l(A_k)$ znajdują się porównania i -tego wariantu w odniesieniu do wariantu A_k . W kolumnach znajdują się kolejne k -te warianty decyzyjne.

Do wyznaczenia macierzy $M'_l(A_k)$ należy skorzystać z wzoru [60]:

$$m'_{l,i,j}(A_k) = m_{l,k,i} m_{l,i,j} \quad (3.1),$$

gdzie $m'_{l,i,j}(A_k)$ jest elementem macierzy $M'_l(A_k)$.

Macierze $M'_l(A_k)$ poddaje się normowaniu celem sprowadzenia ich wartości do porównywalności. Uzyskuje się w ten sposób macierz $M''_l(A_k)$ opisaną wzorem [60]:

$$m''_{l,i,j}(A_k) = m_{l,k,o} m'_{l,i,j}(A_k) \quad (3.2)$$

gdzie $m'_{l,i,j}(A_k)$ to element macierzy $M'_l(A_k)$. o – numer wariantu decyzyjnego do poziomu, którego sprowadza się wszystkie macierze $M'_l(A_k)$.

Macierze $M''_l(A_k)$ są podstawą do wyznaczenia wektorów średnich ocen \vec{X}_j dla poszczególnych wariantów decyzyjnych – wzór [60]:

$$\bar{x}_{j,l} = \frac{\sum_{i \neq k}^{i,k} m''_{l,i,j}(A_k)}{N(N-1)} \quad (3.3),$$

gdzie \vec{X}_j to wektor reprezentujący j -ty wariant decyzyjny. $\bar{x}_{j,l}$ to element tego wektora, a N jest liczbą wariantów decyzyjnych.

Wyznacza się również macierz zawierającą kowariancje $Mcov_j$ dla poszczególnych wariantów w ramach poszczególnych kryteriów według wzoru [60]:

$$mcov_{j,o,p} = \frac{\sum_{i \neq k}^{i,j} (m''_{o,i,j}(A_k) - \bar{x}_{j,l})(m''_{p,i,j}(A_k) - \bar{x}_{j,l})}{2N(N-1)} \quad (3.4),$$

gdzie $mcov_{j,o,p}$ jest elementem macierzy $Mcov_j$.

Dla obliczonych wektorów \vec{X}_j wyznaczany jest na podstawie wzoru 3.5 motywujący wektor preferencji dla wartości średnich $\vec{\Psi}$ [60]:

$$\bar{\psi}_i = \text{quart}_{III j}(\bar{x}_{j,l}) \quad (3.5),$$

gdzie i oznacza określone kryterium, $\bar{\psi}_i$ jest elementem wektora $\vec{\Psi}$, a $\text{quart}_{III j}$ oznacza III kwartył liczony względem j .

Ponadto wyznaczany jest na podstawie wzoru 3.6 demotywuujący wektor preferencji dla wartości średnich $\vec{\Phi}$ [60]:

$$\bar{\phi}_i = \text{quart}_{I j}(\bar{x}_{j,l}) \quad (3.6),$$

gdzie i oznacza określone kryterium, $\bar{\phi}_i$ jest elementem wektora $\vec{\Phi}$, a $\text{quart}_{I j}$ oznacza I kwartył liczony względem j .

Wektor \vec{V} jest różnicą między wektorami $\vec{\Psi}$ i $\vec{\Phi}$, co opisano wzorem [60]:

$$\vec{V} = \vec{\Psi} - \vec{\Phi} \quad (3.7)$$

Na jego podstawie wyznacza się następnie wektor \vec{V}' . W tym celu wektor \vec{V} sprowadza się za pomocą wzoru 4.8 do wektora jednostkowego [60]:

$$\vec{V}' = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \quad (3.8)$$

$\|\vec{V}\|$ jest długością wektora \vec{V} [60], co opisano wzorem:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\sum_i v^2(i)} \quad (3.9)$$

gdzie i oznacza określone kryterium, $v(i)$ jest elementem wektora \vec{V} .

Na podstawie wektora \vec{V} wyznacza się następnie, korzystając ze wzoru 3.10, macierz transformacji T [60]:

$$T = \begin{bmatrix} v(1) & v(2) & v(3) & \dots & v(M) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Macierz T jest zawsze macierzą kwadratową. Służy ona do obliczenia wektora oceny/użyteczności danego wariantu decyzyjnego \vec{U}_j . Wektor ten uzyskuje się, mnożąc współrzędne wektora \vec{X}_j przez macierz transformacji T , co możemy opisać wzorem [60]:

$$\vec{U}_j = T \times \vec{X}_j \quad (3.11)$$

Wszystkie elementy wektora \vec{U}_j poza pierwszym ($\overline{u_{j,1}}$) są równe zero. Element $u_{j,1}$ jest to ocena danego wariantu decyzyjnego. Służy ona do porównania rozważanych w rozpatrywanym problemie decyzyjnym wariantów decyzyjnych. Należy przy tym podkreślić, iż najlepsze rozwiązanie charakteryzuje najmniejsza wartość u_j . Rozpatrywane jest więc w tym przypadku zagadnienie minimalizacji. W istocie za najlepszy uznaje się wariant, nad którym w najmniejszym stopniu przeważają inne warianty w macierzach porównań parami (porównaj wzory (3.1) – (3.3)).

Podobnie można transformować macierze $Mcov_j$. Dokonuje się tego za pomocą wzoru 4.12. Otrzymuje się wówczas macierze $Mcov'_j$ [60]:

$$mco'v'_{j,i,k} = \sum_{o=1}^L \sum_{p=1}^L t_{i,o} t_{k,p} mco'v_{j,o,p} \quad (3.12),$$

gdzie $mco'v'_{j,i,k}$ to element macierzy $Mcov'_j$.

Elementy $mco'v'_{j,i,k}$ dla których $i = k$ są wariancjami. Są one podstawą do obliczenia, za pomocą wzoru [60] odchyłeń standardowych ocen wariantów decyzyjnych po transformacji:

$$\sigma'_{j,i} = \sqrt{mcov'_{j,i,i}} \quad (3.13)$$

Wszystkie elementy $\sigma'_{j,i}$ poza pierwszym ($\sigma'_{j,1}$) są równe zero. Element $\sigma'_{j,1}$ jest odchyleniem standardowym oceny danego wariantu w badanym problemie decyzyjnym.

Odchylenie standardowe jest miarą zmienności badanego zjawiska, obiektu lub obiektów. Zmienność ta może być związana ze zmianą parametrów obiektu w czasie jak również błędem pomiarowym, natomiast przy większej liczbie obiektów może reprezentować ich niejednorodność. Może też być wynikiem wystąpienia trudności z oceną obiektów przez decydenta i reprezentować stopień niepewności tej oceny. Celem przedstawionego sposobu wyznaczania macierzy porównań służącego do wyznaczenia odchylenia standardowego jest właśnie wychwycenie stopnia niepewności/niespójności oceny dokonywanej przez decydenta przy porównywaniu rozpatrywanych wariantów parami w procesie tworzenia rankingu na potrzeby rozpatrywanego problemu decyzyjnego. Metoda PVM–VSI umożliwia obliczenie odchylenia standardowego dla każdego wariantu decyzyjnego w tworzonym rankingu w rozpatrywanym wielokryterialnym problemie decyzyjnym. Odchylenie standardowe jest w tym przypadku miarą niepewności oceny wariantów decyzyjnych przez decydenta. W konstruowanym rankingu można interpretować ją więc jako miarę niepewności położenia danego wariantu w powstałym na potrzeby rozpatrywanego problemu decyzyjnego rankingu. Oznacza to, że gdy dwa warianty decyzyjne leżą blisko siebie w rankingu końcowym rozpatrywanego problemu decyzyjnego możemy porównać, jak duże jest ich odchylenie standardowe. Dzięki temu porównaniu możemy zakwalifikować je jako równorzędne lub też wskazać, który z nich zajmie wyższe miejsce w rankingu końcowym rozpatrywanego problemu decyzyjnego.

3.3. Porównanie metody PVM–VSI z wybranymi metodami

W tabeli 3.1 zestawiono porównanie metod AHP, ELECTRE, PROMETHEE, TOPSIS oraz PVM–VSI. Nie uwzględniono metody PVM z uwagi na fakt, że metoda PVM–VSI jest rozszerzeniem PVM. Jej procedura jest więc podobna.

Z tabeli 3.1 wynika, że najwięcej zalet ma metoda AHP. Charakteryzuje się ona łatwością w użyciu, skalowalnością, elastycznością w zastosowaniu do wspomaganie problemów decyzyjnych różnych rozmiarów. Nie wymaga też dużych zasobów pamięci przy wspomaganie obliczeń oprogramowaniem. Metodę PVM–VSI cechuje łatwość w użyciu (jak w AHP), uwzględnia ona niepewność, a liczba kroków jest zawsze taka sama.

Metody PROMETHEE i TOPSIS mają mniej zalet. PROMETHEE jest również łatwa w użyciu (cecha tożsama z AHP i PVM–VSI), a ponadto kryteria mogą być w niej nieprocentowe (nieproporcjonalne), co odróżnia ją od pozostałych metod zawartych w tabeli 3.1. Metoda TOPSIS ma te same zalety co PVM–VSI (łatwość w użyciu, zawsze taka sama liczba kroków), ale w odróżnieniu od niej nie uwzględnia niepewności. W zestawieniu tym najmniej zalet cechuje metodę ELECTRE. Jej jedyną wyszczególnioną zaletą jest to, że uwzględnia ona niepewność.

Jeśli pod uwagę przy porównaniu metod z tabeli weźmiemy wady poszczególnych metod, to AHP charakteryzuje się również ich większą liczbą od znacznej części wymienionych w tabeli 3.1 metod. Tyle samo wad charakteryzuje tylko metodę TOPSIS. Pozostałe mają ich mniej. Wadą AHP jest zależność między alternatywami a kryteriami, może prowadzić do niespójności między decyzją a kryteriami, a także odwrócenie rankingu. W TOPSIS wadą jest, że również może w niej dojść do niespójności między decyzją a kryteriami. Ponadto trudno określić w niej wagi oraz używa się w niej odległości euklidesowej. Metodę PVM–VSI tak jak ELECTRE charakteryzują dwie wady. Jak TOPSIS używa się w niej odległości euklidesowej oraz nie uwzględnia ona korelacji między kryteriami. Za wady ELECTRE uważa się natomiast to, że proces oraz wyniki mogą być trudne do wyjaśnienia, a siły i słabości poszczególnych rozwiązań nie są łatwe do bezpośredniego zidentyfikowania. Wadą metody PROMETHEE jest natomiast ta cecha, że trudno jest w niej określić wagi.

Jak wynika z opisanych wyżej zalet i wad każdej z kilku najczęściej używanych w problemach wspomaganie decyzji metod nie ma do rozwiązywania problemów decyzyjnych metody idealnej. Porównując poszczególne metody na podstawie ich wad i zalet, można jedynie określić przewagę jednej metody nad drugą. Przewagę nad najpopularniejszymi metodami wielokryterialnymi zebranymi w tabeli 1.3 ma proponowana w niniejszej rozprawie metoda autorska PVM–VSI dlatego, że jest ona pod pewnymi względami lepsza od tych metod. W odróżnieniu od AHP, PROMETHEE oraz TOPSIS uwzględnia niepewność. Ponadto liczba kroków w procedurze jest zawsze taka sama, co również daje jej przewagę nad AHP, ELECTRE I PROMETHEE. Nad metodą ELECTRE ma też przewagę, jeśli chodzi o łatwość w użyciu w wielokryterialnych problemach decyzyjnych. Nie występują w niej zależności między alternatywami a kryteriami jak w AHP. Łatwiej jest też określić w niej wagi niż w TOPSIS oraz PROMETHEE. Wady metody PVM–VSI zostały natomiast opisane powyżej.

Tabela 3.1. Porównanie najczęściej wykorzystywanych metod wielokryterialnych i metody PVM–VSI

Metoda	Zalety							Wady							
	Łatwość w użyciu	Skalowalność	Elastyczność w zastosowaniu do problemów różnych rozmiarów	Uwzględnia niepewność	Nie wymaga dużych zasobów pamięci	Kryteria mogą być nie procentowe (nieproporcjonalne)	Ilość kroków zawsze taka sama	Zależność między alternatywami a kryteriami	Może prowadzić do niespójności między decyzją a kryteriami	Odwrocenie rankingu	Proces oraz wyniki mogą być trudne do wyjaśnienia	Sily i słabości poszczególnych rozwiązań nie są łatwe do bezpośredniego zidentyfikowania	Trudno określić wagi	Użycie odległości euklidesowej	Nie uwzględnia korelacji między kryteriami
AHP	X	X	X		X			X	X	X					
ELECTRE				X							X	X			
PROMETHEE	X					X							X		
TOPSIS	X						X		X				X	X	
PVM–VSI	X			X			X							X	X

Źródło: opracowanie własne na podstawie [88].

Rozdział IV. Przykłady zastosowania metody PVM–VSI w wielokryterialnym podejmowaniu decyzji

4.1. Zastosowanie PVM–VSI w planowaniu budżetu obywatelskiego

Proponowana w niniejszej rozprawie metoda PVM–VSI w pierwszym przykładzie zostanie zastosowana do wspomaganie problemu decyzyjnego, gdzie decyzje podejmuje się na szczeblach władzy samorządowej. Celem takiego badania jest sprawdzenie jej przydatności w problemach decyzyjnych związanych z działalnością samorządów w planowaniu kierunku rozwoju obszarów miejskich, wspomaganie decyzji przy planowaniu nowych inwestycji itp.

Dla porównania metody PVM–VSI z metodami wykorzystywanymi dotychczas we wspomaganie decyzji wielokryterialnych, w których kryteria wyboru mają charakter subiektywny, a więc nie są podane w sposób ilościowy, wyniki otrzymane metodą autorską zostaną zestawione z wynikami otrzymanymi w badaniach z zastosowaniem metody Fuzzy AHP. Metodę tę wybrano ze względu na pewne podobieństwa do metody autorskiej. Początkowe jej etapy polegające na zastosowaniu macierzy porównań parami są zbliżone do metody AHP.

Celem przeprowadzonego badania było utworzenie rankingu projektów zgłoszonych w ramach budżetu obywatelskiego oraz wskazanie najlepszych z nich. Projekty będące wyżej w rankingu w większym stopniu mają wpływ na zrównoważony rozwój miasta. Powinny być więc traktowane przez mieszkańców i władze priorytetowo przy realizacji budżetu obywatelskiego. Badanie ma wspomóc podjęcie decyzji przez decydenta w problemie, w którym musi dokonać wyboru projektu na podstawie wielu kryteriów. Kryteria mają charakter subiektywnej oceny decydenta wg przyjętej w badaniu skali. Może się to wiązać z różnicami w precyzji wyrażania ocen przez decydenta. Zastosowanie metody PVM–VSI ma umożliwić decydentowi utworzenie rankingu projektów i wskazanie najlepszych dla rozwoju miasta, a pośrednio dla jego mieszkańców.

Decydent poddał ocenie za pomocą pięciu kryteriów tyle samo wariantów decyzyjnych. Kryteria były dobierane do badania tak, aby można było dokonać oceny rozpatrywanych wariantów z uwzględnieniem ich wpływu na otoczenie gospodarcze, społeczne i środowiskowe. Badane projekty – warianty oceniane były wg następujących kryteriów:

C_1 – ład przestrzenny – kryterium, na podstawie którego projekty podlegały ocenie pod względem ich wpływu na uporządkowanie przestrzeni miasta i harmonię pomiędzy elementami składowymi tej przestrzeni;

C_2 – modernizacja (rewitalizacja) – kryterium to uwzględnia wpływ projektów na podniesienie walorów estetycznych miasta, dzielnicy bądź ulicy, których projekty dotyczą, zwiększenie wartości użytkowej, korzystne przekształcenia na obszarze objętym projektem;

C_3 – ochrona środowiska i przyrody – kryterium stanowiące ocenę projektów pod względem ich wpływu na środowisko naturalne: otaczającą daną przestrzeń zieleń miejską, gospodarkę wodną oraz faunę zamieszkującą daną przestrzeń;

C_4 – sport i turystyka – kryterium mające na celu ocenę wpływu projektów na rozwój sprawności fizycznej mieszkańców, których dany projekt dotyczy, oraz wpływu na poprawę atrakcyjności danej okolicy dla odwiedzających ją w celach turystycznych osób;

C_5 – kultura – kryterium dotyczące oceny projektów, jaki wpływ mają na rozwój „duchowy” osób, których dotyczy dany projekt.

Według wymienionych kryteriów, ocenie poddano pięć wariantów decyzyjnych:

A_1 – Dirt Park w Parku Zacisze – parkowy tor do jazdy rowerem;

A_2 – Miasteczko ruchu drogowego wraz z grami podwórkowymi w SP 10;

A_3 – Modernizacja Parku Słowiańskiego – ścieżka zdrowia;

A_4 – Średnie tężnie solankowe;

A_5 – Tor do driftu – doskonalenie techniki jazdy z poślizgiem;

Projekty te zostały wybrane jako najciekawsze z grupy projektów zgłoszonych w ramach Budżetu Obywatelskiego 2023 miasta Gorzowa [160]. Wybór części podyktowany był liczbą porównań, jakie musiałyby być wykonane, gdyby rozpatrywać w badaniu wszystkie zgłoszone projekty, a w związku z tym i czasochłonnością badania. Istotnym celem badania był nie sam wybór najlepszego projektu, a sprawdzenie w praktyce proponowanej metody wspomaganie decyzji PVM–VSI w wielokryterialnym problemie decyzyjnym na szczeblu samorządowym, w którym kryteria wyboru nie są podane w sposób ilościowy, dlatego poddano badaniu kilka najciekawszych projektów z puli projektów twardych zgłoszonych w ramach BO 2023.

Badanie składało się z dziesięciu kroków. Pierwszym z nich było sformułowanie problemu decyzyjnego, ustalenie wariantów decyzyjnych oraz kryteriów oceny tych

wariantów. Opis problemu decyzyjnego, wybrane warianty decyzyjne oraz ich kryteria oceny zostały już sformułowane w niniejszej rozprawie.

Drugim krokiem było określenie wag dla poszczególnych kryteriów. Decydent przekonany o tym, że ważny jest zarówno zrównoważony rozwój miasta, ochrona środowiska, zdrowie oraz rozwój jego mieszkańców, nie wskazał priorytetów wśród kryteriów, wg których ocenie poddane zostały w badaniu projekty. Założono więc, że wszystkie kryteria mają w badaniu jednakowe znaczenie – wagi kryteriów mają tę samą wartość. Można to interpretować również jako brak wag. W związku z założeniem decydenta o braku wag nie trzeba było dokonywać ich normowania, co zazwyczaj robi się po określeniu ich wartości przez decydenta.

W trzecim kroku, korzystając z metody badania ankietowego, decydent został poproszony o dokonanie porównań parami wariantów decyzyjnych wybranych do badania. Warianty decydent porównywał względem siebie osobno dla każdego z wyżej opisanych kryteriów. W wyniku tego kroku utworzono pięć macierzy porównań. Przykładową macierz porównań dla kryterium ład przestrzenny przedstawiono w tabeli 4.1. Macierze porównań dla pozostałych kryteriów zamieszczono w załącznikach.

Tabela 4.1. Macierz porównań parami wariantów wg kryterium C_1 – ład przestrzenny

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1	1/2	3	4
A_2	1	1	1/3	2	3
A_3	2	3	1	4	5
A_4	1/3	1/2	1/4	1	2
A_5	1/4	1/3	1/5	1/2	1

Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym kroku, wykorzystując w obliczeniach macierze porównań parami, wyznaczono macierze pośrednie porównania. Celem tego działania jest uwzględnienie w wyniku obliczeń niespójności macierzy porównań będących wynikiem niespójności odpowiedzi respondenta. Macierz pośrednią porównania dla kryterium ład przestrzenny przedstawiono w tabeli 4.2. Pozostałe macierze pośrednie porównań dla kryteriów zamieszczono w załącznikach.

Tabela 4.2. Macierz pośrednia porównań wariantów wg kryterium C_1 – ład przestrzenny

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		1	1/2	3	4
$A_1 (A_2)$		1	1/3	2	3
$A_1 (A_3)$		1 1/2	1/2	2	2 1/2
$A_1 (A_4)$		1 1/2	3/4	3	6
$A_1 (A_5)$		1 1/3	4/5	2	4
$A_2 (A_1)$	1		1/2	3	4
A_2	1		1/3	2	3
$A_2 (A_3)$	2/3		1/3	1 1/3	1 2/3
$A_2 (A_4)$	2/3		1/2	2	4
$A_2 (A_5)$	3/4		3/5	1 1/2	3
$A_3 (A_1)$	2	2		6	8
$A_3 (A_2)$	3	3		6	9
A_3	2	3		4	5
$A_3 (A_4)$	1 1/3	2		4	8
$A_3 (A_5)$	1 1/4	1 2/3		2 1/2	5
$A_4 (A_1)$	1/3	1/3	1/6		1 1/3
$A_4 (A_2)$	1/2	1/2	1/6		1 1/2
$A_4 (A_3)$	1/2	3/4	1/4		1 1/4
A_4	1/3	1/2	1/4		2
$A_4 (A_5)$	1/2	2/3	2/5		2
$A_5 (A_1)$	1/4	1/4	1/8	3/4	
$A_5 (A_2)$	1/3	1/3	1/9	2/3	
$A_5 (A_3)$	2/5	3/5	1/5	4/5	
$A_5 (A_4)$	1/6	1/4	1/8	1/2	
A_5	1/4	1/3	1/5	1/2	

Źródło: opracowanie własne.

Następnym krokiem było obliczanie wektorów średnich ocen dla wszystkich wariantów decyzyjnych. Wektory średnich ocen uzyskuje się z wartości otrzymanych dla poszczególnych macierzy pośrednich wyliczonych w poprzednim kroku. Wektory te przedstawiono w tabeli 4.3. W tym samym kroku procedury metody PVM–VSI wyznacza

się – na podstawie wektorów średnich ocen – macierze kowariancji dla poszczególnych wariantów w ramach poszczególnych kryteriów. Macierz kowariancji dla wariantu A_1 przedstawiono w tabeli 4.4. Macierze kowariancji dla pozostałych wariantów zamieszczono w załącznikach.

Tabela 4.3. Wektory średnich ocen dla wariantów decyzyjnych

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
C_1	0,8617	1,1258	0,3572	2,3775	3,9125
C_2	1,3550	0,3614	0,7158	2,4025	3,9625
C_3	0,7158	2,4025	0,3614	1,3550	3,9625
C_4	0,7117	3,4125	2,7525	0,3576	1,3508
C_5	0,7275	4,0500	2,5542	0,3426	1,3725

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.4. Macierz kowariancji dla wariantu A_1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	0,5169	0,3024	0,3256	-0,1918	-0,1718
C_2	0,3024	1,0591	0,1152	-0,3237	-0,3561
C_3	0,3256	0,1152	0,3209	-0,0671	-0,0624
C_4	-0,1918	-0,3237	-0,0671	0,3217	0,3305
C_5	-0,1718	-0,3561	-0,0624	0,3305	0,3496

Źródło: opracowanie własne

Kolejny krok to normowanie wartości kryteriów. Z uwagi na fakt, że oceny wariantów dokonano, wykorzystując w badaniu kryteria subiektywne, a oceny wyrażone są przez decydenta metodą porównań z wykorzystaniem ocen ze skali Saaty'ego, krok ten można było pominąć w niniejszym badaniu.

W kroku siódmym dokonuje się wyliczenia wektorów preferencji motywującego i demotywowującego. W tabeli 4.5 przedstawiono motywujący wektor preferencji. Tabela 4.6 zawiera natomiast demotywowujący wektor preferencji.

Tabela 4.5. Motywujący wektor preferencji

$\bar{\psi}$	2,3775	2,4025	2,4025	2,7525	2,5542
--------------	--------	--------	--------	--------	--------

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.6. Demotywiający wektor preferencji.

$\vec{\phi}$	0,8617	0,7158	0,7158	0,7117	0,7275
--------------	--------	--------	--------	--------	--------

Źródło: opracowanie własne.

Krok ósmy, jaki wykonuje się podczas badania w procedurze metody PVM–VSI, to wyliczenie różnicy między obliczonymi wektorami preferencji motywującym i demotyującym, czyli wektora \vec{V} . Wektor ten przedstawiony został w tabeli 4.7. Na jego podstawie dokonano wyznaczenia wektora motywującego. Wektor motywujący w niniejszym badaniu ma wartości równe wektorowi \vec{V} . Następnie dokonano normowania wektora motywującego. Wartość unormowanego wektora motywującego wynosi 3,9356. Dysponując wartościami wektora \vec{V} oraz unormowanego wektora motywującego, wyznaczamy następnie wartość wektora \vec{V}' . Wartości tego wektora przedstawiono w tabeli 4.8.

Tabela 4.7. Wartości wektora \vec{V}

\vec{V}	1,5158	1,6867	1,6867	2,0408	1,8267
-----------	--------	--------	--------	--------	--------

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.8. Wartości wektora \vec{V}'

\vec{V}'	0,3852	0,4286	0,4286	0,5186	0,4641
------------	--------	--------	--------	--------	--------

Źródło: opracowanie własne.

W kroku dziewiątym, mając wyliczony wektor \vec{V}' , na jego podstawie wyznaczono macierz transformacji. Macierz tę przedstawia tabela 4.9.

Tabela 4.9. Macierz transformacji

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	0,3852	0,4286	0,4286	0,5186	0,4641
M_2	0	0	0	0	0
M_3	0	0	0	0	0
M_4	0	0	0	0	0
M_5	0	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

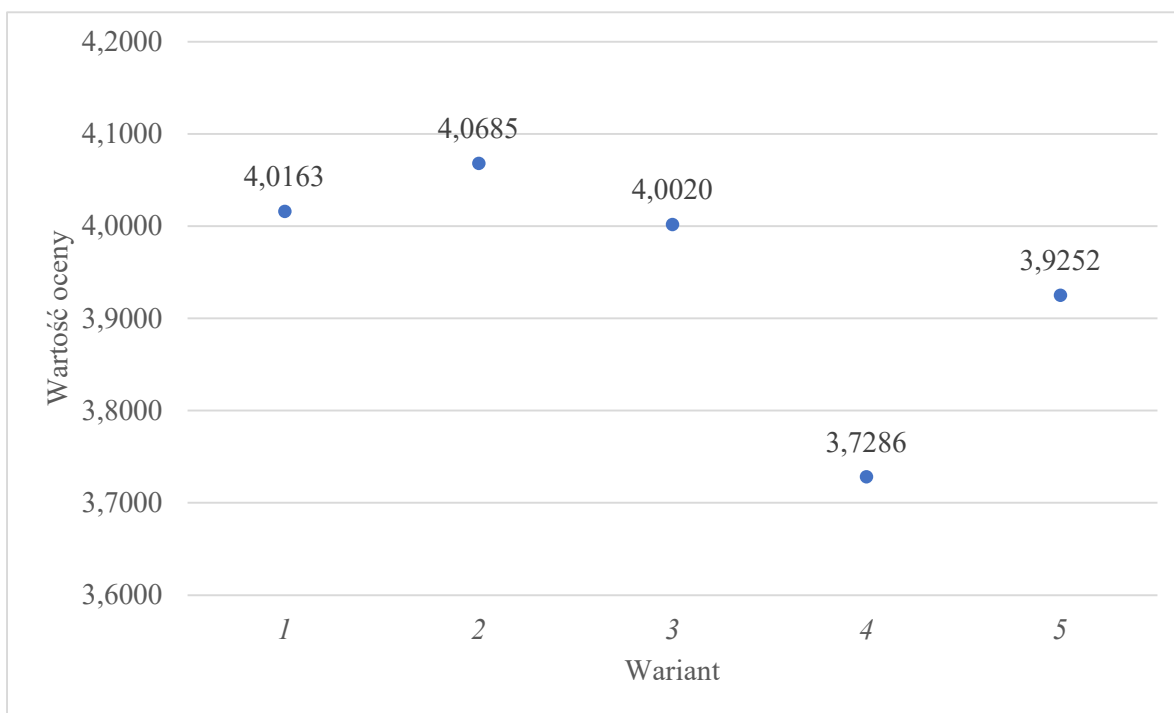
Ostatni, dziesiąty krok procedury metody PVM–VSI obejmuje obliczenie wektora oceny, wariancji i odchylenia standardowego. Wektor oceny danego wariantu decyzyjnego oblicza się na podstawie macierzy wektorów średnich ocen dla poszczególnych wariantów decyzyjnych oraz macierzy transformacji. Wszystkie elementy wektora oceny, poza pierwszym, są równe zero. Pierwszy element jest oceną danego wariantu decyzyjnego i służy do porównania wariantów decyzyjnych celem ustalenia ich kolejności w rankingu wariantów badanego problemu decyzyjnego. Oceny (μ_j) uzyskane przez warianty decyzyjne przedstawiono w tabeli 4.10.

Wariancje dla poszczególnych wariantów decyzyjnych wyliczamy natomiast z macierzy kowariancji i macierzy transformacji. Wariancje potrzebne są do tego, by można było na ich podstawie wyznaczyć odchylenie standardowe dla poszczególnych wariantów. Odchylenie standardowe to wartość mówiąca o tym, w jakim obszarze może zmieniać się wartość oceny wyliczonej w badaniu dla danego wariantu decyzyjnego. Wartości odchylenia standardowego (σ) uzyskane dla poszczególnych wariantów zawiera tabela 4.10. Rysunek 4.1 prezentuje w formie graficznej uzyskane oceny wariantów, natomiast rysunek 4.2 uzyskane wartości odchylenia standardowego.

Tabela 4.10. Oceny (μ_j) oraz wartości odchylenia standardowego (σ) uzyskane przez poszczególne warianty decyzyjne

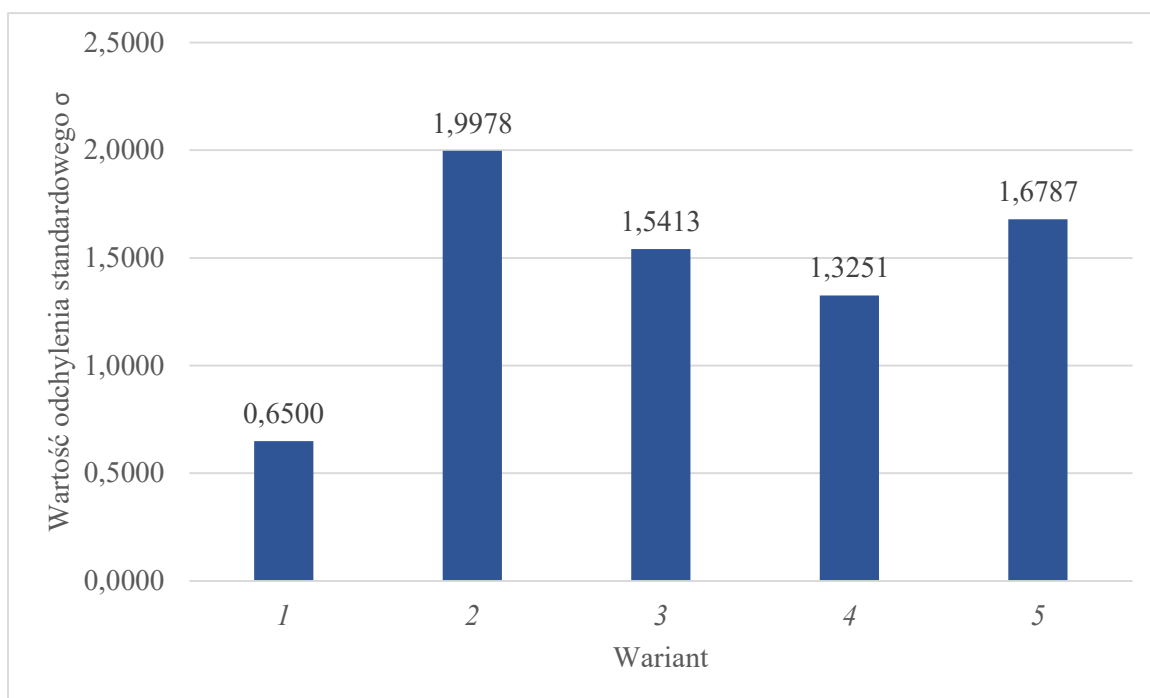
	μ_j	σ
A_1	4,0163	0,6500
A_2	4,0685	1,9978
A_3	4,0020	1,5413
A_4	3,7286	1,3251
A_5	3,9252	1,6787

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.1. Oceny wariantów decyzyjnych

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.2. Wartości odchylenia standardowego

Źródło: opracowanie własne.

Ranking uzyskany w badaniu przedstawiono w tabeli 4.11. Wynika z niego, że najlepszym projektem z badanej grupy projektów zgłoszonych do Budżetu Obywatelskiego jest projekt A_2 – Miasteczko ruchu drogowego wraz z gramami podwórkowymi w SP 10. Wartość jego oceny jest najwyższa i uzyskał on zdecydowaną przewagę nad pozostałymi wariantami, co dokładnie widać na rysunku 4.1. W dalszej kolejności w rankingu znalazły się projekty A_1 – Dirt Park w Parku Zacisze – parkowy tor do jazdy rowerem oraz A_3 – modernizacja Parku Słowiańskiego – ścieżka zdrowia. Oceny wariantów drugiego w rankingu A_1 i trzeciego w rankingu A_3 różnią się między sobą w nieznacznym stopniu. Na końcu rankingu znalazły się projekty A_5 – tor do driftu – doskonalenie techniki jazdy z poślizgiem oraz A_4 – średnie tężnie solankowe. Warianty A_1 i A_3 uzyskały w badaniu oceny do siebie zbliżone. W tym przypadku decydent mógłby mieć wątpliwości odnośnie do ich miejsca w rankingu. Jeśli decydent nie jest pewny co do kolejności wariantów A_1 i A_3 , w rankingu pomocna jest tu obliczona wartość odchylenia standardowego dla tych wariantów. Wartość odchylenia standardowego dla wariantu A_1 jest zdecydowanie mniejsza niż dla wariantu A_3 . Oznacza to, że wariant A_1 jest lepiej określony w rankingu niż wariant A_3 i decydent nie powinien mieć wątpliwości co do miejsc wariantów A_1 i A_3 w rankingu końcowym. Biorąc pod uwagę zrównoważony rozwój miasta, można by zatem przedstawić mieszkańcom otrzymany ranking (tabela 4.11), by mieli świadomość, które z projektów rekomendują eksperci jako te najlepsze dla rozwoju ich miasta.

Tabela 4.11. Ranking uzyskany w badaniu projektów zgłoszonych do BO

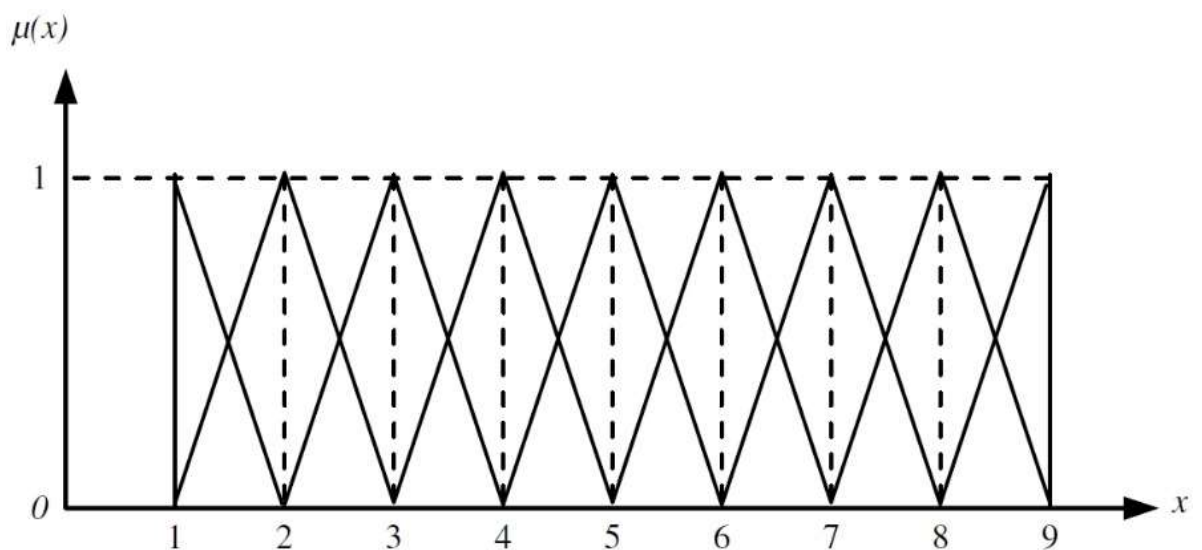
Kolejność projektów w rankingu
$A_2 > A_1 > A_3 > A_5 > A_4$

Źródło: opracowanie własne.

Poniżej przedstawiono wyniki badania uzyskane z zastosowaniem metody Fuzzy AHP. Wykonane badanie posłużyło do porównania wyników badania otrzymanych metodą autorską z wynikiem otrzymanym metodą wykorzystywaną dotychczas we wspomaganie decyzji wielokryterialnych, w których kryteria wyboru mają charakter subiektywny, a więc nie są podane w sposób ilościowy.

W badaniu zastosowano rozmytą wersję metody AHP zaproponowaną przez Vahidnie [139], stanowiącą rozszerzenie AHP [119] na przypadek, w którym decydenci mogą stosować współczynniki rozmycia w miejsce dokładnych stosunków.

W pierwszym kroku badania metodą fuzzy AHP wykorzystano macierze porównań parami poszczególnych wariantów względem każdego z pięciu kryteriów otrzymane w badaniu metodą PVM–VSI. Oceny w tych macierzach wyrażone w skali Saaty’ego (wartości ostre) zamieniono na oceny wyrażone za pomocą liczb rozmytych. Liczby rozmyte odpowiadające poszczególnym ocenom skali Saaty’ego przedstawiono na rysunku 4.3 [139]. Mapowania ocen ostrych na rozmyte dokonano z zastosowaniem wartości lingwistycznych, zdefiniowanych zarówno dla skali Saaty’ego, jak też dla skali rozmytej [119,139]. Wyniki mapowania przedstawiono w tabeli 4.12. Posłużono się przy tym skalą ocen 1–9, przyporządkowując ocenie językowej odpowiednie wartości punktu lewego, punktu środkowego i punktu prawego zakresu, w którym funkcja jest zdefiniowana.



Rysunek 4.3. Pięciostopniowa skala ocen językowych i odpowiadająca im skala ocen rozmytych

Źródło: [150].

Tabela 4.12. Mapowanie wartości ostrych na rozmyte na podstawie ocen lingwistycznych

Wartość ostra	Wartość lingwistyczna	Wartość rozmyta	Odwrotna wartość rozmyta
1	Równie ważne	(1,1,2)	(1/2,1,1)
2	Wartość pośrednia	(1,2,3)	(1/3,1/2,1)
3	Mało ważne	(2,3,4)	(1/4,1/3,1/2)
4	Wartość pośrednia	(3,4,5)	(1/5,1/4,1/3)
5	Zasadniczo ważne	(4,5,6)	(1/6,1/5,1/4)

6	Wartość pośrednia	(5,6,7)	(1/7,1/6,1/5)
7	Bardzo ważne	(6,7,8)	(1/8,1/7,1/6)
8	Wartość pośrednia	(7,8,9)	(1/9,1/8,1/7)
9	Absolutnie ważne	(8,9,9)	(1/9,1/9,1/8)

Źródło: [150]

Macierz porównań parami dla kryterium C_1 (ład przestrzenny) uzyskaną poprzez zamianę ocen w skali Saaty'ego na oceny rozmyte przedstawia tabela 4.13.

Tabela 4.13. Oceny wariantów z uwzględnieniem kryterium C_1 – skala liczb rozmytych

	A_1			A_2			A_3			A_4			A_5		
A_1	1	1	1	3	4	5	1/4	1/3	1/2	1	1	2	1/3	1/2	1
A_2	1/5	1/4	1/3	1	1	1	1/4	1/3	1/2	1/4	1/3	1/2	1/3	1/2	1
A_3	2	3	4	2	3	4	1	1	1	1	1	2	1	2	3
A_4	1	1	2	2	3	4	1	1	2	1	1	1	1	2	3
A_5	1	2	3	1	2	3	1/3	1/2	1	1/3	1/2	1	1	1	1

Źródło: opracowanie własne.

W drugim kroku na podstawie ocen wyrażonych w skali liczb rozmytych obliczono oceny odpowiednio dla niskich, średnich i wysokich wartości. Uzyskane dla poszczególnych wariantów według każdego z kryteriów wyniki przedstawiono w tabeli 4.14.

Tabela 4.14. Oceny wariantów według poszczególnych kryteriów – skala liczb rozmytych

	Ład przestrzenny	Modernizacja	Ochrona środowiska	Sport i turystyka	Kultura
A_1	[0,1559 0,2185 0,3362]	[0,0909 0,1344 0,2030]	[0,1762 0,2602 0,3916]	[0,1766 0,2627 0,3906]	[0,1747 0,2542 0,3802]
A_2	[0,1129 0,1631 0,2721]	[0,3523 0,5028 0,7152]	[0,0467 0,0678 0,1010]	[0,0352 0,0432 0,0699]	[0,0278 0,0346 0,0475]
A_3	[0,3526 0,5147 0,7009]	[0,1762 0,2602 0,3916]	[0,3523 0,5028 0,7152]	[0,0394 0,0520 0,0821]	[0,0450 0,0631 0,0941]
A_4	[0,0464 0,0686 0,1006]	[0,0467 0,0678 0,1010]	[0,0909 0,1344 0,2030]	[0,3523 0,5057 0,7130]	[0,3709 0,5173 0,7135]
A_5	[0,0274 0,0352 0,0478]	[0,0277 0,0348 0,0484]	[0,0277 0,0348 0,0484]	[0,0916 0,1364 0,2026]	[0,0902 0,1307 0,1953]

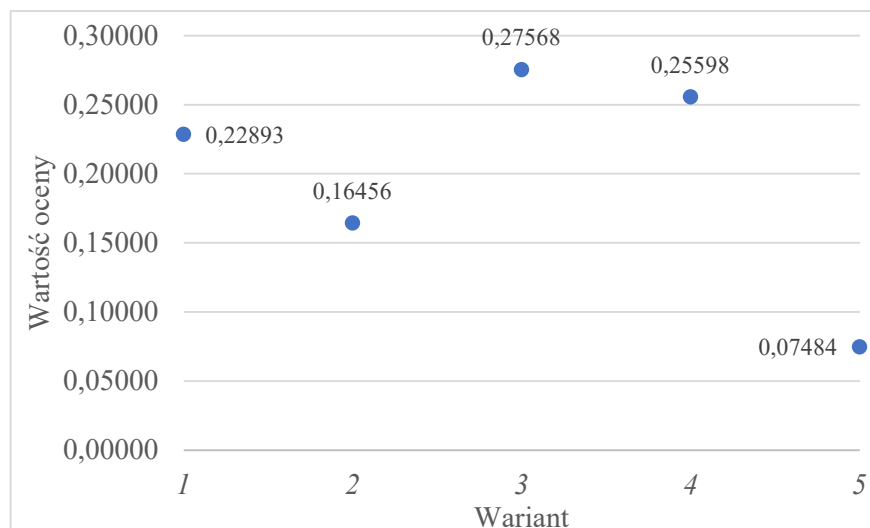
Źródło: opracowanie własne.

Następnym krokiem w prowadzonym badaniu była agregacja ocen cząstkowych. Jakże uzyskały poszczególne warianty dla poszczególnych kryteriów dla niskich, średnich i wysokich wartości w ocenę końcową w skali liczb rozmytych. W końcowym etapie ocenę uzyskaną w badaniu dla poszczególnych wariantów dla niskich, średnich i wysokich wartości poddano wyostrzeniu oraz normalizacji. W ten sposób otrzymano ocenę końcową dla każdego z wariantów. Na jej podstawie ustalono miejsce w rankingu każdego z wariantów. Tabela 4.15 zawiera zagregowany wektor skali dla liczb rozmytych dla niskich średnich i wysokich wartości, zagregowany wektor skali po wyostrzeniu oraz miejsce w rankingu uzyskane z wykorzystaniem procedury badawczej Fuzzy AHP przez poszczególne warianty. Na rysunku 4.4 przedstawiono oceny uzyskane przez poszczególne warianty decyzyjne za pomocą metody Fuzzy AHP.

Tabela 4.15. Rozmyta ocena końcowa poszczególnych wariantów, wyostrzona ocena końcowa oraz miejsce w rankingu uzyskane za pomocą procedury fuzzy AHP

	W_l	W_m	W_u	Wektor skali	Ranking
A_1	0,15485	0,22600	0,34031	0,22893	3
A_2	0,11496	0,16230	0,24112	0,16456	4
A_3	0,19311	0,27856	0,39675	0,27568	1
A_4	0,18144	0,25874	0,36619	0,25598	2
A_5	0,05291	0,07439	0,10847	0,07484	5

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.4. Oceny wariantów decyzyjnych uzyskane metodą Fuzzy AHP

Źródło: opracowanie własne.

Dla porównania wyników uzyskanych za pomocą obu metod otrzymane rankingi przedstawiono zbiorczo w tabeli 4.16.

Tabela 4.16. Rankingi uzyskane z zastosowaniem metod PVM–VSI i Fuzzy AHP

Metoda	Ranking
PVM–VSI	$A_2 > A_1 > A_3 > A_5 > A_4$
Fuzzy AHP	$A_3 > A_4 > A_1 > A_2 > A_5$

Źródło: opracowanie własne.

Analizując tabelę 4.16, można zauważyć, że uzyskane rankingi różnią się od siebie pomimo tego, że początkowe etapy, takie jak zastosowanie macierzy porównań parami, są zbliżone do metody Fuzzy AHP. Różnice pomiędzy rankingiem PVM–VSI i Fuzzy AHP wynikają z różnic w procedurach obliczeniowych poszczególnych metod. W metodzie autorskiej realizowane są operacje, takie jak: budowa pośredniej macierzy porównań, obliczanie macierzy transformacji i kowariancji oraz multiplikatywna agregacja ocen z zastosowaniem macierzy transformacji i wektora średnich ocen. Operacje te nie występują w metodach wykorzystywanych do tej pory we wspomaganie procesów decyzyjnych w tym w metodzie Fuzzy AHP. Niepodważalną zaletą metody autorskiej jest to, że daje ona decydentowi możliwość analizy spójności rozwiązania w oparciu o wartość odchylenia standardowego. Dzięki temu decydent może łatwo wskazać warianty dobrze określone w rankingu, tj. charakteryzujące się najmniejszym odchyleniem czy też najmniejszą zmiennością/spójnością ocen decydenta. Przykładowo, w rozpatrywanym problemie decyzyjnym warianty A_1 i A_3 uzyskały w badaniu oceny do siebie zbliżone (rysunek 4.1). Decydent mógłby zatem poddać w wątpliwość wyższość wariantu A_1 nad wariantem A_3 . Jednak wariant A_1 charakteryzuje się najmniejszym odchyleniem standardowym (rysunek 4.2) w przeprowadzonym za pomocą autorskiej metody badaniu, a więc również najmniejszym zróżnicowaniem ocen kryterialnych dla tego wariantu, można rozważyć go jako silnie preferowany nad wariantem A_3 . Decydent nie powinien mieć zatem wątpliwości o kolejności wariantów A_1 i A_3 w przeprowadzonym badaniu. Nie znaczy to jednak, że wybór przez decydenta wariantu A_3 byłby błędem. Jeśli decydent preferuje ryzyko i wybierze wariant charakteryzujący się większą wartością odchylenia standardowego, może uzyskać on większą wartość oceny końcowej od wariantu porównywalnego, ale o mniejszym odchyleniu standardowym, czyli bardziej stabilnego.

Z przeprowadzonych badań wynika, że zaproponowana w niniejszej pracy metoda PVM–VSI pozwala na zastosowanie jej w rozwiązywaniu problemów decyzyjnych w których dokonuje się oceny wielu wariantów przy rozpatrywaniu wielu kryteriów. Wartości kryteriów nie muszą być podane w sposób ilościowy. Możliwość analizy spójności rozwiązania w oparciu o wartość odchylenia standardowego jest w niej zaletą wyróżniającą ją wśród innych metod wielokryterialnego podejmowania decyzji. Widoczne jest to w porównaniu z wynikami otrzymanymi metodą Fuzzy AHP. W metodzie PVM–VSI w badaniu oceny dwóch z pięciu wariantów są do siebie zbliżone, ale możliwe jest porównanie wartości odchylenia standardowego i na podstawie tej informacji podjęcie decyzji, który z wariantów zostanie określony wyżej w rankingu. Decydent ma więc możliwość wskazania wariantów lepiej określonych w rankingu, to znaczy charakteryzujących się najmniejszym odchyleniem czy też najmniejszą zmiennością/spójnością ocen. W konsekwencji ranking końcowy charakteryzuje dokładniejsze odwzorowanie preferencji decydenta.

4.2. Zastosowanie PVM–VSI do wyboru rodzinnego samochodu o napędzie elektrycznym

W drugim przykładzie proponowana w niniejszej rozprawie metoda PVM–VSI zostanie zastosowana do wspomaganie problemu decyzyjnego dotyczącego decyzji konsumenckich. Celem badania jest sprawdzenie przydatności metody autorskiej w problemach decyzyjnych związanych z nabyciem przez konsumenta dóbr wiążących się z wydatkowaniem pokaźnej kwoty z domowego budżetu i mających wpływ na konsumenta, i na jego rodzinę w dłuższym okresie czasowym. Może to być nabycie nieruchomości, inwestycja w ziemię czy zakup rodzinnego samochodu itp.

Dla porównania metody PVM–VSI z innymi metodami wykorzystywanymi dotychczas we wspomaganie decyzji wielokryterialnych w podobnych problemach decyzyjnych, to jest takich, w których część kryteriów wyboru ma charakter obiektywny (dane podane są w sposób ilościowy), a część kryteriów ma charakter subiektywny (oceny decydenta metodą porównania parami), wyniki otrzymane metodą autorską zostaną zestawione z wynikami otrzymanymi w badaniach z zastosowaniem metod AHP oraz PROMETHEE. Metody te wybrane zostały ze względu na to, że wcześniej zastosowano je z powodzeniem w podobnych problemach decyzyjnych. Istnieją pewne podobieństwa metody autorskiej do wymienionych metod oraz można je zastosować w problemach decyzyjnych, w których do badania stosuje się zarówno kryteria obiektywne, jak i

subiektywne. Wspomnianym wcześniej podobieństwem jest zastosowanie macierzy porównań parami w początkowych etapach jak w metodzie AHP oraz stosowane w metodzie PROMETHEE wartości ϕ^+ i ϕ^- podobne do wektorów preferencji metody PVM–VSI. Najczęściej wykorzystywane w problemach decyzyjnych metody wspomaganie decyzji przedstawiono w rozdziale II niniejszej rozprawy.

Badanie miało na celu utworzenie rankingu dostępnych aktualnie na krajowym rynku samochodów elektrycznych oraz wskazanie spełniającego najlepiej kryteria określone przez konsumenta (decydenta) związane z użytecznością samochodu, preferencjami pod względem wizualnym, biorąc pod uwagę wygląd zewnętrzny, jak i wnętrze samochodu, a także komfort. Badanie ma pomóc w podjęciu decyzji konsumenckiej, której skutkiem będzie inwestycja dużych środków, ma więc duże znaczenie dla budżetu konsumenta (decydenta). Ma też znaczenie fakt, że jest to decyzja długoterminowa i mająca wpływ na innych członków rodziny konsumenta (decydenta). Należy więc rozpatrzyć w występującym problemie decyzyjnym wiele kryteriów. Są to zarówno kryteria ilościowe, jak i jakościowe o charakterze subiektywnej oceny konsumenta (decydenta) wg przyjętej w badaniu skali. Może to wiązać się z różnicami w precyzji wyrażania ocen przez konsumenta (decydenta). Zastosowanie zaproponowanej w niniejszej pracy metody PVM–VSI pozwoli na utworzenie rankingu samochodów elektrycznych dostępnych aktualnie u dealerów lub wprowadzanych w najbliższym czasie do sprzedaży i wskazanie najlepszego z punktu widzenia konsumenta (decydenta), czyli uwzględniającego jego preferencje. Dzięki badaniu odchyleń ocen wariantów w metodzie PVM–VSI możemy również uchwycić niepewność konsumenta (decydenta) w procesie decyzyjnym i uwzględnić ją w wynikach końcowych oceny.

Konsument (decydent) poddał ocenie za pomocą dziesięciu kryteriów sześć wybranych wariantów decyzyjnych. Badane samochody elektryczne – warianty podlegały ocenie wg następujących kryteriów:

C_1 – zasięg na jednym ładowaniu wyrażony w kilometrach i badany metodą WLTP;

C_2 – prędkość maksymalna w kilometrach na godzinę;

C_3 – czas pełnego naładowania akumulatorów prądem z gniazdka wyrażony w godzinach;

C_4 – moc silnika wyrażona w koniach mechanicznych;

C_5 – minimalna pojemność bagażnika wyrażona w litrach;

C_6 – cena samochodu w złotych polskich; w badaniu pod uwagę brano cenę wersji bazowej danego modelu samochodu;

C_7 – odległość serwisu od miejsca zamieszkania decydenta wyrażona w kilometrach;

C_8 – wygląd zewnętrzny;

C_9 – wygląd wewnętrzny;

C_{10} – komfort.

Wymienione wyżej kryteria dobrano do badania tak, aby można było dokonać oceny wariantów, uwzględniając oczekiwaną przez konsumenta (decydenta) wartość użytkową samochodu oraz preferencje odnośnie do wyglądu zewnętrznego, wewnętrznego i komfortu. Według ww kryteriów ocenie poddano sześć wariantów – samochodów elektrycznych:

A_1 – Hyundai IONIQ 5 170 KM / 58 kWh 2WD,

A_2 – Kia EV6 170 KM / 58 kWh / RWD,

A_3 – Kia Niro EV 204 KM / 65 kWh,

A_4 – Nissan Ariya 214 KM / 63 kWh,

A_5 – Škoda ENYAQ iV 60,

A_6 – Volkswagen ID.4 Pro / 174 KM / 77 kWh.

Samochody elektryczne, które znalazły się w grupie wariantów decyzyjnych poddanych ocenie w badaniu, zostały wybrane z grupy samochodów przedstawionych w tabeli 4.17. Tabela ta została opracowana na podstawie danych pochodzących z portalu elektromobilni.pl [152] i internetowej bazy danych samochodów elektrycznych Electric Vehicle Database [161]. Dane zawarte w tabeli pochodzą z lutego 2023 roku i dotyczą modeli samochodów elektrycznych wg portalu elektromobilni.pl dostępnych w bieżącej sprzedaży przez sieci dilerskie działające na polskim rynku motoryzacyjnym.

Samochody elektryczne rozpatrywane w badaniu jako warianty decyzyjne zostały wyodrębnione z tabeli 4.17 na podstawie wstępnych kryteriów postawionych przez konsumenta (decydenta) – jednego z rodziców pięcioosobowej rodziny z dwójką dzieci w wieku zobowiązującym rodziców do korzystania podczas podróżowania z fotelików. Konsument poszukiwał więc auta rodzinnego, które będzie na co dzień użytkowane przez rodzinę w codziennych czynnościach, takich jak dowóz członków rodziny do miejsca pracy oraz miejsca edukacji, ale pozwoli również na rodzinne wyjazdy dalej od miejsca zamieszkania i zabranie ze sobą na czas wyjazdu odpowiedniej ilości bagażu. Założona przez konsumenta pojemność bagażnika musiała być więc większa od 450 litrów. Taka pojemność bagażnika gwarantuje, że samochód nie należy do segmentu najmniejszych aut i może nim podróżować pięć osób w tym dwie w fotelikach do przewozu dzieci. Konsument na ten cel przeznaczył budżet w wysokości 200 tys. złotych. Uwzględnił w zakładanym

budżecie dopłatę w wysokości 27 tys. złotych z programu rządowego „Mój elektryk” przysługującą rodzinom posiadającym „Kartę dużej rodziny” [162]. Graniczna cena rozpatrywana przez konsumenta (decydenta) przy zakupie wynosiła więc maksymalnie 227 tys. złotych. Uwzględniając warunki rynkowe, w których znajduje się konsument – miejsce zamieszkania oddalone 30 kilometrów od średniej co do wielkości (120 tys. mieszkańców) aglomeracji miejskiej, odległość od miejsca zamieszkania do większych aglomeracji miejskich powyżej 100 kilometrów, konsument wziął też pod uwagę przy wstępnej selekcji dostępność serwisu danej marki w promieniu 100 kilometrów od miejsca zamieszkania oraz zasięg auta na jednym ładowaniu minimum 350 kilometrów, by podróżę całą rodziną nie były związane z częstymi obowiązkowymi postojami na stacji ładowania. Tylko sześć modeli samochodów spełniało te kryteria. Nie było więc zasadne rozpatrywanie w badaniu pozostałych samochodów elektrycznych prezentowanych w tabeli 4.17. Samochody spełniające kryteria wstępne wymieniono wyżej jako warianty decyzyjne oraz wyróżniono w tabeli 4.17 za pomocą pogrubionej czcionki.

Tabela 4.17. Oferta oraz parametry techniczne samochodów elektrycznych dostępnych na Polskim rynku motoryzacyjnym (stan na luty 2023 r.)

Producent	Model	Zasięg (km) WLTP	Prędkość max. (km/h)	Czas pełnego ładowania 230V (h)	Moc silnika (KM)	Pojemność bagażnika (min. –litry)	Cena (PLN)	Odległość serwisu (km)
Audi	Audi e-tron GT quattro	501	245	44,5	530	405	458 400	118
	Audi Q4 35 e-tron	357	160	26,0	170	520	212 300	118
	Audi Q4 Sportback 35 e-tron	349	160	26,0	170	535	223 600	118
BMW	BMW i4 eDrive35	482	190	34,0	286	500	240 000	36
	BMW i7 xDrive60	625	240	50,0	544	500	650 000	36
	BMW iX xDrive40	436	200	36,0	326	500	378 300	36
	BMW iX1 xDrive30	440	180	31,5	313	490	250 000	36
	BMW iX3 xDrive	461	180	38,5	286	510	297 000	36
Citroen	Citroën ë-Berlingo M 50 kWh	285	130	24,0	136	597	162 190	60
	Citroën ë-C4 EV136	357	150	24,0	136	380	167 400	60
	Citroën ë-Jumpy Kombi M 50 kWh	222	130	24,0	136	1700	229 800	60
	Citroën ë-SpaceTourer M 50 kWh	225	130	24,0	136	640	256 200	60
Cupra	Cupra Born 58 kWh	427	160	29,5	204	385	187 800	124
Dacia	Dacia Spring Electric 45	230	125	12,0	45	290	91 400	35
DS.	DS 3 Crossback E-TENSE	341	150	24,0	136	350	186 900	139
Fiat	Fiat 500e Action Hatchback 95 KM	321	135	11,0	95	185	104 000	35
	Fiat 500e Cabrio 95 KM	190	135	11,0	95	185	143 400	35
Ford	Ford Mustang Mach-E RWD 75 kWh	440	180	36,0	269	519	300 700	35
Honda	Honda e Advance 154 KM	222	145	16,5	154	171	168 800	35
Hyundai	Hyundai IONIQ 5 170 KM / 58 kWh 2WD	384	185	27,0	170	527	203 900	35
	Hyundai KONA Electric 39 kWh	305	155	20,0	136	332	159 900	35
Jaguar	Jaguar I-PACE EV400	470	200	43,5	400	656	389 200	114

Jeep	Jeep Avenger 156 KM / 54 kWh / FWD	392	150	25,5	156	355	189 700	35
Kia	Kia e-Soul 136 KM / 39 kWh	276	157	20,0	136	315	149 900	35
	Kia EV6 170 KM / 58 kWh / RWD	394	185	29,5	170	520	209 900	35
	Kia Niro EV 204 KM / 65 kWh	560	167	32,0	204	475	191 900	35
Maxus	Maxus Euniq 5MPV 177 KM 70 kWh	360	160	36,0	177	bd	239 900	138
	Maxus Euniq 6 SUV 177 KM 70 kWh	354	160	36,0	177	bd	224 900	138
Mazda	Mazda MX-30 e-SKYACTIV 145 KM AT	200	140	16,5	145	171	157 900	32
Mercedes-Benz	Mercedes-Benz EQA 250	495	160	37,0	190	340	223 500	36
	Mercedes-Benz EQB 250	468	160	37,0	190	495	238 400	36
	Mercedes-Benz EQC 400 4MATIC	432	180	40,5	408	500	315 900	36
	Mercedes-Benz EQE 300	625	210	48,0	245	430	336 700	36
	Mercedes-Benz EQS 350	617	210	48,0	292	610	470 800	36
	Mercedes-Benz EQS SUV 450+	633	210	58,0	360	645	590 800	36
	Mercedes-Benz EQV Długi / 60 kWh	231	160	31,0	204	1030	356 700	36
	Mercedes-Benz eVito Tourer Długi / 60 kWh	233	160	31,0	204	990	315 438	36
Mini	MINI Cooper SE 184 KM / 32 kWh	234	150	15,5	184	211	159 900	122
Nissan	Nissan Ariya 214 KM / 63 kWh	403	160	31,0	214	468	209 900	89
	Nissan LEAF 150KM / 39 kWh	270	144	19,5	150	435	155 900	89
Opel	Opel Combo-e Life 50 kWh / Standard	285	130	24,0	136	597	188 750	36
	Opel Corsa-e e136 KM / 50 kWh	337	150	24,0	136	267	156 000	36
	Opel Mokka-e e136 KM / 50 kWh	338	150	24,0	136	310	176 500	36
	Opel Vivaro-e Kombi 50kWh / Long	238	130	24,0	136	4200	245 800	36
	Opel Zafira-e Life 50 kWh / Long	224	130	24,0	136	3900	260 200	36
Peugeot	Peugeot e-2008 136 KM / 50 kWh	341	150	24,0	136	434	175 900	60
	Peugeot e-208 136 KM / 50 kWh	362	150	24,0	136	311	149 600	60
	Peugeot e-Expert Kombi 50 kWh / Standard	222	130	24,0	136	900	229 800	60
	Peugeot e-Rifter Standard 50 kWh	279	130	24,0	136	1355	169 200	60

	Peugeot e-Traveller 50 kWh / Standard	220	130	24,0	136	2550	256 200	60
Porsche	Porsche Taycan Performance	431	230	37,0	408	491	407 000	133
Renault	Renault Kangoo E-Tech EV45	300	135	21,0	120	1300	162 852	35
	Renault Master E-Tech EV60	450	160	30,0	218	440	191 900	35
	Renault ZOE E-Tech R110	395	135	24,5	108	338	124 900	35
Seres	Seres 3	329	155	24,5	163	385	197 900	270
Skoda	Škoda ENYAQ Coupe iV 80	552	160	39,0	204	570	249 950	36
	Škoda ENYAQ iV 60	396	160	29,5	179	585	212 250	36
Smart	smart EQ fortwo coupe	134	130	8,0	82	260	108 251	97
Ssang Yong	SsangYong Korando e-Motion	339	156	29,5	190	551	199 990	34
Subaru	Subaru Solterra	466	160	36,0	218	452	234 482	114
Tesla	Tesla Model 3	491	225	29,0	325	649	244 990	486
	Tesla Model S Plaid	600	322	48,0	1020	793	666 990	486
	Tesla Model X Plaid	543	262	48	1020	608	683990	486
	Tesla Model Y	455	217	29	325	971	274990	486
Toyota	Toyota bZ4X 204 KM 4x2	516	160	36	204	452	236900	27
Volkswagen	Volkswagen ID.3 204 KM / 58 kWh	422	160	27	204	385	185890	35
	Volkswagen ID.4 Pro / 174 KM / 77 kWh	535	160	39	174	543	212890	35
	Volkswagen ID.5 Pro 174 KM / 77 kWh	536	160	39	174	549	228190	35
	Volkswagen ID.Buzz Pro 204 KM / 77 kWh	419	145	39	204	1121	268029	35
Volvo	Volvo C40 Recharge P6 FWD	438	160	32,5	231	413	226900	86
	Volvo XC40 Recharge P6 FWD	425	160	32,5	231	419	219400	86

Źródło: opracowanie własne na podstawie [152], [161].

Badanie wykonano dwa razy celem porównania, jak kryteria subiektywne, czyli podlegające ocenie przez konsumenta (decydenta), wpłyną na końcowy ranking.

Pierwsze badanie polegało na utworzeniu rankingu wariantów decyzyjnych przy najmniejszym zaangażowaniu konsumenta (decydenta). W badaniu wykorzystano kryteria C_1 – C_7 , w których dane są wyrażone w sposób ilościowy i zostały zawarte w tabeli 4.17.

Badanie to składało się z sześciu kroków. Liczba kroków w tym badaniu wynika z tego, że dotyczy ono tylko kryteriów obiektywnych. Nie trzeba było wykonywać zatem obliczeń związanych z kryteriami subiektywnymi, to jest: porównania parami wariantów, budowy macierzy pośrednich, obliczania wektorów średnich ocen, macierzy kowariancji i macierzy transformacji, obliczania wariancji i odchylenia standardowego. Krok pierwszy – definiowanie problemu decyzyjnego, ustalenie wariantów decyzyjnych i kryteriów oceny tych wariantów – został opisany powyżej i dotyczy obu przeprowadzonych badań. Wartości kryteriów dla poszczególnych wariantów decyzyjnych przedstawione zostały w tabeli 4.18.

Tabela 4.18. Wartości kryteriów dla poszczególnych wariantów decyzyjnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_1	384	185	27,0	170	527	203 900	35
A_2	394	185	29,5	170	520	209 900	35
A_3	560	167	32,0	204	475	191 900	35
A_4	403	160	31,0	214	468	209 900	89
A_5	396	160	29,5	179	585	212 250	36
A_6	535	160	39	174	543	212890	35

Źródło: opracowanie własne.

W drugim kroku poproszono konsumenta o określenie wag dla poszczególnych kryteriów. Był to jedyny etap, w który zaangażowany był konsument przy wykonywaniu badania po raz pierwszy. Za podstawę przyjęto wagę równą 1. Waga 2 oznacza, że dane kryterium jest dwa razy ważniejsze dla konsumenta od kryteriów, które otrzymały wagę przyjętą jako podstawę. Waga 0,5 oznacza, że dane kryterium jest dwa razy mniej ważne od kryteriów, które otrzymały wagę przyjętą jako podstawę. Przydzielone przez konsumenta kryteriom wartości wag zaprezentowano w tabeli 4.19. Następnie wartości te poddano normowaniu. Unormowane wartości wag dla kryteriów zawiera tabela 4.20.

Tabela 4.19. Wagi przydzielone przez konsumenta poszczególnym kryteriom

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
w	1,5	0,5	1,5	0,5	2	1,5	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.20. Unormowane wartości wag dla poszczególnych kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
w'	0,176471	0,058824	0,176471	0,058824	0,235294	0,176471	0,117647

Źródło: opracowanie własne.

W kroku trzecim dokonano normowania wartości kryteriów. Unormowane wartości kryteriów zawiera tabela 4.21.

Tabela 4.21. Unormowane wartości kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
A_1	0,347409	0,444605	0,349282	0,373172	0,412797	0,402295	0,294576
A_2	0,356456	0,444605	0,381623	0,373172	0,407314	0,414133	0,294576
A_3	0,506639	0,401346	0,413964	0,447807	0,372066	0,378619	0,294576
A_4	0,364599	0,384523	0,401028	0,469758	0,366583	0,414133	0,749064
A_5	0,358266	0,384523	0,381623	0,392929	0,458228	0,418769	0,302992
A_6	0,484021	0,384523	0,504519	0,381953	0,425330	0,420032	0,294576

Źródło: opracowanie własne.

Kolejnym krokiem w procedurze metody PVM-VSI jest wyliczenie wektorów preferencji motywującego $\vec{\Psi}$ i demotywuującego $\vec{\Phi}$. Dla kryteriów zysk C_1 , C_2 , C_4 , C_5 motywujący wektor preferencji obliczono na podstawie III kwartyła, a demotywuujący na podstawie I kwartyła. Dla kryteriów koszt C_3 , C_6 , C_7 motywujący wektor preferencji obliczono na podstawie I kwartyła, a demotywuujący na podstawie III kwartyła. Wektory preferencji dla poszczególnych kryteriów przedstawiono w tabeli 4.22. Wektory preferencji poddano następnie normowaniu. Unormowane wartości wektorów preferencji zawiera tabela 4.23.

Tabela 4.22. Wektory preferencji dla poszczególnych kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
$\vec{\Psi}$	502	180,5	29,5	197,75	539	205400	35
$\vec{\Phi}$	394,5	160	31,75	171	486,25	211662,5	35,75

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.23. Unormowane wartości wektorów preferencji

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
$\vec{\Psi}'$	0,454165	0,433790	0,381623	0,434087	0,422197	0,405254	0,294576
$\vec{\Phi}'$	0,356909	0,384523	0,410730	0,375368	0,380878	0,417610	0,300888

Źródło: opracowanie własne.

W kroku piątym wyznaczono wektor \vec{V} jako różnicę między wektorami preferencji motywującym $\vec{\Psi}'$ i demotywującym $\vec{\Phi}'$. Unormowane wartości wektora preferencji \vec{V} przedstawiono w tabeli 4.24. Następnie wyznaczono wektory \vec{V}_v i $\vec{\Phi}'_v$. Dla wektora \vec{V}_v pod uwagę brane są wartości związane z kryteriami zysk. Odrzucane są wartości, dla których brak danych. Dla wektora $\vec{\Phi}'_v$ pod uwagę brane są wartości związane z kryteriami koszt. Tutaj również pod uwagę bierze się tylko wartości, dla których posiadamy dane. Wartości wektorów \vec{V}_v i $\vec{\Phi}'_v$ znajdują się odpowiednio w tabeli 4.25 oraz tabeli 4.26. Ostatnią czynnością, jaką wykonano w tym kroku, było normowanie wektora \vec{V}'_v . Normowania wektora \vec{V}'_v dokonano poprzez podzielenie przez sumę kwadratów współrzędnych wektora \vec{V}'_v reprezentujących kryteria zysk i koszt włącznie z tymi, dla których brak jest danych. Wyliczony w badaniu współczynnik normujący wynosi 0,134466. Unormowany wektor \vec{V}'_v zawiera tabela 4.27.

Tabela 4.24. Unormowane wartości wektora preferencji \vec{V}

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
\vec{V}	0,097257	0,049267	-0,029107	0,058720	0,041319	-0,012356	-0,006312

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.25. Wartości wektora \vec{V}_v

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
\vec{V}_v	0,097257	0,049267	-0,029107	0,058720	0,041319	-0,012356	-0,006312

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.26. Wartości wektora $\vec{\Phi}'_v$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
$\vec{\Phi}'_v$	0,356909	0,384523	0,410730	0,375368	0,380878	0,417610	0,300888

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.27. Unormowany wektor \vec{V}'_v

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
\vec{V}'_v	0,723281	0,366391	-0,216463	0,436689	0,307282	-0,091889	-0,046944

Źródło: opracowanie własne.

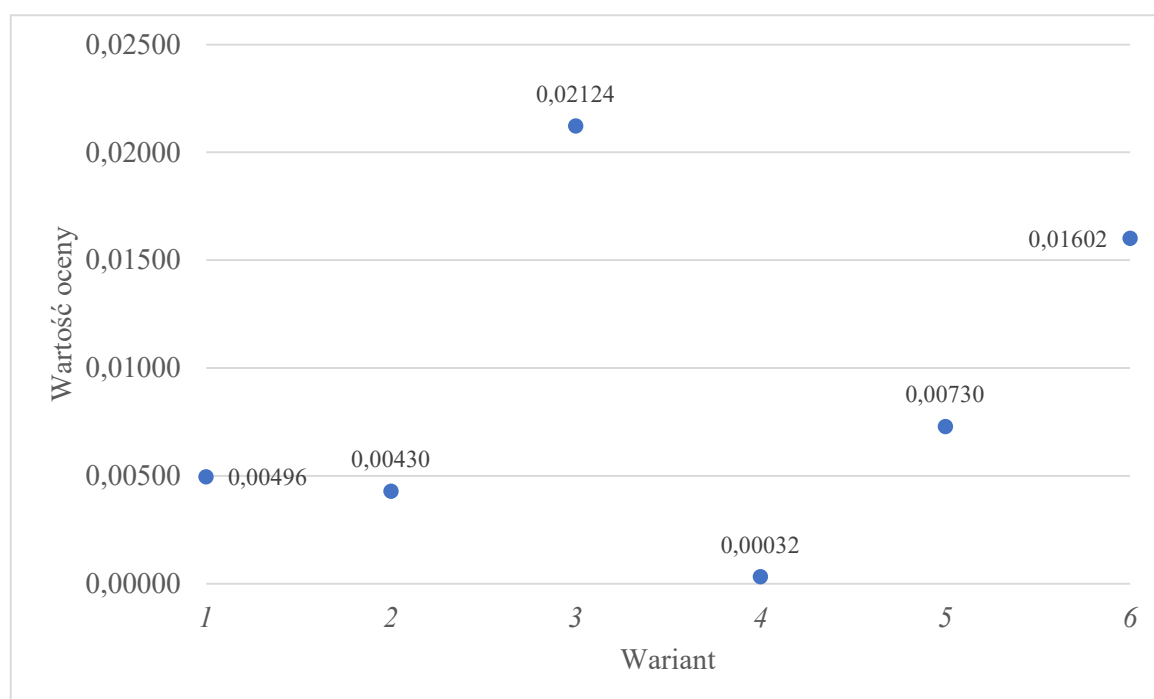
W ostatnim kroku wyliczono wskaźniki μ_j^v, μ_j^d oraz na ich podstawie wskaźnik μ_j .

Ponieważ w badaniu nie występują kryteria pożądane, wskaźnik μ_j równy jest wskaźnikowi μ_j^v . Wartości wskaźnika μ_j dla poszczególnych wariantów decyzyjnych wraz z uzyskanym przez nich w rankingu miejscem przedstawiono w tabeli 4.28 oraz na rysunku 4.5.

Tabela 4.28. Wartości wskaźnika μ_j dla poszczególnych wariantów decyzyjnych wraz z uzyskanym przez nich w rankingu miejscem

Wariant	Wartość wskaźnika μ_j	Miejsce w rankingu
A_1	0,00496	4
A_2	0,00430	5
A_3	0,02124	1
A_4	0,00032	6
A_5	0,00730	3
A_6	0,01602	2

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.5. Oceny wariantów decyzyjnych wg kryteriów obiektywnych (podanych ilościowo)

Źródło: opracowanie własne.

W drugim badaniu ranking wariantów decyzyjnych utworzono na podstawie wszystkich dziesięciu kryteriów. W przypadku kryteriów C_1 – C_7 podanych w sposób ilościowy obliczeń dokonano na wartościach z poprzedniego badania. Wartości kryteriów jakościowych C_8 – C_{10} dla poszczególnych wariantów decyzyjnych uzyskano metodą badania ankietowego, któremu poddano konsumenta (decydenta).

Pierwszy krok – definiowanie problemu decyzyjnego wraz z wyznaczeniem wariantów decyzyjnych i kryteriów ich oceny – jest wspólny dla obu badań i został już opisany w niniejszej pracy.

Krok drugi był tożsamy z krokiem drugim dla pierwszego badania, przy czym konsument przydzielił wagi dla wszystkich dziesięciu kryteriów, a nie tak jak miało to miejsce w pierwszym badaniu, tj. tylko dla kryteriów obiektywnych. Przydzielone przez konsumenta poszczególnym kryteriom wartości wag zawiera tabela 4.29. Wagi te poddano normowaniu, a ich wartości po tej operacji przedstawiono w tabeli 4.30.

Tabela 4.29. Wagi dla wszystkich dziesięciu kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
w	1,5	0,5	1,5	0,5	2	1,5	1	1,5	1,5	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.30. Wagi po unormowaniu

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
w'	0,12	0,04	0,12	0,04	0,16	0,12	0,08	0,12	0,12	0,08

Źródło: opracowanie własne.

Krok trzeci badania wymagał dalszego zaangażowania konsumenta. Został on poproszony o porównanie parami wybranych do badania wariantów decyzyjnych względem siebie osobno dla każdego z kryteriów subiektywnych C_8 – C_{10} według pięciostopniowej skali porównań.

W przypadku kryteriów C_8 – wygląd zewnętrzny i C_9 – wygląd wewnętrzny konsument ocenił warianty na podstawie dostępnych on-line na stronach koncernów motoryzacyjnych zdjęć i materiałów video. W przypadku kryterium C_{10} – komfort warianty poddano ocenie na podstawie zestawienia dostępnych w specyfikacji on-line dla danego modelu samochodu systemów wspomaganie kierowcy i wyposażenia wpływających na komfort podróżowania oraz bezpieczeństwo podróżujących. Z najważniejszych branych pod uwagę przy dokonaniu oceny wymienić należy: boczne i kurtynowe poduszki bezpieczeństwa, systemy: kontroli trakcji, utrzymywania pasa ruchu, kontroli zjazdu i podjazdu, monitorujący poziom koncentracji kierowcy, monitorowania martwego pola, asystent zapobiegania zderzeniu czołowemu, ostrzeganie o ruchu poprzecznym przy cofaniu, podążanie na zadanym pasie ruchu, inteligentny kluczyk i system Start/Stop, el. szyby, el. wspomaganie układu

kierowniczego, podgrzewana kierownica, podgrzewane fotele, klimatyzacja automatyczna, czujniki parkowania, kamera cofania, wybór trybu jazdy, inteligentny tempomat, czujniki ciśnienia w oponach, el. regulowane i podgrzewane lusterka, inteligentne światła LED z funkcją doświetlania zakrętów, światła do jazdy dziennej LED, światła przeciwmgielne, wielofunkcyjny komputer, Bluetooth, nawigacja z dotykowym ekranem, system podgrzewania akumulatorów, kabel ładowanie z gniazdek 230 V, pompa ciepła.

W wyniku tego etapu otrzymano trzy macierze porównań. Przykładową macierz porównań wariantów dla kryterium wygląd zewnętrzny przedstawiono w tabeli 4.31. Pozostałe macierze porównań wariantów dla badanych kryteriów subiektywnych zamieszczono w załącznikach.

Tabela 4.31. Macierz porównań wariantów dla kryterium C_8 (wygląd zewnętrzny)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	1/3	1/2	1/5	1/4	1/2
A_2	3	1	2	1/3	1/2	2
A_3	2	1/2	1	1/4	1/3	1
A_4	5	3	4	1	2	4
A_5	4	2	3	1/2	1	3
A_6	2	1/2	1	1/4	1/3	1

Źródło: opracowanie własne.

W kroku czwartym procedury metody PVM–VSI na podstawie macierzy porównań parami wyznacza się macierze pośrednie porównania. Macierze te wyznacza się, by uwzględnić w wyniku obliczeń niespójność macierzy porównań. Związana jest ona z niespójnością odpowiedzi konsumenta (decydenta). Wszystkie elementy macierzy pośrednich podzielono przez wartość 5 i odjęto od jedynki celem otrzymania liczb z przedziału od 0 do 1. Następnie uzyskane wartości pomnożono przez unormowane wagi dla poszczególnych kryteriów celem uwzględnienia ich w badaniu również przy wyliczaniu odchyłek standardowych, a nie tylko w ocenie końcowej jak ma to miejsce w badaniu pierwszym przy uwzględnieniu wyłącznie kryteriów obiektywnych.

Macierz pośrednią porównania otrzymaną po ww. operacjach arytmetycznych dla kryterium wygląd zewnętrzny przedstawiono w tabeli 4.32. Macierze pośrednie porównania dla pozostałych kryteriów zamieszczono w załącznikach.

Tabela 4.32. Macierz pośrednia porównania dla kryterium C_8 (wygląd zewnętrzny)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1		0,112000	0,108000	0,115200	0,114000	0,108000
$A_1 (A_2)$		0,096000	0,104000	0,117333	0,116000	0,104000
$A_1 (A_3)$		0,114000	0,108000	0,117000	0,116000	0,108000
$A_1 (A_4)$		0,105600	0,100800	0,115200	0,110400	0,100800
$A_1 (A_5)$		0,108000	0,102000	0,117000	0,114000	0,102000
$A_1 (A_6)$		0,114000	0,108000	0,117000	0,116000	0,108000
$A_2 (A_1)$	0,048000		0,084000	0,105600	0,102000	0,084000
A_2	0,048000		0,072000	0,112000	0,108000	0,072000
$A_2 (A_3)$	0,024000		0,072000	0,108000	0,104000	0,072000
$A_2 (A_4)$	0,080000		0,088000	0,112000	0,104000	0,088000
$A_2 (A_5)$	0,072000		0,084000	0,114000	0,108000	0,084000
$A_2 (A_6)$	0,024000		0,072000	0,108000	0,104000	0,072000
$A_3 (A_1)$	0,072000	0,104000		0,110400	0,108000	0,096000
$A_3 (A_2)$	0,084000	0,108000		0,116000	0,114000	0,096000
A_3	0,072000	0,108000		0,114000	0,112000	0,096000
$A_3 (A_4)$	0,090000	0,102000		0,114000	0,108000	0,096000
$A_3 (A_5)$	0,088000	0,104000		0,116000	0,112000	0,096000
$A_3 (A_6)$	0,072000	0,108000		0,114000	0,112000	0,096000
$A_4 (A_1)$	0,000000	0,080000	0,060000		0,090000	0,060000
$A_4 (A_2)$	-0,096000	0,048000	-0,024000		0,084000	-0,024000
$A_4 (A_3)$	-0,072000	0,072000	0,024000		0,088000	0,024000
A_4	0,000000	0,048000	0,024000		0,072000	0,024000
$A_4 (A_5)$	-0,072000	0,024000	-0,024000		0,072000	-0,024000
$A_4 (A_6)$	-0,072000	0,072000	0,024000		0,088000	0,024000
$A_5 (A_1)$	0,024000	0,088000	0,072000	0,100800		0,072000
$A_5 (A_2)$	-0,024000	0,072000	0,024000	0,104000		0,024000
$A_5 (A_3)$	-0,024000	0,084000	0,048000	0,102000		0,048000
$A_5 (A_4)$	0,060000	0,084000	0,072000	0,108000		0,072000
A_5	0,024000	0,072000	0,048000	0,108000		0,048000
$A_5 (A_6)$	-0,024000	0,084000	0,048000	0,102000		0,048000

$A_6 (A_1)$	0,072000	0,104000	0,096000	0,110400	0,108000	
$A_6 (A_2)$	0,084000	0,108000	0,096000	0,116000	0,114000	
$A_6 (A_3)$	0,072000	0,108000	0,096000	0,114000	0,112000	
$A_6 (A_4)$	0,090000	0,102000	0,096000	0,114000	0,108000	
$A_6 (A_5)$	0,088000	0,104000	0,096000	0,116000	0,112000	
A_6	0,072000	0,108000	0,096000	0,114000	0,112000	

Źródło: opracowanie własne.

W piątym kroku na podstawie macierzy pośrednich porównania wyznaczono wektory średnich ocen dla poszczególnych wariantów decyzyjnych, przy czym, by nie brać pod uwagę w wyliczaniu oceny końcowej dwa razy tej samej wartości wagi podanej przez decydenta, wzięto do badania wartości wektorów średnich ocen przed przemnożeniem ich przez wagi celem uwzględnienia jej w wyliczaniu odchyleń standardowych. Wartości wektorów średnich ocen zestawiono w tabeli 4.33. Tabela 4.34 prezentuje wartości kryteriów dla wariantów decyzyjnych z uzupełnionymi ocenami dla kryteriów subiektywnych.

Tabela 4.33. Wartości wektorów średnich ocen

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
C_8	0,271111	0,762667	0,576333	0,931093	0,872889	0,576333
C_9	0,192778	0,839000	0,844000	0,920093	0,702667	0,491333
C_{10}	0,596000	0,915500	0,596000	0,920500	0,270000	0,596000

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.34. Wartości kryteriów dla poszczególnych wariantów decyzyjnych z uzupełnionymi ocenami dla kryteriów subiektywnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
A_1	384	185	27,0	170	527	203 900	35	0,271111	0,192778	0,596000
A_2	394	185	29,5	170	520	209 900	35	0,762667	0,839000	0,915500
A_3	560	167	32,0	204	475	191 900	35	0,576333	0,844000	0,596000
A_4	403	160	31,0	214	468	209 900	89	0,931093	0,920093	0,920500
A_5	396	160	29,5	179	585	212 250	36	0,872889	0,702667	0,270000
A_6	535	160	39	174	543	212 890	35	0,576333	0,491333	0,596000

Źródło: opracowanie własne.

W tym samym kroku, wykorzystując wartości wektorów średnich ocen, wyliczono również macierze kowariancji dla poszczególnych wariantów w ramach poszczególnych kryteriów. Przykładową macierz kowariancji dla pierwszego wariantu decyzyjnego A_1 przedstawiono w tabeli 4.35. Macierze kowariancji dla pozostałych wariantów decyzyjnych zamieszczono w załącznikach.

Tabela 4.35. Macierz kowariancji dla pierwszego wariantu decyzyjnego A_1

	C_1	C_2	C_3
C_1	0,001562391	0,000944698	0,000280192
C_2	0,000944698	0,001410624	0,000356875
C_3	0,000280192	0,000356875	0,000274637

Źródło: opracowanie własne.

Kolejny krok polegał na normowaniu wartości kryteriów. Normowania dokonano metodą wykorzystaną w pierwszym badaniu. Unormowane wartości kryteriów zawiera tabela 4.36.

Tabela 4.36. Unormowane wartości kryteriów dla wszystkich kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
A_1	0,34741	0,44460	0,34928	0,37317	0,41280	0,40229	0,29458	0,15789	0,11065	0,35466
A_2	0,35646	0,44460	0,38162	0,37317	0,40731	0,41413	0,29458	0,44417	0,48158	0,54479
A_3	0,50664	0,40135	0,41396	0,44781	0,37207	0,37862	0,29458	0,33565	0,48445	0,35466
A_4	0,36460	0,38452	0,40103	0,46976	0,36658	0,41413	0,74906	0,54225	0,52813	0,54776
A_5	0,35827	0,38452	0,38162	0,39293	0,45823	0,41877	0,30299	0,50836	0,40333	0,16067
A_6	0,48402	0,38452	0,50452	0,38195	0,42533	0,42003	0,29458	0,33565	0,28202	0,35466

Źródło: opracowanie własne.

W kroku siódmym procedury metody PVM–VSI wylicza się wektory preferencji motywujący $\vec{\psi}$ i demotywujący $\vec{\phi}$ dla wszystkich kryteriów. Dla kryteriów zysk $C_1, C_2, C_4, C_5, C_8, C_9, C_{10}$ motywujący wektor preferencji obliczono na podstawie III kwartyli, demotywujący natomiast na podstawie I kwartyli. Dla kryteriów koszt C_3, C_6, C_7 motywujący wektor preferencji obliczono na podstawie I kwartyli, demotywujący zaś na podstawie III kwartyli. Wektory te przedstawiono w tabeli 4.37. Następnie dokonano normowania tych wektorów. Unormowane wartości wektorów preferencji przedstawiono w tabeli 4.38.

Tabela 4.37. Wektory preferencji dla poszczególnych kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
$\vec{\Psi}$	502	180,5	29,5	197,75	539	205400	35	0,845333	0,842750	0,835625
$\vec{\Phi}$	394,5	160	31,75	171	486,25	211662,5	35,75	0,576333	0,544167	0,596000

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.38. Unormowane wartości wektorów preferencji dla wszystkich kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
$\vec{\Psi}'$	0,45417	0,43379	0,38162	0,43409	0,42220	0,40525	0,29458	0,49231	0,48374	0,49725
$\vec{\Phi}'$	0,35691	0,38452	0,41073	0,37537	0,38088	0,41761	0,30089	0,33565	0,31235	0,35466

Źródło: opracowanie własne.

Krok ósmy to wyznaczenie wektora \vec{V} . Podobnie jak w pierwszym badaniu, wektor ten wyliczono jako różnicę między wektorami motywującym $\vec{\Psi}'$ i demotywującym $\vec{\Phi}'$. Unormowane wartości wektora preferencji \vec{V} dla wszystkich kryteriów zawiera tabela 4.39.

Tabela 4.39. Unormowane wartości wektora preferencji \vec{V} dla wszystkich kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
\vec{V}	0,09726	0,04927	-0,02911	0,05872	0,04132	-0,01236	-0,00631	0,15666	0,17139	0,14259

Źródło: opracowanie własne.

W kroku tym, tak jak w badaniu pierwszym, po wyznaczeniu wektora \vec{V} wyznaczono wektory \vec{V}_v i $\vec{\Phi}'_v$. Wartości dla wektora \vec{V}_v prezentuje tabela 4.40. W tabeli 4.41 znajdują się wartości dla wektora $\vec{\Phi}'_v$. Wektor \vec{V}_v poddano następnie normowaniu. Normowania dokonano tą samą metodą co w pierwszym badaniu. Wyliczony współczynnik normujący wynosi 0,303859. Unormowany wektor \vec{V}'_v przedstawiono w tabeli 4.42.

Tabela 4.40. Wartości dla wektora \vec{V}

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
\vec{V} v	0,09726	0,04927	-0,02911	0,05872	0,04132	-0,01236	-0,00631	0,15666	0,17139	0,14259

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.41. Wartości dla wektora $\vec{\Phi}$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
$\vec{\Phi}$ v	0,35691	0,38452	0,41073	0,37537	0,38088	0,41761	0,30089	0,33565	0,31235	0,35466

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.42. Unormowany wektor \vec{V}

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
\vec{V} v	0,2430	0,1515	-0,2742	0,1860	0,0924	-0,0620	0,0000	0,6131	0,3993	0,5102

Źródło: opracowanie własne.

W dziewiątym kroku, mając wektor \vec{V} , na jego podstawie wyznacza się macierz transformacji. Macierz tę wylicza się tylko dla kryteriów subiektywnych. Wyliczoną w tym kroku macierz transformacji przedstawiono w tabeli 4.43.

Tabela 4.43. Macierz transformacji

	M_1	M_2	M_3
M_1	0,0621	0,0690	0,0369
M_2	0	0	0
M_3	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Ostatni, dziesiąty krok polega na wyliczeniu wskaźników μ_j , μ_j^d i μ_j . Następnie na podstawie wskaźnika μ_j ustala się kolejność poszczególnych wariantów decyzyjnych w rankingu. Wartości wskaźnika μ_j oraz miejsce w rankingu przedstawiono w tabeli 4.44.

Tabela 4.44. Wartości wskaźnika μ_j oraz miejsce wariantów decyzyjnych w rankingu

Wariant	Wartość wskaźnika μ_j	Miejsce w rankingu
A_1	-0,02316	6
A_2	0,02660	2
A_3	0,01804	3
A_4	0,03473	1
A_5	0,01176	4
A_6	0,00277	5

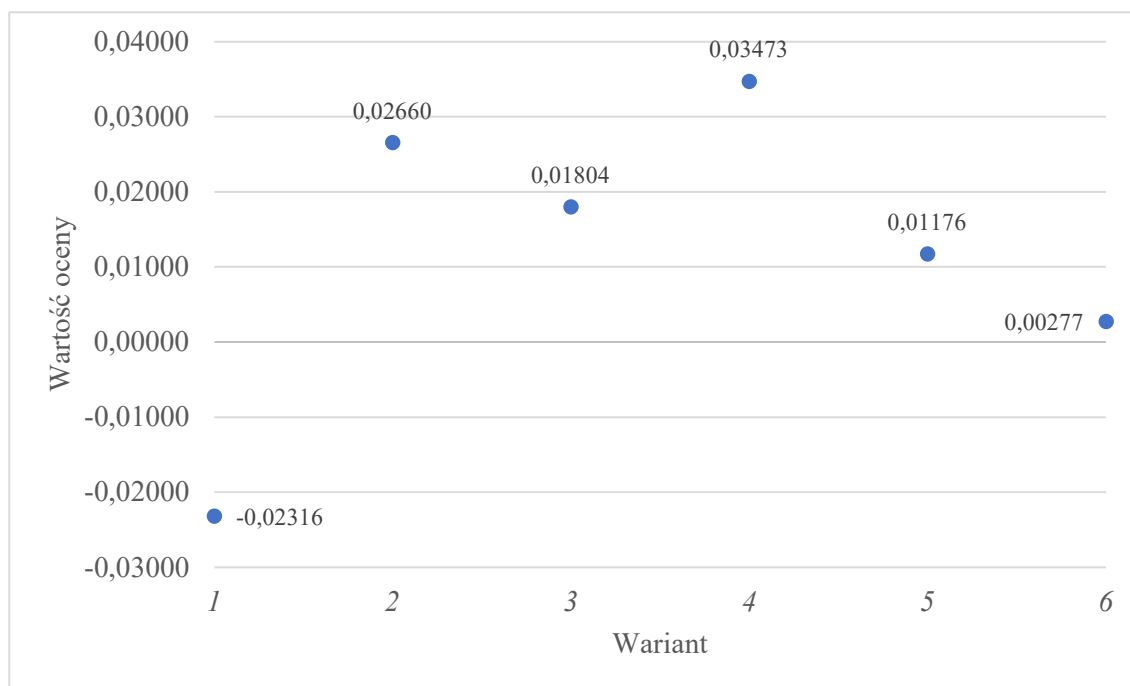
Źródło: opracowanie własne.

W kroku tym na podstawie macierzy kowariancji i transformacji oblicza się też wariancje dla wszystkich wariantów decyzyjnych. Na ich podstawie wyznacza się odchylenie standardowe dla wszystkich wariantów decyzyjnych. Odchylenie standardowe jest wartością określającą obszar, w którym może zmieniać się wartość oceny wyliczonej dla wariantów decyzyjnych. Oceny (μ_j), miejsce w rankingu oraz wartości odchylenia standardowego (σ) dla wariantów zawiera tabela 4.45. Rysunek 4.6 przedstawia oceny, a rysunek 4.7 wartości odchylenia standardowego.

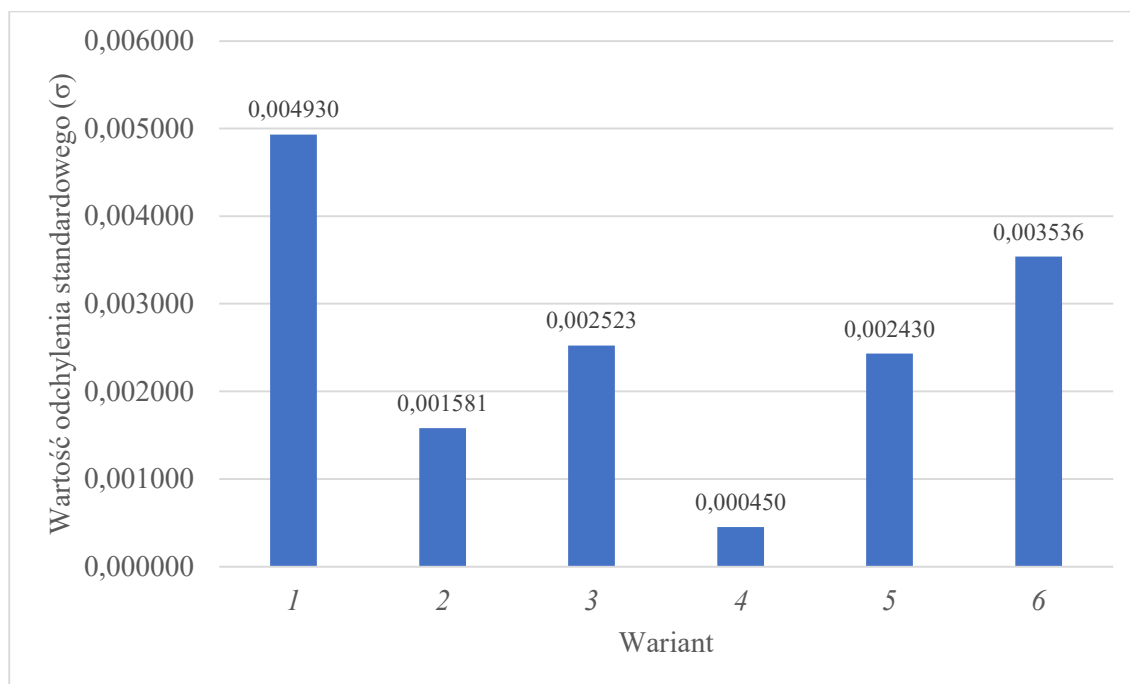
Tabela 4.45. Oceny (μ_j), miejsce w rankingu oraz wartości odchylenia standardowego (σ) uzyskane w badaniu dla poszczególnych wariantów

	μ_j	Miejsce w rankingu	σ
A_1	-0,02316	6	0,004930
A_2	0,02660	2	0,001581
A_3	0,01804	3	0,002523
A_4	0,03473	1	0,000450
A_5	0,01176	4	0,002430
A_6	0,00277	5	0,003536

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.6. Oceny wariantów decyzyjnych po uwzględnieniu kryteriów subiektywnych
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.7. Odchylenie standardowe dla poszczególnych wariantów decyzyjnych
Źródło: opracowanie własne.

W niniejszym podrozdziale zaprezentowano metodę PVM–VSI do wspomaganie procesu problemu decyzyjnego, jakim był wybór przez konsumenta samochodu elektrycznego. Opisany problem decyzyjny jest problemem wielokryterialnym, ponieważ

w badaniu uwzględnić musimy wiele kryteriów, na podstawie których dokonuje się oceny rozważanych przez decydenta (konsumenta) wariantów decyzyjnych. Kryteria mogą być podane w sposób ilościowy jak również jakościowy.

Ranking z wykorzystaniem metody PVM–VSI utworzono dwa razy. W pierwszym badaniu zastosowano metodę PVM–VSI z minimalnym zaangażowaniem decydenta, wykorzystując w badaniu tylko kryteria podane ilościowo. W drugim badaniu pod uwagę wzięto również kryteria jakościowe poddane przez decydenta ocenie, co spowodowało zwiększenie jego zaangażowania w badanie. Otrzymane rankingi przedstawiono w tabeli 4.46.

Tabela 4.46. Otrzymane rankingi

	Ranking
I badanie	$A_3 > A_6 > A_5 > A_1 > A_2 > A_4$
II badanie	$A_4 > A_2 > A_3 > A_5 > A_6 > A_1$

Źródło: opracowanie własne.

Z badań wynika, że biorąc pod uwagę jedynie kryteria ilościowe, najlepszy byłby wariant A_3 – Kia Niro EV 204 KM / 65 kWh. Drugie miejsce zajął wariant A_6 – Volkswagen ID.4 Pro / 174 KM / 77 kWh, a trzecie – wariant A_5 – Škoda ENYAQ iV 60. Po uwzględnieniu kryteriów jakościowych i preferencji decydenta (konsumenta) najlepszym z wariantów okazał się A_4 – Nissan Ariya 214 KM / 63 kWh, drugie miejsce zajął wariant A_2 – Kia EV6 170 KM / 58 kWh / RWD, a trzecie wariant A_3 – Kia Niro EV 204 KM / 65 kWh. Dla wariantów A_4 i A_2 , które uzyskały najlepsze miejsca w rankingu, biorąc pod uwagę kryteria subiektywne, obszar, w którym wartość oceny obliczona dla każdego z wariantów decyzyjnych mogła ulec zmianie, był najmniejszy (mała wartość odchylenia standardowego). Świadczy to o zdecydowaniu decydenta odnośnie do jego preferencji, jeśli chodzi o wybór wariantów według kryteriów subiektywnych.

Wpływ na to, iż Kia Niro EV 204 KM / 65 kWh zajęła pierwsze miejsce w badaniu z wykorzystaniem kryteriów ilościowych, miały prawdopodobnie kryteria zasięg i cena zakupu oraz wagi przydzielone tym kryteriom przez konsumenta (decydenta). Model ten umożliwia przejechanie największej liczby kilometrów na jednym ładowaniu wśród rozpatrywanych w badaniu samochodów, a przy tym ma najniższą cenę zakupu. Drugie miejsce zajął Volkswagen ID.4 Pro / 174 KM / 77 kWh. Jego zasięg na jednym ładowaniu jest niewiele mniejszy od zwycięzcy rankingu, natomiast cena zakupu jest najwyższa

wśród badanych samochodów. Wpływ na to, że wariant ten zajął miejsce drugie, miało prawdopodobnie kryterium pojemność bagażnika (jedna z największych wśród badanych samochodów) i waga tego kryterium w badaniu. To być może zniwelowało najwyższą cenę zakupu. Najgorzej w tym badaniu wypadł Nissan Ariya 214 KM / 63 kWh charakteryzujący się średnim zasięgiem na jednym ładowaniu, dość wysoką ceną zakupu, a przede wszystkim najmniejszym bagażnikiem i największą odległością serwisu od miejsca zamieszkania konsumenta. Te dwa kryteria mogły mieć największy wpływ na miejsce w rankingu przy niewielkich różnicach wartości tego wariantu w pozostałych kryteriach.

W badaniu z wykorzystaniem kryteriów jakościowych, jeśli chodzi o warianty najlepsze, ranking całkowicie uległ zmianie. Ostatni w pierwszym rankingu wariant A_4 – Nissan Ariya 214 KM / 63 kWh zajął miejsce pierwsze, a przedostatni wariant A_2 – Kia EV6 170 KM / 58 kWh / RWD miejsce drugie. Wpływ na to, iż wariant A_4 z ostatniego miejsca w pierwszym rankingu wskoczył na miejsce pierwsze w rankingu drugim, miały oceny otrzymane przez decydenta przez ten wariant w porównaniu wariantów według kryteriów subiektywnych i wagi tychże kryteriów. Wariant ten został przez decydenta najlepiej oceniony według wszystkich kryteriów subiektywnych – wygląd zewnętrzny, wygląd wnętrza i komfort. Wariant A_2 natomiast został identycznie oceniony przez konsumenta wg kryterium komfort jak wariant najlepszy, niewiele gorzej pod względem kryterium wygląd wnętrza, a wg kryterium wygląd zewnętrzny znalazł się w środku stawki ocenianych przez decydenta samochodów. To wystarczyło, by zniwelować przewagę pozostałych wariantów po pierwszym rankingu tylko z wykorzystaniem kryteriów obiektywnych. Ostatnie miejsce zajął w drugim badaniu wariant A_1 – Hyundai IONIQ 5 170 KM / 58 kWh 2WD. Został on najgorzej oceniony przez konsumenta wg kryteriów wygląd zewnętrzny oraz wygląd wnętrza, a ponieważ po pierwszym rankingu nie plasował się on w czołówce klasyfikacji rozpatrywanych wariantów, w drugim badaniu spadł na jej koniec.

Z analizy wartości odchyłeń standardowych otrzymanych dla wariantów w badaniu z wykorzystaniem kryteriów jakościowych wynika, że decydent oceniając poszczególne warianty był konsekwentny w swoich decyzjach. Najmniejszym odchyleniem standardowym charakteryzuje się pierwszy w tym rankingu wariant A_4 . Wariant A_2 , który zajął drugie miejsce w rankingu, charakteryzuje się także drugą najmniejszą wartością odchylenia standardowego. W przypadku wariantu A_3 , który zajął trzecie miejsce w rankingu, wartość odchylenia standardowego jest nieco większa niż wariantu A_5 , ale różnice w ocenach uzyskanych przez te warianty są na tyle duże, że decydent nie powinien

mieć wątpliwości co do uzyskanego przez wariant A_3 trzeciego miejsca w otrzymanym rankingu. Podsumowując zatem uzyskany ranking, należy zauważyć, że różnice między ocenami uzyskanymi przez poszczególne warianty, jak i różnice między otrzymanymi wartościami odchylenia standardowego dla poszczególnych wariantów są na tyle zauważalne, że decydent nie powinien mieć wątpliwości o kolejności poszczególnych wariantów w uzyskanym w tym badaniu rankingu.

Z powyższych badań wynika, że oceny przyznawane poszczególnym wariantom w ramach poszczególnych kryteriów subiektywnych metodą porównań wariantów parami przez decydenta oraz wagi przyznane przez decydenta kryteriom subiektywnym mogą znacząco wpłynąć na miejsce poszczególnych wariantów w rankingu i zniwelować przewagę wariantów charakteryzujących się lepszymi parametrami branymi pod uwagę przy porównywaniu wariantów wg kryteriów, w których dane do badania podane są w sposób ilościowy.

Z badań zawartych w niniejszej rozprawie wynika, że metoda PVM–VSI pozwala na zastosowanie jej we wspomaganie problemów decyzyjnych zarówno wtedy, kiedy warianty poddaje się ocenie na podstawie kryteriów, w których wartości podane są w sposób ilościowy, jak również, kiedy oprócz kryteriów ilościowych, występują kryteria jakościowe.

Zastosowanie metody PVM–VSI w przypadku gdy w badaniu, oprócz kryteriów ilościowych, występują też kryteria jakościowe ma dodatkową zaletę. Jest nią możliwość analizy spójności rozwiązania w oparciu o wartość odchylenia standardowego. Decydent w przypadku podobnych ocen w rankingu końcowym ma możliwość wyboru wariantu lepiej określonego w rankingu, czyli charakteryzującego się najmniejszym odchyleniem standardowym, czyli najmniejszą zmiennością oceny.

Poniżej przedstawiono wyniki badań, jakie uzyskano dla konsumenckiego problemu decyzyjnego pozyskane metodami AHP oraz PROMETHEE. Wykonane badania posłużyły do porównania autorskiej metody z metodami wykorzystywanymi dotychczas we wspomaganie decyzji wielokryterialnych, w których część kryteriów wyboru ma charakter obiektywny, natomiast część kryteriów charakter subiektywny.

W pierwszym badaniu wykorzystano metodę AHP, której opis znajduje się w rozdziale II. W pierwszym kroku badania przeprowadzonego tą metodą utworzono macierze porównań parami poszczególnych wariantów względem każdego z dziesięciu kryteriów. Macierze porównań dla kryteriów obiektywnych utworzono z wykorzystaniem

wartości kryteriów dla poszczególnych wariantów z tabeli 4.18. Posłużono się przy tym metodą z wykorzystaniem stosunku wartości liczbowej pierwszego z porównywanych wariantów do wartości liczbowej drugiego z porównywanych wariantów w poszczególnych kryteriach. [literatura].

W przypadku kryteriów subiektywnych wykorzystano macierze porównań parami wariantów otrzymane w badaniu metodą PVM–VSI (tabela 4.31 oraz załączniki 4.13 i 4.14). Oceny w tych macierzach są wyrażone w skali Saaty’ego.

W drugim kroku dokonano normowania wartości macierzy porównań parami. Normowania dokonano, dzieląc każdą z wartości przez sumę wartości dla każdego z wariantów. Otrzymano w ten sposób unormowane macierze porównań parami.

Na podstawie unormowanych macierzy porównań parami w kolejnym kroku obliczono wektory średnich ocen dla poszczególnych wariantów według poszczególnych kryteriów. Wektory średnich ocen przedstawiono w tabeli 4.47.

Tabela 4.47. Oceny wariantów według poszczególnych kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
A_1	0,143713	0,181908	0,143617	0,153015	0,169019	0,164337	0,132075	0,054464	0,049604	0,091335
A_2	0,147455	0,181908	0,156915	0,153015	0,166774	0,169173	0,132075	0,150908	0,205374	0,335927
A_3	0,209581	0,164208	0,170213	0,183618	0,152341	0,154666	0,132075	0,088983	0,205374	0,091335
A_4	0,150823	0,157325	0,164894	0,192619	0,150096	0,169173	0,335849	0,374405	0,340874	0,335927
A_5	0,148204	0,157325	0,156915	0,161116	0,187620	0,171067	0,135849	0,242257	0,122622	0,054142
A_6	0,200225	0,157325	0,207447	0,156616	0,174150	0,171583	0,132075	0,088983	0,076151	0,091335

Źródło: opracowanie własne.

Obliczono również dla każdego z kryteriów współczynnik CR celem sprawdzenia spójności macierzy porównań parami. Wartości współczynnika CR dla poszczególnych kryteriów przedstawia tabela 4.48. Wynika z niej, że dla kryteriów obiektywnych otrzymano całkowitą spójność, natomiast dla subiektywnych wartości są poniżej 0,1, co oznacza akceptowalną wartość współczynnika spójności. Należy dodać, że w przypadku niespójności macierzy w metodzie AHP należy przerwać obliczenia i dokonać korekty w macierzach porównań parami. Wymaga to dodatkowego czasu i ponownego zaangażowania decydenta w proces decyzyjny. Ponadto niespójność macierzy w metodzie AHP nie dotyczy całego badania, lecz świadczy tylko o niespójności w ocenie decydenta badanych wariantów

decyzyjnych według kryterium, dla którego wystąpiła niespójność macierzy ocen. W przypadku metody PVM–VSI spójność macierzy porównań nie jest badana na tym etapie. Badania spójności macierzy dokonuje się na końcu procedury badawczej, określając wielkość niespójności, co opisano w rozdziale IV niniejszej pracy. Dzięki temu nie trzeba przerywać badania już na jego początku i ponownie angażować decydenta w proces decyzyjny. Spójność macierzy w metodzie PVM–VSI dotyczy całego badania, a nie konkretnego kryterium, co można uznać za dodatkową zaletę metody PVM–VSI.

Tabela 4.48. Wartość współczynnika CR dla poszczególnych kryteriów

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
CR	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,01161	0,01165	0,00599

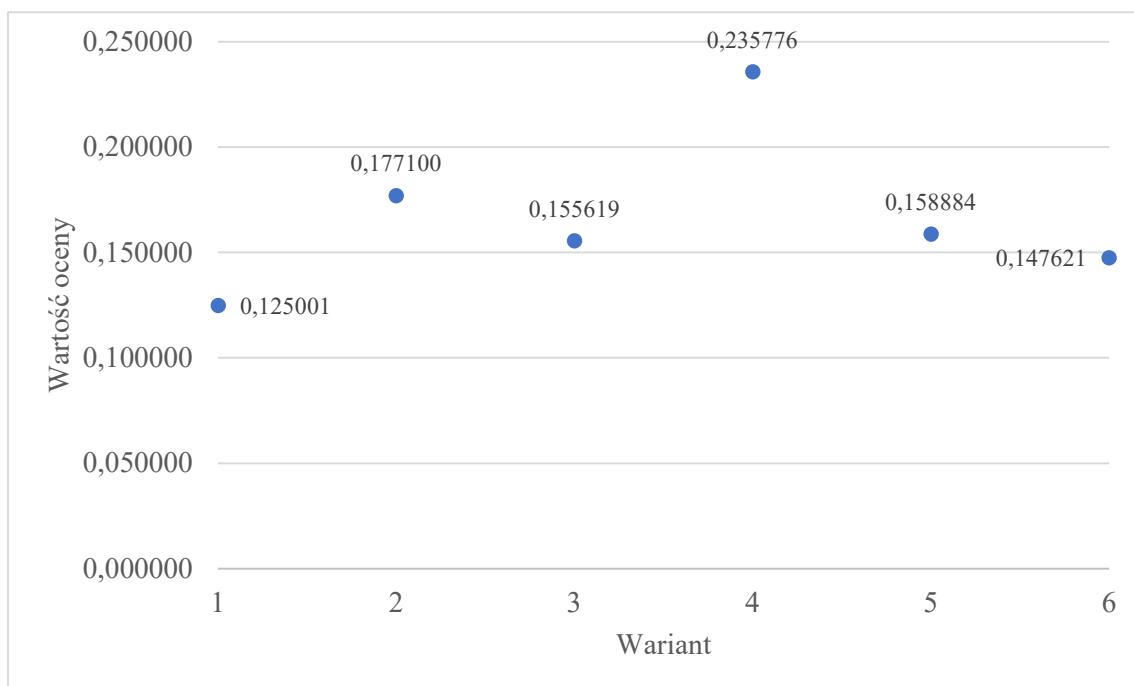
Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym kroku na podstawie ocen z tabeli 4.47 oraz unormowanych wag obliczonych w procedurze PVM–VSI (tabela 4.30) obliczono ocenę końcową dla każdego z wariantów. Wartości oceny końcowej oraz miejsce uzyskane w rankingu z wykorzystaniem metody AHP przedstawiono w tabeli 4.49 oraz na rysunku 4.8.

Tabela 4.49. Ocena końcowa poszczególnych wariantów oraz miejsce w rankingu uzyskane za pomocą procedury AHP

	Wektor skali	Ranking
A_1	0,125001	6
A_2	0,177100	2
A_3	0,155619	4
A_4	0,235776	1
A_5	0,158884	3
A_6	0,147621	5

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4.8. Oceny wariantów decyzyjnych uzyskane metodą AHP

Źródło: opracowanie własne.

Kolejną metodą zastosowaną celem porównania wyników uzyskanych za jej pomocą z wynikami metody PVM–VSI jest metoda PROMETHEE. W procedurze metody PROMETHEE wybrano V–kształtną funkcję preferencji. Wartości progów tej funkcji dla poszczególnych kryteriów przedstawiono w tabeli 4.50.

Tabela 4.50. Progi preferencji i funkcje preferencji zastosowane w metodzie PROMETHEE

Kryteria	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Funkcja preferencji	V– shape	V– shape	V– shape	V– shape	V– shape	V– shape	V– shape	V– shape	V– shape	V– shape
p	75	12	5	20	45	10 000	25	2	2	3

Źródło: opracowanie własne.

Wartości kryteriów obiektywnych dla poszczególnych wariantów decyzyjnych pozyskano z tabeli 4.18, natomiast oceny dla kryteriów subiektywnych ustalono na podstawie macierzy porównań parami otrzymanych w badaniu metodą PVM–VSI.

Wyniki uzyskane metodą PROMETHEE wraz z miejscem poszczególnych wariantów w rankingu rozpatrywanego problemu decyzyjnego przedstawione zostały w tabeli 4.51.

Tabela 4.51. Wyniki dla metody PROMETHEE wraz z miejscem w rankingu

	<i>Phi+</i>	<i>Phi-</i>	<i>Phi</i>	Ranking
A_1	0,3426	0,3055	0,0372	4
A_2	0,3486	0,2043	0,1443	1
A_3	0,3849	0,3023	0,0826	2
A_4	0,2869	0,4091	-0,1222	5
A_5	0,3218	0,2634	0,0584	3
A_6	0,2291	0,4295	-0,2004	6

Źródło: opracowanie własne.

Rankingi pozyskane z zastosowaniem poszczególnych metod WWD wykorzystanych w przykładzie przedstawiono zbiorczo w tabeli 4.52.

Tabela 4.52. Rankingi uzyskane z zastosowaniem poszczególnych metod WWD

Metoda	Ranking
PVM-VSI	$A_4 > A_2 > A_3 > A_5 > A_6 > A_1$
AHP	$A_4 > A_2 > A_5 > A_3 > A_6 > A_1$
PROMETHEE	$A_2 > A_3 > A_5 > A_1 > A_4 > A_6$

Źródło: opracowanie własne.

Analizując tabelę 4.52, można zauważyć, że podobne rankingi otrzymano w badaniach metodami PVM-VSI oraz AHP. W rankingach tych zamieniają się tylko miejscami warianty A_3 i A_5 , czyli warianty zajmujące miejsca pośrodku stawki w obu rankingach. Jest to wynikiem podobieństwa obu metod. Zarówno w PVM-VSI, jak i w AHP w przypadku kryteriów subiektywnych do ich porównania stosuje się macierze porównań parami budowane na podstawie porównań wariantów parami względem każdego z kryteriów z udziałem decydenta na tym etapie badania. Niewielkie różnice między tymi rankingami wynikać mogą z budowy macierzy porównań parami dla kryteriów obiektywnych w przypadku metody AHP. Wykorzystano w niej do budowy macierzy porównań wartości wariantów dla poszczególnych kryteriów i posłużono się metodą z

wykorzystaniem stosunku wartości liczbowej pierwszego z porównywanych wariantów do wartości liczbowej drugiego z porównywanych wariantów.

Porównując metodę PVM–VSI z metodą PROMETHEE, zauważalne jest, że warianty A_2 , A_3 i A_5 uplasowały się w obu rankingach w tej samej kolejności, przy czym w rankingu uzyskanym za pomocą metody PVM–VSI lepszy od nich był wariant A_4 , natomiast w rankingu uzyskanym z wykorzystaniem metody PROMETHEE zajęły one czołowe miejsca. Natomiast różnice w rankingach uzyskane metodami PVM–VSI oraz PROMETHEE wynikać mogą ze sposobu oceniania w przypadku kryteriów subiektywnych. W metodzie PVM–VSI kryteria subiektywne porównuje się parami i buduje się macierze porównań, w przypadku metody PROMETHEE stosuje się skalę ocen 1–5 (jak zastosowano w tym badaniu) lub 1–9, przypisując każdemu z wariantów ocenę.

Otrzymane metodami AHP i PROMETHEE rankingi różnią się nieznacznie z rankingiem otrzymanym metodą autorską PVM–VSI. Wynika to z podobieństw metody autorskiej do metod zastosowanych w badaniu celem porównania z metodą autorską. Te podobieństwa to:

- 1) początkowe etapy jak zastosowanie macierzy porównań parami są zbliżone do AHP,
- 2) wektory preferencji motywujący i demotywuujący w pewnym stopniu odpowiadają metodycznie stosowanym w PROMETHEE wartościom ϕ^+ i ϕ^- .

Metoda autorska PVM–VSI odróżnia się jednak od pozostałych rozpatrywanych metod wykorzystaniem w procedurze pośrednich macierzy porównań, obliczaniem macierzy transformacji i kowariancji oraz agregacji ocen z zastosowaniem macierzy transformacji i wektora średnich ocen. Ma też przewagę nad pozostałymi zastosowanymi w badaniu metodami i daje decydentowi możliwość analizy spójności rozwiązania w oparciu o wartość odchylenia standardowego. Decydent może więc łatwo wskazać warianty dobrze określone w rankingu, tj. charakteryzujące się najmniejszym odchyleniem czy też najmniejszą zmiennością/spójnością ocen. Przykładowo, jeśli w rozpatrywanym problemie decyzyjnym w rankingu otrzymanym metodą PVM–VSI dwa warianty z czołówki rankingu uzyskałyby podobne oceny, możemy porównać wyliczone dla nich wartości odchylenia standardowego. Jeżeli wartości te są relatywnie wysokie, decydent może na tej podstawie podjąć dodatkową decyzję, czy najlepszym rozwiązaniem będzie dla niego wybór wariantu, który w rankingu uzyskał miejsce pierwsze, czy jednak skłania się ku wyborze wariantu, który w ranking zajął miejsce drugie. Jest to niepodważalna zaleta metody autorskiej.

Badanie spójność ocen na końcu procedury badawczej daje przewagę metody PVM–VSI nad innymi metodami – nie wymaga przerywania badania oraz ponownego zaangażowania decydenta w proces badawczy już w początkowych etapach badania w przypadku niespójności macierzy. Przykładowo w metodzie AHP spójność ocen decydenta sprawdzana jest na początku badania na podstawie macierzy porównań parami poszczególnych wariantów względem każdego z kryteriów. Jeżeli otrzymano za dużą wartość współczynnika spójności, musimy przerwać badanie, dokonać korekt w macierzach porównań parami i ponownego sprawdzenia współczynnika spójności. Jest to związane z potrzebą ponownego zaangażowania w badanie decydenta oraz wydłużeniem czasu badania.

Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono wykorzystanie arytmetyki przyrostów we wspomaganie procesu podejmowania decyzji. Arytmetyka przyrostów w połączeniu z dotychczas stosowanymi metodami wspomaganie procesu decyzyjnego w problemach decyzyjnych, gdzie oprócz kryteriów ilościowych występują również kryteria jakościowe, wzbogaca dotychczas stosowane metody podejmowania decyzji. Pozwala ona na uwzględnienie w tych metodach możliwości wystąpienia nieprecyzyjności/niespójności informacji, która może powstać w wyniku ocen wariantów podanych przez decydenta dla kryteriów podlegających ocenie jakościowej. Dzięki wykorzystaniu arytmetyki przyrostów możemy określić, czy występuje, a jeśli tak, to jakiej wielkości jest niespójność/nieprecyzyjność.

Cel jakim było badanie możliwości wykorzystania arytmetyki przyrostów do modyfikacji wybranych metod podejmowania decyzji osiągnięto poprzez połączenie arytmetyki przyrostów z metodą wspomaganie decyzji wielokryterialnych PVM.

Dzięki połączeniu metody PVM z arytmetyką przyrostów potwierdzono tezę postawioną na początku niniejszej pracy. Zakładała ona, że zastosowanie elementów arytmetyki przyrostów w wybranej metodzie wielokryterialnego wspomaganie decyzji pozwoli na uwzględnianie nieprecyzyjności informacji wykorzystywanej w procesie podejmowanie decyzji. Tym samym więc umożliwi dokładniejsze odwzorowanie preferencji decydenta. Potwierdzeniem postawionej tezy są wyniki badań, jakie przeprowadzono z wykorzystaniem nowej metody wspomaganie decyzji wielokryterialnych. W niniejszej pracy wykonano dwa badania. W pierwszym z nich nową metodę zastosowano do wspomaganie problemu decyzyjnego, w którym warianty

porównywano tylko za pomocą kryteriów jakościowych. W drugim badaniu nową metodę zastosowano do wspomaganie problemu decyzyjnego, w którym kryteria jakościowe występują wspólnie z kryteriami ilościowymi. Zastosowanie metody PVM wraz z arytmetyką przyrostów w obu badaniach rozszerzyło możliwości tej metody w procesie decyzyjnym. Pozwoliło na uwzględnienie nieprecyzyjności informacji/niespójności ocen w problemach decyzyjnych, w których decydent oceniając warianty za pomocą kryteriów jakościowych poprzez porównanie ich parami może wprowadzić niespójność w macierzach ocen. Niespójność ta może być wynikiem błędu decydenta lub być wprowadzona przez decydenta celowo – być wynikiem jego niekonsekwencji przy porównywaniu wariantów wg danego kryterium. Rankingi otrzymane w przykładowych badaniach z wykorzystaniem metody PVM wzbogaconej o arytmetykę przyrostów stały się bardziej wiarygodne, gdyż w przypadku identycznych bądź zbliżonych ocen dla poszczególnych wariantów decyzyjnych decydent otrzymał nowe możliwości. Oprócz wskazania decydentowi wariantów najlepszych poprzez dostarczenie mu rankingów końcowych wariantów w badaniach dano decydentowi możliwość porównania wartości odchylenia standardowego otrzymanych z wykorzystaniem arytmetyki przyrostów. Na podstawie tych wartości decydent mógł wybrać ten z wariantów, który charakteryzuje się mniejszym odchyleniem standardowym, czyli jest „lepiej określony” w rankingu.

Jak pokazują przykłady, które zawarto w niniejszej pracy, metodę PVM rozszerzoną o arytmetykę przyrostów możemy zastosować w różnych problemach decyzyjnych, w których decyzje podejmowane są przez decydenta na podstawie kryteriów jakościowych, jak również, gdy kryteria jakościowe występują obok kryteriów ilościowych. Możemy również wykonać badanie dwukrotnie, by określić, jak kryteria jakościowe wpłyną na wynik problemu decyzyjnego, czyli na kolejność wariantów w rankingu. W pierwszym badaniu utworzyć ranking z wykorzystaniem kryteriów ilościowych, w drugim natomiast dodać kryteria jakościowe i porównać otrzymane wyniki.

W niniejszej pracy metodę PVM rozszerzoną o arytmetykę przyrostów wykorzystano z powodzeniem do problemu decyzyjnego związanego ze zrównoważonym rozwojem obszarów miejskich. Można ją zatem stosować w problemach decyzyjnych związanych z podejmowaniem decyzji na różnych szczeblach samorządowych. Decyzje takie są często związane z dużymi wydatkami budżetowymi oraz mają one, jak pokazano w przykładzie, wpływ na różne czynniki związane z funkcjonowaniem obszarów, dla których są podejmowane i społeczeństwa na tych obszarach bytującego. Należy więc w

tych problemach decyzyjnych stworzyć ranking wariantów uwzględniający niespójność/nieprecyzyjność ocen podanych dla wariantów przez decydenta oraz określić jej wielkość, co pozwoli uszeregować precyzyjniej w rankingu warianty o identycznych lub zbliżonych wartościach ocen. Metoda autorska z powodzeniem może być wykorzystywana we wspomaganie decydenta w podobnych problemach decyzyjnych, zastępując metody dotychczas w takich problemach decyzyjnych stosowane.

Metodę PVM rozszerzoną o arytmetykę przyrostów zastosowano z powodzeniem w niniejszej pracy również dla konsumenckiego problemu decyzyjnego. W życiu każdego człowieka są takie decyzje związane z podejmowaniem decyzji konsumenckich, które mają wpływ nie tylko na decydenta, lecz również na jego bliskich, a których wpływ na decydenta i jego otoczenie jest długotrwały. W takich problemach decyzyjnych, co pokazano na przykładzie wyboru elektrycznego samochodu rodzinnego, utworzenie rankingu wariantów powinno się wykonać z uwzględnieniem niespójności/nieprecyzyjności ocen wariantów podanych przez decydenta. Obliczenie wielkości niespójności/nieprecyzyjności pozwoli uniknąć błędów ustalenia rankingu przy jednakowych lub minimalnych różnicach w ocenach, a tym samym na podjęcie przez decydenta trafniejszego wyboru związanego z jego preferencjami. Wybór ten często wiąże się z dużymi wydatkami z domowego budżetu, ma wpływ nie tylko na samego decydenta, a konsekwencje podjętej decyzji są czasami rozciągnięte w długim okresie czasu (budowa/kupno domu, zakup mieszkania czy samochodu itp.).

Elementem nowości, o którym mówi się w niniejszej rozprawie, jest implementacja arytmetyki przyrostów w istniejącej metodzie wielokryterialnego wspomaganie decyzji. Wynikiem tej implementacji jest określenie wielkości nieprecyzyjności/niespójności ocen wariantów dokonanych przez decydenta przy wykorzystaniu kryteriów jakościowych w rozpatrywanym problemie decyzyjnym. Określenie wielkości nieprecyzyjności/niespójności daje możliwość precyzyjniejszego ustalenia miejsc wariantów w rankingu rozpatrywanego wielokryterialnego problemu decyzyjnego zwłaszcza w sytuacji, w której warianty rozpatrywane przez decydenta mają jednakowe lub zbliżone oceny i nie dają decydentowi jednoznacznej odpowiedzi odnośnie do słuszności jego wyboru na podstawie uzyskanego na podstawie ocen rankingu.

Rezultaty badań pozwalają na dogłębsze analizowanie problemów decyzyjnych w sytuacjach decyzyjnych, w których ranking wariantów tworzony jest na podstawie

kryteriów jakościowych lub te kryteria występują wraz z kryteriami ilościowymi. Możemy też określić, jak kryteria jakościowe wpływają na ranking powstały wyłącznie z wykorzystaniem kryteriów ilościowych. Głównym rezultatem jest natomiast tutaj uzyskanie wielkości nieprecyzyjności/niespójności ocen wariantów przez decydenta, przez co możemy określić, czy decydent był zdecydowany w swojej ocenie, czy jego oceny według kryteriów jakościowych były spójne, a jeżeli nie to, czy nie powinien po uwzględnieniu tej niespójności zmienić kolejności wariantów w uzyskanym na podstawie ocen rankingu.

Arytmetyka przyrostów została zastosowana z powodzeniem w metodzie PVM. Wybór tej metody uzasadniono w rozdziale trzecim. W badaniach nad zastosowaniem połączenia metody PVM z arytmetyką przyrostów, czyli autorskiej metody PVM–VSI, ograniczono się do wielokryterialnych problemów decyzyjnych, w których warianty były oceniane za pomocą kryteriów wyłącznie jakościowych lub kryteria jakościowe występowały wraz z kryteriami ilościowymi. Przykłady dotyczyły wspomaganie decyzji w problemach decyzyjnych rozpatrywanych indywidualnie (przez pojedynczego decydenta). Niewykluczone jest jednak zastosowanie arytmetyki przyrostów w innych metodach, w których w problemie decyzyjnym występują kryteria jakościowe bądź też kryteria mieszane (kryteria jakościowe obok kryteriów ilościowych), a nie uwzględniają one nieprecyzyjności/niespójności ocen pozyskanych od decydenta w procesie decyzyjnym. Możliwe jest też wykorzystanie metody autorskiej we wspomaganie decyzji w wielokryterialnych problemach decyzyjnych podejmowanych przez grupę decydentów poprzez agregację ocen wielu decydentów do jednej oceny wspólnej z wykorzystaniem znanych i stosowanych dotychczas metodologii.

Literatura

- [1] Abdullah R.M., Abualkishik A.Z., Alwan A.A., Improved Handover Decision Algorithm Using Multiple Criteria. *Procedia Computer Science*, t. 141 (2018), s. 32–39, doi: 10.1016/j.procs.2018.10.146.
- [2] Abusaeed S., Khan S.U.R., Mashkooor A., A Fuzzy AHP-based approach for prioritization of cost overhead factors in agile software development. *Applied Soft Computing*, t. 133 (2023), s. 109977, doi: 10.1016/j.asoc.2022.109977.
- [3] Ahmad S., Ouenniche J., Kolosz B.W., Greening P., Andresen J.M., Maroto-Valer M.M., Xu B., A stakeholders' participatory approach to multi-criteria assessment of sustainable aviation fuels production pathways. *International Journal of Production Economics*, t. 238 (2021), s. 108156, doi: 10.1016/j.ijpe.2021.108156.
- [4] Akpan U., Morimoto R., An application of Multi-Attribute Utility Theory (MAUT) to the prioritization of rural roads to improve rural accessibility in Nigeria. *Socio-Economic Planning Sciences*, t. 82 (2022), s. 101256, doi: 10.1016/j.seps.2022.101256.
- [5] Anderson D.R., Sweeney D.J., Williams T.A., Camm J.D., Cochran J.J., *An Introduction to Management Science: Quantitative Approach*. Cengage Learning, 2018.
- [6] Aronson E., Wilson T.D., Akert R.M., *Psychologia społeczna*. 2 wyd., Zysk i Spółka Wydawnictwo, 2007. Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <http://wip.pbp.poznan.pl/2079400/Psychologia+spo%C5%82eczna>
- [7] Awasthi A., Chauhan S.S., A hybrid approach integrating Affinity Diagram, AHP and fuzzy TOPSIS for sustainable city logistics planning. *Applied Mathematical Modelling*, t. 36 (2012), s. 573–584, doi: 10.1016/j.apm.2011.07.033.
- [8] Awasthi A., Chauhan S.S., Goyal S.K., A multi-criteria decision making approach for location planning for urban distribution centers under uncertainty. *Mathematical and Computer Modelling*, t. 53 (2011), s. 98–109, doi: 10.1016/j.mcm.2010.07.023.
- [9] Awasthi A., Chauhan S.S., Omrani H., Application of fuzzy TOPSIS in evaluating sustainable transportation systems. *Expert Systems with Applications*, t. 38 (2011), s. 12270–12280, doi: 10.1016/j.eswa.2011.04.005.
- [10] Azadi H., Berg J. van den, Ho P., Sustainability in Rangeland Systems: Introduction of Fuzzy Multi Objective Decision Making. *Current World Environment*, t. 4 (2009), nr 1, s. 19–32.
- [11] Bai C., Dallasega P., Orzes G., Sarkis J., Industry 4.0 technologies assessment: A sustainability perspective. *International Journal of Production Economics*, t. 229 (2020), s. 107776, doi: 10.1016/j.ijpe.2020.107776.
- [12] Bana e Costa C.A., Chagas M.P., A career choice problem: An example of how to use MACBETH to build a quantitative value model based on qualitative value judgments. *European Journal of Operational Research*, t. 153 (2004), s. 323–331, doi: 10.1016/S0377-2217(03)00155-3.

- [13] Bana e Costa C.A., Vincke P., Multiple Criteria Decision Aid: An Overview. [w]: Bana e Costa C.A. (Red.), Readings in Multiple Criteria Decision Aid. Springer, Berlin, Heidelberg, 1990, s. 3–14, doi: 10.1007/978-3-642-75935-2_1.
- [14] Banaszyk P., Zasady zarządzania w przedsiębiorstwie. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, 1997.
- [15] Behzadian M., Kazemzadeh R.B., Albadvi A., Aghdasi M., PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications. European Journal of Operational Research. t. 200 (2010), nr 1, s. 198–215.
- [16] Bell D.E., Schleifer A., Decision Making Under Uncertainty. Course Technology, 1995.
- [17] Berger J.O., Statistical Decision Theory. Foundations, Concepts, and Methods. Springer-Verlag, New York, 1980, doi: 10.1007/978-1-4757-1727-3.
- [18] Borawski M., Rachunek wektorowy z arytmetyką przyrostów w przetwarzaniu obrazów. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.
- [19] Borawski M., Interpretacja graficzna metody VMCM, <http://mborawski.cmee.wneiz.pl/ap/#idVariance> [dostęp: 19 maja 2022].
- [20] Borsuk K., Geometria analityczna w n- wymiarach. (1950), Dostęp: 4 stycznia 2022. [Online]. Dostępne na: <https://eudml.org/doc/219341>
- [21] Brans J.P., Vincke Ph., A Preference Ranking Organisation Method: (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making). Management Science, t. 31 (1985), s. 647–656.
- [22] Buchanan J., Sheppard P., Vanderpooten D., Project ranking using Electre III. 1999.
- [23] Carrera D., Lombillo I., Carpio-García J., Blanco H., Assessment of different combinations of substrate-filter membrane in green roofs. Journal of Building Engineering, t. 45 (2022), s. 103455, doi: 10.1016/j.job.2021.103455.
- [24] Casanovas-Rubio M. del M., Armengou J., Decision-making tool for the optimal selection of a domestic water-heating system considering economic, environmental and social criteria: Application to Barcelona (Spain). Renewable and Sustainable Energy Reviews. t. 91 (2018), s. 741–753, doi: 10.1016/j.rser.2018.04.040.
- [25] Cavallaro F., Multi-criteria decision aid to assess concentrated solar thermal technologies. Renewable Energy, t. 34 (2009), s. 1678–1685, doi: 10.1016/j.renene.2008.12.034.
- [26] Charnes A., Cooper W.W., Management models and industrial applications of linear programming. John Wiley and Sons, New York, 1961, Dostęp: 26 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nav.3800090109>
- [27] Chauhan A., Singh A., A hybrid multi-criteria decision making method approach for selecting a sustainable location of healthcare waste disposal facility. Journal of Cleaner Production, t. 139 (2016), s. 1001–1010, doi: 10.1016/j.jclepro.2016.08.098.

- [28] Chen S.-J., Hwang C.-L., *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making. Tekst oryginalny: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992, doi: 10.1007/978-3-642-46768-4.
- [29] Chmielarz W., Zborowski M., *Analysis of e-Banking Websites' Quality with the Application of the TOPSIS Method – A Practical Study*. *Procedia Computer Science*, t. 126 (2018), s. 1964–1976, doi: 10.1016/j.procs.2018.07.256.
- [30] Civic A., Vucijak B., *Multi-criteria Optimization of Insulation Options for Warmth of Buildings to Increase Energy Efficiency*. *Procedia Engineering*, t. 69 (2014), s. 911–920, doi: 10.1016/j.proeng.2014.03.070.
- [31] Czermiński A., Czapiewski M., *Organizacja procesów decyzyjnych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, 1995, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://katalog.bg.szczecin.pl/cgi-bin/koha/opac-ISBDdetail.pl?bib=39445>
- [32] Czermiński A., Grzybowski M., Ficoń K., *Podstawy organizacji i zarządzania*. Wyższa Szkoła Administracji i Biznesu, 2001.
- [33] Czermiński A., Trzcienecki J., *Elementy teorii organizacji i zarządzania*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1969, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://w.bibliotece.pl/479164/Elementy+teorii+organizacji+i+zarz%C4%85dzania>
- [34] Damaj I.W., Al-Mubasher H., Saadeh M., *An extended analytical framework for heterogeneous implementations of light cryptographic algorithms*. *Future Generation Computer Systems*, t. 141 (2023), s. 154–172, doi: 10.1016/j.future.2022.11.007.
- [35] Doumpos M., Zopounidis C., *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*. [w]: *Applied Optimization*, no. 73, Springer, Dordrecht, 2002, doi: 10.1007/b101986.
- [36] Ebrahimi M., Mirzayi Modam M., *Selecting the best zones to add new emergency services based on a hybrid fuzzy MADM method: A case study for Tehran*. *Safety Science*, t. 85 (2016), s. 67–76, doi: 10.1016/j.ssci.2015.10.011.
- [37] Eckhardt A., Kliegr T., *Preprocessing Algorithm for Handling Non-Monotone Attributes in the UTA method*. *Preference Learning Workshop at ECAI 2012*, 2012.
- [38] Edwards W., Fasolo B., *Decision Technology*. *Annual Review of Psychology*, t. 52 (2001), s. 581–606, doi: 10.1146/annurev.psych.52.1.581.
- [39] Ezbakhe F., Pérez-Foguet A., *Decision analysis for sustainable development: The case of renewable energy planning under uncertainty*. *European Journal of Operational Research*, 2020, doi: 10.1016/j.ejor.2020.02.037.
- [40] Farmer T.A., Matlin M., *Cognition*. Wiley, Orlando, 2019, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.wiley.com/en-us/Cognition%2C+10th+Edition-p-9781119491712>
- [41] Figueira J., Greco S., Ehrogott M., *Introduction*, [w]: *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer, New York, 2005, s. 22–37, [Online]. Dostępne na: <https://link.springer.com/book/10.1007/b100605>
- [42] Figueira J., Mousseau V., Roy B., *Electre Methods*, [w]: Figueira J., Greco S., Ehrogott M. (Red.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer, New York, 2005, s. 133–153, doi: 10.1007/0-387-23081-5_4.

- [43] Figueira J.R., Greco S., Slowiński R., Building a set of additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method. *European Journal of Operational Research*, t. 195 (2009), s. 460–486.
- [44] Flakiewicz W., Wawrzyniak B., *Zasady podejmowania decyzji kierowniczych*. Szkoła Główna Planowania i Statystyki, 1975, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://integro.ciniba.edu.pl/integro/42100146978/flakiewicz-wieslaw/zasady-podejmowania-decyzji-kierowniczych>
- [45] Fontana V., Ebner M., Schirpke U., Ohndorf M., Pritsch H., Tappeiner U., Kurmayer R., An integrative approach to evaluate ecosystem services of mountain lakes using multi-criteria decision analysis. *Ecological Economics*, t. 204 (2023), s. 107678, doi: 10.1016/j.ecolecon.2022.107678.
- [46] Gliński B., Kuc B.R., *Podstawy zarządzania organizacjami*. Państwowe Wydawnictwa Ekonomiczne, 1990, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://integro.ciniba.edu.pl/integro/42100126717/ksiazka/podstawy-zarzadzania-organizacjami>
- [47] Grünig R., Kühn R., *Successful Decision-making. A Systematic Approach to Complex Problems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, doi: 10.1007/978-3-642-00854-2.
- [48] Guitouni A., Martel J., Vincke P., *A Framework to Choose a Discrete Multicriterion Aggregation Procedure (a)*, 2008.
- [49] Guitouni A., Martel J.-M., Tentative guidelines to help choosing an appropriate MCDA method. *European Journal of Operational Research*, t. 109 (1998), s. 501–521, doi: 10.1016/S0377-2217(98)00073-3.
- [50] Guizani K., Ghannouchi S.A., An approach for selecting a business process modeling language that best meets the requirements of a modeler. *Procedia Computer Science*, t. 181 (2021), s. 843–851, doi: 10.1016/j.procs.2021.01.238.
- [51] Hammond J.S., Keeney R.L., Raiffa H., Raiffa H., *Smart Choices: A Practical Guide to Making Better Decisions*. Harvard Business School Press, 1999.
- [52] Hastie R., Problems for Judgment and Decision Making. *Annual Review of Psychology*, t. 52 (2001), s. 653–683, doi: 10.1146/annurev.psych.52.1.653.
- [53] Horvitz E.J., Breese J.S., Henrion M., Decision theory in expert systems and artificial intelligence. *International Journal of Approximate Reasoning*, t. 2 (1988), nr 3, s. 247–302, doi: 10.1016/0888-613X(88)90120-X.
- [54] Hsieh T.-Y., Lu S.-T., Tzeng G.-H., Fuzzy MCDM approach for planning and design tenders selection in public office buildings. *International Journal of Project Management*, t. 22 (2004), nr 7, s. 573–584, doi: 10.1016/j.ijproman.2004.01.002.
- [55] Jaworski J.M., *Matematyczne podstawy metrologii*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1979.
- [56] Kahneman D., *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym*. Media Rodzina, 2012, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.mediarodzina.pl/produkt/pulapki-myslenia-o-mysleniu-szybkim-i-wolnym/>

- [57] Kalinowska A., Trzaskalik T., Bonus Distribution for Employees of a Telephone Customer Service Department: A Case Study based on Pairwise Comparisons. *Procedia Computer Science*, t. 35 (2014), s. 1145–1154, doi: 10.1016/j.procs.2014.08.208.
- [58] Kaliszewski I., *Wielokryterialne podejmowanie decyzji*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2009, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://ksiegarnia.pwn.pl/Wielokryterialne-podejmowanie-decyzji,68956319,p.html>
- [59] Kamali M., Hewage K., Sadiq R., Conventional versus modular construction methods: A comparative cradle-to-gate LCA for residential buildings. *Energy and Buildings*, t. 204 (2019), s. 109479, doi: 10.1016/j.enbuild.2019.109479.
- [60] Kannchen M., Ziemia P., Borawski M., Use of the PVM Method Computed in Vector Space of Increments in Decision Aiding Related to Urban Development. *Symmetry*, t. 11 (2019), nr 4, s. 446, doi: 10.3390/sym11040446.
- [61] Karami A., Utilization and Comparison of Multi Attribute Decision Making Techniques to Rank Bayesian Network Options. 2011, Dostęp: 26 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:his:diva-5276>
- [62] Karczmarczyk A., Wątróbski J., Jankowski J., Ziemia E., Comparative study of ICT and SIS measurement in Polish households using a MCDA-based approach. *Procedia Computer Science*, t. 159 (2019), s. 2616–2628, doi: 10.1016/j.procs.2019.09.254.
- [63] Keeney R.L., Decision analysis: an overview. *Oper Res*, t. 30 (1982), s. 803–838, doi: 10.1287/opre.30.5.803.
- [64] Kieżun W., *Sprawne zarządzanie organizacją*. Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, 1998, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.profit24.pl/Sprawne-zarzadzanie-organizacja.,product517780.html>
- [65] Kim Y., Chung E.-S., Jun S.-M., Kim S.U., Prioritizing the best sites for treated wastewater instream use in an urban watershed using fuzzy TOPSIS. *Resources, Conservation and Recycling*, t. 73 (2013), s. 23–32, doi: 10.1016/j.resconrec.2012.12.009.
- [66] Kobryń A., *Wielokryterialne wspomaganie decyzji w gospodarowaniu przestrzenią*. Difin SA, 2014, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://ksiegarnia.difin.pl/wielokryterialne-wspomaganie-decyzji-w-gospodarowaniu-przestrzenia>
- [67] Kodikara P.N., Multi-objective optimal operation of urban water supply systems. Victoria University, 2008, Dostęp: 26 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <http://www.vu.edu.au/research>
- [68] Kompa K., Witkowska D., Zastosowanie wybranych mierników syntetycznych do porównań poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego w krajach Unii Europejskiej. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. Taksonomia*, t. 17 (2010), s. 71–80.
- [69] Kostecki R.P., Krótka historia matematyki, Dostęp: 18 kwietnia 2023. [Online]. Dostępne na: <https://www.fuw.edu.pl/~kostecki/histmat.pdf>

- [70] Koźmiński A.K., Piotrowski W., Zarządzanie. Teoria i praktyka. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://ksiegarnia.pwn.pl/Zarządzanie-Teoria-i-praktyka,68468682,p.html>
- [71] Krohling R.A., Pacheco A.G.C., A-TOPSIS – An Approach Based on TOPSIS for Ranking Evolutionary Algorithms. *Procedia Computer Science*, t. 55 (2015), s. 308–317, doi: 10.1016/j.procs.2015.07.054.
- [72] Kruszyński M., *Metodyka wielokryterialnego wspomaganie decyzji w problematyce zarządzania transportem miejskim*. Politechnika Poznańska, 2014, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://sin.put.poznan.pl/dissertations/details/d419>
- [73] Kubińska E., Adamczyk-Kowalczyk M., Andrzejewski M., Rozakis S., Incorporating the status quo effect into the decision making process: The case of municipal companies merger. *Socio-Economic Planning Sciences*, t. 84 (2022), s. 101391, doi: 10.1016/j.seps.2022.101391.
- [74] Kuhn H.W., Tucker A.W., *Nonlinear Programming [w]: The Regents of the University of California*. 1951, Dostęp: 26 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200500249>
- [75] Kurnal J., *Zarys teorii organizacji i zarządzania*. Państwowe Wydawnictwa Ekonomiczne, 1969.
- [76] Lellis Moreira M.Â., Simões Gomes C.F., Santos M. dos, Basilio M.P., Araújo Costa I.P. de, Souza Rocha Junior C. de, José Jardim R.R.-A., Evaluation of drones for public security: a multicriteria approach by the PROMETHEE-SAPEVO-M1 systematic. *Procedia Computer Science*, t. 199 (2022), s. 125–133, doi: 10.1016/j.procs.2022.01.016.
- [77] Maleki J., Hakimpour F., Masoumi Z., A Parcel-Level Model for Ranking and Allocating Urban Land-Uses. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, t. 6 (2017), nr 9, s. 273, doi: 10.3390/ijgi6090273.
- [78] Marchewka A., Applying TOPSIS to evaluate labour market resources as a factor of regional investment attractiveness. *Procedia Computer Science*, t. 207 (2022), s. 3122–3129, doi: 10.1016/j.procs.2022.09.370.
- [79] Martins H., Henriques C.O., Figueira J.R., Silva C.S., Costa A.S., Assessing policy interventions to stimulate the transition of electric vehicle technology in the European Union. *Socio-Economic Planning Sciences*. 2023, s. 101505, doi: 10.1016/j.seps.2022.101505.
- [80] Medineckiene M., Zavadskas E.K., Turskis Z., Dwelling selection by applying fuzzy game theory. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, t. 11 (2011), nr 3, s. 681–697, doi: 10.1016/S1644-9665(12)60109-5.
- [81] Miciuła I., Nowakowska-Grunt J., Using the AHP method to select an energy supplier for household in Poland. *Procedia Computer Science*, t. 159 (2019), s. 2324–2334, doi: 10.1016/j.procs.2019.09.407.
- [82] Mikutel T., *Wielokryterialna ocena samolotów transportowych dla Sił Powietrznych RP*. Politechnika Poznańska, 2015, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://sin.put.poznan.pl/dissertations/details/d375>

- [83] Mosadeghi R., Warnken J., Tomlinson R., Mirfenderesk H., Comparison of Fuzzy-AHP and AHP in a spatial multi-criteria decision making model for urban land-use planning. *Computers, Environment and Urban Systems*, t. 49 (2015), s. 54–65, doi: 10.1016/j.compenvurbsys.2014.10.001.
- [84] Nermend K., Taxonomic Vector Measure of Region Development (TWMRR). *Polish Journal of Environmental Studies*, t. 16 (2007), s. 195–198.
- [85] Nermend K., Zastosowanie rzutu wektora do budowy miernika syntetycznego. *Przegląd Statystyczny*, t. 55 (2008), s. 10–21.
- [86] Nermend K., *Rachunek wektorowy w analizie rozwoju regionalnego*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, 2008.
- [87] Nermend K., Employing Similarity Measures to Examine the Development of Technical Infrastructure in Polish Counties. *Folia Oeconomica Stetinensia*, t. 7 (2008), nr 1, s. 87–97, doi: 10.2478/v10031-008-0003-1.
- [88] Nermend K., *Metody analizy wielokryterialnej i wielowymiarowej we wspomaganie decyzji*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2017, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.eki.pl/index.php?detailed=PWN2361&>
- [89] Niemcewicz P., The use of the multi-criteria AHP method to select a cloud computing provider. *Procedia Computer Science*, t. 192 (2021), s. 2558–2567, doi: 10.1016/j.procs.2021.09.025.
- [90] Nong T.N.-M., A hybrid model for distribution center location selection. *The Asian Journal of Shipping and Logistics*, t. 38 (2022), nr 1, s. 40–49, doi: 10.1016/j.ajsl.2021.10.003.
- [91] Nowak M., INSDECM--an interactive procedure for stochastic multicriteria decision problems. *European Journal of Operational Research*, t. 175 (2006), s. 1413–1430, doi: 10.1016/j.ejor.2005.02.016.
- [92] Ogonowski P., Integrated AHP and TOPSIS Method in the Comparative Analysis of the Internet Activities. *Procedia Computer Science*, t. 207 (2022), s. 4409–4418, doi: 10.1016/j.procs.2022.09.504.
- [93] Önüt S., Efendigil T., Soner Kara S., A combined fuzzy MCDM approach for selecting shopping center site: An example from Istanbul, Turkey. *Expert Systems with Applications*, t. 37 (2010), nr 3, s. 1973–1980, doi: 10.1016/j.eswa.2009.06.080.
- [94] Ozsahin D.U., Uzun B., Musa M.S., Şentürk N., Nurçin F.V., Ozsahin I., Evaluating nuclear medicine imaging devices using fuzzy PROMETHEE method. *Procedia Computer Science*, t. 120 (2017), s. 699–705, doi: 10.1016/j.procs.2017.11.298.
- [95] Paradowski B., Bączkiewicz A., Watrąbski J., Towards proper consumer choices - MCDM based product selection. *Procedia Computer Science*, t. 192 (2021), s. 1347–1358, doi: 10.1016/j.procs.2021.08.138.
- [96] Paradowski B., Drażek Z., Identification of the decision-making model for selecting an information system. *Procedia Computer Science*, t. 176 (2020), s. 3802–3809, doi: 10.1016/j.procs.2020.09.007.

- [97] Parmigiani G., Inoue L., *Decision Theory: Principles and Approaches*. John Wiley & Sons, 2009.
- [98] Patel C., Kirby M., Mavris D., Niche-Pareto Genetic Algorithm for Aircraft Technology Selection Process, [w]: 11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, 2001, doi: 10.2514/6.2006-6956.
- [99] Pei Z., Rational decision making models with incomplete weight information for production line assessment. *Information Sciences*, t. 222 (2013), s. 696–716, doi: 10.1016/j.ins.2012.07.060.
- [100] Piegat A., *Modelowanie i sterowanie rozmyte*. Akademicka Oficyna Wydawnicza "Exit", 1999.
- [101] Pinho M., Costa A.S., Meneses M., Manso J., A multiple criteria sorting method for supporting the maintenance management of medical ventilators: The case of Hospital da Luz Lisboa. *Socio-Economic Planning Sciences*, t. 86 (2023), s. 101458, doi: 10.1016/j.seps.2022.101458.
- [102] Piotrowski Z., Algorytm doboru metod wielokryterialnych w środowisku niedoprecyzowania informacji preferencyjnej. *Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie*, 2009, [Online]. Dostępne na: <https://zbc.ksiaznica.szczecin.pl/dlibra/show-content/publication/edition/19428?id=19428>
- [103] Pomerol J.-C., Barba-Romero S., *Multicriterion Decision in Management: Principles and Practice*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [104] Pringle C.D., Jennings D.F., Longenecker J.G., *Managing Organizations: Functions and Behaviors*, Study Guide edition. Merrill Pub Co, Columbus, 1988.
- [105] Promentilla M.A.B., Furuichi T., Ishii K., Tanikawa N., A fuzzy analytic network process for multi-criteria evaluation of contaminated site remedial countermeasures. *Journal of Environmental Management*, t. 88 (2008), s. 479–495, doi: 10.1016/j.jenvman.2007.03.013.
- [106] Prusak A., Stefanów P., AHP - analityczny proces hierarchiczny. Budowa i analiza modeli decyzyjnych krok po kroku. C.H.Beck, 2014, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.ksiegarnia.beck.pl/11453-ahp-analityczny-proces-hierarchiczny-budowa-i-analiza-modeli-decyzyjnych-krok-po-kroku-anna-prusak>
- [107] Rao C., Goh M., Zhao Y., Zheng J., Location selection of city logistics centers under sustainability. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, t. 36 (2015), s. 29–44, doi: 10.1016/j.trd.2015.02.008.
- [108] Robbins S.P., *Skuteczne podejmowanie decyzji*. PWE Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2004, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.empik.com/skuteczne-podejmowanie-decyzji-robbins-stephen-p,284287,ksiazka-p>
- [109] Rocha A., Costa A.S., Figueira J.R., Ferreira D.C., Marques R.C., Quality assessment of the Portuguese public hospitals: A multiple criteria approach. *Omega*, t. 105 (2021), s. 102505, doi: 10.1016/j.omega.2021.102505.

- [110] Roy B., Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1990.
- [111] Roy B., Decision-aid and decision-making. *European Journal of Operational Research*, t. 45 (1990), nr 2, s. 324–331, doi: 10.1016/0377-2217(90)90196-I.
- [112] Roy B., *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [113] Roy B., *Paradigms and Challenges*, [w]: Figueira J., Greco S., Ehrogott M. (Red.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer, New York, 2005, s. 3–24, doi: 10.1007/0-387-23081-5_1.
- [114] Roy B., A conceptual framework for a normative theory of “decision-aid”. s. 38.
- [115] Roy B., Vanderpooten D., The European school of MCDA: Emergence, basic features and current works. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, t. 5 (1996), nr 1, s. 22–38, doi: 10.1002/(SICI)1099-1360(199603)5:1<22::AID-MCDA93>3.0.CO;2-F.
- [116] Roy B., Vanderpooten D., An overview on “The European school of MCDA: Emergence, basic features and current works”. *European Journal of Operational Research*, t. 99 (1997), s. 26–27, doi: 10.1016/S0377-2217(96)00379-7.
- [117] Roy B., Vincke Ph., Relational Systems of Preference with One or More Pseudo-Criteria: Some New Concepts and Results. *Management Science*, t. 30 (1984), nr 11, s. 1323–1335, doi: 10.1287/mnsc.30.11.1323.
- [118] Rudniański J., *Przed decyzją*. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1965, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: https://integro.ciniba.edu.pl/integro/191901705127/rudnianski-jaroslawn/przed-decyzja?_lang=en
- [119] Saaty T.L., *The analytic hierarchy process: Planning, priority setting, resource allocation*. McGraw-Hill International Book Co., 1980.
- [120] Saaty T.L., How to make a decision: The analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, t. 48 (1990), nr 1, s. 9–26, doi: 10.1016/0377-2217(90)90057-I.
- [121] Saaty T.L., Transport planning with multiple criteria: The analytic hierarchy process applications and progress review. *Journal of Advanced Transportation*, t. 29 (1995), nr 1, s. 81–126, doi: 10.1002/atr.5670290109.
- [122] Saaty T.L., The Analytic Hierarchy and Analytic Network Processes for the Measurement of Intangible Criteria and for Decision-Making. [w]: Figueira J., Greco S., Ehrogott M. (Eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer, New York, 2005, s. 345–405, doi: 10.1007/0-387-23081-5_9.
- [123] Saaty T.L., Decision making with the analytic hierarchy process. *IJSSCI*, t. 1 (2008), nr 1, s. 83–98, doi: 10.1504/IJSSCI.2008.017590.
- [124] Saaty T.L., Ozdemir M.S., Why the magic number seven plus or minus two. *Mathematical and Computer Modelling*. 38 (2003) 233–244.

- [125] San Cristóbal J.R., Multi-criteria decision-making in the selection of a renewable energy project in Spain: The VIKOR method. *Renewable Energy*, t. 36 (2011), s. 498–502, doi: 10.1016/j.renene.2010.07.031.
- [126] Scott J., Ho W., Dey P.K., Talluri S., A decision support system for supplier selection and order allocation in stochastic, multi-stakeholder and multi-criteria environments. *International Journal of Production Economics*, t. 166 (2015), s. 226–237, doi: 10.1016/j.ijpe.2014.11.008.
- [127] Sęk O., Czarnowski I., Application of Analytic Hierarchy Process in Selecting a State-Made Electronic Documentation Management System for Polish Municipalities. *Procedia Computer Science*, t. 207 (2022), s. 3969–3977, doi: 10.1016/j.procs.2022.09.459.
- [128] Simon H.A., *Podejmowanie decyzji kierowniczych*. Nowe nurty. Państwowe Wydawnictwa Ekonomiczne, 1982, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://tezeusz.pl/simon-herbert-a-podejmowanie-decyzji-kierowniczych-nowe-nurty-453399>
- [129] Simon H.A., Behavior A., A study of decision-making processes in administrative organizations. *Administrative Behavior*, 1957.
- [130] Spronk J., Steuer R.E., Zopounidis C., *Multicriteria Decision Aid/Analysis in Finance*. [w]: Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (Red.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer, New York, 2005, s. 799–848, doi: 10.1007/0-387-23081-5_20.
- [131] Stachowiak K., *Wielokryterialna analiza decyzyjna w badaniach przestrzenno-ekonomicznych*. 2002, s. 127–136.
- [132] Stanek S., Wachowicz T., *Negocjacje w dobie Internetu*. *Studia Ekonomiczne / Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach*, nr 138 (2013), s. 9–30.
- [133] Szaja M., Analysis and evaluation of socio-economic development of coastal municipalities in the West Pomeranian Voivodeship. *Procedia Computer Science*, t. 207 (2022), s. 3536–3544, doi: 10.1016/j.procs.2022.09.412.
- [134] Szarfenberg R., *Paradoks nieuchronnej niesprawiedliwości w polityce społecznej*[w]: *Paradoksy polityki*, Dom Wydawniczy ELIPSA, 2007, s. 459, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.gandalf.com.pl/b/paradoksy-polityki/#product-details>
- [135] Triantaphyllou E., Shu B., Sanchez S.N., Ray T., *Multi-Criteria Decision Making: An Operations Research Approach*. *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, (Webster J.G., Red.), John Wiley & Sons, 1998.
- [136] Trzaskalik T., *Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2006, Dostęp: 26 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.profit24.pl/Metody-wielokryterialne-na-polskim-ryнку-finansowym.,product517336.html>
- [137] Trzaskalik T., *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2014, Dostęp: 26 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.profit24.pl/Metody-wielokryterialne-na-polskim-ryнку-finansowym.,product517336.html>

- [138] Tzeng G.-H., Huang J.-J., Huang J.-J., Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. Chapman and Hall/CRC, 2011, doi: 10.1201/b11032.
- [139] Vahidnia M.H., Alesheikh A.A., Alimohammadi A., Hospital site selection using fuzzy AHP and its derivatives. *Journal of Environmental Management*, t. 90 (2009), s. 3048–3056, doi: 10.1016/j.jenvman.2009.04.010.
- [140] Vincke P., *Multicriteria Decision-Aid*. Wiley, Chichester, 1992, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://www.wiley.com/en-us/Multicriteria+Decision+Aid-p-9780471931843>
- [141] Walczak D., Rutkowska A., Project rankings for participatory budget based on the fuzzy TOPSIS method. *European Journal of Operational Research*, t. 260 (2017), nr 2, s. 706–714, doi: 10.1016/j.ejor.2016.12.044.
- [142] Wątróbski J., Karczmarczyk A., Rymaszewski S., Multi-criteria decision making approach to production line optimization. *Procedia Computer Science*, t. 176 (2020), s. 3820–3830, doi: 10.1016/j.procs.2020.09.005.
- [143] Więckowski J., Szyjewski Z., Practical Study of Selected Multi-Criteria Methods Comparison. *Procedia Computer Science*, t. 207 (2022), s. 4565–4573, doi: 10.1016/j.procs.2022.09.520.
- [144] Wilson R.A., Keil F.C., *The MIT Encyclopedia of the Cognitive Science*. MIT Press, London, 2001, Dostęp: 24 czerwca 2020. [Online]. Dostępne na: <https://mitpress.mit.edu/books/mit-encyclopedia-cognitive-sciences-mitecs>
- [145] irracjonalny, Wielki słownik języka polskiego PAN, <https://wsjp.pl/haslo/podglad/36018/irracjonalny> [dostęp: 12 stycznia 2023].
- [146] Żak J., *Wielokryterialne wspomaganie decyzji w transporcie drogowym*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2005.
- [147] Żak J., The methodology of multiple criteria decision making/aiding in public transportation. *Journal of Advanced Transportation*, t. 45 (2011), s. 1–20, doi: 10.1002/atr.108.
- [148] Zavadskas E., Turskis Z., Multiple criteria decision making (MCDM) methods in economics: an overview. 2011, doi: 10.3846/20294913.2011.593291.
- [149] Zdyb M., *Istota decyzji*. Wydaw. Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, 1993.
- [150] Zeleny M., An essay into a philosophy of MCDM: A way of thinking or another algorithm?, *Computers & Operations Research*, t. 19 (1992), nr 7, s. 563–566, doi: 10.1016/0305-0548(92)90027-3.
- [151] Zopounidis C., *The European School of MCDA: Some Recent Trends*. [w]: Clímaco J. (Red.), *Multicriteria Analysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997, s. 608–616, doi: 10.1007/978-3-642-60667-0_61.
- [152] Kalkulator samochodów elektrycznych. <https://elektromobilni.pl/kalkulator-samochodow-elektrycznych/> [dostęp: 1 lutego 2023]
- [153] Wikipedia. <https://pl.wikipedia.org> [dostęp: 18 kwietnia 2023]
- [154] Inflacja, Wikipedia. <https://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Inflacja&oldid=69961245> [dostęp: 18 kwietnia 2023]

- [155] Celsius, Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Celsius&oldid=1149184302> [dostęp: 18 kwietnia 2023]
- [156] Kelvin, Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kelvin&oldid=1149255045> [dostęp: 18 kwietnia 2023]
- [157] Poziom morza, Wikipedia. https://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Poziom_morza&oldid=70092857 [dostęp: 18 kwietnia 2023]
- [158] Fahrenheit, Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fahrenheit&oldid=1150329397> [dostęp: 18 kwietnia 2023]
- [159] ScienceDirect.com. <https://www.sciencedirect.com/> [dostęp: 30 marca 2023]
- [160] Budżet obywatelski | Gorzów Wielkopolski. <https://gorzow.konsultacjejst.pl/budzet-obywatelski> [dostęp: 26 stycznia 2023]
- [161] Compare electric vehicles - EV Database. <https://ev-database.org/> [dostęp: 14 maja 2020]
- [162] Elektromobilność, <https://www.gov.pl/web/elektromobilnosc/nabor-dla-osob-fizycznych> [dostęp: 1 lutego 2023]

Spis tabel

Tabela 1.1. Rodzaje relacji	18
Tabela 1.2. Sytuacje preferencyjne	19
Tabela 1.3. Wykorzystanie WWD w problemach decyzyjnych w informatyce.....	29
Tabela 1.4. Wykorzystanie WWD w problemach decyzyjnych w ekonomii.....	31
Tabela 1.5. Wykorzystanie WWD w problemach decyzyjnych w zarządzaniu.....	33
Tabela 1.6. Wykorzystanie WWD w konsumenckich problemach decyzyjnych.....	35
Tabela 2.1. Przykład „świadomej” niespójności macierzy ocen	49
Tabela 2.2. Fundamentalna skala porównań Saat’ego.....	62
Tabela 2.3. Wskaźniki zgodności	65
Tabela 2.4. Obliczanie wektorów motywującego i demotyującego w zależności od charakteru kryteriów	73
Tabela 2.5. Obliczanie wektora preferencji dla kryteriów o charakterze pożądanym i niepożądanym	73
Tabela 2.6. Pięciostopniowa skala porównań kryteriów	79
Tabela 3.1. Porównanie najczęściej wykorzystywanych metod wielokryterialnych i metody PVM–VSI	92
Tabela 4.1. Macierz porównań parami wariantów wg kryterium $C_1 - 1$. przestrzenny ..	95
Tabela 4.2. Macierz pośrednia porównań wariantów wg kryterium $C_1 - 1$ – ład przestrzenny	96
Tabela 4.3. Wektory średnich ocen dla wariantów decyzyjnych	97
Tabela 4.4. Macierz kowariancji dla wariantu A_1	97
Tabela 4.5. Motywujący wektor preferencji.....	97
Tabela 4.6. Demotyujący wektor preferencji.....	98
Tabela 4.7. Wartości wektora \vec{V}	98
Tabela 4.8. Wartości wektora \vec{V}'	98
Tabela 4.9. Macierz transformacji	98
Tabela 4.10. Oceny (μ_j) oraz wartości odchylenia standardowego (σ) uzyskane przez poszczególne warianty decyzyjne.....	99
Tabela 4.11. Ranking uzyskany w badaniu projektów zgłoszonych do BO.....	101
Tabela 4.12. Mapowanie wartości ostrych na rozmyte na podstawie ocen lingwistycznych	102

Tabela 4.13. Oceny wariantów z uwzględnieniem kryterium C_1 – skala liczb rozmytych	103
Tabela 4.14. Oceny wariantów według poszczególnych kryteriów – skala liczb rozmytych	103
Tabela 4.15. Rozmyta ocena końcowa poszczególnych wariantów, wyostrzona ocena końcowa oraz miejsce w rankingu uzyskane za pomocą procedury fuzzy AHP.....	104
Tabela 4.16. Rankingi uzyskane z zastosowaniem metod PVM–VSI i Fuzzy AHP.....	105
Tabela 4.17. Oferta oraz parametry techniczne samochodów elektrycznych dostępnych na Polskim rynku motoryzacyjnym (stan na luty 2023 r.)	110
Tabela 4.18. Wartości kryteriów dla poszczególnych wariantów decyzyjnych.....	113
Tabela 4.19. Wagi przydzielone przez konsumenta poszczególnym kryteriom.....	114
Tabela 4.20. Unormowane wartości wag dla poszczególnych kryteriów.....	114
Tabela 4.21. Unormowane wartości kryteriów.....	114
Tabela 4.22. Wektory preferencji dla poszczególnych kryteriów	115
Tabela 4.23. Unormowane wartości wektorów preferencji.....	115
Tabela 4.24. Unormowane wartości wektora preferencji \vec{V}	116
Tabela 4.25. Wartości wektora \vec{V} v	116
Tabela 4.26. Wartości wektora $\vec{\Phi}$ v	116
Tabela 4.27. Unormowany wektor \vec{V} v	116
Tabela 4.28. Wartości wskaźnika μ_j dla poszczególnych wariantów decyzyjnych wraz z uzyskanym przez nich w rankingu miejscem.....	117
Tabela 4.29. Wagi dla wszystkich dziesięciu kryteriów.....	118
Tabela 4.30. Wagi po unormowaniu.....	118
Tabela 4.31. Macierz porównań wariantów dla kryterium C_8 (wygląd zewnętrzny).....	119
Tabela 4.32. Macierz pośrednia porównania dla kryterium C_8 (wygląd zewnętrzny) ...	120
Tabela 4.33. Wartości wektorów średnich ocen.....	121
Tabela 4.34. Wartości kryteriów dla poszczególnych wariantów decyzyjnych z uzupełnionymi ocenami dla kryteriów subiektywnych	121
Tabela 4.35. Macierz kowariancji dla pierwszego wariantu decyzyjnego A_1	122
Tabela 4.36. Unormowane wartości kryteriów dla wszystkich kryteriów	122
Tabela 4.37. Wektory preferencji dla poszczególnych kryteriów	123

Tabela 4.38. Unormowane wartości wektorów preferencji dla wszystkich kryteriów...	123
Tabela 4.39. Unormowane wartości wektora preferencji \vec{V} dla wszystkich kryteriów ..	123
Tabela 4.40. Wartości dla wektora \vec{v}	124
Tabela 4.41. Wartości dla wektora $\vec{\Phi}'$	124
Tabela 4.42. Unormowany wektor \vec{V}'	124
Tabela 4.43. Macierz transformacji	124
Tabela 4.44. Wartości wskaźnika μ_j oraz miejsce wariantów decyzyjnych w rankingu	125
Tabela 4.45. Oceny (μ_j), miejsce w rankingu oraz wartości odchylenia standardowego (σ) uzyskane w badaniu dla poszczególnych wariantów.....	125
Tabela 4.46. Otrzymane rankingi	127
Tabela 4.47. Oceny wariantów według poszczególnych kryteriów	130
Tabela 4.48. Wartość współczynnika CR dla poszczególnych kryteriów	131
Tabela 4.49. Ocena końcowa poszczególnych wariantów oraz miejsce w rankingu uzyskane za pomocą procedury AHP	131
Tabela 4.50. Progi preferencji i funkcje preferencji zastosowane w metodzie PROMETHEE	132
Tabela 4.51. Wyniki dla metody PROMETHEE wraz z miejscem w rankingu.....	133
Tabela 4.52. Rankingi uzyskane z zastosowaniem poszczególnych metod WWD.....	133

Spis rysunków

Rysunek 1.1. Domena decyzyjna.....	10
Rysunek 1.2. Procedura rozwiązywania problemu decyzyjnego	15
Rysunek 1.3. Klasyfikacja problemów WPD	24
Rysunek 2.1. Historia liczb.....	42
Rysunek 2.2. Możliwa forma zbiorów rozmytych „niski”, „średni”, „wysoki” służących do jakościowej oceny wzrostu dorosłych mężczyzn.....	43
Rysunek 2.3. Arytmetyka przyrostów	51
Rysunek 2.4. Interpretacja geometryczna metody VMCM	61
Rysunek 2.5. Możliwe warianty metody PVM.....	67
Rysunek 2.6. Procedura obliczeniowa w metodzie PVM.....	68

Rysunek 2.7. Jednowymiarowy układ współrzędnych oparty na wektorze \vec{v}	75
Rysunek 2.8. Współrzędne wariantów decyzyjnych w układzie współrzędnych \vec{v}	75
Rysunek 2.9. Odległość wariantów decyzyjnych wektora dla kryteriów pożądaných...77	
Rysunek 3.1. Etapy procedury metody PVM–VSI.....	86
Rysunek 4.1. Oceny wariantów decyzyjnych.....	100
Rysunek 4.2. Wartości odchylenia standardowego	100
Rysunek 4.3. Pięciostopniowa skala ocen językowych i odpowiadająca im skala ocen rozmytych	102
Rysunek 4.4. Oceny wariantów decyzyjnych uzyskane metodą Fuzzy AHP	104
Rysunek 4.5. Oceny wariantów decyzyjnych wg kryteriów obiektywnych (podanych ilościowo).....	117
Rysunek 4.6. Oceny wariantów decyzyjnych po uwzględnieniu kryteriów subiektywnych	126
Rysunek 4.7. Odchylenie standardowe dla poszczególnych wariantów decyzyjnych ...	126
Rysunek 4.8. Oceny wariantów decyzyjnych uzyskane metodą AHP	132

Indeks oznaczeń

F – zbiór kryteriów oceny

C – kryteria

A – warianty decyzyjne

E – macierz wydajności wyników wielokryterialnych

I – równoważność

P – silna preferencja

Q – słaba preferencja

N – nieporównywalność

q – próg równoważności

p – próg preferencji

M – kwadratowa macierz porównań parami

CI – współczynnik spójności

CR – index spójności

R – losowy indeks niezgodności

U – addytywna funkcja użyteczności

V – macierz wag

Ω – supermacierz początkowa

$\bar{\Omega}$ – supermacierz ważona

G – supermacierz wartości granicznych

Z – współczynnik zgodności dla każdej pary wariantów

\emptyset – wskaźnik zgodności

v – próg veta

d – wskaźnik niezgodności

S – współczynnik wiarygodności

λ – współczynnik poziomego cięcia

$s(\lambda)$ – próg dyskryminacji

T – macierz przewyższania

K – współczynnik kwalifikacji

A_{j_i} – wartość i -tego kryterium j -tego wariantu decyzyjnego

c_i – element zbioru kryteriów

κ_d – zbiór kryteriów pożądaných

κ_{nd} – zbiór kryteriów niepożądaných

κ_m – zbiór kryteriów zysk

κ_{dm} – zbiór kryteriów koszt

κ_n – zbiór kryteriów neutralnych

w – wagi kryteriów

w'_i – wartość unormowanej wagi dla i -tego kryterium

m – ilość kryteriów

$\vec{\Psi}$ – motywujący wektor preferencji

$\vec{\Phi}$ – demotywuujący wektor preferencji

τ_i – wartość i -tej współrzędnej wektora \vec{V}

τ'_i – wartość i -tej współrzędnej unormowanego wektora \vec{V}'

\vec{V} – wektor preferencji

m_v – liczba kryteriów zysk i koszt

$\frac{\tau_i'^2}{v}$ – i -ta współrzędna wektora \vec{V}'

$\frac{\phi_i'}{v}$ – i -ta współrzędna wektora $\vec{\Phi}'$

$\frac{\tau_i''}{v}$ – i -ta współrzędna wektora \vec{V}''

m_d – liczba kryteriów pożądaných

$\frac{\tau_i'}{d}$ – i -ta współrzędna wektora \vec{V}'

m_{nd} – liczba kryteriów niepożądaných

$\frac{\tau_i'}{nd}$ – i -ta współrzędna wektora \vec{V}'

$\frac{\mu_j}{v}$ – wartość wskaźnika dla kryteriów pożądaných i niepożądaných

$\frac{\mu_j}{d}$ – wartość wskaźnika dla kryteriów zysk

$\frac{\mu_j}{nd}$ – wartość wskaźnika dla kryteriów koszt

μ_j – współczynnik ważności

$\frac{R}{v}$ – przyrost współczynnika ważności dla kryteriów subiektywných

$\frac{R}{d}$ – przyrost współczynnika ważności dla kryteriów pożądaných

$\frac{R}{nd}$ – przyrost współczynnika ważności dla kryteriów niepożądaných

R_w – przyrost współczynnika ważności wariantów decyzyjnych

B – wartość graniczna współczynnika ważności

x – przedział rozmyty

η – wartości średnie

σ – wariancje

R_l^{Ak} – macierz pośrednia porównania

$r_l^{Ak}(i, j)$ – element macierzy pośredniej porównania o współrzędnych i, j

Z_l^{Ak} – unormowana macierz pośrednia porównania

\vec{X}_j – wektor średnich ocen dla poszczególných wariantów decyzyjnych

N – liczba wariantów decyzyjnych

$Mcov_j$ – macierz kowariancji

$mcov_j$ – element macierzy kowariancji

T – macierz transformacji

\vec{U}_j – wektor użyteczności danego wariantu decyzyjnego
 r

$u_j(i)$ – i -ty element wektora użyteczności
 r

ZałącznikiZałącznik 4.1. Macierz porównań parami wariantów wg kryterium C_2 – modernizacja

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1/3	1/2	2	3
A_2	3	1	2	4	5
A_3	2	1/2	1	3	4
A_4	1/2	1/4	1/3	1	2
A_5	1/3	1/5	1/4	1/2	1

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.2. Macierz porównań parami wariantów wg kryterium C_3 – ochrona środowiska i przyrody

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	3	1/2	2	4
A_2	1/3	1	1/4	1/2	2
A_3	2	4	1	3	5
A_4	1/2	2	1/3	1	3
A_5	1/4	1/2	1/5	1/3	1

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.3. Macierz porównań parami wariantów wg kryterium C_4 – sport i turystyka

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	4	3	1/2	2
A_2	1/4	1	1	1/5	1/3
A_3	1/3	1	1	1/4	1/2
A_4	2	5	4	1	3
A_5	1/2	3	2	1/3	1

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.4. Macierz porównań parami wariantów wg kryterium C_5 – kultura

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	4	3	1/2	2
A_2	1/4	1	1/2	1/5	1/3
A_3	1/3	2	1	1/5	1/2
A_4	2	5	5	1	3
A_5	1/2	3	2	1/3	1

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.5. Macierz pośrednia porównań wariantów wg kryterium C_2 – modernizacja (rewitalizacja)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		1/3	1/2	2	3
$A_1 (A_2)$		1/3	2/3	1 1/3	1 2/3
$A_1 (A_3)$		1/4	1/2	1 1/2	2
$A_1 (A_4)$		1/2	2/3	2	4
$A_1 (A_5)$		3/5	3/4	1 1/2	3
$A_2 (A_1)$	3		1 1/2	6	9
A_2	3		2	4	5
$A_2 (A_3)$	4		2	6	8
$A_2 (A_4)$	2		1 1/3	4	8
$A_2 (A_5)$	1 2/3		1 1/4	2 1/2	5
$A_3 (A_1)$	2	2/3		4	6
$A_3 (A_2)$	1 1/2	1/2		2	2 1/2
A_3	2	1/2		3	4
$A_3 (A_4)$	1 1/2	3/4		3	6
$A_3 (A_5)$	1 1/3	4/5		2	4
$A_4 (A_1)$	1/2	1/6	1/4		1 1/2
$A_4 (A_2)$	3/4	1/4	1/2		1 1/4
$A_4 (A_3)$	2/3	1/6	1/3		1 1/3
A_4	1/2	1/4	1/3		2
$A_4 (A_5)$	2/3	2/5	1/2		2
$A_5 (A_1)$	1/3	1/9	1/6	2/3	
$A_5 (A_2)$	3/5	1/5	2/5	4/5	
$A_5 (A_3)$	1/2	1/8	1/4	3/4	
$A_5 (A_4)$	1/4	1/8	1/6	1/2	
A_5	1/3	1/5	1/4	1/2	

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.6. Macierz pośrednia porównań wariantów wg kryterium C_3 – ochrona środowiska i przyrody

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		3	1/2	2	4
$A_1 (A_2)$		3	3/4	1 1/2	6
$A_1 (A_3)$		2	1/2	1 1/2	2 1/2
$A_1 (A_4)$		4	2/3	2	6
$A_1 (A_5)$		2	4/5	1 1/3	4

$A_2 (A_1)$	1/3		1/6	2/3	1 1/3
A_2	1/3		1/4	1/2	2
$A_2 (A_3)$	1/2		1/4	3/4	1 1/4
$A_2 (A_4)$	1/4		1/6	1/2	1 1/2
$A_2 (A_5)$	1/2		2/5	2/3	2
$A_3 (A_1)$	2	6		4	8
$A_3 (A_2)$	1 1/3	4		2	8
A_3	2	4		3	5
$A_3 (A_4)$	1 1/2	6		3	9
$A_3 (A_5)$	1 1/4	2 1/2		1 2/3	5
$A_4 (A_1)$	1/2	1 1/2	1/4		2
$A_4 (A_2)$	2/3	2	1/2		4
$A_4 (A_3)$	2/3	1 1/3	1/3		1 2/3
A_4	1/2	2	1/3		3
$A_4 (A_5)$	3/4	1 1/2	3/5		3
$A_5 (A_1)$	1/4	3/4	1/8	1/2	
$A_5 (A_2)$	1/6	1/2	1/8	1/4	
$A_5 (A_3)$	2/5	4/5	1/5	3/5	
$A_5 (A_4)$	1/6	2/3	1/9	1/3	
A_5	1/4	1/2	1/5	1/3	

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.7. Macierz pośrednia porównań wariantów wg kryterium C_4 – sport i turystyka

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
		4	3	1/2	2
A_1		4	4	4/5	1 1/3
$A_1 (A_2)$		3	3	3/4	1 1/2
$A_1 (A_3)$		2 1/2	2	1/2	1 1/2
$A_1 (A_4)$		6	4	2/3	2
$A_1 (A_5)$	1/4		3/4	1/8	1/2
$A_2 (A_1)$	1/4		1	1/5	1/3
A_2	1/3		1	1/4	1/2
$A_2 (A_3)$	2/5		4/5	1/5	3/5
$A_2 (A_4)$	1/6		2/3	1/9	1/3
$A_2 (A_5)$	1/3	1 1/3		1/6	2/3
$A_3 (A_1)$	1/4	1		1/5	1/3
$A_3 (A_2)$	1/3	1		1/4	1/2
A_3	1/2	1 1/4		1/4	3/4

$A_3 (A_4)$	1/4	1 1/2		1/6	1/2
$A_3 (A_5)$	2	8	6		4
$A_4 (A_1)$	1 1/4	5	5		1 2/3
$A_4 (A_2)$	1 1/3	4	4		2
$A_4 (A_3)$	2	5	4		3
A_4	1 1/2	9	6		3
$A_4 (A_5)$	1/2	2	1 1/2	1/4	
$A_5 (A_1)$	3/4	3	3	3/5	
$A_5 (A_2)$	2/3	2	2	1/2	
$A_5 (A_3)$	2/3	1 2/3	1 1/3	1/3	
$A_5 (A_4)$	1/2	3	2	1/3	

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.8. Macierz pośrednia porównań wariantów wg kryterium C_5 – kultura

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		4	3	1/2	2
$A_1 (A_2)$		4	2	4/5	1 1/3
$A_1 (A_3)$		6	3	3/5	1 1/2
$A_1 (A_4)$		2 1/2	2 1/2	1/2	1 1/2
$A_1 (A_5)$		6	4	2/3	2
$A_2 (A_1)$	1/4		3/4	1/8	1/2
A_2	1/4		1/2	1/5	1/3
$A_2 (A_3)$	1/6		1/2	0	1/4
$A_2 (A_4)$	2/5		1	1/5	3/5
$A_2 (A_5)$	1/6		2/3	1/9	1/3
$A_3 (A_1)$	1/3	1 1/3		1/6	2/3
$A_3 (A_2)$	1/2	2		2/5	2/3
A_3	1/3	2		1/5	1/2
$A_3 (A_4)$	2/5	1		1/5	3/5
$A_3 (A_5)$	1/4	1 1/2		1/6	1/2
$A_4 (A_1)$	2	8	6		4
$A_4 (A_2)$	1 1/4	5	2 1/2		1 2/3
$A_4 (A_3)$	1 2/3	10	5		2 1/2
A_4	2	5	5		3
$A_4 (A_5)$	1 1/2	9	6		3
$A_5 (A_1)$	1/2	2	1 1/2	1/4	
$A_5 (A_2)$	3/4	3	1 1/2	3/5	
$A_5 (A_3)$	2/3	4	2	2/5	

$A_5 (A_4)$	2/3	1 2/3	1 2/3	1/3	
A_5	1/2	3	2	1/3	

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.9. Macierz kowariancji dla wariantu A_2

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	0,7015	0,1293	1,0702	-0,9069	-0,8396
C_2	0,1293	0,0447	0,2687	-0,1196	-0,2093
C_3	1,0702	0,2687	2,6617	-1,3338	-1,7604
C_4	-0,7723	-0,1196	-1,3338	4,8857	4,6447
C_5	-0,8396	-0,2093	-1,7604	4,6447	6,5503

Źródło: opracowanie własne

Załącznik 4.10. Macierz kowariancji dla wariantu A_3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	0,0404	0,0443	0,0268	-0,0535	-0,0109
C_2	0,0443	0,3209	-0,0067	-0,5021	-0,5532
C_3	0,0268	-0,0067	0,0447	0,1721	0,1379
C_4	-0,0535	-0,5021	0,1721	2,8075	2,5336
C_5	-0,0109	-0,5532	0,1379	2,5336	2,9905

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.11. Macierz kowariancji dla wariantu A_4

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	2,5187	0,9656	1,3879	-0,0980	-0,0513
C_2	0,9656	2,6617	0,2979	-0,1805	-0,1995
C_3	1,3879	0,2979	1,0591	-0,0146	-0,0091
C_4	-0,0980	-0,1805	-0,0146	0,0437	0,0398
C_5	-0,0513	-0,1995	-0,0091	0,0398	0,0407

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.12. Macierz kowariancji dla wariantu A_5

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	5,1232	1,5655	4,4176	-1,2026	-1,1870
C_2	1,5655	5,4795	-0,6403	-1,5557	-1,7116
C_3	4,4176	-0,6403	5,4795	-0,5514	-0,5454
C_4	-1,2026	-1,5557	-0,5514	1,0630	1,0775
C_5	-1,1870	-1,7116	-0,5454	1,0775	1,1137

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.13. Macierz porównań dla kryterium C_9 (wygląd wnętrza)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	1/4	1/4	1/5	1/3	1/2
A_2	4	1	1	1/2	2	3
A_3	4	1	1	1/2	2	3
A_4	5	2	2	1	3	4
A_5	3	1/2	1/2	1/3	1	2
A_6	2	1/3	1/3	1/4	1/2	1

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.14. Macierz porównań dla kryterium C_{10} (komfort)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	1	1/4	1	1/4	2	1
A_2	4	1	4	1	5	4
A_3	1	1/4	1	1/4	2	1
A_4	4	1	4	1	5	4
A_5	1/2	1/5	1/2	1/5	1	1/2
A_6	1	1/4	1	1/4	2	1

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.15. Macierz pośrednia porównania dla kryterium C_9 (wygląd wnętrza)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1		0,114000	0,114000	0,115200	0,112000	0,108000
$A_1 (A_2)$		0,096000	0,114000	0,117000	0,108000	0,102000
$A_1 (A_3)$		0,114000	0,114000	0,117000	0,108000	0,102000
$A_1 (A_4)$		0,110400	0,110400	0,115200	0,105600	0,100800
$A_1 (A_5)$		0,116000	0,116000	0,117333	0,112000	0,104000
$A_1 (A_6)$		0,116000	0,116000	0,117000	0,114000	0,108000
$A_2 (A_1)$	0,024000		0,096000	0,100800	0,088000	0,072000
A_2	0,024000		0,096000	0,108000	0,072000	0,048000
$A_2 (A_3)$	0,024000		0,096000	0,108000	0,072000	0,048000
$A_2 (A_4)$	0,060000		0,096000	0,108000	0,084000	0,072000
$A_2 (A_5)$	-0,024000		0,096000	0,104000	0,072000	0,024000
$A_2 (A_6)$	-0,024000		0,096000	0,102000	0,084000	0,048000
$A_3 (A_1)$	0,024000	0,096000		0,100800	0,088000	0,072000
$A_3 (A_2)$	0,024000	0,096000		0,108000	0,072000	0,048000

A_3	0,024000	0,096000		0,108000	0,072000	0,048000
$A_3 (A_4)$	0,060000	0,096000		0,108000	0,084000	0,072000
$A_3 (A_5)$	-0,024000	0,096000		0,104000	0,072000	0,024000
$A_3 (A_6)$	-0,024000	0,096000		0,102000	0,084000	0,048000
$A_4 (A_1)$	0,000000	0,090000	0,090000		0,080000	0,060000
$A_4 (A_2)$	-0,072000	0,072000	0,072000		0,024000	-0,024000
$A_4 (A_3)$	-0,072000	0,072000	0,072000		0,024000	-0,024000
A_4	0,000000	0,072000	0,072000		0,048000	0,024000
$A_4 (A_5)$	-0,096000	0,084000	0,084000		0,048000	-0,024000
$A_4 (A_6)$	-0,072000	0,088000	0,088000		0,072000	0,024000
$A_5 (A_1)$	0,048000	0,102000	0,102000	0,105600		0,084000
$A_5 (A_2)$	0,072000	0,108000	0,108000	0,114000		0,084000
$A_5 (A_3)$	0,072000	0,108000	0,108000	0,114000		0,084000
$A_5 (A_4)$	0,080000	0,104000	0,104000	0,112000		0,088000
A_5	0,048000	0,108000	0,108000	0,112000		0,072000
$A_5 (A_6)$	0,024000	0,104000	0,104000	0,108000		0,072000
$A_6 (A_1)$	0,072000	0,108000	0,108000	0,110400	0,104000	
$A_6 (A_2)$	0,088000	0,112000	0,112000	0,116000	0,104000	
$A_6 (A_3)$	0,088000	0,112000	0,112000	0,116000	0,104000	
$A_6 (A_4)$	0,090000	0,108000	0,108000	0,114000	0,102000	
$A_6 (A_5)$	0,084000	0,114000	0,114000	0,116000	0,108000	
A_6	0,072000	0,112000	0,112000	0,114000	0,108000	

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.16. Macierz pośrednia porównania dla kryterium C_{10} (komfort)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1		0,076000	0,064000	0,076000	0,048000	0,064000
$A_1 (A_2)$		0,064000	0,064000	0,076000	0,060000	0,064000
$A_1 (A_3)$		0,076000	0,064000	0,076000	0,048000	0,064000
$A_1 (A_4)$		0,076000	0,064000	0,076000	0,060000	0,064000
$A_1 (A_5)$		0,073600	0,064000	0,073600	0,048000	0,064000
$A_1 (A_6)$		0,076000	0,064000	0,076000	0,048000	0,064000
$A_2 (A_1)$	0,016000		0,016000	0,064000	-0,048000	0,016000
A_2	0,016000		0,016000	0,064000	0,000000	0,016000
$A_2 (A_3)$	0,016000		0,016000	0,064000	-0,048000	0,016000
$A_2 (A_4)$	0,016000		0,016000	0,064000	0,000000	0,016000
$A_2 (A_5)$	0,040000		0,040000	0,064000	0,000000	0,040000
$A_2 (A_6)$	0,016000		0,016000	0,064000	-0,048000	0,016000

$A_3 (A_1)$	0,064000	0,076000		0,076000	0,048000	0,064000
$A_3 (A_2)$	0,064000	0,076000		0,076000	0,060000	0,064000
A_3	0,064000	0,076000		0,076000	0,048000	0,064000
$A_3 (A_4)$	0,064000	0,076000		0,076000	0,060000	0,064000
$A_3 (A_5)$	0,064000	0,073600		0,073600	0,048000	0,064000
$A_3 (A_6)$	0,064000	0,076000		0,076000	0,048000	0,064000
$A_4 (A_1)$	0,016000	0,064000	0,016000		-0,048000	0,016000
$A_4 (A_2)$	0,016000	0,064000	0,016000		0,000000	0,016000
$A_4 (A_3)$	0,016000	0,064000	0,016000		-0,048000	0,016000
A_4	0,016000	0,064000	0,016000		0,000000	0,016000
$A_4 (A_5)$	0,040000	0,064000	0,040000		0,000000	0,040000
$A_4 (A_6)$	0,016000	0,064000	0,016000		-0,048000	0,016000
$A_5 (A_1)$	0,072000	0,078000	0,072000	0,078000		0,072000
$A_5 (A_2)$	0,067200	0,076800	0,067200	0,076800		0,067200
$A_5 (A_3)$	0,072000	0,078000	0,072000	0,078000		0,072000
$A_5 (A_4)$	0,067200	0,076800	0,067200	0,076800		0,067200
A_5	0,072000	0,076800	0,072000	0,076800		0,072000
$A_5 (A_6)$	0,072000	0,078000	0,072000	0,078000		0,072000
$A_6 (A_1)$	0,064000	0,076000	0,064000	0,076000	0,048000	
$A_6 (A_2)$	0,064000	0,076000	0,064000	0,076000	0,060000	
$A_6 (A_3)$	0,064000	0,076000	0,064000	0,076000	0,048000	
$A_6 (A_4)$	0,064000	0,076000	0,064000	0,076000	0,060000	
$A_6 (A_5)$	0,064000	0,073600	0,064000	0,073600	0,048000	
A_6	0,064000	0,076000	0,064000	0,076000	0,048000	

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.17. Macierz kowariancji dla wariantu decyzyjnego A_2

	C_1	C_2	C_3
C_1	0,000242967	0,000098987	0,000037231
C_2	0,000098987	0,000082438	0,000025832
C_3	0,000037231	0,000025832	0,000013511

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.18. Macierz kowariancji dla wariantu decyzyjnego A_3

	C_1	C_2	C_3
C_1	0,000665325	0,000184810	0,000177466
C_2	0,000184810	0,000084850	0,000122818
C_3	0,000177466	0,000122818	0,000274637

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.19. Macierz kowariancji dla wariantu decyzyjnego A_4

	C_1	C_2	C_3
C_1	0,000011888	0,000004714	0,000000389
C_2	0,000004714	0,000014110	0,000006058
C_3	0,000000389	0,000006058	0,000012135

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.20. Macierz kowariancji dla wariantu decyzyjnego A_5

	C_1	C_2	C_3
C_1	0,000074937	0,000113918	0,000156736
C_2	0,000113918	0,000293458	0,000277744
C_3	0,000156736	0,000277744	0,000817920

Źródło: opracowanie własne.

Załącznik 4.21. Macierz kowariancji dla wariantu decyzyjnego A_6

	C_1	C_2	C_3
C_1	0,000665325	0,000479707	0,000177466
C_2	0,000479707	0,000704937	0,000253487
C_3	0,000177466	0,000253487	0,000274637

Źródło: opracowanie własne.