

283 137

~~Er II 30~~ ~~W.C.~~

8<sup>a</sup> 233

# Statik

für

## Hoch- und Tiefbautechniker.

Ein Lehrbuch

für den

### Unterricht an bautechnischen Lehranstalten

sowie zum

### Selbstunterricht und Nachschlagen

mit 206 Übungsaufgaben und 483 Figuren

nebst zwei Anhängen.

Bearbeitet von

**Professor J. Vonderlinn,**

Direktor der Kgl. Baugewerkschule Münster i. W.



Vierte Auflage.

Bremerhaven 1911.

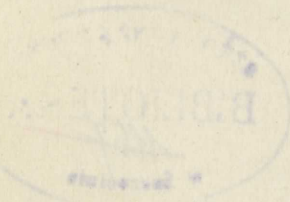
Verlag von L. v. Vangerow.



624.04:539.4



7402



Professor J. Vonderlin

Verlag

Verlag von J. Vonderlin

# Vorwort.

---

Zum vierten Male erscheint meine Statik; diesmal nur wenig verändert gegenüber der dritten Auflage. Ich mußte mir Beschränkung auferlegen und durfte den Stoff nicht noch mehr erweitern. Eine gründliche Umarbeitung hat aber diese Auflage doch erfahren. Manche Bezeichnungen wurden geändert und die amtlichen Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen sowie die über die Beanspruchung der Baustoffe dem Buche als Anhang I beigelegt. Eine Anzahl Tabellen sind im Anhang II zusammengestellt. Aus dem Gebiete des Tiefbaues und des Eisenbetons hätte ich gerne den Stoff vermehrt und noch eine Anzahl Übungsbeispiele aufgenommen; ich mußte mich aber bescheiden. Für das Studium der Eisenbetonkonstruktion muß ich auf die hier einschlägigen Sonderwerke verweisen — es gibt deren hinlänglich viele. Ich darf wohl hoffen, daß mein Buch sich wieder Freunde erwerben möge. Für alle Anregungen zur Verbesserung des Buchinhaltes werde ich dankbar sein. Hoffentlich enthält die neue Auflage nicht so viele Druckfehler wie die dritte. Ich habe mich bemüht, die Korrektur so gründlich wie möglich durchzusehen und die trotzdem stehen gebliebenen Fehler in einem Druckfehlerverzeichnis zu bemerken. Vollständig wird ein solches Verzeichnis allerdings niemals sein, das ist ein Ding der Unmöglichkeit, selbst bei wiederholter peinlichster Durchsicht alle stehen gebliebenen Druckfehler zu bemerken.

Der geehrten Verlagshandlung spreche ich für die sorgfältige Ausstattung und für die Bereitwilligkeit, mit welcher alle meine Wünsche bezüglich der Herstellung des Buches erfüllt worden sind, den ergebensten Dank aus.

Münster i. W., 1. Oktober 1911.

**Prof. J. Vonderlinn.**

# Inhaltsverzeichnis.

## I. Abschnitt.

### Elemente der Statik.

#### A. Einleitung.

	Seite
1. Von den Kräften im allgemeinen . . . . .	1
2. Maß einer Kraft . . . . .	1
3. Bildliche Darstellung und Bezeichnung einer Kraft . . . . .	1
4. Wirkung und Gegenwirkung . . . . .	2
5. Gleichgewicht . . . . .	2
6. Begriff der Statik . . . . .	2
7. Mittelkraft von gegebenen Kräften . . . . .	2
8. Wirkungsweise von Kräften auf einen Körper . . . . .	3

#### B. Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte.

1. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und der nämlichen Richtungslinie . . . . .	3
2. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und verschiedenen Richtungslinien	
a) Zwei Kräfte, Kräfteparallelogramm, Kräftedreieck . . . . .	4
b) Gleichgewicht dreier Kräfte . . . . .	4
c) Übungsaufgaben . . . . .	5
d) Beliebig viele Kräfte, Kräfteviereck . . . . .	8
e) Übungsaufgaben . . . . .	10
3. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und gemeinsamer Richtungslinie . . . . .	11
4. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien. Kräfte- und Seilviereck	
a) Zwei Kräfte . . . . .	11
b) Beliebig viele Kräfte . . . . .	12
c) Parallele Kräfte (c fehlt im Reindruck)	
$\alpha$ ) Beliebig viele Kräfte . . . . .	13
$\beta$ ) Zwei Kräfte mit dem gleichen Richtungspfeil . . . . .	15
$\gamma$ ) Zwei Kräfte mit entgegengesetztem Richtungspfeil . . . . .	16
$\delta$ ) Einige Sätze über das Kräftepaar . . . . .	16
5. Statisches Moment einer Kraft	
a) Drehungsrichtung, Drehungspunkt, Hebelarm . . . . .	19
b) Rechnerische Bestimmung der Mittelkraft eines beliebigen ebenen Kräftesystems . . . . .	19
c) Übungsaufgabe . . . . .	20
d) Rechnerische Bestimmung der Mittelkraft paralleler Kräfte . . . . .	22
6. Zerlegen einer Kraft in parallele Seitenkräfte	
a) Durch Zeichnung . . . . .	23
b) Durch Rechnung . . . . .	23



	Seite
7. Bestimmung der Auflagerdrücke eines auf zwei Stützen aufliegenden belasteten Balkens	
a) Durch Zeichnung . . . . .	24
b) Durch Rechnung . . . . .	25
c) Übungsaufgaben . . . . .	25
8. Graphische Ermittlung des statischen Moments einer Kraft bzw. eines ebenen Kräftesystems	
a) Die Kräfte sind parallel . . . . .	28
b) Die Kräfte sind nicht parallel . . . . .	29
c) Übungsaufgaben . . . . .	30
d) Das Kräftesystem ist im Gleichgewicht . . . . .	32
e) Übungsaufgabe . . . . .	32
9. Der Mittelpunkt paralleler Kräfte	
a) Bestimmung des Mittelpunkts paralleler Kräfte durch Zeichnung . . . . .	33
b) Bestimmung des Schwerpunkts paralleler Kräfte durch Rechnung . . . . .	34
c) Übungsaufgabe . . . . .	35

### C. Der Schwerpunkt.

1. Vom Schwerpunkt im allgemeinen . . . . .	35
2. Der Schwerpunkt von Linien	
a) Schwerpunkt einer geraden Linie . . . . .	36
b) Schwerpunkt einer gebrochenen Linie . . . . .	36
c) Schwerpunkt eines mehrfach gebrochenen Linienzugs . . . . .	36
d) Schwerpunkt eines Kreisbogens . . . . .	37
3. Der Schwerpunkt ebener Flächen	
a) Schwerpunkt eines Dreiecks . . . . .	38
b) Schwerpunkt eines Vierecks . . . . .	38
c) Schwerpunkt eines Trapezes . . . . .	38
d) Schwerpunkt eines Kreisabschnitts . . . . .	40
e) Schwerpunkt eines Kreisabschnitts . . . . .	41
f) Schwerpunkt eines Ringstücks . . . . .	42
g) Schwerpunkt einer unregelmäßigen Figur . . . . .	42
h) Übungsaufgaben . . . . .	43

### D. Bestimmung der Stabkräfte in Fachwerkträgern.

1. Der Fachwerkträger im allgemeinen, Anzahl der Stäbe eines Fachwerks . . . . .	47
2. Belastung eines Fachwerkträgers . . . . .	48
3. Belastung der Dächer	
a) Eigengewicht . . . . .	48
b) Der Schneedruck . . . . .	48
c) Der Winddruck . . . . .	49
4. Belastung eines Dachbinders . . . . .	49
5. Bestimmung der Stabkräfte eines Dachbinders	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	51
b) Graphische Ermittlung der Stabkräfte, Kräftepläne	
$\alpha$ ) Stabkräfte, hervorgerufen durch Eigengewicht und Schneelast . . . . .	51
$\beta$ ) Stabkräfte, hervorgerufen durch den Winddruck . . . . .	53
c) Übungsaufgabe . . . . .	56
d) Ermittlung der Stabkräfte durch Rechnung . . . . .	59
6. Übungsaufgaben . . . . .	61



**E. Stabilität der Körper.**

1. Begriff der Stabilität, Stabilitätsmoment . . . . .	67
2. Stabilitätsgesetz, Stabilitätsgleichung . . . . .	68
3. Übungsaufgaben . . . . .	68

**F. Die Reibung.**

1. Die Reibung im allgemeinen . . . . .	70
2. Reibungsarten . . . . .	70
3. Reibungsgesetze . . . . .	70
4. Reibungskoeffizient . . . . .	71
5. Übungsaufgaben . . . . .	72

**II. Abschnitt.**

**Elemente der Festigkeitslehre.**

**A. Einleitung.**

1. Elastizität, Proportionalitäts- bzw. Elastizitätsgrenze . . . . .	74
2. Festigkeitsarten . . . . .	75

**B. Normalfestigkeit.**

1. Formänderung eines Stabs . . . . .	76
2. Tragfähigkeit eines Stabs . . . . .	76

**C. Schubfestigkeit.**

77

**D. Übungsaufgaben.**

78

**E. Biegnngsfestigkeit.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	92
2. Biegunngsspannungen, Normal- und Schubspannungen . . . . .	92
3. Neutrale Faserschicht, neutrale Achse . . . . .	93
4. Spannungsgesetz, Lage der Neutralachse . . . . .	93
5. Widerstandsmoment, Biegunngsmoment . . . . .	94
6. Trägheitsmoment, Querschnittsmodul oder Widerstandsmoment eines Querschnitts . . . . .	94
7. Biegunngsgleichung . . . . .	95
8. Gefährlicher Querschnitt, größter Biegunngs- bzw. Widerstandsmoment . . . . .	95
9. Bestimmung der Trägheits- und Widerstandsmomente von ebenen Flächen	
a) Trägheitsmoment eines Rechtecks . . . . .	96
b) Trägheitsmoment des Rechtecks bezogen auf eine beliebige Schwerpunktsachse . . . . .	96
c) Trägheitsmoment, bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsachse parallele Achse . . . . .	97
d) Trägheitsmoment eines beliebig geformten Querschnitts . . . . .	98
e) Übungsaufgaben . . . . .	99
f) Widerstandsmoment eines Rechtecks . . . . .	101
10. Trägheitsmoment einer Kraft bzw. eines Systems paralleler Kräfte	
a) Begriff des Trägheitsmoments einer Kraft bzw. eines Kräftesystems . . . . .	102
b) Graphische Ermittlung des Trägheitsmoments einer Kraft bzw. eines Kräftesystems . . . . .	102
11. Graphische Ermittlung des Trägheitsmoments ebener Flächen	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	105
b) Übungsaufgaben . . . . .	105

**F. Die zehn einfachen Belastungsfälle.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	106
2. Erster Belastungsfall . . . . .	106
3. Zweiter Belastungsfall . . . . .	107
4. Übungsaufgaben . . . . .	107
5. Dritter Belastungsfall . . . . .	110
6. Vierter Belastungsfall . . . . .	110
7. Fünfter Belastungsfall . . . . .	111
8. Sechster Belastungsfall . . . . .	111
9. Übungsaufgaben . . . . .	112
10. Siebenter Belastungsfall . . . . .	114
11. Achter Belastungsfall . . . . .	115
12. Neunter Belastungsfall . . . . .	115
13. Zehnter Belastungsfall . . . . .	116
14. Übungsaufgaben . . . . .	116

**G. Krümmungshalbmesser der elastischen Linie.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	119
2. Größe der Durchbiegung eines Trägers . . . . .	120

**H. Zerknickungsfestigkeit.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	121
2. Übungsaufgaben . . . . .	122

**J. Berechnung der Säulenfüße.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	125
2. Übungsaufgaben . . . . .	126

**K. Zusammengesetzte Festigkeit.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	127
2. Übungsaufgaben . . . . .	128

**L. Zusammengesetzte Biegefestigkeit.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	133
2. Übungsaufgaben . . . . .	133

**M. Der durchgehende Träger.**

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	140
2. Spezielle Fälle	
a) Erster Fall. Zwei Felder und drei Stützen	
$\alpha$ ) Die Felder sind gleichlang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzelast $P$ . . . . .	141
$\beta$ ) Die Felder sind gleichlang; auf jedes Feld wirkt eine gleichmäßig verteilte Last $P$ . . . . .	141
$\gamma$ ) Die Felder sind ungleichlang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast $P_1$ bzw. $P_2$ . . . . .	141
$\delta$ ) Die Felder sind ungleichlang; auf jedes Feld wirkt eine gleichmäßig verteilte Last $P_1$ bzw. $P_2$ . . . . .	142



	Seite
b) Zweiter Fall. Drei Felder und vier Stützen	
$\alpha$ ) Die Felder sind gleichlang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast $P$ . . . . .	142
$\beta$ ) Die Felder sind gleichlang; auf jedes Feld wirkt eine gleichmäßig verteilte Last $P$ . . . . .	142
$\gamma$ ) Die Felder sind ungleichlang, aber die Endfelder gleichgroß; in der Mitte der Endfelder wirkt eine Einzellast $P_1$ , in der Mitte des Mittelfeldes eine Einzellast $P_2$ . . . . .	143
$\delta$ ) Die Felder sind ungleichlang, aber die Endfelder gleichgroß; auf die Endfelder wirkt eine gleichmäßig verteilte Last $P_1$ , auf das Mittelfeld eine solche Last $P_2$ . . . . .	143
3. Übungsaufgaben . . . . .	145

### N. Der mehrfach belastete Träger unter der Einwirkung ständiger Belastung.

1. Der mehrfach belastete Freitragler . . . . .	155
2. Der auf zwei Stützen frei aufliegende Träger	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	155
b) Erster Belastungsfall. Der Träger ist nur durch Einzellasten beansprucht . . . . .	156
c) Übungsaufgabe . . . . .	157
d) Zweiter Belastungsfall. Der Träger ist durch einzelne Streckenlasten beansprucht	
$\alpha$ ) Die Belastung $P_1$ ist von $a$ aus auf eine Strecke $l_1$ gleichmäßig verteilt . . . . .	158
$\beta$ ) Die Belastungen $P_1$ und $P_2$ sind auf die Strecken $l_1$ und $l_2$ gleichmäßig verteilt . . . . .	159
$\gamma$ ) Übungsaufgaben . . . . .	159
e) Dritter Belastungsfall. Der Träger ist durch Einzellasten und durch Streckenlasten beansprucht . . . . .	164
f) Übungsaufgaben . . . . .	166

### O. Berechnung der Treppenpodestträger.

1. Arten der Podestträger . . . . .	169
2. Podestträger für freitragende Treppen	
a) Belastung des Podestträgers . . . . .	169
b) Horizontalschub der Podestkappe . . . . .	170
3. Podestträger für unterstützte Treppen	
a) Belastung des Podestträgers . . . . .	171
b) Belastung und Berechnung des Wangenträgers . . . . .	172
4. Übungsaufgaben . . . . .	172

### P. Der mehrfach belastete Träger auf zwei Stützen unter der Einwirkung von beweglicher direkter Belastung.

1. Bestimmung des größten Biegemoments	
a) Erster Fall. Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht . . . . .	174
b) Zweiter Fall. Der Träger ist durch eine Gruppe von beweglichen Einzellasten beansprucht . . . . .	175
c) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte Last beansprucht . . . . .	180
d) Übungsaufgaben . . . . .	181
2. Bestimmung der größten Vertikalkraft	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	181

	Seite
b) Erster Fall. Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht . . .	181
c) Zweiter Fall. Der Träger ist durch eine Gruppe von beweglichen Einzellasten beansprucht . . . . .	183
d) Übungsaufgaben . . . . .	184
e) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte bewegliche Last beansprucht . . . . .	185

### Q. Der mehrfach belastete Träger auf zwei Stützen unter der Einwirkung von beweglicher, indirekter Belastung.

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	186
2. Bestimmung des größten Biegemoments	
a) Erster Fall. Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht . . .	186
b) Zweiter Fall. Der Träger ist durch eine Gruppe von beweglichen Einzellasten beansprucht . . . . .	187
c) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte bewegliche Last beansprucht . . . . .	188
d) Übungsaufgaben . . . . .	190
3. Bestimmung der größten Vertikalkraft	
a) Erster Fall. Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht . . .	190
b) Zweiter Fall. Der Träger ist durch eine Gruppe von beweglichen Einzellasten beansprucht . . . . .	191
c) Übungsaufgaben . . . . .	194
d) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte bewegliche Last beansprucht . . . . .	195
e) Übungsaufgaben . . . . .	197

### R. Der einfache Fachwerkträger, beansprucht durch bewegliche Belastung.

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	198
2. Belastung eines Fachwerkträgers . . . . .	198
3. Ermittlung der Stabkräfte in den Stäben eines einfachen Fachwerks	
a) Stabkräfte, hervorgerufen durch das Eigengewicht . . . . .	198
b) Stabkräfte, hervorgerufen durch die Verkehrsbelastung	
$\alpha$ ) Die Verkehrsbelastung besteht aus einem beweglichen Lastenzuge . . . . .	199
$\beta$ ) Die Verkehrsbelastung ist gleichmäßig verteilt . . . . .	202
4. Übungsaufgaben . . . . .	204

### S. Der exzentrische Druck.

1. Spannungsverteilung in einem durch exzentrischen Druck beanspruchten Querschnitt	
a) Wirkung der exzentrischen Druckkraft . . . . .	214
b) Zentralkern oder Kernfläche eines Querschnitts . . . . .	214
c) Größe der Spannung im Querschnittsrande bei exzentrischer Druckbelastung, Randspannung	
$\alpha$ ) Der Angriffspunkt der äußeren Kraft liegt in dem Kernrande auf einer Hauptachse des Querschnitts . . . . .	215
$\beta$ ) Der Angriffspunkt der äußeren Kraft liegt auf einer Hauptachse in beliebiger Entfernung vom Schwerpunkt des Querschnitts . . . . .	216
d) Konstruktion der Randspannungen in einem Querschnitt bei exzentrischer Druckbelastung . . . . .	217
e) Übungsaufgaben . . . . .	217



	Seite
2. Beziehungen zwischen der Lage der Neutralachse und jener des Angriffspunkts der exzentrischen Druckkraft	
a) Konstruktion der Lage der Neutralachse bei gegebenem Angriffspunkt der Druckkraft . . . . .	219
b) Konstruktion des Kerns eines Querschnitts unter Benutzung der Zentralellipse . . . . .	220
c) Übungsaufgaben . . . . .	221
3. Exzentrische Druckbelastung außerhalb des Zentralkerns unter Ausschluß von Zugspannungen	
a) Lage der Neutralachse und Spannungsverteilung im Querschnitt . . . . .	221
b) Übungsaufgaben . . . . .	224
4. Berechnung einer Säule, welche von horizontalen und vertikalen Kräften beansprucht ist	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	225
b) Übungsaufgabe . . . . .	225
5. Die Einmauerung der Freiträger	
a) Berechnung der Einmauerungstiefe, Verwendung von Unterlagsplatten . . . . .	228
b) Übungsaufgaben . . . . .	230

### III. Abschnitt.

## Stabilität der Mauern und Gewölbe.

### A. Stabilität freistehender Mauern.

1. Stabilitätsbedingungen . . . . .	232
2. Übungsaufgabe . . . . .	233

### B. Stabilität freistehender Fabrikschornsteine.

1. Stabilitätsbedingungen . . . . .	234
2. Übungsaufgaben . . . . .	236

### C. Der Erddruck.

1. Der natürliche Böschungswinkel	
a) Begriff des natürlichen Böschungswinkels . . . . .	240
b) Größe des natürlichen Böschungswinkels für einige Erdarten . . . . .	241
2. Begriff des Erddrucks . . . . .	241
3. Ermittlung der Gleitfläche . . . . .	242
4. Größe und Angriffspunkt des Erddrucks	
a) Größe des Erddrucks . . . . .	244
b) Angriffspunkt und Richtung des Erddrucks . . . . .	245
5. Ermittlung der Gleitfläche in besonderen Fällen	
a) Die Terrainlinie ist unter dem natürlichen Böschungswinkel zur Horizontalen geneigt . . . . .	245
b) Die Terrainlinie ist eine gebrochene Linie . . . . .	246
c) Die Terrainlinie ist eine gebrochene Linie und die obere Begrenzungslinie belastet . . . . .	246
d) Die Terrainlinie ist gerade, die Begrenzung der Wand eine gebrochene Linie . . . . .	247

### D. Stabilitätsuntersuchung einer Stütz- bzw. Futtermauer.

1. Stabilitätsbedingungen . . . . .	249
2. Ausführung der Stabilitätsuntersuchung	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	249
b) Übungsaufgaben . . . . .	251

	Seite
<b>E. Stabilität der Tonnengewölbe.</b>	
1. Form und Belastung eines Gewölbes . . . . .	260
2. Stabilitätsbedingungen	
a) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Drehen, Horizontalschub, Drucklinien. . . . .	261
b) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Zerdrücken, Schlußsteinhöhe und Stärke des Gewölbebogens . . . . .	262
c) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Gleiten . . . . .	265
3. Stabilitätsuntersuchung bei symmetrischer Belastung des Gewölbes	
a) Stabilität des Gewölbebogens . . . . .	266
b) Stabilität des Widerlagers	
$\alpha$ ) Ohne Berücksichtigung des Erddrucks . . . . .	268
$\beta$ ) Mit Berücksichtigung des Erddrucks . . . . .	268
c) Berechnung der im Gewölbe auftretenden Kräfte und der hierdurch verursachten Pressungen . . . . .	269
4. Stabilitätsuntersuchung bei unsymmetrischer Belastung des Gewölbes . . . . .	270
5. Stabilitätsuntersuchung für ein Monier-Gewölbe	
a) Konstruktion des Gewölbebogens . . . . .	274
b) Konstruktion der Drucklinie für Normalbelastung und Berichtigung des Gewölbebogens . . . . .	276
c) Konstruktion der Drucklinie bei einseitiger Belastung des Gewölbes . . . . .	278
d) Pressungen im Gewölbe . . . . .	270
6. Übungsaufgaben . . . . .	282
7. Gewölbe mit Gelenken . . . . .	285

#### IV. Abschnitt.

## Berechnung der Eisenbetonkonstruktionen.

### A. Einleitung.

1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	301
-------------------------------------	-----

### B. Trägerberechnung.

1. Der doppeltarmierte Plattenbalken	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	303
b) Bestimmung der Lage der Neutralachse	
$\alpha$ ) Durch Rechnung . . . . .	303
$\beta$ ) Durch Zeichnung . . . . .	304
c) Bestimmung der Lage der Druckmittelkraft . . . . .	305
2. Balken oder Platte von rechteckigem Querschnitt mit doppelter Eiseneinlage, doppelt-armierter Balken bzw. Platte . . . . .	306
3. Balken oder Platte von rechteckigem Querschnitt mit einfacher Eiseneinlage, einfach-armierter Balken bzw. Platte . . . . .	306
4. Plattenbalken mit Eiseneinlage auf der Zugseite	
a) Einfach armerter Plattenbalken mit Berücksichtigung der Betondruckspannungen im Balkenstege . . . . .	306
b) Einfach armerter Plattenbalken mit Vernachlässigung der Betondruckspannungen im Balkenstege . . . . .	307



	Seite
5. Bestimmung der im Balken auftretenden Schubspannungen	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	307
b) Verteilung der Schubspannungen im Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens . . . . .	307
6. Formeln zur Ermittlung der Abmessungen von Platten bzw. Balken . . . . .	310
a) Formeln für Platten bzw. Balken . . . . .	310
b) Formeln für Plattenbalken . . . . .	310
7. Übungsaufgaben . . . . .	312

### C. Berechnung von Säulen.

1. Säule mit zentrischer Belastung	
a) Untersuchung auf Druck . . . . .	319
b) Untersuchung auf Zerknicken . . . . .	319
c) Übungsaufgaben . . . . .	320
2. Säule mit exzentrischer Belastung	
a) Bestimmung der Lage der Neutralachse. Doppelte Eiseneinlage	
$\alpha$ ) Durch Rechnung . . . . .	324
$\beta$ ) Durch Zeichnung . . . . .	325
$\gamma$ ) Übungsaufgaben . . . . .	326
b) Bestimmung der Lage der Neutralachse. Einfache Eisenanlage	
$\alpha$ ) Durch Rechnung . . . . .	327
$\beta$ ) Durch Zeichnung . . . . .	327
$\gamma$ ) Übungsaufgaben . . . . .	327
3. Säule mit eisenumschnürtem Beton	
a) Allgemeine Bemerkungen . . . . .	327
b) Formeln zur Berechnung von eisenumschnürten Betonsäulen . . . . .	328
c) Amtliche Vorschriften zur Berechnung von eisenumschnürten Betonsäulen . . . . .	330
d) Übungsaufgaben . . . . .	330

## Anhang I.

Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und die Beanspruchungen der Baustoffe usw.	
Runderlaß betreffend die Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen usw. . . . .	334
Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen	
A. Eigengewichte von Zwischendecken und Dächern	
I. Zwischendecken	
a) Holzbalkendecken . . . . .	336
b) Gewölbte Decken . . . . .	338
c) Ebene Massivdecken . . . . .	340
II. Dächer . . . . .	344
B. Eigengewichte der gebräuchlichsten Baustoffe und Baukörper	
Füllstoffe . . . . .	350
Werkstücke und Quadermauerwerk . . . . .	350
Bruchsteinmauerwerk . . . . .	350
Mauerwerk aus künstlichen Steinen . . . . .	350
Mörtel . . . . .	351
Beton . . . . .	351
Estriche und Fußbodenbeläge . . . . .	351

	Seite
Bauhölzer . . . . .	351
Metalle . . . . .	351
C. Belastungen	
a) Zwischendecken . . . . .	352
b) Dächer . . . . .	352
D. Zulässige Beanspruchung der Baustoffe	
a) Eisen . . . . .	353
b) Holz . . . . .	354
c) Natürliche Bausteine . . . . .	355
d) Mauerwerk . . . . .	355
E. Druckfestigkeit der gebräuchlichsten natürlichen Bausteine . . . . .	356
Berechnungsgrundlagen für die statische Untersuchung von Hochbauten	
A. Eigengewichte von Zwischendecken und Dächern . . . . .	357
B. Eigengewichte von Baustoffen und Baukörpern . . . . .	358
C. Belastungen . . . . .	359
D. Zulässige Beanspruchung der Baustoffe . . . . .	360

## Anhang II.

Tabellen . . . . .	363—394
--------------------	---------



# Elemente der Statik.

## A. Einleitung.

### 1. Von den Kräften im allgemeinen.

1. Das Vorhandensein einer Kraft erkennt man durch ihre Wirkung auf einen Körper. Wenn eine Kraft auf einen Körper einwirkt, so teilt sie ihm eine bestimmte Bewegung mit, oder sie übt einen Druck aus. In der Natur gibt es eine ganze Reihe von Kräften, z. B. die Schwerkraft, die Elastizitätskraft, die Kraft des Wasserdampfs, die Kraft des elektrischen Stroms, die Muskelkraft der Menschen und der Tiere usw.

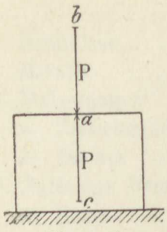
### 2. Maß einer Kraft.

2. Um die Größe einer Kraft angeben zu können, muß man wissen, welche Bewegungsgröße sie einem Körper in einer bestimmten Zeit zu erteilen, bzw. welchen Druck sie auf ihn auszuüben imstande ist. Man vergleicht zweckmäßig die Größe einer Kraft mit der Größe der Gewichtseinheit. Man spricht also von einer Kraft von 1 Kilogramm = 1 kg, von einer Kraft von 200 kg u. dgl. Beim Auftreten größerer Kräfte wählt man als Einheit die Tonne = 1000 kg und spricht von einer Kraft von 20 Tonnen = 20 t usw.

Damit die Wirkungsweise einer Kraft bestimmt werden kann, muß man von ihr kennen: 1. die Größe, 2. den Angriffspunkt, d. h. diejenige Stelle des Körpers, auf welche die Kraft unmittelbar einwirkt, 3. die Richtung, in welcher die Kraft tätig ist.

### 3. Bildliche Darstellung und Bezeichnung einer Kraft.

3. Es ist üblich, eine Kraft der Größe und Richtung nach durch die Größe und Richtung einer geraden Linie darzustellen; dabei muß zwischen dem Längen- und Kraftmaßstab ein bekannter Zusammenhang bestehen. Soll beispielsweise eine Länge von 1 mm eine Kraft von 100 kg darstellen, so wird eine Kraft von 1000 kg gegeben sein durch eine Länge von 10 mm. Die Richtung, in welcher die Kraft auf einen Körper wirkt, wird durch den Richtungspfeil angedeutet.



Figur 1.

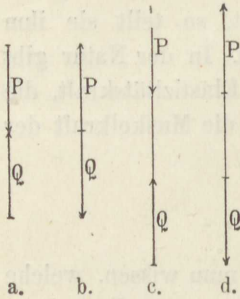
Der Angriffspunkt wird besonders benannt. Die Kraft selbst bezeichnet man in der Regel durch einen Buchstaben des großen lateinischen Alphabets, z. B.  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  usw.

In der Figur 1 ist demnach eine Kraft  $P$  dargestellt, deren Angriffspunkt in  $a$  liegt, welche im Sinne des Pfeils in der Linie  $ab$  wirkt und eine Größe gleich der Linie  $\overline{ab}$  bzw.  $\overline{ac}$  besitzt. Die gerade Linie, in welcher eine Kraft wirkt, heißt ihre Richtungslinie.

#### 4. Wirkung und Gegenwirkung.

4. Wirkt eine Kraft  $P$  in einem Punkte  $a$  in der Linie  $ab$ , siehe Figur 1, auf einen Körper, so erfährt sie von ihm eine Gegenwirkung im Sinne  $\overline{ca}$  von derselben Größe wie  $\overline{ab}$ . Man nennt diese Wirkung den *Gegendruck* oder den *Widerstand* des Körpers gegenüber der Kraft  $P$ .

#### 5. Gleichgewicht.



Figur 2.

5. Wirken zwei Kräfte von der gleichen Größe aber in entgegengesetztem Sinne in derselben geraden Linie, so nennt man diesen Zustand *Gleichgewicht*. Dabei können die beiden Kräfte die Lagen haben, wie sie durch Figur 2, a—d dargestellt sind; in allen den vier Fällen sagt man, die Kräfte  $P$  und  $Q$  sind im Gleichgewicht.

**Anmerkung 1.** Der Angriffspunkt einer Kraft ist in ihrer Richtungslinie beliebig verlegbar, d. h. an keine bestimmte Stelle in ihr gebunden.

#### 6. Begriff der Statik.

6. Die Statik hat die Aufgabe, die Bedingungen festzustellen, unter welchen Kräfte, die in bestimmter Weise auf einen Körper einwirken, unter sich im Gleichgewicht sind: „Die Statik ist daher die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte.“

#### 7. Mittelkraft von gegebenen Kräften.

7. Wirken auf einen Körper beliebig viele Kräfte ein, so kann man sich fragen, ob es nicht möglich ist, eine Kraft zu ermitteln, welche für sich allein die gleiche Wirkung ausübt, wie die gegebenen Kräfte zusammen; gelingt dies, so nennt man diese Kraft die *Mittelkraft* der gegebenen Kräfte; letztere selbst heißen *Seitenkräfte*.

Das Aufsuchen der Mittelkraft von gegebenen Kräften heißt das *Zusammensetzen* der Kräfte. Sehr häufig begegnet man in der Technik auch der umgekehrten Aufgabe: Die Wirkungsweise einer Kraft, die in einer bekannten Richtung auf einen Körper einwirkt, in bestimmten anderen gegebenen Richtungen zu ermitteln.



So wird z. B. durch die Strebe eines Hänge- oder Sprengwerks ein gewisser Druck auf das die Strebe stützende Auflager übertragen, welcher sich sowohl in horizontalem wie in vertikalem Sinne äußern kann. Das Aufsuchen dieser Seitenkräfte aus gegebenen Kräften heißt das Zerlegen der Kräfte.

### 8. Wirkungsweise von Kräften auf einen Körper.

8. Im nachfolgenden sollen nur Kräfte besprochen werden, die unter sich in einer Ebene liegen; unter dieser Voraussetzung können die Kräfte in folgender Weise auf einen Körper einwirken.

Die Kräfte besitzen entweder alle einen gemeinsamen Angriffspunkt oder verschiedene Angriffspunkte und wirken:

- a) in einer geraden Linie,
- b) in verschiedenen geraden Linien.

## B. Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte.

### 1. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und der nämlichen Richtungslinie.

9. Es sind zwei Fälle denkbar; entweder haben die Kräfte den gleichen Richtungspfeil, siehe Figur 3a, oder aber es sind die Richtungspfeile entgegengesetzt, siehe Figur 3b.

Im ersten Falle besitzen die Kräfte eine Mittelkraft gleich der Summe der gegebenen Kräfte, mit der gleichen Richtungslinie und dem gleichen Richtungspfeil wie die gegebenen Kräfte. Heißt diese Mittelkraft  $R$ , so ist:

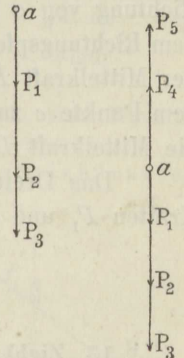
$$1. \dots R = P_1 + P_2 + P_3$$

Im zweiten Falle ist gleichfalls eine Mittelkraft vorhanden, die man erhält, wenn man die Kräfte, die im gleichen Sinne wirken, addiert und die sich ergebenden Summen subtrahiert; man erhält dann für  $R$  die Beziehung:

$$2. \dots R = P_1 + P_2 + P_3 - (P_4 + P_5)$$

Einen Ausdruck von der Form der rechten Seite der Gleichung 2 nennt man eine algebraische Summe.

„Die Mittelkraft von Kräften, welche den Angriffspunkt und die Richtungslinie gemeinsam haben, aber entgegengesetzte Richtungspfeile besitzen, ist gleich der algebraischen Summe der einzelnen Kräfte; ihr Richtungspfeil bestimmt sich nach dem Wert der Summe; ist dieser Wert gleich Null, so sind die Kräfte im Gleichgewicht.“



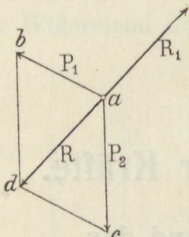
Figur 3a und 3b.

## 2. Kräfte mit einem gemeinsamen Angriffspunkt und verschiedenen Richtungslinien.

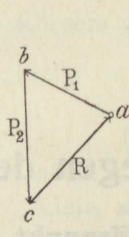
### a) Zwei Kräfte, Kräfteparallelogramm, Kräftedreieck.

10. Sind durch  $\overline{ab}$  und  $\overline{ac}$  die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  dargestellt, siehe Figur 4, so erhält man ihre Mittelkraft  $R$  durch die Diagonale  $\overline{ad}$  des mit den beiden Linien  $\overline{ab}$  und  $\overline{ac}$  als Seiten gebildeten Parallelogramms. Die Richtung der Mittelkraft  $R$  ist durch die Richtung von  $a$  nach  $d$  gegeben, der Richtungspfeil demnach wie in der Figur 4 einzuzeichnen.

**Anmerkung 2.** Das in Figur 4 gezeichnete Parallelogramm führt die Bezeichnung: „Parallelogramm der Kräfte“ oder auch: „Kräfteparallelogramm“.



Figur 4.



Figur 5.

11. In Rücksicht auf Anmerkung 2 kann man sagen: „Die Mittelkraft zweier Kräfte mit verschiedenen Richtungslinien und gemeinsamem Angriffspunkt ist gleich der Diagonale des mit den Kräften als Seiten gebildeten Kräfteparallelogramms.“ Die Spitze des Richtungspfeils ist der dem Angriffspunkt gegenüberliegenden Ecke des Kräfteparallelogramms zugekehrt; eine solche Diagonale ist stets vorhanden, die Kräfte sind also niemals im Gleichgewicht.

12. Macht man, siehe Figur 5, die Linie  $\overline{ab}$  gleich und parallel der Kraft  $P_1$ , ebenso die Linie  $\overline{bc}$  gleich und parallel der Kraft  $P_2$ , und zwar so, daß die Richtung von  $a$  nach  $b$  dem Richtungspfeil von  $P_1$ , die Richtung von  $b$  nach  $c$  dem Richtungspfeil von  $P_2$  gleich ist, so gibt die Linie  $\overline{ac}$  die Größe und Richtung der Mittelkraft  $R$  der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  an. Die Spitze des Richtungspfeils ist dem Punkte  $c$  zugekehrt. Eine Parallele durch  $a$  zu  $ac$  liefert daher in Figur 4 die Mittelkraft  $R$  der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  der Lage nach.

Das Dreieck  $abc$ , dessen Seiten gleich und gleich gerichtet sind den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  und  $R$ , heißt das Kräftedreieck dieser Kräfte.

### b) Gleichgewicht dreier Kräfte.

13. Zieht man durch  $a$ , siehe Figur 4, eine Kraft  $R_1$ , gleich und entgegengesetzt gerichtet der Kraft  $R$ , so sind die Kräfte  $R$  und  $R_1$  im Gleichgewicht, demnach auch die Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $R_1$ . Das zu diesen Kräften gehörige Kräftedreieck ist wieder das Dreieck  $abc$ , siehe Figur 5, es ist aber jetzt die Spitze des Richtungspfeils von  $\overline{ca}$  dem Punkte  $a$  zugekehrt.

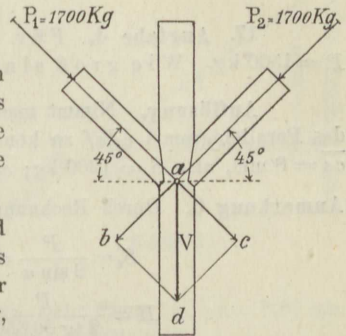
„Sollen drei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt und verschiedenen Richtungslinien im Gleichgewicht sein,



so muß sich mit ihnen ein Dreieck  $abc$  konstruieren lassen, dessen Seiten gleich und gleichgerichtet den gegebenen Kräften sind.“

**e) Übungsaufgaben.**

14. **Aufgabe 1.** Von den unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigten Streben eines Sprengwerks wird auf eine vertikale Säule je ein Druck von 1700 kg übertragen. Wie groß ist der Vertikaldruck auf die Säule?



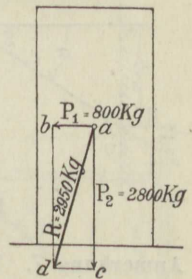
Figur 6.

**Auflösung.** Die Richtungslinien der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  schneiden sich, siehe Figur 6, im Punkte  $a$ . Von  $a$  aus trägt man auf den gegebenen Richtungslinien im Sinne der Pfeile die Kräfte nach  $\overline{ab}$  und  $\overline{ac}$  an, 1 mm gleich 150 kg, und konstruiert das Parallelogramm  $abcd$ , so gibt die Diagonale  $\overline{ad}$  den gesuchten Vertikaldruck  $V$  an.

Bei dem gewählten Maßstabe ist  $\overline{ad} = 16$  mm, daher  $V = 16 \cdot 150 = 2400$  kg.

**Anmerkung 3.** Durch Rechnung läßt sich die Größe von  $V$  wie folgt ermitteln. Es ist:  
 $V = 2 P_1 \cos 45^\circ = 2 \cdot 1700 \cdot 0,70711 = 2404$  kg.

15. **Aufgabe 2.** Im Punkte  $a$ , siehe Figur 7, wirkt auf eine Mauer eine horizontale Kraft  $P_1 = 800$  kg und eine vertikale Kraft  $P_2 = 2800$  kg; es ist die Größe und Lage der Mittelkraft dieser beiden Kräfte zu ermitteln.



Figur 7.

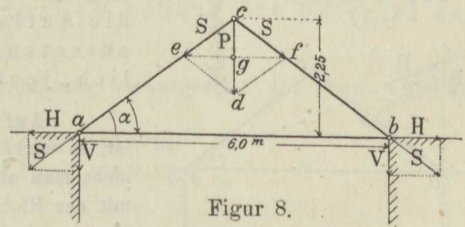
**Auflösung.** Macht man, vorausgesetzt, daß 1 mm = 150 kg darstellt, die Horizontale  $\overline{ab} = 5,3$  mm, die Vertikale  $\overline{ac} = 18,6$  mm und konstruiert das Parallelogramm  $abcd$ , so gibt die Diagonale  $\overline{ad}$  die gesuchte Mittelkraft  $R$ ; es ist  $\overline{ad} = 19,6$  mm =  $19,6 \cdot 150 = 2940$  kg.

**Anmerkung 4.** Durch Rechnung erhält man:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{800^2 + 2800^2} = 2912 \text{ kg.}$$

16. **Aufgabe 3.** Im Firstpunkte  $c$  eines Dachbinders, siehe Figur 8, wirkt ein vertikaler Druck  $P = \overline{cd}$ . Wie groß ist der hierdurch in den Sparren hervorgerufene Druck  $S$  und wie überträgt sich letzterer auf die Auflager  $a$  und  $b$ ?

**Auflösung.** Man konstruiert mit  $\overline{cd}$  als Diagonale das Parallelogramm  $cdef$ , so erhält man in  $\overline{ce}$  die Größe des Sparrendrucks  $S$ . Verlegt man den Angriffspunkt  $e$  von  $S$  nach  $a$ , so läßt sich  $S$  in eine horizontale Seitenkraft  $H$  und in eine vertikale Seitenkraft  $V$  zerlegen.  $H$  bezeichnet den Horizontalschub,  $V$  den Vertikaldruck des Sparrens auf das Auflager.



Figur 8.

**Anmerkung 5.** Bezeichnet  $\alpha$  den Neigungswinkel des Dachs gegen die Horizontale, so findet man den Sparrendruck durch Rechnung wie folgt. Es ist:

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Aus der Figur 8 erkennt man ferner, daß die Strecke  $\overline{eg} = H$  und  $\overline{cg} = V$  sein muß; man hat also die weiteren Beziehungen:

$$H = S \cos \alpha = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

17. **Aufgabe 4.** Für das in Aufgabe 3 behandelte Beispiel sei  $P = 1500$  kg. Wie groß sind  $S$ ,  $H$  und  $V$ ?

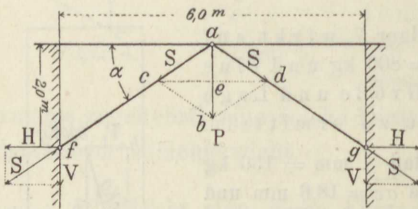
**Auflösung.** Nimmt man  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$ , so hat man  $\overline{cd} = 10 \text{ mm}$  anzutragen und das Parallelogramm  $cdef$  zu konstruieren. Man entnimmt dann der Figur 8 durch Messung  $\overline{ce} = 8 \text{ mm}$ , also  $S = 1200 \text{ kg}$ ;  $\overline{eg} = 6,66 \text{ mm}$ , also  $H = 1000 \text{ kg}$  und  $V = 750 \text{ kg}$ .

**Anmerkung 6.** Durch Rechnung findet man unter der Voraussetzung, daß  $\alpha = 36^\circ 50'$  ist:

$$S_i = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{1500}{2 \cdot \sin 36^\circ 50'} = \frac{1500}{2 \cdot 0,59949} = 1250 \text{ kg}$$

$$H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} 36^\circ 50'} = \frac{1500}{2 \cdot 0,75} = 1000 \text{ kg}, \quad V = \frac{P}{2} = 750 \text{ kg}.$$

18. **Aufgabe 5.** Im Punkte  $a$  eines einfachen Sprengwerks, s. Figur 9, ist eine vertikale Last  $P = 1500$  kg aufzunehmen. Welche Beanspruchungen erfahren die Streben  $af$  und  $ak$ , sowie die Auflager in den Punkten  $f$  und  $g$ ?



Figur 9.

**Auflösung.** Ist  $\overline{ab} = P$ , so erhält man mittels des Parallelogramms  $abcd$  den Streben-  
druck  $S$ ; dieser zerlegt sich in den Punkten  $f$   
und  $g$  in den Horizontalschub  $H$  und den Vertikal-  
druck  $V$ . Unter der Voraussetzung, daß  $1 \text{ mm} =$   
 $150 \text{ kg}$  sein soll, findet man durch Messung aus  
der Zeichnung:

$$S = 8,66 \text{ mm} = 1300 \text{ kg}$$

$$H = 7,33 \text{ mm} = 1100 \text{ kg}$$

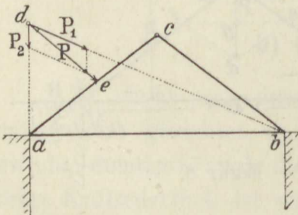
$$V = 5 \text{ mm} = 750 \text{ kg}.$$

**Anmerkung 7.** Durch Rechnung erhält man.

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha}; \quad H = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}; \quad V = \frac{P}{2}.$$

Man rechne das vorstehende Beispiel aus unter der Voraussetzung, daß der Winkel  $\alpha = 33^\circ 40'$  betragen soll.

19. **Aufgabe 6.** Auf den Dachbinder, siehe Figur 10, wirkt im Punkte  $e$  der Winddruck  $P$  wie angegeben. Wie groß sind die Drücke auf die Auflagerpunkte  $a$  und  $b$  unter der Voraussetzung, daß das Auflager in  $a$  beweglich, jenes in  $b$  aber fest sein soll?



Figur 10.

**Auflösung.** Wenn das Auflager in  $a$  beweglich ist, so wirkt der Druck auf dasselbe in vertikaler Richtung; zieht man also durch  $a$  die Vertikale  $ad$  bis zum Schnitt  $d$  mit der Richtungslinie von  $P$ , so ist  $db$  die Richtungslinie für den Auflagerdruck in  $b$ . Mittels des Kräfteparallelogramms mit  $P$  als Diagonale ergeben sich die Auflagerdrücke  $P_1$  und  $P_2$ , siehe Figur 10.

20. **Aufgabe 7.** Auf einen Träger  $ab$ , siehe Figur 11, der im Punkte  $a$  mittels einer Zugstange  $ac$  aufgehängt ist, wirkt im Punkte  $a$



eine vertikale Last  $P$ . Wie äußert sich diese auf die Zugstange und den Träger?

**Auflösung.** Man wählt die Kraft  $P$  als Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten mit  $ac$  und  $ab$  zusammenfallen; man erhält dann für die Zugstange die Beanspruchung  $S$ , für den Balken den Horizontalschub  $H$ .

**Anmerkung 8.** Durch Rechnung findet man, unter  $\alpha$  den Winkel von Träger und Zugband verstanden:

$$S = \frac{P}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad H = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

**Aufgabe 8.** Für das in Aufgabe 7 behandelte Beispiel sei  $P = 1300$  kg; wie groß sind  $H$  und  $S$ ?

**Auflösung.** Nimmt man  $1 \text{ mm} = 150$  kg, so hat man, siehe Figur 11,  $\overline{ad} = 8,66$  mm anzutragen und das Parallelogramm  $acdf$  zu konstruieren. Man erhält dann:

$$S = 14,3 \text{ mm} = 2150 \text{ kg} \quad H = 11,3 \text{ mm} = 1700 \text{ kg}.$$

Durch Rechnung findet man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{64}{84}; \quad \alpha = 37^\circ 20'$$

daher ist:

$$S = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1300}{\sin 37^\circ 20'} = \frac{1300}{0,60645} = 2143 \text{ kg}$$

und

$$H = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{P}{\operatorname{tg} 37^\circ 20'} = \frac{1300}{0,76272} = 1704 \text{ kg}.$$

22. **Aufgabe 9.** Auf einen Träger  $ab$ , siehe Figur 12, der im Punkte  $a$  durch eine Strebe unterstützt ist, wirkt in  $a$  eine Last  $P$ ; wie äußert sich diese auf die Strebe und den Träger?

**Auflösung.** In gleicher Weise wie in Aufgabe 7 ergibt sich im vorliegenden Falle mittels des Kräfteparallelogramms  $acdf$  der Strebendruck  $S$  und der Horizontalschub  $H$ .

**Anmerkung 9.** Durch Rechnung findet man:

$$S = \frac{P}{\sin \alpha'} \quad H = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

23. **Aufgabe 10.** Für das in Aufgabe 9 behandelte Beispiel sei  $P = 1300$  kg. Wie groß sind  $S$  und  $H$ ?

**Auflösung.** Aus der Zeichnung entnimmt man, vorausgesetzt, daß  $1 \text{ mm} = 150$  kg entsprechen soll,

$$S = 14,1 \text{ mm} = 14,1 \cdot 150 = 2115 \text{ kg}$$

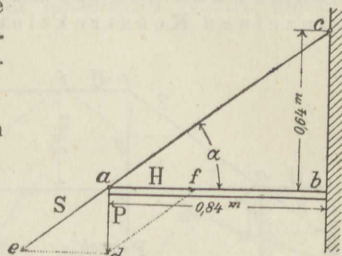
$$H = 11,1 \text{ mm} = 11,1 \cdot 150 = 1665 \text{ kg}.$$

Durch Rechnung erhält man:

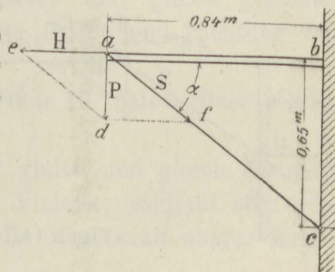
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{65}{84} = 0,77388; \quad \alpha = 37^\circ 54'$$

es ist somit:

$$S = \frac{1300}{\sin 37^\circ 54'} = \frac{1300}{0,61424} = 2116 \text{ kg} \quad H = \frac{1300}{\operatorname{tg} 37^\circ 54'} = \frac{1300}{0,77388} = 1660 \text{ kg}.$$



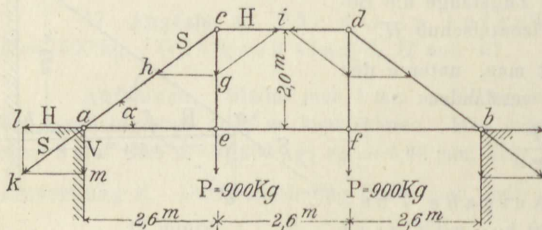
Figur 11.



Figur 12.



24. **Aufgabe 11.** In den Punkten  $e$  und  $f$ , siehe Figur 13, eines doppelten Hängewerks hat jede Hängesäule eine Last von 900 kg aufzunehmen und auf die Auflager  $a$  und  $b$  übertragen. Wie werden die einzelnen Konstruktionsteile beansprucht?



Figur 13.

**Auflösung.** Durch die Hängesäule  $ce$  wird die Last  $P$  nach dem Punkte  $c$  übertragen, woselbst sie sich mittels des Parallelogramms  $chgi$  in die Seitenkräfte  $S$  und  $H$  zerlegt; erstere Kraft wird durch die Strebe  $ac$  nach dem Auflagerpunkte  $a$  übertragen und zerlegt sich daselbst in den Horizontalschub  $H$  und den Vertikaldruck  $V$ . Die in  $c$  wirkende Horizontalkraft  $H$  wird durch den Spannriegel  $cd$  des

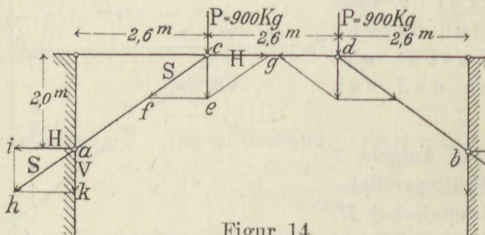
Hängewerks aufgenommen. Bei dem gewählten Kräftemaßstab  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  findet man:

$$H = 8 \text{ mm} = 8 \cdot 150 = 1200 \text{ kg}, \quad S = 10 \text{ mm} = 10 \cdot 150 = 1500 \text{ kg}, \quad V = 900 \text{ kg}.$$

**Anmerkung 10.** Durch Rechnung ergibt sich:

$$S = \frac{P}{\sin \alpha}, \quad H = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad V = P.$$

25. **Aufgabe 12.** In den Punkten  $a$  und  $b$  eines doppelten Sprengwerks, siehe Figur 14, wirkt je eine Last  $P = 900 \text{ kg}$ , welche auf die Auflagerpunkte  $a$  und  $b$  zu übertragen ist; wie werden die einzelnen Konstruktionsteile beansprucht?



Figur 14.

**Auflösung.** Mittels des Parallelogramms  $cefg$ , in welchem die Diagonale  $ce = P$  ist, zerlegt sich  $P$  in die Seitenkräfte  $S$  und  $H$ ;  $S$  wird durch die Strebe  $ac$  nach dem Auflager  $a$  übertragen, und zerlegt sich daselbst wieder in die Horizontalkraft  $H$  und den Vertikaldruck  $V$ ; die in  $c$  wirkende Horizontalkraft  $H$  wird durch den Spannriegel aufgenommen.

Unter Annahme eines Kräftemaßstabs  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  erhält man:

$$S = 1500 \text{ kg}, \quad H = 1200 \text{ kg}, \quad V = P = 900 \text{ kg}.$$

26. **Aufgabe 13.** Man führe die in den Aufgaben 11 und 12 behandelten Beispiele durch Rechnung aus.

**Auflösung.** Auf Grund der gegebenen Ausmaße ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,76923, \quad \alpha = 37^\circ 34'$$

daher:

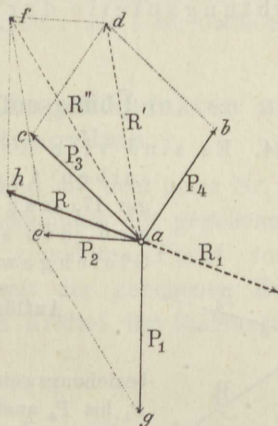
$$S = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{900}{0,69968} = 1272, \quad H = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{900}{0,76923} = 1170 \text{ kg}.$$

### d) Beliebig viele Kräfte, Kräftevieleck.

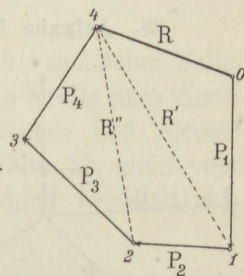
27. Man erhält in diesem Falle die Mittelkraft, wenn man zunächst irgend zwei der Kräfte, z. B.  $P_3$  und  $P_4$ , siehe Figur 15, mittels des Parallelo-

gramms  $abcd$  zu einer Mittelkraft  $R'$  vereinigt, hierauf  $R'$  und eine weitere gegebene Kraft, z. B.  $P_2$ , zu einer Mittelkraft  $R''$  zusammensetzt und so fortführt, bis schließlich alle gegebenen Kräfte zu einer Mittelkraft  $R$  zusammengefaßt sind.

Die angegebene Konstruktion ist unter Umständen wenig empfehlenswert, weil es vorkommen kann, daß einzelne Ecken der zu konstruierenden Parallelogramme über den verfügbaren Teil des Zeichnungsblatts hinausfallen, also unzugänglich werden. Die wiederholte Konstruktion des Kräftedreiecks führt einfacher und zweckmäßiger zum Ziele. Trägt man nämlich, siehe Figur 16, zwei Strecken  $2 \cdot 3$  und  $3 \cdot 4$  gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_3$  und  $P_4$  nacheinander an, so gibt



Figur 15.



Figur 16.

die Linie  $2 \cdot 4$  die Größe und Richtung der Mittelkraft von  $P_3$  und  $P_4$  an. Zeichnet man etwa die Strecke  $2 \cdot 1$  gleich und gleich gerichtet der Kraft  $P_2$  und zieht  $1 \cdot 4$ , so ist durch  $1 \cdot 4$  Größe und Richtung der Mittelkraft von  $P_3$ ,  $P_4$  und  $P_2$  dargestellt. Zieht man endlich  $0 \cdot 1$  gleich und gleich gerichtet der Kraft  $P_1$ , so gibt die Verbindungslinie  $0 \cdot 4$  die Größe und Richtung der Mittelkraft der vier Kräfte  $P_4$ ,  $P_3$ ,  $P_2$  und  $P_1$  an.

Eine Parallele durch  $a$ , Figur 15, zu  $0 \cdot 4$ , Figur 16, liefert diese Mittelkraft selbst.

Der Linienzug  $0, 1, 2, 3, 4$ , dessen Seiten gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sind, bildet ein offenes Vieleck; schließt man dasselbe durch die Linie  $0 \cdot 4$ , so stellt die letztere die Mittelkraft obiger Kräfte der Größe und Richtung nach dar.

Dieses Vieleck heißt das Kräfteviereck der gegebenen Kräfte und die Linie  $0 \cdot 4$  ist seine Schlußlinie. Durchläuft man von dem Punkte  $0$  ausgehend den Umfang des Kräftevierecks im Sinne der Richtungspfeile der gegebenen Kräfte, so gelangt man nach dem Punkte  $4$ . Der Richtungspfeil der Mittelkraft ist nun entgegengesetzt der Bewegungsrichtung, in welcher das Kräfteviereck durchlaufen wurde. Man kann diese Bewegungsrichtung den Umlaufungssinn des Kräftevierecks nennen.

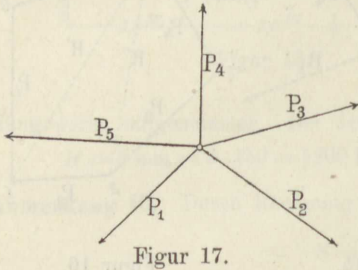
28. Fügt man zu den gegebenen Kräften noch eine Kraft  $R_1$  gleich und entgegengesetzt gerichtet der Mittelkraft  $R$  hinzu, so sind die sämtlichen Kräfte unter sich im Gleichgewicht. Die Linie  $R$  im Kräfteviereck erhält aber nun einen dem vorigen entgegengesetzten Richtungspfeil und das Kräfteviereck wird geschlossen sein.



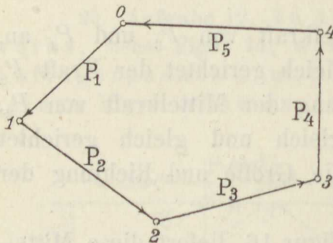
„Beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt sind im Gleichgewicht, wenn ihre Mittelkraft gleich Null ist, und dies ist der Fall, wenn das aus den Kräften konstruierte Kräfteviereck sich schließt; es wird dann sein Umfang vom Richtungspfeile der Kräfte in demselben Sinne durchlaufen.“

### e) Übungsaufgaben.

29. **Aufgabe 14.** Es sind vier Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  mit demselben Angriffspunkte gegeben, siehe Figur 17, man soll eine Kraft  $P_5$  so bestimmen, daß sie den gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält.



Figur 17.



Figur 18.

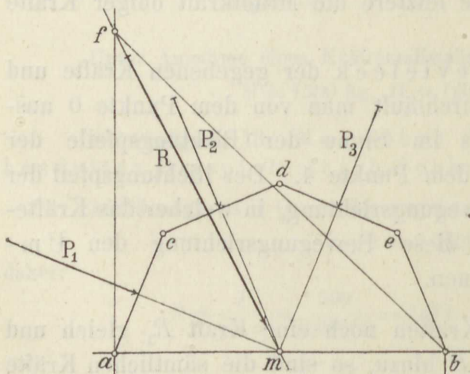
**Auflösung.** Man trägt die Seiten

$$0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4$$

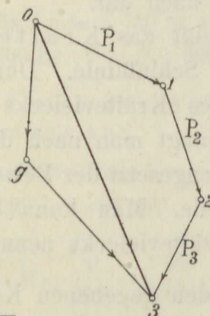
beziehungsweise gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  aneinander an, siehe Figur 18, und zeichnet die Schlußlinie  $4 \cdot 0$  des Kräftevierecks. Nimmt man die Spitze des Richtungspfeils der Schlußlinie dem Anfangspunkt  $o$  zugekehrt und zeichnet durch den Angriffspunkt der gegebenen Kräfte, siehe Figur 17, gleich und gleich gerichtet zu  $4 \cdot 0$ , siehe Figur 18, die Kraft  $P_5$ , so stellt diese die gesuchte Kraft dar.

30. **Aufgabe 15.** In den Mitten der Seiten eines Dachbinders von der in Figur 19 dargestellten Form, wirken die zu den Seiten normalen Drücke  $P_1, P_2$  und  $P_3$ . Man soll die Mittelkraft der drei Kräfte ermitteln.

**Auflösung.** Da die Kräfte normal zu den Seiten  $ac, cd$  und  $de$  gerichtet sind, so schneiden sich deren Richtungslinien im Mittelpunkte  $m$ . Man kann daher die sämtlichen Kräfte mit ihren Angriffspunkten nach dem Punkte  $m$  verlegen, dann wird auch die Mittelkraft durch den Punkt  $m$  hindurchgehen. Zeichnet man daher das Kräfteviereck  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ , siehe Figur 20, so gibt dessen Schlußlinie  $0 \cdot 3$  die Größe und die Richtung der gesuchten Mittelkraft  $R$  an. Diese ist durch den Punkt  $m$  gleich und gleich gerichtet der Schlußlinie  $0 \cdot 3$  zu ziehen.



Figur 19.



Figur 20.

31. **Aufgabe 16.** Unter Bezugnahme auf das in Aufgabe 6 behandelte Beispiel sind die Auflagerdrücke der Mittelkraft  $R$  auf



die Auflager  $a$  und  $b$  zu ermitteln, wenn  $a$  als bewegliches und  $b$  als festes Auflager vorausgesetzt sein soll.

**Auflösung.** Man zieht in  $a$ , siehe Figur 19, die Vertikale bis zum Schnitt  $f$  mit  $R$ , so gibt die Linie  $fb$  die Richtungslinie des Auflagerdrucks in  $b$  an. Zieht man nun in Fig 20 durch  $o$  und 3 Parallelen zu  $af$  und  $fb$  bis zum Schnitt in  $g$ , so stellen die Linien  $og$  und  $g\beta$  die Auflagerdrücke in den Punkten  $a$  und  $b$  der Größe und Richtung nach dar.

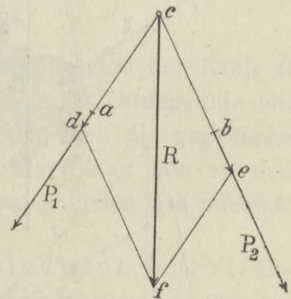
### 3. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und gemeinsamer Richtungslinie.

32. Der Fall ist gleichbedeutend mit dem unter Nr. 9 behandelten Falle, denn man kann die sämtlichen Angriffspunkte der gegebenen Kräfte nach einem willkürlich auf der Richtungslinie gewählten Punkt verlegen und hierauf nach Nr. 9 verfahren. Die Mittelkraft der gegebenen Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der gegebenen Kräfte; ihr Richtungspfeil bestimmt sich aus dem Wert der Summe.

### 4. Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien. Kräfte- und Seilvieleck.

#### a) Zwei Kräfte.

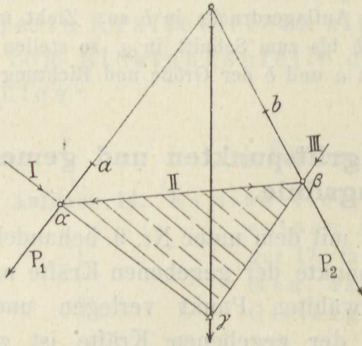
33. Da der Angriffspunkt einer Kraft in ihrer Richtungslinie beliebig verlegt werden kann, so verlängert man, siehe Figur 21, die Richtungslinien der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  bis zu ihrem Schnittpunkt  $c$ , verlegt ihren Angriffspunkt nach  $c$  und konstruiert das Parallelogramm  $cdef$ , so ist dessen Diagonale  $cf$  die gesuchte Mittelkraft  $R$  der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Die vorstehende Konstruktion ist unbrauchbar, wenn der Schnittpunkt  $c$  der Richtungslinien der gegebenen Kräfte unzugänglich ist; in diesem Falle gelangt man zu einer zweckmäßigen Bestimmung der Mittelkraft auf die folgende Weise:



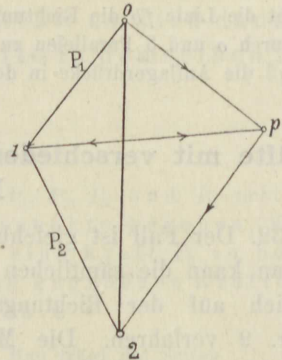
Figur 21.

34. Man trägt, siehe Figur 23, die Strecken  $0 \cdot 1$  und  $1 \cdot 2$  gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  aneinander an. Wählt man nun einen beliebigen Punkt  $p$  und zieht die Linien  $p0$  und  $p1$ , so kann man das Dreieck  $0 \cdot 1 \cdot p$  als ein Kräfte-dreieck auffassen, in welchem  $P_1$  als Schlußlinie, d. h. als Mittelkraft von zweien Kräften  $0p$  und  $1p$ , auftritt; wählt man daher auf der Kraft  $P_1$ , siehe Figur 22, den Punkt  $\alpha$  beliebig und zieht durch ihn die Linien I und II parallel zu  $0p$  und  $1p$ , so stellen diese die Richtungslinien von zwei Seitenkräften dar, deren Größen durch die Längen  $0p$  und  $p1$ , siehe Figur 23, gegeben sind und in welche die Kraft  $P_1$  zerlegt ist. Zieht man in Figur 23 auch noch die Linie  $p2$  und nimmt das Dreieck  $1 \cdot 2 \cdot p$  als Kräfte-dreieck mit  $1 \cdot 2$  oder  $P_2$  als Schlußlinie, bzw. Mittelkraft von zweien Kräften  $1p$  und  $p2$ ,

so findet man die Kräfte selbst, wenn man II bis zum Schnitt  $\beta$  mit  $P_2$  verlängert und durch  $\beta$  die Parallele III zu  $p_2$  zieht. In der Linie II wirken nun



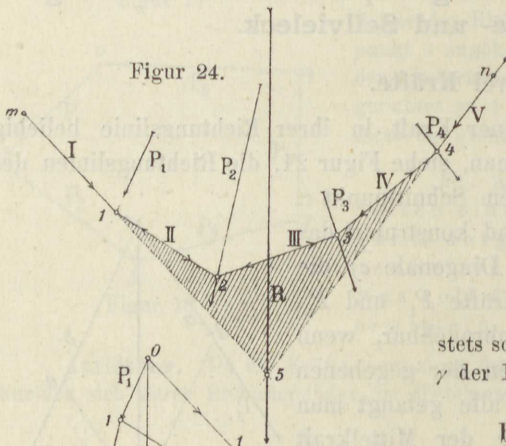
Figur 22.



Figur 23.

zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die sich gegenseitig aufheben, und es bleiben nur die in I und III tätigen Kräfte übrig, deren

Mittelkraft durch den Schnittpunkt  $\gamma$  von I und III parallel zur Linie 02, siehe Figur 23, hindurchgehen muß. Diese Mittelkraft ist aber zugleich die Mittelkraft der gegebenen Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Ihre Größe und ihr Richtungspfeil ist aus Figur 23 zu entnehmen.

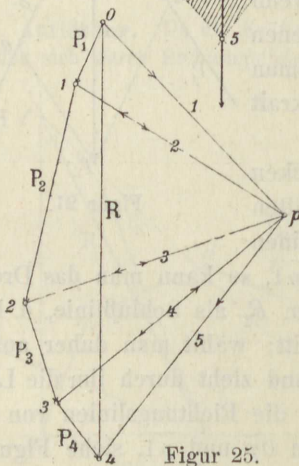


Figur 24.

**Anmerkung 11.** Da der Punkt  $p$  ganz beliebig wählbar ist, so kann er stets so angenommen werden, daß der Schnittpunkt  $\gamma$  der Linien I und III leicht zugänglich ist.

**b) Beliebige viele Kräfte.**

35. Sind beliebig viele Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$ , siehe Figur 24, gegeben, so kann man in gleicher Weise wie in Nr. 34 zur Mittelkraft dieser Kräfte gelangen, wenn man, siehe Figur 25, die Strecken  $0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4$  gleich und gleich gerichtet den Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  aneinander anträgt, einen Punkt  $p$  beliebig wählt und die Linien  $p0, p1, p2, p3, p4$  zieht.



Figur 25.

Hierdurch entstehen die Kräftedreiecke  $0 \cdot 1 \cdot p, 1 \cdot 2 \cdot p, 2 \cdot 3 \cdot p, 3 \cdot 4 \cdot p$  mit den Linien  $0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4$  als Schlusslinien bzw. Mittelkräfte; die zugehörigen Seitenkräfte sind aber durch die Linien  $0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p, 3 \cdot p$  und  $4 \cdot p$ , siehe Figur 25, gegeben, deren Richtungslinien I, II, III, IV, V



parallel zu diesen Linien laufen und erhalten werden, wenn man den Punkt 1 auf  $P_1$ , siehe Figur 24, beliebig wählt und durch ihn die Linie I parallel  $Op$ , dann die Linie II parallel  $1 \cdot p$  bis zum Schnitt 2 mit  $P_2$  zieht; durch 2 geht III parallel zu  $2p$  bis zum Schnitt 3 mit  $P_3$  usw.

In den Linien II, III und IV wirken je zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte, die sich aufheben, so daß nur die Kräfte in I und V übrig bleiben, deren Mittelkraft durch den Schnittpunkt 5 dieser Linien, parallel zur Linie  $0 \cdot 4$ , siehe Figur 25, hindurchgehen muß. Diese Mittelkraft ist aber zugleich die Mittelkraft  $R$  der gegebenen Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$ ; ihre Größe sowie ihr Richtungspfeil ist aus Figur 25 zu entnehmen.

36. Die Linien I bis V, siehe Figur 24, bilden ein Vieleck, das für die Folge ein Seilvieleck der Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  genannt werden soll; das Vieleck  $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0$ , siehe Figur 25, ist das zu dem Seilvieleck gehörige Kräftevieleck; der Punkt  $p$  heißt sein Pol und die Linien  $p \cdot 0, p \cdot 1, p \cdot 2 \dots$  heißen Polstrahlen.

Die Seiten des Seilvielecks, d. h. die Seilstrahlen sind beziehungsweise parallel zu den Polstrahlen des Kräftevielecks; die Längen der Polstrahlen bestimmen die Größen der in den Seiten des Seilvielecks wirkenden Kräfte.

Die Bezeichnung Seilvieleck rührt davon her, daß ein in zwei beliebigen Punkten  $m$  und  $n$  aufgehängtes Seil unter der Einwirkung von äußeren, in den Punkten 1, 2, 3, 4 tätigen Kräften  $P_1, P_2, P_3, P_4$  die in Figur 24 gezeichnete Form annimmt, während in den einzelnen Abschnitten die durch die Längen der Polstrahlen der Größe nach bestimmten Spannungen herrschen. Statt Seilvieleck wird vielfach auch die Bezeichnung „Seileck“ gebraucht.

37. Fügt man zu den gegebenen Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  eine der Kraft  $R$  gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kraft  $R'$  hinzu, deren Richtungslinie mit  $R$  zusammenfällt, so halten sich  $R$  und  $R'$  und demnach auch die gegebenen Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  und  $R'$  das Gleichgewicht. Konstruiert man nun zu den Kräften  $P_1$  bis  $P_4$  und  $R'$  das Kräfte- und Seilvieleck, so schließen sich offenbar die beiden Vielecke.

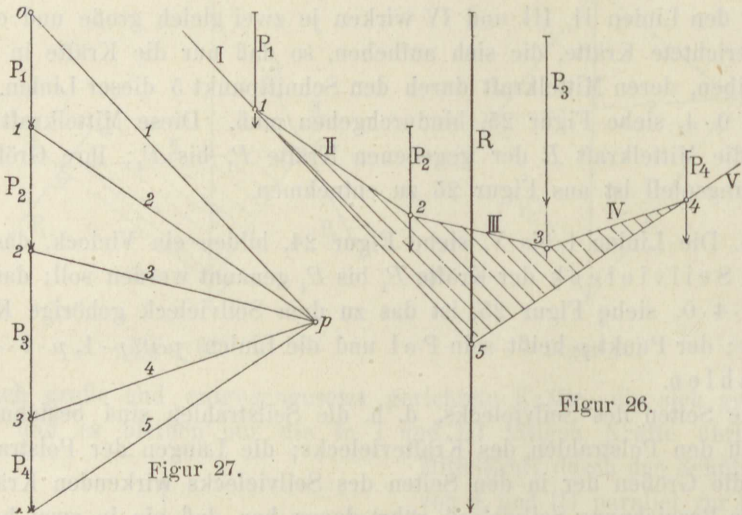
Man kann also sagen: „Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien sind im Gleichgewicht, wenn ihre Mittelkraft gleich Null ist und das zu ihnen gehörige Kräftevieleck sich schließt, desgleichen aber auch ein mittels eines beliebigen Pols konstruiertes Seilvieleck.“

## Parallele Kräfte.

### a) Beliebige viele Kräfte.

38. Einen Spezialfall der Nr. 35 erhält man, wenn die Kräfte parallele Richtungslinien besitzen; in diesem Falle kann die Konstruktion der Mittelkraft in gleicher Weise vorgenommen werden wie in dem allgemeinen Falle. Trägt man die Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  zu einem Kräftevieleck aneinander an, so fällt dieses

Vieleck in eine gerade Linie  $0 \cdot 4$ , siehe Figur 27. Mittels eines beliebigen gewählten Pols  $p$  ergibt sich dann das Seilvieleck I, II, III, IV, V, siehe Figur 26, dessen Seiten I und V sich in einem Punkte 5, der Mittelkraft  $R$ , der gegebenen

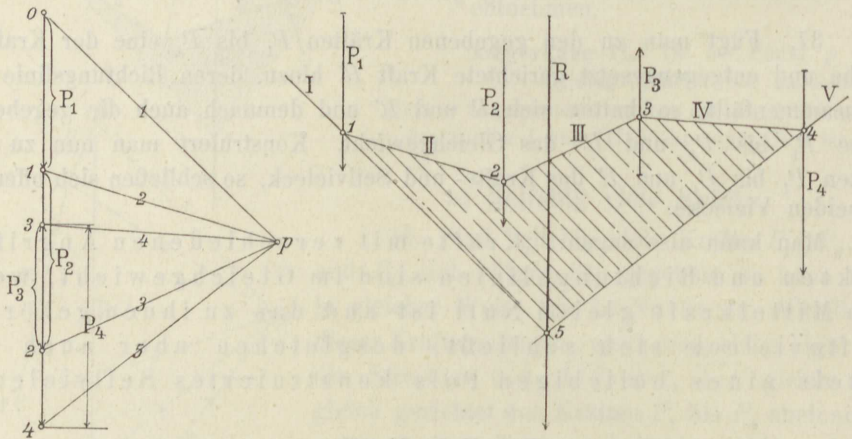


Figur 26.

Figur 27.

Kräfte schneiden. Die Mittelkraft selbst ist gleich und gleich gerichtet der Linie  $0 \cdot 4$ , siehe Figur 27.

39. Besitzen nicht alle Kräfte denselben Richtungspfeil, so bleibt die Konstruktion der Mittelkraft die nämliche, siehe Figur 28 und 29.



Figur 29.

Figur 28.

40. Aus den Konstruktionen in den Figuren 26 bis 29 folgt, daß die Mittelkraft paralleler Kräfte gleich ist der algebraischen Summe der Einzelkräfte.

41. Fügt man zu den gegebenen Kräften eine Kraft  $R'$  hinzu gleich und entgegengesetzt gerichtet der Mittelkraft  $R$ , welche mit letzterer die Richtungs-

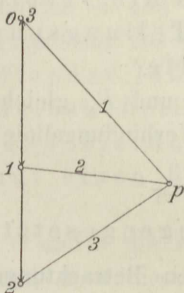


linie gemein hat, so ergibt sich Gleichgewicht. In diesem Falle wird die Mittelkraft gleich Null und es schließt sich sowohl das Kräfte- wie das Seilvieleck. Man kann also sagen: „Parallele Kräfte sind im Gleichgewicht wenn ihre Mittelkraft gleich Null ist und sich sowohl das Kräfte-, wie auch das Seilvieleck schließt.“

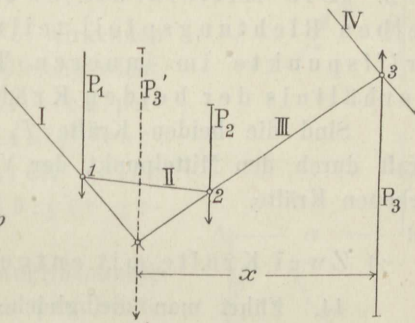
42. Daß die Mittelkraft der Kräfte gleich Null sein kann, ohne daß Gleichgewicht vorhanden ist, kann man aus Figur 30 und 31 ersehen.

Es ist hier die Kraft

$P_3$  gleich der Summe der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , aber diesen Kräften entgegengesetzt gerichtet. Im Seilvieleck werden die Seiten I und IV parallel, d. h. ihr Schnittpunkt liegt in unendlicher Ferne. Vereinigt man  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Mittelkraft  $P_3'$ , so sind die parallelen Kräfte  $P_3$  und  $P_3'$  ein-



Figur 31.



Figur 30.

ander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet; sie bilden ein Kräfte- oder Gegenpaar und sind nicht im Gleichgewicht, sondern haben das Bestreben, den Körper, an dem sie wirken, zu drehen. Das Drehungsbestreben wird ausgedrückt durch das Produkt aus einer dieser Kräfte und ihrer senkrechten Entfernung  $x$  voneinander, also durch das Produkt  $P_3x$ . Man nennt dieses Produkt das statische Moment des Kräftepaars.

β) Zwei Kräfte mit dem gleichen Richtungspfeil.

43. Führt man zur Ermittlung der Mittelkraft die in Nr. 38 beschriebene Konstruktion aus, so erhält man die Figuren 32 und 33. Aus denselben entnimmt man zufolge der Konstruktion die Beziehungen:

$$\triangle \alpha \gamma \delta \sim \triangle 0 p 1$$

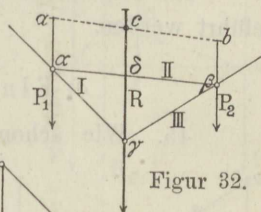
daher ist:

$$3) \dots \frac{\overline{\alpha \delta}}{\overline{\gamma \delta}} = \frac{\overline{1p}}{P_1}$$

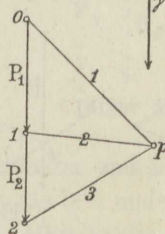
$$\triangle \delta \beta \gamma \sim \triangle 1 p 2$$

daher:

$$4) \dots \frac{\overline{\delta \beta}}{\overline{\gamma \delta}} = \frac{\overline{1p}}{P_2}$$



Figur 32.



Figur 33.

Durch Division der Gleichungen 3) und 4) ergibt sich:

$$\frac{\overline{\alpha \delta} \cdot \overline{\gamma \delta}}{\overline{\gamma \delta} \cdot \overline{\delta \beta}} = \frac{\overline{1p} \cdot P_2}{P_1 \cdot \overline{1p}}$$

oder:

$$\frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\delta\beta}} = \frac{P_2}{P_1}$$

oder auch:

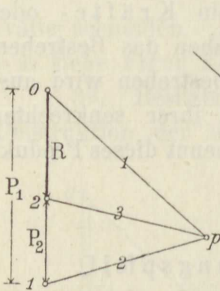
$$5) \dots \frac{\overline{ac}}{\overline{cb}} = \frac{P_2}{P_1}$$

d. h. „Die Mittelkraft zweier parallelen Kräfte mit demselben Richtungspfeil teilt die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte im inneren Teilungspunkte im umgekehrten Verhältnis der beiden Kräfte.

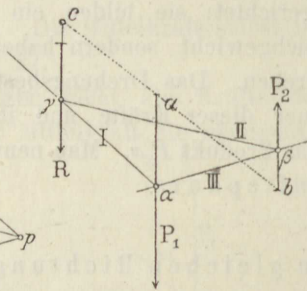
Sind die beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  gleich groß, so geht ihre Mittelkraft durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte.

γ) Zwei Kräfte mit entgegengesetztem Richtungspfeil.

44. Führt man die gleichen Betrachtungen durch wie in Nr. 43, so findet man in vorliegendem Falle, daß die Mittelkraft, siehe Figur 34 und 35,



Figur 35.



Figur 34.

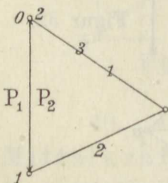
nunmehr durch den äußeren Teilungspunkt der Verbindungslinie  $\overline{ab}$  hindurch geht und letztere wieder im umgekehrten Verhältnis der beiden Kräfte teilt. Sind diese gleich groß, siehe Figur 36 und 37, so erhält man eine Mittelkraft gleich Null, deren Angriffspunkt in unendlicher Ferne liegt. Obwohl die Mittelkraft gleich Null ist, sind die Kräfte doch nicht im Gleich-

gewicht: sie bilden vielmehr ein Kräfte- bzw. Gegenpaar, siehe auch Nr. 42.

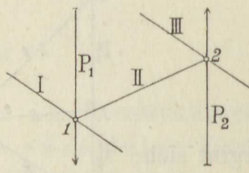
Im folgenden sollen einige wichtige Sätze über das Kräftepaar angeführt werden.

δ) Einige Sätze über das Kräftepaar.

45. Wie schon in Nr. 42 angegeben wurde, besitzt ein Kräftepaar stets ein Drehungsbestreben, welches ausgedrückt wird durch das Produkt aus Kraft mal der Entfernung der beiden das Kräftepaar bildenden Kräfte, durch das statische Moment des Kräftepaars. Dieses statische Moment kann ein rechts drehendes oder positives, siehe Figur 38, oder



Figur 37.



Figur 36.

aber ein links drehendes bzw. negatives, siehe Figur 39, sein; im ersten

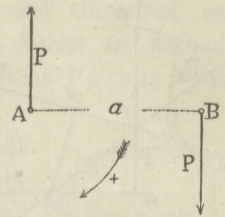
aber ein links drehendes bzw. negatives, siehe Figur 39, sein; im ersten



Falle erfolgt die Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung, im zweiten Falle in entgegengesetztem Sinne.

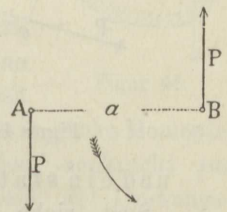
Zunächst erkennt man unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

**1. Satz.** „Besitzen zwei Kräftepaare dieselben Angriffspunkte  $a$  und  $b$  sowie zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $P$  und  $Q$ , so sind sie im Gleichgewicht.“



denn die in den Angriffspunkten  $a$  und  $b$  wirkenden Kräfte  $P$  und  $Q$  halten sich gegenseitig das Gleichgewicht.

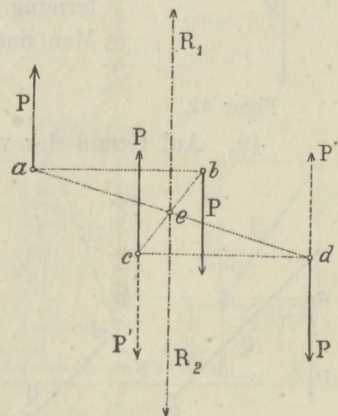
46. **2. Satz.** „Ein Kräftepaar läßt sich parallel zu sich selbst beliebig verschieben, ohne daß hierdurch seine Wirkungsweise auf einen Körper geändert wird.“



Figur 39.

Sind, siehe Figur 40,  $a$  und  $b$  die Angriffspunkte des Kräftepaars und verschiebt man dieses parallel zu sich selbst, so daß die Angriffspunkte nach  $c$  und  $d$  zu liegen kommen, so kann man sich in  $c$  und  $d$  je eine der Kraft  $P$  gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $P'$  angebracht denken und nun die in  $a$  und  $d$  wirkenden Kräfte  $P$  und  $P'$  zu einer Mittelkraft  $R_1$ , die in  $c$  und  $b$  wirkenden Kräfte  $P'$  und  $P$  zu einer Mittelkraft  $R_2$  vereinigen, dann haben die beiden Mittelkräfte  $R_1$  und  $R_2$  gleiche Größe und eine gemeinsame durch den Mittelpunkt  $e$  des Parallelogramms  $abcd$  gehende Richtungslinie, aber entgegengesetzten Richtungspfeil, sie halten sich also das Gleichgewicht und es bleibt nur das Kräftepaar mit den Angriffspunkten  $c$  und  $d$  und den Kräften  $P$  übrig.

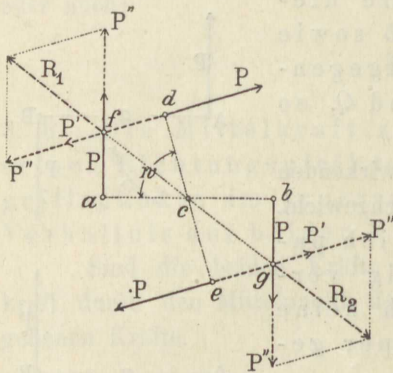
47. **3. Satz.** „Ein Kräftepaar läßt sich um den Mittelpunkt  $e$ , siehe Figur 41, der Verbindungslinie seiner Angriffspunkte  $a$  und  $b$  um einen beliebigen Winkel  $w$  drehen, ohne daß hierdurch seine Wirkungsweise auf einen Körper geändert wird.“



Figur 40.

Gelangen nach der Drehung die Angriffspunkte  $a$  und  $b$  bzw. nach  $d$  und  $e$ , so kann man sich in  $d$  und  $e$  je eine der Kraft  $P$  gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $P'$  angebracht denken und nun die in  $a$  und  $d$  wirkenden Kräfte  $P$  und  $P'$  zu einer Mittelkraft  $R_1$ , die in  $b$  und  $e$  wirkenden Kräfte zu einer Mittelkraft  $R_2$  vereinigen; die beiden Mittelkräfte  $R_1$  und  $R_2$  haben dann gleiche Größe und eine gemeinsame durch  $c$  gehende Richtungs-

linie, aber entgegengesetzten Richtungspfeil, sie halten sich also das Gleichgewicht und es bleibt nur das Kräftepaar mit den Angriffspunkten  $d$  und  $e$  und den Kräften  $P$  übrig.



Figur 41.

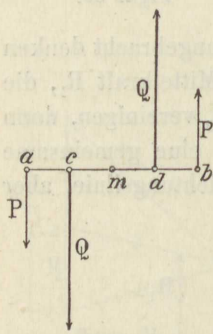
Aus den vorgehenden beiden Sätzen folgt unmittelbar der folgende:

**4. Satz.** „Ein Kräftepaar läßt sich parallel zu sich selbst beliebig verschieben und hierauf noch um einen beliebigen Winkel drehen, d.h. ein Kräftepaar läßt sich beliebig verlegen.“

**5. Satz.** „Ein Kräftepaar läßt sich durch ein anderes ersetzen, das mit ihm das gleiche Drehungsbestreben

und ein statisches Moment von der gleichen Größe besitzt.“

Sind, siehe Figur 42,  $a, b$  die beiden Angriffspunkte,  $P, P$  die das Kräftepaar bildenden Kräfte und denkt man sich den Körper um eine durch den Mittelpunkt  $m$  gehende, zur Ebene der Kräfte  $P$  senkrecht stehende Achse drehbar, so ist das Drehungsbestreben ausgedrückt durch das Produkt  $P \cdot \overline{ab}$ . Soll das gleiche Drehungsbestreben durch ein Kräftepaar mit den Kräften  $Q$  hervorgebracht werden, so müssen diese gleich weit von  $m$  abstehen und eine Entfernung  $\overline{cd}$  voneinander besitzen, daß  $P \cdot \overline{ab} = Q \cdot \overline{cd}$  wird. Man findet hieraus:



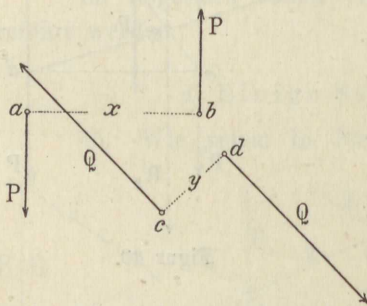
Figur 42.

$$\overline{cd} = \frac{P \cdot \overline{ab}}{Q}$$

49. Auf Grund der vorstehenden Sätze folgt der weitere

**6. Satz.** „Ein Kräftepaar wird im Gleichgewicht gehalten durch ein anderes, das mit ihm ein statisches Moment von der gleichen Größe, aber entgegengesetztem Drehungsbestreben besitzt.“

Sind die Angriffspunkte des einen Kräftepaars die Punkte  $a, b$ , siehe Figur 43, die des andern  $c, d$ , so kann man das erste Kräftepaar zunächst so drehen, daß die Kräfte



Figur 43.

parallel zu  $Q$  werden; hierauf läßt sich das Kräftepaar  $P, P$  so verwandeln, daß seine Kräfte gleich  $Q$  werden und schließlich so verschieben, daß seine Angriffspunkte mit  $c$  und  $d$  zusammenfallen.

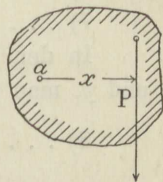


### 5. Statisches Moment einer Kraft.

#### a) Drehungsrichtung, Drehungspunkt, Hebelarm.

50. Steht eine Kraft  $P$  in fester Verbindung mit einem Punkte  $a$ , siehe Figur 44, so hat sie das Bestreben, den Körper, an dem sie wirkt, um eine durch  $a$  gehende, senkrecht zur Ebene  $Pa$  stehende Achse zu drehen; dieses Drehungsbestreben wird ausgedrückt durch das Produkt  $Px$  und wird als das **statische Moment** der Kraft  $P$  bezeichnet.

Die Entfernung  $x$  des Punktes  $a$  von der Kraft  $P$  heißt der Hebelarm der Kraft  $P$ . Unter dem statischen Moment einer Kraft versteht man also das Produkt aus Kraft mal dem zugehörigen Hebelarm.



Figur 44.

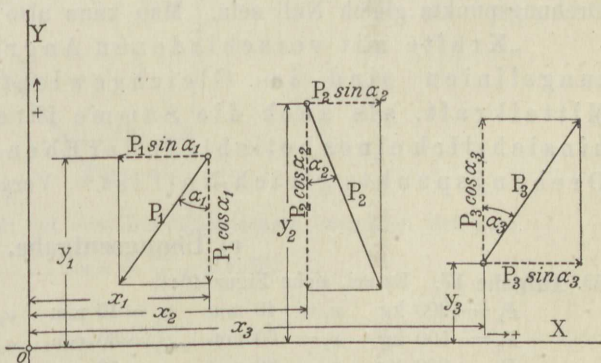
Je nach der Richtung, nach welcher die Drehung stattfindet, d. h. je nach der Drehungsrichtung unterscheidet man rechts- oder linksdrehende Kräfte und demgemäß rechts- und linksdrehende bzw. positive und negative statische Momente.

Der Schnittpunkt  $a$ , der die Kraft  $P$  enthaltenden, senkrecht zur Drehungsachse stehenden Ebene mit der Drehungsachse heißt der Drehungspunkt der Kraft  $P$ .

#### b) Rechnerische Bestimmung der Mittelkraft eines beliebigen ebenen Kräftesystems.

51. Hat man eine beliebige Anzahl von Kräften mit verschiedenen Richtungslinien und Angriffspunkten, also ein beliebiges Kräftesystem, so gehört ihm im allgemeinen eine Mittelkraft zu. Wählt man in der Ebene des Kräftesystems einen beliebigen Punkt, so gehört zu jeder Kraft

des Systems ein statisches Moment  $P_n p_n$  wo  $P_n$  die Kraft und  $p_n$  ihren Hebelarm bezeichnet. Ist nun  $R$  die Mittelkraft des Kräftesystems und  $r$  ihr Hebelarm, so ist das Gesamtdrehungsbestreben des Kräftesystems gleich jenem ihrer Mittelkraft, d. h. es ist



Figur 45.

$$\sum P_n p_n = R r.$$

Mittels dieser Gleichung ist man aber in den Stand gesetzt, die Mittelkraft eines Kräftesystems rechnerisch zu bestimmen.

Hat man nämlich beliebig viele Kräfte  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , siehe Figur 45, und wählt man einen Punkt  $o$  als Drehungspunkt, so kann man durch  $o$  zwei auf-

einander senkrechte Linien  $X$  und  $Y$  ziehen und nun jede Kraft, parallel zu den beiden Richtungen  $X$  und  $Y$  in Seitenkräfte zerlegen. Die Entfernungen dieser Seitenkräfte vom Punkte  $o$  sind dann bzw.  $x_1$  bis  $x_3$  . . und  $y_1$  bis  $y_3$  usw. Vereinigt man die zu  $X$  und  $Y$  parallelen Seitenkräfte je in eine Mittelkraft  $R_x$  und  $R_y$ , so läßt sich schließlich mit  $R_x$  und  $R_y$  eine Mittelkraft  $R$  bilden, welche die Mittelkraft der gegebenen Kräfte darstellt. Man erhält nun die folgenden Beziehungen:

$$6) \dots P_1 \cos \alpha_1 x_1 + P_2 \cos \alpha_2 x_2 - P_3 \cos \alpha_3 x_3 = R_x x$$

$$7) \dots -P_1 \sin \alpha_1 y_1 + P_2 \sin \alpha_2 y_2 + P_3 \sin \alpha_3 y_3 = R_y y$$

In den beiden Gleichungen 6) und 7) kennt man alle Größen bis auf  $x$  und  $y$ , man erhält also:

$$8) \dots x = \frac{P_1 \cos \alpha_1 x_1 + P_2 \cos \alpha_2 x_2 - P_3 \cos \alpha_3 x_3}{P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 - P_3 \cos \alpha_3}$$

$$9) \dots y = \frac{-P_1 \sin \alpha_1 y_1 + P_2 \sin \alpha_2 y_2 + P_3 \sin \alpha_3 y_3}{-P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3}$$

Mittels der beiden Gleichungen 8) und 9) ergibt sich ein Punkt der Mittelkraft. Die Größe selbst findet sich aus der Beziehung:

$$10) \dots R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

**Anmerkung 12.** Die Achsen  $X$  und  $Y$  bezeichnet man als Koordinatenachsen, die Entfernungen  $x_1, y_1$  . . usw. als die Koordinaten der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte; die positiven Richtungen für die  $x$ -Koordinaten bzw.  $y$ -Koordinaten sind in der Figur 45 bezeichnet. Hierdurch ist, wenn die Richtungen der Kräfte gegeben sind, auch die Drehungsrichtung der statischen Momente gegeben.

52. Soll Gleichgewicht zwischen den gegebenen Kräften bestehen, so muß einerseits die Mittelkraft gleich Null sein, andererseits darf aber auch kein Drehungsbestreben der Kräfte vorhanden, d. h. es muß die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte bezüglich eines beliebig in der Ebene angenommenen Drehungspunkts gleich Null sein. Man kann also sagen:

„Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien sind im Gleichgewicht, wenn sowohl ihre Mittelkraft, als auch die Summe ihrer statischen Momente hinsichtlich eines beliebig in der Ebene der Kräfte gewählten Drehungspunkts gleich Null ist.“ Vergleiche auch Nr. 37.

### c) Übungsaufgabe.

53. Aufgabe 17. Es sei, siehe Figur 46:

$$P_1 = 1000 \text{ kg} \quad x_1 = 40 \text{ mm} \quad y_1 = 40 \text{ mm} \quad \alpha_1 = 30^\circ$$

$$P_2 = 500 \text{ kg} \quad x_2 = 60 \text{ mm} \quad y_2 = 30 \text{ mm} \quad \alpha_2 = 60^\circ$$

$$P_3 = 800 \text{ kg} \quad x_3 = 80 \text{ mm} \quad y_3 = 50 \text{ mm} \quad \alpha_3 = 45^\circ$$

$$P_4 = 600 \text{ kg} \quad x_4 = 100 \text{ mm} \quad y_4 = 60 \text{ mm} \quad \alpha_4 = 90^\circ$$

Es soll die Mittelkraft der Kräfte der Größe und Lage nach berechnet werden.

Es ist:

$$\begin{aligned} 11) \dots x &= \frac{1000 \cdot \cos 30^\circ \cdot 40 + 500 \cdot \cos 60^\circ \cdot 60 + 800 \cdot \cos 45^\circ \cdot 80}{1000 \cdot \cos 30^\circ + 500 \cdot \cos 60^\circ + 800 \cdot \cos 45^\circ} \\ &= \frac{34641 + 15000 + 45248}{866 + 250 + 565} = \frac{94889}{1681} = 56 \text{ mm.} \end{aligned}$$



$$12) \dots y = \frac{-1000 \cdot \sin 30^\circ \cdot 40 + 500 \cdot \sin 60^\circ \cdot 30 + 800 \cdot \sin 45^\circ \cdot 50 + 600 \cdot 60}{-1000 \cdot \sin 30^\circ + 500 \cdot \sin 60^\circ + 800 \cdot \sin 45^\circ + 600}$$

$$= \frac{-20000 + 12990 + 28284 + 36000}{-500 + 433 + 565 + 600} = 52 \text{ mm.}$$

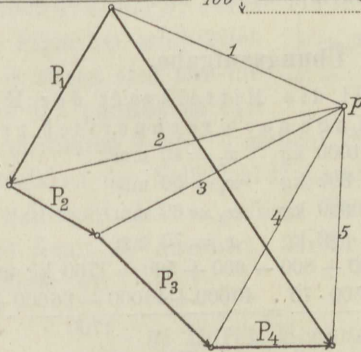
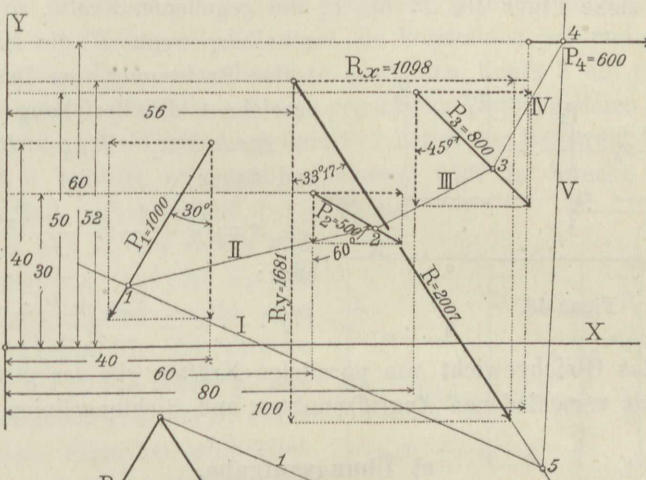
Aus der Berechnung der Nenner in den Gleichungen 11) und 12) erhält man:

$$R_y = 1681 \text{ kg und } R_x = 1098 \text{ kg}$$

Daher ist:

$$13) \dots R_y = \sqrt{R_y^2 + R_x^2} = \sqrt{1681^2 + 1098^2} = 2007 \text{ kg}$$

Figur 46.



Figur 47.

Die Winkel der Mittelkraft mit den Koordinatenachsen berechnen sich aus:

$$14) \dots \cos \alpha = \frac{R_y}{R} = 0,83762$$

demnach:

$$15) \dots \alpha = 33^\circ 17'$$

somit der Winkel  $\beta$  mit der Y-Achse:

$$16) \dots \beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ 43'$$

**Anmerkung 13.** Will man das Ergebnis der Rechnung durch die Zeichnung prüfen, so konstruiert man, siehe Figur 46 und 47, zu den gegebenen Kräften ein Kräfte- und Seilviereck. Dann muß die durch Zeichnung gefundene Lage und Länge der Mittelkraft mit jener durch Rechnung übermittelten übereinstimmen.

In der Figur 46 ist als Längenmaßstab 1 : 66,66, als Kraftmaßstab 1 mm = 37,7 kg gewählt worden.

### d) Rechnerische Bestimmung der Mittelkraft paralleler Kräfte.

54. Im vorstehenden ist auch die rechnerische Bestimmung der Mittelkraft von parallelen Kräften enthalten; denn in diesem Falle ist die Richtung und Größe der Mittelkraft von vornherein bekannt und nur nötig, einen Punkt derselben zu ermitteln; man wählt zu diesem Zwecke in der Ebene der Kräfte einen beliebigen Punkt  $o$  als Drehungspunkt und stellt für diesen die Momentengleichung auf, aus welcher sich die Entfernung der Mittelkraft von dem gewählten Drehungspunkt bestimmen läßt.

Sind, siehe Figur 48,  $P_1$  bis  $P_4$  die gegebenen Kräfte, so hat man unmittelbar, wenn  $R$  die Mittelkraft und  $x$  ihre Entfernung vom Drehungspunkt  $o$  bezeichnet, die Beziehung:

$$Rx = P_1x_1 + P_2x_2 - P_3x_3 + P_4x_4$$

und daher:

$$x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 - P_3x_3 + P_4x_4}{R}$$

oder:

$$17) \dots x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 - P_3x_3 + P_4x_4}{P_1 + P_2 - P_3 + P_4}$$

Für das Gleichgewicht von parallelen Kräften gilt der gleiche Satz wie für Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten und Richtungslinien, siehe Nr. 52.

### e) Übungsaufgabe.

55. **Aufgabe 18.** Man soll die Mittelkraft der Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$ , siehe Figur 48, der Größe und Lagen nach rechnerisch ermitteln, wenn:

$$P_1 = 1000 \text{ kg} \quad x_1 = 40 \text{ mm}$$

$$P_2 = 800 \text{ kg} \quad x_2 = 50 \text{ mm}$$

$$P_3 = 600 \text{ kg} \quad x_3 = 60 \text{ mm}$$

$$P_4 = 500 \text{ kg} \quad x_4 = 70 \text{ mm}$$

**Auflösung.** Es ist  $R = 1000 + 800 - 600 + 500 = 1700 \text{ kg}$  und

$$x = \frac{1000 \cdot 40 + 800 \cdot 50 - 600 \cdot 60 + 500 \cdot 70}{1000 + 800 - 600 + 500} = \frac{40000 + 40000 - 36000 + 35000}{1700} = 46,47 \text{ mm}$$

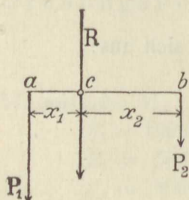
**Anmerkung 14.** Sind nur zwei Kräfte gegeben, siehe Figur 49, so kann man sich als Drehungspunkt den Schnittpunkt  $c$  der Mittelkraft mit der Verbindungslinie  $ab$  gewählt denken und erhält dann die Momentengleichung:

$$0 = P_2 \bar{bc} - P_1 \bar{ac}$$

oder:

$$P_1 \bar{ac} = P_2 \bar{bc}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\bar{bc}}{\bar{ac}}$$



Figur 49.

d. h. die Mittelkraft  $R$  teilt die Verbindungslinie  $\bar{ab}$  umgekehrt im Verhältnis der beiden Kräfte, ein Ergebnis, das schon in Nr. 43 auf andere Weise erhalten worden ist.

Haben die gegebenen Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  entgegengesetzten Richtungspfeil, so wird der Punkt  $c$  der äußere Teilungspunkt der Strecke  $\bar{ab}$ . Sind die Kräfte einander gleich und gleich gerichtet, so ist  $c$  der Mittelpunkt von  $\bar{ab}$ . Sind die Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet, so fällt der Punkt  $c$  in unendliche Ferne und die Kräfte bilden ein Kräftepaar.



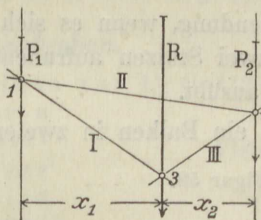
## 6. Zerlegen einer Kraft in parallele Seitenkräfte.

### a) Durch Zeichnung.

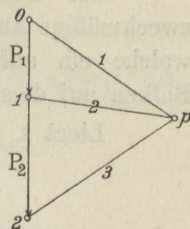
56. Soll eine Kraft  $R$ , siehe Figur 50 und 51, in parallele Seitenkräfte zerlegt werden, so können zwei Fälle eintreten; es sind nämlich entweder a) die Richtungslinien der beiden Seitenkräfte bekannt, oder es ist b) eine Seitenkraft der Größe und Lage nach gegeben. In beiden Fällen gelangt man zu den gesuchten Seitenkräften durch zweckentsprechende Konstruktion eines Kräfte- und Seilvielecks. Sind die Richtungslinien von  $P_1$  und  $P_2$  gegeben, so macht man, siehe Figur 51, die Strecke  $\overline{0 \cdot 2}$  gleich und gleich gerichtet der gegebenen Mittelkraft  $R$ , wählt den Punkt  $p$  als Pol, zieht die Polstrahlen  $p \cdot 0$  und  $p \cdot 2$  und durch einen auf  $R$ , siehe Figur 50, willkürlich gewählten Punkt 3 die entsprechenden Seilstrahlen I und III, welche auf den gegebenen Richtungslinien die Punkte 1 und 2 ausschneiden; die Verbindungslinie  $1 \cdot 2$  liefert den Seilstrahl II, zu welchem der Polstrahl 2 parallel sein muß. Letzterer trifft die Strecke  $\overline{0 \cdot 2}$  in einem Punkte 1 so, daß  $\overline{0 \cdot 1} = P_1$  und  $\overline{1 \cdot 2} = P_2$  ist.

Sind  $R$  und  $P_1$  der Größe und Lage nach gegeben, und ist  $P_2$  der Lage nach gesucht, so macht man wieder, siehe Figur 51, die Strecke  $\overline{0 \cdot 2} = R$  und  $\overline{0 \cdot 1} = P_1$ , wählt  $p$  und zieht die Polstrahlen 1, 2 und 3; durch den auf  $R$ , siehe Figur 50, willkürlich gewählten Punkt 3 lassen sich nun die Seilstrahlen I und III parallel zu den

entsprechenden Polstrahlen 1 und 3 ziehen; Seilstrahl I schneidet  $P_1$  in einem Punkt 1, durch welchen der Seilstrahl II parallel zu dem Polstrahl 2 hindurchgeht und den Seilstrahl III in einem Punkte 2 schneidet, welcher der Richtungslinie der Kraft  $P_2$  angehört. Größe und Richtungspfeil von  $P_2$  entnimmt man aus Figur 51.



Figur 50.



Figur 51.

### b) Durch Rechnung.

57. Durch Rechnung ermittelt man die Größen der Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  sehr einfach wie folgt:

Man nimmt auf  $R$  einen Punkt als Drehungspunkt an und stellt für ihn die Momentengleichung auf, dann ist:

$$P_1 x_1 = P_2 x_2$$

und außerdem

$$P_1 + P_2 = R$$

Man hat somit:

$$18) \dots P_1 = \frac{R x_2}{x_1 + x_2}$$

und

$$19) \dots P_2 = \frac{R x_1}{x_1 + x_2}$$

Ist  $P_1$  der Größe und Lage nach gegeben, so erhält man die Entfernung  $x_2$  der Seitenkraft  $P_2$  von der Mittelkraft  $R$  aus der Gleichung:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

daher ist:

$$20) \dots x_2 = \frac{F_1 x_1}{P_2} \text{ oder } x_2 = \frac{P_1 x_1}{R - P_1}.$$

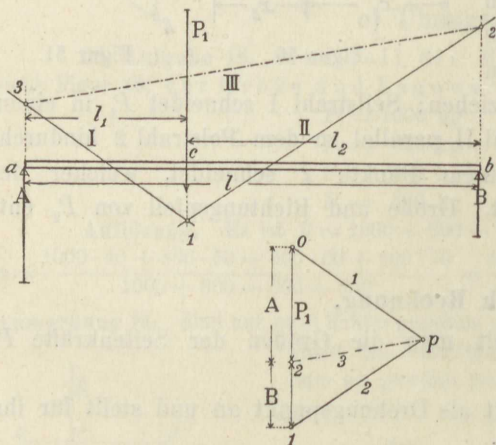
## 7. Bestimmung der Auflagerdrücke eines auf zwei Stützen aufliegenden belasteten Balkens.

### a) Durch Zeichnung.

58. Das Zerlegen einer Kraft in zwei parallele Seitenkräfte findet eine zweckmäßige Anwendung, wenn es sich darum handelt, die Drücke zu ermitteln, welche ein auf zwei Stützen aufliegender und in bestimmter Weise belasteter Balken auf diese ausübt.

Liegt z. B. ein Balken in zweien Punkten  $a$  und  $b$ , siehe Figur 52,

Figur 52.



Figur 53.

auf und erhält derselbe in einem Punkt  $c$  einen Druck  $P_1$ , so erhält man die Auflagerdrücke, graphisch wie in No. 56.

Man macht, siehe Figur 53, die Strecke  $\overline{O1}$  gleich und gleich gerichtet der Kraft  $P_1$ , wählt den Pol  $p$  und auf  $P_1$ , siehe Figur 52, den Punkte 1 beliebig. Zieht man nun die Polstrahlen 1 und 2 und parallel hierzu durch den Punkt 1, Figur 52, die Seilstrahlen I und II, so schneiden diese auf den Auflagervertikalen durch die Punkte  $a$  und  $b$  die Punkte 3 und 2 aus, deren Verbindungslinie den Seil-

strahl III ergibt; parallel hierzu ist der Polstrahl 3, Figur 53, zu ziehen, dann trifft dieser die Strecke  $\overline{O1}$  in einem Punkte 2 so, daß die Strecke  $\overline{O2}$  den Auflagerdruck  $A$ , die Strecke  $\overline{O3}$  den Auflagerdruck  $B$  darstellt. Diesen Drücken gleich und entgegengesetzt wirken die Gegendrücke von den Auflagern, das sind die Stützenwiderstände  $A$  und  $B$ ; diese sind sonach nach oben gerichtet und die drei Kräfte  $P_1$ ,  $A$  und  $B$  im Gleichgewicht. Der Seilstrahl III stellt die Schlußlinie des Seilvielecks dar.



## b) Durch Rechnung.

59. Will man die Auflagerdrücke durch Rechnung ermitteln, so wählt man zur Bestimmung von  $A$  und  $B$  die Punkte  $b$  und  $a$  als Drehungspunkte und erhält die Momentengleichungen:

$$Al = P_1 l_2,$$

daher:

$$21. \dots A = \frac{P_1 l_2}{l}$$

ebenso:

$$Bl = P_1 l_1,$$

also:

$$22. \dots B = \frac{P_1 l_1}{l}$$

Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung muß  $A + B = P_1$  sein, was der Fall ist, denn man hat:

$$\frac{P_1 l_2}{l} + \frac{P_1 l_1}{l} = \frac{P_1 (l_1 + l_2)}{l} = P_1.$$

## c) Übungsaufgaben.

60. **Aufgabe 19.** Auf einen Balken von 5,0 m freier Länge, siehe Figur 53a und b, der in den Punkten  $a$  und  $b$  aufliegt, wirkt in einer Entfernung von 2,6 m vom linken Auflager eine Last  $P_1 = 3500$  kg; wie groß sind die beiden Auflagerdrücke bzw. Gegendrücke  $A$  und  $B$ ?

**Auflösung.** Durch Rechnung findet man:

$$A \cdot 5 = 3500 (5,0 - 2,6)$$

$$A = \frac{3500 \cdot 2,4}{5} = 1680 \text{ kg}$$

$$B \cdot 5 = 3500 \cdot 2,6$$

$$B = \frac{3500 \cdot 2,6}{5} = 1820 \text{ kg}$$

$$\frac{A + B = 3500 \text{ kg}}{A + B = 3500 \text{ kg}}$$

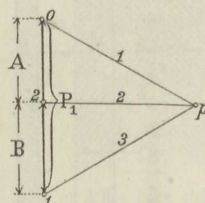
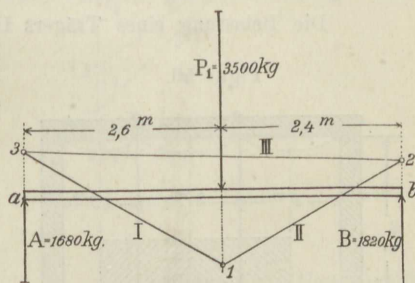
Wählt man als Kräftemaßstab 1 mm = 150 kg und zeichnet Kräfte- und Seilvieleck, so ergibt sich aus der Figur 53b:

$$A = 11,2 \text{ mm} = 1680 \text{ kg}$$

$$B = 12,1 \text{ mm} = 1820 \text{ kg},$$

also dasselbe Ergebnis wie das durch Rechnung erhaltene.

Figur 53 a.



Figur 53 b.

**Anmerkung 15.** Das in Nr. 58 angegebene Verfahren der Bestimmung der Auflagerdrücke kann auch angewendet werden, wenn mehrere parallele Kräfte auf einen Träger wirken. Sind z. B., siehe Figur 54, zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  gegeben, so konstruiert man wieder Kräfte- und Seilvieleck und verlängert die Seilstrahlen I und III bis zum Schnitt mit den Auflagervertikalen durch  $a$  und  $b$ ; der zur Schlußlinie IV des Seilvielecks parallele Polstrahl 4 teilt die Strecke  $0 \cdot 2$ , siehe Figur 55, im Punkte 3 in zwei Abschnitte so, daß  $2 \cdot 3$  den Auflagerdruck bzw. Stützenwiderstand in  $b$  und  $3 \cdot 4$  jenen in  $a$  der Größe nach darstellt.

Durch Rechnung erhält man die Gleichungen:

$$Al = P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2) \text{ (Drehungspunkt } b)$$

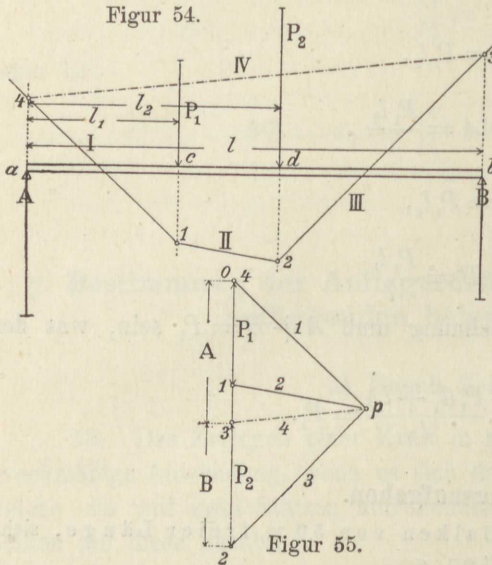
$$Bl = P_1l_1 + P_2l_2 \text{ (Drehungspunkt } a),$$

daher ist:

$$23) \dots A = \frac{P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2)}{l}$$

und

$$24) \dots B = \frac{P_1l_1 + P_2l_2}{l}$$

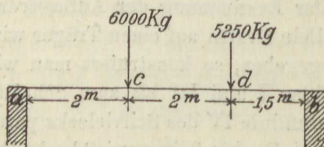
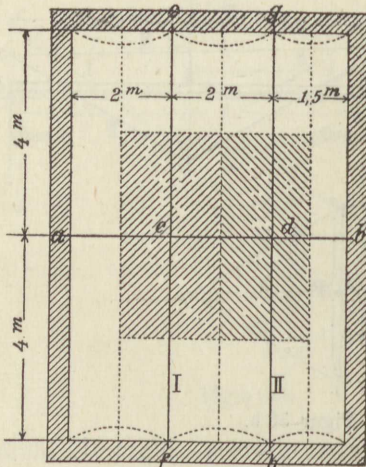


Figur 55.

Diese ganze Belastung ist im Punkte  $c$  aufzunehmen.

Die Belastung eines Trägers II beträgt  $(1,0 + 0,75) \cdot 4 \cdot 750 = 5250$  kg, welche im Punkte  $d$  aufzunehmen ist.

Figur 56.



Figur 57.

61. **Aufgabe 20.** Ein Unterzug  $ab$ , siehe Figur 56, dient in den Punkten  $c$  und  $d$  als Auflager für die Kappenträger I und II. Die Belastung der Decke beträgt einschließlich des Eigengewichts 750 kg für den Quadratmeter. Es sind die Belastungen in den Punkten  $c$  und  $d$ , sowie die Auflagerdrücke in  $a$  und  $b$ , desgleichen in  $e$ ,  $g$ ,  $f$  und  $h$  zu berechnen.

**Auflösung.** Die Belastung eines Trägers I beträgt  $2,0 \cdot 4,0 \cdot 750 = 6000$  kg.

Der Unterzug  $ab$  ist nach der Figur 57 belastet und es ist:

$$A = \frac{6000 \cdot 3,5 + 5250 \cdot 1,5}{5,5} = 5250 \text{ kg}$$

$$B = \frac{6000 \cdot 2 + 5250 \cdot 4}{5,5} = 6000 \text{ kg.}$$

Die Auflagerdrücke in  $e$  und  $f$  bzw.  $h$  und  $g$  sind gleich der halben Belastung eines Trägers I bzw. II, also gleich 3000 kg und 2625 kg.

62. **Aufgabe 21.** Auf einen Träger  $ab$ , siehe Figur 58, wirken in den Punkten  $c$ ,  $d$ ,  $e$  und  $f$  bzw. die Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$ ; es sind die Auflagerdrücke bzw. Gegenkräfte  $A$  und  $B$  in den Punkten  $a$  und  $b$  zu ermitteln.

**Auflösung.** Durch Zeichnung erhält man die gesuchten Auflagerdrücke mittels Kräfte- und Seilviereck. Man verlängert die Seilstrahlen I und V bis zu den Auflagervertikalen durch  $a$  und  $b$  und zieht parallel zum Seilstrahl VI den Polstrahl 6, welcher die Linie  $0-4$ , siehe Figur 59, im Punkte 5 in zwei Abschnitte so teilt, daß die Strecke  $4-5$  gleich  $B$ , die Strecke  $5-0$  gleich  $A$  ist.



Durch Rechnung erhält man die Gleichungen:

$$Al = P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2) + P_3(l - l_3) + P_4(l - l_4) \text{ (Drehungspunkt } b)$$

$$Bl = P_1l_1 + P_2l_2 + P_3l_3 + P_4l_4 \text{ (Drehungspunkt } a)$$

daher ist:

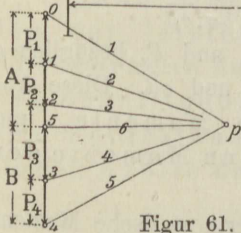
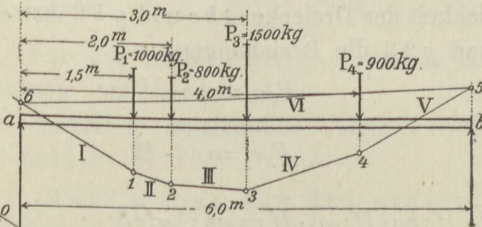
$$25) \dots A = \frac{P_1(l - l_1) + P_2(l - l_2) + P_3(l - l_3) + P_4(l - l_4)}{l}$$

und

$$26) \dots B = \frac{P_1l_1 + P_2l_2 + P_3l_3 + P_4l_4}{l}$$

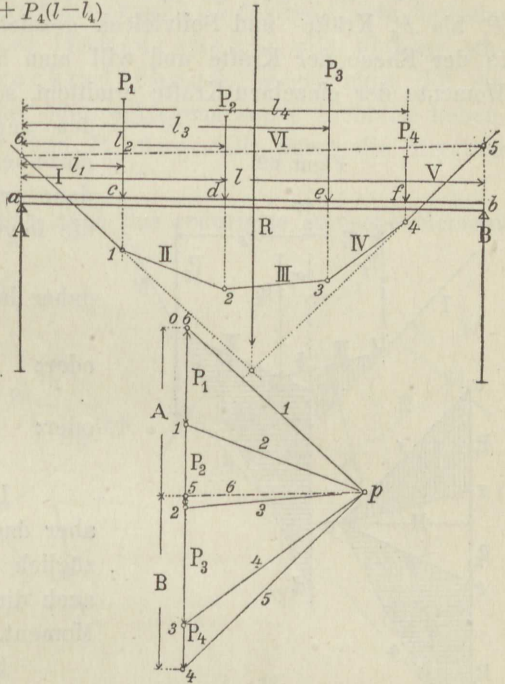
63. **Aufgabe 22.** Es sei mit Rücksicht auf Figur 60 und 61  $l = 6 \text{ m}$ ,  $l_1 = 1,5 \text{ m}$ ,  $P_1 = 1000 \text{ kg}$ ,  $l_2 = 2 \text{ m}$ ,  $P_2 = 800 \text{ kg}$ ,  $l_3 = 3 \text{ m}$ ,  $P_3 = 1500 \text{ kg}$ ,  $l_4 = 4 \text{ m}$ ,  $P_4 = 900 \text{ kg}$ . Man soll die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  graphisch und rechnerisch ermitteln.

Figur 60.



Figur 61.

Figur 58.



Figur 59.

**Auflösung.** Man wählt einen Kräftemaßstab etwa  $1 \text{ mm} = 150 \text{ kg}$  und führt die in Aufgabe 21 genannte Konstruktion durch. Man erhält:

$$B = 15,5 \text{ mm} = 2333 \text{ kg}$$

$$A = 12,4 \text{ mm} = 1867 \text{ kg.}$$

Durch Rechnung ergibt sich:

$$A = \frac{1000(6 - 1,5) + 800(6 - 2) + 1500(6 - 3) + 900(6 - 4)}{6} = 2333,333 \text{ kg}$$

$$B = \frac{1000 \cdot 1,5 + 800 \cdot 2 + 1500 \cdot 3 + 900 \cdot 4}{6} = 1866,666 \text{ kg}$$

$$A + B = 4200 \dots \text{ kg.}$$

## 8. Graphische Ermittlung des statischen Moments einer Kraft bzw. eines ebenen Kräftesystems.

### a) Die Kräfte sind parallel.

64 In Figur 62 und 63 sind für die gegebenen parallelen Kräfte  $P_1$  bis  $P_3$  Kräfte- und Seilvieck gezeichnet. Ist nun  $o$  ein beliebiger Punkt in der Ebene der Kräfte und will man bezüglich dieses Punkts die statischen Momente der einzelnen Kräfte ermitteln, so zieht man durch  $o$  eine Parallele zu

den gegebenen Kräften und verlängert die einzelnen Seilstrahlen bis zu dieser Linie; dann erkennt man aus den Figuren 62 und 63 die folgenden Beziehungen: Es ist:

$$\triangle 1 ab \sim \triangle po 1$$

daher ist auch:

$$x_1 : \overline{ab} = H : \overline{O1}$$

oder:

$$x_1 : \overline{ab} = H : P_1$$

oder:

$$P_1 x_1 = \overline{ab} \cdot H.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber das statische Moment der Kraft  $P_1$  bezüglich des Drehungspunkts  $o$  dar, folglich ist auch die rechte Seite gleich diesem statischen Moment.

In gleicher Weise folgen aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $2bc$  und  $p12$  bzw.  $3cd$  und  $p23$  die Beziehungen:

$$P_2 x_2 = \overline{bc} \cdot H$$

und

$$P_3 x_3 = \overline{cd} \cdot H$$

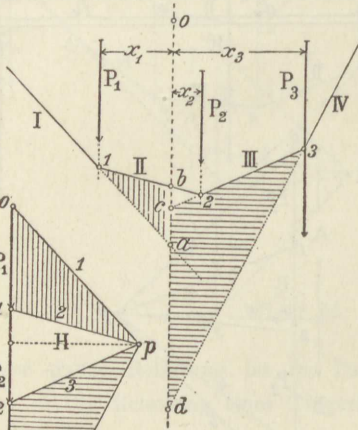
Man kann also schreiben:

$$P_1 x_1 : P_2 x_2 : P_3 x_3 = \overline{ab} \cdot H : \overline{bc} \cdot H : \overline{cd} \cdot H = \overline{ab} : \overline{bc} : \overline{cd}$$

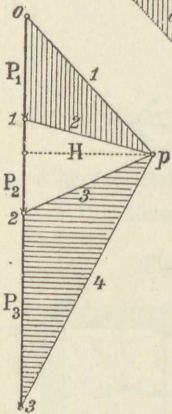
d. h. die statischen Momente der gegebenen Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  bezüglich  $o$  als Drehungspunkt verhalten sich wie die Abschnitte  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  und  $\overline{cd}$ . Diese Abschnitte nennt man die reduzierten statischen Momente, und zwar die auf den Polabstand  $H$  reduzierten statischen Momente der gegebenen Kräfte.

Das zu einer gegebenen Kraft  $P_1$  gehörige reduzierte statische Moment ergibt sich, wenn man die beiden auf  $P_1$  sich schneidenden Seilstrahlen mit der durch den Drehungspunkt gezogenen Parallelen zur Richtungslinie der Kraft zum Schnitt bringt. Will man das wirkliche statische Moment ermitteln, so hat man die Strecke  $\overline{ab}$  im Längenmaß, den Polabstand  $H$  im Kraftmaß auszudrücken; das Produkt der beiden Maßzahlen ist das statische Moment der Kraft  $P_1$ .

Figur 62.



Figur 63.



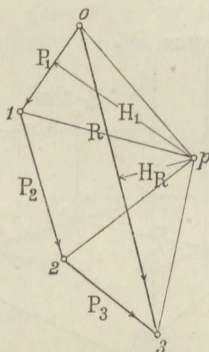


Kennt man von einer Kraft, z. B.  $P_1$ , die Drehungsrichtung ihres statischen Moments, so ist dies auch für die statischen Momente der übrigen Kräfte der Fall, vorausgesetzt daß diese Kräfte gleichen Richtungspfeil besitzen; denn ist  $a$  der Schnittpunkt des der Kraft  $P_1$  vorangehenden Seilstrahls,  $b$  jener des nachfolgenden mit der Hilfsgeraden  $od$ , so gibt die Strecke  $\overline{ab}$  das reduzierte statische Moment von  $P_1$  an, und zwar ist dieses linksdrehend; alle übrigen statischen Momente sind links- bzw. rechtsdrehend, je nachdem die sie darstellenden Strecken mit  $\overline{ab}$  gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

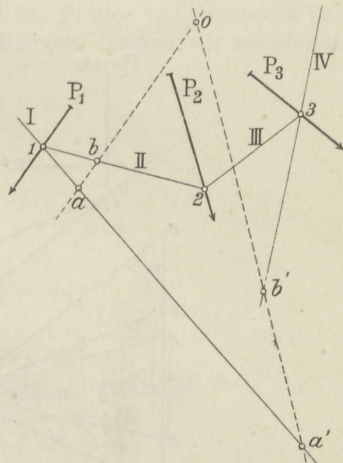
Die statischen Momente von  $P_2$  und  $P_3$ , dargestellt durch die Strecken  $\overline{bc}$  und  $\overline{cd}$ , sind also rechtsdrehend.

65. Aus der Figur 62 läßt sich auch das reduzierte statische Moment von mehreren aufeinanderfolgenden Kräften bzw. der Mittelkraft eines gegebenen Kräftesystems ablesen.

So stellt z. B. die Strecke  $\overline{ac}$  das statische Moment von  $P_1$  und  $P_2$  dar, und zwar ist dasselbe linksdrehend; durch die Strecke  $\overline{ad}$  ist endlich das statische Moment der Mittelkraft der drei Kräfte  $P_1$  bis  $P_3$  gegeben, dieses ist rechtsdrehend.



Figur 64.



Figur 65.

Für das Ablesen der reduzierten statischen Momente mehrerer aufeinanderfolgenden Kräfte kann man sich folgende Regel merken:

„Man bringt den der ersten Kraft vorangehenden und den der letzten Kraft nachfolgenden Seilstrahl mit der Hilfsgeraden durch den Drehungspunkt zum Schnitt. Die von den Schnittpunkten begrenzte Strecke stellt dann das auf den Polabstand reduzierte statische Moment der bezüglichen Kräfte dar.“

**b) Die Kräfte sind nicht parallel.**

66. Die Ermittlung des statischen Moments von nicht parallelen Kräften kann in ähnlicher Weise erfolgen wie in Nr. 64 und 65. Man zeichnet zunächst wieder Kräfte- und Seilvieleck.

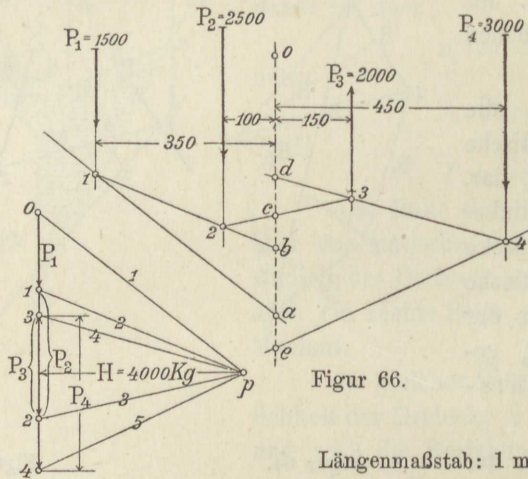
Ist  $o$  der gegebene Drehungspunkt, so schneidet eine Parallele durch  $o$  zu  $P_1$  auf den Seilstrahlen I und II die Punkte  $a$  und  $b$  aus, und es ist  $\overline{ab}$  das

auf den zu  $P_1$  gehörigen Polabstand  $H_1$  reduzierte statische Moment der Kraft  $P_1$ ; das wirkliche statische Moment ist also  $\overline{ab} \cdot H_1$ , dasselbe ist linksdrehend.

Eine Parallele zur Schlußlinie 0-3, d. h. zur Mittelkraftrichtung der gegebenen Kräfte liefert auf den Seilstrahlen I und IV die Punkte  $a'$  und  $b'$ , und es ist  $\overline{a'b'}$  das statische Moment des gegebenen Kräftesystems, reduziert auf den zur Mittelkraft  $R$  gehörigen Polabstand  $H_R$ . Das wirkliche Moment ist also gleich  $\overline{a'b'} \cdot H_R$ , und zwar ist dieses linksdrehend.

### c) Übungsaufgaben.

67. Aufgabe 23. Für das in Figur 66 dargestellte Kräftesystem ist das statische Moment jeder einzelnen Kraft sowie dasjenige der Mittelkraft bezüglich des Drehungspunkts  $o$  anzugeben.



Figur 66.

Längenmaßstab: 1 mm = 15 cm

Figur 67.

$$\overline{ab} = 130 \text{ cm}$$

$$\overline{bc} = 62,5 \text{ cm}$$

$$\overline{cd} = 75,0 \text{ cm}$$

$$\overline{de} = 337,5 \text{ cm}$$

$$\overline{ae} = 70,0 \text{ cm}$$

**Auflösung.** Konstruiert man Kräfte- und Seilviereck, so kann man die auf den Polabstand  $H$  reduzierten Momente aus der Figur 66 abgreifen:

das reduzierte Moment von  $P_1$  ist  $\overline{ab} = 130 \text{ cm}$  linksdrehend,

„ „ „ „  $P_2$  „  $\overline{bc} = 62,5 \text{ cm}$  „

„ „ „ „  $P_3$  „  $\overline{cd} = 75,0 \text{ cm}$  „

„ „ „ „  $P_4$  „  $\overline{de} = 337,5 \text{ cm}$  rechtsdrehend,

das Mittelkraftmoment ist  $\overline{ae} = 70 \text{ cm}$  rechtsdrehend.

Bei dem gewählten Kräftemaßstab von 1 mm = 150 kg beträgt der Polabstand  $H = 26,6 \text{ mm} = 4000 \text{ kg}$ . Daher haben die wirklichen statischen Momente die folgenden Werte:

das statische Moment von  $P_1$  ist  $130 \cdot 4000 = - 520\,000 \text{ kgcm}$

„ „ „ „  $P_2$  „  $62,5 \cdot 4000 = - 250\,000 \text{ kgcm}$

„ „ „ „  $P_3$  „  $75,0 \cdot 4000 = - 300\,000 \text{ kgcm}$

„ „ „ „  $P_4$  „  $337,5 \cdot 4000 = + 1\,350\,000 \text{ kgcm}$

das Mittelkraftmoment ist  $70,0 \cdot 4000 = + 280\,000 \text{ kgcm}$ .



Durch Rechnung ergeben sich für die einzelnen Momente und für das Mittelkraftmoment die folgenden Werte:

das statische Moment von  $P_1$  ist  $1500 \cdot 350 = - 525\,000$  kgcm  
 " " " "  $P_2$  "  $2500 \cdot 100 = - 250\,000$  kgcm  
 " " " "  $P_3$  "  $2000 \cdot 150 = - 300\,000$  kgcm  
 " " " "  $P_4$  "  $3000 \cdot 450 = + 1\,350\,000$  kgcm

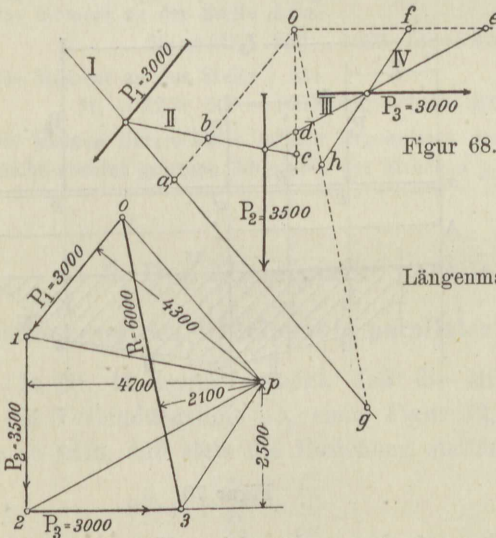
Das Mittelkraftmoment ist:

$$- 525\,000 - 250\,000 - 300\,000 + 1\,350\,000 = + 275\,000 \text{ kgcm.}$$

Die kleinen Unterschiede in den Ergebnissen der Zeichnung und Rechnung rühren von dem Fehler her, der durch Abgreifen der Strecken  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  usw. entsteht und nicht zu vermeiden ist.

**68. Aufgabe 24.** Für das in Figur 68 dargestellte Kräftesystem ist das statische Moment jeder einzelnen Kraft sowie das Mittelkraftmoment zu ermitteln.

**Auflösung.** Man konstruiert, siehe Figur 68 und 69, Kräfte- und Seilvieleck und mittels Parallelen durch den Drehungspunkt zu den entsprechenden Kräften die reduzierten statischen Momente.



Figur 68.

Figur 69.

Längenmaßstab: 1 mm = 15 cm

- $\overline{ab} = 108$  cm
- $\overline{cd} = 43$  cm
- $\overline{ef} = 155$  cm
- $\overline{gh} = 502$  cm

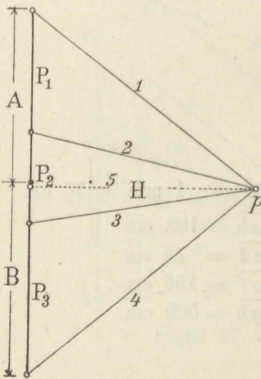
Man erhält für das Moment von  $P_1$  die Strecke  $\overline{ab} = 108$  cm,  
 als entsprechenden Polabstand die Länge  $H_1 = 4300$  kg  
 für das Moment von  $P_2$  die Strecke  $\overline{cd} = 43$  cm,  
 als entsprechenden Polabstand die Länge  $H_2 = 4700$  kg  
 für das Moment von  $P_3$  die Strecke  $\overline{ef} = 155$  cm,  
 als entsprechenden Polabstand die Länge  $H_3 = 2500$  kg  
 für das Mittelkraftmoment die Strecke  $\overline{gh} = 502$  cm,  
 als entsprechenden Polabstand die Länge  $H = 2100$  kg.

Die wirklichen statischen Momente sind demnach:

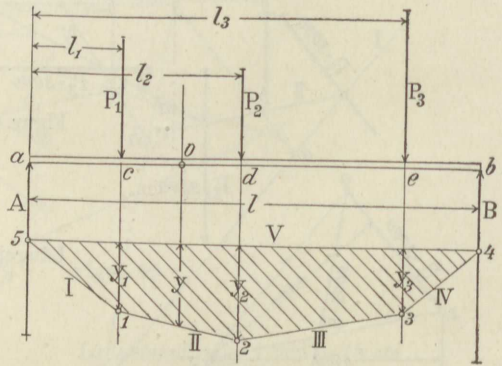
- für die Kraft  $P_1$  gleich  $\overline{ab} \cdot H_1 = 108 \cdot 4300 = 464\,400$  kgcm linksdrehend,
- " " "  $P_2$  gleich  $\overline{cd} \cdot H_2 = 43 \cdot 4700 = 202\,100$  kgcm "
- " " "  $P_3$  gleich  $\overline{ef} \cdot H_3 = 155 \cdot 2500 = 387\,500$  kgcm "
- für die Mittelkraft  $g \cdot h \cdot H = 502 \cdot 2100 = 1\,054\,200$  kgcm linksdrehend.

### d) Das Kräftesystem ist im Gleichgewicht.

69. Hat man ein im Gleichgewicht befindliches System paralleler Kräfte, wie dies z. B. der Fall ist bei einem durch äußere vertikale Kräfte belasteten Träger, insofern man die Stützenwiderstände als vertikal aufwärts gerichtete Kräfte mit in Betracht zieht, so ist die Ermittlung des statischen Moments der auf ein beliebiges Trägerstück wirkenden Kräfte besonders einfach und, wie sich später zeigen wird, auch sehr wichtig. Will man z. B. für den Punkt  $o$ , siehe Figur 70, das statische Moment der auf das Trägerstück  $ao$  wirkenden Kräfte bestimmen, so findet man hierfür die Strecke  $y$ , welche durch die den Punkt  $o$  enthaltende Vertikale aus der Begrenzung des Seilvielecks ausgeschnitten wird; denn betrachtet man die Kräfte in der Reihenfolge  $P_1, P_2, P_3, B, A$ , so wirken auf das Trägerstück  $ao$  die Kräfte  $A_1$  und  $P_1$ ; die der Kraft  $A$  vorangehende Seilvielecksseite ist  $V$ , die der Kraft  $P_1$  nachfolgende  $II$ , daher ist  $y$  das gesuchte auf den Polabstand  $H$  reduzierte statische Moment. Dasselbe Moment muß sich aber, da ja die beiden Trägerabschnitte einander Gleichgewicht



Figur 71.



Figur 70.

halten müssen, auch für die auf das rechtsseitige Trägerstück wirkenden Kräfte  $P_2, P_3$  und  $B$  ergeben, und dies ist auch der Fall, denn die der Kraft  $P_2$  vorangehende Seilvielecksseite ist  $II$ , die der Kraft  $B$  nachfolgende  $V$ , also ist  $y$  das gesuchte, auf den Polabstand  $H$  reduzierte statische Moment.

Mit Rücksicht auf das Vorangegangene erkennt man, daß im Punkte  $d$  die Trägerlänge  $ab$  in zwei Abschnitte geteilt wird, für welche das statische Moment der auf die bezüglichen Abschnitte wirkenden Kräfte den größtmöglichen Wert annimmt.

### e) Übungsaufgabe.

70. **Aufgabe 25.** Für das in Figur 70 dargestellte Kräftesystem ist das statische Moment der auf den Träger wirkenden Kräfte für jeden Angriffspunkt der einzelnen Kräfte als Drehungspunkt zu ermitteln.



Es ist, wenn als Kräftemaßstab 1 mm = 150 kg gewählt ist:

$$P_1 = 1600 \text{ kg} \quad P_2 = 1200 \text{ kg} \quad P_3 = 2000 \text{ kg}$$

$$l_1 = 1,2 \text{ m} \quad l_2 = 2,8 \text{ m} \quad l_3 = 5 \text{ m} \quad l = 6 \text{ m.}$$

**Auflösung.** Mißt man die Längen  $y_1, y_2, y_3$ , so erhält man die Werte:

$$y_1 = 90 \text{ cm} \quad y_2 = 125,0 \text{ cm} \quad y_3 = 85,0 \text{ cm}$$

der Polabstand  $H$  beträgt = 30 mm, also 4500 kg.

Es ist demnach das Moment an der Stelle  $a = 0$ , an der Stelle  $c: M_1 = 90 \cdot 3000 = 270\,000 \text{ kgcm}$ , an der Stelle  $d: M_2 = 125 \cdot 3000 = 375\,000 \text{ kgcm}$ , an der Stelle  $e:$

$$M_3 = 85 \cdot 3000 = 255\,000 \text{ kgcm},$$

an der Stelle  $b = 0$ .

Durch Rechnung ergeben sich die Momente an den oben genannten Trägerstellen wie folgt:

Man berechnet sich zunächst den Stützenwiderstand  $A$  aus der Gleichung:

$$A = \frac{1600 \cdot 4,8 + 1200 \cdot 3,2 + 2000 \cdot 1,0}{6} = 2253 \text{ kg.}$$

Nummehr ergibt sich das Moment an der Stelle  $c$  aus der Gleichung:

$$M_1 = 2253 \cdot 120 = 270\,399 \text{ kgcm.}$$

Das Moment an der Stelle  $d$  ist:

$$M_2 = 2253 \cdot 280 - 1600 \cdot 160 = 374\,932 \text{ kgcm.}$$

Das Moment an der Stelle  $e$  ist:

$$M_3 = 2253 \cdot 500 - 1600 \cdot 380 - 1200 \cdot 220 = 256\,665 \text{ kgcm.}$$

Die kleinen Unterschiede in den Ergebnissen der Zeichnung und Rechnung rühren von dem nicht absolut genauen Abgreifen der Strecken  $y_1, y_2$  und  $y_3$  her.

## 9. Der Mittelpunkt paralleler Kräfte.

### a) Bestimmung des Mittelpunkts paralleler Kräfte durch Zeichnung.

71. In Nr. 43 wurde gezeigt, daß die Mittelkraft von zwei parallelen Kräften die Verbindungslinie  $\overline{ab}$ , siehe Figur 72, der Angriffspunkte in einem Punkte  $c$  so trifft, daß stets die Beziehung stattfindet:

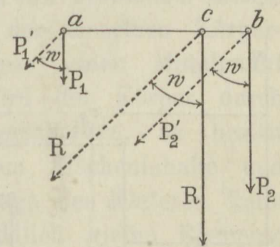
$$27) \dots \frac{P_1}{P_2} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ca}}$$

Dreht man nun jede Kraft in dem nämlichen Sinne um einen beliebigen Winkel  $w$ , so wird die Mittelkraft in ihrer neuen Lage gleichfalls durch den Punkt  $c$  gehen, weil ja das Verhältnis:

$$\frac{P_1}{P_2} \text{ und demnach auch jenes von } \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$$

unverändert geblieben ist.

Sind  $n$  parallele Kräfte gegeben, so kann man davon  $n - 1$  zu einer Mittelkraft vereinigen und schließlich diese mit der  $n$ ten Kraft zu einer Gesamtmittelkraft aller Kräfte zusammenfassen. Diese trifft dann die Verbindungslinie der Angriffspunkte der zugehörigen Kräfte etwa in einem Punkte  $m$ , der bei einer Drehung des Kräftesystems unveränderlich bleibt und der der Mittelpunkt des Kräftesystems heißt.

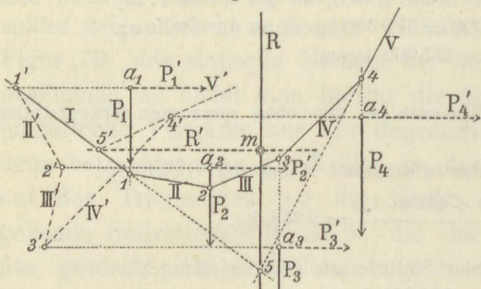


Figur 72.

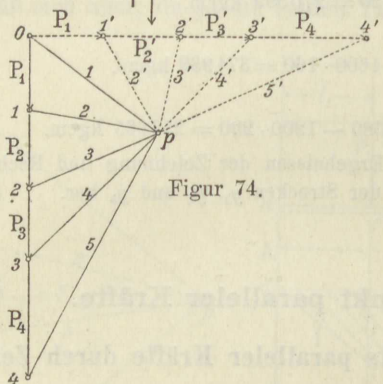
Die Konstruktion des Mittelpunkts eines Systems paralleler Kräfte folgt unmittelbar aus dem vorangehenden.

72. Sind, siehe Figur 73 und 74,  $P_1$  bis  $P_4$  die gegebenen Kräfte, so zeichnet man zunächst für die gegebenen Richtungslinien die Mittelkraft  $R$ , dreht hierauf die Kräfte um ihre Angriffspunkte im nämlichen Sinne um ein und denselben Winkel, am bequemsten um  $90^\circ$ , und zeichnet für die neue Lage der Richtungslinien wiederum die Mittelkraft, sie heiße jetzt  $R'$ , dann schneiden sich die beiden Mittelkräfte  $R$  und  $R'$  im gesuchten Kräfte­mittelpunkt  $m$ .

Figur 73.



**Anmerkung 16.** Zweckmäßig ist es, den ursprünglich gewählten Pol für die beiden Seilvierecke beizubehalten.

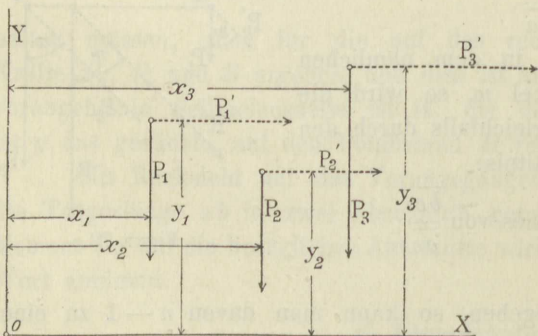


Figur 74.

**b) Bestimmung des Mittelpunkts paralleler Kräfte durch Rechnung.**

73. Bei der Bestimmung des Mittelpunkts paralleler Kräfte durch Rechnung wählt man in der Ebene der Kräfte einen beliebigen Punkt  $o$ , siehe Figur 75, als Drehungspunkt, verschafft sich die Abstände  $x_1$  bis  $x_3$ , ebenso  $y_1$  bis  $y_3$  der Kräfte vor und nach der Drehung von diesem Punkte und stellt für die beiden Lagen des Kräftesystems die Momentengleichung auf.

Man erhält:



Figur 75.

$$28) \dots Rx = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$$

$$29) \dots R'y = P_1'y_1 + P_2'y_2 + P_3'y_3$$

und hieraus:

$$30) \dots x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

$$31) \dots y = \frac{P_1'y_1 + P_2'y_2 + P_3'y_3}{P_1' + P_2' + P_3'}$$

Mittels der Größen  $x$  und  $y$  ist die Lage des Mittelpunkts des Kräftesystems bestimmt.



In den Gleichungen 28 und 29 kann natürlich auch das Minuszeichen auftreten, und dies ist der Fall, wenn linksdrehende, d. h. negative statische Momente vorhanden sind.

### c) Übungsaufgabe.

74. Aufgabe 26. Es sei:

$$\begin{array}{lll} P_1 = 600 \text{ kg} & P_2 = 1000 \text{ kg} & P_3 = 1500 \text{ kg} \\ x_1 = 40 & x_2 = 60 & x_3 = 80 \\ y_1 = 60 & y_2 = 40 & y_3 = 80 \end{array}$$

Auflösung. Es ist:

$$\begin{aligned} Rx &= 600 \cdot 40 + 1000 \cdot 60 + 1500 \cdot 80 \\ Ry &= 600 \cdot 60 + 1000 \cdot 40 + 1500 \cdot 80 \end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned} x &= \frac{600 \cdot 40 + 1000 \cdot 60 + 1500 \cdot 80}{600 + 1000 + 1500} = \frac{204000}{3100} = 65,8 \\ y &= \frac{600 \cdot 60 + 1000 \cdot 40 + 1500 \cdot 80}{600 + 1000 + 1500} = \frac{196000}{3100} = 63,1 \end{aligned}$$

## C. Der Schwerpunkt.

### 1. Vom Schwerpunkt im allgemeinen.

75. Jeder Körper übt unter dem Einflusse der Anziehungskraft der Erde auf eine horizontale Unterlage einen Druck aus, welchen man das Gewicht des Körpers nennt. Der Mittelpunkt dieses Drucks heißt der Schwerpunkt des Körpers. Zur Bestimmung der Lage des Schwerpunkts denkt man sich den Körper in endlich oder unendlich kleine Elemente zerlegt, deren Schwerpunkte entweder bekannt sind oder sich doch in einfacher Weise bestimmen lassen. Bringt man in diesen Schwerpunkten die Gewichte der einzelnen Körperelemente als parallele Kräfte an, so besitzen diese einen Mittelpunkt und letzterer ist der Schwerpunkt des Körpers. Wird der Körper durch Ebenen in parallele und recht dünne Streifen zerschnitten, so besitzt jeder dieser Streifen ein Gewicht entsprechend seinem Flächeninhalte und demnach einen Schwerpunkt. Zur Bestimmung der Lage des letzteren kann man sich die Fläche ebenfalls in endlich oder unendlich kleine Elemente zerlegt und in deren Schwerpunkten Kräfte proportional den Flächeninhalten dieser Elemente angebracht denken. Der Mittelpunkt dieser Kräfte ist der Schwerpunkt der Fläche.

Teilt man endlich eine Fläche in sehr schmale Streifen, so können letztere als Linien von einem bestimmten Gewichte aufgefaßt werden; eine solche Linie besitzt dann ebenfalls einen Schwerpunkt. Im folgenden soll nur von der Bestimmung des Schwerpunkts von Linien und ebenen Flächen gesprochen werden

## 2. Der Schwerpunkt von Linien.

### a) Schwerpunkt einer geraden Linie.

76. Der Mittelpunkt  $s$  einer Strecke ist ihr Schwerpunkt, denn die Summe der links von  $s$  liegenden Schwerkkräfte ist gleich jener der rechts von  $s$  liegenden.

### b) Schwerpunkt einer gebrochenen Linie.

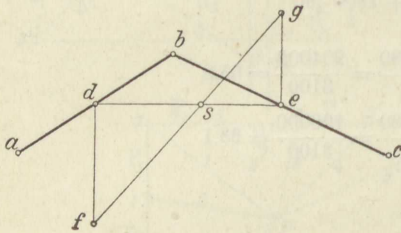
77. Die Schwerpunkte von  $\overline{ab}$  und  $\overline{bc}$ , siehe Figur 76, sind die Mittelpunkte  $d$  und  $e$  dieser Strecken. Denkt man sich also in den Punkten  $d$  und  $e$  parallele Kräfte wirkend, proportional den Längen  $\overline{ab}$  und  $\overline{bc}$ , so geht deren Mittelkraft durch den Schwerpunkt  $s$  des Linienzugs  $abc$ , und zwar liegt  $s$  auf der Verbindungsline  $de$ , so daß:

$$\frac{sd}{se} = \frac{bc}{ab} = \frac{be}{ad}$$

ist. Macht man also:

$$df = be \text{ und } eg = ad$$

so schneidet  $gf$  auf  $de$  den gesuchten Schwerpunkt  $s$  aus.



Figur 76.

### c) Schwerpunkt eines mehrfach gebrochenen Linienzugs.

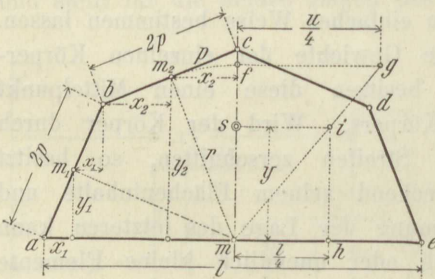
78. Ist z. B.  $abcde$  ein halbes regelmäßiges Vieleck, siehe Figur 77, so ist klar, daß der Schwerpunkt  $s$  auf der Mittellinie  $mc$  liegt. Denkt man sich nun in den Mittelpunkten der einzelnen Seiten  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$ ,  $\overline{de}$  Kräfte proportional den Längen der einzelnen Seiten angebracht, so findet man die Lage von  $s$  entweder durch Konstruktion mittels Kräfte- und Seilvielecks oder aber wie folgt:

Bezeichnet etwa  $p$  die Länge einer halben Vielecksseite und  $R$  die Mittelkraft der vorhandenen Schwerkkräfte, so besteht die Beziehung:

$$Ry = \sum_1^n 2py_n$$

und

$$y = \frac{\sum_1^n 2py_n}{R}$$



Figur 77.

Nun ist aber, siehe Figur 77,

$$p : r = x_n : y_n$$

und

$$y_n = \frac{r}{p} x_n$$



oder

$$y = \frac{\sum_1^n 2p \frac{r}{p} x_n}{R}$$

$$= \frac{r}{R} \sum_1^n 2x_n$$

Aus der Figur 77 ist zu entnehmen, daß

$$\sum_{-1}^n 2x_n = l$$

und

$$R = \sum 2p = u$$

ist, unter  $u$  den Umfang des Vielecks  $abcde$  verstanden.

Man erhält also

$$32) \dots y = \frac{r}{u} l$$

welcher Ausdruck die folgende Konstruktion bedingt:

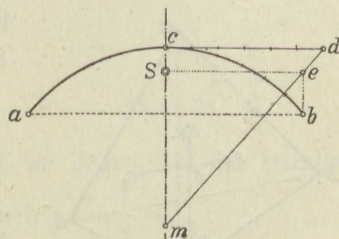
Man macht  $\overline{mf} = r$ , s. Figur 77, zieht durch  $f$  eine Parallele zu  $me$ , trägt

$$\overline{fg} = \frac{1}{4} u$$

ab und zieht  $mg$ ; macht man endlich  $\overline{mh} = \frac{1}{4} l$ , zieht  $hi$  parallel zu  $mc$  bis zum Schnitt  $i$  mit  $mg$ , so trifft die Parallele durch  $i$  zu  $me$  die Linie  $mc$  im Schwerpunkt  $s$  des Linienzugs  $abcde$ .

#### d) Schwerpunkt eines Kreisbogens.

79. Für den Kreisbogen, siehe Figur 78, kann man die gleiche Konstruktion verwenden, wie in Nr. 78. Man zieht also die Halbierungslinie  $mc$  des Zentriwinkels  $amb$  und in  $c$  die Tangente an den Kreisbogen; macht man nun die Länge  $\overline{cd}$  gleich dem Bogen  $cb$ , zieht  $md$  und durch  $b$  die Parallele  $be$  zu  $mc$  bis zum Schnittpunkt  $e$  mit  $md$ , so trifft die Parallele durch  $e$  zur Tangente  $cd$  die  $mc$  im gesuchten Schwerpunkt  $s$  des Kreisbogens  $abc$ .



Figur 78.

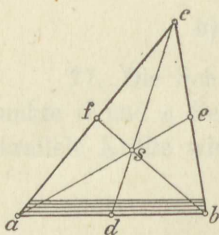
**Anmerkung 17.** Bezeichnet  $u$  die Länge des Bogens  $ab$ ,  $l$  die der Sehne  $\overline{ab}$  und  $r$  den Kreisradius, so ist die Entfernung  $y$  des Schwerpunkts  $s$  vom Kreismittelpunkt  $m$ :

$$33) \dots y = \frac{r l}{u}$$

### 3. Der Schwerpunkt ebener Flächen.

#### a) Schwerpunkt eines Dreiecks.

80. Denkt man sich das Dreieck  $abc$ , siehe Figur 79, parallel zu einer Seite, etwa  $ab$ , in sehr schmale Streifen zerlegt, so liegt für jeden Streifen der zugehörige Schwerpunkt in der Mitte dieses Streifens. Die Verbindungslinie dieser Punkte ist die zur Seite  $ab$  gehörige Mittellinie.



Figur 79.

Auf dieser Linie wird also auch der Schwerpunkt des Dreiecks liegen, desgleichen liegt er aber auch auf den beiden anderen Mittellinien  $ae$  und  $bf$ , ist also der Schnittpunkt  $s$  der drei Mittellinien.

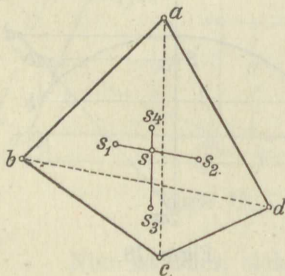
**Anmerkung 18.** Bekanntlich teilt der Schnittpunkt  $s$  der drei Mittellinien eines Dreiecks jede dieser Linien im Verhältnis 1:2, demgemäß liegt der Schwerpunkt eines Dreiecks von jeder Seite um den dritten Teil der zur letzteren gehörigen Höhe entfernt.

81. Jede Mittellinie teilt das Dreieck in zwei gleich schwere Hälften. Diese Mittellinien führen deshalb auch die Bezeichnung „Schwerachsen“. Jede gerade Linie, welche eine Fläche in zwei flächengleiche und demnach auch gleich schwere Teile teilt, ist eine Schwerachse und auf ihr liegt der Schwerpunkt der Fläche. Besitzt eine Fläche mehrere solcher Schwerachsen, so schneiden sich diese stets im Schwerpunkt der Fläche.

Für jede Fläche, welche einen Mittelpunkt besitzt, ist dieser Mittelpunkt der Schwerpunkt, z. B. für ein Parallelogramm, ein Rechteck oder Quadrat, ein regelmäßiges Vieleck, eine Kreisfläche, eine elliptische Fläche usw.

#### b) Schwerpunkt eines Vierecks.

82. Man zerlegt das Viereck  $abcd$ , siehe Figur 80, durch die Diagonalen  $ac$  und  $bd$  je in zwei Dreiecke und bestimmt nach der vorangehenden Nr. 80 die Schwerpunkte  $s_1, s_2$  und  $s_3, s_4$ . Dann liegt der Schwerpunkt  $s$  des Vierecks  $abcd$  im Schnittpunkt der Verbindungslinien  $s_1, s_2$  und  $s_3, s_4$ .



Figur 80.

#### c) Schwerpunkt eines Trapezes.

83. Eine Schwerachse des Trapezes erhält man in der Verbindungslinie  $hi$  der Mittelpunkte  $h$  und  $i$  der beiden parallelen Seiten. Zerlegt man das Trapez außerdem in das Parallelogramm  $adce$  und das Dreieck  $ecb$ , so ist die Verbindungslinie  $fg$  der Schwerpunkte dieser Figuren eine weitere Schwerachse des Trapezes und schneidet auf  $hi$  den gesuchten Schwerpunkt  $s$  aus.

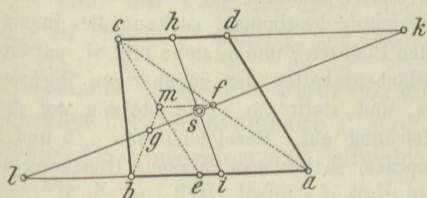


Aus der Figur 81 erkennt man unmittelbar die Ähnlichkeit der Dreiecke  $fmg$  und  $lbg$ ; hieraus folgt aber die Beziehung:

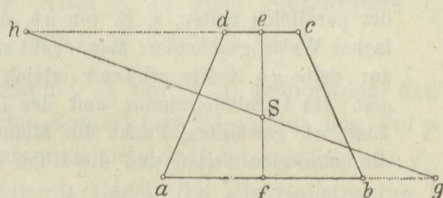
$$\overline{mg} : \overline{gb} = \overline{fm} : \overline{bl}$$

oder da  $\overline{gb} = 2\overline{mg}$  ist, auch  $\overline{bl} = 2\overline{mf} = \overline{dc}$

Nun ist aber auch  $\triangle afl \sim \triangle cfk$ , daher  $\overline{ck} = \overline{al}$ , woraus ferner folgt, daß  $\overline{dk} = \overline{ab}$  ist. Man erhält somit die folgende einfache Konstruktion des Schwerpunkts eines Trapezes  $abcd$ . Man zieht, siehe Figur 82, die Verbindungslinie  $ef$  der Mittelpunkte der parallelen Seiten und verlängert die letzteren nach entgegengesetzten Richtungen und zwar jede Seite um die Länge der anderen; die Verbindungslinie  $hg$  der so sich ergebenden Punkte  $h$  und  $g$  schneidet  $ef$  im Schwerpunkt  $s$  des Trapezes.



Figur 81.

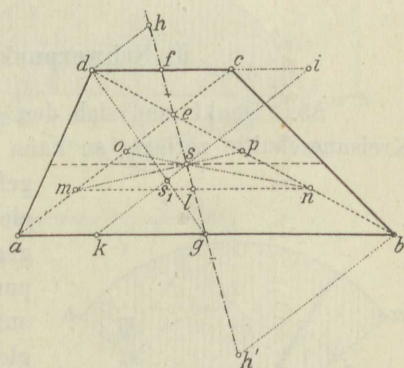


Figur 82.

84. Die in Nr. 83 am Schlusse angeführte Konstruktion ist außerordentlich einfach und zweckmäßig. Der einzige Nachteil ist nur der, daß bei beschränkter Zeichenfläche die Punkte  $h$  und  $g$  unzugänglich werden können. Durch einfache geometrische Betrachtungen lassen sich nun eine ganze Reihe von Schwerpunktskonstruktionen ableiten, welchen der eben berührte Nachteil nicht zukommt. Im folgenden sollen einige dieser Konstruktionen angegeben werden:

1. Zieht man die Mittellinie  $gf$ , siehe Figur 83, die beiden Diagonalen, sowie durch  $d$  oder  $b$  eine Parallele zu einer der Diagonalen, z. B.  $ac$ , so liegt der Schwerpunkt  $s$  von den parallelen Seiten  $ab$  und  $dc$  um ein Drittel der Strecken  $gh$  bzw.  $fh'$  entfernt, d. h. es ist:

$$\overline{gs} = \frac{1}{3}\overline{gh}; \overline{fs} = \frac{1}{3}\overline{fh'}$$



Figur 83.

Denn ist  $s_1$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $abd$ , so liegt  $s$  auf der Parallelen durch  $s_1$  zu  $ac$  und es ist, da  $\overline{s_1g} = \frac{1}{3}\overline{dg}$  ist, auch  $\overline{gs} = \frac{1}{3}\overline{gh}$

2. Denkt man sich die Parallele durch  $s$  zu  $ac$  verlängert bis zu den Schnittpunkten  $i$  und  $k$  mit den parallelen Seiten, so ist,  $\overline{ci} = \overline{ak} = x$  gesetzt,  $2\overline{gk} = \overline{di}$  oder:

$$\overline{ab} - 2x = \overline{dc} + x, \text{ oder } x = \frac{\overline{ab} - \overline{dc}}{3}$$

Macht man also  $\overline{ak} = \overline{ci}$  gleich dem dritten Teil der Differenz der beiden parallelen Seiten, so geht die Verbindungslinie  $ki$  durch den Schwerpunkt  $s$ .

3. Macht man  $\overline{sl} = \frac{1}{2} \overline{es}$  und zieht durch  $l$  die Linie  $mn$  parallel zu  $ab$ , so ist  $s$  auch der Schwerpunkt des Dreiecks  $emn$ , daher ist auch  $\overline{oe} = \overline{om}$  und  $\overline{pe} = \overline{pn}$ , demnach auch  $\overline{am} = \overline{ec}$  und  $\overline{bn} = \overline{de}$ .

Man braucht also nur, um den Schwerpunkt  $s$  zu konstruieren, die beiden Diagonalen des Trapezes zu zeichnen und die Strecken  $\overline{ec}$  und  $\overline{de}$  bzw. nach  $\overline{am} = \overline{nb}$  abzutragen,  $mn$  zu zeichnen und den Schwerpunkt des Dreiecks  $emn$  zu bestimmen.

**Anmerkung 19.** Will man die Entfernung  $y$  des Schwerpunkts  $s$  des Trapezes von einer der parallelen Seiten, z. B. von  $ab$ , durch Rechnung bestimmen, so kann dies in einfacher Weise geschehen: Man denkt sich in den Punkten  $f$  und  $g$ , siehe Fig. 81, parallel zur Seite  $\overline{ab}$  Kräfte wirkend, gleich den Flächeninhalten der zugehörigen Figuren, also des Parallelogramms und des Dreiecks, und stellt für einen beliebig auf der Linie  $ab$  gewählten Punkt die Momentengleichung auf. Bezeichnen nun  $a$ ,  $b$  und  $h$  die parallelen Seiten und die Höhe des Trapezes, so hat man folgende Gleichungen:

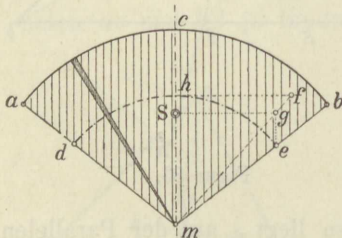
$$\frac{(a+b)h}{2} y = bh \frac{h}{2} + \frac{(a-b)h}{2} \frac{h}{3}$$

daher:

$$34) \dots y = \frac{bh \frac{h}{2} + \frac{(a-b)h}{2} \frac{h}{3}}{\frac{(a+b)h}{2}} = \frac{a+2b}{a+b} \frac{h}{3}$$

#### d) Schwerpunkt eines Kreisabschnitts.

85. Denkt man sich den Kreisabschnitt, siehe Figur 84, in sehr kleine Kreisabschnitte zerlegt, so kann jeder dieser Abschnitte als ein Dreieck aufgefaßt werden, dessen Grundlinie das Bogenelement und dessen Höhe der Halbmesser des gegebenen Kreisabschnitts ist. Die Schwerpunkte aller dieser Abschnitte liegen daher auf einem Kreisbogen  $de$ , dessen Halbmesser gleich zwei Drittel des gegebenen Halbmessers ist. Der Schwerpunkt  $s$  dieses Kreisbogens, der nach Nr. 79 konstruiert werden kann, ist zugleich der Schwerpunkt des gegebenen Kreisabschnitts.



Figur 84.

**Anmerkung 20.** Bezeichnet  $u$  die Länge des Bogens  $acb$ ,  $l$  die der Sehne  $\overline{ab}$  und  $r$  den Halbmesser des Kreisabschnitts, so ist die Entfernung  $y$  des Schwerpunkts  $s$  vom Mittelpunkte  $m$ :

$$35) \dots y = \frac{2}{3} \frac{rl}{u}$$

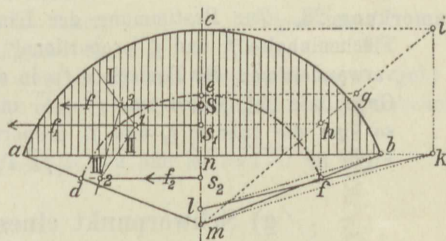


e) Schwerpunkt eines Kreisabschnitts.

86. Ermittelt man die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  des Kreisabschnitts  $macb$  und des Dreiecks  $mab$ , siehe Figur 85, so kann man sich in  $s_1$  und  $s_2$  parallele Kräfte wirkend denken, proportional den Inhalten  $f_1$  und  $f_2$  der zugehörigen Flächen. Die in  $s_1$  wirkende Kraft ist Mittelkraft von zwei Seitenkräften, von welchen die eine Kraft in  $s_2$  proportional dem Flächeninhalt  $f_2$  des Dreiecks  $mab$ , die andere aber proportional dem Inhalt  $f$  des Kreisabschnitts im Schwerpunkt  $s$  dieser Fläche angreift.

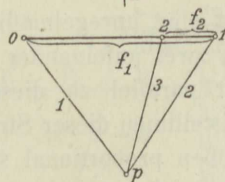
Man hat also die in  $s_1$  angreifende Kraft  $f_1$  in zwei Seitenkräfte  $f_2$  und  $f$  zu zerlegen, wobei  $f_2$  der Größe und Lage nach gegeben ist.

Macht man, siehe Figur 86, die Strecken  $\overline{0 \cdot 1}$  und  $\overline{2 \cdot 1}$  proportional den Maßzahlen der Flächeninhalte  $f_1$  und  $f_2$ , siehe Anmerkung 21, wählt den Pol  $p$  beliebig und konstruiert das Seilvieleck, indem man auf der Richtungslinie von  $f_1$ , siehe Figur 85, den Punkt 1 beliebig annimmt, durch ihn die Seilstrahlen I und II parallel zu den Polstrahlen 1 und 2, siehe Figur 86, zeichnet und durch den Schnittpunkt 2 des Seilstrahles II mit der Richtungslinie  $f_2$  den Seilstrahl III parallel zum Polstrahl 3 zieht, so schneiden sich III und I in einem Punkt 3 der Richtungslinie von  $f$ ; letztere trifft die  $mc$  im Schwerpunkte  $s$  des Kreisabschnitts.



Figur 85.

**Anmerkung 21.** Um in einfacher Weise die Strecken  $\overline{0 \cdot 1}$  und  $\overline{2 \cdot 1}$  proportional den Maßzahlen der Flächeninhalte  $f_1$  und  $f_2$  zu erhalten, hat man nur zu bedenken, daß, da die Strecke  $\overline{eg}$  gleich dem Bogen  $ef$  ist, auch die Strecke  $\overline{ci}$  gleich dem Bogen  $cb$  sein muß. Der Inhalt  $f_1$  des Kreisabschnitts ist daher gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks  $mci$ . Verwandelt man nun das Dreieck  $mnb$  in ein solches, das



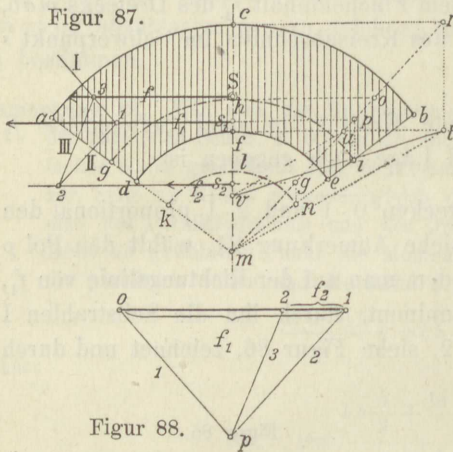
Figur 86.

mit dem Dreieck  $mci$  die gleiche Grundlinie hat, was dadurch geschehen kann, daß man  $ik$  parallel  $mc$  und durch  $b$  die Parallele  $bl$  zu  $mk$  zieht, dann ist  $\triangle mnb$  gleich  $\triangle nlk$ , und es verhalten sich nun die Höhen  $\overline{mc}$  und  $\overline{ln}$  zueinander wie  $f_1 : f_2$ . Man braucht also in Figur 86 die Strecken  $\overline{0 \cdot 1}$  und  $\overline{2 \cdot 1}$  bzw. nur gleich  $mc$  und  $nl$  abzutragen.

**Anmerkung 22.** Der Schwerpunkt  $s$  liegt annähernd und für viele praktische Zwecke genau genug um zwei Fünftel der Pfeilhöhe  $\overline{nc}$  von der Sehne  $\overline{ab}$  entfernt.

f) Schwerpunkt eines Ringstücks.

87. Für das Ringstück kann der Schwerpunkt in ganz ähnlicher Weise bestimmt werden wie für den Kreisabschnitt; man verschafft sich nämlich die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  der Kreisabschnitte  $macb$  und  $mdfe$ , siehe Figur 87. In  $s_1$  kann man sich dann wieder eine Kraft  $f_1$  proportional dem Flächeninhalt von  $macb$  und in  $s_2$  eine Kraft  $f_2$  proportional dem Flächeninhalt von  $mdfe$  wirkend denken; die Kraft  $f_1$  ist Mittelkraft von den Seitenkräften  $f_2$  und  $f$ , wenn unter  $f$  die im Schwerpunkt  $s$  des Ringstücks angreifende Kraft proportional dem Flächeninhalt des Ringstücks verstanden ist.



Macht man also, siehe Figur 88, die Strecken  $\overline{0 \cdot 1}$  und  $\overline{2 \cdot 1}$  gleich  $f_1$  und  $f_2$ , so findet man wie in Nr. 86 den Punkt 3 des Seilvielecks, wenn man durch den Punkt 1 auf  $f_1$  die Seilstrahlen I und II parallel zu den Polstrahlen 1 und 2 und durch 2 auf  $f_2$  den Seilstrahl III parallel zum Polstrahl 3 zieht; durch 3 geht  $f$  hindurch und liefert auf der Linie  $mc$  den Schwerpunkt  $s$  des Ringstücks.

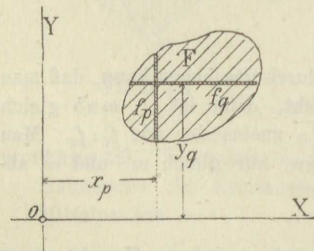
Figur 88.

**Anmerkung 23.** Zur Bestimmung der Längen  $\overline{0 \cdot 1}$  und  $\overline{1 \cdot 2}$  berücksichtigt man, daß die Flächeninhalte  $f_1$  und  $f_2$  proportional sind den Inhalten der Dreiecke  $mcr$  und  $mfu$ ; verwandelt man das Dreieck  $mfu$  in ein solches, das mit dem Dreieck  $mcr$  die gleiche Grundlinie hat, indem man  $\overline{ft} = \overline{cr}$  macht und durch  $u$  die Parallele  $uv$  zu  $mt$  zieht, so sind die Inhalte  $f_1$  und  $f_2$  proportional den Längen  $\overline{mc}$  und  $\overline{fv}$ ; es ist somit in Figur 88  $\overline{0 \cdot 1} = \overline{cm}$  und  $\overline{2 \cdot 1} = \overline{fv}$  abzutragen.

g) Schwerpunkt einer unregelmäßigen Figur.

88. Ist eine unregelmäßig begrenzte Figur  $F$  gegeben, siehe Figur 89, so wählt man zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen  $X$  und  $Y$  und zerlegt die Figur parallel zu diesen Achsen in sehr schmale Streifen  $f_q$  und  $f_p$ .

Die Mittellinien dieser Streifen nimmt man als Richtungslinien von Kräften an, deren Größen proportional sind den Längen dieser Linien. Für die beiden Kräftesysteme bestimmt man je die Mittelkraft. Beide Mittelkräfte schneiden sich im Schwerpunkt der Figur. Bezeichnen  $x$  und  $y$  die Abstände des Schwerpunkts von den Achsen  $Y$  und  $X$ , so erhält man für  $x$  und  $y$  die Beziehungen:



Figur 89.

$$Fx = \sum f_p x_p \quad Fy = \sum f_q y_q$$

daher ist:

$$36) \dots x = \frac{\sum f_p x_p}{F}$$

und

$$37) \dots y = \frac{\sum f_q y_q}{F}$$



**Anmerkung 24.** Der Ausdruck  $\sum f_p x_p$  bedeutet die Summe der Produkte  $f_p x_p$ , d. h. es ist:

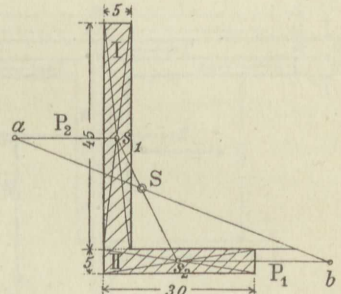
$$38) \dots \sum f_p x_p = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots$$

$$39) \dots \sum f_q y_q = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \dots$$

### h) Übungsaufgaben.

**89. Aufgabe 27.** Für den in Figur 90 gezeichneten Querschnitt ist der Schwerpunkt zu ermitteln.

**Auflösung.** Teilt man, wie Figur 90 zeigt, den Querschnitt in die beiden Rechtecke I und II, so verhalten sich deren Inhalte in Rücksicht auf die beigesetzten Maßzahlen wie 3 : 2; bestimmt man also die Schwerpunkte  $s_1$  und  $s_2$  dieser Rechtecke, so liegt der Schwerpunkt  $s$  auf der Verbindungslinie  $s_1 s_2$  und teilt letztere im Verhältnis 2 : 3, so daß  $s_1 s : s s_2 = 2 : 3$  ist. Man macht also  $s_1 a = 2$  und  $s_2 b = 3$  und zeichnet  $ab$ .



Figur 90.

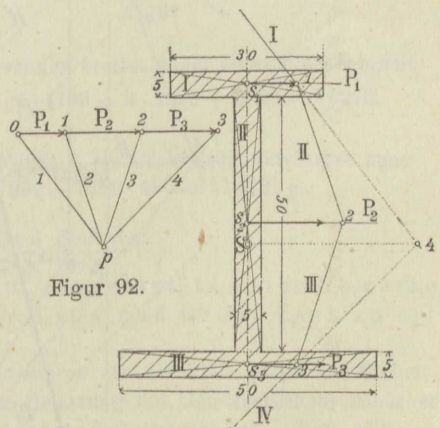
**90. Aufgabe 28.** Für den in Figur 91 gezeichneten Querschnitt ist der Schwerpunkt zu konstruieren.

**Auflösung.** Der Schwerpunkt  $s$  liegt auf der Symmetrieachse des Querschnitts. Zerlegt man diesen nun in die Rechtecke I, II, III, bestimmt die Schwerpunkte  $s_1, s_2$  und  $s_3$  der letzteren und bringt in ihnen als Angriffspunkte die parallelen Kräfte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  proportional den Maßzahlen der Flächeninhalte der betreffenden Rechtecke an, so geht die Mittelkraft dieser Kräfte, siehe Figur 91 und 92, durch den Schwerpunkt  $s$  des Querschnitts. Es ist im vorliegenden Falle:

$$P_1 = 3, P_2 = P_3 = 5$$

**91. Aufgabe 29.** Für den in Figur 93 gezeichneten Querschnitt einer Stützmauer ist der Schwerpunkt zu ermitteln.

**Auflösung.** a) Zeichnerische Bestimmung des Schwerpunkts. Man zerlegt den Querschnitt in die Flächenanteile I, II, III und IV, bestimmt deren Schwerpunkte  $s_1, s_2, s_3$  und  $s_4$ . Bringt man nun in letzteren parallele Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  proportional den Maßzahlen der Flächeninhalte der Teile I bis IV an, bestimmt deren Mittelkraft  $R$ , siehe Figur 93 und 94, so geht letztere durch den Schwerpunkt  $S$ . Dreht man nun das Kräftesystem um einen beliebigen Winkel und bestimmt nunmehr die Mittelkraft  $R'$ , siehe

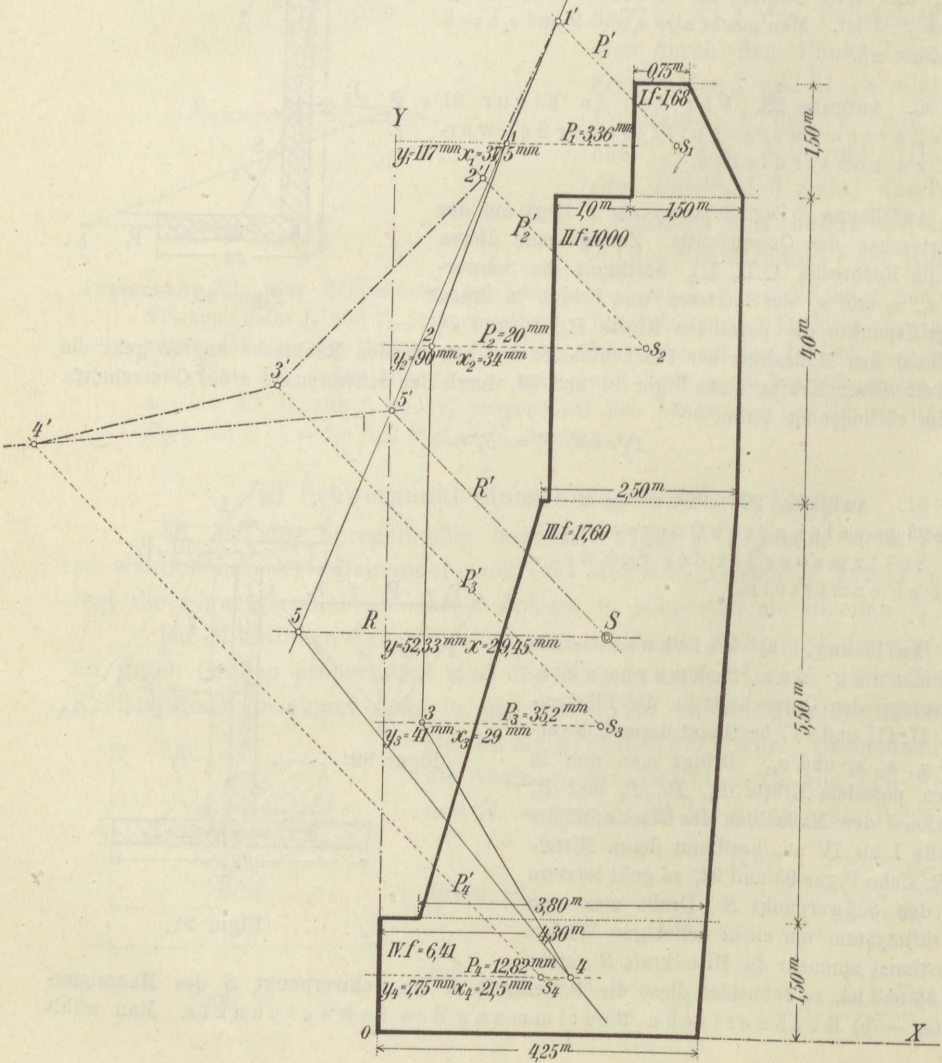
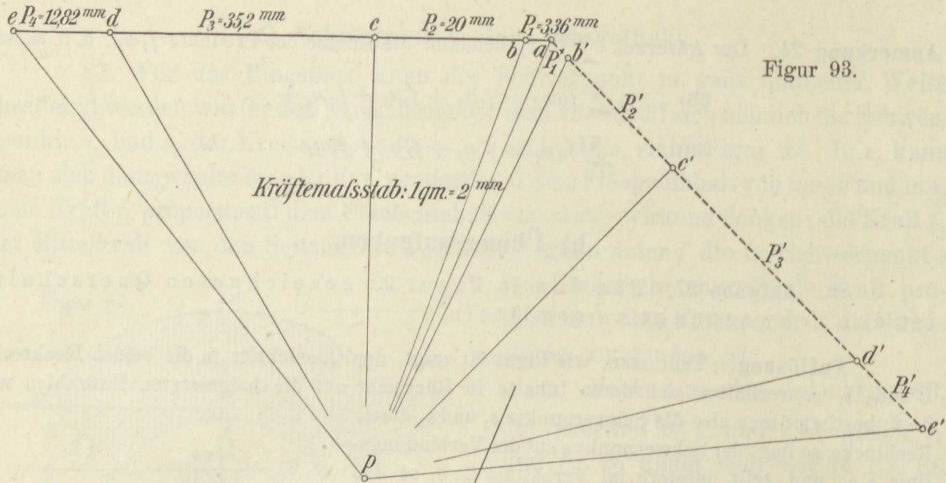


Figur 92.

Figur 91.

Figur 93 und 94, so schneidet diese die Mittelkraft  $R$  im Schwerpunkt  $S$  des Mauerquerschnitts. — b) Rechnerische Bestimmung des Schwerpunkts. Man wählt

Figur 93.





ein Koordinatensystem  $X$  und  $Y$ , so wie die Figur zeigt, und entnimmt die Koordinaten der Schwerpunkte  $s_1$  bis  $s_4$  in Millimetern aus der Zeichnung, man erhält dann:

$$\begin{aligned} \text{für den Schwerpunkt } s_1: & x_1 = 37,5 \text{ mm } y_1 = 117 \text{ mm} \\ \text{„ „ „ } s_2: & x_2 = 34 \text{ mm } y_2 = 90 \text{ mm} \\ \text{„ „ „ } s_3: & x_3 = 29 \text{ mm } y_3 = 41 \text{ mm} \\ \text{„ „ „ } s_4: & x_4 = 21,5 \text{ mm } y_4 = 7,75 \text{ mm.} \end{aligned}$$

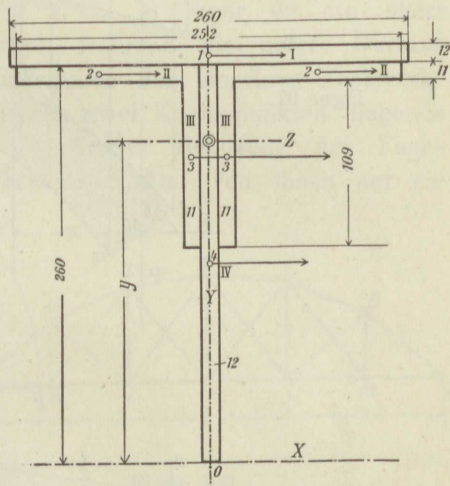
Für die Koordinaten  $x$  und  $y$  des Schwerpunkts  $S$  des Mauerquerschnitts ergeben sich nunmehr die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1,68 \cdot 37,5 + 10,0 \cdot 34 + 17,60 \cdot 29 + 6,41 \cdot 21,5}{1,68 + 10,0 + 17,60 + 6,41} = \frac{1051,215}{35,69} = 29,45 \text{ mm} \\ y &= \frac{1,68 \cdot 117 + 10,0 \cdot 90 + 17,60 \cdot 41 + 6,41 \cdot 7,75}{35,69} = \frac{1867,88}{35,69} = 52,33 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Diese Werte stimmen mit den durch Zeichnung ermittelten Größen hinlänglich genau überein.

92. **Aufgabe 30.** Für den in Figur 94 dargestellten Gurtungsquerschnitt ist die Lage des Schwerpunkts rechnerisch zu ermitteln.

**Auflösung.** Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse  $Y$  des Querschnitts; teilt man letzteren nun in die Rechtecke I bis IV, ermittelt deren Schwerpunkte 1 bis 4 und denkt sich in diesen etwa Kräfte parallel zur Achse  $X$  und der Größe nach proportional den Inhaltzahlen dieser Rechtecke angebracht, so ist der Mittelpunkt dieser Kräfte der Schwerpunkt des in Rede stehenden Querschnitts. Die Flächeninhalte sind im vorliegenden Falle:



Figur 94.

$$\begin{aligned} \text{Rechteck I} &= 260 \cdot 12 = 3120 \\ \text{„ II} &= 109 \cdot 11 = 1199 \\ \text{„ III} &= 120 \cdot 11 = 1320 \\ \text{„ IV} &= 260 \cdot 12 = 3120 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{der Gesamtquerschnitt besitzt daher einen Flächeninhalt} \\ F = 3120 + 2 \cdot 1199 + 2 \cdot 1320 + 3120 = 11278. \end{array}$$

Die Momentengleichung bezogen auf den Punkt 0 als Drehungspunkt lautet nun:  
 $3120 \cdot 266 + 2 \cdot 1199 \cdot 254,5 + 2 \cdot 1320 \cdot 200 + 3120 \cdot 130 = 11278 \cdot y.$

$$\text{Daher } y = \frac{2373811}{11278} = 210,4 \text{ Einheiten.}$$

93. **Aufgabe 31.** Für das in Figur 95 dargestellte halbe Gewölbe ist die Schwerpunktsvertikale  $P$  der Lage und Größe nach zu ermitteln.

**Auflösung.** Betrachtet man einen Gewölbestreifen von der Tiefe gleich der Einheit, so kann man die durch Erdmaterial hervorgerufene Belastung des Gewölberückens zunächst ersetzen durch einen aus Wölbsteinmaterial bestehenden Belastungskörper. Man teilt zu diesem Zwecke den Gewölbestreifen in eine Anzahl gleichbreiter Streifen, deren Gewichte dann proportional ihren mittleren Höhen sind.

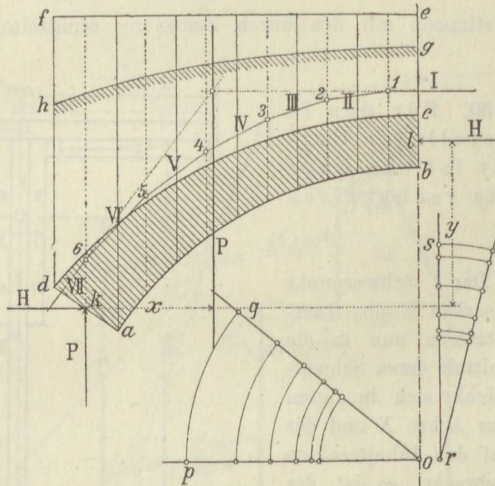
Verhalten sich nun die spezifischen Gewichte des Füll- und Wölbsteinmaterials etwa wie 2:3, so darf man nur die Mittellinien der genannten Streifen, vom Gewölberücken bis

zur Linie  $fe$  gemessen, im Verhältnis 3:2 verkleinern, um hierdurch in der Linie  $hg$  eine Belastungsgrenze so zu erhalten, daß der Körper von der Begrenzung  $hdabg$  als aus Wölbsteinmaterial bestehend angesehen werden kann. Diese Verkleinerung wird zweckmäßig mittels eines Hilfswinkels  $poq$ , siehe Figur 97, ausgeführt, welcher letzterer aus der Bedingung konstruiert wird, daß:

$$\frac{op}{pq} = \frac{3}{2} \text{ ist.}$$

Um den Punkt  $o$  als Mittelpunkt schlägt man mit den aus Figur 95 zu entnehmenden Streifenhöhen Kreisbögen, dann sind die zu diesen Bögen gehörigen, zwischen den Schenkeln  $op$  und  $oq$  liegenden Sehnen, die verkürzten Höhen, welche vom Gewölberücken aus auf den Mittellinien der Streifen abzutragen sind, um Punkte der Linie  $hg$  zu erhalten.

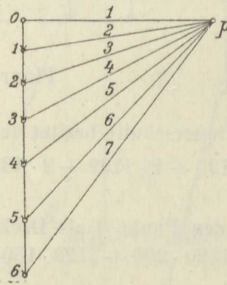
Figur 97.



Figur 95.

Figur 98.

Figur 96.



Da bei gleicher Breite der Streifen deren Gewichte sich wie die Streifenhöhen verhalten, so braucht man nur diese Höhen oder aliquote Teile, z. B. ein Viertel derselben als Kräfte zu einem Kräftevieleck, siehe Figur 96, anzutragen und zu letzterem, mittels eines beliebig gewählten Pols  $p$ , ein Seilvieleck I, II, III . . . VI, siehe Figur 95, zu konstruieren, so schneiden sich dessen äußerste Seiten I und VI in einem Punkte, durch welchen die Mittelkraft  $P$  aus den Streifengewichten hindurchgeht.

Die Verkleinerung der Streifenhöhen, und zwar von der inneren Gewölbeline bis zur Linie  $hg$  gemessen, geschieht gleichfalls mittels eines Hilfswinkels  $srt$ , siehe Figur 98, bei welchem

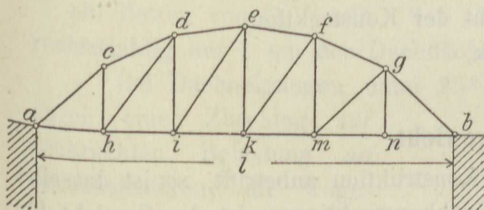
$$\frac{st}{sr} = \frac{1}{4} \text{ ist.}$$



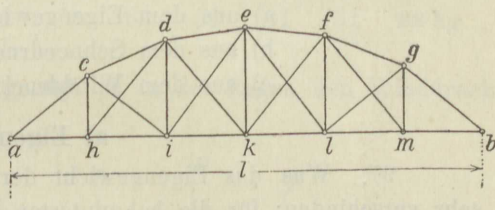
## D. Bestimmung der Stabkräfte in Fachwerkträgern.

### 1. Der Fachwerkträger im allgemeinen, Anzahl der Stäbe eines Fachwerks.

94. Ein Träger, bestehend aus einer Reihe von geraden Stäben, die unter sich zu Dreiecken verbunden sind, heißt ein Fachwerkträger, siehe Figur 99 und 100. An einem Fachwerkträger unterscheidet man zwei Gurtungen, und zwar eine obere und eine untere Gurtung, sowie die Füllungsglieder. Die Gurtungen begrenzen den Umriß des Trägers, die Füllungsglieder verbinden die Gurtungen miteinander. Die Form der Gurtungen kann verschieden sein; so ist z. B. in Figur 99 die obere Gurtung ein gebrochener Linienzug  $acdefg$ , während die untere Gurtung eine gerade Linie darstellt. Die Verbindungsstellen der einzelnen Fachwerkstäbe heißen Knotenpunkte; das zwischen zwei Knotenpunkten liegende Stück einer Gurtung heißt ein Feld. Die äußere Belastung des Fachwerks wird von den Knotenpunkten aufgenommen und von ihnen auf die



Figur 99.



Figur 100.

einzelnen Stäbe so übertragen, daß in ihnen nur Längsspannungen, also Zug- oder Druckspannungen, entstehen. Es gibt demnach eine Zug- und eine Druckgurtung und außerdem gezogene und gedrückte Füllungsglieder. Geht man bei der Bildung eines Fachwerks von einem Dreieck aus, so sind hierzu erforderlich drei Stäbe. Jeder weitere Knotenpunkt erfordert wenigstens zwei Stäbe zur Bildung eines weiteren Dreiecks. Die Anzahl  $m$  aller Stäbe eines Fachwerks wird demnach, wenn  $n$  die Zahl der Knotenpunkte bezeichnet, sein:

$$m = 2n - 3.$$

Ein solches Fachwerk heißt statisch bestimmt, siehe Figur 99, weil es möglich ist, die in den Stäben des Fachwerks auftretenden Spannungen lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen der Statik zu ermitteln. Ist die Anzahl  $m$  der Stäbe eines Fachwerks mit  $n$  Knotenpunkten größer als  $2n - 3$ , so heißt das Fachwerk statisch unbestimmt, siehe Figur 100. Im folgenden soll nur von statisch bestimmten Fachwerken die Rede sein.

## 2. Belastung eines Fachwerkträgers.

95. Die Belastung eines Fachwerkträgers setzt sich zusammen einmal aus der zufälligen Belastung, wie z. B. der Nutz- oder Verkehrslast bei Brücken-trägern oder dem Schnee- und Winddruck bei Dachdeckungen und dem Eigen-gewicht der Konstruktion.

In der Regel wird die zufällige Belastung von den Knotenpunkten einer Gurtung allein aufgenommen, während das Eigengewicht sich auf die Knoten-punkte beider Gurtungen gleichmäßig verteilt.

Bei Dachbindern wird die äußere Belastung von den Knotenpunkten der oberen Gurtung aufgenommen. Der Einfachheit halber läßt man auch das ganze Eigengewicht der Dachkonstruktion von diesen oberen Knotenpunkten aufnehmen.

**Anmerkung 25.** Sollen in den Stäben eines Fachwerks tatsächlich nur Druck- und Zug-spannungen auftreten, so müssen die Stäbe an den Verbindungsstellen durch Gelenk-bolzen befestigt sein, was auch vielfach, namentlich in Amerika, ausgeführt wird.

In Deutschland geschieht die Verbindung der Konstruktionsteile unter sich in der Regel mittels Niete und Schrauben, so daß den Stäben keine freie Drehungsbewegung zukommt. Es entstehen hierdurch in den Konstruktionsteilen oft sehr beträchtliche Nebenspannungen.

## 3. Belastung der Dächer.

96. Die Belastung eines Dachs setzt sich zusammen:

- a) aus dem Eigengewicht der Konstruktion,
- b) aus dem Schneedruck,
- c) aus dem Winddruck.

### a) Eigengewicht.

97. Was das Eigengewicht der Konstruktion anbetrifft, so ist dasselbe sehr verschieden; für die bekanntesten Dachkonstruktionen ist das Gewicht für den Quadratmeter Dachfläche aus den amtlichen Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen usw. siehe Anhang I, zu entnehmen.

### b) Der Schneedruck.

98. Die Belastung durch Schnee ist zu 75 kg/qm der Dachfläche anzunehmen und dabei die Möglichkeit einer vollen oder einer einseitigen Schnee-belastung zu berücksichtigen. Bei steilen Dächern kann die Schneebelastung geringer angenommen werden, sofern einzelne Dachteile nicht etwa Schneesäcke bilden. Mit Bezug auf die aus nebenstehender Figur 101 ersichtlichen Bezeichnungen kann die Schneebelastung angenommen werden

zu 55 kg/qm der Horizontalprojektion wenn  $h = \frac{1}{2} l$  ist

„ 65 „ „ „ „ „  $h = \frac{1}{3} l$  „

„ 70 „ „ „ „ „  $h = \frac{1}{4} l$  „

„ 75 „ „ „ „ „  $h = \frac{1}{5} l$  „

oder der Schneedruck kann aus folgender Formel berechnet werden:  $S = 75 \cos \alpha$  kg für den Quadratmeter Horizontalprojektion.

Bei ganz steilen Dächern, an denen nur geringfügige Schneemassen haften können, ist eine Schneelast nicht weiter in Betracht zu ziehen.



### c) Der Winddruck.

99. Der Winddruck ist in der Regel zu 125 kg/qm rechtwinklig getroffener Fläche anzunehmen. Für hohe Bauten auf kleiner Grundfläche (schlanke Türme) ist außerdem noch der Nachweis zu führen, daß bei einem Winddruck von 150 kg/qm die für die zulässigen Beanspruchungen angegebenen oberen Grenzen nicht überschritten werden.

Werden freistehende Gebäude, deren Frontwände nicht durch Querwände versteift sind, auf Standsicherheit gegen Winddruck untersucht, so genügt es, mit einem Winddruck von 75 kg/qm zu rechnen.

Bezeichnet  $\alpha$  den Neigungswinkel eines Teils  $F$  der Dachfläche gegen die wagerecht anzunehmende Windrichtung, so ist der auf die Fläche  $F$  entfallende und rechtwinklig zu ihr wirkende Winddruck

$$40) \dots W = W_0 F \sin^2 \alpha,$$

wobei  $W_0 = 125$  bzw. 150 kg einzusetzen ist. Bei ebenen Dächern entfällt hiernach aus dem Winddruck von 125 kg/qm und bei einer Dachneigung

von  $70^\circ$   $65^\circ$   $60^\circ$   $55^\circ$   $50^\circ$   $45^\circ$   $40^\circ$   $35^\circ$   $30^\circ$   $25^\circ$

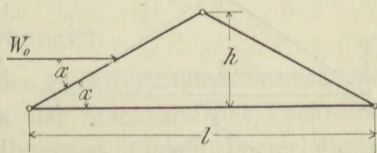
ein Betrag von 110 103 94 84 73 63 52 41 31 22 kg rechtwinklig auf 1 qm der Dachfläche.

Bei Dachneigungen unter  $25^\circ$  genügt es in der Regel, den Winddruck durch einen Zuschlag zur senkrechten Belastung zu berücksichtigen; die wagerechte Seitenkraft darf vernachlässigt werden.

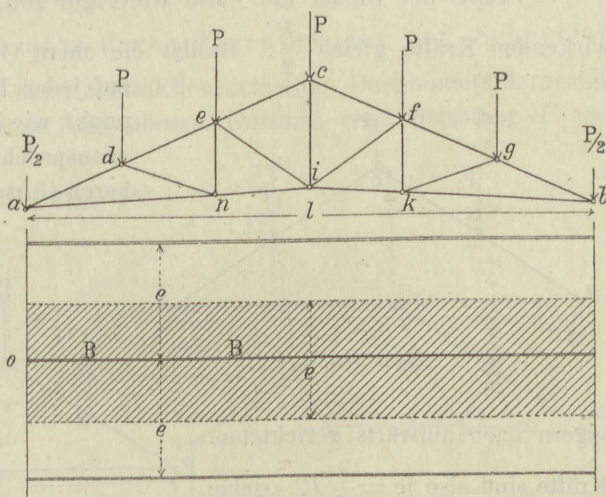
#### 4. Belastung eines Dachbinders.

100. Die Binder eines Satteldachs besitzen eine bestimmte Entfernung  $e$  voneinander, siehe Figur 102, und es trifft auf jeden einzelnen Binder im allgemeinen eine rechtwinklige Belastungsfläche mit den Seiten  $l$  und  $e$ ,

wo bei  $l$  die Stützweite und  $e$  die Binderentfernung bedeutet. Beträgt nun die Belastung eines Dachs für den Quadratmeter Horizontalprojektion  $p$  Kilogramm, so ist die Gesamtbelastung des Binders  $Q = lep$ . Diese Belastung verteilt sich gleichmäßig auf die Knotenpunkte der oberen Gurtung und zwar trifft auf jeden einzelnen



Figur 101.

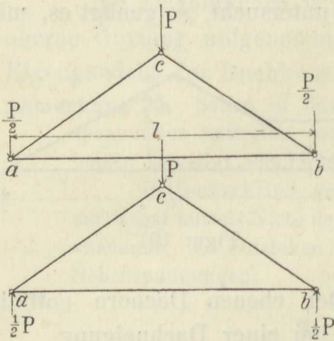


Figur 102.

Knotenpunkt die Belastung eines Gurtungsfelds. Besitzt also die obere Gurtung  $n$  Felder, so ist die Belastung eines Knotenpunkts:

$$41) \dots P = \frac{Q}{n} = \frac{leP}{n}$$

Eine Ausnahme hiervon bilden die Auflagerpunkte, welche nur eine halbe Feldbelastung aufzunehmen haben. Ihre Belastung ist also gleich  $\frac{P}{2}$ .

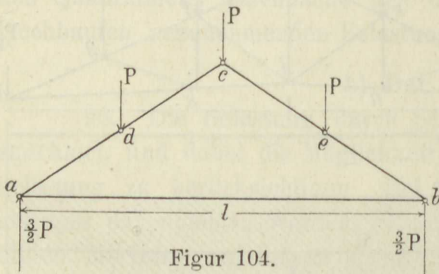


Figur 103.

$\frac{Q}{2} - \frac{P}{2}$  übrig; diese aufwärts gerichteten Kräfte halten den in den Knotenpunkten nach abwärts gerichteten äußeren Kräften das Gleichgewicht.

Besitzt der Binder die Form wie Figur 103, so sind die in den Auflagern wirkenden Kräfte gleich  $\frac{P}{2}$ . Besitzt die obere Gurtung außer dem Firstpunkt

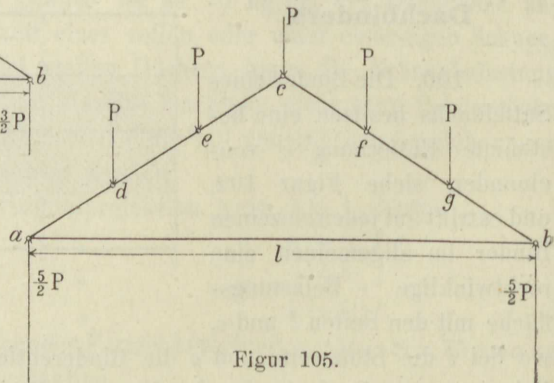
auf jeder Hälfte noch einen Zwischenpunkt, wie in Figur 104, so ist die Gesamtbeanspruchung in den Knotenpunkten der oberen Gurtung gleich  $3P$ , die in den Auf-



Figur 104.

lagern nach aufwärts gerichteten Kräfte sind also je  $= \frac{3}{2}P$ , siehe Figur 104.

Bei zwei Zwischenpunkten auf jeder Gurtungshälfte, siehe



Figur 105.

Figur 105, ist die in jedem Auflager nach aufwärts wirkende Kraft  $= \frac{5}{2}P$ .



Bei  $n$  Feldern der oberen Gurtung ist allgemein die in jedem Auflager nach aufwärts gerichtete Kraft gleich  $\frac{n-1}{2} P$ , wenn  $P$  den Druck auf den Knotenpunkt bezeichnet.

**Anmerkung 26.** Die in Nr. 100 mit  $Q$  bezeichnete Binderbelastung kann einerseits bestehen aus der Belastung durch Eigengewicht und Schneelast, oder aber auch aus der Gesamtbelastung des Dachs, also Winddruck mit eingeschlossen, und zwar bezogen auf den Quadratmeter Horizontalprojektion der Dachfläche.

## 5. Bestimmung der Stabkräfte eines Dachbinders.

### a) Allgemeine Bemerkungen.

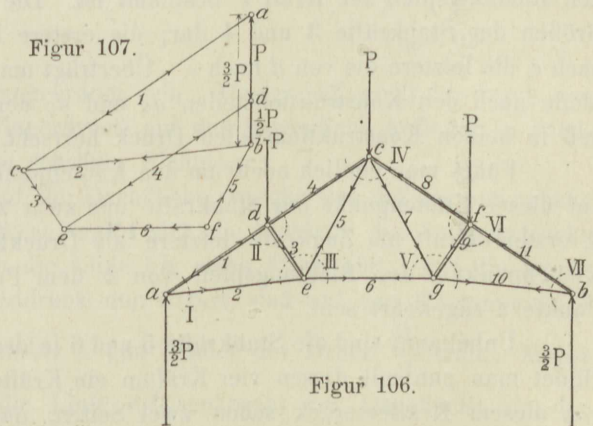
101. Zur Ermittlung der Größe der in den Fachwerkstäben herrschenden Spannungen, oder wie man kürzer sagen kann der Stabkräfte des Fachwerks, gibt es verschiedene Verfahren; sie beruhen im wesentlichen immer darauf, daß man sich von dem durch die äußeren Kräfte im Gleichgewicht befindlichen Träger ein Stück abgeschnitten denkt, und den übrigbleibenden Teil, dessen Gleichgewicht nunmehr gestört ist, durch äußere, in den Konstruktionsteilen anzubringenden Kräfte, ins Gleichgewicht setzt. Die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderlichen Kräfte sind dann gleich den gesuchten Stabkräften. Die Ermittlung dieser Kräfte kann durch Zeichnung oder Rechnung geschehen.

### b) Graphische Ermittlung der Stabkräfte, Kräftepläne.

a) Stabkräfte, hervorgebracht durch Eigengewicht und Schneelast.

102. Ist in Figur 106 das Konstruktionsnetz eines Dachbinders dargestellt, so wirkt in jedem Knotenpunkt der oberen Gurtung eine Belastung  $P$  nach abwärts, während in den Auflagerpunkten  $a$  und  $b$  je eine Kraft gleich  $\frac{3}{2} P$  zur Herstellung des Gleichgewichts tätig ist.

Führt man durch die Konstruktionsteile  $ad$  und  $ae$  den Schnitt I, so wirken auf das abgeschnittene, links von der Schnittlinie I befindliche Trägerstück drei Kräfte, nämlich die äußere nach auf-



Figur 106.

wärts gerichtete Kraft  $\frac{3}{2} P$  und die unbekanntenen Kräfte in den durchgeschnittenen Konstruktionsteilen  $ad$  und  $ae$ ; sollen diese drei Kräfte im Gleichgewicht sein,

so muß mit ihnen ein geschlossenes Kräftedreieck gebildet werden können. Macht man demnach die Strecke  $\overline{ab}$ , siehe Figur 107, gleich  $\frac{3}{2}P$  und zieht durch die Punkte  $a$  und  $b$  die Parallelen zu den Linien  $ad$  und  $ae$  der Figur 106, so ergibt sich hierdurch das Kräftedreieck  $abc$ . In diesem stellen die Längen  $\overline{ac}$  und  $\overline{bc}$  die Größen der in den Konstruktionsteilen  $ad$  und  $ae$  wirkenden Kräfte dar. Die Richtungen dieser Kräfte sind durch den Umfassungssinn des Kräftedreiecks gegeben. Die Richtung der Kraft in  $ad$ , siehe Figur 106, ist also die von  $a$  nach  $c$ , siehe Figur 107, jene der Kraft in  $ae$ , siehe Figur 106, die von  $e$  nach  $b$ , siehe Figur 107, die hierdurch bestimmten Richtungspfeile sind nach Figur 106 so zu übertragen, daß sie in dem rechts von der Schnittlinie I liegenden Trägerteile eingezeichnet werden. In einem Konstruktionsteile herrscht Druck, wenn die Spitze des Richtungspfeils dem in Rede stehenden Knotenpunkt, d. i. im vorliegenden Falle dem Punkt  $a$  zugekehrt, dagegen Zug, wenn diese Spitze dem Knotenpunkt nicht zugekehrt ist. Im Konstruktionsteile  $ad$  oder 1 herrscht also Druck, im Konstruktionsteile  $ac$  oder 2 aber Zug.

Nummehr geht man zum Knotenpunkt  $d$  über und führt den Schnitt II; dann wirken auf das abgeschnittene, den Knotenpunkt  $d$  enthaltende Trägerstück, die äußere Kraft  $P$ , die bekannte Stabkraft 1 und außerdem die noch unbekanntes Stabkräfte 3 und 4 in den Konstruktionsteilen  $de$  und  $dc$ .

Die Stabkraft 1 ist eine Druckkraft, es muß daher für den Schnitt II der Richtungspfeil dem Knotenpunkt  $d$  zugekehrt sein; bildet man nun mit den vier auf den Knotenpunkt  $d$  wirkenden Kräften ein Kräfteviereck, so muß sich dieses schließen. In Figur 107 sind von dem zu konstruierenden Kräfteviereck schon zwei Kräfte, nämlich  $\overline{ca} = 1$  und  $\overline{ad} = P$  gegeben, man braucht also nur durch  $c$  und  $d$  Parallelen zu den Konstruktionsteilen  $de$  und  $dc$  in Figur 106 zu ziehen, um in  $aced$  das gesuchte Kräfteviereck zu erhalten, dessen Umfassungssinn durch den Richtungspfeil der Kraft  $P$  bestimmt ist. Die Längen  $\overline{ec}$  und  $\overline{ed}$  stellen die Größen der Stabkräfte 3 und 4 dar; die erstere Kraft hat die Richtung von  $e$  nach  $c$ , die letztere die von  $d$  nach  $e$ . Überträgt man die so bestimmten Richtungspfeile nach den Konstruktionsteilen  $de$  und  $dc$  der Figur 106, so erkennt man, daß in beiden Konstruktionsteilen Druck herrscht.

Führt man endlich noch um den Knotenpunkt  $e$  den Schnitt III, so wirken auf diesen Knotenpunkt nur Stabkräfte und zwar sind bekannt die Kräfte 2 und 3, erstere Kraft als Zugkraft, letztere als Druckkraft. Es muß also für den Knotenpunkt  $e$  der Richtungspfeil von 2 dem Punkte  $e$  ab-, der von  $de$  dem Punkte  $e$  zugekehrt sein.

Unbekannt sind die Stabkräfte 5 und 6 in den Konstruktionsteilen  $ec$  und  $eg$ . Bildet man nun mit diesen vier Kräften ein Kräfteviereck, so sind in Figur 107 von diesem Kräfteviereck schon zwei Seiten, nämlich  $\overline{bc} = 2$  und  $\overline{ce} = 3$  gezeichnet und man braucht nur durch  $e$  und  $b$  Parallelen zu  $eg$  und  $ec$  der Figur 106 zu ziehen, um den Punkt  $f$ , und damit die Stabkräfte  $\overline{ef} = 6$  und  $\overline{fb} = 5$  zu erhalten. Die Richtung der Kraft 2 ist für das in Rede stehende Kräfteviereck:





Linien  $ah$  und  $hb$  der Figur 108, so sind durch die Längen  $\overline{ae}$  und  $\overline{ed}$  die Größen der Auflagerdrücke bzw. deren Gegendrücke in  $a$  und  $b$  dargestellt, und die Richtungspfeile dieser letzteren ergeben sich aus dem Umlaufsinne des Kräftedreiecks  $ade$ . Die graphische Bestimmung der durch den Winddruck hervorgerufenen Stabkräfte erfolgt nun in gleicher Weise, wie in Nr. 102. Führt man also den Schnitt I, so entspricht demselben das Kräfteviereck  $abfe$ , von welchem die Seiten  $\overline{ab}$  und  $\overline{ae}$  von vornherein gegeben,  $\overline{bf}$  und  $\overline{ef}$  aber durch Ziehen von Parallelen durch die Punkte  $b$  und  $e$  zu den Linien  $ad$  und  $ae$  der Figur 108 zu bestimmen sind. Es werden demnach in **1** und **2** durch den Winddruck Stabkräfte hervorgerufen gleich den Längen  $\overline{bf}$  und  $\overline{fe}$  und zwar ist erstere eine Druck-, letztere eine Zugkraft. Der Schnitt II liefert das Kräfteviereck  $bfge$  und daher die Druckkräfte in **3** und **4** gleich den Längen  $\overline{fg}$  und  $\overline{ge}$ . Mittels des Schnitts III erhält man das Kräfteviereck  $efgh$  und damit die Stabkräfte **5** und **6** =  $\overline{gh}$  bzw.  $\overline{eh}$ , erstere als Zug-, letztere als Druckkraft. Schnitt IV liefert das Kräftefünfeck  $cdihge$  und damit die Druckkräfte in **7** und **8** gleich den Längen  $\overline{hi}$  und  $\overline{id}$ , der Schnitt V bestimmt ein Kräftedreieck  $ehi$ , woraus hervorgeht, daß in  $gf$  durch den Winddruck keine Stabkraft hervorgerufen wird; die Stabkraft in **10** ist gleich  $\overline{ei}$ . Mittels des Schnitts VI findet man, was übrigens selbstverständlich ist, die Stabkraft in **11** gleich jener in **8** als Druckkraft; endlich gehört zu dem Schnitt VII noch das Kräftedreieck  $eid$ . Sind die Stabkräfte bei einem und demselben Konstruktionsteil durch die Beanspruchungen durch Eigengewicht und Schneelast bzw. durch Winddruck dieselben, nämlich beide Druck oder Zug, so gibt die Summe beider Stabkräfte die Gesamtstabkraft des Konstruktionsteils, im anderen Falle muß der Konstruktionsteil so gestaltet sein, daß er sowohl die Zug- wie auch die Druckkräfte mit Sicherheit aufnehmen kann. In nachstehender Tabelle sind die ermittelten Stabkräfte zusammengestellt.

Konstruktionsteil	Stabkräfte durch Eigengewicht und Schneedruck	Stabkräfte durch Winddruck	Gesamtstabkräfte
	Figur 107	Figur 109	
$ad$ oder <b>1</b>	$\overline{ac}$ = Druck	$\overline{fb}$ = Druck	$\overline{ac} + \overline{fb}$ = Druck
$ae$ „ <b>2</b>	$\overline{cb}$ = Zug	$\overline{fe}$ = Zug	$\overline{cb} + \overline{fe}$ = Zug
$de$ „ <b>3</b>	$\overline{ce}$ = Druck	$\overline{fg}$ = Druck	$\overline{ce} + \overline{fg}$ = Druck
$dc$ „ <b>4</b>	$\overline{ed}$ = Druck	$\overline{gc}$ = Druck	$\overline{ed} + \overline{gc}$ = Druck
$ec$ „ <b>5</b>	$\overline{fb}$ = Zug	$\overline{gh}$ = Zug	$\overline{fb} + \overline{gh}$ = Zug
$eg$ „ <b>6</b>	$\overline{ef}$ = Zug	$\overline{eh}$ = Druck	$\overline{ef}$ = Zug und $\overline{eh}$ = Druck
$cg$ „ <b>7</b>	$\overline{fb}$ = Zug	$\overline{hi}$ = Druck	$\overline{fb}$ = Zug und $\overline{hi}$ = Druck
$cf$ „ <b>8</b>	$\overline{ed}$ = Druck	$\overline{id}$ = Druck	$\overline{ed} + \overline{id}$ = Druck
$gf$ „ <b>9</b>	$\overline{ce}$ = Druck	—	$\overline{ce}$ = Druck
$gb$ „ <b>10</b>	$\overline{bc}$ = Zug	$\overline{ei}$ = Druck	$\overline{bc}$ = Zug und $\overline{ei}$ = Druck
$fb$ „ <b>11</b>	$\overline{ac}$ = Druck	$\overline{id}$ = Druck	$\overline{ac} + \overline{id}$ = Druck





105. Faßt man nunmehr die in Nr. 102 ermittelten Stabkräfte mit den eben bestimmten durch den Winddruck hervorgerufenen zusammen, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Konstruktionsteil	Stabkraft durch Eigengewicht und Schneedruck	Stabkraft durch den Wind	Gesamtstabkraft
Figur 106	Figur 107	Figur 111	
$ad$ oder 1	$\overline{ac} = \text{Druck}$	$\overline{af} = \text{Druck}$	$\overline{ac} + \overline{af} = \text{Druck}$
$ae$ „ 2	$\overline{cb} = \text{Zug}$	$\overline{fe} = \text{Zug}$	$\overline{cb} + \overline{fe} = \text{Zug}$
$de$ „ 3	$\overline{ce} = \text{Druck}$	—	$\overline{ce} = \text{Druck}$
$dc$ „ 4	$\overline{ed} = \text{Druck}$	$\overline{fa} = \text{Druck}$	$\overline{ed} + \overline{fa} = \text{Druck}$
$ec$ „ 5	$\overline{fb} = \text{Zug}$	$\overline{fg} = \text{Zug}$	$\overline{fb} + \overline{fg} = \text{Zug}$
$eg$ „ 6	$\overline{ef} = \text{Zug}$	$\overline{ge} = \text{Zug}$	$\overline{ef} + \overline{ge} = \text{Zug}$
$cg$ „ 7	$\overline{fb} = \text{Zug}$	$\overline{gh} = \text{Zug}$	$\overline{fb} + \overline{gh} = \text{Zug}$
$cf$ „ 8	$\overline{ed} = \text{Druck}$	$\overline{hb} = \text{Druck}$	$\overline{ed} + \overline{hb} = \text{Druck}$
$gf$ „ 9	$\overline{ce} = \text{Druck}$	$\overline{ih} = \text{Druck}$	$\overline{ce} + \overline{ih} = \text{Druck}$
$gb$ „ 10	$\overline{cb} = \text{Zug}$	$\overline{ie} = \text{Zug}$	$\overline{cb} + \overline{ie} = \text{Zug}$
$fb$ „ 11	$\overline{ac} = \text{Druck}$	$\overline{ci} = \text{Druck}$	$\overline{ac} + \overline{ci} = \text{Druck}$

**Anmerkung 27.** Der in Nr. 102 behandelte Dachbinder führt den Namen: Einfacher Polonceaubinder.

### e) Übungsaufgabe.

106. **Aufgabe 32.** Für einen einfachen Polonceaubinder mit den nebenstehend, siehe Figur 112, verzeichneten Abmessungen, sind die Stabkräfte in den Konstruktionsteilen zu ermitteln, wenn die Dachdeckung Schiefer auf Holzschalung sein soll und die Binderentfernung 4 m beträgt. Die Belastung durch Schneelast und Eigengewicht sei für den Quadratmeter Horizontalprojektion 140 kg, der Winddruck betrage für den Quadratmeter geneigte Dachfläche 56 kg.

**Auflösung.** Die Belastung eines Binders durch Eigengewicht und Schneelast ist:

$$Q = 10 \cdot 4 \cdot 140 = 5600 \text{ kg}$$

Es trifft somit auf einen Knotenpunkt die Belastung:

$$P = \frac{5600}{4} = 1400 \text{ kg}$$

Die vertikalen Auflagerkräfte sind je gleich:

$$\frac{3}{2} P = \frac{3 \cdot 1400}{2} = 2100 \text{ kg}$$

Die Belastung durch den Winddruck senkrecht zur Dachfläche beträgt für eine Binderhälfte:

$$W = 5 \cdot 4 \cdot 56 = 1120 \text{ kg rund}$$

daher ist der Druck auf einen mittleren Knotenpunkt:

$$W = \frac{1120}{2} = 560 \text{ kg}$$

auf den Auflager- bzw. Firstpunkt:

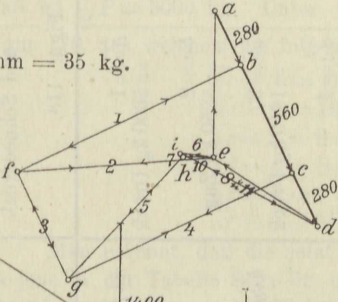
$$\frac{W}{2} = \frac{560}{2} = 280 \text{ kg}$$

Unter Zugrundelegung dieser Drücke sind nun in den Figuren 113, 114 und 115 die Stabkräfte, hervorgerufen durch Eigengewicht und Schneedruck einerseits, sowie linkseitigen bzw. rechtseitigen Winddruck andererseits, und hieraus schließlich die Gesamtstabkräfte in den einzelnen Konstruktionsteilen ermittelt und in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.



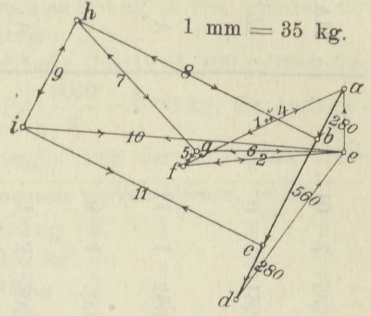
Figur 114.

1 mm = 35 kg.



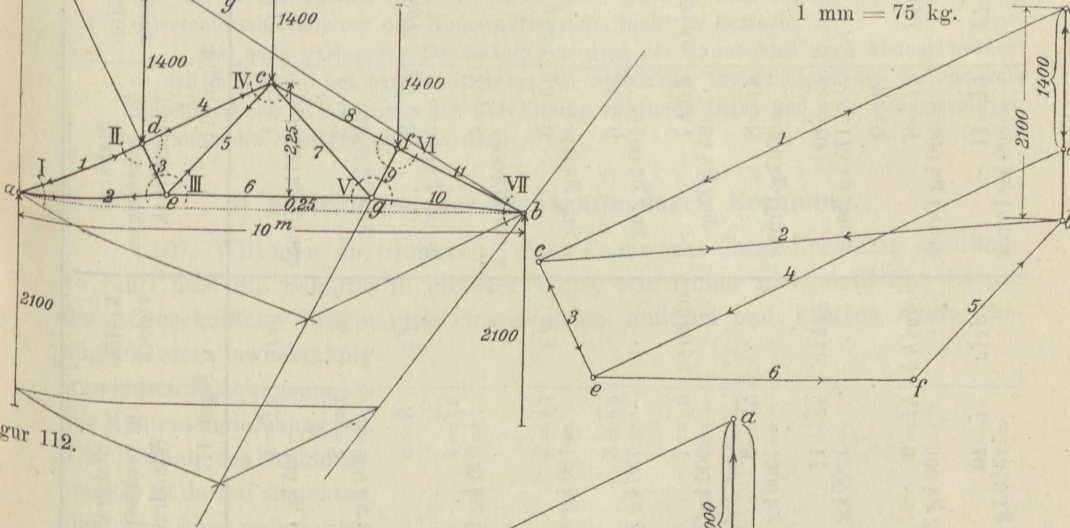
Figur 115.

1 mm = 35 kg.



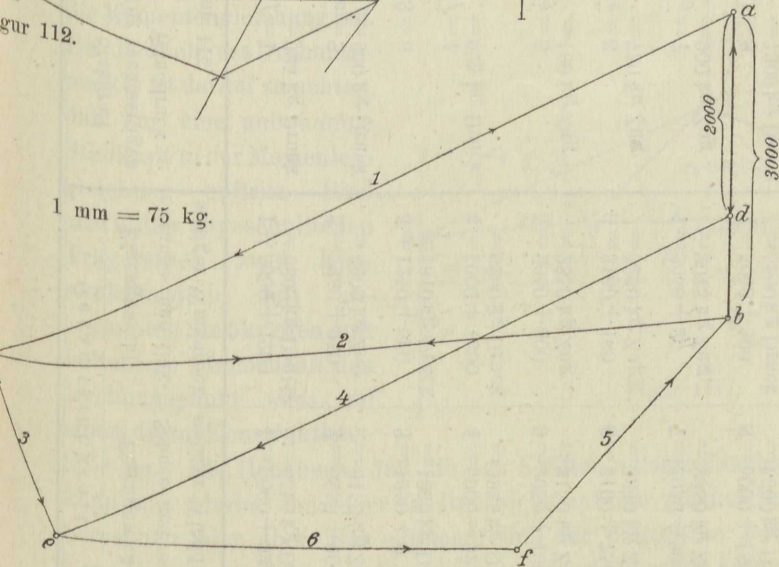
Figur 113.

1 mm = 75 kg.



Figur 112.

1 mm = 75 kg.



Figur 116.

Schnitt	Kräfte- viellek	Stabkraft für Eigen- gewicht und Schneedruck	Kräfte- viellek	Stabkraft für linkseitigen Winddruck	Kräfte- viellek	Stabkraft für rechtseitigen Winddruck	Gesamtstabilität	
							Eigen- gewicht, Schnee- und link- seitiger Winddruck	Eigen- gewicht, Schnee- und recht- seitiger Winddruck
I	<i>abc</i>	$\overline{ac} = 1$ = 5600 kg Druck	<i>abfe</i>	$\overline{bf} = 1$ = 1200 kg Druck	<i>acf</i>	$\overline{af} = 1$ = 925 kg Druck	1 = 5600 + 1200 = 6800 kg Druck	1 = 5600 + 925 = 6525 kg Druck
II	<i>acel</i>	$\overline{ce} = 3$ = 1250 kg Druck	<i>bcgf</i>	$\overline{fg} = 3$ = 560 kg Druck	<i>afa</i>	3 = 0 $\overline{af} = 4$ = 925 kg Druck	3 = 1250 + 560 = 1810 kg Druck	3 = 1250 + 0 = 1250 kg Druck
III	<i>bcef</i>	$\overline{fb} = 5$ = 2050 kg Zug	<i>efghe</i>	$\overline{gh} = 5$ = 800 kg Zug	<i>efg</i>	$\overline{fg} = 5$ = 100 kg Zug	5 = 2050 + 800 = 2850 kg Zug	5 = 2050 + 100 = 2150 kg Zug
IV		7 = 5 = 2050 kg Zug	<i>cg h i d c</i>	$\overline{hi} = 7$ = 25 kg Zug	<i>ab h g f a</i>	$\overline{hg} = 7$ = 900 kg Zug	7 = 2050 + 25 = 2075 kg Zug	7 = 2050 + 900 = 2950 kg Zug
V		11 = 1 = 5600 kg Druck	<i>hie</i>	$\overline{ie} = 10$ = 175 kg Zug	<i>eg h i c</i>	$\overline{ic} = 11$ = 1300 kg Druck	9 = 1250 + 0 = 1250 kg Druck	9 = 1250 + 560 = 1810 kg Druck
VI		10 = 2 = 5250 kg Zug	<i>eid</i>	$\overline{id} = 11$ = 800 kg Druck	<i>be i h b</i>	$\overline{hi} = 9$ = 560 kg Zug	11 = 5600 + 800 = 6400 kg Druck	11 = 5600 + 1300 = 6900 kg Druck
VII								



**Anmerkung 28.** Nimmt man die vertikale Belastung des Dachs einschließlich des Winddrucks für den Quadratmeter Horizontalprojektion rund zu 200 kg an und ermittelt für diese Belastung die Stabkräfte, so ergibt sich folgendes:

Die ganze Belastung eines Binders wird nunmehr  $Q = 10 \cdot 4 \cdot 200 = 8000$  kg, daher trifft auf einen Knotenpunkt eine Belastung  $P = \frac{8000}{4} = 2000$  kg, die Auflagerkraft ist  $\frac{3}{2}P = 3000$  kg. Unter dieser Annahme ergibt sich der Kräfteplan, siehe Figur 116, aus welchem die folgenden Werte entnommen werden können, es ist:

$$\overline{ac} = 1 = 11 = 110 \text{ mm} = 7950 \text{ kg}$$

$$\overline{bc} = 2 = 10 = 98,5 \text{ mm} = 7150 \text{ kg}$$

$$\overline{ce} = 3 = 9 = 24,5 \text{ mm} = 1775 \text{ kg}$$

$$\overline{cd} = 4 = 8 = 98 \text{ mm} = 7080 \text{ kg}$$

$$\overline{bf} = 5 = 7 = 40 \text{ mm} = 2900 \text{ kg}$$

$$\overline{ef} = 6 = 61 \text{ mm} = 4400 \text{ kg}$$

Man erkennt, daß die jetzt ermittelten Stabkräfte fast durchweg größer sind, als jene in der Tabelle Seite 58 ermittelten. Doch kommt der Unterschied für die Querschnittsberechnung der Konstruktionsteile nicht in Betracht.

Bei noch geringeren Dachneigungen wird der Unterschied noch kleiner werden, so daß man wohl bei der Ermittlung der Stabkräfte für flache Dächer die vertikale Seitenkraft des Winddrucks der Berechnung zugrunde legen und von der einseitigen Wirkung des letzteren absehen darf.

#### d) Ermittlung der Stabkräfte durch Rechnung.

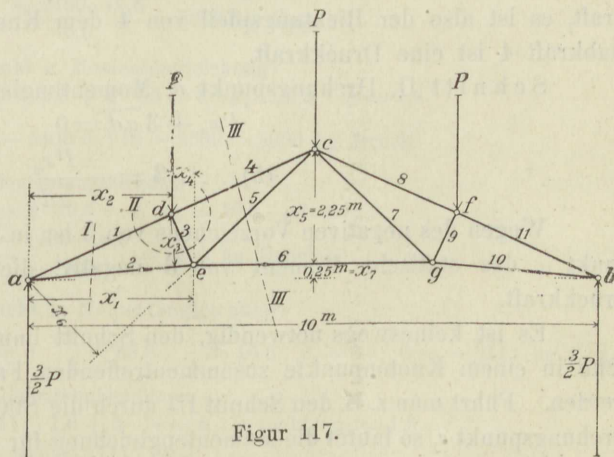
107. Will man die Stabkräfte eines Fachwerks durch Rechnung ermitteln so führt man die Schnitte in gleicher Weise wie früher und stellt für die auf das abgeschnittene Trägerstück einwirkenden äußeren und inneren Kräfte bezüglich eines zweckmäßig

gewählten Drehungspunkts die Momentengleichung auf.

Bei der Wahl des Drehungspunkts ist darauf zu achten, daß nur eine unbekannte Stabkraft in der Momentengleichung auftritt. Sind also in dem abgeschnittenen

Trägerstück zwei Konstruktionsteile mit unbekanntem Stabkräften enthalten, so nimmt man den Drehungspunkt stets auf einem dieser Konstruktionsteile an. Die Hebelarme für die den Kräften entsprechenden statischen Momente

kann man hierbei entweder in Rücksicht auf die geometrische Form der Binder berechnen oder aber, was einfacher und für praktische Zwecke hinsichtlich der Genauigkeit ausreicht, aus der Zeichnung durch Messung entnehmen. Im folgenden soll das letztere Verfahren zugrunde gelegt werden.



Figur 117.

Führt man in dem in Figur 117 dargestellten Binder den Schnitt I und wählt zur Bestimmung der Stabkraft in **1** den Punkt  $e$  als Drehungspunkt, so lautet die Momentengleichung:

$$\frac{3}{2} P x_1 + \mathbf{1} \overline{de} = 0$$

daher ist:

$$42) \dots \mathbf{1} = -\frac{3 P x_1}{2 \overline{de}}$$

Das statische Moment der Stabkraft **1** ist demnach bezüglich des Drehungspunktes  $e$  negativ, was nur möglich ist, wenn der Richtungspfeil von **1** dem Knotenpunkt  $a$  zugekehrt ist; die Stabkraft **1** ist also eine Druckkraft.

Zur Bestimmung von **2** wählt man  $d$  als Drehungspunkt, dann lautet die Momentengleichung:

$$\frac{3}{2} P x_2 + \mathbf{2} x_3 = 0$$

daher:

$$43) \dots \mathbf{2} = -\frac{3 P x_2}{2 x_3}$$

Das statische Moment der Stabkraft **2** ist negativ, demnach muß der Richtungspfeil von **2** dem Knotenpunkte  $a$  abgekehrt, die Stabkraft **2** also eine Zugkraft sein.

Schnitt II, Drehungspunkt  $e$ , Momentengleichung:

$$\mathbf{1} \overline{de} - P x_4 + \mathbf{4} \overline{de} = 0$$

$$44) \dots \mathbf{4} = \frac{P x_4 - \mathbf{1} \overline{de}}{\overline{de}} = \frac{P x_4}{\overline{de}} - \mathbf{1}$$

Da  $x_4$  kleiner als  $\overline{de}$  und  $P$  kleiner als die Stabkraft **1** ist, so ist der Ausdruck für die Stabkraft **4** negativ, demnach auch das statische Moment dieser Kraft, es ist also der Richtungspfeil von **4** dem Knotenpunkte  $d$  zugekehrt, die Stabkraft **4** ist eine Druckkraft.

Schnitt II, Drehungspunkt  $a$ , Momentengleichung:

$$P x_2 + \mathbf{3} \overline{ad} = 0$$

$$45) \dots \mathbf{3} = -\frac{P x_2}{\overline{ad}}$$

Wegen des negativen Vorzeichens von **3** ist in Rücksicht auf den Drehungspunkt  $a$  das statische Moment von **3** negativ, die Stabkraft in **3** also eine Druckkraft.

Es ist keineswegs notwendig, den Schnitt immer so zu führen, daß sämtliche in einem Knotenpunkte zusammentreffenden Fachwerkstäbe durchgeschnitten werden. Führt man z. B. den Schnitt III durch die Stäbe 4, 5 und 6 und wählt den Drehungspunkt  $c$ , so lautet die Momentengleichung für das linksseitige Trägerstück:

$$\frac{3}{2} P \frac{l}{2} - P \frac{l}{4} + \mathbf{6} x_5 = 0$$

daher:

$$46) \dots \mathbf{6} = \frac{-\frac{3}{2} P \frac{l}{2} + \frac{Pl}{4}}{x_5} \text{ oder } \mathbf{6} = -\frac{Pl}{2 x_5}$$

das statische Moment von **6** ist negativ, folglich die Stabkraft **6** eine Zugkraft.



Zur Bestimmung der noch fehlenden Stabkraft **5** kann man gleichfalls den oben genannten Schnitt III benutzen und erhält für  $a$  als Drehungspunkt die Momentengleichung:

$$Px_2 + 6x_7 + 5x_6 = 0$$

$$47) \dots 5 = -\frac{Px_2 + 6x_7}{x_6}$$

Die Kraft **5** ist demgemäß, weil ihr statisches Moment in Hinsicht auf den Drehungspunkt  $a$  negativ sein muß, eine Zugkraft.

### 6. Übungsaufgaben.

108. **Aufgabe 33.** Für den in Aufgabe 32 näher bezeichneten Dachbinder sollen unter den angegebenen Belastungen durch Eigengewicht und Schneeeindruck die Stabkräfte in den Fachwerkstäben durch Rechnung ermittelt werden. Die Hebelarme sind aus der Zeichnung abzugreifen.

**Auflösung.** Mit Bezugnahme auf Figur 112 und 117, sowie die in Nr. 107 aufgestellten Bezeichnungen und Momentengleichungen, die Hebelarme in Millimeter gemessen erhält man folgende Berechnungen:

Schnitt I, Drehungspunkt  $e$ , Momentengleichung:

$$2100 \cdot 20 + 1 \cdot 7,5 = 0 \quad x_1 = 20, \quad \overline{de} = 7,5$$

$$1 = -\frac{2100 \cdot 20}{7,5} = 5600 \text{ kg Druck.}$$

Drehungspunkt  $d$ , Momentengleichung:

$$2100 \cdot 16,6 + 2 \cdot 6,6 = 0 \quad x_2 = 16,6 \quad x_3 = 6,6$$

$$2 = -\frac{2100 \cdot 16,6}{6,6} = 5300 \text{ kg Zug}$$

Schnitt II, Drehungspunkt  $e$ , Momentengleichung:

$$5600 \cdot 7,5 - 1400 \cdot 3,3 + 4 \cdot 7,5 = 0 \quad x_4 = 3,3 \quad \overline{de} = 7,5$$

$$4 = \frac{1400 \cdot 3,3}{7,5} - 5400 = 616 - 5600 = 5000 \text{ kg Druck.}$$

Drehungspunkt  $a$ , Momentengleichung:

$$1400 \cdot 16,6 + 3 \cdot 18,6 = 0 \quad x_2 = 16,6 \quad \overline{ad} = 18,6$$

$$3 = -\frac{1400 \cdot 16,6}{18,6} = 1250 \text{ kg Druck.}$$

Schnitt III, Drehungspunkt  $c$ , Momentengleichung:

$$2100 \cdot 33,3 - 1400 \cdot 16,6 + 6 \cdot 15 = 0 \quad \frac{l}{2} = 33,3 \quad \frac{l}{4} = 16,6 \quad x_5 = 15 \quad 6 = -3111 \text{ kg Zug.}$$

Drehungspunkt  $a$ , Momentengleichung:

$$1400 \cdot 16,6 + 3111 \cdot 1,6 + 5 \cdot 14 = 0 \quad x_6 = 14 \quad x_7 = 1,6$$

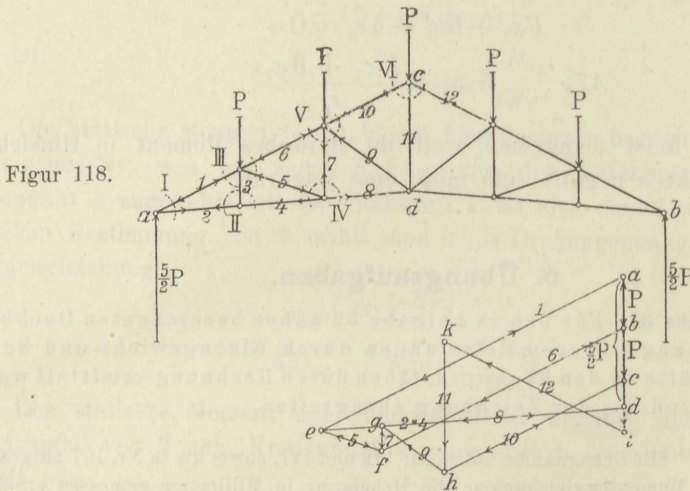
$$5 = -\frac{1400 \cdot 16,6 + 3111 \cdot 1,6}{14} = -2015 \text{ kg Zug.}$$

Ein Vergleich dieser durch Rechnung ermittelten Werte der Stabkräfte mit jenen durch Zeichnung erhaltenen zeigt hinlängliche Übereinstimmung.

109. **Aufgabe 34.** Für den in Figur 118 dargestellten englischen Dachbinder sind die Stabkräfte graphisch zu ermitteln.

**Auflösung.** Unter der Annahme eines Drucks auf die Knotenpunkte gleich  $P$  und

einer Auflagervertikalkraft  $= \frac{5}{2}P$  erhält man mittels der geführten Schnitte die folgenden Kräftevielsecke und Stabkräfte, siehe Figur 118 und 118a.



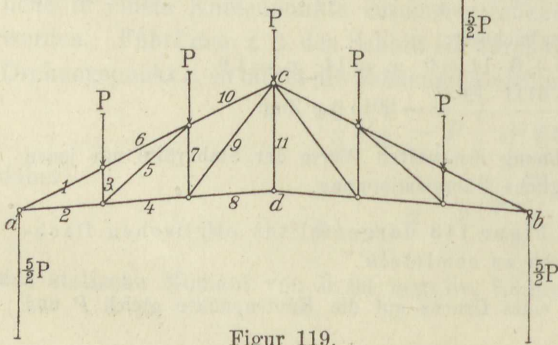
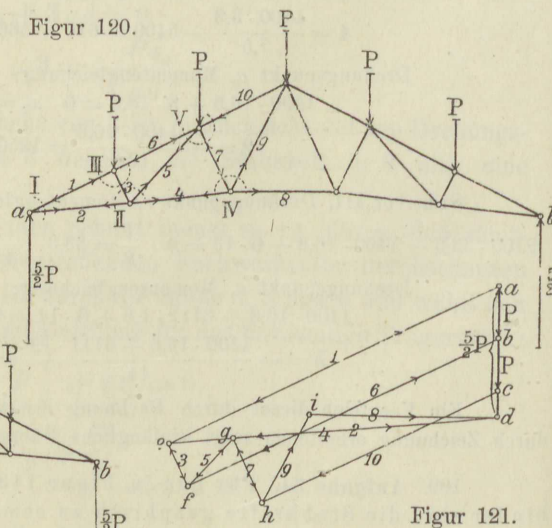
Schnitt	Kräftevielseck	Stabkräfte
I	<i>adea</i>	$1 = \overline{ae} = \text{Druck}$ , $2 = \overline{de} = \text{Zug}$
II	<i>ded</i>	$2 = 4 = \overline{de} = \text{Zug}$ $3 = 0$ Konstruktionsteil 3 ist also überflüssig
III	<i>aefba</i>	$5 = \overline{ef} = \text{Druck}$ $6 = \overline{fb} = \text{Druck}$
IV	<i>defgd</i>	$7 = \overline{fg} = \text{Zug}$ $8 = \overline{gd} = \text{Zug}$
V	<i>bfghcb</i>	$9 = \overline{hg} = \text{Druck}$ $10 = \overline{hc} = \text{Druck}$
VI	<i>cikhc</i>	$11 = \overline{hk} = \text{Zug}$

110. **Aufgabe 35.** Man ermittle die Stabkräfte für den in Figur 119 dargestellten Binder.

**Auflösung.** Man führe die Lösung in gleicher Weise durch wie in Aufgabe 34.

111. **Aufgabe 36.** Man ermittle die Stabkräfte für den

Figur 120.



Figur 119.

Figur 121.

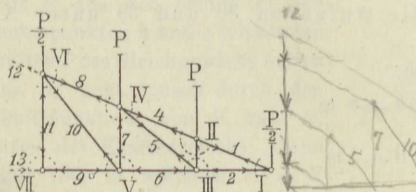
in Figur 120 gezeichneten Dachbinder.



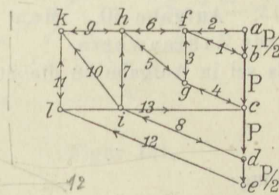
**Auflösung.** Man führt die Schnitte so wie in der Figur 120 angegeben und erhält dann die nachstehend verzeichneten Kräftevierecke und Stabkräfte, siehe Figur 121.

Schnitt	Kräfteviereck	Stabkräfte	
I	$adea$	$1 = \overline{ae} = \text{Druck}$	$2 = \overline{ed} = \text{Zug}$
III	$acfba$	$3 = \overline{ef} = \text{Druck}$	$6 = \overline{fb} = \text{Druck}$
II	$defgd$	$5 = \overline{fg} = \text{Zug}$	$4 = \overline{gd} = \text{Zug}$
IV	$dghid$	$8 = \overline{id} = \text{Zug}$	$9 = \overline{hi} = \text{Zug}$
V	$bchgfb$	$7 = \overline{gh} = \text{Druck}$	$10 = \overline{hc} = \text{Druck}$

112. **Aufgabe 37.** Für den in Figur 122 dargestellten Pultdachbinder sind die Stabkräfte zu ermitteln.



Figur 122.

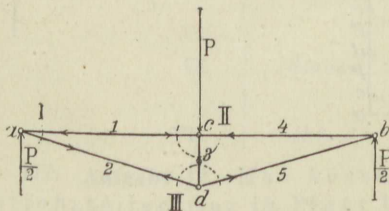


Figur 123.

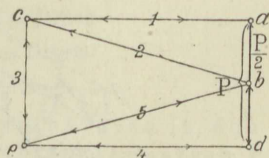
**Auflösung.** Man führt die Schnitte wie die Figur 122 zeigt und erhält dann den Kräfteplan, siehe Figur 123.

Schnitt	Kräfteviereck	Stabkräfte	
I	$abfa$	$2 = \overline{af} = \text{Druck}$	$1 = \overline{fb} = \text{Zug}$
II	$bcgfb$	$3 = \overline{fg} = \text{Druck}$	$4 = \overline{gc} = \text{Zug}$
III	$afgha$	$5 = \overline{hg} = \text{Zug}$	$6 = \overline{ha} = \text{Druck}$
IV	$cdihgc$	$7 = \overline{ih} = \text{Druck}$	$8 = \overline{di} = \text{Zug}$
V	$ahika$	$9 = \overline{ka} = \text{Druck}$	$10 = \overline{ki} = \text{Zug}$
VI	$dikled$	$11 = \overline{kl} = \text{Druck}$	$12 = \overline{le} = \text{Zug}$
VII	$cakle$	$13 = \overline{lc} = \text{Druck}$	

113. **Aufgabe 38.** Für den in Figur 124 dargestellten, einfach armierten Träger sind unter der Voraussetzung einer Beanspruchung durch eine Einzelast  $P$  im Punkte  $c$  die Stabkräfte zu ermitteln.



Figur 124

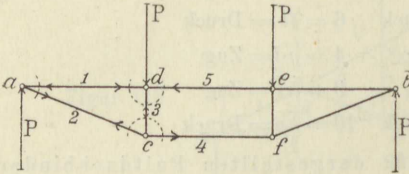


Figur 125.

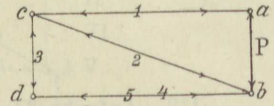
**Auflösung.** Mittels der Schnitte I, II, III ergeben sich die im Kräfteplan, siehe Figur 125, gezeichneten Stabkräfte.

114. **Aufgabe 39.** Für den in Figur 126 dargestellten, doppelt armierten Träger sind unter der Voraussetzung einer Belastung  $P$  in den Punkten  $d$  und  $e$  die Stabkräfte zu ermitteln.

**Auflösung.** Mittels der in Figur 126 angedeuteten Schnitte ergibt sich der Kräfteplan, siehe Figur 127, woraus die gesuchten Stabkräfte zu entnehmen sind.



Figur 126.



Figur 127.

115. **Aufgabe 40.** Man löse die Aufgaben 38 und 39 unter Annahme bestimmter Zahlenwerte.

Es sei in Aufgabe 38 die Stützweite:

$$\overline{ab} = 8 \text{ m}$$

die Höhe:

$$\overline{cd} = 1 \text{ m}$$

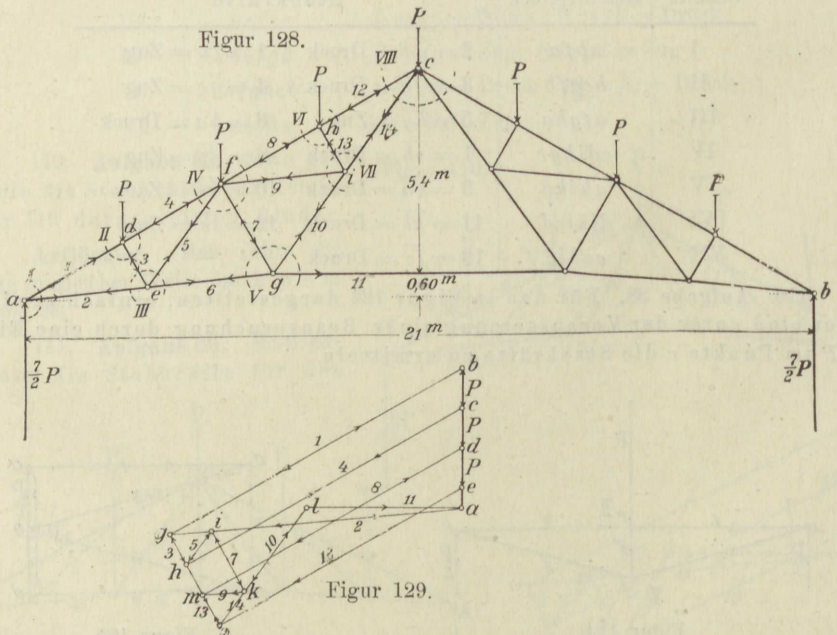
die Belastung:

$$P = 10000 \text{ kg}$$

In Aufgabe 39 sei:

$$\overline{ab} = 12 \text{ m} \quad \overline{cd} = 0,75 \text{ m} \quad P = 8000 \text{ kg}$$

116. **Aufgabe 41.** Für den in Figur 128 gezeichneten doppelten Polonceau-Binder sind die Stabkräfte zu ermitteln.



Figur 128.

Figur 129.

**Auflösung.** Mittels der Schnitte I bis III ergeben sich, siehe Figur 129, die Stabkräfte  $ad$ ,  $ae$ ,  $de$ ,  $df$ ,  $ef$  und  $ge$ . Führt man nun den Schnitt IV, so sind von den in dem

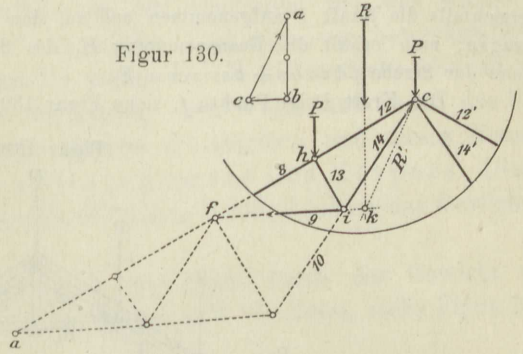


Knotenpunkte  $f$  zusammentreffenden Kräften bekannt die Stabkräfte 4 und 5, unbekannt dagegen 7, 9 und 8.

Die Stabkraft 9 ermittelt man zweckmäßig durch die Erwägung, daß wegen der symmetrischen Anordnung der Stäbe  $fe$  und  $fi$  hinsichtlich des Stabes  $fg$  die in ersteren Stäben herrschenden Kräfte gleich groß sein müssen. Es ist also Stabkraft  $5 = 9$ .

**Anmerkung 29.** Die Stabkraft 9 läßt sich auch noch auf folgende Weise ermitteln. Man führt einen Schnitt so wie Figur 130 zeigt. Die Stabkräfte 8, 10, 14', 12' liefern eine Mittelkraft  $R'$ , welche, mit der Stabkraft 9 zu einer weiteren Mittelkraft vereinigt, der Mittelkraft  $R$  aus den beiden in den Knotenpunkten  $h$  und  $c$  wirkenden Kräften  $P$  das Gleichgewicht halten muß.  $R'$  geht sonach durch den Schnittpunkt  $k$  von 9 und  $R$ . Mittels des Kräfte dreiecks, siehe Figur 130, in welchem  $\overline{ab} = R$  gegeben ist, findet man mittels der Parallelen durch  $a$  und  $b$  zu  $R'$  und 9 die Kräfte  $R' = \overline{ac}$  und  $9 = \overline{bc}$ , und zwar ist  $bc$  eine Zugkraft.

Figur 130.



Figur 131.

Nunmehr kann man ohne weitere Schwierigkeit die Schnitte IV, V, VI und VII, siehe Figur 128, führen und die zugehörigen Kräftepläne zeichnen.

Schnitt	Kräfteviereck	Stabkräfte
I	$abga$	$\overline{bg} = 1 = \text{Druck}$ $\overline{ag} = 2 = \text{Zug}$
II	$bchg'b$	$\overline{ch} = 4 = \text{Druck}$ $\overline{gh} = 3 = \text{Druck}$
III	$aghia$	$\overline{hi} = 5 = \text{Zug}$ $\overline{ia} = 6 = \text{Zug}$
IV	$cdmkihc$	$\overline{ik} = 7 = \text{Druck}$ $\overline{km} = 9 = \text{Zug}$ $\overline{dm} = 8 = \text{Druck}$
V	$aikla$	$\overline{ia} = 6 = \text{Zug}$ $\overline{kl} = 10 = \text{Zug}$ $\overline{la} = 11 = \text{Zug}$
VI	$dmoed$	$\overline{mo} = 13 = \text{Druck}$ $\overline{oe} = 12 = \text{Druck}$
VII	$lkmol$	$\overline{ol} = 14 = \text{Zug}$

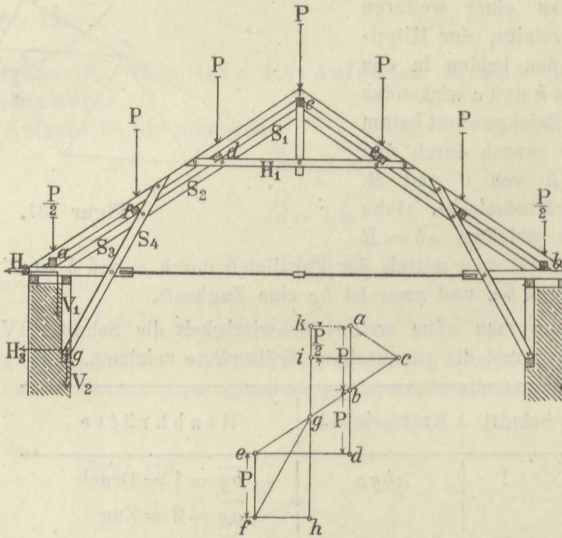
117. **Aufgabe 42.** Man konstruiere die Stabkräfte in den Konstruktionsteilen des in Figur 128 dargestellten doppelten Polonseau-Binders unter der Voraussetzung, daß die Stützweite 14 m, die Höhe 2,0 m, die Binderentfernung 4 m und die Belastung für den Quadratmeter Horizontalprojektion einschließlich Winddruck 200 kg betrage.

118. **Aufgabe 43.** Für das in Figur 132 dargestellte Sprengwerkdach ist für die gegebenen Belastungen der Kräfteplan zu konstruieren.

**Auflösung.** Die im Firstpunkte  $e$ , siehe Figur 132, wirkende Kraft  $P$  wird auf die Streben  $cd$  und  $ce$  übertragen, und zwar erhält man diese Strebendrucke  $S_1$  mittels des Dreiecks  $abc$ , siehe Figur 132a, worin  $\overline{ac} = \overline{bc} = S_1$  ist. Im Punkte  $d$ , siehe Figur 132, wird gleichfalls die Kraft  $P$  aufgenommen und auf den Spannriegel  $de$  sowie die Strebe  $df$  übertragen; man erhält die Beanspruchung  $H_1$  des Spannriegels gleich  $\overline{de}$ , siehe Figur 132a, jene der Strebe  $fd = \overline{be} + \overline{bc} = \overline{ce} = S_2$ .

Die Kraft  $P$  im Punkte  $f$ , siehe Figur 132, nehmen die Streben  $af$  und  $fg$  auf, und

Figur 132.



Figur 132 a.

zwar ist der Druck in der Strebe  $af = S_3 = \overline{gc}$ , siehe Figur 132a, jener in  $fg = S_4 = \overline{gf}$ , siehe Figur 132a.

Durch die Strebendrucke  $S_3$  und  $S_4$  entstehen in den Punkten  $a$  und  $g$  die Horizontal-schübe  $H_2 = \overline{ci}$ , siehe Figur 132 a, und  $H_3 = \overline{fh}$ , siehe Figur 132a, ebenso die Vertikaldrucke:

$$V_1 = \overline{kg} \text{ und } V_2 = \overline{gh}$$

Man erhält folgende Zusammenstellung:

Fig. 132. Fig. 132 a.

- $S_1 = \overline{bc}$  Druck
- $S_2 = \overline{ce}$  "
- $S_3 = \overline{gc}$  "
- $S_4 = \overline{gf}$  "
- $H_1 = \overline{de}$  Zug
- $H_2 = \overline{ci}$  "
- $H_3 = \overline{fh}$  Druck auf die Mauer
- $V_1 = \overline{kg}$  " " " "
- $V_2 = \overline{gh}$  " " " "

Außer den Vertikalen  $V_1$  und  $V_2$  hat die Mauer noch den im Auflagerpunkt  $a$  wirkenden vertikalen Druck  $\frac{P}{2}$  aufzunehmen.

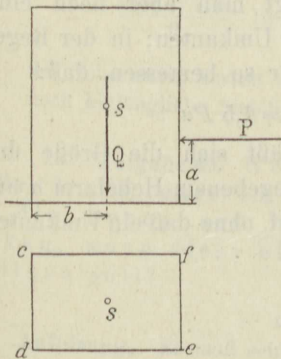


## E. Stabilität der Körper.

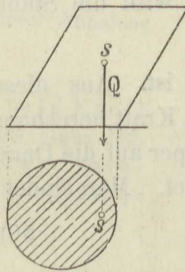
### I. Begriff der Stabilität, Stabilitätsmoment.

119. Unter der Stabilität eines Körpers versteht man dessen Widerstand gegen Umkanten. Liegt z. B. ein Körper, siehe Figur 133, mittels einer Fläche  $cdef$  auf einer Ebene auf und ist angenommen, daß eine Verschiebung auf letzterer ausgeschlossen, vielmehr nur ein Umkanten um die Kante  $cd$  möglich ist, so wird eine Kraft  $P$  ein solches Umkanten nur bewerkstelligen können, wenn das statische Moment  $Pa$  größer ist als das statische Moment  $Qb$ , unter  $Q$  das Gewicht des Körpers verstanden. Der Widerstand gegen das Umkanten ist also durch das statische Moment  $Qb$  gegeben und dieses Moment nennt man deshalb auch das Stabilitätsmoment des Körpers. Dieses Moment ist um so größer, je größer der Hebelarm  $b$  und je größer das Gewicht  $Q$  des Körpers ist.

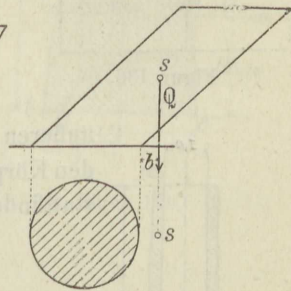
Ein Umkanten des Körpers kann aber auch durch das Gewicht des Körpers selbst bewirkt werden. Hat der Körper z. B. die Form, siehe Figur 135,



Figur 133.



Figur 134.



Figur 135.

so trifft die Schwerpunktsvertikale  $Q$  die Auflagerfläche des Körpers nicht mehr, und es ist demnach auch keine Gegenkraft vorhanden welche der Kraft  $Q$  das Gleichgewicht hält, d. h. es kommt das statische Moment  $Qb$  zur Wirkung; der Körper wird umkanten. In diesem Falle besitzt der Körper keine Stabilität.

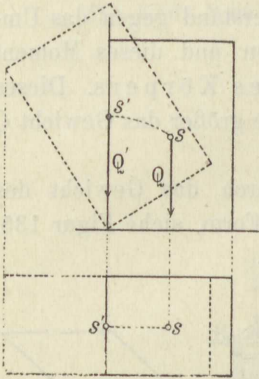
Endlich ist noch der Fall denkbar, daß der Körper keine Stabilität besitzt, ohne daß er jedoch umzukanten braucht. Denkt man sich z. B. einen senkrechten Kreiskegel auf seiner Spitze stehend, so geht die Schwerpunktsvertikale durch den Unterstützungspunkt; es ist das Stabilitätsmoment, weil der Hebelarm verschwindet, gleich Null. Die geringste Einwirkung einer äußeren Kraft wird aber hinreichen, den Körper umzuwerfen; das gleiche ist der Fall, wenn die Vertikale durch den Schwerpunkt gerade die Umfassungslinie der Unterstützungsfläche schneidet.

Wird ein Körper durch eine äußere Kraft umzukanten gesucht, so wird er nach Aufhören der Wirkung der äußeren Kraft so lange in seine ursprüng-

liche Lage zurückkehren, als sein Schwerpunkt noch nicht zur Vertikalebene gelangt ist, welche die Drehungskante enthält. Hat der Schwerpunkt diese Lage überschritten, so kehrt der Körper nicht mehr in seine ursprüngliche Lage zurück, sondern fällt nach der entgegengesetzten Seite um.

## 2. Stabilitätsgesetz, Stabilitätsgleichung.

120. Aus dem vorangegangenen ergibt sich für die Stabilität eines Körpers folgendes Gesetz:



Figur 136.

„Die Stabilität ist um so größer, je größer die Unterstützungsfläche und das Gewicht des Körpers ist, sowie je tiefer sein Schwerpunkt liegt.“

Stabilitätsgleichung. Damit Gleichgewicht zwischen der äußeren Kraft und der Stabilität des Körpers vorhanden ist, muß die Gleichung bestehen

$$48) \dots Qb = Pa$$

Für Bauwerke verlangt man aber noch eine gewisse Sicherheit gegen das Umkanten; in der Regel wird die Stabilität der Körper so bemessen, daß:

$$49) \dots Qb = 1,5 Pa$$

ist. Aus dieser Gleichung läßt sich die Größe der äußeren Kraft berechnen, welche bei gegebenem Hebelarm  $a$  auf den Körper auf die Dauer einwirken darf, ohne daß ein Umkanten stattfindet. Man findet nämlich:

$$50) \dots P = \frac{Qb}{1,5 a}$$

## 3. Übungsaufgaben.

121. **Aufgabe 44.** Ein Schornstein mit den nebenstehenden Ausmessungen, siehe Figur 137, ist gegeben. Wie groß darf der in einer Entfernung gleich 5,6 m von der untersten Fläche befindliche horizontale Winddruck sein, damit hinlängliche Sicherheit gegen das Umkanten des Schornsteins vorhanden ist?

1 Kubikmeter Mauerwerk = 1600 kg.

**Anflösung.** Das Gewicht des Schornsteins ist:

$$Q = \frac{(f_1 + f_2)}{2} \cdot 12 \cdot 1600$$

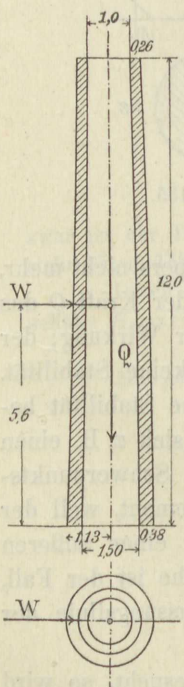
unter  $f_1$  und  $f_2$  die untere, bzw. obere Querschnittsfläche verstanden.

Nun ist aber:

$$f_1 = \frac{3,14}{4} (1,50 + 2,26) \cdot 0,76 = 2,24 \text{ qm}$$

und

$$f_2 = \frac{3,14}{4} (1,0 + 1,52) \cdot 0,52 = 1,03 \text{ qm.}$$



Figur 137.



Es ist also:

$$Q = \frac{2,24 + 1,03}{2} \cdot 12 \cdot 1600 = 31392 \text{ kg.}$$

Man hat nun die Stabilitätsgleichung:

$$W = \frac{31392 \cdot 1,13}{1,5 \cdot 5,6} = 4223 \text{ kg.}$$

In Wirklichkeit beträgt aber der Winddruck bei einer Annahme von 125 kg für den Quadratmeter senkrecht getroffene Fläche nur:

$$\frac{(2,26 + 1,52)}{2} \cdot 12 \cdot 125 \cdot 0,66 = 1890 \text{ kg.}$$

Der Schornstein besitzt also hinlängliche Stabilität.

**Anmerkung 30.** Nimmt man als Winddruck 150 kg für den Quadratmeter senkrecht getroffene Fläche an, so beträgt im vorliegenden Falle der Winddruck auf den Schornstein:

$$\frac{2,26 + 1,52}{2} \cdot 12 \cdot 150 \cdot 0,66 = 2268 \text{ kg}$$

der Schornstein besitzt also auch unter dieser Annahme noch hinlängliche Stabilität.

122. **Aufgabe 45.** Welche horizontale Kraft  $H$  (Erddruck) darf im Punkte  $a$ , siehe Figur 138, für die Dauer auf die Futtermauer einwirken, wenn diese hinreichende Stabilität besitzen soll?

**Auflösung.** Es muß sein:

$$Qy = 1,5 H \cdot 1,0.$$

Nun ist aber für den laufenden Meter Tiefe der Mauer:

$$Q = \frac{1,00 + 1,50}{2} \cdot 3 \cdot 1600 = 6000 \text{ kg}$$

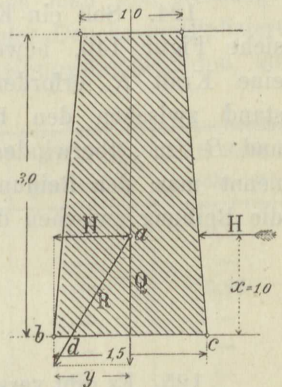
Der Hebelarm  $y$  von  $Q$  beträgt nach der Figur 138:

0,75 m. Es ist daher:

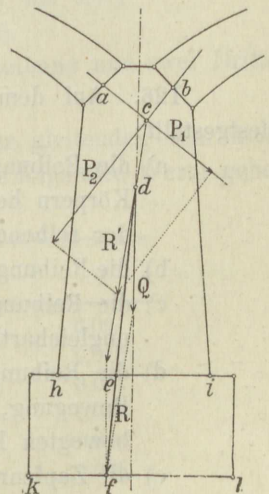
$$6000 \cdot 0,75 = 1,5 H \cdot 1,0$$

$$H = \frac{6000 \cdot 0,75}{1,5} = 3000 \text{ kg}$$

123. **Aufgabe 46.** Auf einen Mauerpfeiler wirken, siehe Figur 139, die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , herrührend von den Belastungen zweier Gewölbekappen. Es ist zu untersuchen, ob der Mauerpfeiler hinreichende Stabilität besitzt?



Figur 138.



Figur 139.

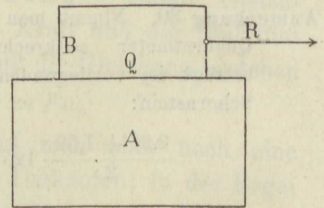
**Auflösung.** Zunächst vereinigt man die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Mittelkraft  $R'$ , hierauf  $R'$  und die das Mauergewicht darstellende Kraft  $Q$  zu einer Mittelkraft  $R$ .

Hinreichende Stabilität besitzt die Mauer, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Mittelkraft  $R$  die Fundamentfläche noch innerhalb ihrer Begrenzung trifft.

## F. Die Reibung.

### 1. Die Reibung im allgemeinen.

124. Soll ein Körper,  $B$ , gleitend auf der Oberfläche eines Körpers  $A$ , siehe Figur 140, bewegt werden, so ist hierzu eine Kraft  $R$  erforderlich, welche den Widerstand zwischen den beiden Oberflächen von  $A$  und  $B$  zu überwinden hat; diesen Widerstand nennt man den Reibungswiderstand oder kurzweg die Reibung zwischen den Körpern  $A$  und  $B$ .



Figur 140.

### 2. Reibungsarten.

125. Es gibt verschiedene Reibungsarten, je nach der Art der Bewegung der die Reibung verursachenden Oberflächen. Man unterscheidet:

- a) gleitende Reibung, wenn die Bewegung, wie in Figur 140, stattfindet;
- b) rollende Reibung, wenn der eine Körper auf dem andern rollt;
- c) Zapfenreibung, und zwar Reibung bei liegenden und Reibung bei stehenden Zapfen.

### 3. Reibungsgesetze.

126. Auf dem Wege des Versuchs hat man folgende Reibungsgesetze festgestellt:

- a) die Reibung ist proportional der Größe des zwischen den reibenden Körpern herrschenden Normaldrucks, aber unabhängig von der Größe der reibenden Oberflächen,
- b) die Reibung ist um so größer, je rauher die reibenden Oberflächen sind,
- c) die Reibung zwischen gleichartigen Körpern ist größer als zwischen ungleichartigen,
- d) die Reibung ist am Anfang der Bewegung größer als während der Bewegung, sonst aber unabhängig von der Geschwindigkeit der bewegten Körper,
- e) die Zapfenreibung ist geringer als die gewöhnliche gleitende Reibung, die rollende Reibung ist im Verhältnis zur gleitenden sehr klein.



Zur Verminderung der Reibung zwischen zwei Körpern dienen die Schmiermittel, welche die Unebenheiten der reibenden Oberflächen ausfüllen und so die Reibung vermindern; solche Schmiermittel sind für Holz: gewisse Fette, Seife, Graphit u. dgl., für Metalle gewisse Öle.

#### 4. Reibungskoeffizient.

127. Hierunter versteht man das Verhältnis der zur Überwindung der Reibung erforderlichen Kraft  $R$  zur Größe des zwischen den Körpern herrschenden Drucks  $Q$ ; es ist also:

$$51) \dots f = \frac{R}{Q}$$

Man erhält somit die Größe der Reibung, wenn man den Reibungskoeffizienten mit der Größe des von den Körpern ausgeübten Drucks multipliziert.

Im folgenden sind für einige Körper die Reibungskoeffizienten zusammengestellt.

Reibende Körper	Ohne Schmiermittel	Mit Öl geschmiert	Mit Fett geschmiert	Mit Seife geschmiert
Holz auf Holz . . . . .	0,36	—	0,07	0,15
Metall auf Metall . . . . .	0,18	0,09	—	—
Holz auf Metall . . . . .	0,42	0,06	0,08	0,20
Hanfseil auf Holz . . . . .	0,45	—	—	—
„ „ Eisen . . . . .	—	0,15	—	—
Zugerichtete Bausteine . . . . .	0,60—0,75	—	—	—

Die hier mitgeteilten Reibungskoeffizienten gelten während der Bewegung; für den Anfang der Bewegung dürfen wohl die doppelten Werte genommen werden.

128. Für die Zapfenreibung hat man für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, daß Zapfen aus Schmiede- oder Gußeisen in Lagern von Gußeisen oder Messing u. dgl. laufen:

bei Schmierung von Zeit zu Zeit:  $f = 0,07$  bis  $0,08$ ,

bei ununterbrochener Schmierung:  $f = 0,05$ .

Hat man stehende Zapfen, so beträgt hier die Reibung nur zwei Drittel der Reibung für liegende Zapfen.

129. Die rollende Reibung ist im Verhältnis zur gleitenden sehr klein und kommt namentlich für Fuhrwerke in Betracht. Die folgenden Werte geben einen Begriff von der Größe dieser Reibungsart.

Art der Fahrbahn	$f$
Auf einer guten Schotterstraße . . . . .	0,02
Auf sehr gutem Pflaster . . . . .	0,015
Auf schlechtem Pflaster . . . . .	0,021
Auf einer schlechten Schotterstraße . . . . .	0,077
Auf einer Brückenbahn von Holz . . . . .	0,023
Auf einer Eisenbahn . . . . .	0,005

## 5. Übungsaufgaben.

130. **Aufgabe 47.** Wie groß ist der Reibungswiderstand einer Futtermauer, siehe Figur 141, längs der Fuge  $ab$ , für den laufenden Meter Tiefe, wenn der Reibungskoeffizient für Ziegelmauerwerk 0,7 sein und 1 cbm Ziegelmauerwerk 1600 kg wiegen soll?

**Auflösung.** Der gesuchte Reibungswiderstand ist:

$$R = 1,0 \cdot 2,0 \cdot 1 \cdot 1600 \cdot 0,7 = 2240 \text{ kg.}$$

Die Horizontalkraft  $P$  muß also kleiner sein als  $R$ , wenn ein Abgleiten des Mauerwerks längs der Fuge  $ab$  nicht stattfinden soll.

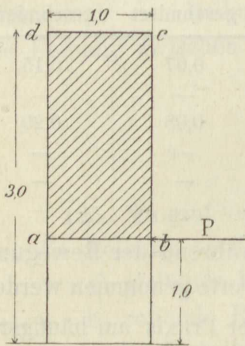
131. **Aufgabe 48.** Es ist der Winkel  $\alpha$ , siehe Figur 142, mit der Horizontalen zu bestimmen, bis zu welchem man wird wölben können, ohne daß ein Abgleiten der Steine längs der Fuge infolge ihres Gewichts stattfindet, wenn der Reibungskoeffizient 0,5 sein soll.

**Auflösung.** Zwischen der Normalkraft  $N$  und der Reibung  $R$  findet das Verhältnis statt:

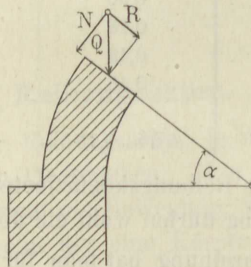
$$N : R = 1 : 0,5.$$

Daher ist:

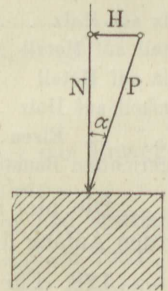
$$\text{tg } \alpha = 0,5 \text{ und demgemäß } \alpha = \text{ca. } 27^\circ.$$



Figur 141.



Figur 142.



Figur 143.

132. **Aufgabe 49.** Es ist der Winkel  $\alpha$ , siehe Figur 143, zu bestimmen, bis zu welchem die Richtung der Kraft  $P$  von der Normalen  $N$  zur Fugenfläche abweichen darf, ohne daß ein Gleiten des Mauerwerks längs der obersten Fuge stattfindet. Reibungskoeffizient  $f = 0,7$ .

**Auflösung.** Sobald das Verhältnis  $H : N$  größer als 0,7 ist, wird ein Abgleiten längs der obersten Fuge stattfinden.

Es muß also sein:

$$\text{tg } \alpha \leq 0,7, \text{ d. h. } \alpha \leq 35^\circ.$$

**Anmerkung 31.** Der Winkel  $\alpha$ , dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten ist, heißt der Reibungswinkel des betreffenden Materials.

133. **Aufgabe 50.** Ein Wasserrad von 4m Durchmesser und 25000 kg Gewicht läuft mittels gußeisernen Zapfen von 35 cm Durchmesser in Lagern von Bronze und macht acht Umgänge in der Minute. Wie groß ist die gesamte Zapfenreibung und der durch letztere hervorgerufene Arbeitsverlust in der Sekunde?



**Auflösung.** Bei guter Schmierung mit Öl hat der Reibungskoeffizient den Wert:

$$f = 0,08$$

dennach ist die Gesamtreibung:

$$R = 0,08 \cdot 25\,000 = 2000 \text{ kg.}$$

Der Umfang eines Zapfens ist nun:

$$3,14 \cdot 0,35 = 1,099 \text{ m}$$

daher die Umfangsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{1,099 \cdot 8}{60} = 0,1465 \text{ m.}$$

Die in der Sekunde geleistete Arbeit ist:

$$A = 0,1465 \cdot 2000 = 293 \text{ Meterkilogramm,}$$

in Pferdestärken ausgedrückt:

$$N = \frac{293}{75} = 3,6 \text{ Pferde.}$$

134. **Aufgabe 51.** Ein Schwungrad wiegt samt Achse 2400 kg und läuft in Zapfen von 15 cm Stärke. Wie groß ist der infolge der Reibung hervorgerufene Arbeitsverlust, wenn das Rad in der Minute 60 Umdrehungen macht und der Reibungskoeffizient 0,08 beträgt.

**Auflösung.** Die gesamte Reibung ist:

$$2400 \cdot 0,08 = 192 \text{ kg}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit eines Zapfens beträgt:

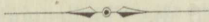
$$v = \frac{0,15 \cdot 3,14 \cdot 60}{60} = 0,471 \text{ m}$$

Die in der Sekunde geleistete Arbeit ist:

$$A = 0,471 \cdot 192 = 90,432 \text{ mkg}$$

dennach die Arbeit der Pferdestärken:

$$N = \frac{90,432}{75} = 1,3 \text{ Pferde.}$$



# Elemente der Festigkeitslehre.

## A. Einleitung.

### I. Elastizität, Proportionalitäts- bzw. Elastizitätsgrenze.

135. Das Einwirken äußerer Kräfte auf einen Körper bedingt eine Formänderung des letzteren. Nach dem Aufhören der Kraftwirkung zeigt der Körper das Bestreben, seine ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen. Dieses Bestreben nennt man Elastizität.

In der Regel bleiben kleine Formänderungen bestehen, welche proportional sind den äußeren Kräften — jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze — der Proportionalitätsgrenze.

Wird die Beanspruchung durch äußere Kräfte über die Proportionalitätsgrenze hinaus fortgesetzt, so wachsen die Formänderungen in einem anderen Verhältnis als die Belastungen, und schließlich tritt der Bruch des Körpers ein. Die entsprechende Belastung heißt die Bruchbelastung, auch Bruchkraft oder Bruchmodul.

Infolge der Beanspruchung durch äußere Kräfte entsteht innerhalb des Körpers eine Spannung; hierunter versteht man die Beanspruchung in irgendeinem Querschnitt des Körpers für die Flächeneinheit. — Der Bruchbelastung entspricht als Spannung die Bruchspannung, d. h. die Festigkeit des Körpers.

136. Statt der Proportionalitätsgrenze unterschied man früher die Elastizitätsgrenze und verstand darunter jene Grenze, bis zu welcher der Körper durch äußere Kräfte beansprucht werden durfte, ohne daß bleibende Formänderungen eintraten. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, daß bleibende Formänderungen bei den meisten in technischer Beziehung wichtigen Körpern schon bei Beanspruchung von verhältnismäßig kleinen äußeren Kräften eintreten; diese Formänderungen sind jedoch so verschwindend klein, daß sie sich bisher der Meßbarkeit entzogen hatten.

Mittels der in neuerer Zeit konstruierten außerordentlich feinen Meßinstrumente ist es möglich gewesen, das Vorhandensein der kleinsten bleibenden Formänderungen nachzuweisen.



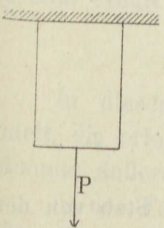
## 2. Festigkeitsarten.

137. Je nach der Art der Einwirkung der äußeren Kräfte kann man verschiedene Festigkeiten unterscheiden; hier sollen nur die folgenden hervor-gehoben werden:

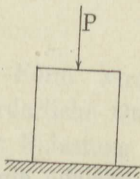
**Zugfestigkeit.** Wirkt eine Kraft  $P$  in der Achse eines stabförmigen Körpers so, daß sie eine Dehnung des Körpers veranlaßt, siehe Figur 144, so wird der Körper auf Zugfestigkeit beansprucht, es entstehen im Körper Zugspannungen.

**Druckfestigkeit.** Die Kraft wirkt gleichfalls in der Achse des stabförmigen Körpers, sie verursacht aber ein Zusammenpressen des Körpers und ruft in letzterem Druckspannungen hervor, siehe Figur 145.

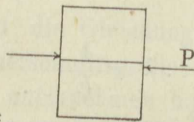
**Schub- oder Scherfestigkeit.** Die Kraft wirkt wie in Figur 146 und bewirkt ein Hinwegschieben eines Querschnitts auf seinem Nachbar-



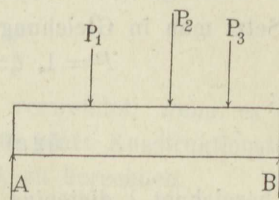
Figur 144.



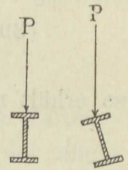
Figur 145.



Figur 146.



Figur 147.



Figur 148.

Figur 148 a.

querschnitte; die hierdurch im Körper auftretenden Spannungen heißen Schubspannungen.

**Anmerkung 32.** Bei der Zug- und Druckfestigkeit wirkt die äußere Kraft stets normal zur Querschnittsebene. Man kann deshalb genannte Festigkeiten unter der gemeinsamen Bezeichnung „Normalfestigkeit“ zusammenfassen. Die hierbei auftretenden Spannungen heißen „Normalspannungen“.

**Biegungsfestigkeit.** Die Kraft wirkt senkrecht zur Achse eines stabförmigen Körpers, siehe Figur 147, die auftretenden Spannungen heißen Biegunsspannungen; man unterscheidet:

einfache und zusammengesetzte Biegungsfestigkeit, je nachdem die Richtungslinie der Kraft mit einer Hauptachse eines Stabquerschnitts zusammenfällt oder nicht, siehe Figur 148 und Figur 148a.

**Zerknickungsfestigkeit.** Die Kraft wirkt in der Längsachse eines stabförmigen Körpers, dessen Länge größer ist als der fünffache Betrag der kleinsten Querschnittsausdehnung.

**Zusammengesetzte Festigkeit.** Der Körper wird auf mehrere Festigkeiten zugleich beansprucht, und zwar entweder auf Biegung und Zug oder auf Biegung und Druck.

## B. Normalfestigkeit.

### 1. Formänderung eines Stabs.

138. Durch Einwirkung einer Kraft  $P$  auf einen stabförmigen Körper, siehe Figur 144, welche sich gleichmäßig auf den Querschnitt  $F$  verteilt, erfährt der Körper eine Längenänderung proportional der Größe der Kraft und der Länge des Stabs und umgekehrt proportional der Größe des Querschnitts  $F$  und des Elastizitätsmodulus  $E$ , siehe Nr. 139.

Bezeichnet  $\lambda$  die hervorgebrachte Verlängerung,  $E$  den Elastizitätsmodulus und  $l$  die Länge des Stabs, so ist:

$$52) \dots \lambda = \frac{Pl}{EF}$$

Ist die Kraft  $F$  eine Druckkraft, so gilt für die Formänderung die nämliche Gleichung 52; nur bezeichnet in diesem Falle  $\lambda$  die infolge der Einwirkung von  $P$  hervorgerufene Verkürzung.

139. Setzt man in Gleichung 52:

$$P=1, l=1 \text{ und } F=1,$$

so erhält man:

$$52a) \dots \lambda = \frac{1}{E}$$

Hierin bezeichnet  $\lambda$  diejenige Längenänderung, welche ein Stab von der Längeneinheit und einem Querschnitt gleich der Flächeneinheit durch die Kräfteinheit erfährt. Diese Längenänderung nennt man den Dehnungskoeffizienten des Materials.

Aus der Gleichung 52a folgt:

$$52b) \dots E = \frac{1}{\lambda}$$

d. h. der Elastizitätsmodulus eines Materials ist gleich dem reziproken Werte seines Dehnungskoeffizienten.

Mittels der vorstehenden Gleichung 52 ist man imstande, die Verlängerung eines Stabs vom gegebenen Querschnitt und Material zu berechnen, welche durch eine Kraft  $P$  hervorgerufen wird.

### 2. Tragfähigkeit eines Stabs.

140. Ist  $K$  die der Bruchkraft  $P'$  entsprechende Spannung und  $F$  der Stabquerschnitt, so findet zwischen den drei Größen  $P'$ ,  $K$  und  $F$  die Beziehung statt:

$$53) \dots P' = KF$$

Zur Berechnung der Tragfähigkeit eines Querschnitts darf man aber nicht die Bruchspannung „ $K$ “ zugrunde legen, sondern muß eine kleinere Spannung „ $k$ “ voraussetzen, so daß man die Gleichung erhält:

$$54) \dots \underline{P = kF}$$



Die der Spannung „ $k$ “ entsprechende Kraft „ $P$ “ heißt die Tragkraft. Der Quotient  $\frac{k}{K}$  heißt der Sicherheitskoeffizient; er beträgt für Holz und Stein in der Regel 10, für Metalle 5, d. h. die Beanspruchung, welche den Körpern zugemutet wird, darf nur den zehnten, bzw. fünften Teil der Bruchbeanspruchung betragen.

Die in Gleichung 54 enthaltene Größe „ $k$ “ bezeichnet man als zulässige Beanspruchung bzw. als die zulässige Faserspannung des Materials; dieselbe ist eine Zug- bzw. eine Druckspannung, je nachdem die Kraft  $P$  eine Zug- bzw. Druckkraft ist.

**Anmerkung 33.** Bei den folgenden Berechnungen soll in der Regel die äußere Kraft  $P$  in Kilogramm, der Flächeninhalt  $F$  in Quadratcentimeter und die zulässige Faserspannung  $k$  in Kilogramm für den Quadratcentimeter ausgedrückt sein.

141. Die Formel 54 findet in mehrfacher Weise Anwendung, je nachdem in ihr  $P$ ,  $k$  oder  $F$  unbekannt sind; am häufigsten ist das letztere der Fall, und man erhält dann für  $F$  den Wert:

$$55) \dots F = \frac{P}{k}$$

In dieser Form wird die Gleichung verwendet, wenn es sich darum handelt, die erforderliche Querschnittsgröße für einen Konstruktionsteil, der eine bestimmte äußere Belastung aufzunehmen hat, zu berechnen.

In der Form 54 findet sie dagegen Anwendung, wenn die Querschnittsgröße „ $F$ “ und die zulässige Beanspruchung, also das Material des Konstruktionsteils bekannt sind und man dessen Tragkraft bestimmen will.

Kennt man endlich die Belastung  $P$  sowie die Querschnittsgröße  $F$  und will man die im Körper durch die Belastung  $P$  auftretende Spannung feststellen, so erhält man, wenn man diese Spannung mit „ $\sigma$ “ bezeichnet:

$$56) \quad \sigma = \frac{P}{F}$$

Hierbei muß, soll das Material innerhalb der zulässigen Grenze beansprucht werden,  $\sigma \leq k$  sein.

## C. Schubfestigkeit.

142. Für die Schubfestigkeit bestehen die gleichen Formeln wie für die Normalfestigkeit, nur ist die zulässige Faserspannung für Schub bei Holz etwa  $\frac{1}{10}$  bei Metallen  $\frac{4}{5}$  der zulässigen Zug- bzw. Druckbeanspruchung; die hierzu gehörigen Werte finden sich in den amtlichen Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und die Beanspruchungen der Baustoffe siehe Anhang I, zusammengestellt.

## D. Übungsaufgaben.

143. **Aufgabe 52.** Ein Flacheisen von rechteckigem Querschnitt  $\frac{10}{8}$  cm und 3 m Länge hat einen Zug von 6000 kg aufzunehmen; wie groß ist die Verlängerung  $\lambda$ ?

**Auflösung.** Es ist  $\lambda = \frac{Pl}{EF}$ ; nun ist der Elastizitätsmodulus für Schmiedeeisen  $E = 2000000$ , daher ist:

$$\lambda = \frac{6000 \cdot 300}{2000000 \cdot 10 \cdot 8} = 0,01125 \text{ cm} = 0,1125 \text{ mm}$$

144. **Aufgabe 53.** Eine kreisrunde Zugstange aus Flußeisen von 6 m Länge und 4 cm Durchmesser hat einen Zug von 10000 kg aufzunehmen, wie groß ist die Verlängerung  $\lambda$ ?

**Auflösung.** Es ist:

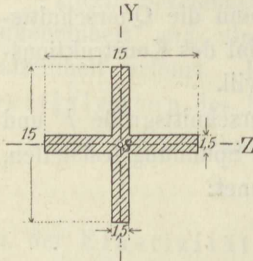
$$\lambda = \frac{10000 \cdot 600}{2150000 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 3,14}{4}} = 0,23 \text{ cm}$$

145. **Aufgabe 54.** Welchen Zug kann ein Winkeleisen Nr. 6 aufnehmen?  $F = 8,96$  qcm.

**Auflösung.** Für Flußeisen ist  $k = 1200$ , daher ist:

$$P = 1200 \cdot 8,96 = 10752 \text{ kg}$$

146. **Aufgabe 55.** Welche Druckbelastung kann eine kurze Flügelsäule von nebenstehendem Querschnitt, siehe Figur 149, aufnehmen?



Figur 149.

**Auflösung.** Für Gußeisen ist  $k = 500$ , daher ist:

$$P = 500 (2 \cdot 15 \cdot 1,5 - 1,5^2) = 21375 \text{ kg}$$

147. **Aufgabe 56.** Welche Last kann eine kreisrunde, flußeiserne Zugstange von 2,5 cm Durchmesser mit Sicherheit tragen?

**Auflösung.** Es ist:

$$P = \frac{2,5 \cdot 2,5 \cdot 3,14 \cdot 800}{4} = 3925 \text{ kg}$$

148. **Aufgabe 57.** Das Fundament eines quadratischen Mauerpfeilers hat eine Länge von vier Steinen, Normalformat; welche Druckbelastung kann der Pfeiler auf den Baugrund übertragen?

**Auflösung.** Für guten Baugrund ist  $k = 3$  kg; die Seitenlänge des Fundaments ist 103 cm, daher hat man:

$$P = 103 \cdot 103 \cdot 3 = 31827 \text{ kg}$$

149. **Aufgabe 58.** Welche Last kann eine Hängesäule aus Eichenholz von quadratischem Querschnitt 16/16 cm aufnehmen?  $k = 100$ .

**Auflösung.** Es ist:  $P = 100 \cdot 16 \cdot 16 = 25600 \text{ kg}$

150. **Aufgabe 59.** Welche Druckbelastung kann ein Kopfband aus Kiefernholz von quadratischem Querschnitt 14/14 cm aufnehmen?  $k = 70$ .

**Auflösung.** Es ist:  $P = 70 \cdot 14 \cdot 14 = 13720 \text{ kg}$



151. **Aufgabe 60.** Eine kreisrunde Zugstange aus Flußeisen hat einen Zug von 12000 kg aufzunehmen; wie groß muß der Durchmesser  $d$  der Zugstange gewählt werden?

**Auflösung.** Es ist:

$$\frac{d^2 \cdot 3,14}{4} = \frac{12000}{800}$$

$$d^2 = \frac{12000 \cdot 4}{800 \cdot 3,14} = \frac{60}{3,14} = 19,11$$

und  $d = \sqrt{19,11} = 4,4 \text{ cm} = 44 \text{ mm}$

152. **Aufgabe 61.** Eine Hängesäule aus Kiefernholz von quadratischem Querschnitt hat einen Zug von 8000 kg aufzunehmen; wie stark muß die Säule sein?  $k = 100$ .

**Auflösung.** Ist die Querschnittseite  $= x$ , so hat man:

$$x^2 = \frac{8000}{100}$$

$$x = \sqrt{\frac{8000}{100}} = 8,9 \text{ oder rund } 9 \text{ cm}$$

153. **Aufgabe 62.** Der Querschnitt der Zuggurtung eines eisernen Dachbinders soll aus zwei gleichschenkligen Winkeleisen bestehen. Die Gurtung hat einen Zug von 7500 kg aufzunehmen. Welche Winkeleisenprofile sind zu wählen?

**Auflösung.** Es ist:

$$F = \frac{7500}{1200} = 6,25 \text{ qcm}$$

Auf einen Winkeleisenquerschnitt trifft demnach ein Flächeninhalt von 3,125 qcm. In der Querschnittstabelle, siehe Anhang II, Tabelle VII, findet man für ein Winkeleisen Nr. 5 eine Querschnittsfläche von 6,51 qcm. Zwei Winkeleisen Nr. 5 werden daher mit Rücksicht auf die Schwächung durch die Niete genügen.

154. **Aufgabe 63.** Eine gußeiserne Säule überträgt auf einen Mauerpfeiler von quadratischem Querschnitt einen Druck von 40000 kg, wie stark muß der Pfeiler und dessen Fundament ausgeführt werden?  $k$  für Ziegelmauerwerk  $= 7 \text{ kg}$ , für Baugrund  $= 3 \text{ kg}$ .

**Auflösung.** Bezeichnet  $x$  die Pfeiler- und  $y$  die Fundamentstärke, so ist:

$$x^2 = \frac{40000}{7}$$

daher:

$$x = \sqrt{\frac{40000}{7}} = 75 \text{ cm}$$

oder in Steinmaß ausgedrückt  $= 3$  Steine,  
ebenso ist:

$$y = \sqrt{\frac{40000}{3}} = 115 \text{ cm oder } 5 \text{ Steine}$$

155. **Aufgabe 64.** Das Auflager eines Trägers ist ein Haustein, der auf Ziegelmauerwerk lagert. Der Träger übermittelt einen Auflagerdruck von 7500 kg. Wie groß muß die Lagerfläche des Hausteins genommen werden, wenn er 30 cm in das Mauerwerk eingreift?

**Auflösung.** Bezeichnet  $x$  die Breite des Hausteins, so ist:

$$30x = \frac{7500}{7}$$

daher:

$$x = \frac{7500}{30 \cdot 7} = 36 \text{ cm}$$

Die Auflagerfläche des Hausteins ist also  $30 \cdot 36 = 1080 \text{ qcm}$ .

156. **Aufgabe 65.** Ein horizontaler Balken hat in einem Endpunkte eine vertikale Last von 2000 kg aufzunehmen und auf eine kurze unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigte Strebe zu übertragen. Wie groß ist der von der Strebe aufzunehmende Druck  $S$  und welche Stärke muß sie erhalten, wenn ihr Querschnitt quadratisch sein soll?  $k = 70$ .

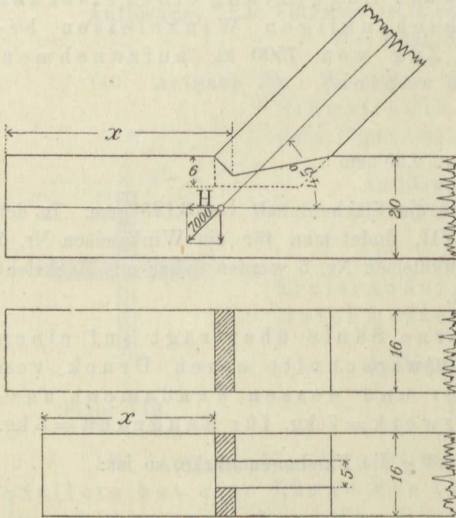
**Auflösung.** Es ist:

$$S = 2000 \cdot \sqrt{2}$$

daher die Stärke der Strebe:

$$x = \sqrt{\frac{2000 \cdot \sqrt{2}}{70}} = 6,3 \text{ cm}$$

157. **Aufgabe 66.** Ein Schornstein besitzt ein quadratisches Fundament von 3 m Seitenlänge. Das Gewicht des Schornsteins beträgt 200000 kg. Wie stark wird der Baugrund beansprucht?



Figur 150.

**Auflösung.** Es ist:

$$\sigma = \frac{200000}{300 \cdot 300} = 2,2 \text{ kg}$$

158. **Aufgabe 67.** Die Umfassungsmauern eines rechtwinkligen Gebäudes von 20 m Länge und 12 m Tiefe besitzen im Fundament eine Stärke von  $3\frac{1}{2}$  Stein und üben einen Gesamtdruck von 1500 t (1 t = 1000 kg) auf den Baugrund aus. Wie stark wird letzterer beansprucht?

**Auflösung.** Es ist:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1500000}{2 \cdot 2000 \cdot 90 + 2(1200 - 180) \cdot 90} \\ &= \frac{1500000}{543600} = 2,7 \text{ kg} \end{aligned}$$

159. **Aufgabe 68.** In der Strebe eines Hängewerks, siehe Figur 148, wirkt eine Druckkraft von 7000 kg, welche auf den horizontalen Balken zu übertragen ist. Wie groß muß die Länge sein, damit ein Aufschlitzen des Holzes nicht stattfindet.  $k = 10 \text{ kg}$ .

**Auflösung.** Die horizontale Schubkraft ist:

$$H = 7000 \cdot \cos 45^\circ = 7000 \cdot 0,70711 = 4949,77$$

oder rund 5000 kg.

Ist nun die Strebe mit dem Balken durch Versatzung verbunden, so ist die dem Abscheren Widerstand leistende Fläche ein Rechteck mit der Breite 16 und der Länge  $x$ , es ist also:

$$16x = \frac{5000}{10} \text{ oder } x = \frac{5000}{16 \cdot 10} = \text{rund } 31 \text{ cm.}$$



Ist die Strebe mit dem Balken durch Verzapfung verbunden, und hat der Zapfen eine Stärke von 5 und eine Tiefe von 6 cm, so ist die dem Abscheren widerstehende Fläche gebildet aus drei Rechtecken mit den Flächen  $6x$  und  $16x$ ; man hat also die Gleichung:

$$6x + 6x + 16x = \frac{5000}{10}$$

daher

$$x = \frac{5000}{28 \cdot 10} = 18 \text{ cm.}$$

160. **Aufgabe 69.** Die Säule eines Hängewerks hat einen Zug von 16000 kg aufzunehmen und ist durch ein 1 cm starkes Bandeisen mit dem Hauptträger verbunden. Es sollen Bolzen von 25 mm Durchmesser zur Verwendung gelangen. Wie viele Bolzen sind erforderlich, wie weit muß der unterste vom Holzrand, der oberste vom Rande des Bandeisens entfernt sein, welches ist endlich die Breite des Bandeisens?

**Auflösung.** Die Querschnittsfläche eines Bolzens beträgt:

$$f = \frac{2,5 \cdot 2,5 \cdot 3,14}{4} = 4,90 \text{ qcm}$$

Da der Bolzen zweischnittig ist, so beträgt die gesamte widerstehende Fläche für einen Bolzen  $= 2 \cdot 4,9 = 9,8 \text{ qcm}$ .

Ist  $n$ , siehe Figur 151, die erforderliche Anzahl der Bolzen, so muß sein:

$$n \cdot 9,8 = \frac{16000}{750}$$

$$n = \frac{16000}{750 \cdot 9,8} = 3$$

gewählt werden 3 Bolzen.

Für den Abstand  $x$  des unteren Bolzens findet man:

$$2 \cdot x \cdot 16 = \frac{16000}{3 \cdot 10}$$

$$x = \frac{16000}{3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 16} = 17 \text{ cm}$$

Für den Abstand der obersten Bolzen von dem Bandeisen hat man:

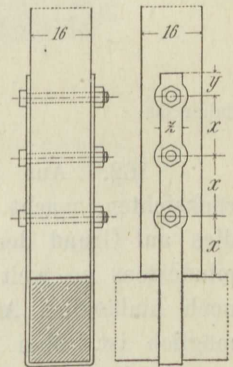
$$4 \cdot y \cdot 1 = \frac{16000}{3 \cdot 1000}$$

$$y = \frac{16000}{3 \cdot 1000 \cdot 4} = 1,33 \text{ cm}$$

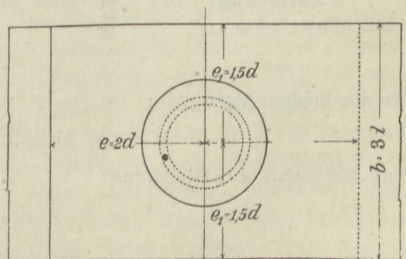
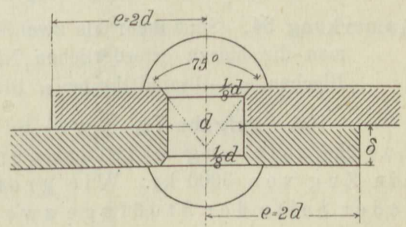
Die Breite  $z$  des Bandeisens findet sich endlich aus der Gleichung:

$$2 \cdot z \cdot 1 = \frac{16000}{1200}$$

$$z = \frac{16000}{2 \cdot 1200} = 6,6 \text{ cm}$$



Figur 151.



Figur 152.

161. **Aufgabe 70.** Zwei Flacheisen von 1 cm Stärke sind durch ein Niet miteinander verbunden, siehe Figur 152; in den Flacheisen herrscht ein Zug von 1000 kg; wie groß ist der Nietdurchmesser  $d$  zu nehmen und wie weit muß das Niet von dem Blechrande abstehen?

**Auflösung.** Das Niet ist auf Scherfestigkeit beansprucht, und zwar wird das Abscheren längs der den beiden Blechen gemeinsamen Trennungsfäche stattfinden. Bei zwei Blechen ist nur eine solche Trennungsfäche vorhanden, das Niet ist einschnittig. Für diesen Fall ist der erforderliche Nietquerschnitt:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{1000}{1000} = 1 \text{ qcm}$$

daher:

$$d = \sqrt{\frac{4}{3,14}} = 1,2 \text{ cm} = 12 \text{ mm}$$

Die Entfernung  $e$  erhält man aus der Gleichung:

$$2 \cdot 1 \cdot e = \frac{1000}{1000}$$

$$e = \frac{1}{2} = 0,50 \text{ cm}$$

Für die Breite  $b$  des Blechs erhält man:

$$b = 2e_1$$

Nun ist aber:

$$2e_1 \cdot 1 = \frac{1000}{1200}$$

$$e_1 = \frac{1000}{2400} = 0,41 \text{ cm}$$

daher ist:

$$b = 2 \cdot 0,41 + 1,2 = 2,02 \text{ cm}$$

162. Aus praktischen Gründen, hervorgerufen durch Konstruktionsrücksichten, macht man die Entfernungen  $e$  und  $e_1$  in der Regel größer, als dies auf Grund der Rechnung erforderlich wäre. Der Blechrand soll nämlich mindestens so weit von dem Niet abstehen, daß der Nietkopf auf dem Bleche noch hinlänglich Auflager findet und außerdem die Ausführung der Nietung möglich ist. Man nimmt deshalb für  $e$  und  $e_1$  den Mindestwert  $e = 2d$  und  $e_1 = 1,5d$  an.

Unter dieser Voraussetzung ist im vorliegenden Falle  $e = 2 \cdot 15 = 30 \text{ mm}$ . Die erforderliche Blechbreite ergibt sich zu  $b = 3d = 45 \text{ mm}$ .

**Anmerkung 34.** Sind mehr als zwei Bleche durch Niete miteinander zu verbinden, so nennt man die hierzu erforderlichen Niete mehrschnittig, und zwar zweischschnittig bei drei Blechen,  $n - 1$  schnittig bei  $n$  Blechen.

163. **Aufgabe 71.** Zwei Bleche, siehe Figur 153, sind durch doppelte Laschnietung miteinander verbunden. In den Blechen herrscht ein Zug von 3000 kg. Wie groß ist der Nietdurchmesser  $d$ , wenn auf jeder Seite der Stoßfuge zwei Niete angeordnet sind?

**Auflösung.** Die Niete sind zweischschnittig, daher kommt auf jedes Niet eine Querschnittfläche gleich:

$$\frac{2d^2 \cdot 3,14}{4}$$

für die beiden Niete also:

$$F = \frac{2 \cdot 2d^2 \cdot 3,14}{4} = d^2 \cdot 3,14$$

Man hat somit die Gleichung:

$$d^2 \cdot 3,14 = \frac{3000}{1000} = 3$$

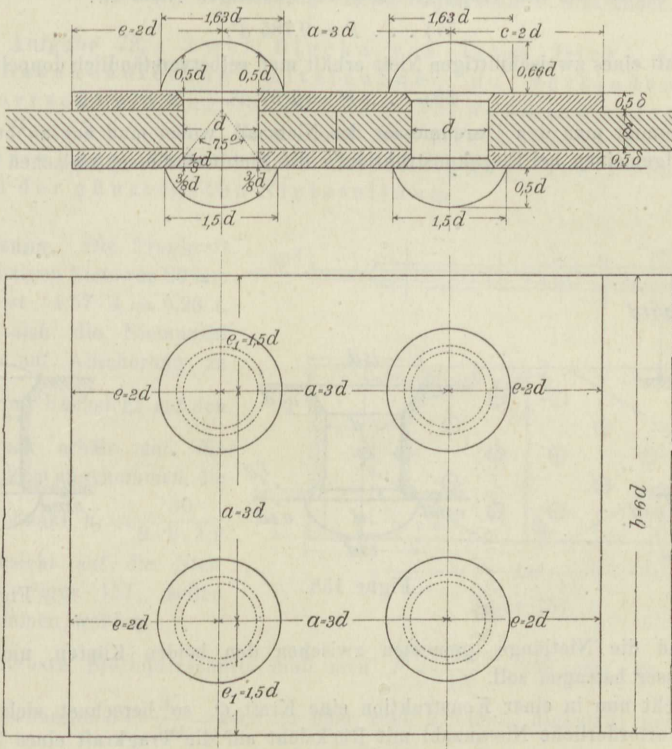
$$d = \sqrt{\frac{3}{3,14}} = 0,94 \text{ cm, rund } 10 \text{ mm}$$



164. Für den Abstand  $a$  der Niete voneinander wählt man in der Regel als kleinsten Wert  $a = 3d$ ; der Abstand  $e_1$  der Niete von den Blechrändern ist wieder gleich  $1,5d$ . Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Breite der Bleche  $b = 6d = 60$  mm.

Die Stärke der Laschen nimmt man gewöhnlich gleich der halben Blechstärke  $\delta$ .

**Anmerkung 35.** Bezüglich der Nietung sollen folgende Bemerkungen hier eingeschaltet werden. Das Niet enthält bei der Herstellung in der Fabrik die Gestalt der Figur 154. Der eine Kopf — der Setzkopf — wird schon in der Fabrik vollständig hergestellt, während der Schließkopf erst bei Ausführung der Nietung aus dem über die Blech-



Figur 153.

fläche vorstehenden Teile des Nietschafts, dessen Länge zwischen dem 1,3 bis 1,7 fachen Durchmesser schwankt, gebildet wird. Der Durchmesser des Niets ist  $\frac{1}{20}$  kleiner als jener des Nietlochs. Man kennt eine warme und eine kalte Nietung, und es kann das Nieten mit der Hand oder mit Maschinen vorgenommen werden. Bei der warmen Nietung werden die Niete in hellglühendem Zustande in die Nietlöcher eingeführt, daselbst mittels eines Gegenhalters oder Nietstocks festgehalten, an die zu vernietenden Bleche festgepreßt und durch Hammerschläge, die in der Achsenrichtung des Schafts erfolgen, gestaucht, so daß der verbreiterte Schaft das Nietloch vollständig ausfüllt. Hierauf wird der Schließkopf aus dem noch vorhandenen Schaft durch Breithämmern und mittels eines aufgesetzten Kopfgesenks, des Schelleisens, geformt. Nach vollendeter Nietung soll der Schließkopf in seiner Mitte noch einen dunkelroten Punkt zeigen.

Das Material des Niets muß von ausgezeichneter Beschaffenheit sein und eignet sich hierzu am besten für warme Nietung ein feisehniges zähes Eisen, für kalte Nietung dagegen ein Feinkorneisen.

Die gebräuchlichsten Nietformen sind in den Figuren 152, 155 und 156 zusammengestellt. Die Figur 152 zeigt ein Niet mit vollem Setz- und Schließkopf, in Figur 155 ist der Schließkopf ganz versenkt, in Figur 156 dagegen nur zur Hälfte. Der Anschluß des Nietschafts an den Nietkopf geschieht entweder unvermittelt oder durch Einschaltung eines kurzen Kegels (Versenkung), siehe Figur 152 bis 156; letzteres ist zweckmäßig und verstärkt das Niet.

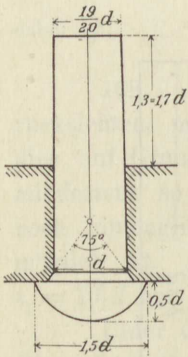
Mit Rücksicht auf die Scherfestigkeit des Niets erhält man als Tragkraft eines einschnittigen Niets den Wert  $P = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot 1000 = 785 d^2$ . Setzt man als Krafteinheit die Tonne fest, so ergibt sich die Tragkraft eines einschnittigen Niets zu:

$$57) \dots P = 0,785 d^2.$$

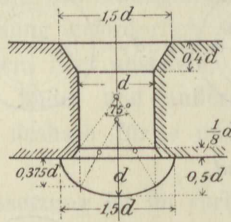
Für die Tragkraft eines zweischnittigen Niets erhält man selbstverständlich doppelt so viel, d. h.:

$$58) \dots P' = 1,57 d^2.$$

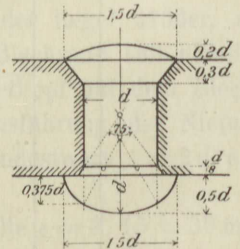
In der Regel nimmt man den Durchmesser des Niets an, wobei man nur zu berücksichtigen hat, daß im allgemeinen bei Eisenkonstruktionen die Nietdurchmesser zwischen 12 und 26 mm



Figur 154.



Figur 155.



Figur 156.

schwanken und die Nietlänge, gemessen zwischen den beiden Köpfen, nicht größer als vier Durchmesser betragen soll.

Herrscht nun in einer Konstruktion eine Kraft  $Q$ , so berechnet sich die zur Aufnahme von  $Q$  erforderliche Nietanzahl mit Rücksicht auf die Tragkraft eines Niets:

$$\text{für einschnittige Niete } 59) \dots n_1 = \frac{Q}{0,785 d^2}$$

$$\text{für zweischnittige Niete } 60) \dots n_2 = \frac{Q}{1,57 d^2}$$

Bei jeder Nietung ist auch der Druck auf die Lochwand des Blechs zu untersuchen. Bezeichnet  $d$  den Nietdurchmesser,  $\delta$  die Blechstärke, so ist der Druck eines Niets auf die Wandung des Blechs

$$= \frac{d \cdot \pi}{2} \cdot \delta \cdot 1200 = 1884 \cdot d \delta \text{ kg}$$

In der Praxis ist es üblich, hierfür den Wert  $2000 \cdot d \delta \text{ kg}$  zu wählen. Setzt man als Krafteinheit wieder die Tonne fest, so erhält man für den von einer Seite ausgeübten Lochwanddruck die Größe  $L = 2 d \delta t$ . Bei der Bestimmung der Anzahl der Niete für eine bestimmte



Kraftwirkung  $Q$  ist auf den Lochwanddruck Rücksicht zu nehmen. Mit Bezug hierauf ergibt sich für eine Kraft  $Q$  die erforderliche Nietanzahl:

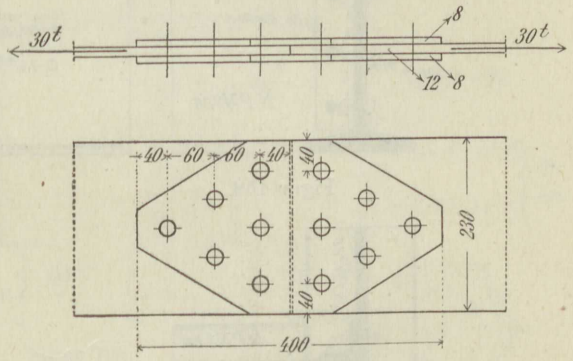
$$61) \dots n_3 = \frac{Q}{2 d \delta}$$

wobei  $Q$  in Tonnen,  $d$  und  $\delta$  in Zentimeter auszudrücken sind.

Bei Nietberechnungen sind sowohl die Formeln 59) und 60) wie 61) zu benutzen; die sich ergebende größere Nietanzahl ist der Konstruktion zugrunde zu legen. Bezüglich der Nietstellung kann man zwei Arten unterscheiden, entweder befinden sich in jeder Reihe gleichviel Niete oder die Zahl der Niete ist in jeder Reihe verschieden groß; im ersteren Falle hat man die gewöhnliche Reihennietung, im letzteren Falle aber die verjüngte Reihennietung. Die letztere ist die zweckmäßigere, weil hierbei nicht nur geringere Blechbreiten, sondern auch eine vorteilhaftere Ausnützung des Blechquerschnitts stattfindet.

165. **Aufgabe 72.** Zwei Bleche von 12 mm Dicke sind durch doppelte Laschennietung miteinander zu verbinden. In den Blechen herrscht ein Zug von 30 t. Zur Verwendung gelangen Niete von 20 mm Durchmesser. Man soll die Blechbreite und die Nietanzahl berechnen unter Berücksichtigung des Lochleibungsdrucks und der günstigsten Nietstellung.

**Auflösung.** Die Tragkraft eines zweiseitigen Niets von 20 mm Durchmesser ist  $1,57 \cdot 4 = 6,28$  t. Es berechnet sich die Nietanzahl mit Rücksicht auf Abscherung zu  $n = \frac{30}{6,28} = 5$ ; mit Rücksicht auf den Lochleibungsdruck erhält man, die Blechdicke zu 1,2 cm angenommen, die erforderliche Nietzahl  $n_1 = \frac{30}{2 \cdot 2 \cdot 1,2} = 6$ . In Rücksicht auf die Nietstellung, siehe Figur 157, sollen 6 Niete angenommen werden.



Figur 157.

Der nutzbare Blechquerschnitt muß sein  $F = \frac{30}{1,2} = 259$  cm; es ergibt sich darum eine Blechbreite  $b = \frac{25}{1,2} = 20,8$  cm oder rund 210 mm; hinzutritt noch eine Nietlochbreite von 20 mm, so daß eine Gesamtlechbreite von 230 mm erforderlich wird. Die Laschenlänge ist aus der Figur 157 gleich  $2(40 + 120 + 40) = 400$  mm zu entnehmen.

In der dritten Nietreihe kommen von der Laschenbreite drei Nietdurchmesser in Abzug, der noch übrige Laschenquerschnitt muß die ganze Last von 30 t aufnehmen. Ist demnach  $x$  die Laschendicke, so muß sein  $2(23 - 6) \cdot x \cdot 1,2 = 30$

$$x = \frac{30}{2(23 - 6) \cdot 1,2} = 0,73 \text{ cm}$$

oder rund 8 mm.

166. **Aufgabe 73.** Ein Träger Nr. 26 überträgt auf einen Träger Nr. 36 einen Druck von 5000 kg und sind die Träger mittels Winkel laschen und Niete miteinander verbunden. Zur Verwendung gelangen Niete von 14 mm Durchmesser. Es ist die Anzahl der Niete und die Größe der Winkellaschen zu bestimmen.

**Auflösung.** Die Niete zur Verbindung der Winkellaschen mit dem Träger Nr. 26 sind zweischnittig, daher ist ihre Tragkraft  $= 1,57 \cdot 1,4^2 = 3 \text{ t}$ . Die Anzahl der Niete beträgt mit Rücksicht auf die Abscherung  $n_2 = \frac{5,0}{3} = 2 \text{ Stück}$ .

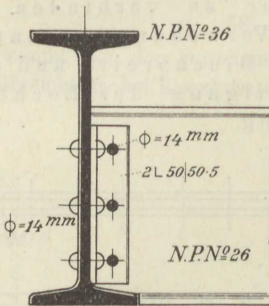
In Rücksicht auf den Lochleibungsdruck sind erforderlich  $\frac{5}{2 \cdot 1,4 \cdot 0,94} = 2 \text{ Stück}$ . Die Stärke des Stegs eines Trägers Nr. 26 beträgt 0,94 cm.

Die Niete zur Verbindung der Winkellaschen mit dem Träger Nr. 36 sind einschnittig, daher ist die Tragkraft einer Niete  $= 0,785 \cdot 1,4^2 = 1,54 \text{ t}$ . Die Nietanzahl beträgt  $\frac{5}{1,54} = 4 \text{ Stück}$ .

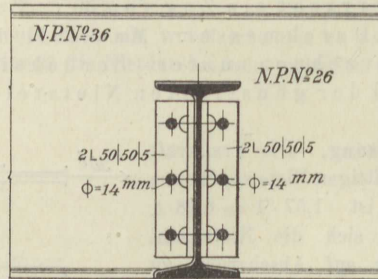
Mit Rücksicht auf den Lochleibungsdruck würde die erforderliche Nietanzahl nur:

$$\frac{5}{2 \cdot 1,4 \cdot 1,3} = \frac{5}{3,64} = 2 \text{ Stück}$$

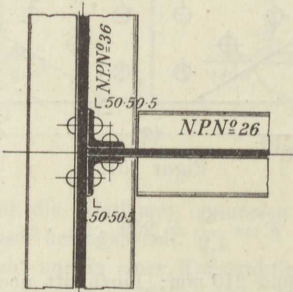
betragen. Man wird 3 Stück zweischnittige und 6 Stück einschnittige Niete zur Verbindung



Figur 158.



Figur 159.



Figur 160.

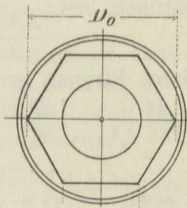
der beiden Träger verwenden, siehe Figur 158 bis 160. Die Winkellaschen müssen eine Schenkellänge von mindestens drei Durchmessern, d. i. 42 mm besitzen. Unter Berücksichtigung der Schenkeldicke wird man also zwei gleichschenklige Winkellaschen 50/50/7 mm wählen.

**Anmerkung 36.** Zur Verbindung von Eisenteilen miteinander werden an die Stelle der Niete häufig auch Schrauben verwendet und zwar immer dann, wenn entweder in der Achse des Bolzens noch eine Zugbeanspruchung auftritt oder eine Beweglichkeit der Verbindung gefordert wird, die eine Nietung nicht gewährt, wie z. B. in den Zugstangen bei Dachbindern oder bei gelenkartigen Verbindungen; endlich werden Schrauben auch da verwendet, wo infolge örtlicher Verhältnisse eine Nietung wegen Raumbeschränkung nicht möglich ist. Als Grundform dient für die zur Befestigung bestimmten Schrauben das Whitworth-Gewinde, das nach Verhältnissen gebildet ist, wie sie aus der Figur 163 zu entnehmen sind. Die Schraubenmutter wird in der

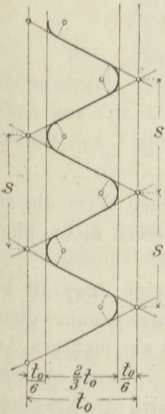
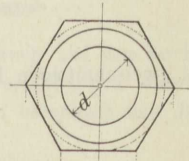


Regel als Sechskant hergestellt, dessen obere Abgrenzung entweder durch eine Kugel- oder Kegelfläche oder aber auch durch eine Ebene gebildet wird, siehe Figur 165, 166 und 167, während zur unteren Abgrenzung fast durchwegs die ebene Fläche dient. Was den Schraubenkopf anbetrifft, so kann derselbe als Vierkant, siehe Figur 164, oder auch wie die Mutter als Sechskant geformt werden. Für die einzelnen Abmessungen dient der Durchmesser des Bolzens als Grundlage und gelten hierfür die in der Figur 164 eingeschriebenen Beziehungen. Auf Grund dieser Beziehungen ist die Tabelle XV im Anhang II berechnet worden. Zwischen

Figur 161.

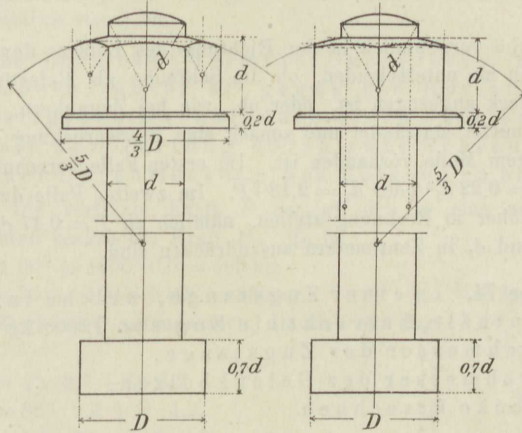


Figur 162.



Figur 163.

Es ist:  
 $s = 0,1 + 0,08 \text{ in cm}$   
 und  $t_0 = 0,96 s$



Figur 164.

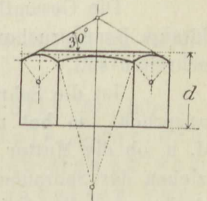
Zwischen dem Durchmesser  $d$  und dem Kerndurchmesser  $d_1$  besteht die Beziehung:

$$d = \frac{d_1 + 0,13}{0,9} \text{ cm.}$$

Unter dem Kerndurchmesser  $d_1$  eines Schraubenbolzens versteht man den Durchmesser des Bolzens ausschließlich des Schraubengewindes, es ist also:

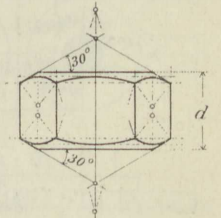
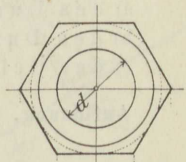
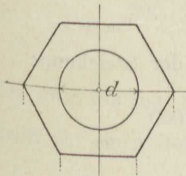
$$d_1 = d - \frac{4}{3} t_0$$

unter  $t_0$  die Dicke des Schraubengewindes verstanden.



Figur 165.

Es ist:  
 $D = 0,5 + 1,4 d$   
 und  
 $D_0 = 0,5 + 1,7 d$  } in cm



Figur 166.

Figur 167.

die Schraubenmutter und die Unterlage wird einestheils zur Schouung der Mutter, andererseits zur besseren Verteilung des Drucks eine Unterlagsscheibe eingeschaltet, für deren Abmessungen die eingeschriebenen Beziehungen üblich sind.

Hinsichtlich der Berechnung der Schrauben hat man zu unterscheiden, ob die Kraftwirkung nur senkrecht zur Bolzenrichtung tätig ist, oder ob auch in der Längsrichtung des Bolzens eine Zugkraft herrscht. Im ersten Falle kommt bei kurzen Bolzen nur die Abscherungsfestigkeit des Materials in Betracht und es wird die Schraube ebenso berechnet wie

ein Niet, wobei der Bolzen als einschnittig oder zweischnittig aufzufassen ist, je nachdem zwei oder drei Bleche miteinander zu verbinden sind. Bei größerer Länge des Bolzen, z. B. bei Gabel- oder Gelenkbolzen, treten auch noch Biegungsspannungen auf und es ist der Bolzen dann noch auf Biegezugfestigkeit zu berechnen, wobei der vierte Belastungsfall der Berechnung zugrunde zu legen ist.

Ist  $d_1$  der Kerndurchmesser des Bolzens,  $P$  die auf Abscherung bzw. Biegung wirkende Kraft,  $l$  die freie Länge des Bolzens, so ist die durch Abscherung hervorgerufene Beanspruchung:

$$\dots \sigma_s = \frac{P}{d_1^2 \pi} = \frac{P}{0,785 d_1^2} \text{ bei einschnittigen, bzw. } \frac{P}{d_1^2 \pi} = \frac{P}{1,57 d_1^2}$$

bei zweischnittigen Bolzen. Die Beanspruchung durch Biegung ist:

$$\sigma_b = \frac{Pl}{8W} = \frac{Pl}{8\pi d_1^3} = \frac{Pl}{0,785 d_1^3} = \frac{1,28 Pl}{d_1^3}$$

Die Gesamtbeanspruchung des Bolzens ist somit  $\sigma = \sigma_s + \sigma_b$ , welcher Wert die zulässige Beanspruchung des Materials, d. i. 750 kg für den Quadratzentimeter, nicht überschreiten soll.

Ist die Schraube vornehmlich in der Richtung des Bolzens durch eine Zugkraft beansprucht, so hat man zu unterscheiden, ob die Schraube als Befestigungsschraube dient, d. h. ob die Mutter stark angezogen ist, oder ob, wie bei Zugankern, nur ein mäßiges Anziehen der Schraubenmutter stattfindet und sonach eine Beanspruchung des Bolzens auf Verdrehung nur in geringem Maße vorhanden ist. Im ersten Falle berechnet sich die Tragkraft einer Schraube zu  $P = 0,22 d_1^2$  oder  $d_1 = 2,13 \sqrt{P}$ . Im zweiten Falle darf man die Tragkraft der Schraube etwas höher in Rechnung stellen, nämlich zu  $P = 0,47 d_1^2$  oder  $d_1 = 1,45 \sqrt{P}$ , wobei  $P$  in Tonnen und  $d_1$  in Zentimetern auszudrücken sind.

167. **Aufgabe 74.** In einer Zugstange, welche in ihrer Mitte ein Doppelgelenk enthält, herrscht ein Zug von 12000 kg = 12 t. Man soll:

- den Durchmesser der Zugstange,
- den Durchmesser der Gelenkbolzen,
- das Gelenke berechnen.

**Auflösung.** Der Durchmesser der Zugstange berechnet sich aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} 800 = 12000$$

$$d = \sqrt{\frac{12000 \cdot 4}{800 \cdot 3,14}} = 4,3 \text{ cm} = 45 \text{ mm}$$

Für den Gelenkbolzen, siehe Figur 168, kann man die für die Biegung in Betracht kommende freie Länge ebenfalls zu 45 mm annehmen und zunächst als Durchmesser des Bolzens 5 cm wählen, dann ist die Beanspruchung auf Abscheren:

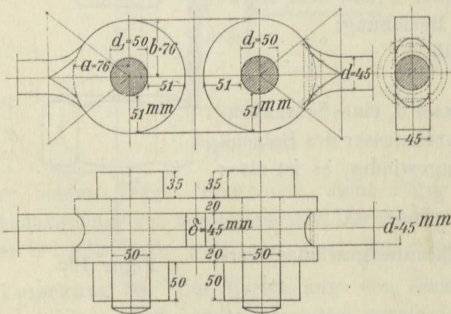
$$\sigma_s = \frac{12}{1,57 \cdot 5^2} = 0,300 \text{ t}$$

Die Biegebeanspruchung ergibt sich zu  $\sigma_b = \frac{1,28 \cdot 12 \cdot 4,5}{5^3} = 0,553 \text{ t}$

Die gesamte Beanspruchung des Bolzens ist demnach:

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_b = 300 + 553 = 853 \text{ kg,}$$

ein Wert, der noch zulässig ist; der Durchmesser  $d_1$  wurde also in der richtigen Größe gewählt.



Figur 168.



Was nun die Ausmaße des Auges der Zugstange anbetrifft, so gelten hierfür die folgenden empirischen Regeln:

Bei runden Zugstangen macht man, wenn die Dicke des Auges gleich dem Durchmesser  $d$  angenommen ist, die Größe  $a = \frac{\pi d}{8} + \frac{5}{6} d_1$  und  $b = \frac{\pi d}{8} + \frac{7}{6} d_1$ . Im vorliegenden Falle wird also.

$$a = \frac{3,14 \cdot 4,5}{8} + \frac{5}{6} \cdot 5,0 = 1,76 + 4,16 = 5,92 \text{ cm und } \left. \begin{array}{l} \text{gewählt wurde für} \\ a \text{ und } b \text{ der Wert} \\ 76 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

$$b = \frac{3,14 \cdot 4,5}{8} + \frac{7}{6} \cdot 5,0 = 1,76 + 5,83 = 7,59 \text{ cm}$$

Bei Gelenkverbindungen ist ähnlich wie bei den Nietungen auch auf den Lochleibungsdruck Rücksicht zu nehmen, doch pflegt man bei Schraubenverbindungen diesen Druck nur mit  $0,66 \cdot d_1 \delta$  in Rechnung zu stellen. Mit Rücksicht hierauf berechnet sich die Dicke  $\delta$  des Auges aus der Gleichung:

$$12 = \frac{2}{3} d_1 \delta, \text{ hieraus folgt } \delta = \frac{12 \cdot 3}{2 \cdot 5,0} = 3,6 \text{ cm}$$

Die gewählte Stärke von 4,5 cm ist also beizubehalten. Für die seitlichen Anschlußlaschen genügt eine Stärke von 2 cm.

168. **Aufgabe 75.** Eine  $\square$ förmige Dachpfette, Profil 20, überträgt auf die obere, unter  $30^\circ$  gegen die Horizontale geneigte Gurtung eines eisernen Dachbinders einen vertikalen Druck von 1000 kg und ist mit der Gurtung durch zwei Schraubenbolzen verbunden. Es ist der Durchmesser eines Bolzens zu berechnen.

**Auflösung.** Die vertikale Kraft  $P$  zerlegt sich in eine zur Gurtung parallele Kraft  $P_y$  und eine hierzu senkrechte Kraft  $P_z$ . Es ist:

$$P_y = P \cdot \sin 30^\circ = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ kg}$$

$$P_z = P \cdot \cos 30^\circ = 1000 \cdot 0,866 = 866 \text{ kg.}$$

Der Bolzen hat eine Zugkraft  $Q$  aufzunehmen, die sich aus der Gleichung berechnet:

$$P_y \cdot 20 = P_z \cdot 2,2 + Q \cdot 4,2$$

$$500 \cdot 20 = 866 \cdot 2,2 + Q \cdot 4,2.$$

$$Q = \frac{500 \cdot 20 - 866 \cdot 2,2}{4,2} = \text{rund } 1950 \text{ kg.}$$

Da zwei Bolzen zur Befestigung der Pfette dienen sollen, so

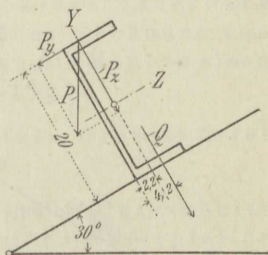
trifft auf einen Bolzen eine Kraft  $= \frac{1950}{2} = 975 \text{ kg.}$

Der Kerndurchmesser ist somit, da die Schraube nur mäßig anzudrehen ist:

$$d_1 = 1,45 \sqrt{0,975} = 1,4 \text{ cm} = 14 \text{ mm.}$$

Diesem Werte entspricht in

$$d = 18 \text{ mm.}$$



Figur 169.

169. **Aufgabe 76.** Eine Zugstange, die in ihrer Mitte ein Spannschloß trägt, siehe Figur 170, hat einen Zug von 16 t aufzunehmen. Wie groß ist der Durchmesser der Zugstange mit Rücksicht auf die Schwächung durch das Schraubengewinde und welche Ausmaße muß das Spannschloß erhalten?

**Auflösung.** Der Kerndurchmesser für die Schraubenspindel muß betragen:

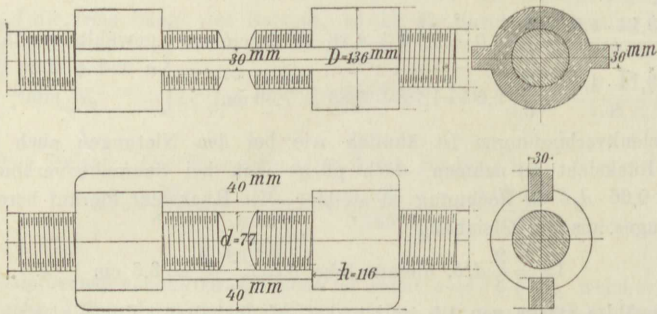
$$d_1 = 1,45 \sqrt{P} = 1,45 \sqrt{16} = 1,45 \cdot 4 = 6,80 \text{ cm} = 68 \text{ mm.}$$

Mit Bezug hierauf muß der Durchmesser  $d$  der Zugstange sein:

$$d = \frac{d_1 + 0,13}{0,9} = \frac{6,8 + 0,13}{0,9} = \frac{6,93}{0,9} = 7,7 \text{ cm} = 77 \text{ mm.}$$

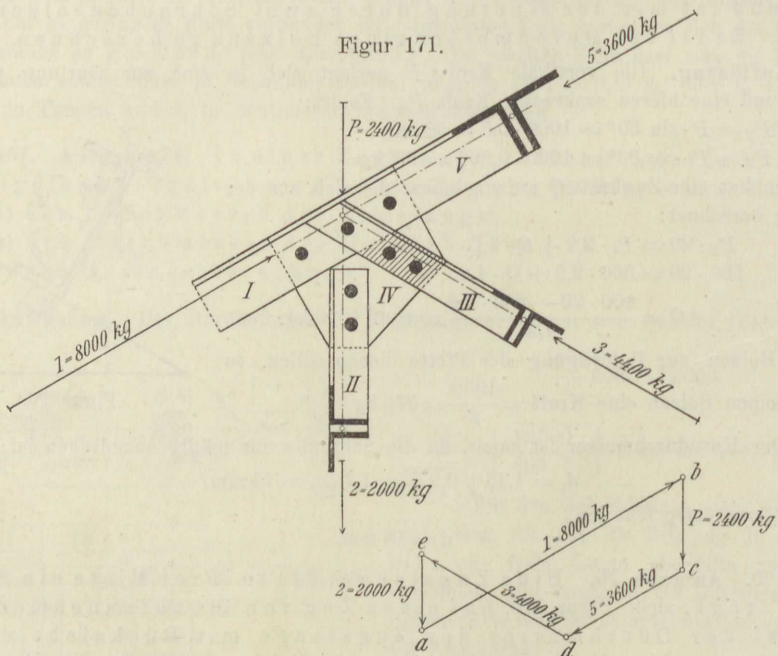
Für die beiden Arme des Spanschlusses ist eine Querschnittsfläche erforderlich von  $F = \frac{16}{0,75} = 21 \text{ qcm}$ . Die gewählten Ausmaße  $\frac{30}{40} \text{ mm}$ , siehe Figur 168, reichen somit aus.

Der Durchmesser  $D$  wurde zu 136 mm, die Höhe  $h$  zu  $1,5d = 1,5 \cdot 77 = 115,5 = 116 \text{ mm}$  angenommen.



Figur 170.

170. **Aufgabe 77.** In dem Knotenpunkte eines fachwerkartigen Dachbinders, siehe Figur 171, stoßen die Konstruktionsteile I bis V aneinander. Die äußere aufzunehmende Kraft ist 2400 kg. Die Stab-



Figur 172.

kräfte in den Konstruktionsteilen I und V sind bekannt und betragen bzw. 8000 und 3600 kg. Es sind die Stabkräfte in den Konstruktionsteilen II und III zu ermitteln und außerdem ist die Anzahl der Nieten zu berechnen, welche zur Verbindung der Konstruktionsteile mit dem Knotenbleche IV erforderlich sind, wenn für alle Nieten der Durchmesser 12 mm betragen soll.



**Auflösung.** Die Stabkräfte bestimmt man mittels des Kräfteplans, siehe Figur 172, und erhält hierfür die daselbst angegebenen Werte.

Da sämtliche Niete als zweischnittig vorausgesetzt sind, so ist die Tragkraft eines Niets mit Bezugnahme auf Gleichung 58):

$$P = 1,57 \cdot 1,2^2 = 2,26 \text{ t.}$$

Für den Konstruktions teil II sind erforderlich  $n_1$  Niete und es ist  $n_1 = \frac{2,0}{2,26} = 2$ .

Für Konstruktions teil III ist die Anzahl der Niete  $n_2 = \frac{4,4}{2,26} = 2$ .

Zur Verbindung des Knotenblechs mit der Gurtung braucht man schon aus praktischen Gründen mindestens 4 Niete.

Berücksichtigt man den Lochleibungsdruck, so ergeben sich für Konstruktions teil III  $\frac{4,4}{2 \cdot 1,2 \cdot 1} = 3$  Niete.

171. **Aufgabe 78.** Welche Belastung kann ein Ziegelstein, Normalformat 65 · 120 · 250 mm, aufnehmen?  $k = 7$ .

172. **Aufgabe 79.** Zu welcher Höhe kann Ziegelmauerwerk aufgeführt werden, bis die unterste Schicht durch das Mauergewicht zerdrückt wird?

173. **Aufgabe 80.** Ein prismatisches Schachtgestänge aus Schmiedeeisen hat bei einer Länge von 200 m einschließlich des Eigengewichts 30000 kg aufzunehmen. Wie groß ist die Verlängerung, welche die Stange erfährt?

174. **Aufgabe 81.** Wie stark müssen die aus Ziegelmauerwerk mit Kalkmörtel hergestellten Grundmauern eines Gebäudes von 20 m Länge und 12 m Tiefe genommen werden, wenn die Mauern einen Druck von 2500 Tonnen zu übertragen haben?  $k = 3$  kg.

175. **Aufgabe 82.** Welche Belastung wird einen Granitwürfel von 20 cm Seitenlänge zerdrücken?  $k = 800$  kg.

176. **Aufgabe 83.** Eine hölzerne Säule von 24/26 cm Querschnitt überträgt mittels einer gußeisernen Platte auf einen Mauerpfeiler einen Druck von 20 t. Wie stark muß der Pfeiler gemacht werden?

177. **Aufgabe 84.** Ein kurzes Kopfband von rechteckigem Querschnitt 12/16 cm hat einen Druck von 7500 kg zu übertragen. Wie stark wird der Quadratzentimeter Querschnitt beansprucht?

178. **Aufgabe 85.** Wie groß ist die Tragkraft eines ein- bzw. zweischnittigen Niets von 18 mm Durchmesser?

179. **Aufgabe 86.** Das Fundament eines Schornsteins ist ein Quadrat von 5 m Seitenlänge. Das Gewicht des Schornsteins beträgt 400 Tonnen. Wie stark wird der Baugrund beansprucht?

180. **Aufgabe 87.** Welchen Zug kann eine runde, 3 cm starke und 6 m lange Stange von Flußeisen aufnehmen? Wie groß ist die durch diesen Zug hervorgerufene Verlängerung der Stange?

## E. Biegungsfestigkeit.

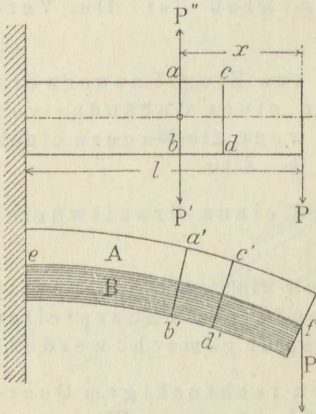
### 1. Allgemeine Bemerkungen.

181. Wirken auf einen stabförmigen Körper in einer die Längsachse des Stabs enthaltenden Ebene Kräfte ein, die unter sich im Gleichgewicht sind, so wird der Stab auf Biegungsfestigkeit beansprucht und zwar auf einfache Biegungsfestigkeit, wenn die Kraftebene die Stabquerschnitte nach einer Hauptachse, siehe Nr. 190, schneidet oder auf zusammengesetzte Biegungsfestigkeit, wenn dies nicht der Fall ist. Zunächst soll das erstere vorausgesetzt werden.

### 2. Biegungsspannungen, Normal- und Schubspannungen.

182. Wirkt eine Kraft  $P$  am freien Ende eines am anderen Ende eingespannten Trägers, siehe Figur 173, so wird letzterer auf Biegung beansprucht; infolge der Biegung nimmt der Träger die Gestalt der Figur 174 an, doch ist hierbei vorausgesetzt, daß alle zur Stabachse senkrechten ebenen Querschnitte wie  $ab$ ,  $cd$ , siehe Figur 173, auch nach der Biegung ihre ebene Gestalt beibehalten, also die Lage  $a'b'$  und  $c'd'$ , siehe Figur 174, einnehmen.

Figur 173.



Figur 174.

Führt man nun in einer Entfernung  $x$  vom Angriffspunkte der Kraft  $P$  einen Schnitt  $ab$  senkrecht zur Stabachse, so kann man sich die Kraft  $P$  in den Querschnitt  $ab$  nach  $P'$  verlegt denken und daselbst eine ihr gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $P''$  hinzufügen, dann wird an der Wirkungsweise von  $P$  auf den Träger nichts geändert. Die Kräfte  $P$  und  $P''$  bilden ein Kräftepaar, das den Querschnitt  $ab$  zu drehen sucht; die Kraft  $P'$  hat das Bestreben, den Querschnitt  $ab$  über seinen Nachbarquerschnitt hinwegzuschieben. Durch die Drehung des Querschnitts  $ab$  wird ein Teil der Längsfasern des Materials verlängert, ein anderer Teil zusammengedrückt, während ein dritter Teil gar keine Längenänderungen erfährt. Es entstehen somit in den Fasern teils Zug-, teils Druckspannungen, teils bleiben die Fasern spannungslos. Durch die Einwirkung von  $P'$  entstehen schließlich im Querschnitt  $ab$  noch Schubspannungen. Die erstgenannten Spannungen kann man im Gegensatz zu den Schubspannungen als Normalspannungen bezeichnen.

Auf die Schubspannungen soll hier, weil diese bei den gewöhnlich im Hochbau vorkommenden Trägerkonstruktion im Vergleich zu den Normalspannungen verhältnismäßig klein sind, nicht weiter eingegangen werden, siehe jedoch Abschnitt IV.



### 3. Neutrale Faserschicht, neutrale Achse.

183. Durch die Biegung eines Trägers entsteht in diesem ein gezogener und ein gedrückter Teil; zwischen beiden Teilen liegt eine spannungslose Faserschicht, welche die neutrale Faserschicht oder auch kurzweg die Neutralschicht genannt wird. Jede Querschnittsebene wird von der Neutralschicht nach einer geraden Linie, der Neutralachse oder auch Nullachse geschnitten.

### 4. Spannungsgesetz, Lage der Neutralachse.

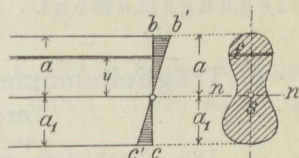
184. In ein und demselben Querschnitte sind sowohl die Zug- wie auch die Druckspannungen in den einzelnen durchschnittenen Fasern verschieden groß, denn da die Spannungen proportional sind den Verlängerungen bzw. Verkürzungen, so ist klar, daß die der Neutralachse zunächstliegenden Fasern geringere Spannungen erleiden, als die von dieser Achse entfernteren Fasern.

Bezeichnet man die Spannung in der äußersten gezogenen bzw. gedrückten Faser mit  $\sigma$  bzw.  $\sigma_1$ , die Spannung in einer Faser in der Entfernung  $y$  von der Neutralachse mit  $\sigma_y$ , so hat man, siehe Figur 175, die Beziehung:

$$62) \sigma : \sigma_y = a : y \text{ bzw. } \sigma_1 : \sigma_y = a_1 : y,$$

daher ist

$$63) \sigma_y = \sigma \frac{y}{a} \text{ bzw. } \sigma_y = \sigma_1 \frac{y}{a_1}$$



Figur 175.

Ist nun  $f$  der Inhalt eines Flächenstreifens in der Entfernung  $y$  von der Neutralachse, so ist die Gesamtspannung in der Entfernung  $y$  von der genannten Linie

$$64) f\sigma_y = \frac{\sigma}{a} f y \text{ bzw. } f\sigma_y = \frac{\sigma_1}{a_1} f y.$$

Für die Gesamtheit aller Zugspannungen erhält man daher den Ausdruck:

$$65) Z = \sum_0^a \frac{\sigma}{a} f y = \frac{\sigma}{a} \sum_0^a f y.$$

Für die Gesamtheit aller Druckspannungen erhält man in gleicher Weise:

$$66) D = \frac{\sigma_1}{a_1} \sum_0^{a_1} f y.$$

Da nun in einem Querschnitte die Zugspannungen gleich der Summe aller Druckspannungen sein muß, so erhält man die Gleichung:

$$Z = D$$

oder

$$67) \frac{\sigma}{a} \sum_0^a f y = \frac{\sigma_1}{a_1} \sum_0^{a_1} f y,$$

was nur möglich ist, wenn

$$68) \sum_0^a f y = \sum_0^{a_1} f y \text{ und } \frac{\sigma}{a} = \frac{\sigma_1}{a_1} \text{ ist.}$$

$\sum_0^a fy$  bedeutet die Summe der statischen Momente aller auf einer Seite

der Neutralachse liegenden Flächenstreifen  $f$  hinsichtlich dieser Achse.  $\sum_0^{a_1} fy$  bedeutet die Summe der statischen Momente aller Flächenstreifen  $f$  auf der anderen Seite der Neutralachse. Sollen diese Momentensummen einander gleich sein, so muß die Neutralachse durch den Schwerpunkt des Querschnitts hindurchgehen.

### 5. Widerstandsmoment, Biegemoment.

185. Faßt man die Zug- und Druckspannungen je zu einer Mittelkraft zusammen, so bilden letztere ein Kräftepaar, dessen statisches Moment dem Moment des Kräftepaares  $PP'$ , siehe Figur 173, das Gleichgewicht halten muß; das erstgenannte statische Moment bezeichnet man als das Moment der inneren Kräfte oder das Widerstandsmoment des Trägers, das letztere Moment heißt das Moment der äußeren Kräfte oder auch das Angriffs- bzw. Biegemoment.

### 6. Trägheitsmoment, Querschnittsmodul oder Widerstandsmoment eines Querschnitts.

186. Nach dem vorausgegangenen ist die Summe aller Spannungen auf der Zugseite ausgedrückt durch:

$$69) Z = \frac{\sigma}{a} \sum fy = \frac{\sigma}{a} (f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots),$$

wenn mit  $f_1, f_2, f_3 \dots$  die Flächenstreifen in den Entfernungen  $y_1, y_2, y_3 \dots$  von der Neutralachse bezeichnet sind. Die Summe der statischen Momente der in den einzelnen Flächenstreifen herrschenden Zugspannungen wird ausgedrückt sein durch:

$$\frac{\sigma}{a} (f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots) = \frac{\sigma}{a} \sum_0^a fy^2.$$

Für die Druckseite ergibt sich als statisches Moment aller Druckspannungen:

$$\frac{\sigma_1}{a_1} \sum_0^{a_1} fy^2.$$

Das Gesamtmoment aller Zug- und Druckspannungen oder das Widerstandsmoment der inneren Kräfte im Querschnitt wird sein, unter Berücksichtigung daß  $\frac{\sigma}{a} = \frac{\sigma_1}{a_1}$  ist:

$$70) Zy_0 = Dy_0 = \frac{\sigma}{a} \left( \sum_0^a fy^2 + \sum_0^{a_1} fy^2 \right) = \frac{\sigma}{a} \sum_0^a fy^2$$

Der Ausdruck  $\sum_0^a fy^2$  ist lediglich von der Form des Querschnitts abhängig und heißt dessen Trägheitsmoment. Dieses wird in der Regel mit  $J$  bezeichnet.



Es ist also  $\sum_{a_1}^a f y^2 = J$ . Unter Annahme dieser Bezeichnung geht die Gleichung 70 über in

$$Z y_0 = D y_0 = \frac{\sigma}{a} J = \frac{\sigma_1}{a_1} J.$$

Der Ausdruck  $\frac{J}{a}$  bzw.  $\frac{J}{a_1}$  ist ebenfalls nur von der Querschnittsform abhängig und heißt der Querschnittsmodul oder das Widerstandsmoment des Querschnitts; es wird mit  $W$  bzw.  $W_1$  bezeichnet, daher ist:

$$\frac{J}{a} = W \text{ und } \frac{J}{a_1} = W_1.$$

Für Querschnitte, welche die Neutralachse als Symmetrieachse besitzen, ist  $W = W_1$ .

Das Widerstandsmoment der inneren Kräfte eines Querschnitts kann nur mehr ausgedrückt werden durch:

$$71) Z y_0 = D y_0 = \sigma W = \sigma_1 W_1.$$

## 7. Biegungsgleichung.

187. Bezeichnet man das Moment der äußeren Kräfte, d. h. das Biegemoment mit  $M$ , so muß für das Gleichgewicht eines durch äußere Kräfte auf Biegung beanspruchten Trägers die Gleichung bestehen:

$$72) \dots M = \sigma W = \sigma_1 W_1.$$

Diese Gleichung heißt die Biegungsgleichung, sie muß für jeden senkrecht zur Längsachse des Trägers geführten Querschnitt, hinsichtlich der äußeren und inneren Kräfte bestehen.

## 8. Gefährlicher Querschnitt, grösstes Biege- bzw. Widerstandsmoment.

188. Bei einem auf Biegung beanspruchten Träger kommen den Biegemomenten für die verschiedenen Querschnitte verschiedene Werte zu und demnach auch den entsprechenden Widerstandsmomenten. Unter allen diesen Biegemomenten wird eines den größten Wert besitzen, demgemäß muß auch für den entsprechenden Querschnitt das Widerstandsmoment am größten sein. Dieser Querschnitt heißt der gefährliche Querschnitt; das zu letzterem gehörige Biegemoment ist das Maximalbiegemoment. Soll ein Träger der Einwirkung äußerer Kräfte auf die Dauer Widerstand leisten, so muß sein Querschnitt so bemessen sein, daß für ihn das Widerstandsmoment der inneren Kräfte gleich ist dem Maximalbiegemoment. Hierbei darf in der äußersten gezogenen bzw. gedrückten Faser die zulässige Beanspruchung des Materials nicht überschritten werden, d. h. es muß sein  $\sigma = k$  und  $\sigma_1 = k_1$ , wenn  $k$  die zulässige Beanspruchung des Materials auf Zug,  $k_1$  jene auf Druck bezeichnet.

Für den gefährlichen Querschnitt lautet daher die Biegungsgleichung:

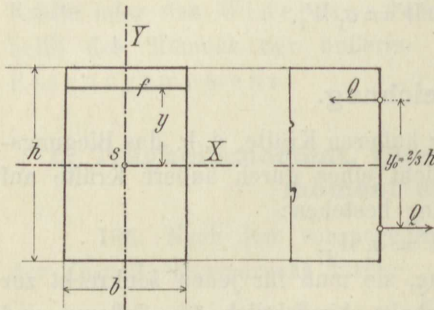
$$72a) M = k W = k_1 W_1.$$

## 9. Bestimmung der Trägheits- und Widerstandsmomente von ebenen Flächen.

### a) Trägheitsmoment des Rechtecks.

189. Der Ausdruck  $\sum_{a_1}^a f y^2$  bedeutet die Summe sämtlicher Trägheitsmomente der einzelnen Flächenstreifen  $f$  hinsichtlich der Achse  $X$ . Das Trägheitsmoment eines solchen Streifens ist nichts anderes als das Produkt von dessen statischen Moment und seiner Entfernung von der Achse  $X$ . Nun ist für die Zugseite  $\sum f y = \frac{b h h}{2} = \frac{b h^2}{2}$ , ebenso groß ist  $\sum f y$  auf der Druckseite. Es ist daher  $Q = \frac{\sigma}{a} \cdot \frac{b h^2}{8}$ ,

Die Angriffspunkte von  $Q$  liegen nun  $\frac{2}{3} \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$  von der  $X$ -Achse entfernt. D. h. der Hebelarm für das Kräftepaar  $Q Q$  beträgt  $\frac{2}{3} h$ . Das Widerstandsmoment der inneren Kräfte für einen auf Biegung beanspruchten rechteckigen Querschnitt ist also ausgedrückt durch:



Figur 176.

$$Q y_0 = \frac{\sigma}{a} \cdot \frac{b h^2}{8} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{\sigma}{a} \frac{1}{12} b h^3$$

d. h. das Trägheitsmoment des Rechtecks bezüglich der  $X$ -Achse ist:

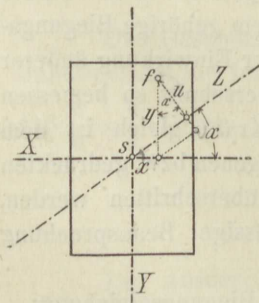
$$73) J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

Für das Trägheitsmoment bezüglich der Achse  $Y$  ergibt sich entsprechend

$$74) J_y = \frac{1}{12} h b^3$$

### b) Trägheitsmoment des Rechtecks bezogen auf eine beliebige Schwerpunktsachse.

190. Ist  $Z$ , siehe Figur 177, eine durch den Schwerpunkt  $s$  des Rechtecks gehende Achse,  $f$  ein Flächenelement des Querschnitts in der Entfernung  $u$  von  $Z$ , so ist das Trägheitsmoment des Rechtecks hinsichtlich der Achse  $Z$ :



Figur 177.

$$75) \dots J_z = \sum f u^2$$

Nun ist aber in Rücksicht auf die Figur 177:

$$u = y \cos \alpha + x \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Daher } \sum f u^2 &= \sum f (y \cos \alpha + x \sin \alpha)^2 \\ &= \sum f y^2 \cos^2 \alpha + \sum 2 f x y \sin \alpha \cos \alpha + \sum f x^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$76) J_z = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha.$$



Vergleicht man die Werte von  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_z$  miteinander, so ergibt sich, daß  $J_x$  den größten,  $J_y$  den kleinsten,  $J_z$  aber einen zwischen  $J_x$  und  $J_y$  liegenden Wert darstellt.

Die beiden Achsen  $X$  und  $Y$  heißen die Haupt Schwerpunktsachsen oder die Hauptachsen und die darauf bezogenen Trägheitsmomente die Hauptträgheitsmomente des Rechtecks. Allgemein kann man sagen:

„Zu jedem Querschnitt gehören zwei Haupt Schwerpunktsachsen, für welche die Trägheitsmomente den größten bzw. kleinsten Wert besitzen, sie heißen die Hauptträgheitsmomente des Querschnitts; für jede weitere den Schwerpunkt enthaltende Achse besitzt das Trägheitsmoment einen Wert, der zwischen den Werten der Hauptträgheitsmomente liegt.“

**c) Trägheitsmoment bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsachse parallele Achse.**

191. Ist  $X_1$ , siehe Figur 178, eine etwa zur Schwerpunktsachse  $X$  parallele Achse im Abstände  $e$  von  $X$ , so ist das auf  $X_1$  bezogene Trägheitsmoment  $J_{x_1}$  ausgedrückt durch:

$$\sum f(y \pm e)^2$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \sum f(y \pm e)^2 &= \sum fy^2 \pm 2e \sum fy + \sum fe^2 \\ &= J_x + 0 + e^2 F \end{aligned}$$

d. h. es ist:

$$77) \dots J_{x_1} = J_x + e^2 F.$$

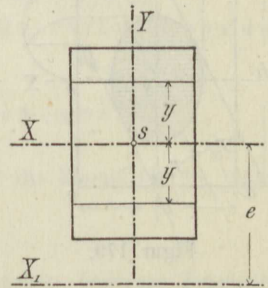
„Das Trägheitsmoment eines Querschnitts bezogen auf eine zu einer Schwerpunktsachse parallele Achse ist gleich dem Trägheitsmoment des Querschnitts bezogen auf die genannte Schwerpunktsachse vermehrt um das Produkt aus dem Flächeninhalt des Querschnitts und dem Quadrate der Entfernung beider Achsen.“

192. Fällt die Achse  $X_1$  mit einer Seite des Rechtecks zusammen, so ist  $e$  entweder gleich  $\frac{h}{2}$  oder gleich  $\frac{b}{2}$  und man erhält für das Trägheitsmoment eines Rechtecks, bezogen auf eine mit einer Rechteckseite zusammenfallende Achse, die Ausdrücke:

$$78) \dots J_{x_1} = J_x + \frac{h^2}{4} F = \frac{1}{12} bh^3 + \frac{h^2}{4} bh = \frac{1}{3} bh^3$$

und

$$79) \dots J_{y_1} = J_y + \frac{b^2}{4} F = \frac{1}{12} hb^3 + \frac{b^2}{4} bh = \frac{1}{3} hb^3.$$

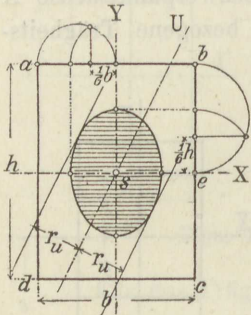


Figur 178.

### d) Trägheitsmoment eines beliebig geformten Querschnitts.

193. Im vorstehenden wurden für das Rechteck die Formeln für die verschiedenen Trägheitsmomente, von denen später Gebrauch gemacht werden soll, auf elementare Weise entwickelt. In ähnlicher Weise lassen sich für alle aus Rechtecken zusammengesetzten Querschnittsformen die Trägheitsmomente ableiten. Ist der Querschnitt nicht in Rechtecke zerlegbar oder von krummen Linien begrenzt, so ist im allgemeinen eine elementare Ableitung der Formeln für die Trägheitsmomente nicht mehr möglich; doch gelten die für das Rechteck ermittelten Beziehungen zwischen den auf verschiedene Achsen bezogenen Trägheitsmomenten auch für alle übrigen Querschnitte. In Tabelle III, Anhang II sind für einige Querschnittsformen die Formeln für die auf die X-Achse bezogenen Trägheitsmomente zusammengestellt.

194. Ist  $J_x$  das Trägheitsmoment eines Rechtecks, siehe Figur 179, mit dem Flächeninhalt  $F$ , so kann man eine Größe  $r$  so bestimmen, daß  $r^2 F = J_x$  ist; dreht man um den Schwerpunkt  $s$  der Fig 179 eine gerade Linie  $U$  und bestimmt für jede ihrer Lagen das hierzu gehörige Trägheitsmoment, hierauf aus der Gleichung  $r^2 F = J$  die zugehörige Größe  $r$  und zeichnet in dem so bestimmten Abstand  $r$  Parallelen zu der in Rede stehenden Achse  $U$ , so umhüllen alle diese Parallelen eine Ellipse, welche die Trägheitseellipse bzw. Zentralellipse des Rechtecks heißt. Die Größen  $r$  heißen die zu den bezüglichen Achsen gehörigen Trägheitshalbmesser. Die Achsen der Zentralellipse fallen mit den Hauptsehwerpunktsachsen des Querschnitts zusammen und die zu den letzteren gehörigen Trägheitshalbmesser liefern die Scheitel der Zentralellipse.



Figur 179.

Für das Rechteck ist nach Nr. 189:

$$J_x = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} h^2 F.$$

Zerlegt man nun den Ausdruck  $\frac{1}{12} h^2$  in zwei Faktoren,  $\frac{1}{2} h$  und  $\frac{1}{6} h$ , so erhält man  $r$  als mittlere geometrische Proportionale aus  $\frac{1}{2} h$  und  $\frac{1}{6} h$ , siehe Figur 179. In gleicher Weise ergibt sich auch der Trägheitshalbmesser für die Achse  $Y$ . Hieraus finden sich aber, wie die Figur 179 zeigt, die Achsen der Zentralellipse.

Ist diese gezeichnet, so bestimmt sich für irgendeine durch  $s$  gehende Achse  $U$  das zugehörige Trägheitsmoment  $J_u$  dadurch, daß man parallel zu  $U$  an die Zentralellipse eine Tangente zieht und deren Abstand  $r_u$  von  $U$  aus der Figur 179 entnimmt; das gesuchte Trägheitsmoment ist dann  $r_u^2 F$ .



**Anmerkung 37.** Durch Rechnung findet man die Halbachsen der Zentralellipse für einen rechtwinkligen Querschnitt wie folgt. Es ist:

$$80) \dots r_x = \sqrt{\frac{1}{12} h^2} \text{ und } r_y = \sqrt{\frac{1}{12} b^2}$$

$$81) \dots r_x = \frac{h}{6} \sqrt{3} \text{ und } r_y = \frac{b}{6} \sqrt{3}$$

**e) Übungsaufgaben.**

195. **Aufgabe 88.** Für einen rechteckigen Balkenquerschnitt von 18/24 cm sind zu ermitteln:

- a) die beiden Hauptträgheitsmomente,
- b) das auf eine unter 45° gegen die Horizontale geneigte Schwerpunktsachse bezogene Trägheitsmoment,
- c) die beiden auf die Rechtecksseiten bezogenen Trägheitsmomente,
- d) die Längen der Halbachsen der Zentralellipse.

**Auflösung.** Es ist:

$$a) \begin{cases} J_x = \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 20736 \\ J_y = \frac{1}{12} \cdot 24 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 = 11664 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} J_{x_1} = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 82944 \\ J_{y_1} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 = 46656 \end{cases}$$

$$b) J_u = \cos^2 45^\circ J_x + \sin^2 45^\circ J_y = 10368 + 5832 = 16200$$

$$d) \begin{cases} r_x = 4\sqrt{3} = 6,92 \text{ cm} \\ r_y = 3\sqrt{3} = 5,19 \text{ cm} \end{cases}$$

196. **Aufgabe 89.** Für einen quadratischen Querschnitt von der Seitenlänge  $b$  sind verlangt:

- a) die Hauptträgheitsmomente,
- b) die auf die Seiten bezogenen Trägheitsmomente,
- c) der Halbmesser des Zentralkreises.

**Auflösung.** a) Für das Quadrat ist  $b = h$ , daher heißt die Formel für die beiden Hauptträgheitsmomente:

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} b^4$$

Diese Formel gilt aber auch für jedes auf eine Schwerpunktsachse bezogene Trägheitsmoment. Mit anderen Worten: Die sämtlichen auf Schwerpunktsachsen bezogenen Trägheitsmomente sind einander gleich.

b) Das auf eine Seite bezogene Trägheitsmoment ist  $\frac{1}{3} b^4$

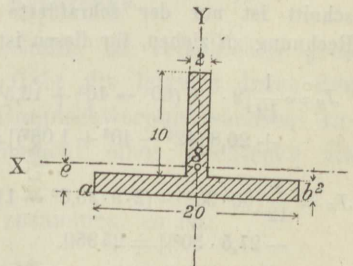
c) Die Zentralellipse geht in einen Kreis über mit einem Halbmesser:

$$r = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{b^4}{b^2}} = \frac{1}{6} b \sqrt{3}$$

197. **Aufgabe 90.** Für den in Figur 180 gezeichneten L-förmigen Querschnitt sind die beiden Hauptträgheitsmomente sowie das auf die Achse  $ab$  bezogene Trägheitsmoment zu berechnen.

**Auflösung.** Zunächst ist die Entfernung  $e$  des Schwerpunkts von der Achse  $ab$  zu berechnen; für diese Entfernung erhält man:

$$e = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 7}{20 \cdot 2 + 10 \cdot 2} = \frac{180}{60} = 3$$



Figur 180.

Das auf die Achse  $ab$  bezogene Trägheitsmoment berechnet sich nun aus der Gleichung:

$$J = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2^3 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 12^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^4 = 53,33 + 1152 - 5,33 = 1200$$

Nun ist:

$$J_x = J - 3^2 \cdot F = 1200 - 3^2 \cdot (20 \cdot 2 + 10 \cdot 2) = 1200 - 540 = 660$$

und

$$J_y = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 20^3 + \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 2^3 = 1333,33 + 6,666 = 1340$$

Für den vorliegenden  $\perp$  förmigen Querschnitt ist also das auf die Achse  $X$  bezogene Trägheitsmoment das kleinste, das auf die  $Y$ -Achse bezogene aber das größte.

**Anmerkung 38.** Das Trägheitsmoment, bezogen auf die  $X$ -Achse, läßt sich, wenn  $e$  bestimmt ist, auch unmittelbar wie folgt anschreiben, es ist:

$$J_x = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 9^3 + \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1^3 = \frac{1458 + 540 - 18}{3} = 660$$

198. **Aufgabe 91.** Für den in Figur 149 gezeichneten  $+$  förmigen Querschnitt sind die Hauptträgheitsmomente zu berechnen.

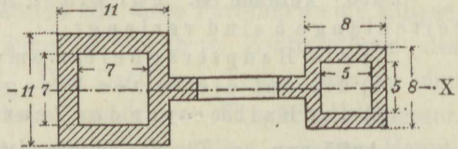
**Auflösung.** Es ist:

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} \cdot 15 \cdot 1,5^3 + \frac{1}{12} \cdot 1,5 \cdot 15^3 - \frac{1}{12} \cdot 1,5^4 = \text{rund } 426.$$

199. **Aufgabe 92.** Für den in Figur 182 gezeichneten Querschnitt ist das auf die Achse  $X$  bezogene Trägheitsmoment zu berechnen.

**Auflösung.** Unter Vernachlässigung der Mittelrippe ist das Trägheitsmoment des Querschnitts:

$$J_x = \frac{1}{12} (11^4 - 7^4 + 8^4 - 5^4) = 1309.$$



Figur 181.

200. **Aufgabe 93.** Es sind die Trägheitsmomente  $J_x$  und  $J_y$  des in Figur 182 dargestellten Querschnitts zu berechnen.

**Auflösung.** Als wirksamer Querschnitt ist nur der schraffierte Teil in Rechnung zu ziehen, für diesen ist:

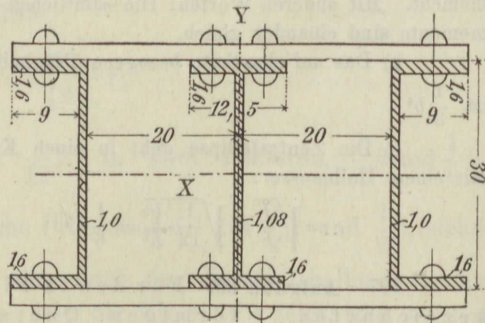
$$J_y = \frac{1}{12} [2 \cdot 1,6 (60^3 - 40^3 + 12,5^3) + 26,8 (42^3 - 40^3 + 1,08^3)] = 63\,586.$$

$$J_x = \frac{1}{12} [60 \cdot 30^3 - (2 \cdot 9 \cdot 26,8^3 - 11,42 \cdot 26,8^3 - 27,5 \cdot 30^3)] = 25\,950.$$

Derselbe Wert ergibt sich, wenn man die Trägheitsmomente  $J_x$  der einzelnen Profilquerschnitte addiert.

Berücksichtigt man die Schwächung des Querschnitts durch die Nietlöcher, so vermindert sich das Trägheitsmoment bei Annahme von 20 mm Lochdurchmesser um den Betrag

$$J' = 4 \cdot \frac{1}{12} \cdot 2 (30^3 - 26,8^3) = 5168.$$



Figur 182.



Als wirkliches Trägheitsmoment für den Querschnitt ergibt sich dann

$$J_x = 25950 - 5168 = 20882.$$

201. **Aufgabe 94.** Für den in Figur 183 dargestellten Querschnitt sind die beiden Hauptträgheitsmomente zu berechnen.

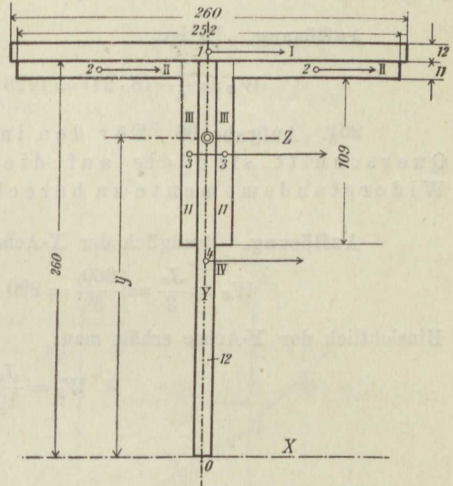
**Anmerkung 38 a.** Für die Trägheits- bzw. Widerstandsmomente ebener Querschnitte sind in der Folge die Zahlenwerte angegeben, die sich ergeben, wenn in den bezüglichen Formeln die Längenmaße in Zentimetern eingesetzt werden. Unter dieser Voraussetzung ist es vielfach üblich, die Werte für die genannten Momente mit  $\text{cm}^4$  bzw.  $\text{cm}^3$  zu bezeichnen. Man schreibt also z. B. in der Auflösung der Aufgabe 94 für den Wert des Trägheitsmoments des in Figur 183 dargestellten Querschnitts

$$J_z = 5568 \text{ cm}^4 \quad J_y = 3262 \text{ cm}^4$$

oder in Aufgabe 95

$$W_x = 1728 \text{ cm}^3 \quad W_y = 1296 \text{ cm}^3 \text{ usw.}$$

Im folgenden sollen diese Bezeichnungen weggelassen und nur die Zahlenwerte der Momente angegeben werden.



Figur 183.

**Auflösung.** Man erhält bezogen auf Zentimeter die Gleichung:

$$J_z = \frac{1}{3}(26 \cdot 6,16^3 - 0,8 \cdot 4,96^3 - 21,8 \cdot 3,86^3) + \frac{1}{3}(2,2 \cdot 7,04^3 + 1,2 \cdot 21,04^3) = 5568.$$

Für das Trägheitsmoment bezogen auf die Y-Achse erhält man die Gleichung:

$$J_y = \frac{1}{12}(1,2 \cdot 26^3 + 1,1 \cdot 25,2^3 + 10,9 \cdot 3,4^3 + 14 \cdot 1,2^3) = 3262.$$

### f) Widerstandsmoment eines Rechtecks.

202. Das Widerstandsmoment eines Querschnitts ist verschieden groß und abhängig von der Lage der Neutralachse. Geht die letztere durch den Schwerpunkt und fällt mit einer der beiden Hauptschwerpunktsachsen zusammen, so ergeben sich für das Widerstandsmoment eines Rechtecks die folgenden Werte:

Fällt die neutrale Achse mit der X-Achse zusammen, so ist:

$$W_x = \frac{J_x}{a} = \frac{bh^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2.$$

Für die Y-Achse als neutrale Achse erhält man:

$$W_y = \frac{J_y}{a} = \frac{hb^3}{12 \frac{b}{2}} = \frac{1}{6}hb^2.$$

Der erstere Wert ist der größte, der letztere der kleinste von allen auf Schwerpunktsachsen bezogenen Widerstandsmomenten.

203. **Aufgabe 95.** Für einen rechtwinkligen Balkenquerschnitt  $18/24$  cm sind die auf die Hauptachsen  $X$  und  $Y$  bezogenen Widerstandsmomente  $W_x$  und  $W_y$  zu berechnen.

**Auflösung.** Es ist:

$$W_x = \frac{1}{6} \cdot 18 \cdot 24^2 = 1728 \quad \text{und} \quad W_y = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 18^2 = 1296.$$

204. **Aufgabe 96.** Für den in Figur 180 gezeichneten  $\perp$ förmigen Querschnitt sind die auf die Hauptachsen  $X$  und  $Y$  bezogenen Widerstandsmomente zu berechnen.

**Auflösung.** Bezüglich der  $X$ -Achse sind die Widerstandsmomente:

$$W_x = \frac{J_x}{3} = \frac{660}{3} = 220 \quad \text{und} \quad W'_x = \frac{J_x}{9} = \frac{660}{9} = 73,33.$$

Hinsichtlich der  $Y$ -Achse erhält man:

$$W_y = \frac{J_y}{10} = \frac{1340}{10} = 134.$$

## 10. Trägheitsmoment einer Kraft bzw. eines Systems paralleler Kräfte.

### a) Begriff des Trägheitsmoments einer Kraft bzw. eines Kräftesystems.

205. Bildet man das Produkt aus einer Kraft und dem Quadrat ihrer Entfernung von einer zur Richtungslinie der Kraft parallelen Achse, so kann man dieses Produkt als das Trägheitsmoment der Kraft bezüglich der gewählten Achse  $X$  bezeichnen. Für ein System paralleler Kräfte ist das zugehörige Trägheitsmoment gleich der algebraischen Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Kräfte.

Für das in der Figur 184 dargestellte Kräftesystem ist also beispielsweise das Trägheitsmoment der Kraft  $P_1$  bezüglich der Achse  $X$  ausgedrückt durch das Produkt  $P_1 y_1^2$ , das Trägheitsmoment des ganzen Kräftesystems aber angedeutet durch die Beziehung:

$$82) \dots J_x = \sum P y^2.$$

### b) Graphische Ermittlung des Trägheitsmoments einer Kraft bzw. eines Kräftesystems.

206) Die Ermittlung des Trägheitsmoments einer Kraft bzw. eines Kräftesystems kann auf graphischem Wege in sehr einfacher Weise erfolgen. Von den verschiedenen Konstruktionsverfahren sollen hier nur die für den Bau-techniker zweckmäßigsten, mitgeteilt werden.

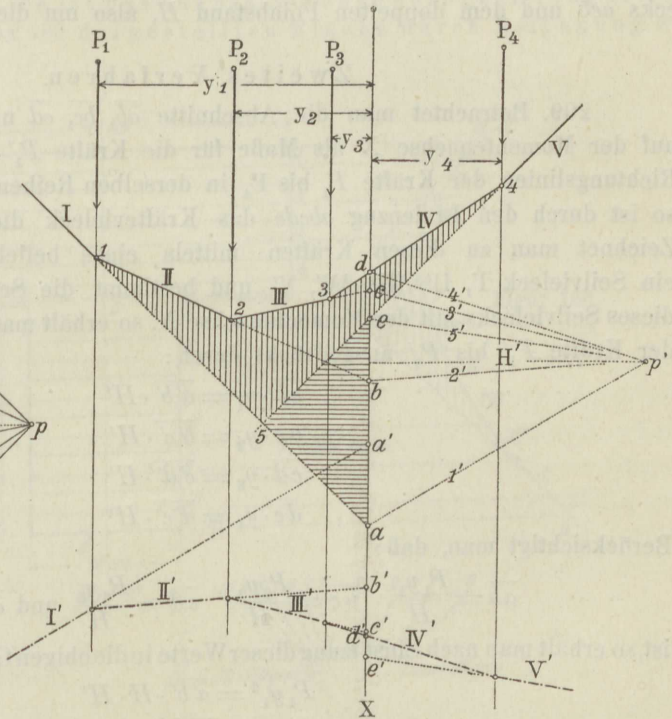
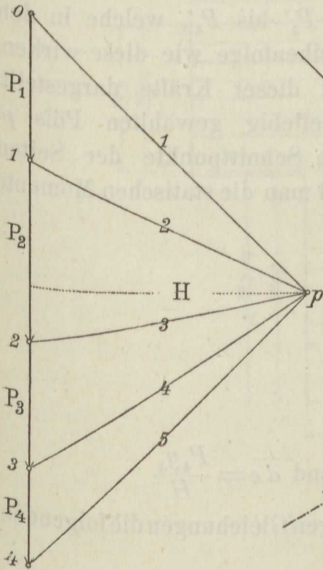


Erstes Verfahren.

207. Konstruiert man zu den gegebenen Kräften das Kräftevieleck 0.1.2.3.4, siehe Figur 185, sowie ein Seilvieleck I. II. III. IV. V, siehe Figur 184, so bilden die Abschnitte  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$ ,  $\overline{de}$  die auf den Polabstand H bezogenen statischen Momente der einzelnen Kräfte hinsichtlich der Achse X, d. h. es ist:

$$83) \dots \begin{cases} H \cdot \overline{ab} = P_1 y_1 \\ H \cdot \overline{bc} = P_2 y_2 \\ H \cdot \overline{cd} = P_3 y_3 \\ H \cdot \overline{de} = P_4 y_4 \end{cases} \quad \text{daher} \quad 83a) \dots \begin{cases} H \cdot \overline{ab} \cdot y_1 = P_1 y_1^2 \\ H \cdot \overline{bc} \cdot y_2 = P_2 y_2^2 \\ H \cdot \overline{cd} \cdot y_3 = P_3 y_3^2 \\ H \cdot \overline{de} \cdot y_4 = P_4 y_4^2 \end{cases}$$

Figur 185.



Figur 184.

Die rechten Seiten der Gleichungen 83a) stellen aber die Trägheitsmomente der einzelnen Kräfte bezüglich der Achse X dar, folglich sind auch die linken Seiten gleich diesen Trägheitsmomenten. Nun bezeichnen die Produkte  $ab \cdot y_1$ ,  $bc \cdot y_2$  usw. die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke  $ab1$ ,  $bc2$  usw.; die algebraische Summe dieser Dreiecke ist daher die in der Figur 184 durch Schraffur bezeichnete Fläche; ist ihr Inhalt gleich  $F$ , so hat man:

$$2 H \cdot F = P_1 y_1^2 + P_2 y_2^2 + P_3 y_3^2 + P_4 y_4^2 = \sum P y^2$$

oder:

$$84) \dots 2 H \cdot F = J_x.$$

„Man erhält also das Trägheitsmoment eines Systems paralleler Kräfte, wenn man die von dem Seilvieleck sowie dessen äußersten Seiten und der Momentenachse eingeschlossene Fläche  $F$  mit dem doppelten Polabstand multipliziert.“

Dabei ist der Polabstand im Kräftemaß auszudrücken.

208. Fällt die Momentenachse mit der Richtungslinie der Mittelkraft des Kräftesystems zusammen, d. h. geht sie durch den Schnittpunkt 5 der äußersten Seilviecksseiten, so ist die Fläche  $F$  gleich der von dem Seilvieleck eingeschlossenen Fläche, und das Trägheitsmoment  $J_x$  erhält seinen kleinsten Wert; bei einer parallelen Verschiebung der Momentenachse wächst das Trägheitsmoment  $J_x$  um die Größe des Produkts aus dem Flächeninhalte  $F_1$  des Dreiecks  $ae5$  und dem doppelten Polabstand  $H$ , also um die Größe  $2H \cdot F_1$ .

### Zweites Verfahren.

209. Betrachtet man die Abschnitte  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$  und  $\overline{de}$ , siehe Figur 184, auf der Momentenachse  $X$  als Maße für die Kräfte  $P_1'$  bis  $P_4'$ , welche in den Richtungslinien der Kräfte  $P_1$  bis  $P_4$  in derselben Reihenfolge wie diese wirken, so ist durch den Linienzug  $abcde$  das Kräftevieleck dieser Kräfte dargestellt. Zeichnet man zu diesen Kräften mittels eines beliebig gewählten Pols  $p'$  ein Seilvieleck  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$ ,  $IV'$ ,  $V'$  und bestimmt die Schnittpunkte der Seiten dieses Seilviecks mit der Momentenachse  $X$ , so erhält man die statischen Momente der Kräfte  $P_1'$  bis  $P_4'$  ausgedrückt durch:

$$\overline{ab} \cdot y_1 = \overline{a'b'} \cdot H'$$

$$\overline{bc} \cdot y_2 = \overline{b'c'} \cdot H'$$

$$\overline{cd} \cdot y_3 = \overline{c'd'} \cdot H'$$

$$\overline{de} \cdot y_4 = \overline{d'e'} \cdot H'$$

Berücksichtigt man, daß:

$$\overline{ab} = \frac{P_1 y_1}{H}, \quad \overline{bc} = \frac{P_2 y_2}{H}, \quad \overline{cd} = \frac{P_3 y_3}{H} \quad \text{und} \quad \overline{de} = \frac{P_4 y_4}{H}$$

ist, so erhält man nach Einsetzung dieser Werte in die obigen Gleichungen die folgenden:

$$P_1 y_1^2 = \overline{a'b'} \cdot H \cdot H'$$

$$P_2 y_2^2 = \overline{b'c'} \cdot H \cdot H'$$

$$P_3 y_3^2 = \overline{c'd'} \cdot H \cdot H'$$

$$P_4 y_4^2 = \overline{d'e'} \cdot H \cdot H'$$

oder: 85)  $\dots \sum P y^2 = J_x = H \cdot H' (\overline{a'b'} + \overline{b'c'} + \overline{c'd'} + \overline{d'e'}) = H \cdot H' \cdot \overline{a'e'}$ .

„Man erhält das Trägheitsmoment eines Kräftesystems, wenn man den von den äußersten Seiten des zweiten Seilviecks auf der Momentenachse gebildeten Abschnitt mit dem Produkt der beiden Polabstände multipliziert.“

Dabei sind die Polabstände im Kräfte-, der Abschnitt  $d'e'$  im Längenmaß auszudrücken.



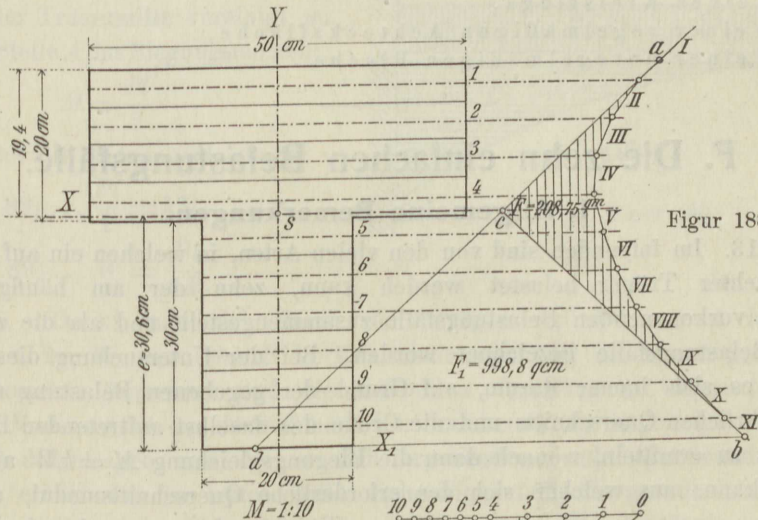
## II. Graphische Ermittlung des Trägheitsmoments ebener Flächen.

### a) Allgemeine Bemerkungen.

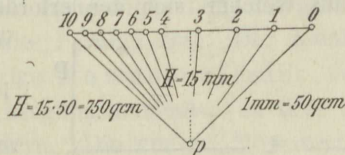
210. Auf Grund des vorstehenden lassen sich nun auch die Trägheitsmomente ebener Flächen durch Zeichnung ermitteln. Man teilt zu diesem Zweck die Fläche in sehr schmale Streifen parallel zur Momentenachse und denkt sich in den Schwerpunkten dieser Streifen Kräfte wirkend, parallel zur Momentenachse und der Größe nach proportional den Maßzahlen der Flächeninhalte der genannten Streifen. Das Trägheitsmoment des so gebildeten Kräftesystems ist gleich dem Trägheitsmoment der in Rede stehenden Fläche.

### b) Übungsaufgaben.

211. **Aufgabe 97.** Es ist das auf die X-Achse bezogene Trägheitsmoment der in Figur 186 dargestellten Fläche durch Zeichnung zu ermitteln.



Figur 188.



Figur 187.

Figur 186.

**Auflösung.** Man zerlegt die Fläche parallel zur X-Achse in die Streifen 1 bis 10, nimmt die Maßzahlen der Inhalte dieser Streifen als Maßzahlen für Kräfte, trägt diese zu einem Kräfteviereck, siehe Figur 187 aneinander an und konstruiert mittels eines beliebigen gewählten Pols  $p$  ein Seilviereck, siehe Figur 188. Nunmehr berechnet man den Inhalt  $F$  der von dem Seilviereck und dessen äußersten Seilstrahlen eingeschlossenen Fläche. Man erhält hierfür  $F = 208,75$  qcm und  $J_x = 2H \cdot F = 2 \cdot 750 \cdot 208,75 = 313128$ .

Durch Rechnung ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J_x = \frac{1}{3} [50 \cdot 19,4^3 + 50 \cdot 0,6^3 + 20 \cdot 30,6^3 - 20 \cdot 0,6^3] = 312742$$

ein Ergebnis, das mit dem durch Zeichnung ermittelten hinlänglich übereinstimmt.

Will man das Trägheitsmoment des Querschnitts hinsichtlich der  $X_1$ -Achse ermitteln, so erhält man:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + 2H \cdot F_1 \\ &= 313\,128 + 2 \cdot 750 \cdot 998,8 \\ &= 13\,128 + 1\,498\,200 = 1\,811\,328 \end{aligned}$$

Durch Rechnung ergibt sich

$$J_{x_1} = J_x + e^2 F_0$$

wobei  $e$  der Abstand der Achsen  $X$  und  $X_1 = 30,6 \text{ cm}$  und  $F_0$  der Querschnittsinhalt  $= 1600 \text{ qcm}$  bezeichnet.

Es ist:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= 312\,742 + 30,6^2 \cdot 1600 \\ &= 312\,742 + 1\,498\,176 \\ &= 1\,810\,918 \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Zeichnung und Rechnung ist hinreichend.

212. **Aufgabe 98.** Man ermittle graphisch nach dem in Nr. 209 besprochenen Verfahren das Trägheitsmoment:

- einer Kreisfläche,
- einer elliptischen Fläche,
- eines Kreisrings,
- einer regelmäßigen Achtecksfläche,
- einer unregelmäßigen Fläche.

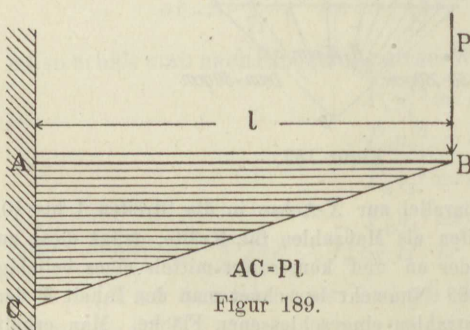
## F. Die zehn einfachen Belastungsfälle.

### 1. Allgemeine Bemerkungen.

213. Im folgenden sind von den vielen Arten, in welchen ein auf Biegung beanspruchter Träger belastet werden kann, zehn der am häufigsten im Hochbau vorkommenden Belastungsfälle zusammengestellt und als die zehn einfachen Belastungsfälle bezeichnet worden. Bei der Untersuchung dieser Fälle handelt es sich immer darum, auf Grund der gegebenen Belastung die Lage des gefährlichen Querschnitts und die Größe des daselbst auftretenden Biegemoments zu ermitteln, wonach dann die Biegleichung  $M = k W$  aufgestellt werden kann, aus welcher sich der erforderliche Querschnittsmodul, d. h. das

Widerstandsmoment des Querschnitts

$W = \frac{M}{k}$  ergibt. Ist das Widerstandsmoment  $W$  ermittelt, so findet man das demselben entsprechende Querschnittsprofil entweder aus einer Querschnittstabelle oder aber durch Rechnung, wie dies an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden soll.



Figur 189.

### 2. Erster Belastungsfall.

214. Der Träger ist an einem Ende eingemauert, bzw. eingespannt, siehe Figur 189, und an seinem anderen, nicht unterstützten Ende durch eine Einzellast  $P$  beansprucht.



Der gefährliche Querschnitt liegt hier an der Einspannstelle  $A$ , das Biegemoment daselbst ist  $M = Pl$ , daher lautet die Bieungsgleichung:

$$86) \dots Pl = kW$$

und

$$87) \dots W = \frac{Pl}{k}$$

### 3. Zweiter Belastungsfall.

215. Der Träger ist wie im ersten Falle unterstützt, aber auf seine ganze Länge durch eine gleichmäßig verteilte Last  $P$  beansprucht, siehe Figur 190.

Auch hier ist der gefährliche Querschnitt an der Einspannstelle  $A$ . Denkt man sich nun für einen Augenblick die ganze Last  $P$  zu einer Mittelkraft in der Trägermitte vereinigt, so ist für die Stelle  $A$  das Biegemoment:

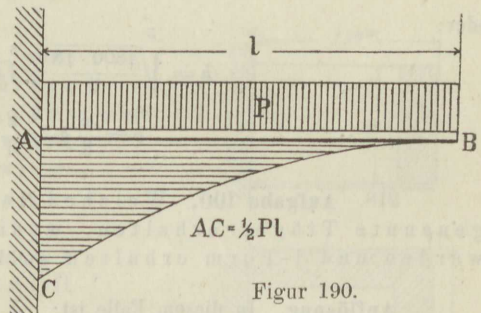
$$M = \frac{Pl}{2}$$

daher lautet die Bieungsgleichung:

$$88) \dots \frac{Pl}{2} = kW$$

und

$$89) \dots W = \frac{Pl}{2k}$$



Figur 190.

216. Denkt man sich durch den Träger von  $B$  nach  $A$  in Entfernungen  $x$ ,  $2x$ ,  $3x$  usw. von  $B$  Vertikalschnitte geführt, die hierzu gehörigen Biegemomente berechnet und die Maßzahlen derselben in einem beliebig gewählten Maßstabe in den betreffenden Vertikalebene als Senkrechte zu einer Achse  $AB$  aufgetragen und die so sich ergebenden Punkte miteinander verbunden, so erhält man im ersten Falle, siehe Figur 189, die gerade Linie  $BC$ , im zweiten Falle, siehe Figur 190, die Parabel  $BC$ . Die konstruierte Linie heißt die zu dem Belastungsfall gehörige Momentenlinie; sie zeigt durch ihren Verlauf, in welcher Weise die Biegemomente von dem einen bis zum anderen Trägerende ihren Wert verändern. Die von der Momentenlinie und der Achse  $AB$  begrenzte Fläche  $ABC$ , siehe Figur 189 und 190, heißt die Momentenfläche.

### 4. Übungsaufgaben.

217. Aufgabe 99. Ein Balken aus Eichenholz hat als Aufzugskran zu dienen. Er ist 1,20 m lang und hat eine Maximallast  $P = 4000$  kg zu tragen. Es ist der Querschnitt des Balkens zu berechnen, für den Fall, daß a)  $b:h = 5:7$ , b)  $b:h = 2:3$  sein soll;  $k = 100$ .

**Auflösung.** Es ist:

$$W = \frac{Pl}{k} = \frac{4000 \cdot 120}{100} = 4800$$

Nun ist für das Rechteck  $W = \frac{1}{6} b h^2$  oder da im Falle a)  $b = \frac{5}{7} h$  ist:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{7} h^3 = 4800$$

daher ist:

$$h = \sqrt[3]{\frac{4800 \cdot 42}{5}} = \sqrt[3]{40320} = 34, \dots \text{rund } 35 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7} \cdot 35 = 25 \text{ cm}$$

Im Falle b hat man  $b : h = 2 : 3$ , also  $b = \frac{2}{3} h$  und demnach:

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} h^3 = 4800$$

oder:

$$h = \sqrt[3]{\frac{4800 \cdot 18}{2}} = \sqrt[3]{43200} = \text{rund } 36 \text{ cm}$$

$$b = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24 \text{ cm}$$

218. **Aufgabe 100.** Welches Normalprofil muß der in Aufgabe 9 genannte Träger erhalten, wenn er aus Flußeisen hergestellt werden und I-Form erhalten soll?

**Auflösung.** In diesem Falle ist:

$$W = \frac{4000 \cdot 120}{1200} = 400$$

Nach der Profiltabelle IV entspricht diesem Werte ein N. P. Nr. 26 mit einem  $W = 446$ .

219. Zu den für die Eisenzimmerung verwendeten Eisenformen werden von den deutschen Hüttenwerken ganz bestimmte Profile hergestellt, die unter dem Namen Normalprofile bekannt sind.

In den Profiltabellen im Anhang II sind für die am häufigsten im Hochbau benutzten Formen die Normalprofile zugleich mit den zugehörigen Ausmaßen, Querschnittsgrößen, dem Gewicht für den laufenden Meter nebst den in Betracht kommenden Trägheits- und Widerstandsmomenten zusammengestellt.

Die Berechnung der Ausmaße eines Balkens wird in der Folge so vorgenommen werden, daß man aus der Biegungsgleichung das erforderliche  $W$  berechnet und dann in der entsprechenden Tabelle nachsieht, welcher Wert von  $W$  dem berechneten am nächsten kommt. Dem auf diese Weise aus der Tabelle entnommenen, dem berechneten zunächst kommenden, aber in der Regel größeren Widerstandsmoment entspricht dann ein bestimmtes Normalprofil, das für den Balkenquerschnitt zu verwenden ist.

220. **Aufgabe 101.** Für einen Aufzug ist ein Balken aus Eichenholz von  $27/36$  cm Querschnitt und 1,10 m freier Länge verwendet. Dieser Balken soll durch einen eisernen I-Träger ersetzt werden welches Profil ist zu wählen?



**Auflösung.** Ist  $k_1 = 100$  die zulässige Beanspruchung des Holzes und  $W_1$  das Widerstandsmoment des rechteckigen Querschnitts,  $k_2 = 1200$  aber die Beanspruchung des I-förmigen Querschnitts, so lautet für den Belastungsfall die Biegunsgleichung:

$$M = k_1 W_1 = k_2 W_2$$

daher ist:

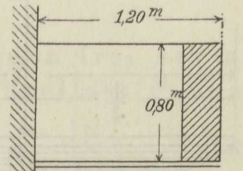
$$90) \dots k_1 : k_2 = W_2 : W_1$$

$$W_2 = \frac{k_1 W_1}{k_2} = \frac{100}{1200} \cdot \frac{1}{6} \cdot 27 \cdot 36 \cdot 36 = 486$$

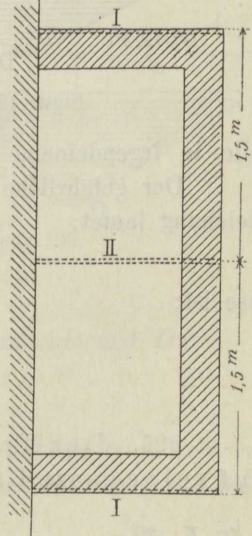
Diesem Werte entspricht laut Profiltabelle IV ein N. P. Nr. 28 mit einem Wert = 547.

221. Aus der Gleichung 90 geht hervor, daß bei der Auswechslung eines Trägers, dessen Querschnitt bekannt und ausreichend befunden ist, zur Bestimmung des Profils des neuen Trägers die Berechnung der Trägerbelastung nicht erforderlich ist, denn es verhalten sich die zulässigen Beanspruchungen der zur Verwendung gelangenden Träger umgekehrt wie die Widerstandsmomente der Trägerprofile.

222. **Aufgabe 102.** Ein Balkon, siehe Figur 191 und 192, wird durch die eisernen I-Träger I und II unterstützt; das Brüstungsmauerwerk ist 0,25 m stark aus Hohlziegeln hergestellt und wiegt der Kubikmeter 1100 kg. Die gleichmäßig verteilte Belastung der Balkondecke soll 600 kg für den Quadratmeter betragen. Es sind die Träger I und II zu berechnen.



Figur 191.



Figur 192.

**Auflösung.**

Belastung des Trägers I.

- 1) Gewicht der Seitenbrüstung  
=  $0,25 \cdot 1,20 \cdot 0,80 \cdot 1100 = 264 \text{ kg}$
- 2) Gewicht der Balkondecke  
=  $0,75 \cdot 1,20 \cdot 600 = 540 \text{ „}$
- 3) Auflagerdruck der Vorderbrüstung  
=  $0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,80 \cdot 1100 = 165 \text{ „}$

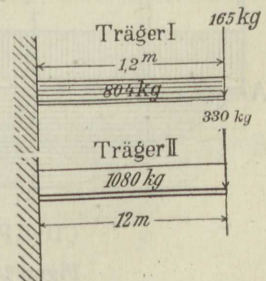
Belastung des Trägers II.

- 1) Gewicht der Balkondecke  
=  $1,50 \cdot 1,20 \cdot 600 = 1080 \text{ kg}$
- 2) Gewicht der Vorderbrüstung in 1,50 m Länge  
=  $1,50 \cdot 0,25 \cdot 0,80 \cdot 1100 = 330 \text{ „}$

Die beiden Träger I und II sind nach dem ersten und zweiten Belastungsfall zugleich belastet und gelten hierfür die Belastungsskizzen, siehe Figur 193.

Man erhält somit für das Widerstandsmoment  $W$  die folgenden Gleichungen:

$$\text{Träger I: } W = \frac{165 \cdot 120}{1200} + \frac{804 \cdot 120}{2 \cdot 1200} = 16,5 + 40,2 = 57.$$



Figur 193.

Dem entspricht *N. P. Nr. 13* mit einem  $W = 67,8$ .

$$\text{Träger II: } W = \frac{330 \cdot 120}{1200} + \frac{1080 \cdot 120}{2 \cdot 1200} = 33 + 54 = 87.$$

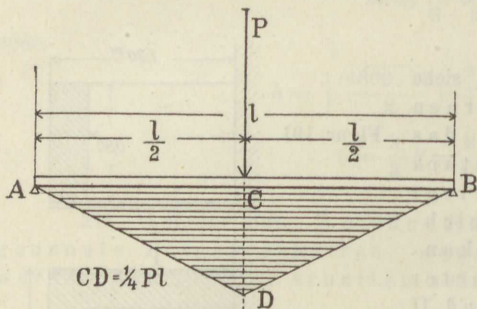
Dem entspricht nun *N. P. Nr. 15* mit einem

$$W = 99.$$

223. **Aufgabe 103.** Man berechne die Träger I und II der Aufgabe 102 unter der Voraussetzung, daß Vollziegel, Gewicht 1 cbm = 1600 kg, zum Brüstungsmauerwerk verwendet werden sollen.

### 5. Dritter Belastungsfall.

224. Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist in seiner Mitte durch eine Einzellast  $P$  beansprucht, siehe Figur 194.



Figur 194.

Denkt man sich den Träger im Punkte  $C$  festgehalten und das Auflager in  $A$  durch den Auflagergegendruck  $\frac{P}{2}$  ersetzt, so ist das Biegemoment für den Punkt  $C$ :

$$M = \frac{P}{2} \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

und dies ist das größte Biegemoment, das bei diesem Belastungs-

falle in irgendeinem Querschnitt auftreten kann.

Der gefährliche Querschnitt liegt also in der Trägermitte; die Biegelgleichung lautet:

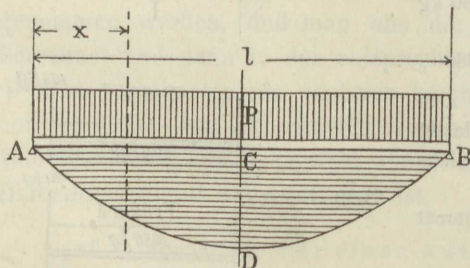
$$91) \dots \frac{Pl}{4} = k W$$

also ist:

$$92) \dots W = \frac{Pl}{4k}$$

### 6. Vierter Belastungsfall.

225. Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist auf seine ganze Länge durch eine gleichmäßig verteilte Last  $P$  beansprucht, siehe Figur 195.



$$CD = \frac{1}{8} Pl$$

Figur 195.

Für einen Querschnitt in der Entfernung  $x$  ist das Biegemoment, wenn man den links vom Schnitt befindlichen Trägerteil in Betracht zieht:

$$M = \frac{Px}{2} - \frac{P}{l} x \frac{x}{2}$$



Dieser Ausdruck wächst mit der Zunahme von  $x$  und erhält seinen größten Wert für  $x = \frac{l}{2}$ , nämlich:

$$M = \frac{Pl}{2 \cdot 2} - \frac{Pl}{2l} \frac{l}{4} = \frac{1}{8} Pl.$$

Der gefährliche Querschnitt liegt in der Trägermitte. Für diese Stelle lautet die Biegungsgleichung:

$$93) \dots \frac{Pl}{8} = k W$$

daher ist:

$$94) \dots W = \frac{Pl}{8k}.$$

**Anmerkung 39.** Konstruiert man in den Fällen 3 und 4 die Momentenlinie, so erhält man im dritten Falle zwei Gerade  $AD$  und  $BD$ , im vierten Falle eine Parabel, deren Achse mit der den Punkt  $C$  enthaltenden Senkrechten zur Achse  $AB$  zusammenfällt.

### 7. Fünfter Belastungsfall.

226. Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist außerhalb seiner Mitte durch eine Einzellast  $P$  beansprucht, siehe Figur 196.

Der gefährliche Querschnitt liegt unter dem Angriffspunkte  $C$  der Last  $P$ . Die Auflagerdrücke sind:

$$A = \frac{P}{l} l_2 \text{ und } B = \frac{P}{l} l_1$$

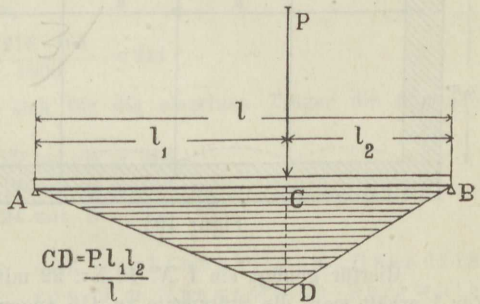
die Biegungsgleichung für die Stelle  $C$  lautet:

$$95) \dots \frac{Pl_1 l_2}{l} = k W$$

daher ist:

$$96) \dots W = \frac{Pl_1 l_2}{lk}.$$

Die Momentenlinie besteht aus den beiden Geraden  $AD$  und  $DB$ .



Figur 196.

### 8. Sechster Belastungsfall.

227. Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist durch zwei gleich große, gleich weit von den Auflagern  $A$  und  $B$  abstehende Einzellasten  $P$  beansprucht, siehe Figur 197.

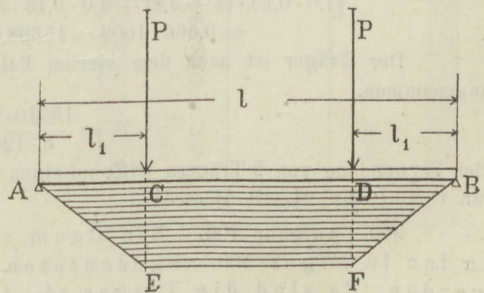
Der gefährliche Querschnitt liegt auf der ganzen Strecke  $CD$ . Die Biegungsgleichung lautet:

$$97) \dots Pl_1 = k W$$

daher:

$$98) \dots W = \frac{Pl_1}{k}.$$

Die Momentenlinie besteht aus den Linien  $AE$ ,  $EF$  und  $FB$ .



Figur 197.

### 9. Übungsaufgaben.

228. **Aufgabe 104.** Ein Raum von rechtwinkliger Grundform, siehe Figur 198, ist mittels Kappen einzuwölben. Die Kappenträger liegen teils auf der Mauer, teils auf dem Träger II. Es sind die Träger I und II zu berechnen. Die Belastung beträgt 700 kg für den Quadratmeter.

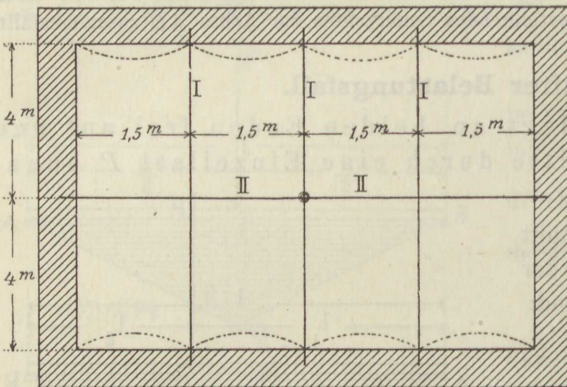
**Auflösung.** Belastung des Kappenträgers I:

$$1,5 \cdot 4 \cdot 700 = 4200 \text{ kg,}$$

ebensogroß ist auch die Belastung des Trägers II.

Der letztere ist nach dem dritten, der erstere nach dem vierten Falle belastet. Daher hat man für II, Stützweite zu 315 cm angenommen,

$$W = \frac{1}{4} \cdot \frac{4200 \cdot 315}{1200} = 276$$



Figur 198.

Hierfür genügt ein I. N. P. Nr. 22 mit  $W = 281$ .

Für I erhält man, die Stützweite zu 415 cm angenommen,

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{4200 \cdot 415}{1200} = 181$$

Hierfür genügt I. N. P. Nr. 19 mit  $W = 187$ .

229. **Aufgabe 105.** Eine drei Stockwerk hohe Zwischenmauer von einem bzw. einem halben Stein Stärke soll auf eine Länge von 4 m durch zwei I-Träger gestützt werden, siehe Figur 199. Es ist das Trägerprofil zu berechnen. 1 cm Mauerwerk = 1600 kg.

**Auflösung.** Die Belastung des Trägers beträgt:

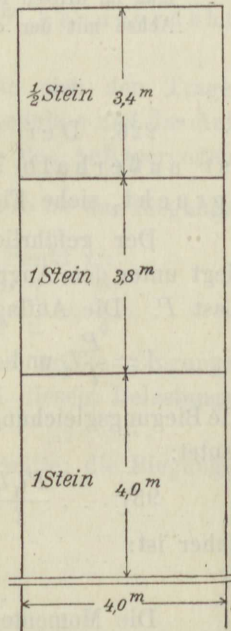
$$[4,0 \cdot 0,25 \cdot (4 + 3,8) + 4,0 \cdot 0,13 \cdot 3,4] \cdot 1600 = (7,8 + 1,768) \cdot 1600 \\ = 9,568 \cdot 1600 = 15308,8 \text{ kg, rund } 15310 \text{ kg.}$$

Der Träger ist nach dem vierten Falle belastet, daher ist, die Stützweite zu 430 cm angenommen,

$$W = \frac{15310 \cdot 430}{8 \cdot 1200} = 686$$

Bei Verwendung von 2 Trägern trifft auf einen Träger ein  $W = 343$ ; diesem Werte entspricht ein I. N. P. Nr. 24 mit  $W = 357$ .

230. **Aufgabe 106.** Ein Raum von rechteckigem Grundriß soll in der in Figur 200 angedeuteten Form durch Kappen überwölbt werden. Es sind die Träger  $cd = I$ ,  $de = II$  und  $ab = III$  zu berechnen. Belastung = 700 kg für den Quadratmeter.



Figur 199.



**Auflösung.** Belastung des Trägers I:

$$\frac{2,0 + 1,5}{2} \cdot 4 \cdot 700 = 4900 \text{ kg}$$

Belastung des Trägers II:

$$\frac{2 + 1,5}{2} \cdot 3 \cdot 700 = 3675 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \text{Belastung des Trägers III} &= \frac{4900}{2} + \frac{3675}{2} = 2450 + 1837 \text{ kg} \\ &= 4287 \text{ rund } 4300 \text{ kg} \end{aligned}$$

Die Träger I und II sind nach dem vierten Belastungsfall zu berechnen. Man hat also für I, Stützweite zu 415 angenommen,

$$W = \frac{4900 \cdot 415}{8 \cdot 1200} = 212$$

für II, Stützweite zu 315 angenommen,

$$W = \frac{3675 \cdot 315}{8 \cdot 1200} = 120$$

Träger III ist nach dem fünften Belastungsfall zu berechnen. Man hat, die Stützweite zu  $215 + 165 = 380$  angenommen,

$$W = \frac{4300 \cdot 215 \cdot 165}{380 \cdot 1200} = 334$$

Auf Grund der Tabelle IV ergeben sich für die einzelnen Träger die folgenden Normal-I-Profile

- I. N. P. Nr. 20 mit  $W = 216$
- II. N. P. Nr. 17 mit  $W = 139$
- III. N. P. Nr. 24 mit  $W = 357$

231. **Aufgabe 107.** Ein Raum von rechteckigem Grundriß, siehe Figur 201, soll durch Kappen von 2 m Spannweite überwölbt werden; die Kappenträger I liegen auf einem Unterzuge II auf. Die Belastung beträgt 700 kg für den Quadratmeter.

**Auflösung.** Die Belastung des Trägers I ist gleich dem Gewichte einer Kappe, also gleich  $2,0 \cdot 4,0 \cdot 700 = 5600 \text{ kg}$ .

Die Belastung des Trägers II beträgt in den Punkten  $c$  und  $d$  je 5600 kg.

Für den Träger I ist, die Stützweite zu 415 cm angenommen,

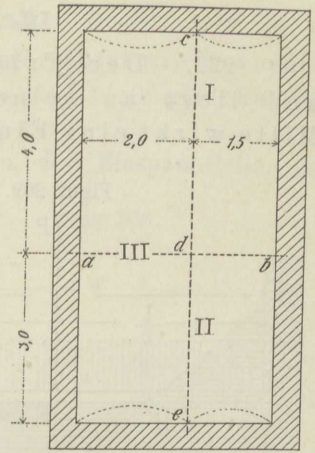
$$W = \frac{5600 \cdot 415}{8 \cdot 1200} = 242$$

Diesem Werte entspricht ein I N. P. Nr. 21 mit  $W = 246$ .

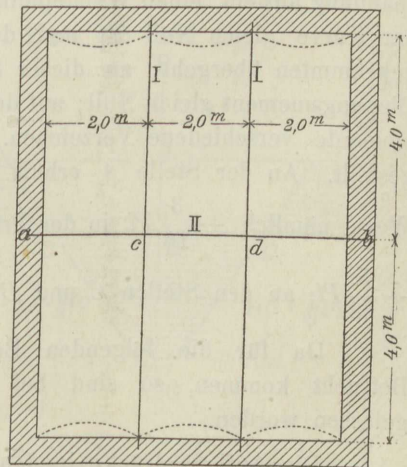
Für den Träger II hat man, die Stützweite zu 215 angenommen,

$$W = \frac{5600 \cdot 215}{1200} = 1003$$

Diesem Werte entspricht ein I N. P. Nr. 36 mit  $W = 1098$ .



Figur 200.

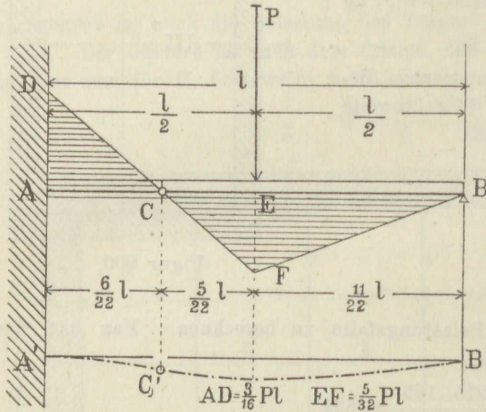


Figur 201.

### 10. Siebenter Belastungsfall.

232. Der Träger ist an einem Ende eingespannt und liegt an seinem anderen Ende frei auf; in seiner Mitte wirkt eine Einzellast  $P$ , siehe Figur 202.

Figur 202.



Figur 202 a.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannstelle, das Biegemoment daselbst ist:

$$M = \frac{3}{16} Pl$$

daher lautet die Biegunsgleichung:

$$99) \dots \frac{3}{16} Pl = k W$$

und es ist:

$$100) \dots W = \frac{3}{16} \frac{Pl}{k}$$

Die Lage des gefährlichen Querschnitts sowie die Größe des Biegemoments lassen sich hier und

bei den folgenden drei Belastungsfällen nicht mehr in einfacher und elementarer Weise ableiten; es sollen daher nur die Ergebnisse angegeben werden.

Durch die Einwirkung der Belastung und infolge der gewählten Unterstützung nimmt die Trägerachse, d. h. die elastische Linie, die Gestalt der Figur 202 a an. Sie besitzt an einer Stelle  $C'$ , die um  $\frac{6}{22}l$  von der Einspannung absteht, einen Wendepunkt, d. i. ein Punkt, in welchem die Krümmung der Kurve gleich Null ist und der konvex gekrümmte Teil in den konkav gekrümmten übergeht; an dieser Stelle ist der Träger spannungslos und das Biegemoment gleich Null; auf den Strecken  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$  besitzen die Biegemomente verschiedene Vorzeichen. In Figur 202 ist die Momentenlinie dargestellt. An der Stelle  $A$  erhält das Biegemoment den größten negativen Wert, nämlich  $-\frac{3}{16}Pl$ , in der Trägermitte den größten positiven Wert, nämlich  $+\frac{5}{32}Pl$ ; an den Stellen  $C$  und  $B$  ist das Biegemoment gleich Null.

Da für die folgenden Berechnungen nur die absoluten Werte in Betracht kommen, so sind bei den Formeln für  $W$  die Vorzeichen weggelassen worden.

Die Auflagerdrücke in den Punkten  $A$  und  $B$  sind:

$$A = \frac{11}{16} P \text{ und } B = \frac{5}{16} P$$



## II. Achter Belastungsfall.

233. Der Träger ist in gleicher Weise unterstützt wie im vorhergehenden Falle, aber durch eine auf seine ganze Länge gleichmäßig verteilte Last  $P$  beansprucht, siehe Figur 203.

Der gefährliche Querschnitt liegt wieder an der Einspannstelle, das Biegemoment daselbst ist  $M = \frac{1}{8} Pl$ ,

daher lautet die Bieungsgleichung:

$$101) \dots \frac{1}{8} Pl = kW$$

und es ist: 102)  $\dots W = \frac{1}{8} \frac{Pl}{k}$

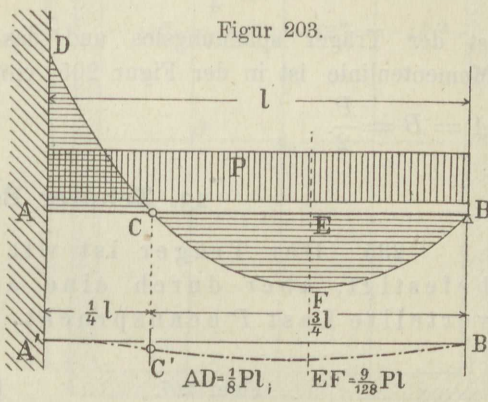
In einer Entfernung gleich  $\frac{1}{4} l$

von der Einspannstelle besitzt die elastische Linie einen Wendepunkt, siehe Figur 204; der Träger ist an dieser Stelle spannungslos und das Biegemoment gleich Null. Auf den Strecken  $AC$  und  $CB$  besitzen die Biegemomente entgegengesetzte Vorzeichen; das größte negative

Biegemoment  $= -\frac{1}{8} Pl$  tritt bei  $A$ , das größte positive  $= +\frac{9}{128} Pl$  bei  $E$  auf,

in einer Entfernung gleich  $\frac{5}{8} l$  von  $A$ . In Figur 203 ist die Momentlinie eine Parabel, deren Achse senkrecht zur Achse  $AB$  durch  $E$  geht, eingezeichnet.

Die Auflagerdrücke sind  $A = \frac{5}{8} P$  und  $B = \frac{3}{8} P$ .



Figur 203.

Figur 204.

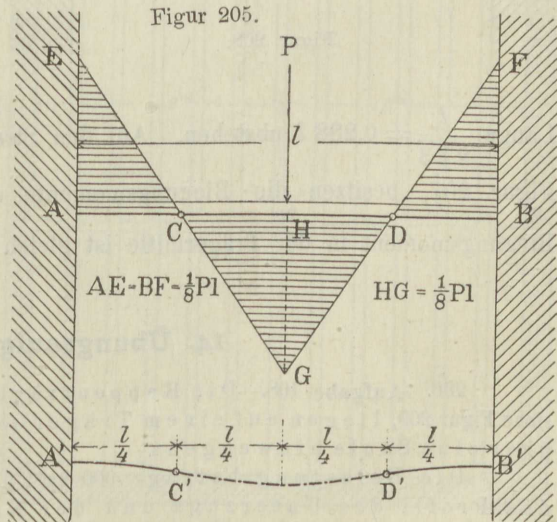
## 12. Neunter Belastungsfall.

234. Der Träger ist an beiden Enden eingespannt und in seiner Mitte durch eine Einzellast  $P$  beansprucht, siehe Figur 205.

Der Träger besitzt drei gleich gefährliche Querschnitte, nämlich jene über den Einspannstellen und der Trägermitte; an jeder dieser Stellen ist das

Biegemoment  $M = \frac{1}{8} Pl$ , daher lautet die Bieungsgleichung:

$$103) \dots \frac{1}{8} Pl = kW$$



Figur 205.

Figur 206.

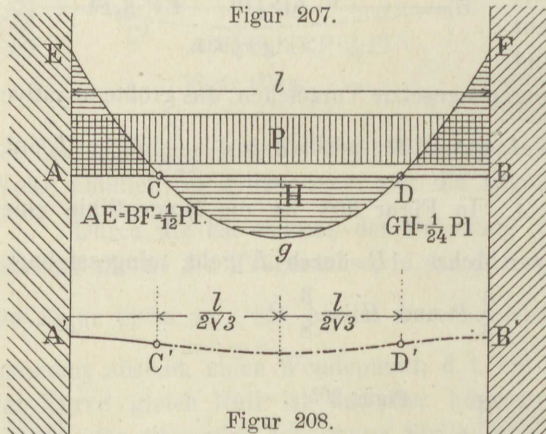
und es ist:

$$104) \dots W = \frac{1}{8} \frac{Pl}{k}$$

Die elastische Linie besitzt zwei Wendepunkte  $C$  und  $D'$ , siehe Figur 206, welche um die Länge  $\frac{1}{4}l$  von den beiden Auflagern abstehen; in diesen Punkten ist der Träger spannungslos und das Biegemoment gleich Null. Die Momentenlinie ist in der Figur 205 eingezeichnet. Die Auflagerdrücke sind  $A = B = \frac{P}{2}$ .

### 13. Zehnter Belastungsfall.

235. Der Träger ist wie im neunten Belastungsfall befestigt, aber durch eine auf seine Länge gleichmäßig verteilte Last  $P$  beansprucht, siehe Figur 207.



Der Träger besitzt zwei gleich gefährliche Querschnitte über den beiden Auflagern, das Biegemoment daselbst ist  $M = \frac{1}{12} Pl$ , daher lautet die Bieungsgleichung

$$105) \dots \frac{1}{12} Pl = k W$$

und es ist:

$$106) \dots W = \frac{1}{12} \frac{Pl}{k}$$

Die elastische Linie besitzt zwei Wendepunkte  $C'$  und  $D'$ , siehe Figur 208, welche von der Trägermitte je um die

Länge  $\frac{l}{2\sqrt{3}} = 0,288 l$  abstehen. Auf den Strecken  $\overline{AC}$  bzw.  $\overline{BD}$  und  $\overline{CD}$ , siehe Figur 207, besitzen die Biegemomente entgegengesetzte Vorzeichen; das Biegemoment in der Trägermitte ist gleich  $\frac{1}{24} Pl$ .

### 14. Übungsaufgaben.

236. Aufgabe 108. Die Kappenträger für eine gewölbte Decke, siehe Figur 209, liegen auf einem Träger  $ab$ , der im Punkte  $c$  ungestoßen über eine Säule hinweggeht.

Die Belastung beträgt 900 kg für den Quadratmeter. Es ist das Profil des Unterzugs und der Kappenträger sowie der Auflagerdruck in den Punkten  $a$ ,  $b$  und  $c$  zu berechnen.



**Auflösung.** Belastung eines Kappenträgers =  $1,8 \cdot 4,5 \cdot 900 = 7290$  kg, rund 7300. Die gleiche Belastung hat der Unterzug im Punkte  $d$  aufzunehmen. Der Kappenträger ist nach dem vierten, der Unterzug nach dem siebenten Falle belastet, daher ist für den Kappenträger, Stützweite = 465 cm angenommen,

$$W = \frac{7300 \cdot 465}{8 \cdot 1200} = 353$$

Diesem Werte entspricht ein I. N. P. Nr. 24 mit  $W = 357$ . Für den Unterzug erhält man, Stützweite = 375 cm,

$$W = \frac{3 \cdot 7300 \cdot 375}{16 \cdot 1200} = 428$$

Hierfür genügt ein I. N. P. Nr. 26 mit  $W = 446$ .

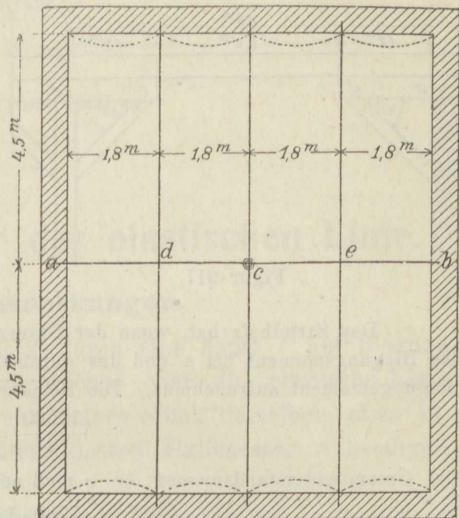
Der Druck auf die Säule  $c$  ist:

$$\frac{22}{16} \cdot 7300 + 7300 = 17337,5 \text{ kg}$$

jener auf die Auflager ist in  $a$ :

$$A = \frac{5}{16} \cdot 7300 = 2281,25 \text{ kg}$$

ebensogroß ist der Auflagerdruck im Punkte  $b$ .



Figur 209.

237. **Aufgabe 109.** Die Balkenlage eines Salzspeichers, siehe Figur 210, liegt auf einem Unterzuge  $ab$  aus Eichenholz auf. Die Balken aus Kiefernholz liegen 0,80 m voneinander entfernt. Die Belastung beträgt für den Quadratmeter 800 kg. Es ist das Profil der Balken,  $b:h = 3:4$  und jenes des Unterzugs  $b:h = 5:7$  zu berechnen. Für Kiefern- und Eichenholz  $k = 100$ .

**Auflösung.** Belastung einer Balkenhälfte =  $0,8 \cdot 4,8 \cdot 800 = 3072$  kg

Belastung des Unterzugs auf die Strecke  $ac = \frac{10}{8} \cdot 4,8 \cdot 4,8 \cdot 800 = 23040$  kg

Für den Balken ist, Stützweite = 495 cm,

$$W = \frac{3072 \cdot 495}{8 \cdot 100} = 1900$$

Für den Unterzug ist, Stützweite = 495 cm,

$$W = \frac{23040 \cdot 495}{8 \cdot 100} = 14256$$

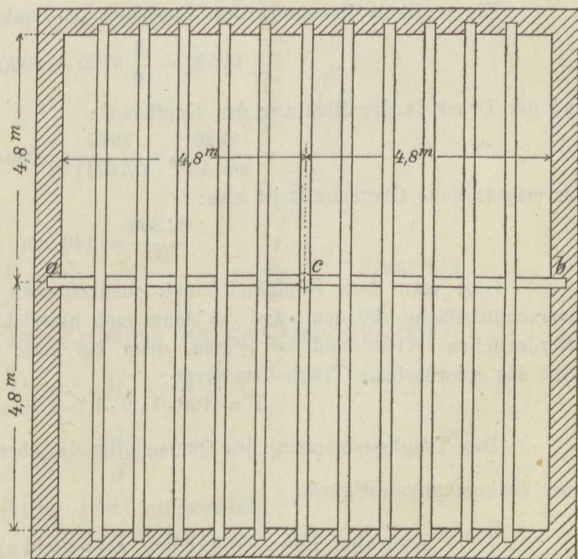
Für den rechteckigen Balkenquerschnitt ist

$$W = \frac{1}{6} \frac{3}{4} b^3 = 1900$$

$$\text{und } b = \sqrt[3]{\frac{1900 \cdot 24}{3}} = 26,$$

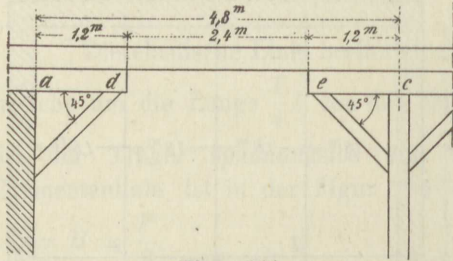
rund 26 cm

Hieraus folgt  $b = \frac{3}{4} \cdot 26 = 20$



Figur 210.

Für den Unterzug wird man zweckmäßig über den Stützen Sattelhölzer verwenden, siehe Figur 211. In diesem Falle hat man den Teil  $de$  des Unterzugs nach dem zehnten Belastungsfalle zu berechnen. Die Belastung auf die Strecke  $\overline{de}$  beträgt  $\frac{23040}{2} = 11520$  kg,



Figur 211.

und es ist

$$W = \frac{11520 \cdot 240}{12 \cdot 100} = 2304$$

Man hat nun

$$h = \sqrt[3]{\frac{2304 \cdot 42}{5}} = 28 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7} \cdot 28 = 20 \text{ cm}$$

Das Sattelholz hat, wenn der Unterzug über der Stütze gestoßen angenommen ist, das Biegemoment bei  $e$  und das durch die Belastung auf der Strecke  $ce$  hervorgerufene Biegemoment aufzunehmen. Die Belastung des Sattelholzes ist:

$$\frac{11520}{2} = 5760 \text{ kg}$$

Das Gesamtwiderstandsmoment bei  $c$  muß sein

$$W = 2304 + \frac{5760 \cdot 120}{8 \cdot 100} = 2304 + 864 = 3168$$

Hiernach ergibt sich die Höhe des Sattelholzes

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{3168 \cdot 42}{5}} = \text{rund } 30 \text{ cm}$$

$$b_0 = \frac{5}{7} \cdot 30 = \text{rund } 22 \text{ cm}$$

#### Berechnung des Kopfbands.

Die vertikale Belastung des Kopfbands im Punkte  $e$  ist:

$$\frac{1}{2} 11520 + \frac{3}{8} 5760 = 7920 \text{ kg}$$

und der Druck in der Richtung des Kopfbands:

$$= \frac{7920}{\cos 45^\circ} = \frac{7920}{0,70711} = \text{rund } 11200$$

der erforderliche Querschnitt ist also:

$$\frac{11200}{80} = 140 \text{ cm}$$

Gibt man dem Kopfband einen quadratischen Querschnitt 16/16 cm, so wird die Querschnittsfläche 256 qcm und ist dann auch hinreichend groß, um gegen Knickung den erforderlichen Widerstand zu leisten, denn bei einer Länge des Kopfbandes von 1,7 m wird das erforderliche Trägheitsmoment:

$$J = 100 \cdot 11,2 \cdot 1,7 \cdot 1,7 = 3037$$

Das Trägheitsmoment des Querschnitts ist aber  $\frac{1}{12} 16^4 = 5461$ , siehe den Abschnitt über Zerknickungsfestigkeit.

238. **Aufgabe 110.** Welche Einzellast kann der in Figur 211 dargestellte, durch Sattelhölzer und Kopfbänder unterstützte



Balken aus Eichenholz in seiner Mitte aufnehmen, wenn sein Querschnitt 20/26 cm mißt?

**Auflösung.** Das Widerstandsmoment beträgt:

$$W = \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 26 \cdot 26 = 2253$$

daher ist:

$$P = \frac{2253 \cdot 8 \cdot 100}{240} = \text{rund } 7500 \text{ kg}$$

## G. Krümmungshalbmesser der elastischen Linie.

### I. Allgemeine Bemerkungen.

239. Ist ein Balken, siehe Figur 212, durch eine Kraft  $P$  auf Biegung beansprucht und nimmt hierdurch die Trägerachse oder die elastische Linie die Form der Linie  $ab$  an, so kann man ein kleines Stück derselben, etwa  $gh$ , als einen Teil eines Kreisbogens betrachten, dessen Halbmesser  $r$  bestimmt werden soll.

Aus der Figur 212 ist ersichtlich, daß  $ie$  die Verlängerung der äußersten Faser für den Querschnitt  $ik$  bezeichnet; nennt man diese Verlängerung  $\lambda$ , so hat man die Beziehung:

$$107) \dots \lambda : \sigma = 1 : E$$

oder:

$$\lambda = \frac{\sigma}{E}$$

ferner ist:

$$\lambda : a = \overline{gh} : \overline{gm} = 1 : r$$

wenn  $\overline{he} = a$ ,  $\overline{gm} = r$  und  $\overline{gh} = 1$  gesetzt wird, daher ist:

$$\lambda : a = 1 : r$$

oder:

$$\lambda = \frac{a}{r}$$

Es ist also:

$$\frac{a}{r} = \frac{\sigma}{E}$$

oder:

$$108) \dots r = \frac{aE}{\sigma}$$

Nun lautet aber die Biegungsgleichung für den Querschnitt  $ef$ :

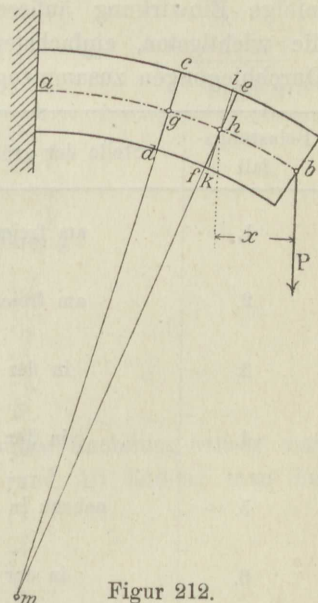
$$M = Px = \sigma W = \sigma \frac{J}{a}$$

hieraus folgt:

$$\sigma = \frac{Ma}{J}$$

oder diesen Wert von  $\sigma$  in Gleichung 108) eingesetzt:

$$109) \dots r = \frac{JE}{M}$$



Figur 212.

Die Gleichung 109) enthält den Satz:

„Für jeden Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens ist der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie proportional dem Trägheitsmoment und dem Elastizitätsmodulus, dagegen umgekehrt proportional dem Biegemoment.“

## 2. Größe der Durchbiegung eines Trägers.

240. Die Durchbiegung eines Trägers ist einerseits abhängig von der Form des Querschnitts und der Größe des Biegemoments, anderseits von der Größe des Elastizitätsmodulus.

Je größer das Trägheitsmoment und der Elastizitätsmodulus und je kleiner das Biegemoment für einen Querschnitt ist, desto größer wird der Krümmungshalbmesser, d. h. desto kleiner wird die Krümmung oder Durchbiegung des Balkens sein.

Für ein und denselben Träger ist die Durchbiegung in der Regel im gefährlichen Querschnitt am größten. Man kann die Durchbiegungen des Trägers infolge Einwirkung äußerer Kräfte berechnen. In folgender Tabelle sind für die wichtigsten, einfachsten Belastungsfälle die Formeln für die Größen der Durchbiegungen zusammengestellt.

Belastungsfall	Stelle der größten Durchbiegung	Größe der Durchbiegung
1.	am freien Trägerende	$\frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EJ}$
2.	am freien Trägerende	$\frac{1}{8} \frac{Pl^3}{EJ}$
3.	in der Trägermitte	$\frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$
4.	in der Trägermitte	$\frac{5}{384} \frac{Pl^3}{EJ}$
5.	nahezu in der Trägermitte	$\frac{1}{48} \frac{Pl_1}{EJ} (3l^2 - 4l_1^2)$
6.	in der Trägermitte	$\frac{1}{2} \frac{Pl_1}{EJ} \left( \frac{l^2}{4} + l_1 - \frac{l_1^2}{3} \right)$
7.	in der Trägermitte	$\frac{1}{109} \frac{Pl^3}{EJ}$
8.	in der Trägermitte	$\frac{1}{185} \frac{Pl^3}{EJ}$
9.	in der Trägermitte	$\frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EJ}$
10.	in der Trägermitte	$\frac{1}{384} \frac{Pl^3}{EJ}$



## H. Zerknickungsfestigkeit.

### 1. Allgemeine Bemerkungen.

241. Wirkt in der Achse eines stabförmigen Körpers eine Druckkraft  $P$ , siehe Figur 213, und sind die Querschnittsausmaße im Verhältnis zur Länge des Stabs sehr klein, so wird der Stab durch die Einwirkung der Kraft nicht nur zusammengedrückt, sondern auch seitlich ausgebogen und schließlich zerknickt werden. Den Widerstand hiergegen nennt man die Zerknickungsfestigkeit des Materials. Durch die Kraft  $P$  wird ein Biegemoment hervorgerufen:

$$110) \dots M = Pf$$

Nun ist, siehe Figur 213:

$$110 a) \dots r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r-f)^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 - 2rf + f^2$$

oder unter Vernachlässigung der sehr kleinen Größe  $f^2$ :

$$2rf = \frac{l^2}{4}$$

und

$$f = \frac{l^2}{8r}$$

Außerdem ist in Rücksicht auf Gleichung 109):

$$M = \frac{EJ}{r}$$

man hat somit für das Biegemoment  $M$  die Gleichung:

$$111) \dots \frac{EJ}{r} = \frac{Pl^2}{8r}$$

oder:

$$112) \dots P = \frac{8EJ}{l^2}$$

Dieser Wert ist nur ein Näherungswert; durch genauere Rechnung würde man statt des Faktors 8 die Größe  $\pi^2 = 9,8596$  oder rund 10 finden; man hat also die Gleichung:

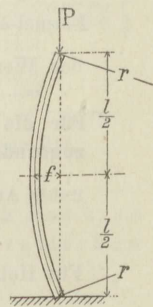
$$113) \dots P = \frac{10EJ}{l^2}$$

Diese Gleichung gibt den Grenzwert der Belastung  $P$  an, dessen Überschreitung ein Unsicherwerden des Gleichgewichts des Stabs zur Folge hat. Legt man eine  $n$ -fache Sicherheit zugrunde, so erhält man:

$$114) \dots nP = \frac{10EJ}{l^2}$$

Hieraus folgt das erforderliche Trägheitsmoment des Stabquerschnitts, damit er die Last  $P$  mit Sicherheit gegen Ausknicken tragen kann:

$$115) \dots J = \frac{nPl^2}{10E}$$



Figur 213.

Der Sicherheitskoeffizient  $n$  beträgt für Holz 10, für Schmiedeeisen 5, für Gußeisen 6. Von manchen Behörden wird für Gußeisen  $n=8$  gefordert.

242. Die Formel 115) wird zur Querschnittsberechnung der auf Knickung beanspruchten Stäbe verwendet, wenn deren Enden beweglich sind, wie dies der Fall ist bei Säulen oder bei den Stäben eines Fachwerkträgers. In den auf Druck beanspruchten Stäben eines Fachwerks muß die Sicherheit gegen Knicken im ungünstigsten Falle noch eine vierfache, d. h.  $n=4$  sein.

**Anmerkung 41.** Der Ausdruck  $\frac{n}{10 \cdot E}$  hat für jedes Material einen bestimmten Wert. Für Schmiedeeisen ist  $n=5$  und  $E=2000000$  bis  $2150000$  anzunehmen. Setzt man nun in Formel 115 die Kraft in  $t$ , die Länge  $l$  in  $m$  ein, so erhält man für den Ausdruck  $\frac{n}{10 E}$

den Wert 2,5 bis 2,33. Die Formel 115 geht dann über in

$$116) \dots J = 2,5 Pl^2 \text{ oder } J = 2,33 Pl^2.$$

Für die Druckstäbe eines Fachwerks ist für  $n=4$ .  $J=1,82 Pl^2$  der Berechnung zugrunde zu legen. Für Gußeisen wird unter Voraussetzung eines  $E=1000000$  und

unter Annahme einer sechs- bis achtfachen Sicherheit  $\frac{n}{10 E} = 6$  bis 8, daher

$$117) \dots J = 6 Pl^2 \text{ bzw. } J = 8 Pl^2$$

Für Holz kann man  $E=100000$  und  $n=10$  annehmen, daher wird  $\frac{n}{10 E} = 100$

und

$$118) \dots J = 100 Pl^2$$

Für vorübergehende Bauten genügt eine sechsfache Sicherheit und man kann die auf Knickung beanspruchten Konstruktionsteile nach der Formel berechnen

$$119) \dots J = 60 Pl^2$$

## 2. Übungsaufgaben.

243. **Aufgabe 111.** Eine gußeiserne Hohlsäule von 4 m Höhe empfängt eine Belastung von 60 t; welchen Querschnitt muß die Säule erhalten?

**Auflösung.** Es ist:

$$J = 6 \cdot 60 \cdot 4 \cdot 4 = 5760$$

Wählt man als Säulenstärke 2 cm, so findet man aus der Tabelle XII Anhang II einen äußeren Säulendurchmesser  $D=21,5$  cm. Das dem Querschnitt entsprechende Trägheitsmoment ist  $J=5885$ , die Querschnittsfläche ist  $F=122,52$  qcm, was genügt, da der erforderliche Druckquerschnitt sein muß:

$$F = \frac{60000}{500} = 120 \text{ qcm}$$

Für  $n=8$  erhält man:

$$J = 8 \cdot 60 \cdot 4 \cdot 4 = 7680$$

und  $D=23,5$  cm.

244. **Aufgabe 112.** Eine gußeiserne Säule von 3 m Höhe hat eine Belastung von 60 t aufzunehmen; welchen Querschnitt muß die Säule bei 2 cm Stärke erhalten?

**Auflösung.** Es ist:

$$J = 6 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 3 = 3240$$

der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$F = \frac{60000}{500} = 120 \text{ qcm}$$

Hierfür genügt ein äußerer Säulendurchmesser  $D=21,5$  cm.



Für diesen Fall ist  $F = 122,52$  cm und  $J = 5885$ .

Nimmt man  $n = 8$  an, so erhält man:

$$J = 8 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 3 = 3840$$

Der Durchmesser  $D$  bleibt derselbe wie vorhin.

245. **Aufgabe 113.** Eine gußeiserne Flügelsäule von 4,5 m Höhe hat 80 t aufzunehmen. Welche Querschnittsgröße muß die Säule erhalten?

**Auflösung.** Es ist:

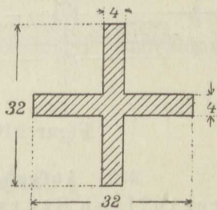
$$J = 6 \cdot 80 \cdot 4,5 \cdot 4,5 = 9720$$

Diesem Werte entspricht das nebenstehende Profil, siehe Figur 214, mit einem

$$J = 11072 \text{ und einem } F = 240$$

der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$\frac{80000}{500} = 160$$



Figur 214.

246. **Aufgabe 114.** Ein 3,5 m hoher Stiel aus Eichenholz hat eine Last von 20 t aufzunehmen, wie groß muß die Seite des quadratischen Querschnitts sein?

**Auflösung.** Es ist:

$$J = 100 \cdot 20 \cdot 3,5 \cdot 3,5 = 24500$$

diesem Werte entspricht ein Quadrat von 24 cm Seitenlänge mit einem

$$J = 27648 \text{ und einem } F = 376$$

der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$F = \frac{20000}{80} = 250$$

247. **Aufgabe 115.** Es ist die Tragfähigkeit einer durchbrochenen gußeisernen Wand zu berechnen, wenn diese 4 m hoch, und das Profil, so wie Figur 215 zeigt, beschaffen sein soll.

**Auflösung.** Es ist:

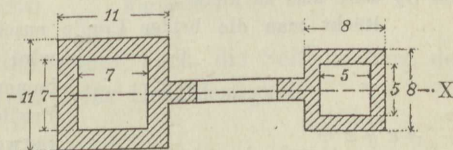
$$J = \frac{1}{12} (11^4 - 7^4 + 8^4 - 5^4) = 1309$$

die Tragfähigkeit findet sich aus der Gleichung:

$$P = \frac{J}{6l^2} = \frac{1309}{6 \cdot 4 \cdot 4} = 13,635 \text{ t}$$

oder:

$$P = 13635 \text{ kg}$$



Figur 215.

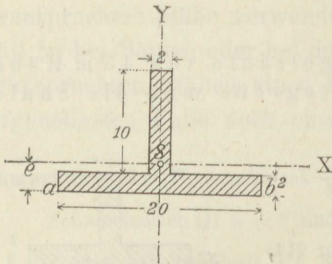
Die Tragfähigkeit für Druck allein wäre, da  $F = 111$  qcm ist:

$$111 \cdot 500 = 55500 \text{ kg} = 55,5 \text{ t}$$

Bei Voraussetzung einer achtfachen Sicherheit erhalte man:

$$P = \frac{J}{8l^2} = \frac{1309}{8 \cdot 4 \cdot 4} = 10,226 \text{ t}$$

248. **Aufgabe 116.** Es ist die Tragfähigkeit einer 3 m langen schmiedeeisernen Strebe von untenstehendem Querschnitt zu berechnen.



Figur 216.

**Auflösung.** Das kleinste Trägheitsmoment ist das auf die Achse X bezogene; es besitzt für das vorliegende Profil, siehe Auflösung der Aufgabe 90, den Wert 660, daher ist:

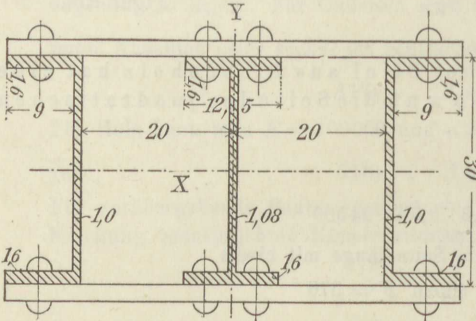
$$P = \frac{660}{2,33 \cdot 3 \cdot 3} = 31 \text{ t}$$

Die Tragfähigkeit für Druck allein ist, da:

$$F = 60 \text{ qcm beträgt} = 60 \cdot 1200 = 72 \text{ t}$$

Es darf daher als Tragkraft nur der erstere Wert berücksichtigt werden.

249. **Aufgabe 117.** Es ist die Tragfähigkeit des in Figur 217 dargestellten Stützenquerschnitts zu berechnen, wenn die Höhe der Stütze 4 m betragen soll.



Figur 217.

**Auflösung.** Die Tragfähigkeit der Stütze beträgt:

$$P = \frac{20882}{2,33 \cdot 4 \cdot 4} = 560 \text{ t}$$

250. **Aufgabe 118.** Eine schmiedeeiserne Stütze von 4 m Höhe soll 40 t aufnehmen. Es ist das Säulenprofil zu ermitteln.

**Auflösung.** Es ist:

$$J = 2,33 P l^2 = 2,33 \cdot 40 \cdot 4 \cdot 4 = 1491$$

Wählt man als Stützenquerschnitt zwei  $\square$  Profile, so kommt auf ein Profil ein  $J = 746$ .

Hierfür genügt Nr. 16 mit einem  $J_x = 932$  und einem  $J_{y_1} = 97,4$ .

Würde man die beiden Profile dicht aneinander legen, siehe Figur 218 a, so wäre für den so gebildeten Querschnitt:

$$J_x = 2 \cdot 932 = 1864$$

$$J_y = 388$$

Das  $J_y$  wäre also zu klein.

Rückt man die beiden Profile auseinander, so bleibt  $J_x$  unverändert,  $J_y$  dagegen wird mit der Entfernung beider Profile voneinander immer größer, und es wird einen Abstand  $e$  der Profile von der Mittelachse Y geben, siehe Figur 218 a, für welchen  $J_y$  gerade den verlangten Wert = 1491 hat.

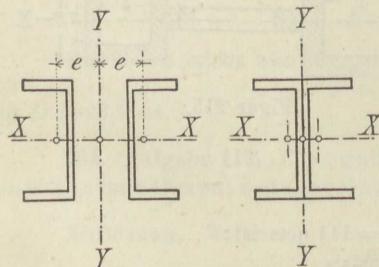
Man erhält diesen Abstand  $e$  aus der

Beziehung:

$$J_y^2 = 2 (J_{y_1} + e^2 F)$$

$$1491 = 2(97,4 + e^2 \cdot 24,1)$$

$$e = \sqrt{\frac{745,5 - 97,4}{24,1}} = 5,2 \text{ cm}$$



Figur 218.

Figur 218 a.

Würde man die beiden  $\square$  Eisen in dem Abstände  $e$  von der Mittelachse Y, so wie die Figur zeigt, ohne jede Querverbindung anordnen, so müßte jedes  $\square$  Eisen für sich die Belastung von 20 t aufnehmen und könnte sich nach der Seite des kleineren Widerstands,



d. h. nach der  $Y_1$ -Achse, ausbiegen. Um dies zu verhindern müssen Querverbindungen so angebracht werden, daß eine Ausbiegung ausgeschlossen ist. Da ein Eisen 20 t aufzunehmen hat und sein kleinstes Trägheitsmoment 97,4 ist, so muß, wenn ein Ausknicken verhindert werden soll, die freie Knicklänge  $l$ , d. h. der Abstand der Querverbindungen der beiden  $\square$  Eisen aus der Beziehung bestimmt werden

$$2,33 \cdot 20 \cdot l^2 = 97,4$$

hieraus folgt

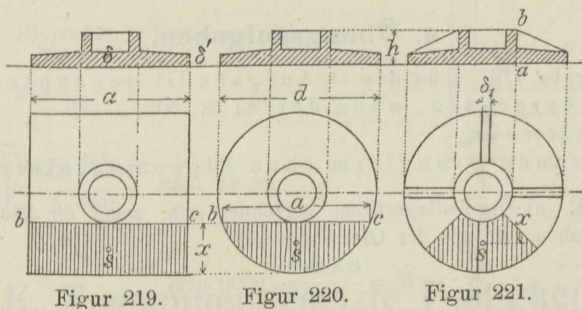
$$l = \sqrt{\frac{97,4}{2,33 \cdot 20}} = 1,4 \text{ m}$$

Zwischen Fuß und Kopf der Stütze werden also zwei Querverbindungen angeordnet werden müssen.

## J. Berechnung der Säulenfüße.

### I. Allgemeine Bemerkungen.

251. Gußeiserne Säulen erhalten in der Regel Säulenfüße, gleichfalls aus Gußeisen, welche entweder an die Säule angegossen sind, so daß Säule und Fuß aus einem Stück bestehen, oder aber getrennt von der Säule hergestellt werden. Die Auflagerplatte des Säulenfußes kann nun quadratisch, siehe Figur 219, oder rund sein, siehe Figur 220 und 221, und außerdem zur Verstärkung angegossene Rippen besitzen oder nicht.



Die Fläche der Unterlagsplatte und damit auch die Seite  $a$  bzw. der Durchmesser  $d$  berechnet sich aus der Formel für Druckfestigkeit:

$$F = \frac{P}{k}$$

Zur Berechnung der Plattendicke  $\delta$  für Säulenfüße ohne Rippen betrachtet man den schraffierten Teil der Platte, siehe Figur 219 und 220, als einen längs des Querschnitts  $bc$  eingespannten Träger, dann hat man als Biegleichung für die quadratische Form:

$$a x \frac{x}{2} k = \frac{1}{6} a \delta^2 k' \quad \begin{array}{l} k = \text{zulässige Beanspruchung des Mauerwerks} = 10 \\ k' = \text{zulässige Beanspruchung des Gußeisens} = 250 \end{array}$$

daher ist:

$$120) \dots \delta = x \sqrt{3 \frac{k}{k'}}$$

Für die kreisrunde Form ergibt sich:

$$\frac{2}{3} a x \frac{2}{5} x k = \frac{1}{6} a \delta^2 k'$$

oder:

$$121) \dots \delta = 1,26 x \sqrt{\frac{k}{k'}}$$

Die Auflagerfläche erhält in der Regel von der Mitte ausgehend nach dem Rande zu eine geringe Steigung, etwa 1:100, um beim Vergießen der Fuge mit Zement den Austritt der Luft und des Wassers zu erleichtern. Bei einer hölzernen Unterlage ist zwischen dieser und dem Säulenfuß eine 3 mm starke Bleiplatte einzuschalten.

Besitzt der Säulenfuß angegossene Rippen, so nimmt man die Rippenstärke gleich drei Viertel der Plattenstärke, also  $\delta_1 = \frac{3}{4} \delta$ . Zur Berechnung der Rippenhöhe betrachtet man die Rippe als einen eingespannten Träger, der den auf die schraffierte Fläche, siehe Figur 221, treffenden Druck aufzunehmen hat. Ist  $F$  diese Fläche, so hat man die Biegleichung:

$$F x k = k' \frac{1}{6} \delta_1 h^2$$

daher:

$$122) \dots h = \sqrt{\frac{6 F x k}{\delta_1 k'}}$$

## 2. Übungsaufgaben.

252. **Aufgabe 119.** Für die in Aufgabe 111 genannte Säule ist der Säulenfuß zu berechnen, wenn derselbe

- a) quadratische,
- b) kreisrunde Grundform ohne Rippen erhalten soll.

**Auflösung.** a) Die Auflagerfläche berechnet sich, wenn die Säule auf Mauerwerk in Zementmörtel ruhen soll, aus der Gleichung:

$$F = \frac{60000}{10} = 6000 \text{ qcm}$$

daher ist:

$$a = \sqrt{6000} = 77 \text{ cm}$$

hiernach wird:

$$x = \frac{77 - 21,5}{2} = 27,75 \text{ cm}$$

und die Dicke der Unterlagerplatte:

$$\delta = 27,75 \sqrt{\frac{3 \cdot 10}{250}} = 9,6 \text{ cm oder } 96 \text{ mm}$$

b) Bei kreisrunder Grundform hat man:

$$\frac{d^2 \cdot 3,14}{4} = 6000$$

$$d = \sqrt{\frac{6000 \cdot 4}{3,14}} = 87 \text{ cm}$$

hiernach ist:

$$x = \frac{87 - 21,5}{2} = 32,75 \text{ cm}$$

und

$$\delta = 1,26 \cdot 32,75 \sqrt{\frac{10}{250}} = 8,25 \text{ cm oder } 83 \text{ mm}$$



253. **Aufgabe 120.** Für die in Aufgabe 119 genannte Säule ist der Säulenfuß zu berechnen, wenn die Grundform quadratisch sein und acht Rippen erhalten soll.

**Auflösung** Es soll vorausgesetzt werden, daß der Säulenfuß auf einem Hausteine auflagert, dessen zulässige Beanspruchung auf Druck 20 kg für den Quadratcentimeter beträgt; dann ist die Seitenlänge des quadratischen Säulenfußes

$$a = \sqrt{\frac{60000}{20}} = 54, \dots \text{ rund } 64 \text{ cm}$$

Der zwischen zwei Rippen eingespannte Teil der Fußplatte hat eine Belastung aufzunehmen

$$= \frac{60}{8} = 7,5 \text{ t}$$

Ist  $\delta$  die Dicke der Fußplatte, so hat man die Gleichung:

$$\frac{21 \cdot \delta^2}{6} \cdot 250 = \frac{7500 \cdot 32}{12}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{7500 \cdot 32 \cdot 6}{21 \cdot 250 \cdot 12}} \text{ rund } 5 \text{ cm}$$

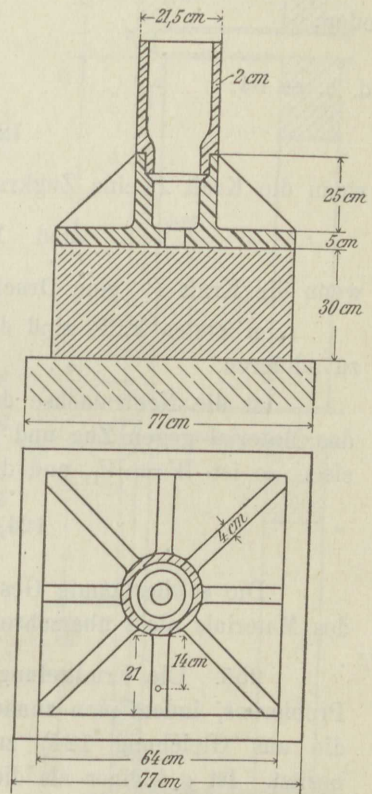
unter Annahme einer Rippendicke = 4 cm.

Für die Rippenhöhe bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{4h^2}{6} \cdot 250 = 7500 \cdot 14$$

$$h = \sqrt{\frac{7500 \cdot 14 \cdot 6}{4 \cdot 250}} \text{ rund } 25 \text{ cm}$$

Figur 222.



Figur 223.

## K. Zusammengesetzte Festigkeit.

### 1. Allgemeine Bemerkungen.

254. Wird ein Träger auf Biegung und Zug oder Biegung und Druck zugleich beansprucht, so ist er auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen.

Durch die Einwirkung der Biegung entstehen im Träger Biegungsspannungen, von denen aber nur die Zug- bzw. Druckspannungen in Betracht kommen; besitzt das Material gegen Zug und Druck verschiedene Festigkeit, so ist die durch Biegung in der äußersten Faser hervorgerufene Zugspannung

$\sigma_b = \frac{M}{W}$ , die Druckspannung aber  $\sigma_{b1} = \frac{M}{W_1}$ , hierbei ist  $W = \frac{J}{a}$  und  $W_1 = \frac{J}{a_1}$ .

Durch die Zug- oder Druckkraft entsteht aber eine Spannung:

$$\sigma_z = \sigma_a = \frac{P}{F}$$

Die Gesamtspannung, welche im gefährlichen Querschnitt des Trägers entsteht, ist also:

$$\sigma = \sigma_{b_1} + \sigma_z$$

oder:

$$\sigma = \sigma_{b_1} + \sigma_a$$

d. h. es ist:

$$123) \dots \sigma = \frac{M}{W} + \frac{P}{F}$$

wenn die Kraft  $P$  eine Zugkraft ist,

$$\text{und } 123 \text{ a)} \dots \sigma = \frac{M}{W_1} + \frac{P}{F}$$

wenn die Kraft  $P$  eine Druckkraft ist.

Im ersten Falle sind die Zug-, im zweiten Falle die Druckspannungen zu addieren.

Ist die Neutralachse des Querschnitts eine Symmetrieachse und besitzt das Material gegen Zug und Druck gleiche Festigkeit, wie z. B. das Schmiedeeisen, so ist  $W = W_1$ , und die Gleichungen gehen über in die folgende:

$$124) \dots \sigma = \frac{M}{W} + \frac{P}{F} \leq k$$

Die so bestimmte Gesamtspannung darf die zulässige Faserverspannung  $k$  des Materials nicht überschreiten.

255. Die Ermittlung des Trägerprofils geschieht auf dem Wege des Probierens, indem man zunächst ein Profil wählt und untersucht, ob für dieses die aus Gleichung 124) zu berechnende Spannung einen passenden Wert besitzt. Ist  $\sigma$  kleiner als die zulässige Faserverspannung des Materials, so ist das gewählte Profil zu groß, im anderen Falle zu klein; durch Annahme eines entsprechend kleineren oder größeren Profils wird man durch wiederholte Berechnung von  $\sigma$  das zweckdienliche Profil erhalten.

## 2. Übungsaufgaben.

256. **Aufgabe 121.** Für den skizzierten Erker, siehe Figur 224 und 225 sind die Träger zu berechnen. Die Belastungen sind:

1. 1 qm Bodenbelastung 500 kg,
2. 1 cbm Mauerwerk aus Hohlziegeln 1100 kg.

Die Belastung kann als gleichmäßig verteilt über die Träger angenommen werden.

**Auflösung.** Gewicht der Stirnmauer:  $7,8 \cdot 0,25 \cdot 3,0 \cdot 1100 = 6435 \text{ kg}$

Gewicht einer Seitenmauer:  $7,8 \cdot (1,30 - 0,25) \cdot 0,25 \cdot 1100 = 2252 \text{ kg}$

Gewicht einer Decke:  $(3,0 - 0,5) \cdot (1,30 - 0,25) \cdot 500 = 2,5 \cdot 1,05 \cdot 500$   
 $= 1312,5 \text{ rund } 1350 \text{ kg}$



Belastung des Trägers I:

1. Das Gewicht der Stirnmauer:  $= \frac{6435}{2} = 3217 \text{ kg}$

2. das Gewicht zweier Decken

zur Hälfte:  $= \frac{2 \cdot 1350}{2 \cdot 2} = 675 \text{ kg}$

Gesamtbelastung 3892 kg  
rund 3900 kg

Der Träger ist nach dem vierten Belastungsfall zu berechnen, Stützweite = 163

$$W = \frac{3900 \cdot 163}{8 \cdot 1200} = 66$$

hierfür genügen 2 I-Träger Nr. 11 mit einem

$$W = 2 \cdot 43,8 = 87,6$$

Belastung des Trägers II:

1. Gewicht der Seitenmauer = 2252 kg

2. Gewicht der Decke  $\frac{1}{4}$  des Ganzen  $= \frac{1350}{4} = 340 \text{ kg}$

Gesamtbelastung = 2592 kg  
rund 2600 kg

Der Träger ist nach dem achten Belastungsfall zu berechnen, danach wird

$$W = \frac{2600 \cdot 130}{8 \cdot 1200} = 35$$

hierfür genügen 2 I N. P. Nr. 8 mit einem

$$W = 2 \cdot 19,6 = 39,2$$

Belastung des Trägers III:

Gewicht der halben Decke  $= \frac{1350}{2} = 675$

Der Träger ist gleichfalls nach dem achten Belastungsfall zu berechnen, d. h. es ist:

$$W = \frac{675 \cdot 130}{8 \cdot 1200} = 9$$

hierfür genügt ein I N. P. Nr. 8 mit einem

$$W = 19,6$$

Belastung der Strebe für den Träger II:

Auflagerdruck von Träger II  $= \frac{3}{8} 2600 = 975 \text{ kg}$

" " " I  $= \frac{3900}{2} = 1950 \text{ kg}$

Gesamtauflagerdruck = 2925 kg

Dieser Vertikaldruck zerlegt sich in den Strebendruck

$$S = 2925 \sqrt{2} = 4135,9 = 4150 \text{ kg}$$

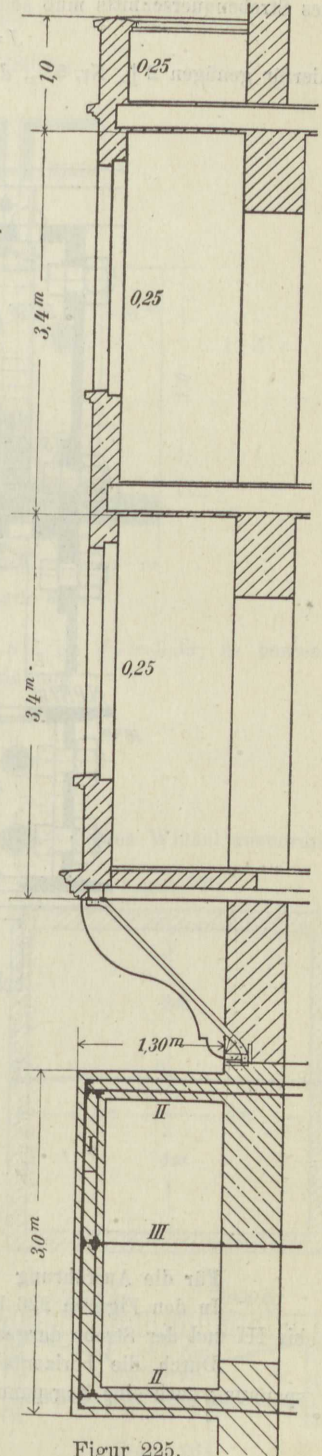
und den Horizontalschub

$$H = 2925 \text{ rund } 3000$$

Die Strebenlänge berechnet sich zu

$$1,30 \sqrt{2} = 1,84 \text{ m}$$

Figur 224.



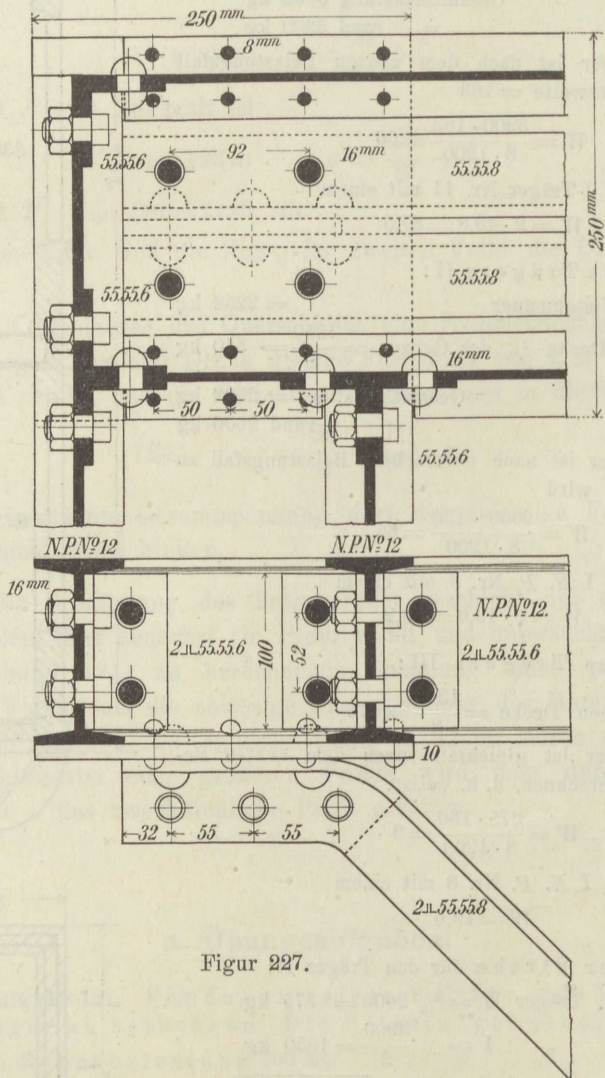
Figur 225.

Die Strebe ist auf Zerknicken zu berechnen. Das erforderliche Trägheitsmoment des Strebenquerschnitts muß sein

$$J = 2,33 \cdot 4,15 \cdot 1,84 \cdot 1,84 = 32,7$$

hierfür genügen 2 L Nr. 5<sup>1/2</sup>,  $d = 8$ , mit einem  $J = 2 \cdot 22,5 = 45$ .

Figur 226.



1 : 5

Figur 227.

Für die Ausführung wurde für alle drei Träger I bis III das Profil 12 gewählt. In den Figuren 226 bis 229 sind die einzelnen Verbindungen zwischen den Trägern I bis III und der Strebe dargestellt.

Durch die horizontale Kraft  $H$  entsteht in dem Träger II außer der Biegespannung noch eine Zugspannung

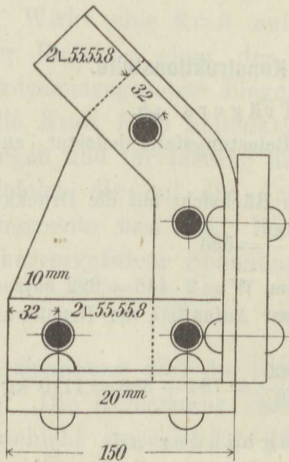
$$\sigma_z = \frac{3000}{2 \cdot 14,3} = 105 \text{ kg}$$



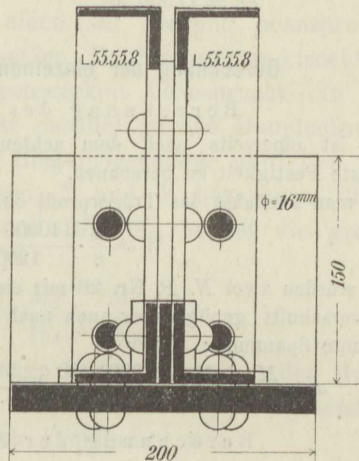
Die eigentliche Biegungsspannung beträgt

$$\sigma_b = \frac{1 \cdot 2600 \cdot 130}{8 \cdot 2 \cdot 55,1} = 383$$

Die Gesamtspannung beträgt somit  $105 + 383 = 488$  kg.



Figur 228.



Figur 229.

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels Nr. 5<sup>1/2</sup> ist  $J_y = 9,38$ ; es berechnet sich somit die freie Knicklänge für die Strebe aus der Beziehung

$$9,38 = \frac{2,33 \cdot 4,15}{2} \cdot l^2$$

$$l = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,38}{2,33 \cdot 4,15}} = 1,3 \text{ m}$$

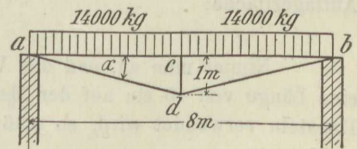
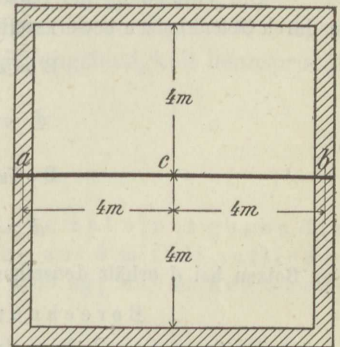
Es ist also in der Strebenmitte eine Querverbindung der beiden Winkel anzuordnen.

257. **Aufgabe 121 a.** Zur Auflagerung einer Balkendecke ist ein einfach armerter Träger, siehe Figur 230, zu verwenden. Die Belastung der Decke, Eigengewicht und Nutzlast, beträgt für den Quadratmeter 700 kg. Es sind die Ausmaße des Trägers festzustellen.

**Auflösung.** Gewicht der ganzen Decke gleich  $8 \cdot 8 \cdot 700 = 44800$  kg. Hiervon hat der armierte Träger unter der Voraussetzung, daß die Balken über ihm nicht gestoßen sind,  $\frac{5}{8}$ , d. i. 28000 kg, aufzunehmen; auf die Strecken  $\overline{ac}$  und  $\overline{cb}$  treffen also je 14000 kg. Diese Last verteilt sich auf die einzelnen Knotenpunkte so, daß auf  $c$   $\frac{10}{8} \cdot 14000 = 17500$  kg und auf  $a$  und  $b$  je  $\frac{3}{8} \cdot 14000 = 5250$  kg treffen. Die in  $a$  und  $b$  nach aufwärts wirkende Vertikalkraft ist dann:

$$\frac{17500}{2} = 8750 \text{ kg}$$

Figur 230.



Figur 231.

Als Stabkräfte in den einzelnen Konstruktionsteilen erhält man durch Rechnung,

$$\begin{aligned} \text{Stabkraft } ac &= 8750 \cdot \cotg \alpha = \frac{8750 \cdot 4}{1} = 35000 && \text{unter } \alpha \text{ den Winkel } cad \\ &&& \text{siehe Figur 231 verstanden,} \\ ad &= \frac{8750}{\sin \alpha} = \frac{8750}{0,2425} = 36000 \text{ kg} \\ cd &= 17500 \text{ kg} \end{aligned}$$

### Berechnung der einzelnen Konstruktionsteile.

#### Berechnung des Trägers $ab$ .

Dieser ist einerseits nach dem achten Belastungsfall belastet, andererseits auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen.

Wählt man zunächst das Trägerprofil ohne Rücksicht auf die Druckkraft, so ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{14000 \cdot 400}{1200} = 583$$

Diesem Werte würden zwei *N. P. Nr.* 26 mit einem  $W = 2 \cdot 446 = 892$  entsprechen.

Der Querschnitt genügt aber auch noch zur Aufnahme der Druckkraft; denn man erhält als gesamte Spannung:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{P}{F} = \frac{14000 \cdot 400}{8 \cdot 892} + \frac{35000}{2 \cdot 53,7} = 784 + 326 = 1110 \text{ kg}$$

#### Berechnung der Zugbänder $ad$ .

Der erforderliche Zugquerschnitt ist:  $F = \frac{35000}{800} = \text{rund } 44 \text{ qcm}$

Hierfür genügt ein Rechteck von 5:10 cm mit einem  $F = 50 \text{ qcm}$ .

#### Berechnung der Strebe $cd$ .

Diese ist auf Zerknickungsfestigkeit zu berechnen; es ist daher das erforderliche Trägheitsmoment:

$$J = 2,33 \cdot 17,5 \cdot 1 \cdot 1 = \text{rund } 41$$

Hierfür genügt ein Kreisquerschnitt mit einem Durchmesser  $d = 55 \text{ mm}$  und einem  $J = 45$ .

#### Berechnung der Verbindungsmittel.

Die Verbindung der einzelnen Konstruktionsteile in den Knotenpunkten  $a, c, d$  und  $b$  ist durch Gelenkbolzen bewerkstelligt worden. Deren Kerndurchmesser berechnen sich wie folgt:

Bolzen im Knotenpunkt  $a$ .

$$d_1 = \sqrt{\frac{36000 \cdot 2}{750 \cdot 3,14}} = \text{rund } 60 \text{ mm}$$

Bolzen im Knotenpunkt  $c$ .

$$d_2 = \sqrt{\frac{17500 \cdot 2}{750 \cdot 3,14}} = \text{rund } 40 \text{ mm}$$

Der Bolzen bei  $d$  erhält denselben Durchmesser wie jener bei  $a$ .

#### Berechnung der Auflagerfläche bei $a$ .

Der gesamte Auflagerdruck beträgt 14000 kg, demnach ist die erforderliche Auflagerfläche:

$$F = \sqrt{\frac{14000}{7}} = 2000 \text{ qcm}$$

Nimmt man an, daß das Widerlager 2 Stein, also 0,51 cm stark ist, der Träger auf eine Länge von 40 cm auf der Mauer aufliegt und zur Übertragung des Auflagerdrucks ein Haustein verwendet wird, so muß dessen Breite sein:

$$b = \frac{2000}{40} = 50 \text{ cm}$$



# L. Zusammengesetzte Biegefestigkeit.

## 1. Allgemeine Bemerkungen.

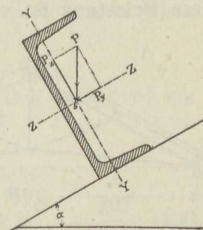
258. Wirkt eine Kraft auf einen auf Biegung beanspruchten Träger nicht in der Richtung einer der beiden Hauptschwerachsen, so wird dieser auf zusammengesetzte Biegefestigkeit beansprucht. In diesem Falle kann man die Kraft  $P$  in Seitenkräfte parallel zu den Hauptachsen des Querschnitts zerlegen und für letztere die Biegemomente aufstellen.

Bezeichnen die auf die Achsen  $X$  und  $Y$  bezogenen Biege- und Widerstandsmomente bzw.  $M_x$ ,  $W_x$  und  $M_y$ ,  $W_y$ , so ist die größte in dem Querschnitt hervorgerufene Spannung:

$$125) \dots \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq k$$

Diese Spannung darf die zulässige Faserspannung  $k$  des Materials nicht überschreiten. Die Berechnung eines Trägers auf zusammengesetzte Biegefestigkeit geschieht zweckmäßig durch Probieren; man wählt zunächst ein Profil willkürlich, ermittelt für dieses die Werte  $W_x$  und  $W_y$  und berechnet hieraus die Spannung  $\sigma$  mittels der Gleichung (125). Bleibt das berechnete  $\sigma$  unter der zulässigen Beanspruchung des Materials, so ist das gewählte Profil zu groß, im anderen Falle zu klein; durch nochmalige Wahl eines kleineren bzw. größeren Profils und Wiederholung der Rechnung wird man in der Regel das passende Profil ermitteln können.

Im Hochbau sind es vornehmlich die Dachpfetten, welche auf zusammengesetzte Biegefestigkeit beansprucht werden, wenn sie mit ihrem unteren Flansch in der Dachfläche aufliegen, siehe Figur 232. Auch Treppenpodestträger können auf zusammengesetzte Biegefestigkeit beansprucht und berechnet werden.



Figur 232.

## 2. Übungsaufgaben.

259. **Aufgabe 122.** Eine Dachpfette, welche auf einer gegen die Horizontale unter 1:4 geneigten Dachfläche auf 3 m frei aufliegt, erhält eine gleichmäßig verteilte Last von 1500 kg; es ist der Querschnitt der Pfette zu berechnen.

**Auflösung.** Im vorliegenden Falle ist  $4 P_y = P_x$  und

$$16 P_y^2 + P_y^2 = 1500^2$$

daher

$$P_y = \sqrt{\frac{1500^2}{17}} = \text{rund } 364 \text{ kg}$$

und

$$P_x = 1456 \text{ kg}$$

Wählt man ein  $\square$  Profil Nr. 14, so hat dasselbe ein  $W_x = 87$  und ein  $W_y = 17,4$ , daher ist

$$\frac{M_x}{W_x} = \frac{54600}{87} = 627$$

und

$$\frac{M_y}{W_y} = \frac{13650}{17,4} = 784$$

Die Gesamtspannung ist somit  $\sigma = 627 + 784 = 1411$ , ein Wert, der schon etwas zu groß ist.

Wählt man  $\square$  Profil Nr. 16, so ist hierfür  $W_x = 117$ ,  $W_y = 21,7$ , daher

$$\frac{54600}{117} + \frac{13650}{21,7} = 466 + 629 = 1095$$

ein Wert, der noch zulässig ist.

260. **Aufgabe 123.** Für den in Figur 233 skizzierten Dachbinder sind die hölzernen Pfetten zu berechnen. Belastung des Dachs = 200 kg für den Quadratmeter Horizontalprojektion.

**Auflösung.** Die Belastung des Binders beträgt:

$$Q = 9 \cdot 3,5 \cdot 200 = 6300 \text{ kg}$$

Hiervon trifft auf einen Knotenpunkt der oberen Gurtung eine Belastung:

$$P = \frac{6300}{4} = 1575 \text{ kg}$$

Diese Belastung ist von einer Mittelpfette aufzunehmen und auf die Knotenpunkte zu übertragen. Auf Grund der gegebenen Maße, siehe Figur 233, erhält man den Dachwinkel  $\alpha$  aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,5}{4,5} = 0,555 \text{ oder } \alpha = 29^\circ$$

Nunmehr berechnet man:

$$\cos \alpha = 0,87462 \text{ oder rund } 0,875 \text{ und}$$

$$\sin \alpha = 0,48481 \text{ oder rund } 0,485$$

Das durch die vertikale Belastung der Pfette hervorgerufene Biegemoment ist:

$$M = \frac{1}{8} \cdot 1575 \cdot 350 = 68906$$

Hieraus folgt:

$$M_x = M \cdot \cos \alpha = 68906 \cdot 0,875 = 60300 \text{ und}$$

$$M_y = M \cdot \sin \alpha = 68906 \cdot 0,485 = 33420$$

Wählt man ein Profil 18/24 cm, so ist hierfür:

$$W_x = \frac{1}{6} \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 = 1728 \text{ und}$$

$$W_y = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 18 \cdot 18 = 1296$$

Man erhält somit die Gleichung:

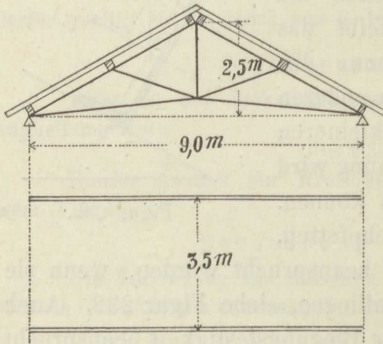
$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{60300}{1728} + \frac{33420}{1296} = 35 + 26 = 61$$

Das gewählte Profil kann beibehalten werden.

261. **Aufgabe 124.** Man berechne für den vorliegenden Dachbinder:

a) die Auflager- und Firstpfette, wenn diese als Holzpfetten vorausgesetzt sind,

b) die sämtlichen Pfetten unter der Voraussetzung, daß diese aus Eisen hergestellt sind und  $\alpha$ ) die  $\square$ -Form,  $\beta$ ) die  $\square$ -Form besitzen sollen.



Figur 233.



**Anmerkung 42.** Die Ermittlung der Profile von Trägern, die auf zusammengesetzte Biege-  
festigkeit beansprucht sind, kann in etwas anderer Art, als in Nr. 258 mitgeteilt wurde,  
geschehen, wenn in den zur Verfügung stehenden Tabellen nicht nur die Werte  
 $W_y$  und  $W_x$ , sondern auch jene des Quotienten  $\frac{W_x}{W_y}$  enthalten sind. Die Gleichung

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = k$$

läßt sich, wenn  $\frac{W_x}{W_y} = c$  gesetzt wird auch schreiben

$$\frac{M_x + c M_y}{W_x} = k$$

$$125 a) \dots W_x = \frac{M_x + c M_y}{k}$$

Hierin bezeichnet  $k$  die zulässige Beanspruchung des Materials. Aus den Tabellen IV, V  
und VI, Anhang II, ist zu entnehmen, daß die Werte von  $c$  bei  $\Gamma$  Profilen zwischen 5,6  
und 8,9 bzw. zwischen 3,27 und 9,45 und bei  $\square$  Profilen zwischen 1,5 und 6,7 schwanken.  
Um nun für einen bestimmten Fall mittels Gleichung 125 a das zugehörige Profil zu be-  
rechnen, setzt man zunächst für  $\square$  Profile  $c=5$  und berechnet einen angenäherten Wert  $W_x'$ .  
Man ermittelt nun aus der Tabelle VI den diesem Werte von  $W_x'$  am nächsten kommenden  
höheren Wert von  $W_x$  nebst dem zugehörigen Wert von  $c$ . Unter Benützung des letzteren  
bestimmt man aus Gleichung 125 a den genauen Wert von  $W_x$  und das zu diesem  
gehörige Profil. Zur Erläuterung des Verfahrens diene die Aufgabe 122. Es ist  
 $M_x = 54\,600$  und  $M_y = 13\,650$ , daher ist, wenn für ein  $\square$  Profil  $c = 5$  gesetzt wird:

$$W_x' = \frac{54\,600 + 5 \cdot 13\,650}{1200} = 102$$

Der nächsthöhere Wert von  $W_x$  in der Tabelle VI ist 117 und ihm entspricht ein  
 $\square$  Profil Nr. 16 mit einem  $c = 5,4$ . Man erhält nunmehr genauer

$$W_x = \frac{54\,600 + 5,4 \cdot 13\,650}{1200} = 107$$

Das Profil genügt also. Die darin auftretende größte Beanspruchung ist  $\sigma = \frac{107}{117} \cdot 1200$   
 $= 1096 \text{ kg}$ ; ein Wert, der mit dem auf Seite 134 berechneten Werte übereinstimmt.

262. **Aufgabe 125.** Für den in Aufgabe 32 behandelten Dach-  
binder sind auf Grund der berechneten Stabkräfte die Stabquer-  
schnitte zu ermitteln. Außerdem ist die Nietberechnung sowie  
die Konstruktion der Knotenpunkte auszuführen.

**Auflösung.** Zur Berechnung der Stabquerschnitte sollen zunächst die in An-  
merkung 28 zusammengestellten Stabkräfte wie folgt aufgerundet werden:

Stab	Spannkraft	
	berechnet	aufgerundet
1	7950	8000
2	7150	7200
3	1775	2000
4	7450	7500
5	2900	3000
6	4400	4400

Die Stäbe 2, 5 und 6 sind Zug-, die übrigen  
Druckstäbe; letztere sind auch auf Knickung zu  
untersuchen.

Berechnung der Querschnitte  
für die Zugstäbe.

Stab 2.  $F = 7200 : 1200 = 6 \text{ qcm}$

Stab 5.  $F = 3000 : 1200 = 2,5 \text{ qcm}$

Stab 6.  $F = 4400 : 1200 = 3,66 \text{ qcm}$

Zur Bildung des Stabs 2 wählt man 2  $\Gamma$  Nr. 4 $\frac{1}{2}$  45 · 45 · 5. Hierfür ist  $F = 2 \cdot 4,25$   
 $= 8,50 \text{ qcm}$ . Berücksichtigt man die Schwächung durch die Niete mit 12 mm Durchmesser  
 $= 0,5 \cdot 1,2 \cdot 2 = 1,2 \text{ qcm}$ , so bleibt als nutzbarer Querschnitt für Stab 2 übrig 8,50 - 1,2  
 $= 7,30 \text{ qcm}$ , was genügt.

Kleinere Profile als  $\perp 45 \cdot 45 \cdot 5$  sollen nicht verwendet werden — es erhalten also auch die Stäbe 5 und 6 dieses Profil.

#### Berechnung der Querschnitte für die Druckstäbe.

Stab 1. Länge des Stabs, aus der Zeichnung gemessen = 2,8 m.

Es ist  $J = 1,82 \cdot 8 \cdot 2,8 \cdot 2,8 = 114$

$$F = \frac{8000}{1200} = 6,66 \text{ qcm}$$

Gewählt werden zwei  $\perp$  Profile Nr. 8  $80 \cdot 80 \cdot 10$  mit einem  $J = 178$  und einem  $F = 30$  qcm, und zwar ohne Nietabzug. Will man die Schwächung des Querschnitts durch die Niete 20 mm ( $\emptyset$ ) berücksichtigen, so ergibt sich folgendes. Es ist

$$J_x = 2 \left[ \frac{1}{8} (8 \cdot 2,37^3 - 7 \cdot 1,37^3) + 1 \cdot 5,63^3 - 1 \cdot 3,13^3 + 1 \cdot 1,13^3 \right] = 158,48$$

Das Profil ist ausreichend.

Stab 4. Hierfür das gleiche Profil wie für Stab 1.

Stab 3. Länge des Stabs = 1 m, Trägheitsmoment  $J = 1,82 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3,64$ ,

Querschnittsfläche  $F = \frac{2000}{1200} = 1,66$  qcm.

Gewählt werden zwei  $\perp$  Profile Nr.  $4\frac{1}{2}$   $45 \cdot 45 \cdot 5$  mit einem  $J = 2 \cdot 8,05 = 16,10$  und einem  $F = 2 \cdot 8,05 = 8,50$  qcm.

#### Nietberechnung.

Zur Verwendung gelangen für die  $\perp 45 \cdot 45 \cdot 5$  Niete mit 12 mm ( $\emptyset$ ), für die Winkel  $80 \cdot 80 \cdot 10$  Niete mit 20 mm ( $\emptyset$ ).

Die Tragkraft eines zweischnittigen 12-mm-Niets beträgt mit Rücksicht auf Abscherung 2,26 t mit Rücksicht auf Lochwanddruck 2,4 t.

Für ein 20-mm-Niet sind die entsprechenden Werte je 6,28 bzw. 4 t. Es ergeben sich für die einzelnen Stäbe die folgenden Nietzahlen:

Stab	Nietzahl	Niete	Durchmesser
1	8:4	2	20 mm
2	7:2,26	4	12 mm
3	2:2,26	2	12 mm
4	7,5:4	2	20 mm
5	3:2,26	2	12 mm
6	4,4:2,26	2	12 mm

#### Berechnung der Knicklänge für die Druckstäbe.

Stab 1. Es ist das kleinste Trägheitsmoment für ein  $\perp 80 \cdot 80 \cdot 10$   $J_y = 37,1$ .

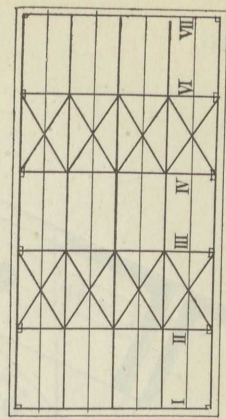
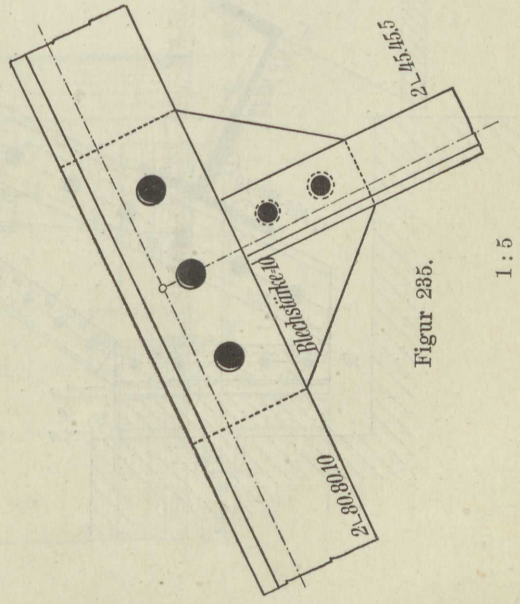
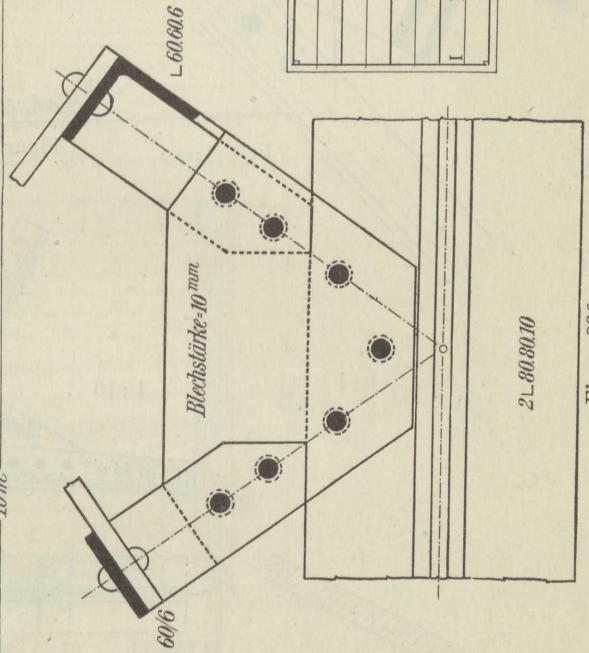
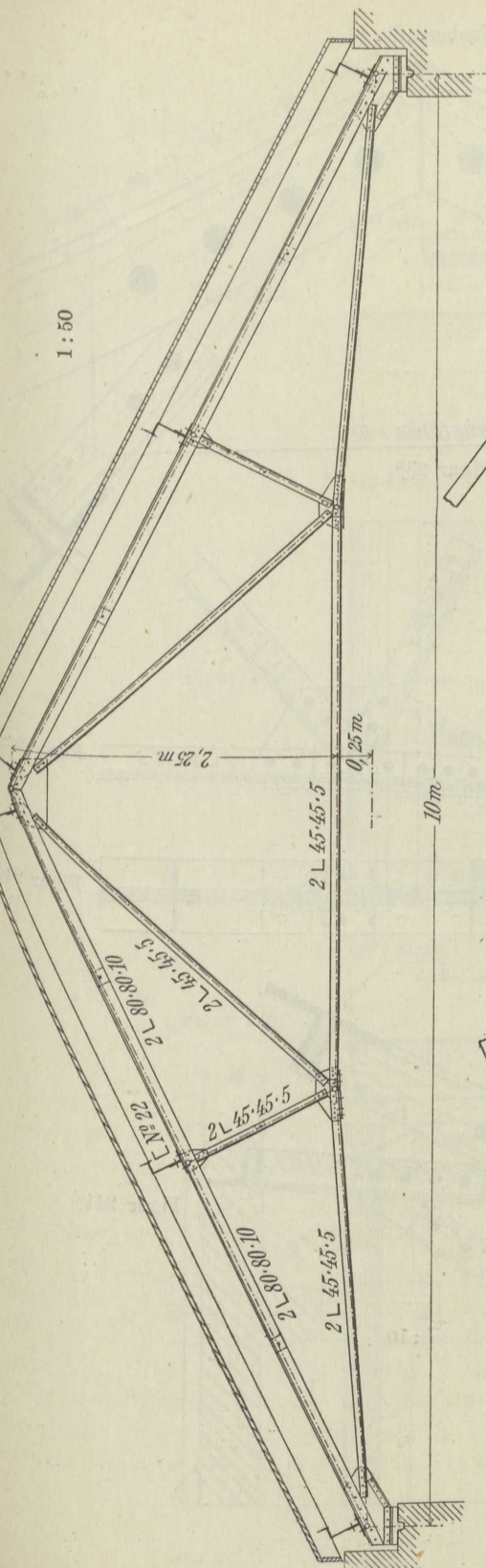
Daher ist die Knicklänge  $l = \sqrt{\frac{37,1}{1,82 \cdot 4}} = 2,2$  m.

Stab 3. Kleinstes Trägheitsmoment eines  $\perp 45 \cdot 45 \cdot 5$   $J_y = 3,37$ . Daher Knick-

länge  $l = \sqrt{\frac{3,37}{1,8}} = 1,2$  m.

Es müssen die Druckstäbe in ihrer Mitte mittels eines Futterstücks miteinander vernietet werden.

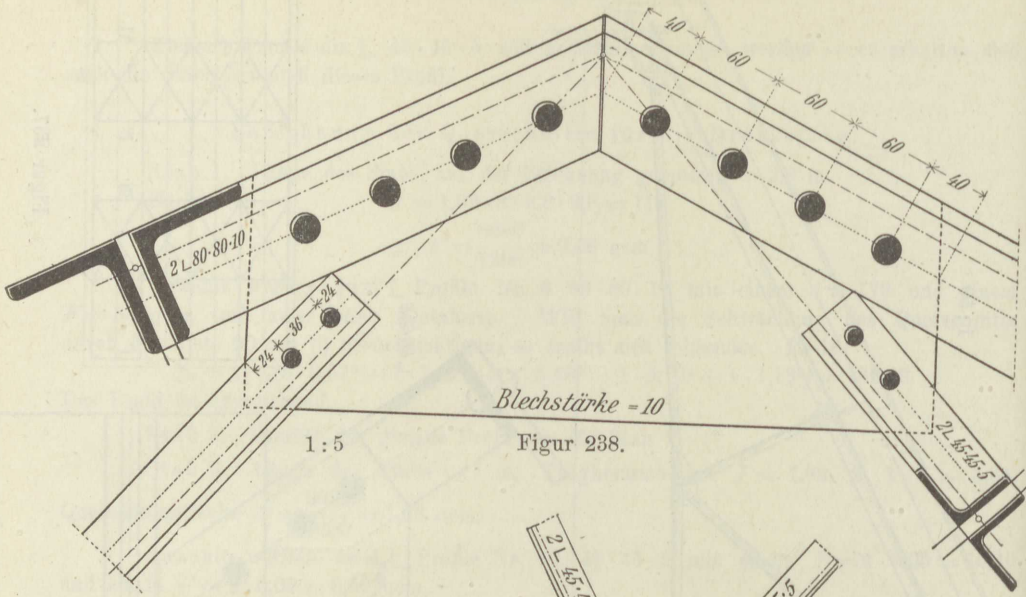




Figur 237.

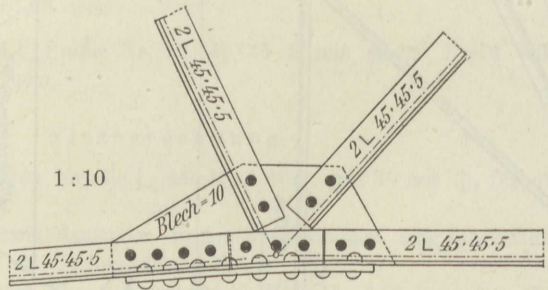
Figur 236.

Figur 235.



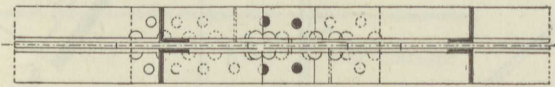
1:5

Figur 238.

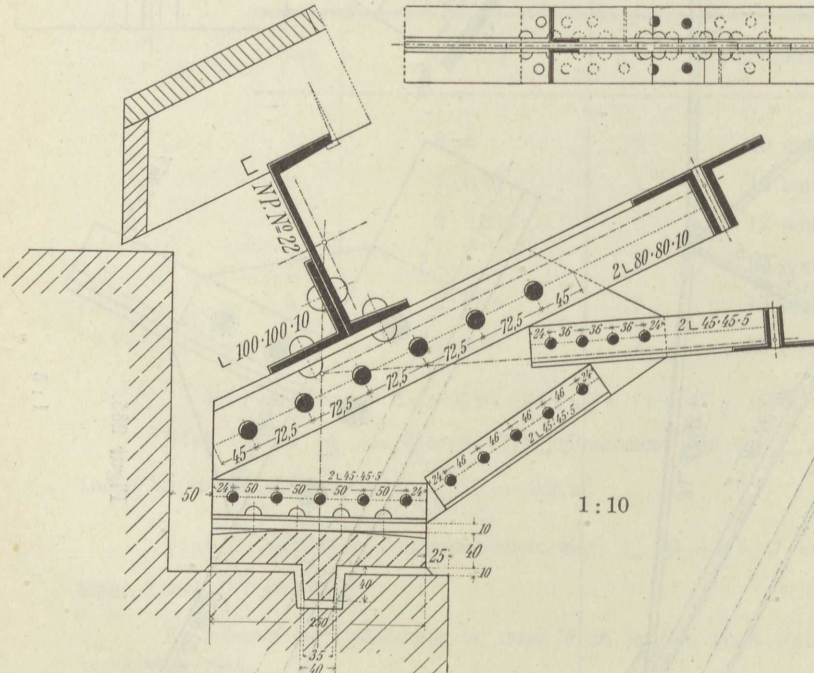


1:10

Figur 239.



Figur 240.

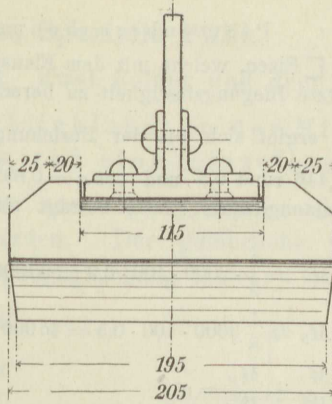


1:10

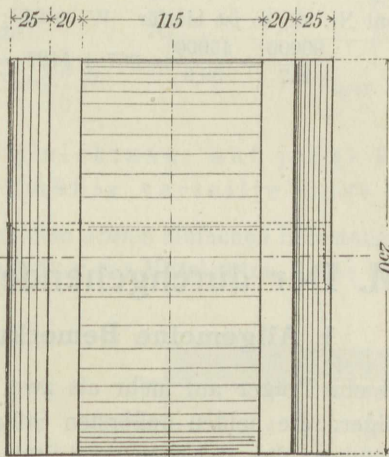
Figur 241.



Figur 242.

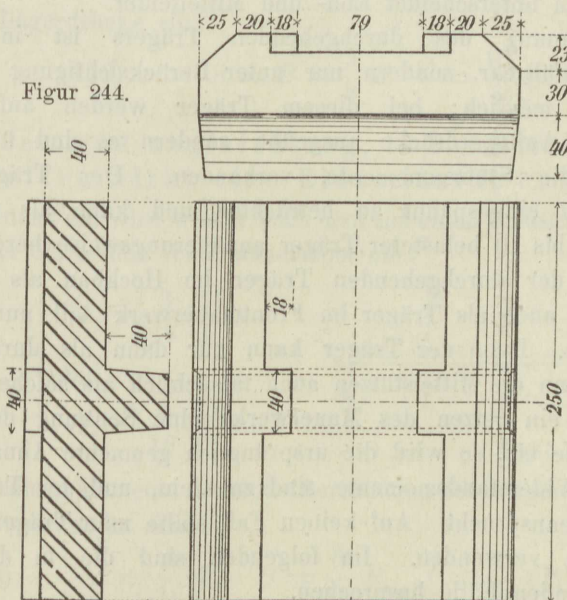


Figur 243.



1:5

Figur 244.



1:5

## P f e t t e n b e r e c h n u n g .

Als Pfetten dienen  $\square$  Eisen, welche mit dem Flansch auf dem Dachbinder aufliegen; sie sind auf zusammengesetzte Biegezugfestigkeit zu berechnen.

Der Dachwinkel  $\alpha$  ergibt sich aus der Beziehung  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,5}{5}$ ; hieraus findet sich  $\alpha = 26^\circ 33'$  und  $\sin \alpha = 0,446$  rund 0,5 und  $\cos \alpha = 0,895$  rund 0,9.

Die vertikale Belastung einer Pfette beträgt einschließlich des Winddrucks rund 2000 kg. Daher ist:

$$M_x = \frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 400 \cdot 0,9 = 90\,000$$

$$M_y = \frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 400 \cdot 0,5 = 45\,000 \text{ und}$$

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \sigma$$

Wählt man ein  $\square$  Profil Nr. 22, so ist hierfür  $W_x = 247$ ;  $W_y = 39,9$ , daher

$$\frac{90\,000}{247} + \frac{45\,000}{39,9} = 367 + 1127 = 1494$$

Das Profil genügt.

## M. Der durchgehende Träger.

### 1. Allgemeine Bemerkungen.

263. Liegt ein Träger auf mehr als zwei Stützen auf, so heißt er ein durchgehender Träger; die beiden äußersten Stützen sind die Endstützen, die übrigen die Mittelstützen; das zwischen zwei Stützen liegende Trägerstück heißt ein Trägerfeld; man unterscheidet End- und Mittelfelder.

Die Berechnung des durchgehenden Trägers ist in elementarer Weise nicht durchführbar, sondern nur unter Berücksichtigung der Form der elastischen Linie möglich; bei diesem Träger werden auf die Mittelstützen nicht nur Auflagerdrücke ausgeübt, sondern es sind über denselben auch Momente, die Stützenmomente, vorhanden. Der Träger ist über diesen Stützen als eingespannt zu betrachten und kann als ein nach den Belastungsfällen 7 bis 10 belasteter Träger annäherungsweise berechnet werden. Die Verwendung der durchgehenden Träger im Hochbau als Balken- oder Deckenträger oder auch als Träger im Frontmauerwerk soll nur unter großer Vorsicht geschehen. Denn der Träger kann nur dann als durchgehend aufgefaßt werden, wenn die Mittelstützen auch tatsächlich als solche wirksam sind. Tritt aber durch ein Setzen des Mauerwerks eine Senkung der einen oder anderen Mittelstütze ein, so wird die ursprünglich gemachte Annahme hinfällig, die berechneten Widerstandsmomente sind zu klein, und der Träger ist demgemäß zu stark beansprucht. Auf keinen Fall sollte man Träger mit mehr als zwei Mittelstützen verwenden. Im folgenden sind die in der Praxis am häufigsten auftretenden Fälle besprochen.



## 2. Spezielle Fälle.

### a) Erster Fall. Zwei Felder und drei Stützen.

a) Die Felder sind gleichlang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast  $P$ .

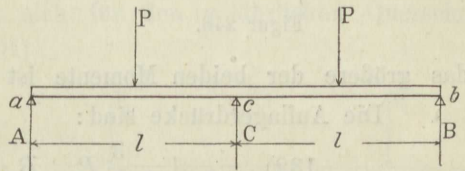
264. Jedes Feld kann nach dem siebenten einfachen Belastungsfalle beansprucht angenommen werden. Der gefährliche Querschnitt liegt also über der Mittelstütze; die Biegungsgleichung lautet:

$$125 \text{ b) } \dots \frac{3}{16} Pl = kW$$

$$126) \dots W = \frac{3}{16} \frac{Pl}{k}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$126 \text{ a) } \dots A = B = \frac{5}{16} P \quad C = \frac{22}{16} P$$



Figur 245.

$\beta$ ) Die Felder sind gleichlang; auf jedes Feld wirkt eine gleichmäßig verteilte Last  $P$ .

265. Jedes Feld ist nach dem achten einfachen Belastungsfalle beansprucht, der gefährliche Querschnitt liegt über der Mittelstütze, daher lautet die Biegungsgleichung:

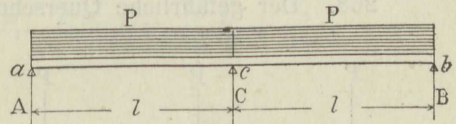
$$126 \text{ b) } \dots \frac{1}{8} Pl = kW$$

und es ist:

$$127) \dots W = \frac{1}{8} \frac{Pl}{k}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$128) \dots A = B = \frac{3}{8} P \quad C = \frac{10}{8} P$$

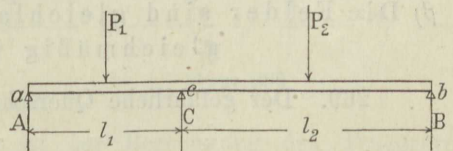


Figur 246.

$\gamma$ ) Die Felder sind ungleichlang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast  $P_1$  bzw.  $P_2$ .

266. Jedes Feld wird wieder nach dem siebenten Belastungsfalle berechnet, man erhält daher die beiden Widerstandsmomente:

$$129) \dots \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \frac{3}{16} \frac{P_1 l_1}{k} \\ \text{und} \\ W_2 = \frac{3}{16} \frac{P_2 l_2}{k} \end{array} \right.$$



Figur 247.

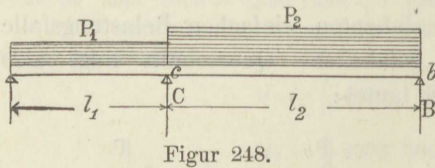
das größere der beiden Momente ist für die Berechnung des Trägerprofils zu benutzen.

Die Auflagerdrücke sind:

$$130) \dots A = \frac{5}{16} P_1 \quad B = \frac{5}{16} P_2 \quad C = \frac{11}{16} (P_1 + P_2)$$

δ) Die Felder sind ungleichlang; auf jedes Feld wirkt eine gleichmäßig verteilte Last  $P_1$  bzw.  $P_2$ .

267. Jedes Feld wird nach dem achten Belastungsfall berechnet; man erhält daher die beiden Widerstandsmomente:



Figur 248.

$$131) \dots \begin{cases} W_1 = \frac{1}{8} \frac{P_1 l_1}{k} \\ \text{und} \\ W_2 = \frac{1}{8} \frac{P_2 l_2}{k} \end{cases}$$

das größere der beiden Momente ist für die Trägerberechnung zu benutzen.

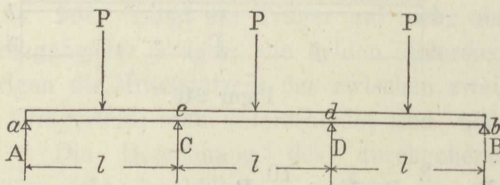
Die Auflagerdrücke sind:

$$132) \dots A = \frac{3}{8} P_1 \quad B = \frac{3}{8} P_2 \quad C = \frac{5}{8} (P_1 + P_2)$$

### b) Zweiter Fall. Drei Felder und vier Stützen.

a) Die Felder sind gleichlang; in der Mitte eines jeden Feldes wirkt eine Einzellast  $P$ .

268. Der gefährliche Querschnitt liegt über den Mittelstützen  $c$  und  $d$ ; für diese lautet die Biegunsgleichung:



Figur 249.

$$133) \dots \frac{3}{20} Pl = k W$$

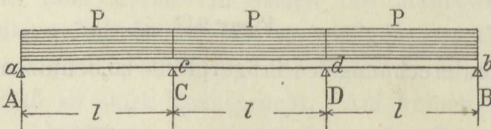
$$133 a) \dots W = \frac{3 Pl}{20 k}$$

Die Auflagerdrücke sind:

$$134) \dots A = B = \frac{7}{20} P \quad C = D = \frac{23}{20} P$$

β) Die Felder sind gleichlang, auf jedes Feld wirkt eine gleichmäßig verteilte Last  $P$ .

269. Der gefährliche Querschnitt liegt über den Mittelstützen  $c$  und  $d$ , für diese lautet die Biegunsgleichung:



Figur 250.

$$135) \dots \frac{1}{10} Pl = k W$$

$$135 a) \dots W = \frac{1 Pl}{10 k}$$



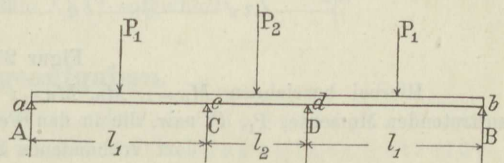
Die Auflagerdrücke sind:

$$135 \text{ b) } \dots A = B = \frac{4}{10} P \quad C = D = \frac{11}{10} P$$

γ) Die Felder sind ungleichlang, aber die Endfelder gleichgroß; in der Mitte der Endfelder wirkt eine Einzellast  $P_1$ , über der Mitte des Mittelfeldes eine Einzellast  $P_2$ .

270. Für das Endfeld ergibt sich für den gefährlichen Querschnitt bei  $c$  oder  $d$  das Widerstandsmoment:

$$136) \dots \begin{cases} W_1 = \frac{3}{16} \frac{P_1 l_1}{k} \\ \text{für das Mittelfeld da-} \\ \text{gegen} \\ W_2 = \frac{1}{8} \frac{P_2 l_2}{k} \end{cases}$$



Figur 251.

Der größere der beiden Werte ist der Berechnung des Trägerprofils zugrunde zu legen.

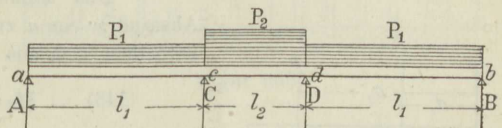
Die Auflagerdrücke sind:

$$137) \dots A = B = \frac{5}{16} P_1 \quad C = D = \frac{11}{16} P_1 + \frac{P_2}{2}$$

δ) Die Felder sind ungleichlang, aber die Endfelder gleichgroß; auf die Endfelder wirkt je eine gleichmäßig verteilte Last  $P_1$ , auf das Mittelfeld eine solche Last  $P_2$ .

271. Für ein Endfeld, siehe Figur 252, ergibt sich für den gefährlichen Querschnitt bei  $c$  oder  $d$  das Widerstandsmoment:

$$138) \dots \begin{cases} W_1 = \frac{1}{8} \frac{P_1 l_1}{k} \\ \text{für das Mittelfeld} \\ \text{dagegen} \\ W_2 = \frac{1}{12} \frac{P_2 l_2}{k} \end{cases}$$



Figur 252.

Der größere der beiden Werte ist der Berechnung des Trägerprofils zugrunde zu legen.

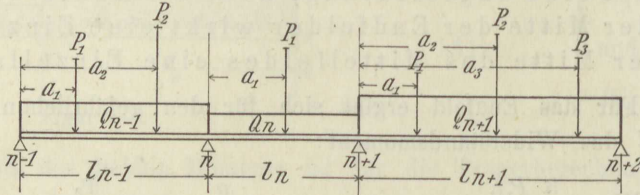
Die Auflagerdrücke sind:

$$139) \dots A = B = \frac{3}{8} P_1 \quad C = D = \frac{5}{8} P_1 + \frac{P_2}{2}$$

**Anmerkung 43.** Betrachtet man den allgemeinsten Fall des durchgehenden Trägers,

d. h. einem Träger mit beliebigen vielen Feldern und beliebigen Belastungen, so besteht für drei aufeinander folgende Felder die folgende Momentengleichung:

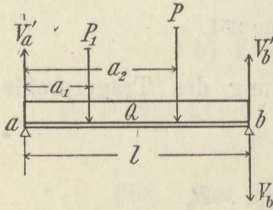
$$140) \dots M_{n-1} l_{n-1} + 2 M_n (l_{n-1} + l_n) + M_{n+1} l_n = - \frac{1}{l_{n-1}} \sum P a (l - a) (l + a) - \frac{1}{l_n} \sum P a (l - a) (2l + a) - \frac{1}{4} Q_{n-1} l_{n-1}^2 - \frac{1}{4} Q_n l_n^2$$



Figur 253.

Hierbei bezeichnen  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$  die über den Stützen  $n-1$ ,  $n$  und  $n+1$  auftretenden Momente,  $P_1$ ,  $P_2$  usw. die in den Feldern wirkenden Einzellasten,  $Q_{n-1}$ ,  $Q_n$  die dort vorhandenen Streckenlasten.

Besitzt der Träger  $m$  Felder, so ergeben sich  $m-1$  Gleichungen, aus welchen sich die Stützenmomente berechnen lassen.



Figur 254.

Bezeichnet man mit  $V'_a$  die unmittelbar rechts vom Auflager  $a$  wirkende nach aufwärts gerichtete Vertikalkraft, mit  $V''_b$  die unmittelbar links von  $b$  wirkende nach abwärts gerichtete Vertikalkraft, so erhält man für das Feld  $l$  folgende Gleichungen:

$$141) \dots V'_a = \frac{[M_b - M_a + \sum P(l - a) + \frac{Ql}{2}]}{l}$$

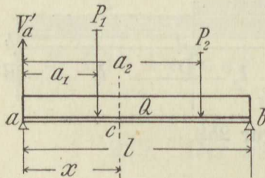
$$142) \dots V''_b = V'_a - \sum P - Q$$

$$= \frac{M_b - M_a - \sum P a - \frac{Ql}{2}}{l}$$

Die Auflagergedrücke sind nun die Unterschiede der Vertikalkräfte unmittelbar rechts und links von dem betreffenden Auflager.

So ist z. B. der Auflagergedruck in  $b$ , siehe Figur 254,  $B = V'_b - V''_b$ .

Das Moment für einen beliebigen Querschnitt  $c$  im Abstand  $x$  von  $a$  zwischen zwei Stützen  $a$  und  $b$ , siehe Figur 255, berechnet sich aus der Gleichung



Figur 255.

$$143) \dots M_x = M_a + V'_a x - \sum_0^x P(x - a) - \frac{Qx^2}{2}$$

Die im Querschnitt  $c$  auftretende Vertikalkraft bestimmt sich aus der Gleichung:

$$144) \dots V_x = V'_a - \sum_0^x P - \frac{Q}{l} x$$

**Anmerkung 44.** Die größten Momente sowohl über den Stützen wie auch in den Feldern treten nicht bei voller Belastung aller Felder des Trägers auf, sondern in der Regel bei abwechselnder Belastung. Man unterscheidet hierbei zwischen ständiger Belastung, herrührend von dem Eigengewicht der Konstruktion und wechselnder Belastung, herrührend von der Nutz- oder Verkehrslast. Das größte Moment über einer Stütze



tritt auf, wenn die beiden an die Stütze anstoßenden Felder voll belastet sind, auf die belasteten Felder folgt ein unbelastetes, dann wird ein belastetes Feld usw. Für ein Trägerfeld wird das Moment am größten, wenn es voll belastet ist, dann folgt ein unbelastetes hierauf ein belastetes Feld usw.

**Anmerkung 45.** Die Verwendung der in Anmerkung angeführten Formeln zur Bestimmung der Biegemomente ist umständlich. Zur bequemeren Ermittlung dieser Momente hat man für Träger mit gleichen Öffnungen d. h. gleichen Stützenabständen sowohl den Einfluß des Eigengewichts als auch jenen der Nutzlast auf das Biegemoment für hinlänglich viele Trägerquerschnitte berechnet und die Ergebnisse in Tabellen, den sog. Winklerschen Tabellen zusammengestellt; aus diesen Tabellen ermitteln sich dann auf einfache Weise die für einen bestimmten Querschnitt eines durchgehenden Trägers auftretenden ungünstigsten Biegemomente. Siehe Aufgabe 130. Diese Tabellen sind im Anhang II als Tabelle XXVI aufgeführt.

### 3. Übungsaufgaben.

272. **Aufgabe 126.** Ein in seiner Mitte durch eine Säule gestützter eiserner Unterzug, siehe Figur 256, hat die Balkenlage eines Getreidespeichers nebst der Nutzlast aufzunehmen. Gesamtbelastung der Decke 800 kg für den Quadratmeter; die Balken aus Kiefernholz  $b:h=3:4$ , sollen über den Unterzug ungestoßen hinwegreichen. Es ist die Konstruktion zu berechnen.

Belastung des Unterzugs.

**Auflösung.** Belastung der ganzen

Decke  $10 \cdot 10 \cdot 800 = 80000$  kg

Hiervon treffen auf den Unterzug  $ab$

$$\frac{5}{8} \cdot 80000 = 50000 \text{ kg}$$

daher trifft auf ein Trägerfeld 25000 kg

Belastung eines Balkens

$$0,80 \cdot 10 \cdot 800 = 6400 \text{ kg}$$

daher auf ein Balkenfeld

$$\frac{6400}{2} = 3200 \text{ kg}$$

Man erhält die nebenstehenden Belastungsskizzen, siehe Figur 257 und 258.

Berechnung des Unterzugs.

Es ist, die Stützweite zu 520 cm angenommen,

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{25000 \cdot 520}{1200} = 1354$$

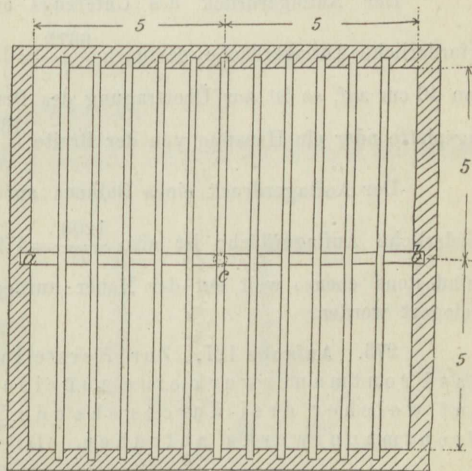
Hierfür genügt ein I Profil Nr. 40 mit einem  $W=1472$  oder ein breitflanschiger Träger Profil Nr. 28 B mit einem  $W=1367$ .

Berechnung des Balkens.

Es ist, die Stützweite zu 515 cm angenommen

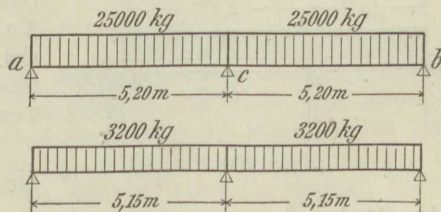
$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{3200 \cdot 515}{100} = 2060$$

daher ist: 
$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} h^3 = 2060$$



Figur 256.

Figur 257.



Figur 258.

und

$$h = \sqrt[3]{\frac{2060 \cdot 24}{3}} = \sqrt[3]{2060} = 26 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4} h = 20 \text{ cm}$$

demgemäß ist:

Belastung der Säule. Dieselbe beträgt:

$$\frac{10}{8} \cdot 25000 = \text{rund } 32000 \text{ kg}$$

Ist die Höhe der Säule zu 4 m angenommen, so ist das erforderliche Trägheitsmoment des Säulenquerschnitts bei 2,5 cm Dicke:

$$J = 8 \cdot 32 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$$

Hierfür genügt ein Durchmesser  $d = 18,5$  cm mit einem  $J = 4119$  und einem  $F = 125,66$  qcm. Der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$\frac{32000}{500} = 64 \text{ qcm}$$

Die Größe der Auflagerplatte des Säulenfußes ist:

$$a = \sqrt{\frac{32000}{10}} = 56$$

Der Mauerpfeiler wird also 64 cm stark sein müssen. Die Fundamentfläche muß sein:  $\frac{32000}{2,5}$ , daher ist dessen Breite  $b = \sqrt{\frac{30000}{2,5}} = 112 \text{ cm} = 4 \frac{1}{2}$  Stein

Der Auflagerdruck des Unterzugs auf die Mauer ist  $\frac{3}{8} \cdot 25000 = 9375 \text{ kg}$ , die erforderliche Auflagerfläche demnach  $\frac{9375}{7} = 1339 \text{ qcm}$ . Liegt der Träger auf einer Länge von 40 cm auf, so ist zur Übertragung des Drucks auf das Mauerwerk entweder eine Unterlagsplatte oder ein Haustein von der Breite  $\frac{1339}{40} = \text{rund } 35 \text{ cm}$  erforderlich.

Der Auflagerdruck eines Balkens auf die Mauer ist  $\frac{3}{8} \cdot 3200 = 1200 \text{ kg}$ . Die erforderliche Auflagerfläche ist also  $\frac{1200}{7} = 172 \text{ qcm}$ . Da der Balken 20 cm breit ist und mindestens ebenso weit auf der Mauer aufliegt, so kann er direkt auf der Mauer aufgelagert werden.

273. **Aufgabe 127.** Zur Herstellung einer Schaufensteranlage wird in das Frontmauerwerk eine gußeiserne Wand von 4 m Höhe eingesetzt auf welcher drei durchgehende I-Träger zur Unterstützung des Frontmauerwerks aufruhcn. Die Belastung, welche als gleichmäßig über den Träger verteilt angenommen werden darf, beträgt 15000 kg für den laufenden Meter.



Figur 259.

Figur 260.

Man soll das Trägerprofil, ferner das Profil der Gußwand, die Auflagerdrücke in  $a$  und  $b$ , siehe Figur 259 und 260, sowie die daselbst erforderlich werdenden Auflagerplatten berechnen.

**Auflösung.** Die Belastung auf der Strecke  $ac$  ist:  $P_1 = 1,5 \cdot 15000 = 22500 \text{ kg}$

auf der Strecke  $cb$ :

$$P_2 = 2,5 \cdot 15000 = 37500 \text{ kg}$$



Das Widerstandsmoment über  $c$ , für das Trägerfeld  $cb$  ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{37500 \cdot 250}{1200} = 1055$$

Verwendet man drei  $\Gamma$ -Träger, so trifft auf einen ein:

$$W = \frac{1055}{3} = 351$$

Diesem Werte entspricht ein *N. P. Nr. 24* mit einem  $W = 357$ . Man wird also drei Träger Nr. 24 verwenden.

Der Auflagerdruck in  $c$  beträgt:

$$C = \frac{5}{8} (P_1 + P_2) = \frac{5}{8} (22500 + 37500) = 37500 \text{ kg}$$

Das für die Gußwand erforderliche Trägheitsmoment ist demnach:

$$J = 6 \cdot 37,5 \cdot 4 \cdot 4 = 3600$$

Diesem Werte entspricht das Profil

siehe Figur 261, mit einem

$$J = 3616 \text{ und einem } F = 141 \text{ qcm}$$

Der erforderliche Druckquerschnitt ist:

$$F = \frac{37500}{500} = 75 \text{ qcm}$$

Der Auflagerdruck in  $b$  ist:

$$B = \frac{3}{8} 37500 = 14062,5 \text{ kg}$$

daher die erforderliche Auflagerfläche:

$$\frac{14062,5}{7} = 2008,9 \text{ qcm}$$

Wollte man die Säule aus Walzeisen herstellen, so würde der in Figur 262 skizzierte Querschnitt erforderlich sein; für dessen Trägheitsmoment ergibt sich:

$$J_x = 2 \cdot 1364 + 1460 = 4128$$

Setzt man eine Mauerstärke von 2 Stein, also 51 cm voraus, so kann man der Auflagerplatte eine Breite von 50 cm geben; es folgt hieraus für die Länge derselben:

$$\frac{2009}{50} = \text{rund } 40 \text{ cm}$$

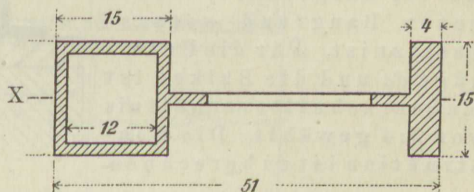
Die Dicke der Auflagerplatte macht man in der Regel gleich:

$$\delta = 15 \text{ mm} + \frac{1}{20} h,$$

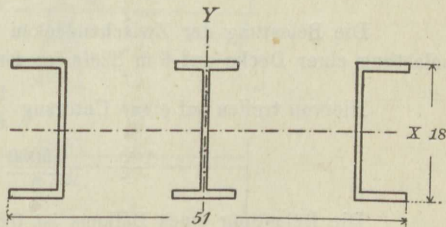
wobei  $h$  die Trägerhöhe bezeichnet; im vorliegenden Falle ist also:

$$\delta = 15 \text{ mm} + \frac{240}{20} = \text{rund } 40 \text{ mm}$$

Für die Auflagerung der Träger ergibt sich die Anordnung, siehe Figur 263 und 263a; zur Versteifung der Träger werden letztere miteinander verschraubt unter Anwendung von Gußstücken von der gezeichneten Form. Diese liegen über den Auflagern und bei großen Trägerlängen in Entfernungen von 2 zu 2 m. Im vorliegenden Falle werden also über den Auflagerpunkten  $a$ ,  $b$  und  $c$  solche Gußstücke angewendet werden müssen. Über die Abmessungen dieser Gußstücke siehe Anhang II, Tabelle XXI.

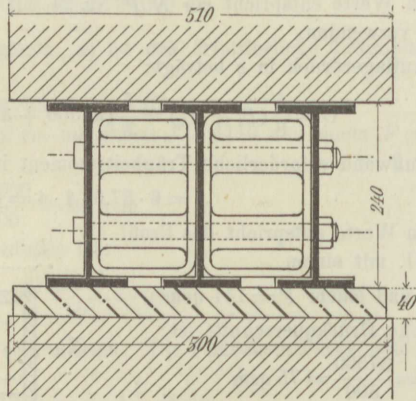


Figur 261.

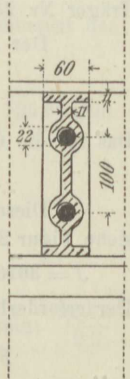


Figur 262.

274. **Aufgabe 128.** Die Zwischendecken eines Speichers werden durch Unterzüge und gußeiserne Säulen gestützt. Die oberen Unterzüge *de*, siehe Figur 264, sind von Eichenholz und auf den Säulen *b* gestoßen, die unteren Unterzüge *hi* dagegen von Walzeisen und durchgehend. Das Dach ist ein Doppelziegeldach. Die Balken aus Kiefernholz sind 6,0 m lang, reichen nur über drei Unterzüge hinweg und liegen 0,80 m auseinander. Die gußeisernen Säulen sollen angegossene Fußplatten von quadratischer Grundform besitzen. Die quadratischen Säulenfundamente sind aus bestem Ziegelmauerwerk in Zementmörtel ausgeführt, wobei guter Baugrund vorausgesetzt ist. Für die Unterzüge *de* und die Balken ist ein Querschnittsverhältnis von 3:4 gewählt. Die Konstruktion ist zu berechnen.



Figur 263.



Figur 263 a.

**Auflösung.** Die Belastung des Dachs für den Quadratmeter Horizontalprojektion kann zu 381 kg angenommen werden.

Auf einen Hauptbinder trifft somit eine Belastung von  $3 \cdot 15 \cdot 381 = 17145$  kg.

Hiervon wird von jeder Stuhlsäule *a* direkt aufgenommen der vierte Teil, also:

$$\frac{17145}{4} = 4286 \text{ oder } 4300 \text{ kg}$$

Die Belastung der Zwischendecken ist für den Quadratmeter 800 kg. Die Gesamtbelastung einer Decke auf 6 m Tiefe ist sonach  $6 \cdot 15 \cdot 800 = 72000$  kg.

Hiervon treffen auf einen Unterzug  $\frac{5}{8} \cdot 72000 = 45000$  kg, auf ein Trägerfeld daher:

$$\frac{45000}{3} = 15000 \text{ kg}$$

Die Belastung eines Balkens ist  $0,8 \cdot 800 \cdot 6 = 3840$  kg.

Die Belastung einer Säule *b* beträgt  $15000 + 4300 = 19300$  kg.

Die Belastung einer Säule *c* ist demnach:

$$\frac{10}{8} \cdot 15000 + 19300 = 18750 + 19300 = 38050 \text{ rund } 39000 \text{ kg}$$

Berechnung eines Balkens. Es ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{3840 \cdot 300}{2 \cdot 100} = 720$$

daher ist:

$$h = 2 \sqrt[3]{720} = 18 \text{ cm}$$

und

$$b = \frac{3}{4} h = \frac{63}{4} = 14 \text{ cm}$$



Berechnung eines Unterzugs *de*, Stützweite 515 cm angenommen.  
Es ist:

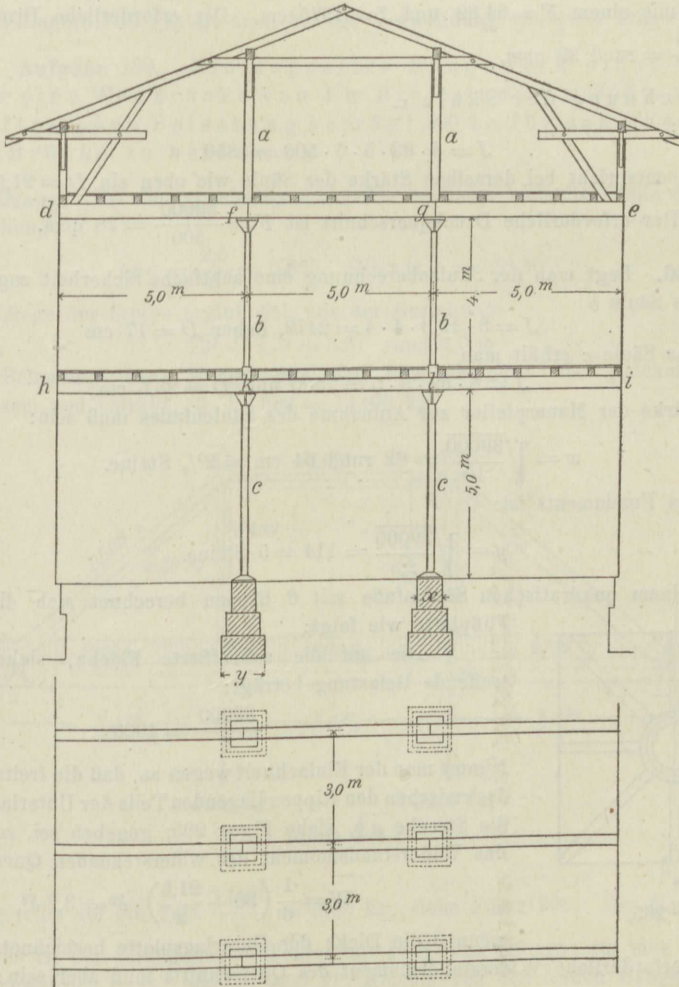
$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{15000 \cdot 515}{100} = 9656$$

Hieraus findet sich:

$$h = 2 \sqrt[3]{9656} = 42 \text{ cm}$$

und

$$b = \frac{3}{4} \cdot 46 = 32 \text{ cm}$$



Figur 264.

Wählt man zwei Balken als Unterzug, so ergibt sich für einen Balkenquerschnitt ein

$$W = \frac{9656}{2} = 4828$$

daher ist:

$$h = 2 \sqrt[3]{4828} = 34 \text{ und demnach } b = \frac{3}{4} \cdot 34 = 26.$$

Berechnung eines Unterzugs *h i*. Stützweite 515 cm angenommen.

Es ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{15000 \cdot 515}{1200} = 805$$

Diesem Werte entspricht *N. P. Nr. 34* mit einem  $W = 931$  oder *2 N. P. Nr. 26* mit einem Gesamt- $W = 2 \cdot 446 = 892$ .

Berechnung einer Säule *b*.

Es ist:

$$J = 6 \cdot 19,3 \cdot 4 \cdot 4 = 1852$$

Bei einer Säulenstärke von 2 cm erhält man für obigen Wert einen Säulendurchmesser  $D = 15,5$  cm mit einem  $F = 84,82$  und  $J = 1975$  cm. Der erforderliche Druckquerschnitt

ist nur  $\frac{19300}{500} = \text{rund } 39 \text{ qcm}$ .

Berechnung der Säule *c*.

Es ist:

$$J = 6 \cdot 39 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 500 = 5850.$$

Diesem Werte entspricht bei derselben Stärke der Säule wie oben ein  $D = 21,5$  cm und ein

$F = 122,52$ . Der erforderliche Druckquerschnitt ist  $F = \frac{39000}{500} = 78 \text{ qcm}$ .

**Anmerkung 46.** Legt man der Säulenberechnung eine achtfache Sicherheit zugrunde, so ist für eine Säule *b*

$$J = 8 \cdot 19,3 \cdot 4 \cdot 4 = 2470, \text{ daher } D = 17 \text{ cm}$$

Für eine Säule *c* erhält man

$$J = 8 \cdot 39 \cdot 5 \cdot 5 = 7800 \text{ und } D = 23,5 \text{ cm.}$$

Die Stärke der Mauerpfeiler zur Aufnahme des Säulenfußes muß sein:

$$x = \sqrt{\frac{39000}{10}} = 62 \text{ rund } 64 \text{ cm} = 2\frac{1}{2} \text{ Steine.}$$

Die Stärke des Fundaments ist:

$$y = \sqrt{\frac{39000}{2,5}} = 114 = 5 \text{ Steine.}$$

Bei einem quadratischen Säulenfuß mit 8 Rippen berechnet sich die Stärke der Fußplatte wie folgt:

Die auf die schraffierte Fläche, siehe Figur 252, treffende Belastung beträgt:

$$\frac{39000}{8} = 4900$$

Nimmt man der Einfachheit wegen an, daß die freitragende Länge des zwischen den Rippen liegenden Teils der Unterlagsplatte durch die Strecke  $\overline{ab}$ , siehe Figur 265, gegeben sei, so hat man für das Widerstandsmoment des widerstehenden Querschnitts:

$$W = \frac{1}{6} \left( 30 - \frac{21,5}{2} \right) \cdot \delta^2 = 3,2 \delta^2,$$

wenn  $\delta$  die Dicke der Unterlagsplatte bezeichnet.

Das erforderliche Widerstandsmoment des Querschnitts muß aber sein:

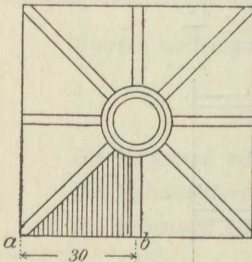
$$W = \frac{4900 \cdot 30}{12 \cdot 250} = 49$$

Man hat daher zur Bestimmung der Dicke  $\delta$  die Gleichung:

$$3,2 \delta^2 = 49 \text{ oder } \delta = \sqrt{\frac{49}{3,2}} = \text{rund } 4 \text{ cm oder } 40 \text{ mm}$$

Die Rippenstärke wird demnach sein:

$$\delta_1 = \frac{3}{4} \delta = 30 \text{ mm}$$



Figur 265.



Der Auflagerdruck des Unterzugs  $hi$  auf die Mauer ist  $\frac{3}{8} \cdot 15000 = 5625$  kg, daher die erforderliche Auflagerfläche  $= \frac{5625}{7} = 804$  qcm.

Die Flanschbreite des Trägers Nr. 34 beträgt 13,7 cm. Bei einer Auflagerlänge von 30 cm ist die Auflagerfläche  $30 \cdot 13,7 = 411$  qcm; es ist somit eine Auflagerplatte von der Breite  $\frac{804}{30} = 27$  cm erforderlich. Die erforderliche Stärke der Auflagerplatte ist  $\delta = 15$  mm  $+ \frac{380}{20} = 54$  mm.

Die Auflagerplatte genügt auch bei der Verwendung von zwei Trägern Nr. 26.

275. **Aufgabe 129.** Ein doppeltes Hängewerk dient als Hauptträger für eine Wegbrücke von 4 m Breite und 9 m Stützweite. Die größte auftretende Belastung beträgt 800 kg für den Quadratmeter. Es ist die Brücke zu berechnen.

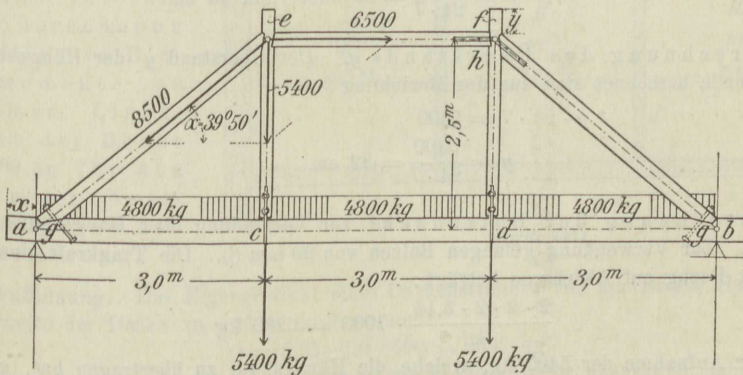
**Auflösung.** Bei den gegebenen Ausmaßen bestimmt sich die Größe des Winkels  $\alpha$  aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,5}{3} = 0,833 \quad \text{Hieraus } \alpha = 39^\circ 50'.$$

Die Länge der Strebe ergibt sich aus der Beziehung:

$$\sqrt{3^2 + 2,5^2} = 3,91, \text{ rund } 4,0 \text{ m}$$

Die Belastung eines Hängewerks soll über letzteres als gleichmäßig verteilt angenommen sein und beträgt:  $9 \cdot 2 \cdot 800 = 14400$  kg.



Figur 266.

Daher trifft auf ein Feld  $\frac{14400}{3} = 4800$  kg, siehe Figur 266. Der Haupttragbalken

des Hängewerks ist ein durchgehender Träger auf zwei Mittelstützen; auf eine solche Stütze trifft ein Auflagerdruck  $= \frac{9}{8} \cdot 4800 = 5400$  kg, welcher von den beiden Hängesäulen aufzunehmen und auf die Außenstützen  $a$  und  $b$  mittels des Spannriegels und der Streben zu übertragen ist.

Die Beanspruchung des Spannriegels ist:

$$5400 \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 5400 \cdot 1,199 = \text{rund } 6500 \text{ kg}$$

Die Beanspruchung der Strebe ist:

$$\frac{5400}{\sin \alpha} = \frac{5400}{0,641} = \text{rund } 8500 \text{ kg}$$

Der Haupttragbalken ist zunächst als durchgehender Träger zu berechnen.  
Man erhält:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{4800 \cdot 300}{60} = 3000$$

Hierfür genügt ein Normalprofil 24/30 mit einem

$$W = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 30 \cdot 30 = 3600$$

Berechnung der Strebe. Die Strecke wird auf Zerknicken beansprucht  
das erforderliche Trägheitsmoment des Strebenquerschnitts muß sein:

$$J = 100 \cdot 8,5 \cdot 4 \cdot 4 = 13600$$

Hierfür genügt ein Profil 20/24 cm mit einem  $J = 16000$ .

Berechnung des Spannriegels. Dieser ist gleichfalls auf Zerknicken  
beansprucht. Das erforderliche Trägheitsmoment des Querschnitts muß sein:

$$J = 100 \cdot 6,5 \cdot 3 \cdot 3 = 5850$$

Hierfür genügt ein Profil 16/24 mit einem  $J = 8192$ .

Den gleichen Querschnitt erhält auch die Hängesäule; ihr Querschnitt beträgt  
demnach  $16 \cdot 24 = 384$  qcm. Die Beanspruchung des Holzes auf Zug ist daher  $\sigma = \frac{5400}{384}$   
= ca. 14 kg für den Quadratmeter.

Berechnung des Überstands  $x$ . Der Überstand  $x$  des Balkenendes von  
dem Strebenende berechnet sich aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} x \cdot 24 \cdot 7 &= 6500 \\ x &= \frac{6500}{24 \cdot 7} = 39 \text{ oder rund } 40 \text{ cm} \end{aligned}$$

Berechnung des Überstands  $y$ . Der Überstand  $y$  der Hängesäule über  
das Strebenende berechnet sich aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} y \cdot 24 \cdot 7 &= 5400 \\ y &= \frac{5400}{24 \cdot 7} = 32 \text{ cm} \end{aligned}$$

Berechnung der Bolzenzahl zur Verbindung der Hängesäule mit dem  
Tragbalken. Zur Verwendung gelangen Bolzen von 20 mm ( $\emptyset$ ). Die Tragkraft eines solchen  
Bolzens mit Bezug auf Abscheren beträgt:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,14}{4} \cdot 1000 = 6280 \text{ kg}$$

Zur Aufnahme der 5400 kg, welche die Hängesäule zu übertragen hat, genügt ein  
Bolzen. Man wird aber zwei Stück verwenden.

Abstand des untersten Bolzens vom Ende der Hängesäule.  
Dieser Abstand  $z$ , in der Figur nicht bezeichnet, berechnet sich aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot z \cdot 24 \cdot 7 &= \frac{5400}{2} \\ z &= \frac{5400}{2 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 7} = 9 \text{ cm oder rund } 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Berechnung der Breite des Bandeisens. Die Stärke des Bandeisens  
sei 10 mm, dann berechnet sich die Breite  $b$  aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot b \cdot 1 \cdot 1200 &= 5400 \\ b &= \frac{5400}{2 \cdot 1200} = 2,2 \text{ cm} = \text{rund } 3 \text{ cm} \end{aligned}$$



Der Abstand  $u$  des obersten Bolzens vom Ende des Bandeisens wird gleich dem doppelten Bolzendurchmesser angenommen, also zu 4 cm.

Die Beanspruchung des Bandeisens auf Abscheren beträgt dann:

$$4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sigma = \frac{5400}{2} \text{ oder } \sigma = \frac{5400}{2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4} = \text{ca. } 169 \text{ kg für den Quadratzentimeter}$$

Der Haupttragbalken des Hängewerks wird durch die mittels der Strebe übertragene Horizontalkraft von 6500 kg auch noch auf Zug beansprucht, ist also noch auf zusammengesetzte Festigkeit zu untersuchen.

Die durch die Horizontalkraft hervorgerufene Zugspannung ist:

$$\sigma_z = \frac{6500}{24 \cdot 30} = 9 \text{ kg}$$

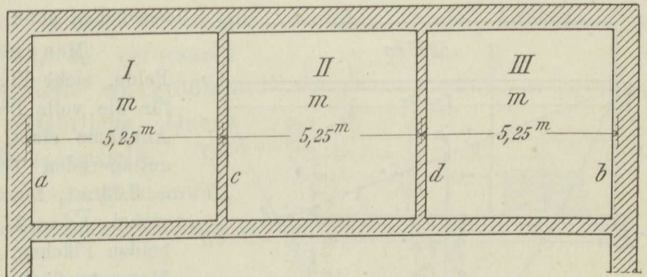
Die durch das Biegemoment hervorgerufene größte Biegungsspannung ist:

$$\sigma_b = \frac{1}{8} \frac{4800 \cdot 300}{3600} = 50$$

Die gesamte größte Zugspannung beträgt somit  $50 + 9 = 59$  kg, ein Wert, der noch zulässig ist.

**Anmerkung 47.** Zur festeren Verbindung der Strebe mit dem Tragbalken bzw. dem Spannriegel des Hängewerks werden in der Regel im ersten Falle Schraubenbolzen  $g$ , im letzteren Falle Bandeisen  $h$ , welche mit Strebe und Spannriegel gleichfalls durch Schraubenbolzen verbunden sind, verwendet.

276. **Aufgabe 130.** Über die Räume I, II, III ist eine Eisenbetondecke zu legen, welche auf den Umfassungsmauern  $a$  und  $b$  und den Zwischenmauern  $c$  und  $d$  auflagert. Es sind die für die Deckenberechnung ungünstigsten Biegemomente zu bestimmen. Eigengewicht der Decke gleich 500 kg für den Quadratmeter. Nutzlast 500 kg für den Quadratmeter.

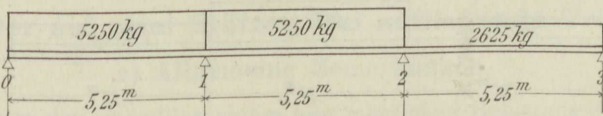


Figur 267.

**Auflösung.** Das Eigengewicht eines Deckenstreifens von der Breite gleich 1 m ist, die Stützweite der Decke zu 5,25 m angenommen:

$$Q = 5,25 \cdot 1,0 \cdot 500 = 2625 \text{ kg}$$

Die Belastung durch Nutzlast für einen Meter breiten Streifen beträgt ebensoviel, daher ist die Belastung eines Deckenfeldes von 1 m Breite durch Eigengewicht und Nutzlast =  $2 \cdot 2625 = 5250$  kg.



Figur 268.

Berechnung der Stützenmomente.

Die allgemeinen Gleichungen lauten:

$$145) \dots \begin{cases} 0 + 4 M \cdot l + M_2 l = -\frac{1}{4} \cdot 5250 \cdot l^2 - \frac{1}{4} 5250 l^2 \\ M_1 l + 4 M l + 0 = -\frac{1}{4} 5250 l^2 - \frac{1}{4} 2650 l^2 \end{cases}$$

oder

$$4 M_1 + M_2 = -\frac{1}{2} \cdot 5250 \cdot 525 = -1378125$$

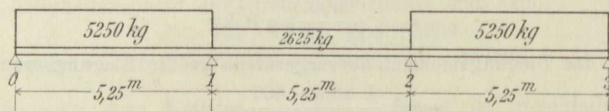
$$M_1 + 4 M_2 = -\frac{1}{4} \cdot 5250 \cdot 525 - \frac{1}{4} \cdot 2625 \cdot 525 = -1033594$$

Aus vorstehenden beiden Gleichungen folgt:

$$M_1 = -298594$$

$$M_2 = -183750$$

Das ungünstigste, d. h. größte Moment im Endfelde tritt bei folgender Belastung auf



Figur 269.

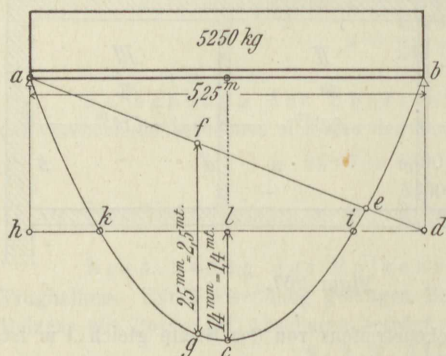
Man erhält wieder die Gleichungen:

$$146) \dots \begin{cases} 4 M_1 + M_2 = -\frac{1}{4} \cdot 5250 \cdot 525 - \frac{1}{4} \cdot 2625 \cdot 525 = -1033594 \\ M_1 + 4 M_2 = -\frac{1}{4} \cdot 2625 \cdot 525 - \frac{1}{4} \cdot 5250 \cdot 525 = -1033594 \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$M_1 = M_2 = -206722$$

Das ungünstigste Moment im Felde selbst kann man entweder mittels der Gleichung 143 bestimmen, bequemer ist es aber, das Moment zeichnerisch zu ermitteln, was sehr einfach geschehen kann.

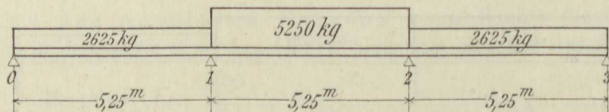


Figur 270.

Man zeichnet zu dem betreffenden Felde, siehe Figur 270, die Momentenparabel für die volle Belastung des Feldes, unter der Annahme eines auf den beiden Stützen frei auflagernden Trägers, es ist  $mc = 3,44 \text{ m} = 3,44 \text{ mt}$ , ferner das Momentendreieck  $abd$ , wobei  $\overline{bd} = M_1$  ist. Der Unterschied der beiden Flächen, Parabel und Dreieck, gibt die Momentenfläche für das erste Feld des durchgehenden Trägers für den in Figur 268 dargestellten Belastungsfall. Aus dieser Figur entnimmt man das größte Moment

$$M_{max} = \overline{fg} = 25 \text{ mm} = 2,5 \text{ mt} = 250000 \text{ cmkg}$$

Für das Mittelfeld erhält man das größte Moment für den nachstehend verzeichneten Belastungsfall.



Figur 271.

Man erhält für  $M_1$  und  $M_2$  die gleichen Werte wie im vorhergehenden Belastungsfall, d. h. es ist  $M_1 = M_2 = 206722$ . Zur Bestimmung des Moments in der Mitte des mittleren Feldes kann man wieder die Figur 270 benutzen, man braucht ja nur durch  $d$  die Horizontale zu ziehen, so ergibt der Unterschied zwischen der Parabel und Rechtecksfläche  $abdh$  die Momentenfläche des Mittelfeldes und als größtes Moment in der Feldmitte erhält man

$$M_{max} = \overline{lc} = 14,00 \text{ mm} = 1,4 \text{ mt} = 140000 \text{ cmkg}$$



Hiermit sind alle Momente ermittelt, welche zur Deckenberechnung erforderlich sind. Mittels der Winklerschen Tabellen erhält man die gleichen Ergebnisse. Für ein Endfeld ergibt sich in einer Entfernung  $x = 0,4l$  vom Auflager  $o$  das Moment:

$$\begin{array}{r} \text{hervorgerufen durch das Eigengewicht } G = M_g = 0,08 \cdot 500 \cdot 5,25^2 \cdot 100 = + 110\,250 \\ \text{durch die Nutzlast } P = M_p = 0,10 \cdot 500 \cdot 5,25^2 \cdot 100 = + 137\,812 \\ \hline \text{Gesamtmoment} = + 248\,062 \text{ cmkg} \end{array}$$

Für die Mittelstütze 1 erhält man als Moment:

$$\begin{array}{r} \text{hervorgerufen durch das Eigengewicht } M_g = - 0,10 \cdot 500 \cdot 5,25^2 \cdot 100 = - 137\,812 \\ \text{durch die Nutzlast } M_p = - 0,11667 \cdot 500 \cdot 5,25^2 \cdot 100 = - 160\,756 \\ \hline \text{Gesamtmoment} = - 298\,568 \text{ cmkg} \end{array}$$

In der Mittelöffnung erhält man als Moment:

$$\begin{array}{r} \text{Hervorgerufen durch das Eigengewicht } M_g = + 0,025 \cdot 500 \cdot 5,25^2 \cdot 100 = 34\,453 \\ \text{durch die Nutzlast } M_p = + 0,075 \cdot 500 \cdot 5,25^2 \cdot 100 = 103\,359 \\ \hline \text{Gesamtmoment} = 137\,812 \text{ cmkg} \end{array}$$

## N. Der mehrfach belastete Träger unter der Einwirkung ständiger Belastung.

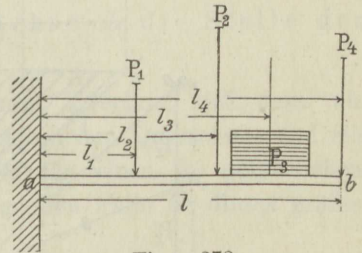
### 1. Der mehrfach belastete Freitragler.

277. Wirken auf einen Freitragler beliebig viele Lasten  $F_1, P_2$  usw., siehe Figur 272, so verursacht jede Last an der Einspannstelle ein größtes Biegemoment. Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannstelle; für diese addieren sich die Biegemomente, so daß man folgende Biegleichung erhält:

$$147) \dots kW = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + P_4 l_4$$

Die Gleichung für das Widerstandsmoment lautet:

$$148) \dots W = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + P_4 l_4}{k} = \frac{\Sigma Pl}{k}$$



Figur 272.

### 2. Der auf zwei Stützen frei aufliegende Träger.

#### a) Allgemeine Bemerkungen.

278. Unter den unendlich vielen hier möglichen Belastungsfällen sollen nur die folgenden, im Hochbau häufig auftretenden Fälle aufgeführt und näher besprochen werden.

Erster Belastungsfall. Der Träger ist nur durch Einzellasten beansprucht.

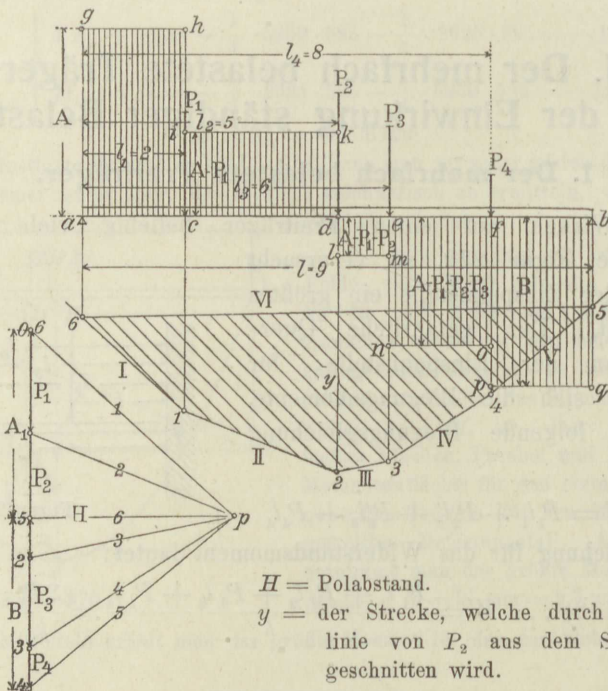
Zweiter Belastungsfall. Der Träger ist nur durch einzelne auf gewisse Strecken gleichmäßig verteilte Lasten, Streckenlasten, beansprucht.

Dritter Belastungsfall. Der Träger ist durch Einzellasten und Streckenlasten beansprucht.

### b) Erster Belastungsfall. Der Träger ist nur durch Einzellasten beansprucht.

279. Bei dieser Belastung ist die Lage des gefährlichen Querschnitts von vornherein nicht bekannt, sondern muß erst bestimmt werden. Am einfachsten gelangt man auf graphischem Wege zum Ziele. Man zeichnet Kräfte- und Seilvieleck und erkennt nun unmittelbar, da die von dem Umfange des Seilvielecks abgegrenzten vertikalen Strecken die auf den Polabstand bezogenen Biegemomente darstellen, daß das größte Moment nur unter dem Angriffspunkte einer der Kräfte  $P$  stattfinden kann. Im vorliegenden Falle trifft dies für die Kraft  $P_2$  zu und es ist  $y$  das größte Biegemoment.

Figur 273.



Figur 274.

$H$  = Polabstand.

$y$  = der Strecke, welche durch die Richtungslinie von  $P_2$  aus dem Seilvieleck ausgeschnitten wird.

Das wirkliche Biegemoment ist dann  $M = y \cdot H$ . Bestimmt man für die Angriffsstellen der einzelnen Lasten die Vertikalkräfte der Größe nach, d. h. die Mittelkräfte der auf die bezüglichen Trägerstücke wirkenden Kräfte, so ist die Vertikalkraft:

von  $a$  bis  $c = V_a = A$ ,

von  $c$  bis  $d = V_c = A - P_1$ ,

von  $d$  bis  $e = V_d = A - (P_1 + P_2)$ ,

von  $e$  bis  $f = V_e = A - (P_1 + P_2 + P_3)$

von  $f$  bis  $b$  endlich  $V_b = A - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = B$ .



Nimmt man die nach aufwärts gerichtete Vertikalkraft  $A$  als positiv an und berechnet hiernach die übrigen Vertikalkräfte, so ergibt sich unmittelbar links von dem gefährlichen Querschnitt  $d$  eine Vertikalkraft  $V = A - P_1$ , unmittelbar rechts von  $d$  dagegen ist  $V = A - (P_1 + P_2)$ .

Die erstere ist noch positiv, die letztere negativ; im gefährlichen Querschnitt wechselt die Vertikalkraft also das Vorzeichen.

Trägt man diese Vertikalkräfte, so wie die Figur 273 zeigt, von einer Achse  $ab$  aus als vertikale Linien an den zugehörigen Stellen auf, so erhält man die in der Figur gezeichnete treppenförmige Linie der Vertikalkräfte; sie durchschneidet die Achse  $ab$  an der Stelle des gefährlichen Querschnitts.

Man erhält somit für die Ermittlung der Lage des gefährlichen Querschnitts folgende Anhaltspunkte:

„Der gefährliche Querschnitt liegt stets unter dem Angriffspunkt einer Last. Man zeichnet Kräfte- und Seilvieleck und ermittelt in letzterem die größte vertikale Strecke  $y$ , welche aus dem Seilvieleck ausgeschnitten wird. Durch die Lage dieser Vertikalen ist die Stelle des gefährlichen Querschnitts, durch ihre Länge das im gefährlichen Querschnitt auftretende größte Biegemoment bestimmt. Zeichnet man aber die Linie der Vertikalkräfte, so bestimmt diese durch ihren Schnitt mit der Achse  $ab$  die Stelle des gefährlichen Querschnitts.“

Das Biegemoment für diesen Querschnitt berechnet sich dann als das statische Moment der auf das durch den gefährlichen Querschnitt und ein Auflager begrenzte Trägerstück wirkenden Kräfte für einen im gefährlichen Querschnitt gewählten Drehungspunkt. Im vorliegenden Falle ist dieses größte Biegemoment:

$$149) \dots M_{max} = Al - P_1(l_2 - l_1) = P_3(l_3 - l_2) + P_4(l_4 - l_2) - B(l - l_2)$$

### c) Übungsaufgabe.

280. **Aufgabe 131.** Für den in Figur 273 durch Einzellasten  $P_1 = 500$  kg,  $P_2 = 600$  kg,  $P_3 = 450$  kg,  $P_4 = 200$  kg belasteten Träger ist die Lage des gefährlichen Querschnitts und das daselbst auftretende größte Biegemoment zu ermitteln.

**Auflösung.** Aus der Zeichnung entnimmt man, daß der gefährliche Querschnitt unterhalb des Angriffspunkts der Last  $P_2$  liegt. Unter Berücksichtigung des gewählten Maßstabs  $1 \text{ mm} = 13 \text{ cm}$ ,  $1 \text{ mm} = 37 \text{ kg}$  beträgt das auf den Polabstand bezogene größte Biegemoment  $y = 20,3 \text{ mm} = 20,3 \cdot 13 = 263,9 \text{ cm}$ . Der Polabstand  $H$  beträgt  $27 \text{ mm}$ , d. h.  $27 \cdot 37 = 1000 \text{ kg}$ . Das wirkliche Biegemoment ist also:

$$M_{max} = H \cdot y = 263,9 \cdot 1000 = 263\,900$$

Bestimmt man die Auflagergegendrücke durch Rechnung, so findet man:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{500(9-2) + 600(9-5) + 450(9-6) + 200(9-8)}{9} \\
 &= \frac{3500 + 2400 + 1350 + 200}{9} = \frac{7450}{9} = 827,77 \text{ kg} \\
 B &= \frac{500 \cdot 2 + 600 \cdot 5 + 450 \cdot 6 + 200 \cdot 8}{9} \\
 &= \frac{1000 + 3000 + 2700 + 1600}{9} = \frac{8300}{9} = 922,22 \text{ kg} \\
 &\qquad\qquad\qquad A + B = 1750 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Es ist nun:

$$V_a = 827,77 \quad V_c = 827,77 - 500 = +327,77 \quad V_d = 827,77 - 1100 = -272,23$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also bei *d*. Das Biegemoment daselbst ist:

$$M_{max} = 827,77 \cdot 5 - 500 \cdot 3 = 2638,85$$

oder auf Zentimeter bezogen 263885.

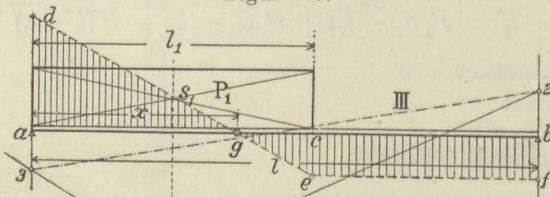
### d) Zweiter Belastungsfall. Der Träger ist durch einzelne Streckenlasten beansprucht.

a) Die Belastung  $P_1$  ist von *a* aus auf eine Strecke  $l_1$  gleichmäßig verteilt.

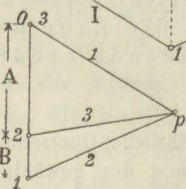
281. Zur Bestimmung der Lage des gefährlichen Querschnitts ermittelt man sich die Auflagergegendrücke *A* und *B*, siehe Figur 273 und 274, sowie die Linie der Vertikalkräfte.

An der Stelle *a*, siehe Figur 275, ist die Vertikalkraft  $V_a = A$  an der Stelle *c* ist:  $V_c = A - P_1$ , dieser Wert wird stets negativ sein, weil  $P_1$  größer als *A* sein muß; die Linie der Vertikalkräfte schneidet also den Träger auf der Strecke *ac*; im vorliegenden Falle im Punkte *g* und hier liegt der gefährliche Querschnitt; an dieser Stelle ist die Vertikalkraft = 0, d. h. die auf die Strecke *ac* treffende Belastung ist gleich *A*; bezeichnet man *ag* mit *x*, so erhält man zur Bestimmung von *x* die Gleichung:

Figur 275.



150) ...  $x = \frac{Al_1}{P_1}$



Figur 276.

Der Auflagergegendruck kann nun rechnerisch oder graphisch bestimmt werden; im letzteren Falle ergibt sich die Länge *x* graphisch.



Das Biegemoment im gefährlichen Querschnitt ist

$$151) \dots M = Ax - \frac{Ax}{2} = \frac{Ax}{2}$$

β) Die Belastungen  $P_1$  und  $P_2$  sind auf die Strecken  $l_1$  und  $l_2$  gleichmäßig verteilt.

282. Mittels der Auflagergegendrückte und der Linie der Vertikalkräfte ergibt

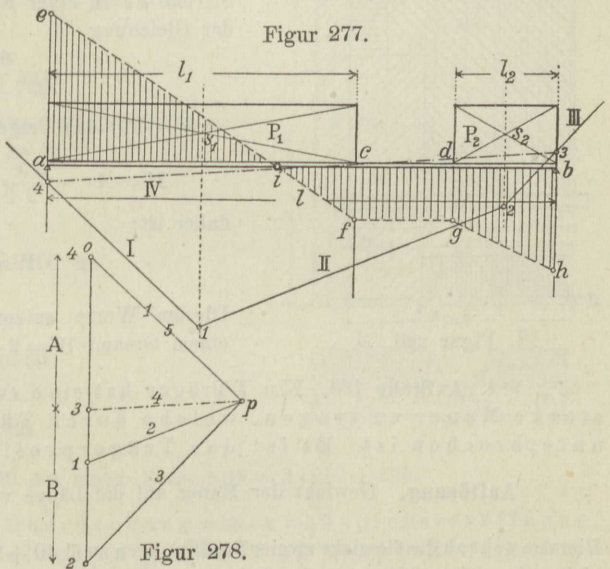
sich im Punkte  $i$  der gefährliche Querschnitt. Je nachdem  $P_1 \geq A$  ist, liegt  $i$  auf der Strecke  $\overline{ac}$  oder  $\overline{db}$ .

Fällt  $i$  auf letztere Strecke, so hat man zur Bestimmung der Entfernung  $x$  des Punktes  $i$  von dem Punkte  $d$  die Gleichung:

$$152) \dots A = P_1 + \frac{P_2 x}{lx}$$

oder:

$$153) \dots x = \frac{(A - P_1)l_2}{P_2}$$

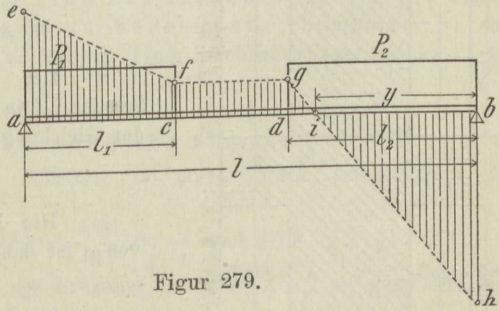


Figur 278.

Ist dagegen  $A > P_1$ , so liegt der gefährliche Querschnitt auf der Strecke  $\overline{ac}$  und es dient zur Bestimmung seiner Entfernung  $x$  vom linken Auflagerpunkte  $a$  die Gleichung 150.

Liegt der gefährliche Querschnitt auf der Strecke  $\overline{db}$ , und ist seine Entfernung von  $b = y$ , so hat man, wenn  $B$  der Auflagergegendruck mit  $l_2$  bezeichnet, zur Bestimmung von  $y$  die Gleichung:

$$154) \dots y = \frac{Bl_2}{P_2}$$



Figur 279.

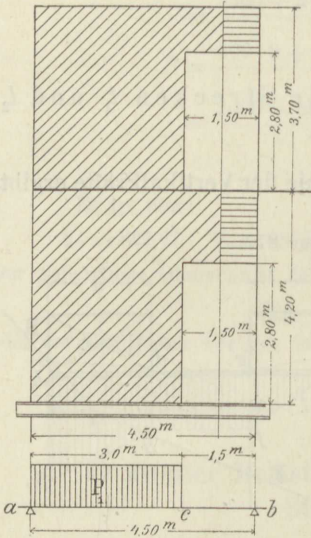
γ) Übungsaufgaben.

283. Aufgabe 192. Ein  $\Gamma$ Träger von 4,50 m Länge hat eine zwei Stockwerk hohe, 1 Stein starke Mauer zu tragen, in welcher sich zwei Türöffnungen befinden, siehe Figur 280, es ist das Trägerprofil zu berechnen.

**Auflösung.** Das Mauergewicht auf die Länge  $4,50 - 0,75 = 3,75$  ist:

$$\begin{aligned} & 3,75 \cdot 0,25 \cdot (4,20 + 3,70) 1600 = 11850 \text{ kg} \\ & = 1,50 \cdot 0,25 \cdot 2,80 \cdot 1600 = 1680 \text{ kg} \end{aligned}$$

Hiervon ab zwei halbe Türöffnungen



Figur 280.

bleibt als gleichmäßig verteilte Belastung

des Trägers auf die Strecke  $\overline{ac}$   $P_1 = 10170 \text{ kg}$

Es ist nun, Stützweite zu  $4,80 \text{ m}$  angenommen,

$$A = \frac{10170 \cdot (4,80 - 1,50)}{4,80} = 6992 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt auf der Strecke  $\overline{ac}$  in einer Entfernung  $x$  von  $a$ , erhältlich aus der Gleichung

$$x = \frac{6992 \cdot 3}{10170} = 2,06 \text{ m}$$

Für das Biegemoment erhält man:

$$M = Ax - \frac{Ax}{2} = \frac{Ax}{2} = 6992 \cdot 103 = 720176$$

daher ist:

$$W = \frac{720176}{1200} = 600$$

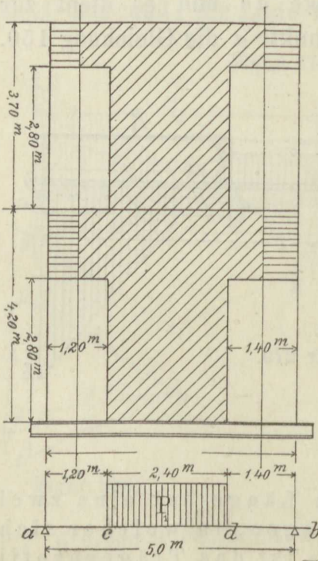
Diesem Werte entsprechen zwei Träger Nr. 23 mit einem Gesamt- $W = 2 \cdot 317 = 634$ .

**284. Aufgabe 133.** Ein I-Träger hat eine zwei Stockwerk hohe, 1 Stein starke Mauer zu tragen, welche durch Türöffnungen, siehe Figur 281, unterbrochen ist. Es ist das Trägerprofil zu berechnen.

**Auflösung.** Gewicht der Mauer auf die Länge von  $2,40 + 1,30 = 3,70 \text{ m}$

$$= 3,7 \cdot 0,25 \cdot 7,9 \cdot 1600 = 11800 \text{ kg}$$

Hiervon geht ab das Gewicht zweier Türöffnungen zu  $(1,40 + 1,20) \cdot 2,80 \cdot 0,25 \cdot 1600 = 2912 \text{ kg}$   
bleibt als gleichmäßig verteilte Belastung auf der Strecke  $\overline{cd}$  rund  $9000 \text{ kg}$



Figur 281.

Der Auflagergedruck in  $a$  ist, die Trägerstützweite zu  $5,30 \text{ m}$  angenommen,

$$A = \frac{9000(5,3 - 2,55)}{5,3} = 4670 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt auf der Strecke  $\overline{cd}$  in einer Entfernung  $x$  von  $c$ , erhältlich aus der Gleichung

$$x = \frac{4670 \cdot 2,4}{9000} = 124 \text{ cm}$$

Die Entfernung des gefährlichen Querschnitts von  $a$  ist daher:

$$135 + 124 = 259 \text{ cm}$$

Das größte Biegemoment ist

$$M = 4670 \cdot 259 - \frac{4670 \cdot 124}{2} = 919990$$

Hieraus folgt  $W = \frac{919990}{1200} = 766$

Hierfür genügen 2 I N. P. Nr. 26 mit

$$W = 2 \cdot 446 = 892$$



285. **Aufgabe 134.** Ein  $\bar{\text{I}}$  Träger ist durch eine 1 Stein starke Mauer von 6 m Höhe in der in Figur 282 dargestellten Weise belastet. Es ist das Trägerprofil zu berechnen.

**Auflösung.** Die Belastung  $P_1$  auf der Strecke  $\bar{ac}$  beträgt:

$$(2,3 + 0,6) \cdot 6,0 \cdot 0,25 \cdot 1600 - 1,20 \cdot 2,4 \cdot 0,25 \cdot 1600 = 6960 - 1152 = 5808 \text{ kg}$$

Die Belastung  $P_2$  auf der Strecke  $\bar{db}$  ist:

$$(0,6 + 1,5) \cdot 6,0 \cdot 0,25 \cdot 1600 - 1152 = 5040 - 1152 = 3888 \text{ kg}$$

Der Auflagergedruck  $A$  ist:

$$A = \frac{5808 (5,00 - 1,15) + 3888 \cdot 0,75}{5,00} = 5055$$

Die Vertikalkraft bei  $c$  ist:

$$5055 - 5808 = -753$$

der gefährliche Querschnitt liegt also auf der Strecke  $\bar{ac}$  in einer Entfernung  $x$  von  $a$ , und es ist:

$$5055 = \frac{5808 \cdot x}{2,3}$$

also:

$$x = \frac{5055 \cdot 2,3}{5808} = 2,0 \text{ m} = 200 \text{ cm}$$

das größte Biegemoment ist:

$$M = \frac{5055 \cdot 2,00}{2} = 505500$$

demnach ist:

$$W = \frac{505500}{1200} = 421$$

hierfür genügen zwei Träger Nr. 20 mit einem Gesamt- $W = 2 \cdot 216 = 432$ .

286. **Aufgabe 135.** Zur Überdeckung einer Schaufensteröffnung, siehe Figur 283 bis 285, sind Walzeisen  $\bar{\text{I}}$ -Träger zu verwenden, welche teils auf dem Mauerwerk, teils auf einer gußeisernen Wand aufliegen und auf letzterer gestoßen sind. Es sind die Trägerprofile zu ermitteln, desgleichen ist die Wand zu berechnen, wenn sie 4,50 m hoch sein soll; außerdem sind die in den Auflagern  $a$  und  $b$  erforderlichen Unterlagsplatten zu berechnen. Belastungen: 1 cbm Mauerwerk = 1600 kg, 1 qm Balkenlage = 500 kg, 1 qm Dachbalkenlage 375 kg, 1 qm Dachbelastung = 250 kg.

**Auflösung.** Belastungsberechnung für den lauf. Meter.

1. Gewicht der Mauer bis zur Brüstung im ersten Stock einschließlich der Balkenlage:

$$(0,80 \cdot 0,64 + 0,60 \cdot 0,51) \cdot 1600 + \frac{5,60}{2} \cdot 500 = \text{rund } 2708 \text{ kg}$$

2. Gewicht der vollen Front von der Brüstung im ersten Stock an gerechnet einschließlich der Balkenlagen und der Dachbelastung:

$$[(3,10 - 0,60 + 3,0) \cdot 0,51 + (3,0 + 2,8) \cdot 0,38 + 1,20 \cdot 0,25] \cdot 1600 + \frac{2 \cdot 5,73 + 5,86}{2} \cdot 500$$

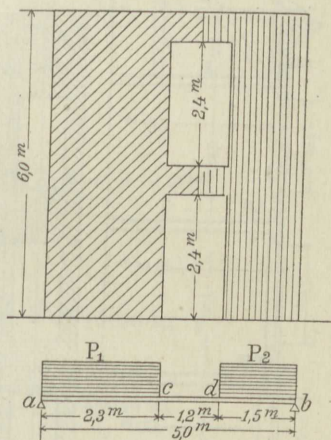
$$+ \frac{5,86 \cdot 375}{2} + \frac{5,86 \cdot 250}{2} = 8494,4 + 4330,0 + 1098,75 + 732,5 = 14655,65$$

oder rund 15000 kg

3. Gewicht einer vertikalen Fensterreihe:

$$(4,10 \cdot 0,51 + 3,8 \cdot 0,38) \cdot 0,9 \cdot 1600 = 5090 \text{ kg}$$

Figur 282.



Belastung des Trägers  $ac$ , siehe Figur 282.

1. Auf die ganze Länge eine gleichmäßig verteilte Last:

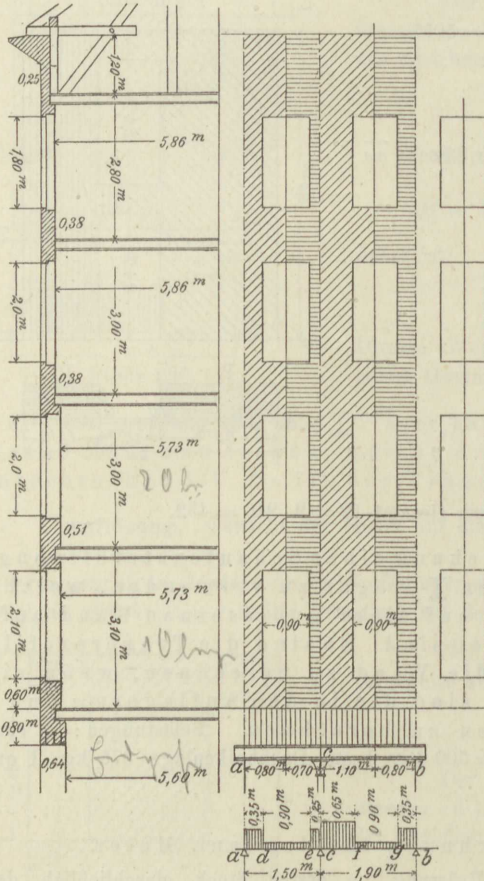
$$P_1 = 1,5 \cdot 2708 = \text{rund } 4100 \text{ kg}$$

2. Auf die Länge  $\overline{ad}$  eine gleichmäßig verteilte Last:

$$P_2 = (0,35 + 0,45) \cdot 15000 - \frac{1}{2} \text{ vertikale Fensterreihe} = 12000 - \frac{5090}{2} = 9455 \text{ kg} = 9500 \text{ kg}$$

Figur 283.

Figur 284.



Figur 285.

3. Auf die Länge  $\overline{ec}$  eine gleichmäßig verteilte Last:

$$P_3 = (0,25 + 0,45) \cdot 15000 - \frac{1}{2} \text{ vertikale Fensterreihe} = 10500 - 2545 = 7955 \text{ kg} = 8000 \text{ kg}$$

Belastung des Trägers  $cb$ , siehe Figur 285.

1. Auf die ganze Länge eine gleichmäßig verteilte Last:

$$Q_1 = 1,90 \cdot 2708 = 5147 \text{ kg} \text{ oder rund } 5200 \text{ kg}$$

2. Auf die Länge  $\overline{cf}$  eine gleichmäßig verteilte Last:

$$Q_2 = (0,65 + 0,45) \cdot 15000 - \frac{1}{2} \text{ vertikale Fensterreihe} = 16500 - 2545 = 13955 = \text{rund } 14000 \text{ kg}$$

3. Auf die Länge  $\overline{gb}$  eine gleichmäßig verteilte Last:

$$Q_3 = (0,35 + 0,45) \cdot 15000 - \frac{1}{2} \text{ vertikale Fensterreihe} = 12000 - 2545 = 9455 = \text{rund } 9500 \text{ kg}$$

Berechnung des Trägers  $ac$ .

Der Auflagergedrückt im Punkte

$a$  ist:

$$A = \frac{4100 \cdot 0,75 + 9500 \cdot 1,325 + 8000 \cdot 0,125}{1,5} = 11108 \text{ kg}$$

Der Auflagergedrückt im Punkte  $c$  ist:

$$C = \frac{4100 \cdot 0,75 + 9500 \cdot 0,175 + 8000 \cdot 1,375}{1,5} = 10491,66 \text{ kg} = 10492 \text{ kg}$$

Nun ist die Vertikalkraft bei  $d$ :

$$V_d = 11108 - 9500 - \frac{4100 \cdot 0,35}{1,5} = + 651$$

Die Vertikalkraft bei  $e$  ist:

$$V_e = 651 - \frac{4100 \cdot 0,90}{1,5} = 651 - 2460 = - 1809$$



Der gefährliche Querschnitt liegt also auf der Strecke  $\overline{de}$ , und zwar in einem Abstände  $x$  von  $d$ , der sich aus folgender Gleichung berechnet:

$$651 = \frac{4100 \cdot x}{1,5}$$

daher:

$$x = \frac{651 \cdot 1,5}{4100} = 0,238 \text{ m}$$

Von dem Auflager  $a$  liegt der gefährliche Querschnitt demnach entfernt um die Strecke:  
 $0,35 + 0,238 = 0,588 \text{ m}$

Das größte Biegemoment berechnet sich aus der Gleichung:

$$M = 11108 \cdot 58,8 - 9500 (58,8 - 17,5) - \frac{4100 \cdot 0,588}{1,5} \cdot \frac{58,8}{2}$$

$$= 653150,4 - 392350 - 47251,6 = 213549$$

Das Widerstandsmoment ist somit:

$$W = \frac{213549}{1200} = 174$$

Hierfür genügen drei **I**-Träger Nr. 13 mit einem Gesamt- $W = 3 \cdot 67,8 = 203$ .

Berechnung des Trägers  $cb$ .

Der Auflagergedruck im Punkte  $c$  ist:

$$C = \frac{5200 \cdot 0,95 + 14000 \cdot 1,575 + 9500 \cdot 0,175}{1,9} = 15080 \text{ kg}$$

Der Auflagergedruck im Punkte  $b$  ist:

$$B = \frac{5200 \cdot 0,95 + 14000 \cdot 0,325 + 9500 \cdot 1,725}{1,9} = 13620 \text{ kg}$$

Die Vertikalkraft in  $f$  ist:

$$V_f = 15080 - 14000 - \frac{5200}{1,9} \cdot 0,65 = -699$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also auf der Strecke  $\overline{cf}$ , und zwar in einer Entfernung  $x$  vom Punkte  $c$ , die sich aus der folgenden Gleichung berechnet:

$$15080 = \frac{5200 x}{1,9} + \frac{14000 x}{0,65}$$

$$x = \frac{15080}{\frac{5200}{1,9} + \frac{14000}{0,65}} = 0,62 \text{ m}$$

Das größte Biegemoment ist:

$$M = \frac{15080 \cdot 62}{2} = 467480$$

Das Widerstandsmoment ist demnach:

$$W = \frac{467480}{1200} = 390$$

Hierfür genügen drei Träger Nr. 17 mit einem Gesamt- $W = 3 \cdot 139 = 417$ .

Berechnung der gußeisernen Wand bei  $c$ .

Druck auf die Wand:

1. vom Träger  $ac$ : Auflagerdruck  $C = 10492 \text{ kg}$

2. vom Träger  $cb$ : Auflagerdruck  $C = 15080 \text{ kg}$

Gesamtdruck auf die Wand = 25572 oder abgerundet 26000 kg

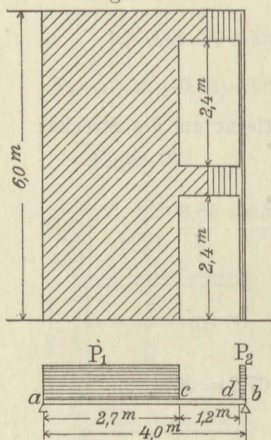
Das erforderliche Trägheitsmoment der Wand muß sein:

$$J = 6 \cdot 26 \cdot 4,5 \cdot 4,5 = 3159$$

Diesem Werte entspricht laut Tabelle XIV, Anhang II ein Profil Nr. 24 mit einem  $J = 3283$ .

Wählt man in den Punkten  $a$  und  $b$  Auflagerplatten von der Größe  $64/30$  cm, so besitzen diese eine Auflagerfläche von  $64/30 = 1920$  qcm. Erforderlich ist im Punkte  $a$  eine Auflagerfläche von

Figur 286.



Figur 287.

$$\frac{11108}{7} = 1587 \text{ qcm}$$

im Punkte  $b$  eine solche von

$$\frac{13620}{7} = 1945 \text{ qcm}$$

Die gewählten Auflagerplatten reichen aus. Eventuell könnte man die Auflagerplatte in  $b$  etwas vergrößern, etwa auf  $64/35$ , sie erhielte dann eine Auflagerfläche von 2240 qcm.

287. Aufgabe 136. Zur Auflagerung einer 1 Stein starken Mauer, in welcher sich, siehe Figur 286 und 287, zwei Türöffnungen befinden, sollen I-Träger verwendet werden. Es ist das Trägerprofil zu ermitteln. 1 cbm Mauerwerk, Hohlsteine vorausgesetzt, = 1100 kg.

**e) Dritter Belastungsfall. Der Träger ist durch Einzellasten und durch Streckenlasten beansprucht.**

288. Dieser Fall läßt sich auf den Fall 1 zurückführen, indem man die Belastungskörper, welche die Streckenlasten  $P_4$  und  $P_5$  darstellen, siehe Figur 288, in eine Anzahl gleiche und recht kleine Teile teilt und in den Schwerpunkten dieser Teile vertikale Einzelkräfte  $Q_1, Q_2$  usw. anbringt, entsprechend den Gewichten dieser Teilkörper. Man hat dann nur Einzellasten und verfährt zur Ermittlung der Lage des gefährlichen Querschnitts und des größten Biegemoments wie im Falle 1. Im vorliegenden Falle liegt der gefährliche Querschnitt bei  $d$ , und das größte Biegemoment ist:

$$155) \dots M_{max} = y \cdot H$$

Dabei ist keineswegs notwendig, daß der gefährliche Querschnitt unterhalb einer der ursprünglich gegebenen Einzellasten  $P_1, P_2$  und  $P_3$  liegt, er kann vielmehr auch unterhalb einer der Lasten  $Q$  liegen.

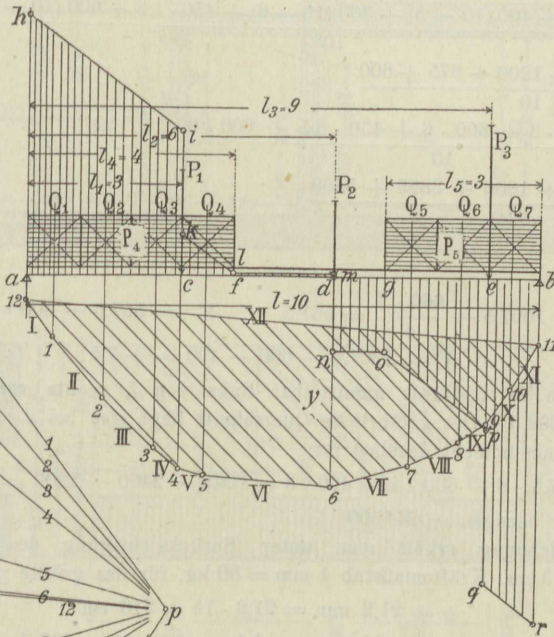
289. Durch Zeichnung der Linie der Vertikalkräfte ergibt sich gleichfalls die Lage des gefährlichen Querschnitts; diese Linie hat ebenfalls eine treppenförmige Gestalt, doch sind die Verbindungslinien zwischen den Brechungspunkten stellenweise gegen die Horizontale geneigt, infolge der Einwirkung der gleichmäßig verteilten Lasten.

Die Vertikalkraft bei  $a$  ist:  $V_a = A$ , unmittelbar links von  $c$ :  $V'_c = A - \frac{P_4 l_1}{l_4}$ , unmittelbar rechts von  $c$ :  $V''_c = V'_c - P_1$ ; die Vertikalkraft bei  $f$  ist:

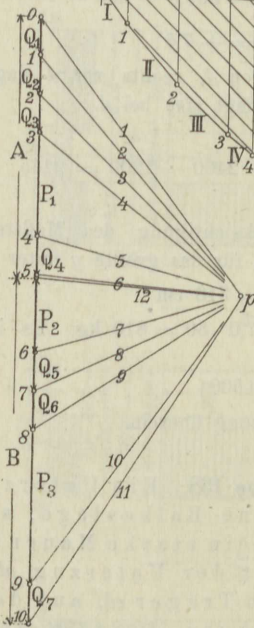


$V_f = A - P_1 - P_4$ , auf der Strecke von  $f$  nach  $d$  behält die Vertikalkraft den Wert  $V_f$ , auf der Strecke von  $d$  nach  $g$  hat man  $V_d = A - P_1 - P_2 - P_4$ , unmittelbar links von  $e$  ist:  $V_e' = A - P_1 - P_2 - P_4 - P_5 \frac{(l_5 - l + l_3)}{l_5}$ , unmittelbar rechts von  $e$  hat man:  $V_e'' = V_e' - P_3$ , bei  $b$  endlich:  $V_b = B$ . Der Wechsel des Vorzeichens findet bei  $d$  statt.

Figur 288.



Figur 289.



$H$  = Polabstand.

$y$  = die Strecke, welche durch die Richtungslinie von  $P_2$  aus dem Seilviereck ausgeschnitten wird.

Das Biegemoment im gefährlichen Querschnitt ist dann im vorliegenden Falle

$$156) \dots M = Al_2 - F_1(l_2 - l_1) - P_4\left(l_2 - \frac{l_4}{2}\right)$$

oder auch

$$157) \dots M = P_3(l_3 - l_2) + P_5\left(l - l_2 - \frac{l_5}{2}\right) - B(l - l_3)$$

## f) Übungsaufgaben.

290. **Aufgabe 137.** Für den in Figur 288 dargestellten, durch die dort verzeichneten Lasten beanspruchten Träger ist die Lage des gefährlichen Querschnitts sowie die Größe des daselbst auftretenden Biegemoments zu ermitteln.

$$P_1 = 400 \text{ kg} \quad P_2 = 300 \text{ kg} \quad P_3 = 600 \text{ kg} \quad P_4 = 600 \text{ kg} \quad P_5 = 450 \text{ kg}$$

**Auflösung.** Durch Rechnung erhält man:

$$A = \frac{600(10-2) + 400(10-3) + 300(10-6) + 450 \cdot 1,5 + 600(10-9)}{10} \\ = \frac{4800 + 2800 + 1200 + 675 + 600}{10} = 1007,5 \text{ kg}$$

$$B = \frac{600 \cdot 2 + 400 \cdot 3 + 300 \cdot 6 + 450 \cdot 8,5 + 600 \cdot 9}{10} \\ = \frac{1200 + 1200 + 1800 + 3825 + 5400}{10} = 1342,5 \text{ kg}$$

$$A + B = 2350 \text{ kg}$$

Es ist nun:

$$V_c' = 1007,5 - \frac{600 \cdot 3}{4} = 557,5 \quad V_c'' = 557,5 - 400 = 157,5$$

$$V_f = 1007,5 - 600 - 400 = +7,5$$

ebenso groß ist die Vertikalkraft unmittelbar links von  $d$ , rechts von  $d$  dagegen ist sie  $= 7,5 - 300 = -292,5$ . Der gefährliche Querschnitt liegt also bei  $d$ .

Das Biegemoment daselbst ist:

$$1007,5 \cdot 6 - 600 \cdot 4 - 400 \cdot 3 = 6045 - 2400 - 1200 = 2445$$

und auf Zentimeter bezogen  $= 244500$ .

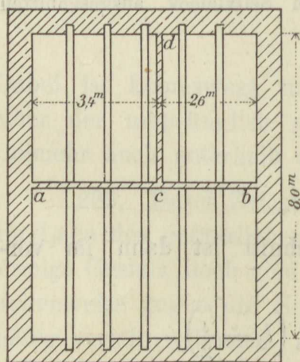
Durch Zeichnung erhält man unter Berücksichtigung des Maßstabs, Längemaßstab 1 mm = 15 cm, Kräftemaßstab 1 mm = 30 kg, für das größte  $y$  unter  $d$ :

$$y = 21,2 \text{ mm} = 21,2 \cdot 15 = 318 \text{ cm}$$

Der Polabstand beträgt 27,0 mm, daher  $27,0 \cdot 30 = 810 \text{ kg}$ . Es ist somit das größte Biegemoment:

$$M = 810 \cdot 318 = 244500$$

Das Ergebnis stimmt also mit dem der Rechnung überein.



Figur 290.

291. **Aufgabe 138.** Ein Unterzug  $ab$ , siehe Figur 290, hat eine Balkenlage, sowie eine 3,5 m hohe,  $\frac{1}{2}$  Stein starke Mauer zu tragen, außerdem dient der Unterzug  $ab$  als Auflager für einen Träger  $cd$ , auf dem gleichfalls eine 3,5 m hohe,  $\frac{1}{2}$  Stein starke Mauer aufruhet. Es ist das Trägerprofil zu ermitteln. 1 cbm Mauerwerk, Hohlsteine = 1100 kg.

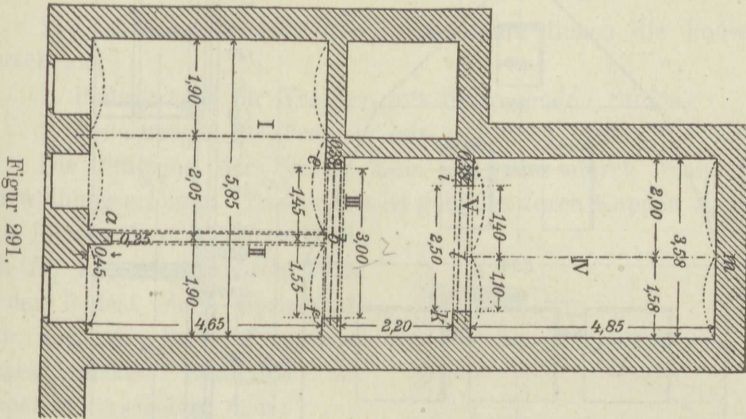
292. **Aufgabe 139.** In der Grundrißanordnung, siehe Figur 291, sind für die im Kellergeschoß erforderlichen eisernen Träger I bis V angedeutet.

Träger I und IV sind Kappenträger und haben das Gewicht der Gewölbekappen, für den Quadratmeter 700 kg, aufzunehmen.



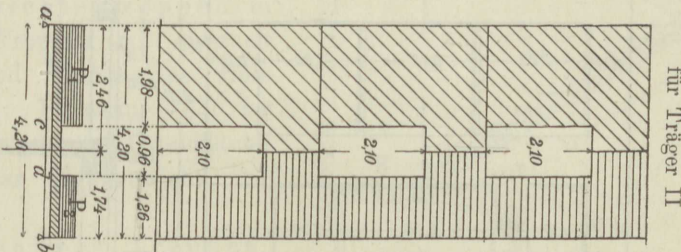
Träger II hat eine 1 Stein starke Mauer nach der Anordnung, siehe Figur 292, zu tragen.

Träger III trägt eine 1½ Stein starke Mauer, siehe Figur 294, außerdem dient er dem Träger II als Auflager.



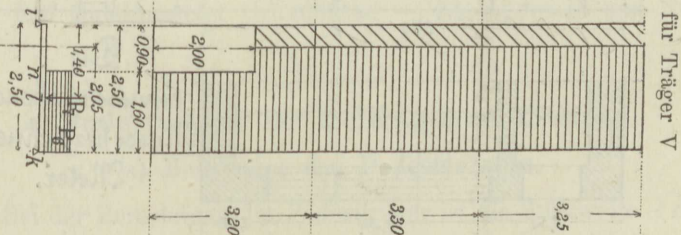
Figur 291.

Figur 292.



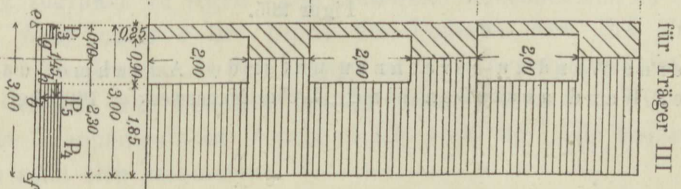
für Träger II

Figur 293.



für Träger V

Figur 294.



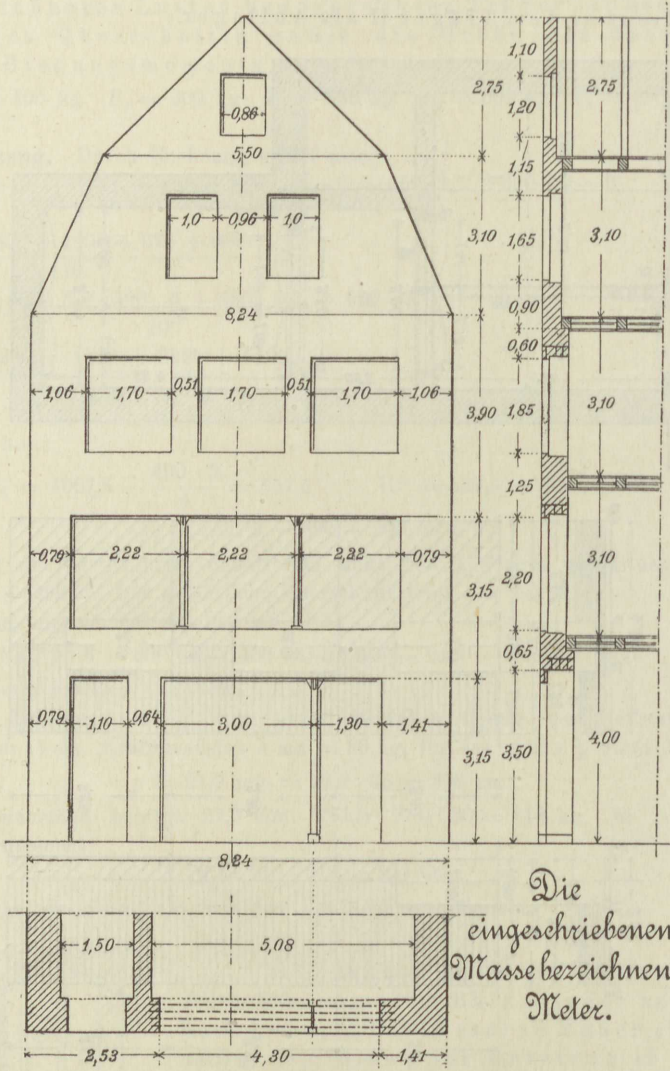
für Träger III

Belastungsskizze

Träger V hat ebenfalls eine 1½ Stein starke Mauer zu tragen, siehe Figur 293, und außerdem dem Träger IV als Auflager zu dienen.

Es sind die erforderlichen Trägerprofile zu berechnen.

293. Aufgabe 140. Für die untenstehend, siehe Figur 295, skizzierte Schaufensteranlage sind die erforderlichen Träger sowie die



Figur 295.

gußeiserne Wand zu berechnen unter der Annahme, daß die Träger über der Wand gestoßen sind. 1 cbm Mauerwerk = 1600 kg.



## O. Berechnung der Treppenpodestträger.

### 1. Arten der Podestträger.

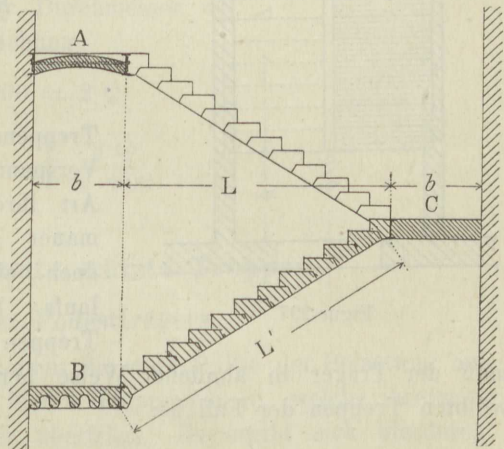
294. Zur Auflagerung der Treppenläufe dienen die Podestträger; man unterscheidet:

1. Podestträger für Treppen mit freitragenden Stufen,
2. Podestträger für Treppen mit gestützten Stufen.

Die Stützung der Stufen kann entweder durch Wangen oder durch Unterwölbung erfolgen. Der Podest ist gebildet durch Kappen *A*, siehe Figur 296, durch Platten *C* oder durch Wellblech *B*; im erstgenannten Falle übt der Podest einen Horizontal-schub aus, im Falle *B* und *C* dagegen nicht. Bezüglich der Treppen unterscheidet man:

a) leichte Treppen, in der Regel Treppen mit eisernen Wangen und Stufen aus Holz oder Eisen; Belastung 650 kg für den Quadratmeter Grundfläche — und zwar Eigengewicht und Nutzlast;

b) schwere Treppen, das sind Treppen mit gemauerten Stufen und Holzbelag oder Stufen aus Beton bzw. Werksteinen; Belastung 1000 kg für den Quadratmeter Grundfläche — Eigengewicht und Nutzlast.



Figur 296.

### 2. Podestträger für freitragende Treppen.

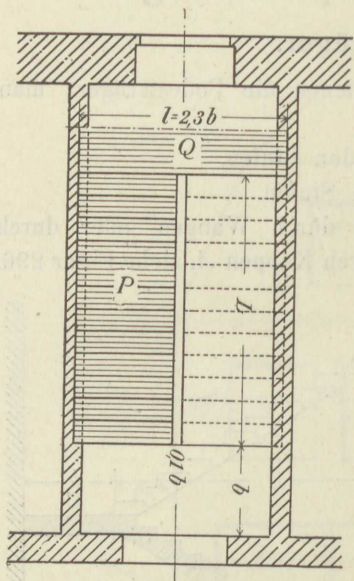
#### (a) Belastung des Podestträgers.

295. Bei der Berechnung der Podestträger ist die Stützweite  $l$  des Trägers der Rechnung zugrunde zu legen. Die Stützweite berechnet sich im allgemeinen zu  $l = 2,3 b$ , wenn unter  $b$  die Breite des Podestes bzw. des Treppenlaufs verstanden und die Durchsicht der Treppe zu  $0,1 b$  angenommen ist.

Das Gewicht des Podestes beträgt dann  $2 Q = l \cdot b \cdot 1000$  kg. Das Gewicht eines Treppenlaufs ist  $P = L \cdot 1,1 b \cdot 1000$  kg. Die Belastung eines Podestträgers setzt sich zusammen:

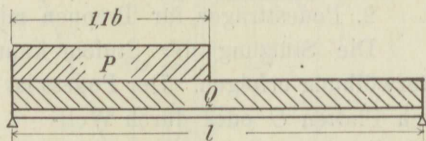
1. aus dem Gewicht  $P$  des aufsteigenden Treppenlaufs als gleichmäßig verteilte Last auf die Länge  $1,1 b$ ;
2. aus dem Gewicht  $Q$  des halben Podestes als gleichmäßig verteilte Last auf die Länge  $l$ .

Man erhält unter dieser Voraussetzung die Belastungsskizze siehe Figur 297 und 298.



Figur 297.

Es ist vorausgesetzt, daß der aufsteigende Treppenlauf auf den Podesträger keinen Horizontalschub und der absteigende Lauf keinen Druck ausübt, daß also die



Figur 298.

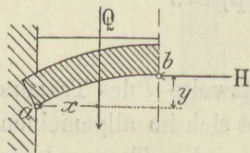
Treppenstufen nicht durch ihre gegenseitige Verspannung, sondern lediglich durch die Art ihrer Einlagerung in der Umfassungsmauer getragen werden. Will man aber doch einen Horizontalschub des Treppenlaufs berücksichtigen, also freitragende Treppen wie ein Gewölbe behandeln, so muß der Träger in ähnlicher Weise berechnet werden, wie dies bei unterwölbten Treppen der Fall ist.

### b) Horizontalschub der Podestkappe.

296. Ist der Podest ein Kappenpodest, so übt er auf den Podesträger einen Horizontalschub  $H$  aus, der sich in Rücksicht auf die Figur 299 aus der folgenden Gleichung berechnet:

Es ist:

$$158) \dots Qx = Hy$$



also:

$$159) \dots H = \frac{Qx}{y}$$

Figur 299.

In der Regel beträgt die Pfeilhöhe  $y$  der Kappe  $= \frac{1}{8}$  der Spannweite  $l$ ; in diesem Falle ist unter Berücksichtigung, daß  $x = \frac{l}{4}$  angenommen wird:

$$160) \dots \frac{Ql}{4} = H \frac{l}{8}$$

$$161) \dots H = 2Q$$



d. h. der von der Podestkappe auf den Podestträger ausgeübte Horizontalschub ist gleich der Podestbelastung.

Ist  $y = \frac{l}{10}$ , so erhält man für den Horizontalschub der Kappe:

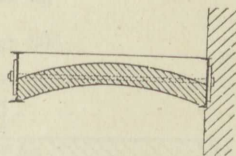
$$162) \dots H = \frac{Ql}{4} \cdot \frac{10}{l} = 2,5 Q$$

d. i. fünf Viertel der Podestbelastung.

Zweckmäßig läßt man den Horizontalschub nicht durch den Podestträger, sondern durch eigens zu diesem Zwecke angeordnete Zuganker, siehe Figur 300, aufnehmen. Werden vier solche Zuganker angeordnet, so ergibt sich der Durchmesser  $d$  der kreisrunden Zugstange an der Gleichung:

$$\frac{4 d^2 \pi}{4} \cdot 800 = 2 Q$$

$$163) \dots d = \sqrt{\frac{2 Q}{\pi \cdot 800}}$$

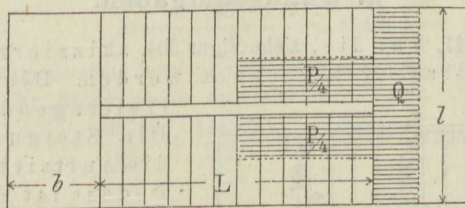


Figur 300.

### 3. Podestträger für unterstützte Treppen.

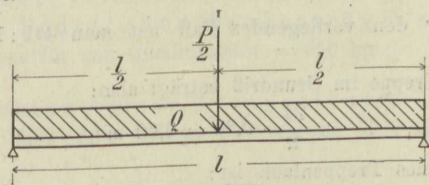
#### a) Belastung des Podestträgers.

297. Von jedem Treppenlaufe kommt die eine Hälfte der Belastung auf die Mauer, die andere Hälfte auf die innere Treppenwange, welche ihrerseits wieder die Hälfte auf die Podestträger überträgt. Es ergibt sich hierdurch die in Figur 301 dargestellte Belastungsskizze. Die beiden Einzellasten  $\frac{P}{4}$



Figur 301.

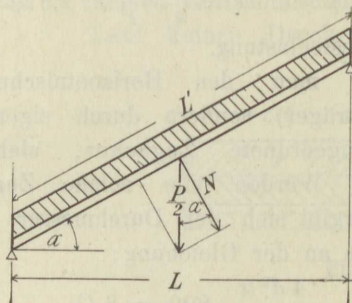
kann man zweckmäßig zu einer Mittelkraft  $\frac{P}{2}$ , angreifend in der Trägermitte, vereinigen, so daß sich für die Berechnung des Trägers die Belastungsskizze, siehe Figur 302, ergibt.



Figur 302.

## b) Belastung und Berechnung des Wangenträgers.

298. Der Wangenträger ist auf seine ganze Länge durch einen halben Treppenlauf, also durch  $\frac{P}{2}$  belastet, siehe Figur 303. Bezeichnet  $\alpha$  den



Figur 303.

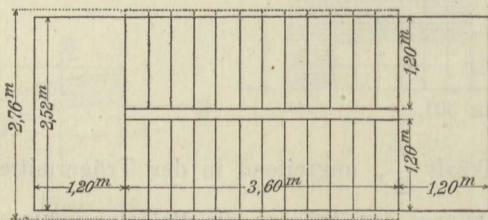
Neigungswinkel der Treppe gegen die Horizontale, so ist die den Träger auf Biegung beanspruchende Kraft  $N = \frac{P}{2} \cos \alpha$ , die Länge des Trägers aber  $L' = \frac{L}{\cos \alpha}$ ; für die Größe des Biegemoments gilt also die Gleichung:

$$164) \dots M = \frac{1}{8} \frac{P}{2} \cos \alpha \frac{L}{\cos \alpha} = \frac{1}{8} \frac{P}{2} L$$

Das Biegemoment ist von der Neigung  $\alpha$  der Treppe unabhängig.

## 4. Übungsaufgaben.

299. Aufgabe 141. Für die, siehe Figur 304, skizzierte Treppenanlage sollen die Podestträger berechnet werden. Die Treppe ist eine



Figur 304.

freitragende und schwere. Die Steigung beträgt 17 cm, die Auftrittsweite 30 cm. Der Podest ist ein Kappenpodest mit einer Pfeilhöhe  $= \frac{1}{8}$  Spannweite; die Stockwerkshöhe ist 4,42 m. Belastung der Treppe = 1000 kg für den Quadratmeter.

**Auflösung.** Für den vorliegenden Fall hat man  $442:17 = 26$  Steigungen, demnach 24 Auftritte.

Die Länge der Treppe im Grundriß beträgt also:

$$\frac{24}{2} \cdot 0,30 = 3,60 \text{ m}$$

Die Belastung eines Treppenlaufs ist:

$$P = 3,60 \cdot 1,1 \cdot 1,20 \cdot 1000 = 4752 \text{ kg}$$



Die halbe Podestbelastung ist:

$$Q = \frac{1,20 \cdot 2,76 \cdot 1000}{2} = 1656 \text{ kg}$$

Nach der Belastungsskizze, siehe Figur 305, wird der Auflagerdruck:

$$A = \frac{1656}{2} + \frac{4752 \left( \frac{276 - 132}{2} \right)}{276} = 828 + 3616 = 4444 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt auf der Strecke  $ac$  in einer Entfernung  $x$  von  $a$ , die sich aus der Gleichung berechnet:

$$\left( \frac{1656}{276} + \frac{4752}{132} \right) x = 4444 \text{ oder}$$

$$x = \frac{4444}{42} = 106 \text{ cm}$$

Das größte Biegemoment ist:

$$M = \frac{4444 \cdot 106}{2} = 235532$$

Hieraus folgt:

$$W = \frac{235532}{750} = 314$$

Diesem Werte entspricht ein I. N. P. Nr. 23 mit einem  $W = 317$ .

Bei der gewählten Podestkappe ist der Horizontalschub des Podestes gleich:

$$2 \cdot 1656 = 3312 \text{ kg}$$

Zu dessen Annahme sind vier Zugstangen erforderlich; der Durchmesser einer Stange beträgt:

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 1656}{3,14 \cdot 800}} = \sqrt{1,32} = \text{rund } 12 \text{ mm}$$

**Anmerkung 48.** Wollte man den Kappenschub durch den Podestträger allein aufnehmen lassen, so müßte dieser auf zusammengesetzte Biegezugfestigkeit berechnet werden. Das von dem Horizontalschub erzeugte größte Biegemoment ist:

$$M = \frac{2 \cdot 1656 \cdot 276}{8} = 114264$$

Das größte Biegemoment, hervorgerufen durch die Podestbelastung, ist: 235532

Nimmt man N. P. Nr. 38 an, so hat man hierfür:

$$\sigma = \frac{235532}{1274} + \frac{114264}{153} = 185 + 748 = 933$$

das Profil genügt.

Aus vorstehendem geht hervor, daß die Träger bedeutend größer und demgemäß auch schwerer ausfallen, wenn sie den Kappenschub für sich allein aufnehmen müssen, als dies der Fall ist, wenn der Horizontalschub durch besondere Konstruktionsteile abgefangen wird.

**300. Aufgabe 142.** Die in Figur 304 in ihren Ausmaßen gegebene Treppe soll eine leichte sein und die Stufen durch Wangen gestützt werden. Es sind die Podest- und Wangenträger zu berechnen.

Belastung der Treppe für den Quadratmeter = 650 kg.

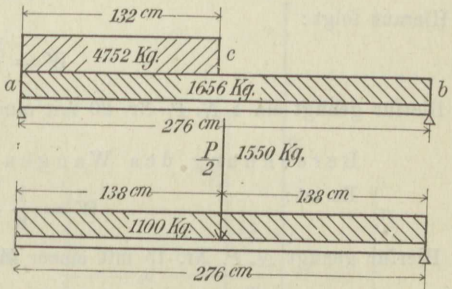
**Auflösung.** Belastung eines Treppenlaufs:

$$P = 1,32 \cdot 3,60 \cdot 6,50 = 3088,8, \text{ rund } 3100 \text{ kg}$$

daher ist:

$$\frac{P}{2} = 1550 \text{ kg}$$

Figur 305.



Figur 306.

Belastung des halben Podestes :

$$Q = \frac{1,20 \cdot 2,76 \cdot 650}{2} = 1076,4 \text{ kg rund } 1100 \text{ kg}$$

Der gefährliche Querschnitt liegt in der Trägermitte und das Biegemoment daselbst ist:

$$M = \frac{1}{4} \cdot 1550 \cdot 276 + \frac{1}{8} \cdot 1100 \cdot 276 \\ = 106950 + 37950 = 144900$$

Hieraus folgt :

$$W = \frac{144900}{750} = 193$$

Hierfür genügt ein I N. P. Nr. 20 mit einem  $W = 216$ .

Berechnung des Wangenträgers.

Es ist:

$$W = \frac{1}{8} \cdot \frac{1550 \cdot 360}{750} = 93$$

Hierfür genügt N. P. Nr. 15 mit einem  $W = 99$ .

## P. Der mehrfach belastete Träger auf zwei Stützen unter der Einwirkung von beweglicher direkter Belastung.

### 1. Bestimmung des größten Biegemoments.

a) Erster Fall. Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht.

301. Ist ein auf zwei Stützen aufruhender Träger durch eine bewegliche Einzellast beansprucht, so ist für jede Stellung der Einzellast das größte auftretende Biegemoment unter dem Angriffspunkt  $c$  der Last. Dieses Moment besitzt den Wert:

$$165) \dots M = Ax$$

wenn  $A$  den linksseitigen Auflagerdruck bezeichnet. Nun ist bekanntlich:

$$166) \dots A = \frac{P(l-x)}{l}$$

daher ist:

$$167) \dots M = \frac{P(l-x)x}{l}$$

Dieser Ausdruck erhält seinen größten Wert für  $x = \frac{l}{2}$ , d. h. die bewegliche Einzellast  $P$  bringt das größte Biegemoment hervor, wenn sie über der Mitte des Trägers sich befindet.



**b) Zweiter Fall. Der Träger ist durch eine Gruppe von beweglichen Einzellasten beansprucht.**

302. Sind zwei Lasten  $F_1$  und  $P_2$  mit unveränderlichem Abstände  $a$ , siehe Figur 307, auf dem Träger vorhanden und bewegt sich diese Lastgruppe über den Träger hin, so entsteht bei der in der Figur 307 gezeichneten Stellung im Punkte  $c$  ein Moment  $M = Ax$ . Nun ist aber:

$$168) \dots A = \frac{R(l - x - \xi)}{l}$$

daher ist:

$$169) \dots M = \frac{R(l - x - \xi)}{l} x$$

Dieser Ausdruck erhält seinen größten Wert für:

$$170) \dots x = \frac{l}{2} - \frac{\xi}{2}$$

In diesem Falle hat aber die Last  $P_1$  von der Trägermitte  $m$  die nämliche Entfernung wie die Mittelkraft  $R$  der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ .

In dem Punkte  $d$ , siehe Figur 307, entsteht ein Moment:

$$171) \dots M = A(x + a) - R(a - \xi)$$

oder den Wert von  $A$  aus Gleichung 168) eingesetzt:

$$172) \dots M = \frac{R(l - x - \xi)(x + a)}{l} - R(a - \xi)$$

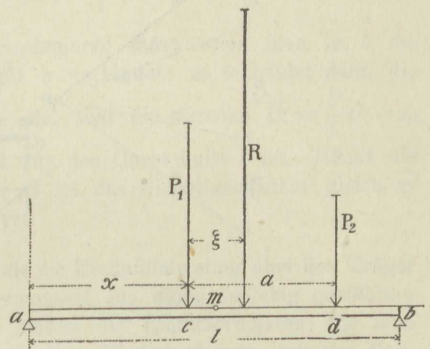
Dieser Ausdruck erhält seinen größten Wert für:

$$173) \dots x = \frac{l - \xi - a}{2}$$

d. h. die Kraft  $P_2$  ist von der Trägermitte so weit entfernt wie die Mittelkraft  $R$  der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Das größte der beiden Momente bei  $c$  oder  $d$  ist das absolut größte Moment, das überhaupt bei der Bewegung der Lastgruppe  $P_1 P_2$  auf dem Träger hervorgebracht werden kann.

Das Vorstehende läßt sich kurz in folgendem Satze zusammenfassen:

„Bewegt sich eine Lastgruppe über einen Träger hinweg, so erzeugt jede Last der Gruppe in dem unter der Last befindlichen Querschnitte dann das größte Biegemoment, wenn die betreffende Last und die Mittelkraft der Lastgruppe von der Trägermitte gleichweit abstehen.“



Figur 307.





Liegt der Angriffspunkt der beweglichen Kraft links vom Querschnitt  $c$  etwa in  $i$ , so erhält man zunächst den Auflagerdruck

$$B = \frac{P' \xi'}{l} \text{ und daher für das Moment in } c$$

$$M'_c = \frac{P' \xi'}{l} (l - x)$$

Setzt man wieder

$$P' = 1, \text{ so wird } M'_c = \frac{\xi'}{l} (l - x)$$

welcher Ausdruck sich ebenfalls einfach konstruieren läßt, wenn man in  $b$  die Auflagervertikale  $\overline{bc} = l - x$  zieht und  $c$  mit  $a$  verbindet; es schneidet dann die

Vertikale durch  $i$  aus  $ac$  den Punkt  $k$  so aus, daß die Strecke  $\overline{ik} = \frac{\xi'}{l} (l - x)$

d. h. gleich dem Biegemoment von  $P' = 1$  für den Querschnitt  $c$  ist. Rückt die Last in den Querschnitt  $c$  hinein, also nach  $c$ , so ist das Biegemoment gleich  $\overline{cf}$  und erhält in diesem Falle seinen größten Wert.

**Anmerkung 50.** Den Linienzug  $afb$  bezeichnet man als die Einflußlinie einer über den Träger sich bewegenden Einzellast, auf das Biegemoment für einen beliebig gewählten Querschnitt  $c$ . Die Strecken  $\overline{gh}$ ,  $\overline{ik}$ ,  $\overline{cf}$  usw. heißen die Einflußordinaten; sie sind im Längenmaß auszudrücken. Multipliziert man diese Einflußordinaten mit der Maßzahl der beweglichen Kraft, so erhält man für jede Stellung der letzteren das Biegemoment für den Querschnitt  $c$ .

Ist z. B.  $P = 2400$  kg und  $\overline{hg} = 78,5$  cm, so ist für die Stellung der Last  $P$  in  $g$  das Biegemoment für den Querschnitt  $c$

$$M_c = 78,5 \cdot 2400 = 188400 \text{ kgcm}$$

Für die Stellung  $P'$  in  $i$  erhält man:  $\overline{ik} = 100$  cm, daher

$$M'_c = 100 \cdot 2400 = 240000 \text{ kgcm}$$

Das größte Moment, welches die Last 2400 kg hervorbringen kann, ergibt sich, wenn  $P$  über  $c$  steht, dann ist  $\overline{cf} = 133,33$  cm, also  $M_c = 133,330 \cdot 2400 = 320000$  kgcm.

Durch Rechnung findet man für die Stellung der Kraft  $P$  in  $g$

$$A = \frac{2400 \cdot 2,36}{6} = 944 \text{ und hieraus } M_c = 944 \cdot 200 = 188800$$

Für die zweite Stellung der Kraft in  $i$  erhält man:

$$B = \frac{2400 \cdot 1,5}{6} = 600 \text{ und } M'_c = 600 \cdot 400 = 240000$$

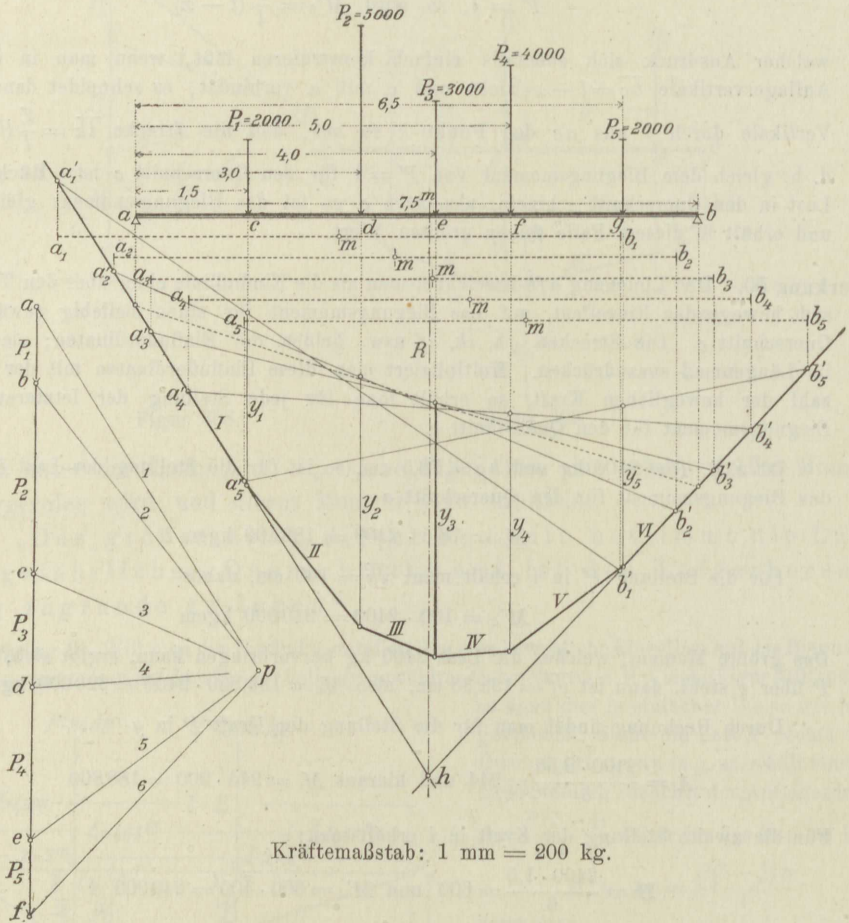
Für die Stellung der Last in  $c$  selbst ergibt sich

$$A = \frac{2400 \cdot 4}{6} = 1600, \text{ daher } M_c = 1600 \cdot 200 = 320000$$

304. **Aufgabe 143.** Auf einem Träger  $ab$ , siehe Figur 311, bewegt sich der dort verzeichnete Lastenzug von einem Auflager zum andern. Es ist die gefährlichste Stellung des Lastenzugs und das hierdurch verursachte größte Biegemoment zu ermitteln.

**Auflösung.** Die gefährlichste Stellung des Lastenzugs ermittelt man am schnellsten durch Zeichnung. Man zeichnet zu dem Lastenzug ein Kräfte- und Seilviereck, von der

siehe Figur 312 und 311, und bestimmt die Mittelkraft  $R$  des Kräftesystems. Anstatt nun den Lastenzug zu verschieben, kann man diesen festhalten und unter ihm den Träger so verschieben, daß jede der einzelnen Lasten diejenige Stellung einnimmt, für welche sie das größte Moment hervorbringt; dies ist der Fall, wenn die betreffende Last von der Trägermitte ebenso weit absteht wie die Mittelkraft  $R$  des Lastenzugs. In der Figur 312 sind die bezüglichen Stellungen eingetragen.



Figur 312.

Figur 311.

So ist z. B. die Strecke  $\overline{a_1 b_1}$  gleich der Trägerlänge  $\overline{ab}$  so eingezeichnet, daß der Mittelpunkt  $m$  von  $\overline{a_1 b_1}$  von  $P_1$  und  $R$  gleich weit absteht. Die Vertikalen durch die Endpunkte  $a_1$  und  $b_1$  bestimmen auf den äußersten Seilstrahlen die Punkte  $a'_1$  und  $b'_1$  der Schlußlinie des Seilviecks für die Trägerstellung  $a_1 b_1$ , wodurch in  $y_1$  das dem Lastenzug entsprechende Biegemoment unter der Last  $P_1$  bestimmt ist. Für die Last  $P_2$  ergibt sich die Trägerstellung  $a_2 b_2$  und damit als Schlußlinie die Linie  $a'_2 b'_2$  und hieraus  $y_2$  als größtes Moment. In gleicher Weise findet man für die Lasten  $P_3, P_4$  und  $P_5$  die größten Momente  $y_3, y_4$  und  $y_5$ . Unter allen diesen Momenten besitzt  $y_3$  den größten Wert. Die ungünstigste Stellung des Lastenzugs ergibt sich also, wenn



die Last  $P_3$  von der Trägermitte  $m$  ebenso weit absteht wie die Mittelkraft  $R$ .

**Anmerkung 51.** Die Schlußlinien  $a_1'b_1'$ ,  $a_2'b_2'$ , ... siehe Figur 306, umhüllen eine Parabel; die zugehörigen  $y$  werden um so größer, je näher sie der Mittelkraft  $R$  zu liegen kommen. Hieraus folgt, daß das absolut größte Moment eines beweglichen Lastenzugs unter jener Last stattfindet, welche der Mittelkraft  $R$  des Lastenzugs am nächsten liegt, und zwar wird das Moment um so größer, je größer die Lasten sind, welche der Mittelkraft zunächst liegen. In dem in Aufgabe 143 behandelten Beispiele ist also  $P_3$  jene Last, unter welcher das größte Biegemoment auftritt, wenn  $P_3$  von der Trägermitte  $m$  und der Mittelkraft  $R$  gleich weit absteht.

**Anmerkung 52.** Für das in Aufgabe 143 behandelte Beispiel erhält man, unter Berücksichtigung der gewählten Maßstäbe, folgende Zahlenergebnisse: Für die Entfernung des Pols  $p$  von dem Kräftezug, d. h. für den Polabstand  $H$  ist aus der Zeichnung, siehe Figur 312, zu entnehmen:

$$H = 30 \text{ mm}$$

Es ist somit:

$$H = 30 \cdot 200 = 6000 \text{ kg}$$

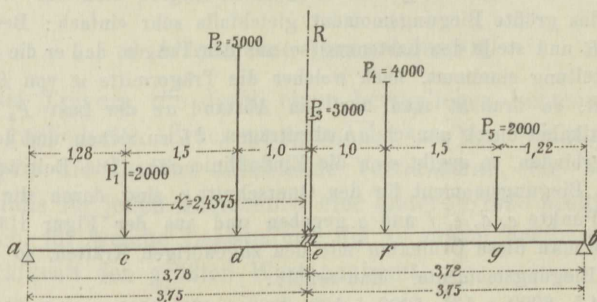
Das auf den Polabstand  $H$  reduzierte Biegemoment für den Querschnitt  $e$  ist:

$$y_3 = 341 \text{ cm}$$

daher ist das wirkliche Biegemoment:

$$M = 6000 \cdot 341 = 2046000 \text{ kgem}$$

Durch Rechnung ergibt sich zunächst, siehe Figur 313, die Entfernung  $x$



Figur 313.

der Mittelkraft  $R$  von der ersten Kraft  $P_1$  unter Annahme eines Drehungspunktes  $c$  die Gleichung:

$$x = \frac{1,5 \cdot 5000 + 2,5 \cdot 3000 + 3,5 \cdot 4000 + 5,0 \cdot 2000}{16000} = 2,4375 \text{ m}$$

Die Entfernung der Kraft  $P_3$  von  $P_1$  beträgt 2,5 m. Die Mittelkraft  $R$  und die Kraft  $P_3$  sind somit 0,0625 m voneinander entfernt, daher liegt  $P_3$  um 0,03125 m rechts von der Trägermitte  $m$ , und der gefährliche Querschnitt ist 3,78 m von dem linken Auflager  $a$  entfernt. Für diese Stellung, siehe Figur 308, ergibt sich als Auflagergedruck:

$$A = \frac{2000 \cdot 6,22 + 5000 \cdot 4,72 + 3000 \cdot 3,72 + 4000 \cdot 2,72 + 2000 \cdot 1,22}{7,5} = 8069 \text{ kg}$$

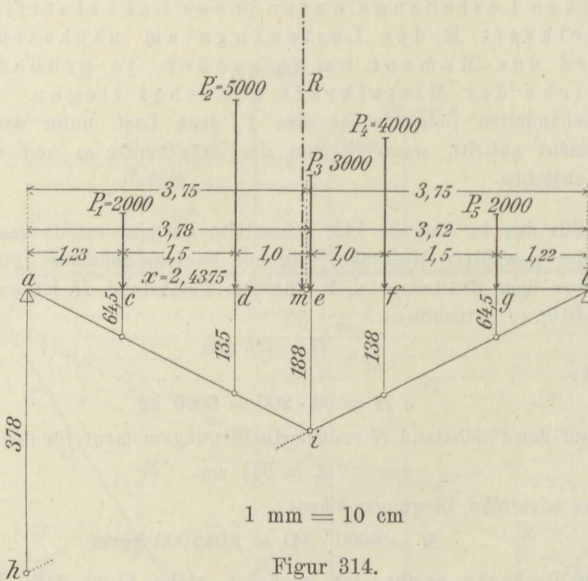
Das Biegemoment im gefährlichen Querschnitt  $e$  ist somit:

$$M = 8069 \cdot 378 - 2000 \cdot 250 - 5000 \cdot 100 = 2050082 \text{ kgcm}$$

Der Unterschied in den Ergebnissen der Zeichnung und Rechnung rührt von dem Fehler in dem Abgreifen der Länge  $y_3$  her.

Würde man  $y_3 = 341,5$  annehmen, so erhielte man:

$$M = 6000 \cdot 341,5 = 2049000 \text{ kgcm}$$



**Anmerkung 53.** Unter Benutzung der Einflußlinie ergibt sich für den dargestellten Lastenzug das größte Biegemoment gleichfalls sehr einfach: Bestimmt man die Mittelkraft  $R$  und stellt den Lastenzug so auf den Träger, daß er die in Anmerkung 51 bemerkte Stellung einnimmt, nach welcher die Trägermitte  $m$  von  $R$  und  $P_3$  gleich weit absteht, so braucht man nur den Abstand  $ae$  der Last  $P_3$  von  $a$  auf der Auflagervertikalen durch  $a$  nach  $ah$  abzutragen,  $bh$  zu ziehen und den Schnittpunkt  $i$  mit  $a$  zu verbinden, so ergibt sich die Einflußlinie  $aib$ . Die Beiträge der einzelnen Lasten zum Biegemoment für den Querschnitt  $c$  sind durch die Einflußordinaten durch die Punkte  $c, d, e, f$  und  $g$  gegeben und aus der Figur 314 zu entnehmen. Multipliziert man diese Ordinaten mit den zugehörigen Kräften, so ergeben sich die wirklichen Biegemomente. Man erhält:

$$M_c = 64,5 \cdot 2000 + 135 \cdot 5000 + 188 \cdot 3000 + 138 \cdot 4000 + 64,5 \cdot 2000 = 2049000$$

ein Wert, der mit dem durch Rechnung ermittelten hinlänglich übereinstimmt.

### c) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte Last beansprucht.

305. Die ungünstigste Belastung des Trägers ist vorhanden, wenn der ganze Träger voll belastet ist. Es liegt dann der gefährliche Querschnitt in der Trägermitte, und man hat den vierten einfachen Belastungsfall. Die Momentenlinie ist eine Parabel. Das größte Biegemoment ist, wenn  $p$  die Belastung der Längeneinheit bezeichnet:

$$174) \dots M = \frac{p l^2}{8}$$



## d) Übungsaufgaben.

306. **Aufgabe 144.** Übereinen Träger von 5,5 m Stützweite bewegt sich die in Tabelle XXII unter Nr. 7 Anhang II angegebene Tenderlokomotive. Es ist die ungünstigste Stellung und das hierdurch hervorgerufene größte Biegemoment zu ermitteln. Als Belastungen sind nur die halben Achsdrücke, d. h. die Raddrücke anzunehmen.

307. **Aufgabe 145.** Ein Träger von 6 m Länge ist durch eine auf seine ganze Länge gleichmäßig verteilte Belastung von 5 t = 5000 kg beansprucht. Außerdem bewegt sich über den Träger ein Lastwagen, siehe Tabelle XXII Nr. 11 Anhang II. Von den Achsdrücken sind nur die halben Beträge als Belastung für den Träger in Rechnung zu stellen. Es ist das größte Biegemoment, das auftreten kann, zu ermitteln.

308. **Aufgabe 146.** Ein Träger von 12 m Länge ist durch eine gleichmäßig verteilte Belastung von 450 kg für den laufenden Meter beansprucht. Außerdem bewegt sich über den Träger ein Lastenzug Nr. 1, siehe Tabelle XXII Anhang II. Es ist das größte Biegemoment, das auftreten kann, zu ermitteln.

## 2. Bestimmung der größten Vertikalkraft.

## a) Allgemeine Bemerkungen.

309. Bei Trägern, die durch einen beweglichen Lastenzug beansprucht werden, z. B. gegliederten Brückenträgern, ist es von Wichtigkeit, an jeder Stelle des Trägers die daselbst auftretende Vertikalkraft, die bei wechselnder Belastung ebenfalls für jeden Querschnitt eine andere Größe besitzt, zu ermitteln, bzw. festzustellen, für welche Laststellung die zu einem bestimmten Querschnitt gehörige Vertikalkraft den größten Wert annimmt.

## b) Erster Fall. Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht.

310. Bewegt sich eine Einzellast  $P$  etwa von  $b$  nach  $a$ , siehe Figur 315, so ist für irgendeinen Querschnitt, z. B.  $d$ , die Vertikalkraft, solange die Last rechts von  $d$  sich befindet, gleich dem Auflagergedrückt  $A$ ; d. h. es ist

$$175) \dots V_a = A = P \frac{x}{l} = \text{positiv,}$$

befindet sich die Last links vom Querschnitt  $d$ , so ist die Vertikalkraft in  $d$

$$175a) \dots V_a = A - P = P \frac{x}{l} - P = \frac{P(x-l)}{l} = -\frac{Py}{l} = \text{negativ.}$$

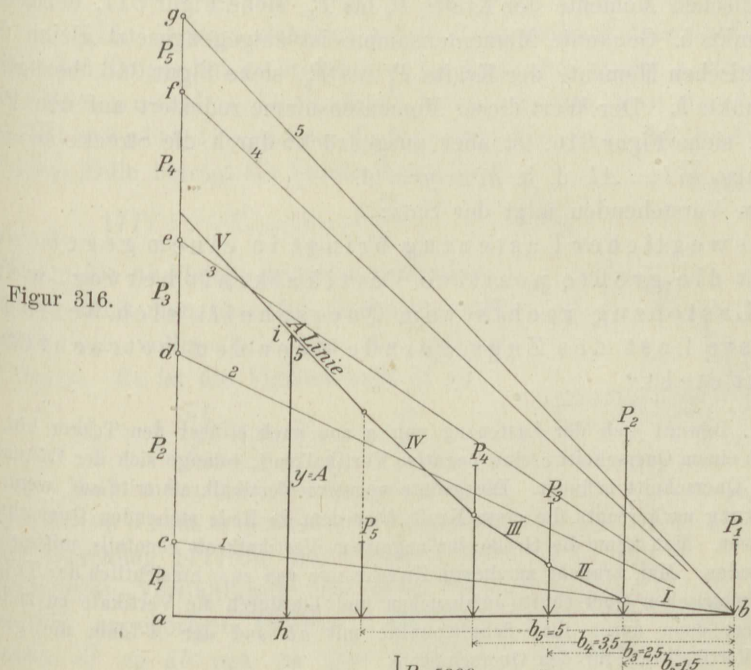




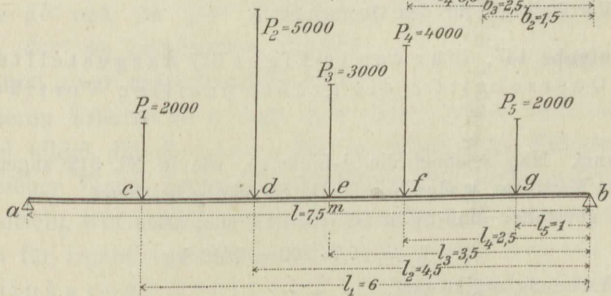
c) Zweiter Fall. Der Träger ist durch eine Gruppe von beweglichen Einzellasten beansprucht.

312. Bewegt sich ein Lastenzug, siehe Figur 317, über einen Träger  $ab$ , und zwar von  $b$  nach  $a$  hin, so entspricht diesem Lastenzug gleichfalls eine  $A$ -Linie, die sich in einfacher Weise konstruieren läßt.

Man trägt, siehe Figur 316, auf dem Träger  $ab$  den Lastenzug so ab, daß die Last  $P_1$  über  $b$  steht und die Lasten  $P_2, P_3$  usw. nach links hin in



Figur 316.



Figur 317.

Maßstab der Längen = 1 : 100

Maßstab der Kräfte 1 mm = 200 kg.

ihren gegebenen Abständen voneinander folgen, errichtet hierauf in  $a$  die Senkrechte  $ag$  zu  $ab$  und trägt auf  $ag$  die Lasten des Zugs zu einem Kräftezug an. Wählt man nun den Punkt  $b$  als Pol und konstruiert zu dem in Figur 316 gezeichneten Kräftesystem das Seilvieck I, II, III . . . , so ist dieses Seilvieck die zu dem Lastenzuge der Figur 317 gehörige  $A$ -Linie. Für irgend eine Stellung des Lastenzugs, z. B. für die in Figur 317 dargestellte,

ergibt sich dann für den unter der ersten Last  $P_1$  befindlichen Querschnitt  $c$  die größte positive Vertikalkraft  $V_c$  in der durch die Richtungslinie von  $P_1$  aus  $ab$  und der  $A$ -Linie herausgeschnittenen Strecke  $\bar{hi} = y = A = V_c$ , denn man erhält für die angegebene Stellung des Lastenzugs für den Auflagergedrückt in  $a$  die Gleichung:

$$176) \dots Al = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + P_4 l_4 + P_5 l_5$$

Nun stellt aber die rechte Seite dieser Gleichung nichts anderes dar als die Summe der statischen Momente der Kräfte  $P_1$  bis  $P_5$ , siehe Figur 317, bezüglich des Drehungspunkts  $b$ . Genannte Momentensumme ist entgegengesetzt gleich der Summe der statischen Momente der Kräfte  $P_1$  bis  $P_5$ , siehe Figur 316, bezüglich des Drehungspunkts  $h$ . Der Wert dieser Momentensumme reduziert auf den Polabstand  $\bar{ab} = l$ , siehe Figur 316, ist aber ausgedrückt durch die Strecke  $\bar{hi} = y$ .

Es ist also  $\bar{hi} l = Al$ , d. h.  $\bar{hi} = y = A$ .

Aus dem Vorstehenden folgt der Satz:

„Ein beweglicher Lastenzug bringt in einem gegebenen Querschnitt die größte positive Vertikalkraft hervor, wenn der ganze Lastenzug rechts vom Querschnitt sich befindet und die erste Last des Zugs gerade über dem betrachteten Querschnitt steht.“

**Anmerkung 54.** Bewegt sich der Lastenzug von  $a$  aus nach  $b$  über den Träger hin, so entsteht in einem Querschnitt  $c$  eine negative Vertikalkraft, solange sich der Lastenzug links vom Querschnitt befindet. Die größte negative Vertikalkraft tritt auf, wenn bei der Bewegung nach rechts die erste Kraft über dem in Rede stehenden Querschnitt, z. B.  $c$ , steht. Man kann die Größe der negativen Vertikalkraft ebenfalls mittels der  $A$ -Linie finden. Man braucht zu diesem Zwecke nur den zu  $c$  hinsichtlich der Trägermitte symmetrischen Querschnitt aufzusuchen und hierdurch die Vertikale zu ziehen; diese liefert dann durch ihre Schnittpunkte mit  $ab$  und der  $A$ -Linie die größte negative Vertikalkraft für den Querschnitt  $c$ .

313. **Aufgabe 147.** Für den in Figur 317 dargestellten Lastenzug ist für den Querschnitt  $c$  die größte positive Vertikalkraft  $V$  zu ermitteln.

**Auflösung.** Man zeichnet die  $A$ -Linie so, wie in Nr. 312 angegeben wurde und zieht durch  $c$  die Vertikale, wodurch sich die Strecke  $y$  bestimmt.

Bei den gewählten Maßstäben ist  $y = 36,7$  mm, also:

$$V_c = 36,7 \cdot 200 = 7340 \text{ kg}$$

Durch Rechnung ergibt sich:

$$V_c = A = \frac{2000 \cdot 6 + 5000 \cdot 4,5 + 3000 \cdot 3,5}{7,5} = 4000 \cdot 2,5 = 7333,33 \text{ kg}$$

## d) Übungsaufgaben.

314. **Aufgabe 148.** Man zeichne für einen Träger von 20 m Länge die  $A$ -Linie zu dem nach Tabelle XXII Nr. 3 Anhang II zusammengesetzten Lastenzug, wenn die dort angelegten Achsendrücke als Lasten auftreten.



315. **Aufgabe 149.** Man zeichne für einen Träger von 8 m Länge zu der in Tabelle XXII unter 7 Anhang II aufgeführte Tenderlokomotive die *A*-Linie und bestimme für einen vom linken Auflager *a* um 3 m entfernten Querschnitt die daselbst auftretende größte positive und negative Vertikalkraft.

**e) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte bewegliche Last beansprucht.**

316. Bewegt sich eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte Last *p* über den Träger hin, so bringt diese in einem Querschnitt *c*, siehe Figur 318, die größte positive Vertikalkraft hervor, wenn die ganze rechts vom Querschnitt liegende Trägerstelle voll belastet ist; denn in diesem Falle beträgt die Vertikalkraft in *c*:

$$177) \dots V_c = A = \frac{p \cdot x^2}{2l}$$

Die größte überhaupt auftretende Vertikalkraft erhält man über den Auflagern, und zwar bei voller Belastung des ganzen Trägers. Es ist die Vertikalkraft in *a*:

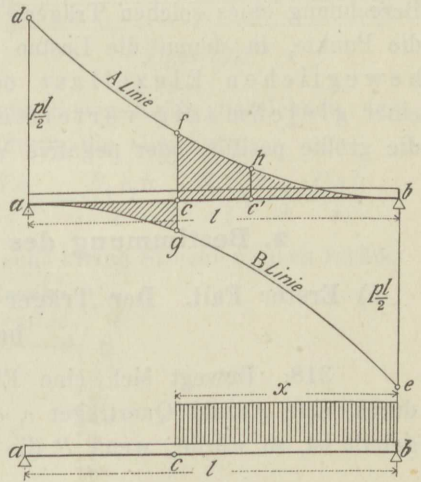
$$V_a = + \frac{pl}{2} \text{ in } b; V_b = - \frac{pl}{2}$$

Läßt man den Punkt *c* den ganzen Träger von *b* nach *a* durchlaufen, berechnet aus Gleichung 177) die dem Punkte *c* entsprechende Vertikalkraft und trägt diese in dem zugehörigen Punkte *c* als Senkrechte *cf* zu *ab* auf, so gibt die Verbindungslinie der so bestimmten Punkte eine Kurve, und zwar eine Parabel, siehe Figur 318, deren Scheitel in *b* liegt und deren Achse senkrecht zu *ab* steht. Diese Parabel bildet die *A*-Linie für die bewegliche Belastung.

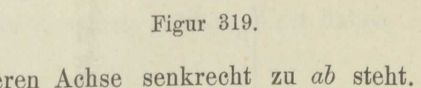
In gleicher Weise kann man die Linie der Auflagerdrücke *B* oder die *B*-Linie ermitteln, wenn die gleichmäßig verteilte Last von *a* nach *b* vorrückt. Es entsteht dann für irgendeinen Querschnitt *c* die größte negative Vertikalkraft, wenn die links von *c* liegende Trägerstrecke voll belastet ist. Diese Vertikalkraft ist also dargestellt durch die Strecke *cg*, siehe Figur 318.

Man kann auch, ohne die *B*-Linie gezeichnet zu haben, zu einem Querschnitt, z. B. *c*, die in ihm auftretende größte negative Vertikalkraft ermitteln; man braucht zu diesem Zwecke nur den zu *c* hinsichtlich der Trägermitte symmetrischen Punkt *c'* auf *ab* zu bestimmen, dann liefert die Vertikale durch *c'* in der Strecke *c'h* die zum Querschnitt *c* gehörige größte negative Vertikalkraft.

Figur 318.



Figur 319.



## Q. Der mehrfach belastete Träger auf zwei Stützen unter der Einwirkung von beweglicher, indirekter Belastung.

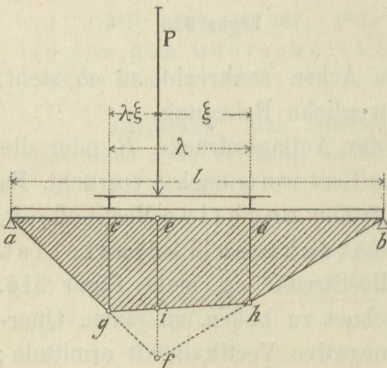
### 1. Allgemeine Bemerkungen.

317. Bei den vorangehenden Betrachtungen war vorausgesetzt worden, daß die Belastungen eines Trägers unmittelbar, d. h. direkt auf letzteren einwirken. Häufig ist aber die Anordnung so getroffen, daß die Lasten von dem Träger nur in gewissen festen Punkten, den Knotenpunkten, aufgenommen werden können und auf diese Punkte durch besondere Konstruktionsteile, Längs- und Querträger, siehe Figur 320, übertragen werden. In diesem Falle spricht man von einer indirekten Belastung eines Trägers. Es handelt sich bei der Berechnung eines solchen Trägers darum, für bestimmte Trägerstellen, das sind die Punkte, in denen die Lasten aufgenommen werden, zu einer gegebenen beweglichen Einzellast oder zu einem Lastenzuge, oder zu einer gleichmäßig verteilten Last, das größte Bieugungsmoment bzw. die größte positive oder negative Vertikalkraft zu ermitteln.

### 2. Bestimmung des größten Bieugungsmoments.

#### a) Erster Fall. Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht.

318. Bewegt sich eine Einzellast  $P$  über einen Träger  $ab$  hin, der durch eine Anzahl Querträger  $c, d, \dots$  siehe Figur 320, in einzelne Felder geteilt ist, so würde, wenn  $P$  die in der Figur angegebene Stellung einnimmt,



Figur 320.

bei direkter Belastung die Momentenfläche aus dem Dreieck  $abf$  bestehen. Bei indirekter Belastung wird aber  $P$  zunächst von den Knotenpunkten  $c$  und  $d$  aufgenommen, und zwar betragen die Auflagerdrücke in  $c$  und  $d$  bzw.:

$$C = \frac{P(\lambda - \xi)}{\lambda}$$

und

$$D = \frac{P\xi}{\lambda}$$

Durch diese Drücke entstehen in  $c$  und  $d$  die Bieugungsmomente gleich den Strecken  $\overline{cg}$  und  $\overline{dh}$ , so daß sich nunmehr die Momentenfläche  $aghb$  ergibt. Hieraus folgt aber, daß das größte Bieugungsmoment nur in einem Knotenpunkte auftreten kann, und zwar nur dann, wenn die Kraft  $P$  über dem Knotenpunkte steht.

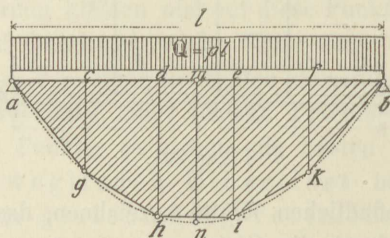




liegenden Kräfte zur Summe der übrigen Kräfte kleiner ist als das Verhältnis der beiden Abschnitte  $a$  und  $b$ , in welche der Träger im Punkte  $c$  geteilt wird.“

**c) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte bewegliche Last beansprucht.**

320. Die ungünstigste Belastung ist wieder vorhanden bei voller Belastung des ganzen Trägers, siehe Figur 322. Die Momentenlinie ist ein



Figur 322.

Vieleck, das der Parabel eingeschrieben ist, deren Achse senkrecht zur Trägerachse durch die Trägermitte  $m$  geht und deren Scheitel von  $m$  um die Strecke:

$$\overline{mn} = \frac{p l^2}{8}$$

entfernt ist. Die Ecken des Momentenvielecks liegen auf den Vertikalen durch die Knotenpunkte. Das größte Biegemoment tritt demnach in den der Trägermitte zunächst liegenden Knotenpunkten auf.

321. **Aufgabe 150.** Über einen Träger  $ab$ , siehe Figur 324, auf welchem die Lasten durch Querträger in den Punkten  $a, b, c, d, e, f$  übertragen werden, bewegt sich ein Lastenzug, bestehend aus den Lasten  $P_1$  bis  $P_5$ . Außerdem ist der Träger auf seine ganze Länge durch eine gleichmäßig verteilte Last  $Q$  beansprucht. Es ist das größte auf dem Träger hervorgerufene Biegemoment zu ermitteln.

**Auflösung.** Man zeichnet sich zunächst wieder ein Kräfte- und Seilviereck, siehe Figur 323 und 324. Will man nun für  $c$  das größte Moment ermitteln, so muß über  $c$  jene Last stehen, durch welche die Bedingung 178 erfüllt wird, d. i. im vorliegenden Falle die Last  $P_2$ , denn für diese ist:

$$R_1 = 2000, \quad R_2 = 9000$$

daher:

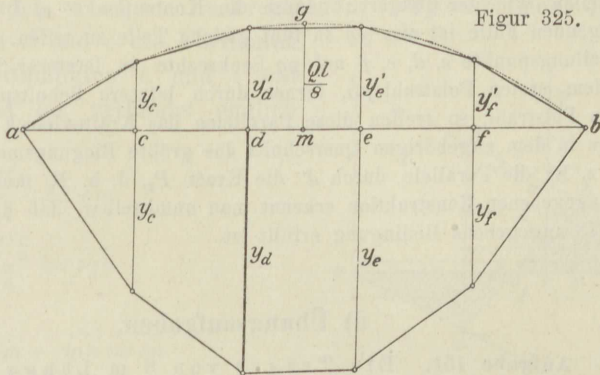
$$\frac{2000}{9000 + 5000} < \frac{1,5}{6} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{7} < \frac{1}{4}$$

Gibt man also dem Träger die Lage  $a_1 b_1$ , so daß  $c_1$  auf die Kraftlinie von  $P_2$  fällt, zieht durch die Endpunkte  $a_1$  und  $b_1$  die Vertikalen bis zu den äußersten Seilstrahlern des Seilvierecks, so ist hierdurch die Schlußlinie  $a_1' b_1'$  und damit das zu  $c$  gehörige größte Biegemoment  $y_c$  bestimmt.

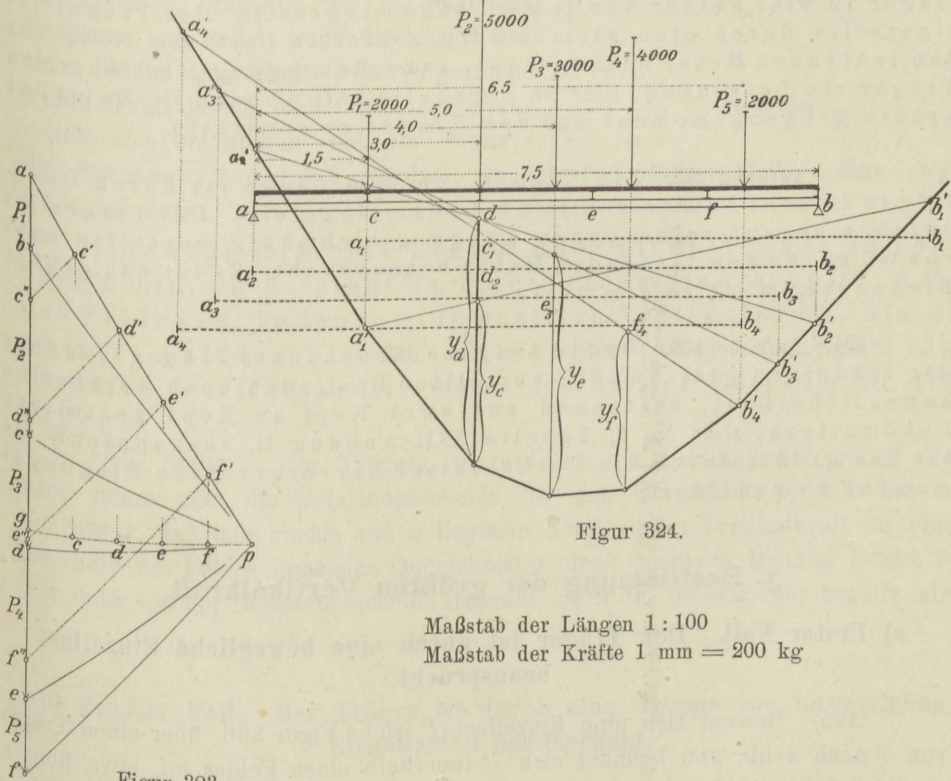
In dem Querschnitt  $d$  bringt gleichfalls die Kraft  $P_2$  das größte Biegemoment hervor, man erhält für den Träger die Lage  $a_2 b_2$ , als zugehörige Schlußlinie die Linie  $a_2' b_2'$  und hieraus das zu  $d$  gehörige Biegemoment  $y_d$ . Für den Querschnitt  $e$  ist die Kraft  $P_3$  über  $e$  zu stellen, man erhält das Moment  $y_e$ . Für den Querschnitt  $f$  endlich bringt die Kraft  $P_4$  das größte Biegemoment hervor, nämlich das Moment  $y_f$ . Das größte aller Biegemomente ist das Moment  $y_d$  für den Querschnitt  $d$ .



Die gleichmäßig verteilte Belastung  $Q$  bringt in der Trägermitte  $m$  ein größtes Biegemoment  $\frac{Ql}{8}$ , siehe Figur 325, hervor. Ermittelt man nun die Momentenparabel, so ergibt sich für den Querschnitt  $d$  in der Senkrechten  $y'd$  das durch  $Q$  hervorgerufene größte Moment.



Figur 325.



Figur 324.

Maßstab der Längen 1 : 100  
 Maßstab der Kräfte 1 mm = 200 kg

Figur 323.

Das Gesamtmoment, hervorgerufen durch die bewegliche und die ständige Belastung, ist also gleich  $ya + y'a$ . Auf Grund der gewählten Maßstäbe erhält man im vorliegenden Beispiele mit Rücksicht auf die gegebenen Kräfte  $M = ya + y'a = 33 + 13 = 46$  mm. Der Polabstand beträgt  $30 \text{ mm} = 30 \cdot 200 = 6000 \text{ kg}$ ; daher ist  $M = 46 \cdot 6000 = 276000 \text{ kgcm}$ .

**Anmerkung 55.** Graphisch läßt sich in einfacher Weise jene Kraft eines Lastenzugs ermitteln, welche über einem Querschnitt stehen muß, damit in letzterem das größte Moment hervorgebracht werde. Man braucht nämlich nur, wenn in Figur 323 durch  $af$  das dem Lastenzug entsprechende Kräftevieleck dargestellt ist, vom Pol  $p$  die Senkrechte  $pg$  zu  $af$  zu ziehen und die Strecke  $pg$  in demselben Verhältnisse einzuteilen wie der Träger  $ab$  durch die Knotenpunkte  $c, d, e, f$  eingeteilt ist; im vorliegenden Falle ist also  $pg$  in fünf gleiche Teile zu teilen. Zieht man nun durch die Teilungspunkte  $c, d, e, f$  auf  $pg$  Senkrechte zu letzterer Linie bis zum Schnitt mit dem ersten Polstrahl  $pa$ , ferner durch letztere Schnittpunkte Parallelen zum letzten Polstrahl, so treffen diese Parallelen das Kräftevieleck  $af$  auf jenen Kräften, welche in dem zugehörigen Querschnitt das größte Biegemoment hervorrufen. So trifft z. B. die Parallele durch  $d'$  die Kraft  $P_2$ , d. h.  $P_2$  muß über  $d$  stehen. Aus der angegebenen Konstruktion erkennt man unmittelbar, daß die in der Ungleichheit Nr. 178 angegebene Bedingung erfüllt ist.

#### d) Übungsaufgaben.

322. **Aufgabe 151.** Ein Träger von 8 m Länge ist durch Quertträger in vier Felder von je 2 m Länge eingeteilt. Der Träger ist einerseits durch eine gleichmäßig verteilte Last von 500 kg für den laufenden Meter beansprucht, außerdem bewegt sich über den Träger ein Lastenzug, siehe Nr. 5, Tabelle XXII Anhang II. Es ist das größte Biegemoment auf dem Träger zu ermitteln.

323. **Aufgabe 152.** Ein Träger von 24 m Länge ist durch Quertträger in acht Felder von je 3 m Länge eingeteilt. Der Träger ist durch eine auf seine ganze Länge gleichmäßig verteilte Last von 600 kg für den laufenden Meter beansprucht. Es ist das größte Biegemoment zu ermitteln.

324. **Aufgabe 153.** Der in Aufgabe 152 genannte Träger ist außer der ständigen gleichmäßig verteilten Last auch noch durch eine bewegliche Last, bestehend aus zwei Kopf an Kopf gestellten Lokomotiven, siehe Nr. 3, Tabelle XXII Anhang II, beansprucht. Es ist das größte durch die Verkehrslast hervorgerufene Biegemoment zu ermitteln.

### 3. Bestimmung der größten Vertikalkraft.

a) **Erster Fall.** Der Träger ist durch eine bewegliche Einzellast beansprucht.

325. Bewegt sich eine Einzellast  $P$ , siehe Figur 326, über einen Träger von  $b$  nach  $a$  hin und befindet sich  $P$  innerhalb eines Feldes  $cd$ , etwa über  $e$ , so überträgt sich  $P$  in den Punkten  $c$  und  $d$  auf den Träger  $ab$ , so daß in  $c$  und  $d$  die Drücke entstehen:

$$C = \frac{P\xi}{\lambda}$$

und

$$D = \frac{P(\lambda - \xi)}{\lambda}$$



Die in irgend einem Querschnitt, z. B.  $p$ , hervorgerufene Vertikalkraft ist dann

$$V_p = A - C = \frac{Px}{l} - \frac{P\xi}{\lambda}$$

Die Größe  $V_p$  läßt sich leicht graphisch darstellen. Errichtet man nämlich in den Punkten  $a$  und  $b$  zu  $ab$  die Senkrechten  $\overline{af} = \overline{bg} = P$ , zieht die Linien  $bf$  und  $ag$  und durch  $d$  und  $c$  die Vertikalen bis zu den Schnittpunkten  $h$  und  $i$  mit den Linien  $bf$  und  $ag$ , verbindet endlich  $hi$ , so ist:

$$A = \frac{Px}{l} = \overline{em}$$

$$C = \frac{P\xi}{\lambda} = \overline{mn}$$

daher:

$$V_p = \overline{em} - \overline{mn} = \overline{en}$$

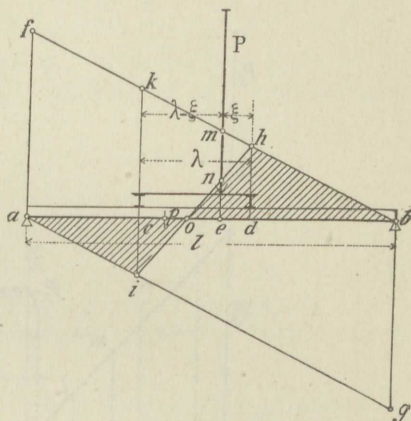
Die Linie  $hi$  schneidet die  $ab$  in einem Punkte  $o$ , und es ist, wenn die Last  $P$  in  $o$  steht, die im Querschnitt  $p$  hervorgerufene Vertikalkraft gleich Null. Aus der Figur ersieht man unmittelbar, daß der Punkt  $o$  die Strecken  $\overline{cd}$  und  $\overline{ab}$  in dem nämlichen Verhältnis teilt. Man erhält folgenden Satz:

„Bewegt sich eine Last  $P$  über einen Träger  $ab$  von  $b$  nach  $a$  hin, so entsteht in irgendeinem Querschnitt, z. B.  $p$  des Feldes  $cd$ , so lange eine positive Vertikalkraft, als die Last  $P$  auf der Strecke  $\overline{ob}$  sich befindet, dagegen eine negative Vertikalkraft, wenn  $P$  auf der Strecke  $\overline{oa}$  sich bewegt.“

Die Stelle  $o$  des Trägers, in welcher die Vertikalkraft gleich Null wird, nennt man die Belastungsscheide für den Querschnitt  $p$ . Sie hat die Bedeutung, daß jede rechts von  $o$  liegende Kraft zu der Vertikalkraft für einen innerhalb des Feldes liegenden Querschnitt  $p$  einen positiven Beitrag liefert, für jede links von der Belastungsscheide liegende Kraft der Beitrag aber negativ wird.

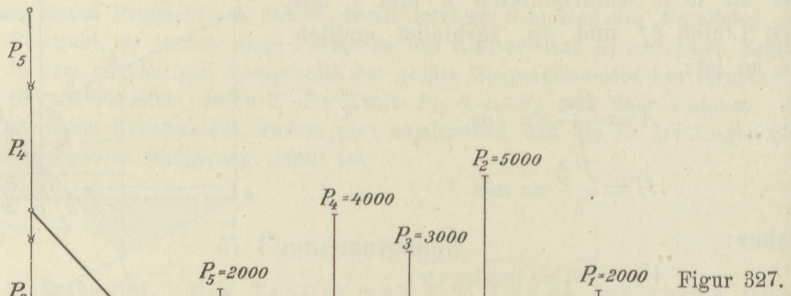
## b) Zweiter Fall. Der Träger ist durch eine Gruppe von beweglichen Einzellasten beansprucht.

326. Für einen gegebenen Lastenzug, der sich über einen Träger  $ab$  hin bewegt, läßt sich die in einem Querschnitt eines Trägerfeldes auftretende Vertikalkraft graphisch leicht ermitteln. Man zeichnet zunächst die  $A$ -Linie, siehe Figur 327. Soll nun für irgendeinen Querschnitt des Feldes  $cd$  die daselbst auftretende Vertikalkraft ermittelt werden, so stellt man den Lastenzug

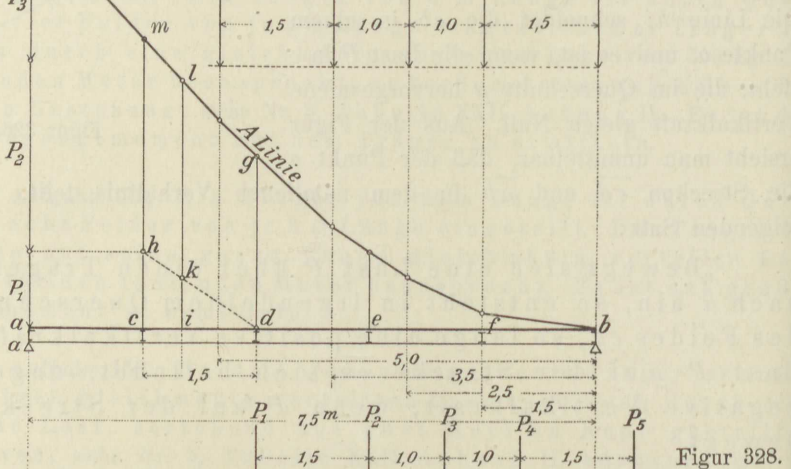


Figur 326.

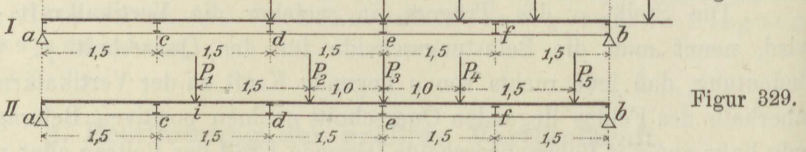
zunächst so, daß die erste Kraft  $P_1$  über dem Knotenpunkte  $d$  steht, siehe Figur 328, dann ist  $\overline{dg}$  die in  $d$  auftretende größte Vertikalkraft. Rückt der Lastenzug weiter vor, so daß die Kraft  $P_1$  in dem Felde  $cd$  erscheint und etwa über  $i$  steht, siehe Stellung II Figur 329, so erhält man jetzt die Vertikalkraft für irgend Querschnitt des Feldes  $od$ , wenn man  $\overline{ch} = P_1$  auf der Vertikalen durch  $c$  abträgt und  $dh$  zieht, in der Strecke  $\overline{kl}$ , und es kann nun



Figur 327.



Figur 328.



Figur 329.

Maßstab der Längen 1 : 100.

Maßstab der Kräfte 1 mm = 200 kg.

$\overline{kl} \geq dg$  sein, siehe Figur 327 und 330. Bezeichnet man mit  $R$  die Summe der auf dem Träger befindlichen Lasten, mit  $P_1$  die im Felde  $cd$  stehende Last, mit  $l$  die Träger- und mit  $\lambda$  die Feldlänge, so findet man, siehe Anmerkung 56, als Bedingung dafür, daß die Vertikalkraft im Felde  $cd$  beim Eintreten der Last  $P_1$  in das Feld kleiner wird als diejenige in  $d$ :

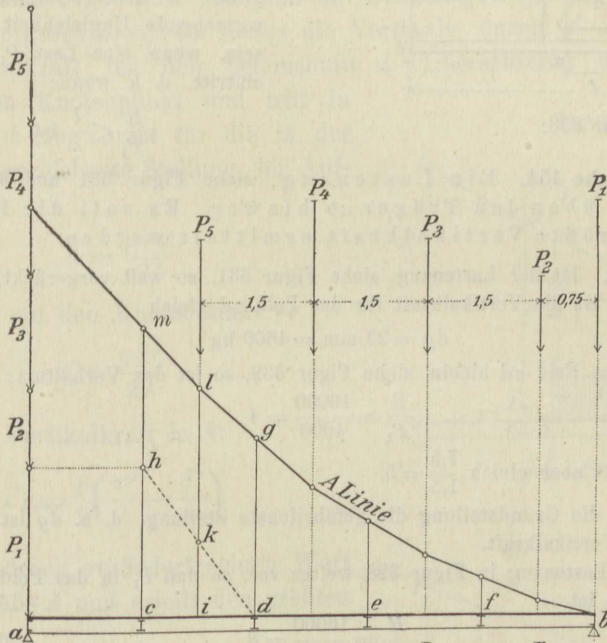
$$\frac{R}{P_1} < \frac{l}{\lambda}$$



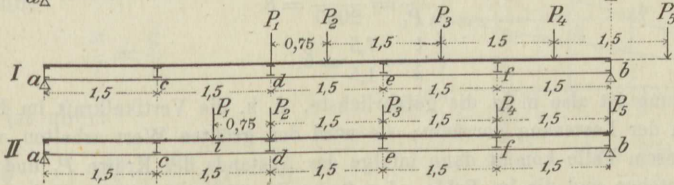
Die Stellung I des Lastenzugs, bei welcher die erste Kraft  $P_1$  über dem rechtseitigen Knotenpunkte des in Rede stehenden Feldes sich befindet, nennt man die Grundstellung des Zugs für das Feld  $cd$ .

Aus vorstehendem folgt der Satz:

„In einem Felde eines Trägers wird die größte Vertikalkraft durch die Grundstellung eines Lastenzugs hervor-



Figur 330.



Figur 331.

Figur 332.

$$P_1 = 4000 \text{ kg} \quad P_2 = 2000 \text{ kg} \quad P_3 = 3000 \text{ kg} \quad P_4 = 4000 \text{ kg} \quad P_5 = 3000 \text{ kg}$$

gerufen, wenn beim Eintreten einer Last  $P_1$  in das Feld das Verhältnis der Summe aller auf dem Träger befindlichen Lasten zu der in das Feld eingetretenen Last  $P_1$  kleiner ist als das Verhältnis der Trägerlänge zur Feldlänge.“

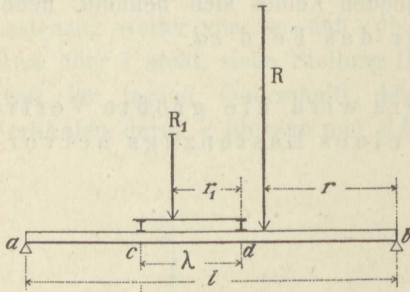
**Anmerkung 56.** Der Beweis des in Nr. 326 angeführten Satzes ergibt sich wie folgt: Aus der Figur 333 entnimmt man für die Vertikalkraft in einem Querschnitt des Feldes  $cd$ :

$$V = \frac{Rr}{l} - \frac{R_1 r_1}{\lambda}$$

Verschiebt man nun den Lastenzug um eine Strecke  $\xi$  nach links, so wird jetzt:

$$V = \frac{R(r + \xi)}{l} - \frac{R_1(r_1 + \xi)}{\lambda} = V + \left( \frac{R}{l} - \frac{R_1}{\lambda} \right) \xi$$

Soll dieser Ausdruck kleiner sein als  $V$ , so muß:



Figur 333.

$$\frac{R}{l} - \frac{R_1}{\lambda}$$

negativ sein, was nur möglich ist, wenn:

$$\frac{R}{R_1} < \frac{l}{\lambda}$$

ist. Soll also die Grundstellung das größte  $V$  hervorbringen, so muß die vorstehende Ungleichheit schon erfüllt sein, wenn eine Last  $P_1$  in das Feld eintritt, d. h. wenn:

$$\frac{R}{P_1} < \frac{l}{\lambda} \text{ ist.}$$

327. **Aufgabe 154.** Ein Lastenzug, siehe Figur 331 und 328, bewegt sich von  $b$  aus über den Träger  $ab$  hinweg. Es soll die im Felde  $cd$  auftretende größte Vertikalkraft ermittelt werden.

**Auflösung.** Ist der Lastenzug, siehe Figur 331, so weit vorgerückt, daß die Last  $P_1$  über  $d$  steht, so ist die Vertikalkraft für das Feld  $cd$  gleich

$$\overline{dg} = 23 \text{ mm} = 4600 \text{ kg}$$

Rückt nun  $P_1$  in das Feld  $cd$  hinein, siehe Figur 332, so ist das Verhältnis:

$$\frac{R}{P_1} = \frac{16000}{4000} = 4,$$

das Verhältnis  $\frac{l}{\lambda}$  ist aber gleich  $\frac{7,5}{1,5} = 5$ .

Es ist also die Grundstellung die gefährlichste Stellung, d. h.  $\overline{dg}$  ist die größte im Felde auftretende Vertikalkraft.

Rückt der Lastenzug in Figur 328 weiter vor, so daß  $P_1$  in das Feld  $cd$  hineintritt, siehe Figur 329, so ist:

$$\frac{R}{P_1} = \frac{16000}{2000} = 8$$

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{7,5}{1,5} = 5.$$

Die Grundstellung ist also nicht die gefährlichste, d. h. die Vertikalkraft im Felde  $cd$  wird wachsen, wenn der Lastenzug vorrückt; sie wird den größten Wert erhalten, wenn  $P_2$  über  $d$  steht; in diesem Falle kommt dann infolge des Abstands der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  die Kraft  $P_1$  über  $c$  zu stehen und die im Felde  $cd$  auftretende größte Vertikalkraft ist gleich

$$\overline{hm} = 28 \text{ mm} = 5600 \text{ kg}$$

### c) Übungsaufgaben.

328. **Aufgabe 155.** Ein Träger von 8 m Länge ist durch Querträger in vier Felder von je 2 m Länge eingeteilt. Über den Träger bewegt sich ein Lastenzug, siehe Nr. 9, Tabelle XXII, Anhang II. Es sind für die einzelnen Knotenpunkte die größten positiven und negativen Vertikalkräfte zu bestimmen.

329. **Aufgabe 156.** Ein Träger von 18 m Länge ist durch Querträger in sechs Felder geteilt. Über den Träger bewegt sich ein Lastenzug, siehe Nr. 5, Tabelle XXII, Anhang II. Es sind für die einzelnen Knotenpunkte die größten positiven und negativen Vertikalkräfte zu ermitteln.



**d) Dritter Fall. Der Träger ist durch eine auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilte, bewegliche Last beansprucht.**

330. Bewegt sich eine gleichmäßig auf die Längeneinheit verteilte Last über einen Träger hin und will man für irgend einen Querschnitt die Größe der hierzu gehörigen Vertikalkraft ermitteln, so bestimmt man sich zunächst die *A-Linie*, siehe Figur 334. Ist nun die Belastung bis zu einem Knotenpunkte, z. B. *d*, vorgeschritten, so liefert die Vertikale durch *d* in der Strecke  $\overline{dg}$  die Vertikalkraft für den Querschnitt *d*. Überschreitet die bewegliche Belastung den Knotenpunkt und tritt in das Feld *cd* ein, so ist für die in der Figur 335 gezeichnete Stellung der Auflagerdruck:

$$A = \frac{p x x}{2l}$$

der Druck auf den Knotenpunkt *c*:

$$C = \frac{p \xi \xi}{2\lambda}$$

Daher die Vertikalkraft in *h*:

$$V_h = \frac{p}{2} \left( \frac{x^2}{l} - \frac{\xi^2}{\lambda} \right)$$

Dieser Ausdruck verändert seinen Wert mit der Größe *x* und erhält den größten Wert, wenn:

$$\frac{x}{l} = \frac{\xi}{\lambda}$$

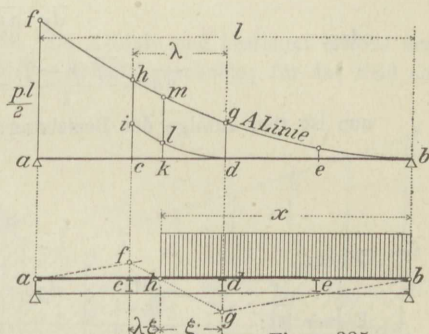
ist, dann ist aber:

$$180 \dots V_h = \frac{p x^2}{2l^2} (l - \lambda)$$

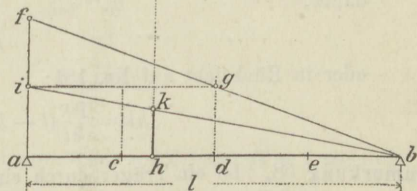
In diesem Falle reicht die Belastung bis zu einem Punkte *h*, der dadurch bestimmt ist, daß in *h* das Feld *cd* in demselben Verhältnisse geteilt ist, wie die Trägerlänge *l*. Zieht man daher durch *a* und *b*, siehe Figur 335, zwei beliebige Parallelen bis zum Schnitt *f* und *g* mit den Vertikalen durch *c* und *d*, so liefert die Verbindungslinie *fg* den Punkt *h*. Der Punkt *h* heißt die Belastungsscheide für das Feld *cd*. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

„In einem Trägerfelde entsteht die größte positive Vertikalkraft, wenn der Träger vom rechten Auflager bis zur Belastungsscheide des Feldes belastet ist, dagegen die größte negative Vertikalkraft, wenn die Belastung vom linken Auflager bis zur Belastungsscheide reicht.“

Figur 334.



Figur 335.



Figur 336.

**Anmerkung 57.** Graphisch läßt sich die in einem Felde auftretende größte Vertikalkraft leicht ermitteln:

Man zeichnet für das Feld  $cd$ , siehe Figur 334, die Linie der Auflagerdrücke für  $c$ , indem man  $\overline{ci} = \frac{pl}{2}$  aufträgt und die Parabel  $di$  mit dem Scheitel  $d$  konstruiert.

Die Vertikale durch die Belastungsscheide  $h$  liefert dann die Strecke  $\overline{lm}$  gleich der größten im Felde auftretenden positiven Vertikalkraft. Ohne Benutzung der  $A$ -Linie und der Parabel  $di$  bestimmt sich die größte Vertikalkraft im Felde  $cd$  auch wie folgt:

Man macht, siehe Figur 336,  $\overline{af} = \frac{pl}{2}$ , zieht  $bf$  und durch  $d$ , die Vertikale, welche auf  $bf$  den Punkt  $g$  liefert; zieht man  $gi$  parallel  $ab$ , ferner  $bi$ , so liefert die Vertikale durch die Belastungsscheide  $h$  die Strecke  $\overline{hk}$  gleich der größten positiven Vertikalkraft im Felde  $cd$ .

Aus der Figur 336 ergibt sich nämlich:

$$\overline{dg} : \overline{af} = (x - \xi) : l$$

oder:

$$\overline{dg} = \frac{\overline{af}(x - \xi)}{l} = \frac{pl}{2l}(x - \xi) = \frac{p}{2}(x - \xi)$$

nun ist aber zufolge der Beziehung:

$$\frac{x}{l} = \frac{\xi}{\lambda}$$

$$\xi = \frac{x\lambda}{l}$$

daher:

$$181) \dots \overline{dg} = \frac{p}{2} \left( x - \frac{x\lambda}{l} \right) = \frac{px}{2l} (l - \lambda)$$

Ferner ist:

$$\overline{dg} = \overline{ai}$$

und

$$\overline{ai} : \overline{hk} = l : x$$

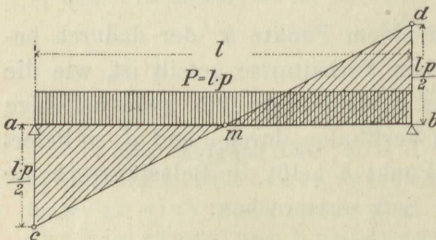
daher:

$$\overline{hk} = \frac{\overline{ai} x}{l}$$

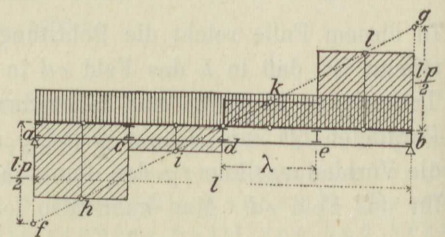
oder in Rücksicht auf Nr. 181:

$$\overline{hk} = \frac{px}{2l} (l - \lambda) \frac{x}{l} = \frac{px^2}{2l^2} (l - \lambda) = V_h$$

**Anmerkung 58.** Ist ein Träger durch eine ständige, auf die ganze Trägerlänge gleichmäßig verteilte Last beansprucht, so ist bei direkter Belastung die Verteilung der Vertikalkräfte auf die einzelnen Trägerquerschnitte durch die Linie  $cd$ , siehe Figur 337, ge-



Figur 337.



Figur 338.

geben. Über den Auflagern  $a$  und  $b$  besitzt die Vertikalkraft den größten positiven bzw. negativen Wert gleich  $\frac{pl}{2}$ , wenn  $p$  die auf den laufenden Meter treffende Belastung bezeichnet. In der Trägermitte ist die Vertikalkraft gleich Null. Bei indirekter



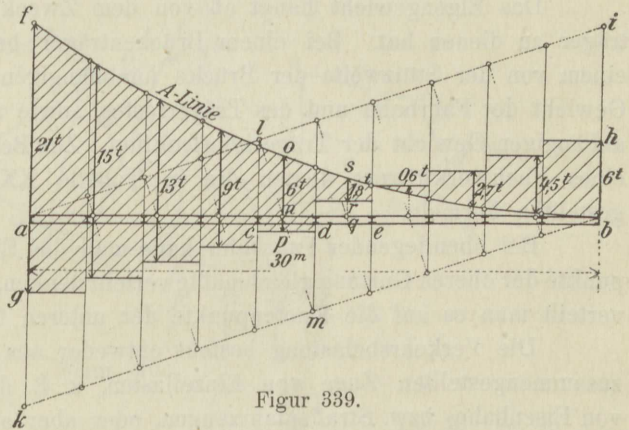
Belastung hat die Linie der Vertikalkräfte den Verlauf, wie ihn die Figur 338 zeigt. Innerhalb eines Feldes besitzt die Vertikalkraft ein und denselben Wert, der sich mittels der durch die Mitte des Feldes bis zur Linie  $fg$  gezogenen Vertikalen ergibt. Die treppenförmig gestaltete Linie stellt die Linie der Vertikalkräfte für die gleichmäßig verteilte ständige indirekte Belastung des Trägers  $ab$  dar.

e) Übungsaufgaben.

331. **Aufgabe 157.** Ein Träger von 30 m Länge, der durch Querträger in 10 Felder von je 3 m Länge eingeteilt ist, hat eine gleichmäßig verteilte Belastung von 600 kg für den laufenden Meter aufzunehmen. Es ist für jedes einzelne Feld die Vertikalkraft zu ermitteln.

**Auflösung.** Man zeichnet, siehe Figur 339, die  $A$ -Linie und bestimmt mittels der beiden Parallelen  $ai$  und  $ak$  für jedes einzelne Feld die Belastungsscheide; für das Feld  $cd$  z. B. erhält man durch die Verbindungslinie  $lm$  die Belastungsscheide  $n$ ; die Strecke  $no$  stellt dann die im Felde  $cd$  auftretende größte positive Vertikalkraft dar. In gleicher Weise ergibt sich für das Feld  $de$  die größte positive Vertikalkraft  $qs$ .

Die Vertikalen  $no$  und  $qs$  liegen von der Trägermitte gleich weit ab; es stellt somit die Strecke  $qs$  zugleich die größte negative Vertikalkraft für das Feld  $cd$  dar, die Strecke  $no$  dagegen die größte negative Vertikalkraft für das Feld  $de$ . Bei dem gewählten Maßstabe  $1\text{ mm} = 0,6\text{ t}$  ist  $\overline{no} = 8\text{ mm} = 4,8\text{ t}$  und  $\overline{qs} = 5\text{ mm} = 3\text{ t}$ .



Figur 339.

332. **Aufgabe 158.** Der in Aufgabe 157 genannte Träger hat außer der beweglichen auch noch eine ständige gleichmäßig verteilte Last im Betrage von 400 kg für den laufenden Meter aufzunehmen. Es ist für jedes einzelne Trägerfeld die größte Vertikalkraft zu ermitteln.

**Auflösung.** Außer der  $A$ -Linie, siehe Figur 339, zeichnet man auch die Linie der Vertikalkräfte für die ständige Belastung. Ermittelt man nun wie in der vorigen Aufgabe bezüglich der beweglichen Belastung für jedes Feld die Belastungsscheide, so liefert die durch diese Belastungsscheide gezogene Vertikale die Größe der in dem betreffenden Felde auftretenden Vertikalkraft. So ist z. B. für das Feld  $cd$  die Strecke  $po$ , für das Feld  $de$  die Strecke  $rs$  die größte positive Vertikalkraft.

Aus dem nämlichen Grunde wie in voriger Aufgabe ist die Strecke  $sr$  auch die größte negative Vertikalkraft im Felde  $cd$ , dagegen  $po$  die größte negative Vertikalkraft im Felde  $de$ . Bei dem gewählten Maßstabe  $1\text{ mm} = 0,6\text{ t}$  ist  $\overline{po} = 10\text{ mm} = 6\text{ t}$  und  $\overline{rs} = 3\text{ mm} = 1,8\text{ t}$ .

332a. **Aufgabe 159.** Für den in Aufgabe 152 genannten Träger ist unter Zugrundelegung der dort angegebenen Verkehrsbelastung für die einzelnen Knotenpunkte je die größte positive und negative Vertikalkraft zu ermitteln.

## R. Der einfache Fachwerkträger, beansprucht durch bewegliche Belastung.

### 1. Allgemeine Bemerkungen.

333. Im folgenden soll nur von dem einfachen Fachwerk die Rede sein, bei welchem sich die in den Konstruktionsteilen auftretenden Stabkräfte lediglich mit Hilfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen ermitteln lassen.

### 2. Belastung eines Fachwerkträgers.

334. Die Belastung eines Fachwerkträgers setzt sich zusammen:

1. aus dem Eigengewicht,
2. aus der beweglichen, d. h. der Verkehrsbelastung.

Das Eigengewicht hängt ab von dem Zwecke, welchem der Fachwerkträger zu dienen hat. Bei einem Brückenträger besteht es in der Regel aus einem von der Stützweite der Brücke unabhängigen Teil, herrührend aus dem Gewicht der Fahrbahn und des Trägerrostes, sowie aus dem von der Stützweite abhängigen Gewicht der Trägerkonstruktion. Zur Berechnung des Eigengewichts eines Fachwerkträgers dienen die in Tabelle XXIII, Anhang II, zusammengestellten Formeln.

Bei obenliegender Fahrbahn kann man das Eigengewicht auf die Knotenpunkte der oberen Gurtung gleichmäßig verteilt denken, bei untenliegender Fahrbahn verteilt man es auf die Knotenpunkte der unteren Gurtung.

Die Verkehrsbelastung besteht entweder aus einem in bestimmter Weise zusammengestellten Zuge von Einzellasten, z. B. die Achsen- oder Raddrücke von Eisenbahn- bzw. Straßenfahrzeugen, oder aber aus einer bestimmten, auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilten Belastung.

Außer den vorstehend angeführten Belastungen ist auch die durch den Winddruck hervorgerufene vertikale Belastung zu berücksichtigen; bei den in Kurven liegenden Brückenträgern hat man die Wirkung der Zentrifugalkraft, bei solchen, die in Gefällstrecken liegen, die Bremswirkung der Fahrzeuge in Rechnung zu stellen; endlich ist auch noch auf die Seitenstöße der Fahrzeuge Rücksicht zu nehmen.

### 3. Ermittlung der Stabkräfte in den Stäben eines einfachen Fachwerks.

#### a) Stabkräfte, hervorgerufen durch das Eigengewicht.

335. Die Stabkräfte, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, bestimmt man zweckmäßig entweder durch Rechnung, siehe Nr. 107, oder mittels eines Kräfteplans, indem man das Eigengewicht gleichmäßig auf die Knotenpunkte verteilt, und zwar auf die oberen bei obenliegender, auf die unteren bei untenliegender Fahrbahn.

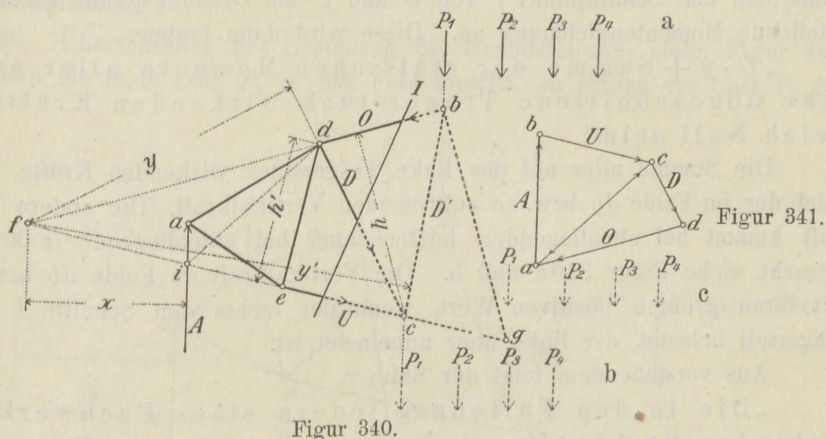


**b) Stabkräfte, hervorgerufen durch die Verkehrsbelastung.**

a) Die Verkehrsbelastung besteht aus einem beweglichen Lastenzuge.

336. Besteht die Belastung aus einem beweglichen Lastenzuge, so handelt es sich darum, diejenigen Stellungen des Zugs zu ermitteln, für welche die Beanspruchungen der Konstruktionsteile am größten werden; hierbei kann die Fahrbahn des Trägers, auf welcher sich der Lastenzug bewegt, auf der oberen oder unteren Gurtung aufliegen.

337. Stabkräfte in den Gurtungen. Ist, siehe Figur 340, ein einfaches Fachwerk von beliebiger Form gegeben, so kann man sich durch



Figur 340.

Figur 341.

dasselbe z. B. den Schnitt *I* geführt denken, dann ergeben sich für die in den durchgeschnittenen Gurtungsstäben *O* und *U* auftretenden Stabkräfte die folgenden Beziehungen:

Es ist:

$$182) \dots Oh + M_c = 0 \dots \text{Drehungspunkt } c$$

ebenso ist:

$$183) \dots Uk + M_d = 0 \dots \text{Drehungspunkt } d$$

Hierbei bezeichnet  $M_c$  bzw.  $M_d$  die Summe der statischen Momente aller links von dem Knotenpunkte *c* bzw. *d* liegenden Kräfte, d. i. das Biegemoment des Trägers für den Knotenpunkt *c* bzw. *d*.

Aus den Gleichungen 182 und 183 folgen die weiteren:

$$184) \dots O = -\frac{\overline{M}_c}{h} \dots \text{Druck}$$

$$185) \dots U = -\frac{\overline{M}_d}{h'} \dots \text{Zug}$$

und

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, daß die in den Gurtungsstäben eines Fachwerks auftretenden Stabkräfte abhängig sind von den Biegemomenten in den den Gurtungen gegenüberliegenden Knotenpunkten des Fachwerks. Die Gurtungsstabkräfte werden daher ihren größten Wert erhalten, wenn in den den Gurtungsstäben gegenüberliegenden Knotenpunkten durch den beweglichen Lastenzug die größten Biegemomente hervorgerufen werden. Die Stellungen des Lastenzugs, für welche diese Momente entstehen, lassen sich aber nach Nr. 303 ermitteln.

338. Stabkräfte in den Füllungsgliedern. Zur Ermittlung der Stabkräfte in den Füllungsgliedern, z. B. in der Diagonale  $D$ , siehe Figur 340, nimmt man den Schnittpunkt  $f$  von  $O$  und  $U$  als Drehungspunkt für die aufzustellende Momentengleichung an. Diese wird dann lauten:

„ $D \cdot y$  + Summe der statischen Momente aller auf das linke abgeschnittene Trägerstück wirkenden Kräfte muß gleich Null sein.“

Die Summe aller auf das linke Trägerstück wirkenden Kräfte ist aber gleich der im Felde  $db$  bzw.  $ec$  auftretenden Vertikalkraft. Die erstere Vertikalkraft kommt bei obenliegender, letztere aber bei untenliegender Fahrbahn in Betracht, siehe Figur 340a und b. Die Vertikalkraft im Felde  $db$  bzw.  $ec$  erhält ihren größten positiven Wert, wenn der rechts vom Schnitte  $I$  liegende Trägerteil belastet, der linke aber unbelastet ist.

Aus vorstehendem folgt der Satz:

„Die in den Füllungsgliedern eines Fachwerks auftretenden Stabkräfte sind von den auf dem Träger auftretenden Vertikalkräften abhängig und erhalten ihren größten Wert bei einseitiger Belastung des Trägers.“

339. Bei der einseitigen Belastung ist zu untersuchen, ob in einem Trägerfelde die größte Vertikalkraft auftritt für die Grundstellung, siehe Figur 340a und b, oder dann, wenn eine oder mehrere Lasten in das Trägerfeld eingerückt sind. Ist die Grundstellung die ungünstigste Stellung des Lastenzugs, so ist bei obenliegender Fahrbahn die Diagonale  $D$  am stärksten, und zwar auf Zug beansprucht, wenn der Lastenzug vom rechten Auflager bis zum Knotenpunkt  $b$ , bei untenliegender Fahrbahn aber bis zum Punkte  $c$  vorgerückt ist. Die in  $b$  bzw.  $c$  auftretende Vertikalkraft ist dann gleich dem Auflagerdruck  $A$  in  $a$  und kann mittels der  $A$ -Linie, siehe Nr. 326 und 330, ermittelt werden. Man erhält für  $D$  die Gleichung:

$$Dy - Ax = 0$$

oder:

$$D = +A \frac{x}{y}$$

woraus folgt, daß die Diagonale  $D$  gezogen wird.



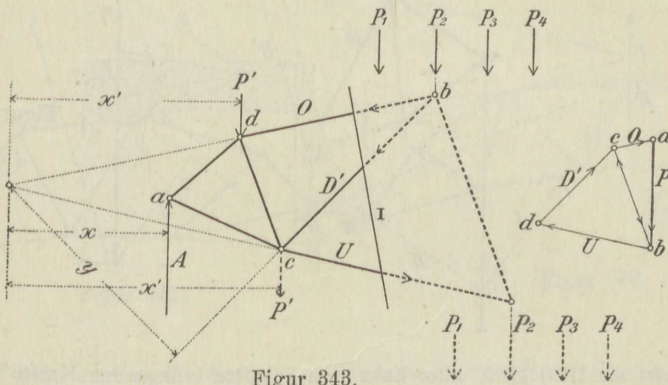
Für die Diagonale  $D'$  entsteht die ungünstigste Laststellung, wenn der Lastenzug bei oberliegender Fahrbahn bis  $b$ , bei untenliegender Fahrbahn aber bis  $g$  vorgerrückt ist, siehe Figur 340 a und c. Man erhält dann für  $D'$  ebenfalls die Gleichung:

$$D' = + A \frac{x}{y} \quad y' = \text{Länge der von dem Punkte } f \text{ auf die Diagonale } D' \text{ gefällten Senkrechten.}$$

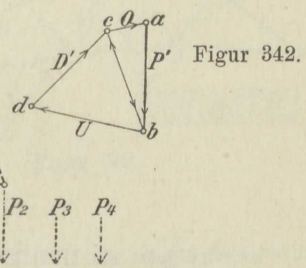
woraus folgt, daß die Diagonale  $D'$  gedrückt wird.

Durch Zeichnung ergeben sich die Stabkräfte in den Diagonalen einfach dadurch, daß man entweder mittels eines Kräftevielecks das zur Diagonale, z. B.  $D$ , siehe Figur 341, gehörige  $A$  in die Seitenkräfte  $O$ ,  $U$  und  $D$  zerlegt, oder aber unter Annahme eines Auflagerdrucks  $A=1$  einen Kräfteplan zeichnet und die hierdurch gefundenen Stabkräfte  $D$  und  $D'$  mit den zugehörigen Werten von  $A$  multipliziert.

340. Überschreitet der Lastenzug die Grundstellung, siehe Figur 343, so daß etwa die erste Last  $P_1$  in das Feld eintritt, so bringt die Last  $P_1$  bei



Figur 343.



Figur 342.

obenliegender Fahrbahn im Punkte  $d$ , bei untenliegender Fahrbahn im Punkte  $e$  einen Auflagerdruck  $P'$  hervor, und man erhält für  $D'$  die Gleichung:

$$D'y - Ax + P'x' = 0$$

oder:

$$D' = + \frac{Ax}{y} - \frac{P'x'}{y}$$

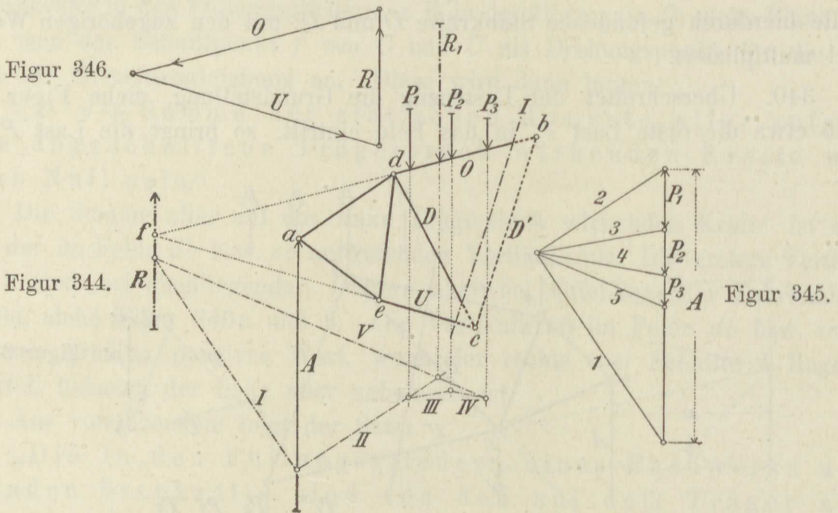
Zeichnerisch kann man  $D'$  dadurch bestimmen, daß man das zur Diagonale  $D'$  gehörige  $A$  und  $P'$  in die Seitenkräfte  $O$ ,  $U$  und  $D'$  zerlegt; in der Figur 342 ist die Zerlegung von  $P'$  angegeben. Die algebraische Summe der durch  $A$  und  $P'$  hervorgerufenen Stabkräfte ergibt die Stabkraft für  $D'$ . Aus dem Vorstehenden ergibt sich der Satz:

„Bewegt sich auf einem Fachwerkträger ein Lastenzug vom rechten zum linken Auflager hin, so wird jede von links nach rechts fallende Diagonale gezogen, dagegen jede

von links nach rechts steigende Diagonale gedrückt, wenn der Lastenzug die zur Diagonale gehörige ungünstigste Stellung einnimmt.“

Entsprechend werden bei der Bewegung des Lastenzugs vom linken zum rechten Auflager die nach rechts fallenden Diagonalen gedrückt, die nach rechts steigenden gezogen.

**Anmerkung 59.** Aus den Figuren 340 und 343 entnimmt man, daß die Beanspruchung von  $D$  stets einen von Null verschiedenen Wert besitzt, solange der Schnittpunkt  $f$  von  $O$  und  $U$  außerhalb von  $A$  fällt. Dies wird bei einem Fachwerk im allgemeinen stets der Fall sein. Rücken nun Lasten in das Feld  $db$  bzw.  $ec$  hinein, siehe Figur 344,



so wird jetzt als Mittelkraft aller links vom Schnitte  $I$  liegenden Kräfte nicht mehr der Auflagergedruck  $A$ , sondern eine Kraft  $R = A - \sum P$  erscheinen, wenn  $\sum P$  die Summe der im Felde  $db$  bzw.  $ec$  liegenden Lasten  $P$  bezeichnet. Die Linie  $R$  fällt ihrer Lage nach nicht mehr mit  $A$  zusammen, sondern wird links von  $A$  liegen, und es kann der Fall eintreten, daß die Mittelkraft  $R$  gerade durch den Schnittpunkt von  $O$  und  $U$  hindurchgeht; in diesem Falle wird aber dann  $D = 0$ , wie die Figur 346 auch zeigt. Nennt man  $\sum P = R_1$ , so folgt aus dem Vorstehenden, daß es innerhalb des Feldes  $db$  bzw.  $ec$  eine Lage von  $R_1$  gibt, für welche die Beanspruchung der Diagonale  $D = \text{Null}$  ist. Diese Lage von  $R_1$  nennt man eine Belastungsscheide für das betreffende Feld.

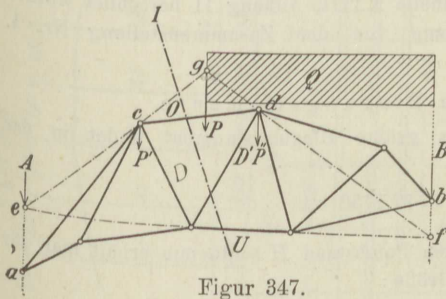
$\beta$ ) Die Verkehrsbelastung ist gleichmäßig verteilt.

341. Stabkräfte in den Gurtungen. Besteht die Verkehrslast aus einer auf die Längeneinheit gleichmäßig verteilten Belastung, so entstehen die größten Biegemomente in den einzelnen Knotenpunkten bei voller Belastung des Trägers, demnach werden auch die Stabkräfte in den Gurtungen am größten sein, wenn der ganze Träger voll belastet ist.

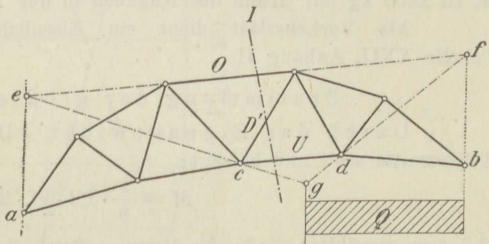


342. Stabkräfte in den Füllungsgliedern. Die Stabkräfte in den Diagonalen eines Fachwerks sind von den Vertikalkräften in den Trägerfeldern abhängig; sie sind am größten bei einseitiger Belastung des Trägers. Ist, siehe Figur 347 und 348, ein Schnitt  $I$  durch das Fachwerk geführt, so ist bei oben liegender Fahrbahn eine nach rechts steigende Diagonale, z. B.  $D'$ , am stärksten, und zwar auf Druck beansprucht, wenn die Belastung bis zu der durch den Punkt  $g$  gehenden Belastungsscheide reicht. Bei unten liegender Fahrbahn, siehe Figur 348, geht die Belastungsscheide durch den Punkt  $g$ .

Anmerkung 60. Die Belastungsscheide ermittelt man einfach dadurch, daß man bei oben liegender Fahrbahn den durch den Schnitt getroffenen unteren Gurtungsstab bis zu den Auflagervertikalen durch  $a$  und  $b$  verlängert, und die Schnittpunkte  $e$  und  $f$  mit den Endpunkten  $c$  und  $d$  des in Rede stehenden Feldes verbindet; durch den Schnittpunkt  $g$  dieser Verbindungslinien geht die Belastungsscheide hindurch. Die gleiche Konstruktion ist auszuführen, wenn die Fahrbahn unten liegt, siehe Figur 348. Daß



Figur 347.



Figur 348.

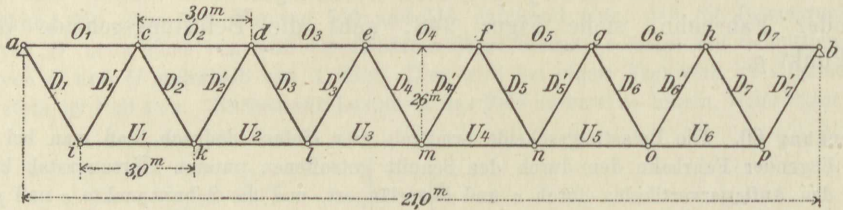
$g$  eine Belastungsscheide darstellt, geht daraus hervor, daß eine in  $g$  angebrachte Last  $P$ , siehe Figur 347, die Diagonale  $D$  nicht beansprucht, denn die Kraft  $P$  zerlegt sich in die Auflagerdrücke  $P'$  und  $P''$ , welche in  $a$  und  $b$  die Auflagergedrücke  $A$  und  $B$  hervorrufen. Die Mittelkraft von  $A$  und  $P'$  geht aber durch den Schnittpunkt von  $O$  und  $U$ , daher ist die Beanspruchung von  $D = 0$ .

Eine nach rechts fallende Diagonale, z. B.  $D$ , erhält durch eine bis zur Belastungsscheide reichende linksseitige Belastung ihre größte Beanspruchung auf Druck. Kurz zusammengefaßt kann man sagen:

„Bei einem einfachen Fachwerkträger werden die nach rechts fallenden Diagonalen gezogen, die nach rechts steigenden gedrückt, wenn die Belastung von rechts nach links bis zur Belastungsscheide vorgerückt ist. Ist dagegen die links von der Belastungsscheide liegende Seite des Trägers belastet, so werden die nach rechts fallenden Diagonalen gedrückt, die nach rechts steigenden aber gezogen.“

## 4. Übungsaufgaben.

343. Aufgabe 160. Ein einfaches Fachwerk von der in Figur 349 gezeichneten Form dient als Träger für eine zweigleisige Eisenbahnbrücke. Die Stützweite beträgt 21,0 m, die Gurtungen sind zueinander parallel, die Diagonalen unter  $60^\circ$  gegen die Horizontale geneigt. Es sind die durch Eigengewicht und Verkehrslast in den Konstruktionsteilen hervorgerufenen Stabkräfte zu ermitteln.



Figur 349.

**Auflösung.** Belastungen: Da die Brücke zweigleisig ist, so hat ein Hauptträger die Belastung für ein Gleis aufzunehmen. Das Eigengewicht für den Meter Gleis ist zu 1400 kg auf Grund der Angaben in der Tabelle XXIII, Anhang II berechnet worden

Als Verkehrslast dient ein Eisenbahnzug von der Zusammenstellung Nr. 1, Tabelle XXII, Anhang II.

Bestimmung der größten Biegemomente.

Durch das Eigengewicht. Das größte Biegemoment findet in der Trägermitte statt und beträgt:

$$M = \frac{1}{8} \cdot 1,4 \cdot 21 \cdot 21 = 77,1750 \text{ mt}$$

Bei dem gewählten Maßstabe  $1 \text{ mm} = 2 \text{ t}$  und den Polabstand  $H = 45 \text{ mm}$  erhält man für die Momentenordinate  $y$  in der Trägermitte die Größe:

$$77,175 : 90 = 0,86 \text{ m}$$

Trägt man diese Länge auf der Senkrechten durch  $m$  zu  $ab$  im Maßstab  $1:200$ , siehe Figur 352, nach  $\overline{mq}$  ab und konstruiert die Momentenparabel, so ergeben sich auf den Senkrechten zu  $ab$  durch die Knotenpunkte  $a, c, d, e, f, g$  und  $h$  der oberen Gurtung die zu diesen Punkten gehörigen, durch das Eigengewicht hervorgerufenen, auf den Polabstand  $H$  reduzierten Biegemomente. Durch Verbindung dieser Punkte der Parabel miteinander ergibt sich das Momentenvieleck  $Me$ . Die Momente für die Knotenpunkte der unteren Gurtung erhält man genau genug mittels der Ordinaten in den Punkten  $i, k, l, m, n, o$  und  $p$ , bezogen auf das Momentenvieleck  $Me$ .

Durch die Verkehrslast. Die ungünstigste Zusammenstellung des Zugs besteht aus zwei hintereinander fahrenden Lokomotiven mit Tender, siehe Tabelle XXII, Nr. 1, Anhang II. Güterwagen haben bei der gegebenen Stützweite auf dem Träger nicht mehr Platz. Um die größten Biegemomente zu erhalten, zeichnet man zunächst, siehe Figur 350 und 351, mit den gegebenen Lasten ein Kräfte- und Seilvieleck. Die ungünstigsten Laststellungen findet man am schnellsten durch Probieren. Für den Knotenpunkt  $c$  findet das größte Moment  $y_c$  statt, wenn die dritte Last des Zuges mit 13 t über  $c$  steht. In diesem Falle stehen 11 Lasten auf dem Träger, und man hat, siehe Formel Nr. 178

$$\frac{14}{13 + 13 + 13 + 9 + 12 + 12 + 7 + 14 + 13 + 13} < \frac{3}{18}$$

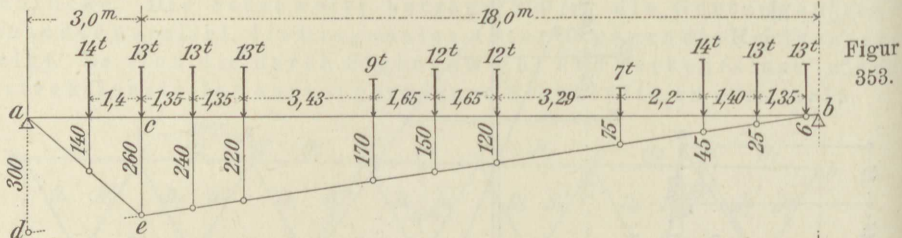
nämlich:

$$\frac{14}{119} < \frac{3}{18}$$

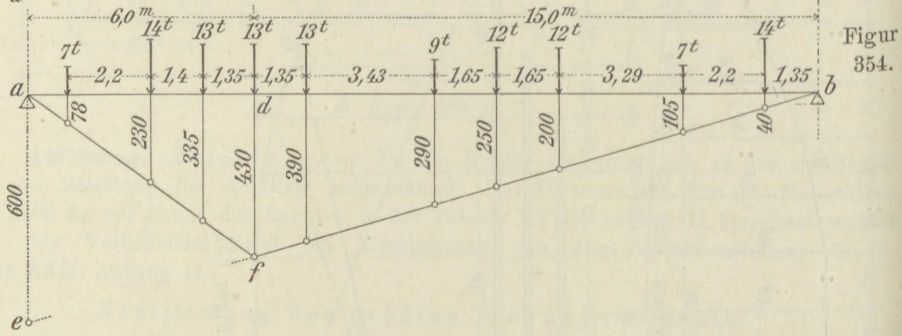




Für den Knotenpunkt  $d$  bringt die Stellung II das größte Biegemoment  $y_a$  hervor; für den Knotenpunkt  $e$  erhält man durch die Stellung III das größte Biegemoment  $y_e$ . In den Knotenpunkten  $f, g$  und  $h$  sind die größten Biegemomente gleich jenen in  $e, d$  und  $c$ .

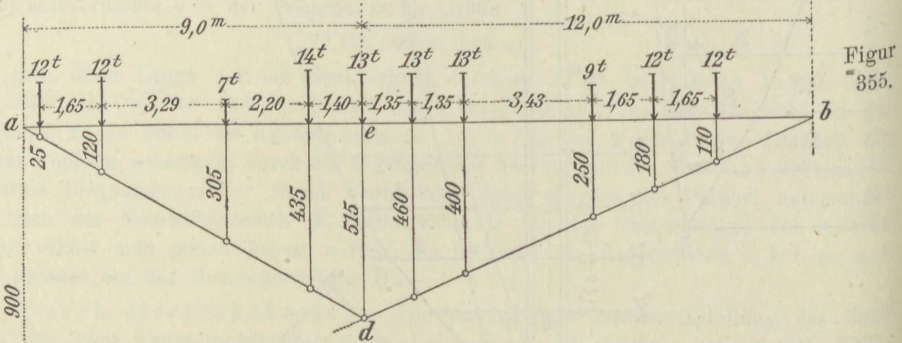


Figur 353.



Figur 354.

Die so bestimmten  $y$  trägt man in Figur 352 in den Punkten  $c, d, e, f, g$  und  $h$  als Ordinaten senkrecht zur Achse  $ab$  auf und verbindet die Endpunkte dieser Ordinaten zu einem Vieleck  $M_v$ , dem Momentenvieleck für die Verkehrslast. Die in den Punkten  $i, k, l, m, n, o$



Figur 355.

$M = 1 : 200.$

und  $p$  zu  $ab$  errichteten Senkrechten begrenzen durch ihre Schnitte mit dem Vieleck  $M_v$  die größten Biegemomente für die Knotenpunkte der unteren Gurtung.

**Anmerkung 61.** Mit Benutzung der Einflußlinien ergeben sich die Biegemomente wie folgt: Querschnitt  $c$ . Als Einflußlinie erhält man den Linienzug  $aeb$ , siehe



Figur 353. Für die zugehörige Stellung des Lastenzugs ergeben sich die in Figur 353 eingeschriebenen Einflußordinaten und hierdurch das Moment:

$$M_c = 140 \cdot 14 + 260 \cdot 13 + 240 \cdot 13 + 220 \cdot 13 + 170 \cdot 9 + 150 \cdot 12 + 120 \cdot 12 \\ + 75 \cdot 7 + 45 \cdot 14 + 25 \cdot 13 + 6 \cdot 13 = 17648 \text{ cmt} = 176,48 \text{ mt}$$

Querschnitt *d*. Einflußlinie *afb*, siehe Figur 354, und hieraus für die gezeichnete Stellung des Lastenzugs:

$$M_d = 78 \cdot 7 + 230 \cdot 14 + 335 \cdot 13 + 430 \cdot 13 + 390 \cdot 13 + 290 \cdot 9 + 250 \cdot 12 \\ + 200 \cdot 12 + 105 \cdot 7 + 40 \cdot 14 = 28086 \text{ cmt} = 280,86 \text{ mt}$$

Querschnitt *e*. Einflußlinie *adb*, siehe Figur 355, und hieraus für die gezeichnete Stellung des Lastenzugs:

$$M_e = 25 \cdot 12 + 120 \cdot 12 + 305 \cdot 7 + 435 \cdot 14 + 515 \cdot 13 + 460 \cdot 13 + 400 \cdot 13 \\ + 250 \cdot 9 + 180 \cdot 12 + 110 \cdot 12 = 33570 \text{ cmt} = 335,7 \text{ mt}$$

**Anmerkung 62.** Berechnet man für die Querschnitte *c*, *d*, *e* für die angegebenen ungünstigsten Laststellungen I, II und III die Biegemomente, so ergibt sich folgendes:

Querschnitt *c*. Auflagerdruck:

$$A = (14 \cdot 19,4 + 13 \cdot 18,0 + 13 \cdot 16,65 + 13 \cdot 15,30 + 9 \cdot 11,87 + 12 \cdot 10,22 + 12 \cdot 8,57 \\ + 7 \cdot 5,28 + 14 \cdot 3,08 + 13 \cdot 1,68 + 13 \cdot 0,33) : 21 = 65,73 \text{ t}$$

Hieraus folgt  $M_c = 65,73 \cdot 300 - 14 \cdot 140 = 17459 \text{ cmt} = 177,59 \text{ mt}$ .

Querschnitt *d*. Auflagerdruck:

$$A = (7 \cdot 19,95 + 14 \cdot 17,75 + 13 \cdot 16,35 + 13 \cdot 15,00 + 13 \cdot 13,65 + 9 \cdot 10,22 + 12 \cdot 8,57 \\ + 12 \cdot 6,92 + 7 \cdot 3,63 + 14 \cdot 1,43) : 21 = 61,73 \text{ t}$$

Hieraus  $M_d = 61,73 \cdot 600 - 7 \cdot 495 - 14 \cdot 275 - 13 \cdot 135 = 27968 \text{ cmt} = 279,68 \text{ mt}$ .

Querschnitt *e*. Auflagerdruck:

$$A = (12 \cdot 20,54 + 12 \cdot 18,89 + 7 \cdot 15,60 + 14 \cdot 13,40 + 13 \cdot 12,00 + 13 \cdot 10,65 \\ + 13 \cdot 9,30 + 9 \cdot 5,87 + 12 \cdot 4,22 + 12 \cdot 2,57) : 21 = 62,84 \text{ t}$$

Hieraus  $M_e = 62,84 \cdot 900 - 12 \cdot 854 - 12 \cdot 689 - 7 \cdot 360 - 14 \cdot 140 = 33570 \text{ cmt} = 335,7 \text{ mt}$ .

Bestimmung der Vertikalkräfte.

Vertikalkräfte, hervorgerufen durch das Eigengewicht. Die Vertikalkräfte in den Knotenpunkten der oberen Gurtung, hervorgerufen durch das Eigengewicht, sind:

$$\begin{aligned} \text{im Punkte } a &= \frac{7 \cdot 4,2}{2} = 14,7 \text{ t} \\ \text{'' '' } c &= 14,7 - 4,2 = 10,5 \text{ t} \\ \text{'' '' } d &= 10,5 - 4,2 = 6,3 \text{ t} \\ \text{'' '' } e &= 6,3 - 4,2 = 2,1 \text{ t} \\ \text{'' '' } f &= 2,1 - 4,2 = -2,1 \text{ t} \\ \text{'' '' } g &= -2,1 - 4,2 = -6,3 \text{ t} \\ \text{'' '' } h &= -6,3 - 4,2 = -10,5 \text{ t} \\ \text{'' '' } b &= -10,5 - 4,2 = -14,7 \text{ t} \end{aligned}$$





Knotenpunkt	Kräfteviereck	Stabkraft	Zug	Druck
		mm	t	t
a	abc	$\overline{bc} = D_1 = 14,55$	14,55	
		$\overline{ac} = O_1 = 7,28$	.....	7,28
i	cbd	$\overline{bd} = U_1 = 14,55$	14,55	
		$\overline{dc} = D_1' = 14,55$	.....	14,55
c	facdef	$\overline{de} = D_2 = 9,7$	9,7	
		$\overline{ef} = O_2 = 19,4$	.....	19,4
k	edbge	$\overline{bg} = U_2 = 24,25$	24,25	
		$\overline{ge} = D_2' = 9,7$	.....	9,7
d	feghif	$\overline{gh} = D_3 = 4,85$	4,85	
		$\overline{hi} = O_3 = 26,68$	.....	26,68
l	hgbkh	$\overline{bk} = U_3 = 29,1$	29,1	
		$\overline{hk} = D_3' = 4,85$	.....	4,85
e	bihkb	$\overline{bk} = O_4 = 29,1$	.....	29,1
		$D_4 = 0$		

Es ist ferner:

$O_5 = O_3 =$	.....	26,68
$O_6 = O_2 =$	.....	19,4
$O_7 = O_1 =$	.....	7,28
$U_4 = U_3 =$	29,1	.....
$U_5 = U_2 =$	24,25	.....
$U_6 = U_1 =$	14,55	.....
$D_4' = D_4 = 0$	.....	.....
$D_5' = D_3 =$	4,85	.....
$D_6' = D_2 =$	9,7	.....
$D_7' = D_1 =$	14,55	.....
$D_4 = D_3' =$	.....	4,85
$D_6 = D_2' =$	.....	9,7
$D_7 = D_1' =$	.....	14,55

## Gurtungsstabkräfte.

Stabkräfte, hervorgerufen durch die Verkehrslast. Die von der Verkehrslast herrührenden Gurtungsstabkräfte sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

Gurtungsstab	Stabkraft	Zug t	Druck t
$O_1 = O_7$	$\frac{M_i}{h} = \frac{1,0 \cdot 90}{2,6} = 1,0 \cdot 34,61 =$	. . . . .	34,61
$O_2 = O_6$	$\frac{M_k}{h} = 2,6 \cdot 34,61 =$	. . . . .	89,99
$O_3 = O_5$	$\frac{M_l}{h} = 3,5 \cdot 34,61 =$	. . . . .	121,14
$O_4$	$\frac{M_m}{h} = 3,8 \cdot 34,61 =$	. . . . .	131,52
$U_1 = U_6$	$\frac{M_c}{h} = 2 \cdot 34,61 =$	68,22	. . . . .
$U_2 = U_5$	$\frac{M_d}{h} = 3,2 \cdot 34,61 =$	110,75	. . . . .
$U_3 = U_4$	$\frac{M_e}{h} = 3,8 \cdot 34,61 =$	131,52	. . . . .

Stabkräfte in den Füllungsgliedern. Bei der vorliegenden Trägerkonstruktion sind je zwei an den unteren Knotenpunkten zusammenstoßende Füllungsglieder (Diagonalen) gleich stark beansprucht, z. B.:

$$D_1 = D_1' = \frac{V}{\cos 30^\circ}$$

Man braucht also nur die in Figur 351 ermittelten Werte für die Vertikalkraft durch den  $\cos 30^\circ = 0,866$  zu dividieren, so ergeben sich in den Quotienten die Stabkräfte der Diagonalen.

Man erhält:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_1' = 58 : 0,866 = 67 \text{ t} \\ D_2 &= D_2' = 43 : 0,866 = 49,6 \text{ t} \\ D_3 &= D_3' = 29 : 0,866 = 33,5 \text{ t} \\ D_4 &= D_4' = 17 : 0,866 = 19,6 \text{ t} \\ D_5 &= D_5' = 8 : 0,866 = 9,2 \text{ t} \\ D_6 &= D_6' = 2 : 0,877 = 2,3 \text{ t} \\ D_7 &= D_7' = 0 \end{aligned}$$

Die Diagonalen  $D$  sind gezogen, die Diagonalen  $D'$  gedrückt.

Bei der Bewegung des Zugs vom linken zum rechten Auflager bleiben die Gurtungsspannungen unverändert, die Diagonalkräfte dagegen werden:

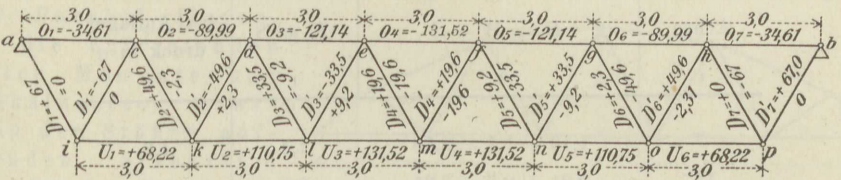
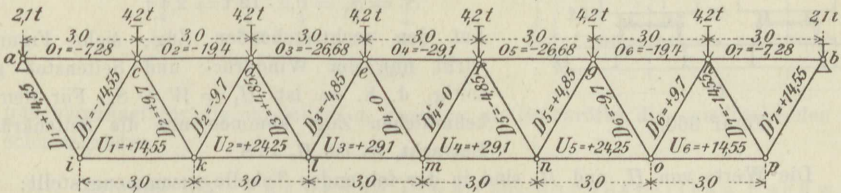
$$\begin{aligned} D_1 &= D_1' = 0 & D_2 &= D_2' = 2,3 \text{ t} & D_3 &= D_3' = 9,2 \text{ t} & D_4 &= D_4' = 19,6 \text{ t} \\ D_5 &= D_5' = 33,5 \text{ t} & D_6 &= D_6' = 49,6 \text{ t} & D_7 &= D_7' = 67 \text{ t} \end{aligned}$$

Nunmehr werden aber die Diagonalen  $D$  gedrückt, die Diagonalen  $D'$  gezogen.



In den Figuren 358 und 359 sind die im vorstehenden ermittelten Stabkräfte eingetragen, und zwar enthält die Figur 358 die durch das Eigengewicht hervorgerufenen Stabkräfte, während in Figur 359 die durch die Verkehrslast bedingten Stabkräfte dargestellt sind.

Figur 358.



Figur 359.

344. **Aufgabe 161.** Für die in der Aufgabe 160 genannte Brücke sind die über die einzelnen Achsen des zugrunde liegenden Eisenbahnzugs infolge des Winddrucks und der Seitenstöße der Fahrzeuge auftretenden horizontalen Kräfte zu berechnen.

**Auflösung.** Die Brücke ist am ungünstigsten belastet, wenn zwei Züge auf der Brücke verkehren. Als Angriffsfläche für den Winddruck ist ein Rechteck von 3,0 m Höhe von Schienenoberkante an gerechnet und gleich der Länge des Zugs anzunehmen, der Winddruck soll 150 kg auf den Quadratmeter Fläche betragen. Die Seitenstöße sollen für jede Achse das 0,2 fache der Radlast betragen.

Unter Zugrundelegung der vorstehenden Annahmen berechnen sich die durch Winddruck entstehenden horizontalen Kräfte wie folgt:

erste Lokomotivachse	$W_1 = (1,55 + 1,10) \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 1,19 \text{ t}$
zweite „	$W_2 = \frac{2,20 + 1,4}{2} \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 0,81 \text{ t}$
dritte „	$W_3 = \frac{1,4 + 1,35}{2} \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 0,62 \text{ t}$
vierte „	$W_4 = \frac{1,35 + 1,35}{2} \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 0,61 \text{ t}$
fünfte „	$W_5 = \frac{1,35 + 3,43}{2} \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 1,08 \text{ t}$
erste Tenderachse	$W_6 = \frac{3,43 + 1,65}{2} \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 1,14 \text{ t}$
zweite „	$W_7 = \frac{1,65 + 1,65}{2} \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 0,74 \text{ t}$
dritte „	$W_8 = \frac{1,65}{2} + 1,74 \cdot 3,0 \cdot 0,15 = 1,15 \text{ t}$

Durch die Seitenstöße entstehen über den Achsen der einzelnen Fahrzeuge eines jeden Zugs die Seitenkräfte:

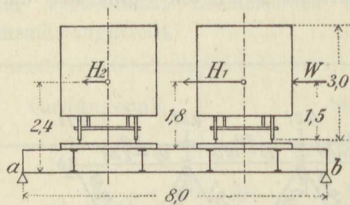
$$S_1 = 0,2 \cdot 7 \text{ t} = 1,4 \text{ t}$$

$$S_2 = 0,2 \cdot 14 \text{ t} = 2,8 \text{ t}$$

$$S_3 = S_4 = S_5 = 0,2 \cdot 13 \text{ t} = 2,6 \text{ t}$$

$$S_6 = 0,2 \cdot 9 \text{ t} = 1,8 \text{ t}$$

$$S_7 = S_8 = 0,2 \cdot 12 \text{ t} = 2,4 \text{ t}$$



Figur 360.

Auf den rechtsstehenden Zug, siehe Figur 360, wirkt nun der Winddruck und Seitenstoß gleichzeitig, d. h. es ist  $H_1 = W + S$ . Für den links befindlichen Zug kommen nur die Seitenkräfte in Betracht, es ist  $H_2 = S$ .

Die Werte von  $H_1$  und  $H_2$  sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Achse	$H_1 = W + S$	$H_2 = S$	$A = \text{Auflagerdruck in } a$
t	t	t	t
7	$1,19 + 1,4 = 2,59$	1,4	1,2
14	$0,81 + 2,8 = 3,61$	2,8	1,9
13	$0,62 + 2,6 = 3,22$	2,6	1,7
13	$0,61 + 2,6 = 3,21$	2,6	1,7
13	$1,08 + 2,6 = 3,68$	2,6	1,9
9	$1,14 + 1,8 = 2,94$	1,8	1,4
12	$0,74 + 2,4 = 3,14$	2,4	1,7
12	$1,13 + 2,4 = 3,55$	2,4	1,8

345. **Aufgabe 162.** Für die in der Aufgabe 160 genannte Brücke sind die durch Seitenkräfte  $H_1$  und  $H_2$  auf den Hauptträgern hervorgerufenen vertikalen Auflagerdrücke zu berechnen.

**Auflösung.** Durch die Horizontalkräfte  $H_1$  und  $H_2$  werden für jede Achse des beweglichen Zugs auf dem linksseitigen Hauptträger vertikale Drücke hervorgerufen, die sich aus der folgenden Gleichung berechnen lassen. Es ist:

$$A = \frac{(H_1 + H_2)}{8,0} \cdot 2,4$$

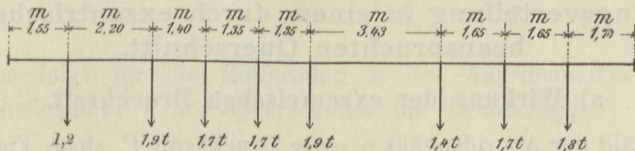
Man erhält für die einzelnen Achsen die in der obigen Tabelle unter der Rubrik A aufgeführten Auflagerdrücke.

346. **Aufgabe 163.** Man soll die durch die horizontalen Seitenkräfte  $H_1$  und  $H_2$  in den Hauptträgern hervorgerufenen Stabkräfte ermitteln.

**Auflösung.** Durch die horizontalen Seitenkräfte entstehen für den einen Hauptträger die in der obigen Tabelle unter A zusammengestellten Auflagerdrücke, welche sich zu dem in Figur 361 dargestellten Lastenzug vereinigen. Bestimmt man nun so, wie dies in Auflösung der Aufgabe 160 gezeigt wurde, für den gezeichneten Lastenzug die größten Biegemomente und Vertikalkräfte, so lassen sich aus diesen die zugehörigen Stabkräfte ermitteln.



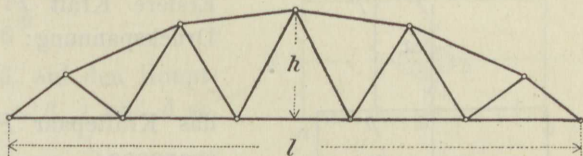
**Anmerkung 63.** Für die Querschnittsberechnung der einzelnen Konstruktionsteile addiert man die durch Eigengewicht, Verkehrslast und Seitenkräfte hervorgerufenen Stabkräfte



Figur 361.

und berechnet für die entstehenden Summen als Stabkräfte die entsprechenden Querschnittsgrößen.

**347. Aufgabe 164.** Für den in Figur 362 dargestellten Fachwerkträger, bei welchem die Knotenpunkte der oberen Gurtung auf einer Parabel liegen, sind die auftretenden größten Momente und Vertikalkräfte, sowie die in den Stäben auftretenden Stabkräfte zu ermitteln. Die Fahrbahn soll unten liegen.



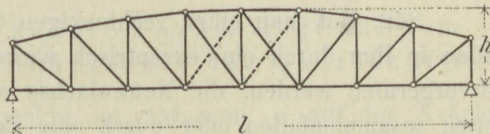
Figur 362.

Als Verkehrslast ist der in Tabelle XXII unter Nr. 3 Anhang II verzeichnete Lastenzug zu verwenden. Das Eigengewicht der Brücke ist nach Tabelle XXIII zu berechnen; es ist  $g_1 = 400$ . Abstand der Hauptträger = 4,5 m, Abstand der Querträger = 4 m.

$$p = 4200 + \frac{23000}{l} \quad k = 252 \quad l = 20 \text{ m} \quad h = 5 \text{ m}$$

**348. Aufgabe 165.** Die gleiche Aufgabe ist durchzuführen für einen Fachwerkträger, bei welchem die obere Gurtung gerade, die untere Gurtung aber nach einer Parabel gekrümmt ist. Die Fahrbahn soll oben liegen. Die Verkehrslast bestehe aus einem Lastzug, zusammengesetzt aus zwei Tenderlokomotiven, siehe Tabelle XXII Nr. 7, Anhang II und einer unbegrenzten Anzahl von Güterwagen, siehe Tabelle XXII Nr. 8, Anhang II; das Eigengewicht kann wie in Aufgabe 164 angenommen werden. Stützweite  $l = 30 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$ , Entfernung der Querträger 3 m.

**349. Aufgabe 166.** Die gleiche Aufgabe wie in Nr. 347 ist zu lösen für einen Fachwerkträger von der Form der Figur 363. Es ist anzugeben, warum in den mittleren Feldern gekreuzte Diagonalen zu verwenden sind, wenn die Diagonalen nur auf Zug beansprucht werden sollen.  $l = 24 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$ .



Figur 363.

**350. Aufgabe 167.** Man löse die Aufgabe 166 für den Fall, daß der Träger zu einer Straßenbrücke von 6 m Breite gehört. Die Verkehrslast bestehe aus einer gleichmäßig verteilten Belastung von 600 kg für den Quadratmeter. Die Fahrbahn sei unten liegend vorausgesetzt.

## S. Der exzentrische Druck.

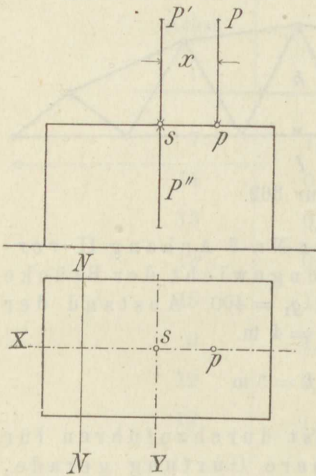
### 1. Spannungsverteilung in einem durch exzentrischen Druck beanspruchten Querschnitt.

#### a) Wirkung der exzentrischen Druckkraft.

351. Fällt der Angriffspunkt  $p$  einer Druckkraft  $P$ , siehe Figur 364 nicht mit dem Schwerpunkt  $s$  des Querschnitts zusammen, so sagt man, die Kraft wirke exzentrisch. In diesem Falle kann man sie parallel zu sich selbst nach dem Schwerpunkt des Querschnitts verlegen und erhält dann:

1. die zentrisch wirkende Druckkraft  $P'$
2. das Kräftepaar  $PP''$ .

Figur 364.



Erstere Kraft  $P'$  erzeugt im Querschnitt eine Druckspannung:

$$\sigma_a = \frac{P'}{F}$$

das Kräftepaar  $PP''$  bewirkt eine Biegungsspannung:

$$\sigma_b = \frac{M}{W}$$

welche sowohl eine Zug- als auch eine Druckspannung sein kann. Als Gesamtspannung, welche im Querschnitt für die Flächeneinheit auftreten kann, erhält man, da  $P' = P$  ist,

$$\begin{aligned} 186) \dots \sigma &= \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W} \\ &= \frac{P}{F} \pm \frac{Px}{W} \end{aligned}$$

Je nach der Lage des Angriffspunkts  $p$  der Kraft  $P$  kann die Neutralachse die Begrenzung des Querschnitts schneiden oder außerhalb derselben liegen; im ersten Falle treten im Querschnitt sowohl Zug- als auch Druckspannungen auf, im zweiten Falle nur Druckspannungen. Das letztere ist auch der Fall, wenn die Neutralachse die Querschnittsbegrenzung berührt oder mit ihr zusammenfällt.

#### b) Zentralkern oder Kernfläche eines Querschnitts.

352. Hat man einen rechteckigen Querschnitt, siehe Figur 365, so muß, sollen in ihm durch eine exzentrisch wirkende Druckkraft nur Druckspannungen hervorgerufen werden, die Neutralachse entweder mit einer der vier Rechteckseiten zusammenfallen oder durch eine der Ecken des Rechtecks gehen, ohne mit dem letzteren selbst noch weitere Punkte gemeinsam zu haben. Liegt die Neutralachse z. B. in  $ab$  oder  $cd$ , siehe Figur 365, so ist die Spannung daselbst gleich Null, und man hat die Gleichung:

$$187) \dots 0 = \frac{P}{F} - \frac{Px}{W}$$



oder, wenn die Rechteckseiten  $ac$  und  $ab$  mit  $b$  und  $h$  bezeichnet werden:

$$0 = \frac{P}{bh} - \frac{Px}{\frac{1}{6}bh^2}$$

Hieraus folgt für die Entfernung  $x$  des Angriffspunkts der Kraft  $P$  von dem Schwerpunkt  $s$  des Querschnitts die Beziehung:

$$188) \dots x = \frac{1}{6}b$$

Für den Fall, daß die Neutralachse mit  $ac$  oder  $bd$  zusammenfällt, ergibt sich für die Entfernung  $y$  des Angriffspunkts von  $P$  vom Schwerpunkt  $s$  des Querschnitts:

$$189) \dots y = \frac{1}{6}h$$

Bestimmt man, siehe Figur 365, auf den Hauptachsen  $X$  und  $Y$  die Punkte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$ , so

daß  $\alpha$  und  $\beta$  um  $\frac{1}{6}b$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  um  $\frac{1}{6}h$  von  $s$

entfernt liegen, und verbindet die Punkte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  miteinander, so begrenzen die Verbindungslinien einen Teil des Querschnitts, der Zentralkern oder auch die Kernfläche genannt wird und für den der folgende Satz Geltung hat:

„Soll eine exzentrisch wirkende Druckkraft in einem Querschnitt nur Druckspannungen hervorrufen, so darf der Angriffspunkt der Kraft nicht außerhalb des Zentralkerns liegen.“

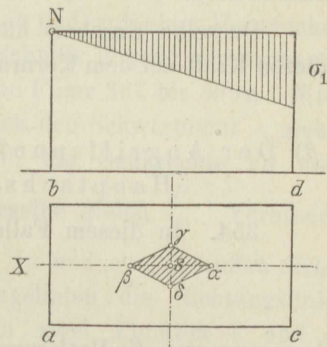
Bei Steinkonstruktionen dürfen keine Zugspannungen auftreten, es muß daher stets der Angriffspunkt der äußeren Kraft innerhalb oder auf der Umgrenzung des Zentralkerns liegen. Die Begrenzung des Zentralkerns heißt der Kernrand des Querschnitts.

### e) Größe der Spannung im Querschnittsrande bei exzentrischer Druckbelastung, Randspannung.

a) Der Angriffspunkt der äußeren Kraft liegt auf dem Kernrande und auf einer Hauptachse des Querschnitts.

353. Ist der Querschnitt rechteckig, so hat man,  $p$  auf der  $X$ -Achse liegend vorausgesetzt:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \frac{1}{6}b}{W} = \frac{P}{bh} + \frac{P \frac{1}{6}b}{\frac{1}{6}bh^2}$$



Figur 365.

oder:

$$190) \dots \sigma = \frac{2P}{F}$$

Die Spannung  $\sigma$  ist also doppelt so groß als bei zentrischer Druckwirkung. Will man aber keine größere Spannung hervorrufen, als die zulässige Faser-  
spannung des Materials beträgt, so darf bei exzentrischer Belastung die äußere Kraft nur halb so groß sein als bei zentrischer Belastung.

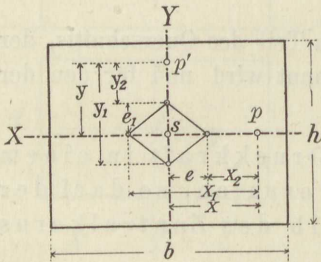
Dasselbe Ergebnis hätte man auch erhalten, wenn der Angriffspunkt der äußeren Kraft auf dem Kernrande und auf der Achse  $Y$  angenommen worden wäre.

$\beta$ ) Der Angriffspunkt der äußeren Kraft liegt auf einer Hauptachse in beliebiger Entfernung.

354. In diesem Falle ist, wenn  $p$  auf der  $X$ -Achse liegt:

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{Px}{W}$$

oder, wenn man die Entfernung eines Kernrands auf der Achse  $X$  von dem Schwerpunkt, d. i.  $\frac{1}{6}b$ , mit  $e$  als Kernweite bezeichnet:



Figur 366.

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{F} \pm \frac{Px}{eF} \\ &= \frac{P}{F} \left( 1 \pm \frac{x}{e} \right) \\ &= \frac{P}{F} \left( \frac{e \pm x}{e} \right) \end{aligned}$$

Setzt man nun, siehe Figur 366,  $e + x = x_1$  und  $x - e = x_2$ , so erhält man für die in der äußersten gedrückten bzw. gezogenen Faser herrschenden Spannung die Beziehung:

$$\begin{aligned} 191) \dots \sigma_1 &= \frac{P}{F} \frac{x_1}{e} = \frac{\sigma x_1}{e} \\ \sigma_2 &= \frac{P}{F} \frac{x_2}{e} = \frac{\sigma x_2}{e} \end{aligned}$$

wobei  $\sigma$  die Spannung bezeichnet, welche bei zentrischer Belastung entstehen würde.

Liegt der Angriffspunkt der äußeren Kraft auf der  $Y$ -Achse, etwa in  $p'$ , so erhält man sinngemäß:

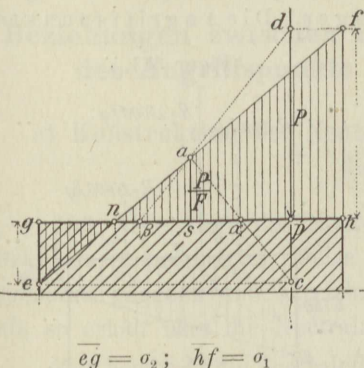
$$\begin{aligned} 191 \text{ a) } \dots \sigma_1 &= \frac{\sigma y_1}{e_1} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma y_2}{e_1} \end{aligned}$$

wobei  $y_1, y_2$  und  $e_1 = \frac{1}{6}h$  auf die  $Y$ -Achse zu beziehen sind.



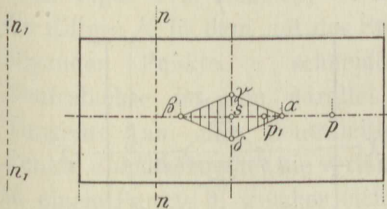
**d) Konstruktion der Randspannungen eines Querschnitts bei exzentrischer Druckbelastung.**

355. Auf Grund der Beziehungen 191 bzw. 191a, welche für jede Querschnittsform Gültigkeit haben, unterliegt es keiner Schwierigkeit, zunächst für einen rechteckigen Querschnitt die größten Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  zu bestimmen, wenn der Angriffspunkt  $p$  der Druckkraft  $P$  bekannt und auf einer Hauptachse des Querschnitts liegend vorausgesetzt wird, siehe Figur 367 bis 368a. Man zieht durch den Schwerpunkt  $s$ , siehe Figur 366, die Senkrechte  $\overline{sa}$  und macht dieselbe gleich  $\frac{P}{F}$ . Verbindet



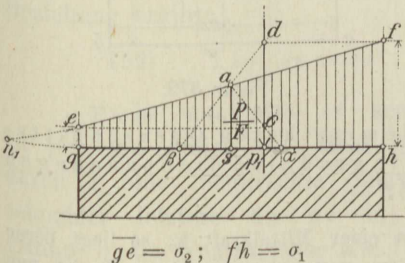
Figur 367.

man nun  $\beta a$  und  $\alpha a$ , so treffen diese Verbindungslinien die Richtungslinie von  $P$  in zwei Punkten  $c$  und  $d$  so, daß  $\overline{pc}$  und  $\overline{pd}$  die größte Zug- bzw. Druckspannung darstellen. Überträgt man  $\overline{pd}$  nach  $\overline{fh}$  und  $\overline{pc}$  nach  $\overline{ge}$  und zieht  $fe$ , so geht durch den Schnittpunkt  $n$  von  $ef$  und  $gh$  die Neutralachse des Querschnitts hindurch. Durch die schraffierte Fläche  $genfhn$  ist die Spannungsverteilung im Querschnitt ersichtlich gemacht.



Figur 368.

356. Liegt der Angriffspunkt der äußeren Kraft innerhalb des Kernrands, siehe Figur 368a, so bleibt die Konstruktion der Randspannungen dieselbe wie vorhin, es werden aber jetzt im Querschnitt nur Druckspannungen herrschen.



Figur 368a.

**e) Übungsaufgaben.**

357. **Aufgabe 168.** Auf die Fugenfläche  $abcd$  eines Mauerpfeilers, siehe Figur 369 und 370, wirkt im Punkte  $a$  eine Kraft  $R = 40000$  kg unter einem Winkel  $= 80^\circ$  gegen die Fugenfläche geneigt. Welche Spannungen entstehen in den Querschnittsrändern  $ad$  und  $bc$ ?

**Auflösung.** Da im vorliegenden Falle die äußere Kraft  $R$  durch den Kernpunkt  $a$  geht, so fällt die Neutralachse mit dem Querschnittsrande  $ad$  zusammen; in dem letzteren

herrscht daher die Spannung Null, während in  $cb$  die größte Druckspannung  $\sigma_1$  auftritt. Die normal zur Querschnittsfläche wirkende Druckkraft ist:

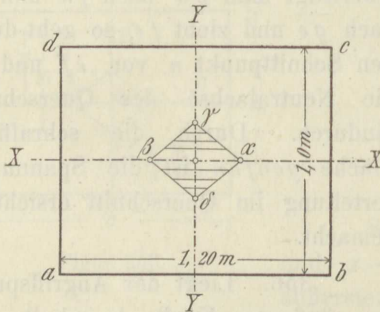
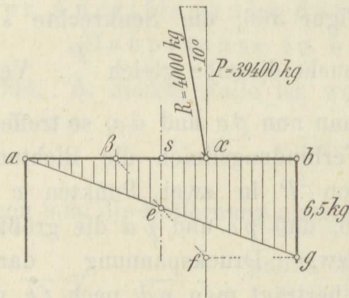
$$P = R \cos 10^\circ = 40000 \cdot 0,985 = 39400 \text{ kg}$$

daher ist:

$$\sigma_1 = \frac{2P}{F} = \frac{2 \cdot 39400}{120 \cdot 100} = 6,5 \text{ kg}$$

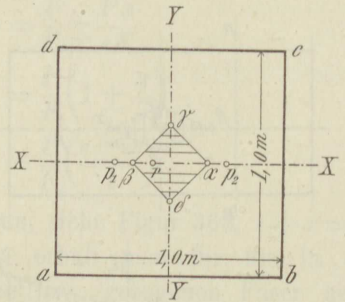
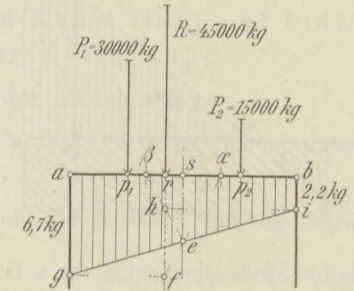
358. **Aufgabe 169.** Eine quadratische Granitplatte von 1 m Seitenlänge, siehe Figur 371 und 372, hat die Auflagerdrücke von zweien Brückenträgern im Betrage von  $P_1 = 30000 \text{ kg}$  und  $P_2 = 15000 \text{ kg}$  auf das Mauerwerk eines Pfeilers zu übertragen. Die Angriffspunkte  $p_1$

Figur 369.



Figur 370.

Figur 371.



Figur 372.

und  $p_2$  von  $P_1$  und  $P_2$  liegen je 25 cm von dem nächsten Querschnittsrande entfernt auf der Mittelachse  $X$ . Wie groß sind die Spannungen in den Querschnittsrändern  $ad$  und  $cb$ ?

**Auflösung.** Vereint man  $P_1$  und  $P_2$  zu einer Mittelkraft  $R$ , so liegt deren Angriffspunkt  $r$  auf  $X$  in einer Entfernung  $x = 8,4 \text{ cm}$  vom Schwerpunkt  $s$ . Es ist nun im vorliegenden Falle:

$$e = \frac{100}{6} = 16,6 \text{ cm}$$

$$x_1 = e + x = 16,6 + 8,4 = 25,0 \text{ cm}$$

$$x_2 = x - e = 16,6 - 8,4 = 8,2 \text{ cm}$$

Demnach ist:

$$\sigma_1 = \frac{R}{F} \frac{x_1}{e} = \frac{45000}{10000} \cdot \frac{25}{16,6} = 6,7 \text{ kg}$$

und

$$\sigma_2 = \frac{x_2}{e} = \frac{45000}{10000} \cdot \frac{8,2}{16,6} = 2,2 \text{ kg}$$



Durch Konstruktion ergeben sich dieselben Werte. Man hat:

$$\frac{R}{F} = 4,5 \text{ kg}$$

Nimmt man nun als Kraftmaßstab  $2 \text{ mm} = 1 \text{ kg}$ , so hat man  $\overline{se} = \frac{P}{F} = 9,0 \text{ mm}$  anzutragen,  $\alpha e$  und  $\beta e$  zu ziehen und  $\overline{rf}$  bzw.  $\overline{rh}$  nach  $\overline{ag}$  und  $\overline{bi}$  zu übertragen. Dann ist:

$$\overline{ag} = 13,4 \text{ mm} = 6,7 \text{ kg} \text{ und } \overline{bi} = 4,4 \text{ mm} = 2,2 \text{ kg}$$

## 2. Beziehungen zwischen der Lage der Neutralachse und jener des Angriffspunkts der exzentrischen Druckkraft.

### a) Konstruktion der Neutralachse bei gegebenem Angriffspunkt der Druckkraft.

359. Die Lage der Neutralachse ist von jener des Angriffspunkts der Druckkraft in bestimmter Weise abhängig. Ist in Figur 373 ein rechteckiger Querschnitt gegeben und bezeichnet  $p$  die Lage des Angriffspunkts der äußeren Kraft, so erhält man die Neutralachse wie folgt:

Man bestimmt die Zentralellipse  $K$ , siehe Figur 373, zieht  $sp$ , welche Linie die Ellipse  $K$  in dem auf der Strecke  $sp$  liegenden Punkte  $a$  schneidet. Die Neutralachse ist nun parallel zu der Tangente an die Zentralellipse im Punkte  $a$  und schneidet die verlängerte  $sp$  in einem Punkte  $q$ , welcher sich aus der Beziehung ergibt:

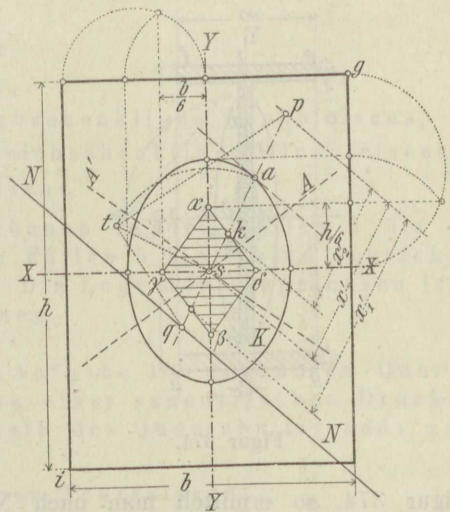
$$192) \dots \overline{sq} \cdot \overline{sp} = \overline{sa}^2$$

Macht man also  $\overline{st}$  senkrecht zu  $ps$  und gleich  $\overline{sa}$ , zieht  $pt$  und durch  $t$  eine Senkrechte hierzu, so schneidet letztere die  $ps$  in einem Punkte  $q$  der Neutralachse  $nn$ .

Aus der Beziehung 192 folgt, daß für den Punkt  $q$  als Angriffspunkt der äußeren Kraft die zugehörige Neutralachse durch den Punkt  $p$  parallel zur Tangente an die Zentralellipse in  $a$  geht.

Unter Berücksichtigung der in der Figur 373 angegebenen Bezeichnungen erhält man dann die in den äußersten Querschnittsrändern, d. i. im vorliegenden Falle an den Stellen  $g$  und  $i$ , auftretenden größten Spannungen:

$$193) \dots \sigma_1 = \frac{P x'_1}{F e'} \text{ und } \sigma_2 = \frac{P x'_2}{F e'}$$



Figur 373.

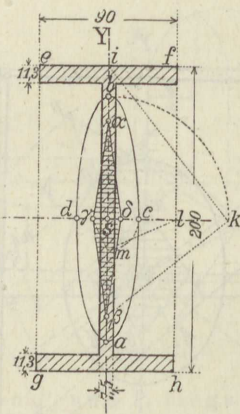
Da die Neutralachse die Querschnittsebene scheidet, so ist  $\sigma'_1$  die größte Druck-,  $\sigma'_2$  aber die größte Zugspannung.

Aus den Beziehungen 193) ist ersichtlich, daß die Spannungen  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_2$  gerade proportional den Längen  $x'_1$  und  $x'_2$ , dagegen umgekehrt proportional der Strecke  $\overline{sk} = e'$  sind.

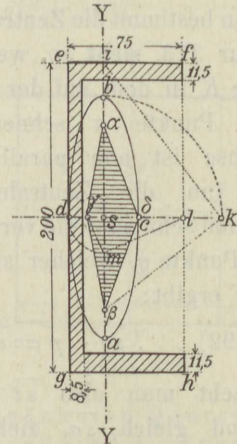
Zieht man durch den Schwerpunkt  $s$  des Querschnitts Senkrechte zu den Kernrändern  $\alpha\delta$ ,  $\beta\gamma$  bzw.  $\alpha\gamma$ ,  $\beta\delta$ , so ergeben sich die beiden Linien  $A$  und  $A'$ . Bei ein und demselben  $x'_1$  bzw.  $x'_2$  erhalten die Spannungen  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_2$  ihren größten Wert, wenn der Angriffspunkt  $p$  von  $P$  auf einer der beiden Linien  $A$  und  $A'$  liegt.

**b) Konstruktion des Kerns eines Querschnitts unter Benützung der Zentralellipse.**

360. Mittels der Beziehung 192) unterliegt es keiner Schwierigkeit, für einen gegebenen Querschnitt die Kernbegrenzung zu konstruieren, sobald man die Zentralellipse kennt. Ist z. B. der gegebene Querschnitt von der Form der



Figur 374.



Figur 375.

Figur 374, so ermittelt man nach Nr. 194 die Werte der Halbachsen der Zentralellipse, wodurch man deren Scheitel  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  erhält.

Nimmt man nun die Neutralachse mit dem Querschnittsrande  $ef$  bzw.  $gh$  zusammenfallend an, so ergeben sich die Punkte  $\beta$  und  $\alpha$  des Kerns aus der Beziehung:

$$\overline{s\beta} = \overline{s\alpha} = \frac{\overline{sb}^2}{s i}$$

ebenso ist:

$$\overline{s\delta} = \overline{s\gamma} = \frac{\overline{sc}^2}{s l}$$



Macht man also  $\overline{sk} = \overline{sb}$ , zieht  $\overline{ik}$ , so trifft die Senkrechte zu  $\overline{ik}$  in  $k$  die Y-Achse im Punkte  $\beta$  des Kerns; ebenso ist  $\overline{sm} = \overline{sc}$  anzutragen,  $\overline{lm}$  zu ziehen, so liefert die Senkrechte  $\overline{m\gamma}$  zu  $\overline{lm}$  den Kernpunkt  $\gamma$ .

In ähnlicher Weise ist für den in Figur 375 dargestellten Querschnitt der Kern ermittelt worden. Es ist:

$$\overline{sa} = \overline{s\beta} = \frac{\overline{sb^2}}{\overline{si}}, \quad \overline{s\gamma} = \frac{\overline{sc^2}}{\overline{sl}}, \quad \overline{s\delta} = \frac{\overline{sc^2}}{\overline{sd}}$$

Im vorliegenden Falle wird, weil  $\overline{sd} = \overline{sc}$  ist, auch  $\overline{s\delta} = \overline{sc}$ .

### c) Übungsaufgaben.

361. **Aufgabe 170.** Man konstruiere den Kern für folgende Querschnittsformen:

1. voller Kreisquerschnitt,
2. ringförmiger Querschnitt,
3. regelmäßiges Achteck,
4. Querschnitt, begrenzt durch zwei konzentrische Achtecke,
5.  $\perp$ förmiger Querschnitt,
6.  $+$ förmiger Querschnitt,
7. Querschnitt eines gleichschenkligen Winkeleisens,  
Querschnitt eines ungleichschenkligen Winkeleisens,
8. Querschnitt eines Z-Eisens.

Die Querschnittsausmaße können in den Fällen 1 bis 4 beliebig gewählt werden; in den Fällen 5 bis 8 sind deutsche Normalprofile zugrunde zu legen. Die Lage der Hauptachsen ist aus den Profiltabellen zu entnehmen.

362. **Aufgabe 171.** Für die in Aufgabe 170 genannten Querschnittsformen ist unter Annahme einer exzentrischen Druckkraft  $P$  für einen beliebig innerhalb des Querschnittsrandes zu wählenden Angriffspunkt  $p$ :

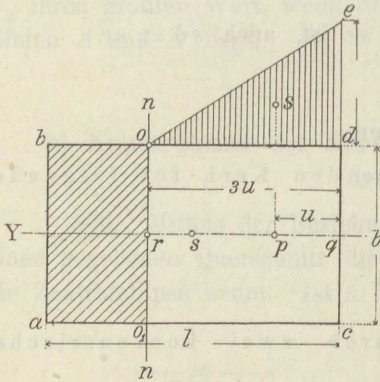
1. die Lage der zugehörigen Neutralachse,
2. die Größe der Randspannungen zu ermitteln.

### 3. Exzentrische Druckbelastung außerhalb des Zentralkerns unter Ausschluß von Zugspannungen.

#### a) Lage der Neutralachse und Spannungsverteilung im Querschnitt.

363. Bei Mauerwerk kann die Forderung gestellt werden, daß, obwohl der Angriffspunkt der äußeren Kraft außerhalb des Zentralkerns gelegen ist, doch keine Zugspannungen im Querschnitt auftreten dürfen. In diesem Falle

teilt die Neutralachse die Querschnittsfläche in zwei Teile, von denen der eine, der sog. nutzbare Querschnittsteil, die äußere Kraft vollständig aufnehmen muß, während der andere Teil spannungslos bleibt. Die Querschnittsgröße muß dann so bemessen sein, daß die Randspannung im nutzbaren Querschnitt die zulässige Beanspruchung des Materials nicht überschreitet. Ist der Mauerquerschnitt ein rechteckiger und liegt der Angriffspunkt  $p$ , siehe Figur 376, in der Symmetrieachse  $Y$ , so läßt sich die Lage der Neutralachse in sehr einfacher



$e d = \sigma_1$   
Figur 376.

Weise ermitteln. Sie steht senkrecht zur Achse  $Y$  und liegt in einer Entfernung gleich  $3u$  vom Querschnittsrande  $cd$  entfernt, wenn  $u$  die Entfernung des Angriffspunktes  $p$  von diesem Querschnittsrande bezeichnet; denn für den nutzbaren Querschnitt muß  $p$  ein Kernpunkt, daher die Querschnittslänge gleich  $3u$  sein. Für die größte Randspannung ergibt sich:

$$194) \dots \sigma_1 = \frac{2P}{3ub} = \frac{2P}{F_1} \leq k$$

wenn unter  $F_1$  der Flächeninhalt des nutzbaren Querschnitts  $oo_1cd$  verstanden ist.

364. Für einen Querschnitt von beliebiger Form ist die Ermittlung der Lage der neutralen Achse ziemlich umständlich und kann hier nicht erörtert werden. Dagegen soll noch ein Fall besprochen werden, der für den Bauingenieur von praktischer Wichtigkeit ist, der Fall nämlich, daß der Querschnitt die Form eines regelmäßigen Vielecks bzw. Kreisrings habe.

Ist etwa der in Figur 377 dargestellte Querschnitt und  $p$  der Angriffspunkt der äußeren Kraft  $P$  gegeben, so weiß man zunächst nur, daß die Neutralachse  $N$  senkrecht steht zur Achse  $ps$ . Für irgend einen in der Entfernung  $y$  von der Neutralachse befindlichen Flächenstreifen  $f$  herrscht die Spannung  $\sigma$ . Nun ist aber die Spannung um so größer, je größer die Entfernung  $y$  ist, und es besteht zwischen  $y$  und  $\sigma$  die Beziehung  $\sigma = my$ , wo  $m$  eine konstante Größe bezeichnet; ist  $P$  die äußere in  $p$  angreifende Kraft, so hat man  $P = \Sigma fmy = m \Sigma fy$ . Wenn nun Gleichgewicht zwischen der äußeren Kraft und der inneren Spannung herrschen soll, so muß das Moment der äußeren Kräfte dem Moment der inneren gleich sein, d. h. man hat die Gleichung:

$$Pv = m \Sigma fy^2$$

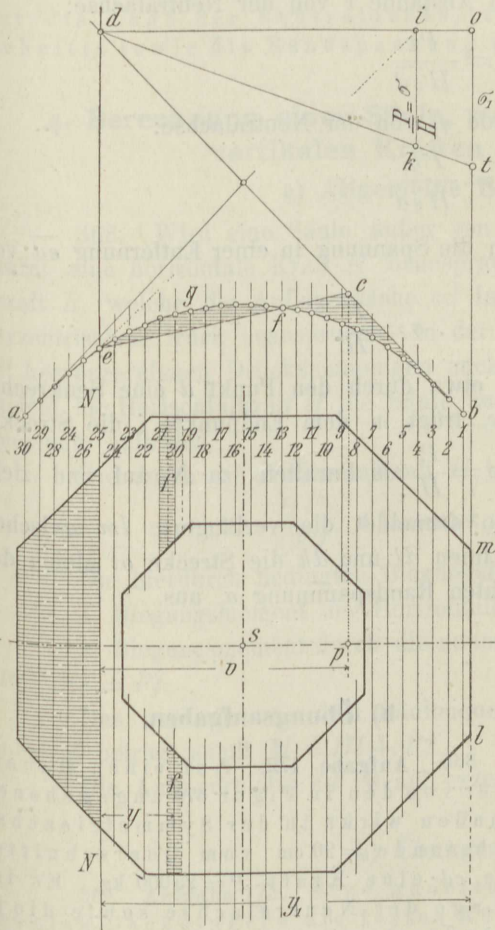
hieraus folgt:

$$195) \dots v = \frac{m \Sigma fy^2}{P} = \frac{m \Sigma fy^2}{m \Sigma fy} = \frac{\Sigma fy^2}{\Sigma fy}$$

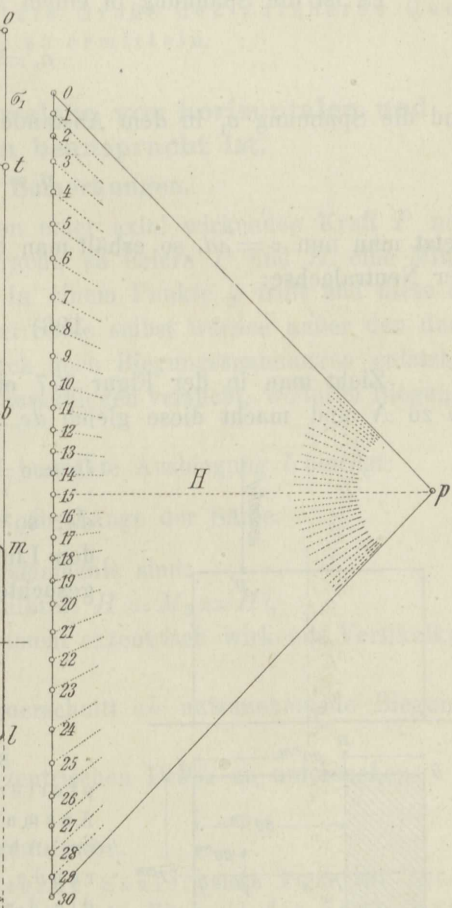


Hierin bezeichnet  $\Sigma fy^2$  das Trägheitsmoment des nutzbaren Querschnittsteils,  $\Sigma fy$  dessen statisches Moment, beide Momente bezogen auf die Neutralachse  $N$ .

Das Trägheitsmoment  $\Sigma fy^2$  ergibt sich nun dadurch, daß man den Querschnitt parallel zur Achse  $N$  in sehr schmale Streifen teilt, die Flächeninhalte dieser Streifen als zur Achse  $N$  parallele Kräfte auffaßt und für letztere ein Seilvieck konstruiert, siehe Figur 377 und 378. Es ist dann  $\Sigma fy^2 = 2HF$ ,



Figur 377.



Figur 378.

unter  $H$  den Polabstand, unter  $F$  die Fläche  $egfbd$ , siehe Figur 377, verstanden, ferner hat man  $\Sigma fy = H\bar{e}d$ ; es ist daher:

$$v = \frac{2HF}{Hed} = \frac{2F}{ed}$$

oder:

$$F = \frac{ved}{2}$$

d. h. die Dreiecksfläche  $ced$  ist gleich der Fläche  $F$ ; was nur möglich ist, wenn die beiden in der Figur 377 schraffierten Flächen  $egf$  und  $fc b$  gleich groß sind. Da nun aber der Punkt  $c$  gegeben ist, so erhält man die Neutralachse  $N$  dadurch, daß man durch  $c$  die Linie  $ce$  so zieht, daß hierdurch die Flächen  $egf$  und  $fc b$  einander gleich werden, was am besten durch Probieren geschieht.

Ist aber die Lage der Neutralachse bestimmt, so ergibt sich die Spannung in dem äußersten Querschnittsrande  $lm$  wie folgt:

Es ist die Spannung in einem Abstände  $v$  von der Neutralachse:

$$\sigma_v = \frac{Pv}{Hed}$$

und die Spannung  $\sigma_1$  in dem Abstände  $y_1$  von der Neutralachse:

$$\sigma_1 = \frac{Py_1}{Hed}$$

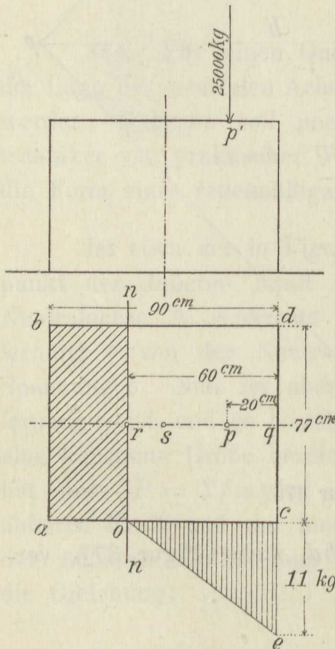
Setzt man nun  $v = \overline{ed}$ , so erhält man die Spannung in einer Entfernung  $\overline{ed}$  von der Neutralachse:

$$196) \dots \sigma = \frac{P}{H}$$

Zieht man in der Figur 377 etwa durch den Punkt  $d$  eine Senkrechte  $di$  zu  $N$  und macht diese gleich  $\overline{de}$ , trägt in dem Endpunkte  $i$  die Strecke:

$$\overline{ik} = \sigma = \frac{P}{H} \text{ als Parallele zu } N \text{ auf und zieht}$$

$dk$ , so schneidet die verlängerte  $lm$  zwischen den Linien  $di$  und  $dk$  die Strecke  $\overline{ot}$  gleich der gesuchten Randspannung  $\sigma_1$  aus.



$$\overline{ce} = \sigma_1$$

Figur 379.

### b) Übungsaufgaben.

365. **Aufgabe 172.** Auf einen Mauerpfeiler von den in Figur 379 angegebenen Ausmaßen wirkt in der Symmetrieachse im Abstände = 20 cm vom Querschnittsrande  $cd$  eine Kraft  $P = 25000$  kg. Es ist die Lage der Neutralachse sowie die in dem äußersten Querschnittsrande herrschende Druckspannung zu ermitteln.

**Auflösung.** Die Neutralachse  $N$  ist vom Querschnittsrande 60 cm entfernt. Die Größe der Randspannung beträgt:

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot 25000}{3 \cdot 20 \cdot 77} = \frac{5000}{462} = 10,8 \text{ kg, rund } 11 \text{ kg.}$$

Diese Spannung ist noch zulässig bei gutem Backsteinmauerwerk in Zementmörtel ausgeführt.



366. **Aufgabe 173.** Für die in Figur 377 dargestellte Querschnittsform ist unter Annahme einer äußeren Achtecksseite  $= 0,50$  m und einer Mauerstärke  $= 0,51$  m, eines Abstands des Angriffspunkts  $p$  vom Schwerpunkt  $= 0,60$  m, einer Belastung  $P = 180$  t, die Lage der Neutralachse und die größte Druckspannung im äußersten Querschnittsrande zu ermitteln.

367. **Aufgabe 174.** Von einem kreisringförmigen Querschnitt beträgt der äußere Durchmesser  $2,0$  m, die Dicke  $0,51$  m; der Angriffspunkt  $p$  der äußeren Kraft liegt  $0,55$  m vom Querschnittsmittelpunkte entfernt. Die Belastung des Querschnitts beträgt  $150$  t. Es ist die Lage der Neutralachse, die Größe des nutzbaren Querschnitts sowie die Randspannung zu ermitteln.

#### 4. Berechnung einer Säule, welche von horizontalen und vertikalen Kräften beansprucht ist.

##### a) Allgemeine Bemerkungen.

368. Wird eine Säule außer von einer axial wirkenden Kraft  $P$  noch durch eine horizontale Kraft  $H$  beansprucht, so liefern  $P$  und  $H$  eine Mittelkraft  $R$ , welche die Auflagerfläche  $cd$  in einem Punkte  $p$  trifft und diese auf exzentrischen Druck beansprucht. In der Säule selbst werden außer den durch  $P$  hervorgerufenen Druckspannungen auch noch Biegungsspannungen entstehen, indem die Horizontalkraft  $H$  die Säule auszubiegen versucht, wodurch Biegemomente auftreten.

Die durch die Horizontalkraft  $H$  bewirkte Ausbiegung  $l$  beträgt:

$$f = \frac{Hl^3}{3EJ}, \quad l \text{ bedeutet die Länge der Säule.}$$

Die hierdurch bedingten Biegemomente sind:

1. Biegemoment der Horizontalkraft  $H = M_H = Hl$ ,

2. Biegemoment durch die nunmehr exzentrisch wirkende Vertikalkraft

$$P = M_P = Pf.$$

Das gesamte von dem Säulenquerschnitt  $ab$  aufzunehmende Biegemoment beträgt somit  $M = Hl + Pf$ .

Die Auflagerplatte  $cd$  ist auf exzentrischen Druck zu untersuchen.

##### b) Übungsaufgabe.

369. **Aufgabe 175.** Eine gußeiserne Säule, siehe Figur 381, dient zweien Dachbindern als festes Auflager. Es soll die Säule unter Berücksichtigung der horizontalen Wirkung des Winddrucks berechnet werden. Die Belastung des Dachs, Eigengewicht und Schneedruck, beträgt für den Quadratmeter Grundrißfläche  $200$  kg. Der Winddruck soll auf den Quadratmeter senkrecht getroffene Fläche zu  $150$  kg angenommen werden.

**Auflösung.** Die vertikale Belastung des Dachs beträgt auf Grund der Ausmaße, siehe Figur 381, die Binderentfernung zu  $4$  m vorausgesetzt,  $14 \cdot 4 \cdot 200 = 11200$  kg. Der Dachwinkel  $\alpha$  ergibt sich aus der Beziehung  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,2}{7} = 0,314$ . Hieraus folgt  $\alpha = 17^\circ 28'$

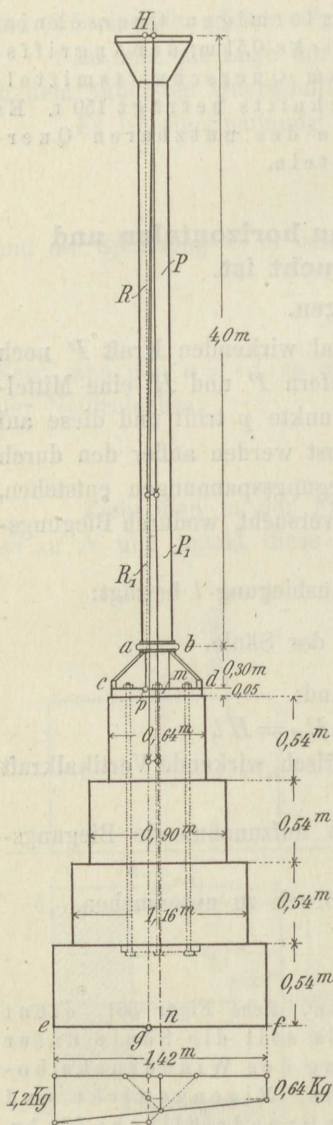
und  $\sin \alpha = 0,3$ ,  $\cos \alpha = 0,95$ . Die Sparrenlänge des Dachs beträgt  $\frac{7}{\cos \alpha} = \frac{7}{0,95} = 7,5$  m rund. Der Winddruck auf die schräge Dachfläche ist  $W = 7,5 \cdot 4 \cdot 150 \cdot \sin^2 \alpha = 4500 \cdot 0,3^2 = 405$  kg.

Dieser Winddruck zerlegt sich, wie die Figur 381 zeigt. Aus dieser Zerlegung ergeben sich die Horizontalkräfte  $H_1$  und  $H_2 = W \sin \alpha = 405 \cdot 0,3 = 121,5$  kg oder rund 125 kg und die Vertikalkräfte  $V_1 = fi$  und  $V_2 = gn$ , siehe Figur 381. Man erhält  $V_1 = 100$  kg,  $V_2 = 300$  kg.

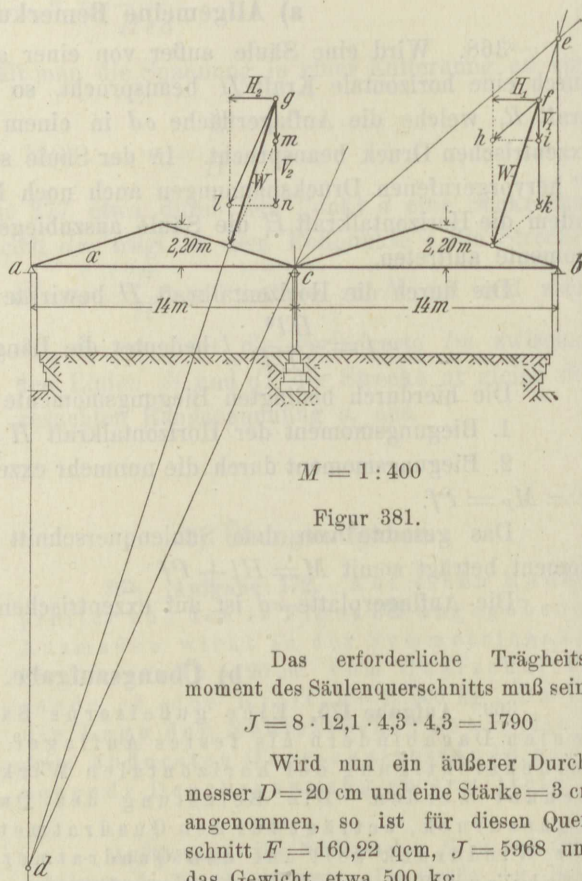
Auf die Säule wirken nun folgende vertikale Kräfte:

1. die Dachbelastung = 11200 kg
2.  $V_1 + V_2$  = 400 kg
3. das Säulengewicht = 500 kg angenommen,

zusammen 12100 kg



Figur 380.



Figur 381.

Das erforderliche Trägheitsmoment des Säulenquerschnitts muß sein:

$$J = 8 \cdot 12,1 \cdot 4,3 \cdot 4,3 = 1790$$

Wird nun ein äußerer Durchmesser  $D = 20$  cm und eine Stärke  $= 3$  cm angenommen, so ist für diesen Querschnitt  $F = 160,22$  qcm,  $J = 5968$  und das Gewicht etwa 500 kg.

Die beiden horizontalen Kräfte  $H_1$  und  $H_2$  vereinigen sich zu einer Horizontalkraft  $H = 250$  kg, welche die Säule auf Biegung beansprucht; sie verursacht eine Ausbiegung

$$f = \frac{250 \cdot 430 \cdot 430 \cdot 430}{3 \cdot 1000000 \cdot 5968} = 1,12 \text{ cm}$$



Die Säule wird nun auf Biegung beansprucht durch die vertikale Belastung  $P$  mit einem Moment  $M_P$  und durch die horizontale Kraft  $H$  mit einem Moment  $M_H$ . Es ist:

$$M_H = 250 \cdot 430 = 107500$$

und

$$M_P = 12100 \cdot 1,12 = 13552$$

Das Gesamtbiegemoment ist demnach gleich  $M = M_H + M_P = 107500 + 13552 = 121052$ .

Das Widerstandsmoment des Säulenquerschnitts ist:

$$W = \frac{5968}{10} = 596,8$$

Daher ist die größte auftretende Biegungsspannung:

$$\sigma_b = \frac{121052}{596,8} = 203 \text{ kg}$$

Durch die Vertikalbelastung  $P$  wird eine Druckspannung hervorgerufen:

$$\sigma_d = \frac{12100}{160,22} = 75 \text{ kg}$$

Die größte in der Säule auftretende Druckspannung ist:

$$\sigma_d = 203 + 75 = 278 \text{ kg,}$$

die größte Zugspannung ist:

$$\sigma_z = 203 - 75 = 128 \text{ kg}$$

Berechnung des Säulenfußes. Die Exzentrizität  $mp = x$  berechnet sich aus der Beziehung:

$$P : H = 430 : x$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{430 \cdot H}{P} = \frac{430 \cdot 250}{12100} = 8,8 \text{ cm} = mp$$

Wird die Seitenlänge des Fußes zu 60 cm gewählt, so ist:

$$d = \frac{60}{6} = 10; \quad x_1 = e + x = 10 + 8,8 = 18,8;$$

$$x_2 = e - x = 10 - 8,8 = 1,2$$

und

$$\sigma_1 = \frac{12100}{6060} \cdot \frac{18,8}{10} = 6 \text{ kg}$$

$$\sigma_2 = \frac{12100}{60 \cdot 60} \cdot \frac{1,2}{10} = 0,4 \text{ kg}$$

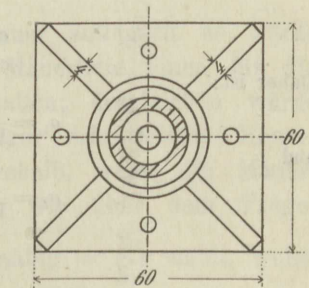
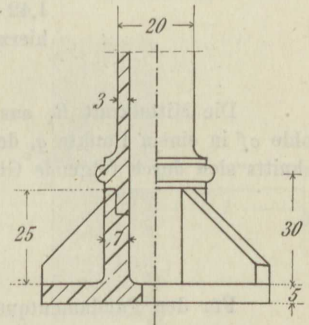
Zur Berechnung der Stärke der Fußplatte soll der ungünstigste Fall angenommen werden, daß der ganze zwischen zwei Rippen eingespannte Teil der Platte mit der größten auftretenden Pressung von 6 kg für den Quadratzentimeter beansprucht sei. Die Fläche dieses Teils sei rundweg zu einem Viertel der ganzen Fußplatte angenommen, also gleich  $\frac{60 \cdot 60}{4} = 900 \text{ qcm}$ ; demnach der darauffallende Druck = 5400 kg.

Das Biegemoment ist dann  $= \frac{1}{12} 5400 \cdot 60 = 27000$  und das Widerstandsmoment

$$W = \frac{27000}{250} = 108.$$

Setzt man die Grundrißlänge der Rippe zu 28 cm und die Stärke der Grundplatte zu 5 cm fest, so ist das Widerstandsmoment des Plattenquerschnitts  $= \frac{1}{6} \cdot 28 \cdot 5 \cdot 5 = 114$ , also ausreichend.

Figur 382.



Figur 383.

Berechnung der Rippenhöhe. Für die Belastung der Rippe soll der gleiche Wert wie für den zwischen zwei Rippen eingespannten Plattenteil, also 5400 kg, angenommen werden, dann ist das Biegemoment für den am Säulenfuß liegenden Rippenquerschnitt  $5400 \cdot 15 = 81000$  und das Widerstandsmoment  $W = \frac{81000}{250} = 324$ .

Bei einer Rippenhöhe von 25 cm und einer Rippenstärke von 4 cm erhält man ein

$$W = \frac{1}{6} 4 \cdot 25 \cdot 25 = 416$$

Die gewählten Ausmaße genügen.

Pressung auf den Baugrund. Die Belastung des Baugrunds setzt sich zusammen aus dem Säulendruck und dem Gewicht der Säulenuntermauerung. Rechnet man hierzu noch das Gewicht der auf der Untermauerung mit aufruhenden Erdmasse, so kann man, Ziegelmauerwerk vorausgesetzt, das Gewicht der über der Fundamentfläche lagernden Erdmasse einschließlich des Mauerwerks ansetzen zu:

$$\begin{aligned} 1,42 \cdot 1,42 \cdot 2,16 \cdot 1600 &= 7000 \text{ kg rund,} \\ \text{hierzu der Säulendruck} &= 12100 \text{ kg,} \\ \text{zusammen } P_1 &= 19100 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die Mittelkraft  $R_1$  aus vertikaler und horizontaler Belastung trifft die Fundamentsohle  $cf$  in einem Punkte  $g$ , dessen Entfernung  $\overline{ng}$  vom Mittelpunkt  $n$  des Fundamentquerschnitts sich durch folgende Gleichung berechnet:

$$\begin{aligned} 19100 : 250 &= 651 : x \\ x &= \frac{250 \cdot 651}{19100} = 8,5 \text{ cm} = \overline{qn} \end{aligned}$$

Für den Fundamentquerschnitt ist nun:

$$e = \frac{142}{6} = 23,66 \text{ cm}$$

$$e + x = 23,66 + 8,5 = 32,16 \text{ cm}$$

$$e - x = 23,66 - 8,5 = 15,16 \text{ cm}$$

Daher ist:

$$\sigma_1 = \frac{19100}{142 \cdot 142} \cdot \frac{32,16}{23,66} = 0,94 \cdot 1,3 = 1,12 \text{ kg}$$

und

$$\sigma_2 = \frac{19100}{142 \cdot 142} \cdot \frac{15,16}{23,66} = 0,94 \cdot 0,64 = 0,69 \text{ kg}$$

## 5. Die Einmauerung der Freiträger.

### a) Berechnung der Einmauerungstiefe, Verwendung von Unterlagsplatten.

370. Wenn ein Freiträger, siehe Figur 384, in einer Mauer aufgelagert werden soll, so wird letztere auf exzentrischen Druck beansprucht. Sollen in den Auflagerquerschnitten nur Druckspannungen herrschen, so dürfen die Angriffspunkte  $a$  und  $b$  der Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  nicht über den Kernrand des betreffenden Querschnitts hinausfallen, müssen also von den Begrenzungen der Mauer um  $\frac{t}{3}$  entfernt liegen, wenn  $t$  die Mauerstärke bzw. die Einmauerungs-



tiefe bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung erhält man für die Größen der Auflagerdrücke die Gleichungen:

$$B \frac{t}{3} = P \left( l + \frac{t}{3} \right) \quad \text{a Drehungspunkt}$$

Hieraus folgt:

$$197) \dots B = \frac{P \left( l + \frac{t}{3} \right)}{\frac{t}{3}} = \frac{P(3l+t)}{t}$$

und

$$198) \dots A = P + B = P + \frac{P(3l+t)}{t} = \frac{P(3l+2t)}{t}$$

Für die größte Druckspannung bei  $c$  erhält man die Gleichung:

$$199) \dots \frac{2P(3l+2t)}{t} = kbt$$

unter  $b$  die Breite der Auflagerung des Trägers verstanden. Hieraus kann  $t$  ermittelt werden. Man erhält:

$$200) \dots t = \frac{2P + \sqrt{P(6blk + 4P)}}{kb}$$

Zur Herstellung des Gleichgewichts des Trägers muß über ihm so viel Mauerwerk stehen, daß es dem nach aufwärts gerichteten Auflagerdruck  $B$  hinlänglich Widerstand zu leisten vermag. Wollte man den Träger direkt auf der Mauer auflagern, so würde in der Regel die aus Gleichung 200 berechnete Mauertiefe einen für die Zwecke der Ausführung viel zu großen Wert erhalten; desgleichen würde auch in den meisten Fällen die über dem Träger erforderliche Mauerhöhe eine viel zu große werden. Man wird deshalb, wenn die Mauerstärke von vornherein gegeben ist, sowohl unter wie über dem Träger Auflagerplatten verwenden, deren Länge man zweckmäßig  $= \frac{2}{3}t$  wählt, wobei jetzt  $t$  die gegebene Einmauerungstiefe bezeichnet, während man die Breite so bestimmt, daß die größte Druckspannung im Mauerwerk die zulässige Größe, also 7 bzw. 10 kg für den Quadratcentimeter, nicht überschreitet.

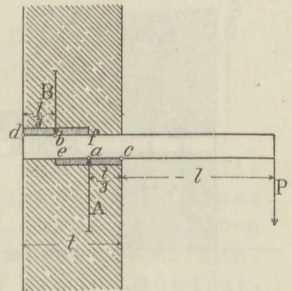
Bezeichnet nun  $x$  die Breite der unteren Platte, so hat man die Gleichung:

$$\frac{2}{3}txk = A = \frac{P(3l+2t)}{t}$$

daher ist:

$$201) \dots x = \frac{3P(3l+2t)}{2t^2k}$$

Die Breite der oberen Auflagerplatte berechnet sich aus der Bedingung, daß bei gegebener Mauerhöhe das über dem Träger befindliche Mauergewicht mindestens die doppelte Größe von  $B$  besitzen muß.



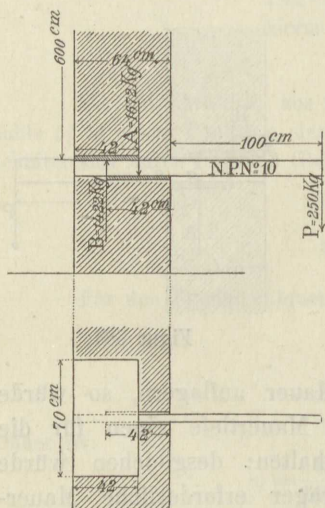
Figur 384.

Anstatt den Träger durch darüber befindliches Mauerwerk zu belasten, kann man ihn auch mit dem unter ihm befindlichen Mauerwerk verankern; es muß dann die hierzu erforderliche Ankerplatte, entsprechend der im vorstehenden erwähnten oberen Auflagerplatte, so tief unter dem Träger angebracht werden, daß das Gewicht des zwischen Träger und Ankerplatte liegenden Mauerwerks den Auflagerdruck  $B$  zu ersetzen imstande ist.

### b) Übungsaufgaben.

371. Aufgabe 176. Ein Freitragender von I-Form, siehe Figur 385, der an seinem freien Ende eine Einzellast von 250 kg aufzunehmen hat, ist in eine 64 cm starke Mauer einzulagern. Welche Ausmaße müssen die unter und über dem Träger anzuordnenden Unterlagsplatten erhalten, wenn das Mauerwerk nur bis zu 7 kg für den Quadratcentimeter beansprucht werden darf und die über dem Träger vorhandene Mauerhöhe 6 m beträgt.

Wie stark müßte die Mauer sein, wenn der Träger direkt auf das Mauerwerk aufgelagert werden sollte?



Figur 385.

**Auflösung.** Zunächst ergibt sich das Trägerprofil aus der Gleichung:

$$W = \frac{250 \cdot 100}{1200} = 21$$

Hierfür genügt N. P. Nr. 9 mit einem  $W = 26,2$ . Dasselbe besitzt eine Auflagerbreite  $b = 4,6$  cm.

Die Auflagerdrücke sind:

$$A = \frac{250(300 + 2 \cdot 64)}{64} = 1672 \text{ kg}$$

und

$$B = \frac{250(300 + 64)}{64} = 1422 \text{ kg}$$

Die Einmauerungstiefe berechnet sich aus der Gleichung:

$$t = \frac{2 \cdot 250 + \sqrt{250(6 \cdot 4,6 \cdot 100 \cdot 7 + 1000)}}{7 \cdot 4,6} = 85 \text{ cm}$$

Da die Mauerstärke aber nur 64 cm beträgt, so müssen Unterlagsplatten verwendet werden. Wählt man deren Länge zu 42 cm, so ergibt sich zunächst die Breite  $x$  der unteren Platte aus der Bedingung, daß die größte Pressung auf das Mauerwerk nur 7 kg betragen darf. Man hat also die Gleichung:

$$42 \cdot x \cdot 7 = 1672$$

daher:

$$x = \frac{1672}{294} = 8 \text{ cm}$$

Bei einer Mauerhöhe von 6 m ist zur Hervorbringung eines vertikalen Drucks von 1422 kg ein Mauerprisma erforderlich, dessen Inhalt beträgt:  $6 \cdot 0,42 \cdot y$ , unter  $y$  die Breite der oberen Platte verstanden, man hat also die Gleichung:

$$6 \cdot 0,42 \cdot y \cdot 1600 = 1422$$

oder:

$$y = \frac{1422}{6 \cdot 0,42 \cdot 1600} = 0,35 \text{ m}$$



Will man also einen doppelt so großen Druck als 1422 kg durch die über dem Träger liegenden Mauerkörper hervorbringen, so muß derselbe eine Breite von

$$2 \cdot 0,35 = 0,70 \text{ m} = 70 \text{ cm}$$

besitzen. Die Ausmaße der oberen Platte sind also  $\frac{42}{70}$  cm.

Die Dicke  $z$  der Platte berechnet man, indem man den über den oberen Trägerflansch hervorragenden Teil der Platte als einen nach dem zweiten Belastungsfalle beanspruchten Träger behandelt; man hat daher die Gleichung:

$$\frac{1}{6} \cdot 42 \cdot z^2 \cdot 250 = \frac{32,7 \cdot 62 \cdot 600 \cdot 0,0016 \cdot 32,7}{2}$$

daher ist:

$$z = \sqrt{12,32} = 3,5 \text{ cm oder rund } 40 \text{ mm}$$

Die Dicke der unteren Platte kann in ähnlicher Weise wie die obere berechnet werden. Wegen des geringen Überstands über den Träger würde aber diese Dicke zu gering ausfallen; man verwendet daher zur Berechnung besser die empirische Formel:

$$z_1 = \frac{1}{20} h + 15 \text{ mm, } h \text{ Trägerhöhe,}$$

es wird demnach im vorliegenden Falle:

$$z_1 = \frac{100}{20} + 15 = 20 \text{ mm}$$

Zweckmäßig macht man beide Platten gleich stark, und zwar gleich 40 mm.

**372. Aufgabe 177.** Ein Balkon von 3 m Länge und 1,20 m Breite wird durch drei Freiträger von I-Form gestützt, die in einer 0,77 m starken Mauer auflagern. Der Balkon ist durch eine 0,80 m hohe  $\frac{1}{2}$  Stein starke Brüstung eingefaßt. Das Gewicht der Balkondecke beträgt einschließlich der Nutzlast 700 kg für den Quadratmeter. Die über dem Träger zur Verfügung stehende Mauerhöhe beträgt 6 m. Es sind die Träger sowie die zur Druckverteilung erforderlichen Auflagerplatten zu berechnen.

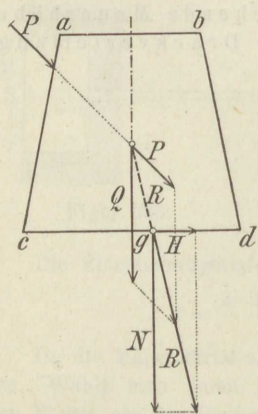


# Stabilität der Mauern und Gewölbe.

## A. Stabilität freistehender Mauern.

### 1. Stabilitätsbedingungen.

373. Wirkt eine äußere Kraft  $P$  in nicht lotrechter Richtung auf eine freistehende Mauer, siehe Figur 386, ein, so wird irgend ein horizontaler Querschnitt, z. B.  $cd$ , beansprucht durch die Mittelkraft  $R$  aus der Kraft  $P$  und dem über dem Querschnitt stehenden Mauergewicht  $Q$ . Die Mittelkraft  $R$  zerlegt



Figur 386.

sich in zwei Seitenkräfte  $H$  und  $N$ , von denen die erstere parallel, die letztere senkrecht zur Querschnittsfläche  $cd$  gerichtet ist. Die Kraft  $H$  sucht den über dem Querschnitt  $cd$  stehenden Mauerkörper über  $cd$  hinweg zu schieben und muß von der Reibung des Mauerwerks längs der Fugenfläche  $cd$  überwunden werden; die Kraft  $N$  beansprucht die Querschnittsfläche  $cd$  auf exzentrischen Druck bzw. sucht den Mauerkörper umzukanten.

Soll die Mauer die erforderliche Stabilität besitzen, so muß der nötige Widerstand vorhanden sein, sowohl gegen Abgleiten als gegen Umkanten.

Der Widerstand gegen Abgleiten ist vorhanden, wenn die längs der Fugenfläche  $cd$  stattfindende Reibung größer ist als die Horizontalkraft  $H$ .

Bezeichnet man den Winkel, dessen Tangente gleich ist dem Reibungskoeffizienten  $f$  des Mauerwerks mit  $\varphi$ , so muß, damit  $H < fN$  ist,  $\frac{H}{N} < f$ , d. h. kleiner als  $\operatorname{tg} \varphi$  sein.

„Damit die Mauer die nötige Sicherheit gegen Abgleiten einer Fuge längs der anderen gewährt, muß der Winkel der Mittelkraft aus äußerer Kraft und dem auf



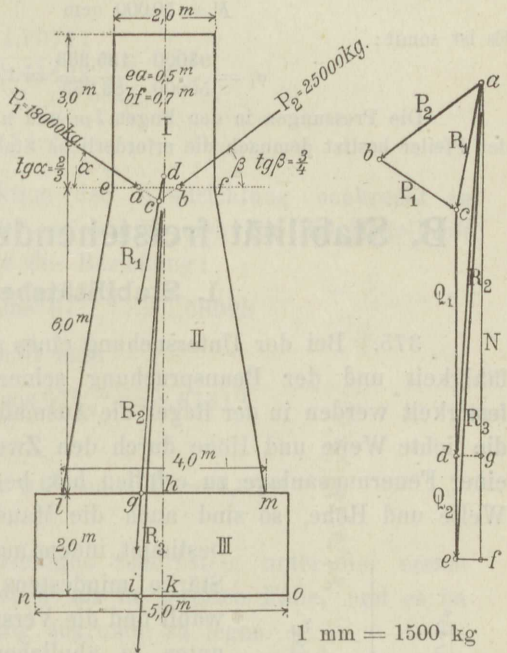
der Fuge stehenden Mauergewicht mit der Normalen zur Fugenfläche kleiner sein als der Reibungswinkel des Mauerwerks.“

„Die Mittelkraft  $R$  muß, wenn ein Umkanten der Mauer nicht eintreten soll, die Fugenfläche  $cd$  innerhalb ihrer Begrenzung treffen.“

Im letzteren Falle wird sie die Fugenfläche auf exzentrischen Druck beanspruchen, wobei der Angriffspunkt  $g$  von  $R$  innerhalb des Kernrands der Fugenfläche sich befinden soll; trifft dieses aber nicht zu, so muß untersucht werden, ob der nutzbare Querschnitt innerhalb der zulässigen Grenze beansprucht wird. Überschreiten die im äußersten Querschnittsrande auftretenden Druckspannungen die zulässige Grenze nicht, so ist die Mauer als stabil zu erachten.

## 2. Übungsaufgabe.

374. Aufgabe 178. Ein Brückenpfeiler von den in der Figur 387 bezeichneten Ausmaßen erhält in den Punkten  $a$  und  $b$  die Drücke zweier Gewölbbebögen,  $P_1 = 18000$  kg,  $P_2 = 25000$  kg, unter den eingezeichneten Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ . Das Gewicht des Pfeilermauerwerks beträgt für den Kubikmeter  $2000$  kg. Es ist die Stabilität des Pfeilers zu untersuchen und die Größe der Randspannungen in den Fugen  $lm$  und  $no$  festzustellen.



Figur 387.

Figur 388.

### Auflösung.

$$\begin{array}{l}
 \text{Gewicht des Pfeilerteils I} = 2 \cdot 3 \cdot 2000 = 12000 \text{ kg} \\
 \text{„ „ „ II} = \frac{2+4}{2} \cdot 6 \cdot 2000 = 36000 \text{ kg} \\
 \text{„ „ „ III} = 5 \cdot 2 \cdot 2000 = 20000 \text{ kg} = Q_2 \\
 \text{Gewicht des ganzen Pfeilers } Q = 68000 \text{ kg}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Gewicht von} \\ \text{I} + \text{II} = Q_1 = 48000 \text{ kg} \end{array}$$

Bestimmt man die Mittelkraft  $R_2$  aus  $P_1$ ,  $P_2$  und  $Q_1$ , siehe Figur 387 und 388, so trifft  $R_2$  die Fugenfläche  $lm$  in einem Punkte  $g$ , dessen Abstand vom Mittelpunkt  $h$  etwa  $45$  cm beträgt, der also noch innerhalb des Zentralkerns liegt.

Die Mittelkraft  $R_3$  aus  $R_2$  und  $Q_2$  trifft die unterste Fugenfläche  $no$  in einem Punkte  $i$ , der in einem Abstand von  $42$  cm vom Mittelpunkte  $h$ , also ebenfalls noch innerhalb des Zentralkerns gelegen ist.

Für den Querschnitt  $lm$  ist:

$$e = \frac{1}{6} \cdot 400 = 66,66 \text{ cm}$$

$$x_1 = 66,66 + 45 = 111,666 \text{ cm}$$

$$F = 40000 \text{ qcm}$$

$$P = ag = 48,66 \text{ mm, Figur 388,} = 73000 \text{ kg}$$

Es ist daher:

$$\sigma_1 = \frac{73000}{40000} \cdot \frac{111,666}{66,666} = 1,825 \cdot 1,67 = 3,05 \text{ kg}$$

Für den Querschnitt  $no$  ist:

$$e = \frac{1}{6} \cdot 500 = 83,333 \text{ cm}$$

$$x_1 = 83,333 + 42 = 125,333 \text{ cm}$$

$$P = af = 62 \text{ mm, Figur 388,} = 93000 \text{ kg}$$

$$F = 50000 \text{ qcm}$$

Es ist somit:

$$\sigma_1 = \frac{93000}{50000} \cdot \frac{125,333}{83,333} = 1,86 \cdot 1,50 = 2,79 \text{ kg}$$

Die Pressungen in den Fugen  $lm$  und  $no$  bleiben innerhalb der zulässigen Grenzen, der Pfeiler besitzt demnach die erforderliche Stabilität.

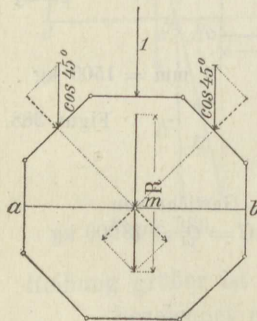
## B. Stabilität freistehender Fabrikschornsteine.

### 1. Stabilitätsbedingungen.

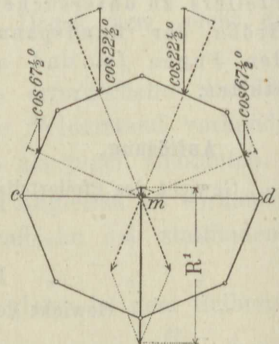
375. Bei der Untersuchung eines Schornsteins hinsichtlich seiner Standfähigkeit und der Beanspruchung seiner einzelnen Querschnitte auf Druckfestigkeit werden in der Regel die Ausmaße von vornherein gegeben sein, indem die lichte Weite und Höhe durch den Zweck, welchen der Schornstein als Teil einer Feuerungsanlage zu erfüllen hat, bedingt sind. Kennt man aber die lichte Weite und Höhe, so sind auch die Mauerstärken innerhalb gewisser Grenzen

bestimmt, indem man als oberste Stärke mindestens einen Stein wählt und die Verstärkung nach unten in ähnlicher Weise eintreten läßt, wie dies bei der Umfassungsmauer eines Gebäudes der Fall ist.

Die statischen Anforderungen, welchen der Schornstein zu genügen hat, bestehen in der hinlänglichen Sicherheit gegen Umkanten durch den Winddruck



Figur 389.



Figur 390.

und gegen Zerdrücken der untersten Schichten durch das Mauergewicht; auch darf die Belastung des Baugrunds die zulässige Grenze nicht überschreiten.

Was die Größe des Winddrucks anbetrifft, so ist durch Ministerialerlaß vom 25. Juli 1889 die Annahme von 125 kg für den Quadratmeter senkrecht



getroffene Fläche als genügend zu erachten, siehe Anmerkung 65. Die am häufigsten auftretenden Querschnittsformen sind das regelmäßige Achteck und der Kreis. Für die erstere Form tritt die stärkste Beanspruchung durch den Winddruck auf, wenn die Horizontalprojektion der Windrichtung senkrecht zu einer Achtecksseite vorausgesetzt wird, denn in diesem Falle hat man, die Achtecksseite = 1 gesetzt, als Mittelkraft des Winddrucks auf die vertikale Fläche  $ab$ , siehe Figur 389:

$$R = 1 + \cos 45^\circ = 1,70711$$

Für die Größe der gedrückten Fläche aber:

$$F = 1 + 2 \cos 45^\circ = 2,41422$$

Es besteht somit das Verhältnis:

$$202) \dots \frac{R}{F} = \frac{1,70711}{2,41422} = 0,71$$

oder es ist:

$$R = 0,71 F$$

Nimmt man die Horizontalprojektion der Windrichtung senkrecht zu einer Diagonale  $cd$  an, siehe Figur 390, so ergibt sich für die Mittelkraft des Winddrucks senkrecht zur Fläche  $cd$  die Beziehung:

$$R' = 2 \cos^3 22\frac{1}{2}^\circ + 2 \cos^3 67\frac{1}{2}^\circ = 1,68998$$

für die Größe der gedrückten Fläche erhält man:

$$F' = 2 \cos 22\frac{1}{2}^\circ + 2 \cos 67\frac{1}{2}^\circ = 2,61312$$

Daher ist:

$$203) \dots \frac{R'}{F'} = \frac{1,68998}{2,61312} = 0,65 \text{ oder } R' = 0,65 F'$$

Der Winddruck wird für den achtseitigen Schornstein unter der ersten Voraussetzung einen größeren Wert ergeben als im zweiten Falle, und es ist deshalb die erstere Annahme der Rechnung zugrunde zu legen.

Zur Berechnung der Größe des Winddrucks wählt man als gedrückte Fläche einen durch die Schornsteinachse senkrecht zu einer Achtecksseite geführten Vertikalschnitt und zieht von dem auf die volle Fläche treffenden senkrechten Druck 71%, d. i. für den Quadratmeter  $0,71 \cdot 125 = 89$  kg in Rechnung. Der Angriffspunkt des Winddrucks liegt im Schwerpunkt der gedrückten Fläche.

Zur Feststellung der Stabilität des Schornsteins wählt man eine Anzahl von Querschnitten, in der Regel an jenen Stellen, wo die Mauerstärke wechselt, bestimmt das Gewicht für den über dem betreffenden Querschnitt liegenden Schornsteinteil und den auf letzteren treffenden Winddruck. Die Mittelkraft aus Mauergewicht und Winddruck wird die Querschnittsfläche in einem Punkte schneiden, und es ist nun zu untersuchen, ob dieser Punkt innerhalb des Zentral-

kerns liegt oder nicht, sowie ob in beiden Fällen die in dem äußersten Querschnittsrande auftretende Spannung innerhalb der zulässigen Grenze bleibt. Das ganze Verfahren soll an einem Beispiele gezeigt werden.

**Anmerkung 65.** Durch Ministerial-Erlaß vom 31. Januar 1910 ist für hohe Bauten auf kleiner Grundfläche noch der Nachweis zu führen, daß bei einem Winddruck von 150 kg für den Quadratmeter, die für die zulässigen Beanspruchungen angegebenen oberen Grenzen nicht überschritten werden.

## 2. Übungsaufgaben.

376. **Aufgabe 179.** Für den in Figur 391 im Vertikalschnitt dargestellten Schornstein ist die Stabilitätsuntersuchung auszuführen.

**Auflösung.** Man teilt den Schornstein etwa in die Abschnitte *A* bis *K*, bestimmt deren Inhalte und hieraus die Gewichte. Die Inhaltsberechnung für den achteckigen Teil wird genau genug dadurch vorgenommen, daß man die mittlere Querschnittsfläche eines Abschnitts berechnet und mit der Höhe des letzteren multipliziert. Für die Inhalte und Gewichte ergeben sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte:

Schornstein Abschnitt	Inhalt des Abschnitts in Kubikmeter	Gewicht des Abschnitts in Kilogramm	Gewichtsumme der einzelnen Abschnitte in Kilogramm
A	$\frac{1,20 + 1,51}{2} \cdot 7,9 +$ dem Inhalt des Krönungsgesimses = 10,67 = 2,25 zusammen 12,98	20764	20764 = $N_1$
B	$\frac{2,06 + 2,48}{2} \cdot 7,7 = 14,479$	27982	48746 = $N_2$
C	$\frac{3,12 + 3,50}{2} \cdot 8,0 = 26,48$	43168	91916 = $N_3$
D	$\frac{4,12 + 4,54}{2} \cdot 4,2 = 18,21$	20132	112048 = $N_4$
E	$7,92 \cdot 6,6 +$ Gesimsvorsprung = 5,03 = 52,27 + 5,03 = 57,3	91683	203731 = $N_5$
F	$9,6 \cdot 0,6 = 5,76$	9214	212945 = $N_6$
G	$14,47 \cdot 0,8 = 11,58$	18522	231467 = $N_7$
H	$18,52 \cdot 0,8 = 14,82$	23708	255175 = $N_8$
J	$28,51 \cdot 0,7 = 19,96$	31938	287113 = $N_9$
K	$36,00 \cdot 1,5 = 54,00$	86400	373513 = $N_{10}$



Die zur Inhaltsberechnung erforderlichen Ausmaße und die hieraus abgeleiteten Flächeninhalte der einzelnen Querschnitte, desgleichen die Formeln zur Berechnung der Kernweite für den achteckigen und den quadratischen Querschnitt sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Querschnitt	Lichte Weite in m	Mauerstärke in m	Äußere Dicke in m	Innere Achtecksseite in m	Äußere Achtecksseite in m	Innerer Durchmesser in m	Äußerer Durchmesser in m	Querschnittsfläche in qm	Kernweite	Bemerkungen
I	1,10	0,26	1,62	0,41	0,67	—	—	1,20	—	Die Kernweite $e$ bestimmt sich für den achteckigen Querschnitt aus der Beziehung: $e = \frac{(D^2 + d^2) 0,244}{D}$ $D$ und $d$ der äußeren bzw. inneren Durchmesser.  Für die Querschnitte IX bis XIII bestimmt sich die Kernweite aus der Beziehung: $e = \frac{D^2 + d^2}{12 D}$ $e = \frac{1}{6}$ der äußeren Weite.
II	1,50	0,26	2,02	0,62	0,83	1,62	2,18	1,51	0,41	
III	1,26	0,38	2,02	0,52	0,83	—	2,18	2,06	—	
IV	1,60	0,38	2,36	0,66	0,97	1,73	2,55	2,48	0,54	
V	1,34	0,51	2,36	0,55	0,97	—	2,55	3,12	—	
VI	1,60	0,51	2,62	0,66	1,04	1,73	2,83	3,50	0,47	
VII	1,34	0,64	2,62	0,55	1,04	—	2,83	4,13	—	
VIII	1,50	0,64	2,78	0,62	1,15	1,73	3,01	4,54	0,49	
IX	1,30	0,90	3,10	—	—	1,84	4,38	7,92	0,43	
X	1,30	1,03	3,36	—	—	1,84	4,75	9,60	0,46	
XI	1,30	1,36	4,02	—	—	1,84	5,69	14,47	0,53	
XII	1,30	1,69	4,68	—	—	1,84	6,62	18,52	0,59	
XIII	—	5,34	—	—	—	—	—	28,51	0,89	
XIV	—	6,00	—	—	—	—	—	36,00	1,00	

In der folgenden Tabelle sind die auf die einzelnen Abschnitte A bis F treffenden Teilwinddrücke und deren Summen berechnet und zusammengestellt.

Schornstein Abschnitt	Gedrückte Fläche in Quadratmeter	Winddruck in Kilogramm	Summe der Winddrücke auf die einzelnen Abschnitte in Kilogramm
A	$\frac{1,62 + 2,02}{2} \cdot 7,9 + 0,79$ qm für das Bekrönungsgesims = 15,17	1353 = $W_A$	1353 = $W_1$
B	$\frac{2,02 + 2,36}{2} \cdot 7,7 = 16,86$	1504 = $W_B$	2857 = $W_2$
C	$\frac{2,36 + 2,62}{2} \cdot 8,0 = 19,92$	1773 = $W_C$	4630 = $W_3$
D	$\frac{2,62 + 2,78}{2} \cdot 4,2 = 11,34$	1010 = $W_D$	5640 = $W_4$
E	$3,10 \cdot 6,60 = 20,46$	2557 = $W_E$	8198 = $W_5$
F	$3,36 \cdot 0,60 = 2,02$	252 = $W_F$	8450 = $W_6$

Die Angriffspunkte der oben berechneten Teilwinddrücke liegen in den Schwerpunkten  $s_1$  bis  $s_6$ , siehe Figur 391, der zugehörigen Flächenabschnitte A bis F. Die Angriffspunkte  $S_1$  bis  $S_6$  der Winddrücke  $W_1$  bis  $W_6$  bestimmen sich am bequemsten mittels eines Seilvielecks, siehe Figur 391 und 392. Nunmehr lassen sich die Mittelkräfte  $R_1$  bis  $R_{10}$  aus den Winddrücken  $W_1$  bis  $W_6$  und  $N_1$  bis  $N_6$  bzw.  $W_6$  und  $N_{6-10}$ , siehe Figur 393, der Größe und Richtung nach ermitteln, wodurch sich durch Parallelen hierzu durch die entsprechenden Angriffspunkte  $S_1$  bis  $S_6$  die Angriffspunkte  $r_1$  bis  $r_{10}$  in den Querschnitten II bis XIV, siehe Figur 391, ergeben. Aus der Lage dieser Angriffspunkte geht hervor, daß die Stabilität des Schornsteins gegen Umkanten gesichert ist. Für die Entfernungen der Angriffspunkte  $r$  von den zugehörigen Querschnittschwerpunkten ergeben sich die folgenden Werte:

Querschnitt	Entfernung des Punktes $r$ vom Schwerpunkte in m
II	0,30
IV	0,45
VI	0,55
VIII	0,65
IX	0,58
X	0,58
XI	0,55
XII	0,55
XIII	0,50
XIV	0,40

Ein Vergleich mit den zu den Querschnitten gehörigen Kernweiten ergibt, daß der Angriffspunkt  $r$  nur in den Querschnitten VI, VIII, IX, X und XI außerhalb der Kernfläche zu liegen kommt. Für diese Querschnitte muß sonach untersucht werden, ob im nutzbaren Querschnitteile die Randpressung die zulässige Grenze nicht überschreitet; diese Untersuchung ist für den Querschnitt VIII vorgenommen worden, siehe Figur 394 a und 394 b.

Es wurde der Querschnitt parallel zur Neutralachse  $nn$ , deren Richtung ja bekannt ist, in 22 Streifen geteilt; die Flächeninhalte dieser Streifen sind als Kräfte parallel zu  $nn$  wirkend aufzufassen und zum Kräftevieleck, siehe Figur 395, Maßstab 1 mm = 0,04969 qm, anzutragen. Mittels des beliebig gewählten Polabstands  $H$  (30 mm = 30 · 0,04969 = 1,488 qm) ergibt sich das Seilvieleck. In demselben zieht man nun durch den Punkt  $c$  die Linie  $cfe$  so, daß die Flächeninhalte der Figuren  $bcf$  und  $fge$  einander gleich werden, dann geht durch  $e$  die Neutralachse  $nn$  hindurch. Es ist nun die Pressung  $\sigma$  in einer Entfernung  $ed = hi$  von der Neutralachse:

$$\sigma = \frac{N_4}{H} = \frac{112048}{14880} = 7,53 \text{ kg für den Quadratzentimeter}$$

In dem äußersten Querschnittsrande  $lm$ , siehe Figur 394, ist die Pressung:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma h_0}{h_i} = \frac{7,53 \cdot 47}{56} = 6 \text{ kg für den Quadratzentimeter}$$

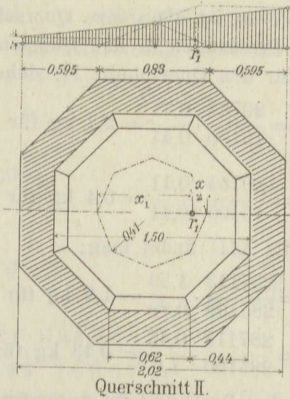
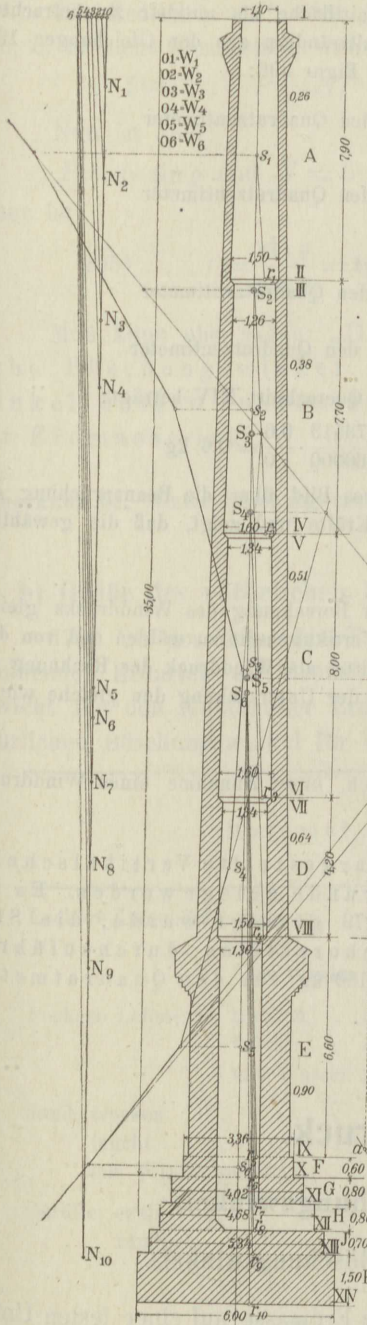
Die Pressung  $\sigma_1$  bleibt also innerhalb der zulässigen Beanspruchung; dasselbe ist auch bezüglich der übrigen auf die gleiche Weise zu untersuchenden Querschnitte IX, X und XI der Fall.



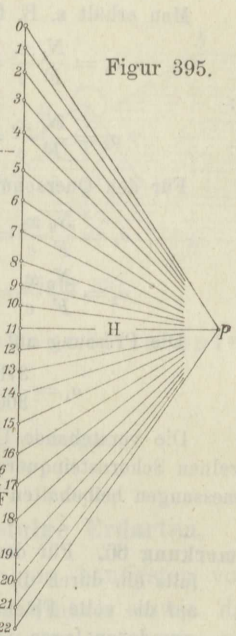
Figur 393.

Figur 391.

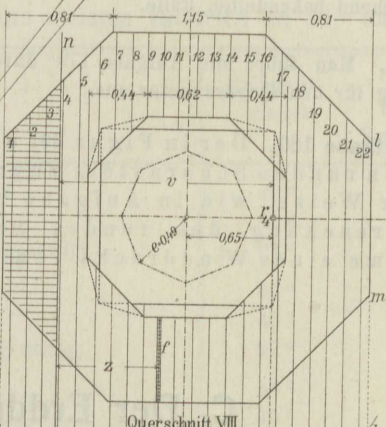
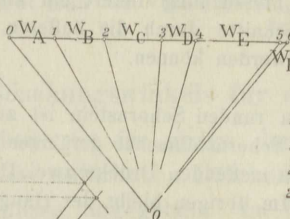
Figur 396.



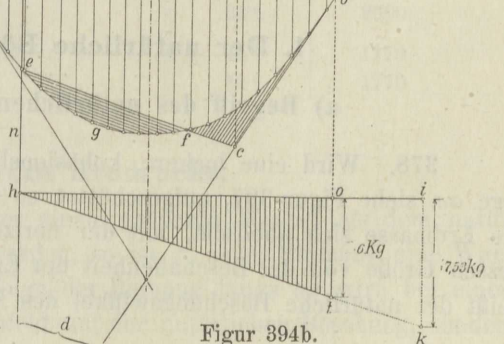
Figur 395.



Figur 392.



Figur 394a.



Figur 394b.

$$\bar{ik} = \sigma = 7,5 \text{ kg}$$

$$ot = \sigma_1 = 6 \text{ kg}$$

Liegt der Angriffspunkt  $r$  innerhalb der Kernfläche, wie z. B. in den Querschnitten II, IV, XII, XIII und XIV, so ist die ganze Querschnittfläche als nutzbar zu betrachten und es berechnen sich die Pressungen in den Querschnittsrändern aus den Gleichungen 191.

Man erhält z. B. für den Querschnitt II, siehe Figur 396:

$$\sigma_1 = \frac{N_1 x_1}{F e} = \frac{20764}{15100} \cdot \frac{0,71}{0,41} = 2,4 \text{ kg für den Quadratcentimeter}$$

und:

$$\sigma_2 = \frac{N_1 x_2}{F e} = \frac{20764}{15100} \cdot \frac{0,11}{0,41} = 0,4 \text{ kg für den Quadratcentimeter}$$

Für den Querschnitt XIII findet man:

$$\sigma_1 = \frac{N_9 x_1}{F e} = \frac{287113}{285100} \cdot \frac{1,39}{0,89} = 1,2 \text{ kg für den Quadratcentimeter}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_9 x_2}{F e} = \frac{287113}{285100} \cdot \frac{0,43}{1,0} = 0,43 \text{ kg für den Quadratcentimeter}$$

Die Pressung auf den Baugrund im untersten Querschnitt XIV beträgt:

$$\sigma_1 = \frac{373513}{360000} \cdot \frac{1,4}{1,0} = 2 \text{ kg bzw. } \sigma_2 = \frac{373513}{360000} \cdot \frac{0,6}{1,0} = 0,6 \text{ kg}$$

Die vorstehende Untersuchung liefert ein klares Bild über die Beanspruchung der einzelnen Schornsteinquerschnitte durch die äußeren Kräfte und zeigt, daß die gewählten Abmessungen beibehalten werden können.

**Anmerkung 66.** Für den runden Schornstein ist zur Berechnung des Winddrucks gleichfalls ein durch die Schornsteinachse geführter Vertikalschnitt zu wählen und von dem auf die volle Fläche treffenden Drucke zwei Drittel als Winddruck der Rechnung zugrunde zu legen. Im übrigen bleibt der Gang der Untersuchung der gleiche wie in dem vorstehend behandelten Falle.

**Anmerkung 66a.** Man führe die Aufgabe 179 durch, unter Annahme eines Winddrucks von 150 kg für den Quadratmeter aus.

377. **Aufgabe 180.** Der in Figur 391 dargestellte Vertikalschnitt soll für einen runden Schornstein zugrunde gelegt werden. Es ist in ähnlicher Weise, wie in Aufgabe 179 gezeigt wurde, die Stabilitätsuntersuchung des runden Schornsteins durchzuführen unter Annahme eines Winddrucks von 150 kg für den Quadratmeter.

## C. Der Erddruck.

### 1. Der natürliche Böschungswinkel.

#### a) Begriff des natürlichen Böschungswinkels.

378. Wird eine lockere, kohäsionslose Erdmasse auf einer festen Unterlage  $ac$ , siehe Figur 397, aufgeschüttet, so schließt die Fläche  $ab$ , nach welcher die Erdmasse sich abböscht, mit der horizontalen Fläche  $ac$  einen Winkel ein, dessen Größe von der Beschaffenheit der Erdmasse abhängig ist. Dieser Winkel heißt der natürliche Böschungswinkel des Materials.



Ein Erdteilchen  $P$  wird auf der schrägen Fläche  $ab$  im Gleichgewicht sein, d. h. nicht abrutschen, wenn die Gleichung besteht:

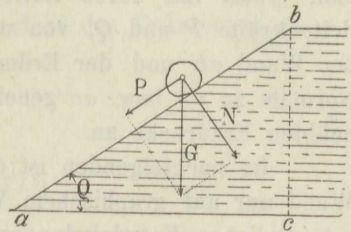
$$204) \dots P = Nf$$

Nun ist aber:

$$P = G \sin \varrho \text{ und } N = G \cos \varrho$$

daher ist:

$$205) \dots f = \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho} = \operatorname{tg} \varrho$$



Figur 397.

Man kann also sagen: „Der natürliche Böschungswinkel ist jener Winkel, dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten der Erdmasse ist.“

**Anmerkung 67.** Unter Böschung versteht man das Verhältnis  $\frac{ac}{bc} = \operatorname{cotg} \varrho$ .

### b) Größe des natürlichen Böschungswinkels für einige Erdarten.

379. In der folgenden Tabelle ist für einige der am häufigsten vorkommenden Erdarten die Größe des natürlichen Böschungswinkels sowie das Gewicht für den Kubikmeter Erdmasse angegeben. Im Mittel darf man den natürlichen Böschungswinkel für die meisten Erdarten zu  $30^\circ$  annehmen.

Material	Reibungswinkel $\varrho$	Gewicht für den Kubikmeter
Lockere Dammerde, trocken . . . . .	$40^\circ$	1400
feucht . . . . .	$45^\circ$	1580
mit Wasser gesättigt . . . . .	$27^\circ$	1800
Lockere Lehmelerde, trocken . . . . .	$40^\circ$	1500
feucht . . . . .	$45^\circ$	1550
mit Wasser gesättigt . . . . .	$27^\circ$	2040
Sand, trocken . . . . .	$35^\circ$	1640
feucht . . . . .	$40^\circ$	1740
mit Wasser gesättigt . . . . .	$24^\circ$	2000
Gerölle, eckig . . . . .	$45^\circ$	1770
rundlich . . . . .	$30^\circ$	1770

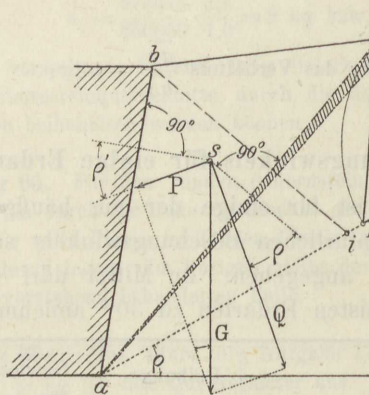
## 2. Begriff des Erddrucks.

380. Soll eine Erdmasse unter einem größeren Winkel als dem natürlichen Böschungswinkel abgeböschet werden, so ist zu ihrer Stützung eine Wand  $ab$  erforderlich, siehe Figur 398. Infolge der Reibung längs  $ab$  wird bei einem Nachgeben der Wand die Erdmasse nicht auf der natürlichen Böschung, sondern

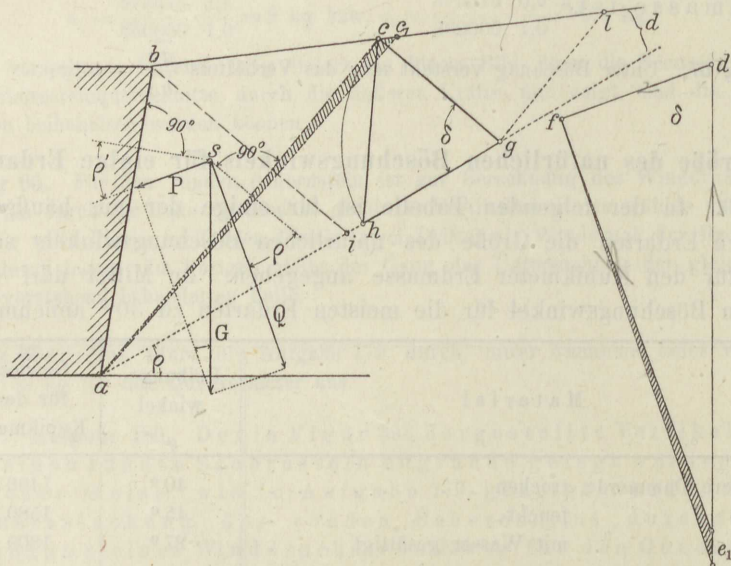
längs einer steileren Böschung  $ac$ , der sogenannten Gleitfläche, abrutschen; der von dem Keile  $abc$  auf die Wand  $ab$  ausgeübte Druck heißt der Erddruck; man erhält ihn durch Zerlegung des Gewichts  $G$  des Erdkeils  $abc$  in zwei Seitenkräfte  $P$  und  $Q$ , von welchen  $P$  unter dem Reibungswinkel  $\rho'$  zwischen der Wand  $ab$  und der Erdmasse,  $Q$  unter dem Reibungswinkel  $\rho$  gegen die Normale zu  $ab$  bzw.  $ac$  geneigt ist.  $P$  gibt die Größe des auf die Wand ausgeübten Erddrucks an.

Im nachfolgenden ist die Ermittlung der Größe des Erddrucks auf eine Wand nur auf graphischem Wege vorgenommen worden, weil sich hierbei die erforderlichen Entwicklungen in einfacher und leichtverständlicher Weise vornehmen lassen. Voraussetzung ist dabei die Annahme, die Richtung des Erddrucks bilde mit der Normalen zur Wandfläche den Reibungswinkel  $\rho$ . Diese

Figur 398.



Figur 399.



Annahme hat viel Wahrscheinlichkeit für sich und kann wohl mit derselben Berechtigung gemacht werden wie jene, daß der Reibungswinkel gar nicht in Betracht komme. Jedenfalls besteht die Tatsache, daß Stützmauern, für welche der Erddruck unter Berücksichtigung des Reibungswinkels  $\rho$  nach dem graphischen Verfahren ermittelt und die Stärke der Mauer dementsprechend bestimmt worden ist, sich als in jeder Hinsicht standfähig bewährt haben.

### 3. Ermittlung der Gleitfläche.

381. Ist die Terrainlinie, siehe Figur 398, unter einem kleineren Winkel als der natürliche Böschungswinkel gegen die Horizontale geneigt, bezeichnet ferner  $ac$  die Gleitfläche und  $G$  das Gewicht des durch die letztere und die Wand  $ab$  begrenzten Erdkeils, so zerlegt man  $G$  in die Kräfte  $P$  und  $Q$  und zeichnet zu den Kräften  $G$ ,  $P$  und  $Q$  das Kräfte-dreieck  $def$ , siehe Figur 399. Für eine



andere, der  $ac$  unendlich nahe liegenden Gleitfläche  $ac_1$ , ergibt sich das Kräfte-dreieck  $de_1f$ . Es finden nun die folgenden Beziehungen statt:

Es ist, siehe Figur 398 und 399:

$$\begin{aligned} \triangle abc : \triangle acc_1 &= G : \triangle G, \quad \triangle G = \text{dem Gewicht des Erdprismas } acc_1, \\ &= \overline{de} : \overline{ee_1} \end{aligned}$$

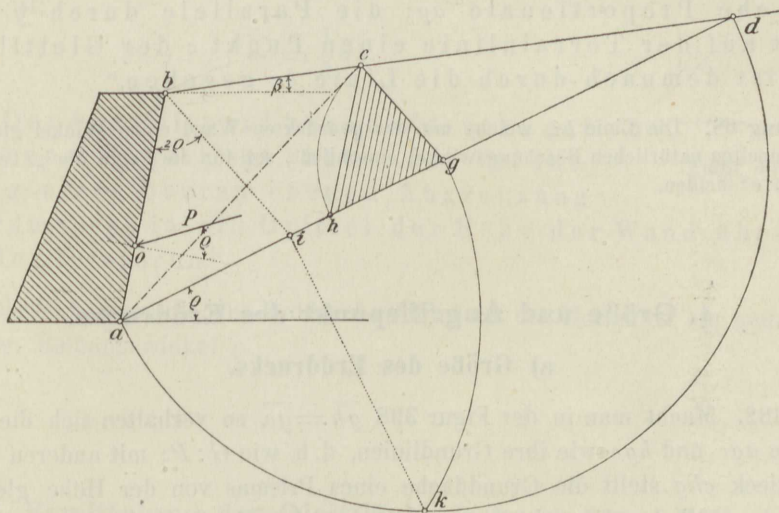
Nun ist aber auch:

$$\overline{de} : \overline{ee_1} = \triangle def : \triangle efe_1$$

oder:

$$\triangle abc : \triangle acc_1 = \triangle def : \triangle efe_1$$

Es läßt sich aber der Kräftemaßstab so wählen, daß die Strecke  $\overline{fe}$  gleich der Strecke  $\overline{ac}$  ist, dann werden die beiden sehr kleinen Dreiecke  $acc_1$  und  $efe_1$  annähernd einander gleich, woraus folgt, daß auch  $\triangle abc = \triangle def$  ist. Zieht man nun durch  $c$  die Linie  $cg$ , unter dem Winkel  $\delta$  gegen die natürliche



Figur 400.

Böschung geneigt, so folgt hieraus die Kongruenz der Dreiecke  $def$  und  $acg$ , woraus sich schließlich die Gleichheit der Dreiecke  $abc$  und  $acg$  ergibt. Zieht man ferner die Linie  $bi$  parallel zu  $cg$  und  $gl$  parallel zu  $ac$ , so erkennt man aus der Figur 398 die folgenden Beziehungen. Es ist:

$$\begin{aligned} \overline{ag} : \overline{ad} &= \overline{cl} : \overline{cd} \\ &= \overline{bc} : \overline{cd} \end{aligned}$$

ferner:

$$\overline{bc} : \overline{cd} = \overline{ig} : \overline{gd}$$

daher auch:

$$\begin{aligned}\overline{ag}:\overline{ad} &= \overline{ig}:\overline{gd} \\ &= (\overline{ag} - \overline{ai}):\overline{(ad - ag)}\end{aligned}$$

Hieraus folgt aber:

$$\overline{ag}(\overline{ad} - \overline{ag}) = \overline{ad}(\overline{ag} - \overline{ai})$$

oder:

$$206) \dots \overline{ag}^2 = \overline{ad} \cdot \overline{ai}$$

d. h. die Strecke  $\overline{ag}$  ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten  $\overline{ad}$  und  $\overline{ai}$ . Aus dem vorstehenden ergibt sich folgende Konstruktion zur Ermittlung der Gleitfläche: „Man zeichnet die Linie  $ad$ , siehe Figur 400, unter dem natürlichen Böschungswinkel zur Horizontalen geneigt, zieht durch  $b$  die Linie  $bi$  unter einem Winkel  $\varrho + \varrho'$ , oder, da in der Regel der Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk jenem zwischen Erde und Erde gleich gesetzt werden kann, unter dem Winkel  $2\varrho$  gegen die Linie  $ab$  geneigt, und konstruiert nun zu den Strecken  $\overline{ad}$  und  $\overline{ai}$  die mittlere geometrische Proportionale  $\overline{ag}$ ; die Parallele durch  $g$  zu  $bi$  liefert auf der Terrainlinie einen Punkt  $c$  der Gleitfläche, diese ist demnach durch die Linie  $ac$  gegeben.“

**Anmerkung 68.** Die Linie  $bi$ , welche mit der gedrückten Wand einen Winkel gleich dem doppelten natürlichen Böschungswinkel einschließt, soll für die Folge die „Stellungslinie“ heißen.

#### 4. Größe und Angriffspunkt des Erddrucks.

##### a) Größe des Erddrucks.

382. Macht man in der Figur 398  $\overline{gh} = \overline{gc}$ , so verhalten sich die beiden Dreiecke  $agc$  und  $hgc$  wie ihre Grundlinien, d. h. wie  $G:P$ ; mit anderen Worten, das Dreieck  $chg$  stellt die Grundfläche eines Prismas von der Höhe gleich der Einheit dar und das Gewicht dieses Prismas gibt die Größe des auf die Wand  $ab$  ausgeübten Erddrucks an. Man bezeichnet deshalb das Dreieck  $chg$  kurzweg als das Druckdreieck.

Zur Bestimmung der Größe des Erddrucks auf die Wand  $ab$  ergibt sich somit die folgende Konstruktion:

„Man bestimmt die Gleitfläche, wie in Nr. 381 angegeben; macht hierauf  $\overline{gh} = \overline{gc}$ , so stellt das Dreieck  $chg$  die Grundfläche eines Prismas dar, dessen Höhe gleich der Einheit ist; das Gewicht dieses Prismas gibt die Größe des Erddrucks auf die Wand  $ab$  an; hierbei ist die Breite der letzteren gleich der Einheit angenommen gedacht.“







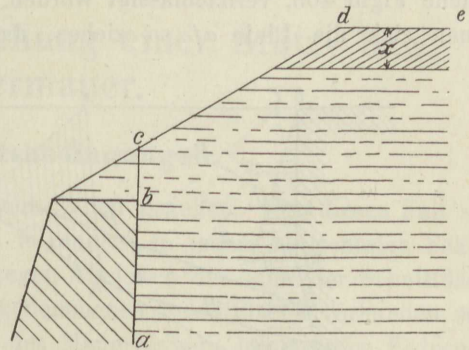


387. Als zufällige Belastung bzw. als Verkehrslast rechnet man bei Eisenbahndämmen 1400, bei Straßendämmen 400 kg für den Quadratmeter; in ersterem Falle ist dann, das Gewicht eines Kubikmeters Dammerde zu 1600 kg angenommen:

$$x = \frac{1400}{1600} = 0,875 \text{ m}$$

in letzterem Falle aber ist:

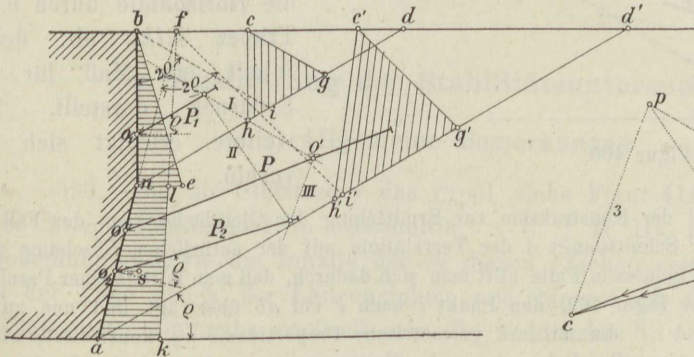
$$x = \frac{400}{1600} = 0,250 \text{ m}$$



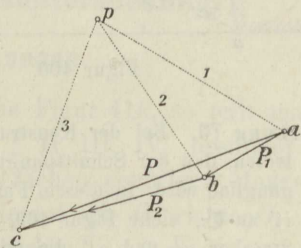
Figur 404.

**d) Die Terrainlinie ist eine gerade, die Begrenzung der Wand aber eine gebrochene Linie.**

388. In diesem Falle bestimmt man sich wie früher den Erddruck  $P_1$  auf die Wand  $nb$ , siehe Figur 405, mittels des Druckdreiecks  $cg'h$ . Hierauf verlängert man die Linie  $an$  bis zum Schnitt  $f$  mit der Terrainlinie und bestimmt den Erddruck auf die Wand  $af$  mittels des Druckdreiecks  $c'g'h'$ . Dieses Druckdreieck  $c'g'h'$  verwandelt man in das ihm flächengleiche Dreieck  $fak$ , von welchem die Horizontale durch  $n$  das Trapez  $nlka$  abschneidet, dessen Flächeninhalt ein Maß für den Erddruck auf die Wand  $na$  darstellt. Der Angriffspunkt  $o_1$  von  $F_1$  liegt auf  $nb$  so, daß  $\overline{no_1} = \frac{1}{3}\overline{nb}$  ist; jener von  $P_2$  liegt im



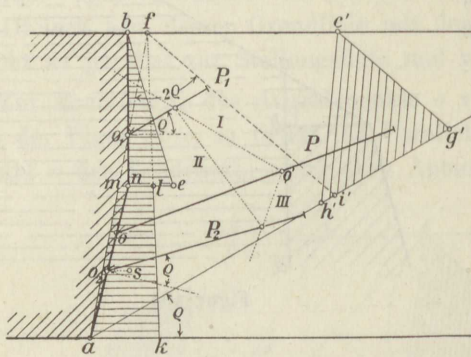
Figur 405.



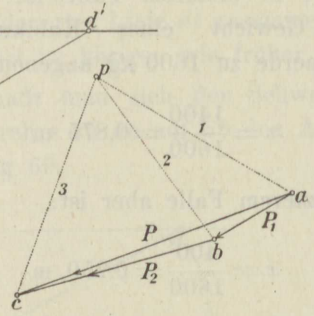
Figur 406.

Durchschnittspunkte  $o_2$ , der durch den Schwerpunkt  $s$  des Trapezes  $nlka$  gezogenen Horizontalen mit der Wandfläche  $an$ . Der Erddruck  $P$  auf die ganze Wand  $ab$  ergibt sich nun als Mittelkraft der beiden Erddrücke  $P_1$  und  $P_2$ .  $P$  bestimmt sich am einfachsten mittels eines Kräfte- und Seilviecks, siehe Figur 405 und 406.

Bei der vorstehenden Konstruktion ist die Größe des Erdkörpers  $nbf$ , siehe Figur 405, vernachlässigt worden. Will man genauer verfahren, so kann man sich die Linie  $af$  so ziehen, daß die Dreiecke  $ano_1$  und  $o_1bf$ , siehe



Figur 407.

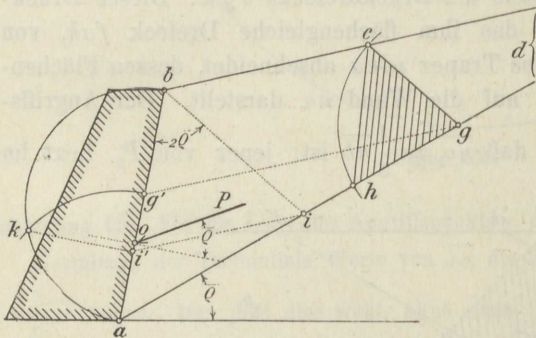


Figur 408.

Figur 407, flächengleich werden. In der Figur 407 fällt der Schnittpunkt von  $af$  mit  $bn$  zufällig mit dem Angriffspunkt  $o_1$  des Erddrucks  $P_1$  auf die Wand  $bn$  zusammen.

Nunmehr bestimmt man wieder wie vorhin den Erddruck  $P_1$  auf die

Wand  $bn$ , hierauf den Druck auf die Wand  $af$  mittels des Dreiecks  $c'g'h'$  und verwandelt dieses in das ihm flächengleiche Dreieck  $afk$ , so schneidet aus letzterem die Horizontale durch  $n$  das Trapez  $mlka$  ab, dessen Inhalt ein Maß für den Erddruck darstellt. Das weitere erledigt sich wie vorhin.



Figur 409.

**Anmerkung 70.** Bei der Konstruktion zur Ermittlung der Gleitfläche kann der Fall eintreten, daß der Schnittpunkt  $d$  der Terrainlinie mit der natürlichen Böschung unzugänglich wird. In diesem Falle hilft man sich dadurch, daß man mittels einer Parallelen  $ii'$  zu  $bc$ , siehe Figur 409, den Punkt  $i$  nach  $i'$  auf  $ab$  überträgt und nun zu den Strecken  $ab$  und  $ai'$  die mittlere geometrische Proportionale  $ag'$  konstruiert; wird  $g'$  nach  $g$  mittels einer Parallelen  $g'g$  zu  $bc$  übertragen, so ergibt sich der Punkt  $c$  und alles weitere wie früher.

**Anmerkung 71.** In der Tabelle XXV, Anhang II sind die Formeln zur Berechnung des Erddrucks für die angegebenen Fälle zusammengestellt worden. Wenn man diese Formeln betrachtet, begreift man wohl, daß man die graphische Methode zur Bestimmung der Größe des Erddrucks der rechnerischen vorzieht.



## D. Stabilitätsuntersuchung einer Stütz- bzw. Futtermauer.

### 1. Stabilitätsbedingungen.

389. Die Ausmaße der Stützmauer seien gegeben. Für diesen Fall sind die Bedingungen für die Stabilität die folgenden: In jedem horizontalen Schnitt muß einerseits die nötige Sicherheit gegen Abgleiten des über der Schnittfläche stehenden Mauerkörpers längs der angenommenen Schnittfläche vorhanden sein, andererseits darf auch ein Umkanten des Mauerkörpers infolge des Erddrucks nicht stattfinden.

Beide Bedingungen sind erfüllt, wenn die Mittelkraft aus dem über der Schnittfläche stehenden Mauergewicht und dem auf diesen Mauerkörper treffenden Erddruck nicht nur mit der Normalen zur Schnittfläche einen kleineren Winkel bildet als den Reibungswinkel, sondern außerdem die betreffende Schnittfläche innerhalb ihrer Umgrenzung trifft. Dabei dürfen an keiner Stelle die auftretenden größten Pressungen die zulässige Beanspruchung des Materials überschreiten.

**Anmerkung 72.** Unter Stützmauer ist eine Mauer verstanden, welche den Druck einer aufgeschütteten Erdmasse aufzunehmen hat im Gegensatze zu einer Futtermauer, welche sich an den gewachsenen Boden anlehnt. Bei der Stabilitätsuntersuchung macht man in der Regel keinen Unterschied zwischen Stütz- und Futtermauer, obwohl der Erddruck auf die Stützmauer größer sein wird als jener auf die Futtermauer. Lehnen sich Futtermauern an gewachsenen Felsen an, so dienen sie lediglich als Verkleidungsmauern und haben somit gar keinen Erddruck aufzunehmen.

### 2. Ausführung der Stabilitätsuntersuchung.

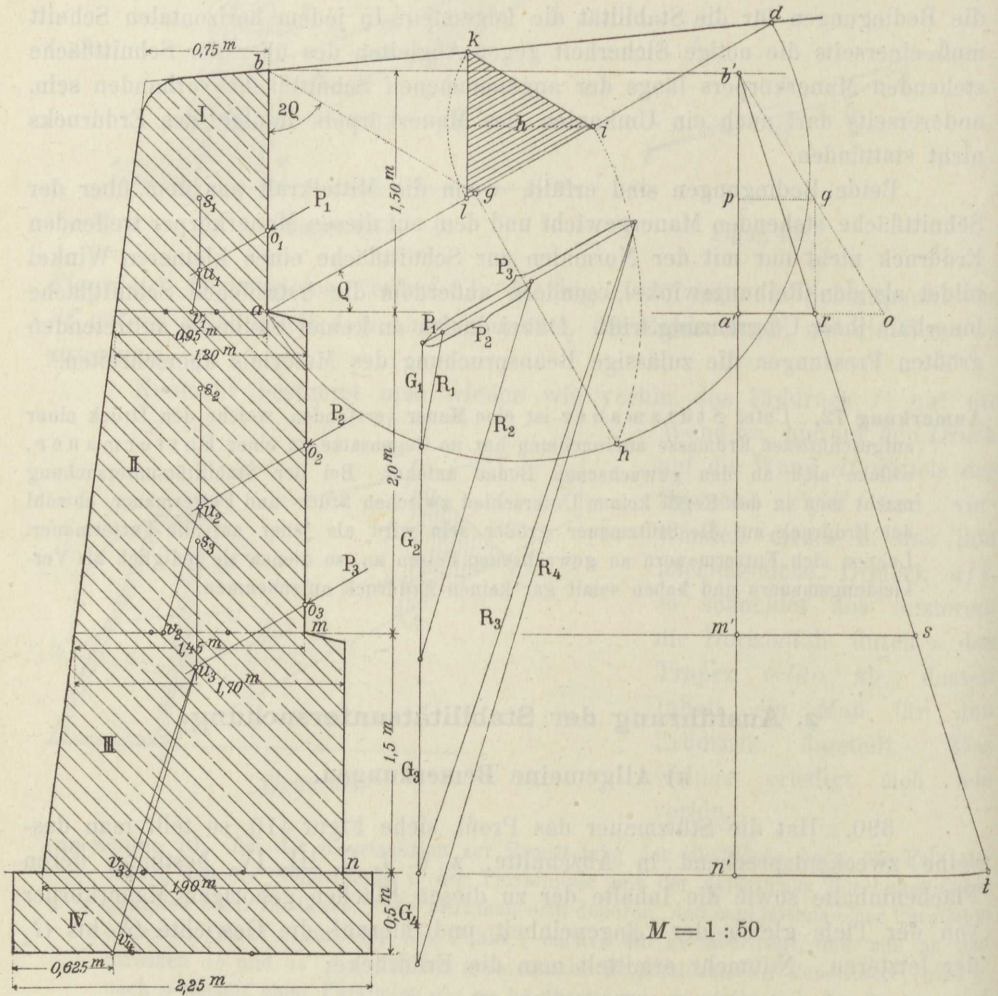
#### a) Allgemeine Bemerkungen.

390. Hat die Stützmauer das Profil, siehe Figur 410, so teilt man dasselbe zweckentsprechend in Abschnitte, z. B. I, II, III, IV, bestimmt deren Flächeninhalte sowie die Inhalte der zu diesen Flächen gehörigen Mauerkörper von der Tiefe gleich der Längeneinheit und hierauf die Gewichte  $G_1$  bis  $G_4$  der letzteren. Nunmehr ermittelt man die Erddrücke:

$$\begin{array}{ll} P_1 & \text{auf die Wand } ba \\ P_2 & \text{„ „ „ } bam \\ P_3 & \text{„ „ „ } bamn \end{array}$$

deren Angriffspunkte  $o_1, o_2, o_3$  sowie die zugehörigen Richtungslinien. Die Richtungslinie von  $G_1$  geht durch den Schwerpunkt  $s_1$  von I. Die Mittelkraft aus dem Mauergewicht  $G_1 + G_2$  enthält den Schwerpunkt  $s_2$  von I + II, jene von  $G_1 + G_2 + G_3$  den Schwerpunkt  $s_3$  von I + II + III. Mittels des Kräfte-

plans, siehe Figur 411, ergeben sich die Mittelkräfte  $R_1$  von  $G_1$  und  $P_1$ ,  $R_2$  von  $G_1 + G_2$  und  $P_2$ ,  $R_3$  von  $G_1 + G_2 + G_3$  und  $P_3$  der Größe und Richtung nach; der Lage nach erhält man sie durch die Parallelen zu  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  durch die Schnittpunkte  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ . Hierdurch ergeben sich die Schnittpunkte  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$ , von denen die ersten beiden die Fugenflächen durch  $a_1$  und  $m$  innerhalb des Kerns treffen.  $v_3$  liegt außerhalb des Kerns. Die Vertikale durch den



Figur 410.

Figur 411.

Schwerpunkt von IV geht im vorliegenden Falle gleichfalls durch  $u_3$ , daher auch Mittelkraft  $R_4$  von  $G_1$  bis  $G_4$  und  $P_3$ ; sie trifft die Fundamentsohle in einem Punkte  $v_4$ , der ebenfalls außerhalb des Kerns liegt. Nunmehr können die Pressungen in den einzelnen Fugenflächen ermittelt werden.



b) Übungsaufgaben.

391. Aufgabe 181. Für die in Figur 410 im Profil dargestellte Stützmauer ist die Stabilitätsuntersuchung durchzuführen; ein Kubikmeter Mauerwerk = 2000 kg, ein Kubikmeter Erdmaterial = 1600 kg, der natürliche Böschungswinkel  $\varrho$  betrage 30°.

**Auflösung.** Berechnung des Mauergewichts:

$$\text{Teil I: } \frac{0,95 + 0,75}{2} \cdot 1,50 \cdot 2000 = 2550 \text{ kg}$$

$$\text{Teil II: } \frac{1,20 + 1,45}{2} \cdot 2,0 \cdot 2000 = 5300 \text{ kg}$$

$$\text{Teil III: } \frac{1,70 + 1,90}{2} \cdot 1,50 \cdot 2000 = 5400 \text{ kg}$$

$$\text{Teil IV: } 2,25 \cdot 0,50 \cdot 2000 = 2250 \text{ kg}$$

Zur Bestimmung des Erddrucks auf die vertikalen Wandflächen der Stützmauer ermittelt man zunächst das Druckdreieck  $ikl$  für die Wandfläche  $\overline{ab}$  und verwandelt dieses in ein Dreieck  $b'a'r$ , das eine Höhe  $\overline{a'b'}$  gleich der Wandhöhe  $\overline{ab}$  besitzt; man erhält dann sehr einfach die noch fehlenden Erddrücke durch Verlängerung der Seiten  $b'a'$  und  $b'r$  und Ziehen von Horizontalen durch die Punkte  $m$  und  $n$ . So ist z. B. der Erddruck  $P_2$  auf die Wand  $abm$  gegeben durch das Gewicht eines Prismas von der Höhe gleich der Einheit und einer Grundfläche gleich dem Dreieck  $b'm's$ , der Erddruck  $P_3$  durch ein entsprechendes Prisma mit der Grundfläche  $b'n't$ . Hiernach berechnen sich die Erddrücke wie folgt:

$$\text{Erddruck auf die Wand } ab: P_1 = \frac{1,50 \cdot 0,50}{2} \cdot 1600 = 600 \text{ kg}$$

$$\text{„ „ „ „ } bam: P_2 = \frac{3,50 \cdot 1,20}{2} \cdot 1600 = 3360 \text{ kg}$$

$$\text{„ „ „ „ } bamn: P_3 = \frac{5,0 \cdot 1,70}{2} \cdot 1600 = 6800 \text{ kg}$$

Konstruiert man nun die Schwerpunkte  $s_1$  von I,  $s_2$  von I + II,  $s_3$  von I + II + III, ebenso die Angriffspunkte  $o_1, o_2, o_3$  von  $P_1, P_2$  und  $P_3$  und hierauf mittels des Kräfteplans, siehe Figur 411, die Mittelkräfte  $R_1$  bis  $R_3$  der Größe und Richtung und in Figur 410 der Lage nach, so ergeben sich die Angriffspunkte  $v_1$  bis  $v_3$ . Konstruiert man schließlich noch die Mittelkraft  $R_4$  aus  $G_1$  bis  $G_4$  und  $P_3$ , so trifft diese die Fundamentsohle in dem Punkte  $v_4$ .

Aus der Lage der Mittelkräfte und der Punkte  $v$  ist ersichtlich, daß die Stabilität der Mauer sowohl gegen Abgleiten, Reibungswinkel ca. 35°, als auch gegen Umkanten gesichert ist; was die Größe der Spannungen anbetrifft, so müßte man, streng genommen, zu den Mittelkräften  $R_1$  bis  $R_4$  die vertikalen Seitenkräfte ermitteln und letztere zur Berechnung der Spannungen benutzen. Der Einfachheit halber sind im folgenden gleich die Mittelkräfte  $R$  der Rechnung zugrunde gelegt worden.

Es ist nun aus der Zeichnung zu entnehmen:

$$R_1 = 15 \cdot 200 = 3000 \text{ kg}$$

$$R_2 = 50 \cdot 200 = 10000 \text{ kg}$$

$$R_3 = 90 \cdot 200 = 18000 \text{ kg}$$

$$R_4 = 100 \cdot 200 = 20000 \text{ kg}$$

Für die Fuge  $v_1a$  erhält man als Pressung:

$$\sigma = \frac{R_1}{F} = \frac{3000}{9500} = \text{ca. } 0,3 \text{ kg}$$

für die Fuge  $v_2m$  ist zunächst:

$$e = \frac{145}{6} = 24 \text{ cm und } x = 20 \text{ cm}$$

daher ist:

$$x_1 = 24 + 20 = 44 \text{ cm und } x_2 = 26 - 24 = 2 \text{ cm}$$

Man erhält demnach als größte Pressungen:

$$\sigma_1 = \frac{R_2}{F} \frac{x_1}{e} = \frac{10000}{14500} \cdot \frac{44}{24} = 1,2 \text{ kg für den qcm}$$

$$\sigma_2 = \frac{R_2}{F} \frac{x_2}{e} = \frac{10000}{145} \cdot \frac{2}{24} = 0,05 \text{ kg für den qcm}$$

Für die Fugenfläche  $n v_3$  fällt  $v_3$  außerhalb des Zentralkerns und es ist der Abstand  $v_3$  vom linksseitigen Querschnittsrande, aus der Zeichnung entnommen, ca. 55 cm, daher der nutzbare Querschnitt =  $3 \cdot 55 \cdot 100 = 16500$  qcm; die größte Pressung am Querschnittsrande beträgt also:

$$\sigma = \frac{2 R_3}{16500} = \frac{36000}{16500} = 2,18 \text{ kg für den qcm}$$

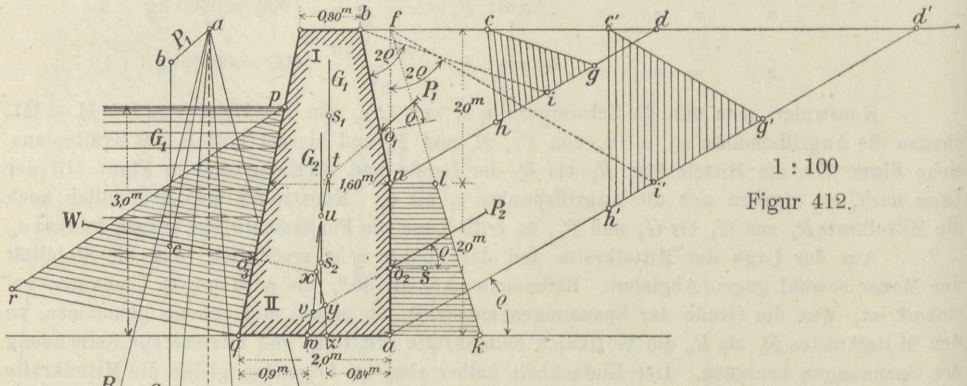
Auch an der Fundamentsohle liegt der Angriffspunkt  $v_3$  außerhalb des Kerns; es ist daher die größte Pressung auf den Baugrund:

$$\sigma = \frac{2 \cdot 20000}{3 \cdot 62,5 \cdot 100} = 2,1 \text{ kg für den qcm}$$

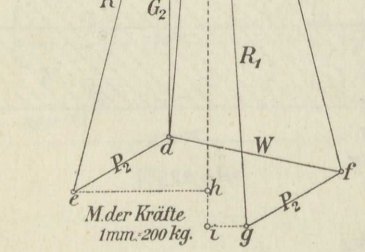
Da an keiner Stelle die zulässigen Beanspruchungen des Materials überschritten werden, so ist die vorgeführte Stützmauer als stabil zu betrachten.

Die Reibung längs der Fuge  $v_3 n$  beträgt, den Reibungskoeffizienten nur zu 0,6 angenommen,  $0,6 \cdot 36000 = 21600$  kg. Die Horizontalkomponente des größten Erddrucks ist aber nur  $P \cos 30^\circ = 6800 \cdot 0,866 = 5900$  kg. Es ist also hinlängliche Sicherheit gegen eine horizontale Verschiebung der Mauer vorhanden.

392. **Aufgabe 182.** Die in Figur 412 dargestellte Kaimauer dient sowohl als Stützmauer gegen den Erddruck als auch zur Ab-



1 : 100  
Figur 412.



Figur 413.

grenzung eines Wasserlaufs. Es ist die Stabilitätsuntersuchung der Kaimauer auszuführen. 1 cbm Erdmaterial = 1600 kg, 1 cbm Mauerwerk = 2000 kg.

**Auflösung.** Man bestimmt zunächst nach Nr. 388 die Erddrücke  $P_1$  und  $P_2$  auf die Wand  $bn$  bzw.  $an$ . Hierauf den Wasserdruck  $W$  auf die Wand  $pq$ .

Wenn durch  $p$  der höchste überhaupt auftretende Wasserstand angezeigt ist, so ergibt sich die Größe des auf die Wand  $pq$  treffenden Wasserdrucks gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche die gedrückte Fläche  $pq$  als Grundfläche und die Entfernung ihres Schwerpunkts vom Wasserspiegel als Höhe hat. Die Richtung des Wasserdrucks  $W$  ist



senkrecht zur Wand  $pq$ , sein Angriffspunkt liegt in  $o_3$ , so daß  $\overline{qo_3} = \frac{1}{3} \overline{qp}$  ist. Im vorliegenden Falle ist der Wasserdruck, da die Länge  $\overline{pq} = 3,05$  m beträgt:

$$W_1 = \frac{3,05 \cdot 3,0}{2} \cdot 1000 = 4600 \text{ kg}$$

Der Erddruck auf die Wand  $nb$  ergibt sich mittels des Dreiecks  $cg h$ , dessen Flächeninhalt  $= \frac{1,25 \cdot 1,35}{2} = 0,844$  qm ist. Man erhält:

$$P_1 = 0,844 \cdot 1600 = 1350 \text{ kg}$$

Der Erddruck auf die Wand  $an$  ergibt sich mittels des Trapezes  $anlk$ . Sein Flächeninhalt ist:

$$F = \frac{1,2 + 0,6}{2} \cdot 2 = 1,80 \text{ qm}$$

daher ist:

$$P_2 = 1,8 \cdot 1600 = 2880 \text{ kg}$$

Das Gewicht der Mauer berechnet man sich wie folgt:

$$\text{Gewicht von I} = G_1 = \frac{0,80 + 1,60}{2} \cdot 2 \cdot 2000 = 4800 \text{ kg}$$

$$\text{„ „ II} = G_2 = \frac{1,60 + 2,0}{2} \cdot 2 \cdot 2000 = 7200 \text{ kg}$$

Das Gewicht  $G_1$  wirkt als vertikale Kraft, gehend durch den Schwerpunkt  $s_1$  von I; das Gewicht  $G_2$  wirkt als vertikale Kraft, gehend durch den Schwerpunkt  $s_2$  von II.

Soll die Mauer stabil sein, so muß sie erstens die vollen Erddrücke aufnehmen können ohne Berücksichtigung der Gegenwirkung durch den Wasserdruck; zweitens muß sie Erddruck und Wasserdruck aufnehmen können. Sieht man zunächst von dem Wasserdruck ab, so vereinigt man mittels des Kräfteplans, siehe Figur 413, die Kräfte  $P_1, G_1$  zu einer Mittelkraft, gehend durch den Schnittpunkt  $t$  von  $G_1$  und  $P_1$  und parallel zur Linie  $ac$ , siehe Figur 413. Diese Mittelkraft trifft  $G_2$  in  $u$  und vereinigt sich mit letzterer Kraft zu einer Mittelkraft, gehend durch  $u$  und parallel zu  $ad$ , siehe Figur 413. Letztgenannte Mittelkraft endlich trifft  $P_2$  in einem Punkte  $v$  und vereinigt sich mit  $P_2$  zu einer Mittelkraft  $R$ , gehend durch  $v$  und parallel zu  $ae$ , siehe Figur 413. Diese Mittelkraft aus den Kräften  $P_1, G_1, P_2$  und  $G_2$  durchschneidet die Fuge  $aq$  in einem Punkte  $w$ , welcher, wie die Figur 412 zeigt, noch innerhalb des Kerns gelegen ist. In der Fugenfläche  $aq$  werden also nur Druckspannungen hervorgerufen.

Pressungen in der Fuge  $\overline{aq}$  ohne Berücksichtigung des Wasserdrucks  $W$ . Die Vertikalseitenkraft von  $R$  ist gleich  $\overline{ah}$ , siehe Figur 413,

$$= 71,5 \text{ mm} = 71,5 \cdot 200 = 14300 \text{ qcm}$$

Man hat ferner:

$$F = 200 \cdot 100 = 20000 \text{ qcm}, e = \frac{200}{6} = 33,33, x = 10 \text{ cm}$$

daher ist:

$$e + x = x_1 = 43,33 \text{ cm}, e - x = x_2 = 23,33 \text{ cm}$$

und

$$\sigma_1 = \frac{14300}{20000} \cdot \frac{43,33}{33,33} = 0,715 \cdot 1,3 = 0,93 \text{ kg für den qcm}$$

und

$$\sigma_2 = \frac{14300}{20000} \cdot \frac{23,33}{33,33} = 0,715 \cdot 0,7 = 0,5 \text{ kg für den qcm}$$

Berücksichtigt man den Wasserdruck  $W$ , so trifft zunächst die Mittelkraft aus  $P_1, G_1$  und  $G_2$  die Linie  $W$  in  $x$  und vereinigt sich mit  $W$  zu einer Mittelkraft, gehend durch  $x$  und parallel zur Linie  $af$ , siehe Figur 413. Diese Mittelkraft trifft  $P_2$  in  $y$  und vereinigt sich mit  $P_2$  zu einer Mittelkraft  $R_1$ , gehend durch  $y$  und parallel zur Linie  $ag$ , siehe Figur 413. Sie trifft die Fugenfläche  $\overline{aq}$  in einem Punkte  $z'$ , welcher ebenfalls innerhalb des Kerns liegt.

Pressungen in der Fuge  $\bar{a}q$  mit Berücksichtigung des Wasserdrucks. Es ist die Vertikalkraft von:

$$R_1 = \bar{a}i = 76 \text{ mm} = 76 \cdot 200 = 15200 \text{ kg}$$

$$x = 16 \text{ cm}, e + x = x_1 = 33,33 + 16 = 49,33 \text{ cm}, e - x = x_2 = 17,33$$

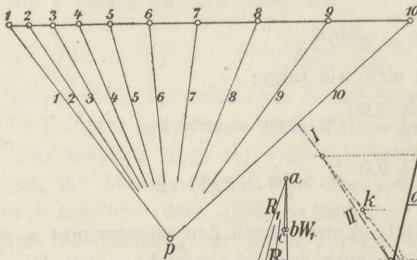
$$\sigma_1 = \frac{15200}{20000} \cdot \frac{49,33}{33,33} = 0,76 \cdot 1,48 = 1,12 \text{ kg für den qcm}$$

und

$$\sigma_2 = \frac{15200}{20000} \cdot \frac{17,33}{33,33} = 0,76 \cdot 0,52 = 0,4 \text{ kg für den qcm}$$

Figur 415.

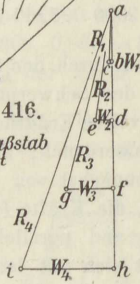
Kräftemaßstab  $1 \text{ mm} = 20 \text{ t}$



Figur 414.

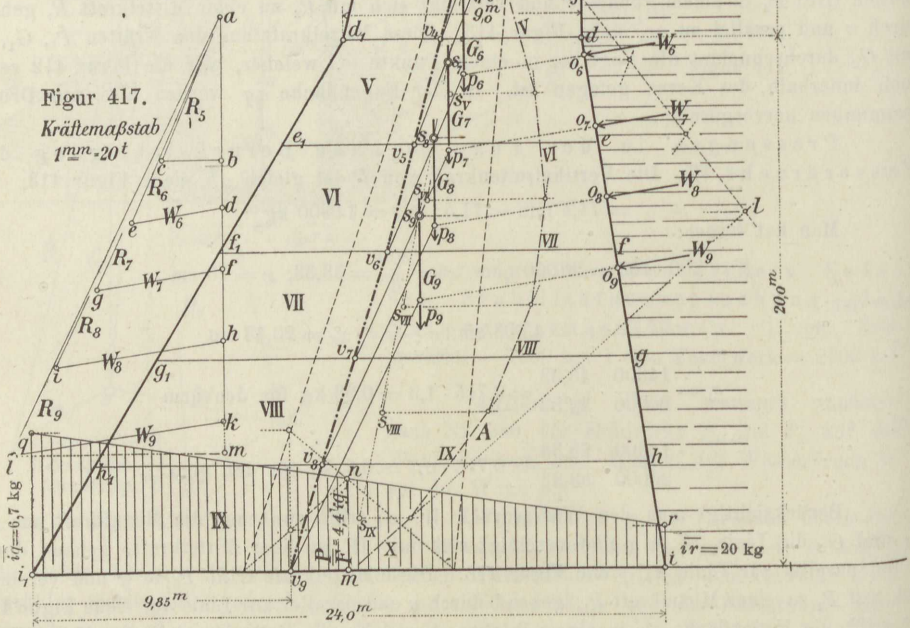
Figur 416.

Kräftemaßstab  $1 \text{ mm} = 8 \text{ t}$



Figur 417.

Kräftemaßstab  $1 \text{ mm} = 20 \text{ t}$





393. **Aufgabe 183.** Für den in Figur 414 dargestellten Querschnitt einer Talsperre ist die Stabilitätsuntersuchung auszuführen. 1 cbm Mauer soll 2400 kg wiegen.

**Auflösung.** Man teilt den Mauerquerschnitt ein in die Teile I, II . . . IX von beliebiger aber gleicher Höhe, im vorliegenden Falle = 4 m, bestimmt die Schwerpunkte  $s_I$ ,  $s_{II}$  . . .  $s_{IX}$  und die Gewichte dieser Teile. Nunmehr berechnet man die Wasserdrücke  $W_1$  bis  $W_9$ , der über den Fugenflächen  $aa_1$ ,  $bb_1$  usw. stehenden Wasserkörper und bestimmt die zugehörigen Angriffspunkte  $o_1$  bis  $o_9$ ; letztere liegen je in ein Drittel der Höhe der zugehörigen Wassersäule über der betreffenden Fugenfläche. Es sind jetzt noch die Angriffspunkte der Mittelkräfte aus Wasserdruck und Mauergewicht für die einzelnen Fugenflächen zu ermitteln. Diese Angriffspunkte  $v_1$  bis  $v_9$  müssen die zugehörigen Fugenflächen  $a$  bis  $i$  innerhalb des Mauerkerne treffen, wenn die Mauer die erforderliche Stabilität besitzen soll.

Für das vorliegende Beispiel gestaltet sich die Untersuchung wie folgt:

Man bestimmt die Schwerpunkte  $s_I$  bis  $s_{IX}$  der einzelnen Trapeze I bis IX, siehe Figur 414. Die Gewichte der einzelnen Mauerkörper sind, die Maße aus der Zeichnung abgegriffen:

Mauerkörper	A u s m a ß e		Gewicht in Tonnen	Bezeichnung des Gewichts
	in Metern	in Kubikmetern		
I	$\frac{5+6}{2} \cdot 4$	22	52,8	$G_I$
II	$\frac{6+7}{2} \cdot 4$	26	62,4	$G_{II}$
III	$\frac{7+8}{2} \cdot 4$	30	72	$G_{III}$
IV	$\frac{8+9}{2} \cdot 4$	34	81,6	$G_{IV}$
V	$\frac{9+12}{2} \cdot 4$	42	100,8	$G_V$
VI	$\frac{12+15}{2} \cdot 4$	54	129,6	$G_{VI}$
VII	$\frac{15+18}{2} \cdot 4$	66	158,4	$G_{VII}$
VIII	$\frac{18+21}{2} \cdot 4$	78	187,2	$G_{VIII}$
IX	$\frac{21+24}{2} \cdot 4$	90	216	$G_{IX}$

Die Wasserdrücke der einzelnen Wassersäulen sind in Tonnen ausgedrückt.

$$\begin{array}{lll}
 W_1 = 2 \cdot 1,0 \cdot 1 = 2 & W_4 = 14 \cdot 1,0 \cdot 7 = 98 & W_7 = 26 \cdot 1,0 \cdot 13 = 338 \\
 W_2 = 6 \cdot 1,0 \cdot 3 = 18 & W_5 = 18 \cdot 1,0 \cdot 9 = 162 & W_8 = 30 \cdot 1,0 \cdot 15 = 450 \\
 W_3 = 10 \cdot 1,0 \cdot 5 = 50 & W_6 = 22 \cdot 1,0 \cdot 11 = 242 & W_9 = 34 \cdot 1,0 \cdot 17 = 578
 \end{array}$$

Das Mauergewicht über der Fuge  $aa_1$  ist  $G_I = G_1$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_1$  von I.

Das Mauergewicht über der Fuge  $bb_1$  ist  $G_I + G_{II} = G_2$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_2$  von I + II.

Das Mauergewicht über der Fuge  $cc_1$  ist  $G_I + G_{II} + G_{III} = G_3$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_3$  von I + II + III.

- Das Mauergewicht über der Fuge  $dd_1$  ist  $G_I + \dots G_{IV} = G_4$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_4$  von I + ... IV.
- Das Mauergewicht über der Fuge  $ee_1$  ist  $G_I + \dots G_V = G_5$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_5$  von I + ... V.
- Das Mauergewicht über der Fuge  $ff_1$  ist  $G_I + \dots G_{VI} = G_6$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_6$  von I + ... VI.
- Das Mauergewicht über der Fuge  $gg_1$  ist  $G_I + \dots G_{VII} = G_7$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_7$  von I + ... VII.
- Das Mauergewicht über der Fuge  $hh_1$  ist  $G_I + \dots G_{VIII} = G_8$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_8$  von I + ... VIII.
- Das Mauergewicht über der Fuge  $ii_1$  ist  $G_I + \dots G_{IX} = G_9$ ,  
gehend durch den Schwerpunkt  $s_9$  von I + ... IX.

Die Schwerpunkte  $s_1$  bis  $s_9$  bestimmt man am bequemsten mittels eines Seilvielecks  $A$ , siehe Figur 414, indem man sich die Gewichte  $G_I$  bis  $G_{IX}$  in den Schwerpunkten I bis IX als horizontale Kräfte wirkend denkt. Man trägt diese Kräfte, siehe Figur 415, zu einem Kräftezug aneinander an, wählt den Pol  $p$  und konstruiert das Seilvieleck  $A$ ; dann ergibt sich z. B. der Punkt  $s_2$  im Schnitt der Verbindungslinie  $s_1 s_{II}$  mit der durch den Schnittpunkt  $k$  der Seilstrahlen I und III gezogenen Horizontalen. Analog bestimmt man auch die übrigen Punkte  $s_2, s_3$  usw. So liegt z. B.  $s_9$  im Schnitt der Verbindungslinie  $s_8 s_{IX}$  mit der durch den Schnittpunkt  $l$  der Seilstrahlen I und X gezogenen Horizontalen.

Nunmehr vereinigt man  $W_1$  und  $G_1$  zu einer Mittelkraft  $R_1$ , gehend durch den Schnittpunkt  $p_1$  von  $W_1$  und  $G_1$  und parallel zur Linie  $ac$ , siehe Figur 417.  $G_2$  und  $W_2$  liefern eine Mittelkraft  $R_2$ , gehend durch den Schnittpunkt  $p_2$  von  $G_2$  und  $W_2$  und parallel zur Linie  $ae$ , siehe Figur 417.  $G_6$  und  $W_6$  liefern schließlich die Mittelkraft  $R_6$ , gehend durch den Schnittpunkt  $p_6$  von  $G_6$  und  $W_6$  und parallel zur Linie  $al$ , siehe Figur 417. Die vorgenannten Mittelkräfte  $R_1$  bis  $R_9$  treffen beziehungsweise die Fugenflächen  $a_1 a_1$  usw. bis  $i_1 i_1$  in den Punkten  $v_1$  bis  $v_9$ . Die Verbindungslinie dieser Punkte gibt eine durch das Mauergewicht und den Wasserdruck hervorgerufene Drucklinie im Mauerkörper, welche auf ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Kerns des Mauerquerschnitts verbleiben muß, was im vorliegenden Beispiel auch der Fall ist.

Für die unterste Fugenfläche  $i_1 i_1$  ergeben sich die folgenden Pressungen:

Es ist:

$$\begin{aligned} \overline{i_1 i_1} &= 2400 \text{ cm}, \quad e = 400 \text{ cm}, \quad x = 1200 - 685 = 215 \text{ cm}, \\ x_1 &= e + x = 400 + 215 = 615 \text{ cm}, \quad x_2 = e - x = 400 - 215 = 185 \text{ cm} \\ F &= 240000 \text{ qcm} \quad P = ak, \text{ siehe Figur 417, } 53 \text{ mm} = 1060 \text{ t} = 1060000 \text{ kg} \end{aligned}$$

Man erhält somit:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1060000}{240000} \cdot \frac{615}{400} = 6,7 \text{ kg für den qcm} \\ \sigma_2 &= \frac{106}{24} \cdot \frac{185}{400} = 2,0 \text{ kg für den qcm} \end{aligned}$$

Diese Pressungen können aber von dem Mauerwerk aufgenommen werden.

Will man noch untersuchen, ob die Mauer auch hinlänglichen Widerstand gegen eine Verschiebung auf der Unterlage durch den Wasserdruck leistet, so hat man nur die Reibung längs der Fläche  $i_1 i_1$  zu berechnen. Diese beträgt aber, den Reibungskoeffizienten zu 0,75 angenommen:

$$R = 0,75 \cdot 1060 = 895 \text{ t}$$

Der größte horizontale Wasserdruck ist aber gleich  $\overline{rm} = 28 \text{ mm} = 560 \text{ t}$ . Es ist also eine 1,5 fache Sicherheit gegen Verschieben vorhanden.





sind, ausgeführt. Bei diesen Konstruktionen werden die zwischen den Pfeilern liegenden Mauerkörper nicht nur auf Druck, sondern auch noch auf Biegung beansprucht. Sie können darum bedeutend schwächer gehalten werden als die Pfeiler selbst; letztere müssen so stark ausgeführt werden, daß sie sowohl den von den dazwischen liegenden Mauerkörpern übertragenen Druck als auch den auf die Pfeiler direkt wirkenden Erddruck aufnehmen können. Die Stabilitätsuntersuchung für eine solche Mauer mit Strebpfeilern soll an dem folgenden Beispiel ausgeführt werden.

394. **Aufgabe 184.** Für die in Figur 418 und 419 durch Grund- und Aufriß, in Figur 421 im Vertikalschnitt dargestellte Stützmauer mit Strebpfeilern ist die Stabilitätsuntersuchung durchzuführen. 1 cbm Mauerwerk = 2000 kg, 1 cbm Erdmaterial = 1600 kg, natürlicher Böschungswinkel  $\varphi = 30^\circ$ .

**Auflösung.** Man bestimmt zunächst den Erddruck auf die Wand  $ab$  für den laufenden Meter Tiefe. Derselbe beträgt, da die Fläche des Druckdreiecks  $F = 2,35$  qm ist:

$$P = 2,35 \cdot 1600 = 3760 \text{ kg}$$

Das Gewicht der Zwischenmauer zwischen den Pfeilern für den laufenden Meter Tiefe ist:

$$G = 0,8 \cdot 4,0 \cdot 2000 = 6400 \text{ kg}$$

Die beiden Kräfte  $P$  und  $G$  liefern eine durch den Schnittpunkt  $t$  parallel zur Linie  $ac$ , siehe Figur 420, gehende Mittelkraft, welche die Mauer zum Umkanten bringen würde. Man denkt sich nun durch  $t$  eine Linie  $R$  nach dem Kernpunkt  $p$  der untersten Fuge  $aa$  gezogen und zerlegt die Mittelkraft  $ac$  aus  $P$  und  $G$  in eine zu  $tp$  parallele Kraft  $R$  und in eine horizontale Kraft  $H$ . Letztere muß durch die Mauer auf die Pfeiler übertragen werden und beansprucht hierbei erstere auf Biegung.

Aus der Zeichnung entnimmt man  $H = 11$  mm. Auf die ganze Länge der zwischen zwei Pfeilern liegenden Mauer ist daher:

$$H_1 = 3 \cdot 11 \cdot 200 = 6600 \text{ kg}$$

Das durch den Horizontalschub hervorgerufene Biegemoment ist  $M$ .

Die Mauer kann als ein auf beiden Seiten zum Teil eingespannter Träger angesehen werden, für welchen das größte Biegemoment in der Trägermitte gleich dem arithmetischen Mittel der absoluten Werte der beiden Biegemomente, welche durch vollständige Einspannung und freie Auflagerung hervorgerufen würden, angenommen werden soll. Man hat somit:

$$M = \left( \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{24}}{2} \right) \cdot 6600 \cdot 300 = \frac{1}{12} \cdot 6600 \cdot 300 = 165000$$

Das Widerstandsmoment des Mauerquerschnitts ist aber:

$$W = \frac{1}{6} \cdot 400 \cdot 80^2 = 426666$$

Die im Mauerwerk entstehende größte Biegespannung ist somit:

$$\sigma = \frac{165000}{426666} = 0,38 \text{ kg}$$

An den Einspannstellen ist dann noch ein negatives Biegemoment in der Größe von

$$\left( \frac{1}{12} - \frac{1}{8} \right) Pl = -\frac{2}{48} = -\frac{1}{24} Pl \text{ aufzunehmen.}$$



Der Pfeiler hat einmal den Horizontalschub  $H_1$  und außerdem den direkt auf den Pfeiler einwirkenden Erddruck, welcher, da der Pfeiler gerade einen Meter breit angenommen ist, 3760 kg beträgt, aufzunehmen. Man bestimmt zunächst:

$$\text{das Gewicht von I} = G_1 = \frac{1,6 + 1,8}{2} \cdot 2 \cdot 2000 = 6800 \text{ kg}$$

hierauf                    „                    „                    „ II =  $G_2 = \frac{1,8 + 2,40}{2} \cdot 2 \cdot 2000 = 8400 \text{ kg}$

Nunmehr vereinigt man  $G_1$  und  $G_2$  zu einer Mittelkraft  $G_3 = \overline{ab}$ , siehe Figur 422, welche mit dem Horizontalschub  $H_1$  zu einer Mittelkraft  $ac$  sich vereinigt, gehend durch den Schnittpunkt  $u$  von  $G_3$  und  $H_1$  und parallel zur Linie  $ac$ , siehe Figur 422. Man vereinigt die eben ermittelte Mittelkraft mit dem auf den Pfeiler treffenden Erddruck  $P$  zu einer weiteren Mittelkraft, gehend durch den Schnittpunkt  $v$  von  $P$  mit der Parallelen zu  $ac$  durch  $u$ , und parallel zu  $ad$ , siehe Figur 422. Diese Parallele trifft die Fugenfläche  $aa_2$  in einem Punkt  $q$ , der noch innerhalb des Mauerkerne liegt.

Bestimmt man endlich noch das Fundamentgewicht

$$G_4 = 2,6 \cdot 1,0 \cdot 2000 = 5200 \text{ kg}$$

und vereinigt  $G_4$  mit der zuletzt ermittelten Mittelkraft von  $G_3$ ,  $H_1$  und  $P$  zu einer neuen Mittelkraft, so geht diese durch den Schnittpunkt  $w$  von  $G_4$  und  $vq$  und trifft die Fundamentsole in einem Punkte  $r$ .

Pressung in den einzelnen Fugen.

Fuge  $\overline{aa_1}$ . Die auf die Fuge  $aa_1$  wirkende äußere vertikale Kraft ist, siehe Figur 420, gleich

$$\overline{ae} = 41,5 \text{ mm} = 41,5 \cdot 200 = 8300 \text{ kg}$$

Es ist somit die Pressung

$$\sigma = \frac{2 \cdot 8300}{80 \cdot 00} = 2,075 \text{ kg}$$

Fuge  $\overline{aa_2}$ . Die auf die Fuge wirkende äußere vertikale Kraft ist, siehe Figur 422, gleich:

$$\overline{ag} = 43 \text{ mm} = 43 \cdot 400 = 17200 \text{ kg}$$

ferner ist:

$$x = 120 - 90 = 30 \text{ cm}, \quad e = \frac{240}{6} = 40, \quad e + x = x_1 = 70, \quad e - x = x_2 = 10, \quad F = 24000,$$

daher:

$$\sigma_1 = \frac{17200}{24000} \cdot \frac{70}{40} = 0,72 \cdot 1,75 = 1,26 \text{ kg für den qcm}$$

und

$$\sigma_2 = \frac{17200}{24000} \cdot \frac{10}{40} = 0,72 \cdot 0,25 = 0,18 \text{ kg für den qcm}$$

Fuge  $\overline{ax_1}$ . Die auf die Fuge wirkende äußere vertikale Kraft ist, siehe Figur 422:

$$\overline{af} = 56 \text{ mm} = 56 \cdot 400 = 22400 \text{ kg}$$

Ferner ist  $x_1 u = 210 \text{ cm}$ , daher

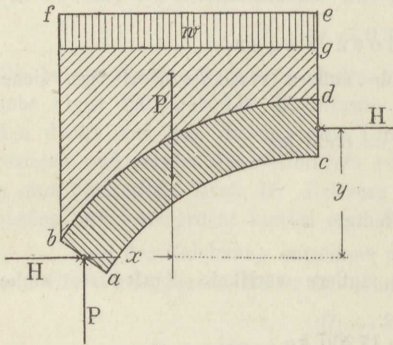
$$\sigma = \frac{2 \cdot 22400}{24000} = 2,1 \text{ kg für den qcm}$$

Die auftretenden Pressungen bleiben überall innerhalb der zulässigen Grenzen.

## E. Stabilität der Tonnengewölbe.

### 1. Form und Belastung eines Gewölbes.

395. Ein Zylinder- oder Tonnengewölbe mit kreisförmiger Wölblinie besteht aus dem eigentlichen Gewölbobogen nebst der Hintermauerung und stützt sich mittels der beiden Kämpfer auf die Widerlager. In der Regel ist das Gewölbe einerseits durch Aufschüttung von Erde bzw. Gerölle auf den Gewölberücken, andererseits durch die Nutz- oder Verkehrslast belastet, wobei letztere aus einer über das ganze Gewölbe gleichmäßig oder ungleichmäßig verteilten, ruhenden oder beweglichen Belastung bestehen kann, wie letzteres z. B. bei Brückengewölben der Fall ist. Im folgenden soll die Verkehrslast als ruhend über das ganze Gewölbe gleichmäßig verteilt vorausgesetzt werden. Liegen dann die beiden Widerlager in gleicher Höhe, so teilt eine die Gewölbeachse enthaltende Vertikalebene das Gewölbe in zwei symmetrische Hälften, wovon eine Hälfte in Figur 423 dargestellt ist.



Figur 423.

Hierbei ist die Wirkung der rechteitigen Gewölbehälfte ersetzt durch eine im Scheitel auftretende horizontale Kraft  $H$ , der Gegendruck des Widerlagers aber durch eine der Kraft  $H$  gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kraft  $H$  sowie eine vertikal nach aufwärts gerichtete Kraft  $P$ , welche letztere gleich ist dem Gewichte der Gewölbehälfte einschließlich der gesamten Gewölbebelastung. Die Verkehrslast  $w$  ist dabei ersetzt gedacht durch eine Schicht Füllmaterial von bestimmter Höhe. Die Lage der Angriffspunkte

der Kräfte  $H$  und  $P$  auf den Fugenflächen  $ab$  und  $cd$ , siehe Figur 423, ist nicht bekannt, doch weiß man, daß, wenn in den betreffenden Fugen nur Druckspannungen herrschen sollen, diese Punkte innerhalb des Zentralkerns der bezüglichen Fugen, also im mittleren Drittel der letzteren liegen müssen.

Die Wölblinie kann verschiedenartig geformt sein; je nach dem Zweck, dem das Gewölbe zu dienen hat, kommen elliptische, parabolische und kreisförmige Wölblinien in der Technik vor. Im nachfolgenden soll stets eine kreisförmige Wölblinie vorausgesetzt werden.

### 2. Stabilitätsbedingungen.

396. Soll ein Gewölbe allen Anforderungen in bezug auf Stabilität entsprechen, so muß in demselben Gleichgewicht vorhanden sein:

1. gegen Drehen,
2. gegen Zerdrücken und
3. gegen Gleiten.



### a) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Drehen, Horizontalschub, Drucklinien.

397. Betrachtet man einen Gewölbestreifen von der Tiefe gleich der Einheit und nimmt die Angriffspunkte der im Scheitel und Kämpfer wirkenden Kräfte zunächst in den Schwerpunkten dieser Flächen, endlich das Gewicht der Gewölbehälfte als eine im Schwerpunkt des Gewölbestreifens wirkende vertikale Kraft  $P$  an, so liegen die sämtlichen in Betracht kommenden Kräfte in einer Vertikalebene und es wird Gleichgewicht bestehen, wenn sowohl die Mittelkraft aller dieser Kräfte als auch die Summe der statischen Momente der letzteren bezüglich eines beliebigen in der Ebene der Kräfte gewählten Drehungspunktes gleich Null ist. Man hat also die Beziehungen:

$$P = P$$

$$H = H$$

$$Px = Hy$$

Aus der letzten Gleichung berechnet sich die im Scheitel des Gewölbes wirkende Horizontalkraft:

$$208) \dots H = \frac{Fx}{y}$$

Denkt man sich, siehe Figur 424, den Gewölbekörper durch eine in beliebigem Abstand  $v$  vom Mittelpunkt der Kämpferfuge durch eine parallel zur Gewölbeachse geführte Vertikalebene durchgeschnitten, die Wirkung des abgeschnittenen Gewölbestücks ersetzt durch eine Kraft  $R$  und letztere in eine horizontale und vertikale Seitenkraft  $H$  und  $V$  zerlegt, so wird der links von der Schnittebene befindliche Gewölbesteil im Gleichgewicht sein, wenn die Gleichungen stattfinden:

$$209) \dots P = G + V$$

$$210) \dots H = H$$

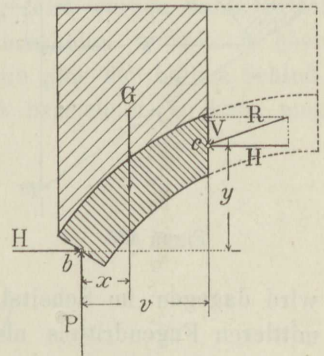
$$211) \dots Hy = Gx + Vv$$

Hierin bezeichnet  $V$  das Gewicht des zwischen Scheitel und Schnittebene liegenden Gewölbesteils, während  $H$  der Horizontalschub des Gewölbes genannt wird.

Aus Gleichung 211) folgt weiter:

$$212) \dots y = \frac{Gx + Vv}{H}$$

Da die Größe von  $H$  aus Gleichung 208) bestimmt ist, so läßt sich nunmehr mittels der Gleichung 212) der Wert von  $y$  ermitteln; die Lage des Angriffspunktes  $c$  von  $R$  ist demnach bestimmt, sobald die Angriffspunkte von  $H$  und  $P$  im Scheitel und Kämpfer gewählt sind. Aus den Beziehungen 208) bis 212) ergeben sich die folgenden Sätze:

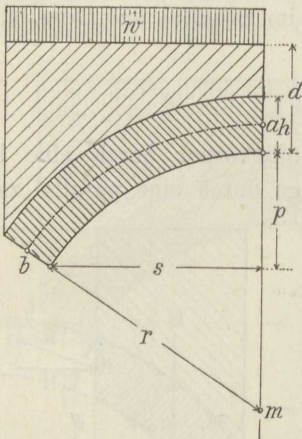


Figur 424.

„Im Scheitel eines Gewölbes wirkt eine horizontale Kraft  $H$ , welche der Horizontalschub des Gewölbes heißt und durch das ganze Gewölbe hindurch von gleicher Größe ist, sobald ihr Angriffspunkt im Scheitel und jener des Widerlagergegendrucks im Kämpfer gewählt sind.“

„Führt man durch das Gewölbe eine Anzahl vertikaler Schnitte, so hat für jeden solchen Schnitt der Angriffspunkt der Mittelkraft aus Horizontalschub und dem Gewicht des zwischen Scheitel und Schnittebene befindlichen Gewölbeteils eine ganz bestimmte Lage, sobald der Angriffspunkt des Horizontalschubs im Scheitel und jener des Widerlagergegendrucks im Kämpfer gewählt sind.“

Die vorgenannten Mittelkräfte bilden in ihrer Gesamtheit ein Vieleck, welches ein Druckvieleck oder eine Drucklinie des Gewölbes heißt.



Figur 425.

Da die Angriffspunkte des Horizontalschubs und des Widerlagergegendrucks innerhalb des mittleren Drittels der betreffenden Fugen beliebig wählbar sind, so gibt es im Gewölbe unzählig viele Drucklinien.

Zu jeder Drucklinie gehört ein ganz bestimmter Horizontalschub, der sich aus Gleichung 208) ermitteln läßt; er wird am größten, wenn  $y$  seinen kleinsten und  $x$  seinen größten Wert annimmt, dagegen am kleinsten, wenn  $y$  am größten und  $x$  am kleinsten ist.

Wählt man also im Scheitel den unteren, im Kämpfer den oberen Endpunkt des mittleren Fugendrittels als Angriffspunkte von  $H$ , so entsteht der größte Horizontalschub im Gewölbe;

wird dagegen im Scheitel der obere, im Kämpfer der untere Endpunkt des mittleren Fugendrittels als Angriffspunkt von  $H$  angenommen, so ergibt sich der kleinste Horizontalschub des Gewölbes.

Die sämtlichen möglichen Drucklinien müssen, wenn im Gewölbe nur Druckspannungen auftreten sollen, jede Fuge innerhalb ihres mittleren Drittels treffen.

Von allen möglichen Drucklinien ist jene die günstigste, welche sich der Mittellinie des Gewölbes am meisten nähert.

## b) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Zerdrücken, Schlußsteinhöhe und Stärke des Gewölbebogens.

398. Denkt man sich im Gewölbe etwa die Mittellinie des Gewölbebogens als Drucklinie angenommen und an irgend einer Stelle einen Vertikalschnitt parallel zur Gewölbeachse geführt, hierauf für die Schnittfläche die



Kräfte  $R$ ,  $V$  und  $H$  ermittelt, endlich im Punkte  $c$  an die Drucklinie, welche an der Stelle  $c$  einer Kreislinie mit dem Halbmesser  $r_0$  angehören soll, die Tangente an letztere gezogen, so erkennt man zunächst, daß:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} = \frac{x}{\sqrt{r_0^2 - x^2}}$$

ist. Hieraus folgt:

$$213) \dots H = \frac{V \sqrt{r_0^2 - x^2}}{x}$$

Setzt man nun  $x=1$  und nimmt die Einheit sehr klein, d. h. führt man den Schnitt in unmittelbarer Nähe des Gewölbescheitels, so geht die Gleichung 213) über in die folgende:

$$214) \dots H = \frac{V \sqrt{r_0^2 - 1}}{1}$$

oder unter Vernachlässigung der Größe 1 gegenüber dem Werte  $r_0^2$ :

$$215) \dots H = V r_0$$

Hierbei bezeichnet  $V$  die nahe am Scheitel des Gewölbes wirkende Vertikalkraft, welche gleich der Scheitelbelastung gesetzt werden kann,  $r_0$  ist der Krümmungshalbmesser der Drucklinie im Gewölbescheitel und kann ohne Fehler gleich dem Halbmesser  $r$  der inneren Wölblinie plus der halben Schlußsteinhöhe angenommen werden; wird letztere mit  $h$  bezeichnet, so kann man setzen:

$$r_0 = \frac{h}{2} + r$$

es geht daher die Gleichung 215) über in folgende:

$$216) \dots H = V \left( \frac{h}{2} + r \right)$$

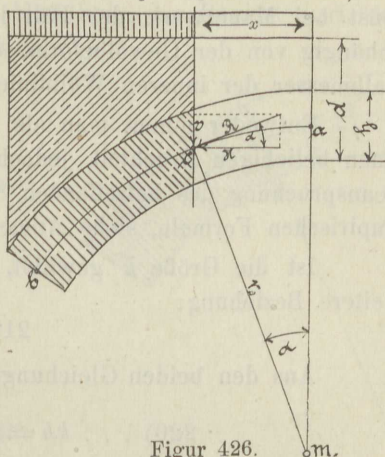
Bezeichnen nun  $g$  und  $g_1$  die Gewichte der Kubikeinheit von Mauerwerk bzw. Füllmaterial, nennt man ferner  $d$  den Abstand des Scheitels der inneren Gewölbeline von der oberen Abgrenzung des Füllmaterials und  $w$  die auf den Quadratmeter treffende Verkehrslast, so ist die Scheitelbelastung des Gewölbes ausgedrückt durch die Beziehung:

$$217) \dots V = w + (d - h)g_1 + hg$$

Man hat somit in Rücksicht auf Gleichung 216):

$$218) \dots H = [w + (d - h)g_1 + hg] \left( \frac{h}{2} + r \right)$$

Mit Bezugnahme auf die Festigkeit des Wölbmaterials darf der Horizontal Schub eine bestimmte Größe nicht überschreiten; doch muß bei einem Gewölbe,



Figur 426.

$x$  = Entfernung der Schnittebene von der Scheitelvertikalen des Gewölbes.

schon wegen der Unbestimmtheit der Lage des Angriffspunkts von  $H$  eine bedeutend größere Sicherheit gegen Zerdrücken angenommen werden, als dies sonst bei Mauerwerk der Fall ist. Auch ist die Beanspruchung im Scheitel abhängig von der Gewölbeform, d. h. von der Spannweite, Pfeilhöhe und dem Halbmesser der inneren Wölblinie.

Entweder nimmt man als zulässige Beanspruchung  $k$  des Wölbmaterials einen beliebigen Bruchteil, jedoch nie mehr als die Hälfte der sonst zulässigen Beanspruchung des betreffenden Steinmaterials, oder man berechnet sich  $k$  aus empirischen Formeln, siehe Anmerkung 74.

Ist die Größe  $k$  gewählt, so erhält man für den Horizontalschub die weitere Beziehung:

$$219) \dots H = kh$$

Aus den beiden Gleichungen 218) und 219) folgt die weitere Gleichung:

$$220) \dots kh = [w + (d - h)g_1 + hg] \left( \frac{h}{2} + r \right)$$

Hierin ist nur mehr die Größe  $h$  unbekannt und kann somit berechnet werden; man erhält, unter der Voraussetzung, daß:

$$g_0 = \frac{g + g_1}{2}$$

sein soll:

$$221) \dots h = \frac{2r(g_0 d + w)}{2k - (g_1 d + w)}$$

**Anmerkung 74.** Zur Feststellung der im Gewölbescheitel zulässigen Beanspruchung  $k$  kann man folgende empirische Formel benutzen. Es ist:

$$k = 0,0026s + 0,323 \frac{r}{p}$$

Hierin bezeichnet  $s$  die Spannweite,  $p$  die Pfeilhöhe und  $r$  den Halbmesser der inneren Wölblinie in Zentimeter ausgedrückt; es ergibt sich dann  $k$  in Kilogramm für den Quadratcentimeter.

**Anmerkung 75.** Für die Berechnung der Schlußsteinhöhe gibt es eine Reihe von empirischen Formeln, welche zur vorläufigen Ermittlung von  $h$  gleichfalls benutzt werden können. Solche Formeln sind:

$$h = 0,035s + 0,325 \text{ m nach Perronet}$$

$$h = 0,2\sqrt{s} + 0,1 \text{ m nach Lesquiller}$$

$$h = 0,346\sqrt{r} \text{ für Kreisbogengewölbe nach Rankine.}$$

399. Der Gewölbobogen wird in der Regel aus einzelnen Steinen hergestellt, deren Lagerflächen entweder normal zur Mittellinie des Gewölbes bzw. normal zur inneren Wölblinie gerichtet sind. Was nun die Stärke des Gewölbes zwischen Scheitel und Kämpfer anbetrifft, so kann man entweder durch das ganze Gewölbe die Stärke gleich der Schlußsteinhöhe beibehalten; dann nimmt die Pressung in den einzelnen Fugen vom Scheitel nach dem Kämpfer hin zu, oder man kann die Forderung stellen, daß die Pressung in jeder Fuge gleich



groß sein soll, dann muß die Gewölbstärke vom Scheitel nach dem Kämpfer zu größer werden. Ist z. B., siehe Figur 427,  $pq$  eine beliebige Lagerfuge zwischen Scheitel und Kämpfer normal zur Mittellinie des Bogens gerichtet,  $R$  die auf die Fugenfläche wirkende normale Druckkraft, so ist:

$$R = \frac{H}{\cos \alpha}$$

daher, wenn  $l'$  die Länge der Fuge  $pq$  bezeichnet:

$$l' = \frac{h}{\cos \alpha}$$

d. h. es ist:

$$222) \dots l' \cdot 1 \cdot k = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{hk}{\cos \alpha}$$

Soll also die Pressung in jeder Fuge zwischen Scheitel und Kämpfer gleich groß sein, so muß die Länge jeder Fuge so gewählt werden, daß ihre rechtwinklige Projektion auf eine Vertikale gleich der Schlußsteinhöhe ist.

Für die Länge der Kämpferfuge ergibt sich:

$$223) \dots l = \frac{h}{\cos \alpha}$$

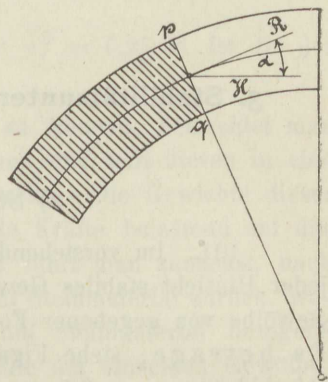
wobei  $\alpha$  den Winkel der Kämpferfuge mit der Vertikalen bezeichnet.

Zur Feststellung der äußeren Wölblinie genügt es, die Gewölbstärke im Scheitel und an den Kämpfern nach den Gleichungen 221) und 223) zu ermitteln und durch die so bestimmten drei Punkte eine Kreislinie zu legen.

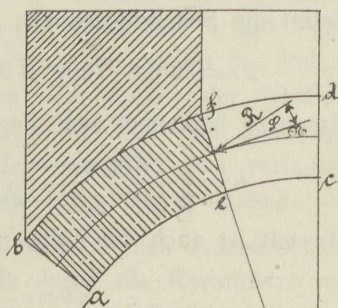
Ist die innere Wölblinie ein voller Halbkreis, so wirkt als eigentliches Gewölbe nicht der ganze über dem Halbkreis befindliche Gewölbbogen, sondern nur jener Teil, welcher zwischen den beiden unter  $30^\circ$  gegen die Horizontalebene geneigten Lagerflächen sich befindet; der größte Zentriwinkel, welcher zu einem Gewölbbogen gehören kann, beträgt somit  $120^\circ$ . Der übrige Teil des Gewölb Bogens ist zum Widerlager zu rechnen.

### c) Gleichgewicht eines Gewölbes gegen Gleiten.

400. Ist  $ef$ , siehe Figur 428, eine zwischen Scheitel und Kämpfer liegende Lagerfläche und  $R$  die auf die Fugenfläche wirkende Mittelkraft der äußeren Kräfte, so muß, soll ein Gleiten längs der Fugenfläche  $ef$  vermieden



Figur 427.



Figur 428.

werden, der Winkel  $\varphi$  zwischen  $R$  und der Normalen zur Fugenfläche kleiner sein als der Reibungswinkel. Erfahrungsgemäß darf die Größe des Winkels  $\varphi$  höchstens  $17^\circ$  betragen. In der Regel wird die notwendige Sicherheit gegen Gleiten vorhanden sein.

### 3. Stabilitätsuntersuchung bei symmetrischer Belastung des Gewölbes.

#### a) Stabilität des Gewölbebogens.

401. Im vorstehenden sind die Bedingungen aufgeführt, welche ein in jeder Hinsicht stabiles Gewölbe zu erfüllen hat; im folgenden soll nun für ein Gewölbe von gegebener Form die Stabilitätsuntersuchung durchgeführt werden. Es betrage, siehe Figur 1, Tafel I, die Spannweite  $s = 12$  m, die Pfeilhöhe  $p = 2,5$  m. Die innere Wölblinie sei eine Kreislinie. Das Gewölbe soll bis auf eine Höhe von 1,20 m über dem Scheitel der inneren Wölblinie mit Dammerde aufgeschüttet und die Aufschüttung horizontal abgeglichen sein. Die Verkehrsbelastung betrage 400 kg per Quadratmeter. Ein Kubikmeter Wölbsteinmauerwerk wiege 2000 kg, ein Kubikmeter Füllmaterial 1600 kg.

Aus der gegebenen Pfeilhöhe und Spannweite bestimmt sich zunächst der Halbmesser  $r$  der inneren Wölblinie mittels der Gleichung:

$$r^2 = (r - 2,5)^2 + 5^2$$

Es folgt hieraus:

$$r = 8,45 \text{ m}$$

Die Formel:

$$k = 0,0026 s + 0,323 \frac{r}{p}$$

liefert die Scheitelpressung:

$$k = 0,0026 \cdot 1200 + 0,323 \cdot \frac{8,45}{2,5} = 4,2 \text{ kg per Quadratzentimeter.}$$

Nunmehr berechnet sich die Schlußsteinhöhe aus der Beziehung:

$$h = \frac{2r(g_0 d + w)}{2k - (g_1 d + w)} = \frac{2 \cdot 8,45 (1800 \cdot 1,2 + 400)}{2 \cdot 4200 - (1600 \cdot 1,2 + 400)} = 0,53 \text{ m}$$

Hiermit ist auch die Länge  $\overline{ab}$  der Kämpferfuge bestimmt; es ist nämlich:

$$\overline{ab} = \frac{0,53}{\cos \alpha} = \frac{0,53 \cdot 8,45}{5,95} = 0,75 \text{ m}$$

Eine Kreislinie durch die Punkte  $d$  und  $b$  mit dem Mittelpunkte  $m'$  auf der Linie  $dm$  bestimmt die Abgrenzung des Gewölberückens.

Die Verkehrsbelastung soll durch eine Lage Füllmaterial dargestellt werden. Da nun der Quadratmeter Gewölbeffläche mit 400 kg belastet ist und



1 cbm Füllmaterial 1600 kg wiegt, so muß die Höhe der die Verkehrslast ersetzenden Füllmaterialschicht offenbar:

$$\frac{400}{1600} = 0,25 \text{ m}$$

betragen. Diese Füllmaterialschicht von der Höhe  $\overline{ef} = 0,25 \text{ m}$  ist in der Figur 1, Tafel I durch Schraffur angedeutet.

Um die weitere Untersuchung durchführen zu können, betrachtet man einen Gewölbestreifen von der Tiefe gleich der Einheit und teilt diesen in eine Anzahl von Streifen von beliebiger aber gleicher Breite. Die Gewichte dieser Streifen wirken in deren Schwerlinien als vertikale Kräfte belastend auf das Gewölbe. Zur bequemen Ermittlung dieser Kräfte führt man zunächst, nach Anleitung der Nr. 93 das vorhandene Füllmaterial auf Steinmaterial zurück, wodurch sich die in Figur 1, Tafel I bezeichnete, auf Steinmaterial bezogene Belastungsgrenze ergibt. Nunmehr sind die Gewichte der einzelnen Gewölbestreifen direkt proportional den Längen der Mittellinien der letzteren. Trägt man diese bzw. einen aliquoten, z. B. den dritten Teil derselben als vertikale Kräfte zu einem Kräftevieleck, siehe Figur 2, Tafel I, an und konstruiert mittels eines auf der Horizontalen durch  $o$  beliebig gewählten Pols  $p$  ein Seilvieleck, so liefert letzteres die Lage von  $P$ , d. h. die Mittelkraft aus den Gewichten der Streifen 1 bis 6 der linken Gewölbehälfte. Wählt man die Mittelpunkte  $i$  und  $n$  der Scheitel- und Kämpferfuge als Angriffspunkte des Horizontalschubs und des Widerlagergedrucks, so ergeben sich aus der Zeichnung die Hebelarme  $x$  und  $y$ , wodurch mittels der Gleichung:

$$Px = Hy$$

der Horizontalschub  $H$  des Gewölbes sich bestimmen läßt, und zwar am bequemsten graphisch als vierte geometrische Proportionale aus den Größen  $P$ ,  $x$  und  $y$ ; man macht zu diesem Zwecke, siehe Figur 2, Tafel I,  $\overline{og} = y$  und  $\overline{os} = x$  und zieht, da die Länge  $\overline{0.6}$  die Größe von  $P$  darstellt, durch den Punkt 6 eine Parallele zu  $gs$ , welche auf der Horizontalen  $op$  den Punkt  $o$  und damit den Horizontalschub  $H$  ausschneidet. Konstruiert man nun mittels des Pols  $o$  ein neues Seilvieleck, dessen erste Seite durch den Mittelpunkt  $i$  der Scheitelfuge geht, so stellt dieses eine Drucklinie des Gewölbes dar; sie muß, soll das Gewölbe stabil sein, innerhalb des Kerns des Gewölbebogens verlaufen sowie außerdem durch den Mittelpunkt  $n$  der Kämpferfuge hindurchgehen.

Man kann außer der eben erwähnten Drucklinie auch noch andere Drucklinien des Gewölbes konstruieren, z. B. jene, welche durch die Kernränder von Scheitel- und Kämpferfuge hindurchgehen, also entweder die Punkte  $i_1$  und  $n_1$  oder  $i_2$  und  $n_2$  enthalten. Der zu jeder dieser Drucklinie gehörige Horizontalschub  $H_1$  bzw.  $H_2$  bestimmt sich in gleicher Weise wie vorhin. In den Figuren 1 und 2, Tafel I ist die Konstruktion angedeutet.

## b) Stabilität des Widerlagers.

## α) Ohne Berücksichtigung des Erddrucks.

402. Um zu untersuchen, ob das Widerlager des Gewölbes die notwendige Stabilität besitzt, bestimmt man auch für dieses eine Drucklinie, indem man die Streifenteilung daselbst fortsetzt. Die letzte Seite in jenem Seilvieleck, das die Drucklinie im Gewölbebogen bildet, ist im vorliegenden Falle die Linie 6·7 parallel zum Polstrahl 0·6; diese trifft die Mittellinie des Streifens 7 im Punkte 7. Nunmehr trägt man im Kräftevieleck, siehe Figur 2 Tafel I, von der Höhe des Streifens 7, d. i. die Strecke  $\overline{7\cdot7}$ , siehe Figur Tafel I, denselben Bruchteil, nämlich  $\frac{1}{3}$  der ganzen Höhe als neue Kraft  $\overline{7\cdot8}$  an, erhält hierdurch den neuen Polstrahl 0·8 und hierdurch den Seilstrahl 7·8 parallel zum Polstrahl 0·8. Auf diese Weise findet man die Strecke 8·8 als Höhe des Streifens 8, mit der man ebenso verfährt wie im vorhergehenden Falle usw. Hierdurch ergibt sich eine Drucklinie, welche bis zum festen Baugrund hinabreicht. Ist nun die Widerlagerstärke von vornherein gegeben, so muß die Drucklinie im Widerlager einen solchen Verlauf haben, daß in keiner Fugenfläche der Angriffspunkt der Mittelkraft der äußeren Kräfte außerhalb der Kernfläche liegt. Soll dagegen die Stärke des Widerlagers erst bestimmt werden, so errichtet man in den durch die Drucklinie auf den Mittellinien der Streifen sich ergebenden Punkte 7, 8, 9 usw. Senkrechte zur zugehörigen Seite der Drucklinie und bestimmt deren Längen derart, daß die Projektion der Fuge auf eine Vertikale gleich der Schlußsteinhöhe  $h$  wird. Die Fundamentstärke des Widerlagers ist so zu bemessen, daß die Beanspruchung des Baugrunds innerhalb der zulässigen Grenze bleibt, d. h. im allgemeinen 2,5 bis 3 kg für den Quadratcentimeter nicht überschreitet.

## β) Mit Berücksichtigung des Erddrucks.

403. Ist das Gewölbe und Widerlager mit Erdmaterial hinterfüllt, so verschiebt sich durch die Wirkung des Erddrucks auf die seitliche Abgrenzung  $AB$  die Drucklinie etwas nach dem Innern des Widerlagers. In der Figur 2 Tafel I ist die Größe des Erddrucks auf die Wand  $AB$  ermittelt worden. Vereint man nun den Erddruck mit der letzten Seite der Drucklinie, d. i. der Parallelen durch 9 zum Polstrahl 0·9 zu einer Mittelkraft, so trifft diese die unterste Fundamentfläche in dem Punkte  $v'$ .

**Anmerkung 76.** Zur Ermittlung des Erddrucks auf die Wand  $AB$  wurde zunächst der Erddruck auf ein beliebiges Stück  $CF$  der Wand  $AB$  bestimmt und hierfür das Druckdreieck  $LMN$ , siehe auch Figur 2 Tafel I, erhalten. Dieses Dreieck ist in das ihm flächengleiche Dreieck  $OQV$  mit der zu  $FC$  gehörigen Höhe  $H_0'$  verwandelt worden auf Grund der Beziehung  $G_0 H_0 = G_0' H_0'$ . Man erhält aus der Gleichung:

$$G_0' : G_0 = H_0 : H_0' \text{ die Größe } G_0' = \overline{UT} = \overline{QV}.$$

Die Verbindungslinie  $OV$  schneidet auf der Horizontalen durch  $A$  den Punkt  $W$  aus, und es stellt nun das Dreieck  $OAW$  das Druckdreieck für den Erddruck auf die





Wand  $AC$  dar. Eine Parallele durch  $B$  zu  $AW$  schneidet aus dem Dreieck  $OAW$  ein Trapez  $AXYW$  aus, dessen Fläche  $F$  den Erddruck  $E$  auf die Wand  $AB$  bestimmt. Es ist nämlich:

$$E = F \cdot 1600 = \frac{1,425 + 3,0}{2} \cdot 3,5 \cdot 1600 = \text{rund } 12500 \text{ kg} = 35,2 \text{ mm.}$$

Der Angriffspunkt  $D$  des Erddrucks liegt auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt  $S$  des Trapezes  $AXYW$ , die Richtung von  $E$  bildet mit der Normalen zur Wand  $AB$  den Reibungswinkel  $\varrho$ .

### e) Berechnung der im Gewölbe auftretenden äußeren Kräfte und der hierdurch verursachten Pressungen.

404. Bisher ist die ganze Stabilitätsuntersuchung des Gewölbes und Widerlagers durchgeführt worden, ohne die in Betracht kommenden Kräfte im Kräftemaß ausgedrückt zu haben. Es sollen nun im folgenden diese Kräfte berechnet werden.

Der Maßstab der Zeichnung ist 1 : 60. Die Breite der Streifen ist 1,0 m; daher ist das Gewicht des ersten Streifens  $1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,3 \cdot 2000 = 2600 \text{ kg}$ . Der Maßstab der Kräfte berechnet sich wie folgt: Die Höhe des ersten Streifens beträgt 22 mm; im Kräftevieleck sind aber nur die dritten Teile der Streifenhöhen angetragen worden, es ist also:

$$\frac{22}{3} \text{ mm} = 2600 \text{ kg} \text{ oder } 1 \text{ mm} = 355 \text{ kg}$$

Auf Grund dieses Kräftemaßstabs berechnet sich zunächst die Größe des Horizontalschubs:

$$H = 72,2 \text{ mm} = 72,2 \cdot 355 = 25\,650 \text{ kg} \text{ rund.}$$

Scheitelpressung des Gewölbes. Die Schlußsteinfläche ist:  $53 \cdot 100 = 5300 \text{ qcm}$ , daher ist die Scheitelpressung  $\sigma = 25650 : 5300 = 4,83 \text{ kg}$ , ein Wert, der wohl beibehalten werden kann und der etwas größer ist, als der frühere empirisch berechnete Wert.

Pressung in der Kämpferfuge. Die Länge der Kämpferfuge beträgt 0,75 m. Die auf die Fläche wirkende Kraft ergibt sich aus dem Kräftevieleck gleich der Länge des Seilstrahls  $0 \cdot 6$  und diese ist 97 mm, daher ist:

$$\sigma = \frac{97 \cdot 355}{7500} = 4,6 \text{ kg für den qcm}$$

Pressung auf den Baugrund. Die Fugenlänge  $\overline{pq}$ , siehe Figur 1 Tafel I, ist zu 3 m = 300 cm angenommen; es beträgt somit die Fugenfläche  $f = 300 \cdot 100 = 30000 \text{ qcm}$ . Der vertikale Druck auf die Fugenfläche  $\overline{pq}$  ist gleich der Länge  $0 \cdot 9$ , siehe Figur 2 Tafel I, = 143,6 mm =  $143,6 \cdot 355 = 51000 \text{ kg}$ .

Die Kernweite beträgt  $e = \frac{300}{6} = 50 \text{ cm}$ .

Die Exzentrizität  $x$  ist gleich der Strecke  $\overline{rv} = 12,5 \text{ cm}$ , daher ist:

$$x_1 = e + x = 50 + 12,5 = 62,5 \text{ cm}$$

$$x_2 = e - x = 50 - 12,5 = 37,5 \text{ cm}$$



Nunmehr erhält man:

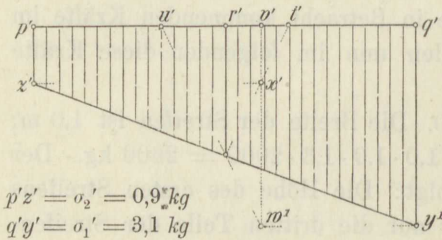
$$\sigma_1 = \frac{51000}{30000} \cdot \frac{62,5}{50} = 1,7 \cdot 1,25 = 2,125 \text{ kg für den qcm}$$

und:

$$\sigma_2 = \frac{51000}{30000} \cdot \frac{37,5}{50} = 1,7 \cdot 0,75 = 1,275 \text{ kg " " "}$$

Pressung auf den Baugrund mit Berücksichtigung des Erddrucks. Unter Berücksichtigung des Erddrucks ergibt sich folgendes:

Der Vertikaldruck auf die Fugenfläche  $\overline{pq}$  ist gleich der Strecke  $\overline{o \cdot 10}$  siehe Figur 2 Tafel I = 169 mm = 169 · 355 = 59700 oder rund 60 000 kg. Es ist ferner:



Figur 429.

$$F = 30000 \text{ qcm}$$

$$x = \overline{r'v'} = 27,5 \text{ cm}$$

$$x_1 = e + x = 50 + 27,5 = 77,5 \text{ cm}$$

$$x_2 = e - x = 50 - 27,5 = 22,5 \text{ cm}$$

$$\sigma_1' = \frac{60000}{30000} \cdot \frac{77,5}{50} = 2,06 \cdot 1,55 = 3,1 \text{ kg}$$

somit wird

$$\sigma_2' = \frac{60000}{30000} \cdot \frac{22,5}{50} = 2,00 \cdot 0,45 = 0,90 \text{ kg}$$

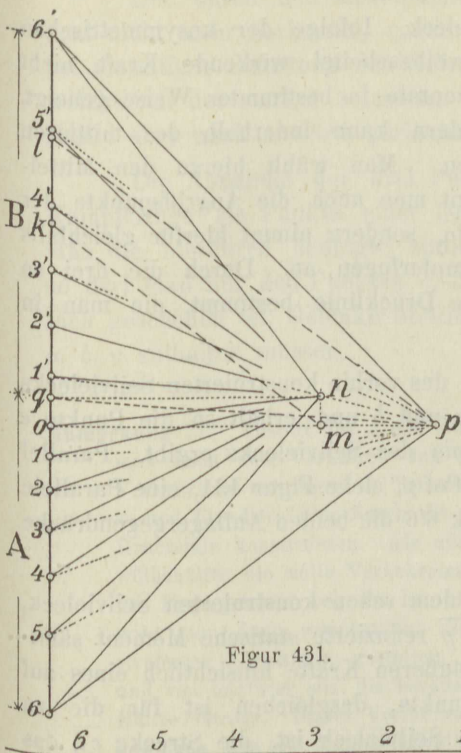
Das vorstehend behandelte Gewölbe besitzt, da weder die Pressungen im Gewölbe, noch jene im Widerlager an keiner Stelle die zulässige Grenze überschreiten, die notwendige Sicherheit gegen Zerdrücken. Auch der Verlauf der Drucklinie ist ein solcher, daß sowohl Gleichgewicht gegen Drehen, wie auch gegen Gleiten vorhanden ist. Das vorliegende Gewölbe ist somit als stabil zu betrachten.

#### 4. Stabilitätsuntersuchung bei unsymmetrischer Belastung des Gewölbes.

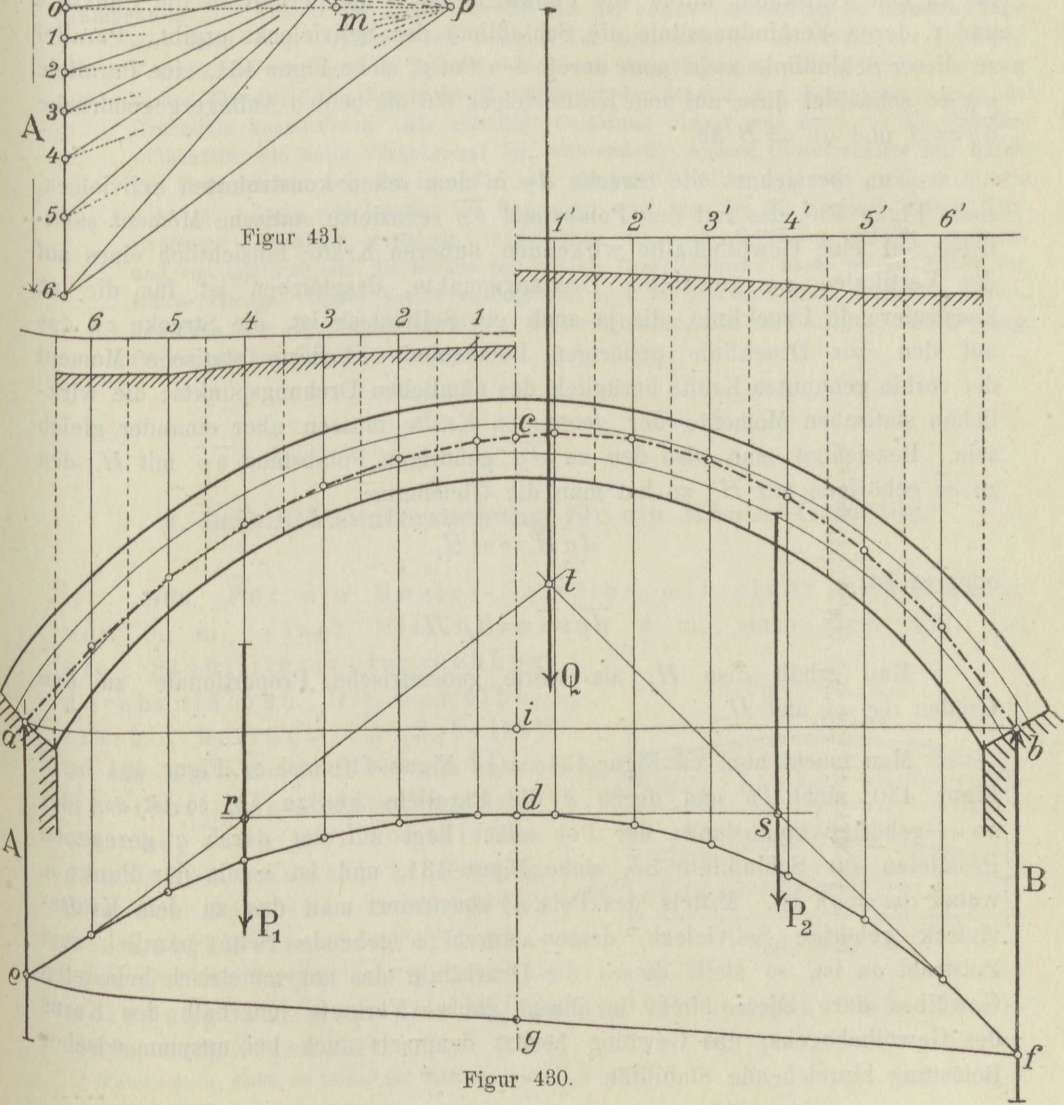
405. Bei den bisherigen Untersuchungen war vorausgesetzt, daß die Verkehrslast über das ganze Gewölbe gleichmäßig verteilt, letzteres also symmetrisch zu dessen vertikaler Mittelebene belastet erscheint. Es kann aber auch der Fall eintreten, daß die Verkehrslast nur auf einem Teile des Gewölbes ruht, während der übrige Teil lediglich durch das Eigengewicht der Konstruktion eine Belastung erfährt.

Der ungünstigste Fall der Belastung ist gegeben, wenn die eine Gewölbehälfte die volle Verkehrslast aufzunehmen, die andere aber nur das Eigengewicht zu tragen hat. Auch in diesem Falle kann man in dem Gewölbe Drucklinien konstruieren und ersteres als stabil betrachten, wenn es gelingt, eine Drucklinie zu ermitteln, welche durch das ganze Gewölbe hindurch innerhalb des Kerns des Gewölbebogens verläuft. Die Konstruktion läßt sich in ganz ähnlicher Weise ausführen wie beim symmetrisch belasteten Gewölbe. Man verschafft

sich zunächst, siehe Figur 430, in beiden Gewölbehälften die auf Steinmaterial bezogene Belastungsgrenze, teilt jede Gewölbehälfte in die gleiche Anzahl von gleich breiten Streifen, deren Höhen wieder proportional den Streifengewichten zu nehmen sind. Entsprechende Proportionalteile dieser Höhen trägt man als vertikale Kräfte zu einem Kräfteviereck, siehe Figur 431, aneinander an und konstruiert mittels eines beliebigen Pols  $p$



Figur 431.



Figur 430.



ein zu dem Kräftevieleck gehöriges Seilvieleck. Infolge der unsymmetrischen Belastung des Gewölbes ist die im Gewölbescheitel wirkende Kraft nicht mehr horizontal, sondern gegen die Horizontale in bestimmter Weise geneigt. Ihr Angriffspunkt ist nicht bekannt, sondern kann innerhalb des mittleren Fugendrittels beliebig angenommen werden. Man wählt hierzu den Mittelpunkt  $c$  der Scheitelfuge; desgleichen kennt man auch die Angriffspunkte der Widerlagergegendrücke nicht von vornherein, sondern nimmt hierfür gleichfalls die Mittelpunkte  $a$  und  $b$  der beiden Kämpferfugen an. Durch die drei so gewählten Punkte  $a$ ,  $b$  und  $c$  ist nun eine Drucklinie bestimmt, die man in folgender Weise erhält:

Man verlängert die äußersten Seiten des vorhin konstruierten Seilvielecks bis zu den Vertikalen durch die Punkte  $a$  und  $b$  und erhält so die Punkte  $e$  und  $f$ , deren Verbindungslinie die Schlußlinie des Seilvielecks ergibt. Parallel zu dieser Schlußlinie zieht man durch den Pol  $p$ , siehe Figur 431, eine Parallele  $pq$ , so schneidet diese auf dem Kräftevieleck  $6'6$  die beiden Auflagergegendrücke  $6q = A$  und  $q6' = B$  ab.

Nun bezeichnet die Strecke  $\overline{dg}$  in dem schon konstruierten Seilvieleck, siehe Figur 430, das auf den Polabstand  $\overline{op}$  reduzierte statische Moment sämtlicher auf eine Gewölbehälfte wirkenden äußeren Kräfte hinsichtlich eines auf der Vertikalen  $cg$  gewählten Drehungspunkts, desgleichen ist für die zu konstruierende Drucklinie, die ja auch ein Seilvieleck ist, die Strecke  $\overline{ci}$ , das auf den zur Drucklinie gehörigen Polabstand reduzierte statische Moment der vorhin genannten Kräfte bezüglich des nämlichen Drehungspunkts; die wirklichen statischen Momente der genannten Kräfte müssen aber einander gleich sein. Bezeichnet man also den zu  $\overline{dg}$  gehörigen Polabstand  $\overline{op}$  mit  $H$ , den zu  $\overline{ci}$  gehörigen mit  $H_1$ , so hat man die Gleichung:

$$\overline{dg} H = \overline{ci} H_1$$

oder es ist:

$$\overline{dg} : \overline{ci} = H_1 : H$$

Man erhält also  $H_1$  als vierte geometrische Proportionale zu den Größen  $\overline{dg}$ ,  $\overline{ci}$  und  $H$ .

Man macht nun,  $\overline{ok}$  Figur 431 =  $\overline{gd}$  Figur 430 und  $\overline{ol}$  Figur 431 =  $\overline{ci}$  Figur 430, zieht  $lp$  und durch  $k$  die Parallele  $km$  zu  $lp$ , so ist  $\overline{om}$  der zu  $ci$  gehörige Polabstand; der Pol selbst liegt auf der durch  $q$  gezogenen Parallelen zur Schlußlinie  $ab$ , siehe Figur 431, und ist somit der Punkt  $n$ , wobei  $\overline{om} = \overline{qn}$  ist. Mittels des Pols  $n$  konstruiert man das zu dem Kräftevieleck gehörige Seilvieleck, dessen durch  $c$  gehende Seite parallel zum Polstrahl  $on$  ist, so stellt dieses die Drucklinie des unsymmetrisch belasteten Gewölbes dar. Diese bleibt in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Kerns des Gewölbebogens; das Gewölbe besitzt demnach auch bei unsymmetrischer Belastung hinreichende Stabilität.

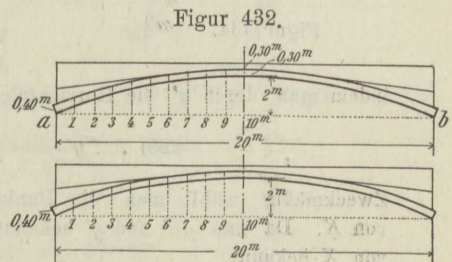
Der durch den Mittelpunkt  $c$  der Scheitelfuge  $f$  gehende Seilstrahl ist jetzt nicht mehr horizontal, sondern parallel zum Polstrahl  $on$ . Es wirkt also bei einseitiger Belastung des Gewölbes im Scheitel eine Vertikalkraft  $V = \overline{og}$ , welche auf der stärker belasteten Gewölbehälfte nach aufwärts, auf der andern Hälfte aber nach abwärts gerichtet ist.

Die Annahme der drei Punkte  $a, b, c$  in der Mitte der Scheitel- und Kämpferfuge als Punkte einer Drucklinie ist freilich eine willkürliche. Will man die hierdurch bedingte statische Unbestimmtheit des Gewölbes aufheben, so darf man nur den Punkten  $a, b$  und  $c$ , wie dies in neuerer Zeit schon mehrfach geschehen ist, Gelenke anbringen; dann wird jede Drucklinie die Punkte  $a, b, c$  enthalten müssen.

**Anmerkung 77.** Anstatt das ganze Gewölbe mit der vollen Verkehrslast zu belasten, kann man nach dem Verfahren von Tolkmitt auf dem Gewölbe beiderseits nur die halbe Verkehrslast anbringen. — Tolkmitt bezeichnet diese Belastung als Normalbelastung — und für diese eine durch die Mittelpunkte der Scheitel und Kämpferfuge gehende Drucklinie konstruieren. Als einseitige Belastung nimmt man dann für die eine Gewölbehälfte die volle Verkehrslast an, während die andere Gewölbehälfte nur durch das Eigengewicht belastet ist. Bei sehr flachen Gewölben von nur geringer Stärke wird man dann zweckmäßig die Bogenform nach der für die Normalbelastung konstruierten Drucklinie gestalten, indem man diese als Gewölbemittellinie annimmt und von letzterer aus die bereits festgesetzte Gewölbestärke nach beiden Seiten zur Hälfte abträgt. Dieses Verfahren empfiehlt sich bei den mit Eisen armierten Betongewölben, den sog. Monier-Gewölben. Im nachstehenden ist die Stabilitätsuntersuchung für ein solches Gewölbe durchgeführt.

## 5. Stabilitätsuntersuchung für ein Monier-Gewölbe.

406. Für ein Monier-Gewölbe mit einer Spannweite von 20 m, einer Pfeilhöhe von 2 m, siehe Figur 432, ist die Stabilitätsuntersuchung durchzuführen. Die Gewölbestärke beträgt im Scheitel 30 cm, am Kämpfer 40 cm. Das Gewicht der Hinterfüllung, welche oben horizontal abgeglichen sein soll, ist 1600 kg, das des Gewölbes 2000 kg für den Kubikmeter. Als Verkehrslast sind 400 kg für den Quadratmeter angenommen. Die Wölblinie ist zunächst als Kreislinie vorausgesetzt.





## a) Konstruktion des Gewölbebogens.

407. Bei der geringen Gewölbestärke und der Flachheit des Bogens, siehe Figur 432, erzielt man durch die graphischen Konstruktionen, will man nicht einen sehr großen Maßstab wählen, selbst bei Anwendung peinlichster Genauigkeit, ziemlich unsichere Ergebnisse. Man hilft sich dadurch, daß man die vertikalen Größen in einem anderen, etwa fünf- bis zehnmal größeren Maßstabe aufträgt als die horizontalen. Im vorliegenden Falle wurden die Höhen in fünfmal so großem Maßstabe aufgetragen als die Längen; erstere im Maßstab 1:20, letztere 1:100, siehe Figur 435 und 438 sowie Anmerkung 78.

**Anmerkung 78.** Zur Zeichnung des kreisförmigen Gewölbebogens in der unter Nr. 407 genannten Verzerrung ist es erforderlich, die Abstände einer Anzahl von Kreispunkten von der den Bogen begrenzenden Sehne ab zu kennen, um diese Abstände dann von der Sehne abtragen zu können. Legt man durch den Punkt  $a$  des Kreisbogens  $K$ , siehe Figur 434, die Horizontale  $X$  und die Vertikale  $Y$ , nimmt auf  $K$  einen Punkt  $e$  willkürlich an, so erkennt man, wenn  $x$  und  $y$  die Abstände des Punktes  $e$  von  $Y$  und  $X$  bedeuten die Beziehung:

$$\overline{me}^2 = \overline{ef}^2 + \overline{mf}^2 \text{ oder}$$

$$r^2 = (p-x)^2 + (q+y)^2$$

Hieraus folgt aber:

$$224) \quad y = -q \pm \sqrt{r^2 - (p-x)^2}$$

Gibt man dem  $x$  der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4 . . . 10, so bestimmen sich aus der Gleichung 224) die zugehörigen Werte von  $y$ , die man benutzen kann, um die Punkte des Bogens  $K$  zu konstruieren. Für den Kämpferpunkt  $a'$  erhält man, da die Strecke  $\overline{aa'}$  gleich der Kämpferstärke des Gewölbes bekannt ist, die Beziehungen:

$$\overline{ag} = \overline{aa'} \cos \alpha; \quad \overline{ga'} = \overline{aa'} \sin \alpha$$

$$\text{und } \operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{p}.$$

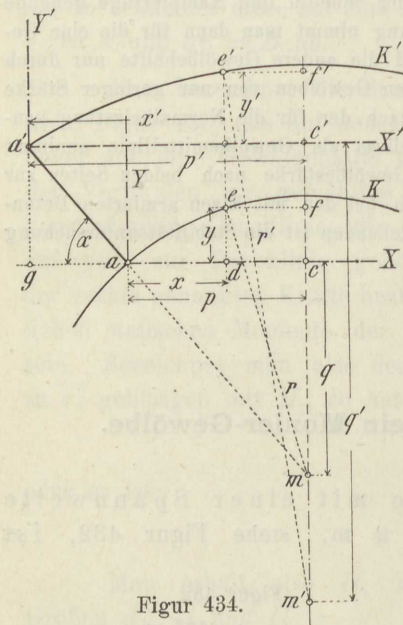
Wie für den Kreisbogen  $K$  lassen sich auch für den Bogen  $K'$  einzelne Punkte rechnerisch ermitteln,

indem man durch  $a'$  die Horizontale  $X'$  und für den Punkt  $e'$  z. B. die Gleichung:

$$225) \quad \dots y' = -q' \pm \sqrt{r'^2 - (p'-x')^2} \text{ benutzt.}$$

Zweckmäßig wählt man die Punkte  $e'$  auf den Vertikalen durch die Punkte  $e$  von  $K$ . Da nun  $\overline{ga'}$  und  $y'$  bekannt sind, so ist auch der Abstand des Punktes  $e'$  von  $X'$  bekannt.

Für das vorliegende Gewölbe, siehe Figur 432, sind für die Werte  $x=1$  bis  $x=10$  die 1 zugehörigen Werte von  $y$  aus Gleichung 224) berechnet und in Figur 435 senkrecht zur Horizontalen im Maßstab 1:20 aufgetragen worden. Hierdurch ergab sich der mit schwachem Strich gezeichnete Bogen  $K$ . Unter Beibehaltung der



Figur 434.





## b) Konstruktion der Drucklinie für Normalbelastung und Berichtigung des Gewölbebogens.

408. Um die Stabilitätsuntersuchung auszuführen, verfährt man zunächst ebenso wie in Nr. 401, nur mit dem Unterschiede, daß als Verkehrslast  $\frac{w}{2} = 200$  kg für den Quadratmeter angenommen wird. Man teilt also den Gewölbestreifen von der Tiefe = 1 m in gleich breite Streifen 1 bis 10 ein, Breite eines Streifens = 1 m, bestimmt die auf Gewölbematerial, hier Beton, zurückgeführte Belastungsgrenze  $A$  und hierauf mittels des Seilvielecks  $B$  und des Pols  $p'$ , siehe Figur 436, die Lage von  $P'$ . Hiernach ermittelt man aus der Gleichung:

$$H' = P' \frac{x}{y}$$

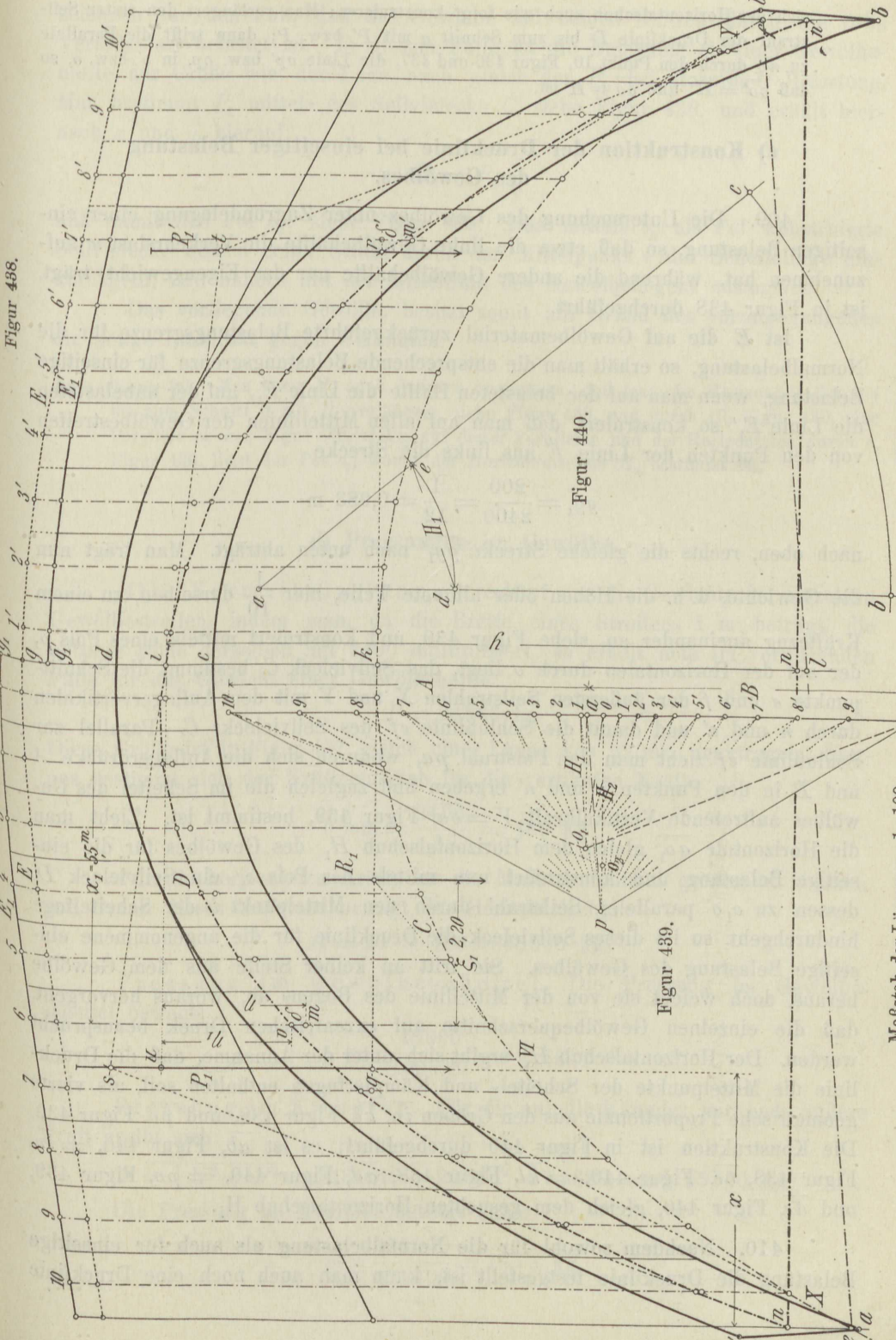
den Horizontalschub  $H'$  und damit die durch den Mittelpunkt  $i$  der Scheitelfuge gehende Drucklinie  $D$ , deren Verlauf im gegebenen Gewölbebogen nicht günstig ist. Wollte man den ursprünglich gegebenen Gewölbebogen beibehalten, so müßte die Belastung des Gewölbes so geändert werden, daß die Drucklinie  $D$  der Mittellinie des Bogens sich nähert. Ist aber an der Belastung nichts zu ändern, so bleibt nur übrig, den Gewölbebogen der Drucklinie anzupassen. Das ist im vorliegenden Falle geschehen, indem die Drucklinie  $D$  als Mittellinie für einen neuen Gewölbebogen genommen wurde, dessen Stärke in allen Vertikalen die gleiche ist wie beim ursprünglichen Bogen. Man erhält hierdurch den in der Figur 435 durch kräftigen Strich hervorgehobenen und in Figur 433 noch besonders dargestellten Gewölbebogen. Man bestimmt nun neuerdings das Gewicht  $P$  des halben Gewölbebogens der Größe und Lage nach, indem man für den neuen Bogen die nunmehrige auf Gewölbematerial zurückgeführte Belastungsgrenze  $E$  ermittelt, siehe Figur 435, hierauf das Seilvieleck  $C$  mittels des Kräfteplans, siehe Figur 437, und des Pols  $p$  konstruiert. Es ergibt sich, daß durch die geringe Formänderung, welche das Gewölbe erfahren hat, die Lage von  $P$  nicht berührt wird, d. h. unverändert bleibt. Man kann also jetzt mittels der Gleichung:

$$H = P \frac{x}{y}$$

den Horizontalschub  $H$ , siehe Figur 437, bestimmen und mittels des Pols  $o$  durch den Mittelpunkt  $i$  der Scheitelfuge die nunmehrige Drucklinie zeichnen. Man findet, daß diese mit der schon vorhin konstruierten Drucklinie  $D$  zusammenfällt. Das Gewölbe hat jetzt die der Belastung angepaßte Form, so daß in ihm die durch die Normalbelastung hervorgerufenen Pressungen sich in jedem Gewölbequerschnitt gleichmäßig auf letzteren verteilen.

**Anmerkung 79.** Bei der Bestimmung des Gewölbehorizontalschubs ist stets vorausgesetzt, daß jede Drucklinie des Gewölbes durch den Mittelpunkt  $n$  der Vertikalen  $aa''$  hindurchgeht, siehe Figur 435; hierdurch ist in jedem Falle zur Bestimmung des Horizontalschubs das  $x$  und  $y$  gegeben. Ohne Benutzung der Hebelarme  $x$  und  $y$  läßt

Figur 438.



Figur 440.

Figur 439.

Maßstab der Höhen = 1 : 20

Maßstab der Längen = 1 : 100



sich der Horizontalschub auch wie folgt konstruieren: Man verlängert den ersten Seilstrahl der Drucklinie  $D$  bis zum Schnitt  $q$  mit  $P'$  bzw.  $P$ ; dann trifft die Parallele zu  $nq$  durch den Punkt 10, Figur 436 und 437, die Linie  $op'$  bzw.  $op$ , in  $o'$  bzw.  $o$ , so daß  $oo' = H'$  und  $oo = H$  ist.

### c) Konstruktion der Drucklinie bei einseitiger Belastung des Gewölbes.

409. Die Untersuchung des Gewölbes unter Zugrundelegung einer einseitigen Belastung, so daß etwa die linke Gewölbehälfte die Verkehrslast  $w$  aufzunehmen hat, während die andere Gewölbehälfte nur das Eigengewicht trägt, ist in Figur 438 durchgeführt.

Ist  $E$  die auf Gewölbematerial zurückgeführte Belastungsgrenze für die Normalbelastung, so erhält man die entsprechende Belastungsgrenze für einseitige Belastung, wenn man auf der belasteten Hälfte die Linie  $E_1$ , auf der unbelasteten die Linie  $E_1'$  so konstruiert, daß man auf allen Mittellinien der Gewölbestreifen von den Punkten der Linie  $E$  aus links die Strecke

$$\overline{gg_1} = \frac{200}{2400} = \frac{1}{12} = 0,083 \text{ m}$$

nach oben, rechts die gleiche Strecke  $\overline{gg_1'}$  nach unten abträgt. Man trägt nun die Gewichte, d. h. die Höhen oder aliquote Teile, hier  $\frac{1}{10}$  derselben, zu einem

Kräftezug aneinander an, siehe Figur 439, und konstruiert mittels eines Pols  $p$ , der auf der Horizontalen durch  $o$  liegt, das Seilvieleck  $C$ , bestimmt die Schnittpunkte  $e$  und  $f$  der äußersten Seilstrahlen  $X$  und  $Y$  mit den Auflagervertikalen durch  $n$  und  $n'$  und damit die Schlußlinie  $ef$  des Seilvielecks  $C$ . Parallel zur Schlußlinie  $ef$  zieht man den Polstrahl  $pa$ , wodurch sich die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  in den Punkten  $n$  und  $n'$  ergeben und zugleich die im Scheitel des Gewölbes auftretende Vertikalkraft  $V = oa$ , Figur 439, bestimmt ist. Zieht man die Horizontale  $\overline{ao_1}$  gleich dem Horizontalschub  $H_1$  des Gewölbes für die einseitige Belastung und konstruiert nun mittels des Pols  $o_1$  ein Seilvieleck  $D$ , dessen zu  $o_1o$  paralleler Seilstrahl durch den Mittelpunkt  $i$  der Scheitelfuge hindurchgeht, so ist dieses Seilvieleck die Drucklinie für die angenommene einseitige Belastung des Gewölbes. Sie tritt an keiner Stelle aus dem Gewölbe heraus, doch weicht sie von der Mittellinie des Bogens ab, woraus hervorgeht, daß die einzelnen Gewölbequerschnitte auf exzentrischen Druck beansprucht werden. Der Horizontalschub  $H_1$  ergibt sich unter der Annahme, daß die Drucklinie die Mittelpunkte der Scheitel- und Kämpferfugen enthalten soll, als vierte geometrische Proportionale aus den Größen  $\overline{in}$ ,  $\overline{kl}$ , Figur 438, und  $\overline{po}$ , Figur 439. Die Konstruktion ist in Figur 440 durchgeführt; es ist  $\overline{ab}$ , Figur 440,  $= \overline{in}$ , Figur 438,  $\overline{bc}$ , Figur 440,  $= \overline{kl}$ , Figur 438,  $\overline{ad}$ , Figur 440,  $= \overline{po}$ , Figur 439, und  $\overline{de}$ , Figur 440, gleich dem gesuchten Horizontalschub  $H_1$ .

410. Nachdem sowohl für die Normalbelastung als auch für einseitige Belastung die Drucklinie festgestellt ist, kann man auch noch eine Drucklinie

zeichnen für den Fall, daß das Gewölbe auf beiden Hälften durch die volle Verkehrslast belastet ist. In diesem Falle ist die Belastung  $P_2$  einer Gewölbehälfte der Größe wie der Lage nach gleich der  $P_1$  bei einseitiger Belastung. Man bestimmt  $P_1$  mittels des Seilvielecks  $C$ , siehe Figur 438, und erhält hierauf nach  $x$  und  $y$ , hierauf:

$$H_2 = P_1 \frac{x}{y}$$

und damit den Pol  $o_2$ , siehe Figur 439. Das mittels  $o_2$  als Pol konstruierte Seilvieleck, dessen erster Strahl durch den Mittelpunkt  $i$  der Scheitelfuge hindurchgeht, fällt nahezu mit der Mittellinie des Gewölbebogens zusammen.

Das vorliegende Gewölbe besitzt somit auf Grund des vorangegangenen die nötige Stabilität gegen Umkanten.

**Anmerkung 80.** Man kann  $H_2$  auch dadurch bestimmen, daß man die Horizontale durch  $i$  bis zum Schnitt  $u$  mit  $P_1$  verlängert, siehe Figur 438, und durch 10, Figur 439, eine Parallele zu  $nu$ , Figur 438, zieht; auf dieser Parallelen und der Horizontalen durch  $o$ , Figur 430, liegt der Pol  $o_2$ , womit der Horizontalschub  $H_2$  bestimmt ist.

#### d) Pressungen im Gewölbe.

411. Normalbelastung. Berechnet man die Gewichte der einzelnen Gewölbestreifen, indem man, da die Breite eines Streifens 1 m beträgt, die mittlere Höhe derselben mit 2400 multipliziert, so erhält man im vorliegenden Falle für das Gewicht einer Gewölbehälfte:

$$P = 24960 \text{ kg}$$

Diese Größe ist in Figur 437 gleich einer Länge von 52 mm angetragen. Hieraus bestimmt sich der Kräftemaßstab für die vertikalen Kräfte:

$$1 \text{ mm} = \frac{24960}{52} = 480 \text{ kg}$$

Für die horizontalen Kräfte ist der Maßstab fünfmal größer zu nehmen. Auf Grund dieses Maßstabs beträgt der Horizontalschub:

$$H = 20 \cdot 5 \cdot 480 = 48000 \text{ kg}$$

Pressung im Gewölbescheitel. Die Pressung im Gewölbescheitel beträgt:

$$\sigma = \frac{48000}{100 \cdot 30} = 16 \text{ kg}$$

Pressung im Kämpfer. Für die auf die Kämpfer wirkende äußere Kraft ergibt sich:

$$K = \sqrt{H^2 + P^2} = \sqrt{48000^2 + 24960^2} = 54828, \text{ rund } 55000 \text{ kg}$$

Die Pressung im Kämpfer beträgt daher:

$$\sigma = \frac{555000}{40 \cdot 100} = 13,75 \text{ kg}$$



412. Belastung des ganzen Gewölbes durch die volle Verkehrslast. Es ist der Horizontalschub:

$$H_2 = \overline{oo_2}, \text{ Figur 439,} = 23 \text{ mm} = 23 \cdot 5 \cdot 480 = 55200 \text{ kg}$$

Pressung im Scheitel. Die Pressung im Scheitel beträgt:

$$\sigma = \frac{55200}{3000} = 18,4 \text{ kg}$$

Pressung im Kämpfer. Das Gewicht der mit der vollen Verkehrslast belasteten Gewölbehälfte beträgt:

$$P_2 = P_1 = 57,5 \cdot 480 = 27600 \text{ kg}$$

Die auf den Kämpfer wirkende äußere Kraft ist:

$$K_2 = \sqrt{55200^2 + 27600^2} = 61715 \text{ kg}$$

Die Pressung im Kämpfer ist somit:

$$\sigma = \frac{61715}{4000} = 15,4 \text{ kg}$$

413. Einseitige Belastung. Die vertikalen Abweichungen  $\delta$  der Drucklinie  $D$ , siehe Figur 438, von der Bogenmittellinie kann man entweder direkt aus der Zeichnung abgreifen oder aber auch berechnen. Faßt man z. B. die Vertikale 6, siehe Figur 438, auf welcher  $\delta$  seinen größten Wert erhält, ins Auge, so ist die Abweichung  $\delta$  der Drucklinie  $D$  von der Bogenmittellinie:

$$\delta = \eta - \eta_1$$

Bezeichnet  $R_1$  das Gewicht des Gewölbes zwischen dem Scheitel und der Linie 6, so ist  $R_1$  gleich der Strecke:

$$\overline{06}, \text{ Figur 439,} = 24,5 \text{ mm} = 24,5 \cdot 480 \text{ kg} = 11760 \text{ kg}$$

Die Vertikalkraft  $V$  im Scheitel beträgt  $2,5 \text{ mm} = 1200 \text{ kg}$ .

Für den Punkt  $v$  als Drehungspunkt ergibt sich die Gleichung:

$$H_1 \eta_1 = R_1 \xi_1 - V x_1$$

und hieraus

$$\eta_1 = \frac{R_1 \xi_1 - V x_1}{H_1} = \frac{11760 \cdot 2,2 - 1200 \cdot 5,5}{48000} = 0,40 \text{ m}$$

Für die Größe  $\eta$  erhält man, siehe Figur 435, den Punkt  $m$  als Drehungspunkt vorausgesetzt:

$$\eta = \frac{R \xi}{H}$$

Nun ist für die Normalbelastung

$$R = \overline{0 \cdot 6}, \text{ siehe Figur 437,} = 21 \text{ mm} = 21 \cdot 480 = 10080 \text{ kg}$$

daher:

$$\eta = \frac{10080 \cdot 2,15}{40000} = 0,45 \text{ m}$$

Man hat also:

$$\delta = \eta - \eta_1 = 0,45 - 0,40 = 0,05 \text{ m}$$

Aus diesen vertikalen Abweichungen  $\delta$  berechnen sich die in den zur Drucklinie  $D$  normalen Querschnittsebenen liegenden Abweichungen der Durchschnitts-

punkte von  $D$  von den zugehörigen Querschnittsmittelpunkten zu  $\delta_0 = \delta \sin \alpha$ , unter  $\alpha$  den Winkel der Vertikalen mit der Normalen zur Querschnittsebene verstanden. Für die durch  $m$ , siehe Figur 438, auf der Linie 6 gehende Querschnittsebene erhält man den Winkel  $\alpha$  gleich dem Winkel des Polstrahls  $0_1 \cdot 6$ , siehe Figur 439, mit der Vertikalen, wobei selbstverständlich die Verzerrung der Vertikalen  $a6$  gegenüber der Horizontalen  $0_1 a$  zu berücksichtigen ist. Man erhält:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5 \cdot \overline{0_1 a}}{a6} = \frac{5 \cdot 20}{22} = 4,54 \text{ oder } \alpha = 77^\circ 35'$$

hieraus folgt:

$$\sin \alpha = 0,977 \text{ und } \delta_0 = 5 \cdot 0,977 = 4,8 \text{ cm}$$

414. Nunmehr lassen sich auch die Pressungen für die Querschnittsebene  $m$ , siehe Figur 438, berechnen. Nimmt man die Gewölbstärke bei  $m$  zu 34 cm, siehe Figur 441, an, so erhält man unter Anwendung der bisher gebrauchten Bezeichnungen:

$$e = \frac{34}{6} = 5,66 \text{ cm}$$

$$x = 4,8 \text{ cm}$$

$$x_1 = e + x = 5,66 + 4,8 = 10,46 \text{ cm}$$

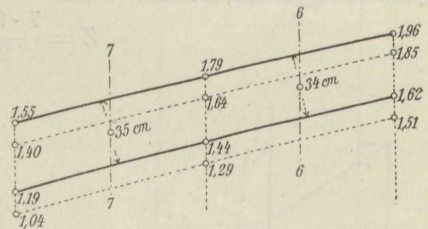
$$x_2 = e - x = 5,66 - 4,8 = 0,86 \text{ cm}$$

$$F = 34 \cdot 100 = 3400 \text{ qem}$$

$$P = \sqrt{H_1^2 + (R_1 - V)^2} = \sqrt{48000^2 + (11700 - 1200)^2} = 49200 \text{ kg}$$

$$\sigma_1 = \frac{49200}{3400} \cdot \frac{10,46}{5,66} = 14,5 \cdot 1,85 = 26,8 \text{ kg}$$

$$\sigma_2 = \frac{49200}{3400} \cdot \frac{0,86}{5,66} = 14,5 \cdot 0,15 = 2,18 \text{ kg}$$



Figur 441.

$$\frac{P}{F} (1 + \frac{e}{x})$$

$$\sigma = \frac{P}{F} \cdot (e + x)$$

415. Auf der durch die Verkehrslast belasteten Gewölbeseite bleibt die Drucklinie in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Mauerkerne; es treten also auf dieser Seite keine Zugspannungen auf. Dagegen verläßt sie auf der unbelasteten Gewölbeseite den Gewölbekern. Die größte Abweichung der Gewölbemittellinie tritt in der Vertikalen 7' auf, nämlich  $\delta' = 10$  cm.

Für die durch den Mittelpunkt der Gewölbevertikalen 7' parallel zum Polstrahl  $0_1 7'$  gelegte Fuge ergibt sich ihr Winkel  $\alpha'$  mit der Vertikalen aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{5 \cdot 20}{27} = 3,703 \text{ und hieraus } \alpha' = 74^\circ 53'$$

Es ist dann:

$$\sin \alpha' = 0,965 \text{ und die Exzentrizität } \delta'_0 = x = \delta' \sin \alpha' = 10 \cdot 0,965 = 9,65 \text{ cm}$$

Für die genannte Fuge erhält man weiter die Gewölbstärke zu 35 cm, siehe Figur 441, und

$$e = \frac{35}{6} = 5,83 \text{ cm}$$



Es ist ferner:

$$x_1 = 5,83 + 9,65 = 15,48 \text{ cm}$$

$$x_2 = 5,83 - 9,65 = -3,82 \text{ cm}$$

$$F = 35 \cdot 100 = 3500, \quad P_1' + V = \overline{a7'} = 26 \text{ mm} + 26 \cdot 480 = 12500 \text{ kg}$$

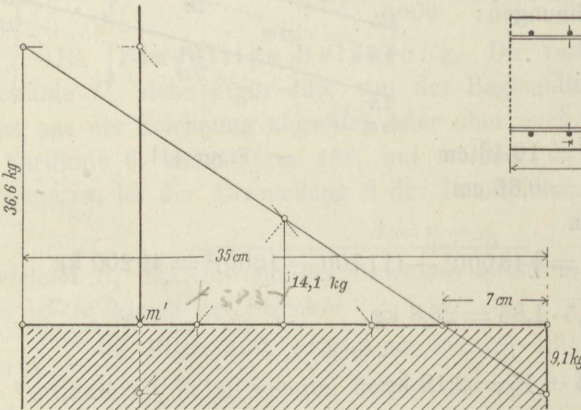
$$P = \sqrt{H_1^2 + (P_1' + V)^2} = \sqrt{48000^2 + 12500^2} = 49600 \text{ kg}$$

$$\sigma_1 = \frac{49600}{3500} \cdot \frac{15,48}{5,83} = 14,1 \cdot 2,6 = 36,6 \text{ kg Druck}$$

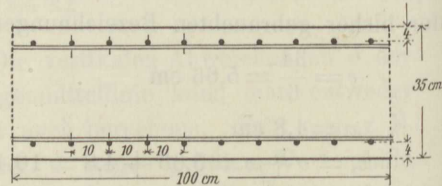
$$\sigma_2 = \frac{49600}{3500} \cdot \frac{3,82}{5,83} = 14,1 \cdot 0,65 = 9,1 \text{ kg Zug, siehe Figur 442.}$$

Die auftretende Zugkraft muß durch eine Eiseneinlage aufgenommen werden. Auf einen Gewölbestreifen von 1 m Tiefe erhält die gesamte aufzunehmende Zugkraft den Wert:

$$Z = \frac{7 \cdot 9,1}{2} \cdot 100 = 3185 \text{ kg}$$



Figur 442.



Figur 443.

Läßt man diese Kraft von 10 Stäben, siehe Figur 443, aufnehmen, so trifft auf einen Stab eine Zugkraft von 318,5 kg. Hierfür genügt ein Durchmesser von 10 mm. Es trifft dann auf den Quadrat-

zentimeter Eisenquerschnitt eine Beanspruchung von etwa 406 kg, siehe auch Nr. 452.

Zweckmäßig wird man noch eine zweite Eiseneinlage, siehe Figur 443, verwenden.

## 6. Übungsaufgaben.

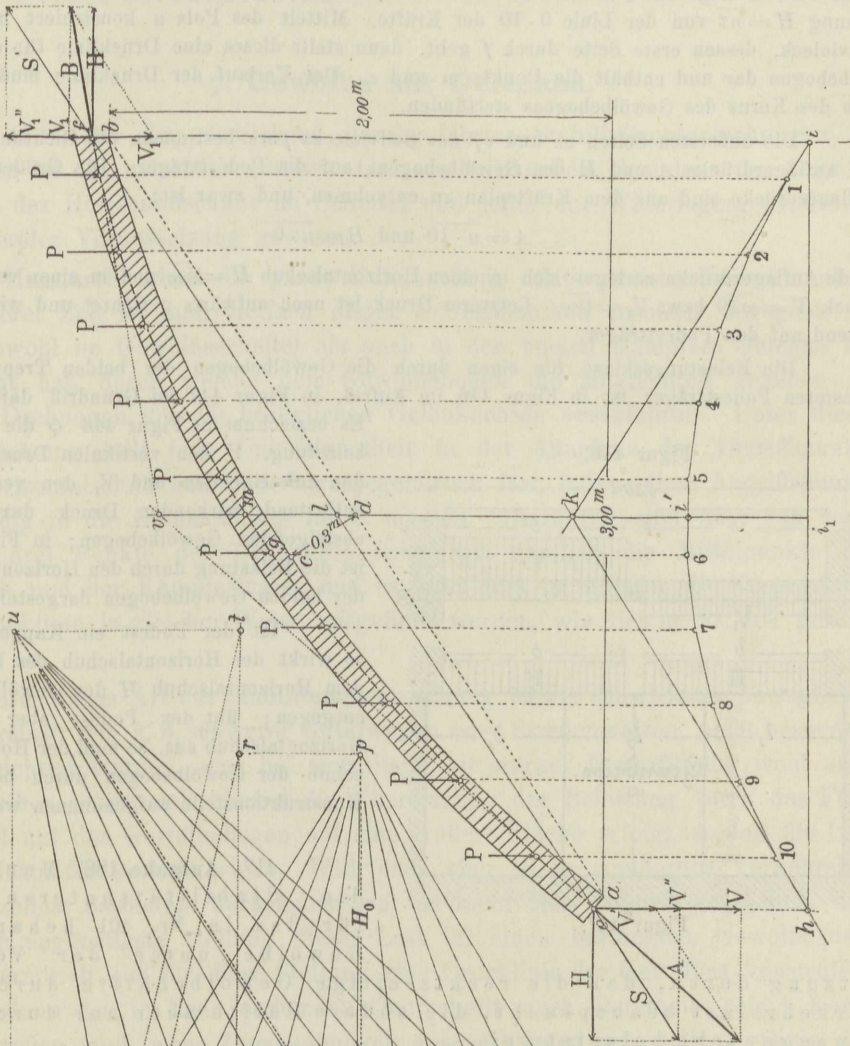
416. **Aufgabe 185.** Für ein Treppengewölbe, das sich in den Punkten  $e$  und  $f$ , siehe Figur 443, auf zwei Podestträger als Widerlager stützt, ist der Verlauf einer Drucklinie zu zeichnen und außerdem die Belastung anzugeben, welche ein Podestträger durch das Gewölbe erfährt.

**Auflösung.** Die auf jede Stufe treffende Belastung einschließlich des Eigengewichts sei  $P$  und wirke so, wie in der Figur 444 angegeben, auf den Gewölbobogen. Man trägt zunächst die Kräfte  $P$  zu einem Kräfteviereck an, konstruiert mittels eines beliebigen Pols  $p$ , siehe Figur 445, ein Seilviereck, siehe Figur 444, und zeichnet dessen Schlußlinie  $hi$ .

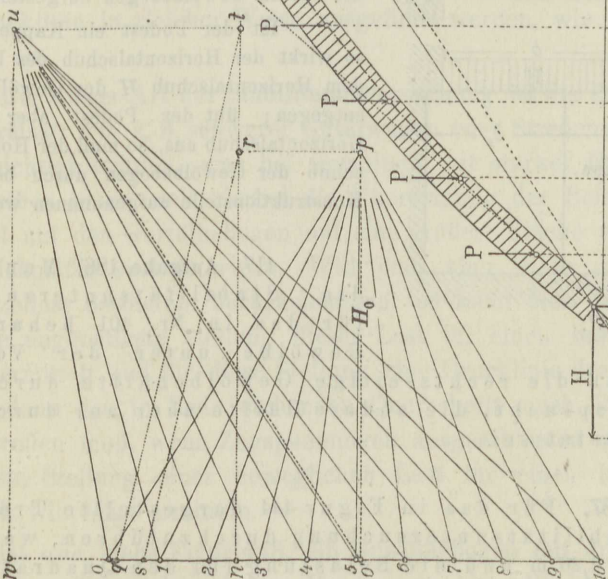
Zieht man ferner durch den Schnittpunkt  $k$  der äußersten Vielecksseiten die Vertikale  $vk$  und wählt auf letzterer den Punkt  $m$  in der Mitte zwischen innerer und äußerer Wölblinie, so kann man durch die drei Punkte  $f$ ,  $m$  und  $e$  ein Seilviereck legen, dessen Schlußlinie die Gerade  $ef$  ist.

Nun bedeutet die Strecke  $\bar{v}i_1$ , siehe Figur 444, das auf den zu  $p$  gehörigen Polabstand  $H_0$  reduzierte statische Moment der auf eine Gewölbbehälte wirkenden Kräfte hinsichtlich

Figur 444.



Figur 445.



eines auf der Vertikalen  $vk$  gewählten Drehungspunkts, desgleichen ist  $\bar{m}l$  das auf einen bestimmten Polabstand  $H$  reduzierte statische Moment der nämlichen Kräfte bezüglich desselben Drehungspunkts. Man hat daher die Gleichung:

$$H_0 \cdot \bar{v}i_1 = H \cdot \bar{m}l$$



woraus sich  $H$  bestimmt. Man wählt, siehe Figur 445, den Punkt  $n$  auf  $0 \cdot 10$  beliebig, zieht  $nr$  senkrecht zu  $0 \cdot 10$  und gleich  $H_0$ , macht  $ns = ml$  und  $nq = i'i_1$ , zieht  $sr$  und zu letzterer Linie parallel die Linie  $qt$ , so ist  $nt = H$ .

Zieht man ferner durch  $p$ , siehe Figur 445, eine Parallele  $po'$  zur Schlußlinie  $hi$  des Seilviecks, siehe Figur 444, endlich durch  $o'$  eine Parallele  $o'u$  zu der Schlußlinie  $ef$ , siehe Figur 444, so liegt auf  $o'u$  der zum Seilvieck  $fme$  gehörige Pol  $u$ , und zwar in einer Entfernung  $H = nt$  von der Linie  $0 \cdot 10$  der Kräfte. Mittelt des Pols  $u$  konstruiert man ein Seilvieck, dessen erste Seite durch  $f$  geht, dann stellt dieses eine Drucklinie für den Gewölbebogen dar und enthält die Punkte  $m$  und  $e$ . Der Verlauf der Drucklinie muß innerhalb des Kerns des Gewölbebogens stattfinden.

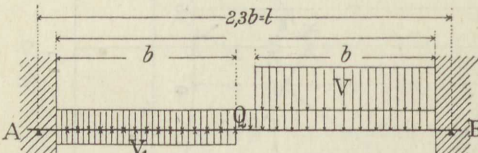
Die äußersten Seiten  $ve$  und  $vf$  des Seilviecks  $fme$  bestimmen die Richtungslinien der Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  des Gewölbebogens auf die Podestträger. Die Größen dieser Auflagerdrücke sind aus dem Kräfteplan zu entnehmen, und zwar ist:

$$A = u \cdot 10 \text{ und } B = u \cdot 0$$

Beide Auflagerdrücke zerlegen sich in einen Horizontalschub  $H = uw$  und in einen vertikalen Druck  $V = w10$  bzw.  $V_1 = 0w$ . Letzterer Druck ist nach aufwärts gerichtet und wirkt entlastend auf den Podestträger.

Die Belastungsskizze für einen durch die Gewölbebogen der beiden Treppenhänge belasteten Podestträger ist in Figur 446 im Aufriß, in Figur 447 im Grundriß dargestellt.

Figur 446.



Es bezeichnet in Figur 446  $Q$  die Podestbelastung,  $V$  den vertikalen Druck durch den aufsteigenden und  $V_1$  den vertikalen, entlastend wirkenden Druck durch den absteigenden Gewölbebogen; in Figur 447 ist die Belastung durch den Horizontalschub der beiden Gewölbebogen dargestellt.

Ist der Podest ein Kappenpodest, so wirkt der Horizontalschub des letzteren dem Horizontalschub  $H$  der Gewölbebogen entgegen; übt der Podest aber keinen Horizontalschub aus, so muß der Horizontalschub der Gewölbebogen durch besondere Konstruktionsteile aufgenommen werden.

Grundriß.



Figur 447.

#### 417. Aufgabe 186.

Man führe die Stabilitätsuntersuchung für das in Nr. 401 behandelte Gewölbe unter der Voraussetzung durch,

daß die rechtsseitige Gewölbehälfte durch die Verkehrslast beansprucht, die andere Hälfte aber nur durch das Eigengewicht belastet sei.

418. Aufgabe 187. Für das in Figur 444 dargestellte Treppengewölbe ist die Stabilitätsuntersuchung durchzuführen, wenn die Breite der Treppe 1,20 m und die Belastung für den Quadratmeter Horizontalprojektion 1000 kg beträgt. Auch ist der zugehörige Podestträger zu berechnen, wenn der Podest ein Plattenpodest und die Belastung für den Quadratmeter dieselbe wie für die Treppe sein soll. Der Horizontalschub der Gewölbe soll durch vier Steifen von  $+$ -Form aufgenommen werden.

418a. **Aufgabe 188.** Ein Monier-Gewölbe von 16 m Spannweite und 1,6 m Pfeilhöhe dient zur Überführung eines Fußwegs über einen Wasserlauf. Der Gewölbe soll im Scheitel 25 cm, am Kämpfer 35 cm stark sein. Gewölbematerial 1 cbm = 2400 kg, Hinterfüllung 1 cbm = 1800 kg, Verkehrslast 400 kg für den qm. Die Breite des Gewölbes von Stirn zu Stirn beträgt 3 m. Es ist die Stabilitätsuntersuchung des Gewölbes durchzuführen.

## 7. Gewölbe mit Gelenken.

419. Bei den vorstehend durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen für Gewölbe ist die innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Annahme der Angriffspunkte des Horizontalschubs im Scheitel und jener der Widerlagergegendrücke im Kämpfer Voraussetzung gewesen.

Hierdurch erhält die ganze Untersuchung eine gewisse Unbestimmtheit. In neuerer Zeit ist man vielfach dieser Unbestimmtheit insofern begegnet, als man sowohl im Gewölbescheitel als auch in den beiden Kämpfern Gelenke angebracht hat, durch welche dem Gewölbebogen die Möglichkeit gegeben ist, kleine Drehungen um die bezüglichlichen Gelenkachsen auszuführen. Unter dieser Voraussetzung fällt jede Unbestimmtheit in der Annahme der Angriffspunkte von Horizontalschub und Widerlagergegendruck fort, indem diese Angriffspunkte notwendig in die Gelenkachsen fallen müssen. Hierdurch sind aber von vornherein drei Punkte der Drucklinie festgelegt, nämlich die Mittelpunkte der Scheitel- und der Kämpferfugen, und es kann nun im übrigen die Konstruktion der Drucklinie in gleicher Weise ausgeführt werden, wie dies in Nr. 401 gezeigt worden ist.

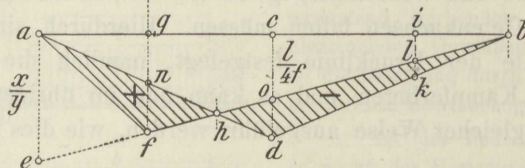
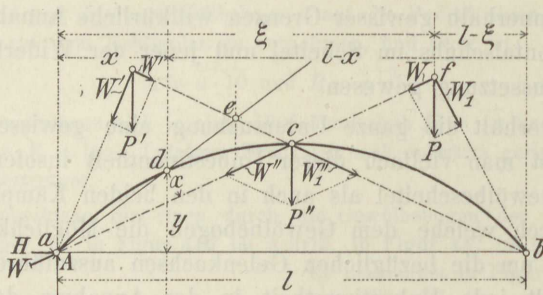
Bei dieser Art der Stabilitätsuntersuchung ist die Einwirkung beweglicher Verkehrslast, wie z. B. schwerer Güterwagen oder Straßenwalzen, nicht besonders berücksichtigt worden, was bei Gewölben mit starker Hinterfüllung wohl auch unterbleiben kann, weil hierbei die Übertragung der Belastung durch das Füllmaterial auf den Gewölbebogen auf eine größere Fläche erfolgt, so daß die Last als gleichmäßig verteilt wirkt. Will man aber diese wandernde Verkehrslast als Einzellast besonders berücksichtigen, so kann dies dadurch geschehen, daß man die ungünstigste Stellung dieser Last für einen bestimmten Gewölbequerschnitt ermittelt und für diese Stellung eine Drucklinie des Gewölbes konstruiert, welche dann den in Rede stehenden Querschnitt noch innerhalb seiner Kernfläche treffen muß, wenn Zugspannungen ausgeschlossen sein sollen. Diese ungünstigste Stellung einer beweglichen Last für einen bestimmten Querschnitt läßt sich wie folgt ermitteln.

Ist  $abc$ , siehe Figur 448, ein Gewölbebogen mit drei Gelenken  $a$ ,  $b$  und  $c$ , und  $d$  ein willkürlich auf dem Bogen gewählter Punkt, endlich  $P$  eine über das Gewölbe sich bewegende Einzellast, so wird durch diese Last das Biegemoment des den Punkt  $d$  als Drehungspunkt enthaltenden Gewölbequerschnitts in bestimmter Weise beeinflusst. Befindet sich nämlich die Last rechts von  $d$ ,



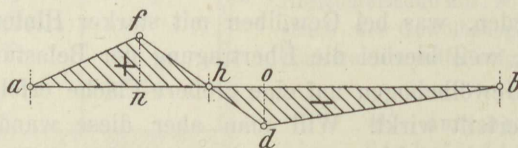
so zerlegt sich  $P$  in die beiden Seitenkräfte  $W$  und  $W_1$ , von welchen  $W$  in die Verbindungslinie  $ac$  fällt, während  $W_1$  mit der Verbindungslinie  $fb$  sich deckt. Die Kraft  $W$  ruft in  $A$  einen Gegendruck  $W$  hervor und dieser besitzt ein statisches Moment  $W\alpha$ . Dieses Moment bleibt solange negativ, als die Richtungslinie von  $W$  rechts von  $d$  liegt. Seinen größten Wert erhält dieses Moment, wenn die Kraft  $P$  durch  $c$  hindurchgeht. Geht die Kraft  $P$  gerade durch den Punkt  $e$ , so ist das Moment gleich Null und wird nunmehr positiv, wenn  $P$  noch weiter nach links vorrückt. Der größte Wert des positiven Moments wird auftreten, wenn  $P$  gerade über  $d$  zu stehen kommt.

Figur 448.



Figur 449.

Figur 450.



Die Vertikale durch den Schnittpunkt  $e$  von  $ad$  und  $bc$  nennt man eine Belastungsscheide für den Punkt  $d$ . Das vorstehende läßt sich kurz wie folgt zusammenfassen:

„Für jeden Punkt  $d$  eines Gewölbequerschnitts gibt es eine Belastungsscheide, welche durch den Schnittpunkt  $e$  der Verbindungslinien  $ad$  und  $bc$  hindurchgeht.“

„Jede Kraft rechts von der Belastungsscheide erzeugt für den Drehungspunkt  $d$  ein negatives Moment, das seinen größten Wert erhält, wenn die Kraft über dem Gewölbescheitel steht.“

„Jede Kraft links von der Belastungsscheide bringt für den Drehungspunkt  $d$  ein positives Moment hervor, dessen größter Wert erreicht wird, wenn die Kraft durch  $d$  hindurchgeht.“

„Fällt die Kraft in die Belastungsscheide, so ist ihr Moment für den Drehungspunkt  $d$  gleich Null.“

420. Der Einfluß, welchen eine über das Gewölbe sich hinweg bewegende Einzellast auf das Moment für einen bestimmten Drehungspunkt  $\bar{d}$  ausübt, läßt sich in Gestalt einer Einflußlinie veranschaulichen. Geht z. B. die bewegliche Einzellast durch  $f$ , siehe Figur 448, so entstehen die beiden Kämpferdrücke  $W$  und  $W_1$ ; ersterer zerlegt sich in eine Horizontalkraft  $H$  und in eine Vertikalkraft  $V$ , denen als Widerlagergegendrücke die gleich großen Kräfte  $H$  und  $A$  entgegenwirken.

Man erhält nun:

$$226) \dots A = \frac{P(l - \xi)}{l} = \frac{l - \xi}{l}, P = 1 \text{ gesetzt}$$

und

$$227) \dots H = \frac{Al}{2f} = \frac{l - \xi}{2f}, P = 1 \text{ gesetzt}$$

$f$  ist die Pfeilhöhe des Bogens  $abc$ , d. h. der Abstand des Punkts  $c$  von der Linie  $ab$ , daher ist das Moment für den Drehungspunkt  $d$ :

$$\begin{aligned} M &= Ax - Hy \\ &= \frac{(l - \xi)x}{l} - \frac{l - \xi}{2f}y \\ 228) \dots &= y \left( \frac{l - \xi}{l} \frac{x}{y} - \frac{l - \xi}{2f} \right) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck läßt sich in einfacher Weise konstruieren. Trägt man nämlich auf der Linie  $ab$ , siehe Figur 449, in  $c$  die Senkrechte  $\bar{cd} = \frac{l}{4f}$  ab, zieht  $da$  und  $db$ , trägt ebenso in  $a$  die Senkrechte  $\bar{ae} = \frac{x}{y}$  an, verbindet  $eb$  und den Schnittpunkt  $f$  von  $eb$  und der Vertikalen durch  $d$ , Figur 448, mit  $a$ , so erhält man in der Figur 449 zunächst durch die Richtungslinie der Kraft  $P$  die Strecken  $\bar{ik}$  und  $\bar{il}$ , und es ist:

$$\bar{ik} = \frac{l - \xi}{2f} \quad \text{und} \quad \bar{il} = \frac{l - \xi}{l} \frac{x}{y}$$

folglich

$$\bar{lk} = \frac{l - \xi}{2f} - \frac{l - \xi}{l} \frac{x}{y}$$

d. i. gleich dem negativen Klammerausdruck in Nr. 228.

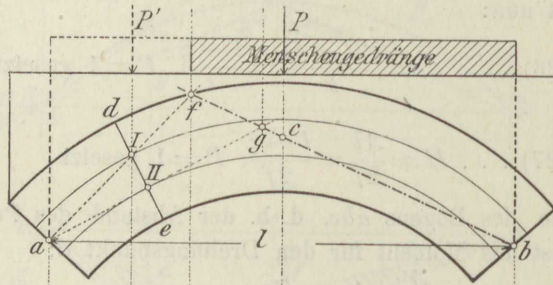
Man erhält also das Moment für den Drehungspunkt  $d$ , wenn man die Strecke  $\bar{lk}$  als Kraft mißt und die Maßzahl mit dem Hebelarm  $y$  multipliziert.



Die in Figur 449 schraffierte Fläche stellt die Einflußfläche für das Moment einer über das Gewölbe sich bewegenden Last  $P=1$  für den Drehungspunkt  $d$  dar. Die Einflußordinaten sind die durch die Kraftlinien aus den Einflußflächen ausgeschnittenen vertikalen Strecken  $\overline{lk}$ ,  $\overline{od}$ ,  $\overline{nf}$  usw. Der die Einflußfläche begrenzende Linienzug  $afbdba$  ist die Einflußlinie; diese kann auch so dargestellt werden, wie in Figur 450 gezeigt ist, wenn man die Strecken  $\overline{nf}$  und  $\overline{od}$  so wie geschehen, nach Figur 450 überträgt.

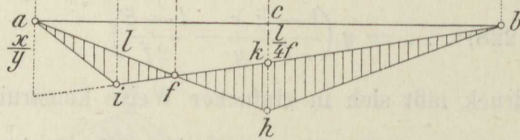
Nachdem man nun in der vorstehend angegebenen Weise für jede Laststellung den hinzugehörigen Einfluß auf das Biegemoment für irgend welchen angenommenen Drehungspunkt feststellen kann, läßt sich die Stabilitätsuntersuchung eines Gewölbes mit drei Gelenken unter Benutzung von Einflußlinien in einfacher Weise durchführen.

Voraussetzung ist, daß die Ausmaße des Gewölbes angenommen sind und daß es sich darum handelt, zu untersuchen, ob das Gewölbe die nötige



Figur 451.

Figur 452.



Stabilität besitzt. Diese ist nach früherem vorhanden, wenn in keinem Querschnitt Zugspannungen auftreten, sondern nur Pressungen und diese die zulässige für das Material festgesetzte Grenze nicht überschreiten.

Wählt man also in dem Gewölbebogen, siehe Figur 451, einen beliebigen Querschnitt  $de$ , bestimmt für diesen die Kernpunkte I und II, so wird man für jeden dieser Kernpunkte die ungünstigsten Belastungen feststellen und die dazu gehörigen Biegemomente ermitteln. Aus diesen Biegemomenten ergeben sich dann die im Gewölbe auftretenden Pressungen.

Für den Drehungspunkt I erhält man die Vertikale durch  $f$  als Belastungsscheide. Die ungünstigste Belastung für das negative Moment wird gebildet:

1. durch die Belastung des ganzen Gewölbes durch sein Eigengewicht;
2. Belastung rechts von der Belastungsscheide durch Menschengedränge;
3. durch die schwerste Einzellast im Gewölbescheitel, ev. rechts daneben noch weitere Einzellasten.

Für das positive Moment erhält man als ungünstigste Belastungsannahme:

1. Belastung des ganzen Gewölbes durch sein Eigengewicht;
2. Belastung links von der Belastungsscheide durch Menschengedränge;
3. schwerste Einzellast über dem Drehungspunkt ev. links davon weitere Einzellasten.

Die Aufstellung des wirklichen Werts des Moments kann entweder mittels der Momentengleichung oder mittels Einflußlinien ausgeführt werden.

Da für jeden Gewölbeschnitt die Mittelkraft der äußeren Kräfte auf das mittlere Drittel der Fugenlänge fallen muß, wenn Zugspannungen ausgeschlossen sein sollen, so läßt sich für jeden Drehungspunkt das Vorzeichen des Moments sowohl für recht- wie linkseitige Belastung feststellen.

Für den Drehungspunkt I muß z. B. sowohl das größte Moment für recht- wie linkseitige Belastung einen negativen, für den Drehungspunkt II dagegen einen positiven Wert haben. Wird der Wert des Moments gleich Null, so geht die Mittelkraft der äußeren Kräfte durch den Drehungspunkt selbst, d. h. durch den Kernrand des Querschnitts.

Die dem Moment entsprechende Druckspannung im Gewölbequerschnitt ergibt sich, durch Division des Momentenwerts durch das Widerstandsmoment des in Rede stehenden Gewölbequerschnitts.

Im folgenden soll an einem Beispiel die vollständige Stabilitätsuntersuchung für ein Gewölbe mit drei Gelenken durchgeführt werden.

**421. Aufgabe 189.** Für eine gewölbte Brücke aus Beton mit drei Gelenken ist die Stabilitätsuntersuchung auszuführen. Als Belastungen sind anzunehmen:

1. Eigengewicht: 1 cbm Beton = 2400 kg
2. Hinterfüllung: 1 cbm = 1600 kg
3. Pflasterung der Fahrbahn: 1 qm = 560 kg
4. Menschengedränge: 1 qm = 400 kg
5. Eine zweiachsige Dampfstraßenwalze von den Abmessungen, siehe Tabelle XXV, Nr. 14.

**Auflösung.** Die Ausmaße des Gewölbebogens sind angenommen. Die Bogenmittellinie ist eine Kreislinie  $opq$  von 25 m Sehnenlänge und 2,5 m Pfeilhöhe.

Die Scheitelstärke ist 0,70 m, am Kämpfer ist das Gewölbe 0,80 m stark.

Der halbe Gewölbebogen ist in fünf Streifen von je 2,5 m Breite geteilt. Fugenlängen an den Grenzen dieser Streifen sind  $\overline{ef} = 0,80$  m;  $\overline{gh} = 0,80$  m;  $\overline{ik} = 0,75$  m und  $\overline{ln} = 0,72$  m.

Zum Zwecke der bequemerer Berechnung des Eigengewichts des Gewölbs ersetzt man zunächst das Pflaster durch eine gleichschwere Füllmaterialschiicht von der Höhe

$\frac{560}{1600} = 0,35$  m, hierauf ersetzt man die Füllmaterialschiicht ganz so wie früher durch eine gleichschwere Schicht von Gewölbematerial, im vorliegenden Falle Beton, indem man die mittleren Streifenhöhen im Verhältnis  $\frac{1600}{2400} = \frac{2}{3}$  verkleinert. Hierdurch ergibt sich die in



Figur 1 Tafel II eingetragene auf Beton reduzierte Belastungsgrenze. Die Kubikinhalte der einzelnen Streifen sind nun, die Gewölbetiefe zu 1,0 m vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} \text{Streifen 1} &= 2,75 \cdot 2,50 = 6,875 \text{ cbm} \\ \text{„ 2} &= 2,10 \cdot 2,50 = 5,250 \text{ „} \\ \text{„ 3} &= 1,65 \cdot 2,50 = 4,125 \text{ „} \\ \text{„ 4} &= 1,35 \cdot 2,50 = 3,375 \text{ „} \\ \text{„ 5} &= 1,15 \cdot 2,50 = 2,875 \text{ „} \end{aligned}$$

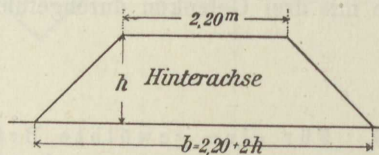
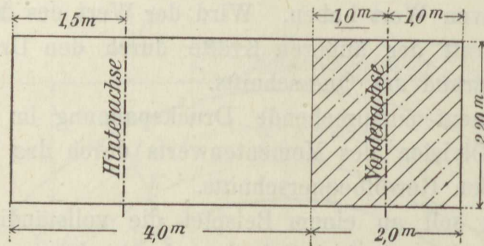
Der Kubikinhalte der Gewölbehälfte beträgt somit 22,5 cbm.

Um die Wirkung der Dampfwalze beurteilen zu können, ist von der Belastungsfläche der Walze das darauf treffende Gewicht des Menschengedränges von den Achsdrücken in Abzug zu bringen und zwar wie folgt:

Auf die Belastungsfläche der Vorderachse trifft ein Menschengedränge von  $2,0 \cdot 2,2 \cdot 400 = 1760$  kg, daher bleibt ein Achsdruck von  $8000 - 1760 = 6240$  kg.

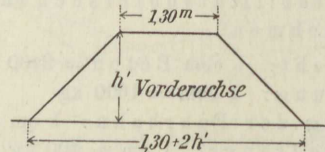
Auf die Belastungsfläche der Hinterachse trifft ein Menschengedränge von  $4,0 \cdot 2,2 \cdot 400 = 3520$  kg. Es bleibt somit ein Achsdruck von  $12000 - 3520 = 8480$  kg.

Figur 453.



Figur 454.

Figur 455.



Wenn nun eine Achse über einem bestimmten Punkte des Gewölbes sich befindet, so verteilt sich der Druck auf eine gewisse Breite des Gewölbes. Nach der Zeichnung der Figur 454 beträgt die Breite des Hinterrades 2,20 m. Wird nun angenommen, es pflanze sich der Druck bis zu einem Winkel von  $45^\circ$  fort, so beträgt die Belastungsbreite  $b$  der Hinterachse, wenn die Belastungshöhe  $h$  ist:

$$b = 2,20 + 2h$$

Für die Vorderachse erhält man die entsprechende Belastungsbreite:

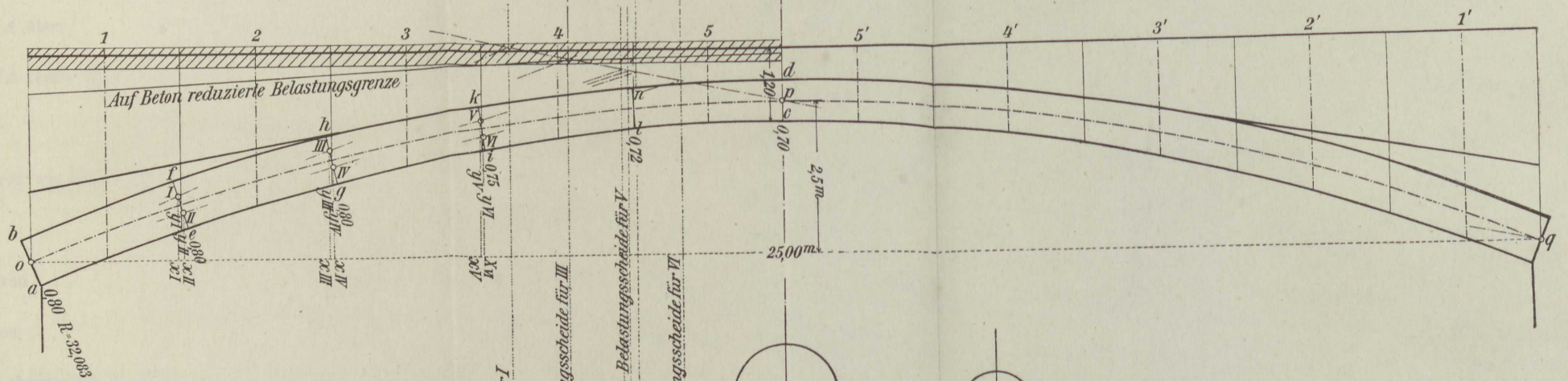
$$b' = 1,30 + 2h'$$

Bestimmt man für die Fugen  $ef$ ,  $gh$  und  $ik$ , die Kernpunkte I bis VI, siehe Figur 1 Tafel II, so erhält man für diese Punkte in den Schnittpunkten der Verbindungslinien  $I_0 \dots VI_0$  mit der Verbindungslinie  $pq$  die Punkte, durch welche die Belastungsscheiden für die Punkte I bis VI hindurchgehen.

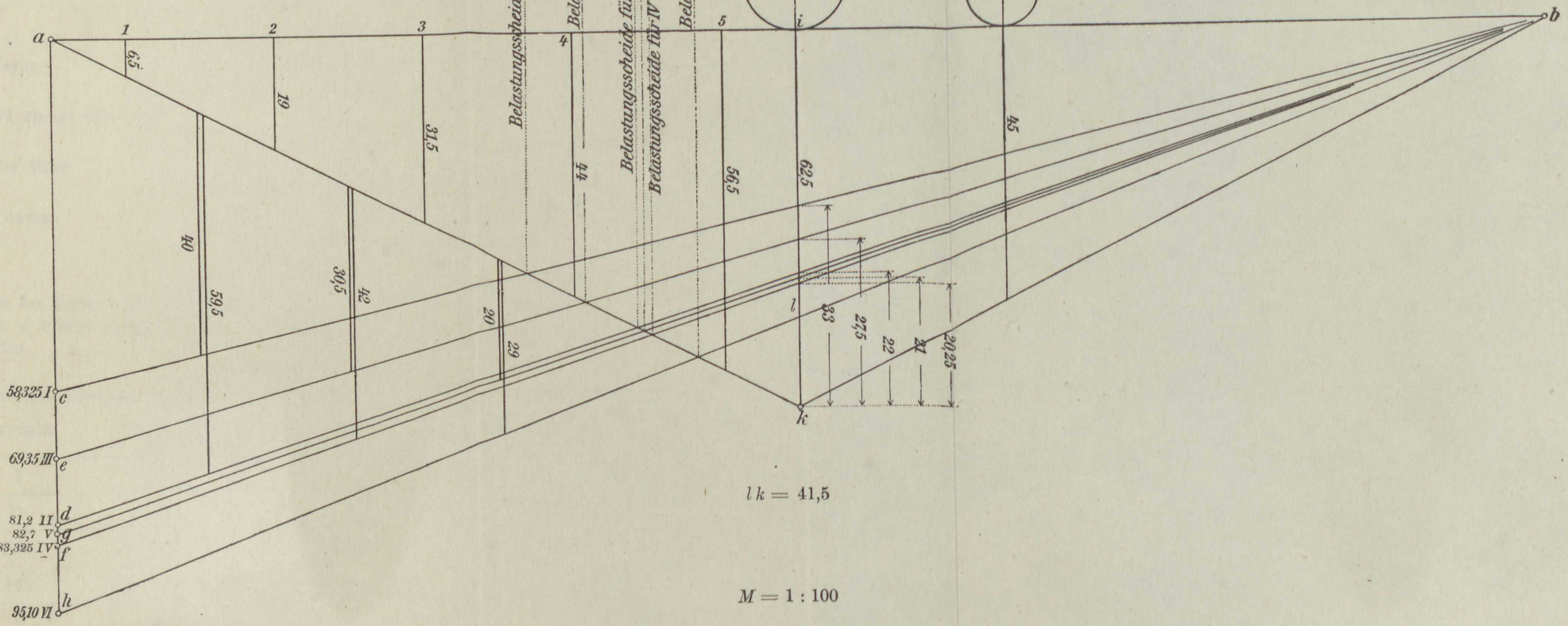
Für die ungünstigsten Stellungen der Dampfwalze hinsichtlich der Punkte I bis VI erhält man die in nachstehender Tabelle zusammengestellten Belastungshöhen und Breiten und die daraus sich ergebenden auf 1 m Breite reduzierten Achsdrücke.

Tafel II.

Figur 1.



Figur 2.





Stellung der Dampfwalze	Belastungshöhe $h$ oder $h'$ in m	Belastungsbreite $b$ oder $b'$ in m	Druck in kg reduziert auf 1 m Breite
Hinterachse HA über I	1,8	$2,20 + 2 \cdot 1,8 = 5,8$	$\frac{8480}{5,8} = 1500$
Vorderachse VA rechts davon	1,3	$1,3 + 2 \cdot 1,3 = 3,9$	$\frac{6240}{3,9} = 1600$
HA über II	1,8	5,8	1500
VA rechts davon wie bei I			1600
HA über III	1,35	$2,20 + 2 \cdot 1,35 = 4,9$	$\frac{8480}{4,9} = 1750$
VA rechts davon	0,80	$1,30 + 2 \cdot 0,80 = 2,90$	$\frac{6240}{2,90} = 2150$
VA links davon	2,00	$1,30 + 2 \cdot 2,00 = 5,30$	$\frac{6240}{5,30} = 1180$
HA über IV ebenso wie bei III			1750
HA über V	0,90	$2,20 + 2 \cdot 0,90 = 4,00$	$\frac{8480}{4,0} = 2120$
VA links davon	1,5	$1,30 + 2 \cdot 1,5 = 4,50$	$\frac{6240}{4,5} = 1390$
HA über VI ebenso wie bei V			2120
HA über der Mitte	0,60	$2,20 + 2 \cdot 0,60 = 3,40$	$\frac{8480}{3,4} = 2500$
VA rechts davon	0,75	$1,30 + 2 \cdot 0,75 = 2,80$	$\frac{6240}{2,80} = 2230$

Aus der Figur 1 Tafel II entnimmt man für die Kernpunkte I bis VI die folgenden Koordinaten  $x$  und  $y$ , deren Quotienten mit der Krafteinheit 1 mm = 25 kg multipliziert werden sollen.

Kernpunkt	$x$		$y$		$\frac{x}{y} \cdot 25$
	in mm	in m	in mm	in m	
I	24,5	2,45	10,5	1,05	58,325
II	25,5	2,55	7,85	0,785	81,00
III	49,25	4,925	17,75	1,775	69,35
IV	50,3	5,03	15,0	1,5	83,825
V	74,5	7,45	22,5	2,25	82,71
VI	75,15	7,515	19,75	1,975	95,1

Für die Einflußordinate des Horizontalschubs im Scheitel des Gewölbes erhält man den Wert:

$$\frac{l}{4f} 25 = \frac{25 \cdot 25}{4 \cdot 2,5} = 62,5 \text{ mm}$$

Nunmehr lassen sich die Einflußlinien für die Punkte I bis VI festlegen.

Für den Horizontalschub ergibt sich das Einflußdreieck  $akb$ , Figur 2 Tafel II, wobei  $\overline{ik} = 62,5$  mm ist. Macht man ferner die Strecken

$$\overline{ac} = 58,325 \text{ mm}, \overline{ad} = 81,2 \text{ mm}, \overline{ae} = 69,35 \text{ mm}, \overline{af} = 83,825 \text{ mm}, \overline{ag} = 82,7 \text{ mm} \\ \text{und } \overline{ah} = 95,1 \text{ mm}$$

so liefern die Verbindungslinien  $bc$  bis  $bh$  im Verein mit dem Dreieck  $akb$  die Einflußlinien für die zu den Punkten I bis VI gehörigen Momente. Aus diesen Einflußlinien ergeben sich für die Stellen I bis VI bzw. für die Bogenmitte die in Figur 2 Tafel II in mm eingeschriebenen Einflußordinaten, welche dazu benutzt werden, die Einflußlinien für jeden einzelnen Drehungspunkt I—VI, siehe Figur 1—6 Tafel III, gesondert herauszutragen. Mittels dieser Linien lassen sich nun in einfacher Weise die Biegemomente für die Drehungspunkte I—VI und damit die im Gewölbe auftretenden Spannungen ermitteln.

Die Aufstellung dieser Momente soll in folgendem geschehen.

Biegemomente für den Querschnitt  $ef$ .

Drehungspunkt I.

Moment für die ungünstigste Laststellung links von der Belastungsscheide. Figur 1 Tafel III.

Eigengewicht. Für das Eigengewicht entnimmt man aus der Figur 1 Tafel III folgende Einflußordinaten und Einflußwerte.

+ positiver Beitrag.				- negativer Beitrag.			
Streifen	Kubikinhalt	Ordinate	Einflußwert	Streifen	Kubikinhalt	Ordinate	Einflußwert
1	6,875	20	137,500	4	3,375	6	20,250
2	5,250	30	157,500	5	2,875	24,5	70,437
3	4,125	12,5	51,562	5'	2,875	29,5	84,812
		+ 62,5	+346,562	4'	3,375	23,0	77,625
				3'	4,125	16,5	68,062
				2'	5,250	10,0	52,500
				1'	6,875	3,5	24,062
						-113,0	-397,748

Menschengedränge. Der gesamte Einflußordinatenwert beträgt + 62,5. Das Menschengedränge, das auf einen Streifen von 2,50 m trifft, beträgt  $400 \cdot 2,50$  kg. Dies entspricht einem Betonkörper von

$$\frac{400 \cdot 2,50}{2400} = 0,416 \text{ cbm}$$

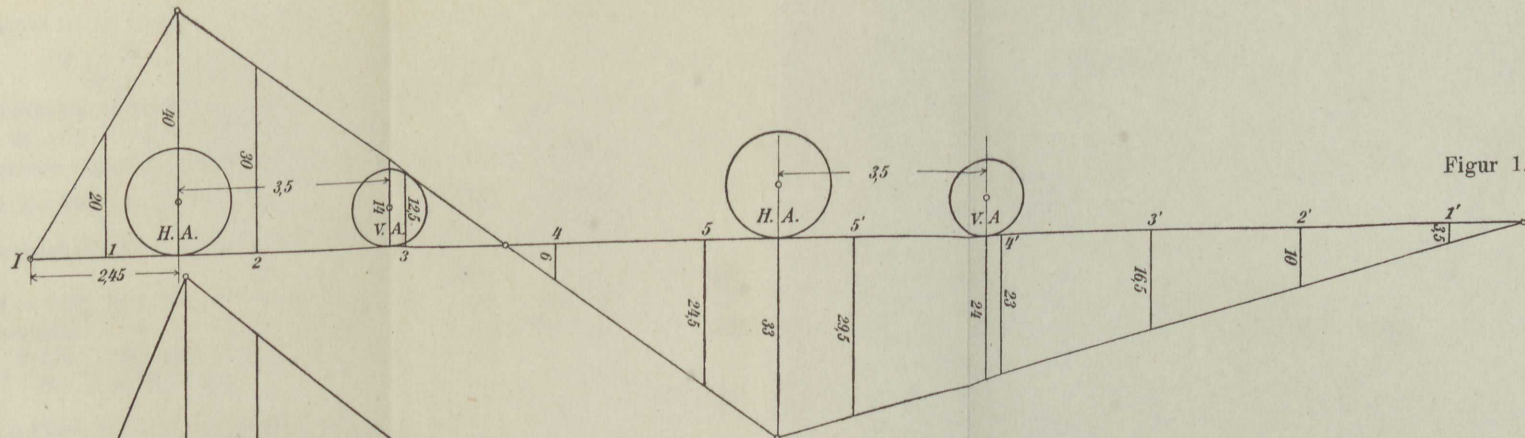
Daher ist der Einflußwert des Menschengedränges bezogen auf cbm Beton:

$$62,5 \cdot 0,416 = + 26$$

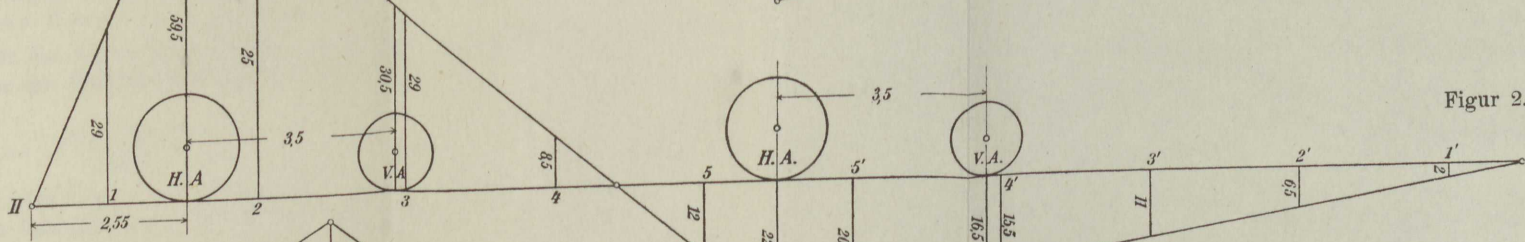
Dampfwalze. Die ungünstigste Stellung der Dampfwalze ist in Figur 1 Tafel III eingezeichnet. Für die Hinterachse ergibt sich als Einflußordinate 40, daher der Einflußwert bezogen auf cbm Beton:

$$\frac{40 \cdot 1500}{2400} = + 25$$

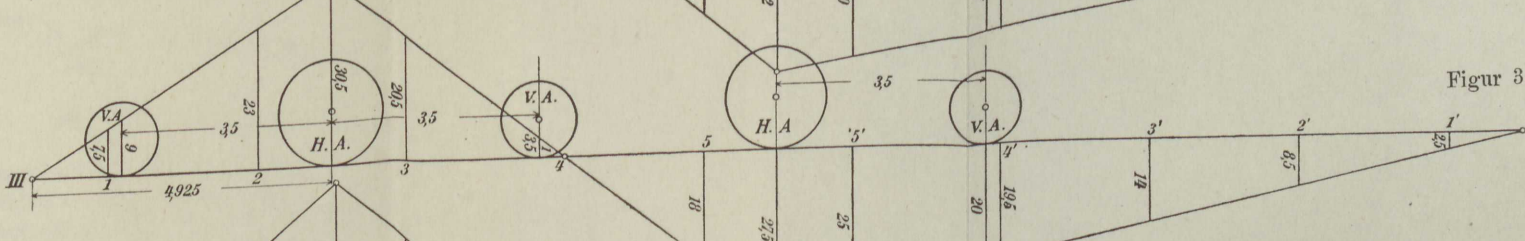




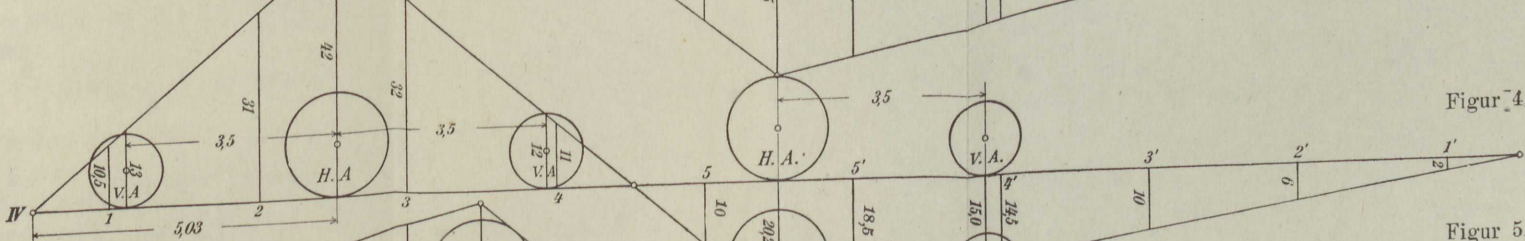
Figur 1.



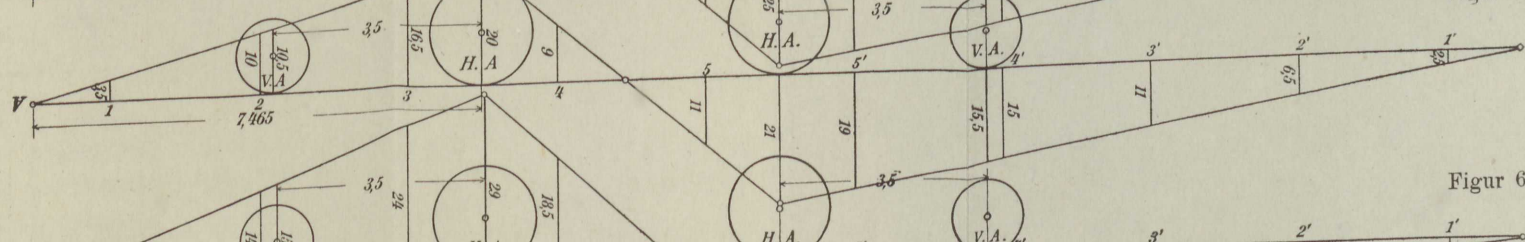
Figur 2.



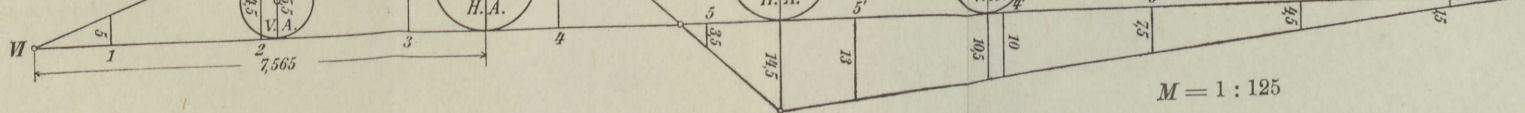
Figur 3.



Figur 4.



Figur 5.



Figur 6.





$$\text{Menschengedränge: } \frac{116,5}{6} \cdot 2,50 = + 48,5$$

$$\text{Dampfwalze: Hinterachse} = \frac{59,5 \cdot 1500}{2400} = + 37$$

$$\text{Vorderachse} = \frac{30,5 \cdot 1600}{2400} = + 20$$

Gesamtbeitrag zum Moment:

$$= 610,187 + 48,5 + 37 + 20 - 237,562 = + 478,125$$

Hieraus folgt:

$$M = 478,125 \cdot 96 \cdot 78,5 = 3602365$$

und

$$\sigma = \frac{3602365 \cdot 6}{80 \cdot 80 \cdot 100} = 34 \text{ kg}$$

Laststellung rechts von der Belastungsscheide.

$$\text{Eigengewicht} = + 610,187 \text{ und} \\ - 237,562$$

$$\text{Menschengedränge: } \frac{-67 \cdot 2,50}{6} = - 28$$

$$\text{Dampfwalze: Hinterachse} \frac{22 \cdot 2500}{2400} = - 23$$

$$\text{Vorderachse} \frac{16,5 \cdot 2230}{2400} = - 15,33$$

Gesamtbeitrag zum Moment:

$$610,187 - 237,562 - 28 - 23 - 15,33 = + 306,295$$

Hieraus folgt:

$$M = + 306,295 \cdot 96 \cdot 78,5 = + 2308239$$

und

$$\sigma = \frac{2308239 \cdot 6}{80 \cdot 80 \cdot 100} = 21,6 \text{ kg}$$

Für die Fuge  $\overline{ef}$  ergeben sich auf Grund der berechneten Spannungen die in den Figuren 456 und 457 zusammengestellten Spannungsdiagramme, aus denen sich der Angriffspunkt der Mittelkraft  $R$  der auf die Fugenfläche  $ef$  wirkenden äußeren Kräfte ermitteln läßt. In den Figuren 456 und 457 ist die Konstruktion ausgeführt. Man trägt für  $f$  und  $e$  die Spannungen  $\overline{ff'} = 21,6$  und  $\overline{ee'} = 15,2$  an, erhält hierdurch auf der Mittelsenkrechten durch  $m$  zu  $ef$  den Punkt  $m'$  auf  $f'e'$ . Die Verbindungslinien  $m'I$  und  $m'II$  schneiden auf den Parallelen durch  $e'$  und  $f'$  zu  $ef$  die Punkte  $n$  und  $n'$  von  $R$  aus.

In Figur 457 geht die Mittelkraft  $R$  nahezu durch den Kernpunkt I.

**Anmerkung 81.** Die im vorstehenden berechneten Spannungen für den Querschnitt  $ef$  verteilen sich wie folgt.

Für den Drehungspunkt I und die Belastung links und rechts von der Belastungsscheide liefern die Momente die Spannungen im Querschnittsrande  $e$ , für den Drehungspunkt II dagegen jene in  $f$ .

Biegemomente für den Querschnitt *gh*.

Drehungspunkt III.

Moment für die ungünstigste Laststellung links von der Belastungsscheide.

Eigengewicht: Figur 3 Tafel III.

Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert	Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert
1	7,5	6,875	51,562	5	18	2,875	51,755
2	23	5,250	120,750	5'	25	2,875	71,875
3	20,5	4,125	84,562	4'	19,5	3,375	65,812
4	1,0	3,375	3,375	3'	14,0	4,125	57,750
	+ 52,0		+ 260,249	2'	8,5	5,250	44,625
				1'	2,5	6,875	17,187
					- 87,5		- 309,000

Menschengedränge:  $\frac{52 \cdot 2,50}{6} = + 21,5$

Dampfwalze: Hinterachse  $\frac{30,5 \cdot 1750}{2400} = + 22,2$

Vorderachse links  $\frac{9 \cdot 1180}{2400} = + 4,5$

Gesamteinflußwert:  $260,249 + 21,5 + 22,2 + 4,5 - 309 = - 0,55$

Hieraus folgt:

$$M = \frac{0,55 \cdot 2400}{25} \cdot 177,5 = - 9372$$

und

$$\sigma = \frac{9372 \cdot 6}{100 \cdot 80 \cdot 80} = 0,06 \text{ kg Druck}$$

Moment für die ungünstigste Laststellung rechts von der Belastungsscheide.

Eigengewicht = + 260,249 und - 309,000

Menschengedränge:  $\frac{87,5}{6} \cdot 2,5 = - 36,5$

Dampfwalze: Hinterachse  $\frac{27,5 \cdot 2500}{2400} = - 28,5$

Vorderachse  $\frac{20 \cdot 2230}{2400} = - 18,6$

Gesamteinflußwert:  $260,249 - 309,000 - 36,5 - 28,5 - 18,6 = - 132,351$

Hieraus folgt:

$$M = - 132,351 \cdot 96 \cdot 177,5 = - 2255 261$$

und

$$\sigma = \frac{2255 261 \cdot 6}{80 \cdot 80 \cdot 100} = 21,0 \text{ kg Druck}$$



## Moment für den Drehungspunkt IV.

Laststellung links von der Belastungsscheide.

Eigengewicht: Figur 4 Tafel III.

Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert	Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert
1	10,5	6,875	72,187	5	10,0	2,875	28,755
2	31,0	5,250	162,750	5'	18,5	2,875	53,187
3	32,0	4,125	132,000	4'	14,5	3,375	48,937
4	11,0	3,375	37,125	3'	10,0	4,125	41,250
	+ 84,5		+ 404,062	2'	6,0	5,250	31,500
				1'	2,0	6,875	13,750
					- 61		- 217,379

$$\text{Menschengedränge: } \frac{84,5 \cdot 2,5}{6} = + 35$$

$$\text{Dampfwalze: Hinterachse } \frac{42 \cdot 1750}{2400} = + 30,5$$

$$\text{Vorderachse rechts } \frac{13 \cdot 2150}{2400} = + 11$$

$$\text{Gesamteinflußwert: } 404,062 - 217,379 + 35 + 30,5 + 11 = + 263,183$$

Hieraus folgt:

$$M = 263,183 \cdot 96 \cdot 150 = 3789835$$

und

$$\sigma = \frac{3789835 \cdot 6}{80 \cdot 80 \cdot 100} = 35,5 \text{ kg Druck}$$

## Laststellung rechts von der Belastungsscheide.

$$\text{Eigengewicht: } + 404,062$$

$$- 217,379$$

$$\text{Menschengedränge: } \frac{61}{6} \cdot 2,50 = - 25,5$$

$$\text{Dampfwalze: Hinterachse } \frac{20,25 \cdot 2500}{2400} = - 21,0$$

$$\text{Vorderachse } \frac{15 \cdot 2230}{2500} = - 13,4$$

$$\text{Gesamteinflußwert: } 404,062 - 217,379 - 25,5 - 21,0 - 13,4 = + 126,783$$

Hieraus folgt:

$$M = 126,783 \cdot 96 \cdot 150 = + 1825747$$

und

$$\sigma = \frac{1825747 \cdot 6}{80 \cdot 80 \cdot 100} = 16,8 \text{ kg Druck}$$

Biegemomente für den Querschnitt *ik*.

Drehungspunkt V.

Moment für die ungünstigste Laststellung links von der Belastungsscheide.

Eigengewicht: Figur 5 Tafel III.

Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert	Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert
1	3,5	6,875	24,062	5	11	2,875	31,625
2	10,0	5,250	52,500	5'	19	2,875	54,625
3	16,5	4,125	68,062	4'	15	3,375	50,625
4	9	3,375	30,375	3'	11	4,125	45,375
	+ 39		+ 175,000	2'	6,5	5,250	34,125
				1'	2,5	6,875	17,187
					- 65		- 233,562

Menschengedränge:  $\frac{39 \cdot 2,50}{6} = + 16$

Dampfwalze: Hinterachse  $\frac{20 \cdot 2120}{2400} = + 17,5$

Vorderachse  $\frac{10,5 \cdot 1390}{2400} = + 6,0$

Gesamteinflußwert:  $175 - 233,563 + 16 + 17,5 + 6,0 = - 19,063$

Hieraus:

$$M = 19,063 \cdot 96 \cdot 225 = 411760$$

und

$$\sigma = \frac{411760 \cdot 6}{75 \cdot 75 \cdot 100} = 4,3 \text{ kg Druck}$$

Moment für die ungünstigste Laststellung rechts von der Belastungsscheide.

Eigengewicht:  $+ 175,00$   
 $- 233,562$

Menschengedränge:  $\frac{65 \cdot 2,5}{6} = - 27,08$

Dampfwalze: Hinterachse  $\frac{21 \cdot 2500}{2400} = - 22$

Vorderachse  $\frac{15,52 \cdot 2230}{2500} = - 13,8$

Gesamteinflußwert:  $175 - 233,562 - 27,08 - 22 - 13,8 = - 121,442$

Hieraus folgt:

$$M = 121,442 \cdot 225 \cdot 96 = - 2644747$$

und

$$\sigma = \frac{2644747 \cdot 6}{75 \cdot 75 \cdot 100} = 27,6 \text{ kg Druck}$$



## Drehungspunkt VI.

Momente für die Laststellung links von der Belastungsscheide.

Eigengewicht: Figur 6 Tafel III.

Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert	Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert
1	5	6,875	34,375	5	3,5	2,875	10,062
2	14,5	5,250	76,125	5'	13	2,875	37,375
3	24	4,125	99,000	4'	10	3,375	33,750
4	18,5	3,375	62,437	3'	7,5	4,125	30,937
	+ 62		+ 271,937	2'	4,5	5,250	23,625
				1'	1,5	6,875	10,312
					- 40		- 146,061

$$\text{Menschengedränge: } \frac{62 \cdot 2,5}{6} = + 25,5$$

$$\text{Dampfwalze: Hinterachse } \frac{29 \cdot 2120}{2400} = + 25,5$$

$$\text{Vorderachse } \frac{15,5 \cdot 1390}{2400} = + 9$$

$$\text{Gesamteinflußwert: } 271,937 - 146,061 + 25,5 + 9 = + 185,876$$

Hieraus folgt:

$$M = 185,876 \cdot 96 \cdot 147,5 = + 2632004$$

und

$$\sigma = \frac{2632004 \cdot 6}{75 \cdot 75 \cdot 100} = 28 \text{ kg Druck}$$

Laststellung rechts von der Belastungsscheide.

$$\text{Eigengewicht } \begin{array}{l} + 271,937 \\ - 146,061 \end{array}$$

$$\text{Menschengedränge } \frac{40}{6} \cdot 2,5 = - 16,5$$

$$\text{Dampfwalze: Hinterachse } \frac{14,5 \cdot 2500}{2400} = - 15$$

$$\text{Vorderachse } \frac{10,5 \cdot 2230}{2400} = - 9,7$$

$$\text{Gesamteinflußwert: } + 271,937 - 146,061 - 16,5 - 15 - 9,7 = + 84,176$$

Hieraus folgt:

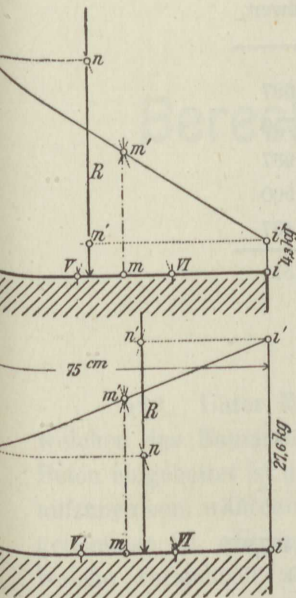
$$M = 84,176 \cdot 96 \cdot 147,5 = 1199012$$

und

$$\sigma = \frac{1199012 \cdot 6}{75 \cdot 75 \cdot 100} = 12,6 \text{ kg Druck}$$

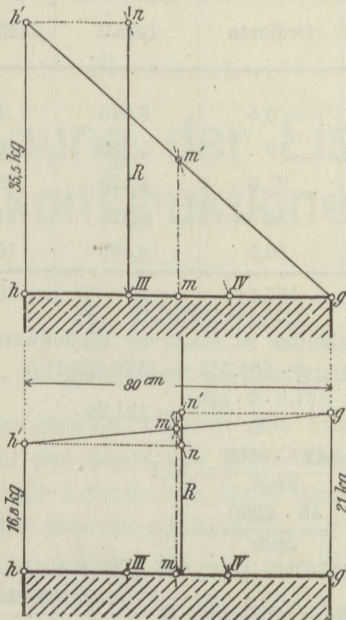
**Anmerkung 82.** In folgendem sind die berechneten Spannungen für die einzelnen Querschnitte zusammengestellt und dementsprechend in den Figuren 456 bis 461 die Spannungsdiagramme eingetragen.

Figur 460.



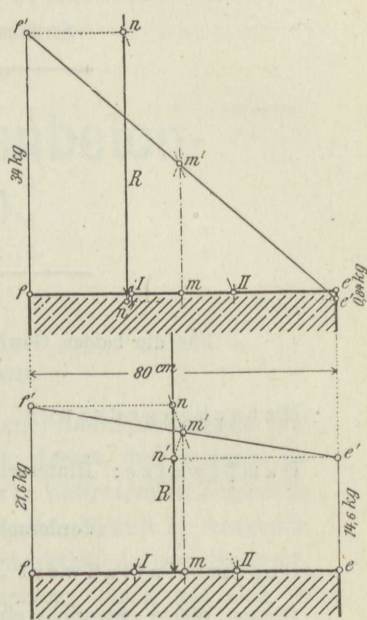
Figur 461.

Figur 458.



Figur 459.

Figur 456.



Figur 457.

Querschnitt	Drehungspunkt		kleinste Pressung		größte Pressung	
			innen	außen	innen	außen
ef	I	II	0,84 kg Zug	34,0	14,6	21,6
	I	II				
	I	II				
gh	III	IV	0,06	35,5	21,0	16,8
	III	IV				
	III	IV				
ik	V	VI	4,3	28,0	27,6	12,6
	V	VI				
	V	VI				

Ermittlung des Horizontalschubs des Gewölbes. Als Einflußlinie des Horizontalschubs ist das Dreieck *akb*, siehe Figur 2 Tafel II, anzusehen. Die ungünstigste Belastung für den Horizontalschub ist gegeben, wenn das ganze Gewölbe



durch Menschengedränge belastet ist und außerdem die Dampfwalze mit ihrer Hinterachse über dem Gewölbescheitel, die Vorderachse rechts daneben steht. Die Einzelbelastungen üben die folgenden Einflüsse aus.

Eigengewicht:

Streifen	Ordinate	Inhalt	Einflußwert
1	6,5	6,875	44,687
2	19	5,250	99,750
3	31,5	4,125	129,937
4	44	3,375	148,500
5	56,5	2,875	162,437
	157,5		585,311

Für die beiden Gewölbehälften ist somit der Einflußwert:

$$2 \cdot 585,311 = 1170,622$$

$$\text{Menschengedränge} \quad \frac{157,5 \cdot 2 \cdot 2,50}{6} = 131,25$$

$$\text{Dampfwalze: Hinterachse} \quad \frac{62,5 \cdot 2500}{2400} = 65,1$$

$$\text{Vorderachse} \quad \frac{45 \cdot 2230}{2400} = 41$$

$$\text{Gesamteinflußwert} = 1170,622 + 131,225 + 65,1 + 41 = 1407,972.$$

$$\text{Diesem Werte entspricht ein Horizontalschub } H = \frac{1407,972 \cdot 2400}{25} \\ = 1407,972 \cdot 96 = 135165 \text{ kg}$$

$$\text{und eine Scheitelpressung } \sigma = \frac{135165}{7200} = 18,6 \text{ kg}$$

Pressung im Kämpfer: Die Pressung auf die Kämpferfuge ergibt sich aus der Beziehung:

$$R = \sqrt{P^2 + H^2}$$

wobei  $P$  das Gewicht einer Gewölbehälfte und  $H$  den Horizontalschub des Gewölbes bezeichnet.

$$\text{Es ist nun } R = \sqrt{(22,5 \cdot 2400)^2 + 135165^2} = 145553 \text{ kg}$$

$$\text{und die Kämpferpressung } \sigma = \frac{145553}{80 \cdot 100} = 18,1 \text{ kg}$$

In dem vorstehend behandelten Gewölbe verläuft die Drucklinie fast durchweg innerhalb des Gewölbekerns und nur im Querschnitt  $ef$  verläßt sie diesen um einen kleinen Betrag. Die hierdurch hervorgerufene Zugspannung ist aber von so kleiner Größe, daß sie wohl von dem Beton aufgenommen werden kann. Will man die Zugspannung nicht zulassen so kann man das Gewölbe an dieser Stelle etwas verstärken.

#### IV. Abschnitt.

# Berechnung der Eisenbetonkonstruktionen.

## A. Einleitung.

### 1. Allgemeine Bemerkungen.

422. Unter Eisenbetonbau versteht man alle jene Bauausführungen, bei welchen das Baumaterial aus Eisen und Beton besteht, derart, daß ersteres im Beton eingebettet ist und die Aufgabe hat, die im Bauwerke auftretenden Zugkräfte aufzunehmen, während der Betonkörper lediglich auf Druckfestigkeit in Anspruch genommen ist. Ungemein groß ist die Zahl der Konstruktionen bzw. Systeme, welche vorstehend genannte Aufgabe zu erfüllen suchen. Doch hat sich in letzter Zeit die Anschauungsweise über das Zusammenwirken von Beton und Eisen so weit geklärt, daß man nunmehr imstande ist, die Eisenbetonkonstruktionen auf ihre Festigkeitsverhältnisse zu berechnen. Freilich bestehen auch heute noch vielfache Unsicherheiten und Ansichten, weil einerseits die Festigkeitsverhältnisse des Betons abhängig sind von dem Verhalten des verwendeten Zements, sowie von den Mischungsverhältnissen und Eigenschaften der Betonbestandteile. Es werden darum noch vielfache Versuche erforderlich sein, um unangreifbare Ergebnisse zu erzielen.

Als feststehend kann bis auf weiteres gelten:

„Die Druckfestigkeit des Betons ist abhängig von der Güte des verwendeten Zements und der sonstigen Bestandteile, sowie von deren Mischungsverhältnis und schwankt zwischen 100 und 300 kg für den qcm.“

„Die zulässige Beanspruchung des Betons soll ein Zehntel der Druckfestigkeit, also 15 bis 30 kg für den qcm bei nur auf Druck beanspruchten Körpern, z. B. Säulen, betragen; bei auf Biegung beanspruchten Körpern darf die zulässige Beanspruchung bis auf ein Sechstel der Druckfestigkeit, also bis zu 20 bzw. 50 kg für den qcm gesteigert werden.“

„Die Zugfestigkeit des Betons ist bei Eisenbetonkonstruktionen unberücksichtigt zu lassen. Versuche



haben eine Zugfestigkeit von etwa ein Zehntel der Druckfestigkeit festgestellt.“

„Der Elastizitätsmodul für Druck ist veränderlich und abhängig von der Beschaffenheit der zum Beton verwendeten Materialien und deren Mischungsverhältnis, sowie von der vorhandenen Belastung.“

„Für die Berechnung der Eisenbetonkonstruktionen nimmt man das Verhältnis  $n$  der Elastizitätszahlen  $E_e$  und  $E_b$  von Eisen und Beton als konstant, und zwar zu  $n = 15$  an.“

„Die zulässige Beanspruchung des Eisens auf Zug und Druck darf bis zu 1000 kg, für Schub bis zu 800 kg für den qcm angenommen werden.“

„Die Schubfestigkeit des Betons hat sich aus vielfachen Versuchen zu etwa 45 kg für den qcm ergeben; als zulässige Beanspruchung darf man 4,5 kg für den qcm in Rechnung stellen, ebensoviel ist auch für die Haftspannung zwischen Beton und Eisen anzunehmen.“

Im folgenden sollen die wichtigsten Berechnungen von Eisenbetonkonstruktionen, soweit sie nach den bisherigen Erfahrungen festgelegt sind, angegeben werden, und zwar die Berechnung von auf Biegung beanspruchten Trägern und Balken, sowie von Säulen und Stützen.

## B. Trägerberechnung.

### 1. Der doppeltarmierte Plattenbalken.

#### a) Allgemeine Bemerkungen.

423. Der allgemeinste Fall, der vorkommen kann, ist wohl der, daß ein Balken von T-förmigem Querschnitt, ein sog. Plattenbalken, siehe Figur 462, mit doppelter Eiseneinlage versehen ist. Es sei zunächst angenommen, daß die Ausmaße der Konstruktion bekannt sind und es sich darum handelt, die auftretenden Druck- und Zugspannungen im Beton und Eisen zu ermitteln.

Bezeichnet nun:

$F_e$  = den Querschnittsinhalt der Eiseneinlage in der Zugzone in qcm

$F_e'$  = " " " " " " Druckzone in qcm

$\sigma_e$  = Zugspannung der Eiseneinlage in kg für den qcm

$\sigma_e'$  = Druckspannung der " " " " " "

$\sigma_{b_o}$  = Druckspannung des Betons in der äußersten Druckfaser in kg für den qcm

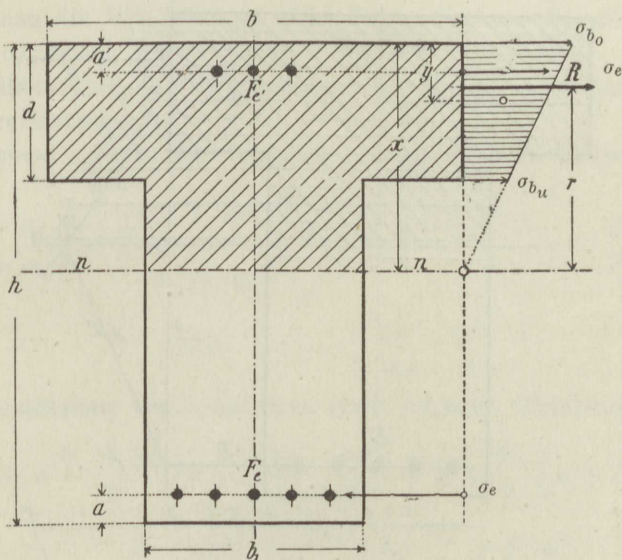
$\sigma_{b_u}$  = " " " " " innersten " " " " " "

so bestehen zwischen den Größen der einzelnen Spannungen die folgenden Beziehungen, die unmittelbar aus der Figur 462 abzulesen sind.

Es ist:

$$229) \dots \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{b_o} : \sigma_{b_u} = x : (x - d), \quad \text{hieraus folgt a) } \sigma_{b_u} = \frac{x - d}{x} \sigma_{b_o} \\ \sigma_e' : \sigma_{b_o} = n(x - a) : x, \quad \text{,, } \quad \text{b) } \sigma_e' = \frac{n(x - a)}{x} \sigma_{b_o} \\ \sigma_e : \sigma_{b_o} = n(h - x - a) : x, \quad \text{,, } \quad \text{c) } \sigma_e = \frac{n(h - x - a)}{x} \sigma_{b_o} \end{array} \right.$$

Sobald also der Abstand  $x$  sowie eine der obigen Spannungen bekannt sind, ermitteln sich die übrigen Spannungen ohne weiteres.



Figur 462.

## b) Bestimmung der Lage der Neutralachse.

### a) Durch Rechnung.

424. Zur Ermittlung des Abstands  $x$  der Neutralachse von dem gedrückten Querschnittsrande dient die Beziehung, daß die Summe der statischen Momente des beanspruchten Querschnitts unter Außerachtlassung der Zugbeanspruchung des Betons hinsichtlich der Neutralachse gleich Null sein muß.

Man kann somit die folgende Gleichung anschreiben:

$$bd \left( x - \frac{d}{2} \right) + b_1 (x - d) \frac{(x - d)}{2} + n F_e' (x - a) - n F_e (h - x - a) = 0$$

Hieraus folgt:

$$230) \dots b_1 x^2 + 2[d(b - b_1) + n(F_e' + F_e)]x = d^2(b - b_1) + 2n[F_e(h - a) + F_e'a]$$

Aus dieser Gleichung kann  $x$  berechnet werden.





kraft entgegengesetzt gerichtet nach  $01'$  an, so entspricht diesem Kräftezug ein zweites Seilvieleck  $A'$ , das  $A$  in einen Punkt  $q$  schneidet, durch welche die Neutralachse hindurch geht, denn es ist ja die Strecke  $sq$  bzw.  $\bar{q}s$  das statische Moment sowohl der Druckkräfte, wie auch der Zugkraft hinsichtlich der Achse  $nn$ ; die Summe dieser Momente ist also gleich Null.

### c) Bestimmung der Lage der Druckmittelkraft.

426. Hat man die Größe  $x$ , d. h. die Lage der Neutralachse, bestimmt, so ermittelt man die Mittelkraft  $R$ , siehe Figur 462, aus den Druckspannungen  $\sigma_{b_0}$ ,  $\sigma_{b_u}$  und  $\sigma_e$ , sowie ihren Abstand  $r$  von der Neutralachse.

Die Mittelkraft der Druckspannungen  $\sigma_{b_0}$  und  $\sigma_{b_u}$  geht durch den Schwerpunkt des Drucktrapezes.

Der Abstand  $y$  dieses Schwerpunkts von dem äußeren Querschnittsrande ist:

$$y = \frac{d}{3} \frac{\sigma_{b_0} + \sigma_{b_u}}{\sigma_{b_0} + \sigma_{b_u}} = \frac{d}{3} \frac{\sigma_{b_0} + 2\sigma_{b_0} \frac{x-d}{x}}{\sigma_{b_0} + \sigma_{b_0} \frac{x-d}{x}} = \frac{d}{3} \frac{1 + 2 \frac{x-d}{x}}{1 + \frac{x-d}{x}} = \frac{d}{3} \frac{x + 2x - 2d}{x + x - d}$$

$$231) \dots y = \frac{d}{3} \frac{3x - 2d}{2x - d}$$

Zur Ermittlung von  $r$  hat man somit folgende Gleichung:

$$r = \frac{(b-b_1)d \frac{\sigma_{b_0} + \sigma_{b_u}}{2} \left(x - \frac{d}{3} \frac{3x-2d}{2x-d}\right) + b_1 x \frac{\sigma_{b_0}}{2} \frac{2}{3} x + F_e' (x-a) \sigma_e'}{(b-b_1)d \frac{\sigma_{b_0} + \sigma_{b_u}}{2} + b_1 x \frac{\sigma_{b_0}}{2} + F_e' \sigma_e'}$$

$$= \frac{(b-b_1)d \frac{1 + \frac{x-d}{x}}{2} \left(x - \frac{d}{3} \frac{3x-2d}{2x-d}\right) + \frac{b_1 x}{3} x + F_e' \frac{x-a^2}{x} n}{(b-b_1)d \frac{1 + \frac{x-d}{x}}{2} + \frac{b_1 x}{2} + F_e' \frac{n(x-a)}{x}}$$

$$232) \dots r = \frac{(b-b_1)(2x-d)d \left(x - \frac{d}{3} \frac{3x-2d}{2x-d}\right) + \frac{2b_1 x^3}{3} + 2F_e' (x-a)^2 n}{(b-b_1)(2x-d)d + b_1 x^2 + 2F_e' (x-a)n}$$

Zur Bestimmung der Spannung  $\sigma_e$  dient die Biegleichung:

$$233) \dots M = \sigma_e F_e (h - a - x + r)$$

Hieraus folgt:

$$234) \dots \sigma_e = \frac{M}{F_e (h - a - x + r)}$$

Ist  $\sigma_e$  bestimmt, so folgen die übrigen Spannungen aus den Beziehungen



## 2. Balken oder Platte von rechteckigem Querschnitt mit doppelter Eiseneinlage, doppeltarmerter Balken bzw. Platte.

427. In diesem Fall ist in der allgemeinen Formel zur Bestimmung der Neutralachse zu setzen  $b = b_1$ , dann wird die Gleichung 230 lauten:

$$235) \dots b x^2 + 2n(F_e + F'_e)x = 2n[F_e(h - a) + F'_e a]$$

woraus  $x$  und damit die Lage der Neutralachse zu bestimmen ist.

Für die Lage der Druckmittelkraft erhält man die Gleichung:

$$r = \frac{\frac{2bx^3}{3} + 2F'_e(x - a)^2 n}{bx^2 + 2F'_e(x - a)n}$$

oder

$$236) \dots r = \frac{\frac{bx}{3n} + F'_e \frac{(x - a)^2}{bx^2}}{\frac{1}{2n} + F'_e \frac{x - a}{bx^2}}$$

## 3. Balken oder Platte von rechteckigem Querschnitt mit einfacher Eiseneinlage, einfach armerter Balken bzw. Platte.

428. Es ist  $b = b_1$  und  $F'_e = 0$ .

Die Gleichung 230 für  $x$  geht über in folgende:

$$bx^2 + 2nF_e x = 2nF_e(h - a)$$

Hieraus erhält man:

$$237) \dots x = \frac{nF_e}{b} \left[ \sqrt{1 + \frac{2b(h - a)}{nF_e}} - 1 \right]$$

Für die Lage der Druckmittelkraft erhält man:

$$238) \dots r = \frac{\frac{x}{3n}}{\frac{1}{2n}} = \frac{2}{3}x$$

## 4. Plattenbalken mit Eiseneinlage auf der Zugseite.

### a) Einfach armerter Plattenbalken mit Berücksichtigung der Betondruckspannungen im Balkenstege.

429. Die Lage der Neutralachse ergibt sich aus der Gleichung:

$$239) \dots b_1 x^2 + 2[d(b - b_1) + nF_e]x = d^2(b - b_1) + 2nF_e(h - a)$$

Die Lage der Druckmittelkraft ermittelt sich aus:

$$240) \dots r = \frac{(b - b_1)(2x - d)d \left( x - \frac{d}{3} \frac{3x - 2d}{2x - d} \right) + \frac{2b_1 x^3}{3}}{(b - b_1)(2x - d)d + b_1 x^2}$$

## b) Einfach armierter Plattenbalken mit Vernachlässigung der Betondruckspannungen im Balkenstege.

430. Für die Lage der Neutralachse ergibt sich die Gleichung:

$$2(db + nF_e)x = d^2b + 2nF_e(h - a)$$

$$241) \dots x = \frac{d^2b + 2nF_e(h - a)}{2(db + nF_e)}$$

Die Lage der Druckmittelkraft bestimmt sich aus:

$$242) \dots r = x - \frac{d}{3} \frac{3x - 2d}{2x - d}$$

## 5. Bestimmung der im Balken auftretenden Schubspannungen.

### a) Allgemeine Bemerkungen.

431. Bei der Behandlung der Biegezugfestigkeit, siehe 182, wurde das Auftreten von Schubspannungen in einem auf Biegung beanspruchten Träger erwähnt und hervorgehoben, daß diese, weil gegenüber den Biegezugspannungen verhältnismäßig klein, bei den im Hochbau vorkommenden Trägern aus Holz oder Eisen vernachlässigt werden können. Bei Betonkörpern hat man aber, weil die Schubfestigkeit des Materials eine geringe ist, auf diese Schubspannungen Rücksicht zu nehmen.

### b) Verteilung der Schubspannungen im Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens.

432. In Figur 465 ist ein vertikaler Längsschnitt durch die Achse eines auf Biegung beanspruchten Balkens dargestellt, in welchem zwei in einem Abstände  $\Delta l$  voneinander entfernte Querschnitte hervorgehoben sind. Für den einen Querschnitt ist die gesamte im Abstand  $y$  von der Neutralachse wirkende Normalkraft bzw. Normalspannung:

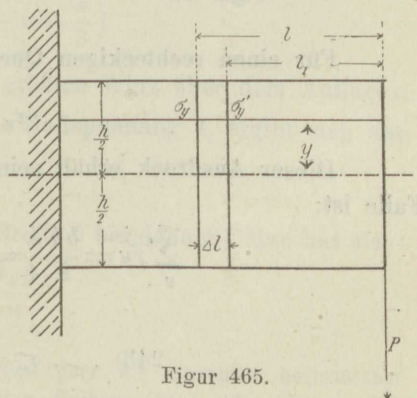
$$\sigma_y = \frac{\sigma}{a} \sum_y^a f y$$

Für den andern Querschnitt erhält man:

$$\sigma'_y = \frac{\sigma'}{a} \sum f y$$

Als Unterschied der beiden Normalspannungen  $\sigma_y$  und  $\sigma'_y$ , d. i. die im Abstand  $y$  von der Neutralachse herrschende Schubspannung ergibt sich:

$$\Delta\sigma_y = \sigma_y - \sigma'_y = \frac{\sigma - \sigma'}{a} \sum_y^a f y$$



Figur 465.



Nun ist aber:

$$\sigma = \frac{M a}{J} \quad \text{und} \quad \sigma' = \frac{M' a}{J}$$

wenn  $M$  und  $M'$  die in den Querschnitten auftretenden Biegemomente bezeichnen; man hat also:

$$\Delta \sigma_y = \frac{M - M'}{J} \sum_y^a f y = \frac{\Delta M}{J} \sum_y^a f y$$

Vorstehender Ausdruck gibt die Größe der in dem im Abstand  $y$  von der Neutralachse befindlichen Flächenstreifen von der Länge  $\Delta l$  wirkenden Schubkraft oder Schubspannung an. Auf die Längeneinheit erhält man somit eine Schubspannung:

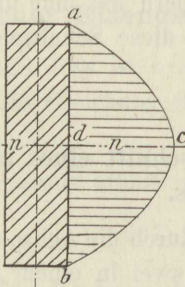
$$\tau_y = \frac{\Delta M}{J \Delta l} \sum_y^a f y$$

Nun ist aber in Rücksicht auf Figur 465:

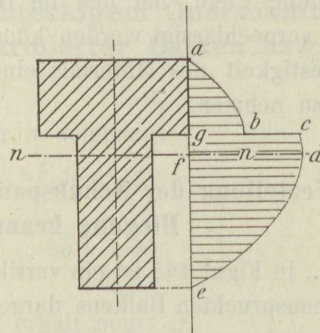
$$\Delta M = Pl - Pl_1 = P(l - l_1) = P \Delta l$$

daher:

$$\tau_y = \frac{P}{J} \sum_y^a f y$$



Figur 466.



Figur 467.

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite  $b$  ergibt sich:

$$\tau_y = \frac{P}{J b} \sum_y^a f y$$

Dieser Ausdruck erhält seinen größten Wert für  $y = 0$ , denn in diesem Falle ist:

$$\sum_y^a f y = \frac{b h}{2} \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8} \quad \text{und} \quad J = \frac{b h^3}{12}, \quad \text{also}$$

$$243) \dots \tau_0 = \frac{P \frac{b h^2}{8}}{\frac{b h^3}{12} l} = \frac{P}{b \frac{2}{3} h} = \frac{F}{b y_0}$$

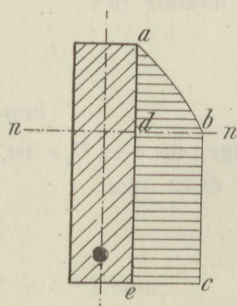
wenn  $y_0 = \frac{2}{3} h$  gesetzt wird.

Für  $y = \frac{h}{2}$  wird  $\tau = 0$ .

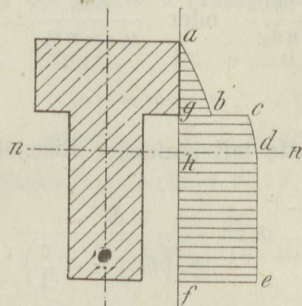
Aus dem vorstehenden ergibt sich der Satz:

„In einem auf Biegung beanspruchten Balkenquerschnitt tritt die größte horizontale Schubspannung in der Neutralachse auf.“

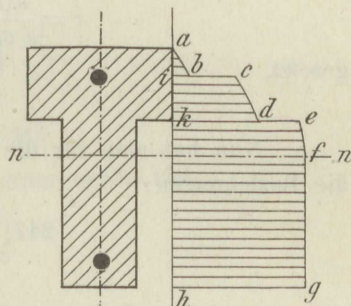
Die Schubspannung ist abhängig von der zum Querschnitt gehörigen Vertikalkraft  $P$ , ist also am größten am Auflager und am kleinsten im gefährlichen Querschnitt. Außer der horizontalen Schubspannung tritt in jedem Querschnitt auch noch eine vertikale über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilte Schubspannung  $\tau_v = \frac{P}{F}$  auf. Letztere ist für die Berechnung des Balkenquerschnitts ohne Bedeutung.



Figur 468.



Figur 469.



Figur 470.

433. Für den einfach armierten Balken- oder Plattenquerschnitt erhält man für die in der Neutralachse auftretende Schubspannung, wenn für  $y_0$  der Abstand der Zug- und Druckmittellkraft, d. h.  $y_0 = \left(h - a - \frac{x}{3}\right)$  gesetzt wird:

$$244) \dots \tau_0 = \frac{P}{b \left(h - a - \frac{x}{3}\right)}$$

Dieser Ausdruck erhält seinen absolut größten Wert über dem Auflager.

Die längs der Eiseneinlagen vorhandene Haftspannung  $\tau_1$  ergibt sich aus der Beziehung:

$$\tau_1 u = \tau_0 b$$

wenn  $u$  den Umfang der Eiseneinlagen für die Breite  $b$  bezeichnet. Man hat also:

$$245) \dots \tau_1 = \frac{\tau_0 b}{u}$$

**Anmerkung 83.** Die Verteilung der Schubspannungen über die einzelnen horizontalen Flächenstreifen eines auf Biegung beanspruchten Balkens ist in den Figuren 466 bis 470 dargestellt, und zwar in den Figuren 466 und 467 für Balken ohne Eiseneinlagen, in den Figuren 468 bis 470 in solchen mit Eiseneinlagen. In der Figur 468 und 469 ist die Eiseneinlage nur in der Zugzone, in Figur 470 ist eine solche in der Zug- und Druckzone vorausgesetzt.



## 6. Formeln zur Ermittlung der Abmessungen von Platten und Plattenbalken.

### a) Formeln für Platten bzw. Balken.

434. Aus den Beziehungen Nr. 229 lassen sich noch einige Formeln ableiten, die man zweckmäßig zur vorläufigen Festsetzung der Abmessungen eines Betonbalkens bzw. einer Platte benutzen kann, wenn das durch die Belastung hervorgerufene größte Biegemoment bekannt ist.

Zunächst entnimmt man aus 229c die Beziehung:

$$\sigma_e x = n(h - a - x)\sigma_b$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{n(h - a)\sigma_b}{\sigma_e + n\sigma_b} \quad \text{oder} \quad \frac{n\sigma_b}{\sigma_e + n\sigma_b} = s$$

gesetzt,

$$246) \dots x = h(s - a)$$

Nun hat man für die Platte mit einfacher Eiseneinlage, da  $r = \frac{2}{3}x$  ist, die Beziehungen:

$$247) \dots \sigma_e = \frac{M}{F_e \left( h - a - \frac{x}{3} \right)}$$

und

$$248) \dots \sigma_b = \frac{2M}{bx \left( h - a - \frac{x}{3} \right)}$$

Durch Einsetzen des Wertes von  $x$  aus Gleichung 246 in Gleichung 248 erhält man weiter:

$$h - a = \sqrt{\frac{2}{\left(1 - \frac{s}{3}\right)\sigma_b}} \sqrt{\frac{M}{b}}$$

$$249) \dots = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Gleichung 247 geht über in:

$$250) \dots F_e = \frac{M}{\sigma_e \left( h - a - \frac{s(h - a)}{3} \right)}$$

oder wenn für  $h - a$  der Wert aus 249 eingesetzt wird:

$$251) \dots F_e = \frac{1}{r \left(1 - \frac{s}{3}\right)\sigma_e} \sqrt{M b}$$

435. Für zusammengehörige Werte von  $\sigma_e$  und  $\sigma_b$  lassen sich aus den Beziehungen 249 und 251 die Stärke der Platte und deren Armierung berechnen

und diese in Tabellen zusammenstellen, so daß man bei gegebenen Biegemomenten aus diesen Tabellen sofort Stärke der Platte und der Eiseneinlage entnehmen kann.

Solche Tabellen sind auch in den amtlichen Vorschriften enthalten. Nach diesen darf für Balken und Platten  $\sigma_e = 1000$  kg und  $\sigma_b$  gleich ein Sechstel der Druckfestigkeit des Betons angenommen werden. Unter dieser Voraussetzung und unter Annahme einer Plattenbreite  $b = 100$  cm und eines  $\sigma_b = 40$  gehen die Formeln 250 und 251 über in:

$$252) \dots h - a = 0,039 \sqrt{M}$$

und

$$253) \dots F_e = 0,0293 \sqrt{M}$$

Für Balken von der Breite  $b$  erhält man:

$$252a) \dots h - a = 0,39 \sqrt{\frac{M}{b}}$$

und

$$253a) \dots F_e = 0,0029 \sqrt{Mb}$$

Siehe auch amtliche Vorschriften S. 12. Ferner ergibt sich:

$$s = \frac{15 \cdot 40}{1000 + 15 \cdot 40} = \frac{3}{8}$$

Daher:

$$254) \dots x = \frac{3}{8}(h - a)$$

und

$$255) \dots h - a - \frac{x}{3} = \frac{7}{8}(h - a)$$

Endlich folgt aus den beiden Gleichungen 252 und 253:

$$256) \dots \frac{F_e}{h - a} = \frac{0,0293}{0,039} = 0,75$$

und

$$257) \dots F_e = 0,75(h - a)$$

d. h. bei einer einfach armierten Platte gibt die Maßzahl für drei Viertel der Plattenstärke zugleich die Maßzahl der auf die Breite  $b = 100$  cm treffenden Eisenarmierung in Quadratzentimeter an.

## b) Formeln für Plattenbalken.

436. Ähnlich wie bei der einfach armierten Platte läßt sich auch für den Plattenbalken eine Formel zur vorläufigen Bestimmung der Balkenhöhe und der Eiseneinlage aufstellen.

Aus der Beziehung:

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e(h - a - x + r)}$$



folgt, wenn man angenähert  $h - a - x + r = h - a - \frac{d}{2} = s$  setzt,

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e s}$$

oder

$$s = \frac{M}{F_e \sigma_e}$$

Erfahrungsgemäß schwankt nun die Armierung eines Plattenbalkens, d. h. die Größe  $F_e$  in qcm ausgedrückt, zwischen 0,5 und 0,7 s. Setzt man  $F_e = 0,5 s$ , so erhält man:

$$s = \sqrt{\frac{M}{0,5 \sigma_e}}$$

oder  $\sigma_e = 1000$  eingesetzt,

$$258) \dots s = \sqrt{\frac{M}{500}}$$

wobei  $M$  in kqcm ausgedrückt ist; für  $M$  in mt erhält man:

$$259) \dots s = \sqrt{\frac{100000}{500} M} = \sqrt{200 M} = 14\sqrt{M}$$

und dementsprechend:

$$260) \dots F_e = 7\sqrt{M}$$

Für  $F_e = 0,7 s$  erhält man in gleicher Weise:

$$261) \dots s = \sqrt{\frac{M \cdot 100000}{700}} = \sqrt{143 M} = 12\sqrt{M}$$

$$262) \dots F_e' = 8,4\sqrt{M}$$

## 7. Übungsaufgaben.

437. **Aufgabe 190.** Ein Raum von 4,0 m lichter Weite und 6 m Tiefe ist mit einer Eisenbetonplatte zu überdecken. Die Spannungen in Beton und Eisen sollen 40 bzw. 1000 kg für den qcm nicht überschreiten. Es ist die Deckenstärke zu berechnen und die Armierung des Betons festzusetzen. Die Belastung der Decke, Eigengewicht und Nutzlast beträgt 1000 kg für den qm.

**Auflösung.** Für die Stützweite ist 4,30 m anzunehmen; es ist dann das größte Biegemoment für einen Deckenstreifen von 1 m Breite:

$$M = \frac{4,30 \cdot 1000 \cdot 430}{8} = 231125$$

und  $h - a = 0,039\sqrt{231125} = 19$  cm

Nimmt man  $a = 3$  cm an, so ist:

$$h = 22$$
 cm

Ferner ist  $0,75(h - a) = \frac{57}{4} = 14,25$  qcm

Wählt man 10 Stück Rundeisen von 14 mm ( $\emptyset$ ), so ist  $F_e = 10 \cdot 1,54 = 15,4$  qcm

Zur Prüfung der tatsächlich auftretenden Spannungen berechnet man zunächst den Abstand  $x$  der Neutralachse von Deckenoberkante und erhält:

$$x = \frac{15 \cdot 15,4}{100} \left[ \sqrt{1 + \frac{200 \cdot 19}{15 \cdot 15,4}} - 1 \right] = 8,63$$
 cm

Hieraus folgt:

$$\frac{x}{3} = \frac{8,63}{3} = 2,88 \text{ cm}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 231125}{100 \cdot 8,63 \cdot 16,12} = 33,2 \text{ kg}$$

$$\sigma_e = \frac{231125}{15,4 \cdot 16,12} = 931 \text{ kg}$$

Die größte Vertikalkraft am Auflager ist:

$$A = \frac{4,3 \cdot 1000}{2} = 2150 \text{ kg}$$

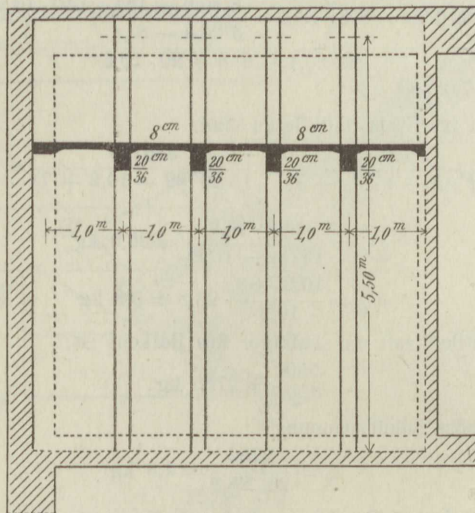
es beträgt daher die größte Schubspannung des Betons an dieser Stelle:

$$\tau_0 = \frac{2150}{b \left( h - a - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2150}{100 \cdot 16,12} = 1,33 \text{ kg}$$

Diese Schubspannung kann vom Beton allein aufgenommen werden.

Würde man alle 10 Rundeseisen bis zum Auflager hin durchgehen lassen, so würde die Haftspannung längs dieser Eisen betragen:

$$\tau_1 = \frac{100 \cdot 1,33}{10 \cdot 1,4 \cdot 3,14} = \frac{133}{43,96} = 3 \text{ kg}$$



Figur 471.

Läßt man nur 5 Rundeseisen bis zum Auflager durchgehen und biegt 5 Eisen nach oben ab, so erhält man als Haftspannung längs der unteren Eisen:

$$\tau_1' = \frac{133}{5 \cdot 1,4 \cdot 3,14} = \frac{133}{26,38} = 5 \text{ kg}$$

ein Betrag, der noch als unbedenklich gelten kann.

438. **Aufgabe 191.** Ein Raum von quadratischem Grundriß, siehe Figur 471, ist mit armierten Betonplattenbalken zu überdecken. Die Platte ist 8 cm stark. Die Balken liegen 1 m von Mitte zu Mitte voneinander entfernt. Die Belastung der Decke beträgt, Eigengewicht und Nutzlast, 1000 kg für den qm. Es sind die Ausmaße der Decke festzustellen und die auftretenden Spannungen zu berechnen.



**Auflösung.** Die Belastung eines Plattenbalkens, die Stützweite zu 5,50 m angenommen, beträgt:  $5,50 \cdot 1000 = 5500$  kg. Das größte Biegemoment in der Balkenmitte ist:

$$M = \frac{1}{8} \cdot 5500 \cdot 550 = 378125 \text{ cmkg} \\ = 3,78 \text{ mt.}$$

Nimmt man  $F_e = 0,5 s$  an, so ist  $s = 14 \sqrt{M} = 14 \sqrt{3,78} = 26,6$  cm oder rund 28 cm. Hieraus folgt  $F_e = 14$  qcm; hierfür genügen 6 Rundeisen von 1,8 cm ( $\emptyset$ ) = 15,26 qcm. Die gesamte Balkenhöhe wird  $28 + 8 = 36$  mm. Der Abstand  $a$  soll zu 4 cm angenommen werden.

Die Lage der Neutralachse ergibt sich aus der Gleichung:

$$b_1 x^2 + 2 [d (b - b_1) + n F_e] x = d^2 (b - b_1) + 2 n F_e (h - a)$$

Nach Einsetzung der Werte erhält man:

$$20 x^2 + 2 [8 \cdot 80 + 15 \cdot 15,26] x = 64 \cdot 80 + 30 \cdot 15,26 \cdot 32 \\ x^2 + 86,89 x = 988,48$$

hieraus folgt

$$x = 10,2$$

Der Abstand  $r$  der Druckmittelkraft folgt aus der Gleichung:

$$r = \frac{(b - b_1) (2x - d) d \left( x - \frac{d}{3} \frac{2x - d}{x - d} \right) + \frac{2 b_1 x^3}{3}}{(b - b_1) (2x - d) d + b_1 x^2} \\ = \frac{80(20,4 - 8) 8 \left( 10,2 - \frac{8}{3} \frac{30,6 - 16}{20,4 - 8} \right) + \frac{40 \cdot 10,2^3}{3}}{80(20,4 - 8) 8 + 20 \cdot 10,2^2} \\ = 7,0 \text{ cm}$$

Die Spannungen im Eisen und Beton sind:

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e (h - a - x + r)} = \frac{378125}{15,26 (32 - 10,2 + 7)} = 861 \text{ kg}$$

und

$$\sigma_{b_0} = \frac{861 \cdot 10,2}{15 (32 - 10,2)} = 26,8 \text{ kg}$$

$$\sigma_{b_u} = \frac{10,2 - 8}{10,2} \cdot 26,8 = 5,8 \text{ kg}$$

Die größte Vertikalkraft am Auflager des Balkens ist:

$$\frac{5500}{2} = 2750 \text{ kg}$$

es beträgt somit die größte Schubspannung:

$$\tau_0 = \frac{2750}{20 \cdot 28,8} = 4,8 \text{ kg}$$

Läßt man von den 6 Rundeisen drei auf die ganze Trägerlänge durchgehen, so erhält man als größte Haftspannung:

$$\tau_1 = \frac{b_1 \tau_0}{u} = \frac{20 \cdot 4,8}{3 \cdot 1,8 \cdot 3,14} = 5,6 \text{ kg}$$

Die ganze Schubkraft auf der Balkenhälfte, d. h. von Mitte bis zum Auflager gerechnet, berechnet sich zu:

$$T = \frac{275 \cdot 20 \cdot \tau_0}{2} = 275 \cdot 10 \cdot 4,8 = 13200 \text{ kg}$$

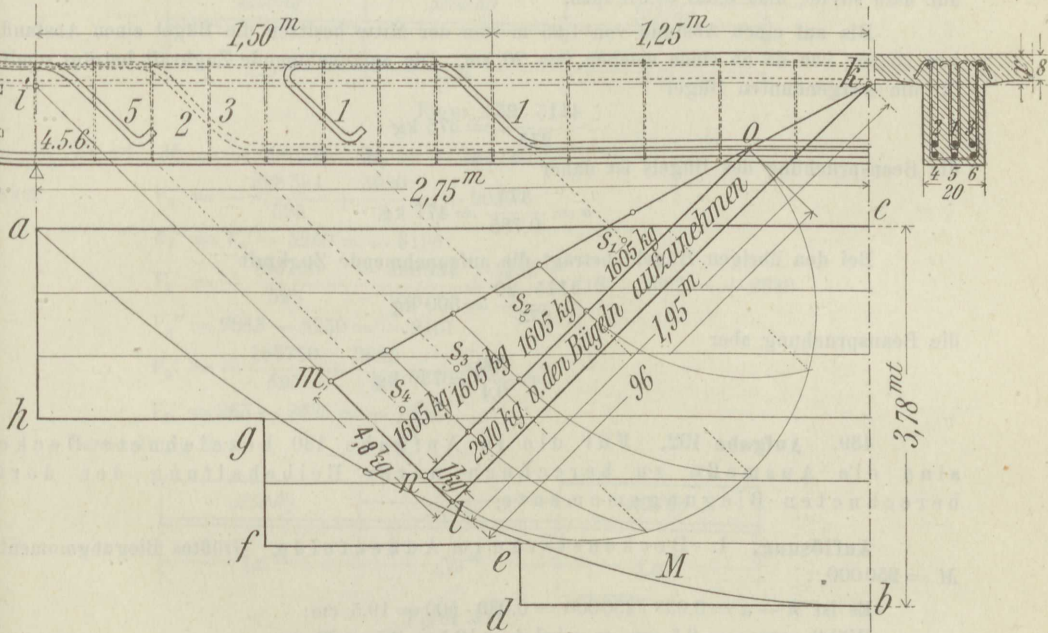
Diese Schubkraft, welche in horizontaler Richtung wirkt, läßt sich in zwei unter  $45^\circ$  gegen die Balkenachse gerichtete Seitenkräfte  $Z$  und  $D$  zerlegen, von denen die eine  $D$  den Beton auf Druck, die andere  $Z$  auf Zug beansprucht. Die gesamte Zugkraft für die halbe Balkenlänge berechnet sich zu:

$$Z = \frac{T}{2} \sqrt{2} = \frac{13200}{2} \cdot 1,414 = 9332 \text{ kg}$$

Diese 9332 kg sind teils von den nach oben abgebogenen Eisen, teils von Bügeln aufzunehmen.

Die Zugkraft  $Z$  läßt sich zweckmäßig durch ein Dreieck  $klm$  darstellen, siehe Figur 472, dessen eine Seite  $kl$  unter  $45^\circ$  gegen die Balkenachse geneigt ist und die Länge  $\overline{kl} = \frac{k_i \sqrt{2}}{2}$  besitzt, während die andere Seite  $\overline{lm}$  gleich der größten Schubspannung  $\tau_0 = 4,8$  kg sein muß. Die Fläche dieses Dreiecks vermehrt mit der Breite  $b$  des Balkens gibt die Größe  $Z$ . Einen Teil dieser Zugkraft  $Z$  kann man durch Bügel aufnehmen lassen, den übrigen Teil durch aufzubiegende Eisen; im vorliegenden Falle ist  $\overline{ln} = 1$  kg abgetragen; es stellt dann die Fläche  $lnok$  jenen von den Bügeln aufzunehmenden Teil von  $Z$  dar. Er beträgt  $= \frac{195 + 96}{2} \cdot 1 \cdot 20 = 2910$  kg.

Von den abgebogenen Eisen sind also noch aufzunehmen  $9332 - 2910 = 6422$  kg. Da die Bügel vertikal angeordnet sind, so ist die vertikale Zugkraft, welche sie aufzunehmen haben  $= 2910 \sqrt{2} = 4115$  kg.



Figur 472.

Um Anhaltspunkte zu gewinnen, an welchen Stellen die Eisen abzubiegen sind, zeichnet man die Momentenparabel  $M$ , siehe Figur 472, teilt die größte Ordinate, entsprechend der Anzahl der vorhandenen Eisen, in 6 Teile und zieht durch die Teilungspunkte Horizontalen. Man erkennt dann, daß bis zur Stelle  $e$  alle 6 Eisen durchgehen müssen, bis zur Stelle  $g$  aber 5 Stück, die übrigen drei Eisen sind auf die ganze Trägerlänge durchzuführen.

Da durch das Dreieck  $mno$  die von den aufzubiegenden Eisen aufzunehmende Zugkraft versinnbildlicht ist, so kann man diese Fläche, parallel zur Grundlinie  $ml$  in eine Anzahl gleicher Teile teilen, deren Schwerpunkte ermitteln und durch letztere Parallelen zu  $il$  ziehen; in der Verlängerung dieser Parallelen können dann die aufgebogenen Eisen liegen.

Im vorliegenden Falle ist das Dreieck  $mno$  in 4 gleiche Teile geteilt worden. Jedem Teile entspricht eine Zugkraft von 1605 kg. Das Eisen 1 wird nun in der Verlängerung der durch  $s_1$  gehenden Senkrechten zu  $kl$  aufgebogen, oben gerade weitergeführt und in der Verlängerung der durch  $s_3$  gehenden Senkrechten zu  $kl$  wieder abgebogen. Die beiden Eisen 2 und 3 werden in der Verlängerung der durch  $s_3$  geführten Senkrechten zu  $kl$  abgebogen



und oben horizontal weitergeführt. Schließlich wird das Eisen 5 am linken Auflager nach oben geführt und dann in der Verlängerung der durch  $s_4$  zu  $kl$  geführten Senkrechten wieder abgebogen.

Da der Querschnitt eines Rundeisens  $\frac{1,8 \cdot 1,8}{4} \cdot 3,14 = 2,54$  qcm beträgt, so erfährt jeder der abgebogenen Teile des Eisens 1 eine Spannung

$$\sigma = \frac{1472,5}{2,54} = 632 \text{ kg};$$

ebenso groß ist die Beanspruchung des Eisens 5. Die Eisen 2 und 3 werden nur halb so stark beansprucht. Auch die Bügel erfahren nur eine geringe Beanspruchung.

Nimmt man den Durchmesser eines Bügelarmes zu 0,5 cm an, so ist bis zu 1,25 m Entfernung von der Trägermitte die an einer Stelle vorhandene gesamte widerstehende Querschnittsfläche gleich  $\frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 3,14 \cdot 4}{4} = 0,785$  qcm; für die übrigen Bügel beträgt diese Fläche nur halb soviel, also  $0,397 = 0,4$  qcm.

Bis auf einen Abstand von 1,25 m von der Mitte besitzen die Bügel einen Abstand von 25 cm, von da ab einen solchen von 20 cm. Die aufzunehmende Zugkraft beträgt somit für die erstgenannten Bügel

$$\frac{4115 \cdot 25}{275} = 375 \text{ kg}$$

die Beanspruchung des Bügels ist daher

$$\sigma = \frac{375}{0,785} = 477 \text{ kg}$$

Bei den übrigen Bügeln beträgt die aufzunehmende Zugkraft

$$\frac{4115 \cdot 20}{275} = 300 \text{ kg}$$

die Beanspruchung aber

$$\sigma = \frac{300}{0,4} = 750 \text{ kg}$$

439. **Aufgabe 192.** Für die in Aufgabe 130 bezeichnete Decke sind die Ausmaße zu berechnen unter Beibehaltung der dort berechneten Biegemomente.

**Auflösung.** 1. Deckenstärke im Außenfelde. Größtes Biegemoment  $M = 250000$ .

Es ist  $h - a = 0,039 \sqrt{250000} = 0,039 \cdot 500 = 19,5$  cm.

Wählt man  $a = 2,5$  cm, so wird  $h = 19,5 + 2,5 = 22$  cm.

Es ist ferner  $F_e = 0,0293 \cdot 500 = 14,69$  cm.

Hierfür 10 Stück Rundeisen unten ( $\cap$ ) = 14 mm mit 15,39 qcm.

2. Deckenstärke über der Mittelstütze.

$$h - a = 0,039 \sqrt{298594} = 0,039 \cdot 547 = 21,33 \text{ cm}$$

$$a = 2,5 \text{ cm, daher } h = 21,33 + 2,5 = \text{rund } 24 \text{ cm}$$

$$F_e = 0,0293 \cdot 547 = 15,86 \text{ qcm}$$

Hierfür genügen 12 Stück Rundeisen oben ( $\cap$ ) = 14 mm mit 16,9 qcm.

3. Deckenstärke im Mittelfelde.

$$h - a = 0,039 \sqrt{140000} = 0,039 \cdot 375 = 14,63 \text{ cm}$$

$$a = 2,5, h = 18 \text{ cm}$$

$$F_e = 0,029 \cdot 375 = 10,875 \text{ qcm}$$

Hierfür genügen 6 Stück Rundeisen unten ( $\cap$ ) = 14 mm mit 9,24 qcm

und 2 " " unten ( $\cap$ ) = 8 mm " 2,00 "

Zusammen 11,24 qcm

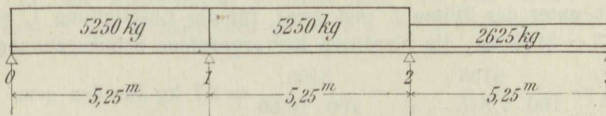
In der Mitte des Mittelfeldes entsteht außer dem größten positiven Biegemoment auch noch ein negatives Moment durch die Nutzlast im Betrage von  $0,05 pl^2$ , das mit dem Moment durch das Eigengewicht im Betrage von  $0,025 gl^2$  zu einem negativen Biegemoment sich vereinigt; dasselbe beträgt im vorliegenden Falle, da  $p = g$  ist,  $0,025 pl^2 = 34453$ . Zur Aufnahme dieses Moments ist eine Eisenmenge  $F_e'$  erforderlich.

Man erhält  $F_e' = 0,029 \cdot \sqrt{34453} = 0,029 \cdot 191 = 5,39$  qcm.

Hierfür genügen 4 Stück Rundeisen oben ( $\emptyset$ ) = 14 mm mit 6,10 qcm Querschnittsfläche.

440. **Aufgabe 193.** Für die in Aufgabe 130 bezeichnete Decke sind für die dort angegebenen Laststellungen, siehe Figur 268, 269 und 271, die auftretenden Vertikalkräfte zu berechnen.

**Auflösung.** Laststellung 1.



Figur 473.

Es ist  $M_1 = -298594$ ,  $M_2 = -183750$

daher

$$V_0' = -\frac{298594}{525} + \frac{5250}{2} = +2057$$

$$V_1'' = V_0' - 5250 = -3193$$

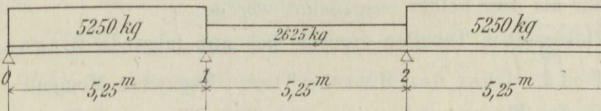
$$V_1' = -\frac{183750}{525} - \frac{298594}{525} + \frac{5250}{2} = 218 + 2625 = +2843$$

$$V_2'' = 2843 - 5250 = -2407$$

$$V_2' = -\frac{183750}{525} + \frac{2625}{2} = +963$$

$$V_3'' = 963 - 2625 = -1662$$

Laststellung 2.



Figur 474.

$$M_1 = M_2 = -206722$$

Es ist  $V_0' = \frac{206722}{525} + \frac{5250}{2} = -393 + 2625 = +2232$

$$V_1'' = 2232 - 5250 = -3018$$

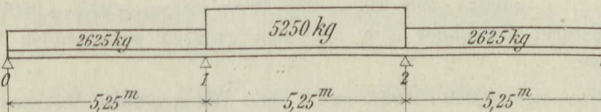
$$V_1' = \frac{2625}{2} = +1313$$

$$V_2'' = -1313$$

$$V_2' = +3018$$

$$V_3'' = -2232$$

Laststellung 3.



Figur 475.



$$\begin{aligned}
 \text{Es ist } M_1 &= M_2 = -206722 \\
 V_0' &= +393 + 1313 = +920 \\
 V_1'' &= -1705 \\
 V_1' &= +2625 \\
 V_2'' &= -2625 \\
 V_2' &= +1705 \\
 V_3'' &= -920
 \end{aligned}$$

Die größte Vertikalkraft, welche unter den vorgezeichneten Laststellungen auftreten kann, findet über einer Mittelstütze statt und beträgt  $V_1'' = 3193$  kg.

441. **Aufgabe 194.** Für die in Aufgabe 130 genannte Decke sind die größten im Beton auftretenden Schubspannungen zu berechnen.

**Auflösung.** Auf Grund der Angaben in Auflösung der Aufgabe 193 tritt die größte Vertikalkraft unter der Stütze 1 und zwar für die Laststellung 1, siehe Figur 473, auf und beträgt  $V_1'' = 3193$  kg; die hierdurch hervorgerufene Schubspannung ist:

$$\tau_0 = \frac{3193}{100 \cdot 7/8(h-a)} = \frac{3193}{100 \cdot 18,66} = 1,7 \text{ kg für den qcm}$$

Diese Schubkraft kann von dem Beton allein aufgenommen werden.

442. **Aufgabe 195.** Für die in Aufgabe 191 genannte Plattenbalkendecke ist zu untersuchen, ob die dort angenommene Stärke der Platte von 8 cm ausreicht. Es ist ferner die Armierung der Platte festzusetzen.

**Auflösung.** Die Platte ist als ein auf den Balken liegender durchgehender Träger zu berechnen.

Das Eigengewicht der Platte selbst ist	$0,08 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2400 = 192$ kg
Gewicht der Überschüttung und des Fußbodens	174 kg
Gesamteigengewicht	366 kg

Nach den ministeriellen Vorschriften darf die rechnerische Annahme des Zusammenhangs auf nicht mehr als drei Felder ausgedehnt werden.

Aus der Winklerschen Tabellen ergeben sich nun folgende Biegemomente:

Erstes Feld. Über der Mittelstütze. Negatives Moment.

Durch das Eigengewicht	$= 0,1 \cdot 366 \cdot 100 = -3666$
„ die Nutzlast	$= 0,11667 \cdot 500 \cdot 100 = -5833,5$
Gesamtmoment	$= 9493,5$

Im Abstand 0,4 l von der Außenstütze

Durch das Eigengewicht	$0,08 \cdot 366 \cdot 100 = +2928$
„ die Nutzlast	$0,1 \cdot 500 \cdot 100 = +5000$
Gesamtmoment	$= +7928$

Zweites Feld. In der Feldmitte. Positives Moment.

Durch das Eigengewicht	$0,025 \cdot 366 \cdot 100 = +915$
„ die Nutzlast	$0,075 \cdot 500 \cdot 100 = 3750$
Gesamtmoment	$= +4665$

Negatives Moment.

$$= 0,025 \cdot 366 \cdot 100 - 0,05 \cdot 500 \cdot 100 = +915 - 2500 = -1585$$

Die Deckenstärke berechnet sich aus dem größten auftretenden Momente 9493,5 über der Mittelstütze.

Man erhält  $h - a = 0,039 \sqrt{9493,5} = 3,8$  cm. Die gewählte Deckenstärke von 8 cm ist also ausreichend.

Für die Armierung der Decke erhält man folgende Ergebnisse:

Über der Mittelstütze.

$$F_e = 0,0293 \sqrt{9493,5} = 2,85 \text{ qcm}$$

Im ersten Felde.

$$F_e' = 0,0293 \sqrt{7928} = 2,619 \text{ cm}$$

Im Mittelfelde zur Aufnahme des positiven Moments.

$$F_e'' = 0,0293 \sqrt{4665} = 2,0 \text{ qcm}$$

Zur Aufnahme des negativen Moments.

$$F_e''' = 0,0293 \sqrt{1515} = 1,14 \text{ qcm}$$

Wählt man Rundeisen von 6 mm Durchmesser, so sind erforderlich:

Über den Mittelstützen 10 Stück oben mit 2,82 qcm, im ersten Felde 9 Stück unten mit 2,54 qcm, in den Mittelfeldern 6 Stück mit 1,98 qcm unten. Zur Aufnahme des negativen Moments in den Mittelfeldern genügen 4 Stück oben mit 1,13 qcm.

## C. Berechnung von Säulen.

### 1. Säule mit zentrischer Belastung.

#### a) Untersuchung auf Druck.

443) Ist  $P$  die im Schwerpunkt des Säulenquerschnitts angreifende Kraft,  $F_b$  die Betonquerschnittsfläche,  $F_e$  die Querschnittsfläche der Eiseneinlage,  $\sigma_b$  die Betondruckspannung und  $\sigma_e$  die Eisen-  
druckspannung, so hat man die Beziehungen:

$P = \sigma_b (F_b + 15 F_e)$  und hieraus

$$263) \dots \sigma_b = \frac{P}{F_b + 15 F_e}$$

und

$$264) \dots \sigma_e = 15 \sigma_b$$

#### b) Untersuchung auf Zerknicken.

444) Das Trägheitsmoment der Eiseneinlage bezüglich einer der Hauptachsen ist:

$$265) \dots J_e = 4 \left[ \frac{d^4 \pi}{64} + \left( \frac{h}{2} - a \right)^2 \frac{d^2 \pi}{4} \right]$$

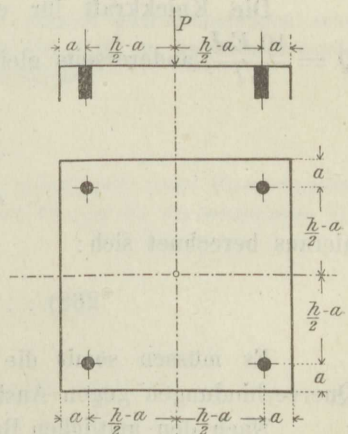
Das Trägheitsmoment des Betonquerschnitts allein ist:

$$J_b = \frac{a^4}{12} - J_e$$

Das Trägheitsmoment des Eisenbetonquerschnitts ist dann:

$$266) \dots J = J_b + 15 J_e$$

Der aus Gleichung 263 sich ergebende Wert von  $J$  muß dem aus der Knickformel gewonnenen Werte von  $J$  mindestens gleich sein.



Figur 476.



Der Ausdruck:

$$J_e = 4 \left[ \frac{d^4 \pi}{64} + \left( \frac{h}{2} - a \right)^2 \frac{d^2 \pi}{4} \right] \text{ kann, weil die Größe } \frac{d^4 \pi}{64}$$

im Vergleich mit dem zweiten Klammersausdruck

$$\left( \frac{h}{2} - a \right)^2 \frac{d^2 \pi}{4}$$

sehr klein ist auch so geschrieben werden:

$$267) \dots J_e = \frac{4 d^2 \pi}{4} \left( \frac{h}{2} - a \right)^2 = F_e \left( \frac{h}{2} - a \right)^2$$

wenn unter  $F_e$  die Gesamtquerschnittsfläche der Eiseneinlage verstanden ist.

Für das Trägheitsmoment eines Eisenstabs, bezogen auf eine Durchmesserachse, erhält man, wie schon früher erwähnt:

$$J = \frac{d^4 \pi}{64}$$

Die Fläche des Stabquerschnitts ist  $F = \frac{d^2 \pi}{4}$ , daher ist:

$$\frac{J}{F} = \frac{\frac{d^4 \pi}{64}}{\frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{d^2}{16}$$

Die Knickkraft für einen Eisenstab von der Länge  $l$  ist einerseits  $Q = \frac{10 E J}{5 l}$ , andererseits gleich  $F \sigma_e$ , daher ist:

$$F \sigma_e = \frac{10 E J}{5 l}, \text{ oder}$$

$$\sigma_e = \frac{10 E J}{5 l F} = \frac{10 E d^2}{5 l 16}$$

hieraus berechnet sich:

$$268) \dots l = \sqrt{\frac{10 E d^2}{80 \sigma_e}} = d \sqrt{\frac{E}{8 \sigma_e}}$$

Es müssen somit die Eisenstäbe je in einem Abstände von  $l$  cm durch Querverbindungen gegen Ausknicken geschützt werden.

Nach den amtlichen Bestimmungen soll  $l$  nicht größer sein als die kleinste Abmessung des Stützenquerschnitts bzw. als das Dreißigfache der Stärke der Längsstäbe.

### c) Übungsaufgaben.

445. Aufgabe 196. Eine Eisenbetonsäule mit quadratischem Querschnitt 30/30 cm und 5,6 m Höhe hat einen Druck von 30 t aufzunehmen. Es ist die Säule zu berechnen, wenn die Eiseneinlage aus vier Rundstäben mit zusammen 10 qcm Querschnittsfläche bestehen soll.

**Auflösung.** Die Betondruckspannung berechnet sich aus der Gleichung 263:

$$\sigma_b = \frac{30\,000}{900 - 10 + 15 \cdot 10} = \frac{30\,000}{1040} = 26,7 \text{ kg}$$

Die Eisendruckbeanspruchung ist daher nach Gleichung 264:

$$\sigma_e = 26,7 \cdot 15 = 400,5 \text{ kg}$$

Untersuchung auf Knicken.

Das Trägheitsmoment berechnet aus der Knickformel. Unter Annahme von  $E = 140\,000$ , wird:

$$J = \frac{n P l^2}{10 E} = \frac{10 \cdot 30\,000 \cdot 550 \cdot 550}{10 \cdot 140\,000} = 64821\frac{1}{2}$$

Das Trägheitsmoment des Eisenquerschnitts allein ist  $4 \cdot 2,5 \cdot 11^2 = 1210$

Das Trägheitsmoment des Betonquerschnitts allein ist  $\frac{30^4}{12} - 1210 = 67\,500 - 1210 = 66\,290$

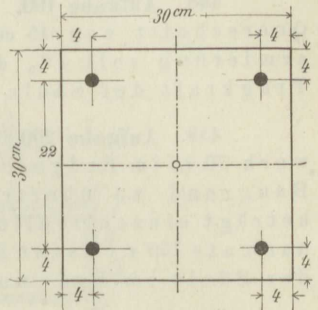
Das Trägheitsmoment des Betoneisenquerschnitts ist  $66\,290 + 15 \cdot 1210 = 84\,440$

Der Querschnitt ist also gegen Knicken gesichert.

Querverbindungen zwischen den Eiseneinlagen:

$$\text{Es muß sein: } l = d \sqrt{\frac{2\,100\,000}{8 \cdot 400,5}} = d \cdot 25,5 = 1,8 \cdot 25,5 = 46 \text{ cm}$$

Da nach den ministeriellen Vorschriften die horizontalen Querverbindungen schon in Abständen gleich dem kleinsten Säulendurchmesser, hier also = 30 cm, angebracht werden müssen, so ist die Knicksicherheit der Konstruktion gewährleistet.



Figur 477.

**Anmerkung 84.** Aus der Formel

$$P = \sigma_b (F_b + 15 F_e)$$

läßt sich eine Beziehung zur Feststellung der Abmessungen einer Eisenbetonsäule ableiten. Zunächst ergibt sich, wenn man zwischen  $F_b$  und  $F_e$  ein bestimmtes Verhältnis etwa  $F_e = \frac{1}{100} F_b$  festsetzt

$$P = \sigma_b (F_b + \frac{15}{100} F_e) = 1,15 \sigma_b F_b$$

oder unter Annahme von  $\sigma_b = 25 \text{ kg}$ .

$$P = 25 \cdot 1,15 F_b = 28,75 F_b$$

Hieraus folgt aber

$$F_b = \frac{P}{28,75} = 0,035 P$$

wobei  $P$  in kg und  $F_b$  in qcm ausgedrückt ist.

Nimmt man  $P$  in t an, so folgt

$$F_b = 35 P$$

Unter Annahme eines quadratischen Säulenquerschnitts mit der Seite  $d$  wird

$$d = 6 \sqrt{P} \quad P \text{ in t, } d \text{ in cm}$$

**446. Aufgabe 197.** Eine Eisenbetonsäule soll eine Last von 50 t aufnehmen; die Längsarmierung soll 1% des Betonquerschnitts betragen. Es sind die Abmessungen der Säule zu ermitteln.



**Auflösung.** Es ist  $F_b = 35 \cdot 50 = 1750$  qcm

Hieraus folgt bei quadratischem Querschnitt die Säulenstärke  $d = 42$  cm. Die Längsarmierung ergibt sich zu

$$F_e = 17,50 \text{ cm}$$

Hierfür 4 Rundeisen ( $\emptyset$ ) = 24 mm und  $F_e = 18,10$  qcm

447. **Aufgabe 198.** Für die in Aufgabe 197 genannte Säule ist die Knicksicherheit zu untersuchen und der Abstand der Querverbindungen festzustellen, wenn die Höhe der Säule 5,5 m betragen soll.

448. **Aufgabe 199.** Eine Säule aus Eisenbeton hat quadratischen Querschnitt von 45 cm Seitenlänge. Der Querschnitt der Längsarmierung soll 1% des Betonquerschnitts betragen. Es ist die Tragkraft der Säule und die Längsarmierung zu bestimmen.

449. **Aufgabe 200.** Eine Eisenbetonsäule hat im ersten Stockwerk 70 t, im Erdgeschoß ebenfalls 70 t aufzunehmen und auf den Baugrund zu übertragen. Die Gesamtbelastung des letzteren beträgt einschließlich des Eigengewichts der Säule und des Fundaments 150 t. Es ist Säule und Fundament zu berechnen. Die Höhe der Säule im Erd- und Kellergeschoß beträgt je 4,5 m.

**Auflösung.** Säule des Erdgeschosses.

Es ist  $d = 6\sqrt{70} = 6 \cdot 8,3 = \text{rund } 50$  cm

$$F_b = 50 \cdot 50 = 2500 \text{ qcm}$$

daher  $F_e = \frac{2500}{100} = 25$  qcm

Hierfür 4 Rundeisen mit 28 mm ( $\emptyset$ ) = 24,63 qcm.

Es ist nun  $\sigma_b = \frac{70000}{2500 - 24,63 + 15 \cdot 24,63} = \frac{70000}{2845} = 24,6$  kg für den qcm

$$\sigma_e = 15 \cdot 24,6 = 369,0 \text{ kg für den qcm}$$

Die freie Knicklänge berechnet sich zu

$$l = d \sqrt{\frac{E}{8 \cdot \sigma_e}} = 2,8 \sqrt{\frac{2150000}{8 \cdot 369,0}} = 75,6 \text{ cm}$$

Da nach den amtlichen Vorschriften in Abständen von 50 cm Querverbindungen angebracht werden müssen, so sind die Längseisen gegen Ausknicken gesichert.

Das Trägheitsmoment  $J$  des Säulenquerschnitts, berechnet aus der Knickformel, muß sein:

$$J = 71,5 \cdot 70 \cdot 4,5 \cdot 4,5 = 101351$$

Das Trägheitsmoment des Eisenquerschnitts ist:

$$\frac{4 \cdot 25^3}{4} \cdot 21^2 = 11025$$

Das Trägheitsmoment des Betonquerschnitts allein ist:

$$\frac{1}{12} 50^4 - 11025 = 520833 - 11025 = 509808$$

Das Trägheitsmoment des Eisenbetonquerschnitts ist demnach:

$$J = 509808 + 15 \cdot 11025 = 675183$$

Säule des Kellergeschosses.

Diese Säule hat aufzunehmen einschließlich des Eigengewichts 145 t. Demnach ist

$$d = 6\sqrt{145} = 72 \text{ cm}$$

$$F_b = 72 \cdot 72 = 5184 \text{ qcm}$$

$$F_e = \frac{51,84}{100} = 52 \text{ qcm}$$

Hierfür gewählt 4 Rundeisen von 41 mm (I) mit zusammen 52,87 qcm.

Die Betondruckspannung wird nun

$$\sigma_b = \frac{145000}{5184 - 52,81 + 15 \cdot 52,81} = 24,4 \text{ kg}$$

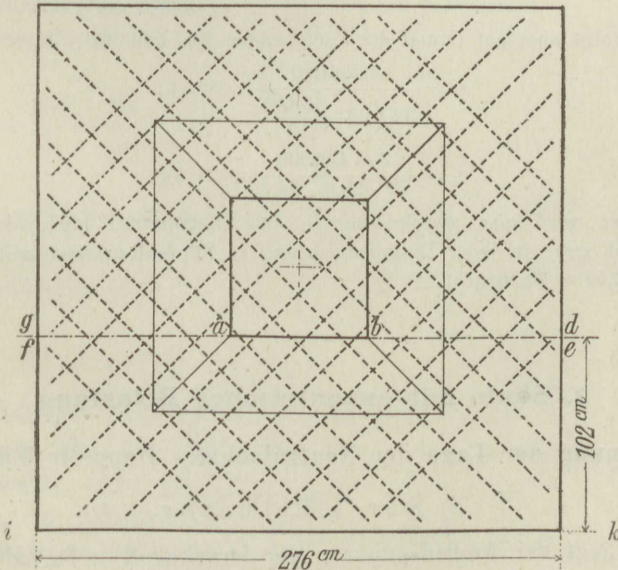
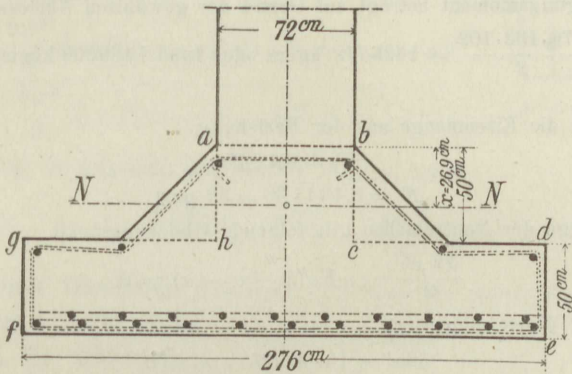
Die Eisendruckspannung wird

$$\sigma_e = 15 \cdot 24,4 = 366,0 \text{ kg}$$

Die freie Knicklänge der Eisen wird

$$l = 4,1 \sqrt{\frac{2150000}{8 \cdot 366}} = 111 \text{ cm}$$

Figur 478.



Figur 479.

Da aber in Entfernung von 72 cm die horizontale Querverbindungen anzubringen sind, so ist Knicksicherheit der Längseisen vorhanden.

Größe der Fundamentsohle.

Es soll angenommen sein, daß der Baugrund nur 2 kg Druck auf den qcm aufnehmen kann; es ist dann eine Fundamentfläche erforderlich in der Größe

$$F = \frac{150000}{2} = 75000 \text{ qcm}$$



Die Seite der quadratisch gedachten Fundamentsohle wird darum sein

$$d = \sqrt{75000} = \text{rund } 276 \text{ cm}$$

Die Ausbildung des Fundaments kann in der Weise erfolgen, wie die Figur 478 zeigt. Die Seite verbreitert sich nach unten. Infolge der starken Verbreiterung entstehen in der Fundamentsplatte Biegungsspannungen, welche die Einlage von Eisen erforderlich machen. Führt man den Vertikalschnitt  $ab$ , so erhält man hierfür die Figur 478, von welcher nur die Begrenzung  $abcdefgha$  betrachtet werden soll. Diese kann als Profil eines umgekehrten Plattenbalkens angesehen werden, auf welches durch die Belastungsfläche  $efik$  ein Biegemoment ausgeübt wird.

Dieses Biegemoment beträgt auf Grund der gewählten Abmessungen

$$\frac{276 \cdot 102 \cdot 102}{2} = 1435772 \text{ kgcm oder rund } 1436000 \text{ kgcm}$$

oder 14,36 mt.

Wählt man die Eisenmenge aus der Beziehung

$$F_e = 8,4 \sqrt{M}$$

so erhält man

$$F_e = 8,4 \sqrt{14,36} = 32 \text{ qcm}$$

Für die Lage der Neutralachse gilt folgende Gleichung:

$$\frac{72 x^2}{2} - n F_e (h - a - x) = 0$$

oder die gegebenen Werte eingesetzt:

$$36x^2 - 15 \cdot 32 (95 - x) = 0$$

$$x = 29,6 \text{ cm}$$

Hieraus folgt aber auf Grund der Gleichungen 247 und 248:

$$\sigma_e = \frac{1436000}{32 \left(95 - \frac{29,6}{3}\right)} = 866 \text{ kg}$$

und

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 1436000}{72 \cdot 29,6 \cdot 64,4} = 21 \text{ kg}$$

Die Eisen wird man zweckmäßig in den Diagonalrichtungen der quadratischen Platte legen, und zwar in jeder Diagonalrichtung 14 Stück Rundeisen mit 1,8 mm (I) und einem  $F_e = 14 \cdot 2,54 = 35,56 \text{ qcm}$ .

## 2. Säule mit exzentrischer Belastung.

### a) Bestimmung der Lage der Neutralachse. Doppelte Eiseneinlage.

#### α) Durch Rechnung.

450. Liegt der Angriffspunkt  $p$  der Druckkraft außerhalb des Schwerpunkts  $s$ , jedoch auf einer Hauptachse, etwa der Hauptachse  $Y$ , so ergibt sich, siehe Nr. 363, die Lage der Neutralachse  $nn$  aus der Beziehung:

$$269) \dots v = \frac{\Sigma f_x^2}{\Sigma f_x} = \frac{J}{S}$$

wobei  $\Sigma f_x^2 = J$  das Trägheitsmoment,  $\Sigma f_x = S$  das statische Moment des nutzbaren Querschnitts einschließlich der Eiseneinlagen bezeichnet. Ist nun  $F_e$  die Querschnittsfläche der Eiseneinlage auf je einer Seite der Neutralachse, so er-

geben sich mit Bezugnahme auf Figur 480 für Zähler und Nenner der Gl. 269 die folgenden Werte: Es ist:

$$270) \dots J = \frac{b x^3}{3} + n F_e (x - a)^2 + n F_e (h - x - a)^2$$

und

$$271) \dots S = \frac{b x^2}{2} + n F_e (x - a) - n F_e (h - x - a)$$

Nun ist ferner:

$$v = x - u = \frac{\frac{b x^3}{3} + n F_e (x - a)^2 + n F_e (h - x - a)^2}{\frac{b x^2}{2} + n F_e (x - a) - n F_e (h - x - a)}$$

welche Gleichung in folgende umgeformt werden kann:

$$272) \dots x^3 - 3 n x^2 + \frac{6 n F_e (h - 2 a)}{b} x = \frac{6 n F_e}{b} [(2 a^2 + h^2) - (2 a + u) h]$$

Vorstehende Gleichung löst man zweckmäßig durch Probieren.

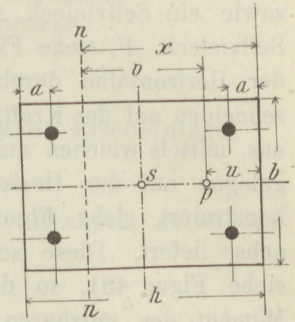
Ist dann  $x$  hinlänglich genau ermittelt, so erhält man die größte Druckbeanspruchung des Betons aus der Beziehung:

$$273) \dots \sigma_b = \frac{M}{W} = \frac{P v}{J} = \frac{P J}{S \frac{J}{x}} = \frac{P x}{S}$$

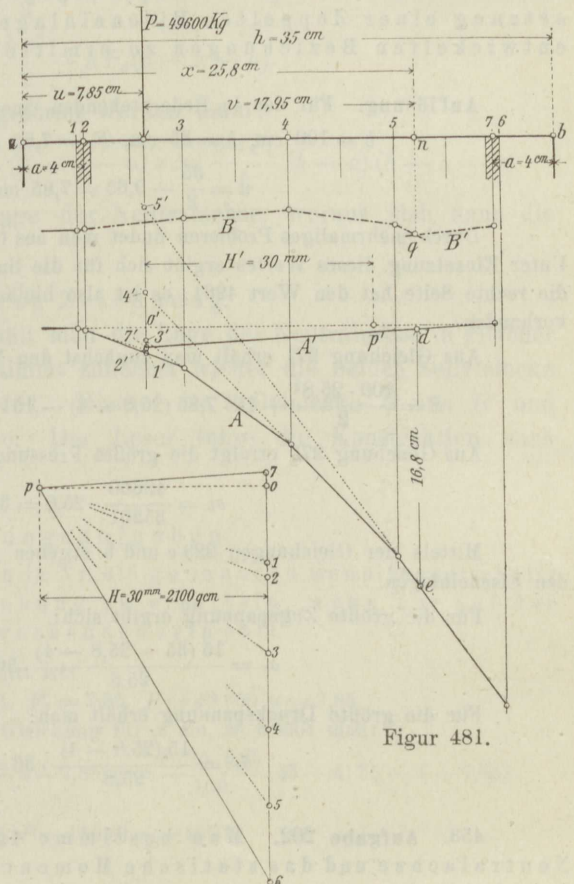
Ist  $\sigma_b$  ermittelt, so folgen die Eisenspannungen  $\sigma_e$  und  $\sigma_e'$  aus den Beziehungen 229.

β) Durch Zeichnung.

451. Man teilt die Länge  $\overline{ab}$ , siehe Figur 481, in eine beliebige Anzahl, etwa fünf gleiche Teile, so beträgt die Fläche eines solchen Teils, die Breite zu 100 vorausgesetzt,  $\frac{35 \cdot 100}{5} = 700$  qcm als Maßzahl für die in dem Streifen herrschende Druckkraft. Die Fläche der Eiseneinlage auf der Druckseite ist, auf Beton reduziert,  $15 \cdot 7,85 = 117,75$  qcm, ebenso



Figur 480.



Figur 481.

Figur 481 a.



groß ist die Eiseneinlage auf der Zugseite. Mit diesen Flächengrößen als Maßzahlen für die Druckkräfte zeichnet man ein Kräftevieleck, siehe Figur 481 a, sowie ein Seilvieleck  $A$ , siehe Figur 481, desgleichen mit den Zugkräften das Seilvieleck  $A'$ , siehe Figur 481. Hierbei ist der Pol  $p$ , siehe Figur 481 a, auf der Horizontalen durch  $o$  beliebig gewählt worden. Die Linien  $A$  und  $A'$  schneiden auf der Kraftlinie  $P$ , die Abschnitte  $\overline{0' \cdot 1'}$ ,  $\overline{1' \cdot 2'}$  usw., siehe Figur 481, aus, mittels welchen man nun durch Zuhilfenahme eines Pols  $p'$ , siehe Figur 481, gelegen auf der Horizontalen durch  $o'$  zwei weitere Seilvielecke  $B$  und  $B'$  konstruiert, siehe Figur 481, deren Schnittpunkt  $q$  einen Punkt der Neutralachse liefert. Diese schneidet dann aus  $A$  und  $A'$  die Punkte  $e$  und  $d$  aus, siehe Figur 481, so daß  $\overline{de}$  das auf den Polabstand  $H$  bezogene statische Moment des nutzbaren Querschnitts einschließlich der Eiseneinlagen darstellt.

### γ) Übungsaufgaben.

452. **Aufgabe 201.** Für den in Nr. 415 behandelten Gewölbequerschnitt sind die auftretenden Beanspruchungen unter der Voraussetzung einer doppelten Eiseneinlage auf Grund der vorstehend entwickelten Beziehungen zu ermitteln.

**Auflösung.** Für den in Rede stehenden Querschnitt ist:

$$b = 100 \text{ cm}, h = 35 \text{ cm}, F_e = 7,85 \text{ qcm}, P = 49\,600 \text{ kg}$$

$$u = \frac{35}{2} - 9,65 = 7,85 \text{ cm}, a = 4$$

Durch mehrmaliges Probieren findet man aus Gleichung 272 für  $x$  den Wert 25,8 cm. Unter Einsetzung dieses Wertes ergibt sich für die linke Seite der Gleichung der Wert 5015, die rechte Seite hat den Wert 4961; es ist also hinlängliche Übereinstimmung beider Seiten vorhanden.

Aus Gleichung 271 erhält man zunächst den Wert von  $S$ , nämlich:

$$S = \frac{100 \cdot 25,8^2}{2} + 15 \cdot 7,85 (25,8 - 4) - 15 \cdot 7,85 (35 - 25,8 - 4) = 35261$$

Aus Gleichung 273 erfolgt die größte Pressung im Beton:

$$\sigma_b = \frac{49600}{35261} \cdot 25,8 = 36,2 \text{ kg}$$

Mittels der Gleichungen 229 c und b ergeben sich nunmehr auch die Spannungen in den Eiseneinlagen.

Für die größte Zugspannung ergibt sich:

$$\sigma_e = \frac{15 (35 - 25,8 - 4)}{25,8} \cdot 36 = 109 \text{ kg}$$

Für die größte Druckspannung erhält man:

$$\sigma_{e'} = \frac{15 (25,8 - 4)}{25,8} \cdot 36 = 458 \text{ kg}$$

453. **Aufgabe 202.** Man bestimme in Aufgabe 201 die Lage der Neutralachse und das statische Moment des nutzbaren Querschnitts durch Zeichnung.

**Auflösung.** Man verfähre so wie in Nr. 451 angegeben. Man erhält, siehe Figur 481, die Lage der Neutralachse wie dort angegeben. Das statische Moment des nutzbaren Querschnitts ergibt sich zu:

$$S = H\bar{d}e; \bar{d}e = 16,8 \text{ cm}, H = 2100 \text{ qcm}, S = 2100 \cdot 16,8 = 35280$$

welcher Wert mit dem Ergebnis der Rechnung hinlänglich übereinstimmt.

## b) Bestimmung der Lage der Neutralachse. Einfache Eiseneinlage.

### α) Durch Rechnung.

454. Ist eine Eiseneinlage nur auf der Zugseite vorhanden, so ist das Trägheitsmoment des nutzbaren Querschnitts:

$$J = \frac{bx^3}{3} + nF_e(h-x-a)^2$$

und sein statisches Moment:

$$S = \frac{bx^2}{2} - nF_e(h-x-a)$$

Es wird nun:

$$v = x - u = \frac{\frac{bx^3}{3} + nF_e(h-x-a)^2}{\frac{bx^2}{2} - nF_e(h-x-a)}$$

welche Gleichung in folgende umgeformt werden kann:

$$274) \dots x^3 - 3ux^2 + \frac{6nF_e}{b}(h-a-u)x = \frac{6nF_e}{b}(h-a)(h-a-u)$$

Hieraus findet sich die Lage der Neutralachse, woraus sich dann die Spannungen wie früher ergeben.

### β) Durch Zeichnung.

455. Durch Zeichnung erhält man die Lage der Neutralachse in gleicher Weise, wie in Nr. 451. Man bestimmt zunächst wieder die beiden Seilvielecke  $A$  und  $A'$ , ganz so, wie in Nr. 451. Hierauf die Seilvielecke  $B$  und  $B'$  und durch deren Schnitt den Punkt  $q$ . Der Leser führe die Konstruktion nach Anleitung der Nummer 451 aus.

### γ) Übungsaufgaben.

456. **Aufgabe 203.** Für den in Nr. 415 genannten Gewölbequerschnitt ist die Beton- und Eisenspannung zu ermitteln, wenn nur auf der Zugseite eine Eiseneinlage vorhanden sein soll.

**Auflösung.** Für den Querschnitt ist:

$$b = 100, h = 35, a = 4, F_e = 7,85, P = 49600 \quad u = 7,85.$$

Setzt man obige Werte in die Gleichung für  $x$  ein, so erhält man:

$$x^3 - 3 \cdot 7,85 \cdot x^2 + \frac{6 \cdot 15 \cdot 7,85}{100} (35 - 4 - 7,85)x = \frac{6 \cdot 15 \cdot 7,85}{100} (35 - 4) 35 - 4 - 7,85$$

oder

$$x^3 - 23,55x^2 + 156,61x = 4855.$$

Dieser Gleichung genügt ein  $x = 25,05$ .



Nunmehr hat man:

$$S = \frac{100 \cdot 25,05^2}{2} - 15 \cdot 7,85 (35 - 25,05 - 4) = 30625$$

und

$$\sigma_b = \frac{49\,600 \cdot 25,05}{30625} = 40 \text{ kg}$$

Als Eisenspannung erhält man:

$$\sigma_e = \frac{15 (35 - 25,05 - 4)}{25,04} \cdot 40 = 182 \text{ kg}$$

457. **Aufgabe 204.** Man bestimme für die Aufgabe 203 die Lage der Neutralachse durch Zeichnung nach Angabe der Nr. 451 bzw. 455.

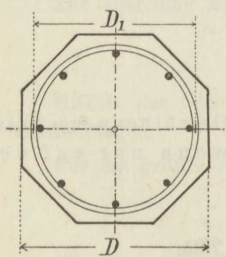
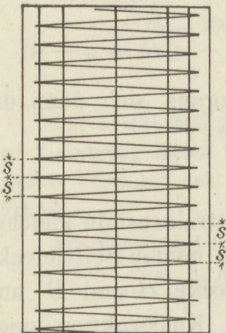
### 3. Säule mit eisenumschnürtem Beton.

#### a) Allgemeine Bemerkungen.

458. Anstatt die Längseiseneinlagen einer Betonsäule in horizontalem Sinne durch Bügel miteinander zu verbinden und gegen Ausknicken zu sichern, umschnürt man in neuester Zeit mit gutem Erfolge die Längseisen mit spiralförmig gewundenem Eisendraht und spricht dann von eisenumschnürten Betonsäulen. Diese Umschnürung wird jedoch nicht nur bei Säulen, sondern überhaupt bei auf Druck beanspruchten Konstruktionsteilen vorgenommen, also auch bei auf Biegung

beanspruchten Trägern in den gedrückten Querschnittsteilen. Die Erfindung stammt von dem belgischen Ingenieur Considère her, der auch über die Berechnungsweise seiner Konstruktion auf Grund von zahlreichen praktischen Versuchen nachstehende Angaben bekanntgegeben hat.

Figur 482.



Figur 483.

#### b) Formeln zur Berechnung von eisenumschnürten Betonsäulen.

459. Considère hat auf Grund von praktischen Versuchen für die Bruchlast  $B$  einer eisenumschnürten Betonsäule folgende Formel aufgestellt:

$$275) \dots B \geq 1,5kF_k + 2400(F_e + 2,4F'_e)$$

Hierin bezeichnet:

$B$  die von der Säule aufzunehmende Bruchlast,

$k$  die Druckfestigkeit des verwendeten Betons,

$F_k$  den Kernquerschnitt der Säule, d. h. den von der

Spiralarmierung eingeschlossenen Betonquerschnitt, siehe

Figur 483.

$F_e$  den Gesamtquerschnitt der vorhandenen Längseisen,

$F'_e$  den Gesamtquerschnitt der gedachten Längseisen, deren Gewicht für die Höheneinheit gleich dem Gewicht der Umschnürung für die gleiche Einheit ist,

2400 die Streckgrenze des Eisens.

460. Aus Formel 275 lassen sich einige Beziehungen zur Bestimmung der Ausmaße einer Säule bei gegebener Belastung ableiten.

Bezeichnet man mit:

$a$  den Prozentsatz der Längsarmierung, bezogen auf den Kernquerschnitt  $F_k$ ,  
 $b$  den Prozentsatz der Spiralarmierung, bezogen auf den gleichen Querschnitt,

$P$  die Nutzlast, d. h. diejenige Last, welche die Säule auf die Dauer tragen kann,

so ist, wenn man  $P = \frac{1}{10} B$  annimmt:

$$10 P = 1,5 k + 24 a + 57,6 b) F_k$$

oder

$$276) \dots F_k = \frac{P}{0,15 k + 2,4 a + 5,76 b}$$

Nimmt man nun  $a = 1\%$ ,  $b = 2\%$  von  $F_k$  und  $k = 180$  kg f. d. qem an, so erhält man:

$$277) \dots F_k = \frac{P}{0,15 \cdot 180 + 2,4 + 5,76 \cdot 2} = \frac{P}{41}$$

wobei  $P$  in kg einzusetzen ist. Für  $P$  in t ergibt sich:

$$278) \dots F_k = 24,4 P$$

Durch die Formel 277 bzw. 278 ist eine Beziehung hergestellt zwischen der Größe des Kernquerschnitts und der aufzunehmenden Belastung.

Bezeichnet  $D_1$  den Durchmesser des Kernquerschnitts, so kann man Gleichung 277 auch so schreiben:

$$\frac{D_1^2 \pi}{4} = \frac{P}{41}; P \text{ in kg,}$$

oder

$$279) \dots D_1 = 0,177 \sqrt{P}$$

Für  $P$  in t erhält man:

$$\frac{D_1^2 \pi}{4} = 24,4 P$$

oder

$$280) \dots D_1 = 5,6 \sqrt{P}$$

Bezeichnet  $F_b$  den gesamten Betonquerschnitt, so kann man für das Verhältnis  $\frac{F_b}{F_k}$  etwa 1,5 bis 1,3 annehmen, und zwar 1,5 für Querschnitte bis zu 40 cm Durchmesser und 1,3 für größere Querschnitte. Unter dieser Voraussetzung wird  $F_b = 1,5 F_k$  bzw.  $1,3 F_k$ , d. h.

$$F_b = 1,5 \cdot 24,4 P = 36,6 P$$

für Querschnitte bis zu 40 cm Durchmesser und

$$F_b = 1,3 \cdot 24,4 P = 31,7 P$$

für größere Querschnitte.



Berücksichtigt man ferner, daß beim Achteck  $F_b = 0,8284 D^2$  ist, wo  $D$  den Durchmesser des dem Achteck eingeschriebenen Kreises bezeichnet, so ist:

$$281) \dots D = \sqrt{\frac{36,6}{0,8284} P} = 6,6 \sqrt{P}$$

oder

$$282) \dots D = \sqrt{\frac{31,72}{0,8284} P} = 6,2 \sqrt{P}$$

Aus den unter 460 genannten Beziehungen gewinnt man hinreichende Anhaltspunkte zur Ermittlung der Ausmaße für eisenumschnürte Betonsäulen, welche eine gegebene Belastung  $P$  aufzunehmen haben.

**Anmerkung 85.** Läßt man in der Säule eine Betondruckspannung von 25 kg für den qcm zu, so ergeben sich für Säulenabmessungen folgende Beziehungen. Es ist:

$$F_k = 20 P$$

$$D_1 = 5 \sqrt{P}$$

$$F_b = 30 P \text{ bzw. } 26 P$$

$$D = 6 \sqrt{P} \text{ bzw. } 5,6 \sqrt{P} \left. \vphantom{\begin{matrix} F_k \\ D_1 \\ F_b \end{matrix}} \right\} \text{ für } D_1 < \text{ bzw. } > 40 \text{ cm}$$

hierbei ist  $P$  in  $t$  einzusetzen, die Flächen und Längen ergeben sich dann in qcm bzw. cm.

### c) Amtliche Vorschriften zur Berechnung von eisenumschnürten Betonsäulen.

461. Durch Ministerialerlaß vom 18. September 1909 ist die Berechnung von eisenumschnürten Betonsäulen für Preußen in folgender Weise geregelt worden: Bezeichnet

$F_b$  den gesamten Betonquerschnitt,

$F_e$  den gesamten Querschnitt der senkrechten Eiseneinlage,

$F_s$  den Querschnitt einer gedachten, ebenfalls senkrechten Eiseneinlage, der entsteht, wenn die in der steigenden Einheit der Säule vorhandene Eisenmenge der Umschnürung in eine auf die gleiche Länge mit gleicher Menge angenommene Längseinlage umgewandelt ist,

so wird mit dem hieraus gebildeten ideellen Säulenquerschnitt:

$$283) \dots F_i = F_b + 15 F_e + 30 F_s$$

die zulässige Belastung  $F$  der Säule bestimmt aus der Gleichung:

$$284) \dots P = \sigma_b F_i$$

worin  $\sigma_b$  die nach den bestehenden Vorschriften zulässige Druckspannung des Betons in Stützen bedeutet. Der aus vorstehender Formel entstehende größere Querschnitt  $F_i$  wird jedoch nur so lange gestattet, als er über  $2 F_b$  nicht hinausgeht.

**Anmerkung 86.** Für die Herstellung spiralumschnürter Eisenbetonkonstruktionen hat die Firma Wayß und Freytag, als Inhaberin des deutschen Considère'schen Patents, die folgenden vorläufigen Konstruktionsgrundsätze aufgestellt.

1. Die Gesamteisenmenge der spiralumschnürten Konstruktionen soll nicht unter 1,5% und nicht über 8% des Kernquerschnitts betragen. Nur konzentrisch angeordnete oder ineinandergreifende Spiralen dürfen letzteres Maß überschreiten.
2. Die Längseisen sollen in ihrer Eisenmenge zu der Spiraleisenmenge in einem Verhältnis 1:1 oder 1:3 stehen.
3. Das Verhältnis der Ganghöhe  $s$  zum Kerndurchmesser  $D_1$ , also  $s : D_1$ , soll bei einer Spiraleisenmenge bis 2% des Kernquerschnitts etwa  $\frac{1}{7}$  bis  $\frac{1}{8}$ , bei höherer Spiralarmerung  $\frac{1}{8}$  bis  $\frac{1}{10}$  sein.
4. Dünnere und enger gewickelte Spiralen besitzen bei gleichem Eisenaufwand eine größere Tragfähigkeit, als wie stärkere Spiraleisen mit größerer Ganghöhe.

### d) Übungsaufgaben

462. **Aufgabe 205.** Die in Aufgabe 196 genannte Säule soll mit spiralförmiger Eisenumschmürung und Längseisen hergestellt werden. Der Querschnitt sei a) achteckig, b) kreisförmig. Es sind die Ausmaße der Säule zu ermitteln.

**Auflösung a.** Es ist  $F_k = 24,4 P = 24,4 \cdot 30 = 732$  qcm

$$D_1 = 5,6 \sqrt{P} = 5,6 \sqrt{30} = 30,69 \text{ cm}$$

$$D = 6,6 \sqrt{P} = 6,6 \sqrt{30} = 36,17 \text{ cm}$$

Setzt man für den Querschnitt der Längseisen 1% des Kernquerschnitts, für den der Spiralarmerung doppelt soviel fest, so erhält man:

$$a = \frac{F_k}{100} = \frac{732}{100} = 7,32 \text{ qcm}$$

und

$$b = 14,64 \text{ qcm.}$$

Es ist endlich

$$F_b = 1,5 F_k = 1098 \text{ qcm}$$

Nach den amtlichen Vorschriften ist dann:

$$F_i = 1098 + 15 \cdot 7,32 + 30 \cdot 14,64 = 1647 \text{ qcm} < 2196$$

und

$$P = 1,8 \cdot 1647 = 29,646 t = \text{rund } 30 t$$

Wählt man für die Längsarmierung 8 Rundeisen, so ist der Durchmesser eines Längseisens:

$$d = \sqrt{\frac{7,32 \cdot 4}{8 \cdot 3,14}} = 11 \text{ mm}$$

Für die Spiralarmerung sollen auf einen Meter Höhe 20 Ringe gerechnet werden, dann ist, wenn  $d_1$  den Durchmesser der Spiralarmerung bezeichnet:

$$d_1 = \frac{20 \cdot 0,369 \cdot 3,14 \cdot d_1^2 \cdot 314}{4} = 14,64 \text{ oder } d_1 = \text{rund } 10 \text{ mm}$$

**Auflösung b.** Für die kreisförmige Säule bleibt die Rechnung die gleiche wie unter a, nur berechnet sich jetzt der Durchmesser  $D$  aus der Beziehung

$$\frac{D^2 \cdot 3,14}{4} = 1,5 F_k = 1091$$

$$D = \sqrt{\frac{1098 \cdot 4}{3,14}} = 37,4 \text{ cm}$$

463. **Aufgabe 206.** Die vorige Aufgabe ist zu lösen für den Fall, daß in der Säule eine Betonbeanspruchung bis zu 25 kg für den qcm zugelassen wird.



**Anflösung.** Es ist  $F_k = 20 P = 20 \cdot 30 = 600$  qcm

$$D_1 = 5 \sqrt{P} = 5 \sqrt{30} = 5 \cdot 5,5 = 27,5 \text{ cm}$$

$$D = 6 \sqrt{P} = 6 \cdot 5,5 = 33 \text{ cm}$$

Setzt man wieder für die Längsarmierung 1% des Kernquerschnitts, für die Spiralarmierung aber 2% fest, so ist:

$$a = \frac{600}{100} = 6 \text{ qcm}$$

$$b = 12 \text{ qcm}$$

$$F_b = 30 \cdot 30 = 900 \text{ qcm.}$$

Nach den amtlichen Vorschriften ist dann:

$$F_i = 900 + 15 \cdot 6 + 30 \cdot 12 = 1350 < 2 \cdot 900$$

und

$$P = 25 \cdot 1350 = 33 \text{ t.}$$



# Bestimmungen

über die

**bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und  
die Beanspruchungen der Baustoffe**

und

**Berechnungsgrundlagen f. die statische Untersuchung v. Hochbauten.**

Vom 31. Januar 1910.

---



## Runderlaß,

betreffend die Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und die Beanspruchungen der Baustoffe sowie die Berechnungsgrundlagen für die statische Untersuchung von Hochbauten.

Berlin, den 31. Januar 1910.

Über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und die Beanspruchung der Baustoffe sind auf Grund der gesammelten Erfahrungen hier neue Bestimmungen ausgearbeitet worden, die an Stelle der früher maßgebenden Vorschriften fortan bei allen Hochbauausführungen der Staatsbauverwaltung zu beachten sind. Euer . . . lasse ich anliegend . . . Abdrucke der neuen Bestimmungen mit dem Ersuchen zugehen, sie an die in Betracht kommenden Staatsbaubeamten des dortigen Bezirks mit entsprechender Weisung zu verteilen und ihnen in Rücksicht auf die wesentliche Erhöhung der Beanspruchungen die Anwendung größter Sorgfalt bei der Aufstellung und Prüfung statischer Berechnungen und bei der Abnahme namentlich der Eisenbauteile zur Pflicht zu machen.

Des weiteren ersuche ich, darauf hinzuwirken, daß die neuen Bestimmungen möglichst bald auch bei allen Privatbauten zur Anwendung gelangen. Zu diesem Zwecke wollen Eure . . . den nachgeordneten Polizeibehörden die den Bestimmungen angehängten, ihren Inhalt auszugsweise wiedergebenden „Berechnungsgrundlagen für die statische Untersuchung von Hochbauten“ mit entsprechenden Weisungen bekanntgeben, sie auch benachrichtigen, daß die ausführlichen Bestimmungen demnächst im Zentralblatt der Bauverwaltung zur Veröffentlichung gelangen und im übrigen als Sonderdrucke zum Preise von 0,80 Mark für das Stück von der Firma Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin W 66, Wilhelmstraße 90, bezogen werden können.

Dabei ermächtige ich Sie, die Berechnungsgrundlagen dortseits zuvor zu ergänzen, sofern die Verwendung besonderer Baustoffe von örtlicher Bedeutung dies für den dortigen Bezirk erforderlich machen sollte. Die bei Nr. 97 der Berechnungsgrundlagen bezüglich der Beanspruchung des Eisens vorgesehene Ausnahmegenehmigung ist mit besonderer Vorsicht zu handhaben. Sie werden zu erwägen haben, ob und inwieweit Sie sich eine Einwirkung auf die im Einzelfalle zu treffende Entscheidung vorbehalten wollen. Soweit der Anwendung der neuen Bestimmungen] zurzeit noch Vorschriften der Bauordnungen entgegenstehen, ist auf deren baldige Änderung hinzuwirken.

Von den Berechnungsgrundlagen sind . . . Abdrucke zur weiteren Überweisung an die Polizeibehörden angeschlossen.

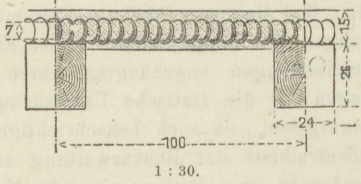
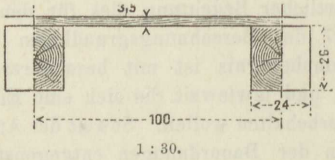
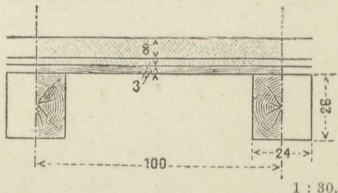
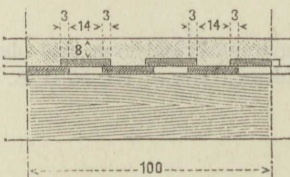
Der Minister der öffentlichen Arbeiten.

v. Breitenbach.

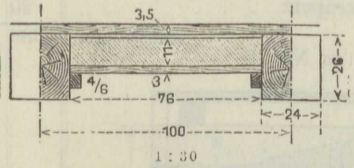
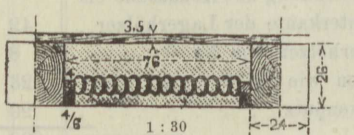
An die Herren Regierungspräsidenten und den  
Herrn Polizeipräsidenten hier — III. 55 D. B.

# Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und die Beanspruchung der Baustoffe.

## A. Eigengewichte von Zwischendecken und Dächern.

Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
<b>I. Zwischendecken.</b>				
a) Holzbalkendecken.				
1	Balkenlage mit gestrecktem Windelboden darüber, unter Annahme einer Entfernung der Balken von 1 m von Mitte zu Mitte und einer Stärke derselben von 24/26 cm	Balken 24/26 cm st. . . . . Schleestangen 7 cm Durchm. . . Lehm . . . . . zusammen	41 25 160 226	230
	zu Nr. 1			
				
2	Balkenlage mit Fußboden von 3,5 cm Stärke darüber	Balken 24/26 cm st. . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . zusammen	41 23 64	70
	zu Nr. 2			
				
3	Balkenlage mit Stülpedecke und Lehmschlag	Balken 24/26 cm st. . . . . Dielen 3 cm st. . . . . Lehmschlag . . . . . zusammen	41 20 148 209	210
	zu Nr. 3			
				



Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
4	Balkenlage mit halbem Windelboden, bestehend aus Stakung mit Lehmstroh umwickelt oder aus Füllbrettern auf angenagelten Latten und aus Lehmschlag oder Sandschüttung, sowie einem 3,5 cm starken Fußboden darüber zu Nr. 4	Balken 24/26 cm st. . . . . Stakhölzer 3 cm st. . . . . Latten 4/6 cm st. . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . Lehmschlag 11 cm st. . . . . zusammen	41 15 3 23 134 216	220
				
5	Balkenlage wie vor, jedoch an den unteren Seite mit 2 cm starker Schalung, gerohrt und geputzt	Balken 24/26 cm st. usw. wie zu Nr. 4 . . . . . dazu Schalung 2 cm st. . . . . Rohrung und Putz . . . . . zusammen	216 13 20 249	250
6	Balkenlage wie Nr. 4, jedoch oberhalb statt des Fußbodens mit einem 5—7 cm starken Gips- oder Lehmestrich versehen	Balken usw. wie zu Nr. 4 . . . . . ab die Dielen mit . . . . . bleiben dazu Estrich 7 cm st. . . . . zusammen	216 23 193 112 305	310
7	Balkenlage wie Nr. 5, jedoch oberhalb statt des Fußbodens mit einem 5—7 cm starken Gips- oder Lehmestrich versehen	Balken 24/26 cm st. . . . . Stakhölzer 3 cm st. . . . . Latten 4/6 cm st. . . . . Lehmschlag 11 cm st. . . . . Schalung 2 cm st. . . . . Estrich 7 cm st. . . . . Rohrung und Putz . . . . . zusammen	41 15 3 134 13 112 20 338	340
8	Balkenlage mit ganzem Windelboden, unterhalb mit Lehm verstrichen, oberhalb mit 3,5 cm starkem Fußboden zu Nr. 8	Balken 24/26 cm st. . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . Stakhölzer 4 cm Durchm. . . . . Latten 4/6 cm st. . . . . Lehmschlag einschl. der Stakhölzer 26 cm st. . . . . zusammen	41 23 16 3 274 357	360
				

Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
b) Gewölbte Decken.				
9	Preußische Kappen aus Hintermauerungssteinen bis zu 2,00 m Spannweite bei Abgleichung mit Koksasche und Holzfußboden	$\frac{1}{2}$ Stein starkes Gewölbe und Hintermauerung . . . . . Hinterfüllung mit Koksasche bis zur Unterkante der Lagerhölzer Lagerhölzer 10/10 cm st. bei 0,80 m Mittenabstand . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . Deckenputz . . . . .	245 42 8 23 20	
		zusammen	338	340
9a	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .		340 + 50 =	390
	Bei Auffüllung bis zur Oberkante der Lagerhölzer:			
9b	mit Koksasche . . . . .		340 + 65 =	410
9c	mit Sand . . . . .		390 + 140 =	530
10	Preußische Kappen wie Nr. 9 für mehr als 2,00 bis zu 2,50 m Spannweite	Gewölbe und Hintermauerung . Hinterfüllung mit Koksasche bis Unterkante der Lagerhölzer . Lagerhölzer wie Nr. 9 . . . . Dielen wie Nr. 9 . . . . . Deckenputz . . . . .	249 71 8 23 20	
		zusammen	371	370
10a	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .		370 + 90 =	460
	Bei Auffüllung bis zur Oberkante der Lagerhölzer:			
10b	mit Koksasche . . . . .		370 + 65 =	440
10c	mit Sand . . . . .		460 + 140 =	600
11	Preußische Kappen wie Nr. 9, jedoch aus Lochsteinen . . . . .	Gewölbe und Hintermauerung . Hinterfüllung mit Koksasche bis Unterkante der Lagerhölzer . Lagerhölzer wie Nr. 9 . . . . Dielen wie Nr. 9 . . . . . Deckenputz . . . . .	199 42 8 23 20	
		zusammen	292	290



Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im ein- zelnen kg	im ganzen rd. kg
11 a	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	290 + 50 =		340
	Bei Auffüllung bis zur Oberkante der Lagerhölzer:			
11 b	mit Koksasche . . . . .	290 + 65 =		360
11 c	mit Sand . . . . .	340 + 140 =		480
12	Preußische Kappen wie Nr. 10, jedoch aus Lochsteinen . . . . .	Gewölbe und Hintermauerung .	202	
		Hinterfüllung mit Koksasche bis Unterkante der Lagerhölzer .	71	
		Lagerhölzer wie Nr. 9 . . . . .	8	
		Dielen wie Nr. 9 . . . . .	23	
		Deckenputz . . . . .	20	
		zusammen	324	320
12 a	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	320 + 90 =		410
	Bei Auffüllung bis zur Oberkante der Lagerhölzer:			
12 b	mit Koksasche . . . . .	320 + 65 =		390
12 c	mit Sand . . . . .	410 + 140 =		550
13	Preußische Kappen wie Nr. 9, jedoch aus Schwemmsteinen oder porigen Lochsteinen . . . . .	Gewölbe und Hintermauerung .	153	
		Hinterfüllung mit Koksasche bis Unterkante der Lagerhölzer .	42	
		Lagerhölzer wie Nr. 9 . . . . .	8	
		Dielen wie Nr. 9 . . . . .	23	
		Deckenputz . . . . .	20	
		zusammen	246	250
13 a	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	250 + 50 =		300
	Bei Auffüllung bis zur Oberkante der Lagerhölzer:			
13 b	mit Koksasche . . . . .	245 + 65 =		310
13 c	mit Sand . . . . .	300 + 140 =		440
14	Preußische Kappen wie Nr. 10, jedoch aus Schwemmsteinen . . . . .	Gewölbe und Hintermauerung .	155	
		Hinterfüllung mit Koksasche bis Unterkante der Lagerhölzer .	71	
		Lagerhölzer wie Nr. 9 . . . . .	8	
		Dielen wie Nr. 9 . . . . .	23	
		Deckenputz . . . . .	20	
		zusammen	277	280

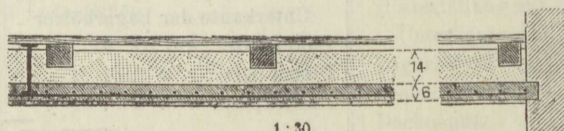
Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
14 a	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	280 + 90 =		370
	Bei Auffüllung bis zur Oberkante der Lagerhölzer:			
14 b	mit Koksasche . . . . .	280 + 65 =		350
14 c	mit Sand . . . . .	370 + 140 =		510
15	Decke in Gewölbeform aus Zement-Kiesbeton bis zu 1,50 m Spannweite, sonst wie Nr. 9 . . . . .	Kiesbeton . . . . . Hinterfüllung mit Koksasche bis Unterkante der Lagerhölzer . . . . . Lagerhölzer wie Nr. 9 . . . . . Dielen wie Nr. 9 . . . . . Deckenputz . . . . . zusammen	220 53 8 23 20 324	320
15	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	320 + 70 =		390
15 a	Bei Auffüllung bis zur Oberkante der Lagerhölzer:			
15 b	mit Koksasche . . . . .	320 + 65 =		390
15 c	mit Sand . . . . .	390 + 140 =		530

## c) Ebene Massivdecken.

Die Eigengewichte sind in jedem Falle zu ermitteln. Nachstehende Beispiele sollen als Anhalt dienen.

16	Ebene Betondecke mit oder ohne Eiseneinlagen (Bauart Monier und ähnliche) bei Abgleichung mit Koksasche und Holzfußboden	Platte bei 6 cm Stärke einschließlich etwa vorhandener Eiseneinlagen . . . . . Überfüllung mit Koksasche, etwa 14 cm st. . . . . Lagerhölzer 10/10 cm st. . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . Deckenputz . . . . . zusammen	141 98 8 23 20 293	290
----	--	--	-----------------------------------	-----

zu Nr. 16

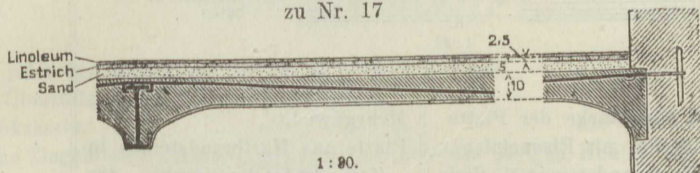


1:30.



Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
16 a	Bei Abgleichung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	295 + 125 =		420
16 b	Für jedes cm Mehrstärke der Platte .	Mehrgewicht . . . . .		25
17	Ebene eingespannte Eisenbetondecke mit voutenförmigen Verstärkungen an den Auflagern (Koenensche Voutenplatte und ähnliche Deckenarten) mit Sandüberfüllung und Linoleumbelag auf Estrich	Platte bei 10 cm Stärke einschließlich Eiseneinlagen und Voutenanschlüssen . . . . . Sandüberfüllung 5 cm st. . . . . Estrich 2,5 cm st. . . . . Linoleum 4 mm st. . . . . Deckenputz . . . . .	270 80 55 5 20	
		zusammen		430

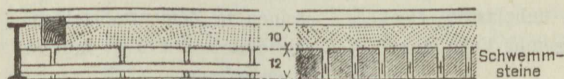
zu Nr. 17



1 : 80.

18	Ebene Ziegeldecke mit Eiseneinlagen (Bauart Kleine und ähnliche) aus Schwemmsteinen in Zementmörtel, mit Überfüllung von Koksasche und Holzfußboden . . . . .	Deckenplatte aus Schwemmsteinen 12 cm st. einschl. der 1/35 mm st. Bandedeisen- einlagen . . . . . Überfüllung mit Koksasche 10 cm st. . . . . Lagerhölzer 10/10 cm st. . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . Deckenputz . . . . .	125 70 8 23 20	
		zusammen	246	250

zu Nr. 18

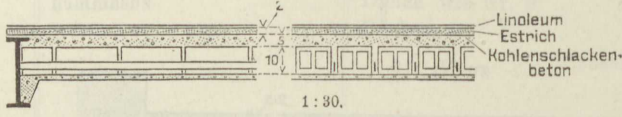


1 : 80.

18 a	Bei Überfüllung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	250 + 90 =		340
19	Ebene Ziegeldecke mit Eiseneinlagen wie vor, jedoch aus porigen Hohlsteinen, bei Auflagerung der Platte auf Betonkonsolen einschl. Über-	Deckenplatte 10 cm st. aus porigen Hohlsteinen in Zementmörtel einschließlich der 1/35 mm st. Bandedeisen-		

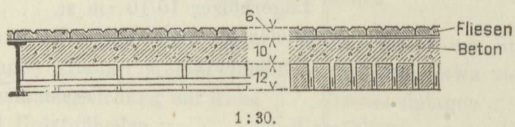
Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
	fällung mit Kohlschlackenbeton und Linoleumbelag auf Estrich (die Träger sind hierbei mit Kiesbeton zu ummanteln)	einlagen und der konsolartigen Auflager . . . . . Überfüllung m. Kohlschlackenbeton 5 cm st. . . . . Estrich 2 cm st. . . . . Linoleum 4 mm st. . . . . Deckenputz . . . . . zusammen	115 50 44 5 20 234	230

zu Nr. 19



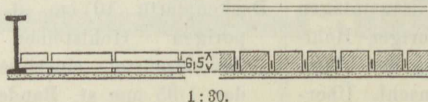
19 a	Für jedes cm Mehrstärke der Platte	Mehrgewicht . . . . .		10
20	Ebene Ziegeldecke mit Eiseneinlagen aus vollen Hartbrandsteinen 1/2 Stein stark mit Überfüllung aus magerem Beton und Fliesenbelag (für Durchfahrten und befahrbare Hofkeller)	Platte aus Hartbrandsteinen in Zementmörtel einschl. der 1/35 mm st. Eiseneinlagen . Magerer Beton 10 cm st. . . Fliesen in Zementmörtelbettung 6 cm st. . . . . zusammen	220 190 126 536	540

zu Nr. 20

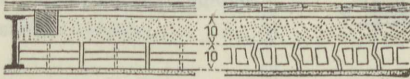
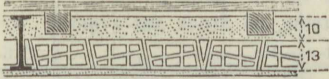



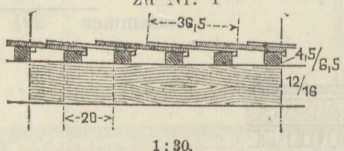
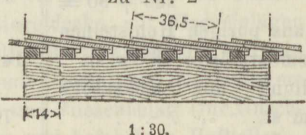
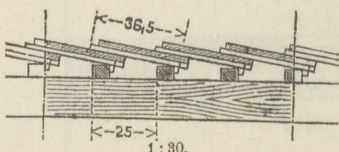
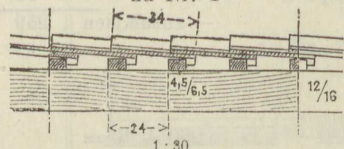
21	Ebene Ziegeldecke wie vor, jedoch 1/4 Stein st. (als unbelastete Decke ohne Überfüllung und Fußboden)	Platte aus Hintermauerungssteinen in Zementmörtel einschließlich der 1/25 mm st. Eiseneinlagen . . . . . Deckenputz . . . . . zusammen	106 20 126	130
----	---	--	------------------	-----

zu Nr. 21

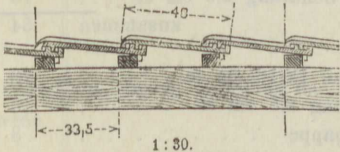
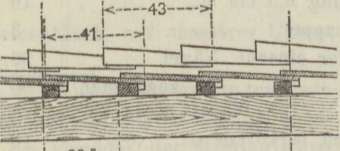




Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
22	Ebene Ziegeldecke ohne Eiseneinlagen (Bauart Förster und ähnliche) aus porigen Hohlsteinen mit quer zur Trägerrichtung verlegten, einander stützenden Ziegelreihen, 10 cm st., einschl. Überfüllung mit Koksasche und Holzfußboden	Platte aus porigen Hohlsteinen in Kalkzementmörtel 10 cm stark . . . . . Überfüllung mit Koksasche 10 cm st. . . . . Lagerhölzer 10/10 cm st. . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . Deckenputz . . . . . zusammen	100 70 8 23 20 221	220
	zu Nr. 22			
				
	1 : 30.			
22 a	Für jedes cm Mehrstärke der Platte .	Mehrgewicht . . . . .		10
22 b	Bei Überfüllung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	220 + 90 =		310
23	Ebene Ziegeldecke ohne Eiseneinlagen (Securadecke und ähnliche) aus porigen Hohlsteinen und schrägem, parallelem oder zentralem Fugenschnitt, gewölbartig wirkend, 13 cm stark, bei Abgleichung mit Koksasche und Holzfußboden	Platte aus porigen Hohlsteinen in Zementmörtel 13 cm st. . Überfüllung mit Koksasche 10 cm st. . . . . Lagerhölzer 10/10 cm st. . . . . Dielen 3,5 cm st. . . . . Deckenputz . . . . . zusammen	142 70 8 23 20 263	260
	zu Nr. 23			
				
	1 : 30.			
23 a	Bei Überfüllung mit Sand statt mit Koksasche . . . . .	260 + 90 =		350
24	Ebene Ziegeldecke wie vor, jedoch 17 cm stark, mit Fliesenbelag in Zementmörtel oder Terrazzofußboden	Deckenplatte aus porigen Hohlsteinen in Zementmörtel 17 cm st. . . . . Fliesenbelag oder Terrazzo- fußboden . . . . . Deckenputz . . . . . zusammen	179 60 20 259	260
	zu Nr. 24			
				
	1 : 30.			
24 a	Dieselbe bei 22 cm starker Platte .	260 + 40 =		300

Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
<b>II. Dächer.</b>				
(Für 1 qm Dachfläche, in der Neigungslinie, nicht in der horizontalen Projektion gemessen.)				
1	Einfaches Ziegeldach aus Biberschwänzen von Normalform, einschl. Lattung und Sparren (Spießdach) zu Nr. 1	Sparren 12/16 cm st., in 1 m Mittenabstand . . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Dachsteine (35 Stück/qm je 36,5 · 15,5 · 1,2 cm) . . . . . Mörtel . . . . . Spieße . . . . . zusammen	13 8 49 3 1 74	75
				
1 a	Dasselbe, aber böhmisch gedeckt in voller Mörtelbettung . . . . .	Mehrgewicht für Mörtel . . . . . dann zusammen	10 85	
2	Doppeldach wie Nr. 1 zu Nr. 2	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Dachsteine, 45 Stück auf 1 qm Mörtel . . . . . zusammen	13 11 63 6 93	95
				
2 a	Dasselbe, aber böhmisch gedeckt	Mehrgewicht für Mörtel . . . . . dann zusammen	20 115	
3	Kronendach wie Nr. 1 zu Nr. 3	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Dachsteine, 55 Stück auf 1 qm Mörtel . . . . . zusammen	13 7 77 6 103	105
				
3 a	Dasselbe, aber böhmisch gedeckt	Mehrgewicht für Mörtel . . . . . dann zusammen	25 130	
4	Pfannendach auf Lattung in böhmischer Deckung, einschließlich Lattung und Sparren, bei Verwendung kleiner, sog. holländischer Pfannen zu Nr. 4	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Pfannen 20 Stück/qm je 34 · 24 · 1,5 cm . . . . . Mörtel . . . . . zusammen	13 6 43 16 78	80
				



Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm		
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg	
5	Pfannendach wie vor, aber mit großen Pfannen	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Pfannen 16 Stück/qm je 40 · 24 · 1,5 cm . . . . . Mörtel . . . . .	13 5 50 16	84	85
		zusammen	84		
6	Pfannendach wie vor, aber auf Stülpschalung nebst darüber genagelten Strecklatten, einschließlich Schalung, Strecklatten, Dachlatten und Sparren (verschaltes Pfannendach)	Wie unter Nr. 4 . . . . . Dazu 2,5 cm st. gestülpte Schalung und Strecklatten . . . . .	78 20	98	100
		zusammen	98		
7	Falzziegeldach einschl. Lattung usw. wie Nr. 1	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Falzziegel, 15 Stück/qm je 40 · 20 cm . . . . . Mörtel zum Verstrich . . . . .	13 5 42 3	63	65
	zu Nr. 7				
	1:30.				
8	Mönch- und Nonnendach, einschließlich Lattung usw. wie Nr. 1	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . 16 Mönche je 43 cm lang und 16 Nonnen je 41 cm lang . . . . . Mörtel . . . . .	13 5 66 17	101	100
	zu Nr. 8				
	1:30				
8 a	Dasselbe böhmisch gedeckt	Mehrgewicht für Mörtel . . . . .	15		115
		dann zusammen			
9	Mönch- und Nonnendach, einschließlich wie vor, aber Mönch und Nonne aus einem Stück (f. 1 qm 15 Steine 42 cm lang, 20 cm breit, sichtbar nach der Eindeckung)	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Dachsteine . . . . . Mörtel . . . . .	13 5 69 3	90	90
		zusammen	90		
9 a	Dasselbe böhmisch gedeckt	Mehrgewicht für Mörtel . . . . .	15		105
		dann zusammen			

Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
10	Mönch- und Nonnendach wie Nr. 9, jedoch aus Steinen kleineren Formats (für 1 qm 18 Mönch- und Nonnensteine 40 cm lang, 18 cm breit, sichtbar nach der Eindeckung)	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Dachsteine . . . . . Mörtel . . . . . zusammen	13 5 63 3 85	85
10 a	Dasselbe böhmisch, gedeckt	Mehrgewicht für Mörtel . . . dann zusammen	15 —	100
11	Englisches Schieferdach auf Lattung wie Nr. 1	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Schiefer einschl. Nägel . . . . zusammen	13 6 25 44	45
12	Englisches Schieferdach wie vor, jedoch auf Schalung	Wie unter Nr. 11 ausschließlich der Lattung . . . . . Dazu Schalung 2,5 cm st. . . . zusammen	38 16 54	55
13	Deutsches Schieferdach auf Schalung und Pappunterlage, einschl. Pappe, Schalung usw. wie Nr. 1 (aus Steinen von rund 35 cm Länge und 25 cm Breite)	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . Dachpappe . . . . . Schiefer einschl. Nägel . . . . zusammen	13 16 3 32 64	65
14	Deutsches Schieferdach wie vor (aus kleineren Steinen von rund 20 cm Länge und 15 cm Breite)	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . Dachpappe . . . . . Schiefer einschl. Nägel . . . . zusammen	13 16 3 28 60	60
15	Zinkdach in Leistendeckung, einschl. der Schalung, Sparren usw. wie Nr. 1	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . 1,20 qm Zinkblech Nr. 13 . . . . zusammen	13 16 7 36	40
16	Kupferdach, mit doppelter Falzung eingedeckt, einschl. wie vor	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . 1,15 qm Kupferblech 0,6 mm st. . zusammen	13 16 7 36	40
17	Wellblechdach aus verzinktem Eisenblech auf Winkeleisen	Wellblech 150 · 40 · 1,5 mm . . Winkeleisen 2,0 m freitragend mit 2,0 m Abstand . . . . . Niete, Anstrich usw. . . . . zusammen	16 7 2 25	25



Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
18	Wellblechdach aus Zinkwellblech auf Schalung, einschl. Schalung und Sparren	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . 1,20 qm Wellblech Nr. 13 . . . zusammen	13 16 8 37	40
19	Einfaches Teerpappdach einschl. Schalung und Sparren	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . 1,05 qm Pappe . . . . . Asphalt, Teer, Leisten u. Nägel zusammen	13 16 3 2 34	35
20	Doppelpappdach	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . erste Lage (starke) Pappe einschl. Nägel . . . . . zweite Lage . . . . . zwei Teeranstriche . . . . . Kies . . . . . zusammen	13 16 6 4 4 9 52	55
21	Holzzementdach einschl. Schalung und Sparren	Sparren 14/18 cm st. . . . . Schalung 3,5 cm st. . . . . 1 Lage starke Pappe und 3 Lagen Papier . . . . . Kies 7 cm st. . . . . Holzzement . . . . . zusammen	16 23 7 126 8 180	180
21 a	Holzzementdach auf massiver Unterlage Bemerkung. Liegt die tragende Platte nicht in der Dachneigung, so muß das Gewicht der erforderlichen Aufmauerung in jedem Falle besonders ermittelt werden. Die Gewichte unter 3) ändern sich entsprechend der gewählten Deckenkonstruktion.	1. Dachdeckung: Pappe und Papier . . . . . Kies 7 cm hoch . . . . . Holzzement . . . . . Zementestrich 2,5 cm st. . . . 2. Wärmeschutz: Lage aus 4 cm st. Korkplatten 3. Decke (vgl. Nr. 9): Gewölbe und Hintermauerung . Abgleichung mit Koksasche . Deckenputz . . . . . zusammen	7 126 8 55 12 245 42 20 515	196 520
21 b	Wird Schlackenbeton 5 cm hoch statt der Korkplatten als Wärmeschutz verwendet, so erhöht sich das Gewicht um . . . . .	50 — 12 = Mehrgewicht . . . zusammen	38 553	550

Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
21 c	Wird eine 12 cm starke Schwemmsteinschicht statt der Korkplatten als Wärmeschutz verwendet, so erhöht sich das Gewicht um . . .	120 — 12 = Mehrgewicht . . . Dazu laut 21 a . . .	108 515	620
		zusammen	623	
22	Leinwanddach (Weber-Falkenberg und ähnliche) einschl. Lattung und Sparren	Sparren . . . . . Lattung . . . . . Leinwand . . . . . Anstrich und Klebmasse sowie Nägel . . . . .	13 6 2 2	25
		zusammen	23	
22 a	Dasselbe auf Schalung . . . . .	Mehrgewicht . . . . . dann zusammen	10	35
23	Schindeldach einschl. Schalung und Sparren zu Nr. 23	Sparren 12/16 cm st. . . . . Schalung 2,5 cm st. . . . . Schindeln einschl. Nägel . . . . .	13 16 16	45
		zusammen	45	
<p style="text-align: center;">1 : 30.</p>				
24	Rohrdach einschl. Lattung und Sparren	Sparren 12/16 cm st. . . . . Latten 4,5/6,5 cm st. . . . . Stacken 3,5 cm Durchm. . . . . Rohr . . . . . Neugewicht	13 5 2 29 49	80
		Dazu für Moosansatz und festgehaltenes Wasser etwa . . . zusammen	30 79	
<p style="text-align: center;">zu Nr. 24</p> <p style="text-align: center;">1 : 30.</p>				



Nr.	Benennung	Einzelteile	Eigengewicht für 1 qm	
			im einzelnen kg	im ganzen rd. kg
25	Strohdach einschl. wie vor	Sparren 12/16 cm st. . . . .	13	
		Latten . . . . .	6	
		Staken 3,5 cm Durchm. . . . .	3	
		Stroh . . . . .	22	
		Neugewicht	44	
	Dazu für Moosansatz und festgehaltenes Wasser etwa . . .	30		
	zusammen	74		75
		zu Nr. 25		
26	Glasdach auf Sprosseneisen einschl. der letzteren bei 4 mm st. Glase	Glas . . . . .	11	
		Sprossen von 5 kg Gewicht für 1 m und rund 0,45 m Abstand zusammen	11	
26 a	Dasselbe bei 5 mm st. Rohglase	Glas . . . . .	14	
		Sprossen von 6 kg Gewicht für 1 m und rund 0,55 m Abstand zusammen	11	
26 b	Dasselbe bei 5 mm st. Drahtglase	Mehrgewicht gegen 26 a . . . . . dann zusammen	5	30
26 c	Dasselbe bei 6 mm st. Rohglase	Glas . . . . .	17	
		Sprossen von 7 kg Gewicht für 1 m und rund 0,55 m Abstand zusammen	13	
26 d	Dasselbe bei 6 mm st. Drahtglase	Drahtglas, Mehrgewicht gegen 26 c . . . . . dann zusammen	5	35
26 e	Für jedes mm Mehrstärke des Glases	Mehrgewicht . . . . .		3
26 f	Bei Verwendung von Drahtglas	Mehrgewicht für die Draht-einlage . . . . .		5
27	Gewölbtes Dach aus Glasbausteinen (Bauart Falconnier und ähnliche)	Glasbausteine . . . . .	42	
		Mörtel . . . . .	22	
	zusammen	64	65	

## B. Eigengewichte der gebräuchlichsten Baustoffe und Baukörper.

Nr.	Benennung der Baustoffe	1 cbm wiegt  kg	Als durchschnittliches Gewicht anzunehmen
<b>Füllstoffe.</b>			
1	Erde, Sand, Lehm, naß . . . . .	1700 bis 2500	2100
2	„ „ „ trocken . . . . .	1400 „ 1800	1600
3	Kies, naß . . . . .	1900 „ 2100	2000
4	„ trocken . . . . .	1500 „ 1900	1700
5	Koksasche . . . . .	600 „ 850	700
6	Bimssteinsand . . . . .	400 „ 900	700
<b>Werkstücke und Quadermauerwerk aus:</b>			
7	Granit, Syenit, Porphy . . . . .	2200 „ 3000	2800
8	Basalt . . . . .	2400 „ 3300	3000
9	Basaltlava, ziemlich dicht . . . . .	1800 „ 3000	2800
10	„ porig . . . . .	1500 „ 2000	1800
11	Marmor . . . . .	2600 „ 2900	2800
12	Kalkstein, dicht . . . . .	1500 „ 2700	2500
13	„ porig . . . . .	1500 „ 2200	2000
14	Sandstein (schwerere Grauwacke und Kohlen- sandstein) . . . . .	2500 „ 2800	2700
15	sonstigen Sandsteinen . . . . .	2000 „ 2600	2400
16	Tuffstein, Porphy und dichtem Kalktuff . . . . .	1600 „ 2200	2000
17	Bimsstein, Leuzit- und lockerem Kalktuff . . . . .	1200 „ 1500	1400
18	Schiefer . . . . .	2600 „ 2800	2700
<b>Bruchsteinmauerwerk aus:</b>			
19	Granit . . . . .	2300 „ 2800	2700
20	Kalkstein, Sandstein, Schiefer . . . . .	2000 „ 2600	2500
<b>Mauerwerk aus künstlichen Steinen, und zwar aus:</b>			
21	Klinkern . . . . .	1800 „ 2000	1900
22	Hartbrandsteinen in Kalkzementmörtel . . . . .	1700 „ 1900	1800
23	Hintermauerungssteinen in Kalkmörtel . . . . .	1500 „ 1700	1600
24	porigen Vollsteinen . . . . .	1000 „ 1200	1100
25	Lochsteinen . . . . .	1250 „ 1300	1300
26	porigen Lochsteinen . . . . .	900 „ 1100	1000
27	Schwemmsteinen . . . . .	900 „ 1100	1000
28	Korksteinen . . . . .	500 „ 700	600
29	Kalksandsteinen . . . . .	1700 „ 1900	1800
30	Kunstsandstein . . . . .	2000 „ 2200	2100



Nr.	Benennung der Baustoffe	1 cbm wiegt kg	Als durchschnittliches Gewicht anzunehmen	
<b>Mörtel.</b>				
31	Zementmörtel . . . . .	2000 bis 2300	2100	
32	Kalkzementmörtel . . . . .	1800 „ 2000	1900	
33	Kalkmörtel . . . . .	1650 „ 1800	1700	
34	Traßmörtel . . . . .	1900 „ 2100	2000	
35	Gips (gegossen) . . . . .	900 „ 1000	1000	
<b>Beton aus:</b>				
36	Kies, Granitschotter u. dgl. . . . .	1800 „ 2400	2200 2400*)	*) einschließ- lich Eisenein- lagen bei Eisenbeton- bauten, sofern nicht ein an- deres Gewicht nachgewiesen wird.
37	Ziegelschotter . . . . .	1500 „ 2000	1800	
38	Kohlenschlacke . . . . .	850 „ 1500	1000	
39	Bimssteinkies . . . . .	900 „ 1100	1000	
<b>Estriche und Fußbodenbeläge aus:</b>				
40	Zement und Zementfliesen . . . . .	2100 „ 2300	2200	
41	Gips . . . . .	1900 „ 2150	2100	
42	Terrazzo . . . . .		2000	
43	Gußasphalt . . . . .	1100 „ 1500	1400	
44	Tonfliesen . . . . .	2000 „ 2100	2000	
45	Linoleum . . . . .	1000 „ 1300	1200	
46	Korkplatten (als Unterlage) . . . . .	250 „ 300	300	
47	Glas . . . . .	2400 „ 2700	2600	
<b>Bauhölzer.</b>				
48	Kiefer, lufttrocken . . . . .	300 „ 800	650	
49	Fichte, lufttrocken . . . . .	350 „ 600	550	
50	Tanne, lufttrocken . . . . .	400 „ 800	600	
51	Lärche, lufttrocken . . . . .	450 „ 800	650	
52	Pitchpine (Pechkiefer), lufttrocken . . . . .	800 „ 1000	900	
53	Yellowpine, lufttrocken . . . . .	600 „ 800	700	
54	Eiche, lufttrocken . . . . .	700 „ 1000	900	
55	Buche, lufttrocken . . . . .	600 „ 900	750	
<b>Metalle.</b>				
56	Gußeisen . . . . .		7250	
57	Schweißeisen . . . . .		7800	
58	Flußeisen . . . . .		7850	
59	Flußstahl . . . . .		7860	
60	Blei . . . . .	11 300 bis 11 450	11 400	
61	Kupfer (gewalzt) . . . . .	8800 „ 9 000	8900	
62	Bronze . . . . .	7500 „ 8 900	8600	
63	Zink, gegossen . . . . .	6850 „ 7 000	6900	
64	„ gewalzt . . . . .	7150 „ 7 200	7200	
65	Zinn, gewalzt . . . . .	7200 „ 7 500	7400	

## C. Belastungen.

## a) Zwischendecken.

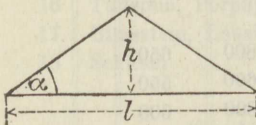
Nr.	Art der Nutzlast.	kg/qm
1	Nutzlast für Wohngebäude und kleine Geschäftshäuser durch Möbel, Menschen usw., abgesehen von den in einzelnen Räumen etwa vorkommenden besonderen Belastungen durch Akten, Bücher, Waren, Maschinen usw. . . . .	250
2	Nutzlast in Geschäftsgebäuden größeren Umfanges, Versammlungssälen, Unterrichtsräumen, Turnhallen . . . . .	500
3	Nutzlast in Fabriken, wenn nicht größere Belastungen anzunehmen sind	500
4	Nutzlast für Decken unter Durchfahrten und befahrbaren Höfen, wenn nicht größere Einzellasten (Raddruck) zu berücksichtigen sind . . . . .	800
5	Treppen-Nutzlast . . . . .	500
6	Nutzlast in Dachbodenräumen von Wohngebäuden . . . . .	125

In Lagerräumen ist die Nutzlast nach dem Eigengewichte der zu lagernden Stoffe und der anzunehmenden Höhe der Lagerung in jedem Einzelfalle zu ermitteln. Dabei ist die Nutzlast für die Gänge, sofern sie nur geschäftlichen Zwecken dienen, nicht aber zur Benutzung durch das Publikum bestimmt sind, mit 150 kg/qm in Rechnung zu stellen.

Für Aktengerüste und Schränke in Registraturen, Bibliotheken, Archiven usw. ist einschließlich der Hohlräume eine Nutzlast von 500 kg für das Raummeter anzunehmen.

## b) Dächer.

1. Die Schneelast ist zu 75 kg/qm der Dachfläche anzunehmen und dabei die Möglichkeit einer vollen oder einer einseitigen Schneebelastung zu berücksichtigen. Bei steilen Dächern kann die Belastung geringer angenommen werden, sofern einzelne Dachteile nicht etwa Schneesäcke bilden. Mit Bezug auf die aus nebenstehender Abbildung ersichtlichen Bezeichnungen kann die Schneebelastung angenommen werden



zu 55 kg/qm der Horizontalprojektion, wenn  $h = \frac{1}{2} l$  ist,  
 „ 65 „ „ „ „  $h = \frac{1}{3} l$  „  
 „ 70 „ „ „ „  $h = \frac{1}{4} l$  „  
 „ 75 „ „ „ „  $h = \frac{1}{5} l$  „

oder der Schneedruck kann aus folgender Formel berechnet werden

$$S = 75 \cos \alpha \text{ (kg/qm)}$$

für 1 qm der Horizontalprojektion.

Bei ganz steilen Dächern, an denen nur geringfügige Schneemassen haften können, ist eine Schneelast nicht weiter in Betracht zu ziehen.

2. Der Winddruck ist in der Regel zu 125 kg/qm rechtwinklig getroffener Fläche anzunehmen. Für hohe Bauten auf kleiner Grundfläche (schlanke Türme) ist außerdem noch der Nachweis zu führen, daß bei einem Winddruck von 150 kg/qm die für die zulässigen Beanspruchungen angegebenen oberen Grenzen nicht überschritten werden.

Werden freistehende Gebäude, deren Frontwände nicht durch Querwände versteift sind, auf Standsicherheit gegen Winddruck untersucht, so genügt es, mit einem Winddruck von 75 kg/qm zu rechnen.



Bezeichnet  $\alpha$  den Neigungswinkel eines Teiles  $F$  der Dachfläche gegen die wagerecht anzunehmende Windrichtung, so ist der auf die Fläche  $F$  entfallende und rechtwinklig zu ihr wirkende Winddruck

$$W = W_0 F \sin^2 \alpha$$

wo  $W_0 = 125$  bzw.  $150$  kg einzusetzen ist. Bei ebenen Dächern entfällt hiernach aus dem Winddruck von  $125$  kg/qm und bei einer

Dachneigung von	70°	65°	60°	55°	50°	45°	40°	35°	30°	25°
ein Betrag von	110	103	94	84	73	63	52	41	31	22 kg

rechtwinklig auf  $1$  qm der Dachfläche.

Bei Dachneigungen unter  $25^\circ$  genügt es in der Regel, den Winddruck durch einen Zuschlag zur senkrechten Belastung zu berücksichtigen; die wagerechte Seitenkraft darf vernachlässigt werden.

Die Gesamtbelastung der Dächer, bestehend aus Eigengewicht, Schnee- und Winddruck, für  $1$  qm der Horizontalprojektion kann angenommen werden

beim Glasdach	mit $10$ bis $25^\circ$ Neigung zu	$125$ bis $150$ kg
„ Schieferdach	„ $25$ „ $45^\circ$ „	„ $150$ „ $250$ „
„ Ziegeldach	„ $30$ „ $45^\circ$ „	„ $250$ „ $300$ „
„ Holzzementdach zu	„ „ „	„ $275$ „

bei steilen Mansardendachflächen mit Schiefer- oder Ziegeldeckung von  $45$  bis  $70^\circ$  Neigung zu  $300$  bis  $700$  „

Bei Dächern über offenen Hallen ist auch ein von innen nach außen wirkender Winddruck von etwa  $60$  kg auf  $1$  qm rechtwinklig getroffener Fläche in Betracht zu ziehen.

Endlich ist noch in der Mitte der einzelnen Dachteile (Sparren, Pfetten, Sprossen-eisen usw.) eine Nutzlast von  $100$  kg für einzelne, das Dach bei Wiederherstellungs- oder Reinigungsarbeiten betretende Personen anzunehmen.

## D. Zulässige Beanspruchung der Baustoffe.

Die nachstehend unter b) bis e) angegebene untere Grenze der zulässigen Beanspruchungen ist einzuhalten, wenn die statische Berechnung nicht mit voller Genauigkeit durchgeführt wird oder nicht genau durchgeführt werden kann. Mit den höheren Werten darf gerechnet werden, wenn einwandfreie statische Untersuchungen unter Annahme der stärksten Belastungen bei Berücksichtigung der denkbar ungünstigsten Umstände durchgeführt werden.

### a) Eisen.

Die folgenden Angaben unter Ziffer 1 bis 3 beziehen sich auf Flußeisen; sollte ausnahmsweise noch Schweißeisen verwendet werden, so sind die Beanspruchungen um  $10$  vH. zu ermäßigen. Für altes, wieder zur Verwendung gelangendes Eisen ist die Beanspruchung je nach seiner Beschaffenheit noch weiter herabzusetzen.

1. Träger zur Unterstützung von Decken und Treppen dürfen auf Biegung höchstens mit  $1200$  kg/qcm beansprucht werden. Bei der Berechnung der Angriffsmomente ist die Stützweite, d. i. die Entfernung der Auflagermitten einzuführen.

Bei Nieten und gedrehten Schraubenbolzen darf die Scherspannung höchstens  $1000$  kg/qcm, der Lochleibungsdruck höchstens  $2000$  kg/qcm, bei gewöhnlichen Schraubenbolzen die Scherspannung höchstens  $750$  kg/qcm, der Lochleibungsdruck höchstens  $1500$  kg/qcm betragen.

2. Schmiedeeiserne Stützen dürfen mit  $1200$  kg/qcm, bei genauer Berechnung der durch ungünstigste Laststellung (Winddruck, Einzellasten, z. B. Kranbahnträger u. dgl.) eintretenden größten Kantenpressung mit  $1400$  kg/qcm beansprucht werden. Sie müssen ferner nach der Eulerschen Formel mit fünffacher Sicherheit gegen Knicken berechnet werden ( $J_{\min} = 2,33 P l^2$ ). Als Knicklänge ist die Systemlänge einzuführen; stehen

die Stützen in mehreren Geschossen übereinander und werden sie durch anschließende Deckenträger unverrückbar gehalten, so ist die Geschoßhöhe als Knicklänge ohne Rücksicht auf etwaigen Stoß in Deckenhöhe anzunehmen.

Maßgebend ist derjenige Fall, der den größten Querschnitt ergibt.

3. Dächer, Fachwerkwände, Träger zur Unterstützung von Wänden, Kranbahnträger u. dgl. dürfen in denjenigen Teilen, deren Querschnittgröße durch die ständige Last, die Nutzlast und den Schneedruck allein bedingt ist, mit 1200 kg/qcm beansprucht werden, während für diejenigen Teile, deren größte Spannung bei gleichzeitiger ungünstigster Wirkung der genannten Lasten und des Winddrucks eintritt, mit einer Beanspruchung des Eisens von 1400 kg/qcm gerechnet werden darf. Die Spannung von 1400 kg/qcm ist nur zulässig, wenn der Winddruck zu 150 kg/qcm angesetzt wird.

Die Spannung von 1400 kg/qcm darf ausnahmsweise bis zu 1600 kg/qcm bei Dächern gesteigert werden, wenn für eine den strengsten Anforderungen genügende Durchbildung, Berechnung und Ausführung volle Sicherheit gewährleistet erscheint.

Für die Berechnung der Träger zur Unterstützung von Wänden ist die Entfernung der Auflagermitteln als Stützweite einzuführen.

Maßgebend ist derjenige Fall, der den größten Querschnitt ergibt.

Die Scherspannung der Nieten und gedrehten Schraubenbolzen darf 1000 kg/qcm, der Lochleibungsdruck 2000 kg/qcm betragen.

Bei fachwerkartigen Bauteilen brauchen die sogenannten Neben- und Zwängungsspannungen nicht berücksichtigt zu werden.

Die nach der Eulerschen Formel zu berechnende Sicherheit der auf Druck beanspruchten Glieder muß im ungünstigsten Falle eine vierfache sein ( $J_{\min} = 1,82 Pl^2$ ). Als Länge dieser Glieder ist die ganze Systemlänge einzuführen.

Anker dürfen nur mit 800 kg/qcm beansprucht werden.

4. Gußeisen darf in Lagern auf Druck mit 1000 kg, in anderen Bauteilen auf Druck mit 500, auf Biegung mit 250, auf Abscherung mit 200 kg/qcm beansprucht werden.

5. Stahlformguß darf auf Biegung mit 1200 kg/qcm,

6. Schmiedestahl auf Zug, Druck und Biegung bis zu 1400 kg/qcm beansprucht werden.

7. Gußeiserne Säulen sind nach der Eulerschen Formel mit sechs- bis achtfacher Sicherheit auf Knicken zu berechnen ( $J_{\min} = 6 Pl^2$  bis  $8 Pl^2$ ).

**b) Holz.**

Eichenholz:	Zug . . . . .	100 bis 120 kg/qcm
	Druck . . . . .	80 " 100 "
	Biegung . . . . .	100 " 120 "
	Abscherung parallel zur Faser . . . . .	15 " 20 "
	Abscherung rechtwinklig zur Faser . . . . .	80 " 90 "
Kiefernholz:	Zug . . . . .	100 " 120 "
(astfrei)	Druck . . . . .	60 " 80 "
	Biegung . . . . .	100 " 120 "
	Abscherung parallel zur Faser . . . . .	10 " 15 "
	Abscherung rechtwinklig zur Faser . . . . .	60 " 70 "

Bei Bauten für vorübergehende Zwecke (Ausstellungshallen u. dgl.) dürfen die Zahlen um 50 v. H. erhöht werden.

Stützen müssen nach der Eulerschen Formel mit  $E = 100000$  kg/qcm eine sechs- bis zehnfache Sicherheit gegen Knicken besitzen ( $J_{\min} = 60 Pl^2$  bis  $100 Pl^2$ ). Die untere Grenze von  $J$  gilt aber nur für vorübergehende Bauten.



### e) Natürliche Bausteine.

Bestimmte Mittelwerte für die Druckfestigkeit lassen sich bei der großen Verschiedenheit der Gesteine in den einzelnen Brüchen und dort wieder in den einzelnen Schichten und Lagen nicht angeben. Die Grenzwerte ergeben sich aus der unten angefügten Tabelle E.

Für Auflagersteine ist eine . . . . . 10 bis 15 fache Sicherheit,  
für Pfeiler und Gewölbe eine . . . . . 15 „ 20 „ „  
für sehr schlanke Pfeiler und Säulen eine . . 25 „ 30 „ „ „

anzunehmen.

Wenn keine Festigkeitsnachweise erbracht werden, wird empfohlen, folgende Werte nicht zu überschreiten:

Gesteinsart	Druckspannung in kg/qcm		
	Auflagersteine	Pfeiler und Gewölbe	Sehr schlanke Pfeiler und Säulen
Granit . . . . .	60 bis 90	45 bis 60	25 bis 30
Sandstein . . . . .	30 „ 50	25 „ 30	15 „ 20
Kalkstein und Marmor . . . . .	30 „ 40	20 „ 30	12 „ 15

### d) Mauerwerk.

Unter der Voraussetzung kunstgerechter und sorgfältiger Ausführung sowie ausreichender Erhärtung des Mörtels sind folgende Druckbeanspruchungen zulässig:

Lfd. Nr.	Bezeichnung des Mauerwerks	Zulässige Druckbeanspruchung in kg/qcm
1	Für gewöhnliches Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel mit dem Mischungsverhältnis von 1 Raumteil Kalk und 3 Raumteilen Sand . . . . .	bis 7
2	Für Mauerwerk aus Hartbrandsteinen in Kalkzementmörtel (1 R.-T. Zement, 2 R.-T. Kalk, 6 bis 8 R.-T. Sand) . . . . .	12 „ 15
3	Für Mauerwerk aus Klinkern in Zementmörtel (1 R.-T. Zement und 3 R.-T. Sand mit Zusatz von etwas Kalkmilch) . . . . .	20 „ 30
4	Für Mauerwerk aus porigen Ziegeln . . . . .	3 „ 6
5	Für Mauerwerk aus Schwemmsteinen von mindestens 20 kg/qcm Druckfestigkeit . . . . .	„ 3
6	Für Mauerwerk aus Kalksandsteinen in Kalkmörtel (1 R.-T. Kalk und 3 R.-T. Sand) . . . . .	„ 7
7	Für Mauerwerk aus Kalksandsteinen in Kalkzementmörtel (1 R.-T. Zement, 2 R.-T. Kalk, 6 bis 8 R.-T. Sand) . . . . .	12 „ 15
8	Für Bruchsteinmauerwerk in Kalkmörtel . . . . .	„ 5
9	Für Fundamentmauerwerk aus geschüttetem Beton . . . . .	6 „ 8
10	Für Fundamentmauerwerk aus gestampftem Beton . . . . .	10 „ 15

### e) Baugrund.

Guter Baugrund darf mit 3 bis 4 kg/qcm beansprucht werden. Die Wahl darüber hinausgehender Beanspruchungen ist besonders zu begründen.

### E. Druckfestigkeit der gebräuchlichsten natürlichen Bausteine.

Nr.	Gesteinsart	Druckfestigkeit in kg/qcm	Bemerkungen
<b>Granite</b>			
1	sehr feste	1200 bis 2000	<b>Vorbemerkung.</b> Alle angegebenen Festigkeiten gelten bei Beanspruchung annähernd rechtwinklig zur Lagerfläche.  <b>Zu 1 bis 7:</b> Höhere Druckfestigkeiten können angenommen werden, wenn sie im Einzelfalle nachgewiesen werden.
2	festen } polierbare	800 " 1200	
3	wenig feste, wenig oder nicht polierbare . . .	450 " 800	
4	Syenit . . . . .	800 " 2000	
5	Porphy . . . . .	500 " 2000	
6	Basalt . . . . .	1000 " 2000	
7	Basaltlava . . . . .	300 " 1500	
<b>Kalksteine</b>			
8	Marmor . . . . .	500 " 1800	<b>Zu 8:</b> Bunt geaderter Marmor hat in der Nähe der Spaltichtung keine in Betracht kommende Festigkeit.  <b>Zu 8 bis 17:</b> Sofern die Steine nicht als völlig zuverlässig bekannt sind, ist reichliche Sicherheit zu wählen.
9	dicht . . . . .	200 " 1600	
10	porig . . . . .	200 " 600	
11	Tonschiefer (Bruchsteine)	600 " 1700	
<b>Sandsteine</b>			
12	sehr feste . . . . .	1500 " 2000	Z. B. Grauwacken, Kohlensandsteine und Keupersandsteine.
13	festen . . . . .	1000 " 1500	Z. B. Grauwacken, Kohlensandsteine, Keupersandsteine, Quadersandsteine, Buntsandsteine, Molassesandsteine und Jurasandsteine.
14	mittelfeste . . . . .	600 " 1000	Z. B. Grauwacken, Kohlensandsteine und Keupersandsteine, Quadersandsteine, Buntsandsteine, Molassesandsteine, Jurasandsteine, Hilssandsteine.
15	wenig feste . . . . .	200 " 600	Z. B. Kohlensandsteine, Keupersandsteine, Quadersandsteine, Buntsandsteine, Molassesandsteine, Jurasandsteine und Hilssandsteine.
<b>Tuff</b>			
16	festen . . . . .	300 " 1500	Z. B. Kalktuffe.
17	wenig feste . . . . .	200 " 300	Porphyrtuffe, Leuzittuffe und Bimssteintuffe sowie Kalktuffe.



## Berechnungsgrundlagen für die statische Untersuchung von Hochbauten.

Nr.	Gegenstand	Gewicht in kg/qm
<b>A. Eigengewichte von Zwischendecken und Dächern.</b>		
a) Decken.		
Holzbalkendecken bis 1 m Balkenabstand und 24/26 cm Balkenstärke.		
1	Balkenlage nur mit Fußboden . . . . .	70
2	Balkenlage mit halbem Windelboden und Fußboden ohne unteren Verputz	220
3	Balkenlage wie vor, jedoch unterhalb verschalt und verputzt . . . . .	250
4	Balkenlage mit ganzem Windelboden, unterhalb mit Lehm verstrichen mit Fußboden, ohne Deckenputz . . . . .	360
Gewölbe.		
5	Kappengewölbe aus vollen Ziegeln in $\frac{1}{2}$ St. Stärke, zwischen Trägern bis 2 m Spannweite, Abgleichung mit Koksasche bis zur Oberfläche des Gewölbes und Holzfußboden . . . . .	340
6	Kappengewölbe wie vor, jedoch mit Abgleichung bis zur Oberfläche der Lagerhölzer . . . . .	410
7	Kappengewölbe wie Nr. 5, jedoch aus Lochsteinen . . . . .	290
8	Kappengewölbe wie Nr. 6, jedoch aus Lochsteinen . . . . .	320
9	Kappengewölbe wie Nr. 5, jedoch aus Schwemmsteinen oder porigen Steinen	250
10	Kappengewölbe aus Kiesbeton, sonst wie Nr. 5 . . . . .	320
Ebene Massivdecken		
11	aus Beton, 6 cm stark, mit oder ohne Eiseneinlagen, mit 14 cm hoher Abgleichung von Koksasche und mit Holzfußboden . . . . .	290
12	aus Eisenbeton, 10 cm stark, mit Verstärkungen der Auflager, 5 cm Sandauffüllung, Estrich und Linoleum . . . . .	430
13	aus Schwemmsteinen, 12 cm stark, mit Eiseneinlagen, 10 cm Koksaschen- auffüllung und Holzfußboden . . . . .	250
14	aus Schwemmsteinen mit Sandauffüllung, sonst wie Nr. 13 . . . . .	340
15	aus porigen Hohlziegeln, 10 cm hoch, mit Konsolauflegern, 5 cm Schlackenbetonauffüllung, Estrich und Linoleum . . . . .	230
16	aus vollen Ziegeln, $\frac{1}{2}$ St. stark, 10 cm Betonauftrag und Fliesen . . . . .	540
17	aus vollen Ziegeln, $\frac{1}{4}$ St. stark, als unbelastete Decke ohne Über- schüttung oder Fußboden . . . . .	130
18	aus porigen Hohlziegeln, 10 cm stark, ohne Eiseneinlagen, mit 10 cm Koksaschenauffüllung und Holzfußboden . . . . .	220
19	aus porigen Hohlziegeln, bis 13 cm hoch, sonst wie vor . . . . .	260
b) Dächer.		
(Gewichte für 1 qm Dachfläche.)		
20	Einfaches Ziegeldach aus Biberschwänzen mit Latten und Sparren . . . . .	75
21	dasselbe, böhmisch gedeckt (in vollem Mörtelbett) . . . . .	85
22	Doppeldach aus Biberschwänzen mit Latten und Sparren . . . . .	95
23	dasselbe, böhmisch gedeckt . . . . .	115
24	Kronendach aus Biberschwänzen mit Latten und Sparren . . . . .	105

Nr.	Gegenstand	Gewicht in kg/qm
25	dasselbe, böhmisch gedeckt . . . . .	130
26	Pfannendach auf Lattung, aus kleinen holländischen Pfannen einschl. Latten und Sparren . . . . .	80
27	dasselbe aus großen Pfannen . . . . .	85
28	Pfannendach auf Stülpchalung mit Strecklatten, Dachlatten und Sparren	100
29	Falzziegeldach einschl. Latten und Sparren . . . . .	65
30	Mönch- und Nonnendach mit Latten und Sparren . . . . .	100
31	dasselbe, böhmisch gedeckt . . . . .	115
32	Englisches Schieferdach auf Lattung, mit Latten und Sparren . . . . .	45
33	Englisches Schieferdach auf Schalung, mit Schalung und Sparren . . . . .	55
34	Deutsches Schieferdach auf Schalung und Pappunterlage, mit Schalung, Sparren und Pappe . . . . .	65
35	dasselbe, jedoch aus kleineren Steinen (etwa 20 cm lang, 15 cm breit) .	60
36	Zinkdach in Leistendeckung einschl. Schalung und Sparren . . . . .	40
37	Kupferdach mit doppelter Falzung, mit Sparren und Schalung . . . . .	40
38	Einfaches Teerpappdach mit Schalung und Sparren . . . . .	35
39	Doppelpappdach mit Kiesüberzug, mit Schalung und Sparren . . . . .	55
40	Holzzementdach einschl. 7 cm Kiesdecke, Schalung und Sparren . . . . .	180
41	Holzzementdach auf Gewölbe, Abgleichung mit Koksasche, Zementestrich und 7 cm Kiesdecke . . . . .	520
42	Glasdach auf Eisensprossen, einschl. der Sprossen, bei 4 mm Glasdicke	22
43	dasselbe, bei 5 bis 6 mm starkem Roh- oder Drahtglase . . . . .	30
<b>B. Eigengewichte von Baustoffen und Baukörpern.</b>		<b>kg/cbm</b>
44	Erde, Sand, Lehm, naß . . . . .	2100
45	desgleichen, trocken . . . . .	1600
46	Kies, naß . . . . .	2000
47	Kies, trocken . . . . .	1700
48	Koksasche . . . . .	700
Werkstücke und Quadermauerwerk aus		
49	Granit, Basaltlava, Marmor . . . . .	2800
50	Kalkstein . . . . .	2500
51	Sandstein (schwerer Grauwacken- und Keupersandstein) . . . . .	2700
52	sonstigem Sandstein . . . . .	2400
53	Tuffstein . . . . .	1400
54	Bruchsteinmauerwerk aus Granit	2700
55	desgleichen aus Kalkstein, Sandstein, Tonschiefer u. dgl. . . . .	2500
Mauerwerk aus künstlichen Steinen, und zwar aus		
56	Klinkern in Zementmörtel . . . . .	1900
57	Hartbrandziegeln in Kalkzementmörtel . . . . .	1800
58	Ziegelsteinen in Kalkmörtel . . . . .	1600
59	porigen Vollziegeln . . . . .	1100
60	Lochziegeln . . . . .	1300
61	porigen Lochziegeln . . . . .	1100
62	Schwemmsteinen . . . . .	1000
63	Kalksandsteinen . . . . .	1800



Nr.	Gegenstand	Gewicht in kg/cbm
<b>Beton aus</b>		
64	Kies, Granitschotter u. dgl. . . . .	2200
65	Kies, Granitschotter u. dgl. einschl. Eiseneinlagen bei Eisenbeton . . . . .	2400
66	Ziegelschotter . . . . .	1800
67	Koks- oder Kohlschlacke oder Bims Kies . . . . .	1000
<b>Bauhölzer:</b>		
68	Kiefer, lufttrocken . . . . .	650
69	Fichte, „ . . . . .	550
70	Tanne, „ . . . . .	600
71	Eiche, „ . . . . .	900
<b>Metalle:</b>		
72	Gußeisen . . . . .	7250
73	Schweißeisen . . . . .	7800
74	Flußeisen . . . . .	7850
<b>C. Belastungen.</b>		<b>kg/qm</b>
75	Nutzlast in Wohngebäuden und kleineren Geschäftsgebäuden . . . . .	250
76	Nutzlast in Versammlungssälen, Unterrichtsräumen, Turnhallen, Warenhäusern, Fabriken, wenn nicht nach den vorliegenden Umständen größere Belastungen anzunehmen sind . . . . .	500
77	Nutzlast für Decken unter Durchfahrten und befahrenen Höfen, soweit nicht größere Einzellasten (Raddruck) zu erwarten sind . . . . .	800
78	Treppennutzlast . . . . .	500
79	In Lagerräumen ist die Nutzlast nach dem Eigengewicht der zu lagernden Stoffe und der Höhe der Lagerung zu ermitteln	
80	Nutzlast in Dachbodenräumen städtischer Wohngebäude . . . . .	125
81	Schneedruck für 1 qm der Dachfläche . . . . . (Bei mehr als 50° Dachneigung braucht der Schneedruck nicht berücksichtigt zu werden.)	75
82	Winddruck für 1 qm rechtwinklig getroffener Fläche . . . . .	125
<b>Gesamtbelastung der Dächer, bestehend aus Eigenlast, Schnee- und Winddruck für 1 qm der Horizontalprojektion:</b>		
83	Glasdach bei 10° Neigung . . . . .	125
84	desgleichen bei 25° Neigung . . . . .	150
85	Schieferdach bei 25° Neigung . . . . .	150
86	desgleichen bei 45° Neigung . . . . .	250
87	Ziegeldach bei 30° Neigung . . . . .	250
88	desgleichen bei 45° Neigung . . . . .	300
89	Holzzementdach auf Holzsparren usw. . . . .	275
90	Steile Mansardendachflächen mit Schiefer- oder Ziegeldeckung bei 45° Neigung . . . . .	300
91	Dieselben bei 70° Neigung . . . . .	700

Nr.	Gegenstand	Zulässige Beanspruchung in kg/qcm				
		Zug	Druck	Bie- gung	Ab- sicherung	Loch- leibungs- druck
<b>D. Zulässige Beanspruchung der Baustoffe.</b>						
92	Flußeisen in Trägern zur Unterstützung von Decken und Treppen . . . . . Als Stützlänge ist die Entfernung zwischen den Auflagermitten anzunehmen.	1200	1200	1200	1000	2000
93	Flußeisen in Stützen . . . . .	1200	1200	1200	1000	2000
94	Flußeisen in Stützen bei genauer Berechnung der unter den ungünstigsten Umständen auftretenden Kantenpressung . . . . . Zu Nr. 93 und 94: Die Berechnung auf Knicken hat nach der Formel $J_{\min} = 2,33 Pl^2$ zu erfolgen. Als Knicklänge gilt die ganze Systemlänge, bei übereinanderstehenden, allseitig durch Deckenträger ausgesteiften Stützen die Geschoßhöhe.	1400	1400	1400	1000	2000
95	Flußeisen in Dächern, Fachwerkwänden, Trägern zur Unterstützung von Wänden, Kranbahnträgern, wenn die Querschnittgröße durch Eigenlast, Nutzlast und Schneedruck allein bedingt ist . . . . .	1200	1200	1200	1000	2000
96	Flußeisen in denselben Bauteilen, wenn die größte Spannung bei gleichzeitiger ungünstigster Wirkung von Eigenlast, Nutzlast, Schneedruck und Winddruck von 150 kg/qm eintritt . . .	1400	1400	1400	1000	2000
97	Ausnahmsweise darf bei Dächern, wenn für eine den strengsten Anforderungen genügende Durchbildung, Berechnung und Ausführung volle Sicherheit gegeben ist, für den Fall der Nr. 96 die Spannung betragen bis . . . . . Zu Nr. 95 und 96: Für Träger zur Unterstützung von Wänden gilt die Entfernung der Auflagermitten als Stützweite. Druckglieder sind nach der Formel $J_{\min} = 1,82 Pl^2$ auf Knicken zu berechnen; als Knicklänge gilt die Systemlänge. Zu Nr. 93 bis 97: Maßgebend ist stets derjenige Fall, der den größten Querschnitt ergibt.	1600	1600	1600	—	—
98	Flußeisen in Anker . . . . .	800	—	—	—	—
99	Für Schweißeisen sind die in Nr. 92 bis 96 für Flußeisen angegebenen Werte überall um 10 vH. zu ermäßigen. Noch weiter herabzusetzen ist die Beanspruchung von altem, wieder zur Verwendung gelangendem Eisen je nach seiner Beschaffenheit.	—	—	—	—	—
100	Gußeisen in Auflagern . . . . .	—	1000	—	—	—



Nr.	Gegenstand	Zulässige Beanspruchung in kg/qcm				
		Zug	Druck	Bie- gung	Ab- scherung	Loch- leibungs- druck
101	Gußeisen in Säulen . . . . . Die Berechnung der gußeisernen Säulen auf Knicken hat nach der Formel $J_{\min} = 8 P l^2$ zu geschehen.	—	500	250	200	—
102	Stahlformguß . . . . .	—	—	1200	—	—
103	Schmiedestahl . . . . .	1400	1400	1400	—	—
104	Eichenholz . . . . .	100	80	100	15 parallel	80 rechtwinklig zur Faser
105	Kiefernholz . . . . .	100	60	100	10 parallel	60 rechtwinklig zur Faser
106	Granit in Auflagersteinen . . . . .	—	60	—	—	—
107	Granit in Pfeilern und Gewölben . . . . .	—	45	—	—	—
108	Granit in sehr schlanken Pfeilern und Säulen . . . . .	—	25	—	—	—
109	Sandstein in Auflagersteinen . . . . .	—	30	—	—	—
110	Sandstein in Pfeilern und Gewölben . . . . .	—	25	—	—	—
111	Sandstein in sehr schlanken Pfeilern und Säulen . . . . .	—	15	—	—	—
112	Kalkstein und Marmor in Auflagersteinen . . . . .	—	30	—	—	—
113	Kalkstein und Marmor in Pfeilern und Gewölben . . . . .	—	20	—	—	—
114	Kalkstein und Marmor in sehr schlanken Pfeilern und Säulen . . . . .	—	12	—	—	—
115	Mauerwerk aus gewöhnlichen Ziegeln in Kalk- mörtel (1 R.-T. Kalk und 3 R.-T. Sand) . . . . .	—	bis 7	—	—	—
116	Mauerwerk aus Hartbrandziegeln in Kalkzement- mörtel (1 R.-T. Zement, 2 R.-T. Kalk, 6 bis 8 R.-T. Sand) . . . . .	—	12bis15	—	—	—
117	Mauerwerk aus Klinkern in Zementmörtel (1 R.-T. Zement, 3 R.-T. Sand mit Zusatz von etwas Kalkmilch) . . . . .	—	20bis30	—	—	—
118	Mauerwerk aus porigen Ziegeln . . . . .	—	3 bis 6	—	—	—
118	Mauerwerk aus Schwemmsteinen von mindestens 20 kg/qcm Druckfestigkeit . . . . .	—	bis 3	—	—	—
120	Mauerwerk aus Kalksandsteinen in Kalkmörtel wie Nr. 115 . . . . .	—	bis 7	—	—	—
121	Mauerwerk aus Kalksandsteinen in Kalkzement- mörtel wie Nr. 116 . . . . .	—	12bis15	—	—	—
122	Bruchsteinmauerwerk in Kalkmörtel . . . . .	—	bis 5	—	—	—
123	Fundamentmauern aus geschüttetem Beton . . . . .	—	6 bis 8	—	—	—
124	Fundamentmauern aus gestampftem Beton . . . . .	—	10bis15	—	—	—
125	Guter Baugrund . . . . .	—	3 bis 4	—	—	—

Bemerkung. Die höheren Werte bei den Nrn. 115 bis 125 dürfen nur verwendet werden, wenn einwandfreie statische Untersuchungen unter Annahme der stärksten Belastungen bei Berücksichtigung der denkbar ungünstigsten Umstände durchgeführt werden.







# Tabellen.

---

---

Tabella I.

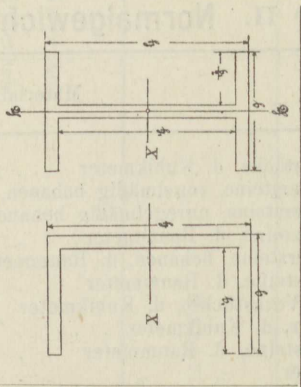
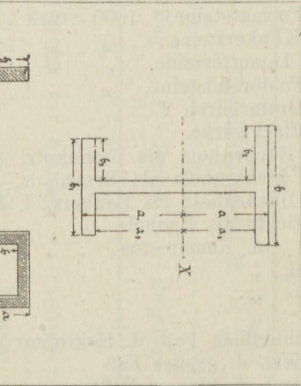
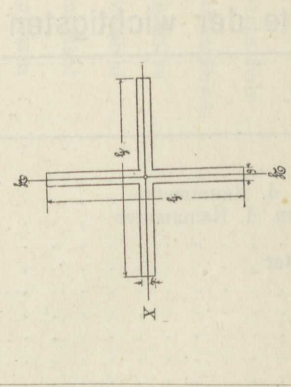
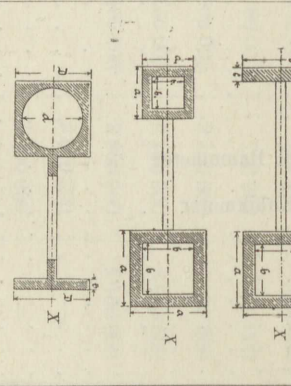
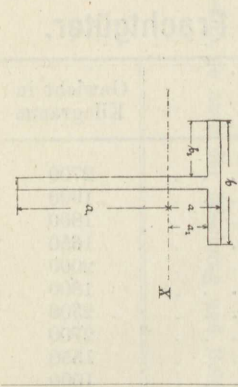
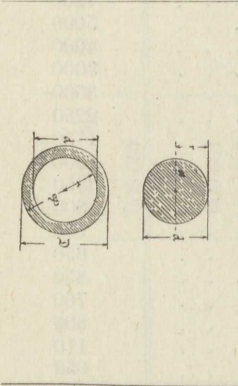
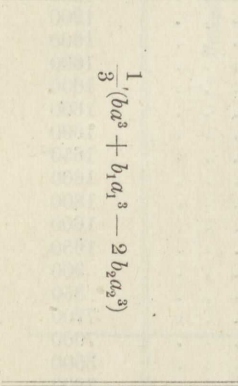
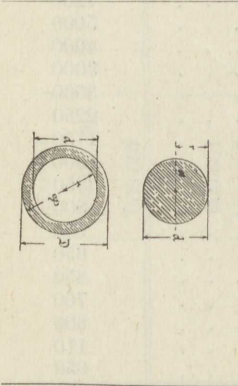
Material	Elastizitätsmodul E.			Proportionalitätsgrenze		
	Zug	Druck	Biegung	Zug	Druck	Biegung
Kiefernholz . . . . .	120 000	110 000	120 000	360	130	250
Eichenholz . . . . .	110 000	100 000	100 000	470	150	216
Buchenholz . . . . .	180 000	170 000	150 000	580	105	250
Schweißeisen . . . . .	2 000 000	2 100 000	1 800 000	1600	—	1600
Flußeisen . . . . .	2 150 000	2 150 000	2 000 000	2200	—	2000
Flußstahl . . . . .	2 200 000	2 300 000	2 100 000	3500	3500	3500
Gußstahl . . . . .	—	2 500 000	—	—	5000	—
Guß Eisen . . . . .	—	1 000 000	—	—	—	—
Beton, je nach der Mischung und Belastung . . . . .	—	100 000 bis 400 000 im Mittel 140 000	—	—	—	—



Tabelle II. Normalgewichte der wichtigsten Frachtgüter.

Material.	Gewicht in Kilogramm
Granit-Werkstücke, d. Kubikmeter	2700
Granit-Pflastersteine, regelmäßig behauen, d. Raummeter	1900
Granit-Pflastersteine, unregelmäßig behauen, d. Raummeter	1800
Granit-Bruchsteine, d. Raummeter	1650
Basalt-Pflastersteine, behauen, d. Raummeter	2000
Basalt-Bruchsteine, d. Raummeter	1800
Sandsteine (Werkstücke), d. Kubikmeter	2300
Kalk, Marmor, d. Kubikmeter	2700
Kalk, Bruchsteine, d. Raummeter	1550
Baukalk, fetter, „ „	1000
Baukalk, magerer „ „	1200
Gneis, „ „	1600
Serpentin, „ „	1600
Quarz, „ „	1600
Porphyr, „ „	1600
Dolomit, „ „	1600
Tonschiefer, „ „	1650
Grünsteinbruchsteine, d. „	1600
Hornblendebruchsteine, d. Raummeter	1800
Bruch- oder Feldsteine, „ „	1600
Kies und Sand, „ „	1650
Steinkohle, „ „	900
Kokes „ „	350
Eisen, gewalzt, d. Kubikmeter	7700
Eisen, gegossen, „ „	7000
Eisenerze, d. Raummeter	3500
Walzzink, d. Kubikmeter	7200
Ziegelwerk: Formatsteine, 1000 Stück	5000
Klinkersteine, „ „	4000
Chamottesteine, „ „	3000
Feldbrandsteine, „ „	3000
Drainröhren 2", „ „	2250
Flachwerke, „ „	1750
Eichen- oder Buchenholz als Brennholz, d. Raummeter	500
Kiefern- oder Fichtenholz als Brennholz, „ „	350
Eichen- oder Buchenholz als Bauholz, d. Kubikmeter	800
Kiefer oder Fichte als Bauholz	650
Rüben, d. Raummeter	650
Rübenschnitzel, „ „	850
Holzstoff „ „	700
Kartoffeln, „ „	600
Spiritus, einschließlich Faß, d. Hektoliter	110
Zucker, raffiniert, d. großes Faß	650
Zucker, raffiniert, d. kleines Faß	375
Lehm, d. Raummeter	1400
Blockeis, „ „	800
Roggen, „ „	650
Weizen, „ „	700
Mehl, „ „	1500
Stallmist, „ „	750
Zement „ „	2200
Kalk, gebrannt, d. Raummeter	1500
Heu, d. Raummeter	100
Stroh von Erbsen und Wicken, d. Raummeter	50
Stroh von Gerste und Hafer, „ „	70
Stroh von Roggen und Weizen, „ „	90
Petroleum inkl. Faß, d. Hektoliter	110
Schlempe „ „ „ „	120

Tabelle III. Querschnittstafel.

Querschnittsform.	Trägheitsmoment $J_x$ bezogen auf die horizontale Schwerachse.	Querschnittsform.	Trägheitsmoment $J_x$ bezogen auf die horizontale Schwerachse X.
	$\frac{1}{12} (bh^3 - b_1h_1^3)$		$\frac{1}{3} (ba^3 + b_1a_1^3 - 2b_2a_2^3)$
	$\frac{b}{12} [h^3 + (h - b)b^2]$		$\frac{1}{12} (a^4 - b^4 + a_1^4 - b_1^4)$
	$\frac{1}{3} (ba^3 + b_1a_1^3 - 2b_2a_2^3)$		$\frac{1}{4} \left( \frac{D^3(D+b)}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right)$
		$\frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$



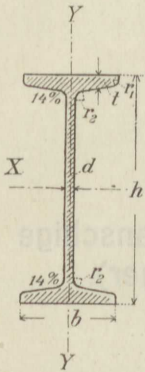


Tabelle IV.

## Normalprofile für I-Eisen.

Bis  $h = 250$  mm ist  $b = 0,4 h + 10$  mm;  $d = 0,03 h + 1,5$  mm

Für  $h > 250$  mm ist  $b = 0,3 h + 35$  mm;  $d = 0,036 h$

Neigung der innern Flanschlflächen  $14\%$ .  $r_2 = d$ ;  $r_1 = 0,6 d$

1 Profil- No.	2 Ausmaße in Millimeter				6 Querschnitt- F qcm	7 Gewicht f.d. lauf. Meter G kg	8 Momente bezogen auf die Achse				12 W <sub>x</sub>  W <sub>y</sub> c
	h	b	d	t			9 X		10 Y		
							J <sub>x</sub>	W <sub>x</sub>	J <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	
8	80	42	3,9	5,9	7,6	6,0	78,4	19,6	7,3	3,5	5,6
9	90	46	4,2	6,3	9,0	7,1	118	26,2	10,4	4,5	5,6
10	100	50	4,5	6,8	10,7	8,3	172	34,4	14,3	5,7	6,0
11	110	54	4,8	7,2	12,4	9,6	241	43,8	18,9	7,0	6,2
12	120	58	5,1	7,7	14,3	11,1	331	55,1	25,2	8,7	6,3
13	130	62	5,4	8,1	16,2	12,6	441	67,8	32,2	10,4	6,5
14	140	66	5,7	8,6	18,3	14,3	579	82,7	41,3	12,5	6,6
15	150	70	6,0	9,0	20,5	16,0	743	99,0	51,8	14,8	6,7
16	160	74	6,3	9,5	22,9	17,9	945	118	64,4	17,4	6,7
17	170	78	6,6	9,9	25,4	19,8	1177	139	78,8	20,2	6,8
18	180	82	6,9	10,4	28,0	21,9	1460	160	95,9	23,4	6,9
19	190	86	7,2	10,8	30,7	24,0	1779	187	115,2	26,8	6,9
20	200	90	7,5	11,3	33,7	26,2	2162	216	138	30,7	7,0
21	210	94	7,8	11,7	36,6	28,5	2587	246	163	34,6	7,0
22	220	98	8,1	12,2	39,8	31,0	3090	281	192	39,2	7,1
23	230	102	8,4	12,6	42,9	33,5	3642	317	224	43,9	7,2
24	240	106	8,7	13,1	46,4	36,2	4288	357	261	49,3	7,2
26	260	113	9,4	14,1	53,7	41,9	5798	446	341	60,3	7,3
28	280	119	10,1	15,2	61,4	47,9	7658	547	429	72,1	7,5
30	300	125	10,8	16,2	69,4	54,1	9888	659	530	84,8	7,7
32	320	131	11,5	17,3	78,2	61,0	12622	789	652	99,5	7,9
34	340	137	12,2	18,3	87,2	68,0	15827	931	789	115	8,1
36	360	143	13,0	19,5	97,5	76,1	19766	1098	956	134	8,2
38	380	140	13,7	20,5	107,5	83,9	24208	1274	1138	153	8,3
40	400	155	14,4	21,6	118,3	92,3	29446	1472	1349	174	8,4
42 <sup>1/2</sup>	425	163	15,3	23,0	133,0	103,7	37266	1754	1672	205	8,5
45	450	170	16,2	24,3	147,7	115,2	46204	2054	2004	236	8,6
47 <sup>1/2</sup>	475	178	17,1	25,6	163,6	127,6	56912	2396	2424	272	8,8
50	500	185	18,0	27,0	180,2	140,5	69245	2770	2171	310	8,9

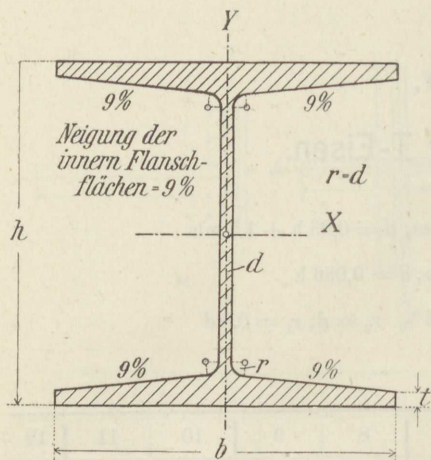


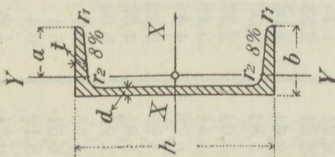
Tabelle V.

Normalprofile für breitflanschtige  
I-Eisen (Greyträger).

1	2	3	4	5	6	7	8				12				
							9					10		11	
							Ausmaße in Millimeter					Querschnitt $F$ qcm	Gewicht f. d. lauf. Meter $G$ kg	X	
$h$	$b$	$d$	$t$	$J_x$	$W_x$	$J_y$	$W_y$								
18 B.	180	180	8,5	9,0	59,9	47,0	3512	390	1073	119	3,27				
20 "	200	200	8,5	9,5	70,4	55,4	5171	517	1568	157	3,26				
22 "	220	220	9	10	82,6	64,8	7379	671	2216	201	3,33				
24 "	240	240	10	10,5	96,8	76,0	10260	855	3043	254	3,37				
25 "	250	250	10,5	10,9	105,1	82,5	12066	965	3575	286	3,37				
26 "	260	260	11	11,7	115,6	90,7	14352	1104	4261	328	3,36				
27 "	270	270	11,25	11,95	123,2	96,7	16529	1224	4920	365	3,35				
28 "	280	280	11,5	12,35	131,8	103,4	19052	1361	5671	405	3,36				
29 "	290	290	12,0	12,7	141,1	110,8	21866	1508	6417	443	3,40				
30 "	300	300	12,5	13,25	152,1	119,4	25201	1680	7494	500	3,36				
32 "	320	300	13	14,1	160,7	126,2	30119	1882	7867	524	3,59				
34 "	340	300	13,4	14,6	167,4	131,4	35241	2073	8097	540	3,84				
36 "	360	300	14,2	16,15	181,5	142,5	42479	2360	8793	586	4,03				
38 "	380	300	14,8	17,0	191,2	150,1	49496	2605	9175	612	4,25				
40 "	400	300	15,5	18,2	203,6	159,8	57834	2892	9721	648	4,46				
42 <sup>1/2</sup>	425	300	16	19	213,9	167,9	68249	3212	10078	672	4,78				
45 "	450	300	17	20,3	229,3	180,0	80887	3595	10668	711	5,05				
47 <sup>1/2</sup>	475	300	17,6	21,35	242,0	190,0	94811	3992	11142	743	5,37				
50 "	500	300	19,4	22,6	261,8	205,5	111283	4451	11718	781	5,70				
55 "	550	300	20,6	24,5	288,0	226,1	145957	5308	12582	839	6,32				
60 "	600	300	20,8	24,7	300,6	236,0	179303	5977	12672	845	7,07				
65 "	650	300	21,1	25,0	314,5	246,9	217402	6690	12814	854	7,83				
75 "	750	300	21,1	25,0	335,7	263,4	302560	8068	12823	855	9,45				



Tabelle VI.  
Normalprofile für [-Eisen.



$b = 0,25h + 25 \text{ mm}$

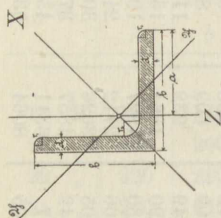
Neigung der inneren Flanschflächen 8 ‰

$r_2 = t; r_1 = \frac{t}{2}$

1 Profil-Nr.	2 Ausmaße in Millimeter			5 Quer-schnitt F qcm	7 Gewicht G f. d. lauf. Meter kg	8 Schwer- punkts- abstand a cm	9 Momente bezogen auf die Achse				13 $\frac{W_x}{W_y}$ c	14  Zwei zusammen- gesetzte [-Eisen	15 W <sub>y</sub>	
	3 h	3 b	4 d				10 X		11 Y					12 W <sub>y</sub>
							9 J <sub>x</sub>	10 W <sub>x</sub>	9 J <sub>y</sub>	11 Y				
3	30	33	5	5,42	4,2	1,86	6,5	4,3	5,2	5,2	2,8	1,5	für J <sub>x</sub> 13,0	für W <sub>x</sub> 8,6
4	40	35	5	6,20	4,8	2,04	14,2	7,1	7,3	7,3	3,6	2,0	für J <sub>x</sub> 28,4	für W <sub>x</sub> 14,2
5	50	38	5	7,12	5,6	2,32	26,7	10,7	10,0	10,0	4,3	2,5	51,5	13,6
6	65	42	5,5	9,05	7,1	2,66	58,2	17,9	15,7	15,7	5,9	3,0	74,7	17,8
8	80	45	6	11,04	8,6	2,93	107	26,7	21,7	21,7	7,4	3,6	98,1	21,8
10	100	50	6	13,5	10,5	3,31	207	41,4	33,1	33,1	10,0	4,1	143	28,6
12	120	55	7	17,04	13,3	3,76	368	61,3	49,2	49,2	13,1	4,6	202	36,7
14	140	60	7	20,4	15,9	4,09	609	87,0	71,2	71,2	17,4	5,0	291	48,5
16	160	65	7,5	24,1	18,8	4,49	932	117	97,4	97,4	21,7	5,4	388	59,7
18	180	70	8	28,0	21,9	4,90	1364	152	130	130	26,6	5,7	508	72,6
20	200	75	8,5	32,3	25,2	5,30	1927	193	171	171	32,2	6,0	654	87,2
22	220	80	9	37,6	29,3	5,66	2712	247	226	226	39,9	6,2	863	108
24	240	85	9,5	42,4	33,0	6,05	3626	302	285	285	47,0	6,4	1096	128
26	260	90	10	48,4	37,8	6,42	4857	374	365	365	56,9	6,5	1376	153
28	280	95	10	53,5	41,6	6,7	6311	450	457	457	68,0	6,6	1565	164
30	300	100	10	58,8	45,9	7,05	8064	538	561	561	80,0	6,7	2151	215

Tabelle VII. Normalprofile für

gleichschenklige Winkelisen.



$$d_{\min.} = 0,1b \text{ für } b \leq 100 \text{ mm}$$

$$d_{\min.} = \frac{1}{11}b \text{ für } b > 100 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{d_{\min.} + d_{\max.}}{2}; r_1 = \frac{r_2}{2}$$

Die Hauptachsen sind XX als Winkelhalbierende  
YY XX

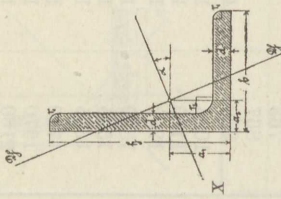
Profil-Nr.	Ausmaße in Millimeter		4	5	6	Momente bezogen auf die Achse						
	b	d				X			Y			Z
						$J_x$	$W_x$	$J_y$	$W_y$	$J_z$	$W_z$	
1 1/2	15	{ 3	0,81	0,63	1,02	0,24	0,07	0,16	0,10	0,11	0,16	0,11
2	20	{ 3	1,04	0,81	0,98	0,29	0,08	0,19	0,11	0,11	0,19	0,13
2 1/2	25	{ 4	1,11	0,87	1,39	0,45	0,17	0,40	0,23	0,23	0,50	0,22
3	30	{ 4	1,44	1,10	1,35	0,56	0,21	0,50	0,23	0,23	0,82	0,26
3 1/2	35	{ 4	1,41	1,10	1,76	0,73	0,34	0,82	0,34	0,34	1,03	0,37
4	40	{ 6	1,84	1,44	1,73	0,93	0,43	1,03	0,40	0,40	1,03	0,45
4 1/2	45	{ 6	2,24	1,75	2,10	1,38	0,77	1,85	0,61	0,61	1,85	0,69
5	50	{ 7	2,24	2,53	2,02	1,88	1,05	2,53	0,76	0,76	2,53	0,88
5 1/2	55	{ 8	2,64	3,00	2,40	1,94	1,26	3,03	0,88	0,88	3,03	0,98
		{ 8	3,84	3,00	2,40	2,68	1,74	4,18	1,12	1,12	4,18	1,28
		{ 8	3,04	2,37	2,85	2,59	1,93	4,67	1,18	1,18	4,67	1,32
		{ 8	4,41	3,46	2,77	3,60	2,68	6,4	1,54	1,54	6,4	1,75
		{ 8	5,76	4,49	2,70	4,48	3,34	8,0	1,82	1,82	8,0	2,10
		{ 5	4,25	3,32	3,19	4,03	3,37	8,05	1,82	1,82	8,05	2,03
		{ 7	5,81	4,53	3,11	5,31	4,45	10,65	2,27	2,27	10,65	2,57
		{ 9	7,29	5,69	3,04	6,41	5,38	12,85	2,60	2,60	12,85	3,00
		{ 5	4,75	3,7	3,56	5,03	4,68	11,20	2,30	2,30	11,20	2,61
		{ 7	5,1	3,49	3,49	6,18	6,18	14,85	2,89	2,89	14,85	3,28
		{ 9	8,19	6,4	3,41	8,08	7,53	18,05	3,35	3,35	18,05	3,85
		{ 6	6,24	4,9	3,91	7,26	7,43	17,75	3,29	3,29	17,75	3,66
		{ 8	8,16	6,4	3,83	9,18	9,38	22,5	3,99	3,99	22,5	4,50
		{ 10	10,00	7,8	3,76	11,0	11,2	26,8	4,56	4,56	26,8	5,25



6	60	6	6,84	5,3	4,28	37,0	8,72	9,74	4,02	23,35	4,49
		8	8,96	6,0	4,21	47,2	11,1	12,4	4,90	28,70	5,54
		10	11,00	8,6	4,14	56,3	13,3	14,8	5,64	35,45	6,40
	65	7	8,61	6,7	4,62	54,4	11,8	14,3	5,38	34,25	6,02
		9	10,9	8,5	4,55	67,0	14,6	17,6	6,38	42,15	7,22
		11	13,1	10,2	4,48	78,5	17,1	20,7	7,24	49,95	8,22
	70	7	9,31	7,3	4,99	68,5	13,9	18,0	6,32	43,20	7,10
		9	11,8	9,2	4,92	84,8	17,2	22,3	7,58	53	8,56
		11	14,2	11,1	4,85	99,8	20,2	26,3	8,65	63	9,81
	75	8	11,4	8,9	5,33	95,0	18,0	25,0	8,16	60	9,22
		10	14,0	10,9	5,26	115,0	21,7	30,3	9,60	72	10,8
		12	16,6	12,9	5,19	133,0	25,1	35,0	10,7	84	12,3
	80	8	12,2	9,5	5,71	117	20,6	30,8	9,48	74	10,7
		10	15,0	11,7	5,63	141	24,9	37,1	11,1	89	12,6
		12	17,8	13,9	5,56	162	28,6	42,7	12,4	103	14,4
	90	9	15,4	12,0	6,42	187	29,4	49,2	13,5	118	15,3
		11	18,6	14,5	6,35	222	34,9	58,4	15,6	140	17,6
		13	21,7	16,9	6,28	254	39,9	66,8	17,4	160	19,7
	100	10	19,0	14,8	7,13	285	40,2	75,0	18,5	180	21,0
		12	22,6	17,6	7,06	333	47,1	87,7	21,2	210	24,1
		14	26,0	20,3	6,99	378	53,4	99,5	23,5	238	26,7
	110	10	21,0	16,4	7,88	385	49,4	101	22,9	243	25,9
		12	25,0	19,5	7,81	450	57,7	118	26,2	284	29,9
		14	28,9	22,5	7,74	513	65,6	135	29,3	324	33,5
	120	11	25,2	19,7	8,59	549	64,8	144	29,8	346	33,8
		13	29,5	23,0	8,52	634	74,9	167	33,8	400	38,1
		15	33,8	26,3	8,45	715	84,4	188	37,5	451	42,8
	130	12	29,8	23,2	9,31	763	83,1	201	38,6	482	43,4
		14	34,4	26,9	9,24	867	94,4	229	43,0	548	48,3
		16	39,0	30,5	9,17	970	106	256	47,3	613	53,7
	140	13	34,7	27,1	10,02	1025	104	270	47,9	647	54,5
		15	39,8	31,0	9,95	1160	117	305	53,2	732	60,4
		17	44,7	34,9	9,88	1290	130	339	58,0	814	66,6
	150	14	40,0	31,2	10,7	1360	128	358	59,3	859	67,0
		16	45,4	35,4	10,7	1525	144	401	65,3	963	74,2
		18	50,8	39,6	10,6	1685	159	443	71,1	1064	80,5
	160	15	45,8	35,7	11,5	1760	156	463	71,8	1112	81,2
		17	51,5	40,2	11,4	1970	174	518	79,0	1244	89,6
		19	57,2	44,6	11,3	2160	191	569	85,5	1365	97,6

Tabelle VIII. Normalprofile für

$$d_{\min.} = \frac{b + h}{20}$$



ungleichschenklige Winkelisen.

$$r_2 = \frac{d_{\min.} + d_{\max.}}{2}$$

$$r_1 = \frac{r_2}{2}$$

1	2		3		4		5	6	7	8	9	10				13	14			
	Prof.-Nr.	Ausmaße in Millimeter		Gewicht f. d. laufenden Meter <i>G</i>	Querschnitt <i>F</i>	Schwerpunktsabstände in Zentimeter						Lage der Hauptachse X	Momente bezogen auf die Achse.					Kleinste Trägheitsmoment		
		<i>b</i>	<i>h</i>			<i>a</i> <sub>1</sub>							<i>a</i> <sub>2</sub>	<i>J</i> <sub>x</sub>	<i>J</i> <sub>y</sub>				<i>W</i> <sub>x</sub>	<i>W</i> <sub>y</sub>
2/3	20	30	30	1,10	1,41	1,01	0,51	0,407	1,44	0,292	0,263	0,718	0,263	1,65						
		45	45	1,44	1,81	1,05	0,55	0,382	1,79	0,392	0,377	0,896	0,377	2,24						
3/4 <sup>1/2</sup>	30	45	45	2,22	2,84	1,50	0,75	0,421	6,63	1,29	0,795	2,18	0,795	7,37						
		60	60	2,73	3,50	1,54	0,79	0,400	7,91	1,64	0,990	2,61	0,990	9,33						
4/6	40	60	60	3,71	4,75	1,99	0,99	0,426	19,9	3,79	1,88	4,85	1,88	21,8						
		75	75	5,08	6,51	2,06	1,06	0,400	26,0	5,39	2,56	6,40	2,56	31,0						
5/7 <sup>1/2</sup>	50	75	75	6,4	8,26	2,51	1,26	0,417	53,2	10,5	3,97	10,4	3,97	59,9						
		90	90	8,1	10,44	2,58	1,33	0,398	64,9	13,6	5,21	12,7	5,21	78,2						

Verhältnis der Schenkellängen  $\frac{h}{b} = 1,5$



		Verhältnis der Schenkellängen $\frac{h}{b} = 2$											
6 $\frac{1}{2}$ /10	65	100	9	14,04	11,0	3,37	1,62	0,399	160	23,7	30,1	8,50	170
			11	16,94	13,2	3,44	1,69	0,384	188	28,0	36,9	10,50	211
	8/12	80	120	10	19,0	14,8	3,97	1,97	0,425	318	38,8	61,1	14,6
			12	22,56	17,6	4,05	2,05	0,412	368	45,5	73,8	17,6	422
10/15	100	150	12	28,56	22,3	4,95	2,45	0,426	749	73,7	143,6	27,2	816
			14	33,04	25,8	5,02	2,52	0,418	851	83,9	167,4	31,5	958
2/4	20	40	3	1,71	1,38	1,45	0,45	0,252	2,99	1,17	0,331	0,279	1,67
			4	2,24	1,75	1,49	0,49	0,231	3,79	1,50	0,445	0,378	2,29
3/6	30	60	5	4,25	3,32	2,20	0,60	0,242	16,5	4,25	1,89	1,08	9,46
			7	5,81	4,53	2,27	0,77	0,215	21,7	5,63	2,66	1,50	13,8
4/8	40	80	6	6,84	5,34	2,90	0,90	0,249	47,7	9,22	5,36	2,23	26,7
			8	8,96	7,00	2,97	0,97	0,229	60,6	11,8	7,16	3,02	36,6
5/10	50	100	8	11,36	8,9	3,64	1,14	0,246	123	19,1	13,9	4,73	69,9
			10	14,00	10,9	3,71	1,21	0,231	148	23,2	17,4	5,88	89,3
6 $\frac{1}{2}$ /13	65	130	10	18,50	14,4	4,72	1,47	0,241	340	40,5	38,0	9,79	192
			12	21,96	17,1	4,79	1,54	0,236	396	47,2	45,9	12,0	234
8/16	80	160	12	27,36	21,3	5,79	1,79	0,249	764	73,9	85,9	17,9	427
			14	31,64	24,7	5,87	1,87	0,240	870	84,6	99,6	20,8	505
10/20	100	200	14	40,04	31,3	7,20	2,20	0,252	1757	135,5	196	32,7	967
			16	45,44	35,4	7,27	2,28	0,246	1970	152,5	223	37,5	1106

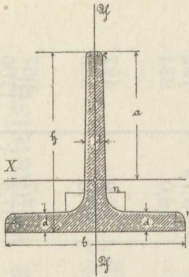


Tabelle IX.

Normalprofile für hochstegige  $\perp$ -Eisen.

$$h = b; d = 0,1 h + 1 \text{ mm}$$

$$r_2 = d; r_1 = \frac{r_2}{2}, \varrho = \frac{r_2}{4}$$

Neigung im Fuß 2%; an jeder Seite des Steges 2%.

1 Profil-Nr.	2 Ausmaße in Millimeter			5 Quer- schnitt $F'$ qcm	6 Gewicht $G$ f. d. lauf. Meter kg	7 Schwer- punkts- abstand $a$	8 Momente bezogen auf die Achse			
	$b$	$h$	$d$				9 X		10 Y	
							$J_x$	$W_x$	$J_y$	$W_y$
2/2	20	20	3	1,11	0,9	1,39	0,40	0,29	0,20	0,20
2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> /2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	25	25	3,5	1,63	1,3	1,75	0,93	0,53	0,46	0,37
3/3	30	30	4	2,24	1,7	2,10	1,86	0,88	0,91	0,61
3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> /3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	35	35	4,5	2,95	2,3	2,46	3,34	1,36	1,63	0,93
4/4	40	40	5	3,75	2,9	2,82	5,56	1,97	2,70	1,35
4 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> /4 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	45	45	5,5	4,65	3,6	3,17	8,74	2,76	4,23	1,88
5/5	50	50	6	5,64	4,4	3,53	13,1	3,71	6,33	2,54
6/6	60	60	7	7,91	6,2	4,24	26,4	6,23	12,8	4,25
7/7	70	70	8	10,6	8,2	4,96	48,4	9,76	23,1	6,62
8/8	80	80	9	13,6	10,6	5,67	81,5	14,4	38,8	9,70
9/9	90	90	10	17,0	13,3	6,38	129	20,3	61,4	13,6
10/10	100	100	11	20,8	16,2	7,10	195	27,5	92,7	18,5
12/12	120	120	13	29,5	23,0	8,52	389	45,6	189	31,5
14/14	140	140	15	39,8	31,0	9,95	734	73,7	347	49,5

Tabelle X.

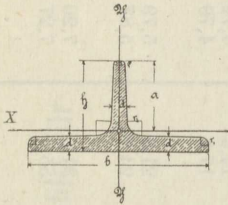
Normalprofile für breitfüßige  $\perp$ -Eisen.

$$h = \frac{b}{2}$$

Neigung im Fuß 2%; an jeder Seite des Steges 4%

$$d = 0,15 h + 1 \text{ mm}$$

$$r_2 = d; r_1 = \frac{r_2}{3}; \varrho = \frac{r_2}{4}$$



1 Profil-Nr.	2 Ausmaße in Millimeter			5 Quer- schnitt $F'$ qcm	6 Gewicht $G$ f. d. lauf. Meter kg	7 Schwer- punkts- abstand $a$	8 Momente bezogen auf die Achse			
	$b$	$h$	$d$				9 X		10 Y	
							$J_x$	$W_x$	$J_y$	$W_y$
6/3	60	30	5,5	4,64	3,6	2,30	2,91	1,26	9,98	3,33
7/3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	70	35	6	5,94	4,6	2,69	5,12	1,90	17,3	4,94
8/4	80	40	7	7,91	6,2	3,07	8,87	2,89	30,1	7,52
9/4 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	90	45	8	10,16	7,9	3,45	14,4	4,18	49,0	10,9
10/5	100	50	8,5	12,02	9,4	3,84	21,2	5,51	71,3	14,3
12/6	120	60	10	17,0	13,3	4,62	43,2	9,35	145	24,2
14/7	140	70	11,5	22,8	17,8	5,39	79,1	14,7	265	37,8
16/8	160	80	13	29,5	23,0	6,17	134	21,7	446	55,8
18/9	180	90	14,5	37,0	28,9	6,95	213	30,5	709	78,8
20/10	200	100	16	45,4	35,4	7,72	323	41,8	1073	107



Tabelle XI.  
Normalprofile für  $\perp$ -Eisen.

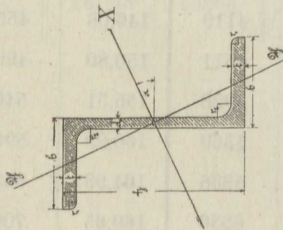
$$b = 0,25 h + 30 \text{ mm}$$

$$d = 0,035 h + 3 \text{ mm}$$

jedoch auf halbe Millimeter abgerundet

$$t = 0,05 h + 3 \text{ mm}$$

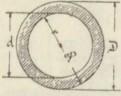
$$r_2 = t; r_1 = \frac{t}{2}$$



1	2		3	4	5	6	7	8	9			11	12
	Ausmaße in Millimeter								Momente bezogen auf die Achse				
	h	b	d	t	J <sub>x</sub>				J <sub>y</sub>	W <sub>x</sub>	W <sub>y</sub>		
Profil-Nr.	Querschnitt					F	Gewicht f. d. laufenden Meter	Lage der Hauptachse X	X		Y		
	qcm								tg α	J <sub>x</sub>	J <sub>y</sub>	W <sub>x</sub>	W <sub>y</sub>
3	30	38	4	4,5	4,5	4,26	3,3	1,69	18,3	1,61	4,75	1,14	
4	40	40	4,5	5	5	5,35	4,2	1,20	28,3	3,00	6,76	1,79	
5	50	43	5	5,5	5,5	6,68	5,2	0,96	45,2	5,17	9,80	2,69	
6	60	45	5	6	6	7,80	6,1	0,80	67,9	7,07	13,6	3,34	
8	80	50	6	7	7	10,96	8,6	0,61	142,9	13,6	24,4	5,82	
10	100	55	6,5	8	8	14,26	11,1	0,52	272	21,1	39,7	8,14	
12	120	60	7	9	9	17,94	14,0	0,46	474	30,0	60,1	10,7	
14	140	65	8	10	10	22,60	17,6	0,42	773	44,6	88,0	14,2	
16	160	70	8,5	11	11	27,13	21,2	0,39	1193	58,8	120,5	16,9	

Tabelle XII.

## Trägheitsmomente von Kreisringen.

 $F$  = Flächeninhalt $J$  = Trägheitsmoment $\delta$  = Säulenstärke

Ausmaße in Zentimeter bzw. Quadratcentimeter.

Durchmesser $D$	$\delta = 1,5$		$\delta = 2$		$\delta = 2,5$		$\delta = 3$	
	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$
5	16,49	—	18,85	—	—	—	—	—
6	21,21	—	25,13	—	27,49	—	—	—
7	25,92	105	31,42	114	35,34	117	37,70	118
8	30,63	170	37,70	188	43,20	197	47,12	200
9	35,34	258	43,98	291	51,05	309	56,55	318
10	40,06	373	50,27	427	58,90	460	65,97	478
10,5	42,41	441	53,41	509	62,83	552	70,69	577
11	44,77	518	56,55	601	66,76	655	75,50	688
11,5	47,12	602	59,69	703	70,69	771	80,11	814
12	49,48	696	62,83	817	74,61	900	84,82	954
12,5	51,84	799	65,97	942	78,54	1043	89,54	1111
13	54,19	911	69,12	1080	82,47	1201	94,25	1284
13,5	56,55	1034	72,26	1231	86,39	1374	98,96	1475
14	58,90	1167	75,40	1395	90,32	1564	103,67	1685
14,5	61,24	1311	78,54	1573	94,25	1770	108,38	1914
15	63,62	1467	81,68	1766	98,17	1994	113,10	2163
15,5	65,97	1635	84,82	1975	102,10	2238	117,81	2433
16	68,33	1815	87,96	2199	106,03	2498	122,52	2726
16,5	70,69	2008	91,11	2440	109,96	2780	127,23	3042
17	73,04	2214	94,25	2698	113,88	3082	131,95	3381
17,5	75,40	2434	97,39	2973	117,81	3405	136,66	3745
18	77,75	2668	100,53	3267	121,74	3751	141,37	4135
18,5	80,11	2917	103,67	3580	125,66	4119	146,08	4551
19	82,47	3180	106,81	3912	129,59	4511	150,80	4995
19,5	84,82	3459	109,96	4264	133,52	4928	155,51	5467
20	87,18	3754	113,10	4637	137,44	5369	160,22	5968
20,5	89,54	4065	116,24	5031	141,37	5836	164,93	6499
21	91,89	4394	129,38	5447	145,30	6330	169,65	7062

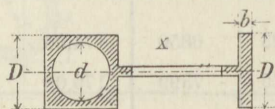


Durch- messer $D$	$\delta = 1,5$		$\delta = 2$		$\delta = 2,5$		$\delta = 3$	
	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$	$F$	$J$
21,5	94,25	4739	122,52	5885	149,23	6850	174,36	7655
22	96,60	5102	125,66	6346	153,15	7399	179,06	8282
22,5	98,96	5483	128,81	6831	157,08	7977	183,78	8942
23	101,32	5483	131,95	7340	161,01	8584	188,50	9637
23,5	103,67	6301	135,09	7873	164,93	9221	193,21	10367
24	106,03	6739	138,23	8432	168,86	9889	197,92	11133
24,5	108,38	7197	141,37	9017	172,79	10589	202,63	11936
25	110,74	7676	144,51	9628	176,71	11321	207,35	12788
25,5	113,10	8175	147,65	10267	180,64	12086	212,06	13658
26	115,45	8695	150,80	10933	184,57	12885	216,77	14578
26,5	117,91	9237	153,94	11627	188,50	13719	221,48	15538
27	120,17	9801	157,08	12350	192,42	14588	226,19	16540
27,5	122,52	10388	160,22	13103	196,35	15493	230,91	17585
28	124,88	10997	163,36	13886	202,28	16435	235,62	18673
28,5	127,23	11630	166,50	14699	204,20	17415	240,33	19805
29	129,59	12287	169,65	15544	208,13	18433	245,04	20952
29,5	131,95	12968	172,79	16420	212,06	19489	249,76	22205
30	134,30	13674	175,93	17329	215,98	20586	254,47	23475
31	139,02	15161	182,21	19246	223,84	22901	263,89	26158
32	143,73	16753	188,50	21300	231,69	25385	273,32	29040
33	148,44	18453	194,78	23495	239,55	28042	282,74	32127
34	153,15	20264	201,06	25836	247,40	30879	292,17	35425
35	157,87	22190	207,35	28329	255,25	33901	301,59	38943
36	162,58	24234	213,63	30976	263,11	37115	311,02	42687
37	167,29	26405	219,91	33784	270,96	40526	320,44	46664
38	172,00	28692	226,19	36757	278,82	44140	329,87	50881
39	176,71	31113	232,48	39899	286,67	47964	339,29	55347
40	181,43	33666	238,76	43216	294,52	52002	348,72	60016

## Trägheitsmomente durchbrochener Wände.

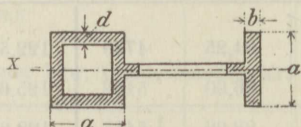
$F$  = Flächeninhalt.  $J$  = Trägheitsmoment. Ausmaße in Zentimeter.

Tabelle XIII.



Nr.	$D$	$d$	$b$	$F$	$J$
1	10	7,6	3	85	920
2	10	7,0	3	92	965
3	10	6,4	3	98	1001
4	11	8,6	3	106	1284
5	11	8	3	104	1352
6	11	7,4	3	111	1411
7	12	9,6	4	120	1887
8	12	8,4	4	137	2060
9	12	8	4	142	2103
10	13	10,6	4	133	2493
11	13	10	4	142	2622
12	13	9,4	4	152	2629
13	13	9	4	157	2790
14	13	8,6	4	163	2844
15	13	8	4	171	2911
16	14	11,6	4	146	3227
17	14	11	4	157	3397
18	14	10,4	4	167	3542
19	14	10	4	173	3625
20	14	9	4	188	3794
21	14	8,4	4	197	3871
22	15	12	4	172	4326
23	15	11,4	4	183	4515
24	15	11	4	190	4625
25	15	10,6	4	197	4724
26	15	10	4	206	4853
27	15	9,4	4	216	4960
28	16	13	5	203	5766
29	16	12,4	5	215	6007
30	16	12	5	223	6150
31	16	11,6	5	230	6279
32	16	11	5	241	6449
33	16	10,4	5	251	6594
34	16	10	5	257	6677

Tabelle XIV.



Nr.	$a$	$d$	$b$	$F$	$J$
1	10	1,2	3	72	805
2	10	1,5	3	81	883
3	10	1,8	3	89	944
4	10	2	3	94	975
5	11	1,2	3	80	1107
6	11	1,5	3	90	1212
7	11	1,8	3	99	1303
8	11	2	3	105	1353
9	11	2,5	3	118	1445
10	12	1,2	4	100	1596
11	12	1,8	4	121	1889
12	13	1,2	4	109	2060
13	12	2,5	4	143	2104
14	12	3	4	156	2196
15	13	1,5	4	121	2279
16	13	1,8	4	133	2462
17	13	2	4	140	2565
18	14	1,2	4	117	2607
19	13	2,2	4	147	2656
20	13	2,5	4	157	2772
21	14	1,5	4	131	2896
22	13	3	4	172	2912
23	14	1,8	4	144	3141
24	14	2	4	152	3283
25	14	2,5	4	171	3570
26	15	1,5	4	141	3616
27	14	3	4	188	3775
28	15	1,8	4	155	3946
29	15	2	4	164	4124
30	15	2,2	4	173	4292
31	15	2,8	4	197	4693
32	16	1,5	5	167	4788
33	16	1,8	5	182	5198
34	16	2	5	192	5440

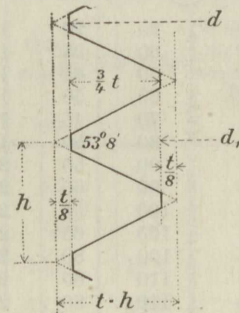


**Tabelle XV.**  
**Scharfgängige Schrauben (Whitworth-Gewinde).**

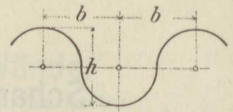
	$d$ mm	$d_1$ mm	$n$	$D$ mm	$U$ mm	$u$ mm	$h$ mm	$P$ kg
$d$ = Bolzendurchmesser der Schraube	6	4,1	7	13	17	2	4	37
	8	5,9	6	16	21	2	6	77
$d_1$ = Kerndurchmesser	10	7,7	5,5	19	25	3	7	130
$n$ = Zahl der Gänge auf 10 mm	12	9,5	5	22	29	3	8	199
	15	12,2	4,5	26	34	4	11	327
$D$ = Durchmesser des dem Sechseck der bearbeiteten Schraubenmutter eingeschriebenen Kreises (Schlüsselweite)	18	14,9	4	30	40	4	13	488
	21	17,6	3,75	34	45	4	15	681
	24	20,3	3	39	52	4	17	907
	27	23	3	43	57	5	19	1164
$U$ = Durchmesser der bearbeiteten Unterlagsscheibe	30	25,7	2,5	47	63	5	21	1453
	34	29,3	2,5	53	70	5	24	1889
$u$ = deren Dicke	38	32,9	2,5	58	77	6	27	2381
$h$ = Höhe des Schraubenkopfs	42	36,5	2,125	64	85	6	29	2931
$P$ = Tragkraft der Schraube	46	40,1	2,125	69	92	7	32	3538
Höhe der Mutter gleich dem Bolzendurchmesser	50	43,7	1,875	75	100	7	35	4201
	55	48,2	1,875	82	109	8	39	5111
Die Tragkraft $P$ ist berechnet nach der Formel $P = 0,22 d_1^2$ , wobei $P$ in t und $d_1$ in cm auszudrücken ist.	60	52,7	1,625	89	119	9	42	6110
	65	57,2	1,625	96	128	10	46	7198
	70	61,7	1,375	103	137	10	49	8375
	75	66,2	1,375	110	147	11	53	9641

**Tabelle XVI.**  
**Scharfgängige Schrauben.**  
(Metrisches Gewinde.)

Masse in Millimetern					Bemerkungen
$d$	$d_1$	$t_0$	$h$	$D$	
5	3,5	0,75	1,0	11	$d$ = Bolzendurchmesser $d_1$ = Kerndurchmesser $t_0$ = Gangtiefe = 0,75 $h$ $h$ = Ganghöhe $D$ = Schlüsselweite.
6	4,5	0,75	1,0	11	
7	5,2	0,90	1,2	14	
8	6,2	0,90	1,2	14	
9	6,9	1,05	1,4	18	
10	7,9	1,05	1,4	18	
12	9,6	1,20	1,6	22	
14	11,3	1,35	1,8	25	
16	13,0	1,50	2,0	28	
18	14,7	1,65	2,2	31	
20	16,4	1,80	2,4	34	
22	17,8	2,10	2,8	37	
24	19,8	2,10	2,8	40	
26	21,2	2,40	3,2	43	
28	23,2	2,40	3,2	46	
30	24,6	2,70	3,6	49	
32	26,6	2,70	3,6	52	
36	30,0	3,00	4,0	58	
40	33,4	3,30	4,4	64	

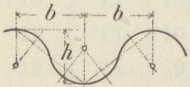


**Tabelle XVII.**  
**Profile für Wellbleche.**  
Normal-Profile.



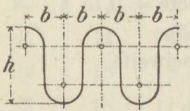
$\delta$  = Blechstärke.

Profile Nr.	$h$	$b$	$\delta$	Gewicht für den qm kg	Breite der Tafeln m	Querschnitts- fläche für 1 m Breite qcm	Widerstands- moment für 1 m Breite cm <sup>3</sup>
	mm	mm	mm				
10	10	10	0,5	6,3	0,66	7,85	1,85
15	15	15	1	12,5	0,66	15,67	5,53
20	20	20	1	12,5	0,66	15,70	7,50
25	25	25	1	12,5	0,57	15,71	9,44
30	30	30	1	12,5	0,57	15,76	11,40
45	45	45	1	12,5	0,675	15,70	17,3
45	45	45	1,5	18,5	0,675	23,55	25,6
45	45	45	2,0	25,0	0,675	31,40	33,8
50	50	50	1,0	12,5	0,650	15,71	19,2
50	50	50	2,0	25,0	0,650	31,41	37,7
60	60	60	1	12,5	0,660	15,71	23,0
60	60	60	2	25,0	0,660	31,41	45,0
70	70	70	1	12,5	0,630	15,71	27,0
70	70	70	2	25,0	0,630	31,42	53,0
80	80	80	1	12,5	0,640	15,71	31,0
80	80	80	2	25,0	0,640	31,42	61,0
90	90	90	2	25,0	0,630	31,42	70
100	100	100	2	25,0	0,700	31,42	77



Flache Wellbleche.

15/20	15	20	1	10,5	0,740	13,40	3,76
25/40	25	40	1	9,7	0,680	12,43	6,41
25/60	25	60	1	8,8	0,660	11,29	6,41
30/60	30	60	1	9,1	0,660	11,70	7,73
35/67,5	35	67,5	1	9,1	0,608	11,70	7,42
40/75	40	75	1	9,2	0,675	11,74	10,4
50/90	50	90	1	9,0	0,630	11,59	13,1
60/90	60	90	1	9,9	0,630	12,71	15,9
70/90	70	90	1	11,4	0,630	14,53	18,2
75/115	75	115	1	11,20	0,575	14,32	20,2

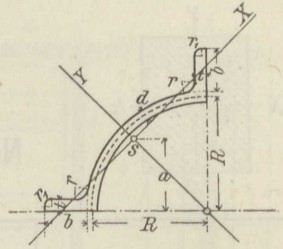


Träger-Wellbleche.

25/20	25	20	1	13,8	0,660	18,20	10,0
30/25	30	25	1	13,8	0,575	17,71	12,0
50/45	50	45	1	13,0	0,585	16,82	20,0
60/50	60	50	1	13,8	0,650	17,71	26,0
70/45	70	45	1	16,6	0,585	21,27	35,0
80/50	80	50	1	17,0	0,550	12,70	40,0
90/50	90	50	2	37,0	0,550	47,40	97,0
90/60	90	60	2	32,3	0,540	41,42	87,0
100/50	100	50	2	40,5	0,450	51,40	115,0
100/65	100	65	2	33,0	0,585	42,20	98,0
100/80	100	80	2	28,4	0,560	36,42	87,0
110/60	110	60	2	36,2	0,540	46,42	123,0
110/80	110	80	2	30,4	0,560	38,92	101,0
120/80	120	80	3	48,5	0,560	62,12	171,0
120/100	120	100	3	41,4	0,600	53,12	129,0
130/90	130	90	3	43,1	0,630	55,22	184,0
130/110	130	110	3	41,1	0,550	52,58	163,0
150/80	130	80	3	54,2	0,400	71,25	237,0



Tabelle XVIII.  
Normalprofile für Quadranteisen



Profil- Nummer	Ausmaße in Millimetern					Querschnitt	Gewicht	Trägheits- moment der vollen Röhre
	R	b	d	r	t	der vollen Röhre qcm	kg	
5	50	35	4	6	6	29,8	23,4	573
			8	6	8	48,0	37,5	901
7 $\frac{1}{2}$	75	40	6	9	8	54,9	42,9	2 064
			10	9	10	80,2	62,8	2 957
10	100	45	8	12	10	88,1	68,9	5 434
			12	12	12	120,4	94,0	7 395
12 $\frac{1}{2}$	125	50	10	15	12	129,3	101,0	11 970
			14	15	14	168,8	131,6	15 590
15	150	55	12	18	14	178,9	139,6	23 200
			18	18	17	248,6	194,0	32 280

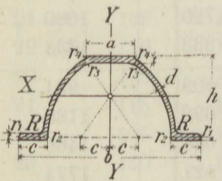


Tabelle XIX.  
Normalprofile für Belageisen.

Profil- Nr.	Ausmaße in Millimetern									Quer- schnitt	Gewicht	Widerstands- moment bezogen auf die X-Achse $W_x$
	h	b	a	c	t = $r_3$	d = $r_1$	$r_2$	$r_4$	R	qcm	kg	
5	50	120	33	21	5	3	2,5	3,1	60	6,74	5,3	9,6
6	60	140	38	24	6	3,5	3	3,4	70	9,33	7,3	15,9
7 $\frac{1}{2}$	75	170	45,5	28,5	7	4	3,5	3,7	85	13,2	10,3	28,3
9	90	200	53	33	8	4,5	4	4	100	17,9	13,8	45,8
11	100	240	63	39	9	6	4,5	4,3	120	24,2	18,6	76,2

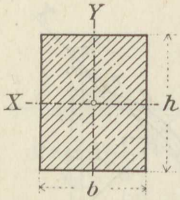


Tabelle XX.

## Normalprofile für Bauhölzer.

Profilnummer	Ausmaße in cm $b : h$	Flächeninhalt qcm	Momente bezogen auf die Achse			
			X		Y	
			$J_x$	$W_x$	$J_y$	$W_y$
8	8/8	64	367	94	367	94
10	8/10	80	666	133	428	107
	10/10	100	833	166	833	166
12	10/12	120	1 440	240	1 000	200
	12/12	144	1 728	288	1 728	288
14	10/14	140	2 287	326	1 166	233
	12/14	168	2 744	392	2 016	336
	14/14	196	3 201	457	3 201	457
16	12/16	192	4 096	512	2 304	382
	14/16	224	4 778	597	3 658	522
	16/16	256	5 461	682	5 461	682
18	14/18	262	6 804	756	4 116	588
	16/18	288	7 776	864	6 144	768
	18/18	324	8 898	988	8 898	988
20	14/20	280	9 333	633	4 573	657
	16/20	320	10 666	1066	6 826	853
	18/20	360	12 000	1200	9 720	1080
	20/20	400	13 333	1333	13 333	1333
22	16/22	352	14 197	1290	7 509	934
	18/22	396	15 972	1452	10 692	1188
	20/22	440	17 746	1613	14 666	1466
	22/22	484	19 521	1774	19 521	1774
24	18/24	392	20 736	1728	11 664	1296
	20/24	480	23 040	1920	16 000	1600
	24/24	576	27 648	2304	27 648	2304
26	20/26	520	29 293	2253	17 333	1733
	24/26	624	35 152	2704	29 952	2496
	26/26	676	38 081	2929	38 081	2929

## Tabelle für Schnitthölzer, Bretter, Bohlen, Pfosten, Latten.

Längen: 3,50, 4,00, 4,50, 5,00, 5,50, 6,00, 7,00 und 8,00 m.

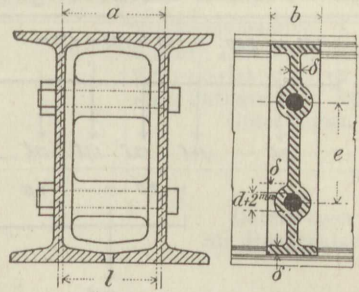
Stärken: 15, 20, 25, 30, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120 und 150 mm.

Besäumte Bretter in Breiten von Zentimeter zu Zentimeter steigend.



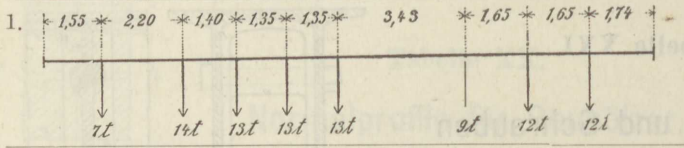
Tabelle XXI.

Gußstücke und Schrauben  
zur Querverbindung  
von I-Träger.

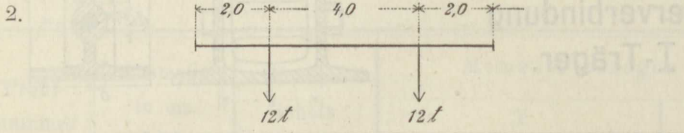


Trägerprofil		Gußstück			Schrauben			Gewicht des Gußstücks	
Nr.	$a$	$\delta$ mm	$l$ mm	$b$ mm	Anzahl	$d$ mm	$e$ mm	Stück kg	f. d. cm Längen- zunahme kg
8	50	6	46,1	35	1	14	—	0,5	0,07
9	55	6	50,8	35	1	14	—	0,5	0,08
10	60	7	55,5	40	1	14	—	0,7	0,10
11	65	7	60,2	40	1	14	—	0,8	0,10
12	70	8	64,9	45	1	16	—	1,2	0,13
13	70	8	64,6	45	1	16	—	1,2	0,14
14	75	9	69,3	50	1	16	—	1,6	0,17
15	80	9	74,0	50	1	20	—	1,8	0,18
16	85	9	78,7	50	1	20	—	2,0	0,19
17	90	10	83,4	55	1	20	—	2,5	0,22
18	90	10	83,1	55	2	16	80	2,8	0,26
19	95	10	87,8	55	2	16	80	3,1	0,26
20	100	10	92,5	55	2	16	90	3,3	0,27
21	105	11	97,2	60	2	16	90	4,1	0,31
22	110	11	101,9	60	2	16	90	4,4	0,32
23	110	11	101,6	60	2	20	100	4,6	0,34
24	115	11	106,3	60	2	20	100	4,9	0,35
26	125	12	115,6	65	2	20	110	6,2	0,41
28	130	12	119,9	65	2	20	120	6,8	0,42
30	135	12	124,2	65	2	20	130	7,3	0,44
32	140	12	128,5	65	2	24	140	8,0	0,46
34	145	13	132,8	70	2	24	150	9,5	0,53
36	155	13	142,0	70	2	24	160	10,4	0,55
38	160	13	146,3	70	2	24	170	11,1	0,56
40	165	13	150,6	70	2	24	180	11,8	0,58
42 <sup>1/2</sup>	175	14	159,7	75	3	20	120	14,9	0,71
45	180	14	163,8	75	3	20	130	15,8	0,73
47 <sup>1/2</sup>	190	15	172,9	80	3	24	140	19,2	0,84
50	195	15	177,0	80	3	24	150	20,2	0,87
55	210	16	191,0	80	3	24	160	24,4	0,98

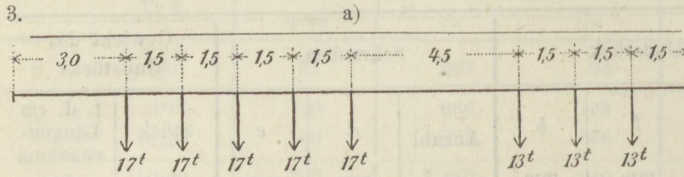
**Tabelle XXII. Belastungsannahmen zur Berechnung von Brücken.**



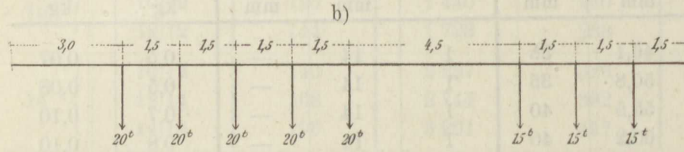
Lokomotive mit Tender. Lastenzug besteht aus zwei Lokomotiven hintereinander mit einer unbeschränkten Anzahl von Güterwagen.



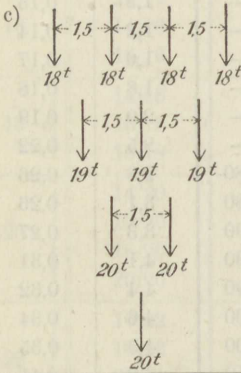
Güterwagen für preuß. Staatsbahnen.



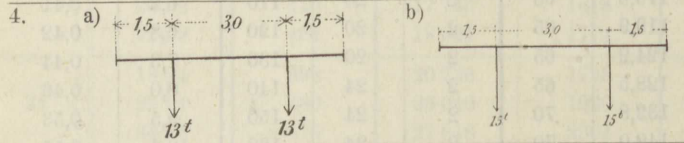
a) Lokomotive mit Tender. Preußische Staatseisenbahnverwaltung. Lastenzug A besteht aus zwei Lokomotiven hintereinander, nebst einer unbegrenzten Anzahl von Güterwagen nach Schema 4 a. Vorschrift vom 1. April 1901.



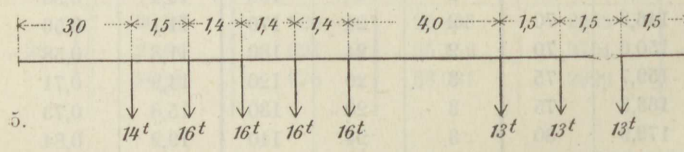
b) Lokomotive mit Tender. Preußische Staatseisenbahnverwaltung. Lastenzug B besteht aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkte Zahl einseitig angehängter Güterwagen, siehe 4 b.



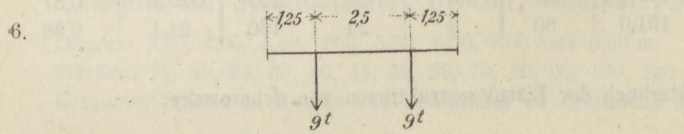
c) Bei der Berechnung kleinerer Brücken sowie der Quer- und Schwellenträger sind, soweit sich hierdurch größere Beanspruchungen ergeben als durch vorstehenden Lastenzug, die Belastungen nach Schema c zugrunde zu legen.



Güterwagen. Preußische Staatseisenbahnverwaltung. a) zum Lastenzug A gehörig b) " " B. "

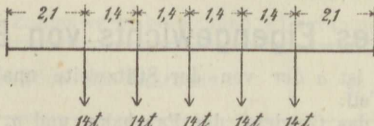
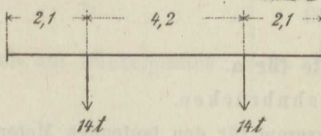
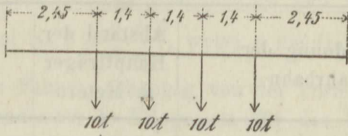
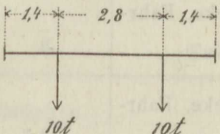
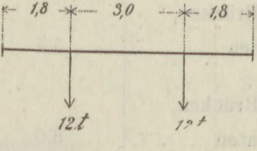
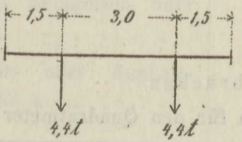
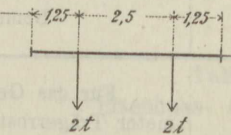
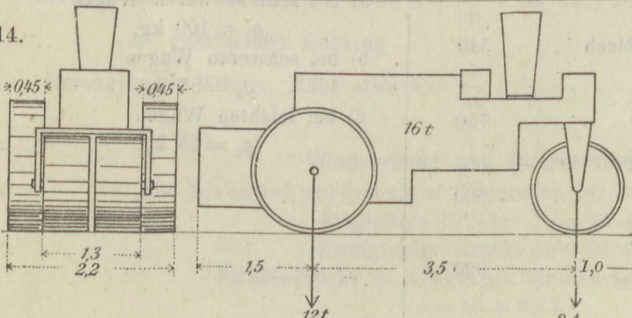


Lokomotive mit Tender. Verein deutsch. Eisenbahnverwaltungen. Lastenzug besteht aus zwei Lokomotiven hintereinander nebst einer unbegrenzten Anzahl v. Güterwagen n. Schema 6.



Güterwagen. Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen.



<p>7.</p> 	<p>Tenderlokomotive f. Hauptbahnen. Lastenzug besteht aus 2 Tenderlokomotiven und aus einer unbegrenzten Anzahl von Güterwagen.</p>
<p>8.</p> 	<p>Güterwagen für Hauptbahnen</p>
<p>9.</p> 	<p>Tenderlokomotive für Lokalbahnen. Lastenzug besteht aus 2 Tenderlokomotiven u. aus einer unbegrenzten Anzahl von Güterwagen.</p>
<p>10.</p> 	<p>Güterwagen für Lokalbahnen</p>
<p>11.</p> 	<p>Lastwagen für Hauptstraßen ohne Bespannung. Spurwte. 1,6 m, Wagenbreite 2,6 m. Belastung besteht a. einem Wagen wie nebenstehend skizziert, außerdem Menschengedrange f. d. qm 360 kg f. Hauptträger u. 560 kg für Querträger usw.</p>
<p>12.</p> 	<p>Lastwagen für Nebenstraßen ohne Bespannung. Spurwte. 1,3 m, Wagenbreite 2,4 m. Belastung besteht aus zwei Wagen neben od. hintereinander und außerdem Menschengedrange wie unter 11.</p>
<p>13.</p> 	<p>Lastwagen f. Ortsverbindungswege. Spurwte. 1,3 m, Wagenbreite 2,2 m. Belastung besteht aus einem Wagen u. außerdem Menschengedrange wie unter 11.</p>
<p>14.</p> 	<p>Straßenwalze. Dampfwalze.</p>

## Tabelle XXIII.

## Angaben zur Bestimmung des Eigengewichts von Brücken.

Eigengewicht =  $a + bl + c$ . Hierbei ist  $a$  der von der Stützweite unabhängige und  $bl + c$  der von der Stützweite abhängige Teil.

Es ist ferner  $a = g_1 + g_2$ , wobei  $g_1$  das Gewicht der Fahrbahn und  $g_2$  das Gewicht des Trägerrostes bezeichnet.

## Tabelle für a.

## 1. Eisenbahnbrücken.

Die Zahlenwerte bezeichnen Kilogramm für den laufenden Meter Gleis.

Konstruktion der Fahrbahn	$g_1$	Anordnung der Fahrbahn	Abstand der Hauptträger in Metern	$g_2$	e = Abstand der Querträger in Metern
Holzquerschwellen m. Bohlenbelag nebst Schienen	450	Eingleisige Brücke, Fahrbahn oben . . . . .	3	$56 + \frac{272}{e}$	
Bohlenbelag und Schienen unmittelbar a. d. Trägern	400	Eingleisige Brücke, Fahrbahn unten . . . . .	4,5	$17 + \frac{482}{e}$	
Langschwellen u. Schienen 35 cm Kies auf Buckelplatten . . . . .	2250	Zweigleisige Brücken, Fahrbahn oben . . . . .	5,5	$64 + \frac{357}{e}$	
Langschwellen u. Schienen Kies auf Wellblech oder Belageisen . . . . .	2500	Zweigleisige Brücken, Fahrbahn unten . . . . .	8,0	$98 + \frac{700}{e}$	

## 2. Straßenbrücken.

Die Zahlenwerte bezeichnen Kilogramm für den Quadratmeter Grundfläche.

Konstruktion der Fahrbahn	$g_1$	Bemerkungen
Doppelter Bodenbelag von $d$ cm im ganzen dick . . . . .	$d$ 10	Für das Gewicht von 1 Quadratmeter Trägerrost rechnet man:
20 cm Schotter auf Belageisen, Buckelplatten oder Wellblech . . . . .	540	a) bei sehr schweren Wagen $g_2 = 100$ kg,
16 cm Steinpflaster mit Kiesbettung . . . . .	750	b) bei schweren Wagen $g_2 = 85$ kg,
Holzpfaster oder Stampfasphalt auf Kiesbeton . . . . .	600	c) bei leichten Wagen $g_2 = 65$ kg.
Kappen, einen Stein stark, zwischen I-Trägern . . . . .	920	



## 3. Fußwege.

Die Zahlenwerte bezeichnen Kilogramm für den Quadratmeter Grundfläche.

Konstruktion der Fahrbahn	$g_1$	Bemerkungen
Granitplatten . . . . .	400	Das Gewicht $g_2$ kann man durchschnittlich zu 60 kg annehmen.
Beton mit Asphalt auf Buckelplatten . . . . .	300	

Der von der Stützweite abhängige Teil des Eigengewichts setzt sich zusammen aus  $bl + c$ . Hierbei ist  $b = \frac{a+p}{k+l}$ , wobei  $p$  das Gewicht der Verkehrslasten bezeichnet.

$k$  ist ein Faktor, abhängig von der Form der Brücke,  $a$  bezeichnet das Gewicht der Brückenbahn und zwar in Kilogramm für das laufende Gleis für Eisenbahnbrücken und für den Quadratmeter Grundfläche für Straßenbrücken,  $c$  ist das Gewicht des Windverbands und der Querversteifung.

Tabelle für  $p$ .

Eisenbahnbrücken	$p$
von $l = 10 - 50$ m . . . . .	$4200 + \frac{23\,000}{l}$
von $l > 50$ m . . . . .	$3100 + \frac{80\,000}{l}$
Straßenbrücken	
a) mit Schotter auf Belageisen oder Buckelplatten . . . . .	$360 + \frac{1200}{l}$
b) mit Stein-, Holz- oder Asphalt-pflaster wie bei a . . . . .	$440 + \frac{1400}{l}$
Fußgängerbrücken . . . . .	400

Tabelle für  $k$ .

## Eisenbahn- und Straßenbrücken.

Träger mit unveränderlicher Höhe $h + \frac{1}{8}l$ auf zwei Stützen . . . . .	$k = 230$
„ „ gekrümmter Gurtung . . . . .	$k = 252$
Durchgehende Träger, Höhe etwa $h = \frac{1}{10}l$ . . . . .	$k = 238$

## Windverband und Querversteifung.

Für Eisenbahnbrücken in Kilogramm für laufenden Meter Gleis

Eingleisige Brücke  $c = 27 + 5l$ Zweingleisige Brücke  $c = 21 + 3,7l$ 

Straßenbrücke in Kilogramm für den Quadratmeter:

 $c = 15 + 0,7l$

## Tabelle XXIV.

## Zulässige Beanspruchung des Schweiß- und Flußeisens bei eisernen Brücken.

## A. Glieder der Hauptträger.

## 1. Zugglieder.

Bei einer Stützweite über	10	20	40	80	120	150 m	
a) ohne Rücksicht auf Winddruck	800	850	900	950	1000	1050 kg	für den qcm
b) mit Rücksicht auf Winddruck	1000 bis 1300 kg						für den qcm.

Bei Anwendung von Schweißeisen sind diese Werte um 10% zu ermäßigen.

## 2. Druckglieder.

Es können die gleichen Beanspruchungen wie unter 1 zugelassen werden, doch sind die Konstruktionsteile auch noch auf Zerknicken zu untersuchen.

## B. Vollwandige Hauptträger und Fahrbahnträger.

## 1. Hauptträger kleinerer Brücken.

Bei Flußeisen ist eine Beanspruchung bis zu 750 kg, bei Schweißeisen bis zu 700 kg für den qcm zugelassen.

## 2. Längs- und Querträger.

Wird das Schotterbett über die Brücke geführt, so daß der Oberbau nicht unmittelbar auf den Fahrbahnträgern aufliegt, so gelten die gleichen Beanspruchungen wie für die Hauptträger.

Liegen die Schienen mittels Querschwellen auf den Längsträgern, so dürfen diese und die Querträger nur bis 700 kg bei Flußeisen und bis 650 kg bei Schweißeisen beansprucht werden. Liegen die Schienen unmittelbar auf den Längsträgern, so dürfen diese bei Flußeisen bis 650 kg, bei Schweißeisen bis 600 kg für den qcm beansprucht werden.

Das gleiche gilt für Querträger, wenn auf diesen die Schienen direkt aufliegen.

## C. Glieder der Wind- und Eckverbände.

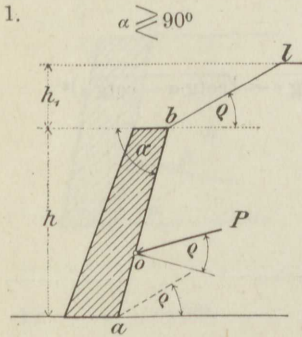
Die Beanspruchungen dürfen die unter A, 1 b) aufgeführten Werte erreichen, doch sollen bei Windverbänden Flacheisen mit geringerem Querschnitt als 80/100 mm und bei Eckverbänden schwächere Winkeleisen als 70/70/10 mm nicht verwendet werden.

## D. Nietverbindungen.

Als Schubspannung sind für die zur Verbindung von Hauptträgern dienenden Niete höchstens 800—1000 kg für den qcm zuzulassen. Der Lochwanddruck darf höchstens den doppelten Wert hiervon erreichen. Jeder Anschluß eines zur Übertragung von Kräften dienenden Stabs muß bei Flacheisen wenigstens zwei — bei Winkeleisen wenigstens drei Niete erhalten. Für die Niete zum Anschluß der Längs- an die Querträger und der letzteren an die Hauptträger darf die Schubspannung 650—700 kg, der Lochwanddruck das Doppelte hiervon nicht überschreiten.



**Tabelle XXV.**  
**Größe des Erddrucks P.**

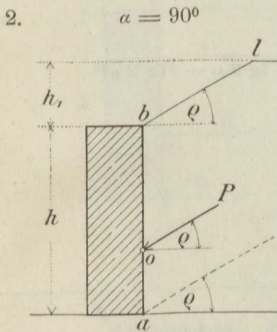


$P =$  Erddruck für den lauf. Meter Mauertiefe.

$$P = \gamma \frac{2}{(h+h_1)^2} \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} (\sqrt{\cotg \varphi - \cotg \varepsilon} - \sqrt{m - \cotg \varepsilon})^2$$

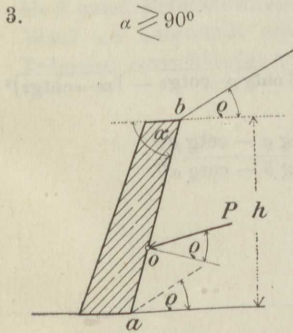
$$\varepsilon = \alpha + 2\varphi; m = \cotg \alpha + \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2} (\cotg \varphi - \cotg \alpha)$$

$\gamma =$  Gewicht 1 cbm Erdmasse.

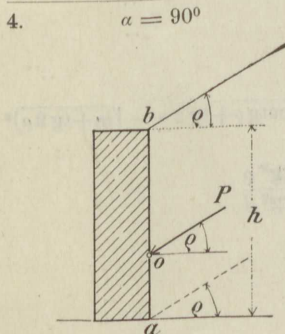


$$P = \gamma \frac{(h+h_1)^2}{2 \cos 2\varphi} (\sqrt{\cotg \varphi + \tg 2\varphi} - \sqrt{m + \tg 2\varphi})^2$$

$$m = \frac{h_1^2}{(h+h_1)^2} \cotg \varphi$$

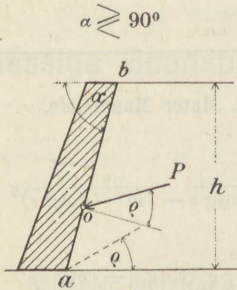


$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha + \varphi)}$$



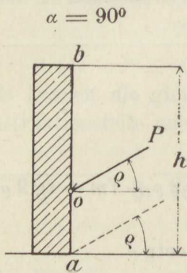
$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \cos \varphi$$

5.



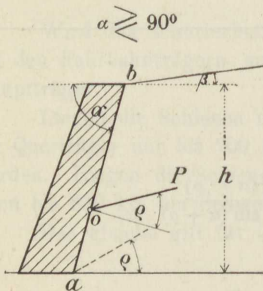
$$P = \frac{\gamma h^2 \sin \varphi}{2 \sin \varepsilon} (\sqrt{\cotg \varphi - \cotg \varepsilon} - \sqrt{\cotg \alpha - \cotg \varepsilon})^2$$

6.



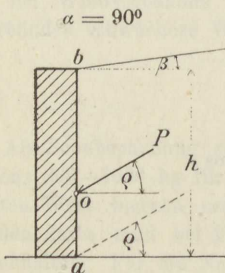
$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma h^2 \sin \varphi}{2 \cos 2\varphi} (\sqrt{\cotg \varphi + \tg 2\varphi} - \sqrt{\tg 2\varphi})^2 \\ &= \frac{\gamma h^2 \cos \varphi}{2 (1 + \sqrt{2} \sin^2 \varphi)} \end{aligned}$$

7.



$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma h^2 (\cotg \beta - \cotg \alpha)^2 \sin \varphi}{2 (\cotg \beta - \cotg \varphi) \sin \varepsilon} (\sqrt{\cotg \varphi - \cotg \varepsilon} - \sqrt{m - \cotg \varepsilon})^2 \\ m &= \cotg \alpha + \frac{(\cotg \varphi - \cotg \beta)^3}{(\cotg \beta - \cotg \alpha)^2} \end{aligned}$$

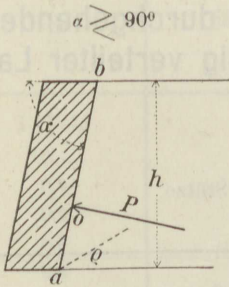
8.



$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma h^2 (\cotg \beta)^2 \sin \varphi}{2 (\cotg \beta - \cotg \varphi) \cos 2\varphi} (\sqrt{\cotg \varphi + \tg 2\varphi} - \sqrt{m + \tg 2\varphi})^2 \\ m &= \frac{\cotg^3 \varphi}{\cotg^2 \beta} \end{aligned}$$

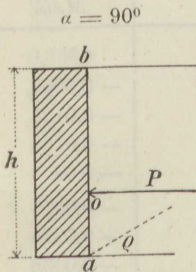


9.



$$P = \frac{\gamma h^2}{2 \sin \alpha} \frac{1 - \cotg \frac{\alpha + \varrho}{2} \operatorname{tg} \varrho}{1 - \cotg \frac{\alpha - \varrho}{2} \operatorname{tg} \varrho}$$

10.



$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right)$$

**Anmerkung.** Die Formeln für die Größe des Erddrucks  $P$  sind in den Fällen 1 bis 8 unter Berücksichtigung des Einflusses der Reibung der Erdmasse längs der stützenden Wand  $ab$  aufgestellt worden. In den Fällen 9 und 10 ist der Einfluß der Reibung der Erdmasse vernachlässigt worden.

Tabelle XXVI.

## Größtwerte der Biegemomente für den durchgehenden Träger unter der Einwirkung von gleichmäßig verteilter Last.

$g$  = Eigengewicht für den laufenden Meter.

$p$  = Nutzlast für den laufenden Meter.

$l$  = Länge eines Trägerfeldes.

$x$  = Abstand des Querschnitts von der linksseitigen Stütze.

### Zwei Felder.

$\frac{x}{l}$	Einfluß von $g$		Einfluß von $p$	
	$M$		$+ M_{max.}$	$- M_{max.}$
0	0		0	0
0,1	+ 0,0325		+ 0,0388	- 0,0063
0,2	+ 0,0550		+ 0,0676	- 0,0125
0,3	+ 0,0675		+ 0,0863	- 0,0188
0,4	+ 0,0700		+ 0,095	- 0,0250
0,5	+ 0,0625		+ 0,0938	- 0,0313
0,6	+ 0,0450		+ 0,0825	- 0,0375
0,7	+ 0,0175		+ 0,0613	- 0,0438
0,75	0		+ 0,0469	- 0,0469
0,8	- 0,02		+ 0,03	- 0,05
0,9	- 0,0675		+ 0,0061	- 0,0736
1	- 0,125		0	- 0,125
Mitte	$gl^2$		$pl^2$	$pl^2$

### Drei Felder.

1. Feld				
0	0		0	0
0,1	+ 0,035		+ 0,04	- 0,005
0,2	+ 0,06		+ 0,07	- 0,01
0,3	+ 0,075		+ 0,09	- 0,015
0,4	+ 0,08		+ 0,10	- 0,02
0,5	+ 0,075		+ 0,10	- 0,025
0,6	+ 0,06		+ 0,09	- 0,030
0,7	+ 0,035		+ 0,07	- 0,035
0,8	0		+ 0,04	- 0,040
0,9	- 0,045		+ 0,02	- 0,0654
1	- 0,10		+ 0,0167	- 0,1167
2. Feld				
0	- 0,10		+ 0,0167	- 0,1167
0,1	- 0,055		+ 0,0075	- 0,0625
0,2	- 0,02		+ 0,03	- 0,050
0,276	0		+ 0,05	- 0,050
0,3	+ 0,005		+ 0,055	- 0,050
0,4	+ 0,02		+ 0,070	- 0,050
0,5	+ 0,025		+ 0,075	- 0,050
Mitte	$gl^2$		$pl^2$	$pl^2$



## Vier Felder.

$\frac{x}{l}$	Einfluß von $g$	Einfluß von $p$	
	$M$	+ $M_{max.}$	- $M_{max.}$
1. Feld			
0	0	0	0
0,1	+ 0,0343	+ 0,0396	- 0,0054
0,2	+ 0,0586	+ 0,0693	- 0,0107
0,3	+ 0,0729	+ 0,0889	- 0,0161
0,4	+ 0,0771	+ 0,0986	- 0,0214
0,5	+ 0,0714	+ 0,0982	- 0,0268
0,6	+ 0,0557	+ 0,0879	- 0,0321
0,7	+ 0,03	+ 0,0675	- 0,0375
0,786	0	+ 0,0421	- 0,0421
0,8	- 0,0057	+ 0,0374	- 0,0431
0,9	- 0,0514	+ 0,0163	- 0,0677
1,0	- 0,1071	+ 0,0134	- 0,1205
2. Feld			
0	- 0,1071	+ 0,0134	- 0,1205
0,1	- 0,0586	+ 0,0146	- 0,0721
0,2	- 0,02	+ 0,03	- 0,050
0,266	0	+ 0,0488	- 0,0488
0,3	+ 0,0086	+ 0,0568	- 0,0482
0,4	+ 0,0271	+ 0,0736	- 0,0464
0,5	+ 0,0357	+ 0,0804	- 0,0446
0,6	+ 0,0343	+ 0,0772	- 0,0429
0,7	+ 0,0229	+ 0,0639	- 0,0411
0,8	+ 0,0014	+ 0,0417	- 0,0403
0,805	0	+ 0,0409	- 0,0409
0,9	- 0,013	+ 0,0311	- 0,0611
1,0	- 0,0714	+ 0,0357	- 0,1071
Mitte	$gl^2$	$pl^2$	$pl^2$



## Druckfehlerverzeichnis.

Seite	7	Zeile	10	lies	21. Aufgabe 8	statt	Aufgabe 8
"	13	"	36	"	c) Parallele Kräfte	"	Parallele Kräfte
"	82	"	25	"	$e = 2 \cdot 12 = 24$	"	$e = 2 \cdot 15 = 30$
"	82	"	26	"	36 mm	"	45 mm
"	85	"	30	"	259 qcm	"	259 cm
"	91	"	9	"	3 Niete	"	4 Niete
"	96	"	7	"	d. h.	"	D. h.
"	106	"	14	"	Nr. 210	"	Nr. 209
"	162	"	1	"	Figur 285	"	Figur 282
"	213	"	24	"	Lastenzug	"	Lastzug
"	235	"	9	"	für	"	fir
"	266	"	16	"	für den	"	per
"	266	"	27	"	für den	"	per
"	273	"	35	"	2400	"	2000
"	275	letzte Zeile	"	"	2,30	"	230
"	276	Zeile 20	"	"	Figur 238	"	Figur 233