

Leitfaden und Aufgabensammlung

ZUR

Mechanik.

Für technische Fachschulen

und den Selbstunterricht

bearbeitet

von

R. Geigenmüller,

Oberlehrer am Technikum Mittweida.



~~IV. 1084 Ia 92~~



II. TEIL:

Technische Mechanik.



Mittweida.

Polytechnische Buchhandlung R. Schulze.

1899.

531



CZ-II.606

Biblioteka Główna
Zachodniopomorskiego Uniwersytetu
Technologicznego w Szczecinie
CZ. 606



001-000606-00-0

Technische Mechanik.

Vorwort.

Der Verfasser dieses Leitfadens erteilt seit einer langen Reihe von Jahren mechanischen Unterricht im I. Lehrplan des Technikums Mittweida und hat sich dabei selbstverständlich dem mathematischen Wissen und Können seiner Schüler genau anzupassen.

Während der ersten drei Semester läuft nämlich der Unterricht in der Mechanik parallel neben dem in der Mathematik her und da im Anfangshalbjahr, für welches die Kenntnisse der Algebra und Planimetrie vorausgesetzt sind, das algebraische Rechnen gründlich geübt und die Trigonometrie, sowie Stereometrie neu durchgenommen werden, woran sich dann im zweiten und dritten Semester die Elemente der algebraischen Analysis, der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung schliessen, so ist dem Lehrer für Mechanik sein Weg, was Auswahl und Anordnung des Stoffes betrifft, besonders anfangs innerhalb ziemlich enger Grenzen vorgeschrieben. Es hat sich als zweckmässig bewährt, im ersten Semester die einfachsten Bewegungsarten, dann die Grundgesetze und die Grundbegriffe der Mechanik, hierauf das Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte, endlich das Wichtigste vom Schwerpunkte, von der Reibung und den Maschinen zu bringen. Wie der unter dem Titel »Die Anfangsgründe der Mechanik« im Jahre 1894 in dritter Auflage erschienene Leitfaden zeigt, kommt man auf diese Weise mit ganz geringen algebraischen Hilfsmitteln und wenigen planimetrischen Lehrsätzen zum Ziele und steigt pädagogisch richtig vom leichteren allmähig zum schwierigeren auf.

Eine Bestätigung für die Richtigkeit seiner Ansicht konnte wohl der Verfasser in der günstigen Beurteilung obigen Werkchens von kompetenter Seite, sowie auch in der Thatsache erblicken, dass es während der verhältnismässig kurzen Frist von sechs Jahren drei starke Auflagen erlebt hat; allein andererseits stellte sich im Laufe der Zeit immer mehr heraus, dass der Inhalt des Leitfadens im längeren Wintersemester kaum, im kürzeren Sommersemester aber

keinesfalls erledigt werden kann und um diesem Übelstande abzu-
helfen, entschloss sich Verfasser, die »Anfangsgründe« um alles
dasjenige zu kürzen, was mit Trigonometrie oder Stereometrie
behandelt ist und das derart auf sein richtiges Mass zurückgeführte
Werkchen als ersten Teil eines Leitfadens zur Mechanik
unter dem Spezialtitel »Elementarmechanik« herauszugeben.

Die Fortsetzung wird durch die vorliegende »technische
Mechanik« gebildet, welche den Unterrichtsgegenstand im zweiten und
dritten Semester ausmacht. Auch hier ist die Reihenfolge der ein-
zelnen Abschnitte abhängig von der mathematischen Bildung, welche
die Schüler allmählig durchläuft. Anfangs, wo er die Elementar-
mathematik hinter sich hat, eignen sich diejenigen Schwerpunkts-
bestimmungen, zu welchen Trigonometrie und Stereometrie erforder-
lich sind, sowie die Stabilität der Körper und die Ableitung der Guldin-
schen Regeln; dann folgt der gerade Centralstoss und die gleitende
Reibung auf der schiefen Ebene, am Keil und an der Schraube.

Mittlerweile sind die Schüler in der Analysis mit den Grenzwerten
bekannt geworden und es kann daher in der Mechanik die Seilreibung
auf die möglichst einfache Weise erledigt werden. Ferner ist jetzt der
Schüler durch die Grundbegriffe, welche er sich in der analytischen
Geometrie und in der Differentialrechnung angeeignet hat, befähigt
zum richtigen Verständnis der graphischen Darstellung der Bewegungen,
sowie der allgemeinen Definitionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung.
Selbst der Anwendung unbestimmter und bestimmter Integrale steht
nichts mehr im Wege, weil an unserer Anstalt die letzteren Begriffe
kurz nach der Differentiation der Funktionen entwickelt werden. Überhaupt
ist es leicht zu ermöglichen, dass das aus der höheren Mathematik für
die Mechanik Erforderliche rechtzeitig zur Hand ist, da der mathematische
und mechanische Unterricht meist in der Hand desselben Lehrers liegen
und sollte dies einmal nicht der Fall sein, so genügt eine kurze Verständigung
zwischen beiden Kollegen, um die nötige Übereinstimmung herbeizuführen.

Unter diesen Verhältnissen wäre es nach Verfassers Ansicht un-
recht, auf die mannigfaltigen und gewichtigen Vorteile, welche die
Hilfsmittel der Analysis für die Mechanik darbieten, zu verzichten;
denn wenn durch jene einerseits viel Zeit und Arbeit gespart wird,
indem zahlreiche mechanische Probleme der elemen-

taren Behandlungsweise gar nicht oder doch schwer zugänglich sind oder wenigstens ihr gegenüber sich recht spröde verhalten, so darf wohl andererseits neben der Geometrie mit Recht die Mechanik als das günstigste Anwendungsgebiet der höheren Mathematik bezeichnet werden. Hier tritt dem Schüler wiederholt der grosse Nutzen der graphischen Darstellungen entgegen, er hat ferner fortwährend Gelegenheit, die gesetzmässige Abhängigkeit veränderlicher Grössen an konkreten Fällen zu beobachten und die Grundbegriffe der Analysis (Grenzwert, Differential, Differentialquotient, Integral etc.), erscheinen im klarsten Lichte. Es liegt mithin zu Tage, dass beide Wissenszweige sich gegenseitig auf das wohlthätigste beeinflussen, anregen und fördern.

Schliesslich möchte Verfasser dem möglichen Einwurf, der Umfang des Stoffes stehe nicht im richtigen Verhältniss zu dem Titel »technische Mechanik«, mit der Bemerkung vorbeugen, dass an unserer Schule im zweiten und dritten Semester noch graphische Statik, Festigkeitslehre, Hydraulik und mechanische Wärmetheorie vorgetragen werden, während die allgemeineren Prinzipien und höheren Probleme der im vierten und fünften Semester zum Unterricht gelangenden analytischen Mechanik vorbehalten bleiben müssen. Überdies kann die Aufgabe des Unterrichts nicht in einer lückenlosen Entwicklung der Wissenschaft, sondern sie soll vielmehr darin bestehen, dem Schüler Klarheit in den Grundbegriffen, richtiges Verständnis der Kräftewirkungen und die Fähigkeit zu erteilen, leichtere Aufgaben aus allen Theilen der Mechanik selbständig zu lösen; denn ist auf diese Art eine solide Grundlage gewonnen, so sorgt dann schon die Maschinenbaukunde mit ihren verschiedenen Zweigen nach allen Richtungen hin für genügend zahlreiche Anwendungen.

Mittweida, im September 1898.

Der Verfasser.



I. Kapitel.

Schwerpunktsbestimmungen, die Stabilität der Körper und die Guldinsche Regel.

§ 1.

Schwerpunkte vom Kreisbogen und vom Kreisabschnitt.

Wir haben uns im ersten Teile dieses Werkes blos mit denjenigen Schwerpunkten von homogenen Linien, ebenen Flächen und Körpern beschäftigt, deren Ermittlung lediglich die Kenntnis einiger planimetrischer Sätze und etwas Übung im algebraischen Rechnen erforderte.

Nummehr wollen wir die dadurch entstandene Lücke ausfüllen und auch solche Schwerpunktsformeln bringen, zu deren Ableitung die Grundbegriffe und Lehrsätze der Trigonometrie und Stereometrie herangezogen werden müssen.

In dieser Hinsicht können zunächst die beiden Formeln für die damals gefundenen Schwerpunktsabstände $OS_1 = x_1$ (Fig. 1) und $OS_2 = x_2$ des Kreisbogens und des Kreisabschnitts, nämlich

$$x_1 = \frac{rs}{b} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$$

jetzt für die Anwendung wesentlich bequemer gestaltet werden, wenn man statt der Bogenlänge $\widehat{AB} = b$ und der Sehne $AB = s$ den Centriwinkel $AOB = \alpha$ einführt; denn man hat einerseits

$$b = r \alpha$$

und andererseits, weil Winkel $COB = \frac{\alpha}{2}$ ist, $\frac{BD}{OB} = \frac{s}{2r} = \sin \frac{\alpha}{2}$,

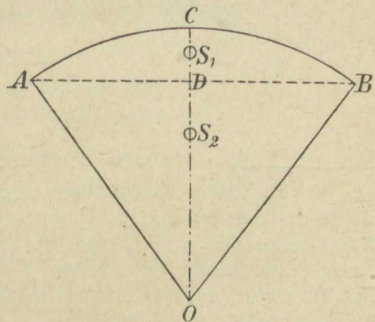


Fig. 1.

mithin

$$s = 2 r \sin \frac{\alpha}{2}$$

und folglich

$$x_1 = \frac{2 r}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \dots \dots \dots (1)$$

den Schwerpunktsabstand $O S_1$ des Kreisbogens, sowie

$$x_2 = \frac{4 r}{3 \alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \dots \dots \dots (2)$$

den Schwerpunktsabstand $O S_2$ des Kreisabschnittes vom Mittelpunkte O . Bei dem Gebrauche dieser Formeln ist aber wohl zu beachten, dass der Winkel α als Divisor nur im Bogenmass genommen werden darf, welches bekanntlich aus dem Gradmass mittels der Formel

$$\text{arc } \alpha = \frac{\alpha^0 \pi}{180^0} = \frac{\alpha' \pi}{180 \cdot 60'} = \frac{\alpha'' \pi}{180 \cdot 60 \cdot 60''}$$

leicht bestimmt werden kann*).

So wäre z. B. für einen Kreisabschnitt mit dem Halbmesser $r = 285 \text{ mm}$ und einem Centriwinkel von $34^0 44' = 2084'$ zunächst das Bogenmass des letzteren

$$\text{arc } \alpha = \frac{2084 \pi}{180 \cdot 60} = \frac{2084 \pi}{10800},$$

mithin nach Formel 1

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 r}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot 285 \cdot 10800}{2084 \pi} \cdot \sin 17^0 22' \\ &= \frac{3078000}{1042 \pi} \cdot \sin 17^0 22', \end{aligned}$$

$$\log x_1 = \left\{ \begin{array}{l} \log 3078000 = 6,48827 \\ + \log \sin 17^0 22' = 9,47492 - 10 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \log 1042 = 3,01787 \\ + \log \pi = 0,49715 \end{array} \right\} = \frac{5,96319}{3,51502}$$

$$\log x_1 = 5,96319 - 3,51502 = 2,44817$$

$$x_1 = 280,55 \text{ mm},$$

*) In vielen Zahlentabellenwerken, z. B. in den fünfstelligen Logarithmentafeln von Schlömilch auf den Seiten 38 und 39 finden sich die Bogenmasse der Winkel für die einzelnen Grade, Minuten und Sekunden fertig ausgerechnet vor und es ist deshalb höchstens eine Addition von drei Zahlen nötig, um das Bogenmass für einen beliebigen Winkel zu erhalten; beispielsweise ergibt sich

$$\text{arc } 65^0 43' 21'' = \left\{ \begin{array}{l} \text{arc } 65^0 = 1,13446 \\ + \text{arc } 43' = 0,01251 \\ + \text{arc } 21'' = 0,00010 \end{array} \right\} = \underline{\underline{1,14707}}$$

der Schwerpunktsabstand des Kreisbogens vom Mittelpunkt O . Den Schwerpunktsabstand x_2 der Kreissektorfläche könnte man entweder nach Formel 2 in ganz gleicher Weise oder kürzer dadurch ermitteln, dass man von x_1 das $\frac{2}{3}$ fache nimmt. In beiden Fällen erhält man

$$x_2 = 187,01 \text{ mm.}$$

Speziell für $\alpha = 180^\circ = \pi$ folgen aus den beiden obigen Formeln (1.) und (2.)

$$x_1 = \frac{2r}{\pi}, \quad \dots \dots \dots (3.)$$

der Schwerpunktsabstand des halben Kreisumfanges und

$$x_2 = \frac{4r}{3\pi}, \quad \dots \dots \dots (4.)$$

der Schwerpunktsabstand der Halbkreisfläche vom Centrum O .

§ 2.

Schwerpunkte krummer Flächen.

a. Der Schwerpunkt eines Cylindermantels ist der Mittelpunkt seiner Achse.

Beweis: Wir denken uns die Mantelfläche in zahllose gleiche und deshalb unendlich dünne rechteckige Streifen zerlegt und deren Gewichte in ihre Schwerpunkte vereinigt. Hierdurch entsteht eine homogene Kreislinie, welche den Cylindermantel halbiert und deren Mittelpunkt, das ist der Halbierungspunkt der Cylinderachse, zugleich den Schwerpunkt des Cylindermantels darstellt.

b. Der Schwerpunkt eines Kegelmantels liegt auf der Achse des letzteren und ist von der Basis um den dritten Teil der Höhe entfernt.

Beweis: Teilt man die Peripherie des Grundkreises in unzählige gleiche Teile und verbindet jeden Teilpunkt mit der Spitze D des Kegels (Fig. 2), so zerfällt die Kegelmantelfläche in zahllose kongruente gleichschenklige Dreiecke. Die sämtlichen Schwerpunkte der letzteren bilden aber eine homogene Kreislinie, welche jede Seitenlinie BD des Kegels in dem Verhältnis

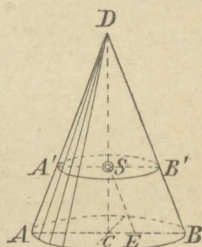


Fig. 2.

$$BB' : BD = 1 : 3$$

teilt und deren Centrum S zugleich der Schwerpunkt des Kegelmantels ist. Zieht man jetzt $SE \parallel DB$ und setzt zur Abkürzung $CS = x$, $CD = h$, so besteht wegen Ähnlichkeit der beiden Dreiecke CES und CBD die Proportion

$$x : h = BB' : BD = 1 : 3,$$

woraus folgt

$$x = \frac{h}{3} \dots \dots \dots (1.)$$

c. Der Schwerpunkt eines Kegelstumpfmantels mit den beiden Radien R , r und der Höhe h liegt auf der Achse und zwar in einem Abstände

$$x = \frac{R + 2r}{R + r} \cdot \frac{h}{3} \dots \dots \dots (2.)$$

vom Mittelpunkte des Kreises vom Radius R , gleichgiltig, ob R grösser oder kleiner als r sei.

Beweis: Wir denken uns eine der beiden Kreisperipherien in unendlich viele (n) gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt, sowie durch die Achse Ebenen geführt. Hierdurch zerfällt die Kegelstumpfmantelfläche in n unter sich kongruente Trapeze mit den beiden parallelen Seiten

$$a = \frac{2R\pi}{n}, \quad b = \frac{2r\pi}{n}$$

und der Höhe $AB = s$ (Seitenlinie des Kegelstumpfes), folglich mit dem Schwerpunktsabstände

$$AD = x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{s}{3} = \frac{R + 2r}{R + r} \cdot \frac{s}{3}$$

von der Seite a (Fig. 3). Die Schwerpunkte aller dieser Trapeze

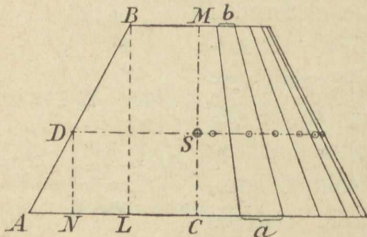


Fig. 3.

bilden auf dem Kegelstumpfmantel eine homogene Kreisperipherie, deren Mittelpunkt S identisch mit unserem Schwerpunkte ist. Ziehen wir nun DN und BL parallel CM , so verhält sich

$$DN : BL = AD : AB$$

oder, weil $DN = SC = x$,

$BL = CM = h$, $AD = z$ und $AB = s$ ist,

$$x : h = x : s.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{h}{s} z, \text{ oder } z = x \cdot \frac{s}{h}$$

und mit Einsetzung des obigen Wertes von x ergibt sich Formel 2.

d. Der Schwerpunkt einer Kugelzonenfläche liegt in der Mitte ihrer Achse.

Beweis: Zerlegen wir die Höhe der Kugelzone in zahllose gleiche Teile und denken uns durch sämtliche Teilpunkte ein System von Ebenen lotrecht zur Höhe, so zerfällt die Kugelzonenfläche in unendlich viele Kugelzonen, welche alle dieselbe verschwindend kleine Höhe δ und einen gemeinschaftlichen Kugelradius r , folglich auch den gleichen Flächeninhalt $2r\pi\delta$ und demgemäss gleiches Gewicht besitzen. Denkt man sich aber jetzt die Gewichte dieser Zonen in ihre Schwerpunkte, das sind ihre Mittelpunkte, vereinigt, so entsteht eine homogene Linie, welche genau mit der Achse der Kugelzone zusammenfällt und deren Mittelpunkt daher den Schwerpunkt der letzteren darstellt.

Zusatz: Das vorstehend Gesagte gilt ganz offenbar auch für die Kugelkalotte und mithin ist der Schwerpunkt der letzteren der Halbierungspunkt ihrer Achse.

Die Schwerpunktslage solcher homogener Gebilde, welche aus den vorstehend aufgeführten Flächen zusammengesetzt sind, lässt sich dann leicht dadurch bestimmen, dass in Bezug auf einen passend gewählten Punkt der gemeinschaftlichen Rotationsachse das statische Moment des Ganzen gleich der (algebraischen) Summe der Momente aller seiner Teile gesetzt wird.

Beispielsweise bestehe das durch die Fig. 4 veranschaulichte Blechgefäss aus einer Halbkugeloberfläche und darauf gesetztem Cylindermantel mit den Abmessungen $OA = OB = r$, $BC = h$. Wir bezeichnen den Abstand des Gesamtschwerpunktes S vom Kugelmittelpunkte O mit x und haben in Bezug auf letzteren die Momentengleichung

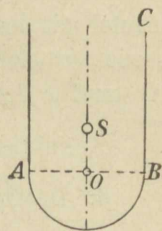


Fig. 4.

$$(2r\pi h + 2r^2\pi)x = 2r\pi h \cdot \frac{h}{2} - 2r^2\pi \cdot \frac{r}{2},$$

$$(h + r)x = \frac{h^2 - r^2}{2},$$

$$x = \frac{h - r}{2}.$$

Für $h > r$ wird x positiv und S liegt oberhalb O , für $h = r$ wird x gleich Null und S fällt mit O zusammen, für $h < r$ wird x negativ und S liegt unterhalb O .

Übungsbeispiele.

1. Eine Kreissektorfläche ist bestimmt durch $r = 333 \text{ mm}$ und $\alpha = 77^\circ$; man berechne den Abstand des Schwerpunktes vom Centrum.

Resultat: $x = 205,67 \text{ mm}$.

2. Desgleichen, wenn $r = 0,876 \text{ m}$ und $\alpha = 192^\circ 46'$ ist.

Resultat: $x = 0,345 \text{ m}$.

3. Wo liegt der Schwerpunkt eines cylindrischen, oben offenen Gefäßes, welches aus überall gleich dickem Metallblech besteht und durch seinen Radius r , sowie seine Höhe h bestimmt ist?

Antwort: Auf seiner Achse in einer Entfernung $x = \frac{h^2}{2h + r}$ vom Boden.

4. Man bestimme für einen Kegelstumpfmantel den Schwerpunktsabstand x von der kleinen Grundfläche, wenn $R = 5a$, $r = 2a$ und $h = 3,5a$ gegeben sind.

Resultat: $x = 2a$.

5. Ein homogenes Blechgefäß wird aus einem Kegelstumpfmantel mit den Radien $R = 7a$, $r = 3a$ und der Höhe $h = 3a$, sowie aus einer Kreisfläche mit dem Radius r gebildet; es ist der Abstand x des Schwerpunktes von der Bodenfläche anzugeben.

Resultat: $x = \frac{85}{59} a$.

6. Desgleichen, wenn die seitliche Wandung eine Zone mit dem Kugelradius r , sowie der Höhe $\frac{1}{2}r$ und der Boden ein Kreis mit dem Durchmesser r ist.

Resultat: $x = \frac{1}{5} r$.

7. Ein kesselförmiges Gefäß besteht aus einer Kugelhaube mit dem Radius r , sowie der Höhe $\frac{1}{2}r$ und einem sich tangential anschliessenden Kegelstumpfmantel von der Höhe $\frac{r}{2}$; man bestimme

die Entfernung x des Schwerpunktes S vom tiefsten Punkte der Kugelhaube.

Resultat: $x = \frac{41}{78} r.$

§ 3.

Schwerpunkte einfacher Körper.

Nachdem wir bereits früher erfahren haben, dass der Schwerpunkt eines beliebigen Prismas die Verbindungslinie der Schwerpunkte beider paralleler Endflächen halbiert, und folglich der Schwerpunkt des Cylinders der Mittelpunkt seiner Achse ist, wenden wir uns zur Bestimmung der Schwerpunkte einiger anderer homogener Körper, zunächst der Pyramide.

Denkt man sich zu dem Ende die Höhe der letzteren in zahllose gleiche Teile zerlegt und durch jeden Teilungspunkt eine Ebene parallel zur Grundfläche gelegt, so zerfällt die Pyramide in unendlich viele Schichten, deren sämtliche Schwerpunkte auf einer von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Basis gezogenen Geraden liegen. Allein weil diese Schichten zwar gleich stark gedacht werden sollen, aber verschiedene Inhalte und mithin auch verschiedene Gewichte haben, so ist die genannte Schwerlinie heterogen, und es ist daher zur Bestimmung des Pyramidenschwerpunktes noch der Abstand von der Grundfläche notwendig. Um diesen zu erhalten, fassen wir vorerst eine dreiseitige Pyramide ins Auge und betrachten ABC als Basis (Fig. 5), D als Spitze.

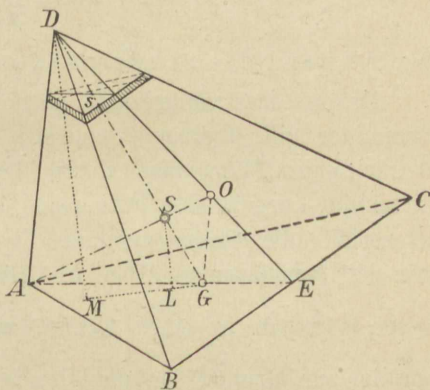


Fig. 5.

Dann ist die von D nach dem Schwerpunkte G des Dreiecks ABC gezogene Gerade GD eine Schwerlinie der Pyramide. Sehen wir dagegen BCD als Grundfläche, folglich A als Spitze an, so ist, wenn O den Schwerpunkt des Dreiecks BCD bezeichnet, AO eine zweite Schwerachse unserer Pyramide und wir haben den ge-

wünschten Schwerpunkt S als Durchschnitt zwischen DG und AO . Weil aber nach dem vorigen Paragraphen

$$EG : EA = EO : ED = 1 : 3$$

sich verhalten, so ist Dreieck EGO ähnlich EAD und folglich einerseits $GO \parallel AD$ und andererseits $GO : AD = 1 : 3$.

Aus der Parallelität von GO und AD erkennen wir wieder die Ähnlichkeit der Dreiecke SGO und SDA und hiermit das Bestehen der weiteren Proportionen

$$SG : SD = GO : AD = 1 : 3$$

oder

$$SG : (SG + SD) = 1 : (1 + 3)$$

das ist

$$SG : DG = 1 : 4.$$

Wenn wir schliesslich vom Schwerpunkte und von der Spitze auf die Basis der Pyramide die Lote $SC = x$ und $DM = h$ fällen und ihre Fusspunkte mit G verbinden, so entstehen abermals zwei ähnliche Dreiecke GLS und GMD ; mithin verhält sich

$$SL : DM = SG : DG \text{ oder } x : h = 1 : 4,$$

woraus folgt

$$x = \frac{h}{4}, \dots \dots \dots (1.)$$

der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche.

Davon, dass vorstehende Formel auch für beliebig vielseitige Pyramiden gilt, überzeugt man sich leicht durch folgende einfache Betrachtung: Führt man durch die Spitze und die von einem Eckpunkte ausgehenden Diagonalen der Grundfläche ebene Schnitte, so zerfällt die Gesamtpyramide in lauter dreiseitige Pyramiden mit der gemeinsamen Höhe h . Die Schwerpunkte der letzteren liegen sämtlich in einer Ebene, welche in der Entfernung $\frac{h}{4}$ parallel zur Grundfläche der vielseitigen Pyramide läuft und mithin liegt auch der Schwerpunkt der letzteren in derselben Ebene.

Demnach haben wir den Lehrsatz:

Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt auf derjenigen Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Basis verbindet, und zwar um den vierten Teil der Höhe von der letzteren entfernt.

Genau dasselbe gilt von dem Kegel, weil derselbe als regelmässige Pyramide mit unendlich vielen Seitenflächen aufgefasst werden kann.

Um endlich den Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes zu erhalten, legen wir durch die Pyramide in Fig. 6 parallel zur Grundfläche eine Ebene, wodurch dieser Körper in eine kleinere Pyramide und in einen Pyramidenstumpf zerlegt wird, sodass nach dem Momentengesetz das statische Moment der Gesamtpyramide gleich ist der Summe der Momente vom Pyramidenstumpf und der Ergänzungspyramide. Bezeichnen wir jetzt die Inhalte der parallelen Flächen $deglm$ und $DEGLM$ mit f und F , setzen die Höhen $BN = h$ und $CN = x$, so ist für die grosse Pyramide das Volumen

$$V_1 = \frac{1}{3} F \cdot (x + h),$$

und der Abstand des Schwerpunktes von der unteren Endfläche

$$x_1 = \frac{x + h}{4},$$

folglich das Moment

$$V_1 x_1 = \frac{F}{12} (x + h)^2,$$

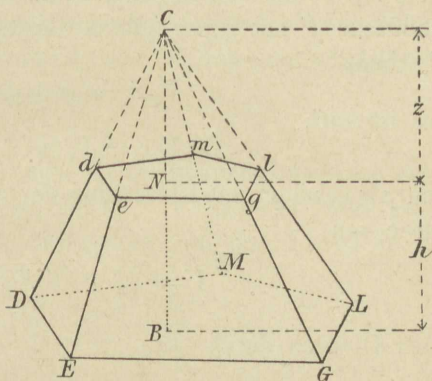


Fig. 6.

ferner ist für die kleine Pyramide das Volumen

$$V_2 = \frac{f}{3} x,$$

der Abstand des Schwerpunktes von F

$$x_2 = h + \frac{x}{4}$$

und demnach das statische Moment in Bezug auf F

$$V_2 x_2 = \frac{f}{3} x \left(h + \frac{x}{4} \right).$$

Hierin ist aber x eine Unbekannte und muss eliminiert werden. Zu diesem Zwecke benutzen wir aus der Stereometrie die Proportion

$$F : f = (x + h)^2 : x^2 \text{ oder } \sqrt{F} : \sqrt{f} = (x + h) : x,$$

woraus nach kurzer Rechnung folgt

$$x = \frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}, \quad x + h = \frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}},$$

und wir erhalten mit Einführung dieser Werte in die obigen beiden Momente

$$V_1 x_1 = \frac{F}{12} \cdot \frac{h^2 F}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2} = \frac{F^2}{F-2\sqrt{Ff}+f} \cdot \frac{h^2}{12},$$

sowie

$$V_2 x_2 = f x \cdot \frac{4h+x}{12} = \frac{4f\sqrt{Ff}-3f^2}{F-2\sqrt{Ff}+f} \cdot \frac{h^2}{12}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Kubikinhalt der abgestumpften Pyramide mit V und den Abstand ihres Schwerpunktes von der unteren Endfläche F mit x , so gilt in Bezug auf letztere die Momentengleichung

$$V_1 x_1 = V x + V_2 x_2,$$

das ist auch

$$V x = V_1 x_1 - V_2 x_2,$$

und wir erhalten mit Einsetzung der letzten Werte von $V_1 x_1$, $V_2 x_2$, sowie von

$$V = (F + \sqrt{Ff} + f) \frac{h}{3}$$

nach Division durch $\frac{h}{3}$

$$(F + \sqrt{Ff} + f) x = \frac{F^2 - 4f\sqrt{Ff} + 3f^2}{F - 2\sqrt{Ff} + f} \cdot \frac{h}{4}$$

oder endlich, weil ohne Rest

$(F^2 - 4\sqrt{Ff} + 3f^2) : (F - 2\sqrt{Ff} + f) = F + 2\sqrt{Ff} + 3f$
sich ergibt,

$$x = \frac{F + 2\sqrt{Ff} + 3f}{F + \sqrt{Ff} + f} \cdot \frac{h}{4}, \quad \dots \quad (2.)$$

den Schwerpunktsabstand eines Pyramidenstumpfes von der Grundfläche F , wobei es nicht darauf ankommt, ob F grösser oder kleiner als f ist.

Weil der Kegelstumpf als besonderer Fall des ebengenannten Körpers betrachtet werden darf, so entsteht aus der letzten Formel für

$$F = R^2 \pi \quad \text{und} \quad f = r^2 \pi$$

bei gleichzeitiger Kürzung mit π

$$x = \frac{R^2 + 2 R r + 3 r^2}{R^2 + R r + r^2} \cdot \frac{h}{4}, \quad \dots \quad (3.)$$

der Schwerpunktsabstand eines Kegelstutzes mit den Radien R , r und der Höhe h .

Übungsbeispiele.

8. Die parallelen Endflächen einer abgestumpften Pyramide enthalten 2 und 18 Quadratmeter, während die Höhe 26 m beträgt. Man berechne den Abstand des Schwerpunktes von der kleineren Endfläche.

Resultat: 17 m.

9. Den Schwerpunktsabstand eines Kegelstutzes mit den Dimensionen $R = 2$ cm, $r = 1$ cm und $h = 7$ cm von dem Grundkreise mit dem Halbmesser R anzugeben.

Resultat: $x = 2,75$ cm.

10. Die beiden Grundflächen eines Pyramidenstumpfes seien regelmässige Sechsecke mit den Seiten a , b und die Höhe sei h . Welches ist die Schwerpunktsentfernung von der Endfläche mit der Seite a ?

$$\text{Antwort: } x = \frac{a^2 + 2 a b + 3 b^2}{a^2 + a b + b^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

§ 4.

Schwerpunkte zusammengesetzter Körper.

Unter Benutzung der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Formeln lässt sich der Schwerpunkt eines jeden Körpers ermitteln, welcher aus Prismen, ganzen und abgestumpften Pyramiden, Cylindern, Kegeln und Kegelstutzen zusammengesetzt ist, indem man in Bezug auf eine passend gewählte Ebene, bezw. Achse oder Punktstelle das statische Moment des ganzen Körpers gleich der Summe der Momente aller seiner Teile setzt.

Dabei können an die Stelle der Gewichte offenbar auch die Volumina der Körper treten; denn führt man die ersteren ein, so lässt sich jedes Glied der Momentengleichung durch das spezifische Gewicht dividieren. Letzteres fällt also heraus, und es bleiben anstatt der Gewichte die Rauminhalte stehen.



Als Anwendungsbeispiel wählen wir eine ungleichschenklige schmiedeeiserne Achse, welche in Fig. 7 dargestellt und mit den nötigen in Millimetern ausgedrückten Masseinschreibungen versehen ist.

Es gewährt einen kleinen Vorteil, wenn wir die statischen Momente der Achse und ihrer einzelnen Teile nicht auf den End-, sondern auf den Mittelpunkt des linken Zapfens beziehen,

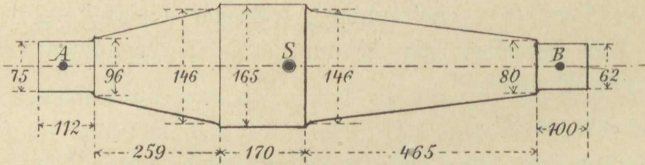


Fig. 7.

zunächst schon insofern, als dann der Schwerpunktsabstand und demnach auch das Moment des letzteren gleich Null wird.

Der linke Achsenschengel ist ein Kegelstutz mit den Radien $R = 48$, $r = 73$ und der Höhe $h = 259$, folglich mit dem Volumen

$$V_1 = (R^2 + Rr + r^2) \frac{\pi h}{3} = 11037 \cdot 271,225 = \mathbf{2993510 \text{ cbmm}}$$

und dem Schwerpunktsabstand

$$x = \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{25099 \cdot 259}{44148} = 147,5 \text{ mm}$$

von der linken Endfläche, also

$$x_1 = 56 + 147,5 = \mathbf{203,5 \text{ mm}}$$

vom Momentenpunkte A .

Sodann stellt der Achsenkopf einen Cylinder dar mit dem Halbmesser $r = 82,5$ und der Höhe $h = 170$, folglich mit dem Inhalte

$$V_2 = r^2 \pi h = \mathbf{3635018 \text{ cbmm}}$$

und dem Abstände

$$x_2 = 56 + 259 + 85 = \mathbf{400 \text{ mm}}$$

des Schwerpunktes von A .

Weiter erkennen wir im rechten Achsenschengel abermals einen abgestumpften Kegel mit den Radien $R = 73$, $r = 40$ und der Höhe $h = 465$, demnach mit dem Kubikinhalte

$$V_3 = (5329 + 2920 + 1600) \cdot 155 \pi = \mathbf{4795940 \text{ cbmm}}$$

und dem Schwerpunktsabstände

$$x_3 = 56 + 259 + 170 + 188,5 = \mathbf{673,5 \text{ mm}}$$

von *A*. Endlich gelangen wir zum rechten Zapfen mit dem Volumen

$$V_4 = r^2 \pi h = (31)^2 \pi \cdot 100 = 96100 \pi = \mathbf{301907 \text{ cbmm}}$$

und dem Schwerpunktsabstände

$$x_4 = 56 + 259 + 170 + 465 + 50 = \mathbf{1000 \text{ mm}},$$

woraus wir zugleich nebenbei erfahren, dass die beiden Zapfenmitten *A* und *B* genau um einen Meter von einander abstehen.

Diese Resultate, sowie auch die statischen Momente der Achse und ihrer Bestandteile stellen wir der besseren Übersicht halber tabellarisch, wie folgt, zusammen. Behufs Vermeidung übermässig grosser Zahlen wollen wir aber die Volumenwerte in Kubikdecimeter verwandeln, während die Schwerpunktsabstände in Millimetern ausgedrückt bleiben mögen. Die Entfernung des Achsen Schwerpunktes *S* von *A* sei mit *x* bezeichnet.

Körper	Volumen in ebdm	Abstand des Schwerpunktes von A	Statisches Moment in Bezug auf A
Linker Zapfen	0,494801	0	0
Linker Achsenschenkel .	2,993510	203,5 mm	609,1793
Achsenkopf	3,635018	400 mm	1454,0072
Rechter Achsenschenkel	4,795940	673,5 mm	3230,0652
Rechter Zapfen	0,301907	1000 mm	301,9070
Ganze Achse	12,221176	<i>x</i>	12,2212 <i>x</i>

Wir haben jetzt laut Momentengesetz die Gleichung
 $12,2212 x = 609,1793 + 1454,0072 + 3230,0652 + 301,9070$
 oder

$$12,2212 x = 5595,1587$$

und erhalten daraus

$$x = \mathbf{457,8 \text{ mm}},$$

den Abstand *AS* des Achsen Schwerpunktes von der linken Zapfenmitte.

Auf gleiche Weise könnte nun der Leser zur Übung auch den Abstand des Schwerpunktes S von der rechten Zapfenmitte berechnen, indem er B als Momentenpunkt behandelt. Fände er BS gleich

$$y = 1000 - x = 542,2 \text{ mm},$$

so wäre dies ein Zeichen für die Richtigkeit seiner und zugleich der obigen Rechnung.

Dagegen schliesst sich hier die Frage an, wie sich wohl das Eigengewicht G unserer Achse bei horizontaler Lagerung auf die beiden Druckpunkte A und B verteilen würde. Um die Antwort zu finden, nehmen wir das spezifische Gewicht des Schmiedeeisens zu 7,7 an und erhalten

$$G = V \cdot \gamma = 12,2212 \cdot 7,7 = 94,11324,$$

also rund

$$G = 94,1 \text{ kg}.$$

Bezeichnen wir nunmehr die Auflagerdrücke in A und B mit N_1 und N_2 , so erhalten wir aus den beiden Momentengleichungen

$$1000 N_1 = G \cdot y \text{ und } 1000 N_2 = G \cdot x$$

oder

$$1000 N_1 = 51021,02 \text{ und } 1000 N_2 = 43078,98$$

die gesuchten Werte

$$N_1 = 51,02 \text{ kg} \text{ und } N_2 = 43,08 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele.

11. Ein Körper besteht aus einem Würfel mit der Kante $2a$ und aus einer quadratischen Pyramide von gleicher Grundkante und der Höhe $4a$. Wie weit ist der Schwerpunkt dieses Körpers von der unteren Fläche des Würfels entfernt?

Antwort: Um $x = \frac{9}{5} a$.

12. Wie gross fällt aber der Schwerpunktsabstand aus, wenn auf den Würfel statt der Pyramide ein Pyramidenstumpf mit derselben Höhe $4a$ und mit den Grundkanten $2a$, a gesetzt wird?

Antwort: $x = \frac{31}{13} a$.

13. Man bestimme für einen abgestumpften Kegel den Schwerpunktsabstand von der grösseren Endfläche, wenn die Höhe h

ist und der grosse Radius das zwei-, resp. das vierfache vom kleineren beträgt.

Resultate: $\frac{11}{28} h$, resp. $\frac{9}{28} h$.

14. Ein homogener Körper ist aus einem Prisma und einer Pyramide mit gemeinschaftlicher Basis zusammengesetzt. Wie müssen sich die Höhen von Prisma und Pyramide zu einander verhalten, damit der Schwerpunkt des ganzen Körpers in die Zusammenstossungsebene seiner beiden Bestandteile fällt?

Antwort: Wie $1 : \sqrt{6}$.

§ 5.

Stabilität.

An dem in Fig. 8 dargestellten Körper, welcher auf horizontaler Ebene ruht, wirkt eine Kraft P in nicht vertikaler Richtung.

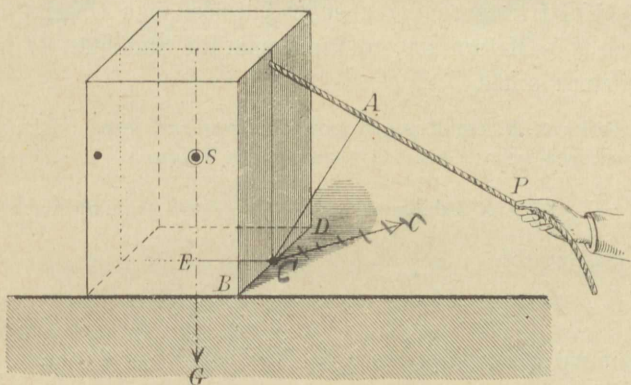


Fig. 8.

Wir setzen voraus, dass die Reibung, oder, falls diese nicht hinreicht, ein anderes Hindernis das Fortgleiten unmöglich macht.

Dann wird P suchen, den Körper um die Kante BD zu drehen, bzw. ihn umzuwerfen. Allein dem setzt der Körper vermöge seines Gewichtes G einen gewissen Widerstand entgegen, welcher gemessen werden kann durch das statische Moment des Körpergewichts in Bezug auf die Kippkante BD ; denn bezeichnen wir den Halbpunkt von BD mit C und setzen die beiden Lote, welche von C aus auf die Richtungslinien von P und G gefällt werden können,

$CA = a$ und $CE = e$, so halten sich P und G das Gleichgewicht, wenn ihre statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt übereinstimmen, wenn also die Gleichung

$$P \cdot a = G \cdot e \dots \dots \dots (1.)$$

besteht, dagegen wird der Körper thatsächlich umkippen, sobald

$$Pa > Ge, \text{ folglich } P > \frac{Ge}{a}$$

ist. Das Produkt Ge wird deshalb Stabilitätsmoment, auch kurzweg Stabilität oder Standfähigkeit, bezw. Standfestigkeit des Körpers in Bezug auf die Kippkante BD genannt, und es kann diese Grösse nach der Formel

$$St = Ge \dots \dots \dots (2.)$$

leicht berechnet werden, indem man das Gewicht des Körpers mit dem kürzesten Abstand der Falllinie von der Umwerfkante multipliziert. Um Irrtümern vorzubeugen, drücke man G stets in Kilogrammen, e in Metern aus, wodurch man die Stabilität St in Kilogramm Metern erhält.

So besitzt z. B. ein Kegel, dessen Halbmesser r , dessen Höhe h Meter und dessen spezifisches Gewicht γ beträgt, das Volumen

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h \text{ Kubikmeter} = \frac{1000}{3} r^2 \pi h \text{ Kubikdecimeter,}$$

folglich das Gewicht

$$G = \frac{1000}{3} r^2 \pi h \gamma \text{ Kilogramm}$$

und mithin auf horizontaler Ebene die Stabilität $St = Gr$ oder

$$St = \frac{1000}{3} r^3 \pi h \gamma \text{ Kilogramm Meter.}$$

Eine Kraft P , welche in der Spitze senkrecht zur Höhe des Kegels wirkt, hat den Hebelsarm h , demnach das Moment Ph und ist also imstande, die Stabilität des Kegels aufzuheben, wenn

$$Ph > St$$

oder

$$P > \frac{1000}{3} r^3 \pi \gamma.$$

Für $r = 0,1 \text{ m}$ und $\gamma = 7,5$ erhält die rechte Seite vorstehender Ungleichung den Wert $7,854$. Wenn folglich P etwas grösser als $7,854 \text{ kg}$ ist, so wird der Kegel umgeworfen, wie hoch er auch sei.

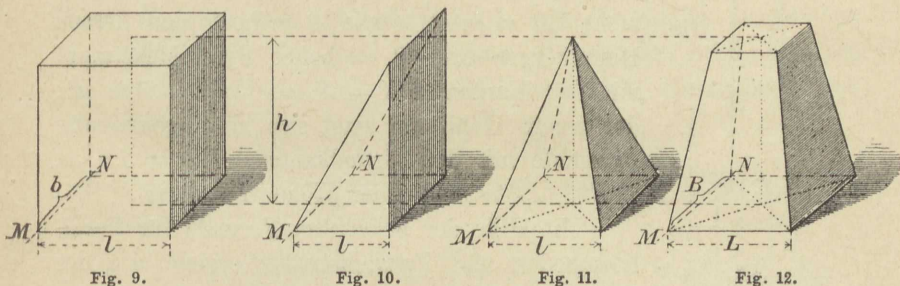
Übungsbeispiele.

15. Man berechne die Stabilität eines rechtwinkligen Parallelepipedons (Fig. 9), welches b Meter breit, l Meter lang, h Meter hoch ist und das spezifische Gewicht γ besitzt, gegen das Drehen um die Kante $MN = b$.

Resultat: $St = 500 b h l^2 \gamma$ Kilogrammometer.

16. Desgleichen für das aus Fig. 10 ersichtliche Prisma mit denselben Dimensionen.

Resultat: $St = \frac{1000}{3} b h l^2 \gamma$ Kilogrammometer.



17. Ebenso für die in Fig. 11 dargestellte vierseitige Pyramide.

Resultat: $St = \frac{500}{3} b h l^2 \gamma$ Kilogrammometer.

18. Endlich auch für den durch Fig. 12 veranschaulichten Pyramidenstumpf. Die parallelen Endflächen sind Rechtecke mit den Seiten B, L , bzw. b, l und die Verbindungslinie der Mittelpunkte ist die Höhe h , alles in Metern; der Körper soll wieder um $MN = B$ gekippt werden.

Resultat: $St = \frac{500}{3} (BL + \sqrt{BLbl} + bl) h l \gamma$ Kilogrammometer.

19. Eine abgestumpfte regelmässige Pyramide hat zu Endflächen zwei Quadrate von 2 und 1 *dem* Seite, 2,8 *m* Höhe, das spezifische Gewicht 3 und ruht mit der grösseren Grundfläche auf horizontaler Ebene. Welches ist die Stabilität gegen das Drehen um eine Basiskante?

Antwort: $St = 10,6 \text{ kgm.}$



Sicherheit eines Fabrikschornsteins gegen den Winddruck.

Bei der im Verhältnis zur Grundfläche bedeutenden Höhe eines Fabrikschornsteins liegt die Gefahr des Umwerfens durch heftigen Sturm sehr nahe und ist wohl zu berücksichtigen. Zu diesem Behufe muss in erster Linie die Stabilität desjenigen Teiles berechnet werden, welcher über der Erde sich befindet.

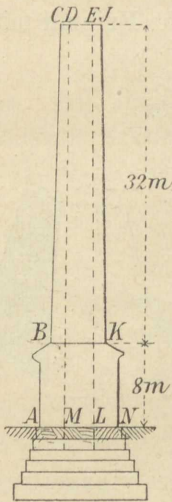


Fig. 13.

Es stelle nun die Fig. 13 einen Schornstein mit quadratischem Querschnitt dar, dessen Postament 3,3 m breit, sowie 8 m hoch und dessen Hauptkörper ein 32 m hoher Pyramidenstumpf mit den Kanten $BK = 3\text{ m}$, $CI = 1,7\text{ m}$ ist; der innere Hohlraum zeigt sich als abgestumpfte Pyramide mit den Grundkanten $ML = 1,8\text{ m}$, $DE = 1,2\text{ m}$ und einer Höhe von 40 m.

Mit Hilfe der bekannten Formeln für Parallelepipedon und Pyramidenstutz ergibt sich der Kubikinhalt

$$V = (3,3)^2 \cdot 8 + [(3,3)^2 + 3,3 \cdot 1,7 + (1,7)^2] \cdot \frac{32}{3} - [(1,8)^2 + 1,8 \cdot 1,2 + (1,2)^2] \cdot \frac{40}{3}$$

oder

$$V = 88,12 + 206,266 - 84,533 = 209,853\text{ cbm},$$

das sind

$$V = 209853\text{ cbdm}.$$

Nehmen wir das spezifische Gewicht des Ziegelmauerwerks zu 1,5 an, so erhält man das absolute Gewicht vom oberirdischen Teile des Schornsteins

$$G = V \gamma = 209853 \cdot 1,5 = 314780\text{ kg}$$

und weil die Falllinie durch die Mitte der Basis geht, die Stabilität in Bezug auf eine Basiskante

$$St = 314780 \cdot 1,65 = 519387\text{ kgm}.$$

Was nun zweitens die Wirkung des Windes anlangt, so müssen wir selbstredend den ungünstigsten Fall voraussetzen, dass derselbe normal zu einer Seitenfläche des viereckigen Schornsteins gerichtet ist. Dann beträgt der Druck höchstens, nämlich bei

orkanartigem Sturm, auf jeden Quadratmeter Fläche 200 kg ; es gilt daher vor allem die vom Winde getroffene Seitenfläche unseres Schornsteins in Quadratmetern zu bestimmen. Dieselbe ist

$$F = 3,3 \cdot 8 + \frac{3 + 1,7}{2} \cdot 32 = 26,4 + 75,2 = \mathbf{101,6 \text{ qm}}$$

und mithin der Winddruck

$$P = 101,6 \cdot 200 = \mathbf{20320 \text{ kg.}}$$

Der Angriffspunkt von P ist aber offenbar der Schwerpunkt der gedrückten Ebene; denn denken wir uns letztere in gleiche Teilchen, etwa Quadratmillimeter, zerlegt, so wirkt auf jedes solches Flächenelement dieselbe Kraft in derselben Richtung, wir haben also ein System gleicher und gleichmässig verteilter Parallelkräfte vor uns. Bezeichnet daher x den Abstand dieses Schwerpunktes von AN , so besteht nach dem Momentengesetze die Gleichung

$$101,6 x = 26,4 \cdot 4 + 75,2 (8 + y),$$

worin y den Schwerpunktsabstand des Trapezes $BCIK$ von BK bedeutet. Nun ist jedoch

$$y = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3} = \frac{3 + 3,4}{3 + 1,7} \cdot \frac{32}{3} = 14,525 \text{ m,}$$

folglich

$$101,6 x = 105,6 + 75,2 \cdot 22,525 = 1799,48$$

also

$$x = \mathbf{17,7113 \text{ m}}$$

und mithin das statische Moment des gesamten Winddrucks in Bezug auf die gegenüberliegende Basiskante

$$Px = 20320 \cdot 17,7113 = \mathbf{359886 \text{ kgm.}}$$

Wir erkennen jetzt, dass das Moment Px des Winddruckes erheblich geringer ist als das Stabilitätsmoment $St = 519387 \text{ kgm}$ und können daher den Schornstein gegen Sturm als vollkommen gesichert betrachten.

Vorteilhafter gegen den Einfluss des Winddrucks verhalten sich die achteckigen und am vorteilhaftesten die runden Schornsteine; denn wirkt der Luftstrom gegen einen vertikal stehenden Cylinder oder Kegel, so bilden sich seitliche Komponenten (die bewegte Luft gleitet teilweise ab), und es beträgt erfahrungsgemäss P nur das $0,57$ fache desjenigen Druckes, welcher die Projektion des Cylinders, bezw. Kegels auf eine gegen die Windrichtung senkrechte Ebene direkt belasten würde. Man baut deshalb und aus

anderen Gründen in der Neuzeit fast ausschliesslich den runden Schornstein (Fig. 14), welcher äusserlich einen Kegelstumpf darstellt; denn die etwaigen Verzierungen, welche am Fusse und am Kopfe in Gestalt von Sockel und Sims aus der Hauptform etwas heraustreten, sind für die Stabilität so unwesentlich, dass sie ohne Bedenken vernachlässigt werden dürfen.

Bezeichnet man nun den unteren und den oberen äusseren Durchmesser des Schornsteins mit D , bzw. d , die entsprechenden Durchmesser den inneren ebenfalls kegelstumpfförmigen Hohlraums mit D_1 , bzw. d_1 und die Höhe mit h , alle diese Längen in Metern verstanden, endlich das spezifische Gewicht des Baumaterials mit γ , so ist das absolute Gewicht des oberirdischen Teiles vom Schornstein

$$G = \frac{250 \pi h \gamma}{3} \left\{ D^2 + D d + d^2 - (D_1^2 + D_1 d_1 + d_1^2) \right\} \text{ Kilogramm}$$

oder, wenn man zur Abkürzung den Klammerausdruck

$$D^2 + D d + d^2 - (D_1^2 + D_1 d_1 + d_1^2) = K$$

setzt,

$$G = \frac{250 \pi h \gamma}{3} \cdot K \text{ Kilogramm}$$

und mithin die Standfähigkeit

$$St = G \cdot \frac{D}{2} = \frac{250}{3} \pi h \gamma K \cdot \frac{D}{2} \text{ Kilogrammmer.}$$

Andererseits ist die Vertikalprojektion der vom Luftstrome getroffenen Fläche ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = D$, $b = d$ und der Höhe h , also mit dem Inhalte

$$F = \frac{a + b}{2} h = \frac{D + d}{2} h \text{ Quadratmeter}$$

und dem Schwerpunktsabstande

$$x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3} = \frac{D + 2d}{D + d} \cdot \frac{h}{3} \text{ Meter.}$$

Bezeichnet man folglich den Druck in Kilogrammen, welchen ein Quadratmeter Fläche bei horizontaler Luftströmung thatsächlich auszuhalten hat, mit ε , so ist nach obigem der gesamte Winddruck auf den Schornstein

$$P = 0,57 F \varepsilon = 0,57 \cdot \frac{D + d}{2} h \varepsilon \text{ Kilogramm}$$

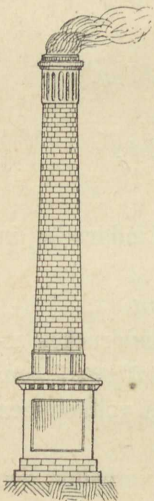


Fig. 14

und das Moment

$$Px = 0,57 \cdot (D + 2d) \frac{h^2 z}{6} \text{ Kilogrammometer.}$$

Werfen wir jetzt die Frage auf, bis zu welcher Stärke der Sturm sich nur erheben darf, um den Sturz des Schornsteins herbeizuführen, so ergibt sich die Antwort aus

$$Px = St,$$

das wäre

$$0,57 \cdot (D + 2d) \cdot \frac{h^2 z}{6} = \frac{250}{3} \cdot \pi h \gamma K \cdot \frac{D}{2}$$

oder

$$z = \frac{25000 D K \pi \gamma}{57 h (D + 2d)} \text{ Kilogramm,}$$

worin $K = D^2 + Dd + d^2 - (D_1^2 + D_1 d_1 + d_1^2)$ ist und sämtliche Dimensionen D, d, D_1, d_1 und h in Metern auszudrücken sind. Diese Formel liefert für z den äussersten Druck, welchen der Schornstein pro Quadratmeter Projektionsfläche gerade noch ertragen kann, ohne umzustürzen. Wird z kleiner als 200, so ist er bei Orkan, wird $z < 110$, so ist der Schornstein schon bei heftigem Sturm gefährdet.

Wäre beispielsweise $D = 3m, d = 2m, D_1 = 1,5m, d_1 = 0,7m, h = 40m$ und $\gamma = 1,5$, so erhielten wir

$$K = 9 + 6 + 4 - (2,25 + 1,05 + 0,49) = 19 - 3,79 = 15,21$$

folglich

$$z = \frac{25000 \cdot 3 \cdot 15,21 \cdot \pi \cdot 1,5}{57 \cdot 40 \cdot 5} = \sim 471,5 \text{ kg}$$

und könnten daraus schliessen, dass selbst der stärkste Orkan diesen Schornstein nicht umwerfen würde.

Eine andere hier nahe liegende Frage bestände aber darin, ob der Winddruck möglicher Weise stark genug sein könnte, um den Schornstein auf seiner Basis zu verschieben. Zu dem Ende müsste die schiebende Kraft grösser sein als die Reibung, also wenn f den Reibungskoeffizienten bezeichnet,

$$P > Gf,$$

$$0,57 \cdot \frac{D + d}{2} h z > \frac{250}{3} \pi h \gamma K f,$$

$$3 \cdot 0,57 (D + d) z > 500 \pi \gamma K f$$

oder mit Einführung der Zahlenwerte unseres Falles, wenn man noch den Koeffizienten der gleitenden Reibung zwischen Mauerwerk und natürlichen Boden $f = 0,57$ setzt,

$$z > 2387,6 \text{ kg,}$$

es müsste demnach der Sturm reichlich das fünffache derjenigen Stärke besitzen, welche zum Umkippen des Schornsteins erforderlich war, und man darf daher wohl allgemein die Möglichkeit der Abschiebung eines Schornsteins durch den Winddruck als völlig ausgeschlossen betrachten. Noch weniger als an der Basis wäre aber das Abschieben des Schornsteins an irgend einer anderen Stelle zu befürchten, weil der Koeffizient der gleitenden Reibung von Mauerwerk auf Mauerwerk erheblich grösser ist als vorhin, nämlich $f = 0,75$.

§ 7.

Die Arbeitsstabilität.

Bis jetzt haben wir angenommen, dass in Bezug auf die Umsturzseite C (Fig. 15) das Moment Pa der angreifenden Kraft P

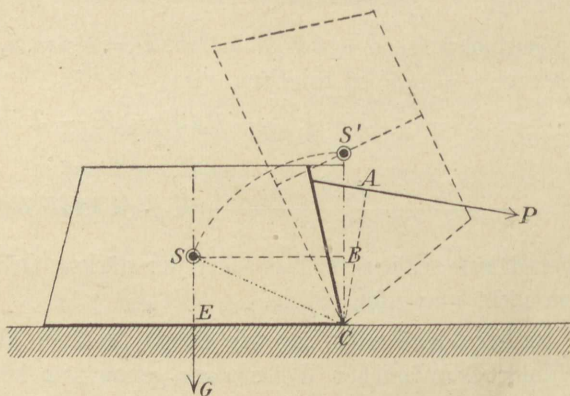


Fig. 15.

kleiner oder höchstens gleich ist der Standfähigkeit Ge des Körpers. Unter dieser Bedingung

$$Pa \leq Ge \text{ oder } P \leq \frac{Ge}{a}$$

widersteht der Körper vermöge seines Eigengewichtes G der Einwirkung von P und verharrt in seiner Lage.

Sowie aber

$$Pa > Ge, \text{ also } P > \frac{Ge}{a}$$

wird, entsteht Bewegung des Körpers und zwar eine beschleunigte, weil, wie aus der Figur ersichtlich, der Hebelsarm $CE = e$ und damit zugleich das statische Moment von G beständig abnimmt.

Hierbei verrichtet die Kraft P eine bestimmte mechanische Arbeit, indem sie den Schwerpunkt um C einen Kreis beschreiben lässt und dadurch das Körpergewicht von S auf die höchste Schwerpunktslage S' hebt. Die Hubhöhe $BS' = h$ ist leicht zu berechnen; denn bezeichnen wir den Schwerpunktsabstand SE des Körpers mit d , so gilt

$$h = CS' - CB = CS - ES = CS - d,$$

oder, weil nach dem Pythagoräischen Lehrsatz $CS = \sqrt{d^2 + e^2}$ ist,

$$h = \sqrt{d^2 + e^2} - d.$$

Mithin ist die zum Umsturz eines Körpers erforderliche mechanische Arbeit

$$A = G (\sqrt{d^2 + e^2} - d), \quad (1.)$$

worin G das Gewicht des Körpers, d den Abstand seines Schwerpunktes von der Basis und e die Entfernung der Falllinie von der Drehkante bedeuten. Um A in mkg zu erhalten, müssen G in Kilogrammen und d , sowie e in Metern eingeführt werden.

Weil nun offenbar ein Körper um so fester steht, je grösser die zum Umwerfen nötige Arbeit ist und umgekehrt, so kann die vorstehende Grösse ebenfalls als Mass für die Standfähigkeit eines Körpers dienen und heisst deshalb die dynamische oder Arbeitsstabilität.

Beispielsweise ist für ein rechtwinkliges Parallelepipeton aus Granit mit dem spezifischen Gewichte $\gamma = 2,5$, dessen Basis ein Quadrat von der Seite $a = 0,72 \text{ m} = 7,2 \text{ dm}$ und dessen Höhe $h = 1,54 \text{ m} = 15,4 \text{ dm}$ sind, zunächst das Gewicht

$$G = a^2 h \gamma = (7,2)^2 \cdot 15,4 \cdot 2,5 = 1995,84 \text{ kg}.$$

Weiter ist in diesem Falle

$$d = \frac{h}{2} = 0,77 \text{ m} \text{ und } e = \frac{a}{2} = 0,36 \text{ m},$$

mithin

$$\sqrt{d^2 + e^2} = 0,85 \text{ m}$$

und folglich

$$A = 1995,84 \cdot 0,08 = 159,6672 \text{ mkg},$$

die dynamische Stabilität des Parallelepipedons, welches mit seiner quadratischen Basis auf horizontaler Ebene steht.

Wenn dagegen das erstere mit einer rechteckigen Seitenfläche aufliegt, so haben wir

$$d = \frac{a}{2} = 0,36 \text{ m} \text{ und } e = \frac{h}{2} = 0,77 \text{ m},$$

demnach

$$\sqrt{d^2 + e^2} - d = 0,85 - 0,36 = 0,49 \text{ m}$$

und es ergibt sich hier die Arbeitsstabilität

$$A' = 1995,84 \cdot 0,49 = 977,9616 \text{ mkg}.$$

Übungsbeispiele.

20. Man bestimme die dynamische Stabilität einer vertikalen Mauer, welche b Meter breit, h Meter hoch, l Meter lang ist und das spezifische Gewicht γ besitzt.

Resultat: $A = 500 b h l \gamma (\sqrt{b^2 + h^2} - h)$ Meterkilogramm.

21. Eine abgestumpfte regelmässige Pyramide hat zu Endflächen zwei Quadrate von 2 und 1 Decimeter Seite, 2,8 Meter Höhe, das spezifische Gewicht 3 und ruht mit der grösseren Grundfläche auf horizontaler Ebene. Welches ist die Arbeitsstabilität in Bezug auf eine Basiskante?

Antwort: $A = 0,79$ Meterkilogramm.

§ 8.

Beurteilung der Stabilität eines Körpers aus seinem Gewichte und der Lage seines Schwerpunktes.

Aus Formel 1 in § 5 folgt, dass die zum Umwerfen eines um eine Kante C drehbaren Körpers vom Gewichte G erforderliche Kraft etwas grösser als

$$P = \frac{G e}{a}$$

sein muss, wenn e und a die beiden Hebelsarme von G und P in Bezug auf jene Drehkante darstellen.

Nehmen wir nun speziellerweise an, dass die Kraft P in horizontaler Richtung durch den Schwerpunkt geht, so ist $a = d$ die Höhe des Schwerpunkts über der Kippkante und wir erkennen aus der Beziehung

$$P = \frac{G e}{d}$$

ohne weiteres, dass die umwerfende Kraft P um so bedeutender sein muss, je grösser G und e , je kleiner dagegen d ist, dass also *ein Körper um so fester steht, je schwerer er ist, je weiter seine Falllinie von der Kippkante absteht und je tiefer sein Schwerpunkt liegt.*

Dieser wichtige Satz lässt sich aber auch — und zwar ohne jede willkürliche Annahme — aus der Formel 1 in § 7 entwickeln; denn die zum Umstürzen eines Körpers notwendige mechanische Arbeit

$$A = G (\sqrt{d^2 + e^2} - d)$$

wächst zunächst, wie unmittelbar ersichtlich, zugleich mit G und e . Multiplizieren und dividieren wir aber die rechte Seite der letzten Gleichung mit

$$\sqrt{d^2 + e^2} + d,$$

so ergibt sich

$$A = \frac{G e^2}{\sqrt{d^2 + e^2} + d}$$

und hieraus geht hervor, dass mit zunehmenden d der Nenner vorstehenden Bruches wächst, während der Zähler ungeändert bleibt, folglich der Wert des ganzen Bruches, das ist die mechanische Arbeit A , abnimmt.

§ 9.

Guldins Regel zur Bestimmung von Rotationsflächen.

Eine weitere interessante und zugleich nützliche Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte enthält die sogenannte Guldinsche Regel, welche sich am kürzesten folgendermassen entwickeln lässt.

Es sei LM in Fig. 16 eine gegebene Kurve von der Länge l , welche sich um die feste Achse XX' derartig bewegt, dass jeder ihrer Punkte von XX' gleichen Abstand behält. Auf diese Weise erzeugt die Linie LM eine krumme Fläche, welche Umdrehungs- oder Rotationsfläche genannt wird und deren Inhalt O zu ermitteln unsere nächste Aufgabe sein soll.

Zu diesem Zwecke fallen wir von den Endpunkten L, M der Erzeugungskurve auf die Rotationsachse XX' die Lote LO', MQ , teilen dann $O'Q$ in eine beliebige Anzahl, etwa n gleiche Teile und denken uns endlich durch jeden Teilpunkt eine Ebene rechtwinklig zu XX' gelegt. Hierdurch zérfällt die ganze Umdrehungsfläche in n zonenartige Streifen, welche um so eher als Kegelstumpfmäntel betrachtet werden dürfen, je grösser man sich die Zahl n vorstellt, absolut genau bei unendlich gedachtem n .

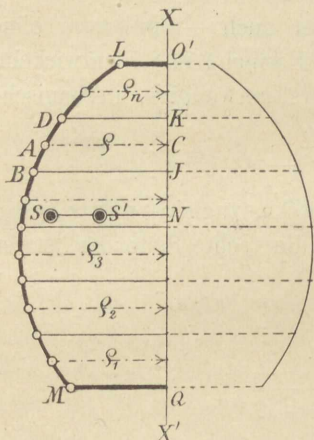


Fig. 16.

setzen,

$$f = 2 \varrho e \pi.$$

Bezeichnen wir jetzt die Seitenlinien der n Kegelstumpfmäntel, aus welchen die gesamte Umdrehungsfläche zusammengesetzt ist, mit $e_1, e_2, e_3 \dots, e_n$ und die mittleren Abstände der letzteren von XX' mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \dots, \varrho_n$, so erhalten wir auf Grund der vorstehenden Formel die Flächeninhalte aller n Kegelstumpfmäntel $f_1 = 2 e_1 \varrho_1 \pi, f_2 = 2 e_2 \varrho_2 \pi, f_3 = 2 e_3 \varrho_3 \pi \dots, f_n = 2 e_n \varrho_n \pi$ und mithin ist

$$O = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = \Sigma (f) \\ = 2 \pi (e_1 \varrho_1 + e_2 \varrho_2 + e_3 \varrho_3 + \dots + e_n \varrho_n) = 2 \pi \Sigma (e \varrho).$$

In

$$e_1 \varrho_1 + e_2 \varrho_2 + e_3 \varrho_3 + \dots + e_n \varrho_n = \Sigma (e \varrho)$$

erkennen wir aber die Summe der auf XX' bezogenen Momente aller Teile, aus welchen die Erzeugende LM mit der Länge l besteht; es gilt daher, wenn wir den Schwerpunkt der letzteren

Greifen wir nun einen solchen Kegelstumpf an beliebiger Stelle heraus und setzen seine Radien $BI = R, DK = r$, seine Seitenlinie $BD = e$, so beträgt seine Mantelfläche

$$f = (R + r) e \pi,$$

oder, wenn wir das vom Mittelpunkte A der Seitenlinie BD auf XX' gefällte Lot $AC = \varrho$ einführen, indem wir

$$\varrho = \frac{R + r}{2},$$

also

$$R + r = 2 \varrho$$

durch S und das von S auf XX' gefällte Lot SN durch x bezeichnen, die Momentengleichung

$$\Sigma (e \rho) = l x$$

und folglich auch

$$O = 2 \pi l x = l \cdot 2 \pi x \dots \dots \dots (1.)$$

oder in Worten: **Der Inhalt einer Rotationsfläche ist gleich dem Produkte aus der Erzeugenden und dem vom Schwerpunkte der letzteren zurückgelegten Wege.**

An der Hand dieses Satzes können wir jede Rotationsfläche bestimmen, sobald die Länge der Erzeugenden und der Abstand ihres Schwerpunktes von der Umdrehungsachse bekannt ist.

Zum Beispiel bekommen wir die Oberfläche O einer Kugel vom Halbmesser r (Fig. 17), wenn wir in der letzten Formel für l den halben Umfang des Erzeugungskreises, also $r \pi$ und aus Formel 3 in § 1 den Schwerpunktsabstand CS gleich

$$x = \frac{2 r}{\pi}$$

setzen, nämlich

$$O = r \pi \cdot 2 \pi \cdot \frac{2 r}{\pi} = 4 r^2 \pi.$$

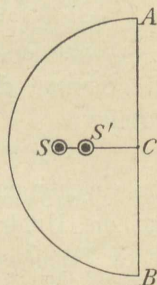


Fig. 17.

§ 10.

Guldins Regel zur Bestimmung von Rotationskörpern.

Der im vorigen Paragraphen abgeleitete Lehrsatz bildet jedoch nur den ersten Teil der Guldinschen Regel; der zweite Teil lautet:

Das Volumen eines Umdrehungskörpers wird erhalten, indem man den Inhalt der Erzeugungsfläche mit dem Wege ihres Schwerpunktes multipliziert

und ist das Ergebnis der nachstehenden Erwägungen.

Durch das im vorigen Paragraphen erwähnte System von n Parallelebenen zerfällt das Volumen V des vom Flächenstück $LMQO'$ in Fig. 16 nach einer vollen Umdrehung erzeugten

Rotationskörpers in scheibenförmige Stücke, welche bei sehr grossem n als Cylinder mit der gemeinschaftlichen Höhe $IK = \frac{O'Q}{n} = h$ betrachtet werden dürfen. Die Radien dieser Cylinder sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \dots \varrho_n$, mithin die Volumina

$v_1 = \varrho_1^2 \pi h, v_2 = \varrho_2^2 \pi h, v_3 = \varrho_3^2 \pi h, \dots v_n = \varrho_n^2 \pi h$
und folglich ergibt sich das Gesamtvolumen des Rotationskörpers

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \Sigma (v)$$

$$= \pi (\varrho_1^2 h + \varrho_2^2 h + \varrho_3^2 h + \dots + \varrho_n^2 h),$$

oder, wenn man den ersten Faktor dieses Produkts mit 2 multipliziert und dafür den zweiten durch 2 dividiert,

$$V = 2\pi \left(\varrho_1 h \cdot \frac{\varrho_1}{2} + \varrho_2 h \cdot \frac{\varrho_2}{2} + \varrho_3 h \cdot \frac{\varrho_3}{2} + \dots + \varrho_n h \cdot \frac{\varrho_n}{2} \right).$$

Jetzt erscheint uns der vorstehende Klammersausdruck als die Summe der statischen Momente aller rechteckigen Flächenstreifen

$$f_1 = \varrho_1 h, f_2 = \varrho_2 h, f_3 = \varrho_3 h, \dots f_n = \varrho_n h,$$

aus welchen das Flächenstück $LMQO'$ besteht und zwar in Bezug auf die Umdrehungsachse XX' . Bezeichnet daher F den Inhalt jenes Flächenstückes und

$$NS' = x'$$

die Entfernung seines Schwerpunktes S' von XX' , so ist nach dem Momentengesetze der genannte Klammersausdruck gleich

$$f_1 \frac{\varrho_1}{2} + f_2 \frac{\varrho_2}{2} + f_3 \frac{\varrho_3}{2} + \dots + f_n \frac{\varrho_n}{2} = \Sigma \left(f \frac{\varrho}{2} \right) = F x',$$

und es ergibt sich

$$V = 2\pi \cdot F x' = F \cdot 2\pi x', \dots \dots (2.)$$

womit die Richtigkeit des obigen Satzes erwiesen ist.

Wir wählen als einfaches Beispiel die Volumenberechnung einer Kugel mit dem beliebigen Halbmesser $CA = CB = r$ (Fig. 17). Hier ist

$$F = \frac{r^2 \pi}{2}$$

und nach Formel 4 in § 1 der Schwerpunktsabstand CS' gleich

$$x' = \frac{4r}{3\pi},$$

mithin laut Formel 2 der Kugelinhalt

$$V = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Oberfläche und Kubikinhalt eines Ringes mit kreis-, bezw. halbkreisförmigem Querschnitt.

Etwas weitergehend und dabei von praktischer Wichtigkeit ist die Berechnung von der Oberfläche und dem Volumen derjenigen Körper, welche durch Rotation eines ganzen oder eines halben Kreises um eine feste Achse entstehen.

Erstens. Stellen $BS = r$ (Fig. 18) den Halbmesser des Kreises und $SN = R$ den Abstand seines Mittel- und zugleich Schwerpunktes von der Drehachse dar, so haben wir in diesem Falle

$l = 2r\pi$, $F = r^2\pi$ und $x = x' = R$,
folglich nach No. 1

$O = 2r\pi \cdot 2\pi \cdot R = 4Rr\pi^2$,
die Oberfläche und auf Grund von No. 2

$V = r^2\pi \cdot 2\pi \cdot R = 2Rr^2\pi^2$,
das Volumen des Ringes mit kreisförmigem Querschnitt.

Zweitens. Ist die Erzeugende ein Halbkreis, dessen Durchmesser AD parallel zur Drehachse XX' (Fig. 19), so findet sich die äussere Umlfläche U , wenn wir in der 1. Beziehung

$$l = r\pi$$

und

$$x = NC + CS = R + \frac{2r}{\pi}$$

setzen, nämlich

$$U = r\pi \cdot 2\pi \left(R + \frac{2r}{\pi} \right) = 2Rr\pi^2 + 4r^2\pi.$$

Die innere Fläche ist ein Cylindermantel M und ergibt sich aus No. 1 für $l = 2r$ und $x = CN = R$, also

$$M = 2r \cdot 2\pi R = 4Rr\pi$$

und folglich erhalten wir die Gesamtfläche

$$O = U + M = 2r\pi (R\pi + 2r + 2R).$$

Dagegen entsteht das Volumen durch Einsetzung von

$$F = \frac{r^2\pi}{2} \text{ und } x' = NC + CS = R + \frac{4r}{3\pi}$$

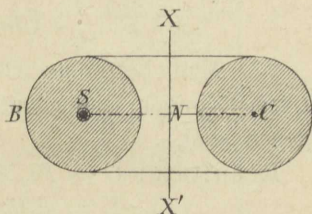


Fig. 18

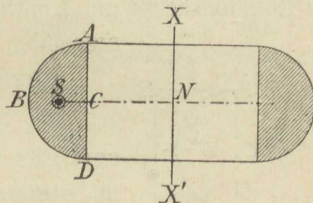


Fig. 19.

in Formel 2, nämlich

$$V = \frac{r^2 \pi}{2} 2 \pi \left(R + \frac{4r}{3} \right) = R r^2 \pi + \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Zugleich führt uns die Lösung der vorstehenden Aufgaben den hohen geometrischen Wert der Guldinschen Regel vor Augen; denn die auf so leichte Art erlangten Resultate können auf elementarem Wege (durch die Stereometrie) zum Teil gar nicht und mit Hilfe der höheren Mathematik nur auf viel umständlichere Weise gewonnen werden.

Übungsbeispiele.

22. Man bestimme Oberfläche und Volumen eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt, für welchen $R = 1 \text{ dm}$ und $r = 0,5 \text{ dm}$ gegeben sind.

Resultate: $O = 19,739 \text{ qdm} = \sim 1974 \text{ qcm}$ und
 $V = 4,934 \text{ cbdm} = 4934 \text{ cbcm}.$

23. Mit Hilfe der Guldinschen Regel die bekannten Formeln für die Oberfläche und den Kubikinhalte von Voll- und Hohlzylinder, Kegel und Kegelstumpf zu entwickeln.

24. Der Mittelpunkt eines Quadrates mit der Seite a ist von der Rotationsachse um d entfernt. Oberfläche und Volumen des entstehenden Körpers anzugeben.

Resultate: $O = 8 a d \pi$ und $V = 2 a^2 d \pi.$

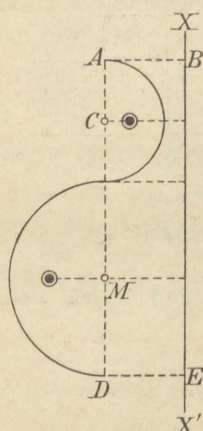


Fig. 20.

25. Die Erzeugungsfäche sei ein gleichseitiges Dreieck, von welchem eine Seite a im Abstände d parallel zur Rotationsachse läuft. Welches ist das Volumen des betreffenden Körpers, wenn die a gegenüberliegende Dreieckspitze 1., von der Drehachse ab- und 2., der Drehachse zugewendet liegt?

Antwort: $V_1 = \frac{a^2 \pi}{4} (2 d \sqrt{3} + a),$

$V_2 = \frac{a^2 \pi}{4} (2 d \sqrt{3} - a).$

26. Welche Fläche erzeugt die in Fig. 20 dargestellte, aus zwei halben Kreisumfängen zusammengesetzte Linie bei Rotation

um XX' , wenn $AB = DE = d$, $MD = R$ und $CA = r$ gegeben sind?

Antwort: $O = (R + r) \cdot (\pi d + 2R - 2r)$.

27. Man berechne diese Fläche für die speziellen Zahlenwerte $R = 1,5 m$, $r = 0,5 m$ und $d = 1 m$.

Resultat: $O = 10,2832 qm$.

28. In Fig. 21 ist der Normalquerschnitt eines Schwungradkranzes zur Anschauung gebracht; XX' ist die Drehachse, die eingeschriebenen Masszahlen bedeuten Millimeter. Man soll mit Hilfe der Guldinschen Regel das Volumen dieses Körpers berechnen und in Kubikdecimetern angeben.

Resultate: Man findet die Querschnittsfläche $F = 36127 qmm = 3,6127 qdm$, den Schwerpunktsabstand der letzteren $OS = 1110,875 mm = 11,10875 dm$ und mithin das Volumen $V = 252,16 cbdm$.

29. Wie viel wird dieser Ring wiegen, wenn er aus Guss-eisen mit dem spezifischen Gewicht 7,5 angefertigt werden soll?
Antwort: $1891,2 kg$, also beinahe 19 Metercentner.

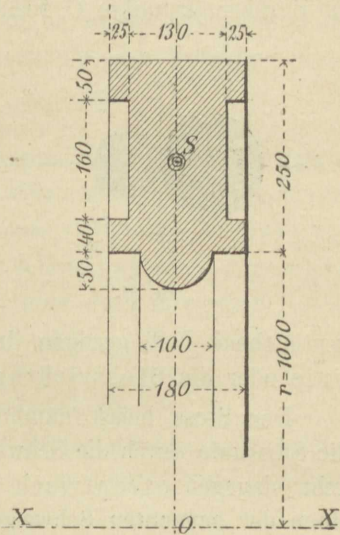


Fig. 21.

II. Kapitel.

Die Lehre vom geraden Centralstosse fester Körper.

§ 12.

Die verschiedenen Arten des Stosses.

Wenn zwei Körper A und B vermöge ihrer Bewegungen in demselben Augenblicke den nämlichen Raum einnehmen wollen, so tritt zwischen ihnen eine Wechselwirkung ein, welche man Stoss nennt.

Eine wichtige Rolle in Bezug auf die Einteilung der Stossarten spielt dabei diejenige Gerade LN (siehe Figuren 22 bis 24), welche man sich im Momente des Zusammentreffens beider Körper im Berührungspunkte O rechtwinklig zur gemeinschaftlichen Tangentialebene DE gezogen denken möge und welche die Stosslinie oder die Stossrichtung genannt wird.

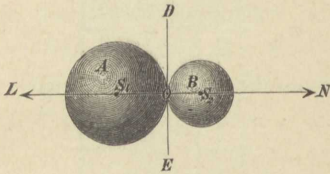


Fig. 22.

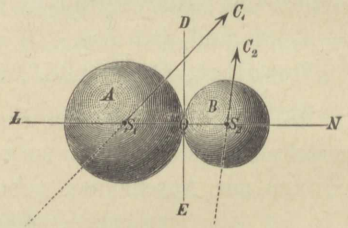


Fig. 23.

Der Stoss heisst nämlich *centrisch* oder *central*, sobald die Stosslinie durch die Schwerpunkte der beiden Körper hindurchgeht; dagegen *excentrisch*, wenn die Stosslinie keinen oder nur einen der genannten Schwerpunkte trifft.

Z. B. ist der Stoss der Körper A und B in Figur 22 *centrisch*, weil die Stosslinie LN beide Schwerpunkte S_1 und S_2 enthält; hingegen in Figur 24 *excentrisch*, weil der Schwerpunkt S_2 von B ausserhalb LN liegt.

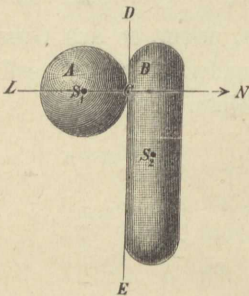


Fig. 24.

Sodann unterscheidet man zweitens zwischen einem *geraden* und einem *schiefen* Stoss, je nachdem die Bewegungsrichtungen der beiden Körper mit der Stossrichtung übereinstimmen oder nicht.

In Figur 22 erblicken wir den *geraden* und in Figur 23 den *schiefen* *Centralstoss*; denn dort fallen die Bewegungsrichtungen der Schwerpunkte S_1 und S_2 mit der Stosslinie LN zusammen, hier aber nicht.

Die Dauer t des Stosses, welche zwar immer sehr klein, aber niemals verschwindend klein ist, kann man aus zwei Perioden t_1 und t_2 bestehend annehmen, sodass die Beziehung

$$t = t_1 + t_2$$

gilt. In der ersten Stossperiode drücken die Körper einander zusammen und in der zweiten dehnen sie sich entweder ganz

oder nur zum Teil oder endlich gar nicht wieder aus, welche drei Fälle wir etwas näher beleuchten wollen.

Erster Fall. Nehmen beide Körper nach dem Stosse ihre ursprüngliche Form genau wieder an, so ist der Vorgang in der zweiten Stossperiode das getreue Spiegelbild vom Vorgange in der ersten, weil nicht nur

$$t_2 = t_1$$

ist, sondern auch der Stossdruck während der zweiten Periode in umgekehrter Reihenfolge die gleichen Werte durchläuft, wie während der ersten und wir nennen dann den Stoss vollkommen elastisch.

Zweiter Fall. Wenn sich die Körper während der zweiten Stossperiode zwar wieder ausdehnen, aber doch ihre erste Gestalt nicht vollständig wieder erlangen, so gilt

$$t_2 < t_1$$

und der Stoss ist unvollkommen elastisch.

Dritter Fall. Hier behält der Körper die ihm am Ende der ersten Stossperiode erteilte Form bei, er besitzt also gar kein Bestreben zum Ausdehnen, es ist daher

$$t_2 = 0$$

und der Stoss heisst vollkommen unelastisch.

§ 13.

Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgrösse.

Zwei homogene Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer geraden Linie sich bewegen, üben beim Zusammentreffen stets einen geraden Centralstoss aus. Wir nehmen an, dass beide Kugeln gleichförmig fortschreiten, die vorausgehende, welche die Masse M_2 besitzen möge, mit der Geschwindigkeit c_2 und die nachfolgende, deren Masse M_1 sei, mit der Geschwindigkeit c_1 . Ist nun

$$c_1 > c_2,$$

so wird die erste Kugel von der zweiten eingeholt und vom Momente der ersten Berührung an beginnt eine gegenseitige Einwirkung zwischen beiden: die nachfolgende drückt auf die vorausgehende, empfängt aber nach dem zweiten Grundgesetze von der Wechselwirkung einen genau ebenso grossen Gegendruck, woraus zunächst folgt, dass in der ersten Stossperiode, d. h. bis zum Augenblick der stärksten Zusammenpressung, die Masse M_1 eine verzögerte

und die Masse M_2 eine beschleunigte Bewegung ausführt, während sich dann in der etwaigen zweiten Stossperiode bei der Wiederausdehnung der Körper ein analoger Vorgang anreihen würde. Jedenfalls haben die Massen M_1 und M_2 nach dem Stosse andere Geschwindigkeiten, welche wir mit v_1 , bzw. v_2 bezeichnen wollen, und es sei jetzt unsere Aufgabe, eine Beziehung zwischen den Bekannten M_1, c_1, M_2, c_2 und den Unbekannten v_1, v_2 ausfindig zu machen.

Zu diesem Behufe müssen wir die Wirkungen des gegenseitigen Druckes zwischen den Kugeln innerhalb der ganzen Stossdauer verfolgen und dabei vor allem bedenken, dass derselbe sich stetig ändert: In der ersten Stossperiode nähern sich die Mittelpunkte beider Kugeln, die letzteren werden immer stärker zusammengepresst, der gegenseitige Druck wächst; in der etwaigen zweiten Stossperiode entfernen sich die Kugelmittelpunkte von einander, Druck und Gegendruck nehmen wieder ab.

Nun vermögen wir aber nur von konstanten Kräften die Wirkungen zu beurteilen und sind deshalb genötigt, die Stossdauer in zahllose Teilchen zu zerlegen; denn innerhalb einer solchen verschwindend kleinen Zeit kann dann der Druck zwischen den Kugeln als vollkommen unveränderlich angesehen werden.

Zugleich müssen wir uns den Einfluss in das Gedächtnis zurückrufen, welchen eine Kraft P auf die Masse M in der Zeit t ausübt.

Hatte die Masse M bereits die Geschwindigkeit c und wirkt P sowohl in der Richtung als auch im Sinne von c , so erzeugt P in M die Beschleunigung p und die Endgeschwindigkeit v derartig, dass die beiden Formeln

$$P = Mp \text{ und } v = c + pt$$

bestehen. Sollte P der Bewegung entgegen wirken, so würde

$$p = \frac{v - c}{t}$$

zur Verzögerung, also negativ und mithin $v < c$ werden. Die Einsetzung des letzten Wertes von p in die Gleichung für P liefert aber unter allen Umständen die Beziehung

$$Pt = M(v - c),$$

deren rechte Seite die Änderung der Bewegungsgrösse von der Masse M darstellt und entweder einen Gewinn oder

einen Verlust ausdrückt, je nachdem P und damit p positiv oder negativ, bzw. je nachdem $v \geq c$ ist.

Nach dieser Einschaltung kehren wir zur Betrachtung der Stosswirkung zurück und greifen ein beliebiges, unendlich kleines Zeiteilchen τ aus der Stossdauer t heraus. Nehmen wir an, es finde während des Augenblicks τ auf die Masse M_2 der Druck $+P$ statt, welcher in M_2 die Beschleunigung p_2 hervorruft und die Geschwindigkeit von c'' auf v'' steigert, so gilt nach obigem die Gleichung

$$P \tau = M_2 (v'' - c''),$$

deren rechte Seite denjenigen Betrag ausdrückt, um welchen die Bewegungsgrösse der Masse M_2 in dem Zeiteilchen τ zugenommen hat. Während derselben Zeit τ bewirkt aber der Gegendruck $-P$ in der Masse M_1 eine Verzögerung, die wir mit p_1 bezeichnen wollen und wodurch die Geschwindigkeit von M_1 abnimmt, sagen wir von c' bis v' , sodass $c' > v'$; es besteht mithin die weitere Beziehung

$$-P \tau = M_1 (v' - c'),$$

und wir erkennen in der rechten Seite denjenigen Betrag, um welchen die Bewegungsgrösse der Masse M_1 abgenommen hat.

Da die linken Seiten der letzten Gleichungen ihren absoluten Werten nach übereinstimmen, aber entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so ist hierdurch festgestellt, dass in jedem einzelnen Zeiteilchen der Stossdauer der *eine* Körper genau ebensoviel an Bewegungsgrösse *verliert*, wie der *andere gewinnt*. Was aber von jedem einzelnen der aufeinander folgenden Zeiteilchen gilt, das gilt auch für die ganze Stossdauer: der gegenseitige Druck zwischen beiden Körpern durchläuft zwar eine Reihe verschiedener Werte, entzieht aber dabei dem einen Körper genau so viel Bewegungsgrösse, als er in dem andern erzeugt, sodass die Summen der Bewegungsgrössen beider Massen vor und nach dem Stosse gleich gross sind, demnach die Formel

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2 \dots (1.)$$

gilt, wobei es ganz gleichgiltig ist, ob die stossenden Massen vollkommen elastisch oder unvollkommen elastisch oder vollkommen unelastisch sind.

§ 14.

Der vollkommen unelastische Stoss.

Setzen wir die Massen M_1 und M_2 als vollständig weich und unelastisch voraus, so spielt sich der Vorgang des Stosses lediglich innerhalb der ersten Stossperiode ab; denn nach dem Ende der letzteren findet weder eine weitere Zusammendrückung noch eine Wiederausdehnung der Körper statt, diese wirken demnach nicht weiter aufeinander ein und verhalten sich fortan wie ein einziger Körper, welcher mit der Geschwindigkeit $v_2 = v_1 = v$ fortschreitet. Setzen wir also

$$v_2 = v_1 = v \dots \dots \dots (2.)$$

in der letzten Formel des vorigen Paragraphen ein, so entsteht

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v + M_2 v$$

und hieraus folgt

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}, \dots \dots \dots (3.)$$

diejenige gemeinschaftliche Geschwindigkeit, mit welcher die beiden Körper nach dem vollkommen unelastischen Stosse ihre Bewegung fortsetzen.

Wenn die Massen M_1 und M_2 einander entgegenkommen, so ist in vorstehender Formel die Geschwindigkeit c_2 negativ zu setzen; aus dem Vorzeichen von v erkennt man dann, wohin sich die vereinigten Massen nach dem Stosse bewegen. Es wird dies offenbar stets im Sinne derjenigen Masse geschehen, welche vor dem Stosse die höhere Bewegungsgrösse besass.

Übrigens können statt der Massen M_1 und M_2 auch deren Gewichte G_1 und G_2 gesetzt werden; denn mit Benutzung der aus der Elementarmechanik bekannten Beziehungen

$$M_1 = \frac{G_1}{g} \text{ und } M_2 = \frac{G_2}{g}$$

geht die letzte Formel über in

$$v = \frac{G_1 c_1 + G_2 c_2}{G_1 + G_2} \dots \dots \dots (3a.)$$

Folgt z. B. einer 7 kg schweren Kugel, welche pro Sekunde 6 m zurücklegt, eine 3 kg wiegende Kugel mit 8 m Geschwindigkeit und übt auf erstere einen vollkommen unelastischen Stoss aus, so erhalten wir mit Einsetzung von $G_1 = 3$, $G_2 = 7$, $c_1 = 8$ und $c_2 = 6$ in die vorstehende

Formel
$$v = \frac{3 \cdot 8 + 7 \cdot 6}{3 + 7} = \frac{24 + 42}{10} = 6,6 \text{ m,}$$

die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse. Begegnen sich aber dieselben beiden Körper mit denselben Geschwindigkeiten im vollkommen unelastischen geraden Centralstoss, so ist c_2 negativ zu setzen, wir erhalten also

$$v = \frac{3 \cdot 8 - 7 \cdot 6}{3 + 7} = \frac{24 - 42}{10} = - 1,8 \text{ m}$$

und das Minuszeichen von v sagt uns, dass in diesem Falle nach dem Stosse beide Körper im Sinne von c_2 sich bewegen.

§ 15.

Verlust an Arbeitsvermögen beim vollkommen unelastischen Stoss.

Die Frage, ob durch den soeben behandelten Stoss mechanische Arbeit für die fortschreitende Bewegung verloren geht, ist auf Grund des in § 22 der Elementarmechanik entwickelten Satzes von der Erhaltung der Arbeit zu bejahen; denn die bleibende Formänderung, welche die Körper durch den vollkommen unelastischen Stoss erleiden, beansprucht offenbar eine gewisse Arbeit L und dieselbe wird erhalten, indem man von dem Arbeitsvermögen

$$\frac{M_1}{2} c_1^2 + \frac{M_2}{2} c_2^2,$$

welches die Massen vor dem Stosse besaßen, dasjenige Arbeitsvermögen

$$\frac{M_1 + M_2}{2} \cdot v^2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot \left(\frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} \right)^2,$$

welches in beiden Massen nach dem Stosse noch enthalten ist, subtrahiert, nämlich

$$L = \frac{M_1}{2} \cdot c_1^2 + \frac{M_2}{2} \cdot c_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(M_1 c_1 + M_2 c_2)^2}{M_1 + M_2},$$

woraus sich nach kurzer Rechnung ergibt

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2)^2, \quad \dots \quad (4.)$$

oder auch, wenn wir hierin wiederum $M_1 = \frac{G_1}{g}$ und $M_2 = \frac{G_2}{g}$ substituieren,

$$L = \frac{1}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot (c_1 - c_2)^2. \quad \dots \quad (4a.)$$

Auch in diesen beiden Formeln 4 und 4a ist c_2 positiv oder negativ zu setzen, je nachdem beide Körper sich folgend oder einander begegnend stossen.

§ 16.

Der vollkommen elastische Stoss.

Diese Formänderungsarbeit L ist zwar bei dem vollkommen elastischen Stosse in der ersten Stossperiode von der Trägheit der Massen M_1 und M_2 ebenfalls zu leisten, wird aber dann während der zweiten Periode, wo beide Körper vermöge ihrer Elastizität in die ursprüngliche Gestalt zurückkehren, wiedergewonnen, sodass hier kein Verlust an mechanischer Arbeit stattfindet. Demnach gelten beim vollkommen elastischen, centrischen Stoss die Gleichungen

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$$

und

$$\frac{M_1}{2} \cdot c_1^2 + \frac{M_2}{2} \cdot c_2^2 = \frac{M_1}{2} \cdot v_1^2 + \frac{M_2}{2} \cdot v_2^2,$$

wovon die erste das oben abgeleitete Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgrösse und die zweite das Gesetz von der Erhaltung der Arbeit ausdrückt und welche zur Bestimmung von v_1 und v_2 genügen. Dividieren wir

$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2)$$

durch

$$M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2),$$

so ergibt sich zunächst die interessante Beziehung

$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2 \dots \dots \dots (5.)$$

zwischen den Geschwindigkeiten beider Körper vor und nach dem vollkommen elastischen Stosse. Mit Einsetzung von $v_2 = c_1 + v_1 - c_2$ in die allererste Gleichung dieses Paragraphen folgt weiter

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 c_1 + M_2 v_1 - M_2 c_2$$

oder

$$(M_1 + M_2) v_1 = M_1 c_1 - M_2 c_1 + 2 M_2 c_2$$

und, wenn wir auf der rechten Seite $M_2 c_1$ addieren und subtrahieren,

$$(M_1 + M_2) v_1 = (M_1 + M_2) c_1 - 2 M_2 c_1 + 2 M_2 c_2,$$

also

$$v_1 = c_1 - 2 \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \dots \dots \dots (6.)$$

die Geschwindigkeit der Masse M_1 und auf gleiche Art ergibt sich

$$v_2 = c_2 + 2 \cdot \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \dots \dots \dots (7.)$$

die Geschwindigkeit der Masse M_2 nach dem vollkommen elastischen Stosse.

Auch in diesen Formeln 6 und 7 dürfen statt der Massen M_1 und M_2 deren Gewichte G_1 und G_2 gesetzt werden und dem Bewegungssinne von M_2 , bzw. G_2 vor dem Stosse ist Rechnung zu tragen durch das Vorzeichen, welches man der Geschwindigkeit c_2 beilegt.

Wenn beispielsweise zwei Körper mit den Gewichten 2 und 3 *kg*, sowie den Geschwindigkeiten 5 und 4 *m* von links nach rechts sich bewegen und im vollkommen elastischen Stosse einander treffen, so haben wir $G_1 = 2$, $G_2 = 3$, $c_1 = 5$, $c_2 = 4$ und erhalten aus den Formeln 6 und 7

$$v_1 = 5 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 1}{5} = 5 - 1,2 = 3,8 \text{ m,}$$

$$v_2 = 4 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{5} = 4 + 0,8 = 4,8 \text{ m.}$$

Da beide Werte positiv ausgefallen sind, so folgt daraus, dass beide Körper nach dem Stosse sich von links nach rechts bewegen.

Wenn dagegen dieselben beiden Körper mit denselben Geschwindigkeiten im vollkommen elastischen Stosse sich begegnen, so muss c_2 negativ, also $= -4$ gesetzt werden und es ergeben sich

$$v_1 = 5 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 9}{5} = 5 - 10,8 = -5,8 \text{ m,}$$

$$v_2 = -4 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 9}{5} = -4 + 7,2 = 3,2 \text{ m.}$$

Die Vorzeichen von v_1 und v_2 deuten darauf hin, dass in diesem Falle nach dem Stosse der erste Körper von rechts nach links und der zweite Körper entgegengesetzt läuft.

In beiden Fällen hat man eine Probe für die Richtigkeit der Resultate an der Beziehung 5.

§ 17.

Übungsbeispiele.

30. Zwei Kugeln mit den Gewichten von 10 und 3 *kg* und den Geschwindigkeiten 2 und 9 *m* treffen sich im vollkommen unelastischen Stosse; man bestimme ihre gemeinsame Geschwindig-

keit nach dem Stosse, wenn die Kugeln vorher erstens in gleicher und zweitens in entgegengesetzter Richtung sich bewegt hatten.

Resultate: $3 \frac{4}{11} m$ und $-\frac{5}{11} m$.

31. Welche Geschwindigkeit muss ein $2 kg$ schwerer Körper haben um im unelastischen Stosse einen $5 kg$ schweren Körper, der sich mit $8 m$ Geschwindigkeit bewegt, eine Geschwindigkeitsvermehrung von $3 m$ erteilen?

Antwort: $18,5 m$.

32. Zwei vollkommen unelastische Körper, welche 20 und $35 kg$ wiegen, stossen mit den Geschwindigkeiten 4 und $3 m$ erstens in gleicher und zweitens in entgegengesetzter Richtung centrisch zusammen. Wie gross ist in beiden Fällen der Verlust an mechanischer Arbeit?

Antwort: $0,6487 mkg$ und $31,7864 mkg$.

33. Eine homogene Kugel von $30 kg$ Gewicht bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $2 m$ und wird von einer anderen Kugel, welche $2 kg$ wiegt und $7 m$ Geschwindigkeit besitzt, eingeholt. Welches sind die Geschwindigkeiten beider Kugeln nach dem Stosse, wenn derselbe als vollkommen elastisch angesehen wird.

Resultate: $2 \frac{5}{8} m$ und $-2 \frac{3}{8} m$.

34. Um wieviel wird die Leistung einer Maschine geschädigt, wenn zwei unelastische Massen mit den Gewichten von 100 und $200 kg$ und den Geschwindigkeiten von $4 m$ und $1 m$ während einer Minute 20 mal in gleicher Richtung zusammenstossen?

Antwort: Um $\frac{100}{g} = 10,2 mkg$ per Sekunde oder $0,136$

Pferdestärke.

35. Mit einem Rammklotz von $Q kg$ Gewicht, welcher $h m$ frei herabfällt, soll ein $q kg$ wiegender Pfahl in den Erdboden getrieben werden. Wie viel Arbeit kommt bei jedem Schlage auf die Zusammenpressung des Pfahlkörpers, wenn der Stoss als vollkommen unelastisch angesehen werden darf?

Antwort: $L = \frac{1}{2g} \cdot \frac{Qq}{Q+q} \cdot v^2$, oder, weil $\frac{v^2}{2g} = h$ ist,

$$L = \frac{Qq}{Q+q} h mkg.$$

36. Welches Arbeitsvermögen A_v bleibt demnach im Rammklotze zum Einrammen des Pfahles übrig?

Antwort: $A_v = Qh - L = \frac{Q^2 h}{Q + q}$. Hierzu kommt dann

noch die von der Schwerkraft verrichtete Arbeit $(Q + q)s$, worin s die Strecke bezeichnet, um welche per Schlag eindringt.

37. Man bestimme den Widerstand W , welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt.

Lösung: Aus $Ws = \frac{Q^2 h}{Q + q} + (Q + q)s$ folgt

$$W = \frac{Q^2}{Q + q} \cdot \frac{h}{s} + Q + q.$$

38. Mit einem $1,7\text{ m}$ hoch herabfallenden Rammbar von 200 kg Gewicht wird ein 25 kg schwerer Pfahl durch 20 Schläge um 4 cm eingetrieben. Welche Last könnte nun dieser Pfahl höchstens tragen, ohne weiter einzusinken?

Antwort: 80425 kg .

39. Wie hoch dürfte aber dieser Pfahl nur belastet sein, sobald man eine 15 fache Sicherheit verlangt?

Antwort: Mit $5361 \frac{2}{3}\text{ kg}$.

40. Die Geschwindigkeit v nach dem vollkommen unelastischen Stosse anzugeben, wenn beide Massen einander gleich sind.

Resultat: $v = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

41. Ebenso die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden gleichen Massen M_1 und M_2 nach dem rein elastischen Stosse.

Resultate: $v_1 = c_2$ und $v_2 = c_1$, d. h. gleiche Massen vertauschen durch den vollkommen elastischen Stoss ihre Geschwindigkeiten.

42. Die rein elastische Masse M_1 trifft mit der Geschwindigkeit c_1 gegen die unendlich ruhende Masse M_2 , z. B. gegen eine feste Wand; welches sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stosse?

Auflösung: Für $M_2 = \infty$ und $c_2 = 0$ ergibt sich aus der 7. Formel $v_2 = 0$ und aus No. 6, nachdem man vorher Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch M_2 dividiert

hat, $v_1 = -c_1$; die gestossene Masse bleibt also in Ruhe, während die stossende Masse M_1 mit derselben Geschwindigkeit zurückprallt, mit welcher sie aufgetroffen ist.

43. Zwei homogene unelastische Kugeln von 15 und 22 kg Gewicht bewegen sich gegen einander und zwar die erste mit 11 m Geschwindigkeit. Welche Geschwindigkeit muss die zweite Kugel unmittelbar vor dem Stosse besessen haben, wenn beide durch den Stoss in den Ruhestand versetzt werden?

Antwort: 7,5 m.

§ 18.

Der unvollkommen elastische Stoss.

Die in den vorigen Paragraphen behandelten Fälle setzen zwei Idealzustände voraus, welche in Wirklichkeit niemals vorkommen; denn es giebt weder einen Körper, der vollkommen elastisch, noch einen solchen, der vollkommen unelastisch wäre: alle Körper sind nur unvollkommen oder teilweise elastisch und liegen in dieser Beziehung zwischen den oben festgestellten Grenzen, welche eben nur gedacht werden können.

Trotzdem sind die bisher gewonnenen Resultate keineswegs überflüssig, sondern sie bilden vielmehr die Grundlage für die weiteren Entwicklungen, welche den thatsächlichen Umständen beim Stosse Rechnung tragen sollen.

Nun besteht aber diejenige Wirkung des letzteren, welche wir ziffernmässig zu beurteilen imstande sind, in der Geschwindigkeitsänderung der beiden Massen; denn diese ist nach Formel 3 beim vollkommen unelastischen Stosse für M_1

$$c_1 - v = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

und für M_2

$$v - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2};$$

dagegen beim vollkommen elastischen Stoss nach den Formeln 6 und 7 für die Masse M_1

$$c_1 - v_1 = 2 \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

und für die Masse M_2

$$v_2 - c_2 = 2 \cdot \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Eine Vergleichung dieser beiden Formelpaare sagt uns, dass die entsprechenden Geschwindigkeitsänderungen beim vollkommen elastischen Stoss gerade doppelt so gross sind, als beim vollkommen unelastischen Stoss. Wir werden daher nach obigem die Geschwindigkeitsänderungen für den unvollkommen elastischen Stoss erhalten, wenn wir die rechten Seiten des letzten Gleichungspaares weder mit 1 noch mit 2, sondern mit einer Zahl multiplizieren, welche zwischen 1 und 2 liegt, also z. B. mit $1 + k$, wo dann k einen positiven echten Bruch darstellt, nämlich

$$c_1 - v_1 = (1 + k) \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

und

$$v_2 - c_2 = (1 + k) \cdot \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Einerseits ergeben sich hieraus

$$v_1 = c_1 - (1 + k) \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \dots \quad (8.)$$

$$v_2 = c_2 + (1 + k) \cdot \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \dots \quad (9.)$$

die Geschwindigkeiten der Massen M_1 und M_2 nach dem unvollkommen elastischen Stosse und andererseits entsteht durch Subtraktion

$$v_1 - v_2 = c_1 - c_2 - (1 + k) (c_1 - c_2)$$

oder

$$v_1 - v_2 = -k (c_1 - c_2), \dots \quad (10.)$$

eine einfache Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten der Massen vor und nach dem Stosse, sowie der Zahl k . Letztere wird der Stoss- oder Elastizitäts-Koeffizient genannt und kann natürlich nur durch praktische Versuche ermittelt werden.

§ 19.

Experimentelle Bestimmung des Stosskoeffizienten.

Hierzu könnte wohl die letzte Formel 10 benutzt werden, aus welcher

$$k = - \frac{v_1 - v_2}{c_1 - c_2}$$

folgt, indem man die Geschwindigkeiten c_1, c_2, v_1, v_2 zweier Massen M_1 und M_2 unmittelbar vor und nach ihrem Zusammenstosse messen würde und diese Werte in die vorstehende Gleichung ein-

setzte. Allein ein solcher Versuch würde aus praktischen Gründen kaum ausführbar sein und wir müssen daher nach Vereinfachung trachten. Zu diesem Behufe lassen wir die eine Masse, etwa M_2 im Ruhezustande und im Verhältnis zu M_1 sehr gross (∞) sein, was beides erreicht wird, wenn wir die gestossene Masse (M_2) fest mit dem Erdkörper verbinden. Dann ist nämlich von vornherein $c_2 = 0$, zweitens aber nach Formel 9 auch

$$v_2 = c_2 + (1 + k) \cdot \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + \infty} = c_2 + 0 = c_2 = 0$$

und die obige Gleichung für k geht über in

$$k = - \frac{v_1}{c_1}.$$

Auf diese Formel, welche also voraussetzt, dass die eine der beiden im geraden Centralstosse sich treffenden Massen ruht und im Verhältnis zur andern als unendlich gross betrachtet werden kann, gründet sich das folgende Experiment zur Bestimmung von k : man lässt aus der Höhe H eine Kugel auf eine grosse, horizontal festliegende Platte frei niederfallen und bezeichnet mit h diejenige Höhe, auf welche die Kugel zurückprallt. Dann ist die Geschwindigkeit der Kugel unmittelbar vor dem Stosse

$$c_1 = \sqrt{2gH}$$

und die Geschwindigkeit kurz nach dem Stoss

$$v_1 = - \sqrt{2gh},$$

(negativ, weil c_1 die entgegengesetzte Richtung wie v_1 hat), und wir erhalten

$$k = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Da man nun H , h für die verschiedenen Materialien, aus welchen man Kugel und Platte bestehen lässt, direkt messen kann, so hat man auch k . Auf diese Weise fand schon Newton

$$k = \frac{5}{9} = 0,56 \text{ für Stahl, Kork und Wolle,}$$

$$k = \frac{8}{9} = 0,89 \text{ „ Elfenbein und}$$

$$k = \frac{15}{16} = 0,94 \text{ „ Glas}$$

und General Morin stellte fest, dass für Thon und Holz k nahezu Null, dagegen für Gusseisen k annähernd gleich 1 ist, dass also der Stoss mit Thon und Holz als vollkommen unelastisch und der Stoss mit Gusseisen als vollkommen elastisch gelten darf.

Bei derartigen Versuchen darf jedoch mit der Fallhöhe H nicht über eine gewisse Grenze hinausgegangen werden, weil bei zu hohem Stossdruck selbst sehr elastische Körper mehr oder weniger die Fähigkeit verlieren, sich wieder auszudehnen und man folglich bei zu grossem H für k einen geringeren Wert erhalten würde.

Zugleich folgt hieraus, dass die vorstehenden Zahlenwerte für k nur mit Vorsicht benützt werden dürfen; denn sie haben nur dann Anspruch auf Geltung, wenn während des Zusammentreffens beide Körper die Elastizitätsgrenze nicht erheblich überschritten wird.

Der letztere Umstand hängt aber ausser von der Körperbeschaffenheit noch von der Höhe des Stossdruckes ab und dieser fällt um so bedeutender aus, je grösser die Geschwindigkeitsdifferenz $c_1 - c_2$ beider Körper unmittelbar vor dem Stosse war.

Es kann demnach vorkommen, dass zwei Körper trotz ihres hohen Stosskoeffizienten k sich doch wie unelastische Körper verhalten, nämlich dann, wenn der Stossdruck auf Grund des grossen Geschwindigkeitsunterschiedes $c_1 - c_2$ so gewaltig ist, dass die Elastizitätsgrenze weit überschritten wird.

In einem solchen Falle, welcher sich äusserlich an der wesentlichen bleibenden Formänderung beider Körper nach dem Stosse zu erkennen giebt, hätte man selbstredend die Formeln für den vollkommen unelastischen Stoss anzuwenden.

§ 20.

Arbeitsverlust beim unvollkommen elastischen Stoss.

Jedenfalls geht auch während des unvollkommen elastischen Stosses eine gewisse Arbeit L für die fortschreitende Bewegung verloren und diese kann offenbar wiederum bestimmt werden als Differenz derjenigen beiden Arbeitsvermögen, welche in den Massen M_1 und M_2 unmittelbar vor und gleich nach dem Stosse vorhanden sind. Wir haben

$$L = \frac{M_1}{2} \cdot c_1^2 + \frac{M_2}{2} \cdot c_2^2 - \left(\frac{M_1}{2} \cdot v_1^2 + \frac{M_2}{2} \cdot v_2^2 \right)$$

$$= \frac{M_1}{2} (c_1 + v_1) (c_1 - v_1) + \frac{M_2}{2} (c_2 + v_2) (c_2 - v_2),$$

worin v_1 und v_2 die in den Formeln 8 und 9 angegebenen Werte besitzen. Wollten wir aber letztere einfach substituieren, so müssten wir uns zur Vereinfachung des entstehenden Ausdrucks für L durch ziemlich verwickelte Rechnungen hindurcharbeiten, was auf folgende Art vermieden werden kann. Wir führen zunächst aus der Beziehung

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2,$$

welche ja für alle Arten des geraden Centralstosses gilt,

$$M_2 (c_2 - v_2) = M_1 (v_1 - c_1)$$

ein, wodurch entsteht

$$L = \frac{M_1}{2} (c_1 + v_1) (c_1 - v_1) + \frac{M_1}{2} (c_2 + v_2) (v_1 - c_1)$$

$$= \frac{M_1}{2} (c_1 - v_1) (c_1 + v_1 - c_2 - v_2) = \frac{M_1}{2} (c_1 - v_1) (c_1 - c_2 + v_1 - v_2)$$

und erhalten daraus mit gleichzeitiger Benutzung der beiden Formeln

$$c_1 - v_1 = (1 + k) \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

sowie

$$v_1 - v_2 = -k (c_1 - c_2)$$

aus § 18 die weitere Gleichung

$$L = \frac{M_1}{2} \cdot (1 + k) \cdot \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \cdot \{c_1 - c_2 - k (c_1 - c_2)\}$$

oder

$$L = \frac{1 - k^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (c_1 - c_2)^2, \quad \dots \quad (11.)$$

welcher auch mit Einsetzung von $M_1 = \frac{G_1}{g}$ und $M_2 = \frac{G_2}{g}$ die Form

$$L = \frac{1 - k^2}{2 g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot (c_1 - c_2)^2 \quad \dots \quad (11a.)$$

erteilt werden kann.

In den Beziehungen 11 und 11a sind auch die beiden extremen Fälle des vollkommen elastischen und des vollkommen unelastischen Stosses enthalten; denn für jenen ist $k = 1$ zu setzen,

wodurch $L = 0$ wird, dagegen für diesen gilt $k = 0$ und hierdurch gehen die Formeln 11, bzw. 11a in 4, bzw. 4a über.

Wie sich ferner aus 11, bzw. 11a leicht erkennen lässt, wird die während des Stosses zur Formänderung verbrauchte Arbeit L einen um so höheren Betrag annehmen, erstens, je kleiner der Stosskoeffizient k ist und zweitens, je mehr der Geschwindigkeitsunterschied $c_1 - c_2$ der aufeinander prallenden Körper ausmacht; besonders stark wird dieser Unterschied, wenn sich die Körper begegnen, weil dann $-c_2$ statt c_2 zu setzen ist und mithin der dritte Faktor sich in $(c_1 + c_2)^2$ verwandelt.

Der Einfluss der Massen M_1 und M_2 , bzw. der Gewichte G_1 und G_2 , welcher im mittelsten Faktor seinen Ausdruck findet, soll erst besprochen werden, nachdem wir die in den letzten drei Paragraphen gefundenen Resultate auf einige besondere Fälle angewendet haben.

§ 21.

Übungsbeispiele.

44. Die Mittelpunkte zweier Kugeln aus Elfenbein bewegen sich auf derselben geraden Linie von rechts nach links; die vorausgehende hat 12 kg Gewicht und 1 m Geschwindigkeit, die nachfolgende 5 kg Gewicht und 2 m Geschwindigkeit. Welche Geschwindigkeiten besitzen diese Kugeln nach dem Zusammentreffen?

Antwort: Diese $1\frac{5}{9}\text{ m}$ und jene $\frac{2}{3}\text{ m}$.

45. Wie gestalten sich aber die Resultate, wenn die erste Kugel von rechts nach links läuft und der hierdurch verstärkte Stossdruck den Koeffizienten k noch nicht beeinflusst?

Antwort: Die 12 kg schwere Kugel hat die Geschwindigkeit $\frac{2}{3}\text{ m}$ und läuft von rechts nach links, die andere besitzt die Geschwindigkeit -2 m , läuft also von links nach rechts, beide prallen zurück.

46. Um wie viel nimmt beidemale die Summe der Arbeitsfähigkeiten in den Kugeln durch den Stoss ab?

Antwort: Um $\frac{10}{27}\text{ mkg}$, bzw. $3\frac{1}{3}\text{ mkg}$.

47. Eine stählerne Kugel fällt aus 243 mm Höhe auf eine horizontal fest aufliegende, ebenfalls stählerne Platte; wie hoch springt erstere zurück?

Antwort: Um 75 mm.

48. Angenommen, Kugel und Platte beständen aus einem beliebigen anderen Material und die erstere würde bei 1,2 m Fallhöhe um 0,675 m zurückspringen, wie gross berechnete sich hieraus der zugehörige Stosskoeffizient?

Antwort: $k = \frac{3}{4}$.

49. Irgend ein Körper trifft einen anderen ruhenden Körper von gleicher Masse im geraden Centralstosse mit der Geschwindigkeit c . Die Geschwindigkeiten nach dem Zusammentreffen zu ermitteln, wenn der Stosskoeffizient allgemein mit k bezeichnet wird.

Resultate: Es ist $v_1 = \frac{1-k}{2} \cdot c$, die Geschwindigkeit des stossenden und $v_2 = \frac{1+k}{2} \cdot c$, die Geschwindigkeit des gestossenen Körpers.

50. Die Masse M stösst mit der Geschwindigkeit c centrisch gegen eine unendlich grosse ruhende Masse (oder ein unbewegliches Hindernis). Man bestimme die Geschwindigkeit v des ersteren nach dem Stosse unter Annahme des beliebigen Koeffizienten k .

Resultat: $v = -kc$.

51. Welches ist dabei die Arbeit der durch den Stoss erzeugten Formänderung?

Antwort: $L = \frac{1-k^2}{2} \cdot Mc^2$.

52. Wie viel Arbeitsvermögen bleibt in der Masse M nach dem Stosse für die fortschreitende Bewegung verfügbar?

Antwort: $A_v = \frac{k^2}{2} Mc^2 = \frac{M}{2} (kc)^2$.

Über die nützliche und schädliche Wirkung des Stosses.

Hinsichtlich der praktischen Ausnutzung des Stosses hat man vor allem zu bedenken, dass sich die in beiden Körpern enthaltene Arbeitsfähigkeit während der Stossdauer in zwei Teile zerlegt: der eine wird in der Hauptsache zur Formänderung der zusammentreffenden Körper (nebenbei auch zur Erregung von Wärme- und Schallwellen) verwendet, der andere nach dem Stosse noch übrig bleibende Teil bewirkt die fortschreitende Bewegung und kann gegebenen Falles zur Überwindung eines Widerstandes längs einer gewissen Wegstrecke dienen.

Es kommt also darauf an, ob man mit dem Stosse lediglich eine Formänderungsarbeit verrichten will, wie etwa beim Schmieden eines Stückes Eisen, beim Nieten, bei Hammer- und Stampfwerken und bei der Stosspräge oder aber, ob man beabsichtigt, durch den Stoss einen bestimmten Widerstand zu bewältigen, als z. B. bei Einschlagung eines Nagels, beim Eintreiben eines Keiles, beim Rammen der Pfähle u. s. w.

Im ersten Falle wäre es dann so einzurichten, dass die Formänderungsarbeit

$$L = \frac{1 - k^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot (c_1 - c_2)^2$$

möglichst gross, im zweiten, dass sie möglichst klein wird. Da bei Anwendungen der eine Körper immer ruht, sagen wir derjenige mit dem Gewichte G_2 (in den oben angeführten Beispielen ist es das zu hämmernde Stück Eisen, die Niete, das Stampfgut, die Münze, der Nagel, der Keil und der Pfahl), so ist $c_2 = 0$ und es wird nunmehr eine Handhabe zur Beurteilung der Stosswirkung dargeboten durch die Formänderungsarbeit

$$L = (1 - k^2) \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{c_1^2}{2g},$$

welche, wie schon im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, einen um so höheren Wert haben wird, je grösser c_1 und je kleiner k ist. Man wird demnach, wenn etwa ein Stück Eisen geschmiedet werden soll, mit dem Hammer weit ausholen und ihn, soweit es andere Rücksichten gestatten, aus einem wenig elastischen Material herstellen. Da letzteres zugleich eine gewisse Härte und

Zähigkeit besitzen muss, so sind wir auf den Stahl angewiesen, welcher den verhältnismässig geringen Elastizitätskoeffizienten $k = \frac{5}{9}$ besitzt.

Der Einfluss der Gewichte G_1 und G_2 auf die Stosswirkung ergibt sich aus dem mittleren Faktor

$$\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_1}{1 + \frac{G_1}{G_2}},$$

welcher einen um so höheren Wert annimmt, je kleiner bei einem bestimmten G_1 der Bruch $\frac{G_1}{G_2}$, je grösser mithin das Gewicht G_2 des bearbeiteten Körpers im Verhältnis zum Gewichte G_1 des schlagenden oder stossenden Körpers ist. Man erreicht dies, indem man den ersteren auf eine bedeutende Masse legt, mit welcher er dann hinsichtlich der Stosswirkung ein Ganzes bildet, beispielsweise ein zu hämmerndes Stück Metall auf einen schweren Ambos, welcher stark fundamementiert ist.

Dagegen wird die rechte Seite der letzten Gleichung und damit die Formänderungsarbeit um so geringer, je grösser $\frac{G_1}{G_2}$, je kleiner also G_2 im Verhältnis zu G_1 ist. Dies benutzt man bei jeder Stossleistung der zweiten Art, indem man, um z. B. einen Nagel, Pfahl oder Keil einzutreiben, den schlagenden Körper (Hammer, Rammbar) gegenüber dem geschlagenen von recht erheblichem Gewichte macht.

Überzeugen wir uns einmal von dem Einfluss, welchen das Verhältnis zwischen den Gewichten G_1 und G_2 des stossenden und des ruhenden Körpers auf die Art der Stosswirkung ausübt, an einem Zahlenbeispiel, indem wir einen 3 kg schweren stählernen Hammer mit 4 m Geschwindigkeit zunächst auf einen 7 kg schweren eisernen Pfahl und sodann auf einen Nagel von nur $0,1 \text{ kg}$ Gewicht fallen lassen. Beidemale besitzt der Hammer beim Auftreffen die Arbeitsfähigkeit

$$A_v = \frac{M_1}{2} \cdot c_1^2 = \frac{G_1 c_1^2}{2g} = \frac{3 \cdot 16}{2 \cdot 9,81} = 2,446 \text{ mkg},$$

davon wird, wenn wir den Stosskoeffizienten $k = \frac{5}{9}$ annehmen, im ersten Falle zur Formänderung

$$L_1 = (1 - k^2) \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \frac{56}{81} \cdot \frac{21}{10} \cdot \frac{16}{2 \cdot 9,81} = 1,184 \text{ mkg}$$

und daher zum Eintreiben

$$A_1 = A_v - L_1 = 2,446 - 1,184 = 1,262 \text{ mkg};$$

dagegen im zweiten Falle zur Formänderung nur

$$L_2 = \frac{56}{81} \cdot \frac{0,3}{3,1} \cdot \frac{16}{2 \cdot 9,81} = 0,056 \text{ mkg}$$

und mithin zum Eintreiben

$$A_2 = A_v - L_2 = 2,446 - 0,056 = 2,39 \text{ mkg}$$

verwendet, sodass die Formänderungsarbeit dort 48,4% und hier knapp 2,3% der Gesamtarbeit beträgt.

Man darf aber nicht etwa glauben, dass dieser Prozentsatz durch Vergrößerung von G_2 beliebig hoch geschraubt werden könne. Derselbe hat vielmehr eine äusserste Grenze, welche eintritt, sobald man in der Formänderungsarbeit

$$L = (1 - k^2) \cdot \frac{G_1}{\frac{G_1}{G_2} + 1} \cdot \frac{c_1^2}{2g}$$

das Gewicht des ruhenden Körpers $G_2 = \infty$ setzt. Wir erhalten hierdurch, weil $\frac{G_1}{G_2} = \frac{G_1}{\infty} = 0$ wird, die denkbar grösste Formänderungsarbeit

$$L = (1 - k^2) \cdot \frac{G_1 c_1^2}{2g},$$

welche also im obigen Spezialfalle

$$L_1 = \frac{56}{81} \cdot \frac{3 \cdot 16}{2 \cdot 9,81} = 1,69 \text{ mkg}$$

oder reichlich 69% der Gesamtarbeit beträgt; jedoch gilt dies alles wiederum nur in der Voraussetzung, dass beim Stosse die Elastizitätsgrenze der Körper nicht überschritten wird, denn wäre letzteres der Fall, wie z. B. beim Schmieden eines glühenden Stückes Eisen angenommen werden darf, so würde wegen $k = 0$ die Formänderungsarbeit

$$L = \frac{G_1 c_1^2}{2g} = 2,446 \text{ mkg}$$

sein und mithin das gesamte Arbeitsvermögen des schlagenden Hammers zur Formänderung Verwendung finden.

Es wird dem Leser nicht entgangen sein, worin sich eigentlich die Nutzwirkung des Stosses charakterisiert. Die in dem stossenden Körper vermöge seiner Masse und seiner Geschwindigkeit enthaltene Arbeitsfähigkeit (Ps) wird in so kurzer Zeit und auf so kurzer Wegstrecke (s) geäussert, dass ein gewaltiger Druck (P) entsteht, welcher geeignet ist, die beabsichtigte Überwindung eines bedeutenden Widerstandes oder die gewünschte Formänderung, bezw. Zerteilung irgend eines Körpers zu erreichen. Weitere Vorteile bieten sich dadurch, dass man den Stoss in be-

liebigen Zwischenräumen wiederholen und auch, wo es sich um Schlaginstrumente (Hammer, Beil etc.) handelt, die Richtung nach Gutdünken fortwährend ändern kann (z. B. beim Schmieden, Nieten, Behauung eines Balkens u. dergl.).

Im Gegensatz zu den vorstehend aufgezählten Fällen macht sich der Stoss sehr unerwünscht bemerkbar bei allen Umtriebs- und Zwischenmaschinen, sowie bei den meisten Arbeitsmaschinen. Hier wirkt der Stoss nur schädlich; einerseits wegen des damit verbundenen Arbeitsverlustes und andererseits, weil infolge des hohen Stossdruckes die Maschinenteile schnell abgenützt, aus der Form gebracht oder wohl gar gänzlich zerstört werden können, wobei natürlich die Gefahr mit den Massen und mit dem Geschwindigkeitsunterschiede der sich stossenden Körper wächst.

Aus diesen Gründen soll man im Maschinenbetrieb die Stösse nach Kräften zu vermeiden suchen, indem man vorerst alle Maschinenteile möglichst genau konstruiert und sorgfältig ausführt. Demnächst ist es so einzurichten, dass die Geschwindigkeiten sich nur allmählich ändern und besonderes Gewicht hat man darauf zu legen, dass die ruckartigen Bewegungen umgangen oder doch gemildert werden; z. B. kann man bei hin- und hergehenden Bewegungen durch Einschaltung einer Feder die Zeit des Stosses (am Beginn und am Ende der Bewegung) verlängern und dadurch den Stossdruck vermindern.

Endlich besteht noch ein Mittel, die nachteiligen Wirkungen des Stosses abzuschwächen, darin, dass man die dem Stosse ausgesetzten Stellen, soweit es andere wichtigere Rücksichten erlauben, aus elastischem und zähem Material herstellt.

III. Kapitel.

Die gleitende Reibung.

§ 23.

Einleitung.

Im letzten Kapitel der Elementarmechanik haben wir die Begriffe des Reibungswiderstandes W und des Reibungskoeffizienten f

entwickelt und erfahren, dass ersterer berechnet werden kann mittels der Formel

$$W = f N,$$

wo N den Druck bezeichnet, mit welchen die Berührungsflächen beider sich reibenden Körper in normaler Richtung zusammengepresst werden, während W stets in der Richtung der genannten Berührungsflächen wirkt.

Der Koeffizient f ist dabei abhängig von dem Material, aus dem die sich reibenden Körper bestehen, ferner von der Beschaffenheit der Berührungsflächen und dann auch von der Art der Reibung; derselbe musste daher durch besondere Versuche bestimmt werden und es hat sich gezeigt, dass er die grössten Werte bei der gewöhnlichen gleitenden, schon kleinere bei der Zapfen- und die kleinsten Werte bei der rollenden Reibung besitzt.

Wenn wir nun in den früheren Untersuchungen lediglich der Zapfen- und der rollenden Reibung näher getreten sind, weil die Behandlung derselben nur ganz geringe mathematische Hilfsmittel erfordert, so wollen wir jetzt die gewöhnliche gleitende Reibung in Betracht ziehen und zunächst die wichtigsten zugehörigen Werte von f mitteilen, wie sie sich aus den Versuchen von Morin ergeben haben.

In der folgenden Tabelle, welche der »Hütte« entnommen ist, bedeutet $=$, dass die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper, \pm , dass sie normal gegen die Fasern des gleitenden Körpers und \perp , dass sich Hirnholz auf Langholz in der Faserichtung der letzteren bewegt.

Namen der reibenden Körper	Lage der Fasern	Zustand der Oberflächen	Reibungskoeffizient	
			der Ruhe	der Bewegung
Gusseisen auf Gusseisen oder Bronze	}	wenig fettig	0,16	0,15
		mit Wasser	.	0,31
Schmiedeeisen auf Schmiede- eisen	}	trocken	.	0,44
		wenig fettig	0,13	.
Bronze auf Gusseisen	trocken	.	0,21
Bronze auf Schmiedeeisen .	.	etwas fettig	.	0,16

Namen der reibenden Körper	Lage der Fasern	Zustand der Oberflächen	Reibungskoeffizient	
			der Ruhe	der Bewegung
Bronze auf Bronze	trocken	.	0,20
Gusseisen auf Eiche	=	trocken	.	0,49
	=	mit Wasser	0,65	0,22
	=	trockne Seife	.	0,19
	=	mit Wasser	0,65	0,26
Schmiedeeisen auf Eiche	=	mit Talg	0,11	0,08
	=	trocken	0,62	0,48
	=	trockne Seife	0,44	0,16
	=	mit Wasser	0,65	0,26
Eiche auf Eiche	±	trocken	0,54	0,34
	±	mit Wasser	0,71	0,25
	⊥	trocken	0,43	0,19
Rindsleder auf Eiche	hohe	trocken	0,43	0,33
	Kante	mit Wasser	0,79	0,29
Leder-Riemen auf Eichen- trommel	=	trocken	0,47	0,27
Hanfseil auf Eiche	=	trocken	0,80	0,52
Leder-Riemen auf Gusseisen	flach	trocken	0,54	0,30
	flach	mit Wasser	0,38	0,36
Rindsleder als Kolben- liderung	flach	mit Wasser	0,62	.
	flach	Öl, Seife	0,12	.

Soll z. B. ein 100 kg schwerer Block aus Schmiedeeisen auf horizontalen und mit Wasser benetzten eichenen Bohlen fortgezogen werden, so ist die nötige Kraft im ersten Moment, um die Bewegung einzuleiten,

$$P_0 = f_0 G = 0,65 \cdot 100 = 65 \text{ kg},$$

dann aber, um die Bewegung gleichförmig zu erhalten, braucht man blos noch die Kraft

$$P = f G = 0,26 \cdot 100 = 26 \text{ kg};$$

denn in beiden Fällen ist der Normaldruck N dem Gewicht G des Körpers gleich. Das erste Mal hatten wir den Reibungskoeffizienten der Ruhe, $f_0 = 0,65$ und das andere Mal denjenigen der Bewegung, $f = 0,26$ anzuwenden.

Übungsbeispiele.

53. Ein horizontales, gusseisernes Sägegatter von 100 kg Gewicht läuft in Bronzebahnen. Wie gross ist die Reibung nach

Morin, wenn die Berührungsflächen wenig gefettet sind?

Antwort: 15 kg.

54. Welcher Effekt geht durch die Reibung in voriger Aufgabe per Sekunde verloren, wenn das Sägegatter 0,94 m Hubhöhe hat und während einer Minute 110 Züge macht?

Antwort: 25,85 mkg, also reichlich 1/3 Pferdestärke.

§ 24.

Reibung auf horizontaler Bahn.

Eine Last Q ruht auf horizontaler Ebene LM (Fig. 25) und soll fortgezogen werden durch eine Kraft $AB = P$, welche mit dem Horizont einen beliebigen Winkel $BAC = \beta$ einschliesst.

Offenbar ist die Wirkung der Kraft P auf die Last Q insofern eine doppelte, als sie die letztere einerseits auf LM weiter zu bewegen, andererseits vertikal emporzuheben sucht; wir zerlegen daher P nach den genannten Richtungen in die beiden Komponenten

$$AC = P \cos \beta \text{ und } AD = P \sin \beta.$$

Die erstere hat bei der horizontalen Bewegung des Körpers die Reibung zu überwinden und heisst deshalb die Arbeitskomponente; die andere wirkt genau entgegengesetzt der Last Q , es verbleibt daher der Normaldruck

$$N = Q - AD = Q - P \sin \beta$$

und mithin ist, wenn f den Reibungskoeffizienten bezeichnet, der Reibungswiderstand

$$W = fN = Qf - Pf \sin \beta.$$

Weil aber dieser Reibungswiderstand im Gleichgewicht gehalten werden soll durch die Komponente $AC = P \cos \beta$, so haben wir

$$P \cos \beta = Qf - Pf \sin \beta,$$

woraus folgt

$$P = \frac{Qf}{\cos \beta + f \sin \beta} \dots \dots (1.)$$

als diejenige Kraft, welche der Reibung gerade das Gegengewicht hält, sodass eine geringe Vermehrung genügt, um die Bewegung der Last Q herbeizuführen.

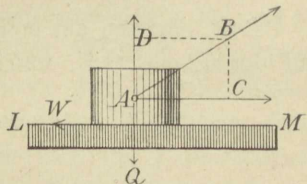


Fig. 25.

Übungsbeispiele.

55. Auf einer Horizontalebene soll eine Last von 1000 kg durch eine Kraft in Bewegung gesetzt werden, welche mit dem Horizont nacheinander Winkel von 0, 10, 20 und 30 Grad einschliesst. Wie gross muss jene Kraft in jedem einzelnen Falle sein, wenn der Reibungskoeffizient der Ruhe 0,3 beträgt?

Antwort: $P_0 = 300 \text{ kg}$, $P_1 = 289,3 \text{ kg}$, $P_2 = 287,8 \text{ kg}$ und $P_3 = 295,3 \text{ kg}$.

56. Wie gross würde aber die Kraft sein müssen, wenn ihr Winkel mit dem Horizont 40, 50 und 60 Grad wäre?

Antwort: $P_4 = 312,8 \text{ kg}$, $P_5 = 344,5 \text{ kg}$ und $P_6 = 394,9 \text{ kg}$.

§ 25.

Der Reibungswinkel.

Ruht dagegen ein beliebiger Körper vom Gewichte G (Fig. 26) auf der Ebene OE , welche mit dem Horizont OH den Winkel

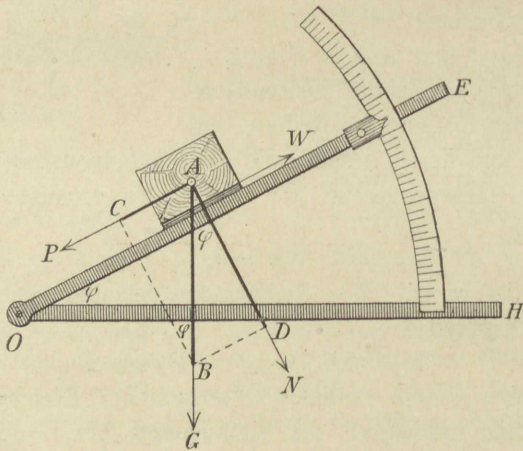


Fig. 26.

$EOH = \varphi$ einschliesst, so müssen wir, um den Normaldruck N auf OE zu erhalten, das Gewicht $AB = G$ in zwei Komponenten AD und AC zerlegen, welche rechtwinklig und parallel zu OE sind. Wegen

$$\sphericalangle DAB = ABC = EOH = \varphi$$

ergeben sich aus dem Kräfterechteck $ADBC$ einerseits AD gleich

$$N = G \cos \varphi, \dots (II.)$$

der Normaldruck, welchen der Körper auf OE ausübt und andererseits AC gleich

$$P = G \sin \varphi, \dots (III.)$$

die Kraft, welche den Körper parallel EO abwärts zu ziehen sucht.

Bezeichnen wir jetzt den Koeffizienten für die Reibung zwischen dem Körper und der Ebene OE mit f , so ist der in der Richtung der letzteren stattfindende Reibungswiderstand

$$W = f N = f G \cos \varphi, \dots (IV.)$$

welcher der bewegenden Kraft P direkt entgegenwirkt. Für den Spezialfall $\varphi = 0$ ist OE horizontal und die Formeln III und IV liefern die vorauszusehenden Werte

$$P = 0, \text{ sowie } W = f G;$$

eine Bewegung des Körpers ist wegen $P = 0$ ausgeschlossen. Wenn wir aber nunmehr φ beständig wachsen lassen, so nimmt P zu, W hingegen ab, wie aus den beiden Beziehungen III und IV klar hervorgeht, weil mit wachsendem Winkel der Sinus grösser, dagegen der Kosinus kleiner wird. Auch könnten wir diese Änderungen durch die Anschauung bestätigen; denn nimmt der Winkel φ in Fig. 26 zu, so wird die P darstellende Rechteckseite AC grösser, während der Normaldruck AD und damit auch der Reibungswiderstand W abnimmt.

Wenn wir daher OH horizontal halten und OE um das Charnier bei O aufwärts drehen, wodurch der Winkel φ stetig wächst, so muss einmal der Moment eintreten, wo die Zugkraft P dem Reibungswiderstand W , also laut III und IV

$$G \sin \varphi = f G \cos \varphi$$

oder

$$tg \varphi = f \dots (V.)$$

wird. In diesem bemerkenswerten Augenblick halten sich P und W gerade das Gleichgewicht, es genügt daher die geringste weitere Vermehrung von φ , um ein langsames Abwärtsgleiten des Körpers eintreten zu lassen.

Der für die Theorie der Reibung hoch bedeutsame Winkel, welcher der letzten Beziehung V entspricht, heisst der Reibungswinkel und wird gewöhnlich mit ϱ bezeichnet, sodass die Formel

$$f = tg \varrho \dots \dots \dots (2.)$$

den einfachen Zusammenhang zwischen Reibungskoeffizienten und Reibungswinkel für dieselben beiden Körper angiebt.

Zugleich ergibt sich aus vorstehendem eine leichte experimentelle Bestimmung des Reibungswinkels ϱ und damit auch des zugehörigen Koeffizienten f mit Hilfe des in Fig. 26 dargestellten Apparates: Nachdem wir OH genau wagerecht gestellt haben, legen wir den fraglichen Körper auf die Ebene OE und drehen dann letztere ganz langsam, bis jener zu gleiten beginnt. In diese Lage bildet die schiefe Ebene EO mit dem Horizont OH den Reibungswinkel $EOH = \varrho$, welcher mittels eines Nonius an der Winkelskala abgelesen werden kann.

Angenommen, der Nonius zeigte auf $14\frac{1}{2}^{\circ}$, so würde sich aus der Formel 2 für den betreffenden Fall der Reibungskoeffizient

$$f = \operatorname{tg} 14^{\circ} 30' = 0,2586 \sim 0,26$$

ergeben.

Übungsbeispiele.

57. Einer der grössten Reibungskoeffizienten ist derjenige von Kalkstein auf Kalkstein bei gespitzter Oberfläche, nämlich $f = 0,78$. Bei welcher Neigung zum Horizont würden dieselben anfangen, aufeinander hinzugleiten?

Antwort: Bei $37^{\circ} 57'$.

58. Dagegen ist der kleinste aller bis jetzt bekannten Koeffizienten der gleitenden Reibung nach Rennie derjenige von Eisen auf Eis, nämlich $0,014$. Wie stark brauchte demnach eine Eisbahn bloss gegen den Horizont geneigt zu sein, damit ein darauf befindlicher Schlittschuhläufer oder auch ein Schlitten mit eisernen Kufen ganz von selbst und zwar gleichförmig abwärts gleitet?

Antwort: Unter einem Winkel von $48' 8''$.

§ 26.

Reibung auf der schiefen Ebene.

Wir wollen nun die Bedingung des Gleichgewichtes, welcher ein Körper auf schiefer Ebene unterliegt, mit Rücksicht auf die gleitende Reibung entwickeln. Zu dem Ende zerlegen wir sowohl Q als P in je zwei Komponenten parallel und rechtwinklig zu LM (Fig. 27), nämlich $AB = Q$ in

$$AE = Q \sin \alpha \text{ und } AD = Q \cos \alpha,$$

sowie $AC = P$ in

$$AJ = P \cos \beta \text{ und } AK = P \sin \beta.$$

Dann ist der Normaldruck, welchen die Ebene LM auszuhalten hat,

$$N = AD - AK = Q \cos \alpha - P \sin \beta$$

und demnach der Reibungswiderstand längs LM

$$W = fN = Q f \cos \alpha - P f \sin \beta.$$

Jetzt haben wir aber wohl zu unterscheiden, ob die Last Q durch die Kraft P aufwärts bewegt oder bloß am Herabgleiten gehindert werden soll; denn im ersten Falle wirkt die Reibung der ziehenden Komponente AJ entgegen, also nach unten, im anderen Falle dagegen umgekehrt, nach oben.

Für die Aufwärtsbewegung haben wir nämlich die Gleichgewichtsbedingung

$$AJ = AE + W$$

und erhalten mit Einführung der obigen Werte

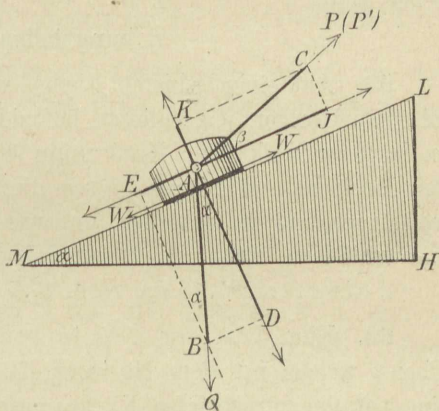


Fig. 27.

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha + Q f \cos \alpha - P f \sin \beta,$$

$$P (\cos \beta + f \sin \beta) = Q (\sin \alpha + f \cos \alpha),$$

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta} \dots \dots (3.)$$

Hierin ist die Kraft P derart bestimmt, dass eine kleine Vermehrung die Aufwärtsbewegung von Q zur Folge hätte.

Zweitens bezeichnen wir diejenige Kraft, welche eben noch gross genug sein soll, um dem Heruntergleiten von Q vorzubeugen, mit P' . Dann wirkt, wie schon bemerkt, die Reibung im Sinne der Komponente AJ , und es folgt aus der Gleichgewichtsbedingung

$$AJ + W = AE$$

oder

$$P' \cos \beta + Q f \cos \alpha - P' f \sin \beta = Q \sin \alpha,$$

$$P' (\cos \beta - f \sin \beta) = Q (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

$$P' = Q \cdot \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \dots \dots (4.)$$

Für jeden kleineren Wert von P' , als ihn diese Formel verlangt, tritt Abwärtsbewegung der Last Q ein.

Es verdient hierbei noch erwähnt zu werden, dass No. 4 kürzer hätte abgeleitet werden können, wenn man in No. 3 den Reibungskoeffizienten negativ, also $-f$ statt $+f$ gesetzt hätte, weil dort der Reibungswiderstand $W = fN$ gerade entgegengesetzt wirkt als hier, alle übrigen Umstände aber die nämlichen sind.

Übungsbeispiele.

59. Auf einer schiefen Ebene, welche einen Winkel von 12° mit dem Horizont einschliesst, befindet sich eine Last von 500 kg ; an letzterer wirkt eine Kraft unter einem Winkel von 23° gegen den Horizont. Wie gross muss diese Kraft sein, um eine Aufwärtsbewegung zu bewirken, und wie gross, um ein Abwärtsgleiten zu verhindern, wenn der Reibungskoeffizient $0,2$ ist?

Antwort: $197,85\text{ kg}$, resp. $6,51\text{ kg}$.

60. Eine Last von 100 kg befindet sich auf einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizont 18° einschliesst, und soll durch eine parallel zur schiefen Ebene gerichtete Kraft im Gleichgewicht erhalten werden. Zwischen welchen Grenzen ist diese Kraft bei einem Reibungskoeffizienten von $0,25$ eingeschlossen, wenn keine Bewegung entstehen soll?

Antwort: Zwischen $P = 54,68\text{ kg}$ und $P' = 7,13\text{ kg}$.

61. Auf einer unter 7° zum Horizont geneigten Ebene soll eine Last von 250 kg durch eine parallel zur ersten gerichtete Kraft auf- und abwärts befördert werden. Wie gross muss diese Kraft in beiden Fällen sein, wenn der Reibungskoeffizient $0,16$ beträgt?

Antwort: $70,17\text{ kg}$, bzw. $9,235\text{ kg}$; denn man erhält die Kraft $P' = -9,235\text{ kg}$ und aus dem negativen Zeichen muss geschlossen werden, dass P' abwärts zu wirken hat.

§ 27.

Einführung des Reibungswinkels in die letzten Formeln.

Mit Benutzung der Beziehung $f = tg\ \rho$ gehen die Gleichungen 3 und 4 des vorigen Paragraphen über in

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \varrho \cos \alpha}{\cos \beta + \operatorname{tg} \varrho \sin \beta} = Q \cdot \frac{\sin \alpha \cos \varrho + \sin \varrho \cos \alpha}{\cos \beta \cos \varrho + \sin \varrho \sin \beta},$$

bezw.

$$P' = Q \cdot \frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \varrho \cos \alpha}{\cos \beta - \operatorname{tg} \varrho \sin \beta} = Q \cdot \frac{\sin \alpha \cos \varrho - \sin \varrho \cos \alpha}{\cos \beta \cos \varrho - \sin \varrho \sin \beta}$$

und man erhält mit Rücksicht auf die bekannten Grundformeln der Trigonometrie

$$P = Q \cdot \frac{\sin (\alpha + \varrho)}{\cos (\beta - \varrho)}, \quad \dots \dots \dots (5.)$$

die Kraft, welche nur einer geringen Vermehrung bedarf, um die Last Q aufwärts zu ziehen und dabei die Reibung zu überwinden, sowie

$$P' = Q \cdot \frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\cos (\beta + \varrho)}, \quad \dots \dots \dots (6.)$$

diejenige Kraft, welche das Abwärtsgleiten von Q mit Hilfe der Reibung eben noch verhindert.

Wenn wir uns in Formel 5 die drei Grössen Q , α und ϱ konstant, dagegen β veränderlich vorstellen, so ist P eine Funktion von β ; denn jedem beliebig gewählten Werte von β entspricht ein ganz bestimmter Wert von P . Da nun der Zähler $Q \sin (\alpha + \varrho)$ unveränderlich ist, so wird P um so kleiner, je grösser der Nenner $\cos (\beta - \varrho)$ sich darstellt. Dieser letztere besitzt aber den denkbar grössten Wert 1 bei $\beta - \varrho = 0$ und mithin wird P am kleinsten für

$$\beta = \varrho,$$

d. h. die Zugkraft P wird ein Minimum, wenn sie mit der schiefen Ebene den Reibungswinkel einschliesst. Diese Minimalkraft selbst ergibt sich mit Einsetzung von $\beta = \varrho$ in 5, nämlich

$$P_{\min} = Q \cdot \sin (\alpha + \varrho).$$

Selbstverständlich gilt dies Resultat auch für die Fortbewegung einer Last Q auf horizontaler Bahn, welche ja nur einen besonderen Fall der schiefen Ebene darbietet. Hier ergibt sich für $\alpha = 0$ aus der letzten Beziehung

$$P_{\min} = Q \sin \varrho.$$

Knüpfen wir die nämliche Betrachtung an die 6. Formel, so erhalten wir das Ergebnis: die günstigste Richtung der Haltekraft P' wird bestimmt durch

$$\beta = -\varrho$$

oder die Kraft, welche Q vor dem Hinabgleiten bewahrt,

$$P'_{\min} = Q \sin(\alpha - \varrho)$$

fällt am kleinsten aus, sobald sie mit der schiefen Ebene nach unten den Reibungswinkel ϱ bildet. Sollte allerdings in diesem Falle der Neigungswinkel α der schiefen Ebene kleiner sein als der Reibungswinkel ϱ , so würde P'_{\min} negativ ausfallen und folglich entgegengesetzt (nach links) gerichtet sein müssen, um bei der geringsten Vergrößerung die Abwärtsbewegung von Q einzuleiten.

Soll z. B. in Fig. 27 ein Gusseisenblock von 100 kg Gewicht auf eichener Bahn durch eine möglichst kleine Kraft befördert werden, so ist laut Tabelle der Reibungskoeffizient $f = 0,49$ und demnach ergibt sich aus

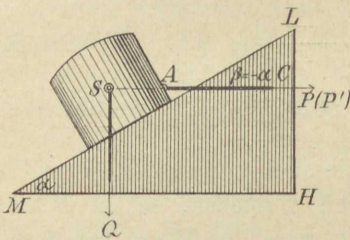


Fig. 28.

$$tg \varrho = f = 0,49$$

bei Abrundung auf Minuten der Reibungswinkel

$$\varrho = 26^{\circ} 6',$$

welchen die Minimalkraft mit der Gleitbahn einschliessen muss.

Wäre nun der Neigungswinkel der letzteren zum Horizont grösser als der Reibungswinkel, etwa $\alpha = 30^{\circ}$, so erhielte man

$$P_{\min} = Q tg(\alpha + \varrho) = 100 \cdot tg 56^{\circ} 6' = 148,8 \text{ kg},$$

die zur gleichförmigen Aufwärtsbewegung und

$$P'_{\min} = Q tg(\alpha - \varrho) = 100 \cdot tg 3^{\circ} 54' = 6,8 \text{ kg},$$

die zum Halten der Last Q erforderliche kleinste Kraft.

Dagegen bekäme man bei $\alpha < \varrho$, z. B. bei $\alpha = 20^{\circ}$, ein negatives Kräfteminimum

$$P'_{\min} = Q tg(\alpha - \varrho) = 100 \cdot tg(-6^{\circ} 6') = -10,69 \text{ kg},$$

woraus gefolgert werden muss, dass in diesem Falle P'_{\min} nach links (der fallenden Seite) hin zu wirken hat, um die Abwärtsbewegung einzuleiten.

Zum Schlusse sei noch des für später wichtigen Spezialfalles gedacht, wo die Kraft parallel zur Basis der schiefen Ebene gerichtet und demnach $\beta = -\alpha$ ist (Fig. 28). Mit Einführung dieser letzteren Bedingung in die Formeln 5 und 6 erhalten wir, weil dort $\cos(-\alpha - \varrho) = \cos(\alpha + \varrho)$ und hier $\cos(-\alpha + \varrho) = \cos(\alpha - \varrho)$ gesetzt werden darf,

$$P = Q tg(\alpha + \varrho), \dots \dots \dots (7.)$$

die Kraft, welche nur einer geringen Vermehrung bedarf, um die Last Q aufwärts zu ziehen und dabei die Reibung zu überwinden, sowie

$$P' = Q \operatorname{tg} (\alpha - \varrho), \dots \dots \dots (8.)$$

diejenige Kraft, welche das Abwärtsgleiten von Q gerade noch verhütet.

Übungsbeispiele.

62. Der Reibungskoeffizient eines Schlittens mit hölzernen Kufen auf ungeschmierten, aber glatten Holz- oder Steinbahnen ist $0,38$. Welches wäre der vorteilhafteste Winkel zwischen Zugkraft und Bahn?

Antwort: $20^\circ 50'$.

63. Mit welcher Kraft könnte unter diesem Winkel die Last von 1000 kg auf horizontaler Bahn gleichförmig fortbewegt werden?

Antwort: Mit $355,6 \text{ kg}$.

64. Welche Minimalkraft wäre aber erstens zur Aufwärtsbewegung und zweitens zum Halten der Last erforderlich, wenn der Neigungswinkel der Bahn zum Horizont 25° betrüge?

Antwort: $717,3 \text{ kg}$, bezw. $72,6 \text{ kg}$.

§ 28.

Die Reibung am Keil.

Rechtwinklig auf die Seitenflächen AB und AD des in der 29. Figur abgebildeten Keiles ABD wirken die Druckkräfte

$$E_1 F = E_2 F = Q,$$

welche die aufwärts gerichtete Resultante GF gleich

$$R_1 = 2 Q \sin \frac{\alpha}{2} \dots (I)$$

erzeugen, sobald man unter α den Keilwinkel BAD versteht. Ausserdem verursachen aber die beiden Seitendrucke Q in den Richtungen BA und DA zwei einander gleiche Reibungswiderstände $W = f Q$, welche ebenfalls den Winkel α einschliessen und sich mithin zur Resultierenden AC gleich

$$R_2 = 2 Q f \cos \frac{\alpha}{2} \dots (II)$$

vereinigen.

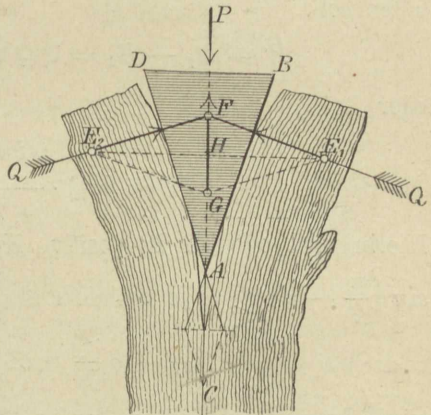


Fig. 29.

Stellt nun erstens P diejenige rechtwinklig zum Rücken BD wirkende Kraft dar, welche den Keil eintreiben soll, so muss sowohl R_1 als R_2 von P überwunden werden, und es gilt für den Gleichgewichtszustand $P = R_1 + R_2$ oder

$$P = 2 Q \left(\sin \frac{\alpha}{2} + f \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad \dots \quad (9.)$$

oder auch, indem wir mittels der Beziehung

$$f = \operatorname{tg} \varrho = \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho}$$

den Reibungswinkel ϱ einführen,

$$P = 2 Q \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin \varrho}{\cos \varrho} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2 Q \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \varrho + \sin \varrho \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \varrho}$$

und das ist

$$P = 2 Q \cdot \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varrho \right)}{\cos \varrho}. \quad \dots \quad (10.)$$

Wenn es sich dagegen zweitens nicht um das Eindringen, sondern um das Zurückgehen des Keiles handelt, so wirkt die Reibung gerade entgegengesetzt wie vorhin, und es ist die Kraft, welche das Zurückspringen des Keiles eben noch verhüten soll,

$$P' = R_1 - R_2 = 2 Q \left(\sin \frac{\alpha}{2} - f \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

oder

$$P' = 2 Q \cdot \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \varrho \right)}{\cos \varrho}. \quad \dots \quad (11.)$$

Hierin wird offenbar P' positiv, Null oder negativ, je nachdem

$\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \varrho \right) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$, je nachdem also

$$\frac{\alpha}{2} - \varrho \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} 0 \text{ oder } \frac{\alpha}{2} \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} \varrho$$

wird. Im oberen Fall, wo der halbe Keilwinkel den Reibungswinkel überwiegt, muss die aus No. 11 berechnete Kraft P' normal auf den Rücken des Keiles abwärts drücken, um letzteren zu halten. Im mittleren Falle, in welchem $\frac{\alpha}{2} = \varrho$, wird der

Keil lediglich durch die Reibung vor dem Zurückspringen bewahrt und im letzten Falle, wenn $\frac{\alpha}{2} < \rho$, sitzt der Keil fest; denn es gehört dann noch die aus Formel 11 zu bestimmende Kraft P' dazu, um ihn herauszuziehen.

Jedenfalls muss, wenn der Keil als Befestigungsmittel dienen soll, $\frac{\alpha}{2} < \rho$ sein, damit die entstehende Reibung für sich allein das Lösen verhindert.

Allerdings verwendet man in der Praxis zu Befestigungszwecken meist den einfachen Keil, den man dabei selten scharf auslaufen lässt, sondern ihn parallel zum Rücken abschneidet, sodass der Normalquerschnitt ein Trapez $C B D E$ (Fig. 30) darstellt, wobei dann selbstverständlich der Keilwinkel α derjenige ist, welcher von den verlängert gedachten Seiten $D B$ und $E C$ eingeschlossen wird. Es macht sich demnach noch nötig, die Bedingung zu entwickeln, unter welcher der einfache Keil Selbstsperrung besitzt.

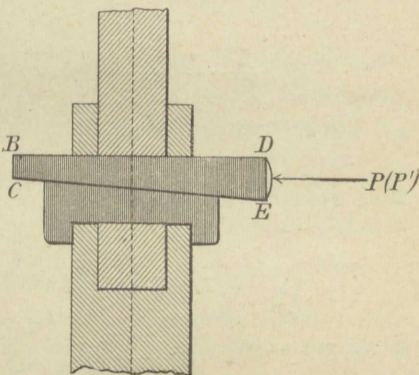


Fig. 30.

Zu diesem Behufe bezeichnen wir die Kräfte, welche senkrecht auf die Seiten des einfachen Keiles $A D E$ (Fig. 31) wirken, mit P' , Q und Q' . P' ist die Kraft normal zum Rücken $D E$, muss also negativ ausfallen, wenn der Keil selbstsperrend sein soll; Q ist der gegebene Druck rechtwinklig zu $B D$ und Q' der vorläufig unbekannte Normaldruck auf $C E$.

Da nun die beiden letzten Drücke die Reibungswiderstände $Q f$ und $Q' f$ längs $B D$ und $C E$ erzeugen, so haben wir es im ganzen mit den fünf Kräften P' , Q , $Q f$, Q' und $Q' f$ zu thun, welche am Keile wirksam sind und sich das Gleichgewicht halten sollen.

Um nun die Bedingung für das letztere aufstellen zu können, zerlegen wir noch Q' und $Q' f$ in je zwei Komponenten rechtwinklig

und parallel zum Keilrücken DE , nämlich Q' in $Q' \sin \alpha$ und $Q' \cos \alpha$, sowie $Q'f$ in $Q'f \cos \alpha$ und $Q'f \sin \alpha$, darauf hinweisend, dass in der Fig. 31 die Richtungen sämtlicher Kräfte durch Pfeilspitzen angedeutet sind. Dann herrscht offenbar Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe aller Kräfte sowohl in der Richtung von AD als auch in der Richtung von DE der Null gleich ist, wenn also gleichzeitig die beiden Beziehungen

$$P' + Qf + Q'f \cos \alpha - Q' \sin \alpha = 0 \dots (III)$$

und

$$Q' \cos \alpha + Q'f \sin \alpha - Q = 0 \dots (IV)$$

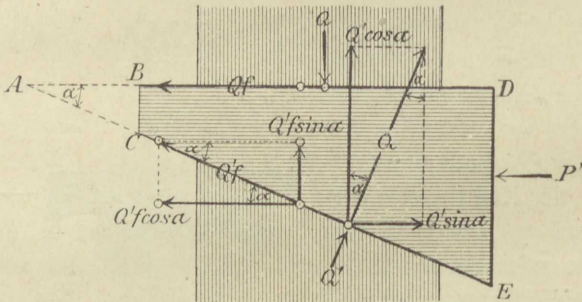


Fig. 31.

bestehen. Aus der letzten Gleichung lässt sich zunächst Q' bestimmen; denn es folgt

$$Q' = \frac{Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \dots (V)$$

und aus III ergibt sich

$$P' = Q' (\sin \alpha - f \cos \alpha) - Qf$$

oder mit Rücksicht auf V

$$P' = Q \cdot \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} - Qf$$

und hieraus, wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\cos \alpha$ dividiert, $f = \operatorname{tg} \varrho$ setzt und den gemeinschaftlichen Faktor Q aushebt,

$$P' = Q \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varrho}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varrho} - \operatorname{tg} \varrho \right),$$

also mit Anwendung der bekannten goniometrischen Formel

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varrho}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varrho} = \operatorname{tg} (\alpha - \varrho)$$

$$P' = Q [\operatorname{tg} (\alpha - \varrho) - \operatorname{tg} \varrho], \dots \dots (12.)$$

diejenige Kraft, welche den Keil in seiner Lage zurückhält. Soll dazu die Reibung allein ausreichen, so muss P' mindestens gleich, oder, was sicherer, kleiner als Null, folglich

$$\operatorname{tg} (\alpha - \varrho) < \operatorname{tg} \varrho,$$

das ist

$$\alpha - \varrho < \varrho$$

oder

$$\alpha < 2\varrho$$

sein, und wir gelangen somit zu dem Ergebnis: Wie der doppelte so ist auch der einfache Keil selbstsperrend unter der Bedingung, dass der Keilwinkel α weniger als der doppelte Reibungswinkel 2ϱ beträgt.

Handelt es sich etwa um einen schmiedeeisernen Keil zwischen gusseisernen oder bronzenen Bahnen, so ist laut Tabelle der Reibungskoeffizient $f = 0,18$, folglich

$$\operatorname{tg} \varrho = 0,18, \log \operatorname{tg} \varrho = 9,25527 - 10$$

und mithin der Reibungswinkel $\varrho = 10^{\circ} 12'$; man dürfte also den Keilwinkel α nicht über 20° wählen, wenn man der Selbstsperrung des Keiles sicher sein will.

Übungsbeispiele.

65. Man soll die Kraft P_1 rechtwinklig zum Rücken eines einfachen Keiles derartig bestimmen, dass schon eine geringe Vermehrung hinreichen würde, um den Keil in den Spalt eindringen zu lassen.

Andeutung zur Lösung: Substituiert man in III und IV P_1 statt P' sowie $-f$ statt $+f$ und führt die Rechnung wie dort weiter, so erhält man schliesslich

$$P_1 = Q [\operatorname{tg} (\alpha + \varrho) + \operatorname{tg} \varrho].$$

66. Ein schmiedeeiserner einfacher Keil hat die in Fig. 31 zur Anschauung gebrachte Gestalt mit den Dimensionen $BD = 600 \text{ mm}$, $BC = 50 \text{ mm}$, $DE = 100 \text{ mm}$ und soll zwischen zwei Körper aus Gusseisen getrieben werden. Es soll zunächst entschieden werden, ob dieser Keil selbstsperrend ist.

Auflösung: Zur Berechnung des Keilwinkels haben wir

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DE - BC}{BD} = \frac{100 - 50}{600} = \frac{1}{12} = 0,0833,$$

$$\text{mithin } \alpha = 4^{\circ} 45'.$$

Sodann bestimmen wir den Reibungswinkel mittels

$$\operatorname{tg} \varrho = f = 0,18, \text{ woraus folgt } \varrho = 10^{\circ} 12'$$

und sehen nun, dass α bedeutend kleiner als 2ϱ , dass also die Selbstsperrung reichlich vorhanden ist.

67. Welche Kraft wäre notwendig, um mit diesem Keil einen Druck von 1000 kg auszuüben.

Auflösung: Mit Einsetzung von $Q = 1000 \text{ kg}$, $\alpha = 4^{\circ} 45'$ und $\varrho = 10^{\circ} 12'$ in die Resultatformel von Beispiel 65 entsteht

$$P = 1000 (\operatorname{tg} 14^{\circ} 57' + \operatorname{tg} 10^{\circ} 12') = \sim 447 \text{ kg}.$$

68. Mit wie viel Kilogramm müsste man aber auf den Fuss BC des Keiles drücken, um letzteren zu lösen?

Auflösung: Hier bedienen wir uns der 12. Formel und erhalten

$$P' = 1000 [\operatorname{tg} (-5^{\circ} 37') - \operatorname{tg} 10^{\circ} 12'] = \sim -278\frac{1}{4} \text{ kg}.$$

Anmerkung: Das negative Vorzeichen von P' bestätigt den vorauszusehenden Umstand, dass diese Kraft von links nach rechts wirken muss, um den Keil zu lösen.

§ 29.

Der Wirkungsgrad des Keiles.

Aus den vorstehenden Untersuchungen und Zahlenbeispielen geht hervor, dass ein beträchtlicher Teil der den Keil eintreibenden Kraft durch die gleitende Reibung aufgezehrt wird. Zifferngemässen Aufschluss hierüber liefert aber der Wirkungsgrad η , das ist der Quotient aus derjenigen Kraft P_0 , welche am Keile dem Widerstande Q ohne Reibung das Gleichgewicht halten würde und aus jener Kraft P_1 , die denselben Widerstand Q und zugleich die Reibung zu überwinden vermag.

Diese letztere ist nach Formel 9 für den doppelten Keil

$$P_1 = 2 Q \left(\sin \frac{\alpha}{2} + f \cos \frac{\alpha}{2} \right),$$

daraus ergibt sich für $f = 0$ die den Keil ohne Rücksicht auf Reibung eintreibende Kraft

$$P_0 = 2 Q \sin \frac{\alpha}{2}$$

und mittels Division der letzteren durch die erstere Gleichung entsteht der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_0}{P_1} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} + f \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + f \cot \frac{\alpha}{2}}$$

Eine etwas einfachere Gestalt erhält der letzte Ausdruck durch Einführung des Winkels $DBA = \beta$ (Fig. 29), welchen der Keilrücken mit den Seiten bildet, denn aus $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \beta$ folgt $\cot \frac{\alpha}{2} = \cot(90^\circ - \beta) = \operatorname{tg} \beta$ und mithin

$$\eta = \frac{1}{1 + f \operatorname{tg} \beta}, \dots \dots \dots (13.)$$

eine Formel, welche uns sagt, dass der Wirkungsgrad des doppelten Keiles vom Reibungskoeffizienten und vom Winkel β in folgender Weise abhängt: mit f und β nimmt der Nenner zu und folglich, weil der Zähler 1 bleibt, der Wirkungsgrad η ab; je kleiner man also f und β wählt, desto grösser wird das Güteverhältnis η des Keiles, d. h. desto weniger verliert man an Arbeit. Allein man muss auch mit dem Umstande rechnen, dass der Hauptzweck des Keiles in der Ausübung eines bedeutenden Druckes besteht und letzterer bedingt ein grosses β und damit ein kleines α .

So geht man in der Praxis*) mit dem Winkel α selten über 6° ; dann ist

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 87^\circ$$

und demnach, wenn wir f den denkbar günstigsten Wert $0,1$ beilegen, der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{1}{1 + 0,1 \operatorname{tg} 87^\circ} = \frac{1}{1 + 2,021} = \frac{1}{3,021} = 0,331,$$

d. h. es geht durch die Reibung mehr als $\frac{2}{3}$ der Kraftarbeit verloren.

*) Man findet bei Keilen, welche dauernde Befestigung gewähren, sollen, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{30}, \frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{100}$ oder gar noch kleiner, dagegen bei solchen, welche öfter gelöst werden müssen, $\frac{1}{24}$ bis $\frac{1}{12}$ und höchstens $\frac{1}{6}$.

Allein man darf deshalb den Keil nicht für unvorteilhaft oder wohl gar entbehrlich erachten; denn er ist die einzige einfache Maschine, welche durch Schläge mit schwerem Hammer getrieben wird. Hierbei entsteht zwischen Hammer und Keil ein so hoher Stossdruck, dass trotz des geringen Wirkungsgrades immerhin ein bedeutender Effekt erzielt wird und die grosse Reibung kommt sogar höchst gelegen, insofern sie das Zurückspringen des Keiles hindert.

In Formel 12 bedeutet P' die Kraft, welche mit Hilfe der Reibung den einfachen Keil zurückhält, die Reibung wirkt also im Sinne von P' . Wünschen wir jetzt diejenige Kraft P_1 , welche den Keil eintreibt, so müssen wir bedenken, dass dann die Reibung von P_1 zu überwinden ist, also entgegengesetzt wie vorhin wirkt und diesem Umstande Rechnung tragen, indem wir den Reibungskoeffizienten f und mithin auch den Reibungswinkel ϱ mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen, also $-\varrho$ statt $+\varrho$ setzen. Hierdurch entsteht bei Berücksichtigung von $tg(-\varrho) = -tg\varrho$

$$P_1 = Q \{ tg(\alpha + \varrho) + tg\varrho \},$$

die Kraft, welche am einfachen Keil die zum Rücken des letzteren parallele Last Q mit der Reibung zu überwinden imstande ist und daraus folgt für $\varrho = 0$ die Kraft

$$P_0 = Q tg\alpha,$$

welche derselben Last Q ohne Reibung das Gegengewicht halten könnte. Hieraus folgt weiter $\frac{P_0}{P_1}$ gleich

$$\eta = \frac{tg\alpha}{tg(\alpha + \varrho) + tg\varrho} \dots \dots \dots (14.)$$

der Wirkungsgrad des einfachen Keiles, wobei allerdings die Reibung an der seitlichen Führung des Widerstandes Q ihrer geringfügigkeit halber unberücksichtigt geblieben ist.

Beispielsweise erhalten wir, wenn abermals $\alpha = 6^\circ$ und $f = 0,1$ angenommen wird, zunächst aus $tg\varrho = f = 0,1$ den Reibungswinkel $\varrho = 5^\circ 42' 38''$ und wir haben damit, weil $\alpha < 2\varrho$ Sicherheit, dass die Reibung nicht von selbst aufgeht. Weiter findet sich jetzt nach Formel 14 bei Ab-
 rundung des Reibungswinkels auf $5^\circ 43'$ der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{tg 6^\circ}{tg 11^\circ 43' + tg 5^\circ 43'} = \frac{0,1051}{0,3075} = 0,3418 = \sim 0,342.$$

Dieser Wert erreicht vom obigen Resultate, welches für den Wirkungsgrad des doppelten Keiles bei demselben α und der nämlichen Reibung sich herausstellte, nur sehr wenig ab.

Übungsbeispiele.

69. Den Wirkungsgrad des einfachen Keiles für $\alpha = 6^\circ$ und $\varrho = 10^\circ$ anzugeben.

Resultat: $\eta = 0,227$.

70. Was ergibt sich bei denselben Werten von α und ϱ für den Wirkungsgrad des doppelten Keiles?

Antwort: $\eta = 0,224$.

§ 30.

Reibung an der Bewegungsschraube.

Schon in der Elementarmechanik wurde auseinandergesetzt, dass die flachgängige Schraube in ihrer mechanischen Wirkungsweise als eine schiefe Ebene zu betrachten ist. Bezeichnet $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ den mittleren Halbmesser und h die Ganghöhe des Gewindes, so stimmt der Steigungswinkel α des letzteren mit dem Winkel überein, den die schiefe Ebene zum Horizont bildet und welcher aus der Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 r \pi}$$

berechnet werden kann. Der Koeffizient f der gleitenden Reibung zwischen Schraubengewinde und Mutter hängt mit dem zugehörigen Reibungswinkel ϱ wiederum durch die Beziehung

$$f = \operatorname{tg} \varrho$$

zusammen und es ist die Kraft, welche tangential am mittleren Schraubenbolzenumfang, also in Hinsicht auf die schiefe Ebene parallel zur Basis wirkt, nach Formel 7 in § 27

$$P_1 = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho) \dots (I)$$

genügend, um die Last Q gleichförmig aufwärts zu bewegen und nach Formel 8

$$P_1' = Q \operatorname{tg} (\alpha - \varrho) \dots (II)$$

hinreichend, um Q zu halten oder mit konstanter Geschwindigkeit sinken zu lassen. Ist im letzteren Falle

$$\alpha = \varrho,$$

so wird $P' = 0$ und es macht sich deshalb gar keine Kraft notwendig, um die Last Q an der Abwärtsbewegung zu hindern,

d. h. die Reibung für sich allein hält der Last Q das Gleichgewicht, und wäre weiter

$$\alpha < \varphi,$$

so würde P' negativ und es müsste folglich noch eine gewisse Kraft in entgegengesetzter Richtung wie früher, also in demjenigen Sinne thätig sein, in welchem schon die Last Q die Schraube zu drehen sucht. Hierin liegt der Satz: Jede flächgängige Schraube ist selbstsperrend, wenn ihr Steigungswinkel gleich oder kleiner ist als der Reibungswinkel; sie sitzt um so fester, je mehr der letztere den ersteren übertrifft.

Es ist jedoch noch zu bedenken, dass die Drehkräfte für gewöhnlich nicht am Hebelsarm r , sondern, wie aus Fig. 32 ersichtlich, an dem grösseren Arm R wirken. Bezeichnen wir diese letztern mit P , bezw. P' , so entstehen aus den beiden Momentengleichungen

$$P R = P_1 r, \quad P' R = P_1' r$$

die Werte

$$P_1 = \frac{R}{r} P, \quad P_1' = \frac{R}{r} P'$$

und hierdurch

$$P = \frac{r}{R} Q \operatorname{tg} (\alpha + \varphi), \quad (15.)$$

die Kraft zum Überwinden der Reibung und des Widerstandes Q , sowie

$$P' = \frac{r}{R} Q \operatorname{tg} (\alpha - \varphi), \quad \dots \dots \dots (16.)$$

die Kraft gegen das Zurückgehen der Schraube.

Zur näheren Erläuterung betrachten wir das in Fig. 33 abgebildete Schutz Brett, dessen benetzte Fläche ein Rechteck von a Decimeter Breite und b Decimeter Höhe sei. Der Aufzug erfolgt durch eine bewegliche Schraubenmutter, an welcher der Hebel R sitzt und durch deren Drehung eine am Brett B befestigte Spindel S gehoben wird. Der mittlere Radius des Gewindes sei r , die Ganghöhe h und der mittlere Radius der ringförmigen Platte, worauf die Mutter ruht, r' ; die Koeffizienten der Reibungen am

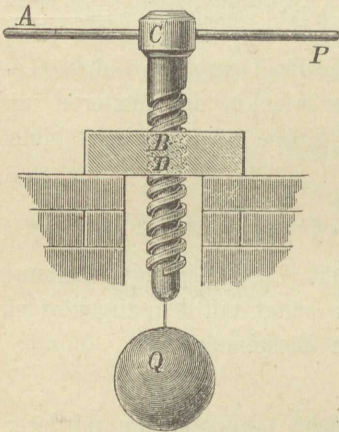


Fig. 32.

Schutzbrett, im Schraubengewinde und zwischen Schraubenmutter und Unterlage bezeichnen wir mit f_1 , f und f_2 . Es fragt sich, welche Kraft P am Hebelsarm R zum Aufzuge erforderlich ist.

Es ist aber der Wasserdruck auf den Schützen

$$D = \frac{a b^2}{2} \text{ Kilogramm,}$$

folglich der Reibungswiderstand am Schutzbrett

$$W = D f_1 = \frac{a b^2 f_1}{2} \text{ Kilogramm}$$

und demnach, wenn G das Gewicht des Brettes samt Schraubenspindel bezeichnet, der vertikal aufwärts zu überwindende Widerstand

$$Q = W + G = \frac{a b^2 f_1}{2} + G = \frac{a b^2 f_1 + 2 G}{2}.$$

Jetzt ergibt sich die Kraft, welche am Hebelsarme r dieser Last Q und der Reibung im Schraubengewinde das Gleichgewicht zu halten vermag, nach Formel I

$$P_1 = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varphi),$$

wenn φ den dem Koeffizienten f entsprechenden Reibungswinkel und α den durch die Formel $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 r \pi}$

bestimmten Steigungswinkel bedeuten.

Mithin ist ihr Drehmoment

$$P_1 r = Q r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi),$$

und weil das Moment der gleitenden Reibung zwischen Mutter und Platte

$Q r' f_2$ beträgt, so haben wir laut Momentengesetz

$$P R = P_1 r + Q r' f_2 = Q r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) + Q r' f_2,$$

also

$$P = \frac{Q}{R} \cdot \{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) + r' f_2\},$$

oder mit Einsetzung des obigen Wertes von Q

$$P = \frac{a b^2 f_1 + 2 G}{2 R} \cdot \{r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi) + r' f_2\}, \quad (17.)$$

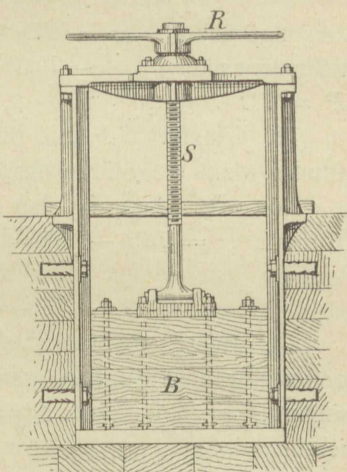


Fig. 33.

die zum Aufziehen des Schützens notwendige Kraft. Letztere ist in Wirklichkeit etwas kleiner, wenn man den Auftrieb berücksichtigen will, was einfach dadurch geschehen kann, dass man das Gewicht des vom Schutzbrett verdrängten Wasser von G subtrahiert. Diese Kraft ist aber auch bloß beim ersten Anruck erforderlich; denn nachher werden die Reibungskoeffizienten, besonders f_1 , geringer und ferner nimmt der Wasserdruck gegen das Schutzbrett stärker ab als der Auftrieb.

Übungsbeispiele.

71. Man berechne die Kraft P für die Spezialwerte $a = 14 \text{ dm}$, $b = 10 \text{ dm}$, $h = 6 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$, $R = 90 \text{ cm}$, $r' = 5 \text{ cm}$, $G = 160 \text{ kg}$, $f_1 = 0,71$ und $f_2 = f = 0,16$.

Lösung: Zunächst ergibt sich aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 r \pi} = \frac{1}{\pi}$ der Steigungswinkel $\alpha = \sim 17^\circ 40'$ und aus $\operatorname{tg} \varrho = f = 0,16$ der Reibungswinkel $\varrho = \sim 9^\circ 5'$ und mithin nach Formel 17

$$P = 7,3 (3 \operatorname{tg} 26^\circ 45' + 0,8) = 7,3 \cdot 2,312 = \sim \mathbf{16,88 \text{ kg.}}$$

72. Die Kraft P mit Berücksichtigung des Auftriebs zu ermitteln, wenn die Stärke des Schutzbrettes 5 cm beträgt.

Lösung: Dann ist der Auftrieb $A = 14 \cdot 10 \cdot 0,5 = 70 \text{ kg}$, demnach $G = 160 - 70 = 90 \text{ kg}$ und folglich nach derselben Formel

$$P = 6,52 \cdot 2,312 = \sim \mathbf{16,08 \text{ kg.}}$$

73. Wie gross braucht aber P sofort nach Lösung des Schutzbrettes nur noch zu sein, wenn die Reibungskoeffizienten der Bewegung $f = 0,25$, ferner $f_2 = f_1 = 0,15$ und der Auftrieb berücksichtigt wird?

Antwort: Hier ist $\varrho = \sim 8^\circ 30'$ und

$$P = \frac{53}{6} (\operatorname{tg} 26^\circ 10' + 0,25) = \sim \mathbf{6,1 \text{ kg.}}$$

§ 31.

Wirkungsgrad der Bewegungsschraube.

Nach Formel I im vorigen Paragraphen ist

$$P_1 = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho)$$

die Kraft, welche tangential am Kerne einer flachgängigen Schraube vom Steigungswinkel α und Reibungswinkel ϱ in der Richtung der

Spindel den Widerstand Q und zugleich die Reibung überwindet. Hieraus ergibt sich für $\varrho = 0$ die Kraft

$$P_0 = Q \operatorname{tg} \alpha,$$

welche am gleichen Hebelsarm mit Hilfe der nämlichen Schraube genau dieselbe Wirkung ohne Reibung ausüben würde und mit-

hin erhalten wir $\frac{P_0}{P_1}$ gleich

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}, \dots \dots \dots (18.)$$

den Wirkungsgrad der flachgängigen Schraube.

Wir sehen, dass η einerseits vom Steigungswinkel α der Schraubelinie und andererseits vom Reibungswinkel ϱ abhängt. Der Einfluss des letzteren ist ohne weiteres klar; denn weil für denselben Wert von α der Nenner des vorstehenden Bruches wächst, während der Zähler unverändert bleibt, so fällt der Wirkungsgrad um so kleiner aus, je grösser ϱ und mithin auch der Reibungskoeffizient ist, eine Thatsache, welche ja von vornherein feststand.

Schwieriger ist zu erkennen, wie η bei gleicher Reibung, d. h. bei demselben ϱ mit dem Steigungswinkel α sich ändert, weil in der Formel 18 mit wachsendem α , sowohl der Zähler $\operatorname{tg} \alpha$ als auch der Nenner $\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)$ zunehmen.

Um dennoch ein Urteil zu gewinnen, nehmen wir einen bestimmten Reibungskoeffizienten an und rechnen den Wirkungsgrad η für verschiedene Steigungswinkel α aus.

Setzen wir etwa voraus, der Schraubensatz sei von Eisen und ungeschmiert, so liegt der Reibungskoeffizient f zwischen $0,17$ und $0,18$ und diesem entspricht der Reibungswinkel $\varrho = \sim 10^\circ$. Wir erhalten dann für $\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$, aus Formel 18 den Wirkungsgrad $\eta = 0,48; 0,63; 0,69; 0,71; 0,69; 0,63; 0,48$ und sehen nun, dass mit wachsendem Steigungswinkel α der Wirkungsgrad η erst zu-, dann aber später wieder abnimmt. Da im vorliegenden Falle der grösste Wert von η , nämlich $0,71$, bei $\alpha = 40^\circ$ eintritt, so wäre der letztere der günstigste Steigungswinkel unter der Bedingung, dass es sich um Bewegung handelt und der Reibungswinkel 10° beträgt.

Es könnte daher allgemein bei irgend einer Bewegungsschraube, für welche die Reibung durch einen bestimmten Reibungs-

winkel ρ gegeben ist, gefragt werden nach jenem vorteilhaftesten Steigungswinkel α , welchem der grösste Wirkungsgrad η entspricht. Nach den Regeln der Differentialrechnung erhalten wir die Antwort darauf, indem wir η als Funktion von α betrachten, aus Formel 18 den Differentialquotienten von η nach α bilden, diesen gleich Null setzen und letztere Gleichung für α auflösen. Hierdurch entsteht

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{tg(\alpha + \rho) \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - tg \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha + \rho)}}{tg^2(\alpha + \rho)} = 0,$$

$$tg(\alpha + \rho) \cdot \cos^2(\alpha + \rho) = tg \alpha \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \rho) \cos(\alpha + \rho) = \sin \alpha \cos \alpha,$$

oder, wenn man beide Seiten mit 2 multipliziert und bedenkt, dass $2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta$ ist,

$$\sin(2\alpha + 2\rho) = \sin 2\alpha$$

und hieraus

$$2\alpha + 2\rho = 2\alpha \text{ oder } \rho = 0.$$

Letzteres Resultat hat wohl einen Sinn, da es für η den Idealwert 1 verursacht, kann aber doch nicht unserer Absicht entsprechen, weil ja in der Wirklichkeit ρ stets eine endliche Grösse besitzt. Wir müssen daher nach einer zweiten Wurzel der Gleichung $\sin(2\alpha + 2\rho) = \sin 2\alpha$ suchen und finden auch eine solche, wenn wir den Umstand benützen, dass $\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha)$ ist; denn hierdurch geht die letzte Beziehung über in

$$\sin(2\alpha + 2\rho) = \sin(180^\circ - 2\alpha),$$

woraus folgt

$$2\alpha + \rho = 180^\circ - 2\alpha$$

oder

$$\alpha = 45^\circ - \frac{\rho}{2} \dots \dots \dots (19.)$$

Die vorstehende Formel sagt uns, dass der vorteilhafteste Steigungswinkel einer Bewegungsschraube sich nach der Grösse der Reibung im Gewinde richtet: je geringer die Reibung und damit ρ , desto mehr nähert sich der günstigste Steigungswinkel 45° . Ziehen wir noch in Erwägung, dass η für $\alpha = 0$ zum ersten und für $\alpha + \rho = 90^\circ$, also für $\alpha = 90^\circ - \rho$ zum zweiten Male Null wird, so erkennen wir, dass der vorteilhafteste Steigungswinkel $\alpha = 45^\circ - \frac{\rho}{2}$ genau in der Mitte zwischen den beiden Grenzen aller möglichen Steigungswinkel liegt.

In der Praxis ist man hinreichend bemüht, die Reibung möglichst klein zu machen und demnach ϱ auf ein Minimum herabzudrücken; infolgedessen fällt der vorteilhafteste Steigungswinkel meist verhältnismässig gross, nahe an 40° aus. Leider geht man häufig zu Gunsten grosser Drücke, aber zum Nachteil des Wirkungsgrades viel zu weit davon ab.

Den maximalen Wirkungsgrad selbst erhält man durch Einsetzung des Wertes von α aus Formel 19 in die Beziehung 18, nämlich

$$\eta_{\max} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)} = \frac{\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varrho}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2} \right)},$$

woraus auch nach einiger Umformung folgt

$$\eta_{\max} = \frac{1 - \sin \varrho}{1 + \sin \varrho} \dots \dots \dots (20.)$$

Beispielsweise angenommen, in dem durch Fig. 34 veranschaulichten Schneckengetriebe sei für das Schraubengewinde der mittlere Radius $r = 11 \text{ cm}$, die Ganghöhe $h = 13 \text{ cm}$ und der Reibungskoeffizient $f = 0,15$, so fände sich aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 r \pi} = \frac{13}{22 \pi}$$

der Steigungswinkel $\alpha = \sim 10^\circ 40'$, sodann aus

$$\operatorname{tg} \varrho = f = 0,15$$

der Reibungswinkel $\varrho = \sim 8^\circ 32'$ und mithin wäre der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)} = \frac{\operatorname{tg} 10^\circ 40'}{\operatorname{tg} 19^\circ 12'} = \sim 0,54.$$

Die Ursache dieses geringen Wertes von η liegt in der ungünstigen Wahl der Ganghöhe h , bzw. des Steigungswinkels α ; denn aus Formel 19 ergibt sich der für den Reibungskoeffizienten $0,15$ vorteilhafteste Steigungswinkel

$$\alpha = 45^\circ - \frac{\varrho}{2} = 45^\circ - 4^\circ 16' = 40^\circ 44',$$

welchem der grösste Wirkungsgrad

$$\eta_{\max} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)} = \frac{\operatorname{tg} 40^\circ 44'}{\operatorname{tg} 49^\circ 16'} = \sim 0,74$$

entspricht. Hätte man also mit Beibehaltung des Schraubenhalmessers $r = 11 \text{ cm}$ an Stelle des Steigungswinkels von $10^\circ 40'$ den Steigungs-

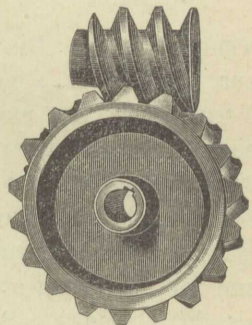


Fig. 34.

winkel von $40^{\circ} 44'$ und folglich statt der Ganghöhe von 13 cm die Ganghöhe

$$h = 2 r \pi \operatorname{tg} \alpha = 22 \pi \operatorname{tg} 40^{\circ} 44' = 59,52 \text{ cm}$$

gewählt, so wäre nicht weniger als 20% an Nutzeffekt gewonnen worden.

§ 32.

Die Befestigungsschraube.

Alles bisher Gesagte gilt jedoch nur von den Schrauben mit rechteckigem oder flachem Gewinde. Was das dreikantige oder scharfe Gewinde anlangt, so wollen wir hier nur betonen, dass bei diesem der Normaldruck und damit auch die Reibung grösser ist, als bei jenen.

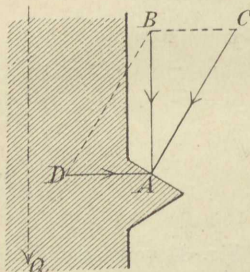


Fig. 35.

Der Beweis dafür ergibt sich leicht, wenn man den in der Richtung der Spindelachse wirkenden Widerstand $Q = AB$ (Fig. 35) in zwei Komponenten AD und AC zerlegt, wovon die erstere senkrecht zur Spindelachse wirkt und von der Schraubenmutter aufgenom-

nommen wird. Die andere, AC , rechtwinklig zur Fläche des Gewindes, stellt den besagten Normaldruck dar und muss Q überwiegen, weil eben die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks immer grösser als jede von beiden Katheten ist. Daraus geht dann weiter hervor, dass bei scharfgängigen Schraubengewinden der Steigungswinkel α zur Selbstsperrung sogar etwas grösser sein darf, als der zugehörige Reibungswinkel ϱ .

Es wird jetzt auch einleuchten, warum sich das rechteckige Gewinde am besten für Bewegungsschrauben, das dreieckige dagegen mehr zu Befestigungszwecken eignet. Bei Befestigungsschrauben kommt ausser der Reibung im Gewinde noch diejenige zwischen der Schraubenmutter ab (Fig. 36) und ihrer Unterlage in Betracht. Mittels einer ringförmigen Zwischenlage cd aus geeignetem Material kann die zuletzt genannte Reibung erhöht und der Verschluss verbessert werden.

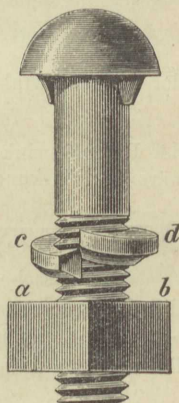


Fig. 36.

Übungsbeispiel 74. Bei welchem Steigungswinkel besitzt eine scharfgängige eiserne Schraube in Holz mit Sicherheit Selbstsperrung, wenn der zugehörige Reibungskoeffizient $0,49$ beträgt?

Antwort: Bei $\alpha = 26^\circ$.

§ 33.

Die Seilreibung.

An den freien Enden eines biegsamen Fadens (Fig. 37), welcher um einen befestigten Cylinder gelegt ist und den durch den Winkel α bestimmten Bogen aA umfasst, herrschen die Zugspannungen t und T . Soll nun unter Berücksichtigung des Reibungswiderstandes W die geringste Vermehrung von T eine Bewegung im Sinne von T zur Folge haben, so muss

$T = t + W$ oder $W = T - t$ sein. Bei der Bestimmung von W , bzw. T begegnen wir aber der Schwierigkeit, dass der Normaldruck N zwischen Faden und Cylinder seine Richtung von a nach A hin beständig ändert,

auch die Grösse von N wächst stetig in der genannten Richtung und damit die Reibung, sowie die Spannung in den aufeinanderfolgenden Punkten des Fadens.

Hierdurch sind wir genötigt, den Winkel α in eine sehr grosse Anzahl n gleicher Teile zu zerlegen, wo nun

$$\frac{\alpha}{n} = \gamma$$

um so kleiner sein wird, je grösser man sich n vorstellt. Auf diese Weise zerfällt auch der den Cylinder berührende Teil aA des Fadens in n gleich lange Stückchen, von welchen wir uns irgend eines herausgegriffen und die an seinen Endpunkten wirkenden Spannungen mit S und S' bezeichnet denken wollen. Letztere beiden setzen sich dann nach dem Parallelogrammgesetz zu einer Resultante zusammen, welche an der betreffenden Stelle den Normaldruck des Fadens auf den Cylinder darstellt.

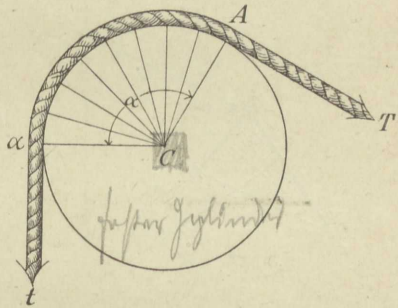


Fig. 37.

Je grösser aber n und je kleiner demnach γ und das Fadestückchen gedacht wird, desto weniger unterscheiden sich S und S' , desto mehr nähert sich also das Kräfteparallelogramm dem Rhombus. Bei unendlichem n und folglich verschwindendem γ wird der Normaldruck N ausgedrückt durch die Diagonale AB (Fig. 38) des Rhombus $ADBE$ mit der Seite

$$AD = AE = S$$

und dem Winkel $ADB = \angle C = \gamma$; es ist mithin für ein an beliebiger Stelle gedachtes Fadenelement der Normaldruck

$$N = AB = 2AO = 2S \sin \frac{\gamma}{2} = 2S \sin \frac{\alpha}{2n}$$

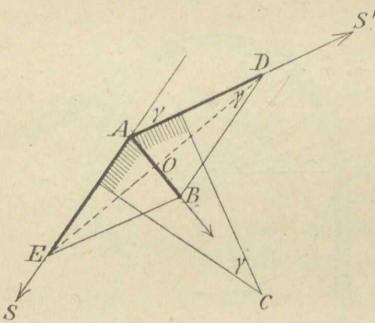


Fig. 38.

oder, weil man bei verschwindend kleinen Winkeln statt des *sinus* auch den Winkel selbst (natürlich im Bogenmass) setzen darf,

$$N = 2S \cdot \frac{\alpha}{2n} = S \cdot \frac{\alpha}{n}$$

infolgedessen, sobald f den Koeffizienten der gleitenden Reibung bezeichnet, der Reibungswiderstand

$$w = fN$$

$$w = f \cdot S \cdot \frac{\alpha}{n}$$

und demnach die grössere Endspannung

$$S' = S + w = S \left(1 + \frac{f\alpha}{n} \right),$$

worin unter S die kleinere Endspannung zu verstehen ist.

Mit Hilfe dieses Resultats können wir der Spannung des Fadens auf dem Cylinder von Punkt zu Punkt nachgehen. Im ersten Punkte A (Fig. 39) ist sie t , folglich im nächsten Punkte a_1

$$S_1 = t \left(1 + \frac{f\alpha}{n} \right),$$

ferner am oberen Endpunkte a_2 des zweiten Fadenelementes

$$S_2 = S_1 \left(1 + \frac{f\alpha}{n} \right) = t \left(1 + \frac{f\alpha}{n} \right)^2,$$

dann am oberen Endpunkte a_3 des dritten Fadenelementes

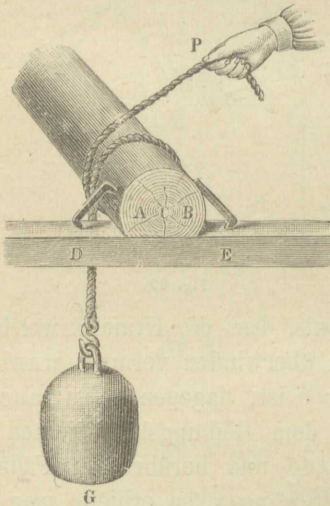
die kleinere Kraft t , welcher der grösseren Spannung oder Last T mit Hilfe der Reibung das Gegengewicht hält und die Einsetzung von $T = t e^{f \alpha}$ in die erste Beziehung $W = T - t$ dieses Paragraphen liefert

$$W = t (e^{f \alpha} - 1), \dots \dots \dots (23.)$$

den gesamten Seilreibungswiderstand.

Übungsbeispiele.

75. Welche Last kann mit einem Kilogramm durch ein um einen horizontal festliegenden Cylinder gelegtes Seil gehalten werden, wenn der dem umschlungenen Bogen zugehörige Centriwinkel $90^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 720^\circ$ und 1440° beträgt, den Reibungskoeffizienten zu $\frac{1}{3}$ angenommen.



Resultate: 1,69 kg; 2,85 kg; 8,12 kg; 65,94 kg und 4348,56 kg.

76. Die Last $G = 456$ kg in Fig. 40 soll mittelst eines Seiles, welches den durch Klammern am Balken $D E$ befestigten wagerechten Holzcyliner $A B$ ein und ein viertel mal umschlingt, langsam herabgelassen werden. Mit welcher Zugkraft P ist das freie Seilende festzuhalten, wenn der Koeffizient der gleitenden Reibung zwischen Holzcyliner und Seil $0,4$ beträgt?

Fig. 40.

Antwort: Mit $P = 0,0533G = 24,3$ kg.

77. Um den Koeffizienten der gleitenden Reibung zwischen einer Eichenholzscheibe und einem Lederriemen experimentell festzustellen, legt man den letzteren über einen befestigten Cylinder aus Eichenholz und belastet das eine freie Ende des Riemens mit 10 kg, während man an das andere Ende eine Wagschale hängt und dieselbe so lange mit Gewichtsstücken belegt, bis der Riemen anfängt, langsam zu gleiten. Wenn nun das letztere in dem Momente eintritt, wo die Wagschale samt Belastung das Gewicht

von 28,5 kg erreicht hat, wie hoch bestimmt sich dann hieraus der Koeffizient f der Reibung zwischen Lederriemen und Eichtrommel?

Antwort: $f = 0,3333 = \sim \frac{1}{3}$.

§ 34.

Die Bandbremsen.

In der Beziehung 21 des vorigen Paragraphen

$$T = t e^{f \alpha}$$

sind die Endspannungen t und T (Fig. 41) an den beiden Enden des um den festliegenden Cylinder gelegten biegsamen Zugorgans so bestimmt, dass die grössere Zugkraft ein gleichförmiges Hingleiten des letzteren über den Cylinder herbeizuführen imstande ist. Offenbar bleibt nun diese Gleichgewichtsbedingung auch dann noch gültig, wenn umgekehrt der Cylinder im entgegengesetzten Sinne von T um seine Achse O gleichförmig rotiert, während das Zugorgan durch die Endspannungen t und T in seiner Lage festgehalten wird; nur ist dabei zu beachten, dass ein Punkt C , welchen man sich auf dem nicht umspannten Teile des Cylindermantels vorstellen möge, stets der grösseren Spannung T , bzw. dem Punkte B , wo das stärker gespannte Ende den Cylinder verlässt, entgegengerichtet kommt.

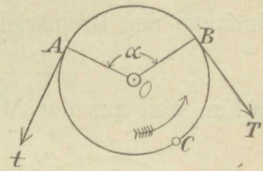


Fig. 41.

Diese Thatsachen werden praktisch benützt bei den Bandbremsen, welche dazu dienen sollen, die Abwärtsbewegung einer Last Q , die an dem um eine horizontale Welle gewundenen Seil hängt, zu verhindern oder zu verlangsamen. Zu dem Behufe wird auf der Welle ein Rad oder eine Scheibe konzentrisch befestigt und darum ein Stahlband gelegt, welches straff angespannt werden kann. Je nachdem die Anspannung entweder durch einen zweiarmigen oder durch einen dreiarmigen Hebel oder auch durch eine Schraube vermittelt wird, unterscheidet man drei Arten von Bandbremsen, für welche wir die Gleichgewichtsbedingungen einzeln ableiten wollen.

I. Die einfache Bandbremse.

Die beiden Endpunkte C und B des Bremsbandes sind, wie Fig. 42 zeigt, an dem Hebel BD so befestigt, dass die Verlängerung des einen Endes genau durch den Drehpunkt A gehen würde.

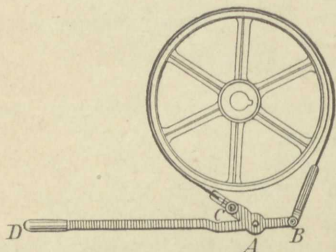


Fig. 42.

Setzen wir nun nach Fig. 43 den Radius der Brems­scheibe $OE = R$, die Hebelsarme der Bremskraft P und der Spannung t , nämlich $CA = a$ und $CB = b$, so ist zunächst, wenn α den Umspannungswinkel und f den Reibungskoeffizienten des Bremsbandes bezeichnen, laut Formel 23 der Reibungswiderstand am

Umfange des Bremsrades

$$W = t (e^{f\alpha} - 1),$$

mithin, weil aus der Momentengleichung $Pa = t \cdot b$

$$t = \frac{Pa}{b}$$

folgt,

$$W = \frac{Pa}{b} (e^{f\alpha} - 1).$$

Andererseits ergibt sich aus $WR = Qr$ der Reibungswiderstand

$$W = \frac{r}{R} \cdot Q,$$

und wir erhalten durch Gleichsetzung dieser beiden Werte von W

$$\frac{Pa}{b} (e^{f\alpha} - 1) = \frac{r}{R} \cdot Q$$

oder

$$P = \frac{br}{aR} \cdot \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1}, \quad \dots \quad (24.)$$

diejenige Kraft, welche erforderlich ist, um mit der einfachen Bandbremse die Bewegung der Last Q zu hemmen.

Selbstverständlich müssen die Längen a , b , r und R mit gleicher Einheit gemessen sein, damit P die Benennung von Q erhalte; denn der Reibungskoeffizient f , der Umspannungswinkel α

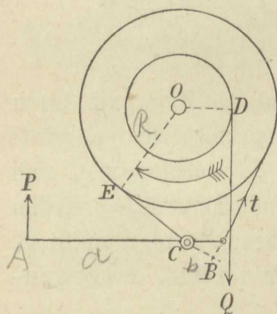


Fig. 43.

(im Bogenmass) und die Basis $e = 2,71828$ sind unbenannte Zahlen. P ergibt sich dann um so geringer, je kleiner die Faktoren b, r, Q im Zähler und je grösser a, R, f und α im Nenner werden.

II. Die Differenzial-Bremse.

Sind die beiden Enden B und B_1 (Fig. 44) am Bremshebel DK derartig befestigt, dass keines von beiden durch den Drehpunkt D hindurchgeht, und setzen wir nach Fig. 45

die Hebelsarme der Spannungen T und t , nämlich $CB_1 = b_1$ und $CB_2 = b_2$, sowie den Arm der Bremskraft P , d. i. $CA = a$, so gilt zunächst die Momentengleichung

$$Pa + T b_1 - t b_2 = 0,$$

oder, weil wieder $T = t e^{f\alpha}$ ist,

$$Pa + t(b_1 e^{f\alpha} - b_2) = 0$$

und hieraus folgt

$$t = \frac{Pa}{b_2 - b_1 e^{f\alpha}}.$$

Sodann erhalten wir mit Benutzung dieses Wertes den Reibungswiderstand

$$W = t(e^{f\alpha} - 1) = \frac{Pa}{b_2 - b_1 e^{f\alpha}} \cdot (e^{f\alpha} - 1),$$

welcher am Umfange des Bremsrades oder der Bremsscheibe wirkt und der Last Q das Gegengewicht halten soll. Es muss daher

$$WR = Qr$$

sein und diese Beziehung geht nach Einführung des obigen Wertes von W und Auflösung für P über in

$$P = \frac{rQ}{aR} \cdot \frac{b_2 - b_1 e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}, \dots \dots (25.)$$

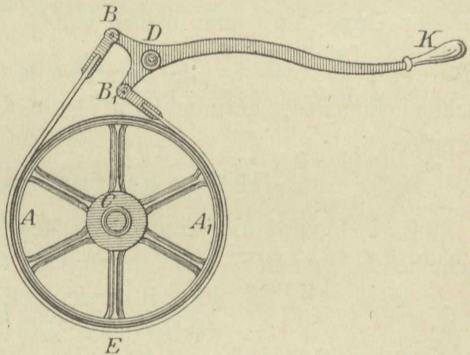


Fig. 44.

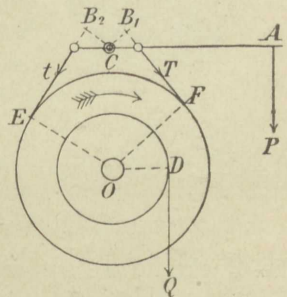


Fig. 45.

die an der Differenzial-Bremse zum Aufhalten der Last Q erforderliche Kraft.

Speziell für $b_2 = b_1 e^{f\alpha}$ oder

$$\frac{b_2}{b_1} = e^{f\alpha} \dots \dots \dots (26.)$$

wird $P = 0$ und die Bremse wirkt demnach selbstthätig. Dieser Zustand ist leicht erreichbar, da man ja die Wahl von b_2 und b_1 in der Hand hat; man macht jedoch das Verhältniß $\frac{b_2}{b_1}$ nur annähernd so, wie es die vorstehende Gleichung verlangt, damit schon eine ganz geringe Kraft genügt, um eine grosse Last zu bremsen.

III. Die Schrauben-Bremse.

Endlich wird die Anpressung des Stahlbandes an die Bremscheibe H zuweilen auch durch eine Schraube vermittelt, wie

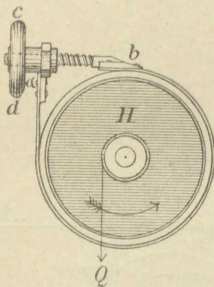


Fig. 46.

Fig. 46 ersichtlich macht. Das eine Ende a des Bremsbandes ist an der festen Schraubennutter, das andere, b an der Spindel in deren Richtung befestigt und kann durch Drehung der Scheibe cd gespannt werden. Bezeichnet nun P die tangential an der letzteren wirkende Kraft, R_1 den Hebelsarm von P , r_1 den mittleren Halbmesser, α_1 den Steigungswinkel und ϱ_1 den Reibungswinkel des Schraubengewindes, so ist nach Formel 15 in § 30 für $r = r_1$,

$$R = R_1, \alpha = \alpha_1, \varrho = \varrho_1 \text{ und } Q = Q_1$$

$$Q = \frac{P R_1}{r_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varrho_1)}$$

die Zugkraft, welche die Schraubenspindel auf das Bandende b ausübt, d. h. die Spannung t und folglich

$$W = t(e^{f\alpha} - 1) = \frac{P R_1}{r_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varrho_1)} \cdot (e^{f\alpha} - 1)$$

die Reibung zwischen Bremsband und Bremscheibe. Damit dieser Widerstand W die Abwärtsbewegung der Last Q hindert, muss

$WR = Qr$, folglich

$$\frac{P R R_1}{r_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varrho_1)} \cdot (e^{f\alpha} - 1) = Qr$$

und mithin

$$P = \frac{Q r r_1 \operatorname{tg} (\alpha_1 + \varrho_1)}{R R_1 (e^{f\alpha} - 1)} \dots \dots (27)$$

sein, so dass also diese bremsende Kraft um so geringer ausfällt, je kleiner Q, r, r_1, α_1 und ϱ_1 , je grösser dagegen R, R_1, f und α ist, wie ja auch alles vorauszusehen war.

Es fällt ins Auge, dass in allen auf Seilreibung Bezug habenden Formeln der Zahlenausdruck $e^{f\alpha}$ eine Rolle spielt und da die numerische Berechnung desselben etwas umständlich ist, so seien in der nachstehenden Tabelle die Werte von $e^{f\alpha}$ für $f = 0,18$ (Stahl auf Eisen) und für die in der Praxis vorkommenden Umspannungswinkel α zusammengestellt.

$\alpha =$	π	$1,1 \pi$	$1,2 \pi$	$1,3 \pi$	$1,4 \pi$	$1,5 \pi$	$1,6 \pi$	$1,7 \pi$	$1,8 \pi$
$e^{f\alpha} =$	1,76	1,86	1,97	2,09	2,21	2,34	2,47	2,61	2,77

Übungsbeispiele.

78. Welche Last kann man durch einfache Bandbremse mit 40 kg Kraft aufhalten, wenn $r = 125 \text{ mm}, R = 28 \text{ cm}, a = 12 \text{ dm}, b = 1 \text{ dm}, f = 0,18$ und $\alpha = \frac{4}{3} \pi$ gegeben sind?

Antwort: $Q = 1210,14 = \sim 1210 \text{ kg}.$

79. Welche Kraft P ist nötig, um mittels einer Differenzial-Bremse die Last $Q = 750 \text{ kg}$ zu hemmen, wenn $r = 8 \text{ cm}, R = 15 \text{ cm}, a = 85 \text{ cm}, b_1 = 7 \text{ cm}, b_2 = 13 \text{ cm}, \alpha = 1,5 \pi$ und $f = 0,18$ sind?

Antwort: $P = - 11,87 \text{ kg};$ das negative Zeichen bedeutet, dass P den Bremshebel entgegengesetzt drehen muss, wie in Fig. 45.

80. Für gewöhnlich ist der vom Bremsbande umspannte Bogen $\alpha = 1,4 \pi$ und der Reibungskoeffizient $f = 0,18$. In welchem Verhältnisse müssen dann die Abstände b_1 und b_2 der Bandenden vom Drehpunkte C des Bremshebels zu einander stehen, damit die Differenzial-Bremse selbstthätig wirkt?

Antwort: $b_2 : b_1 = 2,207 : 1 = \sim 221 : 100.$

81. An einer Schrauben-Bremse seien $r = 10 \text{ cm}, r_1 = 1,5 \text{ cm}, R = 30 \text{ cm}, R_1 = 12 \text{ cm}, \alpha_1 = \varrho_1 = 9^\circ 30', \alpha = 1,4 \pi$ und $f = 0,18;$ man bestimme das Verhältnis zwischen P und Q .

Resultat: Es ist $P : Q = 1 : 82.$

Im nächsten Paragraphen wollen wir noch eine Hemmvorrichtung anderer Art besprechen, obwohl deren Wirkung nicht auf der Seil-, sondern auf der gewöhnlichen gleitenden Reibung beruht.

§ 35.

Die Backenbremse.

Um die durch die Last Q hervorgerufene Drehbewegung der Welle W in Fig. 46 zu hemmen, wird mit Hilfe des Hebels CA ein Stück Holz oder Eisen eh , der sogenannte Bremsbacken oder Bremsklotz, entweder gegen die Welle W selbst oder gegen den

Umfang einer darauf befestigten Scheibe J gepresst und hierdurch Reibung erzeugt, welche der Last Q das Gegengewicht halten soll.

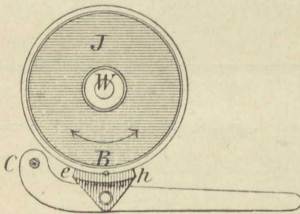


Fig. 47.

wir uns im Druckmittelpunkt B zwischen Bremsklotz und Bremscheibe an der letzteren eine Tangente gezogen, so können folgende drei Fälle unterschieden werden.

Die mechanische Wirkungsweise der Backenbremse hängt dabei wesentlich von der Lage des Hebeldrehpunktes C (Fig. 47) ab; denn, denken

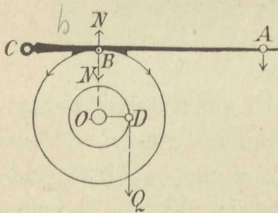


Fig. 48.

Erstens. Der Drehpunkt C liegt auf der genannten Tangente (Fig. 48).

Wir setzen $CB = b$, $BA = a$, $OB = R$, $OD = r$ und bezeichnen die im Punkte A rechtwinklig zum Hebel wirksame Kraft mit K , sowie die durch K in B erzeugten Normaldruck mit N .

Dann folgt aus $bN = (a + b)K$ der Druck

$$N = \frac{a + b}{b} \cdot K,$$

und mithin ist, wenn f den Reibungskoeffizienten bezeichnet, der in B stattfindende Reibungswiderstand

$$W = fN = f \cdot \frac{a + b}{b} \cdot K.$$

Andererseits ergibt sich aus $PR = Qr$ die von der Last Q auf den Scheibenrand übertragene Kraft

$$K = \frac{Q}{a + b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{b}{f} + c \right) \cdot \dots \cdot (29a.)$$

Wenn hingegen Q auf der linken Seite der Welle am Seile herabhängt, so wird der Hebel durch P nach unten zu drehen gesucht, demnach müsste K_2 aufwärts wirken und deshalb wäre die das Gleichgewicht erhaltende Kraft

$$K = K_1 - K_2 = \frac{Q}{a + b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{b}{f} - c \right) \cdot \dots \cdot (29b.)$$

Speziell für $\frac{b}{f} = c$ oder

$$b = fc$$

wird in diesem Falle die bremsende Kraft $K = 0$, d. h. die Bremse wirkt selbstthätig. Man sucht jedoch diese Beziehung nur annähernd zu erreichen, indem man b stets noch etwas grösser als fc macht.

Drittens. Wenn C zwischen der Tangente BE und dem Mittelpunkte O der Bremsscheibe liegt, wie in Fig. 50, so erhalten wir K auf dieselbe Weise wie

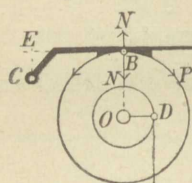


Fig. 50.

vorhin oder noch kürzer, indem wir in den obigen Formeln $-c$ statt $+c$ schreiben. Demnach ist der Druck am Bremshebelgriff

$$K = \frac{Q}{a + b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{b}{f} \mp c \right), (30.)$$

und es gilt dabei das Minuszeichen für die in Fig. 49 gezeichnete Drehrichtung der Bremsscheibe, das Pluszeichen für die umgekehrte.

Der Reibungskoeffizient f beträgt

0,5 bei Holz auf Eisen trocken und
0,15 bis **0,1** bei Eisen auf Eisen geschmiert.

Übungsbeispiele.

82. Für eine Backenbremse, bei welcher die Tangente durch den Drehpunkt C geht, seien die Halbmesser von Windtrommel und Bremsscheibe 10 und 32 *cm*, die Abstände des Bremsklotzes vom Drehpunkt C und vom Angriffspunkte A des Hebels 24 und 76 *cm*. Man bestimme das Verhältnis zwischen der zum Bremsen

nötigen Kraft K und der an der Windtrommel hängenden Last Q , wenn die Bremscheibe von Eisen ist und der Klotz aus Holz besteht.

Resultat: $K : Q = 3 : 20$.

83. Welche Last kann ein Arbeiter mit 21 kg Druck auf den Hebelgriff durch diese Bremse im Gleichgewicht halten?

Antwort: Eine Last von 140 kg.

84. Wie wäre aber das Verhältnis zwischen der bremsenden Kraft K und der gebremsten Last Q bei denselben Dimensionen, sobald der Drehpunkt C von der Tangente BE um 32 cm absteht und die ganze Anordnung analog Figur 4 ist?

Antwort: $K : Q = 1 : 20$.

85. Wie gross müsste der Abstand des Drehpunktes C von der Tangente BE sein, damit diese Backenbremse selbstthätig wirkt, also gar keine Kraft nötig wäre, um jede beliebige Last zu halten?

Antwort: $c = 48$ cm.

86. Wie verhielt es sich mit der Bremse, wenn $c > 48$ cm gemacht würde?

Antwort: Dann müsste in A eine gewisse Kraft aufwärts wirksam sein, um den Hebel von der Bremscheibe loszureissen.

IV. Kapitel.

Graphische Darstellung der einfachen Bewegung,
die Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung.

§ 36.

Die Wegkurve.

Ein mathematischer Punkt fange in einem bestimmten Augenblicke an, sich auf gerader Linie zu bewegen; dann hängt ganz offenbar die vom Punkte durchlaufene Strecke s ab von der seit jenem Momente verflossenen Zeit t , das heisst in der Sprache der Analysis: » s ist eine Funktion von t « und wird allgemein bezeichnet durch die Gleichung

$$s = F(t), \quad \dots \dots \dots (1.)$$

worin $F(t)$ einen algebraischen Ausdruck zwischen gegebenen Konstanten und der Variablen t darstellt. Mit der vorstehenden Formel ist daher in jedem einzelnen Falle das Gesetz gegeben, nach welchem jeder Zeit t ein ganz bestimmter Weg s entspricht; so wurde schon in der Elementarmechanik gezeigt, dass für die gleichförmige Bewegung bei der (konstanten) Geschwindigkeit c nach t Sekunden der zurückgelegte Weg

$$s = ct$$

und für die gleichförmig beschleunigte Bewegung bei der Anfangsgeschwindigkeit c und der Beschleunigung p der während t Sekunden durchlaufene Raum

$$s = ct + \frac{p}{2} t^2$$

ist, und es wären demnach die in t gleich

$$0, 1, 2, 3, 4 \text{ Sekunden}$$

gleichförmig zurückgelegten Wege s gleich

$$0, c, 2c, 3c, 4c \text{ Meter,}$$

während die gleichförmig beschleunigt durchlaufenen Wege

$$0, c + \frac{p}{2}, 2c + 2p, 3c + \frac{9}{2}p, 4c + 8p \text{ Meter}$$

betragen würden. Aber auch bei jeder anderen Art von Bewegung, für welche die Natur der Abhängigkeit zwischen t und s durch eine Formel gegeben vorliegt, kann aus letzterer der in jeder beliebigen Zeit zurückgelegte Weg berechnet werden, wie etwa aus

$$s = \frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{4} (t - 2)$$

die nach t gleich

$$0, 1, 2, 3, 4 \text{ Sekunden}$$

durchlaufenen Räume s gleich

$$0, -\frac{1}{4}, 0, +2\frac{1}{4}, +8 \text{ Meter}$$

sich ergeben. Dabei bedeutet ein mit der Zeit t abnehmender Weg s die rückläufige Bewegung des Punktes und wenn man, wie üblich, die positiven Wege vom Ausgangspunkte A , wo der Punkt zur Zeit $t = 0$ ist, nach rechts abträgt, so weist ein negatives Vorzeichen von s darauf hin, dass der bewegte Punkt

links von A sich befindet. Bezeichnet daher in Fig. 51 A die Anfangslage des auf der Geraden AX nach obigem Gesetze hinlaufenden Punktes, so hat letzterer, wenn noch AI die Längeneinheit ($1 m$) darstellt, nach der ersten Sekunde seine Stellung in B , nach der zweiten wieder in A , nach der dritten in C und nach der vierten in D .

Durch Vergleichung dieser Werte von s sowohl untereinander, als auch mit den zugehörigen t -Werten erhält man wohl eine ohngefähre Vorstellung von dem betreffenden Bewegungsgesetze, d. h. von dem Charakter der Abhängigkeit zwischen t und s auf dem gewählten Zeitgebiete (in den obigen Beispielen von $t = 0$ an bis $t = 4''$); allein ein bequemerer Einblick ergibt sich durch folgende geometrische Veranschaulichung.

Unter Annahme eines rechtwinkligen Koordinatensystems konstruiert man jeden der willkürlich gewählten t -Werte als Abscisse,

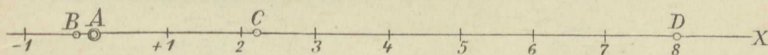


Fig. 51.

ferner jeden der zugehörigen s -Werte als entsprechende Ordinate, wobei zur Darstellung von t und s verschiedene Längeneinheiten benützt werden dürfen, und verbindet die so erhaltene Punktreihe durch einen stetigen Kurvenzug. Letzterer, welcher Wegkurve heisst, gewährt uns dann ein genaues und klares Bild davon, wie der vom Punkte zurückgelegte Weg s sich mit der Zeit t ändert; denn weil t als Abscisse und s als zugehörige Ordinate konstruiert sind, so wird für solche t , für welche die Kurve steigt, der vom Punkte durchlaufene Raum wachsen und zwar rascher oder langsamer, je nachdem die Kurve mehr oder weniger steil von links nach rechts ansteigt, dagegen nimmt der zurückgelegte Weg ab, d. h. der Punkt hat eine rückläufige Bewegung an den Zeitstellen, wo die Kurve — immer von links nach rechts — der X -Achse sich nähert. Insbesondere bezeichnen die Abscissen der höchsten und tiefsten Punkte die Umkehrungsmomente des Punktes und die Abscissen der Schnittpunkte mit OX diejenigen Augenblicke, wo der Punkt durch die Ausgangsstelle der Bewegung hindurchgeht.

Auf diese Weise ist in Fig. 52 die durch die Formel

$$s = ct$$

dargestellte gleichförmige Bewegung als eine durch O gehende gerade Linie konstruiert; ferner zeigt Fig. 53, dass die der gleichförmig beschleunigten Bewegung

$$s = ct + \frac{p}{2} t^2$$

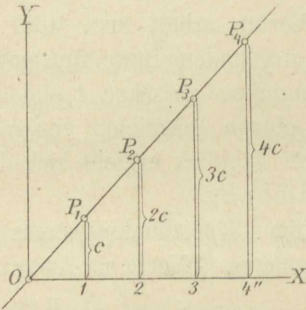


Fig. 52.

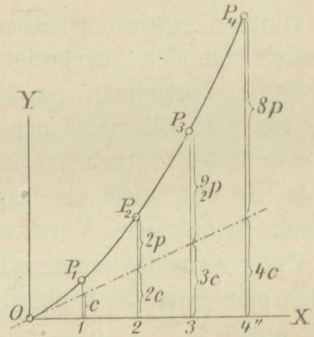


Fig. 53.

entsprechende Wegkurve $OP_1P_2P_3$ immer rascher und rascher steigt und aus Fig. 54 ist zu ersehen, wie sich der durchlaufene Raum

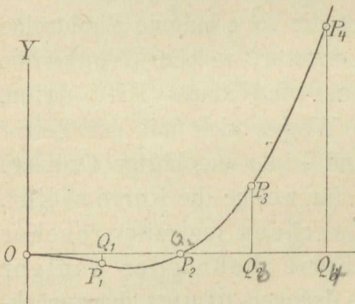


Fig. 54.

$$s = \frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{2}$$

in den ersten vier Sekunden ändert:

Weil die Kurve von $t = 0$ bis $t = 2''$ unterhalb OX sich erstreckt, so ist s auf diesem Zeitgebiete negativ und der Punkt bewegt sich mithin nach links.

Kurz nach der ersten Sekunde erreicht die Kurve ihre tiefste Stelle und geht dann ins Steigen über, woraus folgt, dass der Punkt in dem betreffenden Momente umkehrt und von jetzt ab nach rechts läuft. Genau nach $2''$, an der Stelle P_2 , durchschneidet die Kurve OX und wir können daraus schliessen, dass unser Punkt den Ausgangsort wieder erreicht hat. Von P_2 an steigt die Wegkurve und wird immer steiler, was darauf hinweist, dass der Punkt nach rechts weiter eilt und in gleichen Zeiten immer grössere Räume hinter sich lässt.

Man hüte sich aber ja vor der irrtümlichen Ansicht, dass die Wegkurve die wirkliche Bahn des bewegten Punktes darstellt, halte vielmehr nur daran fest, dass für jede durch die Abscisse $OQ = t$ dargestellte Zeit der vom Punkte durchlaufene geradlinige Weg geometrisch versinnlicht ist durch die entsprechende Ordinate $QP = s$; z. B. ist in Fig. 54 der nach $OQ_3 = 3''$ zurückgelegte Weg ausgedrückt durch die Ordinate $Q_3P_3 = 2,25 m$ und der nach $OQ_4 = 4''$ durchlaufene Raum durch die Ordinate $Q_4P_4 = 8 m$.

Übungsbeispiele.

87. Die der Bewegungsformel

$$s = \frac{t^3}{3} - 2t^2$$

entsprechende Wegkurve zwischen $t = 0$ und $t = 6''$ zu konstruieren.

88. Ebenso für die Beziehung

$$s = \sqrt{2t}$$

auf dem Zeitraume von $t = 0$ bis $t = 8''$.

89. Desgleichen für

$$s = a \sin t$$

von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ (die Winkel im Bogenmass).

90. Endlich für

$$s = ct - \frac{p}{2}t^2$$

auf dem Gebiete zwischen 0 und $2''$, als Abscissenintervall eine halbe Sekunde wählend.

§ 37.

Die Geschwindigkeit.

Jede beliebige Bewegung eines mathematischen Punktes beruht also auf den Grundbegriffen von Zeit und Raum; denn wie wir gesehen haben, ist der von einem gewissen Momente an zurückgelegte Weg s eine Funktion der seitdem verflossenen Zeit t , was allgemein durch die Bezeichnungweise

$$s = F(t) \dots (I)$$

seinen analytischen Ausdruck findet.

Aus diesen beiden naturgemässen Ausgangsgrössen t und s können aber noch zwei für alle Bewegungsarten sehr wichtige

Kunstbegriffe abgeleitet werden, von welchen wir als ersten die »Geschwindigkeit« nennen. Diese letztere ist zunächst an der gleichförmigen Bewegung, bei welcher in gleichen Zeiten auch gleiche Wege zurückgelegt werden, als der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg definiert worden, und aus dieser Definition ergibt sich daher die Geschwindigkeit als Quotient zwischen dem durchlaufenen Raum s und der dazu verbrauchten Zeit t , in Formel

$$c = \frac{s}{t}; \dots \dots (II.)$$

allein weder diese Begriffserklärung noch diese Bestimmungsweise dürfen wir auf die ungleichförmige Bewegung übertragen, weil bei letzterer die Geschwindigkeit sich mit der Zeit stetig ändert. Für irgend eine ungleichförmige Bewegung können wir die Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke definieren als den Weg, welchen der Punkt während der nächstfolgenden Sekunde durchlaufen müsste, wenn von beregtem Momente an die Bewegung plötzlich gleichförmig würde und diese Definition deutet auch zugleich auf ein Mittel zur Bestimmung der Geschwindigkeit v hin, welche der Punkt nach der beliebigen Zeit t besitzt. Lassen wir nämlich t nur um das Zeitelement dt wachsen, so wird sich in Formel I s um das Wegelement ds ändern und weil offenbar jede Bewegung innerhalb der verschwindend kleinen Zeit dt als gleichförmig angesehen werden kann, so ist nach Formel II die dem Zeitpunkte t entsprechende Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = F'(t) = f(t), \dots \dots (2.)$$

das heisst: man findet die Geschwindigkeit einer durch ihre Beziehung zwischen s und t gegebenen Bewegung, indem man den Weg nach der Zeit differenziert.

So ist z. B. für die gleichmässige Bewegung der durchlaufene Raum

$$s = c \cdot t$$

und folglich nach irgend einer Zeit t die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = c,$$

wir finden demnach bestätigt, dass bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit zu allen Zeiten gleich c , das heisst also konstant ist. Ferner ist bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit c und der konstanten Beschleunigung q der Weg

$$s = ct + \frac{q}{2} t^2,$$

mithin die Geschwindigkeit nach t Sekunden

$$v = \frac{ds}{dt} = c + q \cdot t,$$

während für die gleichförmig verzögerte Bewegung aus dem zurückgelegten Wege

$$s = ct - \frac{q}{2} t^2$$

die Geschwindigkeit

$$v = c - qt$$

folgt und für die ungleichförmige Bewegung, deren Weg dem Gesetze

$$s = 3t - 2t^2 + t^3$$

unterworfen ist, findet sich die Geschwindigkeit

$$v = 3 - 4t + 3t^2$$

nach der beliebigen Zeit t .

An der in Fig. 55 gezeichneten Wegkurve OC bedeutet $OQ = t$ eine beliebige, seit Beginn der Bewegung verstrichene Zeit, $QP = s = F(t)$ den bis dahin zurückgelegten Weg, $QQ' = PM = dt$ eine verschwindend geringe Zunahme von t , $MP' = ds$ die entsprechende Wegänderung und mithin die zugehörige Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ die

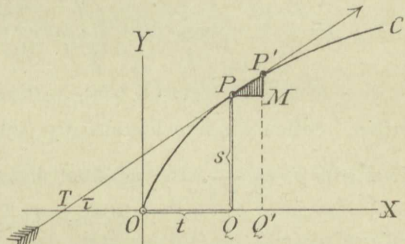


Fig. 55.

goniometrische Tangente des Winkels τ , welchen die Berührende im Punkte P mit der rechten Seite der Abscissenachse einschliesst.

Jetzt sind wir auch umgekehrt imstande, aus dem bekannten Geschwindigkeitsgesetz den zurückgelegten Weg s der betreffenden Bewegung ausfindig zu machen; denn ist die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit in der allgemeinen Form

$$v = f(t)$$

gegeben, so folgt daraus wegen $v = \frac{ds}{dt}$ das Wegelement

$$ds = v dt = f(t) \cdot dt$$

und hieraus durch Integration der in t Sekunden zurückgelegte Gesamtweg

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t f(t) dt. \dots \dots (3.)$$

Zum Beispiel ist für die gleichförmige Bewegung die Geschwindigkeit konstant, d. h. $v = c$, wir haben daher in diesem Falle $ds = c dt$ und hieraus folgt durch Integration zwischen den Grenzen 0 und t

$$s = ct,$$

der bei der gleichförmigen Bewegung in t Sekunden zurückgelegte Weg. Ferner ist für die gleichförmig beschleunigte Bewegung die Geschwindigkeit nach der beliebigen Zeit t

$$v = c + qt = \frac{ds}{dt},$$

folglich

$$ds = (c + qt) dt$$

und mithin

$$s = ct + \frac{q}{2} t^2.$$

Endlich sei drittens das Gesetz, nach welcher die Geschwindigkeit v einer sonst unbekanntem Bewegung mit der Zeit t sich ändert, ausgesprochen in der Gleichung

$$v = 1 + t^2,$$

woraus wir z. B. sehen, dass die Geschwindigkeit nach

$$\begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, \dots \text{ Sekunden,} \\ 1, 2, 5, 10, \dots \text{ Meter} \end{array}$$

beträgt. Sollen wir nun hieraus den zurückgelegten Weg ableiten, so setzen

wir wieder $v = \frac{ds}{dt}$ und erhalten dadurch

$$ds = (1 + t^2) dt$$

oder

$$s = t + \frac{t^3}{3}.$$

Den obigen Zeiten würden also die Wege

$$0, 1\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}, 12 \dots \text{ Meter}$$

entsprechen.

§ 38.

Das Geschwindigkeitsdiagramm.

Auch den Verlauf der allgemein durch die Beziehung

$$v = f(t)$$

gegebenen Geschwindigkeit einer Bewegung kann man sich geometrisch versinnlichen, indem man unter Annahme einer passenden Längeneinheit für die Zeitsekunde verschiedene Werte von t auf OX nach Fig. 56 als Abscissen, z. B.

$$t = 0, t_1 = OQ_1, t_2 = OQ_2, t_3 = OQ_3, t_4 = OQ_4, t_5 = OQ_5 \dots$$

und die zugehörigen Geschwindigkeiten mit Benützung derselben oder auch einer anderen Einheit als zugehörige Ordinaten

$v_0 = f(0) = OA$, $v_1 = f(t_1) = Q_1 P_1$, $v_2 = f(t_2) = Q_2 P_2$,
 $v_3 = f(t_3) = Q_3 P_3$, $v_4 = f(t_4) = Q_4 P_4$, $v_5 = f(t_5) = Q_5 P_5 \dots$

konstruiert. Die Endpunkte der letzteren bestimmen dann die sogenannte Geschwindigkeitskurve $A P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$, deren Lage und Gestalt uns ebenso rasch als klar erkennen lässt, in welcher Weise sich die

Geschwindigkeit der Bewegung innerhalb des gewählten Zeitabschnitts $O Q_5$ ändert: Wo die Kurve steigt (in unserem Falle von $t = 0$ bis $t = t_3 = O Q_3$), wächst die Geschwindigkeit v und sobald sich die Kurve senkt (von $t = t_3$ bis $t = t_5 = O Q_5$),

nimmt dagegen v ab; für die höchsten und tiefsten Punkte P_3 und P_5 mit zur Zeitachse OX parallelen Tangenten, also in den durch t_3 und t_5 bestimmten Augenblicken, besitzt v einen grössten und einen kleinsten Wert.

In der graphischen Darstellung der Geschwindigkeit

$$v = f(t)$$

(Fig. 57), welche auch das Geschwindigkeitsdiagramm genannt zu werden pflegt und wo $OQ = t$ eine beliebige Zeit seit Beginn der Bewegung und $QP = v$ die entsprechende Geschwindigkeit veranschaulicht, hat aber auch der in der Zeit t zurückgelegte Weg s eine sehr einfache Bedeutung; denn weil nach Formel 3

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t f(t) dt$$

ist und bekanntlich das bestimmte Integral zwischen 0 und t von $v dt = f(t) dt$ aufgefasst werden darf als diejenige Fläche, welche von den beiden Koordinatenachsen, der krummen Linie $v = f(t)$ und der Ordinate v eingeschlossen wird, so wird im Geschwindigkeitsdiagramm der durchlaufene Weg s durch die Fläche $OAPQ$ gemessen.

Demnach ist z. B. das Geschwindigkeitsdiagramm für eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c eine gerade Linie AB (Fig. 58), welche im Abstände c parallel zur X -Achse läuft. Der zurückgelegte Weg s wird uns dabei vor Augen ge-

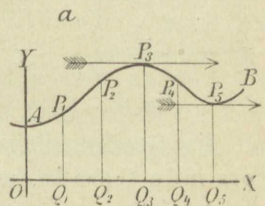


Fig. 56.

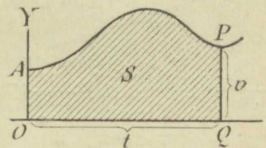


Fig. 57.

stellt durch das Rechteck $OAPQ$ mit der Basis $OQ = t$ und der Höhe $OA = QP = c$, also mit dem Inhalt $s = ct$.

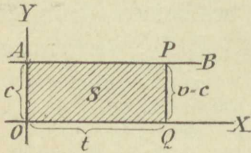


Fig. 58.

Zweitens ist für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit c und der konstanten Beschleunigung q nach t Sekunden die Geschwindigkeit

$$v = c + q \cdot t$$

und die Geschwindigkeitslinie eine von links nach rechts aufsteigende Gerade, welche auf der Y -Achse das Stück $OA = c$

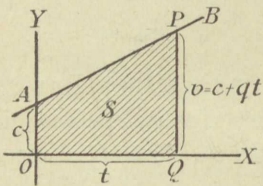


Fig. 59.

abschneidet, mithin der in der Zeit t durchlaufene Raum s graphisch dargestellt durch das Trapez $OAPQ$ mit den parallelen Seiten c und v (siehe Fig. 59), der Höhe $OQ = t$ und folglich mit dem Flächeninhalte

$$s = \frac{c + v}{2} t.$$

Auch im Geschwindigkeitsdiagramm der gleichförmig verzögerten Bewegung (Fig. 60) wird der durchlaufene Raum durch ein dem vorigen gleiches Trapez ausgedrückt, der Unterschied besteht nur darin,

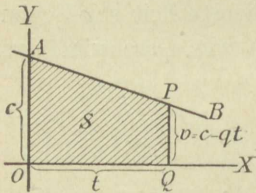


Fig. 60.

dass hier die Geschwindigkeitslinie AB von links nach rechts fällt, also einen stumpfen Winkel mit der positiven Richtung der Zeitachse OX einschliesst.

§ 39.

Die mittlere Geschwindigkeit.

Bisweilen vereinfacht es die Betrachtungen, welchen eine ungleichförmige und kompliziertere Bewegung zu Grunde liegt, ganz bedeutend, wenn man auf einem gewissen Zeitgebiete t statt der veränderlichen Geschwindigkeit v eine konstante, mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit einführt. Man versteht darunter diejenige Geschwindigkeit v_m , mit welcher sich ein Punkt gleichförmig bewegen müsste, um in derselben Zeit t den gleichen Weg s zu durchlaufen, welcher in Wirklichkeit bei der ungleich-

förmigen Bewegung zurückgelegt wurde. Aus dieser Definition folgt unmittelbar $s = v_m \cdot t$ und hieraus mit Benützung von Formel 3

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t v \, dt = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t f(t) \, dt. \quad (4.)$$

Im Geschwindigkeitsdiagramm (Fig. 61) wird v_m vertreten durch die Höhe OC oder QD desjenigen Rechteckes $OC D Q$, welches die Basis $OQ = t$ und den nämlichen Inhalt besitzt, wie $O A E B Q$. Zulässig ist die Einführung einer mittleren Geschwindigkeit besonders bei solchen Bewegungen, wo die veränderliche Geschwindigkeit periodisch wiederkehrenden Schwankungen unterworfen ist und die äussersten Grenzwerte nicht zu weit von einander abstehen, wie z. B. am Kolben einer Dampfmaschine. Die Geschwindigkeitskurven derartiger Bewegungen bilden wellen- oder schlangenartige Linien.

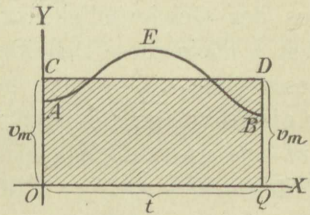


Fig. 61.

Wäre z. B. die Geschwindigkeit einer gewissen Bewegung

$$v = 1 + t^2,$$

so erhielten wir für $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = 1 \text{ m}$$

und die Geschwindigkeit nach 3 Sekunden

$$v_3 = 1 + 9 = 10 \text{ m.}$$

Der während dieser 3 Sekunden durchlaufene Raum berechnet sich aus

$$s = \int_0^t v \, dt = \int_0^t (1 + t^2) \, dt = t + \frac{t^3}{3},$$

worin man $t = 3$ zu setzen hat, sodass sich

$$s = 3 + 9 = 12 \text{ m}$$

ergibt; demnach ist die mittlere Geschwindigkeit unserer Bewegung auf dem Zeitraum von 0 bis 3 Sekunden

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{12}{3} = 4 \text{ m,}$$

oder auch direkt mittels Formel 4

$$s = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t v \, dt = \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 (1 + t^2) \, dt = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ m.}$$

§ 40.

Die Beschleunigung.

Aus der Formel für die Geschwindigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung

$$v = c + q t$$

folgt die Beschleunigung

$$q = \frac{v - c}{t},$$

es liesse sich also die Beschleunigung auch auffassen als Quotient aus der Geschwindigkeitszunahme $v - c$ und der verbrauchten Zeit t , allein diese Definition würde eben bloß für die gleichförmig beschleunigte Bewegung gelten, und um sie auch auf jede ungleichförmige Bewegung ausdehnen zu können, müssen wir sie auf eine unendlich kleine Zeit dt beziehen; denn während des Zeitelementes $Q Q' = P M = dt$ (siehe Fig. 62)

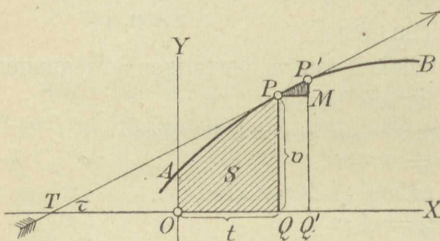


Fig. 62.

liebige Bewegung als gleichförmig beschleunigt angesehen werden, weil das zugehörige Kurvenelement $PP' = ds$ als geradlinig betrachtet werden darf und die graphische Darstellung der gleichförmig beschleunigten Bewegung ebenfalls

eine gerade Linie bildet. Ist daher die Geschwindigkeit $v = Q P$ irgend einer ungleichförmigen Bewegung als Funktion der Zeit $t = O Q$ in der Gestalt

$$v = f(t)$$

gegeben und bezeichnet $M P' = dv$ die Änderung der Geschwindigkeit v , welche durch eine Zunahme von t um das Zeitelement dt verursacht wird, so ist die Beschleunigung in dem Augenblick, wo t Sekunden verflossen sind,

$$p = \frac{dv}{dt} = f'(t), \quad \dots \dots \dots (5.)$$

oder auch, weil nach Formel 2 in § 37 $v = \frac{ds}{dt}$ war,

$$p = \frac{d^2 s}{dt^2} = F''(t). \quad \dots \dots \dots (6.)$$

Man erhält demnach die Beschleunigung einer bekannten Bewegung, indem man entweder den ersten Differentialquotienten der Geschwindigkeit v , oder den zweiten Differentialquotienten des zurückgelegten Weges s nach der Zeit t bildet.

Es sei z. B. das Gesetz, nach welchem sich die Geschwindigkeit einer gewissen Bewegung ändert, ausgesprochen durch die Beziehung

$$v = t^3 - 6t^2 + 15t,$$

dann erhält man die Geschwindigkeitsänderung dieser Bewegung

$$p = \frac{dv}{dt} = 3t^2 - 12t + 15 = 3(t^2 - 4t + 5),$$

beispielsweise wäre für $t = 0$ die Beschleunigung $p = 15$ und für $t = 1$ die Beschleunigung $p = 6$ Längeneinheiten.

Ferner ergibt sich auf diese Weise für die gleichförmig veränderte Bewegung aus dem in der Zeit t durchlaufenen Raume

$$s = ct \pm \frac{q}{2} t^2$$

die Endgeschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = c \pm qt$$

und hieraus die derselben Zeit t entsprechende Geschwindigkeitsänderung

$$p = \frac{dv}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} = \pm q,$$

konstant und positiv oder negativ, je nachdem die Geschwindigkeit v zu- oder abnimmt. Im ersten Falle heisst p Beschleunigung, im letzten Verzögerung.

Die Beschleunigung p einer bestimmten Bewegung hat an der Geschwindigkeitskurve AB (Fig. 62) ebenfalls eine recht einfache geometrische Bedeutung; denn bedenkt man, dass die Beschleunigung der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit ist, und zieht man andererseits in Erwägung, dass der Differentialquotient an der Funktionskurve die trigonometrische Tangente des Winkels τ darstellt, welchen die geometrische Tangente mit der rechten Seite der Abscissenachse einschliesst, so ist klar, dass für die Zeit $OQ = t$ die Beschleunigung p die goniometrische Tangente des Berührungswinkels $PTX = \tau$ repräsentiert, dass also

$$p = tg \tau$$

ist. Die Geschwindigkeitskurve AB liefert nämlich deshalb das beste und klarste Bild einer Bewegung, weil an diesem Diagramm

die vier Hauptbegriffe Zeit, Raum, Geschwindigkeit und Beschleunigung die denkbar einfachste graphische Bedeutung besitzen; denn wird eine beliebige Zeit t durch die Abscisse OQ ausgedrückt, so stellt $OA = c$ die Anfangsgeschwindigkeit, $QP = v$ die Endgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit nach t Sekunden, dann die Fläche $OAPQ = s$ den zurückgelegten Weg und $tg\tau = p$ die Beschleunigung in dem durch die Zeit t bestimmten Augenblicke dar.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass auch umgekehrt die Beschleunigung als Funktion der Zeit und zwar allgemein durch die Beziehung

$$p = \varphi(t)$$

gegeben sein und nun nach dem Geschwindigkeitsgesetz der betreffenden Bewegung gefragt werden kann. Behufs Lösung dieser Aufgabe folgern wir zunächst aus Formel 5

$$dv = p dt = \varphi(t) dt$$

und erhalten dann hieraus durch Integration

$$v = \int \varphi(t) dt = f(t) + K, \dots \dots (7.)$$

worin $f(t)$ das unbestimmte Integral von $\varphi(t) dt$ und K die Integrationskonstante bezeichnet. Um letztere ermitteln zu können, muss noch das einem gewissen t entsprechende v bekannt sein oder willkürlich angenommen werden, gewöhnlich ist es die sogenannte Anfangsgeschwindigkeit c , welche der bewegte Punkt im Momente $t = 0$ hat. Führt man das zusammengehörige Wertpaar $t = 0$ und $v = c$ in die letzte Gleichung ein, so wird $K = c - f(0)$.

Beispielsweise angenommen, die Beschleunigung einer gewissen Bewegung unterläge dem Gesetz

$$p = t^2 - 1,$$

so fände sich nach Formel 7 die Geschwindigkeit

$$v = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + K$$

und wäre uns ausserdem die Anfangsgeschwindigkeit $c = 2 m$ bekannt, so erhielten wir mit Einführung von $t = 0$ und $v = 2$ in die vorstehende Relation $2 = K$ und mithin

$$v = \frac{t^3}{3} - t + 2.$$

§ 41.

Übungsbeispiele.

91. Man soll aus der Wegformel

$$s = 6t - 2,5t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

die Geschwindigkeit v nach beliebiger Zeit t ableiten, dann daraus die Anfangsgeschwindigkeit c und endlich die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 und v_4 nach 1, 3, 5 und 7 Sekunden berechnen.

Resultate: $v = 6 - 5t + t^2$, $c = 6$, $v_1 = 2$, $v_2 = 0$, $v_3 = 6$ und $v_4 = 20$ Längeneinheiten.

92. Das Geschwindigkeitsgesetz einer Bewegung ist ausgesprochen in der Gleichung

$$v = t^2 - 8t + 7.$$

Welche Beschleunigung besitzt der bewegte Punkt nach einer beliebigen Zeit t und welchen Weg hat er bis dahin zurückgelegt.

Resultate: $p = 2(t - 4)$ und $s = t\left(\frac{t^2}{3} - 4t + 7\right)$.

93. In welchen Augenblicken ist die Geschwindigkeit gleich Null und welches sind dann die zugehörigen Beschleunigungen und die zurückgelegten Wege, das Meter als Längeneinheit?

Antwort: Nach $t_1 = 1$ und $t_2 = 7$ Sekunden sind die Beschleunigungen $p_1 = -6$ und $p_2 = +6$ m, sowie die zurückgelegten Wege $s_1 = 3\frac{1}{3}$ m und $s_2 = -32\frac{2}{3}$ m.

94. Nach wie viel Sekunden wird die Bewegung aus einer verzögerten in eine beschleunigte übergehen, wie gross ist in diesem betreffenden Moment die Geschwindigkeit und der zurückgelegte Weg?

Antwort: Nach 4 Sekunden; dann ist $v = -9$ m und $s = -14\frac{2}{3}$ m.

95. Das Gesetz, nach welchem sich die Geschwindigkeit einer Bewegung ändert, ist ausgesprochen in der Formel

$$v = 4 - 2t + t^2;$$

man bestimme den zurückgelegten Weg und die Beschleunigung, erst allgemein nach der Zeit t und dann für den speziellen Wert von $t = 5''$.

Resultate: $s = 4t - t^2 + \frac{t^3}{3} = 36\frac{2}{3}m$ und $p = 2(t-1) = 8m$.

96. Die Beschleunigung einer Bewegung ändert sich mit der Zeit nach dem Gesetze:

$$p = 6t - 2,$$

während die Anfangsgeschwindigkeit $4m$ betrug. Man entwickle daraus die Geschwindigkeit v und den durchlaufenen Raum s .

Resultate: $v = 3t^2 - 2t + 4$ und $s = t^3 - t^2 + 4t$.

97. Wie gross war also bei dieser Bewegung Beschleunigung, Geschwindigkeit und zurückgelegter Weg nach 2 Sekunden?

Antwort: $p = 10m$, $v = 12m$ und $s = 12m$.

98. Man gebe den Zeitpunkt an, wo die Geschwindigkeit dieser Bewegung am kleinsten gewesen ist.

Resultat: Nach $\frac{1}{3}$ Sekunde ist die Geschwindigkeit $v = 3\frac{2}{3}m$, ein Minimum.

99. Der Beschleunigungsverlauf für eine gewisse Bewegung ist mathematisch ausgedrückt durch die Formel

$$p = 3t^2 - 4t + 1.$$

Wie findet sich daraus das Geschwindigkeitsgesetz, wenn man weiss, dass die Bewegung von der Ruhe aus erfolgt.

Resultat: $v = t^3 - 2t^2 + t$.

100. Wann wird die Geschwindigkeit des bewegten Punktes zum zweiten Male Null?

Antwort: Nach einer Sekunde.

101. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg eines Körpers bestimmt sich aus der Gleichung

$$s = \sqrt{t(t+2)};$$

es soll Geschwindigkeit und Beschleunigung zur beliebigen Zeit t ermittelt werden.

Resultate: $v = \frac{t+1}{\sqrt{t(t+2)}}$ und $p = -\frac{1}{t(t+2)\sqrt{t(t+2)}}$.

102. Man bestimme im vorigen Beispiel den durchlaufenen Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung nach einer Sekunde.

Resultate: $s = \sqrt{3}$, $v = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $p = -\frac{1}{9}\sqrt{3}$.

V. Kapitel.

Die zusammengesetzte Bewegung eines mathematischen Punktes.

§ 42.

Zusammensetzung zweier beliebiger geradliniger Bewegungen.

Wenn ein Punkt von einem bestimmten Momente an von O aus (Fig. 63) gleichzeitig zwei verschiedene geradlinige Bewegungen ausführt, nämlich während einer gewissen Zeit t in der Richtung $O X$ den Weg $O Q$ und in der Richtung $O Y$ den Weg $O R$ zurücklegt, so ist nach dem vierten Grundgesetze von der Unabhängigkeit der Bewegungen, welches wir schon in der Elementarmechanik kennen gelernt haben, der wirkliche

Ort des bewegten Punktes im betreffenden Augenblicke der vierte Eckpunkt P eines Parallelogrammes $O Q P R$, welches aus den beiden

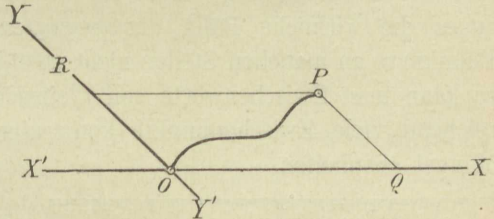


Fig. 63.

Seiten $O Q$ und $O R$ konstruiert werden kann und welches auch das Parallelogramm der Bewegungen heisst. Mit Weglassung der zur Darstellung von P unnötigen Linie $R P$ erhält man P am kürzesten, indem man $O Q$ von O aus auf $O X$ abträgt, dann $Q P$ parallel $O Y$ zieht und gleich $O R$ macht. Hierbei sind auch die Vorzeichen von $O Q$ und $Q P$ zu berücksichtigen, indem man negative Werte nach links, bzw. nach unten konstruiert.

Legt daher ein mathematischer Punkt in der Richtung $X' X$ den Weg

$$x = \varphi (t),$$

und gleichzeitig in der Geraden $Y' Y$ den Weg

$$y = \psi (t)$$

zurück, so kann die von ihm thatsächlich beschriebene Linie auf folgende Weise konstruiert werden: man nimmt für die Zeit t eine Reihe fortlaufender Werte an, etwa

0, 1, 2, 3 . . . n Sekunden,

berechnet dann aus den obigen beiden Gleichungen die zugehörigen Wege

$x_0 = \varphi(0), x_1 = \varphi(1), x_2 = \varphi(2), x_3 = \varphi(3) \dots x_n = \varphi(n)$,
sowie

$y_0 = \psi(0), y_1 = \psi(1), y_2 = \psi(2), y_3 = \psi(3) \dots y_n = \psi(n)$

und konstruiert jetzt in Bezug auf das im allgemeinen schiefwinklige Koordinatensystem YOX unter Annahme einer passenden Längeneinheit die vorstehenden Werte von x als Abscissen und die entsprechenden Werte von y als zugehörige Ordinaten. Hierdurch erhält man die n Punkte

$$P_0, P_1, P_2, P_3 \dots P_n$$

und durch Verbindung derselben mittelst eines stetigen Kurvenzuges die wirkliche Bahn des bewegten Punktes. Sollte diese Bahnkurve an manchen Stellen nicht genügend bestimmt erscheinen, so kann man Zwischenwerte von t einschalten und hierdurch hinreichend viele Zwischenpunkte konstruieren, um dem genannten Mangel abzuhelfen.

t	$x = \frac{t^3}{3} - 5t$	$y = \frac{t^2}{2} - t$	Bahn- punkt
0	0	0	O
1	$-4\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	P_1
2	$-7\frac{1}{3}$	0	P_2
3	-6	$+1\frac{1}{2}$	P_3
4	$+1\frac{1}{3}$	+4	P_4
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{11}{24}$	$-\frac{3}{8}$	O'
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{5}{24}$	$-2\frac{5}{8}$	P_3'

Es seien z. B. die beiden gegebenen Bewegungsgesetze

$$x = \frac{t^3}{3} - 5t, y = \frac{t^2}{2} - t$$

und wir sollen den wahren Weg dieser zusammengesetzten Bewegung während der Zeit zwischen 0 und 4 Sekunden graphisch darstellen. In der nebenstehenden Tabelle sind zunächst die Werte von x und y für $t = 0$ und die ersten vier Sekunden und hierauf die zugehörigen Punkte O, P_1, P_2, P_3, P_4 nach Fig. 64 konstruiert. Da bemerken wir, dass die Gestalt der Kurve zwischen O und P_1 , sowie P_3 und P_4 nicht sicher genug bestimmt ist; wir schalten deshalb die Zeiten $\frac{1}{2}$, bzw. $3\frac{1}{2}$ ein, konstruieren die entsprechenden Zwischenpunkte O' , bzw. P_3' und sind nun nicht mehr in Zweifel über die Gestalt der Bahnkurve $O O' P_1 P_2 P_3 P_3' P_4$.

Aber man kann den wirklichen Weg einer zusammengesetzten Bewegung nicht bloß graphisch, mit Lineal und Zirkel, sondern auch analytisch, d. h. auf dem Wege der Rechnung darstellen; denn wenn man aus den beiden Gleichungen

$$x = \varphi(t) \text{ und } y = \psi(t),$$

welche die in der Richtung der X - und der Y -Achse nach der Zeit t zurückgelegten Wege angeben, die Veränderliche t eliminiert,

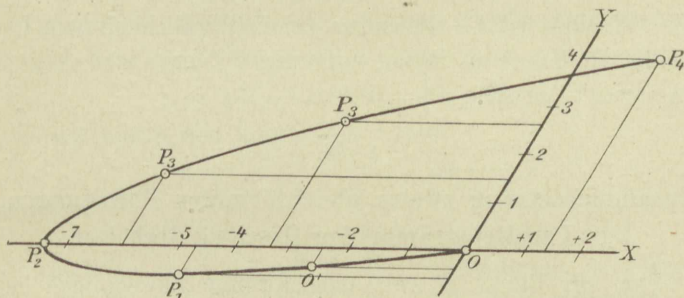


Fig. 64.

so erhält man die Gleichung der wirklichen Bahn unseres Punktes in Bezug auf das im allgemeinen schiefwinklige Parallelkoordinatensystem $Y O X$.

Im obigen Beispiel war

$$x = \frac{t^3}{3} - 5t \text{ und } y = \frac{t^2}{2} - t,$$

aus der letzten Gleichung folgt

$$t^2 - 2t = 2y, \text{ also } t = 1 \pm \sqrt{1 + 2y}$$

und mit Einsetzung dieses Wertes in die erste Gleichung

$$x = (2y - 13 \pm 2\sqrt{1 + 2y}) \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2y}}{3},$$

die Gleichung der Kurve, welche wir in der obigen Figur konstruiert haben, in Bezug auf das schiefwinklige Parallelkoordinatensystem $Y O X$.

Übungsbeispiele.

103. Ein Punkt bewegt sich gleichzeitig auf zwei unter beliebigem Winkel α zu einander geneigten Geraden und die vom Durchschnittspunkt O ausgerechneten Wege bestimmen sich aus den Formeln

$$x = \frac{t^2}{2} - 2 \text{ und } y = t^2 - 3t;$$

man soll die Bahnkurve auf dem Zeitgebiete zwischen $t = 0$ und $t = 4$ konstruieren.

104. Die Gleichung dieser Bahnkurve aufzustellen.

Lösung: $y = 2(x + 2) - 3\sqrt{2(x + 2)}$.

105. Auf den beiden Achsen eines Parallelkoordinatensystems legt ein Punkt gleichzeitig die Räume

$$x = a \cos t \text{ und } y = b \sin t$$

zurück. Welches ist die Gleichung der in Wirklichkeit vom Punkte durchlaufenen Kurve in Bezug auf jenes System?

Antwort: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

§ 43.

Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen.

Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Wenn ein Punkt P zwei gleichförmige Bewegungen besitzt, nämlich während der Zeit t in der Achse $O X$ (Fig. 65) den Weg

$$x = c_1 t$$

zurücklegt und zugleich in der Geraden $O Y$ den Weg

$$y = c_2 t$$

durchläuft, so findet man die Gleichung der wirklich durchlaufenen Bahn in Bezug auf das System

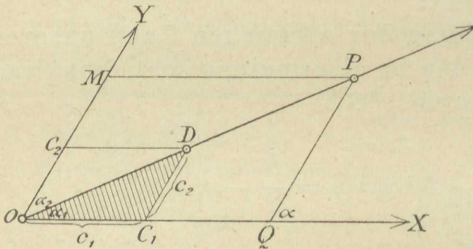


Fig. 65.

$Y O X$, wenn man aus den beiden vorstehenden Formeln t eliminiert.

Mit Einsetzung von $t = \frac{x}{c_1}$ aus der ersten in die zweite

Beziehung ergibt sich $y = c_2 \cdot \frac{x}{c_1}$ oder

$$y = \frac{c_2}{c_1} \cdot x$$

und da wir hierin wegen der Unveränderlichkeit von c_1 und c_2 die Gleichung einer durch den Koordinatenursprung gehenden Geraden erkennen, so ist bewiesen, dass die resultierende Bewegung geradlinig ist, und es fragt sich bloß noch, welcher Art diese Bewegung angehört, ob sie z. B. gleichförmig oder gleichförmig beschleunigt oder ob sie ganz ungleichförmig ist.

Um darüber Aufschluss zu erhalten, berechnen wir den nach t Sekunden vom Punkte zurückgelegten Weg $OP = s$ und bedienen uns dazu des Dreiecks OPQ , in welchem die beiden Seiten $OQ = x = c_1 t$, $QP = y = c_2 t$ und der eingeschlossene Winkel $OPQ = 180^\circ - \alpha$ ist; es gilt folglich nach dem Kosinussatze die Beziehung

$$OP = s = \sqrt{c_1^2 t^2 + c_2^2 t^2 - 2 c_1 c_2 t^2 \cos (180^\circ - \alpha)},$$

oder, wenn wir den gemeinschaftlichen Faktor t^2 ausheben und bedenken, dass $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ist,

$$s = t \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2 c_1 c_2 \cos \alpha}.$$

Setzen wir hierin den konstanten Faktor

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2 c_1 c_2 \cos \alpha} = c,$$

so entsteht

$$s = c \cdot t,$$

die Formel für den während der Zeit t gleichförmig zurückgelegten Weg. Hierdurch ist bewiesen, dass sich zwei gleichförmige Bewegungen stets zu einer abermals gleichförmigen Bewegung zusammensetzen. Dabei bildet die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2 c_1 c_2 \cos \alpha}, \quad \dots \quad (1.)$$

die Diagonale OD eines Parallelogramms OC_1DC_2 , welches aus den beiden Seitengeschwindigkeiten $OC_1 = c_1$ und $OC_2 = c_2$ konstruiert ist und welches deshalb das Parallelogramm der Geschwindigkeiten genannt wird.

Um die Richtung von c zu erhalten, bezeichnen wir die Winkel DOX und DOY mit α_1 und α_2 , wenden dann auf das Dreieck ODC_1 den Sinussatz an und erhalten, weil $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ist, die Proportionen

$$c_1 : c = \sin \alpha_2 : \sin \alpha, \quad c_2 : c = \sin \alpha_1 : \sin \alpha$$

oder

$$\sin \alpha_1 = \frac{c_2 \cdot \sin \alpha}{c}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{c_1 \cdot \sin \alpha}{c}, \quad \dots \quad (2.)$$

worin $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ sein muss.

Wichtige Spezialfälle.

1. Wenn ein Punkt in derselben Geraden zugleich zwei Geschwindigkeiten c_1 und c_2 besitzt, welche nach derselben Seite gerichtet sind, so ist $\alpha = 0$ und es folgt aus No. 1

$$c = c_1 + c_2,$$

die resultierende Geschwindigkeit ist also dann gleich der Summe der Seitengeschwindigkeiten.

2. Sind die beiden Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in der nämlichen Geraden entgegengesetzt gerichtet, so ist $\alpha = 180^\circ$ und es folgt aus No. 1

$$c = c_1 - c_2,$$

die Gesamtbewegung erfolgt demnach mit der Differenz beider Geschwindigkeiten nach der Richtung der grösseren Geschwindigkeit.

3. Sind c_1 und c_2 rechtwinklig zu einander, so ergibt sich für $\alpha = 90^\circ$ aus 1

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} (3.)$$

und der Winkel α_1 zwischen c_1 und c bestimmt sich nach der einfachen Formel

$$tg \alpha_1 = \frac{c_2}{c_1} (4.)$$

Zum Schluss wollen wir das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten auf einen allgemeineren Fall anwenden und zu dem Ende zwei Bewegungen, welche in den Geraden $O X$, bzw. $O Y$

stattfinden und den Ge-
setzen

$$x = 12 \sin t, y = 3 \operatorname{tg} t$$

unterworfen sind, zu-
sammensetzen. Aus
den vorstehenden Be-
ziehungen ergeben sich
die Geschwindigkeiten

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 12 \cos t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3}{\cos^2 t}$$

in den Richtungen $O X$,
bzw. $O Y$ zur be-

liebigen Zeit t und es sind nun die Spezialwerte von x , y , v_x und v_y für $t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{2}$ Sekunden in der obigen

Tabelle zusammengestellt, sowie in Fig. 66 genau konstruiert.

Zeit t	$x =$ $12 \sin t$	$y =$ $3 \operatorname{tg} t$	Bahn- punkt	$v_x =$ $12 \cos t$	$v_y = \frac{3}{\cos^2 t}$
0	0	0	O	12	3
$\frac{\pi}{6}$	6	$\sqrt{3}$	P_1	$6\sqrt{3}$	4
$\frac{\pi}{4}$	$6\sqrt{2}$	3	P_2	$6\sqrt{2}$	6
$\frac{\pi}{3}$	$6\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	P_3	6	12
$\frac{\pi}{2}$	12	∞	—	0	∞

Anfangs, zur Zeit $t = 0$, befindet sich der Punkt in O , seine Seitengeschwindigkeiten sind $Oa = 12$, $Ob = 3$ und folglich ist seine wirkliche Geschwindigkeit die Diagonale Oc des Parallelogramms $Oacb$; nach $\frac{\pi}{6}$ Sekunden hat der bewegte Punkt die Stelle P_1 erreicht, seine Seitengeschwindigkeiten sind jetzt $P_1 a_1 = 6\sqrt{3}$, $P_1 b_1 = 4$ und mithin wird in diesem Moment seine thatsächliche

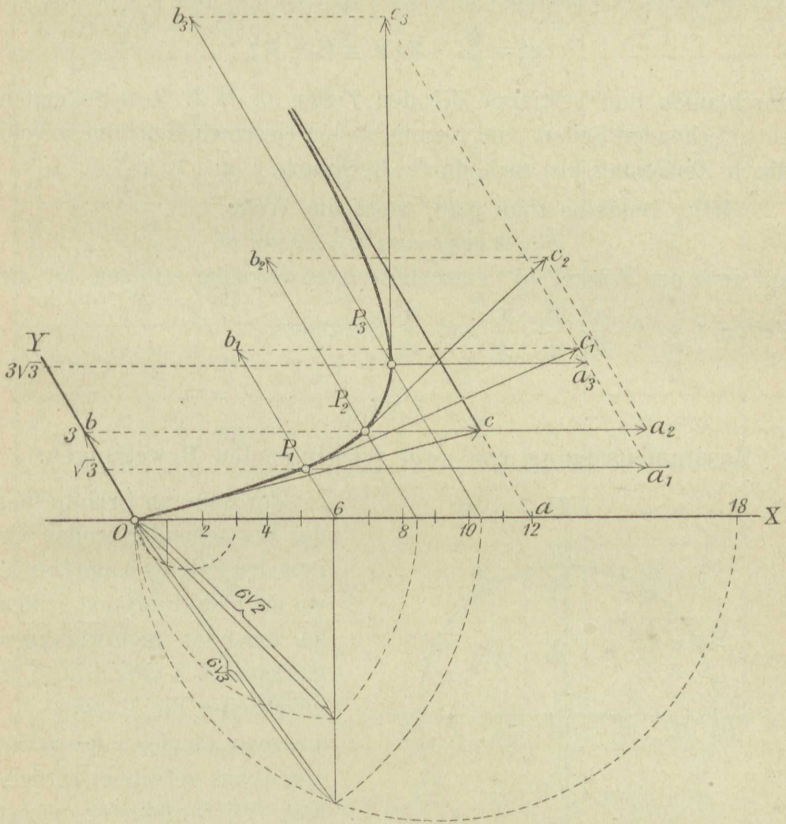


Fig. 66.

Geschwindigkeit nach Richtung und Grösse ausgedrückt durch die Diagonale $P_1 c_1$ des Parallelogramms $P_1 a_1 c_1 b_1$ u. s. w.

Natürlich können diese resultierenden Geschwindigkeiten Oc , $P_1 c_1$, $P_2 c_2$ u. s. w. nicht bloß graphisch dargestellt, sondern auch mittels der Formeln 1 und 2 berechnet werden. Dies kann zwar

füglich dem Leser überlassen werden, doch müsste derselbe, wenn die Rechnungs- mit den Konstruktionsresultaten übereinstimmen sollen, den Winkel α zu 120° annehmen, wie es in unserer Figur geschehen ist.

Übungsbeispiele.

106. Man vereinige diejenigen beiden Bewegungen, welche auf den unter 60° zu einander geneigten Achsen OX und OY die Räume

$$x = \frac{t^2}{2} - 2, \quad y = t^2 - 3t$$

durchlaufen und bestimme die den Zeiten $0, 1, 2, 3, 4$ Sekunden entsprechenden Seiten- und resultierenden Geschwindigkeiten sowohl durch Zeichnung als auch durch Rechnung.

107. Dasselbe thue man, wenn die Wege

$$x = 3 \cos t \quad \text{und} \quad y = 2 \sin t$$

auf zwei den Winkel 45° einschliessenden Geraden erfolgen, für die Zeiten $t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{2}$ Sekunden.

§ 44.

Zusammensetzung von zwei schwingenden Bewegungen.

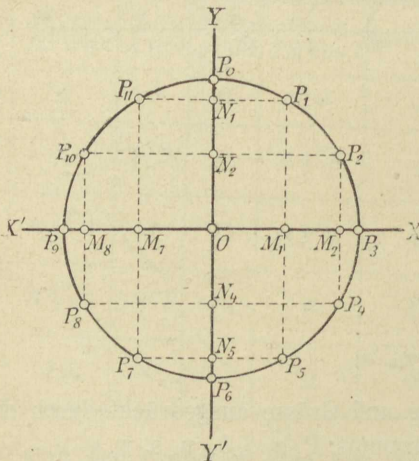


Fig. 67.

Zur weiteren Erläuterung des Vorstehenden wollen wir jetzt den Fall ins Auge fassen, wo ein Punkt auf den beiden zu einander rechtwinkligen Geraden $X'X$ (Fig. 67), $Y'Y'$ gleichzeitig die Räume $x = a \sin t$ und $y = a \cos t$ (I.) von O aus gerechnet zurücklegt. Wir verfolgen zunächst die beiden Seitenbewegungen jede für sich auf dem Zeitgebiete von $t = 0$ bis $t = 2\pi$, indem wir als Intervall $\frac{\pi}{6}$

wählen, die zugehörigen Werte von x und y aus den Formeln (I.) bestimmen und die erhaltenen Resultate tabellarisch zusammenstellen.

t	$x = a \sin t$	Ort in $X'X$	$v_x = a \cos t$	$y = a \cos t$	Ort in YY'	$v_y = -a \sin t$	Bahn- punkt
0	0	O	$+a$	$+a$	P_0	0	P_0
$\frac{\pi}{6}$	$+\frac{a}{2}$	M_1	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	N_1	$-\frac{a}{2}$	P_1
$\frac{\pi}{3}$	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	M_2	$+\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	N_2	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	P_2
$\frac{\pi}{2}$	$+a$	P_3	0	0	O	$-a$	P_3
$\frac{2}{3}\pi$	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	M_2	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	N_4	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	P_4
$\frac{5}{6}\pi$	$+\frac{a}{2}$	M_1	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	N_3	$-\frac{a}{2}$	P_5
π	0	O	$-a$	$-a$	P_6	0	P_6
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{a}{2}$	M_7	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	N_5	$-\frac{a}{2}$	P_7
$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	M_8	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	N_4	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	P_8
$\frac{3}{2}\pi$	$-a$	P_9	0	0	O	$+a$	P_9
$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{a}{2}\sqrt{3}$	M_8	$+\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	N_2	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	P_{10}
$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{a}{2}$	M_7	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$+\frac{a}{2}\sqrt{3}$	N_1	$+\frac{a}{2}$	P_{11}
2π	0	O	$+a$	$+a$	P_0	0	P_0

Aus der zweiten Vertikalspalte, welche die Werte von x enthält, ist zu erkennen, dass unser Punkt in der Achse $X'X$ eine zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ hin- und hergehende, oder schwingende Bewegung ausführt und die fünfte Spalte sagt uns, dass ein Gleiches mit dem Punkte in der Y -Achse stattfindet. Weil ferner die beiden Seitengeschwindigkeiten

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a \cos t \quad \text{und} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -a \sin t \dots (II)$$

veränderliche Grössen darstellen, so sind die beiden Seitenbewegungen ungleichförmig; die Spezialwerte von v_x und v_y selbst sind in der vierten und siebenten Spalte aufgeführt, sie zeigen periodisch sich wiederholende Zahlen, welche zwischen $+a$ und $-a$ schwanken.

Was nun die zusammengesetzte Bewegung anbelangt, so können wir erstens nach ihrer Bahnform und zweitens nach ihrer Art fragen. Antwort auf die erste Frage erhalten wir durch Elimination von t aus den beiden Gleichungen I, was am besten erreicht wird, wenn wir

$$\frac{x}{a} = \sin t, \text{ sowie } \frac{y}{a} = \cos t$$

quadrieren und addieren; denn auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

oder

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

die Mittelpunktsleichung eines Kreises vom Radius a und mithin bewegt sich unser Punkt auf dem Umfange eines Kreises, welcher mit dem Halbmesser a um den Punkt O beschrieben ist.

Um zweitens Aufschluss über die Art dieser Kreisbewegung zu erhalten, nämlich ob sie gleichförmig oder ungleichförmig ist, berechnen wir nach Formel 3 mit Benützung der Beziehungen II ihre Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

oder

$$v = a$$

und sehen nun, dass letztere konstant und folglich die Vereinigung der beiden schwingenden Bewegungen, welche den Gesetzen I unterliegen, eine gleichförmige Kreisbewegung ist.

§ 45.

Zusammensetzung zweier gleichförmig beschleunigter Bewegungen.

Bewegt sich ein Punkt in den beiden Richtungen $O X$ (Fig. 68) und $O Y$ von der Ruhe aus gleichzeitig mit den konstanten Be-

schleunigungen p_1 und p_2 , so hat er nach der beliebigen Zeit t in der ersten Richtung den Weg

$$OQ = x = \frac{p_1}{2} t^2$$

zurückgelegt und in der zweiten Richtung den Raum

$$OR = y = \frac{p_2}{2} t^2$$

durchlaufen, und wir erhalten mit Einführung von $t^2 = \frac{2x}{p_1}$ aus

der ersten in die zweite Beziehung $y = \frac{p_2}{2} \cdot \frac{2x}{p_1}$ oder

$$y = \frac{p_2}{p_1} x,$$

die Gleichung einer geraden Linie in Bezug auf das System

YOX , welche durch den Koordinatenursprung O geht und ausserdem den Punkt D

mit den Koordinaten $OC_1 = p_1$, $C_1D = p_2$ enthält, weil für die Abscisse $x = p_1$ die Ordinate $y = p_2$ wird. Hierdurch wäre zwar festgestellt, dass die wirkliche Bewegung unseres Punktes in der Geraden ODP erfolgt, allein es bleibt noch zweifelhaft, welcher Art diese Bewegung angehört.

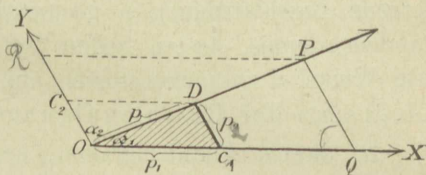


Fig. 68.

Um hierüber näheres zu erfahren, berechnen wir den vom Punkte P in der Zeit t zurückgelegten Weg OP und bedienen uns dazu des Dreiecks OQP , von welchem wir zwei Seiten $OQ = x = \frac{p_1}{2} t^2$ und $QP = y = \frac{p_2}{2} t^2$, sowie den eingeschlossenen Winkel $OQP = 180^\circ - \alpha$ kennen. Es gilt nämlich nach dem Kosinussatze die Gleichung

$$OP = s = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x \cdot y \cdot \cos(180^\circ - \alpha)},$$

oder, wenn wir hierin für x und y die obigen Werte, sowie $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ setzen

$$\begin{aligned} OP = s &= \sqrt{\frac{p_1^2}{4} \cdot t^4 + \frac{p_2^2}{4} \cdot t^4 + 2 \frac{p_1 p_2}{4} t^4 \cos \alpha} \\ &= \frac{t^2}{2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir hierin zur Abkürzung die konstante Wurzelgrösse mit p , so entsteht die Formel

$$OP = s = \frac{p}{2} t^2,$$

welche bekanntlich den in der Zeit t mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ und der Beschleunigung

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \cos \alpha} \dots (5.)$$

durchlaufenen Raum s darstellt, und wir gelangen zu dem Ergebnis: die Zusammensetzung zweier gleichförmig beschleunigter Bewegungen giebt wieder eine geradlinige und gleichförmig beschleunigte Bewegung. Dabei bedeutet die resultierende Beschleunigung p geometrisch die Diagonale OD eines Parallelogramms, dessen Seiten $OC_1 = p_1$ und $OC_2 = p_2$ unter dem Winkel α zusammenstossen und welches deshalb das Parallelogramm der Beschleunigungen genannt wird.

In diesem Parallelogramm, bezw. in dem Dreieck OC_1D kann man nun die Winkel $DOC_1 = \alpha_1$ und $DOC_2 = \alpha_2$, welche p mit p_1 und p_2 einschliesst, wie früher im Parallelogramm der Geschwindigkeiten, mit Hilfe des Sinussatzes sehr leicht berechnen. Man erhält

$$\sin \alpha_1 = \frac{p_2 \cdot \sin \alpha}{p}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{p_1 \cdot \sin \alpha}{p}, \quad (6.)$$

wobei selbstredend $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ sein muss.

Besondere Fälle.

1. Für $\alpha = 0$ erhalten wir aus den letzten Formeln $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, sowie $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2}$ oder

$$p = p_1 + p_2$$

und das will sagen: Bewegt sich ein Punkt gleichzeitig mit zwei Beschleunigungen, welche in derselben Geraden und nach derselben Seite erfolgen, so ist seine absolute Bewegung eine gleichförmig beschleunigte und die Gesamtbeschleunigung gleich der Summe der beiden Einzelbeschleunigungen.

2. Für $\alpha = 180^\circ$ ergibt sich aus der 5. Formel

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2} \text{ oder}$$

$$p = p_1 - p_2,$$

woraus folgt: Hat ein Punkt in derselben Geraden zwei gleichförmig beschleunigte Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen, so ist die resultierende Bewegung ebenfalls gleichförmig beschleunigt, erfolgt nach der Seite der grösseren Beschleunigung hin und die Totalbeschleunigung ist gleich der Differenz der Seitenbeschleunigungen.

3. Für $\alpha = 90^\circ$ geht das Parallelogramm der Beschleunigungen in ein Rechteck über, welches durch die Diagonale p in zwei pythagoräische Dreiecke mit den Katheten p_1 und p_2 zerlegt wird, mithin ist die resultierende Beschleunigung

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

und der Winkel α_1 , welchen p mit p_1 einschliesst, bestimmt sich aus der Formel

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{p_2}{p_1}.$$

§ 46.

Zusammensetzung einer gleichmässig beschleunigten mit einer gleichförmigen Bewegung.

Auf gleiche Weise wie früher ist in Figur 69 die wirkliche Bahn desjenigen mathematischen Punktes konstruiert, welcher in

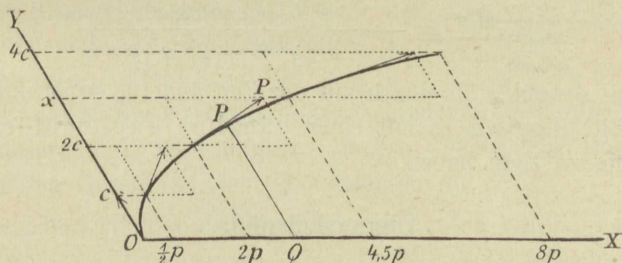


Fig. 69.

den unter beliebigem Winkel α zu einander geneigten Geraden OX und OY von O aus gleichzeitig die Wege

$$OQ = x = \frac{q}{2} t^2 \text{ und } QP = y = ct$$

zurücklegt und zwar während der ersten vier Sekunden; auch die zugehörigen Geschwindigkeiten sind als Diagonalen der punk-

tierten Parallelogramme dargestellt. Nun lehrt uns allerdings schon der Augenschein, dass die Bahn selbst krummlinig ist und die Geschwindigkeiten von einander abweichen (nämlich von O aus wachsen), dass also durch Vereinigung einer gleichmässig beschleunigten und einer gleichförmigen Bewegung eine krummlinige und ungleichförmige Bewegung zustande kommt; allein der strenge Beweis hierfür kann doch nur durch die Rechnung geliefert werden.

Mit Einsetzung von $t = \frac{y}{c}$ aus der rechten in die linke Beziehung erhalten wir $x = \frac{q}{2} \cdot \frac{y^2}{c^2}$ oder

$$y^2 = 2 \cdot \frac{c^2}{q} \cdot x,$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung (Parabel) und ferner aus den beiden Einzelgeschwindigkeiten

$$v_x = \frac{dx}{dt} = q t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = c$$

nach Formel 1 die Totalgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 + (q t)^2} = \sqrt{c^2 + (q t)^2 + 2 c q t \cos \alpha}$$

und hieraus nach § 40, Formel 5 die Totalbeschleunigung

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{q^2 t + c q \cos \alpha}{\sqrt{c^2 + (q t)^2 + 2 c q t \cos \alpha}}$$

Weil sowohl p als v sich mit der Zeit ändern, so ist analytisch festgestellt, dass wir es mit einer gänzlich ungleichförmigen Bewegung zu thun haben.

Übungsbeispiele.

108. Ein Punkt bewegt sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels YOX und durchläuft in OX , bezw. OY die Räume $x = 2 t^2$, bezw. $y = 5 t$. Welches sind seine wirklichen Geschwindigkeiten im ersten Augenblick, sowie nach 1, 2, 3, 4 Sekunden, wenn als Längeneinheit das Meter vorausgesetzt wird?

Antwort: Aus $v = \sqrt{c^2 + (q t)^2}$ ergibt sich $v_0 = 5 m$,
 $v_1 = \sqrt{26} = 5,099 m$, $v_2 = \sqrt{29} = 5,385 m$, $v_3 = \sqrt{34} = 5,831 m$,
 $v_4 = \sqrt{41} = 6,403 m$.

109. Man bestimme die entsprechenden Beschleunigungen.

Resultate: Aus $p = \frac{q^2 t}{\sqrt{c^2 + (qt)^2}}$ folgt $p_0 = 0$, $p_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}$
 $= 0,196 \text{ m}$, $p_2 = \frac{2}{\sqrt{29}} = 0,372 \text{ m}$, $p_3 = \frac{3}{\sqrt{34}} = 0,514 \text{ m}$,
 $p_4 = \frac{4}{\sqrt{41}} = 0,625 \text{ m}$.

§ 47.

Das Zerlegen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Mit Hilfe des Gesetzes vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten, welches wir in § 43 abgeleitet haben, kann man nun auch eine gegebene Geschwindigkeit c in zwei Seitengeschwindigkeiten oder Geschwindigkeitskomponenten zerlegen, d. h. man kann zwei solche Geschwindigkeiten c_1 und c_2 ausfindig machen, dass der Punkt in deren gleichzeitigen Besitz die thatsächliche Geschwindigkeit c haben würde.

Zu diesem Behufe legt man durch den Anfangspunkt A der gegebenen Geschwindigkeit $AB = c$ (Fig. 70) in beliebig gewählten Richtungen zwei Gerade, sodass die eine den Winkel α_1 nach der einen und die andere den Winkel α_2 nach der entgegengesetzten Seite mit c einschliesst und zieht durch B Parallele zu diesen Linien. Dann sind $AB_1 = c_1$ und $AB_2 = c_2$ zwei Geschwindigkeiten, welche in ihrer Vereinigung die resultierende Geschwindigkeit c liefern würden, also die beiden gewünschten Geschwindigkeitskomponenten für c .

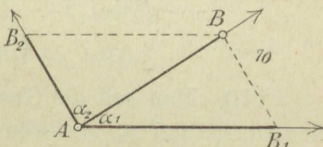


Fig. 70.

Dieselben können auch leicht rechnerisch bestimmt werden; denn durch die Diagonale $AB = c$ zerfällt das Geschwindigkeitsparallelogramm in zwei kongruente Dreiecke, von denen jedes die drei Seiten c_1 , c und c_2 mit den Gegenwinkeln α_2 , $180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$ und α_1 besitzt; es gelten also nach dem Sinussatze die beiden Proportionen

$c_1 : c = \sin \alpha_2 : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$ und $c_2 : c = \sin \alpha_1 : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$,
woraus folgt

$$c_1 = \frac{c \cdot \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{c \cdot \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (7.)$$

Für den speziellen und besonders wichtigen Fall, dass die beiden Seitengeschwindigkeiten c_1 und c_2 normal zu einander angenommen werden, ist das Geschwindigkeitsparallelogramm ein Rechteck und es gelten daher die einfacheren Formeln:

$$c_1 = c \cdot \cos \alpha_1 \text{ und } c_2 = c \cdot \sin \alpha_1. \quad (8.)$$

Ebenso kann man auf Grund des Gesetzes vom Parallelogramm der Beschleunigungen eine gegebene Beschleunigung p in den willkürlich angenommenen Richtungen α_1 und α_2 konstruktiv in die beiden Seitenbeschleunigungen $AB_1 = p_1$ und $AB_2 = p_2$ zerlegen.

Analytisch findet man die letzteren einfach dadurch, dass man in den vorstehenden Formeln 7 und 8 an die Stelle der Geschwindigkeiten c , c_1 und c_2 die Beschleunigungen p , p_1 und p_2 setzt, nämlich allgemein

$$p_1 = \frac{p \cdot \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \text{ und } p_2 = \frac{p \cdot \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (9.)$$

und für den besonderen Fall, dass die Seitenbeschleunigungen p_1 und p_2 rechtwinklig zu einander gewählt werden,

$$p_1 = p \cos \alpha_1 \text{ und } p_2 = p \sin \alpha_1. \quad (10.)$$

Übungsbeispiele.

110. Man soll die Geschwindigkeit $c = 11 \text{ m}$ in zwei Komponenten c_1 und c_2 zerlegen, welche mit c die Winkel $\alpha_1 = 58^\circ$ und $\alpha_2 = 73^\circ$ einschliessen.

Resultate: $c_1 = 13,938 \text{ m}$ und $c_2 = 12,36 \text{ m}$.

111. Ein Punkt bewegt sich geradlinig von der Ruhe aus mit der konstanten Beschleunigung $p = 3 \text{ m}$. Man soll diese Bewegung in zwei Seitenbewegungen zerlegen, welche mit der gegebenen Bewegung die Winkel $\alpha_1 = 33^\circ 33'$ und $\alpha_2 = 54^\circ 32'$ einschliessen und die entsprechenden Beschleunigungen p_1 und p_2 durch Rechnung bestimmen.

Resultate: $p_1 = 2,445 \text{ m}$ und $p_2 = 1,659$.

§ 48.

Der schiefe Centralstoss.

Wenn wir früher (im zweiten Kapitel) unsere Betrachtungen auf den geraden Centralstoss beschränken mussten, so können

wir jetzt den schiefen centrischen Stoss auf jenen zurückführen, indem wir jede der beiden Geschwindigkeiten c_1 und c_2 vor dem Stosse in zwei Komponenten parallel und rechtwinklig zur Stossrichtung zerlegen. Die letzteren werden durch den Stoss nicht beeinflusst, bleiben also ungeändert und die ersten ändern sich nach den Regeln des geraden Centralstosses. Man erhält daher die Geschwindigkeiten beider Körper nach dem Stosse, wenn man die geänderten Geschwindigkeitskomponenten wieder mit den ungeänderten (zur Stossrichtung normalen) Komponenten vereinigt.

Besitzen demnach zwei homogene Kugeln (Fig. 71) mit den Massen M_1 und M_2 unmittelbar vor ihrem Zusammentreffen die Geschwindigkeiten $C_1 D_1 = c_1$ und $C_2 D_2 = c_2$, welche mit der Centrale XX' die Winkel $D_1 C_1 X = \alpha_1$ und

$D_2 C_2 X = \alpha_2$ einschliessen, so sind die Geschwindigkeitskomponenten in der Stossrichtung

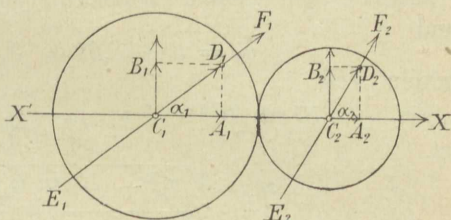


Fig. 71.

$$C_1 A_1 = c_1 \cos \alpha_1 \quad \text{und} \quad C_2 A_2 = c_2 \cos \alpha_2.$$

Dieselben gehen infolge der Stosswirkung nach § 18, Formel 8, bzw. 9 über in

$$v_1 = c_1 \cos \alpha_1 - \frac{(1+k) M_2}{M_1 + M_2} (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)$$

und

$$v_2 = c_2 \cos \alpha_2 + \frac{(1+k) M_1}{M_1 + M_2} (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2),$$

wobei auch für die Massen M_1 und M_2 beider Körper deren Gewichte G_1 und G_2 gesetzt werden können und vereinigen sich mit den durch den Stoss unberührt gelassenen (zur Stossrichtung senkrechten) Seitengeschwindigkeiten

$$C_1 B_1 = c_1 \sin \alpha_1, \quad C_2 B_2 = c_2 \sin \alpha_2$$

nach § 43, Formel 3 zu den resultierenden Geschwindigkeiten

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + (c_1 \sin \alpha_1)^2}, \quad w_2 = \sqrt{v_2^2 + (c_2 \sin \alpha_2)^2}.$$

Die Winkel β_1 und β_2 , unter welchen w_1 und w_2 zu $x'x$ geneigt sind, bestimmen sich auf Grund der Formel 4 in § 43 aus den Beziehungen

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{c_1 \sin \alpha_1}{v_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_2}{v_2}.$$

Es bewege sich z. B. nach Figur 71 die 4 kg schwere rechte Kugel in der Richtung $E_2 F_2$ mit der Geschwindigkeit $c_2 = 6 m$ und die 8 kg wiegende linke Kugel in der Linie $E_1 F_1$ mit der Geschwindigkeit $c_1 = 10 m$; im Momente des Zusammentreffens schliessen c_1 und c_2 mit der Centrale $X'X$ die Winkel $\alpha_1 = 30^\circ$ und $\alpha_2 = 60^\circ$ ein und der Stosskoeffizient sei $k = \frac{1}{2}$. Dann haben wir

$c_1 \cos \alpha_1 = 10 \cdot \cos 30^\circ = 8,66 m$, $c_2 \cos \alpha_2 = 6 \cos 60^\circ = 3 m$,
ferner, wenn wir 8 für M_1 , sowie 4 für M_2 setzen,

$$v_1 = 8,66 - \frac{1}{2}(8,66 - 3) = 8,66 - 2,83 = 5,83 m$$

und

$$v_2 = 3 + 8,66 - 3 = 8,66 m,$$

mithin, weil

$c_1 \sin \alpha_1 = 10 \sin 30^\circ = 5 m$, $c_2 \sin \alpha_2 = 6 \sin 60^\circ = 5,2 m$
ist,

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + (c_1 \sin \alpha_1)^2} = 7,68 m,$$

$$w_2 = \sqrt{v_2^2 + (c_2 \sin \alpha_2)^2} = 10,1 m$$

und endlich aus

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{5}{5,83} = 0,8576, \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{5,2}{8,66} = 0,60046$$

$$\beta_1 = 40^\circ 37', \text{ sowie } \beta_2 = 30^\circ 59'.$$

Übungsbeispiele.

112. Eine 3 kg schwere homogene Kugel, welche sich mit 3 m Geschwindigkeit bewegt, stösst auf eine 12 kg wiegende Kugel unter einem Winkel von 60° gegen die Centrale. Mit welchen Geschwindigkeiten w_1 und w_2 , sowie unter welchen Winkeln β_1 und β_2 zur Centrale gehen beide Kugeln nach dem Stosse auseinander, wenn letzterer ein vollkommen unelastischer ist?

Resultate: $w_1 = 2,615 m$, $w_2 = 0,3 m$, $\beta_1 = 83^\circ 25'$ und $\beta_2 = 0^\circ$.

113. Wie würden sich diese Resultate unter der Voraussetzung abändern, dass die Kugeln beim Stosse vollkommen elastisch sich verhalten?

Antwort: $w_1 = 2,7496 m$, $w_2 = 0,6 m$, $\beta_1 = 109^\circ 6'$ und $\beta_2 = 0^\circ$.

VI. Kapitel.

Die Wurfbewegung.

§ 49.

Der schiefe Wurf.

Eine geeignete Anwendung der in den beiden letzten Kapiteln vorgetragenen Lehren bietet die Wurfbewegung dar, welche durch einen unter beliebigem Winkel $ZAX = \alpha$ (Fig. 72) zum Horizont mit bestimmter Geschwindigkeit c fortgeschleuderten Körper erzeugt wird. Sieht man dabei vom Luftwiderstande ab, so sind nur zwei Bewegungsursachen vorhanden, nämlich die Trägheit

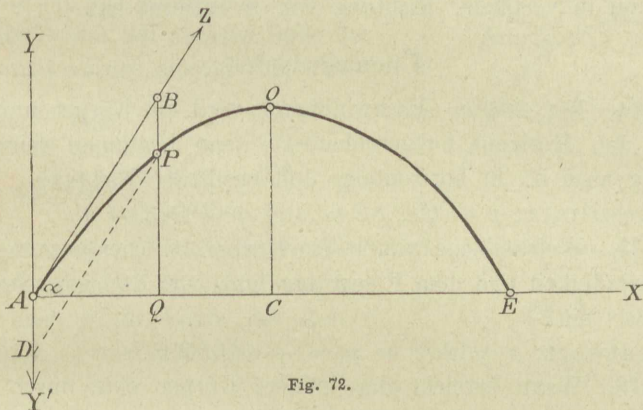


Fig. 72.

des Körpers und die Anziehungskraft der Erde. Bei Abwesenheit der letzteren würde der Körper weder die ursprüngliche Richtung AZ noch seine Geschwindigkeit c ändern, mithin nach t Sekunden den Weg

$$AB = ct$$

zurücklegen und infolge der Schwerkraft allein müsste er sich mit der Beschleunigung $g = 9,81 \text{ m}$ dem Erdmittelpunkt nähern, also während der Zeit t die vertikale Strecke

$$AD = BP = \frac{g}{2} t^2$$

durchfallen. Da aber beide Kräfte gleichzeitig wirken, so ist der wahre Ort unseres Körpers der vierte Eckpunkt P des aus den Seiten AB und AD konstruierten Bewegungsparallelogramms $ABPD$.

Beziehen wir jetzt den Punkt P auf das rechtwinklige System YAX , indem wir seine Koordinaten $AQ = x$ und $QP = y$ setzen, so erhalten wir nach Figur 72

$$AQ = AB \cos \alpha$$

oder

$$x = ct \cos \alpha \dots \dots \dots (1.)$$

und $QP = QB - BP = AB \sin \alpha - BP$ oder

$$y = ct \sin \alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2, \dots \dots \dots (2.)$$

zwei Formeln, mit Hilfe welcher man leicht berechnen kann, wie weit sich der unter dem Elevationswinkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfene Körper nach t Sekunden in horizontaler und in vertikaler Richtung von A entfernt hat.

Übungsbeispiele.

114. Mit 200 m Geschwindigkeit wird ein Körper unter 30° gegen den Horizont fortgeschleudert; man bestimme seine Entfernung nach $4''$ in horizontaler und vertikaler Richtung.

Resultate: $x = 692,82 \text{ m}$ und $y = 243,04 \text{ m}$.

115. Welche Lage nimmt ein Körper, welcher jetzt mit 40 m Geschwindigkeit und dem Elevationswinkel von 60° geworfen wird, nach $10''$ ein?

Antwort: $x = 200 \text{ m}$, $y = -144,08 \text{ m}$.

116. Wann erreicht der letztere Körper eine durch seinen Ausgangspunkt A gelegte Horizontalebene?

Antwort: Für $y = 0$ ergibt sich aus der 2. Formel $t = 7,079''$.

117. Wie weit hat er sich dann von A entfernt?

Antwort: $x = 141,58 \text{ m}$.

§ 50.

Grösse und Richtung der Geschwindigkeit in irgend einem Punkte der Flugbahn.

Aus den Formeln 1 und 2 erhalten wir laut § 37

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c \cos \alpha,$$

die Horizontalgeschwindigkeit Pa (Fig. 73) und

$$v_y = \frac{dy}{dt} = c \sin \alpha - g t,$$

die Vertikalgeschwindigkeit Pb , welcher der unter dem Elevationswinkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit c von A aus geworfene materielle Punkt P nach irgend einer Zeit t besitzt. Hieraus ergibt sich nach § 43, Formel 3 seine resultierende Geschwindigkeit Pc gleich

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{c^2 + 2cgt \sin \alpha - g^2 t^2}$$

$$= \sqrt{c^2 - 2g \left(ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \right)},$$

oder mit Benutzung von Formel 2 des vorigen Paragraphen

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}, \quad \dots \dots \dots (3.)$$

während sich auf Grund der Beziehung 4 in § 43 der Winkel $cPa = \beta$, welchen v mit der rechten Seite der Abscissenachse einschliesst, aus

$$tg \beta = \frac{v_y}{v_x} \text{ oder}$$

$$tg \beta = \frac{c \sin \alpha - gt}{c \cos \alpha} \quad (4.)$$

bestimmen lässt. Diese letzte Gleichung sagt aus, dass $tg \beta$ und sonach auch β im Laufe der Zeit t abnimmt; speziell für $c \sin \alpha - gt = 0$ oder

$$t = \frac{c \sin \alpha}{g}$$

ist $\beta = 0$, folglich P im Kulminationspunkt O angekommen und daher $y = CO$ am grössten geworden. Wir erhalten dieses Maximum von y durch Einsetzung des vorstehenden Wertes von t in Formel 2, nämlich

$$y_{\max} = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Dagegen können wir aus Formel 3 schliessen, dass die Geschwindigkeit v des geworfenen Körpers mit zunehmenden y , also im aufsteigenden Ast der Flugbahn, abnimmt und den kleinsten Wert an der höchsten Stelle O erhält, es ergibt sich für obigen Wert von y aus der 3. Formel

$$v_{\min} = \sqrt{c^2 (1 - \sin^2 \alpha)} = c \cos \alpha;$$

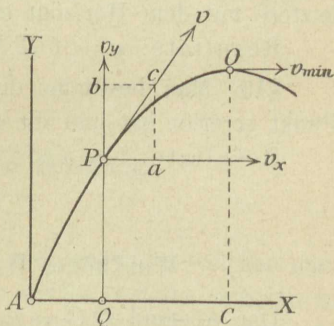


Fig. 73.

von hier an, im absteigenden Teil der Flugbahn nimmt y wieder ab, demnach wächst v und durchläuft rückwärts dieselbe Reihe von Werten wie vorhin, bis zur Anfangsgeschwindigkeit c , welche eintritt, wenn y zum zweiten Male 0 geworden und der Punkt in $O X$ angekommen ist.

Übungsbeispiele.

118. Ein Körper wird im luftleeren Raume unter dem Winkel $\alpha = 23^\circ 45'$ mit der Geschwindigkeit $c = 360 \text{ m}$ fortgeschleudert; wie hoch ist er nach 5 Sekunden gestiegen, welches ist in diesem Momente seine Geschwindigkeit v und welchen Winkel β schliesst letztere mit dem Horizont ein.

Resultate: $y = 602,3 \text{ m}$, $v = 343,2 \text{ m}$ und $\beta = 13^\circ 22'$.

119. Man bestimme die Zeit, nach welcher er den höchsten Punkt erreicht hat und die zugehörige maximale Steighöhe.

Resultate: $t = 14,78''$ und $y_{\max} = 1071,4 \text{ m}$.

§ 51.

Wurfhöhe, Wurfzeit und Wurfweite.

Der Abstand $OC = y_{\max}$ des höchsten Punktes O von der durch A gelegten Horizontalebene AX wird auch die Wurfhöhe genannt und mit h bezeichnet. Es ist deshalb

$$h = \frac{(c \sin \alpha)^2}{2g} \dots \dots \dots (5.)$$

und wir sehen daraus, dass h um so grösser ausfällt, je grösser einerseits c und andererseits α ist. Bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit c erhalten wir für $\alpha = 90^\circ$ den denkbar grössten Wert $h_{\max} = \frac{c^2}{2g}$, die Steighöhe des senkrechten Wurfes.

Ausser A und O bildet noch einen wichtigen Punkt die Stelle E (Fig. 72), in welcher die Flugbahn die durch A gelegte Horizontalebene schneidet. Um dorthin zu gelangen, braucht der Körper oder materielle Punkt die Zeit t , welche sich aus Formel 2 für $y = 0$ ergibt und welche auch die Wurfzeit oder Wurfdauer genannt wird. Wir erhalten

$$t = \frac{2c \sin \alpha}{g} \dots \dots \dots (6.)$$

und bemerken, dass sie genau das doppelte derjenigen Zeit be-
trägt, bis zu welcher der Scheitel O der Flugbahn erreicht wurde.

Endlich ist noch von Wichtigkeit die Entfernung $AE = w$,
welche den Namen Wurfweite führt und sich aus der Formel 1
bestimmen lässt, indem t gleich der in Formel 6 angegebenen
Wurfdauer und $x = w$ gesetzt wird. Benutzen wir ausserdem die
bekannte Beziehung $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2 \alpha$, so ergibt sich

$$w = \frac{c^2 \sin 2 \alpha}{g} \dots \dots \dots (7.)$$

und da der Sinus für den Winkel 90° den höchsten Wert 1 er-
reicht, so erhalten wir bei bestimmter Anfangsgeschwindigkeit c
für $2 \alpha = 90^\circ$ oder

$$\alpha = 45^\circ$$

die möglichst grosse Wurfweite

$$w_{\max} = \frac{c^2}{g}.$$

Mit Hilfe der aus No. 7 folgenden Beziehung

$$\sin 2 \alpha = \frac{w g}{c^2}$$

kann der Elevationswinkel α berechnet werden, unter welchen man
den Körper mit der Geschwindigkeit c werfen müsste, um ein in
horizontaler Ebene w Meter entferntes Ziel zu treffen; allein da
bekanntlich $\sin 2 \alpha = \sin (180^\circ - 2 \alpha)$ ist, so giebt es im allge-
meinen zwei verschiedene Werte von α , welche dieser Beding-
genügen; denn bezeichnet α den einen, so ist der andere $\alpha' = 90^\circ - \alpha$,
woraus man sieht, dass der erste ebensoweit von O entfernt ist,
als der zweite von 90° . Diese Eigenschaft erhält eine noch deut-
lichere Form, wenn man $\alpha = 45^\circ - \gamma$ setzt, weil dadurch $\alpha' = 45^\circ + \gamma$
und somit erkennbar wird, dass α und α' von 45° gleich weit
abstehen.

Übrigens sind diese beiden Winkel bloß dann möglich, wenn

$$\frac{w g}{c^2} < 1 \text{ oder } w < \frac{c^2}{g}$$

ist, sie sind speziell einander gleich, nämlich jeder gleich 45° , sobald

$$\frac{w g}{c^2} = 1 \text{ oder } w = \frac{c^2}{g}$$

sein sollte. Wäre endlich drittens

$$\frac{w g}{c^2} > 1 \text{ oder } w > \frac{c^2}{g},$$

so könnte das Ziel bei der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit c überhaupt nicht erreicht werden, weil es gar keinen Winkel giebt, dessen Sinus grösser als 1 ist.

Übungsbeispiele.

120. Unter welchem Winkel muss ein Körper mit 310 m Anfangsgeschwindigkeit geschleudert werden, wenn er ein in derselben Horizontalebene liegendes 2000 m entferntes Ziel treffen soll?

Antwort: $\alpha = 6^\circ 17' 44''$, bezw. $\alpha' = 83^\circ 42' 16''$.

121. Mit einem Geschütz, für welches die Anfangsgeschwindigkeit der Geschosse 560 m beträgt, soll ein in derselben Horizontalebene gelegenes und 4900 m entferntes Ziel getroffen werden. Man berechne

1. die notwendigen Elevationswinkel α und α' ,
2. die zugehörigen Wurfzeiten t und t' ,
3. die entsprechenden Wurfhöhen h und h' ,
4. die Geschwindigkeiten in den Kulminationspunkten v_{\min} und v'_{\min} für beide Fälle.

Resultate: $\alpha = 4^\circ 24' 30''$, $\alpha' = 85^\circ 35' 30''$, $t = 8,776''$, $t' = 113,83''$, $h = 94,276\text{ m}$, $h' = 15889\text{ m}$, $v_{\min} = 558,33\text{ m}$, $v'_{\min} = 42,78\text{ m}$.

§ 52.

Die Gleichung der Wurfkurve.

Mit Einsetzung von $t = \frac{x}{c \cos \alpha}$ aus der 1. in die 2. Formel des § 49 entsteht

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha}, \quad \dots \quad (8.)$$

die Gleichung der Flugbahn oder

$$y = \left(1 - \frac{g x}{2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha}\right) \cdot x \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun folgt aus Formel 7, da $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ist,

$$w = \frac{2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad \text{oder} \quad \frac{g}{2 c^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{w}$$

und durch Multiplikation der letzteren Beziehung mit der aus No. 5 sich ergebenden Gleichung $\frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g} = h$

$$\frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{w} \text{ oder } \operatorname{tg} \alpha = 4 \frac{h}{w}$$

und die zweite Gleichung für y geht über in

$$y = \left(1 - \frac{x}{w}\right) x \cdot \frac{4h}{w}$$

oder

$$y = \frac{4h}{w^2} (w - x) x, \quad \dots \dots \dots (9.)$$

die Gleichung der Wurfkurve in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Abscissenachse horizontal läuft und dessen Ursprung mit dem Anfangspunkt der Bewegung zusammenfällt; h und w bedeuten die Wurfhöhe und die Wurfweite.

Übungsbeispiel 122. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $c = 100 \text{ m}$ unter dem Winkel 30° in den luftleeren Raum hinausgeschleudert; man entwickle mit Benutzung von Formel 8 die Gleichung seiner Flugbahn.

$$\text{Resultat: } y = \frac{x}{3} \sqrt{3} - \frac{g x^2}{15000} = 0,5774 x - 0,000654 x^2.$$

§ 53.

Die Wurfkurve ist eine Parabel mit vertikaler Achse.

Um zu erkennen, was für eine krumme Linie die Gleichung No. 9 darstellt, gehen wir zu einem neuen, ebenfalls rechtwinkligen Koordinatensystem über, nämlich zu einem System, dessen Ursprung mit dem Kulminationspunkt O der Wurfkurve zusammenfällt, dessen Abscissenachse $O X'$ vertikal steht und dessen Ordinatenachse $O Y'$ folglich horizontal gerichtet ist. Sind nun für irgend einen Punkt P in Fig. 74

$$A Q = x \text{ und } Q P = y$$

die alten, dagegen

$$O Q' = x' \text{ und } Q' P = y$$

die neuen Koordinaten, so erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit der Beziehungen:

$$A Q = A C + C Q, \quad Q P = Q' C = O C - O Q'$$

oder

$$x = \frac{w}{2} + y', \quad y = h - x'$$

und es geht mit Einsetzung dieser Werte die bereits erwähnte Beziehung 9 des vorigen Paragraphen über in

$$h - x' = \frac{4h}{w^2} \left(\frac{w}{2} - y' \right) \left(\frac{w}{2} + y' \right) = \frac{4h}{w^2} \left(\frac{w^2}{4} - y'^2 \right),$$

$$h - x' = h - \frac{4h y'^2}{w^2}, \quad \frac{4h y'^2}{w^2} = x'$$

oder

$$y'^2 = \frac{w^2}{4h} \cdot x'.$$

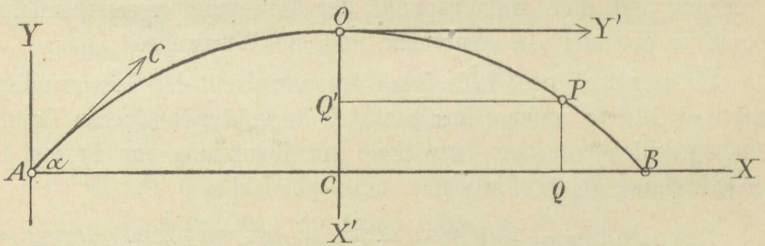


Fig. 74.

Da wir aber in der vorstehenden Formel die Scheitelgleichung einer Parabel erkennen, so ist die in der Überschrift dieses Paragraphen enthaltene Behauptung bewiesen.

Der Parameter dieser Wurfparabel ist

$$2p = \frac{w^2}{4h},$$

oder mit Rücksicht auf die beiden Formeln 7 und 5

$$2p = \frac{4c^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \cdot \frac{g}{2c^2 \sin^2 \alpha} = \frac{2c^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

und mithin ergibt sich als Halbparameter der Wurfparabel

$$p = \frac{(c \cdot \cos \alpha)^2}{g} \dots \dots \dots (10.)$$

Diese Formel sagt uns, dass der Halbparameter p von der Anfangsgeschwindigkeit c des geworfenen Körpers, sowie vom Elevationswinkel α abhängt und zwar wird p um so grösser sein, je grösser c und je kleiner α ist.

Übungsbeispiel 123. Man bestimme den Halbparameter für $c = 6 m$ und $\alpha = 52\frac{1}{2}^\circ$.

Resultat: $p = 1,3599 m$.

§ 54.

Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse.

Wenn also ein Körper im luftleeren Raume mit der Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Elevationswinkel α fortgeschleudert wird, so beschreibt der Schwerpunkt des ersteren eine Parabel mit vertikaler Achse und dem Halbparameter

$$p = \frac{(c \cos \alpha)^2}{g}.$$

Nach der beliebigen Zeit t hat der genannte Punkt in horizontaler und vertikaler Richtung die Wege

$$x = c t \cos \alpha \quad \text{und} \quad y = c t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$$

zurücklegt, während seine mit der Parabeltangente zusammenfallende Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{c^2 - 2 c g t \sin \alpha + g^2 t^2} = \sqrt{c^2 - 2 g y}$$

unter dem durch die Formel

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{c \sin \alpha - g t}{c \cos \alpha}$$

bestimmten Winkel β zum Horizont gerichtet ist. Diese Geschwindigkeit nimmt im aufsteigenden Aste der Flugbahn allmähig ab und erreicht im höchsten Punkte der letzteren nach der Zeit

$$t_1 = \frac{c \sin \alpha}{g}$$

den kleinsten Wert

$$v_{\min} = c \cos \alpha,$$

dagegen wächst v im absteigenden Parabelast und durchläuft in umgekehrter Reihenfolge dieselben Zahlenwerte wie im aufsteigenden, sodass der Körper nach

$$t_2 = 2 t_1 = \frac{2 c \sin \alpha}{g}$$

Sekunden wieder mit der Anfangsgeschwindigkeit c in der durch den Ausgangspunkt A der Bewegung gelegten Horizontalebene

anlangt. Im letzteren Moment ist der Körper von A um die Wurfweite

$$w = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$

entfernt, wohingegen sein grösster Vertikalabstand von der genannten Horizontalebene durch die Wurfhöhe

$$h = \frac{(c \sin \alpha)^2}{2g}$$

dargestellt wird.

Die Wurfweite w wächst bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit c mit dem Elevationswinkel α und erreicht für $\alpha = 45^\circ$ ihren grössten Wert

$$w_{\max} = \frac{c^2}{g},$$

bei weiter wachsendem α nimmt w wieder ab. Die Wurfhöhe h nimmt dagegen bei steigendem α beständig zu und wird am grössten für $\alpha = 90^\circ$, wo sie die Steighöhe

$$h_{\max} = \frac{c^2}{2g}$$

des vertikalen Wurfes repräsentiert.

Alles dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Wurfbewegung im luftleeren Raume stattfindet. Bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes, welcher mit der Geschwindigkeit rasch wächst, fallen die Wurfweite w , die Wurfhöhe h und die Geschwindigkeit v kleiner, dagegen die Wurfdauer t grösser aus, als es die vorstehenden Formeln verlangen und zwar wird die Abweichung um so bedeutender, je grösser die Anfangsgeschwindigkeit c war. Die Flugbahn selbst ist dann keine Parabel mehr, sondern eine andere, parabelähnliche Kurve, welche »ballistische Linie« genannt wird. Die Aufstellung ihrer Gleichung, sowie die allgemeine Berechnung von v , h , w und t würde uns hier zu weit führen und bietet ohnehin kein maschinentechnisches Interesse.

§ 55.

Übungsbeispiele.

124. Seit dem Moment, wo ein Körper unter 36° zum Horizont mit 50 m Geschwindigkeit fortgeschleudert wurde, sind gerade $4''$

verflossen. Welche Räume hat der Körper in horizontaler und vertikaler Richtung zurückgelegt, welches ist seine Horizontal-, seine Vertikal- und seine wirkliche Geschwindigkeit im genannten Augenblicke und unter welchem Winkel ist die letztere gegen den Horizont gerichtet?

Antwort: $x = 161,8 \text{ m}$, $y = 39,08$; $v_x = 40,45 \text{ m}$, $v_y = -9,85 \text{ m}$; $v = 46,71 \text{ m}$, $\beta = 166^\circ 19'$.

125. Ein materieller Punkt wird mit 10 m Geschwindigkeit unter 45° gegen den Horizont fortgeschleudert; man bestimme die Wurfweite, die Wurfhöhe und die Gleichung der Flugbahn.

Resultate: $w = \frac{100}{g} = 10,1936 \text{ m}$; $h = \frac{25}{g} = 2,5484 \text{ m}$

und $y = x - \frac{g x^2}{100} = x - 0,0981 x^2$.

126. Unter welchem Elevationswinkel α und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit c müsste ein Körper im luftleeren Raume geworfen werden, damit er 1000 m Wurfweite und $94,3 \text{ m}$ Wurfhöhe erreicht?

Antwort: $\alpha = \sim 20^\circ 40'$ und $c = 121,88 \text{ m}$.

127. Nach wie viel Sekunden passiert dieser Körper den höchsten Punkt und welche Geschwindigkeit besitzt er im betreffenden Momente?

Antwort: $t = \sim 4,4''$ und $v = 114,04 \text{ m}$.

128. Den Halbparameter der Wurfparabel zu berechnen.

Resultat: $p = 1325,5 \text{ m}$.

129. Unter welchem Elevationswinkel muss der Lauf eines Geschützes gerichtet werden, um bei der Anfangsgeschwindigkeit c des Geschosses einen Punkt P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 zu treffen, wenn vom Luftwiderstande abgesehen wird?

Lösung: Da P_1 auf der Flugbahn liegen muss, so haben seine Koordinaten der Gleichung zu genügen. Setzte man aber

in letzterer $x = x_1, y = y_1, \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha}$ und löst die hierdurch entstehende (quadratische) Gleichung für $tg \alpha$ auf, so erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 - g(2c^2 y_1 + g x_1^2)}}{g x_1}.$$

130. Was ist in voriger Aufgabe über die Anzahl, bezw. Beschaffenheit der Werte von α zu sagen?

Antwort: Aus der letzten Formel ergeben sich entweder zwei reelle und verschiedene oder zwei reelle und gleiche oder zwei komplexe Werte, je nachdem

$$c^4 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} g(2c^2 y_1 + g x_1^2)$$

ist. Im ersten Falle kann das Ziel P_1 unter zwei Winkeln α_1 und α_2 erreicht werden: der grössere Winkel α_1 liefert den sogenannten Bogen- und der kleinere Winkel α_2 den sogenannten scharfen Schuss; im zweiten Falle ist $\alpha_2 = \alpha_1$, also nur ein Winkel möglich, unter welchem P_1 getroffen werden kann und im dritten Falle wäre P_1 bei der Anfangsgeschwindigkeit c überhaupt nicht erreichbar.

131. Man will mit einem Geschütze einen Punkt treffen, dessen horizontale und vertikale Entfernung 1500 und 300 m betragen. Unter welchem Winkel α zum Horizont müsste man den Lauf richten, wenn das Geschoss 400 m Anfangsgeschwindigkeit besitzt und vom Luftwiderstande abgesehen wird?

Antwort: $\alpha_1 = \sim 87^\circ$, $\alpha_2 = \sim 67^\circ 50'$.

VII. Kapitel.

Freie Bewegung des materiellen Punktes.

§ 56.

Beziehungen zwischen Kraft und Bewegung.

Bereits in der Elementarmechanik wurde »Kraft« definiert als dasjenige, was Bewegung erzeugt, hindert oder abändert, was also die Bewegung eines Körpers irgend wie beeinflusst; wir können daher auch sagen: Wird von einem bewegten Körper entweder die Grösse oder die Richtung der Geschwindigkeit geändert, so ist die Ursache davon immer eine Kraft.

Wir betrachten nun zunächst die Bewegung des materiellen Punktes, d. h. eines Körpers mit der endlichen Masse m , dessen Dimensionen im Verhältnis zu den übrigen Raumgrößen verschwindend klein sind, mit Rücksicht auf die ihn beeinflussenden Kräfte und setzen voraus, dass der Punkt schon die konstante Geschwindigkeit c besitzt.

Wirkt vorerst ausser der Trägheit gar keine Kraft, so wird weder die Grösse noch die Richtung von c geändert und der materielle Punkt verfolgt nach dem ersten Grundgesetze vom Beharrungsvermögen eine geradlinige gleichförmige Bewegung.

Wenn dagegen beliebig viele Kräfte auf den Punkt wirken, so lassen sich dieselben, weil sie letzteren zum gemeinschaftlichen Angriffspunkt besitzen, immer durch eine einzige Kraft P ersetzen und es genügt daher zu untersuchen, was geschieht, falls der die Geschwindigkeit c besitzende materielle Punkt von der Masse m der Wirkung lediglich einer Kraft P ausgesetzt ist. Hierbei kommt es aber wesentlich auf die Richtung von P an und wir können diesbezüglich drei Fälle unterscheiden.

Fällt nämlich erstens die Wirkungslinie von P mit der Richtung von c zusammen, so erteilt nach dem dritten Grundgesetze die Kraft P dem materiellen Punkte die Beschleunigung

$$p = \frac{P}{m}, \dots \dots \dots (1.)$$

welche positiv oder negativ ist, je nachdem P im Sinne von c wirkt oder entgegengesetzt. Wäre P konstant, so müsste, weil m sich nicht ändert, auch p konstant sein und mithin der materielle Punkt eine gleichförmig beschleunigte, bezw. gleichförmig verzögerte Bewegung ausführen; wäre jedoch P variabel, so gewänne im Hinblick auf die obige Formel auch p den Charakter der Veränderlichkeit und der materielle Punkt bewegte sich ungleichförmig. Endlich würde sich insbesondere für $P = 0$ auch $p = 0$ ergeben, was die Schlussfolgerungen aus der allerersten Annahme bestätigt.

Wenn zweitens die Wirkungslinie von P mit der Bewegungsrichtung einen rechten Winkel einschliesst, so erzeugt P abermals eine in ihre Richtung fallende Beschleunigung p , welche sich mit c zu einer resultierenden Bewegung zusammensetzt, es wird

demnach die Richtung des materiellen Punktes geändert und zwar ununterbrochen, sobald P zur augenblicklichen Bewegungsrichtung normal bleibt, d. h. es entsteht eine krummlinige Bahn.

Der dritte und allgemeinste Fall, dass die den materiellen Punkt angreifende Kraft P einen schiefen Winkel mit der momentanen Richtung desselben bildet, lässt sich auf jene beiden Fälle zurückführen, indem man P in zwei Komponenten zerlegt, von welchen die eine in die Richtung der Bewegung fällt, während die andere dazu senkrecht steht. Jene stellt eine Tangentialkraft dar, welche c vermehrt, bezw. vermindert und diese als Normalkraft ändert stetig die Richtung von e , es entsteht demnach eine krummlinige Bewegung mit veränderlicher Geschwindigkeit.

Wie im vorstehenden aus den vorhandenen Kräften auf die Bewegung des materiellen Punktes Schlüsse gezogen wurden, so kann man auch umgekehrt aus den Eigenschaften einer gegebenen Bewegung auf die bewegenden Kräfte schliessen. Bewegt sich z. B. ein materieller Punkt in gerader Linie gleichförmig beschleunigt, so ist sicher, dass auf ihn eine konstante Kraft in der Geraden und im Sinne der Bewegung wirkt, durchläuft er dagegen eine krumme Linie, so kann die Ursache nur eine Kraft sein, deren Wirkungslinie mit der Kurventangente einen (im allgemeinen sich ändernden) Winkel einschliesst.

Als passendes Erläuterungsbeispiel können wir den schrägen Wurf im luftleeren Raume vorführen. Sowie der materielle Punkt mit der Geschwindigkeit c fortgeschleudert ist, wirkt auf ihn ausser der Trägheit lediglich die Schwerkraft stetig mit immer gleicher Stärke nach dem Erdschwerpunkte hin. Denken wir uns dieselbe in jedem Augenblicke in zwei Komponente tangential und normal zur Flugbahn zerlegt, so wirkt die letztere beständig richtungsändernd und die erstere verzögernd im aufsteigenden und beschleunigend im absteigenden Aste der Wurfparabel. Weil der Winkel, welchen die Schwere mit der Bahnrichtung bildet, im Laufe der ersten halben Wurfdauer wächst, so nimmt die Normalkomponente zu und die Tangentialkomponente ab, woraus sich erklärt, dass vom Ausgangs- nach dem Kulminationspunkte hin die Krümmung der Wurfbewegung grösser, dagegen die Ge-

schwindigkeit kleiner wird. Im absteigenden Kurvenzweig findet dann das Entgegengesetzte statt.

Der Anschaulichkeit halber pflegt man übrigens die für die Bewegung des materiellen Punktes gewonnenen Resultate auf ganze Körper zu übertragen, was auch erlaubt ist, sobald die Dimensionen der letzteren so gering sind, dass sie im Verhältnis zu denjenigen ihrer Bahnen keine Berücksichtigung erheischen.

§ 57.

Die gleichförmige Kreisbewegung.

Wir betrachten jetzt den einfachen und sehr wichtigen Fall, wo ein materieller Punkt A die Peripherie eines Kreises vom Radius $OA = OB = r$ (Fig. 75) gleichförmig durchläuft. Weil die Umfangsgeschwindigkeit, die wir mit v bezeichnen wollen, sich nicht ändert, so kann auch keine Tangentialkraft vorhanden sein, dagegen muss die stetige Richtungsänderung hervorgerufen werden durch eine Kraft P , welche fortwährend senkrecht zur Kreistangente wirkt, also im Mittelpunkt O angenommen werden darf. Diese Normalkraft P , deren Grösse uns vorläufig unbekannt ist, heisst Centripetalkraft und erzeugt im Punkte A nach O hin die sogenannte Normalbeschleunigung p , welche wir dadurch bestimmen können, dass wir die wirkliche Bewegung von A in die beiden Richtungen der Tangente AC und der Normale AO zerlegen.

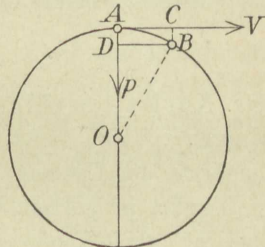


Fig. 75.

Angenommen, der Punkt sei in der verschwindend kleinen Zeit τ von A nach B gelangt, so ist nach dem Gesetze vom Parallelogramm der Bewegungen der während des Zeitelementes τ in der Richtung der Tangente mit der konstanten Geschwindigkeit v zurückgelegte Weg

$$AC = v \tau$$

und der in der Richtung AO mit der Beschleunigung p durchlaufene Raum

$$AD = \frac{p}{2} \tau^2.$$

Verbinden wir nunmehr B mit O , so erhalten wir das rechtwinklige Dreieck BDO und es gilt daher nach dem Pythagoräischen Lehrsatz die Gleichung

$$\overline{BO}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DO}^2,$$

woraus mit Einführung von $BO = r$, $BD = AC = v \tau$ und $DO = OA - AD = r - \frac{p}{2} \tau^2$ folgt

$$r^2 = v^2 \tau^2 + r^2 - p r \tau^2 + \frac{p^2}{4} \tau^4,$$

$$p r \tau^2 = v^2 \tau^2 + \frac{p^2}{4} \tau^4,$$

$$p r = v^2 + \frac{p^2}{4} \tau^2,$$

oder, weil τ eine unendlich kleine Grösse ist und daher auf der rechten Seite der letzten Beziehung das zweite Glied gegen das endliche erste Glied verschwindet,

$$p r = v^2.$$

Hieraus ergibt sich

$$p = \frac{v^2}{r}, \dots \dots \dots (2.)$$

die Normalbeschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung. Man sieht, dass letztere direkt proportional ist dem Quadrate der Umfangs- oder Tangentialgeschwindigkeit v , dagegen umgekehrt proportional dem Halbmesser r der Kreisbahn, dass sie also mit wachsendem v quadratisch zu- und mit wachsendem r einfach abnimmt.

Übungsbeispiele.

132. Ein Punkt durchläuft den Umfang eines Kreises von $2 m$ Radius in 3 Sekunden 5 mal; man bestimme seine Tangentialgeschwindigkeit v und seine Normalbeschleunigung p .

Resultate: $v = 20,944 m$ und $p = 219,325 m$.

133. Die Normalbeschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung allgemein aus dem Halbmesser r der Kreisbahn und der Tourenzahl n zu entwickeln.

$$\text{Resultat: } p = \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \cdot r n^2 = \sim 0,011 r n^2.$$

134. Man löse die vorige Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte $r = 3 m$ und $n = 49$.

Resultat: $p = 79,233 m$.

135. Ein materieller Punkt kommt mit $12 m$ Geschwindigkeit in den Bereich einer Kraft, welche ihn mit $3 m$ Beschleunigung anzieht. In welchem Abstände wird der erstere den Sitz der letzteren umkreisen?

Antwort: Im Abstände $r = \frac{v^2}{p} = \frac{144}{3} = 48 m$.

136. Welche Tangentialgeschwindigkeit v müsste der materielle Punkt haben, damit er sich um den Sitz einer Kraft, welche ihn mit $p = 2 m$ Beschleunigung anzieht, im unveränderten Abstände $r = 50 m$ bewegt?

Antwort: $v = \sqrt{p r} = 10 m$.

§ 58.

Centripetal- und Centrifugalkraft.

Von der Normalbeschleunigung $p = \frac{v^2}{r}$ können wir jetzt auch auf die Centripetalkraft P schliessen, welche jene erzeugt, indem wir den Wert von p aus (2) in (1) einsetzen und die so entstehende Beziehung für P auflösen. Bezeichnen wir dabei, weil es sich bei praktischen Anwendungen nicht um einen materiellen Punkt, sondern um einen rotierenden Körper handelt, die Masse des letzteren mit M , so müssen wir noch M statt m schreiben und erhalten

$$P = \frac{M v^2}{r}, \quad \dots \dots \dots (3.)$$

die Centripetalkraft desjenigen Körpers von der Masse M , welcher sich mit der Geschwindigkeit v im Kreise vom Halbmesser r bewegt, unter der schon früher gemachten Voraussetzung, dass die Abmessungen des Körpers im Verhältnis zu r als unerheblich vernachlässigt werden dürfen.

Will man für die Masse M das Gewicht G des Körpers einführen, so geht mit Benützung von

$$M = \frac{G}{g}$$

No. 3 über in die Beziehung

$$P = \frac{G v^2}{g r}, \dots \dots \dots (4.)$$

deren Gebrauch voraussetzt, dass sowohl v und g , als auch P und G mit gleichen Benennungen in die Rechnung gebracht werden.

Zuweilen wünscht man statt der Umfangsgeschwindigkeit v die Tourenzahl n zu benutzen. Für diesen Fall erhält man durch Substitution von

$$v = \frac{\pi r n}{30}$$

in No. 4 die geeignete Formel

$$P = \frac{\pi^2}{900 g} \cdot G r n^2,$$

oder, weil der konstante Zahlenkoeffizient

$$\frac{\pi^2}{900 g} = 0,001178 = \sim 0,0012$$

ist,

$$P = 0,0012 G r n^2, \dots \dots \dots (5.)$$

worin aber nun r stets in Metern auszudrücken und P mit G gleichnamig ist.

Sollte endlich die Winkelgeschwindigkeit ω bekannt sein, so würde sich mit Einsetzung von

$$v = \omega r$$

in No. 3 die Centripetalkraft

$$P = \frac{G r \omega^2}{g} \dots \dots \dots (6.)$$

ergeben, wo nun P und G , sowie g und r gleich benannt sind.

Zum Schlusse haben wir uns noch daran zu erinnern, dass nach dem zweiten Grundgesetze der Mechanik eine Kraft niemals allein auftritt, sondern stets eine zweite hervorruft, welche gleiche Grösse wie jene hat, aber genau entgegengesetzt gerichtet ist. So erzeugt auch die Centripetalkraft immer eine Gegenkraft, welche Centrifugal-, auch Flieh- oder Schwungkraft genannt wird und von deren Vorhandensein man sich durch vielerlei Erscheinungen überzeugen kann.

Eine solche bietet z. B. der bekannte Versuch, bei welchem man ein mit Wasser gefülltes Gefäss an das eine Ende einer Schnur befestigt (Fig. 76) und es hernach möglichst schnell im Kreise herumschwingt. Ist nun die Umfangsgeschwindigkeit genügend gross, so bleibt das Wasser selbst in den höchsten Punkten der Bahn, wo es in Folge seines Gewichtes herausfallen sollte, doch im Gefässe haften und zwar aus dem Grunde, weil die Centrifugalkraft vom Mittelpunkte der Drehung nach der freien Wasseroberfläche wirkt und das Wasser in das Gefäss zurückdrückt, sobald nur die Schwingkraft etwas grösser ist als das Wassergewicht. Die Centripetalkraft kommt als Zugspannung in der Schnur zum Ausdruck.

Weil die Centrifugal- mit der Centripetalkraft an Grösse übereinstimmt, so kann erstere selbstverständlich ebenfalls mit Hilfe der Formeln 3 bis 6 bestimmt werden. Diese Formeln aber lassen erkennen, dass beide Kräfte direkt proportional sind der Masse, bezw. dem Gewichte, sowie dem Quadrate der Geschwindigkeit des rotierenden Körpers, dagegen umgekehrt proportional dem Halbmesser der Kreisbahn; d. h. verdreifacht man z. B. das Gewicht, so wird P dreimal so gross, verdreifacht man aber die Geschwindigkeit, so wird P neunmal so gross und verdreifacht man den Radius, so beträgt P nur den dritten Teil seines vorigen Wertes.

Wenn wir die Umfangsgeschwindigkeit v eines rotierenden Körpers, z. B. eines Schwungrades, allmählig grösser werden lassen, so wächst die Centrifugalkraft in noch viel stärkerem Grade, nämlich im quadratischen Verhältnisse, und da den Schwingkräften nur die Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen des Materiales entgegenwirken, so wird schliesslich ein Moment eintreten, wo die ersteren die Oberhand gewinnen und das Schwungrad in Stücke fliegt. Es würde indes ein Irrtum sein, wenn man meinte, die Schwingkraft selbst wäre es, welche die einzelnen Stücke umherschleudert; denn die Schwingkraft dauert nur so lange, als das Rad ganz ist und bildet lediglich die Ursache zur Zerstörung. Sobald sich ein Stück vom Schwungrade getrennt hat, kann die Centrifugalkraft nicht mehr auf dasselbe wirken, und es bewegt sich sofort nach dem Bruche mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der Tangente weiter.

In vielen Fällen bedient man sich der Schwingkraft, um damit gewisse Arbeiten zu verrichten; z. B. bei der Centrifugal-Trockenmaschine, wie sie vielfach zum Trocknen der Gewebe

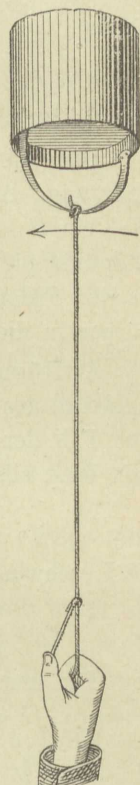


Fig. 76.

und der Wäsche angewandt wird, dann bei den Centrifugen, welche man in den Zuckerfabriken braucht, um den Saft aus den zerkleinerten Zuckerrüben zu gewinnen und ferner benutzt man die Centrifugalkraft in dem sogenannten Schwungregulator, um einen nahezu gleichförmigen Gang der Maschine zu erzielen oder um die Geschwindigkeit der letzteren selbst kontrollieren zu können.

§ 59.

Übungsbeispiele.

137. Eine gewisse Sorte Bindfaden zerreisst bei $Q = 10 \text{ kg}$ Belastung. An das eine Ende eines Stückes von $r = 2 \text{ m}$ Länge wird ein $G = 3 \text{ kg}$ schwerer Körper geknüpft und um den anderen Endpunkt mit steigender Geschwindigkeit kreisförmig bewegt, bis der Faden reisst. Es fragt sich, welche Geschwindigkeit der Körper in diesem Momente hat.

Auflösung: Das Zerreißen muss eintreten, sobald die Centrifugalkraft des Körpers grösser wird, als die Festigkeit des Fadens. Den Fall der Gleichheit erhalten wir aus Formel 4 für $P = Q$. Nun folgt allgemein aus

$$Q = \frac{G v^2}{g r}$$

die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{Q g r}{G}}$$

und für unsern Spezialfall erhalten wir mit Einsetzung von $Q = 10$, $G = 3$ und $r = 2 \text{ m}$

$$v = \sqrt{\frac{10 \cdot 9,81 \cdot 2}{3}} = \sqrt{65,4} = 8,097 \text{ m} = \sim 8,1 \text{ m}.$$

138. Wie lang müsste aber die Schnur genommen werden, wenn sie bei 10 m Umfangsgeschwindigkeit zerreißen soll und der rotierende Körper 7 kg wiegt?

$$\text{Resultat: } r = \frac{G v^2}{Q g} = 7,136 \text{ m}.$$

139. Wie gross ist die Fliehkraft eines $G = 20 \text{ kg}$ schweren Körpers, welcher einen Kreis mit $r = 4 \text{ m}$ langen Halbmesser in $T = 8$ Sekunden durchläuft?

Antwort: $P = \frac{4 G r \pi^2}{g T^2} = 5,03 \text{ kg.}$

140. Unter welcher Bedingung ist bei einem im Kreise gleichförmig rotierenden Körper die Fliehkraft gleich dem Gewichte des letzteren?

Antwort: Für $P = G$ folgt aus der 4. Formel $v^2 = g r$ oder $v = \sqrt{g r}$.

141. Welche Geschwindigkeit muss ein 6 kg schwerer Körper besitzen, damit er von einer ihn anziehenden Kraft $P = 30 \text{ kg}$ den gleichen Abstand $r = 2 \text{ m}$ behält?

Antwort: Die Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{P g r}{G}} = 9,905 \text{ m.}$

142. Mit welcher Umfangsgeschwindigkeit muss ein mit Wasser gefüllter Eimer in einem Kreise von 9 m Halbmesser geschwungen werden, damit das Wasser nicht ausfließt?

Lösung: Es muss $P \geq G$ sein und wir erhalten für den Gleichgewichtszustand

$$v = \sqrt{g r} = 9,396 \text{ m} = \sim 9,4 \text{ m,}$$

die Geschwindigkeit des Eimers muss also mindestens 9,4 m betragen.

143. Wie stark wird die Anziehungskraft der Erde durch ihre Centrifugalkraft am Äquator vermindert?

Lösung: Wir berechnen die Schwerkraft eines Körpers vom Gewichte G am Äquator nach der Resultatformel des 139. Beispiels

$$P = \frac{4 r \pi^2}{g T^2} \cdot G$$

und folgen dabei den sehr genauen Zahlenangaben auf Seite 223 des logarithmisch-trigonometrischen Handbuchs von Dr. H. G. Köhler. Die Ausrechnung soll ebenfalls auf dem logarithmischen Wege und zwar mit fünfstelliger Genauigkeit erfolgen. Es ist

der Halbmesser vom Erdäquator

$$r = 6377398 \text{ m.}$$

Ferner die Beschleunigung durch die Erdschwere am Äquator

$$g = 9,78026 \text{ m}$$

und die Umdrehungszeit der Erde

$$T = 86164,1 \text{ Sekunden.}$$

$\log 4 =$	$0,60206$
$\log r =$	$6,80464$
$2 \log \pi =$	$0,99430$
$\log (4 r \pi^2) =$	$8,40100$
$\log g =$	$0,99037$
$2 \log T =$	$9,87065$
$\log (g T^2) =$	$10,86102.$

Mithin erhalten wir

$$\log \frac{4 r \pi^2}{g T^2} = 8,40100 - 10,86102 = 0,53998 - 3$$

und daraus

$$\frac{4 r \pi^2}{g T^2} = 0,003467 = \sim \frac{1}{289}.$$

Es ergibt sich also $P = \frac{G}{289}$ oder in Worten: Die Centrifugalkraft eines Körpers am Äquator beträgt rund den 289ten Teil vom Gewichte des ersteren.

144. Wieviel mal grösser müsste die Umdrehungszahl der Erde sein, damit die Schwungkraft eines Körpers seinem eignen Gewichte gleich würde, sodass der Körper weder fallen noch steigen könnte?

Antwort: 17 mal so gross, weil dann ihre Geschwindigkeit am Äquator 17 mal und folglich die Fliehkraft des Körpers $(17)^2 = 289$ mal so gross wäre.

145. Ein Eisenbahnwagen vom Gewichte G , dessen Schwerpunkt $1,5 m$ über der Schienenhöhe liegt, bewegt sich auf einer normalspurigen Bahn von $1,435 m$ Spurweite. Es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit v der Wagen höchstens erreichen darf, damit er bei einer Krümmung des Geleises, deren Halbmesser $200 m$ beträgt, durch die Centrifugalkraft nicht aus den Schienen geworfen werde.

Lösung: Der kritische Moment tritt ein, sobald die Geschwindigkeit so weit gewachsen ist, dass in Bezug auf die äussere Bahnschiene das statische Moment der Schwungkraft demjenigen vom Gewicht des Wagens, also der Stabilität gleichkommt. Aus der so entstehenden Gleichung folgt

$$v = 30,634 m,$$

wobei natürlich vorausgesetzt ist, dass beide Schienen des Geleises gleich hoch stehen.

146. Die vertikale Welle AB (Fig. 77) trägt den horizontalen Arm DE , auf welchem ein Körper vom Gewichte G liegt. Wie gross darf der Abstand des Schwerpunktes S von der Rotationsachse, das wäre $SC = x$, höchstens sein, damit kein Gleiten des Körpers stattfindet, wenn die Tourenzahl der gleichförmigen

Drehbewegung mit n und der Koeffizient der gleitenden Reibung zwischen dem Körper und seiner Unterlage mit f bezeichnet wird?

Lösung: Die Centrifugalkraft, welche im Schwerpunkte S horizontal nach rechts wirkt, ergibt sich aus Formel 4 mit Ein-

setzung von $v = \frac{x \pi n}{30}$, nämlich

$$P = \frac{\pi^2}{900 g} \cdot G n^2 x.$$

Sie darf den Reibungswiderstand $W = G f$ nicht überschreiten, weil sonst Bewegung im Sinne von P erfolgen müsste und es gilt daher für den verlangten Gleichgewichtsfall die Bedingung $P = W$, welche mit Benützung obiger Werte übergeht in

$$\frac{\pi^2}{900 g} \cdot G n^2 x = G f$$

oder

$$x = \frac{900 f g}{n^2 \pi^2}.$$

Dieser Abstand x hängt also ab vom Reibungskoeffizienten f und der Tourenzahl n , ist dagegen unabhängig vom Gewichte G des Körpers; die Benennung von x richtet sich nach derjenigen von g , setzt man z. B. $g = 9,81$, so ergibt sich x in Metern.

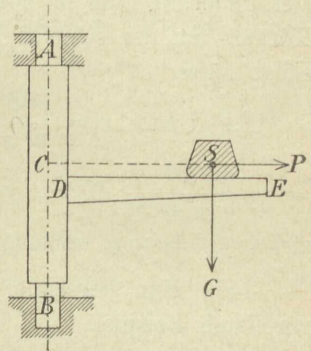


Fig. 77.

147. Man berechne den Abstand x für die Zahlenwerte $f = 0,16$ und $n = 5$.

Resultat: $x = 5,7252 m$.

148. Die vorletzte Aufgabe soll unter der allgemeineren Annahme gelöst werden, dass der Arm DE mit dem oberen Teile der Wellenachse den beliebigen spitzen Winkel α einschliesst.

Resultat: Bezeichnet ϱ den dem Koeffizienten f zugehörigen Reibungswinkel, so erhält man den Abstand des Körperschwerpunktes S von der Rotationsachse

$$x = \frac{900 g}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{\cos \alpha + f \sin \alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha} = \frac{900 g}{n^2 \pi^2 \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)},$$

oder auch, wenn der konstante Zahlenwert $\frac{900 g}{\pi^2} = \sim 894,6 m$

gesetzt wird,

$$x = \frac{894,6}{n^2 \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)} \text{ Meter,}$$

woraus man erkennt, dass x mit n und α ab-, dagegen mit wachsendem ϱ zunimmt.

149. Man bestimme x für die Spezialwerte $n = 11$, $f = 0,16$ und $\alpha = 23^\circ 45'$.

Resultat: $x = 28,248 \text{ m.}$

150. Den Grenzwert von x derart zu ermitteln, dass jede Verminderung von x oder auch von n das Abwärtsgleiten des Körpers auf der schiefen Ebene (nach der Rotationsachse hin) zur Folge hätte.

Resultat: $x = \frac{900 \text{ g}}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{\cos \alpha - f \sin \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha} = \frac{900 \text{ g}}{(n \pi)^2 \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}$
 $= \frac{894,6}{n^2 \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)} \text{ Meter,}$ wobei wiederum f und ϱ durch die Beziehung $f = \operatorname{tg} \varrho$ verknüpft sind.

151. Man berechne dieses x für dieselben Zahlen wie im vorletzten Beispiel.

Resultat: $x = 13,636 \text{ m.}$

152. Wir nehmen an, der Schwerpunkt S des Körpers habe den Abstand a von der Achse der rotierenden Welle. Zwischen welchen Grenzen n_1 und n_2 dürfte die Umdrehungszahl liegen, ohne dass ein Gleiten des Körpers auf dem Arm DE weder ab- noch aufwärts eintritt?

Antwort: Zwischen den Grenzen

$$n_1 = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{a \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}} = \sqrt{\frac{894,6}{a \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}}$$

und

$$n_2 = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{a \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)}} = \sqrt{\frac{894,6}{a \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)}}$$

153. Welches sind die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten?

Antwort: $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}}$ und $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{a \operatorname{tg}(\alpha - \varrho)}}$.

§ 60.

Das Centrifugalpendel.

Das eine Ende eines gewichtlosen Fadens sei im Punkte B befestigt (Fig. 78), während das andre Ende eine kleine Metallkugel mit dem Schwerpunkte S trägt. Hebt man jetzt die letztere aus ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage seitlich heraus und versetzt ihr rechtwinklig zur Bildebene einen Stoss, so wird S eine zunächst spiralförmige Bahn beschreiben, welche aber allmähig in die Kreisform übergeht, nämlich von dem Momente an, wo sich die beschleunigenden Kräfte, und das sind hier die Centrifugalkraft und die Erdschwere, welche die Kugel beeinflussen, ins Gleichgewicht gesetzt haben.

Um nun die Gleichgewichtsbedingung entwickeln zu können, denken wir uns durch den Aufhängepunkt die Vertikale gelegt und darauf von S das Lot $SC = r$ gefällt. Dann bezeichnen wir die Pendellänge BS mit l , die Pendelhöhe BC mit h , den sogenannten Elongationswinkel SBC mit α und zerlegen das Eigengewicht G der Metallkugel, welches durch die Strecke SD dargestellt sein möge, in zwei Komponenten SF und SE , wovon die eine mit der Verlängerung des Fadens BS , die andere mit der Horizontalen SC zusammenfällt.

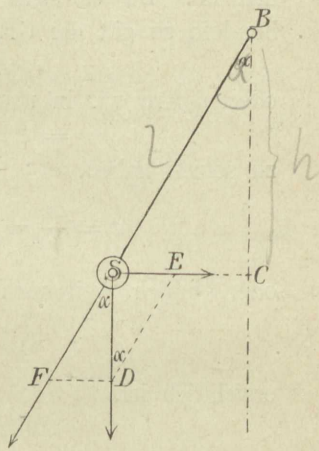


Fig. 78.

Die erstere, $SF = \frac{G}{\cos \alpha}$, erregt lediglich eine Spannung im Faden, sie wird durch die Festigkeit des letzteren aufgehoben und kommt für uns nicht weiter in Betracht. Die letztere ist

$$SE = G \operatorname{tg} \alpha$$

und muss ins Gleichgewicht gebracht werden durch die entgegengesetzt wirkende, nach Formel 4 zu bestimmende Centrifugalkraft

$$P = \frac{G v^2}{g r};$$

*Komp = Masse * Kraft*

es ergibt sich daher als Bedingung des Gleichgewichts am Centrifugalpendel

$$P = SE$$

oder

$$\frac{G v^2}{g r} = G \operatorname{tg} \alpha,$$

woraus folgt

$$v^2 = g r \operatorname{tg} \alpha. \dots \dots \dots (7.)$$

Ausser den in vorstehender Formel auftretenden Grössen v , r und α kommt beim Centrifugalpendel hauptsächlich noch in Betracht die sogenannte Schwingungsdauer t , d. h. die Anzahl von Sekunden, welche zu einem vollen Umlauf der Kugel erforderlich ist. Da es sich hier um eine gleichförmige Bewegung handelt, so gilt die Grundgleichung

$$s = c t,$$

oder, sofern wir in unserem Falle

$$s = 2 r \pi \text{ und } c = v = \sqrt{g r \operatorname{tg} \alpha}$$

zu setzen haben,

$$t = \frac{s}{c} = \frac{2 r \pi}{\sqrt{g r \operatorname{tg} \alpha}} = 2 \pi \sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tg} \alpha}},$$

oder endlich, weil noch aus der Figur 78 die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{h}$$

ersichtlich ist,

$$t = 2 \pi \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}. \dots \dots \dots (8.)$$

Dieses Resultat macht uns mit der Thatsache bekannt, dass die Schwingungsdauer t eines Centrifugalpendels nur von der Höhe h des letzteren abhängt oder mit anderen Worten: wenn mehrere Centrifugalpendel wohl verschiedene Elongationswinkel α und verschiedene Längen l , ja selbst verschiedene Kugelgewichte G , aber doch gleiche Höhen h besitzen, so haben sie alle die nämliche Schwingungsdauer t .

Übungsbeispiele.

154. Aus der Länge $l = 3 \text{ m}$ und dem Elongationswinkel $\alpha = 7^\circ$ eines Centrifugalpendels dessen Umfangsgeschwindigkeit v und Schwingungsdauer t zu bestimmen.

Resultate: $v = (\sin \alpha) \cdot \sqrt{\frac{gl}{\cos \alpha}} = 0,6636 \text{ m}$ und
 $t = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} = 3,462 \text{ Sekunden.}$

155. Der Kugel eines $l = 2,5 \text{ m}$ langen Centrifugalpendels wird durch Anstoss eine gewisse Geschwindigkeit v erteilt und erstere dreht sich, nachdem der Beharrungszustand eingetreten, während $t = 2''$ einmal im Kreise herum. Wie gross ist dann der Elongationswinkel α und die Umfangsgeschwindigkeit v ?

Antwort: Aus $\cos \alpha = \frac{gt^2}{4\pi^2 l} = \frac{g}{2,5\pi^2}$ folgt $\alpha = \sim 66^\circ 34'$
 und hieraus $v = (\sin \alpha) \cdot \sqrt{\frac{gl}{\cos \alpha}} = 7,207 \text{ m.}$

156. Wie viel Umdrehungen in der Minute macht ein Centrifugalpendel von der Länge l und dem Elevationswinkel α ?

Antwort: $n = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}.$

157. Die Tourenzahl n für die Spezialwerte $l = 5,2 \text{ m}$ und $\alpha = 12^\circ 34'$ zu berechnen.

Resultat: $n = 10,255.$

§ 61.

Der Centrifugalregulator.

Das Centrifugalpendel entsteht auch dadurch, dass an einer vertikalen rotierenden Welle das Ende eines Fadens befestigt wird, dessen anderes Ende eine Metallkugel trägt. Die Pendelhöhe h ist dann lediglich von der Umdrehungszahl n der Welle abhängig; denn setzt man in der Resultatformel des 156. Übungsbeispiels $l \cos \alpha = h$, so entsteht

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

oder

$$n^2 \pi^2 h = 900 g$$

und mithin

$$h = \frac{900 g}{n^2 \pi^2},$$

woraus man erkennt, dass die Pendelhöhe h mit wachsender Tourenzahl n abnimmt und diesen Umstand hat man in der Technik dazu benützt, den Maschinen einen gleichmässigeren Gang zu erteilen.

Wenn nämlich die zu überwindenden Widerstände innerhalb zu weiter Grenzen veränderlich sind, so reicht das Schwungrad zur Regulierung nicht mehr aus und man muss daher auf die Maschine so einzuwirken suchen, dass die bewegende Kraft geändert und dadurch ein genügender Ausgleich zwischen der letzteren und dem zu überwindenden Widerstand herbeigeführt wird.

Man erreicht die Absicht durch den sogenannten Centrifugal- oder Schwungradregulator, indem man an einer mit dem Maschinenmechanismus in Verbindung stehenden vertikalen Rotations-

welle BD (Fig. 79) zwei schwere Kugeln S_1 und S_2 mittels zweier Schenkel befestigt.

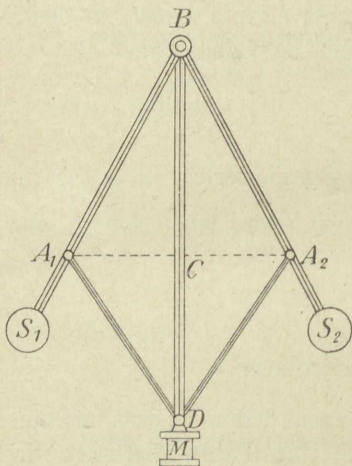


Fig. 79.

Wäre nun der Widerstand W im Verhältnis zur bewegenden Kraft P zu gross, so würde der Gang der Maschine verlangsamt, demnach n kleiner, und folglich nach obigem die Pendelhöhe $BC = h$ grösser. Hierdurch würde aber die sogenannte Muffe M , welche mit den Schenkeln BS_1, BS_2 durch Stäbe DA_1, DA_2 verbunden ist, abwärts gedrückt und die Folge davon wäre, dass durch eine Drosselvorrichtung eine Vergrösserung

des Dampfleitungsquerschnitts und damit auch eine Vermehrung der Dampfspannung bewirkt würde. Im entgegengesetzten Falle, wo W gegen P zu klein wäre, entstünde eine beschleunigte Bewegung aller Maschinenteile, n würde also wachsen, demnach h abnehmen, folglich die Muffe M steigen und hierdurch eine Verminderung des Leitungsquerschnitts entstehen, was auch eine Verminderung der Dampfspannung zur Folge hätte.

Auf analoge Weise kann bei Wasserrädern und Turbinen die Menge des Aufschlagwassers durch den Schwungradregulator geregelt und so grösseren Geschwindigkeitsschwankungen der Maschinenorgane vorgebeugt werden.

Übungsbeispiele.

158. An einer senkrecht stehenden Welle, welche während einer Minute n Umdrehungen macht, ist mittels einer l Meter langen Schnur eine G Kilogramm schwere Kugel befestigt. Welchen Winkel α bildet die Schnur mit der Wellenachse und welche Spannung S herrscht in der Schnur?

Antwort: Der gesuchte Winkel ist bestimmt durch die Formel $\cos \alpha = \frac{900g}{n^2 l \pi^2}$ und die Fadenspannung ist $S = \frac{n^2 l \pi^2 G}{900g}$ Kilogramm.

159. Welcher Winkel ergibt sich für die Zahlenwerte $n = 100$ und $l = 1,5$ m?

Antwort: $\alpha = 86^\circ 34' 51''$.

160. Man bestimme die Spannung in der Schnur, wenn die Kugel 10 kg wiegt.

Resultat: $S = 167,67$ kg.

161. Die beiden Kugeln eines Schwungradregulators drehen sich in jeder Minute 72 mal um. Wie gross bestimmt sich hieraus die Pendelhöhe $BC = h$?

Antwort: $h = 0,1726$ m.

§ 62.

Beliebige freie Bewegung des materiellen Punktes.

Die bisherigen Ergebnisse für die Normalbeschleunigung p der gleichförmigen Kreisbewegung und die dabei auftretende Centrifugalkraft P lassen sich jetzt auch ausdehnen auf die ungleichförmige Bewegung eines Massenpunktes, welche auf ganz beliebiger Kurve erfolgt.

Zunächst gilt die Formel

$$p = \frac{v^2}{r}$$

auch für die ungleichförmige Bewegung auf dem Kreise vom Halbmesser r , sobald v die momentane Geschwindigkeit des

Massenpunktes bezeichnet, weil man auf dem unendlich kleinen Wege, welcher im nächsten Zeitelement zurückgelegt wird, die Geschwindigkeit v als konstant betrachten darf. Nach einem endlichen Zeitraume wird sich aber natürlich v und damit auch p um ein endliches Stück geändert haben und wir gelangen zu dem Satze: Bewegt sich ein Punkt mit der Masse m ungleichförmig im Kreise vom Radius r , so ist seine Umfangsgeschwindigkeit v und damit auch seine Normalbeschleunigung $p = \frac{v^2}{r}$, sowie die ihm innewohnende Centrifugalkraft

$$P = \frac{m v^2}{r}$$

veränderlich. Beide Grössen bestimmen sich für jeden gewünschten Moment aus vorstehenden beiden Formeln, indem man für v die augenblickliche Geschwindigkeit des Massenpunktes substituiert.

Endlich können wir die beiden Beziehungen für p und P sogar auf den allgemeinsten Fall übertragen, dass sich ein Massen-

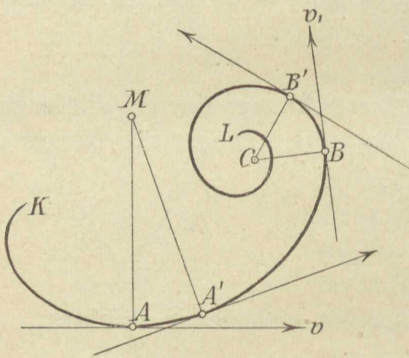


Fig. 80.

punkt ungleichförmig auf einer ganz beliebigen Kurve KL (Fig. 80) bewegt.

Angenommen, der Punkt hätte an der beliebigen Stelle A die Tangentialgeschwindigkeit v und er bewegte sich im nächsten Zeitelement bis zur Stelle A' , so können wir das unendlich kleine Kurvenstück AA' als einen Kreisbogen mit dem Halbmesser

$AM = MA' = \rho$ ansehen, welcher bekanntlich der Krümmungsradius dieser Kurve im Punkte A heisst und nach den Regeln der Differentialrechnung bestimmt werden kann, sobald man die Gleichung der Bahnkurve KL kennt. Setzen wir also in unseren Formeln ρ für r , so bekommen wir die Normalbeschleunigung an der Stelle A

$$p = \frac{v^2}{\rho}, \dots \dots \dots (9)$$

wenn v die Tangentialgeschwindigkeit des Punktes im betreffenden Augenblick und ρ den zugehörigen Krümmungshalbmesser bezeichnet, sowie die dem Massenpunkte eigene Centrifugalkraft $P = Mp$ oder

$$P = \frac{M v^2}{\rho} = \frac{G v^2}{g \rho}, \dots \dots \dots (10.)$$

worin M die Masse und G das Gewicht des materiellen Punktes, bzw. auch Körpers, bedeuten.

Wir sehen, dass die Normalbeschleunigung p um so bedeutender ausfällt, je grösser die Tangentialgeschwindigkeit v und je kleiner der Krümmungshalbmesser ρ ist. Das Gleiche gilt für die Centrifugalkraft P , welche ausserdem mit der Masse M , bzw. dem Gewichte G wächst. Ausserdem wäre noch zu beachten, dass ρ , v , g mit p und G mit P gleiche Benennungen haben.

Zur Erläuterung verfolgen wir die gleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes oder auch Körpers mit verhältnismässig kleinen Dimensionen auf der Parabel vom Halbparameter $2a$, deren Scheitelgleichung

$$y^2 = 4ax$$

ist. Zunächst bestimmen wir den Krümmungshalbmesser ρ dieser Parabel, indem wir aus $y = 2\sqrt{ax}$ die beiden ersten Differentialquotienten ziehen. Es findet sich

$$y' = 2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax}} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

und

$$y'' = \left(\sqrt{a}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}},$$

folglich mit Weglassung des hier bedeutungslosen Minuszeichens der Krümmungsradius

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(x + a)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$$

oder

$$\rho = 2(x + a) \cdot \sqrt{\frac{x + a}{a}}.$$

Bezeichnet jetzt v die konstante Tangentialgeschwindigkeit unseres Punktes auf der Parabel, so erhalten wir nach Formel 9 seine Normalbeschleunigung

$$p = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{2(x + a)} \cdot \sqrt{\frac{a}{x + a}},$$

worin x die Abscisse des bewegten materiellen Punktes darstellt, also für jeden Moment die Lage des letzteren bestimmt. Beispielsweise erhalten wir für $x = 0$ die Normalbeschleunigung

$$p_0 = \frac{v^2}{2a},$$

wo der Punkt durch den Parabelsichel O hindurchgeht und für $x = a$ die Normalbeschleunigung

$$p_1 = \frac{v^2}{4a\sqrt{2}}$$

in dem Augenblicke, wo unser Punkt im Endpunkte des Parameters sich befindet.

Um die Änderung der Normalbeschleunigung p des auf der Parabel hinlaufenden Massenpunktes noch besser übersehen zu können, wählen wir die besonderen Zahlenwerte $a = 1\text{ m}$, $v = 6\text{ m}$ und erhalten für

$$x = 0, 3, 8, 15 \dots \text{Meter}$$

die zugehörigen Normalbeschleunigungen

$$p_0 = \frac{36}{2} = 18\text{ m}, \quad p_3 = \frac{36}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = 2,25\text{ m},$$

$$p_8 = \frac{36}{18} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,667\text{ m}, \quad p_{15} = \frac{36}{32} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{32} = 0,281\text{ m},$$

wir bemerken also, dass die Normalbeschleunigung p des Massenpunktes um so kleiner wird, je weiter sich dieser vom Scheitel der Parabel entfernt, wofür der Grund darin zu suchen ist, dass der Krümmungshalbmesser ρ wächst und damit die Krümmung selbst abnimmt. Ebenso ist es mit der Centrifugalkraft P ; denn nehmen wir das Gewicht unseres materiellen Punktes G etwa zu $9,81\text{ gr}$ an, so erhalten wir aus der Formel 10 die den obigen Abscissen entsprechenden Centrifugalkräfte

$$P_0 = 18\text{ gr}, \quad P_3 = 2,25\text{ gr}, \quad P_8 = 0,667\text{ gr}, \quad P_{15} = 0,281\text{ gr}.$$

Wenn sich ein materieller Punkt oder Körper speziell auf gerader Linie bewegt, so ist die Gleichung der letzteren $y = Cx + n$, demnach $y' = C$, $y'' = 0$, mithin $\rho = \infty$ und wir erhalten mit Einsetzung dieses Wertes von ρ in die 9. und 10. Formel $p = 0$ und $P = 0$, woraus folgt, dass während der geradlinigen Bewegung ein Körper bei irgend welcher Geschwindigkeit weder Normalbeschleunigung noch Centrifugalkraft besitzen kann.

VIII. Kapitel.

Bewegung des materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn infolge der Schwerkraft.

Die Lehre vom Kreispendel.

§ 63.

Bewegung auf schiefer Ebene ohne Berücksichtigung der Reibung und des Luftwiderstandes.

Eine kleine homogene Metallkugel werde in Fig. 81 auf die Ebene AE gelegt, welche mit dem Horizont AX den beliebigen Winkel $EAX = \alpha$ einschliesst. Dann ist die Wirkung des Kugelgewichtes G , welches durch die Strecke MB dargestellt sein möge,

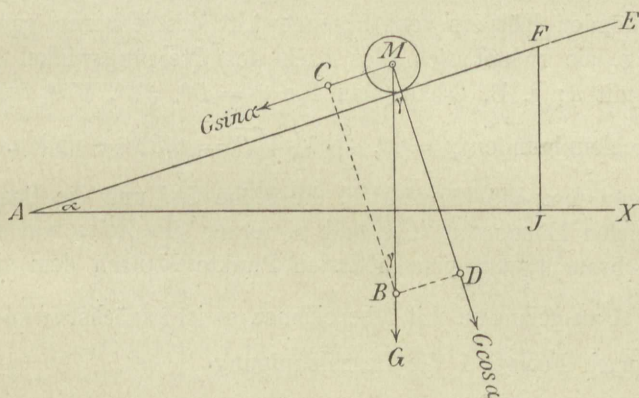


Fig. 81.

eine doppelte, indem es einerseits einen Druck senkrecht zur schiefen Ebene AE und andererseits das Bestreben erzeugt, nach welchem die Kugel auf der schiefen Ebene herabrollt.

Um diese beiden Wirkungen genau zu erhalten, zerlegen wir MB in zwei Komponenten $MD = N$ und $MC = P$ rechtwinklig und parallel zur schiefen Ebene AE . Weil Winkel $MBC = BMD = \alpha$ ist, so ergibt sich der Normaldruck

$$N = G \cos \alpha$$

und die Kraft, welche die Kugel längs der schiefen Ebene herabzieht, MC gleich

$$P = G \sin \alpha.$$

Der Normaldruck N wird von der schiefen Ebene aufgenommen, hat daher, wenn von der Reibung abgesehen wird, gar keinen Einfluss auf die Bewegung der Kugel, und mithin wirkt auf die Kugel nur die bewegende Kraft P . Letztere ruft die Beschleunigung p hervor, welche mittels der aus der Elementarmechanik bekannten Formel

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{g}$$

gewonnen werden kann; denn mit Einsetzung des obigen Wertes von P ergibt sich leicht

$$p = g \sin \alpha. \dots \dots \dots (1.)$$

Weil in der rechten Seite der vorstehenden Gleichung G nicht vorkommt, so ist die Beschleunigung eines auf schiefer Ebene herabrollenden Körpers vom Eigengewicht des letzteren ganz unabhängig, sie richtet sich bloß nach dem Neigungswinkel α und wächst mit α ; z. B. erhält man für $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ und 90° die Beschleunigungen $p = 0, \frac{g}{2}, \frac{g}{2}\sqrt{3} = 0,866 g$ und g .

Wenn man die Länge AF , die Höhe FJ und die Basis AJ der schiefen Ebene mit l, h und b , ferner die Zeit, welche der Körper braucht, um vom höchsten Punkte F nach dem tiefsten Punkte A zu gelangen, mit t bezeichnet, so ist zunächst $\sin \alpha = \frac{h}{l}$, mithin nach Formel 1 die Beschleunigung

$$p = g \frac{h}{l},$$

folglich der zurückgelegte Weg

$$l = \frac{p}{2} t^2 = \frac{g h}{2 l} t^2$$

und die Endgeschwindigkeit

$$v = p t = g \cdot \frac{h}{l} \cdot t.$$

Mit Einsetzung von

$$t^2 = \frac{2 l^2}{g h},$$

Verallgemeinerung des letzten Satzes.

Hier entsteht die Frage, ob dieser Satz auch noch Geltung behält, wenn die Bahn zwischen den höher und tiefer gelegenen Punkten nicht gerad-, sondern krummlinig ist. Zur Beantwortung müssen wir zunächst den Fall ins Auge fassen, wo die schiefe Ebene ES (Fig. 83) plötzlich ihre Neigung um den endlichen Winkel $ESN = \beta$ verringert.

Wäre der Kugelmittelpunkt in A mit der Geschwindigkeit $AC = v$ angelangt, so stösst die Kugel gegen die Ebene NM und mit diesem Stosse muss, wie wir im zweiten Kapitel erfahren haben, im allgemeinen ein Geschwindigkeitsverlust verbunden

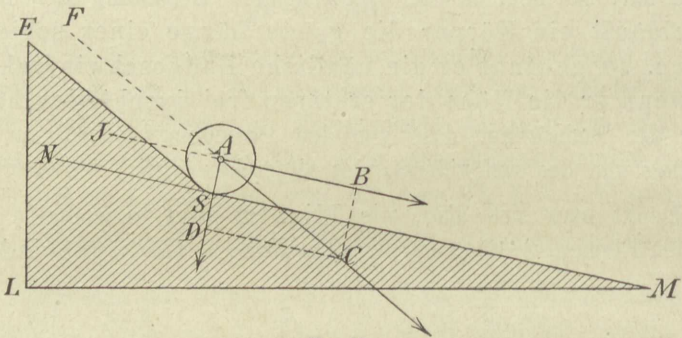


Fig. 83.

sein. Um letzteren zu bestimmen, zerlegen wir die Geschwindigkeit $AC = v$ in zwei Komponenten rechtwinklig und parallel zu SM , nämlich in AD und AB . Da Winkel $ACD = CAB = F'AJ = ESN = \beta$, so ist

$$AD = v \sin \beta \text{ und } AB = v \cos \beta.$$

Erstere darf umsomehr als verloren betrachtet werden, je weniger elastisch der Stoss ist und es schreitet daher die Kugel auf der Ebene SM mindestens mit der Geschwindigkeit $v \cos \beta$ fort, sodass der Geschwindigkeitsverlust an der Stelle S höchstens

$$v - v \cos \beta = v (1 - \cos \beta)$$

beträgt. Wir sehen, dass diese für den Fall des unelastischen Stosses eintretende maximale Geschwindigkeitseinbusse nur vom Winkel β abhängt und zwar um so geringer ist, einen je kleineren

Wert β besitzt. Für ein verschwindendes β ergibt sich $v(1 - \cos 0) = 0$, es findet also in diesem Falle überhaupt kein Geschwindigkeitsverlust statt.

Auf Grund dieser Thatsache können wir jetzt leicht weiter folgern, dass eine Kugel C , welche im Punkte B (Fig. 84) losgelassen wird und nun auf beliebiger Kurve im luftleeren Raume ohne Reibung nach der tiefer gelegenen Stelle D rollt, in letzterer mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

ankommt, sobald h den vertikalen Abstand AE der Endpunkte B und D bedeutet; denn wir können uns die ganze Bahn BD

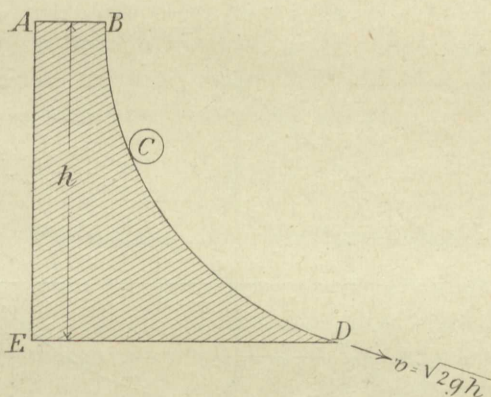


Fig. 84.

aus zahllosen und daher unendlich kurzen schiefen Ebenen zusammengesetzt denken, von denen immer zwei benachbarte eine verschwindend kleine Neigungsdifferenz bilden, und da mithin beim Übergang der Kugel von einem zum nächsten Bahnelement kein Geschwindigkeitsverlust eintritt, so ist unser Fall auf den im vorigen Paragraphen zurückgeführt und die Richtigkeit der obigen Behauptung bewiesen.

§ 65.

Einfaches oder mathematisches Pendel.

Dasselbe ist ein nach der unteren Seite hin mit einem Massenpunkte beschwerter und am oberen Ende befestigter gewichtloser Faden, welcher in der Ebene hin und her schwingen kann. Die

Entfernung des materiellen Punktes P (Fig. 85) von der Aufhängestelle C heisst die Pendellänge und soll mit l bezeichnet werden. Hebt man jetzt das Pendel aus seiner vertikalen Gleichgewichtslage CO um den Winkel $BCO = \alpha$ seitlich heraus und überlässt es dann sich selbst, so beschreibt der materielle untere Endpunkt infolge der Schwerkraft einen Kreisbogen, die Geschwindigkeit, welche in B Null war, wächst nun, bis sie im tiefsten Punkte O ihren grössten Wert erreicht; von hier aus steigt der Massenpunkt mit abnehmender Geschwindigkeit, und erreicht, wenn von den Bewegungshindernissen abgesehen wird, zum zweiten Male seine höchste Stelle D , welche in der durch B gedachten Horizontal-

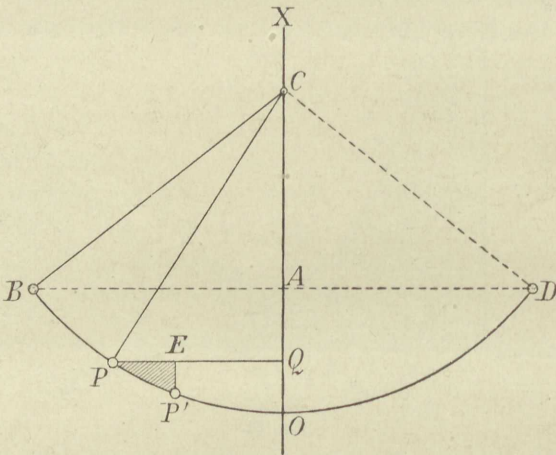


Fig. 85.

ebene liegt. Die Bewegung von B bis D oder umgekehrt heisst ein Pendelschlag oder eine Pendelschwingung, die Zeit, welche eine solche Schwingung erfordert, führt den Namen Schwingungsdauer und den Grenzwinkel $OCB = OCD = \alpha$ nennt man Ausschlag- oder Elongationswinkel.

Von Interesse ist zunächst die Geschwindigkeit v , welche der unterste Punkt des Pendels in der beliebigen Stellung CP besitzt und welche bestimmt sein möge durch die beiden Koordinaten $OQ = x$, $QP = y$ des Punktes P in Bezug auf das rechtwinklige System mit dem Ursprung O und der Abscissenachse OX . Setzen wir aber den von der Pendellänge l und dem Ausschlag-

winkel α abhängigen Abstand des tiefsten Punktes O von BD , nämlich $OA = 2a$, so hat unser Punkt von B bis P die vertikale Höhe

$$h = AQ = OA - OQ = 2a - x$$

durchfallen und mithin ist nach dem vorigen Paragraphen seine momentane Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g(2a - x)},$$

allerdings unter der Voraussetzung, dass der Luftwiderstand unberücksichtigt bleiben darf. Diese Voraussetzung ist aber für praktische Zwecke als hinreichend erfüllt zu betrachten, wenn der Elongationswinkel α sehr klein ist, wenigstens nicht über 5° hinausgeht, weil dann die Geschwindigkeit v sehr klein bleibt, und wir müssen deshalb von jetzt an im Auge behalten, dass die weiteren Schlüsse nur unter dieser Einschränkung ein Anrecht auf Geltung mit genügender Genauigkeit besitzen.

§ 66.

Bestimmung der Schwingungsdauer.

Um die Zeit t zu bestimmen, welche während eines Pendelschlags vergeht, müssen wir uns die ganze durchlaufene Bahn, d. i. den Kreisbogen BOD in zahllose Teile zerlegt denken und ein solches Element $PP' = ds$ an der beliebigen Stelle P , für welche wir die momentane Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g(2a - x)}$ erhalten hatten, herausgreifen; denn die Zurücklegung des verschwindend kurzen Weges ds erfolgt in der unendlich kleinen Zeit dt , während welcher die Bewegung als gleichförmig betrachtet werden darf, wir haben also $ds = v dt$ und daraus ergibt sich das Zeitelement

$$dt = \frac{ds}{v},$$

durch dessen Integration die Bestimmung der gesuchten Zeit t in Aussicht steht, sobald es uns gelingt, die rechte Seite der letzten Gleichung von nur einer Veränderlichen abhängig zu machen. Da wir v schon als Funktion von x aufgestellt haben, so kommt es demnach noch darauf an, auch ds durch x auszudrücken. Zu dem Ende fallen wir von P' das Lot auf QP , setzen die Koordi-

natendifferentiale $EP' = dx$, $EP = dy$ und haben im rechtwinkligen Dreieck PEP' nach dem Pythagoräischen Lehrsatz die Beziehung

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = -(dx) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

wobei der dem x entgegengesetzten Lage von dx durch das Minuszeichen Rechnung getragen wurde, oder, weil im rechtwinkligen Dreieck PQC wiederum nach dem Pythagoras

$$y^2 = l^2 - (l - x)^2 = 2lx - x^2,$$

folglich

$$2y dy = 2l dx - 2x dx$$

und demnach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l - x}{y}$$

ist,

$$\begin{aligned} ds &= -(dx) \sqrt{1 + \frac{l^2 - 2lx + x^2}{y^2}} \\ &= -(dx) \sqrt{\frac{2lx - x^2 + l^2 - 2lx + x^2}{2lx - x^2}} \end{aligned}$$

oder

$$ds = -\frac{l dx}{\sqrt{2lx - x^2}}.$$

Mit Einsetzung dieses Wertes von ds , sowie von $v = \sqrt{2g(2a - x)}$ aus dem vorigen Paragraphen in die obige Formel $dt = \frac{ds}{v}$ entsteht

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{l dx}{\sqrt{x(2l - x)} \cdot \sqrt{2g(2a - x)}} \\ &= -\frac{l dx}{\sqrt{2g \cdot 2l \left(1 - \frac{x}{2l}\right) (2a - x) x}} \end{aligned}$$

oder auch

$$dt = -\frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{x}{2l}\right) (2ax - x^2)}},$$

das Zeitelement, während welchem das Pendel vom Punkte P mit der Abscisse $OQ = x$ bis zum Nachbarpunkte P' mit der Abscisse

$x - dx$ gelangt. Wie schon erwähnt, beruht diese letzte Formel auf der Voraussetzung, dass weder Luftwiderstand noch Reibung die Bewegung merklich hindern, und sie gilt deshalb mit genügender Schärfe nur für kleine Ausschlagwinkel, etwa bis zu 5° . Unter letzterer Bedingung ist aber x , welches sich nur auf dem Spielraum zwischen $OA = 2a$ und Null ändert, im Verhältnis zur Pendellänge l sehr unbedeutend und man darf daher ohne Bedenken den Quotienten $\frac{x}{2l}$ vernachlässigen. Hierdurch geht das Zeitdifferential über in

$$dt = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

und man erhält jetzt die Hälfte der Schwingungsdauer t als Summe aller Zeiteilchen dt , welche verfließen, indem sich x von $OA = 2a$ bis zur Null vermindert, d. h. mit anderen Worten dadurch, dass wir den vorstehenden Ausdruck für das Zeitdifferential dt zwischen den Grenzen $x = 2a$ und $x = 0$ integrieren. Demnach wäre

$$\frac{t}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_{2a}^0 \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

oder, weil

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - a^2 + 2ax - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} \\ &= \text{arc sin } \frac{x-a}{a} \end{aligned}$$

ist,

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\text{arc sin } \frac{x-a}{a} \right]_{x=2a}^{x=0}$$

$$= -\left[\text{arc sin } (-1) - \text{arc sin } 1 \right] \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = -\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{l}{g}}$$

und daraus folgt

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \dots \dots \dots (3.)$$

allerdings streng genommen nur eine Annäherungsformel für die Schwingungsdauer des mathematischen Kreispendels von der Länge l , welche aber bei kleinem Elongationswinkel bis zu 5° für praktische Zwecke hinreichend genaue Resultate liefert.

§ 67.

Folgerungen aus der Formel für die Schwingungsdauer.

Aus der Formel 3 in Verbindung mit dem zuletzt Gesagten geht hervor, dass die Schwingungsdauer t vom Ausschlagwinkel α unabhängig ist, sobald α nicht über 5° hinausgeht, d. h. ein mathematisches Pendel von bestimmter Länge l besitzt genau dieselbe Schwingungszeit, ganz gleichgiltig, ob nun der Ausschlag 1° , 2° , 3° oder 4° beträgt, man sagt: Pendel von gleicher Länge sind bei Ausschlagwinkeln bis zu 5° »isochron«, d. h. sie brauchen genau dieselbe Zeit zum Ausschlag.

Dagegen ändert sich die Schwingungszeit t mit der Pendellänge l , z. B. entsprechen den Pendellängen von 1 und 2 m die Schwingungszeiten

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1,003'' \text{ und } t_2 = \pi \sqrt{\frac{2}{g}} = 1,418''.$$

Bezeichnet man allgemein die den Pendellängen l_1 und l_2 zugehörigen Schwingungszeiten mit t_1 und t_2 , so folgt aus den Beziehungen

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \text{ und } t_2 = \pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

die Proportion

$$t_1 : t_2 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2},$$

woraus man erkennt, dass sich an demselben Orte die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten.

Eine zweite Schlussfolgerung, welche aus der Gleichung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gezogen werden kann, besteht darin, dass sich mit Hilfe derselben die Beschleunigung g des freien Falles für irgend einen Ort auf

der Erde durch Versuche feststellen lässt; denn mit Auflösung der letzten Beziehung nach g erhält man

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$$

und wenn man jetzt für ein Pendel von bestimmter Länge l die Schwingungsdauer t bei nicht zu grossem Elongationswinkel genau misst, so liefert vorstehende Formel mit Einsetzung dieser beiden zusammengehörigen Werte von l und t die dem genannten Orte eigenthümliche Fallbeschleunigung g .

Durch zahlreiche und mit äusserster Sorgfalt ausgeführter derartiger Pendelbeobachtungen hat man in Erfahrung gebracht, dass an der Erdoberfläche die Acceleration g vom Äquator nach den Polen hin abnimmt, woraus mit Notwendigkeit weiter gefolgert werden musste, dass auch die Anziehungskraft der Erde vom Äquator nach den Polen zu allmählig kleiner wird.

Diese Erscheinung ist zum Teil eine Folge der Centrifugalkraft, welche aus der Rotation der Erde um ihre Achse entspringt, mithin der Schwerkraft entgegenwirkt und nach den Polen hin abnimmt, sodass g in der genannten Richtung wachsen muss; allein genaue Rechnungen haben ergeben, dass der Einfluss der Centrifugalkraft allein die Zunahme von g noch nicht ausreichend erklärt und man war daher gezwungen, anzunehmen, dass der Erdhalbmesser nach den beiden Polen hin abnimmt, ein Ergebnis, welches durch anderweitige Beobachtungen, Messungen und Rechnungen volle Bestätigung gefunden hat. Dieselben beiden Gründe erklären auch, warum g unter denselben Breitengraden auf hohen Bergen geringer ist als am Meeresspiegel.

Drittens vermögen wir mittels der Formel $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ diejenige Länge eines mathematischen Pendels ausfindig zu machen, welches eine gewünschte Schwingungsdauer t besitzen soll; denn es folgt

$$l = \frac{g t^2}{\pi^2}$$

und daraus beispielsweise für $t = 3$ und $g = 9,81$

$$l = 8,945 \text{ m,}$$

die Länge desjenigen Pendels, welches in unserer Gegend bei Elongationswinkeln unter 5° während 3 Sekunden einen Schlag ausführt.

Insbesondere erhalten wir aus der Beziehung $l = g \cdot \left(\frac{t}{\pi}\right)^2$ für die Zeiteinheit ($t = 1''$)

$$l = \frac{g}{\pi^2}, \dots \dots \dots (4.)$$

die Länge desjenigen einfachen Pendels, welches per Sekunde einen Schlag thut und deshalb auch »Sekundenpendel« genannt wird.

Da z. B. die Fallbeschleunigung unter 45° geographischer Breite am Meeresniveau $9,806 \text{ m}$ beträgt, so findet sich aus

$$\log l = \log 9,806 - 2 \log \pi = 0,99149 - 0,99430 = 0,99719 - 1$$

$$l = 0,99355 \text{ m},$$

die Länge des zugehörigen Sekundenpendels.

§ 68.

Zusammengesetztes oder physisches Pendel.

Das einfache oder mathematische Pendel, welches als gewichtsloser und mit einem Massenpunkte beschwerter Faden definiert wurde, kommt offenbar in der Wirklichkeit gar nicht vor und kann höchstens annähernd erzielt werden, indem man an eine sehr dünne Schnur eine im Verhältnis zur Länge der letzteren kleine Metallkugel von grossem spezifischen Gewichte befestigt. Dagegen ist es möglich, das zusammengesetzte oder physische Pendel, worunter man jeden beliebigen festen und um eine Achse ohne merkliche Reibung drehbaren Körper versteht, folgendermassen auf das ebenerwähnte Idealgebilde zurückzuführen.

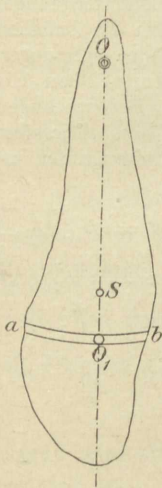


Fig. 86.

Wird der in Fig. 86 zur Anschauung gebrachte und um den festen Punkt O leicht bewegliche Körper durch Anstoss in eine hin- und hergehende Bewegung versetzt, so sucht jeder der zahllosen materiellen Punkte, aus welchen wir

uns den Körper zusammengesetzt vorstellen dürfen, wie ein mathematisches Pendel zu schwingen. Weil aber die der Aufhängestelle O näher gelegenen Punkte kürzere Pendellängen besitzen, als die entfernteren, so haben sie das Bestreben, rascher zu schwingen als diese, die ersteren werden daher auf die letzteren beschleunigend einwirken. Umgekehrt würden die von O weiter

abstehenden Punkte für sich allein langsamer schwingen, wie die näher gelegenen und daher müssen diese von jenen verzögernd beeinflusst sein. Es wird daher zwischen diesen teils beschleunigenden, teils verzögerten Massenpunkten eine unendlich dünne, sozusagen neutrale Schicht ab von Punkten liegen, welche alle denselben Abstand von O haben und welche weder eine Beschleunigung, noch eine Verzögerung erfahren: diese cylinderschalenförmige Schicht ab schwingt deshalb genau so, wie das mathematische Pendel von der Länge

$$Oa = Ob = l.$$

Die von O nach dem Schwerpunkt S des physischen Pendels gezogene Gerade trifft die genannte Cylinderschale in der Stelle O_1 , welche der Schwingungspunkt des zusammengesetzten Pendels heisst, während seine Entfernung von der Drehachse, also $OO_1 = l$, die reduzierte Pendellänge genannt wird.

Um diese letztere zu bestimmen, braucht man nur die Schwingungsdauer des physischen Pendels experimentell festzustellen und dann die zugehörige Pendellänge aus der Formel

$$l = g \cdot \left(\frac{t}{\pi}\right)^2$$

zu berechnen. Hierdurch ist das physische Pendel auf das mathematische zurückgeführt; denn mit Zugrundelegung der reduzierten Pendellänge l verhält sich das erstere in jeder Beziehung genau so wie das letztere.

§ 69.

Übungsbeispiele.

162. Wie verhalten sich die Zeiten t und t' , während welcher sich ein Körper von der Ruhe aus ohne Rücksicht auf Reibung und Luftwiderstand die Länge l einer schiefen Ebene durchläuft und die Höhe h derselben frei durchfällt?

Antwort: Es gilt die Proportion $t : t' = l : h$.

163. Eine schiefe Ebene von der Basis b ist unter dem Winkel α zum Horizont geneigt. In welcher Zeit t gleitet ein Körper vom höchsten bis zum tiefsten Punkte, wenn dieselben Bedingungen wie vorhin gelten?

Antwort: In $t = \sqrt{\frac{4b}{g \sin 2\alpha}}$ Sekunden, sobald b und g mit gleicher Längeneinheit gemessen sind.

164. Für welchen Wert von α wird bei konstantem b die Zeit t ein Minimum?

Antwort: Für $t = 45^\circ$.

165. Man bestimme das Verhältnis zwischen der Schwingungsdauer t und derjenigen Zeit t' , während welcher ein Körper im luftleeren Raume vom Ruhezustande aus die Pendellänge l frei herabfällt.

Resultat: Es verhält sich $t : t' = \pi : \sqrt{2}$.

166. Zu beweisen, dass sich die Schwingungszahlen, d. h. die Anzahlen der Schwingungen in einer Minute, für zwei verschiedene Pendel, an demselben Orte umgekehrt wie die Längen dieser Pendel verhalten.

167. Die Fallbeschleunigung g im luftleeren Raume für denjenigen Ort anzugeben, an welchem das Sekundenpendel genau einen Meter lang ist.

Resultat: $g = \pi^2 = 9,8696 \text{ m}$.

168. Man berechne die Länge des Sekundenpendels unterm Äquator, wo die Beschleunigung durch die Erdschwere $9,78 \text{ m}$ beträgt.

Resultat: $l = 0,99093 \text{ m}$.

169. Man bestimme die reduzierte Länge eines physischen Pendels, welches in Deutschland, wo die Beschleunigung der Schwerkraft $9,81 \text{ m}$ beträgt, in 3 Minuten 193 Schwingungen macht.

Resultat: $1,143 \text{ m}$.

IX. Kapitel.

Drehbewegung des Körpers und die Lehre von den Trägheitsmomenten.

§ 70.

Einleitung.

In den letzten fünf Kapiteln war nur vom materiellen Punkte die Rede und es ist bereits gesagt worden, dass die erhaltenen Ergebnisse nur dann auf Körper Anwendung finden dürfen, wenn die Dimensionen des letzteren gegen den Krümmungshalbmesser der von ihm durchlaufenen Bahn verschwinden; die bisher abgeleiteten Formeln gelten also auch für jeden festen Körper genau, wenn die Bewegung des Körpers fortschreitend und geradlinig, dagegen nur annähernd, so lange die Ausdehnung des Körpers im Verhältnis zum Krümmungsradius ρ der Kurve, auf welcher ersterer fortschreitet, sehr klein ist. Der tiefere Grund hierfür liegt darin, dass alle Punkte des Körpers im ersten Falle parallele Grade und im zweiten Falle konzentrische Kreisbögen mit sehr grossen Radien beschreiben, also dort genau und hier annähernd dieselbe Geschwindigkeit besitzen.

Wenn demnach der Körper um eine Achse rotiert, welche durch denselben hindurchgeht, oder welche zwar ausserhalb liegt, gegen deren Entfernung aber die Dimensionen des rotierenden Körpers nicht vernachlässigt werden dürfen, so haben die bisher abgeleiteten Formeln gar keinen Anspruch auf Geltung mehr und wir müssen über diesen in der Maschinentechnik sehr häufig vorkommenden Fall weitere neue Betrachtungen anstellen. Dabei werden wir die Erfahrung machen, dass die uns entgegentretenden Schwierigkeiten mit Hilfe der für den materiellen Punkt gewonnenen Resultate unschwer zu überwinden sind.

Eine derartige Aufgabe von ganz hervorragender Bedeutung besteht in der Ermittlung derjenigen Arbeitsfähigkeit, welche jedem sich bewegenden Körper vermöge seiner Masse M und vermöge seiner Geschwindigkeit eigenthümlich ist und welche auch »kinetische Energie« genannt wird. Sehr einfach liegt die Sache bei der fortschreitenden geradlinigen Bewegung, wo alle Punkte

des Körpers die gemeinsame Geschwindigkeit v haben; denn dann berechnet sich sein Arbeitsvermögen A_v nach der bereits in der Elementarmechanik gewonnenen Formel

$$A_v = \frac{M}{2} v^2.$$

§ 71.

Entwicklung des Begriffes „Trägheitsmoment“.

Dreht sich dagegen der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse O (Fig. 87), so haben die einzelnen Punkte des Körpers ganz verschiedene Geschwindigkeiten, nämlich kleinere oder grössere, je nachdem sie sich näher oder entfernter von der Drehachse befinden und die Ermittlung von A_v gestaltet sich daher wesentlich schwieriger. Wir müssen den rotierenden Körper in seine kleinsten Teilchen mit den Massen

$m_1, m_2, m_3, m_4 \dots \dots$ in inf.

zerlegt denken, welche von der Drehachse die Abstände

$r_1, r_2, r_3, r_4 \dots \dots$ in inf.

und die Geschwindigkeiten

$v_1, v_2, v_3, v_4 \dots \dots$ in inf.

besitzen mögen. Nun ist allgemein

$$v = \omega r,$$

mithin auch im speziellen

$$v_1 = \omega r_1, v_2 = \omega r_2, v_3 = \omega r_3, v_4 = \omega r_4 \dots \dots$$
 in inf.

und wir erhalten daher die kinetische Energie des rotierenden Körpers

$$A_v = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 + \frac{m_3}{2} v_3^2 + \frac{m_4}{2} v_4^2 + \dots \dots$$
 in inf.

oder mit Benutzung der obigen Werte von $v_1, v_2, v_3 \dots \dots$

$$A_v = \frac{m_1}{2} \omega^2 r_1^2 + \frac{m_2}{2} \omega^2 r_2^2 + \frac{m_3}{2} \omega^2 r_3^2 + \frac{m_4}{2} \omega^2 r_4^2 + \dots \dots$$
 in inf.

und das ist auch

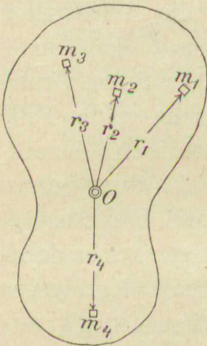


Fig. 87.

$$A_v = \frac{\omega^2}{2} \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + \dots \text{in inf.} \right)$$

Man sieht also, dass das Arbeitsvermögen eines um eine feste Achse rotierenden Körpers von zwei Umständen abhängt, nämlich erstens von der Winkelgeschwindigkeit ω und zweitens von der Summe aller unendlich vielen Massenteilchen, aus welchen der Körper zusammengesetzt ist und welche multipliziert sind mit den Quadraten ihrer Abstände von der Drehachse. Man nennt diese Summe von unendlich vielen Gliedern das Trägheitsmoment des betreffenden Körpers und bezeichnet letzteres gewöhnlich mit J . Demnach wäre der Begriff Trägheitsmoment definiert durch die Gleichung

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + \dots \text{in inf.}, \quad (1.)$$

und wir erhalten die kinetische Energie eines Körpers, welcher mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, aus der Formel

$$A_v = \frac{\omega^2}{2} \cdot J, \quad \dots \dots \dots (2.)$$

worin J das auf die Rotationsachse bezogene Trägheitsmoment des Körpers darstellt.

Daraus geht die Wichtigkeit dieses Begriffes hervor und zugleich auch die Notwendigkeit, die Trägheitsmomente der in der Maschinenteknik vorkommenden Körper zu entwickeln.

§ 72.

Homogener Voll- und Hohleylinder.

Direkt angeben kann man das Trägheitsmoment nur von einem unendlich dünnen Hohleylinder (Fig. 88), welcher um seine geometrische Achse O rotiert; denn bezeichnet man seine Masse mit m und seinen Radius mit x , so ist, weil alle Massenteilchen denselben Abstand x von der Drehachse haben, sein Trägheitsmoment

$$i = m \cdot x^2,$$

und es liegt zugleich auf der Hand, dass vorstehende Formel näherungsweise auch das Trägheitsmoment eines dünnen Hohl-

cylinders liefert, sobald man für x den mittleren Halbmesser einführt. Dabei ist der dennoch begangene Fehler um so unbedeutender, je weniger die Dicke des Hohlcyllinders im Verhältnis zu x ausmacht.

Handelt es sich dagegen um einen homogenen Volleycylinder mit dem Radius r , der Länge l und dem spezifischen Gewichte γ , so denken wir uns den Radius r in unendlich viele gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt einen Cyllindermantel gelegt,

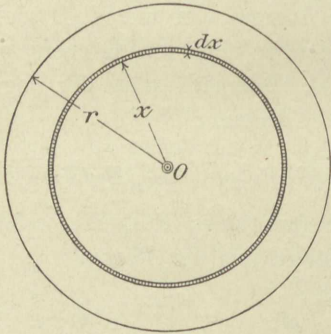


Fig. 88.

dessen Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt, wodurch sich der ursprüngliche Volleycylinder aus unendlich vielen und mithin unendlich dünnen Hohlzylindern zusammensetzt. Greifen wir einen beliebigen Hohlzylinder mit dem Halbmesser x und der Stärke dx heraus, so ist sein Volumen, welches sich durch Aufschneiden und nachheriges Aufrollen leicht in eine rechteckige Platte mit der Länge l ,

der Breite $2 \pi x$ und der Stärke dx verwandeln lässt,

$$dV = 2 \pi x \cdot l \cdot dx,$$

folglich sein Gewicht

$$dG = \gamma \cdot dV = 2 \gamma \pi l x dx,$$

demnach seine Masse

$$dM = \frac{dG}{g} = \frac{2 \gamma \cdot \pi \cdot l}{g} x \cdot dx$$

und mithin sein Trägheitsmoment

$$dJ = x^2 dM = \frac{2 \gamma \pi \cdot l}{g} \cdot x^3 dx.$$

Jetzt erhalten wir das gesamte Trägheitsmoment des Cylinders als Summe aller dJ von $x = 0$ bis $x = r$, d. h. in der Sprache der Analysis

$$J = \int_{x=0}^{x=r} \frac{2 \gamma \pi l}{g} \cdot x^3 dx = \frac{2 \gamma \pi l}{g} \cdot \frac{x^4}{4} \Bigg|_0^r = \frac{\gamma \pi l r^4}{2 g}.$$

Dividieren wir dieses Trägheitsmoment des Cylinders

$$J = \frac{\gamma \pi l r^4}{2 g}$$

durch seine Masse

$$M = \frac{r^2 \pi l \gamma}{g},$$

so ergibt sich

$$\frac{J}{M} = \frac{r^2}{2}$$

und hieraus folgt

$$J = M \frac{r^2}{2} = \frac{M}{2} r^2, \quad \dots \dots \dots (3.)$$

das auf seine geometrische Achse bezogene Trägheitsmoment eines homogenen Vollcylinders mit der Masse M und dem Halbmesser r .

Behufs Bestimmung des Trägheitsmomentes von einem homogenen Hohlcyliner mit den beiden Radien r und R (Fig. 89) stossen wir genau auf dasselbe Integral wie beim Vollcylinder, nur ist dieses Integral nicht, wie vorhin, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = r$, sondern von $x = r$ bis $x = R$ zu nehmen.

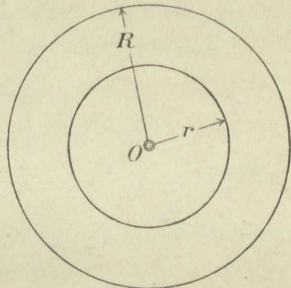


Fig. 89.

Auf diese Weise ergibt sich

$$J = \frac{2 \gamma \pi l}{g} \int_r^R x^3 dx = \frac{2 \gamma \pi l}{g} \frac{x^4}{4} \Big|_r^R = \frac{\gamma \pi l}{2 g} \cdot (R^4 - r^4),$$

oder auch

$$J = \frac{\pi \gamma l}{2 g} (R^2 - r^2) (R^2 + r^2).$$

Dividieren wir jetzt diese Gleichung durch die Masse des Hohlcyliners

$$M = \frac{(R^2 - r^2) \pi l \gamma}{g},$$

so entsteht

$$\frac{J}{M} = \frac{R^2 + r^2}{2}$$

und hieraus folgt

$$J = M \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}, \dots \dots \dots (4.)$$

das Trägheitsmoment eines homogenen Hohlcyinders mit der Masse M und den beiden Radien R und r .

§ 73.

Homogener Kegel.

Wir setzen die Höhe des Kegels $AC = h$ (Fig. 90), den Radius $CB = CD = r$ und das spezifische Gewicht gleich γ . Sodann denken wir uns den Radius CB in unendlich viele gleiche

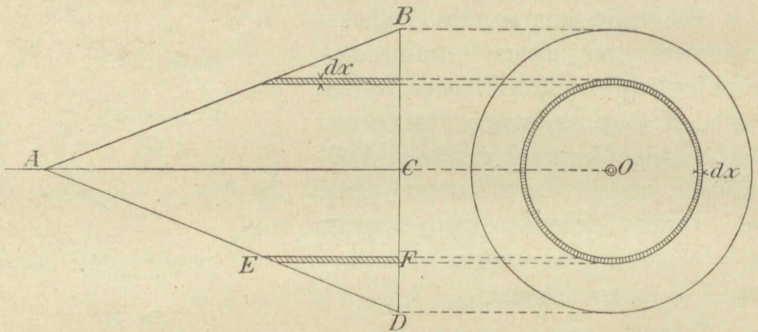


Fig. 90.

Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt einen Cylindermantel gelegt, dessen Achse mit AC zusammenfällt.

Hierdurch setzt sich der ganze Kegel aus unendlich vielen und daher unendlich dünnen Hohlcyindern zusammen, von denen wir einen ganz beliebigen mit dem inneren Radius x , der Dicke dx und der Länge $EF = y$ herausgreifen. Für diesen Hohlcyinder ist das Volumen

$$dV = 2\pi xy dx,$$

folglich sein Gewicht

$$dG = \gamma dV = 2\pi\gamma xy dx,$$

demnach seine Masse

$$dM = \frac{dG}{g} = \frac{2\pi\gamma}{g} xy dx,$$

mithin sein Trägheitsmoment

$$dJ = x^2 dM = \frac{2\pi\gamma}{g} x^3 y dx$$

und hieraus ergibt sich, wenn wir die Summe aller dJ von $x = 0$ bis $x = r$ bilden, d. h. mit andern Worten, wenn wir dJ zwischen den Grenzen 0 und r integrieren, das Trägheitsmoment des ganzen Kegels

$$J = \frac{2\pi\gamma}{g} \int_{x=0}^{x=r} x^3 y dx.$$

Jetzt ist aber hierin y eine überschüssige veränderliche Grösse, welche von x abhängt und demnach auch als Funktion von x aufgestellt werden muss. Zu dem Ende benützen wir die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke DEF und ACD , nach welcher

$$y : h = (r - x) : r$$

sich verhält und demnach

$$y = \frac{h}{r} (r - x)$$

ist. Mit Einführung dieses Wertes von y in die letzte Gleichung für J entsteht

$$J = \frac{2\pi\gamma h}{g r} \cdot \int_0^r (r x^3 - x^4) dx,$$

$$J = \frac{2\pi\gamma h}{g r} \cdot \left(\frac{r x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^r = \frac{2\pi\gamma h}{g r} \cdot \frac{r^5}{20}$$

oder

$$J = \frac{\pi\gamma h r^4}{10g}.$$

Wenn man dieses Trägheitsmoment durch die Masse

$$M = \frac{r^2 \pi h \gamma}{3g}$$

dividiert, so ergibt sich

$$\frac{J}{M} = \frac{3}{10} r^2$$

und hieraus

$$J = \frac{3}{10} M r^2, \quad (5.)$$

das auf seine geometrische Achse bezogene Trägheitsmoment eines homogenen Kegels mit der Masse M und dem Radius r .

§ 74.

Die homogene Kugel.

Eine homogene Kugel vom Radius r und dem spezifischen Gewicht γ rotiere um einen Durchmesser XX' (Fig. 91); wir teilen

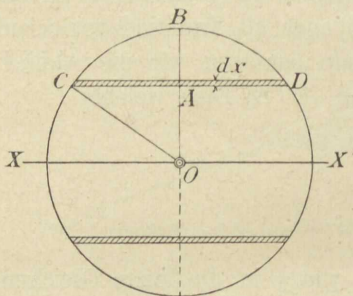


Fig. 91.

diese Kugel wiederum in unendlich dünne Hohlcylinder mit der gemeinschaftlichen Achse XX' und greifen davon einen beliebigen mit dem inneren Radius $OA = x$, der Länge $CD = 2y$ und der verschwindenden Dicke dx heraus. Von diesem ist das Volumen

$$dV = 2x\pi \cdot 2y \cdot dx = 4\pi xy dx,$$

folglich sein Gewicht

$$dG = \gamma dV = 4\pi\gamma xy dx,$$

demnach die Masse

$$dM = \frac{dG}{g} = \frac{4\pi\gamma}{g} \cdot xy dx,$$

mithin das Trägheitsmoment

$$dJ = x^2 dM = \frac{4\pi\gamma}{g} \cdot x^3 y dx$$

und wir erhalten daher das Trägheitsmoment J der ganzen Kugel als Summe aller dJ von $x = 0$ bis $x = r$, d. h. wenn wir den letzten Ausdruck für dJ zwischen 0 und r integrieren. Ziehen wir dabei in Betracht, dass im rechtwinkligen Dreieck ACO nach dem Pythagoräischen Lehrsatz die Beziehung $x^2 + y^2 = r^2$ gilt und somit

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

ist, so erhalten wir

$$J = \frac{4 \pi \gamma}{g} \int_{x=0}^{x=r} x^3 y \, dx = \frac{4 \pi \gamma}{g} \int_{x=0}^{x=r} x^3 \sqrt{r^2 - x^2} \, dx,$$

und es kommt nun vorerst darauf an, das unbestimmte Integral zu lösen. Zu dem Ende substituieren wir $r^2 - x^2 = z^2$, folglich

$$x^2 = r^2 - z^2 \text{ und } x \, dx = -z \, dz,$$

wodurch entsteht

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x \, dx &= \int (r^2 - z^2) z (-z \, dz) = \int (z^4 - r^2 z^2) \, dz \\ &= \frac{z^5}{5} - \frac{r^2 z^3}{3} = \frac{z^3}{15} (3 z^2 - 5 r^2), \end{aligned}$$

ferner hieraus mit Einführung der Grenzen

$$\begin{aligned} \int_0^r x^3 \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= \frac{(\sqrt{r^2 - x^2})^3}{15} (3 r^2 - 3 x^2 - 5 r^2) \\ &= -\frac{3 x^2 + 2 r^2}{15} (\sqrt{r^2 - x^2})^3 \Big|_0^r = \frac{2 r^2}{15} \cdot r^3 = \frac{2}{15} r^5 \end{aligned}$$

und mit Substitution dieses Resultates in die letzte Gleichung für J das Trägheitsmoment

$$J = \frac{4 \pi \gamma}{g} \cdot \frac{2}{15} r^5 = \frac{8 \pi \gamma r^5}{15 g}.$$

Wird jetzt dieses Trägheitsmoment durch die Masse der Kugel dividiert, so ergibt sich, da

$$M = \frac{4 r^3 \pi \gamma}{3 g}$$

ist,

$$\frac{J}{M} = \frac{2 r^2}{5}$$

und hieraus folgt

$$J = \frac{2}{5} M r^2, \dots \dots \dots (6.)$$

das Trägheitsmoment einer Kugel mit der Masse M und dem Radius r in Bezug auf einen Durchmesser.

Zu den Formeln 3 bis 6 sei noch allgemein bemerkt, dass, weil in der 2. Formel

$$A_v = \frac{\omega^2}{2} \cdot J$$

die linke Seite A_v eine mechanische Arbeit und die Winkelgeschwindigkeit ω eine unbenannte Zahl darstellt, das Trägheitsmoment J irgend eines Körpers offenbar auch eine mechanische Arbeit bedeutet. Um diese letztere z. B. in Meterkilogrammen zu erhalten, brauchen wir bei Benutzung der Formeln 3 bis 6 die Masse M nur in Kilogrammen und die Radien r , bzw. R in Metern einzuführen.

Da übrigens für $\frac{\omega^2}{2} = 1$, d. i. für

$$\omega = \sqrt{2} = 1,4142,$$

die obige Gleichung $A_v = \frac{\omega^2}{2} \cdot J$ übergeht in

$$A_v = J,$$

so könnte man auch sagen: Das Trägheitsmoment irgend eines Körpers lässt sich auffassen als diejenige kinetische Energie, welche der letztere besitzt, indem er sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{2}$ um die seinem Trägheitsmomente zu Grunde liegende Achse dreht. Bei $\omega > \sqrt{2}$, bzw. $\omega < \sqrt{2}$, wäre natürlich auch das Arbeitsvermögen A_v des betreffenden Körpers grösser, bzw. kleiner als sein Trägheitsmoment J .

§ 75.

Übungsbeispiele.

170. Das auf seine geometrische Achse bezogene Trägheitsmoment eines homogenen Volleylinders mit den Dimensionen $r = 123 \text{ cm}$, $l = 456 \text{ mm}$ und dem spezifischen Gewichte $\gamma = 7,8$ in Meterkilogrammen anzugeben.

Resultat: $J = 1303,8 \text{ mkg}$.

171. Wie gross ist das Arbeitsvermögen dieses Cylinders, wenn er während einer Minute $n = 73$ gleichförmige Drehungen um seine Achse macht?

Antwort: $A_v = \frac{\omega^2}{2} \cdot J = \frac{n^2 \pi^2 J}{1800} = 38090 \text{ mkg}$.

172. Man bestimme den Fehler F , welchen man begeht, indem man das Trägheitsmoment eines Hohlcylinders mit den Radien R , r und der Masse M so berechnet, als wäre letztere in die Mittellinie des Ringes konzentriert.

$$\text{Resultat: } F = \frac{M}{4} \cdot (R - r)^2.$$

173. Welchen Teilbetrag vom richtigen Wert des Trägheitsmomentes J bildet demnach der Fehler F und was kann man aus dem erhaltenen Ergebnis schliessen?

Antwort: Aus $F = \frac{(R - r)^2}{2(R^2 + r^2)} \cdot J$ folgt, dass die Abweichung vom wahren Werte J um so geringer ausfällt, je grösser die beiden Halbmesser selbst sind und je weniger sie sich von einander unterscheiden.

174. Man gebe den Fehlbetrag in Prozenten des richtigen Wertes von J an a) für einen Schwungradring mit den Radien $R = 3 \text{ m}$, $r = 2,8 \text{ m}$ und b) für einen Mühlstein mit den Halbmessern $R = 0,75 \text{ m}$ und $r = 0,15 \text{ m}$.

Resultate: Zu a) nicht ganz $0,12 \%$ und zu b) reichlich 30% .

175. Das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloïdes, dessen Masse M und für welches der Radius r der Grundfläche gegeben ist, in Bezug auf die Rotationsachse zu ermitteln.

$$\text{Resultat: } J = \frac{M r^2}{3}.$$

§ 76.

Reduktion von Trägheitsmomenten.

Schon die allgemeine Begriffsentwicklung in § 71 lässt erkennen, und die in den darauf folgenden Paragraphen vorgeführten einzelnen Fälle bestätigen es, dass jeder feste Körper für eine gewählte Drehachse ein ganz bestimmtes Trägheitsmoment besitzt und dass die Grösse desselben abhängt erstens vom Volumen und von der Gestalt des Körpers, zweitens von der Masse des letzteren und von der Art ihrer Verteilung, sowie drittens von der Lage der Drehachse. Aus letzterem Grunde hat daher ein und derselbe Körper immerhin noch unendlich viele Trägheitsmomente, sobald man alle möglichen Drehachsen annimmt; aber

unter diesen zeichnen sich wieder die auf eine Schwerachse bezogenen aus, welche äquatoriale Trägheitsmomente heißen und auf welche sich die andern zurückführen lassen mittels eines nachstehend abgeleiteten wichtigen Satzes.

Wir stellen uns den beliebigen in Fig. 92 dargestellten Körper mit der Masse M und dem Schwerpunkt S aus seinen kleinsten Bestandteilen (etwa aus unendlich kleinen Würfeln) zusammengesetzt vor und fassen einen derselben an beliebiger Stelle P mit der Masse m ins Auge. Wir denken uns ferner durch den Schwerpunkt S eine Achse (rechtwinklig zur Bildebene) und in irgend einem Abstand $SO = d$ eine zweite Achse parallel zur ersteren; endlich setzen wir die Lote, welche von unserem Massenteilchen P auf diese Achsen gefällt werden können,

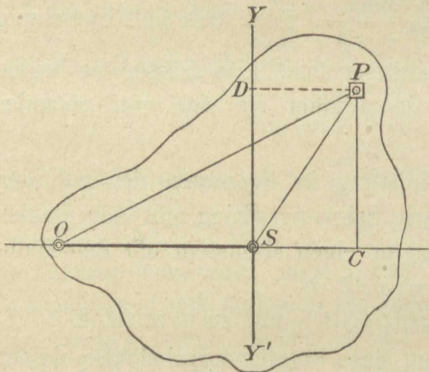


Fig. 92.

gefällt werden können, $PS = r$, $PO = r_1$, bezeichnen den senkrechten Abstand OS beider paralleler Achsen mit d und fällen von P auf

die Verlängerung der letzteren das Lot PC , dessen Fusspunkt C von S um $CS = PD = x$ entfernt sein möge.

Dann ist das äquatoriale Trägheitsmoment unseres Körpers definiert durch die Gleichung

$$J = \Sigma m r^2$$

und das Trägheitsmoment desselben Körpers in Bezug auf die zur Schwerlinie parallel gedachte Achse O ist

$$J_1 = \Sigma m r_1^2,$$

oder, weil nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$\overline{PC}^2 = r_1^2 - (x + d)^2 = r^2 - x^2,$$

folglich

$$r_1^2 - x^2 - 2dx - d^2 = r^2 - x^2$$

und mithin für jeden Massenpunkt P die Beziehung

$$r_1^2 = r^2 + 2dx + d^2$$

gilt,

$$J_1 = \Sigma (m r^2 + 2 d m x + d^2 m) = \Sigma m r^2 + 2 d \cdot \Sigma m x + d^2 \cdot \Sigma m.$$

Nun ist aber auf der rechten Seite dieser letzten Gleichung das erste Glied gleich dem äquatorialen Trägheitsmoment J unseres Körpers, das zweite Glied verschwindet, weil nach einem bekannten Satze der Elementarmechanik der Faktor $\Sigma m x$ als Summe der statischen Momente aller Massenteilchen in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S rechtwinklig zu OS gelegte Ebene YY' der Null gleich ist und im dritten Gliede bedeutet der Faktor Σm die Gesamtmasse M des Körpers, sodass die letzte Gleichung übergeht in

$$J_1 = J + M d^2, \quad \dots \dots \dots (7.)$$

eine Formel, mit Hilfe deren man das Trägheitsmoment jedes Körpers in Bezug auf eine beliebige Drehachse erhält, wenn man zu seinem äquatorialen Trägheitsmoment J das Produkt aus seiner Masse und dem Quadrate des Abstandes zwischen beiden parallelen Drehachsen hinzu addiert.

Zum Beispiel war nach Formel 6 das äquatoriale Trägheitsmoment einer homogenen Kugel mit der Masse M und dem Radius r

$$J = \frac{2}{5} M r^2.$$

Setzt man nun diesen Wert, sowie $d = a$ in Formel 7 ein, so ergibt sich

$$J_1 = \frac{2}{5} M r^2 + M a^2,$$

oder

$$J_1 = M \left(a^2 + \frac{2}{5} r^2 \right),$$

das Trägheitsmoment einer Kugel mit der Masse M und dem Radius r , wenn der Mittelpunkt der Kugel von der Drehachse den Abstand a besitzt.

Aus No. 7 folgt die weitere Beziehung

$$J = J_1 - M d^2,$$

mittels welcher man rückwärts das äquatoriale Trägheitsmoment J eines Körpers aus einem beliebigen andern Trägheitsmoment J_1 desselben Körpers bestimmen kann und welche uns sagt, dass J um $M d^2$ kleiner ist als J_1 , dass also von allen Trägheitsmomenten

desselben Körpers in Beziehung auf lauter parallele Achsen dasjenige ein Minimum darstellt, dessen Achse durch den Schwerpunkt S hindurchgeht.

§ 77.

Vom Trägheitshalbmesser.

Man kann sich die Masse M eines Körpers in einen einzigen Punkt konzentriert vorstellen. Ist nun ϱ der Abstand dieses Punktes von der Drehachse und J das Trägheitsmoment des genannten Körpers in Bezug auf letztere, so heisst der durch die Bedingung

$$M \varrho^2 = J,$$

bestimmte Wert von ϱ der Trägheitsarm, auch Trägheitshalbmesser oder Schwungradradius des betreffenden Körpers in Bezug auf die erwähnte Drehachse. Offenbar kommt es auf das Gleiche hinaus, wenn man sich die Masse M anstatt in den Endpunkt von ϱ konzentriert, über der Peripherie eines Kreises oder auch über dem Mantel eines Cylinders vom Halbmesser ϱ ausgebreitet vorstellt, und man könnte daher den Trägheitsarm eines Körpers auch definieren als Radius desjenigen Ringes oder unendlich dünnen Hohlcyinders, welcher mit jenem Körper gleiche Masse und gleiches Trägheitsmoment besitzt.

Demnach hat jeder Körper in Bezug auf eine gewählte Drehachse einen ganz bestimmten Trägheitsarm und wir können denselben aus der Gleichung

$$\varrho = \sqrt{\frac{J}{M}}, \quad \dots \dots \dots (8.)$$

leicht berechnen, wenn wir für J das Trägheitsmoment und für M die Masse des mehrfach genannten Körpers setzen. Wir wollen dies an einigen Beispielen erläutern.

1. Der homogene Volleylinder.

Nach Formel 3 war $J = \frac{M}{2} r^2$ und wir bekommen daher den

Trägheitsarm des Cylinders

$$\varrho = \sqrt{\frac{J}{M}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0,7071 r.$$

Dieser Wert von ϱ lässt sich auch leicht graphisch darstellen als Hypotenuse OM (Fig. 93) eines rechtwinkligen Dreiecks mit den beiden Katheten $OA = AM = \frac{r}{2}$. Wäre also die Masse des

ganzen Cylinders im Punkte M vereinigt, so würde dieser Punkt in Bezug auf die Achse O genau dasselbe Trägheitsmoment besitzen als wie der ganze Cylinder, oder auch: Denkt man sich die Masse M des Vollcylinders vom Radius $OB = r$ in den unendlichen dünnen Hohlcyliner vom Halbmesser $OM = \frac{r}{\sqrt{2}}$ zu-

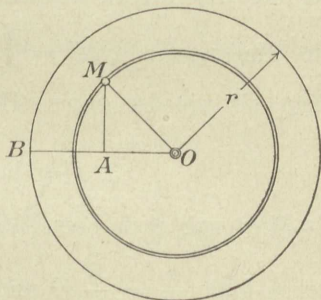


Fig. 93.

sammengedrängt, so hat letzterer mit ersterem in Beziehung auf die gemeinsame Achse gleiches Trägheitsmoment.

2. Der homogene Hohlcyliner.

Aus der 4. Formel $J = M \cdot \frac{R^2 + r^2}{2}$ folgt $\frac{J}{M} = \frac{R^2 + r^2}{2}$ und mithin ist

$$\varrho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$$

der Schwungradradius des homogenen Hohlcylin-
ders. Giebt man der letzten
Gleichung die Form

$$\varrho = \sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

so erkennt man, dass sich ϱ
geometrisch darstellen lässt,
indem man mit Benützung
rechtwinkliger Dreiecke

$$OA = AC = \frac{r}{2} \text{ (Fig 94),}$$

$$OB = BD = \frac{R}{2} \text{ abträgt, denn dann ist } OC = \frac{r}{\sqrt{2}}, OD = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

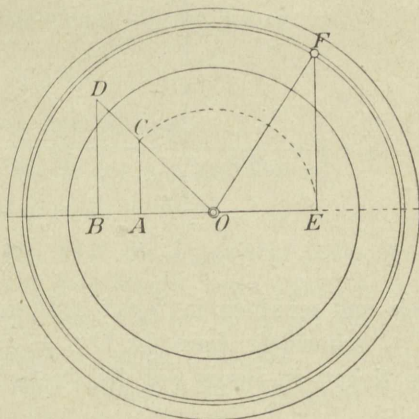


Fig. 94.

und macht man daher weiter $OE = OC$ und $EF = OD$, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz $OF = \rho$. Vereinigt man demnach die ganze Masse M des Cylinders in den Abstand $OF = \rho$, so hat bei der Rotation der materielle Punkt F mit der Masse M oder der unendlich dünne Hohlcylinder von gleicher Masse und dem Halbmesser $OF = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$ denselben mechanischen Effekt, als wie der ganze Hohlcylinder.

3. Der homogene Kegel.

Hier war nach Formel 5 das Trägheitsmoment $J = \frac{3}{10} M r^2$, woraus folgt $\frac{J}{M} = \frac{3}{10} r^2$ und mithin der Trägheitshalbmesser des Kegels

$$\rho = r \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{r}{10} \sqrt{30} = 0,547723 r.$$

Um dieses ρ zu konstruieren, verwandeln wir die Gleichung

$$\rho^2 = \frac{3}{10} r^2 = r \cdot \frac{3}{10} r$$

in die stetige Proportion

$$\frac{3}{10} r : \rho = \rho : r$$

machen also, wenn

$OA = r$ ist (Fig. 95),

$OB = \frac{3}{10} r$, schlagen

dann über AB als

Durchmesser einen Halb-

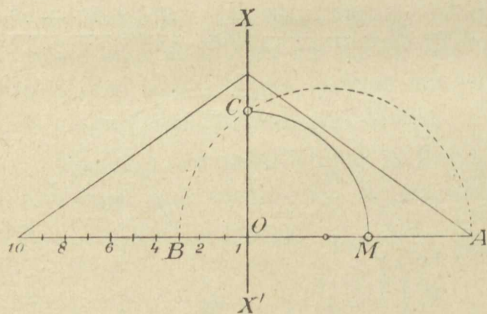


Fig. 95.

Durchmesser einen Halbkreis und errichten in O auf AB ein Lot, welches den Halbkreis in C schneidet; dann ist $OC = OM = \rho$ der Trägheitsradius des Kegels in Bezug auf die Drehachse XX' .

4. Die homogene Kugel.

Nach Formel 6 war das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel in Bezug auf irgend einen Durchmesser $J = \frac{2}{5} M r^2$, mit-

hin ergibt sich $\frac{J}{M} = \frac{2}{5} r^2$ und daraus nach Formel 8 der Trägheitsradius dieser Kugel

$$\varrho = r \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{r}{5} \sqrt{10} = 0,6325 \cdot r.$$

Aus $\varrho^2 = \frac{2}{5} r^2 = \frac{2}{5} r \cdot r$ folgt die Proportion $\frac{2}{5} r : \varrho = \varrho : r$

und hieraus folgende einfache Konstruktion: Macht man $OA = r$

(Fig. 96), $OB = \frac{2}{5} r$, schlägt

über AB als Durchmesser einen Halbkreis und errichtet auf AB in O ein Lot, welches den erwähnten Halbkreis im Punkte M schneidet, so ist $OM = \varrho$ der Trägheitsarm der Kugel, d. h.

wenn man die Masse der Kugel in den Punkt M oder in einem verschwindend dünnen Ring vom Radius $OM = r \sqrt{\frac{2}{5}}$ konzentriert, so haben letztere beiden Gebilde in Bezug auf die Drehachse XX' dasselbe Trägheitsmoment wie die Kugel.

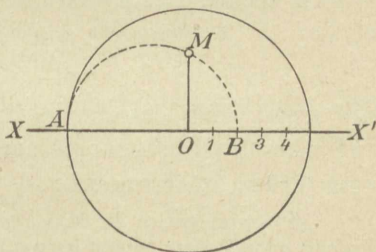


Fig. 96.

§ 78.

Reduktion der Massen.

Im vorigen Paragraphen haben wir aus der Formel

$$M \varrho^2 = J$$

den Radius ϱ derartig bestimmt, dass die an seinem freien Endpunkte befindliche oder auch auf dem Mantel eines Cylinders vom Halbmesser ϱ irgendwie verteilte Masse M in Bezug auf die Achse des ersteren das gegebene Trägheitsmoment J besitzt. War dabei M die Masse und J das auf eine gewisse Achse bezogene Trägheitsmoment eines gegebenen Körpers, so nannten wir dieses ϱ den Trägheitsarm oder Schwungradradius des Körpers in Bezug auf die Drehachse.

Jetzt können wir aber auch umgekehrt ϱ und J als gegeben, dagegen M als gesucht betrachten, d. h. nach derjenigen

179. Eine homogene Kugel mit der Masse M und dem Radius r dreht sich um einen Durchmesser. Welche Massen μ_1 , μ_2 und μ_3 müsste man in den Abständen r , $\frac{r}{2}$ und $\frac{r}{3}$ vom letzteren anbringen, damit jedesmal dasselbe Trägheitsmoment entstände, welches die Kugel hat?

Antwort: $\mu_1 = \frac{2}{5} M$, $\mu_2 = \frac{8}{5} M$ und $\mu_3 = \frac{18}{5} M$.

180. Wie verhalten sich die reduzierten Massen μ_1 , μ_2 eines und desselben Körpers in verschiedenen Abständen ϱ_1 , ϱ_2 von der Drehachse?

Antwort: Umgekehrt wie die Quadrate der letzteren; denn es gilt die Proportion $\mu_1 : \mu_2 = \varrho_2^2 : \varrho_1^2$.

§ 79.

Trägheitsmoment des Stabes.

Ausser den bisher behandelten einfachen Körperformen kommen bezüglich ihrer Trägheitsmomente noch einige andere Gebilde in Frage, von welchen wir zunächst die geradlinige Stange betrachten wollen. Wir setzen voraus, dass die Querschnittsdimensionen der Länge gegenüber keine Berücksichtigung erheischen

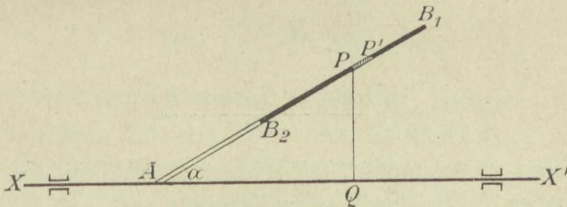


Fig. 97.

und nehmen den allgemeinsten Fall an, dass die Verlängerung der Stange B_1B_2 (Fig. 97), welche die Drehachse XX' in A schneidet, mit letzterer den Winkel $B_1AX' = \alpha$ einschliesst, ausserdem sei $AB_1 = l_1$, $AB_2 = l_2$ und das Gewicht der Längeneinheit q .

Jetzt zerlegen wir $B_1B_2 = l_1 - l_2$ in unendlich viele, daher auch unendlich kleine Teile, greifen ein solches Stabelement

$PP' = dx$ heraus und setzen den Abstand $AP = x$, während wir seine Entfernung QP von der Drehachse XX' mit y bezeichnen.

Dann ist für dieses Stabelement dx das Gewicht

$$dG = q \cdot dx,$$

also seine Masse

$$dM = \frac{q}{g} dx,$$

demnach sein Trägheitsmoment

$$dJ = y^2 dM = \frac{q}{g} y^2 dx$$

und folglich ergibt sich das gesamte Trägheitsmoment J unseres Stabes als Summe aller dJ von $x = l_2$ bis $x = l_1$, d. h. dadurch, dass wir den letzten Ausdruck für dJ zwischen den Grenzen l_1 und l_2 integrieren. Bedenken wir dabei, dass im rechtwinkligen Dreieck APQ die Gegenkathete $PQ = AP \cdot \sin \alpha$, das wäre

$$y = x \cdot \sin \alpha$$

ist, so ergibt sich auf diese Weise

$$J = \int_{x=l_2}^{x=l_1} \frac{q}{g} y^2 dx = \frac{q}{g} \cdot (\sin \alpha)^2 \cdot \int_{l_2}^{l_1} x^2 dx = \frac{q}{g} \cdot (\sin \alpha)^2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=l_2}^{x=l_1}$$

oder

$$J = \frac{q (l_1^3 - l_2^3) \sin^2 \alpha}{3g}.$$

Dividieren wir nunmehr, wie früher, dieses Trägheitsmoment J unseres Stabes $B_1 B_2$ durch seine Masse

$$M = \frac{q (l_1 - l_2)}{g},$$

so ergibt sich

$$\frac{J}{M} = \frac{l_1^3 - l_2^3}{3(l_1 - l_2)} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2}{3} \cdot \sin^2 \alpha$$

und hieraus folgt

$$J = \frac{M}{3} \cdot (l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2) \cdot \sin^2 \alpha, \quad \dots \quad (10.)$$

das Trägheitsmoment einer geradlinigen Stange von der Masse M , welche mit der Drehachse den Winkel α einschliesst und deren Endpunkte B_1, B_2 von letzterer die senkrechten Abstände $l_1 \sin \alpha, l_2 \sin \alpha$ besitzen.

Besondere Fälle.

1. Für $\alpha = 90^\circ$ wird $\sin \alpha = 1$ und man erhält aus der letzten Formel

$$J = \frac{M}{3} (l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2), \dots \dots \dots (11.)$$

das Trägheitsmoment eines geraden, zur Drehachse XX' rechtwinkligen Stabes (Fig. 98), dessen Endpunkte B_1 und B_2 von letzterer um l_1 und l_2 abstehen.

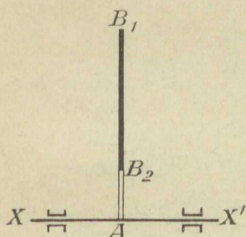


Fig. 98.

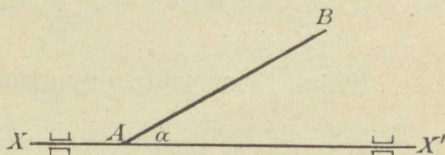


Fig. 99.

2. Ist dagegen $l_2 = 0$ und $l_1 = l$, so geht die 10. Formel über in

$$J = \frac{M}{3} (l \sin \alpha)^2, \dots \dots \dots (12.)$$

das Trägheitsmoment einer geraden Stange $AB = l$ (Fig. 99) mit der Masse M , deren Endpunkt A in XX' liegt und welche mit der Drehachse den beliebigen Winkel $BAX' = \alpha$ bildet.

3. Treten die beiden vorstehenden Bedingungen zusammen, so entsteht

$$J = \frac{M}{3} l^2, \dots \dots \dots (13.)$$

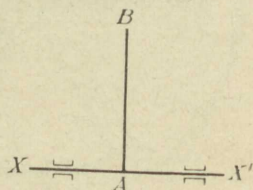


Fig. 100.

das Trägheitsmoment der Stange $AB = l$ (Fig. 100), welche die Masse M hat und mit dem Endpunkte A rechtwinklig zur Rotationsachse XX' befestigt ist.

4. Wenn die Stange $B_1 B_2$ die Drehachse durchschneidet, so dass die Endpunkte der ersteren auf entgegengesetzten Seiten der letzteren liegen, wie Figur 101 zeigt, so ergibt sich das Träg-

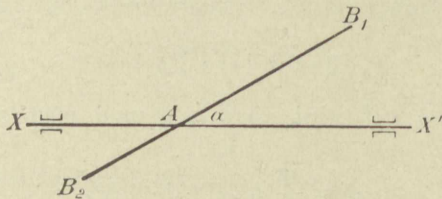


Fig. 101.

heitsmoment, wenn man in der 10. Formel — l_2 statt l_2 setzt, nämlich

$$J = \frac{M}{3} (l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2) \sin^2 \alpha.$$

§ 80.

Trägheitsmomente zusammengesetzter Körper.

Besteht ein Massengebilde aus solchen Teilen, von welchen die Trägheitsmomente in Bezug auf eine gewisse Achse bereits

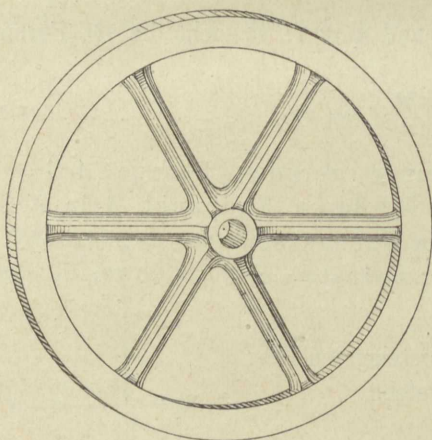


Fig. 102.

bekannt sind, so erhält man das Trägheitsmoment des Ganzen in Bezug auf dieselbe Achse durch Addition der Trägheitsmomente aller einzelnen Teile; denn laut Definition in § 71 ist jedes

Trägheitsmoment eine Summe und Summen werden gebildet, indem man alle ihre Glieder addiert.

Als Anwendungsbeispiel wählen wir die Berechnung des Trägheitsmomentes von einem Schwungrad, wie es aus Fig. 102 ersichtlich ist. Den

Schwungradkranz und die Nabe betrachten wir als zwei Hohlcylinder mit den Massen M_1, M_2 , den äusseren Radien R_1, r_1 und den inneren Radien R_2, r_2 , während wir annehmen, dass jeder von den n stabförmigen

Armen die Masse M_3 hat. Dann ergibt sich nach Formel 4 das Trägheitsmoment des Ringes

$$J_1 = M_1 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2},$$

sowie der Nabe

$$J_2 = M_2 \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{2},$$

ferner nach Formel 11 das Trägheitsmoment eines Armes

$$J_3 = M_3 \cdot \frac{r_1^2 + R_2 r_1 + R_2^2}{3}$$

und mithin das Trägheitsmoment des ganzen Schwungrades

$$J = J_1 + J_2 + n J_3,$$

oder

$$J = M_1 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} + M_2 \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + n M_3 \cdot \frac{r_1^2 + r_1 R_2 + R_2^2}{3}.$$

§ 81.

Trägheitsmoment einer rechteckigen dünnen Platte.

Um das Trägheitsmoment der in Figur 103 dargestellten rechteckigen Schicht $ABCD$ mit der Länge $AB = l$ in Bezug auf AD als Drehachse zu erhalten, zerlegen wir sie in unendlich viele Streifen rechtwinklig zu AD , welche die gemeinschaftliche Länge l besitzen und deren Massen der Reihe nach $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ sein mögen. Dann erhalten wir nach dem vorigen Paragraphen und auf Grund von Formel 13 das Trägheitsmoment der ganzen Schicht $ABCD$

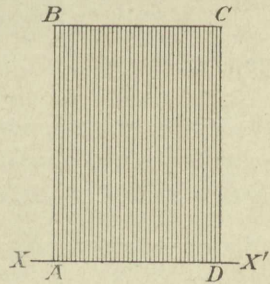


Fig. 103.

$$J = \frac{m_1}{3} l^2 + \frac{m_2}{3} l^2 + \frac{m_3}{3} l^2 + \frac{m_4}{3} l^2 + \dots + \frac{m_n}{3} l^2 = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n) \cdot \frac{l^2}{3},$$

oder, weil $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$ gleich der Masse M ist,

$$J = \frac{M}{3} l^2.$$

Ein anderer Weg zu demselben Resultate besteht darin, dass man sich die homogene Platte $ABCD$ in zahllose Streifen parallel zur Drehachse XX' zerlegt denkt (Fig. 104).

Ein solcher Streifen im Abstände $AE = x$ mit der Länge $EE' = AD = b$ und der Breite dx hat den Flächeninhalt $b dx$, folglich, wenn p das Gewicht pro Quadrateinheit bezeichnet, die Masse $\frac{p b dx}{g}$, mithin das Trägheitsmoment

$$dJ = \frac{b p}{g} x^2 dx,$$

und es ergibt sich hieraus durch Integration von $x = 0$ bis $x = l$

$$J = \frac{b p}{g} \cdot \int_0^l x^2 dx = \frac{b p}{g} \cdot \frac{l^3}{3}$$

oder, indem man diese Gleichung durch die Masse der ganzen Platte

$$M = \frac{b l p}{g}$$

dividiert,

$$\frac{J}{M} = \frac{l^2}{3},$$

woraus folgt

$$J = \frac{M l^2}{3},$$

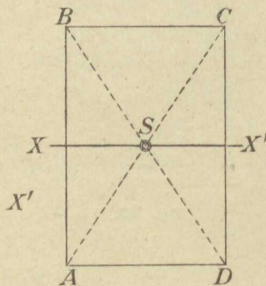


Fig. 105.

das Trägheitsmoment einer homogenen rechteckigen Platte mit der Masse M und den Seiten b und l in Bezug auf b , genau so wie oben.

Aus dieser letzten Formel kann mit Hilfe des in § 76 abgeleiteten Satzes leicht das Trägheitsmoment J_s in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S (Fig. 105) parallel AD gelegten Achse XX' abgeleitet werden; denn weil die Entfernung d zwischen beiden Achsen $\frac{l}{2}$ beträgt, so gilt

$$J_s = J - M d^2 = \frac{M}{3} l^2 - M \frac{l^2}{4},$$

woraus folgt

$$J_s = \frac{M l^2}{12}, \dots \dots \dots (14.)$$

das äquatoriale Trägheitsmoment einer homogenen rechteckigen Fläche von der Masse M in Bezug auf die zur Seite l rechtwinkligen Achse XX' .

§ 82.

Trägheitsmoment der dreieckigen Platte.

Wir zerlegen die dreieckige Schicht ABC (Fig. 106) wieder in schmale Streifen, welche parallel zur Seite $BC = a$ laufen, dieselben sind aber jetzt unter einander ungleich; denn denkt man sich auch ihre Breiten konstant gleich dx , so sind

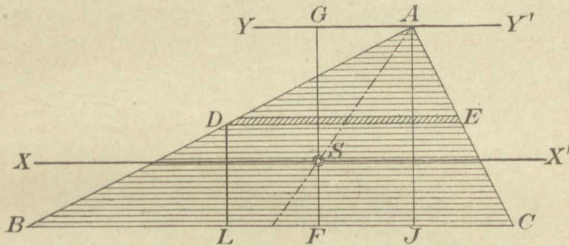


Fig. 106.

doch ihre Längen verschieden. Bezeichnet $DE = y$ die Länge eines solchen Streifens im beliebigen Abstände $DL = x$ von der Basis a und hat p dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen, so enthält ersterer die Masse $\frac{p}{g} \cdot y dx$ und demnach das Trägheitsmoment

$$dJ = \frac{p}{g} \cdot x^2 y dx$$

oder, weil wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und ADE mit den Grundlinien a, y , sowie den Höhen $AJ = h$ und $h - x$ die Proportion

$$a : y = h : (h - x)$$

und daraus

$$y = \frac{a}{h} (h - x)$$

folgt,

$$dJ = \frac{a p}{g h} (h x^2 - x^3) dx.$$

Jetzt ergibt sich durch Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = h$ das Trägheitsmoment

$$J = \frac{a p}{g h} \cdot \int_0^h (h x^2 - x^3) dx = \frac{a p}{g h} \left(\frac{h x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=h}$$

oder

$$J = \frac{a p h^3}{12 g}$$

und wenn wir diese Gleichung durch die Masse unserer Platte

$$M = \frac{a p h}{2 g}$$

dividieren,

$$\frac{J}{M} = \frac{h^2}{6}$$

oder

$$J = \frac{M}{6} \cdot h^2, \dots \dots \dots (15.)$$

das Trägheitsmoment einer dreieckigen homogenen Platte mit der Masse M und der Höhe h in Beziehung auf die der letzteren zugehörigen Basis a .

Behufs Bestimmung des Trägheitsmomentes J_s für die zu $BC = a$ parallelen Schwerachse XX' bedenken wir, dass in diesem Falle $d = SF = \frac{h}{3}$ ist und erhalten

$$J_s = J - d^2 M = \frac{M}{6} h^2 - \frac{h^2}{9} M$$

oder

$$J_s = \frac{M}{18} \cdot h^2, \dots \dots \dots (16.)$$

das äquatoriale Trägheitsmoment unserer Platte, worin die Drehachse rechtwinklig zu h ist.

Nunmehr können wir auch leicht zu demjenigen Trägheitsmoment J_1 unserer Platte gelangen, welches auf die durch den Eckpunkt A parallel zu $BC = a$ gehende Achse YY' bezogen ist, indem wir in Formel 7

$$J = J_s = \frac{M}{18} h^2 \text{ und } d = SG = \frac{2}{3} h$$

substituieren, wodurch entsteht

$$J_1 = \frac{M}{18} h^2 + \frac{4}{9} M h^2 = \frac{M}{2} h^2.$$

§ 83.

Das polare Trägheitsmoment dünner Platten.

In den letzten beiden Paragraphen haben wir die Trägheitsmomente homogener dünner Platten auf solche Achsen bezogen, welche in letzteren selbst liegen. Geht aber die Drehachse durch den Punkt O (Fig. 107) rechtwinklig zur Platte, so heisst

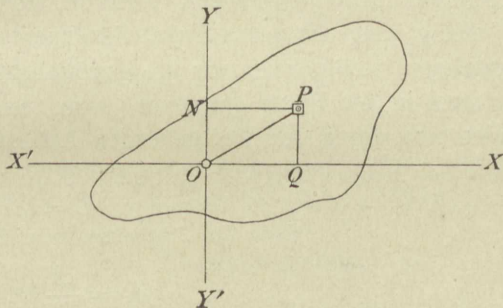


Fig. 107.

das Trägheitsmoment ein polares in Bezug auf jene Achse oder kurzweg in Bezug auf den Punkt O , welcher letzterer dann auch der »Pol« genannt wird. Bezeichnet demnach m die Masse eines Flächenteilchens an der beliebigen Stelle P und $OP = r$ seinen Abstand vom Pole O , so spricht sich der Begriff des polaren Trägheitsmomentes aus in der Beziehung

$$J_p = \Sigma m r^2. \quad \dots \dots \dots (17.)$$

Um nun eine allgemeine Formel zu erlangen, mit Hilfe welcher wir die Bestimmung der polaren Trägheitsmomente auf die früheren

Ergebnisse zurückführen können, denken wir uns in Figur 107 durch den Pol O zwei zu einander rechtwinklige Achsen $O X$, $O Y$ gelegt und von P auf dieselben die Lote $P Q = y$, $P N = x$ gefällt; dann gilt nach dem Pythagoras

$$r^2 = x^2 + y^2$$

und wir erhalten mit Einsetzung dieses Wertes in No. 17

$$J_p = \Sigma (m x^2 + m y^2) = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2.$$

Nun erkennen wir in $\Sigma m x^2$ das Trägheitsmoment unseres ebenen Gebildes in Bezug auf die Y -Achse und in $\Sigma m y^2$ das Trägheitsmoment derselben Figur bezogen auf die X -Achse. Bezeichnen wir daher das erstere mit J_y und das letztere mit J_x , so entsteht die Gleichung

$$J_p = J_x + J_y, \dots \dots \dots (18.)$$

woraus wir erkennen, dass das polare Trägheitsmoment einer ebenen Figur gleich ist der Summe derjenigen beiden Trägheitsmomente, welche auf zwei durch den Pol gehenden und zu einander rechtwinkligen Achsen bezogen sind. Dieser Satz befähigt uns, das polare Trägheitsmoment einer dünnen Platte zu berechnen, von welcher wir die gewöhnlichen Trägheitsmomente für zwei in der Platte gelegenen, einen rechten Winkel einschliessenden und durch den Pol gehenden Achsen kennen.

Z. B. habe das Rechteck $O A C B$ in Figur 108 die Masse M , die Seiten $O A = a$, $O B = b$ und die Diagonale $O C = c$; nach § 81 ist dann das Trägheitsmoment für $O X$

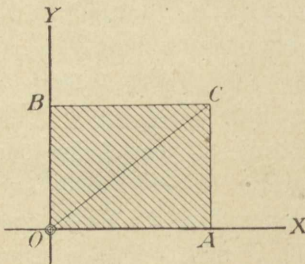


Fig. 108.

$$J_y = \frac{M}{3} b^2,$$

ferner für $O Y$

$$J_x = \frac{M}{3} a^2$$

und mithin laut Formel 17

$$J_p = J_x + J_y = \frac{M}{3} (b^2 + a^2)$$

oder wegen $a^2 + b^2 = c^2$

$$J_p = \frac{M}{3} \cdot c^2,$$

das polare Trägheitsmoment der homogenen rechteckigen Platte in Bezug auf den Eckpunkt O .

Mit Hilfe der Formel

$$J_p = J_x + J_y$$

lässt sich unter besonderen Umständen aus dem gewöhnlichen auf das polare Trägheitsmoment einer dünnen homogenen Platte schliessen. Wird nämlich letztere durch jede von zwei zu einander rechtwinkligen Achsen in Teile zerlegt, welche unter sich kongruent sind, so ist $J_y = J_x$, mithin $J_p = 2 J_x$ und folglich

$$J_x = \frac{J_p}{2}.$$

Diese Bedingung ist z. B. erfüllt bei der homogenen Kreisfläche, welche für jeden Durchmesser symmetrisch liegt. Nun gilt die Formel für das auf seine geometrische Achse bezogene Trägheitsmoment des homogenen Vollcylinders

$$J = \frac{M}{2} r^2$$

offenbar auch für eine unendlich dünne Kreisscheibe, da J nur von M und r , nicht aber von der Länge l des Cylinders abhängt; es ist also das polare Trägheitsmoment einer unendlich dünnen Scheibe in Bezug auf ihren Mittelpunkt

$$J_p = \frac{M}{2} r^2,$$

und wir erhalten mit Einsetzung dieses Wertes in die vorletzte Gleichung

$$J_x = \frac{M}{4} r^2,$$

das Trägheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe in Bezug auf einen beliebigen Durchmesser als Drehachse.

Übungsbeispiele.

181. Das polare Trägheitsmoment einer homogenen Rechtecksfläche mit der Masse M und der Diagonale e in Beziehung auf den Mittel- oder Schwerpunkt zu entwickeln.

$$\text{Resultat: } J_p = \frac{M}{12} \cdot e^2.$$

182. Man ermittle das polare Trägheitsmoment eines homogenen rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 109) mit der Masse M , den Katheten $AC = b$, $CB = a$ und der Hypotenuse $AB = c$ in Bezug auf den Eckpunkt A .

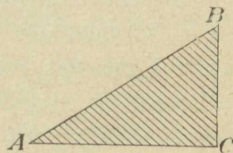


Fig. 109.

Lösung: Aus $J_x = \frac{M}{6} \cdot b^2$ und $J_y = \frac{M}{2} \cdot b^2$ folgt

$$J_p = J_x + J_y = \frac{2}{3} M b^2.$$

183. Ebenso in Bezug auf den Eckpunkt B .

Resultat: $J_p = \frac{2}{3} M a^2.$

184. Desgleichen, wenn der Scheitel C des rechten Winkels zum Pole gewählt wird.

Resultat: $J_p = \frac{M}{6} \cdot c^2.$

§ 84.

Von den geometrischen Trägheitsmomenten.

In der Festigkeitslehre und in der Hydrostatik ist ebenfalls von dem Trägheitsmomente ebener Flächen vielfach die Rede; man denkt sich aber dort über die Flächen nicht eine Masse M ausgebreitet, sondern man fasst das Trägheitsmoment rein geometrisch auf als Summe der Produkte zwischen allen Teilchen, aus welchen die ebene Figur besteht und den Quadraten ihrer Abstände von einer festen Achse, bezw. von einem festen Punkte in dieser ebenen Figur. Man sieht, dass die letzteren Trägheitsmomente nicht identisch sind mit den ersteren und um sie von einander zu unterscheiden, nennt man jene die geometrischen und diese die mechanischen Trägheitsmomente ebener Flächen. Zugleich liegt es aber in den beiderseitigen Definitionen begründet, dass man die geometrischen Trägheitsmomente des Rechteckes, des Dreieckes und des Kreises leicht erhalten kann, wenn man in den Formeln der Paragraphen 81 bis 83 für die Masse M der ebenen Figur das Produkt aus ihrem Inhalte F und der auf jede Flächeneinheit entfallenden Masse k einführt und sodann diesen letzteren Faktor, das wäre

$$k = \frac{p}{g}$$

der Einheit gleich setzt. Die nähere Ausführung wollen wir an einigen besonderen Fällen erläutern und dabei wie früher die Masse

des ebenen Gebildes mit M , das Gewicht pro Flächeneinheit mit p und die entsprechende Masse $\frac{p}{g}$ mit k bezeichnen. Dann ist für ein Rechteck mit den Seiten a und b das mechanische Trägheitsmoment in Bezug auf a nach § 81

$$J = \frac{M}{3} b^2,$$

oder, weil die Masse $M = \frac{a b p}{g} = a b k$ ist,

$$J = \frac{a b k}{3} b^2$$

und dieses spezialisiert sich für $k = 1$ in

$$J = \frac{a b^3}{3},$$

das geometrische Trägheitsmoment eines Rechtecks mit den Seiten a und b in Bezug auf a .

Ferner erhalten wir mit Einsetzung der Masse eines Dreiecks von der Basis a und der Höhe h , d. i.

$$M = \frac{a h}{2} \cdot \frac{p}{g} = \frac{a h k}{2}$$

in die 15. Formel

$$J = \frac{M}{6} \cdot h^2 = \frac{a h^3 k}{12}$$

und hieraus für $k = 1$

$$J = \frac{a h^3}{12},$$

das geometrische Trägheitsmoment eines Dreiecks mit der Höhe h in Bezug auf die zugehörige Basis a .

Weiter liefert die letzte Formel des vorigen Paragraphen mit Einsetzung von $M = r^2 \pi \cdot \frac{p}{g} = r^2 \pi k$ das mechanische Trägheitsmoment

$$J = \frac{M}{4} \cdot r^2 = \frac{r^4 \pi k}{4}$$

und hieraus entsteht für $k = 1$

$$J = \frac{r^4 \pi}{4},$$

das geometrische Trägheitsmoment des Kreises in Bezug auf einen Durchmesser, während sich aus der vorletzten Formel des vorigen Paragraphen

$$J_p = \frac{M}{2} r^2$$

mit Einführung derselben Werte von M und k das polare Trägheitsmoment des Kreises für den Mittelpunkt als Pol, nämlich

$$J_p = \frac{r^4 \pi}{2}$$

ergibt.



Inhalts-Verzeichnis.

I. Kapitel.

Schwerpunktsbestimmungen, die Stabilität der Körper und die Guldinsche Regel.

	Seite
§ 1. Schwerpunkte vom Kreisbogen und vom Kreisausschnitt	1
§ 2. Schwerpunkte krummer Flächen	3
§ 3. Schwerpunkte einfacher Körper	7
§ 4. Schwerpunkte zusammengesetzter Körper	11
§ 5. Stabilität	15
§ 6. Sicherheit eines Fabrikschornsteins gegen den Winddruck	18
§ 7. Die Arbeitsstabilität	22
§ 8. Beurteilung der Stabilität eines Körpers aus seinem Gewichte und der Lage seines Schwerpunktes	24
§ 9. Guldins Regel zur Bestimmung von Rotationsflächen	25
§ 10. Guldins Regel zur Bestimmung von Rotationskörpern	27
§ 11. Oberfläche und Kubikinhalte eines Ringes mit kreis-, bezw. halbkreisförmigem Querschnitt	29

II. Kapitel.

Die Lehre vom geraden Centralstosse fester Körper.

§ 12. Die verschiedenen Arten des Stosses	31
§ 13. Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgrösse	33
§ 14. Der vollkommen unelastische Stoss	36
§ 15. Verlust an Arbeitsvermögen beim vollkommen unelastischen Stosse	37
§ 16. Der vollkommen elastische Stoss	38
§ 17. Übungsbeispiele	39
§ 18. Der unvollkommen elastische Stoss	42
§ 19. Experimentelle Bestimmung des Stosskoeffizienten	43
§ 20. Arbeitsverlust beim unvollkommen elastischen Stoss	45
§ 21. Übungsbeispiele	47
§ 22. Über die nützliche und schädliche Wirkung des Stosses	49

II

III. Kapitel.

Die gleitende Reibung.

	Seite
§ 23. Einleitung	52
§ 24. Reibung auf horizontaler Bahn	55
§ 25. Der Reibungswinkel	56
§ 26. Reibung auf der schiefen Ebene	58
§ 27. Einführung des Reibungswinkels in die letzten Formeln	60
§ 28. Die Reibung am Keil	63
§ 29. Der Wirkungsgrad des Keiles	68
§ 30. Reibung an der Bewegungsschraube	71
§ 31. Wirkungsgrad der Bewegungsschraube	74
§ 32. Die Befestigungsschraube	78
§ 33. Die Seilreibung	79
§ 34. Die Bandbremsen	83
§ 35. Die Backenbremse	88

IV. Kapitel.

Graphische Darstellung der einfachen Bewegung, die Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung.

§ 36. Die Wegkurve	91
§ 37. Die Geschwindigkeit	95
§ 38. Das Geschwindigkeitsdiagramm	98
§ 39. Die mittlere Geschwindigkeit	100
§ 40. Die Beschleunigung	102
§ 41. Übungsbeispiele	105

V. Kapitel.

Die zusammengesetzte Bewegung eines mathematischen Punktes.

§ 42. Zusammensetzung zweier beliebiger geradliniger Bewegungen	107
§ 43. Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen. Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten	110
§ 44. Zusammensetzung von zwei schwingenden Bewegungen	114
§ 45. Zusammensetzung zweier gleichförmig beschleunigter Be- wegungen	116
§ 46. Zusammensetzung einer gleichmässig beschleunigten mit einer gleichförmigen Bewegung	119
§ 47. Das Zerlegen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen	121
§ 48. Der schiefe Centralstoss	122

III

VI. Kapitel.

Die Wurfbewegung.

	Seite
§ 49. Der schiefe Wurf	125
§ 50. Grösse und Richtung der Geschwindigkeit in irgend einem Punkte der Flugbahn	126
§ 51. Wurfhöhe, Wurfzeit und Wurfweite	128
§ 52. Die Gleichung der Wurfkurve	130
§ 53. Die Wurfkurve ist eine Parabel mit vertikaler Achse	131
§ 54. Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse	133
§ 55. Übungsbeispiele	134

VII. Kapitel.

Freie Bewegung des materiellen Punktes.

§ 56. Beziehungen zwischen Kraft und Bewegung	136
§ 57. Die gleichförmige Kreisbewegung	139
§ 58. Centripetal- und Centrifugalkraft	141
§ 59. Übungsbeispiele	144
§ 60. Das Centrifugalpendel	149
§ 61. Der Centrifugalregulator	151
§ 62. Beliebige freie Bewegung des materiellen Punktes	153

VIII. Kapitel.

Bewegung des materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn infolge der Schwerkraft.

Die Lehre vom Kreispendel.

§ 63. Bewegung auf schiefer Ebene ohne Berücksichtigung der Reibung und des Luftwiderstandes	157
§ 64. Verallgemeinerung des letzten Satzes	160
§ 65. Einfaches oder mathematisches Pendel	161
§ 66. Bestimmung der Schwingungsdauer	163
§ 67. Folgerungen aus der Formel für die Schwingungsdauer	166
§ 68. Zusammengesetztes oder physisches Pendel	168
§ 69. Übungsbeispiele	169

IX. Kapitel.

Drehbewegung des Körpers und die Lehre von den Trägheitsmomenten.

§ 70. Einleitung	171
§ 71. Entwicklung des Begriffes »Trägheitsmoment«	172
§ 72. Homogener Voll- und Hohlzylinder	173

	Seite
§ 73. Homogener Kegel	176
§ 74. Die homogene Kugel	178
§ 75. Übungsbeispiele	180
§ 76. Reduktion von Trägheitsmomenten	181
§ 77. Vom Trägheitshalbmesser	184
§ 78. Reduktion der Massen	187
§ 79. Trägheitsmoment des Stabes	189
§ 80. Trägheitsmomente zusammengesetzter Körper	192
§ 81. Trägheitsmoment einer rechteckigen dünnen Platte	193
§ 82. Trägheitsmoment der dreieckigen Platte	195
§ 83. Das polare Trägheitsmoment dünner Platten	197
§ 84. Von den geometrischen Trägheitsmomenten	200
