



H. F. B. Müller-Breslau

Die neueren Methoden der Festigkeitslehre  
und der Statik der Baukonstruktionen.

---





Die neueren Methoden

der

Festigkeitslehre

und der

Statik der Baukonstruktionen,

ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und  
den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit;

von

Dr. Ing. Heinrich F. B. Müller-Breslau,

Geheimem Regierungsrat und Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

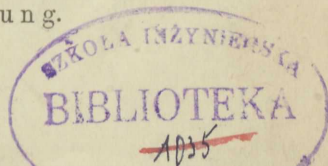
Dritte vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit 259 Abbildungen im Text.

Leipzig,

Baumgärtner's Buchhandlung.

1904.



Vorwort zur zweiten Auflage.

Dem Andenken

an

ALBERTO CASTIGLIANO

(† 1885)

gewidmet.



## Vorwort zur zweiten Auflage.

---

In dem vorliegenden Buche werden die von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit ausgehenden Methoden der Festigkeitslehre im Zusammenhange vorgetragen. Die zur Erläuterung der allgemeinen Beziehungen zwischen den äußeren und inneren Kräften gewählten Aufgaben sind größtenteils der Statik der Bauwerke und hier wiederum der Theorie der statisch unbestimmten Träger entlehnt worden; sie beziehen sich meistens auf schwierigere, zum Teil aber auch auf solche einfachere Fälle, die in anderer Weise ebenso kurz — und vielleicht noch kürzer — behandelt werden können, die aber mit aufgenommen wurden, weil die Gewinnung bekannter Ergebnisse auf neuen Wegen besonders geeignet sein dürfte, den Leser schnell mit den fraglichen Verfahren vertraut zu machen, wie denn überhaupt sämtliche Aufgaben vornehmlich darauf hinzielen, die gegebenen Gesetze streng zu beweisen und in möglichst lehrreicher Art zu erklären, nicht aber, die Theorie einer beschränkten Anzahl von Fällen bis ins Einzelne auszufeilen. Es sind deshalb die meisten Aufgaben über statisch unbestimmte Träger nur soweit durchgeführt worden, bis die statische Unbestimmtheit gehoben war, da gerade die einheitliche Berechnung der an Elastizitätsgleichungen gebundenen äußeren und inneren Kräfte neben einer übersichtlichen Darstellung der Formenänderungen das Feld bilden, auf welchem das Vorgetragene erfolgreich zu verwerten ist.

Besonders eingehend wurde die Aufsuchung der Einflußlinien für die statisch nicht bestimmbaren Größen ebener Träger behandelt, wozu es nötig war, die — vielfach erweiterten und vereinfachten — Gesetze über die Biegelinie (elastische Linie) abzuleiten, um mit



deren Hilfe die Berechnung der gesuchten Einflußlinien in besonders übersichtlicher Weise auf die Berechnung von Momentenlinien für einfache Balken zurückführen zu können.

Trotzdem sich das Buch an reifere, mit den Grundzügen der Festigkeitslehre und der Statik der Bauwerke bereits vertraute Leser wendet, und sein Umfang durch Voranstellung der im § 23 enthaltenen allgemeineren Untersuchungen etwas hätte gekürzt werden können, erschien es ratsam, mit der Betrachtung des übersichtlichsten Falles — der Theorie des Fachwerks — zu beginnen, und auch im zweiten Abschnitte der schärferen Untersuchung einfach gekrümmter Stäbe diejenigen vereinfachten Entwicklungen vor auszuschicken, die beispielsweise im Hochbau und Brückenbau bei der Berechnung von Bogenträgern stets Anwendung finden, da hier den Vorbedingungen der genaueren Theorie nur sehr unvollkommen entsprochen wird.

Die Ableitung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen für den elastischen Körper wurde, da sie den meisten Lesern aus der Mechanik geläufig sein dürfte, in einen Anhang verwiesen, der auch geschichtliche Angaben und Anführung einschlägiger Schriften enthält.

Auf die in diesem Buche gebotenen eigenen Untersuchungen brauche ich Kenner der Literatur nicht besonders hinzuweisen.

Berlin 1893.

**H. Müller-Breslau.**

## Vorwort zur dritten Auflage.

---

Die vorliegende dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten Auflage hauptsächlich durch die eingehendere Behandlung des statisch bestimmten Fachwerks. Insbesondere hoffe ich, daß der an den Schluß des Buches gestellte Abschnitt über das räumliche Fachwerk, der eine abgerundete Wiedergabe einiger vom Verfasser in einer Reihe kleinerer Abhandlungen veröffentlichten Untersuchungen enthält, Manchem willkommen sein wird. Denn, trotzdem es sich beim Fachwerk nur um die Auflösung von Gleichungen ersten Grades handelt, also um eine in mathematischer Beziehung sehr einfache Aufgabe, so begegnet man doch gerade bei der Berechnung räumlicher Fachwerke häufig recht umständlichen und weitläufigen Verfahren. Die Anwendungsbeispiele sind auf das notwendigste Maß beschränkt worden; eine ausführlichere Behandlung dieses Gebietes wird der dritte Band meiner „Graphischen Statik“ bringen. Immerhin genügt das in diesem Buche Gebotene für die Berechnung jedes räumlichen Fachwerks.

Der übrige Teil des Buches ist sorgfältig durchgesehen und verbessert worden. Zu großem Danke bin ich Herrn Ingenieur Müllenhoff in Lauchhammer verpflichtet, der mich bei dieser Durchsicht und beim Lesen der Korrekturen unterstützt hat.

Berlin 1904.

**H. Müller-Breslau.**





# Inhalt.

## Abschnitt I.

### Theorie des ebenen Fachwerks.

	Seite
§ 1. Allgemeines über das ebene Fachwerk . . . . .	1
§ 2. Die Maxwellschen Gleichungen zur Berechnung der statisch nicht bestimm- baren Größen $X$ , $X''$ . . . . .	22
§ 3. Verschiebungen der Knotenpunkte eines Fachwerks. Allgemeine Untersuchungen . . . . .	32
§ 4. Die Biegungspolygone für ebene Fachwerkträger . . . . .	36
§ 5. Das Biegungspolygon eines Strebenfachwerkes. (Zweites Verfahren.)	43
§ 6. Änderung der Länge einer Gurtsehne . . . . .	46
§ 7. Aufgaben, betreffend die Ermittlung von Biegungslinien . . . . .	47
§ 8. Ebene Fachwerkträger mit veränderlicher Belastung. Einflußlinien für die statisch nicht bestimm- baren Größen $X$ . . . . .	49
§ 9. Der Maxwellsche Lehrsatz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen . . . . .	58
§ 10. Bemerkung über die angenäherte Berechnung der statisch nicht be- stimm- baren Größen $X$ ebener Fachwerkträger . . . . .	69
§ 11. Die Castiglianoschen Lehrsätze über die Formänderungsarbeit . .	72

## Abschnitt II.

### Biegungsfestigkeit gerader und einfach gekrümmter Stäbe.

§ 12. Allgemeine Gesetze für Stäbe, deren Querschnittsabmessungen im Ver- hältnis zu den Krümmungshalbmessern klein sind . . . . .	77
§ 13. Die Spannungen $\sigma$ im geraden Stabe. Naviersche Biegungsformel	85
§ 14. Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte gerade Stäbe . . .	91
§ 15. Berechnung der Verschiebungen von Punkten gerader Stäbe und der Drehungswinkel von Tangenten an die Stabachse . . . . .	147
§ 16. Aufgaben über krumme Stäbe mit im Verhältnis zu der Querschnitts- höhe großen Krümmungshalbmessern . . . . .	154
§ 17. Die Biegungslinie . . . . .	171
§ 18. Der Maxwellsche Satz . . . . .	181
§ 19. Allgemeine Untersuchung des Einflusses einer Einzellast auf die statisch nicht bestimm- baren Größen $X$ . . . . .	189
§ 20. Fortsetzung . . . . .	203
§ 21. Schärfere Untersuchung einfach gekrümmter Stäbe . . . . .	209

### Abschnitt III.

	Seite
§ 22. Drehungsfestigkeit . . . . .	226
§ 23. Gesetze für beliebige isotrope, feste Körper . . . . .	235
§ 24. Schubfestigkeit . . . . .	243

### Abschnitt IV.

#### Das räumliche Fachwerk.

§ 25. Allgemeine Untersuchung des statisch bestimmten räumlichen Fachwerks	247
§ 26. Ermittlung der drei an einem Knotenpunkte auftretenden unbekannten Spannkkräfte . . . . .	258
§ 27. Beispiele . . . . .	275
§ 28. Die abgestumpfte Fachwerkpyramide und verwandte Systeme . . .	281
§ 29. Statisch bestimmte Schwedlersche Kuppeln . . . . .	288
§ 30. Die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte . . . . .	303
§ 31. Kinematische Ermittlung der Stabkräfte . . . . .	306
§ 32. Das statisch unbestimmte räumliche Stabwerk . . . . .	319
Anhang . . . . .	329

## Abschnitt I.

# Theorie des ebenen Fachwerks.

### § 1.

#### Allgemeines über das ebene Fachwerk.

1) Ein Fachwerk ist eine Verbindung von Stäben, welche in den Knotenpunkten, d. h. in den Punkten, in denen mehrere Stabachsen zusammentreffen, durch reibungslose Gelenke miteinander befestigt sind. Greifen alle äußeren Kräfte in den Knotenpunkten an (was streng genommen nur bei gewichtslosen Stäben möglich ist), so tritt in jedem Stabe eine mit der Achse desselben zusammenfallende Spannkraft auf, welche positiv oder negativ angenommen werden soll, je nachdem sie Zugspannungen oder Druckspannungen hervorbringt. Liegen alle Stabachsen und äußeren Kräfte in derselben Ebene, so heißt das Fachwerk ein ebenes.

Wir betrachten das ebene Fachwerk unter der Voraussetzung, daß die äußeren Kräfte sowohl für sich allein als auch mit den inneren Kräften im Gleichgewichte sind, und daß es zulässig ist, die durch die Elastizität des Materials der Fachwerkstäbe und der das Fachwerk

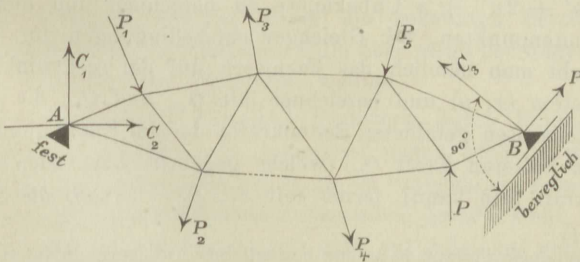


Fig. 1.

stützenden fremden Körper bedingten Formänderungen als verschwindend klein aufzufassen. Es dürfen in diesem Falle in die Gleichgewichts-



bedingungen alle Hebelarme und die Neigungswinkel der Stäbe mit denjenigen Werten eingeführt werden, welche dem spannungslosen Anfangszustande des Fachwerks entsprechen.

Die äußeren Kräfte sind theils gegeben und sollen dann Lasten heißen und mit  $P$  bezeichnet werden, theils bestehen sie aus den zu suchenden Widerständen  $C$  der das Fachwerk stützenden Körper. Die Stützpunkte, auch Auflager genannt, können bewegliche oder feste sein. Ein bewegliches Auflager entsteht, sobald ein Knotenpunkt gezwungen wird, auf einer gegebenen Linie zu bleiben, an der Bewegung längs dieser Linie aber durch den Zusammenhang mit dem Fachwerke gehindert wird; der Stützenwiderstand wirkt, wenn keine Reibung auftritt, senkrecht zu dieser Bahn, seine Richtung ist gegeben, seine Größe wird gesucht.\*)

Von dem Widerstande eines festen Auflagers ist hingegen sowohl die Größe als auch die Richtung unbekannt, es sind — wie wir bei der Herleitung der allgemeinen Gesetze voraussetzen wollen — zwei Seitenkräfte desselben anzugeben.

Die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte der Stützenwiderstände lassen sich auch als die Spannkkräfte in Stäben deuten, welche die fraglichen Stützpunkte mit außerhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkten verbinden und Auflagerstäbe genannt werden. Einem beweglichen Auflager entspricht ein Auflagerstab, zu einem festen gehören zwei Stäbe.

Die Einführung der Auflagerstäbe gestattet eine sehr kurze Darstellung allgemeiner Untersuchungen; es liegt nur eine Art von Unbekannten vor, denn man hat nur noch mit Stabkräften zu tun.

Bedeutet nun  $n'$  die Anzahl der beweglichen Auflager,

$n''$	"	"	"	"	"
				festen	
$r$	"	"	"	"	"
				Fachwerkstäbe,	

so sind  $n' + 2n'' + r$  Unbekannte zu berechnen und hierzu stehen, bei  $k$  Knotenpunkten,  $2k$  Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung.

Bezieht man nämlich das Fachwerk auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $(x, y)$  und bezeichnet mit  $Q_{xm}$  und  $Q_{ym}$  die parallel den Koordinatenachsen gebildeten Seitenkräfte der im Knotenpunkten  $m$  angreifenden äußeren Kraft  $Q_m$  (welche gegebene Last oder unbekannte Auflagerkraft sein kann), ferner mit  $S_1, S_2 \dots S_p$  die Spannkkräfte

---

\*) Reibungswiderstände an den beweglichen Auflagern dürfen wir hier ausschließen. Bei großem Reibungskoeffizienten kann ein bewegliches Lager zu einem festen werden; tritt Bewegung ein, so ist der Reibungswiderstand in bestimmter Weise von dem Normaldrucke auf die Auflagerbahn abhängig; wir zählen ihn in diesem Falle zu den Lasten, über deren Größe ja nichts vorausgesetzt zu werden braucht.

in den von  $m$  ausgehenden Stäben und mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  die Neigungswinkel dieser Stäbe gegen die  $x$ -Achse, so ergeben sich die beiden Gleichgewichtsbedingungen:

$$(1) \quad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

und zwei solcher Gleichungen ersten Grades lassen sich für jeden Knotenpunkt aufstellen.

Ist nun  $n' + 2n'' + r > 2k$ , so ist es nicht möglich, die Unbekannten lediglich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen, und das Fachwerk heißt ein statisch unbestimmtes.

Ist  $n' + 2n'' + r < 2k$ , so kann im allgemeinen kein Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren Kräften bestehen; das Fachwerk ist beweglich.

Ist aber  $r + n' + 2n'' = 2k$ , und besitzt die aus den Koeffizienten der linearen Gleichungen (1) gebildete Determinante  $D$  einen von Null verschiedenen Wert, so lassen sich die unbekannten Stabkräfte für jeden Belastungszustand eindeutig durch die gegebenen Lasten  $P$  ausdrücken. Ein solches Fachwerk heißt ein statisch bestimmtes. Die einzelnen Teile eines solchen Fachwerks können nicht gegeneinander bewegt werden, weil die Gleichungen (1) aussprechen, daß an jedem Knotenpunkte für jede Angriffsweise Gleichgewicht besteht.

Die Untersuchung der Determinante  $D$  ist umständlich, aber auch entbehrlich, da sich die Frage nach der statischen Bestimmtheit stets schnell und sicher durch den Versuch entscheiden läßt, die unbekannten Spannkkräfte für einen ganz allgemeinen Belastungszustand eindeutig zu bestimmen. Meistens werden hierzu die bekannten Berechnungsverfahren ausreichen; für verwickeltere Fälle aber möge der folgende, immer zum Ziele führende Weg angegeben werden.

Man verwandle das fragliche Fachwerk durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügung von ebensoviel neuen Stäben, welche kurz Ersatzstäbe genannt werden sollen, in ein Stabgebilde, dessen statische Bestimmtheit und Unbeweglichkeit außer allem Zweifel steht, und dessen Spannkkräfte und Auflagerwiderstände sich auf möglichst einfache Weise ermitteln lassen. Die Spannkkräfte der beseitigten Stäbe bringe man an dem neuen Fachwerke als äußere Kräfte an; sie mögen mit  $Z_a, Z_b, Z_c, \dots, Z_n$  bezeichnet werden. Hierauf stelle man die Spannkkräfte des neuen Fachwerks als Funktionen der gegebenen Lasten  $P$  und der





möglich, so von Knotenpunkt zu Knotenpunkt zu gehen, daß man an jedem Knotenpunkte immer nur zwei unbekannten Stabkräften begegnet, so beseitige man die überzähligen Stäbe und rechne ihre Spannkraften  $Z$  zunächst zu den gegebenen Lasten. Man wird dann auch auf Knotenpunkte stoßen, an denen Stäbe fehlen, weil ja das Fachwerk nur die erforderliche Stabzahl besitzt — was gleich zu Beginn der Untersuchung festgestellt worden ist. An diesen Knotenpunkten werden nun die Ersatzstäbe angebracht. Dabei ist es keineswegs notwendig, die

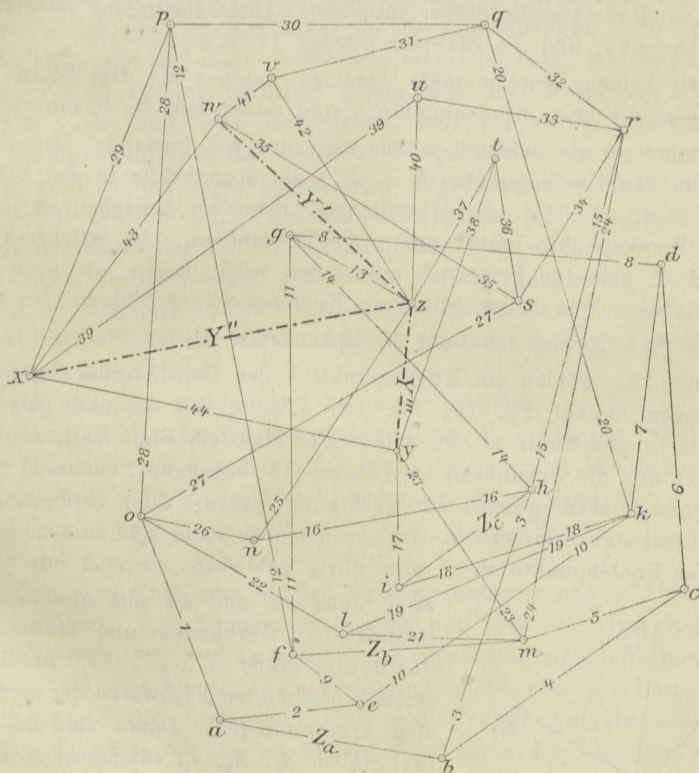


Fig. 2.

Ersatzstäbe zwischen zwei Knotenpunkten einzuziehen. Diese Stäbe dürfen auch nach außerhalb des Fachwerks liegenden festen Punkten geführt werden; ihre Richtungen werden so gewählt, daß möglichst einfache und übersichtliche Rechnungen und Kräftezerlegungen entstehen.

Die folgenden Beispiele werden genügen, das beschriebene allgemeine Verfahren zu erläutern.

**1. Beispiel.** An der in Fig. 2 dargestellten Fachwerkscheibe mögen sich gegebene äußere Kräfte das Gleichgewicht halten. Es soll der Weg zur Bestimmung der Spannkkräfte angegeben werden. Da die äußeren Kräfte im Gleichgewicht sein sollen, so dürfen sie nicht willkürlich angenommen werden; sie müssen vielmehr drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Von den  $2k$  Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren und inneren Kräften des Fachwerks stehen also zur Berechnung der Spannkkräfte nur noch  $2k - 3$  voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung; die Scheibe muß also  $2k - 3$  Stäbe, und nicht mehr Stäbe, enthalten. Diese Bedingung ist erfüllt; es ist  $k = 25$ , und die Stabzahl beträgt  $47 = 2 \cdot 25 - 3$ .

An keinem Knotenpunkte kommen weniger als drei Stäbe vor. Beginnen wir beim Knotenpunkte  $a$  und setzen wir die Spannkraft  $Z_a$  des Stabes  $\overline{ab}$  als bekannt voraus, so sind wir imstande, der Reihe nach an den Knotenpunkten  $b, c, d, e$  die Spannkkräfte in den Stäben 1, 2, 3, 4, . . . bis 10 zu bestimmen, denn wir begegnen an jedem dieser Knotenpunkte immer nur zwei Unbekannten. An welcher Stelle der zu  $Z_a$  gehörige Ersatzstab eingezogen wird, lassen wir noch unentschieden. Wir gehen nun zum Knotenpunkte  $f$ , führen den Stab  $\overline{fm}$  als Stab  $Z_b$  ein, ermitteln die Spannkkräfte in den Stäben 11, 12, 13 und 14, wählen am Knotenpunkte  $h$  den Stab  $\overline{hi}$  zum Stabe  $Z_c$ , bestimmen hierauf 15, 16, 17, 18, u. s. w. bis 42 und gelangen so zum Knotenpunkte  $w$ , wo zum ersten Male ein Stab fehlt, denn es ist dort nur die Spannkraft des Stabes 43 unbekannt, während zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen. Hier wird also der erste Ersatzstab erforderlich. Im vorliegenden Falle sind nur noch die wenigen Knotenpunkte  $w, x, y, z$  übrig geblieben; sie sind nur durch

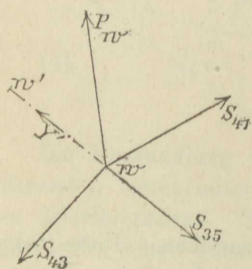


Fig. 3.

zwei Stäbe  $wx$  und  $xy$  mit unbekannten Spannkkräften verbunden und lassen sich durch drei Stäbe  $Y', Y'', Y'''$  zu einem statisch bestimmten Fachwerke der einfachsten Art vereinigen. Damit sind die den drei Stäben  $Z_a, Z_b, Z_c$  entsprechenden Ersatzstäbe gefunden. Man erkennt, daß das neue Fachwerk, in welches das gegebene Fachwerk verwandelt worden ist, aus einem Dreieckssystem  $wxyz$  besteht, an welches die übrigen Knotenpunkte in der Reihen-

folge  $v, u, t, s, r, \dots, c, b, a$  zweistufig angeschlossen sind. Daß dieses Verfahren selbst in den schwierigsten Fällen zum Ziele führt, bedarf keines weiteren Beweises.



In Fig. 3 haben wir noch den Fall dargestellt, wo der am Knotenpunkte  $w$  erforderliche erste Ersatzstab  $Y'$  in einem beliebigen festen Punkte  $w'$  endigt. Von den in  $w$  angreifenden Stabkräften  $S$  ist nur noch  $S_{43}$  unbekannt. Es empfiehlt sich, dem Stabe  $Y'$  die Richtung einer der bekannten Kräfte zu geben; wir wählten in Fig. 3 die Richtung von  $S_{35}$ . Das Kräftepolygon liefert dann die beiden Werte  $S_{43}$  und  $Y' - S_{35}$ . Dieser Vorgang läßt sich auch in folgender Weise beschreiben. Man läßt den Stab  $ww'$  weg und betrachtet dafür außer  $S_{43}$  noch eine der beiden bereits bekannten Stabkräfte als Unbekannte, beispielsweise  $S_{35}$ . Den für  $S_{35}$  gewonnenen Wert setzt man nun demjenigen gleich, den das Kräftepolygon des Knotenpunktes  $s$  für  $S_{35}$  geliefert hat. Die auf diese Weise erhaltene Gleichung zur Berechnung der  $Z$ -Kräfte stimmt natürlich genau mit der Bedingung  $Y' = 0$  überein. Ich muß dies hervorheben, weil vor kurzem diese zweite Darstellungsweise eines und desselben Vorganges zu einem neuen Verfahren erhoben und sogar gegen mein allgemeines Ersatzstabverfahren ausgespielt worden ist,<sup>\*)</sup> trotzdem ich bereits im Jahrgange 1891 des Zentralblatts der Bauverwaltung (Seite 440, Abb. 20 u. 21) den nach einem festen Punkte gehenden, beliebig gerichteten Ersatzstab eingeführt und auch das zweckmäßige des Zusammenfallens seiner Richtung mit der Richtung eines wirklich vorhandenen Stabes durch ein Beispiel erläutert habe.

Ich will noch zwei andere Lösungen mitteilen.

Erstens: Man ersetzt die gegebene Kraft  $P_w$  durch die unbekannte Kraft  $Y'$ , ermittelt nun mit Hilfe des Kräftepolygons die beiden Unbekannten  $Y'$  und  $S_{43}$  und stellt dann zur Berechnung der  $Z$ -Kräfte die Gleichung auf

$$Y' = P_w;$$

und ebenso verfährt man an den Knotenpunkten  $x$  und  $y$ .<sup>\*\*)</sup>

Zweitens: Am Knotenpunkte  $w$  ist nur noch die eine Stabkraft  $S_{43}$  unbekannt, während zwei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden müssen; die eine Gleichgewichtsbedingung steht also zur Berechnung der Kräfte  $Z$  zur Verfügung. Wir wollen diese Aufgabe analytisch lösen und setzen, um  $S_{43}$  zu finden, die Summe der Projektionen der in  $w$  angreifenden Kräfte auf eine Gerade, die rechtwinklig zu  $S_{35}$  oder  $S_{41}$  ist, gleich Null. Mit den in die Figur 4a eingetragenen Winkelbezeichnungen finden wir

$$S_{43} = \frac{S_{41} \sin \alpha + P_w \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

<sup>\*)</sup> Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, Seite 634.

<sup>\*\*) Nach dieser Lesart habe ich im Zentralblatt der Bauverwaltung 1902 auf Seite 62 ein Beispiel behandelt.</sup>

Jetzt setzen wir die Summe der Projektionen der Kräfte auf eine zu  $S_{41}$  oder  $S_{43}$  rechtwinklige Gerade gleich Null. Mit den in Fig. 4b angegebenen Bezeichnungen erhalten wir die Gleichung

$$S_{35} \sin \varphi + S_{41} \sin \tau = P_w \sin \psi,$$

in der nur noch die Unbekannten  $Z_a, Z_b, Z_c$  vorkommen. Ganz ebenso verfahren wir am Knotenpunkte  $x$ . Nach Bestimmung von  $S_{44}$  mit Hilfe der einen Gleichgewichtsbedingung steht die zweite Bedingung wieder zur Berechnung der Unbekannten  $Z$  zur Verfügung. Da nunmehr alle Stabkräfte als Funktionen der  $P$  und  $Z$  dargestellt worden sind, so braucht man nur noch eine dritte Gleichung zur Bestimmung der Kräfte  $Z$ . Man hat die Wahl unter den vier Gleichgewichtsbedingungen der beiden Knotenpunkte  $y$  und  $z$ . Drei Gleichgewichtsbedingungen bleiben übrig, was damit zusammenhängt, daß die äußeren Kräfte nicht willkürlich angenommen werden dürfen, sondern die drei

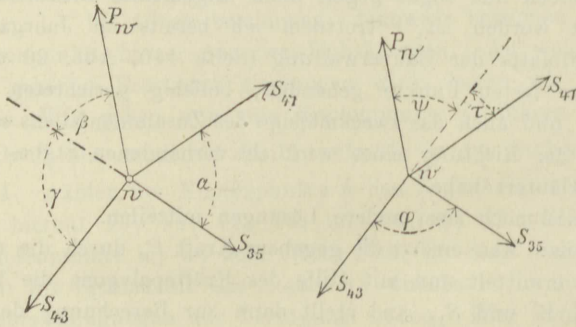


Fig. 4a und 4b.

allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen müssen, denen jedes ebene Kräftesystem, das an einer starren Scheibe angreift, zu genügen hat. Die übrig bleibenden Gleichgewichtsbedingungen können nun zur Prüfung der Richtigkeit der Zahlenrechnung benutzt werden; sie entsprechen den bekannten Zeichnungsproben, welche beim Auftragen der Kräftepolygone für die Knotenpunkte eines Fachwerks stets zur Verfügung stehen, sobald sämtliche äußeren Kräfte gegeben sind.

Ob man sich nun besser dafür entscheidet, Ersatzstäbe zwischen Knotenpunkte des Fachwerks einzuziehen oder einen der zuletzt beschriebenen Wege zu gehen, hängt von der Natur der zu lösenden Aufgabe ab. Jedenfalls ist die Einfügung von Ersatzstäben, die zwischen Fachwerksknotenpunkten eingezogen werden oder nach außerhalb des Fachwerks liegenden festen Punkten führen und deren Spannkkräfte an jeder beliebigen Stelle des Rechnungsganges gleich Null gesetzt

werden dürfen, die allgemeinste der hier vorgeführten Darstellungsweisen; aus ihr folgt jede andere Darstellung durch Spezialisierung.

Hervorzuheben ist noch, daß jede Aufgabe — je nach der Wahl der Z-Stäbe — verschiedene Lösungen zuläßt, und daß man vor der Auftragung von Kräfteplänen und Ausführung von Rechnungen verschiedene Wege miteinander vergleichen wird, um mit einer möglichst kleinen Anzahl von Z-Stäben auszukommen, es sei denn, daß symmetrisch gebaute Fachwerke vorliegen, bei denen es sich dann meistens

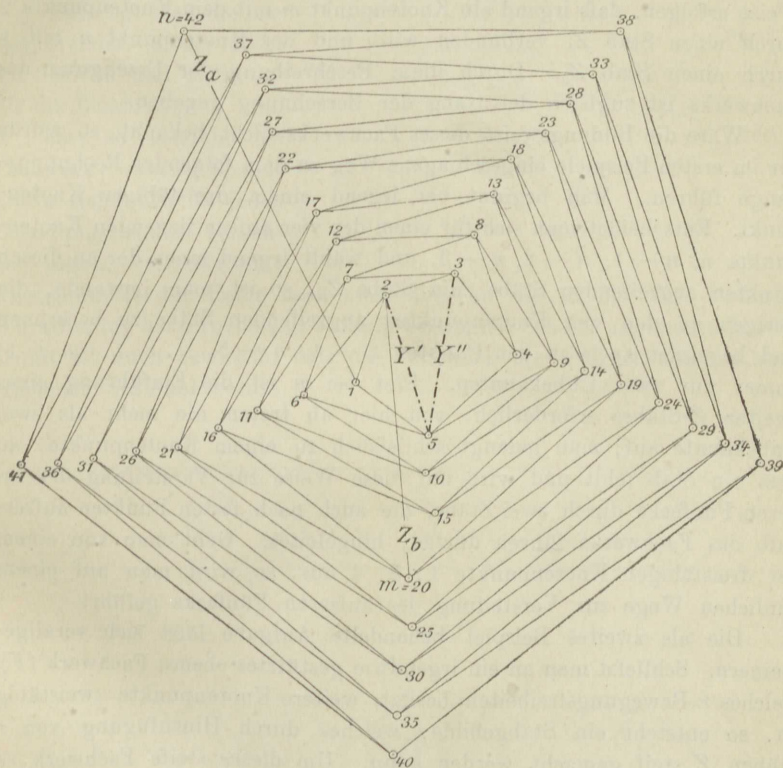


Fig. 5.

empfiehlt, die aus der Regelmäßigkeit sich ergebenden Vereinfachungen tunlichst auszunutzen und dafür lieber eine größere Anzahl von Z-Stäben in den Kauf zu nehmen. Wir machen schon an dieser Stelle auf die in dem Abschnitte über das räumliche Fachwerk vorgeführten Aufgaben aufmerksam, denn für den Raum ist unser Verfahren von besonderer Bedeutung.



**2. Beispiel.** An ein aus fünf Stäben bestehendes Fünfeck 1, 2, 3, 4, 5, Fig. 5, seien weitere Knotenpunkte 6, 7, 8, . . .  $m$  . . .  $n$  durch je zwei Stäbe in der Weise angeschlossen, daß 6 verbunden wird mit 5 und 2, 7 mit 6 und 3, . . .  $n$  mit  $(n - 1)$  und  $(n - 4)$ . Es entsteht auf diese Weise ein Fachwerk, das nicht steif ist, sondern zwei Bewegungsfreiheiten besitzt, das aber im allgemeinen in ein steifes Fachwerk übergeht, sobald zwei Stäbe hinzugefügt werden. Das naheliegendste wäre nun, das Fünfeck zu versteifen, beispielsweise durch die Diagonalen  $Y'$  und  $Y''$ . Die Versteifung möge aber in der Weise erfolgen, daß irgend ein Knotenpunkt  $m$  mit dem Knotenpunkte 2 durch einen Stab  $Z_b$  verbunden wird und der Knotenpunkt  $n$  mit 1 durch einen Stab  $Z_a$ . Durch diese Beschreibung der Erzeugung des Fachwerks ist zugleich der Gang der Berechnung gegeben.

Wäre die Bildungsweise dieses Fachwerks nicht bekannt, so würde der im ersten Beispiele eingeschlagene Weg zu dem folgenden Rechnungsgange führen. Man beginnt bei irgend einem dreiständigen Knotenpunkt. Entscheidet man sich für einen der vier außen liegenden Knotenpunkte  $n$ ,  $n - 1$ ,  $n - 2$ ,  $n - 3$ , und wählt irgend einen der an diesen Punkten angreifenden Stäbe zum Stabe  $Z_a$ , so ist man imstande, die übrigen an den vier Knotenpunkten angreifenden Stäbe zu berechnen und begegnet auch an den Punkten  $n - 4$ ,  $n - 5$ , . . . . .  $(m + 1)$  immer nur zwei Unbekannten. Erst bei  $m$  ist die Einführung eines zweiten  $Z$ -Stabes erforderlich; von hier ab treten nie mehr als zwei Unbekannte auf; man gelangt schließlich zu einem Knotenpunkte, an dem ein Stab fehlt und wird auf diese Weise zur Versteifung des inneren Fünfecks durch zwei Stäbe, die auch nach festen Punkten außerhalb des Fachwerks führen dürfen, hingeleitet. Geht man von einem der dreiständigen Knotenpunkte 1, 3, 4 aus, so wird man auf einem ähnlichen Wege zur Versteifung des äußeren Fünfecks geführt.

Die als zweites Beispiel behandelte Aufgabe läßt sich verallgemeinern. Schließt man an ein irgendwie gestütztes ebenes Fachwerk ( $F$ ), welches  $r$  Bewegungsfreiheiten besitzt, weitere Knotenpunkte zweiständig an, so entsteht ein Stabgebilde, welches durch Hinzufügung von  $r$  Stäben  $Z$  steif gemacht werden kann. Um dieses steife Fachwerk zu berechnen, führe man die zur Versteifung des Fachwerks ( $F$ ) erforderlichen  $r$  Ersatzstäbe  $Y$  ein. Die Zahl  $r$  ist hierbei die größte Anzahl der zur Berechnung der  $Z$  aufzustellenden Gleichungen  $Y = 0$ . Es kann aber auch vorkommen, daß man mit weniger als  $r$  Gleichungen auskommt, da durch die Einfügung der  $Z$ -Stäbe ein Fachwerk entstehen kann, das sich aus einer Stabverbindung mit  $i$  Bewegungsfreiheiten herleiten läßt, wo  $i < r$  ist. Liegt z. B. bei dem oben aus dem

Fünfeck abgeleiteten Fachwerk der Sonderfall  $m = 8$  und  $n = 11$  vor, Fig. 6, so braucht man nur einen einzigen Ersatzstab  $Y$  einzuführen.

**3. Beispiel.** Es soll der in Fig. 7 dargestellte trapezförmige Balken, dessen Füllungsstäbe ein vierfaches, durch drei Ständer versteiftes Netzwerk bilden, untersucht werden.

Beseitigt man die beiden Ständer in der Nähe der Stützen und zieht dafür die Ersatzstäbe  $Y'$  und  $Y''$  ein, so entsteht ein Fachwerk, dessen Spannkraften sich leicht für jeden Belastungszustand berechnen lassen, weil sich seine Knotenpunkte der Reihe nach zweistufig an die in der Fig. 8 durch Schraffierung hervorgehobene statisch bestimmte Scheibe angliedern lassen. Damit ist auch bewiesen, daß das Fachwerk die erforderliche und ausreichende Stabzahl besitzt.

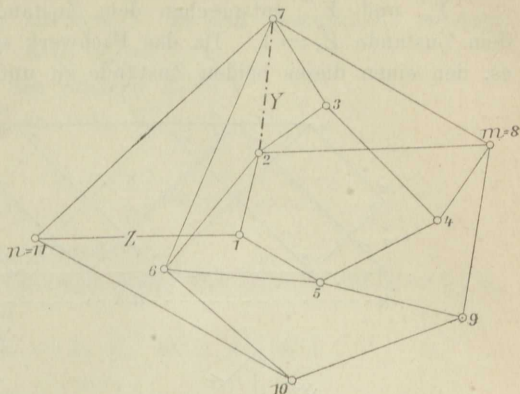


Fig. 6.

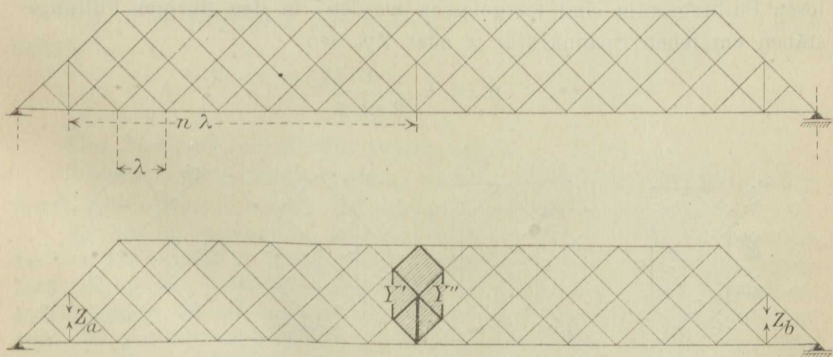


Fig. 7 und 8.

Wir wollen dieses Beispiel etwas weiter durchführen und die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} Y'_a & Y'_b \\ Y''_a & Y''_b \end{vmatrix}$$

welche über die statische Bestimmtheit entscheidet, untersuchen. Die Anzahl der Felder sei gleich groß, die Streben mögen alle mit der Wagerechten denselben Neigungswinkel  $\varphi$  bilden.

$Y_a'$  und  $Y_a''$  entsprechen dem Zustande  $Z_a = 1$ , und  $Y_b'$ ,  $Y_b''$  dem Zustande  $Z_b = 1$ . Da das Fachwerk symmetrisch ist, so genügt es, den einen dieser beiden Zustände zu untersuchen.

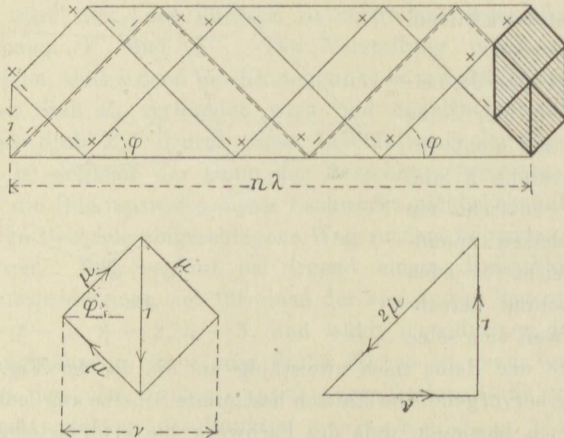


Fig. 9.

Fig. 9 stellt den Belastungszustand  $Z_a = 1$  dar. Die spannungslosen Füllungsstäbe sind fortgelassen worden; in den übrigen Füllungsstäben entstehen Spannkkräfte  $\mu$  oder  $2\mu$ , wo

$$\mu = \pm \frac{1}{2 \sin \varphi}$$

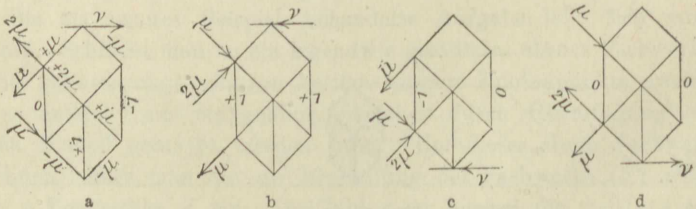


Fig. 10.

ist. Die mit  $2\mu$  beanspruchten Stäbe sind durch gestrichelte Linien hervorgehoben worden. Der Trägerteil rechts von der schraffierten Scheibe ist spannungslos. Der Abstand der seitlichen Vertikalen von der Mitte sei gleich  $n\lambda$ . In Fig. 7 ist  $n = 7$ . Für diesen Fall und ebenso für  $n = 3$ ,  $n = 11$ ,  $15$ ,  $19$ , . . . zeigt Fig. 10a den Be-



lastungszustand der steifen Scheibe in der Mitte des Balkens. Es greifen an dieser Scheibe drei Streben an, deren Spannkkräfte  $\mu$ ,  $\mu$ ,  $2\mu$  sind. Damit Gleichgewicht besteht, muß die obere Gurtung auf die Scheibe einen Druck  $\nu = 1 \cdot \cotg \varphi$  ausüben.\*) In den Ersatzstäben entsteht

$$Y_a' = 0, Y_b' = -1.$$

Daraus folgt nun für den Zustand  $Z_b = 1$

$$Y_a'' = -1, Y_b'' = 0,$$

mithin

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Das Fachwerk ist also brauchbar.

Fig. 10b gibt den Belastungszustand der Scheibe für  $n = 2, 6, 10, 14, \dots$  an; es wird

$$Y_a' = 1, Y_b' = 1, Y_a'' = 1, Y_b'' = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und das Fachwerk erweist sich als unbrauchbar.

Fig. 10c gilt für  $n = 1, 5, 9, 13, \dots$  und liefert

$$Y_a' = -1, Y_b' = 0, Y_a'' = 0, Y_b'' = -1$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +1.$$

Das Fachwerk ist brauchbar.

Fig. 10d entspricht den Fällen  $n = 4, 8, 12, 16, \dots$  und liefert

$$Y_a' = 0, Y_b' = 0, Y_a'' = 0, Y_b'' = 0$$

$$D = 0.$$

Das Fachwerk ist wieder unbrauchbar.

Unsere Untersuchung beweist, daß  $n$  eine ungrade Zahl sein muß, wenn das Fachwerk ein statisch bestimmtes sein soll.

2) Dem im vorstehenden entwickelten Verfahren des Verfassers möge nun das von Henneberg in seinem Buche Statik der starren Systeme, Leipzig 1886, angegebene Verfahren, das ebenfalls stets zum Ziele führt, gegenübergestellt werden. Es gilt zunächst nur für freie, d. h. ungestützte Fachwerke, an denen sich gegebene äußere Kräfte das Gleichgewicht halten, läßt sich aber ohne weiteres auch auf irgendwie gestützte Fachwerke ausdehnen. Man hat nur nötig, die Stützpunkte durch Stäbe mit außerhalb des Fachwerks liegenden festen Punkten zu verbinden und diese festen Punkte zu Knotenpunkten eines die Gesamtheit aller Widerlager vorstellenden statisch bestimmten Fachwerks zu machen. Auf diese Weise bildet man aus dem Fachwerk und den Widerlagern eine Fachwerkscheibe; sie möge  $k$  Knotenpunkte und  $2k - 3$  Stäbe enthalten. Besitzt diese

\*) Dies Ergebnis liefert auch die Verfolgung der Spannkkräfte  $\mathfrak{S}_a$  in den Gurtungen.

Scheibe dann keinen einzigen einfachen Knotenpunkt,\*) so muß sie mindestens einen zweifachen Knotenpunkt haben, denn liegen in allen Knotenpunkten mindestens vier Stäbe zusammen, so müßten wenigstens  $\frac{4k}{2} = 2k$  Stäbe vorhanden sein. Auf diesen Satz stützt sich nun das Verfahren von Henneberg: die Berechnung jedes freien Fachwerks von  $n$  Knotenpunkten auf die Berechnung eines Fachwerks von  $n-1$  Knotenpunkten zurückzuführen. Wir teilen hier die von Henneberg selbst gegebene Darstellung seines Verfahrens mit. (Siehe a. a. O. Seite 228.)

„Es möge ein bestimmtes ebenes Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten gegeben sein, welches keinen einfachen Knotenpunkt besitzt. Dann ist jedenfalls ein

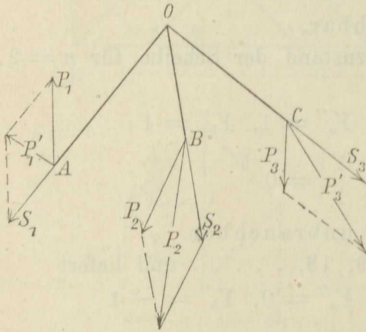


Fig. 11.

zweifacher Knotenpunkt  $O$  vorhanden. Derselbe sei durch Stäbe mit den drei Knotenpunkten  $A, B, C$  verbunden, und zwar seien relative Verschiebungen der beiden Punkte  $A$  und  $B$  nach Weglassung des Knotenpunktes  $O$  und der drei Stäbe  $OA, OB, OC$  möglich. Aus dem Fachwerke von  $n$  Knotenpunkten läßt sich ein einfaches von  $n-1$  Knotenpunkten herleiten, indem der Knotenpunkt  $O$  und die Stäbe  $OA, OB, OC$  weggelassen und dafür ein Stab  $AB$  hinzugefügt wird. Hierbei ist das Fachwerk von  $n-1$  Knotenpunkten ein (statisch) bestimmtes, sobald das Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten ein

solches ist. Ist umgekehrt das Fachwerk von  $n-1$  Knotenpunkten ein bestimmtes, so ist es auch dasjenige von  $n$  Knotenpunkten.\*\*)

Die Kräfte, welche auf die einzelnen Knotenpunkte  $X, Y$  des Fachwerks von  $n$  Knotenpunkten wirken, seien  $P_i$  und speziell  $P_0, P_1, P_2, P_3$  die Kräfte, welche auf die Knotenpunkte  $O, A, B, C$  wirken.

Die Kraft  $P_0$ , welche auf  $O$  wirkt, läßt sich auf unendlich viele Arten in drei Komponenten  $S_1, S_2, S_3$  zerlegen, welche in den drei Stäben  $OA, OB, OC$  liegen. Es seien  $S_1', S_2', S_3'$  die Komponenten von  $P_0$  bei einer speziellen Zerlegung und ferner  $S_1'', S_2'', S_3''$  irgend drei in  $OA, OB, OC$  liegende Kräfte, welche unter sich im Gleichgewichte stehen. Dann sind alle möglichen Zerlegungen von  $P_0$  in drei Komponenten in  $OA, OB, OC$  in der Form enthalten

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1' + \lambda S_1'' \\ S_2 &= S_2' + \lambda S_2'' \\ S_3 &= S_3' + \lambda S_3'' \end{aligned}$$

Diese drei Kräfte  $S_1, S_2, S_3$  drücken den Einfluß aus, welchen der Knotenpunkt  $O$  und die Kraft  $P_0$  auf die Spannungen in den übrigen Stäben des Fachwerks besitzt. Es sei nun der Knotenpunkt  $O$  weggewonnen, dafür ein Stab  $AB$  hinzugefügt, und so das bestimmte Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten auf ein

\*) Ein Knotenpunkt heißt  $i$ -fach, wenn  $i+1$  Stäbe von ihm ausgehen.

\*\*) Hier steht bei Henneberg noch der Zusatz: „wenn der Punkt  $O$  nicht auf dem Kegelschnitte 4, § 39 sich befindet“. Auf die Wiedergabe der Gleichung dieses Kegelschnittes (a. a. O. Seite 219) dürfen wir hier verzichten.

solches von  $n - 1$  Knotenpunkten reduziert. Sollen dann die Spannungen in den Stäben des Fachwerkes von  $n - 1$  Knotenpunkten übereinstimmen mit den Spannungen, die sich in dem Fachwerke von  $n$  Knotenpunkten infolge der Kräfte  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$  ergeben, so muß es möglich sein, den Faktor  $\lambda$  so zu bestimmen, daß, wenn auf die drei Knotenpunkte  $A, B, C$  des Fachwerkes von  $n - 1$  Knotenpunkten die Resultanten  $P_1', P_2', P_3'$  von  $P_1$  und  $S_1, P_2$  und  $S_2, P_3$  und  $S_3$ , dagegen auf die übrigen Knotenpunkte die früheren Kräfte  $P_4, P_5, \dots$  wirken, sich in dem Stabe  $AB$  eine Spannung von der Größe Null ergibt. Es seien nun gefunden:

1) Die Spannungen in den Stäben des Fachwerkes von  $n - 1$  Knotenpunkten, wenn auf die drei Knotenpunkte  $A, B, C$  die Resultanten von  $P_1$  und  $S_1',$  von  $P_2$  und  $S_2',$  von  $P_3$  und  $S_3'$  und auf die übrigen Knotenpunkte die Kräfte  $P_4, P_5, \dots$  wirken. In einem Stabe  $l_{ik}$  möge sich die Spannung  $S_{ik}'$  und speziell in dem Stabe  $AB$  die Spannung  $S_{12}'$  ergeben.

2) Die Spannungen in den Stäben des Fachwerkes von  $n - 1$  Knotenpunkten, wenn auf die drei Knotenpunkte  $A, B, C$  die drei im Gleichgewichte stehenden Kräfte  $S_1'', S_2'', S_3''$  und auf die übrigen Knotenpunkte gar keine Kräfte wirken. Hierbei möge sich in dem Stabe  $l_{ik}$  eine Spannung  $S_{ik}''$  und speziell in dem Stabe  $AB$  eine Spannung  $S_{12}''$  ergeben haben. Es stellt dann

$$S_{ik} = S_{ik}' + \lambda S_{ik}''$$

die Spannung im Stabe  $l_{ik}$  und speziell

$$S_{12} = S_{12}' + \lambda S_{12}''$$

die Spannung in dem Stabe  $AB$  für jeden Wert von  $\lambda$  dar, wenn auf die Knotenpunkte des Fachwerkes von  $n - 1$  Knotenpunkten die Kräfte  $P_1', P_2', P_3', P_4, P_5, \dots$  wirken. Die gestellte Aufgabe ist gelöst, sobald es möglich ist,  $\lambda$  so zu bestimmen, daß die Spannung  $S_{12}$  in dem Stabe  $AB$  gleich Null ist, daß also:

$$1) \quad S_{12}' + \lambda S_{12}'' = 0.$$

Dann stellt bei Einsetzung dieses Wertes  $S_{ik}$  die Spannung in dem Stabe  $l_{ik}$  des Fachwerkes von  $n$  Knotenpunkten dar, wenn auf die Knotenpunkte die gegebenen Kräfte  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$  wirken.

Damit das Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten ein statisch bestimmtes ist, muß das Fachwerk von  $n - 1$  Knotenpunkten ein solches sein; dann läßt sich die Bestimmung der Spannungen  $S_{ik}'$  und  $S_{ik}''$  stets durchführen, und zwar ergibt sich nur eine Lösung für dieselben.

Ist das Fachwerk von  $(n - 1)$  Knotenpunkten ein statisch bestimmtes, so können zwei Fälle eintreten:

1) Es ist  $S_{12}'' \geq 0$ : Es gibt nur einen ganz bestimmten und endlichen Wert von  $\lambda$ , welcher der Gleichung:

$$S_{12}' + \lambda S_{12}'' = 0$$

genügt. Das Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten ist ebenfalls statisch bestimmt.

2) Es ist  $S_{12}'' = 0$ . Die Gleichung I reduziert sich auf

$$S_{12}' = 0.$$

Es folgt hieraus, daß die Kräfte  $P_i$ , die auf die Knotenpunkte wirken, nicht beliebig angenommen werden dürfen, wenn eine Lösung des Problems überhaupt existieren soll. Sind die Kräfte  $P_i$  der Bedingung gemäß angenommen, daß  $S_{12}' = 0$  wird, so ist die Gleichung I für jeden endlichen Wert von  $\lambda$  erfüllt. Es sind unendlich viele Lösungen vorhanden. Das Fachwerk von  $n$  Knotenpunkten ist ein statisch unbestimmtes. (\*\*)

Soweit die Darstellung Hennebergs. — Den großen Unterschied zwischen

\*) Es folgt nun eine Untersuchung über das Eintreten dieses singulären Falles.



seinem Verfahren und dem vorhin gezeigten Wege wird man sofort erkennen, wenn man die vorgeführten drei Beispiele nach der Henneberg'schen Methode behandelt.

Das in Fig. 2 abgebildete Fachwerk besitzt 12 dreistäbige Knotenpunkte:  $a, b, c, d, e, i, l, n, t, u, v, w$ . Man hat die Auswahl unter den 36 Ersatzstäben — und nur unter diesen 36 Stäben —

$oe$	$eb$	$bo$	$ok$	$km$	$mo$
$ah$	$hc$	$ca$	$oz$	$zh$	$ho$
$bm$	$md$	$db$	$zy$	$ys$	$sz$
$ck$	$kg$	$gc$	$xz$	$zr$	$rx$
$af$	$fk$	$ka$	$wz$	$zq$	$qw$
$yh$	$hk$	$ky$	$xs$	$sv$	$vx$

Hat man sich für den Knotenpunkt  $a$  und den Stab  $oe$  entschieden, so ist man in der Lage, zwei Systeme von Spannkraften  $S_a'$  und  $S_a''$  für die in den Knotenpunkten  $a, b, c, d$  angreifenden Stäbe zu bestimmen und steht dann wieder vor einem Fachwerk, das keinen zweiständigen Knotenpunkt, wohl aber 9 dreiständige Knotenpunkte:  $e, g, i, l, n, t, u, v, w$  besitzt. Die Auswahl unter den zur Verfügung stehenden 18 Ersatzstäben muß offenbar so getroffen werden, daß die Systeme der Spannkraften  $S_a', S_a''$  und die neu hinzutretenden Systeme  $S_b', S_b''$  für möglichst viele Knotenpunkte bestimmt werden können. Wir überlassen es dem Leser, selbst herauszuprobieren, welcher Weg nun einzuschlagen ist, damit möglichst wenig Systeme von Spannungen ( $S_a', S_a''$ ), ( $S_b', S_b''$ ), ( $S_c', S_c''$ ) . . . . . erforderlich werden.

3) Wir knüpfen noch einige Betrachtungen an den Fall, daß die Nennerdeterminante  $D$  der Gleichungen  $Y' = 0, Y'' = 0, Y''' = 0, \dots$  den Wert Null hat. Die Spannkraften  $Z_a, Z_b, Z_c, \dots, Z_m, \dots, Z_n$  seien auf die Form gebracht  $Z_m = D_m : D$ .

Ist  $D = 0$ , so ist ein Gleichgewichtszustand, herbeigeführt durch endliche Spannkraften nur möglich, wenn die äußeren Kräfte den Bedingungen

$$D_a = 0, D_b = 0, \dots, D_m = 0, \dots, D_n = 0$$

genügen; die Spannkraften erscheinen zunächst in der unbestimmten Form  $0:0$  und nehmen nur dann bestimmte Werte an, wenn die

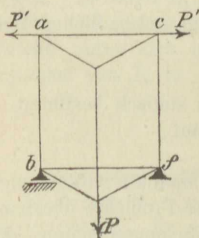


Fig. 12.

Zähler- und Nennerdeterminanten gemeinschaftliche Faktoren besitzen, durch deren Verschwinden sie gleich Null werden. Die an jedes Fachwerk zu stellende Forderung aber, daß für jeden Belastungszustand Gleichgewicht bestehen muß, wird nicht erfüllt. Bleiben nämlich im Falle  $D = 0$  die Determinanten  $D_a, D_b, \dots$  endlich, so beweist dies entweder, daß nach Beseitigung der eingefügten Ersatzstäbe Gleichgewicht überhaupt nicht

möglich ist, oder daß ein Fachwerk vorliegt, in welchem durch endliche äußere Kräfte unendlich große innere Kräfte hervorgerufen werden. Der erste Fall liegt beispielsweise vor bei dem in Fig. 12 dargestellten Fachwerk, welches mittels eines Er-

satzstabes 1 in das Fachwerk in Fig. 13 verwandelt werden möge. Bildet man

$$S_1 = \mathfrak{S}_{o1} + \mathfrak{S}_{a1} Z_a$$

und setzt  $S_1 = 0$ , so erhält man  $Z_a = \frac{\mathfrak{S}_{o1}}{\mathfrak{S}_{a1}}$  und wegen  $S_{a1} = 0$  (was leicht einzusehen ist)  $Z_a = \infty$ . Nimmt man den Ersatzstab heraus, so ist Gleichgewicht im allgemeinen nicht möglich; man erkennt auf den ersten Blick, daß das Fachwerk in Fig. 12 von endlicher Beweglichkeit ist. Für gewisse Belastungsfälle jedoch besteht Gleichgewicht, beispielsweise für die in der Figur 12 angegebene Angriffsweise. Ist  $P = 0$ , so lassen sich die Stabkräfte sogar eindeutig berechnen; man erhält für den Stab  $ac$  die Spannkraft  $S = +P'$ , für alle übrigen Stäbe  $S = 0$ . Tritt  $P$  hinzu, so gibt es unendlich viele Systeme von Kräften  $S$ , die mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind.

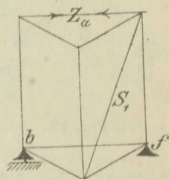


Fig. 13.

Der zweite Fall — nämlich das Auftreten unendlich großer Stabkräfte infolge endlicher Lasten — erfordert eine eingehendere Prüfung, die an der Hand einiger leicht zu überschauender Sonderfälle erfolgen möge.

Wir gehen von dem bekannten statisch bestimmten Dreigelenkbogen aus, Fig. 14, nehmen in der Scheitel eine lotrechte Last  $P$  an und bestimmen mittels der Gleichge-

$$\text{wichtsbedingung } \frac{Pl}{2} - Hf = 0$$

den Horizontalschub

$$H = \frac{Pl}{2f}.$$

Nehmen wir  $f = 0$  an, Fig. 15, so wird  $H = \infty$ ; es liegt dann ein Fachwerk von unendlich kleiner Beweglichkeit vor, denn der Punkt  $B$  wird in

zwei Kreisbögen, deren Mittelpunkte in  $A$  bzw.  $C$  liegen, geführt und vermag sich innerhalb des beiden Bögen gemeinschaftlichen Elementes  $ds$  frei zu bewegen. Wird die Last  $P$  aufgebracht, so besteht zunächst kein Gleichgewicht; hat sich aber  $B$  im Sinne von  $P$  um  $\frac{1}{2} ds$  verschoben, so ist die Ruhelage erreicht, und es entsteht dann

$$H = \frac{Pl}{ds} = \infty.$$

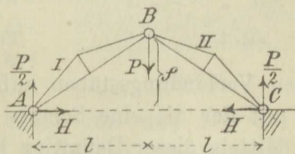
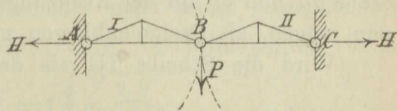


Fig. 14. u. 15.



Ganz ähnlich verhält sich das Fachwerk in Fig. 16. Nach einer unendlich kleinen Verrückung der Punkte  $a$  und  $b$  im Sinne von  $P$  befindet sich das Fachwerk in einer Ruhelage; es herrschen aber unendlich große Spannkkräfte.

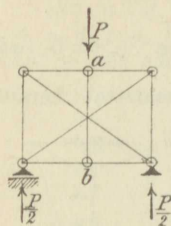


Fig. 16.

Weitere Beispiele für Fachwerke von unendlich kleiner Beweglichkeit lassen sich aus Fig. 14 mit Hilfe des von Föppl eingeführten Begriffs des imaginären Gelenks herleiten.

Werden zwei Scheiben bei  $G$  drehbar miteinander verbunden, Fig. 17, so nennt man  $G$  ein wirkliches Gelenk; in  $G$  greifen die entgegengesetzt gleichen Kräfte  $D$  an, mit denen die Scheiben bei Eintritt einer Belastung aufeinander wirken. Erfolgt die Verbindung der beiden Scheiben durch zwei Stäbe, Fig. 18, so nennt man den Schnittpunkt  $G$  der Stabachsen ein imaginäres Gelenk, und die Mittelkraft der

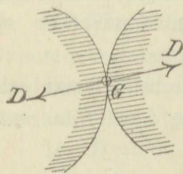


Fig. 17.

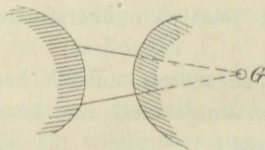


Fig. 18.

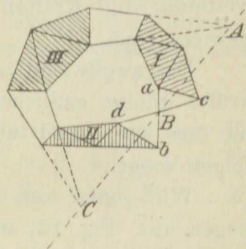


Fig. 19.

in den Verbindungsstäben auftretenden Spannkkräfte stellt die Kraft  $D$  vor, mit der die eine Scheibe auf die andere wirkt.

Mittels dieser Definition läßt sich das Fachwerk in Fig. 19, dessen Stäbe  $ab$  und  $cd$  an der Kreuzungsstelle  $B$  nicht miteinander verbunden sein mögen, als Dreigelenkbogen mit drei imaginären Gelenken deuten.

Wird die Scheibe III als das Widerlager betrachtet, so sind  $A$

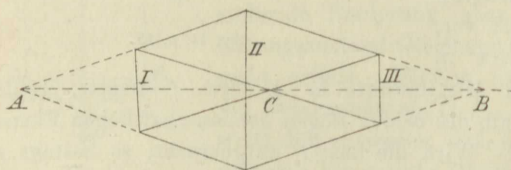


Fig. 20.

und  $C$  die Kämpfergelenke,  $B$  das Scheiteltgelenk, und in derselben Weise kann das in Fig. 20 dargestellte

Paskalsche Sechseck als Dreigelenkbogen aufgefaßt werden.\*) Da  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in einer Geraden liegen, sind beide Fachwerke von unendlich kleiner Beweglichkeit; endliche äußere Kräfte

\*) Ein Sonderfall wurde bereits in Fig. 16 dargestellt.



vermögen in ihnen unendlich große Spannkraften hervorzurufen, der Gleichgewichtszustand tritt aber erst nach einer verschwindend kleinen Verrückung der Knotenpunkte ein.

Auch das Fachwerk in Fig. 21 (Bogenträger mit zwei festen Auflagern  $f$  und einem beweglichen Auflager  $b$ ) lässt sich auf die in Fig. 22 veranschaulichte Weise als Dreigelenkbogen von unendlich kleiner Beweglichkeit auffassen.

Die Scheibe IV bedeutet das Widerlager, die Scheibe III spielt die Rolle eines Stabes und bestimmt zusammen mit dem das Gleitlager ersetzenden Stabe V das imaginäre Kämpfergelenk  $C$ . Die in  $B$  angreifende Last  $P_1$  erzeugt nach Eintritt der Ruhelage unendlich große Stabkräfte; hingegen besteht für den Belastungsfall in Fig. 21 sofort (d. h. ohne dass erst eine verschwindend kleine Bewegung erfolgt) Gleichgewicht; es gibt aber unendlich viele Systeme von Spannkraften  $S$ , welche die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

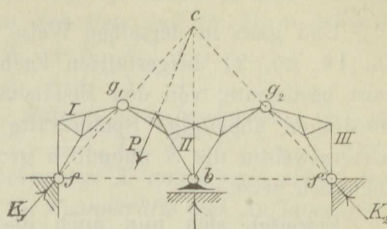
Nun ist aber zu beachten, dass die ganze vorstehende Untersuchung an die Annahme starrer Stäbe und Widerlager geknüpft ist — eine Voraussetzung, die in Wirklichkeit nie erfüllt wird.

So werden sich die Längen der Stäbe  $AB$  und  $BC$  des Fachwerks in Fig. 15 um endliche Strecken  $\Delta l$  ändern, und es wird selbst im Falle starrer Widerlager ein endlicher nach unten zeigender Pfeil  $f = \sqrt{(l + \Delta l)^2 - l^2}$  entstehen, wofür unter Vernachlässigung von  $\Delta l^2$

$$f = \sqrt{2l\Delta l} = l \sqrt{\frac{2S}{EF}}$$

gesetzt werden darf, wenn  $S$  die Spannkraft in  $AB$  und  $BC$ ,  $F$  den Stabquerschnitt und  $E$  die Elastizitätsziffer bedeutet. Da die Winkel, um welche sich die Stäbe drehen, sehr klein sind, darf  $S = H = \frac{Pl}{2f}$  angenommen werden, womit schließlich

$$H = \sqrt[3]{\frac{P^2 EF}{8}}$$



erhalten wird, d. i. ein Wert, der um so größer wird, je größer  $E$ , d. h. je weniger elastisch der Stab ist. Für den starren Stab ist  $E = \infty$  und  $H = \infty$ .

Und ganz in derselben Weise ergeben sich bei den in den Figuren 16, 19, 20, 21 dargestellten Fachwerken für jeden Belastungszustand ganz bestimmte, von den Elastizitätsziffern  $E$  und den Querschnittsabmessungen abhängige Spannkkräfte  $S$ , so zwar, daß für gewisse Belastungsweisen die  $S$  unendlich groß werden, sobald man die  $E$  gleich unendlich setzt.

Erweisen sich nun auch die fraglichen Fachwerke — bei genügenden Querschnittsabmessungen — als tragfähig, so wird es sich doch empfehlen, den oben ausgesprochenen Satz: „das Fachwerk ist unbrauchbar, sobald die Determinante  $D$  der zur Bestimmung der Stabkräfte  $Z_a, Z_b, \dots Z_n$  aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen verschwindet“ aufrecht zu erhalten. Ja es empfiehlt sich sogar, diesen Ausspruch dahin zu verschärfen, daß man das Fachwerk schon als unbrauchbar bezeichnet, sobald sich die Determinante  $D$  der Null sehr nähert. Denn im Falle eines sehr kleinen  $D$  ist es leicht möglich, daß das Fachwerk infolge geringfügiger Änderungen der Stablängen und Verschiebungen der elastischen Widerlager eine Lage durchschreitet, welcher  $D = 0$  entspricht. Auch leuchtet ein, daß bei gewissen Fachwerken, z. B. sehr flachen Bogenbrücken, die Vernachlässigung der Formänderungen bei Ermittlung der Spannkkräfte unzulässig ist.

4) Wir gehen jetzt zur Untersuchung derjenigen statisch unbestimmten Fachwerke über, welche sich durch Beseitigung gewisser Stäbe und Auflagerkräfte — welche in der Folge überzählig genannt werden sollen — in ein statisch bestimmtes und ausschließlich elastischen Formänderungen unterworfenen Stabgebilde (das Hauptnetz) verwandeln lassen. Die Stäbe und Auflagerkräfte des Hauptnetzes heißen die notwendigen Glieder des Fachwerks.

Werden die überzähligen Stäbe entfernt und, damit an dem Spannungszustande des Fachwerkes nichts geändert werde, die Spannkkräfte in den weggenommenen Stäben als äußere Kräfte wieder hinzugefügt, so ist es möglich, die Spannkkräfte in den notwendigen Stäben und die notwendigen Auflagerkräfte durch die gegebenen Lasten und die unbekannten überzähligen Stabkräfte und Auflagerkräfte auszudrücken. Hierbei können sich nur Beziehungen ersten Grades ergeben, weil in den Gleichgewichtsbedingungen alle Kräfte ausschließlich in der ersten Potenz vorkommen. Da es nun weiter freisteht, die überzähligen Stabkräfte und Auflagerkräfte als geradlinige Funktionen anderer, ebenfalls in der ersten Potenz vorkommender Unbekannten

darzustellen, beispielsweise als Funktionen ihrer Momente, bezogen auf gegebene Drehpunkte, so darf man behaupten:

*Sämtliche Spannkraften  $S$  und Auflagerkräfte  $C$  eines statisch unbestimmten Fachwerks lassen sich stets auf die Form bringen:*

$$(5) \quad \begin{cases} S = S_0 + S'X' + S''X'' + S'''X''' + \dots \\ C = C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \dots \end{cases}$$

wobei  $X', X'', X''' \dots$  gewisse, statisch nicht bestimmbar Gröſsen bedeuten, während  $S_0, S', S'' \dots, C_0, C', C'' \dots$  Werte vorstellen, welche von den Unbekannten  $X$  unabhängig sind. Insbesondere bedeuten  $S_0$  und  $C_0$  die Spannkraften und Auflagerkräfte des statisch bestimmten Hauptnetzes, in welches das Fachwerk übergeht, sobald sämtliche Gröſsen  $X$  verschwinden; sie sind geradlinige Funktionen der Lasten  $P$ , während die  $S', S'' \dots C', C'' \dots$  von den  $P$  unabhängig sind.\*)

Beispiel. Der in Fig. 23 dargestellte, bei  $A, B$  und  $C$  unverschieblich gelagerte Dachbinder wird statisch bestimmt, sobald der Stab  $EC$ , dessen Spannkraft  $= X$  sein möge, beseitigt wird. In den Knotenpunkten  $E$  und  $C$  sind die Kräfte  $X$  wieder anzubringen.

Um nun die Spannkraft in irgend einem Stabe, z. B. in  $LN$ , zu berechnen, werde die Rittersche Methode angewendet. Es wird das Fachwerk durch einen Schnitt, welcher auſer  $LN$  nur noch zwei Stäbe trifft, in zwei Teile zerlegt. An den Schnittstellen werden die inneren Kräfte  $S_1, S_2, S_3$  der geschnittenen Stäbe als äußere Kräfte angebracht, und nun wird für die auf den einen

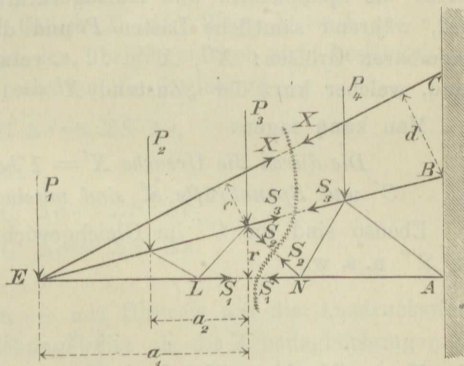


Fig. 23.

der beiden Fachwerkteile, z. B. den linken, wirkenden äußeren Kräfte die Gleichung der statischen Momente aufgestellt, wobei, wenn es sich um die Berechnung von  $S_1$  handelt, der Schnittpunkt von  $S_2$  und  $S_3$  zum Drehpunkte gewählt wird. Mit den Bezeichnungen in Fig. 23 ergibt sich

$$Xc - P_1 a_1 - P_2 a_2 - S_1 r = 0 \text{ und hieraus}$$

$$S_1 = -\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{r} + X \frac{c}{r},$$

und in gleicher Weise lassen sich die Kräfte  $S$  in sämtlichen übrigen notwendigen Stäben als geradlinige Funktionen der Lasten  $P$  und der Gröſſe  $X$  darstellen.

\*) Die Gleichungen 5 gelten für die notwendigen und überzähligen Stäbe und Auflagerkräfte. Ist z. B.  $X''$  die Spannkraft in einem überzähligen Stabe, so entsprechen diesem die Werte:  $S_0 = 0, S' = 0, S'' = 1, S''' = 0$  u. s. w., und es folgt  $S = X''$ .



An Stelle von  $X$  hätte man auch das auf den Knotenpunkt  $B$  bezogene Moment:  $M = Xd$  dieser Kraft zu derjenigen statisch nicht bestimmbar GröÙe wählen können, durch welche die  $S$  ausgedrückt werden sollen und würde erhalten haben:

$$S_1 = - \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{r} + \frac{Mc}{dr}.$$

5) Für die Folge ist es nicht unwichtig, besonders hervorzuheben, daß die mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen hergestellten Beziehungen (5) zwischen den  $S$ ,  $C$ ,  $P$  und  $X$  für beliebige Werte der Lasten  $P$  und der statisch nicht bestimmbar GröÙen  $X$  gültig sind, und daß mithin die teilweise Differentiation von  $S$  und  $C$  beispielsweise nach  $X'$  liefert:

$$\frac{\partial S}{\partial X'} = S' \text{ und } \frac{\partial C}{\partial X'} = C'.$$

Ferner ist zu beachten, daß  $S'$  und  $C'$  diejenigen Werte bedeuten, welche die Spannkkräfte und Auflagerkräfte annehmen, sobald  $X' = 1$  wird, während sämtliche Lasten  $P$  und die übrigen statisch nicht bestimmbar GröÙen:  $X''$ ,  $X'''$  . . . . verschwinden, ein Belastungszustand, welcher kurz der „Zustand  $X' = 1$ “ genannt werden möge.

Man kann sagen:

*Die durch die Ursache  $X' = 1$  hervorgerufenen Auflagerkräfte  $C'$  und Spannkkräfte  $S'$  sind miteinander im Gleichgewichte.*

Ebenso sind die  $C''$  im Gleichgewichte mit den  $S''$ , die  $C'''$  mit den  $S'''$  u. s. w.

## § 2.

### Die Maxwellschen Gleichungen zur Berechnung der statisch nicht bestimmbar GröÙen $X'$ , $X''$ . . . .

#### 1. Allgemeine Form der Bedingungen für die GröÙen $X$ .

Die Längen  $s$  der Stäbe eines Fachwerks mögen um Strecken  $\Delta s$  zunehmen, und im Zusammenhange hiermit mögen die Knotenpunkte ihre auf ein beliebiges, festes Koordinatensystem bezogenen Lagen ändern, wobei:

$\overline{\Delta c}$  = Verschiebung eines Stützpunktes im Sinne der in diesem Punkte angreifenden Auflagerkraft  $C$ ,\*)

$\overline{\delta}$  = Verschiebung des Angriffspunktes irgend einer Last  $P$  im Sinne von  $P$ .

---

\*)  $\overline{\Delta c}$  läßt sich stets als Längenänderung eines Auflagerstabes auffassen. Vergl. Seite 2.

Bezüglich aller dieser Verschiebungen wird nur vorausgesetzt, daß sie möglich sind und klein genug, um als verschwindende Größen aufgefaßt werden zu dürfen. Es gilt dann der Satz von den virtuellen Verrückungen (Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten), welcher aussagt, daß im Falle des Gleichgewichtes der inneren und äußeren Kräfte die Arbeit der ersteren entgegengesetzt gleich derjenigen der letzteren ist, und es folgt die Gleichung:

$$(6) \quad \Sigma P \bar{\delta} + \Sigma C \Delta c = \Sigma S \Delta s,$$

welche wir die Arbeitsgleichung des Fachwerks nennen wollen, und welche mit den durch die Gleichungen (5) für  $C$  und  $S$  gegebenen Werten übergeht in

$$(7) \quad \Sigma P \bar{\delta} + \Sigma (C_0 + C' X' + C'' X'' + \dots) \bar{\Delta c} \\ = \Sigma (S_0 + S' X' + S'' X'' + \dots) \Delta s;$$

sie gilt für beliebige Werte der Lasten  $P$  und statisch nicht bestimmbar Gröfßen  $X'$ ,  $X''$  ....

Wir schreiben nun der Gröfße  $X'$  den Wert  $X' = 1$  zu, sämtlichen Lasten  $P$  hingegen und den übrigen statisch nicht bestimmbar Gröfßen den Wert Null und erhalten die Beziehung

$$\Sigma C' \bar{\Delta c} = \Sigma S' \Delta s,$$

und ebenso läßt sich ableiten:

$$\Sigma C'' \bar{\Delta c} = \Sigma S'' \Delta s$$

$$\Sigma C''' \bar{\Delta c} = \Sigma S''' \Delta s$$

$$\dots \dots \dots$$

Es können diese Gleichungen — mit Hinweis auf die Ausdrucksweise am Schlusse des § 1 — beziehungsweise als die Arbeitsgleichungen für die Zustände  $X' = 1$ ,  $X'' = 1$ ,  $X''' = 1$  u. s. w. bezeichnet werden; ihre Anzahl stimmt mit derjenigen der Unbekannten  $X$  überein, und sie ermöglichen deshalb die Berechnung der Werte  $X$ ; man braucht sie nur auf die wirklichen elastischen Formänderungen des Fachwerks, welche nach einem durch die Erfahrung gegebenen Gesetze von den inneren und äußeren Kräften abhängen und mit  $\Delta c$ ,  $\Delta s$  bezeichnet werden mögen, anzuwenden.

Es ergeben sich dann die Maxwellschen Gleichungen:\*)

$$\left. \begin{aligned} \Sigma C' \Delta c &= \Sigma S' \Delta s \\ \Sigma C'' \Delta c &= \Sigma S'' \Delta s \\ \Sigma C''' \Delta c &= \Sigma S''' \Delta s \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (8)$$

\*) Vergl. die Geschichtlichen Anmerkungen im Anhang.

Sie lassen sich auch mit Beachtung von

$$\frac{\partial C}{\partial X'} = C', \quad \frac{\partial C}{\partial X''} = C'' \dots\dots, \quad \frac{\partial S}{\partial X'} = S', \quad \frac{\partial S}{\partial X''} = S'' \dots\dots$$

in der Form schreiben:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \frac{\partial C}{\partial X'} \Delta c = \Sigma \frac{\partial S}{\partial X'} \Delta s \\ \Sigma \frac{\partial C}{\partial X''} \Delta c = \Sigma \frac{\partial S}{\partial X''} \Delta s \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. ;$$

in welcher sie sich unmittelbar ergeben, sobald die Gleichung (6) nach allen unabhängigen Veränderlichen  $X', X'' \dots\dots$  teilweise differenziert wird und hierbei die Verschiebungen  $\delta, \Delta c, \Delta s$ , sowie die Lasten  $P$  als Konstanten betrachtet werden, was bei der Willkürlichkeit dieser Größen gestattet ist. Schliesslich werden die virtuellen Formänderungen  $\overline{\Delta s}, \overline{\Delta c}$  durch die wirklichen  $\Delta s, \Delta c$  ersetzt.

Für die den Zuständen  $X' = 1, X'' = 1, X''' = 1 \dots$  entsprechenden virtuellen Arbeiten

$$\Sigma C' \Delta c, \Sigma C'' \Delta c, \Sigma C''' \Delta c, \dots$$

der Auflagerkräfte werden wir häufig die kürzeren Bezeichnungen

$$L', L'', L''', \dots$$

anwenden.

**2. Die Verschiebungen  $\Delta s$  und  $\Delta c$ .** Es werde vorausgesetzt, daß für den Stoff, aus dem das Fachwerk hergestellt ist, eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt, eine Annahme, welche bei den hier ausschließlich in Betracht kommenden Tragwerken aus Schweißseisen, Flusseisen und Stahl zulässig ist. Sodann wird angenommen, daß das Fachwerk bei einem bestimmten Temperaturzustande vor Einwirkung der Belastung spannungslos sei (Anfangszustand), und daß sich die Anfangstemperatur eines Stabes in allen Teilen desselben um den gleichen Betrag  $t$  ändere. Bedeutet dann:

$E$  den Elastizitätsmodul des Stabmaterials,

$F$  „ Inhalt des Stabquerschnittes,

$\varepsilon$  „ Ausdehnungskoeffizienten für  $t = 1$ ,

so ist erfahrungsgemäß:

$$(10) \quad \Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts,$$

wobei, bezogen auf die Tonne und das Meter als Einheiten, und wenn  $t$  in Celsiusgraden ausgedrückt wird, durchschnittlich gesetzt werden darf:



für Schweißseisen  $E = 20\,000\,000$ ,  $\varepsilon = 0,000\,0121$ ,  $\varepsilon E = 240$   
 „ Flusseisen  $E = 21\,500\,000$ ,  $\varepsilon = 0,000\,0118$ ,  $\varepsilon E = 250$   
 „ Flußstahl  $E = 22\,000\,000$ ,  $\varepsilon = 0,000\,0124$ ,  $\varepsilon E = 270$ .

Die Verschiebungen  $\Delta c$  der Stützpunkte hängen von der Form, der Elastizität, der Belastung und der Temperaturänderung der das

Fachwerk stützenden Körper ab; sie lassen sich fast nie mit Sicherheit angeben und werden meistens gleich Null gesetzt oder geschätzt. Besitzen unbeabsichtigte Störungen der Stützlage einen

größeren Einfluß auf den Spannungs-

zustand eines Fachwerks, so darf dieses nur bei sicherer Stützung ausgeführt werden. Beispielsweise sind kontinuierliche Balken und Bogenträger ohne Gelenke bei unsicherem Baugrunde zu verwerfen.

Im Falle starrer und reibungsloser Widerlager lauten die Bedingungsgleichungen, denen die statisch nicht bestimmbar Größen  $X$  zu genügen haben:

$$(11) \quad \sum S' \Delta s = 0; \quad \sum S'' \Delta s = 0; \quad \text{u. s. f.}$$

**3. Beispiel zur Erläuterung der allgemeinen Theorie.** Der in Fig. 24 dargestellte Dachbinder sei bei  $A$  und  $B$  fest gelagert und werde bei  $E$  und  $F$

durch Säulen gestützt, welche am Kopfe und am Fuße reibungslose Gelenke besitzen.

Alle Verschiebungen mögen auf das durch  $A$  und  $B$  gelegte feste Koordinatensystem

$(x, y)$  bezogen werden. Nachgeben der Widerlager verursacht eine Vergrößerung der Stützweite  $l$  um  $\Delta l$  und Senkungen der Stützpunkte  $E$  und  $F$  und  $\delta'$  bzw.  $\delta''$ . Die Lasten  $P$  seien beliebig ge-

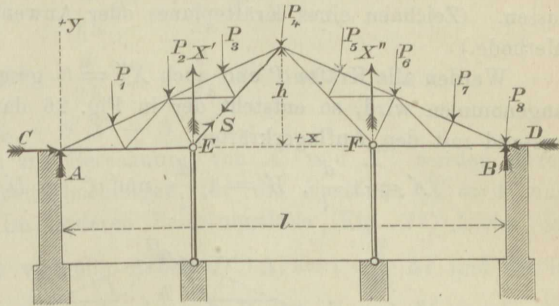


Fig. 24.

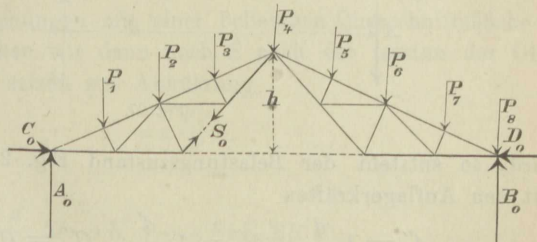


Fig. 25.

richtet; die senkrechten Seitenkräfte der Stützendrücke an den Enden seien  $= A$  und  $= B$ , die wagerechten  $= C$  und  $= D$ ; die Säulen üben die Gegendrücke  $X'$  und  $X''$  aus.

Beseitigung der beiden Mittelstützen führt zu dem statisch bestimmten Hauptnetze, Fig. 25 (Bogen mit 3 Gelenken), dessen Auflagerkräfte  $A_0, B_0, C_0, D_0$  und Stabkräfte  $S_0$  sich leicht berechnen lassen. (Zeichnen eines Kräfteplanes oder Anwendung der Ritterschen Methode.)

Werden alle Kräfte  $P$  und auch  $X'' = 0$  gesetzt, während  $X' = 1$  angenommen wird, so entsteht der in Fig. 26 dargestellte Belastungszustand mit den Auflagerkräften

$$A' = 1 \frac{d'}{l}, \quad B' = 1 \frac{d}{l} \quad \text{und} \quad C' = D' = 1 \frac{d}{2h} *)$$

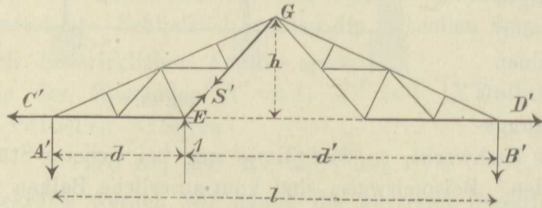


Fig. 26.

und den leicht zu berechnenden Spannkraften  $S'$ ; wir nennen ihn kurz: Zustand  $X' = 1$ . Verschwinden die Kräfte  $P$  und  $X'$ , während  $X'' = 1$

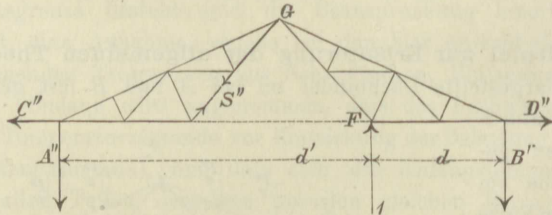


Fig. 27.

wird, so entsteht der Belastungszustand Fig. 27 (Zustand  $X'' = 1$ ) mit den Auflagerkräften

$$A'' = 1 \frac{d}{l}, \quad B'' = 1 \frac{d'}{l}, \quad C'' = D'' = 1 \frac{d}{2h}$$

und den Spannkraften  $S''$ .

\*) Folgt aus der Momentgleichung für Punkt G:

$$D' h = B' \frac{l}{2}.$$

Für das statisch unbestimmte Fachwerk in Fig. 24 ergibt sich nun

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = A_0 - A' X' - A'' X'' = A_0 - \frac{d'}{l} X' - \frac{d}{l} X'', \\ B = B_0 - \frac{d}{l} X' - \frac{d'}{l} X'', \\ C = C_0 - \frac{d}{2h} X' - \frac{d}{2h} X'', \\ D = D^0 - \frac{d}{2h} X' - \frac{d}{2h} X'' \text{ und} \\ S = S_0 + S' X' + S'' X''. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen zur Berechnung von  $X'$  und  $X''$  werden durch Anschreiben der Arbeitsgleichungen für die Zustände  $X' = 1$  und  $X'' = 1$  erhalten. Im ersteren Belastungsfalle (Fig. 26) leistet die Auflagerkraft  $D'$  die virtuelle Arbeit  $D' \cdot \Delta l = 1 \cdot \frac{d}{2h} \Delta l$  und die in  $E$  angreifende Kraft 1 leistet, da sich Punkt  $E$  und  $\delta'$  senkt, die Arbeit  $(-1 \cdot \delta')$ ; es ergibt sich daher:

$$-1 \cdot \delta' + \frac{d}{2h} \Delta l = \Sigma S' \Delta s,$$

während für den Belastungsfall in Fig. 27 in derselben Weise die Gleichung

$$-1 \cdot \delta'' + \frac{d}{2h} \Delta l = \Sigma S'' \Delta s$$

gewonnen wird. Drückt man  $\Delta s$  nach Gleichung (10) aus, so folgt:

$$-\delta' + \frac{d}{2h} \Delta l = \Sigma S' \left( \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s \right) \text{ und}$$

$$-\delta'' + \frac{d}{2h} \Delta l = \Sigma S'' \left( \frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s \right).$$

Wir wollen  $E$ ,  $\varepsilon$  und  $t$  für sämtliche Stäbe konstant annehmen und die vorstehenden Gleichungen mit einer beliebigen Querschnittsfläche  $F_c$  multiplizieren. Drücken wir dann noch  $S$  nach der letzten der Gleichungen (I) aus und setzen zur Abkürzung

$$s' = s \frac{F_c}{F},$$

so erhalten wir:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} EF_c \left( \frac{d}{2h} \Delta l - \delta' \right) - \varepsilon Et F_c \Sigma S' s \\ \quad = \Sigma S_0 S' s' + X' \Sigma S'^2 s' + X'' \Sigma S' S'' s', \\ EF_c \left( \frac{d}{2h} \Delta l - \delta'' \right) - \varepsilon Et F_c \Sigma S'' s \\ \quad = \Sigma S_0 S'' s' + X' \Sigma S' S'' s' + X'' \Sigma S''^2 s'. \end{array} \right.$$



Die Multiplikation mit  $F_c$  ist zu empfehlen, sobald, was meistens der Fall sein wird, mehrere Stäbe des Fachwerks denselben Querschnitt erhalten; setzt man dann  $F_c$  gleich der am häufigsten vorkommenden Querschnittsfläche, so erhält man möglichst viele Verhältnisse  $\frac{F_c}{F} = 1$ . Stimmen für eine grössere Anzahl von Stäben sowohl Länge als Querschnitt überein, so kann man  $F_c$  so annehmen, daß  $s' = s \frac{F_c}{F}$  durch eine runde Zahl ausgedrückt wird.

Sollen nun die Gleichungen (II) für einen bestimmten Fall der Anwendung aufgelöst werden, so müssen gewisse Voraussetzungen über die Größe der Verschiebungen  $\delta'$ ,  $\delta''$  und  $\Delta l$  gemacht werden. Lehnt sich der Dachstuhl bei  $A$  und bei  $B$  gegen gemauerte Widerlager, so wird in der Regel  $\Delta l = 0$  angenommen. Weiter wird meistens die Zusammendrückung des Baugrundes und der Säulen-Fundamente (weil schwer anzugeben) vernachlässigt, so daß  $\delta'$  und  $\delta''$  gleich sind den Verkürzungen der Säulen infolge der Drücke  $X'$  und  $X''$ , vermindert um die Verlängerungen derselben infolge einer Erhöhung der Temperatur. Ist also

$E_0$  = Elastizitätsmodul des Säulenmaterials,

$\varepsilon_0$  = Ausdehnungskoeffizient für  $t = 1^\circ$ ,

$F_0$  = Inhalt des Säulenquerschnittes,

$s_0$  = Länge einer Säule,

so ergibt sich

$$\delta' = \frac{X' s_0}{E_0 F_0} - \varepsilon_0 t s_0 \quad \text{und} \quad \delta'' = \frac{X'' s_0}{E_0 F_0} - \varepsilon_0 t s_0,$$

und es gehen die Gleichungen (II) über in

$$F_c t [\varepsilon_0 E s_0 - \varepsilon E \Sigma S' s] = \Sigma S_0 S' s' + X' \left[ \frac{E F_c}{E_0 F_0} s_0 + \Sigma S'^2 s' \right] \\ + X'' \Sigma S' S'' s'$$

$$F_c t [\varepsilon_0 E s_0 - \varepsilon E \Sigma S'' s] = \Sigma S_0 S'' s' + X'' \left[ \frac{E F_c}{E_0 F_0} s_0 + \Sigma S''^2 s' \right] \\ + X' \Sigma S' S'' s';$$

sie enthalten jetzt nur noch die Unbekannten  $X'$  und  $X''$ .

Die Durchführung der Rechnung in Zahlen erfordert natürlich, daß alle Querschnittsinhalte (deren Bestimmung in der Regel das Ziel einer statischen Berechnung ist) bekannt sind; es müssen also diese Inhalte, sobald es sich um ein neu zu entwerfendes Fachwerk handelt, zunächst abgeschätzt oder mit Hilfe von angenäherten Rechnungsmethoden ermittelt werden.

**4. Zahlenbeispiel.** Es ist der Horizontalschub  $X$  des in Fig. 28

dargestellten, bei  $A$  und  $B$  fest gelagerten Bogenträgers zu berechnen. Stützweite 20 m, Feldweite 2 m. Die unteren Knotenpunkte liegen auf einer Parabel, deren Pfeil = 2,5 m ist; die obere Gurtung ist geradlinig; Höhe der Endvertikale = 3 m. Die Knotenpunktslasten sind = 1 t bzw. 0,5 t. Die in Fig. 28 an die Stäbe gesetzten Zahlen geben links von der Mitte die Stablängen in cm an und rechts von der Mitte die Inhalte der Querschnitte in qcm.

Im Falle  $X = 0$  entsteht ein statisch bestimmter Fachwerkbalken, dessen Spannkraft  $S_0$  mit Hilfe eines Kräfteplanes ermittelt und in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt worden sind. Sodann sind in Fig. 29 diejenigen Stabkräfte  $S'$  eingetragen worden, welche tätig sind,

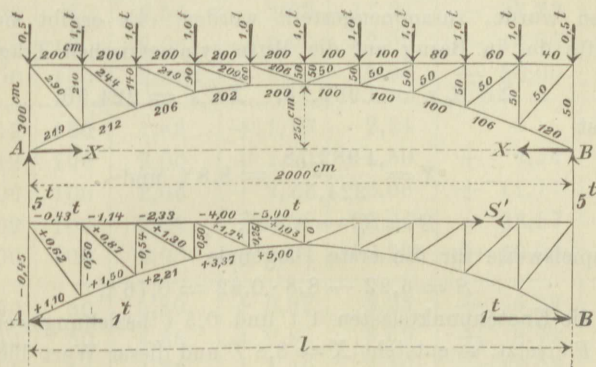


Fig. 28. u. 29.

sobald in  $A$  und  $B$  zwei auswärts gerichtete, wagerechte Kräfte 1 auf das im übrigen unbelastet und gewichtslos gedachte Fachwerk wirken. Aus den Werten  $S_0$  und  $S'$  ergeben sich die Spannkraften: (I)  $S = S_0 - S' X$ . Um  $X$  zu berechnen, schreiben wir die Arbeitsgleichung für den Belastungszustand in Fig. 29 an; sie lautet, wenn sich  $l$  um  $\Delta l$  vergrößert:

$$(II) \quad 1 \cdot \Delta l = \sum S' \Delta s$$

und geht mit

$$\Delta s = \frac{S s}{EF} + \varepsilon t s$$

über in

$$(III) \quad \Delta l = \sum \frac{SS' s}{EF} + \sum \varepsilon t S' s.$$

Werden  $E$  und  $\varepsilon$  für alle Stäbe gleich groß angenommen, und wird die vorstehende Gleichung mit der beliebigen Querschnittsfläche  $F_c$  multipliziert, so geht sie, mit der Abkürzung

$$s' = s \frac{F_c}{F}.$$

über in

$$EF_c \Delta l = \Sigma S' (S_0 - S' X) s' + \varepsilon EF_c \Sigma t S' s$$

und liefert

$$(IV) \quad X = \frac{\Sigma S' S_0 s' + \varepsilon EF_c \Sigma t S' s - EF_c \Delta l}{\Sigma S'^2 s'}$$

Die Belastung erzeugt für sich allein

$$(V) \quad X = \frac{\Sigma S' S_0 s'}{\Sigma S'^2 s'}$$

In der folgenden Tabelle sind die den einzelnen Stäben entsprechenden Werte  $S' S_0 s'$  und  $S'^2 s'$ , bei deren Berechnung  $F_c = 100$  qcm angenommen wurde, zusammengestellt worden. Es ergibt sich für die eine Hälfte des in Bezug auf die Mitte symmetrischen Trägers.

$$\Sigma S' S_0 s' = 1982,78, \quad \Sigma S'^2 s' = 224,50,$$

mithin ist

$$X = \frac{1982,78}{224,50} = 8,8 \text{ t und}$$

$$S = S_0 - 8,8 S',$$

also beispielsweise für die erste Diagonale

$$S = 6,22 - 8,8 \cdot 0,62 = 0,76 \text{ t.}$$

Werden die Knotenpunktslasten 1 t und 0,5 t beziehungsweise durch  $P$  und  $0,5 P$  ersetzt, so entsteht  $X = 8,8 P$  und dieser Wert bleibt gültig, wenn man sämtliche Querschnittsflächen mit ein und derselben Zahl multipliziert, so daß es bei der Berechnung des durch die Belastung erzeugten Horizontalschubes  $H$  eines zu entwerfenden Fachwerkbogens nur darauf ankommt, das gegenseitige Verhältnis der Querschnittsflächen abzuschätzen.

Der durch eine Erhöhung der Temperatur hervorgerufene Horizontalschub möge unter der Voraussetzung eines konstanten  $t$  berechnet werden; er ergibt sich nach Gleichung (IV):

$$X = \frac{\varepsilon EF_c t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 s'}$$

und, wenn für Schweißseisen  $\varepsilon E = 240$  (bezogen auf die Tonne und das Meter) gesetzt und  $t = 40^\circ \text{ C.}$  angenommen wird, mit  $F_c = 100$  qcm = 0,01 qm,

$$X = \frac{240 \cdot 0,01 \cdot 40 \Sigma S' s}{2 \cdot 224,50} = 0,214 \Sigma S' s.$$

Um den Wert  $\Sigma S' s$ , welcher sich über den ganzen Träger erstreckt, schnell zu berechnen, beachte man, daß in der Arbeitsgleichung (II) unter  $\Delta l$  und  $\Delta s$  beliebige, aber mögliche und genügend kleine Ver-



schiebungen verstanden werden dürfen. Solche mögliche Verschiebungen entstehen unter anderem, wenn das Fachwerk eine der früheren Form ähnliche Form annimmt, wenn sich also  $s$  um  $\omega s$  und  $l$  um  $\omega l$  ändert, unter  $\omega$  eine Konstante verstanden. Gleichung (II) geht dann über in

$$\omega l = \omega \Sigma S' s;$$

	$s$	$F$	$s' = s \frac{F_e}{F}$	$S'$	$S'^2$	$S_0$	$S_0 S' s'$
Obere Gurtung	2,00	40	5,00	— 0,43	0,92	— 4,29	9,22
	2,00	60	3,34	— 1,14	4,36	— 11,43	43,39
	2,00	80	2,50	— 2,33	13,57	— 23,33	135,90
	2,00	100	2,00	— 4,00	32,00	— 40,00	320,00
	2,00	100	2,00	— 5,00	50,00	— 50,00	500,00
Untere Gurtung	2,19	120	1,83	+ 1,10	2,21	0	0
	2,12	106	2,00	+ 1,50	4,50	+ 4,54	13,62
	2,06	100	2,06	+ 2,21	10,06	+ 11,77	53,58
	2,02	100	2,02	+ 3,37	22,94	+ 23,57	160,45
	2,00	100	2,00	+ 5,00	50,00	+ 40,05	400,50
Diagonalen	2,90	50	5,80	+ 0,62	2,23	+ 6,22	22,37
	2,44	50	4,88	+ 0,87	3,69	+ 8,71	36,98
	2,19	50	4,38	+ 1,30	7,40	+ 13,03	74,19
	2,09	50	4,18	+ 1,74	12,66	+ 17,42	126,70
	2,06	50	4,12	+ 1,03	4,37	+ 10,30	43,71
Vertikalen	3,00	50	6,00	— 0,45	1,22	— 5,00	13,50
	2,10	50	4,20	— 0,50	1,05	— 6,00	12,60
	1,40	50	2,80	— 0,54	0,82	— 6,36	9,62
	0,90	50	1,80	— 0,50	0,45	— 6,00	5,40
	0,60	50	1,20	— 0,25	0,08	— 3,50	1,05
	$m$	$qcm$	$m$	$\Sigma S'^2 = 224,50$		$\Sigma S_0 S' s' = 1982,78$	

sie liefert

$$\Sigma S' s = l,$$

und es folgt somit:

$$X = 0,214 \cdot 20 = 4,3 \text{ t.}$$

Eine durch Nachgeben der Widerlager entstandene Vergrößerung der Stützweite um  $\Delta l$  bedingt nach Gleichung (IV) den Horizontalschub

$$X = - \frac{EF_c \Delta l}{\sum S_s'^2} = - \frac{20\,000\,000 \cdot 0,01}{2 \cdot 224,5} \Delta l$$

und beispielsweise für  $\Delta l = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$ :

$$X = - 4,5 \text{ t.}$$

### § 3.

## Verschiebungen der Knotenpunkte eines Fachwerks. Allgemeine Untersuchungen.

Werden die Knotenpunkte des Fachwerks mit  $1, 2, 3 \dots m \dots n$  bezeichnet und die in denselben angreifenden Lasten mit  $P_1, P_2, P_3, \dots P_m \dots P_n$ , so lautet die in § 2 aufgestellte Arbeitsgleichung (6):

$$(12) \quad P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 + \dots + P_m \delta_m + \dots P_n \delta_n \\ + \sum C \Delta c = \sum S \Delta s;$$

sie gilt für beliebige mögliche Verschiebungen  $\delta$ ,  $\Delta c$  und  $\Delta s$  und für beliebige Werte der Lasten  $P$  und liefert unmittelbar die durch bestimmte  $\Delta c$  und  $\Delta s$  hervorgerufene Verschiebung  $\delta_m$  des Knotenpunktes  $m$  im Sinne von  $P_m$ , sobald  $P_1$  bis  $P_{m-1}$  und  $P_{m+1}$  bis  $P_n$  gleich Null gesetzt werden, während  $P_m = 1$  angenommen wird. Da nun aber die Gleichung (12) bei statisch unbestimmten Fachwerken auch für beliebige Werte der statisch nicht bestimmbar Größen  $X$  gültig ist, so wird es sich empfehlen, sämtliche  $X$  gleich Null zu setzen, d. h.

*man wird, um die durch irgend einen, kurz mit  $L$  bezeichneten Belastungszustand erzeugte Verschiebung  $\delta_m$  zu berechnen, die Arbeitsgleichung für das durch  $P_m = 1$  belastete, statisch bestimmte Hauptnetz anschreiben und in diese Gleichung die dem Belastungszustande  $L$  entsprechenden Verschiebungen  $\Delta c$  und  $\Delta s$  einsetzen.*

Hierbei ist es ganz gleichgültig, in welcher Weise das statisch bestimmte Hauptnetz gebildet wird. Daß dies auf verschiedenartige Weise geschehen kann, geht daraus hervor, daß bei der Auswahl der als statisch nicht bestimmbar aufzufassenden Größen — innerhalb gewisser Grenzen — nach Willkür verfahren werden darf.

Auch ist hervorzuheben, daß bei der Berechnung der Knotenpunktverschiebungen  $\delta$  andere Hauptnetze gebildet werden dürfen, wie bei der Berechnung der Spannkkräfte.

**Zahlenbeispiel.** Es wird die Senkung  $\delta_3$  des Knotenpunktes 3 des in Fig. 30 dargestellten, statisch bestimmten Fachwerkträgers ge-

sucht. Die Knotenpunktlasten sind 8 t und 4 t. Stützweite = 12 m, Trägerhöhe = 4 m, Feldweite = 3 m, Länge einer Diagonale = 5 m. In Fig. 30 sind die Spannkraften  $S$  zusammengestellt worden; die ihnen entsprechenden Änderungen der Stablängen sind, wenn die Anfangstemperatur erhalten bleibt,

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF}.$$

Fig. 31 gibt diejenigen Spannkraften  $\mathcal{S}$ , welche entstehen, sobald im Knotenpunkte 3 nach der Richtung der gesuchten Verschiebung (d. i. also im vorliegenden Falle senkrecht) eine Last 1 angreift. Die Arbeitsgleichung lautet für diesen Belastungszustand

$$1 \cdot \delta_3 = \sum \mathcal{S} \cdot \Delta s,$$

sie gilt für beliebige zusammengehörige Werte  $\delta_3$  und  $\Delta s$ , und liefert insbesondere die dem Belastungsfall in Fig. 30 entsprechende Senkung  $\delta_3$ , sobald die für diesen Belastungsfall berechneten  $\Delta s$  eingesetzt werden. Bei konstantem  $E$  folgt:

$$\delta_3 = \sum \frac{\mathcal{S} S s}{EF} = \frac{1}{E} \sum \frac{\mathcal{S} S s}{F}.$$

Die den einzelnen Stäben entsprechenden Produkte  $\frac{\mathcal{S} S s}{F}$  sind in der Tabelle auf Seite 34 zusammengestellt worden. Man findet

$$\sum \frac{\mathcal{S} S s}{F} = 822$$

und, wenn für Schweifeseisen  $E = 2000$  t für das qcm gesetzt wird,

$$\delta = \frac{822}{2000} = 0,4 \text{ cm.}$$

**Beispiel 2.** Es soll die Senkung  $\delta$  des Scheitels  $G$  des in Fig. 24 auf Seite 25 dargestellten Dachbinders ermittelt werden.

Nachdem die statisch nicht bestimmaren Größen  $X'$  und  $X''$  nach der in § 2 gegebenen Anleitung berechnet und die Spannkraften  $S = S_0 + S'X' + S''X''$  ermittelt worden sind, werden die wirklichen Längenänderungen  $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \epsilon ts$  für sämtliche Stäbe, sowie etwaige Verschiebungen der Stützpunkte festgestellt.

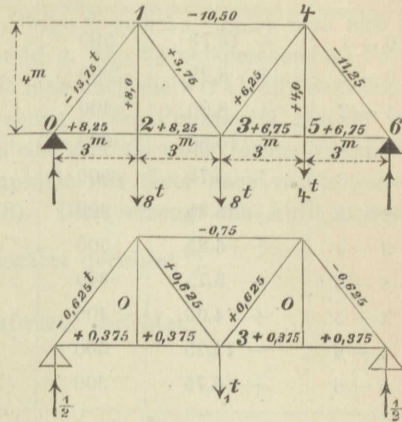


Fig. 30. u. 31.



Tabelle zum Zahlenbeispiele auf Seite 32.

Stab	$S$	$s$	$F$	$\ominus$	$\frac{\ominus S s}{F}$
0 — 1	— 13,75	500	30	— 0,625	143
0 — 2	+ 8,25	300	15	+ 0,375	62
1 — 2	+ 8,00	400	10	0	0
1 — 4	— 10,50	600	20	— 0,750	24
1 — 3	+ 3,75	500	10	+ 0,625	117
2 — 3	+ 8,25	300	15	+ 0,375	62
3 — 4	+ 6,25	500	10	+ 0,625	195
3 — 5	+ 6,75	300	15	+ 0,375	51
4 — 5	+ 4,00	400	10	+ 0	0
4 — 6	— 11,25	500	30	— 0,625	117
5 — 6	+ 6,75	300	15	+ 0,375	51
	Tonnen	cm	qcm	Tonnen	$\Sigma \frac{\ominus S s}{F} = 822$

Hierauf wird das statisch bestimmte Hauptnetz (Fig. 32) mit der in  $G$  angreifenden Kraft 1 belastet. Es entstehen die Auflagerkräfte

$$A = B = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad C = D = 1 \cdot \frac{l}{2h},$$

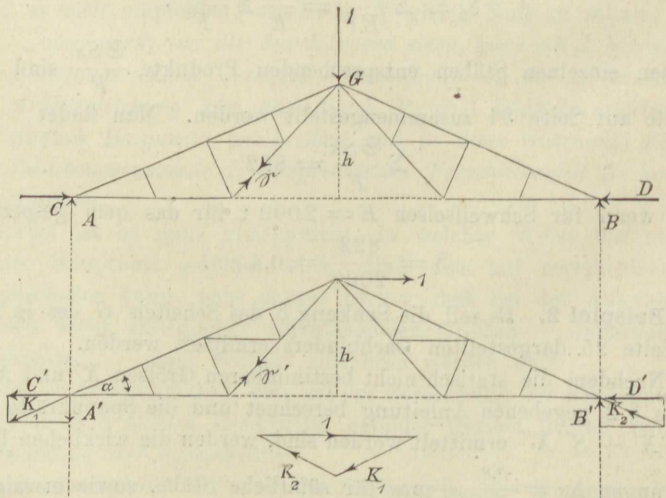


Fig. 32. u. 33.

sowie gewisse, leicht bestimmbare Spannkkräfte  $\mathfrak{S}$ , und es lautet die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot \delta - 1 \cdot \frac{l}{2h} \Delta l = \Sigma \mathfrak{S} \Delta s,$$

sie gilt für beliebige zusammengehörige  $\delta$  und  $\Delta s$ . Setzt man also die wirklichen (dem Belastungszustande in Fig. 24 entsprechenden) Formänderungen  $\Delta l$  und  $\Delta s$  ein, so erhält man auch die wirkliche Senkung  $\delta$ .

Wird die wagerechte Verschiebung  $\delta'$  des Punktes  $G$  gesucht und hierbei  $\delta'$  positiv angenommen, sobald sich  $G$  nach rechts verschiebt, so ist das statisch bestimmte Hauptnetz mit einer nach rechts gerichteten Kraft 1 zu belasten (Fig. 33). Diese erzeugt die Auflagerkräfte

$$A' = 1 \cdot \frac{h}{l}, \text{ abwärts gerichtet*),}$$

$$B' = 1 \cdot \frac{h}{l}, \text{ aufwärts gerichtet,}$$

$$C' = D' = \frac{1}{2},$$

sowie Spannkkräfte  $\mathfrak{S}'$ , und es ergibt sich die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot \delta' - D' \cdot \Delta l = \Sigma \mathfrak{S}' \Delta s, \text{ aus welcher}$$

$$\delta' = \frac{1}{2} \Delta l + \Sigma \mathfrak{S}' \Delta s$$

erhalten wird.

**Beispiel 3.** Gesucht sei die Senkung  $\delta_m$  des Knotenpunktes  $m$  der Mittelöffnung eines kontinuierlichen Fachwerkträgers mit 4 Stützpunkten (Fig. 34).

Nachdem für den vorgeschriebenen Belastungsfall die Spannkkräfte  $S$  ermittelt worden sind, wird der Teil des Fachwerks, welchem der Knotenpunkt  $m$  angehört, statisch bestimmt gemacht. Dies geschieht am zweckmäßigsten durch Beseitigung der beiden Stäbe  $LN$  und  $RT$ . Der Trägerteil  $C_1 C_2$  ist jetzt als ein einfacher Balken aufzufassen (Fig. 34); er wird im Punkte  $m$  mit der senkrechten Kraft 1 belastet, und hierauf werden die Auflagerkräfte  $1 \frac{b}{l}$  und  $1 \frac{a}{l}$  und die Spannkkräfte  $\mathfrak{S}$  berechnet. Schließlich wird die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot \delta_m = \Sigma \mathfrak{S} \Delta s$$

angeschrieben; sie liefert, wenn für  $\Delta s$  die wirklichen Änderungen

\*) Es ist  $B'$  gleich aber entgegengesetzt  $A'$ , damit die senkrechten Kräfte im Gleichgewichte sind. Sodann verlangt das Gleichgewicht gegen Drehen:  $A' l = 1 \cdot h$ , woraus  $A' = 1 \frac{h}{l}$ . Schließlich folgt  $C' = A' \cotg \alpha = \frac{h}{l} \cdot \frac{l}{2h} = \frac{1}{2}$  und ebenso  $D' = \frac{1}{2}$ , weil die Mittelkraft  $K_1$  aus  $A'$  und  $C'$ , desgl.  $K_2$  aus  $B'$  und  $D'$  durch den Punkt  $G$  gehen muß.

der Stablängen gesetzt werden, die wirkliche senkrechte Verschiebung des Punktes  $m$  gegen die fest gedachte Gerade  $C_1 C_2$ . Senken sich die

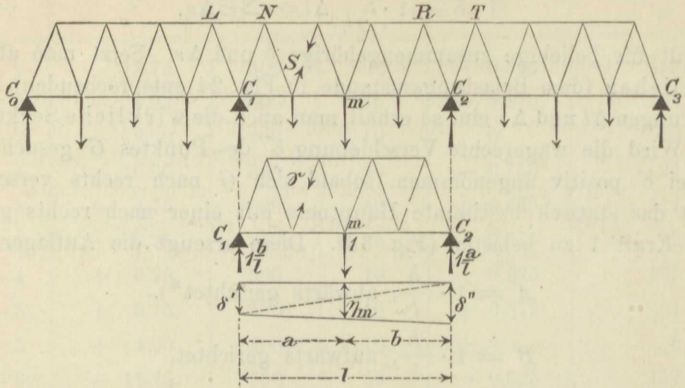


Fig. 34 a, b, c.

Stützpunkte  $C_1$  und  $C_2$  bzw. um  $\delta'$  und  $\delta''$ , so ist zu  $\delta_m$  noch der durch die Fig. 34 nachgewiesene Betrag

$$\eta_m = \delta' \frac{b}{l} + \delta'' \frac{a}{l}$$

hinzuzufügen.

#### § 4.

### Die Biegungspolygone für ebene Fachwerkträger.

1) Trägt man die (nach unten positiv gezählten) senkrechten Verschiebungen  $\dots \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1} \dots$  der Knotenpunkte  $\dots m-1, m, m+1 \dots$  einer Gurtung  $AB$  eines in einer lotrechten Ebene gedachten Fachwerks von einer wagerechten  $A'B'$  aus als Ordinaten auf und verbindet die Endpunkte derselben durch gerade Linien, so erhält man das der gegebenen Belastung entsprechende Biegungspolygon der Gurtung  $AB$  (Fig. 35 b). Es läßt sich bestimmen, sobald die Längenänderungen der Gurtstäbe und die Änderungen der von je zwei aufeinander folgenden Gurtstäben gebildeten Winkel, welche wir kurz die Randwinkel nennen und  $= \vartheta$  setzen wollen, bekannt sind.

Die Fläche zwischen dem Biegungspolygone und der zugehörigen Abscissenachse möge die Biegungsfläche der Gurtung heißen.

Wir betrachten zuerst das

**Biegungspolygon einer unteren Gurtung**, bezeichnen

mit  $s_m$  und  $s_{m+1}$  die Längen der einem Knotenpunkte  $m$  benachbarten Gurtstäbe,

„  $\gamma_m$  und  $\gamma_{m+1}$  die von der Wagerechten durch das linke Stabende aus nach unten positiv gezählten Neigungswinkel dieser Stäbe,



mit  $c_m$  und  $c_{m+1}$  die senkrechten Projektionen von  $s_m$  und  $s_{m+1}$ ,

„  $\lambda_m$  und  $\lambda_{m+1}$  die waagrechten Projektionen von  $s_m$  und  $s_{m+1}$ ,

„  $\Delta s$ ,  $\Delta \gamma$ ,  $\Delta c$ ,  $\Delta \lambda$  die Änderungen von  $s$ ,  $\gamma$ ,  $c$  und  $\lambda$ , und erhalten  
 $\delta_m - \delta_{m-1} = \Delta c_m$ ,  
 $\delta_{m+1} - \delta_m = \Delta c_{m+1}$ .

Wird die Gleichung

$$c_m = s_m \sin \gamma_m$$

differentiiert und hierbei das Differentialzeichen  $d$  durch das Zeichen  $\Delta$  ersetzt, so folgt:

$$\Delta c_m = \Delta s_m \sin \gamma_m$$

$$+ s_m \cos \gamma_m \Delta \gamma_m$$

und nach Division durch

$$\lambda_m = s_m \cos \gamma_m:$$

$$\frac{\Delta c_m}{\lambda_m} = \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \gamma_m + \Delta \gamma_m$$

und ebenso ergibt sich

$$\frac{\Delta c_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \gamma_{m+1} + \Delta \gamma_{m+1},$$

so daß

$$\frac{\Delta c_m}{\lambda_m} - \frac{\Delta c_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \gamma_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \gamma_{m+1} + \Delta \gamma_m - \Delta \gamma_{m+1}$$

wird.

Nun ist aber

$$\gamma_m + \gamma_m - \gamma_{m+1} = 180^\circ, \text{ mithin } \Delta \gamma_m + \Delta \gamma_m - \Delta \gamma_{m+1} = 0,$$

und es entsteht, wenn die  $\Delta c$  durch die  $\delta$  ausgedrückt werden:

$$\frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \gamma_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \gamma_{m+1} - \Delta \gamma_m.$$

Bezeichnet man zunächst für den Temperaturzustand  $t=0$  mit

$$\sigma_m = \frac{S_m}{F_m} = \frac{\Delta s_m}{s_m} E \text{ und } \sigma_{m+1} = \frac{S_{m+1}}{F_{m+1}} = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} E$$

die Spannungen in den Gurtstäben  $s_m$  und  $s_{m+1}$  und setzt zur Abkürzung

$$(13) \quad w_m = \frac{\sigma_m}{E} \operatorname{tg} \gamma_m - \frac{\sigma_{m+1}}{E} \operatorname{tg} \gamma_{m+1} - \Delta \gamma_m,$$

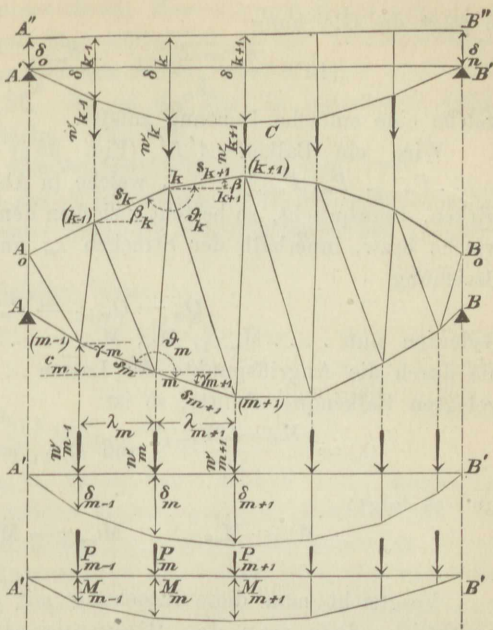


Fig. 35 a, b, c.

so folgt die Gleichung

$$(14) \quad \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} = w_m,$$

welche eine einfache Deutung zuläßt.

Wird ein Balken  $A'B'$  (Fig. 35c) durch senkrechte Lasten  $\dots P_{m-1}, P_m, P_{m+1} \dots$ , welche in Abständen  $\dots \lambda_m, \lambda_{m+1} \dots$  wirken, beansprucht, so besteht zwischen den Querkraften  $Q_m$  und  $Q_{m+1}$ , welche bezw. innerhalb der Strecken  $\lambda_m$  und  $\lambda_{m+1}$  konstant sind, die Beziehung

$$Q_m - Q_{m+1} = P_m.$$

Bedeutet nun  $\dots M_{m-1}, M_m, M_{m+1} \dots$  die Biegemomente für die durch die Angriffspunkte der Lasten  $\dots P_{m-1}, P_m, P_{m+1} \dots$  gelegten Balkenquerschnitte, so ist

$$Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m} \quad \text{und} \quad Q_{m+1} = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}},$$

und es folgt:

$$\frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}} = P_m. *)$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der Gleichung (14), so ist ersichtlich, daß man das Bieungspolygon einer Fachwerksgurtung auffassen darf als das Momentenpolygon eines Balkens  $A'B'$ , welcher durch Lasten  $\dots w_{m-1}, w_m, w_{m+1} \dots$  beansprucht wird (Fig. 35b).

Sind insbesondere die Verschiebungen des ersten und des letzten

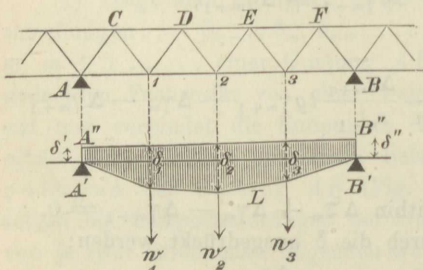


Fig. 36.

Knotenpunktes ( $o$  und  $n$ ) der Gurtung gleich Null, wie dies in der Fig. 35b vorausgesetzt worden ist, so ist der Balken  $A'B'$  ein einfacher, d. h. an den Enden frei aufliegender.

Handelt es sich um das Bieungspolygon einer Gurtung  $AB$ , deren Endknotenpunkte sich um Strecken  $\delta'$  und  $\delta''$  senken (beispielsweise der Gurtung des

Mittelfeldes eines kontinuierlichen Trägers mit verschieblichen Stützpunkten, Fig. 36), so setze man zuerst  $\delta'$  und  $\delta''$  gleich Null, berechne

\*) Die Querkraft  $Q$  ist hierbei als Mittelkraft der auf das Balkenstück links vom betrachteten Querschnitt wirksamen äußeren Kräfte aufgefaßt und positiv angenommen, wenn aufwärts gerichtet.  $M$  bedeutet das Moment von  $Q$ , bezogen auf den Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts als Drehpunkt, und wird positiv gesetzt, wenn es rechts drehend ist.

also das den Lasten  $w$  entsprechende Momentenpolygon  $A'LB'$  eines einfachen Balkens  $A'B'$  und füge schliesslich zu den Ordinaten dieses Polygons die Ordinaten der Geraden  $A''B''$ , welche durch  $A'A'' = \delta'$  und  $B'B'' = \delta''$  gegeben ist. Die in der Fig. 36 schraffierte Fläche ist die gesuchte Biegungsfläche. Für das

**Biegungspolygon einer oberen Gurtung** ergibt sich, wenn

$\beta_k$  und  $\beta_{k+1}$  die von der Wagerechten durch das linke Stabende aus nach oben positiv gezählten Neigungswinkel der Gurtstäbe

$s_k$  und  $s_{k+1}$

bedeuten (Fig. 35a), in gleicher Weise

$$\frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{\lambda_k} - \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{\lambda_{k+1}} = w_k,$$

wobei

$$(15) \quad w_k = \frac{\sigma_{k+1}}{E} \operatorname{tg} \beta_{k+1} - \frac{\sigma_k}{E} \operatorname{tg} \beta_k + \Delta \varepsilon_k$$

ist. Der durch die Lasten  $w_k$  beanspruchte Balken  $A'B'$ , dessen Momentenpolygon mit dem gesuchten Biegungspolygone übereinstimmt, ist, wie vorhin, als ein an den Enden frei aufliegender anzusehen, sobald der erste und der letzte Knotenpunkt der betrachteten Gurtung keine senkrechten Verschiebungen erfahren. Handelt es sich nun beispielsweise um die obere Gurtung eines Fachwerkträgers mit Endvertikalen (Fig. 35 d), so hat man nach Aufzeichnung des Momentenpolygons  $A'CB'$  für den an den Enden freiliegenden Balken  $A'B'$ , zu den Ordinaten dieses Polygons noch die der Geraden  $A''B''$  zu addieren, wobei die Strecken  $A'A''$  und  $B'B''$  gleich den Verkürzungen  $\delta_o$  bzw.  $\delta_n$  der Endvertikalen zu machen sind.

Will man die Senkungen der Knotenpunkte  $C, D, E, F$  der oberen Gurtung einer Mittelöffnung eines kontinuierlichen Balkens bestimmen (Fig. 36), so betrachte man das Polygon  $ACDEFB$  als obere Gurtung und die Stützpunkte  $A$  und  $B$ , deren Verschiebungen stets gegeben sind, bzw. als Anfangs- und Endknotenpunkt.

Bei einem Fachwerke mit Vertikalen (Fig. 37) findet man nach Bestimmung des Biegungspolygones der unteren Gurtung dasjenige der oberen (oder umgekehrt) mit Hilfe der Beziehung

$$\delta_m - \delta_k = \Delta h,$$

wobei  $\delta_m$  = Senkung des unteren Knotenpunktes  $m$ ,

$\delta_k$  = Senkung des oberen Knotenpunktes  $k$ ,

$\Delta h$  = Verlängerung der die beiden Punkte  $m$  und  $k$  verbindenden Vertikale.

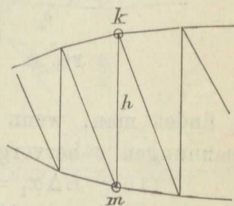


Fig. 37.



**Berechnung der  $\Delta \vartheta_m$ .** Wir beschränken uns in diesem Buche auf die Behandlung des Falles, in welchem das Fachwerk durch Aneinanderfügung von Dreiecken erzeugt werden kann. Es setzt sich dann jeder Winkel  $\vartheta$  aus einzelnen Dreieckswinkeln zusammen, und es genügt, die Berechnung der Änderung eines solchen zu zeigen.

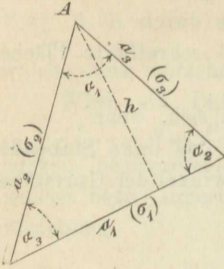


Fig. 38.

Sind  $a_1, a_2, a_3$  die Seiten eines Dreiecks und  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die ihnen gegenüberliegenden Winkel, und bedeutet  $h$  das Lot von  $A$  auf  $a_1$ , so folgt:

$$a_1 = a_2 \cos \alpha_3 + a_3 \cos \alpha_2$$

und hieraus durch Differenzieren:

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= \Delta a_2 \cos \alpha_3 - a_2 \sin \alpha_3 \Delta \alpha_3 + \Delta a_3 \cos \alpha_2 - a_3 \sin \alpha_2 \Delta \alpha_2 \\ &= \frac{\Delta a_2}{a_2} \cdot a_2 \cos \alpha_3 + \frac{\Delta a_3}{a_3} \cdot a_3 \cos \alpha_2 - h (\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3). \end{aligned}$$

Nun ist aber  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$  also  $\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = 0$  und  $\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 = -\Delta \alpha_1$ , ferner ist  $a_2 \cos \alpha_3 = h \cotg \alpha_3$  und  $a_3 \cos \alpha_2 = h \cotg \alpha_2$ , weshalb sich ergibt:

$$\Delta \alpha_1 = \frac{\Delta a_1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{h} - \frac{\Delta a_2}{a_2} \cotg \alpha_3 - \frac{\Delta a_3}{a_3} \cotg \alpha_2.$$

Bezeichnet man mit  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die Spannungen in den Stäben  $a_1, a_2, a_3$  und setzt die Temperaturänderung  $t = 0$  voraus, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a_1}{a_1} &= \frac{\sigma_1}{E}, \quad \frac{\Delta a_2}{a_2} = \frac{\sigma_2}{E}, \\ \frac{\Delta a_3}{a_3} &= \frac{\sigma_3}{E}. \end{aligned}$$

Beachtet man noch

$$\frac{a_1}{h} = \cotg \alpha_2 + \cotg \alpha_3,$$

so findet man, wenn  $E$  konstant ist, zur Berechnung der durch die Spannungen  $\sigma$  hervorgerufenen Winkeländerung die Gleichung

$$(16) \quad E \Delta \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \alpha_2.$$

Für die Änderung des Winkels  $\vartheta$  in Fig. 39 ergibt sich z. B. mit den an die einzelnen Stäbe geschriebenen Spannungen  $\sigma$  die Gleichung:

$$(16a) \quad E \Delta \vartheta = (\sigma_2 - \sigma_1) \cotg \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_3) \cotg \alpha_2 + (\sigma_4 - \sigma_3) \cotg \alpha_3 + (\sigma_4 - \sigma_5) \cotg \alpha_4 + (\sigma_6 - \sigma_5) \cotg \alpha_5 + (\sigma_6 - \sigma_7) \cotg \alpha_6.$$

Sollen Temperaturänderungen berücksichtigt werden, so ergibt sich die Änderung  $\Delta s$  einer Stablänge  $s$  aus

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{FE} + \varepsilon t = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{1}{E} (\sigma - \varepsilon Et);$$

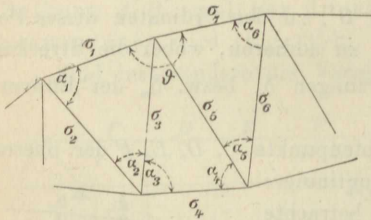


Fig. 39.



$$\begin{aligned}
 E\Delta\mathfrak{S}_2 &= (-0,28 - 0,48) 0,75 + (-0,69 - 0,48) 0,66 + (-0,69 \\
 &\quad - 0) 0,39 + (0,51 - 0) 1,11 + (0,51 - 0,65) 0,90 = -1,17 \\
 E\Delta\mathfrak{S}_3 &= (0 - 0,51) 1,11 + (-0,72 - 0,51) 0,68 + (-0,72 \\
 &\quad + 0,04) 0,14 + (0,53 + 0,04) 1,25 + (0,53 - 0,71) 0,8 \\
 &\quad = -0,93 \\
 E\Delta\mathfrak{S}_4 &= (-0,04 - 0,53) 1,25 + (-0,68 - 0,53) 0,8 + (0,27 \\
 &\quad + 0,06) 1,25 + (0,27 - 0,73) 0,8 = -1,64 \\
 E\Delta\mathfrak{S}_5 &= \{(-0,06 - 0,27) 1,25 + (-0,71 - 0,27) 0,8\} 2 \\
 &\quad = -2,39.
 \end{aligned}$$

Da die untere Gurtung wagerecht ist, so folgt aus der Gleichung (13):

$$w_m = -\Delta\mathfrak{S}_m.$$

Berechnet man also das Momentenpolygon für einen einfachen, an den Enden frei aufliegenden Balken  $A'B'$ , Fig. 40, welcher durch die Einzellasten

$$-E\Delta\mathfrak{S}_1 = 1,88, \quad -E\Delta\mathfrak{S}_2 = 1,17 \text{ u. s. w.}$$

beansprucht wird, so sind die Ordinaten  $M$  dieses Polygons gleich den mit  $E$  multiplizierten Durchbiegungen  $\delta$ . Ist die Feldweite  $\lambda$  konstant, so darf man bei der Berechnung der Momente  $M$  für den Balken  $A'B'$

die Annahme  $\lambda = 1$  machen, und erhält dann  $M = \frac{E\delta}{\lambda}$ .

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 6,815, \quad M_2 = 11,750, \quad M_3 = 15,515, \quad M_4 = 18,350 \\
 &\quad \text{und } M_5 = 19,545, *)
 \end{aligned}$$

und es folgen nun, wegen  $\lambda = 400 \text{ cm}$  und  $E = 2000 \text{ t}$  für das qcm, die Durchbiegungen:

$$\delta = \frac{M\lambda}{E} = \frac{M 400}{2000} = \frac{M}{5};$$

$$\text{also } \delta_1 = \frac{6,815}{5} = 1,4 \text{ cm}, \quad \delta_2 = \frac{11,750}{5} = 2,35 \text{ cm},$$

$$\delta_3 = 3,1 \text{ cm}, \quad \delta_4 = 3,7 \text{ cm}; \quad \delta_5 = 3,9 \text{ cm}.$$

\*) Hat man die Biegemomente für einen durch eine grössere Zahl von Einzel-lasten beanspruchten Balken zu berechnen, so ermittle man zuerst die Querkräfte. Für den vorliegenden symmetrischen Belastungsfall erhält man folgenden Ansatz: für Feld 5 ist  $Q_5 = \frac{1}{2} \cdot 2,39 = 1,195$

$  \begin{array}{r}  \text{dazu addiert } \dots 1,640 = w_4 \\  \hline  \text{gibt } Q_4 = 2,835 \\  \quad + 0,930 = w_3 \\  \hline  Q_3 = 3,765 \\  \quad + 1,170 = w_2 \\  \hline  Q_2 = 4,935 \\  \quad + 1,880 = w_1 \\  \hline  Q_1 = 6,815  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  M_1 = Q_1 = 6,815 \\  \text{dazu addiert } 4,935 = Q_2 \\  \hline  \text{gibt } M_2 = 11,750 \\  \quad + 3,765 = Q_3 \\  \hline  M_3 = 15,515 \\  \quad + 2,835 = Q_4 \\  \hline  M_4 = 18,350 \\  \quad + 1,195 = Q_5 \\  \hline  M_5 = 19,545  \end{array}  $
--	--



§ 5.

# Das Biegunspolygon eines Strebenfachwerkes. (Zweites Verfahren.)

Haben sämtliche Stäbe eine gegen die Senkrechte geneigte Lage, so nennt man das Stabsystem ein Strebenfachwerk. Für ein solches möge dasjenige Polygon bestimmt werden, dessen Ordinaten gleichzeitig die senkrechten Verschiebungen  $\delta$  der Knotenpunkte der oberen und der unteren Gurtung liefern.

Mit Bezugnahme auf die aus der Fig. 42 zu ersiehende Bezeichnung der Knotenpunkte sollen bedeuten:

$o_m$  die Länge des einem Knotenpunkte  $m$  der unteren Gurtung gegenüberliegenden Obergurt-Stabes,

$u_k$  die Länge des einem Knotenpunkte  $k$  der oberen Gurtung gegenüberliegenden Untergurt-Stabes,

$d_m$  die Länge der  $m^{\text{ten}}$  Diagonale,

$\beta_m$  den Neigungswinkel von  $o_m$  gegen die Wagerechte,

$\gamma_k$  den Neigungswinkel von  $u_k$  gegen die Wagerechte,

$\varphi_m$  den Neigungswinkel von  $d_m$  gegen die Wagerechte,

$e_m$  die senkrechte Projektion von  $d_m$ .

Um eine einfache Beziehung zwischen den Verlängerungen  $\Delta o_m$ ,  $\Delta d_m$ ,  $\Delta d_{m+1}$  der Seiten des Dreiecks  $(m-1) - m - (m+1)$ , und den Verkürzungen

$$\Delta e_m = \delta_{m-1} - \delta_m \text{ und } \Delta e_{m+1} = \delta_{m+1} - \delta_m$$

der Strecken  $e_m$  und  $e_{m+1}$  zu erhalten, denken wir dieses Dreieck herausgelöst und in den Punkten  $m-1$  und  $m+1$  mit den senkrechten

Kräften  $\frac{1}{\lambda_m}$  und  $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$  belastet, Fig. 43, während wir den Punkt  $m$

festlegen. In den drei Stäben  $o_m$ ,  $d_m$ ,  $d_{m+1}$  entstehen gewisse Spannkraften  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , und es lautet, da  $\mu_2$  und  $\mu_3$  Drücke sind, die Arbeitsgleichung:

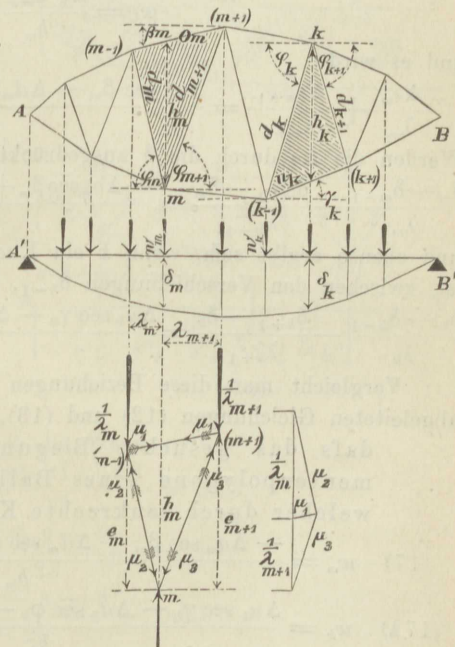


Fig. 42. u. 43.

$$\frac{1}{\lambda_m} \Delta e_m + \frac{1}{\lambda_{m+1}} \Delta e_{m+1} = \mu_1 \Delta o_m - \mu_2 \Delta d_m - \mu_3 \Delta d_{m+1}.$$

Mit Hilfe des Kräfteplanes in Fig. 43 ergibt sich nun, wenn  $h_m$  die bei  $m$  gemessene senkrechte Höhe des Fachwerks bedeutet,

$$\mu_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \lambda_m \sec \beta_m : h_m \text{ und hieraus } \mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m},$$

$$\mu_2 : \frac{1}{\lambda_m} = d_m : h_m = \lambda_m \sec \varphi_m : h_m \quad , \quad \mu_2 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m},$$

$$\mu_3 : \frac{1}{\lambda_{m+1}} = d_{m+1} : h_m = \lambda_{m+1} \sec \varphi_{m+1} : h_m \text{ und hieraus}$$

$$\mu_3 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m},$$

und es wird

$$\frac{\Delta e_m}{\lambda_m} + \frac{\Delta e_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = \frac{\Delta o_m \sec \beta_m - \Delta d_m \sec \varphi_m - \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Werden die  $\Delta e$  durch die  $\delta$  ausgedrückt, so folgt

$$\frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\delta_{m+1} - \delta_m}{\lambda_{m+1}} = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m},$$

und ebenso ergibt sich, wenn  $k$  ein Knotenpunkt der oberen Gurtung ist, zwischen den Verschiebungen  $\delta_{k-1}$ ,  $\delta_k$ ,  $\delta_{k+1}$  die Beziehung

$$\frac{\delta_k - \delta_{k-1}}{\lambda_k} - \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{\lambda_{k+1}} = \frac{\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}.$$

Vergleicht man diese Beziehungen mit den auf Seite 30 und 31 abgeleiteten Gleichungen (12) und (13), so erkennt man,

dafs das gesuchte Biegungspolygon mit dem Momentenpolygone eines Balkens  $A'B'$  übereinstimmt, welcher durch senkrechte Kräfte

$$(17) \quad w_m = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}, \text{ und}$$

$$(17a) \quad w_k = \frac{\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}$$

belastet wird.

In Figur 42 ist vorausgesetzt worden, dafs die senkrechten Verschiebungen der Endpunkte  $A$  und  $B$  gleich Null sind, dafs also  $A'B'$  ein an den Enden frei aufliegender Balken ist.

**Zahlenbeispiel.** Es sollen die senkrechten Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte des in Fig. 44 dargestellten schmiedeeisernen Netzwerkes unter der Voraussetzung berechnet werden, dafs in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung eine Last von 12 t angreift.

In Fig. 42 sind die Spannkkräfte in Tonnen (nicht eingeklammerte Zahlen) und die Stablängen in dm (eingeklammerte Zahlen) angegeben





$$M_1 = Q_1 = 7,34, \quad M_2 = M_1 + Q_2 = 12,55, \quad M_3 = M_2 + Q_3 = 15,92, \\ M_4 = M_3 + Q_4 = 18,68 \text{ und } M_5 = M_4 + M_5 = 18,98.$$

Um die Durchbiegungen zu erhalten, müssen wir die Momente  $M$  mit  $\lambda = 20 \text{ dm}$  multiplizieren und (da wir vorhin  $E = 100$  statt  $E = 200\,000$  setzten) durch 2000 dividieren. Es ergibt sich

$$\delta_5 = \frac{18,98 \cdot 20}{2000} \text{ dm} = 19,0 \text{ mm}$$

und ebenso  $\delta_4 = 18,7 \text{ mm}$ ,  $\delta_3 = 15,9 \text{ mm}$ ,  $\delta_2 = 12,6 \text{ mm}$ ,  $\delta_1 = 7,3 \text{ mm}$ .

## § 6.

### Änderung der Länge einer Gurtsehne. (Fig. 47.)

Es soll die Verlängerung  $\xi$  der irgend zwei Knotenpunkte 0 und  $n$  einer Gurtung verbindenden Sehne bestimmt werden. Die Lote von den Knotenpunkten  $1, 2, \dots, m, \dots$  auf diese Sehne seien  $= y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$ , und die Projektionen der Längen  $s_1, s_2, \dots, s_m, \dots$  der von der Sehne  $0-n$  unterspannten Gurtstäbe auf  $0-n$  seien  $= e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ .

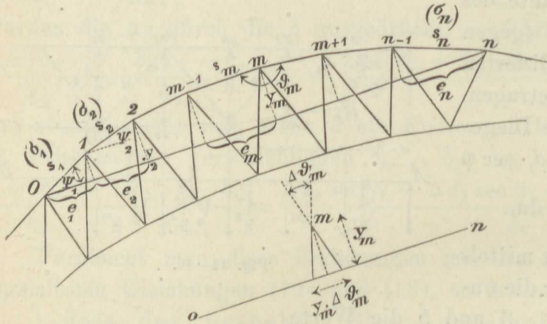


Fig. 47 a u. b.

Die Vergrößerung irgend eines Randwinkels  $\varpi_m$  um  $\Delta \varpi_m$  bedingt die durch die Figur 47 b nachgewiesene Änderung  $\xi = y_m \Delta \varpi_m$ , und die Verlängerung  $\Delta s_m$  der Länge  $s_m$  eines Gurtstabes erzeugt  $\xi = \Delta s_m \cos \psi_m$ , wobei  $\psi_m =$  Neigungswinkel des Stabes  $s_m$  gegen die fragliche Sehne.

Im ganzen entsteht also

$$\xi = \sum_{1}^{n-1} y_m \Delta \varpi_m + \sum_{1}^n \Delta s_m \cos \psi_m$$

und, wenn für den Fall  $t = 0$

$$\Delta s_m = s_m \frac{\sigma_m}{E} = \frac{e_m}{\cos \psi_m} \cdot \frac{\sigma_m}{E}$$

gesetzt wird,

$$(18) \quad \xi = \sum_{1}^{n-1} y_m \Delta \varpi_m + \sum_{1}^n \frac{\sigma_m}{E} e_m.$$

Beispiele für die Anwendung dieser Gleichung finden sich im § 7 und § 9.

§ 8.

# Aufgaben, betreffend die Ermittlung von Biegelinien.

**Aufgabe 1.** Gesucht die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des in Fig. 48 dargestellten Fachwerkträgers mit 2 nicht an den Enden stehenden Stützen  $A$  und  $B$ .

Man nehme zunächst  $C$  und  $D$  in senkrechter Richtung unverschieblich an und zeichne das Momentenpolygon  $\bar{C}'A'N'B'D'$  für einen bei  $C'$  und  $D'$  frei aufliegenden Balken, auf welchen die nach Gleich. (12) berechneten Lasten  $w$  (welche teils positiv, teils negativ sind\*) wirken. Bringt man hierauf die Senkrechten durch die festen Stützpunkte  $A$  und  $B$  in  $A'$  und  $B'$  mit dem Momentenpolygone zum Schnitte und zieht die Gerade  $A'B'$ , so erhält

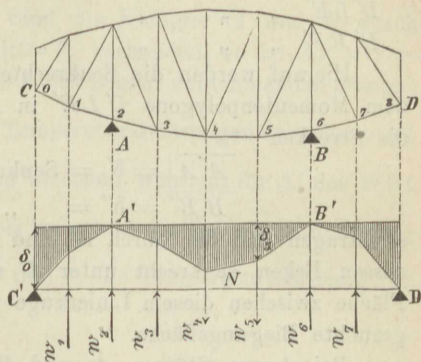


Fig. 48.

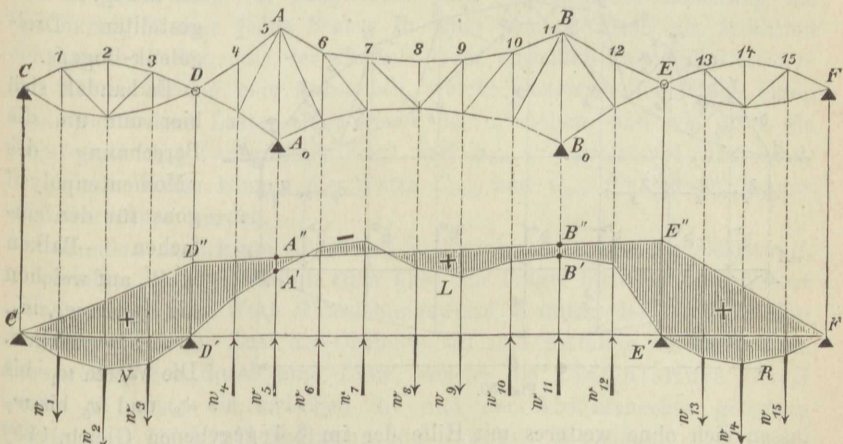


Fig. 49.

man in der schraffierten Fläche die gesuchte Biegungsfläche. Beispielsweise ist die Senkung der Knotenpunkte 0 und 5 gleich  $\delta_0$  bzw.  $\delta_5$ .

**Aufgabe 2.** Gesucht die Biegungsfläche für die obere Gurtung  $CDABEF$  des Gerberschen Trägers in Fig. 49.

\*) In Fig. 46 wurden  $w_4$  und  $w_5$  positiv, die übrigen  $w$  negativ (also nach oben gerichtet) angenommen.

Nachdem die den Knotenpunkten 1 bis 3, 4 bis 12 und 13 bis 15 entsprechenden (teils positiv, teils negativ ausfallenden) Werte  $w$  berechnet worden sind, werden die Momentenpolygone gezeichnet:

$C'ND'$  für den einfachen Balken  $C'D'$  mit den Lasten  $w_1$  bis  $w_3$ ,  
 $D'LE'$  " " " " "  $D'E'$  " " "  $w_4$  "  $w_{12}$ ,  
 $E'RF'$  " " " " "  $E'F'$  " " "  $w_{13}$  "  $w_{15}$ .

Hierauf werden die Senkrechten durch die Punkte  $A$  und  $B$  mit dem Momentenpolygone  $D'LE'$  in  $A'$  und  $B'$  zum Schnitte gebracht, die Strecken

$$\overline{A'A''} = \delta' = \text{Senkung des Punktes } A,$$

$$\overline{B'B''} = \delta'' = \text{ " " " " } B$$

abgetragen und der durch  $A''$  und  $B''$  gehende Linienzug  $C'D''E''F'$ , dessen Ecken senkrecht unter  $D$  und  $E$  liegen, eingezeichnet. Die Fläche zwischen diesem Linienzuge und dem Momentenpolygone ist die gesuchte Biegungsfläche.

Bei starren Stützen  $A_0$  und  $B_0$  ist

$$\delta' = \text{Verkürzung der Vertikale } A_0 A,$$

$$\delta'' = \text{ " " " " } B_0 B.$$

**Aufgabe 3.** Gesucht die Biegelinie für die obere Gurtung

des in Fig. 50 dargestellten Dreigelenk-Bogens.

Es handelt sich hier nur um die Berechnung des Momentenpolygons für den einfachen Balken  $A'B'$ , auf welchen die Lasten  $w_1, w_2, \dots, w_7$  wirken.

Die Werte  $w_1$  bis  $w_3$  und  $w_5$  bis  $w_7$

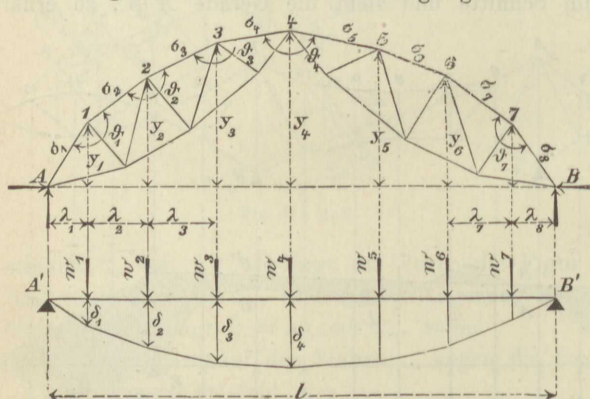


Fig. 50.

lassen sich ohne weiteres mit Hilfe der im § 4 gegebenen Gleich. (15) berechnen, da sich die Randwinkel  $\varpi_1$  bis  $\varpi_3$  und  $\varpi_5$  bis  $\varpi_7$  aus Dreieckswinkeln zusammensetzen. Um  $w_4$  mittels der Gleich. (14) bestimmen zu können, muß  $\Delta\varpi_4$  bekannt sein. Nun ist die durch Änderungen der Randwinkel und die Spannungen in den Gurtstäben bedingte Änderung  $\xi$  der Stützweite  $AB$  nach § 6, zunächst für den Fall  $t = 0$ :

$$\xi = \frac{\sigma_1}{E} \lambda_1 + \frac{\sigma_2}{E} \lambda_2 + \frac{\sigma_3}{E} \lambda_3 + \frac{\sigma_4}{E} \lambda_4 + \dots + \frac{\sigma_8}{E} \lambda_8$$

$$+ y_1 \Delta\varpi_1 + y_2 \Delta\varpi_2 + y_3 \Delta\varpi_3 + y_4 \Delta\varpi_4 + y_5 \Delta\varpi_5 + y_6 \Delta\varpi_6 + y_7 \Delta\varpi_7$$



und man erhält somit, bei gegebener Verschiebung  $\xi = \Delta l$ , den Wert

$$\Delta \mathfrak{Z}_4 = \frac{\Delta l - \sum_1^3 y \Delta \mathfrak{Z} - \sum_5^7 y \Delta \mathfrak{Z} - \sum_1^8 \frac{\sigma}{E} \lambda}{y_4}.$$

Bei starren Stützen ist  $\Delta l = 0$ . Sind die Kämpfer  $A$  und  $B$  durch eine Zugstange mit dem Querschnitte  $F_0$  verbunden, so ist  $\Delta l =$  Verlängerung dieser den Horizontalschub  $H$  des Bogens aufnehmenden Stange;

es folgt dann  $\Delta l = \frac{Hl}{EF_0}$ . Sollen Temperaturänderungen berücksichtigt

werden, so ist  $\sigma$  durch  $\sigma + \varepsilon Et$  zu ersetzen, während für  $\Delta l$  der Wert

$\frac{Hl}{EF_0} + \varepsilon t_0 l$  einzuführen ist. Hierbei bedeutet  $t$  die Temperaturänderung

für einen Stab der oberen Gurtung und  $t_0$  die Temperaturänderung für die Stange  $AB$ .

## § 8.

### Ebene Fachwerkträger mit veränderlicher Belastung. Einflußlinien für die statisch nicht bestimmaren Größen $X$ .

1) Stellt man bei Fachwerken mit veränderlicher Belastung die Spannkraft  $S$  eines jeden Stabes in einer solchen Form als Funktion der Lasten  $P$  dar, daß der Einfluß jeder einzelnen Last auf  $S$  ersichtlich ist, so vermag man anzugeben, welche Lasten in dem Stabe einen Zug, und welche Lasten einen Druck hervorbringen, und wie groß die Grenzwerte  $S_{max}$  (= größter Zug) und  $S_{min}$  (= größter Druck) sind. In gleicher Weise können die Werte  $C_{max}$  und  $C_{min}$  für jede Auflagerkraft berechnet werden.

Handelt es sich um ein ebenes Fachwerk mit senkrechter Belastung, so verfolge man den Einfluß einer über den Träger fortschreitenden Last „Eins“, trage den Wert  $S$  beziehungsweise  $C$  unter dem jedesmaligen Angriffspunkte der Last als Ordinate auf und verbinde die Endpunkte dieser Ordinaten durch eine Linie, welche die Einflußlinie für  $S$  bzw.  $C$  heißt; die zwischen ihr und der Abscissenachse gelegene Fläche wird die Einflußfläche für  $S$  bzw.  $C$  genannt.

Die Einflußlinien für die Werte  $S$  und  $C$  lassen sich mit Hilfe der Gleichungen

$$S = S_0 + S'X' + S''X'' + S'''X''' + \dots$$

$$C = C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \dots$$

leicht finden, sobald die Einflußlinien für die Größen  $X'$ ,  $X''$ ,  $X''' \dots$  gegeben sind. Die Ermittlung dieser „ $X$ -Linien“ ist das Ziel der nachstehenden Untersuchungen, und zwar soll sie unter der Voraussetzung

erfolgen, daß jede zwischen zwei Knotenpunkten wirkende Last durch einfache Zwischenträger auf die benachbarten Knotenpunkte übertragen wird. Es ist dann jede Einflußlinie ein aus geraden Linien bestehendes Polygon, dessen Ecken den Knotenpunkten des Fachwerkes entsprechen. Besitzt z. B. (Fig. 51) die  $X'$ -Linie unter den Knotenpunkten  $(m-1)$  und  $m$  die Ordinaten  $X'_{m-1}$  und  $X'_m$ , und wird der durch eine zwischen  $m-1$  und  $m$  gelegene Last  $P$  verursachte Wert  $X'$  gesucht, so bestimmt man die durch den Zwischenträger auf die

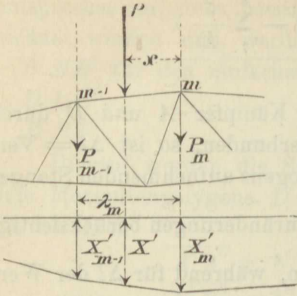


Fig. 51.

Knotenpunkte  $(m-1)$  und  $m$  übertragenen Lastanteile

$$P_{m-1} = P \frac{x}{\lambda_m} \text{ und } P_m = P \frac{\lambda_m - x}{\lambda_m}$$

und erhält:

$$PX' = P_{m-1} X'_{m-1} + P_m X'_m.$$

Hieraus folgt aber

$$X' = X'_{m-1} \frac{x}{\lambda_m} + X'_m \frac{\lambda_m - x}{\lambda_m},$$

und dieser Ausdruck ist in Bezug auf die Veränderliche  $x$  vom ersten Grade.

2) Die statisch nicht bestimmbar Gröößen  $X'$ ,  $X'' \dots \dots$  müssen, wenn im allgemeinen nachgiebige Stützen vorausgesetzt werden, den im § 3 abgeleiteten Gleichungen genügen:

$\Sigma C' \Delta c = \Sigma S' \Delta s$ ,  $\Sigma C'' \Delta c = \Sigma S'' \Delta s$ ,  $\Sigma C''' \Delta c = \Sigma S''' \Delta s$ ,  $\dots \dots$  und diese gehen mit

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \epsilon ts$$

und nach Einsetzen der Werte  $S$  über in

$$\left. \begin{aligned} L' - \Sigma \epsilon t S' s &= \Sigma S_0 S' \rho + X' \Sigma S' S' \rho + X'' \Sigma S'' S' \rho \\ &\quad + X''' \Sigma S''' S' \rho + \dots \dots \\ L'' - \Sigma \epsilon t S'' s &= \Sigma S_0 S'' \rho + X' \Sigma S' S'' \rho + X'' \Sigma S'' S'' \rho \\ &\quad + X''' \Sigma S''' S'' \rho + \dots \\ L''' - \Sigma \epsilon t S''' s &= \Sigma S_0 S''' \rho + X' \Sigma S' S''' \rho \\ &\quad + X'' \Sigma S'' S''' \rho + X''' \Sigma S''' S''' \rho + \dots \end{aligned} \right\} (19),$$

wobei, zur Abkürzung,

$$(20) \quad \frac{s}{EF} = \rho$$

gesetzt wurde, während  $L'$ ,  $L''$ ,  $L''' \dots$  die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte für die Zustände  $X'=1$ ,  $X''=1$ ,  $X'''=1$ ,  $\dots$  bedeuten.

Wird das Fachwerk zunächst unbelastet gedacht, so verschwinden die von  $S_0$  abhängigen Glieder, und es ergeben sich, durch Auflösung der Gleichungen (19), die durch die Verschiebungen der Stützpunkte und durch eine Änderung des anfänglichen Temperaturzustandes hervorgerufenen Größen  $X$  in der Form

$$(21) \quad \begin{cases} X' = \alpha' (L' - \sum \varepsilon t S' s) + \beta' (L'' - \sum \varepsilon t S'' s) \\ \quad + \gamma' (L''' - \sum \varepsilon t S''' s) + \dots \\ X'' = \alpha'' (L' - \sum \varepsilon t S' s) + \beta'' (L'' - \sum \varepsilon t S'' s) \\ \quad + \gamma'' (L''' - \sum \varepsilon t S''' s) + \dots \\ \dots \end{cases}$$

wobei  $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \alpha'', \beta'', \gamma'', \dots$  Werte sind, welche nur von den Koeffizienten der Größen  $X$  in den Gleichungen (19) abhängen und nur einmal berechnet zu werden brauchen, da sie lediglich durch die Form des Fachwerks bestimmt sind.

Nach Erledigung dieser in der Regel wenig zeitraubenden Rechnungen ergeben sich die von der Belastung abhängigen Werte:

$$(22) \quad \begin{cases} X' = -\alpha' \sum S_0 S' \rho - \beta' \sum S_0 S'' \rho - \gamma' \sum S_0 S''' \rho - \dots \\ X'' = -\alpha'' \sum S_0 S' \rho - \beta'' \sum S_0 S'' \rho - \gamma'' \sum S_0 S''' \rho - \dots \\ \dots \end{cases}$$

und mit Hilfe dieser letzteren Gleichungen lassen sich die Einflußlinien für die Größen  $X', X'' \dots$  schnell finden, sobald die Einflußlinien für die von der jedesmaligen Belastung abhängigen Summen

$$\sum S_0 S' \rho, \sum S_0 S'' \rho, \dots$$

bekannt sind.

Wir zeigen jetzt die Ermittlung dieser Summen für den Fall, daß auf das Fachwerk nur eine senkrechte Lasteinheit  $P$  wirkt, welche in irgend einem Knotenpunkte des statisch bestimmten Hauptnetzes, das meistens ein einfacher Balken oder ein Drei-Gelenkbogen oder ein Gerberscher Balken sein wird, angreift.

Da die Last  $P$  in den Stäben des Hauptnetzes die Spannkkräfte  $S_0$  erzeugt (Fig. 52), so ist die durch irgend welche Änderungen  $\Delta s$  der Stablängen hervor-gebrachte Senkung  $\delta$  ihres Angriffspunktes (nach § 3) durch die Arbeitsgleichung

$$P\delta = \sum S_0 \Delta s^*)$$

gegeben, und es besteht insbesondere

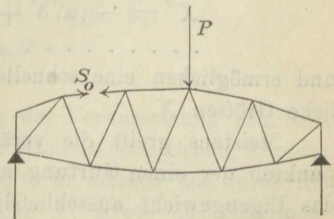


Fig. 52.

\*) Bei Aufstellung dieser Arbeitsgleichung werden die Stützen starr vorausgesetzt, da der Einfluß etwaiger Verschiebungen  $\Delta c$  der Stützpunkte gesondert mit Hilfe der Gleichung (21) beurteilt wird. Die Reibungswiderstände an den Auflagern werden gleich Null angenommen.



zwischen den durch die Ursache  $X' = 1$  (welche die Spannkraften  $S$  erzeugt) bedingten Verschiebungen  $\delta'$  und  $\Delta's$  die Beziehung:

$$P\delta' = \sum S_0 \Delta's = \sum S_0 \cdot \frac{S's}{EF},$$

aus welcher sich

$$(23a) \quad \sum S_0 S' \varphi = P\delta'$$

ergibt.

Da nun  $\delta'$  die Ordinate des den Spannungen  $\sigma' = \frac{S'}{F}$  entsprechenden Biegungspolygones derjenigen Gurtung ist, welcher der Angriffspunkt von  $P$  angehört, so ergibt sich der wichtige Satz:

*Bewegt sich über den Träger eine Last „Eins“, welche der Reihe nach in den verschiedenen Knotenpunkten der  $\frac{\text{oberen}}{\text{unteren}}$  Gurtung des Hauptnetzes angreift, so stimmt die Einflußlinie für den Aus-  
druck  $\sum S_0 S' \varphi$  mit dem für den Belastungszustand  $X' = 1$  berechneten Biegungspolygone der  $\frac{\text{oberen}}{\text{unteren}}$  Gurtung des Hauptnetzes überein.*

In gleicher Weise lassen sich die Einflußlinien für die übrigen in den Gleichungen (22) vorkommenden Summen darstellen. Man erhält

(23b)  $\sum S_0 S'' \varphi = P\delta''$ ,  $\sum S_0 S''' \varphi = P\delta'''$  u. s. f.,  
unter  $\delta''$ ,  $\delta'''$ , . . . . die unter dem jedesmaligen Angriffspunkte von  $P$  gemessenen Ordinaten der Biegungspolygone verstanden, welche beziehungsweise für die Spannungszustände  $X'' = 1$ ,  $X''' = 1$ , . . . . und für die Gurtung berechnet worden sind, in deren Knotenpunkten die Last  $P$  nacheinander angreift.

Die Gleichungen (22) gehen jetzt über in

$$\begin{aligned} X' &= -(\alpha' \delta' + \beta' \delta'' + \gamma' \delta''' + \dots) P \\ X'' &= -(\alpha'' \delta' + \beta'' \delta'' + \gamma'' \delta''' + \dots) P \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und ermöglichen eine schnelle Berechnung der Einflußlinien für sämtliche Größen  $X$ .

Meistens greift die veränderliche Belastung nur in den Knotenpunkten der einen Gurtung an, und es ist dann in der Regel zulässig, das Eigengewicht ausschließlich auf die Knotenpunkte dieser Gurtung zu verteilen. Sind die Knotenpunkte beider Gurtungen Angriffspunkte veränderlicher Lasten, so hat man für jeden Wert  $X$  zwei Einflußlinien zu zeichnen, da die Wirkungen der oben und unten angreifenden Lasten gesondert untersucht werden müssen.

**Beispiel 1.** Der vereinigte Balken- und Bogenträger in Fig. 53 mit einem festen Lager bei  $B$  und einem wagerechten Gleit-

lager bei  $A$  ist einfach statisch unbestimmt. Es lassen sich deshalb die Spannkkräfte in der Form

$$S = S_0 + S'X$$

darstellen, und es ergibt sich, da die Verschiebungen der Stützen im vorliegenden Falle ohne Einfluß auf die Beanspruchung des Fachwerks sind, zur Berechnung der statisch nicht bestimmaren Gröfse  $X$  aus der ersten der Gleichungen (19) die Bedingung:

$$-\sum \varepsilon t S' s = \sum S_0 S' \rho + X \sum S'^2 \rho,$$

aus welcher erhalten wird

$$\text{der Einfluß einer Temperaturänderung: } X_t = \frac{-\sum \varepsilon t S' s}{\sum S'^2 \rho}$$

$$\text{und „ „ der Belastung: } X = \frac{-\sum S_0 S' \rho}{\sum S'^2 \rho}.$$

Als statisch nicht bestimmare Gröfse  $X$  wählen wir die überall gleiche wagerechte Seitenkraft der in den Stäben 1, 2, 3, 3', 2', 1' des Bogens wirkenden Spannkkräfte. Ist  $X = 0$ , so sind diese Stäbe spannungslos, und ebenso verschwinden die nur von  $X$  abhängigen Spannkkräfte in den senkrechten Stäben 4, 5, 6, 5', 4'. Als statisch bestimmtes Hauptnetz verbleibt der einfache Balken  $ABCD$ .\*)

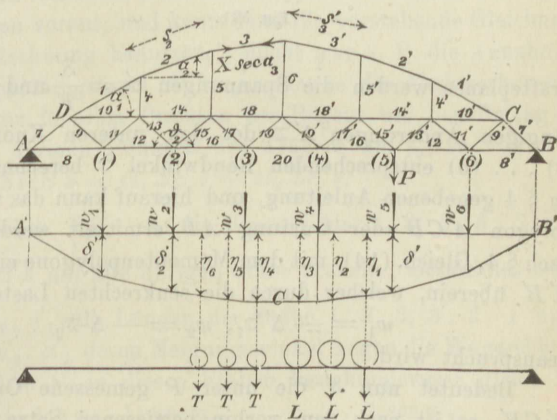


Fig. 53 a u. c.

Soll nun die Einflußlinie für  $X$  unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß eine Lasteinheit  $P$  der Reihe nach in sämtlichen Knotenpunkten der unteren Gurtung  $AB$  angreift, so müssen die durch die Ursache  $X = 1$  hervorgerufenen Spannkkräfte  $S'$ , sowie das Biegunbspolygon der Gurtung  $AB$  für diesen Spannungszustand bestimmt werden.

\*) Sind  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  die Neigungswinkel der Stäbe 2 und 3, so sind die Spannkkräfte in diesen Stäben bzw.:  $S_2 = X \sec \alpha_2$  und  $S_3 = X \sec \alpha_3$ . Für den Stab 5 erhält man aus der Bedingung  $S_5 + S_2 \sin \alpha_2 - S_3 \sin \alpha_3 = 0$  den Wert:  $S_5 = -X (\tg \alpha_2 - \tg \alpha_3)$ . In gleicher Weise werden die  $S$  für alle übrigen Bogenglieder und für die senkrechten Stäbe 4 bis 4' berechnet.

Die Kräfte  $S'$  werden zweckmäßig mit Hilfe des in Fig. 53 b dargestellten Kräfteplanes gefunden. In diesem Plane schneiden die von dem Punkte  $O$  aus zu den Stäben 1, 2, 3, 3', 2', 1' gezogenen Parallelen auf der im Abstände „Eins“ von  $O$  gezeichneten Senkrechten die in den Stäben 4, 5, 6, 5', 4' wirkenden Spannkkräfte  $S'$  ab, und die Längen der Strahlen 1, 2, . . . . . 1' stellen die Spannkkräfte  $S'$  in den Bogen-

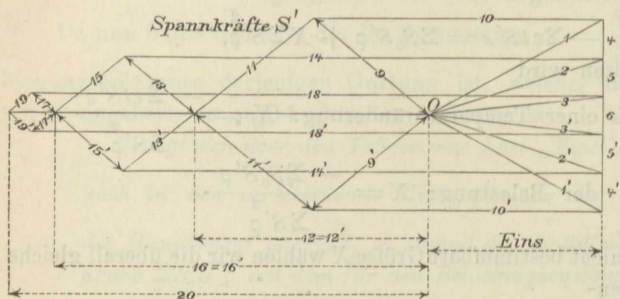


Fig. 53 b.

gliedern vor. Aus der Spannkraft 1 findet man die Kräfte 9 und 10, hierauf 11 und 12 u. s. w. Für die Stäbe 7, 8, 8' und 7' ist  $S' = 0$ .\*)

Nach Zeichnen dieses

Kräfteplanes werden die Spannungen  $\sigma' = \frac{S'}{F}$  und die von den  $\sigma'$  abhängigen Änderungen  $\Delta' \mathfrak{Z}$  der den unteren Knotenpunkten (1), (2), (3) . . . (6) entsprechenden Randwinkel  $\mathfrak{Z}$  berechnet, letztere nach der im § 4 gegebenen Anleitung, und hierauf kann das zugehörige Biegunbspolygon  $A'CB'$  der Gurtung  $AB$  ermittelt werden; dasselbe stimmt nach § 4, Gleich. (14), mit dem Momentenpolygone eines einfachen Balkens  $A'B'$  überein, welcher durch die senkrechten Lasten

$$w_1 = -\Delta' \mathfrak{Z}_1, w_2 = -\Delta' \mathfrak{Z}_2 \dots \dots$$

beansprucht wird.

Bedeutet nun  $\delta'$  die unter  $P$  gemessene Ordinate des Polygons  $A'CB'$ , so ist nach dem vorhin bewiesenen Satze:

$$\sum S_0 S' \rho = P \delta',$$

mithin

$$X = - \frac{P \delta'}{\sum S' \rho^2}.$$

Dividiert man also die Ordinaten  $\delta'_1, \delta'_2 \dots$  des Biegunbspolygons  $A'CB'$  durch den konstanten Wert  $\sum S' \rho^2$ , so erhält man die Ordinaten  $X_1, X_2 \dots$  der gesuchten Einflußlinie.

Wird beispielsweise durch den Träger ein Eisenbahngleis gestützt, und bedeutet  $L$  die Belastung einer Lokomotivachse,  $T$  die Belastung

\*) Die Stäbe 1, 2, 3, 3', 2', 1', 9, 12, 13, 16, 17, 20, 17', 16', 13', 12', 9' werden gezogen, die übrigen gedrückt.



einer Tenderachse, und entsprechen den Lasten  $L$  und  $T$  beziehungsweise die Polygon-Ordinaten  $\eta_1, \eta_2 \dots$ , so ist der durch die Belastung in Fig. 53c erzeugte Wert  $X$  bestimmt durch die Gleichung

$$X \cdot \Sigma S' \varphi^2 = -L(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - T(\eta_4 + \eta_5 + \eta_6).$$

Das Zeichen (—) deutet an, daß der Bogen auf Druck beansprucht wird.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß der durch eine Temperaturänderung erzeugte Wert  $X_t$  gleich Null wird, sobald  $\varepsilon$  und  $t$  konstant sind; denn setzt man in die dem Spannungszustande  $X = 1$  entsprechende Arbeitsgleichung

$$\Sigma S' \Delta s = 0,$$

welche für beliebige, mögliche Formänderungen  $\Delta s$  gilt, den Wert  $\Delta s = \omega s$ , wobei  $\omega$  eine Konstante, d. h. nimmt man an, daß das Fachwerk eine der früheren Form ähnliche Form annimmt, so findet man

$$\Sigma S' s = 0.$$

In der Regel setzt man innerhalb einzelner Gruppen von Stäben konstante Temperaturänderungen voraus, und kann dann die vorstehende Gleichung zur Abkürzung der Rechnung benutzen. Macht man z. B. die Annahme, daß sich die dem spannungslosen Anfangszustande des Fachwerks entsprechende Temperatur in allen Punkten des Bogens um den Betrag  $t_1$  ändere und in allen übrigen Punkten des Trägers um  $t_2$ , so folgt

$$\Sigma \varepsilon t S' s = \varepsilon t_1 \Sigma I S' s + \varepsilon t_2 \Sigma II S' s,$$

wobei sich der Ausdruck  $\Sigma I S' s$  auf die Bogenglieder 1, 2, 3, 3', 2', 3'

und der Ausdruck  $\Sigma II S' s$  auf alle übrigen Stäbe bezieht. Bezeichnet man

mit  $s_1, s_2, s_3, s'_3, s'_2, s'_1$  die Längen der Stäbe 1, 2, 3, 3', 2', 1' und mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha'_3, \alpha'_2, \alpha'_1$  deren Neigungswinkel gegen die Wagerechte, so sind die Spannkraften  $S'$  in diesen Stäben beziehungsweise gleich

$$1 \cdot \sec \alpha_1, 1 \cdot \sec \alpha_2, 1 \cdot \sec \alpha_3, \dots \dots \dots 1 \sec \alpha'_1,$$

und es folgt

$$\Sigma I S' s = s_1 \sec \alpha_1 + s_2 \sec \alpha_2 + \dots \dots \dots + s'_1 \sec \alpha'_1.$$

Da nun  $\Sigma I S' s + \Sigma II S' s = 0$  ist, so ergibt sich schliesslich

$$X_t = -\frac{\varepsilon(t_1 - t_2)}{\Sigma S' \varphi^2} [s_1 \sec \alpha_1 + s_2 \sec \alpha_2 + s_3 \sec \alpha_3 + s'_3 \sec \alpha'_3 + s'_2 \sec \alpha'_2 + s'_1 \sec \alpha'_1].$$

**Beispiel 2.** Es soll der Horizontalzug  $X$  der in Fig. 54a dargestellten, durch einen Balken versteiften Kette ermittelt werden. Der Balken ist mit der Kette durch senkrechte Stäbe verbunden und besitzt bei  $B$  ein festes und bei  $A$  ein auf einer Wagerechten geführtes Lager. Bei ausschließlich senkrechten Lasten  $P$  wirken auf den Balken

nur senkrechte Kräfte. Die Kette ruht auf Pendelpfeilern (10 und 10'), welche aus demselben Materiale hergestellt sein sollen, wie alle übrigen Stäbe des Fachwerks und als Bestandteile des Fachwerks aufgefaßt werden. Die Stabverbindung ist eine einfach statisch unbestimmte, und es mögen die Spannkkräfte auf die Form

$$S = S_0 - S'X$$

gebracht werden. Die Spannkkräfte  $S'$  entsprechen dann dem Zustande  $X = -1$ , welchen man erhält, wenn man sich in irgend einem Stabe

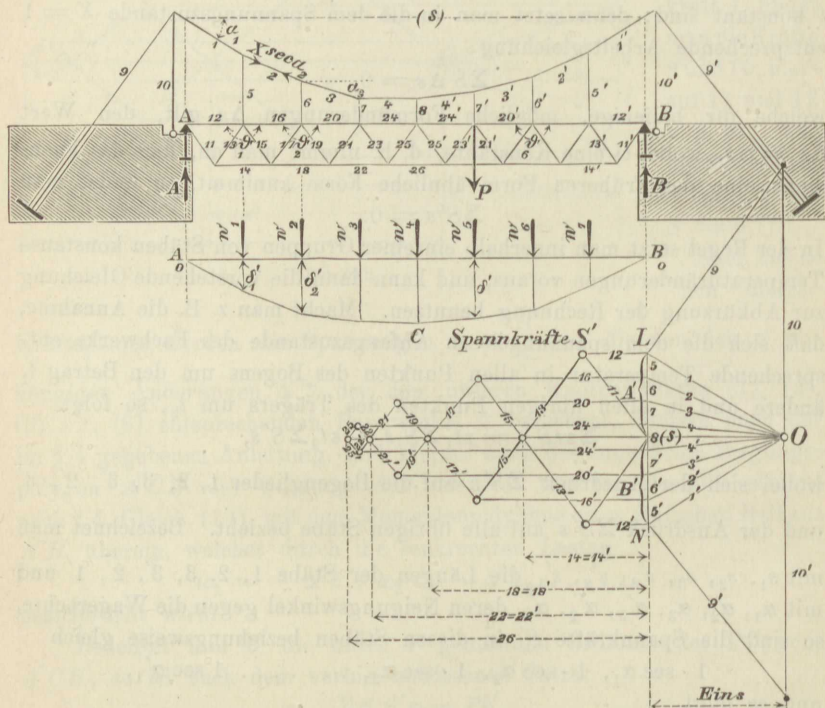


Fig. 54 a u. b.

der Kette einen Druck erzeugt denkt, dessen wagerechte Seitenkraft = „Eins“ ist, und es lautet die Gleichung zur Berechnung von  $X$ , sobald die Stützen starr angenommen werden,

$$-\sum \epsilon t S' s = \sum S_0 S' \rho - X \sum S'^2;$$

sie liefert den durch eine Änderung der Temperatur entstehenden Horizontalzug

$$X_t = \frac{\sum \epsilon t S' s}{\sum S'^2}$$

und den durch eine Belastung hervorgerufenen

$$X = \frac{\sum S_0 S' \rho}{\sum S'^2 \rho}.$$

Den Kräfteplan für den Zustand  $X = -1$  zeigt Fig. 54 b; er wird in ähnlicher Weise konstruiert wie in dem vorigen Beispiele. Die Spannkkräfte in den Kettengliedern 1, 2, 3, 4, 4', 3', 2', 1' bilden einen Strahlenbüschel, dessen wagerechte Projektion der Horizontalschub „Eins“ ist, und welcher auf der Senkrechten  $LN$  die in den Hängestangen wirkenden Spannkkräfte 5, 6, 7, 8, 7', 6', 5' abschneidet. Die Kräfte 9 und 10, desgleichen 9' und 10' ergeben sich aus den Kräften 1 und 1'. Die Kräfte 5, 6, 7, 8, 7', 6', 5' wirken als Drücke auf den Balken und rufen die senkrechten Auflagerwiderstände  $A'$  und  $B'$  hervor. Ist das Fachwerk symmetrisch (wie in Fig. 54 angenommen wurde), so ist  $A' = B'$ ; im Gegenfalle verlängere man in Fig. 54 die Auflagersenkrechten  $A$  und  $B$  bis zu ihren Schnittpunkten mit der Kette, verbinde diese durch die Schlußlinie ( $s$ ) und ziehe von  $O$  aus (Fig. 54 b) eine Parallele zu ( $s$ ); letztere zerlegt nach einem bekannten Satze der graphischen Statik den Kräftezug  $5 + 6 + 7 + 8 + 7' + 6' + 5'$  in  $A'$  und  $B'$ . Nunmehr lassen sich die Spannkkräfte  $S'$  auch für den Balken ermitteln.\*)

Nach Zeichnen dieses Kräfteplanes werden die Spannungen  $\sigma' = \frac{S'}{F}$  und die von den  $\sigma'$  abhängigen Änderungen  $\Delta' \varpi$  der oberen Randwinkel  $\varpi$  bestimmt, und hierauf wird das Biegungspolygon  $A_0CB_0$  der Gurtung  $AB$ , in dessen Knotenpunkten die über den Balken wandernde Last  $P$  der Reihe nach angreifen möge, berechnet; es stimmt (nach § 4, Gleichung 15) mit dem Momentenpolygone eines einfachen Balkens  $A_0B_0$  überein, welcher durch senkrechte Lasten

$$w_1 = \Delta' \varpi_1, w_2 = \Delta' \varpi_2, w_3 = \Delta' \varpi_3, \dots$$

beansprucht wird.

Bedeutet nun  $\delta'$  die unter  $P$  gemessene Ordinate des Biegungspolygons, so ist

$$\sum S_0 S' \rho = P \delta',$$

und es erzeugt mithin die Last  $P$  in der Kette den Horizontalzug

$$X = \frac{P \delta'}{\sum S'^2 \rho}.$$

\*) Die Spannkkräfte  $S'$  sind, links von der Mitte, negativ (Drücke) für die Stäbe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25 und positiv (Züge) für die Stäbe: 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23.



§ 9.

# Der Maxwellsche Lehrsatz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen.

Wir betrachten ein Fachwerk, dessen Stützpunkte unverrückbar sind oder über reibungslose Lager gleiten, dessen Auflagerkräfte mithin bei der eintretenden Formänderung keine Arbeit leisten.

Die durch irgendwelche Änderungen  $\Delta s$  der Stablängen  $s$  verursachten Verschiebungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  der Knotenpunkte  $A_1$  und  $A_2$  nach den Richtungen  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  ergeben sich nach § 3 aus den Arbeitsgleichungen

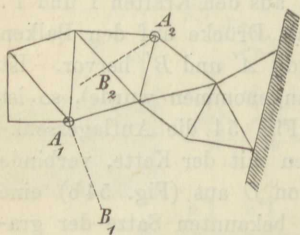


Fig. 55.

$$1 \cdot \delta_1 = \sum S_1 \Delta s \text{ und}$$

$$1 \cdot \delta_2 = \sum S_2 \Delta s,$$

wobei für irgend einen Stab

$S_1$  diejenige Spannkraft ist, welche eine in  $A_1$  angreifende, nach der Richtung  $A_1 B_1$  wirkende Kraft „Eins“ hervorbringt und

$S_2$  diejenige Spannkraft, welche entsteht, sobald in  $A_2$  nach der Richtung  $A_2 B_2$  die Kraft „Eins“ wirksam ist.

Herrscht in allen Stäben die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechende Temperatur, so ist für irgend einen Belastungsfall

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} \text{ mithin}$$

$$\delta_1 = \sum S_1 S \frac{s}{EF} \text{ und } \delta_2 = \sum S_2 S \frac{s}{EF}.$$

Ist insbesondere  $S = S_2$ , so ergibt sich

$$\delta_1 = \sum S_1 S_2 \frac{s}{EF},$$

während im Falle  $S = S_1$

$$\delta_2 = \sum S_2 S_1 \frac{s}{EF}.$$

ist, und es folgt aus der Übereinstimmung dieser beiden Werte der hinsichtlich seiner Gültigkeit an die oben gemachten Annahmen gebundene Satz:

Eine in dem Knotenpunkte  $A_1$  und im Sinne  $A_1 B_1$  angreifende Kraft „Eins“ verschiebt einen Knotenpunkt  $A_2$  im Sinne  $A_2 B_2$  um eine Strecke, welche ebenso groß ist wie die Verschiebung, welche der Knotenpunkt  $A_1$  im Sinne  $A_1 B_1$  erfährt, sobald im Punkte  $A_2$  und im Sinne  $A_2 B_2$  eine Kraft „Eins“ angreift.

Um diesen zuerst von Maxwell aufgestellten Satz zu erweitern,

wollen wir den Buchstaben  $P$  und  $\delta$ , die bis jetzt zur Bezeichnung einer Einzellast und der Verschiebung des Angriffspunktes dieser Last im Sinne der Last dienten, eine allgemeine Bedeutung beilegen, so zwar, daß wir unter  $P\delta$  die virtuelle Arbeit einer ganzen Gruppe von Lasten verstehen. Diese Gruppenbildung möge durch einige Beispiele erläutert werden.

1) Greifen in zwei Punkten  $m, m_1$  (Fig. 56) zwei entgegengesetzte, gleich große Kräfte  $P_m$  an, die in die Grade  $m m_1$  fallen, so ist das zugehörige  $\delta_m$  gleich der gegenseitigen Verschiebung des Punktepaares  $m, m_1$ , d. h. gleich der Änderung, welche die Entfernung  $mm_1$  erfährt. Man nennt diese Gegenkräfte  $P$  auch die Belastung des Punktepaares  $m m_1$  und spricht im Falle  $P = 1$  von der Belastungseinheit eines Punktepaares.

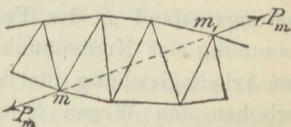
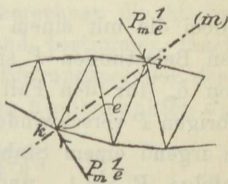


Fig. 56.

2) Werden zwei in  $i$  und  $k$  angreifende, rechtwinklig zur Geraden  $ik$  gerichtete, entgegengesetzte gleiche Kräfte, die ein Kräftepaar bilden, dessen Moment  $= P_m \cdot 1$  ist (Fig. 57), zu einer Gruppe vereinigt, so ist das zugehörige  $\delta_m$  gleich dem im Bogenmaß ausgedrückten Drehungswinkel der Geraden  $ik^*$ ). Man spricht hier kurz von der Belastung einer Geraden  $(m)$  und im Falle  $P = 1$  von der Belastungseinheit einer Geraden.





Die Bildung von Lastgruppen dürfte hiermit genügend erläutert sein, und es werde nur noch festgesetzt, daß jede am Fachwerke angreifende Last immer nur einer einzigen Gruppe zugewiesen werden soll. Der Kürze wegen nennen wir — im Anschluß an die unter 1, 2, 3 eingeführten Begriffe — eine solche Gruppe von Kräften allgemein eine Belastung und das zugehörige  $\delta$  den Weg dieser Belastung. Die Ermittlung eines beliebigen  $\delta_m$  für irgend einen Belastungszustand  $L$  des Fachwerks erfolgt auf dem im § 3 zur Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen angegebenen Wege mittels der Arbeitsgleichung für den Zustand  $P_m = 1$  und läßt erkennen, daß zwischen den Wegen  $\delta$  und den Belastungen  $P$  Beziehungen ersten Grades bestehen, daß also der Weg  $\delta_m$  infolge von Belastungen  $P_a, P_b, P_c, \dots P_m, P_n \dots$  in der Form erscheint:

$$\delta_m = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \delta_{mc} P_c + \dots + \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n + \dots,$$

wobei die mit einem Doppelzeiger behafteten Werte  $\delta$  unabhängig von den Belastungen  $P$  sind. Beispielsweise bedeutet  $\delta_{mn}$  den Sonderwert von  $\delta_m$  für den Fall, daß  $P_n$  die Größe Eins besitzt, während alle übrigen  $P$  verschwinden. Bezeichnet man nun mit  $S_n$  die infolge  $P_n = 1$  in irgend einem Stabe erzeugte Spannkraft und mit  $S_m$  die Spannkraft infolge  $P_m = 1$ , und schreibt man behufs Berechnung von  $\delta_{mn}$  die Arbeitsgleichung für den Zustand  $P_m = 1$  und für den Verschiebungszustand  $P_n = 1^*)$  an, so erhält man:

$$1 \cdot \delta_{mn} = \sum S_m \Delta s_n = \sum S_m \frac{S_n s}{EF};$$

und in derselben Weise ergibt sich für den Kräftezustand  $P_n = 1$  und den Verschiebungszustand  $P_m = 1$ :

$$1 \cdot \delta_{nm} = \sum S_n \Delta s_m = \sum S_n \frac{S_m s}{EF}.$$

Hieraus folgt aber

$$\delta_{mn} = \delta_{nm},$$

d. h. es dürfen die beiden Buchstaben eines Doppelzeigers miteinander vertauscht werden. Das ist der erweiterte Maxwellsche Satz. Aus ihm folgt u. a. für die vorhin erklärten Sonderfälle der Belastung eines Punktpaares bzw. eines Geradenpaares:

1. Die gegenseitige Verschiebung  $\delta_{mn}$  eines Punktpaares  $m, m_1$  infolge der Belastungseinheit eines anderen Punktpaares  $n, n_1$  ist ebenso groß wie die gegenseitige Verschiebung  $\delta_{nm}$  des Punktpaares  $n, n_1$  infolge der Belastungseinheit des Punktpaares  $mm_1$ .

\*) D. h. es sollen die durch  $P_n = 1$  erzeugten Formänderungen  $\delta_{mn}, \Delta s_n$  an die Stelle der virtuellen Formänderungen  $\bar{\delta}$  und  $\bar{\Delta s}$  treten.



2. Die gegenseitige Drehung  $\delta_{mn}$  eines Geradenpaares ( $m$ ) ( $m_1$ ) infolge der Belastungseinheit eines anderen Geradenpaares ( $n$ ) ( $n_1$ ) ist ebenso groß wie die gegenseitige Drehung des Geradenpaares ( $n$ ,  $n_1$ ) infolge der Belastungseinheit des Geradenpaares ( $m$ ) ( $m_1$ ).

3. Die gegenseitige Verschiebung eines Punktpaares  $m$ ,  $m_1$  infolge der Belastungseinheit eines Geradenpaares ( $n$ ) ( $n_1$ ) ist ebenso groß wie die gegenseitige Drehung des Geradenpaares ( $n$ ) ( $n_1$ ) infolge der Belastungseinheit des Punktpaares  $m$ ,  $m_1$ .

Wie vorteilhaft der Maxwellsche Satz in der Fachwerktheorie verwertet werden kann, wird die Lösung der folgenden Aufgaben zeigen.

**Aufgabe 1.** Gesucht die Einflußlinie für die Senkung  $\delta_m$  eines Knotenpunktes  $m$  eines Fachwerkträgers (Fig. 60).

Wir nehmen das gewichtslose Fachwerk nur mit einer in  $m$  angreifenden senkrechten Kraft „Eins“ belastet an, berechnen die hierbei entstehenden Spannkraften  $S$  und Spannungen  $\sigma$  und bestimmen (nach § 4 bis § 7) das diesen Spannungen entsprechende Biegungspolygon derjenigen Gurtung (beispielsweise von  $ACB$ ), in deren Knotenpunkten die Verkehrsbelastungen angreifen sollen. Ist nun die unter  $k$  gemessene Ordinate dieses Biegungspolygons  $= \eta_k$ , so verschiebt die in  $m$  angreifende Last „Eins“ den Knotenpunkt  $k$  im senkrechten Sinne um  $\eta_k$ , und es wird mithin (nach dem eben bewiesenen Satze) eine in  $k$  angreifende Last „Eins“ den Knotenpunkt  $m$  ebenfalls um  $\eta_k$  verschieben. Hieraus folgt, daß das gezeichnete Biegungspolygon die Einflußlinie für  $\delta_m$  ist.

Die Lasten  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  in Fig. 60, denen die Ordinaten  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  entsprechen, verursachen beispielsweise bei  $m$  die Senkung

$$\delta_m = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3.$$

**Aufgabe 2.** Gesucht die Einflußlinie für die gegenseitige Drehung  $\delta$  der Scheitelständer eines Dreigelenkbogens.

Es sei  $\delta$  im Sinne der in Fig. 61 eingezeichneten Pfeile positiv. Die Belastungseinheit des aus den Achsen der Scheitelständer bestehenden Geradenpaares setzt sich aus vier gleich großen Kräften

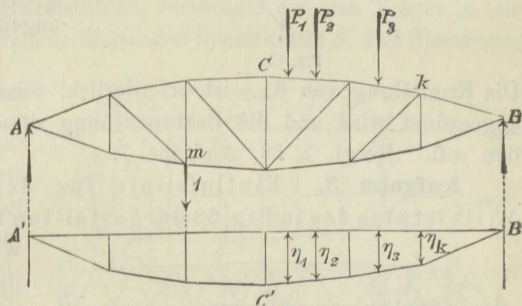


Fig. 60.

$\frac{1}{f'}$  zusammen (wo  $f'$  die Höhe des Bogenträgers im Scheitel) nämlich aus zwei an den Scheitelständern angreifenden Kräftepaaren, deren Momente  $\frac{1}{f'} \cdot f' = 1$  sind. Der Drehungssinn dieser Kräftepaare muß mit dem Sinn der gesuchten Drehung übereinstimmen. An den Kämpfern werden nur wagerechte Auflagerwiderstände von der Größe  $\frac{1}{f}$  hervorgerufen, unter  $f$  die Pfeilhöhe des Bogens verstanden.

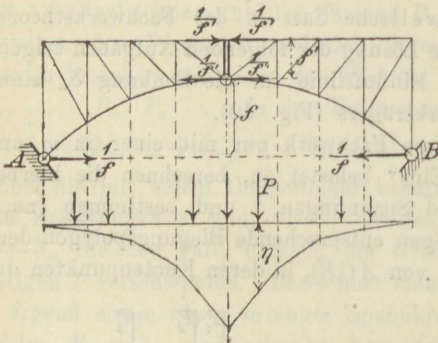


Fig. 61.

Die Ermittlung von  $\delta_{max}$  ist erforderlich, sobald im Scheitel eine Feder angeordnet wird und die Beanspruchung dieser Feder untersucht werden soll. Vergl. § 16, Aufgabe 7.

**Aufgabe 3.** Einflußlinie für den Widerstand  $X$  der Mittelstütze des in Fig. 62 dargestellten kontinuierlichen Fach-

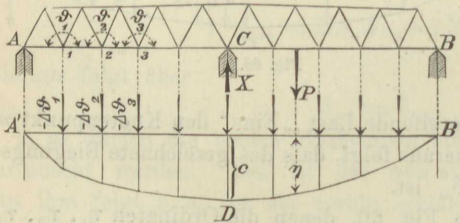


Fig. 62.

Berechnet man nun die durch diese Belastungszustände erzeugten Spannkraften  $S$  und Längenänderungen  $\Delta s$  und zeichnet man die hierzu gehörige Biegelinie (vergl. § 7), so ist dies die Einflußlinie für die gesuchte Drehung  $\delta$ . Der Beweis wird wie in Aufgabe 1 geführt. Die in der Fig. 61 angegebene Belastung erzeugt

$$\delta = \sum P\eta.$$

werkträgers mit 3 Stützpunkten. Die Lasten greifen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an.

Beseitigt man die Mittelstütze, so entsteht der statisch bestimmte Balken  $AB$ . Für diesen werden, unter der Voraussetzung, daß bei  $C$  eine senkrechte, abwärts ge-

richtete Last „Eins“ angreift, die Spannkraften  $S'$ , Spannungen  $\sigma'$  und Änderungen  $\Delta' \mathfrak{S}$  der unteren Randwinkel berechnet, und hierauf wird das Biegungspolygon der wagerechten Gurtung  $AB$  als Momentenlinie eines durch die Änderungen  $(-\Delta' \mathfrak{S}_1), (-\Delta' \mathfrak{S}_2), \dots$  belasteten, einfachen Balkens  $A'B'$  gezeichnet (vergl. § 4, Gleichung (12)). Dieses Polygon ist die Einflußlinie für die Senkung  $\delta$  des Punktes  $C$ . Wirken



nun auf das Fachwerk die beiden Kräfte  $P$  und  $X$ , und mißt man unter  $P$  die Polygonordinate  $\eta$  und unter  $C$  die Ordinate  $c$ , so folgt

$$\delta = P\eta - Xc.$$

Aus der Bedingung  $\delta = 0$  ergibt sich

$$X = P \frac{\eta}{c}.$$

Es ist also das Biegungspolygon  $A'DB'$  die Einflußlinie für  $X$ , und  $\frac{1}{c}$  ist der Multiplikator für diese Linie.

Der Elastizitätsmodul  $E$  darf bei gleichem Materiale sämtlicher Stäbe beliebig groß angenommen werden, da es nur auf das gegenseitige Verhältnis von  $\eta$  und  $c$  ankommt, und ebenso leuchtet ein, daß  $A'DB'$  ein mit beliebigem Polabstande zu den Lasten ( $-\Delta' \mathfrak{Z}$ ) gezeichnetes Seilpolygon sein darf.

**Aufgabe 4.** Einflußlinien für die Widerstände  $X'$  und  $X''$  der Mittelstützen des in Fig. 63a dargestellten, in den Knotenpunkten der unteren Gurtung belasteten kontinuierlichen Fachwerkträgers mit 4 Stützpunkten.

Man beseitige die Mittelstützen, verwandle also den Träger in einen einfachen Balken  $AB$ , berechne diejenigen Spannkraften  $S'$  und Spannungen

$\sigma' = \frac{S'}{F}$ , welche eine im

Punkte  $C'$  wirksame, senkrechte, abwärts gerichtete Last „Eins“ hervorbringt und zeichne das den Spannungen  $\sigma'$  entsprechende Biegungspolygon  $A'L'B'$  der Gurtung  $AB$ ; es stimmt mit dem Momentenpolygone eines mit den Randwinkeländerungen

( $-\Delta' \mathfrak{Z}_1$ ), ( $-\Delta' \mathfrak{Z}_2$ ) . . . . belasteten einfachen Balkens  $A'B'$  überein.

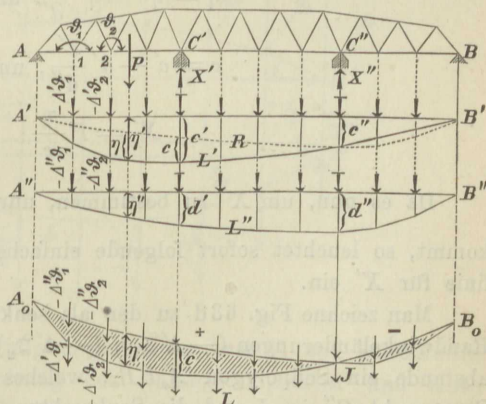


Fig. 63 a, b, c, d.

In gleicher Weise wird dasjenige Biegungspolygon  $A''L''B''$  der Gurtung  $AB$  ermittelt, welches eine im Punkte  $C''$  angreifende Last „Eins“ verursacht.

Es sind nun  $A'L'B'$  und  $A''L''B''$  die Einflußlinien für die Senkungen  $\delta'$  und  $\delta''$  der Punkte  $C'$  und  $C''$  des einfachen Balkens  $AB$ , und es erzeugen somit die drei Kräfte  $P$ ,  $X'$  und  $X''$  zusammen



die Durchbiegungen

$$\delta' = P\eta' - X'c' - X''c'' \text{ und}$$

$$\delta'' = P\eta'' - X'd' - X''d'',$$

wobei  $c'$  und  $c''$  die unter den Stützpunkten  $C'$  und  $C''$  gemessenen Ordinaten des Polygons  $A'L'B'$  und  $d'$  und  $d''$  die entsprechenden Ordinaten des Polygons  $A''L''B''$  sind.

Aus den Bedingungen  $\delta' = 0$  und  $\delta'' = 0$  ergeben sich zur Berechnung von  $X'$  und  $X''$  die Gleichungen

$$X'c' + X''c'' = P\eta'$$

$$X'd' + X''d'' = P\eta''$$

und aus diesen folgt:

$$X' = \frac{\eta' - \eta'' \frac{c''}{d''}}{c' - d' \frac{c''}{d''}} P.$$

Sind die Ordinaten des in Fig. 63b gestrichelten Polygons  $A'RB'$  gleich den mit  $\frac{c''}{d''}$  multiplizierten Ordinaten  $\eta''$  des Polygons  $A''L''B''$ , und ist der Unterschied der Ordinaten der Polygone  $A'L'B'$  und  $A'RB'$ , unter  $P$  gemessen,  $= \eta$  und, unter der Stütze  $C'$  gemessen,  $= c$ , so folgt

$$\eta = \eta' - \eta'' \frac{c''}{d''} \text{ und}$$

$$c = c' - d' \frac{c''}{d''}, \text{ und es ergibt sich}$$

$$X' = P \frac{\eta}{c}.$$

Da es nun, um  $X'$  zu bestimmen, nur auf das Verhältnis  $\frac{\eta}{c}$  ankommt, so leuchtet sofort folgende einfache Konstruktion der Einflußlinie für  $X'$  ein.

Man zeichne Fig. 63d zu den als senkrechte Lasten aufzufassenden Randwinkeländerungen  $(-\Delta' \varpi_1)$ ,  $(-\Delta' \varpi_2)$  . . . . mit beliebigem Polabstände ein Seilpolygon  $A_oLB_o$ , welches die Senkrechte durch den Stützpunkt  $C''$  in  $J$  und die Senkrechten durch die Endstützen in  $A_o$  und  $B_o$  schneiden möge. Hierauf zeichne man zu den Änderungen  $(-\Delta'' \varpi_1)$ ,  $(-\Delta'' \varpi_2)$  . . . . ein durch die 3 Punkte  $A_o$ ,  $J$  und  $B_o$  gehendes Seilpolygon. Mißt man jetzt unter  $P$  den senkrechten Abstand  $\eta$  der beiden Seilpolygone und unter der Stütze  $C'$  den Abstand  $c$ , so folgt

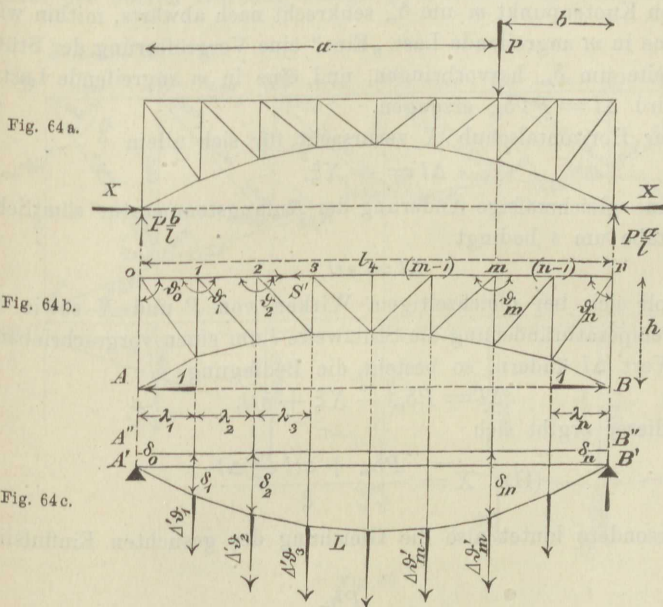
$$X' = P \frac{\eta}{c}.$$

Es ist also die in Fig. 63d schraffierte Fläche die Einflußfläche für  $X'$ ; dieselbe ist links von der Stütze  $C''$  positiv, rechts von dieser Stütze negativ. Der Wert  $\frac{1}{c}$  ist der Multiplikator der Einflußfläche.

In gleicher Weise wird die Einflußfläche für  $X''$  gefunden.

Sind sämtliche Stäbe aus gleichem Materiale, so darf bei Berechnung der Winkeländerungen der Elastizitätsmodul beliebig groß angenommen werden.

**Aufgabe 5.** Gesucht der Horizontalschub  $X$  des bei  $A$  und  $B$  festgelagerten Bogenträgers in Fig. 64. Es handelt sich um den Einfluß einer der Reihe nach in sämtlichen Knotenpunkten



der oberen, wagerechten Gurtung angreifenden Last  $P$ , und gleichzeitig soll der Einfluß einer Änderung der Anfangstemperatur und eines Nachgebens der Widerlager bestimmt werden.

Zuerst wird angenommen, daß auf das Fachwerk nur zwei in  $A$  und  $B$  angreifende, nach außen gerichtete wagerechte Kräfte „Eins“ wirken. Es entstehen Spannkraften  $S'$ , Spannungen  $\sigma'$  und Änderungen  $\Delta' \varphi$  der oberen Randwinkel, und man erhält die entsprechende Biegungsfläche der oberen Gurtung, wenn man die den Lasten  $\Delta' \varphi_1, \Delta' \varphi_2, \dots$  entsprechende Momentenfläche  $A'LB'$  eines an den Enden  $A'$  und  $B'$  frei aufliegenden Balkens bestimmt und zu dieser das Trapez  $A'A''B''B'$  hinzu-

fügt, dessen Endhöhen gleich den (ebenfalls für den Belastungszustand in Fig. 64b berechneten) Verkürzungen  $\delta_0$  und  $\delta_n$  der Endvertikalen sind.

Hierauf wird die dem Belastungszustande in Fig. 64b entsprechende Verlängerung  $\xi$  der Sehne  $AB$  berechnet; sie ist nach § 6, Gleichung (18):

$$(I) \quad \xi = h \sum_0^n \Delta' \vartheta + \sum_1^n \sigma' \frac{\lambda}{E},$$

wobei sich die erste Summe über sämtliche Randwinkeländerungen der oberen Gurtung erstreckt und die zweite die Spannungen  $\sigma'$  in sämtlichen Stäben dieser Gurtung umfaßt.

Nunmehr lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

- 1) Die in  $A$  und  $B$  wirksamen wagerechten Kräfte 1 verschieben den Knotenpunkt  $m$  um  $\delta_m$  senkrecht nach abwärts, mithin wird eine in  $m$  angreifende Last „Eins“ eine Vergrößerung der Stützweite um  $\delta_m$  hervorbringen, und eine in  $m$  angreifende Last  $P$  wird  $\Delta l = P \cdot \delta_m$  erzeugen.

- 2) Der Horizontalschub  $X$  verursacht für sich allein

$$\Delta l = -X\xi.$$

- 3) Eine gleichmäßige Änderung der Anfangstemperatur sämtlicher Stäbe um  $t$  bedingt

$$\Delta l = \varepsilon t l.$$

- 4) Soll sich bei gleichzeitigem Wirken von  $P$  und  $X$  sowie der Temperaturänderung die Stützweite  $l$  um einen vorgeschriebenen Wert  $\Delta l$  ändern, so besteht die Bedingung

$$\Delta l = P\delta_m - X\xi + \varepsilon t l,$$

und aus dieser ergibt sich

$$(II) \quad X = \frac{P\delta_m + \varepsilon t l - \Delta l}{\xi}.$$

Insbesondere lautet also die Gleichung der gesuchten Einflußlinie für  $X$ :

$$X = \frac{P\delta_m}{\xi}.$$

Bei gleichem Materiale sämtlicher Stäbe darf die Berechnung der  $\Delta' \vartheta$  und der Strecke  $\xi$  unter der Annahme  $E=1$  erfolgen. Es muß dann in Gleichung (II) gesetzt werden:

$\varepsilon E$  an Stelle von  $\varepsilon$  und

$\Delta l E$  „ „ „ „  $\Delta l$ .

**Zahlenbeispiel zu Aufgabe 5.** Es möge der bereits im § 2, Seite 29, für den Fall einer vollen Belastung untersuchte, in Fig. 28 dargestellte Bogenträger vorliegen. Die über den Träger wandernde Last  $P=1$  greife der Reihe nach in sämtlichen Knotenpunkten der



oberen Gurtung an. In Fig. 28 geben die links von der Mitte an die Stäbe gesetzten Zahlen die Stablängen  $s$  in cm an und die Zahlen rechts von der Mitte die Stabquerschnitte  $F$  in qcm, während in Fig. 29 die in Tonnen ausgedrückten, durch die in  $A$  und  $B$  angreifenden Kräfte 1 erzeugten Spannkkräfte  $S$  eingetragen sind.

In der (der Deutlichkeit der Zahlen wegen verzerrt gezeichneten) Trägerskizze in Fig. 65 bedeuten die an die Stäbe geschriebenen Zahlen die Spannungen  $\sigma' = \frac{S'}{F}$  in Tonnen für das qdm und die in die Winkel gesetzten Zahlen die Kotangenten dieser Winkel. Aus diesen Zahlen ergeben sich — mit  $E=1$  — die folgenden Änderungen der Randwinkel der oberen Gurtung (vergl. § 4, Gleichung (16), Seite 40):

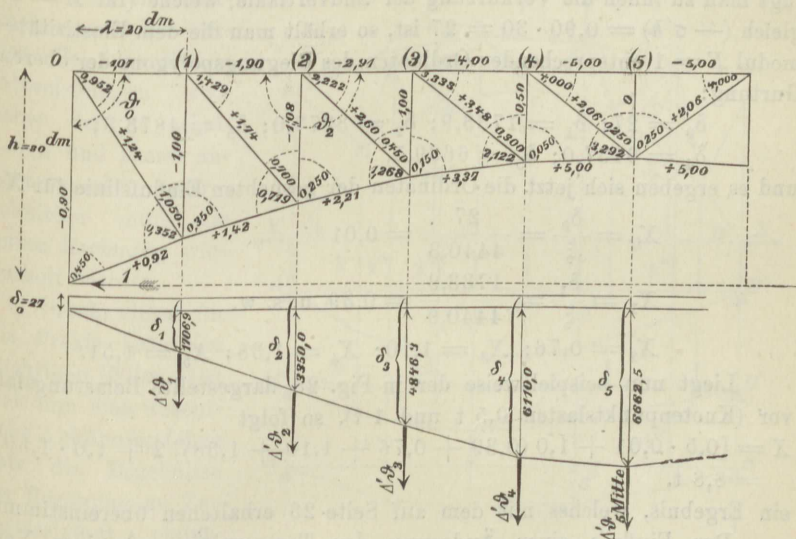


Fig. 65.

$$\Delta' \mathcal{S}_0 = (0,92 + 0,90) 0,450 + (0,92 - 1,24) 0,352 + (-1,00 - 1,24) 1,050 = -1,42$$

$$\Delta' \mathcal{S}_1 = (1,24 + 1,07) 0,952 + (1,24 + 1,00) 1,050 + (1,42 + 1,00) 0,350 + (1,42 - 1,74) 0,719 + (-1,08 - 1,74) 0,700 = +3,19$$

$$\Delta' \mathcal{S}_2 = (1,74 + 1,90) 1,429 + (1,74 + 1,08) 0,700 + (2,21 + 1,08) 0,250 + (2,21 - 2,60) 1,268 + (-1,00 - 2,60) 0,450 = +7,34$$

$$\Delta' \mathcal{S}_3 = (2,60 + 2,91) \cdot 2,222 + (2,60 + 1,00) 0,450 + (3,37 + 1,00) 0,150 + (3,37 - 3,48) 2,122 + (-0,50 - 3,48) 0,300 = +11,63$$

$$\Delta' \mathfrak{S}_4 = (3,48 + 4,00) 3,333 + (3,48 + 0,50) 0,300 + (5,00 + 0,50) 0,050 + (5,00 - 2,06) 3,292 + (0 - 2,06) 0,250 = 35,56$$

$$\Delta' \mathfrak{S}_5 = [(2,06 + 5,00) 4,000 + (2,06 - 0) 0,250] 2 = 55,25$$

und es folgt nach Gleichung (I) (wegen  $h = 30$  dm und  $\lambda = 20$  dm)

$$\begin{aligned} \xi &= 30 \Sigma \Delta' \mathfrak{S} + 20 \Sigma \sigma' \\ &= 30 [(-1,42 + 3,19 + 7,34 + 11,63 + 35,56) 2 + 55,25] \\ &\quad + 20 [-1,07 - 1,90 - 2,91 - 4,00 - 5,00] 2 = 4440,3. \end{aligned}$$

Die Ordinaten des Momentenpolygones eines mit den Winkeländerungen  $\Delta' \mathfrak{S}_1, \Delta' \mathfrak{S}_2, \dots$  belasteten, einfachen Balkens  $A'B'$  sind:

$$M_1 = 1706,9; M_2 = 3350,0; M_3 = 4846,3;$$

$$M_4 = 6110,0; M_5 = 6662,5;$$

fügt man zu ihnen die Verkürzung der Endvertikale, welche (für  $E = 1$ ) gleich  $(-\sigma'h) = 0,90 \cdot 30 = 27$  ist, so erhält man die dem Elastizitätsmodul  $E = 1$  entsprechenden Ordinaten des Biegungspolygons der oberen Gurtung:

$$\delta_0 = 27; \delta_1 = 1733,9; \delta_2 = 3377,0; \delta_3 = 4873,3;$$

$$\delta_4 = 6137,0; \delta_5 = 6689,5,$$

und es ergeben sich jetzt die Ordinaten der gesuchten Einflußlinie für  $X$ :

$$X_0 = \frac{\delta_0}{\xi} = \frac{27}{4440,3} = 0,01$$

$$X_1 = \frac{\delta_1}{\xi} = \frac{1733,9}{4440,3} = 0,39 \text{ u. s. w.}$$

$$X_2 = 0,76; X_3 = 1,10; X_4 = 1,38; X_5 = 1,51.$$

Liegt nun beispielsweise der in Fig. 28 dargestellte Belastungsfall vor (Knotenpunktslasten 0,5 t und 1 t), so folgt

$$X = [0,5 \cdot 0,01 + 1,0 (0,39 + 0,76 + 1,10 + 1,38)] 2 + 1,0 \cdot 1,50 = 8,8 \text{ t,}$$

ein Ergebnis, welches mit dem auf Seite 23 erhaltenen übereinstimmt.

Der Einfluß einer Änderung der Temperatur und einer Verschiebung der Widerlager ist

$$X = E \frac{\varepsilon t l - \Delta l}{\xi},$$

worein für Schweißseisen  $E = 200\,000$  t für das qdm und  $\varepsilon = 0,000012$  zu setzen ist. Eine Erhöhung der Temperatur um  $t = 40^\circ$  erzeugt (wegen  $l = 300$  dm)

$$X = \frac{200\,000 \cdot 0,000012 \cdot 40 \cdot 200}{4440,3} = 4,3 \text{ t}$$

und eine Verschiebung  $\Delta l = 0,1$  dm bedingt

$$X = - \frac{200\,000 \cdot 0,1}{4340,3} = - 4,5 \text{ t. (Vergl. Seite 32.)}$$







$$X = P \frac{\delta'}{\sum S'^2 \frac{F_c}{F}}$$

Für einen Stab  $o_m$  der oberen Gurtung ist

$$S'^2 \frac{F_c}{F} = O'^2 o_m \frac{F_c}{F_m} = \frac{y_m^2 o_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m} = y_m w_m,$$

und für einen Stab  $u_k$  der unteren Gurtung

$$S'^2 \frac{F_c}{F} = U'^2 u_k \frac{F_c}{F_k} = \frac{y_k^2 u_k}{r_k^2} \cdot \frac{F_c}{F_k} = y_k w_k,$$

und es folgt, wenn zur Kürzung gesetzt wird:

$$z_m = y_m w_m \text{ und } z_k = y_k w_k$$

$$X = P \frac{\delta'}{\sum z}.$$

Die Summe im Nenner des Wertes  $X$  erstreckt sich über alle Werte  $z_m$  und  $z_k$ .

Es ist statthaft, für sämtliche Stäbe der oberen Gurtung denselben Querschnitt  $F_o$  anzunehmen und für sämtliche Stäbe der unteren Gurtung denselben Querschnitt  $F_u$ . Setzt man dann die willkürliche Querschnittsfläche  $F_o = F_u$ , so ist für alle Stäbe  $o_m$ :

$$\frac{F_c}{F_m} = \frac{F_o}{F_o} = 1, \text{ mithin } w_m = \frac{y_m o_m}{r_m^2}$$

und für alle Stäbe  $u_k$ :

$$\frac{F_c}{F_k} = \frac{F_o}{F_u}, \text{ mithin } w_k = \frac{y_k u_k}{r_k^2} \cdot \frac{F_o}{F_u},$$

und es wird sich empfehlen:

- 1) ein Momentenpolygon  $A''RB''$  zu zeichnen, entsprechend den durch die Knotenpunkte  $m$  der unteren Gurtung gehenden Lasten

$$w_m = \frac{y_m o_m}{r_m^2},$$

- 2) desgleichen ein Momentenpolygon  $A'''TB'''$ , entsprechend den durch die Knotenpunkte  $k$  der oberen Gurtung gehenden Lasten

$$w_k = \frac{y_k u_k}{r_k^2} \left( \text{statt } w_k = \frac{y_k u_k}{r_k^2} \cdot \frac{F_o}{F_u} \right),$$

- 3) die beiden Summen zu berechnen:

$$\sum_1 = \sum \frac{y_m^2 o_m}{r_m^2} \text{ und } \sum_2 = \sum \frac{y_k^2 u_k}{r_k^2},$$

aus denen sich dann

$$\sum z = \sum_1 + \frac{F_o}{F_u} \sum_2$$

ergibt.

Sind nun  $\delta''$  und  $\delta'''$  die unter der Last  $P$  gemessenen Ordinaten der Momentenpolygone  $A''RB''$  und  $A'''TB'''$ , so ist offenbar

$$X = P \frac{\delta'' + \frac{F_o}{F_u} \delta''}{\Sigma_1 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma_2}, *)$$

und man ist jetzt im stande, für verschiedene Verhältnisse  $\frac{F_o}{F_u}$  eine Reihe von Einflußlinien für  $X$  zu zeichnen und durch vergleichende Rechnungen festzustellen, welchen Einfluß die Wahl des Verhältnisses  $\frac{F_o}{F_u}$  auf die Spannkkräfte  $S$  besitzt.

Betont werde noch, daß in dem Falle einer von der Wagerechten wenig abweichenden oder mit dieser zusammenfallenden Gurtung unter

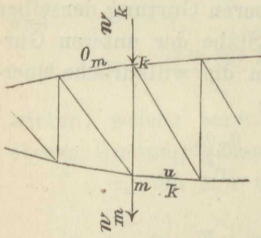


Fig. 67.

$\frac{F_o}{F_u}$  das mittlere Verhältnis der Querschnitte der oberen und unteren Gurtstäbe in der Nähe des Scheitels zu verstehen ist, weil die Längenänderungen der hier gelegenen Gurtstäbe einen besonderen Einfluß auf  $X$  ausüben, und daß es sich bei der geringen Höhe, welche derartige Bogenträger in der Regel im Scheitel erhalten, empfiehlt (wenigstens für die erste Berechnung)  $\frac{F_o}{F_u} = 1$  zu wählen.

In gleicher Weise kann auch der Fachwerkbogen mit senkrechten Wandgliedern berechnet werden; hier fallen je zwei Lasten  $w$  in dieselbe Senkrechte, Fig. 67.

## § 11.

### Die Castiglianosen Lehrsätze über die Formänderungsarbeit.

1. Der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit. Wir betrachten ein statisch unbestimmtes Fachwerk mit spannungslosem Anfangszustande, nehmen an, daß der anfängliche Temperaturzustand bestehen bleibt, daß also die Änderungen der Stablängen durch die

\*) Der Horizontalschub infolge einer gleichmäßigen Erhöhung der Anfangstemperatur um  $t$  wird, nach § 2, Seite 30 und 31,

$$X = \frac{\varepsilon E F_o t l}{\Sigma S^2 \frac{F_o}{F}} = \frac{\varepsilon E F_o t l}{\Sigma + \frac{F_o}{F_u} \Sigma_2}$$



Gleichung  $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$  gegeben sind, und setzen festliegende oder über reibungslose Lager gleitende Stützpunkte voraus. Es sind dann sämtliche Verschiebungen  $\Delta c = 0$ , und die statisch nicht bestimmbar Gröfsen  $X'$ ,  $X''$ ,  $X''' \dots$  haben (nach Seite 24) den Gleichungen zu genügen:

$$(24) \quad \begin{cases} \sum \frac{\partial S}{\partial X'} \Delta s = \sum \frac{\partial S}{\partial X'} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0 \\ \sum \frac{\partial S}{\partial X''} \Delta s = \sum \frac{\partial S}{\partial X''} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

welche man durch die Forderung ersetzen darf:

*Es müssen die Gröfsen  $X'$ ,  $X''$ ,  $\dots$  den Ausdruck*

$$A = \sum \frac{S^2 s}{2 EF} \text{ zu einem Minimum machen.}$$

In der Tat stimmen die aus der Bedingung  $A = \text{minimum}$  gefolgerten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X'} &= \sum \frac{\partial S}{\partial X'} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial X''} &= \sum \frac{\partial S}{\partial X''} \cdot \frac{Ss}{EF} = 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

mit den Gleichungen (24) überein. \*)

Der Wert  $A$  läßt sich in einfacher Weise deuten. Verlängert sich ein Fachwerkstab unter dem Einflusse einer von 0 bis  $S$  wachsenden Spannkraft allmählich um die Strecke  $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ , so wird er in dem Augenblicke, in welchem die Verlängerung den zwischen 0 und  $\Delta s$  liegenden Wert  $x$  erreicht hat, durch die Kraft  $S_x = \frac{EFx}{s}$  gespannt. Schreitet die Verlängerung um  $dx$  fort, so leistet  $S_x$  die Arbeit

$$S_x \cdot dx = \frac{EF}{s} x dx,$$

und es ist somit die gesamte Formänderungsarbeit des Stabes:

\*) Daß  $A$  ein Minimum und nicht ein Maximum wird, lehrt die Untersuchung des zweiten Differentialquotienten. Es ist  $\frac{\partial^2 A}{\partial X'^2} = \sum \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial X'^2} = \sum \frac{Ss}{EF} S' \text{ und } \frac{\partial^2 A}{\partial X'^2} = \sum \frac{S's}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X'} = \sum \frac{S'^2 s}{EF}$ , also positiv.

$$\frac{EF}{s} \int_0^{\Delta s} x dx = \frac{EF}{s} \frac{(\Delta s)^2}{2} = \frac{EF}{2s} \left( \frac{Ss}{EF} \right)^2 = \frac{Ss^2}{2EF},$$

und diejenige des Fachwerks

$$A = \Sigma \frac{Ss^2}{2EF}.$$

Es folgt mithin der hinsichtlich seiner Giltigkeit an die im Eingange dieses Paragraphen gemachten Annahmen  $\Delta c = 0$  und  $t = 0$  und an die Voraussetzung eines spannungslosen Anfangszustandes gebundene Satz:

*Werden die Spannkkräfte  $S$  eines statisch unbestimmten Fachwerks als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $X', X'', \dots$  aufgefaßt, so müssen den Gröfsen  $X$  diejenigen Werte beigelegt werden, welche die Formänderungsarbeit  $A$  zu einem Minimum machen.*

## 2. Der Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit.

Die Arbeitsgleichung eines Fachwerks lautet bei festliegenden oder über reibungslose Lager gleitenden Stützpunkten (vergl. § 3, Gleichung (12)

$$P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_m \delta_m + \dots + P_n \delta_n = \Sigma S \Delta s;$$

sie gilt für beliebige, genügend kleine, zusammengehörige Verschiebungen  $\delta$  und  $\Delta s$  und für beliebige Werte der Lasten  $P$ , und es dürfen somit bei der teilweisen Differentiation dieser Gleichung nach  $P_m$  sämtliche  $\delta$  und  $\Delta s$  sowie alle Lasten  $P_1$  bis  $P_{m-1}$  und  $P_{m+1}$  bis  $P_n$  als Konstanten aufgefaßt werden. Es ergibt sich

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m} \Delta s$$

und, wenn  $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$  ist, wenn also die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Temperaturen ungeändert bleiben,

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{Ss}{EF} = \frac{\partial \left( \Sigma \frac{Ss^2}{2EF} \right)}{\partial P_m} \text{ d. i.}$$

$$(25) \quad \delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m}.$$

Für den Fall:  $\Delta c = 0$  und  $t = 0$  und unter der Voraussetzung eines spannungslosen Anfangszustandes gilt somit der zuerst von Castigliano bewiesene Satz:

*Die Verschiebung  $\delta_m$  des Angriffspunktes  $m$  einer Last  $P_m$  im Sinne von  $P_m$  ist gleich der nach  $P_m$  gebildeten teilweisen Abgeleiteten der Formänderungsarbeit  $A$  des Fachwerks.*

Bei der Anwendung dieses Satzes ist zu beachten, daß man die Spannkkräfte in den überzähligen Stäben und die überzähligen Stützenwiderstände stets als Lasten auffassen darf, welche auf das Hauptnetz

wirken. Es ist aus diesem Grunde zulässig, unter  $A$  nur die Formänderungsarbeit für die dem statisch bestimmten Hauptnetze angehörigen Stäbe zu verstehen und  $\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_o}{\partial P_m}$  zu setzen, d. h. bei der Berech-

nung der Abgeleiteten  $\frac{\partial A}{\partial P_m}$  die Größen  $X$  als Konstanten zu betrachten.

Die Ausdehnung von  $A$  über das ganze Fachwerk, entsprechend dem Wortlaute des oben gegebenen Satzes, und die Behandlung der  $X$  als Funktionen der Lasten  $P$  führt natürlich zu demselben Ergebnisse.

Man muß dann setzen:

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_o}{\partial P_m} + S' \frac{\partial X'}{\partial P_m} + S'' \frac{\partial X''}{\partial P_m} + \dots$$

und, da für  $X$  stets Ausdrücke von der Form

$$X' = z_1' P_1 + z_2' P_2 + \dots + z_m' P_m + \dots$$

$$X'' = z_1'' P_1 + z_2'' P_2 + \dots + z_m'' P_m + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

gefunden werden, wobei sämtliche  $z$  von den  $P$  unabhängige Werte sind,

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = \frac{\partial S_o}{\partial P_m} + S' z_m' + S'' z_m'' + \dots \quad \text{und}$$

$$\delta_m = \Sigma \frac{Ss}{EF} \frac{\partial S_o}{\partial P_m} + z_m' \Sigma \frac{S'Ss}{EF} + z_m'' \Sigma \frac{S''Ss}{EF} + \dots$$

Nun ist aber  $\Sigma S' \Delta s = 0$ ,  $\Sigma S'' \Delta s = 0$ ,  $\dots$  (vergl. Seite 25),

$$\text{d. h. } \Sigma \frac{S'Ss}{EF} = 0, \quad \Sigma \frac{S''Ss}{EF} = 0, \quad \dots$$

und es ergibt sich, genau wie bei der obigen Auffassung,

$$\delta_m = \Sigma \frac{Ss}{EF} \frac{\partial S_o}{\partial P_m}.$$

**3. Berücksichtigung einer Änderung des Temperaturzustandes.** Ändert sich die Anfangstemperatur in allen Punkten eines Fachwerkstabes um den gleichen, gegebenen Betrag  $t$ , so ist

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \epsilon t s,$$

und es gehen die Gleichungen (24), denen die Größen  $X$  bei festliegenden oder über reibungslose Lager gleitenden Stützpunkten genügen müssen über in

$$(26) \quad \begin{cases} \Sigma \frac{\partial S}{\partial X'} \left( \frac{Ss}{EF} + \epsilon t s \right) = 0 \\ \Sigma \frac{\partial S}{\partial X''} \left( \frac{Ss}{EF} + \epsilon t s \right) = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

sie führen zu dem für den Fall  $\Delta c = 0$  und bei Bestehen eines spannungslosen Anfangszustandes giltigen Satze:



Die statisch nicht bestimmbaren Größen  $X$  müssen den Ausdruck

$$(27) \quad A_i = \Sigma \frac{S_s^2}{2EF} + \Sigma \epsilon t S_s$$

zu einem Minimum machen.\*)

Die für die Verschiebung  $\delta_m$  des Angriffspunktes  $m$  der Last  $P_m$  im Sinne von  $P_m$  abgeleitete Gleichung

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m} \Delta s$$

geht über in

$$\delta_m = \Sigma \frac{\partial S}{\partial P_m} \left( \frac{S_s}{EF} + \epsilon t s \right) = \frac{\partial \left( \Sigma \frac{S_s^2}{2EF} + \Sigma \epsilon t S_s \right)}{\partial P_m}$$

und führt zu dem hinsichtlich seiner Giltigkeit an dieselben Voraussetzungen wie der Satz  $A_i = \text{Minimum}$  gebundenen ebenfalls zuerst von Castigliano bewiesenen Satze:

$$(28) \quad \delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m},$$

bei dessen Benutzung wieder zu beachten ist, daß die Größen  $X$  als Konstanten aufgefaßt werden dürfen, sobald  $A_i$  teilweise nach  $P_m$  differenziert wird, und daß sich mithin der Ausdruck  $A_i$  nur über die dem Hauptnetze angehörigen Stäbe zu erstrecken braucht.

4. Berücksichtigung von Verschiebungen der Stützpunkte bei Anwendung der unter 1 bis 3 aufgestellten Sätze. Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, daß die für den Fall  $\Delta c = 0$  abgeleiteten Sätze

$A_i = \text{minimum}$  und  $\delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m}$  die Berechnung der Größen  $X$  und der Verschiebungen  $\delta$  auch dann ermöglichen, wenn sich die Angriffspunkte der Auflagerkräfte  $C$  bei der Formänderung des Fachwerks verschieben. Die Kräfte  $C$  dürfen nämlich nach § 1 stets als die Spannkkräfte in Stäben aufgefaßt werden, welche gleiche Richtung wie die Kräfte  $C$  haben und die Stützpunkte mit außerhalb des Fachwerks gelegenen festen Punkten (zuweilen auch mit festen Punkten des Fachwerks selbst) verbinden. Werden diesen Auflagerstäben solche Eigenschaften beigelegt, daß ihre Längenänderungen mit den vorgeschriebenen Verschiebungen  $\Delta c$  der Stützpunkte übereinstimmen, so sind sie als den Stützen vollkommen gleichwertig aufzufassen, und man hat, wenn die Verschiebungen  $\Delta c$  bei der Berechnung der  $X$  und  $\delta$  berücksichtigt werden sollen, nur nötig, den Ausdruck  $A_i$  auf die Auflagerstäbe mit auszudehnen, wobei für jeden Auflagerstab ein beliebiger Elastizitätsmodul und ein beliebiger Querschnitt angenommen werden darf.

Bedeutet nun für einen Auflagerstab:

$c$  die Länge,  $E_c$  den Elastizitätsmodul,

$F_c$  den Querschnittsinhalt,  $t_c$  die Temperaturänderung,

$\epsilon_c$  den Ausdehnungskoeffizienten für  $t_c = 1$ ,

\*) Es ist  $\frac{\partial^2 A_i}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial X^2}$ , also positiv.

so ist  $\Delta c = \frac{Cc}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c c$ . Mit  $E_c F_c = \infty$  wird  $\Delta c = \varepsilon_c t_c c$ , d. i. unabhängig von  $C$ , und man erhält:

$$A_i = \Sigma \frac{S_s^2}{2 EF} + \Sigma \varepsilon t S s + \Sigma C \Delta c,$$

wobei  $\Delta c$  als eine Konstante zu betrachten ist.

Beispiel. Handelt es sich um den Horizontalschub  $X$  des in Fig. 28, Seite 29 dargestellten Bogenträgers, dessen Stützweite  $l$  sich um  $\Delta l$  ändern möge, so denke man die Kämpfergelenke  $A$  und  $B$  durch einen Stab verbunden, in welchem die Spannkraft  $X$  wirksam ist und mache

$$A_i = \Sigma \frac{S_s^2}{2 EF} + \Sigma \varepsilon t S s + X \cdot \Delta l$$

zu einem Minimum. Es ergibt sich die Gleichung

$$\Sigma \frac{\partial S}{\partial X} \cdot \frac{S s}{EF} + \Sigma \varepsilon t s \frac{\partial S}{\partial X} + \Delta l = 0.$$

Ist (wie im § 2, Seite 29)  $S = S_0 - X S'$ , so folgt  $\frac{\partial S}{\partial X} = -S'$  und

$$- \Sigma S' (S_0 - X S') \frac{s}{EF} - \Sigma \varepsilon t s S' + \Delta l = 0,$$

und hieraus ergibt sich, wie auf Seite 30,

$$X = \frac{\Sigma S' S_0 \frac{s}{EF} + \Sigma \varepsilon t S' s - \Delta l}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}.$$

## Abschnitt II.

# Biegungsfestigkeit gerader und einfach gekrümmter Stäbe.

## § 12.

**Allgemeine Gesetze für Stäbe, deren Querschnittsabmessungen im Verhältnis zu den Krümmungshalbmessern klein sind.**

1) **Arbeitsgleichung.** Wird ein Stab, dessen Schwerpunktsachse  $AB$  eine Linie einfacher Krümmung ist, durch äußere Kräfte angegriffen, welche in der die Linie  $AB$  enthaltenden Ebene (Kräfteebene, Stabebene) liegen, so besitzen, bei im Verhältnis zur Länge des Stabes geringen Querschnittsabmessungen, außer den Temperaturänderungen nur die senkrecht zu den Querschnittsteilchen wirkenden Spannungen (Normalspannungen)  $\sigma$  einen wesentlichen Einfluß auf die Formänderung. Der Stab läßt sich, bei Vernachlässigung aller übrigen Spannungen, in unendlich kleine, annähernd prismatische Teilchen zer-

legen, welche durch der Stabachse parallele Spannkkräfte  $S$  auf Zug oder auf Druck beansprucht werden (Fig. 69).

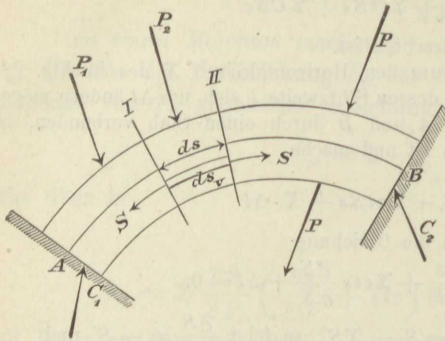


Fig. 69.

Bedeutet

- $F$  die im allgemeinen veränderliche Querschnittsfläche des Stabes,  
 $ds$  die Länge des zwischen den unendlich nahen Querschnitten I und II gelegenen Elementes der Stabachse,  
 $ds_v$  die dem Bogenelemente  $ds$  parallele Länge irgend eines der zwischen I und II gedachten, unendlich kleinen Prismen,

$\sigma$  die Normalspannung für den Endquerschnitt  $dF$  dieses Prismas,  
 $\Delta ds_v$  die Strecke, um welche sich  $ds_v$  infolge irgend einer geringen Verbiegung des Stabes ändert,

so ist

$$S = \sigma dF,$$

und es ergibt sich, mit Vernachlässigung der Änderungen der Querschnittsabmessungen, die virtuelle Formänderungs-Arbeit

$$\int S \cdot \Delta ds_v = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV, \text{ wobei} \\ dV = ds_v dF$$

den Inhalt des Stabteilchens bedeutet. Bezeichnet nun, wie im Abschnitte I auf Seite 22:

$P$  eine Last,

$C$  eine Auflagerkraft,

$\delta$  die durch jene  $\Delta ds_v$  bedingte Verschiebung des Angriffspunktes von  $P$  im Sinne von  $P$ ,

$\Delta c$  die durch jene  $\Delta ds_v$  bedingte Verschiebung des Angriffspunktes von  $C$  im Sinne von  $C$ ,

und wird angenommen, daß die äußeren und inneren Kräfte miteinander im Gleichgewichte sind, so folgt, wenn die Gewichte der Stabteilchen zu den Lasten gerechnet werden, aus dem Satze von den virtuellen Verschiebungen die Arbeitsgleichung:

$$(28) \quad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV,$$

welche für beliebige mögliche Verschiebungen  $\delta$ ,  $\Delta c$  und  $\Delta ds_v$  gilt,



sobald diese nur klein genug sind, um als verschwindende Größen aufgefaßt werden zu dürfen.

In den meisten Fällen der Anwendung handelt es sich um Stäbe, deren Querschnittsabmessungen, verglichen mit den Krümmungshalbmessern  $r$ , so gering sind, daß es zulässig ist,  $ds_v = ds$  zu setzen und die Spannungen  $\sigma$  genau so zu berechnen, als sei an der betrachteten Stelle  $r = \infty$ , d. h. der Stab gerade. Wir wollen auch (ausgenommen sind die genaueren Entwicklungen im § 21) mit dieser vereinfachenden Annahme rechnen, trotzdem aber die Bezeichnung  $ds_v$  beibehalten, um die Verschiedenheit der Lagen, nicht der Längen, der Stabteilchen zu kennzeichnen.

2) **Bedingungsgleichungen zur Berechnung statisch nicht bestimmbarer Größen.** Unter gewissen vereinfachenden Annahmen gelingt es mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen, die Spannungen  $\sigma$  ebenso wie die Auflagerkräfte  $C$  als geradlinige Funktionen der gegebenen Lasten  $P$  und gewisser statisch nicht bestimmbarer Größen  $X'$ ,  $X''$ ,  $X''' \dots \dots$  darzustellen; sie erscheinen dann in den für beliebige Werte der  $P$  und  $X$  gültigen Formen:

$$(29) \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \sigma''' X''' + \dots \dots \dots \\ C = C_0 + C' X' + C'' X'' + C''' X''' + \dots \dots \dots, \end{cases}$$

wobei  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ ,  $\sigma''' \dots \dots$ ,  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$  gegebene, von den Lasten  $P$  und den Größen  $X$  unabhängige Koeffizienten sind, während  $\sigma_0$  und  $C_0$  die als geradlinige Funktionen der Kräfte  $P$  darstellbaren Spannungen und Auflagerkräfte für denjenigen statisch bestimmten Belastungszustand bedeuten, welcher entsteht, sobald alle statisch nicht bestimmbaren Größen  $X$  verschwinden.

Wird  $X' = 1$  angenommen, und werden gleichzeitig alle Lasten  $P$ , sowie die übrigen statisch nicht bestimmbaren Größen  $X''$ ,  $X''' \dots \dots$  gleich Null gesetzt, so entsteht ein Belastungsfall, welcher „Zustand  $X' = 1$ “ heißen soll, und welchem die Spannungen  $\sigma'$  und Auflagerkräfte  $C'$  entsprechen, und in gleicher Weise soll in der Folge von Zuständen  $X'' = 1$  oder  $X''' = 1$  u. s. w. gesprochen werden.

Die Arbeitsgleichung für den Zustand  $X' = 1$  bildet einen besonderen Fall der Arbeitsgleichung (28); sie ergibt sich aus jener, sobald  $P = 0$ ,  $C = C'$  und  $\sigma = \sigma'$  gesetzt wird und lautet:

$$(30) \quad \begin{cases} \Sigma C' \Delta c = \int \sigma' \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV, \\ \text{und ganz entsprechend wird gefunden:} \\ \Sigma C'' \Delta c = \int \sigma'' \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV, \\ \Sigma C''' \Delta c = \int \sigma''' \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Die Gleichungen (30), deren Anzahl mit derjenigen der Unbekannten  $X$  übereinstimmt, ermöglichen die Berechnung dieser Größen; man hat nur nötig, sie auf die wirklichen elastischen Verschiebungen  $\Delta c$  und  $\Delta ds_v$  anzuwenden. Die  $\Delta c$  werden meistens geschätzt (vergl. § 2, Seite 25) und die  $\Delta ds_v$  unter der Voraussetzung eines spannungslosen Anfangszustandes als Funktionen der Spannungen  $\sigma$  und Temperaturänderungen  $t$  dargestellt. Es ist dann nach Gleichung (10):

$$(31) \quad \frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t,$$

und es folgen somit die Bedingungsgleichungen:

$$(32) \quad \begin{cases} L' = \int \frac{\sigma' \sigma}{E} dV + \int \varepsilon t \sigma' dV \\ L'' = \int \frac{\sigma'' \sigma}{E} dV + \int \varepsilon t \sigma'' dV \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

in denen  $L' = \sum C' \Delta c$ ,  $L'' = \sum C'' \Delta c \dots \dots$  die virtuellen Arbeiten der den Zuständen  $X' = 1$ ,  $X'' = 1$  u. s. w. entsprechenden Auflagerkräfte bedeuten.

Bringt man die dem wirklichen Belastungszustande entsprechende virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte auf die Form

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}' X' + \mathfrak{U}'' X'' + \mathfrak{U}''' X''' + \dots \dots \dots,$$

wobei  $\mathfrak{U}_0$ ,  $\mathfrak{U}'$ ,  $\mathfrak{U}''$ ,  $\mathfrak{U}''' \dots \dots$  Größen vorstellen, welche von den Werten  $X$  und (mit Ausnahme von  $\mathfrak{U}_0$ ) von den Lasten  $P$  unabhängig sind, so ist:

$$L' = \mathfrak{U}', \quad L'' = \mathfrak{U}'', \quad \dots \dots \dots$$

Beachtet man nun, daß

$$\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial X'}, \quad \sigma'' = \frac{\partial \sigma}{\partial X''}, \quad \dots \dots \dots$$

ist, so sieht man ein, daß die Gleichung:

$$(33) \quad L = \int \frac{\sigma}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial X} dV + \int \varepsilon t \frac{\partial \sigma}{\partial X} dV,$$

welche auch unmittelbar durch teilweise Differentiation der Gleichung (28) erhalten werden kann, als allgemeine Form der Bedingungsgleichungen (32) aufgefaßt werden darf; man braucht nur  $X$  der Reihe nach durch  $X'$ ,  $X'' \dots \dots$  zu ersetzen, um die Gleichungen (32) zu erhalten.  $L$  bedeutet die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand  $X = 1$ .

Führt man die Bezeichnung ein:

$$(34) \quad A_i = \int \frac{\sigma^2 dV}{2E} + \int \varepsilon t \sigma dV,$$

so kann man Gleichung (33) noch kürzer schreiben:

$$(35) \quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X}.$$

Für den besonderen Fall festliegender oder über reibungslose Lager gleitender Stützen verschwindet die Arbeit  $L$ , und es ergibt sich die Bedingung

$$(I) \quad \frac{\partial A_i}{\partial X} = 0, \text{ also } A_i = \text{minimum.}$$

Ist außer  $L = 0$  auch  $t = 0$ , so folgt

$$(II) \quad \int \frac{\sigma^2 dV}{2E} = \text{minimum,}$$

wobei  $\int \frac{\sigma^2 dV}{2E}$  die Formänderungsarbeit für den Fall  $t = 0$  vorstellt. Die vorstehenden Sätze (I) und (II) entsprechen den für das Fachwerk im § 11 unter 3 bzw. 1 abgeleiteten; sie ergeben sich sofort aus jenen, sobald die Spannkraft  $S$  des Fachwerkstabes ersetzt wird durch  $\sigma dF$ , der Stab-Inhalt  $sF$  durch  $dV$  und das Zeichen  $\Sigma$  durch das Zeichen  $\int$ .

3) **Bestimmung der Verschiebung  $\delta$  irgend eines in der Kräfteebene gelegenen Punktes des Stabes nach irgend einer in die Kräfteebene fallenden Richtung.** Werden die auf den Stab wirkenden Lasten mit  $P_1, P_2 \dots P_m \dots P_n$  bezeichnet, ihre Angriffspunkte mit 1, 2,  $\dots m \dots n$  und die Verschiebungen dieser Punkte im Sinne der entsprechenden  $P$  mit  $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_m \dots \delta_n$ , so lautet die Arbeitsgleichung:

$$P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 \dots + P_m \delta_m + \dots + P_n \delta_n + \Sigma C \Delta c = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV;$$

sie gilt für beliebige zusammengehörige Verschiebungen  $\delta$ ,  $\Delta c$  und  $\Delta ds_v$  und für beliebige Werte der Lasten  $P$  und statisch nicht bestimmbar Gröfsen  $X$  und liefert unmittelbar einen einfachen Ausdruck für die Verschiebung  $\delta_m$ , sobald sämtliche Gröfsen  $X$  sowie die Lasten  $P_1$  bis  $P_{m-1}$  und  $P_{m+1}$  bis  $P_n$  gleich Null gesetzt werden, während  $P_m = 1$  angenommen wird. Es entsteht dann ein statisch bestimmter Stab, welcher der Hauptträger genannt werden möge, und an welchem außer  $P_m = 1$  noch die durch diese Last hervorgerufenen Auflagerkräfte  $\bar{C}$  angreifen, während im Innern gewisse Spannungen  $\bar{\sigma}$  erzeugt werden. Die obige Arbeitsgleichung geht über in

$$(36) \quad \delta_m + \Sigma \bar{C} \Delta c = \int \bar{\sigma} \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV$$

und gestattet, die durch einen beliebigen Belastungs- und Temperaturzustand verursachte Verschiebung  $\delta_m$  aus den diesem Zustande entsprechenden Verschiebungen  $\Delta c$  und  $\Delta ds_v$  zu berechnen. Insbesondere ergibt sich mit



$$\frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t$$

der Wert

$$(37) \quad \delta_m = \int \bar{\sigma} \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) dV - \bar{L},$$

wobei  $\bar{L}$  die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den durch  $P_m = 1$  belasteten Hauptträger bezeichnet.

Denselben Ausdruck für  $\delta_m$  erhält man — in anderer Form — durch teilweise Differentiation der allgemeinen Arbeitsgleichung nach der Last  $P_m$ , wobei die  $\delta$ ,  $\Delta c$  und  $\Delta ds_v$  als Konstanten aufgefaßt werden dürfen, da jene Arbeitsgleichung für beliebige zusammengehörige Werte dieser Verschiebungen gültig ist. Man gelangt zu

$$\delta_m + \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c = \int \frac{\partial \sigma}{\partial P_m} \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV = \int \frac{\partial \sigma}{\partial P_m} \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) dV$$

und findet schliesslich das übersichtliche Gesetz:

$$(38) \quad \delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

wobei  $A_i$  durch die Gleichung (34) erklärt ist.

Bei festliegenden oder über reibungslose Lagerflächen gleitenden Stützpunkten verschwinden sämtliche  $\Delta c$ ; es ergibt sich

$$\delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m}$$

und im Falle  $\Delta c = 0$  und  $t = 0$  folgt

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m},$$

wobei  $A = \int \frac{\sigma^2 dV}{2E}$  die Formänderungsarbeit bedeutet.

Mit Hilfe der entwickelten Gesetze ist man auch imstande, die Verschiebungen von solchen Punkten eines Stabes zu bestimmen, welche nicht Angriffspunkte von Lasten sind; man hat nur nötig, in dem fraglichen Punkte nach der Richtung der gewünschten Verschiebung eine beliebig große Last  $P$  hinzuzufügen und nachträglich  $P = 0$  zu setzen. Bedingung ist nur, daß die Verschiebungsrichtung in die Kräfteebene fällt.

Bedient man sich bei der Berechnung von  $\delta$  der Gleichung (38), so ist zu beachten, daß nicht nur die Lasten  $P$ , sondern auch die Größen  $X$  als unabhängige Veränderliche aufgefaßt werden dürfen, daß es also zulässig ist, die  $X$  als Konstanten anzusehen, sobald nach einer Last  $P$  differenziert wird. Vergl. Seite 75.

4) **Auflager.** Außer den im § 1 (Fig. 1) angeführten festen und beweglichen Lagern, deren Widerstände durch die Angabe von zwei Seitenkräften oder einer Seitenkraft bestimmt sind, müssen bei den auf Biegefestigkeit beanspruchten Stäben noch Auflager unter-

schieden werden, welche der im Stützpunkte an die Stabachse gelegten Tangente eine bestimmte Lage vorschreiben. Es kommen zwei Anordnungen in Betracht.

a) Feste Einspannung (Fig. 70). Bei vollkommener Starrheit des stützenden Körpers liegt der Stützpunkt  $A$  fest, desgleichen die in  $A$  an die Stabachse gelegte Tangente (Auflagertangente). Der Stützenwiderstand

läßt sich zerlegen in zwei Seitenkräfte  $C_1$  und  $C_2$  und in ein

Kräftepaar, dessen Moment  $M$  das Einspannungsmoment heißt. Verschiebt sich, infolge der Elastizität

des stützenden Körpers, der Punkt  $A$  im Sinne von  $C_1$  um  $\Delta c_1$  und im Sinne von  $C_2$  um  $\Delta c_2$ , während sich die Auflagertangente im Sinne des Momentes  $M$  um  $\tau$  dreht, so leisten die Auflagerkräfte die virtuelle Arbeit

$$C_1 \Delta c_1 + C_2 \Delta c_2 + M \tau. *)$$

b) Lose Einspannung (Fig. 71). Der Stützpunkt  $A$  gleitet auf vorgeschriebener Bahn  $AB$ . Die Auflagertangente liegt bei starrem Stützkörper fest. Der Stützenwiderstand zerfällt in das Einspannungsmoment  $M$  und in einen Gegendruck  $C$ , welcher bei glatter Bahn senkrecht zu  $AB$  wirkt. Verschiebt sich  $A$  im Sinne von  $A$  um  $\Delta c$ , während sich die Auflagertangente im Sinne von  $M$  um  $\tau$  dreht, so leisten die Auflagerkräfte die virtuelle Arbeit

$$C \Delta c + M \tau.$$

c) Beispiel für die Berechnung der Arbeiten  $L$ . Um die Ermittlung der in den Gleichungen (32) vorkommenden Arbeiten  $L', L'', \dots$  der Auflagerkräfte für die Zustände  $X' = 1, X'' = 1, \dots$  durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir einen bei  $A$  und  $B$  fest eingespannten Bogenträger ohne Gelenke (Fig. 72). Die senkrechten und wagerechten Seitenkräfte

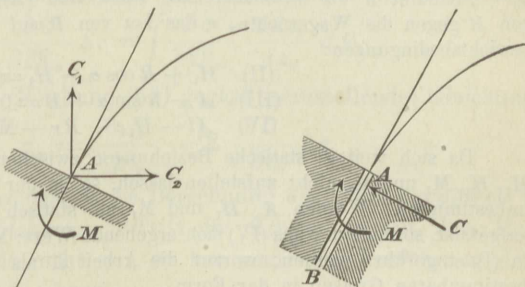


Fig. 70.

Fig. 71.

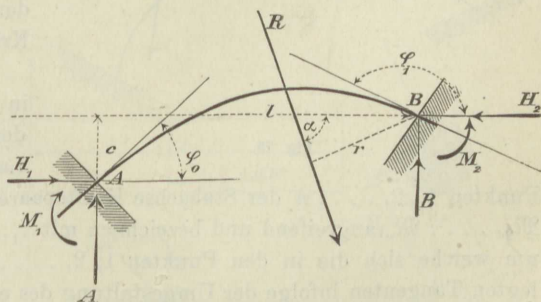


Fig. 72.

\*) Hinsichtlich der Arbeit des Momentes  $M$  vergl. Seite 59.

der Stützendrücke seien  $A$ ,  $B$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ , und die Spannungsmomente seien  $M_1$  und  $M_2$ . Infolge der Nachgiebigkeit der Widerlager gehe über

$c$  in  $c + \Delta c$ ,  $l$  in  $l + \Delta l$ ,  $\varphi_0$  in  $\varphi_0 + \Delta\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  in  $\varphi_1 + \Delta\varphi_1$ ;

es leisten dann die Auflagerkräfte (wenn Punkt  $B$  und die Wagerechte durch  $B$  festliegen) die virtuelle Arbeit

$$(I) \quad \mathfrak{A} = -A\Delta c - H_1\Delta l - M_1\Delta\varphi_0 + M_2\Delta\varphi_1.$$

Bedeutet  $R$  die Mittelkraft aus sämtlichen Lasten,  $\alpha$  den Neigungswinkel von  $R$  gegen die Wagerechte,  $r$  das Lot von  $B$  auf  $R$ , so bestehen die Gleichgewichtsbedingungen:

$$(II) \quad H_1 + R \cos \alpha - H_2 = 0$$

$$(III) \quad A - R \sin \alpha + B = 0$$

$$(IV) \quad Al - H_1c - Rr + M_1 - M_2 = 0.$$

Da sich weitere statische Beziehungen zwischen den 6 Unbekannten  $A$ ,  $B$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $M_1$  und  $M_2$  nicht aufstellen lassen, so ist der Träger ein dreifach statisch unbestimmter. Werden  $A$ ,  $H_1$  und  $M_1$  als statisch nicht bestimmbare Größen aufgefaßt, so muß der aus (IV) sich ergebende Wert:  $M_2 = Al - H_1c - Rr + M_1$  in (I) eingeführt werden, worauf die Arbeit  $\mathfrak{A}$  als Funktion der statisch nicht bestimmbaren Größen in der Form

$\mathfrak{A} = A(l\Delta\varphi_1 - \Delta c) - H_1(c\Delta\varphi_1 + \Delta l) + M_1(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_0) - Rr\Delta\varphi_1$  erhalten wird, und es folgt schließlich

für den Zustand  $X' = A = 1$  der Wert  $L' = l\Delta\varphi_1 - \Delta c$

„ „ „  $X'' = H_1 = 1$  „ „  $L'' = -(c\Delta\varphi_1 + \Delta l)$

„ „ „  $X''' = M_1 = 1$  „ „  $L''' = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_0$ .

5) **Belastung durch Kräftepaare. Drehung von Tangenten an die Stabachse.** Die in irgend einem Punkte  $m$  an die Stabachse gelegte Tangente  $TT$  (Fig. 73) können wir als starre Linie auffassen, welche mit dem Stabe fest verbunden ist. Wirkt auf diese Linie ein

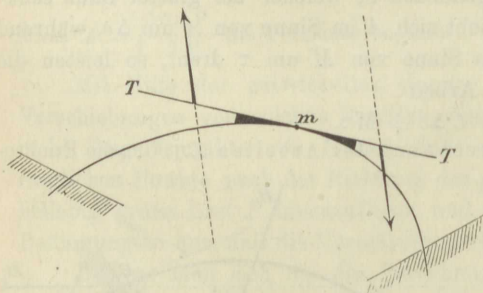


Fig. 73.

Kräftepaar, dessen Moment  $= \mathfrak{M}_m$  ist, so werden an den Auflagern gewisse Gegendrücke und im Stabe gewisse Spannungen hervorgerufen. Es möge  $m$  der Angriffspunkt des Kräftepaares heißen.

Denken wir uns nun in gleicher Weise (außer den bislang vorausgesetzten Lasten  $P$ ) in beliebigen

Punkten 1, 2, . . . .  $n$  der Stabachse Kräftepaare mit den Momenten  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$ , . . . .  $\mathfrak{M}_n$  angreifend und bezeichnen mit  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , . . . .  $\tau_n$  die Winkel, um welche sich die in den Punkten 1, 2, . . . .  $n$  an die Stabachse gelegten Tangenten infolge der Umgestaltung des elastischen Stabes drehen, so leisten die Kräftepaare die virtuelle Arbeit  $\mathfrak{M}_1\tau_1 + \mathfrak{M}_2\tau_2 + \dots + \mathfrak{M}_n\tau_n$ , und es ergibt sich die Arbeitsgleichung:



$$\Sigma P\delta + \mathfrak{M}_1\tau_1 + \mathfrak{M}_2\tau_2 + \dots \mathfrak{M}_m\tau_m + \dots \mathfrak{M}_n\tau_n + \Sigma C\Delta c \\ = \int \sigma \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV.$$

Sie gilt im Falle des Gleichgewichtes und bei verschwindend kleinen, möglichen Verschiebungen für beliebige Werte der Lasten  $P$  und Momente  $\mathfrak{M}_m$  und liefert, teilweise nach  $\mathfrak{M}_m$  differenziert, die Beziehung:

$$\tau_m + \Sigma \frac{\partial C}{\partial \mathfrak{M}_m} \Delta c = \int \frac{\partial \sigma}{\partial \mathfrak{M}_m} \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV,$$

aus welcher sich die (der Gleichung (38) gegenüberzustellende) Gleichung

$$(38a) \quad \tau_m = \frac{\partial A_i}{\partial \mathfrak{M}_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial \mathfrak{M}_m} \Delta c$$

ableiten läßt; dieselbe ermöglicht die Berechnung des Drehungswinkels  $\tau$  jeder Tangente an die Stabachse. Tritt das Kräftepaar mit dem Momente  $\mathfrak{M}_m$  in Wirklichkeit nicht auf, so hat man nach Ausführung der Differentiation  $\mathfrak{M}_m = 0$  zu setzen.

Weiter leuchtet sofort die Richtigkeit der (der Gleichung (37) gegenüberzustellenden) Gleichung ein:

$$(37a) \quad \tau_m = \int \bar{\sigma} \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) dV - \bar{L},$$

in welcher  $\bar{\sigma}$  diejenige Spannung bedeutet, die in irgend einem Querschnittselemente des statisch bestimmten Hauptträgers entsteht, sobald im Punkte  $m$  ein Kräftepaar mit dem Momente  $\mathfrak{M}_m = 1$  angreift, während  $\bar{L}$  die virtuelle Arbeit der durch diese Belastung hervorgerufenen Auflagerkräfte vorstellt.

### § 13.

#### Die Spannungen $\sigma$ im geraden Stabe. Naviersche Biegeformel.

1) Durch einen Querschnitt im Abstände  $x$  von irgend einem in der Stabachse angenommenen Anfangspunkte  $A$  denken wir den Stab in zwei Teile zerlegt und vereinigen alle an dem einen der beiden Teile, z. B. an dem linken, angreifenden äußeren Kräfte zu ihrer Mittelkraft  $R$  (Fig. 74).

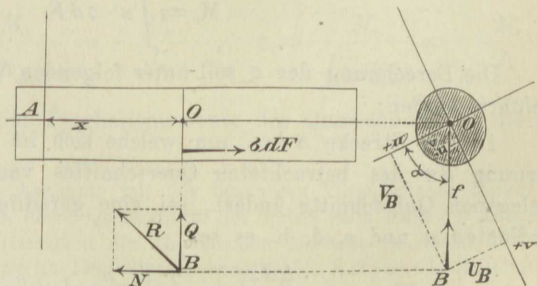


Fig. 74.

$R$  heisst die äussere Kraft für den fraglichen Querschnitt und zerfällt in die Längskraft  $N$ , senkrecht zum Querschnitte, und die Querkraft  $Q$  in der Ebene des Querschnittes. Wird vorausgesetzt, dass alle äusseren Kräfte die Stabachse treffen (wenn auch in unendlicher Ferne) so geht  $Q$  durch den Schwerpunkt  $O$  des Querschnitts. Die Kraft  $N$  möge positiv angenommen werden, sobald sie das Bestreben hat, den linken Stabteil von dem festgehalten gedachten rechten Teile zu entfernen.

Die durch den Schwerpunkt  $O$  des Querschnittes und den Schnittpunkt  $B$  der Kraft  $R$  mit dem Querschnitte gelegte Gerade heisse die Kraftlinie, sie möge mit der  $u$ -Achse eines in der Querschnittsebene angenommenen rechtwinkligen Achsenkreuzes ( $u, v$ ), dessen Ursprung der Punkt  $O$  ist, den Winkel  $\alpha$  einschliessen. Bedeuten dann:

$f$  den Abstand des Punktes  $B$  vom Ursprunge,

$u_B$  und  $v_B$  die Koordinaten von  $B$ ,

so zerfällt das dem betrachteten Querschnitte entsprechende Biegemoment

$$M = Nf$$

in das um die  $u$ -Achse drehende Moment

$$M_u = Nv_B = M \sin \alpha$$

und in das um die  $v$ -Achse drehende Moment

$$M_v = Nu_B = M \cos \alpha,$$

und es bestehen zwischen den in dem Querschnitte wirksamen Spannungen  $\sigma$  und den äusseren Kräften die Gleichgewichtsbedingungen:

$$N = \int \sigma dF$$

$$M_u = \int v \cdot \sigma dF$$

$$M_v = \int u \cdot \sigma dF.$$

Die Berechnung der  $\sigma$  soll unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt werden:

1. Die Strecke  $\Delta dx_v$ , um welche sich im Punkte  $u, v$  die Entfernung  $dx$  des betrachteten Querschnittes von dem unendlich nahe gelegenen Querschnitte ändert, sei eine geradlinige Funktion der Koordinaten  $u$  und  $v$ , d. h. es sei

$$\frac{\Delta dx_v}{dx} = a' + a''v + a'''u,$$

unter  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  Werte verstanden, welche für den betrachteten Querschnitt Konstanten sind.)\*

2. Die Temperaturänderung  $t$  im Punkte  $u$ ,  $v$  sei ebenfalls eine geradlinige Funktion von  $u$  und  $v$ , es bestehe also die Gleichung

$$t = t' + t''v + t'''u,$$

deren Koeffizienten gegeben sind, sobald die Temperaturänderungen für drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte des Querschnittes bekannt sind.

Dann folgt aus der Gleichung

$$\frac{\Delta dx_v}{dx} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t$$

für die Spannung  $\sigma$  der Ausdruck

$$\sigma = E(a' - \varepsilon t') + E(a'' - \varepsilon t'')v + E(a''' - \varepsilon t''')u$$

und hierfür soll kürzer geschrieben werden

$$\sigma = a + bv + cu,$$

wobei  $a$ ,  $b$ ,  $c$  Konstanten sind, welche sich mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen. Jene Bedingungen gehen über in

$$N = a \int dF + b \int v dF + c \int u dF$$

$$M_u = a \int v dF + b \int v^2 dF + c \int uv dF$$

$$M_v = a \int u dF + b \int au dF + c \int u^2 dF;$$

sie nehmen eine besonders einfache Gestalt an, sobald zu den Koordinatenachsen Hauptachsen gewählt werden. In diesem Falle ist das

Centrifugalmoment  $\int uv dF = 0$ , und weiter folgt, da der Ursprung  $O$

mit dem Schwerpunkte des Querschnittes zusammenfällt,  $\int u dF = 0$  und

$\int v dF = 0$ . Es ergeben sich die Werte:

$$a = \frac{N}{F}, \quad b = \frac{M_u}{\int v^2 dF} = \frac{M_u}{J_u}, \quad c = \frac{M_v}{\int u^2 dF} = \frac{M_v}{J_v},$$

in denen  $J_u$  und  $J_v$  die Trägheitsmomente des Querschnittes in Bezug

---

\*) Es stimmt diese Annahme mit der bekannten Voraussetzung Naviers überein, daß ursprünglich ebene Querschnitte des Stabes auch nach der Biegung Ebenen sind. Die Zuverlässigkeit der Navierschen Methode ist durch die Arbeiten von Saint-Venant (in Liouvilles Journal 1856), Kirchhoff (in Crelles Journal 1859) und namentlich von Pochhammer (in dessen Werke über das Gleichgewicht des elastischen Stabes, Kiel, 1879) nachgewiesen worden.



auf die Hauptachsen bedeuten, und es entsteht die Naviersche Formel

$$(39) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u}{J_u} v + \frac{M_v}{J_v} u.$$

Besonders hervorzuheben ist, daß eine ungleichmäßige Erwärmung des Stabes nach dem Gesetze  $t = t' + t'' v + t''' u$  nur dann Spannungen  $\sigma$  hervorbringt, wenn die Werte  $N$  und  $M$  von den Temperaturänderungen abhängig sind, was nur bei statisch unbestimmten Stäben der Fall sein kann. Verschwinden alle äußeren Kräfte, so verschwinden auch die Spannungen  $\sigma$ .

2) Setzt man in Gleichung (39)

$$M_u = N v_B \quad \text{und} \quad M_v = N u_B$$

und bezeichnet man die Koordinaten der Stelle  $A$ , für welche die Spannung  $\sigma$  infolge der in  $B$  angreifenden Kraft  $N$  berechnet werden soll, mit  $v_A, u_A$ , so erhält man — wenn diese Spannung  $\sigma_{AB}$  genannt wird —

$$(40) \quad \sigma_{AB} = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{F}{J_u} v_B v_A + \frac{F}{J_v} u_B u_A \right),$$

und in dieser Gleichung sind die Buchstaben  $B$  und  $A$  vertauschbar. Man findet nämlich für die Spannung an der Stelle  $B$  infolge einer in  $A$  angreifenden Kraft  $N$  den Wert

$$\sigma_{BA} = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{F}{J_u} v_A v_B + \frac{F}{J_v} u_B u_A \right)$$

und gelangt zu der Beziehung

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}.$$

Es seien nun für irgend einen Querschnitt (Fig. 75) die Spannungen bestimmt, welche eine in einem Querschnittspunkte  $B$  angreifende Kraft  $N = 1$  hervorruft, und zwar seien diese Spannungen mit Hilfe von Gleichung (39) durch eine Gerade  $B'B''$  dargestellt. Die Spannung an der Stelle  $A$  ist dann gleich der Ordinate  $\sigma_{AB}$ , welche die  $B'B''$  auf einer durch den Punkt  $A$  parallel zur Spannungs-Nulllinie gezogenen Geraden  $g$  abschneidet; und ebensogroß ist auch (nach Gleichung (40)) die Spannung  $\sigma_{BA}$ , welche eine in  $A$  angreifende Kraft  $N = 1$  bei  $B$  hervorruft. Eine in  $A$  wirksame Kraft  $N$  wird also an der Stelle  $B$  die Spannung

$$\sigma_B = N \cdot \sigma_{AB}$$

hervorrufen, und dieser Wert  $\sigma$  bleibt ungeändert, wenn sich der Angriffspunkt  $A$  von  $N$  in der Geraden  $g$  bewegt. Greifen mehrere Kräfte  $N$  am Querschnitte an, so erhält man für die Spannung an der Stelle  $B$  einen Wert

$$\sigma_B = \sum N \sigma_{AB}.$$

*Die Gerade  $B'B''$  ist also die Einflußlinie für die Spannung  $\sigma$  an der Stelle  $B$ .*

Wird der Einfluß eines Momentes  $M$  gesucht, welches in einer den Querschnitt in der Geraden  $l-l$  schneidenden, zum Querschnitte rechtwinkligen Ebene wirkt, Fig. 76, so ersetze man dasselbe durch ein Kräftepaar  $Na$  mit beliebig großem Arme  $a$  und lege den Angriffs-

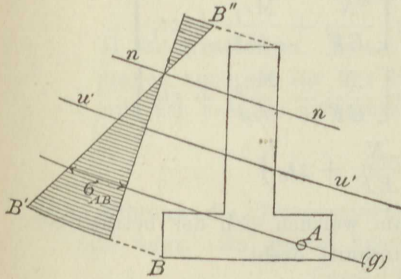


Fig. 75.

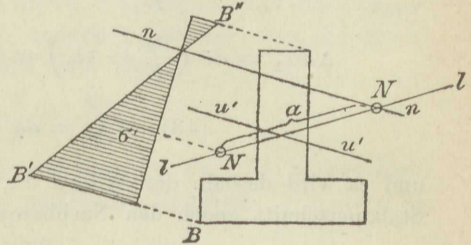


Fig. 76.

punkt der einen der beiden Gegenkräfte  $N$  in den Schnittpunkt der Geraden  $l-l$  und  $n-n$ . Man findet dann nach Fig. 76:

$$\sigma_B = N\sigma' = \frac{M\sigma'}{a}.$$

3) Meistens fällt die Kraftlinie mit einer Hauptachse zusammen. Wir wählen dann die Kraftlinie zur  $v$ -Achse, bezeichnen das Trägheitsmoment für die  $u$ -Achse kurz mit  $J$  und erhalten:

$$(41) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}.$$

Wird angenommen, daß die Temperaturänderung  $t$  von  $u$  unabhängig ist, so darf

$$(42) \quad t = t_0 + \Delta t \frac{v}{h}$$

gesetzt werden; hierbei bedeutet (Fig. 77):

$h$  die Höhe des Querschnittes,  
 $t_0$  die Temperaturänderung für  $v=0$  (also z. B. für den Querschnittsschwerpunkt),

$\Delta t = t_1 - t_2$  den Unterschied der den äußersten Querschnittspunkten entsprechenden Temperaturänderungen,

$t_1$  den Wert von  $t$  für  $v = +e_1$  und

$t_2$  den Wert von  $t$  für  $v = -e_2$ .

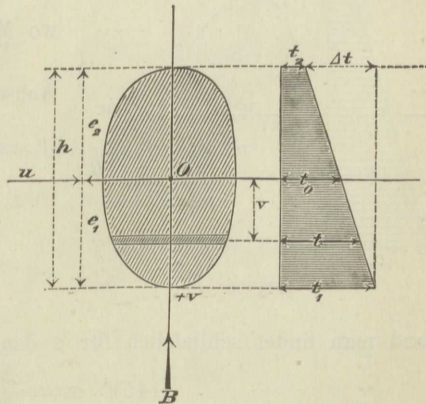


Fig. 77.

Zwischen  $t_0$ ,  $t_1$  und  $t_2$  besteht die Beziehung

$$t_0 = t_1 \frac{e_2}{h} + t_2 \frac{e_1}{h}.$$

Die Werte  $\Delta dx_1$ ,  $\Delta dx_2$  und  $\Delta dx$ , welche  $\Delta dx_e$  bzw. für  $v = +e_1$ ,  $v = -e_2$  und  $v = 0$  annimmt, sind

$$\Delta dx_1 = dx \left( \frac{\sigma_1}{E} + \varepsilon t_1 \right) = dx \left[ \frac{N}{EF} + \frac{M e_1}{EJ} + \varepsilon t_1 \right]$$

$$\Delta dx_2 = dx \left( \frac{\sigma_2}{E} + \varepsilon t_2 \right) = dx \left[ \frac{N}{EF} - \frac{M e_2}{EJ} + \varepsilon t_2 \right]$$

$$(43) \quad \Delta dx = dx \left( \frac{N}{EF} + \varepsilon t_0 \right)$$

und es wird deshalb der Winkel  $d\tau$ , um welchen sich der betrachtete Stabquerschnitt gegen den Nachbarquerschnitt dreht,

$$d\tau = \operatorname{tg} d\tau = \frac{\Delta dx_1 - \Delta dx_2}{h}, \text{ d. i.}$$

$$(44) \quad d\tau = dx \left( \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \right).$$

4) Die Gleichung (39) gilt auch für schiefwinklige Koordinaten  $u'$ ,  $v'$ , Fig. 78. Wählt man die Kraftlinie zur  $v'$ -Achse und bestimmt die  $u'$ -Achse so, daß  $\int u' v' dF = 0$  wird, so erhält man

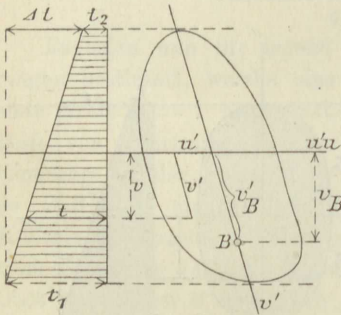


Fig. 78.

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_{u'} v'}{J_{u'}},$$

wo  $M_{u'} = N v'_B$  ist.

Bildet die  $v'$ -Achse mit der  $u'$ -Achse den Winkel  $\alpha$ , so ist

$$J_{u'} = \int v'^2 dF = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \int v^2 dF = \frac{J_u}{\sin^2 \alpha},$$

$$v' = \frac{v}{\sin \alpha},$$

$$M_{u'} = \frac{N v_B}{\sin \alpha} = \frac{M_u}{\sin \alpha},$$

und man findet schließlic für  $\sigma$  den Wert

$$(45) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u v}{J_u},$$

welcher dieselbe Form hat, wie der durch die Gleichung (41) für den Fall einer mit einer Hauptachse zusammenfallenden Kraftlinie bestimmte Wert. Ist nun  $h$  die Querschnittshöhe rechtwinklig zur  $u$ -Achse und wird angenommen, daß sich  $t$  nur mit  $v$  ändert, so gelten die Gleichungen (44) und (45) auch für den in Fig. 78 dargestellten Fall.



§ 14.

**Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte gerade Stäbe.**

1) **Integrationen.** Es sollen die im § 12 abgeleiteten Bedingungsgleichungen zunächst für den Fall umgeformt werden, daß die Kraftlinie mit der  $v$ -Achse zusammenfällt, daß also

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$$

ist, während die Temperaturänderung dem in Fig. 77 dargestellten Gesetze folgt. Zu diesem Zwecke mögen die Integrale

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b dV}{E} \quad \text{und} \quad \int \varepsilon t dV$$

berechnet werden, wobei

$$\sigma_a = \frac{N_a}{F} + \frac{M_a v}{J} \quad \text{und} \quad \sigma_b = \frac{N_b}{F} + \frac{M_b v}{J}$$

die Spannungen für irgend zwei durch die Zeiger  $a$  und  $b$  unterschiedene Belastungsfälle bedeuten.

Mit  $dV = dx dF$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{\sigma_a \sigma_b dV}{E} &= \iint \left( \sigma_b \frac{N_a}{F} + \sigma_b \frac{M_a v}{J} \right) \frac{dx dF}{E} \\ &= \int \frac{N_a dx \int \sigma_b dF}{EF} + \int \frac{M_a dx \int \sigma_b v dF}{EJ} \end{aligned}$$

und mit Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \int \sigma_b dF &= N_b \quad \text{und} \quad \int \sigma_b v dF = M_b \\ (46) \quad \int \frac{\sigma_a \sigma_b dV}{E} &= \int \frac{N_a N_b dx}{EF} + \int \frac{M_a M_b dx}{EJ} \end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned} \int \sigma \varepsilon t dV &= \iint \sigma \left( t_0 + \Delta t \frac{v}{h} \right) \varepsilon dx dF \\ &= \int \varepsilon t_0 dx \int \sigma dF + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} dx \int \sigma v dF \\ (47) \quad \int \sigma \varepsilon t dV &= \int \varepsilon t_0 N dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{M}{h} dx. \end{aligned}$$

2) Umformung der Gleichungen (32). Die Auflagerkräfte  $C$ , Biegemomente  $M$  und Längskräfte  $N$  eines mehrfach statisch unbestimmten Stabes lassen sich in der Form darstellen

$$(48) \quad \begin{cases} C = C_0 + C' X' + C'' X'' + C''' X''' + \dots \\ M = M_0 + M' X' + M'' X'' + M''' X''' + \dots \\ N = N_0 + N' X' + N'' X'' + N''' X''' + \dots \end{cases}$$

wobei  $X', X'', X''', \dots$  statisch nicht bestimmbare Größen bedeuten.

$C_0, M_0, N_0$ , sind die Auflagerkräfte, Biegemomente und Längskräfte für den statisch bestimmten Hauptträger, in welchen der Stab übergeht, sobald sämtliche Unbekannten  $X$  verschwinden; sie sind geradlinige Funktionen der gegebenen Lasten.

$C', M', N'$  sind die Werte der Auflagerkräfte, Momente und Längskräfte für den auf Seite 79 erklärten Zustand  $X' = 1$ , desgl.  $C'', M'', N''$  die Werte für den Zustand  $X'' = 1$  u. s. w.

Die Spannungen für den Zustand  $X' = 1$  sind:

$$\sigma = \frac{N'}{F} + \frac{M'v}{J},$$

für den Zustand  $X'' = 1$ :

$$\sigma'' = \frac{N''}{F} + \frac{M''v}{J}, \text{ u. s. w.}$$

und die Gleichungen (32) gehen, mit Beachtung der Gleich. (46) und (47), über in

$$(49) \quad \begin{cases} L' = \int \frac{N' N}{EF} dx + \int \frac{M' M}{EJ} dx + \int \epsilon t_0 N' dx + \int \epsilon \Delta t \frac{M'}{h} dx \\ L'' = \int \frac{N'' N}{EF} dx + \int \frac{M'' M}{EJ} dx + \int \epsilon t_0 N'' dx + \int \epsilon \Delta t \frac{M''}{h} dx \\ \dots \end{cases}$$

wobei  $L', L'', \dots$  die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte bei Eintreten der Zustände  $X' = 1, X'' = 1, \dots$  bedeuten.

Ist die Temperaturerhöhung für alle Punkte eines Stabquerschnittes konstant und  $= t$ , so ist  $\Delta t = 0$  und  $t_0 = t$  zu setzen.

3) Umformung der Gleichungen (33) und (34). Für den durch die Gleichung (34) gegebenen Arbeitsausdruck  $A_i$  findet man mit Hilfe der Gleichungen (46) und (47) den Wert

$$(50) \quad A_i = \int \frac{N^2 dx}{2 EF} + \int \frac{M^2 dx}{2 EJ} + \int \epsilon t_0 N dx + \int \epsilon \Delta t \frac{M}{h} dx,$$

und es geht somit die Bedingungsgleichung (33) über in

$$(51) \quad L = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} dx \\ + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx,$$

wobei  $X$  irgend eine der zu berechnenden statisch nicht bestimmbar Gröſsen und  $L$  die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand  $X=1$  bedeutet.

Daſs Gleichung (51) die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen (49) darſtellt, leuchtet ein, ſobald der Gröſſe  $X$  der Reihe nach die Werte  $X'$ ,  $X''$ ..... beigelegt werden und

$$\frac{\partial M}{\partial X} = M', \quad \frac{\partial M}{\partial X''} = M'' \dots \dots \\ \frac{\partial N}{\partial X'} = N', \quad \frac{\partial N}{\partial X''} = N'' \dots \dots$$

geſetzt wird.

**4) Der auf Biegungsfeſtigkeit beanspruchte gerade Stab in Verbindung mit einem Fachwerke.** Sehr häufig hat man es mit der Berechnung eines Körpers zu tun, der aus einem Fachwerke und aus einem oder mehreren auf Biegungsfeſtigkeit beanspruchten, geraden Stäben beſteht. Die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen, denen die ſtatiſch nicht beſtimmbar Gröſſen  $X$  zu genügen haben, lautet dann (vergleiche die für das Fachwerk abgeleiteten Gleichungen 26):

$$(52) \quad L = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} dx \\ + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} + \Sigma \varepsilon ts \frac{\partial S}{\partial X},$$

wobei angenommen wird, daſs die Temperaturänderung  $t$  für alle Punkte eines und deſſelben Fachwerkſtabes gleich groſs iſt.

Meiſtens macht man die Annahme, daſs auch für alle Punkte eines und deſſelben Querschnittes der durch die  $M$  und  $N$  beanspruchten Stäbe die Temperaturänderung  $t$  gleich groſs iſt und erhält dann die Bedingung

$$(53) \quad L = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \varepsilon t \frac{\partial N}{\partial X} dx \\ + \Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} + \Sigma \varepsilon ts \frac{\partial S}{\partial X}.$$

$L$  bedeutet die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zuſtand  $X=1$ .

**5)** Die im vorſtehenden abgeleiteten Geſetze gelten auch für den Fall einer nicht mit einer Hauptachſe zuſammenfallenden Kraftlinie,



vorausgesetzt, daß sich (nach Fig. 78)  $t$  nur mit  $v$  ändert, daß unter  $h$  die Querschnittshöhe rechtwinklig zur  $u$ -Achse verstanden wird und für  $J$  das auf die  $u$ -Achse bezogene Trägheitsmoment  $J_u$  gesetzt wird. Liegen jedoch die Kraftlinien der verschiedenen Querschnitte oder die  $u$ -Achsen nicht in einer Ebene, so ist es zweckmäßiger, die Momente  $M_u$  und  $M_v$  (§ 13, 1) einzuführen und das Integral

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b dV}{E}$$

auf Grund der Formeln

$$\sigma_a = \frac{N_a}{F} + \frac{M_{ua}v}{J_u} + \frac{M_{va}u}{J_v}$$

$$\sigma_b = \frac{N_b}{F} + \frac{M_{ub}v}{J_u} + \frac{M_{vb}u}{J_v}$$

zu berechnen. Man erhält mit  $dV = dx dF$

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b dV}{E} = \int \frac{N_a dx \int \sigma_b dF}{EF} + \int \frac{M_{ua} dx \int \sigma_b v dF}{EJ_u}$$

$$+ \int \frac{M_{va} dx \int \sigma_b u dF}{EJ_v}$$

und mit Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma_b dF = N_b, \quad \int \sigma_b v dF = M_{ub}, \quad \int \sigma_b u dF = M_{vb}$$

die Beziehung:

$$\int \frac{\sigma_a \sigma_b dV}{E} = \int \frac{N_a N_b dx}{EF} + \int \frac{M_{ua} M_{ub} dx}{EJ_u} + \int \frac{M_{va} M_{vb} dx}{EJ_v}.$$

Für das Integral  $\int \sigma \varepsilon t dV$  liefert die Voraussetzung der allgemeinen

Beziehung

$$t = t' + t'v + t''u$$

den Wert

$$\int \sigma \varepsilon t dV = \int \varepsilon t' N dx + \int \varepsilon t'' M_u dx + \int \varepsilon t''' M_v dx.$$

Hiernach ist es leicht, die unter 2), 3), 4) abgeleiteten Gesetze für den allgemeineren Fall zu erweitern. Beispielsweise geht der Ausdruck (50) für  $A_i$  über in

$$(50a) \quad A_i = \int \frac{N^2 dx}{2EF} + \int \frac{M_u^2 dx}{2EJ_u} + \int \frac{M_v^2 dx}{2EJ_v}$$

$$+ \int \varepsilon t' N dx + \int \varepsilon t'' M_u dx + \int \varepsilon t''' M_v dx.$$

## 6) Anwendungen.\*)

**Aufgabe 1.** Wagerechter, bei  $B$  eingespannter und bei  $A$  frei aufliegender Balken. Gesucht ist der durch eine gleichmäßige Belastung,  $p$  für die Längeneinheit, hervorgerufene Auflagerwiderstand  $X$  (Fig. 79). Temperaturänderungen sollen unberücksichtigt bleiben, desgleichen Verschiebungen der Angriffspunkte der Auflagerkräfte; es ist also  $L = 0$  und  $t = 0$ .

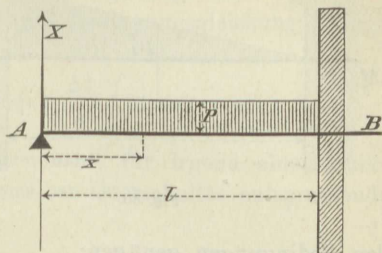


Fig. 79.

Da nur Beanspruchung auf Biegung vorliegt ( $N = 0$ ), so muß  $X$  der Bedingung (vergl. Gleich. 51)

$$\int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0$$

genügen, und bei konstantem  $EJ$  der Bedingung

$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0.$$

Nun ist  $M = Xx - \frac{px^2}{2}$  und  $\frac{\partial M}{\partial X} = x$ , weshalb

$$\int_0^l \left( Xx - \frac{px^2}{2} \right) x dx = \frac{Xl^3}{3} - \frac{pl^4}{8} = 0,$$

woraus

$$X = \frac{3pl}{8}.$$

Es ist mithin das Biegemoment an der Stelle  $x$

$$M = \frac{3pl}{8} x - \frac{px^2}{2}.$$

Für  $x = \frac{3l}{8}$  folgt  $\max M = \frac{9}{128} pl^2$  und für  $x = l$  ergibt sich das Einspannungsmoment  $M_B = -\frac{pl^2}{8}$ . Die größten Beanspruchungen sind

$$\sigma_1 = \frac{M_B e_1}{J} \text{ und } \sigma_2 = -\frac{M_B e_2}{J} \text{ (nach Gleichung 41).}$$

**Aufgabe 2.** Wagerechter, bei  $A$  und  $B$  eingespannter Balken mit Dreiecksbelastung (Fig. 80). Es sei wie in Aufgabe 1 sowohl  $L$  als auch  $t = 0$ .

\*) In den Aufgaben 1—11 wird vorausgesetzt, daß überall die Kraftlinie mit einer Querschnittshauptachse zusammenfällt.

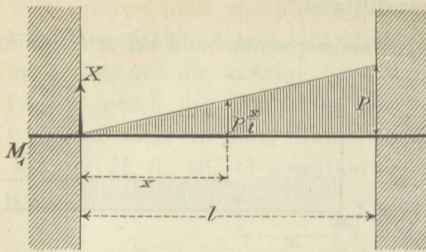


Fig. 80.

Bedeutet  $X$  die senkrechte Auflagerkraft und  $M_1$  das Biegemoment am linken Auflager, so ist das Biegemoment an der Stelle  $x$ :

$$M = Xx - p \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + M_1.$$

Die beiden statisch nicht bestimmbar Größen  $X$  und  $M_1$  müssen, bei konstantem  $EJ$ ,

den Bedingungen genügen:

$$\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_1} dx = 0$$

und diese gehen, wegen  $\frac{\partial M}{\partial X} = x$  und  $\frac{\partial M}{\partial M_1} = 1$ , nach Ausführung der Integrationen über in

$$X \frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{30} + M_1 \frac{l^2}{2} = 0 \quad \text{und}$$

$$X \frac{l^2}{2} - \frac{pl^3}{24} + M_1 l = 0;$$

sie liefern:

$$X = \frac{3}{20} pl, \quad M_1 = -\frac{pl^2}{30}.$$

Nun folgt an der Stelle  $x$ :

$$M = \frac{p}{2} \left[ \frac{3}{10} lx - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l} - \frac{1}{15} l^2 \right].$$

Für  $x = l \sqrt{0,3}$  folgt  $\max M = +0,02144 pl^2$ .

Für  $x = l$  ist  $M_2 = -\frac{pl^2}{20}$ .

Das größte aller Momente ist  $M_2$ .

**Aufgabe 3** (Fig. 81). Ein frei auf drei Stützpunkten ruhender, ursprünglich wagerechter, kontinuierlicher Balken ohne Gelenke und mit konstantem  $E$  und  $J$  sei durch beliebige senkrechte Lasten beansprucht; außerdem mögen auf die Endquerschnitte (1) und (3) beliebig große, von außerhalb des Balkens wirkenden Kräfte herrührende Biegemomente  $M_1$  und  $M_3$  wirken. Es soll das Biegemoment  $M_2$  für den über der Mittelstütze gelegenen Querschnitt unter der Voraussetzung berechnet werden, daß, bei festliegenden Stützpunkten (1) und (3), sich der Stützpunkt (2) um  $\delta$  senkt und der Balken ungleichmäßig erwärmt

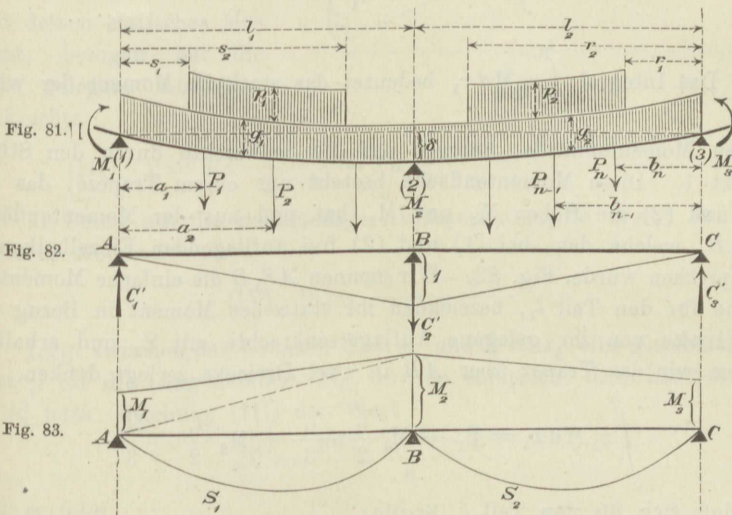


wird. Die Temperaturänderung sei für den untersten Punkt eines Querschnittes  $t_1$ , für den obersten  $t_2$ ; beide Werte seien konstant, und es sei  $t_1 - t_2 = \Delta t$ . Querschnittshöhe  $= h$  (vergl. Fig. 77).

Wir benutzen (da  $N=0$  ist) die Bedingungsgleichung (vergl. Seite 92, Gleichung 49):

$$L' = \frac{1}{EJ} \int M' M dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \int M' dx,$$

in welcher  $M$  das wirkliche Biegemoment für irgend einen Querschnitt bedeutet, während  $M'$  das demselben Querschnitte entsprechende



Biegemoment für den Fall ist, daß die Lasten verschwinden und die statisch nicht bestimmbare Größe (hier also  $M_2$ ) den Wert 1 annimmt (Zustand  $X = M_2 = 1$ ). Die Momentenfläche für diesen Zustand ist das Dreieck in Fig. 82 mit der Höhe 1, und die zugehörigen Auflagerkräfte sind

$$C_1' = \frac{1}{l_1}, \quad C_3' = \frac{1}{l_2}, \quad \text{beide aufwärts wirkend, und}$$

$$C_2' = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}, \quad \text{abwärts gerichtet.}$$

Senkt sich die Mittelstütze um  $\delta$ , so ist die virtuelle Arbeit der dem Zustande  $X = M_2 = 1$  entsprechenden Auflagerkräfte:

$$L' = C_2' \delta = \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \delta,$$

und es folgt somit die Bedingung

$$(I) \quad EJ \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \delta = \int M' M dx + \varepsilon EJ \frac{\Delta t}{h} \int M' dx.$$

Für einen Querschnitt im Abstände  $x_1 < l_1$  von  $A$  folgt:  $M' = 1 \cdot \frac{x_1}{l_1}$ ,

mithin für den Teil  $l_1$ :  $\int_0^{l_1} M' dx = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} x_1 dx = \frac{l_1}{2}$  und

$$\int_0^{l_1} M' M dx = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} x_1 M dx.$$

Das Integral:  $\int_0^{l_1} x_1 M dx$  bedeutet das statische Moment der wirk-

lichen Momentenfläche, bezogen auf die Senkrechte durch den Stützpunkt 1. Diese Momentenfläche besteht aus einem Trapeze, das bei (1) und (2) die Höhen  $M_1$  und  $M_2$  hat und aus der Momentenfläche  $AS_1B$ , welche dem bei (1) und (2) frei aufliegenden Einzelbalken  $l_1$  entsprechen würde, Fig. 83. Wir nennen  $AS_1B$  die einfache Momentenfläche für den Teil  $l_1$ , bezeichnen ihr statisches Moment in Bezug auf die links von ihr gelegene Auflagersenkrechte mit  $\mathfrak{Q}_1$  und erhalten, indem wir das Trapez über  $AB$  in zwei Dreiecke zerlegt denken,

$$\int_0^{l_1} x_1 M dx = \mathfrak{Q}_1 + M_1 \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3} + M_2 \frac{l_1}{2} \cdot \frac{2l_1}{3},$$

so daß sich für den Teil  $l_1$  ergibt:

$$\int_0^{l_1} M' M dx = \frac{\mathfrak{Q}_1}{l_1} + \frac{1}{6} (M_1 l_1 + 2 M_2 l_1);$$

ebenso ergibt sich für den Teil  $l_2$ :

$$\int_0^{l_2} M' dx = \frac{l_2}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^{l_2} M' M dx = \frac{\mathfrak{R}_2}{l_2} + \frac{1}{6} (M_3 l_2 + 2 M_2 l_2),$$

wobei  $\mathfrak{R}_2$  das statische Moment der zu dem Teile  $l_2$  gehörigen einfachen Momentenfläche  $BS_2C$ , bezogen auf die rechts von ihr gelegene Auflagersenkrechte, bedeutet.

Die Gleichung (I) geht jetzt, nach Multiplikation mit 6 über in

$$(II) \quad 6EJ\delta \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} = 6 \frac{\mathfrak{Q}_1}{l_1} + 6 \frac{\mathfrak{R}_2}{l_2} + M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) \\ + M_3 l_2 + 3\varepsilon EJ \frac{l_1 + l_2}{h} \Delta t;$$

sie ermöglicht die Berechnung von  $M_2$ .

Die am häufigsten vorkommenden Belastungen sind: Beanspruchung durch Einzellasten und durch eine gleichmäßige Belastung.

Liegt auf einem einfachen Balken eine Einzellast  $P$  in den Abständen  $a$  und  $b$  von den Stützpunkten (Fig. 84), so ist die Momentenfläche  $ABS$  ein Dreieck, dessen Höhe  $= \frac{Pab}{l}$ , und dessen statisches Moment, bezogen auf die links gelegene Auflagersenkrechte,

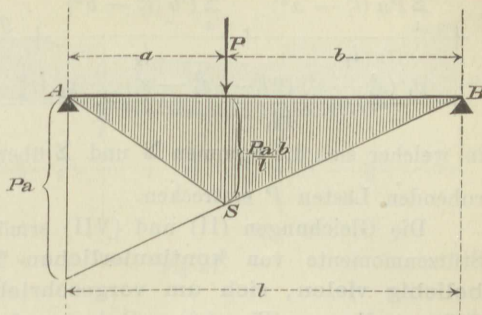


Fig. 84.

$$(III) \quad \mathfrak{Q} = Pa \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} - Pa \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6}$$

ist. In Bezug auf die rechtsseitige Auflagersenkrechte ergibt sich das statische Moment

$$(IV) \quad \mathfrak{R} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6}.$$

Liegt zwischen den Grenzen  $\xi = s_1$  und  $\xi = s_2$  eine gleichmäßige Last  $p$  für die Längeneinheit (Fig. 85), so entspricht dem Lastteilchen  $p \cdot d\xi$  nach Gleichung (III) der Wert

$$d\mathfrak{Q} = \frac{pd\xi \cdot \xi(l^2 - \xi^2)}{6}$$

und es folgt

$$(V) \quad \mathfrak{Q} = \int_{s_1}^{s_2} d\mathfrak{Q} = \frac{p(s_2^2 - s_1^2)(2l^2 - s_2^2 - s_1^2)}{24}.$$

Ist der ganze Balken  $AB$  mit  $g$  für die Längeneinheit belastet, so ergibt sich aus (V) (mit  $p = g$ ,  $s_2 = l$  und  $s_1 = 0$ )

$$(VI) \quad \mathfrak{Q} = \frac{gl^4}{24}.$$

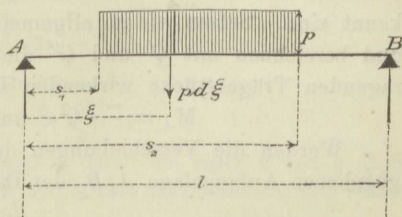


Fig. 85.

Wenn also, wie in Fig. 81 angenommen wurde, auf den kontinuierlichen Balken gleichzeitig Einzellasten  $P$  und gleichmäßige Lasten  $g_1, g_2, p_1, p_2$  wirken, so geht mit den aus der Fig. 81 ersichtlichen Bezeichnungen die Gleichung (II) über in



$$(VII) \quad M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 3EJ \left[ \frac{\varepsilon \Delta t}{h} - 2 \frac{\delta}{l_1 l_2} \right] (l_1 + l_2) \\ + \frac{\sum_1 Pa (l_1^2 - a^2)}{l_1} + \frac{\sum_2 Pb (l_2^2 - b^2)}{l_2} + \frac{g_1 l_1^3}{4} + \frac{g_2 l_2^3}{4} \\ + \frac{p_1 (s_2^2 - s_1^2) (2l_1^2 - s_2^2 - s_1^2)}{4l_1} + \frac{p_2 (r_2^2 - r_1^2) (2l_2^2 - r_2^2 - r_1^2)}{4l_2} = 0,$$

in welcher sich die Summen  $\sum_1$  und  $\sum_2$  über die auf den Teilen  $l_1$  oder  $l_2$  ruhenden Lasten  $P$  erstrecken.

Die Gleichungen (II) und (VII) ermöglichen die Berechnung der Stützenmomente von kontinuierlichen Trägern, welche frei auf beliebig vielen, sich um vorgeschriebene Strecken senkenden Stützen liegen (Fig. 86). Bedeuten für einen solchen Träger  $M_1$ ,

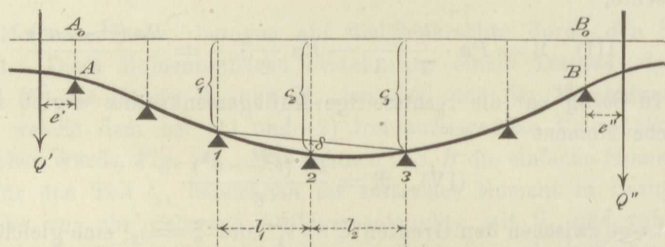


Fig. 86.

$M_2$ ,  $M_3$  irgend drei aufeinander folgende Stützenmomente und  $\delta$  die Strecke, um welche sich der Stützpunkt 2 unter die Verbindungsgerade der beiden benachbarten Stützpunkte 1 und 3 verschiebt, so besteht zwischen den Momenten  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  die durch die Gleichung (II) oder Gleichung (VII) dargestellte Beziehung. Bei  $n$  Stützen lassen sich  $n - 2$  solcher Beziehungen angeben, und diese genügen zur Berechnung aller Momente  $M$ , da die Momente  $M_A$  und  $M_B$  über den Endstützen bekannt sind. Setzen wir im allgemeinen überragende Trägerenden voraus und bezeichnen mit  $Q'$  und  $Q''$  die Mittelkräfte aus den auf die überragenden Trägerstücke wirkenden Lasten, so erhalten wir

$$M_A = -Q'e' \quad \text{und} \quad M_B = -Q''e''.$$

Werden die Verschiebungen der Stützpunkte (1, 2, 3) aus einer gegebenen Anfangslage  $A_0 B_0$  des Balkens mit  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  bezeichnet, so ist

$$\delta = c_2 - c_1 \frac{l_2}{l_1 + l_2} - c_3 \frac{l_1}{l_1 + l_2},$$

und es ergibt sich

$$(VIII) \quad \frac{\delta (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} = \frac{c_2 - c_1}{l_1} + \frac{c_2 - c_3}{l_2}.$$

**Aufgabe 4.** Es sollen die bei Lösung der Aufgabe 3 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen zur Berechnung der Stützenmomente des in Fig. 87 dargestellten gleichmäßig belasteten, kontinuierlichen Trägers, dessen Mittelstützen sich um  $c_2$  und  $c_3$  gesenkt haben, benutzt werden.

Zwischen den Stützenmomenten  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  besteht (nach Gleichung (VII) mit Beachtung von Gleichung (VIII) die Beziehung:

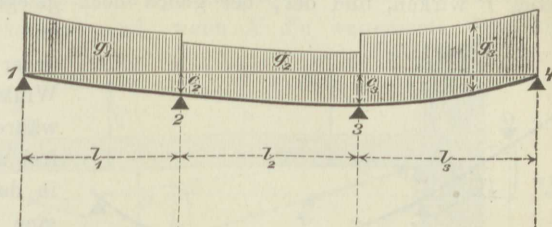


Fig. 87.

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + \frac{3 E J \varepsilon \Delta t (l_1 + l_2)}{h} - 6 E J \left[ \frac{c_2 - c_1}{l_1} + \frac{c_2 - c_3}{l_2} \right] + \frac{g_1 l_1^3}{4} + \frac{g_2 l_2^3}{4} = 0,$$

und ebenso folgt

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 + \frac{3 E J \varepsilon \Delta t (l_2 + l_3)}{h} - 6 E J \left[ \frac{c_3 - c_2}{l_2} + \frac{c_3 - c_4}{l_3} \right] + \frac{g_2 l_2^3}{4} + \frac{g_3 l_3^3}{4} = 0,$$

und in diese Gleichungen ist zu setzen:

$$M_1 = 0, M_4 = 0, c_1 = 0, c_4 = 0.$$

Die Auflösung der beiden Gleichungen nach  $M_2$  und  $M_3$  ergibt z. B. für den Fall  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ :

1) den Einfluß der Lasten  $g_1, g_2, g_3$ :

$$M_2 = -\frac{1}{60} (4 g_1 + 3 g_2 - g_3) l^2$$

$$M_3 = -\frac{1}{60} (4 g_3 + 3 g_2 - g_1) l^2,$$

2) den Einfluß der Stützenverschiebungen  $c_1, c_2$ :

$$M_2 = \frac{6}{5} \frac{E J}{l^2} (3 c_2 - 2 c_3)$$

$$M_3 = \frac{6}{5} \frac{E J}{l^2} (3 c_3 - 2 c_2),$$

3) den Einfluß der Temperaturänderung:

$$M_2 = M_3 = -\frac{6}{5} \frac{\varepsilon E J}{h} \Delta t.$$

Die im Querschnitte über der Stütze 2 durch die unter 2 und 3 angeführten Einflüsse erzeugten Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind nach Gleichung (41) (vergl. auch Fig. 77):

$$\sigma_1 = + \frac{M_3 e_1}{J} = + \frac{6}{5} E \frac{e_1}{l} \left[ \frac{3 c_2 - 2 c_3}{l} - \varepsilon \Delta t \frac{l}{h} \right] \text{ und}$$

$$\sigma_2 = - \frac{M_2 e_2}{J} = - \frac{6}{5} E \frac{e_2}{l} \left[ \frac{3 c_3 - 2 c_2}{l} - \varepsilon \Delta t \frac{l}{h} \right].$$

**Aufgabe 5.** Es soll das Einspannungsmoment  $M_1$  für einen ursprünglich wagerechten Balken berechnet werden, auf welchen Einzellasten  $P$  wirken, und der, bei gleich hoch gelegenen Stützpunkten 1 und 2 am linken Ende

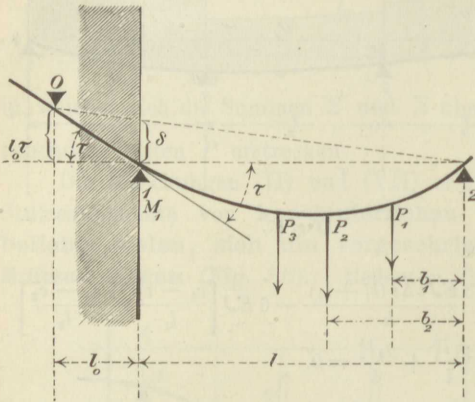


Fig. 88.

unter einem gegebenen Winkel  $\tau$  eingespannt wird, während am rechten Ende frei aufliegt. Es soll, wie in den Aufgaben 3 und 4, eine ungleichmäßige Erwärmung berücksichtigt werden. Fig. 88.

Wir betrachten den Balken als frei auf 3 Stützen 0, 1, 2 ruhend. Die Endstütze 0 liegt unendlich nahe der Stütze 1 und ist um  $l_0 \tau$  angehoben.

Gleichung (VII) in Aufgabe 3 liefert dann die Beziehung:

$$M_0 l_0 + 2 M_1 (l_0 + l) + M_2 l + 3 E J \left[ \frac{\varepsilon \Delta t}{h} - \frac{2 \delta}{l_0 l} \right] (l_0 + l) + \sum \frac{P b (l^2 - b^2)}{l} = 0,$$

in welcher  $\delta$  die Verschiebung des Punktes 1 gegen die Gerade 02 bedeutet. Es ist

$$\delta = l_0 \tau \frac{l}{l_0 + l} \text{ also } \frac{\delta}{l_0} = \frac{\tau l}{l_0 + l},$$

und es ergibt sich, da  $l_0 = 0$ ,  $M_0 = 0$  und  $M_2 = 0$  ist, der Wert

$$\frac{2 \delta}{l_0 l} = 2 \frac{\tau}{l} \text{ und die Gleichung:}$$

$$2 M_1 l + 3 E J l \left[ \frac{\varepsilon \Delta t}{h} - 2 \frac{\tau}{l} \right] + \frac{\sum P b (l^2 - b^2)}{l} = 0;$$

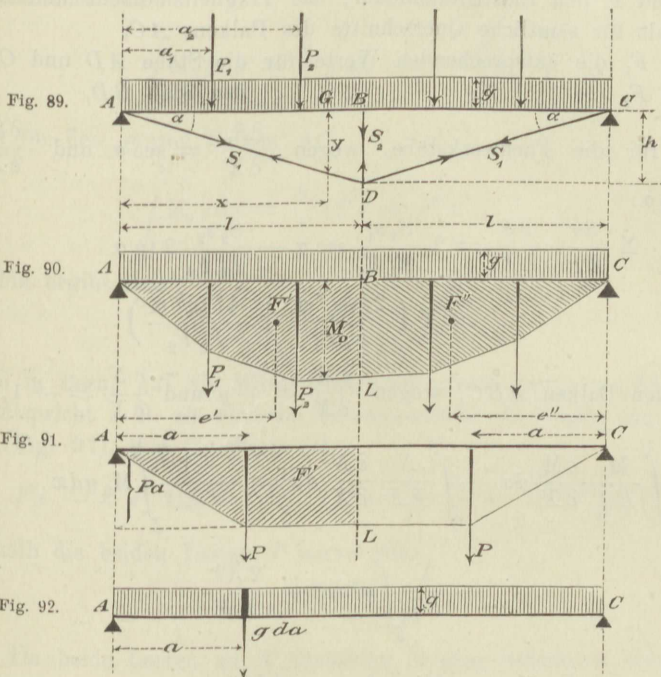
mithin ist das gesuchte Einspannungsmoment

$$M_1 = - \frac{\sum P b (l^2 - b^2)}{2 l^2} + \frac{3}{2} \frac{E J}{l} \left[ 2 \tau - \varepsilon \Delta t \frac{l}{h} \right].$$

Die Lösung dieser Aufgabe lehrt auch, in welcher Weise die Gleichungen (II) und (VII) in Aufgabe 3 auf die Berechnung der Stützenmomente eines kontinuierlichen Balkens angewendet werden können, dessen Enden unter bestimmten Winkeln eingespannt sind.



**Aufgabe 6.** Ein bei  $A$  und  $C$  frei aufliegender, durch 2 Zugstangen und eine Strebe verstärkter Träger, Fig. 89, sei durch senkrechte Lasten beansprucht. Die Spannkraften  $S_1, S_2$  in den gelenkartig befestigten Fachwerkstäben sind, wenn  $X$  die wagerechte Seitenkraft



von  $S_1$  bedeutet:  $S_1 = X \sec \alpha$  und  $S_2 = -2X \tan \alpha$ , und für den Balkenquerschnitt  $G$  bei  $x$  ergibt sich die Längskraft

$$N = -S_1 \cos \alpha = -X$$

und das Biegemoment

$$M = M_0 - S_1 y \cos \alpha = M_0 - Xy,$$

wobei  $M_0$  das Biegemoment für einen bei  $A$  und  $C$  frei aufliegenden, nicht verstärkten Balken  $AC$  bedeutet (Fig. 90). Die Momentenfläche  $ALC$  für diesen einfachen Balken  $AC$  möge die einfache Momentenfläche heißen.\*)

Die Größe  $X$  ist statisch nicht bestimmbar, sie muß, wenn Temperaturänderungen unberücksichtigt bleiben sollen, der Bedingung genügen:

\*) Infolge der gleichmäßigen Belastung  $g$  sind die Begrenzungslinien der Momentenfläche schwach gekrümmte Linien, nicht gerade Linien, wie in Fig. 90 der Einfachheit wegen gezeichnet.

$$(I) \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx + \Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} = 0.$$

Bedeutung nun

$E$ ,  $J$  und  $F$  den Elastizitätsmodul, das Trägheitsmoment und den Inhalt für sämtliche Querschnitte des Balkens  $AC$ ,

$E_1$  und  $F_1$  die entsprechenden Werte für die Stäbe  $AD$  und  $CD$ ,

$E_2$  und  $F_2$  " " " " den Stab  $BD$ ,

so folgt für die Fachwerkstäbe, wegen  $\frac{\partial S_1}{\partial X} = \sec \alpha$  und  $\frac{\partial S_2}{\partial X} = -2 \operatorname{tg} \alpha$ :

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial X} &= 2 \frac{S_1 s_1}{E_1 F_1} \sec \alpha - \frac{S_2 s_2}{E_2 F_2} 2 \operatorname{tg} \alpha \\ &= X \left( \frac{2l \sec^3 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{4l \operatorname{tg}^3 \alpha}{E_2 F_2} \right) \end{aligned}$$

und für den Balken  $ABC$ , wegen  $\frac{\partial M}{\partial X} = -y$  und  $\frac{\partial N}{\partial X} = -1$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2l} \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int_0^{2l} \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx &= -\frac{1}{EJ} \int_0^{2l} M_0 y dx \\ &+ \frac{X}{EJ} \int_0^{2l} y^2 dx + \frac{2Xl}{EF} \end{aligned}$$

und es geht, mit  $\int_0^{2l} y^2 dx = 2 \int_0^l \left( \frac{hx}{l} \right)^2 dx = 2 \frac{h^2 l}{3}$  die Gleichung (I) über in

$$-\frac{1}{EJ} \int_0^{2l} M_0 y dx + \frac{2Xh^2 l}{3EJ} + \frac{2Xl}{EF} + X \left( \frac{2l \sec^3 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{4l \operatorname{tg}^3 \alpha}{E_2 F_2} \right) = 0;$$

sie liefert den Wert:

$$X = \frac{3 \int_0^{2l} M_0 y dx}{2 \mu h^2 l},$$

wo

$$\mu = 1 + 3 \frac{J}{Fh^2} \left( 1 + \frac{E}{E_1} \frac{F}{F_1} \sec^3 \alpha + 2 \frac{E}{E_2} \frac{F}{F_2} \operatorname{tg}^3 \alpha \right)$$

eine von den Querschnittsabmessungen abhängige Zahl ist.

Die einfache Momentenfläche  $ALC$  in Fig. 90 wird durch die Mittel-Senkrechte in zwei Teile zerlegt, deren Inhalte gleich  $F'$  und  $F''$  und deren Schwerpunktsabstände von den benachbarten Auflager-Senkrechten gleich  $e'$  und  $e''$  sein mögen, und es folgt nun für das Balkenstück  $AB$ :

$$\int_0^l M_0 y dx = \frac{h}{l} \int_0^l M_0 x dx = \frac{h}{l} \cdot F' e'$$

und für den ganzen Balken  $AC$ :

$$\int_0^{2l} M_0 y dx = \frac{h}{l} (F' e' + F'' e''),$$

mithin ergibt sich

$$X = \frac{3 (F' e' + F'' e'')}{2 \mu h l^2}.$$

Zwei in Bezug auf die Mittel-Senkrechte gleich gelegenen Einzellasten  $P$  entspricht z. B. als einfache Momentenfläche ein Trapez von der Höhe  $Pa$  (Fig. 91), und für dieses ist

$$F' e' = F'' e'' = Pa \cdot l \cdot \frac{l}{2} - Pa \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa (3l^2 - a^2)}{6},$$

weshalb die beiden Lasten  $P$  hervorrufen:

$$X = \frac{Pa (3l^2 - a^2)}{2 \mu h l^2}.$$

Da beide Lasten zu  $X$  denselben Beitrag liefern, so entsteht bei Aufbringen nur einer Last:

$$X = \frac{Pa (3l^2 - a^2)}{4 \mu h l^2}.$$

Eine gleichförmige Belastung  $g$  für die Längeneinheit (Fig. 92) darf als aus unendlich kleinen Einzellasten  $g da$  bestehend aufgefaßt werden; sie erzeugt, wenn sie auf der ganzen Länge des Trägers wirkt,

$$X = \frac{1}{4 \mu h l^2} \cdot 2 \int_0^l a (3l^2 - a^2) g da = \frac{5 g l^2}{8 \mu h}.$$

Wird also der Träger gleichzeitig durch eine gleichmäßige Last und eine Schar von Einzellasten beansprucht, Fig. 86, so entsteht

$$X = \frac{5 g l^2 + 2 \sum Pa (3l^2 - a^2)}{8 \mu h l^2}.$$

Nach Berechnung von  $X$  lassen sich die Beanspruchungen  $\sigma$  in allen Teilen des Trägers leicht angeben.



Die abgeleiteten Formeln gelten natürlich auch für das durch Umkehrung des verspannten Balkens entstandene einfache Hängewerk, Fig. 93. Nur sind die Vorzeichen der Spannkkräfte  $S$  umzukehren.

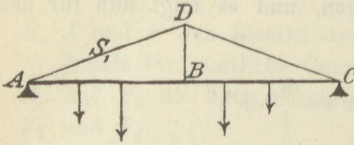


Fig. 93.

Liegt ein einfaches Sprengewerk vor, Fig. 94, so verlängere man die Mittellinien der Streben bis zu ihren Schnittpunkten  $A'$  und  $C'$  mit den Lotrechten durch  $A$  und  $C$ , bezeichne die auf die Gerade  $A'C'$  bezogene Pfeilhöhe des Sprengewerks mit  $h$  und zerlege den Strebendruck  $S_1$  im Punkte  $A'$  in den Horizontalschub  $X$  und die lotrechte Seitenkraft  $A_u$ . Ist dann  $A_o$  der Stützenwiderstand am Balken-

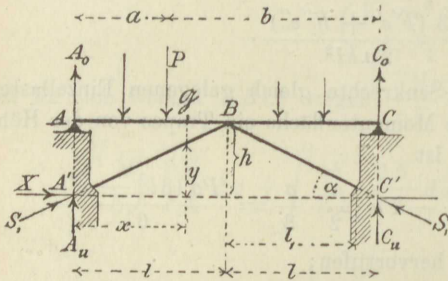


Fig. 94.

ende  $A$ , so ergibt sich der Einfluss einer Last  $P$  auf die Summe  $A_o + A_u$  aus der Momentengleichung für  $C'$

$$(A_o + A_u) 2l - Pb = 0$$

$$A_o + A_u = \frac{Pb}{2l}$$

so dass also  $A_o + A_u$  gleich dem Auflagerwiderstande  $A$  eines Balkens  $AC$  ist, der nur bei  $A$  und  $C$  aufliegt.

Führt man nun an der Stelle  $x$  einen lotrechten Schnitt und zerlegt man an der Schnittstelle die Strebekraft  $S_1$  nach wagerechter und lotrechter Richtung, so ist die wagerechte Seitenkraft  $X$  und das Angriffsmoment für den Balkenquerschnitt  $\mathcal{G}$  wird (da  $A_o$ ,  $A_u$  zusammen gleich  $A$  sind)

$$M = M_0 - Xy,^*)$$

wo  $M_0$  das Moment für den nur bei  $A$  und  $C$  gestützten Balken ist. Die ganze Betrachtung lehrt, dass die vorhin für  $X$  abgeleiteten Formeln gültig bleiben, nur hat jetzt  $\mu$  eine andere Bedeutung; denn es fehlt die Hängestange, und außerdem wird der Balken nur auf Biegung beansprucht. Man findet

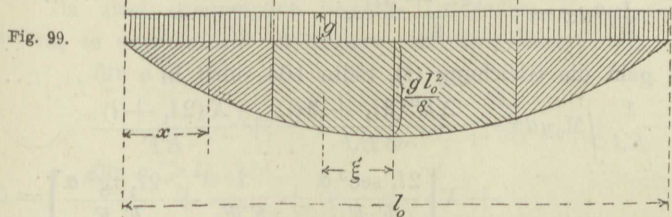
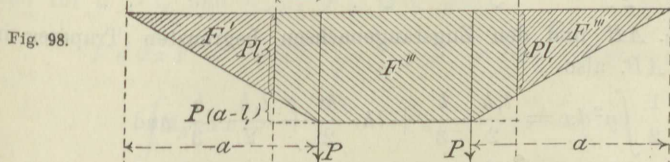
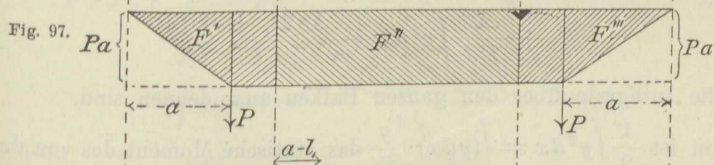
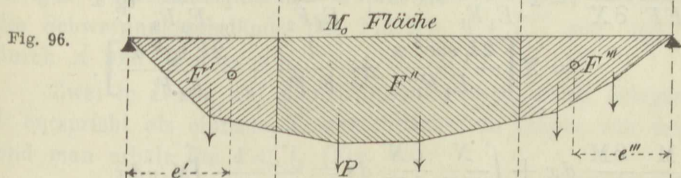
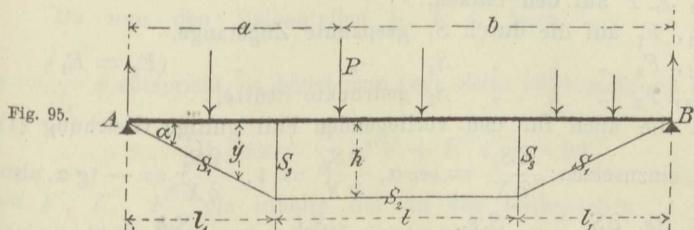
$$\mu = 1 + 3 \frac{E}{E_1} \frac{J}{F_1 h^2} \sec^3 \alpha \cdot \frac{l_1}{l}.^{**})$$

\*) Diese Gleichung folgt auch daraus, dass der Einfluss von  $A_o$  sich auf die Form bringen lässt:  $A_o x = (A - A_u) x = Ax - X \tan \alpha \cdot x = Ax - Xy$ .

\*\*) Der Faktor  $l_1 : l$  ist erforderlich, weil die Länge der Strebe  $s_1 = \overline{A'B} \cdot \frac{l_1}{l}$  ist.

**Aufgabe 7.** Für den in Fig. 95 dargestellten Balken mit zwei von Zugstangen getragenen Mittelstützen wählen wir die Spannkraft  $S_2$  in der mittelsten Zugstange zur statisch nicht bestimmaren Gröfse  $X$  und erhalten

$$S_1 = X \sec \alpha, \quad S_3 = -X \operatorname{tg} \alpha,$$



ferner für den Balken die Längskraft

$$N = -X$$

und (an der Stelle  $x$ ) das Bieugungsmoment

$$M = M_0 - Xy \text{ (vergl. Aufgabe 6),}$$

wo  $M_0$  das Angriffsmoment für den nur in  $A$  und  $B$  gestützten Balken bedeutet. Ist  $x > l_1$  aber  $< l + l_1$ , so wird  $y = h$ , wir wollen aber die allgemeine Bezeichnung  $y$  beibehalten und  $\frac{\partial M}{\partial X} = -y$  setzen.

Beziehen sich nun die Werte

$E, J, F$  auf den Balken,

$E_1, F_1$  auf die durch  $S_1$  gespannte Zugstange,

$E_1, F_2$  " " "  $S_2$  " " " ( $E_2 = E_1$ ),

$E_3, F_3$  " " "  $S_3$  gedrückte Stütze,

so ist in die auch für den vorliegenden Fall gültige Gleichung (I),

Seite 104, einzusetzen:  $\frac{\partial S_1}{\partial X} = \sec \alpha$ ,  $\frac{\partial S_2}{\partial X} = 1$ ,  $\frac{\partial S_3}{\partial X} = -\tan \alpha$ , also:

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{Ss}{EF} \frac{\partial S}{\partial X} &= 2 \frac{S_1 s_1}{E_1 F_1} \sec \alpha + \frac{S_2 l}{E_1 F_2} - 2 \frac{S_3 h}{E_3 F_3} \tan \alpha \\ &= X \left[ \frac{2l_1 \sec^3 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{l}{E_1 F_2} + \frac{2l_1 \tan^3 \alpha}{E_3 F_3} \right], \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} ds &= -\frac{1}{EJ} \int M_0 y dx \\ &+ \frac{X}{EJ} \int y^2 dx + \frac{X(2l_1 + l)}{EF}, \end{aligned}$$

wobei die Integrale über den ganzen Balken auszudehnen sind.

Nun ist  $\frac{1}{2} \int y^2 dx = \int (y dx) \cdot \frac{y}{2}$  das statische Moment des von der Balkenachse  $AB$  und den Zugstangenachsen begrenzten Trapezes in Bezug auf  $AB$ , also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int y^2 dx &= \frac{l_1 h}{2} \cdot \frac{h}{3} + lh \cdot \frac{h}{2} + \frac{l_1 h}{2} \cdot \frac{h}{3} \text{ und} \\ \int y^2 dx &= \frac{h^2 (2l_1 + 3l)}{3}. \end{aligned}$$

Mithin geht die Gleichung (I), Seite 104, über in

$$\begin{aligned} -\frac{1}{EJ} \int M_0 y dx + \frac{X h^2 (2l_1 + 3l)}{3 EJ} + \frac{X (2l_1 + l)}{EF} \\ + X \left[ \frac{2l_1 \sec^3 \alpha}{E_1 F_1} + \frac{l}{E_1 F_2} + \frac{2l_1 \tan^3 \alpha}{E_3 F_3} \right] = 0; \end{aligned}$$

sie liefert für  $X$  den Wert

$$X = \frac{3 \int M_0 y dx}{h^2 (2l_1 + 3l)},$$



wo

$$\mu = 1 + 3 \frac{J}{Fh^2} \frac{2l_1 + l}{2l_1 + 3l} + \frac{3l_1}{h^2(2l_1 + 3l)} \left( 2 \frac{E}{E_1} \frac{J}{F_1} \sec^3 \alpha + \frac{E}{E_1} \frac{J}{F_2} \frac{l}{l_1} + 2 \frac{E}{E_3} \frac{J}{F_3} \operatorname{tg}^3 \alpha \right). *)$$

Da nun den Balkenteilen  $l_1$ ,  $l$ ,  $l_1$  bezw.  $y = \frac{h}{l_1} x$ ,  $y = h$ ,  $y = \frac{h}{l_1} x$  entspricht, so findet man (vgl. Seite 105) leicht die Beziehung

$$\int M_0 y dx = \frac{h}{l_1} [F' e' + F''' e'''] + h F'',$$

wo  $F'$ ,  $F''$ ,  $F'''$  die Inhalte der zu den Balkenteilen  $l_1$ ,  $l$ ,  $l_1$  gehörigen Teile der einfachen Momentenfläche sind, ferner  $e'$  und  $e'''$  die Schwerpunktsabstände der Flächen  $F'$ ,  $F'''$  von den Lotrechten durch  $A$  und  $B$ , Fig. 96.

Zwei in Bezug auf die Mittelsenkrechten gleich gelegenen Lasten  $P$  entspricht als einfache Momentenfläche ein Trapez von der Höhe  $Pa$ , und man erhält für  $a < l_1$  (Fig. 97):

$$F' e' = F''' e''' = Pa \cdot l_1 \frac{l_1}{2} - Pa \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa(3l_1^2 - a^2)}{6}$$

$$F'' = Pal, \text{ also}$$

$$\int M_0 y dx = \frac{2Pa(3l_1^2 - a^2)h}{6l_1} + Palh$$

und für  $a > l_1$  und  $< (l_1 + l)$  (Fig. 98):

$$F' e' = F''' e''' = Pl_1 \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3}; F'' = Pal - P(a - l_1)^2$$

$$\int M_0 y dx = \frac{2Pl_1^2 h}{6} + Ph[al - (a - l_1)^2].$$

Da zwei symmetrisch liegende Lasten zu  $X$  denselben Beitrag liefern, so entsteht bei Aufbringen nur einer Last:

für  $a < l_1$

$$X = Pa \frac{3l_1^2 - a^2 + 3l_1 l}{2\mu h l_1 (2l_1 + 3l)},$$

für  $a > l_1$

$$X = P \frac{l_1^2 + 3al - 3(a - l_1)^2}{2\mu h (2l_1 + 3l)}.$$

Behufs Ermittlung des Einflusses einer gleichförmigen Belastung  $g$  setzen wir (mit  $l_0 = 2l_1 + l$ ) für den Teil  $l_1$ :

\*) Vergl. Anmerkung Seite 104.

$$M_0 = \frac{gl_0 x}{2} - \frac{gx^2}{2}$$

und für den Teil  $l$  (indem wir die Abscisse  $\xi = \frac{l_0}{2} - x$  einführen, Fig. 99)

$$M_0 = \frac{gl_0^2}{8} - \frac{g\xi^2}{2},$$

weshalb

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int M_0 y dx &= 2 \int_0^{l_1} \left( \frac{gl_0 x}{2} - \frac{gx^2}{2} \right) \frac{x}{l_1} dx + 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{gl_0^2}{8} - \frac{g\xi^2}{2} \right) d\xi \\ &= g \frac{5l_1^3 + l^3 + 10l_1^2 l + 6l_1 l^2}{12} \end{aligned}$$

und schließlich

$$X = \frac{g(5l_1^3 + l^3 + 10l_1^2 l + 6l_1 l^2)}{4\mu h(2l_1 + 3l)}.$$

Die für  $X$  abgeleiteten Formeln gelten auch für den Druck im

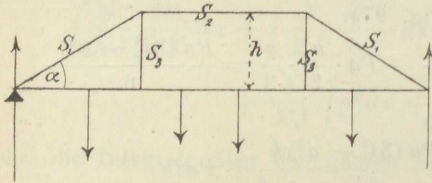


Fig. 100.

Spannriegel eines doppelten Hängewerks, Fig. 100, und für den Horizontalschub eines doppelten Sprengewerks, Fig. 101. Für letzteres ist (unter der Annahme, daß der Druck  $X$  lediglich vom Spannriegel aufgenom-

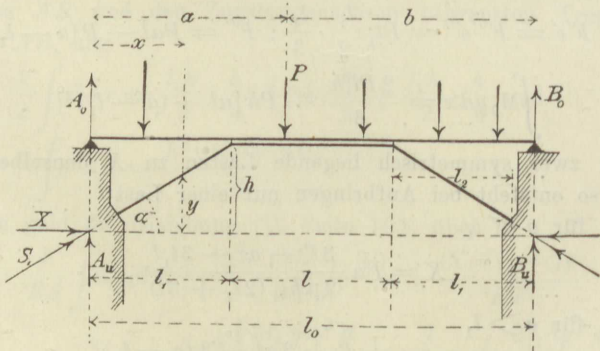


Fig. 101.

men wird):

$$\mu = 1 + \frac{3}{h^2(2l_1 + 3l)} \left( 2 \frac{Jl_2}{F_1} \sec^3 \alpha + \frac{Jl}{F_2} \right) \frac{E}{E_1}.$$





und hieraus

$$(III) \quad D_2 \cos \alpha_2 = -D_1 \cos \alpha_1 \frac{l_6}{l_5 + l_6} - H \frac{h}{l_5 + l_6},$$

wo

$$H = P \frac{l_1 + l_2 + l_3}{h}.$$

Wir bezeichnen mit  $J$  und  $J_0$  beziehungsweise die Trägheitsmomente der Querschnitte von Balken und Säule, mit  $E$  und  $E_0$  die zugehörigen Elastizitätsziffern und erhalten für die Teile  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_4$ ,  $l_5$  und  $l_6$  folgende Momente und Werte  $\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial D_1} dx$ :

$$\text{Teil } l_1: M = Px_1, \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = 0;$$

$$\text{Teil } l_2: M = P(l_1 + x_2) + D_1 \sin \alpha_1 x_2; \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = x_2 \sin \alpha_1$$

$$\int_0^{l_2} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx_2 = \frac{l_2^2 \sin \alpha_1}{3EJ} \left[ \frac{P}{2} (3l_1 + 2l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1 \right];$$

Teil  $l_3$ :  $M = P(l_1 + l_2 + x_3) + D_1 \sin \alpha_1 (l_2 + x_3) + D_2 \sin \alpha_2 \cdot x_3$ ,  
oder, wenn  $D_2$  mittels Gleichung (II) ausgedrückt wird,

$$M = [P(l_1 + l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1] \frac{l_3 - x_3}{l_3}; \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = \frac{l_2}{l_3} (l_3 - x_3) \sin \alpha_1;$$

$$\int_0^{l_3} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx_3 = \frac{l_2 l_3 \sin \alpha_1}{3EJ} [P(l_1 + l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1];$$

$$\text{Teil } l_4: M = Hx_4, \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = 0;$$

$$\text{Teil } l_5: M = H(l_4 + x_5) + D_2 \cos \alpha_2 x_5$$

und, wenn  $D_2$  mittels Gleichung (III) ausgedrückt wird,

$$M = H \left( 1 - \frac{x_5}{l_5 + l_6} \right) l_4 - D_1 \cos \alpha_1 \frac{l_6 x_5}{l_5 + l_6};$$

$$\frac{\partial M}{\partial D_1} = -\cos \alpha_1 \frac{l_6 x_5}{l_5 + l_6};$$

$$\int_0^{l_5} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial D_1} dx_5 = \frac{l_6 l_5^2 \cos \alpha_1}{3(l_5 + l_6)^2 E_0 J_0} \left[ D_1 l_5 l_6 \cos \alpha_1 - \frac{H}{2} l_4 (l_5 + 3l_6) \right];$$

$$\text{Teil } l_6: M = H(l_4 + l_5 + x_6) + D_2 \cos \alpha_2 (l_5 + x_6) + D_1 \cos \alpha_1 x_6$$

und, mit Beachtung von Gleichung (III),

$$M = (Hl_4 - D_1 l_5 \cos \alpha_1) \frac{l_6 - x_6}{l_5 + l_6}; \quad \frac{\partial M}{\partial D_1} = -\frac{l_5 (l_6 - x_6)}{l_5 + l_6} \cos \alpha_1;$$

$$\int_0^{l_6} \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial D_1} dx_6 = \frac{l_5 l_6^3 \cos \alpha_1}{3 (l_5 + l_6)^2 E_0 J_0} [D_1 l_5 \cos \alpha_1 - H l_4].$$

Setzt man nun, nach Gleichung (I), die Summe aller berechneten

Integrale:  $\int_0^z \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial D_1} dx$  gleich Null und multipliziert man mit  $3 EJ$ ,

so erhält man die Gleichung:

$$0 = l_2^2 \sin \alpha_1 \left[ \frac{P}{2} (3 l_1 + 2 l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1 \right] + l_2 l_3 \sin \alpha_1 [P (l_1 + l_2) + D_1 l_2 \sin \alpha_1] + \frac{l_6 l_6^2 \cos \alpha_1}{(l_5 + l_6)^2} \frac{EJ}{E_0 J_0} \left[ D_1 l_5 l_6 \cos \alpha_1 - \frac{H}{2} l_4 (l_5 + 3 l_6) \right] + \frac{l_5 l_6^3 \cos \alpha_1}{(l_5 + l_6)^2} \frac{EJ}{E_0 J_0} [D_1 l_5 \cos \alpha_1 - H l_4] = 0,$$

und hieraus folgt, mit  $\sin \alpha_1 = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \cos \alpha_1 \frac{l_6}{l_2 + l_3}$ ,

$$D_1 = -\frac{1}{2} \frac{P[l_1 l_2 + 2(l_1 + l_2)(l_2 + l_3)] \frac{l_2}{l_2 + l_3} - H \frac{l_4 l_5}{l_5 + l_6} [l_5 + 2 l_6] \frac{EJ}{E_0 J_0}}{l_2^2 \sin \alpha_1 + \frac{l_6^2 l_6}{l_5 + l_6} \cos \alpha_1 \frac{EJ}{E_0 J_0}}.$$

Nun kann man nach Gleichung (II) oder (III) die Strebekraft  $D_2$  finden und sämtliche Biegemomente berechnen.

**Aufgabe 9.** Das in Figur 103 dargestellte Krahngerüst ist bei  $D$  und  $C$  fest, aber gelenkartig gelagert. Bei  $A$  und  $B$  sind starre Eckverbindungen gedacht. Bedeutet  $R$  die Mittelkraft aus den auf den Balken  $AB$  wirkenden, senkrecht angenommenen Lasten, so sind die senkrechten Auflagerkräfte bei  $D$  und  $C$

Fig. 103.

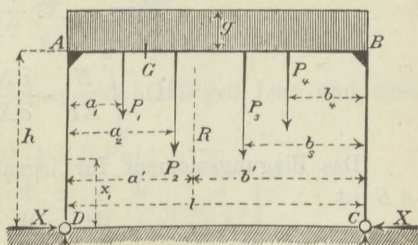


Fig. 104.

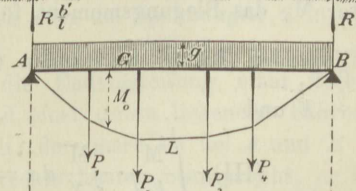


Fig. 105.

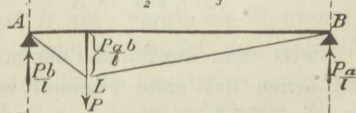
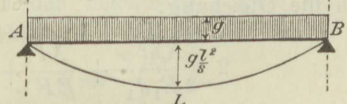


Fig. 106.



bezw.  $= \frac{Rb'}{l}$  und  $= \frac{Ra'}{l}$ . Die wagerechten Auflagerkräfte sind gleich groß und statisch nicht bestimmbar, sie seien  $= X$  gesetzt.

Bleiben Verschiebungen der Angriffspunkte der Auflagerkräfte und Temperaturänderungen unberücksichtigt, so muß  $X$  der Bedingung genügen:

$$\int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx = 0.$$

Bedeutend  $J_1$  und  $E_1$  das Trägheitsmoment und den Elastizitätsmodul für alle Querschnitte der Stäbe  $AD$  und  $CB$ ,  $J$  und  $E$  die entsprechenden Werte für den Stab  $AB$ ,  $F$  den konstanten Querschnitt des Stabes  $AB$ , so folgt für den Stab  $AD$ :

$$M = -Xx_1, \quad N = -\frac{Rb'}{l}, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -x_1, \quad \frac{\partial N}{\partial X} = 0,$$

$$(I) \quad \int_0^h \frac{M}{E_1 J_1} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx_1 = \frac{Xh^3}{3 E_1 J_1}; \quad \int \frac{N}{E_1 F_1} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx_1 = 0.$$

Dieselben Werte der gesuchten Integrale ergeben sich für  $CB$ . Dem Stabe  $AB$  entspricht

$$N = -X, \quad \frac{\partial N}{\partial X} = -1,$$

$$(II) \quad \int_0^l \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} dx = \frac{Xl}{EF}.$$

Das Biegemoment für irgend einen Querschnitt  $G$  des Stabes  $AB$  ist

$$M = M_0 - Xh,$$

unter  $M_0$  das Biegemoment für einen einfachen, bei  $A$  und  $B$  frei aufliegenden Balken verstanden (Fig. 53), und es folgt somit  $\frac{\partial M}{\partial X} = -h$  und

$$(III) \quad \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx = + \frac{Xh^2 l}{EJ} - \frac{h}{EJ} \int_0^l M_0 dx.$$

Setzt man die Summe der mit (I), (II), (III) bezeichneten Integrale (von denen das erste zweimal zu nehmen ist) gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$2 \frac{Xh^3}{3 E_1 J_1} + \frac{Xl}{EF} + \frac{Xh^2 l}{EJ} - \frac{h}{EJ} \int_0^l M_0 dx = 0,$$



und aus dieser folgt:

$$(IV) \quad X = \frac{\int_0^l M_0 dx}{hl \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{E}{E_1} \frac{h}{l} + \frac{J}{Fh^2} \right]}.$$

Hierin bedeutet  $\int_0^l M_0 dx$  den Inhalt der dem einfachen Balken  $AB$

(Fig. 104) entsprechenden Momentenfläche  $ALB$ . Wirkt z. B. auf  $AB$  nur die Einzelkraft  $P$ , Fig. 105, so ist die Momentenfläche  $ALB$  ein Dreieck von der Höhe  $\frac{Pab}{l}$  und dem Inhalte

$$(V) \quad \int_0^l M_0 dx = \frac{Pab}{2}.$$

Einer gleichmäßigen Belastung der Längeneinheit von  $AB$  mit  $g$  entspricht eine Parabelfläche  $ALB$  von der Höhe  $\frac{gl^2}{8}$ , Fig. 106, und dem Inhalte

$$\int_0^l M_0 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{gl^2}{8} \cdot l = \frac{gl^3}{12}.$$

Bei gleichzeitigem Auftreten einer gleichmäßigen Last und einer Schar von Einzellasten entsteht:

$$(VI) \quad X = \frac{gl^3 + 6 \sum Pab}{12hl \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{E}{E_1} \frac{h}{l} + \frac{J}{Fh^2} \right]}.$$

Nachdem  $X$  gefunden ist, lassen sich die Spannungen  $\sigma$  in allen Teilen des Gerüsts leicht berechnen.

**Aufgabe 10.** Fig. 107 stellt die Endversteifung einer Balkenbrücke mit einer oben liegenden und einer unten liegenden Fahrbahn dar. Der untere Endquerträger fehlt; der obere sei bei  $A$  und  $B$  gelenkartig aufgelagert und durch lotrechte Lasten beansprucht, er übe auf die Endständer die Drücke  $A$  und  $B$  aus; vergl. die Figuren 108, 109, 110, in denen die am Querträger und an den Ständern angreifenden Kräfte angegeben sind;  $N$  bedeutet die im Querträger auftretende Längskraft.  $A$  und  $B$  werden nach den bekannten Regeln für den einfachen Balken berechnet. Man erhält

$$A = \frac{\sum Pb}{l}, \quad B = \frac{\sum Pa}{l}.$$

Liegt  $P$  links von  $A$ , so wird  $a$  negativ, liegt es rechts von  $B$ , so wird  $b$  negativ.

$H$  bedeutet den in  $A$  angreifenden, gegebenen Winddruck;  $X$  und  $H - X$  sind die bei  $B'$  und  $A'$  hervorgerufenen wagerechten Stützen-

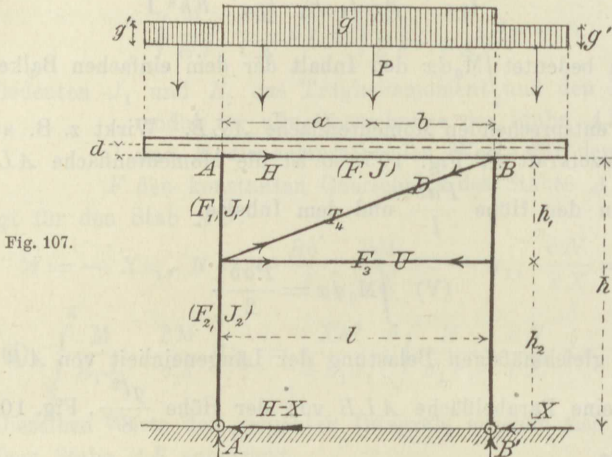


Fig. 107.

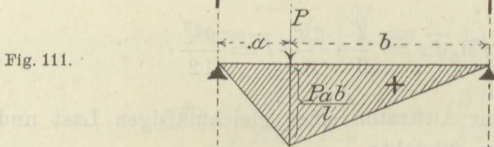


Fig. 111.

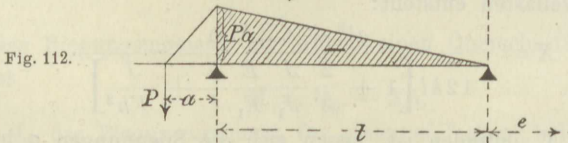


Fig. 112.

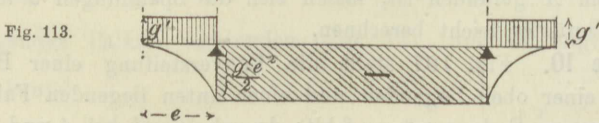


Fig. 113.

widerstände. Die lotrechten Stützendrücke bei  $A'$  und  $B'$  sind  $A' = A - H \frac{h}{l}$  bzw.  $B' = B + H \frac{h}{l}$ .

Damit der Ständer  $AA'$  im Gleichgewicht bleibt, muß  
 $(H + N) h_1 = (X - H) h_2$   
 sein, und hieraus folgt:

$$N = X \frac{h_2}{h_1} - H \frac{h}{h_1}.$$

Ebenso muß sein

$$Uh_1 + Xh = 0, \text{ also}$$

$$U = -X \frac{h}{h_1}.$$

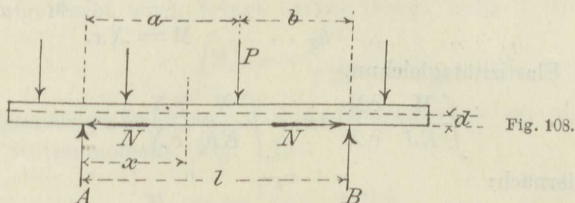


Fig. 108.

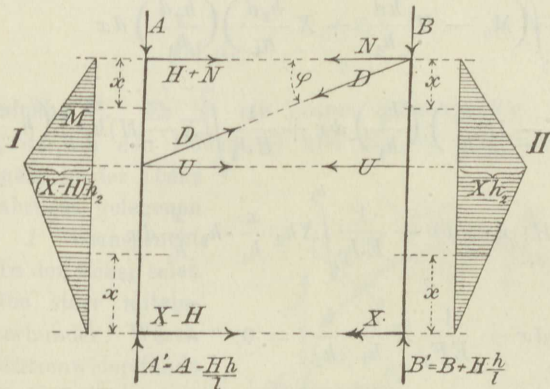


Fig. 109.

Fig. 110.

Ferner ergibt sich für die Diagonale

$$D \sin \varphi = H \frac{h}{l},$$

so daß also  $D$  unabhängig von  $X$  ist. Das gleiche gilt von den Längskräften der Ständer.

Das Biegemoment für einen zwischen  $A$  und  $B$  gelegenen Querschnitt des Querträgers ist, wenn  $d$  der Abstand des Windverbandes von der Achse des Querträgers bedeutet,

$$M = M_0 + Nd = M_0 - H \frac{hd}{h_1} + X \frac{h_2 d}{h_1},$$

wo  $M_0$  das Moment für einen bei  $A$  und  $B$  frei aufliegenden, nur von den lotrechten Kräften  $A$ ,  $B$ ,  $P$  beanspruchten Balken  $AB$  ist. Die Momente für die Querschnitte der ausgekragten Teile des Querträgers sind unabhängig von  $X$ .

Für die Ständer ergeben sich auf Grund der Momentenflächen I und II die folgenden Biegemomente. Es ist an der Stelle  $x$



des linken Teiles  $h_1 \dots M = (X - H) h_2 \frac{x}{h_1}$

„ „ „  $h_2 \dots M = (X - H) x$

„ rechten „  $h_1 \dots M = X h_2 \frac{x}{h_1}$

„ „ „  $h_2 \dots M = X x$ .

Die Elastizitätsgleichung

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx$$

lautet hiernach:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EJ} \int_0^l \left( M_0 - H \frac{hd}{h_1} + X \frac{h_2 d}{h_1} \right) \left( \frac{h_2 d}{h_1} \right) dx \\ & + \frac{1}{EF} \int_0^l \left( X \frac{h_2}{h_1} - H \frac{h}{h_1} \right) \left( \frac{h_2}{h_1} \right) dx + \frac{1}{EJ_1} \int_0^{h_1} (X - H) h_2 \frac{x}{h_1} \left( h_2 \frac{x}{h_1} \right) dx \\ & + \frac{1}{EJ_2} \int_0^{h_2} (X - H) x \cdot x dx + \frac{1}{EJ_1} \int_0^{h_1} X h_2 \frac{x}{h_1} \cdot h_2 \frac{x}{h_1} dx \\ & + \frac{1}{EJ_2} \int_0^{h_2} X x \cdot x dx + \frac{1}{EF_3} X \frac{h}{h_1} \cdot \frac{h}{h_1} l = 0. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Integrale beziehen sich auf den Querträger, die folgenden der Reihe nach auf den linken Ständerteil  $h_1$ , den linken Teil  $h_2$ , den rechten Teil  $h_1$ , den rechten Teil  $h_2$ , den Stab  $U$ .

Nach Ausführung der Integrationen findet man:

$$X = \frac{1}{C} \left\{ -\frac{h_2 d}{h_1} \int M_0 dx + H \left[ \frac{J}{F} \frac{h h_2 l}{h_1^2} + \frac{J h_2^2}{3 J_1} h_1 + \frac{J h_2^3}{3 J_2} + \frac{h_2 h d^2 l}{h_1^2} \right] \right\},$$

$$\text{wo} \quad C = \frac{l h_2^2}{h_1^2} \left( d^2 + \frac{J}{F} \right) + \frac{2 J h_2^2 h_1}{3 J_1} + \frac{2 J h_2^3}{3 J} + \frac{J}{F_3} \frac{h^2 l}{h_1^2}.$$

Das Integral  $\int M_0 dx$  ist gleich dem Inhalte des zwischen  $A$  und  $B$  gelegenen Teiles der  $M_0$  = Fläche. Einer Last zwischen  $A$  und  $B$  entspricht (vergl. Fig. 111):

$$\int M_0 dx = \frac{Pab}{2},$$

und einer links von  $A$  gelegenen Last

$$\int M_0 dx = -\frac{Pal}{2} \quad (\text{Fig. 112}),$$

ebenso einer rechts von  $B$  angreifenden Last

$$\int M_0 dx = -\frac{Pbl}{2}.$$

Eine gleichmäßige Belastung  $g$  f. d. Längeneinheit, die zwischen  $A$  und  $B$  aufgebracht wird, bringt hervor (vergl. Seite 115):

$$\int M_0 dx = \frac{gl^3}{12},$$

und die gleichmäßige Belastung  $g'$  f. d. Längeneinheit der Kragträger erzeugt das Stützenmoment (Fig. 113)

$$M_A = -\frac{g'e^2}{2}, \text{ mithin}$$

$$\int M_0 dx = -\frac{g'e^2 l}{2}.$$

**Aufgabe 11.** Es ist ein ebener Stabzug (Fig. 114) zu untersuchen, der an den Enden ( $A$  und  $B$ ) fest eingespannt ist und von gegebenen, in der Ebene des Stabzuges gelegenen Lasten  $P$  beansprucht wird. In den Ecken seien die Stäbe starr miteinander verbunden. Wären die Stützenwiderstände  $K_a$  und  $K_b$  bekannt, so ließen sich die Momente  $M$  und Längskräfte  $N$  für sämtliche Querschnitte leicht berechnen. Wir zerlegen  $K_a$  nach lotrechter und wagerechter Richtung in  $A$  und  $H_a$ , bezeichnen den Abstand der Kraft  $H_a$  von der Einspannungsstelle mit  $k_a$  (nach oben positiv gezählt) und setzen

$$[1] \quad H_a k_a = M_A.$$

$M_A$  heißt das Einspannungsmoment bei  $A$ . Ebenso zerlegen wir  $K_b$  in  $B$  und  $H_b$  und setzen

$$[2] \quad H_b k_b = M_B.$$

Da zur vollständigen Bestimmung der Stützenwiderstände, nämlich zur Ermittlung der sechs Unbekannten  $A$ ,  $B$ ,  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $M_A$ ,  $M_B$  nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, so müssen drei Elastizitätsbedingungen aufgestellt werden. Hierbei wollen wir den Einfluß der Längskräfte  $N$  vernachlässigen\*) und (von Temperaturänderungen und

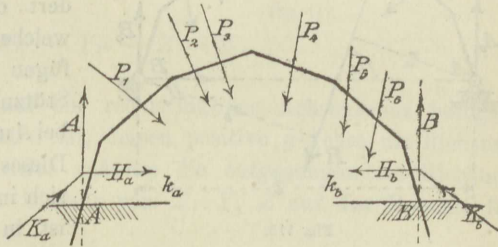


Fig. 114.

\*) Dies ist nur bei größeren Pfeilhöhen zulässig.

Stützenverschiebungen absehend) nur die Biegarbeit  $\int \frac{M^2 ds}{2 EJ}$  zu einem Kleinstwerte machen, wo  $ds$  die Länge eines Elementes einer Stabachse bedeutet.

Zunächst machen wir den Stabzug auf irgend eine Art statisch bestimmt, beispielsweise durch Anordnung eines auf wagerechter Bahn beweglichen Auflagergelenkes  $A$  und eines festen Auflagergelenkes bei  $B$ .) Ist dann  $R$  die Mittelkraft sämtlicher Lasten  $P$ , und sind  $r_a$  und  $r_b$  die Hebelarme von  $R$  in Bezug auf die Gelenke  $A$  und  $B$ , so erhält man mit den aus der Fig. 115 ersichtlichen Bezeichnungen die Stützenwiderstände:

$$[3] \quad A_0 = \frac{R r_b}{l}, \quad B_0 = \frac{R r_a}{l}, \quad H_0 = R \cos \alpha;$$

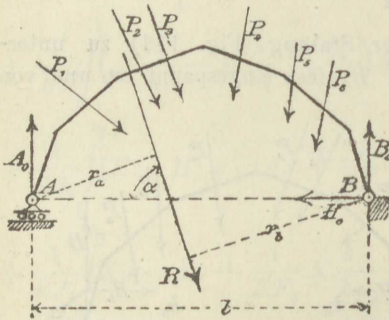


Fig. 115.

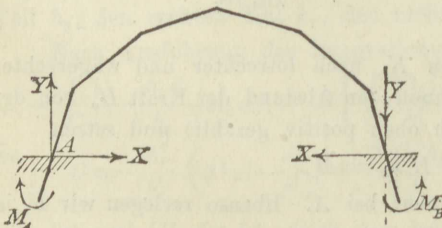


Fig. 116.

sie mögen im Verein mit den Lasten  $P$  die Biegemomente  $M_0$  erzeugen.

Nun betrachten wir gesondert den Einfluß der Kräfte, welche bei  $A$  und  $B$  hinzuzufügen sind, damit die wirkliche Stützung (nämlich Einspannung bei  $A$  und  $B$ ) herbeigeführt werde. Dieses Kräftesystem, welches für sich im Gleichgewicht sein muß, ist in Fig. 116 angegeben; es

besteht aus den entgegengesetzt gleichen wagerechten Widerständen  $X$ , den entgegengesetzt gleichen lotrechten Widerständen  $Y$  und aus zwei bei  $A$  bzw.  $B$  angreifenden Kräftepaaren, deren Momente gleich  $M_A$  und  $M_B$  sind und die wir kurz die Kräftepaare  $M_A$  und  $M_B$

nennen wollen. Zwischen  $M_A$  und  $M_B$  besteht die Beziehung (Gleichgewichtsbedingung):

$$[4] \quad M_A + Yl - M_B = 0.$$

Hat man  $X$ ,  $Y$ ,  $M_A$  mit Hilfe der Elastizitätsbedingungen er-

\*) Diese Stützung erweist sich für die hier ins Auge gefaßten Anwendungen als besonders vorteilhaft.



mittelt, so findet man

$$[5] \quad \begin{cases} A = A_0 + Y; & B = B_0 - Y \\ H_a = X; & H_b = H_0 + X \end{cases}$$

und ist dann imstande, die Widerstände  $K_a$  und  $K_b$  nach Lage und GröÙe zu bestimmen.

Eine wesentliche Vereinfachung der ganzen Rechnung erzielt man nun, wenn man den Angriffspunkt der Kräfte  $X$ ,  $Y$  von  $A$  nach  $O$  verlegt, Fig. 117, und die Lage von  $O$  so bestimmt, daß jede der drei Elastizitätsgleichungen nur eine statisch nicht bestimm-  
bare GröÙe enthält. Das Kräftepaar  $M_A$  ist durch ein anderes Kräftepaar  $Z$  zu ersetzen, so zwar, daß mit den in Fig. 117 angegebenen Koordinaten von  $O$ :

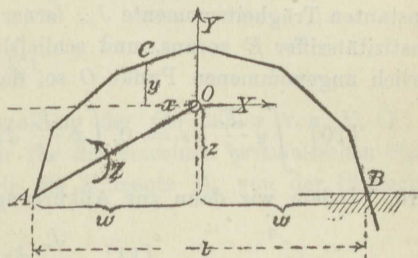


Fig. 117.

$$Xz - Yw - Z = M_A$$

ist.

Wird der Stabzug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogen, dessen Ursprung der Punkt  $O$  ist, dessen positive  $y$ -Achse die Richtung von  $+Y$  und dessen positive  $x$ -Achse die entgegengesetzte Richtung von  $+X$  hat, so ist der Einfluß von  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  auf das Moment für irgend einen Querschnitt  $C$

$$M = -Xy - Yx - Z.$$

Dabei ist das Moment der am Teile  $AC$  des Stabzuges angreifenden äußeren Kräfte positiv angenommen, wenn es rechts herum (d. h. im Sinne des Uhrzeigers) dreht.\*) Im ganzen entsteht

$$[6] \quad M = M_0 - Xy - Yx - Z,$$

und insbesondere an der Stelle  $A$ :

$$[7] \quad M_A = +Xz - Yw - Z.$$

$X$ ,  $Y$  und  $Z$  berechnen wir mittels der Bedingungen

$$[8] \quad \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds = 0; \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial Y} ds = 0; \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial Z} ds = 0;$$

und erhalten wegen

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -y, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = -x, \quad \frac{\partial M}{\partial Z} = -1 \quad \text{die Gleichungen:}$$

\*) Das Moment der am Stücke  $BC$  angreifenden Kräfte ist dann bekanntlich positiv, wenn es links drehend ist.

$$[9] \quad \begin{cases} \int (M_0 - Xy - Yx - Z) \frac{y ds}{EJ} = 0 \\ \int (M_0 - Xy - Yx - Z) \frac{x ds}{EJ} = 0 \\ \int (M_0 - Xy - Yx - Z) \frac{ds}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen multiplizieren wir mit dem beliebig grofsen, konstanten Trägheitsmomente  $J_c$ , ferner setzen wir eine überall gleiche Elastizitätsziffer  $E$  voraus, und schliefslich wählen wir den bislang willkürlich angenommenen Punkt  $O$  so, dafs

$$[10] \quad \int y \frac{J_c}{J} ds = 0, \int x \frac{J_c}{J} ds = 0, \int xy \frac{J_c}{J} ds = 0$$

wird. Indem wir dann zur Abkürzung

$$[11] \quad \frac{J_c}{J} ds = ds'$$

setzen, erhalten wir die einfachen Formeln

$$[12] \quad \begin{cases} X = \frac{\int M_0 y ds'}{T_x}, \text{ wo } T_x = \int y^2 ds' \\ Y = \frac{\int M_0 x ds'}{T_y}, \text{ " } T_y = \int x^2 ds' \\ Z = \frac{\int M_0 ds'}{G}, \text{ " } G = \int ds'. \end{cases}$$

Die Gleichungen [10] lassen sich wie folgt deuten. Schreibt man dem Stabteilchen  $ds$  das Gewicht  $\frac{J_c}{J} ds = ds'$  zu, so bedeuten die beiden ersten Integrale in den Gleichungen [10] die statischen Momente des Stabzuges in Bezug auf die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse, das dritte Integral aber stellt das Zentrifugalmoment des Stabzuges vor. Damit die Gleichungen [10] erfüllt werden, mufs der Punkt  $O$  mit dem Schwerpunkte des Stabzuges zusammenfallen; ferner müssen die Achsen  $x, y$  Hauptachsen sein. In dem in der Fig. 117 vorausgesetzten Falle eines in Bezug auf die Lotrechte durch die Mitte symmetrischen Stabzuges ( $w = \frac{1}{2}l$ ) fällt die  $y$ -Achse mit der Symmetrieachse zusammen.

Die Integrale  $T_x$  und  $T_y$  bedeuten die Trägheitsmomente des Stabzuges in Bezug auf die  $x$ -Achse bzw. die  $y$ -Achse und  $G$  ist das gesamte Gewicht des Stabzuges. Bei Berechnung dieser Integrale ist

es stets zulässig, den Stabzug in prismatische Teile zu zerlegen. Man erhält dann für ein solches Stabstück konstanten Querschnitts

$G = \frac{J_c}{J} s = s'$  und, bezogen auf irgend eine Achse ( $A$ ), mit den Zeichnungen in Fig. 118,

$$[13] \quad T = \frac{J_c}{J} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^2 ds = \frac{J_c}{J} \frac{1}{\sin \alpha} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^2 d\eta = \frac{J_c}{J} \frac{s}{\eta_2 - \eta_1} \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{3} \\ = \frac{1}{3} s' (\eta_2^2 + \eta_2 \eta_1 + \eta_1^2).$$

Behufs übersichtlicher Darstellung der die Zähler von  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  bildenden Integrale, zeichnen wir für die einzelnen prismatischen Stabstücke die  $M_0$ -Linien, indem wir die Momente  $M_0$  von der Stabachse

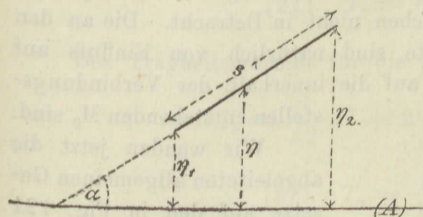


Fig. 118.

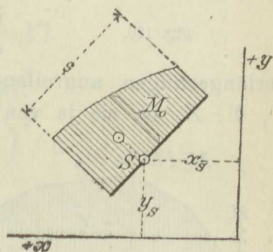


Fig. 119.

aus als Ordinaten auftragen, Fig. 119. Sodann bestimmen wir den Schwerpunkt der zu einem Teile  $s$  gehörigen  $M_0$ -Fläche, ferner den diesem Schwerpunkte entsprechenden Punkt  $S$  der Stabachse, bezeichnen die Koordinaten dieses Punktes mit  $x_s$ ,  $y_s$ , den Inhalt der  $M_0$ -Fläche mit  $\mathfrak{F}_0$  und erhalten für den Teil  $s$ :

$$[14] \quad \begin{cases} \int M_0 y \frac{J_c}{J} ds = \frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0 y_s \\ \int M_0 x \frac{J_c}{J} ds = \frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0 x_s. \end{cases}$$

Diese Werte lassen sich deuten als die auf die Achse  $x$  bzw.  $y$  bezogenen statischen Momente eines dem Punkte  $S$  zugeschriebenen Gewichtes  $\frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0$ . Bezeichnet man also mit  $\mathfrak{S}_x$  und  $\mathfrak{S}_y$  die Summe der statischen Momente aller auf die beschriebene Weise gebildeten Gewichte  $\frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0$  in Bezug auf die Achsen  $x$  und  $y$ , so erhält man



$$[15] \quad X = \frac{\mathfrak{S}_x}{T_x}, \quad Y = \frac{\mathfrak{S}_y}{T_y},$$

während

$$[16] \quad Z = \frac{\Sigma \frac{J_c}{J} \mathfrak{S}_0}{G}$$

ist.

Werden einzelne Stäbe über die Verbindungsstellen mit den Nachbarstäben hinaus verlängert, Fig. 120, so sind diese überstehenden Enden bei Berechnung der Trägheitsmomente  $T$  und Gewichte  $G$  beseitigt zu denken, weil die Momente nur innerhalb der Verbindungsstellen abhängig sind von  $X, Y, Z$ . Aus demselben Grunde kommen auch die  $M_0$ -Flächen der überstehenden Enden bei Berechnung der Flächeninhalte  $\mathfrak{S}_0$  und Ermittlung der Schwerpunkte dieser Flächen nicht in Betracht. Die an den

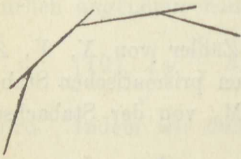


Fig. 120.

Verlängerungen angreifenden Kräfte sind natürlich von Einfluss auf  $X, Y, Z$ , da sie ja von Einfluss auf die innerhalb der Verbindungsstellen entstehenden  $M_0$  sind.

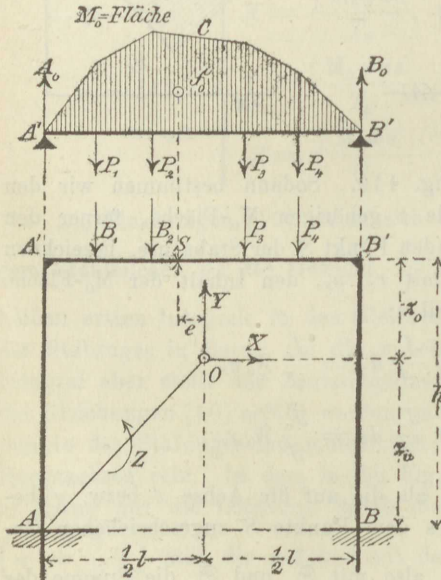


Fig. 121.

Wir wenden jetzt die abgeleiteten allgemeinen Gesetze auf den in Fig. 121 dargestellten Sonderfall an. Es handle sich wie in Aufgabe 10 um die Endversteifung einer Balkenbrücke. Der Querschnitt des Querträgers habe das Trägheitsmoment  $J$ , der Ständerquerschnitt das Trägheitsmoment  $J_v$ . Es sei  $J_c = J$  gewählt. Dann ist das Gewicht des Querträgers gleich  $l$ , das Gewicht eines Ständers:

$$\frac{J}{J_v} h = h',$$

also im ganzen

$$[17] \quad G = l + 2h'.$$

Der Abstand  $z_0$  des Schwerpunktes  $O$  von der Achse des Querträgers ergibt sich aus der Momentengleichung

$$[18] \quad z_0 G = 2h' \cdot \frac{h}{2} = h'h \text{ zu}$$

$$[19] \quad z_0 = \frac{h'h}{l + 2h'}.$$

Das Trägheitsmoment des Stabzuges in Bezug auf die Achse des Querträgers ist

$$T = 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{J}{J_v} h^3 = \frac{2}{3} h' h^2 = \frac{2}{3} h z_0 G, \text{ mithin}$$

$$[20] \quad \begin{cases} T_x = T - G z_0^2 = z_0 G \left( \frac{2}{3} h - z_0 \right) \text{ oder} \\ T_x = \frac{h h'}{3} (2h - 3z_0), \end{cases}$$

wofür man auch, wegen  $h'h = z_0 l + 2h' z_0$  schreiben darf:

$$[21] \quad T_x = \frac{h z_0}{3} (2l + h').$$

Das Trägheitsmoment für die  $y$ -Achse ist:

$$T_y = \frac{1}{12} l^3 + 2 \frac{J}{J_v} h \left( \frac{l}{2} \right)^2, \text{ d. i.}$$

$$[22] \quad T_y = \frac{l^2}{12} (l + 6h').$$

Auf den Querträger  $A'B'$  mögen beliebige lotrechte Lasten  $P$  wirken; die Ständer hingegen seien unbelastet. Die  $M_0$ -Fläche stimmt dann mit der Momentenfläche eines einfachen Balkens  $A'B'$ , der an den Enden frei aufliegt, überein; ihr Inhalt sei  $\mathfrak{F}_0$ , ihr Schwerpunkt habe von der  $y$ -Achse den Abstand  $e$ . Die statischen Momente  $\mathfrak{S}_x$  und  $\mathfrak{S}_y$  sind

$$\mathfrak{S}_x = \mathfrak{F}_0 z_0, \quad \mathfrak{S}_y = \mathfrak{F}_0 e$$

und man erhält

$$[23] \quad H = X = \frac{\mathfrak{F}_0 z_0}{T_x} = \frac{3 \mathfrak{F}_0}{h(2l + h')};$$

$$[24] \quad Y = \frac{\mathfrak{F}_0 e}{T_y}; \quad Z = \frac{\mathfrak{F}_0}{G}.$$

Setzt man den wagerechten Stützenwiderstand  $H = X$  mit dem Kräftepaare, dessen Moment gleich  $Z$  ist, zu einer Resultierenden (deren GröÙe wieder  $= X$  ist) zusammen, so findet man den Angriffspunkt  $L$  derselben (vergl. Fig. 122) mit Hilfe der Gleichung

$$X \cdot \overline{LL'} = X z_u - Z,$$

woraus

$$\overline{LL'} = z_u - \frac{T_x}{z_o G} = z_u - \left( \frac{2h}{3} - z_o \right) = \frac{h}{3}.*)$$

Der Neigungswinkel  $\beta$  der Mittelkraft  $R$  aus  $Y$  und  $X$  ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Y}{X} = \frac{e T_x}{z_o T_y} = \frac{e}{v},$$

wo

$$[25] \quad v = \frac{l^2 (l + 6h')}{4h (2l + h')}$$

eine von der Belastung unabhängige Strecke bedeutet. Bestimmt man also in der  $y$ -Achse im Abstände  $v$  von der Achse des Querträgers einen

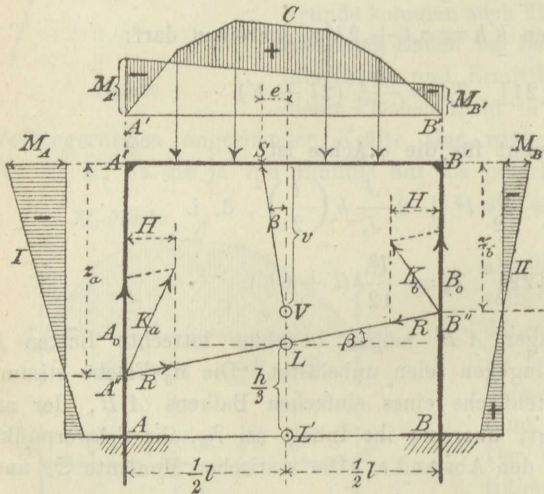


Fig. 122.

festen Punkt  $V$  und verbindet  $V$  mit dem lotrecht unter dem Schwerpunkte der  $M_0$ -Fläche gelegenen Punkte  $S$  der Querträgerachse durch eine Gerade, so steht die Richtung der Kraft  $R$  senkrecht auf dieser Geraden. Hat man hiernach die Richtung von  $R$  bestimmt, so findet man die GröÙe von  $R$ , indem man  $H$  mittels Gleichung [23] berechnet.

Setzt man schließlich  $R$  mit dem Stützenwiderstande  $A_0$  des einfachen Balkens  $A'B'$  zusammen, so erhält man den Stützenwiderstand (Kämpferdruck)  $K_a$  und ganz ebenso findet man  $K_b$  als Mittelkraft aus  $R$  und  $B_0$ . Bezeichnet man mit  $z_a$  und  $z_b$  die Entfernungen der Querträgerachse von den Punkten  $A''$  und  $B''$ , in denen die Ständerachsen von den Kräften  $R$  geschnitten werden, so sind die Angriffsmomente für die Endquerschnitte  $A'$  und  $B'$  des Querträgers:

$$[26] \quad M_{A'} = -Hz_a; \quad M_{B'} = -Hz_b,$$

\*) Nach Gleichung [20] ist  $\frac{T_x}{z_o G} = \frac{2h}{3} - z_o$ .



und man erhält die Momentenfläche des Querträgers, indem man von der  $M_0$ -Fläche  $A'CB'$  ein Trapez in Abzug bringt, dessen Endhöhen gleich  $M_{A'}$  bzw.  $M_{B'}$  sind. Durch die Momente  $M_{A'}$  und  $M_{B'}$  sowie durch die Punkte  $A''$ ,  $B''$  sind auch die Momentenflächen  $I$  und  $II$  der Ständer bestimmt.

Es möge noch der Einfluß einer zwischen  $A'$  und  $B'$  aufgebrachten Einzellast  $P$ , deren Abstand von der Mitte gleich  $\xi$  sei, für sich verfolgt werden. Die  $M_0$ -Fläche ist ein Dreieck von

der Höhe  $\frac{Pab}{l}$  (Fig. 123),

dessen Schwerpunkt im Abstände  $e = \frac{1}{3}\xi$  von der

Mitte liegt. Bestimmt man also auf der Mittellinie den festen Punkt  $V'$  im Abstände  $3v$  von  $A'B'$  und verbindet man  $V'$  mit dem Angriffspunkte  $C$  von  $P$  durch eine Gerade, so ist  $A''B'' \perp V'C$ . Die Kämpferdrücke  $K_a$  und  $K_b$  treffen  $P$  in demselben Punkte  $C'$ ; der lotrechte Abstand  $n$  dieses Punktes von der Geraden  $A''B''$  ist bestimmt durch die Gleichung\*)

$$\frac{n}{a} = \frac{A_0}{H} = \frac{Pb}{lH},$$

woraus

$$[27] \quad n = \frac{Pab}{lH}.$$

Nun ist aber

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{Pab}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pab}{2},$$

ferner

$$[28] \quad H = \frac{3\tilde{\sigma}_0}{h(2l+h')}, \text{ d. i.}$$

\*) Zum Beweise denke man  $K_a$  wie in Fig. 122 in  $A_0$  und  $R$  zerlegt.

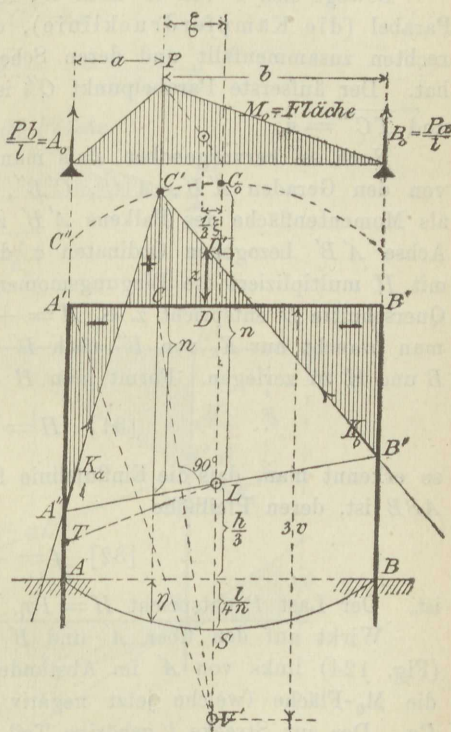


Fig. 123.

$$[29] \quad H = \frac{3Pab}{2h(2l + h')},$$

und man erhält daher für  $n$  den von der Lage der Last unabhängigen, festen Wert

$$[30] \quad n = \frac{2h}{3l} (2l + h').$$

Bewegt sich  $P$  von  $A'$  nach  $B'$ , so beschreibt der Punkt  $C'$  eine Parabel (die Kämpferdrucklinie), deren Achse mit der Mittelloten zusammenfällt und deren Scheitel  $C_0$  von  $L$  den Abstand  $n$  hat. Der äußerste Parabelpunkt  $C''$  ist bestimmt durch  $TL \perp A'V'$  und  $TC'' = n$ .

Noch sei hervorgehoben, daß man die in der Fig. 123 schraffierte, von den Geraden  $A'B'$ ,  $A''C'$ ,  $C'B''$ ,  $A'A''$ ,  $B'B''$  begrenzte Fläche als Momentenfläche des Balkens  $A'B'$  auffassen darf, denn die auf die Achse  $A'B'$  bezogenen Ordinaten  $z$  des Linienzuges  $A''C'B''$  geben mit  $H$  multipliziert die Biegemomente für den Balken  $A'B'$ . Dem Querschnitte  $D$  entspricht z. B.  $M = +Hz$ , was leicht einzusehen ist; man braucht nur  $K_b$  von  $B''$  nach  $D'$  hin zu verschieben und dort in  $B$  und  $H$  zu zerlegen. Formt man  $H$  durch Einführung von  $n$  um in

$$[31] \quad H = \frac{Pab}{ln},$$

so erkennt man, daß die Einflußlinie für  $H$  eine symmetrische Parabel  $ASB$  ist, deren Pfeilhöhe

$$[32] \quad f = \frac{1}{4} \frac{l}{n}$$

ist. Der Last  $P$  entspricht  $H = P\eta$ .

Wirkt auf den über  $A'$  und  $B'$  hinaus verlängerten Querträger (Fig. 124) links von  $A'$  im Abstände  $a$  von  $A'$  eine Last  $P$ , so ist die  $M_0$ -Fläche (welche jetzt negativ ist) ein Dreieck von der Höhe  $Pa$ . Der zur Strecke  $l$  gehörige Teil dieser Fläche hat den Inhalt

$$\mathfrak{F}_0 = -\frac{Pal}{2},$$

es entsteht also

$$[33] \quad H = \frac{-3Pal}{2h(2l + h')} = -\frac{Pa}{n}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes der Fläche  $\mathfrak{F}_0$  von der Mittellinie beträgt  $e = \frac{1}{6}l$ , weshalb

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e}{v} = \frac{\frac{1}{6}l}{v} = \frac{\frac{1}{2}l}{3v},$$

und hieraus folgt  $A''B'' \perp A'V'$ . Für  $A_0$  und  $B_0$  erhält man

$$A_0 = \frac{Pb}{l}, \quad B_0 = -\frac{Pa}{l}.$$

Die Lage des Punktes  $C''$ , in welchem der Kämpferdruck  $K_b$  die Achse des linken Ständers schneidet, ist durch die Gleichung

$$A''C'' : l = B_0 : H$$

bestimmt, und zwar folgt hieraus

$$\overline{A''C''} = n.$$

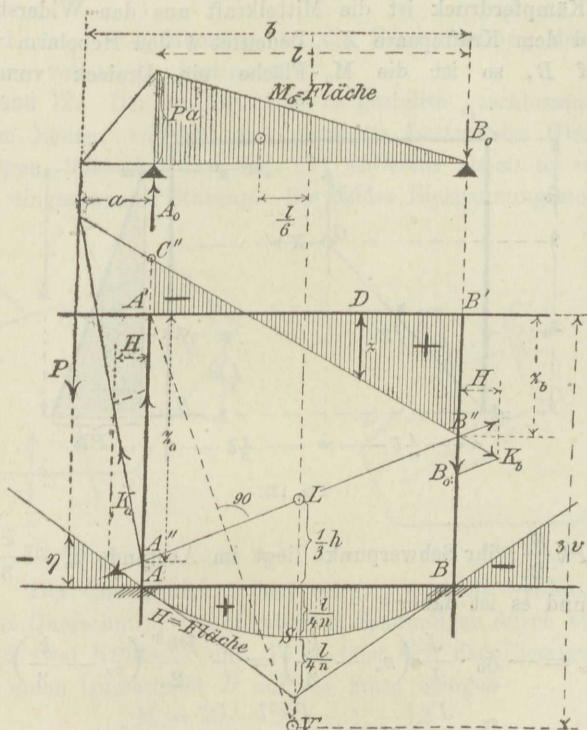


Fig. 124.

Die Fläche zwischen den Geraden  $A'B'$  und  $C''B''$  darf als Momentenfläche des Balkens  $A'B'$  aufgefasst werden. Dem Querschnitt  $D$  entspricht  $M = +Hz$ . Für den Querschnitt  $B'$  ist  $M = Hz_b$ , während man an der Stelle  $A'$  entweder  $M = -Pa$  oder  $M = H(n - z_a)$  erhält, jenachdem man den Schnitt links oder rechts von der Mittellinie des Ständers  $AA'$  führt.\*) Den Ständerquerschnitten  $A'$ ,  $B'$  entsprechen die Momente  $M_{A'} = -Hz_a$ ,  $M_{B'} = -Hz_b$ .

\*) In Wirklichkeit ist dieser schroffe Übergang selbstverständlich nicht vorhanden.



Die Einflußlinie für  $H$  infolge von Lasten, die links von  $A'$  oder rechts von  $B'$  liegen, besteht (wegen  $H = -P \frac{a}{n}$ ) aus den Endtangente der Parabel  $ASB$ .

Greift an der Endversteifung eine wagerechte Kraft  $P$  an, Fig. 125, \*) so führt man als statisch bestimmtes Hauptsystem zweckmäßig den bei  $B$  fest eingespannten, bei  $A$  freien Stabzug ein. Es wird dann nur der Ständer  $B'B$  durch Momente  $M_0$  beansprucht und der linke Kämpferdruck ist die Mittelkraft aus den Widerständen  $X$  und  $Y$  und dem Kräftepaare  $Z$ . Bedeutet  $k$  den Hebelarm von  $P$  in Bezug auf  $B$ , so ist die  $M_0$ -Fläche ein Dreieck vom Inhalte

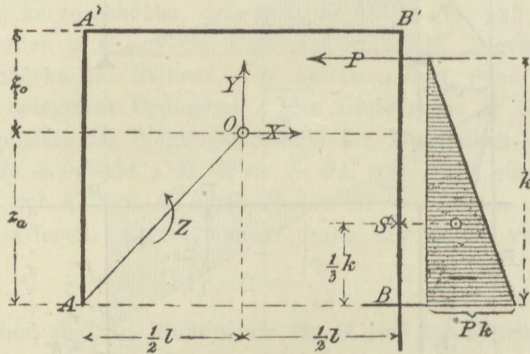


Fig. 125.

$\mathfrak{S}_0 = -Pk \frac{k}{2}$ ; ihr Schwerpunkt liegt im Abstände  $z_u - \frac{k}{3}$  von der  $x$ -Achse, und es ist daher

$$\mathfrak{S}_x = -\mathfrak{S}_0 \cdot \frac{J}{J_v} \left( z_u - \frac{k}{3} \right) = + \frac{Pk^2}{2} \left( z_u - \frac{k}{3} \right) \frac{J}{J_v}$$

$$\mathfrak{S}_y = -\mathfrak{S}_0 \frac{J}{J_v} \frac{l}{2} = + \frac{Pk^2 l}{4} \frac{J}{J_v}.$$

Man erhält also:

$$[34] \quad X = \frac{Pk^2 \left( z_u - \frac{k}{3} \right)}{2 T_x} \frac{J}{J_v}, \quad Y = \frac{Pk^2 l}{4 T_y} \frac{J}{J_v}, \quad Z = -\frac{Pk^2}{2 G} \frac{J}{J_v}$$

und ist nun im stande, die Angriffsmomente für die Querschnitte  $A$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $B$  zu berechnen. Es ist

\*) Es handelt sich hier um den Einfluß des Winddrucks. Der Windverband liegt in der Regel unterhalb der Achse des Querträgers.

$$[35] \quad \begin{cases} M_A = + Xz_u - Y\frac{l}{2} - Z \\ M_{A'} = - Xz_o - Y\frac{l}{2} - Z \\ M_{B'} = - Xz_o + Y\frac{l}{2} - Z \\ M_B = + Xz_u + Y\frac{l}{2} - Z - Pk. \end{cases}$$

Durch diese vier Momente ist die Beanspruchung des Rahmens auf Biegung vollständig bestimmt.

**Aufgabe 12.** Der in Fig. 126 dargestellte geschlossene Stabzug mit steifen Ecken, an dem sich gegebene Lasten das Gleichgewicht halten mögen, läßt sich nach Fig. 127 auffassen als ein an zwei Enden  $C$  und  $C'$  eingespannter Stabzug. Die beiden Einspannungsstellen fallen

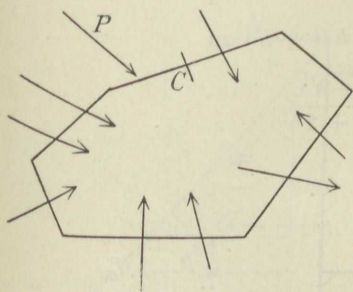


Fig. 126.

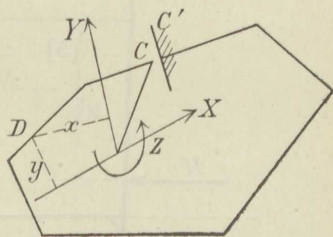


Fig. 127.

zusammen. Der Querschnitt  $C$  darf beliebig gewählt werden. Ersetzt man die im Querschnitte  $C$  auftretenden Spannungen durch ein Kräftepaar  $Z$  und zwei Kräfte  $X$  und  $Y$ , so läßt sich das Biegemoment für irgend einen Querschnitt  $D$  auf die Form bringen

$$M = M_0 - Xy - Yx - Z$$

wo  $y$  und  $x$  die vom Schwerpunkte des Querschnitts  $D$  auf  $X$  und  $Y$  (die sich nicht rechtwinklig zu kreuzen brauchen) gefällten Lote bedeuten und  $M_0$  das Biegemoment infolge der am Teil  $DC$  des Stabzuges angreifenden Lasten  $P$ .

Wird das Koordinatensystem  $(x, y)$  ebenso wie bei Aufgabe 11 so gewählt, daß die Gleichungen

$$[1] \quad \int y \frac{J_c}{J} ds = 0, \quad \int x \frac{J_c}{J} ds = 0, \quad \int \frac{J_c}{J} ds = 0$$

erfüllt werden (Seite 122), so gelten für  $X, Y, Z$  die auf Seite 124 abgeleiteten Gleichungen:

$$[2] \quad X = \frac{\mathfrak{S}_x}{T_x}, \quad Y = \frac{\mathfrak{S}_y}{T_y}$$

$$[3] \quad Z = \frac{\sum \frac{J_o}{J} \mathfrak{S}_o}{G}$$

Als Beispiel untersuchen wir den in Fig. 128 dargestellten Rahmen, der bekanntlich bei der Querversteifung eiserner Brücken eine große Rolle spielt. Zum Trägheitsmoment  $J_o$  wählen wir das Trägheitsmoment  $J_u$  des Querschnitts des Querträgers. Die Gewichte von Ständer und Querriegel bezeichnen wir mit

$$\frac{J_u}{J_v} h = h' \quad \text{und} \quad \frac{J_u}{J_o} l = l'.$$

Das Gewicht des ganzen Rahmens ist dann

$$[4] \quad G = l + l' + 2h';$$

seine wagerechte Schwerachse ergibt sich aus der Momentengleichung

$$z_o G = lh + 2h' \frac{h}{2} = h(l + h') \quad \text{zu}$$

$$[5] \quad z_o = \frac{h(l + h')}{l + l' + 2h'}.$$

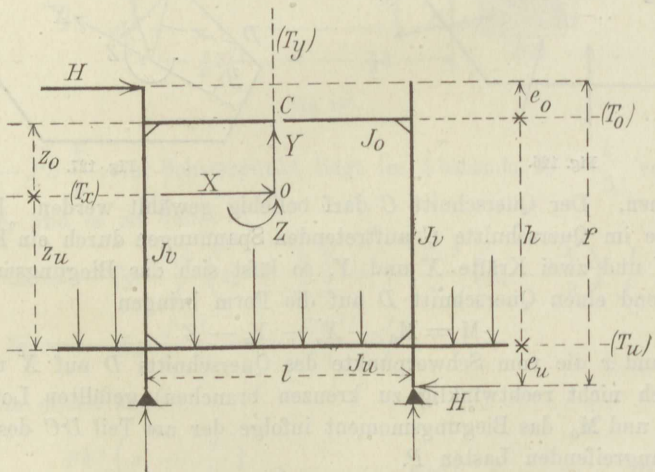


Fig. 128.

Den Schnitt  $C$  führen wir durch die Mitte des Querriegels. Die in die Figur eingetragenen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  mögen sich auf den links vom Schnitte gelegenen Querschnitt  $C$  beziehen. Da die  $Y$ -Achse eine Symmetrieachse ist, werden die Bedingungen [1] erfüllt.

Das Trägheitsmoment des Rahmens in Bezug auf die Achse des oberen Querriegels ist



$$T_o = 2 \frac{h^3}{3} \frac{J_u}{J_v} + lh^2 = h^2 \left( \frac{2}{3} h' + l \right)$$

und für die  $X$ -Achse

$$T_x = T_o - Gz_o^2 = T_o - h(l + h')z_o.$$

Setzt man  $z_o = h - z_u$ , so erhält man

$$[6] \quad T_x = h \left[ z_u (h' + l) - \frac{1}{3} h' h \right].$$

Das Trägheitsmoment für die  $Y$ -Achse wird

$$T_y = \frac{1}{12} l^3 + \frac{1}{12} l^3 \frac{J_u}{J_o} + 2h \left( \frac{l}{2} \right)^2 \frac{J_u}{J_v},$$

$$[7] \quad T_y = \frac{l^2}{12} (l + l' + 6h').$$

Wir untersuchen getrennt den Einfluß der Lasten  $H$  und  $P$ .

1. **Einfluß der wagerechten Kräfte  $H$ .** Fig. 129. Im Falle  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=0$  sind der obere Querriegel und der rechte

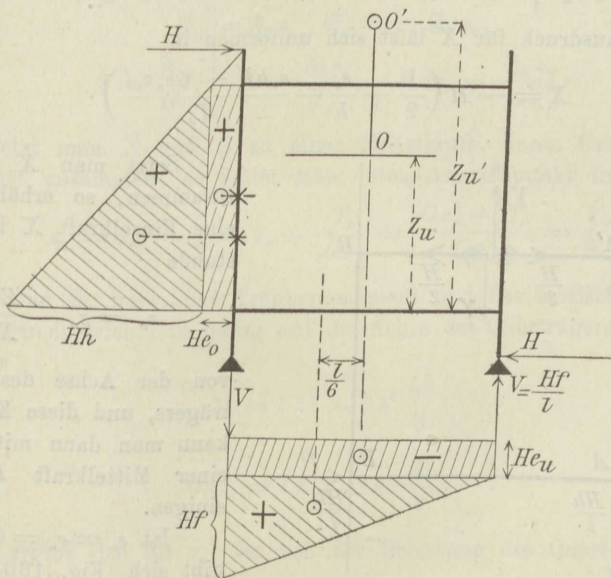


Fig. 129.

Ständer spannungslos. In den Stützpunkten  $A$  und  $B$  werden zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Widerstände  $V = \frac{Hf}{l}$  hervorgerufen. Die  $M_o$ -Fläche des linken Ständers läßt sich in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegen, beide Flächen von positivem Vorzeichen; die  $M_o$ -Fläche des Querträgers zerfällt in ein positives Dreieck und ein negatives Rechteck. Man erhält:

$$\Sigma \frac{J_c}{J} \mathfrak{F}_0 = \frac{J_u}{J_v} \left( H e_o h + H \frac{h^2}{2} \right) + \frac{H f l}{2} - H e_u l,$$

$$\mathfrak{S}_y = \frac{J_u}{J_v} \left( H e_o h + H \frac{h^2}{2} \right) \frac{l}{2} + \frac{H f l}{2} \cdot \frac{l}{6},$$

$$\mathfrak{S}_x = - \frac{J_u}{J_v} \left[ H e_o h \left( z_u - \frac{h}{2} \right) + H \frac{h^2}{2} \left( z_u - \frac{h}{3} \right) \right] + \left( \frac{H f l}{2} - H e_u l \right) z_u$$

und findet

$$Z = \frac{H}{2 G} [h' (2 e_o + h) + l (f - 2 e_u)]$$

$$Y = \frac{H l}{12 T_y} [3 h' (2 e_o + h) + f l],$$

$$X = - \frac{H}{2 T_x} \left\{ h' \left[ 2 e_o \left( z_u - \frac{h}{2} \right) + h \left( z_u - \frac{h}{3} \right) \right] + z_u l (f - 2 e_u) \right\}.$$

Der Ausdruck für  $X$  läßt sich umformen in

$$X = - H \left( \frac{1}{2} + \frac{e_o}{h} - \frac{e_o h h' + 6 e_u z_u l}{T_x} \right).$$

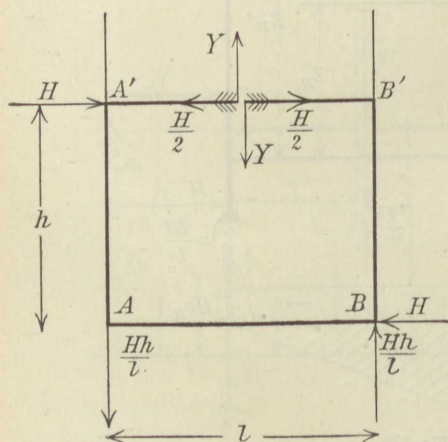


Fig. 130.

Setzt man  $X$  mit  $Z$  zusammen, so erhält man eine Einzelkraft  $X$  im Abstände

$$z_u' = z_u - \frac{Z}{X}$$

von der Achse des Querträgers, und diese Kraft  $X$  kann man dann mit  $Y$  zu einer Mittelkraft  $K$  vereinigen.

Ist  $e_o = e_u = 0$  so ergibt sich (Fig. 130)

$$Z = \frac{H h (l + h')}{2 G} = \frac{H z_o}{2},$$

$$X = - \frac{1}{2} H; \quad z_u' = z_u + z_o = h,$$

$$Y = \frac{H h l (3 h' + l)}{12 T_y} = H \frac{h}{l} \cdot \frac{3 h' + l}{6 h' + l + l'}.$$

Die Biegemomente für die 4 Ecken sind dann

$$M_A = -\frac{H}{2} h - Y \frac{l}{2}, \quad M_B = -M_A,$$

$$M_{A'} = -Y \frac{l}{2}, \quad M_{B'} = +Y \frac{l}{2}.$$

Für den Fall  $J_o = J_u$ , also  $l = l'$ , erhält man

$$Y = \frac{H}{2} \frac{h}{l}, \quad M_A = M_{B'} = -M_B = -M_{A'} = \frac{Hh}{4}.$$

2. **Einfluss der senkrechten Lasten  $P$ .** Fig. 131a. Am Querträger  $AB$  mögen Lasten  $P$  angreifen, die zwischen  $A$  und  $B$  liegen, die Kragarme seien also unbelastet. Die  $M_0$ -Fläche stimmt dann mit der Momentenfläche eines einfachen Balkens  $AB$  überein, der an den Enden frei aufliegt; ihr Flächeninhalt sei  $\mathfrak{F}_0$  und der Abstand ihres Schwerpunktes von der  $Y$ -Achse sei  $e$ . Dann ergibt sich

$$\mathfrak{S}_y = \mathfrak{F}_0 e, \quad \mathfrak{S}_x = -\mathfrak{F}_0 z_u,$$

$$Z = \frac{\mathfrak{F}_0}{G}, \quad Y = \frac{\mathfrak{F}_0 e}{T_y}, \quad X = -\frac{\mathfrak{F}_0 z_u}{T_x}.$$

Setzt man  $X$  und  $Z$  zu einer Mittelkraft, deren Gröfse wieder  $= X$  ist, zusammen, so findet man deren Angriffspunkt in der Höhe

$$z_u' = z_u - \frac{Z}{X} = z_u + \frac{T_x}{G z_u} = \frac{G z_u^2 + T_x}{G z_u} = \frac{T_u}{\mathfrak{S}_u},$$

wo  $T_u$  und  $\mathfrak{S}_u$  bezw. das Trägheitsmoment und das statische Moment des Rahmengewichts in Bezug auf die Achse des Querträgers bedeuten. Da nun

$$T_u = l' h^2 + 2 h' \frac{h^2}{3},$$

$$\mathfrak{S}_u = l' h + 2 h' \frac{h}{2}$$

ist, so ergibt sich für  $z_u'$  der von der Belastung des Querträgers unabhängige Wert

$$z_u' = \frac{h}{3} \frac{3l' + 2h'}{l' + h}.$$

Die wichtigsten Belastungszustände sind nun die folgenden.

Gleichförmige Belastung mit  $g$  für die Längeneinheit Fig. 131b.

Die  $M_0$ -Linie ist eine Parabel vom Pfeil  $\frac{1}{8} gl^2$ . Es ist



$$\mathfrak{F}_0 = \frac{2}{3} \frac{gl^2}{8} \cdot l = \frac{gl^3}{12},$$

mithin

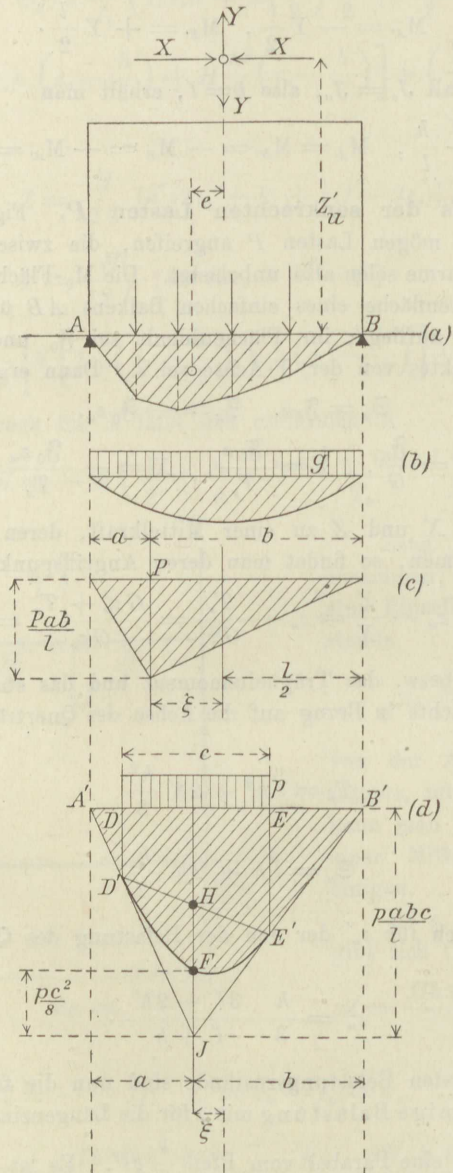


Fig. 131 a—d.

$$X = - \frac{gl^3 z_u}{12 T_x}, \quad Y = 0.$$

Eine Einzellast  $P$ , Fig. 131c, entspricht als  $M_0$ -Fläche im Dreieck von der Höhe  $\frac{Pab}{l}$ , dessen Schwerpunkt von der  $y$ -Achse den Abstand

$e = \frac{1}{3} \xi$  hat. Man erhält:

$$X = - \frac{Pab z_u}{2 T_x}, \quad Y = + \frac{Pab \xi}{6 T_y}.$$

Liegt eine teilweise gleichförmige Belastung, welche  $p$  für die Längeneinheit sein möge und die Strecke  $c$  (Fig. 131d) bedecke,

vor, so erhält man die  $M_0$ -Fläche wie folgt. Man betrachtet  $pc$  als eine im Mittelpunkte der Strecke  $c$  angreifende Einzellast, ermittelt das zugehörige Momentendreieck  $A'JB'$  und berechnet dessen Inhalt:

$pc \frac{ab}{2}$ . Nun bestimmt man

senkrecht unter den Endpunkten  $D$  und  $E$  der belasteten Strecke  $c$  die Punkte  $D'$  und  $E'$  der Geraden  $A'J$  und  $B'J$  und zeichnet eine

Parabel  $D'HE'$ , welche die Geraden  $A'J$  und  $B'J$  in  $D'$  und  $E'$  berührt. Die in Fig. 131d schraffierte Fläche ist die  $M_0$ -Fläche. Es ist

$FH = HJ = \frac{pc^2}{8}$ . Der Inhalt der von den Geraden  $D'J$  und  $E'J$

und der Parabel begrenzten Fläche ist  $\frac{1}{3} \cdot \frac{pc^2}{8} \cdot c = \frac{pc^3}{24}$ . Es ergibt sich also

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{pabc}{2} - \frac{pc^3}{24},$$

$$\mathfrak{S}_y = \frac{pabc}{2} \cdot \frac{\xi}{3} - \frac{pc^3}{24} \cdot \xi,$$

$$Y = \frac{\mathfrak{S}_y}{T_y}, \quad X = - \frac{\mathfrak{S}_0 z_u}{T_x}.$$

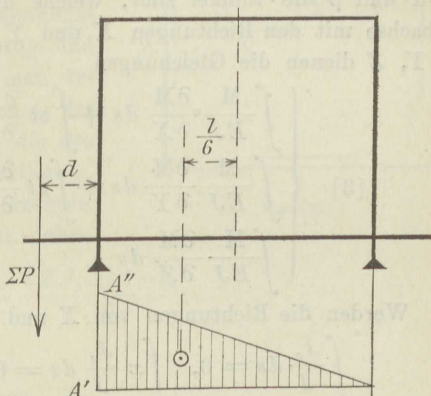


Fig. 132.

Wird der linke Ausleger durch Lasten  $P$ , deren Mittelkraft  $\Sigma P$  sei, belastet, Fig. 132, so ist die  $M_0$ -Fläche des Querträgers ein Dreieck von der Höhe  $A'A'' = -d\Sigma P$ , wo  $d$  den Abstand der Mittelkraft von  $A$  ist. Man erhält

$$\mathfrak{F}_0 = -\Sigma P \frac{ld}{2}, \quad \mathfrak{E}_y = -\Sigma P \frac{ld}{2} \cdot \frac{l}{6}.$$

**Aufgabe 13.** Der in Fig. 126 dargestellte geschlossene Stabzug werde ungleichmäßig um  $t^0$  erwärmt. Infolgedessen werden die Stabquerschnitte durch Längskräfte  $N$  und Momente  $M$  beansprucht und zwar ist für den Querschnitt an der Stelle  $xy$

$$[1] \quad M = -Xy - Yx - Z,$$

$$[2] \quad N = +X \cos \alpha + Y \cos \beta,$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel sind, welche die den Punkt  $xy$  enthaltende Stabachse mit den Richtungen  $X$  und  $Y$  bildet. Zur Berechnung von  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  dienen die Gleichungen

$$[3] \quad \begin{cases} \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds + \int \epsilon t \frac{\partial N}{\partial X} ds = 0, \\ \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial Y} ds + \int \epsilon t \frac{\partial N}{\partial Y} ds = 0, \\ \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial Z} ds = 0. *) \end{cases}$$

Werden die Richtungen von  $X$  und  $Y$  wieder so gewählt, daß

$$\int \frac{J_c}{J} ds = 0, \quad \int x \frac{J_c}{J} ds = 0, \quad \int y \frac{J_c}{J} ds = 0,$$

so ergibt sich

$$[4] \quad X = \frac{EJ_c \int \epsilon t \cos \alpha ds}{T_x},$$

$$[5] \quad Y = \frac{EJ_c \int \epsilon t \cos \beta ds}{T_y},$$

$$Z = 0.$$

Schreibt man nun allen Punkten eines und desselben Stabes ein und dieselbe Temperaturänderung zu, \*\*) so gehen die für  $X$  und  $Y$  gefundenen Ausdrücke über in

\*) Vergl. Seite 87, Gleichung (51). Die Integrale  $\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} ds$  und  $\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial Y} ds$  haben wir, wie in Aufgabe 12, vernachlässigt. Auch haben wir  $\Delta t = 0$  angenommen.

\*\*) Längere Stäbe kann man in kürzere Stücke zerlegen und jedem Stück einen besonderen Wert  $t$  beilegen. Auf diese Weise läßt sich der Genauigkeitsgrad der Rechnung beliebig steigern.



$$[6] \quad X = - \frac{\varepsilon E J_c \sum t s_x}{T_x},$$

$$[7] \quad Y = - \frac{\varepsilon E J_c \sum t s_y}{T_y},$$

wo  $s_x$  und  $s_y$  die Projektionen der Stablängen  $s$  auf die Richtungen von  $X$  und  $Y$  bedeuten.

**Beispiel.** Es liege der in der Aufgabe 12 untersuchte Rechteck-Rahmen vor, Fig. 133. Der obere Querriegel werde erwärmt um  $t_o$ , der untere um  $t_u$ , der linke Ständer um  $t_l$ , der rechte um  $t_r$ . Um den Projektionen  $s_x$  und  $s_y$  der Stablängen das richtige Vorzeichen zu geben, umfahre man, von der Einspannungsstelle  $C'$  ausgehend, den Stabzug und deute dies durch Pfeile an; man erkennt dann, daß die Projektion  $s_x$  des oberen Querriegels  $= +l$  ist, die des unteren  $= -l$ , und die Projektion  $s_y$  des linken Ständers  $= +h$ , des rechten Ständers  $= -h$ . Man erhält daher

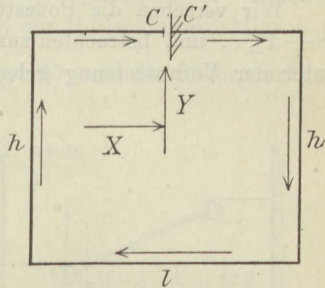


Fig. 133.

$$X = - \frac{\varepsilon E J_c l (t_o - t_u)}{T_x},$$

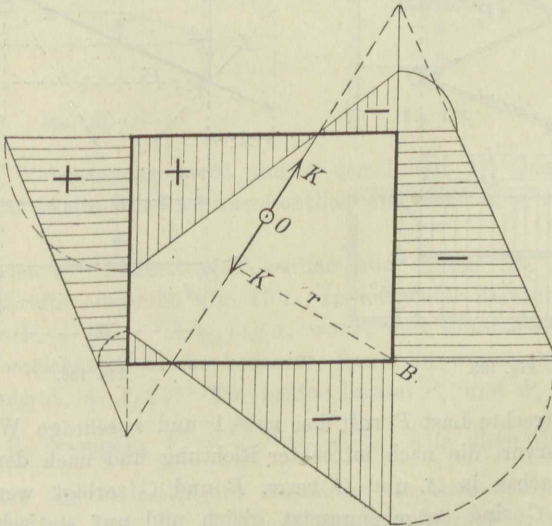


Fig. 134.

$$Y = - \frac{\varepsilon E J_c h (t_l - t_r)}{T_y}.$$

Ist also  $t_o > t_u$  und  $t_l > t_r$ , so entstehen negative Werte  $X$  und  $Y$ . Ihre Zusammensetzung zu  $K$  führt zu der in Fig. 134 dargestellten Angriffsweise des Rahmens. Die durch Schraffierung kenntlich gemachte Momentenfläche ist durch Berechnung eines Eckmomentes, beispielsweise des Momentes  $M_B = -Kr$  bestimmt.

**Aufgabe 14.** Untersuchung der Träger der in Fig. 135 skizzierten eisernen Treppe.

Wir verstehen die Podestträger mit den Ordnungsziffern 1, 2, ..  $r$ ,  $(r + 1)$ , .. und betrachten zunächst die Wange  $(r - 1) - r$  und zwar unter der Voraussetzung gelenkartiger Endbefestigungen, Fig. 136.

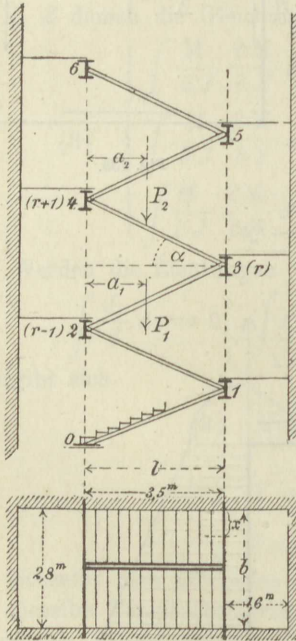


Fig. 135.

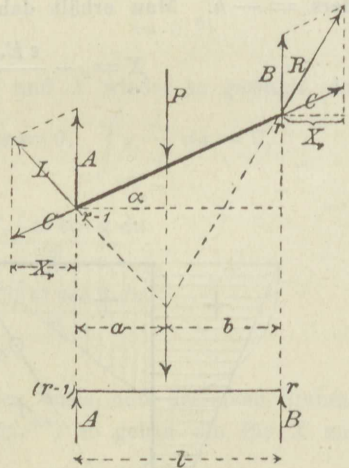


Fig. 136.

Eine lotrechte Last  $P$  ruft bei  $r - 1$  und  $r$  schräge Widerstände  $L$  und  $R$  hervor, die nach lotrechter Richtung und nach der Richtung der Wangenachse in  $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $C$  zerlegt werden. Die Seitenkräfte  $C$  sind entgegengesetzt gleich und auf statischem Wege nicht bestimmbar; ihre wagerechte Seitenkraft werde mit  $X_r$  bezeichnet.

Für  $A$  und  $B$  erhält man aus den Momentengleichungen (in Bezug auf  $r$  und  $r - 1$ ):

$$Al - Pb = 0; \quad Bl - Pa = 0,$$

die Werte

$$A = \frac{Pb}{l}, \quad B = \frac{Pa}{l},$$

welche mit den Auflagerdrücken eines einfachen Balkens übereinstimmen, dessen Stützweite gleich der Horizontalprojektion  $l$  der Wange ist. Infolgedessen sind auch die Biegemomente für den ansteigenden Träger und für den wagerechten Träger ( $r - 1$ ) —  $r$  gleich groß. Bedeutet also  $q$  die Belastung für die Längeneinheit der Horizontalprojektion  $l$ , so ist das größte Moment  $M = \frac{1}{8} ql^2$ , Fig. 137, und die Beanspruchung der Wange:

$$\sigma = \pm \frac{ql^2}{8W} + \frac{X_r \sec \alpha}{F},$$

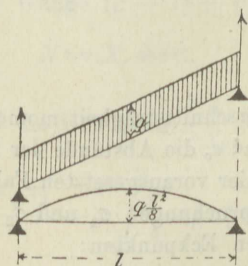


Fig. 137.

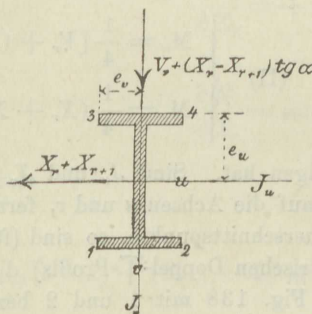


Fig. 138.

wo  $W$  das Widerstandsmoment und  $F$  den Inhalt des Querschnitts bedeutet. Das zweite Glied ist unwesentlich und darf stets vernachlässigt werden.

Auf den  $r^{\text{ten}}$  Podestträger werden nun seitens der Wangen die folgenden Kräfte ausgeübt, Fig. 138. In lotrechter Richtung wirkt die Belastung:  $V_r + (X_r - X_{r+1}) \operatorname{tg} \alpha$ , wo  $V_r$  den Einfluss der vorhin mit  $A$  und  $B$  bezeichneten Kräfte bedeutet, ferner in wagerechter Richtung die Belastung  $X_r + X_{r+1}$ . Die beiden Lasten  $P_1$  und  $P_2$  in Fig. 135

würden z. B. erzeugen:  $V_r = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}$ . Alle diese Kräfte dürfen

in der Mitte des Podestträgers angreifend angenommen werden; sie erzeugen für den nach Fig. 138 auf ein Achsenkreuz  $u, v$  bezogenen Querschnitt, im Abstand  $x$  von der Stütze (Fig. 135), die Biegungs-



momente\*)

$$(I) \quad \begin{cases} M_u = \frac{1}{2} [V_r + (X_r - X_{r+1}) \operatorname{tg} \alpha] x, \\ M_v = \frac{1}{2} (X_r + X_{r+1}) x. \end{cases}$$

Außerdem verursacht die Belastung des Podestes noch ein Moment  $M_u$ , dessen Größtwert bei  $x = \frac{1}{2} b$

$$M_u = \frac{1}{8} q_r b^2$$

ist, wenn  $q_r$  die gleichmäßige Belastung für die Einheit der Länge  $b$  bedeutet. Die Momente  $M_u$ ,  $M_v$  nehmen ebenfalls an der Stelle  $x = \frac{1}{2} b$  ihre Größtwerte an, weshalb die Berechnung der Beanspruchung auf Grund von

$$(II) \quad \begin{cases} M_u = \frac{1}{4} [V_r + (X_r - X_{r+1}) \operatorname{tg} \alpha] b + \frac{1}{8} q_r b^2, \\ M_v = \frac{1}{4} (X_r + X_{r+1}) b \end{cases}$$

zu erfolgen hat. Sind  $J_u$  und  $J_v$  die Querschnittsträgheitsmomente in Bezug auf die Achsen  $u$  und  $v$ , ferner  $e_u$  und  $e_v$  die Abstände der äußersten Querschnittspunkte, so sind (für den hier vorausgesetzten Fall eines symmetrischen Doppel-T-Profils) die Beanspruchungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in den in der Fig. 138 mit 1 und 2 bezeichneten Eckpunkten:

$$(III) \quad \begin{cases} \sigma_1 = + \frac{M_u e_u}{J_u} + \frac{M_v e_v}{J_v} = \frac{e_u}{J_u} \left( M_u + \frac{e_v}{e_u} \frac{J_u}{J_v} M_v \right), \\ \sigma_2 = + \frac{M_u e_u}{J_u} - \frac{M_v e_v}{J_v} = \frac{e_u}{J_u} \left( M_u - \frac{e_v}{e_u} \frac{J_u}{J_v} M_v \right). \end{cases}$$

Für die Eckpunkte 3 und 4 erhält man

$$\sigma_3 = -\sigma_2 \quad \text{und} \quad \sigma_4 = -\sigma_1.$$

Das Moment  $M_u$  ist stets positiv, hingegen wird  $M_v$  positiv oder negativ ausfallen, je nachdem  $X_r + X_{r+1}$  positiv oder negativ ist. Im ersten Falle entstehen die größten Beanspruchungen an den Stellen 1 und 4, im zweiten Falle an den Stellen 2 und 3.

Die Berechnung der statisch nicht bestimmaren Größen  $X$  soll

---

\*) Der Podestträger muß als an den Enden frei aufliegender Träger berechnet werden. Die Einmauerung der Enden darf nicht als Einspannung betrachtet werden.

(unter Absehung von Temperaturänderungen) mittels der Bedingungen:

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{M_u}{EJ_u} \frac{\partial M_u}{\partial X} dx + \int \frac{M_v}{EJ_v} \frac{\partial M_v}{\partial X} dx = 0,$$

deren Anzahl mit der Anzahl der  $X$  übereinstimmt, erfolgen.  $X_r$  tritt nur in  $M_u$ ,  $M_v$  für den Podestträger  $(r-1)$  und  $r$  und in  $N$  für die beide Träger verbindende Wange auf. Es ist für den  $(r-1)$  ten Podestträger:

$$M_u = \frac{x}{2} [V_{r-1} + (X_{r-1} - X_r) \operatorname{tg} \alpha] + \frac{q_{r-1} x (b-x)}{2}; \quad \frac{\partial M_u}{\partial X_r} = -\frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$M_v = \frac{x}{2} (X_{r-1} + X_r), \quad \frac{\partial M_v}{\partial X_r} = +\frac{x}{2},$$

für den  $r^{\text{ten}}$  Podestträger:

$$M_u = \frac{x}{2} [V_r + (X_r - X_{r+1}) \operatorname{tg} \alpha] + \frac{q_r x (b-x)}{2}; \quad \frac{\partial M_u}{\partial X_r} = +\frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$M_v = \frac{x}{2} (X_r + X_{r+1}), \quad \frac{\partial M_v}{\partial X_r} = +\frac{x}{2},$$

für die Wange  $(r-1) - r$ :

$$N = X_r \sec \alpha,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_r} = \sec \alpha,$$

weshalb die Gleichung  $\frac{\partial A}{\partial X_r} = 0$  lautet:

$$\begin{aligned} \frac{X_r l \sec^3 \alpha^*)}{F} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4} \operatorname{tg} \alpha [V_{r-1} + q_{r-1} (b-x) + (X_{r-1} - X_r) \operatorname{tg} \alpha] \frac{dx}{J_u} \\ + 2 \int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4} (X_{r-1} + X_r) \frac{dx}{J_v} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4} \operatorname{tg} \alpha [V_r + q_r (b-x) \\ + (X_r - X_{r+1}) \operatorname{tg} \alpha] \frac{dx}{J_u} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}b} \frac{x^2}{4} (X_r + X_{r+1}) \frac{dx}{J_v} = 0, \end{aligned}$$

und nach Ausführung der Integration:

$$\begin{aligned} \frac{X_r l \sec^3 \alpha}{F} - \frac{b^3}{48 J_u} [(T_{r-1} - T_r) \operatorname{tg} \alpha + (X_{r-1} - 2 X_r + X_{r+1}) \operatorname{tg}^2 \alpha] \\ + \frac{b^3}{48 J_v} (X_{r-1} + 2 X_r + X_{r+1}) = 0, \end{aligned}$$

---

\*) Für die Wange ist  $\int dx = l \sec \alpha$ .

wo

$$T_r = V_r + \frac{5}{8} q_r b$$

oder, nach den Größen  $X$  geordnet,

$$X_{r-1} \kappa' + 2 X_r \kappa + X_{r+1} \kappa' = N_r,$$

wo

$$\kappa' = 1 - \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$\kappa = 1 + \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg}^2 \alpha + 24 \frac{J_v l}{F b^3} \sec^3 \alpha,$$

$$N_r = \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \alpha (T_{r-1} - T_r).$$

Die Zahlen  $\kappa'$  und  $\kappa$  weichen von 1 so wenig ab, daß man stets genügend genau setzen darf:

$$X_{r-1} + 2 X_r + X_{r+1} = N_r,$$

und man erhält deshalb für den in Fig. 135 dargestellten Fall einer durch drei Geschosse reichenden Treppe, deren unterste Wange bei 0 ein wagerechtes Gleitlager erhalten möge (weshalb  $X_1 = 0$  wird), die fünf Elastizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned} 2 X_2 + X_3 &= N_2, \\ X_2 + 2 X_3 + X_4 &= N_3, \\ X_3 + 2 X_4 + X_5 &= N_4, \\ X_4 + 2 X_5 + X_6 &= N_5, \\ X_5 + 2 X_6 &= N_6. \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} 6 X_2 &= 5 N_2 - 4 N_3 + 3 N_4 - 2 N_5 + N_6, \\ 6 X_3 &= -4 N_2 + 8 N_3 - 6 N_4 + 4 N_5 - 2 N_6, \\ 6 X_4 &= 3 N_2 - 6 N_3 + 9 N_4 - 6 N_5 + 3 N_6, \\ 6 X_5 &= -2 N_2 + 4 N_3 - 6 N_4 + 8 N_5 - 4 N_6, \\ 6 X_6 &= N_2 - 2 N_3 + 3 N_4 - 4 N_5 + 5 N_6. \end{aligned}$$

Drückt man die  $N$  durch die  $T$  aus, so findet man:

$$X_r = \frac{1}{6} \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \alpha H_r, \text{ wo}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= 5 T_1 - 9 T_2 + 7 T_3 - 5 T_4 + 3 T_5 - T_6, \\ H_3 &= -4 T_1 + 12 T_2 - 14 T_3 + 10 T_4 - 6 T_5 + 2 T_6, \\ H_4 &= 3 T_1 - 9 T_2 + 15 T_3 - 15 T_4 + 9 T_5 - 3 T_6, \\ H_5 &= -2 T_1 + 6 T_2 - 10 T_3 + 14 T_4 - 12 T_5 + 4 T_6, \\ H_6 &= T_1 - 3 T_2 + 5 T_3 - 7 T_4 + 9 T_5 - 5 T_6, \end{aligned}$$



und erhält nun für  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  (vergl. Seite 127) nach leichter Zwischenrechnung die Formel

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{e_u b}{4 J_u} \left[ V_r + H_r \left( \pm \frac{e_v}{e_u} + \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{6} + H_{r+1} \left( \pm \frac{e_v}{e_u} - \frac{J_v}{J_u} \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{6} + \frac{1}{2} q_r b \right],$$

wobei das obere Vorzeichen  $\sigma_1$  liefert, das untere  $\sigma_2$ .

Ist beispielsweise  $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$  und erhalten die Podestträger das Normalprofil Nr. 23, Fig. 139, mit

$$\begin{aligned} e_v &= 51 \text{ mm}, & e_u &= 115 \text{ mm}, \\ J_v &= 191 \text{ cm}^4, & J_u &= 3657 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

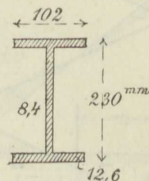


Fig. 139.

so entsteht

$$\sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u} [V_r + 0,05 H_r + 0,04 H_{r+1} + 0,5 q_r b],$$

$$\sigma_2 = \frac{e_u b}{4 J_u} [V_r - 0,04 H_r - 0,05 H_{r+1} + 0,5 q_r b].$$

Insbesondere ergibt sich für die Beanspruchung  $\sigma_1$  des Podestträgers 1 (auf deren Berechnung wir uns hier beschränken wollen) wegen  $H_r = H_1 = 0$  und  $H_{r+1} = H_2$ :

$$(IV) \quad \sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u} [V' + V''], \text{ wo}$$

$$(V) \quad V' = 1,20 V_1 - 0,36 V_2 + 0,28 V_3 - 0,20 V_4 + 0,12 V_5 - 0,04 V_6,$$

$$(VI) \quad V'' = \frac{1}{8} b (5 q_1 - 1,8 q_2 + 1,4 q_3 - 1,0 q_4 + 0,6 q_5 - 0,2 q_6).$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke, nämlich  $V'$ , hängt nur von der Belastung der Wangen ab, der zweite von der Belastung der Podeste.

Liegt eine die Wangen entlang wandernde Last  $P = 1$  (Fig. 140) zwischen dem zweiten und dritten Podeste im Abstände  $x$  von Träger 2, so erzeugt sie  $V_2 = 1 \frac{l-x}{l}$  und  $V_3 = 1 \frac{x}{l}$ , während alle übrigen  $V$  Null werden. Es entsteht dann

$$V' = -0,36 \frac{l-x}{l} + 0,28 \frac{x}{l},$$

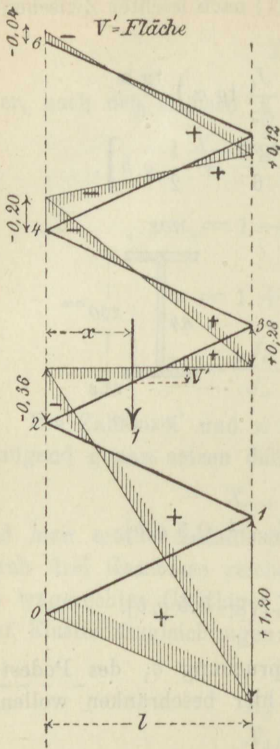


Fig. 140.

das ist eine Funktion ersten Grades von  $x$ , woraus folgt, daß die zur Wange 2—3 gehörige Einflußlinie für  $V'$  eine Gerade ist, die bei  $x=0$  und  $x=l$  die Ordinaten  $-0,36$  und  $+0,28$  besitzt. Auf diese Weise gelangt man zu der in Fig. 140 dargestellten Einflußlinien für  $V'$ ; sie ist durch die Koeffizienten der Größen  $V$  in Gleichung (VI) bestimmt. Ihr Flächeninhalt ist

$$\mathfrak{F} = l \left[ 1,20 - 0,36 + 0,28 - 0,20 + 0,12 - \frac{0,04}{2} \right] = 1,02 l.$$

Hiervon entfällt auf den positiven Teil der Einflußfläche:

$$\mathfrak{F}_+ = \frac{l}{2} \left[ 1,20 + \frac{1,20^2}{1,20 + 0,36} + \frac{0,28^2}{0,36 + 0,28} + \frac{0,28^2}{0,28 + 0,20} + \frac{0,12^2}{0,20 + 0,12} + \frac{0,12^2}{0,12 + 0,04} \right] = 1,27 l,$$

und auf den negativen Teil (absolut genommen)

$$\mathfrak{F}_- = 1,27 l - 1,02 l = 0,25 l.$$

Wir zerlegen nun die Belastung der Wange in

die ständige Belastung  $g$  für die Einheit der Länge  $l$

und „bewegliche „  $p$  „ „ „ „ „ „ „  $l$ ,

setzen  $p + g = q$  und belasten, um das größte  $\sigma_1$  zu erzielen, die positiven Beitragsstrecken mit  $q$ , die negativen mit  $g$ . Wir erhalten dann

$$\max V' = q \mathfrak{F}_+ - g \mathfrak{F}_- = (1,27 q - 0,25 g) l.$$

Sind  $g'$  und  $q'$  bzw. die ständige und bewegliche Belastung für den Podesträger, so wird  $V''$  ein Größtwerth mit  $q_1 = q_3 = q_5 = q'$  und  $q_2 = q_4 = q_6 = g'$ , und zwar ergibt sich

$$\max V'' = \frac{1}{8} b (7 q' - 3 g'),$$

also schließlich:

$$\max \sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u} \left[ (1,27 q - 0,25 g) l + (7 q' - 3 g') \frac{b}{8} \right].$$

Wird das Eigengewicht der Treppe für das qm Grundfläche zu 200 kg angenommen, die bewegliche Belastung zu 800,\*) so ist, mit den in der Fig. 135 angegebenen Abmessungen, für die Wange:

$$g = 200 \cdot \frac{1,4}{2} = 140 \frac{kg}{m}, \quad q = (200 + 800) \frac{1,4}{2} = 700 \frac{kg}{m},$$

und für den Podestträger:

$$g' = 200 \frac{1,6}{2} = 160 \frac{kg}{m},$$

$$q' = (200 + 800) \frac{1,6}{2} = 800 \frac{kg}{m}.$$

Man erhält dann

$$(1,27 q - 0,25 g) l + (7 q' - 3 g') \frac{b}{8} = 4781 kg$$

und, wegen  $\frac{J_u}{e_u} = W_u = 318,$

$$\sigma_1 = \frac{4781 \cdot 280}{4 \cdot 318} = 1052 \frac{kg}{cm^2}. **)$$

Nach der gewöhnlichen Berechnung hätte man in der Mitte des Podestträgers die Belastung  $V_r = ql$  angenommen und die Kräfte  $X = 0$  gesetzt. Dann wäre entstanden

$$\sigma_1 = \frac{e_u b}{4 J_u} [ql + 0,5 q' b],$$

und hieraus hätte sich  $\sigma_1 = 790 kg/cm^2$  ergeben, d. i. ein um etwa 49% zu kleiner Wert.

## § 16.

### Berechnung der Verschiebungen von Punkten gerader Stäbe und der Drehungswinkel von Tangenten an die Stabachse.

1) Umformung der Gleichungen (37) und (38) im § 12. Um die Verschiebung  $\delta_m$  eines in der Kräfteebene gelegenen Stabpunktes  $m$  nach einer in die Kräfteebene fallenden Richtung  $mm'$  zu berechnen, bringe man im Punkte  $m$  eine durch  $m'$  gehende Last „Eins“ an und

\*) Die Treppe diene zur Beförderung schwerer Lasten.

\*\*) Ganz ebenso werden die übrigen Podestträger untersucht. Wir fanden für sie etwas geringere Beanspruchungen.



bestimme die hierdurch hervorgerufenen Auflagerkräfte  $\bar{C}$ , Biegemomente  $\bar{M}$  und Längskräfte  $\bar{N}$ . Sodann erhält man für den Fall, daß die Gleichung (41) und (42) auf Seite 89 gültig sind:

$$(54) \quad \delta_m = \int \frac{N\bar{N}dx}{EF} + \int \frac{M\bar{M}dx}{EJ} + \int \varepsilon t_0 \bar{N}dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\bar{M}}{h} dx - \bar{L},$$

wobei

$\bar{L}$  = virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte  $\bar{C}$ ,

$N$  = Längskraft,  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$  hervorgerufen durch die wirkliche

$M$  = Biegemoment  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$  Belastung,

während  $t_0$  und  $\Delta t$  die auf Seite 89 erklärte Bedeutung haben.

Die Gleichung (54) ergibt sich aus der Gleichung (37) mit Beachtung der Gleichung (46) und (47).

Ist der Stab (oder die Stabverbindung) statisch unbestimmt, so dürfen bei der Berechnung der  $\bar{C}$ ,  $\bar{M}$  und  $\bar{N}$  alle statisch nicht bestimm-  
baren Größen gleich Null gesetzt werden, wobei es freisteht, in welcher Weise der Stab in einen statisch bestimmten Hauptträger verwandelt wird.

Man darf auch schreiben (nach Gleichung 38):

$$(55) \quad \delta_m = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} dx + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial P_m} dx \\ + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} dx - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

wobei  $P_m$  eine in  $m$  angreifende, durch  $m'$  gehende Last bedeutet, welcher nötigenfalls nach Ausführung der Differentiation der Wert Null beizulegen ist.

**2) Drehung einer Tangente.** Der Winkel  $\tau_m$ , um welchen sich die im Punkte  $m$  an die Stabachse gelegte Tangente bei der Formänderung des Stabes dreht, ist gegeben durch die Gleichung

$$(54a) \quad \tau_m = \int \frac{N\bar{N}dx}{EF} + \int \frac{M\bar{M}dx}{EJ} + \int \varepsilon t_0 \bar{N}dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\bar{M}}{h} dx - \bar{L},$$

wobei  $N$  = Längskraft,  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$

$M$  = Biegemoment  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$  infolge der wirklichen Belastung,

$\bar{N}$  = Längskraft,  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$  für irgend einen Querschnitt des

$\bar{M}$  = Biegemoment  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$  Hauptträgers,

falls auf letzteren ein im Punkte  $m$  angreifendes Kräftepaar wirkt, dessen Moment  $M_m = 1$  ist (vergl. Seite 85).

$\bar{L}$  bedeutet die virtuelle Arbeit der gleichzeitig mit  $\bar{N}$  und  $\bar{M}$  entstehenden Auflagerkräfte.

Man darf auch schreiben, entsprechend Gleichung (38a) und mit Hinweis auf Gleichung (55),

$$(55a) \quad \tau_m = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial \mathfrak{M}_m} dx + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}_m} dx + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial \mathfrak{M}_m} dx \\ + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}_m} dx,$$

wobei das Moment  $\mathfrak{M}_m$  nach Ausführung der Differentiation gleich Null zu setzen ist, wenn das im Punkte  $m$  angenommene Kräftepaar in Wirklichkeit nicht vorhanden ist.

3) Handelt es sich um einen Körper, der aus einem Fachwerke und aus einem oder mehreren auf Biegezugfestigkeit beanspruchten, geraden Stäben besteht, so tritt auf der rechten Seite der Gleichung (54) und (54a) noch der Wert hinzu:

$$\Sigma \frac{S \bar{S}s}{EF} + \Sigma \varepsilon t \bar{S}s,$$

auf der rechten Seite der Gleichung (55) der Wert

$$\Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial P_m} + \Sigma \varepsilon t \frac{\partial S}{\partial P_m} s,$$

und auf der rechten Seite der Gleichung (55a) der Wert

$$\Sigma \frac{Ss}{EF} \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{M}_m} + \Sigma \varepsilon t \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{M}_m} s.$$

$\bar{S}$  bedeutet die gleichzeitig mit  $\bar{N}$  und  $\bar{M}$  entstehende Spannkraft eines Fachwerkstabes.

Bei Anwendung der Gleichungen (55) und (55a) dürfen die statisch nicht bestimmbar Größen  $X$  als Konstanten aufgefaßt werden; es genügt, die Integrale und Summen über den statisch bestimmten Hauptträger auszudehnen.

**Aufgabe 1.** Der in Fig. 141 dargestellte, ursprünglich wagerechte Stab mit einem eingespannten und einem freien Ende sei gleichmäßig und außerdem im Punkte  $A$  mit  $P$  belastet. Gesucht die senkrechte Verschiebung  $\delta$  des Punktes  $A$ .  $E$  und  $J$  seien konstant; Verschiebungen der Stützpunkte seien ausgeschlossen, hingegen soll eine ungleichmäßige Erwärmung (nach Fig. 77) berücksichtigt werden.

Es ergibt sich

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \int_0^l \frac{\partial M}{\partial P} dx, *)$$

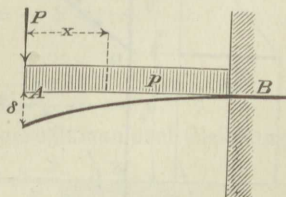


Fig. 141.

\*)  $\Delta t = t_1 - t_2$ , wobei  $t_1$  = Temperaturänderung für den untersten,  $t_2$  desgl. für den obersten Punkt des Querschnittes.

$$M = -Px - \frac{px^2}{2}, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x,$$

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left( Px^2 + \frac{px^3}{2} \right) dx - \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \int_0^l x dx,$$

$$\delta = \frac{l^3}{EJ} \left( \frac{P}{3} + \frac{pl}{8} \right) - \varepsilon \Delta t \frac{l^2}{2h}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man für einen ungleichmäßig erwärmten und gleichmäßig belasteten, bei A frei aufliegenden, bei B wagerecht eingespannten Balken (Fig. 142), dessen linke, ursprünglich in der Wagerechten durch B gelegene Stütze sich um  $\delta$  gesenkt hat, die Beziehung:

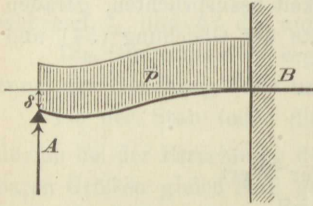


Fig. 142.

$$\delta = \frac{l^3}{EJ} \left( -\frac{A}{3} + \frac{pl}{8} \right) - \varepsilon \Delta t \frac{l^2}{2h}$$

und hieraus die Auflagerkraft

$$A = \frac{3pl}{8} - \frac{3EJ}{l^3} \left[ \delta + \varepsilon \Delta t \frac{l^2}{2h} \right].$$

**Aufgabe 2.** Es soll die Senkung  $\delta$  des Punktes A des in Fig. 143 dargestellten, mit P belasteten, festen Krahnes berechnet werden.

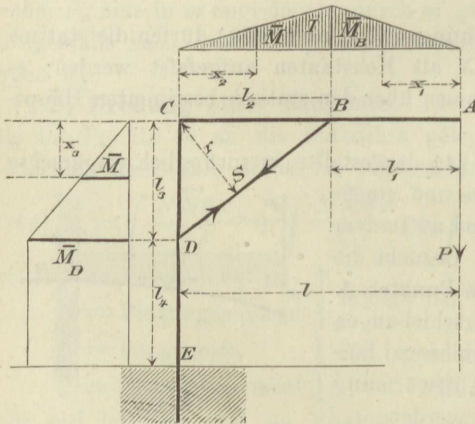


Fig. 143.

Verschiebungen der Stützpunkte und Temperaturänderungen seien ausgeschlossen. Es seien

$F$  und  $J$  = Inhalt und Trägheitsmoment des Querschnittes von Stab AC,

$F_1$  und  $J_1$  = Inhalt und Trägheitsmoment des Querschnittes von Stab CE,

$F_2$  = Inhalt des Querschnittes,  $s$  = Länge von Stab BD,

$E, E_1, E_2$  bedeuten die entsprechenden Elastizitätsziffern.

Wir wenden Gleichung (54) an und setzen  $\bar{L} = 0, t_0 = 0, \Delta t = 0.$

$\bar{M}$  und  $\bar{N}$  entsprechen der Last  $P = 1$ , und es folgt  $N = P\bar{N}$ ,  $M = P\bar{M}$ , mithin:



$$(I) \quad \delta = P \left[ \int \frac{\bar{N}^2 dx}{EF} + \int \frac{\bar{M}^2 dx}{EJ} \right].$$

In Fig. 143 sind die der Last  $P=1$  entsprechenden Momentenflächen für die Stäbe  $AC$  und  $CE$  dargestellt; sie sind bestimmt durch

$$\bar{M}_B = 1 \cdot l_1 = \text{Moment für Querschnitt } B \text{ und}$$

$$\bar{M}_D = 1 \cdot l = \text{„ „ die Querschnitte zwischen } D \text{ und } E.$$

Die Spannkraft  $\bar{S}$  im Stabe  $BD$  ist

$$\bar{S} = -1 \cdot \frac{l}{r} \quad (\text{folgt aus der Bedingung } Sr + Pl = 0),$$

wobei  $r$  das Lot von  $C$  auf  $BD$ .

Es folgt nun, wenn  $\angle CBD = \alpha$  ist,

$$\text{für Teil } l_1: \bar{M} = 1 \cdot x_1, \quad \int \frac{\bar{M}^2 dx}{EJ} = \frac{l_1^3}{3EJ}, \quad \bar{N} = 0;$$

$$\text{für Teil } l_2: \bar{M} = 1 \cdot \frac{x_2}{l_2} l_1, \quad \int \frac{\bar{M}^2 dx}{EJ} = \frac{l_1^2 l_2}{3EJ},$$

$$\bar{N} = -\bar{S} \cos \alpha = + \frac{l}{r} \cos \alpha, \quad \int \frac{\bar{N}^2 dx}{EF} = \frac{l^2}{r^2} \cos^2 \alpha \frac{l_2}{EF};$$

$$\text{für Teil } l_3: \bar{M} = 1 \cdot \frac{x_3}{l_3} l, \quad \int \frac{\bar{M}^2 dx}{EJ} = \frac{l^2 l_3}{3E_1 J_1},$$

$$\bar{N} = -\bar{S} \sin \alpha = + \frac{l}{r} \sin \alpha, \quad \int \frac{\bar{N}^2 dx}{EF} = \frac{l^2}{r^2} \sin^2 \alpha \frac{l_3}{E_1 F_1};$$

$$\text{für Teil } l_4: \bar{M} = 1 \cdot l, \quad \int \frac{\bar{M}^2 dx}{EJ} = \frac{l^2 l_4}{E_1 J_1},$$

$$\bar{N} = -1, \quad \int \frac{\bar{N}^2 dx}{EF} = \frac{l_4}{E_1 F_1};$$

$$\text{für Teil } DB = s: \bar{M} = 0, \quad \bar{N} = -\bar{S} = -\frac{l}{r},$$

$$\int \frac{\bar{N}^2 dx}{EF} = \frac{l^2}{r^2} \cdot \frac{s}{E_2 F_2}.$$

Addiert man die berechneten Integrale, so erhält man nach Gleichung (I):

$$\delta = P \left[ \frac{l^2}{r^2} \left( \frac{l_2}{EF} \cos^2 \alpha + \frac{l_3}{E_1 F_1} \sin^2 \alpha + \frac{s}{E_2 F_2} \right) + \frac{l_4}{E_1 F_1} \right. \\ \left. + \frac{l_1^2}{3EJ} (l_1 + l_2) + \frac{l^2}{E_1 J_1} \left( \frac{l_3}{3} + l_4 \right) \right].$$

**Aufgabe 3.** Um welche Strecke  $\delta$  senkt sich der Mittelpunkt  $S$  des Balkens  $AB$  des in Aufgabe 9 (§ 14) behandelten Krangerüstes?

Bezüglich aller Bezeichnungen wird auf § 14 verwiesen; die dort gezeigte Berechnung der statisch nicht bestimmaren Auflagerkraft  $X$  muß der Ermittlung von  $\delta$  vorausgehen. Hierauf wird die Stabverbindung

statisch bestimmt gemacht, beispielsweise durch das bei  $D$  (Fig. 144) angeordnete wagerechte Gleitlager, und der so erhaltene Hauptträger im Punkte  $S$  mit der senkrechten Kraft „Eins“ belastet. Es entstehen bei  $D$  und  $C$  senkrechte Gegendrucke ( $= \frac{1}{2}$ ), welche im Verein mit

Fig. 144.

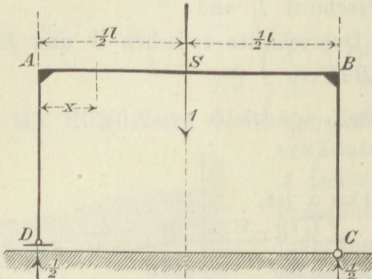


Fig. 145.

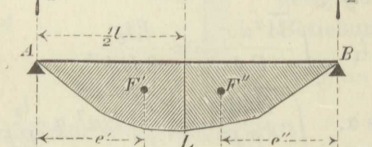


Fig. 146.

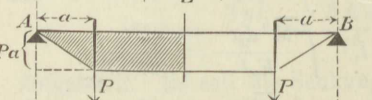
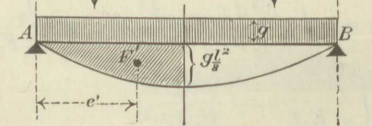


Fig. 147.



der Last „Eins“ Momente  $\bar{M}$  und Längskräfte  $\bar{N}$  erzeugen, und es ergibt sich aus diesen — wenn Verschiebungen der Stützpunkte und Temperaturänderungen unberücksichtigt bleiben sollen —

$$(I) \quad \delta = \int \frac{\bar{M} \bar{M} dx}{EJ} + \int \frac{\bar{N} \bar{N} dx}{EF},$$

wobei  $M$  = Biegemoment und  $N$  = Längskraft für die wirkliche, in Fig. 103 dargestellte Belastung.

Für die linke Hälfte des Stabes  $AB$  ist  $\bar{N} = 0$ ,  $\bar{M} = \frac{1}{2}x$ ,  $M = M_0 - Xh$  und

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\bar{M} \bar{M} dx}{EJ} &= \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} (M_0 - Xh) \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2EJ} \left( \int_0^{\frac{l}{2}} M_0 x dx - \frac{Xh l^2}{8} \right). \end{aligned}$$

$M_0$  bedeutet die Ordinate der früher erklärten einfachen Momentenfläche  $ALB$  (Fig. 104 und Fig. 145), welche durch die Mittel-Senkrechte in 2 Teile zerlegt wird, deren Inhalte  $= F'$  und  $= F''$ , und deren Schwerpunkts-Abstände von den benachbarten Auflagersenkrechten  $= e'$

und  $= e''$  sind. Da nun  $F' e' = \int_0^{\frac{l}{2}} M_0 x dx$  ist, so ergibt sich für die linke Hälfte des Stabes  $AB$ :

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\bar{M} \bar{M} dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \left( F' e' - \frac{Xh l^2}{8} \right),$$

und für den ganzen Stab:

$$\int \frac{\bar{M} \bar{M} dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \left( F' e' + F'' e'' - \frac{Xh l^2}{4} \right).$$

Für den Stab  $AD$  ist:  $\bar{N} = -\frac{1}{2}$ ,  $\bar{M} = 0$ ,  $N = -\frac{Rb'}{l}$  (vergl. Seite 113 und Fig. 103) und

$$\int \frac{N \bar{N} dx}{EF} = \frac{R b'}{2l} \frac{h}{E_1 F_1},$$

und dem Stabe  $BC$  entspricht:  $\bar{N} = -\frac{1}{2}$ ,  $\bar{M} = 0$ ,  $N = -\frac{R a'}{l}$ ,

$$\int \frac{N \bar{N} dx}{EF} = \frac{R a'}{2l} \frac{h}{E_1 F_1}.$$

Für beide Stäbe erhält man zusammen:

$$\int \frac{N \bar{N} dx}{EF} = \frac{R}{2l} \frac{h}{E_1 F_1} (a' + b') = \frac{R h}{2 E_1 F_1},$$

wobei  $R$  = Summe aller auf den Balken  $AB$  wirkenden Lasten.

Nach Gleichung (I) ist nun

$$\delta = \frac{R h}{2 E_1 F_1} + \frac{1}{2 E J} \left( F' e' + F'' e'' - \frac{X h l^2}{4} \right).$$

Die einfache Momentenfläche für zwei in Bezug auf die Mittel-Senkrechte gleich gelegene Lasten  $P$  ist ein Trapez mit der Höhe  $Pa$  (Fig. 146), und für dieses ist

$$F' e' = Pa \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - Pa \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa (3l^2 - 4a^2)}{24} = F'' e''.$$

Da nun diesen beiden Lasten die Werte entsprechen:

$$R = 2P \text{ und}$$

$$X = \frac{Pab}{hl \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{E}{E_1} \frac{h}{l} + \frac{J}{F h^2} \right)} \quad (\text{nach Gleichung (IV) und (V)})$$

auf Seite 115), so folgt die durch beide Lasten erzeugte Verschiebung  $\delta$ :

$$\delta = \frac{Ph}{E_1 F_1} + \frac{1}{2 E J} \left( \frac{Pa (3l^2 - 4a^2)}{12} - \frac{Pabl}{4 \mu} \right),$$

wobei

$$\mu = 1 + \frac{2}{3} \frac{J}{J_1} \frac{E}{E_1} \frac{h}{l} + \frac{J}{F h^2} \text{ ist.}$$

Zu dieser Senkung liefern beide Lasten den gleichen Beitrag, so daß eine Last  $P$  nur eine halb so grofse Senkung hervorbringt, nämlich:

$$(II) \quad \delta = \frac{Ph}{2 E_1 F_1} + \frac{Pa}{16 E J} \left( l^2 - \frac{4}{3} a^2 - \frac{l(l-a)}{\mu} \right).$$

Die einfache Momentenfläche für eine gleichmäfsige Last ( $=g$  für die Längeneinheit) ist eine Parabelfläche (Fig. 147) mit dem Pfeile  $\frac{gl^2}{8}$ ; für diese ist

$$F' = F'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{gl^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{gl^3}{24},$$

$$e' = e'' = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5l}{16},$$



$$F'e' + F''e'' = 2 \cdot \frac{gl^3}{24} \cdot \frac{5l}{16} = \frac{5gl^4}{192},$$

und weiter erzeugt diese gleichmäßige Last:

$$R = gl, \quad X = \frac{gl^3}{12hl\mu} \quad (\text{nach Gleichung (VI), Seite 115}),$$

und die Durchbiegung

$$\begin{aligned} \text{[III]} \quad \delta &= \frac{glh}{2E_1F_1} + \frac{1}{2EJ} \left[ \frac{5gl^4}{192} - \frac{gl^4}{48\mu} \right] \\ &= \frac{glh}{2E_1F_1} + \frac{gl^4}{384EJ} \left( 5 - \frac{4}{\mu} \right). \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** (Fig. 148). Ein ursprünglich wagerechter, bei  $B$  fest eingespannter, bei  $A$  freier Stab ist gleichmäßig mit  $p$  für die Längeneinheit belastet und wird außerdem im Punkte  $A$  durch eine Einzellast  $P$  und ein Kräftepaar, dessen Moment  $= M_1$  ist, beansprucht. Gesucht ist der Neigungswinkel  $\tau$  der in  $A$  an die elastische Linie gelegten Tangente. Temperaturänderungen und Nachgeben des Widerlagers seien ausgeschlossen. Da  $N = 0$  ist, so folgt aus Gleichung (55a):

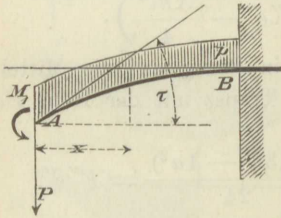


Fig. 148.

$$\tau = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_1} dx,$$

worein zu setzen:

$$M = -Px - \frac{px^2}{2} - M_1,$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_1} = -1.$$

Es ergibt sich, bei konstantem  $EJ$ ,

$$\tau = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left( Px + \frac{px^2}{2} + M_1 \right) dx = \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pl^2}{2} + \frac{pl^3}{6} + M_1l \right).$$

## § 17.

### Aufgaben über krumme Stäbe mit im Verhältnis zu der Querschnittshöhe großen Krümmungshalbmessern.

Ist ein einfach gekrümmter Stab symmetrisch in Bezug auf die die Stabachse enthaltende Kräfteebene, so dürfen, bei im Verhältnis zur Querschnittshöhe großen Krümmungshalbmessern, die senkrecht zur



gleichmäßig über die Sehne  $AB$  verteilte Lasten  $z_1$  und  $z_2$  für die Längeneinheit. Die Kämpfer sind durch eine Stange verbunden. Bei  $B$  ist ein festes, bei  $A$  ein wagerechtes (reibungslloses) Gleitlager angeordnet, Fig. 150. Gesucht ist die Spannkraft  $X$  in der Stange  $AB$ .

Wir nehmen zunächst an, es sei  $z_1 = z_2 = z$  und finden mit den aus der Fig. 151 ersichtlichen Bezeichnungen für einen Querschnitt  $D$ , im Abstände  $x$  vom Scheitel, das Biegemoment

$$\begin{aligned} M &= za(a-x) - z(a-x) \frac{a-x}{2} - X(f-y) \\ &= z \frac{(a^2 - x^2)}{2} - X(f-y), \text{ d. i.} \end{aligned}$$

$$(I) \quad M = z \frac{r^2}{2} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi) - Xr(\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Die Mittelkraft der auf das Stabstück  $AD$  wirkenden senkrechten äußeren Kräfte ist

$$V = za - z(a-x) = zx = zr \sin \varphi,$$

und es ergibt sich daher die Längskraft  $N$  für den Querschnitt  $D$  mittels Gleichung (56):

$$(II) \quad N = -zr \sin^2 \varphi - X \cos \varphi.$$

Fassen wir jetzt  $X$  als Auflagerkraft auf und bezeichnen mit  $\Delta a$  die Verlängerung der Sehnen-Hälfte  $a$ , so ist die virtuelle Arbeit der auf die linke Stabhälfte wirkenden Auflagerkräfte, bei festliegend angenommenen Linien  $RR$  und  $AB$ :

$$L' = -X \Delta a,$$

und es ergeben sich für den Zustand  $X=1$  die Werte

$$M' = -r(\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad N' = -\cos \varphi, \quad L' = -\Delta a.$$

Die für den Fall einer gleichmäßigen Erwärmung des Bogens um  $t$  Grad gültige Gleichung

$$L' = \int \frac{N' N ds}{EF} + \int \frac{M' M ds}{EJ} + \varepsilon t \int N' ds,$$

welcher die Unbekannte  $X$  zu genügen hat, geht, wenn  $E$ ,  $F$  und  $J$  für alle Bogenquerschnitte gleich groß angenommen werden, über in

$$\begin{aligned} (III) \quad \Delta a &= \frac{1}{EF} \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi (-zr \sin^2 \varphi - X \cos \varphi) r d\varphi \\ &+ \frac{1}{EJ} \int_0^{\varphi_0} r(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \left[ \frac{zr^2}{2} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi) - Xr(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right] r d\varphi \\ &+ \varepsilon t \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi ds; \end{aligned}$$



die in derselben vorkommenden Integrale erstrecken sich nur über die linke Hälfte des Trägers. Die Verlängerung  $\Delta a$  der Hälfte der Stange  $AB$ , deren Querschnitt  $= F_0$  und deren Elastizitätsmodul  $= E$  sein möge, ist

$$\Delta a = \frac{Xa}{EF_0},$$

wobei angenommen wird, daß sich nur der Bogen um  $t$  erwärmt, während die Anfangstemperatur der Stange ungeändert bleibt.\*) Es geht Gleichung (III) über in

$$\begin{aligned} \frac{Xa}{EF_0} = & -\frac{zr^2}{EF} \int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi - \frac{Xr}{EF} \int_0^{\varphi_0} \cos^2 \varphi d\varphi \\ & + \frac{zr^4}{2EJ} \int_0^{\varphi_0} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi \\ & - \frac{Xr^3}{EJ} \int_0^{\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 d\varphi + \varepsilon ta. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_0} (\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi &= \frac{2}{3} \sin^3 \varphi_0 \\ &+ \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos 2\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \varphi_0 - \frac{3}{2} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + \varphi_0 \cos^2 \varphi_0,$$

und es ergibt sich somit, wegen  $a = r \sin \varphi_0$ :

$$X = \frac{\mu' zr + 2\varepsilon E \frac{J}{r^2} t \sin \varphi_0}{\mu''},$$

wobei

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{2}{3} \sin^3 \varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos 2\varphi_0 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 - \frac{2}{3} \frac{J}{Fr^2} \sin^3 \varphi_0 \text{ und} \\ \mu'' &= \varphi_0 - 3 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + \frac{J}{Fr^2} (\varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0) + 2 \frac{J}{F_0 r^2} \sin \varphi_0. ** \end{aligned}$$

\*) Bei gleichmäßiger Erwärmung von Stange und Bogen ist der unbelastete Träger spannungslos. Es ist zu empfehlen, einen Unterschied der Temperaturen von Bogen und Stange von  $t = \pm 10^\circ$  bis  $\pm 15^\circ$  Celsius in Rechnung zu stellen.

\*\*) Die von  $\frac{J}{r^2}$  abhängigen Glieder der Ausdrücke  $\mu'$  und  $\mu''$  dürfen in der Regel vernachlässigt werden.

Der Einfluß einer Temperaturänderung ist für sich allein

$$X = 2\varepsilon E \frac{J}{\mu'' r^2} t \sin \varphi_0$$

und der Einfluß der Belastung:

$$X = \frac{\mu'}{\mu''} z r.$$

Zu letzterem Werte liefern die auf beiden Bogenhälften ruhenden Lasten  $z a$  den gleichen Beitrag:  $\frac{1}{2} \frac{\mu'}{\mu''} z r$ ; wirkt auf die eine Hälfte (wie in Fig. 150) die Last  $z_1 a$  und auf die andere die Last  $z_2 a$ , so entsteht demnach

$$X = \frac{1}{2} \frac{\mu'}{\mu''} r (z_1 + z_2).$$

Handelt es sich um die Berechnung eines Dachbinders, dessen Eigengewicht  $= g$ , und dessen gesamte Belastung  $= q$  für die Längeneinheit der Sehne  $AB$  ist, so genügt es, die Werte  $X$ ,  $M$  und  $N$  sowie die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= + \frac{M e_1}{J} + \frac{N}{F} \\ \sigma_2 &= - \frac{M e_2}{J} + \frac{N}{F} \end{aligned} \right\} \text{vergl. Gleichung (41) und Fig. 77}$$

für zwei Belastungsfälle zu berechnen.

Man setze einmal

$$z_1 = g \text{ und } z_2 = q$$

und hierauf

$$z_1 = z_2 = q.$$

(Bei beträchtlicher Pfeilhöhe ist noch der Einfluß schräger Winddrücke mit Hilfe einer besonderen Untersuchung, die ähnlich durchzuführen ist, wie die vorstehende, festzustellen.)

**Aufgabe 2.** Ein in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischer Parabelbogen ist an den Enden fest eingespannt und im Scheitel mit einem Gelenke versehen; es sollen die durch eine senkrechte Einzellast  $P$  und durch Temperaturänderung hervorgerufenen Stützendrücke  $K_1$  und  $K_2$  ermittelt werden, Fig. 152.

Die 3 Kräfte  $K_1$ ,  $K_2$  und  $P$  müssen sich in einem Punkte  $C$  schneiden. Liegt  $P$  links vom Scheitelgelenk  $S$ , so geht der Auflagerdruck  $K_2$  durch  $S$ ; er möge im Punkte  $S$  in die senkrechte Seitenkraft  $B$  und in die wagerechte Seitenkraft  $H$  (Horizontalschub) zerlegt werden. Sind  $B$  und  $H$  gefunden, so ist das aus  $P$ ,  $K_1$  und  $K_2$  bestehende Kräfdreieck bestimmt und die gestellte Aufgabe gelöst.

$B$  und  $H$  sind statisch nicht bestimmbare Größen; sie sollen unter der Voraussetzung berechnet werden, daß die Stützen starr sind und

der Bogen gleichmäßig erwärmt wird; dann gilt die Gleichung

$$(I) \quad 0 = \int \frac{M ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} + \int \frac{N ds}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} + \varepsilon t \int ds \frac{\partial N}{\partial X},$$

in welche erst  $X = B$ , dann  $X = H$  zu setzen ist.

Ist der Scheitel der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ergibt sich für den bei  $x$  gelegenen Bogenquerschnitt das Biegemoment:

$$M = Hy + Bx - M_0,$$

wobei  $(-M_0)$  das Biegemoment für den Fall:  $H = 0$  und  $B = 0$  bedeutet. Für alle Querschnitte rechts von  $P$  ist  $M_0 = 0$ , und für die links von  $P$  gelegenen Querschnitte ist  $M_0$  gleich der Ordinate einer Geraden  $C_1 A_2$ , deren Endordinate  $A_1 A_2 = Pa$  ist, während die Spitze  $C_1$  senkrecht unter der Last  $P$  liegt.

Die Längskraft  $N$  ist für einen Querschnitt rechts von  $C$

(wenn  $\varphi$  den Neigungswinkel der in  $x, y$  an die Bogenachse gelegten Tangente gegen die  $x$ -Achse bezeichnet)

$$N = B \sin \varphi - H \cos \varphi$$

und für einen Querschnitt links von  $C$

$$N = (B - P) \sin \varphi - H \cos \varphi;$$

beide Male ist  $\frac{\partial N}{\partial B} = \sin \varphi$  und  $\frac{\partial N}{\partial H} = -\cos \varphi$ . Da nun weiter

$\frac{\partial M}{\partial B} = x$  und  $\frac{\partial M}{\partial H} = y$  ist, so folgen aus Gleichung (I) mit  $X = B$

und  $X = H$  die beiden Bedingungen:

$$0 = \int \frac{M x ds}{EJ} + \int \frac{N dy}{EF} + \varepsilon t \int dy,$$

$$0 = \int \frac{M y ds}{EJ} - \int \frac{N dx}{EF} - \varepsilon t \int dx;$$

sie sollen mit Vernachlässigung der von  $N$  abhängigen, das Endergebnis nur wenig beeinflussenden Integrale aufgelöst werden; außerdem soll

$\frac{ds}{J} = \frac{dx}{J \cos \varphi}$  gesetzt und  $J \cos \varphi = \text{Konst.} = J'$  angenommen werden.

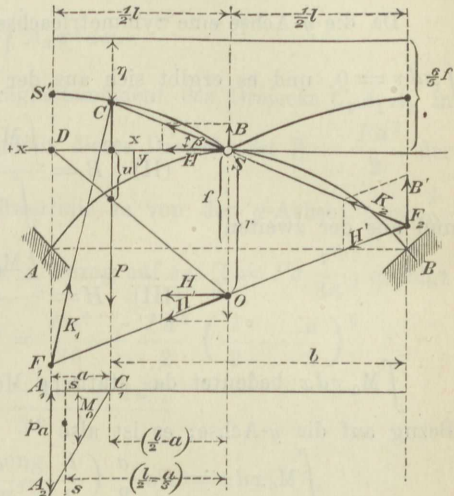


Fig. 152.



Es gehen dann, wegen  $\int dy = 0$  und  $\int dx = l$ , obige Gleichungen über in:

$$0 = \int (Hy + Bx - M_0) x dx,$$

$$0 = \int (Hy + Bx - M_0) y dx - \varepsilon EJ' tl.$$

Da die  $y$ -Achse eine Symmetrieachse ist, so folgt  $\int yx dx = 0$  und  $\int x dx = 0$ , und es ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$(II) \quad B = \frac{\int M_0 x dx}{\int x^2 dx}$$

und aus der zweiten

$$(III) \quad H = \frac{\int M_0 y dx + \varepsilon EJ' tl}{\int y^2 dx}.$$

$\int M_0 x dx$  bedeutet das statische Moment des Dreiecks  $C_1 A_1 A_2$  in Bezug auf die  $y$ -Achse; es ist also

$$\int M_0 x dx = Pa \frac{a}{2} \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{3} \right) = \frac{Pa^2 (3l - 2a)}{12}$$

und

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} x^2 dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 dx = \frac{l^3}{12}, \text{ mithin folgt}$$

$$(IV) \quad B = \frac{Pa^2 (3l - 2a)}{l^3}.$$

Diese Gleichung gilt bei beliebiger Form des symmetrischen Bogens; sie liefert den senkrechten Widerstand des rechtsseitigen Auflagers. Zerlegt man  $K_1$  in  $A$  (senkrecht) und  $H$  (wagerecht), so folgt

$$(V) \quad A = P - B = \frac{Pb^2 (3l - 2b)}{l^3} .*)$$

Aus Gleichung (III) ergibt sich der durch die Belastung erzeugte Horizontalschub

$$H = \frac{\int M_0 y dx}{\int y^2 dx}.$$

---

\*) Die für die senkrechten Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  abgeleiteten Ausdrücke stimmen mit denen eines wagerechten, an beiden Enden eingespannten, durch eine senkrechte Last  $P$  beanspruchten Balkens überein und bleiben auch bei fehlendem Scheiteltgelenke  $S$  gültig, wie der Verfasser in der Abhandlung: „Elastizitätstheorie

Für den Parabelbogen ist  $y = 4 \frac{fx^2}{l^2}$ , wobei  $f$  = Pfeilhöhe, und es folgt

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} y^2 dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} \left( \frac{4fx^2}{l^2} \right)^2 dx = \frac{f^2 l}{5},$$

$$\int M_0 y dx = \frac{4f}{l^2} \int M_0 x^2 dx.$$

$\int M_0 x^2 dx$  bedeutet das Trägheitsmoment des Dreiecks  $C_1 A_1 A_2$  in Bezug auf die  $y$ -Achse. Der Inhalt dieses Dreiecks ist  $\mathfrak{F} = \frac{Pa^2}{2}$ , der Abstand seiner senkrechten Schwerlinie  $ss$  von der  $y$ -Achse:  $e = \frac{l}{2} - \frac{a}{3}$  und sein Trägheitsmoment in Bezug auf  $ss$ :  $\mathfrak{J} = Pa \frac{a^3}{36}$ ; es folgt

$$\begin{aligned} \int M_0 x^2 dx &= \mathfrak{J} + \mathfrak{F}e^2 = \frac{Pa^4}{36} + \frac{Pa^2}{2} \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{3} \right)^2 \\ &= \frac{Pa^2 (3l^2 - 4al + 2a^2)}{24} \end{aligned}$$

und man gelangt zu der Gleichung

$$(VI) \quad H = \frac{5Pa^2}{6fl^3} (3l^2 - 4al + 2a^2),$$

welche nur anwendbar ist, sobald  $P$  links vom Scheitелgelenk liegt. Befindet sich  $P$  rechts von  $S$ , so ist

$$H = \frac{5Pb^2}{6fl^3} (3l^2 - 4bl + 2b^2).$$

Bewegt sich  $P$  von  $S$  aus nach dem linken Auflager hin, so beschreibt der Schnittpunkt  $C$  der 3 Kräfte  $P$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  eine Linie  $SS'$ , welche die Kämpferdrucklinie genannt wird; ihre Ordinate  $\eta$ , bezogen auf eine in der Entfernung  $\frac{6}{5}f$  vom Scheitel gelegene wagerechte Gerade, ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{6}{5}f - \eta = \left( \frac{l}{2} - a \right) \operatorname{tg} \beta, \text{ wobei } \operatorname{tg} \beta = \frac{B}{H} \text{ ist.}$$

Man findet

$$(VII) \quad \eta = \frac{3}{5}f \frac{1}{1 - \frac{2a(2l-a)}{3l^2}}$$

der Tonnengewölbe“, Zeitschrift für Bauwesen 1881, nachgewiesen hat. Besonders wichtig ist, daß die Form des (symmetrischen) Bogens gleichgültig ist.

und kann nun Gleichung (VI) umformen in

$$(VIII) \quad H = \frac{3Pa^2}{2l\eta}.$$

Zur Berechnung der  $\eta$ -Linie diene die folgende Tabelle:

$a$	$\eta$	$a$	$\eta$
0	0,600	0,6	0,909
0,1	0,642	0,7	0,976
0,2	0,687	0,8	1,047
0,3	0,736	0,9	1,121
0,4	0,789	1,0	1,200
0,5	0,847		
$\frac{l}{2}$	$\cdot f$	$\frac{l}{2}$	$\cdot f$

Um mit Hilfe der Kämpferdrucklinie die Lagen der einer gegebenen Einzellast  $P$  entsprechenden Kämpferdrücke  $K_1$  und  $K_2$  schnell feststellen zu können, beachte man folgendes:

Verbindet man die Punkte  $F_1$  und  $F_2$ , in denen die Auflager-senkrechten von den Kämpferdrücken geschnitten werden, durch die „Schlußlinie“  $F_1F_2$ , zerlegt  $K_2$  nach senkrechter Richtung und nach der Richtung der Schlußlinie in  $B'$  und  $H'$ , so findet man, indem man die Summe der Momente aller Kräfte, in Bezug auf  $F_1$ , gleich Null setzt:

$$B'l - Pa = 0 \text{ und hieraus } B' = \frac{Pa}{l}.$$

Verlegt man die Kraft  $H'$  von  $F_2$  nach dem Punkte  $O$ , in welchem die Schlußlinie von der Senkrechten durch  $S$  geschnitten wird, und zerlegt sie dort in  $H$  und in eine senkrechte Seitenkraft, so erhält man das Biegemoment in Bezug auf  $S$ :

$$M = B' \frac{l}{2} - Hr = 0 \text{ und hieraus}$$

$$r = \frac{B'l}{2H} = \frac{Pa}{2H} = \eta \frac{l}{3a}.$$

Die Gerade  $OD$  schneidet nun auf der Last-Senkrechten die Ordinate

$$u = r \frac{a}{\frac{1}{2}l} = \frac{2}{3}\eta$$

ab, und es ergibt sich somit folgende einfache Konstruktion der Lagen von  $K_1$  und  $K_2$ .

Man bringt  $P$  mit der Kämpferdrucklinie in  $C$  zum Schnitt, zieht die Gerade  $CSF_2$ , setzt die Strecke  $u$  ab, zieht die Gerade  $DO$  und von  $F_2$  durch  $O$  die Gerade  $F_2F_1$ ; man erhält in  $F_1C$  und  $F_2C$  die Richtungen von  $K_1$  und  $K_2$ . Indem man diese Konstruktion für verschie-



dene Lagen der Last  $P$  wiederholt, kann man die von den Kämpferdrücken  $K_1$  umhüllte Linie (Kämpferdruck-Umhüllungslinie) zeichnen, deren hohe Bedeutung für die Theorie der gefährlichsten Belastung bekannt ist.

In gleicher Weise wird verfahren, wenn sich  $P$  von  $S$  aus nach  $F_2$  hin bewegt.

Der durch eine Temperaturerhöhung um  $t$  hervorgerufene, durch das Scheiteltgelenk  $S$  gehende Horizontalschub  $H_t$  ist nach Gleichung (III):

$$H_t = \frac{\varepsilon EJ' t l}{\int y^2 dx},$$

woraus, mit  $\int y^2 dx = \frac{1}{5} f^2 l$ , erhalten wird:

$$H_t = \frac{5 \varepsilon EJ' t}{f^2}.$$

**Aufgabe 3.** Es wird der Einfluß von Verschiebungen der Widerlager auf die Stützenwiderstände  $B$  und  $H$  des in Aufgabe 2 behandelten Bogenträgers gesucht. Fig. 153.

Mit  $EJ' = EJ \cos \varphi = \text{Konst.}$  und Vernachlässigung von  $N$  bestehen die Gleichungen:

$$L' = \int \frac{M}{EJ} ds \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{1}{EJ'} \int M dx \frac{\partial M}{\partial B} \quad \text{und} \quad L'' = \frac{1}{EJ'} \int M dx \frac{\partial M}{\partial H},$$

wobei  $L'$  und  $L''$  die virtuellen Arbeiten der den Zuständen  $X' = 1$  bzw.  $X'' = 1$  entsprechenden Auflagerkräfte bedeuten, während (da die Belastung jetzt  $= 0$  vorausgesetzt ist)

$$M = Hy + Bx, \quad \frac{\partial M}{\partial B} = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial H} = y$$

wird. Man erhält

$$EJ' L' = \int (Hy + Bx) x dx, \quad EJ' L'' = \int (Hy + Bx) y dx$$

und, wegen  $\int y x dx = 0$ ,

$$B = \frac{EJ' L'}{\int x^2 dx} = \frac{12 EJ' L'}{l^3}$$

und

$$H = \frac{EJ' L''}{\int y^2 dx} = \frac{5 EJ' L''}{f^2 l}.$$

Es senke sich nun (bei relativ fest gelegenen Stützpunkten  $A$ ) der Stützpunkt  $B$  um  $\delta$ , während  $l$  in  $l + \Delta l$  übergehe, und sich die Auflagertangenten im Sinne der daselbst wirksamen Einspannungsmomente  $M_1$  und  $M_2$  um die Winkel  $\tau_1$  und  $\tau_2$  drehen. Beachtet man dann, daß die äußeren Kräfte nur im Gleichgewichte sein können, wenn bei  $A$

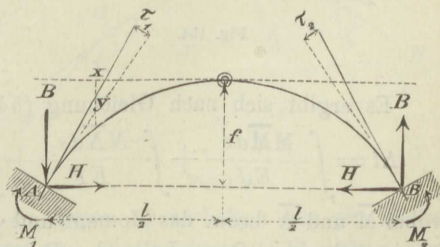


Fig. 153.

Auflagerdrücke wirken, die den in  $B$  angreifenden gleich und entgegengesetzt sind, so findet man die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte

$$\mathfrak{U} = M_1 \tau_1 + M_2 \tau_2 - H \Delta l - B \delta,$$

und in diesen Ausdruck sind die aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$M_1 - Hf - B \frac{l}{2} = 0 \quad \text{und} \quad M_2 - Hf + B \frac{l}{2} = 0$$

folgenden Werte

$$M_1 = Hf + B \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad M_2 = Hf - B \frac{l}{2}$$

einzuführen, so daß entsteht:

$$\mathfrak{U} = B \left[ \frac{l}{2} (\tau_1 - \tau_2) - \delta \right] + H [f(\tau_1 + \tau_2) - \Delta l].$$

Hieraus folgt für den Zustand  $B=1$  der Wert:  $L' = \frac{l}{2} (\tau_1 - \tau_2) - \delta$

und „ „ „ „  $H=1$  „ „ „  $L'' = f(\tau_1 + \tau_2) - \Delta l$ ,

und es ergibt sich mithin:

$$B = \frac{6 E J'}{l^2} \left( \tau_1 - \tau_2 - 2 \frac{\delta}{l} \right),$$

$$H = \frac{5 E J'}{f l} \left( \tau_1 + \tau_2 - \frac{\Delta l}{f} \right).$$

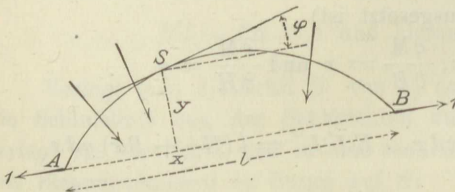


Fig. 154.

**Aufgabe 4.** Ein krummer Stab  $ASB$  ohne Zwischen-  
gelenke sei beliebig belastet  
und ungleichmäßig erwärmt.  
Gesucht ist die Änderung  $\Delta l$   
der Sehne  $AB$ , Fig. 154. Die  
Temperaturänderung folge  
innerhalb eines Querschnittes  
dem in Fig. 77 dargestellten  
Gesetze.

Es ergibt sich nach Gleichung (54):

$$\Delta l = \int \frac{M \bar{M} ds}{EJ} + \int \frac{N \bar{N} ds}{EF} + \int \varepsilon t_0 \bar{N} ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \bar{M} ds,$$

wobei  $\bar{M}$  und  $\bar{N}$  bezw. das Moment und die Längskraft bedeuten, welche für irgend einen Querschnitt des Bogens durch zwei in  $A$  und  $B$  angreifende, in die Gerade  $AB$  fallende, nach außen gerichtete Kräfte „Eins“ hervorgebracht werden.

Nun ist  $\bar{M} = 1 \cdot y$  und  $\bar{N} = 1 \cdot \cos \varphi$ , unter  $\varphi$  den Neigungswinkel der an die Bogenachse gelegten Tangente gegen die Sehne  $AB$  verstanden, und es ergibt sich deshalb

$$(57) \quad \Delta l = \int \frac{My ds}{EJ} + \int \frac{N dx}{EF} + \int \varepsilon t_0 dx + \int \varepsilon \Delta l \frac{y}{h} ds.$$

Beispielsweise verlängert sich die Sehne  $AB$  eines symmetrischen, durch zwei der Scheiteltangente parallele Kräfte  $P$  belasteten und gleichmäßig um  $t$  erwärmten Bogens, Fig. 155 (wegen  $M = Py$  und  $N = P \cos \varphi$ ) um

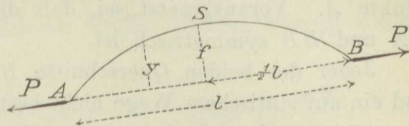


Fig. 155.

$$(58a) \quad \Delta l = P \int_0^l \frac{y^2 ds}{EJ} + P \int_0^l \frac{dx \cos \varphi}{EF} + \varepsilon t l.$$

Setzt man  $J \cos \varphi = J'$  und  $F \sec \varphi = F'$  und führt an Stelle der veränderlichen Werte  $J'$  und  $F'$  konstante Mittelwerte ein, was in allen Fällen der Anwendung zulässig ist, so folgt bei parabolischer Achse (mit

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l}):$$

$$\Delta l = \frac{16Pf^2}{EJ'l^4} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx + \frac{P}{EF'} \int_0^l dx + \varepsilon t l, \text{ d. i.}$$

$$(58b) \quad \Delta l = \frac{8Pf^2l}{15EJ'} + \frac{Pl}{EF'} + \varepsilon t l.$$

**Aufgabe 5.** Gesucht ist die Änderung  $\Delta l$  der Sehne  $l$  eines beliebig belasteten und ungleichmäßig erwärmten Bogens  $ASB$  mit Zwischengelenken, Fig. 156.

Der Winkel  $\Delta \varphi$ , welchen die zu beiden Seiten eines Gelenkes  $G$  an die Bogenachse gelegten Tangenten miteinander bilden, ändert sich im allgemeinen um einen endlichen Wert  $\Delta \varphi$ , und hierdurch vergrößert sich  $l$  um  $\Delta l = f \Delta \varphi$ , wobei  $f$  das Lot von  $G$  auf  $l$  bedeutet. Wären alle  $\Delta \varphi = 0$ , so würde sich der

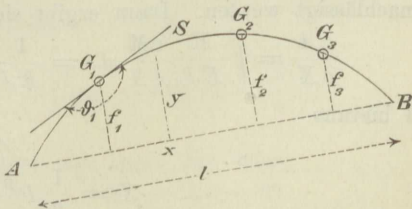


Fig. 156.

Bogen bezüglich der Änderung  $\Delta l$  genau so verhalten wie ein solcher ohne Zwischengelenke, und es würde die Gleichung (57) gültig sein. Fügt man nun zu dem Ergebnisse dieser Gleichung den von den Änderungen sämtlicher Winkel  $\Delta \varphi$  herrührenden Wert  $\Delta l = \sum f \Delta \varphi$ , so erhält man für einen Bogen mit beliebig vielen Zwischengelenken:

$$(59) \quad \Delta l = \int \frac{My ds}{EJ} + \int \frac{N dx}{EF} + \int \varepsilon t_0 dx + \int \varepsilon \Delta l \frac{y}{h} ds + \sum f \Delta \varphi.$$



**Aufgabe 6.** Ein dünner Ring werde nach Fig. 157 mit zwei entgegengesetzt gleichen Kräften  $P$  belastet. Wie groß ist die Beanspruchung des Ringes und die gegenseitige Verrückung  $\vartheta$  der beiden Angriffspunkte  $A$ . Vorausgesetzt sei, daß der Ring in Bezug auf die Achsen  $AA$  und  $BB$  symmetrisch ist.

Jeder der beiden Querschnitte  $B$  wird durch eine Längskraft  $\frac{1}{2} P$  und ein auf statischem Wege nicht bestimmbares Moment  $X$  beansprucht, Fig. 158; an irgend einer Stelle  $C$  entsteht

$$(I) \quad \dots \dots M = X - \frac{1}{2} P y \text{ und } N = \frac{1}{2} P \cos \varphi.$$

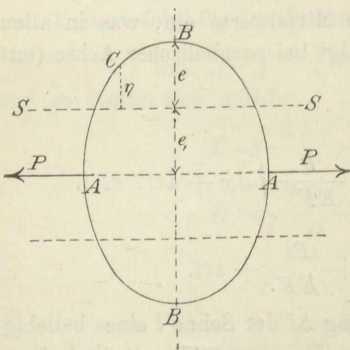


Fig. 157.

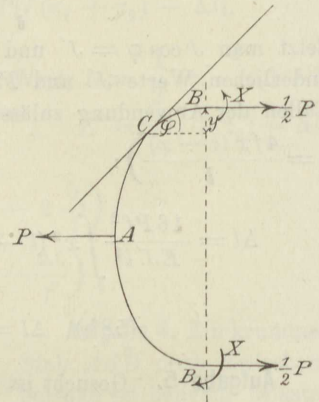


Fig. 158.

Bei Berechnung von  $X$  darf die Formänderungsarbeit der Kräfte  $N$  vernachlässigt werden. Dann ergibt sich

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds = \frac{1}{EJ} \int \left( X - \frac{1}{2} P y \right) ds = 0$$

und hieraus

$$X = \frac{1}{2} P \frac{\int_B^A y ds}{\int_B^A ds}.$$

Ist  $SS$  die den Kräften  $P$  parallele Schwerachse des Bogens  $BA$  und  $e$  ihr Abstand von  $B$ , so wird sehr einfach

$$X = \frac{1}{2} P e$$

und an der Stelle  $C$

$$M = \frac{1}{2} P \eta \text{ (Fig. 157).}$$

Das größte Moment (absolut genommen) entsteht bei  $A$ , nämlich

$$M = -\frac{1}{2} P e_1.$$

Bei Berechnung der Strecke  $\delta$ , um welche der Durchmesser  $AA$  zunimmt, darf ebenfalls der Einfluß der Kräfte  $N$  vernachlässigt werden. Es wird dann

$$\delta = \frac{\partial A}{\partial P} = \frac{4}{EJ} \int_B^A P \left( \frac{\eta}{2} \right)^2 ds = \frac{P}{EJ} \int_B^A \eta^2 ds = \frac{PT}{EJ},$$

wo  $T$  das Trägheitsmoment des Bogens  $BA$  in Bezug auf die Achse  $SS$  bedeutet.

Im allgemeinen findet man die Lage der  $SS$  und das Trägheitsmoment  $T$  am schnellsten zeichnerisch mit Hilfe von Seilpolygonen. Ist dagegen der Ring kreisförmig, Fig. 159,

so ergibt sich  $e = r \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right)$ ,

$e_1 = \frac{2r}{\pi}$ . Die Momente bei  $B$  und  $A$  sind

$$M_B = \frac{Pr}{2} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) =$$

$$+ 0,182 Pr; M_A = -\frac{Pr}{\pi}$$

$$= -0,318 Pr,$$

und das Trägheitsmoment  $T$  wird wegen

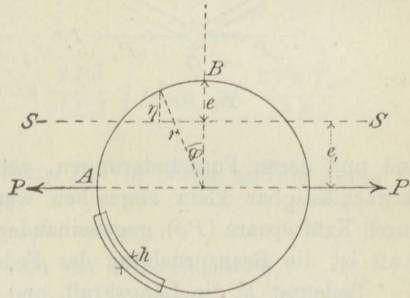


Fig. 159.

$$\eta = r \left( \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)$$

$$T = r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)^2 d\varphi = r^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

Für die Verrückung  $\delta$  ergibt sich daher der Wert:

$$\delta = \frac{Pr^3}{EJ} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{M_{max} r^2 (\pi^2 - 8)}{4 EJ},$$

wo  $M_{max} = M_A = \frac{Pr}{\pi}$  (absolut genommen). Ist die Stärke des Ringes  $= h$  und liegt der Schwerpunkt des Querschnitts in der Mitte von  $h$ , so ist die größte Beanspruchung

$$\sigma = \frac{M_{max} h}{2 J},$$

und man erhält die folgende Beziehung zwischen  $\sigma$  und  $\delta$ :

$$\sigma = E \frac{\delta h}{r^2} \frac{2}{\pi^2 - 8} = 1,07 E \frac{\delta h}{r^2};$$

dieselbe ist wichtig für die Beurteilung ringförmiger Biegefedern.

**Aufgabe 7.** Eine Blattfeder  $ABA$  sei nach Fig. 160 zwischen zwei Backen eingespannt, die bei  $\mathcal{G}$  gelenkartig miteinander befestigt

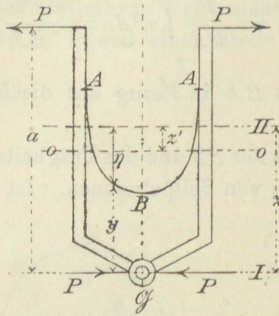


Fig. 160.

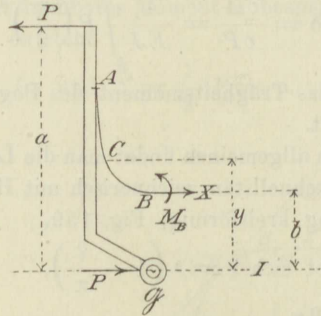


Fig. 161.

sind und deren Formänderungen, verglichen mit denen der Feder, als vernachlässigbar klein angesehen werden dürfen. Die Backen werden durch Kräftepaare ( $Pa$ ) gegeneinander um den Winkel  $\tau$  gedreht. Wie groß ist die Beanspruchung der Feder?  $BG$  sei Symmetrieachse.

Bedeutet  $X$  die Längskraft und  $M_B$  das Biegemoment für den Querschnitt  $B$  (Fig. 161), so muß, damit Gleichgewicht bestehe,

$$M_B + Pa = Xb$$

sein, und hieraus folgt

$$M_B = Xb - Pa.$$

An der Stelle  $C$  ist

$$M = M_B + X(y - b) = Xy - Pa.$$

Zur Berechnung von  $X$  dient (unter Vernachlässigung der Formänderungsarbeit infolge der Kräfte  $N$ ) die Bedingung

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds = \frac{1}{EJ} \int (Xy - Pa) y ds = 0,$$

und hieraus ergibt sich

$$X = Pa \frac{S_I}{T_I},$$

wo

$$\left. \begin{array}{l} T_I = \int y^2 ds \text{ das Trägheitsmoment} \\ S_I = \int y ds \text{ das statische Moment} \end{array} \right\} \text{ des Bogens } BA,$$



bezogen auf die durch den Gelenkmittelpunkt  $G$  und senkrecht zur Symmetrieachse  $BG$  gelegte Achse  $I$  bedeutet.

Bezieht man nun den Bogen  $BA$  auf eine neue Achse  $II$ , welche parallel zu  $I$  ist und von  $I$  den Abstand

$$z = \frac{T_I}{S_I}$$

hat, so erhält man an der Stelle  $C$  das Moment

$$M = Xy - Pa = Pa \frac{y - z}{z} = - \frac{Pa\eta}{z}$$

und findet, absolut genommen,

$$M_{max} = \frac{Pa}{z} \cdot \eta_{max}.$$

Der Winkel  $\tau$ , um den sich die beiden Backen gegeneinander drehen, ist (wenn  $Pa = \mathfrak{M}$  gesetzt wird)

$$\tau = \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{M}} = 2 \int_B^A \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}} ds = \frac{2Pa}{z^2 EJ} \int_B^A \eta^2 ds = \frac{2Pa T_{II}}{z^2 EJ},$$

wo  $T_{II}$  das Trägheitsmoment des Bogens  $BA$  in Bezug auf die Achse  $II$  bedeutet. Bezeichnet man nun mit

$s$  die Länge des Bogens  $BA$ ,

$z'$  den Abstand der Achse  $II$  von der Schwerachse  $O$ ,

$T_0$  das Trägheitsmoment des Bogens  $BA$ , bezogen auf die Achse  $O$ ,  
so erhält man

$$\begin{aligned} T_I &= T_0 + s(z - z')^2 \\ T_{II} &= T_0 + s z'^2 \\ T_{II} - T_I &= 2s z z' - s z^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber  $T_I = z S_I$ , ferner  $S_I = s(z - z')$ , weshalb

$$T_{II} = s z z'$$

und

$$\tau = 2 \frac{Pa s z'}{z EJ} = 2 \frac{M_{max} s z'}{\eta_{max} EJ}.$$

Ist die Stärke der Feder (deren Querschnitt ein Rechteck sein möge) gleich  $h$ , so ist die größte an der Stelle  $A$  auftretende Beanspruchung:

$$\sigma = \frac{M_{max} h}{2J},$$

und die gesuchte Beziehung zwischen  $\sigma$  und  $\tau$  lautet:

$$\sigma = \frac{1}{4} \tau E \frac{h \eta_{max}}{s z'}.$$

Die Ermittlung von  $z'$  und  $\eta_{max}$  geschieht im allgemeinen am zweckmäßigsten durch Zeichnung mit Hilfe zweier Seilpolygone. Man zerlege den Bogen  $BA$  in gleiche lange Teilchen, betrachte dieselben

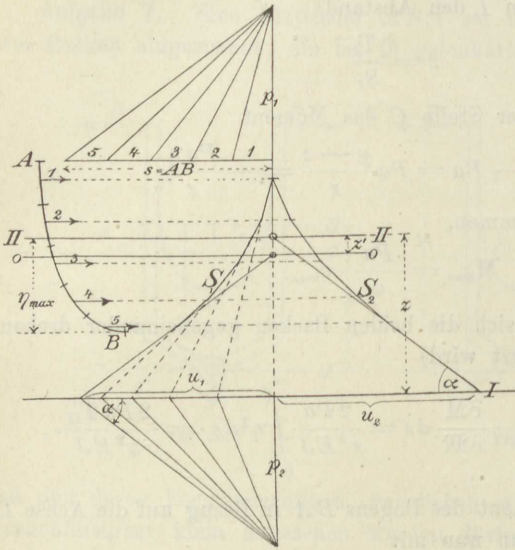


Fig. 162.

als Kräfte, die parallel zur Achse  $I$  wirken und verbinde sie durch ein Seilpolygon  $S_1$  (Fig. 162). Der Schnittpunkt der äußersten Polygonseiten bestimmt die Achse  $0$ . Nun werden die von den Seileckseiten auf der Achse  $I$  abgeschnittenen Strecken als Kräfte aufgefaßt, die in den Mittelpunkten der Bogenteilchen angreifen; dann wird ein zweites Seileck  $S_2$  gezeichnet und dessen letzte Seite mit der ersten Seite zum Schnittpunkt gebracht. Der Schnittpunkt bestimmt die Achse  $II$ , denn es ist — mit den aus der Figur ersichtlichen Beziehungen —

$$S_I = u_1 p_1 \quad T_I = u_2 p_1 p_2$$

$$z = u_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{u_2 p_2}{u_1} = \frac{T_I}{S_I}.$$

Damit sind aber die Strecken  $z'$  und  $\eta_{max}$  bestimmt.

In einfacheren Fällen wird man der Berechnung von  $z'$  und  $\eta_{max}$  den Vorzug geben.

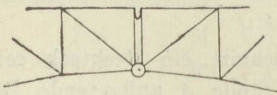


Fig. 163.

Mit Hilfe der vorstehenden Untersuchung ist man z. B. imstande, anzugeben, welche Beanspruchung die in Fig. 163 dargestellte Feder im Scheitel eines Dreigelenkbogens infolge der gegenseitigen Drehung der beiden Bogenhälften erfährt.

Vergl. Aufgabe 2 auf Seite 61; der Drehungswinkel wurde dort mit  $\delta$  bezeichnet und mit Hilfe einer Einflußlinie ermittelt.

§ 17.

**Die Biegelinie.**

Trägt man die nach unten positiv gezählten, senkrechten Verschiebungen  $\delta$  der Punkte der in einer lotrechten Ebene gedachten Achse  $ASB$  eines einfach gekrümmten Stabes von einer Geraden  $A'B'$  aus als Ordinaten auf, so erhält man die Biegelinie  $A''S''B''$ ; die zwischen ihr und der Geraden  $A'B'$  gelegene Fläche heiße die Biegungsfläche. Fig. 164.

1) Bestimmung der Biegelinie für ein Stabstück  $AB$  ohne Zwischen-  
gelenke. Die Stabachse möge auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit nach oben positiver, senkrechter  $y$ -Achse bezogen werden;

$\varphi$  bedeute den Neigungswinkel der im Punkte  $xy$  an die Stabachse gelegten Tangente gegen die  $x$ -Achse. Fig. 164.

Die Änderung  $\Delta y$  von  $y$  ergibt sich durch Differenzieren der Gleichung

$$dy = ds \sin \varphi,$$

wobei das Differentialzeichen durch das Zeichen  $\Delta$  zu ersetzen ist. Man erhält

$$\begin{aligned} \Delta dy &= \Delta ds \sin \varphi + ds \cos \varphi \Delta \varphi \\ &= \frac{\Delta ds}{ds} dy + \Delta \varphi dx, \end{aligned}$$

und es folgt, da  $\delta = -\Delta y$ , also

$$d\delta = -d\Delta y = -\Delta dy^*)$$

ist:

$$-\frac{d\delta}{dx} = \Delta \varphi + \frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi,$$

woraus (durch Differenzieren nach  $x$ ) die Differentialgleichung der Biegelinie

$$(60) \quad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx}$$

\*) Nach einem bekannten Satze der Variationsrechnung dürfen die Zeichen  $d$  und  $\Delta$  vertauscht werden.

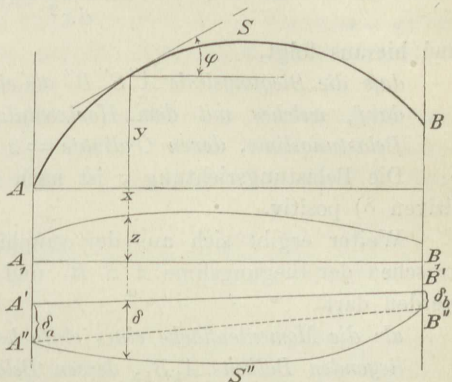


Fig. 164.



gefunden wird. Mit der Bezeichnung

$$(61) \quad z = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d \left( \frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi \right)}{dx}$$

wird

$$-\frac{d^2 \delta}{dx^2} = z,$$

und hieraus folgt,

*daß die Biegungslinie  $A''S''B''$  als ein Seilpolygon aufgefaßt werden darf, welches mit dem Horizontalzuge (Polabstande) 1 zu einer Belastungslinie, deren Ordinate  $= z$  ist, gezeichnet wird.\*)*

Die Belastungsrichtung  $z$  ist nach unten (also im Sinne der positiven  $\delta$ ) positiv.

Weiter ergibt sich aus der graphischen Statik, daß die Fläche zwischen der Biegungslinie  $A''S''B''$  und der Geraden  $A''B''$  angesehen werden darf

*als die Momentenfläche eines einfachen, d. h. an den Enden frei aufliegenden Balkens  $A_1B_1$ , dessen Belastungslinie die Ordinate  $z$  hat.*

Sind die senkrechten Verschiebungen  $\delta_a$  und  $\delta_b$  der Endpunkte  $A$  und  $B$  des betrachteten Bogenstückes gleich Null, so stimmt die Biegungslinie mit der Momentenkurve des einfachen Balkens  $A_1B_1$  überein.

Handelt es sich nun (ebenso wie im § 16) um Stäbe, deren Krümmungsradien im Vergleiche zur Stabdicke sehr groß sind, und auf deren Spannungen und Formänderungen die im § 13 entwickelten Grundgleichungen angewendet werden dürfen, so ist in Gleichung (61) einzuführen:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \varepsilon t_0 \quad (\text{nach Gleichung (43), Seite 90})$$

und, da die Änderung  $\Delta d\varphi$  des von zwei unendlich nahen Tangenten eingeschlossenen Winkels  $d\varphi$  mit dem im § 13 mit  $d\tau$  bezeichneten Winkel übereinstimmt, um welchen sich ein Stabquerschnitt gegen seinen Nachbarquerschnitt dreht,

$$\Delta d\varphi = \left( \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \right) ds \quad (\text{nach Gleichung (44), Seite 90})$$

also

$$\frac{\Delta d\varphi}{dx} = \left( \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \right) \sec \varphi.$$

Es ergibt sich mithin:

\*) Die Differentialgleichung einer Seillinie mit dem Horizontalzuge  $H$  und der Belastungsordinate  $z$  ist, bezogen auf rechtwinklige Koordinaten ( $yx$ ):

$$+ H \frac{d^2 y}{dx^2} = z.$$



Der von den Biegemomenten abhängige Teil der Belastungslinie, um dessen Einfluß auf die Durchbiegungen es sich zunächst handeln möge, besteht aus geraden Linien, und es ist somit die Belastungsfläche für irgend eine Strecke  $\lambda_m$  ein Trapez, dessen Inhalt mit  $T_m$  bezeichnet werden soll. Dieses Trapez ist bestimmt durch die Ordinaten

$$\eta' = \frac{M_{m-1}}{EJ'_m} \text{ und } \eta'' = \frac{M_m}{EJ'_m}.$$

Wird nun das der Biegelinie einbeschriebene Polygon, dessen Ecken senkrecht unter den Knotenpunkten liegen, gesucht, so darf (nach einem hier als bekannt vorausgesetzten Satze aus der Theorie der Biegemomente, als welche ja die Durchbiegungen  $\delta$  aufgefaßt werden dürfen) die Belastungsfläche durch eine Schar von Einzellasten ersetzt werden, welche in die Senkrechten durch die Knotenpunkte fallen. Die durch  $m$  gehende Einzellast ist hierbei

$$w_m = \frac{T_m \xi_m}{\lambda_m} + \frac{T_{m+1} \xi'_{m+1}}{\lambda_{m+1}},$$

wenn  $\xi_m$  und  $\xi'_{m+1}$  die Abstände der Schwerpunkte der Trapeze  $T_m$  und  $T_{m+1}$  von den Senkrechten durch  $m-1$  und  $m+1$  bedeuten. Das statische Moment des Trapezes (welches man sich in zwei Dreiecke zerlegt denke) ist

$$T_m \xi_m = \eta' \frac{\lambda_m}{2} \frac{\lambda_m}{3} + \eta'' \frac{\lambda_m}{2} \frac{2\lambda_m}{3} = \frac{\lambda_m^2}{6 EJ'_m} (M_{m-1} + 2 M_m),$$

und ebenso folgt

$$T_{m+1} \xi'_{m+1} = \frac{\lambda_{m+1}^2}{6 EJ'_{m+1}} (M_{m+1} + 2 M_m),$$

weshalb entsteht:

$$w_m = \frac{1}{6 E} \left[ \frac{\lambda_m}{J'_m} (M_{m-1} + 2 M_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{J'_{m+1}} (M_{m+1} + 2 M_m) \right].$$

Für die Vergrößerung, welche die Einzellast  $w$  erfahren muß, wenn der Einfluß der Änderungen  $\Delta s$  der Strecken  $s$  berücksichtigt werden soll, ergibt sich aus der Fachwerkstheorie der Wert

$$w_m = \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \varphi_m \text{ [nach § 4]*),}$$

und es folgt, wenn (für den Fall  $t=0$ ):

\*) Geht man zur Grenze über, indem man  $\lambda$  durch  $dx$  ersetzt, so wird  $\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \varphi_m = d \left( \frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi \right)$ , und es folgt, wenn die Einzellast  $w_m$  durch das Element  $z dx$  einer Belastungsfläche ersetzt wird, genau wie früher

$$\text{die Ordinate } z = \frac{d \left( \frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi \right)}{dx}.$$



$$\frac{\Delta s_m}{s_m} = \frac{N_m}{EF_m} \text{ und } \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} = \frac{N_{m+1}}{EF_{m+1}}$$

eingeführt wird, im ganzen

$$w_m = \frac{\lambda_c}{EJ_c} \left[ \omega_m - \left( \frac{N_m}{F_m} \operatorname{tg} \varphi_m - \frac{N_{m+1}}{F_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} \right) \frac{J_c}{\lambda_c} \right],$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$(63) \quad \omega_m = \frac{1}{6} \left[ \frac{J_c}{J'_m} \frac{\lambda_m}{\lambda_c} (M_{m-1} + 2M_m) + \frac{J_c}{J'_{m+1}} \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_c} (M_{m+1} + 2M_m) \right].$$

Zeichnet man zu den Gewichten  $w$  mit dem Polabstande „Eins“ ein Seilpolygon  $A''S''B''$  und trägt die Schluslinie  $A'B'$  ein, wozu 2 Verschiebungen  $\delta$  gegeben sein müssen (meistens die Werte  $\delta_0 = 0$  und  $\delta_n = 0$ ), so erhält man die Durchbiegungen  $\delta$ . Noch besser ist es, die Einzellasten  $w$  mittels der Gleichung

$$(64) \quad w_m = \omega_m - \left( \frac{N_m}{F_m} \operatorname{tg} \varphi_m - \frac{N_{m+1}}{F_{m+1}} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} \right) \frac{J_c}{\lambda_c}$$

zu berechnen; man muß dann die Polentfernung „Eins“ durch die Entfernung  $\mathfrak{S} = \frac{EJ_c}{\lambda_c}$  ersetzen. Wählt man hierfür  $\mathfrak{S} = \frac{EJ_c}{\gamma \lambda_c}$ , wobei  $\gamma$  eine beliebige runde Zahl ist, so sind die Ordinaten des Seilpolygons gleich den mit  $\gamma$  multiplizierten Durchbiegungen.\*)

Wenn der Einfluß einer Temperaturänderung berücksichtigt werden soll, so muß

$$\frac{M}{EJ'} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h'} \text{ an die Stelle von } \frac{M}{EJ'} \text{ treten}$$

$$\text{und } \frac{N}{EF} + \varepsilon t_0 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \frac{N}{EF} \text{ [nach Gleichung (62)].}$$

Hierbei ist  $h' = h \cos \varphi$  die vertikale Projektion der Querschnittshöhe  $h$ .

Macht man die Annahme, daß  $t_0$  und  $\Delta t$  für sämtliche Bogenquerschnitte gleich groß sind und bezeichnet den Wert von  $h'$  für das  $m^{\text{te}}$  Feld mit  $h'_m$ , so findet man leicht, daß die durch die Gleichung (64) gegebene Einzellast  $w_m$  beim Eintreten einer Temperaturänderung um

$$(65) \quad w'_m = \frac{\varepsilon EJ_c}{\lambda_c} \left[ \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\lambda_m}{h'_m} + \frac{\lambda_{m+1}}{h'_{m+1}} \right) - t_0 (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) \right]$$

vergrößert werden muß. Ist die Bogenachse eine in Bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrische Parabel mit dem Pfeile  $f$ , so ist

$$(66) \quad \operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1} = \frac{4f}{l^2} (\lambda_m + \lambda_{m+1}),$$

\*) Bezüglich der Einheiten ist zu betonen, daß sowohl die Werte  $\omega$  und  $w$  als auch die Polentfernung  $\mathfrak{S}$  Momente vorstellen.

und es folgt dann bei konstantem  $\lambda$  und  $h'$  für alle Knotenpunkte der gleiche Wert

$$(67) \quad w'_m = \varepsilon EJ_c \left( \frac{\Delta t}{h'} - 8t_0 \frac{f}{l^2} \right);$$

derselbe ist auch bei flachen Kreisbögen brauchbar.

3) Bestimmung des Integrales:  $\int y \frac{M ds}{EJ}$  mit Hilfe der Werte  $\omega$ . Zuweilen soll gleichzeitig mit den Verschiebungen  $\delta$  eines Bogenträgers die Änderung  $\Delta l$  der Stützweite  $l$  bestimmt werden. Wird hierzu die auf Seite 150 abgeleitete Gleichung (57) benutzt, so handelt es sich u. a. um die Berechnung des Integrales

$$\int_0^l y \frac{M ds}{EJ} = \int_0^l y \frac{M dx}{EJ'},$$

und es möge daher an dieser Stelle gezeigt werden, wie sich dieses Integral durch die bereits bei der Berechnung der  $\delta$  gebrachten Werte  $\omega$  ausdrücken läßt.

Für das Feld  $\lambda_m$  ergibt sich mit den aus Fig. 165 zu ersiehenden Bezeichnungen:

$$y = y_{m-1} \frac{x'}{\lambda_m} + y_m \frac{x}{\lambda_m} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_m} y \frac{M dx}{EJ'} &= \frac{y_{m-1}}{\lambda_m} \int_0^{\lambda_m} x' \frac{M}{EJ'} dx + \frac{y_m}{\lambda_m} \int_0^{\lambda_m} x \frac{M}{EJ'} dx \\ &= \frac{y_{m-1}}{\lambda_m} T_m \xi'_m + \frac{y_m}{\lambda_m} T_m \xi_m; \end{aligned}$$

denn es sind  $\int_0^{\lambda_m} x' \frac{M}{EJ'} dx$  und  $\int_0^{\lambda_m} x \frac{M}{EJ'} dx$  die statischen Momente des Belastungstrapezes  $T_m$  in Bezug auf die Senkrechten durch die Knotenpunkte  $m$  und  $m-1$ . Es folgt deshalb für den ganzen Bogen (mit  $y_0 = 0$  und  $y_n = 0$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^l y \frac{M dx}{EJ'} &= y_1 \frac{T_1 \xi_1}{\lambda_1} + y_1 \frac{T_2 \xi'_2}{\lambda_2} + y_2 \frac{T_2 \xi_2}{\lambda_2} + y_2 \frac{T_3 \xi'_3}{\lambda_3} + \dots \\ &+ y_{n-1} \frac{T_{n-1} \xi_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + y_{n-1} \frac{T_n \xi'_n}{\lambda_n}, \end{aligned}$$

und hierfür kann, mit Beachtung der Entwicklungen auf Seite 175, geschrieben werden

$$(68) \quad \int_0^l y \frac{M dx}{EJ'} = \frac{\lambda_c}{EJ_c} \sum_{m=1}^{m=n-1} y_m \omega_m.$$

Faßt man die Werte  $\omega$  als Kräfte auf, welche in den Knotenpunkten  $0, 1, \dots, m, \dots$  angreifend, parallel zu  $on$  sind und zeichnet mit dem Polabstand  $\mathfrak{S}$  ein Seilpolygon, dessen äußerste Seiten auf der Geraden  $on$  die Strecke  $e$  abschneiden, Fig. 166, so ergibt sich

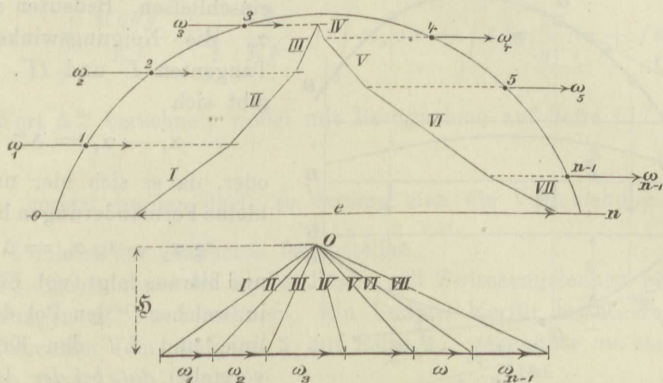


Fig. 166 u. Fig. 167.

$$\sum y \omega = \mathfrak{S} e$$

und es folgt, wenn  $\mathfrak{S} = \frac{E J_c}{\lambda_c \gamma}$  gewählt wird, wobei  $\gamma$  eine beliebige Zahl bedeutet,

$$\int_0^l y \frac{M dx}{E J'} = \frac{e}{\gamma}.$$

$\frac{e}{\gamma}$  stellt eine Linie vor, nämlich die von den Biegemomenten herrührende Verlängerung  $\Delta l$  der Stützweite  $l$ .

Wendet man die unter 2) und 3) mitgeteilten Verfahren auf die Berechnung der Formänderungen von Bogenbrücken an, so genügt es in der Regel, die Punkte, in denen die senkrechten, zwischen die Fahrbahn und den Bogen eingeschalteten Stäbe die Bogenachse schneiden, als Knotenpunkte in dem vorhin erklärten Sinne anzunehmen. Fig. 168. In der Regel ist die Feldweite  $\lambda$  konstant, und es wird dann  $\lambda_c = \lambda$  gesetzt.

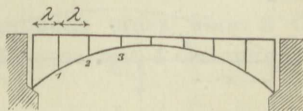


Fig. 168.

**4) Biegelinie für einen Stab mit Zwischengelenken.** Liegt im Punkte  $G$  der Stabachse (Fig. 169) ein Gelenk, so wird sich der Winkel  $\mathfrak{Z}$ , welchen die beiden in  $G$  an die angrenzenden Zweige der Stabachse gelegten Tangenten  $I$  und  $II$  miteinander bilden, infolge der



Formänderung des Stabes um den sehr kleinen aber endlichen Wert  $\Delta \mathfrak{Z}$  ändern. Es müssen dann die in dem senkrecht unter  $G$  gelegenen Punkte  $G''$  an die entsprechenden Zweige  $A''G''$  und  $G''B''$  der Biegungslinie

gelegten Tangenten  $I'$  und  $II'$  miteinander den Winkel  $\Delta \mathfrak{Z}$  einschließen. Bedeuten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Neigungswinkel der Tangenten  $I'$  und  $II'$ , so ergibt sich

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \Delta \mathfrak{Z}$$

oder, da es sich hier um sehr kleine Formänderungen handelt,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 = \Delta \mathfrak{Z}$$

und hieraus folgt (vgl. Fig. 169, in welcher  $O$  den Pol der Seillinie und  $LT$  den Kräftezug vorstellt), daß bei der Aufzeichnung der Seillinie  $A''S''B''$  außer der stetigen Belastung ( $z$ ) noch unter jedem Gelenke eine Einzelast  $\Delta \mathfrak{Z}$  anzunehmen ist.

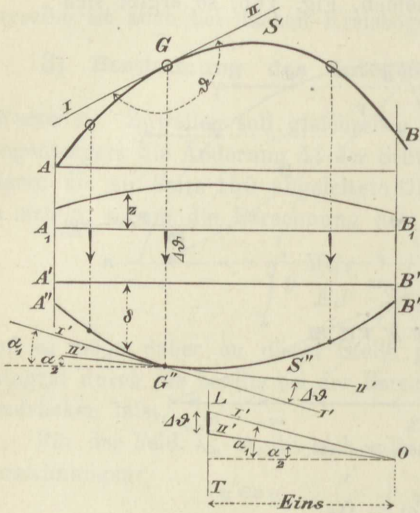


Fig. 169.

**Beispiel. Biegungslinie eines Bogens mit 3 Gelenken.** Die Kämpfer  $A$  und  $B$  seien in senkrechter Richtung unverschieblich, die

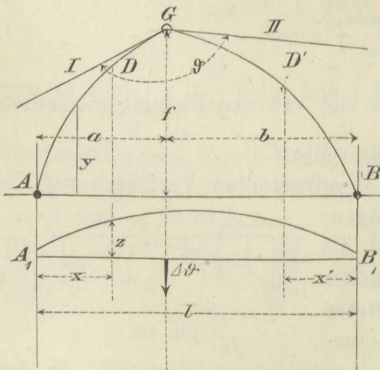


Fig. 170.

Stützweite  $l$  gehe infolge Nachgebens der Widerlager über in  $l + \Delta l$ .

Die gesuchte Biegungslinie stimmt mit der Momentenkurve eines einfachen Balkens  $A_1B_1$  überein, auf welchen eine stetige Belastung mit der durch die Gleichung (62) gegebenen Ordinate  $z$  und eine Einzelast  $\Delta \mathfrak{Z}$  wirkt. Zuerst möge  $\Delta \mathfrak{Z} = 0$  angenommen werden; es entsteht dann eine Biegungslinie, die am besten mit Hilfe des unter 2) gegebenen Verfahrens bestimmt wird und deren Ordinate  $= \delta'$

sein möge. Infolge von  $\Delta \mathfrak{Z}$  wird der Wert  $\delta$  für einen Punkt  $D$ , links vom Scheitel, um  $\frac{\Delta \mathfrak{Z} b}{l} x$  vergrößert und für einen Punkt  $D'$ ,

rechts vom Scheitel, um  $\frac{\Delta \mathfrak{S} a}{l} x', *$ ) weshalb sich ergibt:

$$\delta = \delta' + \Delta \mathfrak{S} \frac{bx}{l}, \text{ bzw. } \delta = \delta' + \Delta \mathfrak{S} \frac{ax'}{l}.$$

Hat man nun mittels der auf Seite 165 entwickelten Gleichung

$$\Delta l = \int_0^l \frac{My ds}{EJ} + \int_0^l \frac{N dx}{EF} + \int_0^l \varepsilon t_0 dx + \int_0^l \varepsilon \Delta t \frac{y}{h} ds + f \Delta \mathfrak{S}$$

den Wert  $\Delta \mathfrak{S}$  berechnet, wobei mit Bezugnahme auf Seite 177  $\int_0^l \frac{My ds}{EJ}$

$= \frac{e}{\gamma}$  gesetzt werden darf, so vermag man die Verschiebung  $\delta$  eines jeden Punktes der Stabachse festzustellen.

5) Nicht immer ist es bei Bögen mit Zwischengelenken nötig, die Änderungen  $\Delta \mathfrak{S}$  zu berechnen. Ein Beispiel hierfür bietet die Lösung der folgenden (der Aufgabe 2 auf Seite 47 gegenüber zu stellenden)

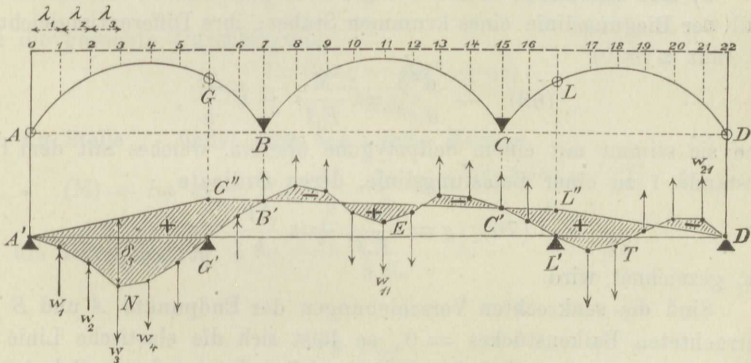


Fig. 171.

**Aufgabe:** Gesucht wird die Biegungsfläche eines über 3 Öffnungen gespannten kontinuierlichen Bogens mit 4 Gelenken  $A$ ,  $D$ ,  $G$  und  $L$  (Fig. 171).\*\*)

\*) Die auf  $A_1 B_1$  wirkende Einzellast  $\Delta \mathfrak{S}$  erzeugt die Auflagerwiderstände  $\frac{\Delta \mathfrak{S} b}{l}$  (bei  $A_1$ ) und  $\frac{\Delta \mathfrak{S} a}{l}$  (bei  $B_1$ ) und die Biegemomente  $\frac{\Delta \mathfrak{S} b}{l} x$  (bei  $x$ ) und  $\frac{\Delta \mathfrak{S} a}{l} x'$  (bei  $x'$ ).

\*\*) Bei  $B$  und  $C$  sind keine Gelenke angeordnet, die einzelnen Bögen sind vielmehr über den Auflagern fest miteinander verbunden. Ein besonderer Fall dieses Bogenträgers ist der bekannte Gerbersche Balken.

Die senkrechten Verschiebungen der Stützpunkte  $A, B, C, D$  seien  $= 0$ . Es soll, wie unter 2), mit Einzellasten  $w$  an Stelle der Belastung  $z$  gerechnet werden.

Man zeichne mit der Polentfernung  $\mathfrak{P} = \frac{EJ_c}{\lambda}$ :

das Momentenpolygon  $A'NG'$  für den einfachen Balken  $A'G'$  mit den Lasten  $w_1$  bis  $w_5$ ,

das Momentenpolygon  $G'EL'$  für den einfachen Balken  $G'L'$  mit den Lasten  $w_6$  bis  $w_{16}$  und

das Momentenpolygon  $L'TD'$  für den einfachen Balken  $L'D'$  mit den Lasten  $w_{17}$  bis  $w_{21}$ ,\*)

bringe die Auflagersenkrechten durch  $B$  und  $C$  mit dem Momentenpolygone  $G'EL'$  in  $B'$  und  $C'$  zum Schnitt, lege durch  $B'$  und  $C'$  eine Gerade, welche die Senkrechten durch die Gelenke in  $G''$  und  $L''$  schneidet und verbinde  $A'$  mit  $G''$  und  $D'$  mit  $L''$  durch Geraden. Die zwischen den Momentenpolygonen und dem Linienzuge  $A'G''L''D'$  gelegene Fläche ist die gesuchte Biegungsfläche.

**6) Die elastische Linie des geraden Balkens** ist ein besonderer Fall der Biegelinie eines krummen Stabes; ihre Differentialgleichung ist (mit  $\varphi = 0$ )

$$(69) \quad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h},$$

und sie stimmt mit einem Seilpolygone überein, welches mit dem Polabstande 1 zu einer Belastungslinie, deren Ordinate

$$(70) \quad z = \frac{M}{EJ} + \varepsilon \frac{\Delta t}{h}$$

ist, gezeichnet wird.

Sind die senkrechten Verschiebungen der Endpunkte  $A$  und  $B$  des betrachteten Balkenstückes  $= 0$ , so läßt sich die elastische Linie als Momentenkurve eines einfachen Balkens  $AB$  auffassen, dessen Belastungshöhe an der Stelle  $x$  gleich  $z$  ist.

Bei konstantem  $EJ$  empfiehlt es sich,

$$(71) \quad z = M + \varepsilon EJ \frac{\Delta t}{h}$$

zu setzen. Bedeutet dann  $(M)$  die Ordinate der durch diese Belastungslinie bedingten Momentenkurve (welche auch die zweite Momentenkurve des Balkens  $AB$  heißt), so ist

$$(72) \quad \delta = \frac{(M)}{EJ}.$$

\*) In Fig. 171 wurden die nach Gleichung (64) zu berechnenden Werte  $w_3$  bis  $w_5$ ,  $w_{10}$  bis  $w_{12}$  und  $w_{17}$  und  $w_{18}$  positiv (d. h. abwärts gerichtet), die übrigen  $w$  hingegen negativ angenommen.



**Beispiel.** Auf einen Balken mit konstantem  $EJ$ , Fig. 172, der an den Enden frei aufliegt, wirken zwei Einzellasten  $P$ . Es sollen die Durchbiegungen  $\delta$  an den Stellen  $x$  und  $x_1$  berechnet werden. Temperaturänderungen  $\Delta t$  seien ausgeschlossen.

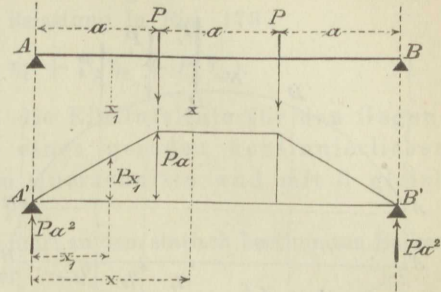


Fig. 172.

Die Momentenfläche ist ein Trapez, dessen Höhe  $= Pa$  und dessen Inhalt  $= 2 Pa^2$  ist; sie wird als Belastungsfläche des einfachen Balkens  $A'B'$  aufgefaßt und ruft an dessen Auflagern die Gegendrücke  $Pa^2$

hervor. Das zweite Moment für den Querschnitt bei  $x$  ist deshalb

$$(M) = Pa^2 x - \frac{Pa^2}{2} \left( x - \frac{2a}{3} \right) - Pa \left( x - a \right) \frac{x - a}{2} \\ = \frac{Pa (9ax - 3x^2 - a^2)}{6}$$

und die gesuchte Durchbiegung:

$$\delta = \frac{Pa (9ax - 3x^2 - a^2)}{6 EJ}$$

An Stelle  $x_1$  findet man das zweite Moment

$$(M) = Pa^2 x_1 - Px_1 \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_1}{3} = \frac{Px_1 (6a^2 - x_1^2)}{6}$$

und die Durchbiegung  $\delta = \frac{Px_1 (6a^2 - x_1^2)}{6 EJ}$ .

## § 18.

### Der Maxwellsche Satz.

Der im § 9 für das Fachwerk bewiesene, an die Voraussetzungen  $L = 0$ ,  $\Delta t = 0$  gebundene Maxwellsche Satz gilt auch für alle den Annahmen des § 12 entsprechenden, auf Biegungsfestigkeit beanspruchten stabförmigen Körper, was ohne weiteres einleuchtet, wenn die auf Seite 60 für die Wege  $\delta_{mn}$  und  $\delta_{nm}$  aufgestellten Gleichungen durch die Beziehungen

$$\delta_{mn} = \int \sigma_m \left( \frac{\Delta ds_v}{ds} \right)_n dV = \int \frac{\sigma_m \sigma_n dV}{EF} \quad \text{und}$$

$$\delta_{nm} = \int \sigma_n \left( \frac{\Delta ds_v}{ds} \right)_m dV = \int \frac{\sigma_n \sigma_m dV}{EF}$$

ersetzt werden.

**Aufgabe 1.** Gesucht ist die Einflußlinie für die Senkung  $\delta$  eines Punktes  $D$  der Achse eines Bogenträgers  $ASB$  (Fig. 173).

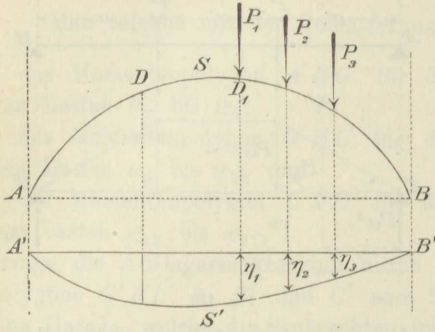


Fig. 173.

Wir denken den gewichtslosen Träger nur mit einer in  $D$  angreifenden senkrechten Kraft „Eins“ belastet, berechnen die hierdurch hervorgerufenen Auflagerkräfte, Momente  $M$  und Längskräfte  $N$  und zeichnen nach der im § 17 gegebenen Anleitung die Biegelinie  $A'S'B'$ . Ist nun die unter  $D_1$  gemessene Ordinate dieser Linie  $= \eta_1$ , so verschiebt die in  $D$  gedachte Last „Eins“ den Punkt  $D_1$  in senkrechtem Sinne um  $\eta_1$  nach unten, und es wird mit hin (nach Satz 1) eine in  $D_1$  angreifende Last „Eins“ den Punkt  $D$  ebenfalls um  $\eta_1$  senken. Hieraus folgt, daß die Biegelinie  $A'S'B'$  die gesuchte Einflußlinie für die Senkung  $\delta$  des Punktes  $D$  ist. Beispielsweise senken die Lasten  $P_1, P_2, P_3$  den Punkt  $D$  um

$$\delta = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3.$$

Die Einflußlinie  $A'S'B'$  für die Senkung  $\delta$  des Punktes  $D$  der Achse eines Balkens  $AB$  mit veränderlichem Querschnitte (Fig. 174)

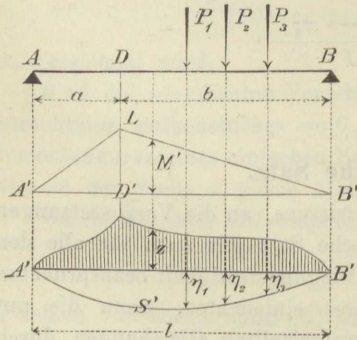


Fig. 174.

stimmt mit der Momentenkurve eines einfachen Balkens  $A'B'$  überein, dessen Belastungsordinate

$$z = \frac{M'}{EJ}$$

ist, wobei  $M'$  das Biegemoment bedeutet, welches für irgend einen Balkenquerschnitt durch eine in  $D$  angreifende Last „Eins“ erzeugt wird. Die Momentenfläche für diesen Belastungsfall ist ein Dreieck  $A'LB'$

von der Höhe  $\overline{LD'} = 1 \cdot \frac{ab}{l}$ .

Für die Anwendung ist, bei konstantem  $E$ , zu empfehlen, die Belastungshöhe  $z = \frac{M'}{EJ}$  durch

$$z = M' \frac{J_c}{J}$$

zu ersetzen, unter  $J_c$  ein beliebiges aber konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment verstanden. Die Momentenkurve  $A'S'B'$  ist dann nicht mehr die Einflußlinie für die Verschiebung  $\delta$ , sondern für den Wert  $EJ_c\delta$ , und man erhält für die Belastung in Fig. 173

$$\delta = \frac{1}{EJ_c} (P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3).$$

**Aufgabe 2.** Gesucht ist die Einflußlinie für den Gegendruck  $X$  der Mittelstütze eines geraden kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Querschnitte und mit 3 gleich hohen Stützpunkten. Fig. 175.

Beseitigung der Mittelstütze führt zu dem statisch bestimmten Balken

$AB$ . Für diesen wird, unter der Voraussetzung, daß bei  $C$  eine senkrechte, abwärts gerichtete Last „Eins“ angreift, die Momentenfläche  $A'DB'$  gezeichnet (Dreieck mit der Höhe  $\overline{C'D} = 1 \cdot \frac{l_1 l_2}{l}$ ) und

hierauf wird eine Linie  $A'D'B'$  aufgetragen, deren Gleichung

$$z = M \frac{J_c}{J}$$

lautet, wobei  $J$  das wirkliche, veränderlich angenommene und  $J_c$  ein

beliebiges aber konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment bedeuten. Faßt man diese Linie  $A'D'B'$  als Belastungslinie eines einfachen Balkens  $A'B'$  auf und zeichnet die zugehörige Momentenkurve  $A'SB'$ , so ist diese (nach Aufgabe 1) die Einflußlinie für die mit  $EJ_c$  multiplizierte Senkung des Punktes  $C$ . Wirken also auf den Balken  $AB$  (außer den in  $A$  und  $B$  hervorgerufenen Auflagerkräften) die beiden Kräfte  $P$  und  $X$ , und mißt man unter  $P$  die Ordinate  $\eta$  und unter  $X$  die Ordinate  $c$ , so ergibt sich die Senkung  $\delta$  des Punktes  $C$ :

$$\delta = \frac{1}{EJ_c} (P\eta - Xc),$$

und es folgt aus der Bedingung  $\delta = 0$  der Wert

$$X = P \frac{\eta}{c}.$$

Es ist mithin die Linie  $A'SB'$  die gesuchte Einflußlinie für den Gegendruck  $X$ , und  $\frac{1}{c}$  ist der Multiplikator für diese Linie.

Da es bei der Bestimmung von  $X$  nur auf das gegenseitige Verhältnis von  $\eta$  und  $c$  ankommt, so darf die Höhe des Dreiecks  $A'DB'$

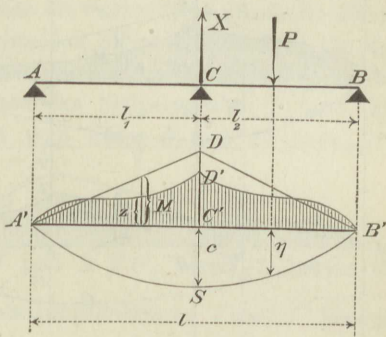


Fig. 175.



beliebig groß gewählt werden, und weiter darf die Linie  $A'SB'$  ein mit beliebigem Polabstande gezeichnetes Seilpolygon sein.

**Aufgabe 3.** Gesucht sind die Einflußlinien für die Gegenkräfte  $X'$  und  $X''$  der Mittelstützen eines wagerechten kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Querschnitte und mit 4 gleich hohen Stützpunkten.

Werden die beiden Mittelstützen beseitigt, so entsteht ein einfacher

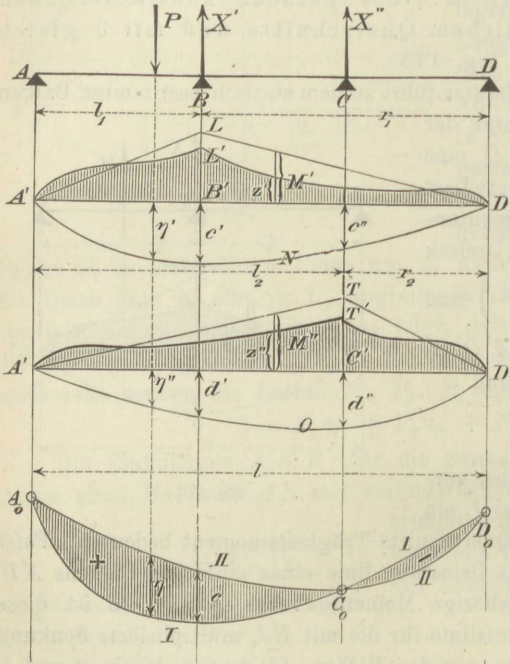


Fig. 176.

Balken  $AD$ ; die Punkte  $B$  und  $C$  desselben mögen sich um  $\delta'$  und  $\delta''$  senken. Die Einflußlinie für den Wert  $EJ_c\delta'$  (wobei  $J_c$  ein beliebiges Querschnitts-Trägheitsmoment bedeutet) stimmt mit der Momentenkurve  $A'ND'$  eines einfachen Balkens  $A'D'$  überein, dessen Belastungslinie  $A'L'D'$  man erhält, wenn man den Balken  $AD$  im Punkte  $B$  mit der senkrechten Kraft „Eins“ belastet, die dieser Belastung entsprechende Momentenfläche  $A'LD'$  (Dreieck mit der Höhe  $LB' = 1 \frac{l_1 r_1}{l}$ ) zeichnet und hierauf die Momente

$M'$  mit  $\frac{J_c}{J}$  multipliziert; man erhält die Belastungsordinaten  $z' = M' \frac{J_c}{J}$ .

In gleicher Weise wird die Einflußlinie  $A'OD'$  für den Wert  $EJ_c\delta''$  gefunden; es wird nach Auftragen des Dreiecks  $A'TD'$ , dessen Höhe  $TC' = 1 \frac{l_2 r_2}{l}$  ist, die Belastungslinie  $A'T'D'$  mit der Gleichung  $z'' = M'' \frac{J_c}{J}$  ermittelt und die zugehörige Momentenkurve  $A'OD'$  gezeichnet.

Wirken nun auf den Balken  $AD$  (außer den bei  $A$  und  $D$  hervorgerufenen Auflagerkräften) die drei senkrechten Kräfte  $P$ ,  $X'$  und  $X''$ , so ergeben sich, mit den aus der Fig. 176 ersichtlichen Bezeichnungen, bei  $B$  und  $C$  die Durchbiegungen

$$\delta' = \frac{1}{EJ_c} (P\eta' - X'c' - X''c'') \text{ und}$$

$$\delta'' = \frac{1}{EJ_c} (P\eta'' - X'd' - X''d''),$$

und es folgen aus den Bedingungen  $\delta' = 0$  und  $\delta'' = 0$  die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} X'c' + X''c'' &= P\eta' \\ X'd' + X''d'' &= P\eta'', \end{aligned}$$

aus denen sich die folgende Konstruktion der Einflußfläche für  $X'$  ableiten läßt. \*)

Man zeichne zu der Belastungslinie  $A'L'D'$  mit beliebig gewähltem Polabstande ein Seilpolygon (I), welches die Senkrechten durch die Stützpunkte  $A, C, D$  in  $A_0, C_0, D_0$  schneiden möge und hierauf zu der Belastungslinie  $A'T'D'$  ein durch die 3 Punkte  $A_0, C_0$  und  $D_0$  gehendes Seilpolygon (II). Die Fläche zwischen den Seilpolygonen (I) und (II) ist die Einflußfläche für  $X'$ . Mißt man unter  $P$  und  $X'$  bzw. die Ordinaten  $\eta$  und  $c$ , so ist

$$X' = P \frac{\eta}{c}.$$

Die Höhen der Dreiecke  $A'LD'$  und  $A'TD'$ , deren Ordinaten  $M'$  und  $M''$  mit  $\frac{J_c}{J}$  multipliziert die Belastungsordinaten  $z'$  und  $z''$  liefern, dürfen, da es bei der Berechnung von  $X'$  nur auf das gegenseitige Verhältnis von  $\eta$  und  $c$  ankommt, beliebig groß gewählt werden.

Ganz ebenso wird die Einflußfläche für  $X''$  gefunden.

**Aufgabe 4.** Gesucht ist der Horizontalschub  $X$  eines Bogen-trägers mit 2 (an den Kämpfern gelegenen) Gelenken. Fig. 177. Es handele sich um den Einfluß einer über den Träger wandernden Last  $P$ , einer gleichmäßigen Erwärmung und eines Nachgebens der Widerlager.

Zuerst wird angenommen, daß auf den Bogen nur zwei in  $A$  und  $B$  angreifende, nach außen gerichtete, wagerechte Kräfte „Eins“ wirken (Zustand  $X = -1$ ). Die Sehnenslänge  $l$  vergrößert sich hierbei nach Gleichung 58 a, Seite 165, um

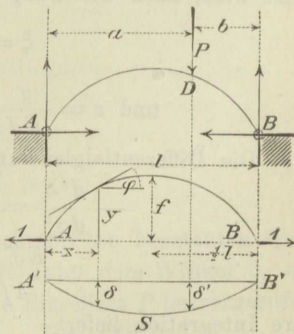


Fig. 177.

$$\Delta l = \int_0^l \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_0^l \frac{\cos \varphi dx}{EF},$$

\*) Vergl. Seite 64.

und es entsteht eine Biegelinie  $A'SB'$ , welche als die Momentenkurve eines einfachen Balkens  $A'B'$  aufgefaßt werden darf, dessen Belastungsordinate, nach Gleichung (62) und mit Vernachlässigung von  $N$ , stets genügend genau:  $z = \frac{y \sec \varphi}{EJ}$  gesetzt werden darf; denn es ist  $M = y \cdot 1$ .

Mit Hilfe des Maxwellschen Satzes lassen sich jetzt folgende Schlüsse ziehen, wobei  $\delta'$  die unter der Last  $P$  gemessene Ordinate der Biegelinie  $A'SB'$  und  $D$  den Angriffspunkt von  $P$  bezeichnen möge.

- 1) Die in  $A$  und  $B$  wirksamen wagerechten Kräfte 1 verschieben den Punkt  $D$  um  $\delta'$  nach abwärts, mithin wird eine in  $D$  angreifende Last „Eins“ eine Vergrößerung der Stützweite  $l$  um  $\delta'$  hervorbringen, und eine in  $D$  angreifende Last  $P$  wird  $\Delta l = P\delta'$  erzeugen.
- 2) Der Horizontalschub  $X$  verursacht für sich allein  $\Delta l = -X\xi$ .
- 3) Eine gleichmäßige Änderung der Anfangstemperatur um  $t$  bedingt  $\Delta l = \varepsilon tl$ .
- 4) Soll sich bei gleichzeitigem Wirken von  $P$  und  $X$  sowie der Temperaturänderung die Stützweite  $l$  um einen vorgeschriebenen Wert  $\Delta l$  ändern, so besteht die Bedingung

$$\Delta l = P\delta' - X\xi + \varepsilon tl,$$

und aus dieser ergibt sich der für einen beliebig geformten Bogen gültige Wert

$$(I) \quad X = \frac{P\delta' + \varepsilon tl - \Delta l}{\xi}.$$

Für einen flachen Parabelbogen mit konstanten Werten  $EJ \cos \varphi$  und  $F \sec \varphi$  ist, wenn  $J \cos \varphi = J'$  und  $F \sec \varphi = F'$  gesetzt wird, nach Gleichung (58 b), Seite 165,

$$\xi = \frac{8f^2 l}{15EJ'} + \frac{l}{EF'}.$$

$$\text{und } z = \frac{y}{EJ} \sec \varphi = \frac{1}{EJ'} \cdot \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

Die Differentialgleichung der Biegelinie  $A'SB'$  lautet

$$-\frac{d^2 \delta}{dx^2} = z = \frac{4fx(l-x)}{EJ'l^2}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{EJ'l^2}{4f} \frac{d^2 \delta}{dx^2} = x^2 - lx;$$

ihre Integration liefert

$$\frac{EJ'l^2}{4f} \frac{d\delta}{dx} = \frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} + C_1,$$

$$\frac{EJ'l^2}{4f} \delta = \frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} + C_1 x + C_2.$$



Aus den Bedingungen:

$$x = 0 \text{ muß liefern } \delta = 0,$$

$$x = l \quad ,, \quad ,, \quad \delta = 0$$

ergeben sich die Integrationskonstanten

$$C_1 = \frac{l^3}{12} \text{ und } C_2 = 0,$$

und es folgt die Gleichung

$$(75) \quad \delta = \frac{f(xl^3 - 2lx^3 + x^4)}{3EJ'l^2},$$

so daß unter der bei  $a$  gelegenen Last  $P$  die Ordinate

$$(76) \quad \delta' = \frac{f(al^3 - 2la^3 + a^4)}{3EJ'l^2}$$

erhalten wird. Die für  $X$  abgeleitete Gleichung (I) geht über in:

$$X = \frac{5P(al^3 - 2la^3 + a^4)}{8f_1l^3} + \frac{15EJ'}{8ff_1l} (\varepsilon tl - \Delta l),$$

wobei

$$f_1 = f \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{J'}{F'f^2} \right).$$

Das von  $P$  abhängige erste Glied von  $X$  bestimmt die Einflußlinie für  $X$ ; diese Linie weicht so wenig von einer Parabel ab, daß es stets zulässig ist, sie durch eine Parabel zu ersetzen, so zwar, daß beide Linien mit der Abscissenachse  $A'B'$  (Fig. 177) gleichgroße Flächen einschließen. Die Pfeilhöhe  $Z$  dieser Parabel bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{Z2l}{3} = \frac{5P}{8f_1l^3} \int_0^l (al^3 - 2la^3 + a^4);$$

man erhält

$$Z = \frac{3Pl}{16f_1}$$

und schließlich den Einfluß von  $P$  auf  $X$ :

$$(77) \quad X = \frac{3Pab}{4f_1l} \cdot *)$$

**Aufgabe 5.** Ein ursprünglich wagerechter Stab konstanten Querschnitts liegt bei  $A$  frei auf und ist bei  $B$  unter dem Winkel  $\tau_1$  eingespannt. Es soll das durch eine senkrechte Einzellast  $P$  hervorgerufene Einspannungsmoment  $M_1$  bestimmt werden. Fig. 178.

\*) Eine andere Ableitung der Formel  $X = \frac{3Pab}{4fl}$  findet sich bei Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Berlin 1880, Seite 31.

Wir betrachten zunächst den bei  $A$  und  $B$  frei aufliegenden, nur durch ein in  $B$  angreifendes Kräftepaar, dessen Moment  $= 1$  ist, belasteten Stab (Zustand  $M_1 = 1$ ) und berechnen die bei  $a$  entstehende

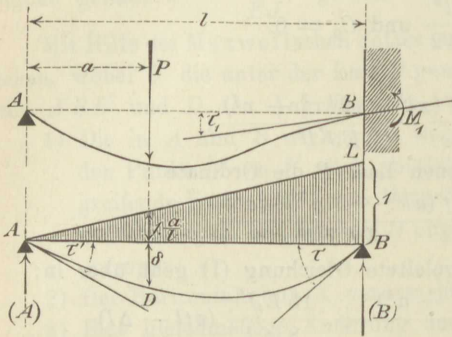


Fig. 178.

Durchbiegung  $\delta$ , sowie den Neigungswinkel  $\tau$  der in  $B$  an die elastische Linie gelegten Tangente. Die Momentenfläche ist ein Dreieck  $ALB$  von der Höhe  $LB = 1$ ; faßt man sie als Belastungsfläche eines einfachen Balkens  $AB$  auf, so entstehen die Stützendrucke  $(A) = \frac{1 \cdot l}{6}$  und  $(B) = \frac{1 \cdot l}{3}$  und, an der

Stelle  $a$ , das zweite Moment (vergl. Seite 180):

$$(M) = \frac{l}{6} a - 1 \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a(l^2 - a^2)}{6l};$$

es ist mithin 
$$\delta = \frac{(M)}{EJ} = \frac{a(l^2 - a^2)}{6EJl}.$$

Weiter ergibt sich

$$\tau = \frac{(B)}{EJ} = \frac{l}{3EJ} \cdot *)$$

Der vierte der vorhin bewiesenen Sätze gestattet jetzt folgende Schlüsse:

Ein bei  $B$  angreifendes, links drehendes Kräftepaar „Eins“ senkt den Punkt  $D$  um  $\delta$ , folglich verursacht eine in  $D$  wirksame Last „Eins“ bei  $B$  eine Links-Drehung  $\delta$ , und eine Last  $P$  erzeugt die Drehung  $P\delta$ .

Da nun das Moment  $M_1$  für sich allein die Drehung  $M_1\tau$  bewirkt, so entsteht im ganzen die Drehung

$$\tau_1 = P\delta + M_1\tau,$$

und es folgt hieraus, bei vorgeschriebenem  $\tau_1$ , das gesuchte Einspannungsmoment:

$$M_1 = -P \frac{\delta}{\tau} + \frac{\tau_1}{\tau}, \text{ d. i.}$$

$$M_1 = -\frac{Pa(l^2 - a^2)}{2l^2} + \frac{3EJ\tau_1}{l}.$$

\*) Da  $EJ\delta$  als Biegemoment aufgefaßt werden darf, so läßt sich  $EJ\tau = EJ \frac{d\delta}{dx}$  als Querkraft (Vertikalkraft) deuten. Es folgt dann (Fig. 178):  $EJ\tau = (B)$  und ebenso  $EJ\tau' = (A)$ .

§ 19.

# Allgemeine Untersuchung des Einflusses einer Einzellast auf die statisch nicht bestimmbaren Größen $X$ .

Wir betrachten ein Stabwerk, auf welches nur eine Last  $P$  wirkt, und suchen die statisch nicht bestimmbaren Größen  $X' X'' \dots$  für eine beliebige Lage dieser Last unter der Annahme zu ermitteln, daß bezüglich der auf Biegungsfestigkeit in Anspruch genommenen Stäbe die Voraussetzungen des § 12 zutreffen.

Die Gleichungen:

$$L' = \int \frac{\sigma' \sigma dV}{E} + \int \varepsilon t \sigma' dV,$$

$$L'' = \int \frac{\sigma'' \sigma dV}{E} + \int \varepsilon t \sigma'' dV,$$

welche auf Seite 80 für den Fall abgeleitet wurden, daß die Spannungen  $\sigma$  in der Form  $\sigma = \sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \dots$

darstellbar sind, lassen sich, wenn der die Unbekannten  $X$  enthaltende Teil von  $\sigma$  mit  $\sigma_x$  bezeichnet und

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_x$$

gesetzt wird, schreiben:

$$(78) \quad \begin{cases} L' = \int \frac{\sigma' \sigma_0 dV}{E} + \int \frac{\sigma' \sigma_x dV}{E} + \int \varepsilon t \sigma' dV, \\ L'' = \int \frac{\sigma'' \sigma_0 dV}{E} + \int \frac{\sigma'' \sigma_x dV}{E} + \int \varepsilon t \sigma'' dV, \\ \dots \end{cases}$$

Die von den Spannungen  $\sigma_0$  abhängigen Integrale erstrecken sich über den statisch bestimmten Hauptträger, in welchen das betrachtete Stabwerk im Falle des Verschwindens sämtlicher Unbekannten  $X$  übergeht; sie lassen sich in folgender Weise deuten:

Bezeichnet, für irgend einen Spannungszustand des Hauptträgers,  $\delta$  die unter der Annahme unverrückbarer oder über reibungslose Lager gleitender Stützpunkte und für den Fall  $t = 0$  bestimmte Verschiebung des Angriffspunktes von  $P$ , so besteht, da  $P$  die Spannungen  $\sigma_0$  hervor-

bringt, zwischen  $\delta$  und den Formänderungen  $\Delta ds_v = \frac{\sigma}{E} ds_v$  die Beziehung (Arbeitsgleichung)

$$P \delta = \int \sigma_0 \frac{\Delta ds_v}{ds_v} dV = \int \frac{\sigma_0 \sigma dV}{E},$$

und es ergibt sich insbesondere für die dem Zustande  $X' = 1$  entsprechende Verschiebung  $\delta'$  die Gleichung



$$(79) \quad \begin{cases} P\delta' = \int \frac{\sigma_0 \sigma' dV}{E}, \\ \text{und ebenso folgt} \\ P\delta'' = \int \frac{\sigma_0 \sigma'' dV}{E}, \quad P\delta''' = \int \frac{\sigma_0 \sigma''' dV}{E}, \text{ u. s. w.,} \end{cases}$$

wobei  $\delta''$ ,  $\delta'''$ , . . . . die bezw. durch die Spannungen  $\sigma''$ ,  $\sigma'''$ , . . . . (entsprechend den Zuständen  $X'' = 1$ ,  $X''' = 1$ , . . . .) hervorgebrachten Verschiebungen des Angriffspunktes von  $P$  bedeuten.

Die Bedingungsgleichungen (78) gehen jetzt über in:

$$(80) \quad \begin{cases} L' = P\delta' + \int \frac{\sigma' \sigma_x dV}{E} + \int \varepsilon t \sigma' dV, \\ L'' = P\delta'' + \int \frac{\sigma'' \sigma_x dV}{E} + \int \varepsilon t \sigma'' dV, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

sie mögen für den Fall weiter umgeformt werden, daß für die auf Biegungsfestigkeit beanspruchten Stäbe die Spannungen  $\sigma$  nach Gleichung (40) (§ 13) berechnet werden dürfen, und die Temperaturänderung innerhalb eines Querschnittes dem in Fig. 77 dargestellten Gesetze folgt. Es ergibt sich dann (vergl. die im § 14 unter 1 durchgeführten Integrationen):\*)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sigma' \sigma_x dV}{E} &= \int \frac{N' N_x ds}{EF} + \int \frac{M' M_x ds}{EJ} \quad \text{und} \\ \int \varepsilon t \sigma' dV &= \int \varepsilon t_0 N' ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} M' ds; \end{aligned}$$

dabei wird angenommen, daß die Längskraft  $N$  und das Biegemoment  $M$  durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N' X' + N'' X'' + \dots \quad \text{und} \\ M &= M_0 + M' X' + M'' X'' + \dots \end{aligned}$$

gegeben sind und für die von  $X$  abhängigen Teile von  $N$  und  $M$  die Abkürzungen

$$\begin{aligned} N_x &= N' X' + N'' X'' + \dots \\ M_x &= M' X' + M'' X'' + \dots \end{aligned}$$

eingeführt werden.

Für die Fachwerkstäbe ist, wenn die Temperaturänderung in allen Punkten eines Stabes den gleichen Wert  $t$  annimmt,

$$\int \frac{\sigma' \sigma_x dV}{E} + \int \varepsilon t \sigma' dV = \Sigma \frac{S' S_x s}{LF} + \Sigma \varepsilon t S' s,$$

wobei die Spannkraft  $S$  in der Form

$$S = S_0 + S' X' + S'' X'' + \dots$$

dargestellt sein muß und

\*) Wir schreiben jetzt  $ds$  an Stelle von  $dx$ .

$$S_x = S'X' + S''X'' + \dots$$

den von den Unbekannten  $X$  abhängigen Teil der Spannkraft  $S$  angibt.

Die Gleichungen (80) gehen jetzt über in

$$(81) \quad \begin{cases} L' = P\delta' + \int \frac{M' M_x ds}{EJ} + \int \frac{N' N_x ds}{EF} + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} M' ds \\ \quad + \int \varepsilon t_0 N' ds + \Sigma \frac{S' S_x s}{EF} + \Sigma \varepsilon t S' s, \\ L'' = P\delta'' + \int \frac{M'' M_x ds}{EJ} + \int \frac{N'' N_x ds}{EF} + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} M'' ds \\ \quad + \int \varepsilon t_0 N'' ds + \Sigma \frac{S'' S_x s}{EF} + \Sigma \varepsilon t S'' s \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

sie ermöglichen u. a. die Berechnung der Einflußlinien für die Größen  $X'$ ,  $X''$ , . . . . . ebener Stabwerke auf die Ermittlung von Biegungslinien für stets sehr einfache Belastungsfälle zurückzuführen, da alle in den Gleichungen (81) stehenden Integrale von der Lage der Last  $P$  unabhängig sind und nur einmal berechnet zu werden brauchen.

Ist das Stabwerk nur einfach statisch unbestimmt, d. h. tritt nur eine Unbekannte  $X$  auf, so folgt

$$N = N_0 + N'X, \quad M = M_0 + M'X, \quad S = S_0 + S'X \text{ also}$$

$$N_x = N'X, \quad M_x = M'X, \quad S_x = S'X$$

und es ergibt sich dann aus der ersten der Gleichungen (81) der Wert

$$(82) \quad X = \frac{L' - P\delta' - \int \varepsilon t_0 N' ds - \int \varepsilon \Delta t \frac{M' ds}{h} - \Sigma S' \varepsilon t s}{\int \frac{N'^2 ds}{EF} + \int \frac{M'^2 ds}{EJ} + \Sigma \frac{S'^2 s}{EF}}.$$

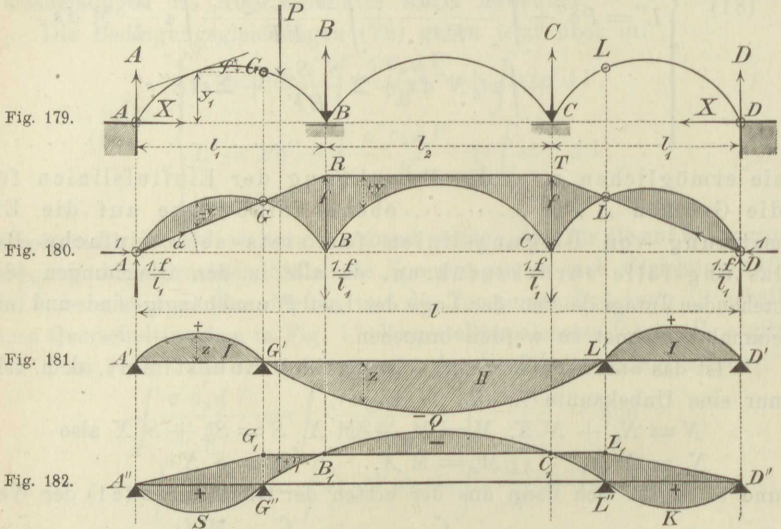
**Aufgabe 1.** Gesucht ist die Einflußlinie für den Horizontalschub  $X$  eines kontinuierlichen Bogenträgers mit 3 Öffnungen. Fig. 179. Die einzelnen Bögen sind bei  $B$  und  $C$  starr miteinander verbunden; bei  $A$  und  $D$ ,  $G$  und  $L$  sind Gelenke angeordnet. Über den Mittelpfeilern liegen wagerechte Gleitlager, weshalb die Gegenkräfte  $B$  und  $C$  der Mittelstützen senkrecht wirken. Die Veränderlichkeit des Bogenquerschnittes soll berücksichtigt werden; sodann ist anzunehmen, daß der Bogen gleichmäßig um  $t$  erwärmt wird, und, infolge eines Nachgebens der Widerlager,  $l$  in  $l + \Delta l$  übergeht, während sich die Mittelstützen um die sehr kleinen Strecken  $\delta_1$  und  $\delta_2$  senken.

Der Bogenträger ist einfach statisch unbestimmt; er geht im Falle  $X = 0$  in einen Gerberschen Balken über, für den sich die Biegemomente  $M_0$  und Längskräfte  $N_0$  leicht berechnen lassen.

Um die Unbekannte  $X$  mittels der aus der Gleichung (82) folgenden Formel

$$(I) \quad X = \frac{L' - P\delta' - \varepsilon t \int N' ds}{\int \frac{N'^2 ds}{EF} + \int \frac{M'^2 ds}{EJ}} \quad *)$$

bestimmen zu können, muß man zunächst den Zustand  $X = 1$ , welchem die Momente  $M'$  und Längskräfte  $N'$  entsprechen, untersuchen. Dieser



Zustand ist in Fig. 180 dargestellt. Außer dem Horizontalschube „Eins“ wirken noch senkrechte Auflagerkräfte  $1 \cdot \frac{f}{l_1}$ , denn es müssen, damit sich die Bogenstücke  $AG$  und  $LD$  nicht um die Gelenke  $G$  und  $L$  drehen, die Kämpferdrücke durch diese Gelenke gehen. Der Linienzug  $ARTD$  ist (mit der Ausdrucksweise der graphischen Statik) das dem Zustande  $X = 1$  entsprechende Mittelkraftspolygon, und es ergibt sich für irgend einen Querschnitt des Bogenträgers das Biegemoment

$$M' = 1 \cdot y,$$

wobei  $y$  den senkrechten Abstand des Querschnitts-Schwerpunktes vom Mittelkraftspolygone bezeichnet. Die in Fig. 180 schraffierte Fläche ist somit die dem Zustande  $X = 1$  entsprechende Momentenfläche; der mittlere Teil derselben ist positiv.

\*) Da Fachwerkstäbe nicht vorkommen, so fallen die Glieder  $\Sigma$  in Gleichung (82) fort; ferner ist, wegen der hier vorausgesetzten gleichmäßigen Erwärmung  $\Delta t = 0$  und  $t_0 = t$  zu setzen.



Ist  $\varphi$  der Neigungswinkel der Tangente an die Stabachse gegen die Wagerechte, so ist die Längskraft für den Querschnitt durch den Berührungspunkt:

$$1) \text{ innerhalb einer Außenöffnung: } N' = -1 \cdot \cos \varphi - 1 \cdot \frac{f}{l_1} \sin \varphi,$$

$$2) \text{ „ der Mittelöffnung: } N' = -1 \cdot \cos \varphi.$$

Da nun das über eine Außenöffnung ausgedehnte Integral  $\int ds \sin \varphi = \int dy_1 = 0$  ist, weil  $B$  und  $A$ , desgl.  $C$  und  $D$  gleich hoch liegen, so folgt

$$\int N' ds = - \int \cos \varphi ds = -(l_1 + l_2 + l_1) = -l.$$

Die virtuelle Arbeit  $L'$  der Auflagerkräfte ist, für den Zustand  $X = 1$  und bei den hier vorgeschriebenen Bewegungen der Stützpunkte:

$$L' = -1 \cdot \Delta l + 1 \cdot \frac{f}{l_1} \delta_1 + 1 \cdot \frac{f}{l_1} \delta_2$$

und es entsteht, wenn Zähler und Nenner des Wertes für  $X$  [Gleichung (I)] mit  $EJ_c$  multipliziert werden (unter  $J_c$  ein beliebiges, konstantes Querschnitts-Trägheitsmoment verstanden) und die Bezeichnung

$$J \cos \varphi = J'$$

eingeführt wird:

$$X = \frac{-PEJ_c \delta' + EJ_c \left( \frac{f}{l_1} (\delta_1 + \delta_2) - \Delta l + \varepsilon t l \right)}{\mathfrak{N}},$$

wobei

$$\mathfrak{N} = J_c \int \frac{N'^2 ds}{F} + \int M'^2 \frac{J_c}{J'} dx = J_c \int \frac{N'^2 ds}{F} + \int y^2 \frac{J_c}{J'} dx.$$

Das erste Glied von  $\mathfrak{N}$  ist gegen das zweite stets geringfügig, und es genügt, dasselbe angenähert zu berechnen. Man setze für alle drei Öffnungen:  $N' = -1 \cdot \cos \varphi$  und nehme für  $F \sec \varphi$  einen konstanten Mittelwert  $F_c$  an; es entsteht dann

$$J_c \int \frac{N'^2 ds}{F} = J_c \int \frac{dx}{F_c \cos \varphi} = \frac{J_c}{F_c} l \text{ und}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{J_c}{F_c} l + \int y^2 \frac{J_c}{J'} dx. *)$$

Nach Berechnung von  $\mathfrak{N}$  braucht man, um  $X$  bestimmen zu können, nur noch  $\delta'$  anzugeben.

Es bedeutet  $\delta'$  die unter der Last  $P$  gemessene Ordinate der für

\*) Wenn der Querschnitt nicht sehr stark veränderlich ist, ist es auch zulässig, für  $J'$  (wenigstens innerhalb der einzelnen Öffnungen) einen konstanten Mittelwert zu setzen.

den Zustand  $X = 1$  gezeichneten Biegelinie, deren Differentialgleichung

$$-\frac{d^2\delta'}{dx^2} = \frac{M'}{EJ} \sec \varphi + \frac{d\left(\frac{N'}{EF} \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx}$$

unter Vernachlässigung des ganz unwesentlichen Gliedes  $\frac{d\left(\frac{N'}{EF} \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx}$

in 
$$-\frac{d^2\delta'}{dx^2} = \frac{M'}{EJ'}$$

vereinfacht werden darf. Es folgt dann, wenn an Stelle der Linie mit der Ordinate  $\delta'$  diejenige mit der Ordinate  $EJ_c\delta' = \eta$  gesucht wird,

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = M' \frac{J_c}{J'} = y \frac{J_c}{J'},$$

und es ergibt sich nun im Anschlusse an die Entwicklungen des § 17 (wobei namentlich auf die Aufgabe unter 5 zu achten ist) die folgende Darstellung der  $\eta$ -Linie.

Man bestimmt die Belastungslinie  $z = y \frac{J_c}{J'}$ , wobei es sich empfiehlt (damit die Gleichung  $-EJ_c\delta' = \eta$  bestehe), das Vorzeichen der  $y$  umzukehren und die  $y$  zwischen  $G$  und  $L$  negativ anzunehmen. Hierauf faßt man die in Fig. 181 mit I bezeichneten Flächen als Belastungsflächen einfacher Balken  $A'G'$  und  $L'D'$  auf, die mit II bezeichnete als Belastungsfläche eines einfachen Balkens  $G'L'$  und zeichnet die zugehörigen Momentenkurven  $A''SG''$ ,  $G''QL''$  und  $L''KD''$ . Nachdem hierauf die Senkrechten durch die Stützpunkte  $B$  und  $C$  mit der Momentenkurve  $G''QL''$  in  $B_1$  und  $C_1$  zum Schnitte gebracht worden sind, wird der Linienzug  $A''G_1L_1D''$  eingetragen, dessen Eckpunkte  $G_1$  und  $L_1$  senkrecht unter den Gelenken liegen. Mißt man nun unter der Last  $P$  den senkrechten Abstand der Momentenkurve von dem Linienzuge  $A''G_1L_1D''$ , so besteht zwischen  $\eta$  und  $\delta'$  die Beziehung  $-EJ_c\delta' = \eta$ ,

und es ergibt sich der durch die Last  $P$  hervorbrachte Horizontalschub

$$X = \frac{P\eta}{\Re}.$$

Sind die Momentenkurven  $A''SG''$ ,  $G''QL''$ ,  $L''KD''$  Seilpolygone, und ist der Polabstand  $= \Re$ , so folgt

$$X = P\eta.$$

Es ist dann die Fläche zwischen den Seilpolygonen und dem Linienzuge  $A''G_1L_1D''$  die Einflußfläche für  $X$ . Lasten zwischen  $B$  und  $C$  erzeugen ein negatives  $X$ .

Besonders empfehlenswert für den vorliegenden Fall ist die auf Seite 173 gelehrte Einführung von Einzellasten an Stelle der Belastungsflächen I und II.

Vergl. auch Fig. 171. Wegen  $M' = 1 \cdot y$  erhält man, wenn der Einfluß der Längskräfte  $N$  auf die Werte  $\eta$  vernachlässigt wird, nach Gleichung (64) und (63) die im Knotenpunkte  $m$  anzunehmende Einzellast

$$w_m = \omega_m = \frac{1}{6} \left[ \frac{J_c}{J'_m} \frac{\lambda_m}{\lambda_c} (y_{m-1} + 2y_m) + \frac{J_c}{J'_{m+1}} \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_c} (y_{m+1} + 2y_m) \right],$$

wobei  $\lambda_c$  eine beliebige konstante Feldweite vorstellt. Zeichnet man zu diesen Lasten  $w$  (welche zwischen  $G$  und  $L$  nach aufwärts, hingegen links von  $G$  und rechts von  $L$  nach abwärts wirkend anzunehmen sind) die einfachen Momentenkurven  $A''SG''$ ,  $G''QL''$  und  $L''KD''$  (Fig. 182), trägt den Linienzug  $A''G_1L_1D''$  ein und mißt unter  $P$  die Ordinate  $\eta$ , so besteht die Beziehung  $-\frac{EJ_c}{\lambda_c} \delta' = \eta$

und es folgt  $X = \frac{P\eta\lambda_c}{\eta}$ .

Nun ist

$$\int \frac{y^2 dx}{EJ'} = \int y \frac{M' dx}{EJ'} = \frac{\lambda_c}{EJ_c} \sum y_m \omega_m = \frac{\lambda_c}{EJ_c} \sum y_m w_m \quad [\text{nach Gleichung (68)}]$$

$$\text{und} \quad \int y^2 \frac{J_c}{J'} dx = \lambda_c \sum y_m w_m,$$

$$\text{mithin} \quad \frac{\eta}{\lambda_c} = \frac{J_c l}{E_c \lambda_c} + \sum y_m w_m,$$

und man erhält, wenn  $a$  eine beliebig lange Strecke bedeutet,

$$X = \frac{P}{\mathfrak{H}} \frac{\eta}{a}, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{H} = \frac{J_c l}{E_c \lambda_c a} + \frac{\sum y_m w_m}{a}.$$

Sind die Linien  $A''SG''$ ,  $G''QL''$ ,  $L''KD''$  Seilpolygone, welche zu den Lasten  $w$  mit der Polentfernung  $\mathfrak{H}$  gezeichnet wurden, so ist

$$X = P \frac{\eta}{a}$$

und, wenn die Lastenheit  $P$  durch eine Strecke von der Länge  $a$  dargestellt wird (Kräftemaßstab):

$$X = \eta.$$

Zu beachten ist, daß sowohl die Polentfernung  $\mathfrak{H}$  als auch die Lasten  $w$  „Strecken“ vorstellen, welche in beliebigem (vom Längenmaßstabe der Zeichnung unabhängigen) Maßstabe aufgetragen werden dürfen. Meistens ist  $\lambda$  konstant;

man wählt dann  $\lambda_c =$  wirkliche Feldweite und erhält  $\frac{\lambda_m}{\lambda_c} = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_c} = 1$ . Ist außerdem die Annahme:  $J' = \text{Konst.}$  zulässig, so wählt man  $J_c$  gleich dem Mittelwerte von  $J'$  und hat dann sehr einfach

$$w_m = \frac{1}{6} (y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}).$$

Bei kleiner Feldweite ist genügend genau  $w_m = y_m$ .

**Aufgabe 2.** Eine auf Pendelpfeilern ruhende Kette sei durch senkrechte Stäbe mit einem Bogen verbunden, welcher an den Kämpfern Gelenke besitzt. Auf den Bogen wirke eine Last  $P$ . Es soll der Horizontalzug  $X'$  der Kette und der Horizontalschub  $X''$  des Bogens unter der Voraussetzung berechnet werden, daß sich die Stützpunkte um beobachtete kleine Strecken verschieben und eine gleichmäßige Erhöhung der Anfangstemperatur um  $t$  stattfindet. Fig. 183.

Zunächst müssen die Spannkkräfte in den Fachwerkstäben, sowie



die den Bogen beanspruchenden Biegemomente  $M$  und Längskräfte  $N$  durch die Last  $P$  und die Unbekannten  $X'$  und  $X''$  ausgedrückt werden.

a) Die Fachwerkstäbe. Es ergibt sich für irgend ein Glied der Kette, wenn  $\alpha$  den Neigungswinkel desselben gegen die Wagerechte bedeutet:

$$(I) \quad S = X' \sec \alpha$$

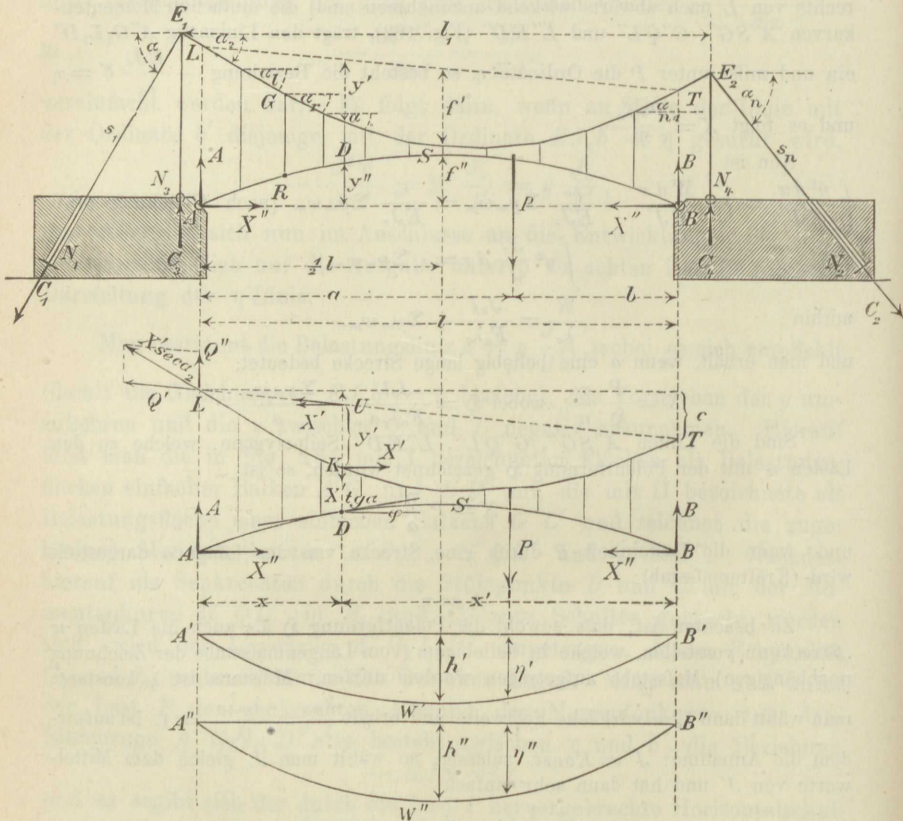


Fig. 183.

und für irgend eine Hängestange  $GR$ , wenn  $\alpha_l$  und  $\alpha_r$  die links und rechts von  $GR$  gelegenen Winkel  $\alpha$  bedeuten;

$$(II) \quad S = X' (\tg \alpha_l - \tg \alpha_r).$$

Für den linken Pendelfeiler ist

$$(III) \quad S = -X' (\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2)$$

und für den rechten:

$$(IIIa) \quad S = -X' (\tg \alpha_{n-1} + \tg \alpha_n).$$

b) Der Bogen. Die senkrechten Auflagerdrücke bei  $A$  und  $B$

seien  $= A$  bzw.  $= B$ ; sie mögen die Kette in  $L$  und  $T$  schneiden. Die Gerade  $LT$  heiße die Schlufslinie, und es sei an der Stelle  $x$  der senkrechte Abstand der Kette von der Schlufslinie  $= y'$  und die Ordinate des Bogen  $= y''$ . Bei  $L$  denken wir die Kette durchgeschnitten, zerlegen die Spannkraft  $X' \sec \alpha_2$  des geschnittenen Kettengliedes in die Seitenkräfte  $Q'$  (in der Richtung der Schlufslinie) und  $Q''$  (senkrecht) und schreiben die Momentengleichung für den Punkt  $T$  an; sie lautet

$$(IV) \quad (A + Q'')l - Pb = 0,$$

und liefert  $A + Q'' = \frac{Pb}{l}$ . Nun führen wir an der Stelle  $x$  einen senkrechten Schnitt, welcher Bogen, Kette und Schlufslinie in  $D$ ,  $K$  und  $U$  trifft, verlegen  $Q'$  von  $L$  nach  $U$ , zerlegen sowohl  $Q'$  als auch die Spannkraft  $S$  des vom Schnitte  $DU$  getroffenen Kettengliedes in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft (welche letztere  $= X'$  ist) und finden, wenn  $x < a$  ist, das Bieugungsmoment für den Bogenquerschnitt bei  $D$ :

$$M = (A + Q'')x - X'y' - X''y'', \text{ d. i.}$$

$$M = \frac{Pb}{l}x - X'y' - X''y'',$$

während im Falle  $x > a$

$$M = \frac{Pa}{l}x' - X'y' - X''y'$$

erhalten wird, weshalb allgemein gesetzt werden darf

$$(V) \quad M = M_0 - X'y' - X''y'',$$

wobei  $M_0$  = Bieugungsmoment für einen bei  $A$  und  $B$  frei aufliegenden, mit  $P$  belasteten Balken  $ASB$ .

Die Momentengleichung (IV) für den Punkt  $T$  läßt sich auch nach der (in Fig. 183 nicht angegebenen) Zerlegung von  $X' \sec \alpha_2$  in  $X'$  (wagerecht) und  $X' \tg \alpha_2$  (senkrecht) in der Form schreiben:

$$(A + X' \tg \alpha_2)l - X'c - Pb = 0;$$

sie liefert dann den senkrechten Gegendruck des Bogenwiderlagers

$$(VI) \quad A = \frac{Pb}{l} - X' \left( \tg \alpha_2 - \frac{c}{l} \right),$$

und ebenso läßt sich ableiten

$$(VII) \quad B = \frac{Pa}{l} - X' \left( \tg \alpha_{n-1} + \frac{c}{l} \right),$$

wobei  $\alpha_{n-1}$  der spitze Neigungswinkel des vom Schnitte  $BT$  getroffenen Kettengliedes ist.

Die Summe der auf das Bogenstück  $AD$  wirkenden senkrechten Kräfte ist nun für  $x < a$ :

$$V = A + X' \operatorname{tg} \alpha_2 - X' \operatorname{tg} \alpha = \frac{Pb}{l} - X' \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l} \right)$$

und für  $x > a$

$$V = (A - P) + X' \operatorname{tg} \alpha_2 - X' \operatorname{tg} \alpha = -\frac{Pa}{l} - X' \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l} \right),$$

weshalb man setzen darf

$$(VIII) \quad V = V_0 - X' \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l} \right),$$

unter  $V_0$  die Querkraft (Vertikalkraft) für den Querschnitt  $x$  eines einfachen Balkens  $AB$  verstanden.

Da die Summe der auf das Bogenstück  $AD$  wirkenden wagerechten Kräfte  $= X''$  ist, so ergibt sich nach Gleichung (56) für den Bogenquerschnitt bei  $D$  die Längskraft

$$(IX) \quad N = -V_0 \sin \varphi + X' \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l} \right) \sin \varphi - X'' \cos \varphi.$$

$\varphi$  bedeutet den Neigungswinkel der in  $D$  an die Bogenachse gelegten Tangente gegen die Wagerechte.

Durch die abgeleiteten Gleichungen ist die Berechnung der Inanspruchnahme unseres Stabwerks auf diejenige von  $X'$  und  $X''$  zurückgeführt.

c) Bestimmung von  $X'$  und  $X''$ . Es sollen die Gleichungen (81) benutzt werden; dieselben gehen, wegen  $\Delta t = 0$ ,  $t_0 = t$  und  $S'' = 0$ ,\*) nach Multiplikation mit  $EJ_c^{**}$ ) und mit der Bezeichnung  $J \cos \varphi = J'$  über in:

$$EJ_c L' = PEJ_c \delta' + \int M' M_x \frac{J_c}{J'} dx + J_c \int \frac{N' N_x ds}{F} + \varepsilon EJ_c t \int N' ds \\ + J_c \Sigma \frac{S' S_x s}{F} + \varepsilon Et J_c \Sigma S' s$$

$$EJ_c L'' = PEJ_c \delta'' + \int M'' M_x \frac{J_c}{J'} dx + J_c \int \frac{N'' N_x}{F} ds + \varepsilon EJ_c t \int N'' ds,$$

und hierin ist zu setzen für den Bogen:

$$M_x = -X' y' - X'' y''; \quad N_x = +X' \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l} \right) \sin \varphi - X'' \cos \varphi$$

$$M' = -y'; \quad N' = \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{c}{l} \right) \sin \varphi \quad (\text{Zustand } X' = 1)$$

$$M'' = -y''; \quad N'' = -\cos \varphi; \quad (\text{Zustand } X'' = 1)$$

und für sämtliche Fachwerkstäbe:

$$S_x = S' X',$$

wobei  $S'$  bezw. den Koeffizienten von  $X'$  in den Gleichungen (I) bis (III) bedeutet.

\*) In den für die Spannkkräfte  $S$  gefundenen Ausdrücken ist die Unbekannte  $X''$  nicht enthalten.

\*\*)  $J_c$  bedeutet, wie früher, ein beliebiges, konstantes Trägheitsmoment.



Mit der stets zulässigen Vernachlässigung des fast einflusslosen Wertes  $N'$  sowie des ersten Gliedes des Ausdruckes für  $N_x$  ergeben sich zur Berechnung von  $X'$  und  $X''$  die Gleichungen:

$$(X) \begin{cases} EJ_c L' = PEJ_c \delta' + X' \int y'^2 \frac{J_c}{J'} dx + X'' \int y' y'' \frac{J_c}{J'} dx + J_c X' \Sigma \frac{S'^2 s}{F} \\ \quad + \varepsilon Et J_c \Sigma S' s, \\ EJ_c L'' = PEJ_c \delta'' + X' \int y' y'' \frac{J_c}{J'} dx + X'' \int y''^2 \frac{J_c}{J'} dx + \frac{J_c X''}{F_c} l \\ \quad - \varepsilon Et J_c l. *) \end{cases}$$

Die Summen  $\Sigma$  erstrecken sich über Kette, Hängestangen und Pendelpfeiler und die Integrale über den ganzen Bogen.

Um die virtuellen Arbeiten  $L'$  und  $L''$  der Auflagerkräfte zu berechnen, nehmen wir die Wagerechte durch die Punkte  $A$  und  $B$  relativ festliegend an und bezeichnen die Verschiebungen der Stützpunkte  $N_1$  und  $N_2$  im Sinne von  $N_1 E_1$  bzw.  $N_2 E_2$  mit  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , die Senkungen der Punkte  $N_3$  und  $N_4$  mit  $\xi_3$  und  $\xi_4$  und die Vergrößerungen der Stützweite  $l$  mit  $\Delta l$ . Es ist dann die von den Stützendrücken

$$X'', C_1 = X' \sec \alpha_1, C_2 = X' \sec \alpha_n,$$

$$C_3 = X' (\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2), C_4 = X' (\tg \alpha_{n-1} + \tg \alpha_n)$$

geleistete virtuelle Arbeit:

$$\mathcal{U} = -X'' \Delta l - X' \sec \alpha_1 \cdot \xi_1 - X' \sec \alpha_n \cdot \xi_2 - X' (\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2) \xi_3 \\ - X' (\tg \alpha_{n-1} + \tg \alpha_n) \xi_4$$

und es folgt für den Zustand  $X' = 1$ :

$$(XI) \quad L' = -\xi_1 \sec \alpha_1 - \xi_2 \sec \alpha_n - \xi_3 (\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2) \\ - \xi_4 (\tg \alpha_{n-1} + \tg \alpha_n)$$

und für den Zustand  $X'' = 1$

$$(XII) \quad L'' = -\Delta l.$$

$\delta'$  und  $\delta''$  sind die unter der Last  $P$  gemessenen Ordinaten der für die Zustände  $X' = 1$  und  $X'' = 1$  zu zeichnenden Biegelinien eines bei  $A$  und  $B$  frei aufliegenden Balkens  $ASB$  (des Hauptträgers unseres Stabwerks); sie können mit Hilfe ihrer Differentialgleichungen:

$$(XIII) \quad \begin{cases} -\frac{d^2 \delta'}{dx^2} = \frac{M'}{EJ'} + \frac{d \left( \frac{N'}{EF} \tg \varphi \right)}{dx}, \\ -\frac{d^2 \delta''}{dx^2} = \frac{M''}{EJ'} + \frac{d \left( \frac{N''}{EF} \tg \varphi \right)}{dx} \end{cases}$$

\*) Es bedeutet, wie in Aufgabe 1,  $F_c$  den konstanten Mittelwert aus den veränderlichen Werten  $F \sec \varphi$ , wobei  $F$  = Querschnitt des Bogens an der Stelle  $x$ .

berechnet oder nach der im § 17 gegebenen Anleitung auf graphischem Wege gefunden werden, während sich die in den Gleichungen (X) vorkommenden Integrale u. a. mittels der Simpsonschen Formel ermitteln lassen.\*)

**Formeln für die durch einen Parabelbogen versteifte parabolische Kette.** Sind  $f'$  und  $f''$  die Werte von  $y'$  und  $y''$  bei  $x = \frac{1}{2} l$ , so ist

$$y' = \frac{4f'x(l-x)}{l^2} \quad \text{und} \quad y'' = \frac{4f''x(l-x)}{l^2}$$

und es folgt, wenn  $J' = J \cos \varphi$  durch einen konstanten Mittelwert  $J_c$  ersetzt wird,

$$(XIV) \quad \begin{cases} \int y'^2 \frac{J_c}{J'} dx = \frac{16f'^2}{l^4} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx = \frac{8f'^2 l}{15} \\ \int y''^2 \frac{J_c}{J'} dx = \frac{8f''^2 l}{15} \quad \text{und} \quad \int y' y'' \frac{J_c}{J'} dx = \frac{8f' f'' l}{15} \end{cases}$$

Die Gleichungen (XIII) gehen, mit Vernachlässigung der unwesentlichen, von  $N'$  und  $N''$  abhängigen Glieder, über in

$$\begin{aligned} -EJ_c \frac{d^2 \delta'}{dx^2} &= M' = -y' = -\frac{4f'x(l-x)}{l^2} \quad \text{und} \\ -EJ_c \frac{d^2 \delta''}{dx^2} &= -\frac{4f''x(l-x)}{l^2}, \end{aligned}$$

und es ergeben sich nach Gleichung (76) Seite 187 bei  $x = a$  die Ordinaten

$$\delta' = -\frac{f'(al^3 - 2la^3 + a^4)}{3EJ_c l^2} \quad \text{und} \quad \delta'' = -\frac{f''(al^3 - 2la^3 + a^4)}{3EJ_c l^2},$$

wofür nach Seite 187 stets gesetzt werden darf (Gleichung 77):

$$(XV) \quad \delta' = -\frac{2f'ab}{5EJ_c} \quad \text{und} \quad \delta'' = -\frac{2f''ab}{5EJ_c}.$$

Bei Berechnung der Summen  $\Sigma \frac{S'^2 s}{F}$  und  $\Sigma S's$  ist es stets zulässig, nur die Spannkkräfte  $S'$  der Kette zu berücksichtigen; dieselben sind für die unter  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  geeigneten Stäbe bezw.

$$1 \cdot \sec \alpha_1, 1 \cdot \sec \alpha_2, \dots, 1 \cdot \sec \alpha_n,$$

so daß sich, wenn der Querschnitt der Kette dem Gesetze

$$F = F_s \sec \alpha$$

folgt, wobei  $F_s =$  Querschnitt der Kette im Scheitel,

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{F} = \Sigma \frac{S's}{F_s} = \frac{1}{F_s} \sum_1^n s \sec \alpha$$

\*) In den Gleichungen (XIII) dürfen die von  $N'$  und  $N''$  abhängigen Glieder stets vernachlässigt werden.

ergibt, und hierfür darf bei Annahme einer von  $L$  bis  $T$  stetig gekrümmten Kette und wenn  $y$  den Abstand des bei  $x$  gelegenen Kettenpunktes von der Wagerechten durch  $L$  bezeichnet, gesetzt werden

$$\begin{aligned}\sum_1^n s \sec \alpha &= s_1 \sec \alpha_1 + \int_0^l ds \sec \alpha + s_n \sec \alpha_n \\ &= s_1 \sec \alpha_1 + s_n \sec \alpha_n + \int_0^l dx \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{*}.\end{aligned}$$

Bedeutet  $c$  den Höhenunterschied der Punkte  $L$  und  $T$ , so ist  $y = y' + c \frac{x}{l} = \frac{4f'x(l-x)}{l^2} + c \frac{x}{l}$ , und es folgt somit (nach Ausführung der Integration):

$$\begin{aligned}\text{(XVI)} \quad F_s \sum \frac{S'^2 s}{F} &= \sum S' s = \sum_1^n s \sec \alpha \\ &= s_1 \sec \alpha_1 + s_n \sec \alpha_n + l \left( 1 + \frac{16 f'^2}{3 l^2} + \frac{c^2}{l^2} \right).\end{aligned}$$

Werden die Werte aus (XIV), (XV), (XVI) in (X) eingeführt und letztere Gleichungen nach  $X'$  und  $X''$  aufgelöst, so ergeben sich mit den Bezeichnungen:

$$\text{(XVII)} \quad \begin{cases} \mu = 1 + \frac{15}{8} \frac{J_c}{F_s f'^2} \frac{s_0}{l}; \quad \nu = 1 + \frac{15}{8} \frac{J_c}{F_c f''^2}; \\ s_0 = s_1 \sec \alpha_1 + s_n \sec \alpha_n + l \left( 1 + \frac{16}{3} \frac{f'^2}{l^2} + \frac{c^2}{l^2} \right) \end{cases}$$

folgende Ausdrücke für  $X'$  und  $X''$ :

Die Last  $P$  erzeugt:

$$\text{(XVIII)} \quad X' = \frac{3Pab}{4f''l} \frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1} \quad \text{und} \quad X'' = \frac{3Pab}{4f'l} \frac{\mu - 1}{\mu\nu - 1},$$

die gleichmäßige Erwärmung verursacht:

$$\text{(XIX)} \quad \begin{cases} X' = -\frac{15}{8} \frac{\varepsilon E t J_c}{f'' l (\mu\nu - 1)} \left( \frac{s_0 \nu}{f'} + \frac{l}{f''} \right) \\ X'' = +\frac{15}{8} \frac{\varepsilon E t J_c}{f' l (\mu\nu - 1)} \left( \frac{s_0}{f'} + \frac{l}{f''} \mu \right) \end{cases}$$

und eine Verschiebung der Stützpunkte bringt hervor

$$\text{(XX)} \quad X' = \frac{15 E J_c}{8 f'^2 l} \frac{L' \nu - L'' \frac{f'}{f''}}{\mu\nu - 1} \quad \text{und} \quad X'' = \frac{15 E J_c}{8 f''^2 l} \frac{L'' \mu - L' \frac{f''}{f'}}{\mu\nu - 1},$$

wobei  $L'$  und  $L''$  durch die Gleichungen (XI) und (XII) gegeben sind.

\*) Es ist hierbei die Dehnung der Stücke  $E_1 L$  und  $T E_2$  der Kette vernachlässigt worden.



Trägt man die Parabeln  $A'W'B'$  und  $A''W''B''$  auf, deren Pfeilhöhen bezw.

$$h' = \frac{3l}{16f'} \frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1} \text{ und } h'' = \frac{3l}{16f''} \frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1}$$

sind und bezeichnet die unter der Last  $P$  gemessenen Ordinaten dieser Parabeln mit  $\eta'$  und  $\eta''$ , so findet man, daß

$$X' = P\eta' \text{ und } X'' = P\eta''$$

gesetzt werden darf. Die Parabeln  $A'W'B'$  und  $A''W''B''$  sind demnach die gesuchten Einflußlinien für  $X'$  und  $X''$ .

**Horizontalzug der durch einen Balken versteiften parabolischen Kette.** Ordnet man bei  $A$ , Fig. 183, ein wagerechtes Gleitlager (das aber auch negative Stützenwiderstände aufzunehmen imstande sein muß) an, so ist  $X'' = 0$ . Der Horizontalzug  $X'$  der Kette muß der Gleichung genügen [vergl. (X)]:

$$(XXI) \quad EJ_c L' = PEJ_c \delta' + X' \int y'^2 \frac{J_c}{J'} dx + J_c X' \Sigma \frac{S'^2 s}{F} + \varepsilon Et J_c \Sigma S' s,$$

und aus dieser folgt mit den durch die Gleichungen (XIV), (XV) und (XVIII) gegebenen Werten:

$$X' = \frac{3Pab}{4\omega f' l} - \frac{15}{8} \frac{\varepsilon Et J_c s_0}{\omega f'^2 l} + \frac{15 L' EJ_c}{8 \omega f'^2 l},$$

wobei

$$\omega = 1 + \frac{15}{8} \frac{J_c s_0}{F_s f'^2 l}$$

ist, während  $L'$  durch die Gleichung (XI) bestimmt ist.

Den durch die Last  $P$  hervorgerufenen Horizontalzug kann man auch setzen:

$$X' = P\eta',$$

wenn  $\eta'$  die unter  $P$  gemessene Ordinate einer Parabel  $A'W'B'$  be-

deutet, deren Pfeil  $h' = \frac{3l}{16\omega f'}$  ist.

**Kette mit Versteifungsbalken, deren Horizontalzug vom Versteifungsbalken aufgenommen wird.** In Figur 184 ist eine Kettenbrücke mit drei Öffnungen dargestellt worden. Die gelenkartig miteinander verbundenen Balken  $C_1A$ ,  $AB$  und  $BC_2$  besitzen nur ein einziges festes Auflager; die übrigen Auflager bewegen sich auf wagerechten Bahnen. Bei  $C_1$  und  $C_2$  sind die Rückhaltketten mit den äußeren Balken befestigt — eine zuerst von dem verstorbenen österreichischen Ingenieur Langer vorgeschlagene Anordnung, durch welche die mit gewissen Übelständen verbundene Einführung der Rückhaltketten in das Widerlagermauerwerk vermieden wird.

Lasten, welche auf die äußeren Balken  $C_1A$ ,  $BC_2$  wirken, erzeugen  $X' = 0$ . Bei Berechnung der infolge Belastung des mittleren Balkens hervorgerufenen Horizontalzuges ist zu beachten, daß der Balken  $AB$  nicht nur durch die Momente

$$M = M_0 - X'y,$$

sondern auch durch die für alle Querschnitte gleiche Längskraft  $N = -X'$  beansprucht wird. Für die Balken  $C_1A$  und  $BC_2$  ist bei ausschließlicher Belastung der Mittelöffnung  $M = 0$  und  $N = -X'$ . In der

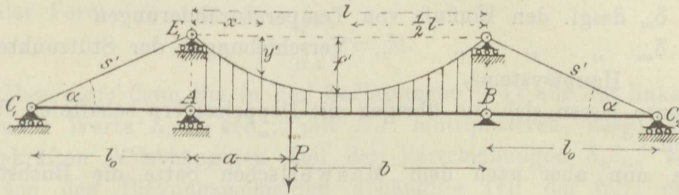


Fig. 184.

Gleichung (XXI) sind hiernach die auf die Kette sich beziehenden Summen  $\Sigma \frac{S'^2 s}{F}$  und  $\Sigma S's$  zu vermehren um die über die drei Balken  $F$  (deren Querschnitte  $F_0, F, F_0$  seien) sich erstreckenden Summen:

$$\int \frac{N'^2 dx}{F} = 1 \frac{l_0}{F_0} + 1 \frac{l}{F} + 1 \frac{l_0}{F_0} \text{ und}$$

$$\int N' ds = l_0 + l + l_0.$$

Man gelangt dann zu der Formel

$$X' = \frac{3Pab}{4\omega f'l} - \frac{15}{8} \frac{\varepsilon Et J_c (s_0 + 2l_0 + l)}{\omega f'^2 l} + \frac{15 L' EJ_c}{8 \omega f'^2 l},$$

wo

$$\omega = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_c}{f'^2 l} \left( \frac{s_0}{F_s} + \frac{2l_0}{F_0} + \frac{l}{F} \right)$$

ist.

## § 21.

### Fortsetzung.

Zu einer besonders übersichtlichen Ermittlung der statisch nicht bestimmaren Größen, die jetzt mit  $X_a, X_b, X_c, \dots$  bezeichnet werden sollen, gelangt man in der Weise, daß man die  $X$  zunächst zu den auf das statisch bestimmte Hauptsystem wirkenden Lasten rechnet und die Wege  $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \dots$  der Belastungen  $X_a, X_b, X_c, \dots$  (nach Seite 60) auf die Form bringt:

$$(83) \begin{cases} \delta_a = \Sigma P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \dots + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \Sigma P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \dots + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \Sigma P_m \delta_{cm} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \dots + \delta_{ct} + \delta_{cw} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet:

$\delta_{am}$  den Einfluß der Ursache  $P_m = 1$  auf den Weg  $\delta_a$   
 $\delta_{aa}$  „ „ „ „  $X_a = -1$  „ „ „  $\delta_a$   
 $\delta_{ab}$  „ „ „ „  $X_b = -1$  „ „ „  $\delta_a$   
 . . . . .  
 $\delta_{at}$  desgl. den Einfluß von Temperaturänderungen  
 $\delta_{aw}$  „ „ „ „ Verschiebungen der Stützpunkte des  
 Hauptsystems,

und ebenso lassen sich die übrigen mit Doppelzeigern behafteten Werte  $\delta$  deuten.

Da nun aber nach dem Maxwellschen Satze die Buchstaben eines Doppelzeigers miteinander vertauschbar sind, so ist

$$\delta_{am} = \delta_{ma}, \delta_{bm} = \delta_{mb}, \dots$$

und es sind mithin die Beiwerte der Belastungen  $P_m$  durch die den Ursachen  $X_a = -1$ ,  $X_b = -1$ , . . . entsprechenden Verschiebungszustände völlig bestimmt. Schreibt man die Arbeitsgleichung für den Belastungszustand  $X_a = -1$  an und legt man hierbei jedem Teilchen  $ds_e$  die Änderung  $\Delta ds_e = 0$  bei, so erhält man

$$-1 \cdot \delta_{aw} + L_a = 0; -1 \cdot \delta_{bw} + L_b = 0; \dots$$

unter  $L_a$ ,  $L_b$ , . . . die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte für den Zustand  $X_a = -1$ , bzw.  $X_b = -1$ , . . . verstanden.

Es gehen also die Gleichungen (83) über in

$$(84) \begin{cases} \delta_a - \delta_{at} - L_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \dots \\ \delta_b - \delta_{bt} - L_b = \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \dots \\ \delta_c - \delta_{ct} - L_c = \sum P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \dots \\ \dots \end{cases}$$

sie führen zu den Unbekannten  $X$ , nachdem die Wege  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$ , . . . bestimmten Bedingungen unterworfen worden sind. Ist beispielsweise  $a$  der Angriffspunkt eines Auflagerwiderstandes  $X_a$ , und ist das fragliche Widerlager starr, so ist  $\delta_a = 0$  zu setzen. Bedeutet  $X_b$  die Spannkraft in einem überzähligen Fachwerkstabe, so muß für  $\delta_b$  die Längenänderung dieses Stabes eingeführt und positiv oder negativ angenommen werden, je nachdem der Stab gedehnt oder verkürzt wird.

Bevor wir zur Durchführung eines Beispiels übergehen, bemerken wir folgendes:

Sollen die Gleichungen (84) auf die Berechnung von statisch nicht bestimmbarren Auflagerkräften eines auf Biegung beanspruchten Stabes angewendet werden, so wird bei der Ermittlung der  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$ , . . . die Gleichung der Biegelinie stets in

$$-\frac{d^2 \delta}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$$



vereinfacht werden dürfen, wobei  $J' = J \cos \varphi$  ist. Sobald die Annahme  $EJ' = \text{Const.}$

erlaubt ist, was in der Regel der Fall sein wird, setze man bei der Ermittlung der Biegelinien ( $\delta', \delta'', \delta''' \dots$ ) den Wert  $EJ' = 1$ , integriere also (auf analytischem oder graphischem Wege) Gleichungen von der Form

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = M.$$

Man muß dann die in den Bedingungen (84) auf der linken Seite stehenden Werte  $L_m - \epsilon t \delta_{m..}$  mit  $EJ'$  multiplizieren, desgl. den von Längskräften  $N$  abhängigen Teil der Verschiebungen  $\delta_{m..n}$ , während der von den Biegemomenten abhängige Teil der  $\delta_{m..n}$  ebenfalls unter der Voraussetzung  $EJ' = 1$  berechnet wird.

Es ist oft zweckmäßig, nur die Verschiebungen  $\delta_{ma}, \delta_{mb}, \dots$  mit Hilfe von Biegelinien zu ermitteln, hingegen die Koeffizienten der Größen  $X$ , d. s. die Verschiebungen  $\delta_{aa}, \delta_{ab}, \delta_{ac}, \dots$  mittels der Formel

$$(85) \quad \delta_{pq} = \int \frac{N_p N_q ds}{EF} + \int \frac{M_p M_q ds}{EJ} + \sum \frac{S_p S_q s}{EF}$$

zu berechnen, wo  $p$  und  $q$  zwei beliebige Zeiger sind. Will man auch einzelne oder alle Summen  $\sum P_m \delta_{ma}, \sum P_m \delta_{mb}, \dots$ , so setze man

$$\sum P_m \delta_{ma} = \delta_{oa}$$

$$\sum P_m \delta_{mb} = \delta_{ob}$$

.....

und wende auf  $\delta_{oa}, \delta_{ob}, \dots$  die Gleichung (85) an.

**Aufgabe.** Gesucht sind die Stützenwiderstände eines durch eine senkrechte Kraft  $P$  belasteten Bogenträgers mit 3 Öffnungen. Bei  $A$  und  $B$  sind Kämpfergelenke angeordnet; über den Mittelpfeilern sind die einzelnen Bögen fest miteinander verbunden und durch wagerechte Gleitlager unterstützt.  $EJ'$  sei konstant.

Es bedeuten  $A$  und  $B$  die senkrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke,  $X_1$  den Horizontalschub,  $X_2$  und  $X_3$  die senkrechten Gegenkräfte der Mittelstützen. Im Falle  $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$  liegt ein an den Enden frei aufliegender Balken  $AB$  vor, und es nehmen dann  $A$  und  $B$  die Werte

$$A_0 = \frac{Pb}{l}, \quad B_0 = \frac{Pa}{l}$$

an. Wirken auf diesen (den Hauptträger unseres Stabwerks vorstellenden) einfachen Balken  $AB$  nur die wagerechten Kräfte  $X_1 = -1$ , so ist das Biegemoment für irgend einen Querschnitt:  $M' = 1 \cdot y'$ . Die Fläche zwischen der Bogenachse und der Geraden  $AB$  ist die Momentenfläche für den Zustand  $X_1 = -1$ ; sie sei kurz „Fläche I“ genannt.

Die „Momentenfläche II“ für den Zustand  $X_2 = -1$  ist ein Dreieck  $A_2S_2B_2$  mit der Höhe  $\overline{G_2S_2} = 1 \cdot \frac{l_2 r_2}{l}$ , und die „Momentenfläche III“ für den Zustand  $X_3 = -1$  ein Dreieck  $A_3S_3B_3$  mit der Höhe  $\overline{G_3S_3} = 1 \cdot \frac{l_3 r_3}{l}$ . Die Biegemomente  $M''$  und  $M'''$  für den beliebigen Querschnitt  $D$  sind

$$M'' = 1 \cdot y'' \text{ und } M''' = 1 \cdot y''' ,$$

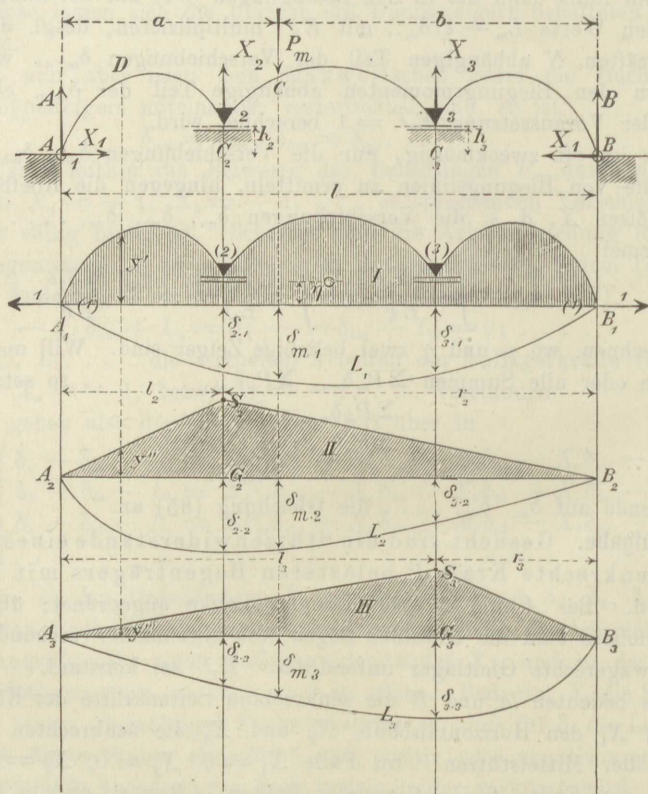


Fig. 185.

und das gesamte Biegemoment für  $D$  wird

$$M = M_0 - X_1 y' - X_2 y'' - X_3 y''' ,$$

wobei (für den Hauptträger):

$$M_0 = \frac{Pb}{l} x, \text{ sobald } x < a$$

und

$$M_0 = \frac{Pa}{l} x', \text{ sobald } x' < b.$$

Fälst man die Fläche I als Belastungsfläche eines einfachen Balkens  $A_1B_1$  auf und zeichnet die zugehörige Momentenkurve  $A_1L_1B_1$ , so erhält man in dieser die dem Zustande  $X_1 = -1$  und der Voraussetzung  $EJ' = 1$  entsprechende Biegelinie, ihre unter dem Angriffspunkte  $C$  von  $P_m$  und unter den Stützpunkten  $C_2$  und  $C_3$  gemessenen Ordinaten

$$\delta_{m1}, \delta_{2 \cdot 1}, \delta_{3 \cdot 1}$$

sind gleich den senkrechten Verschiebungen (Senkungen) der Punkte  $C$ ,  $C_2$  und  $C_3$  für den Zustand  $X_1 = -1$ .

Ebenso bedeuten, wenn  $A_2L_2B_2$  und  $A_3L_3B_3$  die den Belastungsflächen II und III entsprechenden Momentenkurven der einfachen Balken  $A_2B_2$  und  $A_3B_3$  sind, die Ordinaten

$$\delta_{m2}, \delta_{2 \cdot 2}, \delta_{3 \cdot 2} \\ \delta_{m3}, \delta_{2 \cdot 3}, \delta_{3 \cdot 3}$$

die senkrechten Verschiebungen, welche die Punkte  $C$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  bei Eintreten der Zustände  $X_2 = -1$  bzw.  $X_3 = -1$  erfahren.

Da die Verschiebungen  $\delta_{m1}$ ,  $\delta_{m2}$ ,  $\delta_{m3}$  unter der Voraussetzung  $EJ' = 1$  abgeleitet worden sind, und da ferner die Widerlager des statisch bestimmten Hauptsystems  $AB$  als starr angesehen wurden, so gehen die Gleichungen (85) für den vorliegenden Fall über in

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{1 \cdot 1} + X_2 \delta_{1 \cdot 2} + X_3 \delta_{1 \cdot 3} &= P_m \delta_{m \cdot 1} + (\delta_{1t} - \delta_1) EJ' \\ X_1 \delta_{2 \cdot 1} + X_2 \delta_{2 \cdot 2} + X_3 \delta_{2 \cdot 3} &= P_m \delta_{m \cdot 2} + (\delta_{2t} - \delta_2) EJ' \\ X_1 \delta_{3 \cdot 1} + X_2 \delta_{3 \cdot 2} + X_3 \delta_{3 \cdot 3} &= P_m \delta_{m \cdot 3} + (\delta_{3t} - \delta_3) EJ'. \end{aligned}$$

Die auf den linken Seiten stehenden Verschiebungen  $\delta$  sind (da  $\delta_{1 \cdot 2} = \delta_{2 \cdot 1}$  und  $\delta_{1 \cdot 3} = \delta_{3 \cdot 1}$  ist) bereits bekannt bis auf  $\delta_{1 \cdot 1}$ ; letztere bedeutet die mit  $EJ'$  multiplizierte Verlängerung der Sehne  $l$  im Belastungsfalle  $X_1 = -1$ ; dieselbe ist, nach Gleichung (58a) genügend genau

$$\delta_{1 \cdot 1} = \int y'^2 dx + \frac{J'}{F'} l,$$

wobei  $F'$  den Mittelwert von  $F \sec \varphi$  und  $F$  den Inhalt des Bogenquerschnitts bedeutet,\*) während

$$\int y'^2 dx = 2 \int y' dx \frac{y'}{2} = 2 F_I \cdot \eta$$

gesetzt werden darf, unter  $F_I$  den Inhalt der Belastungsfläche  $I$  und unter  $\eta$  den Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von der Geraden  $A_1B_1$  verstanden.

$\delta_{1t}$ ,  $\delta_{2t}$ ,  $\delta_{3t}$  sind die im entgegengesetzten Sinne von  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  positiv angenommenen Verschiebungen der Stützpunkte infolge einer Temperaturänderung. Wird eine gleichmäßige Erwärmung um  $t$

\*) Bei flachen Bögen ist genügend genau  $F' =$  dem Mittelwerte von  $F$ .



vorausgesetzt, so bleibt der Bogen seiner früheren Gestalt ähnlich; es geht über:

$l$  in  $l + \varepsilon t l$ ,  $h_2$  in  $h_2 + \varepsilon t h_2$ ,  $h_3$  in  $h_3 + \varepsilon t h_3$ ,  
und es ergibt sich

$$\delta_{1 \cdot \varepsilon} = \varepsilon t l, \delta_{2 \cdot \varepsilon} = -\varepsilon t h_2, \delta_{3 \cdot \varepsilon} = -\varepsilon t h_3.$$

Ändert sich infolge von Verschiebungen der Widerlager:

$$l \text{ in } l + \Delta l, h_2 \text{ in } h_2 - \Delta h_2, h_3 \text{ in } h_3 - \Delta h_3,$$

so ist

$$\delta_1 = \Delta l, \delta_2 = -\Delta h_2, \delta_3 = -\Delta h_3.$$

Nunmehr sind die sämtlichen Konstanten der Gleichungen (I) bestimmt, und es lassen sich die Werte  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  berechnen.

Wir geben die Auflösung für den Fall eines in Bezug auf die Mittelsenkrechte symmetrischen Trägers, setzen:

$$\delta_{2 \cdot 1} = \delta_{3 \cdot 1} = c_1,$$

$$\delta_{2 \cdot 2} = \delta_{3 \cdot 3} = c_2,$$

$$\delta_{3 \cdot 3} = \delta_{2 \cdot 3} = c_3,$$

führen für  $\delta_{1 \cdot 1}$  die Bezeichnung  $c$  ein und erhalten mit den Abkürzungen:

$$\alpha' = \frac{1}{c - 2 \frac{c_1^2}{c_2 + c_3}}, \quad \alpha'' = \frac{c_2}{c_2^2 - c_3^2}, \quad \alpha''' = \frac{c_3}{c_2^2 - c_3^2}$$

die Auflagerkräfte:

$$X_1 = \alpha' P_m \left[ \delta_{m1} - (\delta_{m2} + \delta_{m3}) \frac{c_1}{c_2 + c_3} \right] + \alpha' \varepsilon E J' t \left[ l + (h_2 + h_3) \frac{c_1}{c_2 + c_3} \right] \\ - \alpha' E J' \left[ \Delta l - (\Delta h_2 + \Delta h_3) \frac{c_1}{c_2 + c_3} \right],$$

$$X_2 = P_m (\alpha'' \delta_{m2} - \alpha''' \delta_{m3}) - \varepsilon E J' t \frac{h_2}{c_2 + c_3} \\ + E J' (\alpha'' \Delta h_2 + \alpha''' \Delta h_3) - X' \frac{c_1}{c_2 + c_3},$$

$$X_3 = P_m (\alpha'' \delta_{m3} - \alpha''' \delta_{m2}) - \varepsilon E J' t \frac{h_2}{c_2 + c_3} \\ + E J' (\alpha'' \Delta h_3 + \alpha''' \Delta h_2) - X' \frac{c_1}{c_2 + c_3}.$$

Wird das eine der beiden festen Auflager  $A$  und  $B$  durch ein wagerechtes Gleitlager ersetzt, so ist  $X_1 = 0$ ; es entsteht ein kontinuierlicher Balken, dessen Mittelstützen die Gegendrücke

$$X_2 = P_m (\alpha'' \delta_{m2} - \alpha''' \delta_{m3}) - \varepsilon E J' t (\alpha'' h_2 - \alpha''' h_3) \\ + E J' (\alpha'' \Delta h_2 + \alpha''' \Delta h_3), \\ X_3 = P_m (\alpha'' \delta_{m3} - \alpha''' \delta_{m2}) - \varepsilon E J' t (\alpha'' h_3 - \alpha''' h_2) \\ + E J' (\alpha'' \Delta h_3 + \alpha''' \Delta h_2)$$

austüben.

Wird bei Lösung der vorstehenden Aufgabe eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Querschnittes verlangt, so hat man nur nötig, die Belastungsordinaten  $y', y'', y'''$  der einfachen Balken  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  durch die Ordinaten  $y' \frac{J_c}{J'}$ ,  $y'' \frac{J_c}{J'}$ ,  $y''' \frac{J_c}{J'}$  zu ersetzen, wobei  $J_c$  ein beliebiges konstantes Querschnittsträgheitsmoment bedeutet. In den Gleichungen (I) muß dann  $J_c$  an die Stelle von  $J'$  treten, und schließlich ist

$$\delta_{1 \cdot 1} = \int y^2 \frac{J_c}{J'} dx + \frac{J_c}{J'} l$$

zu setzen. \*)

## § 21.

### Schärfere Untersuchung einfach gekrümmter Stäbe.

#### 1) Grundgleichungen für die Spannungen und Formänderungen.

Es wird, wie bei der bisherigen Untersuchung eines krummen Stabes angenommen, daß dieser in Bezug auf die durch seine Mittellinie gelegte Ebene symmetrisch ist, daß alle äußeren Kräfte in jener Ebene liegen, und nur die senkrecht zum Querschnitte wirkenden Spannungen  $\sigma$  berücksichtigt zu werden brauchen. Hingegen wird die Voraussetzung von im Verhältniß zu den Krümmungshalbmessern verschwindenden Querschnittsabmessungen aufgegeben.

Indem der Querschnitt auf zwei durch seinen Schwerpunkt gehende Koordinaten-Achsen ( $u$  und  $v$ ) bezogen wird, deren eine (die  $u$ -Achse) senkrecht zur Stabebene ist, wird angenommen, daß in allen von der  $u$ -Achse gleichweit abgelegenen Querschnittsteilchen gleich große Spannungen  $\sigma$  und Temperaturänderungen  $t$  entstehen, und die Berechnung der  $\sigma$  an die Voraussetzung geknüpft, daß die vor der Biegung ebenen Querschnitte auch nach der Biegung Ebenen bleiben. \*\*)

Sind in Fig. 186:  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  zwei unendlich nahe Querschnitte,  $C_1C_2 = ds$  das Element der Stabachse,  $C_1D_1 = C_2D_2 = +v$ ,  $D_1D_2 = ds_\varphi$  und  $\angle A_1OA_2 = (-d\varphi)$ , wobei  $\varphi$  den Winkel bedeutet,

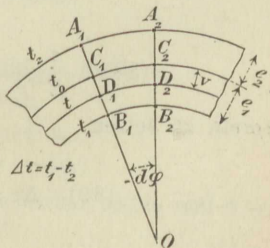


Fig. 186.

\*) Weiteres über kontinuierliche Bogenträger enthält eine Abhandlung des Verfassers im „Wochenblatte für Architekten und Ingenieure, 1884“.

\*\*) Man kann hierfür auch die Annahme machen, daß zwei unendlich nahe Querschnitte infolge der Biegung gleich gekrümmt werden und die Stabachse unter gleichen Winkeln schneiden.

den die im Punkte  $C_1$  an die Stabachse gelegte Tangente mit der  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 164) bildet, so ist vor Eintreten einer Verbiegung des Stabes, wenn  $r$  den Krümmungshalbmesser der Stabachse bezeichnet.

$C_1 C_2 = ds = -r d\varphi$ ;  $D_1 D_2 = ds_v = -(r - v) d\varphi = ds + v d\varphi$   
und nach einer kleinen Verbiegung

$$C_1 C_2 = ds + \Delta ds, \quad \angle A_1 O A_2 = -(d\varphi + \Delta d\varphi),$$

$$D_1 D_2 = ds_v + \Delta ds_v = ds + \Delta ds + (v + \Delta v) (d\varphi + \Delta d\varphi),$$

woraus, mit Vernachlässigung der sehr kleinen Größe  $\Delta v \Delta d\varphi$  und mit Beachtung von  $ds = ds_v - v d\varphi$ :

$$(86) \quad \Delta ds_v = \Delta ds + \Delta v d\varphi + v \Delta d\varphi,$$

während andererseits entsteht

$$\text{infolge der Spannung } \sigma: \Delta ds_v = \frac{\sigma}{E} ds_v,$$

$$,, \quad ,, \quad \text{Temperaturänderung } t: \Delta ds_v = \varepsilon t ds_v$$

und beim Zusammenwirken von  $\sigma$  und  $t$ :

$$(87) \quad \Delta ds_v = \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t \right) ds_v,$$

so daß sich ergibt:

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{\Delta ds + \Delta v d\varphi + v \Delta d\varphi}{ds + v d\varphi}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung durch  $\frac{ds}{r} = -d\varphi$ , so erhält man

$$(88) \quad \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{\frac{\Delta ds}{ds} r - \Delta v - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} v}{r - v},$$

worein zu setzen

$$(89) \quad \Delta v = \int_0^v \Delta dv = \int_0^v \left( \varepsilon t - \frac{\sigma}{mE} \right) dv,$$

unter  $\frac{1}{m}$  den Koeffizienten der Querdrehung <sup>Querdrehung</sup> verstanden; derselbe ist

für Schweißseisen und Flußeisen  $= \frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{3}$ .

Differentiiert man (88), um das Integral  $\Delta v$  zu beseitigen, so gelangt man zu einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den 3 Veränderlichen  $\sigma$ ,  $v$ ,  $t$  und ist dann imstande,  $\sigma$  als Funktion von  $v$  darzustellen, sobald  $t$  als Funktion von  $v$  gegeben ist. Die beiden



in  $\sigma$  noch enthaltenen Unbekannten  $\frac{\Delta ds}{ds}$  und  $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$  können schließlich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen

$$N = \int \sigma dF, \quad M = \int \sigma v dF$$

berechnet werden, unter  $N$  die Längskraft und unter  $M$  das Biegemoment für den fraglichen Querschnitt verstanden.

Wir wollen zunächst (vorbehaltlich einer späteren genaueren Untersuchung) den von  $\sigma$  abhängigen Teil von  $\Delta v$  vernachlässigen und  $\Delta dv = \varepsilon t dv$  setzen; sodann wollen wir, ebenso wie beim geraden Stabe, nur solche Temperaturzustände in Betracht ziehen, welche keinen unmittelbaren Einfluß auf die Spannungen  $\sigma$  haben.

Beim geraden Stabe wurde gezeigt, daß mit den äußeren Kräften ( $P$  und  $C$ ) auch die Spannungen  $\sigma$  verschwinden, sobald  $t$  eine Funktion ersten Grades der Querschnittskordinaten  $u$  und  $v$  ist; es können dann durch Temperaturänderungen zwar beachtenswerte Formänderungen, aber nur im Falle statischer Unbestimmtheit Spannungen hervorgerufen werden, sobald nämlich infolge jener Temperaturänderungen äußere Kräfte entstehen.

Es fragt sich nun:

Welchem Gesetze  $t = F(v)$  muß die Temperaturänderung innerhalb des Querschnittes eines krummen Stabes folgen, damit auch für diesen mit den äußeren Kräften die Spannungen verschwinden.

Wir gehen von der Gleichung

$$\Delta ds_v = \Delta ds + \Delta v d\varphi + v \Delta d\varphi$$

aus, bezeichnen mit

$t$  die Temperaturänderung an beliebiger Stelle  $v$ ,

$t_0$  „ „ für  $v = 0$ ,

$t_1$  „ „ „  $v = +e_1$ ,

$t_2$  „ „ „  $v = -e_2$ ,

setzen, da auf den Stab keine äußeren Kräfte wirken sollen und  $\sigma = 0$  sein soll,

$$\Delta ds_v = \varepsilon t ds_v = -\varepsilon t(r-v) d\varphi$$

$$\Delta ds = \varepsilon t_0 ds = -\varepsilon t_0 r d\varphi$$

und erhalten die Bedingung

$$-\varepsilon t(r-v) = -\varepsilon t_0 r + \Delta v + v \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}.$$

Wird diese Gleichung differenziert, so entsteht, mit  $\Delta dv = \varepsilon t dv$ :

$$(90) \quad -\varepsilon(r-v) dt = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} dv,$$

und hieraus folgt:

$$t = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int \frac{dv}{r-v} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln(r-v) + C.$$

Da nun für  $v = 0$ :  $t = t_0$  ist, so ergibt sich

$$C = t_0 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln r \text{ und}$$

$$t = t_0 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln\left(1 - \frac{v}{r}\right).$$

Setzt man erst  $v = -e_2$  und  $t = t_2$ , hierauf  $v = +e_1$  und  $t = t_1$ , so findet man

$$t_2 = t_0 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln\left(1 + \frac{e_2}{r}\right),$$

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln\left(1 - \frac{e_1}{r}\right) \text{ und}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \ln\left(\frac{1 + \frac{e_2}{r}}{1 - \frac{e_1}{r}}\right),$$

woraus sich mit der schon früher benutzten Bezeichnung  $t_1 - t_2 = \Delta t$  ergibt:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon \Delta t}{\ln\left(\frac{r + e_2}{r - e_2}\right)}$$

und hierfür darf, mit  $e_1 + e_2 = h$ , stets genügend genau gesetzt werden:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = -\varepsilon \Delta t \frac{r}{h},$$

so daß schließlich folgt

$$(91) \quad t = t_1 - \Delta t \frac{r}{h} \ln\left(1 - \frac{v}{r}\right).$$

Im Falle  $r = \infty$  entsteht, wegen  $\ln\left(1 - \frac{v}{r}\right) = -\frac{v}{r}$ ,

$$(92) \quad t = t_1 + \Delta t \frac{v}{h},$$

d. i. die früher vorausgesetzte Funktion.

In der Regel werden die Ergebnisse von (91) und (92) nur wenig voneinander abweichen.

Indem wir in der Folge annehmen, daß sich  $t$  nach dem durch die Gleichung (91) dargestellten Gesetze ändert, setzen wir:

$$(93) \quad \Delta ds = \varepsilon t_0 ds \text{ und (angenähert):}$$

$$(94) \quad \Delta d\varphi = -\varepsilon \Delta t \frac{r}{h} d\varphi = +\varepsilon \Delta t \frac{ds}{h} \cdot *)$$

Um nun die durch äußere Kräfte erzeugten  $\sigma$ ,  $\Delta ds$  und  $\Delta d\varphi$  zu ermitteln, setzen wir, indem wir  $t = 0$  und mithin auch  $\Delta v = 0$  annehmen,

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{\Delta ds}{ds} r - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} v}{r - v} = \frac{\Delta ds}{ds} - \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \frac{v}{r - v},$$

führen diesen Wert in die Gleichgewichtsbedingungen ein und erhalten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{N}{E} &= \frac{\Delta ds}{ds} \int dF - \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \int \frac{v dF}{r - v}, \\ \frac{M}{E} &= \frac{\Delta ds}{ds} \int v dF - \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \int \frac{v^2 dF}{r - v}. \end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich, wenn

$$(95) \quad \int v^2 \frac{r}{r - v} dF = Z$$

gesetzt wird, mit Hilfe der Integralwerte:

$$\int dF = F, \quad \int v dF = 0, \quad \int \frac{v dF}{r - v} = \int \left( \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} \frac{r}{r - v} \right) dF = \frac{Z}{r^2}$$

die Ausdrücke:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{Mr}{EZ}; \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} - \frac{M}{EFr}$$

und es folgt mithin

$$\begin{aligned} (96) \quad \sigma &= \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{Mv}{Z} \frac{r}{r - v} \\ \frac{\Delta ds}{ds} &= \frac{\mathfrak{N}}{EF} \\ \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} &= \frac{\mathfrak{N}}{EF} - \frac{Mr}{EZ}, \text{ wobei} \\ \mathfrak{N} &= N - \frac{M}{r}. \end{aligned}$$

Fügt man zu  $\Delta ds$  und  $\Delta d\varphi$  die vorhin gefundenen, unmittelbar von  $t_0$  und  $\Delta t$  abhängigen Werte, so erhält man für den vorhin erklärten Temperaturzustand:

\*) Bei der Berechnung ungleichmäßig erwärmter Bogenträger ist die Näherungsformel schon deshalb am Platze, weil das Gesetz, welchem  $t$  folgt, sich nie scharf angeben läßt.



$$(97) \quad \Delta ds = \frac{N ds}{EF} + \varepsilon t_0 ds,$$

$$(98) \quad \Delta d\varphi = -\frac{N ds}{EFr} + \frac{M ds}{EZ} + \varepsilon \Delta t \frac{ds}{h}.$$

Im Falle  $r = \infty$  ist

$$\frac{r}{r-v} = 1, \quad Z = \int v^2 dF = J, \quad N = N, \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$$

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF} + \varepsilon t_0 ds, \quad \Delta d\varphi = \frac{M ds}{EJ} + \varepsilon \Delta t \frac{ds}{h},$$

es entstehen die früher für den geraden Stab abgeleiteten Gleichungen, welche auch dann noch anwendbar sind, wenn zwar  $r$  einen endlichen, aber, verglichen mit dem größten  $v$ , sehr großen Wert besitzt.

2) Reihenentwicklung von  $Z$ . Setzt man

$$\frac{r}{r-v} = 1 + \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^3}{r^3} + \dots,$$

so erhält man

$$Z = J + \frac{1}{r} \int v^3 dF + \frac{1}{r^2} \int v^4 dF + \frac{1}{r^3} \int v^5 dF + \dots$$

und für den Fall eines bezüglich der  $u$ -Achse symmetrischen Querschnittes:

$$Z = J + \frac{1}{r^2} \int v^4 dF + \frac{1}{r^4} \int v^6 dF + \dots$$

Für das Rechteck von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ergibt sich mit  $dF = b dv$  und  $J = \frac{bh^3}{12}$ :

$$\int v^4 dF = 2b \int_0^{\frac{1}{2}h} v^4 dv = \frac{bh^5}{5 \cdot 2^4} = \frac{3}{5} \frac{Jh^2}{2^2}$$

$$\int v^6 dF = 2b \int_0^{\frac{1}{2}h} v^6 dv = \frac{bh^7}{7 \cdot 2^6} = \frac{3Jh^4}{7 \cdot 2^4} \text{ u. s. w.}$$

$$(99) \quad Z = J \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r} \right)^4 + \frac{3}{9} \left( \frac{h}{2r} \right)^6 + \dots \right].$$

Im Falle  $r = 5h$  wird z. B.  $Z = 1,006J$ , und es leuchtet ein, daß bei der Berechnung der im Brückenbau und Hochbau vorkommenden Bogenträger stets  $Z = J$  gesetzt werden darf.

Für einen Kreisquerschnitt vom Halbmesser  $e$  ergibt sich in ähnlicher Weise

$$(100) \quad Z = J \left[ 1 + \frac{3}{6} \left( \frac{e}{r} \right)^2 + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \left( \frac{e}{r} \right)^4 + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} \left( \frac{e}{r} \right)^6 + \dots \right].$$

**3) Arbeitsbedingungen. Berechnung statisch nicht bestimmbarer Größen.** Für die Folge sollen nur solche auf ein festes Koordinatensystem bezogene Verrückungen  $\delta$  und  $\Delta c$  der Angriffspunkte der äußeren Kräfte  $P$  und  $C$  in Betracht gezogen werden, welche durch Änderungen der die Gestalt der Stabachse bestimmenden Werte  $ds$  und  $d\varphi$  bedingt sind. Man hat sich also entweder sämtliche äußeren Kräfte in Punkten der Stabachse angreifend zu denken (wie dies in der Regel geschieht), oder man muß eine starre Verbindung ihrer Angriffspunkte mit der Stabachse voraussetzen.

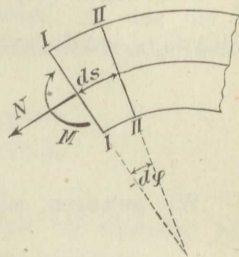


Fig. 187.

Um zu einem sehr übersichtlichen Ausdrucke für die virtuelle Formänderungs-Arbeit zu gelangen, denken wir uns durch zwei unendlich nahe Querschnitte  $I$  und  $II$  (Fig. 187) ein plattenförmiges Stabstück abgegrenzt und ersetzen die Spannungen  $\sigma$  eines jeden Querschnittes durch die im Querschnittsschwerpunkte angreifende Längskraft  $N = \int \sigma dF$  und ein Kräftepaar mit dem Momente  $M = \int \sigma v dF$ . Letzteres ist für den Querschnitt  $I$  rechts drehend. Verschiebt sich nun, bei relativ festliegendem Querschnitt  $II$ , der Querschnitt  $I$  im Sinne von  $N$  um  $\Delta ds$ , so leistet  $N$  die virtuelle Arbeit  $N \Delta ds$ , während bei einer Drehung des Querschnittes um den Winkel  $\Delta(-d\varphi)$  das Kräftepaar die Arbeit  $-M \Delta(-d\varphi)$  verrichtet, wobei das erste Minuszeichen nötig ist, weil  $\Delta(-d\varphi)$  die Vergrößerung des ursprünglich von den beiden Querschnitten gebildeten Winkels  $(-d\varphi)$  vorstellt, mithin der Sinn der Querschnittsdrehung demjenigen des Kräftepaares entgegengesetzt ist. Die virtuelle Formänderungs-Arbeit ist für die betrachtete Platte

$$dA_v = N \Delta ds + M \Delta d\varphi$$

und für den ganzen Stab:

$$A_v = \int N \Delta ds + \int M \Delta d\varphi.$$

Die Arbeitsgleichung, welche ausdrückt, daß die von den äußeren Kräften  $P$  und  $C$  geleistete virtuelle Arbeit gleich der virtuellen Formänderungs-Arbeit ist, lautet

$$(101) \quad \sum P \delta + \sum C \Delta c = \int N \Delta ds + \int M \Delta d\varphi;$$

sie gilt für beliebige mögliche, verschwindend kleine Verschiebungen und möge zunächst mit der im § 12 entwickelten Arbeitsbedingung verglichen werden. Dazu führen wir ein:

$N = \int \sigma dF$  und  $M = \int \sigma v dF$ ,  
erhalten

$$\Sigma P \delta + \Sigma C \Delta c = \int \sigma dF (\Delta ds + v \Delta d\varphi)$$

und setzen, indem wir die durch irgend einen, mittels des Zeigers  $a$  gekennzeichneten Belastungszustand sowie durch Temperaturänderungen hervorgerufenen Verschiebungen  $\delta_a$ ,  $\Delta c_a$ ,  $\Delta ds_a$ ,  $\Delta d\varphi_a$  einführen, nach den Gleichungen (86) und (87):

$$\begin{aligned} dF (\Delta ds_a + v \Delta d\varphi_a) &= \frac{dV}{ds_v} [\Delta ds_{v \cdot a} + \Delta v d\varphi] = dV \left[ \frac{\Delta ds_{v \cdot a}}{ds_v} + \frac{\Delta v}{r - v} \right] \\ &= dV \left[ \frac{\sigma_a}{E} + \varepsilon t + \frac{1}{r - v} \int_0^v \varepsilon t dv \right]. \end{aligned}$$

Wir gelangen, mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\int_0^v \varepsilon t dv}{(r - v) t}$$

zu der, irgend einem nur gedachten Belastungszustande, welcher von dem die Verschiebungen erzeugenden ( $a$ ) durch den Zeiger  $b$  unterschieden werde, entsprechenden Arbeitsgleichung:

$$(102) \quad \Sigma P_b \delta_a + \Sigma C_b \Delta c_a = \int \sigma_b \left( \frac{\sigma_a}{E} + \varepsilon' t \right) dV;$$

diese hat die gleiche Form, wie die aus (28) und (31) auf Seite 78 und 80 für den geraden Stab sich ergebende und als Annäherungsgleichung für Bögen mit großen Krümmungshalbmessern bislang benutzte Beziehung

$$(103) \quad \Sigma P_b \delta_a + \Sigma C_b \Delta c_a = \int \sigma_b \left( \frac{\sigma_a}{E} + \varepsilon t \right) dV,$$

und es geht tatsächlich (102) in (103) über, sobald  $r = \infty$  also  $\varepsilon' = \varepsilon$  gesetzt wird, womit dann gleichzeitig  $\sigma$  den durch die Gleichung (40) gegebenen Wert annimmt.\*)

Aus der übereinstimmenden Form der Gleichung (102) und (103) folgt überdies, daß die früher für den Fall eines beliebig veränderlichen  $\varepsilon t$

\*) Man gelangt auch zur Gleichung (102) durch die Erwägung, daß die Kräfte  $S = \sigma dF$  (Fig. 66) eine in die Halbierungslinie des Winkels ( $-d\varphi$ ) fallende Mittelkraft  $S \frac{ds_v}{r - v}$  besitzen, daß sie also die virtuelle Formänderungsarbeit

$$dA_v = \sigma dF \left( \Delta ds_v + \frac{ds_v}{r - v} \Delta v \right) = \sigma dV \left( \frac{\Delta ds_v}{ds_v} + \frac{\Delta v}{r - v} \right)$$

verrichten.



und für beliebige  $\sigma$  gegebenen Ableitungen, namentlich die zu dem Maxwell'schen Satze führenden Gleichungen (73), (74), sowie die Gleichungen (80), (84), (85) auch unter den in diesem Paragraphen gemachten Voraussetzungen gültig sind.

Die weiteren Entwicklungen knüpfen wir an die Gleichung (101); die Anwendung derselben auf die Belastungszustände  $X' = 1$ ,  $X'' = 1$ , . . . . . führt, wenn diesen Zuständen bezw. die Längskräfte  $N' N''$ , . . . . und Bieugungsmomente  $M'$ ,  $M''$ , . . . . entsprechen, zu den die Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Größen  $X$  ermöglichenden Beziehungen:

$$(104) \quad \begin{cases} L' = \int \Delta ds N' + \int \Delta d\phi M' \\ L'' = \int \Delta ds N'' + \int \Delta d\phi M'' \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

wobei  $L'$ ,  $L''$ , . . . . . die von den Auflagerkräften bei Eintreten jener Belastungszustände geleisteten virtuellen Arbeiten bedeuten.

Die Gleichungen (104) lassen sich auch durch die Bedingung

$$(105) \quad L = \int \Delta ds \frac{\partial N}{\partial X} + \int \Delta d\phi \frac{\partial M}{\partial X}$$

ersetzen, unter  $X$  irgend eine statisch nicht bestimmbare Größe und unter  $L$  die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand  $X = 1$  verstanden.

Drückt man  $\Delta ds$  und  $\Delta d\phi$  mittels der eine ungleichmäßige Erwärmung berücksichtigenden, hingegen an die Voraussetzung  $\frac{1}{m} = 0$  gebundenen Gleichungen (97) und (98) aus, so gehen die Beziehungen (104) über in

$$(106) \quad \begin{cases} L' = \int \frac{\mathfrak{N} \mathfrak{N}' ds}{EF} + \int \frac{MM' ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 N' ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} M' ds \\ L'' = \int \frac{\mathfrak{N} \mathfrak{N}'' ds}{EF} + \int \frac{MM'' ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 N'' ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} M'' ds \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

wobei

$$\mathfrak{N} = N - \frac{M}{r}, \quad \mathfrak{N}' = N' - \frac{M'}{r}, \quad \mathfrak{N}'' = N'' - \frac{M''}{r}, \quad \dots\dots\dots$$

ist, und Gleichung (105) lautet:

$$(107) \quad L = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial X} ds + \int \frac{M}{EZ} \frac{\partial M}{\partial X} ds + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial X} ds;$$

sie läßt sich, mit der Bezeichnung

$$(108) \quad A_i = \int \frac{\mathfrak{N}^2 ds}{2EF} + \int \frac{M^2 ds}{2EZ} + \int \varepsilon t_0 N ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} M ds$$

auch schreiben:

$$(109) \quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X},$$

und im Falle  $L = 0$ :

$$A_i = \text{minimum},$$

wobei  $A_i$  bei angenommenen Lasten und Temperaturänderungen als Funktion der zunächst unabhängig veränderlich gedachten  $X$  aufzufassen ist.

**Beispiel.** Ein Bogenträger mit Kämpfergelenken, dessen Mittellinie  $AB$  ein Kreisbogen ist, wird in der Mitte durch eine senkrechte Kraft  $P$  belastet. Es soll der Horizontalschub  $X$  mit Hilfe der Gleichung (107) unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß  $l$  in  $l + \Delta l$  übergeht und der Bogen gleichmäßig um  $t$  erwärmt wird.

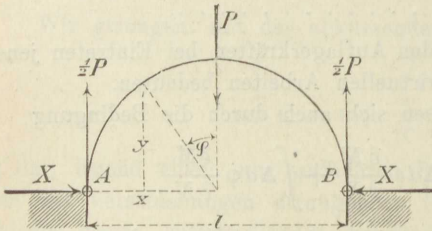


Fig. 188.

Für den Bogenquerschnitt bei  $x < \frac{1}{2}l$  ist (wenn  $\varphi_0$  den Wert von  $\varphi$  bei  $x = 0$  bedeutet)

$$N = -\frac{P}{2} \sin \varphi - X \cos \varphi,$$

$$M = \frac{P}{2} x - Xy = \frac{Pr}{2} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) - Xr (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

$$\mathfrak{N} = N - \frac{M}{r} = -\frac{P}{2} \sin \varphi_0 - X \cos \varphi_0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X} = -\cos \varphi, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -r (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial X} = -\cos \varphi_0,$$

während die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Fall  $X = 1$ :

$$L = -1 \cdot \Delta l$$

wird. Mit  $ds = -r d\varphi$ ,  $t_0 = t$  und  $\Delta t = 0$  folgt deshalb bei konstantem  $E$ ,  $F$  und  $Z$ , wenn  $\int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} ds = -\varepsilon t l$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \varepsilon t l - \Delta l = & - \left( \frac{P}{2} \sin \varphi_0 + X \cos \varphi_0 \right) \cos \varphi_0 \frac{r}{EF} 2 \int_{\varphi_0}^0 d\varphi \\ & + \frac{Pr^3}{2EZ} \cdot 2 \int_{\varphi_0}^0 (\sin \varphi_0 - \sin \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{Xr^3}{EZ} \cdot 2 \int_{\varphi_0}^0 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^2 d\varphi \\
 = & \left( \frac{P}{2} \sin \varphi_0 + X \cos \varphi_0 \right) \cos \varphi_0 \frac{r}{EF} 2\varphi_0 \\
 & - \frac{Pr^3}{EZ} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi_0 - \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \cos \varphi_0 - 1 \right) \\
 & + \frac{Xr^3}{EZ} (2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + \varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0),
 \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$X = \frac{P \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \varphi_0 + \cos \varphi_0 - 1 - \varphi_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \left( 1 + \frac{Z}{Fr^2} \right) \right] + \frac{EZ}{r^3} (\varepsilon t l - \Delta l)}{\varphi_0 - 3 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \left( 1 + \frac{Z}{Fr^2} \right)}.$$

**4) Verschiebungen und Drehungen.** Die Verschiebung  $\delta$  des Angriffspunktes einer Last  $P$  (die auch  $= 0$  sein kann) im Sinne von  $P$  ist

$$(111) \quad \delta = \int \Delta ds \bar{N} + \int \Delta d\varphi \bar{M} - \bar{L},$$

wobei  $\bar{N}$  = Längskraft,

$\bar{M}$  = Biegemoment,

$\bar{L}$  = virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte

für den Fall, daß  $P = 1$  wird und sämtliche statisch nicht bestimm-  
baren Größen  $X$  verschwinden, während  $\Delta ds$  und  $\Delta d\varphi$  demjenigen  
Belastungszustande entsprechen müssen, welcher die Verschiebung  $\delta$   
hervorbringt. Man darf auch setzen

$$(112) \quad \delta = \int \Delta ds \frac{\partial N}{\partial P} + \int \Delta d\varphi \frac{\partial M}{\partial P} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P} \Delta c.$$

Die Einführung der für  $\Delta ds$  und  $\Delta d\varphi$  durch die Gleichungen (97)  
und (98) gegebenen Werte liefert die den Gleichungen (54) und (55)  
gegenüber zu stellenden Beziehungen

$$(113) \quad \delta_m = \int \frac{\Re \bar{\Re} ds}{EF} + \int \frac{M \bar{M} ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 \bar{N} ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \bar{M} ds - \bar{L},$$

$$\begin{aligned}
 (114) \quad \delta_m = & \int \frac{\Re}{EF} \frac{\partial \Re}{\partial P_m} ds + \int \frac{M}{EZ} \frac{\partial M}{\partial P_m} ds + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial P_m} ds \\
 & + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial P_m} ds - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,
 \end{aligned}$$

wobei  $\bar{\Re} = \bar{N} - \frac{\bar{M}}{r}$



ist. In derselben Weise ergibt sich für die Änderung  $\Delta\varphi$  des Neigungswinkels  $\varphi$  irgend einer an die Stabachse gelegten Tangente die Gleichung

$$(115) \quad \Delta\varphi = \int \frac{\mathfrak{N} \bar{\mathfrak{N}} ds}{EF} + \int \frac{\mathfrak{M} \bar{\mathfrak{M}} ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 \bar{N} ds + \int \frac{\varepsilon \Delta t}{h} \bar{M} ds - \bar{L},$$

in welcher  $\bar{N}$  und  $\bar{M}$  bzw. die Längskraft und das Biegemoment für den Fall bedeuten, daß an der als starre, mit dem betrachteten Stabe fest verbundene Linie aufzufassenden Tangente und im Sinne der gesuchten Drehung ein Kräftepaar angreift, dessen Moment gleich „Eins“ ist, während die Größen  $X$  verschwinden.  $\bar{L}$  stellt die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für diesen Belastungszustand dar. An Stelle von Gleichung (115) darf auch gesetzt werden:

$$(116) \quad \Delta\varphi = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \mathfrak{M}} ds + \int \frac{\mathfrak{M}}{EZ} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{M}} ds + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial \mathfrak{M}} ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}} ds - \sum \frac{\partial C}{\partial \mathfrak{M}} \Delta c,$$

wenn  $\mathfrak{M}$  das beliebig große Moment eines an der Tangente angreifenden Kräftepaares vorstellt. Vergl. Seite 84.

**Beispiel.** Es soll die Verlängerung  $\Delta l$  der Sehne  $\overline{AB} = l$  eines ungleichmäßig erwärmten krummen Stabes ohne Zwischengelenke bestimmt werden. Fig. 154.

Man erhält

$$(117) \quad \Delta l = \int \frac{\mathfrak{N} \bar{\mathfrak{N}} ds}{EF} + \int \frac{\mathfrak{M} \bar{\mathfrak{M}} ds}{EZ} + \int \varepsilon t_0 \bar{N} ds + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \bar{M} ds,$$

wobei  $N$  und  $M$  der wirklichen Belastung entsprechen, während  $\bar{N}$  und  $\bar{M}$  bzw. die Längskraft und das Biegemoment bedeuten, welche für irgend einen Querschnitt des Bogens durch zwei in die Gerade  $AB$  fallende, im Sinne der gesuchten Verschiebung  $\Delta l$  wirkende Kräfte „Eins“ hervorgebracht werden.

Es ist  $\bar{N} = 1 \cdot \cos \varphi$ ,  $\bar{M} = 1 \cdot y$  und

$$\bar{\mathfrak{N}} = \bar{N} - \frac{M}{r} = \cos \varphi - \frac{y}{r},$$

mithin ergibt sich, bei konstantem  $\varepsilon$ ,  $t_0$ ,  $\Delta t$ :

$$(118) \quad \Delta l = \int \left( N - \frac{M}{r} \right) \left( \cos \varphi - \frac{y}{r} \right) \frac{ds}{EF} + \int \frac{M y ds}{EZ} + \varepsilon t_0 l = \int \varepsilon \Delta t \frac{y ds}{h}.$$

Beispielsweise ist für einen Halbkreisbogen, welcher die in Fig. 177 dargestellte Belastung durch zwei Kräfte  $Q$  erfährt:

$$N = Q \cos \varphi, \quad M = Q y, \quad y = r \cos \varphi, \quad N - \frac{M}{r} = 0$$

und, wegen  $ds = -r d\varphi$ , bei konstantem  $E, Z, h$ :

$$\begin{aligned}\Delta l &= -\frac{Qr^3}{EZ} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \varepsilon t_0 l - \frac{\varepsilon \Delta t r^2}{h} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi d\varphi \\ &= 2 \left[ \frac{Qr^3}{EZ} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{\varepsilon \Delta t r^2}{h} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi d\varphi \right] + \varepsilon t_0 2r, \\ (119) \quad \Delta l &= \frac{Qr^3\pi}{2EZ} + 2r\varepsilon \left( t_0 + \Delta t \frac{r}{h} \right).\end{aligned}$$

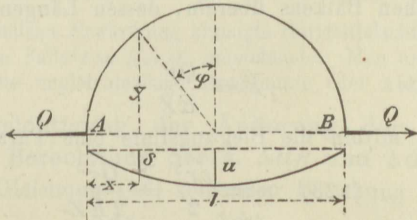


Fig. 189.

**5) Die Biegungslinie.** Setzt man in die im § 17 für die Biegungslinie eines einfach gekrümmten Stabes entwickelte Gleichung:

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{dx} \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx},$$

die durch die Gleichungen (97) und (98) für  $\Delta d\varphi$  und  $\Delta ds$  gegebenen Werte ein, so erhält man (mit  $dx = ds \cos \varphi = -r d\varphi \cos \varphi$ ):

$$(120) \quad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \left( \frac{M}{EZ} + \frac{\varepsilon \Delta t}{h} - \frac{\mathfrak{N}}{EFr} \right) \sec \varphi + \frac{d \left[ \left( \frac{\mathfrak{N}}{EF} + \varepsilon t_0 \right) \frac{ds}{dx} \operatorname{tg} \varphi \right]}{dx},$$

und es lassen sich jetzt, ebenso wie im § 17, die Verschiebungen  $\delta$  mittels eines Seilpolygons darstellen, dessen Belastungsordinate

$$(121) \quad z = \left( \frac{M}{EZ} + \frac{\varepsilon \Delta t}{h} - \frac{\mathfrak{N}}{EFr} \right) \sec \varphi + \frac{d \left[ \left( \frac{\mathfrak{N}}{EF} + \varepsilon t_0 \right) \frac{ds}{dx} \operatorname{tg} \varphi \right]}{dx}$$

ist. Sind Zwischengelenke vorhanden, so ist nach Seite 165 zu verfahren.

Für manche Fälle ist es vorteilhaft, Gleichung (120) umzuformen in

$$\begin{aligned}(122) \quad -\frac{d^2\delta}{dx^2} &= \left( \frac{M}{EZ} + \frac{\varepsilon \Delta t}{h} \right) \frac{ds}{dx} + \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{d^2y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{d \left( \frac{\mathfrak{N}}{EF} \right)}{dx} \frac{dy}{dx} + \varepsilon t_0 \frac{d^2y}{dx^2};\end{aligned}$$

hierbei ist  $t_0$  für sämtliche Punkte der Stabachse gleich groß angenommen.

**Beispiel 1.** Gesucht ist die Biegelinie eines Halbkreisbogens, welcher nach Fig. 189 durch zwei Kräfte  $Q$  belastet wird. Es sei  $t = 0$ .

Für den Stabquerschnitt bei  $x$  ist

$$N = Q \cos \varphi, \quad M = Qr \cos \varphi, \quad \mathfrak{N} = N - \frac{M}{r} = 0,$$

mithin 
$$-\frac{d^2 \delta}{dx^2} = \frac{Qr}{EZ}.$$

Nach § 17 stimmt die gesuchte Biegelinie mit der Momentenkurve eines einfachen Balkens überein, dessen Längeneinheit die konstante Belastung

$$z = \frac{Qr}{EZ}$$

trägt, und es ist mithin die Biegelinie eine Parabel, deren Pfeil

$$(123) \quad u = \frac{zr^2}{2} = \frac{Qr^3}{2EZ}$$

ist, und deren Gleichung

$$(124) \quad \delta = \frac{ux(2r - x)}{r^2} = \frac{Qrx(2r - x)}{2EZ}$$

lautet.

**Beispiel 2.** Gesucht sei für einen Bogenträger mit halbkreisförmiger Mittellinie der durch eine Einzellast  $P$ , eine gleichmäßige Erwärmung um  $t$  und eine Vergrößerung der Stützweite  $l$  um  $\Delta l$  erzeugte Horizontalschub  $X$ . Der Querschnitt sei konstant, und an den Kämpfern mögen Gelenke liegen. Fig. 190.

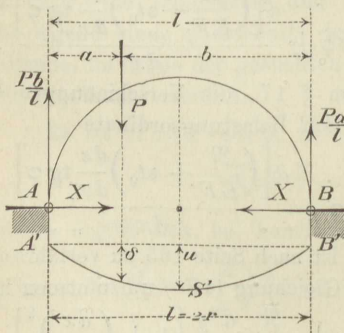


Fig. 190.

Nachdem für den in Fig. 189 dargestellten Belastungsfall (mit  $Q=1$ ) die Biegelinie  $A'S'B'$  und die Verlängerung

$$\xi = \frac{\pi r^3}{2EZ} \quad [\text{nach Gleichung (119)}]$$

der Sehne  $AB$  ermittelt worden sind, wird, genau wie auf Seite 186, mit Hilfe des Maxwellschen Satzes der Wert gefolgt:

$$X = \frac{P\delta + \varepsilon t l - \Delta l}{\xi},$$

wobei  $\delta$  die unter der Last  $P$  gemessene Ordinate der Linie  $A'S'B'$  bedeutet.



Wegen

$$\delta = \frac{ra(2r-a)}{2EZ} \quad [\text{nach Gleichung (124)}]$$

ergibt sich

$$X = \frac{Pa(2r-a)}{\pi r^2} + \frac{2EZ}{\pi r^3} (2\epsilon tr - \Delta l).$$

Bei ungleichmäßiger Erwärmung tritt nach Gleichung (119) an die Stelle von  $2\epsilon tr$  der Wert  $2\epsilon r \left( t_0 + \Delta t \frac{r}{h} \right)$ .

Ist beispielsweise  $r = 12h$  und  $\Delta t = \frac{t_0}{4}$ , so folgt  $t_0 + \Delta t \frac{r}{h} = 4t_0$ , und der durch die ungleichmäßige Erwärmung erzeugte Horizontalschub ergibt sich viermal so groß wie der im Falle  $t = \text{Konst.}$  entstehende. Man ersieht hieraus, welchen großen Einfluss eine ungleichmäßige Erwärmung oder Abkühlung haben kann.

**6) Berücksichtigung der Änderung der Querschnittsmessungen bei Berechnung der  $\sigma$ ,  $\Delta ds$  und  $\Delta d\varphi$ .** Die Differentiation der aus Gleichung (86) folgenden Beziehung

$$\frac{\sigma}{E} (r-v) = \frac{\Delta ds}{ds} r - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} v - \Delta v - \epsilon t (r-v)$$

liefert, wenn zunächst der Zustand  $t = 0$  vorausgesetzt wird,

$$\frac{d\sigma}{dv} \frac{r-v}{E} - \frac{\sigma}{E} = - \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta dv}{dv},$$

worein zu setzen

$$\frac{\Delta dv}{dv} = - \frac{\sigma}{mE}.$$

Es entsteht mit der Abkürzung  $\frac{m+1}{m} = \mu$ :

$$\frac{d\sigma}{dv} - \mu \frac{\sigma}{r-v} + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{E}{r-v} = 0$$

und hieraus durch Integration\*)

$$\sigma = \frac{C}{(r-v)^\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E,$$

wobei  $C$  die Integrationskonstante bedeutet. Für  $v = 0$  soll sein:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta ds}{ds}, \text{ und es folgt daher}$$

\*) Einer Differentialgleichung  $\frac{dy}{dx} - yF(x) + F_1(x) = 0$  entspricht das Integral:

$$y = \left( e^{\int F(x) dx} \right) \left( C - \int F_1(x) e^{-\int F(x) dx} dx \right).$$

$$E \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{C}{r^\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E, \text{ mithin}$$

$$C = E \left( \frac{\Delta ds}{ds} - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right) r^\mu \text{ und schliesslich}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \alpha + \beta \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^\mu},$$

wobei

$$\alpha = \frac{m}{m+1} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \text{ und } \beta = \frac{\Delta ds}{ds} - \alpha.$$

Die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$N = \int \sigma dF \text{ und } M = \int \sigma v dF$$

gehen über in

$$\frac{N}{E} = \alpha F + \beta \int \frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^\mu}; \quad \frac{M}{E} = \beta \int \frac{v dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^\mu}$$

und liefern, mit den Bezeichnungen:

$$K_1 = \int \frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^\mu}; \quad K_2 = \int \frac{\frac{v}{r} dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^\mu} = K_1 - \int \frac{dF}{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{\mu-1}}$$

die Werte

$$\beta = \frac{M}{E K_2 r}, \quad \alpha = \frac{N}{E F} - \frac{M}{E F r} \frac{K_1}{K_2},$$

weshalb sich für die Spannung  $\sigma$  der Ausdruck ergibt

$$(125) \quad \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{r K_2} \left( \frac{1}{\sqrt[m]{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^{+m1}}} - \frac{K_1}{F} \right);$$

derselbe bleibt bei Eintreten einer ungleichmäßigen Erwärmung ungeändert, sobald  $t$  dem durch die Gleichung (91) gegebenen Gesetze folgt.

Bestimmt man noch  $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{m+1}{m} \alpha$  und  $\frac{\Delta ds}{ds} = \alpha + \beta$  und fügt zu diesen Werten die für jene ungleichmäßige Erwärmung auf Seite 212 und 213 nachgewiesenen Beiträge  $\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon t_0$  und  $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = -\varepsilon \Delta t \frac{r}{h}$ , so gelangt man zu

$$(126) \quad \begin{cases} \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} - \frac{M}{EFr} \frac{K_1 - F}{K_2} + \varepsilon t_0 \\ \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{m+1}{m} \left( \frac{N}{EF} - \frac{M}{EFr} \frac{K_1}{K_2} \right) - \varepsilon \Delta t \frac{r}{h}. \end{cases}$$

Für ein Rechteck von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ergibt sich beispielsweise, wegen  $dF = b dv$ :

$$K_1 = F \frac{r}{h} \omega_1; \quad K_2 = F \frac{r}{h} (\omega_1 - \omega_2), \quad \text{wobei}$$

$$\omega_1 = m \left[ \frac{1}{\sqrt[m]{1 - \frac{h}{2r}}} - \frac{1}{\sqrt[m]{1 - \frac{h}{2r}}} \right];$$

$$\omega_2 = \frac{m}{m-1} \left[ \sqrt[m]{\left(1 + \frac{h}{2r}\right)^{m-1}} - \sqrt[m]{\left(1 - \frac{h}{2r}\right)^{m-1}} \right].$$

Ist  $r = 5h$  und  $m = 3$ , so erhält man  $\omega_1 = 0,201042$ ,  $\omega_2 = 0,200148$ ,

$$\frac{K_1}{F} = 5\omega_1 = 1,005210, \quad rK_2 = 25Fh(\omega_1 - \omega_2) = 0,02235bh^2,$$

$$\sigma = \frac{N}{bh} + \frac{M}{0,02235bh^2} \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{v}{r}\right)^4}} - 1,005240 \right]$$

und für  $v = +\frac{1}{2}h$  bzw.  $v = -\frac{1}{2}h$ :

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + 6,514 \frac{M}{bh^2}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{bh} - 5,119 \frac{M}{bh^2}.$$

Die Anwendung der Gleichung (96) hätte mit  $Z = 1,006J$  geliefert:

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + 6,427 \frac{M}{bh^2}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{bh} - 5,623 \frac{M}{bh^2}$$

und die für den geraden Stab abgeleitete Gleichung (40):

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + 6 \frac{M}{bh^2}, \quad \sigma_2 = \frac{N}{bh} - 6 \frac{M}{bh^2}.$$



## Abschnitt III.

### § 22.

### Drehungsfestigkeit.

**1) Spannungen.** Wird ein gerader Stab durch Kräftepaare beansprucht, deren Ebenen die Stabachse rechtwinklig schneiden, so besitzen nur die in den Querschnitten hervorgerufenen und in der Folge mit  $\tau$

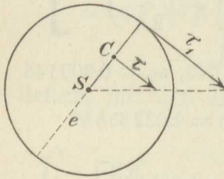


Fig. 191.

bezeichneten Schubspannungen einen wesentlichen Einfluß auf die Formänderung. Auf jeden Querschnitt wirkt ein Moment  $M_a$ , welches das Drehungs- oder Torsions-Moment genannt wird und gleich der algebraischen Summe der Momente der zwischen jenem Querschnitte und dem Stabende angreifenden Kräftepaare ist.

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Radius  $e$ , auf welchen Fall die folgenden Untersuchungen beschränkt bleiben mögen, so ist die in irgend einem Punkte  $C$  (Fig. 191) auftretende Schubspannung  $\tau$  rechtwinklig zu der von  $C$  nach dem Kreismittelpunkte  $S$  gezogenen Geraden, deren Länge  $\overline{SC} = \rho$  sei, und es verhält sich, wenn  $\tau_1$  den Wert von  $\tau$  für  $\rho = e$  bedeutet,

$$\tau : \tau_1 = \rho : e.$$

Das Gleichgewicht zwischen den inneren und äußeren Kräften verlangt:

$$M_a = \int \rho \tau dF = \frac{\tau_1}{e} \int \rho^2 dF,$$

wobei das Integral über den ganzen Querschnitt auszudehnen ist, und es ergibt sich, wenn

$$(127) \quad \int \rho^2 dF = J_p$$

gesetzt wird,

$$(128) \quad \tau_1 = \frac{M_a e}{J_p} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{M_a \rho}{J_p}.$$

2) **Drehungswinkel.** Der von irgend einem auf der Stabachse angenommenen Ausgangspunkte  $A$  um  $s$  entfernte Querschnitt  $D$  wird sich gegen den bei  $s + ds$  gelegenen Querschnitt  $D_1$  um einen Winkel  $d\vartheta$  drehen, und hierbei wird sich der Angriffspunkt  $C$  der Schubspannung  $\tau$  gegen den gleich gelegenen Punkt  $C_1$  des Querschnittes  $D_1$  um  $\rho d\vartheta$  verschieben. Ist  $C'$  die neue Lage von  $C$  und setzt man

$$\angle C' C_1 C = \gamma,$$

so folgt  $\overline{C'C} = \gamma ds$ , und es ist mithin  $\rho d\vartheta = \gamma ds$ , woraus sich

$$d\vartheta = \gamma \frac{ds}{\rho}$$

ergibt. Man nennt  $\gamma$  die Gleitung im Punkte  $C$ ; sie ist der Spannung  $\tau$  proportional und durch

$$(129) \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

gegeben, wobei  $G$  den Gleitmodul (Schub-Elastizitätsmodul) bedeutet.

Der Ausdruck für  $d\vartheta$  geht nun über in

$$(130) \quad d\vartheta = \frac{\tau ds}{G\rho} = \frac{M_a ds}{G J_p},$$

und die Drehung des Querschnittes  $D$  gegen einen um  $s$  von ihm entfernten Querschnitt wird

$$(131) \quad \vartheta = \int_0^s \frac{M_a ds}{G J_p} .*)$$

Zwischen den beiden Elastizitätsmodulen  $E$  und  $G$  besteht die Beziehung

$$(132) \quad G = \frac{mE}{2(m+1)},$$

wenn  $\frac{1}{m}$  den Koeffizienten der Querdehnung bedeutet. Für Metalle ist  $m = 3$  bis 4.

3) **Die Arbeitsgleichung.** Da man alle in einem Querschnitte wirksamen Schubkräfte zu einem Kräftepaare vereinigen kann, dessen Moment den absoluten Wert  $M_a$  hat, so ist die virtuelle Arbeit dieser Schubkräfte bei einer Drehung des Querschnittes um einen beliebigen Winkel  $d\vartheta$  (wenn der um  $ds$  entfernte Nachbarquerschnitt relativ fest liegt:

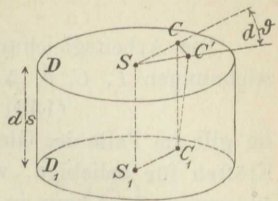


Fig. 192.

\*) Ist der Stabquerschnitt kein Kreis, so tritt nach Saint-Venant (Comptes rendus 1879, Band 88, Seite 144) an die Stelle von  $J_p$  der Wert  $\frac{F^4}{\alpha J_p}$ , wobei, genügend genau,  $\alpha = 40$  gesetzt werden darf.

$$dA_v = M_a d\varpi,$$

und es ergibt sich die virtuelle Formänderungs-Arbeit des ganzen Stabes  
 $A_v = \int M_a d\varpi.$

Die Arbeitsgleichung lautet mit den auf Seite 22 erklärten Bezeichnungen  $P, C, \delta, \Delta c$ :

$$(133) \quad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int M_a d\varpi;$$

sie gilt im Falle des Gleichgewichtes zwischen den äußeren und inneren Kräften für beliebige, verschwindend kleine, zusammengehörige Formänderungen und kann in derselben Weise wie die entsprechenden Arbeitsgleichungen der Abschnitte I. und II. benutzt werden, um statisch nicht bestimmbare Größen  $X$  und Verschiebungen  $\delta$  zu ermitteln. Die teilweise Differentiation von Gleichung (133) nach einer GröÙe  $X$  oder einer Last  $P$  führt zu den Beziehungen

$$(134) \quad L = \int \frac{\partial M_a}{\partial X} d\varpi = \int \frac{M_a}{GJ_p} \frac{\partial M_a}{\partial X} ds \text{ und}$$

$$(135) \quad \delta_m = \int \frac{\partial M_a}{\partial P_m} d\varpi - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c = \int \frac{M_a}{GJ_p} \frac{\partial M_a}{\partial P_m} ds - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

wobei die Lasten  $P$  und die Größen  $X$  als unabhängige Veränderliche aufzufassen sind.  $L$  bedeutet, wie früher, die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand  $X=1$ .

#### 4) Zusammensetzung von Drehungs- und Biegungs-Festigkeit.

Die Gleichungen (134) und (135) eignen sich besonders für die Beurteilung des Einflusses der Drehungsmomente in Fällen gleichzeitiger Beanspruchung auf Drehungs- und Biegungs-Festigkeit, namentlich für die Untersuchung von Stäben kreisförmigen Querschnitts, die bei beliebiger Gestalt der Mittellinie durch irgendwelche Kräfte belastet werden.

Ist die Mittellinie des Stabes eine Kurve doppelter Krümmung, so beziehe man den Querschnitt auf rechtwinklige Koordinatenachsen ( $u, v$ ) und lasse die  $v$ -Achse mit dem Krümmungsradius (d. h. also mit der Hauptnormale) zusammenfallen; die  $u$ -Achse steht dann senkrecht zur Schmiegungeebene und deckt sich mit der Binormale. Nun denke man den Stab durch den fraglichen Querschnitt in zwei Teile zerlegt, ersetze die Mittelkraft  $R$  der auf den einen der beiden Teile wirkenden äußeren Kräfte durch die aufeinander senkrechten Seitenkräfte:

$N$  (Längskraft) senkrecht zur Querschnittsebene,

$Q_u$  (Querkraft) parallel der  $u$ -Achse,

$Q_v$  „ „ „ „  $v$ -Achse

und bestimme die von der Kraft  $R$  ausgeübten Momente:

$M_a$ , in Bezug auf eine zum Querschnitte senkrechte Achse,

$M_u$ , „ „ „ „ die  $u$ -Achse,

$M_v$ , „ „ „ „  $v$ -Achse.



Infolge von  $N$  und  $M_u$  entsteht nach § 21, Gleichung (96) in irgend einem Querschnittspunkte ( $u, v$ ) die Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{M_u v}{Z} \frac{r}{r - v},$$

wobei

$$\mathfrak{N} = N - \frac{M_u}{r},$$

$$Z = J \left[ 1 + \frac{3}{6} \left( \frac{e}{r} \right)^2 + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \left( \frac{e}{r} \right)^4 + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} \left( \frac{e}{r} \right)^6 + \dots \right],$$

$$J = \frac{\pi e^4}{4}, \quad F = \pi e^2, \quad e = \text{Halbmesser des Kreisquerschnittes},$$

$r$  = Krümmungshalbmesser der Mittellinie,

während die durch das Moment  $M_v$  erzeugte Spannung  $\sigma$  mittels der für den geraden Stab entwickelten Formel

$$\sigma = \frac{M_v u}{J}$$

zu berechnen ist, da die Schmiegungeebene drei aufeinander folgende Punkte der Mittellinie enthält.

Zu der gesamten Längsspannung

$$(136) \quad \sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{M_u v}{Z} \frac{r}{r - v} + \frac{M_v u}{J}$$

tritt noch eine Schubspannung, welche mit der hier als zulässig angenommenen Vernachlässigung der von  $Q_u$  und  $Q_v$  abhängigen Beiträge gleich

$$(137) \quad \tau = \frac{M_a \rho}{J_p} = \frac{M_a \rho}{2J}$$

ist, und es ergibt sich hiermit die Inanspruchnahme an der Stelle ( $uv$ ):

$$(138) \quad k = \frac{m-1}{2m} \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Hinsichtlich der Vorzeichen der von den äußeren Kräften abhängigen Werte gilt folgendes:

Das Moment  $M_u$  ist positiv, sobald es den Krümmungshalbmesser  $r$  der Stab-Mittellinie zu vergrößern sucht; der Krümmungsmittelpunkt muß hierbei auf dem positiven Teile der  $v$ -Achse liegen, vergl. § 21.

Das Moment  $M_v$  ist positiv, sobald es bestrebt ist, auf der Seite der positiven  $u$ -Achse Zugspannungen hervorzubringen.

Die Längskraft  $N$  ist positiv, sobald sie den Stab an der betrachteten Stelle zu zerreißen trachtet.

Das Vorzeichen von  $M_a$  ist gleichgültig, da in  $k$  die Schubspannung  $\tau$  nur im Quadrat vorkommt.

Statisch nicht bestimmbar GröÙen  $X$  lassen sich (für den in der Folge vorausgesetzten Zustand  $t=0$ ) mit Hilfe der aus (53), (107) und (134) sich ergebenden Arbeitsbedingung

$$(139) \quad L = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial X} ds + \int \frac{M_u}{EZ} \frac{\partial M_u}{\partial X} ds + \int \frac{M_v}{EJ} \frac{\partial M_v}{\partial X} ds + \int \frac{M_d}{GJ_p} \frac{\partial M_d}{\partial X} ds$$

ermitteln, und zur Berechnung von Verschiebungen  $\delta$  kann die Gleichung

$$(140) \quad \delta_m = \int \frac{\mathfrak{N}}{EF} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial P_m} ds + \int \frac{M_u}{EZ} \frac{\partial M_u}{\partial P_m} ds + \int \frac{M_v}{EJ} \frac{\partial M_v}{\partial P_m} ds + \int \frac{M_d}{GJ_p} \frac{\partial M_d}{\partial P_m} ds - \sum \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c$$

benutzt werden.

**Aufgabe 1.** Ein Ring von konstantem Querschnitte und kreisförmiger Mittellinie (Fig. 193) wird bei  $A$  durchgeschnitten und unmittelbar zu

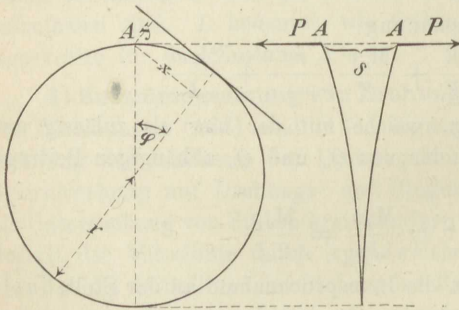


Fig. 193.

beiden Seiten der Schnittstelle von zwei entgegengesetzt gleichen, zur Stabebene rechtwinkligen Kräften  $P$  ergriffen. Es soll angegeben werden, um wieviel sich der Ring, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser  $e$  ist, bei  $A$  öffnet, und wie groß seine Beanspruchung ist.

Bedeutend  $y$  und  $x$  die von  $A$  auf eine beliebige Tangente und den durch ihren Berührungspunkt gehenden Halbmesser gefällten Lote, so entsteht in Bezug auf die in die Stabebene fallende  $v$ -Achse jenes Querschnittes das Biegemoment

$$M_v = Px.$$

Das Drehmoment ist

$$M_d = Py$$

und die gesuchte Öffnungsweite:

$$\delta = 2 \int_0^\pi \frac{M_v}{EJ} \frac{\partial M_v}{\partial P} ds + 2 \int_0^\pi \frac{M_d}{GJ_p} \frac{\partial M_d}{\partial P} ds.$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial M_v}{\partial P} = x, \quad \frac{\partial M_a}{\partial P} = y \quad \text{und} \quad \frac{EJ}{GJ_p} = \frac{m+1}{m}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2P}{EJ} \left( \int_0^\pi x^2 ds + \frac{m+1}{m} \int_0^\pi y^2 ds \right) \\ &= \frac{2Pr^3}{EJ} \left( \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{m+1}{m} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi \right) \\ &= \frac{\pi Pr^3}{EJ} \left( 1 + 3 \frac{m+1}{m} \right), \end{aligned}$$

und beispielsweise für  $m = 3$ , mit  $J = \frac{\pi e^4}{4}$ :

$$\delta = \frac{20 Pr^3}{Ee^4}.$$

Die Inanspruchnahme des Ringes ist nach (138) mit  $m = 3$ :

$$k = \frac{1}{3} \sigma + \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

worein zu setzen:

$$\sigma = M_v \frac{e}{J} = \frac{4Pr \sin \varphi}{\pi e^3}, \quad 2\tau = \frac{M_a e}{J} = \frac{4Pr (1 - \cos \varphi)}{\pi e^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } k &= \frac{4Pr}{3\pi e^3} \left( \sin \varphi + 2 \sqrt{\sin^2 \varphi + (1 - \cos \varphi)^2} \right) \\ &= \frac{4Pr}{3\pi e^3} \left( \sin \varphi + 4 \sin \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Dieser Wert wird am größten für  $\varphi = 137^\circ 4'$  und zwar ergibt sich hiermit

$$k_{max} = 1,869 \frac{Pr}{e^3} \text{.}^*)$$

**Aufgabe 2.** Ein Stab  $ASA$  (Fig. 194) mit halbkreisförmiger, in einer wagerechten Ebene gedachten Mittellinie und konstantem Querschnitte ist an beiden Enden fest eingespannt und mit einer Kraft  $2P$  belastet, welche in der zur Stabebene senkrechten Symmetrieebene liegt, mit der Stabebene den Winkel  $\alpha$  einschließt und auf der im Halbierungspunkte  $S$  des Kreisbogens zur Stabebene errichteten Senkrechten die Strecke  $SB = c$  abschneidet. Es soll die Inanspruchnahme des Stabes, dessen Querschnitt ein Kreis vom Radius  $e$  ist, ermittelt werden.

Wir denken den Stab bei  $S$  aufgeschnitten, nehmen an jeder Stabhälfte die Kraft  $P$  an und ersetzen die in der Schnittfläche bei  $S$  wirkenden

\*) Vergl. Grashof, Theorie der Elektrizität und Festigkeit. Berlin 1878, Seite 296.



inneren Kräfte durch ihre Mittelkraft  $H$ . Wegen der Symmetrie des Belastungszustandes ist  $H$  parallel der in  $S$  an die Stabachse gelegten

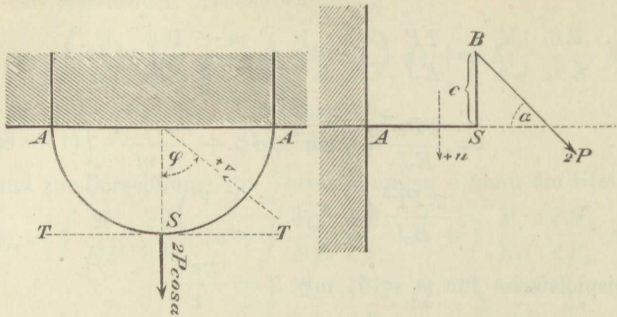


Fig. 194.

Tangente  $TT$ ; sie habe von der Stabebene den Abstand  $b$ , während die Entfernung ihrer Projektion auf die Stabebene vom Punkte  $S$  gleich  $a$  sein möge, und es werde gesetzt

$$Ha = M_1; Hb = M_2.$$

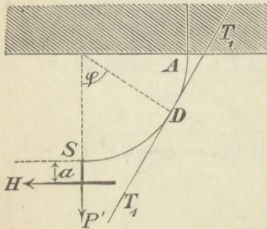


Fig. 195.

Nach Zerlegung von  $P$  in  $P' = P \cos \alpha$  und  $P'' = P \sin \alpha$  ergibt sich für einen beliebigen Querschnitt  $D$  (vergl. Fig. 195, in welcher die auf eine Stabhälfte wirkenden Kräfte auf die Stabebene projiziert sind):

die Längskraft  $N = H \cos \varphi + P' \sin \varphi$ ,  
das um die zur Stabebene senkrechte  $u$ -Achse drehende Biegemoment

$$\begin{aligned} M_u &= P' r \sin \varphi - H(r + a - r \cos \varphi) \\ &= P' r \sin \varphi - Hr(1 - \cos \varphi) - M_1, \end{aligned}$$

das um die in die Stabebene fallende  $v$ -Achse drehende Biegemoment (nach Zerlegung von  $H$  in  $H \cos \varphi$  und  $H \sin \varphi$ )

$$\begin{aligned} M_v &= -P'' r \sin \varphi - P' \sin \varphi \cdot c - H \cos \varphi \cdot b \\ &= -(P'' r + P' c) \sin \varphi - M_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

und das um die in  $D$  an die Stabachse gelegte Tangente  $T_1 T_1$  drehende Torsionsmoment

$$M_d = P'' r (1 - \cos \varphi) - P' c \cos \varphi + M_2 \sin \varphi.$$

Sind nun  $H$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  bekannt, so vermag man für jeden Punkt  $u, v$  des Querschnittes die Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$ , sowie die Inanspruchnahme  $k$  mit Hilfe der Gleichungen (136) bis (138) anzugeben, worauf der stets einem Umfangspunkte entsprechende Wert  $k_{max}$  berechnet werden kann.

Die statisch nicht bestimmbar Größen  $H$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  lassen sich mittels der Bedingung

$$0 = \frac{1}{EF} \int \mathfrak{N} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial X} ds + \frac{1}{EZ} \int M_u \frac{\partial M_u}{\partial X} ds + \frac{1}{EJ} \int M_v \frac{\partial M_v}{\partial X} ds \\ + \frac{1}{GJ_p} \int M_d \frac{\partial M_d}{\partial X} ds;$$

in welcher  $\mathfrak{N} = N - \frac{M_u}{r} = H + \frac{M_1}{r}$  ist, berechnen; man hat nur nötig, für  $X$  der Reihe nach  $H$ ,  $M_1$  und  $M_2$  zu setzen, um drei Gleichungen mit drei Unbekannten zu erhalten.

Zunächst sollen die in jenen drei Gleichungen vorkommenden, zwischen den Grenzen 0 und  $\frac{1}{2}\pi$  zu nehmenden Integrale gesondert berechnet werden. Es ist, mit  $ds = r d\varphi$ :

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial H} = 1, \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathfrak{N} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial H} ds = \left( H + \frac{M_1}{r} \right) \frac{r\pi}{2},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial M_1} = \frac{1}{r}, \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathfrak{N} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial M_1} ds = \left( H + \frac{M_1}{r} \right) \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial M_u}{\partial H} = -r(1 - \cos \varphi),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_u \frac{\partial M_u}{\partial H} ds = - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [P'r \sin \varphi - Hr(1 - \cos \varphi) - M_1] r^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi \\ = -r^3 \left[ \frac{P'}{2} - H \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) - \frac{M_1}{r} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right],$$

$$\frac{\partial M_u}{\partial M_1} = -1, \int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_u \frac{\partial M_u}{\partial M_1} ds = - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [P'r \sin \varphi - Hr(1 - \cos \varphi) - M_1] r d\varphi \\ = -r^2 \left[ P' - H \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{M_1}{r} \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\frac{\partial M_v}{\partial M_2} = -\cos \varphi, \int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_v \frac{\partial M_v}{\partial M_2} ds = + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [(P'c + P''r) \sin \varphi + M_2 \cos \varphi] r \cos \varphi d\varphi \\ = \frac{r}{2} \left( P'c + P''r + M_2 \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial M_2} = \sin \varphi, \int_0^{\frac{1}{2}\pi} M_d \frac{\partial M_d}{\partial M_2} ds = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [P''r(1 - \cos \varphi) - P'c \cos \varphi + M_2 \sin \varphi] r \sin \varphi d\varphi \\ = \frac{r}{2} \left( P''r - P'c + M_2 \frac{\pi}{2} \right),$$

und es lautet daher die obige Arbeitsgleichung

für  $X = H$ :

$$\frac{1}{EF} \left( H + \frac{M_1}{r} \right) \frac{\pi r}{2} - \frac{r^3}{EZ} \left[ \frac{P'}{2} - H \left( \frac{3\pi}{4} - 2 \right) - \frac{M_1}{r} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = 0,$$

für  $X = M_1$ :

$$\frac{1}{EF} \left( H + \frac{M_1}{r} \right) \frac{\pi}{2} - \frac{r^2}{EZ} \left[ P' - H \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{M_1}{r} \frac{\pi}{2} \right] = 0,$$

für  $X = M_2$ :

$$\frac{r}{2EJ} \left( P'c + P''r + M_2 \frac{\pi}{2} \right) + \frac{r}{2GJ_p} \left( P''r - P'c + M_2 \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$1 + \frac{Z}{Fr^2} = \kappa$$

und beachtet, daß  $\frac{EJ}{GJ_p} = \frac{m+1}{m}$  ist, so ergeben sich aus den drei Bedingungen die Werte:

$$H = 2P \cos \alpha \frac{4 - \kappa\pi}{\kappa\pi^2 - 8},$$

$$M_1 = 2Pr \cos \alpha \frac{(\kappa + 1)\pi - 6}{\kappa\pi^2 - 8},$$

$$M_2 = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{Pc \cos \alpha}{2m + 1} - Pr \sin \alpha \right].$$

Die gestellte Aufgabe ist hiermit gelöst.

Ist die Last  $2P$  parallel zur Stabebene, d. h. ist  $\alpha = 0$ , so ergibt sich

$$H = 2P \frac{4 - \kappa\pi}{\kappa\pi^2 - 8}, \quad M_1 = 2Pr \frac{(\kappa + 1)\pi - 6}{\kappa\pi^2 - 8}, \quad M_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Pc}{2m + 1}.$$

$H$  und  $M_1$  sind unabhängig von  $c$ ; beide Werte hätten mit Hilfe der im § 21 für den einfach gekrümmten Stab gegebenen Gesetze entwickelt werden können.

Ist die Last  $2P$  senkrecht zur Stabebene ( $\alpha = 90$ ), so ergibt sich

$$H = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = -\frac{2Pr}{\pi}.$$

Für eine beliebige, jedoch in Bezug auf den Halbierungspunkt  $S$  des Bogens  $ASA$  symmetrische Belastung erhält man

$$\mathfrak{N} = F(P) + H + \frac{M_1}{r}; \quad \mathfrak{M}_u = F_1(P) - Hr(1 - \cos \varphi) - M_1;$$

$$\mathfrak{M}_v = F_2(P) - M_2 \cos \varphi; \quad \mathfrak{M}_a = F_3(P) + M_2 \sin \varphi,$$

wobei  $F(P)$ ,  $F_1(P)$ ,  $F_2(P)$ ,  $F_3(P)$  gegebene Funktionen der Lasten sind. Die nach  $H$ ,  $M_1$  und  $M_2$  gebildeten teilweisen Differentialquotienten der Größen  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{M}_u$ ,  $\mathfrak{M}_v$ ,  $\mathfrak{M}_a$  behalten die oben angegebenen Werte, und es ergeben sich daher, wenn der Reihe nach  $X = H$ ,  $X = M_1$ ,  $X = M_2$  gesetzt wird, die Bedingungen:

$$(I) \quad 0 = \int_{EF} \mathfrak{N} d\varphi - r \int_{EZ} \frac{\mathfrak{M}_u}{EZ} (1 - \cos \varphi) d\varphi$$





zerlegt, und in gleicher Weise mögen die Spannungen in den dem Punkte  $O$  anliegenden Seitenflächen  $dzdx$  und  $dx dy$  durch ihre Seiten-

$$\begin{aligned} \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \\ \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy} \end{aligned}$$

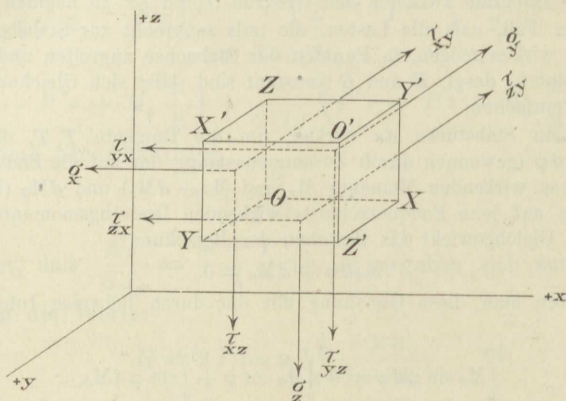


Fig. 196.

gegeben werden. Die  $\sigma$  sind Zug- oder Druckspannungen, die  $\tau$  Schubspannungen.

Wird die Momentensumme aller auf das Parallelepipedum  $dx dy dz$  wirkenden Kräfte in Bezug auf die der  $y$ -Achse parallele Schwerachse

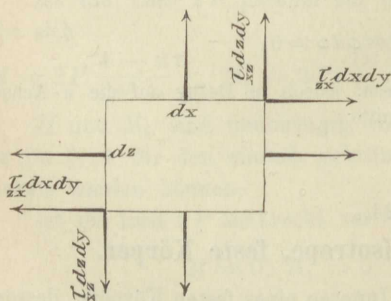


Fig. 197.

auf Fig. 197, in der die Projektion des Parallelepipedums auf die  $(zx)$ -Ebene dargestellt ist) die Gleichung:

$$(\tau_{zx} dx dy) yz = (\tau_{xz} dy dz) dx,$$

und hieraus und aus ähnlichen Momentengleichungen für die der  $x$ -Achse und  $z$ -Achse parallelen Schwerachsen des Körperteilchens folgt

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

weshalb die kürzere Bezeichnung eingeführt werden soll:

$$\tau_x = \tau_{yx} = \tau_{xy}; \tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

wobei zu merken ist, daß

$$\tau_x \perp dx, \tau_y \perp dy, \tau_z \perp dz.$$

Ändern sich die anfänglichen Längen  $dx, dy, dz$  um Strecken  $\Delta dx, \Delta dy, \Delta dz$ , so leisten die von den Spannungen  $\sigma$  herrührenden Kräfte  $\sigma_x dy dz, \sigma_y dz dx, \sigma_z dx dy$  die virtuelle Arbeit

$$\begin{aligned} dA_v &= \sigma_x dy dz \Delta dx + \sigma_y dz dx \Delta dy + \sigma_z dx dy \Delta dz \\ &= \left( \sigma_x \frac{\Delta dx}{dx} + \sigma_y \frac{\Delta dy}{dy} + \sigma_z \frac{\Delta dz}{dz} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

und hierfür kann, wenn die in der Folge Dehnungen genannten Verlängerungs-Verhältnisse mit

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

bezeichnet werden und der Inhalt des Körperteilchens  $dx dy dz = dV$  gesetzt wird, geschrieben werden

$$dA_v = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) dV.$$

Gleichzeitig mit den Dehnungen entstehen Winkeländerungen, und es sei, mit Bezugnahme auf Fig. 192:

$$\begin{array}{llll} \gamma_x & \text{die Änderung des Winkels } YOZ, \\ \gamma_y & \text{,, „ „ „ } ZO X, \\ \gamma_z & \text{,, „ „ „ } XO Y. \end{array}$$

Man nennt  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  die Gleitungen im Punkte  $xyz$ ; sie seien positiv oder negativ, je nachdem sie Verkleinerungen oder Vergrößerungen der Winkel  $YOZ, ZO X, XO Y$  vorstellen.

Infolge der Änderung des Winkels  $YOZ$  um  $\gamma_x$  verschiebt sich die Fläche  $YO'$  im Sinne  $OZ$  gegen die Fläche  $OY'$  um  $\gamma_x dy$ , wobei die in  $YO'$  und senkrecht zu  $dx$  wirksame Schubkraft  $\tau_x dx dz$  die virtuelle Arbeit  $\tau_x dx dz \gamma_x dy$  leistet, oder es verschiebt sich die Fläche  $ZO'$  im Sinne  $OY$  gegen die Fläche  $OZ'$  um die Strecke  $\gamma_x dz$ , bei welcher Bewegung die in  $ZO'$  und senkrecht zu  $dx$  wirkende Schubkraft  $\tau_x dx dy$  die Arbeit  $\tau_x dx dy \gamma_x dz$  verrichtet. In beiden Fällen entsteht die virtuelle Formänderungs-Arbeit:

$$dA_v = \tau_x \gamma_x dx dy dz = \tau_x \gamma_x dV,$$

und ebenso ergeben sich die den Winkeländerungen  $\gamma_y$  und  $\gamma_z$  entsprechenden virtuellen Arbeiten

$$\tau_y \gamma_y dV \text{ und } \tau_z \gamma_z dV,$$

so daß die gesamte virtuelle Formänderungs-Arbeit der an den Seitenflächen des Parallelepipedums angreifenden Kräfte gleich

$$(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV$$

wird und diejenige sämtlicher inneren Kräfte des Körpers:

$$(141) \quad A_v = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV.$$

Setzt man nun  $A_v$  gleich der von den äußeren Kräften geleisteten virtuellen Arbeit, so erhält man die Gleichung



(142)  $\Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV$ ; sie gilt für beliebige durch einander bedingte äußere und innere Verschiebungen  $\delta$ ,  $\Delta c$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ , wenn diese nur klein genug sind, um als verschwindende Größen aufgefaßt werden zu dürfen. Zu den äußeren Kräften gehören außer den in Punkten der Oberfläche angreifenden Kräften, die auf die Massenteilchen wirkenden (z. B. die Erdanziehung, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung) und, wenn Teile des Körpers aufeinander reiben, die an den Berührungsstellen wirksamen Reibungswiderstände.

Nehmen wir nun an, es sei geglückt, die nach bestimmten Richtungen wirkenden Seitenkräfte  $C$  der Stützenwiderstände, sowie die Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$  in der Form

$$\begin{aligned} C &= C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \dots \\ \sigma_x &= \sigma_{x0} + \sigma'_x X' + \sigma''_x X'' + \sigma'''_x X''' + \dots \\ \sigma_y &= \sigma_{y0} + \sigma'_y X' + \sigma''_y X'' + \sigma'''_y X''' + \dots \\ \sigma_z &= \sigma_{z0} + \sigma'_z X' + \sigma''_z X'' + \sigma'''_z X''' + \dots \\ \tau_x &= \tau_{x0} + \tau'_x X' + \tau''_x X'' + \tau'''_x X''' + \dots \\ \tau_y &= \tau_{y0} + \tau'_y X' + \tau''_y X'' + \tau'''_y X''' + \dots \\ \tau_z &= \tau_{z0} + \tau'_z X' + \tau''_z X'' + \tau'''_z X''' + \dots \end{aligned}$$

als geradlinige Funktionen der gegebenen Lasten  $P$  und gewisser, statisch nicht bestimmbarer Größen  $X$  herzustellen, wobei nur die mit dem Zeiger 0 behafteten Werte von  $P$  abhängen sollen, und wenden die obige Arbeitsgleichung der Reihe nach auf die früher erklärten Zustände  $X' = 1$ ,  $X'' = 1$ , ... an, so ergeben sich, da die Kräfte  $C'$  mit den Spannungen  $\sigma'$  und  $\tau'$ , die  $C''$  mit den  $\sigma''$  und  $\tau''$  im Gleichgewichte sind, die bei gegebenen  $\Delta c$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  zur Berechnung der  $X$  ausreichenden Bedingungen

$$(143) \quad \begin{cases} \Sigma C' \Delta c = \int (\sigma'_x \varepsilon_x + \sigma'_y \varepsilon_y + \sigma'_z \varepsilon_z + \tau'_x \gamma_x + \tau'_y \gamma_y + \tau'_z \gamma_z) dV \\ \Sigma C'' \Delta c = \int (\sigma''_x \varepsilon_x + \sigma''_y \varepsilon_y + \sigma''_z \varepsilon_z + \tau''_x \gamma_x + \tau''_y \gamma_y + \tau''_z \gamma_z) dV \\ \dots \dots \dots \end{cases};$$

dieselben lassen sich auch durch die eine Gleichung:

$$(144) \quad L = \int \left( \varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial X} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial X} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial X} \right) dV$$

ersetzen, in welcher  $X$  irgend eine statisch nicht bestimmbare Größe und  $L$  die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand  $X = 1$  bedeutet, während die Differentialquotienten  $\frac{\partial \sigma}{\partial X}$  und  $\frac{\partial \tau}{\partial X}$  die Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$  für jenen Zustand vorstellen.

Die Verschiebung  $\delta_m$  des Angriffspunktes  $m$  einer Last  $P_m$  wird

$$(145) \quad \delta_m = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \varepsilon_z + \bar{\tau}_x \gamma_x + \bar{\tau}_y \gamma_y + \bar{\tau}_z \gamma_z) dV - \Sigma \bar{C} \Delta c,$$

wobei  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\tau}$  und  $\bar{C}$  diejenigen Spannungen und Auflagerkräfte sind,

welche mit einer Last  $P_m = 1$  im Gleichgewichte sind. Man darf hierfür auch setzen

$$(146) \quad \delta_m = \int \left( \varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial P_m} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial P_m} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial P_m} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial P_m} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial P_m} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial P_m} \right) dV - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c,$$

welche Gleichung durch teilweise Differentiation der Arbeitsgleichung nach der Last  $P_m$ , bei als Konstanten betrachteten willkürlichen Formänderungen,  $\delta$ ,  $\Delta c$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  gewonnen wird.

2) Einführung der durch Spannungen und Temperaturänderungen verursachten Dehnungen und Gleitungen. Wir wenden jetzt die Gleichungen (143) bis (146) auf die wirklichen Dehnungen und Gleitungen an und beschränken uns hierbei auf den isotropen (d. h. in allen Punkten gleich beschaffenen) festen Körper mit spannungslosem Anfangszustande.

Die Seite  $dx$  des betrachteten Parallelepipedums erleidet, wenn die Spannung  $\sigma_x$  allein wirkt, die Dehnung  $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$ , während

eine Änderung der Anfangs-Temperatur um  $t$  erzeugt:  $\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon t$

und infolge von  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  entsteht:  $\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE}$ , wobei  $\frac{1}{m}$

den Koeffizienten der Querdehnung ( $= \frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{3}$  für Schweiß- und Flußeisen) bedeutet. Beim Zusammenwirken aller Ursachen ergibt sich die Dehnung

$$(147) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE} + \varepsilon t \text{ und ebenso} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{mE} + \varepsilon t, \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{mE} + \varepsilon t, \end{cases}$$

während die nur von den Schubspannungen abhängigen Gleitungen

$$(148) \quad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

sind, wobei

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

den Schub-Elastizitätsmodul bedeutet.

Die Gleichungen (144) und (146) gehen nach Einsetzen der vorstehenden Werte der Dehnungen und Gleitungen über in

$$(149) \quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X} \text{ und}$$

$$(150) \quad \partial_m = \frac{\partial A_i}{\partial P_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c, \text{ wobei}$$

$$(151) \quad A_i = \frac{1}{2} \int \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right] \frac{dV}{E} \\ + \frac{1}{2} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G} + \int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \varepsilon t dV.$$

Im Falle  $t = 0$  ergeben sich die Gesetze:

$$(152) \quad L = \frac{\partial A}{\partial X} \text{ und}$$

$$(153) \quad \delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m} - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} \Delta c, \text{ wobei}$$

$$(154) \quad A = \frac{1}{2} \int \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right] \frac{dV}{E} \\ + \frac{1}{2} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G}.$$

$A$  bedeutet die wirkliche Formänderungsarbeit, wie aus der folgenden Entwicklung hervorgeht.

Die Arbeit, welche die an den Körperteilchen wirkenden Kräfte leisten, während die im Entstehen begriffenen Dehnungen und Gleitungen um die Werte  $d\varepsilon_x$ ,  $d\varepsilon_y$ ,  $d\varepsilon_z$ ,  $d\gamma_x$ ,  $d\gamma_y$ ,  $d\gamma_z$  zunehmen, ist nach den Entwicklungen unter 1):

$$(\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z) dV,$$

worein zu setzen

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ d\sigma_x - \frac{1}{m} d\sigma_y - \frac{1}{m} d\sigma_z \right],$$

$$d\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[ d\sigma_y - \frac{1}{m} d\sigma_z - \frac{1}{m} d\sigma_x \right],$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[ d\sigma_z - \frac{1}{m} d\sigma_x - \frac{1}{m} d\sigma_y \right], \text{ also}$$

$$\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_y + \sigma_z d\sigma_z \right. \\ \left. - \frac{1}{m} d(\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right]$$

$$\text{und } d\gamma_x = \frac{1}{G} d\tau_x, \quad d\gamma_y = \frac{1}{G} d\tau_y, \quad d\gamma_z = \frac{1}{G} d\tau_z.$$

Integriert man diesen Ausdruck bei von 0 aus wachsenden Spannungen, so erhält man für das Körperteilchen die gesamte Formänderungsarbeit



$$dA = \frac{1}{E} \left[ \frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{\sigma_y^2}{2} + \frac{\sigma_z^2}{2} - \frac{1}{m} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right] dV \\ + \frac{1}{G} \left[ \frac{\tau_x^2}{2} + \frac{\tau_y^2}{2} + \frac{\tau_z^2}{2} \right] dV,$$

und hieraus folgt dann für den ganzen Körper der durch die Gleichung (154) gegebene Arbeitswert  $A$ .\*)

Im Falle  $t = 0$  und  $L = 0$  entstehen aus (152) und (153) die Castiglianoschen Sätze:

1) Die statisch nicht bestimmbar Gröſsen  $X$  machen die Formänderungsarbeit  $A$ , welche als Funktion der zuerst unabhängig veränderlich angenommenen Werte  $X$  darzustellen ist, zu einem Minimum.

2) Die Verschiebung des Angriffspunktes  $m$  einer Last  $P_m$  im Sinne von  $P_m$  ist gleich der nach  $P_m$  gebildeten teilweisen Abgeleiteten der Formänderungsarbeit  $A$ .

Bei der Ausführung der durch die Gleichungen (150) und (153) vorgeschriebenen Differentiationen dürfen sämtliche Gröſsen  $X$  als Konstanten aufgefaßt werden. Man gehe gewissermassen von dem allgemeineren Falle willkürlicher Werte  $X$  aus, wende also die Gleichung (150) und (153) (wie in den Abschnitten I und II) auf den statisch bestimmten Hauptträger an. Die Auffassung der  $X$  als Funktionen der Lasten  $P$  führt, wenn die Bedingungsgleichungen (143) berücksichtigt werden, zu denselben Ergebnissen; der (übrigens überflüssige) Beweis hierfür kann ähnlich geführt werden wie beim Fachwerke. Vergl. Seite 75.

3) Der **Maxwellsche Satz**. Wir nehmen an, daß die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechende Temperatur ungeändert bleibt ( $t = 0$ ) und die Auflagerwiderstände bei eintretenden elastischen Verschiebungen keine Arbeit leisten ( $\Delta c = 0$ ). Den von beliebigen Belastungen  $P_m$  ergriffenen Körper denken wir durch drei einander rechtwinklig schneidende Flächenscharen in unendlich kleine Teilchen zerlegt, in deren Seitenflächen nur Normalspannungen auftreten, welche dann Hauptspannungen heißen und mit  $\sigma_1'$ ,  $\sigma_2'$ ,  $\sigma_3'$  bezeichnet werden sollen. Die entsprechenden Dehnungen sind, wegen  $t = 0$

$$(155) \quad \begin{cases} \varepsilon_1' = \left[ \sigma_1' - \frac{1}{m} (\sigma_2' + \sigma_3') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_2' = \left[ \sigma_2' - \frac{1}{m} (\sigma_3' + \sigma_1') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_3' = \left[ \sigma_3' - \frac{1}{m} (\sigma_1' + \sigma_2') \right] \frac{1}{E}; \end{cases}$$

die Gleitungen sind  $= 0$ .

\*) Führt man in Gleichung (142) die wirklichen Werte von  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ , Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. 16

Jetzt ersetzen wir die Belastungen  $P_m$  durch andere Belastungen  $P_n$ , behalten aber die vorhin angenommene Zerlegung des Körpers bei. Es treten dann Normalspannungen  $\sigma_1''$ ,  $\sigma_2''$ ,  $\sigma_3''$  auf und erzeugen Dehnungen:

$$(156) \quad \begin{cases} \varepsilon_1'' = \left[ \sigma_1'' - \frac{1}{m} (\sigma_2'' + \sigma_3'') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_2'' = \left[ \sigma_2'' - \frac{1}{m} (\sigma_3'' + \sigma_1'') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_3'' = \left[ \sigma_3'' - \frac{1}{m} (\sigma_1'' + \sigma_2'') \right] \frac{1}{E} \end{cases}$$

Außerdem werden durch die  $P_n$  Schubspannungen  $\tau''$  und Gleitungen  $\gamma''$  hervorgerufen.

Bezeichnen wir nun mit  $(\delta_{mn})$  den Weg irgend einer Belastung  $P_m$  für den Fall, daß auf den Körper nur die Belastungen  $P_n$  wirken,\*\*) und mit  $(\delta_{nm})$  den Weg irgend einer Belastung  $P_n$  infolge ausschließlicher Wirkung der  $P_m$ , und schreiben wir die Arbeitsgleichung zuerst an, für den Belastungszustand  $(P_m)$  und den hiervon unabhängigen, den Belastungen  $P_n$  entsprechenden Verschiebungszustand, sodann

für den Belastungszustand  $(P_n)$  und den hiervon unabhängigen, den Belastungen  $P_m$  entsprechenden Verschiebungszustand, so erhalten wir, da die Stützenwiderstände der Voraussetzung gemäß keine Arbeit verrichten, die Gleichungen:

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \int (\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'') dV$$

$$\Sigma P_n (\delta_{nm}) = \int (\sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3') dV,$$

bei deren Aufstellung zu beachten ist, daß den Gleitungen  $\gamma''$  die Schubspannungen  $\tau' = 0$  gegenüberstehen und den Schubspannungen  $\tau''$  die Gleitungen  $\gamma' = 0$ .

Mit Hilfe der Gleichungen (155) und (156) läßt sich nun leicht nachweisen, daß

$$\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'' = \sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3'$$

ist und deshalb auch

$$\Sigma P_m (\delta_{mn}) = \Sigma P_n (\delta_{nm}).***)$$

$\gamma_z$  ein, so erhält man für den Zustand  $t=0$ :  $\Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = A_v = 2A$ . Bezeichnet man also mit  $Q$  irgend eine äußere Kraft und mit  $r$  die Verschiebung ihres Angriffspunktes im Sinne von  $Q$ , so besteht die Beziehung:

$$\frac{1}{2} \Sigma Qr = A,$$

welche das Clapeyronsche Gesetz heißt.

\*\*) Wirkt nur eine Belastung  $P_n$  und hat diese die Größe eins, so geht  $(\delta_{mn})$  über in  $\delta_{nn}$ . Vergl. Seite 60.

\*\*\*)) In dieser allgemeinen Form wurde der Satz zuerst von Betti bewiesen.

Hieraus folgt aber, als besonderer Fall

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

## § 24.

### Schubfestigkeit.

Im Anschluß an die Entwicklungen des § 23 soll der Einfluß der durch die Querkräfte  $Q$  (vgl. Seite 85) hervorgerufenen Schubspannungen  $\tau$  auf die Formänderungen und statisch nicht bestimmbar GröÙen von auf Biegeungs-  
festigkeitsbeanspruchten geraden Stäben untersucht werden.

**1) Formänderungsarbeit der Schubkräfte.** Ist die Kräfteebene eine Symmetrieebene des Stabes (welcher Fall hier ausschließlich betrachtet werden möge), so wird durch die Querkraft  $Q$  in irgend einem Punkte  $D$  des Querschnitts eine Schubspannung  $\tau$  hervorgerufen, welche die  $v$ -Achse in einem Punkte  $H$  schneidet, dessen Lage erhalten wird, indem man durch  $D$  die der  $u$ -Achse parallele Sehne  $AB$  zieht und in  $B$  eine Tangente  $BH$  an den Querschnittsumfang legt. Fig. 198.

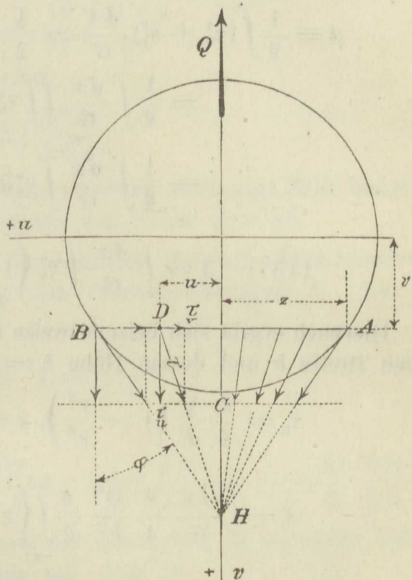


Fig. 198.

Von den beiden Seitenspannungen  $\tau_v$  und  $\tau_u$ , in welche sich  $\tau$  zerlegen läßt und die senkrecht zur  $v$ -Achse und senkrecht zur  $u$ -Achse sind, folgt  $\tau_u$  bekanntlich dem Gesetze:

$$\tau_u = \frac{QS}{2zJ},$$

wenn  $2z$  die Länge der Sehne  $AB$ ,

$S$  das auf die  $u$ -Achse bezogene statische Moment des einen der beiden durch die Sehne  $AB$  begrenzten Querschnittsteile (z. B. des Teiles  $ACB$ ) und

$J$  das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in Bezug auf die  $u$ -Achse

bedeuten. Es ist somit  $\tau_u$  unabhängig von  $u$  und gleich groß für alle



auf der Sehne  $AB$  gelegenen Querschnittspunkte, und es folgt, wenn  $\varphi$  den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente  $BH$  mit der  $v$ -Achse einschließt, für den Punkt  $B$ :  $\tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi$  und für den Punkt  $D$ :

$$\tau_v = \tau_u \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{u}{z}.$$

Der von den Schubspannungen abhängige Teil der Formänderungs-Arbeit ist, bei innerhalb des Querschnitts konstantem  $G$  und wenn das Element der Stabachse  $= dx$  gesetzt wird,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int (\tau_u^2 + \tau_v^2) \frac{dV}{G} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{G} \iint (\tau_u^2 + \tau_v^2) du dv \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{G} \iint \tau_u^2 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{u^2}{z^2} \right) du dv \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{G} \int \tau_u^2 dv \int_{-z}^{+z} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{u^2}{z^2} \right) du, \text{ d. i.} \\ (157) \quad A &= \int \frac{dx}{G} \int \tau_u^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) z dv. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich beispielsweise für den Rechteckquerschnitt, dessen Breite  $b$  und dessen Höhe  $h = 2e$  sein möge, wegen

$$\tau_u = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} \left( 1 - \frac{v^2}{e^2} \right), \quad z = \frac{1}{2} b \quad \text{und} \quad \varphi = 0:$$

$$A = \int \frac{dx}{G} \frac{9}{4} \frac{Q^2}{F^2} \frac{b}{2} \int_{-e}^{+e} \left( 1 - \frac{v^2}{e^2} \right)^2 dv,$$

und, da  $\int_{-e}^{+e} \left( 1 - \frac{v^2}{e^2} \right)^2 dv = \frac{16}{15} e = \frac{8F}{15b}$  ist,

$$(158) \quad A = \frac{3}{5} \int \frac{Q^2 dx}{GF}.$$

Für den Kreisquerschnitt vom Radius  $e$  ist

$$\tau_u = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \cos^2 \varphi, \quad z = e \cos \varphi, \quad v = e \sin \varphi,$$

$$A = \int \frac{dx}{G} \frac{16}{9} \frac{Q^2}{F^2} e^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \cos^2 \varphi d\varphi$$

und wegen

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^6 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi \\
 & = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \\
 (159) \quad A &= \frac{16}{27} \int \frac{Q^2 dx}{GF}.
 \end{aligned}$$

Allgemein darf gesetzt werden:

$$A = \beta \int \frac{Q^2 dx}{2GF},$$

wobei  $\beta$  eine von der Gestalt des Querschnittes abhängige Zahl bedeutet. Für das Rechteck ist  $\beta = \frac{6}{5}$  und für den Kreis:  $\beta = \frac{3}{2}$ .

**2) Arbeitsgleichung zur Berechnung statisch nicht bestimmbarer Größen. Ermittlung von Verschiebungen  $\delta$ .** Die auf Seite 93 mit Hilfe des Satzes

$$(160) \quad L = \frac{\partial A_i}{\partial X}$$

abgeleitete Bedingung

$$L = \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial X} dx$$

geht, wenn der Einfluß der durch die Querkkräfte  $Q$  erzeugten Schubspannungen berücksichtigt werden soll, über in

$$\begin{aligned}
 (161) \quad L &= \beta \int \frac{Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial X} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx \\
 &+ \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial X} dx.
 \end{aligned}$$

An Stelle der zur Berechnung von Verschiebungen abgeleiteten Gleichung (55) tritt die Beziehung

$$\begin{aligned}
 (162) \quad \delta_m &= \beta \int \frac{Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial P_m} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_m} dx \\
 &+ \int \varepsilon t_0 \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \varepsilon \frac{\Delta t}{h} \frac{\partial M}{\partial P_m} dx - \Sigma \frac{\partial C}{\partial P_m} dx.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe.** Ein wagerechter Balken ist gleichmäßig mit  $p$  für die Längeneinheit belastet, bei  $B$  wagerecht eingespannt, bei  $A$  frei aufliegend. Gesucht ist der senkrechte Stützenwiderstand  $X$  bei  $A$ . Fig. 79. Die

Stützen seien starr ( $L=0$ ), und eine Erhöhung der Anfangstemperatur habe nicht stattgefunden ( $t=0$ ).

Wegen  $N=0$  ergibt sich die Bedingung

$$0 = \beta \int_0^l \frac{Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial X} dx + \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx,$$

worein zu setzen:

$$Q = X - px, \quad M = Xx - \frac{px^2}{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = x,$$

so daß, bei konstantem  $G$ ,  $F$ ,  $E$ ,  $J$  entsteht:

$$0 = \beta \frac{J}{F} \frac{E}{G} \int_0^l (X - px) dx + \int_0^l \left( Xx^2 - \frac{px^3}{2} \right) dx = 0,$$

$$0 = \beta \frac{J}{F} \frac{E}{G} l \left( X - \frac{pl}{2} \right) + \frac{l^3}{3} \left( X - \frac{3pl}{8} \right) = 0,$$

woraus, wegen  $\frac{E}{G} = \frac{2(m+1)}{m}$ :

$$X = \frac{3pl}{8} \frac{1 + 8 \frac{J}{Fl^2} \frac{m+1}{m} \beta}{1 + 6 \frac{J}{Fl^2} \frac{m+1}{m} \beta}.$$

Ist der Balkenquerschnitt ein Rechteck ( $b, h$ ), so ist  $\beta = \frac{6}{5}$  und

$$\frac{J}{F} = \frac{h^2}{12}, \quad \text{weshalb sich mit } m=3 \text{ ergibt:}$$

$$X = \frac{3pl}{8} \frac{1 + \frac{16}{15} \frac{h^2}{l^2}}{1 + \frac{4}{5} \frac{h^2}{l^2}}.$$

$\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$  liefert z. B.  $X = 1,01 \cdot \frac{3pl}{8}$ , während die Vernachlässigung der Querkraft  $Q$  zu  $X = \frac{3pl}{8}$  geführt hätte.





#### IV. Abschnitt.

### Das räumliche Fachwerk.

#### § 25.

#### Allgemeine Untersuchung des statisch bestimmten räumlichen Fachwerks.

1) Bedeuten  $A, B, C$  die rechtwinkligen Seitenkräfte der in einem Knotenpunkte  $m$  eines räumlichen Fachwerks angreifenden äußeren Kraft, ferner  $S_1, S_2, S_3, \dots S_p$  die Spannkkräfte in den von  $m$  ausgehenden Stäben,  $s_1, s_2, s_3, \dots s_p$  die Längen dieser Stäbe, und sind  $a_r, b_r, c_r$  die rechtwinkligen Projektionen der Stablänge  $s_r$  auf die Richtungen  $A, B, C$ , so lauten die drei Bedingungen für das Gleichgewicht der in  $m$  angreifenden Kräfte:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum S_r \frac{a_r}{s_r} + A = 0 \\ \sum S_r \frac{b_r}{s_r} + B = 0 \\ \sum S_r \frac{c_r}{s_r} + C = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots p) \end{cases}$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$(2) \quad \frac{S_r}{s_r} = x_r$$

setzt,

$$(3) \quad \begin{cases} \sum x_r a_r + A = 0 \\ \sum x_r b_r + B = 0 \\ \sum x_r c_r + C = 0. \end{cases}$$

Ist die Anzahl der Knotenpunkte gleich  $k$ , so stehen  $3k$  Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der unbekannten Spannkkräfte und Stützenwiderstände zur Verfügung.

Wird ein Stützpunkt reibungslos in einer Fläche geführt, so fällt die Richtung des Stützendruckes mit der Normalen zur Fläche zusammen; es tritt nur die Größe des Widerstandes als Unbekannte auf.

An dem in einer Linie geführten Stützpunkt greift in der zur Linie normalen Ebene ein Widerstand an, dessen Bestimmung die Angabe zweier Seitenkräfte erfordert.

Der Widerstand eines festen Stützpunktes wird durch drei Seitenkräfte bestimmt.

Ist also

- $r$  die Anzahl der Stäbe,
- $n'$  die Anzahl der in einer Fläche geführten Stützpunkte,
- $n''$  die Anzahl der in einer Linie geführten Stützpunkte,
- $n'''$  die Anzahl der festen Stützpunkte,

so ist die Anzahl der zu berechnenden Unbekannten gleich

$$r + n' + 2n'' + 3n'''.$$

Das Fachwerk ist ein statisch bestimmtes, sobald die Bedingung

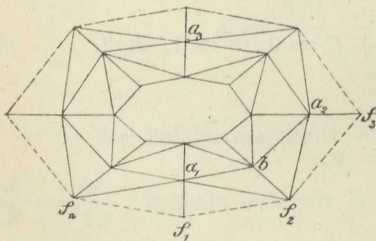
$$r + n' + 2n'' + 3n''' = 3k$$

erfüllt wird, und die Nennerdeterminante der linearen Gleichgewichtsbedingungen  $\leq 0$  ist.

In den folgenden allgemeinen Untersuchungen ersetzen wir (nach Seite 2, Absatz 3) die Stützenwiderstände durch Auflagerstäbe. Ein Flächenlager erfordert einen Auflagerstab, ein Linienlager zwei, ein fester Stützpunkt drei Auflagerstäbe. Wir sprechen also fortan nur von gegebenen Lasten und unbekannten Stabkräften.

2) Besitzt ein Fachwerk mindestens einen Knotenpunkt, von dem nur drei Stäbe ausgehen, und ist es so gebaut, daß an jedem folgen-

den Knotenpunkte höchstens drei Stäbe hinzutreten, so lassen sich die unbekannten Stabkräfte leicht durch wiederholte Auflösung von drei Gleichungen mit drei Unbekannten berechnen. Ein derartiges Stabgebilde wollen wir ein Fachwerk der einfachsten Art nennen; als Beispiel diene die in Fig. 199 im Grundrifs dargestellte Kuppel.



kann mit Hilfe des im § 1 auf Seite 3 und 4 angegebenen allgemeinen Verfahrens durchgeführt werden. Man verwandle das Fachwerk durch Beseitigung von Stäben und Hinzufügung von ebensoviel Ersatzstäben in ein solches der einfachsten Art, bringe die Spannkraften  $Z_a, Z_b, Z_c, \dots, Z_n$  der beseitigten Stäbe an dem neuen Fachwerk als Lasten an, stelle die Spannkraften  $S$  der Stäbe des neuen Fachwerks in der Form

$$S = S_0 + S_a Z_a + S_b Z_b + S_c Z_c + \dots + S_n Z_n$$

dar und setze schliesslich die Spannkraften in den Ersatzstäben gleich Null. Man erhält dann ein System von  $n$  linearen Gleichungen zur Berechnung der  $n$  Kräfte  $Z$ . Das Fachwerk ist statisch bestimmt, sobald die Nennerdeterminante jener  $n$  Gleichungen  $\neq 0$  ist.

Liegt z. B. das in Fig. 200 im Grundriss dargestellte Fachwerk vor, so führe man die Spannkraften in vier Stäben des obersten Ringes als  $Z$ -Kräfte ein und füge die in der Abbildung durch gestrichelte Linien ange deuteten Ersatzstäbe 38, 41, 44, 47 hinzu, welche die Punkte  $a$  mit ausserhalb des Fachwerks angenommenen festen Punkten  $f'$  verbinden. Die Richtungen dieser Stäbe sind nur an die Bedingungen gebunden, daß Stab 41 nicht in die Ebene  $af_2 f_3$  fallen darf, Stab 44 nicht in die Ebene  $af_1 f_2$  u. s. w. Die Stabkräfte  $S$  werden in der durch die Ziffern 1 bis 48

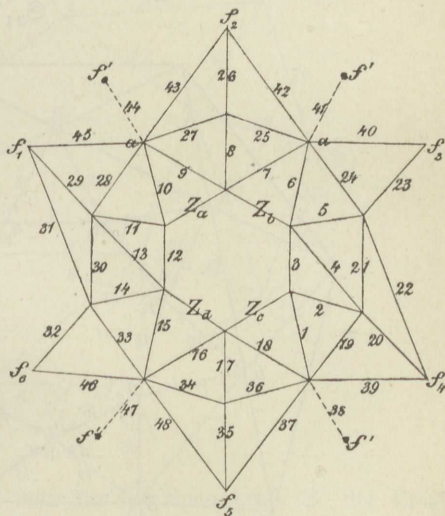


Fig. 200.

angegebenen Reihenfolge durch die Kräfte  $Z$  und Lasten  $P$  ausgedrückt, und schliesslich werden die Spannkraften  $S_{38}, S_{41}, S_{44}, S_{47}$  gleich Null gesetzt.

Auf diesem Wege lässt sich jedes räumliche Fachwerk berechnen. Die Richtungen der Ersatzstäbe wähle man so, daß die rechnerische oder zeichnerische Ermittlung ihrer Spannkraften möglichst einfach ausfällt. Wir verweisen im übrigen auf die entsprechende Untersuchung des ebenen Fachwerks auf Seite 4 bis 8, insbesondere auf den zu den Figuren 3 und 4 gehörigen Text. Der ganze Unterschied besteht darin, daß man beim ebenen Fachwerk an jedem Knotenpunkte zwei, beim räumlichen Fachwerk dagegen drei unbekannte Stabkräfte berechnen kann.



Als zweites Beispiel betrachten wir die in Fig. 201 im Grundriss dargestellte Netzwerkkuppel. Die wagerechten Ringe seien regelmäßige Polygone, ihre Seiten bilden mit den Verbindungsstäben  $ab$  gleichschenklige Dreiecke. Zur Berechnung der oberen Zone genügt die Einführung eines  $Z$ -Stabes. Der Ersatzstab 21 verbinde  $a_7$  mit einem außerhalb des Fachwerks liegenden festen Punkte; seine Richtung sei mit der des beseitigten Stabes zusammenfallend angenommen (in Fig. 201 wurde Stab 21 der Deutlichkeit wegen aus dieser Lage  $Z$  gedreht). Die Spannkkräfte werden in der Form

$$S = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}' Z$$

dargestellt. Zur Berechnung von  $Z$  dient die Gleichung

$$\mathfrak{S}_{21} = \mathfrak{S}_0 \cdot 21 + \mathfrak{S}_{21}' Z = 0,$$

woraus

$$Z = - \frac{\mathfrak{S}_0 \cdot 21}{\mathfrak{S}_{21}'}.$$

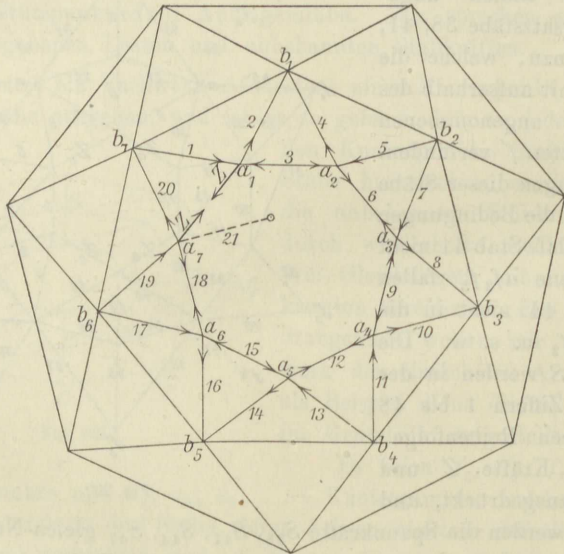


Fig. 201.

Das Fachwerk ist unbrauchbar, sobald  $\mathfrak{S}_{21}' = 0$  wird. Um festzustellen, wann dieser Fall eintritt, untersuchen wir den Belastungszustand  $Z = 1$ .

Die Mittelkraft der Spannkkräfte der beiden in  $a_1$  angreifenden Ringstäbe muß in der Ebene  $a_1 b_1 b_7$  liegen und, da sie wagerecht gerichtet ist, parallel zur Geraden  $b_1 b_7$  sein. Daraus folgt aber



Ersatzstäbe, deren Spannkkräfte gleich Null gesetzt werden; ihre Richtung wurde in allen Beispielen mit der Richtung eines wirklichen Fachwerkstabes zusammenfallend angenommen. Die in den Kreisen neben den Stützpunkten stehenden Zahlen beziehen sich auf die lotrechten Auflagerstäbe 5, 9, 14, 18, 23, 27, 32, 36, 41, 44. Für die Mehrzahl der Beispiele genügte es, den Grundriss zu zeichnen.

Fig. 202 zeigt eine Zimmermannsche Kuppel, mit fünfseitigem oberem Ringe und zehneitigem Fußringe.  $f_1, f_2, \dots, f_5$  sind feste Stützpunkte. In den übrigen Eckpunkten des Fußringes sind wagerechte Flächenlager angeordnet; ihnen entsprechen die lotrechten Auflagerstäbe 5, 9, 14, 18, 23, 27, 32, 36, 41, 44. Man kommt mit zwei Z-Stäben aus, deren Spannkkräfte sich aus den Gleichungen  $S_{39} = 0$  und  $S_{45} = 0$  ergeben, die sich auch durch andere an den Knotenpunkten  $a$  und  $b$  verfügbare Gleichgewichtsbedingungen ersetzen lassen. Ermittelt man z. B. unter Weglassung des Ersatzstabes 39 die Spannkraft  $S_{37}$ , indem man die Summe der zur Grundrisslinie  $ab$  rechtwinkligen Seitenkräfte der am Knotenpunkte  $a$  angreifenden Kräfte gleich Null setzt, bestimmt sodann auf ähnliche Weise  $S_{38}$ , und setzt man hierauf die Summe der lotrechten Seitenkräfte gleich Null, so erhält man eine Gleichung, in der nur noch die Unbekannten  $Z_1$  und  $Z_2$  vorkommen.

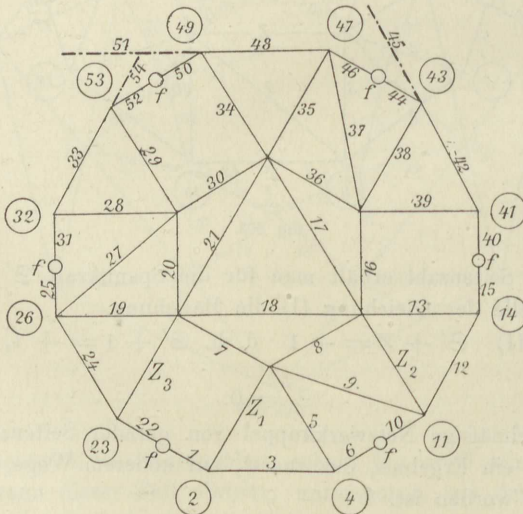


Fig. 203.

Fig. 203 zeigt ein ähnliches Fachwerk wie Fig. 202. Drei der den Mantel bildenden Rechtecke sind ohne Diagonalen; dafür ist der



Schlufsring durch drei Stäbe zu einem steifen ebenen Fachwerk gemacht worden. Es wurden drei Z-Stäbe eingeführt.

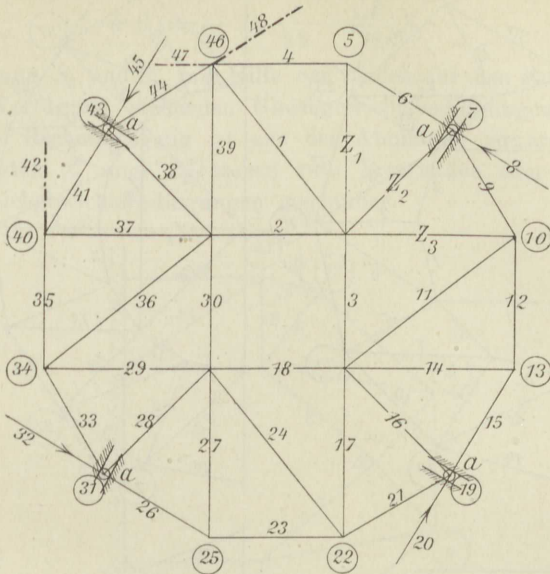


Fig. 204.

Die in Fig. 204 dargestellte Kuppel enthält einen 12-seitigen Fufsring und einen 4-seitigen Kopfring. Die Stützpunkte  $a$  sind in Geraden geführt, die mit den Stäben 6, 15, 26, 41 rechte Winkel bilden. Die zu den Führungen rechtwinkligen Auflagerstäbe 8, 20, 32, 45 haben also die Richtungen der Stäbe 6, 15, 26, 41. In allen Stützpunkten greifen lotrechte Auflagerstäbe an. Es wurden drei Z-Kräfte eingeführt.

Fig. 205 zeigt den Grundriss und Aufriss einer 6-seitigen Halbkuppel. Eine standsichere Hauptwand biete genügend feste Stützpunkte. Im übrigen aber ruhe die Kuppel auf lotrechten Säulen. Es stellt sich heraus, daß ein Mantel Schwedlerscher Bauart allein nicht genügt. Es fehlen zwei Stäbe. Fig. 205 setzt voraus, daß der obere Ring eine Plattform stützt; es wurden zwei, auch als Träger verwendbare Stäbe zur Gewinnung der erforderlichen Stabzahl eingefügt. Bei der Berechnung dieses Fachwerks kommt man mit einem Z-Stabe aus.

Fig. 206 stellt eine 8-seitige Halbkuppel dar, deren Mantel wieder von Schwedlerscher Bauart ist. Der obere Ring muß durch vier Stäbe versteift werden. Es wurden ein wagerechter Stab ( $Z_2$ ) und drei geneigte, nach einem und demselben festen Punkte laufende Gratstäbe eingebaut.

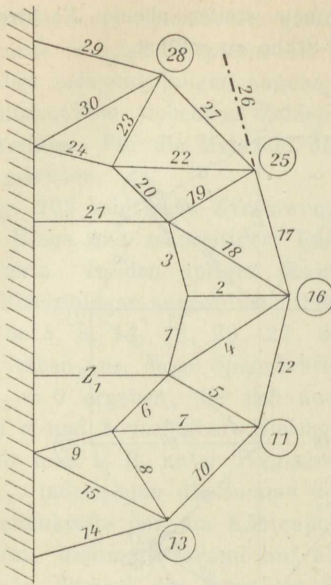


Fig. 205.

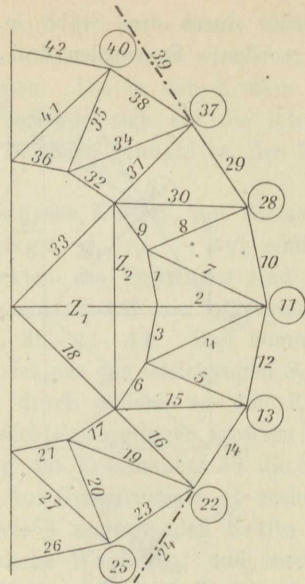
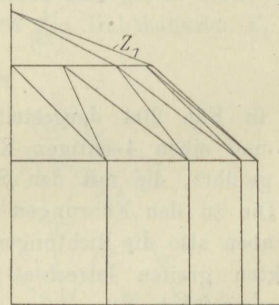
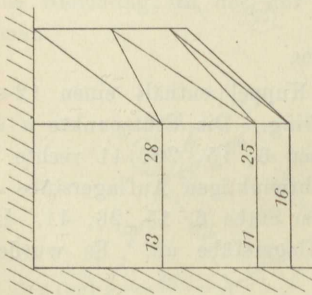


Fig. 206.



Ein drittes Beispiel für die Berechnung von Halbkuppeln enthält Fig. 207. Wird die Summe der lotrechten Projektionen der im Knotenpunkte  $a$  angreifenden Kräfte gleich Null gesetzt und die in  $a$  wirksame lotrechte Last mit  $P_a$  bezeichnet, so ergibt sich

$$(S_1 + S_2) \frac{h}{s} + P_a = 0,$$

wo  $s = s_1 = s_2$  ist. Setzt man also

$$S_1 - S_2 = Z_1$$

und nimmt  $Z_1$  zunächst als bekannt an, so findet man

$$S_1 = -P_a \frac{s}{2h} + \frac{1}{2} Z_1$$

$$S_2 = -P_a \frac{s}{2h} - \frac{1}{2} Z_1$$

und kann nun  $S_3$  und  $S_4$  mit Hilfe der beiden für den Knotenpunkt  $a$  noch zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen berechnen. Der weitere Rechnungsgang ist aus der Abbildung zu ersehen. Den beiden Werten  $Z_1$  und  $Z_2$  stehen zwei Ersatzstäbe oder zwei überzählige Gleichgewichtsbedingungen gegenüber.

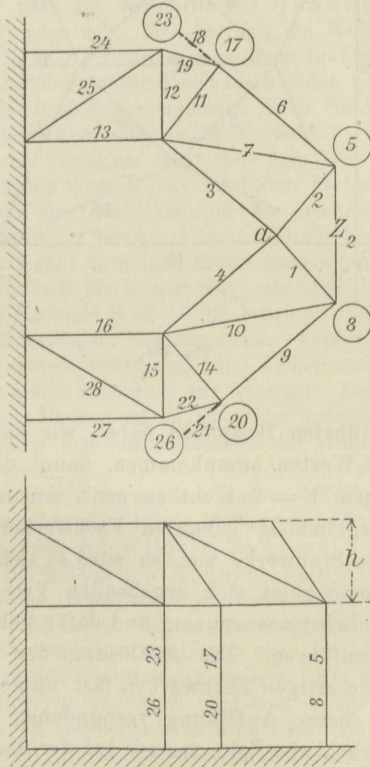


Fig. 207.

Es kommt öfter vor, daß es zweckmäßig ist, zu  $Z$ -Werten nicht Stabkräfte, sondern andere Werte zu wählen, die mit Stabkräften durch lineare Gleichungen verbunden sind.

Bei der in Fig. 208 abgebildeten, auf vier lotrechten Auflagerstäben 15, 18, 21, 24 und drei wagerechten Auflagerstäben 22, 23, 25 ruhenden Netzwerkkuppel, deren Ringe in wagerechten Ebenen liegen mögen, wird man zweckmäßig den Querriegel des oberen Ringes



zum Stabe  $Z_1$  und den Unterschied  $S_1 - S_2$  der Spannkkräfte der Stäbe 1 und 2 zum Werte  $Z_2$  wählen.

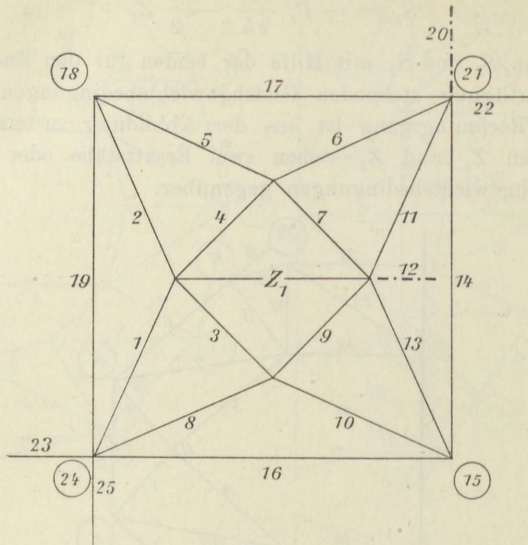


Fig. 208.

In den vorgeführten Beispielen haben wir danach getrachtet, mit möglichst wenig  $Z$ -Werten auszukommen, damit die Anzahl der aufzulösenden Gleichungen  $Y=0$  nicht zu groß wurde, ein Weg, der sich besonders bei unregelmäßig gebauten Fachwerken empfiehlt. Liegen regelmäßig gebaute Stabwerke vor, so wird es sich meistens empfehlen, die aus der Regelmäßigkeit sich ergebenden Vereinfachungen bei der Kräftezerlegung tunlichst auszunutzen und dafür lieber eine größerer Zahl von  $Z$ -Werten einzuführen. Die Auflösung der Gleichungen  $Y=0$  gestaltet sich bei derartigen Fachwerken fast immer recht einfach, und der geringen mit dieser Auflösung verbundenen rechnerischen Mehrarbeit, steht eine erhebliche Zeitersparnis bei der Ausführung der Kräftezerlegungen gegenüber. Wir verweisen auf die Beispiele im § 27 und empfehlen dem Leser, den dort gewählten Weg auch auf die vorstehenden Aufgaben anzuwenden.

4. Das Hennebergsche Verfahren der Zurückführung der Berechnung eines freien Fachwerks von  $n$ -Knotenpunkten auf die Berechnung eines freien Fachwerks von  $(n - 1)$  Knotenpunkten. Nach der im § 1 unter 2) für das ebene Fachwerk gegebenen ausführlichen Darstellung dieses Verfahrens wird für den Raum die folgende kurze Beschreibung ausreichen.

Zunächst muß das irgendwie gestützte Fachwerk auf die auf Seite 13 angedeutete Weise in ein freies Fachwerk verwandelt werden. Ein freies Fachwerk von  $n$ -Knotenpunkten besitzt nun  $3k - 6$  Stäbe, es muß also mindestens einen Knotenpunkt haben, an welchem höchstens 5 Stäbe zusammentreffen; denn liefern in allen Knotenpunkten mindestens 6 Stäbe zusammen, so müßten wenig-

stens  $\frac{6k}{2} = 3k$  Stäbe vorhanden sein. Es handelt sich also beim Übergange von der Knotenzahl  $n$  zur Knotenzahl  $n - 1$  nur um die Beseitigung drei- oder vier- oder fünfstäbiger Knotenpunkte. Ein dreistäbiger Knotenpunkt darf ohne Ersatz entfernt werden. Die Wegnahme eines vierstäbigen Knotenpunktes  $E$ , dessen Stäbe nach den Punkten  $A, B, C, D$  führen, erfordert die Hinzufügung eines Ersatzstabes, der nach der Vorschrift von Henneberg zwei der vier Punkte  $A, B, C, D$  verbinden soll. Man hat also die Wahl unter den Stäben  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ . Entfernt man einen fünfstäbigen Knotenpunkt, so muß man zwei Ersatzstäbe einbauen, und diese sollen zwei der fünf Punkte verbinden, nach denen die fünf weggenommenen Stäbe führten. Es stehen im allgemeinen 45 verschiedene Anordnungen zur Auswahl.

Das Hennebergsche Verfahren führt stets zum Ziele, denn es gestattet schließlic die Zurückführung eines jeden räumlichen Fachwerks auf ein freies Tetraeder, es fordert aber die Geschicklichkeit des Rechners bei nur einigermaßen schwierigen Aufgaben in besonders hohem Grade heraus. Schuld daran trägt die Beschränkung auf ganz bestimmte Ersatzstabanordnungen, die manchem auf den ersten Blick vorteilhaft erscheinen mag, die aber keineswegs eine bestimmte, rasch zum Ziele führende Wegweisung bedeutet. Bei dem ebenen Fachwerk in Fig. 2 mit 12 dreistäbigen Knotenpunkten stellte die Hennebergsche Vorschrift allein bei der ersten Beseitigung eines Knotenpunktes 36, und nur 36 Lagen für den einzuführenden Ersatzstab zur Auswahl. Bei einem räumlichen Fachwerk mit 6 fünfstäbigen Knotenpunkten, das weder dreistäbige noch vierstäbige Knotenpunkte besitzt, würde man im allgemeinen die Wahl unter  $6 \cdot 45 = 270$  Ersatzstabanordnungen haben.

Anmerkung. Ich muß hier zu dem Buche: „Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre“ Stellung nehmen, welches Herr Professor Georg Mehrtens 1903 bei Wilhelm Engelmann in Leipzig hat erscheinen lassen. Seine Darstellung des Hennebergschen Verfahrens beweist, daß er die Hennebergsche Arbeit nicht genügend kennt, sonst würde er auf Seite 200 wenigstens erwähnt haben, daß es Raumfachwerke gibt, die weder dreistäbige noch vierstäbige Knotenpunkte, mindestens aber einen fünfstäbigen Knotenpunkt besitzen; er scheint aber der Meinung zu sein, daß mindestens ein vierstäbiger Knotenpunkt vorhanden ist. Auch wird man in seiner Darstellung vergeblich die von Henneberg gegebenen und auch nach dem Erscheinen meiner Arbeiten aufrecht erhaltenen Regeln für das Einziehen der Ersatzstäbe suchen, trotzdem er wiederholt und ausdrücklich von einem ursprünglichen Hennebergschen Verfahren redet. Die Art und Weise, wie er die Stabvertauschung handhabt, entspricht vollständig dem von mir im Zentralblatt der Bauverwaltung 1891 veröffentlichten Verfahren und rührt nicht von Herrn Mehrtens her;\*) man vergleiche nur die Seite 218 des Mehrtensschen Buches mit der Seite 444 des

\*) Als Beispiel behandelt Herr Mehrtens u. a. das hier in Fig. 207 wieder-gegebene Fachwerk, mit einer anderen, nicht sehr zweckmäßigen Ersatzstabanordnung.

ersten Bandes meiner Graphischen Statik. Die Quelle, aus der er geschöpft hat, verschweigt Herr Mehrten:

Ich benutze noch die Gelegenheit, den die „Anwendung von Sätzen der geometrischen Bewegungslehre“ behandelnden § 12 des Mehrtensschen Buches als eine ohne Angabe der Quelle erfolgte, auch auf eigenartige Beispiele sich erstreckende Benutzung meiner Arbeiten über die kinematische Theorie des Fachwerks zu bezeichnen.

## § 26.

### Ermittlung der drei an einem Knotenpunkte auftretenden unbekannten Spannkkräfte.

Im § 25 haben wir gezeigt, daß sich die Berechnung jedes statisch bestimmten räumlichen Fachwerks auf die Lösung der Aufgabe zurückführen läßt: an einem Knotenpunkte sind drei Spannkkräfte  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  zu ermitteln, welche mit gegebenen, an diesem Punkte angreifenden Kräften im Gleichgewicht sind. Für diese Aufgabe mögen nun verschiedene Lösungen angegeben werden.

1) Benutzung der auf Seite 247 aufgestellten drei Gleichgewichtsbedingungen, welche jetzt die Form annehmen

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + A = 0, \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + B = 0, \\ x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 + C = 0, \end{cases}$$

wo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  die Summen der Seitenkräfte aller gegebenen Kräfte nach den Richtungen der drei Koordinatenachsen bedeuten. Die Auflösung dieser drei Gleichungen liefert für  $x_1$  den Wert

$$(5) \quad x_1 = \frac{-A(b_2 c_3 - b_3 c_2) - B(c_2 a_3 - c_3 a_2) - C(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{+a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1(c_2 a_3 - c_3 a_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)}.$$

Die Werte für  $x_2$  und  $x_3$  erhält man durch entsprechende Änderung der Zeiger.

Sehr übersichtlich ist der folgende mit Hilfe der Determinanten durchgeführte Rechnungsansatz.

Es liegen die Gleichungen vor:

$$\begin{aligned} + 8x_1 - 7x_2 - x_3 &= A, \\ + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= B, \\ - 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= C. \end{aligned}$$

Man schreibe die Zahlen der zweiten Gleichung, mit dem zweiten Gliede beginnend, in der cyklischen Reihenfolge  $+3$ ,  $+4$ ,  $+2$ ,  $+3$



hin und setze darunter, immer mit dem zweiten Gliede beginnend, die Zahlen der dritten, ersten und zweiten Gleichung. Am Kreuzungspunkt der die Zahlen  $+3$ ,  $+9$  und  $+5$ ,  $+4$  verbindenden Linien trage man den Wert der aus diesen vier Zahlen gebildeten Determinante:  $+3 \cdot 9 - 5 \cdot 4 = +7$  ein und fülle in dieser Weise das Schema aus.

$+3$	$+4$	$+2$	$+3$	
$+7$	$-42$	$+28$		(A)
$+5$	$+9$	$-6$	$+5$	
$+58$	$+66$	$+2$		(B)
$-7$	$-1$	$+8$	$-7$	
$-25$	$-34$	$+38$		(C)
$+3$	$+4$	$+2$	$+3$	

Bezeichnet man nun die Nennerdeterminante der drei Gleichungen mit  $D$ , so erhält man

$$Dx_1 = +7A + 58B - 25C,$$

$$Dx_2 = -42A + 66B - 34C,$$

$$Dx_3 = +28A + 2B + 38C.$$

Zur Berechnung von  $D$  stehen drei Ansätze zur Verfügung:

$$D = +7 \cdot 8 + 58 \cdot 2 + 25 \cdot 6^*) = 322,$$

$$D = +42 \cdot 7 + 66 \cdot 3 - 34 \cdot 5 = 322,$$

$$D = -28 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 38 \cdot 9 = 322.$$

Zur Prüfung der Zahlenrechnung empfiehlt sich die dreimalige Ermittlung von  $D$ .

Durch passende Wahl der Koordinatenachsen kann man oft Vereinfachungen erzielen. Ist z. B. die  $c$ -Achse parallel zur Richtung des Stabes  $S_3$  und die  $c$ ,  $b$ -Ebene parallel zu der durch die Achsen der Stäbe  $S_1$  und  $S_2$  bestimmten Ebene, so nehmen die Gleichungen (4) die Form an

$$x_1 a_1 + A = 0,$$

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + B = 0,$$

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 + C = 0;$$

\*) Die Zahlen  $+7$ ,  $+58$ ,  $-25$  der ersten senkrechten Determinantenreihe werden mit den entsprechenden Zahlen der ersten senkrechten Koeffizientenreihe  $+8$ ,  $+2$ ,  $-6$  der Gleichgewichtsbedingungen multipliziert. Und in ähnlicher Weise ergeben sich die beiden anderen Ansätze für  $D$  aus den zweiten und dritten senkrechten Reihen.

die Unbekannten  $x_1, x_2, x_3$  kann man dann schrittweise ohne weiteres hinschreiben.

2) Das Verfahren von Mohr\*). Anstatt die drei Teilkraftsummen

$$\begin{aligned} x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + A, \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + B, \\ x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 + C \end{aligned}$$

einzelnen gleich Null zu setzen und die drei Unbekannten  $x_1, x_2, x_3$  aus den drei Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen, multipliziert Mohr diese Summen der Reihe nach mit den virtuellen Verrückungen  $\xi, \eta, \zeta$ , welche er dem Knotenpunkte in den Richtungen der Kräfte  $A, B, C$  zuschreibt. Indem er diese Produkte addiert und ihre nach den Unbekannten geordnete Summe gleich Null setzt, erhält er die Gleichung

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 (a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta) + x_2 (a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta) \\ + x_3 (a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta) + A \xi + B \eta + C \zeta = 0. \end{cases}$$

Hierauf stellt Mohr drei Gruppen von Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \begin{cases} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta = -1 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta = 0 \\ a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta = 0 \end{cases} \\ \text{(II)} \quad & \begin{cases} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta = 0 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta = -1 \\ a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta = 0 \end{cases} \\ \text{(III)} \quad & \begin{cases} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta = 0 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta = 0 \\ a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

deren Wurzeln der Reihe nach

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \quad \xi_3, \eta_3, \zeta_3$$

sein mögen. Die Einsetzung der Wurzeln  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  in die Gleichung (6) liefert für  $x_1$  den Wert

$$(7) \quad x_1 = A \xi_1 + B \eta_1 + C \zeta_1.$$

In der gleichen Weise werden  $x_2$  und  $x_3$  berechnet.

Löst man die neun Gleichungen (I) bis (III) in ihrer allgemeinen Form ein für allemal auf, so gelangt man schließlich auf einem Umwege zu der Formel (5), die sich aus den Gleichungen (4) ohne jede Zwischenrechnung ablesen läßt, weil die Faktoren der Größen  $A, B, C$

\*) Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 205.

im Zähler der Formel (5) die zu den Koeffizienten  $a_1, b_1, c_1$  gehörigen Unterdeterminanten sind.

Etwas kürzer verfährt man, wenn man für eine der drei Verückungen einen beliebigen Wert annimmt. Entscheidet man sich z. B. im allgemeinen Falle für  $\zeta = 1$ , so gelangt man zu einer Gleichung, in der nur  $\kappa_1$  als Unbekannte auftritt, wenn man  $\xi$  und  $\eta$  aus den Gleichungen ermittelt:

$$(8) \quad \begin{cases} a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 = 0 \\ a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 = 0. \end{cases}$$

**3) Momentengleichungen.** Für die folgenden Untersuchungen führen wir zwei rechtwinklige Projektionsebenen ein und bezeichnen die Projektionen der Stabkräfte  $S$  mit  $S'$  (Grundrifs) und  $S''$  (Aufrifs), die Projektionen der Stablängen  $s$  mit  $s'$  und  $s''$ . Es ist

$$(9) \quad \frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} = \frac{S''}{s''}.$$

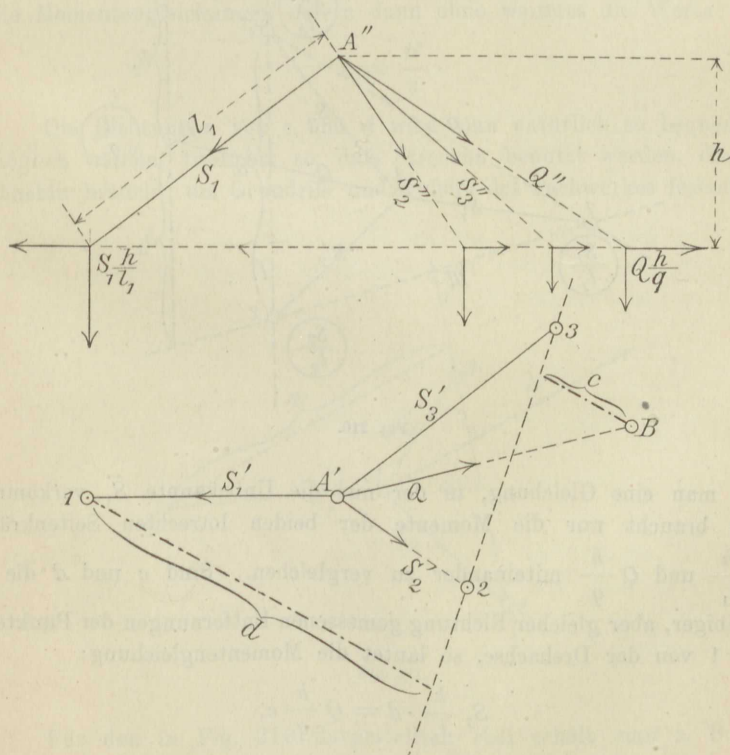


Fig. 209.



Die Grundrifsebene wollen wir uns in wagerechter Lage denken.

Fig. 209 zeigt Aufriss und Grundriss eines Knotenpunktes  $A$ , von dem drei Stäbe ausgehen, deren Achsen die Grundrifsebene in den Punkten 1, 2, 3 schneiden. Die in  $A$  angreifende gegebene Kraft  $Q$  treffe die Grundrifsebene im Punkte  $B$ . Die Längen der Strecken

$$AB, A1, A2, A3$$

seien der Reihe nach

$$q, l_1, l_2, l_3.$$

Punkt  $A$  liege in der Höhe  $h$  über der Grundrifsebene. Zerlegt man in den Punkten 1, 2, 3,  $B$  jede der Spannkraften  $S_1, S_2, S_3$  und ebenso auch  $Q$  in eine lotrechte und eine wagerechte Seitenkraft, und setzt man hierauf die Summe der Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf eine durch die Punkte 2 und 3 gelegte Achse gleich Null, so er-

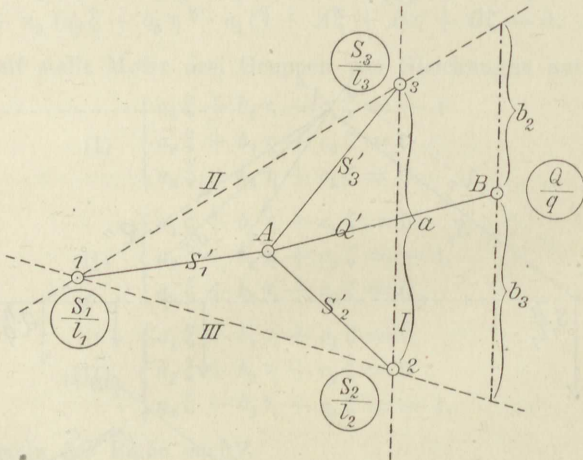


Fig. 210.

hält man eine Gleichung, in der nur die Unbekannte  $S_1$  vorkommt. Man braucht nur die Momente der beiden lotrechten Seitenkräfte  $S_1 \frac{h}{l_1}$  und  $Q \frac{h}{q}$  miteinander zu vergleichen. Sind  $c$  und  $d$  die in beliebiger, aber gleicher Richtung gemessenen Entfernungen der Punkte  $B$  und 1 von der Drehachse, so lautet die Momentengleichung:

$$S_1 \frac{h}{l_1} \cdot d = Q \frac{h}{q} c,$$

und man erhält daher die einfache Beziehung



$$(12) \quad \begin{cases} \frac{S_2}{l_2} = -\frac{Q}{q} \frac{b_2}{a} \\ \frac{S_3}{l_3} = -\frac{Q}{q} \frac{b_3}{a} \end{cases}$$

und aus der Bedingung, daß die Summe der lotrechten Seitenkräfte gleich Null sein muß, den Wert

$$(13) \quad \frac{S_1}{l_1} = -\frac{Q}{q} - \frac{S_2}{l_2} - \frac{S_3}{l_3}.$$

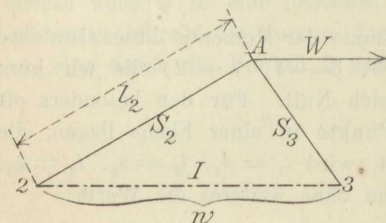


Fig. 212.

Es möge nun in  $A$  eine zur Grundrisfebene parallele Last  $W$  angreifen, Fig. 211. Um die Spannkraft  $S_1$  zu bestimmen, denke man  $W$  in eine zur Drehachse parallele und eine hierzu rechtwinklige Seitenkraft zerlegt. Bezeichnet man dann mit  $\alpha$  den Winkel, den  $W$  mit der Achse  $I$  bildet, so ist das Moment von  $W$  gleich

$$W \sin \alpha \cdot h.$$

Das Moment der im Punkte 1 angreifenden lotrechten Seitenkraft von  $S_1$  ist  $S_1 \frac{h}{l_1} w \sin \alpha$ , wo  $w$  die in der Richtung von  $W$  gemessene Entfernung des Punktes 1 von der Achse  $I$  bedeutet. Die Gleichsetzung der beiden Momente führt nach Streichung des sich hebenden Wertes  $h \sin \alpha$  zu der einfachen Formel

$$(14) \quad \frac{S_1}{l_1} = \frac{W}{w}.$$

Liegt der Punkt 1 in der Grundrisfebene, so erhält man

$$(15) \quad x_1 = \frac{W}{w}.$$

Ist  $W$  parallel zur Drehachse  $I$ , so ist  $S_1 = 0$ . Man braucht dann nur  $W$  nach den Richtungen von  $S_2$  und  $S_3$  zu zerlegen. Bei der in Fig. 212 angenommenen Richtung von  $W$  ist  $S_2$  ein Zug und  $S_3$  ein Druck; man findet

$$(16) \quad \frac{S_2}{l_2} = -\frac{S_3}{l_3} = \frac{W}{w}.$$



Liegen die Punkte 2 und 3 in der Grundriflebene, so ergibt sich

$$(17) \quad x_2 = -x_3 = \frac{W}{w}.$$

Wir betrachten noch die folgenden Sonderfälle.

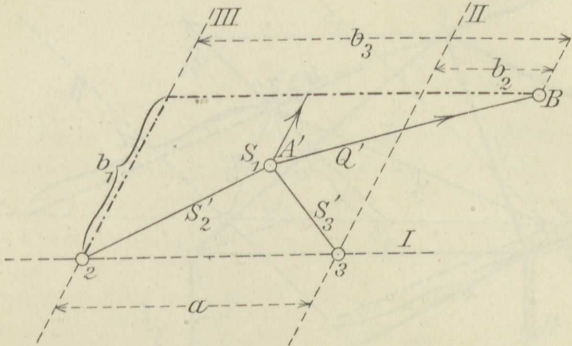


Fig. 213.

Erstens.  $S_2$  und  $S_3$  schneiden die Grundriflebene in den Punkten 2 und 3;  $S_1$  ist wagerecht.  $Q$  trifft die Grundriflebene in  $B$ , Fig. 213. Die Drehachsen II und III sind parallel zu  $S_1$ . Mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen findet man

$$(18) \quad \begin{cases} S_1 = -\frac{Q}{q} b_1 \\ \frac{S_2}{l_2} = +\frac{Q}{q} \frac{b_2}{a} \\ \frac{S_3}{l_3} = -\frac{Q}{q} \frac{b_3}{a} \end{cases} \quad \frac{S_2}{l_2} + \frac{S_3}{l_3} + \frac{Q}{q} = 0.$$

Die Vorzeichen hängen von der Lage der Kraft  $Q$  gegen die Drehachsen ab.

Eine wagerechte Last  $W$  erzeugt (Fig. 214):

$$(19) \quad \begin{cases} S_1 = -W \frac{c}{d} \\ -\frac{S_2}{l_2} = +\frac{S_3}{l_3} = \frac{W}{w} \end{cases}.$$

Zweitens. Es schneide nur  $S_3$  die Grundriflebene.  $S_1$  und  $S_2$  seien wagerecht. Die Drehachse I ist parallel zu  $S_2$ , die Achse II

parallel zu  $S_1$ . Einer die Grundrifsebene in  $B$  schneidenden Last  $Q$  entsprechen die Werte

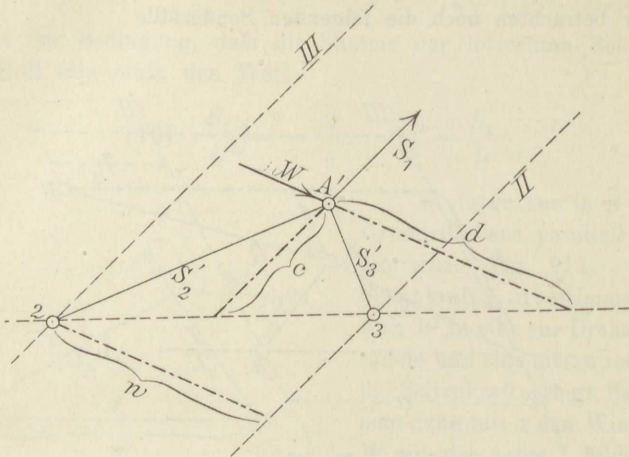


Fig. 214.

$$(20) \quad \begin{cases} S_1 = + \frac{Q}{q} b_1 \\ S_2 = - \frac{Q}{q} b_2 \\ \frac{S_3}{s_3} = - \frac{Q}{q} . \end{cases}$$

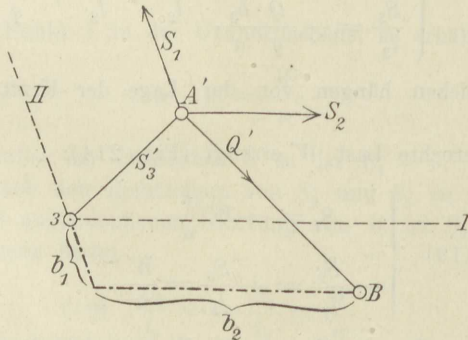


Fig. 215.

Zu dem letzten Werte gelangt man durch Nullsetzen der Summe der lotrechten Kräfte  $S_3 \frac{h}{s_3}$  und  $Q \frac{h}{q}$ .

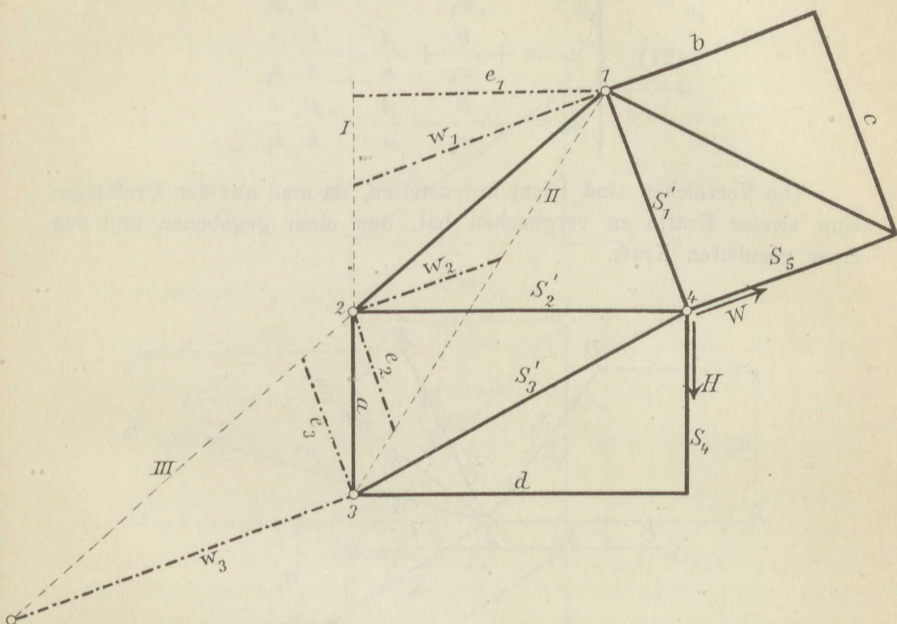


Fig. 216.

Als Anwendungsbeispiel für das Momentenverfahren wählen wir den in Fig. 216 im Grundriss dargestellten Knotenpunkt 4 eines Fachwerkes, dessen Seitenflächen aus Rechtecken und Dreiecken bestehen (vergl. auch Fig. 202). Die Ringe mögen in wagerechten Ebenen liegen. Punkt 4 habe von der Ebene des Ringes . . . 1, 2, 3 . . . den Abstand  $h$ . Die Spannkraften  $S_4$  und  $S_5$  seien bereits gefunden;  $S_1, S_2, S_3$  seien gesucht. In 4 greife eine lotrechte Last  $P$  und eine wagerechte, nach den Richtungen der Stäbe des oberen Ringes in die Seitenkräfte  $W$  und  $H$  zerlegte Last an. Es möge gesetzt werden  $S_4 + H = A$ ,  $S_5 + W = B$ .

Die Grundrissabmessungen der Rechtecke sind  $a, d$  und  $b, c$ . Die von den Punkten 1, 2, 3 nach den Drehachsen I, II, III gezogenen Strecken  $w_1, w_2, w_3$  sind parallel zu  $W$ . Zu Hebelarmen der Last  $P$  in Bezug auf die Achsen I, II, III wurden die Strecken  $d, c, c$  gewählt.



Es ist also der Hebelarm  $e_1$  parallel zu  $d$ ; die Hebelarme  $e_2$  und  $e_3$  sind parallel zu  $c$ . Da  $A$  parallel zu  $I$  ist, so beeinflusst es nur  $S_2$  und  $S_3$ . Man erhält ohne Zwischenrechnung für  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  die Werte:

$$(21) \quad \begin{cases} \kappa_1 = -\frac{B}{w_1} - \frac{P}{h} \frac{d}{e_1} \\ \kappa_2 = +\frac{B}{w_2} + \frac{A}{a} + \frac{P}{h} \frac{c}{e_2} \\ \kappa_3 = -\frac{B}{w_3} - \frac{A}{a} - \frac{P}{h} \frac{c}{e_3} \end{cases}$$

Die Vorzeichen sind leicht festzustellen, da man nur den Drehsinn zweier Kräfte zu vergleichen hat, den einer gegebenen und den einer gesuchten Kraft.

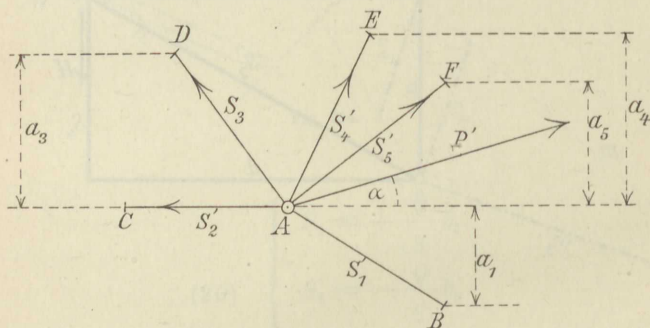


Fig. 217.

#### 4) Verbindung der unter 1 und 3 angegebenen Verfahren.

Hat man eine der drei Spannkraften (z. B. die Spannkraft  $S_1$ ) mit Hilfe einer Momentengleichung berechnet, so findet man oft die beiden anderen Spannkraften  $S_2$  und  $S_3$  sehr schnell, mit Hilfe zweier Gleichgewichtsbedingungen von der Art der Gleichungen (4) auf Seite 258, wobei man die Bezugsachsen zweckmäßig so wählt, daß jede Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält. Diese Lösung haben wir in Fig. 217 dargestellt.  $AB, AC, AD, \dots$  seien die Projektionen der Stablängen  $s_1, s_2, s_3, \dots$ . Die Stabkräfte  $S_5, S_6, \dots$  seien bereits aus den für andere Knotenpunkte gefundenen Gleichungen berechnet.  $P'$  sei die Projektion der gegebenen äußeren Kraft. Zur Berechnung von  $S_3$  erhält man mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen die Gleichung

$$P' \sin \alpha + S_3 \frac{a_3}{s_3} - S_1 \frac{a_1}{s_1} + S_4 \frac{a_4}{s_4} + S_5 \frac{a_5}{s_5} + \dots = 0,$$

sie liefert

$$(22) \quad x_3 = - \frac{P'}{a_3} \sin \alpha + x_1 \frac{a_1}{a_3} - x_4 \frac{a_4}{a_3} - x_5 \frac{a_5}{a_3} - \dots$$

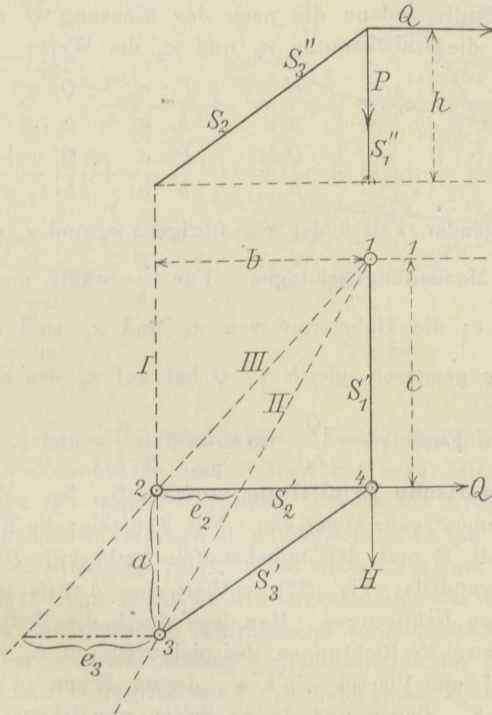


Fig. 218.

Häufig empfiehlt es sich nun, die äußeren Kräfte  $P$  als Spannkraften in Stäben aufzufassen, denen eine gewisse Länge  $p$  zugeschrieben wird. Ist dann  $a_P$  die Projektion von  $p$  auf die zu  $S'_2$  rechtwinklige Richtung, und führt man die Bezeichnung  $P:p = x_P$  ein, so ergibt sich  $x_3$  in der Form

$$(23) \quad x_3 = - x_P \frac{a_P}{a_3} + x_1 \frac{a_1}{a_3} - x_4 \frac{a_4}{a_3} - x_5 \frac{a_5}{a_3} - \dots *)$$

\*) Der häufig zu Vereinfachung der Zahlenrechnungen führende Kunstgriff, an Stelle der äußeren Kräfte  $P$  Werte  $P:p$  einzuführen, ist zuerst von Zimmermann in seinem Buche: Über Raumbachwerke angegeben worden.

Es liege z. B. der in Fig. 218 dargestellte Knotenpunkt 4 vor. Außer wagerechten Lasten  $H$  und  $Q$  greife in 4 die lotrechte Last  $P$  an. Man findet aus der Momentengleichung für die Achse I

$$(24) \quad x_1 = -\frac{P}{h} - \frac{Q}{b}.$$

Setzt man nun die Summe der nach der Richtung  $H$  wirkenden Kräfte gleich Null, sodann die nach der Richtung  $Q$  wirkenden, so findet man für die Unbekannten  $x_3$  und  $x_2$  die Werte

$$(25) \quad \begin{cases} x_3 = +x_1 \frac{c}{a} - \frac{H}{a} = -\frac{P}{h} \frac{c}{a} - \frac{Q}{b} \frac{c}{a} - \frac{H}{a} \\ x_2 = +x_3 + \frac{Q}{b} = +\frac{P}{h} \frac{c}{a} + \frac{Q}{b} \frac{c+a}{a} + \frac{H}{a}. \end{cases}$$

Im vorliegenden Fall findet man übrigens  $x_2$  und  $x_3$  ebenso schnell mit Hilfe von Momentengleichungen. Für  $\frac{P}{h}$  wähle man beide Male den Hebelarm  $c$ ; die Hebelarme von  $x_3$  und  $x_2$  sind dann, in der Richtung von  $c$  gemessen, gleich  $a$ .  $Q$  hat auf  $x_2$  den Einfluss  $+\frac{Q}{e_2}$  und auf  $x_3$  den Einfluss  $-\frac{Q}{e_3}$ , wo  $e_2 = b \frac{a}{a+c}$  und  $e_3 = b \frac{a}{c}$ .

**5) Zeichnerische Ermittlung von  $S_1, S_2, S_3$ .** Wir behandeln diese Aufgabe zuerst ganz allgemein. Fig. 219 zeigt die Richtungen der gegebenen Kraft  $P$  und der unbekannten Stabkräfte  $S_1, S_2, S_3$  im Aufriss und Grundriss; Fig. 220 enthält den Aufriss und Grundriss des geschlossenen Kräftezuges. Man lege durch die Endpunkte von  $P$  Parallelen zu zwei  $S$ -Richtungen, beispielsweise zu  $S_1$  und  $S_2$ , und zeichne hierauf ein Viereck  $a'b'b''a''$ , dessen Ecken in den Geraden  $S'_1, S'_2, S''_2, S''_1$  liegen und dessen Seiten parallel zu  $S'_3, S''_3$  und zu den Projektionsstrahlen sind. Zur Bestimmung dieses Vierecks wurden in Fig. 220 zunächst zwei Hilfsvierecke  $a'_1b'_1b''_1a''_1$  und  $a'_2b'_2b''_2a''_2$  aufgetragen, deren Eckpunkte  $a'_1, b'_1, b''_1$  und  $a'_2, b'_2, b''_2$  in den vorgeschriebenen Geraden  $S'_1, S'_2, S''_2$  liegen, und deren Seiten die vorgeschriebenen Richtungen haben. Es ist dann die Gerade  $a''_1a''_2$  der Ort des Punktes  $a''$ , und hiermit ist die Lage des Punktes  $a''$  und das Viereck  $a'b'b''a''$  bestimmt. Denn:

Ändert ein  $n$ -Eck in der Weise seine Form, daß sämtliche Seiten durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die im vorliegenden Falle die unendlich ferne Gerade ist), während  $n-1$  Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Eckpunkt in einer Geraden.



Die Schnittpunkte der Geradenpaare  $S'_1, S'_2$  und  $\overline{a''_1 a''_2}, S''_2$  liegen in einer Parallelen zu  $m'm''$ , und es genügt daher — eine günstige Lage des Schnittpunktes von  $S'_1$  und  $S'_2$  vorausgesetzt — die Aufzeichnung eines der beiden Hilfsvierecke.

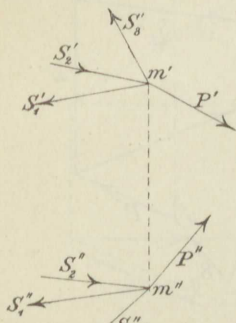


Fig. 219.

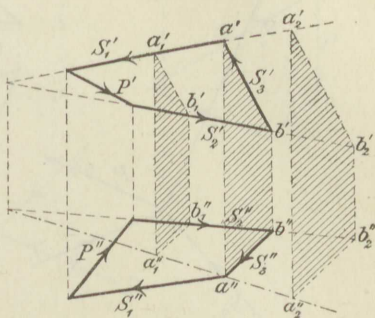


Fig. 220.

Der zeichnerischen Untersuchung von Fachwerken mit einer größeren Anzahl von Knotenpunkten und Stäben hat man öfter vorgeworfen, daß sie infolge der vielen Hilfslinien, welche die Kräftezerlegung im Raume im allgemeinen verlangt, zu unübersichtlichen und deshalb schwer zu prüfenden Kräfteplänen führt. Und dieser Vorwurf ist fast immer dann berechtigt, wenn sämtliche Kräftezerlegungen bei derartigen Fachwerken in ein und derselben Aufrissebene vorgenommen werden. Arbeitet man aber mit verschiedenen Aufrissebenen, unter Umständen auch mit verschiedenen Grundrissebenen, so kann man stets Darstellungen erzielen, die an Übersichtlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen. Die geringe Mühe, welche die Übertragung der bereits gefundenen Kräfte in die neuen Projektionsebenen verursacht, wird reichlich belohnt durch die Ersparnis vieler Hilfslinien und durch die große Durchsichtigkeit des Verfahrens. Die Projektionsebene wird man natürlich für jeden Knotenpunkt so günstig wie möglich wählen. Es empfiehlt sich, diese Wahl so zu treffen, daß von den drei an einem Knotenpunkte auftretenden unbekannten Kräften sich zwei in einer Projektionsebene decken. In den Fig. 221 und 222 ist dieser Fall dargestellt worden. Im Aufriss decken sich  $S''_2$  und  $S''_3$ ; man kann also  $S'_1$  mit Hilfe eines Kräftedreiecks finden und hierauf im Grundriss  $S'_2$  und  $S'_3$  ermitteln.

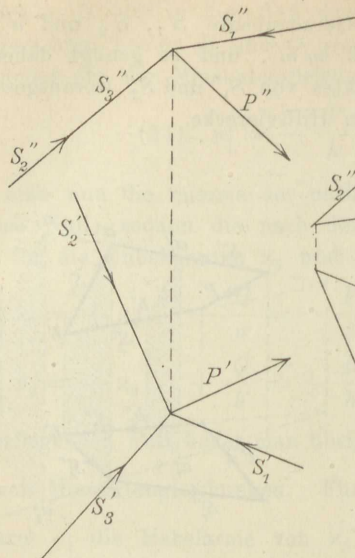


Fig. 221.

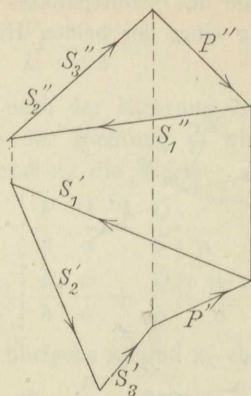


Fig. 222.

6) Die Herleitung von Formeln aus Kräfteplänen, die dann nur skizziert zu werden brauchen, ist ein in vielen Fällen sehr rasch zum Ziele führender Weg zur Bestimmung der drei unbekannten Spannkraft. An die Stelle von Kräftezerlegungen treten dann Zerlegungen von Stablängen oder von Projektionen der Stablängen.

Wir beginnen mit dem einfachen, oft vorkommenden, in Fig. 223 dargestellten Falle. Der fragliche Knotenpunkt trägt eine lotrechte Last  $P$ . Die Stäbe  $S_2$  und  $S_3$  liegen wagerecht. Zerlegt man die Projektion  $s_1'$  von  $s_1$  nach den Richtungen von  $S_2$  und  $S_3$  in die Strecken  $a_2$  und  $a_3$ , so findet man mit Hilfe des in Fig. 224 gezeichneten Kräfteplanes die Formeln

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{S_1}{s} = -\frac{P}{h} \\ S_2 = -\frac{P}{h} a_2 \\ S_3 = -\frac{P}{h} a_3. \end{cases}$$

Ein allgemeineres Beispiel zeigt Fig. 225. Außer der lotrechten Last  $P$  greife im fraglichen Knotenpunkte noch eine wagerechte Last  $Q$  an. Keine der Stabachsen sei parallel zu einer Projektionsebene. Im Aufriß decken sich  $S_2''$  und  $S_3''$ . Zerlegt man im Aufriß jede der

drei Kräfte  $P$ ,  $Q''$  und  $S_1''$  in eine lotrechte Seitenkraft und in eine Seitenkraft in der Richtung von  $S_2''S_3''$ , und setzt man die Summe

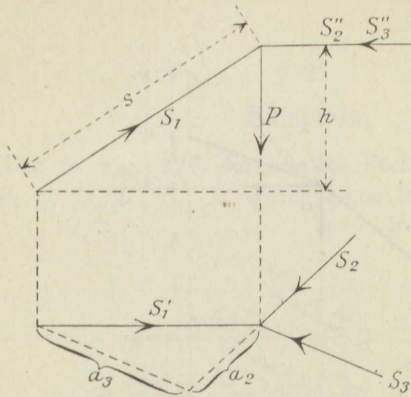


Fig. 223.

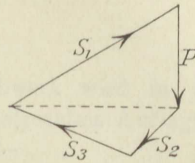


Fig. 224.

der lotrechten Seitenkräfte gleich Null, so erhält man mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen die Gleichung

$$P + Q'' \frac{w}{q} + S_1'' \frac{v}{s_1} = 0.$$

Da nun

$$\frac{S_1''}{s_1} = \frac{S_1}{s_1} \quad \text{und} \quad \frac{Q''}{q} = \frac{Q}{q}$$

ist, so folgt

$$(27) \quad x_1 = \frac{S_1}{s_1} = - \frac{P}{v} - \frac{Q}{q} \frac{w}{v}.$$

Zerlegt man weiter im Grundrisse jede der drei Kräfte  $S_1'$ ,  $S_2'$  und  $Q$  nach der Richtung von  $S_3'$  und nach der Richtung  $C'C''$ , und setzt man die Summe der nach der Richtung  $C'C''$  gebildeten Seitenkräfte gleich Null, so findet man

$$S_2' \frac{e}{s_2} = Q \frac{b_2}{q} + S_1' \frac{c_2}{s_1},$$

woraus

$$(28) \quad x_2 = \frac{Q}{q} \frac{b_2}{e} + x_1 \frac{c_2}{e},$$



und in ähnlicher Weise erhält man

$$(29) \quad x_3 = \frac{Q}{q} \frac{b_3}{e} + x_1 \frac{c_3}{e}.$$

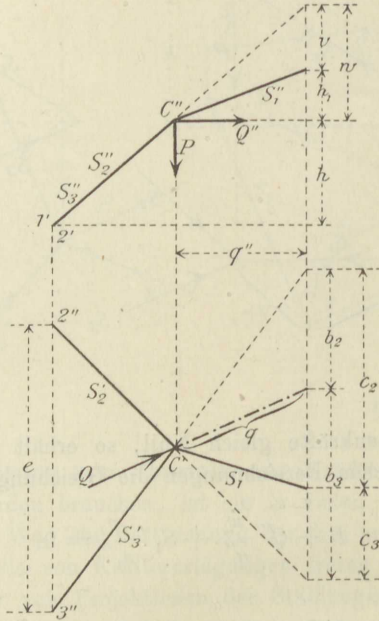


Fig. 225.

Liegt der Endpunkt des Stabes  $s_3$  nicht in der durch den Endpunkt des Stabes  $s_2$  gelegten Grundrisfebene, so tritt an die Stelle von  $x_3 = S_3 : s_3$  der Wert  $S_3 : l_3$ , wo  $l_3$  die Entfernung des Knotenpunktes  $C$  von dem Punkte ist, in welchem die Achse des dritten Stabes die Grundrisfebene schneidet.

7) Greifen an einem Knotenpunkte mehr als drei unbekannte Stabkräfte an, liegen aber diese unbekannten Kräfte mit Ausnahme einer einzigen in ein und derselben Ebene ( $\alpha$ ), so kann man diese eine Stabkraft — wir nennen sie  $S_1$  — finden, indem man die Summe aller rechtwinklig zur Ebene  $\alpha$  wirkenden Seitenkräfte gleich Null setzt, oder eine Momentengleichung für eine in der Ebene  $\alpha$  angenommene Drehachse aufstellt. Man kann aber auch  $S_1$  durch Zerlegung der Mittelkraft  $P$  der gegebenen Kräfte nach der Richtung von  $S_1$  und den Richtungen von zwei mit der Ebene  $\alpha$  zusammenfallenden, durch den

fraglichen Knotenpunkt gehenden, im übrigen aber beliebig angenommenen Geraden ermitteln.

## § 27.

### Beispiele.

1) Das in Fig. 226 dargestellte Fachwerk wird in jedem der Punkte  $B, C, D, B', C', D'$  durch einen lotrechten Auflagerstab ge-

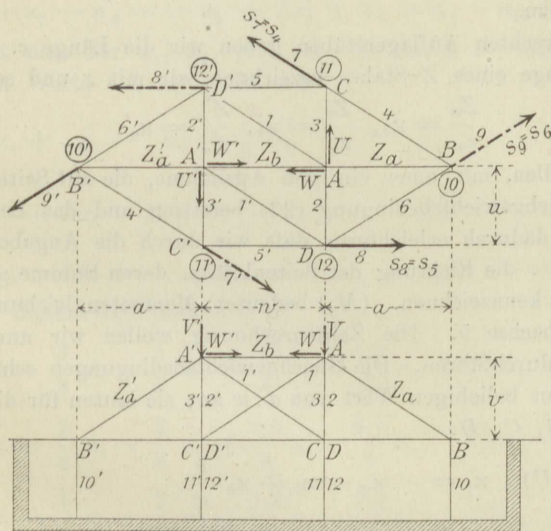


Fig. 226.

stützt, außerdem noch in  $C, D$  und  $B'$  durch wagerechte Auflagerstäbe 7, 8, 9', welche mit den Seiten der Stäbe 4, 5', 6' zusammenfallen. Das Fachwerk ließe sich mit Hilfe von zwei  $Z$ -Stäben berechnen; wir führen aber deren drei ein, nämlich  $Z_a, Z_b$  und  $Z_a'$  und fügen die Ersatzstäbe 9, 7', 8' ein. Diese Wahl bietet den Vorteil, daß es genügt, die Spannkraften der Stäbe 1 bis 12 durch die gegebenen Lasten und die  $Z$ -Kräfte auszudrücken. Die Bildungsgesetze für die Stäbe 1' bis 12' sind dann ebenfalls bekannt, da das Fachwerk symmetrisch gebaut ist.

In den Knotenpunkten  $A$  und  $A'$  greifen die gegebenen Lasten  $U, V, W, U', V', W'$  an. Damit wir es nur mit Stabkräften zu tun

haben, fassen wir die Lasten  $U, V, W, U', V', W'$  als die Spannkraften in Stäben auf, deren Längen  $u, v, w$  sind, und führen die Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned}\frac{U}{u} &= \kappa_u, & \frac{U'}{u} &= \kappa'_u \\ \frac{V}{v} &= \kappa_v, & \frac{V'}{v} &= \kappa'_v \\ \frac{W}{w} &= \kappa_w, & \frac{W'}{w} &= \kappa'_w.\end{aligned}$$

Den wagerechten Auflagerstäben 7, 7', 8, 8', 9, 9' schreiben wir die Längen der mit ihnen in dieselbe Richtung fallenden Stäbe 4, 4', 5', 5, 6, 6' zu.

Den lotrechten Auflagerstäben geben wir die Länge  $v$ .

Die Länge eines  $Z$ -Stabes bezeichnen wir mit  $z$  und setzen

$$\frac{Z_a}{z_a} = \kappa_a, \quad \frac{Z_b}{z_b} = \kappa_b, \quad \frac{Z'_a}{z'_a} = \kappa'_a.$$

Wir wollen, mit einer einzigen Ausnahme, die auf Seite 270 aufgestellte Gleichgewichtsbedingung (23) benutzen und das Lesen dieser Gleichungen dadurch erleichtern, daß wir durch die Angaben  $(\perp U)$ ,  $(\perp W)$  . . . die Richtung der Seitenkräfte, deren Summe gleich Null gesetzt wird, kennzeichnen.  $(M_5)$  bedeutet: Momentengleichung bezogen auf die Stabachse 5. Die Zahlenrechnung wollen wir nur für den Fall  $a = w$  durchführen. Die Gleichgewichtsbedingungen schreiben wir aber für einen beliebigen Wert von  $a:w$  an; sie lauten für die Knotenpunkte  $A, B, C, D$ :

$$\begin{aligned}A \quad & \begin{cases} (\perp U) & \kappa_1 = -\kappa_w - \kappa_b + \kappa_a \frac{a}{w} \\ (M_5) & \kappa_2 = (\kappa_u - \kappa_v - \kappa_a) \frac{1}{2} *) \\ (\perp W) & \kappa_3 = \kappa_2 - \kappa_1 - \kappa_u. \end{cases} \\ B \quad & (\perp 6) \quad \kappa_4 = -\kappa_a \frac{1}{2} \qquad (\perp 4) \quad \kappa_9 = \kappa_6 + \kappa_a \frac{1}{2} \\ C \quad & (\perp 4) \quad \kappa_5 = -\kappa_3 \frac{a}{w} \qquad (\perp 5) \quad \kappa_7 = \kappa_3 + \kappa_4 \\ D \quad & (\perp 5') \quad \kappa_6 = -\kappa'_1 - \kappa_2 \qquad (\perp 2) \quad \kappa_8 = \kappa'_1 + \kappa'_5 - \kappa_6 \frac{a}{w} \\ & B, C, D \quad (\parallel V) \quad \kappa_{10} = \kappa_a, \quad \kappa_{11} = \kappa_3, \quad \kappa_{12} = \kappa'_1 + \kappa_2. \end{aligned}$$

\*) Der Abstand des in  $D$  angreifenden Gewichtes  $\kappa_2$  von der Drehachse 5 ist doppelt so groß wie der Hebelarm von  $\kappa_v$ , angreifend in  $A$  und von  $\kappa_a$  angreifend in  $B$ ; er ist auch doppelt so groß wie die Länge des Stabes  $U$ .



Für die lotrechten Auflagerstäbe wurden die Druckspannungen als die positiven angenommen.

Mit Hilfe der angeschriebenen Gleichungen kann man die Werte  $x_1$  bis  $x_{12}$  und  $x'_1$  bis  $x'_{12}$  berechnen, sobald man  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $x'_b$  kennt. Zur Ermittlung dieser drei Werte stehen nun die Bedingungen zur Verfügung:  $x_9 = 0$ ,  $x'_7 = 0$ ,  $x'_8 = 0$ ; sie lauten für  $a = w$ :

$$0 = x_6 + x_a \frac{1}{2} = -x'_1 + \frac{1}{2} x_a - x_2$$

$$0 = x'_3 + x'_4 = +x'_3 - \frac{1}{2} x'_a = x'_2 - x'_1 - x'_u - \frac{1}{2} x'_a$$

$$0 = x_1 + x_5 - x'_6 = -x_3 + 2x_1 + x'_2 = x'_2 - x_2 + x_u + 3x_1.$$

Setzt man für  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x'_1$ ,  $x'_2$  die durch die Gleichungen (A) gegebenen Werte ein, so erhält man

$$x_a + x_b - x'_a = \frac{1}{2} (x_u - x_v) - x'_w$$

$$+ x_b - 2x'_a = \frac{1}{2} (x'_u + x'_v) - x'_w$$

$$-7x_a + 6x_b + x'_a = x_u + x'_u + x_v + x'_v - 6x_w.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$x_a = -\frac{3}{8} x_v - \frac{1}{8} x'_v + \frac{2,2}{8} x_u - \frac{1,8}{8} x'_u + 0,3x_w - 0,3x'_w$$

$$x_b = -\frac{2}{8} x_v - \frac{2}{8} x'_v + \frac{3,6}{8} x_u - \frac{0,4}{8} x'_u - 0,6x_w - 0,4x'_w$$

$$x'_a = -\frac{1}{8} x_v - \frac{3}{8} x'_v + \frac{1,8}{8} x_u - \frac{2,2}{8} x'_u - 0,3x_w + 0,3x'_w.$$

Nun lassen sich sämtliche Werte  $x$  in der durch die Ziffern angegebenen Reihenfolge mühelos hinschreiben; sie sind in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt worden. Die dort fehlenden Werte sind durch die Beziehungen gegeben:

$$x_4 = x_6 = -\frac{1}{2} x_a; \quad x'_3 = -x'_4 = -x'_5 = -x'_{11} = \frac{1}{2} x'_a$$

$$x_5 = -x_3; \quad x_{10} = x_a; \quad x'_{10} = x'_a; \quad x_{11} = x_3.$$

	$\frac{V}{8v}$	$\frac{V'}{8v}$	$\frac{U}{8u}$	$\frac{U'}{8u}$	$\frac{W}{w}$	$\frac{W'}{w}$
$x_a$	— 3,0	— 1,0	+ 2,2	— 1,8	+ 0,3	— 0,3
$x_b$	— 2,0	— 2,0	+ 3,6	— 0,4	— 0,6	— 0,4
$x'_a$	— 1,0	— 3,0	+ 1,8	— 2,2	— 0,3	+ 0,3
$x_1$	— 1,0	+ 1,0	— 1,4	— 1,4	— 0,1	+ 0,1
$x'_1$	+ 1,0	— 1,0	— 1,8	— 1,8	+ 0,3	— 0,3
$x_2$	— 2,5	+ 0,5	+ 2,9	+ 0,9	— 0,15	+ 0,15
$x'_2$	+ 0,5	— 2,5	— 0,9	+ 5,1	+ 0,15	— 0,15
$x_3$	— 1,5	— 0,5	— 3,7	+ 2,3	— 0,05	+ 0,05
$x'_3$	+ 0,5	+ 1,5	+ 2,3	— 3,7	— 0,05	+ 0,05
$x_7$	0	0	— 4,8	+ 3,2	— 0,2	+ 0,2
$x_8$	0	0	— 1,6	— 1,6	+ 0,6	— 0,6
$x'_9$	0	0	+ 3,2	— 4,8	— 0,2	+ 0,2
$x_{12}$	— 1,5	— 0,5	+ 1,1	— 0,9	+ 0,15	— 0,15
$x'_{12}$	— 0,5	— 1,5	— 2,3	+ 3,7	+ 0,05	— 0,05

2) Das in Fig. 227 abgebildete, durch vier lotrechte und drei wagerechte Auflagerstäbe gestützte Fachwerk, das wir bereits auf Seite 256 kurz besprochen haben, trage in den Knotenpunkten I, II, III, IV die lotrechten Lasten  $V_1, V_2, V_3, V_4$  und die wagerechten Lasten  $A, B, C, D, \dots H$ . In den Knotenpunkten des unteren Ringes greifen die wagerechten Lasten  $L, Q$  an. Den Lasten  $A, B, C, D, \dots H$  schreiben wir die Länge  $a$  zu, den Lasten  $L, Q$  die Länge  $2d$  und allen Lasten  $V$  die Länge  $v$ . Wir setzen also

$$\frac{A}{a} = x_A, \quad \frac{B}{a} = x_B, \quad \dots, \quad \frac{H}{a} = x_H, \quad \frac{L}{2d} = x_L, \quad \frac{Q}{2d} = x_Q$$

und führen für die  $V:v$  die Bezeichnungen ein

$$\frac{V_1}{v} = \gamma_1, \quad \frac{V_2}{v} = \gamma_2, \quad \dots$$

Zunächst nehmen wir an, es seien bereits bekannt

$$x_1 - x_2 = x' \text{ und } x_3.$$

$x'$  und  $x_3$  spielen also die Rolle der  $Z$ -Werte unserer allgemeinen Untersuchung.

Für den Knotenpunkt I besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$(\parallel V_1) \quad x_1 + x_2 + \gamma_1 = 0,$$

weshalb

$$x_1 = -\frac{1}{2} \gamma_1 + \frac{1}{2} x'$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \gamma_1 - \frac{1}{2} x'.$$

Weiter findet man für den Knotenpunkt I, indem man die Summe der Seitenkräfte nach der Richtung des Stabes 3 gleich Null setzt und beachtet, daß  $x_1 + x_2 = -\gamma_1$  ist:

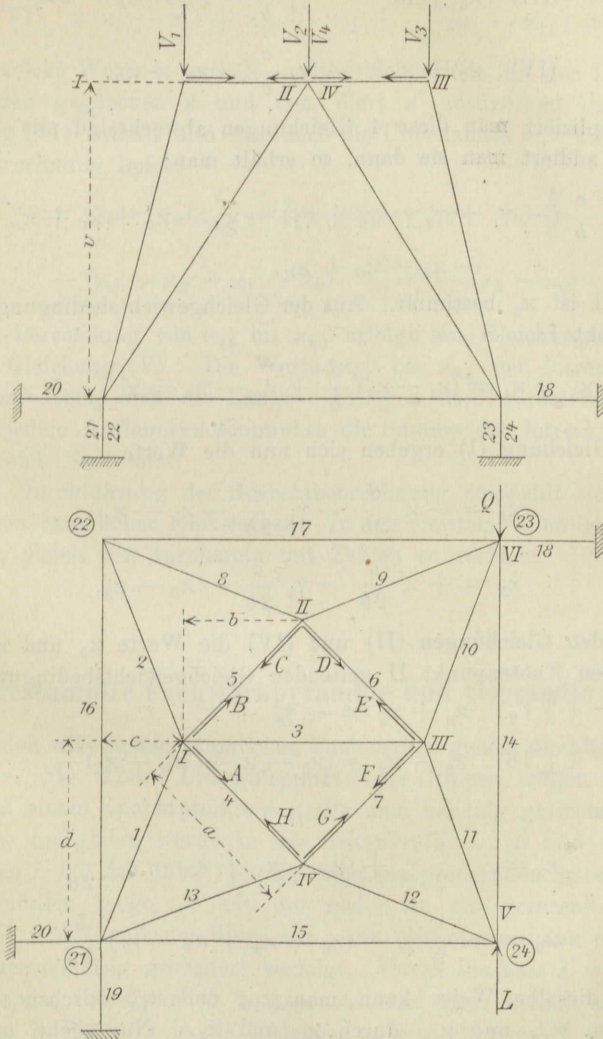


Fig 227.

$$(I) \quad x_4 + x_5 = -\gamma_1 \frac{c}{b} - x_A - x_B - 2x_3,$$

und ganz ähnliche Gleichungen erhält man für die Knotenpunkte II, III, IV, nämlich



$$(II) \quad x_5 + x_6 = -\gamma_2 \frac{c}{b} - x_C - x_D$$

$$(III) \quad x_6 + x_7 = -\gamma_3 \frac{c}{b} - x_E - x_F - 2x_3$$

$$(IV) \quad x_7 + x_4 = -\gamma_4 \frac{c}{b} - x_G - x_H.$$

Multipliziert man diese 4 Gleichungen abwechselnd mit  $+1$  und  $-1$  und addiert man sie dann, so erhält man:

$$4x_3 = \frac{c}{b} (-\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) - x_A - x_B + x_C + x_D - x_E - x_F + x_G + x_H.$$

Damit ist  $x_3$  bestimmt. Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knotenpunkt I:

$$(\perp 3) \quad x_5 - x_4 = (x_1 - x_2) \frac{d}{b} + x_A - x_B = x' \frac{d}{b} + x_A - x_B$$

und aus Gleichung (I) ergeben sich nun die Werte

$$x_4 = -x' \frac{d}{2b} - \gamma_1 \frac{c}{2b} - x_A - x_3$$

$$x_5 = +x' \frac{d}{2b} - \gamma_1 \frac{c}{2b} - x_B - x_3,$$

und aus den Gleichungen (II) und (IV) die Werte  $x_6$  und  $x_7$ . Aus den für den Knotenpunkt II geltenden Gleichgewichtsbedingungen

$$(\parallel V_2) \quad x_8 + x_9 = -\gamma_2$$

$$(\perp 16) \quad x_8 - x_9 = (x_6 - x_5 + x_D - x_C) \frac{b}{d}$$

findet man

$$x_8 = -\frac{1}{2} \gamma_2 + (x_6 - x_5 + x_D - x_C) \frac{b}{2d}$$

$$x_9 = -\frac{1}{2} \gamma_2 - (x_6 - x_5 + x_D - x_C) \frac{b}{2d}.$$

Auf dieselbe Weise kann man  $x_{10}$  und  $x_{11}$  durch  $x_6$  und  $x_7$  ausdrücken,  $x_{12}$  und  $x_{13}$  durch  $x_7$  und  $x_4$ . Nun geht man zum Knotenpunkt V, ermittelt:

$$(V) \quad (\perp 15) \quad x_{14} = -x_{12} \frac{c}{2d} - x_{11} \frac{1}{2} - x_L$$

und setzt diesen Wert in die für den Knotenpunkt VI aufgestellte Gleichgewichtsbedingung

$$(\perp 17) \quad x_{14} + x_9 \frac{c}{2d} + x_{10} \frac{1}{2} + x_Q = 0,$$

ein. Man findet dann die Bedingung

$$(VI) \quad 2(x_Q - x_L) + x_{10} - x_{11} + \frac{c}{d}(x_9 - x_{12}) = 0,$$

die nur solche Werte  $x$  enthält, welche sich durch die den Lasten entsprechenden gegebenen  $x$  und den Wert  $x'$  ausdrücken lassen. Die Gleichung (VI) enthält also nur noch die Unbekannte  $x'$ . Eine einfache Zwischenrechnung liefert

$$x' = -(\gamma_2 - \gamma_4) \frac{c}{2d} - (x_A - x_B + x_C - x_H) \frac{b}{d} \\ - (x_D - x_E + x_F - x_G) \frac{b}{c+d} - (x_L - x_Q) \frac{2d}{c+d}.$$

Die Berechnung von  $x_{15}$  bis  $x_{20}$  erfolgt aus Gleichungen von der Art der Gleichung (V). Die Werte  $x_{21}$  bis  $x_{24}$  der lotrechten Auflagerstäbe, denen man die Länge  $v$  beilegen wird, findet man, indem man an jedem Auflagerknotenpunkte die Summe der lotrechten Seitenkräfte gleich Null setzt.

Die Durchführung der Buchstabenrechnung empfiehlt sich nur bei einfacheren räumlichen Fachwerken. In den meisten Fällen ist es zweckmäßiger, gleich von vornherein mit Zahlen zu rechnen.

## § 28.

### Die abgestumpfte Fachwerkpyramide und verwandte Systeme.

Zu den wichtigsten räumlichen Fachwerken gehört die abgestumpfte Pyramide, Fig. 228. Die Fußpunkte der Rippen mögen festliegen. In irgend einem Knotenpunkte  $m$  greife eine beliebig gerichtete äußere Kraft an, und diese werde in die Seitenkräfte  $L$ ,  $R$  und  $U$  zerlegt, von denen  $L$  mit der links\*) an die Rippe  $ma$  grenzenden Seitenwand (I) zusammenfallen möge,  $R$  mit der rechts an  $ma$  grenzenden Seitenwand (II) und  $U$  mit der Rippe  $ma$ . Die Wirkungen dieser drei Kräfte werden zweckmäßig gesondert verfolgt. Durch die Last  $L$  werden nur die Stäbe der Seitenwand I beansprucht, und zwar verhält sich hierbei das ebene, in Fig. 229 in die Bildebene gelegte Fachwerk I wie ein am unteren Ende eingespannter Freitrag. Die Last  $R$  beansprucht in gleicher Weise das ebene Fachwerk II, und die Last  $U$  ruft nur in der Rippe  $ma$  Spannkkräfte ( $S = -U$ ) hervor. Die Gesamtwerte der

\*) Die Bezeichnungen links und rechts gelten für einen von außen auf den Mantel der Pyramide sehenden Beschauer.

Spannkkräfte der Rippe  $ma$  erhält man schliesslich durch Zusammenzählen der einzelnen Wirkungen der drei Kräfte  $L$ ,  $R$ ,  $U$ .

Die Rippen brauchen sich nicht in einem Punkte zu treffen. Die beschriebene Berechnungsweise gilt also nicht nur für den Pyramidenstumpf; sie ist vielmehr nur an die Voraussetzung gebunden, daß die Seitenflächen statisch bestimmte ebene Träger sind.

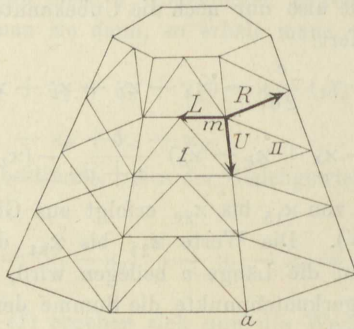


Fig. 228.

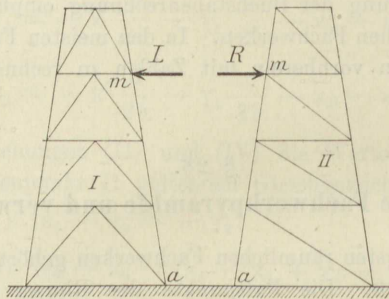


Fig. 229.

Die Richtungen der Kräfte  $L$  und  $R$  brauchen nur mit den Ebenen I und II zusammenfallen; im übrigen dürfen sie nach Belieben gewählt werden. In der Regel empfiehlt es sich,  $L$  und  $R$  wagerecht anzunehmen.

Es liege z. B. der in Fig. 230 dargestellte Pfeiler mit wagerechten Ringen vor. Am Knotenpunkte  $m$  greife eine lotrechte Last  $P_m$  und eine wagerechte, nach den Richtungen der angrenzenden Ringstäbe in die Seitenkräfte  $H_m$  und  $Q_m$  zerlegte Last an. Zerlegt man  $P_m$  nach der Richtung der Rippe  $ma$  und nach den Richtungen der Kräfte  $H_m$  und  $Q_m$ , so erhält man (nach Seite 274, Fig. 223) mit den in die Figur 230 eingeschriebenen Bezeichnungen für  $U_m$ ,  $L_m$  und  $R_m$  die Werte



$$(30) \quad \begin{cases} U_m = P_m \frac{s}{h} \\ L_m = H_m + P_m \frac{l}{h} \\ R_m = Q_m + P_m \frac{r}{h} \end{cases}$$

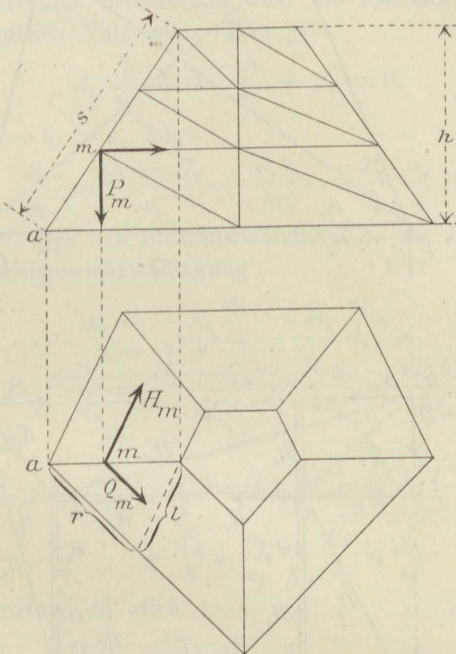


Fig. 230.

Hat man auf diese Weise die Lasten  $U$ ,  $L$ ,  $R$ , ermittelt, so ist die Berechnung der Spannkraften auf die Untersuchung einfacher ebener Fachwerke zurückgeführt.

**Beispiel.** Für die Spannkraften und Auflagerwiderstände des in Figur 231 dargestellten eingeschossigen Pfeilers sollen allgemeine Formeln aufgestellt werden. Das Fachwerk besitzt vier feste Stützpunkte  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$ ,  $IV'$ , deren Widerstände in die wagerechten Seitenkräfte  $A$  und  $B$  und die lotrechten Gegendrückte  $C$  zerlegt worden sind. Es genügt natürlich, Formeln für die Spannkraften  $T_1$ ,  $S_1$ ,  $D_1$  und die Widerstände  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  aufzustellen.

Man findet für den Knotenpunkt (I)

$$L_1 = H_1 + P_1 \frac{a_1}{h}$$

$$R_1 = Q_1 + P_1 \frac{b_1}{h}$$

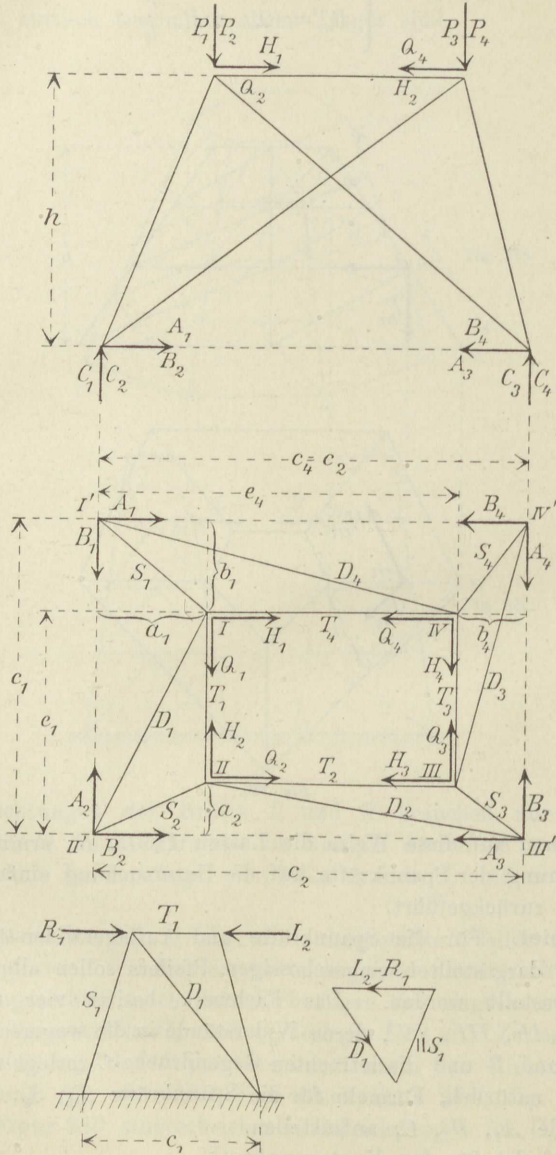


Fig. 231.

Die Berechnung von  $U_1$  ist, wie sich zeigen wird, entbehrlich. Die Seitenwand  $I, II, II', I'$  wird belastet mit  $R_1$  und  $L_2$ .

Es ergibt sich

$$T_1 = -L_2 = -H_2 - P_2 \frac{a_2}{h},$$

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{L_2 - R_1}{c_1} = \frac{H_2 - Q_1}{c_1} + \frac{P_2 a_2}{h c_1} - \frac{P_1 b_1}{h c_1}.$$

Die Spannkraft  $S_1$  erhält man am schnellsten, wenn man die Summe der lotrechten Seitenkräfte aller am Knotenpunkte (I) angreifenden Kräfte gleich Null setzt. Dies gibt

$$S_1 \frac{h}{s_1} + D_1 \frac{h}{d_1} + P_1 = 0,$$

woraus mit  $c_1 - b_1 = e_1$  folgt

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{Q_1 - H_2}{c_1} - \frac{P_1 e_1}{h c_1} - \frac{P_2 a_2}{h c_1}.$$

Nun findet man den Stützenwiderstand  $A_1$  am Knotenpunkte (I') mittels der Gleichgewichtsbedingung

$$A_1 = -S_1 \frac{a_1}{s_1} - D_4 \frac{e_4}{d_4},$$

wo

$$\frac{D_4}{d_4} = \frac{H_1 - Q_4}{c_4} + \frac{P_1 a_1}{h c_4} - \frac{P_4 b_4}{h c_4}.$$

Man erhält

$$A_1 = (H_2 - Q_1) \frac{a_1}{c_1} + (Q_4 - H_1) \frac{e_4}{c_4} + \frac{P_1}{h} a_1 \left( \frac{e_1}{c_1} - \frac{e_4}{c_4} \right) + \frac{P_2}{h} a_1 \frac{a_2}{c_1} + \frac{P_4}{h} b_4 \frac{e_4}{c_4}.$$

Der Widerstand  $B_1$  wird

$$B_1 = -S_1 \frac{b_1}{s_1} - D_4 \frac{b_1}{d_4}, \text{ das ist}$$

$$B_1 = (H_2 - Q_1) \frac{b_1}{c_1} + (Q_4 - H_1) \frac{b_1}{c_4} + \frac{P_1}{h} b_1 \left( \frac{e_1}{c_1} - \frac{a_1}{c_4} \right) + \frac{P_2}{h} b_1 \frac{a_2}{c_1} + \frac{P_4}{h} b_1 \frac{b_4}{c_4}.$$

Schließlich findet man den Stützenwiderstand  $C_1$  aus der Gleichgewichtsbedingung

$$C_1 = -S_1 \frac{h}{s_1} - D_4 \frac{h}{d_4} = B_1 \frac{h}{b_1}.$$

Werden die vier Fußpunkte miteinander durch Stäbe verbunden, so müssen vier der zwölf Stützenwiderstände beseitigt werden. Ein Beispiel zeigt die Figur 232. Die Stützpunkte werden in wagerechten



Geraden geführt, die mit den Richtungen der Stäbe des Fußringes zusammenfallen\*). Rechtwinklig zu den Führungen treten Widerstände

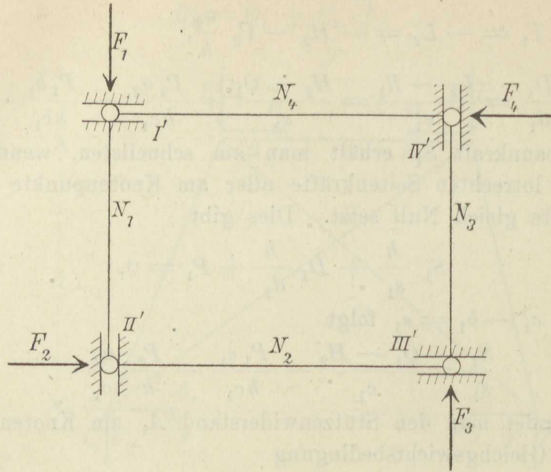


Fig. 232.

$F_1, F_2, F_3, F_4$  auf. Aus den vorhin berechneten Stützenwiderständen  $A$  und  $B$  findet man für die Spannkraften  $N$  im Fußringe und für die Widerstände  $F$  die Werte:

$$N_1 = A_2, N_2 = A_3, \text{ u. s. w.},$$

$$F_1 = B_1 - N_1, F_2 = B_2 - N_2, \text{ u. s. w.}$$

**Zahlenbeispiel.** Es sei  $c_1 = c_2 = 12,1^m$ ,  $a_1 = b_1 = a_2 = b_3 = \dots = b_4 = 2,0^m$ ,  $e_1 = e_2 = 10,1^m$ ,  $h = 19,9^m$ ,  $s = 20,1^m$ ,  $d = 22,4^m$ . Man findet

$$T_1 = -H_2 - 0,101 P_2,$$

$$D_1 = 1,851 (H_2 - Q_1) + 0,186 (P_2 - P_1),$$

$$S_1 = 1,661 (Q_1 - H_2) - 0,843 P_1 - 0,167 P_2,$$

$$A_1 = 0,165 (H_2 - Q_1) + 0,835 (Q_4 - H_1) + 0,017 P_2 + 0,084 P_4,$$

$$B_1 = 0,165 (H_2 - Q_1 + Q_4 - H_1) + 0,017 (P_2 + P_4) + 0,067 P_1,$$

$$C_1 = 9,95 B_1.$$

Ein zweites Beispiel für ein eingeschossiges Fachwerk mit vier ebenen Seitenflächen und zwei wagerechten Ringen zeigt Fig. 233. Sämtliche Knotenpunkte des unteren Ringes sind durch lotrechte Auflagerstäbe gestützt. An den in Geraden geführten Stützpunkten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  treten wagerechte, mit denselben Buchstaben bezeichnete

\*) Die allgemeine Lösung der Aufgabe der sicheren Stützung eines ebenen Fußringes, dessen Knotenpunkte in Geraden geführt werden, gab der Verfasser im Zentralblatt der Bauverwaltung 1892.

Widerstände auf. Die an den Knotenpunkten der Rippen angreifenden Lasten werden in die Seitenkräfte  $L$ ,  $R$ ,  $U$  zerlegt.

Sind nur die Lasten  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L_3$  und  $L_4$  vorhanden, so wird nur das Seitenfachwerk I nebst den Stäben, welche die Knotenpunkte 0

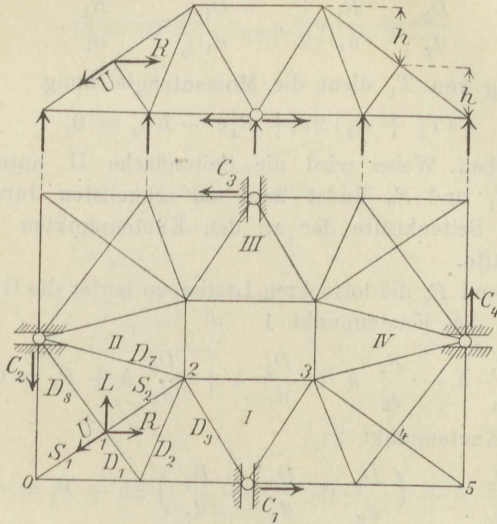


Fig. 233.

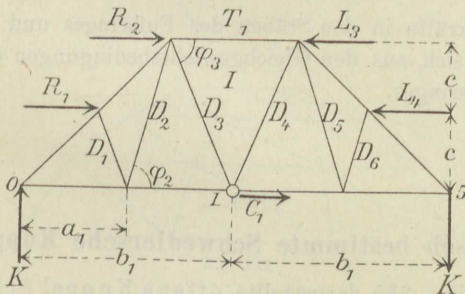


Fig. 234.

und 5 mit den Stützpunkten  $C_2$  und  $C_4$  verbinden, beansprucht. Die Vereinigung der Spannkraft des Stabes  $0C_2$  mit dem in 0 angreifenden lotrechten Auflagerdrucke gibt eine in die Ebene I fallende Mittelkraft  $K$  (siehe Fig. 234, welche das in die Bildebene gelegte Seitenfach darstellt). Eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft  $K$  erhält man am Knotenpunkte 5. Die Größe von  $K$  ist durch die Momentengleichung

$$K \cdot 2b_1 = (R_2 - L_3) 2c + (R_1 - L_4) c$$

bestimmt.

Für die Spannkkräfte in den Diagonalen findet man die Werte

$$D_3 \sin \varphi_3 = K, \quad \frac{D_3}{d_3} = \frac{K}{2c},$$

$$D_2 \sin \varphi_2 = -D_1 \sin \varphi_1 = \frac{R_1 c}{a_1},$$

$$\frac{D_2}{d_2} = \frac{R_1}{a_1} \frac{1}{2}, \quad \frac{D_1}{d_1} = -\frac{R_1}{a_1},$$

zur Berechnung von  $T_1$  dient die Momentengleichung

$$(T_1 + R_2) 2c + R_1 c - Kb_1 = 0.$$

In derselben Weise wird die Seitenfläche II untersucht. Die Spannkraften  $S_1$  und  $S_2$  findet man am schnellsten durch Nullsetzen der lotrechten Seitenkräfte der an den Knotenpunkten 1 und 2 angreifenden Kräfte.

Sind  $P_1$  und  $P_2$  die lotrechten Lasten, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für den Knotenpunkt 1

$$\frac{S_1}{s_1} h - \frac{S_2}{s_2} h + \frac{D_1}{d_1} h + \frac{D_8}{d_8} h + P_1 = 0,$$

und für den Knotenpunkt 2

$$\frac{S_2}{s_2} h + \left( \frac{D_2}{d_2} + \frac{D_3}{d_3} + \frac{D_7}{d_7} \right) 2h + P_2 = 0.$$

Die Spannkraften in den Stäben des Fußringes und den Auflagerstäben ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des Fußringes.

## § 29.

### Statisch bestimmte Schwedlersche Kuppeln.

1) Die in Fig. 235 dargestellte offene Kuppel Schwedlerscher Bauart läßt sich in Fachwerke von der im § 28 beschriebenen Art zerlegen. Wir bezeichnen die Spannkraften in den Ringstäben, Diagonalen und Rippen der oberen Zone mit  $T$ ,  $D$ ,  $S$ , in der zweiten Zone mit  $T'$ ,  $D'$ ,  $S'$ , in der dritten mit  $T''$ ,  $D''$ ,  $S''$  u. s. w. \*) Die Berechnung der obersten Zone kann ohne weiteres nach dem im § 28 beschriebenen Verfahren erfolgen. An der zweiten Zone greifen außer den gegebenen Lasten  $P'$ ,  $H'$  und  $Q'$  noch die nunmehr bekannten Spannkraften  $S$  und  $D$  an. Es ist also nur noch die Aufgabe zu lösen,

\*) Man achte also darauf, daß  $S'$ ,  $S''$ ,  $D'$ ,  $D''$  nicht Projektionen von Stabkräften bezeichnen.



diese Kräfte auf möglichst übersichtliche und einfache Weise nach den drei ausgezeichneten Richtungen  $L$ ,  $R$  und  $U$  (Fig. 228) zu zerlegen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir zunächst jede Spannkraft  $D$  in ihrem unteren Endpunkte auf die in Fig. 236 dargestellte Weise nach der Richtung des Ringstabes und der Rippe in die Seitenkräfte

$$D_u = D \frac{a}{d} \quad \text{und} \quad D_s = D \frac{s}{d},$$

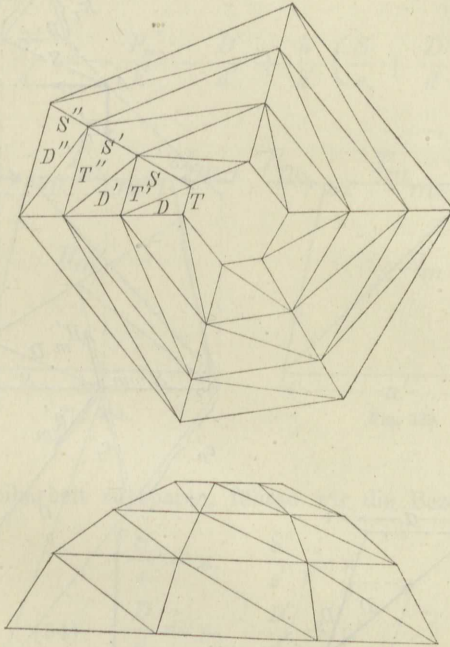


Fig. 235.

wo  $a$  die Länge des oberen Ringstabes des betrachteten Seitenfaches und  $d$  die Länge der Diagonale bedeutet.  $D_u$  tritt zu der Last  $H'_m$ ,  $D_s$  wird zu  $S$  gefügt, und nun wird  $S + D_s$  nach den Richtungen von  $H'_m$  und  $Q'_m$  und nach der Richtung der Rippe  $S'$  der zweiten Zone in die Seitenkräfte  $L'$ ,  $R'$ ,  $U'$  zerlegt. Dazu denken wir uns zunächst die Kraft  $S + D_s$  durch die Länge  $s$  der oberen Rippe dargestellt, zerlegen die Strecke  $AC = s$  (Fig. 237) nach der Richtung von  $S'$  und nach wagerechter Richtung in die Strecken  $AB$  und  $BC$  und hierauf die wagerechte Strecke  $BC$  nach den Richtungen der beiden

von  $m'$  ausgehenden Ringstäbe in die Strecken  $k_i'$  und  $k_r'$ . Die Beiträge der Kraft  $S + D_s$  zu den Belastungen  $L_m'$  und  $R_m'$  des Knotenpunktes  $m'$  sind dann

$$L' = (S + D_s) \frac{k_i'}{s} = \left( \frac{S}{s} + \frac{D}{d} \right) k_i',$$

$$R' = (S + D_s) \frac{k_r'}{s} = \left( \frac{S}{s} + \frac{D}{d} \right) k_r'.$$

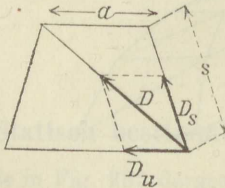


Fig. 236.

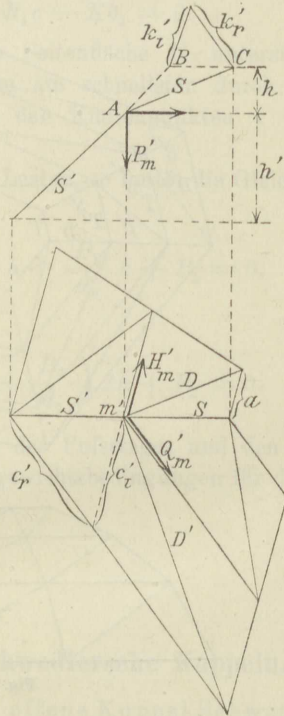


Fig. 237.

Bezeichnet man noch mit  $c_i'$  und  $c_r'$  die Strecken, welche man durch Zerlegung des Grundrisses der Stablänge  $s'$  nach den Richtungen der beiden Ringstäbe gewinnt, so findet man schließlich für den Knotenpunkt  $m'$  der Fig. 237 die Belastungen

$$(31) \quad L_m' = H_m' + \frac{P_m'}{h'} c_i' + \left( \frac{S}{s} + \frac{D}{d} \right) k_i' + \frac{D}{d} a,$$

$$(32) \quad R_m' = Q_m' + \frac{P_m'}{h'} c_r' + \left( \frac{S}{s} + \frac{D}{d} \right) k_r'.$$

Durch diese für sämtliche Knotenpunkte zu berechnenden Lasten  $L'$  und  $R'$  sind die Spannkraft  $T'$  und  $D'$  der Ringstäbe und Diagonalen der zweiten Zone bestimmt. Vergl. Fig. 231 auf Seite 285.

Die Berechnung der Spannkraft  $S'$  erfolgt am einfachsten mit Hilfe der Bedingung, daß die Summe der im Punkte  $m'$  angreifenden Seitenkräfte gleich Null sein muß. Es ergibt sich die Gleichung

$$S' \frac{h'}{s'} + D' \frac{h'}{d'} + P_m' = S \frac{h}{s} + D \frac{h}{d}$$

und daraus:

$$(33) \quad \frac{S'}{s'} = -\frac{P_m'}{h'} - \frac{D'}{d'} + \frac{h}{h'} \left( \frac{S}{s} + \frac{D}{d} \right).$$

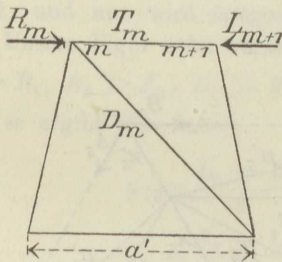


Fig. 238.

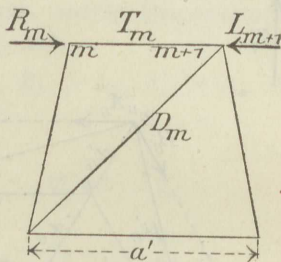


Fig. 239.

Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir die Bezeichnungen ein

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{S}{s} = x, & \frac{S'}{s'} = x' \\ \frac{D}{d} = \mu, & \frac{D'}{d'} = \mu' \\ \frac{P}{h} = \gamma, & \frac{P'}{h'} = \gamma' \end{cases}$$

und erhalten dann

$$(35) \quad L_m' = H_m' + \gamma_m' c_i' + (x + \mu) k_i' + \mu a,$$

$$(36) \quad R_m' = Q_m' + \gamma_m' c_r' + (x + \mu) k_r',$$

$$(37) \quad x' = -\gamma_m' - \mu' + \frac{h}{h'} (x + \mu).$$

Bei der Ableitung dieser Formeln haben wir vorausgesetzt, daß am Knotenpunkte  $m'$  eine linkssteigende Diagonale  $D$  und eine linkssteigende Diagonale  $D'$  angreift. In der Regel werden aber die Dia-



gonalen nur als Zugstäbe konstruiert. Es erhält dann jedes Fach zwei sich kreuzende, abwechselnd in Tätigkeit tretende Diagonalen.

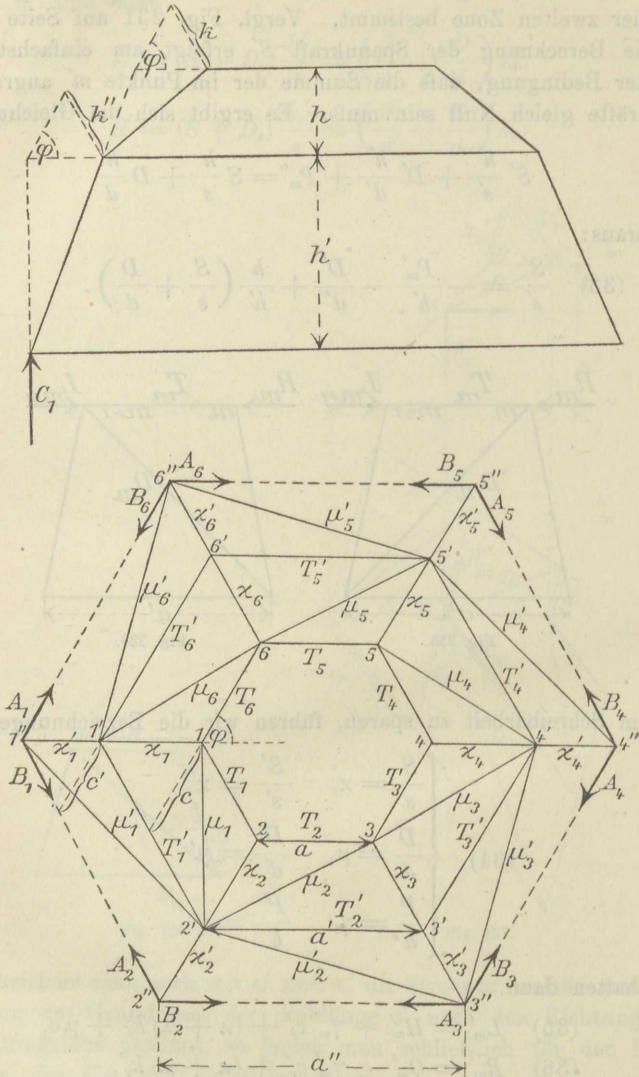


Fig. 240.

Ist für das  $m$ te Fach der obersten Zone  $L_{m+1} > R_m$ , so wird die linkssteigende Diagonale gespannt, und es ergibt sich (Fig. 238)

$$(38) \quad \mu_m = \frac{D_m}{d_m} = \frac{L_{m+1} - R_m}{a'}, \quad T_m = -L_{m+1}.$$

Ist dagegen  $R_m > L_{m+1}$ , so wird die rechtssteigende Diagonale gespannt, und man findet (Fig. 239)

$$(39) \quad \mu_m = \frac{D_m}{d_m} = \frac{R_m - L_{m+1}}{a'}, \quad T_m = -R_m.$$

Für die zweite Zone sind die  $L$  und  $R$  zu ersetzen durch die  $L'$  und  $R'$ , ferner  $a'$  durch  $a''$ .

Den Gang der Berechnung einer solchen Schwedlerkuppel wollen wir nun an der in Fig. 240 dargestellten regelmäßigen 6-Eck-Kuppel erläutern. Es ist  $c'_i = c'_r = c'$ ,  $c'_i = c'_r = c$ , und  $k'_i = k'_r = k'$ . Für die Knotenpunkte des obersten Ringes werden die Lasten

$$L_m = H_m + \gamma_m c \text{ und}$$

$$R_m = Q_m + \gamma_m c \quad (m = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

berechnet, und nun wird festgestellt, welche Diagonalen in Tätigkeit treten. Unsere Figur setzt voraus, daß

$L_2 > R_1$ ,  $R_2 > L_3$ ,  $L_4 > R_3$ ,  $R_4 > L_5$ ,  $R_5 > L_6$ ,  $L_1 > R_6$  ist, und es ergibt sich daher:

$$\mu_1 = \frac{L_2 - R_1}{a'}, \quad T_1 = -L_2$$

$$\mu_2 = \frac{R_2 - L_3}{a'}, \quad T_2 = -R_2$$

$$\mu_3 = \frac{L_4 - R_3}{a'}, \quad T_3 = -L_4$$

$$\mu_4 = \frac{R_4 - L_5}{a'}, \quad T_4 = -R_4$$

$$\mu_5 = \frac{R_5 - L_6}{a'}, \quad T_5 = -R_5$$

$$\mu_6 = \frac{L_1 - R_6}{a'}, \quad T_6 = -L_1.$$

Setzt man nun an jedem Knotenpunkte des oberen Ringes die Summe der lotrechten Seitenkräfte gleich Null, so erhält man für die Rippen der obersten Zone die Werte

$$\begin{array}{l|l} x_1 = -\gamma_1 - \mu_1 & x_4 = -\gamma_4 \\ x_2 = -\gamma_2 & x_5 = -\gamma_5 - \mu_4 \\ x_3 = -\gamma_3 - \mu_2 - \mu_3 & x_6 = -\gamma_6 - \mu_5 - \mu_6. \end{array}$$

Damit ist die Berechnung der obersten Zone erledigt.

Jetzt ermittelt man für die Knotenpunkte 1', 2', 3', 4', 5', 6' der zweiten Zone nach den Formeln (35) und (36) die Kräfte

$$\begin{aligned}
 L_1' &= H_1' + \gamma_1' c' + k' (x_1 + \mu_6) & + a \mu_6 \\
 R_1' &= Q_1' + \gamma_1' c' + k' (x_1 + \mu_6) \\
 L_2' &= H_2' + \gamma_2' c' + k' (x_2 + \mu_1 + \mu_2) & + a \mu_1 \\
 R_2' &= Q_2' + \gamma_2' c' + k' (x_2 + \mu_1 + \mu_2) & + a \mu_2 \\
 L_3' &= H_3' + \gamma_3' c' + k' x_3 \\
 R_3' &= Q_3' + \gamma_3' c' + k' x_3 \\
 L_4' &= H_4' + \gamma_4' c' + k' (x_4 + \mu_3 + \mu_4) & + a \mu_3 \\
 R_4' &= Q_4' + \gamma_4' c' + k' (x_4 + \mu_3 + \mu_4) & + a \mu_4 \\
 L_5' &= H_5' + \gamma_5' c' + k' (x_5 + \mu_5) \\
 R_5' &= Q_5' + \gamma_5' c' + k' (x_5 + \mu_5) & + a \mu_5 \\
 L_6' &= H_6' + \gamma_6' c' + k' x_6 \\
 R_6' &= Q_6' + \gamma_6' c' + k' x_6.
 \end{aligned}$$

Nun wird festgestellt, welche Diagonalen der zweiten Zone gespannt werden. Fig. 240 setzt voraus:

$$R_1' > L_2', \quad L_3' > R_2', \quad R_3' > L_4', \quad R_4' > L_5', \quad L_6' > R_5', \quad R_6' > L_1'.$$

Es ergeben sich also für die Diagonalen und Ringstäbe der zweiten Zone die Werte

$$\begin{aligned}
 \mu_1' &= \frac{R_1' - L_2'}{a''}, & T_1' &= -R_1' \\
 \mu_2' &= \frac{L_3' - R_2'}{a''}, & T_2' &= -L_3' \\
 \mu_3' &= \frac{R_3' - L_4'}{a''}, & T_3' &= -R_3' \\
 \mu_4' &= \frac{R_4' - L_5'}{a''}, & T_4' &= -R_4' \\
 \mu_5' &= \frac{L_6' - R_5'}{a''}, & T_5' &= -L_6' \\
 \mu_6' &= \frac{R_6' - L_1'}{a''}, & T_6' &= -R_6'.
 \end{aligned}$$

Indem man nun für jeden der Knotenpunkte 1', 2', ... die Summe der lotrechten Seitenkräfte gleich Null setzt, erhält man für die Rippen mit der zur Abkürzung eingeführten Bezeichnung  $h: h' = \varepsilon$  die Werte [vergl. Formel (37)]:

$$\begin{aligned}
 x_1' &= -\gamma_1' - \mu_6' & + \varepsilon (x_1 + \mu_6) \\
 x_2' &= -\gamma_2' - \mu_1' - \mu_2' & + \varepsilon (x_2 + \mu_1 + \mu_2) \\
 x_3' &= -\gamma_3' & + \varepsilon x_3 \\
 x_4' &= -\gamma_4' - \mu_3' & + \varepsilon (x_4 + \mu_3 + \mu_4) \\
 x_5' &= -\gamma_5' - \mu_4' - \mu_5' & + \varepsilon (x_5 + \mu_5) \\
 x_6' &= -\gamma_6' & + \varepsilon x_6.
 \end{aligned}$$



Damit ist auch die Berechnung der zweiten Zone erledigt. Und in der gleichen Weise ließen sich die Spannkkräfte in einer dritten, vierten u. s. w. Zone ermitteln.

Zur Untersuchung der Stützenwiderstände übergehend, nehmen wir zunächst an, es seien 1'', 2'', 3'', . . . feste Stützpunkte. Jeden Stützenwiderstand bestimmen wir nach Fig. 240 durch drei Seitenkräfte  $A, B, C$ . Die Widerstände  $C$  mögen positiv sein, wenn sie von unten nach oben gerichtet sind. Nach Ermittlung der Strecke  $k''$  in Fig. 240 finden wir

$$\begin{aligned} A_1 &= -k''(x_1' + \mu_1') \\ B_1 &= -k''(x_1' + \mu_1') - \mu_1'a' \\ A_2 &= B_2 = -k''x_2' \\ A_3 &= -k''(x_3' + \mu_2' + \mu_3') - \mu_2'a' \\ B_3 &= -k''(x_3' + \mu_2' + \mu_3') - \mu_3'a' \\ A_4 &= -k''(x_4' + \mu_4') \\ B_4 &= -k''(x_4' + \mu_4') - \mu_4'a' \\ A_5 &= B_5 = -k''x_5' \\ A_6 &= -k''(x_6' + \mu_5' + \mu_6') - \mu_5'a' \\ B_6 &= -k''(x_6' + \mu_5' + \mu_6') - \mu_6'a' \\ C_1 &= -h'(x_1' + \mu_1') & C_4 &= -h'(x_4' + \mu_4') \\ C_2 &= -h'x_2' & C_5 &= -h'x_5' \\ C_3 &= -h'(x_3' + \mu_2' + \mu_3') & C_6 &= -h'(x_6' + \mu_5' + \mu_6'). \end{aligned}$$

Lasten  $H'', Q'', P''$ , welche in den Punkten 1'', 2'', 3'', . . . angreifen, werden von diesen Stützpunkten unmittelbar aufgenommen.

In Fig. 241 haben wir noch den Fall eines die Stützpunkte verbindenden Fußringes dargestellt und dabei angenommen, daß die Stützpunkte 1'', 2'', 3'' . . . in Geraden geführt werden, die rechtwinklig zu den Stabachsen 1''—2'', 2''—3'', 3''—4'', . . . sind. An den Führungen treten die Widerstände  $F_1, F_2, F_3$  . . . auf. Außerdem sollen noch Lasten  $H''_1, H''_2, H''_3$  . . . berücksichtigt werden. Lasten  $Q''$  werden ohne weiteres von den Führungen aufgenommen. Die Spannkkräfte in den Stäben des Fußringes seien  $T''_1, T''_2$ , . . . Die Zurückführung dieses Falles auf den vorhin behandelten Fall fester Stützpunkte geschieht mit Hilfe der Gleichungen

$$(I) \quad \begin{cases} T_6'' + H_1'' = A_1 \\ T_1'' + H_2'' = A_2 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

und

$$(II) \quad \begin{cases} T_1'' + F_1 = B_1 \\ T_2'' + F_2 = B_2 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

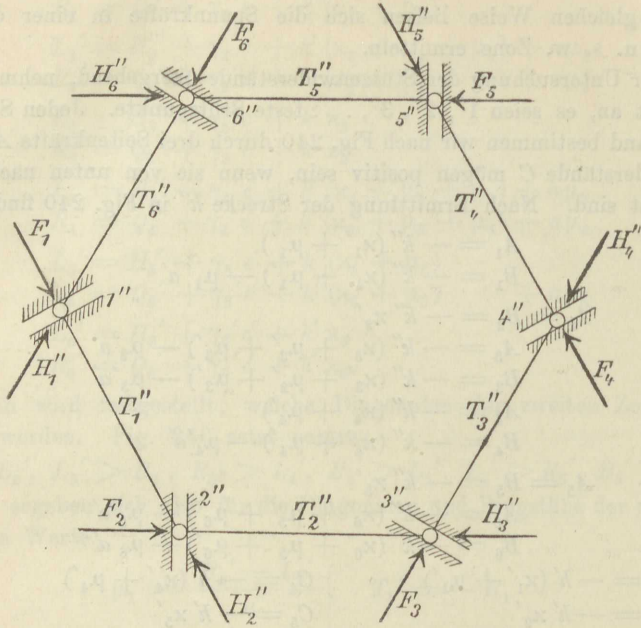


Fig. 241.

Die Gleichungen (I) liefern die Spannkkräfte  $T''$  und die Gleichungen (II) die Stützenwiderstände  $F$ .

Zahlenbeispiel. Für den in Fig. 242 dargestellten Fall einer regelmäßigen 6-Eck-Kuppel mit steifen Diagonalen sollen die Spannkkräfte so dargestellt werden, daß der Einfluß jeder einzelnen Last erkennbar ist. Mit den in der Figur angegebenen Zahlenwerten erhält man für die obere Zone:

$$\begin{aligned} L_2 &= H_2 + 279 \gamma_2 \\ R_1 &= Q_1 + 279 \gamma_1 \\ T_1 &= -L_2 \end{aligned}$$

$$\mu_1 = \frac{L_2 - R_1}{588} = +0,00170 (H_2 - Q_1) + 0,474 (\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$\mu_2 = +0,00170 (H_3 - Q_2) + 0,474 (\gamma_3 - \gamma_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_6 = +0,00170 (H_1 - Q_6) + 0,474 (\gamma_1 - \gamma_6)$$

$$x_1 = -\mu_1 - \gamma_1 = -0,00170 (H_2 - Q_1) - 0,474 (\gamma_2 - \gamma_1) - \gamma_1.$$





Mit Hilfe dieser Formeln berechnet man die Werte  $\alpha, \mu, \alpha', \mu'$  für die gefährlichste Belastungsweise und aus ihnen dann die Spannkraften  $S = \alpha s, S' = \alpha' s', D = \mu d, D' = \mu' d'$ .

2) Berechnung der in Fig. 242 dargestellten Kuppel nach dem Verfahren von Mohr. Da es stets lehrreich ist, ein und dieselbe Aufgabe nach verschiedenen Verfahren zu behandeln, so möge noch die von Mohr für dieses Zahlenbeispiel im Zentrablatt der Bauverwaltung 1902, Seite 205, angegebene Lösung wiedergegeben werden.

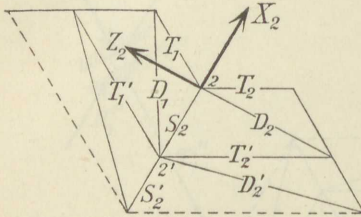


Fig. 243.

Jede Knotenlast ist in drei Seitenkräfte  $X, Y, Z$  zerlegt; die wagerechte Last  $X$  zeigt in der Richtung des Halbmessers nach innen, die lotrechte Last  $Y$  nach unten;  $Z$  ist zur Ebene  $XY$  rechtwinklig gerichtet und zeigt für einen außen stehenden Beschauer nach links, Fig. 243. Das folgende Verzeichnis enthält die Kosinusse der Winkel, die von den positiven Lasten  $X, Y, Z$  mit den von den Knoten 2 und 2' ausgehenden Stabstrecken eingeschlossen werden. Um

mit ganzen Zahlen rechnen zu können, ist das Hundertfache der Kosinuswerte angegeben.

	Knoten 2				Knoten 2'					
	$T_2$	$T_1$	$D_2$	$S_2$	$S_2$	$D_1$	$T_2'$	$T_1'$	$D_2'$	$S_2'$
$X$	+ 50	+ 50	+ 3	- 89	+ 89	+ 82	+ 50	+ 50	+ 24	- 71
$Y$	0	0	+ 27	+ 45	- 45	- 27	0	0	+ 29	+ 71
$Z$	- 87	+ 87	- 96	0	0	+ 51	- 87	+ 87	- 93	0

Erteilt man dem Knotenpunkte 2 gleichzeitig drei Geschwindigkeiten, die in der Richtung und in dem Sinne der äußeren Kräfte  $X, Y, Z$  die Größen  $\xi, \eta, \zeta$  haben, so erhält man für den Knoten 2 die allgemeine Gleichgewichtsbedingung

$$0 = 100 (\xi X_2 + \eta Y_2 + \zeta Z_2) + (50 \xi - 87 \zeta) T_2 + (50 \xi + 87 \zeta) T_1 + (3 \xi + 27 \eta - 96 \zeta) D_2 + (- 89 \xi + 45 \eta) S_2.$$

Wir wählen zunächst die Werte  $\xi, \eta, \zeta$  so, daß die Geschwindigkeiten der Kräfte  $T_2$  und  $S_2$  verschwinden, diejenige der Kraft  $T_1$  aber gleich - 10000 wird.

$$\begin{aligned} 50 \xi - 87 \zeta &= 0 \\ - 89 \xi + 45 \eta &= 0 \\ 50 \xi + 87 \zeta &= - 10000. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen drücken aus, daß die resultierende Geschwindigkeit des Knotens 2 zu den beiden Kräften  $T_2$  und  $S_2$  rechtwinklig steht. Da die drei Kräfte  $T_2, D_2, S_2$  in einer Ebene liegen, so ist infolgedessen auch die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft  $D_2$  gleich Null. Die Gleichungen ergeben:

$$\xi = - 100, \eta = - 198, \zeta = - 57.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (I) erhält man

$$(II) \quad 100 T_1 = -100 X_2 - 198 Y_2 - 57 Z_2$$

und nach demselben Bildungsgesetz

$$(III) \quad 100 T_2 = -100 X_3 - 198 Y_3 - 57 Z_3.$$

Um ferner  $D_2$  durch Gleichung (I) zu bestimmen, lassen wir die Geschwindigkeit dieser Kraft  $= -10000$  und die Geschwindigkeiten der beiden Kräfte  $T_1$  und  $S_2$  gleich Null werden:

$$3 \xi + 27 \eta - 96 \zeta = -10000$$

$$50 \xi + 87 \zeta = 0$$

$$-89 \xi + 45 \eta = 0.$$

Wir erhalten

$$\xi = -89, \eta = -176, \zeta = +51,$$

also durch Gleichung (I)

$$0 = -89 X_2 - 176 Y_2 + 51 Z_2 - 89 T_2 - 100 D_2$$

und in Verbindung mit Gleichung (III)

$$(IV) \quad 100 D_2 = 89 (X_3 - X_2) + 176 (Y_3 - Y_2) + 51 (Z_3 + Z_2).$$

Dieses Bildungsgesetz liefert auch

$$(V) \quad 100 D_1 = 89 (X_2 - X_1) + 176 (Y_2 - Y_1) + 51 (Z_2 + Z_1).$$

Man bestimmt endlich die letzte Kraft  $S_2$  durch Gleichung (I), indem man die Geschwindigkeit dieser Kraft  $= -10000$  und die Geschwindigkeiten der beiden Kräfte  $T_1$  und  $T_2$  gleich Null setzt:

$$-89 \xi + 45 \eta = -10000$$

$$50 \xi - 87 \zeta = 0$$

$$50 \xi + 87 \zeta = 0.$$

Es wird also

$$\xi = 0, \eta = -222, \zeta = 0,$$

ferner nach Gleichung (I):

$$0 = -222 Y_1 - 60 D_2 - 100 S_2$$

und nach Gleichung (IV)

$$(VI) \quad 100 S_2 = 53 (X_2 - X_3) - 116 Y_2 - 106 Y_3 - 31 (Z_2 + Z_3).$$

Damit ist die Berechnung der ersten Zone erledigt.

Nun bildet man für den Knotenpunkt 2' mit Hilfe des Kosinusverzeichnisses die allgemeine Gleichgewichtsbedingung

$$(VII) \quad 0 = 100 (\xi X_2' + \eta Y_2' + \zeta Z_2') + (89 \xi - 45 \eta) S_2 + (82 \xi - 27 \eta + 51 \zeta) D_1 \\ + (50 \xi - 87 \zeta) T_2' + (50 \xi + 87 \zeta) T_1' + (24 \xi + 29 \eta - 93 \zeta) D_2' \\ + (-71 \xi + 71 \eta) S_2'.$$

Um hieraus die Stabkraft  $T_1'$  zu berechnen, ist die Geschwindigkeit dieser Kraft  $= -10000$  und die der drei anderen unbekannten Kräfte gleich Null zu setzen:

$$50 \xi + 87 \zeta = -10000$$

$$50 \xi - 87 \zeta = 0$$

$$-71 \xi + 71 \eta = 0.$$

Demnach ist

$$\xi = -100, \eta = -100, \zeta = -57,$$

also nach Gleichung (VII)

$$0 = -100 X_2' - 100 Y_2' - 57 Z_2' - 44 S_2 - 84 D_1 - 100 T_1'$$

und nach den Gleichungen (V) und (VI)

$$(VIII) \quad 100 T_1' = 23 X_3 + 47 Y_3 + 14 Z_3 - 98 X_2 - 97 Y_2 - 29 Z_2 \\ + 75 X_1 + 148 Y_1 - 43 Z_1 - 100 X_2' - 100 Y_2' - 57 Z_2'.$$

Behufs Berechnung von  $D_2'$  sind  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  so zu wählen, daß

$$24 \xi + 29 \eta - 93 \zeta = -10000$$

$$50 \xi + 87 \zeta = 0$$

$$-71 \xi + 71 \eta = 0$$

wird, u. s. w. Wir überlassen es dem Leser, das Beispiel zu Ende zu rechnen.

2a) Es möge dasselbe Zahlenbeispiel noch nach einem dritten Verfahren behandelt werden. Setzt man für den Knotenpunkt 2 die Summen der nach den Richtungen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  gebildeten Seitenkräfte einzeln gleich Null, so erhält man mit Hilfe des Kosinusverzeichnisses die Gleichungen

$$(a) \quad 100 X_2 + 50 (T_1 + T_2) + 3 D_2 - 89 S_2 = 0$$

$$(b) \quad 100 Y_2 + 27 D_2 + 45 S_2 = 0$$

$$(c) \quad 100 Z_2 + 87 (T_1 - T_2) - 96 D_2 = 0.$$

Da nun  $D_2$ ,  $S_2$ ,  $T_2$  in ein und derselben Ebene liegen, so darf man bei der Berechnung von  $T_1$  einer dieser drei Spannkkräfte einen beliebigen Wert beilegen. Wir setzen  $D_2 = 0$ , führen in Gleichung (a) den aus (b) folgenden Ausdruck

$$S_2 = -\frac{100}{45} Y_2 \text{ ein, und finden dann aus den Gleichungen:}$$

$$(d) \quad \begin{cases} \frac{100}{50} X_2 + T_1 + T_2 + \frac{89}{50} \cdot \frac{100}{45} Y_2 = 0 \\ \frac{100}{87} Z_2 + T_1 - T_2 = 0 \end{cases}$$

den Wert

$$100 T_1 = -100 X_2 - 198 Y_2 - 57 Z_2.$$

Hieraus folgt auch

$$100 T_2 = -100 X_3 - 198 Y_3 - 57 Z_3.$$

Nun ergibt sich aus Gleichung (c) die nur noch die Unbekannte  $D_2$  enthält

$$100 D_2 = +90 (X_3 - X_2) + 179 (Y_3 - Y_2) + 52 (Z_3 + Z_2)^*)$$

und aus Gleichung (b):

$$100 S_2 = 54 (X_2 - X_3) - 114 Y_2 - 108 Y_3 - 31 (Z_2 + Z_3).$$

Ganz ebenso verfährt man am Knotenpunkte 2'.

3) Die in Fig. 244 im Grundriß dargestellte, oben durch acht zu einer Spitze zusammenlaufende Rippen geschlossene Kuppel läßt sich aus der offenen Kuppel wie folgt herleiten. Man schließt die Spitze durch drei Stäbe an den obersten Ring an, fügt die fünf Stäbe  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_4$ ,  $Z_5$  hinzu und beseitigt dafür fünf andere Stäbe. In Fig. 243 sind wir von einer Kuppel ausgegangen, deren Fußring in sämtlichen acht Knotenpunkten in geraden Linien geführt wird. Wir haben drei Führungen und zwei Diagonalen beseitigt. Die weggenommenen Auflagerstäbe und Diagonalen führen wir als Ersatzstäbe wieder ein

\*) Infolge der Abrundungen der Werte  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  weichen die unter 2) gefundenen Ziffern von den jetzt erhaltenen etwas ab. Die jetzt auf kürzerem Wege gewonnenen Werte sind die genaueren.



und berechnen die Unbekannten  $Z_1$  bis  $Z_5$  aus den Bedingungen  $R_3' - L_4' = 0$ ,  $R_7' - R_8' = 0$ ,  $F_1 = 0$ ,  $F_3 = 0$ ,  $F_7 = 0$ .

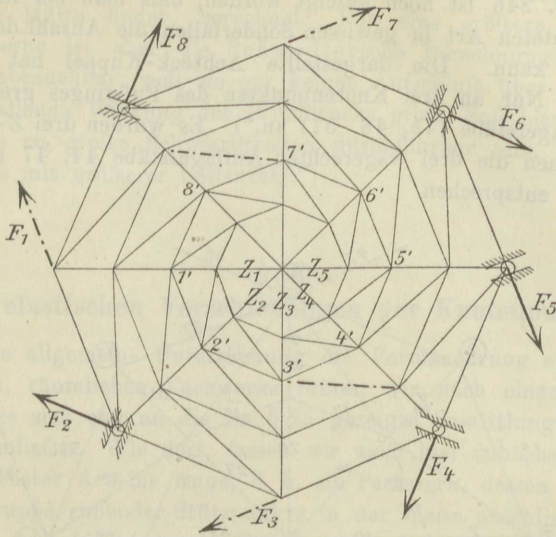


Fig. 244.

Ganz ähnlich wird die in Fig. 245 abgebildete Kuppel mit einem durch vier Querriegel versteiften Schlufsring berechnet. Die Spann-

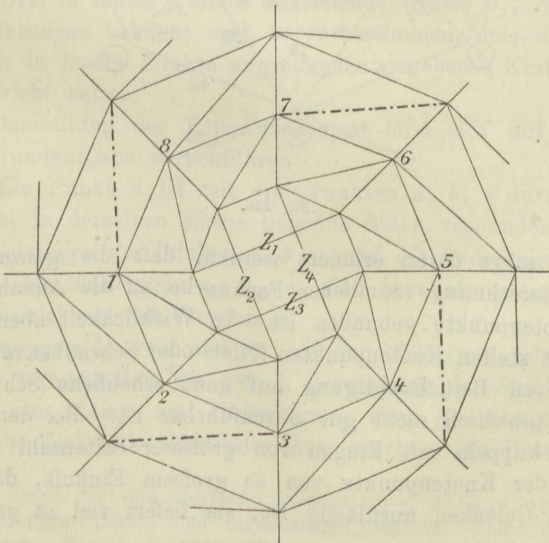


Fig. 245

kräfte  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  der Querriegel ergeben sich aus den Gleichungen  $R_2' - L_3' = 0, R_4' - L_5' = 0, R_6' - L_7' = 0, R_8' - L_1' = 0$ .

In Fig. 246 ist noch gezeigt worden, daß man bei Kuppeln der hier betrachteten Art in gewissen Sonderfällen die Anzahl der  $Z$ -Stäbe erniedrigen kann. Die dargestellte Achteck-Kuppel hat nur zwei Geschosse. Nur an drei Knotenpunkten des Fußringes greifen wagerechte Auflagerstäbe (45, 48, 51) an. Es wurden drei  $Z$ -Stäbe eingeführt, denen die drei wagerechten Auflagerstäbe 44, 47 und 50 als Ersatzstäbe entsprechen.

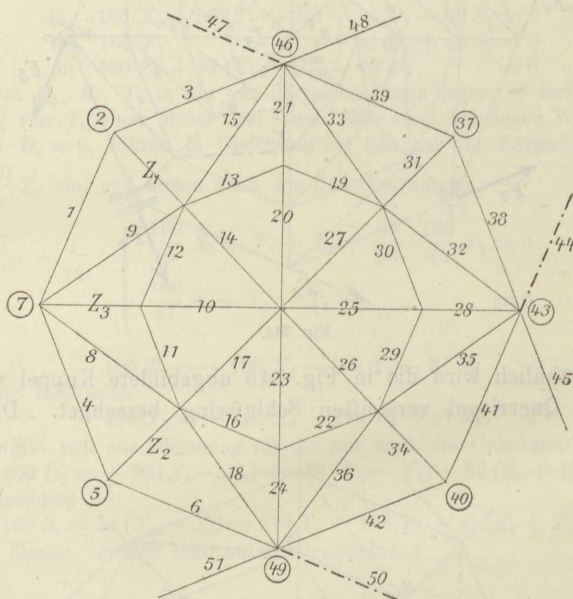


Fig. 246.

4) Es möge daran erinnert werden, daß die ganze hier vorgetragene Berechnung räumlicher Fachwerke an die Annahme gelenkartiger Knotenpunkte gebunden ist. In Wirklichkeit aber haben wir es stets mit steifen Knotenpunkten (Niet- oder Schraubenverbindungen) zu tun, deren Berücksichtigung auf ganz erhebliche Schwierigkeiten stößt und praktisch nicht gut durchführbar ist. Bei den bekannten Schwedlerkuppeln mit Ringen von größerer Seitenzahl ist nun die Steifigkeit der Knotenpunkte von so großem Einfluß, daß die Annahme von Gelenken unzulässig ist; sie liefert viel zu große Spann-

\*) Wir haben hier dieselbe Darstellungsweise gewählt wie im § 26.

kräfte. Flache Kuppeln mit niedriger Laterne werden meistens nach den durch die Erfahrung als genügend sicher bestätigten einfachen Schwedlerschen Formeln die man u. a. in dem bekannten Taschenbuche der Hütte findet, berechnet. Für eine größere Kuppel mit hoher Laterne ist aber die Schwedlersche Berechnungsweise schon deshalb unbrauchbar, weil sie gar keinen Aufschluß über die sehr ins Gewicht fallende Wirkung des Winddrucks gibt. Soll hier die Berechnung ohne zu große Schwierigkeiten durchführbar sein, so vermeide man Ringe mit größerer Seitenzahl.\*)

### § 30.

#### Die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte.

1) Die allgemeine Untersuchung der Formänderung eines statisch bestimmten, räumlichen Fachwerks führen wir nach einem Verfahren aus, welches sich eng an die im § 25 gezeigte Ermittlung der Spannkkräfte anschließt. Wie dort, fassen wir auch hier zunächst ein Fachwerk einfachster Art ins Auge, d. h. ein Fachwerk, dessen Knoten sich an eine Gruppe ruhender Stützpunkte in der Weise anschließen lassen, daß jeder neu hinzutretende Knotenpunkt durch drei Stäbe, deren Achsen nicht in dieselbe Ebene fallen, festgelegt wird. Die Bestimmung der Spannkkräfte eines solchen Fachwerks geschah durch Lösung der einfachen Aufgabe:

Drei in einem Punkte angreifende Kräfte  $S_1, S_2, S_3$ , deren Richtungen bekannt sind, so zu bestimmen, daß sie einer ebenfalls in jenem Punkte angreifenden gegebenen Kraft das Gleichgewicht halten,

und die Darstellung der Formänderungen läßt sich auf die ebenso einfache Grundaufgabe zurückführen:

Ein Punkt  $d$  ist mit drei Punkten  $a, b, c$  durch elastische, nicht in derselben Ebene liegende Stäbe verbunden. Die Verschiebungen der Punkte  $a, b, c$  und die Änderungen  $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$  der Stablängen  $s_1, s_2, s_3$  sind bekannt; gesucht wird die Verschiebung des Punktes  $d$ .

Ein Stabgebilde von anderer als der oben angegebenen Erzeugungsweise verwandelten wir behufs Berechnung der Stabkräfte durch Wegnahme von Stäben und Hinzufügung einer gleichen Anzahl neuer Stäbe in ein Fachwerk einfachster Art, brachten die Spannkkräfte  $Z_a$ ,

\*) Die Ringe der vom Verfasser konstruierten, 35,65 m weit gespannten Kuppel des Berliner Domes sind regelmäßige Achtecke. Siehe Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1898, Seite 1205.



$Z_b, Z_c \dots$  der beseitigten Stäbe als äußere Kräfte am Fachwerk an, drückten hierauf die Spannkkräfte ( $Y$ ) der Ersatzstäbe durch die gegebenen Lasten und die Kräfte  $Z$  aus und setzten schließlich die Spannkkräfte  $Y=0$ . Wir gewannen hierdurch die zur Berechnung der  $Z$ -Kräfte erforderlichen Gleichungen.

Im Anschluß hieran läßt sich auch die Darstellung der Formänderungen für den Fall verschwindend kleiner  $\Delta s$ , auf den wir uns hier beschränken, verallgemeinern.

Die Längen der beseitigten Stäbe seien  $z_a, z_b, z_c \dots$ , die Längen der Ersatzstäbe  $y', y'', y''' \dots$ . Schreibt man den letzteren zunächst die willkürlichen Änderungen  $\Delta y', \Delta y'', \Delta y''' \dots$  zu, so erhält man für die Verschiebung  $\delta_m$ , welche irgend ein Knotenpunkt  $m$  nach einer bestimmten Richtung erfährt (d. i. die Projektion der Verschiebung des Punktes  $m$  auf jene Richtung), einen Ausdruck von der Form:

(40)  $\delta_m = \delta_{m0} + \delta_m' \Delta y' + \delta_m'' \Delta y'' + \delta_m''' \Delta y''' + \dots$ ,  
worin  $\delta_{m0}$  den Wert von  $\delta_m$  für den Fall bedeutet, daß die Längenänderungen  $\Delta y$  sämtlicher Ersatzstäbe gleich Null angenommen werden, während  $\delta_m', \delta_m'' \dots$  die den Zuständen  $\Delta y' = 1, \Delta y'' = 1, \dots$  entsprechenden Werte von  $\delta_m$  vorstellen. Und in gleicher Weise ergeben sich für die Änderungen  $\Delta z_a, \Delta z_b, \dots$  der Knotenpunktentfernungen  $z_a, z_b \dots$  die Ausdrücke

$$(41) \quad \begin{cases} \Delta z_a = \Delta_0 z_a + \Delta' z_a \Delta y' + \Delta'' z_a \Delta y'' + \Delta''' z_a \Delta y''' + \dots \\ \Delta z_b = \Delta_0 z_b + \Delta' z_b \Delta y' + \Delta'' z_b \Delta y'' + \Delta''' z_b \Delta y''' + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Da nun aber die Längenänderungen  $\Delta z_a, \Delta z_b \dots$  der Stäbe  $z_a, z_b \dots$  bekannt sind, so lassen sich die  $\Delta y$  mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen berechnen, und damit sind dann auch die Verschiebungen  $\delta_m$  bestimmt.

Dabei ist zu beachten, daß die Verschiebungen  $\delta_m', \delta_m'', \dots$   $\Delta' z_a, \Delta' z_b, \dots$  von den Lasten und Temperaturänderungen unabhängig sind, und daß nur die  $\delta_0$  und  $\Delta_0 z$  für jeden neuen Belastungs- und Temperaturzustand von neuem berechnet werden müssen.

Wir haben in der vorstehenden Darstellung unseres Verfahrens der Kürze wegen nur von Stäben gesprochen. Stützenwiderstände müssen also in der bekannten Weise durch Auflagerstäbe ersetzt werden, deren Längenänderungen gleich den Verschiebungen der Stützpunkte sind. Nach festen Punkten führende Ersatzstäbe spielen die Rolle von Auflagerstäben. Anstatt zu sagen, die Länge  $y$  eines Stabes, der einen Fachwerksknoten  $a$  mit einem festen Punkt  $f$  verbindet, ändere sich um  $\Delta y$ , darf man natürlich auch sagen: die Projektion

der Verschiebung des Punktes  $a$  auf die feste Richtung  $fa$  ist gleich  $\Delta y$ . Die Auffassung unbekannter äußerer Kräfte als Stabkräfte und der Verschiebungen ihrer Angriffspunkte als Längenänderungen von Stäben gestattet aber eine sehr kurze Aussprache der allgemeinen Gesetze, da man es nur mit einer Art von Unbekannten zu tun hat.

2) Die naheliegendste und älteste Lösung der auf Seite 304 angeführten Grundaufgabe ist wohl die folgende.

Sind  $x_a, y_a, z_a$  und  $\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a$  die rechtwinkligen Koordinaten zweier durch einen starren Stab verbundenen Punkte und  $s_1$  die Länge des Stabes  $da$ , so erhält man durch Differenzieren der Gleichung

$$(42) \quad (x_a - \bar{x}_a)^2 + (y_a - \bar{y}_a)^2 + (z_a - \bar{z}_a)^2 = s_1^2$$

die Bedingung

$$(43) \quad (x_a - \bar{x}_a)(\Delta x_a - \Delta \bar{x}_a) + (y_a - \bar{y}_a)(\Delta y_a - \Delta \bar{y}_a) + (z_a - \bar{z}_a)(\Delta z_a - \Delta \bar{z}_a) = s_1 \cdot \Delta s_1.$$

Ist also  $d$  durch drei Stäbe an die Punkte  $a, b, c$  angeschlossen, deren Verschiebungen  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  bekannt sind, so stehen zur Berechnung der Verschiebungen  $\Delta x_a, \Delta y_a, \Delta z_a$  drei lineare Gleichungen zur Verfügung.

3) Zweckmäßiger ist in der Regel die folgende Lösung der Grundaufgabe; sie bestimmt jede Verschiebung nach einer festen Richtung mit Hilfe einer einzigen Gleichung.

Wird die Projektion  $\delta$  der Verschiebung des Punktes  $d$  auf eine feste Richtung  $d-r$  gesucht, so belaste man den Punkt  $d$  mit einer von  $d$  nach  $r$  gerichteten Kraft  $P=1$ , bringe in den Punkten  $a, b, c$  die mit den Achsen der Stäbe  $s_1, s_2, s_3$  zusammenfallenden, der Kraft  $P=1$  das Gleichgewicht haltenden Kräfte  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$  (welche nicht mit den wirklichen Spannkraften  $S_1, S_2, S_3$  zu verwechseln sind) an und berechne  $\delta$  mit Hilfe des Gesetzes der virtuellen Verrückungen. Bedeuten  $\delta_a, \delta_b, \delta_c$  die Projektionen der Verschiebungen der Punkte  $a, b, c$  auf die Geraden  $da, db, dc$ , so ergibt sich die Gleichung

$$(44) \quad 1 \cdot \delta + \bar{S}_1 \delta_a + \bar{S}_2 \delta_b + \bar{S}_3 \delta_c = \bar{S}_1 \Delta s_1 + \bar{S}_2 \Delta s_2 + \bar{S}_3 \Delta s_3,$$

welche nur die Unbekannte  $\delta$  enthält.

Ist der Stabbüschel auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x, y, z$  bezogen, und sind die Seitenverschiebungen der Punkte  $a, b, c, d$

nach der Richtung der  $x$ -Achse:  $\xi_a, \xi_b, \xi_c, \xi_d$ ,

" " " "  $y$ - "  $\eta_a, \eta_b, \eta_c, \eta_d$ ,

" " " "  $z$ - "  $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c, \zeta_d$ ,

sind ferner  $S_{1 \cdot x}, S_{1 \cdot y}, S_{1 \cdot z}$  die den Achsen  $x, y, z$  parallelen Seitenkräfte von  $S_1$  u. s. w., so ist

$$(45) \quad S \delta_a = S_{1 \cdot x} \xi_a + S_{1 \cdot y} \eta_a + S_{1 \cdot z} \zeta_a$$



und in gleicher Weise lassen sich auch die Glieder  $\overline{S}_2 \delta_b$ ,  $\overline{S}_3 \delta_c$  umformen. Indem man nun Gleichung (14) der Reihe nach für eine nach den Richtungen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  angreifende Kraft  $P = 1$  anschreibt, findet man die gesuchten Seitenverschiebungen  $\xi_d$ ,  $\eta_d$ ,  $\zeta_d$  des Punktes  $d$ . Die Einführung rechtwinkliger Koordinaten ist aber nicht erforderlich; sie ist sogar nicht einmal immer zweckmäßig. Man kann die Verschiebung des Punktes  $d$  auch durch drei beliebig gerichtete Projektionen  $\delta$  bestimmen.

### § 31.

#### Kinematische Ermittlung der Stabkräfte.

1) Auf ein statisch bestimmtes Fachwerk mögen in den Punkten 1, 2, . . .  $m$  . . . gegebene äußere Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ , . . .  $P_m$  . . . von beliebiger Richtung wirken. Es soll die Spannkraft  $S_{ik}$  irgend eines Stabes  $ik$ , dessen Länge  $= s_{ik}$  sei, in der Form

$$S_{ik} = p_1 P_1 + p_2 P_2 + \dots + p_m P_m + \dots$$

dargestellt werden, wo  $p_1$ ,  $p_2$ , . . .  $p_m$  . . . Zahlen bedeuten, welche von den Lasten  $P$  unabhängig sind und den Namen Einfluszahlen führen.

Zur Lösung dieser Aufgabe verwandeln wir das steife Fachwerk durch Herausnahme des Stabes  $ik$  in eine zwangsläufige kinematische Kette, bringen in den Punkten  $i$  und  $k$  zur Wiederherstellung des gestörten Gleichgewichts die Kräfte  $S_{ik}$  als äußere Kräfte an, schreiben nun dem Punktepaar  $ik$  eine verschwindend kleine gegenseitige Verschiebung  $\Delta s_{ik}$  zu, ermitteln die hierdurch bedingten Verrückungen sämtlicher Knotenpunkte und wenden schließlich auf diesen Bewegungszustand das Gesetz der virtuellen Verrückungen an. Wir erhalten dann die Gleichung

$$(46) \quad S_{ik} \Delta s_{ik} = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_m \delta_m + \dots,$$

in welcher  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , . . . die Projektionen der Verschiebungen der Punkte 1, 2, . . . auf die Richtungen von  $P_1$ ,  $P_2$ , . . .  $P_m$ , . . . bedeuten und finden die gesuchten Einfluszahlen mittels der Beziehung

$$p_m = \frac{\delta_m}{\Delta s_{ik}}.$$

Die Aufgabe der Berechnung der Einfluszahlen ist hiernach nur ein einfacher Sonderfall der im vorigen Abschnitt behandelten Darstellung der elastischen Verschiebungen. Dort handelte es sich um die Ortsveränderung der Knotenpunkte infolge von Längenänderungen sämt-



licher Stäbe; hier wird nach dem Einfluß einer einzigen willkürlichen Längenänderung  $\Delta s_{ik}$  gefragt. Setzt man  $\Delta s_{ik} = 1$ , so erhält man

$$p_m = \delta_m.$$

2) Das kinematische Verfahren ist besonders vorteilhaft für die Berechnung von solchen Fachwerken, die durch Beseitigung von  $n$  Stäben, deren Längen  $z_1, z_2 \dots z_n$  seien, und durch Einfügung von  $n$  Ersatzstäben in Fachwerke der einfachsten Art verwandelt werden. Man schreibe den Ersatzstäben zunächst willkürliche Längenänderungen  $\Delta y$  zu, und stelle nach § 29 die Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte und die in ihrem Gefolge auftretenden Änderungen  $\Delta z_1, \Delta z_2, \dots \Delta z_n$  der Knotenpunktentfernungen  $z_1, z_2, \dots z_n$  als Funktionen der Werte  $\Delta y$  dar. Zwischen den  $n$  willkürlichen Werten  $\Delta y$  und den  $n$  Werten  $\Delta z$  bestehen  $n$  lineare Gleichungen.

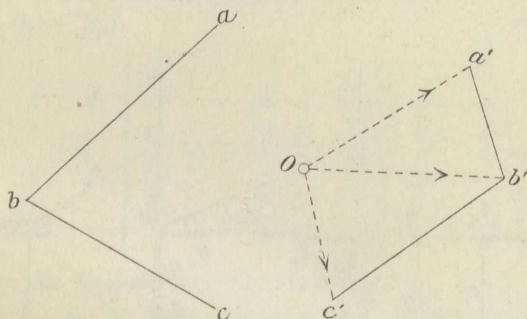


Fig. 247.

Wählt man nun

$$\Delta z_1 = 1, \Delta z_2 = \Delta z_3 = \Delta z_4 = \dots = \Delta z_n = 0,$$

so lassen sich mit Hilfe dieser Bedingungen diejenigen besonderen Werte jener  $n$  Verschiebungen  $\Delta y$  berechnen, welche den Bewegungszustand einer kinematischen Kette bestimmen, in die das Fachwerk durch die Beseitigung eines einzigen Stabes, des Stabes  $z_1$  verwandelt wird. Zwischen der Spannkraft  $Z_1$  des Stabes  $z_1$ , den gegebenen äußeren Kräften  $K, P, Q, \dots$  und den Projektionen der Verschiebungen  $k, p, q, \dots$  der Angriffspunkte dieser Kräfte auf die Richtungen dieser Kräfte besteht dann die Gleichung

$$Z_1 = Kk + Pp + Qq + \dots$$

Hat man auf diese Weise die Kräfte  $Z$  berechnet, so erfolgt die Ermittlung der übrigen Stabkräfte und der Stützenwiderstände in der

Regel am schnellsten mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte.

In den folgenden Beispielen werden wir die Verschiebungen nach dem im § 29 unter 3) angegebenen Verfahren berechnen. Für die Knotenpunkte der ebenen Fußringe soll von dem Satze Gebrauch gemacht werden: Stellt man die verschwindend kleinen Verrückungen der Endpunkte  $a$  und  $b$  eines starren Stabes nach Größe und Richtung durch die Strahlen  $Oa'$  und  $Ob'$  dar, Fig. 247, so muß  $a'b' \perp ab$  sein, weil die Projektionen von  $Oa'$  und  $Ob'$  auf die Stabachse gleich groß sein müssen. Sind also die Verschiebungen  $Oa'$  und  $Ob'$  der Endpunkte zweier im Knoten  $b$  zusammenhängenden Stäbe bekannt, so findet man die Verschiebung  $Ob'$  des Punktes  $b$  mit Hilfe von  $a'b' \perp ab$  und  $c'b' \perp cb$ .

3) Erstes Beispiel. Es liege das in Fig. 248 im Grundriss dargestellte Fachwerk (System der von Zimmermann konstruierten

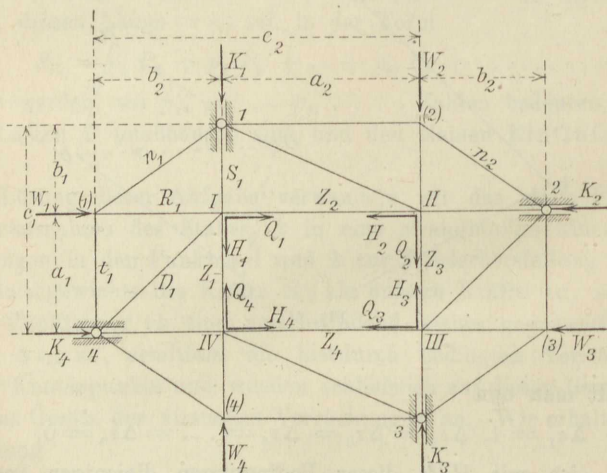


Fig. 243.

Reichstagskuppel) vor. In den Knotenpunkten I, II, III, IV greifen lotrechte Lasten  $P_1, P_2, \dots$  und wagerechte Lasten  $H_1, Q_1, H_2, Q_2, \dots$  an, in den Knotenpunkten des Fußringes wagerechte Lasten  $W_1, K_1, W_2, K_2, \dots$ . Die Höhe des Fachwerkes sei  $h$ .

Es werden die vier Stäbe des oberen Ringes beseitigt und dafür vier Bewegungsfreiheiten eingetauscht. Als vorläufig willkürliche Verschiebungen sollen die Verrückungen  $k_1, k_2, k_3, k_4$  der in Graden geführten Fußpunkte 1, 2, 3, 4 im Sinne der daselbst angreifenden gegebenen Lasten  $K_1, K_2, K_3, K_4$  eingeführt werden.

Durch  $k_1$  und  $k_4$  ist die Verschiebung des Stützpunktes (1) bestimmt. Stellt man  $k_1$  und  $k_4$  durch die Strecken  $O1'$  und  $O4'$  dar (Fig. 249), so ist die Verschiebung  $w_1 = O(1)'$  von (1) durch die Bedingung  $\overline{1'(1)'} \perp \overline{1(1)}$  gegeben.

Man findet

$$[1] \quad w_1 = -k_1 \frac{b_1}{b_2}, \quad w_2 = -k_2 \frac{b_2}{b_1}, \quad w_3 = -k_3 \frac{b_1}{b_2}, \quad w_4 = -k_4 \frac{b_2}{b_1}$$

und ist nun im stande, die Verschiebungen der dreistäbig an den Fußring angeschlossenen Knotenpunkte I, II, III, IV im Sinne der in diesen Punkten angreifenden senkrechten Lasten  $P$  und wagerechten Lasten  $Q$  und  $H$  anzugeben. Es möge dies hier mit Hilfe der bereits auf Seite 271 benutzten Gleichgewichtsbedingungen geschehen; sie lauten für den Knotenpunkt I (mit den Bezeichnungen  $A_1 = H_1 + Z_1$  und  $B_1 = Q_1 + Z_2$ )

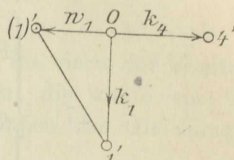


Fig. 249.

$$[2] \quad \begin{cases} \frac{S_1}{s_1} = -\frac{P_1}{h} - \frac{B_1}{b_2} \\ \frac{D_1}{d_1} = -\frac{P_1}{h} \frac{b_1}{a_1} - \frac{B_1}{b_2} \frac{b_1}{a_1} - \frac{A_1}{a_1} \\ \frac{R_1}{r_1} = +\frac{P_1}{h} \frac{b_1}{a_1} + \frac{B_1}{b_2} \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) + \frac{A_1}{a_1} \end{cases}$$

Da nun die Projektionen der Stablängen  $s_1$ ,  $d_1$ ,  $r_1$  auf die Verschiebungen  $k_1$ ,  $k_4$ ,  $w_1$  ihrer Fußpunkte der Reihe nach gleich  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_2$  sind, so sind die Projektionen der durch  $P_1 = 1$  erzeugten Kräfte  $S_1$ ,  $D_1$  und  $R_1$  auf jene Verschiebungen gleich

$$-\frac{b_1}{h}, \quad -\frac{b_2}{h} \frac{b_1}{a_1}, \quad +\frac{b_2}{h} \frac{b_1}{a_1},$$

und man erhält daher für die der Kraft  $P_1$  zugeordnete Verschiebung  $p_1$  des Knotenpunktes I den Ausdruck

$$[3] \quad p_1 = -\frac{b_1}{h} k_1 - \frac{b_2}{h} \frac{b_1}{a_1} k_4 + \frac{b_2}{h} \frac{b_1}{a_1} w_1,$$

und ebenso findet man für die Verschiebungen im Sinne der Kräfte  $Q_1$  und  $H_1$  die Werte

$$[4] \quad q_1 = -\frac{b_1}{b_2} k_1 - \frac{b_1}{a_1} k_4 + \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) w_1$$

$$[5] \quad h_1 = -\frac{b_2}{a_1} k_4 + \frac{b_2}{a_1} w_1.$$



Werden die  $w$  durch die  $k$  ausgedrückt, so ergeben sich die folgenden Formeln [6], aus denen die Formeln [7] bis [9] durch Vertauschung der Zeiger entstehen.

$$[6] \quad \begin{cases} p_1 = -\frac{b_2}{h} \frac{b_1}{a_1} k_4 - \frac{b_1}{h} \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) k_1 \\ q_1 = -\frac{b_1}{a_1} k_4 - \frac{b_1}{b_2} \left(2 + \frac{b_1}{a_1}\right) k_1 \\ h_1 = -\frac{b_2}{a_1} k_4 - \frac{b_1}{a_1} k_1 \end{cases}$$

$$[7] \quad \begin{cases} p_2 = -\frac{b_1}{h} \frac{b_2}{a_2} k_1 - \frac{b_2}{h} \left(1 + \frac{b_2}{a_2}\right) k_2 \\ q_2 = -\frac{b_2}{a_2} k_1 - \frac{b_2}{b_1} \left(2 + \frac{b_2}{a_2}\right) k_2 \\ h_2 = -\frac{b_1}{a_2} k_1 - \frac{b_2}{a_2} k_2 \end{cases}$$

$$[8] \quad \begin{cases} p_3 = -\frac{b_2}{h} \frac{b_1}{a_1} k_2 - \frac{b_1}{h} \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) k_3 \\ q_3 = -\frac{b_1}{a_1} k_2 - \frac{b_1}{b_2} \left(2 + \frac{b_1}{a_1}\right) k_3 \\ h_3 = -\frac{b_2}{a_1} k_2 - \frac{b_1}{a_1} k_3 \end{cases}$$

$$[9] \quad \begin{cases} p_4 = -\frac{b_1}{h} \frac{b_2}{a_2} k_3 - \frac{b_2}{h} \left(1 + \frac{b_2}{a_2}\right) k_4 \\ q_4 = -\frac{b_2}{a_2} k_3 - \frac{b_2}{b_1} \left(2 + \frac{b_2}{a_2}\right) k_4 \\ h_4 = -\frac{b_1}{a_2} k_3 - \frac{b_2}{a_2} k_4 \end{cases}$$

Die Knotenpunktentfernungen  $\overline{I II}$ ,  $\overline{II III}$ ,  $\overline{III IV}$  und  $\overline{IV I}$  ändern sich infolge dieser Verschiebungen um

$$[10] \quad \begin{aligned} \Delta z_2 &= -q_1 - h_2, \quad \Delta z_3 = -q_2 - h_3, \quad \Delta z_4 = -q_3 - h_4, \\ \Delta z_1 &= -q_4 - h_1, \end{aligned}$$

und es ergeben sich daher die folgenden Beziehungen zwischen den Größen  $\Delta z$  und  $k$ :

$$[11] \quad \begin{cases} k_4 \frac{b_1}{a_1} + k_1 \frac{b_1}{b_2} (2 + \varepsilon) + k_2 \frac{b_2}{a_2} = \Delta z_2 \\ k_1 \frac{b_2}{a_2} + k_2 \frac{b_2}{b_1} (2 + \varepsilon) + k_3 \frac{b_1}{a_1} = \Delta z_3 \\ k_2 \frac{b_1}{a_1} + k_3 \frac{b_1}{b_2} (2 + \varepsilon) + k_4 \frac{b_2}{a_2} = \Delta z_4 \\ k_3 \frac{b_2}{a_2} + k_4 \frac{b_2}{b_1} (2 + \varepsilon) + k_1 \frac{b_1}{a_1} = \Delta z_1, \end{cases}$$

wo

$$\varepsilon = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}.$$

Addiert man die dritte Gleichung zur ersten, die vierte zur zweiten, und subtrahiert man die dritte von der ersten, die vierte von der zweiten, so entstehen die folgenden beiden Gruppen von Gleichungen

$$[12] \quad \begin{cases} (k_1 + k_3) \frac{b_1}{b_2} (2 + \varepsilon) + (k_2 + k_4) \varepsilon & = \Delta z_2 + \Delta z_4 \\ (k_1 + k_3) \varepsilon + (k_2 + k_4) \frac{b_2}{b_1} (2 + \varepsilon) & = \Delta z_3 + \Delta z_1 \end{cases}$$

$$[13] \quad \begin{cases} (k_1 - k_3) \frac{b_1}{b_2} (2 + \varepsilon) + (k_2 - k_4) \varepsilon & = \Delta z_2 - \Delta z_4 \\ (k_1 - k_3) \varepsilon + (k_2 - k_4) \frac{b_2}{b_1} (2 + \varepsilon) & = \Delta z_3 - \Delta z_1 \end{cases}$$

wo

$$\varepsilon' = \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}.$$

Für die Nennerdeterminanten der Gleichungen [12] und [13] ergeben sich mit den Bezeichnungen  $c_1 = a_1 + b_1$  und  $c_2 = a_2 + b_2$  die einfachen Ausdrücke

$$(2 + \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 = 4(1 + \varepsilon) = \frac{4(c_1 c_2 - b_1 b_2)}{a_1 a_2}$$

$$(2 + \varepsilon)^2 - \varepsilon'^2 = (2 + \varepsilon + \varepsilon')(2 + \varepsilon - \varepsilon') = \frac{4 c_1 c_2}{a_1 a_2},$$

und man gelangt nach einer kurzen Zwischenrechnung zu dem folgenden Ergebnis.

Man berechne die drei Zahlen

$$[14] \quad \alpha = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{8 c_1 c_2}, \quad \beta = \frac{c_1 b_2 + c_2 b_1}{8 c_1 c_2}, \quad \gamma = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{8(c_1 c_2 - b_1 b_2)}$$

und aus diesen die vier Zahlen

$$[15] \quad \begin{cases} \lambda = \gamma - \alpha, & \nu = -\beta - \gamma + 0,5 \\ \mu = \gamma + \alpha, & \xi = +\beta - \gamma \end{cases}$$

um dann zu erhalten

$$[16] \quad \begin{cases} k_4 = -\mu \Delta z_4 - \lambda \Delta z_2 + \frac{b_1}{b_2} (\nu \Delta z_1 + \xi \Delta z_3) \\ k_1 = -\lambda \Delta z_1 - \mu \Delta z_3 + \frac{b_2}{b_1} (\nu \Delta z_2 + \xi \Delta z_4) \\ k_2 = -\mu \Delta z_2 - \lambda \Delta z_4 + \frac{b_1}{b_2} (\nu \Delta z_3 + \xi \Delta z_1) \\ k_3 = -\lambda \Delta z_3 - \mu \Delta z_1 + \frac{b_2}{b_1} (\nu \Delta z_4 + \xi \Delta z_2). \end{cases}$$

Nach dieser einfachen Untersuchung kann man den Einfluß der einzelnen Lasten  $P$ ,  $Q$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $W$  auf die einzelnen Stabkräfte schnell angeben.

Wird z. B. die Spannkraft  $Z_1$  des Stabes  $IV I$  gesucht, so handelt es sich um die Verschiebungen der Knotenpunkte einer durch Beseitigung des Stabes  $z_1$  aus dem Fachwerk abgeleiteten zwangsläufigen kinematischen Kette. Alle Stäbe dieser Kette sind starr anzunehmen, es ist also  $\Delta z_2 = \Delta z_3 = \Delta z_4 = 0$  zu setzen. Über die eine Bewegungsfreiheit der Kette wird durch die Festsetzung  $\Delta z_1 = 1$  verfügt, um  $Z_1$  in der Form

$$Z_1 = \sum Pp + \sum Qq + \sum Hh + \sum Ww + \sum Kk$$

darzustellen. Man findet aus [16]

$$k_4 = \frac{b_1}{b_2} \nu, \quad k_1 = -\lambda, \quad k_2 = \frac{b_1}{b_2} \xi, \quad k_3 = -\mu$$

und kann nun mit Hilfe von [1] und [6] bis [9] alle übrigen Verschiebungen  $w_1$ ,  $p_1$ ,  $q_1$  . . . . berechnen.

Ist z. B.  $b_1 = 3,0^m$ ,  $b_2 = 5,0^m$ ,  $a_1 = 4,0^m$ ,  $a_2 = 6,0^m$ ,  $h = 4,0^m$ , so ergibt sich

$$\alpha = \frac{1}{308}, \quad \beta = \frac{17}{154}, \quad \gamma = \frac{19}{248}$$

$\lambda = 0,0734$ ,  $\mu = 0,0799$ ,  $\nu = 0,3130$ ,  $\xi = 0,0338$ ,  
 $k_4 = +0,1878$ ,  $k_1 = -0,0734$ ,  $k_2 = +0,0203$ ,  $k_3 = -0,0759$ ,  
 und man erhält die in dem folgenden Verzeichnis angegebenen, auf 2 Stellen abgerundeten Verschiebungen  $k$ ,  $w$ ,  $p$  . . . .:



	$k_m$	$w_m$	$p_m$	$q_m$	$h_m$
$m=1$	— 0,07	+ 0,04	— 0,08	— 0,02	— 0,18
$m=2$	+ 0,02	— 0,03	— 0,00	— 0,03	+ 0,02
$m=3$	— 0,08	+ 0,05	+ 0,09	+ 0,12	+ 0,03
$m=4$	+ 0,19	— 0,31	— 0,38	— 0,82	— 0,12

Danach ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_1 = & -0,07 K_1 + 0,02 K_2 - 0,08 K_3 + 0,19 K_4 \\ & + 0,04 W_1 - 0,03 W_2 + 0,05 W_3 - 0,31 W_4 \\ & - 0,08 P_1 - 0,00 P_2 + 0,09 P_3 - 0,38 P_4 \\ & - 0,02 Q_1 - 0,03 Q_2 + 0,12 Q_3 - 0,82 Q_4 \\ & - 0,18 H_1 + 0,02 H_2 + 0,03 H_3 - 0,12 H_4. \end{aligned}$$

Damit sind auch die Bildungsgesetze für  $Z_2$ ,  $Z_3$  und  $Z_4$  gegeben.

Nach Berechnung der Spannkkräfte  $Z$  in den vier Stäben des oberen Ringes lassen sich die übrigen Spannkkräfte und die Stützenwiderstände ohne weiteres mit Hilfe der Gleichungen [2] und der einfachen Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des Fußringes angeben. Es bietet aber auch keine Schwierigkeit, alle diese Unbekannten kinematisch zu ermitteln.

Handelt es sich z. B. um die Spannkraft  $D_1$ , so müssen die Knotenpunktverschiebungen für den Bewegungszustand  $\Delta d_1 = 1$  berechnet werden. Da nun die Kräfte  $P_1 = 1$ ,  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 1$ , jede für sich allein, im Stabe  $d_1$  die Spannkkräfte

$$-\frac{b_1}{h} \frac{d_1}{a_1}, \quad -\frac{b_1}{b_2} \frac{d_1}{a_1}, \quad -\frac{d_1}{a_1}$$

hervorrufen, so erzeugt  $\Delta d_1 = 1$  die Verschiebungen

$$p_1 = -\frac{b_1}{h} \frac{d_1}{a_1} 1, \quad q_1 = -\frac{b_1}{b_2} \frac{d_1}{a_1} 1, \quad h_1 = -\frac{d_1}{a_1} 1$$

und die Formeln [6] gehen über in

$$[6a] \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= -\frac{b_2}{h} \frac{b_1}{a_1} k_4 - \frac{b_1}{h} \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) k_1 - \frac{b_1}{h} \frac{d_1}{a_1} \\ q_1 &= -\frac{b_1}{a_1} k_4 - \frac{b_1}{b_2} \left(2 + \frac{b_1}{a_1}\right) k_1 - \frac{b_1}{b_2} \frac{d_1}{a_1} \\ h_1 &= -\frac{b_2}{a_1} k_4 - \frac{b_1}{a_1} k_1 - \frac{d_1}{a_1} \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen [7], [8], [9] und die Gleichungen [1] bleiben ungeändert, und die Bedingungen [10] liefern, da alle  $\Delta z$  gleich Null gesetzt werden, vier Gleichungen, die sich von den Gleichungen [11] nur dadurch unterscheiden, daß an die Stelle von

$$\Delta z_2, \Delta z_3, \Delta z_4, \Delta z_1$$

der Reihe nach die Werte treten

$$-\frac{b_1}{b_2} \frac{d_1}{a_1}, 0, 0, -\frac{d_1}{a_1}.$$

Daraus folgt aber, daß  $\Delta d_1 = 1$  die Verschiebungen erzeugt:

$$k_1 = (\lambda - \nu) \frac{d_1}{a_1}, \quad k_4 = \frac{b_1}{b_2} k_1$$

$$k_3 = (\mu - \xi) \frac{d_1}{a_1}, \quad k_2 = \frac{b_1}{b_2} k_3.$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich auch der Einfluß der elastischen Längenänderungen der Stäbe auf die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte mit Hilfe der bei der Berechnung der Spannkkräfte gewonnenen Zahlenwerte schnell verfolgen läßt.

**Zweites Beispiel.** Der obere Ring des in Fig. 250 dargestellten Fachwerks sei ein regelmäßiges  $n$ -Eck, die Seitenfache bestehen aus Rechtecken und gleichschenkligen Dreiecken. Es genügt, das Bildungsgesetz für  $Z_1$  durch Untersuchung des Bewegungszustandes  $\Delta z_1 = 1$  zu ermitteln.

Die Beziehungen zwischen den Spannkkräften  $S_1, D_1, R_1$  und den in 1 angreifenden Kräften  $P_1, B_1 = Q_1 + Z_2, A_1 = H_1 + Z_1$  lassen sich wieder mit Hilfe der Momentengleichungen ohne weiteres hinschreiben (siehe Seite 268). Die Längen der drei Stäbe seien  $s, s, d$ , die Höhe des Fachwerks sei  $h$ ; die übrigen Bezeichnungen sind aus der Fig. 251 zu ersehen. Man findet

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{S_1}{s} = -\frac{P_1}{h} \frac{b}{l} - \frac{B_1}{c} \\ \frac{R_1}{s} = +\frac{P_1}{h} \frac{b}{f} + \frac{B_1}{e} + \frac{A_1}{a} \\ \frac{D_1}{d} = -\frac{P_1}{h} \frac{b}{m} - \frac{B_1}{a} - \frac{A_1}{a} \end{cases}$$

Da nun die Projektionen der Stablängen  $s, s, d$  auf die Richtungen der Verschiebungen  $k_1, w_1, k_n$  ihrer Fußpunkte gleich  $b$  sind, und da sich  $w_1 = -k_1$  ergibt, vergl. Formel [1] auf Seite 310, so erhält man für die Verschiebungen  $p_1, q_1, h_1$  des Punktes 1 die Werte

$$(b) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{b^2}{h} \left( -\frac{k_1}{l} - \frac{k_1}{f} - \frac{k_n}{m} \right) \\ q_1 = b \left( -\frac{k_1}{c} - \frac{k_1}{e} - \frac{k_n}{a} \right) \\ h_1 = b \left( 0 - \frac{k_1}{a} - \frac{k_n}{a} \right) \end{cases}$$

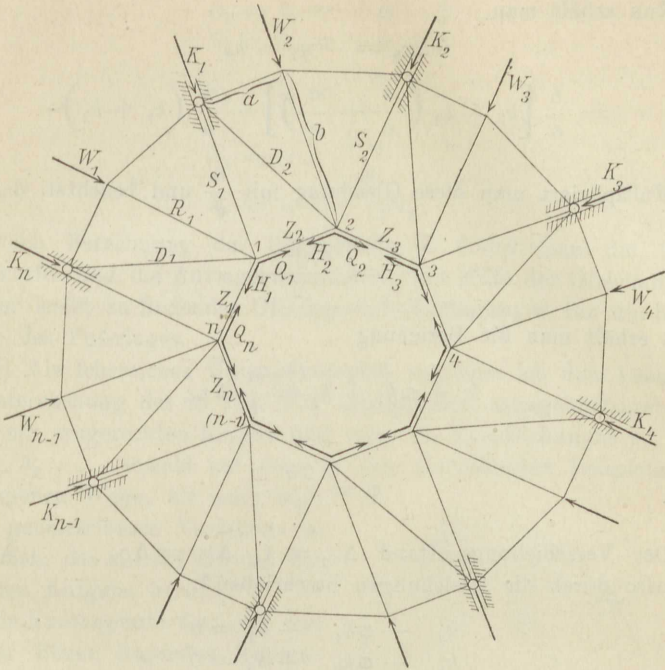


Fig. 250.

und damit sind auch die Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte des oberen Ringes bestimmt. Beispielsweise wird

$$h_2 = b \left( -\frac{k_2}{a} - \frac{k_1}{a} \right).$$

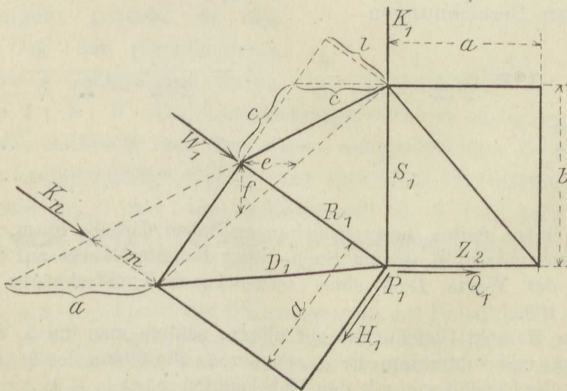


Fig. 251.





$$\begin{aligned} k_1 &= k_7 = -\alpha - \beta \\ k_3 &= k_5 = -\alpha + \beta \\ k_2 &= k_6 = \frac{2\alpha}{\varphi} \\ k_4 &= -\frac{2k_3}{\varphi} \\ k_8 &= -k_2 - \varphi k_1. \end{aligned}$$

Nach Berechnung der Spannkkräfte  $Z$  findet man die übrigen Spannkkräfte und die Auflagerwiderstände mit Hilfe der Gleichungen (a) und der leicht zu findenden Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte des Fußsringes.

4) Als lehrreiches **Übungsbeispiel** empfehle ich dem Leser auch die Untersuchung des in Fig. 252 angegebenen unregelmäßigen Fachwerks mit wagerechten Ringen und rate, die Verschiebungen  $p_1, q_1, h_1, p_2, q_2, h_2 \dots$  sowohl auf dem in den vorstehenden Beispielen eingeschlagenen Wege, als auch nach einem geometrischen Verfahren zu bestimmen, das auf der Lösung der folgenden Aufgabe beruht.

Ein Knotenpunkt 4 sei mit drei in einer Ebene liegenden Knotenpunkten 1, 2, 3 durch starre Stäbe verbunden, deren Längen  $s_1, s_2, s_3$  seien (Fig. 253). Die Punkte 1, 2, 3 bewegen sich in der Grundriflebene und erfahren gegebene, durch die Strecken  $O'1', O'2', O'3'$  dargestellte verschwindend kleine Verschiebungen; gesucht ist der Grundrifs  $O'4'$  der Verschiebung des Punktes 4. Man lege durch

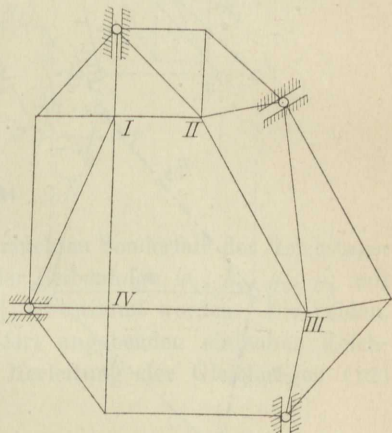


Fig. 252.

die Punkte  $1', 2', 3'$  des Verschiebungsplans die Geraden  $(s_1'), (s_2'), (s_3')$ , welche senkrecht auf den ihnen entsprechenden Richtungen  $s_1', s_2', s_3'$  der Stabgrundrisse stehen, und bestimme den Schnittpunkt  $1 \cdot 2$  von  $(s_1')$  und  $(s_2')$  und den Schnittpunkt  $2 \cdot 3$  von  $(s_2')$  und  $(s_3')$ . Zieht man dann durch  $1 \cdot 2$  und  $2 \cdot 3$  die Geraden  $(n_{1 \cdot 2})$  und  $(n_{2 \cdot 3})$

$x_3 = k_3 + k_7, x_4 = k_4 + k_8$  und vier Gleichungen mit den Unbekannten  $y_1 = k_1 - k_5, y_2 = k_2 - k_6, y_3 = k_3 - k_7, y_4 = k_4 - k_8$ . Aus der ersten Gruppe von Gleichungen lassen sich nun in derselben Weise zwei neue Gruppen von Gleichungen mit den Unbekannten  $x_1 + x_3, x_2 + x_4$ , und  $x_1 - x_3, x_2 - x_4$  bilden und in derselben Weise wird auch mit den  $y$  verfahren.

senkrecht zu den Verbindungslinien  $n_{1 \cdot 2}$  und  $n_{2 \cdot 3}$  der Knotenpunkte 1, 2, 3, so schneiden sich diese beiden Geraden in dem gesuchten Punkte  $4'$ . Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst an, 4 liege in der Grundrifsebene und sei nur an 1 und 2 angeschlossen. Seine Geschwindigkeit ist dann durch die in  $1'$  und  $2'$  auf  $s_1'$  und  $s_2'$  errichteten Lote bestimmt, und es fällt  $4'$  mit dem Punkte  $1 \cdot 2$  zusammen. Lassen wir nun 4 aus der Grundrifsebene heraustreten, so bleibt die Projektion der Geschwindigkeit  $O'4'$  auf die Richtung der Geraden  $n_{1 \cdot 2}$  ungeändert, weil eine in 4 parallel zu  $n_{1 \cdot 2}$  angreifende äußere Kraft  $Q$  nur in den beiden Stäben  $s_1$  und  $s_2$  Spannkräfte er-

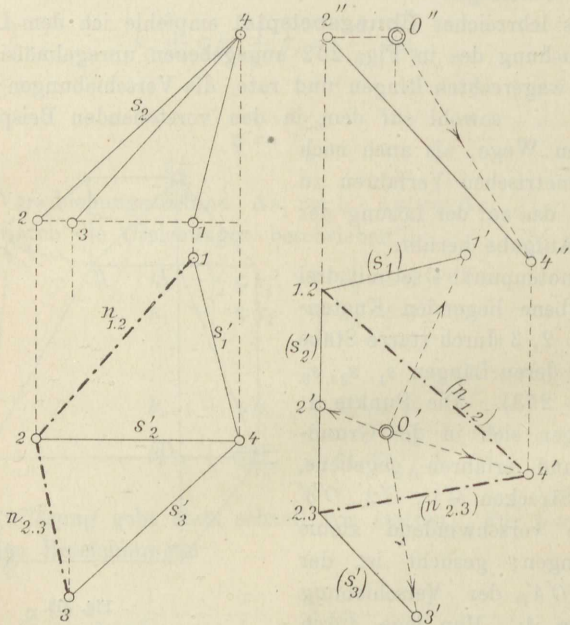


Fig. 253.

zeugt und zwischen diesen Spannkraften und ihren Projektionen auf die Grundrifsebene die Beziehung besteht

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{S_1'}{s_1'} = \frac{Q}{n_{1 \cdot 2}} = -\frac{S_2}{s_2} = -\frac{S_2'}{s_2'},$$

wo  $n_{1 \cdot 2}$  die Länge der Strecke 1—2 bedeutet. Daraus folgt nun, daß  $4'$  in der Geraden  $(n_{1 \cdot 2})$  liegt, und ebenso wird bewiesen, daß  $4'$  auch der Geraden  $(n_{2 \cdot 3})$  angehört. Kennt man nun den Grundriß  $O'4'$  der Verschiebung des Punktes 4, so kann man auch den Aufriß



$O''4''$  schnell angeben. In Fig. 253 wurde die Aufrissebene durch den Stab  $s_2$  gelegt und  $O''4''$  mittels der Bedingung  $2''4'' \perp 24$  bestimmt. Mit Hilfe dieses Verfahrens lassen sich die Einflüsse der Verschiebungen  $k_1, k_2, k_3, k_4$  auf die Verschiebungen  $p_1, q_1, h_1, p_2, q_2, h_2 \dots$  sehr schnell feststellen. Fig. 254 zeigt die Anwendung unserer Konstruk-

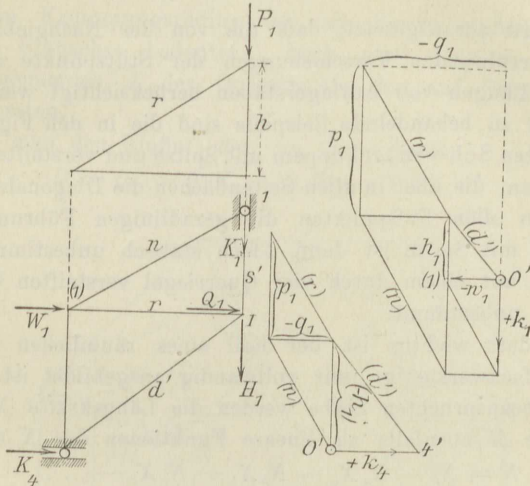


Fig. 254.

tion auf den im ersten Beispiel untersuchten Sonderfall der Reichstagskuppel; die Verschiebungen sind in der Reihenfolge  $w_1, h_1, q_1, p_1$  mit Hilfe von  $(d') \perp d', (n) \perp n$  und  $(r) \perp r$  bestimmt worden. Die beiden, die Einflüsse von  $k_1$  und  $k_4$  gesondert angegebenden einfachen Zeichnungen können auch zur schnellen Herleitung der Gleichungen (12) benutzt werden.

## § 32.

### Das statisch unbestimmte räumliche Stabwerk.

1. Werden die Spannkkräfte der Stäbe eines statisch unbestimmten, räumlichen Fachwerks in der Form

$$S = S_o - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \dots$$

als lineare Funktionen der statisch unbestimmten Größen  $X_a, X_b, X_c \dots$  dargestellt, so stehen zur Berechnung der Größen  $X$  die Gleichungen zur Verfügung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum S_o S_a \varphi + \sum S_a \varepsilon t s - X_a \sum S_a^2 \varphi - X_b \sum S_b S_a \varphi - X_c \sum S_c S_a \varphi - \dots \\ 0 &= \sum S_o S_b \varphi + \sum S_b \varepsilon t s - X_a \sum S_a S_b \varphi - X_b \sum S_b^2 \varphi - X_c \sum S_c S_b \varphi - \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

wo

$$\varphi = \frac{s}{EF}.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die von der Nachgiebigkeit der Widerlager herrührenden Verschiebungen der Stützpunkte durch Änderungen der Längen von Auflagerstäben berücksichtigt werden.

Als leicht zu behandelnde Beispiele sind die in den Fig. 244 und 245 dargestellten Schwedlerkuppeln mit Spitze und versteiftem Schlußring anzuführen, die aber in allen Seitenflächen die Diagonalen behalten und ebenso an allen Fußpunkten die geradlinigen Führungen. Die Achteckkuppel mit Spitze ist dann 5fach statisch unbestimmt und die Achteckkuppel mit einem durch vier Querriegel versteiften Schlußring 4fach statisch unbestimmt.

2. Besonders wichtig ist der Fall eines räumlichen Stabwerks, welches teils fachwerkartig, teils vollwandig ausgebildet ist. Für die auf Biegung beanspruchten Stäbe werden die Längskräfte  $N$  und Biegemomente  $M$  ebenfalls als lineare Funktionen der  $X$  dargestellt:

$$\begin{aligned} N &= N_o - N_a X_a - N_b X_b - N_c X_c - \dots \\ M &= M_o - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c - \dots \end{aligned}$$

und zur Berechnung der  $X$  stehen die Elastizitätsgleichungen zur Verfügung:

$$(47) \quad \begin{cases} 0 = \delta_{0a} + \delta_{at} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ba} - X_c \delta_{ca} - \dots \\ 0 = \delta_{0b} + \delta_{bt} - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{cb} - \dots \\ 0 = \delta_{0c} + \delta_{ct} - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_c \delta_{cc} - \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

wo für zwei beliebige Zeiger  $p$  und  $q$

$$(48) \quad \delta_{pq} = \sum \frac{S_p S_q s}{EF} + \int \frac{N_p N_q ds}{EF} + \int \frac{M_p M_q ds}{EJ}.$$

Gleichung (48) gilt für alle  $\delta$  mit Ausnahme von

$$\delta_{at}, \delta_{bt}, \delta_{ct}, \dots,$$

welche nach der Formel zu berechnen sind

$$(49) \quad \delta_{pt} = \sum S_p \varepsilon t s + \int N_p \varepsilon t_0 ds + \int M_p \varepsilon \frac{\Delta t}{h} ds.$$

$$p = a, b, c, \dots$$

Hinsichtlich der Bedeutung von  $t_0$ ,  $\Delta t$ ,  $h$  verweisen wir auf Seite 89, Fig. 77.





Wir wählen die Untersuchung einer offenen, regelmäßigen Schwedlerschen Achteckkuppel mit biegungsfestem ebenem Schlußring. Fig. 255. Die Belastung der Kuppel sei symmetrisch in Bezug auf die Halbierungsebene  $AB$  zweier Ringseiten. Die in Fig. 255 fortgelassenen Diagonalen sind dann spannungslos.

Zunächst möge der Schlußring für sich allein betrachtet werden. Fig. 256. Das Trägheitsmoment  $J$  seines Querschnitts sei konstant. Von den drei auf Seite 122 abgeleiteten Elastizitätsgleichungen [9] ist die eine infolge der Symmetrie der Belastung überflüssig. Die beiden anderen gehen über in

$$\int M ds = 0, \quad \int M x ds = 0.$$

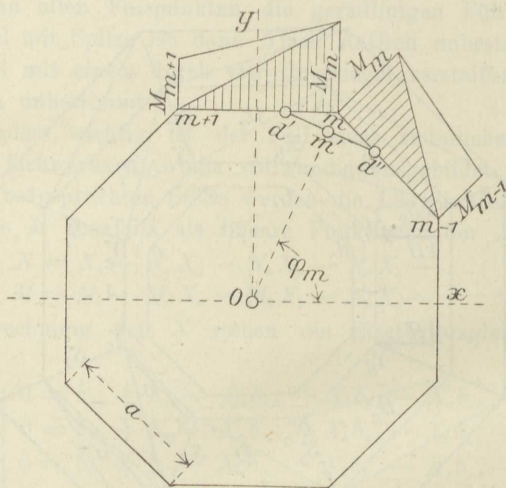


Fig. 256.

Greifen die Lasten nur in den Knotenpunkten an, was hier vorausgesetzt werden möge, so ist die Momentenfläche jeder Ringseite ein Trapez. Für den Querschnitt  $m$  sei das Moment gleich  $M_m$ ; sein Beitrag zum Integral  $\int M ds$  ist gleich dem Inhalte der beiden in Fig. 256 schraffierten Dreiecke, d. i. gleich  $M_m a$ , und es geht daher die erste Bedingung über in

$$[1] \quad \sum M_m = 0.$$

Der Beitrag von  $M_m$  zum Integrale  $\int M x ds$  ist gleich dem auf die  $y$ -Achse bezogenen statischen Momente der in den Drittpunkten  $d'$  und  $d''$  der an  $m$  grenzenden Ringseiten wirksam gedachten Gewichte

$\frac{M_m a}{2}$ . Vereinigt man nun diese beiden gleich großen Gewichte im

Mittelpunkte  $m'$  der Strecke  $d'd''$ , und bezeichnet man die Länge der Strecke  $Om'$  mit  $c$ , so wird der gesuchte Beitrag  $= M_m a \cdot c \cos \varphi_m$ , und die zweite Bedingung nimmt die einfache Form an

$$[2] \quad \sum M_m \cos \varphi_m = 0.$$

Wir bezeichnen nun die Biegemomente für die Knotenpunktquerschnitte  $c, a, b, d$  (Fig. 255) mit  $Y_c, X_a, X_b, Y_d$ . Zwischen diesen Momenten bestehen nach den Gleichungen [1] und [2] die Beziehungen

$$Y_c + X_a + X_b + Y_d = 0$$

$$Y_c \cos \varepsilon + X_a \sin \varepsilon - X_b \sin \varepsilon - Y_d \cos \varepsilon = 0,$$

und es ergibt sich mit  $\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{2} - 1$  für jeden Belastungszustand der Kuppel

$$[3] \quad Y_c = -\frac{1}{2} \sqrt{2} X_a - \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}) X_b$$

$$[4] \quad Y_d = -\frac{1}{2} \sqrt{2} X_b - \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}) X_a.$$

Es sollen nun diejenigen Spannkkräfte  $D$  und  $S$  in den am fraglichen Ringe angreifenden Fachwerkstäben berechnet werden, die nur von den Momenten  $X_a$  und  $X_b$  abhängen, die also verschwinden, wenn  $X_a$  und  $X_b$  gleich Null werden. Wird jede Spannkraft  $D$  in ihrem oberen Endpunkte zerlegt in eine mit der Rippe zusammenfallende Seitenkraft  $\lambda D$ , wo  $\lambda = \frac{s}{d}$  ist, und eine mit der Ringseite zusammen-

fallende Seitenkraft  $\omega D$ , wo  $\omega = \frac{a'}{d}$ , so müssen die am unbelasteten ebenen Schlußringe angreifenden  $S$  und  $D$  offenbar den Bedingungen genügen:

$$[5] \quad \begin{cases} S_1 + \lambda D_1 = 0 \\ S_2 + \lambda D_2 = 0 \\ S_3 + \lambda D_3 = 0 \\ S_4 = 0 \end{cases}$$

denn Gleichgewicht kann nur bestehen, wenn die am Ring angreifenden Kräfte in der Ebene des Ringes liegen.

Außerdem muß, falls sich für  $\omega D_1 a$  der Wert

$$[6] \quad \omega D_1 a = + \alpha X_a + \beta X_b$$

ergibt,

$$[7] \quad \omega D_3 a = - \beta X_a - \alpha X_b$$

sein, und  $\omega D_2 a$  muß die Form

$$[8] \quad \omega D_2 a = \gamma (X_a - X_b)$$

erhalten. Aus Gleichung [6] und [7] folgt

$$\omega D_1 a + \omega D_3 a = (\alpha - \beta) (X_a - X_b).$$

Außerdem besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$(\omega D_1 + \omega D_3) \sin 45^\circ + \omega D_2 = 0,$$

weshalb sich

$$[9] \quad \gamma = \frac{\beta - \alpha}{2} \sqrt{2}$$

ergibt.

Bezeichnet man nun die Längskraft für den Ringquerschnitt  $A$  mit  $N$  (Fig. 257), so lassen sich  $X_a$  und  $X_b$  auch wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} X_b &= \omega D_1 a \sin 45^\circ - Na (1 + \sin 45^\circ) + Y_c, \\ X_a &= \quad \quad \quad - Na \sin 45^\circ \quad \quad + Y_c, \end{aligned}$$

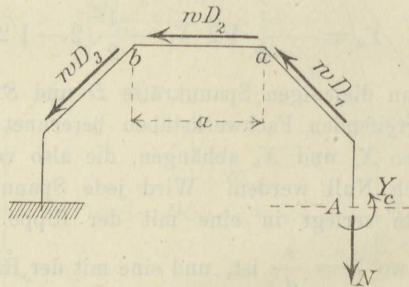


Fig. 257.

und man gelangt, indem man  $N$  aus diesen beiden Gleichungen eliminiert und  $Y_c$  mittels Gleichung [3] durch  $X_a$  und  $X_b$  ausdrückt, zu der gesuchten Beziehung zwischen  $D_1$ ,  $X_a$  und  $X_b$ . Damit sind aber auch  $D_2$  und  $D_3$  als Funktionen von  $X_a$  und  $X_b$  dargestellt. Auf diesem Wege findet man die Formeln

$$[10] \quad \begin{cases} \omega D_1 a = -2(\sqrt{2} + 1) X_a + 2(\sqrt{2} - 1) X_b \\ \omega D_2 a = +4(X_a - X_b) \\ \omega D_3 a = -2(\sqrt{2} - 1) X_a + 2(\sqrt{2} + 1) X_b. \end{cases}$$

Jetzt kann man mittels der Gleichung [5] die Spannkraften  $S$  finden und kennt somit die Spannkraften in sämtlichen Stäben der oberen Zone der Kuppel. Die Spannkraften in den übrigen Teilen der Kuppel werden nach dem im § 28 angegebenen Verfahren berechnet, und damit ist dann die Ermittlung des Einflusses von  $X_a$  und  $X_b$  auf alle Stabkräfte erledigt.



Der Einfluß der in den Knotenpunkten angreifenden Lasten auf das statisch bestimmte Hauptsystem wird nunmehr unter der Voraussetzung berechnet, daß auch in den Knotenpunkten des Schlußringes Gelenke angeordnet sind (Zustand  $X=0$ ), und schließlich werden die beiden statisch unbestimmten Größen  $X_a$  und  $X_b$  mit Hilfe der Gleichungen berechnet

$$[11] \quad \begin{cases} -\delta_{0a} = X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ba} \\ -\delta_{0b} = X_a \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} \end{cases}$$

Benutzen wir das Zeichen  $S$  vorübergehend für alle Stabkräfte, so erhalten wir

$$\delta_{0a} = \sum S_0 S_a \frac{s}{EF}, \quad \delta_{0b} = \sum S_0 S_b \frac{s}{EF}$$

$$\delta_{aa} = \sum S_a^2 \frac{s}{EF} + \int M_a^2 \frac{ds}{EJ}$$

$$\delta_{ab} = \sum S_a S_b \frac{s}{EF} + \int M_a M_b \frac{ds}{EJ}$$

$$\delta_{bb} = \sum S_b^2 \frac{s}{EF} + \int M_b^2 \frac{ds}{EJ}$$

Die Summen erstrecken sich über die Fachwerkstäbe, die Integrale über den biegungsfesten Ring.

Für die Ringseite  $ca$  ist z. B. im Abstände  $x$  vom Knotenpunkte  $a$

$$M = Y_c \frac{x}{a} + X_a \frac{a-x}{a}$$

und dieser Wert geht für  $X_a = -1$  über in

$$M_a = \sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{a-x}{a} = -1 + \frac{x}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\right).$$

Die Ringseite liefert also zu  $\delta_{aa}$  den Beitrag

$$\frac{1}{EJ} \int_0^a \left[ -1 + \frac{x}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) \right]^2 dx.$$

Auf diesem Wege findet man leicht für die Ringhälfte\*) die Werte

$$\int M_a^2 \frac{ds}{EJ} = \left(\frac{7}{3} - \sqrt{2}\right) \frac{a}{J}.$$

Diese Ausdrücke sind unabhängig von der Anzahl der Geschosse, der Kuppel. Die Berechnung der über die Fachwerkstäbe auszudehnenden

\*) Es genügt, die Summen für die Hälfte der symmetrisch belastet angenommenen Kuppel zu berechnen.

Summen wird am besten sofort mit Zahlen ausgeführt; sie bietet keine Schwierigkeit und erfordert nicht einmal besonders großen Zeitaufwand. Für den Fall einer eingeschossigen Kuppel wollen wir die Buchstabenberechnung hier noch etwas weiter durchführen. Wählen wir für die Spannkkräfte in den Diagonalen wieder das Zeichen  $D$ , so erhalten wir für die Beiträge der Fachwerkstäbe zu den Gröößen  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{bb}$ , mit Beachtung der Gleich. [5] die Werte

$$\delta_{aa} = \Sigma \frac{S_a^2 s}{EF_s} + \Sigma \frac{D_a^2 d}{EF_d} = \left( \frac{\lambda_s^2 s}{EF_s} + \frac{d}{EF_d} \right) \Sigma D_a^2$$

$$\delta_{bb} = \left( \frac{\lambda_s^2 s}{EF_s} + \frac{d}{EF_d} \right) \Sigma D_b^2$$

$$\delta_{ab} = \left( \frac{\lambda_s^2 s}{EF_s} + \frac{d}{EF_d} \right) \Sigma D_a D_b,$$

worin  $F_s$  den Querschnittsinhalt für eine Rippe und  $F_d$  für eine Diagonale bedeutet. Den Diagonalen  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  entsprechen für  $X_a = -1$  und  $X_b = -1$  der Reihe nach die Werte

$$\omega a D_a = +2(\sqrt{2} + 1); \quad -4; \quad +2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\omega a D_b = -2(\sqrt{2} - 1); \quad +4; \quad -2(\sqrt{2} + 1),$$

weshalb sich für die Hälfte der Kuppel ergibt

$$\Sigma D_a^2 = \Sigma D_b^2 = \frac{40}{\omega^2 a^2}$$

$$\Sigma D_a D_b = -\frac{24}{\omega^2 a^2}.$$

Nehmen wir nun an, es greife am Schlufsringe eine sich auf die beiden Knotenpunkte  $d$  verteilende wagerechte Last  $H$  an, Fig. 255. In diesem Belastungsfalle, Zustand  $X_a = 0$ ,  $X_b = 0$  (Schlufsring mit Gelenken) werden nur die Stäbe der an die Knotenpunkte  $d$  grenzenden Seitenfache beansprucht. Es entsteht

$$\omega D_{3.0} = \frac{H}{2} \sqrt{2}$$

$$S_3 = -\lambda D_{3.0};$$

Die übrigen  $S$  und  $D$  werden  $= 0$ , und es ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \delta_{0a} &= \left( \frac{\lambda^2 s}{EF_s} + \frac{d}{EF_d} \right) \Sigma D_0 D_a \\ &= \left( \frac{\lambda^2 s}{EF_s} + \frac{d}{EF_d} \right) D_{3.0} D_{3a} \\ &= \left( \frac{\lambda^2 s}{EF_s} + \frac{d}{EF_d} \right) \frac{H \sqrt{2}}{2 \omega} \cdot \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{a \omega} \end{aligned}$$

und

$$\delta_{0b} = - \left( \frac{\lambda^2 s}{EF_s} + \frac{d}{EF_d} \right) \frac{H \sqrt{2}}{2 \omega} \cdot \frac{2 (\sqrt{2} + 1)}{a \omega}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{F_s a^2}{J} \cdot \frac{a}{s} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2 + \frac{d}{s} \frac{F_s}{F_d}} = \mu,$$

$$\left( \frac{7}{3} - \sqrt{2} \right) \mu = \nu_1$$

$$(\sqrt{2} - 1) \mu = \nu_2,$$

so gehen die die Gleichungen [11] über in

$$(\nu_1 + 40) X_a + (\nu_2 - 24) X_b = (+2 - \sqrt{2}) Ha$$

$$(\nu_2 - 24) X_a + (\nu_1 + 40) X_b = (-2 - \sqrt{2}) Ha;$$

sie liefern, wegen  $\nu_1 + \nu_2 = \frac{4}{3} \mu$  und  $\nu_1 - \nu_2 = \text{rund } \frac{1}{2} \mu$ .

$$X_a - X_b = + \frac{Ha}{16} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{128}}$$

$$X_a + X_b = - \frac{Ha}{8} \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{\mu}{12}}.$$

Nun folgt

$$\omega D_2 = \frac{H}{4} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{128}}$$

$$\omega D_3 a = \frac{H \sqrt{2}}{2} a - 2 (\sqrt{2} - 1) X_a + 2 (\sqrt{2} + 1) X_b$$

$$\omega D_1 a = - 2 (\sqrt{2} + 1) X_a + 2 (\sqrt{2} - 1) X_b$$

$$(\omega D_3 - \omega D_1) a = \frac{H \sqrt{2}}{2} a + 4 (X_a + X_b).$$

Man kann deshalb auch setzen

$$(\omega D_3 - \omega D_1) \sin 45^\circ = \frac{H}{2} \frac{\mu}{12 + \mu}$$

$$(\omega D_3 + \omega D_1) \sin 45^\circ = \frac{H}{2} - \omega D_2.$$



Zahlenbeispiel. Ist  $\mu = 0$  (vollkommen starrer Ring) mit  $J = \infty$ ), so findet man

$$\omega D_2 = \frac{H}{4}, \quad \omega D_1 = \omega D_3 = \frac{H}{8} \sqrt{2} = \frac{H}{4} \sin 45^\circ$$

und für  $H = 10000 \text{ kg}$

$$\omega D_3 = 1770, \quad \omega D_2 = 2500, \quad \omega D_1 = 1770 \text{ kg.}$$

Es sei nun  $a = 2,6^m$ ,  $s = 3,6^m$ ,  $d = 4,7^m$ ,  $a' = 3,2^m$  also

$$\omega = \frac{3,2}{4,7} = 0,68, \quad \lambda = \frac{3,6}{4,0} = 0,77, \quad \frac{d}{s} = 1,31, \quad \frac{a}{s} = 0,72,$$

$$F_s = 34 \text{ qcm}, \quad F_d = 11 \text{ qcm}, \quad \text{also} \quad \frac{F_s}{F_d} = 3.$$

Der Ring bestehe aus einem  $\square$ -Eisen N. Pr. 14 mit wagerecht liegendem Stege. Dann ist

$$J = 609 \text{ cm}^3 \quad \frac{F_s a^2}{J} = \frac{34 \cdot 260^2}{609} = 3774$$

$$\mu = 3774 \cdot 0,72 \frac{0,46}{0,59 + 1,31 \cdot 3} = 276,$$

und es ergibt sich

$$X_a - X_b = + \frac{10000 \cdot 2,60}{16} \cdot \frac{128}{276 + 128} = 0,08 \frac{H a}{4}$$

$$X_a + X_b = - \frac{10000 \cdot 2,60}{8} \cdot \frac{12 \sqrt{2}}{276 + 12}$$

und hieraus und mittels Gleichungen [3] und [4]

$$X_a = + 162 \text{ kgm}, \quad X_b = - 353 \text{ kgm}$$

$$Y_c = - 11 \text{ kgm}, \quad Y_d = + 202 \text{ kgm.}$$

Das Widerstandsmoment des Ringquerschnitts ist  $87 \text{ cm}^3$ , und es wird daher die Biegungsspannung im Ringe

$$\sigma = \frac{35300}{87} = \text{rund } 400 \text{ kg/qcm.}$$

Für die Diagonalen erhält man schließlich die Werte

$$D_3 = 9400, \quad D_2 = + 1200, \quad D_1 = - 610 \text{ kg.}$$

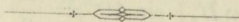
Ein vollkommen starrer Ring würde liefern

$$D_3 = + 2600, \quad D_2 = + 3700, \quad D_1 = + 2600.$$

Sind die Knotenpunkte des Schlufsringes gelenkartig ausgebildet ( $X_a = 0$ ,  $X_b = 0$ ) so entsteht

$$D_3 \cdot 0 = \frac{H \sqrt{2}}{2 \omega} = 7250 \sqrt{2} = 10250 \text{ kg}, \quad D_2 = 0, \quad D_1 = 0.$$

Der Unterschied zwischen  $D_3 \cdot 0$  und  $D_3 = 9400$  ist nicht sehr groß. Trotzdem also der elastische Schlufsring nur die geringe Beanspruchung von  $\sigma = 400 \text{ kg/qcm}$  erfährt, trägt er wenig zur Versteifung der Kuppel bei.



## Anhang.

### I. Entwicklung der Arbeitsgleichungen.

Obgleich das Gesetz der virtuellen Verschiebungen zu den bekanntesten Lehren der Mechanik gehört, dürfte eine Entwicklung der in diesem Buche benutzten Arbeitsgleichungen, welche dieses Gesetz für die betrachteten Fälle ausdrücken, manchem Leser erwünscht sein; sie möge deshalb hier gegeben werden, zuerst für das Fachwerk, sodann für einen beliebigen Körper.

1) **Das Fachwerk.** Wirken an den Endpunkten  $m$  und  $n$  eines Stabes von unveränderlicher Länge zwei entgegengesetzt gleiche, mit der Stabachse zusammenfallende Kräfte  $S$ , so ist die bei irgend einer Bewegung des Stabes von den beiden Kräften verrichtete Arbeitssumme gleich Null.

Um dies einzusehen, zerlege man jene Bewegung in eine fortschreitende und eine drehende und wähle für die letztere irgend einen Punkt der Stabachse (z. B.  $n_1$ ) zum Drehpunkte, Fig. 258. Während des ersten Teiles der Ortsveränderung leisten die Kräfte  $S$  entgegengesetzt gleiche Arbeiten, die sich mithin tilgen, und während des zweiten verrichten sie, weil fortwährend durch den Drehpunkt gehend, überhaupt keine Arbeit. Dabei ist es gleichgültig, ob die Stabkräfte  $S$  konstant sind oder sich stetig ändern; im letzteren Falle dürfen sie innerhalb jedes unendlich kleinen Zeitteilchen als konstant betrachtet werden.

Wächst die anfängliche Länge  $s$  des Stabes während jener Bewegung um  $\Delta s$ , und bedeutet für irgend ein Teilchen der Bewegungsdauer:  $S_x$  den augenblicklichen Wert der Stabkraft und  $d\Delta s$  die Änderung der Stablänge, so ist die Arbeitssumme für dieses Zeitteilchen  $= S_x \Delta ds$  und für die ganze Bewegungsdauer:

$$A = s \int_{S_a}^S S_x d\Delta s,$$

wobei  $S_a$  den anfänglichen und  $S$  den schließlichen Wert der Stabkraft vorstellt.

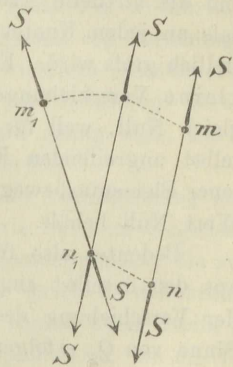


Fig. 258.

Der Ausdruck  $A$  gibt hiernach die Arbeitssumme an, welche die an den Endpunkten eines elastischen Stabes  $mn$  eines Fachwerks wirkenden Spannkkräfte verrichten, sobald irgend welche Ursachen die Knotenpunkte  $m, n$  in die Lagen  $m_1, n_1$  (wobei  $\overline{m_1 n_1} = s + \Delta s$  ist) verschieben, während die Stabkräfte von  $S_a$  bis  $S$  wachsen.

Der wirklichen Arbeit  $A$  wollen wir nun diejenige Arbeit  $A_v = S\Delta s$  gegenüberstellen, welche die Stabkräfte in dem nur gedachten Falle verrichten, daß sie während der ganzen Dauer der Bewegung ihre Endwerte  $S$  besitzen, und daß an Stelle der wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte irgend welche willkürliche Verschiebungen treten, die wir uns zwar als möglich vorstellen können, die aber in Wirklichkeit nicht einzutreten brauchen, und virtuelle Verschiebungen genannt werden. Die Arbeit  $A_v$  heißt die virtuelle Arbeit der auf den Stab  $s$  wirkenden Spannkkräfte  $S$ . Für das ganze Fachwerk ergibt sich

$$A_v = \sum S\Delta s,$$

welche Summe über sämtliche Stäbe auszudehnen ist.

Wir betrachten jetzt die Spannkkräfte  $S$  als Kräfte, die an den Knotenpunkten angreifen, also entgegengesetzte Richtung wie vorhin haben, und die virtuelle Arbeit: —  $\sum S\Delta s$  leisten; sodann setzen wir voraus, daß an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht besteht und keine Kraft unendlich groß wird. Erfahren die Knotenpunkte irgendwelche unendlich kleine Verschiebungen, so ist die Arbeitssumme für sämtliche Kräfte gleich Null, weil für jeden Knotenpunkt die Mittelkraft aus allen daselbst angreifenden Kräften zu Anfang gleich Null ist und während jener Elementarbewegung bis auf eine verschwindend kleine Größe den Wert Null behält.

Bedeutet also für irgend einen Knotenpunkt  $m$ :  $Q_m$  die Mittelkraft aus den daselbst angreifenden äußeren Kräften und  $r_m$  die Projektion der Verschiebung des Punktes  $m$  auf die Kraft  $Q_m$  (positiv, wenn im Sinne von  $Q_m$  erfolgend), so ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte  $= \sum Q_m r_m$ , und es folgt:

$$\sum Q_m r_m - \sum S\Delta s = 0$$

und hieraus:

$$\sum Q_m r_m = \sum S\Delta s.$$

Diese Gleichung drückt das Gesetz aus:

*Für ein im Gleichgewichte befindliches Fachwerk ist die bei unendlich kleinen virtuellen Verschiebungen der Knotenpunkte von den äußeren Kräften verrichtete virtuelle Arbeit ebensogroß wie die virtuelle Arbeit der Stabkräfte  $S$ .*

Die Arbeit  $\sum S\Delta s$ , welche man aus den Änderungen der Stablängen berechnen kann, ohne die anfänglichen und schließlichen Lagen der



Knotenpunkte zu kennen, wird auch die virtuelle Formänderungsarbeit des Fachwerks genannt.

Scheiden wir die äußeren Kräfte ganz allgemein in Lasten und Auflagerkräfte und führen die auf Seite 22 erklärten Bezeichnungen  $P$ ,  $C$ ,  $\delta$ ,  $\Delta c$  ein, so erhalten wir  $\Sigma Qr = \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c$ , und es entsteht die Gleichung

$$(I) \quad \Sigma P\delta + \Sigma C\Delta c = \Sigma S\Delta s,$$

welche wir die Arbeitsgleichung des Fachwerks genannt und zum Ausgangspunkte unserer Entwicklungen gemacht haben.

Hinsichtlich der auf das Fachwerk wirkenden Kräfte wurde bei der Ableitung der Gleichung (I) nur vorausgesetzt, daß sie miteinander im Gleichgewichte sind. Hat man also die Spannkkräfte  $S$  und Auflagerkräfte  $C$  eines statisch unbestimmten Fachwerks durch die Lasten  $P$  und durch gewisse statisch nicht bestimmbare Größen  $X$  so ausgedrückt, daß die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind (vergl. Seite 21), so darf man bei Einsetzen der  $S$  und  $C$  in die Gleichung (I) den Größen  $P$  und  $X$  willkürliche Werte beilegen. Indem man nun diese Werte verschiedenartig wählt, ist man im stande, aus (I) beliebig viele Gleichungen zu folgern und erhält, sobald man diese nun auf die wirklichen Verschiebungen  $\delta$ ,  $\Delta c$ ,  $\Delta s$  (die ja nur besondere Fälle von willkürlichen Verschiebungen sind) anwendet, eine genügende Anzahl von Beziehungen, um die wirklichen Größen  $X$  berechnen und die wirkliche Formänderung des Fachwerkes feststellen zu können. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß die wirklichen Verschiebungen klein genug sind, um als verschwindende Größen aufgefaßt werden zu dürfen.

2) **Beliebiger Körper.** Wir gehen von der Voraussetzung einer stetigen Erfüllung des Raumes durch die Materie aus, im Gegensatz zu der Auffassung des Körpers als ein System von Massenpunkten, die zwar einander unendlich nahe liegen, immerhin aber durch Zwischenräume voneinander getrennt sind, und denken uns an irgend einer Stelle ein unendlich kleines Körperteilchen abgegrenzt, beispielsweise, um die Vorstellung zu erleichtern, ein Parallelepipedium. Die auf die Seitenflächen desselben wirkenden Kräfte sollen Flächenkräfte genannt und insbesondere als innere Kräfte oder Oberflächenkräfte bezeichnet werden, je nachdem die durch sie beanspruchten Flächen im Inneren des Körpers liegen oder zur Oberfläche gehören; außer ihnen wird an dem Körperteilchen im allgemeinen noch eine auf die Masse desselben wirkende äußere Kraft angreifen, welche eine Massenkraft heißt (z. B. die Erdanziehung, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung).

Bezüglich sämtlicher Kräfte wird vorausgesetzt, daß sie endlich sind.

Nehmen wir nun an, es erleide ein anfänglich im Gleichgewichte befindlicher Körper durch Hinzutreten äußerer Kräfte und durch Tem-

peraturänderung eine Umgestaltung, dieselbe hört auf, sobald sich ein neuer Gleichgewichtszustand gebildet hat und bestehen bleibt; während ihrer Erzeugung werden die Flächenkräfte des betrachteten Körperteilchens eine bestimmte Arbeitssumme verrichten, und von dieser ist besonders derjenige Teil von Wichtigkeit, der nur von der Formänderung des Körperteilchens abhängt, der also verschwindet, wenn sich das Teilchen bewegt, ohne seine Gestalt zu ändern. Man nennt diesen Teil der Gesamtarbeit der Flächenkräfte die Formänderungsarbeit des Körperteilchens; ihre Integration über den ganzen Körper liefert die Formänderungsarbeit des Körpers. Bei der Berechnung dieser Arbeit ist zu beachten, daß die Flächenkräfte, deren schließliche Werte wir ganz allgemein mit  $R$  bezeichnen wollen, sich im Verlaufe jener Umgestaltung ändern.

Denkt man sich hingegen die Flächenkräfte während der ganzen Dauer der Formänderung konstant und mit ihren Endwerten  $R$  wirkend, bestimmt die von den Kräften  $R$  geleistete Formänderungsarbeit und ersetzt hierbei die wirkliche Formänderung durch eine willkürliche, die zwar als möglich gedacht werden kann, in Wirklichkeit aber nicht einzutreten braucht, so erhält man einen Ausdruck  $dA_v$ , welcher die virtuelle Formänderungs-Arbeit heißt, während jene willkürliche, mögliche Umgestaltung des Körpers eine virtuelle Formänderung genannt werden soll.

Um die im vorstehenden erklärten Begriffe an einem Beispiele zu erläutern, betrachten wir ein unendlich kleines Parallelepipedum, welches an der Stelle  $x, y, z$  eines auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Körpers abgegrenzt ist, und dessen den Koordinatenachsen parallele Kanten die Längen  $dx, dy, dz$  haben. Es mögen nur Normalspannungen auftreten und zwar nur solche, die der  $(x, y)$ -Ebene parallel sind; sie seien stetige Funktionen der Koordinaten (Fig. 259). Ist dann die Normalspannung für Fläche  $AB$  gleich  $\sigma_x$  (positiv im Sinne  $-x$ ),  
 „ „ „  $AD$  „  $\sigma_y$  ( „ „ „  $-y$ ),  
 so ist die Normalspannung

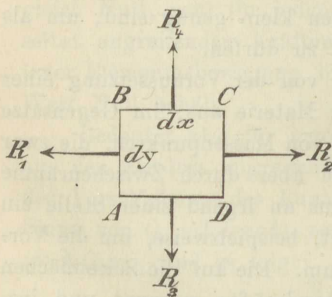


Fig. 259.

für Fläche  $CD$  gleich  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$  und

„ „  $CB$  „  $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$ .

Diesen Spannungen entsprechen die Flächenkräfte:

$$R_1 = \sigma_x dy dz; \quad R_2 = \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz;$$

$$R_3 = \sigma_y dz dx; \quad R_4 = \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dz dx,$$

und zwar seien dies die schließlichen Werte der Kräfte  $R$ .



Erleidet nun das Körperteilchen im Sinne von  $x$  und  $y$  die virtuellen Verschiebungen  $\Delta x$  und  $\Delta y$ , ohne daß sich hierbei die Gestalt des Teilchens ändert, so leisten die Kräfte  $R$  die Arbeit:

$$(R_2 - R_1) \Delta x + (R_4 - R_3) \Delta y = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \Delta y \right) dV,$$

unter  $dV = dx dy dz$  den Inhalt des Körperteilchens verstanden. Ändert sich während jener Bewegung:  $dx$  um  $\Delta dx = \varepsilon_x dx$  (wobei  $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$  das Ver-

längerungsverhältnis der Kante  $dx$  bedeutet) und  $dy$  um  $\Delta dy = \varepsilon_y dy$ , so nimmt die vorhin ermittelte Arbeitssumme zu um die virtuelle Formänderungsarbeit  $dA_v$ , bei deren Berechnung  $R_2$  ersetzt werden darf durch  $R_1$  und  $R_4$  durch  $R_3$ . Denn die Flächenkräfte für gegenüberliegende Seitenflächen des Körperteilchens unterscheiden sich bei stetigen Spannungen nur um unendlich kleine Werte, so daß infolge der Gleichsetzung von  $R_2$  und  $R_1$ , sowie von  $R_4$  und  $R_3$  nur verschwindende Größen vierter Ordnung vernachlässigt werden.\* Mithin folgt:

$$dA_v = R_1 \Delta dx + R_3 \Delta dy = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y) dV,$$

und es ergibt sich schließlich die virtuelle Gesamtarbeit der Flächenkräfte:

$$dA_f = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \Delta y + \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y \right) dV.$$

Wir fassen jetzt eine unendlich kleine, virtuelle Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers und insbesondere die Bewegung und Umgestaltung eines Körperteilchens ins Auge und bezeichnen die virtuelle Arbeit der auf dieses Körperteilchen wirkenden Massenkraft mit  $dA_m$ , diejenige der Flächenkräfte mit  $dA_f$ . Letztere Arbeit besteht aus zwei Teilen; der eine,  $dA_v$ , hängt nur von der Umgestaltung des Körperteilchens ab, der andere, nämlich  $dA_f - dA_v$ , von der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Drehung des Körperteilchens um diesen Punkt. Somit stellt  $dA_m + dA_f - dA_v$  diejenige virtuelle Arbeit vor, welche sämtliche auf das Körperteilchen wirkenden Kräfte leisten, wenn dessen Bewegung ohne eine Formänderung vor sich geht. Diese Arbeit muß aber = Null sein, da die Mittelkraft der auf das Körperteilchen wirkenden Kräfte während der ganzen Dauer der angenommenen Elementarbewegung, bis auf eine verschwindende Größe, den anfänglichen Wert Null beibehält.

Es folgt somit  $dA_m + dA_f = dA_v$  und, wenn entsprechende Gleichungen für sämtliche Körperteilchen aufgestellt und hierauf addiert werden,

$$(II) \quad A_m + A_f = A_v.$$

Da sich nun in dem Ausdrucke  $A_f$  die Arbeiten der inneren Flächenkräfte gegenseitig tilgen, weil auf die Flächen, in denen aneinandergrenzende Körperteilchen zusammenhängen, bei gleichen Verschiebungen entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken, so leuchtet ein, daß

\*) Bei unstetigen Spannungen muß der Körper in Teile zerlegt werden, innerhalb welcher alle Spannungen stetig sind; die Werte  $dA_v$  werden für die einzelnen Teile gesondert integriert und schließlich addiert.



$A_f$  die virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte, mithin  $A_f + A_m$  die virtuelle Arbeit sämtlicher äusseren Kräfte vorstellt, und es drückt deshalb die Gleichung (II) das Gesetz aus:

*Bei einer verschwindend kleinen virtuellen Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers ist die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte gleich der virtuellen Formänderungsarbeit.*

Die Ableitung dieses Satzes nimmt an, daß alle anfänglich sich deckenden Seitenflächen von aneinander grenzenden Körperteilchen auch während des ganzen Verlaufes der Formänderung sich decken, weil nur dann die Arbeiten der auf diese Flächen wirkenden Kräfte sich aufheben. Besteht nun der betrachtete Körper aus mehreren einander berührenden Teilen, von denen jeder einzelne der obigen Voraussetzung entspricht, und finden gegenseitige Verschiebungen von anfänglich zusammenliegenden Berührungsflächen je zweier Teile statt, so müssen, wenn das bewiesene Gesetz gültig bleiben soll, alle diese Flächen der Oberfläche zugezählt werden; d. h. es sind die auf diese Flächen wirkenden Kräfte, soweit sich ihre Arbeiten nicht tilgen, zu den äusseren Kräften zu rechnen. In allen Fällen der Anwendung genügt die Festsetzung, daß bei aufeinander reibenden Teilen eines Körpers die an den Berührungsstellen wirkenden Reibungswiderstände als äussere Kräfte aufzufassen sind.

Wird der betrachtete Körper durch fremde Körper gestützt, so nennen wir die Drücke, welche die letzteren auf den ersteren ausüben, Stützenwiderstände oder Auflagerkräfte. Alle übrigen äusseren Kräfte mögen Lasten heissen. Es ergibt sich dann, mit den auf Seite 22 erklärten Bezeichnungen  $P$ ,  $C$ ,  $\delta$ ,  $\Delta c$ , die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte  $= \sum P\delta + \sum C\Delta c$ , und es entsteht die Arbeitsgleichung

$$(III) \quad \sum P\delta + \sum C\Delta c = A_v,$$

welche in den Abschnitten II. und III. in derselben Weise wie die Arbeitsgleichung des Fachwerks zur Berechnung von statisch nicht bestimmbar Gröfßen und von Verschiebungen beliebiger Punkte benutzt worden ist.

## II. Literatur.

Die ersten Anwendungen des Satzes von der Arbeit auf Aufgaben der Festigkeitslehre finden sich bei Clapeyron, welcher die von Navier\*) aus dem Principe der virtuellen Verschiebungen gefolgerte allgemeine und einzige Bedingung für das Gleichgewicht zwischen den

\*) Mém. de l'acad. des sciences 1827, Seite 388.

inneren und äußeren Kräften eines elastischen Körpers anwendet und in diese an Stelle der virtuellen die wirklichen elastischen Verschiebungen einführt. Indem er hierbei die Annahme eines spannungslosen Anfangszustandes macht und voraussetzt, daß in jedem Punkte des Körpers die anfängliche Temperatur herrscht, erhält er die von ihm später zur Berechnung der Durchbiegung von Federn benutzte Gleichung:

$$\frac{1}{2} \sum Qr = A.*)$$

Lamé nennt diese Gleichung in seinen „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides“ (Paris 1852 und 1866) das Clapeyronsche Gesetz, er erläutert es an mehreren Beispielen und hebt seine Wichtigkeit für die Statik der Bauwerke hervor.

Im Jahre 1864 entwickelt Clerk Maxwell in der im Philosophical Magazine, Band 27, Seite 294, abgedruckten Abhandlung: „On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames“ mittels des Clapeyronschen Gesetzes die erste allgemeine Theorie des Fachwerks, indem er für die Berechnung der statisch unbestimmten Größen die Gleichungen:

$$0 = \sum S' (S_0 + S' X' + S'' X'' + S''' X''' + \dots) \frac{s}{EF}$$

aufstellt und das im § 9 dieses Buches der „Maxwellsche Satz“ genannte wichtige Gesetz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen beweist. Maxwell war der erste, welcher eine Beziehung zwischen der Längenänderung  $\Delta s$  eines Stabes und der durch sie verursachten Verrückung  $\delta$  eines Knotenpunktes in der Weise bestimmt, daß er das Fachwerk als eine Maschine auffaßt, mittels welcher eine treibende Kraft  $P$  einen Widerstand  $S$  überwindet. Die Vergleichung der von  $P$  und  $S$  geleisteten Arbeiten vollzieht er mit Hilfe des Gesetzes

$$(1) \quad \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} S \Delta s,$$

indem er  $P$  und  $S$  als Kräfte auffaßt, die von Null aus allmählich anwachsen. Die auf diesem Wege abgeleitete Grundgleichung

$$(2) \quad \sum P \delta = \sum S \Delta s$$

ist übrigens von derselben allgemeinen Bedeutung, wie die unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen gefolgerte Bedingung  $\sum P \delta = \sum S \Delta s$ . Denn solange es sich nur um die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen handelt, ist die Größe der Elastizitätsziffern  $E$  und Querschnittsinhalte  $F$  der Stäbe gleichgültig, und man kann daher auch mit Hilfe der aus dem Clapeyronschen Gesetze gefolgerten

\*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 242 dieses Buches.



Gleichung (2) leicht auf den von Maxwell nicht berücksichtigten Einfluß von Temperaturänderungen schließen, ebenso wie man beobachteten Stützenverschiebungen durch Anbringung von Auflagerstäben mit passend gewählten Querschnitten Rechnung tragen kann. Dem Fehlen praktischer Beispiele ist es wohl zuzuschreiben, daß die Maxwellsche Arbeit lange Zeit nicht die verdiente Anerkennung gefunden hat.

Die erste Ableitung der Maxwellschen Gleichungen und Gesetze auf dem kürzeren Wege der Benutzung des Prinzips der virtuellen Verückungen rührt von Mohr her. Seine Beiträge zur Theorie des Fachwerks in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1874 und 1875 sind durch wichtige Anwendungen bahnbrechend geworden. Mohr stellte auch zuerst die elastische Linie des geraden Stabes und die Biegelinie des Fachwerks mit Hilfe des Seilpolygons dar.

Im Jahrgange 1884 der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover veröffentlichte Krohn eine Herleitung des Maxwellschen Satzes und zeigte seine Anwendung auf die Ermittlung der Einflußlinie für den Horizontalschub eines Zweigelenkbogens, und im Jahrgange 1885 derselben Zeitschrift gab der Verfasser die allgemeine

Deutung der Einflußlinien der Summen  $\sum S_0 S_a \frac{s}{\rho F}$ ,  $\sum S_0 S_b \frac{s}{\rho F}$ , .... als Biegelinien, ohne hinsichtlich der Größen  $X$  einschränkende Voraussetzungen zu machen. Schließlich stellte der Verfasser in der ersten, 1886 erschienenen Auflage des vorliegenden Buches nach einer Erweiterung des Maxwellschen Satzes die allgemeinen Elastizitätsgleichungen

$$L_a + \delta_a - \delta_{at} = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{ma} - X_b \delta_{mb} - \dots$$

auf, deren Gültigkeit nicht auf das Fachwerk beschränkt ist.

Neben den Maxwellschen Sätzen bilden die Sätze von Castigliano die Grundpfeiler der gegenwärtigen Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen. Man darf sogar behaupten, daß der Einfluß Castiglianos insofern der größere gewesen ist, als die Untersuchungen dieses leider so früh verstorbenen Forschers sich nicht auf die verhältnismäßig einfache Theorie des Fachwerks beschränkten. Das hervorragende Werk Castiglianos: „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques“ enthält eine Fülle wichtiger Anwendungen auf verschiedenen Gebieten der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. An seiner Spitze steht der mit Hilfe des Clapeyronschen Gesetzes entwickelte Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit sowie der aus diesem gefolgerte Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit. Den letzten Satz gab bereits früher Menabrea in der Abhandlung: „Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques“ [Comptes



rendus 1858, I, Seite 1056]\*); eine eigenartige Herleitung veröffentlicht Fränkel (1882) in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover.

Bemerkenswert ist, daß auch Daniel Bernoulli ein Gesetz der kleinsten Bieigungsarbeit gerader Stäbe aufstellte und Euler brieflich mitteilte.\*\*) Euler macht hiervon Gebrauch in der seinem berühmten Werke: „Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes“ angehängten Abhandlung: „De curvis elasticis“, in welcher er bei der Untersuchung der elastischen Linie eines geraden Stabes gleichen Querschnitts und gleicher Elastizität von dem Satze ausgeht: ut inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quæ non solum per puncta  $A$  et  $B$  transeant, sed etiam in his punctis a rectis positione datis

tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus expressionis  $\int \frac{ds}{R^2}$  minimus. Hierbei bedeutet  $ds$  das Bogenelement und  $R$  den Krümmungsradius. Setzt man  $\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$ , so erhält man, da  $EJ = \text{Konst.}$  ist:

$\int \frac{M^2 ds}{2 EJ}$  ein minimum. Das Integral:  $\int \frac{ds}{R^2}$  nennt Bernoulli die „vis potentialis.“

Zu den neueren Methoden der Statik zählt auch die kinematische Untersuchung statisch bestimmter Systeme. Sie schlägt den umgekehrten Weg ein wie die Maxwellsche Arbeit. Das Ziel der Maxwellschen Theorie des Fachwerkes ist die Verwertung der Arbeitsgleichung

$$\Sigma P \delta = \Sigma S \Delta s$$

zur Berechnung der Formänderungen statisch bestimmter Fachwerke aus den auf statischem Wege gefundenen Spannkraften  $S$  und deren Verwertung zur Untersuchung statisch unbestimmter Systeme; die gesuchte Größe ist

$$(I) \quad \delta = \Sigma \frac{S}{P} \Delta s.$$

Die kinematische Theorie des Fachwerkes verfolgt das entgegengesetzte Ziel: die Berechnung der Spannkraften aus den Verschiebungen  $\delta$ ; die gesuchte Größe ist

$$(II) \quad S = \Sigma \frac{\delta}{\Delta s} P.$$

\*) Man sehe auch: Comptes rendus, 1884, S. 174.

\*\*) Vergl. Fufs, Correspondance mathématique et physique, Tome II, S. 457, 507, 533.

Die erste Herleitung der  $S$  aus den auf geometrischem Wege gefundenen  $\delta$  gab der Verfasser in der Schweiz. Bauzeitung 1887 (Mai) und im Band I seiner Graphischen Statik 1887 zunächst für das ebene Fachwerk. Dann folgten die Arbeiten von R. Land in der Schweiz. Bauzeitung 1887 (Nov.) und der Zeitschrift des Österreichischen Architekten- und Ingenieur-Vereins 1888. Die kinematische Berechnung des Raumbachwerks entwickelte der Verfasser im Jahrgange 1892 im Zentralblatt der Bauverwaltung. Ein Teil dieser Untersuchung wurde im § 31 des vorliegenden Buches wiedergegeben; der hier eingeschlagene Weg besteht aus einer Verbindung der Grundgleichungen I und II. Bereits 1880 hatte Föppl in seinem Buche „Theorie des Fachwerkes“ ausgesprochen, daß man beim statisch bestimmten Fachwerk zu einer Gleichung mit nur einer Unbekannten  $S$  gelangt, wenn man einem Stabe, und nur diesem allein eine verschwindend kleine Längenänderung zuschreibt, und auf den dadurch eindeutig bestimmten Bewegungszustand des Fachwerks das Gesetz der virtuellen Verrückungen anwendet. Föppl hat aber diesen Gedanken nicht weiter verfolgt und deshalb ist wohl diese Stelle seines Buches nur von wenigen bemerkt worden.\*)

Wir schliessen mit der Anführung einiger Schriften, in denen der Leser weitere Anwendungen der in diesem Buche vorgetragenen Gesetze findet.

1. **Castigliano**, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turin (bei Negro), 1879.
2. — *Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici*. *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, Juni 1882; enthält eine sehr allgemeine Entwicklung des Maxwellschen Lehrsatzes und einen Bericht über den Satz von Betti, vgl. Seite 243 unseres Buches.
3. **Fränkel**, *Das Prinzip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben*. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1882, S. 63.
4. **Föppl**, *Theorie des Fachwerks*. Leipzig, 1880.
5. — *Das Fachwerk im Raume*. Leipzig, 1892.
6. **Gebbia**, *Una questione di priorità su alcune contribuzioni alla teoria dei sistemi articolati*. Il Politecnico 1891.
7. **Henneberg**, *Statik der starren Systeme*. Leipzig, 1886.

---

\*) Verfasser wurde erst später durch ein Referat von Henneberg auf diese Stelle aufmerksam gemacht.



8. **Könen**, Vereinfachung der Berechnung kontinuierlicher Balken mit Hilfe des Satzes von der Arbeit. Wochenbl. f. Archit. u. Ing. 1882, Seite 402.
9. — Theorie gekrümmter Erker- und Balkonträger. Deutsche Bauzeitung 1885, S. 607.
10. **Krohn**, Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger; Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 269.
11. **Land**, Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen u. s. w. Wochenblatt für Baukunde 1887, Seite 14.
12. — Über die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflußlinien für Träger. Zeitschr. f. Bauwesen 1890, S. 165.
13. — Die Ermittlung der Spannungsverteilung und des Kerns u. s. w. Zeitschr. f. Bauwesen 1892.\*)
14. **Landsberg**, Ebene Fachwerksysteme mit festen Knotenpunkten und das Prinzip der Deformationsarbeit. Zentralblatt der Bauverwaltung 1885, S. 165.
15. — Dächer und Dachstuhlkonstruktionen. Handbuch der Architektur 3. Teil, 2. Band, 4. Heft. 2. Aufl. 1901, S. 148.
16. — Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Zentralblatt der Bauverwaltung 1903, S. 221 u. 361.
17. **Melan**, Berechnung eiserner Hallengespärre unter Anwendung des Satzes von der kleinsten Arbeit. Wochenschr. des österr. Archit. u. Ing.-Ver. 1883, S. 149 u. 162.
18. — Über den Einfluß der Wärme auf elastische Systeme. Ebendasselbst 1883, S. 183 u. 202.
19. — Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme. Zeitschrift des österr. Archit.- u. Ing.-Ver. 1884, S. 100.
20. **Mohr**, Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874, S. 509 und 1875, S. 17.
21. — Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger. Ebendasselbst 1881, S. 243.
22. **Müller-Breslau**, Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit. Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 211.
23. — Zur Theorie der durch einen Balken versteiften Kette. Ebendasselbst 1883, S. 347. Diese Arbeit schließt sich an den in

---

\*) Der bekannte Satz  $\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$  (Seite 83 unseres Buches) wird hier mittels des Maxwellschen Satzes bewiesen und zur Bestimmung der Einflußlinie für  $\sigma$  benutzt.



- derselben Zeitschrift 1881, S. 57) von demselben Verfasser veröffentlichten Aufsatz an.
24. — *Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogen-träger.* Ebendasselbst 1884, S. 575. Ein Sonderabdruck erschien bei Schmorl u. von Seefeld in Hannover.
  25. — *Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens.* Civilingenieur 1883, S. 13.
  26. — *Influenzlinien für kontinuierliche Träger mit drei Stützpunkten.* Wochenbl. f. Archit. u. Ing. 1883, S. 353.
  27. — *Über kontinuierliche Bögen und Balken.* Ebendasselbst 1884.
  28. — *Zur Theorie der Versteifung labiler und flexibler Bogen-träger.* Zeitschr. f. Bauwesen 1883, S. 312.
  29. — *Beitrag zur Theorie des durch einen Balken versteiften Bogens.* Ebendasselbst 1884, S. 323.
  30. — *Beitrag zur Theorie des Fachwerks.* Zeitschr. des Architek.-u. Ing.-Ver. zu Hannover 1885.
  31. — *Elastizitäts-Theorie der nach der Stützlinie geformten Tonnen-gewölbe.* Zeitschr. f. Bauwesen 1886.
  32. — *Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger.* Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1888, S. 605.
  33. — *Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger.* Zentralblatt der Bauverwaltung 1889.
  34. — *Über einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen.* Zeitschr. f. Bauwesen 1891.
  35. — *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*, Bd. II, Abt. 1. 1892. 1901. Leipzig, Baumgärtners Buchhandlung.
  36. — *Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks*, 1892. Berlin, Ernst u. Sohn.
  37. — *Über die Berechnung statisch unbestimmter Auslegerbrücken.* Zentralblatt der Bauverwaltung 1898.
  38. — *Über räumliche Fachwerke.* Zentralblatt der Bauverwaltung 1902.
  39. — *Beiträge zur Theorie der Windverstreungen*, Zeitsch. f. Bauwesen 1904.
  40. **Ovazza**, *Sul calcolo delle deformazione dei sistemi articolati.* Atti della Academia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.
  41. — *Sul calcolo delle frecce elastiche delle travi reticolari*, ebenda-selbst vol. XXIII, 1888.
  42. **Stelzel**, *Berechnung der Ferdinandsbrücke in Graz.* Enthalten in der Schrift: v. Gabriely u. Winter, Ferdinandsbrücke in Graz, Mittheilungen des Polytechnischen Klubs in Graz 1883.

43. **Swain**, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames.* Journal of the Franklin Institute 1883, Febr. bis April, S. 101, 194, 250.
44. **Weyrauch**, *Theorie elastischer Körper.* Leipzig (bei Teubner) 1884.
45. — *Aufgaben zur Theorie elastischer Körper.* Ebendasselbst 1885.
46. — *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme.* Wochenbl.
47. **Winkler**, *Berechnung der Windverstreungen in Brücken mit zwei Trägern.* Civilingenieur 1884, S. 211.
48. **Zimmermann**, *Über Raumbachwerke.* Berlin 1901.

### Berichtigungen.

Seite	6, Zeile 10 v. o.	lies: und nur 2 k — 3 statt: und nicht mehr.	
"	16, " 22 v. u.	" Nennerdeterminante "	Nennerdetermine.
"	17, " 4 v. o.	" $\mathfrak{S}_{a1}$	" $S_{a1}$ .
"	27, " 5 v. o.	" $D_0$	" $D^0$ .
"	27, " 6 v. o.	" $X''$	" $Y''$ .
"	27, " 11 v. o.	" um	" und.
"	44, " 17 v. u.	" Seite 37 und 38	" Seite 30 und 31.
"	44, " 16 v. u.	" (13) und (14)	" (12) und (13).
"	44, " 2 v. u.	" Fig. 44	" Fig. 42.
"	47, " 13 v. u.	" Gleich. (13)	" Gleich. (12).
"	47, Anm.	" Fig. 48	" Fig. 46.
"	50, Zeile 23 v. o.	" § 2	" § 3.
"	52, " 1 v. o.	" Spannkkräfte $S'$	" Spannkkräfte $S$ .
"	55, " 16 v. u.	" 1, 2, 3, 3', 2', 1' "	1, 2, 3', 2' 3'.
"	109, " 2 v. o.	fällt die Anmerkung fort.	
"	109, " 10 v. u.	lies: $= Pl_1 \frac{l_1}{2} \cdot \frac{2l_1}{3}$ ; statt $= Pl_1 \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3}$ .	
"	109, " 9 v. u.	$= \frac{2Pl_1^2 h}{3} + \dots$ " $= \frac{2Pl_1^2 h}{6} + \dots$	
"	109, " 3 v. u.	$P \frac{2l_1^2 + 3al - 3(a - l_1)^2}{2\mu h (2l_1 + 3l)}$ statt $P \frac{l_1^2 + 3al - 3(a - l_1)^2}{2\mu h (2l_1 + 3l)}$ .	
"	114, " 7 v. u.	(Fig. 104) statt: (Fig. 53).	

- Seite 118, Zeile 7 v. u. lies:  $+\frac{2 J h_2^3}{3 J_2}$  statt:  $+\frac{2 J h_2^2}{3 J}$ .
- „ 131, „ 10 v. u. „  $M = M_0 - X \cdot y - Y \cdot x - Z$  statt  
 $M = M_0 - X_y - Y_x - Z$ .
- „ 137, „ 8 v. u. „  $D'FE'$  statt:  $D'HE'$ .
- „ 137, „ 6 v. u. „  $FH = FJ$  „  $FH = HJ$ .
- „ 147, „ 7 v. u. „ § 15 „ § 16.
- „ 154, „ 6 v. u. „ § 16 „ § 17.
- „ 176, „ 8 v. o. „ Seite 165 „ Seite 150.
- „ 203, „ 16 v. u. „  $X' = \frac{3 Pab}{4 \omega f' l} - \dots$  statt:  $X' = \frac{3 Pab}{4 \omega' f' l}$ .
- „ 203, „ 14 v. u. „  $\omega = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_c}{f'^2 l} \left( \frac{s_0}{F_s} + \frac{2 l_0}{F_0} + \frac{l}{F} \right)$   
 statt:  $\omega = 1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{J_c}{f'^2 l} \left( \frac{s_0}{F_s} + \frac{2 l^0}{F_0} + \frac{l}{F} \right)$ .
- „ 203, „ 12 v. u. lies: § 20 statt: § 21.
- „ 208, „ 16 v. o. „  $\delta_3 \cdot 2 = \delta_2 \cdot 3 = c_3$  statt  $\delta_3 \cdot 3 = \delta_3 \cdot 2 = c_3$ .
- „ 208, „ 11 v. u. „  $-X_1 \frac{c_1}{c_2 + c_3}$  „  $-X \frac{c_1}{c_2 + c_3}$ .
- „ 208, „ 9 v. u. „  $-X_1 \frac{c_1}{c_2 + c_3}$  „  $-X \frac{c_1}{c_2 + c_3}$ .
- „ 224 in Formel (125) ist unter dem Wurzelzeichen der Exponent  
 $+ m 1$  zu ersetzen durch  $m + 1$ .
- „ 227 fehlt in der Fußnote die Bemerkung, daß der de Saint-  
 Venantsche Näherungswert  $\frac{F^4}{\kappa J_p}$  (wo  $\kappa = 40$ ) nur für  
 gewisse einfache Querschnitte brauchbar und durch Versuche  
 von Bauschinger bestätigt ist. Für die wichtigen  $\perp$ -,  $\perp$ -,  
 $\perp$ -,  $\perp$ -Querschnitte muß das Torsionsproblem zur Zeit noch  
 als ungelöst bezeichnet werden.





Überzicht und Einteilung des Werkes

# Die graphische Statik der Bau- Konstruktionen

von

Heinrich F. B. Müller-Breslau.

Hier von bisher vorliegend:

**Band I:** Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte. Spannungen in geraden Stäben. Theorie der statisch bestimmten Träger mit Ausschluß der Untersuchung der Formänderungen. 3. wesentlich vermehrte Auflage 1901. Mit 541 Textfiguren und 7 lithographischen Tafeln. Brosch. 18 Mk. In Halbfranz geb. 20 Mk.

**Band II, Abt. 1:** Formänderung ebener Fachwerke. Das ebene statisch unbestimmte Fachwerk. 3. verbesserte Auflage 1903. Mit 436 Textfiguren und 7 lithographischen Tafeln. Brosch. 16 Mk. In Halbfranz geb. 18 Mk.

**Band II, Abt. 2, Lieferung 1:** Formveränderung des geraden Stabes. Der Balken auf mehreren Stützen. Mit 110 Textfiguren und 2 lithographischen Tafeln. Brosch. 3 Mk.

Band II, Abt. 2, Liefg. 2 (Schluß von Bd. II, Abt. 2), sowie Band III (Theorie des Erddrucks, Untersuchung der Stützmauern, Gewölbe-theorie, Steinerne Pfeiler und Widerlager) sollen sobald als möglich nachfolgen.

In unserm Verlag erschienen ferner:

## Über die Festigkeit veränderlich elastischer Konstruktionen insbesondere von Eisenbeton-Bauten.

Ein Beitrag zur Erforschung der inneren Kräfte und Deformationen sowie zum Gebrauch bei der Berechnung und Ausführung armerter Betonbalken, -Stützen und -Gewölbe.

Von

Ingenieur **Dr. RUDOLF SALIGER**

Oberlehrer a. d. Kgl. Baugewerkschule Cassel.

1904. Mit 63 Textabbildungen und 5 Tafeln in Photolithographie.

Preis broschiert 4 Mark.

Bei der immer wachsenden Bedeutung des modernen Betonbaues ist dies Werkchen hochaktuell und wird in den Interessenten-Kreisen raschen Absatz finden. Dasselbe berücksichtigt selbst die neuesten Fortschritte und wird hierin der jetzige Stand dieses wichtigen Konstruktionsgebietes erschöpfend zusammengefaßt.

---

## Aug. Ritter

Geh. Reg.-Rat und Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen.

### Lehrbuch der Analytischen Mechanik.

Dritte Auflage. Mit 224 Textfiguren. Brosch. 8 M., geb. 10 M.

### Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik.

Dritte Auflage. Mit 612 Textfiguren. Brosch. 16 M., geb. 18 M.

### Lehrbuch der Technischen Mechanik.

Achte, neu durchgesehene und vermehrte Auflage. 1900. Mit 873 Textabbildungen. Brosch. 20 M., geb. 22 M.

Ferner von demselben Verfasser:

### Elementare Theorie und Berechnung Eiserner Dach- und Brücken-Konstruktionen.

Sechste Auflage. Mit 495 Textabbildungen. Broschirt 10 M., in Halbfranz geb. 12 M.

---

## Die Geometrie der Lage

Vorträge von **Dr. Th. Reye**, ordentl. Professor der Universität Strassburg i. E.

3 Bände. Brosch. 23 M., in Halbfranz geb. 29 M.

Mit zahlreichen Textfiguren. Zur Zeit als das vollständigste Lehrbuch der neueren Geometrie angesehen.

---

## Handbuch der Fundierungsmethoden

im Hochbau, Brückenbau und Wasserbau von **L. Klasen**.

Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage. Grösstes Lex.-8°. Mit 580 Textabbildungen. Preis broschiert 15 M., in Halbfranz geb. 17 M.

Inhalt: Der Baugrund. Die zur Verwendung kommenden Maschinen und Apparate. Kalk, Zement und Beton. Spundwände und Fangedämme. Ausführung: auf Sand und Steinschüttung, auf Betonschüttung, auf Pfahlrost und Schraubenpfählen, in Caissons und Schwimmpfeilern, auf Senkbrunnen, Pneumatische Fundierungen. Gefrierverfahren. Sicherung gegen Senkungen und gegen Erdbeben. Kosten der verschiedenen Methoden.

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.