

R. Lauenstein,
Die graphische Statik.





HC

80. *24.*

7. MAJA 1906

Jamisz Marszyckie II 17a

Die graphische Statik.

Elementares Lehrbuch

für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauche in der Praxis
bearbeitet von

R. Taubenstein.

Fünfte Auflage. Mit 270 Abbildungen.

Preis geheftet 5 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 6 Mark.

Die Festigkeitslehre.

Elementares Lehrbuch

für den Schul- und Selbstunterricht sowie zum Gebrauch in der Praxis
nebst einem Anhang, enthaltend

Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte,
bearbeitet von

R. Taubenstein.

Vierte Auflage. Mit 90 Abbildungen.

Preis geheftet 3 M. 50 Pf. In Leinwand gebunden 4 M. 50 Pf.

Leitfaden der Mechanik.

Elementares Lehrbuch

für technische Mittelschulen und zum Selbstunterricht
bearbeitet von

R. Taubenstein.

Dritte Auflage. Mit 191 Abbildungen.

Preis geheftet 4 Mark. In Leinwand gebunden 5 Mark.

Die Eisenkonstruktionen des einfachen Hochbaues.

Zum Gebrauch für Schule und Praxis bearbeitet von

R. Taubenstein

unter Mitwirkung von A. Hanser.

Erster Teil:

Material und Konstruktionselemente.

Zweite Auflage. Mit 196 Abbildungen.

Preis geheftet 2 M. 40 Pf. In Leinwand gebunden 3 Mark.

Zweiter Teil:

Anwendung und Ausführung der Konstruktionen.

Mit 322 Abbildungen. Preis geheftet 3 M. 60 Pf.

Einladung zum Abonnement.

Dinglers Polytechnisches Journal.

Achtzigster Jahrgang. 1899.

Herausgegeben von Professor W. Pickersgill in Stuttgart.

Jährlich 52 Hefte in Quart mit vielen Abbildungen.

Abonnementspreis vierteljährlich 6 Mark.

„Dinglers Polytechnisches Journal“ zeichnet sich vor allen anderen technischen Zeitschriften dadurch aus, dass es seine Leser hinsichtlich der Fortschritte und Neuerungen auf dem gesamten Gebiete der mechanischen Technologie, des Maschinenbaus und der Elektrotechnik auf dem Laufenden erhält.

Da die einzelnen Zweige der gewerblichen Thätigkeit sich vielfach berühren und durchdringen und ein Fortschritt auf irgend einem Gebiete sehr oft in einer überraschend erfolgreichen Weise auf einen fremden Erwerbszweig Einfluss ausübt, so sind die planmässigen, kurzen und mit einer Menge von bildlichen Darstellungen versehenen Uebersichtsberichte aus allen technischen Gebieten, wie sie „Dinglers Polytechnisches Journal“ bringt, von höchstem Nutzen für jeden Techniker und Industriellen.

Der Vergleich des Inhalts des neuen Jahrgangs 1899 mit demjenigen der früheren Jahrgänge lässt erkennen, dass Redaktion und Verlag noch mehr als bisher bemüht sind, interessante Originalartikel aus allen in Betracht kommenden Fächern zu bieten.

Um dem Journal in immer weiteren Kreisen Eingang zu verschaffen, wurde der **Abonnementspreis** für das Quartal von 13 Wochenheften von 9 Mark auf **6 Mark** ermässigt.

Durch zahlreiche Textabbildungen wird das Verständnis erleichtert und durch ausführliche Vierteljahrs-Register das rasche Auffinden jedes Namens und jeder Materie ermöglicht.

Probehefte sind in den meisten Buchhandlungen gratis zu haben.

Man abonniert auf „Dinglers Polytechnisches Journal“ bei allen Buchhandlungen und Postanstalten.

214 232

Die

Graphische Statik.

Elementares Lehrbuch

für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis

bearbeitet von

R. Lauenstein,

Ingenieur und Professor an der Großh. Baugewerkschule in Karlsruhe.

Fünfte Auflage.

Mit 270 Abbildungen.



Stuttgart 1899.

Arnold Bergsträßer Verlagsbuchhandlung

H. Kröner.

531/533



2308

Alle Rechte vorbehalten.

Vorwort.

Die vorliegende Bearbeitung der graphischen Statik soll einerseits als Lehrbuch in technischen Unterrichtsanstalten, andererseits auch zum Gebrauche in der Praxis dienen. Diesem Zwecke entsprechend ist sowohl die Art der Behandlung, wie die Auswahl des Stoffes, bei welcher der Verfasser immer die Anwendung auf praktische Fälle im Auge hatte, möglichst angepaßt. Von den allgemeinen Entwicklungen wurde nur so viel gegeben, als zur Lösung der dem Techniker hauptsächlich vorkommenden Aufgaben nötig ist, dagegen alles das fortgelassen, was nur theoretisches Interesse bietet.

Das Buch enthält außer den in den ersten Paragraphen behandelten allgemeinen Grundlagen der graphischen Statik die Anwendungen derselben auf dem Gebiete der belasteten einfachen Balkenträger sowie der Fachwerke, und zwar für bleibende als auch für veränderliche Belastung, und der verschiedenartigen Dachbinder; ferner die Bestimmung des Winddruckes und des Erddruckes (nach Rebhann), die Untersuchung der Stützmauern, Tonnengewölbe, Kreuz- und Kuppelgewölbe, sowie der Widerlager und Pfeiler, nebst einem Anhange mit Tabellen über Eigengewicht, Belastung und Beanspruchung von Bauteilen.

Den einzelnen Paragraphen ist eine größere Anzahl dem Baufache entnommener Zahlenbeispiele beigelegt, welche von den Studierenden zur Uebung durchzukonstruieren sind. Dabei ist es nützlich, die durch graphische Lösung gefundenen Ergebnisse nachträglich durch Rechnung zu prüfen; es zeigt sich dadurch, mit welcher Genauigkeit die stets mit kleinen Zeichenfehlern behaftete Konstruktion durchgeführt war.

Der Umstand, daß von dem Buche binnen wenigen Jahren schon die fünfte Auflage erforderlich geworden ist, beweist wohl am besten, daß dasselbe sich als brauchbar herausgestellt und manche Freunde erworben hat.

Trotz mehrfacher bei der Neubearbeitung eingeschalteter Zusätze und Erweiterungen ist durch passendere Ausnutzung des für die Figuren erforderlichen Raumes und (soweit es ohne die Deutlichkeit zu beeinträchtigen möglich war) durch knappere Fassung des erläuternden Textes der Umfang des Buches gegen die vorige Auflage nicht wesentlich vergrößert worden.

Schließlich spreche ich allen Fachgenossen, die mir durch freundliche Winke, durch Rat und That auch diesmal zur Seite gestanden haben, namentlich Herrn Professor R. Land in Konstantinopel, meinen besonderen Dank aus, mit der Bitte, mich auch fernerhin durch ihre Ratschläge zur Verbesserung und weiteren Vervollkommnung des Buches unterstützen zu wollen.

Karlsruhe, März 1899.

R. Lauenstein.

I n h a l t.

	Seite
§ 1. Einleitung	1
§ 2. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene	2
1) Die Kräfte wirken in derselben geraden Linie	2
2) Die Kräfte schneiden sich in einem Punkte	3
3) Die Kräfte liegen in der Ebene zerstreut	5
4) Die Kräfte sind parallel	9
§ 3. Zusammenhang zwischen dem Kräfteplan und dem Seilzuge	12
1) Gleichgewichtsbedingung	12
2) Veränderung des Poles bei einer und derselben Kräftegruppe	14
3) Der Seilzug als Mittelkraftslinie	16
§ 4. Das statische Moment der Kräfte	17
§ 5. Graphische Flächenbestimmung	22
1) Das Dreieck	22
2) Das Viereck	23
3) Das Vieleck	24
4) Kreisabschnitt und Kreisbogen	25
§ 6. Graphische Schwerpunktsbestimmung	25
1) Das Dreieck	26
2) Das Viereck	26
3) Das Vieleck	29
4) Zusammenge setzte Figuren	29
§ 7. Trägheitsmomente	32
§ 8. Der belastete Träger	36
A. Bleibende Belastungen	37
1) Unmittelbare Belastung durch Einzelkräfte	37
2) Unmittelbare gleichmäßig verteilte Belastung	41
3) Unmittelbare zusammengesetzte Belastung	45
4) Mittelbare Belastung durch Einzelkräfte	47
5) Mittelbare gleichmäßig verteilte Belastung	49
B. Veränderliche Belastungen	51
1) Unmittelbare Belastung durch eine bewegliche Einzelkraft	51
2) Unmittelbare Belastung durch eine bewegliche Gruppe von Einzelkräften	53
3) Unmittelbare gleichmäßig verteilte Belastung	57
4) Mittelbare Belastung durch eine bewegliche Einzelkraft	59
5) Mittelbare Belastung durch eine bewegliche Gruppe von Einzelkräften	60
6) Mittelbare gleichmäßig verteilte Belastung	63
§ 9. Zahlenbeispiele zu dem belasteten Träger	65
A. Bleibende Belastungen	65
B. Veränderliche Belastungen	69

	Seite
§ 10. Fachwerke für bleibende Belastung	74
1) Fachwerke mit wagerechtem Obergurt	76
2) Fachwerke mit wagerechtem Untergurt	80
3) Fachwerke mit wagerechtem Ober- und Untergurt (Parallelträger)	83
4) Das allgemeine ebene Fachwerk	84
§ 11. Zahlenbeispiele zu dem bleibend belasteten Fachwerke	87
§ 12. Fachwerke für veränderliche Belastung (Brückenträger)	91
§ 13. Zahlenbeispiele zu den Brückenträgern	95
§ 14. Fachwerkartige Dachkonstruktionen	104
1) Das deutsche Dach	105
2) Das englische Dach	107
3) Das belgische Dach	107
4) Das französische oder Polonceau-Dach	109
5) Die Vorbächer	113
6) Die Sägebächer	117
7) Die Holzbächer	118
§ 15. Zahlenbeispiele zu den Dachkonstruktionen	123
§ 16. Winddruck	131
§ 17. Erddruck	143
§ 18. Druckverteilung in Mauerwerkskörpern	151
1) Winkelrecht und central belastete Mauern	151
2) Central aber schief belastete Mauern	153
3) Excentrisch belastete Mauern	154
§ 19. Druckverteilung in Pfeilerquerschnitten bei excentrischer Belastung	163
1) Druckverteilung mit Zulassung von Zugspannungen	163
2) Druckverteilung mit Ausschluß von Zugspannungen	166
§ 20. Statische Untersuchung der Stützmauern	169
Die Stützlinie der Mauern	173
Unterschnittene Futtermauern	178
Stützmauern mit Strebepfeilern	181
§ 21. Statische Untersuchung der Fabrikschornsteine	185
§ 22. Die Tonnengewölbe	190
1) Das symmetrisch belastete Gewölbe	191
2) Das unsymmetrisch belastete Gewölbe	196
3) Die verschiedenen Lagen der Drucklinie (Maximal- und Minimal- Drucklinie)	203
§ 23. Die Kreuzgewölbe	208
1) Die Lagerfugen laufen parallel den Längsachsen der Tonnengewölbe	209
2) Die Lagerfugen sind im Grundriß senkrecht zu den Graten angeordnet	210
§ 24. Die Kuppelgewölbe	212
§ 25. Die Widerlager und Pfeiler	215
1) Die Widerlager	215
2) Die Pfeiler	218
§ 26. Die Stärken der Brückengewölbe	224
§ 27. Belastung der Lehrgerüste durch die Gewölbe	227
Anhang. Tabellen über Eigengewicht, Belastung und Beanspruchung von Bauteilen	230

§ 1.

Einleitung.

Durch die graphische Statik werden die Aufgaben der Statik, d. h. der Lehre vom Gleichgewicht der unter Einwirkung von Kräften befindlichen Körper, auf zeichnerischem Wege mit Hilfe von Lineal und Zirkel gelöst, indem man sich dabei ausschließlich der geometrischen Konstruktionen bedient und die Rechnung ausschließt.

Zu dem Zwecke werden die Kräfte in der graphischen Statik nicht durch Zahlen, sondern durch gerade Linien dargestellt.

Eine Kraft ist vollständig bestimmt durch Größe, Richtung und Lage; eine gerade Linie ist bestimmt durch Länge, Richtung und einen Punkt, durch welchen diese verläuft. Bei einer eine Kraft darstellenden geraden Linie gibt die Länge der Linie die Größe der Kraft an, die Richtung der Linie entspricht der Richtung der Kraft und irgend ein Punkt in der geraden Linie bestimmt die Lage der Kraft. Die Kräfte werden gemessen durch Gewichtseinheiten, die geraden Linien durch Längeneinheiten. Die gerade Linie also, durch welche eine Kraft dargestellt werden soll, muß so viele Längeneinheiten enthalten als die Kraft Gewichtseinheiten; sie wird gemessen mit einem Maßstabe, dem sogen. Kräftemaßstabe, dessen Einheit (gewöhnlich das cm) einem bestimmten Gewichte entspricht.

Stellt z. B. 1 cm 500 kg dar, so wird eine gerade Linie von 4 cm Länge eine Kraft von $4 \cdot 500 = 2000$ kg bedeuten, eine Linie von 6,3 cm Länge eine Kraft von $6,3 \cdot 500 = 3150$ kg.

In dem Maßstabe: 1 cm = 3000 kg wird eine Kraft von 9600 kg dargestellt durch eine gerade Linie von $\frac{9600}{3000} = 3,2$ cm Länge u. s. w.

Fig. 1.

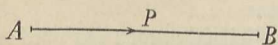
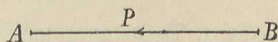


Fig. 2.



Die Richtung einer Kraft wird am einfachsten angegeben durch einen Pfeil oder auch durch die Reihenfolge der Buchstaben, mit denen die Endpunkte der die Kraft darstellenden Geraden bezeichnet sind.

So wird z. B. die Kraft P in Fig. 1 angegeben durch die Strecke AB , weil sie von A nach B wirkt, in Fig. 2 durch die Strecke BA , weil sie von B nach A wirkt.

§ 2.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene.

Unter Zusammensetzung von Kräften versteht man die Bestimmung ihrer Mittelkraft oder Resultierenden, deren Wirkung dieselbe ist, wie die Wirkungen der einzelnen gegebenen Kräfte zusammen genommen. Die Kräfte selbst nennt man Seitenkräfte oder Komponenten.

Die Zerlegung von Kräften ist das Umgekehrte der Zusammensetzung. Aus einer Kraft, welche man als Mittelkraft auffaßt, werden daher durch Zerlegung die Seitenkräfte gebildet, welche zusammen genommen dieselbe Wirkung hervorbringen als die Mittelkraft.

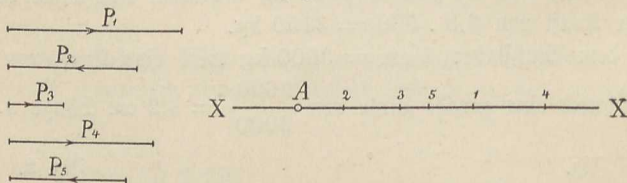
1) Die Kräfte wirken in derselben geraden Linie.

Liegen beliebig viele Kräfte in derselben geraden Linie und haben alle dieselbe Richtung, so ist die Mittelkraft gleich der Summe derselben. Ihre Richtung fällt mit der Richtung der ursprünglichen Kräfte zusammen.

Liegen zwei Kräfte in derselben geraden Linie, haben aber entgegengesetzte Richtung, so ist die Mittelkraft gleich dem Unterschiede derselben und hat die Richtung der größeren Kraft. Für den Fall, daß die beiden gegebenen Kräfte gleiche Größe haben, ist deren Mittelkraft = Null.

Beliebig viele Kräfte, welche in derselben geraden Linie liegen, aber ungleiche Richtung haben, werden zu einer Mittelkraft vereinigt, indem man die die Kräfte darstellenden Strecken der Reihe nach, von einem beliebigen Punkte A der geraden Linie ausgehend, den Richtungen entsprechend aneinander reiht. Die Mittelkraft wird dann dargestellt durch die Strecke vom Anfangspunkte A bis zum Endpunkte der letzten Kraft.

Fig. 3.



So z. B. gelangt man (Fig. 3) durch den Pfeilrichtungen entsprechendes Aneinanderreihen der Kräfte P_1 bis P_5 , welche sämtlich in der Geraden XX liegen sollen, von dem beliebig gewählten Anfangspunkte A aus nacheinander zu den Punkten 1, 2, 3, 4, 5. Die Strecke $A5$ ist dann die Mittelkraft der Kräfte P_1 bis P_5 .

Die Aufgabe, eine Kraft in zwei oder allgemein n Seitenkräfte zu zerlegen, welche in derselben geraden Linie wirken, ist nur lösbar, wenn eine bzw. $(n - 1)$ Seitenkräfte der Größe und Richtung nach bestimmt sind.

2) Die Kräfte schneiden sich in einem Punkte.

Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 , welche zwar in derselben Ebene, aber nicht in derselben Geraden liegen, sondern einen Winkel miteinander bilden und ihrer Größe und Richtung nach durch die Linien AB und AD bestimmt sind (Fig. 4), auf einen Punkt A , so stellt nach dem Parallelogrammgesetze die Diagonale AC des aus den beiden Kräften konstruierten Parallelogramms ihrer Größe und Richtung nach die Mittelkraft R dar.

Zur Bestimmung von R braucht man nun nicht das ganze Parallelogramm $ABCD$, sondern es genügt die Hälfte desselben, z. B. das Dreieck ABC .

Fig. 4.

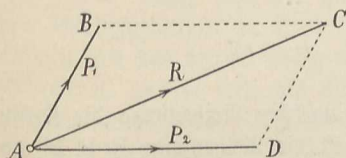
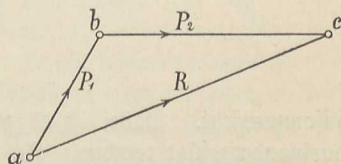


Fig. 5.



Man trägt zu dem Zwecke in einer besonderen Figur (Fig. 5) von dem Endpunkte b der Kraft $P_1 = ab$ aus die Kraft $P_2 = bc$ ihrer Größe und Richtung nach so ab, daß die Pfeilrichtung von a aus über b nach c sich nicht ändert. Der Linienzug abc wird durch die Gerade ac zu einer geschlossenen Figur, dem sogen. Kräfte-dreieck. Die Gerade ac heißt deshalb die Schlußlinie; sie stellt ihrer Größe und Richtung nach die Mittelkraft der Kräfte P_1 und P_2 dar. Die Pfeilrichtung der Mittelkraft geht immer vom Anfangspunkte a nach dem Endpunkte c des Kräftezuges.

Soll umgekehrt eine Kraft R in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 von gegebener Richtung zerlegt werden, so geschieht dies graphisch ebenfalls durch Konstruktion des Kräfte-dreiecks, indem man durch die Endpunkte von R Parallelen zu den gegebenen Richtungen der P_1 und P_2 zieht (Fig. 5). Statt der Richtung beider Seitenkräfte kann auch Richtung und Größe einer derselben oder aber die Größe beider Seitenkräfte gegeben sein.

Im letzteren Falle, welcher zwei Lösungen zuläßt, beschreibt man aus den Endpunkten von R mit P_1 bzw. P_2 als Halbmesser Kreisbögen, welche sich im Punkte b schneiden. Die Lösung ist natürlich nur dann möglich, wenn die Summe der Kräfte P_1 und P_2 größer als R ist.

Hat man 3 Kräfte $P_1 P_2 P_3$, welche auf denselben Punkt A wirken (Fig. 6), so bestimmt man deren Mittelkraft, indem man mittels des Kräfte-dreiecks zunächst P_1 und P_2 zu der Mittelkraft R_{1-2} zusammensetzt, sodann

diese letztere in derselben Weise mit P_3 zu der Mittelkraft $R_{1-3} = R$. Man trägt also an a c von c aus die P_3 ihrer Größe und Richtung nach so ab, daß die Pfeilrichtung von a aus über c nach d sich nicht ändert. Es ist dann $a d = R_{1-3} = R$ die Mittelkraft von R_{1-2} und P_3 , somit auch die Mittelkraft von $P_1 P_2 P_3$.

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man die Kräfte P_1 bis P_3 , von a anfangend, zu einem fortlaufenden Zuge mit demselben Umlaufungssinn

Fig. 6.

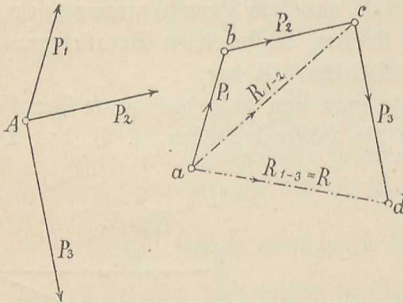
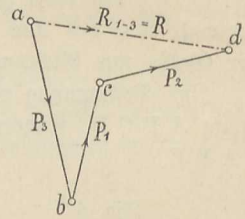


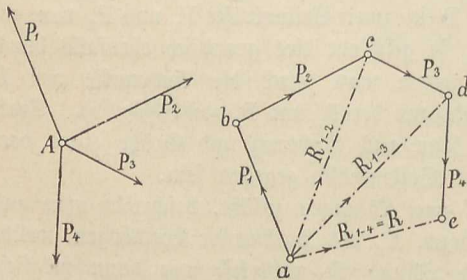
Fig. 7.



zusammensetzt. Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Kräfte aneinandergesetzt werden. In Fig. 7 z. B. ist die Reihenfolge $P_3 P_1 P_2$ gewählt. Man erhält auch hier wieder dieselbe Schlußlinie $a d = R$.

Ganz in derselben Weise verfährt man, wenn man die Mittelkraft von beliebig vielen, auf einen Punkt wirkenden Kräften zu bestimmen hat. Man setzt in beliebiger Reihenfolge die Kräfte als gerade Linien so aneinander, daß die Richtungspfeile immer denselben Sinn haben. Die Schlußlinie stellt dann die Mittelkraft sämtlicher Einzelkräfte dar; die Pfeilrichtung derselben geht immer vom Anfangspunkte nach dem Endpunkte des Kräftezuges.

Fig. 8.



Die einzelnen Diagonalen stellen die Mittelkräfte dar aus den Kräften, welche als Vielecke zwischen den Endpunkten der Diagonalen liegen.

In Fig. 8 z. B. ist R_{1-2} die Mittelkraft aus P_1 und P_2 ; R_{1-3} die Mittelkraft aus R_{1-2} und P_3 , also auch aus $P_1 P_2 P_3$; $R_{1-4} = R$ die Mittelkraft aus R_{1-3} und P_4 , also auch aus $P_1 P_2 P_3 P_4$.

Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als 2 Seitenkräfte von gegebenen Richtungen, welche die Kraft in demselben Punkte schneiden, zu zerlegen, ist unbestimmt, da unendlich viele Lösungen möglich sind.

Fällt der Endpunkt des Kräftezuges mit dem Anfangspunkte zusammen, ist also der Kräftezug geschlossen, so ist die Mittelkraft = Null. Es sind dann die Kräfte miteinander im Gleichgewichte. Bei dem geschlossenen Kräftezuge haben sämtliche Richtungs Pfeile denselben Umfahrungsinn, es dürfen sich also nie zwei Pfeile begegnen. Ein solcher Kräftezug heißt ein Kräfteplan.

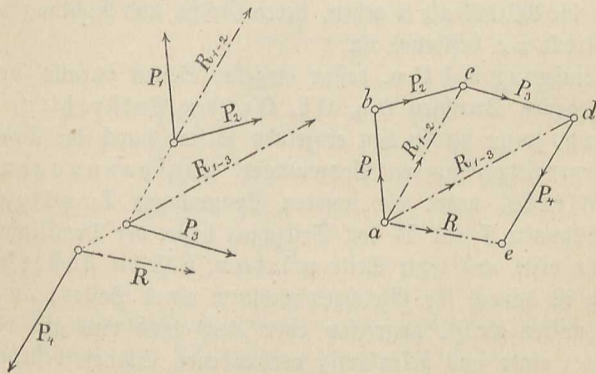
Sind beliebig viele Kräfte, welche denselben Angriffspunkt haben, miteinander im Gleichgewichte, entspricht ihnen also ein geschlossener Kräfteplan, so ist jede von ihnen gleich, aber entgegengesetzt der Mittelkraft aller übrigen Kräfte. Kehrt man also in einem geschlossenen Kräfteplan den Richtungs Pfeil einer Seite um, so stellt diese die Mittelkraft aller übrigen Kräfte dar.

3) Die Kräfte liegen in der Ebene zerstreut.

Ist die Mittelkraft von beliebig vielen Kräften, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, zu bestimmen, so kann dies in folgender Weise geschehen:

Man bringt zwei der gegebenen Kräfte zum Schnitt und setzt sie nach dem Vorhergehenden zu einer Mittelkraft zusammen; diese bringt man zum Schnitt mit der dritten Kraft und vereinigt sie mit letzterer wieder zu einer Mittelkraft und so fort, bis alle gegebenen Kräfte zu einer Gesamtmittelkraft vereinigt sind. Da durch Parallelverschiebung einer Kraft die Größe und Richtung derselben nicht verändert wird, so wird die Größe und Richtung der Gesamtmittelkraft dargestellt durch die Schlußlinie des aus den gegebenen Einzelkräften gezeichneten Kräftezuges. Auf diese Weise ist in Fig. 9 die Mittelkraft R aus den Kräften P_1 bis P_4 bestimmt.

Fig. 9.



Dies Verfahren zur Bestimmung der Mittelkraft ist aber nur dann möglich, wenn die Schnittpunkte der Einzelkräfte wirklich in der Zeichensfläche liegen. Ist dies nicht der Fall, so ist ein Verfahren anzuwenden, bei welchem die Schnittpunkte nicht erforderlich sind.

Es sollen zunächst die beiden Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 10), deren Schnittpunkt außerhalb der Zeichenfläche liegen möge, zu der Mittelkraft R vereinigt werden. Die Größe und Richtung von R ergibt sich aus dem mit den Kräften P_1 und P_2 konstruierten Kräftezuge $a b c$. Die Lage von R bestimmt man folgendermaßen:

Man füge den wirklich vorhandenen Kräften P_1 und P_2 (Fig. 10 a) noch zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete, sich also gegenseitig aufhebende Kräfte $+K$ und $-K$ von beliebiger Größe hinzu, deren Angriffspunkte zwei willkürlich in den Richtungslinien von P_1 und P_2 gewählte Punkte I und II sein können.

P_1 und $+K$ werden in dem Kräfteplane Fig. 10 b zu der Mittelkraft r_1 , P_2 und $-K$ zu der Mittelkraft r_2 zusammengesetzt. Nach Fig. 10 b

Fig. 10 a.

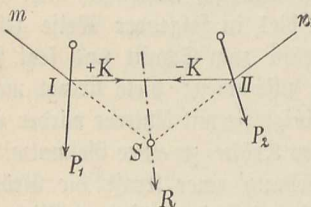
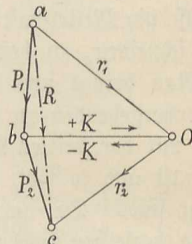


Fig. 10 b.



ist R die Mittelkraft von P_1 und P_2 , gleichzeitig aber auch die Mittelkraft von r_1 und r_2 . Zeichnet man die letzteren beiden Kräfte in Fig. 10 a ein, indem man durch I die mI parallel zu r_1 , durch II die nII parallel zu r_2 zieht und verlängert diese Linien bis zu dem Schnittpunkte S , so muß durch diesen Punkt die Mittelkraft R gehen, deren Größe und Richtung in Fig. 10 b durch die Strecke $a c$ bestimmt ist.

Den Linienzug $m I II n$, dessen einzelne Seiten parallel den aus dem Pole O gezogenen Strahlen $O a$, $O b$, $O c$ (den Polstrahlen) sind, nennt man Seilzug, wenn die in den einzelnen Seiten durch die äußeren Kräfte $P_1 P_2$ hervorgerufenen inneren Spannungen Zugspannungen sind, dagegen Drucklinie, wenn die inneren Spannungen Druckspannungen sind. Die Eckpunkte I und II des Seilzuges bzw. der Drucklinie heißen die Knoten, die erste und letzte Seite $m I$ bzw. $n II$ die äußersten Seiten. Der Seilzug ist danach die Gleichgewichtsform eines Seiles, an welchem in beliebigen Punkten Kräfte angreifen oder auch (und dies gilt ebenfalls für die Drucklinie) einer aus gelenkartig verbundenen Stäben bestehenden Kette, in welcher Kräfte in den Knoten angreifen.

Die Form des Seilzuges hängt von der Lage des Poles O ab, welche bestimmt wird durch Größe und Angriffspunkt der Kräfte K . Da aber sowohl Größe als auch Angriffspunkt der Kräfte K beliebig angenommen waren, so folgt, daß man zu den Kräften P_1 und P_2 unzählig viele Seilzüge kon-

struieren kann; alle aber haben die Eigenschaft, daß durch den Schnittpunkt S , welcher sich ergibt durch Verlängerung der äußersten Seilzugseiten, die Mittelkraft R hindurchgehen muß.

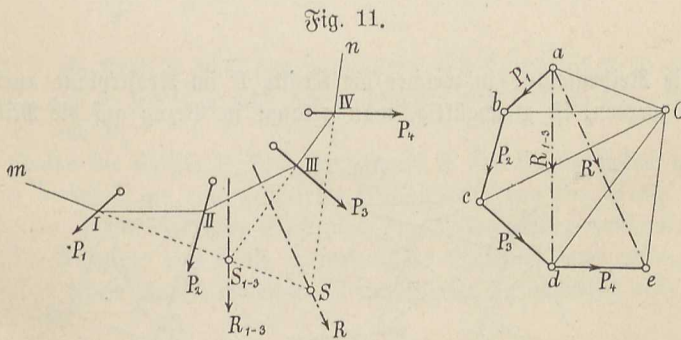
Aus dem Vorhergehenden ergibt sich zur Bestimmung der Mittelkraft R der Kräfte P_1 und P_2 , welche sich nicht in der Zeichenfläche schneiden, folgende Regel:

Man zeichnet zuerst den Linienzug abc , dessen Seiten gleich und parallel den Kräften P_1 und P_2 sind; die Schlußlinie ac gibt die Größe und Richtung der Mittelkraft R . Aus einem beliebig gewählten Pole O zieht man sodann die Strahlen Oa , Ob , Oc und zeichnet durch einen in der Richtung der einen Kraft willkürlich gewählten Punkt (z. B. den Punkt I in der Richtungslinie der Kraft P_1) den Seilzug $mIIn$ so ein, daß $mI \parallel Oa$, $IIn \parallel Ob$, $IIIn \parallel Oc$ ist. Durch den Schnittpunkt S der äußersten Seilzugseiten geht die Mittelkraft R .

Ersetzt man die Mittelkraft durch eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft, so befindet sich das ganze System im Gleichgewichte. Da dies auch für jeden Knoten des Seilzuges gilt, so müssen die an einem Knoten angreifenden Kräfte, d. h. eine äußere Kraft und die anschließenden Seilspannungen, im Kräfteplane ein geschlossenes Dreieck bilden.

Ganz in derselben Weise, wie oben bei 2 Kräften gezeigt wurde, ist die Mittelkraft R mehrerer in der Ebene zerstreut liegender Kräfte mit Hilfe des Kräfteplanes und Seilzuges zu konstruieren.

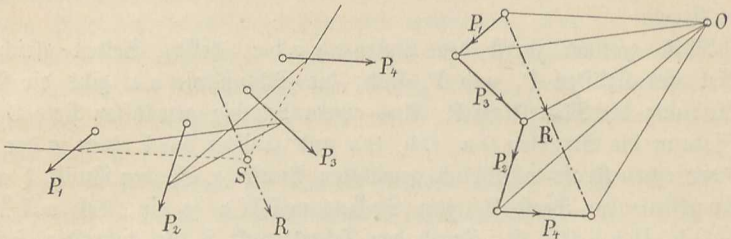
Soll z. B. aus den 4 Kräften $P_1 P_2 P_3 P_4$ (Fig. 11) die Mittelkraft bestimmt werden, so reihe man die gegebenen Kräfte zunächst in einem Kräfte-



plan nach Größe und Richtung aneinander und ziehe von einem beliebig gewählten Pole O nach den Eckpunkten $abcde$ die Strahlen. Darauf folgt die Aufzeichnung des Seilzuges, indem man von einem beliebigen Punkte I der Kraft P_1 die Seiten mI , IIn , $IIIn$. . . parallel den zugeordneten Polstrahlen Oa , Ob , Oc . . . zieht. Der Schnittpunkt S der äußersten Seilzugseiten gibt die Lage der Mittelkraft an, Größe und Richtung derselben liefert die Schlußlinie ae im Kräfteplane.

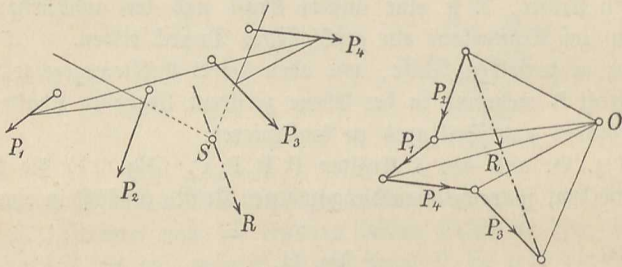
Sollen in Fig. 11 nicht alle Kräfte P , sondern nur z. B. die Kräfte $P_1 P_2 P_3$ zu einer Mittelkraft vereinigt werden, so sind für diese Kräfte m I und IV III die äußersten Seilzugseiten. Diese schneiden sich in S_{1-3} und

Fig. 12.



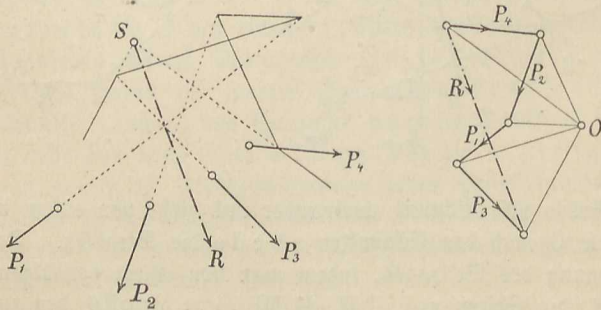
durch diesen Punkt geht die Mittelkraft R_{1-3} . Größe und Richtung derselben wird dargestellt durch die Linie $a d$ im Kräfteplane.

Fig. 13.



Die Reihenfolge, in welcher die Kräfte P im Kräfteplane aneinander getragen werden, ist gleichgültig, man gelangt in Bezug auf die Mittelkraft

Fig. 14.



immer zu demselben Endergebnis. In Fig. 11 z. B. war die Mittelkraft R der 4 Kräfte P_1 bis P_4 bestimmt, welche im Kräfteplane in der Reihenfolge $P_1 P_2 P_3 P_4$ aneinander getragen sind. In Fig. 12 ist dieselbe Aufgabe gelöst

für die Reihenfolge $P_1 P_3 P_2 P_4$, in Fig. 13 für die Reihenfolge $P_2 P_1 P_4 P_3$, in Fig. 14 endlich für die Reihenfolge $P_4 P_2 P_1 P_3$. Die Mittelkraft geht immer durch den Schnittpunkt der äußersten Seilzugseiten.

Eine Kraft R Fig. 10 S. 6 wird in 2, der Lage und Richtung nach gegebene Seitenkräfte P_1 und P_2 , deren Schnittpunkt mit R außerhalb der Zeichenebene liegt, zerlegt, indem man durch den einen Endpunkt der die Kraft R darstellenden Geraden eine Parallele zu P_1 , durch den andern Endpunkt eine Parallele zu P_2 zieht.

Soll eine Kraft R in 3 der Lage und Richtung nach gegebene Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 zerlegt werden, so ist diese Aufgabe nur dann lösbar, wenn sich die Seitenkräfte nicht in einem Punkte schneiden und wenn keiner ihrer Schnittpunkte auf der Richtungslinie von R liegt. Unter dieser Voraussetzung ist die Lösung folgendermaßen:

Man verbinde den Schnittpunkt A zweier Seitenkräfte, z. B. P_1 und P_2 , mit dem Schnittpunkte B der dritten Seitenkraft P_3 und der Kraft R durch die Gerade AB (Fig. 15 a). Man zerlege sodann in dem Kräfteplane

Fig. 15 a.

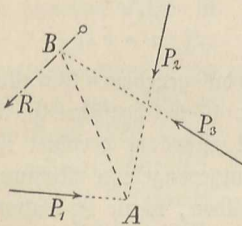


Fig. 15 b.

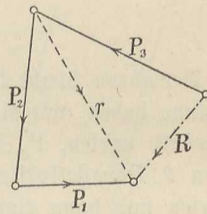


Fig. 15 b die Kraft R nach den Richtungen von P_3 und AB in die Seitenkräfte P_3 und r , ferner r nach den Richtungen von P_1 und P_2 in die Seitenkräfte P_1 und P_2 .

Sollen die Kräfte $P_1 P_2 P_3$ der Kraft R das Gleichgewicht halten, so erhalten dieselben die entgegengesetzte Pfeilrichtung von der in Fig. 15 a eingezeichneten, so daß dann der Kräfteplan Fig. 15 b zu einem geschlossenen wird.

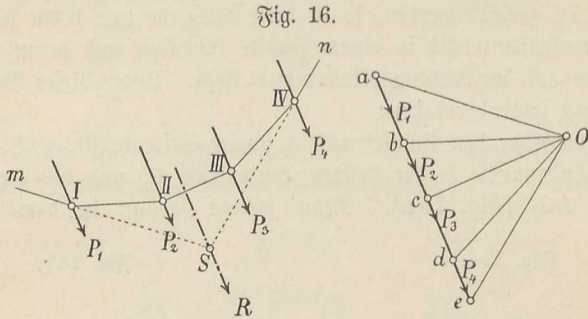
Die Aufgabe, eine Kraft in mehr als 3 Seitenkräfte zu zerlegen, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, ist unbestimmt, da unendlich viele Lösungen möglich sind.

4) Die Kräfte sind parallel.

Die Zusammensetzung paralleler Kräfte geschieht mit Benutzung des Kräfteplanes und Seilzuges in derselben Weise, wie die unter 3) in diesem Paragraphen beschriebene Zusammensetzung von in der Ebene zerstreut liegenden Kräften.

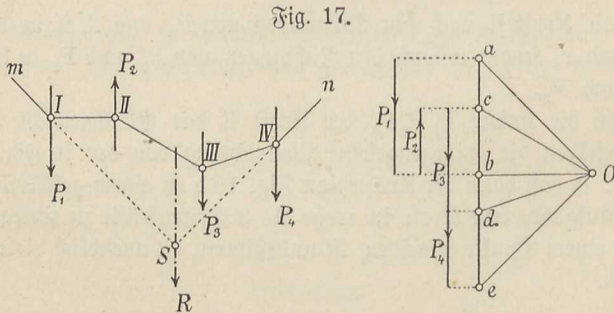
Es seien z. B. die 4 Parallelkräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ (Fig. 16) zu einer Mittelkraft zu vereinigen. Man setzt zunächst die gegebenen Kräfte zu einem

Kräftezuge, der in diesem Falle eine gerade Linie, die sogen. Kraftlinie, bildet, zusammen, so daß $ab = P_1$, $bc = P_2$, $cd = P_3$, $de = P_4$ ist. Es stellt dann die ganze Linie ae die Mittelkraft R der Größe und Richtung nach dar. Aus einem beliebigen Pole O ziehe man sodann die Strahlen Oa , Ob , Oc , Od , Oe , und zeichne den Seilzug so auf, daß die einzelnen Seiten desselben parallel den zugeordneten Polstrahlen sind, also $mI \parallel Oa$, $I II \parallel Ob$ u. s. w. Der Schnittpunkt S der äußersten Seilzugseiten ist dann ein Punkt, durch welchen die Mittelkraft R verlaufen muß.



Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn die gegebenen Parallelkräfte ungleiche Richtung haben, wie dies z. B. in Fig. 17 durchgeführt ist, wo $P_1 P_3 P_4$ lotrecht abwärts wirken, P_2 dagegen lotrecht aufwärts gerichtet ist.

Saben 2 Parallelkräfte P_1 und P_2 entgegengesetzte Richtung, so läßt sich aus diesen nur dann eine Mittelkraft bilden, wenn P_1 entweder größer

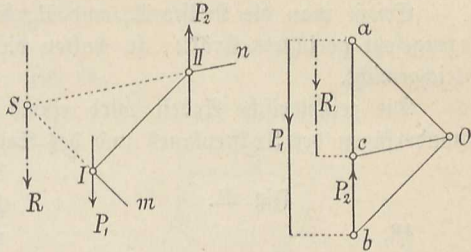


oder kleiner als P_2 ist. Ist $P_1 = P_2$, so ist die Mittelkraft = Null und es entsteht ein Kräftepaar, wovon weiter unten die Rede sein wird.

Es soll hier zunächst (Fig. 18) $P_1 > P_2$ vorausgesetzt werden. Durch Aneinanderfügen der Kräfte $P_1 = ab$ lotrecht abwärts und $P_2 = bc$ lotrecht aufwärts zu einem Kräftezuge, welcher hier wiederum eine gerade Linie bildet, ergibt sich die Mittelkraft $R = ac$; dieselbe ist gleich dem Unterschied der gegebenen Kräfte und hat die Richtung der größeren Kraft. Zur

Bestimmung der Lage von R zeichne man den Kräfteplan aus dem beliebigen Pole O , und den Seilzug $m I II n$, so daß $m I \parallel O a$, $I II \parallel O b$, $II n \parallel O c$ wird. Der Schnittpunkt S der äußersten Seilzugseiten (hier $m I$ und $n II$), durch welchen die Mittelkraft R gehen muß, liegt stets außerhalb der gegebenen Kräfte P_1 und P_2 und zwar auf der Seite der größeren Kraft.

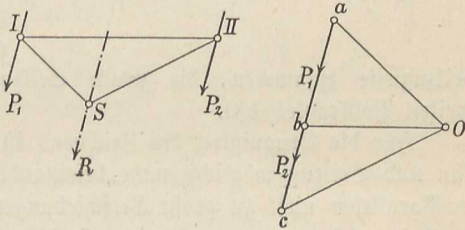
Fig. 18.



Zur Lösung der Aufgabe, eine Kraft R in zwei ihr parallele der Lage nach gegebene Seitenkräfte P_1 und P_2 zu zerlegen, zeichne man (Fig. 19) einen beliebigen Seilzug $I S II$,

trage seitwärts $a c$ gleich und parallel R auf und ziehe durch a eine Parallele zu $I S$, durch c eine Parallele zu $S II$. Durch den Schnittpunkt O dieser Linien ziehe zu der Schlußlinie $I II$ eine Parallele, welche die $a c$ in b schneidet. Es ist dann $a b = P_1$ und $b c = P_2$.

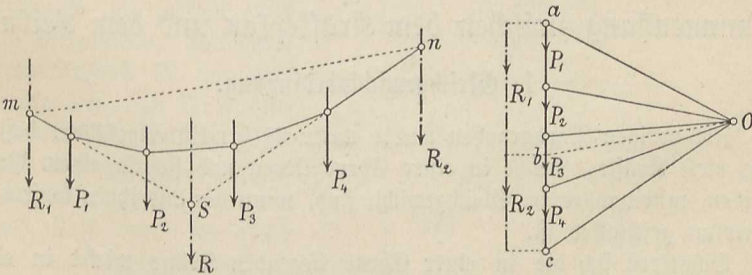
Fig. 19.



In dieser Konstruktion ist zugleich die Lösung der Aufgabe enthalten, die Größe von 2 der Lage nach gegebenen Parallelkräften R_1 und R_2 zu bestimmen, durch welche eine beliebige Anzahl gegebener Parallelkräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ ersetzt werden kann.

Man füge die gegebenen Kräfte P zu einem Kräftezuge $a c$ (Fig. 20) aneinander, zeichne aus einem beliebigen Pole O den Kräfteplan und danach

Fig. 20.



den Seilzug, dessen äußerste Seiten die Richtungen von R_1 und R_2 in den Punkten m und n schneiden. Man ziehe die Schlußlinie $m n$ und durch den Pol O eine Parallele zu derselben, welche den Kräftezug in b schneidet. Es

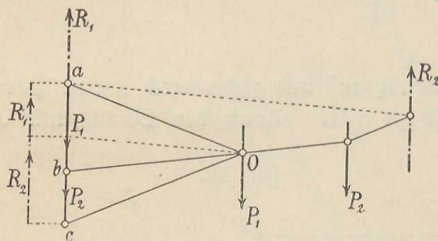
ist dann $ab = R_1$ und $bc = R_2$. Der Schnittpunkt S der verlängerten äußersten Seilzugseiten gibt die Lage der Gesamtmittelkraft $R = R_1 + R_2$.

Diese Konstruktion findet eine wichtige Anwendung zur Bestimmung der Auflagerdrücke eines belasteten Balkens auf 2 Stützen, welcher später ausführlich besprochen wird.

Ersetzt man die Kräfte R_1 und R_2 durch 2 ihnen gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte, so halten diese den gegebenen Kräften P das Gleichgewicht.

Die zeichnerische Arbeit wird etwas vereinfacht durch teilweises Zueinanderfügen des Kräfteplanes und des Seilzuges, wie dies z. B. in Fig. 21

Fig. 21.



durchgeführt ist, wo die Größe der der Lage nach gegebenen Kräfte R_1 und R_2 bestimmt wurde, welche den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht halten. Die Kraftlinie fällt hier mit der Richtung von R_1 zusammen, der Pol O ist in der Richtungslinie von P_1 angenommen. Dadurch fällt der erste Polstrahl a O mit der ersten

Seilzugseite zusammen, die zweite Seilzugseite ist die Verlängerung des zweiten Polstrahles b O.

Für die Genauigkeit des Zeichnens ist es überhaupt vorteilhaft, Kräfteplan und Seilzug möglichst nahe beieinander aufzutragen, um beim Ziehen der Parallelen nicht zu große Verschiebungen zu haben. Ferner ist es ratsam, die Seilzugseiten von vornherein möglichst lang durchzuziehen, weil späteres nochmaliges Anlegen des Lineals zum Zwecke der Verlängerung der Seiten die Zeichnung ungenauer macht.

§ 3.

Zusammenhang zwischen dem Kräfteplan und dem Seilzuge.

1) Gleichgewichtsbedingung.

Im vorigen Paragraphen wurde unter 2) bereits angeführt, daß beliebig viele Kräfte, welche in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, miteinander im Gleichgewichte sind, wenn der aus ihnen konstruierte Kräfteplan geschlossen ist.

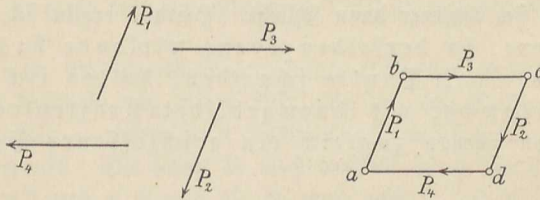
Schneiden sich die in einer Ebene liegenden Kräfte nicht in einem Punkte und ist der aus ihnen gebildete Kräfteplan geschlossen, so folgt hieraus noch nicht ohne weiteres, daß Gleichgewicht unter den Kräften besteht.

So z. B. ist der aus den gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Parallelkräften $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ (Fig. 22) gebildete Kräfteplan a b c d

jedenfalls geschlossen, die Kräfte sind aber nicht miteinander im Gleichgewichte, suchen vielmehr eine Drehung im Sinne der Zeiger einer Uhr hervorzubringen.

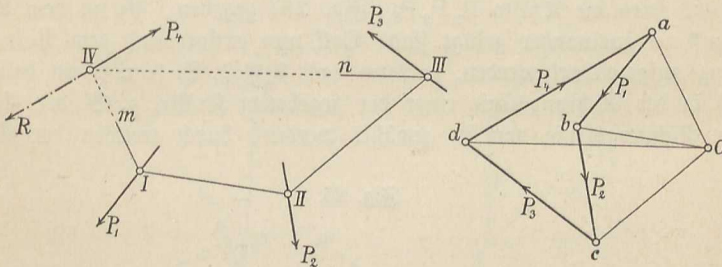
Für den Gleichgewichtszustand von Kräften muß also jedenfalls außer der Bedingung, daß der Kräfteplan geschlossen ist, noch eine andere Bedingung bestehen, die zunächst festgestellt werden soll.

Fig. 22.



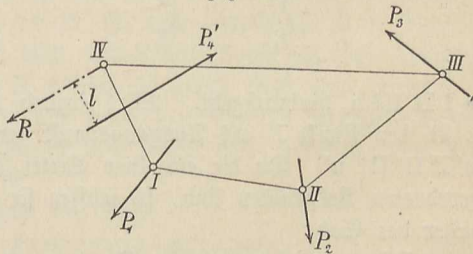
Bildet man aus den Kräften P_1, P_2, P_3 (Fig. 23) den Kräftezug $a b c d$ und schließt denselben durch die Linie $a d$, so stellt $a d$ bekanntlich die Mittel-

Fig. 23.



kraft R der Kräfte P_1, P_2, P_3 der Größe und Richtung nach dar. Zeichnet man dann entsprechend einem beliebigen Pole O den Seilzug $m I II III n$, so muß die Mittelkraft R durch den Schnittpunkt der ersten und letzten Seilzugseite, also durch den Schnittpunkt IV der verlängerten $I m$ und $III n$ hindurchgehen. Der Seilzug bildet alsdann die geschlossene Figur $I II III IV$. Ersetzt man die Mittelkraft R durch die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft P_4 , die demnach auch durch den Punkt IV gehen muß, so sind die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 miteinander im Gleichgewichte. Der aus diesen Kräften gebildete Kräfteplan ist geschlossen, zugleich aber auch der Seilzug. Ginge die Kraft P_4 nicht durch den Punkt IV des Seilzuges, sondern hätte

Fig. 24.



dieselbe irgend eine andere parallele Lage, etwa P'_4 (Fig. 24), so wäre der Kräfteplan allerdings noch immer geschlossen, die Kräfte würden aber nicht miteinander im Gleichgewichte sein, denn die P'_4 ($= R$) bildet alsdann mit der Mittelkraft R der Kräfte P_1, P_2, P_3 ein Kräftepaar, dessen Moment*) bei dem Hebelarme l die Größe hat:

$$M = R \cdot l.$$

Das Moment wird nur dann $=$ Null, wenn $l =$ Null wird, d. h. wenn P'_4 mit R in einer Geraden liegt, also durch den Punkt IV des Seilzuges geht, wodurch sich letzterer dann schließt. Hieraus ergibt sich der Satz:

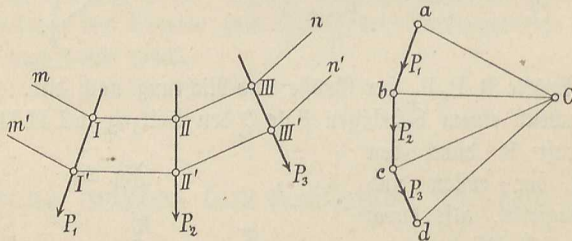
Mehrere, in derselben Ebene wirkende Kräfte, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, halten sich im Gleichgewichte, wenn der aus ihnen gebildete Kräfteplan geschlossen ist und wenn ihnen zugleich ein geschlossener Seilzug entspricht.

2) Veränderung des Poles bei einer und derselben Kräftegruppe.

Zu einer und derselben Kräftegruppe lassen sich unendlich viele Seilzüge zeichnen, die aber alle zu demselben Ergebnis führen müssen.

Es seien die Kräfte P_1, P_2, P_3 (Fig. 25) gegeben, die zu dem Kräftezuge $a b c d$ aneinander gefügt sind. Soll nun entsprechend dem Pole O ein Seilzug aufgezeichnet werden, so kann nach 3) § 2, S. 5 u. f. ein beliebiger Punkt in der Richtungslinie einer der gegebenen Kräfte, z. B. der Punkt I in der Richtungslinie von P_1 gewählt werden, durch welchen der Seilzug

Fig. 25.



m I II III n hindurchgeht. Wird irgend ein anderer Punkt auf der P_1 , z. B. der Punkt I' als Ausgangspunkt gewählt, so ergibt sich der Seilzug $m' I' II' III' n'$. Da die einzelnen Seiten beider Seilzüge parallel den zugeordneten Polstrahlen sind, so müssen sie auch parallel untereinander sein, daher der Satz:

Die gleichnamigen Seiten zweier Seilzüge, welche zu einer und derselben Kräftegruppe mit Benutzung desselben Poles O konstruiert sind, sind einander parallel.

*) Siehe § 4, S. 17.

Die Lage des Poles O für eine Kräftegruppe ist nun ebenfalls ganz willkürlich und es könnte irgend ein anderer Punkt O' als Pol gewählt werden. Mit der Lage des Poles ändert sich dann auch die Lage des Seilzuges. Die Seilzüge aber, welche verschiedenen Polen einer und derselben Kräftegruppe entsprechen, stehen in einer gewissen Beziehung zu einander, was jetzt näher untersucht werden soll.

Es seien die Kräfte P_1 und P_2 gegeben, welche in Fig. 26 b zu dem Kräftezuge $a b c$ vereinigt sind; in Fig. 26 a ist der Seilzug $m I I n$ entsprechend dem Pole O und ein anderer $m I' I' n'$ entsprechend dem Pole O' aufgezeichnet.

Denkt man sich die Verbindungslinie $O O'$ der Pole O und O' in Fig. 26 b als Kraft K , so bildet diese mit den die Seilspannungen darstellenden Strahlen s_1 und s'_1 ein Kräftedreieck, welchem in Fig. 26 a der Knoten m entspricht. Die Kraft K muß deshalb durch den Punkt m gehen und, da $s_1 \parallel m I$ und $s'_1 \parallel m I'$ ist, so muß auch $K \parallel O O'$ sein. Die $O O'$ bildet aber auch mit den Strahlen s_2 und s'_2 ein Kräftedreieck, welchem in

Fig. 26 a.

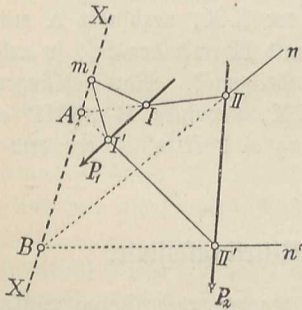


Fig. 26 b.

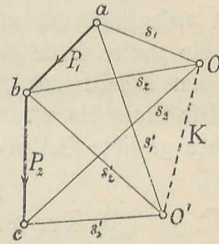


Fig. 26 a der Knoten A (Schnittpunkt der verlängerten Seilzugseiten $II I$ und $II' I'$) entspricht. Die Kraft K muß deshalb auch durch den Punkt A gehen und, da $s_2 \parallel II I$ und $s'_2 \parallel I' II'$ ist, auch parallel zu $O O'$ sein.

In derselben Weise schließt man, daß K auch durch den Schnittpunkt B der verlängerten Seilzugseiten $n II$ und $n' II'$ gehen muß und parallel zu $O O'$ ist. Da K in Fig. 26 a aber nur durch eine Gerade dargestellt werden kann, so folgt daraus, daß die Punkte $m A B$ auf einer geraden Linie $X X$ liegen, welche parallel zu $O O'$ ist.

Aus obiger Betrachtung folgt der Satz:

Wenn für denselben Kräftezug mit zwei verschiedenen Polen zwei Seilzüge konstruiert werden, so liegen die Schnittpunkte der verlängerten gleichnamigen Seilzugseiten auf einer Geraden, welche der Verbindungslinie der beiden Pole parallel ist.

Liegen die Pole O und O' auf derselben Seite des Kräftezuges, so haben die zugehörigen Seilzüge gleichartige Spannung, also je nach der Richtung der Kräfte entweder beide Zugspannung oder beide Druckspannung; liegen aber die Pole auf entgegengesetzten Seiten des Kräftezuges, so haben die zugehörigen Seilzüge entgegengesetzte Spannung.

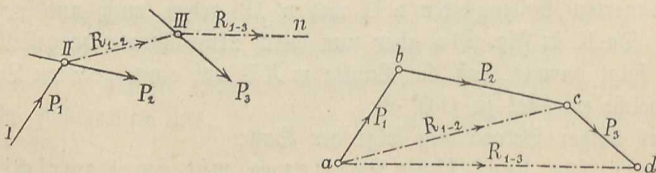
Mit Hilfe der oben gezeigten Beziehung, welche zwischen zwei Seilzügen besteht, die für dieselbe Kräftegruppe mit zwei verschiedenen Polen konstruiert sind, läßt sich nun leicht die Aufgabe lösen: Aus einem Seilzuge, welcher für eine bestimmte Kräftegruppe mit dem Pole O aufgezichnet wurde, einen anderen Seilzug für dieselbe Kräftegruppe aber mit einem anderen Pole O' abzuleiten.

Es seien die Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 26 a) gegeben, welche zu dem Kräftezuge abc (Fig. 26 b) aneinandergefügt sind; es sei ferner der Seilzug $m\text{III}n$ entsprechend dem Pole O aufgezichnet. Um aus diesem den dem Pole O' entsprechenden Seilzug abzuleiten, ziehe man in Fig. 26 b den ersten Strahl $O'a$ und in Fig. 26 a durch m eine Parallele dazu bis zum Schnittpunkte I' mit der P_1 . Es ist dann mI' die erste Seite des gesuchten Seilzuges. Durch m ziehe eine Parallele XX zu der Verbindungslinie OO' der Pole O und O' . Verlängert man dann die zweite Seite II des ersten Seilzuges bis zum Schnittpunkt A mit der XX , verbindet A mit I' und verlängert diese Linie bis zum Schnittpunkt II' mit der P_2 , so erhält man in $I'II'$ die zweite Seite des gesuchten Seilzuges. Man verlängere ferner nII bis zum Schnittpunkt B mit der XX , verbinde B mit II' und verlängere diese Linie bis n' . Der Linienzug $mI'II'n'$ ist der dem Pole O' entsprechende gesuchte Seilzug.

3) Der Seilzug als Mittelkraftslinie.

Da die Lage des Poles für einen gegebenen Kräftezug willkürlich ist, so kann man denselben auch mit dem Anfangspunkte der ersten Kraft zusammenfallen lassen. Der diesem Pole entsprechende Seilzug verdient besondere Beachtung und soll deshalb hier kurz besprochen werden.

Fig. 27.



Fügt man die Kräfte $P_1 P_2 P_3$ (Fig. 27) zu dem Kräftezuge $abcd$ aneinander, so stellen die Diagonalen ac und ad ihrer Größe und Richtung nach die Mittelkräfte dar aus den Kräften $P_1 P_2$ bzw. aus $P_1 P_2 P_3$.

Läßt man nun den Pol mit dem Punkte a zusammenfallen und zeichnet dazu den Seilzug, so schrumpft der erste Polstrahl zu einem Punkt zusammen, folglich ist die erste Seilzugseite irgend ein Punkt auf der Richtungslinie von P_1 . Die zweite Seilzugseite I II fällt mit P_1 zusammen, die dritte Seite II III hat die Richtung der Diagonale a c, die vierte III n die Richtung der Diagonale a d. Die Seite II III fällt daher mit der Mittelkraft aus P_1 und P_2 , die Seite III n mit der Gesamtmittelkraft aus $P_1 P_2 P_3$ zusammen.

Legt man für eine gegebene Kräftegruppe den Pol in den Anfangspunkt des Kräftezuges, so fällt mit jeder Seite des Seilzuges die Mittelkraft aus allen, dieser Seite vorangehenden Kräften zusammen, so daß in der letzten Seite des Seilzuges die Mittelkraft aus sämtlichen gegebenen Kräften liegt.

Wegen dieser Eigenschaft nennt man einen solchen Seilzug die Mittelkraftslinie.

§ 4.

Das statische Moment der Kräfte.

Unter dem statischen Momente einer Kraft P (Fig. 28) in Bezug auf eine außerhalb der Krafrichtung liegende Drehachse C , welche rechtwinklig zur Krafebene gerichtet ist, versteht man das Produkt aus der Kraft und dem (senkrechten) Abstände l derselben von der Drehachse.

Man nennt diesen Abstand l den Hebelarm der Kraft in Bezug auf die Drehachse und kann danach kurz sagen:

$$\text{Statisches Moment} = \text{Kraft} \times \text{Hebelarm}$$

oder: $M = P \cdot l$.

Ziemlich allgemein wird das Moment einer Kraft als positiv bezeichnet, wenn die Kraft eine Drehung im Sinne der Zeiger einer Uhr um die Drehachse hervorzubringen sucht; bei der entgegengesetzten Drehrichtung ist das Moment negativ (Fig. 29).

Das Moment wird = Null, wenn der Hebelarm = Null wird, wenn also die Krafrichtung durch die Drehachse hindurchgeht.

Da die Kräfte in Gewichtseinheiten, die Hebelarme (als gerade Strecken) aber in Längeneinheiten ausgedrückt werden, so ist für die Größenangabe der Momente eine Einheit zu legen, welche zusammengesetzt ist aus einer Gewichtseinheit und einer Längeneinheit. Werden z. B. die Kräfte in kg, die Hebelarme in m angegeben, so ist die Momenteneinheit das m kg.

Fig. 28.

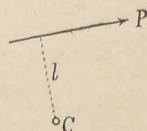
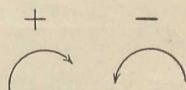


Fig. 29.



Stellt man nun, wie dies in der graphischen Statik immer geschieht, die Kräfte durch gerade Linien dar, so erscheint das Moment graphisch als das Produkt zweier Linien, d. h. als Fläche.

Das statische Moment ist danach gleich dem Flächeninhalte desjenigen Rechtecks, welches man erhält, wenn man die Kraft als Grundlinie, ihren Hebelarm als Höhe, oder umgekehrt, aufträgt.

So z. B. wird man unter Zugrundelegung eines Kräftemaßstabes 1 cm = 200 kg und eines Längenmaßstabes 1 : 100 als graphische Darstellung des Momentes einer Kraft $P = 500$ kg, deren Hebelarm $l = 200$ cm ist, ein Rechteck erhalten

$$\begin{aligned} \text{von der Grundlinie: } & \frac{500}{200} = 2,5 \text{ cm} \\ \text{und der Höhe: } & \frac{200}{100} = 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jede andere Figur von gleichem Flächeninhalte, in welche sich das Momentenrechteck verwandeln läßt, kann ebenfalls als graphische Darstellung des statischen Momentes benutzt werden. So ist z. B. das statische Moment auch gleich dem doppelten Flächeninhalte eines Dreiecks, dessen Grundlinie die Kraft ist und dessen Spitze in der Drehachse liegt (Fig. 30).

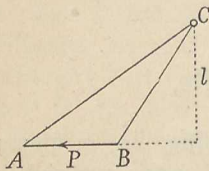
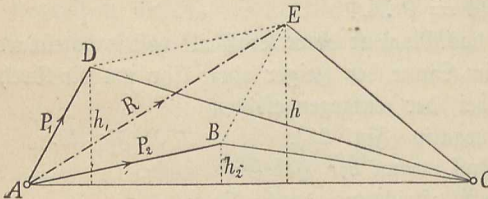


Fig. 30.

Ist R die Mittelkraft der Kräfte P_1 und P_2 , welche sich im Punkte A schneiden (Fig. 31) und werden in Bezug auf die Drehachse C die statischen Momente von R, P_1, P_2 bzw. mit M, M_1, M_2 bezeichnet, so ist, wenn man noch die Hilfslinie AC zieht:

$$\begin{aligned} M &= 2 \cdot \triangle ACE = AC \cdot h \\ M_1 &= 2 \cdot \triangle ACD = AC \cdot h_1 \\ M_2 &= 2 \cdot \triangle ACB = AC \cdot h_2 \end{aligned}$$

Fig. 31.



Da nun, wie sich leicht aus der Figur beweisen läßt:

$$h = h_1 + h_2$$

ist, so folgt:

$$M = M_1 + M_2$$

oder in Worten:

Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente ihrer Seitenkräfte in Bezug auf eine gegebene Drehachse.

Liegt die Drehachse C zwischen den Seitenkräften P_1 und P_2 , so haben deren Momente entgegengesetztes Vorzeichen.

Sind beliebig viele in der Ebene zerstreut liegende Kräfte $P, P_2 \dots P_n$ gegeben und ist R deren Gesamt-Mittelkraft, so vereinige man, um eine Beziehung zwischen den Momenten der Kräfte P und dem Momente der Mittel-

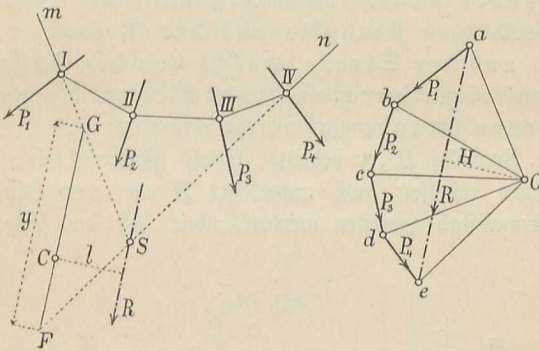
Kraft R in Bezug auf eine feste Drehachse C herzustellen, die Kräfte P_1 und P_2 zu einer Mittelkraft R_{1-2} . Das Moment der letzteren ist nach dem Vorigen gleich der Summe der Momente der Kräfte P_1 und P_2 . Setzt man dann weiter R_{1-2} mit P_3 zu der Mittelkraft R_{1-3} zusammen, so ist das Moment von R_{1-3} gleich der Summe der Momente der Kräfte R_{1-2} und P_3 , folglich auch gleich der Summe der Momente der Kräfte P_1, P_2, P_3 . In derselben Weise weiter schließend erhält man den Satz:

Das statische Moment der Mittelkraft beliebig vieler in der Ebene zerstreut liegender Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aller einzelnen Kräfte in Bezug auf eine gegebene Drehachse.

Die Momente der einzelnen Kräfte erhalten bei der Summation das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem ihr Drehsinn positiv oder negativ ist (vgl. Fig. 29).

Unter Benutzung des letzten Satzes kann das statische Moment beliebig vieler in der Ebene zerstreut wirkender Kräfte in Bezug auf eine feste Drehachse mit Hilfe des Kräfteplanes und Seilzuges folgendermaßen bestimmt werden:

Fig. 32.



Man füge die gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 32) zu dem Kräftezuge $abcde$ aneinander; die Linie ae stellt die Mittelkraft R der Größe und Richtung nach dar. Man zeichnet darauf den dem beliebig gewählten Pole O entsprechenden Seilzug $mI II III IV n$ und zieht durch den Schnittpunkt S der äußersten Seilzugseiten mI und nIV die Mittelkraft R parallel ae . Fällt man dann von der Drehachse C auf R die Senkrechte l , so ist das gesuchte Moment ein Rechteck von der Grundlinie R und der Höhe l .

$$M = R \cdot l$$

Das Moment M kann auch als vierte Proportionale zu den Größen R, l und 1 aufgefaßt werden, indem man schreibt:

$$\frac{M}{R} = \frac{l}{1}$$

und erscheint dann als Linie ($a b$ in Fig. 33), welche nach dem Kräftemaßstab zu messen ist, denn $a b$ stellt diejenige Kraft dar, welche am Hebelarme l dasselbe Moment hervorbringt, als die Kraft R am Hebelarme l .

Zieht man in Fig. 32 durch die Drehachse C zu R eine Parallele, auf welcher die verlängerten äußersten Seilzugseiten ($m I$ und $n IV$) das Stück $y = FG$ abschneiden, so sind die Dreiecke FGS und $e a O$ wegen des Parallelismus ihrer Seiten einander ähnlich, es verhalten sich daher ihre Grundlinien wie ihre Höhen

$$y : R = l : H$$

wobei H die rechtwinklige Entfernung der Kraft R von dem Pole O bedeutet und Polentfernung genannt wird.

Aus der letzten Proportion folgt:

$$R \cdot l = H \cdot y$$

oder

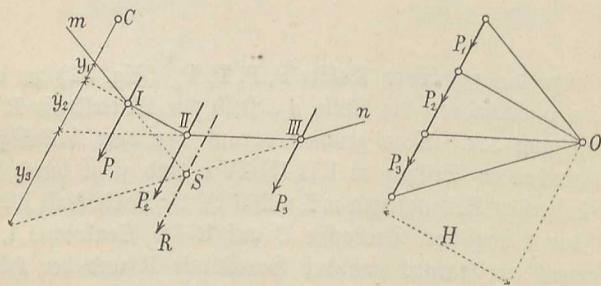
$$M = H \cdot y$$

Daraus ergibt sich der Satz:

Das statische Moment beliebig vieler in der Ebene zerstreut wirkender Kräfte in Bezug auf eine gegebene Drehachse ist gleich dem Produkte aus der Polentfernung ihrer Mittelkraft und der Strecke, welche von den äußersten Seilzugseiten auf einer durch die Drehachse parallel zu der Mittelkraft gezogenen Geraden abgechnitten wird.

In dem Produkte $H \cdot y$ bedeutet H als Polstrahl eine Kraft, y eine Strecke; es kann indessen auch umgekehrt H mit dem Längenmaßstab, y mit dem Kräftemaßstab gemessen werden, ohne daß das Ergebnis sich dadurch ändert.

Fig. 34.



Macht man H gleich der Längeneinheit, so stellt die Strecke y , nach dem Kräftemaßstab gemessen, unmittelbar das Moment M dar.

Das Verfahren, das statische Moment auszudrücken als Produkt aus der Polentfernung H und der Strecke y , erweist sich besonders vorteilhaft und einfach, wenn es sich darum handelt, das Moment von Parallelkräften zu

bestimmen, denn in diesem Falle bildet der Kräftezug eine gerade Linie, die einmal angenommene Polentfernung bleibt daher für sämtliche Kräfte dieselbe.

Es seien $P_1 P_2 P_3$ drei gegebene Parallelkräfte und C eine feste Drehachse (Fig. 34). Man ziehe nach Aufzeichnung des Kräfteplanes und Seilzuges durch C eine Gerade parallel den gegebenen Kräften. Für die Kraft P_1 sind die äußersten Seilzugseiten $m I$ und $II I$; diese schneiden auf der durch C gelegten Geraden die Strecke y_1 ab, folglich ist das Moment der Kraft P_1

$$M_1 = H \cdot y_1$$

Für die Kraft P_2 sind die äußersten Seilzugseiten $I II$ und $III II$. Diese schneiden auf der durch C gelegten Geraden die Strecke y_2 ab, folglich ist das Moment der Kraft P_2

$$M_2 = H \cdot y_2$$

Ebenso erhält man für das Moment der Kraft P_3

$$M_3 = H \cdot y_3$$

Daraus folgt: Zieht man durch die Drehachse C eine Parallele zu den gegebenen Kräften, so schneiden die zwei Seilzugseiten, welche sich auf einer Kraftlinie treffen, auf jener Parallelen eine Strecke ab , welche, mit der Polentfernung H multipliziert, das statische Moment der betreffenden Kraft in Bezug auf die Achse C liefert.

Macht man die Polentfernung H gleich der Längeneinheit, so stellen die Abschnitte $y_1 y_2 y_3$, nach dem Kräftemaßstab gemessen, unmittelbar die Momente der Kräfte $P_1 P_2 P_3$ dar.

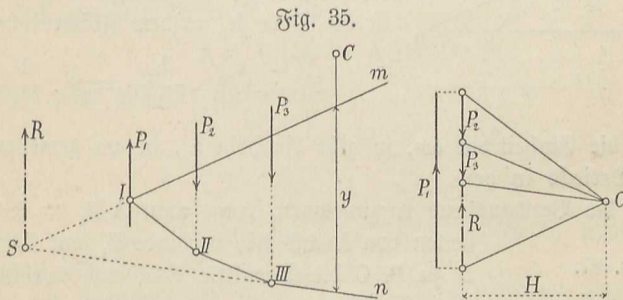


Fig. 35.

Die Mittelkraft R geht durch den Schnittpunkt S der äußersten Seilzugseiten $m I$ und $n III$, das Moment derselben ist nach Fig. 34:

$$M = H (y_1 + y_2 + y_3)$$

oder

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

Hieraus ergibt sich nochmals der oben allgemeiner bewiesene Satz, daß das Moment der Mittelkraft gleich ist der Summe der Momente der einzelnen Kräfte.

In Fig. 35 ist P_1 lotrecht aufwärts, P_2 und P_3 lotrecht abwärts gerichtet. Die Mittelkraft $R = P_1 - P_2 - P_3$ geht durch den Schnittpunkt S der äußersten Seilzugseiten mI und $nIII$ und wirkt, wie der Kräfteplan zeigt, lotrecht aufwärts, liefert also in Bezug auf die Drehachse C ein positives Moment. Die äußersten Seilzugseiten schneiden auf der durch C gelegten Lotrechten die Strecke y ab, folglich ist das statische Moment sämtlicher gegebener Kräfte in Bezug auf die Drehachse C :

$$M = H \cdot y$$

und wenn auch hier wieder $H = 1$ angenommen wird:

$$M = y$$

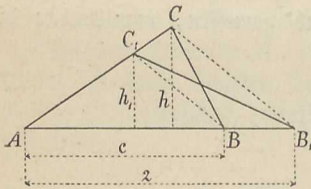
§ 5.

Graphische Flächenbestimmung.

1) Das Dreieck.

Bekanntlich ist der Flächeninhalt des Dreiecks = Grundlinie mal Höhe dividirt durch 2

Fig. 36.



$$F = c \cdot \frac{h}{2}$$

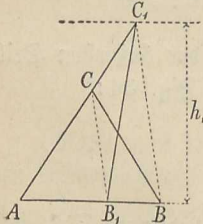
Berwandelt man das gegebene Dreieck ABC (Fig. 36) in das inhaltsgleiche Dreieck AB_1C_1 , dessen Grundlinie $AB_1 = 2$ ist, so ist die Höhe $h_1 =$ dem Flächeninhalte, denn:

$$F = AB_1 \cdot \frac{h_1}{2} = 2 \cdot \frac{h_1}{2} = h_1$$

Ist die Einheit das cm , so gibt die Höhe h_1 , in cm gemessen, den Inhalt des Dreiecks in qem .

Um die Verwandlung vorzunehmen, trage man $AB_1 = 2$ Längeneinheiten von A aus ab, verbinde B_1 mit C , ziehe durch B zu B_1C die Parallele BC_1 und verbinde B_1 mit C_1 . Es ist dann:

Fig. 37.



$$\triangle AB_1C_1 = \triangle ABC$$

Der Beweis ergibt sich aus der Gleichheit der Dreiecke BC_1C und BC_1B_1 , welche gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.

Um ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 37) in ein inhaltsgleiches Dreieck AB_1C_1 von gegebener Höhe h_1 zu verwandeln, ziehe man zu der Grundlinie AB eine Parallele im Abstände h_1 , verlängere AC bis zum Schnittpunkte C_1 mit der Parallelen,

verbinde C_1 mit B und ziehe durch C die Parallele CB_1 zu C_1B . Es ist dann:

$$\triangle AB_1C_1 = \triangle ABC$$

Macht man die Höhe $h_1 = 2$, so ist die Grundlinie $AB_1 =$ dem Flächeninhalte des Dreiecks.

2) Das Viereck.

Der Inhalt des Parallelogramms $ABCD$ (Fig. 38) ist gleich dem Inhalte des Rechtecks ABC_1D_1 von derselben Grundlinie und der gleichen Höhe, wie unmittelbar aus der Kongruenz der Dreiecke ADD_1 und BCC_1 folgt. Das Parallelogramm läßt sich also immer durch ein Rechteck ersetzen.

Fig. 38.

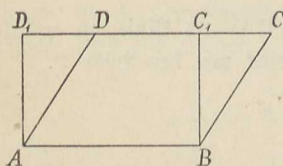
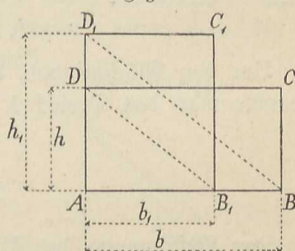


Fig. 39.



Um das Rechteck $ABCD = b \cdot h$ (Fig. 39) in ein inhaltsgleiches Rechteck von der gegebenen Grundlinie b_1 zu verwandeln, mache man $AB_1 = b_1$, ziehe B_1D und durch B die $BD_1 \parallel B_1D$. Es ist dann $AD_1 = h_1$ die Höhe des gesuchten Rechtecks, also:

$$AB_1C_1D_1 = ABCD$$

Der Beweis folgt aus der Proportion

$$b : b_1 = h_1 : h$$

oder

$$b \cdot h = b_1 \cdot h_1$$

Macht man $b_1 =$ der Längeneinheit, so stellt die Höhe h_1 unmittelbar den Flächeninhalt des Rechtecks dar.

Um den Flächeninhalt eines Trapezes zu bestimmen, verwandle man dasselbe in ein inhaltsgleiches Parallelogramm. Man halbiere zu dem Zwecke eine der nicht parallelen Seiten, z. B. BC (Fig. 40) in E und ziehe durch E die $B_1C_1 \parallel AD$. Es ist dann:

$$AB_1C_1D = ABCD$$

Der Beweis folgt aus der Kongruenz der Dreiecke BB_1E und CC_1E . Um den Flächeninhalt als Linie zu erhalten, verwandle man nach dem Vorigen das Parallelogramm AB_1C_1D in ein inhaltsgleiches Rechteck von der Grundlinie 1, die Höhe desselben ist dann = dem Flächeninhalte.

Das unregelmäßige Viereck $ABCD$ (Fig. 41) wird zur Bestimmung des Flächeninhaltes am besten in ein inhaltsgleiches Dreieck verwandelt. Man ziehe zu dem Zwecke die Diagonale BD und durch C zu BD eine Parallele, welche die verlängerte AB in B_1 schneidet. Es ist dann, wenn man noch B_1 mit D verbindet:

Fig. 40.

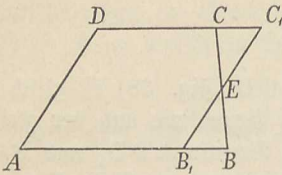
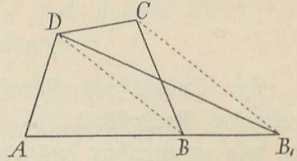


Fig. 41.



welche die verlängerte AB in B_1 schneidet. Es ist dann, wenn man noch B_1 mit D verbindet:

$$ABCD = AB_1D$$

Um den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ als Linie zu erhalten, verwandle man das Dreieck AB_1D in ein Dreieck mit der Höhe 2.

3) Das Vieleck.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes wird das Vieleck durch schrittweise Verminderung der Seitenzahl in ein Dreieck verwandelt.

Aus dem Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 42) wird zunächst das Fünfeck AB_1DEF gebildet, indem durch die Linie BD von dem Sechseck das Dreieck BCD abgeschnitten und dafür das inhaltsgleiche Dreieck BB_1D an die Stelle

Fig. 42.

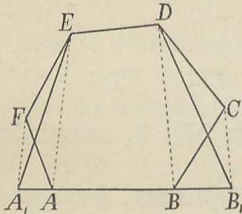
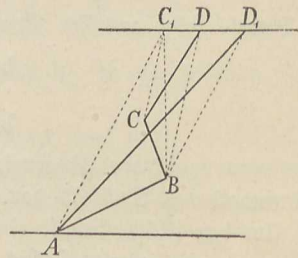


Fig. 43.



gesetzt wird. Ebenso wird durch die Linie AE das Dreieck AEF abgeschnitten und durch das Dreieck AEA_1 ersetzt. Wie das auf solche Weise entstandene Viereck A_1B_1DE weiter in ein Dreieck zu verwandeln ist, wurde bereits oben unter 2 gezeigt.

Nicht selten liegt die Aufgabe vor, einen geknickten Linienzug $ABCD$ (Fig. 43) durch eine Gerade so auszugleichen, daß die Flächen links und rechts sich der Größe nach dadurch nicht ändern.

Man ziehe zu dem Zweck die Gerade BD und $CC_1 \parallel BD$, ferner die Gerade AC_1 und $BD_1 \parallel AC_1$. Es ist dann AD_1 die gesuchte Gerade.

Der Beweis ist mit Hilfe des Satzes, daß zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe inhaltsgleich sind, leicht zu führen.

4) Kreisabschnitt und Kreisabschnitt.

Bezeichnet man in Fig. 44 den Bogen AB mit b , so ist:

$$\frac{\text{Auschnitt } AOB}{r^2 \pi} = \frac{b}{2 r \pi}$$

folglich:

$$\text{Auschnitt } AOB = \frac{r b}{2}$$

Der Auschnitt kann also ersetzt werden durch ein Dreieck von der Höhe r und der Grundlinie b , welches sich ergibt, wenn man auf der Tangente in A den Kreisbogen $AB = b$ durch Abtragen genügend kleiner Teile abwickelt.

Ist:

$$\overline{AB_1} = \widehat{AB}$$

so wird:

$$\text{Auschnitt } AOB = \text{Dreieck } AOB_1$$

zieht man $BB_2 \parallel AO$, so ist wegen Gleichheit der Dreiecke AOB und AOB_2 :

$$\text{Kreisabschnitt } AB = \triangle B_1 B_2 O$$

Ist der Kreisbogen sehr flach, so kann man ihn genügend genau als Parabelbogen auffassen. In diesem Falle ist der Inhalt des Abschnittes AB

Fig. 44.

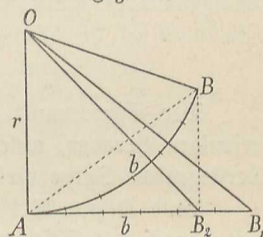


Fig. 45.

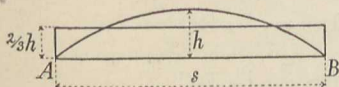
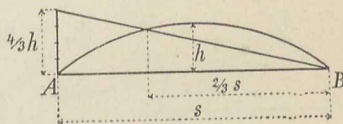


Fig. 46.



(Fig. 45), wenn die Sehnenlänge AB mit s , die Pfeilhöhe mit h bezeichnet wird, gleich einem Rechteck von der Höhe $\frac{2}{3} h$ und der Grundlinie s , oder gleich einem Dreieck von der Höhe $\frac{4}{3} h$ und der Grundlinie s (Fig. 46).

§ 6.

Graphische Schwerpunktsbestimmung.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist bekanntlich derjenige Punkt, in welchem der Körper unterstützt sein muß, um sich in jeder Lage im Gleichgewichte zu befinden. Denkt man sich den Körper zusammengesetzt aus sehr

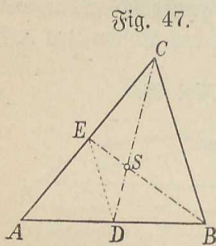
vielen sehr kleinen Teilchen, so bildet der Schwerpunkt des Körpers den Angriffspunkt der Mittelkraft der Gewichte sämtlicher Körperteilchen. Der Körper kann dabei die Gestalt einer ebenen, seitlich beliebig begrenzten Platte haben, die bei sehr geringer Dicke genügend genau als Fläche angesehen werden darf. Man kann unter dieser Voraussetzung dann auch von dem Schwerpunkt einer Fläche reden, und versteht darunter den Angriffspunkt der Mittelkraft von allen auf die einzelnen Flächenteile wirkenden und der Größe nach denselben proportionalen Einzelkräften.

Die Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche kommt als Zwischenaufgabe bei der zeichnerischen Lösung von Aufgaben im Gebiete der Bau- und Ingenieurwissenschaften (z. B. bei der graphischen Untersuchung von Stützmauern und Gewölben, ferner bei Konstruktionen aus Profileisen mit unshmetrischen Querschnitten u. s. w.) so häufig vor, daß der Techniker mit dem bei den verschiedenen regelmäßig oder unregelmäßig begrenzten Querschnitts-Figuren gebräuchlichen Verfahren der Schwerpunktsbestimmung durchaus vertraut sein muß. Es sollen daher diese Verfahrensarten für die wichtigsten Querschnittsformen hier in folgendem kurz besprochen werden¹⁾.

1) Das Dreieck.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt auf der Mittellinie, d. h. auf derjenigen Geraden, welche die Mitte einer Seite des Dreiecks mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet.

Sind D und E die Mitten der Seiten AB bzw. AC (Fig. 47), so liegt danach der Schwerpunkt S im Schnittpunkte von CD und BE.



BCS folgt:

$$DS : SC = DE : BC$$

da nun:

$$DE = \frac{1}{2} BC$$

ist, so folgt:

$$DS = \frac{1}{2} SC$$

oder:

$$DS = \frac{1}{3} DC$$

Danach kann man sagen:

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt auf der Mittellinie und im ersten Drittel der Höhe.

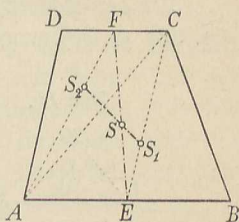
2) Das Viereck.

Da das Parallelogramm durch jede der beiden Diagonalen in je zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, so liegt der Schwerpunkt eines Parallelogramms im Kreuzungspunkte der Diagonalen.

¹⁾ Vergl. auch die Aufsätze von R. Land im Centralbl. d. Bauverw. 1894. S. 192 und S. 458, 459.

Halbiert man bei einem Trapeze ABCD (Fig. 48) die parallelen Seiten AB und CD in E und F, so ist die Verbindungslinie EF eine Schwerlinie, d. h. eine Linie, auf welcher der Schwerpunkt des Trapezes liegen muß. Eine andere Schwerlinie erhält man durch Verbindung der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Dreiecke ABC und ACD, in welche das Trapez durch die Diagonale AC zerlegt wird. Der Schnittpunkt S der beiden Schwerlinien EF und S_1S_2 ist der Schwerpunkt des Trapezes.

Fig. 48.



Eine andere, etwas einfachere Konstruktion des Schwerpunktes ergibt sich, wenn man das Trapez in ein Parallelogramm und ein Dreieck zerlegt (Fig. 49).

Verbindet man den Schwerpunkt S_1 des Parallelogramms mit dem Schwerpunkt S_2 des Dreiecks und verlängert diese Verbindungslinie bis zu den Schnittpunkten H und J mit den verlängerten parallelen Seiten AB und CD, so wird, wie sich leicht beweisen läßt¹⁾, $BH = CD$ und $DJ = AB$. Hiernach ist die Konstruktion des Schwerpunktes eines Trapezes folgendermaßen auszuführen:

Man verlängere jede der beiden parallelen Seiten nach entgegengesetzten Richtungen um eine Strecke gleich der an-

Fig. 49.

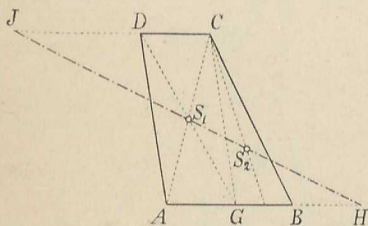
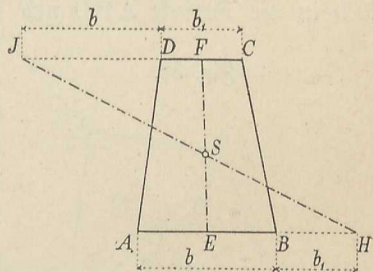


Fig. 50.



deren Seite, mache also $BH = b_1$ und $DJ = b$ (Fig. 50). Der Schnittpunkt S der Verbindungslinie HJ mit der Mittellinie EF ist der Schwerpunkt des Trapezes.

Eine andere, von Prof. Land angegebene einfache Konstruktion des Schwerpunktes eines Trapezes ist folgende:

Man ziehe (Fig. 51) die Diagonale AC und durch D die $DG \parallel AC$, verlängere die Mittellinie EF bis G und mache $ES = \frac{1}{3} EG$. Es ist dann S der gesuchte Schwerpunkt.

¹⁾ Siehe Lauenstein, Mechanik, III. Aufl. S. 43.

Beweis. Sind S_1 und S_2 (Fig. 52) die Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BCD , so ist:

$$\begin{aligned} S_1 S_2 &\parallel AC \\ \text{also auch: } S_1 S &\parallel AC \parallel DG \\ \text{Da nun: } ES_1 &= \frac{1}{3} ED \\ \text{so folgt: } ES &= \frac{1}{3} EG \end{aligned}$$

Um den Schwerpunkt eines beliebigen unregelmäßigen Vierecks $ABCD$ (Fig. 53) zu bestimmen¹⁾, teile man dasselbe durch die Diagonale AC in die

Fig. 51.

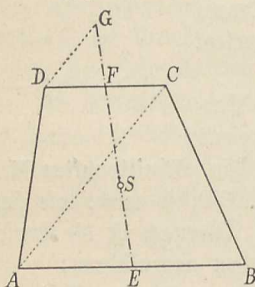
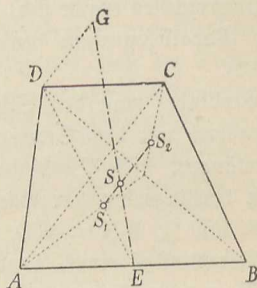


Fig. 52.



beiden Dreiecke ABC und ACD und bestimme deren Schwerpunkte S_1 und S_2 . Die Verbindungslinie $S_1 S_2$ ist dann eine Schwerlinie des Vierecks. Eine zweite Schwerlinie erhält man, wenn man das Viereck durch die Diagonale BD in die Dreiecke ABD und BCD zerlegt und deren Schwerpunkte S_3

Fig. 53.

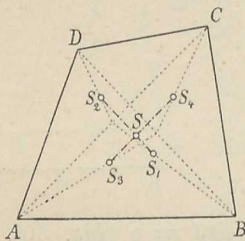
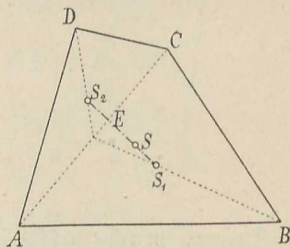


Fig. 54.



und S_4 miteinander verbindet. Der Schnittpunkt S der beiden Schwerlinien $S_1 S_2$ und $S_3 S_4$ gibt dann den Schwerpunkt des Vierecks.

Etwas einfacher ist folgendes Verfahren: Man teile das Viereck $ABCD$ (Fig. 54) durch die Diagonale AC in die Dreiecke ABC und ACD , und bestimme deren Schwerpunkte S_1 und S_2 . Der Schnittpunkt der Verbindungs-

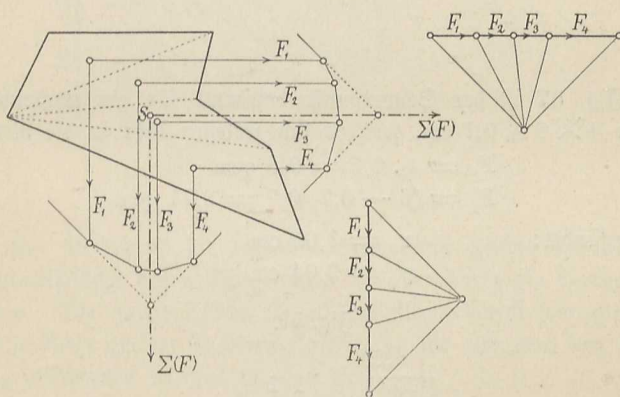
¹⁾ Bezüglich der neueren von H. Land angegebenen Verfahren zur Schwerpunktsbestimmung von Trapezen und unregelmäßigen Vierecken wird auf Lauenstein, Mechanik, III. Aufl. S. 45 und 46 verwiesen.

Linie $S_1 S_2$ mit der Diagonalen AC sei E . Trägt man dann die Strecke $S_2 E$ auf der $S_1 S_2$ von S_1 aus bis S ab, macht man also $S_1 S = S_2 E$, so ist S der Schwerpunkt des Vierecks¹⁾.

3) Das Vieleck.

Um den Schwerpunkt eines Vielecks zu ermitteln, zerlege man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke, deren Schwerpunkte man in bekannter Weise bestimmt. Die Flächeninhalte der Dreiecke als beliebig gerichtete Parallelkräfte betrachtend, bilde man aus ihnen einen Kräfte- und Seilzug und bestimme die Lage der Mittelkraft, welche durch den Schnittpunkt der äußersten Seilzugseiten verläuft. Die Mittelkraft bildet alsdann eine Schwerlinie des Vielecks. Um noch eine zweite Schwerlinie zu erhalten, wiederhole man dasselbe Verfahren, indem man für die Parallelkräfte eine andere Richtung annimmt. Der Schnittpunkt beider Schwerlinien bildet dann den Schwerpunkt des Vielecks. Der Flächeninhalt der einzelnen Dreiecke kann dabei entweder berechnet oder nach 1) § 5 S. 22 zeichnerisch ermittelt werden.

Fig. 55.



In Fig. 55 ist in dieser Weise der Schwerpunkt eines unregelmäßigen Sechsecks bestimmt. Dabei ist der Bequemlichkeit der Zeichnung wegen die eine Richtung der Parallelkräfte lotrecht, die andere Richtung wagerecht angenommen; ferner wurden die äußersten Polstrahlen unter einem Winkel von 45° gegen die Kraftlinie gezogen.

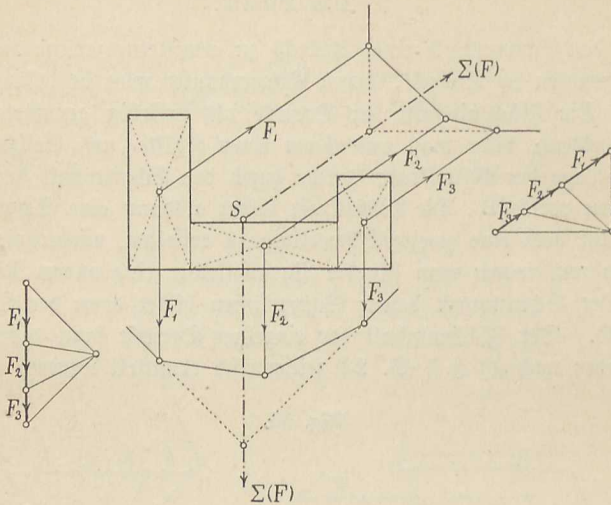
4) Zusammengesetzte Figuren.

Handelt es sich darum, den Schwerpunkt einer zusammengesetzten Figur zu bestimmen, so zerlege man dieselbe in eine Anzahl einfacher Figuren, deren Schwerpunkt bekannt ist und deren Flächeninhalt leicht berechnet werden

¹⁾ Der Beweis findet sich in Lauenstein, Mechanik, III. Aufl. S. 46.

kann. Die weitere Konstruktion mit Hilfe des Kräfteplans und Seilzuges ist ganz übereinstimmend mit der unter 3) besprochenen durchzuführen. Ein Beispiel hierzu gibt Fig. 56.

Fig. 56.



In Fig. 57 ist der Schwerpunkt bestimmt für ein ungleichschenkliges Winkelblech $4 \times 6 \times 0,7$ cm, welches sich zerlegen läßt in die Rechtecke:

$$F_1 = 4 \cdot 0,7 = 2,8 \text{ qcm}$$

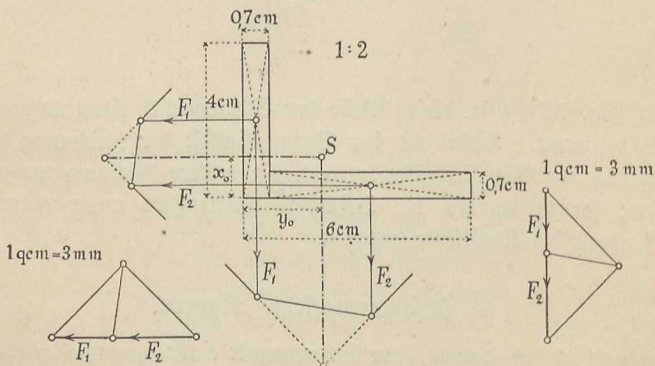
$$F_2 = (6 - 0,7) \cdot 0,7 = 3,71 \text{ qcm}$$

Man findet:

$$x_0 = 1,05 \text{ cm}$$

$$y_0 = 2,04 \text{ cm}$$

Fig. 57.

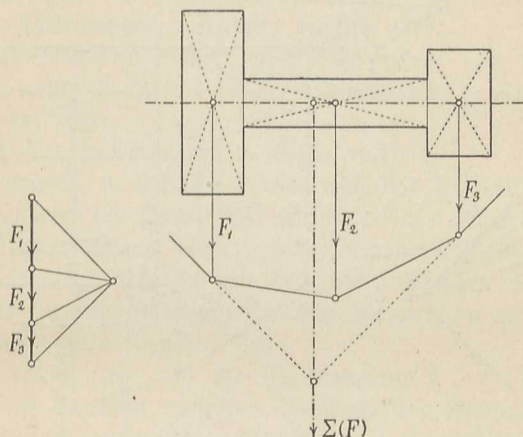


Hat die Fläche, deren Schwerpunkt zu bestimmen ist, eine Symmetrieachse, so geht diese durch den Schwerpunkt, und es braucht deshalb nur noch eine andere Schwerlinie für die Fläche konstruiert zu werden (Fig. 58).

In einigen Fällen ist es, auch wenn die betreffende Fläche unsymmetrisch ist, doch nur erforderlich, eine Schwerlinie zu bestimmen, während der Schwerpunkt selbst nicht weiter verlangt wird. Als Beispiel kann ein Hauptgesims gelten, bei welchem nur die Lotrechte Schwerlinie besonderes Interesse bietet,

Die ganze Querschnittsfläche wird in solche Teile zerlegt, daß der Schwerpunkt jedes derselben genau genug bestimmbar ist. Dabei kann für einzelne Teile die gegliederte Außenkante nach Augenmaß ersetzt werden durch eine gerade Linie, wodurch sich häufig eine mathematisch regelmäßige Figur bilden läßt, deren Schwerpunkt leicht ermittelt werden kann.

Fig. 58.



In Fig. 59 wurde die Lotrechte Schwerlinie zeichnerisch bestimmt für die Querschnittsfläche des Hauptgesimses der Großherzogl. Baugewerkschule in Karlsruhe. Die ganze Fläche ist zu dem Zwecke durch Lotrechte Linien in fünf einzelne Teile zerlegt¹⁾, deren Inhalte in qm sich nach den in Fig. 59 in cm eingeschriebenen Maßen ergeben zu:

$$F_1 = 0,19 \cdot 0,1 = 0,019 \text{ qm}$$

$$F_2 = 0,42 \cdot 0,3 = 0,126 \text{ "}$$

$$F_3 = 0,13 \cdot 0,5 = 0,065 \text{ "}$$

$$F_4 = 0,13 \cdot 0,95 = 0,1235 \text{ "}$$

$$F_5 = 0,55 \cdot 1,29 = 0,7095 \text{ "}$$

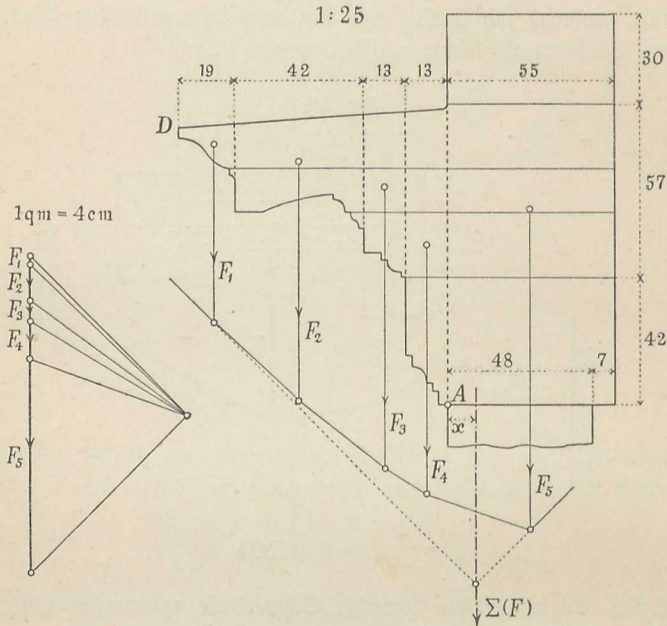
Die Fläche F_1 ist durch eine Dreiecksfläche von gleichem Inhalte ersetzt, deren Lotrechte Schwerlinie um $\frac{2}{3} \cdot 19 = \sim 13$ cm von der Kante D absteht. Die Schwerlinien der übrigen Flächen F_2 bis F_5 können genau genug als mit den Mittellinien zusammenfallend angenommen werden.

¹⁾ Häufig ist es ratsam, aus Gründen, welche erst später angeführt werden können, die Zerlegung in einzelne Teile durch wagerechte statt durch Lotrechte Linien vorzunehmen; namentlich gilt dies für die Steinkonstruktionen.

Mit Hilfe des Kräfteplanes und Seilzuges hat sich der Abstand der Schwerlinie der ganzen Figur von der Kante A, ein, wie sich später bei den Steinkonstruktionen zeigen wird, sehr wichtiges Maß, ergeben zu $x = 9,5$ cm.

Schließlich verdient noch ein Verfahren kurz erwähnt zu werden, durch welches bei unregelmäßig begrenzten Flächen der Schwerpunkt mit ziemlicher

Fig. 59.



Genauigkeit sich leicht und rasch bestimmen läßt. Man zeichnet die Figur, deren Schwerpunkt man sucht, auf starkes Zeichenpapier, schneidet sie recht genau aus und läßt sie sodann auf einer Nadelspitze balancieren. Wenn die ausgeschnittene Figur wagerecht liegt und nach keiner Seite hin ein Ueberkippen stattfindet, so hat man mit der Nadelspitze den Schwerpunkt getroffen.

§ 7.

Trägheitsmomente.

Sind $f_1 f_2 f_3 \dots$ die einzelnen sehr schmalen Flächenstreifen, in welche irgend eine Querschnittsfläche durch Parallelen zu einer in der Ebene der Fläche liegenden Geraden NN (Fig. 60) zerlegt werden kann; sind ferner $y_1 y_2 y_3 \dots$ die Entfernungen der Schwerpunkte der einzelnen Flächenstreifen von der Geraden NN , so nennt man die Summe:

$$f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 \dots = \Sigma (f y^2) = J$$

oder in Worten: die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Achse NN, das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf die Achse NN.

Die Größe des Trägheitsmomentes hängt einerseits ab von der Größe und Form der Querschnittsfläche selbst, andererseits aber auch von der Lage der Achse, und da diese unendlich viele verschiedene Lagen haben kann, so gibt es auch für eine und dieselbe Querschnittsfläche unendlich viele verschiedene Trägheitsmomente.

Rückt die Achse der Querschnittsfläche näher, so werden die Entfernungen y kleiner, folglich wird auch das Trägheitsmoment kleiner; es erreicht seinen kleinsten Wert, wenn die Achse durch den Schwerpunkt der Fläche hindurchgeht.

Ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse ermittelt, so läßt sich daraus leicht das Trägheitsmoment in Bezug auf eine andere, der Schwerachse parallele Achse ableiten¹⁾.

Das Trägheitsmoment einer beliebig begrenzten Figur, deren Flächeninhalt = F sein möge, läßt sich mit Hilfe der graphischen Statik bestimmen, indem man die einzelnen Flächenstreifen oder Lamellen als Kräfte auffaßt, welche der Achse parallel gerichtet sind.

Man berechne (Fig. 61) die Flächeninhalte $f_1 \dots f_7$ der Streifen und bilde daraus in einem passenden Maßstabe den Kräftezug AB (= F), wähle einen Pol O (Polentfernung = H) und zeichne den Seilzug m I... VII n. Durch den Schnittpunkt der äußersten Seilzugseiten wird die Lage der Schwerachse SS bestimmt. Zur Ermittlung des Trägheitsmomentes betrachte man einen beliebigen Streifen, z. B. den zweiten. Das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Achse SS ist = $f_2 \cdot y_2^2$. Dieses läßt sich durch eine Fläche darstellen. Verlängert man nämlich die f_2 einschließenden Seilzugseiten bis zu den Schnittpunkten α und β mit der SS, so wird dadurch das Dreieck $\Pi \alpha \beta$, dessen Flächeninhalt mit Δ_2 bezeichnet werden möge, gebildet, welches wegen Parallelismus der Seiten dem Dreiecke OCD im Kräfteplane ähnlich ist. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Höhen, folglich ist:

$$\frac{\Delta_2}{OCD} = \frac{y_2^2}{H^2}$$

Da nun:

$$OCD = f_2 \cdot \frac{H}{2}$$

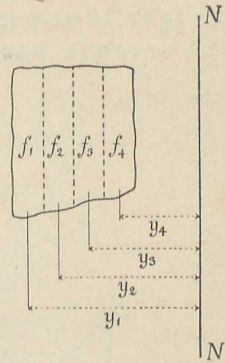
ist, so wird:

$$\Delta_2 = \frac{1}{2H} f_2 \cdot y_2^2$$

oder:

$$f_2 y_2^2 = \Delta_2 \cdot 2H$$

Fig. 60.

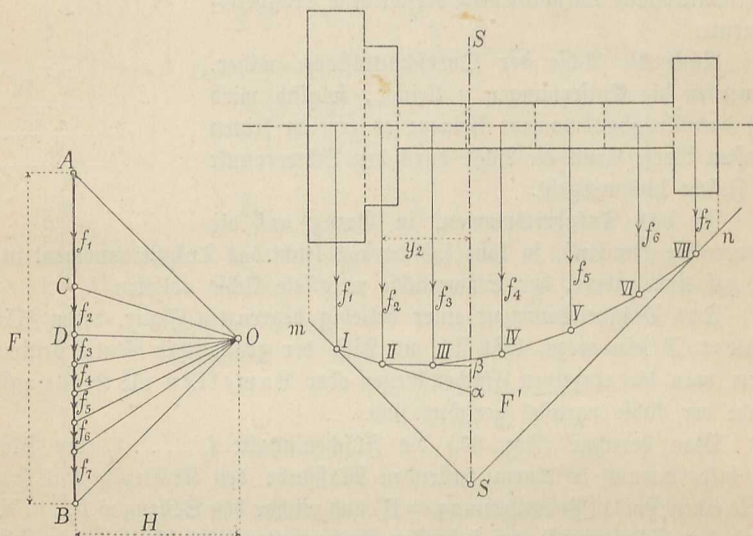


¹⁾ Näheres darüber findet sich in Lauenstein, Festigkeitslehre, IV. Aufl. § 4.

das Dreieck \triangle_2 , multipliziert mit der doppelten Polentfernung, stellt also das Trägheitsmoment des Streifens f_2 dar.

Führt man dieselbe Betrachtung für alle übrigen Streifen der Querschnittsfläche durch, so kommt man zu dem Schluß, daß das gesamte Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf die Schwerachse dargestellt wird durch die, von dem Seilzuge

Fig. 61.



selbst und den verlängerten äußersten Seilzugseiten begrenzte Fläche, multipliziert mit der doppelten Polentfernung. Wird diese Fläche mit F' bezeichnet, so ist:

$$J = F' \cdot 2H$$

Zieht man die äußersten Polstrahlen unter 45° gegen den Kräftezug, so wird, da $AB = F$ ist, $H = \frac{F}{2}$

folglich:

$$J = F' \cdot F$$

Die Fläche F' ist dabei in demselben Maßstabe zu messen, in welchem die Querschnittsfläche F aufgezeichnet war.

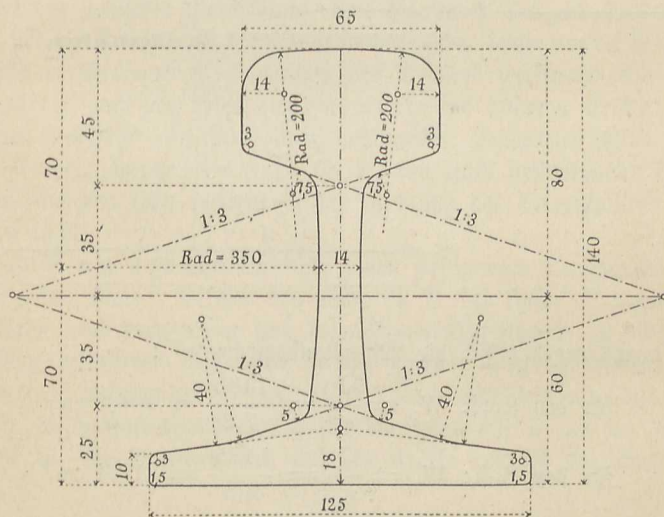
In Fig. 63 ist das soeben besprochene Verfahren an einem Schienenquerschnitt (verstärkter badischer Oberbau), dessen Abmessungen in Fig. 62 angegeben sind, konstruktiv durchgeführt.

Der ganze Querschnitt, welcher im Maßstabe 1 : 2,5 aufgezeichnet ist, ist in 11 Streifen geteilt (Fig. 63), deren Höhen und Flächeninhalte folgende sind:

	Höhe	Flächeninhalt
Streifen Nr. 1	1,0 cm	12,50 qcm
" " 2	0,3 "	3,00 "
" " 3	0,8 "	3,85 "
" " 4	1,5 "	3,00 "
" " 5	1,5 "	2,55 "
" " 6	1,5 "	2,25 "
" " 7	1,5 "	2,10 "
" " 8	1,5 "	2,25 "
" " 9	1,2 "	5,10 "
" " 10	1,7 "	11,05 "
" " 11	1,5 "	8,85 "
Summe	14 cm	56,5 qcm

Fig. 62.

1:2,5



Aus den Flächeninhalten der einzelnen Streifen ist der Kräftezug im Maßstabe 1 qcm = 1 mm gebildet und die Endstrahlen unter 45° gezogen, danach der Seilzug gezeichnet. Die Fläche F' hat sich dabei ergeben zu:

$$F' = 26,3 \text{ qcm}$$

und da:

$$F = 56,5 \text{ qcm}$$

so wird:

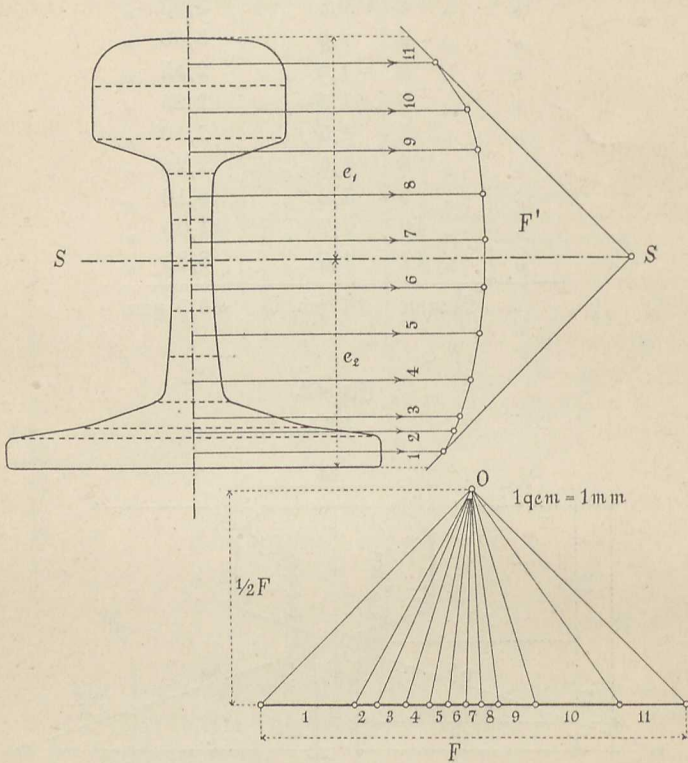
$$J = 26,3 \cdot 56,5 = 1485 \text{ cm}^4.$$

Die Abstände der wagerechten Schwerpunktsachse vom Kopf bzw. vom Fuß der Schiene sind:

$$e_1 = 7,2 \text{ cm}$$

$$e_2 = 6,8 \text{ cm}$$

Fig. 63.



Daraus ergeben sich die Widerstandsmomente¹⁾:

$$\text{für den Kopf: } W_1 = \frac{J}{e_1} = \frac{1485}{7,2} = 206,3 \text{ cm}^3$$

$$\text{für den Fuß: } W_2 = \frac{J}{e_2} = \frac{1485}{6,8} = 218,4 \text{ cm}^3$$

§ 8.

Der belastete Träger.

Ein an beiden Enden unterstützter, durch Lotrechte Kräfte belasteter einfacher Träger übt auf die Unterstützungspunkte Lotrecht abwärts gerichtete

¹⁾ Vergl. Lauenstein, Festigkeitslehre, IV. Aufl., § 3, Gl. 9.

Drücke aus; umgekehrt erfährt der Träger durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also lotrecht aufwärts gerichteten Drücke. Man nennt diese letzteren die Stützenwiderstände. Die Lasten und Stützenwiderstände bilden die äußeren Kräfte, gegenüber den inneren Spannungen des Trägers.

Die Belastung besteht entweder aus einer Anzahl von Einzellasten oder sie ist gleichmäßig über einen Teil des Trägers oder über die ganze Länge desselben verteilt; auch können Einzellasten und gleichmäßig verteilte Belastung (Streckenlast) gleichzeitig vorhanden sein.

Man nennt einen Träger unmittelbar belastet, wenn die Belastung am Träger selbst angreift; wird dagegen die Belastung durch Zwischenkonstruktionen auf einzelne bestimmte Punkte des Trägers übertragen, so nennt man den Träger mittelbar belastet. So z. B. werden bei einer größeren Brücke die Lasten durch kleinere Längsträger auf Querträger und von diesen weiter auf die Hauptträger übertragen, letztere sind daher mittelbar belastet.

Man unterscheidet ferner bleibende und veränderliche bzw. Verkehrsbelastung. Die bleibende Belastung ist stets vorhanden, die veränderliche Belastung wirkt nur zeitweise. Das Eigengewicht der Träger bildet z. B. eine bleibende Belastung, während ein Lastwagen bei einer Brücke, Schnee- und Winddruck bei einem Dache veränderliche Belastungen sind.

Bei der statischen Berechnung eines belasteten Trägers handelt es sich zunächst um die Ermittlung der Stützenwiderstände, sowie um die Bestimmung der in den verschiedenen Querschnitten des Trägers wirkenden Schubkräfte (Querkkräfte), und der Biegemomente der äußeren Kräfte.

Die Schubkraft für einen bestimmten Trägerquerschnitt ist diejenige Kraft, welche den einen (z. B. den links befindlichen) Trägerteil gegen den anderen (den rechten) in der Richtung des Querschnittes zu verschieben sucht.

Das Biegemoment für einen bestimmten Querschnitt ist dasjenige Kraftmoment, welches den einen (z. B. den linken) Trägerteil gegen den anderen (den rechten) in dem betrachteten Querschnitte zu verbiegen sucht. Von besonderer Wichtigkeit ist das größte Biegemoment und der Querschnitt, in welchem dasselbe auftritt, der sogen. gefährliche Querschnitt.

Die Stützenwiderstände sollen für die Folge mit A und B, die Schubkräfte mit S, die Momente der äußeren Kräfte mit M bezeichnet werden.

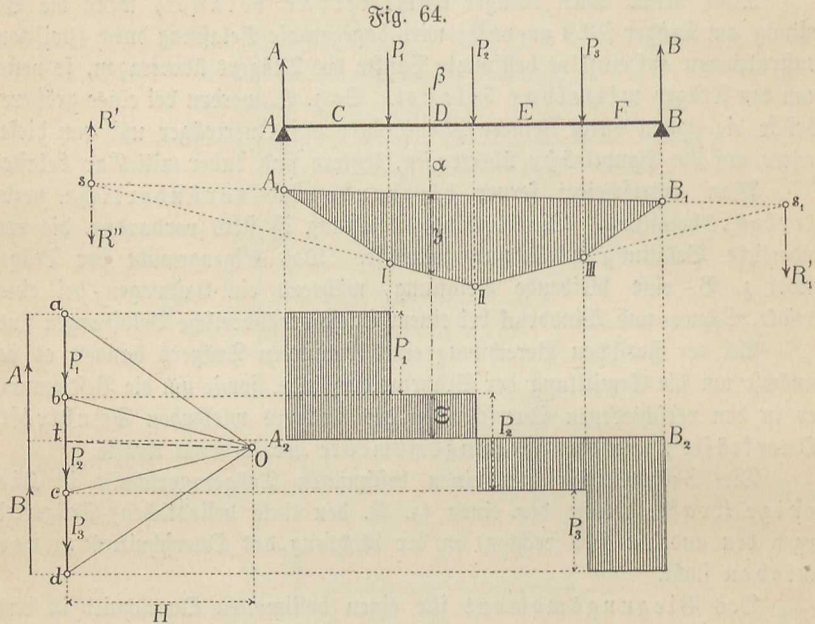
A. Bleibende Belastungen.

1) Unmittelbare Belastung durch Einzelkräfte.

Wirken auf einen an beiden Enden frei aufgelagerten wagerechten Träger AB die Lasten $P_1 P_2 P_3$, so werden dadurch die zunächst zu bestimmenden lotrechten Stützenwiderstände A und B hervorgerufen (Fig. 64). Die Konstruktion derselben ist im wesentlichen bereits in 4) § 2 S. 10—12 angegeben.

Man füge die gegebenen Lasten $P_1 P_2 P_3$ zu dem Kräftezuge $a b c d$ aneinander, wähle einen beliebigen Pol O , und zeichne danach den Seilzug, dessen äußerste Seiten die durch A und B gelegten Lotrechten in den Punkten A_1 und B_1 schneiden. Man ziehe die Schlußlinie $A_1 B_1$ und durch den Pol O eine Parallele zu derselben, welche den Kräftezug in t schneidet. Es ist dann $ta = A$ und $dt = B$.

Die Stützenwiderstände A und B halten den gegebenen Lasten P das Gleichgewicht, denn es entspricht allen diesen Kräften ein geschlossener Kräfteplan und ein geschlossener Seilzug.



Die äußeren Kräfte suchen den Träger durchzubiegen; dadurch werden innere Kräfte hervorgerufen, welche als Widerstände die Biegung zu verhindern suchen. Für den Gleichgewichtszustand des Trägers müssen die äußeren Kräfte mit diesen inneren Widerständen sich im Gleichgewichte befinden. Um die letzteren näher untersuchen zu können, denkt man sich den Träger durch einen Schnitt in zwei Teile zerlegt, hat dann aber an der Schnittstelle äußere Kräfte anzubringen, welche genau dieselbe Wirkung hervorbringen, als vorher die inneren Widerstände, also solche Kräfte, durch welche der frühere Gleichgewichtszustand für jeden der beiden Trägerteile genau wieder hergestellt wird.

Die Ermittlung der inneren Widerstände, welche an der Schnittstelle als Zug- und Druckspannungen auftreten, ist Gegenstand der Festigkeitslehre, auf welche hier verwiesen werden muß.

Denkt man sich nun den Träger an einer beliebigen Stelle D durch einen Lotrechten Schnitt $\alpha\beta$ in zwei Abschnitte geteilt, so ist zunächst fest-

zustellen, daß es zur Bestimmung der an dieser Stelle D wirkenden Schubkraft und des Momentes der äußeren Kräfte gleichgültig ist, ob das links oder rechts vom Schnitte $\alpha\beta$ befindliche Trägerstück in Betracht gezogen wird.

Auf das linke Trägerstück wirken die Kräfte A und P_1 , deren Mittelkraft $R' = A - P_1$ durch den Schnittpunkt s der Seilzugseiten A_1B_1 und III geht; die Größe dieser Mittelkraft ist im Kräfteplane durch die Strecke tb gegeben, die Pfeilrichtung ist lotrecht aufwärts.

Auf das rechte Trägerstück wirken die Kräfte BP_2P_3 . Die Strecke bt im Kräfteplane gibt die Größe der Mittelkraft $R'' = P_2 + P_3 - B$, welche lotrecht abwärts gerichtet ist, und deren Lage durch denselben Schnittpunkt s der zugehörigen Seilzugseiten A_1B_1 und III bestimmt wird.

Die Mittelkraft R' der auf das linke Trägerstück wirkenden Kräfte A und P_1 und die Mittelkraft R'' der auf das rechte Trägerstück wirkenden Kräfte BP_2P_3 liegen also in derselben Lotrechten und sind einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, halten sich daher im Gleichgewichte.

Die Momente dieser Mittelkräfte in Bezug auf den Drehpunkt D sind der Größe nach einander ebenfalls gleich, haben aber entgegengesetzten Dreh Sinn, halten sich daher im Gleichgewichte.

Daraus folgt, daß, wenn man zur Ermittlung der Schubkraft und des Biegemomentes für einen bestimmten Querschnitt den Träger an dieser Stelle durchschnitten denkt, es gleichgültig ist, ob man das linke oder rechte Trägerstück in Betracht zieht.

Für die Folge soll immer, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist, das links von der Schnittstelle befindliche Trägerstück in Betracht gezogen werden.

a) **Momente.** Nach § 4 S. 21 und 22 ist das Moment der am linken Trägerteil angreifenden Kräfte A und P_1 in Bezug auf den Punkt D gleich der Polentfernung H, multipliziert mit der Strecke y, welche die für die Kräfte A und P_1 äußersten Seilzugseiten A_1B_1 und III auf der durch D gelegten Lotrechten abschneiden.

$$M = H \cdot y$$

Dabei ist H im Kräftemaßstabe, y im Längenmaßstabe auszudrücken oder umgekehrt. Nimmt man $H =$ der Längeneinheit an, so wird:

$$M = y$$

wobei y mit dem Kräftemaßstabe zu messen ist.

Die Lotrechten Linien y stellen in diesem Falle also unmittelbar die Momente dar, man nennt deshalb die durch den Seilzug und dessen Schlußlinie begrenzte Fläche die Momentenfläche.

Aus dieser Momentenfläche ergibt sich, daß die größten Momente lotrecht unter den Belastungspunkten liegen und von Belastungspunkt zu Belastungspunkt entweder zu- oder abnehmen; ferner, daß die Momente an den Auflagerpunkten = Null sind.

Das größte Moment erhält man, wenn man an den Seilzug eine Tangente parallel der Schlußlinie legt. Entweder berührt die Tangente eine

Ecke des Seilzuges, das größte Moment liegt dann lotrecht unter einem Belastungspunkte, oder es kann eine Seilzugseite der Schlußlinie parallel laufen; im letzteren Falle hat das größte Moment für alle Querschnitte, welche lotrecht über dieser Seite liegen, denselben Wert.

Bei Berechnung der Träger mit unveränderlichem Querschnitt braucht immer nur das größte Moment bestimmt zu werden.

Es erübrigt noch zu zeigen, welches Vorzeichen das Moment hat.

Für einen Querschnitt C (zwischen A und P_1 gelegen) ist A die einzige auf das linke Trägerstück wirkende Kraft, welche, da sie aufwärts gerichtet ist, in Bezug auf C ein positives Moment liefert, denn dasselbe sucht eine Drehung im Sinne der Zeiger einer Uhr um den Punkt C zu bewirken.

Für den Querschnitt D (zwischen P_1 und P_2 gelegen) geht die Mittelkraft R' aus A und P_1 durch den Schnittpunkt s der Seilzugseiten $A_1 B_1$ und III und ist lotrecht aufwärts gerichtet, liefert daher, weil s links von D liegt, ein positives Moment.

Für irgend einen zwischen den Angriffspunkten von P_2 und P_3 gelegenen Querschnitt E des Trägers ist die Mittelkraft der am linken Trägerteil angreifenden Kräfte: $R'_1 = A - P_1 - P_2$. Diese geht durch den Schnittpunkt s_1 der Seilzugseiten $A_1 B_1$ und IIIII, welcher nach Fig. 64 rechts von E liegt. Die Mittelkraft R'_1 wird aber nach dem Kräfteplan durch die Strecke tc dargestellt, ist also lotrecht abwärts gerichtet, das Moment derselben folglich positiv.

Für einen Querschnitt F endlich (zwischen P_3 und B) wird die Mittelkraft der auf das linke Trägerstück wirkenden Kräfte $A - P_1 - P_2 - P_3$ im Kräfteplane durch die Strecke td dargestellt, sie ist also abwärts gerichtet und geht durch den Punkt B_1 (Schnittpunkt der Seilzugseiten $A_1 B_1$ und IIIII B_1), liefert daher in Bezug auf den Punkt F ebenfalls ein positives, d. h. ein im Sinne der Uhrzeiger drehendes Moment.

Man erhält aus diesen Betrachtungen die beiden Sätze:

Bei einem durch lotrecht abwärts gerichtete Kräfte belasteten Träger auf zwei Stützen ist das Moment der äußeren Kräfte für jeden Querschnitt des Trägers positiv.

Die Mittelkraft der auf einen Trägerteil wirkenden Kräfte kann nie zwischen die Auflagerpunkte fallen.

b) **Schubkräfte.** Die Schubkraft sucht, wie bereits S. 37 gesagt war, ein Trägerstück gegen das andere in der Richtung des Querschnittes zu verschieben, was durch die in dem betreffenden Querschnitte auftretenden inneren Schubspannungen verhindert wird.

Für den Querschnitt D (Fig. 64) ist die Schubkraft S gleich der Mittelkraft der auf das linke Trägerstück wirkenden Kräfte. Wird die Richtung aufwärts positiv angenommen, so ist:

$$S = A - P_1$$

Im Kräfteplane wird diese Kraft dargestellt durch die Strecke tb , welche durch die Strahlen Ot und Ob auf dem Kräftezuge abgeschnitten wird. Diese

Strahlen sind aber parallel den Seilzugseiten A_1B_1 und III, welche lotrecht unter D liegen und durch deren Schnittpunkt s die Lage von S bestimmt ist.

Man erhält danach den Satz:

Die Schubkraft S für den linksseitigen Trägerteil AD wird auf dem Kräftezuge durch zwei Polstrahlen abgeschnitten, von denen der eine parallel der Schlußlinie des Seilzuges, der andere parallel zu derjenigen Seite des Seilzuges ist, welche lotrecht unter dem Punkte D liegt.

Die Schubkraft ändert sich sprungweise in den Belastungspunkten und ist innerhalb zweier aufeinander folgender Belastungspunkte unveränderlich.

Von A bis P_1 ist: $S = A$

" P_1 " P_2 " $S = A - P_1$

" P_2 " P_3 " $S = A - (P_1 + P_2)$

" P_3 " B " $S = A - (P_1 + P_2 + P_3) = -B$

Diese Schubkräfte werden im Kräfteplane dargestellt durch die Strecken ta , tb , tc , td .

Um eine graphische Darstellung der Schubkräfte zu erhalten, ziehe man durch t eine Wagerechte, welche von den durch A und B gelegten Lotrechten in A_2 und B_2 geschnitten wird. Ueberträgt man sodann die Abschnitte ta , tb , tc , td aus dem Kräfteplane auf die Lotrechten der aufeinander folgenden Belastungspunkte, so erhält man einen gebrochenen Linienzug, mit dessen Hilfe man die Schubkraft für irgend einen beliebigen Trägerabschnitt leicht bestimmen kann. Die Ordinaten der durch diesen gebrochenen Linienzug, die Gerade A_2B_2 und die Auflagerlotrechten begrenzten Fläche stellen nämlich unmittelbar die Schubkräfte dar, so z. B. stellt die lotrecht unter D liegende Ordinate die Schubkraft für den Trägerteil AD dar.

Aus der Schubkraftfläche erkennt man ohne weiteres, daß unter dem Belastungspunkte, wo das größte Moment stattfindet, die Schubkraft = Null ist; links davon sind die Schubkräfte nach oben gerichtet, also positiv, rechts davon nach unten gerichtet, also negativ. Ist eine Seite des Seilzuges der Schlußlinie parallel, so ist die Schubkraft für alle Querschnitte des Trägers welche über dieser Seite liegen, = Null. Die Schubkraft erreicht ihren größten Wert an den Auflagerpunkten, wo das Moment = Null ist.

Die Biegemomente lassen sich auch wohl mit Hilfe der Schubkraftfläche darstellen, so z. B. ist das Moment der auf den Trägerteil AD wirkenden Kräfte gleich dem Flächeninhalte des lotrecht unter AD befindlichen Abschnittes der Schubkraftfläche, wie sich leicht beweisen läßt; indessen ist die Benutzung der oben beschriebenen Momentenfläche zur Bestimmung der Biegemomente vorzuziehen.

2) Unmittelbare gleichmäßig verteilte Belastung.

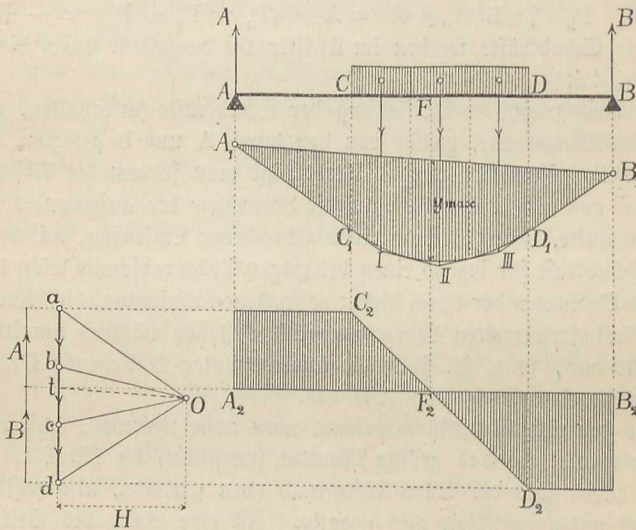
Eine gleichmäßig über die ganze Länge eines Trägers oder über einen Teil desselben verteilte Belastung kann angesehen werden als bestehend aus

einer sehr großen Anzahl sehr kleiner Einzellasten, denn die ganze Belastung kann durch sehr nahe nebeneinander liegende Lotrechte Schnittebenen in Streifen zerlegt werden, von denen jede als Einzelkraft betrachtet werden darf.

Fügt man alle diese Einzellasten, deren Angriffspunkte in den Schwerpunkten der Streifen liegen, zu einem Kräftezuge aneinander und zeichnet den einem beliebig gewählten Pole O entsprechenden Seilzug, so können mit Hilfe desselben die Momente und Schubkräfte in derselben Weise bestimmt werden wie unter 1) in diesem Paragraphen.

In Fig. 65 ist die gleichmäßig auf die Länge CD verteilte Belastung in 3 Streifen von gleicher Breite zerlegt, die letzteren sind zu dem Kräftezuge $abcd$ aneinander gefügt und dem Pole O entsprechend der Seilzug

Fig. 65.



$A_1 I I I I B_1$ gezeichnet. Dieser wird zwischen den Lotrecht unter C und D gelegenen Punkten C_1 und D_1 , um so mehr Seiten enthalten, sich also um so mehr einer stetigen Kurve nähern, je größer die Anzahl der Streifen ist, in welche die auf die Länge CD verteilte Belastung zerlegt ist. Nimmt man die Anzahl der Streifen unendlich groß, also die Breite der einzelnen Streifen unendlich klein, so geht der Seilzug zwischen C_1 und D_1 in eine Kurve, die sogen. Seilkurve über. Die einzelnen Seiten des Seilzuges in Fig. 65 sind Tangenten an die Seilkurve und die Punkte C_1 und D_1 , sowie die Schnittpunkte der in den Streifengrenzen gezogenen Lotrechten mit den Seilzugseiten sind die Berührungspunkte.

Der durch den Pol O parallel zu der Schlusslinie $A_1 B_1$ gezogene Strahl Ot teilt den Kräftezug $abcd$ in die Stützenwiderstände A und B .

Das Moment für irgend einen Querschnitt ist gleich der Lotrecht unter

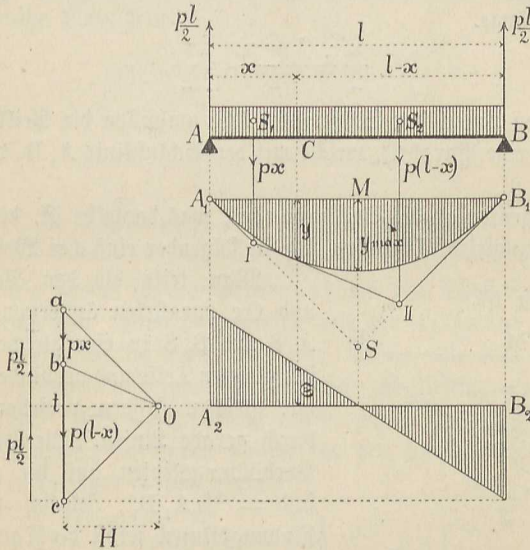
diesem Querschnitte liegenden Ordinate der Momentenfläche multipliziert mit der Polentfernung H .

Die Schubkraft ist von A bis C unveränderlich und gleich dem Stützwiderstande A ; zwischen C und D nimmt dieselbe gleichmäßig ab (daher C_2D_2 geradlinig) und erreicht in D den größten negativen Wert (= dem negativen Stützwiderstande B), welchen sie bis B unverändert beibehält.

Durch den Schnittpunkt F_2 der Geraden C_2D_2 und A_2B_2 wird die Stelle F des Trägers bestimmt, wo die Schubkraft = Null ist; an derselben Stelle ist das Biegemoment am größten und der Querschnitt F daher der gefährliche Querschnitt.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Fall, wo die Belastung gleichmäßig über die ganze Länge des Trägers verteilt ist.

Fig. 66.



Wird die Belastung auf die Längeneinheit des Trägers mit p bezeichnet und trägt man diese als überall gleiche Ordinate auf, so erhält man als Belastungsfläche ein Rechteck von der Höhe p und der Länge $AB = l$ (Fig. 66), dessen Inhalt pl die ganze Belastung des Trägers darstellt.

Diese letztere verteilt sich zu gleichen Teilen auf die beiden Auflager, so daß jedes derselben die Hälfte der ganzen Belastung aufzunehmen hat. Die Stützwiderstände sind danach:

$$A = B = \frac{pl}{2}$$

a) Momente. Um das Moment für einen Querschnitt C des Trägers in der Entfernung x vom Auflager A zu bestimmen, betrachte man die auf

die beiden Trägerteile AC und BC kommenden Belastungen px und $p(l-x)$ als Einzelkräfte, deren Angriffspunkte die Schwerpunkte S_1 und S_2 der betr. Belastungsflächen sind. Fügt man die Belastungen px und $p(l-x)$ zu dem Kräftezuge abc aneinander und zeichnet entsprechend dem Pole O den Seilzug $A_1 I I I B_1$, so wird auf der durch C gelegten Lotrechten durch die Seilzugseite III und die Schlußlinie $A_1 B_1$ die Strecke y abgeschritten und es ist, wenn wieder mit H die Polentfernung bezeichnet wird:

$$M_x = H \cdot y$$

und für $H = 1$:

$$M_x = y$$

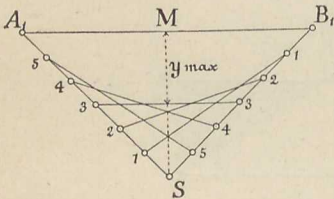
Ändert sich nun x , nimmt also der Querschnitt C andere Lagen an, so ändert sich dem entsprechend auch die Seilzugseite III , ihre Projektion auf AB aber, welche gleich der Entfernung der Schwerpunkte der beiden Belastungsteile ist, bleibt stets dieselbe und ist, wo auch der Punkt C liegen möge, gleich der halben Trägerlänge.

$$\frac{x}{2} + \frac{l-x}{2} = \frac{l}{2}$$

Die verschiedenen Lagen der Seilzugseite III umhüllen die Seilkurve (im vorliegenden Falle eine Parabel), welche mit der Schlußlinie $A_1 B_1$ die Momentenfläche begrenzt.

Die Tangenten an die Seilkurve oder, was dasselbe ist, die verschiedenen Lagen der Seilzugseite III lassen sich in folgender einfacher Weise aufzeichnen.

Fig. 67.



Man teile die den Polstrahlen Oa und Oc parallelen äußersten Seilzugseiten $A_1 S$ und $B_1 S$ in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile und verbinde die in Fig. 67 mit gleichen Ziffern versehenen Teilpunkte durch gerade Linien. Die Projektionen der Verbindungslinien auf die Gerade $A_1 B_1$ sind $= \frac{1}{2} A_1 B_1$, folglich sind die Verbindungslinien selbst die Tangenten an die

Seilkurve, welche sich um so genauer einzeichnen läßt, in je mehr unter sich gleiche Teile man die $A_1 S$ und $B_1 S$ geteilt hatte.

Wählt man die Lage des Poles O in Fig. 66 so, daß $Oa = Oc$ ist, so wird wegen des gleichmäßigen Belastungszustandes die Schlußlinie $A_1 B_1$ wagerecht.

Die größte Ordinate der Momentenfläche befindet sich lotrecht unter der Trägermitte und es ist:

$$y_{\max} = \frac{1}{2} MS$$

Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $A_1 MS$ und Ota (Fig. 66) verhält sich:

$$MS : A_1 M = at : Ot$$

oder:

$$MS : \frac{1}{2} l = \frac{pl}{2} : H$$

folglich:
$$MS = \frac{1}{H} \cdot \frac{pl^2}{4}$$

und:
$$y_{\max} = \frac{1}{2} MS = \frac{1}{H} \cdot \frac{pl^2}{8}$$

für $H = 1$ wird:
$$M_{\max} = y_{\max} = \frac{pl^2}{8}$$

b) **Schubkräfte.** Auf den Querschnitt C in der Entfernung x vom Auflager A wirkt die Schubkraft:

$$S_x = A - px = \frac{pl}{2} - px = p \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

Man erkennt aus diesem Ausdruck, daß die Schubkräfte sich in linearem Verhältnis mit den Längen x ändern, die graphische Darstellung derselben wird daher eine gerade Linie sein:

für $x = 0$ wird $S = \frac{pl}{2}$

„ $x = \frac{l}{2}$ „ $S = 0$

„ $x = l$ „ $S = -\frac{pl}{2}$

Durch diese Werte ist die Gerade, welche zur Darstellung der Schubkräfte dient, festgelegt. Dieselbe begrenzt mit der $A_2 B_2$ und den in A_2 und B_2 errichteten Lotrechten die Schubkraftfläche, welche, wie schon oben unter 1) in diesem Paragraphen angeführt wurde, auch zur Bestimmung der Momente sich benutzen läßt. Aus dieser Fläche ergibt sich z. B. das Moment der am linksseitigen Trägerteil wirkenden Kräfte für den Querschnitt C in der Entfernung x vom Auflager A der Wert:

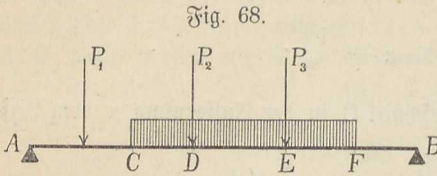
$$M_x = \frac{1}{2} \left(\frac{pl}{2} + S_x \right) x = \frac{1}{2} \left[\frac{pl}{2} + p \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] x$$

$$M_x = \frac{p}{2} x (l - x)$$

3) Unmittelbare zusammengesetzte Belastung.

Wenn ein Träger außer gleichmäßig verteilter Belastung noch Einzellasten zu tragen hat (ein Fall, der streng genommen immer vorliegt, sobald ein Träger den Einwirkungen von Einzellasten ausgesetzt ist, denn das Eigengewicht des Trägers bildet eine über die ganze Länge desselben verteilte gleichmäßige Belastung), so können zur Bestimmung der Momente zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden.

Das erste Verfahren besteht darin, daß man im Kräfteplane die Einzelkräfte zwischen den gleichmäßig verteilten Belastungen einschaltet und den Seilzug dazu zeichnet. So ist für den Belastungsfall Fig. 68 der Kräfte-



plan in der Weise anzufertigen, daß auf P_1 die gleichmäßig von C bis D verteilte Belastung folgt, nach dieser P_2 , sodann die gleichmäßig von D bis E verteilte Belastung u. s. w.

Man erhält auf diese Weise einen Kräfte- und Seilzug, welche der gleichzeitigen Wirkung der Einzelkräfte und der gleichmäßig verteilten Belastung entsprechen.

Nach dem zweiten Verfahren, welches im allgemeinen den Vorzug verdient, behandelt man getrennt: die Einzelkräfte für sich, und die gleichmäßig verteilte Belastung für sich, zeichnet für jede Belastungsart die Momentenfläche und die Schubkraftfläche, und hat dann einfach die Ergebnisse mit Rücksicht auf das Vorzeichen zu addieren.

Damit sich die Summe der Ordinaten der beiden Momentenflächen unmittelbar als eine gerade Linie abgreifen läßt, sind die Pole für die Einzelkräfte und für die gleichmäßig verteilte Belastung auf verschiedene Seiten des betreffenden Kräftezuges zu legen, und bei derselben Polentfernung H die Lage derselben so anzunehmen, bezw. die Lage des einen Poles später so zu verändern, daß die der gleichmäßig verteilten Belastung entsprechende Seilkurve und der den Einzelkräften entsprechende Seilzug dieselbe Schlußlinie erhalten.

In Fig. 69 ist diese Konstruktion durchgeführt worden für einen Träger AB, welcher gleichmäßig über die ganze Länge l mit p auf die Längeneinheit belastet ist und auf welchen außerdem die Einzelkräfte P_1, P_2, P_3 wirken.

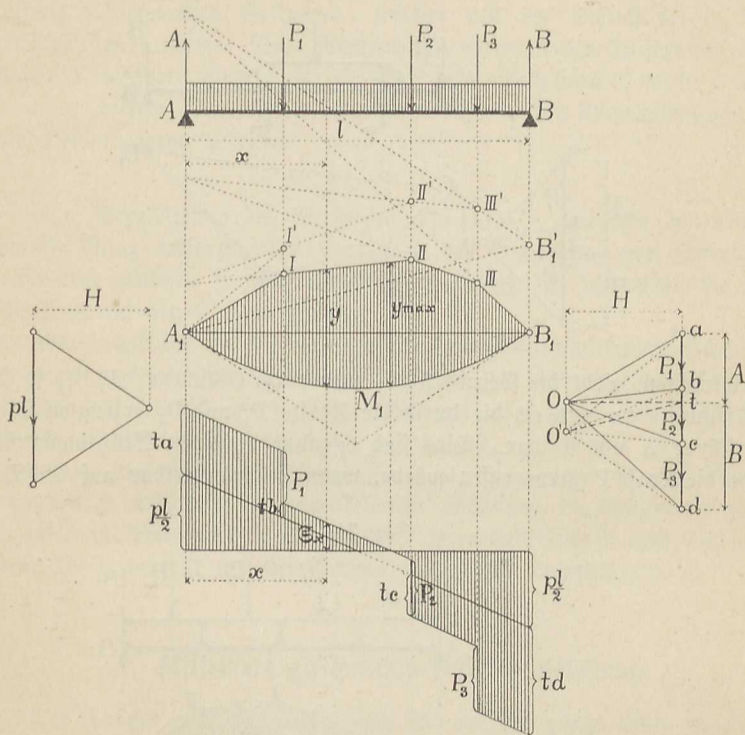
Die Seilkurve $A_1 M_1 B_1$ entspricht der gleichmäßigen Belastung, der Seilzug $A_1 I' II' III' B_1'$ den Einzelkräften P_1, P_2, P_3 . Der letztere ist in den Seilzug $A_1 I III B_1$ mit der Schlußlinie $A_1 B_1$ umgewandelt.

Die Umwandlung geschieht in der Weise, daß durch den Punkt t , welcher auf dem Kräftezuge $abcd$ die von den Kräften P_1, P_2, P_3 hervorgerufenen Stützenwiderstände abschneidet, eine Parallele zu $A_1 B_1$ gezogen wird, welche die durch den ursprünglichen Pol O' gelegte Lotrechte in O schneidet. Wählt man O als neuen Pol und zeichnet den Seilzug für die Kräfte P_1, P_2, P_3 , so wird, wenn man bei A_1 beginnt, $A_1 B_1$ die Schlußlinie desselben sein.

Nach 2) § 3 S. 15 schneiden sich je zwei gleichnamige Seiten des ersten und des zweiten Seilzuges auf einer zu OO' parallelen Geraden. Da nun OO' Lotrecht gerichtet ist, so liegt der Schnittpunkt je zweier gleichnamiger Seilzugseiten auf der durch A_1 gezogenen Lotrechten. Mit Zuhilfenahme dieses Satzes läßt sich der Seilzug $A_1 I' II' III' B_1'$ ebenfalls sehr rasch in den Seilzug $A_1 I III B_1$ mit der Schlußlinie $A_1 B_1$ verwandeln.

Die Fläche zwischen der Seilkurve $A_1 M_1 B_1$ und dem Seilzuge $A_1 III III B_1$ ist die den gesamten Kräften entsprechende Momentenfläche. Durch Abgreifen mit dem Zirkel läßt sich leicht die größte Ordinate y_{max} und damit auch der gefährliche Querschnitt finden.

Fig. 69.



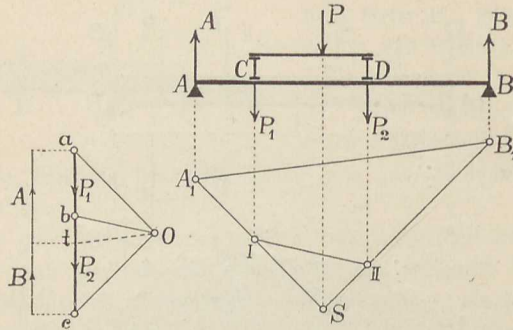
Schärfer erhält man die Stelle, wo das Moment seinen größten Wert erreicht (also die Stelle des gefährlichen Querschnittes) mit Hilfe der zeichnerischen Darstellung der Gesamtschubkräfte, welche sich ergibt durch Addition der durch die gleichmäßig verteilte Belastung und der durch die Einzelkräfte P_1, P_2, P_3 hervorgerufenen Schubkräfte, deren Bestimmung nach 1) und 2) in diesem Paragraphen auszuführen ist.

4) Mittelbare Belastung durch Einzelkräfte.

Wirkt die Last P nicht unmittelbar auf den Träger AB (Fig. 70), sondern wird sie durch zwei Querträger C und D auf AB übertragen, so bilden diese Querträger die Stützen für den darauf ruhenden Zwischenträger CD und erhalten die Auflagerdrücke P_1 und P_2 , deren Größe in bekannter Weise ermittelt wird.

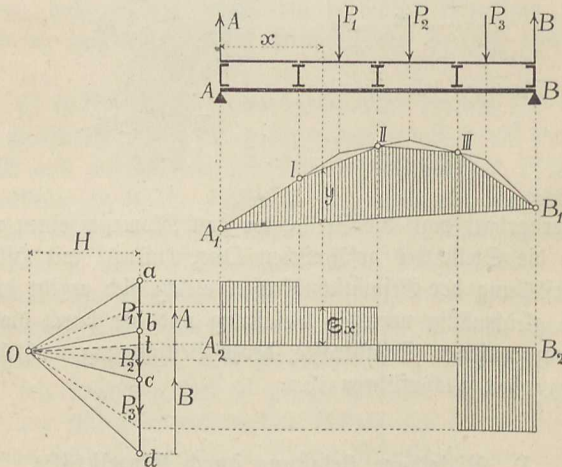
Zeichnet man nämlich für die Kraft $P = ac$ den dem Pole O entsprechenden Seilzug $ISII$, zieht die Schlusslinie III und durch O den Strahl $Ob \parallel III$, so wird $ab = P_1$ und $bc = P_2$. Verlängert man dann die Seilzugseiten SI und SII bis zu den Schnittpunkten A_1 und B_1 mit den Auf-

Fig. 70.



lagerlotrechten, zieht die Gerade $A_1 B_1$ und durch O die $Ot \parallel A_1 B_1$, so stellen die Abschnitte ta und et die durch die Kräfte P_1 und P_2 erzeugten Stützwiderstände A und B dar. Dies sind offenbar dieselben Stützwiderstände, welche die Kraft P hervorrufen würde, wenn sie unmittelbar auf den Träger

Fig. 71.



AB wirkte, denn der der unmittelbar wirkenden Kraft P entsprechende Seilzug ist $A_1 S B_1$, welcher bei mittelbarer Belastung in den Seilzug $A_1 I I B_1$ übergeht.

Da, wie Fig. 70 zeigt, die Momente für die unter den Querträgern liegenden Querschnitte des Hauptträgers bei unmittelbarer und mittelbarer

Belastung einander gleich sind, so kann man leicht aus dem der unmittelbaren Belastung entsprechenden Seilzuge den Seilzug für mittelbare Belastung ableiten.

Man zeichne (Fig. 71) den Seilzug für unmittelbare Belastung, ziehe die Querträgerlotrechten und bestimme die Schnittpunkte I IIII derselben mit den Seilzugseiten. Diese Schnittpunkte sind die Eckpunkte des der mittelbaren Belastung zukommenden Seilzuges, welcher mit der Schlußlinie $A_1 B_1$ die Momentenfläche begrenzt. Das Moment für einen in der Entfernung x vom Auflager A liegenden Querschnitt ist dann bekanntlich wieder, wenn y die Lotrecht unter diesem Querschnitte liegende Ordinate der Momentenfläche, und H die Polentfernung bedeutet:

$$M_x = Hy$$

Eine Vergleichung des Seilzuges $A_1 I IIII B_1$ mit dem der unmittelbaren Belastung entsprechenden zeigt, daß bei Anwendung von Querträgern das Moment zwischen je zwei Querträgern kleiner ist, als wenn die Lasten unmittelbar auf den Träger wirken.

Man erhält die auf die verschiedenen Querschnitte wirkenden Schubkräfte, wenn man von dem Pole O aus Parallelen zu den einzelnen Seiten des Seilzuges $A_1 I IIII B_1$ zieht. Diese schneiden auf dem Kräftezuge die Schubkräfte ab, welche, wenn $Ot \parallel A_1 B_1$ gezogen ist, von t aus zu messen sind. Zwischen je zwei aufeinander folgenden Querträgern ist die Schubkraft unveränderlich, während bei unmittelbarer Belastung die Schubkraft zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lastpunkten unveränderlich ist und sich auch in anderer Weise verteilt als bei Vorhandensein von Querträgern.

5) Mittelbare gleichmäßig verteilte Belastung.

Der Träger $AB = l$ (Fig. 72) sei auf die ganze Linie gleichmäßig mit p auf die Längeneinheit mittelbar belastet, d. h. die Belastung werde durch Querträger auf den Hauptträger übertragen.

Die ganze Belastung pl verteilt sich zu gleichen Teilen auf die Auflager, so daß die Stützenwiderstände sind:

$$A = B = \frac{Pl}{2}$$

Zur Bestimmung der Momente kann man die der unmittelbaren Belastung entsprechende Seilkurve (Parabel) zeichnen und in diese den der mittelbaren Belastung entsprechenden Seilzug oder mit anderen Worten den Seilzug für die auf die Querträger wirkenden Lasten in der Weise einzeichnen, daß die Eckpunkte des letzteren auf den Querträgerlotrechten liegen.

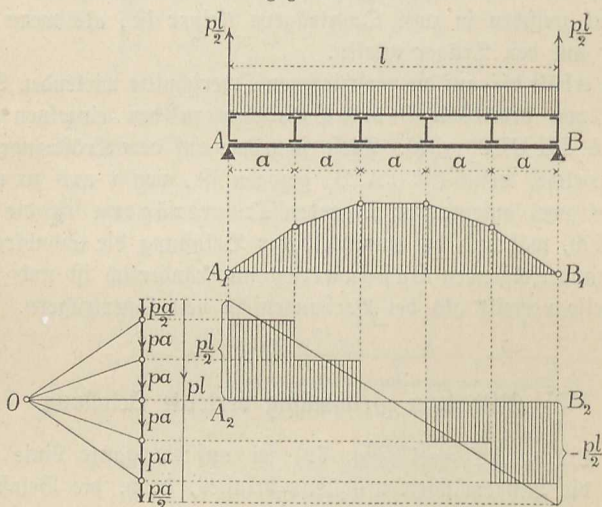
Für den Fall, daß die Entfernungen der Querträger voneinander (die Feldlängen) gleich sind, ist es zweckmäßiger, die Querträgerbelastungen als

Einzelkräfte, welche für alle zwischen den Auflagerpunkten A und B liegenden Querträger einander gleich sind, zu einem Kräftezuge zusammen zu fügen und dazu den Seilzug aufzuzeichnen.

Bezeichnet man die Feldlänge mit a , so ist die Belastung jedes zwischen A und B liegenden Querträgers $= pa$; die Endquerträger erhalten jeder die Belastung $\frac{pa}{2}$. An dem Punkte A wirkt daher der Stützendruck $\frac{pl}{2}$ lotrecht aufwärts und die Querträgerbelastung $\frac{pa}{2}$ lotrecht abwärts. Da nach Fig. 72: $l = 5a$ ist, so bleibt als lotrecht aufwärts gerichtete Kraft:

$$S = \frac{pl}{2} - \frac{pa}{2} = \frac{p \cdot 5a}{2} - \frac{pa}{2} = 2pa$$

Fig. 72.



Diese Schubkraft bleibt unverändert bis zu dem ersten Querträger, wo sie um die Querträgerbelastung pa abnimmt.

Im zweiten Felde ist daher:

$$S = 2pa - pa = pa$$

im dritten Felde:

$$S = pa - pa = 0$$

In den folgenden Feldern wird die Schubkraft negativ, und zwar im vierten Felde $= -pa$, im fünften Felde $= -2pa$.

Man kann zu der graphischen Darstellung der Schubkräfte auch folgendes einfache Verfahren benutzen: Man trage von den lotrecht unter A und B liegenden Punkten A_2 und B_2 der Geraden A_2B_2 die Ordinaten $+\frac{pl}{2}$

bezw. $-\frac{Pl}{2}$ auf und verbinde die Endpunkte derselben durch eine gerade Linie. Die Strecke zwischen dieser Geraden und der A_2B_2 , lotrecht unter der Mitte eines Feldes gemessen, stellt die Schubkraft für dieses Feld dar.

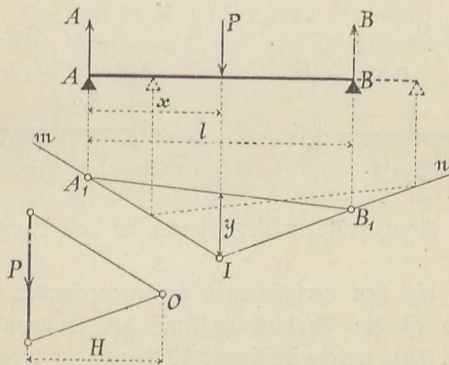
B. Veränderliche Belastungen.

1) Unmittelbare Belastung durch eine bewegliche Einzelkraft.

Ein solcher Belastungsfall liegt z. B. vor bei Brückenträgern, deren Spannweite kleiner ist als die Achsenentfernung eines Fuhrwerkes (Lokomotive oder Lastwagen), so daß nur je ein Räderpaar sich zur Zeit auf der Brücke befinden kann.

a) Momente. Um den Einfluß einer Einzellast P zu untersuchen, welche sich über den Träger AB (Fig. 73) fortbewegt, nehmen wir zunächst

Fig. 73.



umgekehrt an, die Last sei feststehend und der Träger bewege sich unter derselben fort.

Der dem Pole O entsprechend gezeichnete Seilzug mIn ändert sich durch wagerechte Verschiebung des Trägers nicht, aber jede besondere Stellung des Trägers zu der Last bedingt eine besondere Schlußlinie.

Da die Momente nach § 4 dargestellt werden durch die Ordinaten der von dem Seilzuge und der Schlußlinie begrenzten Fläche, so ist diejenige Lage der Schlußlinie die ungünstigste, welche die größte Ordinate liefert. Für diese Lage der Schlußlinie ergibt sich dann das überhaupt größte Moment unter dem Lastpunkte.

Die ungünstigste Lage der Schlußlinie findet man am besten durch Rechnung. Es ist nämlich:

$$M_x = Ax = \frac{P(l-x)}{l} x = \frac{P}{l} x(l-x)$$

Dieser Ausdruck läßt erkennen, daß die verschiedenen Lagen der Schlußlinie die Berührungsgewandten einer Parabel sind.

M_x erreicht seinen größten Wert für:

$$x = l - x$$

oder:

$$x = \frac{1}{2} l$$

Es entsteht dann:

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = \frac{P l}{4}$$

b) **Schubkräfte.** Um die in irgend einem Querschnitt D des durch P belasteten Trägers AB auftretende Schubkraft zu untersuchen, nehmen wir zunächst an, P greife rechts von D an, es sei also (nach Fig. 74) $x > AD$.

Es entsteht dann in D die Schubkraft:

$$S = A = P \frac{l - x}{l} = P \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

welche wegen $x \leq l$ stets positiv ist. Sie wird um so größer, je kleiner x

Fig. 74.

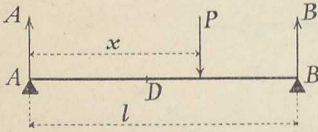
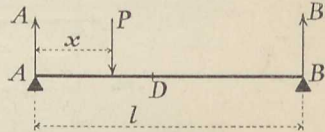


Fig. 75.



wird, und erreicht ihren größten Wert, wenn die Last P unmittelbar rechts von D angreift.

Trägt man die den verschiedenen x entsprechenden Werte von S als Ordinaten auf, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte derselben eine Gerade MB_1 (Fig. 76), welche bestimmt ist durch die Grenzwerte:

$$S = P \text{ für } x = \text{Null}$$

$$S = \text{Null für } x = l$$

Es möge nun zweitens die Last P links von D angreifen, also $x < AD$ sein (Fig. 75).

Bei dieser Laststellung ist die in D auftretende Schubkraft:

$$S = A - P = P \left(\frac{l - x}{l} \right) - P = -\frac{P x}{l}$$

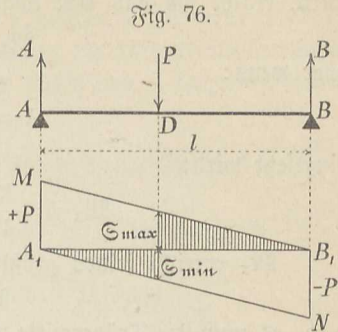
also negativ. Sie wird um so größer, je größer x wird, und erreicht ihren größten (negativen) Wert für $x = AD$, d. h. wenn die Last P unmittelbar links von D angreift. Es wird:

$$S = \text{Null für } x = \text{Null}$$

$$S = -P \text{ für } x = l$$

Durch diese Werte ist die Begrenzungsgerade $A_1 N$ (Fig. 76) der Ordinaten, durch welche die negativen Schubkräfte dargestellt werden, festgelegt.

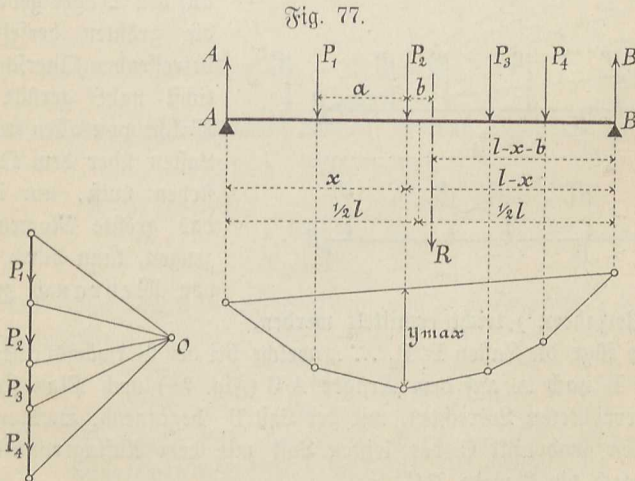
Nochmals kurz zusammengefaßt ergibt sich aus der obigen Betrachtung, daß in einem Trägerquerschnitt eine positive Schubkraft entsteht durch eine Last rechts, eine negative Schubkraft durch eine Last links von dem betreffenden Querschnitte. Die größte positive Schubkraft (S_{\max}) wird erzeugt durch eine unmittelbar rechts, die größte negative Schubkraft (S_{\min}) dagegen durch eine unmittelbar links vom Querschnitt angreifende Last P .



2) Unmittelbare Belastung durch eine bewegliche Gruppe von Einzelkräften.

a) Momente. Sind die Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben, welche auf den Träger AB (Fig. 77) wirken, so zeichne man den diesen Lasten entsprechenden Kräfteplan, sowie den Seilzug und verschiebe dann den Träger derart, daß die ungünstigste Schlußlinie, welche die größte Ordinate liefert, zum Vorschein kommt.

Das größte Moment ist zu erwarten unter derjenigen Last, welche der Mittelkraft aller Lasten am nächsten liegt. Wenn die Ordinaten unter zwei benachbarten Lasten einander gleich sind, so bleibt das Moment zwischen denselben unveränderlich.



Bei dem Träger AB (Fig. 77) möge z. B. die Mittelkraft R der Last P_2 am nächsten liegen. Es wird dann das größte Moment wahrscheinlich unter P_2 , sonst aber unter P_3 liegen. Die Lage von P_2 auf dem Träger,

bei welcher das unter dieser Last liegende Moment überhaupt das größte wird, ergibt sich aus dem allgemeinen Ausdruck für M_x .

$$M_x = Ax - P_1 a$$

oder wenn:

$$A = R \frac{(l - x - b)}{l}$$

eingesetzt wird:

$$M_x = \frac{R}{l} (l - x - b) x - P_1 a$$

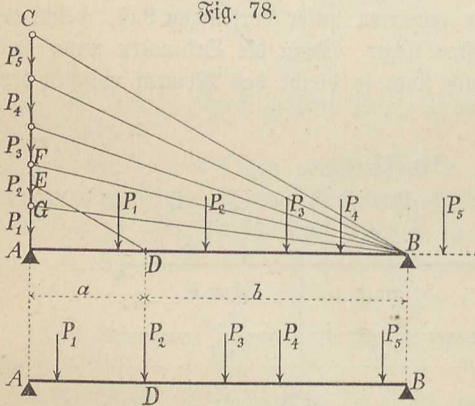
M_x erreicht seinen größten Wert für:

$$l - x - b = x$$

d. h. es muß die Trägermitte gerade zwischen P_2 und R liegen. Daraus ergibt sich der Satz:

Das Moment unter einer bestimmten Last wird so groß wie möglich, wenn diese Last von der Trägermitte ebenso weit entfernt ist, wie die Mittelkraft R aller auf dem Träger befindlichen Lasten.

Da, wie früher (S. 40) nachgewiesen wurde, das Moment für die belasteten Träger auf zwei Stützen stets positiv ist, so wird durch jede Last



das Moment vergrößert; es müssen daher, um für irgend einen Querschnitt des Trägers das größte Moment zu erhalten, möglichst viele Lasten auf den Träger gebracht, und die größten derselben dem betreffenden Querschnitt möglichst nahe gerückt werden. Welche von allen beweglichen Lasten über dem Querschnitt stehen muß, um in diesem das größte Moment zu erzeugen, kann durch folgendes von Wehrbach zuerst ange-

gebene Verfahren ¹⁾ leicht ermittelt werden.

Man füge die Lasten P_1, P_2, \dots , welche bei der Vorwärtsbewegung derselben von B nach A auf dem Träger AB (Fig. 78) noch Platz finden, auf der in A errichteten Lotrechten, mit der Last P_1 beginnend, aneinander, und verbinde den Endpunkt C der letzten Last mit dem Auflagerpunkte B des Trägers durch die Gerade BC.

Um nun für einen beliebigen Querschnitt D des Trägers das größte Moment zu bestimmen, zieht man $DE \parallel BC$. Diejenige Last in dem Last-

¹⁾ Zeitschrift d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1875 S. 467 u. ff.

zuge AC, welche von der DE geschnitten wird, muß über dem Querschnitt D stehen. Liegt der Punkt E gerade auf der Grenze zwischen zwei Lasten, so ist es gleichgültig, welche derselben über den Querschnitt D gestellt wird.

Der Beweis folgt aus Fig. 79, in welcher die Mittelkraft sämtlicher links von D liegender Lasten mit R_1 , die der rechts von D liegenden Lasten mit R_2 bezeichnet ist.

R_1 erzeugt in B den Stützwiderstand $\frac{R_1 m}{l}$ und in D das Moment $\frac{R_1 m}{l} b$

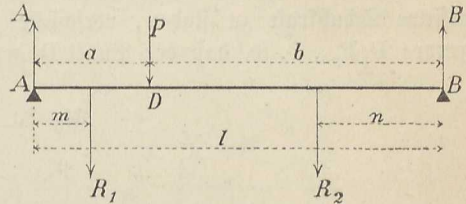
R_2 erzeugt in A den Stützwiderstand $\frac{R_2 n}{l}$ und in D das Moment $\frac{R_2 n}{l} a$

Die in D angreifende Last P erzeugt daselbst das Moment $\frac{P a b}{l}$

Im ganzen entsteht:

Fig. 79.

$$M = \frac{R_1 m}{l} b + \frac{R_2 n}{l} a + \frac{P a b}{l}$$



Wird nun die Lastengruppe nach rechts um eine kleine Strecke λ verschoben, so ändert sich dadurch das Moment um die Größe ΔM , und es wird:

$$M + \Delta M = \frac{R_1 (m + \lambda) b}{l} + \frac{R_2 (n - \lambda) a}{l} + \frac{P a (b - \lambda)}{l}$$

oder:

$$M + \Delta M = \frac{R_1 m}{l} b + \frac{R_2 n}{l} a + \frac{P a b}{l} + \frac{R_1 \lambda b}{l} - \frac{R_2 \lambda a}{l} - \frac{P \lambda a}{l}$$

$$M + \Delta M = M + \frac{\lambda}{l} (R_1 b - R_2 a - P a)$$

Soll M das größte Moment bleiben, so muß ΔM negativ sein, also:

$$R_1 b < (R_2 + P) a$$

oder:

$$\frac{R_1}{R_2 + P} < \frac{a}{b}$$

Ebenso folgt, wenn die Lastengruppe um die kleine Strecke λ nach links verschoben wird:

$$\frac{R_1 + P}{R_2} > \frac{a}{b}$$

Diese Bedingungen sind aber erfüllt durch die Konstruktion (Fig. 78), wenn darin (entsprechend der obigen Ableitung) eingesetzt wird:

$$AG = R_1 ; CF = R_2 ; FG = P$$

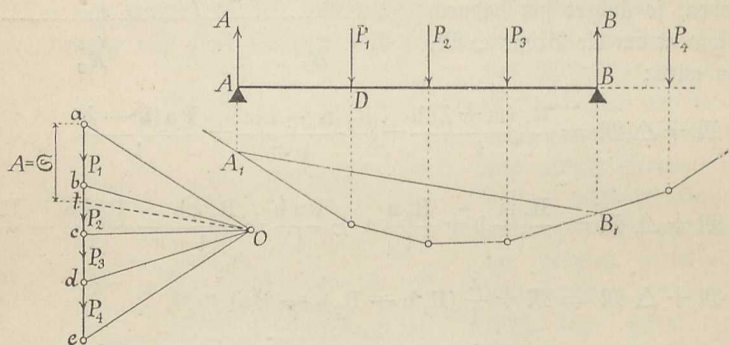
b) Schubkräfte. Auf S. 52 wurde gezeigt, daß eine Last rechts von einem bestimmten Trägerquerschnitt in diesem positive, eine Last links

davon dagegen negative Schubspannung erzeugt. Danach ergibt sich bei einer gegebenen Gruppe von Einzellasten zur Bestimmung der Schubkraft die Regel: Um für einen Querschnitt die größte **positive** Schubkraft zu erhalten, belaste man nur den rechts von demselben befindlichen Trägerteil und stelle die erste (womöglich schwerste) Last gerade über den Querschnitt. Um die größte **negative** Schubkraft zu erhalten, belaste man nur den linken Trägerteil und stelle dabei die erste (womöglich schwerste) Last gerade über den Querschnitt.

Man zeichnet auch hier wieder für die gegebene Lastgruppe den einem beliebigen Pole O des Kräftezuges entsprechenden Seilzug, und verschiebt dann den Träger wagerecht unter der Lastgruppe derart, daß derjenige Querschnitt, für welchen die größte Schubkraft zu bestimmen ist, gerade unter der ersten Last sich befindet.

Um z. B. für den Querschnitt D des Trägers AB (Fig. 80) die größte positive Schubkraft zu finden, verschiebe man den Träger unter der Lastgruppe $P_1 P_2 \dots$ so, daß der Punkt D gerade unter P_1 liegt und die rechte

Fig. 80.



Trägerseite durch die übrigen Kräfte $P_2 P_3 \dots$ belastet, die linke Trägerseite dagegen gänzlich unbelastet ist. Die bei dieser Laststellung in D auftretende Schubkraft ist dann gleich dem Stützenwiderstande A , welcher nach den früher gegebenen Regeln in bekannter Weise zu ermitteln ist.

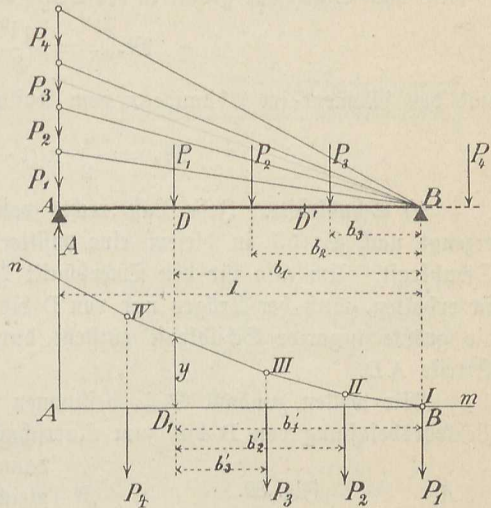
Man bestimme auf dem Seilzuge die Punkte A_1 und B_1 lotrecht unter A bzw. B , ziehe die Schlußlinie $A_1 B_1$ und im Kräfteplan durch den Pol O die $Ot \parallel A_1 B_1$. Es ist dann $at = A$, also zugleich, da A die einzige auf den Trägerteil AD wirkende äußere Kraft ist, gleich der gesuchten Schubkraft in D .

Ein anderes, zuerst von C. Winkler angegebenes, noch etwas einfacheres Verfahren zur Bestimmung der größten Schubkräfte für die verschiedenen Trägerquerschnitte ist folgendes:

Man füge die Lasten $P_1 P_2 \dots$, welche bei der Vorwärtsbewegung derselben von B nach A auf dem Träger AB (Fig. 81) noch Platz finden, auf

der in A errichteten Lotrechten, mit der Last P_1 bei A beginnend, zu einem Kräftezuge aneinander, und wähle den Auflagerpunkt B des Trägers als Pol. Man trage dann die Lastengruppe in umgekehrter Richtung, also mit Last P_1 voran, von A nach B fortschreitend so auf, daß P_1 lotrecht unter B liegt, und zeichne den dem Pole B entsprechenden Seilzug $m \text{---} II \text{---} III \text{---} IV \text{---} n$, dessen erste Seite $m \text{---} I$ wagerecht angenommen wird. Jede von dem Seilzuge und der verlängerten ersten Seite desselben, also der Wagerechten $A_1 B_1$, begrenzte Ordinate y stellt dann die größte positive Schubkraft (S_{\max}) für den Lotrecht darüber liegenden Trägerquerschnitt dar.

Fig. 81.



Es ist nämlich in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$Al = P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3$$

und da nach (Fig. 81):

$$b_1 = b'_1; \quad b_2 = b'_2; \quad b_3 = b'_3$$

ist, so wird wegen $A = S_{\max}$:

$$S_{\max} l = P_1 b'_1 + P_2 b'_2 + P_3 b'_3$$

Die rechte Seite dieser

Gleichung ist das Moment der Kräfte $P_1 P_2 P_3$ in Bezug auf den Punkt D_1 (Fig. 81 unten), welches nach S. 21 dargestellt wird durch die Ordinate y , multipliziert mit der Polentfernung l . Es ist daher auch:

$$y l = P_1 b'_1 + P_2 b'_2 + P_3 b'_3$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$y = S_{\max}$$

Da die positive Schubkraft für einen Trägerquerschnitt D' , welcher denselben Abstand von dem Auflager B hat, wie der Querschnitt D vom Auflager A, dem Zahlenwerte nach gleich ist der negativen in D auftretenden Schubkraft (die Laststellung für S_{\min} im Querschnitt D ist nämlich das Spiegelbild der Laststellung, bei welcher S_{\max} im Querschnitt D' entsteht), so kann die Fig. 81 auch unmittelbar zur Bestimmung der größten negativen Schubkräfte benutzt werden.

3) Unmittelbare gleichmäßig verteilte Belastung.

a) Momente. Nach S. 40 können bei einem Träger auf zwei Stützen nur positive Momente entstehen; es tragen deshalb alle Lasten, wo sie auch liegen mögen, zur Vergrößerung des Momentes in irgend einem beliebigen

Querschnitt bei. Es entsteht folglich für jeden Querschnitt M_{\max} , wenn der Träger voll belastet angenommen wird.

Bezeichnet man für die Längeneinheit:

die bleibende Belastung mit p

die veränderliche " " v

und die Gesamtbelastung: $p + v$ mit q

so wird nach S. 45 das größte in der Mitte des Trägers auftretende Moment:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

und das Moment im Abstände x vom Auflager A (vergl. Fig. 66 S. 43):

$$M_x = \frac{q}{2} x (l - x)$$

b) **Schubkräfte.** Jede Last rechts von dem Querschnitt D (Fig. 82) erzeugt nach S. 53 in diesem eine positive, jede Last links eine negative Schubkraft. Um also für den Querschnitt D die größte positive Schubkraft zu erhalten, muß der Träger nur von D bis B belastet angenommen werden; die größte negative Schubkraft entsteht durch ausschließliche Belastung der Strecke AD.

Wir wollen zunächst S_{\max} bestimmen und nehmen zu dem Zwecke die Verkehrsbelastung von B bis zum Querschnitt D fortgeschritten an. Es ist dann die in D auftretende Schubkraft gleich dem Stützenwiderstande A, welcher sich ergibt aus der Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt B.

$$Al - v(l-x) \frac{l-x}{2} = 0$$

Man erhält:

$$A = S_{\max} = \frac{v(l-x)^2}{2l}$$

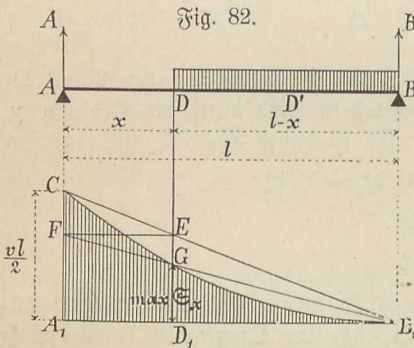
Dieser Ausdruck läßt sich durch eine Parabel darstellen, d. h. wenn

man die Werte von S_{\max} für die jedesmaligen entsprechenden x als Ordinaten von einer Wagerechten A_1B_1 aus aufträgt, so erscheint als Verbindungslinie der oberen Endpunkte derselben eine Parabel. Diese ist durch die Grenzordinaten festgelegt. Es wird:

$$S_{\max} = \frac{vl}{2} \quad \text{für } x = \text{Null}$$

$$S_{\max} = \text{Null} \quad \text{für } x = l$$

Die Parabel kann in bekannter (auch auf S. 44 angegebener) Weise aufgezeichnet werden. Einzelne Parabelpunkte, z. B. der lotrecht unter D liegende Punkt G, können in folgender Weise bestimmt werden:



Man mache $A_1 C = \frac{vl}{2}$ und ziehe CB_1 , welche die Lotrechte durch D im Punkte E schneidet. Zieht man dann $EF \parallel A_1 B_1$ und verbindet F mit B_1 durch eine Gerade, so schneidet diese die Lotrechte durch D in dem Parabelpunkte G. Es ist nämlich:

$$\frac{D_1 G}{A_1 F} = \frac{l - x}{l}$$

also auch wegen $A_1 F = D_1 E$

$$\frac{D_1 G}{D_1 E} = \frac{l - x}{l}$$

ferner ist:

$$\frac{D_1 E}{A_1 C} = \frac{l - x}{l}$$

Daraus folgt durch Multiplikation:

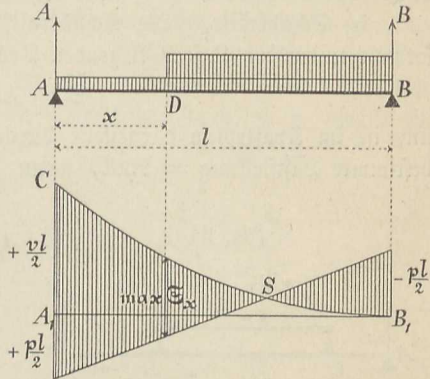
$$\frac{D_1 G}{A_1 C} = \frac{(l - x)^2}{l^2}$$

woraus sich wegen $A_1 C = \frac{vl}{2}$

ergibt:

$$D_1 G = \frac{v(l - x)^2}{2l} = S_{\max}$$

Fig. 83.



Aus Fig. 82 können (nach der Erklärung auf S. 57 unten) auch unmittelbar die negativen Schubkräfte abgegriffen werden, da S_{\min} für den Punkt D dem Zahlenwerte nach gleich ist S_{\max} für den Punkt D' , wenn beide Punkte den gleichen Abstand von A bzw. B haben.

Zu den durch die Verkehrsbelastung erzeugten Schubkräften sind die durch die bleibende Belastung (das Eigengewicht) hervorgerufenen Schubkräfte, deren Ermittlung aus Fig. 66 S. 43 hervorgeht, mit Rücksicht auf das Vorzeichen zu addieren.

Dies ist für eine bewegliche gleichmäßig verteilte Belastung geschehen in Fig. 83, wobei aber die der bleibenden Belastung entsprechenden Werte von S des bequemeren Abgreifens wegen in umgekehrter Richtung, also die positiven Werte nach unten aufgetragen sind. Es ergibt sich aus der Figur, daß die Werte S_{\max} vom Punkte S ab nach rechts negativ sind.

4) Mittelbare Belastung durch eine bewegliche Einzelkraft.

a) Momente. Nach Fig. 70 S. 48 befinden sich die Knickpunkte der Momentenfläche lotrecht unter den Querträgern. Die Ordinate der Momentenfläche unter einem Querträger wird aber bei einer beweglichen Last am größten, wenn diese gerade über dem Querträger steht. Das Moment für den Träger an dieser Stelle ist dann genau so groß, als wenn die Last unmittelbar am Träger selbst angriffe.

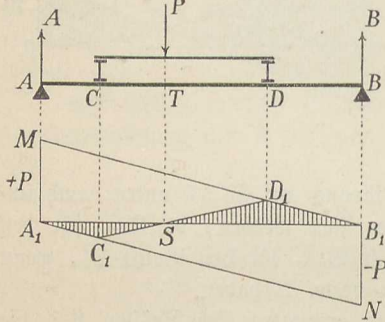
Man bestimme daher die Maximal-Momente für die Lotrecht unter den Querträgern liegenden Trägerquerschnitte, mit Laststellung jedesmal unmittelbar über dem betreffenden Querträger, nach den früheren Regeln. Trägt man sodann die gefundenen Werte lotrecht unter den Querträgern von einer beliebigen Geraden aus als Ordinaten auf, und verbindet die aufeinander folgenden Endpunkte derselben durch gerade Linien, so begrenzen diese die Momentenfläche, aus welcher auch die Momente für beliebige zwischen den Querträgern liegende Trägerquerschnitte abgegriffen werden können.

b) **Schubkräfte.** Die Schubkraft, welche nach Fig. 70 S. 48 in dem Lotrecht unter der Last P liegenden Trägerquerschnitt auftritt, hat die Größe

$$S = A - P_1$$

und ist im Kräfteplan dargestellt durch die Strecke bt . Sie wird für eine bestimmte Laststellung = Null, wenn nämlich die Seilzugseite III parallel der Schlußlinie A_1B_1 gerichtet ist, so daß im Kräfteplane die Punkte b und t zusammenfallen.

Fig. 84.



Die Lage, welche die veränderliche Last P haben muß, um in dem Felde CD die Schubkraft $S = \text{Null}$ zu erzeugen, kann unter Benutzung der Fig. 76 S. 53 in folgender Weise gefunden werden.

Man zeichne (Fig. 84) die Schubkraftfläche A_1MB_1N genau wie in Fig. 76, ziehe die Querträger-Lotrechten CC_1 und DD_1 , ferner die Verbindungsgerade C_1D_1 . Die durch diese Gerade und die A_1B_1 begrenzten

Ordinaten stellen dann die Schubkräfte für das Feld CD dar. Die durch den Schnittpunkt S der C_1D_1 mit der A_1B_1 gelegte Lotrechte ST bezeichnet die gesuchte Lage von P , bei welcher in dem Felde CD die Schubkraft Null entsteht. Eine Last rechts von ST erzeugt eine positive, eine Last links von ST dagegen eine negative Schubkraft.

Die Lotrechte ST , bezw. der Punkt T wird die Belastungsscheide genannt.

Kommt es nur darauf an, die Belastungsscheide zu bestimmen, so können die durch A_1 und B_1 gezogenen Parallelen beliebig gerichtet sein.

5) Mittelbare Belastung durch eine bewegliche Gruppe von Einzelkräften.

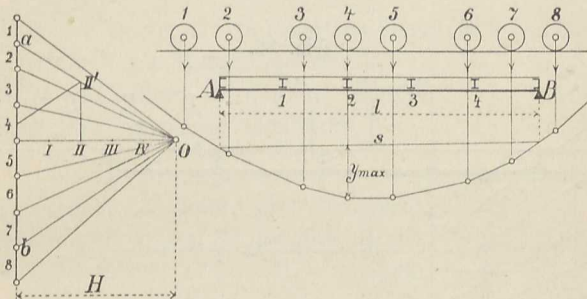
a) **Momente.** Da nach 4 a S. 59 die Momente unter den Querträgern genau so groß sind, als wenn die Lasten unmittelbar am Hauptträger selbst angriffen, so bestimme man die Maximal-Momente für die Querträger-Angriffspunkte, trage dieselben lotrecht unter diesen Punkten von einer wage-

rechten Geraden aus als Ordinaten auf, und verbinde die Endpunkte dieser Ordinaten der Reihe nach durch Gerade. Letztere begrenzen dann die Momentenfläche, deren Ordinaten auch genau genug die Maximal-Momente für die zwischen den Querträgern liegenden Trägerquerschnitte liefern.

Zur Ermittlung der die Maximalmomente hervorrufenden ungünstigsten Laststellungen kann das S. 54 beschriebene Wehrauch'sche, oder besser noch das folgende von R. Land angegebene Verfahren benutzt werden.

Man bilde aus der Lastengruppe, die über beide Trägerenden hinüberreichen kann, einen Kräftezug und zeichne dazu den Kräfteplan mit der Polentfernung H und den Seilzug (Fig. 85). Man teile sodann die Polentfernung H durch die Punkte I, II, III, IV in demselben Verhältnis, wie die Stützweite l des Trägers durch die Querträger 1, 2, 3, 4 geteilt ist.

Fig. 85.



Handelt es sich nun z. B. um das Maximalmoment für Querträger 2, so errichte man in II zu H eine Senkrechte und bestimme den Schnittpunkt II' derselben mit dem Strahl Oa , welcher die auf dem Träger befindliche erste Last begrenzt. Durch II' ziehe man eine Parallele zu dem andern Grenzstrahl Ob , d. h. demjenigen Strahl, welcher die letzte noch auf dem Träger befindliche Last begrenzt. Die Parallele durch II' trifft auf dem Kräftezuge diejenige Last (hier die vierte), welche über Querträger 2 gestellt werden muß, damit für diesen das größtmögliche Moment entsteht. (Der Beweis ist genau so zu führen, wie bei dem Wehrauch'schen Verfahren S. 55.) Durch entsprechende Trägereinstellung erhält man sodann die Schlußlinie s und (lotrecht unter Querträger 2) die Ordinate y_{max} . Es ist dann:

$$M_{max} = H \cdot y_{max}.$$

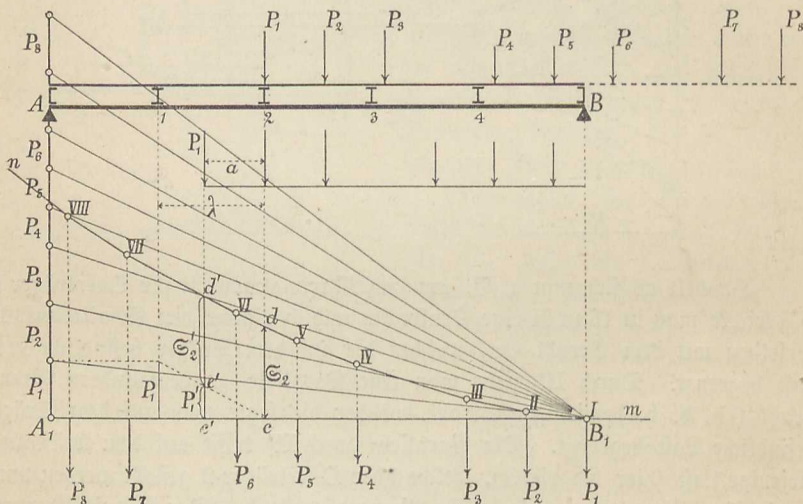
b) **Schubkräfte.** Innerhalb eines durch zwei Querträger begrenzten Feldes wird nach dem Vorhergehenden durch jede Last rechts von der Belastungsscheide eine positive, durch jede Last links davon eine negative Schubkraft erzeugt. In irgend einem Querschnitt des Trägers innerhalb eines Feldes wird daher die größte positive Schubkraft auftreten, wenn die bewegliche Lastgruppe vom rechten Auflager nach links fortschreitend mit ihrer ersten Last bis zur Belastungsscheide gelangt ist. Die größte negative Schubkraft

entsteht, wenn die Lastgruppe vom linken Auflager aus nach rechts fortschreitend mit der ersten Last bis zur Belastungsscheide des betreffenden Feldes gekommen ist.

Sind bei der beweglichen Lastgruppe die Abstände der einzelnen Lasten voneinander unveränderlich, wie dies z. B. bei einem Eisenbahnzuge der Fall ist, so entsteht in einem bestimmten Felde meistens die größte positive Schubkraft, wenn die erste Last der von rechts aus vorrückenden Lastgruppe gerade über demjenigen Querträger steht, welcher unmittelbar rechts neben dem betreffenden Felde liegt. Diese Laststellung bezeichnet man als Normalstellung.

Es kann jedoch vorkommen, daß eine etwas größere Schubkraft entsteht, wenn die Lastgruppe noch weiter um so viel vorrückt, daß die zweite Last über dem das Feld rechts begrenzenden Querträger steht. Um aber doppelte Rechnung zu vermeiden, hat Prof. Reck vorgeschlagen, die Normalstellung immer festzuhalten, dafür aber die erste Last etwas größer anzunehmen, als

Fig. 86.



sie in Wirklichkeit ist, z. B. bei einem Eisenbahnzuge die erste Lokomotiv-Achse mit 15 statt mit 13 Tonnen in Rechnung zu stellen. Die Schubkräfte ergeben sich dabei im allgemeinen etwas zu groß.

Unter Voraussetzung der Normalstellung werden nun zunächst die Schubkräfte für die unter den Querträgern liegenden Querschnitte nach dem S. 57 mitgeteilten Verfahren ermittelt.

Man trage (Fig. 86) auf $A_1 B_1$ die Lasten, soweit sie auf dem Träger Platz finden, in ihrer natürlichen Reihenfolge so auf, daß P_1 unter B_1 liegt, und füge dieselben auf der Vortrechten in A_1 zu einem Kräftezuge aneinander. Man wähle sodann den Punkt B_1 als Pol, ziehe die Polstrahlen und zeichne den Seilzug m III . . . n.

Die durch $A_1 B_1$ und den Seilzug begrenzten, Lotrecht unter den Querträgern liegenden Ordinaten stellen dann die der Normalstellung entsprechenden größten positiven Schubkräfte für die zugehörigen Querträger-Angriffspunkte dar. So z. B. erhält man in Fig. 86 durch die Lotrecht unter dem Querträger 2 liegende Ordinate cd die dem Querschnitt 2 zukommende Schubkraft $\max S_2$.

Schiebt man nun die Lastgruppe auf dem Träger AB nach links weiter vorwärts, so daß die zweite Last über dem Querträger 2 steht, so übt die Last P_1 auf den Querträger 1 den Druck aus:

$$P_1' = \frac{P_1 a}{\lambda}$$

wobei a den Abstand der beiden ersten Lasten, und λ die Feldlänge (Abstand der Querträger voneinander) bedeutet. Aus dem Verhältnis:

$$\frac{P_1'}{P_1} = \frac{a}{\lambda}$$

ergibt sich leicht das in Fig. 87 in doppeltem Maßstabe besonders angedeutete zeichnerische Verfahren zur Ermittlung von P_1' .

Bei dieser Laststellung ist nun die Lotrecht unter der ersten Last auftretende Schubkraft:

$$S_2' = A' - P_1'$$

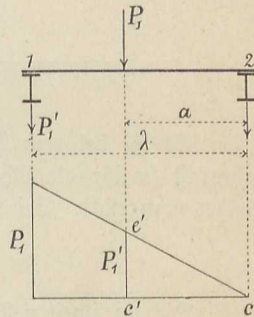
Der Stützenwiderstand A' wird aber dargestellt durch die Ordinate $c'd'$ in Fig. 86, folglich ist von dieser Ordinate die Strecke $c'e' = P_1'$ in Abzug zu bringen, um S_2' zu erhalten.

Ergibt sich durch Messung $S_2' > S_2$, so ist die letzte Laststellung (mit Last P_2 über Querträger 2) die gefährlichste, umgekehrten Falles bleibt die Normalstellung die maßgebende.

In derselben Weise lassen sich die größten positiven Schubkräfte für alle übrigen Felder bestimmen. Bezüglich der negativen Schubkräfte (S_{\min}), welche ebenfalls aus Fig. 86 entnommen werden können, verweisen wir auf die Erklärung S. 57 unten. So ist z. B. S_{\min} für Querschnitt 1 gleich $-S_{\max}$ für Querschnitt 4.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß zu den gefundenen durch die Verkehrsbelastung hervorgerufenen Werten $\pm S_{\max}$ noch die durch das Eigengewicht entstehenden Schubkräfte (vergl. Fig. 72 S. 50) mit Rücksicht auf das Vorzeichen hinzuzufügen sind.

Fig. 87.



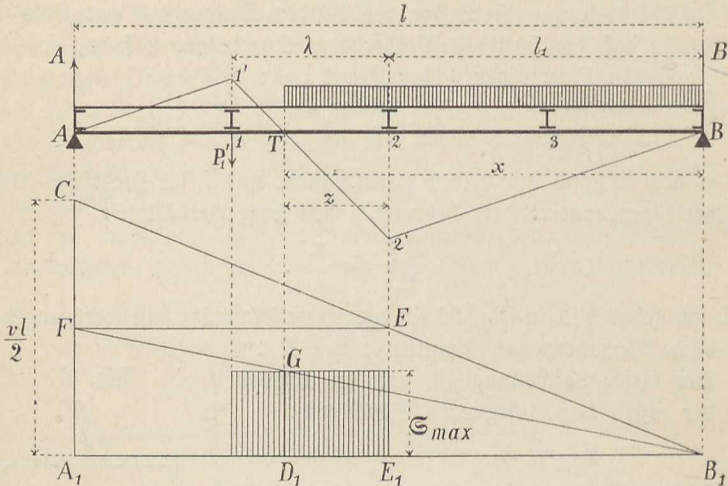
6) Mittelbare gleichmäßig verteilte Belastung.

a) **Momente.** Die größten Momente entstehen bei voller Belastung des Trägers, und sind nach Fig. 72 S. 50 zu bestimmen.

b) **Schubkräfte.** Für irgend ein beliebiges Feld entsteht die größte positive Schubkraft, wenn die bewegliche Belastung, vom rechten Auflager aus

nach links fortschreitend, bis zur Belastungsscheide des betreffenden Feldes gelangt ist. Die Ermittlung der letzteren erfolgt mit Hilfe zweier durch die Auflagerpunkte gelegter Parallelen nach Fig. 84 S. 60.

Fig. 88.



Es sei bei dem Träger AB (Fig. 88) die gleichmäßig verteilte Verkehrslast (v für die Längeneinheit) bis zur Belastungsscheide T des zweiten Feldes vorgerückt. Bei dieser Laststellung ist der linksseitige Stützenwiderstand:

$$A = \frac{vx^2}{2l}$$

Die im zweiten Felde befindliche Belastung übt auf den das Feld links begrenzenden Querträger Nr. 1 nach den Bezeichnungen der Fig. 88 den Druck aus:

$$P_1' = \frac{vz^2}{2\lambda}$$

so daß sich für die zwischen den Querträgern Nr. 1 und 2 auftretende Schubkraft der Wert ergibt:

$$S_{\max} = A - P_1' = \frac{vx^2}{2l} - \frac{vz^2}{2\lambda}$$

Nach Fig. 88 ist nun:

$$\frac{z}{\lambda - z} = \frac{l_1}{l - l_1 - \lambda}$$

woraus folgt:

$$\lambda = \frac{lz}{l_1 + z} = \frac{l(x - l_1)}{x}$$

daher:

$$\frac{z^2}{\lambda} = \frac{(x - l_1)^2 x}{l(x - l_1)} = \frac{(x - l_1)x}{l}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes erhält man für S_{\max} den Ausdruck:

$$S_{\max} = \frac{v}{2l} [x^2 - (x - l_1)x] = \frac{vl_1x}{2l}$$

Man mache (nach Land) in Fig. 88: $A_1C = \frac{vl}{2}$, ziehe CB_1 und bestimme den Schnittpunkt E derselben mit der Lotrechten durch Querträger 2. Ziehe ferner $EF \parallel A_1B_1$ und verbinde F mit B_1 durch eine Gerade, welche die Lotrechte durch T im Punkte G schneidet. Es ist dann:

$$\frac{E_1E}{A_1C} = \frac{l_1}{l} \text{ oder } E_1E = A_1F = \frac{vl}{2} \cdot \frac{l_1}{l} = \frac{vl_1}{2}$$

und:

$$\frac{D_1G}{A_1F} = \frac{x}{l} \text{ oder } D_1G = \frac{vl_1x}{2l} = S_{\max}$$

Auch hier gilt die Schlussbemerkung zu 5b S. 63.

§ 9.

Zahlenbeispiele zu dem belasteten Träger.

A. Bleibende Belastungen.

Beispiel 1. Ein Balken AB (vergl. Fig. 64 S. 38) sei 4,5 m lang und werde belastet durch:

$$P_1 = 1600 \text{ kg}; \quad P_2 = 800 \text{ kg}; \quad P_3 = 940 \text{ kg}$$

Die Entfernung vom Auflager A bis zum Angriffspunkte der Last P_1 sei = 200 cm, die Entfernungen der Lasten voneinander je 100 cm.

Der Balken ist aufzuzeichnen im Maßstabe 1 : 50.

Man wähle den Kräftemaßstab 500 kg = 1 cm und die Polentfernung $H = 2000 \text{ kg} (= 4 \text{ cm})$.

Die Stützenwiderstände sind: A = 1260 kg; B = 2080 kg.

Man findet $y_{\max} = 126 \text{ cm}$ (unter der Last P_1) und es ist daher das größte Biegemoment:

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 2000 \cdot 126 = 252\,000 \text{ kg cm.}$$

Beispiel 2. Die Belastung einer Deckenkonstruktion einschließlich Eigengewicht sei = 700 kg für das qm. Die Entfernung der 5 m langen Balken voneinander sei = 75 cm. Es soll für einen Balken das größte Moment, ferner das Moment und die Schubkraft in der Entfernung $x = 1,5 \text{ m}$ vom Auflager zeichnerisch bestimmt werden (Längenmaßstab 1 : 50, Kräftemaßstab 500 kg = 1 cm, Polentfernung $H = \frac{1}{2}l = 250 \text{ cm}$).

Die ganze Belastung eines Balkens ist:

$$pl = 0,75 \cdot 5 \cdot 700 = 2625 \text{ kg}$$

Davon kommt auf jedes Auflager die Hälfte, also:

$$A = B = 1312,5 \text{ kg}$$

Dies ist zugleich der größte Wert der Schubkraft:

$$S_{\max} = 1312,5 \text{ kg}$$

Die Ordinaten der Momentenfläche sind, da als Polentfernung ein Längenmaß angenommen wurde, mit dem Kräftemaßstabe zu messen.

Man findet:

$$y_{\max} = 656,25 \text{ kg}$$

daher

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 250 \cdot 656,25 = 164\,062,5 \text{ kg cm}$$

In der Entfernung $x = 150 \text{ cm}$ vom Auflager ist:

$$y = 551,25 \text{ kg}$$

folglich

$$M_x = 250 \cdot 551,25 = 137\,812,5 \text{ kg cm}$$

$$S_x = 525 \text{ kg}$$

Aus der Schubkraftfläche findet man ebenfalls:

$$M_x = \frac{S_{\max} + S_x}{2} \cdot x = \frac{1312,5 + 525}{2} \cdot 150 = 137\,812,5 \text{ kg cm}$$

Beispiel 3. Ein Träger AB von 4,6 m Länge sei auf die ganze Länge gleichmäßig belastet mit $p = 6 \text{ kg}$ für das cm; außerdem wirken auf denselben die Einzellasten:

$P_1 = 800 \text{ kg}$ in der Entfernung 130 cm vom Auflager A

$P_2 = 650 \text{ " " " "}$ 280 " " " "

$P_3 = 700 \text{ " " " "}$ 380 " " " "

(Vergl. Fig. 69 S. 47.)

Es soll die Momentenfläche und die Schubkraftfläche aufgezeichnet werden. Längenmaßstab 1 : 50; Kräftemaßstab 500 kg = 1 cm; Polentfernung = 1500 kg.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = 1380 + 950 = 2330 \text{ kg}$$

$$B = 1380 + 1200 = 2580 \text{ kg}$$

Aus der Momentenfläche ergab sich durch Messung:

bei P_1 die Ordinate $y_1 = 168 \text{ cm}$ folglich $M_1 = 1500 \cdot 168 = 252\,000 \text{ kg cm}$

" P_2 " " $y_2 = 198 \text{ " "}$ $M_2 = 1500 \cdot 198 = 297\,000 \text{ " "}$

" P_3 " " $y_3 = 125 \text{ " "}$ $M_3 = 1500 \cdot 125 = 187\,500 \text{ " "}$

Das größte Moment befindet sich zwischen P_1 und P_2 in der Entfernung 255 cm vom Auflager A. An dieser Stelle wurde gemessen:

$$y_{\max} = 199,5 \text{ cm} \text{ folglich } M_{\max} = 1500 \cdot 199,5 = 299\,250 \text{ kg cm}$$

Die genauen Werte der Momente ergeben sich durch Rechnung zu:

$$M_1 = 252\,200; M_2 = 297\,200; M_3 = 187\,200; M_{\max} = 299\,075 \text{ kg cm}$$

Beispiel 4. Ein Träger AB von 10 m Länge (vergl. Fig. 71 S. 48) sei belastet durch:

$$P_1 = 2000 \text{ kg in der Entfernung 4 m vom Auflager A}$$

$$P_2 = 1800 \text{ " " " " 6 m " " "}$$

$$P_3 = 3000 \text{ " " " " 8,5 m " " "}$$

Diese Lasten werden durch Querträger, welche in 2,5 m Entfernung voneinander liegen, auf den Hauptträger übertragen.

Es sind die Momente unter den Querträgern und unter den Lastpunkten durch Zeichnung zu bestimmen.

Längenmaßstab 1 : 100; Kräftemaßstab 1000 kg = 1 cm; Polentfernung = $\frac{1}{2} l = 500$ cm.

Die Stützenwiderstände ergaben sich übereinstimmend durch Zeichnung und Rechnung zu:

$$A = 2370 \text{ kg; } B = 4430 \text{ kg}$$

Die unter den Querträgern gemessenen Ordinaten waren:

$$y_I = 1180 \text{ kg; } y_{II} = 1970 \text{ kg; } y_{III} = 1610 \text{ kg}$$

Die unter den Lastpunkten gemessenen Ordinaten waren:

$$y_1 = 1660 \text{ kg; } y_2 = 1830 \text{ kg; } y_3 = 970 \text{ kg}$$

Daraus erhält man für die Momente die Werte:

$$\text{unter den Querträgern } \begin{cases} M_I = 500 \cdot 1180 = 590\,000 \text{ kg cm} \\ M_{II} = 500 \cdot 1970 = 985\,000 \text{ " } \\ M_{III} = 500 \cdot 1610 = 805\,000 \text{ " } \end{cases}$$

$$\text{unter den Lastpunkten } \begin{cases} M_1 = 500 \cdot 1660 = 830\,000 \text{ kg cm} \\ M_2 = 500 \cdot 1830 = 915\,000 \text{ " } \\ M_3 = 500 \cdot 970 = 485\,000 \text{ " } \end{cases}$$

Die durch die Rechnung bestimmten Werte der Momente sind folgende:

$$M_I = 592\,500 \text{ kg cm} \quad M_1 = 828\,000 \text{ kg cm}$$

$$M_{II} = 985\,000 \text{ " } \quad M_2 = 914\,000 \text{ "}$$

$$M_{III} = 807\,500 \text{ " } \quad M_3 = 484\,500 \text{ "}$$

Beispiel 5. Der in Fig. 89 S. 68 dargestellte Träger sei von A bis C und von D bis B gleichmäßig mit $p = 8$ kg auf das laufende cm belastet. Es soll der gefährliche Querschnitt und das in diesem herrschende Biegemoment durch Zeichnung ermittelt werden.

Ein solcher Belastungsfall liegt z. B. vor, wenn ein Träger eine Mauer zu unterstützen hat, welche durch eine Thüröffnung (CD) unterbrochen ist.

Das Beispiel ist aufzuzeichnen im Maßstabe 1 : 100; Kräftemaßstab 1000 kg = 1 cm; Polentfernung $H = 3000$ kg.

Die Ergebnisse sind:

a) Durch Zeichnung gefunden:

$$A = 2000 \text{ kg; } B = 2400 \text{ kg}$$

Entfernung des gefährlichen Querschnitts vom Auflager A:

$$x = 495 \text{ cm}$$

Ordinate der Momentenfläche unter dem gefährlichen Querschnitt:

$$y_{\max} = 118 \text{ cm}$$

Größtes Moment:

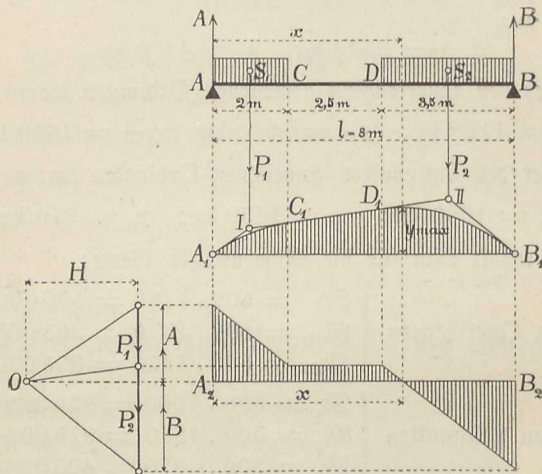
$$M_{\max} = 3000 \cdot 118 = 354\,000 \text{ kg cm}$$

b) Durch Rechnung gefunden:

$$A = 2012,5 \text{ kg}; \quad x = 501,56 \text{ cm}$$

$$B = 2387,5 \text{ „}; \quad M_{\max} = 356\,260 \text{ kg cm}$$

Fig. 89.



Beispiel 6. Der Träger AB (Fig. 90) sei bei C belastet durch die Einzelkraft $P = 2100 \text{ kg}$, ferner von D bis B gleichmäßig belastet mit $p = 12 \text{ kg}$ auf das laufende cm. Die Lage der Punkte C und D ist bestimmt durch die in Fig. 90 eingeschriebenen Maße. Trägerlänge $l = 8 \text{ m}$.

Es soll für diesen Träger die Momentenfläche und die Schubkraftfläche aufgezeichnet und daraus die Lage des gefährlichen Querschnittes und das größte Moment bestimmt werden. Beim Aufzeichnen ist anzunehmen der Längenmaßstab $1 : 100$, der Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = 1500 \text{ kg}$, die Polentfernung $H = 4500 \text{ kg}$ ($= 3 \text{ cm}$). Für die Einzelkraft und die gleichmäßig verteilte Belastung ist ein gemeinsamer Kräfteplan anzufertigen.

a) Durch Zeichnung gefundene Werte:

$$A = 3225 \text{ kg} \quad B = 4275 \text{ kg}$$

Entfernung des gefährlichen Querschnitts vom Auflager A:

$$x = 444 \text{ cm}$$

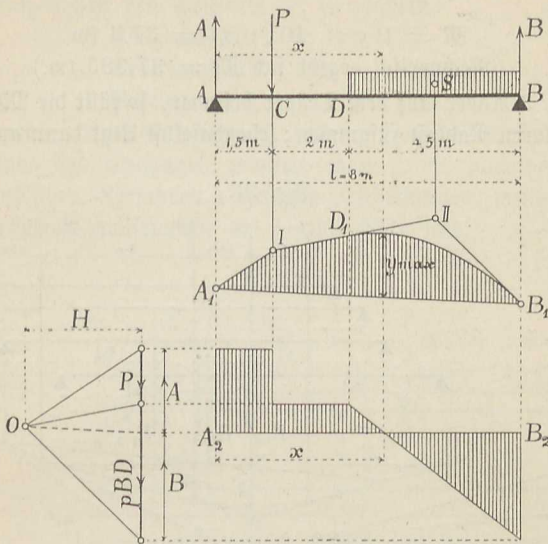
Ordinate der Momentenfläche unter dem gefährlichen Querschnitt:

$$y_{\max} = 168 \text{ cm}$$

Größtes Moment:

$$M_{\max} = 4500 \cdot 168 = 756\,000 \text{ kg cm}$$

Fig. 90.



b) Durch Rechnung gefundene Werte:

$$A = 3225 \text{ kg} \quad B = 4275 \text{ kg}$$

$$x = 443,75 \text{ cm}$$

$$M_{\max} = 761\,485 \text{ kg cm}$$

B. Veränderliche Belastungen.

Beispiel 1. Ein Träger von 10 m Länge soll der Einwirkung von Lokomotivlasten ausgesetzt sein. Jede Radbelastung betrage $6,5 \text{ Tonnen}$; für die Radabstände sind die in Fig. 91 eingeschriebenen Maße zu Grunde zu legen. Es soll für den Träger das größte Moment bestimmt werden.

Längenmaßstab $1 : 50$, Kräftemaßstab $1 \text{ Tonne} = 4 \text{ mm}$, Polentfernung $H = 40 \text{ Tonnen}$.

Es können entweder 5 oder 4 oder 3 Räder auf dem Träger stehen. Bei 5 Radlasten ergibt sich mit Hilfe des Kräfteplanes und Seilzuges, daß die Mittelkraft R_{1-5} um 1 m rechts von der Last Nr. 3 liegt. Die Mitte zwischen R_{1-5} und der dritten Last müßte daher nach S. 54 die Trägermitte sein. Dann aber steht das Rad Nr. 5 gerade über dem Auflager und liefert keinen Beitrag zu dem Momente, so daß zur Ermittlung des größten Momentes

höchstens 4 Radlasten in Frage kommen können. Die Mittelkraft R_{1-4} derselben liegt um 0,125 m links von der Last Nr. 3. Nimmt man nun, der Forderung S. 54 gemäß, die Trägermitte im Halbierungspunkt der Entfernung von R_{1-4} und P_3 an, und zieht bei dieser Trägerstellung die Schlußlinie s , so findet man als Ordinate unter P_3 :

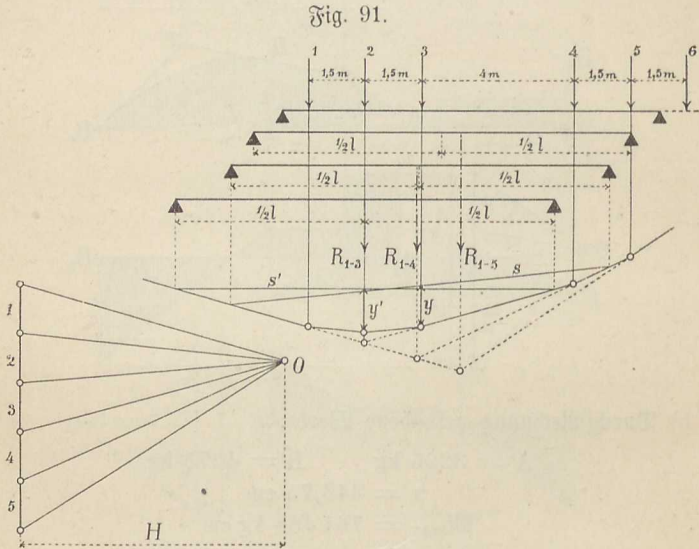
$$y = 0,94 \text{ m}$$

folglich wird:

$$M = Hy = 40 \cdot 0,94 = 37,6 \text{ tm}$$

(Rechnerisch ergibt sich $M = 37,385 \text{ tm}$.)

Wenn sich nur 3 Räder auf dem Träger befinden, so fällt die Mittelkraft R_{1-3} mit der mittleren Radlast zusammen; ebendasselbst liegt dann auch die Träger-



mitte. Wir ziehen die dieser Trägerstellung entsprechende Schlußlinie s' . Die unter der Last Nr. 2 gemessene Ordinate ist dann:

$$y' = 0,98 \text{ m}$$

daher:

$$M' = Hy' = 40 \cdot 0,98 = 39,2 \text{ tm}$$

(Durch Rechnung ergibt sich $M' = 39 \text{ tm}$.)

Demnach ist das durch 3 Radlasten erzeugte M' von allen das größte Moment.

Beispiel 2. Für den Träger AB einer Eisenbahnbrücke (Fig. 92 S. 71) von $l = 19,2 \text{ m}$ Spannweite sollen die größten Momente und Schubkräfte bestimmt werden.

Als Verkehrsbelastung sind für die Momente zwei Kopf an Kopf stehende Lokomotiven und ein Tender, für die Schubkräfte zwei vorwärts gehende Lokomotiven, die erste mit nachfolgendem Tender, anzunehmen. (Der Tender der zweiten Lokomotive findet auf dem Träger keinen Platz mehr.)

Die bleibende Belastung (das Eigengewicht) betrage $p = 1,4$ tons für das laufende Meter. Die Achsenbelastungen sind angenommen zu je 13 tons für die Lokomotiven, und je zu 8 tons für den Tender; die Radabstände sind aus Fig. 92 zu entnehmen.

Die Belastungen werden durch Querträger, die in 3,2 m Entfernung voneinander liegen, auf den Hauptträger übertragen.

Zum Aufzeichnen des Beispiels ist zu wählen:

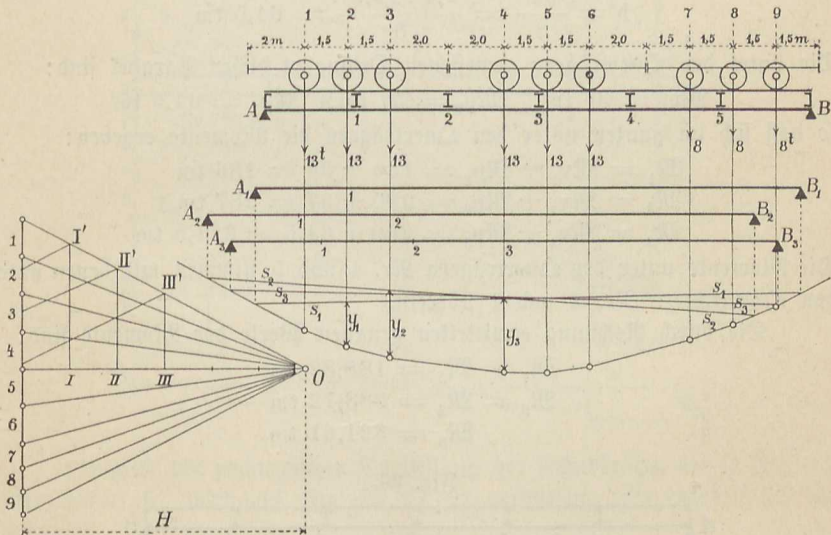
Längenmaßstab 1 : 100

Kräftemaßstab 1 ton = 1 mm

Polentfernung $H = 100$ tons.

a) **Momente.** Nach Aufzeichnung des der Verkehrsbelastung entsprechenden Kräfteplanes und Seilzuges ermittle man zuerst nach dem S. 60 angegebenen Land'schen Verfahren diejenigen Laststellungen, welche für die einzelnen Querträger-Angriffspunkte die gefährlichsten sind.

Fig. 92.



Zu dem Zweck teile man die Polentfernung H in sechs gleiche Teile (entsprechend den 6 unter sich gleichen Feldern des Hauptträgers), und ziehe durch die Teilpunkte I, II, III Parallelen zu der Kraftlinie, welche den oberen Grenzstrahl (Last 1 bleibt nämlich immer auf dem Träger) in den Punkten I', II', III' schneiden. Durch Ziehung der Parallelen durch die Punkte I', II', III' zu dem andern Grenzstrahl (für Querschnitt 2 gilt der vorletzte Strahl, weil das Rad Nr. 9 dann nicht mehr auf dem Träger steht) findet man, daß das größte Moment entsteht:

für Querschnitt 1, wenn das Rad Nr. 2 über 1 steht

"	"	2,	"	"	"	3	"	2	"
"	"	3,	"	"	"	4	"	3	"

Man verschiebt nun den Träger AB unter dem Lastenzuge so, wie es den gefundenen ungünstigsten Laststellungen für die einzelnen Querträger-Angriffspunkte entspricht, bringt die jedesmaligen Auflager-Lotrechten zum Schnitt mit dem Seilzuge, und zieht die Schlußlinien s_1, s_2, s_3 . Es werden dadurch die Lotrecht unter den Querträgern 1, 2, 3 liegenden der Verkehrsbelastung entsprechenden Ordinaten y_1, y_2, y_3 bestimmt, für welche die Maße gefunden wurden:

$$y_1 = 1,5 \text{ m}; \quad y_2 = 2,3 \text{ m}; \quad y_3 = 2,6 \text{ m}$$

Diese liefern, mit der Polentfernung H multipliziert, die Momente:

$$M_{v_1} = H \cdot y_1 = 100 \cdot 1,5 = 150 \text{ tm}$$

$$M_{v_2} = H \cdot y_2 = 100 \cdot 2,3 = 230 \text{ tm}$$

$$M_{v_3} = H \cdot y_3 = 100 \cdot 2,6 = 260 \text{ tm}$$

Die von der bleibenden Belastung herrührenden Momente, welche den obigen hinzufügen sind, werden erhalten durch Konstruktion einer Parabel mit der Pfeilhöhe:

$$h = \frac{p l^2}{8} = \frac{1,4 \cdot 19,2^2}{8} = 64,5 \text{ tm}$$

Die unter den Querträgern gemessenen Ordinaten dieser Parabel sind:

$$M_{p_1} = 36 \text{ tm}; \quad M_{p_2} = 57 \text{ tm}; \quad M_{p_3} = 64,5 \text{ tm}$$

so daß sich im ganzen unter den Querträgern die Momente ergeben:

$$M_1 = M_{v_1} + M_{p_1} = 150 + 36 = 186 \text{ tm}$$

$$M_2 = M_{v_2} + M_{p_2} = 230 + 57 = 287 \text{ tm}$$

$$M_3 = M_{v_3} + M_{p_3} = 260 + 64,5 = 324,5 \text{ tm}$$

Die Momente unter den Querträgern Nr. 4 und 5 stimmen mit denen unter den Querträgern Nr. 2 und 1 überein.

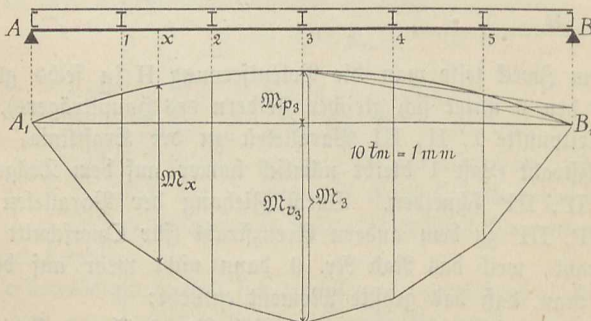
Die durch Rechnung ermittelten genauen Werte der Momente sind:

$$M_1 = M_5 = 188,82 \text{ tm}$$

$$M_2 = M_4 = 288,12 \text{ tm}$$

$$M_3 = 321,61 \text{ tm}$$

Fig. 93.

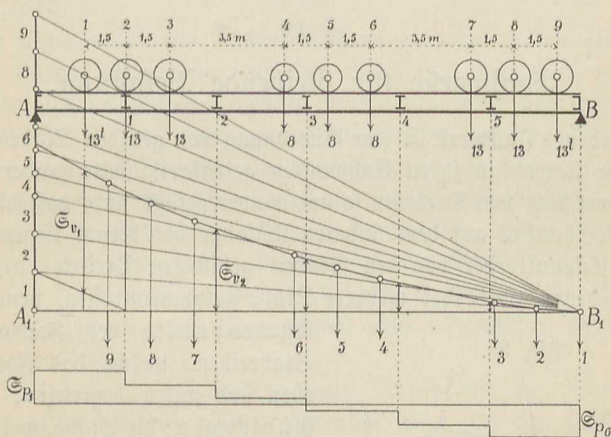


Die Momente sind in Fig. 93 als Ordinaten im Maßstabe $10 \text{ tm} = 1 \text{ mm}$ graphisch aufgetragen, und zwar die der bleibenden Belastung entsprechenden

oberhalb, die der Verkehrsbelastung entsprechenden unterhalb der Wage-rechten A, B_1 . Aus dieser Figur können auch für beliebige zwischen den Quer-trägern liegende Querschnitte die Momente genügend genau abgegriffen werden. Streng genommen sind die für Zwischenpunkte in Wirklichkeit entstehenden Momente etwas kleiner, da z. B. für einen Punkt x innerhalb eines Feldes nicht gleichzeitig die ungünstigsten Laststellungen für die angrenzenden Querträger-Angriffspunkte eintreten.

b) **Schubkräfte.** Für das erste Feld ergibt sich die der Verkehrs-belastung entsprechende größte Schubkraft, wenn die vordere der von B nach A vorrückenden Lokomotiven mit der zweiten Achse über dem Querträger Nr. 1 steht (Fig. 94). Um für das zweite und die folgenden Felder die größte Schubkraft zu erhalten, muß die vordere Lokomotive mit ihrer ersten Achse über den Querträger Nr. 2 bzw. 3 u. s. w. gestellt werden.

Fig. 94.



Bezüglich der zeichnerischen Darstellung der Schubkräfte, die in Fig. 94 durchgeführt ist, wird auf Fig. 86 S. 62 verwiesen. Es ergeben sich die Ordinaten:

$$\begin{array}{ll} E_{v_1} = 44 \text{ tons} & E_{v_4} = 10,0 \text{ tons} \\ E_{v_2} = 29 \text{ " } & E_{v_5} = 3,5 \text{ " } \\ E_{v_3} = 18,5 \text{ " } & E_{v_6} = 0 \text{ " } \end{array}$$

Die durch die bleibende Belastung hervorgerufenen Schubkräfte werden nach Fig. 72 S. 50 ermittelt, und liefern die Werte:

$$\begin{array}{ll} E_{p_1} = 11,2 \text{ tons} & E_{p_4} = - 2,2 \text{ tons} \\ E_{p_2} = 6,7 \text{ " } & E_{p_5} = - 6,7 \text{ " } \\ E_{p_3} = 2,2 \text{ " } & E_{p_6} = - 11,2 \text{ " } \end{array}$$

Die durch gleichzeitige Wirkung der Verkehrslast und des Eigengewichtes entstehenden Maximalschubkräfte sind danach:

für das erste Feld:	$\max S_1 = 44 + 11,2 = + 55,2$	tons
" " zweite "	$\max S_2 = 29 + 6,7 = + 35,7$	"
" " dritte "	$\max S_3 = 18,5 + 2,2 = + 20,7$	"
" " vierte "	$\max S_4 = 10,0 - 2,2 = + 7,8$	"
" " fünfte "	$\max S_5 = 3,5 - 6,7 = - 3,2$	"
" " sechste "	$\max S_6 = 0 - 11,2 = - 11,2$	"

Hieraus folgen ohne weiteres die Minimal Schubkräfte

für das erste Feld:	$\min S_1 = - \max S_6 = + 11,2$	tons
" " zweite "	$\min S_2 = - \max S_5 = + 3,2$	"

Sind die Achsbelastungen durch zwei, drei u. s. w. Hauptträger aufzunehmen, so betragen sowohl die Momente als auch die Schubkräfte für jeden Träger natürlich nur die Hälfte, den dritten Teil u. s. w. der oben berechneten Werte.

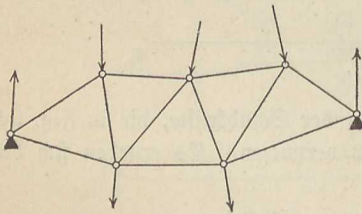
§ 10.

Fachwerke für bleibende Belastung.

Ein ebenes Fachwerk ist eine Anordnung von geraden Stäben, welche in einer Ebene liegend in ihren Endpunkten gelenkartig miteinander verbunden und zu einem Netz von Dreiecken so aneinander gefügt sind, daß die Eckpunkte der Dreiecke sämtlich auf dem äußeren Umfange des Netzes liegen (Fig. 95).

Die Eckpunkte der von den Stäben gebildeten Dreiecke, also alle die Punkte, in denen zwei oder mehrere Stäbe zusammentreffen, nennt man die Knotenpunkte des Fachwerkes; die Stabreihen, welche das Fachwerk nach oben und unten begrenzen, heißen die Gurtungen; die Stäbe, welche zwischen den Gurtungen liegen und dieselben miteinander verbinden, die Wandglieder. Letztere unterscheidet man in Vertikalen, wenn sie lotrecht und in Diagonalen, wenn sie schräg gerichtet sind.

Fig. 95.



Für die Folge soll die obere Gurtung mit O, die untere Gurtung mit U, die Vertikalen mit V, die Diagonalen mit D bezeichnet werden.

Es soll bei den nachstehenden Untersuchungen stets vorausgesetzt werden, daß alle äußeren, auf das Fachwerk wirkenden Kräfte in einer Ebene mit dem Fachwerke selbst liegen, und daß nur die Knotenpunkte die Angriffspunkte der Kräfte bilden, was sich stets durch Anbringung von Hilfs- oder Zwischenträgern erreichen läßt. Ferner sollen die Knotenpunkte als reibungslose Gelenkverbindungen vorausgesetzt werden.

Denkt man sich ein Fachwerk durch einen Schnitt in zwei Teile zerlegt, welcher bei einem richtig entworfenen und statisch bestimmten Fachwerke nicht

mehr als drei Stäbe trifft, so hat man, um den früheren Gleichgewichtszustand wieder herzustellen, bei jedem der beiden Teile an den durchschnittlichen Stäben äußere Kräfte anzubringen, welche die Wirkung des abgeschnittenen Teiles genau wieder ersetzen. Diese Kräfte nennt man Spannkräfte, oder auch innere Kräfte im Gegensatz zu den äußeren Kräften, nämlich den gegebenen Lasten und den Stützenwiderständen. Die Spannkraft eines Stabes muß immer mit der Richtung desselben zusammenfallen, da sie sonst den Stab um seinen Endpunkt drehen würde.

Hierin liegt ein großer Vorteil der Fachwerke, denn da jeder Stab desselben nur durch Kräfte in Anspruch genommen wird, welche in seiner Achsenrichtung wirken, also nur durch Zug- oder Druckkräfte, so verteilt sich die Spannung gleichmäßig über den ganzen Querschnitt des Stabes, und das Material kann voll ausgenutzt werden, während bei einem Stabe, welcher auf Biegung in Anspruch genommen wird, die Spannungen sich im Innern des Stabes ungleichmäßig verteilen, das Material also nur unvollkommen ausgenutzt wird.

Das Eigengewicht des Fachwerks kann genügend genau als eine über die ganze Länge gleichmäßig verteilte Belastung angesehen werden; die zwischen zwei Knotenpunkten liegenden Konstruktionsteile übertragen ihr Gewicht zur Hälfte auf den einen, zur Hälfte auf den anderen Knoten, so daß die Knotenpunkte ausschließlich die Angriffspunkte des Eigengewichts bilden. Streng genommen verteilt sich das Eigengewicht auf sämtliche Knoten des Fachwerkes, es ist aber für die Praxis hinreichend, wenn man annimmt, daß nur diejenigen Knoten das Eigengewicht der Konstruktion aufzunehmen haben, welche die Angriffspunkte der äußeren Lasten bilden. Häufig kann bei kleineren Fachwerken das Eigengewicht ohne wesentlichen Fehler gänzlich unberücksichtigt bleiben.

Die Belastung der Fachwerke kann, ebenso wie bei jedem einfachen Träger, entweder bleibend oder veränderlich sein. Zu den Fachwerken mit veränderlicher Belastung gehören z. B. alle fachwerkartigen Brückenträger, während die im Hochbau verwandten Fachwerke, zu denen auch die größere Anzahl der Dächer zu zählen ist, Träger mit bleibender Belastung bilden.

Es sollen hier zunächst die Fachwerke mit bleibender Belastung besprochen werden, während die für veränderliche Belastung zu berechnenden Fachwerksträger an einer späteren Stelle (§§ 12 und 13) ihre besondere Erledigung finden.

Bei einem an den Endpunkten unterstützten Fachwerke werden die durch gegebene Lasten erzeugten Stützenwiderstände genau in derselben Weise bestimmt, wie bei einem einfachen Träger auf zwei Stützen, und dürfen demnach als bekannt vorausgesetzt werden. Die Spannkräfte der einzelnen Stäbe des Fachwerkes können nach verschiedenen Verfahrensarten ermittelt werden; eine der gebräuchlichsten besteht in der Anfertigung eines Kräfteplanes, welcher nach dem Grundsatz aufgezeichnet wird, daß, wenn die auf das ganze Fachwerk wirkenden äußeren Kräfte im Gleichgewichte sind, sich dann auch

die auf jeden einzelnen Knoten desselben wirkenden äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewichte befinden müssen, daß ihnen also ein geschlossener Kräfteplan entspricht. (Verfahren nach Cremona.)

Bei Herstellung des Kräfteplanes beginnt man mit einem Knoten, auf welchen eine der Größe und Richtung nach bekannte äußere Kraft wirkt und in dem nur zwei Stäbe zusammentreffen. Die Spannkraft dieser beiden Stäbe läßt sich zeichnerisch dann leicht ermitteln. Beim Uebergange zu einem der benachbarten Knoten ist die Spannkraft desjenigen Stabes, welcher beide Knoten miteinander verbindet, bereits bekannt und es treten daher bei jedem folgenden Knoten immer nur zwei neue Spannkraft auf, die zu bestimmen sind. Man ordnet dabei den Kräfteplan so an, daß jede Spannkraft nur einmal in demselben vorkommt.

Um zu entscheiden, ob ein Stab gezogen oder gedrückt wird, denke man sich den betreffenden Knoten herausgeschnitten und bringe an den in ihm zusammenlaufenden Stäben die Pfeile so an, wie sie mit dem Umlaufsinne des zugehörigen Kräfteplanes übereinstimmen. Weist bei einem Stabe der Pfeil mit seiner Spitze auf den Knoten, so wird der Stab gedrückt, im umgekehrten Falle gezogen.

In den Kräfteplänen pflegen die äußeren Kräfte durch einfache starke Linien, die Spannkraft der gezogenen Glieder durch einfache dünne Linien, die der gedrückten Glieder durch dünne Doppellinien bezeichnet zu werden.

Bei den folgenden näher zu besprechenden einzelnen Arten der Fachwerkträger soll angenommen werden, daß dieselben in Bezug auf die Mitte symmetrisch angeordnet sind, ferner, daß alle Feldweiten, ebenso alle Knotenpunktbelastungen einander gleich sind. Da in diesem Falle alle Stäbe, welche symmetrisch zur Trägermitte liegen, die gleiche Spannkraft erhalten, so ist es nur nötig, die Spannkraft für die eine Trägerhälfte zu bestimmen, der Kräfteplan braucht folglich auch nur zur Hälfte gezeichnet zu werden.

1) Fachwerke mit wagerechtem Obergurt.

(Lasten am Obergurt.)

Den einfachsten Fall bildet der verspannte oder armierte Balken. Der Balken AB (Fig. 96) ist in der Mitte C gestützt durch eine lotrechte Strebe, deren unterer Endpunkt E mit den Balkenenden A und B durch Zugstangen verbunden ist. Jedes der beiden Felder sei mit P belastet, der ganze Träger also mit 2 P; davon kommt auf den Knoten C die Last P, auf die Knoten A und B je die Last $\frac{1}{2} P$. Jeder Stützenwiderstand ist $= P$, so daß in den Punkten A und B je die nach oben gerichtete Kraft $\frac{1}{2} P$ angreift.

Zur Bestimmung der Spannkraft, für welche dieselbe Bezeichnung (OUV) gewählt werden soll wie für die Konstruktionsteile selbst, beginnt man mit einem Auflager, z. B. A. Denkt man sich den Knoten A durch

einen Schnitt von der übrigen Konstruktion abgetrennt, so wirken an diesem die Kräfte AOU , die miteinander im Gleichgewicht sein, also ein geschlossenes Kräfte-dreieck bilden müssen. Man trage daher in einem passenden Maßstabe $A = ab$ auf, ziehe durch a eine Parallele zu AC , durch b eine Parallele zu AE . Ist c der Schnittpunkt dieser Parallelen, so stellt ac die Spannkraft O , bc die Spannkraft U dar. Da A lotrecht aufwärts gerichtet ist, so ist ba c der Umfahungssinn des Kräfte-dreiecks. Die Spannkraft O wirkt von a nach c , hat also die Richtung nach dem Knoten A hin, erzeugt daher Druckspannung; die Spannkraft U wirkt von c nach b , also von A weg, erzeugt daher Zugspannung.

Man kann nun weiter entweder zu dem Knoten C oder zu dem Knoten E übergehen.

In E halten sich die beiden gleichen Kräfte U und U' und die Kraft V im Gleichgewichte. Da $U = bc$ bereits im Kräfteplane festliegt, so ziehe man durch c eine Parallele zu CE , durch b eine Parallele zu BE ; man erhält dadurch das Kräfte-dreieck bed und es ist $cd = V$. Der Umfahungssinn des Kräfte-dreiecks ist $bedb$, die Kraft V wirkt in der Richtung von c nach d , wird also, da ihr Pfeil auf E zu gerichtet ist, in der Strebe CE Druckspannung erzeugen.

Bei gleichmäßig verteilter Belastung erfahren die Teile AC und CB des Obergurtes außer der durch die Knotenpunktlast P erzeugten Druckspannung auch noch eine Biegungsspannung¹⁾.

In derselben Weise wie der einfach gespannte ist der in Fig. 97 abgebildete doppelt gespannte Träger zu behandeln.

Fig. 96.

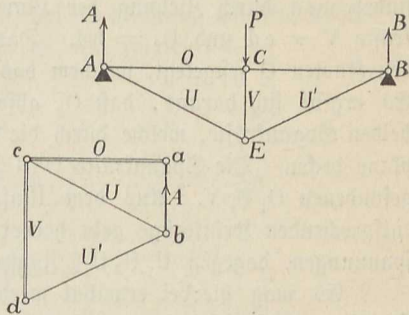
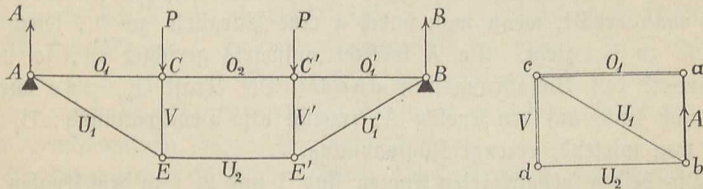


Fig. 97.



Der Balken AB ist außer an den Endpunkten noch an den Punkten C und C' gestützt durch die lotrechten Streben CE und $C'E'$, deren untere Endpunkte E und E' einerseits untereinander, andererseits mit den Balkenenden A und B durch Zugstangen verbunden sind. Bei symmetrischer An-

¹⁾ Vergl. Lauenstein, Festigkeitslehre, IV. Aufl. § 15.

ordnung des Trägers in Bezug auf die Mitte und bei gleichen Knotenpunktslasten P sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = P$$

Zur Bestimmung der Spannkkräfte trage man $ab = A$ auf und ziehe durch die Endpunkte a und b Parallelen zu AC und AE . Ist c der Schnittpunkt dieser Parallelen, so wird $ac = O_1$ und $bc = U_1$. Zu dem Knoten E , an welchem sich die Kräfte $U_1 V U_2$ im Gleichgewicht halten, übergehend, findet man durch Ziehung der Linien $cd \parallel CE$ und $bd \parallel EE'$ die Spannkkräfte $V = cd$ und $U_2 = bd$. Damit ist zugleich auch der Kräfteplan für den Knoten C festgelegt, welchem das Rechteck $cabd$ als Kräftezug entspricht. Es ergibt sich daraus, daß O_2 absolut genommen $= U_2$ ist, da sich diese beiden Spannkkräfte, welche durch die Linie bd dargestellt werden, im Kräfteplane decken. Die Spannkkräfte $O_1 U_1 V'$ haben gleiche Größe mit den bereits gefundenen $O_1 U_1 V$. Aus dem Umfahrunngsinn der den einzelnen Knoten entsprechenden Kräftezüge geht hervor, daß $O_1 O_2 O_1'$ sowie V und V' Druckspannungen, dagegen $U_1 U_2 U_1'$ Zugspannungen sind.

Es mag hierbei erwähnt werden, daß die gegebene Berechnung der Stabspannkkräfte bei dem einfach und doppelt verspannten Träger (Fig. 96 und 97) nur eine angenäherte ist, da die geraden Obergurte als steife Balken durchgehen, also keine Gelenke haben.

Der in Fig. 98 S. 79 dargestellte Träger ist in 6 gleiche Felder geteilt; jeder Knoten des wagerechten Obergurtes sei belastet mit P , es sind dann die Stützenwiderstände:

$$A = B = 2\frac{1}{2}P$$

Man trage $A = ad$ in einem passenden Maßstabe auf und zeichne den Kräfteplan in der Weise, daß man die Parallelen zu den unbelasteten Teilen (hier den Stäben des Untergurtes) von dem unteren Endpunkte d des Kräftezuges aus zieht.

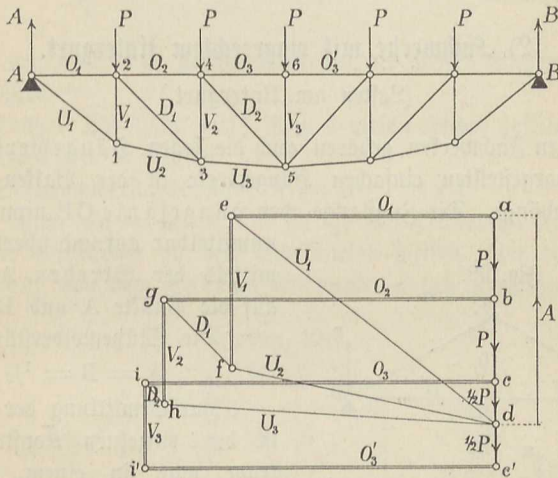
Man beginnt wieder mit dem Auflager A . Es halten sich hier die Kräfte $AO_1 U_1$ im Gleichgewichte und bilden im Kräfteplane das Dreieck dae , welches man erhält, wenn man durch a eine Parallele zu O_1 , durch d eine Parallele zu U_1 zieht. Da A lotrecht aufwärts gerichtet ist, so hat das Kräftedreieck den Umfahrunngsinn $daed$. Die Kraft $O_1 = ae$ wirkt von rechts nach links auf den Knoten A , erzeugt also Druckspannung; $U_1 = ed$, von A weg wirkend, erzeugt Zugspannung.

Die beiden benachbarten Knoten sind 1 und 2. Zu dem Knoten 2 kann man noch nicht übergehen, da an diesem außer der Last P und der nun bekannten Spannkraft O_1 doch drei unbekannte Spannkkräfte, nämlich $V_1 D_1 O_2$ wirken. Dagegen hat man bei dem Knoten 1 nur zwei unbekannte Spannkkräfte zu bestimmen, nämlich V_1 und U_2 , welche mit der bekannten Spannkraft U_1 im Gleichgewichte sind. Man zeichne also zunächst den Kräftezug für den Knoten 1, indem man $ef \parallel V_1$ und $df \parallel U_2$ zieht, wodurch das Kräftedreieck def entsteht. $U_1 = de$ erzeugt, wie von dem Knoten A her bekannt

ist, Zugspannung, wirkt also von dem Knoten 1 weg, der Umfahrunngsinn für das dem Knoten 1 entsprechende Kräftedreieck ist daher $d e f d$. Daraus folgt, daß V_1 Druckspannung, U_2 Zugspannung erzeugt.

Nunmehr kann man zu dem Knoten 2 übergehen, da von den sämtlichen auf diesen Knoten wirkenden Kräften alle bis auf O_2 und D_1 bekannt sind. Diese schließen sich im Kräfteplane an $V_1 O_1 P$ an, man wird deshalb $f g \parallel D_1$ und $b g \parallel O_2$ ziehen und erhält dadurch den Kräftezug $a b g f e a$ mit demselben Umfahrunngsinn (weil $P = a b$ lotrecht abwärts gerichtet ist), in welchem $b g = O_2$ und $g f = D_1$ ist. O_2 hat die Richtung auf dem Knoten 2, ist also Druckkraft, D_1 wirkt von 2 weg, ist also Zugkraft.

Fig. 98.



Zu dem Knoten 3 übergehend, an welchem sich die Kräfte $U_2 D_1 V_2$ und U_3 im Gleichgewichte halten, ziehe man, da U_2 und D_1 bereits bekannt und im Kräfteplane durch $d f$ und $f g$ dargestellt sind, durch g eine Parallele zu V_2 , durch d eine Parallele zu U_3 . Aus dem dadurch entstehenden Kräftezuge $d f g h d$ ergibt sich $V_2 = g h$ als Druckkraft, $U_3 = h d$ als Zugkraft.

An dem Knoten 4 sind die Spannkkräfte O_3 und D_2 noch unbekannt, während $V_2 O_2 P$ durch den Kräftezug $h g b c e$ bestimmt sind. Man ziehe daher $c i \parallel O_3$ und $h i \parallel D_2$, wodurch der Kräftezug $c i h g b c e$ entsteht. $O_3 = c i$ erzeugt Druckspannung, $D_2 = i h$ Zugspannung.

Die Spannkkräfte sämtlicher Stäbe des Fachwerkes sind damit bestimmt bis auf V_3 . Man hat die Wahl, entweder den Knoten 5 oder 6 zur Bestimmung von V_3 zu benutzen. Am schnellsten kommt man hier mit Knoten 6 zum Ziele, denn da $O_3 = O'_3$ ist und diese beiden Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen in derselben Geraden wirken, so muß auch $V_3 = P$ sein und die Richtung lotrecht aufwärts nach dem Knoten 6 zu haben, also Druckspannung erzeugen. Im Kräfteplane bilden die im Knoten 6 angreifenden Kräfte $P O'_3 V_3 O_3$ die Figur $c c' i' i e$.

Man erkennt aus dem Kräfteplane, daß die Stäbe der oberen Gurtung und die Vertikalen sämtlich gedrückt, die Stäbe der unteren Gurtung und die Diagonalen gezogen werden

Erwähnenswert ist noch, daß in dem Kräfteplane die Spannkkräfte der Vertikalen und Diagonalen einen zusammenhängenden geknickten Linienzug $efghii'$ bilden, ferner daß die Spannkkräfte der im Fachwerke ein Dreieck bildenden Stäbe im Kräfteplane durch denselben Punkt gehen.

So gehen

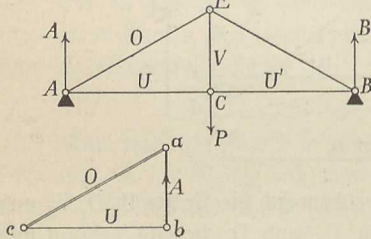
$$\begin{array}{l} O_1 U_1 V_1 \text{ durch den Punkt } e \\ V_1 U_2 D_1 \text{ " " " } f \\ O_2 D_1 V_2 \text{ " " " } g \text{ u. s. w.} \end{array}$$

2) Fachwerke mit wagerechtem Untergurt.

(Lasten am Untergurt.)

Zu diesen Fachwerken gehören auch die sogen. Hängewerke. Bei dem in Fig. 99 dargestellten einfachen Hängewerke ist der Balken AB in der Mitte C aufgehängt. Die Zugstange oder Hängesäule CE nimmt die Last P unmittelbar auf und überträgt dieselbe mittels der Streben AE und BE auf die Punkte A und B .

Fig. 99.



Die Stützenwiderstände sind:

$$A = B = \frac{1}{2} P$$

Zur Ermittlung der Spannkkräfte in den einzelnen Konstruktionsteilen trage man in einem abgerundeten Maßstabe $ab = A$ auf, ziehe $ac \parallel AE$ und $bc \parallel AC$. Es ist dann bac das Kräftedreieck für die am Knoten A

angreifenden Kräfte AOU und $ac = O$, $cb = U$. Da A lotrecht aufwärts gerichtet ist, so ist der Umlaufungssinn des Kräftedreiecks $bacb$, folglich hat O die Richtung nach dem Knoten A , ist also Druckkraft; U ergibt sich als Zugkraft.

Am Knoten C heben sich die beiden gleichen in derselben Geraden AB , aber nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte U und U' gegenseitig auf, daher hat die Hängesäule CE den Zug P vollständig aufzunehmen.

Der Balken des in Fig. 100 dargestellten doppelten Hängewerkes ist in den Belastungspunkten C und C' aufgehängt.

Die Anfertigung des Kräfteplanes geschieht in derselben Weise wie bei dem doppelt verspannten Träger (Fig. 97). Es ergeben sich daraus die Spannkkräfte:

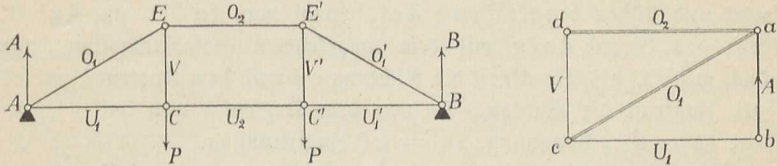
$$\begin{array}{l} O_1 = ac; \quad U_1 = cb; \quad V = cd \\ O_2 = U_2 = ad \end{array}$$

Da $ad = cb$ ist, so haben U_1, U_2, O_2 gleiche absolute Größe.

Der Obergurt AEE'B wird gedrückt, der Untergurt ACC'B sowie die Hängesäulen CE und C'E' gezogen.

Auch hier bei den Hängewerken gilt wieder die Bemerkung, daß die angegebene Berechnung der Spannkraften nur eine angenäherte ist, wenn, wie

Fig. 100.



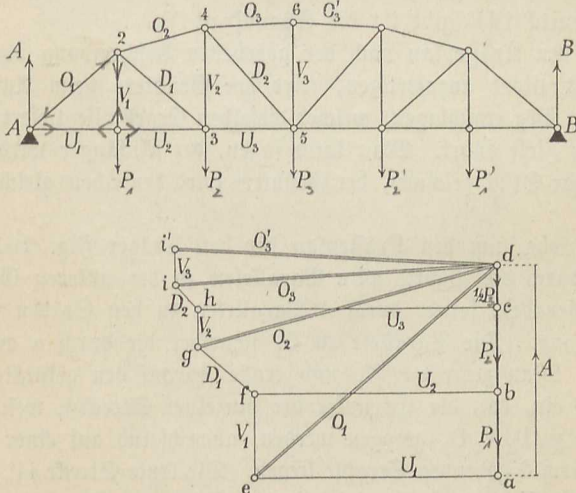
es meistens der Fall, der gerade Untergurt als steifer Balken ohne Gelenke ausgeführt wird.

Der Träger AB (Fig. 101) ist in 6 gleiche Felder geteilt, jeder Knoten des Untergurtes mit P belastet.

Die Stützwiderstände sind: $A = B = 2\frac{1}{2} P$

Man mache $ad = 2,5 P$ und fertige den Kräfteplan in der Weise an, daß man die Parallelen zu den unbelasteten Teilen (hier den Stäben des Obergurtes) von dem oberen Endpunkte d des Kräftezuges aus zieht.

Fig. 101.



Vom Auflager A aus beginnend ziehe man $ae \parallel U_1$ und $de \parallel O_1$. Das dadurch gebildete Kräftedreieck hat den Umlaufungssinn $adea$, folglich ist $O_1 = de$ Druckkraft, $U_1 = ea$ Zugkraft.

Am Knoten 1 halten sich die 4 Kräfte $PU_1V_1U_2$ im Gleichgewichte, müssen daher im Kräfteplan ein geschlossenes Viereck bilden. Von diesen

4 Kräften sind bereits zwei, nämlich die Last $P = ba$ und die Zugkraft $U_1 = ae$ bekannt, an welche sich die noch unbekanntenen Kräfte V_1 und U_2 anreihen müssen. Man ziehe daher durch e eine Parallele zu V_1 , durch b eine Parallele zu U_2 ; ist f der Schnittpunkt dieser Parallelen, so ist $ef = V_1$ und $fb = U_2$. Beide sind Zugkräfte, wie aus dem Umfahungssinne hervorgeht.

Von den am Knoten 2 wirkenden 4 Kräften $O_1 V_1 D_1 O_2$ sind O_1 und V_1 bekannt und bilden den Kräftezug def . Zieht man $fg \parallel D_1$ und $dg \parallel O_2$, so entsteht das Viereck $defg$ mit dem umgekehrten Umfahungssinn, nämlich $d g f e d$, weil O_1 als Druckkraft die Richtung ed nach dem Knoten 2 zu, ebenso V_1 als Zugkraft die Richtung fe von dem Knoten 2 weg hat. $O_2 = dg$ erzeugt daher Druckspannung, $D_1 = gf$ Zugspannung.

Der dem Knoten 3 entsprechende Kräftezug ist zu bilden aus den Kräften $P U_2 D_1 V_2 U_3$; davon liegt bereits der Zug $cbfg$, bestehend aus den Kräften $P U_2 D_1$, fest und es sind nur noch die Kräfte V_2 und U_3 anzureihen. Man ziehe zu dem Zwecke $gh \parallel V_2$ und $ch \parallel U_3$. Der Umfahungssinn ist $cbfghc$, folglich sind $V_2 = gh$ und $U_3 = hc$ beide Zugkräfte.

An dem für den Knoten 4 gezeichneten Kräftezuge $dghi$ mit dem Umfahungssinn $gdihg$ ergibt sich $O_3 = di$ als Druckkraft und $D_2 = ih$ als Zugkraft.

Die Spannkraft V_3 folgt am einfachsten unter Benutzung des Knotenpunktes 6. Hier halten sich die drei Kräfte $O_3 V_3 O'_3$ im Gleichgewichte, von denen die beiden gleichen Kräfte O_3 und O'_3 bereits bekannt sind. In dem Kräfte Dreieck idi' gibt $i'i$ die Spannkraft V_3 .

Statt den Kräfteplan nach der gegebenen Beschreibung von Knoten zu Knoten fortschreitend anzufertigen, wird der Geübtere beim Aufzeichnen des Planes einen Weg einschlagen, welcher dieselben Ergebnisse liefert, aber etwas schneller zum Ziele führt. Man kann sagen, der Anfänger wird den Kräfteplan Stück für Stück zeichnen, der Geübtere wird denselben gleich als Ganzes ausführen.

Man ziehe, um den Kräfteplan für den Träger Fig. 101 schnell anzufertigen, durch die Punkte abc Parallelen zu der unteren Gurtung (also wagerechte Gerade), ferner durch d Parallelen zu den Stäben $O_1 O_2 O_3$ der oberen Gurtung. Die Parallele zu O_1 schneidet die durch a gelegte Wagerechte in e . Man ziehe $ef \parallel V_1$ und trage darauf den geknickten Linienzug $fghi$ derart ein, daß die Eckpunkte der einzelnen Strecken, welche der Reihe nach parallel zu $D_1 V_2 D_2$ gezogen werden, abwechselnd auf einer Wagerechten und einem durch d gehenden Strahle liegen. Die letzte Strecke ii' , durch welche die Spannkraft V_3 dargestellt wird, liegt zwischen den Strahlen di und di' .

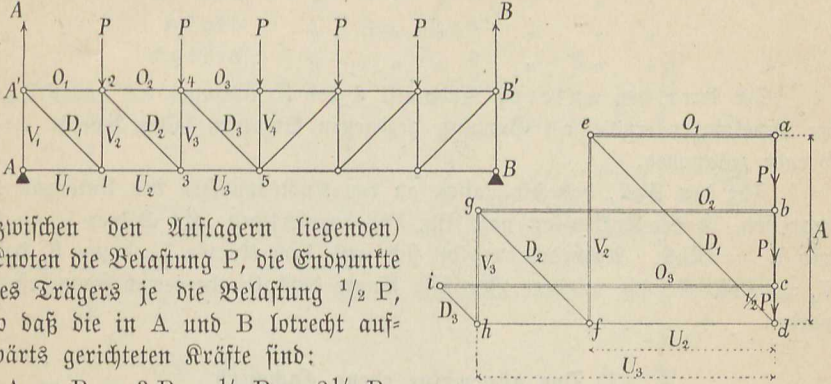
Wird der geknickte Linienzug von e ausgehend stetig durchfahren, so bezeichnen die Pfeile die Richtung, in welcher die Kräfte V und D auf die Knoten der unteren Gurtung wirken. Dadurch wird festgestellt, ob die Vertikalen gezogen oder gedrückt werden; die Diagonalen werden stets gezogen, ebenso die Stäbe der unteren Gurtung. Die obere Gurtung erfährt stets Druck.

3) Fachwerke mit wagerechtem Ober- und Untergurt.

(Parallelträger.)

Der in Fig. 102 dargestellte, in 6 gleiche Felder geteilte Träger sei für ein Feld gleichförmig belastet mit P ; es erhält dann jeder der mittleren

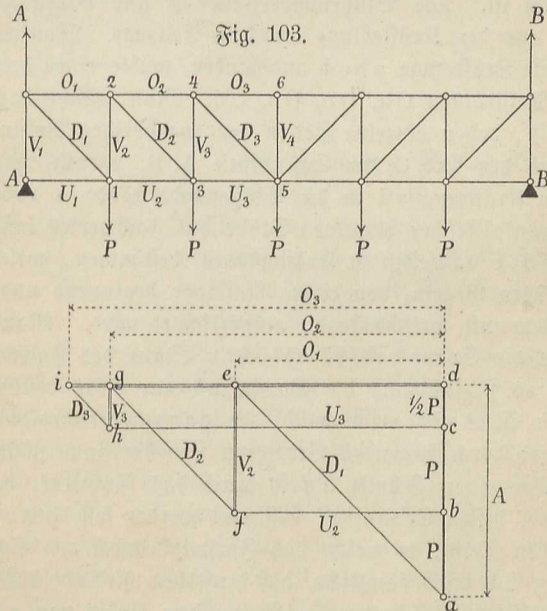
Fig. 102.



(zwischen den Auflagern liegenden) Knoten die Belastung P , die Endpunkte des Trägers je die Belastung $\frac{1}{2} P$, so daß die in A und B lotrecht aufwärts gerichteten Kräfte sind:

$$A = B = 3P - \frac{1}{2}P = 2\frac{1}{2}P$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung des Knotenpunktes A ergibt sich $V_1 = A + \frac{1}{2}P$ und $U_1 = \text{Null}$. Der Stab $A1$ könnte daher in dem Fachwerke



fehlen, und die erste Vertikale AA' hat den ganzen Auflagerdruck $3P$ unmittelbar aufzunehmen, daher ist der Punkt A' als eigentlicher Stützpunkt des Fachwerkes anzusehen. Dasselbe gilt von dem Punkte B' .

In A' halten sich dann die Kräfte $A O_1 D_1$ im Gleichgewichte; man mache daher $ad = A$ und ziehe $ae \parallel O_1$ und $de \parallel D_1$, wodurch das Kräfte-dreieck dae entsteht mit $ae = O_1$ und $ed = D_1$. Die weitere Aufzeichnung des Kräfteplanes geschieht in gewohnter Weise nach den früheren Regeln.

Für den Knoten 1	ist der Kräftezug:	$d e f d$
" " "	2 " " "	$a b g f e a$
" " "	3 " " "	$d f g h d$
" " "	4 " " "	$b c i h g b$

Die durch den unteren Endpunkt d des Kräftezuges ad parallel zu der unbelasteten unteren Gurtung gezogenen Strahlen fallen hier in eine Gerade zusammen.

Für den Fall, daß die Lasten an den Knotenpunkten des Untergurtes angreifen, ist der Kräfteplan nach Fig. 103 anzufertigen. Es ist hier $V_1 = A$ und $U_1 = \text{Null}$. Außerdem ergibt sich aus dem Knoten 5, bezw. 6, daß $V_4 = \text{Null}$ ist; die mittlere Vertikale könnte deshalb theoretisch fortgelassen werden.

4) Das allgemeine ebene Fachwerk.

Die Fig. 104 zeigt ein unsymmetrisches Fachwerk allgemeiner Form, welches in den Knotenpunkten der oberen Gurtung durch die lotrechten Kräfte $P_1 P_2 P_3$ belastet ist. Die Stützenwiderstände A und B ergeben sich in bekannter Weise aus dem Kräfteplane und dem Seilzuge. Man reihe die Kräfte $P_1 P_2 P_3$ zu dem Kräftezuge $abcd$ aneinander, wähle einen beliebigen Pol O und ziehe die Polstrahlen Oa, Ob, Oc, Od . Man zeichne darauf den Seilzug $A_1 III III B_1$, dessen einzelne Seiten den zugehörigen Polstrahlen parallel sind. Die durch den Pol O der Schlußlinie $A_1 B_1$ parallel gezogene Gerade Ot zerlegt den Kräftezug ad in die Stützenwiderstände A und B .

Die Spannkraft der einzelnen Stäbe des Fachwerkes lassen sich mittels des in Fig. 104b dargestellten Kräfteplanes bestimmen, welcher nach den früher mitgetheilten Regeln, von einem Auflager beginnend und von Knotenpunkt zu Knotenpunkt fortschreitend, aufgezeichnet wird. Man erhält durch den Kräfteplan die Spannkraft sämtlicher Stäbe des Fachwerkes.

Handelt es sich darum, die Spannkraft nur eines bestimmten Stabes zu ermitteln, so ist es nicht erforderlich, den ganzen Kräfteplan aufzuzeichnen und man kommt durch folgendes Verfahren schneller zum Ziele.

Man führe einen Schnitt $\alpha\beta$ so durch das Fachwerk, daß durch denselben der Stab, dessen Spannkraft bestimmt werden soll, getroffen wird. An jedem der beiden Teile, in welche das Fachwerk durch den Schnitt $\alpha\beta$ zerlegt ist, müssen sich dann sämtliche, auf denselben wirkende äußere und innere Kräfte im Gleichgewichte halten, z. B. an dem linken von $\alpha\beta$ befindlichen Teile die Kräfte $A P_1 O_2 D_2 U_2$.

Die Kräfte A und P_1 bilden die Mittelkraft R , deren Größe im Kräfteplane durch die Strecke $tb = A - P_1$ gegeben ist, und deren Lage be-

stimmt wird durch den Schnittpunkt s der verlängerten Seilzugseite III und der Schlußlinie $A_1 B_1$.

An dem linken Trägerteile müssen sich demnach die Kräfte $R O_2 D_2 U_2$ im Gleichgewichte halten. Die Mittelkraft aus je zweien dieser Kräfte muß durch den Schnittpunkt der beiden anderen Kräfte gehen und der Mittelkraft derselben gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sein.

Fig. 104 a.

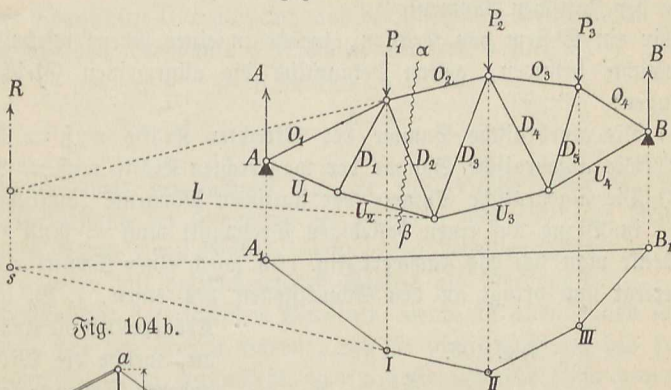


Fig. 104 b.

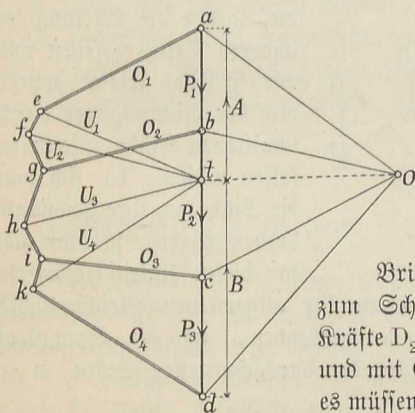
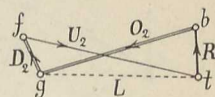


Fig. 104 c.



Bringt man z. B. die Kräfte O_2 und R zum Schnitt, so muß die Mittelkraft L der Kräfte D_2 und U_2 durch diesen Schnittpunkt gehen und mit O_2 und R sich im Gleichgewichte halten; es müssen daher die Kräfte $R O_2 L$ ein geschlossenes Kräfte-dreieck bilden.

Man trage $R = A - P_1$ auf und ziehe durch den oberen Endpunkt von R eine Parallele zu O_2 , durch den unteren Endpunkt von R eine Parallele zu L . Aus dem dadurch gebildeten Kräfte-dreieck tbg (Fig. 104 c) ergeben sich die Größen der Kräfte O_2 und L . Die Kraft L zerlege man dann weiter in die Seitenkräfte D_2 und U_2 , indem man $gf \parallel D_2$ und $tf \parallel U_2$ zieht. Da R lotrecht aufwärts gerichtet ist und das Kräftevier-eck $tbgf$ einen ununterbrochenen Umfahrungs-sinn haben muß, so erhalten $O_2 D_2 U_2$ die in Fig. 104 c eingezeichneten Pfeile. Denkt man die Kräfte $O_2 D_2 U_2$ an den durchschnittenen Stäben des links vom Schnitte $\alpha\beta$ befindlichen Trägerteiles in der durch die Pfeile bezeichneten Richtung angebracht, so erkennt man, daß U_2 Zugspannung, dagegen O_2 und D_2 Druckspannung erzeugen.

In derselben Weise lassen sich durch passend angebrachte Lage des

Schnittes $\alpha\beta$ die Spannkraften sämtlicher anderer Stäbe des Fachwerkes bestimmen; wie aber auch der Schnitt $\alpha\beta$ gelegt sein möge, immer wird derselbe mehrere Stäbe (zunächst den Auflagern zwei, an allen anderen Stellen des Fachwerkes drei Stäbe) treffen, deren Spannkraften in der angegebenen Weise gemeinsam gefunden werden.

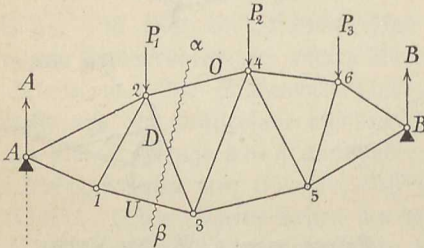
Die Spannkraft eines einzelnen Stabes eines Fachwerkes kann aber auch unabhängig von allen anderen bestimmt werden mit Hilfe der Ritter'schen Methode der statischen Momente¹⁾.

Für ein System von Kräften, welche in einer Ebene wirkend sich im Gleichgewichte befinden, gelten bekanntlich die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen:

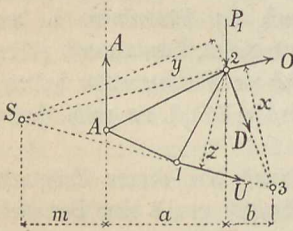
- 1) Die algebraische Summe der lotrechten Kräfte muß = Null sein.
- 2) Die algebraische Summe der wagerechten Kräfte muß = Null sein.
- 3) Die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt muß = Null sein.

Denkt man sich das Fachwerk Fig. 105 durch einen Schnitt $\alpha\beta$ in zwei Teile zerlegt und bringt an den Schnittstellen des einen, z. B. des linken Trägerteiles die Kräfte ODU an, welche die Wirkung des anderen Teiles ersetzen und, wie früher gezeigt wurde, mit der Richtung der durchschnittenen Stäbe zusammenfallen müssen, da sich sonst die Stäbe um ihre Endpunkte drehen würden, so kann man für diesen linken Fachwerks-

Fig. 105.



teil die dritte der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anwenden, um die Spannkraft irgend eines der durchschnittenen Stäbe zu ermitteln.



Man stelle für den betreffenden Trägerteil die Gleichung der statischen Momente auf und wähle dabei den Schnittpunkt derjenigen zwei Stäbe, deren Spannkraft vorläufig nicht verlangt wird, als Drehpunkt.

Soll z. B. die Spannkraft O bestimmt werden, so wähle man den Schnittpunkt 3 von D und U als Drehpunkt. Die Gleichung der statischen Momente lautet dann:

$$O \cdot x + A(a + b) - P_1 \cdot b = 0$$

¹⁾ Siehe Ritter, Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen.

woraus folgt:
$$O = - \frac{A(a+b) - P_1 b}{x}$$

Zur Bestimmung von D wählt man den Schnittpunkt S von O und U als Drehpunkt und erhält:

$$D \cdot y - A \cdot m + P_1 (m+a) = 0$$

$$D = \frac{A m - P_1 (m+a)}{y}$$

Die Spannkraft U ergibt sich aus der Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt 2 (Schnittpunkt von O und D)

$$- U \cdot z + A \cdot a = 0$$

$$U = \frac{A \cdot a}{z}$$

Werden durch den Schnitt $\alpha\beta$ nur zwei Stäbe getroffen, so wähle man bei Aufstellung der Gleichung der statischen Momente zur Bestimmung der Spannkraft des einen Stabes irgend einen beliebigen Punkt in der Richtung des anderen mit durchschnittenen Stabes als Drehpunkt.

Die Methode der statischen Momente, welche in allen Fällen sicher zum Ziele führt, hat den großen Vorteil, daß sie nur das Gesetz des Hebels in seiner einfachsten Form voraussetzt, und daß sie sich sehr leicht dem Gedächtnisse einprägt. Wer einmal diese Methode richtig anzuwenden gelernt hat, wird sie niemals wieder vergessen.

§. 11.

Zahlenbeispiele zu dem bleibend belasteten Fachwerke.

Beispiel 1. Zu einer Deckenkonstruktion sollen verspannte Träger verwendet werden, die in 0,8 m Entfernung voneinander liegen. Die Belastung einschließlich Eigengewicht sei 800 kg für das qm; Spannweite AB = 7 m; Länge der Strebe CE = 1 m (vergl. Fig. 96 S. 77).

Die ganze Belastung eines Trägers ist:

$$0,8 \cdot 7 \cdot 800 = 4480 \text{ kg}$$

Davon kommt auf den Knotenpunkt O die Hälfte, folglich:

$$P = 2240 \text{ kg}$$

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = B = 1120 \text{ kg}$$

Es sollen die Spannkraften zeichnerisch ermittelt werden (Längenmaßstab 1 : 50, Kräftemaßstab 1 cm = 500 kg).

Es wurde gefunden:

durch Zeichnung:	durch Rechnung:
O = 3930	O = 3920
U = 4100	U = 4077
V = 2240	V = 2240

Beispiel 2. Der dreifach verspannte Träger A B (Fig. 106) von 12 m Länge sei in jedem der Knotenpunkte 2, 4 und 6 mit 4000 kg belastet. Die unteren Zugstangen seien mit $1 : 2\frac{1}{2}$ gegen die Wagerechte geneigt, so daß die Länge der mittleren Strebe $6 : 2\frac{1}{2} = 2,4$ m beträgt.

Die Stützenwiderstände sind:

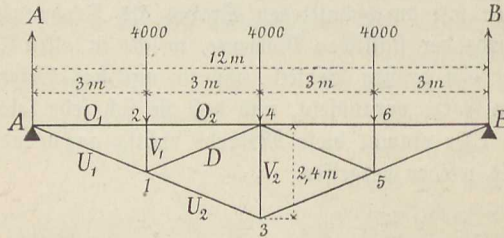
$$A = B = 6000 \text{ kg}$$

Für die Spannkraften ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{array}{ll} O_1 = O_2 = 15000 & V_1 = 4000 \\ U_1 = 16155 & V_2 = 8000 \\ U_2 = 10770 & D = 5385 \end{array}$$

Das Beispiel ist aufzuzeichnen im Maßstabe $1 : 66\frac{2}{3}$ ($1\frac{1}{2}$ cm = 1 m), Kräftemaßstab 1 cm = 1500 kg.

Fig. 106.



Beispiel 3. Bestimmung der Spannkraften für einen Träger von der Form Fig. 98 S. 79 und den folgenden Abmessungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Spannweite} & \dots \quad AB = 18 \text{ m} \\ \text{Feldweite} & \dots \quad = 3 \text{ ''} \\ \text{Länge der Vertikalen} & V_1 = 2,6 \text{ ''} \\ \text{'' '' ''} & V_2 = 3,3 \text{ ''} \\ \text{'' '' ''} & V_3 = 3,5 \text{ ''} \end{array}$$

Jeder der zwischen den Auflagern befindlichen Knoten der oberen Gurting sei belastet mit $P = 10000$ kg.

Der Träger ist aufzuzeichnen im Maßstabe $1 : 100$; als Kräftemaßstab ist zu wählen 1 cm = 5000 kg.

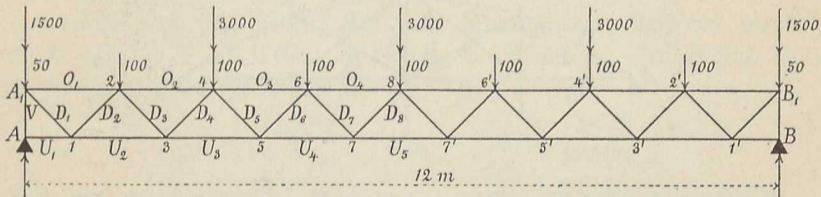
Es ergeben sich folgende Spannkraften:

$$\begin{array}{ll} O_1 = 28846 & V_1 = 18269 \\ O_2 = 36363 & V_2 = 12576 \\ O_3 = 38571 & V_3 = 10000 \\ U_1 = 38172 & D_1 = 11175 \\ U_2 = 29621 & D_2 = 3393 \\ U_3 = 36444 & \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Druck} \\ \text{Zug} \end{array} \right\}$$

Beispiel 4. Der Träger Fig. 107, welcher zur Unterstützung eines Vordaches dient, ruht bei A und B auf Säulen und ist in den Punkten A_1 und B_1 mit je 1500 kg, in den Punkten 4, 8 und $4'$ mit je 3000 kg belastet. Die ganze Spannweite AB beträgt 12 m, die Entfernung der Knoten A_1 2 4 u. s. w. voneinander je 1,5 m. Die Trägerhöhe ist zu 0,75 m angenommen, so daß die Diagonalen unter 45° gegen die Wagerechte geneigt sind.

Es sind die Spannkraften der sämtlichen Stäbe zu bestimmen unter Berücksichtigung des Eigengewichtes des Trägers, welches zu 800 kg veranschlagt ist. Ein passender Maßstab ist 1:25 (die Hälfte des Trägers braucht nur aufgezeichnet zu werden), Kräftemaßstab 1 cm = 1500 kg.

Fig. 107.



Das Eigengewicht darf als eine gleichmäßig über die ganze Trägerlänge verteilte Belastung angesehen werden, als Angriffspunkte desselben werden die Knotenpunkte der oberen Gurtung angenommen. Da die obere Gurtung in 8 gleiche Felder geteilt ist, so ist das auf ein Feld kommende Eigengewicht = $\frac{1}{8} \cdot 800 = 100$ kg. Jeder der zwischen A_1 und B_1 befindlichen Knoten erhält daher 100 kg, die Endknoten A_1 und B_1 erhalten je 50 kg als Beitrag des Eigengewichtes.

Die gesamten Belastungen sind in Fig. 107 eingeschrieben.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = B = 4850 \text{ kg.}$$

Es ergeben sich folgende Spannkraften:

$V = 4850 + 1550 = 6400 \text{ kg}$	} Druck	$U_1 = \text{Null}$	} Zug
$O_1 = 4850 \text{ ''}$		$U_2 = 9700 \text{ kg}$	
$O_2 = 14450 \text{ ''}$		$U_3 = 19200 \text{ ''}$	
$O_3 = 20950 \text{ ''}$		$U_4 = 22500 \text{ ''}$	
$O_4 = 24250 \text{ ''}$		$U_5 = 25600 \text{ ''}$	
$D_1 = D_2 = 6859 \text{ kg}$		$D_5 = D_6 = 2333 \text{ kg}$	
$D_3 = D_4 = 6718 \text{ ''}$		$D_7 = D_8 = 2192 \text{ ''}$	

Die Diagonalen D_2 D_4 D_6 D_8 werden gedrückt.

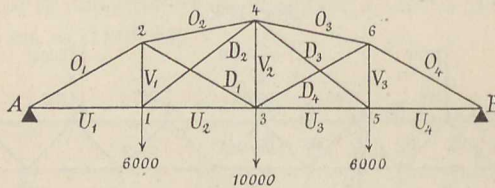
" " D_1 D_3 D_5 D_7 " gezogen.

Ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes würde man folgende Spannkraften erhalten:

$$\begin{aligned}
 V &= 4500 + 1500 = 6000 \text{ kg} & U_1 &= \text{Null} \\
 O_1 &= 4500 \text{ " } & U_2 &= 9000 \text{ kg} \\
 O_2 &= 13500 \text{ " } & U_3 &= 18000 \text{ " } \\
 O_3 &= 19500 \text{ " } & U_4 &= 21000 \text{ " } \\
 O_4 &= 22500 \text{ " } & U_5 &= 24000 \text{ " } \\
 D_1 &= D_2 = D_3 = D_4 = 6364 \text{ kg} \\
 D_5 &= D_6 = D_7 = D_8 = 2121 \text{ " }
 \end{aligned}$$

Beispiel 5. Der in Fig. 108 dargestellte, in 4 gleiche Felder geteilte Träger AB sei 10 m lang. Die Form der oberen Gurtung ist symmetrisch in Bezug auf die Mitte, die untere Gurtung wagerecht. Die Länge

Fig. 108.



der Vertikalen beträgt $V_1 = V_3 = 1,2$ m; $V_2 = 1,6$ m. In den beiden Mittelfeldern sind gekreuzte Diagonalen angeordnet. Die Knotenpunkte 1 und 5 seien mit je 6000 kg belastet, während an dem Knotenpunkte 3 die Last 10 000 kg angreift.

Es sollen die Spannkraften in sämtlichen Teilen dieses Trägers zeichnerisch ermittelt werden. Maßstab $1 : 66\frac{2}{3}$, Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = 1500 \text{ kg}$.

Fig. 109 a.

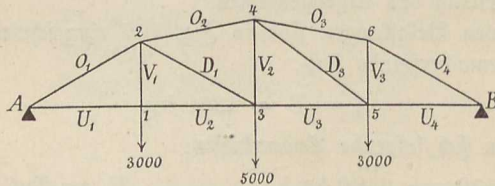
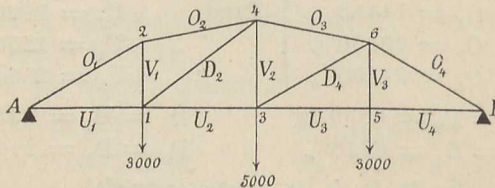


Fig. 109 b.



Man denke sich den Träger zusammengesetzt aus den beiden Trägern Fig. 109 a und 109 b, von denen jeder die Hälfte von der auf den Träger Fig. 108 wirkenden Belastung aufzunehmen hat. Diese beiden einfachen

Träger unterscheiden sich in der Form nur dadurch voneinander, daß bei dem Träger Fig. 109a die Diagonalen die Richtung von links oben nach rechts unten, bei dem Träger Fig. 109b aber die entgegengesetzte Richtung haben.

Es ergeben sich für den Träger Fig. 109a folgende Spannkkräfte:

$O_1 = 12710$ kg	$U_1 = 11458$ kg
$O_2 = 12660$ "	$U_2 = 11458$ "
$O_3 = 11604$ "	$U_3 = 12500$ "
$O_4 = 12710$ "	$U_4 = 11458$ "
$V_1 = 3000$ "	$D_1 = 1155$ "
$V_2 = 4500$ "	$D_3 = 1237$ "
$V_3 = 3667$ "	

Die obere Gurtung und die Diagonale D_3 werden gedrückt, alle übrigen Glieder gezogen.

Denkt man sich die Fig. 109a so herumgedreht, daß der Punkt A nach B und der Punkt B nach A kommt, so entsteht der Träger Fig. 109b. Die Spannkkräfte desselben sind:

$O_1 = 12710$ kg	$U_1 = 11458$ kg
$O_2 = 11604$ "	$U_2 = 12500$ "
$O_3 = 12660$ "	$U_3 = 11458$ "
$O_4 = 12710$ "	$U_4 = 11458$ "
$V_1 = 3667$ "	$D_2 = 1237$ "
$V_2 = 4500$ "	$D_4 = 1155$ "
$V_3 = 3000$ "	

Die obere Gurtung und die Diagonale D_2 werden gedrückt, alle übrigen Glieder gezogen.

Die Spannkkräfte in den Gurtungen und Vertikalen des zusammengesetzten Trägers Fig. 108 erhält man, wenn man die Spannkkräfte der gleichnamigen Teile in den einfachen Trägern Fig. 109a und 109b addiert. Man gelangt zu folgenden Werten:

$O_1 = O_4 = 25420$ kg	} Druck	$U_1 = U_4 = 22916$ kg	} Zug
$O_2 = O_3 = 24264$ "		$U_2 = U_3 = 23958$ "	
$V_1 = V_3 = 6667$ "	} Zug	$D_1 = D_4 = 1155$ "	} Druck
$V_2 = 9000$ "		$D_2 = D_3 = 1237$ "	

§ 12.

Fachwerke für veränderliche Belastung.

(Brückenträger.)

Eine Einzelkraft, möge sie rechts oder links von einem betrachteten Querschnitt angreifen, wirkt auf die Gurtungsglieder eines an den Enden frei unterstützten Fachwerkes immer in demselben Sinne, und erzeugt in der oberen Gurtung stets Druck, in der unteren Gurtung stets Zugspannung.

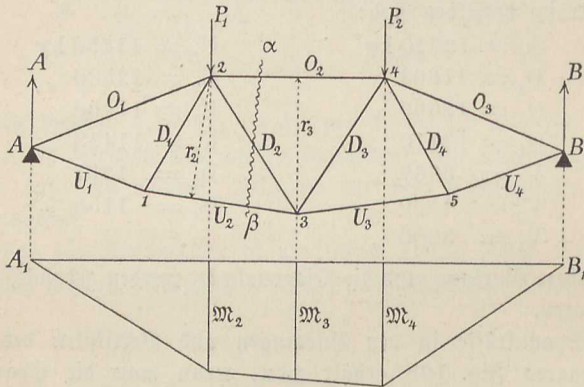
Daraus folgt, daß die obere Gurtung die größte Druckbeanspruchung, die untere Gurtung die größte Zugbeanspruchung erfährt bei voller Belastung des Fachwerkträgers.

Für die Beanspruchung der Wandglieder sind die auftretenden Schubkräfte maßgebend, auf welche, wie S. 52 nachgewiesen wurde, eine bewegliche Last, wenn sie einmal rechts, ein anderes Mal links von dem betreffenden Gliede angreift, in entgegengesetztem Sinne einwirkt.

Ein Wandglied (Vertikale oder Diagonale) wird daher am stärksten beansprucht, wenn auf der einen Seite desselben der Träger in den Knotenpunkten voll belastet, auf der anderen Seite desselben dagegen unbelastet ist.

a) **Gurtspannkräfte.** Man ermittle nach S. 54 oder 61 für die einzelnen belasteten Knotenpunkte die ungünstigsten Laststellungen, trage die denselben entsprechenden Momente, die in bekannter Weise (vergl. Fig. 92 S. 71)

Fig. 110.



durch Konstruktion des Kräfteplanes und Seilzuges gefunden werden, von der Wagerechten $A_1 B_1$ (Fig. 110) als Ordinaten lotrecht unter den Knotenpunkten auf.

Denkt man sich alsdann durch das Fachwerk den Schnitt $\alpha\beta$ gelegt, so hat man nach den Bezeichnungen der Fig. 110 zur Bestimmung der dem Knoten 3 gegenüber liegenden Spannkraft O_2 , indem man den Punkt 3 (Schnittpunkt von U_2 und D_2) als Drehpunkt wählt, die Bedingungsgleichung:

$$O_2 \cdot r_3 + M_3 = 0$$

also:

$$O_2 = - \frac{M_3}{r_3}$$

Zur Bestimmung von U_2 wählt man den Punkt 2 (Schnittpunkt von O_2 und D_2) als Drehpunkt und erhält:

$$- U_2 \cdot r_2 + M_2 = 0$$

folglich:

$$U_2 = + \frac{M_2}{r_2}$$

In derselben Weise lassen sich die Spannkraften aller übrigen Gurtglieder ermitteln.

Die Spannkraft eines Gurtstabes wird erhalten, indem man das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf den gegenüberliegenden Knotenpunkt durch den winkelrechten Abstand des Gurtstabes von diesem Knotenpunkte dividiert.

Bestehen die Wandglieder des Fachwerkes aus Vertikalen und Diagonalen, so haben die Momente in Bezug auf zwei lotrecht übereinanderliegende Knotenpunkte denselben Wert. Sind außerdem die Gurtungen des Trägers einander parallel, so ist für sämtliche Felder der lotrechte Abstand eines Gurtstabes von dem gegenüberliegenden Knoten unveränderlich und zwar gleich der Entfernung der Gurtschwerlinien. Bezeichnet man diese Entfernung kurzweg als Trägerhöhe, so kann man für den Parallelträger sagen:

$$\text{Gurtspannkraft} = \frac{\text{Moment}}{\text{Trägerhöhe}}$$

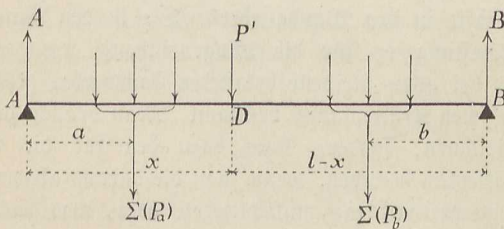
wobei das Moment stets in Bezug auf den gegenüberliegenden Knotenpunkt zu nehmen ist.

Für Fachwerksträger von größerer Spannweite¹⁾ ist es zulässig, folgenden in der Praxis üblichen Annäherungsweg einzuschlagen:

Man ermittle bei einer gegebenen beweglichen Lastengruppe (z. B. Eisenbahnzug) nach S. 53 Fig. 77 die für die Mitte des Trägers ungünstigste Laststellung und bestimme danach das überhaupt auftretende größte Moment M_{\max} .

Bezeichnet man die Lasten links von dem gefährlichen Querschnitt D mit $\Sigma(P_a)$, die Lasten rechts davon mit $\Sigma(P_b)$, und die Abstände der Lasten vom linken bezw. rechten Auflager mit a und b (Fig. 111), so erzeugt $\Sigma(P_b)$ für sich allein den Stützenwiderstand:

Fig. 111.



$$A = \frac{\Sigma(P_b \cdot b)}{l}$$

und in D das Moment:

$$M_b = Ax = \frac{x}{l} \Sigma(P_b \cdot b)$$

¹⁾ Für Träger unter 10 m Spannweite ist dieser Weg, der zu ungenauen Ergebnissen wegen, nicht zu empfehlen.

$\Sigma(P_a)$ erzeugt für sich allein den Stützenwiderstand:

$$B = \frac{\Sigma(P_a \cdot a)}{l}$$

und in D das Moment:

$$M_a = B(l - x) = \frac{l - x}{l} \Sigma(P_a \cdot a)$$

Zusammen entsteht:

$$M_{\max} = \frac{x}{l} \Sigma(P_b \cdot b) + \frac{l - x}{l} \Sigma(P_a \cdot a)$$

Die Last P' , welche über D steht, darf nach Belieben zu $\Sigma(P_a)$ oder zu $\Sigma(P_b)$ gerechnet werden.

Man berechne sodann diejenige gleichförmig verteilte Belastung v für die Längeneinheit, welche vorhanden sein müßte, um dasselbe Moment M_{\max} zu erzeugen.

$$\text{Aus:} \quad \frac{v l^2}{8} = M_{\max}$$

$$\text{ergibt sich:} \quad v = \frac{8}{l^2} M_{\max}$$

Hierzu kommt die vom Eigengewichte herrührende Belastung p , man erhält folglich die Gesamtbelastung für die Längeneinheit:

$$q = v + p$$

und bei der Feldlänge λ die Knotenpunktbelastung:

$$P = q \lambda = (v + p) \lambda$$

Dieser Knotenpunktbelastung entsprechend wird der Kräfteplan in bekannter Weise aufgezeichnet, aus welchem die Gurtspannkräfte dann unmittelbar zu entnehmen sind.

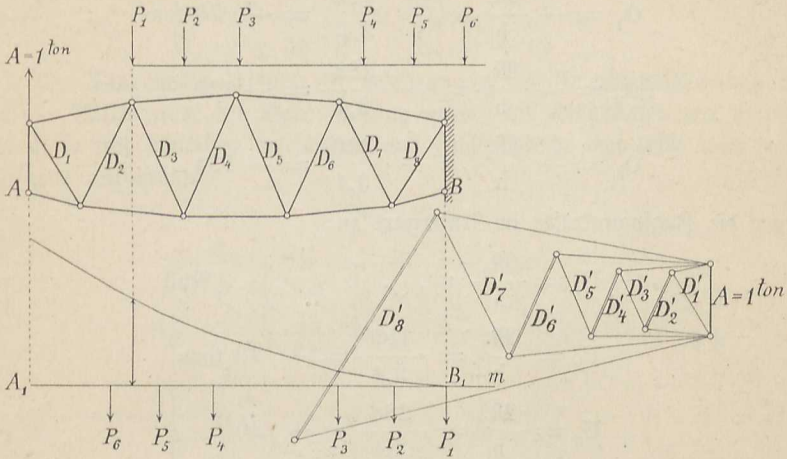
b) **Spannkräfte in den Wandgliedern.** Die in den Wandgliedern durch die bleibende Belastung (p für die Längeneinheit) erzeugten Spannkräfte werden, wie dies bei allen bleibend belasteten Fachwerken geschieht, mit Hilfe eines Cremona'schen Kräfteplanes bestimmt. Man braucht diesen aber nicht besonders aufzuzeichnen, sondern kann dazu den für die Gurtspannkräfte angefertigten Kräfteplan benutzen, wenn man die daraus abgemessenen Spannkräfte der Wandglieder mit p/q multipliziert, oder, was dasselbe ist, wenn man daraus die Spannkräfte nach einem q/p mal so großen Maßstabe abgreift.

Ist z. B. $p = 1$ ton, $q = 4$ tons für das Meter und war der Kräfteplan für die Gurtspannkräfte, entsprechend der Gesamtbelastung, im Maßstabe 1 ton = 1 mm aufgezeichnet, so hat man, um die durch die bleibende Belastung erzeugten Spannkräfte für die Wandglieder zu erhalten, die diese Spannkräfte darstellenden Strecken des Kräfteplanes mit dem Maßstabe 1 ton = 4 mm zu messen.

Die in den Wandgliedern durch die Verkehrsbelastung hervorgerufenen Spannkräfte bestimmt man in folgender Weise:

Man denke sich (Fig. 112) das rechte Trägerende fest eingespannt und auf den links frei gedachten Träger nur die aufwärts gerichtete Stützkraft $A = 1$ ton wirkend, welche in den Wandgliedern Spannkkräfte D' erzeugt, die nach dem Cremona'schen Verfahren bestimmt werden. Diese sind dann mit den der jedesmaligen ungünstigsten Laststellung (siehe S. 62) entsprechenden wirklichen Stützendrücken zu multiplizieren.

Fig. 112.



Diese letzteren aber, deren Bestimmung sich bei der Normalstellung (siehe S. 62) mit derjenigen der in den einzelnen Knoten auftretenden größten Schubkräfte deckt, werden wieder in der bekannten Weise (vergl. Fig. 81 S. 57 und Fig. 86 S. 62) durch Aufzeichnung eines Seilzuges ermittelt.

Die durch den Seilzug selbst und die verlängerte erste Seilzugseite mB_1A_1 begrenzte, lotrecht unter der ersten Last der von B nach A vorrückenden Lastgruppe gemessene Ordinate stellt den dieser Laststellung entsprechenden Stützengewand dar.

§ 13.

Zahlenbeispiele zu den Brückenträgern.

Beispiel 1. Parallelträger für eine zweigleisige Eisenbahnbrücke nach der Anordnung von Mohrié mit Vertikalen und gezogenen Diagonalen (Fig. 113).

Stützweite . . .	$l = 19,2 \text{ m}$
Trägerhöhe . . .	$h = 2,4 \text{ ''}$
Feldweite . . .	$\lambda = 3,2 \text{ ''}$

Die Brücke besteht aus zwei Hauptträgern, so daß jeder derselben die Belastung eines Geleises aufzunehmen hat.

Die Belastungen und Radabstände sind dieselben wie in dem Beispiel 2 Fig. 92 S. 71, von dem das vorliegende Beispiel die Fortsetzung ist.

a) **Gurtspannkkräfte.** Die abgerundeten Werte der S. 72 gefundenen Momente für die Knotenpunkte sind:

$$M_1 = 189 \text{ tm}; \quad M_2 = 288 \text{ tm}; \quad M_3 = 322 \text{ tm}.$$

Es ergeben sich daraus nach S. 93 die Druckspannkkräfte im Obergurt zu:

$$O_1 = -\frac{M_1}{h} = -\frac{189}{2,4} = -79 \text{ tons}$$

$$O_2 = -\frac{M_2}{h} = -\frac{288}{2,4} = -120 \text{ "}$$

$$O_3 = -\frac{M_3}{h} = -\frac{322}{2,4} = -134 \text{ "}$$

ferner die Zugspannkkräfte im Untergurt zu:

$$U_1 = \frac{M_0}{h} = \dots \dots \dots \text{ Null}$$

$$U_2 = \frac{M_1}{h} = \frac{189}{2,4} = +79 \text{ tons}$$

$$U_3 = \frac{M_2}{h} = \frac{288}{2,4} = +120 \text{ "}$$

b) **Spannkkräfte in den Diagonalen.** Die durch die Wirkung der einseitigen Verkehrsbelastung (des sich von B nach A bewegenden Eisenbahnzuges) und des Eigengewichtes in den einzelnen Feldern hervorgerufenen größten Schubkräfte sind nach S. 74:

$$\text{für das erste Feld: } \max S_1 = +55,2 \text{ tons}$$

$$\text{" " zweite " } \max S_2 = +35,7 \text{ "}$$

$$\text{" " dritte " } \max S_3 = +20,7 \text{ "}$$

$$\text{" " vierte " } \max S_4 = +7,8 \text{ "}$$

$$\text{" " fünfte " } \max S_5 = -3,2 \text{ "}$$

$$\text{" " sechste " } \max S_6 = -11,2 \text{ "}$$

Der Seilzug in Fig. 94 S. 73 für die von der Verkehrsbelastung und der darunter gezeichnete geknickte Linienzug für die vom Eigengewichte herrührenden Schubkräfte wurden nach Fig. 113 übertragen und so aneinander gefügt, daß sich die Ordinaten gleich gemeinsam als Strecke abgreifen lassen.

Für $\max S_1$ muß die Lokomotive mit ihrer zweiten Achse über dem Knotenpunkte 1 stehen. Man hat also von der Lotrecht unter der ersten Lokomotivachse gemessenen Gesamt-Ordinate noch den auf das Auflager A kommenden von P_1 herrührenden Betrag:

$$P'_1 = P_1 \frac{a}{\lambda}$$

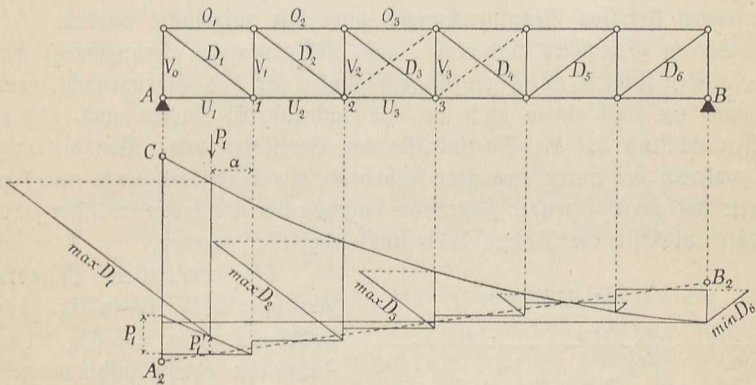
abzuziehen, um $\max S_1$ zu erhalten (vergl. Fig. 86 S. 62). Für die übrigen Knotenpunkte ist die Normalstellung die maßgebende.

Die Diagonalspannkraften ergeben sich ohne weiteres aus den Schubkräften durch die in Fig. 113 angedeutete Konstruktion, indem man durch die oberen Endpunkte der Schubkraftordinaten wagerechte Linien, durch die unteren Endpunkte derselben aber Parallelen zu den Diagonalen zieht. Man findet die auf volle Tonnen abgerundeten Werte:

$$\begin{array}{ll} D_1 = + 92 \text{ tons} & D_4 = + 13 \text{ tons} \\ D_2 = + 60 \text{ " } & D_5 = - 5 \text{ " } \\ D_3 = + 35 \text{ " } & D_6 = - 19 \text{ " } \end{array}$$

Die Diagonalen D_5 und D_6 würden hiernach Druckbeanspruchung erfahren. Sollen aber der Voraussetzung gemäß die Diagonalen nur gezogen werden, so sind dieselben im fünften und sechsten Felde von links nach rechts ansteigend anzuordnen.

Fig. 113.



Bewegt sich der Eisenbahnzug in umgekehrter Richtung von A nach B über die Brücke, so ergibt sich natürlich auch die umgekehrte Anordnung der Diagonalen, also im ersten und zweiten Felde von links nach rechts abfallend, in den übrigen Feldern von links nach rechts ansteigend. Daraus folgt dann, daß die beiden mittleren Felder gekreuzte Diagonalen erhalten müssen.

c) **Spannkraften in den Vertikalen.** Während es für die Spannkraften in den Gurtungen und Diagonalen gleichgültig ist, ob die Knotenpunkte der oberen oder unteren Gurtung die belasteten sind, so müssen bei Bestimmung der Spannkraften in den Vertikalen die beiden Belastungsfälle auseinander gehalten werden.

Die Spannkraft in einer Vertikalen ist immer das Entgegengesetzte von der lotrechten Seitenkraft derjenigen Diagonalen, welche mit der Vertikalen an einem unbelasteten Knotenpunkt zusammentrifft. Die Vertikalen werden mithin bei gezogenen Diagonalen stets gedrückt. Da nun die lotrechte Seitenkraft einer Diagonale gleich ist der in demselben Felde wirkenden größten Schubkraft S , so erhält man abgerundet

bei belastetem Untergurt (Fahrbahn unten):

$$V_0 = - \max S_1 = - 55 \text{ tons}$$

$$V_1 = - \max S_2 = - 36 \text{ "}$$

$$V_2 = - \max S_3 = - 21 \text{ "}$$

$$V_3 = - \max S_4 = - 8 \text{ "}$$

bei belastetem Obergurt (Fahrbahn oben):

$$V_1 = - \max S_1 = - 55 \text{ tons}$$

$$V_2 = - \max S_2 = - 36 \text{ "}$$

$$V_3 = - \max S_3 = - 21 \text{ "}$$

Die Endvertikale hat bei belastetem Obergurt den ganzen Auflagerdruck aufzunehmen, welcher nach Fig. 113 durch die Strecke A_2C gemessen wird. Man findet:

$$V_0 = - \max S_0 = - 73 \text{ tons}$$

Da es sich hauptsächlich nur um die Feststellung der größten Beanspruchungen in den einzelnen Gliedern handelt, so sind die in den Diagonalen und Vertikalen auftretenden kleinsten Beanspruchungen nicht mit aufgeführt worden.

Streng genommen sind nicht, wie stillschweigend vorausgesetzt wurde, die belasteten Knoten allein die Angriffspunkte für das Eigengewicht, sondern es kommt ein Teil davon auch auf die unbelasteten Knoten und übt einen gewissen Einfluß auf die Spannkkräfte der Vertikalen aus. Von diesem Einfluß, wodurch bei unten liegender Fahrbahn die Vertikalen noch etwas mehr belastet, bei oben liegender Fahrbahn dagegen um ebensoviel entlastet würden, soll hier (als für die Praxis belanglos) abgesehen werden.

Fig. 114.

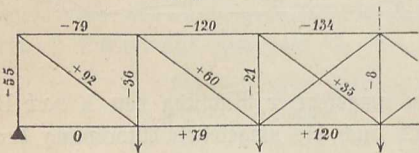
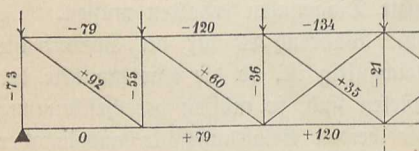


Fig. 115.



Die ermittelten Spannkkräfte sämtlicher Stäbe sind in Fig. 114 (für Fahrbahn unten) und Fig. 115 (für Fahrbahn oben) zusammengestellt.

Beispiel 2. Parabelträger für eine eingleisige Eisenbahnbrücke mit gerader oberer Gurtung und nebartig angeordneten Diagonalen (Fig. 118—121).

Stützweite . . . $l = 32,4 \text{ m}$

Trägerhöhe . . . $h = \frac{1}{8}l = 4 \text{ m}$

Anzahl d. Felder $n = 9$

Feldweite . . . $\lambda = \frac{32,4}{9} = 3,6 \text{ m}$

Die Brücke besteht aus zwei Hauptträgern, folglich hat jeder derselben die Hälfte der Geleisbelastung aufzunehmen.

Das Eigengewicht der Brücke für das Meter Geleis kann berechnet werden nach der Erfahrungsgformel:

$$g = 28 l + 750 \text{ kg}$$

worin die Stützweite l in m einzusetzen ist.

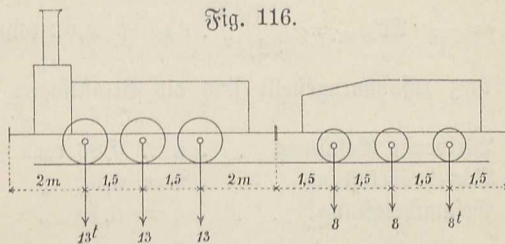
Für unser Beispiel wird:

$$g = 28 \cdot 32,4 + 750 = 1657 \text{ kg} = \approx 1,66 \text{ tons}$$

Auf das Meter Träger kommt dann:

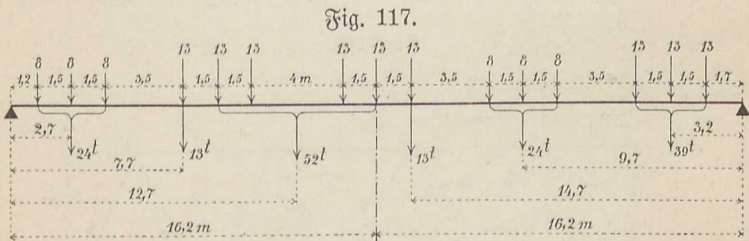
$$p = \frac{g}{2} = 0,83 \text{ tons}$$

Als Verkehrsbelastung für die Gurtungen wird ein Güterzug mit drei Lokomotiven angenommen, von denen zwei Brust an Brust stehen. Die zu Grunde zu legenden Achsbelastungen und Radabstände von Lokomotive und Tender, für welche abgerundete Zahlenwerte einzusetzen zweckmäßig ist, sind in der Skizze Fig. 116 angegeben.



Als Verkehrsbelastung für die Wandglieder wird ein Güterzug mit drei vorwärts gehenden Lokomotiven angenommen, und zwar die erste Achse zu 15 tons (nach Reck's Vorschlag).

Die ungünstigste Laststellung für die Gurtungen, die mit Hilfe des Land'schen Verfahrens (Fig. 85 S. 61) ermittelt werden kann, ist in Fig. 117 angegeben. Es steht dabei (von links ab gerechnet) die achte Last über der Trägermitte.



Das Moment in Bezug auf die Trägermitte ergibt sich nach der Formel S. 94, in welche hier:

$$\frac{x}{l} = \frac{l - x}{l} = \frac{1}{2}$$

einzusetzen ist, zu:

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \sum (P_a \cdot a) + \frac{1}{2} \sum (P_b \cdot b)$$

Für die gefundene ungünstigste Laststellung Fig. 117 ist nun, wenn man die über der Trägermitte stehende Last zu der linken Gruppe rechnet:

$$\Sigma (P_a \cdot a) = 24 \cdot 2,7 + 13 \cdot 7,7 + 52 \cdot 12,7 = 825,3 \text{ tm}$$

$$\Sigma (P_b \cdot b) = 39 \cdot 3,2 + 24 \cdot 9,7 + 13 \cdot 14,7 = 548,7 \text{ tm}$$

folglich wird:

$$M_{\max} = \frac{1}{2} (825,3 + 548,7) = 687 \text{ tm}$$

Auf einen Träger kommt davon die Hälfte mit:

$$M'_{\max} = \infty 344 \text{ tm}$$

Bei einer gleichmäßigen Belastung v für das m würde sein:

$$\frac{v l^2}{8} = M'_{\max}$$

daher:
$$v = \frac{8}{l^2} M'_{\max} = \frac{8}{32,4^2} \cdot 344 = 2,62 \text{ tons}$$

Nochmals kurz zusammengestellt sind die Belastungen für das Meter Träger:

Bleibende Belastung . . . $p = 0,83 \text{ tons}$

Verkehrsbelastung . . . $v = 2,62 \text{ "}$

Gesamtbelastung . . . $q = 3,45 \text{ "}$

Die Knotenpunktsordinaten der Parabel sind berechnet nach der Gleichung:

$$y = \frac{4h}{l^2} (x l - x^2)$$

Man findet:

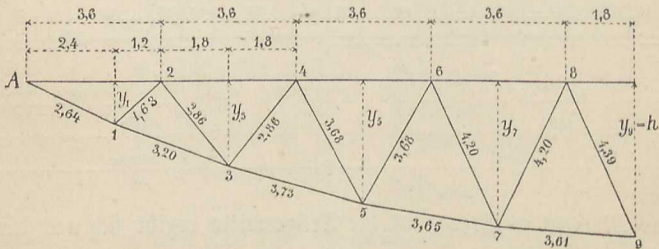
$$y_1 = 1,1 \text{ m} \quad y_7 = 3,8 \text{ m}$$

$$y_3 = 2,22 \text{ "} \quad y_9 = h = 4,0 \text{ m}$$

$$y_5 = 3,21 \text{ "}$$

Die danach berechneten Stablängen sind in Fig. 118 zusammengestellt.

Fig. 118.



1) Es ist nämlich:
$$y = M_x = \frac{q}{2} x (l - x)$$

$$h = M = \frac{q l^2}{8}$$

woraus sich durch Division der obige Ausdruck ergibt.

Die Gurtspankräfte werden erhalten aus dem Kräfteplan, welcher für die Knotenpunktlast:

$$P = q \lambda = 3,45 \cdot 3,6 = 12,42 \text{ tons}$$

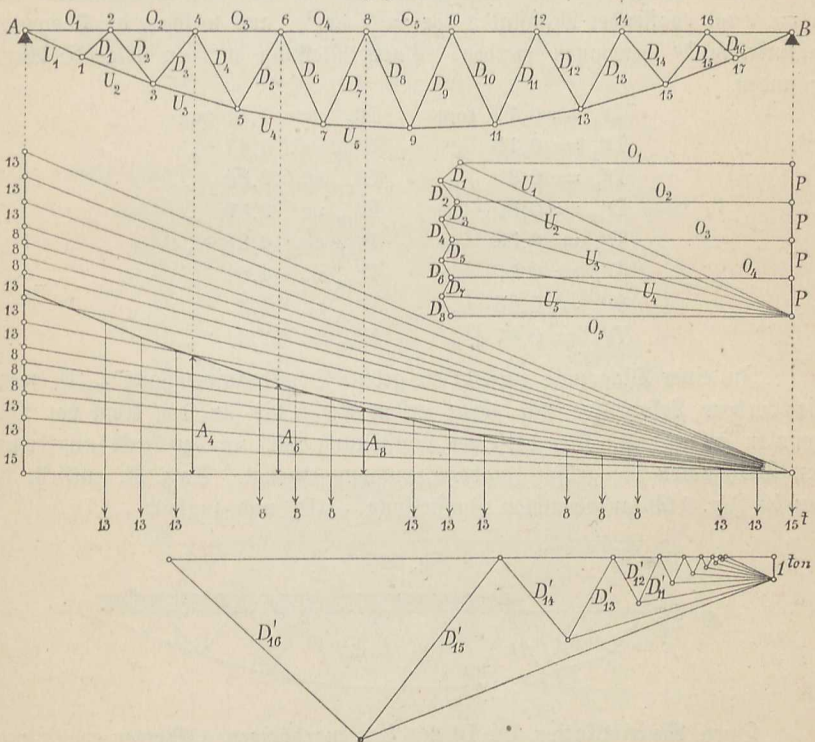
anzufertigen ist. Das bequemste ist, für die Knotenpunktlast einen abgerundeten Maßstab zu wählen, z. B. $P = 2 \text{ cm}$, und die Gurtspankräfte dann abzugreifen mit dem Maßstabe:

$$10 \text{ tons} = \frac{2 \cdot 10}{12,42} = 1,6 \text{ cm}$$

die von der bleibenden Belastung herrührenden Diagonalspankräfte später aber mit dem Maßstabe:

$$10 \text{ tons} = 1,6 \cdot \frac{q}{p} = 1,6 \cdot \frac{3,45}{0,83} = 6,65 \text{ cm}$$

Fig. 119.



Man erhält aus dem Kräfteplane (Fig. 119):

Die Obergurtspankräfte	Die Untergurtspankräfte
$O_1 = 109 \text{ tons}$	$U_1 = 120 \text{ tons}$
$O_2 = 110 \text{ ''}$	$U_2 = 123 \text{ ''}$
$O_3 = 111 \text{ ''}$	$U_3 = 119 \text{ ''}$
$O_4 = 112 \text{ ''}$	$U_4 = 116 \text{ ''}$
$O_5 = 112 \text{ ''}$	$U_5 = 115 \text{ ''}$

Zur Ermittlung der Diagonalspannkkräfte ist zunächst die Curve für die Stützenwiderstände A in bekannter Weise aufzuzeichnen. Passende Maßstäbe sind:

für die Achslasten 1 ton = 1 mm
Längenmaßstab für den Träger 1 : 100

Die Stützenwiderstände A sind dann, da jeder Träger nur die halben Achslasten aufzunehmen hat, im Maßstabe 1 ton = 2 mm abzugreifen.

Es ergeben sich nach Fig. 119 folgende Werte:

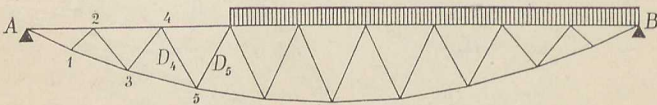
$A_2 = 37,4$ tons	$A_{10} = 10,9$ tons
$A_4 = 29,4$ "	$A_{12} = 7,0$ "
$A_6 = 22,4$ "	$A_{14} = 3,8$ "
$A_8 = 16,3$ "	$A_{16} = 1,4$ "

Man fertigt sodann einen Kräfteplan an für den Stützenwiderstand $A = 1$ ton (passender Maßstab 1 ton = 1 cm¹), aus welchem die Diagonalspannkkräfte D' gewonnen werden. Durch Messung wurden folgende Werte gefunden.

$D'_1 = 0,17$ tons	$D'_9 = 1,39$ tons
$D'_2 = 0,15$ "	$D'_{10} = 1,41$ "
$D'_3 = 0,35$ "	$D'_{11} = 2,30$ "
$D'_4 = 0,30$ "	$D'_{12} = 2,39$ "
$D'_5 = 0,58$ "	$D'_{13} = 4,28$ "
$D'_6 = 0,56$ "	$D'_{14} = 4,8$ "
$D'_7 = 0,88$ "	$D'_{15} = 10,3$ "
$D'_8 = 0,87$ "	$D'_{16} = 11,6$ "

In einer Diagonale entsteht die größte Druckbeanspruchung $\min D$, wenn die vordere Lokomotive mit ihrer ersten Achse bis an den Kopf der Diagonalen gelangt ist. Bei derselben Laststellung wird in der links angrenzenden Diagonalen die größte Zugbeanspruchung erzeugt. So z. B. entsteht bei der in Fig. 120 angedeuteten Zugstellung $\min D_5$ und zugleich $\max D_4$.

Fig. 120.



Durch Multiplikation der D' mit den zugehörigen A-Werten erhält man daher die durch die Verkehrsbelastung allein erzeugten Diagonalspannkkräfte:

$$\begin{aligned} \min D_1 &= D'_1 \cdot A_2 = - 0,17 \cdot 37,4 = - 6,4 \text{ tons} \\ \text{" } D_3 &= D'_3 \cdot A_4 = - 0,35 \cdot 29,4 = - 10,3 \text{ " } \\ \text{" } D_5 &= D'_5 \cdot A_6 = - 0,58 \cdot 22,4 = - 13,0 \text{ " } \end{aligned}$$

¹) Es ist praktisch, für die Diagonalspannkkräfte der linken Trägerhälfte einen besonderen größeren Maßstab zu wählen, etwa 1 ton = 5 cm.

$$\begin{aligned} \min D_7 &= D'_7 \cdot A_8 = - 0,88 \cdot 16,3 = - 14,3 \text{ tons} \\ \text{'' } D_9 &= D'_9 \cdot A_{10} = - 1,39 \cdot 10,9 = - 15,2 \text{ ''} \\ \text{'' } D_{11} &= D'_{11} \cdot A_{12} = - 2,3 \cdot 7,0 = - 16,1 \text{ ''} \\ \text{'' } D_{13} &= D'_{13} \cdot A_{14} = - 4,28 \cdot 3,8 = - 16,3 \text{ ''} \\ \text{'' } D_{15} &= D'_{15} \cdot A_{16} = - 10,3 \cdot 1,4 = - 14,2 \text{ ''} \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} \max D_2 &= D'_2 \cdot A_4 = 0,15 \cdot 29,4 = + 4,4 \text{ tons} \\ \text{'' } D_4 &= D'_4 \cdot A_6 = 0,3 \cdot 22,4 = + 6,7 \text{ ''} \\ \text{'' } D_6 &= D'_6 \cdot A_8 = 0,56 \cdot 16,3 = + 9,1 \text{ ''} \\ \text{'' } D_8 &= D'_8 \cdot A_{10} = 0,87 \cdot 10,9 = + 9,5 \text{ ''} \\ \text{'' } D_{10} &= D'_{10} \cdot A_{12} = 1,41 \cdot 7,0 = + 9,9 \text{ ''} \\ \text{'' } D_{12} &= D'_{12} \cdot A_{14} = 2,39 \cdot 3,8 = + 9,1 \text{ ''} \\ \text{'' } D_{14} &= D'_{14} \cdot A_{16} = 4,8 \cdot 1,4 = + 6,7 \text{ ''} \\ \max D_{16} &= \text{Null} \end{aligned}$$

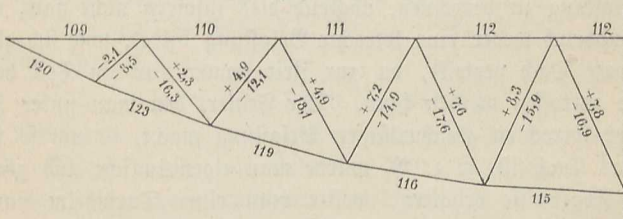
oder da, wie sich bei umgekehrter Zugrichtung ergibt,

$$\begin{aligned} \max D_1 &= \max D_{16} \quad \text{und} \quad \min D_2 = \min D_{15} \\ \max D_3 &= \max D_{14} \quad \min D_4 = \min D_{13} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned}$$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} \max D_1 &= \text{Null} & \min D_1 &= - 6,4 \text{ tons} \\ \text{'' } D_2 &= + 4,4 \text{ tons} & \text{'' } D_2 &= - 14,2 \text{ ''} \\ \text{'' } D_3 &= + 6,7 \text{ ''} & \text{'' } D_3 &= - 10,3 \text{ ''} \\ \text{'' } D_4 &= + 6,7 \text{ ''} & \text{'' } D_4 &= - 16,3 \text{ ''} \\ \text{'' } D_5 &= + 9,1 \text{ ''} & \text{'' } D_5 &= - 13,0 \text{ ''} \\ \text{'' } D_6 &= + 9,1 \text{ ''} & \text{'' } D_6 &= - 16,1 \text{ ''} \\ \text{'' } D_7 &= + 9,9 \text{ ''} & \text{'' } D_7 &= - 14,3 \text{ ''} \\ \text{'' } D_8 &= + 9,5 \text{ ''} & \text{'' } D_8 &= - 15,2 \text{ ''} \end{aligned}$$

Fig. 121.



Zu diesen Spannkraften sind noch diejenigen hinzuzufügen, die durch das Eigengewicht hervorgerufen werden und aus dem Kräfteplan für bleibende Belastung zu entnehmen sind. Durch Messung wurde gefunden:

$$\begin{aligned} D_1 &= - 2,1 \text{ tons} & D_5 &= - 1,9 \text{ tons} \\ D_2 &= - 2,1 \text{ ''} & D_6 &= - 1,5 \text{ ''} \\ D_3 &= - 1,8 \text{ ''} & D_7 &= - 1,6 \text{ ''} \\ D_4 &= - 1,8 \text{ ''} & D_8 &= - 1,7 \text{ ''} \end{aligned}$$

so daß sich schließlich die folgenden durch gleichzeitige Wirkung des Eigengewichts und der Verkehrsbelastung entstehenden Diagonalspannkräfte ergeben:

$\max D_1 = 0$	$- 2,1 = - 2,1$ tons	$\min D_1 = - 6,4$	$- 2,1 = - 8,5$ tons
" $D_2 = 4,4$	$- 2,1 = + 2,3$ "	" $D_2 = - 14,4$	$- 2,1 = - 16,3$ "
" $D_3 = 6,7$	$- 1,8 = + 4,9$ "	" $D_3 = - 10,3$	$- 1,8 = - 12,1$ "
" $D_4 = 6,7$	$- 1,8 = + 4,9$ "	" $D_4 = - 16,3$	$- 1,8 = - 18,1$ "
" $D_5 = 9,1$	$- 1,9 = + 7,2$ "	" $D_5 = - 13,0$	$- 1,9 = - 14,9$ "
" $D_6 = 9,1$	$- 1,5 = + 7,6$ "	" $D_6 = - 16,1$	$- 1,5 = - 17,6$ "
" $D_7 = 9,9$	$- 1,6 = + 8,3$ "	" $D_7 = - 14,3$	$- 1,6 = - 15,9$ "
" $D_8 = 9,5$	$- 1,7 = + 7,8$ "	" $D_8 = - 15,2$	$- 1,7 = - 16,9$ "

Die sämtlichen Stabspannkräfte sind in Fig. 121 zusammengestellt.

§ 14.

Fachwerkartige Dachkonstruktionen.

Die Belastung eines Daches besteht im allgemeinen aus dem Eigengewichte der ganzen Konstruktion (Binder, Pfetten und Eindeckung), aus der Schneelast und aus der von dem Winddrucke herrührenden Belastung. In einzelnen Fällen kann das Dach noch zum Tragen besonderer angehängter Lasten benutzt werden.

Das Eigengewicht der ganzen Dachkonstruktion und die Schneelast bilden eine Lotrechte gleichmäßige Belastung, welche gewöhnlich für das q_m der Grundrißfläche angegeben wird.

Für das Eigengewicht der Dächer sind Tabellen im Anhange angegeben; die Schneelast nimmt man für Mitteleuropa zu 75 kg für das q_m an; der Winddruck soll in einem folgenden Paragraphen besonders behandelt werden.

Es ist ziemlich allgemein üblich, die Dächer nur für Lotrechte gleichmäßige Belastung zu berechnen, obgleich dies insofern nicht ganz richtig ist, als der Winddruck weder eine Lotrechte Belastung bildet, noch sich gleichmäßig auf das ganze Dach verteilt, da zur Zeit immer nur ein Teil des Daches vom Winde getroffen werden kann. Der Fehler, den man unter Zugrundelegung einer Lotrechten gleichmäßigen Belastung macht, ist um so schlimmer, je steiler das Dach ist, so z. B. würde man eigentümliche und gänzlich unbrauchbare Ergebnisse erhalten, wollte man einen Turmhelm nur für Lotrechte Belastung berechnen, dagegen ist bei flachen Dächern diese Berechnungsweise wohl noch brauchbar.

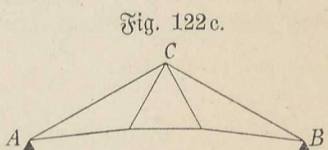
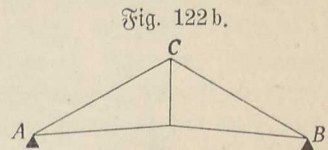
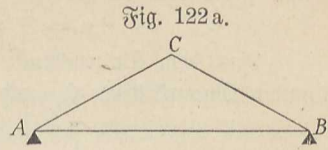
Die Belastung wird von der Dachdeckung auf Querträger, die sogen. Pfetten, und von diesen in den Knotenpunkten auf die Binder übertragen, so daß ebenso wie bei allen Fachwerksträgern auch hier wieder die Knoten ausschließlich die Belastungspunkte bilden.

Die folgenden Untersuchungen sollen sich nur auf solche Dachbinder erstrecken, bei denen der Obergurt nur einen, der Untergurt keinen oder einen

Knick, höchstens aber zwei Knicke hat und bei denen die Gurtungen bei den Auflagern in einer Spitze zusammenlaufen (Fig. 122 a, b, c). Der Grundriß des Daches soll stets rechteckig vorausgesetzt werden. Bei diesen Dächern ist volle Belastung, auch für die Wandglieder, der ungünstigste Fall.

Bezeichnet man die Spannweite eines Daches mit l , die Entfernung der Binder voneinander mit b , so ist die Belastungsfläche für einen Binder = bl . Nennt man dann p die auf 1 qm der Grundrißfläche kommende lotrechte Belastung, so erhält der Binder die Belastung pbl . Ist die ganze Spannweite durch die Knotenpunkte der oberen Gurtung in n gleiche Felder geteilt, so kommt auf jedes einzelne Feld die Belastung:

$$P = \frac{1}{n} p b l$$



Das erste Feld überträgt auf den Auflagerpunkt A nur die Hälfte seiner Belastung, ebenso entfällt auf den Auflagerpunkt B die Hälfte der Belastung des letzten Feldes, während auf jeden der übrigen Knotenpunkte je zwei benachbarte Felder die Hälfte ihrer Belastung übertragen. Die Knotenpunktsbelastung der zwischen den Auflagern A und B befindlichen Knoten ist daher gleich der Belastung eines Feldes.

Ist z. B. bei einem Dache

- die Spannweite $l = 24 \text{ m}$
- „ Binderentfernung $b = 3,5 \text{ „}$
- „ Felderzahl $n = 8$

so ist bei einer Belastung $p = 160 \text{ kg}$ für das qm die Belastung eines Binders :

$$p b l = 160 \cdot 3,5 \cdot 24 = 13440 \text{ kg}$$

die Belastung eines Feldes:

$$P = \frac{1}{8} \cdot 13440 = 1680 \text{ kg}$$

Die Endknoten A und B erhalten daher jeder die Belastung $\frac{1}{2} P = 840 \text{ kg}$, die übrigen Knoten die Belastung $P = 1680 \text{ kg}$.

Für einige der gebräuchlichsten Dachbinder ist in folgendem die Bestimmung der Spannkraften mit Benutzung der Cremona'schen Kräftepläne und unter Voraussetzung lotrechter gleichmäßiger Belastung durchgeführt.

1) Das deutsche Dach. Fig. 123.

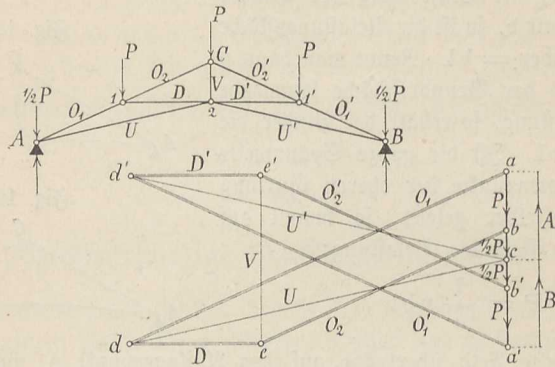
Die Strebe 11' teilt die Obergurte AC und BC in je zwei gleiche Felder; die Mitte 2 der Strebe ist mit dem Scheitel C und den Auflagern A und B durch Zugstangen verbunden.

Die Feldbelastung sei $= P$; die Knoten 1 C $1'$ sind dann je mit P , die Knoten A und B je mit $1/2 P$ belastet, so daß die in A und B lotrecht aufwärts gerichteten Kräfte (die wirkenden Stützenwiderstände) sind:

$$A = B = 2P - 1/2 P = 1 1/2 P$$

Aus dem Stützendrucke $A = 1 1/2 P$ und den der Richtung nach bekannten Spannkraften O_1 und U wird das Kräftedreieck $a d e$ aufgezeichnet

Fig. 123.



und dadurch $ad = O_1$ und $de = U$ gefunden. Im Knotenpunkt 1 sind die Kräfte O_1 und P bekannt, die Kräfte O_2 und D unbekannt; man ziehe $be \parallel O_2$ und $de \parallel D$, wodurch das Kräfteviereck $abcd$ entsteht mit $be = O_2$ und $ed = D$. Am Knoten C halten sich die Kräfte $O_2 P O_2' V$ im Gleichgewichte. Diesen Kräfte entspricht der Linienzug $bb'e'e$ mit $e'e = V$. Der Kräftezug für den Knoten 2 bildet die in e zusammenlaufende Figur $edee'd'e$.

Fig. 124.

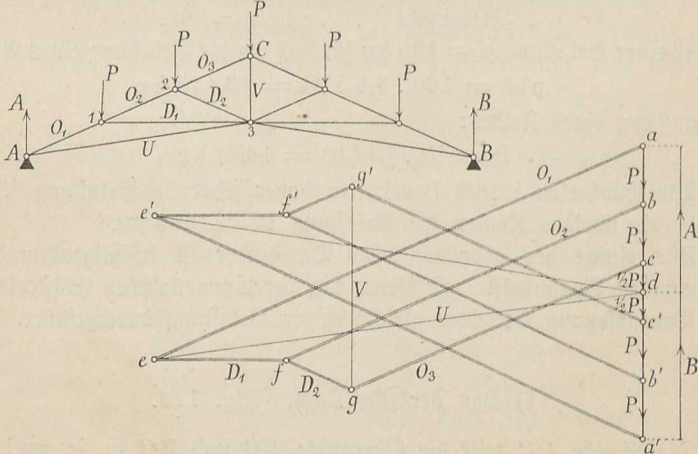
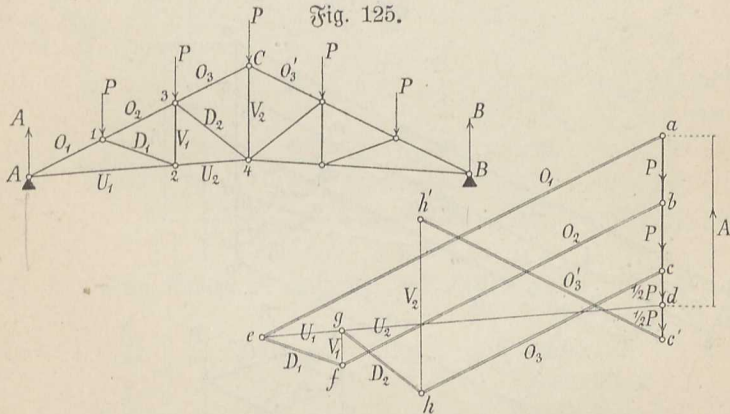


Fig. 124 zeigt ein deutsches Dach, bei welchem die Gurtungen AC und BC durch die Streben in je drei gleiche Felder geteilt sind.

Das deutsche Dach ist ungünstig, da die gedrückten Glieder lang und die Anschlüsse schief sind; auch stößt die fachgemäße Ausbildung des Mittelknotens häufig auf Schwierigkeiten.

2) Das englische Dach. Fig. 125.

Die Wandglieder des englischen Daches bestehen aus Vertikalen und Diagonalen und sind meistens so angeordnet, daß die Gurtungen durch die Knotenpunkte in eine beliebige Anzahl unter sich gleicher Felder eingeteilt werden. Die untere Zugstange kann entweder gerade durchgehen oder wie in Fig. 125 angehoben sein. In einzelnen Fällen ist sogar die Zugstange gefenkt, wodurch das Aussehen allerdings verschlechtert wird, der Binder aber an Tragfähigkeit gewinnt, was dann wünschenswert ist, wenn das Dach noch zum Tragen besonderer Lasten (z. B. Decken) bestimmt ist. Die Diagonalen werden bei der Anordnung Fig. 125 gedrückt; ein englisches Dach mit gezogenen Diagonalen ist in § 16 behandelt.



Die aufwärts gerichteten Stützenwiderstände sind $A = B = 2\frac{1}{2} P$.

Der Kräfteplan wird in gewohnter Weise aufgezeichnet, indem man bei einem Auflager, z. B. A beginnt. Die Parallelen zu der oberen Gurtung schneiden auf dem Kräftezuge die Knotenpunktlasten P ab, die Parallelen zu der unteren Gurtung gehen sämtlich durch den Punkt d und fallen, da sie dieselbe Richtung haben, zusammen ($de = U_1$, $dg = U_2$). Die Parallelen zu den Wandgliedern bilden den geknickten Linienzug $efghh'$. Da die Spannkraft der symmetrisch zur Mitte liegenden Stäbe gleich sind, so braucht der Kräfteplan nur zur Hälfte aufgezeichnet zu werden.

3) Das belgische Dach. Fig. 126.

Bei dem belgischen Dachbinder, dessen Streben N winkelfrecht zu der oberen Gurtung gerichtet sind, werden die Spannkraft in derselben Weise ermittelt wie bei dem englischen Dache.

Hat das Dach einen Aufsatz wie in Fig. 126, so kann man bei Auf- fertigung des Kräfteplanes nicht unmittelbar von dem Knoten 4 auf den Knoten 5 übergehen, da außer den von den Knoten 3 und 4 her bekannten Spannkräften O_3 und D_2 noch drei unbekannte Spannkräfte, nämlich N_3 , O_4 und V , welche sämtlich an dem Knoten 5 angreifen, zu bestimmen sind. Man hat folgendermaßen vorzugehen:

Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten A findet man O_1 und U_1 .

Am Knoten 1 sind bekannt O_1 und P , man findet N_1 und O_2

" " 2 " " U_1 " N_1 " " D_1 " U_2

" " 3 " " O_2 P " D_1 " " N_2 " O_3

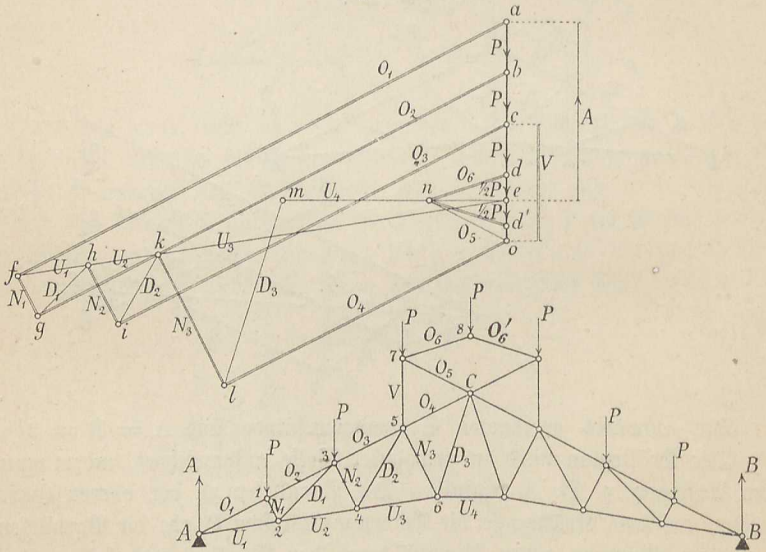
" " 4 " " U_2 " N_2 " " D_2 " U_3

" " 8 ist " P " " " O_6 " O'_6

" " 7 sind " P " O_6 " " V " O_5

Nachdem auf diese Weise V bestimmt ist, kann man auch den Knoten 5 lösen.

Fig. 126.



Am Knoten 5 sind bekannt O_3 , D_2 und V , man findet N_3 und O_4

" " 6 " " U_3 " N_3 " " D_3 " U_4

womit dann sämtliche Spannkräfte bestimmt sind.

Die Kräfte U_1 , U_2 , U_3 decken sich im Kräfteplane; es ist: $ef = U_1$, $eh = U_2$, $ek = U_3$. Dem Knotenpunkte 8 entspricht das Kräfte- dreieck $dd'n$, dem Knoten 7 der Linienzug $cdnoc$, in welchem $oc = V$ ist.

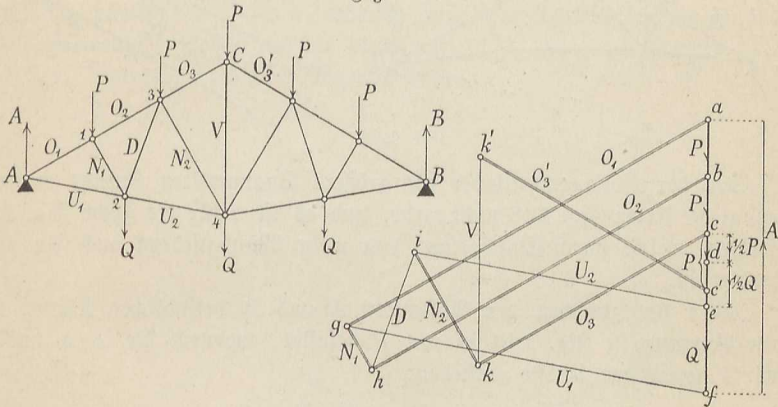
Liegt O_5 in der Richtung BC und ist $O_6 \parallel AC$, so ist absolut genommen $O_5 = O_6$ und $V = 2P$. Im Kräfteplane fällt alsdann der Punkt o mit dem Punkte d' zusammen.

Bei dem in Fig. 127 dargestellten belgischen Dachstuhl mit gefenckter Zugstange sei jeder Knoten des Obergurtes mit P, jeder Knoten des Untergurtes mit Q belastet. Die Stützenwiderstände sind dann:

$$A = B = 2\frac{1}{2}P + 1\frac{1}{2}Q$$

Man füge die Lasten in der Reihenfolge P, P, $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{2}Q$, Q zu dem Kräftezuge a — f aneinander und zeichne den Kräfteplan von A beginnend und von Knoten zu Knoten fortschreitend nach den früheren Regeln so auf, daß den an einem Knoten angreifenden inneren und äußeren Kräften ein geschlossenes Kräfteviereck entspricht.

Fig. 127.



Dem Knoten A	entspricht	das	Viereck	agfa	
"	"	1	"	"	abhga
"	"	2	"	"	efghie
"	"	3	"	"	bekihb
"	"	C	"	"	cc'k'kc

Die Obergurtstäbe und die winkelfrecht dazu gerichteten Streben werden gedrückt, die Untergurtstäbe, die Diagonale und die mittlere Vertikale werden gezogen.

Statt für die Lasten P und Q einen gemeinsamen Kräfteplan anzufertigen, kann man auch zwei besondere Kräftepläne aufzeichnen, den einen für die Knotenpunktlasten P, den andern für die angehängten Lasten Q. Die aus diesen beiden Plänen sich ergebenden Spannkkräfte werden dann addiert.

4) Das französische oder Polonceau-Dach.

Ein Polonceau-Binder in seiner einfachsten Gestalt ist in Fig. 128 abgebildet. Die oberen Gurtungen AC und BC sind in 2 gleiche Teile geteilt durch die winkelfrecht dazu stehenden Streben N, deren Endpunkte unter sich, ferner mit den Auflagern A und B und mit dem Scheitel C durch Zug-

stangen verbunden sind. Die untere Zugstange kann entweder angehoben sein, also in den Knoten 2 und 2' einen Knick bilden (wie in Fig. 128) oder sie kann geradlinig von A bis B durchgehen.

Fig. 128 zeigt den Kräfteplan, welcher unter der Voraussetzung gezeichnet ist, daß jeder der Knotenpunkte 1 O 1' die Last P aufzunehmen hat. Die obere Gurtung und die Streben N werden gedrückt, die untere Gurtung und die Diagonalen D gezogen.

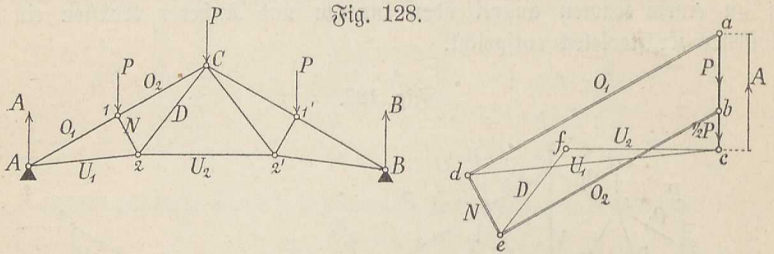


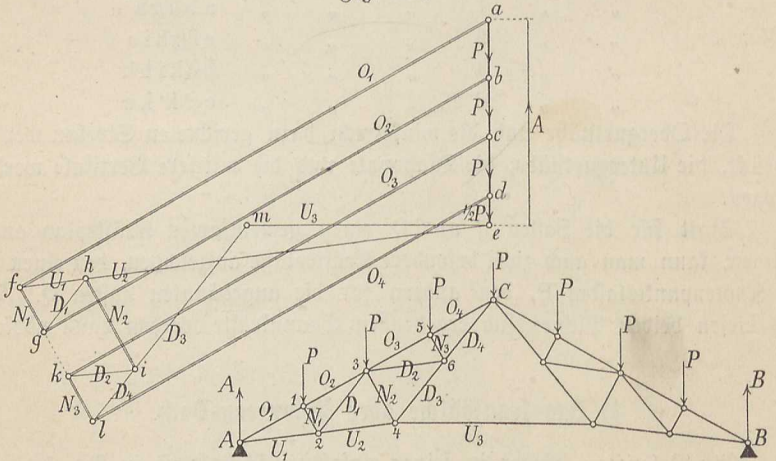
Fig. 128.

Soll der Polonceau-Binder für größere Spannweiten benutzt werden, so genügt die Form Fig. 128 nicht mehr, und es ist dafür die Form Fig. 129 zu wählen, welche durch Einschaltung von mehr Wandgliedern aus Fig. 128 entstanden ist.

Jeder der zwischen den Auflagern A und B befindlichen Knoten der oberen Gurtung in Fig. 129 sei mit P belastet, wodurch die in A und B aufwärts gerichteten Kräfte entstehen:

$$A = B = 3^{1/3} P$$

Fig. 129.

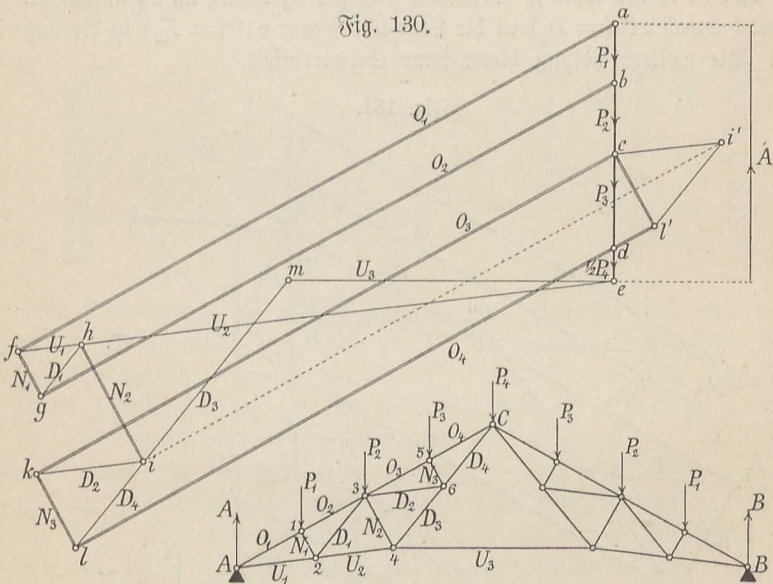


Im Kräfteplane zerlege man $A = ae$ in die Seitenkräfte $af =$ und $\parallel O_1$ und $fe =$ und $\parallel U_1$. Für den Knoten 2 werden darauf aus den bekannten Kräften O_1 und P mittels des Kräftevierecks $abgf$ die beiden Kräfte

N_1 und O_2 bestimmt. Zum Knoten 2 übergehend erhält man aus der Figur $efgh$ die Kräfte $gh = D_1$ und $he = U_2$.

Am Knoten 3 halten sich die drei bekannten Kräfte P, O_2, D_1 und die drei vorläufig noch unbekannt Kräfte N_2, D_2, O_3 im Gleichgewichte. Danach erscheint die Aufgabe unbestimmt, wird aber durch den Umstand lösbar, daß die Spannkkräfte D_1 und D_2 einander gleich sind, denn zerlegt man die am Knoten 3 angreifende äußere Kraft P in die Seitenkräfte $P \sin \alpha$ und $P \cos \alpha$, so hat $P \sin \alpha$ nur Einfluß auf die Gurtspannung, während die in der Richtung der Mittelstrebe N_2 wirkende Kraft $P \cos \alpha$ symmetrisch zu D_1 und D_2 steht. Der Unterschied der Spannkkräfte in den einzelnen aufeinanderfolgenden Stäben des Obergurtes ist aber bei gleichen Knotenpunktsbelastungen P stets derselbe, nämlich $= P \sin \alpha$, woraus folgt, daß im Kräfteplane die unteren Endpunkte der O -Kräfte auf der winkelrecht zu O_1 gezogenen geraden fl liegen müssen. Danach ergibt sich folgende Lösung:

Fig. 130.



Von dem dem Knoten 3 entsprechenden Kräfteviereck liegt der Teil $hgbc$ bereits fest. Man ziehe durch h eine Parallele zu N_2 , durch e eine Parallele zu O_3 ; verlängert man dann die Richtung von N_1 bis zum Schnittpunkt k mit O_3 und legt $D_2 = D_1$ an, indem man durch k eine Parallele zu D_2 zieht und $ki = gh$ macht, so wird $ih = N_2$ und das vollständige dem Knoten 3 entsprechende Viereck ist $hckihg$. Die weitere Aufzeichnung des Kräfteplanes bietet keine Schwierigkeit, indem man entweder zu dem Knoten 4 oder zu dem Knoten 5 übergeht und danach den Knoten 6 löst. Von den Spannkkräften decken sich im Kräfteplane U_1 und U_2 , ferner D_3 und D_4 ; es ist $ef = U_1$; $eh = U_2$; $im = D_3$; $lm = D_4$.

Die Obergurtstäbe und die Normalen werden gedrückt, die Untergurtstäbe und die Diagonalen gezogen.

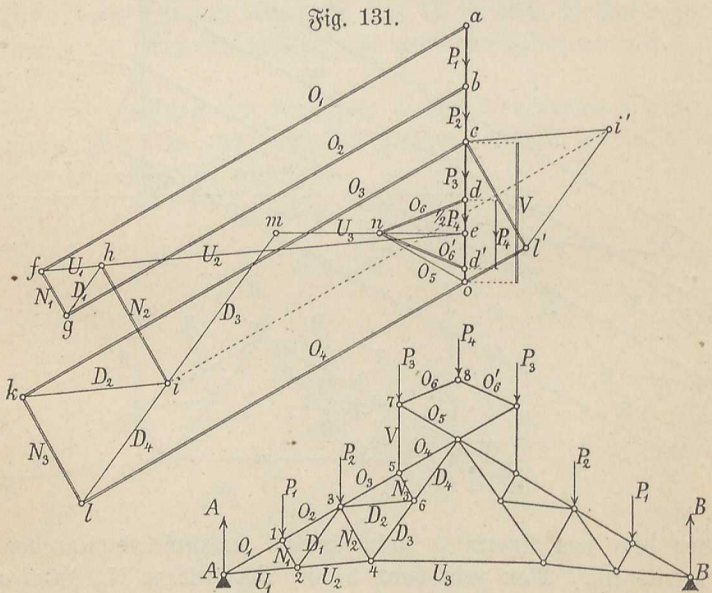
Sind die Knotenpunktlasten ungleich, so wird im Kräfteplan N_3 nicht mehr in der Verlängerung von N_1 liegen. Die Lösung ist dann folgendermaßen vorzunehmen (Fig. 130):

Nachdem die Spannkraften für die in den Knoten A, 1, 2 zusammenstehenden Stäbe in gewohnter Weise bestimmt sind, denke man sich um den Knoten 5 herum einen Schnitt geführt und zeichne für diesen Knoten das Kräftedreieck $cl'd$. In diesem ist $cd = P_3$; $c'l' = N_3$ und $d'l' =$ dem Unterschiede der Spannkraften O_3 und O_4 , also $d'l' = O_3 - O_4$.

Denkt man sich sodann einen Schnitt um den Knoten 6 herumgeführt, so ergibt sich für diesen Knoten aus der nunmehr bekannten Kraft $c'l' = N_3$ das Kräftedreieck $cl'i'$ mit $l'i' = D_4 - D_3$ und $ci' = D_2$.

Damit läßt sich jetzt der Knoten 3 lösen; man erhält für diesen den Kräftezug $hgbc'i'i$, den man so verschiebt, daß sich O_3 richtig an P_2 anschließt. Es kommt dadurch ci' ($= D_2$) in die Lage ki , ferner $c'l'$ ($= N_3$) in die Lage kl .

Die weitere Lösung bietet keine Schwierigkeit.



Ist das Polonceau-Dach mit einem Aufsatze versehen (Fig. 131), so werden nach Lösung der drei Knoten A, 1, 2 zunächst der Reihe nach die Knoten 8, 7, 5, 6 gelöst, und zwar entspricht

	dem Knoten 8	das Vieleck	$dd'd'nd$
"	"	7	" " $edn'oc$
"	"	5	" " $col'c$
"	"	6	" " $cl'i'c$

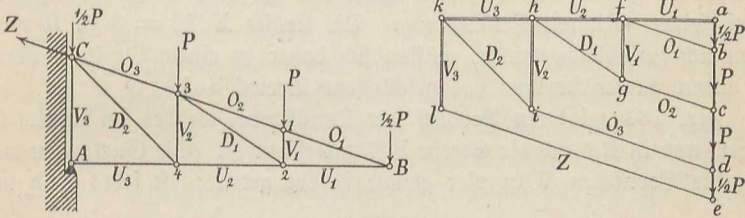
Danach ergibt sich die Kräftefigur $hgbei$ für den Knoten 3. Die Parallelverschiebung von O_3 ist ebenso wie bei Fig. 130 auszuführen.

5) Die Vordächer.

Die Vordächer sind entweder freitragend, d. h. nur am Gebäude befestigt, oder auch noch durch Säulen gestützt. Im ersteren Falle kann die Unterstützung des Daches in den Punkten A und C erfolgen, wie in Fig. 132 und 133, oder es kann eine besondere Druckstange bezw. Zugstange zur Anwendung kommen, von welchen Anordnungen die Fig. 134 und 135 Beispiele geben.

Bei dem Vordache ABC, Fig. 132, ist AB durch die lotrechten Streben in drei gleiche Felder geteilt; jedes Feld sei mit P belastet, so daß auf die Punkte 1 und 3 je die Last P, auf die Punkte B und C je die Last $\frac{1}{2}P$ entfällt.

Fig. 132.



Bei Anfertigung des Kräfteplanes beginnt man mit dem Knoten B, an welchem sich die Kräfte $\frac{1}{2}P, O_1$ und U_1 im Gleichgewichte halten. Man mache $ab = \frac{1}{2}P$ und zerlege ab in $af = \text{und} \parallel U_1$ und $bf = \text{und} \parallel O_1$. Am Knoten 1 bestimme man aus dem Kräfteviereck $bcgf$, in welchem $bc = P$ und $fb = O_1$ bereits bekannt sind, die Kräfte $O_2 = cg$ und $V_1 = gf$. Zum Knoten 2 übergehend vereinige man U_1 und V_1 zu der Mittelkraft ag und zerlege diese nach den Richtungen D_1 und U_2 ; man erhält dadurch $gh = D_1$ und $ha = U_2$. Der dem Knoten 3 entsprechende Kräftezug ist $edihg$ mit $di = O_3$ und $ih = V_2$. Von den vier Kräften, welche sich am Knoten 4 im Gleichgewichte halten, sind die beiden Kräfte U_2 und V_2 von den vorigen Knoten her bekannt, und es werden die beiden anderen Kräfte D_2 und U_3 aus dem Linienzuge $ahika$ gefunden, und zwar $ik = D_2$ und $ka = U_3$. Das für den Knoten C gezeichnete Fünfeck $delkid$ gibt die Kräfte $Z = el$ und $V_3 = lk$.

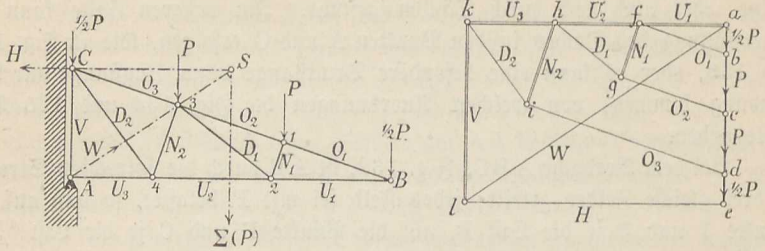
Durch den Umfahrungsinn der den einzelnen Knoten entsprechenden Kräftezüge wird festgestellt, daß die Vertikalen V und die Untergurtstäbe U Druckspannung erleiden, während die Obergurtstäbe und die Diagonalen gezogen werden.

Die Verankerung bei dem Dache Fig. 132 erfolgt in der Richtung der oberen Gurtung, der Anker hat dabei die Zugkraft Z aufzunehmen. Häufiger

geschieht die Verankerung wagerecht, was insofern zweckmäßiger ist, als das Mauerwerk dann für den Anker nicht sehr äg durchbrochen zu werden braucht.

Ein Vordach mit wagerechter Verankerung der oberen Gurtung, welche durch die Normalen N in drei gleiche Felder geteilt wird, ist in Fig. 133

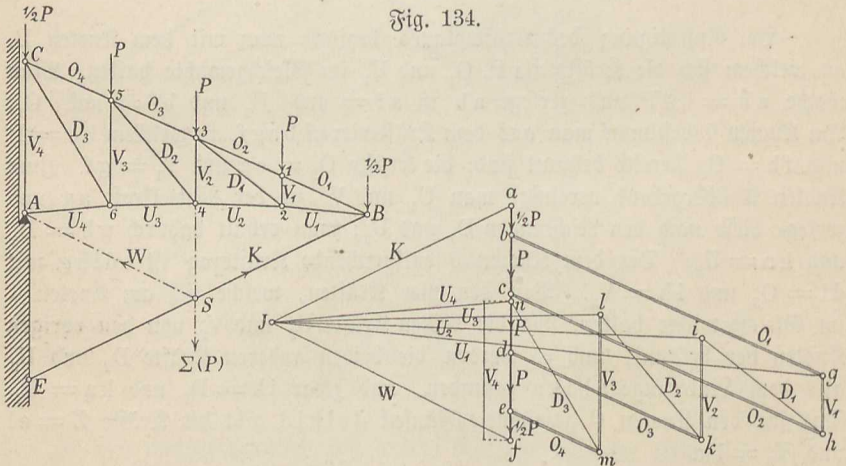
Fig. 133.



dargestellt. Jedes Feld sei wieder mit P belastet. Die Aufertigung des Kräfteplanes geschieht in derselben Weise wie bei dem vorigen Dachstuhl und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Die Kräfte $\Sigma(P) = 3P$, H und W halten sich im Gleichgewichte, müssen sich daher in einem Punkte S schneiden und bilden im Kräfteplane das geschlossene Dreieck ael .

Fig. 134 zeigt ein Vordach mit Druckstrebe, welches im Punkte A fest gelagert und in B durch die Strebe BE unterstützt ist. Die Gurtungen werden durch die Vertikalen V in vier gleiche Felder geteilt; ist jedes Feld mit P

Fig. 134.



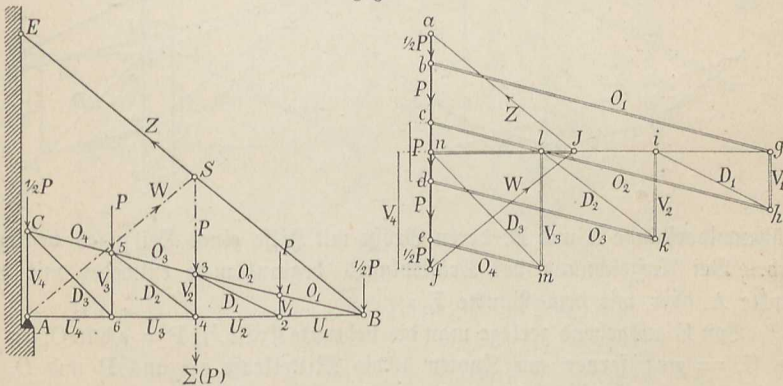
belastet, so erhalten die Punkte B und C je die Belastung $\frac{1}{2}P$, jeder der Punkte $1\ 3\ 5$ die Belastung P . Der ganze Dachbinder befindet sich unter der Einwirkung der drei Kräfte $\Sigma(P)$, W und K , welche miteinander im Gleichgewichte sind, folglich sich in einem Punkte S schneiden müssen und im Kräfteplane ein geschlossenes Dreieck bilden.

Man trage $\Sigma(P) = 4P$ in einem abgerundeten passenden Maßstabe als Strecke af auf, ziehe durch den oberen Endpunkt a eine Parallele zu BE , durch den unteren Endpunkt f eine Parallele zu AS , wodurch man $Ja = K$ und $fJ = W$ erhält. Bei Aufzeichnung des Kräfteplanes beginne man mit dem Punkte B , an welchem sich die Kräfte $\frac{1}{2}PO_1U_1K$ im Gleichgewichte halten. Von dem diesen vier Kräften entsprechenden Vieleck liegt bereits der Zug Jab mit $Ja = K$ und $ab = \frac{1}{2}P$ fest; das Vieleck wird vervollständigt durch $bg \parallel O_1$ und $Jg \parallel U_1$. Die weitere Ausführung des Kräfteplanes bietet keine Schwierigkeit. Die Spannkkräfte der Obergurtstäbe schneiden auf dem Kräftezuge die Strecken P ab , die Spannkkräfte der Untergurtstäbe gehen sämtlich durch den Punkt J . Die Parallelen zu den Vertikalen und Diagonalen bilden den bei g beginnenden geknickten Linienzug $ghiklm$. Zeichenprobe: Der Punkt n , welcher sich bei Bestimmung von D_3 aus dem Knoten 6 ergibt, muß auf der Kraftlinie ab liegen, da die am Knoten A angreifenden WV_4U_4 ein geschlossenes Kräfte-Dreieck (Jfn) bilden müssen.

Die obere Gurtung und die Vertikalen werden gedrückt, die untere Gurtung und die Diagonalen gezogen.

Durch die bei dem Dache Fig. 134 zur Anwendung gebrachte Druckstrebe EB wird der Verkehr etwas gehemmt und ist aus diesem Grunde das folgende Dach Fig. 135 vorzuziehen, bei welchem die Verankerung der Zugstange BE höher am Gebäude erfolgt. Die Punkte B und C erhalten jeder die Belastung $\frac{1}{2}P$, die übrigen Punkte der oberen Gurtung die Belastung P . Es sei S der Schnittpunkt der Kräfte $\Sigma(P)$, Z und W , die sich einander im Gleichgewichte halten.

Fig. 135.



Man bestimme zunächst die Spannkraft Z der Zugstange BE aus dem Kräftedreieck afJ , indem man $\Sigma(P) = af$ aufträgt, durch a eine Parallele zu ES und durch f eine Parallele zu AS zieht. Am Knotenpunkte B wirken die Kräfte $\frac{1}{2}PZO_1U_1$, von denen $\frac{1}{2}P$ und Z bekannt sind und den Kräftezug Jab bilden. Durch Ziehung der Parallelen bg und Jg zu der oberen, bezw. unteren Gurtung erhält man $bg = O_1$ und $gJ = U_1$. Die Lösung

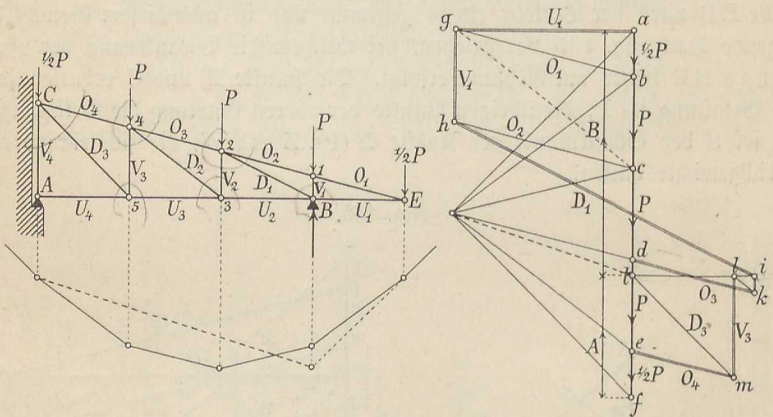
der übrigen Knotenpunkte erfolgt in der Reihenfolge 1 2 3 4 5 6 C in bekannter Weise. Da in Fig. 135 die untere Gurtung geradlinig angenommen wurde, so liegen im Kräfteplane die Spannkraften U in einer Geraden. Es ist $Jg = U_1$ und $Ji = U_2$ Zug, ferner $Jl = U_3$ und $Jn = U_4$ Druck.

Auch hier gilt wieder als Zeichenprobe, daß der Punkt n (Schnittpunkt der D_3 und U_4) auf der Kraftlinie af liegen muß, und zwar aus demselben Grunde wie bei Fig. 134.

In einzelnen Fällen kann es vorkommen, daß einer der Untergurtstäbe bei voller Belastung spannungslos ist. Es mag hier erwähnt werden, daß volle Belastung für den Untergurt nicht der ungünstigste Fall ist, indessen soll hier auf die veränderliche Belastung noch nicht näher eingegangen werden (siehe Beispiel 13 § 15). Alle übrigen Glieder werden bei voller Belastung am stärksten beansprucht und zwar werden die Obergurtstäbe und die Vertikalen gedrückt, die Diagonalen gezogen.

Ein Beispiel eines durch Säulen unterstützten Vordaches zeigt Fig. 136. Die in den Knotenpunkten des Obergurtes wirkenden Lasten erzeugen die

Fig. 136.



Stützwiderstände A und B , deren Größe mit Hilfe eines Seilzuges bestimmt wird. Bei Aufzeichnung des Kräfteplanes beginnt man entweder mit dem Punkte A oder mit dem Punkte E .

Von E ausgehend zerlegt man die bekannte Kraft $\frac{1}{2}P = ab$ in $O_1 = bg$ und $U_1 = ga$; ferner am Knoten 1 die Mittelkraft cg aus P und O_1 in die Kräfte $O_2 = ch$ und $V_1 = hg$. Am Knoten B halten die bekannten Kräfte BU_1V_1 den zu bestimmenden Kräften D_1U_2 das Gleichgewicht; man erhält aus dem diesem Knoten entsprechenden Vieleck $taghit$ die Kräfte $it = U_2$ und $hi = D_1$. Am Knoten 2 wird der aus den Kräften D_1O_2P gebildete und bereits festliegende Kräftezug $ihcd$ durch $ik \parallel V_2$ und $dk \parallel O_3$ vervollständigt zu dem Vieleck $edkihc$, woraus $ki = V_2$ und $dk = O_3$ gefunden wird.

Die den Knoten 3 und 4 entsprechenden Kräftezüge sind bezw.
 tiklt (Knoten 3)
 demlkd (Knoten 4)

mit deren Hilfe die Kräfte $D_2 U_3 V_3$ und O_4 bestimmt werden. Am Knoten 5 bilden die drei Kräfte $U_3 D_3 V_3$ das geschlossene Kräftedreieck tlm , woraus folgt, daß die vierte an diesem Knoten angreifende Kraft $U_4 = \text{Null}$ ist. Die Vertikale V_4 hat allein den Stützenwiderstand A aufzunehmen, daher $V_4 = A$.

Die Druckspannkräfte sind in dem Kräfteplane (Fig. 136) durch Doppellinien bezeichnet.

6) Die Sägedächer.

Die bei Fabrikbauten vielfach benutzten Sägedächer oder Shed-Dächer (Fig. 137) entstehen durch eine Aneinanderreihung mehrerer nebeneinander gestellter Satteldächer von ungleich geneigten Dachflächen. Die steileren nach Norden gefehrten Dachflächen sind mit Glas, die weniger geneigten mit irgend einem anderen Stoffe eingedeckt. Diese Dächer sind geeignet zu gleichmäßiger Beleuchtung großer Räume.

Die Knotenpunktslasten werden, entsprechend der verschiedenen Dachneigung und der verschiedenen Eindeckung, im allgemeinen ungleich ausfallen.

Man bestimme zunächst die Stützenwiderstände A und B mit Hilfe eines

Fig. 137.

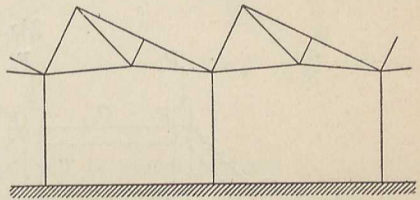


Fig. 138.

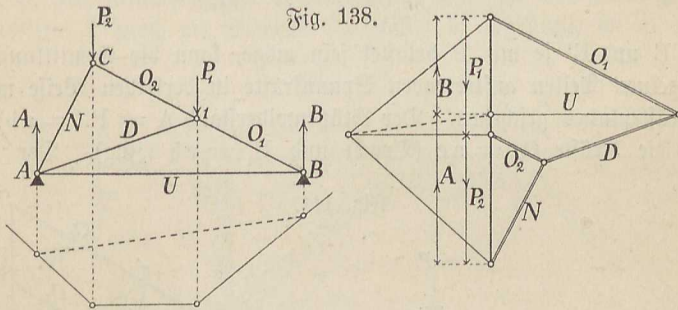
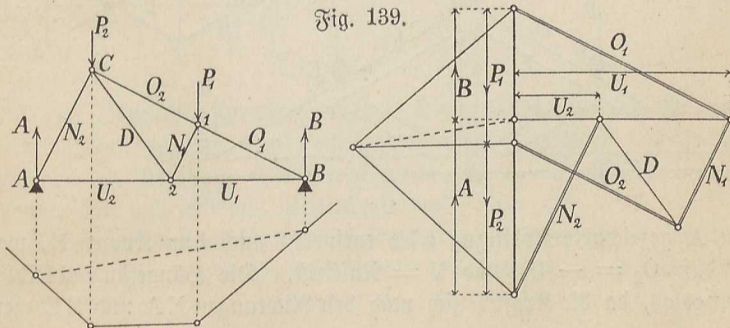


Fig. 139.



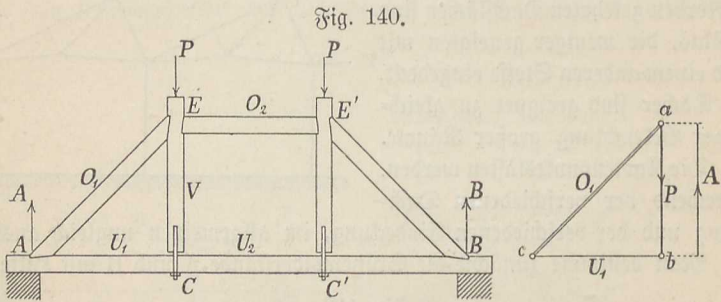
Seilzuges in bekannter Weise, und beginne bei Anfertigung des Kräfteplanes mit dem auf der Seite der flacheren Dachneigung liegenden Auflagerpunkte B.

Einige Beispiele von Kräfteplänen für einfache Sägedächer zeigen die Figuren 138 und 139.

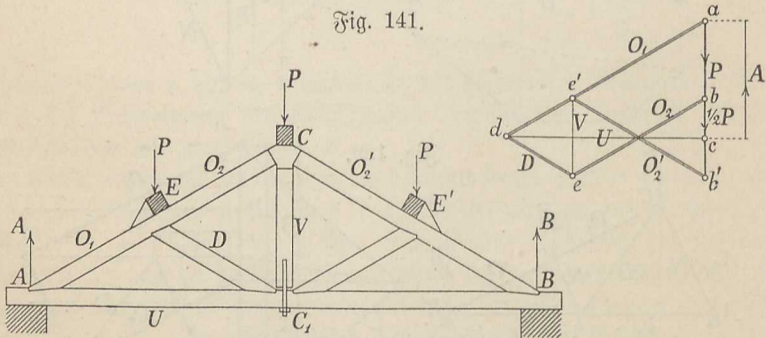
7) Die Holzdächer.

Bei den fachwerkartigen Holzdächern trifft die im Anfang des § 10 S. 74 über das Fachwerk im allgemeinen gemachte Voraussetzung, daß die Knotenpunkte reibungslose Gelenkverbindungen bilden sollen, nicht zu; es lassen sich daher bei den Holzdächern die Spannkkräfte nur angenähert bestimmen. Aus diesem Grunde und da außerdem manche der üblichen Holzkonstruktionen statisch unbestimmt sind, sollen hier nur einige einfache Fälle besprochen werden.

Das Hängewerk wurde bereits unter 2) § 10 Seite 80 und 81 besprochen; bei dem doppelten Hängewerke (Fig. 140), welches in den oberen



Knoten E und E' je mit P belastet sein möge, kann die Ermittlung der in den einzelnen Teilen auftretenden Spannkkräfte in derselben Weise mit Hilfe eines Kräfteplanes geschehen. Der Stützenwiderstand $A = P$ ($= ab$), zerlegt sich in die Kräfte $O_1 = ac$ (Druck) und $U_1 = cb$ (Zug). Der für den



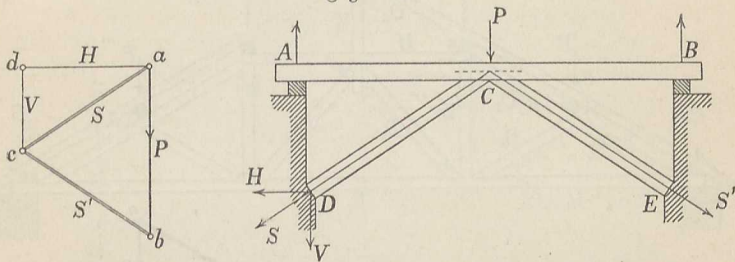
Knoten A gezeichnete Kräftezug abc entspricht auch dem Knoten E, woraus folgt, daß $O_2 = -U_1$ und $V = \text{Null}$ ist. Die Hängefäule bleibt also spannungslos, da die Kraft P sich nach den Richtungen EA und EE' zerlegt,

und hat nur den Zweck, die beiden Gurtungen zusammen zu halten. (Im Falle die Lasten P in den Punkten C und C' angegriffen, wie bei Fig. 100 S. 81, würden die Hängesäulen die Zugkraft P aufzunehmen haben.) Aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten C ergibt sich $U_2 = U_1$.

Fig. 141, welche ein dreifaches Hängewerk zeigt, ist ein vereinfachter Fall der Fig. 125 S. 107 und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Bei den im Hochbau seltener vorkommenden Sprengwerken wird der Balken AB (Fig. 142 und 143) durch Streben, welche sich gegen die Widerlager legen und auf diese einen schräg gerichteten Druck ausüben, abgestützt.

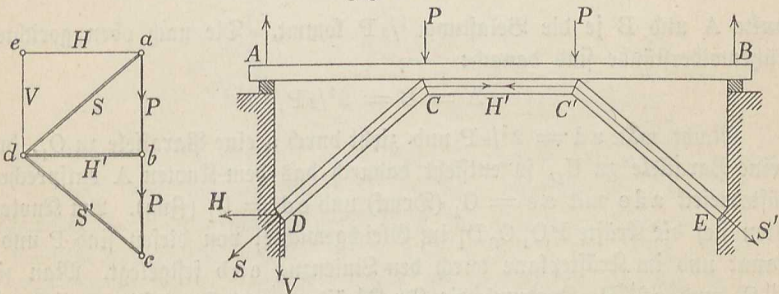
Fig. 142.



Die statische Berechnung der Widerlager soll in einem späteren Paragraphen durchgeführt und hier vorläufig angenommen werden, daß dieselben stark genug gehalten sind, um die durch die Streben übertragenen Schübe aufnehmen zu können.

Bei dem einfachen Sprengwerke (Fig. 142) ist der Balken AB nur in der Mitte C durch die Streben CD und CE abgestützt, welche durch die

Fig. 143.

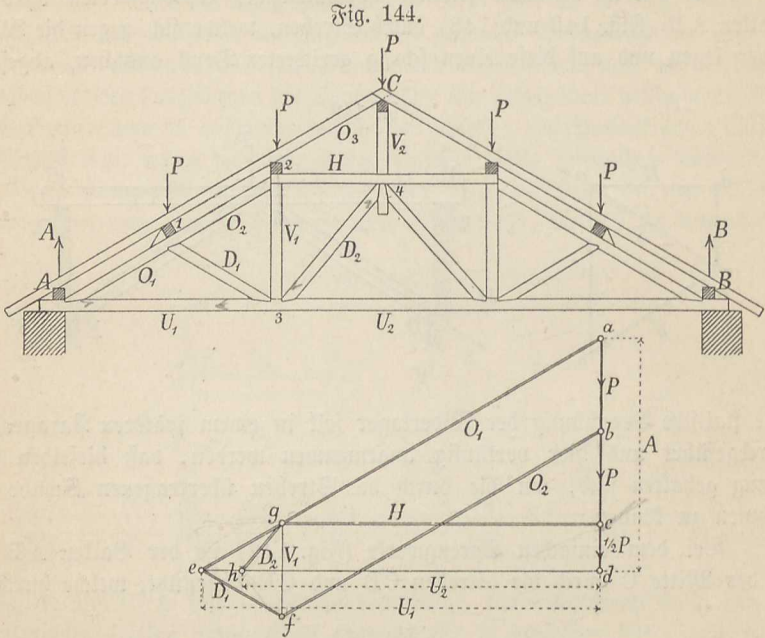


Last P auf Druck beansprucht werden. Die einander gleichen Druckkräfte S und S' ergeben sich aus dem Kräfteplane durch Zerlegung von P nach den Richtungen der Streben. Die Strecken ad und dc des Kräfteplanes stellen die wagerechte und Lotrechte Seitenkraft von S dar.

Der Unterschied zwischen dem Hängewerke und Sprengwerke besteht hauptsächlich darin, daß der Seitenschub H beim Hängewerke in der Stangen- bzw. Balken-Verbindung selbst aufgehoben wird, beim Sprengwerke dagegen nicht.

Ist der Balken AB an zwei Punkten C und C' unterstützt, zwischen denen der Spannriegel CC' eingeschaltet wird, so entsteht das doppelte Sprengwerk Fig. 143. Die Kräftezerlegung desselben ist aus dem der Figur beigefügten Kräftepläne ersichtlich.

Der Binder Fig. 144 ist in 6 gleiche Felder geteilt, jedes Feld mit P belastet, so daß auf die inneren Knotenpunkte je die Belastung P , auf die



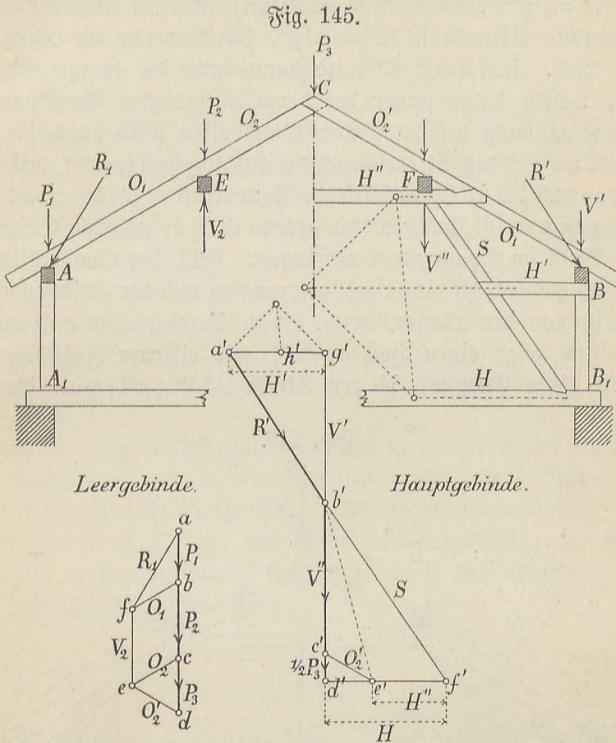
Punkte A und B je die Belastung $\frac{1}{2}P$ kommt. Die nach oben gerichteten Stützenwiderstände sind danach:

$$A = B = 2\frac{1}{2}P$$

Macht man $ad = 2\frac{1}{2}P$ und zieht durch a eine Parallele zu O_1 , durch d eine Parallele zu U_1 , so entsteht dadurch das dem Knoten A entsprechende Kräftedreieck ade mit $ae = O_1$ (Druck) und $ed = U_1$ (Zug). Am Knoten 1 halten sich die Kräfte $PO_1O_2D_1$ im Gleichgewichte; von diesen sind P und O_1 bekannt und im Kräftepläne durch den Linienzug eab festgelegt. Man ziehe $bf \parallel O_2$ und $ef \parallel D_1$, wodurch die Druckkräfte O_2 und D_1 bestimmt sind. Am Knoten 2 erhält man aus den bekannten Kräften P und O_2 mittels des Linienzuges $begfb$ die beiden anderen an diesem Knoten angreifenden Kräfte $V_1 = gf$ (Zug) und $H = eg$ (Druck). O_3 bleibt spannungslos, da die Kraft P durch die Vertikale V_2 unmittelbar auf die Streben D_2 übertragen wird. Von den fünf am Knoten 3 angreifenden Kräften sind bereits die drei Kräfte $U_1D_1V_1$ bekannt; es entspricht denselben der Kräftezug $defg$, welcher durch Ziehung von $gh \parallel D_2$ vervollständigt wird zu dem Vieleck $defghd$.

Aus diesem ergibt sich die auf die Strebe kommende Druckkraft $D_2 = gh$ und die Untergurtspannkraft $U_2 = hd$ (Zug). Das Glied V_2 überträgt die Kraft P unmittelbar auf den Knoten 4, daher $V_2 = P$ (Druck).

Fig. 145 zeigt einen Pfettendachstuhl mit Kniestock, und zwar links das Leergebinde, rechts das Hauptgebinde. Die in den Punkten AEC des Leergebindes angreifenden Lasten seien bezw. $P_1 P_2 P_3$, die zu dem Kräftezuge $abcd$ aneinander gefügt sind. P_3 zerlegt sich nach der Richtung der



Streben in $O'_2 = de$ und $O_2 = ec$. Am Knoten E halten sich die Kräfte $P_2 O_1 O_2$ und der von der Pfette E geleistete lotrechte Gegendruck V_2 im Gleichgewichte; es entspricht diesen Kräften das Kräfteparallelogramm $beef$, aus welchem hervorgeht, daß $O_1 = O_2$ und $V_2 = P_2$ ist. Auf den Knoten A wirken die Kräfte P_1 und O_1 , deren Mittelkraft R_1 von der Pfette A aufgenommen werden muß.

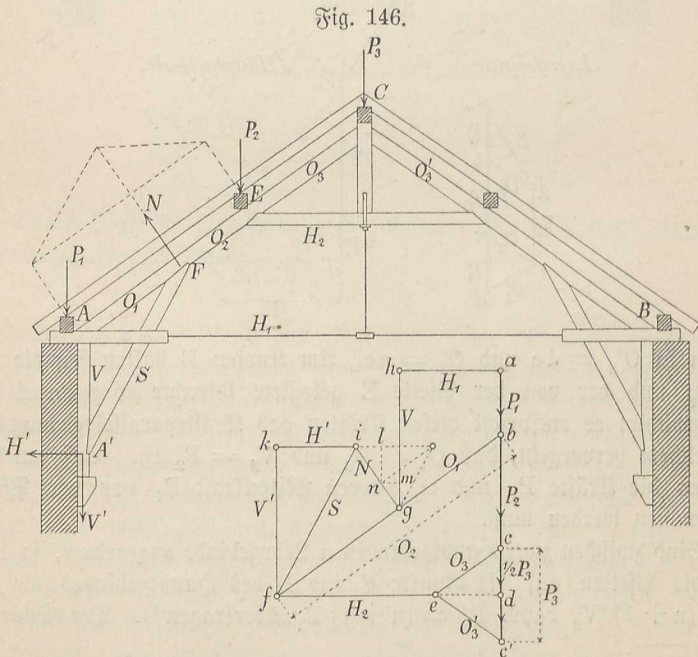
Sind zwischen zwei Hauptgebinden n Lehrgebinde angeordnet, so werden durch die Pfetten auf die Punkte F und B des Hauptgebindes die Kräfte $V'' = (n + 1) V_2$ bezw. $R' = (n + 1) R_1$ übertragen¹⁾. Der Sparrenteil

¹⁾ Streng genommen ergibt sich R' als Mittelkraft aus nR_1 und P_1 , da im Hauptgebinde der Sparrenteil BF spannungslos bleibt; der Sicherheit wegen kann aber doch $R' = (n + 1) R_1$ gesetzt werden.

CF erfährt im Hauptgebinde dieselbe Beanspruchung wie im Leergebinde. Zerlegt man die Mittelkraft $b'e'$ der in F angreifenden Belastung V'' und der Spannkraft O_2 nach der Richtung des Spannriegels und der Strebe, so erhält man aus dem Kräfte-dreieck $b'e'f'$ den Druck auf den Spannriegel $H'' = e'f'$ und den Strebendruck $S = f'b'$. Der Sparrenteil BF des Hauptgebindes bleibt spannungslos.

Am Punkte B zerlegt sich die Kraft $R' = (n+1)R_1$ in die lotrechte Seitenkraft $V' = g'b'$, welche von dem Kniestockpfosten aufzunehmen ist, und in die wagerechte Seitenkraft $H' = a'g'$, durch welche die Zange auf Zug beansprucht wird. Die Kraft H' wird dann durch die Zange auf die Strebe übertragen, welche daher außer der durch S erzeugten Druckspannung noch eine Biegungsspannung erfährt. Der Bundbalken wird durch die wagerechte Seitenkraft $H = d'f'$ des Strebendruckes S auf Zug beansprucht, außerdem wirkt auf denselben noch die in B_1 angreifende Seitenkraft $g'h'$ der Kraft H' , welche ebenfalls Zug hervorruft, während die andere in F angreifende Seitenkraft $a'h'$ von H' den Druck im Spannriegel verringert. Fehlt der Bundbalken $A_1 B_1$, so wird das Dach dadurch zu einem frei gesprengten und der Seitenschub $H +$ der Kraft $g'h'$ ist von der Mauer, bezw. einem Strebepfeiler aufzunehmen.

Fig. 146 zeigt einen Holzdachstuhl mit eiserner Zugstange AB, bei welchem der obere Endpunkt F der Strebe A'F zwischen die Punkte A



und E fällt, so daß die Pfette E nicht unmittelbar unterstützt ist. Es wird diese Anordnung, deren Ausführung allerdings einiges gegen sich hat, bei

einzelnen Dächern zuweilen des Aussehens wegen getroffen. Aus Schönheitsrücksichten wird dabei die Zugstange AB so schwach gehalten, daß sie nur einen gewissen Teil des Seitenschubes aufnehmen kann; der Rest desselben wird dann mittels der Strebe A'F auf die Mauer übertragen, die gewöhnlich durch Strebepfeiler verstärkt ist.

Die Knotenpunktslast $P_3 = cc'$ zerlegt sich nach der Richtung der Hauptstreben und erzeugt in diesem die Druckkräfte $O_3 = ce$ und $O'_3 = c'e$.

Den am Knotenpunkte E angreifenden Kräften $P_2 O_3 H_2 O_2$ entspricht der Kräftezug $bc'ef$ mit den Druckspannkräften $ef = H_2$ und $fb = O_2$.

Im Punkte F findet eine weitere Kräftezerlegung statt. Man darf annehmen, daß nur ein Teil $O_1 = bg$ der Kraft O_2 und zwar ein Teil von einer solchen Größe, daß die wagerechte Seitenkraft H_1 desselben von der Zugstange AB aufgenommen werden kann, sich als Druckkraft in dem Hauptstrebenende FA fortpflanzt und im Punkte A angreift, so daß dem Knoten A der Kräftezug $abgh$ entspricht, mit $gh = V$ und $ha = H_1$. Der andere Teil fg der Kraft O_2 zerlegt sich dann in die in der Richtung der Strebe A'F wirkende Seitenkraft $S = fi$ und in $N = gi$, welche senkrecht zu der Hauptstrebe AE gerichtet ist und in dieser eine Biegungsspannung hervorruft.

Die Strebenkraft S zerlegt sich im Punkte A' in die Lotrechte Seitenkraft V' und in die wagerechte Kraft H', welche letztere als Seitenschub auf die Mauer wirkt.

Durch die wagerechten und Lotrechten Seitenkräfte der durch die Kraft N in den Punkten A und E hervorgerufenen Stützenwiderstände werden die übrigen in diesen Punkten angreifenden Kräfte etwas verändert, so daß dadurch z. B. die Kraft H_1 um das Stück mn vergrößert, die Kraft V um das Stück gm verkleinert wird; desgleichen wird der Druck H_2 im Spannriegel um das Stück il verringert.

§ 15.

Zahlenbeispiele zu den Dachkonstruktionen.

In den folgenden Beispielen ist die Spannweite des Daches mit l , die Höhe des Scheitels über der durch die Auflagerpunkte gezogenen Wagerechten mit h bezeichnet. Die Feldweiten sind stets einander gleich vorausgesetzt. Für die Spannkräfte sind nur die gerechneten Werte angegeben. Man kann dann aus der Vergleichung derselben mit den zeichnerisch zu ermittelnden Werten den Genauigkeitsgrad der Zeichnung beurteilen. Die Beispiele sind sämtlich durchzukonstruieren unter Benutzung eines Längenmaßstabes 1 : 100 und eines Kräftemaßstabes $1000 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$.

Beispiel 1. Deutsches Dach nach Fig. 123 S. 106

$$l = 8 \text{ m}; \quad h = 2 \text{ m}; \quad V = 1 \text{ m}$$

$$\text{Binderentfernung: } b = 3 \text{ m}$$

Belastung für das qm der Grundrißfläche: $p = 165 \text{ kg}$

Danach ergibt sich die Belastung eines Binders zu:

$$p \cdot b \cdot l = 165 \cdot 3 \cdot 8 = 3960 \text{ kg}$$

die Belastung eines Feldes zu:

$$P = \frac{3960}{4} = 990 \text{ kg}$$

Die Spannkraften sind:

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = 6641 \text{ kg} \\ O_2 = 4427 \text{ " } \\ D = 1980 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{array}{l} U = 6123 \text{ kg} \\ V = 2970 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Zug}$$

Beispiel 2. Deutsches Dach nach Fig. 124 S. 106

$$l = 12 \text{ m}; \quad h = 2,4 \text{ m}; \quad V = 1,6 \text{ m}$$

$$\text{Binderentfernung: } b = 3,5 \text{ m}$$

$$\text{Knotenpunktbelastung: } P = 1120 \text{ kg}$$

Wie groß also die Belastung auf das qm der Grundrissfläche?

Die Spannkraften sind:

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = 11309 \text{ kg} \\ O_2 = 8293 \text{ " } \\ O_3 = 6785 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{array}{l} U = 10593 \text{ kg} \\ V = 3920 \text{ " } \\ D_1 = 2800 \text{ " } \\ D_2 = 1508 \text{ " } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zug} \\ \\ \text{Druck} \end{array}$$

Beispiel 3. Englisches Dach nach Fig. 125 S. 107

$$l = 15 \text{ m}; \quad h = 3 \text{ m}; \quad V_2 = 2,5 \text{ m}$$

$$\text{Binderentfernung: } b = 4 \text{ m}$$

$$\text{Belastung: } p = 150 \text{ kg/qm}$$

$$P = 1500 \text{ kg}$$

Die Spannkraften sind:

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = 12117 \text{ kg} \\ O_2 = 9694 \text{ " } \\ O_3 = 7271 \text{ " } \\ U_1 = 11275 \text{ " } \\ U_2 = 9020 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{array}{l} V_1 = 750 \text{ kg} \\ V_2 = 3902 \text{ " } \\ D_1 = 2328 \text{ " } \\ D_2 = 2624 \text{ " } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zug} \\ \\ \text{Druck} \end{array}$$

Beispiel 4. Belgisches Dach nach Fig. 126 S. 108

$$l = 20 \text{ m}; \quad h = 5 \text{ m}; \quad N_3 = 3 \text{ m}; \quad O_6 \parallel O_4$$

$$b = 4 \text{ m}; \quad p = 160 \text{ kg/qm}; \quad P = 1600 \text{ kg}$$

Die Spannkraften sind:

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = 16433 \text{ kg} \\ O_2 = 15720 \text{ " } \\ O_3 = 13016 \text{ " } \\ O_4 = 9594 \text{ " } \\ O_5 = 1789 \text{ " } \\ O_6 = 1789 \text{ " } \\ D_1 = 2115 \text{ " } \\ D_2 = 2448 \text{ " } \\ D_3 = 5307 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck} \quad \left. \begin{array}{l} U_1 = 14801 \text{ kg} \\ U_2 = 12686 \text{ " } \\ U_3 = 10571 \text{ " } \\ U_4 = 7084 \text{ " } \\ N_1 = 1425 \text{ " } \\ N_2 = 2137 \text{ " } \\ N_3 = 4275 \text{ " } \\ V = 3200 \text{ " } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Zug} \\ \\ \\ \text{Druck} \end{array}$$

Beispiel 5. Belgisches Dach nach Fig. 127 S. 109

$$l = 14,4 \text{ m}; \quad h = 4 \text{ m}$$

$$P = 1560 \text{ kg}$$

$$Q = 2000 \text{ "}$$

Die Länge der mittleren Vertikalen ergibt sich zu: $V = 5,653 \text{ m}$.
Die Spannkkräfte sind:

$O_1 = 10053 \text{ kg}$	}	Druck	$N_1 = 1366 \text{ kg}$	}	Druck
$O_2 = 9299 \text{ "}$			$N_2 = 3360 \text{ "}$		
$O_3 = 6326 \text{ "}$			$V = 4585 \text{ "}$		
$U_1 = 9016 \text{ "}$	}	Zug	$D = 2981 \text{ "}$	}	Zug
$U_2 = 7342 \text{ "}$					

Beispiel 6. Französisches Dach nach Fig. 128 S. 110

$$l = 8,8 \text{ m}; \quad h = 2,5 \text{ m}; \quad N = 1 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ kg}$$

Die Spannkkräfte sind:

$O_1 = 4037 \text{ kg}$	}	Druck	$U_1 = 3543 \text{ kg}$	}	Zug
$O_2 = 3543 \text{ "}$			$U_2 = 2076 \text{ "}$		
$N = 870 \text{ "}$			$D = 1604 \text{ "}$		

Beispiel 7. Französisches Dach nach Fig. 129 S. 110

$$l = 20 \text{ m}; \quad h = 4 \text{ m}; \quad N_2 = 2 \text{ m}$$

$$P = 2000 \text{ kg}$$

Die Spannkkräfte sind:

$O_1 = 20099 \text{ kg}$	}	Druck	$N_1 = 1857 \text{ kg}$	}	Druck
$O_2 = 19356 \text{ "}$			$N_2 = 3714 \text{ "}$		
$O_3 = 18613 \text{ "}$			$N_3 = 1857 \text{ "}$		
$O_4 = 17870 \text{ "}$			$D_1 = 2667 \text{ "}$		
$U_1 = 18666 \text{ "}$	}	Zug	$D_2 = 2667 \text{ "}$	}	Zug
$U_2 = 15999 \text{ "}$			$D_3 = 5728 \text{ "}$		
$U_3 = 10370 \text{ "}$			$D_4 = 8395 \text{ "}$		

Beispiel 8. Bordach nach Fig. 132 S. 113

$$AB = 4,5 \text{ m}; \quad V_3 = 1,2 \text{ m}$$

$$P = 900 \text{ kg}$$

Die Spannkkräfte sind:

$O_1 = 1746 \text{ kg}$	}	Zug	$U_1 = 1688 \text{ kg}$	}	Druck
$O_2 = 1746 \text{ "}$			$U_2 = 3375 \text{ "}$		
$O_3 = 3493 \text{ "}$			$U_3 = 5063 \text{ "}$		
$Z = 5239 \text{ "}$			$V_1 = 900 \text{ "}$		
$D_1 = 1913 \text{ "}$			$V_2 = 1350 \text{ "}$		
$D_2 = 2161 \text{ "}$		$V_3 = 1350 \text{ "}$			

Beispiel 9. Vordach mit wagerechter Verankerung nach Fig. 133 S. 114

$$AB = 4,8 \text{ m}; \quad V = 1,2 \text{ m} \\ P = 800 \text{ kg}$$

Die Spannkraften sind:

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = 1649 \text{ kg} \\ O_2 = 1844 \text{ " } \\ O_3 = 3592 \text{ " } \\ H = 4800 \text{ " } \\ D_1 = 1600 \text{ " } \\ D_2 = 1740 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Zug}$$

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = 1600 \text{ kg} \\ U_2 = 3200 \text{ " } \\ U_3 = 4800 \text{ " } \\ N_1 = 778 \text{ " } \\ N_2 = 1167 \text{ " } \\ V = 2400 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck}$$

Beispiel 10. Vordach untersttzt durch Druckstrebe (Fig. 134 S. 114)
mit geradliniger wagerechter unterer Gurtung

$$AB = 6 \text{ m}; \quad AC = 1 \text{ m}; \quad AE = 2,6 \text{ m} \\ P = 1000 \text{ kg}$$

Die Spannkraften sind:

$$\left. \begin{array}{l} K = 5031 \text{ kg} \\ O_1 = 9120 \text{ " } \\ O_2 = 9120 \text{ " } \\ O_3 = 6080 \text{ " } \\ O_4 = 3040 \text{ " } \\ D_1 = 3160 \text{ " } \\ D_2 = 3360 \text{ " } \\ D_3 = 3606 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck}$$

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = 13615 \text{ kg} \\ U_2 = 10615 \text{ " } \\ U_3 = 7615 \text{ " } \\ U_4 = \text{Null} \text{ " } \\ V_1 = 1000 \text{ " } \\ V_2 = 1500 \text{ " } \\ V_3 = 2000 \text{ " } \\ V_4 = 2500 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Zug}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 1000 \text{ " } \\ V_2 = 1500 \text{ " } \\ V_3 = 2000 \text{ " } \\ V_4 = 2500 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck}$$

Beispiel 11. Vordach untersttzt durch Säule nach Fig. 136 S. 116.
Ganze Ausladung = 8 m und zwar:

$$AB = 6 \text{ m}; \quad BE = 2 \text{ m}; \quad AC = 1,6 \text{ m} \\ P = 1200 \text{ kg}$$

Die Auflagerdrücke ergeben sich zu:

$$A = 1600 \text{ kg}; \quad B = 3200 \text{ kg}$$

Die Spannkraften sind:

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = 3060 \text{ kg} \\ O_2 = 3060 \text{ " } \\ O_3 = 2040 \text{ " } \\ O_4 = 1700 \text{ " } \\ U_1 = 3000 \text{ " } \\ U_2 = 2000 \text{ " } \\ U_3 = 1667 \text{ " } \\ U_4 = \text{Null} \text{ " } \end{array} \right\} \text{Zug}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 1200 \text{ kg} \\ V_2 = 200 \text{ " } \\ V_3 = 1333 \text{ " } \\ V_4 = 1600 \text{ " } \\ D_1 = 5385 \text{ " } \\ D_2 = 389 \text{ " } \\ D_3 = 2133 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Druck}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = 5385 \text{ " } \\ D_2 = 389 \text{ " } \\ D_3 = 2133 \text{ " } \end{array} \right\} \text{Zug}$$

Beispiel 12. Sägeförmiges Dach nach Fig. 147

$$l = 6 \text{ m}; \quad h = 2,2 \text{ m}$$

Binderentfernung: $b = 3,6 \text{ m}$

Firstwinkel bei C = 90°

Aus:

$$h^2 = l_1 \cdot l_2 = l_1 (l - l_1)$$

ergibt sich nach Einsetzung der Zahlenwerte für h und l :

$$l_1 = 5,04 \text{ m}$$

$$l_2 = 0,96 \text{ m}$$

Durch den Knotenpunkt 1 wird die obere Gurtung AC in zwei gleiche Teile geteilt. Strebe 1—2 \perp AC, untere Zugstange AB geradlinig.

Die Belastungen für das qm der Grundrißfläche betragen

für die mit Wellblech eingedeckte Dachfläche AC: $p_1 = 160 \text{ kg}$

" " " Glas " " BC: $p_2 = 600 \text{ kg}$

Die Knotenpunktlasten werden danach:

$$P_1 = p_1 \frac{l_1}{2} b = 1452 \text{ kg}$$

$$P_2 = \left(p_1 \frac{l_1}{4} + p_2 \frac{l_2}{2} \right) b = 1763 \text{ kg}$$

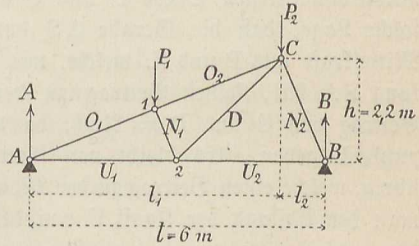
Die Stützenwiderstände ergeben sich zu:

$$A = 1124 \text{ kg}; \quad B = 2091 \text{ kg}$$

Die Spannkkräfte sind:

$O_1 = 2810 \text{ kg}$	}	Druck	$U_1 = 2570 \text{ kg}$	}	Zug
$O_2 = 2229 \text{ "}$			$U_2 = 912 \text{ "}$		
$N_1 = 1331 \text{ "}$			$D = 1662 \text{ "}$		
$N_2 = 2281 \text{ "}$					

Fig. 147.



Beispiel 13. Aufgehängtes Vordach nach Fig. 135 S. 115

$$AB = 6,0 \text{ m}; \quad AC = 1,2 \text{ m}; \quad AE = 3,6 \text{ m}$$

$$P = 1150 \text{ kg}$$

Die Spannkkräfte sämtlicher Stäbe mit Ausnahme derjenigen des Untergurtes sind für volle Belastung zu bestimmen und ergeben sich zu:

$O_1 = 8796 \text{ kg}$	$V_1 = 1150 \text{ kg}$	$D_1 = 3096 \text{ kg}$
$O_2 = 8796 \text{ "}$	$V_2 = 1725 \text{ "}$	$D_2 = 3349 \text{ "}$
$O_3 = 5865 \text{ "}$	$V_3 = 2300 \text{ "}$	$D_3 = 3682 \text{ "}$
$O_4 = 2932 \text{ "}$	$V_4 = 2300 \text{ "}$	

Die Diagonalen D werden gezogen, sämtliche anderen Glieder gedrückt.

Die Spannkkräfte der Untergurtstäbe dürfen nicht aus dem für volle Belastung konstruierten Kräfteplane entnommen werden, da volle Belastung für diese Stäbe nicht der ungünstigste Fall ist. (Nur in U_4 entsteht bei voller Belastung die größte Druckspannung.)

Der Einfluß der Einzelkraft P auf die Spannkraft eines Untergurtstabes läßt sich in sehr klarer Weise erkennen mit Hilfe der Ritter'schen Methode der statischen Momente (Fig. 148). Auf die ganze Stangenverbindung wirkt außer den Kräften P und Z , welche sich in S schneiden, noch der

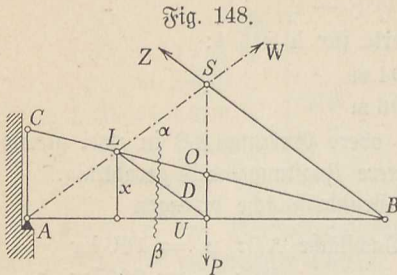


Fig. 148.

Widerstand W des festen Stützpunktes A , dessen Richtung durch die Gerade AS gegeben ist. Diese drei Kräfte halten einander im Gleichgewichte, die Mittelkraft von P und Z ist daher gleich, aber entgegengesetzt gerichtet dem Stützendrucke W , hat also die Richtung SA .

Um die Spannkraft U zu ermitteln, führe man den Schnitt $\alpha\beta$, welcher die Stäbe UDO trifft, und stelle für das rechts von $\alpha\beta$ liegende Trägerstück

die Gleichung der statischen Momente auf, indem man den Schnittpunkt L der mitdurchschnittenen Stäbe D und O als Drehpunkt wählt. Hat nun P eine solche Lage, daß die Gerade AS durch den Punkt L geht, so liefert die Mittelkraft aus P und Z , welche, wie vorhin bereits gesagt wurde, die Richtung SA hat, keinen Beitrag zu der Momentengleichung. Ebenso ist der Beitrag von O und $D = \text{Null}$, da diese Kräfte ebenfalls durch den Drehpunkt L gehen. Es bleibt von sämtlichen Kräften daher nur die Kraft U übrig, welche einen Beitrag zu der Momentengleichung liefern kann. Bezeichnet man den Abstand der Kraft U von dem Drehpunkte L mit x , so erhält man:

$$U \cdot x = 0$$

woraus folgt, daß $U = \text{Null}$ ist.

Eine Kraft P , deren Richtung durch den Punkt S (Schnittpunkt der verlängerten AL mit Z) geht, bringt also in dem Stabe U die Spannung Null hervor, der Punkt S kann deshalb der Nullpunkt genannt werden.

Jegende eine andere rechts vom Nullpunkte wirkende Kraft P' bildet mit Z' eine Mittelkraft W' (von S' nach A wirkend), welche eine Drehung um den Punkt L im Sinne der Zeiger einer Uhr hervorzubringen strebt (Fig. 149). Bezeichnet man den Hebelarm von W' mit y , so erhält man:

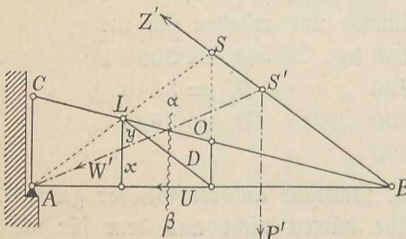
$$U \cdot x + W' \cdot y = 0$$

folglich:

$$U = - \frac{W' \cdot y}{x}$$

d. h. eine rechts vom Nullpunkte wirkende Kraft P' erzeugt in dem Untergurtstabe U Druckspannung. In derselben Weise läßt sich zeigen, daß eine links vom Nullpunkte wirkende Kraft in U Zugspannung hervorbringt.

Fig. 149.



Um die größte in U auftretende Zugspannung zu erhalten, muß man daher alle links von S befindlichen Knotenpunkte voll belastet, alle rechts von S befindlichen Knotenpunkte unbelastet annehmen.

Um die größte in U auftretende Druckspannung zu erhalten, hat man alle rechts von S liegenden Knotenpunkte voll belastet, dagegen alle Knotenpunkte links von S unbelastet anzunehmen.

Liegt der Punkt S gerade über einem Knotenpunkte, so ist es gleichgültig, ob derselbe belastet oder unbelastet angenommen wird, denn eine Belastung dieses Knotens würde in dem betreffenden Untergurtstabe die Spannung Null hervorbringen.

Danach ergeben sich für unser Beispiel folgende Belastungsfälle:

$\max U_1$	entsteht,	wenn die Knoten 1 3 5	belastet sind,
$\max U_2$	"	" " " "	3 u. 5 " "
$\max U_3$	"	der " 5	" ist,
$\max U_4$	"	kein Knoten	belastet ist,
$\min U_1$	"	der Knoten B	belastet ist,
$\min U_2$	"	" " B	" "
$\min U_3$	"	die " B u. 1	" sind,
$\min U_4$	"	" " B 1 3 5	" "

Die Belastung des Knotenpunktes C kann unberücksichtigt bleiben, da dieselbe ganz ohne Einfluß auf die Spannkraften U ist. Der besseren Uebersicht wegen ist die Konstruktion der Spannkraften U_{\max} und U_{\min} in den Figuren 150 und 151 gesondert durchgeführt worden.

a) Die Spannkraften U_{\max} (Zug).

Man füge die Belastungen der Knotenpunkte 1 3 5 zu dem Kräftezuge a b c d aneinander, wähle einen beliebigen Pol O und zeichne dazu den Seilzug m I I I V n (Fig. 150).

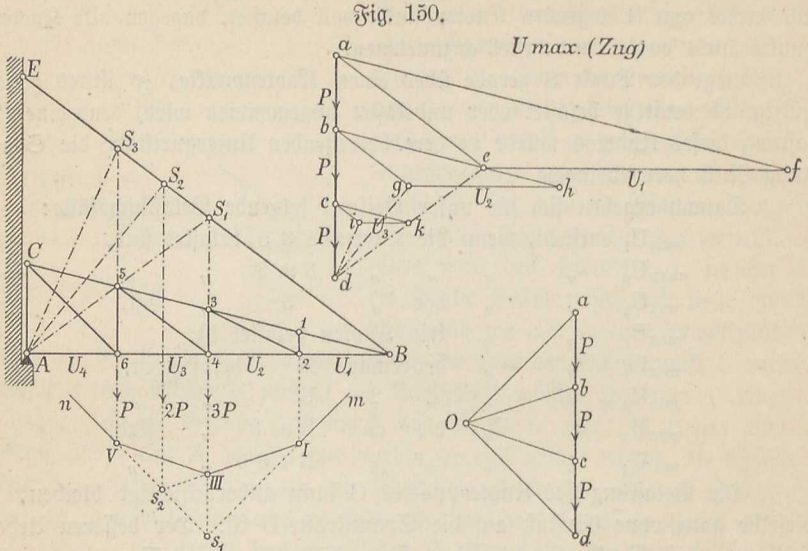
Zur Bestimmung von $\max U_1$ nehme man die Knoten 1 3 5 belastet an. Der Schnittpunkt s_1 der verlängerten Seilzugseiten m I und n V giebt die Lage der Mittelkraft dieser Belastungen, welche die Zugstange BE im Punkte S_1 schneidet. Durch Zeichnung des Kräftedreiecks a d e, in welchem $a e \parallel EB$ und $d e \parallel AS_1$ gezogen ist, erhält man die durch die Belastungen der Knoten 1 3 5 hervorgebrachte Zugkraft $Z_1 = a e$. Da die Kräfte $Z_1 O_1 U_1$ miteinander im Gleichgewichte sind, so ziehe man im Kräfteplane $a f \parallel O_1$ und $e f \parallel U_1$. Man erhält dadurch $e f = \max U_1$.

Für $\max U_2$ erhalten die Knoten 3 und 5 je die Belastung P, deren Mittelkraft durch den Schnittpunkt s_2 der verlängerten Seilzugseiten I I I und n V geht und die Zugstange BE im Punkte S_2 schneidet. Den in S_2 angreifenden Kräften entspricht das Kräftedreieck b d g, in welchem $b g \parallel EB$ und $d g \parallel AS_2$ gezogen ist. Zieht man durch b eine Parallele zu der oberen Gurtung BC und durch g eine Parallele zu der unteren Gurtung AB, so erhält man $g h = \max U_2$.

$\max U_3$ ergibt sich, wenn allein der Knoten 5 belastet ist durch die Kraft P, welche die Zugstange BE in S_3 schneidet. Man zeichne für die in

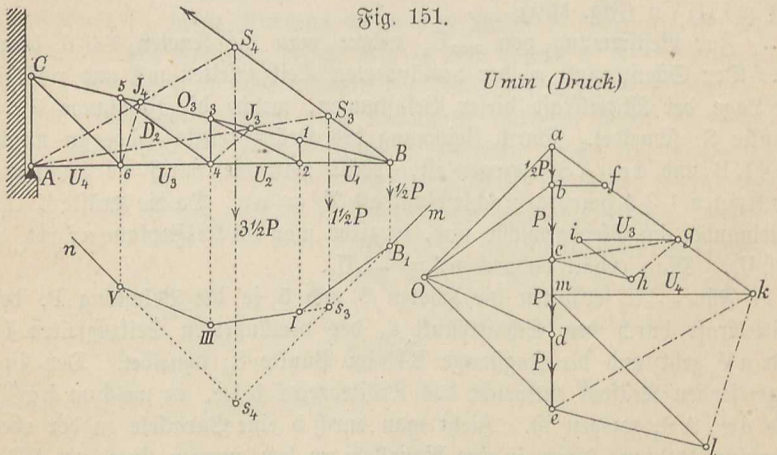
S_3 angreifenden Kräfte das Kräftedreieck edi und zerlege ei in $ck \parallel O$ und $ik \parallel U$. Es ist dann $ik = \max U_3$.

Für $\max U_4$ sind sämtliche Knotenpunkte unbelastet anzunehmen, wodurch sich $\max U_4 = \text{Null}$ ergibt.



b) Die Spannkraften U_{\min} (Druck).

Man füge die Belastungen der Knotenpunkte B 1 3 5 zu dem Kräftezuge $abede$ aneinander und zeichne entsprechend dem beliebig gewählten Pole O den Seilzug $mB_1 III Vn$ (Fig. 151).



Für $\min U_1$ und $\min U_2$ ist der Knoten B mit $1/2 P$ belastet anzunehmen. An diesem Knoten halten sich dann im Gleichgewichte die Last $1/2 P$, die durch dieselbe erzeugte Spannkraft Z , in der Zugstange BE , und die Kraft

U_1 bzw. U_2 (die Obergurtspannkraft O ist = Null). Das diesen drei Kräften entsprechende Kräftedreieck abf erhält man, wenn man durch a eine Parallele zu BE , durch b eine Parallele zu U zieht. Es ist dann $bf = \min U_1 = \min U_2$.

$\min U_3$ entsteht, wenn der Knoten 1 mit P , der Knoten B mit $1/2 P$ belastet wird. Die Mittelkraft aus diesen beiden Lasten geht durch den Schnittpunkt s_3 der verlängerten Seilzugseiten mB_1 und III und trifft die Zugstange BE im Punkte S_3 . Die drei am Punkte S_3 angreifenden Kräfte (Mittelkraft aus P und $1/2 P$, die Spannkraft Z_3 in der Zugstange BE und der in der Richtung AS_3 wirkende Gegenruck W_3 des festen Stützpunktes A) halten sich einander im Gleichgewichte und bilden das Kräftedreieck acg , aus welchem $cg = W_3$ und $ga = Z_3$ gewonnen wird. Die dem Gegenrucke W_3 gleiche aber entgegengesetzte Kraft (im Kräfteplane durch die Strecke gc dargestellt) ist die Mittelkraft der Knotenpunktlasten P und $1/2 P$ und der Kraft Z_3 und muß den Kräften $O_3 D_2 U_3$ das Gleichgewicht halten. Die Zerlegung von W_3 in die Seitenkräfte $O_3 D_2 U_3$ geschieht nach 4 § 10 S. 85. Man bestimme den Schnittpunkt J_3 von W_3 und O_3 und verbinde diesen mit dem Schnittpunkte 4 der Kräfte U_3 und D_2 durch die Gerade $J_3 4$. Im Kräfteplane ziehe man sodann $ch \parallel O_3$ und $gh \parallel J_3 4$ und zerlege die Kraft gh nach den Richtungen von D_2 und U_3 , wodurch man $ig = \min U_3$ erhält.

Genau in derselben Weise ist die Bestimmung von $\min U_4$ durchzuführen, wobei der Knoten B mit $1/2 P$, die Knoten 1 3 5 mit P belastet anzunehmen sind. Man erhält $mk = \min U_4$. Diese Spannkraft kann übrigens auch aus dem für volle Belastung gezeichneten Kräfteplane entnommen werden.

Für obiges Zahlenbeispiel ergeben sich folgende Werte:

$\max U_1 = 5750 \text{ kg}$	$\min U_1 = - 958 \text{ kg}$
$\max U_2 = 2875 \text{ "}$	$\min U_2 = - 958 \text{ "}$
$\max U_3 = 958 \text{ "}$	$\min U_3 = - 1917 \text{ "}$
$\max U_4 = \text{Null} \text{ "}$	$\min U_4 = - 3833 \text{ "}$

§ 16.

Winddruck.

Im mittleren Europa kann der Winddruck auf eine rechtwinklig zur Windrichtung stehende Fläche zu $p = 150 \text{ kg}$ für das qm angenommen werden. Erfahrungsgemäß bildet die Windrichtung mit der Wagerechten einen Winkel von etwa 10° , so daß der Winkel, den die Windrichtung mit einer um den Winkel α gegen die Wagerechte geneigten Dachfläche AB (Fig. 152) einschließt, $= \alpha + 10^\circ$ ist. Die Lotrechte Windebene ist dabei rechtwinklig zur Dachtraufe vorausgesetzt.

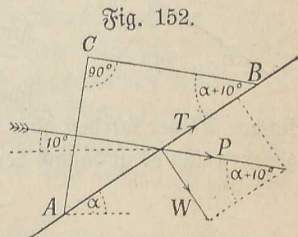


Fig. 152.

Zieht man die Linie AC rechtwinklig gegen die Windrichtung und betrachtet ein Stück des Daches von der Tiefe der Bänderentfernung b, so drückt gegen die Dachfläche b . AB ein Windprisma vom Querschnitt

$$b \cdot AC = b \cdot AB \sin (\alpha + 10^0),$$

der Winddruck gegen die Dachfläche b . AB ist daher:

$$P = p \cdot b \cdot AC = p \cdot b \cdot AB \sin (\alpha + 10^0),$$

Zerlegt man P in zwei Seitenkräfte, von denen die eine W rechtwinklig zur Dachfläche, die andere T parallel zur Dachfläche gerichtet ist, so kann man letztere vernachlässigen, da der Reibungswinkel des Windes gegen die Dachfläche = Null ist. Es bleibt daher nur die rechtwinklig zur Dachfläche gerichtete Seitenkraft:

$$W = P \cdot \sin (\alpha + 10^0) = p \cdot b \cdot AB \sin^2 (\alpha + 10^0)$$

zu berücksichtigen.

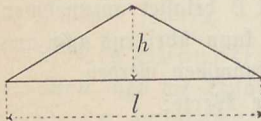
Der rechtwinklig zur Dachfläche gerichtete Winddruck für das qm der geneigten Dachfläche ist daher:

$$w = \frac{W}{b \cdot AB} = p \cdot \sin^2 (\alpha + 10^0)$$

und für p = 150 kg:

$$w = 150 \cdot \sin^2 (\alpha + 10^0)$$

Fig. 153.



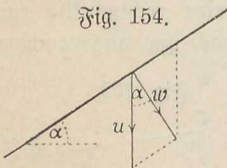
Bedeutet l die ganze Spannweite des Daches, h die Firsthöhe (Fig. 153), so ergibt sich aus der letzten Gleichung für verschiedene Werte von h : l folgende Tabelle:

Tabelle des rechtwinklig zur Dachfläche gerichteten Winddruckes für das qm der geneigten Dachfläche:

für $\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
wird w =	100	70	54	42	34	29	25	22	20

Zerlegt man w in eine Lotrechte und eine parallel zur Dachfläche gerichtete Seitenkraft (Fig. 154), so ist erstere:

Fig. 154.



$$u = \frac{w}{\cos \alpha}$$

Die längs der Dachfläche wirkende Seitenkraft kann vernachlässigt werden.

u ist der Lotrechte Winddruck für das qm der schrägen Dachfläche. Bei der üblichen Berechnungsweise flacher Dächer werden aber die Belastungen für das qm der Grundrißfläche angegeben und es ist danach der Lotrechte Winddruck für das qm der Grundrißfläche:

$$v = \frac{u}{\cos \alpha} = \frac{w}{\cos^2 \alpha}$$

Danach ist folgende Tabelle berechnet:

Tabelle des lotrechten Winddruckes für das qm der Grundrißfläche:

für $\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
wird $v =$	200	101	68	49	38	31	27	23	21

Wird bei der Berechnung eines Daches der rechtwinklig zur Dachfläche gerichtete Winddruck W eingeführt, so ist die Mittelkraft R aus W und den lotrechten Lasten (Eigengewicht und Schnee) schräg gerichtet und es lassen sich die Stützenwiderstände A und B mit Sicherheit nur dann bestimmen, wenn das eine Auflager, z. B. dasjenige bei A , als bewegliches Rollenlager ausgeführt wird, was bei den jetzigen größeren eisernen Dächern ziemlich allgemein geschieht, während das andere Auflager B als festes Auflager hergestellt ist. Da in diesem Falle der Stützenwiderstand bei A , abgesehen von dem verhältnismäßig kleinen Reibungswinkel, lotrecht aufwärts gerichtet ist, so läßt sich der Schnittpunkt S von A und der Kraft R genau festlegen.

Fig. 155.

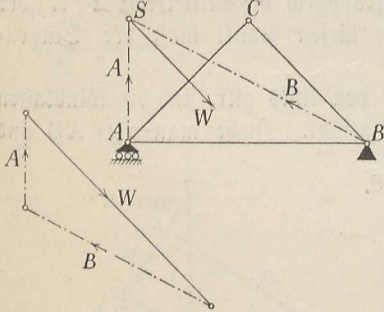
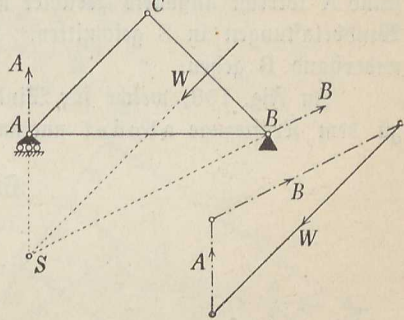


Fig. 156.



Der Stützenwiderstand B muß dann ebenfalls durch diesen Schnittpunkt S gehen, hat also die Richtung BS oder SB , je nachdem der Wind von links oder rechts kommt. Die Größen von A und B ergeben sich leicht aus dem Kräfteplane.

Die zeichnerische Ermittlung der Stützenwiderstände A und B eines nur durch den rechtwinklig zur Dachfläche gerichteten Winddruck belasteten Daches ist in den Figuren 155 und 156 gezeigt, wobei in Fig. 155 der Winddruck von links wirkend, in Fig. 156 von rechts wirkend angenommen wurde.

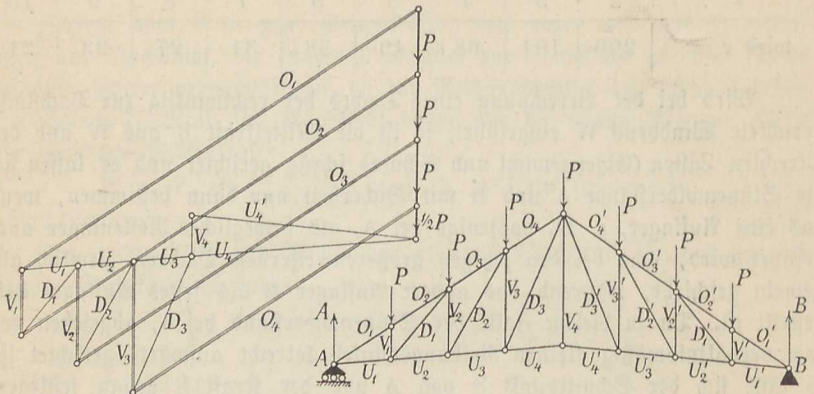
Die Ermittlung der Spannkraften eines englischen Dachbinders mit gezogenen Diagonalen unter Berücksichtigung des rechtwinklig zur Dachfläche wirkenden Winddruckes, welcher für ein Feld = W sein möge, ist in den Figuren 157, 158, 159 durchgeführt.

Die Fig. 157 gibt den Kräfteplan für die Lotrechte Belastung (Eigenlast

und Schnee), welcher nach den früheren Regeln aufzuzeichnen ist und weiter keiner Erklärung bedarf.

Für den Winddruck sind zwei Kräftepläne anzufertigen und zwar einer für Winddruck links (Fig. 158), der andere für Winddruck rechts (Fig. 159).

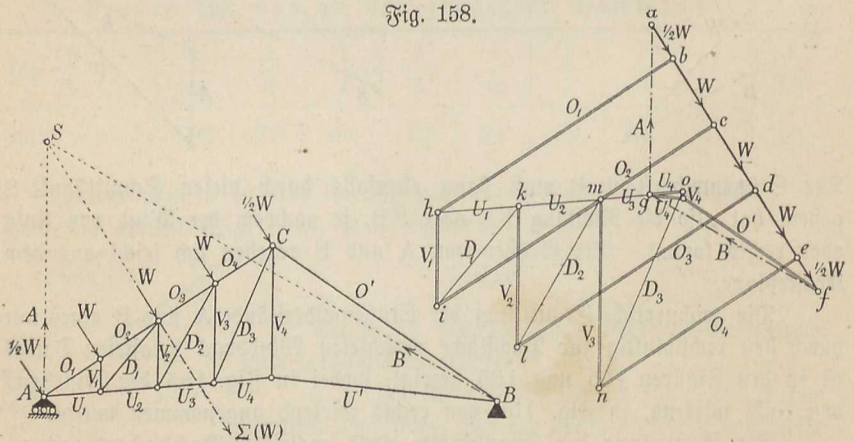
Fig. 157.



Das bewegliche Auflager sei bei A angeordnet; es ist dann der Stützenwiderstand A lotrecht aufwärts gerichtet und wird durch die Mittelkraft $\Sigma(W)$ der Windbelastungen in S geschnitten. Durch diesen Punkt muß der Stützenwiderstand B gehen.

In Fig. 158, welche für Winddruck von links gilt, sind die Windlasten zu dem Kräftezuge abcdef aneinander gefügt. Zieht man $ag \parallel AS$ und

Fig. 158.



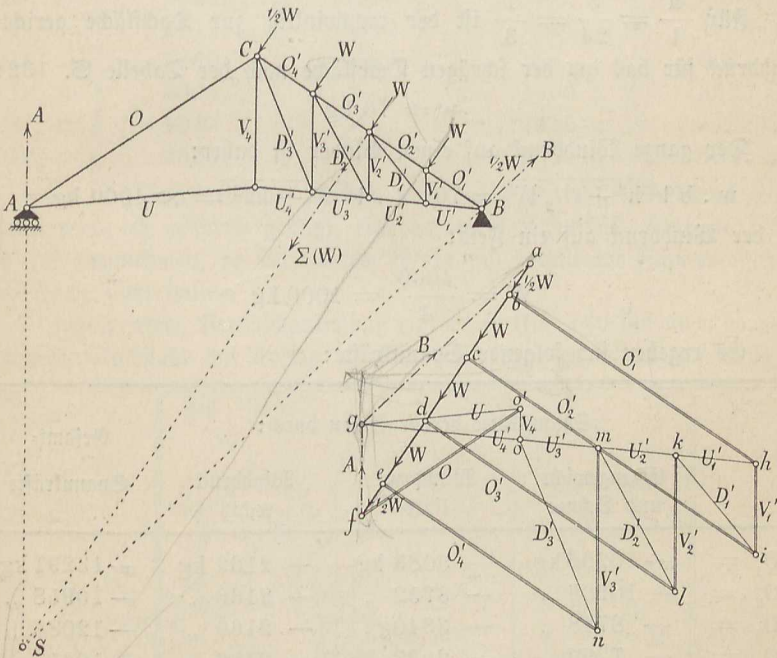
$fg \parallel BS$, so erhält man aus dem Kräftedreieck afg die Stützenwiderstände $A = ga$ und $B = fg$. An der rechten unbelasteten Dachhälfte halten sich die drei durch den Punkt B gehenden Kräfte $BO'U'$ im Gleichgewichte, es sind daher die auf der rechten Seite befindlichen Wandglieder spannungslos

und können fortgelassen werden. Am Auflager A wirken die Kräfte $\frac{1}{2}W O_1 U_1 A$, welche im Kräfteplane die Figur abhga bilden, aus der die Spannkräfte $O_1 = bh$ und $U_1 = hg$ gefunden werden. Die weitere Ausführung des Kräfteplanes ist aus Fig. 158 zu ersehen.

Kommt der Wind von der rechten Seite, wie in Fig. 159 angenommen wurde, so ist wieder der Lotrecht aufwärts gerichtete Stützenwiderstand A mit $\Sigma(W)$ zum Schnitt S zu bringen, wodurch die Richtung BS des Stützenwiderstandes B festgestellt wird. Nach Ermittlung von A und B ist die Aufzeichnung des Kräfteplanes in gewohnter Weise vorzunehmen. Es sind hier die Wandglieder der linken Dachhälfte spannungslos.

Nachdem für jeden einzelnen Stab die durch den linksseitigen und rechtsseitigen Winddruck hervorgebrachte Spannkraft bestimmt ist, muß die größere dieser Spannkräfte zu derjenigen hinzugefügt werden, welche sich aus dem für die Lotrechten Lasten aufgezeichneten Kräfteplane (Fig. 157) ergibt.

Fig. 159.



In gleicher Weise kann der Einfluß des schrägen Winddruckes bei sämtlichen in § 14 besprochenen Dächern bestimmt werden, doch genügt es in den meisten Fällen, namentlich bei flachen Dächern, statt dessen nur die Lotrechte Seitenkraft des Winddruckes einzuführen und die Spannkräfte aus dem für Lotrechte Lasten aufgezeichneten Kräfteplane zu bestimmen. Nur bei verhältnismäßig hohen Dächern empfiehlt es sich, die statische Berechnung mit Berücksichtigung des schrägen Winddruckes durchzuführen.

Beispiel. Statische Berechnung eines englischen Daches mit gezogenen Diagonalen nach Fig. 157, unter Berücksichtigung des rechtwinklig zur Dachfläche gerichteten Winddruckes. (Die untere Zugstange AB ist wagerecht angenommen.)

Spannweite	$l = 24$ m
Firshöhe	$h = 8$ "
Binderentfernung	$b = 4$ "
Eigengewicht des Daches	$g = 60$ kg für das qm
Belastung durch Schnee .	$p = 75$ " " " "

Die lotrechte Belastung eines Binders beträgt:

$$(g + p) b \cdot l = (60 + 75) \cdot 4 \cdot 24 = 12960 \text{ kg}$$

folglich ist die Belastung eines Feldes:

$$P = \frac{12960}{8} = 1620 \text{ kg}$$

Für $\frac{h}{l} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ ist der rechtwinklig zur Dachfläche gerichtete Winddruck für das qm der schrägen Dachfläche nach der Tabelle S. 132:

$$w = 70 \text{ kg}$$

Der ganze Winddruck auf einen Binder ist daher:

$$w \cdot b \sqrt{h^2 + (\frac{1}{2} l)^2} = 70 \cdot 4 \cdot \sqrt{8^2 + 12^2} = \approx 4000 \text{ kg}$$

und der Winddruck auf ein Feld:

$$W = \frac{4000}{4} = 1000 \text{ kg}$$

Es ergeben sich folgende Spannkräfte:

	Spannkräfte hervorgerufen durch:			Gesamt- Spannkräfte
	Eigengewicht und Schnee	Winddruck links	Winddruck rechts	
$O_1 =$	— 10206 kg	— 3085 kg	— 2166 kg	— 13291 kg
$O_2 =$	— 10206 "	— 3752 "	— 2166 "	— 13958 "
$O_3 =$	— 8748 "	— 3340 "	— 2166 "	— 12088 "
$O_4 =$	— 7290 "	— 2927 "	— 2166 "	— 10217 "
$O'_1 =$	— 10206 "	— 2166 "	— 3085 "	— 13291 "
$O'_2 =$	— 10206 "	— 2166 "	— 3752 "	— 13958 "
$O'_3 =$	— 8748 "	— 2166 "	— 3340 "	— 12088 "
$O'_4 =$	— 7290 "	— 2166 "	— 2927 "	— 10217 "
$U_1 =$	8505 "	2295 "	1808 "	10800 "
$U_2 =$	7290 "	1395 "	1808 "	8685 "
$U_3 =$	6075 "	495 "	1808 "	7883 "

	Spannkraften hervorgerufen durch			Gesamt- Spannkraften
	Eigengewicht und Schnee	Winddruck links	Winddruck rechts	
$U_4 =$	4860 kg	— 405 kg	1808 kg	6668 kg
$U'_1 =$	8505 "	— 405 "	4508 "	13013 "
$U'_2 =$	7290 "	— 405 "	3608 "	10898 "
$U'_3 =$	6075 "	— 405 "	2708 "	8783 "
$V_1 =$	— 1620 "	— 1200 "	—	— 2820 "
$V_2 =$	— 2430 "	— 1800 "	—	— 4230 "
$V_3 =$	— 3240 "	— 2400 "	—	— 5640 "
$V'_1 =$	— 1620 "	—	— 1200 "	— 2820 "
$V'_2 =$	— 2430 "	—	— 1800 "	— 4230 "
$V'_3 =$	— 3240 "	—	— 2400 "	— 5640 "
$D_1 =$	2025 "	1500 "	—	3525 "
$D_2 =$	2717 "	2012 "	—	4729 "
$D_3 =$	3460 "	2563 "	—	6023 "
$D'_1 =$	2025 "	—	1500 "	3525 "
$D'_2 =$	2717 "	—	2012 "	4729 "
$D'_3 =$	2025 "	—	2563 "	6023 "

Es mag noch erwähnt werden, daß, wenn der volle Winddruck berücksichtigt wird, es meistens genügt, eine geringere Schneelast, etwa 30 kg für das qm anzunehmen, da bei starkem Winde sich bedeutende Schneemassen auf dem Dache nicht halten.

Zur weiteren Veranschaulichung wurden in Fig. 160 für einen doppelten Polonceau-Dachstuhl mit Aufsatz die Windkräftepläne gezeichnet, die nach dem

Fig. 160 a.

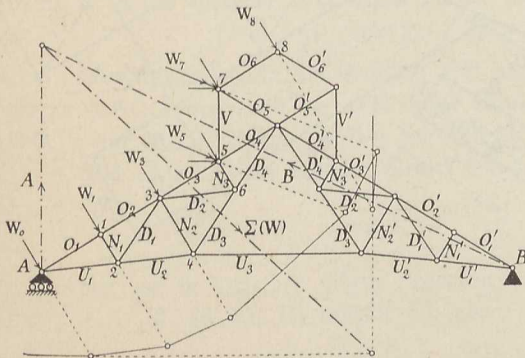
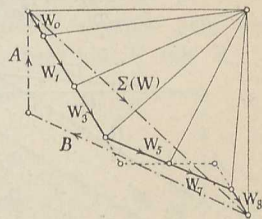


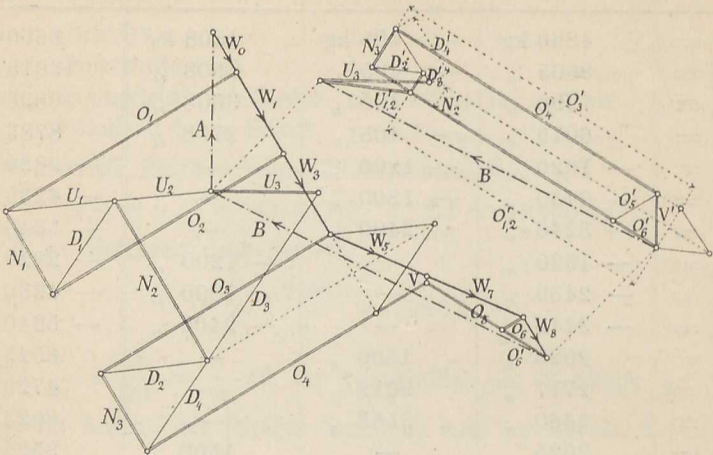
Fig. 160 b.



Vorhergehenden leicht zu übersehen sind. Die Lage der Mittelkraft $\Sigma(W)$ sämtlicher Winddrücke wird mit Hilfe eines Seilzuges bestimmt, wie in Fig. 160 b für Winddruck von links (bewegliches Auflager auf der Windseite)

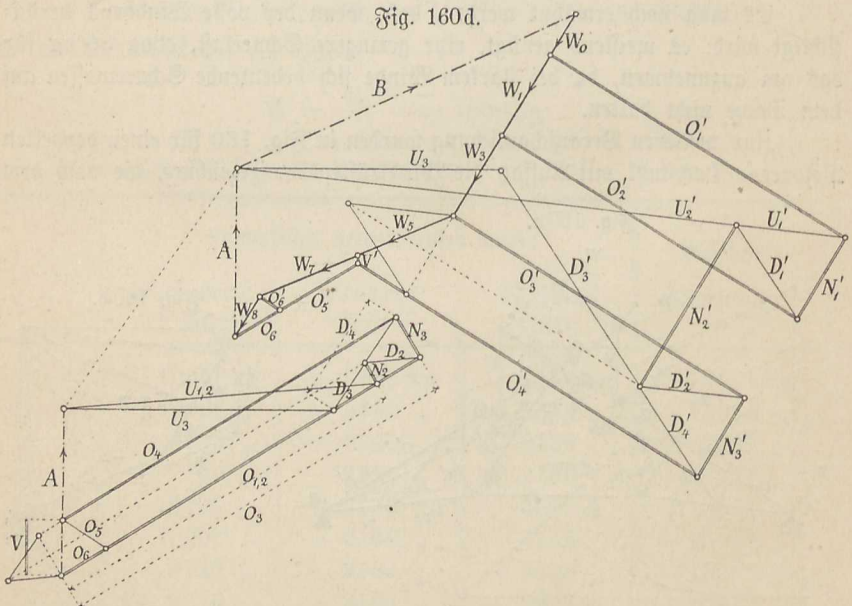
angedeutet ist. An den Knotenpunkten 5 und 7 werden dabei die einzelnen, rechtwinklig zu den anschließenden Dachflächen gerichteten Winddrücke zu den Mittelkräften W_5 und W_7 zusammengefasst.

Fig. 160 c.



Bei den in größerem Maßstabe ausgeführten Kräfteplänen Fig. 160 c für Wind von links, und Fig. 160 d für Wind von rechts, wurden die Spannkraften,

Fig. 160 d.



welche in den Wandgliedern der dem Wind abgekehrten Dachseite auftreten, der Deutlichkeit wegen besonders gezeichnet. Bei Wind von links bleiben die Glieder D_1' und N_1' , bei Wind von rechts die Glieder D_1 und N_1 spannungslos.

Im Vorhergehenden wurde (als ungünstigster Fall) stets angenommen, daß die Lotrechte Windebene mit einer in der getroffenen Fläche liegenden Wagerechten (z. B. mit der Traufenlinie der Dächer) einen Winkel von 90° bildet.

Es soll nun der allgemeinere Fall untersucht werden, wo die Windrichtung im Grundriß mit der Traufenlinie den beliebigen Winkel δ einschließt.

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Windrichtung und der Senkrechten zu der getroffenen Fläche mit η (Fig. 161), so drückt gegen 1 qm der Fläche ein Windprisma vom Querschnitt $1 \cdot \cos \eta$, folglich ist der Druck in der Windrichtung = $p \cos \eta$, und der Druck rechtwinklig zur getroffenen Fläche für ein qm:

$$w = p \cos^2 \eta$$

wobei wieder wie früher p den Druck auf eine rechtwinklig zur Windrichtung stehende Fläche für das qm (für gewöhnliche Verhältnisse $p = 150 \text{ kg}$) bedeutet.

Es ist nun zunächst η in den gegebenen Winkeln α, β, δ auszudrücken.

Es sei ABC (Fig. 162) eine beliebige Dachfläche, durch welche ein rechtwinkliges Achsenkreuz in solcher Weise gelegt ist, daß die XZ -Ebene mit der Lotrechten Windebene übereinstimmt. Man ziehe AD rechtwinklig zu BC und verbinde D mit O . Es ist dann:

$$\begin{aligned} \angle ADO &= \sphericalangle \alpha \\ \angle WOX &= \sphericalangle \beta \\ \angle OCB &= \sphericalangle \delta \end{aligned}$$

Von O aus fälle man auf die Ebene ABC das Lot OE , dessen Fußpunkt E in der Geraden AD liegen muß. Es ist dann:

$$\angle WOE = \sphericalangle \eta$$

Man ziehe sodann die Geraden EF und EC , welche, da sie in der Ebene ABC liegen, mit der OE rechte Winkel bilden. Ferner ziehe man $EG \perp$ auf die XY -Ebene, $GH \parallel$ der Y -Achse und verbinde H mit E .

Aus $\triangle OEF$ mit rechtem Winkel bei E folgt:

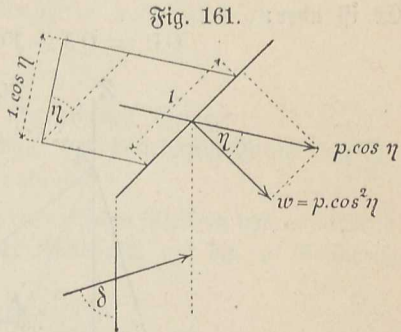
$$\cos \eta = \frac{OE}{OF}$$

Bei den in derselben Ebene liegenden Dreiecken OEC (H. W. bei E) und OEH (H. W. bei H) verhält sich aber:

$$\frac{OE}{OC} = \frac{OH}{OE}$$

also:

$$OE = OC \cdot \frac{OH}{OE}$$



Aus $\triangle OGH$ (R. W. bei H) folgt:

$$OH = OG \cos(90 - \delta) = OG \sin \delta$$

daher:

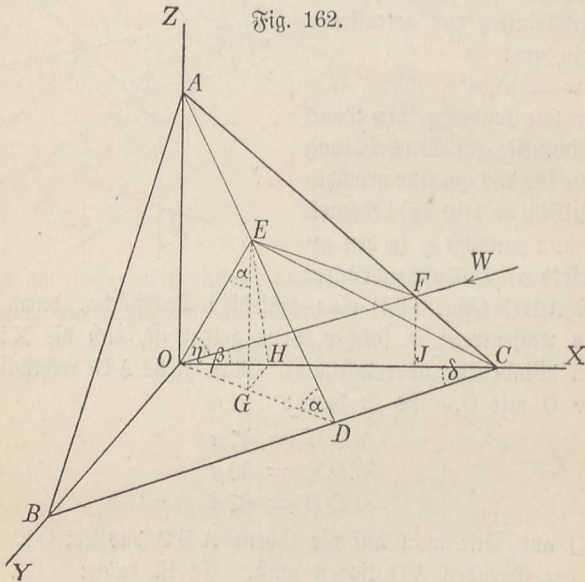
$$OE = OC \cdot \frac{OG}{OE} \sin \delta = OC \sin \alpha \sin \delta$$

und:

$$\cos \eta = \frac{OC}{OF} \sin \alpha \sin \delta$$

Es ist aber:

$$OC = OJ + JC = OF \cos \beta + JC$$



Aus dem Verhältnis:

$$\frac{JC}{JF} = \frac{OC}{OA} = \frac{\left(\frac{OD}{\sin \delta}\right)}{OD \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \delta \operatorname{tg} \alpha}$$

ergibt sich dann:

$$JC = \frac{JF}{\sin \delta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{OF \sin \beta}{\sin \delta \operatorname{tg} \alpha} = OF \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \delta}$$

so daß man nach Einsetzung dieses Wertes erhält:

$$OC = OF \cos \beta + OF \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \delta}$$

oder:

$$\frac{OC}{OF} = \cos \beta + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \delta}$$

folglich wird: $\cos \eta = \sin \alpha \sin \delta \left(\cos \beta + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \delta} \right)$

und nach Ausführung der Multiplikation:

$$\cos \eta = \sin \alpha \cos \beta \sin \delta + \cos \alpha \sin \beta$$

Danach ergibt sich der Winddruck rechtwinklig zur getroffenen Fläche für 1 qm ganz allgemein zu:

$$w = p (\sin \alpha \cos \beta \sin \delta + \cos \alpha \sin \beta)^2$$

für $\delta = 90^\circ$ wird:

$$w = p (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 = p \sin^2 (\alpha + \beta)$$

und bei $\beta = 10^\circ$:

$$w = p \sin^2 (\alpha + 10^\circ)$$

übereinstimmend mit dem schon S. 132 angegebenen Werte.

Für $\beta = 0$ (wagerechte Windrichtung) und beliebigem Winkel δ wird:

$$w = p (\sin \alpha \sin \delta)^2$$

Ist dabei $\alpha = 90^\circ$ (wie z. B. bei prismatischen Pfeilern und annähernd auch bei Fabrikschornsteinen), so wird der Winddruck auf die im Grundriß schräg getroffenen Flächen für 1 qm:

$$w = p \sin^2 \delta$$

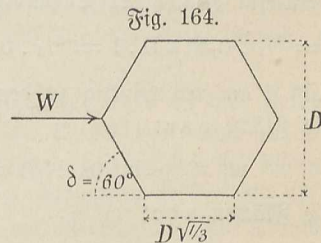
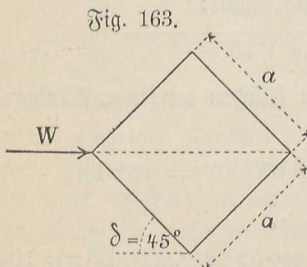
Für einen Pfeiler oder Schornstein, dessen Grundriß ein Quadrat von der Seite a ist, beträgt der Winddruck für 1 m Höhe unter der Annahme, daß der Wind wagerecht und in der Richtung der Diagonale weht (Fig. 163) nach v. Löfl: ¹⁾

$$W = 2 a p \sin^2 45^\circ = 2 a p \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^2 = p a$$

ist also ebenso groß, als wenn eine Seitenfläche rechtwinklig vom Winde getroffen wird.

Für ein regelmäßiges Sechskant ist bei der in Fig. 164 angegebenen Windrichtung:

$$W = 2 \cdot D \sqrt{\frac{1}{3}} p \sin^2 60^\circ = 0,75 p D$$



Ebenso groß ist, wie sich leicht nachweisen läßt, der Winddruck, wenn der Wind eine Seite des Sechskantes rechtwinklig, die anschließenden Seiten unter einem Winkel von 30° trifft.

¹⁾ v. Löfl: Die Luftwiderstandsgesetze, Wien 1896.

Für das Achtekant (Fig. 165) mit der Seitenlänge D ($\sqrt{2} - 1$)
 $= 0,414D$ ist:

$$W = 0,414D (1 + 2 \sin^3 45^\circ) = 0,707 p D$$

Für den Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser D
 ergibt sich der Winddruck auf 1 m Höhe nach
 Binzger zu: ¹⁾

$$W = \frac{2}{3} p D$$

für die Kugel ist:

$$W = \frac{1}{3} \frac{D^2 \pi}{4} p$$

Fig. 165.

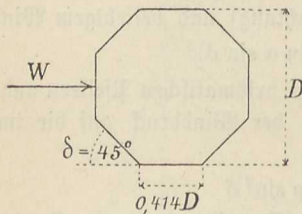
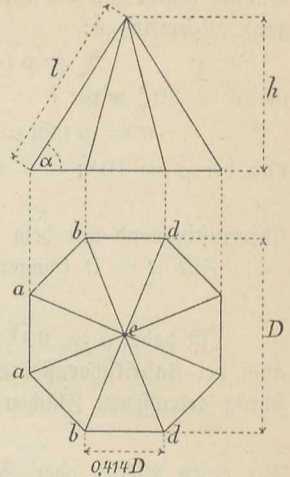


Fig. 166.



Beispiel: Berechnung des Winddruckes auf die achteckige Turmspitze
 der neuen Synagoge in Straßburg ²⁾ (Fig. 166) mit dem Durchmesser D
 $= 18,2$ m und der Höhe $h = 15,5$ m, unter der Annahme, daß die Wind-
 richtung den Winkel $\beta = 10^\circ$ mit der Wagerechten bildet. Der Druck auf
 1 qm \perp zur Windrichtung wurde angenommen zu $p = 150$ kg.

Es ist: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15,5}{9,1} = 1,7$

dem entspricht: $\alpha = 59^\circ 40'$

Jede einzelne Fläche der Turmspitze hat den Inhalt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 0,414 D \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 0,414 \cdot 18,2 \sqrt{15,5^2 + 9,1^2} = 67,7 \text{ qm}$$

Der auf 1 qm rechtwinklig zu den einzelnen Flächen wirkende Winddruck ist
 für die Fläche aac :

$$w_1 = p \sin^2 (\alpha + \beta) = 150 \sin^2 69^\circ 40' = 132 \text{ kg}$$

für die Flächen abc :

$$w_2 = 150 (\sin 59^\circ 40' \cos 10^\circ \sin 45^\circ + \cos 59^\circ 40' \sin 10^\circ) = 103 \text{ kg}$$

¹⁾ v. Reiche gibt an: $W = 0,5 p D$.

²⁾ Die kürzlich vollendete Synagoge, zu welcher der Verfasser die statischen
 Berechnungen lieferte, wurde entworfen und ausgeführt von Architekt Prof. L. Levy
 in Karlsruhe.

für die Flächen bdc:

$$w_3 = 150 (\cos 59^\circ 40' \sin 10^\circ) = 13 \text{ kg}$$

Der gesamte Winddruck beträgt danach:

$$W = F (w_1 + 2w_2 + 2w_3) = 67,7 (132 + 2 \cdot 103 + 2 \cdot 13) = 24643 \text{ kg}$$

Bei wagerechter Windrichtung ($\beta = 0$) würde sich ergeben:

$$w_1 = p \sin^2 \alpha = 150 \sin^2 59^\circ 40' = 112 \text{ kg}$$

$$w_2 = 150 \sin 59^\circ 40' \sin 45^\circ = 91,5 \text{ kg}$$

$$w_3 = \text{Null}$$

und

$$W = 67,7 (112 + 2 \cdot 91,5) = 19972 \text{ kg}$$

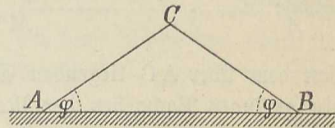
§ 17.

Erddruck.

Wird eine lockere Erdmasse auf einer wagerechten Ebene aufgeschüttet, so bilden die Seiten AC und BC des dadurch gebildeten Erdhaufens (Fig. 167) mit der Wagerechten einen gewissen Winkel φ , dessen Größe von der Beschaffenheit der Erdart abhängt. Diesen Winkel φ nennt man den natürlichen Böschungswinkel.

Eine Erdmasse, welche unter einem Winkel angeschnitten wird, welcher größer als der natürliche Böschungswinkel ist, kann für sich allein nicht im Gleichgewichte sein, sondern muß in irgend einer Weise, z. B. durch eine Mauer, abgestützt werden. Die Mauer erfährt durch die Erdmasse dann einen Druck, den sog. Erddruck, welcher bei der Untersuchung der Standfähigkeit einer Stützmauer zu bestimmen ist. Der Erddruck soll für die Folge immer mit E bezeichnet werden.

Fig. 167.



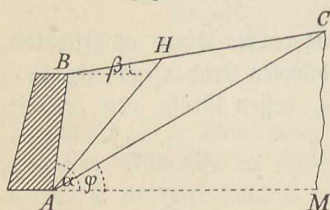
Bei gewachsenem Boden oder festgestampfter Erde ist das Zusammenhaften der einzelnen Teilchen aneinander (die Kohäsion) und infolgedessen auch der Neigungswinkel gegen die Wagerechte, bei welcher die Masse noch für sich selbst im Gleichgewichte sich befindet, bedeutend größer als bei einer lockeren Erdmasse, indessen nimmt man bei Berechnung der Stützmauern hierauf keine Rücksicht, da durch ungünstige äußere Einflüsse, besonders durch Feuchtigkeit, das Zusammenhaften der Erdteilchen (die Bindkraft) stark vermindert werden kann.

In folgender Tabelle sind die Mittelwerte der natürlichen Böschungswinkel φ , die zugehörigen Reibungskoeffizienten und die Gewichte eines Kubikmeters der gewöhnlich vorkommenden Erdarten zusammengestellt.

Er d a r t e n	Böschungswinkel φ	Reibungskoeffizient $f = \operatorname{tg} \varphi$	Gewicht eines cbm in kg
Thonerde, trocken	45°	1,00	1600
" naß	20°	0,36	2000
Lehmerde, trocken	40°	0,84	1500
" naß	20°	0,36	1900
Dammerde, trocken	40°	0,84	1400
" naß	30°	0,58	1800
Sand und Kies, feucht	30°	0,58	1800
Gerölle, feucht	40°	0,84	1700

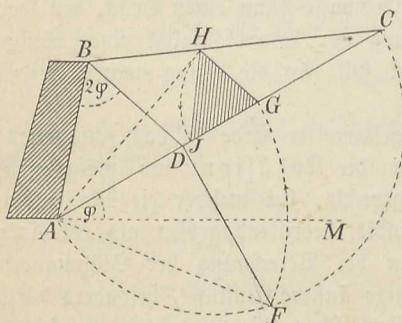
Es sei (Fig. 168) AB die Rückenfläche einer den Erdkörper ABCM stützenden Mauer und $\alpha (> \varphi)$ der Winkel, den dieselbe mit der Wagerechten bildet. Die Bodenoberfläche, welche die obere Begrenzung des Erdkörpers bildet, stehe rechtwinklig zur Bildebene, und schneide dieselbe in der Geraden BC. Ist β der Winkel, den die Bodenoberfläche mit der Wagerechten bildet, so muß $\beta < \varphi$ sein.

Fig. 168.



Denkt man sich durch den Fußpunkt A der Mauer die Ebene AC unter dem Winkel φ gegen die Wagerechte AM gelegt, so ist die unter AC befindliche Erdmasse für sich im Gleichgewichte, der Erddruck rührt daher lediglich von dem über AC liegenden Erdprisma vom Querschnitte ABC her. Durch ein geringes Nachgeben der Mauer würde eine Bewegung dieses Erdprismas ABC eintreten und zwar in der Art, daß dasselbe in einer Ebene AH spaltet, in dieser Ebene abbricht und der Teil ABH abgleitet. Die Ebene AH wird deshalb die Bruchebene oder Gleitebene genannt.

Fig. 169.



Wäre die Stützmauer nicht vorhanden, so würde die Gleitebene mit der natürlichen Böschungsebene AC zusammenfallen. Durch die an der Rückenfläche der Stützmauer auftretende Reibung erhält die Gleitebene aber die steilere Lage AH.

Die Lage der Gleitebene und die Größe des Erddruckes E wird am einfachsten durch folgendes von Rebhann¹⁾ angegebene zeichnerische Verfahren bestimmt (Fig. 169).

¹⁾ Rebhann, Theorie des Erddruckes und der Futtermauern, Wien 1871.

Ziehe AC unter Winkel φ gegen die Wagerechte AM ; BD unter Winkel 2φ gegen die Rückenfläche der Mauer AB , beschreibe über AC einen Halbkreis und ziehe $DF \perp$ zu AC . Mache $AG = AF$, ziehe $GH \parallel BD$ und mache $GJ = GH$. Die Gerade AH ist die Gleitlinie. Zieht man dann noch die Gerade HJ , so wird die Größe des Erddruckes E dargestellt durch ein Prisma, dessen Querschnitt das Dreieck GHJ ist. Man nennt dieses Dreieck GHJ das Erddruckdreieck.

Statt einen Kreisbogen über der Böschungslinie AC zu beschreiben, kann man zur Aufzeichnung des Erddruckdreiecks auch die Rückenfläche AB der Mauer benutzen (Fig. 170).

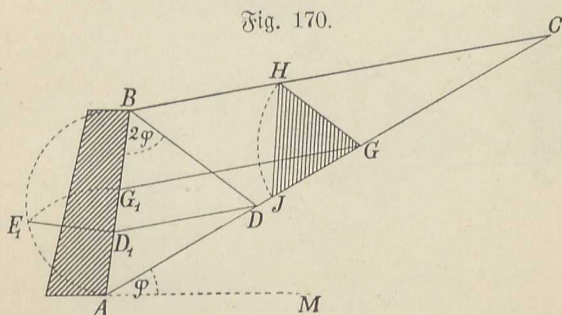


Fig. 170.

Man ziehe die Linien AC und BD wie oben angegeben und beschreibe über AB einen Halbkreis; ziehe sodann $DD_1 \parallel BC$ und $D_1F_1 \perp AB$, mache $AG_1 = AF_1$ und ziehe $G_1G \parallel BC$. Nachdem auf diese Weise der Punkt G festgelegt ist, ist die weitere Aufzeichnung des Dreiecks GHJ genau wie oben vorzunehmen.

Zweckmäßig führt man die Untersuchung durch für 1 m Tiefe (die Abmessung rechtwinklig zur Bildfläche), da alsdann der Flächeninhalt des Dreiecks GHJ , in qm gemessen, gleich dem Erddruck in cbm ist. Ist γ das Gewicht eines cbm Erde in kg , so ist der Erddruck in kg :

$$E = \gamma \cdot GHJ$$

Ist der Winkel, den die Bodenoberfläche mit der Wagerechten einschließt, gleich dem natürlichen Böschungswinkel, also $\beta = \varphi$, so ziehe man durch einen, auf der unter dem Winkel φ gegen die Wagerechte gelegten Geraden AC' beliebigen Punkt G (Fig. 171) $GH \parallel BD$ und mache $GJ = GH$. Durch geradlinige Verbindung der Punkte H und J erhält man das Dreieck GHJ , durch welche die Größe des Erddruckes bestimmt ist.

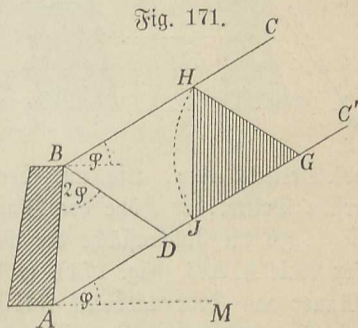


Fig. 171.

Ist die Bodenoberfläche geknickt, wie in Fig. 172, so ziehe man die Gerade AK und verwandle das Dreieck ABK in das inhaltsgleiche Dreieck

AB_1K , indem man $BB_1 \parallel AK$ zieht und die Gerade CK über K hinaus bis B_1 verlängert.

Man ziehe BD unter dem Winkel 2φ gegen die Rückenfläche der Mauer und durch B_1 die Gerade $B_1D_1 \parallel BD$, ferner $D_1F \perp$ zu AC .

Die weitere Ausführung ist genau wie bei Fig. 169 S. 144.

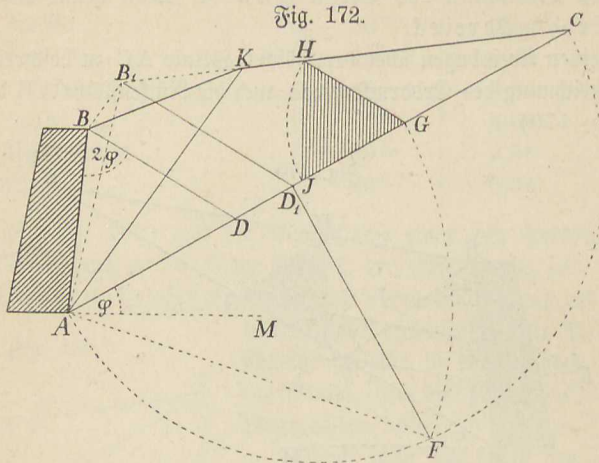


Fig. 172.

Um den Angriffspunkt des Erddruckes zu finden, verwandle man nach 1 § 5 S. 22 das Erddruckdreieck $G H J$ in ein inhaltsgleiches Dreieck, dessen Höhe gleich der Höhe h der Stützmauer ist, und bestimme den Schwerpunkt S desselben. Zieht man durch S eine Wagerechte, so trifft diese die Rückenfläche AB der Mauer in dem Angriffspunkte von E . Die

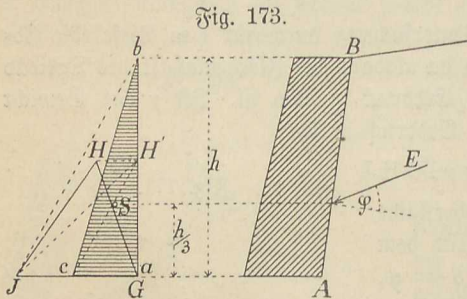


Fig. 173.

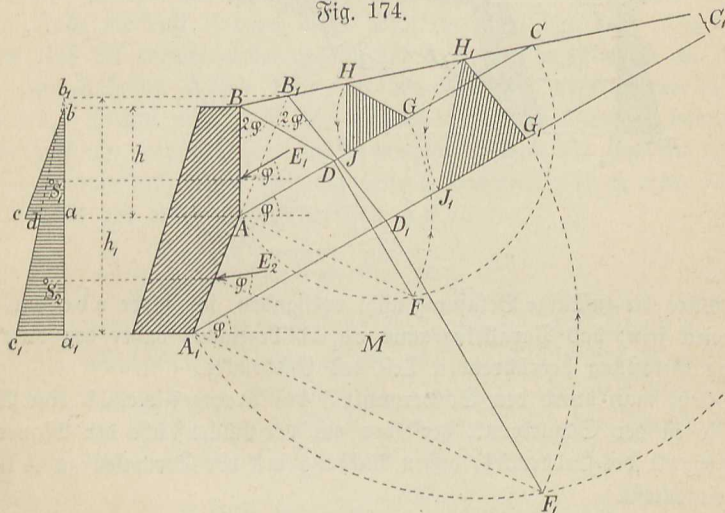
Richtungslinie von E schließt mit der Normalen zu AB den Winkel φ ein. In Fig. 173 ist das Dreieck $G H J$ zunächst in das rechtwinklige Dreieck $G H' J$ von derselben Höhe verwandelt, darauf letzteres in das inhaltsgleiche Dreieck abc von der Höhe h . Der Schwerpunkt S

des Dreiecks abc , also auch der Angriffspunkt des Erddruckes E , liegt im ersten Drittel der Höhe der Mauer.

Ist die Rückenfläche der Mauer nicht geradlinig, sondern geknickt nach der Linie A_1AB (Fig. 174), so bestimme man für das obere Stück AB der Mauer das Erddruckdreieck $G H J$ in der oben angegebenen Weise und verwandle dasselbe in das inhaltsgleiche Dreieck abc von der Höhe h . Die Wagerechte durch den Schwerpunkt S_1 dieses Dreiecks schneidet AB im Angriffspunkte des auf das obere Mauerstück AB wirkenden Erddruckes E_1 ,

dessen Größe durch den Inhalt des Dreiecks $abc = GHJ$ gegeben ist. Um den auf das untere Stück A_1A der Mauer wirkenden Erddruck E_2 zu finden, denke man sich A_1A bis zum Schnittpunkte B_1 mit der Bodenoberfläche verlängert, betrachte die Gerade A_1B_1 als Rückenfläche der Mauer und zeichne dafür das Erddruckdreieck $G_1H_1J_1$, welches in das inhaltsgleiche Dreieck $a_1b_1c_1$ mit der Höhe h_1 verwandelt wird. Der Inhalt des Dreiecks $a_1b_1c_1$ würde danach die Größe des Erddruckes angeben, welchem eine Mauer mit der Rückenfläche A_1B_1 ausgesetzt ist. In Wirklichkeit ist von dieser Mauer aber nur das untere Stück A_1A vorhanden, dem das untere trapezförmige Stück a_1c_1da des Erddruckdreiecks $a_1b_1c_1$ entspricht. Bestimmt man von diesem

Fig. 174.



Trapeze a_1c_1da , dessen Flächeninhalt die Größe des auf das untere Mauerstück A_1A wirkenden Erddruckes E_2 angibt, den Schwerpunkt S_2 und zieht durch diesen eine Wagerechte, so schneidet dieselbe die Gerade A_1A im Angriffspunkte des Erddruckes E_2 . Die Richtungslinie von E_2 schließt mit der Normalen zu A_1A den Winkel φ ein.

Ruht auf dem Erdkörper noch eine zufällige Belastung p für ein qm , so kann dieselbe ersetzt werden durch eine über der Bodenoberfläche aufgetragene Erdschicht von der Höhe p/γ , wobei γ das Gewicht eines cbm Erde in kg bedeutet.

Ist z. B. $p = 600$ kg für ein qm , so würde sich die Höhe der Erdschicht, welche die gleiche Belastung darstellt (bei $\gamma = 1600$ kg), ergeben zu:

$$\frac{600}{1600} = 0,375 \text{ m}$$

In Fig. 175 sei die zufällige Belastung dargestellt durch eine Erdschicht von der Höhe h_1 . Man verlängere die Rückenfläche AB der Mauer bis zum Punkte B_1 und zeichne nach dem oben angegebenen Verfahren das Erddruck-

Gerade AH bezeichnet dann die Lage der Gleitebene, welche unverändert bleibt und durch eine Ueberlast in keiner Weise beeinflusst wird.

Da die zufällige Belastung rechts von der Gleitebene (Fig. 176) keine weitere Rolle spielt, so verwandle man das Belastungsviereck von der Höhe h_1 und der Grundlinie HL (nach 2 § 5 Fig. 39) in ein inhaltsgleiches Viereck von der Grundlinie BH, verlängere AB bis zum Punkte B_1 und konstruiere in der bekannten Weise das Erddruckdreieck $G_1H_1J_1$ genau so, als ob AB_1 die Rückenfläche der Mauer wäre. Das Weitere wie oben.

Ist statt der stetigen Belastung eine Einzellast P vorhanden, so hat dieselbe nur Bedeutung, wenn sie zwischen der Gleitebene und der Mauerfante, also zwischen den Punkten H und B (Fig. 176) liegt. Man ersetze in diesem Falle die Last P durch einen Erdkörper von der Tiefe 1 m und der Breite BH bei entsprechender Höhe, und verfähre im übrigen wie vorher.

In einfachen Fällen läßt sich der Erddruck auch rechnerisch leicht ermitteln. Nimmt man z. B. die Rückenfläche der Stützmauer lotrecht, die Bodenoberfläche wagerecht an, und vernachlässigt man die zwischen der Erde und der Mauer auftretende Reibung (also E wagerecht), so ist nach Fig. 177 das Gewicht des drückenden Erdprisma ABH:

$$Q = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg} x$$

Das Erdprisma ABH befindet sich unter der Einwirkung der Kräfte QEW im Gleichgewichte. Der auf die Seite AH wirkende Gegendruck W bildet den $\angle \varphi$ mit der Normalen zu AH, diese aber mit der Lotrechten den $\angle y + \varphi$, folglich ist der Winkel zwischen W und der Lotrechten = y.

Aus dem Kräftedreieck abc ergibt sich dann:

$$E = Q \operatorname{tg} y = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$$

Der Erddruck erreicht seinen größten Wert für:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$$

oder:

$$x = y = \frac{90 - \varphi}{2}$$

folglich wird:

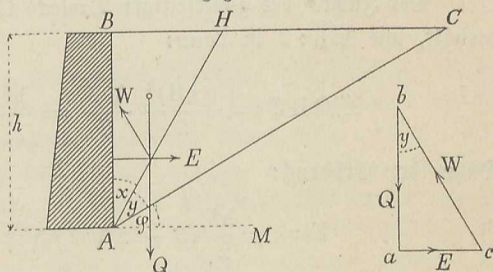
$$E = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{90 - \varphi}{2} \right)$$

für $\varphi = 30^\circ$ wird daraus:

$$E = \frac{\gamma h^2}{6}$$

z. B. bei $\gamma = 1600 \text{ kg}$ wird: $E = 266\frac{2}{3} h^2$
 „ $\gamma = 1500 \text{ „ „}$: $E = 250 h^2$

Fig. 177.



Für Wasser ist $\varphi = \text{Null}$ und $\gamma = 1000 \text{ kg}$ einzusetzen, daher der Wasserdruck W in kg :

$$W = \frac{\gamma h^2}{2} = 500 h^2$$

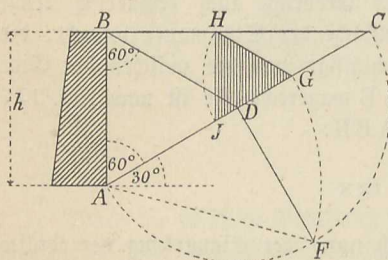
Danach ist z. B. der Erddruck auf eine Mauer von 5 m Höhe (die obigen vereinfachten Annahmen vorausgesetzt), wenn $\gamma = 1600 \text{ kg}$ angenommen wird:

$$E = 266\frac{2}{3} \cdot 5^2 = 6667 \text{ kg}$$

und der Wasserdruck auf dieselbe Mauer:

$$W = 500 \cdot 5^2 = 12500 \text{ kg}$$

Fig. 178.



Nach dem zeichnerischen Verfahren von Rebhann ergibt sich bei lotrechter Rückenfläche der Mauer und wagerechter Bodenoberfläche und für $\varphi = 30^\circ$ ohne die obige Vernachlässigung der Reibung zwischen Erde und Mauer nach Fig. 178:

$$AD = BD = DC = h$$

also:

$$AC = 2h$$

und da auch $DF = h$ ist:

$$AG = AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{2h^2} = h\sqrt{2}$$

daher:

$$GH = CG = AC - AG = 2h - h\sqrt{2}$$

$$GH = h(2 - \sqrt{2})$$

Der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks GHJ, dessen Höhe sich zur Seite verhält, wie $\sqrt{3} : 2$ ist dann:

$$\triangle GHJ = \frac{(GH)^2}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h^2(2 - \sqrt{2})^2}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Daher der Erddruck:

$$E = \gamma \frac{h^2}{2} (3 - 2\sqrt{2}) \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,1486 \gamma h^2$$

oder abgerundet:

$$E = 0,15 \gamma h^2$$

$$\text{z. B. bei } \gamma = 1600 \text{ kg wird: } E = 240 h^2$$

$$\text{" } \gamma = 1500 \text{ " " : } E = 225 h^2$$

§ 18.

Druckverteilung in Mauerwerkskörpern.

1) Winkelrecht und central belastete Mauern.

Bei den winkelrecht und central belasteten Mauern darf man annehmen, daß sich die Belastung gleichmäßig über den Querschnitt verteilt; es ist dann die Inanspruchnahme in allen Punkten des Querschnittes dieselbe. Die Tragfähigkeit der Mauer ist in diesem Falle nur abhängig von der Größe der Querschnittsfläche und der Festigkeit des Materiales.

Die Belastung besteht im allgemeinen aus irgend einer Last P und dem Eigengewichte G der Mauer. Die obere Querschnittsfläche F_1 der Mauer, auf welche nur die Kraft P wirkt, ist zu berechnen aus:

$$F_1 = \frac{P}{k}$$

wobei k die zulässige Inanspruchnahme des Materiales bedeutet.

Ist tiefer irgend ein anderer Querschnitt der Mauer unter dem oberen liegt, ein um so größerer Teil des Eigengewichtes G wirkt außer der Kraft P auf denselben; die größte Belastung erfährt die Grundfläche, nämlich durch die Kraft P und durch das volle Eigengewicht G . Ist F_2 der Querschnitt der Grundfläche, so ist diese zu berechnen aus:

$$F_2 = \frac{P + G}{k}$$

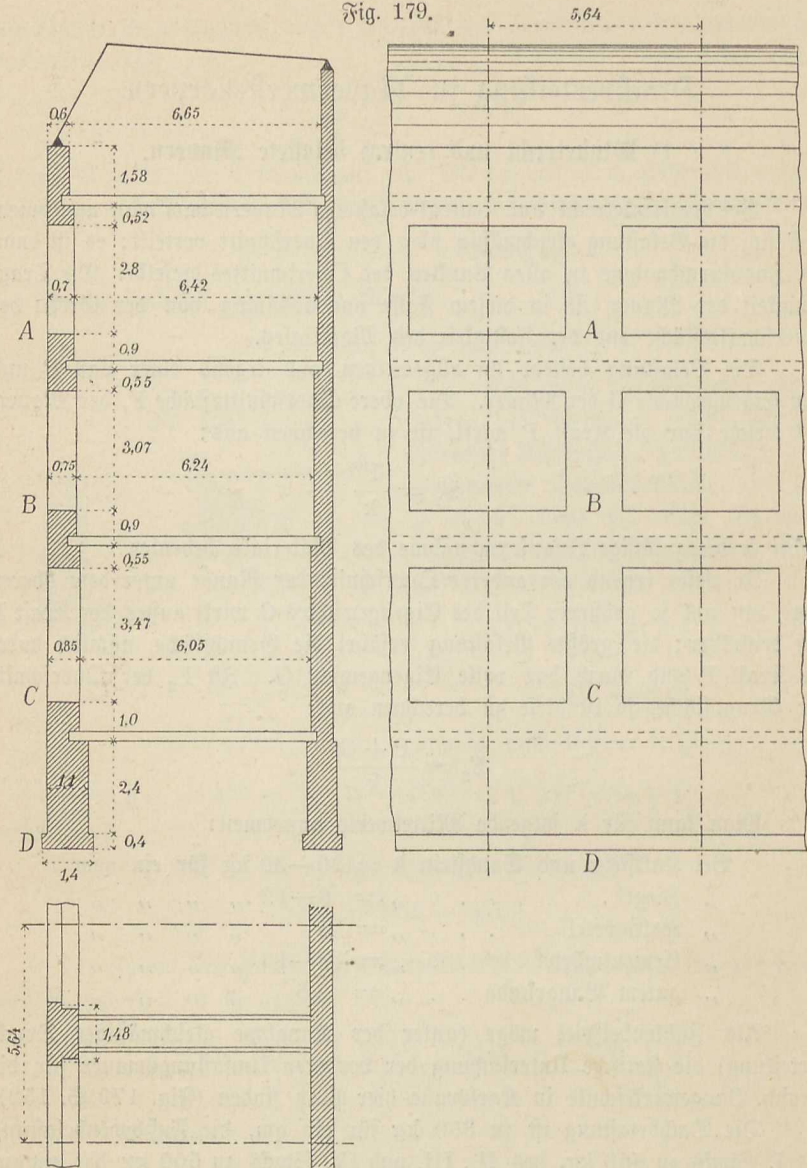
Man kann für k folgende Mittelwerte annehmen:

Bei Kalkstein und Sandstein	$k = 20-30$ kg für ein qcm
„ Ziegel	„ = 6—12 „ „ „ „
„ Kalkmörtel	„ = 4 „ „ „ „
„ Cementmörtel	„ = 10—15 „ „ „ „
„ gutem Baugrunde	„ = 2,5 „ „ „ „

Als Zahlenbeispiel möge (unter der Annahme gleichmäßiger Druckverteilung) die statische Untersuchung der vorderen Umfassungsmauer für die Großh. Baugewerkschule in Karlsruhe hier Platz finden (Fig. 179 S. 152).

Die Dachbelastung ist zu 350 kg für ein qm, die Fußbodenbelastung des I. Stockes zu 650 kg, des II., III. und IV. Stockes zu 500 kg für ein qm angenommen. Für das Fundamentmauerwerk wurde 1 cbm = 2000 kg, für das übrige Mauerwerk 1 cbm = 1600 kg gerechnet. Die am stärksten beanspruchten Querschnitte sind die in Fig. 179 mit A, B, C, D bezeichneten und ist die Inanspruchnahme k dieser Querschnitte durch die folgende Berechnung, welche für einen Steifen der Mauer von Fenstermitte zu Fenstermitte durchgeführt ist, bestimmt worden. (Die Maße sind in Fig. 179 in Metern eingeschrieben.)

Fig. 179.



Schnitt A.

$$\text{Dachlast} = \frac{6,65}{2} \cdot 5,64 \cdot 350 \dots \dots \dots = 6564 \text{ kg}$$

$$\text{Mauerlast} = [(1,58 \cdot 0,6 + 0,52 \cdot 0,7) \cdot 5,64 + 2,8 \cdot 0,7 \cdot 1,48] \cdot 1600 = 16480 \text{ ,,}$$

$$\text{Fußbodenlast} = \frac{6,65}{2} \cdot 5,64 \cdot 500 \dots \dots \dots = 9377 \text{ ,,}$$

zusammen 32421 kg

Querschnitt des Pfeilers = $70 \cdot 148 = 10360$ qem

Inanspruchnahme: $k = \frac{32421}{10360} = 3,13$ kg/qem

Schnitt B.

Belastung durch den Pfeiler des III. Stockes = 32421 kg

Mauerlast = $[(0,9 \cdot 0,7 + 0,55 \cdot 0,75) \cdot 5,64 + 3,07 \cdot 0,75 \cdot 1,48] \cdot 1600 = 14860$ „

Fußbodenlast = $\frac{6,42}{2} \cdot 5,64 \cdot 500$ = 9052 „

zusammen 56333 kg

Querschnitt des Pfeilers = $75 \cdot 148 = 11100$ qem

Inanspruchnahme: $k = \frac{56333}{11100} = 5,1$ kg/qem

Schnitt C.

Belastung durch den Pfeiler des II. Stockes = 56333 kg

Mauerlast = $[(0,9 \cdot 0,75 + 0,55 \cdot 0,85) \cdot 5,64 + 3,47 \cdot 0,85 \cdot 1,48] \cdot 1600 = 17294$ „

Fußbodenlast = $\frac{6,24}{2} \cdot 5,64 \cdot 500$ = 8798 „

zusammen 82425 kg

Querschnitt des Pfeilers = $85 \cdot 148 = 12580$ qem

Inanspruchnahme: $k = \frac{82425}{12580} = 6,6$ kg/qem

Schnitt D.

Belastung durch den Pfeiler des I. Stockes = 82425 kg

Mauerlast = $1,085 \cdot 5,64 \cdot 1600 + (2,4 \cdot 1,1 + 0,4 \cdot 1,4) \cdot 5,64 \cdot 2000 = 43766$ „

Fußbodenlast = $\frac{6,05}{2} \cdot 5,64 \cdot 650$ = 11090 „

zusammen 137281 kg

Querschnitt der Mauer am Fuße = $140 \cdot 564 = 78960$ qem

Beanspruchung des Baugrundes: $k = \frac{137281}{78960} = 1,74$ kg/qem

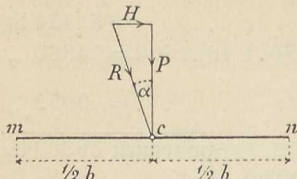
Streng genommen stellen sich die Inanspruchnahmen etwas größer heraus, da in Wirklichkeit keine ganz gleichmäßige Druckverteilung stattfindet, indessen ist die hier durchgeführte Berechnung die bei den Architekten allgemein gebräuchliche. Dasselbe Beispiel ist übrigens weiter unten (S. 161 bis 163) unter Berücksichtigung der excentrischen Druckverteilung genauer durchgeführt.

2) Central aber schief belastete Mauern.

Der Angriffspunkt der auf eine Mauerfuge mn (Fig. 180) wirkenden Kraft R liege in der Mitte e, die Kraft R sei aber nicht rechtwinklig zu mn gerichtet, sondern schließe mit der Normalen zu mn den Winkel α ein. Zer-

legt man R in eine rechtwinklig zu mn gerichtete Seitenkraft P und in eine in die Richtung von mn fallende Seitenkraft H , so wird durch erstere die Mauer winkelfrecht und central belastet, während die Kraft H auf Abscherung wirkt, d. h. den über mn liegenden Teil der Mauer gegen den unteren Teil, oder wenn mn die Bodenfläche der Mauer bedeutet, die ganze Mauer auf dem Untergrunde zu verschieben strebt. Damit kein Abschieben erfolgt, muß der Winkel α kleiner sein als der Reibungswinkel des Materiales.

Fig. 180.



Zulässige Werte des Winkels α sind:

innerhalb der Mauer:

$$\sphericalangle \alpha \text{ bis zu } 30^\circ$$

an der Bodenfläche der Mauer bei gutem Baugrunde:

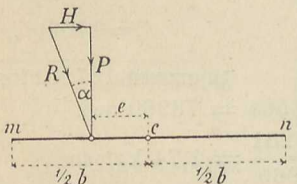
$$\sphericalangle \alpha \text{ bis zu } 20^\circ$$

Besteht der Baugrund aus Thon, welcher durch Nässe schlüpfrig wird, so ist die Bodenfläche der Mauer rechtwinklig oder doch nahezu rechtwinklig zu R anzunehmen. Ueberschreitet bei wagerechten Lagerfugen der Winkel α im Inneren der Mauer oder an der Bodenfläche die zulässige Grenze, so muß mit geneigten Fugen gemauert werden.

3) Excentrisch belastete Mauern.

Der Belastungsfall Fig. 181, wo die Kraft R die Mauerfuge mn in der Entfernung e (e wird die Excentricität genannt) von der Mitte trifft und mit der Normalen zu mn den Winkel α einschließt, läßt sich durch Zerlegung von R in die Seitenkräfte P (\perp zu mn) und H (\parallel zu mn) immer auf den Belastungsfall Fig. 182 zurückführen, da, wenn der Winkel α innerhalb der erlaubten Grenze liegt, die Seitenkraft H , welche keinen Einfluß auf die in der Fuge mn auftretenden Pressungen ausübt, unberücksichtigt bleiben kann.

Fig. 181.



Ohne an dem Belastungszustande (Fig. 182) etwas zu ändern, kann man in der Mitte c zwei der ursprünglichen Kraft P parallele und gleiche,

Fig. 182.

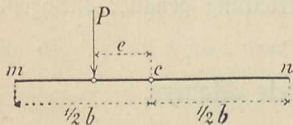
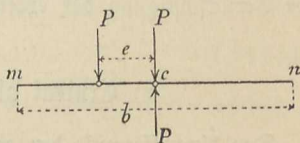


Fig. 183.



aber entgegengesetzt gerichtete, sich also gegenseitig aufhebende Kräfte P anbringen, wodurch die Fig. 183 entsteht. Durch die in c angreifende, nach

unten wirkende Kraft P wird eine Druckspannung k_1 erzeugt, welche sich gleichmäßig über die ganze Querschnittsfläche verteilt; die anderen beiden Kräfte P bilden ein Kräftepaar vom Momente $P \cdot e$, wodurch eine Biegungsspannung erzeugt wird, welche von der Mitte aus nach beiden Seiten gleichmäßig zu⁼ bzw. abnimmt und in m und n ihren größten Wert k_2 erreicht, und zwar ist k_2 für den Punkt m Druckspannung, für den Punkt n Zugspannung. Da bei Mauerwerkskörpern nur die Druckspannungen von besonderem Interesse sind, so sollen diese als positive Spannungen eingeführt werden. Danach entsteht durch das Kräftepaar vom Momente $P e$ in m die Spannung $+k_2$, in n die Spannung $-k_2$.

Führt man die Untersuchung durch für ein Stück der Mauer, dessen Tiefe (Abmessung \perp zur Bildfläche) $= 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ ist, so ist, wenn die Breite der Fuge $mn = b$ in cm ausgedrückt wird, der Querschnitt in qm : $F = 100 \cdot b$, folglich

$$k_1 = + \frac{P}{100 \cdot b}$$

Aus der Biegungsgleichung¹⁾:

$$P e = k_2 \frac{100 \cdot b^2}{6}$$

folgt:
$$k_2 = \frac{6 \cdot P e}{100 \cdot b^2}$$

Im ganzen entstehen in den Punkten m bzw. n die Rantenspannungen:

$$k_m = k_1 + k_2$$

$$k_n = k_1 - k_2$$

und wenn für k_1 und k_2 die obigen Ausdrücke eingesetzt werden:

$$k_m = \frac{P}{100 b} \left(1 + \frac{6 e}{b} \right)$$

$$k_n = \frac{P}{100 b} \left(1 - \frac{6 e}{b} \right)$$

In der letzten Gleichung bedeutet der Faktor $\frac{P}{100 b}$ die in der Mitte e auftretende Spannung; dieselbe ist gleich derjenigen sich über den Querschnitt gleichmäßig verteilenden Spannung, welche durch eine in der Mitte angreifende und rechtwinklig zu mn gerichtete Kraft P erzeugt wird.

Die Figuren 184 und 185 zeigen die graphische Darstellung der Spannungen k_1 und k_2 . Durch die Zusammensetzung derselben entsteht die Fig. 186.

Setzt man die Rantenpressung k_n im Punkte $n = \text{Null}$, so ergibt sich aus:

$$0 = \frac{P}{100 b} \left(1 - \frac{6 e}{b} \right)$$

¹⁾ Vergl. in des Verfassers Festigkeitslehre: Widerstand gegen Biegung.

für den Abstand e der Kraft P von der Mitte der Wert:

$$e = \frac{b}{6}$$

und die Pressung im Punkte m wird alsdann:

$$k_m = \frac{2P}{100b}$$

also doppelt so groß, als wenn die Kraft P in der Mitte angreift.

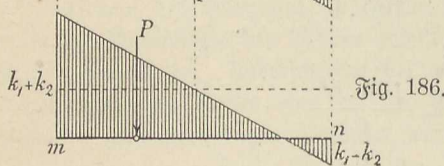
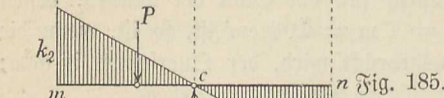
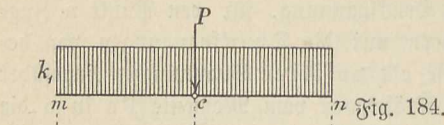
Für $e > \frac{b}{6}$ wird k_n nega-

tiv, für $e < \frac{b}{6}$ positiv.

Liegt der Angriffspunkt der Kraft P in der Entfernung $\frac{b}{6}$

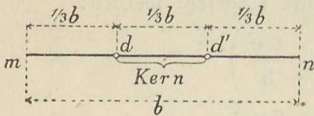
rechts von c , so wird die Pressung bei $m = \text{Null}$ und erreicht ihren größten Wert $k_n = \frac{2P}{100b}$ bei n .

Die in der Entfernung $\frac{b}{6}$ links



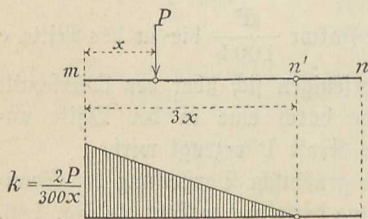
und rechts von c liegenden Punkte d und d' (Fig. 187) werden die Kernpunkte oder Kerngrenzen, der Raum zwischen ihnen ($dd' = \frac{b}{3}$) der Kern genannt.

Fig. 187.



Der Kern oder das mittlere Drittel der Mauer ist für die Druckverteilung von besonderer Wichtigkeit. Greift nämlich die Kraft P innerhalb des Kernes an, so entstehen in der Mauer nur Druckspannungen, greift P außerhalb des Kernes an, so würden in einem Teile der Mauer auch Zugspannungen auftreten. In solchen Fällen aber, wo man Zugspannungen im Mauerwerke nicht zulassen kann, z. B. bei dem ohne Mörtel aufgeführten sogen. Trockenmauerwerke, und außerdem bei Mörtelmauerwerk an der Bodenfuge, ist derjenige Teil der Mauer, in welchem die

Fig. 188.



$$k = \frac{2P}{300x}$$

Zugspannungen auftreten würden, als spannungslos zu betrachten, und infolgedessen verteilt sich die Kraft P nicht mehr über die ganze Fuge mn , sondern nur über einen Teil mn' derselben (Fig. 188). Da in n' die Spannung Null herrscht, so ist der Angriffspunkt der Kraft P die Kerngrenze

für die Fuge mn' . Bezeichnet man daher den Abstand der Kraft P von der Kante m mit x , so muß $mn' = 3x$ sein, wodurch die Lage des Punktes n' bestimmt ist. Die in m auftretende Kantenpressung ist dann:

$$k = \frac{2P}{100 \cdot 3x} = \frac{2P}{300x}$$

Bei Mauern, welche dem Wasserdrucke ausgesetzt sind, und bei Gewölben gilt es als Regel, dieselben so stark auszuführen, daß die Drucklinie, d. i. diejenige Linie, welche die Angriffspunkte der auf die einzelnen Fugen wirkenden Drücke miteinander verbindet, innerhalb des Kerns verläuft. Bei allen übrigen Stützmauern darf der Druckpunkt außerhalb des mittleren Drittels liegen, vorausgesetzt, daß dabei die größte Kantenpressung unterhalb der praktisch zulässigen Grenze bleibt.

Nach den obigen Betrachtungen ergibt sich für die Kantenpressung k je nach der Lage des Angriffspunktes der Kraft P folgende Zusammenstellung:

1) Die Kraft P greift in der Mitte der Fuge an (Fig. 189).

$$k = \frac{P}{100b}$$

Fig. 189.

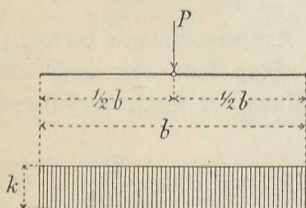
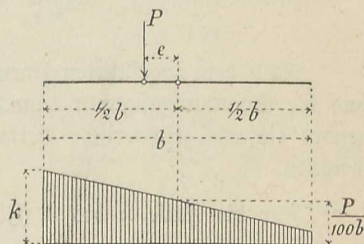


Fig. 190.



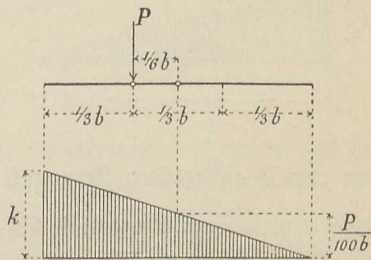
2) Die Kraft P greift in der Entfernung e von der Mitte der Fuge innerhalb des Kerns an, also $e < \frac{b}{6}$ (Fig. 190).

$$k = \frac{P}{100b} \left(1 + \frac{6e}{b} \right)$$

3) Die Kraft P greift am Kernrande an, also $e = \frac{b}{6}$ (Fig. 191).

$$k = \frac{2P}{100b}$$

Fig. 191.



4) Die Kraft P greift in der Entfernung e von der Mitte der Fuge, aber außerhalb des Kerns an, also $e > \frac{b}{6}$. Dabei sind Zugspannungen zulässig (Fig. 192).

$$k_m = \frac{P}{100 b} \left(1 + \frac{6 e}{b} \right) \text{ Druck}$$

$$k_n = \frac{P}{100 b} \left(1 - \frac{6 e}{b} \right) \text{ Zug}$$

5) Die Kraft P greift außerhalb des Kernes in der Entfernung x von der Mauerkante an. Zugspannungen sind unzulässig (Fig. 193).

$$k = \frac{2 P}{300 x}$$

Fig. 192.

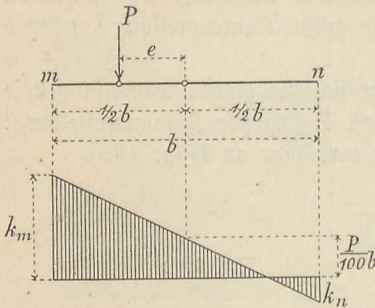
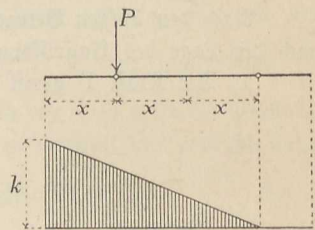


Fig. 193.



Nach den angeführten Formeln werden die Rantenpressungen berechnet und die Spannungsfiguren danach aufgezeichnet. Man kann aber auch folgendes einfache zeichnerische Verfahren zur Ermittlung der Rantenpressungen benutzen.

Für die Fälle 2 bis 4 (Fig. 194 bis 196) trage man $\frac{P}{100 b}$ in der Mitte der Fuge $m n$ und \perp zu derselben in beliebigem Maßstabe auf, verbinde

Fig. 194.

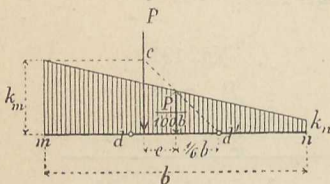
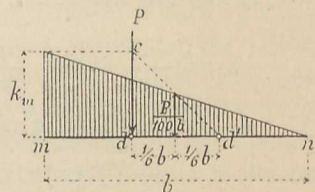


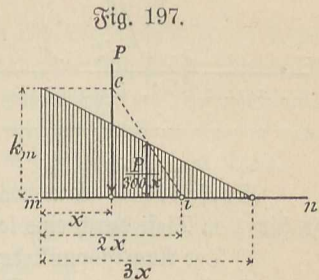
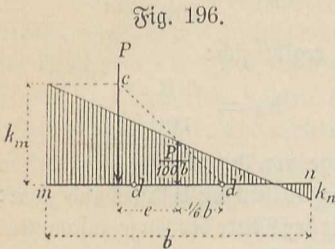
Fig. 195.



den von P abliegenden Kernpunkt d' mit dem Endpunkte von $\frac{P}{100 b}$, verlängere diese Verbindungslinie bis zum Schnittpunkt e mit P , und ziehe durch e eine Parallele zu $m n$ bis zum Schnitt mit der in m errichteten Senkrechten. Verbindet man nun diesen zuletzt erhaltenen Schnittpunkt mit dem Endpunkte von $\frac{P}{100 b}$ und verlängert diese Linie bis zum Schnitt mit der in n er-

richteten Senkrechten, so bildet diese Linie die obere Begrenzung der Druckverteilungsfigur für die Fuge mn.

Für den Fall 5 (Fig. 197) trage man $\frac{P}{300x}$ in der Mitte von $3x$ und rechtwinklig zu mn auf, verbinde den in der Entfernung $2x$ von der



Mauerfante liegenden Punkt i mit dem Endpunkte von $\frac{P}{300x}$ u. f. w. wie oben.

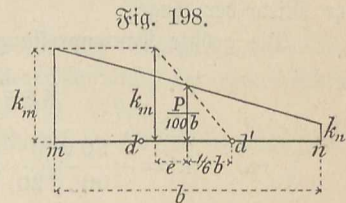
Zum Beweise des Verfahrens dient die Fig. 198. Danach ist:

$$\frac{P}{100b} : \frac{b}{6} = k_m : \left(e + \frac{b}{6} \right)$$

oder:

$$k_m \frac{b}{6} = \frac{P}{100b} \left(e + \frac{b}{6} \right)$$

$$k_m = \frac{P}{100b} \left(1 + \frac{6e}{b} \right)$$



Da ferner:

$$\frac{k_m + k_n}{2} = \frac{P}{100b}$$

oder:

$$k_n = \frac{2P}{100b} - k_m$$

ist folgt:

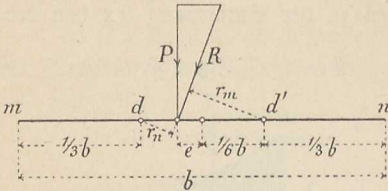
$$k_n = \frac{P}{100b} \left(1 - \frac{6e}{b} \right)$$

Für die Kantenpressungen k_m und k_n , welche entstehen, wenn eine beliebig gerichtete Kraft R (vergl. Fig. 181 S. 154) in der Entfernung e von der Mitte der Fuge mn angreift, läßt sich aus den oben angeführten Formeln leicht noch ein anderer einfacher Ausdruck ableiten, welcher in der Anwendung häufig sehr bequem ist. Es ist nämlich:

$$k_m = \frac{P}{100b} \left(1 + \frac{6e}{b} \right) = \frac{6P}{100b^2} \left(e + \frac{b}{6} \right)$$

Bezeichnet man dann die winkelrechten Abstände der Kernpunkte d und d' von der Kraft R mit r_n bzw. r_m (Fig. 199), so ist:

Fig. 199.



$$P \left(e + \frac{b}{6} \right) = R \cdot r_m$$

folglich:

$$k_m = \frac{6 R \cdot r_m}{100 b^2}$$

Ebenso ergibt sich:

$$k_n = \frac{6 R \cdot r_n}{100 b^2}$$

Beispiel 1. Eine wagerechte Mauerfuge von der Breite $b = 1,2$ m ist für 1 m Tiefe durch eine lotrechte Kraft $P = 30\,000$ kg belastet und zwar:

1) Der Angriffspunkt der Kraft P fällt mit der Mitte der Fuge zusammen.

Es findet in diesem Falle gleichmäßige Kraftverteilung statt und der Querschnitt erfährt in allen Teilen die gleiche Beanspruchung:

$$k = \frac{P}{100 b} = \frac{30\,000}{100 \cdot 120} = 2,5 \text{ kg}$$

2) Der Angriffspunkt der Kraft P hat die Entfernung $e = 10$ cm von der Mitte der Fuge.

Die größte Kantenpressung ist in diesem Falle:

$$k = \frac{P}{100 b} \left(1 + \frac{6 e}{b} \right)$$

$$k = \frac{30\,000}{100 \cdot 120} \left(1 + \frac{6 \cdot 10}{120} \right) = 3,75 \text{ kg}$$

3) Der Angriffspunkt der Kraft P liegt auf der Kerngrenze, also in der Entfernung $\frac{b}{6} = \frac{120}{6} = 20$ cm von der Mitte.

Die größte Pressung entsteht in der dem Angriffspunkte der Kraft P zunächst liegenden Kante und hat die Größe:

$$k = \frac{2 P}{100 b} = \frac{2 \cdot 30\,000}{100 \cdot 120} = 5 \text{ kg}$$

Die Pressung an der entgegengesetzten Kante ist = Null.

4) Die Kraft P greift außerhalb des Kernes an in der Entfernung $e = 30$ cm von der Fugenmitte. Zugspannungen sind zulässig.

Die Kantenpressung auf der Druckseite ist:

$$k = \frac{30\,000}{100 \cdot 120} \left(1 + \frac{6 \cdot 30}{120} \right) = 6,25 \text{ kg}$$

Auf der entgegengesetzten Kante entsteht die Zugspannung:

$$k = \frac{30\,000}{100 \cdot 120} \left(1 - \frac{6 \cdot 30}{120} \right) = -1,25 \text{ kg}$$

5) Die Kraft P greift außerhalb des Kernes an und hat die Entfernung $x = 30$ cm von der Mauerkante. (Der Angriffspunkt der Kraft ist also derselbe wie in 4.) Zugspannungen sind ausgeglichen.

Die größte Kantenpressung ist:

$$k = \frac{2 P}{300 x} = \frac{2 \cdot 30\,000}{300 \cdot 30} = 6\frac{2}{3} \text{ kg}$$

Beispiel 2. Betrachtet man von dem am Schlusse des § 6 S. 31 u. 32 bereits angeführten Hauptgesimse der Großh. Baugewerkschule zu Karlsruhe ein Stück von 1 m Tiefe, so sind die an obiger Stelle für die Flächeninhalte F_1 bis F_5 berechneten Zahlen übereinstimmend mit dem Rauminhalt der einzelnen Teile. Der Rauminhalt des Gesimses ist danach für 1 m Tiefe:

$$V = 0,019 + 0,126 + 0,065 + 0,1235 + 0,7095 = 1,043 \text{ cbm}$$

Rechnet man das cbm zu 2000 kg, so ist das Gewicht des Gesimses:

$$G = 1,043 \cdot 2000 = 2086 \text{ kg}$$

Da der Abstand der Schwerlinie von der Kante A (vergl. S. 32 und Fig. 59) sich zu:

$$x = 9,5 \text{ cm}$$

ergeben hat, so wird bei Ausschluß von Zugspannungen die Kantenpressung:

$$k = \frac{2 G}{300 x} = \frac{2 \cdot 2086}{300 \cdot 9,5} = \sim 1,5 \text{ kg}$$

Beispiel 3. Statische Untersuchung der vorderen Umfassungsmauer der Großh. Baugewerkschule in Karlsruhe mit Berücksichtigung der excentrischen Druckverteilung (vergl. S. 151 bis 153 und Fig. 179).

Die Länge der Balkenauflagerung ist überall zu 30 cm angenommen.

Schnitt A.

$$\text{Dachlast} = \frac{1}{2} \cdot 6,65 \cdot 5,64 \cdot 350 \dots\dots\dots = 6564 \text{ kg}$$

$$\text{Mauerlast} = 0,6 \cdot 1,58 \cdot 5,64 \cdot 1600 \dots\dots\dots = 8560 \text{ "}$$

$$\text{zusammen: } P_1 = 15124 \text{ kg}$$

$$\text{Fußbodenlast} = \frac{1}{2} \cdot 6,65 \cdot 5,64 \cdot 500 \dots\dots\dots P_2 = 9377 \text{ kg}$$

$$\text{Mauerlast} = 0,7 (0,52 \cdot 5,64 + 2,8 \cdot 1,48) 1600 \dots\dots P_3 = 7920 \text{ "}$$

$$\text{Gesamtlast: } R = 32421 \text{ kg}$$

Die Lage von R wird graphisch mit Hilfe eines Seilzuges oder durch Rechnung bestimmt. Es möge hier der letztere Weg eingeschlagen werden.

Bedeutet x_0 den Abstand der Kraft R, x_1, x_2, x_3 die Abstände der Kräfte P_1, P_2, P_3 von der äußeren Mauerkante, so ist¹⁾:

$$R x_0 = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3$$

also nach Fig. 200:

$$x_0 = \frac{15\,124 \cdot 30 + 9377 \cdot 55 + 7920 \cdot 35}{32\,421} = 38 \text{ cm}$$

folglich:

$$e = 38 - 35 = 3 \text{ cm}$$

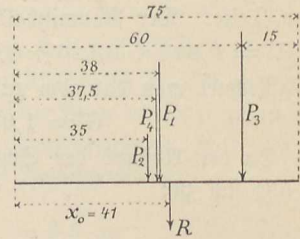
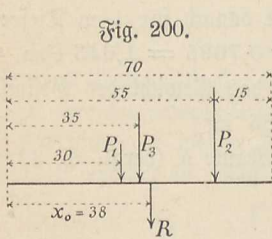
¹⁾ Vergl. Lauenstein, Mechanik, III. Aufl. Gl. 28, S. 32.

$$\text{Inanspruchnahme: } k = \frac{32421}{148 \cdot 70} \left(1 + \frac{6 \cdot 3}{70} \right) = 3,9 \text{ kg/qcm}$$

Schnitt B.

Belastung durch den Pfeiler des III. Stocks	$P_1 = 32421 \text{ kg}$
Mauerlast = $0,7 \cdot 0,9 \cdot 5,64 \cdot 1600$	$P_2 = 5685 \text{ "}$
Fußbodenlast = $\frac{1}{2} \cdot 6,42 \cdot 5,64 \cdot 500$	$P_3 = 9052 \text{ "}$
Mauerlast = $0,75 (0,55 \cdot 5,64 + 3,07 \cdot 1,48) 1600$	$P_4 = 9175 \text{ "}$
Gesamtlast: $R = 56333 \text{ kg}$	

Fig. 201.



Nach Fig. 201 ist:

$$x_0 = \frac{32421 \cdot 38 + 5685 \cdot 35 + 9052 \cdot 60 + 9175 \cdot 37,5}{56333} = 41 \text{ cm}$$

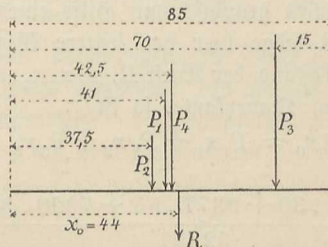
folglich: $e = 41 - 37,5 = 3,5 \text{ cm}$

$$\text{Inanspruchnahme: } k = \frac{56333}{148 \cdot 75} \left(1 + \frac{6 \cdot 3,5}{75} \right) = 6,5 \text{ kg/qcm}$$

Schnitt C.

Belastung durch den Pfeiler des II. Stocks	$P_1 = 56333 \text{ kg}$
Mauerlast = $0,75 \cdot 0,9 \cdot 5,64 \cdot 1600$	$P_2 = 6091 \text{ "}$
Fußbodenlast = $\frac{1}{2} \cdot 6,24 \cdot 5,64 \cdot 500$	$P_3 = 8798 \text{ "}$
Mauerlast = $0,85 (0,55 \cdot 5,64 + 3,47 \cdot 1,48) 1600$	$P_4 = 11203 \text{ "}$
Gesamtlast: $R = 82425 \text{ kg}$	

Fig. 202.



Nach Fig. 202 ist:

$$x_0 = \frac{56333 \cdot 41 + 6091 \cdot 37,5 + 8798 \cdot 70 + 11203 \cdot 42,5}{82425} = 44 \text{ cm}$$

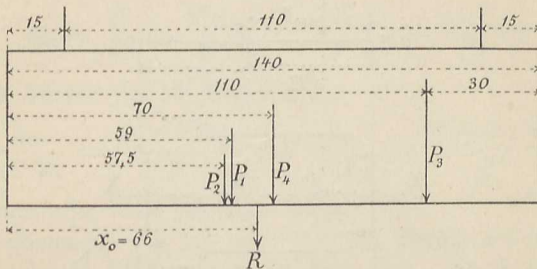
folglich: $e = 44 - 42,5 = 1,5 \text{ cm}$

$$\text{Beanspruchnahme: } k = \frac{82425}{148 \cdot 85} \left(1 + \frac{6 \cdot 1,5}{85} \right) = 7,3 \text{ kg/qcm}$$

Schnitt D.

Belastung durch den Pfeiler des I. Stockes	$P_1 = 82425 \text{ kg}$
Mauerlast $= 0,85 \cdot 1 \cdot 5,64 \cdot 1600$	$P_2 = 7670 \text{ ''}$
Fußbodenlast $= \frac{1}{2} \cdot 6,05 \cdot 5,64 \cdot 650$	$P_3 = 11090 \text{ ''}$
Mauerlast $= (1,1 \cdot 2,4 + 1,4 \cdot 0,4) \cdot 5,64 \cdot 2000$	$P_4 = 36096 \text{ ''}$
Gesamtlast: $R =$	137281 kg

Fig. 203.



Nach Fig. 203 ist:

$$x_0 = \frac{82425 \cdot 59 + 7670 \cdot 57,5 + 11090 \cdot 110 + 36096 \cdot 70}{137281} = 66 \text{ cm}$$

folglich:

$$e = 70 - 66 = 4 \text{ cm}$$

Die Beanspruchung des Baugrundes an der Außenkante ist danach:

$$k = \frac{137281}{140 \cdot 564} \left(1 + \frac{6 \cdot 4}{140} \right) = 2 \text{ kg/qcm}$$

§ 19.

Druckverteilung in Pfeilerquerschnitten bei excentrischer Belastung.

Es soll vorausgesetzt werden, daß die hier zu betrachtenden, im übrigen beliebig begrenzten Pfeilerquerschnitte eine Symmetrieachse haben, und daß in dieser der Angriffspunkt der Kraft P liegt.

1) Druckverteilung mit Zulassung von Zugspannungen.

Bedeutet F die Querschnittsfläche eines Pfeilers, und werden die Widerstandsmomente dieser Fläche für die Ranten m und n mit W_m bzw. W_n be-

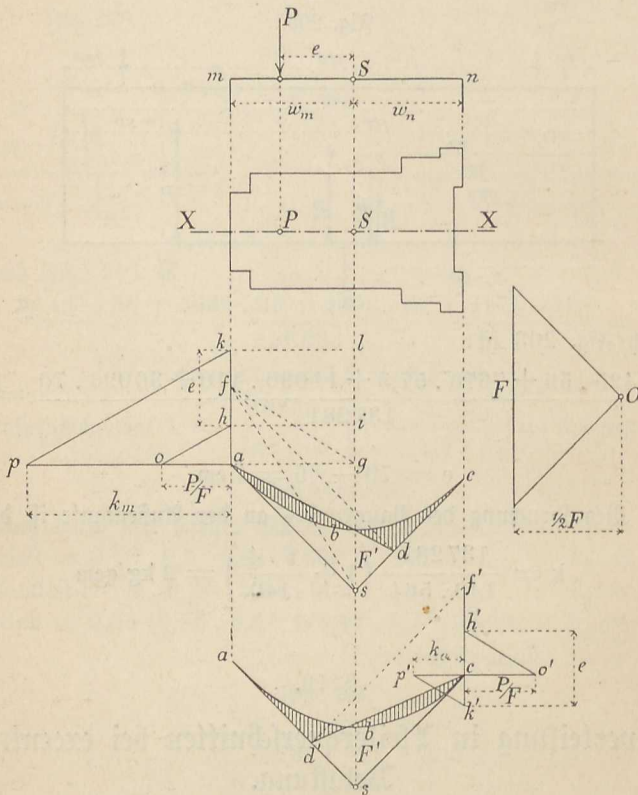
zeichnet, so sind, wenn die Kraft P in der Entfernung e von der neutralen Achse angreift, nach § 18 S. 155 die Kantenpressungen:

$$k_m = \frac{P}{F} + \frac{P e}{W_m}$$

$$k_n = \frac{P}{F} - \frac{P e}{W_n}$$

Man zerlege (Fig. 204) die Querschnittsfläche durch Linien rechtwinklig zur Symmetrieachse XX in Streifen, welche man als Kräfte behandelt. Man

Fig. 204.



zeichne den Kräfteplan mit dem Polabstand $\frac{1}{2} F$, und dazu den Seilzug abc . Der Schnittpunkt s der verlängerten äußersten Seilzugseiten ergibt die Lage der neutralen Achse, deren Abstände von den Kanten m und n in Fig. 204 mit w_m bzw. w_n bezeichnet sind.

Bedeutet dann J das Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche, so ist:

$$W_m = \frac{J}{w_m} \text{ und } W_n = \frac{J}{w_n}$$

folglich:

$$k_m = \frac{P}{F} + \frac{P e w_m}{J}$$

$$k_n = \frac{P}{F} - \frac{P e w_n}{J}$$

oder da nach S. 34:

$$J = F \cdot F'$$

gesetzt werden kann, wobei F' die von dem Seilzuge selbst und den verlängerten äußersten Seilzugseiten begrenzte Fläche bedeutet:

$$k_m = \frac{P}{F} + \frac{P e \cdot w_m}{F \cdot F'} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{e \cdot w_m}{F'} \right)$$

$$k_n = \frac{P}{F} - \frac{P e \cdot w_n}{F \cdot F'} = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{e \cdot w_n}{F'} \right)$$

Daraus ergeben sich die Verhältnisse:

$$\frac{k_m}{(P/F)} = \frac{F' + e \cdot w_m}{F'} \quad \text{und} \quad \frac{k_n}{(P/F)} = \frac{F' - e \cdot w_n}{F'}$$

welche sich zeichnerisch leicht darstellen lassen.

Zur Bestimmung von k_m ziehe man die Gerade ad so, daß die in Fig. 204 schraffierten Flächen einander gleich sind. Es ist dann:

$$\Delta asd = F'$$

Man verwandle dann das Dreieck asd durch $df \parallel as$ in das inhaltsgleiche Dreieck asf , letzteres weiter in das Dreieck afg . Halbirt man af im Punkte h und zeichnet das Rechteck $ahig$, so ist:

$$ahig = F'$$

Man mache sodann hk gleich der Excentricität e und ziehe $kl \perp hk$. Es ist dann:

$$hkli = e \cdot w_m$$

folglich:

$$aklg = F' + e \cdot w_m$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{F' + e \cdot w_m}{F'} = \frac{aklg}{ahig} = \frac{ak}{ah}$$

also auch:

$$\frac{k_m}{(P/F)} = \frac{ak}{ah}$$

Trägt man $ao = P/F$ auf, zieht die Gerade ho und durch k die $kp \parallel ho$, so ist:

$$k_m = ap$$

In derselben Weise wird k_n bestimmt.

Man ziehe ed' so, daß:

$$\Delta ed's = F'$$

wird, ziehe $d'f' \parallel cs$, halbiere cf' in h' und mache $h'k' = e$. Trägt man dann $co' = P/F$ auf, und zieht durch k' die $k'p' \parallel h'o'$ so ist:

$$k_n = cp'$$

k_n ergibt sich als Zugspannung, wenn $e > eh'$ ist, wenn also der Punkt k' unterhalb c liegt.

Es mag hierbei erwähnt werden, daß für den vorliegenden Fall, wo der Spannungsmittelpunkt auf einer Hauptachse liegt, die Rechnung einfacher ist und wohl schneller zum Ziele führt, als das zeichnerische Verfahren.

2) Druckverteilung mit Anschluß von Zugspannungen¹⁾.

Es sei (Fig. 205) ein ringförmiger Querschnitt F gegeben, auf welchen die Druckkraft P wirkt, deren Angriffspunkt außerhalb des Kernes liegen soll. Ist NN die neutrale Achse, so erfährt nur der schraffierte Teil $mNN = F_N$ des Querschnittes Druckspannung, der übrige Teil ist wirkungslos.

Bezeichnet man die Druckspannung in irgend einem Flächenteilchen f mit p , die Entfernung des Flächenteilchens von der neutralen Achse NN mit x und die Entfernung der Kraft P von der NN mit l , so ist nach dem Satze:

Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte²⁾:

$$Pl = \sum (pfx)$$

Die Druckspannung in der im Abstände x_0 von der NN liegenden und dieser parallelen Schwerpunktsachse der gedrückten Fläche ist:

$$k_0 = \frac{P}{F_N}$$

und da sich die Spannungen der Flächenteilchen verhalten wie ihre Abstände von der neutralen Achse, so ist:

$$\frac{p}{k_0} = \frac{x}{x_0} \text{ oder } p = \frac{k_0}{x_0} x$$

folglich:

$$Pl = \frac{k_0}{x_0} \sum (fx^2) = \frac{P}{F_N x_0} \sum (fx^2)$$

und daraus:

$$l = \frac{\sum (fx^2)}{F_N x_0} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$$

Man teile nun die Fläche F durch Linien parallel der NN in Streifen, fasse diese als Kräfte auf und zeichne den Kräfteplan mit dem Polabstand $1/2 F$ (F ist die ganze Fläche) und dazu den Seilzug.

¹⁾ Nach Mohr, Zeitschrift des Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins, Jahrg. 1883, S. 163.

²⁾ Vergl. Lauenstein, Mechanik, III. Aufl., S. 27.

Verlängert man die erste Seilzugseite und die neutrale Achse NN bis zum Schnittpunkt E, so ist nach S. 34 das Trägheitsmoment der Fläche F_N in Bezug auf die Achse NN:

$$J_N = 2 \left(\frac{1}{2} F\right) GHDE$$

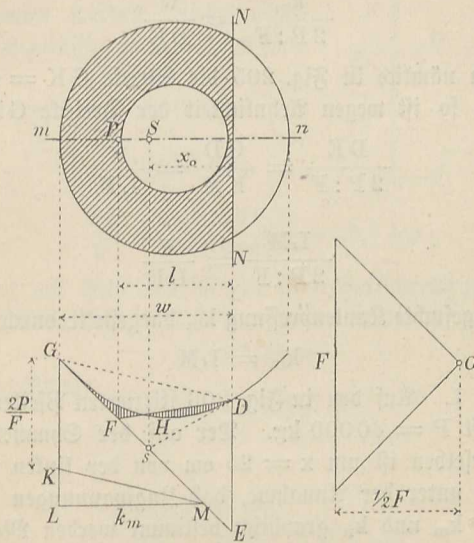
und nach S. 20 deren statisches Moment:

$$M_N = F_N x_0 = \frac{1}{2} F \cdot DE$$

folglich:

$$l = \frac{J_N}{F_N x_0} = \frac{2 \cdot GHDE}{DE}$$

Fig. 205.



Verwandelt man die Fläche GHDE in ein inhaltsgleiches Dreieck mit der Grundlinie DE, indem man die Gerade DF so zieht, daß die in Fig. 205 schraffierten Flächen einander gleich sind, so wird:

$$l = \frac{2 \cdot DEF}{DE}$$

d. h. l ist gleich der Höhe eines Rechtecks mit der Grundlinie DE. Der Angriffspunkt der Kraft P liegt demnach auf der durch den Punkt F gezogenen Lotrechten.

Um also bei gegebenem Angriffspunkte der Kraft P die Lage der neutralen Achse zu bestimmen, ziehe man nach Aufzeichnung des Kräfteplanes und Seilzuges von P aus Lotrecht herunter nach F , und lege durch F die Ausgleichungslinie FD so, daß die schraffierten Flächen einander gleich werden. Durch den Punkt D ist die gesuchte Lage der neutralen Achse NN festgelegt.

Nun ist:
$$\frac{k_m}{k_0} = \frac{w}{x_0}$$

oder:

$$k_m = \frac{k_0}{x_0} w = \frac{P}{F_N x_0} w$$

und wenn nach dem obigen:

$$F_N x_0 = 1/2 F \cdot DE$$

eingesetzt wird:

$$k_m = \frac{P w}{1/2 F \cdot DE}$$

Daraus ergibt sich das geometrisch leicht darstellbare Verhältnis:

$$\frac{k_m}{2P:F} = \frac{w}{DE}$$

Trägt man nämlich in Fig. 205 die Strecke $GK = 2P:F$ auf, und zieht $KM \parallel GD$, so ist wegen Ähnlichkeit der Dreiecke GKM und GDE :

$$\frac{DE}{2P:F} = \frac{GD}{KM} = \frac{w}{LM}$$

oder:

$$\frac{LM}{2P:F} = \frac{w}{DE}$$

folglich wird die gesuchte Kantendruckung k_m dargestellt durch die Strecke LM .

$$k_m = LM$$

Beispiel 1. Auf den in Fig. 206 skizzierten Pfeilerquerschnitt wirke die lotrechte Kraft $P = 40000$ kg. Der auf der Symmetrieachse liegende Angriffspunkt derselben ist um $x = 25$ cm von der linken Pfeilerkante entfernt. Es sollen unter der Annahme, daß Zugspannungen zulässig sind, die Kantendruckungen k_m und k_n graphisch bestimmt werden Maßstab 1:10.

Die ganze Querschnittsfläche ist:

$$F = 26 \cdot 130 + 65 \cdot 104 + 13 \cdot 52 = 10816 \text{ qcm}$$

folglich:

$$\frac{P}{F} = \frac{40000}{10816} = 3,7 \text{ kg}$$

Durch den Schnittpunkt der verlängerten äußersten Seilzugseiten ergeben sich die Maße:

$$w_m = 46,7 \text{ cm} ; w_n = 57,3 \text{ cm}$$

Danach ist:

$$e = w_m - x = 46,7 - 25 = 21,7 \text{ cm}$$

Man findet durch Aufzeichnung der Ausgleichungsklinien (vergl. Fig. 204):

$$sd = 25,5 \text{ cm} ; sd' = 20,8 \text{ cm}$$

und daraus:

$$ah = 18 \text{ cm} ; ch' = 14,7 \text{ cm}$$

Die gesuchten Rantenpressungen ergeben sich durch das weitere an Fig. 204 erläuterte zeichnerische Verfahren zu:

$$k_m = 8,2 \text{ kg (Druck)}$$

$$k_n = 1,8 \text{ kg (Zug)}$$

Der Nullpunkt liegt in 19 cm Entfernung von der rechten Pfeilerkante.

Beispiel 2. Ein ringförmiger Kaminquerschnitt von $D = 200$ cm äußerem und $d = 100$ cm innerem Durchmesser ist belastet durch die Kraft $P = 45\,000$ kg, deren Angriffspunkt 60 cm von der Mitte entfernt ist. Es soll die größte Rantenpressung k_m zeichnerisch bestimmt werden, wobei Zugspannungen als unzulässig zu betrachten sind. Maßstab 1 : 10.

Der Querschnitt hat die Größe:

$$F = \frac{(D^2 - d^2) \pi}{4} = 23\,562 \text{ qcm}$$

folglich wird:
$$\frac{2P}{F} = \frac{2 \cdot 45\,000}{23\,562} = 3,8 \text{ kg}$$

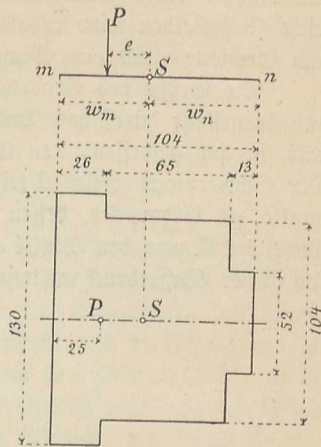
Man findet mit Hilfe des Mohr'schen Verfahrens (Fig. 205 S. 167) den Abstand der neutralen Achse NN von der Kante m zu:

$$w = 1,11 \text{ m}$$

und die Rantenpressung:

$$k_m = 7 \text{ kg}$$

Fig. 206.



§ 20.

Statische Untersuchung der Stützmauern.

Auf die Stützmauer ABCD (Fig 207) wirkt außer dem Eigengewichte G noch ein Seitendruck E , welcher von der zu stützenden Erdmasse gegen die Mauer ausgeübt wird. Unter dem Einflusse der Mittelkraft R dieser beiden Kräfte G und E müssen, wenn die Mauer standfester sein soll, folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) Es darf keine Drehung der Mauer um die äußerste Kante (die Kippkante) erfolgen, es muß daher die Kraft R die Grundfläche der Mauer innerhalb der Ranten A und D schneiden.

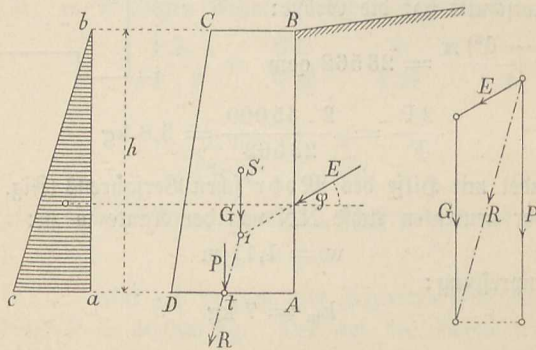
2) Es darf kein Gleiten der Mauer auf der Lagerfläche AD erfolgen; der Winkel, den die Kraft R mit der Winkelrechten zu AD bildet, muß daher kleiner sein als der Reibungswinkel des Materiales.

3) Die größte Rantenpressung darf das für den Baugrund zulässige Maß nicht übersteigen.

Der Angriffspunkt des Eigengewichtes G der Mauer liegt im Schwerpunkte der Querschnittsfläche $ABCD$, welcher nach 2 § 6 und Fig. 50 ermittelt wird. Der Flächeninhalt des Querschnittes in qm ist gleich dem Rauminhalt eines Mauerstückes von der Tiefe Eins in cbm . Das Gewicht G desselben wird erhalten durch Multiplikation des Rauminhaltes mit dem Gewichte eines cbm Mauerwerk.

Die Größe des Erddruckes E wird nach § 17 (S. 143 u. f.) bestimmt und dargestellt durch das Dreieck abc von der Höhe der Mauer, dessen Inhalt, in qm gemessen, den Erddruck in cbm (für die Tiefe Eins) angibt. Der Schwerpunkt dieses Dreiecks liegt in gleicher Höhe mit dem Angriffspunkte des Erddruckes, dessen Richtungslinie mit der Senkrechten zur Rückenfläche der Mauer den Winkel φ einschließt. (Bei Wasser ist $\varphi = \text{Null}$, folglich ist der Wasserdruck rechtwinklig gegen die Rückenfläche der Mauer gerichtet.)

Fig. 207.



Die beiden Kräfte G und E , ausgedrückt in derselben Einheit (kg oder Tonnen), werden zu einem Kräftezuge zusammengesetzt und zu der Mittelkraft R vereinigt, welche die Grundlinie AD der Mauer in einem Punkte t schneidet. Nach 3 § 18 (S. 154 u. f.) bestimmt man sodann die durch R erzeugte, bei D auftretende größte Kantenpressung k .

Beispiel. Es soll bei einer Stützmauer (Fig. 207) die größte Kantenpressung bestimmt werden unter folgenden Voraussetzungen.

- Die Bodenoberfläche sei wagerecht.
- Böschungswinkel des Erdmaterials . . . $\varphi = 30^\circ$
- Gewicht eines cbm Erde $\gamma = 1600 \text{ kg}$
- " " " Mauerwerk . . . $\gamma_1 = 2000 \text{ "}$
- AB lotrecht, AD und BC wagerecht.

Die Abmessungen der Mauer sind: $AB = 3 \text{ m}$; $BC = 0,5 \text{ m}$; $AD = 0,9 \text{ m}$.

Das Beispiel ist aufzuzeichnen im Maßstabe $1 : 20$; Kräftemaßstab $1000 \text{ kg} = 2,5 \text{ cm}$.

Das Gewicht der Mauer für ein m Tiefe ist:

$$G = h \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot \gamma_1 = 3 \cdot \frac{0,5 + 0,9}{2} \cdot 2000 = 4200 \text{ kg}$$

Bestimmt man nach § 17 das Erddruckdreieck und verwandelt dieses in das inhaltsgleiche Dreieck abc mit der Höhe $h = AB$, so erhält man $ac = 0,9$ m.

Der Erddruck E für 1 m Tiefe ergibt sich danach zu:

$$E = h \cdot \frac{ac}{2} \cdot \gamma = 3 \cdot \frac{0,9}{2} \cdot 1600 = 2160 \text{ kg}$$

Das Gewicht G greift im Schwerpunkte S des Trapezes ABCD an; der Angriffspunkt von E liegt im ersten Drittel der Mauerhöhe, also 1 m über A, die Richtungslinie von E schließt mit der Wagerechten den Winkel $\varphi = 30^\circ$ ein. Die beiden Kräfte G und E werden im Kräfteplane zu der Mittelkraft R zusammengesetzt, deren Lage durch den Schnittpunkt 1 in der Hauptfigur bestimmt wird. Die Grundlinie der Mauer wird von der Mittelkraft R im Punkte t geschnitten und es ergibt sich $Dt = x = 26$ cm.

Die lotrechte Seitenkraft von R wird aus dem Kräfteplane durch Messung gefunden zu:

$$P = 5270 \text{ kg}$$

folglich ist, da der Punkt t außerhalb des mittleren Drittels der Grundlinie AD liegt (nach § 18 S. 157), die in D auftretende größte Kantenpressung in kg:

$$k = \frac{2P}{300x} = \frac{2 \cdot 5270}{300 \cdot 26} = 1,35 \text{ kg}$$

Der Nullpunkt liegt in der Entfernung $3x = 3 \cdot 26 = 78$ cm von der Kante D; die Mittelkraft R bildet mit der Lotrechten einen Winkel von $19\frac{1}{3}^\circ$.

Handelt es sich darum, die Stärke einer Stützmauer annähernd zu erhalten, so kann folgendes Verfahren benutzt werden (Fig. 208).

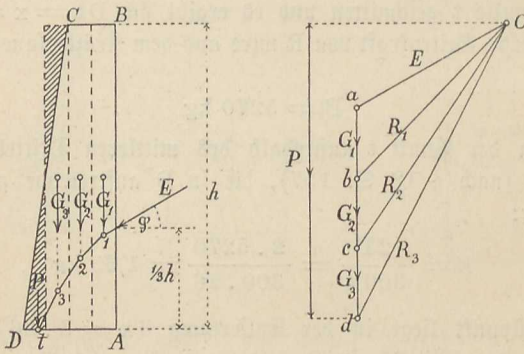
Man teile die beliebig aber stark genug angenommene Mauer, von der Rückseite derselben ausgehend, durch lotrechte Schnitte in dünne Streifen, deren Gewichte G_1, G_2, G_3, \dots man mit dem Erddrucke E zu einem Kräfteplan vereinigt. Die Kräfte E und G_1 bilden die Mittelkraft $Ob = R_1$, die in der Hauptfigur durch den Schnittpunkt 1 geht. Man ziehe also durch den Punkt 1 eine Parallele zu dem Strahl Ob; durch den Schnittpunkt 2 von R_1 und G_2 ziehe man weiter eine Parallele zu dem Strahl $Oc = R_2$ u. s. f. Man erhält auf diese Weise den Punkt t, in welchem die Grundlinie AD der Mauer von der Gesamtmittelkraft, deren lotrechte Seitenkraft P sich aus dem Kräfteplane ergibt, geschnitten wird. Die äußere Mauerkante D muß nun eine solche Entfernung x von dem Punkte t haben, daß die Kantenpressung k die erlaubte Grenze nicht überschreitet.

Die Größe x ergibt sich aus der Bedingung: $k = \frac{2 P}{300 x}$ zu:

$$x = \frac{2 P}{300 k}$$

Fällt danach der Punkt D (zufällig) mit der äußeren Grenze des letzten Mauerstreifens zusammen, so waren bei vorn lotrecht abfallender Mauer die Gewichte richtig. Liegt der Punkt D außerhalb des in Rechnung gezogenen letzten Streifens, so kann entweder die Mauer vorn so gebüsch werden, daß die in Fig. 208 schraffierten Dreiecke einander gleich sind, in welchem Falle sich die Mauergewichte ebenfalls nicht ändern, oder man hat noch einen mehr oder weniger breiten Streifen hinzuzufügen, wodurch das wirkliche Mauergewicht größer als berechnet war ausfällt. Man erhält dadurch eine neue Kraft P_1 , folglich auch ein neues x_1 , mit dem man wie oben verfährt, und kann nötigenfalls durch nochmalige Wiederholung dieses Verfahrens die erforderliche Mauerstärke bis zu ziemlicher Genauigkeit feststellen.

Fig. 208.



Beispiel. Es soll bei einer 5 m hohen, an der Rückseite lotrechten Stützmauer die erforderliche Stärke am Fuße bestimmt werden unter Annahme einer Kantenpressung $k = 4 \text{ kg}$.

Die Bodenoberfläche sei wagerecht.

Böschungswinkel des Erdmaterials . . . $\varphi = 30^\circ$

Gewicht eines cbm Erde $\gamma = 1600 \text{ kg}$

„ „ „ Mauerwerk $\gamma_1 = 2000 \text{ „}$

Das Beispiel ist aufzuzeichnen im Maßstabe 1 : 25; Kräftemaßstab 1000 kg = 1 cm. Man führt die Untersuchung wieder für 1 m Tiefe durch. Der Erddruck ergibt sich dann zu:

$$E = 5200 \text{ kg}$$

Denkt man sich die Mauer durch lotrechte Schnitte in 0,3 m breite Streifen geteilt, so ist der Rauminhalt jedes Streifens:

$$V_1 = V_2 = \dots = 0,3 \cdot 5 = 1,5 \text{ cbm}$$

folglich das Gewicht:

$$G_1 = G_2 = \dots = 1,5 \cdot 2000 = 3000 \text{ kg}$$

Nach Aufzeichnung des Kräfteplanes und Seilzuges ergibt sich die Entfernung des Punktes t außerhalb der Außenkante des dritten Streifens zu 15 cm.

Nach dem Kräfteplan ist die Lotrechte Seitenkraft P der Kraft R_3 (Mittelkraft aus dem Erddruck E und dem Gewichte dreier Streifen):

$$P = 12000 \text{ kg}$$

folglich

$$x = \frac{2P}{300k} = \frac{2 \cdot 12000}{300 \cdot 4} = 20 \text{ cm}$$

Verbindet man den so gewonnenen Punkt D mit dem Mittelpunkt der äußeren Lotrechten Seite des dritten Streifens, so ergibt sich die Böschung der Mauer zu $1 : 7^{1/7}$.

Die Grundlinie der Mauer ist:

$$AD = 1,25 \text{ m.}$$

Die Stützlinie der Mauern.

Es sei $ABCD$ (Fig. 209) der Querschnitt einer Mauer, welche einen Wasserdruck auszuhalten hat und $A EFG$ das Fundament derselben. Denkt man sich die Mauer durch wagerechte Schnitte $A_1 D_1, A_2 D_2 \dots$ in Streifen zerlegt und ermittelt für die verschiedenen Schnitte die Druckpunkte, so entsteht durch die Verbindungslinien aller einzelnen Druckpunkte miteinander die Drucklinie oder Stützlinie, deren Verlauf ein deutliches Bild von der Druckverteilung im Innern der Mauer gibt.

Der größte Wasserdruck, welcher entsteht, wenn der Oberwasserspiegel mit der Mauerkrone BC abschneidet, ist gleich dem Gewichte eines Wasserprisma, dessen Querschnitt das Dreieck abc mit $ac = ab = h$ ist.

Betrachtet man, wie gewöhnlich, von der Mauer ein Stück von 1 m Tiefe, so wirkt auf den oberen Streifen das Gewicht G_1 und der Wasserdruck W_1 , welche im Kräfteplane zu der Mittelkraft R_1 vereinigt werden.

Werden die Flächen in qm gemessen und bedeutet

$$\begin{aligned} \gamma & \text{ das Gewicht eines cbm Wasser} \\ \gamma_1 & \text{ " " " " Mauerwerk} \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} G_1 &= A_1 BCD_1 \cdot \gamma_1 \\ W_1 &= a_1 b c_1 \cdot \gamma \end{aligned}$$

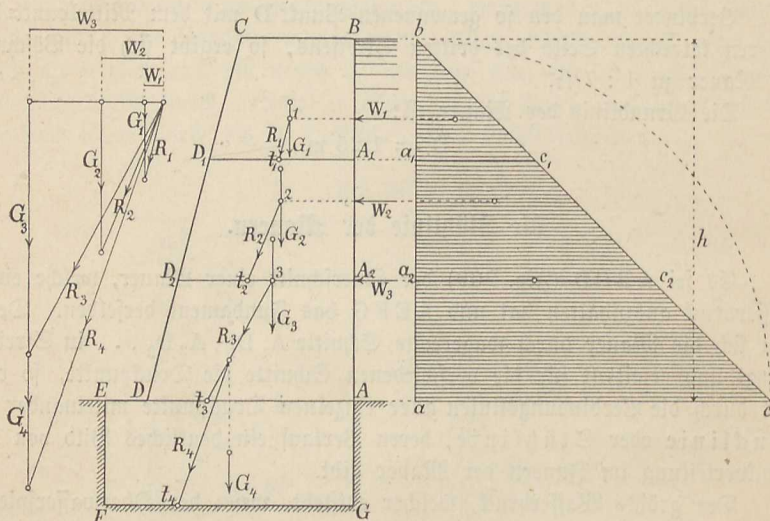
Zieht man durch 1 (Schnittpunkt von G_1 und W_1) eine Parallele zu R_1 , so schneidet diese die Fuge $A_1 D_1$ im Punkte t_1 . Der Punkt t_1 ist daher der Druckpunkt für die Fuge $A_1 D_1$.

Das Verfahren wird bei allen folgenden Fugen wiederholt, indem man jedesmal das ganze Mauerstück betrachtet von der Krone bis zu der betreffenden Fuge.

Auf die beiden ersten, von der Mauerkrone BC bis zu der Fuge $A_2 D_2$ reichenden Streifen, d. i. auf das Mauerstück $A_2 B C D_2$ wirken die Kräfte $G_2 = A_2 B C D_2 \cdot \gamma_1$ und $W_2 = a_2 b c_2 \cdot \gamma$. Durch Zusammensetzung derselben ergibt sich die Mittelkraft R_2 , welche die Fuge $A_2 D_2$ im Punkte t_2 schneidet.

Die auf die Fuge AD wirkende Kraft R_3 (Mittelkraft aus $G_3 = ABCD \cdot \gamma_1$ und $W_3 = abc \cdot \gamma$), welche die Grundfläche AD im Punkte t_3 schneidet, wird schließlich zusammengesetzt mit dem Gewichte G_4 des Fundamentes zu der Mittelkraft R_4 . Der Schnitt der Kraft R_4 mit der Fundamentsohle gibt den Druckpunkt t_4 .

Fig. 209.



Durch die geradlinige Verbindung der Punkte $t_1 t_2 t_3 t_4$ entsteht ein die Drucklinie umhüllender geknickter Linienzug, welcher, wenn die Punkte $t_1 t_2 \dots$ nahe genug aneinander liegen, oder was dasselbe ist, wenn die Höhen der Streifen klein genug angenommen waren, an Stelle der wirklichen, stetig verlaufenden Drucklinie gesetzt werden kann. In den meisten Fällen genügt es bei Mauern von der Form der Figur 209, die Druckpunkte in der unteren Fuge AD und in der Fundamentsohle FG zu ermitteln und danach die in den Punkten D und F auftretenden Pressungen festzustellen.

Beispiel. Eine Leichmauer von der Form der Fig. 209 habe folgende Abmessungen:

$$AB = 3 \quad \text{m}$$

$$BC = 1,2 \quad \text{,,}$$

$$AD = 1,95 \quad \text{,,}$$

$$AE = 2,4 \quad \text{,,}$$

$$GA = AA_2 = A_2 A_1 = A_1 B = 1 \text{ m}$$

Das Gewicht von 1 cbm Mauerwerk sei $\gamma_1 = 2000$ kg.

Es soll die Drucklinie eingezeichnet und die Pressungen in den Punkten D_1 , D_2 , D und F bestimmt werden. (Maßstab 1 : 20, Kräftemaßstab 1000 kg = 1,5 cm.)

Die Gewichte der einzelnen Mauerabschnitte sind:

$$G_1 = A_1 B C D_1 \cdot \gamma_1 = 1,325 \cdot 2000 = 2650 \text{ kg}$$

$$G_2 = A_2 B C D_2 \cdot \gamma_1 = 2,9 \cdot 2000 = 5800 \text{ ,,}$$

$$G_3 = A B C D \cdot \gamma_1 = 4,725 \cdot 2000 = 9450 \text{ ,,}$$

$$G_4 = A E F G \cdot \gamma_1 = 2,4 \cdot 2000 = 4800 \text{ ,,}$$

Die Wasserdrücke sind:

$$W_1 = a_1 b c_1 \cdot \gamma = 0,5 \cdot 1000 = 500 \text{ kg}$$

$$W_2 = a_2 b c_2 \cdot \gamma = 2,0 \cdot 1000 = 2000 \text{ ,,}$$

$$W_3 = a b c \cdot \gamma = 4,5 \cdot 1000 = 4500 \text{ ,,}$$

Die auf die Fugen $A_1 D_1$, $A_2 D_2$, AD , FG wirkenden Kräfte ergeben sich aus dem Kräfteplane, deren rechtwinklige Abstände von den maßgebenden Kernpunkten (vergl. Fig. 199 S. 160) aus der Hauptfigur. Man findet:

$$R_1 = 2700 \text{ kg} ; r_{m1} = 24 \text{ cm}$$

$$R_2 = 6150 \text{ ,,} ; r_{m2} = 38 \text{ ,,}$$

$$R_3 = 10450 \text{ ,,} ; r_{m3} = 57 \text{ ,,}$$

$$R_4 = 14950 \text{ ,,} ; r_{m4} = 74 \text{ ,,}$$

Daraus berechnen sich die Kantenpressungen nach der auf S. 160 angegebenen Formel:

$$k_m = \frac{6 R \cdot r_m}{100 b^2}$$

$$\text{In } D_1 \text{ wird: } k_1 = \frac{6 \cdot 2700 \cdot 24}{100 \cdot 145^2} = 0,18 \text{ kg}$$

$$\text{In } D_2 \text{ ,, : } k_2 = \frac{6 \cdot 6150 \cdot 38}{100 \cdot 170^2} = 0,5 \text{ ,,}$$

$$\text{In } D \text{ ,, : } k_3 = \frac{6 \cdot 10450 \cdot 57}{100 \cdot 195^2} = 0,94 \text{ ,,}$$

$$\text{In } F \text{ ,, : } k_4 = \frac{6 \cdot 14950 \cdot 74}{100 \cdot 240^2} = 1,15 \text{ ,,}$$

Die Kraft R_1 trifft die Fuge $A_1 D_1$ genau in der Mitte, es findet daher in dieser Fuge gleichmäßige Druckverteilung statt, und die Pressung k_1 läßt sich etwas einfacher wie oben auch berechnen aus:

$$k_1 = \frac{G_1}{100 \cdot A_1 D_1} = \frac{2650}{100 \cdot 145} = 0,18 \text{ kg}$$

Die Drucklinie bleibt überall im mittleren Drittel der Mauer.

Die Winkel, welche die Kräfte $R_1 \dots R_4$ mit den Normalen zu den Fugen bilden, sind:

$$\alpha_1 = 10^{1/2}$$

$$\alpha_2 = 19^0$$

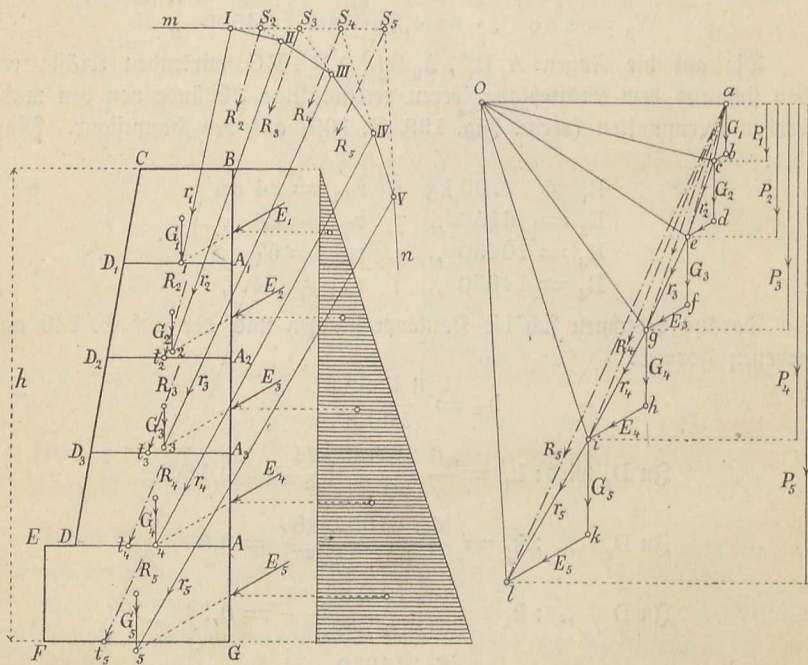
$$\alpha_3 = 25^{1/2} 0$$

$$\alpha_4 = 17^{1/2} 0$$

Die Druckpunkte in den Fugen einer Stützmauer lassen sich noch in einer anderen Weise bestimmen, welche den Vorteil großer Uebersichtlichkeit bietet und in Fig. 210 durchgeföhrt ist.

Die Mauer und das Erddruckdreieck teile man durch wagerechte Schnitte in eine beliebige Anzahl Streifen. Die Gewichte G_1, G_2, \dots der einzelnen Streifen und die auf dieselben wirkenden Erddrücke E_1, E_2, \dots werden in der Reihenfolge $G_1, E_1, G_2, E_2, \dots$ zu einem Kräfteplane aneinander geföhgt und darauf G_1 und E_1 zu der Mittelkraft r_1 , G_2 und E_2 zu der Mittelkraft r_2 u. s. w. vereinigt. Wird dann mit einem beliebig gewählten Pole O zu den Kräften r

Fig. 210.



ein Seilzug aufgezeichnet, so lässt sich für irgend eine der Mauerfugen $A_1 D_1, A_2 D_2, \dots$ die auf dieselbe wirkende Mittelkraft R bestimmen, deren Größe aus dem Kräfteplane entnommen wird und deren Lage gegeben ist durch den Schnittpunkt der die Kräftegruppe r einschließenden Seilzugseiten.

So z. B. wirken auf die Fuge AD die Kräfte r_1 bis r_4 , deren Mittelkraft R_4 im Kräfteplane durch die Strecke ai dargestellt wird, und deren Lage bestimmt ist durch den Schnittpunkt S_4 der die Kräfte r_1 bis r_4 einschließenden verlängerten Seilzugseiten mI und VI . Der Punkt t_4 , in welchem die Fuge AD von der Kraft R_4 geschnitten wird, ist der Stützpunkt der Fuge AD . Aus der Lage des Punktes t_4 und der Größe der Kraft R_4 lässt sich dann die in D auftretende Pressung berechnen.

In derselben Weise werden die Stützpunkte und Rantenpressungen in allen anderen Fugen ermittelt; wichtig ist von diesen indessen nur die Kenntnis der Pressung im Punkte F der Fundamentsohle.

Beispiel. Die in Fig. 210 dargestellte Stützmauer habe folgende Abmessungen:

$$AB = 3,2 \text{ m}; BC = 0,5 \text{ m}; AD = 1,0 \text{ m}$$

$$AE = FG = 1,3 \text{ m}$$

$$GA = AA_3 = A_3 A_2 = A_2 A_1 = A_1 B = 0,8 \text{ m}$$

$$\text{Das Gewicht von 1 cbm Erde sei: } \gamma = 1600 \text{ kg}$$

$$\text{„ „ „ 1 „ Mauerwerk: } \gamma_1 = 2000 \text{ „}$$

Der Böschungswinkel φ ist $= 30^\circ$ und die Bodenoberfläche wagerecht anzunehmen.

Es soll die Drucklinie mit Hilfe eines Kräfteplanes und Seilzuges eingezeichnet und die Rantenpressungen in den Fugen $A_1 D_1, A_2 D_2 \dots$ berechnet werden. (Maßstab 1 : 20; Kräftemaßstab 1000 kg = 2 cm.)

Die Gewichte der einzelnen Mauerstreifen für 1 m Tiefe sind:

$$G_1 = \frac{1}{2} (0,5 + 0,625) 0,8 \cdot 2000 = 900 \text{ kg}$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (0,625 + 0,75) 0,8 \cdot 2000 = 1100 \text{ „}$$

$$G_3 = \frac{1}{2} (0,75 + 0,875) 0,8 \cdot 2000 = 1300 \text{ „}$$

$$G_4 = \frac{1}{2} (0,875 + 1,0) 0,8 \cdot 2000 = 1500 \text{ „}$$

$$G_5 = \quad \quad \quad 1,3 \cdot 0,8 \cdot 2000 = 2080 \text{ „}$$

Der ganze auf die Mauer wirkende Erddruck ist nach S. 150:

$$E = 0,15 \gamma h^2$$

und wird dargestellt durch ein Dreieck von der Höhe $h = 4 \text{ m}$, und der Grundlinie $2 \cdot 0,15 h = 1,2 \text{ m}$. Die auf die einzelnen Streifen der Mauer wirkenden Erddrücke sind danach:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,24 \cdot 0,8 \cdot 1600 = 154 \text{ kg}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (0,24 + 0,48) 0,8 \cdot 1600 = 461 \text{ „}$$

$$E_3 = \frac{1}{2} (0,48 + 0,72) 0,8 \cdot 1600 = 768 \text{ „}$$

$$E_4 = \frac{1}{2} (0,72 + 0,96) 0,8 \cdot 1600 = 1075 \text{ „}$$

$$E_5 = \frac{1}{2} (0,96 + 1,2) 0,8 \cdot 1600 = 1382 \text{ „}$$

Die Streifengewichte G und Erddrücke E werden nun in der Reihenfolge $G_1 E_1 G_2 E_2 G_3 E_3$ u. s. w. zu dem Kräftezuge $abc \dots l$ aneinander gefügt und aus G_1 und E_1 die Mittelkraft $r_1 = ac$, aus G_2 und E_2 die Mittelkraft $r_2 = ce$ u. s. w. gebildet und in die Hauptfigur so eingezeichnet, daß r_1 durch den Schnittpunkt 1 von G_1 und E_1 , r_2 durch den Schnittpunkt 2 von G_2 und E_2 u. s. w. geht. Dem beliebig gewählten Pole O entsprechend wird sodann der Seilzug $m I I I I I V n$ aufgezeichnet.

Auf die Bodenfuge FG wirkt die Kraft $R_5 = al$ (Mittelkraft aus r_1 bis r_5), deren Lage durch den Schnittpunkt S_5 der verlängerten Seilzugseiten $m I$ und $n V$ gegeben ist, und welche die Fuge FG im Punkte t_5 trifft. Die

Entfernung dieses Punktes von der Kante F ist: $x = 42,5$ cm. Die lotrechte Seitenkraft P_5 der Kraft R_5 hat (nach dem Kräfteplan) die Größe:

$$P_5 = 8800 \text{ kg}$$

und erzeugt im Punkte F die Pressung:

$$k_5 = \frac{2 P_5}{300 \cdot x} = \frac{2 \cdot 8800}{300 \cdot 42,5} = 1,4 \text{ kg/qcm}$$

Um die in D auftretende Kantenpressung zu berechnen, hat man die oberhalb der Fuge AD wirkenden Kräfte r_1 bis r_4 zu der Mittelkraft $R_4 = a$ i zusammenzufassen, welche durch den Schnittpunkt S_4 der verlängerten Seilzugseiten mI und VIV geht und die Fuge AD im Punkte t_4 schneidet. Man findet: $D t_4 = x = 31$ cm. Die lotrechte Seitenkraft P_4 der Kraft R_4 ergibt sich aus dem Kräfteplane zu:

$$P_4 = 6000 \text{ kg}$$

wonach sich dann die Pressung im Punkte D berechnet zu:

$$k_4 = \frac{2 \cdot P_4}{300 \cdot x} = \frac{2 \cdot 6000}{300 \cdot 31} = 1,3 \text{ kg/qcm}$$

Die Pressungen in den oberen Fugen fallen wesentlich geringer aus. Man findet nach 2) S. 157 für die Punkte D_3 und D_2 :

$$k_3 = \frac{P_3}{100 \cdot A_3 D_3} \left(1 + \frac{6 \cdot e_3}{A_3 D_3} \right) = \frac{3200}{100 \cdot 87,5} \left(1 + \frac{6 \cdot 9,6}{87,5} \right) = 0,61 \text{ kg}$$

$$k_2 = \frac{P_2}{100 \cdot A_2 D_2} \left(1 + \frac{6 \cdot e_2}{A_2 D_2} \right) = \frac{1840}{100 \cdot 75} \left(1 + \frac{6 \cdot 3}{75} \right) = 0,3 \text{ kg}$$

Die Fuge $A_1 D_1$ wird von der Kraft $R_1 = r_1 = a$ in einem Punkte t_1 geschnitten, welcher rechts von der Fugenmitte liegt. Die größte Pressung in dieser Fuge findet folglich im Punkte A_1 statt und ist:

$$k_1 = \frac{P_1}{100 \cdot A_1 D_1} \left(1 + \frac{6 \cdot e_1}{A_1 D_1} \right) = \frac{800}{100 \cdot 62,5} \left(1 + \frac{6 \cdot 1,5}{62,5} \right) = 0,15 \text{ kg}$$

Unterschnittene Futtermauern.

Die neueren Stütz- oder Futtermauern sind gewöhnlich vorn gebösch mit 1:5 bis 1:10 und an der Rückseite unterschritten. Dadurch läßt es sich erreichen, daß die Mittelkraft R aus dem Eigengewichte G der Mauer und dem Erddruck E etwa die Mitte der Grundlinie AD (Fig. 211) trifft, was insofern vorteilhaft ist, als sich dann die Pressungen gleichmäßig über den Querschnitt AD verteilen. Die Unterschneidung darf dabei aber ein gewisses Maß nicht überschreiten, denn da während des Aufmauerns (wenn nicht gleichzeitig die Hinterfüllung mit Erde vorgenommen wird, was selten geschieht) noch kein Erddruck vorhanden ist, so muß die Mauer auch ohne Erddruck standfest sein, d. h. es muß G die untere Mauerfuge innerhalb der Punkte A

und D schneiden und es darf die durch das Eigengewicht G im Punkte A erzeugte Pressung das praktisch zulässige Maß nicht überschreiten.

Die Lagerfugen der Mauern sind nötigenfalls so geneigt anzuordnen, daß der Winkel, welchen die Mittelkraft mit der Normalen zur Fuge bildet, überall kleiner bleibt als der Reibungswinkel des Materiales. Dieses ist namentlich bei der Bodenfuge zu untersuchen, weil dort die Gefahr des Abschiebens am größten ist. Häufig legt man aus praktischen Gründen die Lagerfugen rechtwinklig zur Außenfläche der Mauer.

Bei der Stützmauer AA_1BCD (Fig. 212 a) sei die Bodenoberfläche wagerecht; auf dieser ruhe außerdem noch eine gleichmäßig verteilte Belastung p für das qm , welche nach § 17 S. 147 ersetzt werden kann durch eine Erdschicht von der Höhe

$$BB_1 = \frac{p}{\gamma}$$

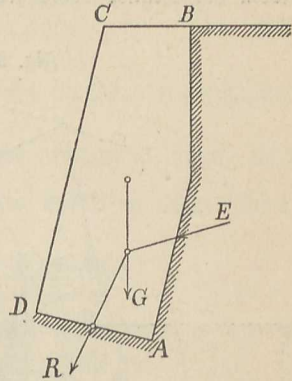
das Mauerstück A_1B wirkenden Erddruck E_1 , nach den in § 17 angegebenen Regeln, wodurch man das Erddruckdreieck GHI erhält. Verwandelt man dieses in das inhaltsgleiche Dreieck $a_1b_1d_1$, so ist das schraffierte Trapez $a_1b_1cd_1$ die Belastungsfläche für den oberen Teil A_1B der Mauer. Die Wagerechte durch den Schwerpunkt dieses Trapezes trifft die Rückenfläche der Mauer im Angriffspunkte des Erddruckes E_1 , welcher mit der Winkelrechten zu A_1B den Winkel φ einschließt. Der Erddruck E_2 auf das untere Stück AA_1 der Mauer kann nach Fig. 174 S. 147 oder auch in folgender Weise bestimmt werden. Man verlängere AA_1 bis B_2 , betrachte A_1B_2 als Rückenfläche der Mauer und konstruiere dafür das Erddruckdreieck $G_1H_1J_1$, welches in das inhaltsgleiche Dreieck $a_1b_1d_2$ verwandelt wird. Verlängert man die Seiten b_1a_1 und b_1d_2 dieses Dreiecks bis zu den Punkten a und d , so gibt das Trapez add_2a_1 die Belastungsfläche für den unteren Teil AA_1 der Mauer. Die Wagerechte durch den Schwerpunkt dieses Trapezes trifft die Rückenfläche der Mauer im Angriffspunkte des Erddruckes E_2 , welcher mit der Winkelrechten zu AA_1 den Winkel φ einschließt.

Man füge nun die Kräfte in der Reihenfolge $G_1E_1G_2E_2$ zu dem Kräftezuge $abcde$ (Fig. 212b) aneinander, aus welchem die Mittelkräfte $r_1 = ac$ und $r_2 = ce$ erhalten werden. Diese werden in die Hauptfigur eingezeichnet. Man ziehe zu dem Zwecke durch den Schnittpunkt der Kräfte G_1 und E_1 eine Parallele zu ac und durch den Schnittpunkt der Kräfte G_2 und E_2 eine Parallele zu ce .

Der Schnittpunkt der Kraft r_1 mit der Fuge A_1D_1 gibt den Druckpunkt t_1 .

Um den Druckpunkt t_2 auf der Bodenfuge AD zu erhalten, zeichne man entsprechend dem beliebig gewählten Pole O den Seilzug $mIII_n$. Die

Fig. 211.



auf die Fuge AD wirkende Kraft $R = ae$ (Mittelkraft aus r_1 und r_2) geht durch den Schnittpunkt der verlängerten äußersten Seilzugseiten mI und nII und trifft AD in dem gesuchten Punkte t_2 .

Aus der Lage der Punkte t_1 und t_2 und der Größe und Richtung der in diesen Punkten angreifenden Kräfte r_1 und R lassen sich nach den früher gegebenen Regeln die in D_1 und D auftretenden Kantenpressungen berechnen. Von der Größe dieser Pressungen wird es abhängen, ob man die gewählte Form der Mauer beibehalten kann, oder ob die Abmessungen zu verändern

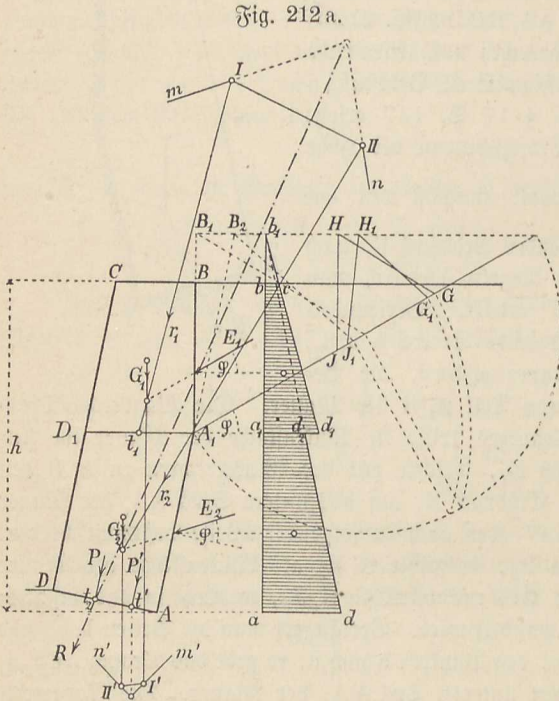


Fig. 212 b.

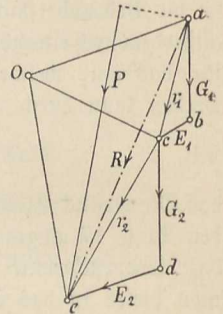
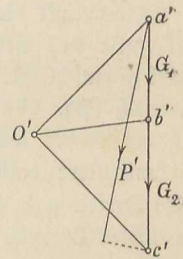


Fig. 212 c.



sind. Fallen die Pressungen kleiner aus, als praktisch gestattet ist, so könnte man die Mauer schwächer halten; würden dagegen die Pressungen das zulässige Maß überschreiten, so hat man die Mauer zu verstärken.

Zum Schluß ist noch die Untersuchung durchzuführen, ob die Mauer ohne Erddruck standfester ist. Man bilde aus den Gewichten G_1 und G_2 der Mauerabschnitte den Kräftezug $a'b'c'$ (Fig. 212 c) und zeichne dem beliebigen gewählten Pole O' entsprechend den Seilzug $m'I'II'n'$. Der Schnittpunkt der verlängerten Seilzugseiten $m'I'$ und $n'II'$ bezeichnet die Lage der Mittelkraft $G_1 + G_2$, welche die Bodenfuge in t' schneidet. Aus der Größe von $G_1 + G_2$ und der Lage des Punktes t' kann die Kantenpressung in A berechnet werden.

Beispiel. Bei einer unterschrittenen Futtermauer (Fig. 212) soll die Kantenpressung in D bestimmt werden unter folgenden Annahmen:

Die Vorderfläche CD sei geböschet mit 1:6, BA₁ lotrecht, A₁A || CD, AD ⊥ CD

$$\begin{aligned} \text{Höhe der Mauer: } h &= 4 \text{ m} \\ &BC = 0,6 \text{ " } \\ &AD = 0,9 \text{ " } \end{aligned}$$

Die Bodenoberfläche sei wagerecht und habe eine gleichmäßig verteilte Belastung von 600 kg/qm zu tragen.

Das Gewicht von 1 cbm Erde sei: $\gamma = 1600 \text{ kg}$

" " " 1 " Mauerwerk: $\gamma_1 = 2000 \text{ "}$

Der Böschungswinkel: $\varphi = 30^\circ$.

Das Beispiel ist aufzuzeichnen im Maßstabe 1:20, Kräftemaßstab 1000 kg = 1,5 cm.

Die gleichmäßig auf der Oberfläche der Erde verteilte Belastung wird ersetzt durch eine Erdschicht von der Höhe $\frac{600}{1600} = 0,375 \text{ m}$. Man findet:

$$G_1 = 2740 \text{ kg}$$

$$E_1 = 1140 \text{ kg}$$

$$G_2 = 3860 \text{ "}$$

$$E_2 = 2720 \text{ "}$$

Die Mittelkraft R aller dieser Kräfte schneidet die Bodenfuge AD in einem Punkte, dessen Abstand von der Kante D sich ergibt zu:

$$x = 21 \text{ cm}$$

Die rechtwinklig zu AD gerichtete Seitenkraft P von R ist:

$$P = 8600 \text{ kg}$$

folglich erscheint in D die Pressung:

$$k = \frac{2P}{300 \cdot x} = \frac{2 \cdot 8600}{300 \cdot 21} = 2,73 \text{ kg}$$

Die Mittelkraft R bildet mit der Normalen zu AD einen Winkel von 14° .

Die durch das Gewicht der Mauer allein, ohne Berücksichtigung des Erddruckes in A erzeugte Kantenpressung ist:

$$k = 2,73 \text{ kg}$$

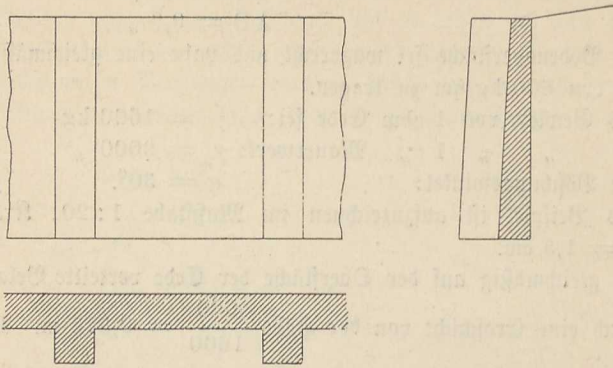
Um die Inanspruchnahme des Baugrundes klein zu erhalten, werden die Stützmauern meist mit einem sich nach unten verbreiternden Fundamente ausgeführt, welches stärker unterschritten sein kann, als die Mauer selbst, da es in festem, nicht angeschüttetem Boden liegt.

Stützmauern mit Strebepfeilern.

Die Stützmauern mit Strebepfeilern (Fig. 213) werden häufiger angewandt und sind auch in Bezug auf Materialverbrauch nicht ungünstig. Die Mauer selbst zwischen den Pfeilern wird verhältnismäßig schwach ausgeführt, so daß sie nur einen Teil des durch den Erddruck erzeugten Seiten-

schubes aufnehmen kann; der andere Teil wird auf die Pfeiler übertragen. Der Strebepfeiler hat danach außer dem unmittelbar auf ihn wirkenden

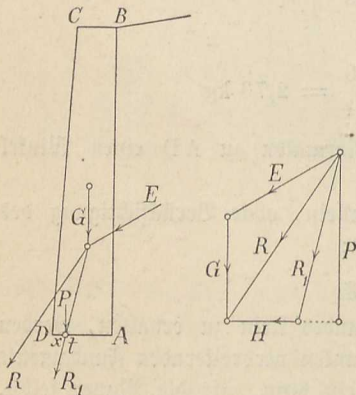
Fig. 213.



Erddruck noch den von der Mauer herrührenden Seitenschub aufzunehmen und ist dementsprechend stark zu bemessen.

Auf die Mauer ABCD (Fig. 214) wirken die Kräfte E und G, deren Mittelkraft R die Bodenfuge AD so nahe der Kante D schneiden möge, daß die in D auftretende Pressung die zulässige Grenze bedeutend überschreitet, oder wie in Fig. 214 angenommen wurde, die Fuge AD überhaupt nicht mehr trifft, sondern ganz außerhalb fällt.

Fig. 214.



Danach würde die Mauer an und für sich zu schwach sein, um den auf sie wirkenden Kräften zu widerstehen. Sie ist aber im stande, eine Kraft R_1 aufzunehmen, welche die Bodenfuge im Punkte t in einer solchen Entfernung x von der Kante D schneidet, daß in D die zulässige Pressung k nicht überschritten wird. Die Bedingung für die Standicherheit der Mauer ist daher, wenn P die lotrechte Seitenkraft von R bedeutet:

$$k = \frac{2P}{300x} \text{ oder: } x = \frac{2P}{300k}$$

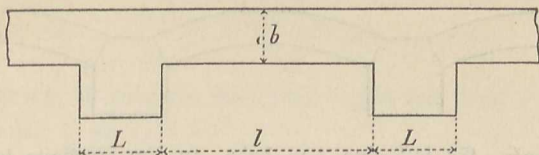
Hierdurch ist die Lage des Punktes t und damit auch die Lage von R_1 gegeben. Trägt man R_1 im Kräfteplan an, so erhält man H, d. i. diejenige Seitenkraft, welche von der Mauer nicht aufgenommen werden kann und auf den Pfeiler übertragen werden muß.

Ist nun l die Länge der Mauer zwischen den Pfeilern (Fig. 215), so wirkt (da H den Seitenschub für 1 m Tiefe bedeutet) auf die Mauer die wagerechte Schubkraft Hl als gleichmäßig verteilte Belastung und ruft

in ihr eine Biegungsspannung k_1 hervor. Nach der allgemeinen Biegungsgleichung:

$$M = k_1 W$$

Fig. 215.



ist, wenn die mittlere Stärke der Mauer mit b , die Höhe derselben mit h bezeichnet wird:

$$\frac{Hl \cdot l}{8} = k_1 \frac{hb^2}{6}$$

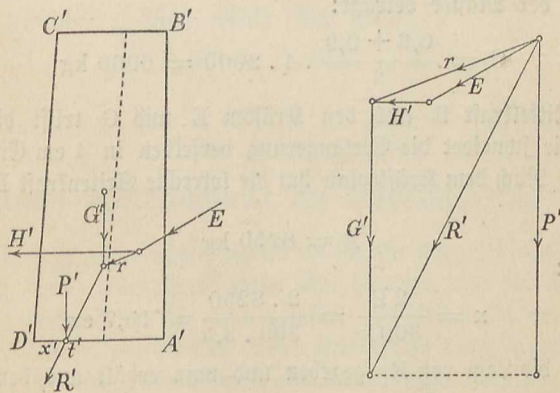
woraus folgt:

$$l = 2b \sqrt{\frac{hk_1}{3H}}$$

k_1 ist sehr niedrig, etwa 1 bis 1,5 kg für 1 qem anzunehmen.

Auf 1 m Tiefe des Pfeilers kommen nun die Kräfte: E , G' (Gewicht des Pfeilers) und $H' = \frac{Hl}{L}$, welche zu der Mittelkraft R' zusammengesetzt werden (Fig. 216) (die Lage von H' ist bestimmt durch den Schnittpunkt der Kräfte E und G' in Fig. 214).

Fig. 216.

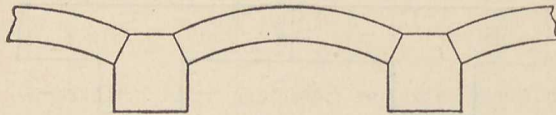


Wird die Bodenfuge $A'D'$ des Pfeilers von der Kraft R' in der Entfernung x' von der Kante D' geschnitten und ist P' die aus dem Kräfteplan zu entnehmende lotrechte Seitenkraft von R' , so ergibt sich die Kantenpressung zu:

$$k' = \frac{2P'}{300x'}$$

Noch vorteilhafter für den Materialverbrauch würde es sein, die Mauer zwischen den Strebepfeilern nicht geradlinig, sondern gewölbartig (nach Fig. 217) auszuführen.

Fig. 217.



Beispiel. Es soll eine 4 m hohe, an der Rückseite lotrechte Stützmauer mit Strebepfeilern ausgeführt werden, wobei die Bodenoberfläche um 10° gegen die Wagerechte geneigt anzunehmen ist.

Böschungswinkel des Erdmaterials $\varphi = 30^\circ$

Gewicht eines cbm Erde $\gamma = 1600 \text{ kg}$

" " " Mauerwerk $\gamma_1 = 2000 \text{ "}$

für die Stärke der Mauer selbst sind gegeben (Fig. 214):

$$AD = 0,9 \text{ m} ; \quad BC = 0,6 \text{ m}$$

die Pfeilerbreite soll betragen: $L = 1,2 \text{ m}$

für die Pressungen sind die Werte einzuhalten:

$$k = 3,5 \text{ kg} ; \quad k_1 = 1 \text{ kg}$$

Das Beispiel ist aufzuzeichnen im Maßstab 1 : 25; Kräftemaßstab für die Mauer: $1000 \text{ kg} = 1 \text{ cm}$, für den Strebepfeiler: $1000 \text{ kg} = 0,5 \text{ cm}$.

Der Erddruck ergibt sich durch Konstruktion zu:

$$E = 4560 \text{ kg}$$

Das Gewicht der Mauer beträgt:

$$G = \frac{0,6 + 0,9}{2} \cdot 4 \cdot 2000 = 6000 \text{ kg}$$

Die Mittelkraft R aus den Kräften E und G trifft die Bodenfuge nicht mehr, sie schneidet die Verlängerung derselben in 4 cm Entfernung von der Kante D. Nach dem Kräfteplan hat die lotrechte Seitenkraft P der Kraft R die Größe:

$$P = 8250 \text{ kg}$$

folglich wird:

$$x = \frac{2P}{300k} = \frac{2 \cdot 8250}{300 \cdot 3,5} = 15,7 \text{ cm}$$

Hierdurch ist die Lage von R_1 gegeben und man erhält aus dem Kräfteplan:

$$H = 1300 \text{ kg}$$

für:

$$k_1 = 1 \text{ kg/qcm} = 10000 \text{ kg/qm}$$

$$b = \frac{0,6 + 0,9}{2} = 0,75 \text{ m}$$

$$h = 4 \text{ m}$$

wird dann:

$$l = 2b \sqrt{\frac{hk_1}{3H}} = 2 \cdot 0,75 \sqrt{\frac{4 \cdot 10000}{3 \cdot 1300}} = 4,8 \text{ m}$$

folglich bei $L = 1,2 \text{ m}$:

$$H' = \frac{Hl}{L} = \frac{1300 \cdot 4,8}{1,2} = 5200 \text{ kg}$$

Die Höhe von H' über der Bodenfuge ergibt sich durch den Schnittpunkt der Kräfte G und E zu $1,12 \text{ m}$.

Denkt man sich den Pfeiler bestehend aus lotrechten Streifen von $0,2 \text{ m}$ Breite und setzt man die Mittelkraft r aus den Kräften E und H' mit den einzelnen Streifengewichten ($g = 0,2 \cdot 4 \cdot 2000 = 1600 \text{ kg}$) zu einem Kräfteplan zusammen, so findet man durch Einzeichnung der Drucklinie, daß der Punkt t (vergl. Fig. 208 S. 172) mit der äußeren Kante des siebenten Streifens zusammenfällt. Die den Kräften E, H' und $7g$ entsprechende lotrechte Seitenkraft ist:

$$P' = 13600 \text{ kg}$$

$$\text{folglich wird: } x' = \frac{2P'}{300k} = \frac{2 \cdot 13600}{300 \cdot 3,5} = 26 \text{ cm}$$

Hierdurch ist die Lage des Punktes D' (vergl. Fig. 216) gegeben. Wird der Pfeiler von D' aus mit $1:8$ geböschet, so wird von der oberen Hälfte des Pfeilerquerschnittes durch die Böschungslinie ein Dreieck abgeschnitten, welches ersetzt wird durch ein inhaltsgleiches Dreieck in der unteren Hälfte des Pfeilerquerschnittes, begrenzt von der Böschungslinie und der äußeren Kante des siebenten Streifens. Die Gewichte werden also durch die Abböschung der Mauer nicht verändert. Man erhält (Fig. 216):

$$D'A' = 1,66 \text{ m} \quad ; \quad B'C' = 1,14 \text{ m}$$

§ 21.

Statische Untersuchung der Fabrikschornsteine.

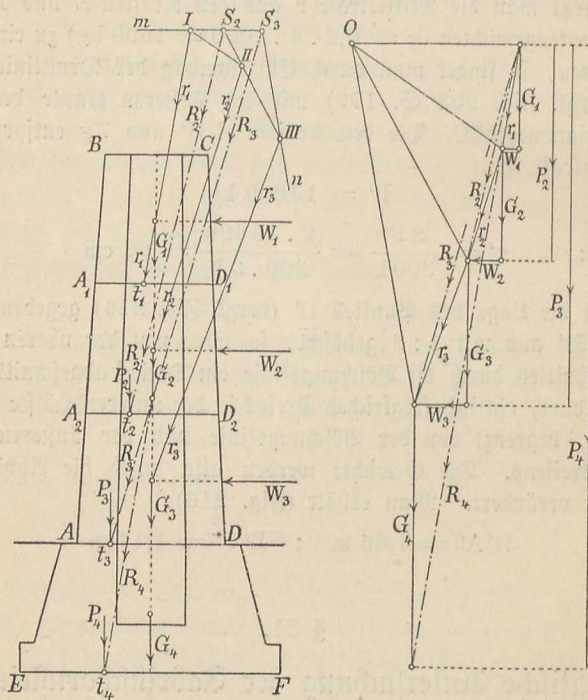
Die auf einen Schornstein wirkenden Kräfte sind das Eigengewicht und der Winddruck, deren Mittelkraft mehr oder weniger von der Lotrechten abweicht und die Grundfläche in einer gewissen Entfernung e von der Mittelachse schneidet. Unter dem Einfluß dieser Mittelkraft darf, wenn der Schornstein standfester sein soll, kein Rutschen und kein Gleiten erfolgen und es muß die größte auftretende Kantenpressung innerhalb der für den Baugrund zulässigen Grenzen bleiben. Dasselbe gilt für jeden höher gelegenen Querschnitt des Schornsteines, auf welchen die Mittelkraft aus dem Gewichte des über diesem Querschnitt befindlichen Mauerkörpers und dem darauf entfallenden Winddruck einwirkt. Die größte Kantenpressung darf dabei die für das Mauerwerk zulässige Grenze nicht überschreiten.

Bei gutem Steinmaterial und bei Verwendung von verlängertem Zementmörtel sind Druckspannungen bis zu 12 kg, Zugspannungen bis etwa 4 kg/qcm als zulässig zu betrachten.

Um ein klares Bild von der Spannungsverteilung innerhalb des Schornsteines zu erhalten, wird die Drucklinie nach den bekannten, schon bei den Stützmauern S. 173 u. f. angegebenen Regeln eingezeichnet.

Zu dem Zweck zerlege man den Schornstein (Fig. 218) durch wagerechte Schnitte in eine Anzahl Teile, füge die Gewichte G_1, G_2, \dots der einzelnen

Fig. 218.



Teile und die darauf wirkenden Winddrücke W_1, W_2, \dots zu einem Kräfteplane aneinander und vereinige G_1 und W_1 zu der Mittelkraft r_1 , G_2 und W_2 zu der Mittelkraft r_2 u. f. w. Wird dann entsprechend einem beliebig gewählten Pole O zu den Kräften r ein Seilzug aufgezeichnet, so lassen sich für die Querschnitte $A_1 D_1, A_2 D_2, \dots$ die auf dieselben wirkenden Mittelkräfte R_1, R_2, \dots bestimmen, und zwar der Größe nach aus dem Kräfteplane, der Lage nach durch den Schnittpunkt der die Kräftegruppe r einschließenden Seilzugseiten. Die Kraft $R_1 = r_1$ trifft die Fuge $A_1 D_1$ im Druckmittelpunkte t_1 , die Kraft R_2 die Fuge $A_2 D_2$ im Punkte t_2 u. f. w. Die stetige Verbindungslinie der Punkte t liefert die Drucklinie.

Die Rantenpressung für einen bestimmten Querschnitt wird alsdann berechnet nach der Gleichung S. 164:

$$k = \frac{P}{F} \pm \frac{P e}{W}$$

wobei:

- P = Lotrechte Seitenkraft der auf den Querschnitt wirkenden Kraft R
- F = Flächeninhalt des Querschnittes
- e = Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P von der Mittelachse
- W = Widerstandsmoment der Querschnittsfläche.

Für den Ringquerschnitt mit den Durchmessern D außen und d innen ist:

$$W = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32 D}$$

$$\frac{(D^2 - d^2) \pi}{4} \cdot \frac{D^2 + d^2}{8 D} = F \frac{D^2 + d^2}{8 D}$$

folglich:

$$k = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{8 D e}{D^2 + d^2} \right)$$

Bei quadratischer Bodenfläche mit der Seite b ist das kleinste Widerstandsmoment in Bezug auf die mit der Diagonalen zusammenfallende Achse:

$$W = \frac{b^4}{12} : \sqrt{2} = \frac{b^3}{6 \sqrt{2}} = F \frac{b}{6 \sqrt{2}}$$

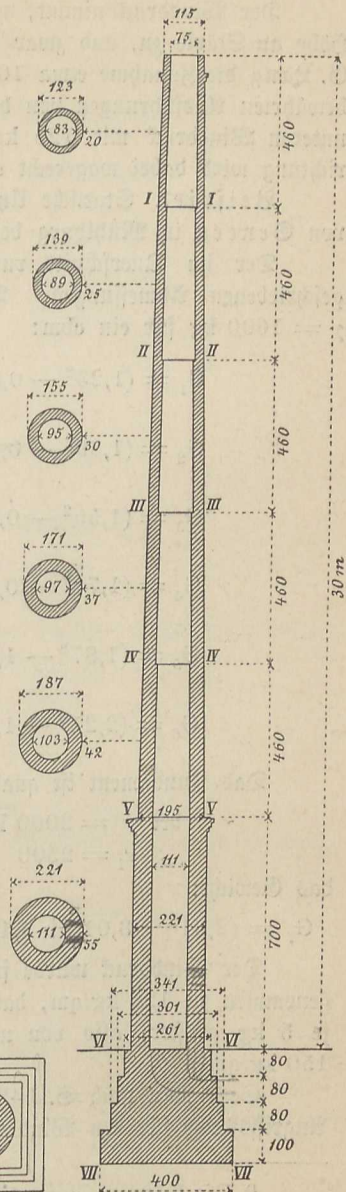
folglich ist bei diagonaler Windrichtung die in einer Ecke auftretende größte Rantenpressung zu berechnen nach:

$$k = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{6 \sqrt{2} \cdot e}{b} \right)$$

Zugspannungen in der Bodenfuge sind natürlich ausgeschlossen.

Da die Winddrücke im Vergleich mit den Gewichten der Mauerwerkkörper klein ausfallen, so ist es, um die Abweichungen der Mittelkräfte von der Lotrechten deutlicher zur Anschauung zu bringen, und die Abstände e derselben von der Mittelachse genauer abgreifen zu können, empfehlenswert, den Höhendurchschnitt des Schornsteines

Fig. 219.



und den Kräfteplan in verzerrem Maßstabe aufzuzeichnen und für die Breiten, sowie für die Windkräfte den Maßstab 2, 3, 4... mal so groß zu wählen, als für die Höhen bzw. die Gewichte der Mauerwerkskörper.

Der Winddruck nimmt, wie durch Messungen festgestellt ist, mit der Höhe an Stärke zu, und zwar beträgt nach den Untersuchungen von Professor G. Lang die Zunahme etwa 10 kg/qm für je 10 m Höhe. Nach zahlreichen bewährten Ausführungen von hohen Fabrikschornsteinen ist es genügend, den unteren Winddruck mit 125 kg/qm in Rechnung zu stellen¹⁾. Die Windrichtung wird dabei wagerecht angenommen.

Beispiel. Statische Untersuchung des Kaminens für die Eisengießerei von Seneca in Mühlburg bei Karlsruhe.

Der im Querschnitt runde Schornstein hat die in Fig. 219 eingeschriebenen Abmessungen. Die Gewichte der Kaminabschnitte sind bei $\gamma = 1600$ kg für ein cbm:

$$G_1 = (1,23^2 - 0,83^2) \frac{\pi}{4} \cdot 4,6 \cdot 1600 = 4763 \text{ kg}$$

$$G_2 = (1,39^2 - 0,89^2) \frac{\pi}{4} \cdot 4,6 \cdot 1600 = 6590 \text{ ,,}$$

$$G_3 = (1,55^2 - 0,95^2) \frac{\pi}{4} \cdot 4,6 \cdot 1600 = 8671 \text{ ,,}$$

$$G_4 = (1,71^2 - 0,97^2) \frac{\pi}{4} \cdot 4,6 \cdot 1600 = 11464 \text{ ,,}$$

$$G_5 = (1,87^2 - 1,03^2) \frac{\pi}{4} \cdot 4,6 \cdot 1600 = 14081 \text{ ,,}$$

$$G_6 = (2,21^2 - 1,11^2) \frac{\pi}{4} \cdot 7 \cdot 1600 = 32124 \text{ ,,}$$

Das Fundament ist quadratisch gehalten und hat

bei $\gamma = 2000$ kg für Bruchsteinmauerwerk und

„ $\gamma_1 = 2500$ „ „ Kiesbeton

das Gewicht:

$$G_7 = (2,61^2 + 3,01^2 + 3,41^2) 0,8 \cdot 2000 + 4^2 \cdot 1 \cdot 2500 = 84000 \text{ kg}$$

Der Winddruck wurde für den unteren 7 m hohen Kaminabschnitt angenommen zu 125 kg/qm, dann für die oberen 4,6 m hohen Abschnitte um je 5 kg größer, also von unten ab gerechnet zu 130, 135, 140, 145, 150 kg/qm.

Setzt man nach S. 142 bei dem Kreisquerschnitt $\frac{2}{3}$ des Aufrisses als Angriffsfläche für den Wind voraus, so ergeben sich die Winddrücke:

¹⁾ Die bekannte Firma G. R. Heinicke in Chemnitz nimmt den Winddruck von unten bis oben unverändert an zu 120 kg/qm und rechnet die für den Wind wegen der Cylinderform einzuführende Druckfläche nach v. Reiche zu 0,5 der Aufrissfläche, läßt dagegen nur Zugspannungen bis 0,9 kg/qcm zu.

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{2}{3} \cdot 1,23 \cdot 4,6 \cdot 150 = 566 \text{ kg} \\
 W_2 &= \frac{2}{3} \cdot 1,39 \cdot 4,6 \cdot 145 = 618 \text{ " } \\
 W_3 &= \frac{2}{3} \cdot 1,55 \cdot 4,6 \cdot 140 = 665 \text{ " } \\
 W_4 &= \frac{2}{3} \cdot 1,71 \cdot 4,6 \cdot 135 = 708 \text{ " } \\
 W_5 &= \frac{2}{3} \cdot 1,87 \cdot 4,6 \cdot 130 = 745 \text{ " } \\
 W_6 &= \frac{2}{3} \cdot 2,21 \cdot 7,0 \cdot 125 = 1289 \text{ " }
 \end{aligned}$$

Die Querschnitte I bis VII haben den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (131^2 - 91^2) \frac{\pi}{4} = 6974 \text{ qem} \\
 F_2 &= (147^2 - 97^2) \frac{\pi}{4} = 9582 \text{ " } \\
 F_3 &= (163^2 - 103^2) \frac{\pi}{4} = 12535 \text{ " } \\
 F_4 &= (179^2 - 105^2) \frac{\pi}{4} = 16506 \text{ " } \\
 F_5 &= (195^2 - 111^2) \frac{\pi}{4} = 20188 \text{ " } \\
 F_6 &= (221^2 - 111^2) \frac{\pi}{4} = 28683 \text{ " } \\
 F_7 &= 400 \cdot 400 = 160000 \text{ " }
 \end{aligned}$$

Für die graphische Untersuchung wurden folgende Maßstäbe gewählt:

Kräftemaßstab für die Gewichte : 1000 kg = 2 mm
 " " " Winddrücke: 1000 " = 2 cm
 Längenmaßstab " " Höhen: 1 : 100
 " " " Breiten: 1 : 10

(Die eine Raminhälfte braucht nur aufgezeichnet zu werden.)

Die Entfernungen der Druckpunkte von der Mittelachse wurden durch Zeichnung ermittelt zu:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= 26,5 \text{ cm} & e_5 &= 80,5 \text{ cm} \\
 e_2 &= 46 \text{ " } & e_6 &= 83,5 \text{ " } \\
 e_3 &= 62 \text{ " } & e_7 &= 47 \text{ " } \\
 e_4 &= 73 \text{ " } & &
 \end{aligned}$$

Die auf die Fugen wirkenden lotrechten Kräfte sind:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= G_1 = \dots \dots \dots 4763 \text{ kg} \\
 P_2 &= G_1 + G_2 = 4763 + 6590 = 11353 \text{ " } \\
 P_3 &= P_2 + G_3 = 11353 + 8671 = 20024 \text{ " } \\
 P_4 &= P_3 + G_4 = 20024 + 11464 = 31488 \text{ " } \\
 P_5 &= P_4 + G_5 = 31488 + 14081 = 45569 \text{ " } \\
 P_6 &= P_5 + G_6 = 45569 + 32124 = 77693 \text{ " } \\
 P_7 &= P_6 + G_7 = 77693 + 84000 = 161693 \text{ " }
 \end{aligned}$$

Danach berechnen sich die folgenden Rantenpressungen:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{4763}{6974} \left(1 \pm \frac{8 \cdot 131 \cdot 26,5}{131^2 + 91^2} \right) = \begin{cases} 1,4 \text{ kg Druck} \\ 0,06 \text{ „ Zug} \end{cases} \\
 k_2 &= \frac{11353}{9582} \left(1 \pm \frac{8 \cdot 147 \cdot 46}{147^2 + 97^2} \right) = \begin{cases} 3,3 \text{ kg Druck} \\ 0,9 \text{ „ Zug} \end{cases} \\
 k_3 &= \frac{20024}{12535} \left(1 \pm \frac{8 \cdot 163 \cdot 62}{163^2 + 103^2} \right) = \begin{cases} 5,1 \text{ kg Druck} \\ 1,9 \text{ „ Zug} \end{cases} \\
 k_4 &= \frac{31488}{16506} \left(1 \pm \frac{8 \cdot 179 \cdot 73}{179^2 + 105^2} \right) = \begin{cases} 6,5 \text{ kg Druck} \\ 2,7 \text{ „ Zug} \end{cases} \\
 k_5 &= \frac{45569}{20188} \left(1 \pm \frac{8 \cdot 195 \cdot 80,5}{195^2 + 111^2} \right) = \begin{cases} 7,9 \text{ kg Druck} \\ 3,4 \text{ „ Zug} \end{cases} \\
 k_6 &= \frac{77693}{28683} \left(1 \pm \frac{8 \cdot 221 \cdot 83,5}{221^2 + 111^2} \right) = \begin{cases} 9,3 \text{ kg Druck} \\ 3,8 \text{ „ Zug} \end{cases} \\
 k_7 &= \frac{161693}{160000} \left(1 + \frac{6 \sqrt{2} \cdot 47}{400} \right) = 2 \text{ kg Druck}
 \end{aligned}$$

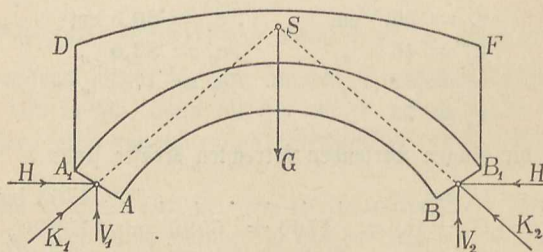
§ 22.

Die Tonnengewölbe.

Von den verschiedenen möglichen Gewölbeformen ist das symmetrische Tonnengewölbe mit wagerechter Achse das verbreitetste und wichtigste und soll deshalb bei den folgenden Untersuchungen zu Grunde gelegt werden. In derselben Weise wie bei den Stützmauern wird auch hier bei den Gewölben die Untersuchung stets für 1 m Tiefe durchgeführt.

Hat das Gewölbe außer seinem Eigengewichte noch eine andere Belastung aufzunehmen, z. B. bei Brückengewölben die zur Herstellung der

Fig. 220.



wagerechten Fahrbahn nötige Aufschüttung, ferner die Verkehrsbelastung, so wird diese zunächst durch einen Mauerwerkskörper von gleichem spezifischen Gewicht als das Gewölbematerial ersetzt. Der Schnitt DF (Fig. 220) der oberen Begrenzungsfläche dieses Mauerwerkskörpers mit der Lotrecht zu der

Gewölbeachse stehenden Bildebene heißt die Belastungslinie, die ganze Fläche AA_1DFB_1B die Belastungsfläche.

Auf das Gewölbe (Fig. 220) wirken drei Kräfte, nämlich das Gewicht G des ganzen Gewölbes mit der darauf ruhenden Belastung, und die Kämpferdrücke K_1 und K_2 . Diese drei Kräfte müssen sich im Gleichgewichte halten, folglich durch einen Punkt S gehen. Zerlegt man die Kämpferdrücke K_1 und K_2 in ihre wagerechten und lotrechten Seitenkräfte, so lauten die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen:

- 1) Die wagerechten Seitenkräfte H der Kämpferdrücke müssen einander gleich sein:

$$H = \text{Const.}$$

- 2) Die Summe der lotrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke muß $= G$ sein:

$$V_1 + V_2 = G$$

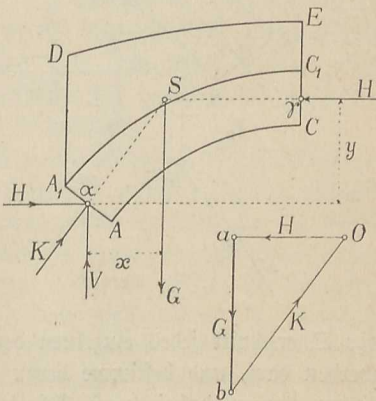
- 3) Die Summe der statischen Momente der Kräfte G, K_1, K_2 in Bezug auf irgend einen beliebigen Drehpunkt muß $= \text{Null}$ sein.

Es sind nun Größe, Richtung und Angriffspunkt von jeder der beiden Kräfte K_1 und K_2 zu bestimmen, also im ganzen 6 Unbekannte, wozu die drei Gleichgewichtsbedingungen ohne weitere Annahmen nicht ausreichen. Die Unbestimmtheit der Aufgabe verschwindet aber, wenn man die Angriffspunkte von K_1 und K_2 und außerdem noch irgend einen Punkt im Inneren des Gewölbes annimmt, durch welchen die Drucklinie verlaufen soll.

1) Das symmetrisch belastete Gewölbe.

Bei diesem genügt die Untersuchung einer Gewölbehälfte. Denkt man sich ein solches Gewölbe durch einen lotrechten Schnitt im Scheitel in zwei gleiche Teile geteilt, so muß zur Erhaltung des Gleichgewichtes bei jedem der Teile an der Schnittstelle eine Kraft H angebracht werden, welche wegen der Symmetrie des Gewölbes selbst und der Belastung wagerecht gerichtet ist, und der Horizontalschub des Gewölbes genannt wird. Nimmt man (Fig. 221) die Angriffspunkte α und γ für die Kräfte K und H an, so ergibt sich die Richtung des Kämpferdruckes K aus der Bedingung, daß sich die Kräfte G, H, K in einem Punkte S schneiden müssen. Die Größe von H und K folgt dann aus dem Kräfteplane, indem man durch den oberen Endpunkt a der bekannten Kraft $G = ab$ (= Gesamtbelastung der einen Gewölbehälfte) eine Parallele zu γS und durch den unteren Endpunkt b von G eine Parallele zu αS zieht.

Fig. 221.



Die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Drehpunkt α lautet (Fig. 221):

$$- H \cdot y + G \cdot x = 0$$

oder:

$$H = \frac{G \cdot x}{y}$$

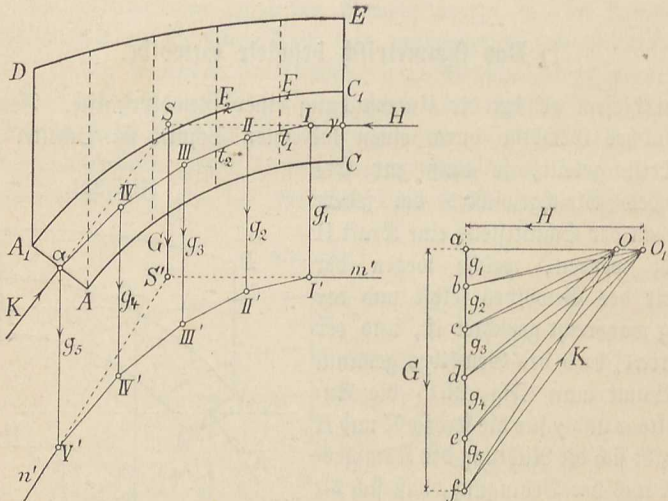
Hieraus folgt, daß unter sonst gleichen Verhältnissen der Horizontal-schub H bei einem Gewölbe um so größer wird, je größer G ist, also je stärker das Gewölbe belastet ist; ferner je größer x wird, d. h. je größer die Spannweite des Gewölbes ist; endlich je kleiner y wird, also je tiefer der Angriffspunkt von H liegt, oder je flacher das Gewölbe ist.

Aus der Größe der Kräfte K und H und aus der Lage der Angriffspunkte α und γ derselben ergeben sich die in den Punkten AA_1CC_1 auftretenden Pressungen. Es ist empfehlenswert, Zugspannungen im Gewölbe ganz und gar zu vermeiden und das Gewölbe so auszuführen, daß die Drucklinie überall innerhalb des Kerns (des mittleren Drittels) verläuft.

Die Konstruktion der Drucklinie für das symmetrisch belastete Gewölbe ist folgendermaßen:

Man teile die eine Gewölbehälfte mit der darauf ruhenden Belastung (Fig. 222) durch Lotrechte Schnitte in Streifen von so geringer Breite, daß

Fig. 222.



der Querschnitt jedes einzelnen derselben als Rechteck oder Trapez angesehen werden darf, und bestimme deren Gewichte g_1, g_2, \dots . Die lotrechten Schwerlinien können dabei (vom Scheitel ab gerechnet) für den ersten, allenfalls (namentlich bei flachen Gewölben) für die paar ersten Streifen genau genug in der Mitte der Streifenbreiten angenommen werden. Für die übrigen

Streifen, die schon ausgesprochene Trapezform haben, ist die Lotrechte Schwerlinie besonders zu bestimmen, wozu das folgende von R. Land angegebene Verfahren¹⁾ sehr geeignet ist.

Man ziehe in dem trapezförmigen Streifen $ABCD$ (Fig. 223) eine Diagonale AC , markiere den Schnittpunkt F mit der anderen Diagonalen, und mache $AG = FC$. Die Schwerlinie geht dann durch den nach der größeren Parallellseite (AB) zu gelegenen Drittelpunkt M der Mittelstrecke FG .

Fig. 223.

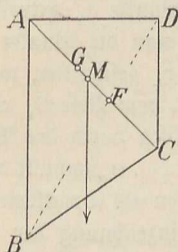
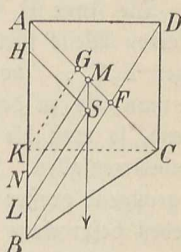


Fig. 224.



Der Beweis ergibt sich leicht aus Fig. 224. Zieht man nämlich (nach Land) $CK \parallel AD$, macht $AH = BL = \frac{1}{3} BK$ und zieht durch H und L Parallelen zu den Diagonalen AC bzw. BD , so ist der Schnittpunkt S derselben der Schwerpunkt des Trapezes $ABCD$ ²⁾. Da nun wegen Gleichheit einer Seite ($LH = NA$) und der anliegenden Winkel $\triangle LSH \cong \triangle NMA$, so ist $MS \parallel AB$; also wenn AB lotrecht, so liegt auch M lotrecht über S , ist folglich ein Punkt, durch welchen die lotrechte Schwerlinie des Trapezes $ABCD$ gehen muß.

Es kommt nun zunächst darauf an, die Mittelkraft der Streifengewichte der Lage nach zu bestimmen. Zu dem Zwecke reihe man in Fig. 222 die Streifengewichte zu dem Kräftezuge $abc \dots f$ aneinander, wähle einen beliebigen Pol O (am besten auf einer durch den Anfangspunkt a des Kräftezuges gezogenen Wagerechten) und zeichne dazu den sogen. ersten Seilzug $m'I'II' \dots n'$. Durch den Schnittpunkt S' der verlängerten äußersten Seilzugseiten ist die Lage der Mittelkraft G bestimmt.

Wählt man nun den Angriffspunkt γ der Kraft H in der Mitte der Scheitelfuge CC_1 , so ist dadurch, weil H wagerecht gerichtet ist, der Schnittpunkt S von G und H gegeben. Der Kämpferdruck K muß, da die Kräfte GHK sich im Gleichgewichte halten, ebenfalls durch den Punkt S gehen. Nimmt man dann den Angriffspunkt α von K in der Mitte der Kämpferfuge AA_1 an, so ist durch die Gerade αS die Richtung von K festgelegt. Die Größen der Kräfte H und K ergeben sich aus dem Kräfteplane, wenn man durch den unteren Endpunkt f des Kräftezuges eine Parallele zu αS

¹⁾ Centralbl. d. Bauverw. 1894. S. 458 u. 459.

²⁾ Vergl. Lauenstein, Mechanik. III. Aufl. S. 44 und Fig. 41.

zieht, welche die durch a gelegte Wagerechte im Punkte O_1 schneidet. Es ist dann $O_1 a = H$ und $f O_1 = K$. Man betrachte nun O_1 als neuen Pol und ziehe von O_1 aus Strahlen nach den Punkten b c d \dots .

Auf die Fuge F_1 wirken die Kräfte H und g_1 , deren Mittelkraft r_1 durch den Schnittpunkt I geht und gleich und parallel dem Strahle $O_1 b$ ist; sie schneidet die Fuge F_1 im Punkte t_1 .

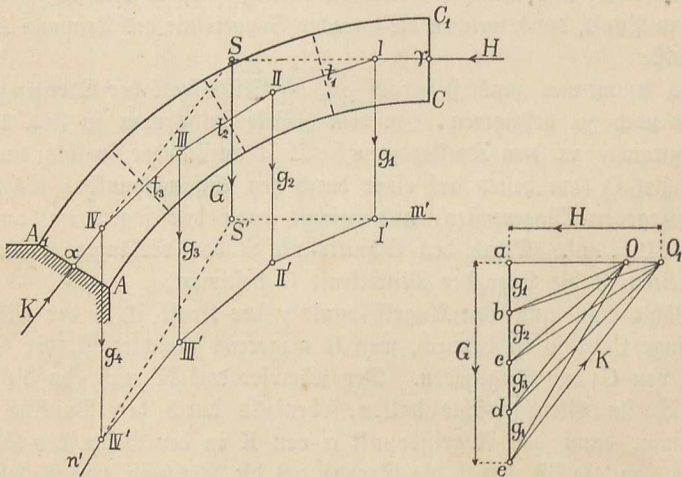
Die auf die Fuge F_2 wirkende Kraft r_2 ist die Mittelkraft aus den Kräften $H g_1 g_2$ oder, was dasselbe ist, aus den Kräften r_1 und g_2 ; sie geht durch den Schnittpunkt II von r_1 und g_2 und ist gleich und parallel dem Strahle $O_1 c$. Die Fuge F_2 wird von r_2 im Punkte t_2 getroffen.

In derselben Weise fortschreitend erhält man die Punkte $t_3 t_4 \dots$, in denen die Fugen $F_3 F_4 \dots$ von den Kräften $r_3 r_4$ geschnitten werden.

Zeichnet man also zu dem Kräfteplane mit dem Pole O_1 einen Seilzug, von γ beginnend, so muß die letzte Seite desselben durch den Punkt α gehen und mit αS zusammenfallen. Der Seilzug $\gamma III \dots \alpha$ umhüllt die Drucklinie, kann aber bei genügend großer Anzahl der Streifen als Drucklinie selbst gelten.

Das soeben besprochene Verfahren zur Einzeichnung der Drucklinie ist insofern nicht ganz scharf, als die Fugen des Gewölbes in Wirklichkeit nicht lotrecht, sondern radial gerichtet sind; indessen sind die Abweichungen der in obiger Weise bestimmten Drucklinie von der wirklichen Drucklinie in den meisten Fällen so gering, daß, namentlich bei den flachen belasteten Gewölben, das angegebene Verfahren praktisch vollständig genügt.

Fig. 225.

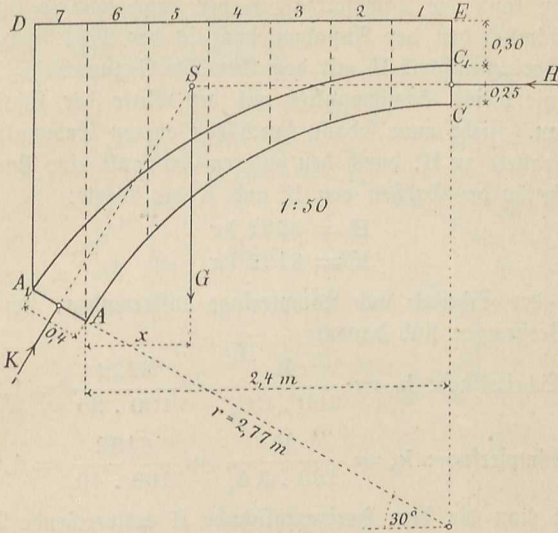


Bei den im Hochbau vielfach vorkommenden unbelasteten Gewölben, welche zur Ueberwölbung von Räumen benutzt werden und häufig nur ihr Eigengewicht zu tragen haben (z. B. bei Kirchengewölben), ist es dagegen vorzuziehen, das Gewölbe zur Einzeichnung der Drucklinie nach Fig. 225 durch

radiale Schnitte in eine Anzahl unter sich gleicher Teile zu zerlegen, deren Gewichte in den Schwerpunkten derselben angreifen.

Zahlenbeispiel. Statische Untersuchung des in Fig. 226 dargestellten symmetrisch belasteten Gewölbes. Belastungslinie DE wagerecht; Gewicht eines cbm Mauerwerk: $\gamma = 1800 \text{ kg}$.

Fig. 226.



Das Gewölbe ist im Maßstab 1 : 10 aufzuzeichnen und die Drucklinie so zu konstruieren, daß sie durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfuge verläuft.

Die ganze Gewölbehälfte ist durch lotrechte Schnitte in 7 Streifen geteilt und zwar so, daß die Streifen 1 bis 6 die gleiche Breite $b = 0,4 \text{ m}$ erhalten; der Streifen 7 wird $0,35 \text{ m}$ breit. Für die mittleren Höhen und die Gewichte der Streifen erhält man folgende Werte:

Streifen	Mittlere Höhe	Gewicht in kg
Nr. 1	0,56 m	$0,4 \cdot 0,56 \cdot 1800 = 403 \text{ kg}$
" 2	0,62 "	$0,4 \cdot 0,62 \cdot 1800 = 446 \text{ "}$
" 3	0,745 "	$0,4 \cdot 0,745 \cdot 1800 = 536 \text{ "}$
" 4	0,94 "	$0,4 \cdot 0,94 \cdot 1800 = 677 \text{ "}$
" 5	1,225 "	$0,4 \cdot 1,225 \cdot 1800 = 882 \text{ "}$
" 6	1,65 "	$0,4 \cdot 1,65 \cdot 1800 = 1188 \text{ "}$
" 7	1,85 "	$0,35 \cdot 1,85 \cdot 1800 = 1165 \text{ "}$
		$G = 5297 \text{ kg}$

Die Streifengewichte sind nun in einem passenden Maßstabe (100 kg = 0,5 cm) zu einem Kräftezuge aneinander zu fügen, der Pol O beliebig gewählt und dazu der erste Seilzug aufgezeichnet. Aus dem Schnittpunkte der verlängerten äußersten Seilzugseiten ergibt sich die Lage der Kraft G, deren wagerechter Abstand von der Kante A gefunden wird zu:

$$x = 0,695 \text{ m}$$

Nunmehr kann die Kämpferkraft K der Lage nach bestimmt werden. Bringt man nämlich den der Annahme nach in der Mitte der Scheitelfuge angreifenden Horizontalschub H mit dem Gewichte G zum Schnitt, so gibt die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit der Mitte der Kämpferfuge die Lage von K an. Zieht man sodann durch den oberen Endpunkt des Kräftezuges eine Parallele zu H, durch den unteren Endpunkt eine Parallele zu K, so ergeben sich für die Größen von H und K die Werte:

$$H = 3222 \text{ kg}$$

$$K = 6192 \text{ kg}$$

Die in der Scheitel- und Kämpferfuge auftretenden, sich gleichmäßig verteilenden Pressungen sind danach:

$$\text{in der Scheitelfuge: } k_c = \frac{H}{100 \cdot CC_1} = \frac{3222}{100 \cdot 25} = 1,29 \text{ kg}$$

$$\text{in der Kämpferfuge: } k_a = \frac{K}{100 \cdot AA_1} = \frac{6192}{100 \cdot 40} = 1,55 \text{ kg}$$

Zeichnet man die dem Horizontalschube H entsprechende Drucklinie in das Gewölbe ein, so ergibt sich, daß dieselbe in der Fuge zwischen dem dritten und vierten Streifen sich am meisten von der Gewölbemitte entfernt. Man findet hier:

$$e = 1 \text{ cm}$$

Da die Breite der Fuge an dieser Stelle (radial gemessen) $b = 28 \text{ cm}$ beträgt und die auf die Fuge wirkende Kraft nach dem Kräfteplan: $P = 3510 \text{ kg}$ ist, so berechnet sich hier die größte Kantenpressung zu:

$$k = \frac{P}{100 \cdot b} \left(1 + \frac{6e}{b} \right) = \frac{3510}{100 \cdot 28} \left(1 + \frac{6 \cdot 1}{28} \right) = 1,52 \text{ kg}$$

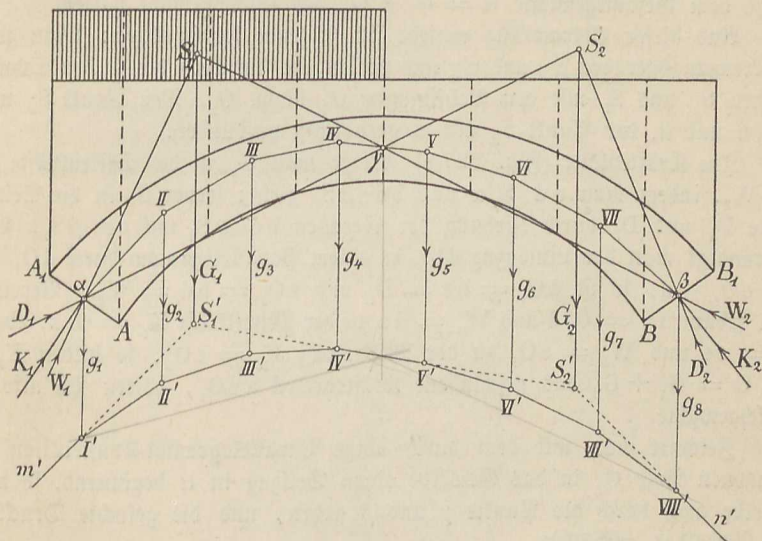
2) Das unsymmetrisch belastete Gewölbe.

Außer der bleibenden Belastung, welche aus dem Eigengewichte, der Hintermauerung und Aufschüttung besteht, kann bei einem Gewölbe noch eine veränderliche Belastung vorhanden sein, durch deren Einfluß die Drucklinie eine unsymmetrische Gestalt annimmt. Das Gewölbe wird am stärksten beansprucht, wenn die veränderliche Belastung sich über eine Seite desselben erstreckt bis zu demjenigen Punkte, wo die Tangente an die Drucklinie wagerecht gerichtet ist, die andere Seite aber unbelastet bleibt, d. h. keine veränderliche Belastung zu ertragen hat. Dieser genaue Grenzpunkt

zwischen belasteter und unbelasteter Seite ist nicht so ganz leicht zu bestimmen und praktisch genügt es vollkommen, als ungünstigsten Belastungsfall, eine Hälfte des Gewölbes voll belastet, die andere Hälfte unbelastet anzunehmen.

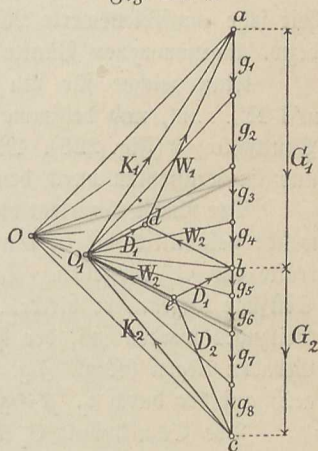
Um die Drucklinie in ein solches einseitig belastetes Gewölbe einzeichnen zu können, nimmt man drei Punkte an, durch welche dieselbe verlaufen soll

Fig. 227 a.



und zwar zunächst die Mitten α und β der Kämpferfugen und die Mitte γ der Scheitelfuge (Fig. 227 a). Man teilt sodann die belastete, sowie die unbelastete Gewölbehälfte in eine Anzahl Streifen ein, deren Gewichte man zu einem Kräfteplane abc (Fig. 227 b) aneinander fügt. Mit dem beliebig gewählten Pol O wird darauf der erste Seilzug $m' I' II' \dots n'$ aufgezeichnet, mit dessen Hilfe sich durch Verlängerung der entsprechenden Seilzugseiten bis zu den Schnittpunkten S_1' und S_2' die Lagen von G_1 (Mittelkraft der Streifengewichte der belasteten Gewölbehälfte) und G_2 (Mittelkraft der Streifengewichte der unbelasteten Gewölbehälfte) bestimmen lassen.

Fig. 227 b.



An der linken belasteten Gewölbehälfte halten sich die Kräfte G_1 und die durch G_1 allein hervorgerufenen Kämpferdrücke W_1 und W_2 im Gleichgewichte, müssen also durch einen Punkt S_1 gehen. Dieser Punkt S_1 ist aber dadurch bestimmt, daß W_2 die Richtung $\beta\gamma$ haben muß, weil sonst die rechte unbelastete Gewölbehälfte um den Punkt β gedreht werden würde.

An der rechten Gewölbehälfte halten die Kräfte G_2 und die durch G_2 allein erzeugten Kämpferdrücke D_1 und D_2 einander im Gleichgewichte und schneiden sich im Punkte S_2 , welcher dadurch festliegt, daß D_1 die Richtung $\alpha\gamma$ haben muß.

Durch die gemeinsame Wirkung von G_1 und G_2 entstehen die Kämpferdrücke K_1 (Mittelkraft aus W_1 und D_1) und K_2 (Mittelkraft aus W_2 und D_2), welche dem Gesamtgewichte $G = G_1 + G_2$ das Gleichgewicht halten.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich folgende Konstruktion: Man ziehe die Kreuzungsgeraden $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$ und verlängere dieselben bis zu den Schnittpunkten S_1 und S_2 mit den Belastungen G_1 bzw. G_2 . Der Punkt S_1 wird sodann mit α , der Punkt S_2 mit β geradlinig verbunden.

Im Kräfteplane (Fig. 227 b) zerlege man G_1 in die Seitenkräfte W_1 und W_2 , indem man $a d \parallel S_1 \alpha$ und $b d \parallel \beta S_1$ zieht; ferner G_2 in die Seitenkräfte D_1 und D_2 durch Ziehung der Geraden $b e \parallel \alpha S_2$ und $c e \parallel \beta S_2$. Vervollständigt man den Linienzug $d b e$ zu einem Parallelogramm durch $d O_1 \parallel b e$ und $e O_1 \parallel b d$, so ist $d O_1 = b e = D_1$ und $e O_1 = b d = W_2$. Vereintigt man sodann $D_1 = O_1 d$ und $W_1 = d a$ zu der Mittelkraft $K_1 = O_1 a$, ebenso $D_2 = c e$ und $W_2 = e O_1$ zu der Mittelkraft $K_2 = c O_1$, so bilden $K_1 K_2$ und $G = G_1 + G_2$ das geschlossene Kräfte dreieck $a c O_1$, halten sich also im Gleichgewichte.

Zeichnet man mit dem durch obige Parallelogramm-Konstruktion gewonnenen Pole O_1 in das Gewölbe einen Seilzug in α beginnend, so wird derselbe auch durch die Punkte γ und β gehen, und die gesuchte Drucklinie des Gewölbes umhüllen.

Eine andere von Prof. R. Land angegebene¹⁾ und wegen ihrer Einfachheit sehr empfehlenswerte Lösung, eine Drucklinie durch die drei gegebenen, bzw. angenommenen Punkte $\alpha\gamma\beta$ zu legen, ist folgende:

Man zeichne für den beliebig gewählten Pol O den ersten Seilzug $m'I'II' \dots n'$, und bestimme auf diesem die Punkte $\alpha'\gamma'\beta'$ lotrecht über den Punkten $\alpha\gamma\beta$ (Fig. 228). Man ziehe sodann die Schlußlinien $\alpha'\gamma'$ und $\beta'\gamma'$, und im Kräfteplan durch den Pol O die $O t_1 \parallel \alpha'\gamma'$ und $O t_2 \parallel \beta'\gamma'$.

Der Punkt t_1 zerlegt die Strecke $ab = G_1$ in die Abschnitte $a t_1$ und $t_1 b$, welche bekanntlich die in den Lotrechten durch α und γ auftretenden Seitenkräfte von G_1 darstellen. Da aber diese Seitenkräfte für beliebige andere Seilzüge ungeändert bleiben, so muß, wenn $\alpha\gamma$ die Schlußlinie des gesuchten Seilzuges werden soll, der Pol O_1 derselben auf der durch $t_1 \parallel \alpha\gamma$ gezogenen Geraden liegen (vergl. Fig. 69 S. 47). Aus demselben Grunde muß O_1 auch auf der durch $t_2 \parallel \beta\gamma$ gezogenen Geraden liegen.

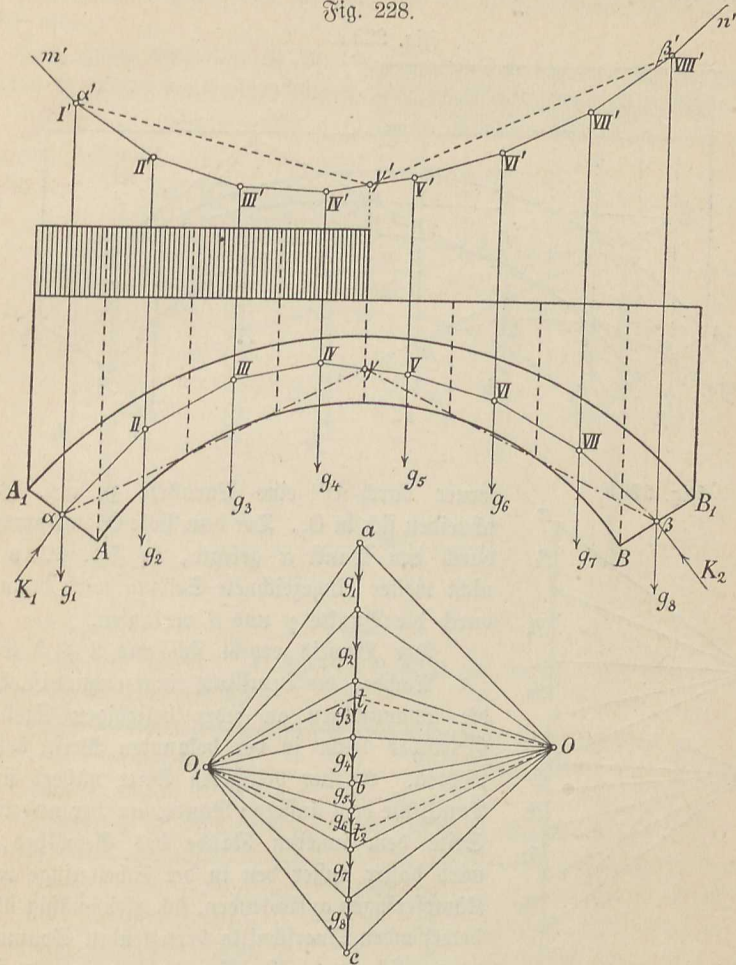
Der Schnittpunkt O_1 der $t_1 O_1 \parallel \alpha\gamma$ und $t_2 O_1 \parallel \beta\gamma$ ist danach der Pol des Kräfteplanes für den gesuchten Seilzug, welcher durch die Punkte $\alpha\gamma\beta$ verläuft.

Eine dritte, sich auf den in § 3 Seite 15 angeführten Satz stützende

¹⁾ Centralbl. der Bauverw. 1890. S. 94.

Lösung, eine Drucklinie durch die Punkte $\alpha\gamma\beta$ zu legen, gibt Prof. Warthausen folgendermaßen an:

Fig. 228.



Man konstruiere für den in Fig. 229 b beliebig angenommenen Pol O den Seilzug $mIIIIVV$ so, daß er durch den Punkt α verläuft. Dieser ist zunächst so zu schwenken, daß er auch durch den Punkt γ geht. Zu dem Zweck verlängere man die lotrecht unter γ liegende Seilzugseite IVV bis zum Schnitt d mit der im Punkte α errichteten Lotrechten und ziehe die Gerade $d\gamma$. Durch den Punkt b (Grenzpunkt zwischen den Streifengewichten g_4 und g_5) in Fig. 229 b ziehe man sodann eine Parallele zu $d\gamma$ bis zum Schnittpunkt O' mit der durch O verlaufenden Lotrechten. Der dem Pole O' entsprechende durch den Punkt α gelegte Seilzug geht dann auch zugleich durch den Punkt γ . Von diesem letzteren Seilzuge wird nur die zweite Hälfte

(von γ ab) gezeichnet. Die letzte Seite desselben möge die Lotrechte g_8 im Punkte β' schneiden. Man verlängere dieselbe bis zum Schnittpunkt ε mit der verlängerten $\alpha\gamma$ und ziehe in Fig. 229 b durch c eine Parallele zu $\beta'\varepsilon$,

Fig. 229 a.

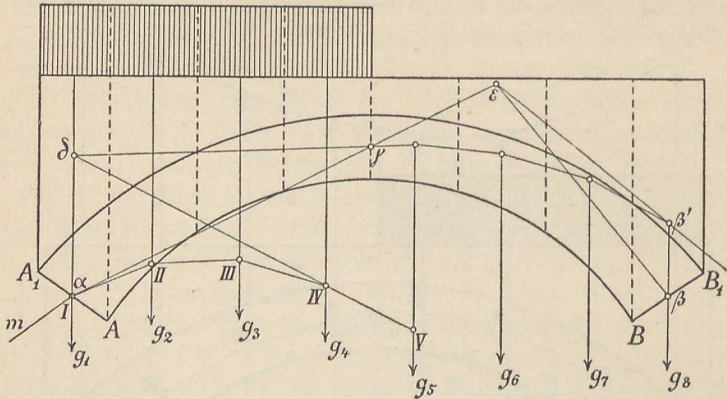
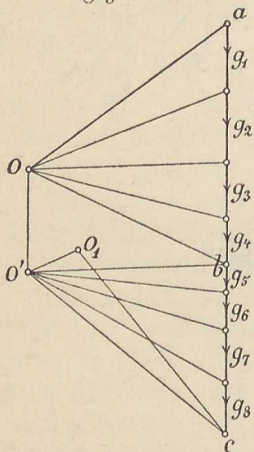


Fig. 229 b.



ferner durch O' eine Parallele zu $\alpha\gamma$. Beide schneiden sich in O_1 . Der dem Pole O_1 entsprechende, durch den Punkt α gelegte, in Fig. 229 a aber nicht weiter eingezeichnete Seilzug wird dann auch durch die Punkte γ und β verlaufen.

Der Beweis ergibt sich aus 2 § 3 S. 15.

Nachdem die Drucklinie eingezeichnet ist, können die Spannungen an jeder beliebigen Stelle des Gewölbes leicht in der bekannten Weise bestimmt werden. An der belasteten Seite nähert sich die Drucklinie dem äußeren Rande, an der unbelasteten Seite dem inneren Rande des Gewölbes, man wird daher außer den in der Scheitelfuge und den Kämpferfugen auftretenden, sich gleichmäßig über die betreffenden Querschnitte verteilenden Spannungen, namentlich noch die Spannungen an denjenigen

Stellen des Gewölbes berechnen, wo die Drucklinie sich am weitesten von der Mittellinie des Gewölbes entfernt.

Zahlenbeispiel. Statische Untersuchung des in Fig. 230 skizzierten einseitig mit $p = 800$ kg für 1 qm belasteten symmetrischen Tonnengewölbes. (Das Beispiel ist dem Werke: „Kircher, Vorlagen für den gewerblichen Fachunterricht an technischen Lehranstalten“ entnommen.)

Gewicht eines ehm Mauerwerk: $\gamma = 1600$ kg.

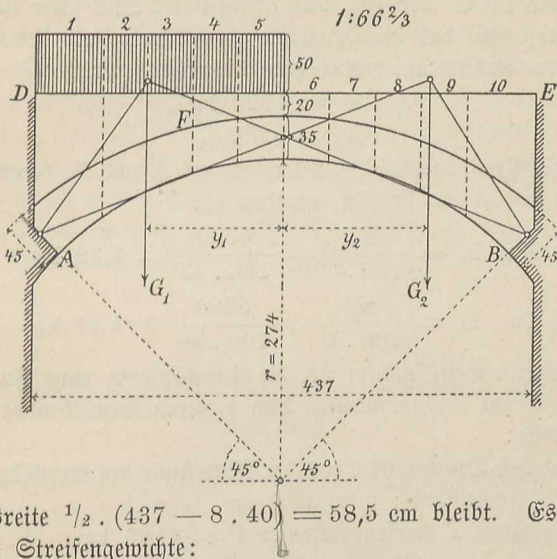
Spezifisches Gewicht der Aufschüttung gleich dem des Mauerwerkes, so daß die Belastungslinie DE wagerecht. Die veränderliche Belastung wird ersetzt durch einen Mauerwerkskörper von der Höhe:

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{800}{1600} = 0,5 \text{ m}$$

Die Aufgabe ist aufzuzeichnen im Maßstabe 1 : 20; Kräftemaßstab 1000 kg = 2,5 cm.

Das ganze Gewölbe ist in 10 Streifen geteilt, von denen die acht mittleren je 40 cm breit angenommen sind, so daß für jeden der beiden End-

Fig. 230.



streifen die Breite $\frac{1}{2} \cdot (437 - 8 \cdot 40) = 58,5$ cm bleibt. Es ergeben sich dann folgende Streifengewichte:

Belastete Seite		Unbelastete Seite	
Streifen	Gewicht in kg	Streifen	Gewicht in kg
Nr. 1	1610 kg	Nr. 6	358 kg
" 2	928 "	" 7	397 "
" 3	800 "	" 8	480 "
" 4	717 "	" 9	608 "
" 5	678 "	" 10	1142 "
$G_1 = 4733 \text{ kg}$		$G_2 = 2985 \text{ kg}$	

Diese Gewichte werden sodann zu einem Kräfteplane aneinander gefügt. Aus dem mit einem beliebig gewählten Pole O gezeichneten ersten Seilzuge findet man durch Verlängerung der äußersten Seiten bis zu den Schnittpunkten mit der Lotrecht unter der Gewölbmitte liegenden Seilzugseite die wagerechten Entfernungen der Belastungen G_1 und G_2 von der Mittelachse des Gewölbes zu:

$$y_1 = 119,5 \text{ cm}$$

$$y_2 = 128,5 \text{ cm}$$

Es werden darauf durch die Mitte der Scheitelfuge und der beiden Kämpferfugen die Kreuzungslinien gezogen, deren Schnittpunkte mit den Belastungen G_1 und G_2 bestimmt und diese Schnittpunkte mit den Mitten der Kämpferfugen geradlinig verbunden. Durch Ausführung der oben gezeigten Parallelogrammkonstruktion im Kräfteplane erhält man den neuen Pol O_1 , mit welchem die durch die Mitte der Scheitel- und Kämpferfugen verlaufende Drucklinie zu verzeichnen ist. Noch schneller führt zur Bestimmung des Poles O_1 die Anwendung des auf S. 198 Fig. 228 angegebenen Land'schen Verfahrens zum Ziele. Es zeigt sich, daß die Drucklinie überall innerhalb des Kernes bleibt.

Aus dem Kräfteplane findet man die Kämpferdrücke:

$$K_1 = 5920 \text{ kg}$$

$$K_2 = 5280 \text{ "}$$

wonach sich die Pressungen in den Kämpferfugen A und B, deren Stärke (nach Fig. 230): $b = 45 \text{ cm}$ beträgt, ergeben zu:

$$\text{in Fuge A: } k_a = \frac{K_1}{100 \cdot b} = \frac{5920}{100 \cdot 45} = 1,32 \text{ kg}$$

$$\text{in Fuge B: } k_b = \frac{K_2}{100 \cdot b} = \frac{5280}{100 \cdot 45} = 1,17 \text{ kg}$$

Auf der belasteten Seite nähert sich die Drucklinie in einer Fuge F (zwischen den Streifen 3 und 4) am meisten dem äußeren Gewölbrande. Man mißt an dieser Stelle:

den Abstand des Druckpunktes von der Mittellinie des Gewölbes: $e = 5 \text{ cm}$

die radikale Fugenstärke: $b = 36,6 \text{ cm}$

die auf die Fuge F wirkende Kraft: $P = 4160 \text{ kg}$.

Die am äußeren Gewölbrande in Fuge F auftretende Kantenpressung berechnet sich danach zu:

$$k_f = \frac{P}{100 \cdot b} \left(1 + \frac{6e}{b} \right) = \frac{4160}{100 \cdot 36,6} \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{36,6} \right) = 2,07 \text{ kg}$$

In derselben Weise kann auf der unbelasteten Seite zwischen den Streifen 7 und 8, wo sich die Drucklinie am meisten dem inneren Gewölbrande nähert, die dort erzeugte Kantenpressung berechnet werden.

Die Drucklinie wurde vorläufig so eingezeichnet, daß die Mitten der Fugen A und B die Angriffspunkte der Kämpferdrücke bilden. Die Spannungen in diesen Fugen verteilen sich dann gleichmäßig über den Querschnitt, können also zeichnerisch durch ein Rechteck dargestellt werden, während an allen anderen Stellen des Gewölbes (ausgenommen am Scheitel), wo die Drucklinie von der Mittellinie des Gewölbes abweicht, sich als Darstellung der Spannung ein Trapez oder Dreieck ergibt. Man wird im allgemeinen für verschiedene Stellen des Gewölbes verschiedene Spannungen finden, so z. B. weichen in unserem Beispiele die Spannungen k_a , k_b , k_f wesentlich voneinander ab.

In Wirklichkeit wird nun die Drucklinie bei den einseitig belasteten Gewölben nicht durch die Mitten der Kämpferfugen gehen, sondern eine solche

Lage annehmen, daß die in den Fugen A, B und F auftretenden größten Spannungen (die Rantenpressungen) einander nahezu gleich sind, denn aller Wahrscheinlichkeit nach ist die günstigste Drucklinie immer die wirkliche. Es würde bei der günstigsten Lage der Drucklinie dann in den drei Fugen A B F die mittlere Spannung entstehen:

$$k = \frac{k_a + k_b + k_f}{3} = \frac{1,32 + 1,17 + 2,07}{3} = 1,52 \text{ kg}$$

Nach dieser berechneten mittleren Spannung können die Angriffspunkte in den Fugen A B F festgelegt und es kann danach eine neue Drucklinie eingezeichnet werden, die der wirklichen schon sehr nahe kommt. Dieses Verfahren, welches das Schwenken der Drucklinie genannt wird, ist dann immer vorzunehmen, wenn die erste durch die Mitten des Scheitels und der Kämpfer gelegte Drucklinie an einzelnen Stellen aus dem Kern heraustritt. Tritt auch die geschwenkte Drucklinie noch aus dem Kern heraus, so muß, wenn man an der Forderung festhält, daß keine Zugspannungen entstehen sollen, das Gewölbe verstärkt werden.

3) Die verschiedenen Lagen der Drucklinie (Maximal- und Minimal-Drucklinie).

Am günstigsten für ein Gewölbe würde es immer sein, wenn die Drucklinie mit der Mittellinie desselben zusammenfielen, da dann die Spannungen, weil sie sich gleichmäßig über die Querschnitte verteilen, am kleinsten ausfallen. Dieser Fall ist theoretisch durch passende Annahme der Gewölbeform bei unveränderlicher Belastung allerdings zu erreichen, praktisch liegt die Sache jedoch derart, daß in den Gewölben Formänderungen (sog. Störungen) vorkommen, die sich häufig einer scharfen Beurteilung entziehen, und daß infolgedessen die Form eines Gewölbes nie genau so bleibt, wie sie entworfen war. Die Formänderungen bestehen hauptsächlich in dem Setzen des Lehrgerüsts während des Aufmauerns, in dem Setzen des Gewölbes selbst nach Entfernung des Lehrgerüsts und in dem Ausweichen der Widerlager; ferner ist der Wärmezustand von Einfluß. Infolge dieser Formänderungen läßt es sich, auch bei den unveränderlich belasteten Gewölben, nicht mit Sicherheit behaupten, daß die Drucklinie mit der Mittellinie des Gewölbes immer zusammenfällt; bei dem einer veränderlichen Last ausgesetzten Gewölbe wird unter allen Umständen die Drucklinie je nach der Lage der Belastung von der Mittellinie abweichen. Es muß daher der Drucklinie ein gewisser Spielraum gestattet sein und das Gewölbe so ausgeführt werden, daß dasselbe standfester ist, wie auch immer die Drucklinie innerhalb des ihr gestatteten Spielraums liegen möge. Für diesen Spielraum wird, damit keine Zugspannungen im Gewölbe entstehen, von den meisten maßgebenden Fachleuten das mittlere Drittel des Gewölbes (der Kern) angenommen und demnach die Forderung aufgestellt:

In ein Gewölbe muß, damit es standfester sein soll, sich eine Drucklinie so einzeichnen lassen, daß dieselbe überall innerhalb des Kernes bleibt; die auf Grund dieser Drucklinie berechneten Pressungen dürfen an keiner Stelle des Gewölbes die zulässige Grenze überschreiten.

Von allen Lagen, welche die Drucklinie innerhalb des Kernes einnehmen kann, verdienen besondere Beachtung die beiden Grenzlagen, von denen die eine (die Maximaldrucklinie) dem größten, die andere (die Minimaldrucklinie) dem kleinsten Horizontalschube entspricht.

Da, wie bereits Seite 192 angeführt war, unter sonst gleichen Verhältnissen der Horizontalschub um so größer sein muß, je geringer die Lotrechte Entfernung des Angriffspunktes desselben von dem Angriffspunkte des Kämpferdruckes ist (vergl. Fig. 221, S. 191), so wird bei einem und demselben Gewölbe dem größeren Horizontalschube eine flachere, dem kleineren Horizontalschube eine steilere Drucklinie entsprechen.

Bei Gewölben mit kleinem Pfeil geht die dem Maximal-Horizontalschube entsprechende Drucklinie, welche von allen Drucklinien, die sich in den Kern einzeichnen lassen, die flachste ist, im Scheitel durch den unteren Kernpunkt, an den Kämpfern durch die oberen Kernpunkte (Fig. 231); umgekehrt geht die dem Minimal-Horizontalschube entsprechende Drucklinie (von allen

Fig. 231.

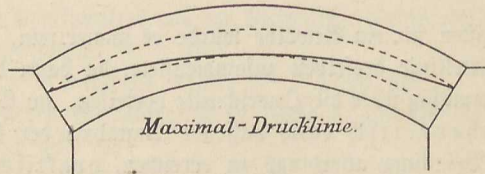
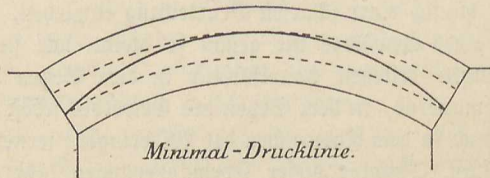


Fig. 232.



innerhalb des Kernes liegenden Drucklinien die steilste) durch den oberen Kernpunkt des Scheitels und durch die unteren Kernpunkte der Kämpfer (Fig. 232). Die Kämpferfugen bilden daher bei allen flachen Gewölben auch die Bruchfugen¹⁾.

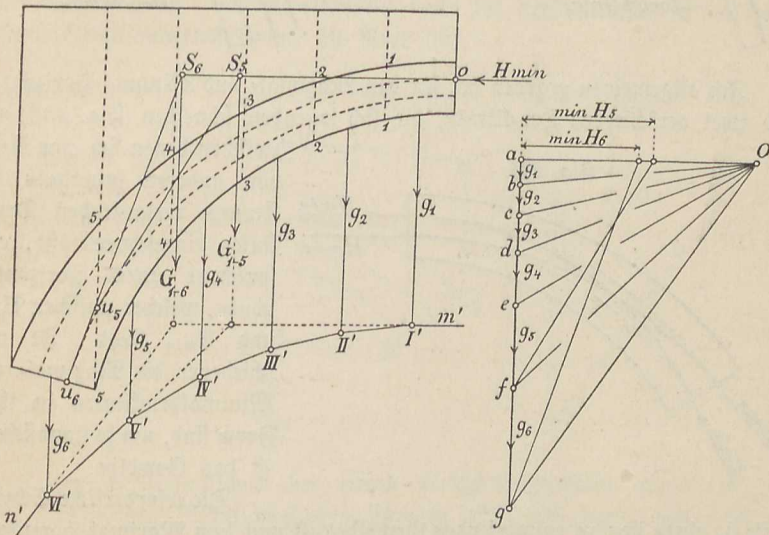
Dies ist nicht immer der Fall bei hohen Gewölben, bei denen die Bruchfugen besonders bestimmt werden müssen.

¹⁾ Unter Bruchfugen versteht man diejenigen Fugen, in denen am leichtesten ein Bruch des Gewölbes entsteht, weil sich dort die Drucklinie am meisten dem Gewölbrande nähert.

Die Bestimmung der Bruchfuge für den Minimal-Horizontalschub (H_{\min}) ist durchgeführt bei dem symmetrisch belasteten Gewölbe Fig. 233. H_{\min} greife dabei zunächst im oberen Kernpunkte o des Scheitels an.

Nach Einteilung des Gewölbes in Streifen und Aneinanderfügen der Gewichte derselben zu dem Kräftezuge $abc\dots g$ bestimme man mittels des ersten Seilzuges mit beliebigem Pole O die Lage von G_{1-6} (Mittelkraft sämtlicher Streifengewichte) und bringe diese zum Schnitt S_6 mit H_{\min} . Verbindet man dann S_6 mit dem unteren Kernpunkte u_6 der Kämpferfuge und zieht durch den unteren Endpunkt g des Kräfteplanes eine Parallele zu $u_6 S_6$, so schneidet diese auf der durch a gelegten Wagerechten den Horizontalschub ${}_{\min}H_6$ ab, welcher einer durch die Punkte o und u_6 gehenden Drucklinie entspricht.

Fig. 333.



Diese Drucklinie genügt für die Kämpferfuge, kann aber möglicherweise bei einer der folgenden Fugen 5, 4... aus dem Kern heraustreten. Um dies zu untersuchen, bestimme man weiter die Lage G_{1-5} (Mittelkraft der Streifengewichte g_1 bis g_5), welche H_{\min} im Punkte S_5 schneidet. Verbindet man S_5 mit dem Punkte u_5 (Schnittpunkt der Fuge 5 mit der unteren Kernlinie des Gewölbes) und zieht durch f im Kräfteplane eine Parallele zu $u_5 S_5$, so schneidet diese den Horizontalschub ${}_{\min}H_5$ ab, welcher einer durch die Punkte o und u_5 gehenden Drucklinie entspricht. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man den Horizontalschub H_{\min} für alle übrigen Fugen; mit dem größten derselben ist die Drucklinie aufzuzeichnen und derjenige Punkt, für welchen H_{\min} den größten Wert erreicht, bezeichnet zugleich die Bruchfuge.

In derselben Weise ist die Bruchfuge für den Maximal-Horizontalschub zu bestimmen. Von allen Werten, die sich dabei für H_{\max} ergeben, ist zur Aufzeichnung der Drucklinie der kleinste zu nehmen.

In manchen Fällen wird bei hohen Gewölben die Minimaldrucklinie nicht durch den oberen Kernpunkt, die Maximaldrucklinie nicht durch den unteren Kernpunkt der Scheitelfuge gehen (Fig. 234 und 235); der Angriffspunkt von H wird dann am besten durch Versuch bestimmt.

Fig. 234.

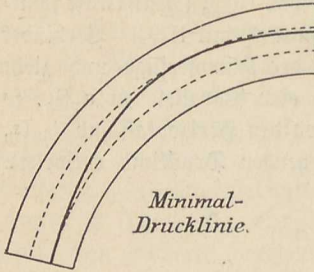
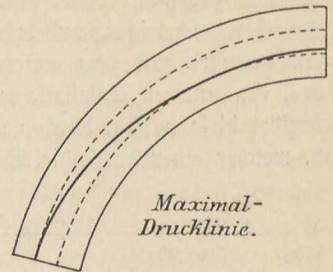
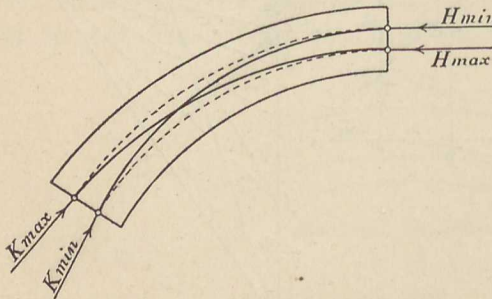


Fig. 235.



Im allgemeinen ergeben sich für den Maximal- und Minimal-Horizontal-schub zwei verschiedene Drucklinien, die sich irgendwo schneiden (Fig. 236) und zwischen denen sich eine Reihe von anderen innerhalb des

Fig. 236.



Kernes verlaufenden Drucklinien einzeichnen läßt, entsprechend einem Horizontal-schube, welcher zwischen H_{max} und H_{min} liegt. Je verschiedener die Maximal- und Minimaldrucklinien in ihrer Form sind, um so standfester ist das Gewölbe.

Die erforderliche Scheitelstärke d_0 eines neu zu entwerfenden Gewölbes ist nach dem Maximal-Horizontal-schube zu bestimmen. Greift derselbe im unteren Kernpunkte der Scheitelfuge an und ist k die zulässige Kanten-

pressung, so ist:

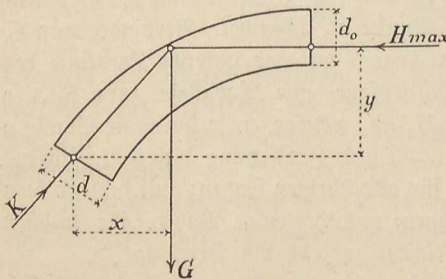
$$d_0 = \frac{2 \cdot H_{max}}{k}$$

Der Größe von H_{max} kann dabei unter vorläufiger Annahme der Gewölbeform annähernd berechnet werden aus der Bedingung (Fig. 237).

$$H_{max} = \frac{G x}{y}$$

Da der Kämpferdruck K immer größer ist als der Horizontal-schub, so muß auch die Kämpferstärke d in demselben Verhältnis größer ausgeführt werden

Fig. 237.



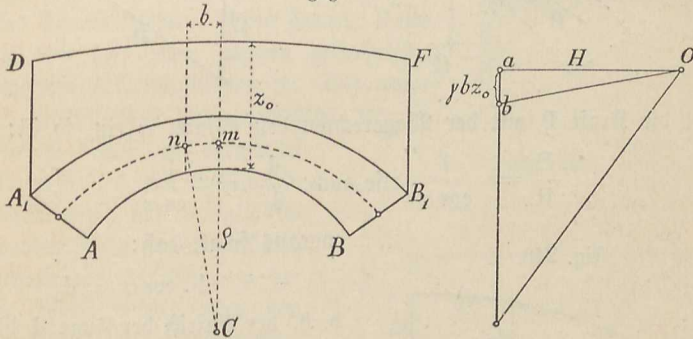
als die Scheitelfstärke, damit die in der Kämpferfuge auftretende Kantenpressung das zulässige Maß nicht überschreitet. Greift (bei der Maximaldrucklinie) K im oberen Kernpunkte der Kämpferfuge an, so wird:

$$d = \frac{2K}{k}$$

Kleinere Backsteingewölbe werden meistens mit gleichbleibender Stärke durchgeführt und so bemessen, daß die Beanspruchungen in den Kämpfern oder den Bruchfugen nicht zu groß ausfallen; die Pressungen im Scheitel erreichen dann das zulässige Maß nicht.

Wird bei einem Gewölbe, welches einer bestimmten ruhenden Belastung ausgesetzt ist, die Form so gewählt, daß die Drucklinie mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, so nennt man ein solches Gewölbe ein Stützliniengewölbe. Selbstverständlich kann bei veränderlicher Belastung von einem Stützliniengewölbe nie die Rede sein.

Fig. 238.



Der Horizontalschub bei einem Stützliniengewölbe ergibt sich nach Fig. 238 wegen Ähnlichkeit der Dreiecke abO und mnC aus dem Verhältnis:

$$\frac{H}{\gamma b z_0} = \frac{\rho}{b}$$

zu:

$$H = \gamma \rho z_0$$

wobei:

- ρ = Krümmungshalbmesser im Scheitel
- z_0 = Belastungshöhe im Scheitel

(DF in Fig. 238 ist die auf Gewölbemauerwerk bezogene Belastungslinie.)

Für ein kreisförmiges Gewölbe ist der Krümmungshalbmesser unveränderlich, also $\rho = r$, daher:

$$H = \gamma r z_0$$

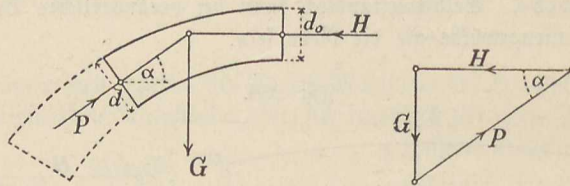
z. B. für $r = 5$ m, $z_0 = 2,8$ m, und $\gamma = 1600$ kg wird:

$$H = 1600 \cdot 5 \cdot 2,8 = 22400 \text{ kg}$$

Bei den Stützliniengewölben muß, wenn sie überall gleiche Widerstandsfähigkeit gegen Druck besitzen sollen, die Stärke der rechtwinklig zur Krafttrichtung angenommenen Fugen vom Scheitel nach den Kämpfern zu beständig in demselben Maße zunehmen, als die wirkenden Kräfte größer werden, oder mit anderen Worten: Die Fugenstärken müssen sich verhalten, wie die auf die Fugen wirkenden Kräfte. Vergleicht man z. B. in einem Gewölbe Fig. 239 die beliebige Fuge d , auf welche die Kraft P wirkt, mit der Scheitelfuge d_0 , so besteht die Beziehung:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{P}{H}$$

Fig. 239.



Schließt die Kraft P mit der Wagerechten den Winkel α ein, so ist:

$$\frac{P}{H} = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ also auch: } \frac{d}{d_0} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Fig. 240.

woraus folgt, daß:

$$d \cdot \cos \alpha = d_0$$

d. h. der Aufriß der Fuge d ist gleich der Scheitelfuge d_0 .

Da die Fuge d beliebig gewählt war, die letzte Gleichung also für sämtliche Fugen gilt, so erhält man den Satz:

Bei einem Stützliniengewölbe von überall gleicher

Widerstandsfähigkeit gegen Druck muß der Aufriß jeder Fuge gleich der Scheitelfuge sein (Fig. 240).

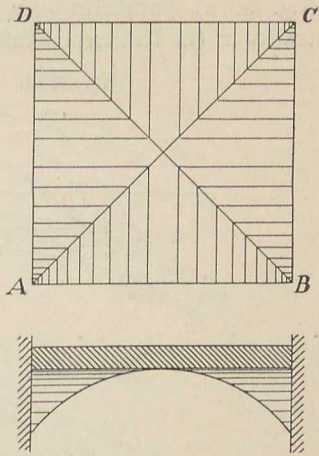
§ 23.

Die Kreuzgewölbe.

Unter einem Kreuzgewölbe versteht man bekanntlich die Durchdringung zweier Tonnengewölbe (Fig. 241). Die Stirnseiten AB , BC , CD , DA werden begrenzt durch Mauern oder durch Gurtbögen, die Diagonalen AC , BD heißen die Grate oder Gratabbögen.

Die Ausführung der Kreuzgewölbe erfolgt entweder derart, daß die Lagerfugen parallel den Längsachsen der Tonnengewölbe laufen, oder so, daß die Lagerfugen senkrecht zu den Gratbögen angeordnet werden. Jede dieser Konstruktionen ist bei der statischen Untersuchung für sich zu betrachten.

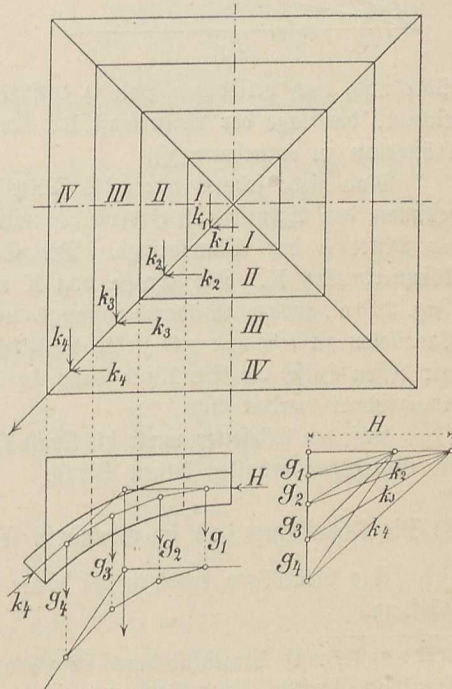
Fig. 241.



1) Die Lagerfugen laufen parallel den Längsachsen der Tonnengewölbe.

Man teile das im Grundriß quadratisch angenommene Gewölbe (Fig. 242) in Streifen senkrecht zu den Lagerfugen und zwar alle vier Gewölbeteile in dieselbe Anzahl. Jeder dieser Streifen bildet für sich ein kleines, d. h. schmales Tonnengewölbe, dessen statische Untersuchung wie bei jedem andern gewöhnlichen Tonnengewölbe durchzuführen ist. Wir untersuchen zunächst das Tonnengewölbe Nr. IV,

Fig. 242.



und teilen dieses in ebensoviel Belastungsstreifen, wie im Grundriß angenommen waren, also im vorliegenden Falle in vier. Durch Einzeichnen der Drucklinie in bekannter Weise erhält man den Horizontalschub H und Kämpferdruck k_4 . In derselben Weise werden für die kleinen Tonnengewölbe Nr. III, II, I die Kämpferdrücke k_3, k_2, k_1 graphisch bestimmt.

Auf den Gratbogen wirken nun die Kräfte k_1 und k_1, k_2 und k_2, k_3 und k_3, k_4 und k_4 , welche in wagerechte und lotrechte Seitenkräfte zerlegt werden. Die wagerechten Seitenkräfte H und H setzen sich wieder zusammen zu der in der Richtung des Gratbogens wirkenden Mittelkraft H_1 . Die lotrechten Seitenkräfte bestehen aus den doppelten Gewichten g , sind also: $2g_1, 2g_2, 2g_3, 2g_4$. Bildet man aus diesen letzteren und dem

Horizontalschube H_1 ¹⁾ einen Kräfteplan (Fig. 243 b), so ergeben sich daraus die Kräfte r_1, r_2, r_3, r_4 , durch welche der Gratbogen beansprucht wird. Durch die bekannten Angriffspunkte 1, 2, 3, 4 der Kräfte r (es sind dieselben Punkte, in denen die Kräfte k angreifen) ziehe man in der Hauptfigur (Fig. 243 a) Parallelen zu r_1, r_2, r_3, r_4 , und bestimme, indem man aus den Kräften r (in kleinerem Maßstabe) einen besonderen Kräfteplan (Fig. 243 c)

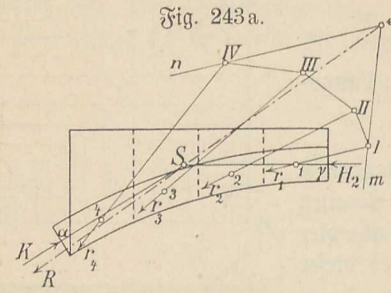


Fig. 243 a.

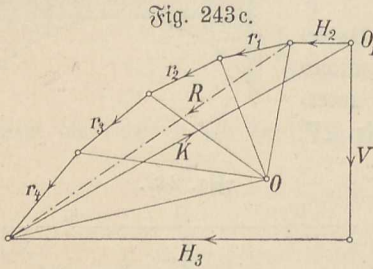


Fig. 243 c.

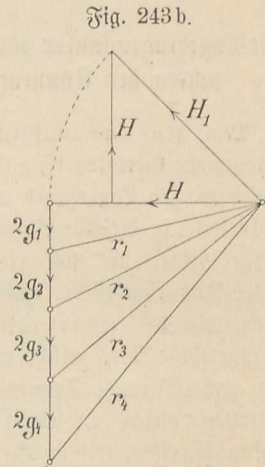


Fig. 243 b.

bildet und, dem beliebigen Pole O entsprechend, den Seilzug mIIIIIn aufzeichnet, die Lage der Mittelkraft R, deren Größe und Richtung aus dem Kräfteplan zu entnehmen ist.

Man ziehe sodann durch die Mitte γ der Scheitelfuge eine Wagerechte, bestimme den Schnittpunkt S derselben mit der Kraft R, und verbinde S mit der Mitte α der Kämpferfuge. Die Gerade $S\alpha$ gibt die Richtung des Kämpferdruckes K. Die Größe von K und H_2 folgt aus dem Kräfteplan (Fig. 243 c), indem man durch Anfangs- und Endpunkt des Zuges der r -Kräfte Parallelen zu αS und γS zieht. Dadurch erhält man zugleich den Pol O_1 , mit dessen Hilfe die Drucklinie dann in bekannter Weise in den Gratbogen eingezeichnet werden kann.

Auf den Giebfelder wirkt die Kraft K, welche sich in V und H_3 zerlegt; die Gurtbögen erhalten keinen Schub.

2) Die Lagerfugen sind im Grundriß senkrecht zu den Graten angeordnet.

Die Gratbögen erhalten bei dieser Ausführungsart meistens eine Verstärkung.

¹⁾ H_1 wird dargestellt durch die Hypotenuse eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks, dessen Katheten gleich dem Horizontalschube H sind.

Man teilt das Gewölbe (Fig. 244) in Streifen I, II, III, IV, senkrecht zu den Gratbögen. Sämtliche Streifen übertragen auf die Gratbögen Horizontalschübe, die sich gegenseitig aufheben. Von den innerhalb des Vierecks JLMN liegenden Streifen lehnen sich je zwei zusammengehörige (I und I,

Fig. 244.

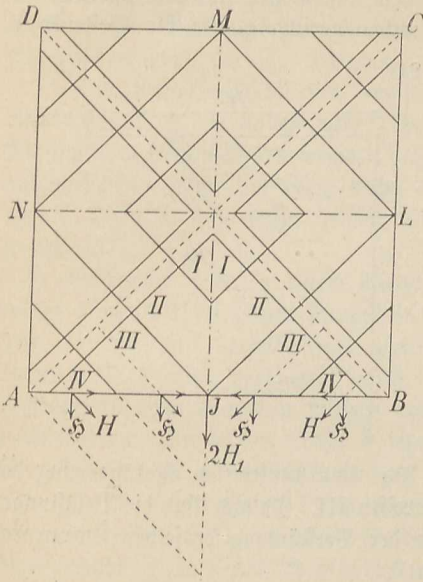
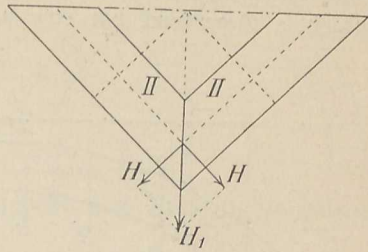


Fig. 245.



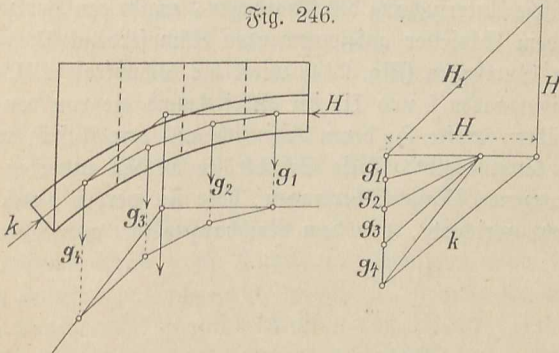
II und II) im Scheitel aneinander und üben die Horizontalschübe H aufeinander aus, die sich zusammensetzen zu der in der Richtung der Gewölbeachse wirkenden Mittelkraft H_1 (Fig. 245).

Die außerhalb des Vierecks JLMN liegenden Streifen stützen sich mit ihren Außenenden gegen die Gurtbögen und übertragen auf

diese die Seitenschübe S (d. s. die in die Richtung der Gewölbeachse fallenden Seitenkräfte von H).

Wir untersuchen zunächst den äußeren Streifen IV, und denken uns denselben ergänzt bis zum Scheitel des Tonnengewölbes (bis zu der ver-

Fig. 246.

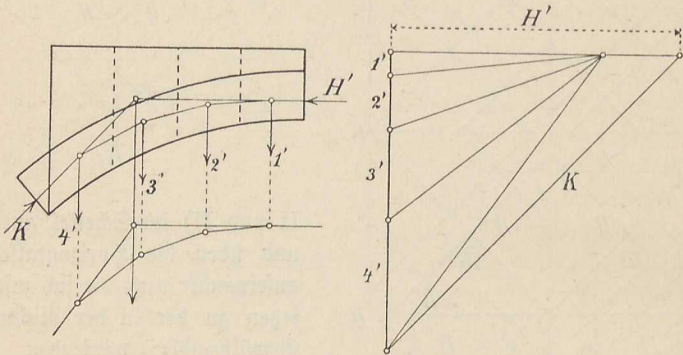


längerten MJ in Fig. 244). Dieser wird in so viel Belastungsstreifen geteilt, wie im Grundriß Gewölbestreifen vorhanden sind, also im vorliegenden Falle in vier. Die Untersuchung wird nach Fig. 246 in bekannter Weise durch-

geführt und ergibt den Horizontalschub H , welcher für die anderen Streifen III bis I dieselbe Größe hat.

Danach wird die statische Untersuchung durchgeführt für den (ebenfalls in vier Belastungsstreifen eingeteilten) Gratbogen (Fig. 247). Auf diesen wirken nur lotrechte Kräfte, da sich, wie schon oben bemerkt, die Horizontalkräfte gegenseitig aufheben. Der von dem Gurtbogen auf den Streifen IV ausgeübte Gegendruck hat eine nach unten gerichtete lotrechte Seitenkraft,

Fig. 247.



welche gleich ist dem Gewichte der in Fig. 244 punktierten Verlängerung des Streifens. Dasselbe gilt von dem Streifen III. Danach sind die Belastungen des Gratbogens (außer dem Gewichte der Verstärkung desselben, wenn das Gewölbe nur sich selbst zu tragen hat):

$2 g_1$	herrührend von den Gewichten der Streifen I					
$2 (g_1 + g_2)$	"	"	"	"	"	II
$2 (g_1 + g_2 + g_3)$	"	"	"	"	"	III
$2 (g_1 + g_2 + g_3 + g_4)$	"	"	"	"	"	IV

Diese Belastungen sind in Fig. 247 mit 1', 2', 3', 4' bezeichnet.

Die statische Untersuchung des Gratbogens ergibt den Horizontalschub H' und den von dem Eckpfeiler aufzunehmenden Kämpferdruck K .

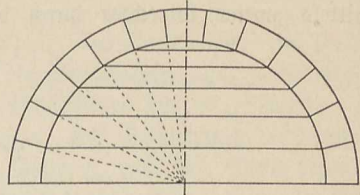
Auf den Gurtbogen (Fig. 244) wirkt die Schubkraft $2H_1$ (herrührend von den Streifenpaaren I und II) im Scheitel und die von den Streifen III und IV ausgeübten Kräfte H , deren Lage sich aus dem Aufriß und Grundriß des Gewölbes leicht ergibt. Diese Schubkräfte werden entweder auf die das Gewölbe begrenzende Mauer übertragen, oder sie werden durch gleiche aber entgegengesetzt gerichtete, von dem Nachbargewölbe ausgeübte Kräfte aufgehoben.

Die Kuppelgewölbe.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer passend geformten Kurve (meist Kreisbogen) um eine lotrechte Achse (Fig. 248). Die zur Ueberdeckung

solcher Flächen dienenden Gewölbe (Kuppelgewölbe) bestehen aus einzelnen in sich geschlossenen wagerechten, kreisförmigen Ringen, von denen jeder einzelne sich im Gleichgewichte befinden muß, wenn die ganze Kuppel standfester sein soll. Dabei ist es gleichgültig, ob die Kuppel oben geschlossen oder offen ist. Bei den offenen Kuppeln dient die obere kreisförmige Oeffnung zur Anordnung eines Oberlichtes, der sog. Laterne.

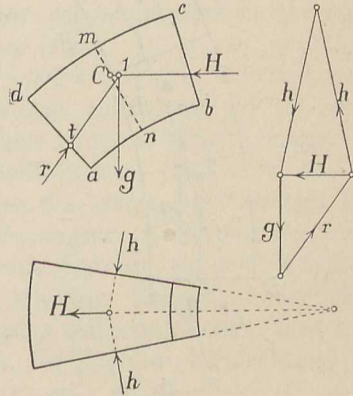
Fig. 248.



Die Kuppelgewölbe sind meistens unbelastet, d. h. sie haben außer ihrem Eigengewicht keine weiteren fremden Lasten aufzunehmen. Nur der obere Ring der offenen Kuppeln hat außer seinem Eigengewicht noch die Last der Laterne zu tragen.

Betrachtet man in einem Ringe, der zur Zeit der oberste, d. h. der zuletzt gemauerte Ring der Kuppel sein möge, einen beliebigen Stein $abcd$ (Fig. 249), so darf derselbe nicht gleiten und sich auch nicht um die Kante a drehen. Dies wird verhindert durch die Kräfte h , welche von den nebenliegenden Steinen desselben Ringes ausgeübt werden. Die beiden Kräfte h setzen sich zusammen zu der Mittelkraft H .

Fig. 249.



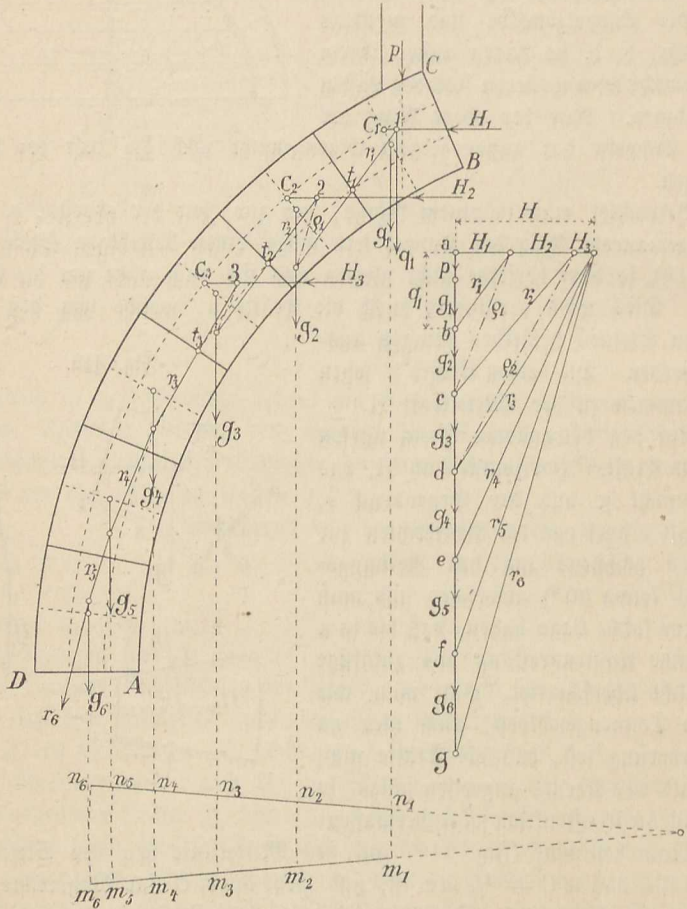
Auf den betrachteten Stein wirken dann die Kräfte: Horizontalschub H , das Eigengewicht g und der Gegendruck r . Die Kraft r darf von der Senkrechten zur Fuge ad höchstens um den Reibungswinkel φ (etwa 30°) abweichen und muß dabei eine solche Lage haben, daß die in a auftretende Kantenpressung das zulässige Maß nicht überschreitet. Hält man, wie bei den Tonnengewölben, auch hier an der Forderung fest, daß die Kräfte nicht außerhalb des Kernes angreifen sollen, so ergibt sich die Konstruktion folgendermaßen:

Man bestimme (Fig. 249) auf der Mittellinie mn des Steines den Punkt C so, daß $mC = \frac{1}{3}mn$ ist, und ziehe durch C eine Wagerechte, welche die Lage von H angibt. Diese schneidet die im Schwerpunkte des Steines angreifende Lotrechte Kraft g im Punkte 1 . Bestimmt man dann auf der Fuge ad den Punkt t so, daß $at = \frac{1}{3}ad$ ist, so gibt die Gerade $1t$ die Richtung des Gegendruckes r . Die Größen von H und r erhält man aus dem Kräfteplan, indem man durch den oberen Endpunkt von g eine Wagerechte, durch den unteren Endpunkt eine Parallele zu $t1$ zieht. Dadurch ergibt sich zugleich auch die Kraft h , da der Winkel, den h und h miteinander bilden, durch den Grundriß bekannt ist.

Stellt es sich bei der Konstruktion heraus, daß die Kraft r mit der Senkrechten zur Fuge $a d$ einen größeren Winkel als φ einschließt, so muß sie um den Punkt l nach der Mitte zu geschwenkt werden, kann dann also nicht mehr durch den Kernrand t gehen.

Zur statischen Untersuchung des ganzen Kuppelgewölbes denke man sich mittels zweier Lotrechter durch die Gewölbe-Achse gehender Ebenen einen

Fig. 250.



Meridianstreifen ABCD (Fig. 250) herausgeschnitten und teile denselben in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Die in den Schwerpunkten der einzelnen Streifen Teile angreifenden Gewichte $g_1 g_2 \dots$ werden ermittelt mit Rücksicht auf die Grundrißbildung. Sie sind bei gleichbleibender Stärke des Gewölbes proportional den Längen der durch die Schwerpunkte der Streifen Teile im Grundriß gezogenen Kreisbögen $m_1 n_1, m_2 n_2$ u. s. w. Wird also die Querschnittsfläche eines Flächenstreifens mit f bezeichnet, so ist:

$$g_1 = \gamma f \cdot m_1 n_1$$

$$g_2 = \gamma f \cdot m_2 n_2$$

Das Gewicht g_1 setzt sich bei offenen Kuppeln zusammen mit der auf den ersten Streifen teil entfallenden, von der Laterne herrührenden Belastung p zu der Mittelkraft q_1 .

Man füge g_1 bzw. q_1 und $g_2, g_3 \dots$ aneinander zu dem Kräftezuge $a b \dots g$, zeichne dann im Aufriß die Kernränder und markiere auf dem oberen die Punkte $C_1, C_2 \dots$ in den Mittellinien der Streifen teile, auf dem unteren die Punkte $t_1, t_2 \dots$ in den Fugen. Der Schnittpunkt der durch C_1 gelegten Wagerichten mit dem Gewichte g_1 bzw. q_1 gibt den Punkt 1. Man ziehe die Gerade $1 t_1$ und im Kräfteplan durch b eine Parallele dazu. Diese ergibt die Kraft r_1 und schneidet auf der durch a gelegten Wagerichten den Horizontalschub H_1 ab. Die Kraft r_1 setzt sich zusammen mit g_2 zu der Mittelkraft q_1 , welche die durch C_2 gezogene Wagerichte im Punkte 2 schneidet. Man ziehe $2 t_2$ und im Kräfteplan durch c eine Parallele dazu, wodurch man die Kräfte r_2 und H_2 erhält. Das Verfahren wird in derselben Weise fortgesetzt. Ergeben sich dabei zu große Winkel zwischen den Kräften r und den Senkrechten zu den Fugen, so sind nicht mehr die Punkte t maßgebend, sondern die Richtungslinien. In diesem Falle ergibt sich r_1 dadurch, daß man durch den Punkt 1 eine Gerade zieht, welche mit der Senkrechten zur ersten Fuge den Winkel φ ($= 30^\circ$) einschließt u. s. w.

Sobald die Mittelkraft aus einer Kraft r mit dem Gewichte g des folgenden Steines (in Fig. 250 die Mittelkraft aus r_3 und g_4) die untere Fuge innerhalb des Kernes schneidet, ist keine durch die Ringspannungen erzeugte, nach außen hin gerichtete Horizontalkraft mehr erforderlich, um den Stein im Gleichgewicht zu halten. Die von den oberen Gewölberingen herrührenden und auf die unteren Ringe übertragenen Horizontalkräfte treten dann für den unteren Teil der Kuppel als Zugkräfte auf und suchen ein Herauschieben der Steine nach außen zu bewirken. Dieses wird verhindert durch genügende Hintermauerung des unteren Kuppelsteiles oder durch umgelegte eiserne Reifen, welche geeignet sind, die Zugkräfte aufzunehmen.

§ 25.

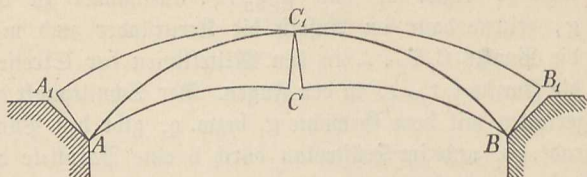
Die Widerlager und Pfeiler.

1) Die Widerlager.

Auf ein Widerlager, gegen welches sich ein Gewölbe lehnt, wirkt außer dem lotrecht abwärts gerichteten Eigengewichte Q und der auf dem Widerlager ruhenden Belastung Q' noch der schräg gerichtete Kämpferdruck K des Gewölbes (Fig. 253 S. 117). Letzterer entspricht der Minimaldrucklinie, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht.

Angenommen, ein Gewölbe stützt sich gegen zwei Widerlager, die nicht genügend widerstandsfähig sind und unter der Wirkung der Kämpferdrücke nach außen ausweichen, so wird sich der Scheitel des Gewölbes immer mehr senken, es wird ein Klaffen der Scheitelfuge unten, der Kämpferfugen oben eintreten, bis schließlich bei dem in Fig. 251 skizzierten Grenzzustande, wo die

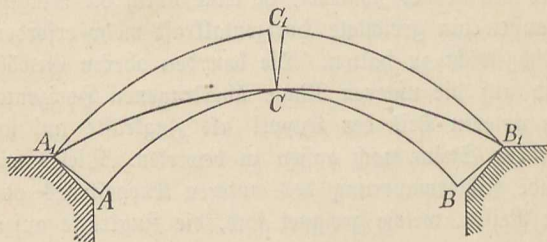
Fig. 251.



Drucklinie durch die Punkte $A_1 C_1 B_1$ geht, der Einsturz des Gewölbes erfolgt. Umgekehrt ist es klar, daß durch Zusammenschieben der Widerlager der Scheitel des Gewölbes steigt, die Drucklinie flacher wird und im Grenzzustande durch die Punkte $A_1 C B_1$ geht, wo dann ebenfalls der Einsturz des Gewölbes stattfinden würde (Fig. 252). Da die Drucklinie bei einem standsfähigeren Gewölbe nun stets innerhalb des Kernes bleiben muß, so sind die praktisch zulässigen Grenzzustände die Minimal- bezw. Maximaldrucklinie. Man erhält daher den Satz:

Durch Ausweichen der Widerlager nach außen steigt die Drucklinie und geht im Grenzzustande in die Minimaldruck-

Fig. 252.



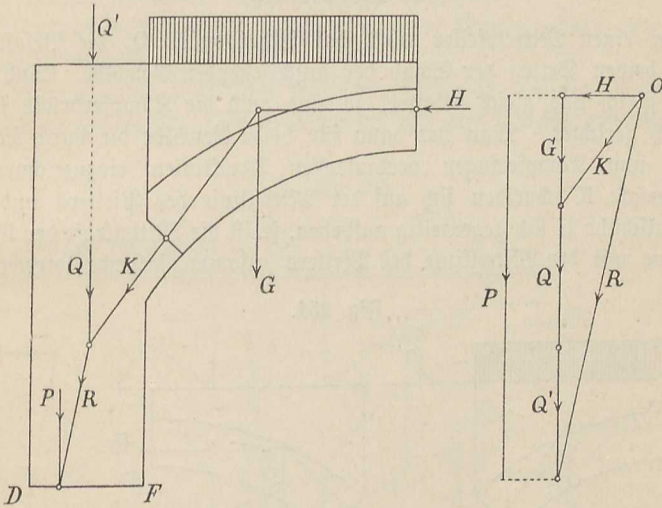
linie über. Durch Zusammenschieben der Widerlager nach innen wird die Drucklinie flacher und geht im Grenzzustande in die Maximaldrucklinie über.

Zur statischen Untersuchung des Widerlagers ist nun das anschließende Gewölbe voll belastet anzunehmen, und da hier das Widerlager das Bestreben hat, nach außen auszuweichen, so ist die Minimaldrucklinie einzuzichnen und danach der Kämpferdruck K zu bestimmen. Durch Zusammensetzung der Kräfte $K Q Q'$ erhält man die auf die Bodenfuge des Widerlagers wirkende Mittelkraft R (Fig. 253) und kann dann aus der Größe, Richtung und Angriffspunkt derselben auf die Standfestigkeit des Widerlagers schließen. Die Bedingungen für die Standfestigkeit sind, daß die Kraft R die Bodenfuge inner-

halb der Punkte D und F schneidet, daß der Winkel, welchen R mit der Senkrechten zu DF bildet, kleiner bleibt als der Reibungswinkel, und daß die in D auftretende Rantenpressung die für den Baugrund festgesetzte zulässige Grenze nicht überschreitet. Sollen nur Druckspannungen auftreten, so muß R im mittleren Drittel von DF angreifen.

Der Angriffspunkt der Kraft R steht nun mit der Drucklinie des Gewölbes in bestimmter Beziehung. Schneidet nämlich R die Bodenfuge DF im Kernrande, so geht auch die Drucklinie durch den Kernrand der Kämpferfugen (bezw. der Bruchfugen) und der Scheitelfuge; greift R innerhalb des

Fig. 253.



Kerns an, so weichen die Widerlager weniger aus und die Minimaldrucklinie tritt nicht ein, es schneidet vielmehr die wirklich eintretende Drucklinie die Kämpferfugen (bezw. die Bruchfugen) und die Scheitelfuge auch innerhalb des Kerns.

Obgleich durch die Belastung Q' die rechtwinklig zur Bodenfuge DF gerichtete Kraft P vergrößert wird, so kann doch Q' günstig auf die Standfestigkeit des Widerlagers einwirken, indem dadurch die Mittelkraft R mehr nach der Mitte zu gedrängt wird, was wieder eine günstigere Spannungsverteilung zur Folge hat. Es kann sogar sehr wohl der Fall eintreten, daß durch Fortnahme der Belastung Q' ein Einsturz des Widerlagers erfolgt (wenn nämlich die Mittelkraft aus K und Q über die Kante D hinausfällt), welches vorher unter gleichzeitiger Wirkung der drei Kräfte $KQ'Q$ vollständig standfest war. So z. B. hat die Auswechslung einer schweren, das Widerlager belastenden Steinwand gegen einen leichten Holzbau schon häufiger den Einsturz eines Gebäudes herbeigeführt.

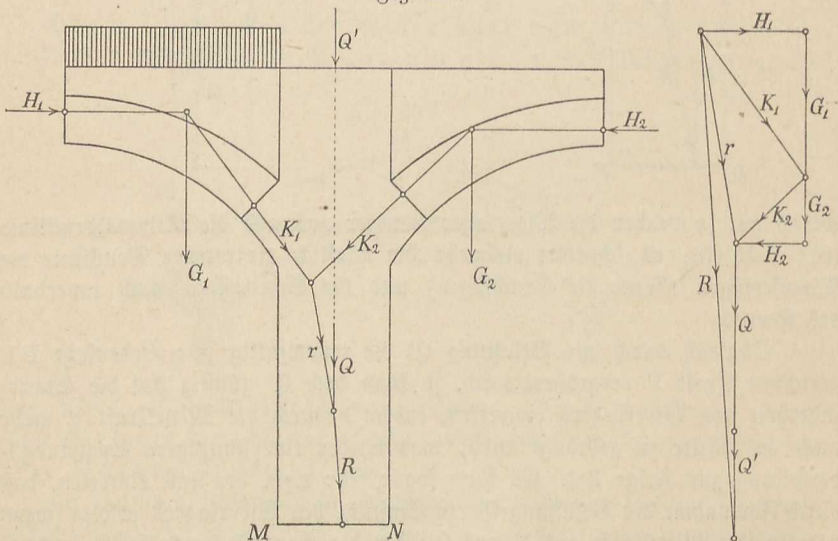
Findet an der äußeren, dem Gewölbe abgewendeten Seite des Widerlagers eine Auffüllung mit Erde statt, wie dies meistens bei den Fundament-

mauern der Gebäude der Fall ist, so tritt zu den genannten Kräften $KQ'Q'$ noch der Erddruck E hinzu, welcher die Stützlinie nach der Mitte zu drängt und insofern günstig auf die Standfestigkeit des Widerlagers einwirken kann. Bei sehr hohen Widerlagern wird aber häufig der Erddruck so groß, daß dadurch die Stützlinie über die Mitte von DF hinaus nach der inneren Kante F zu gedrängt wird. In diesem Falle würde nicht mehr D , sondern F die Rippfante sein, das Widerlager hätte dann das Bestreben, nach innen auszuweichen, wodurch im Gewölbe als Grenzfall die Maximaldrucklinie entstehen würde.

2) Die Pfeiler.

Auf einen Mittelpfeiler wirkt das Eigengewicht Q , die Belastung Q' und von beiden Seiten der Schub der anschließenden Gewölbe. Sind letztere einander gleich und gleich belastet, so sind auch die Kämpferdrücke K gleich und gleich gerichtet. Man hat dann für beide Gewölbe die durch Mitte der Scheitel- und Kämpferfugen verlaufenden Drucklinien einzuzichnen. Die Kämpferdrücke K schneiden sich auf der Mittellinie des Pfeilers und da die Horizontalschübe H sich gegenseitig aufheben, so ist die Mittelkraft der Kämpferdrücke eine mit der Mittellinie des Pfeilers zusammenfallende Lotrechte Kraft, deren Größe gleich der Summe der Belastungen der anschließenden Gewölbehälften ist. Der Pfeiler ist in diesem Falle Lotrecht und central belastet und die sich gleichmäßig über die Querschnittsflächen verteilenden Spannungen sind nach 1) § 18 S. 151 u. f. zu berechnen.

Fig. 254.



deren Größe gleich der Summe der Belastungen der anschließenden Gewölbehälften ist. Der Pfeiler ist in diesem Falle Lotrecht und central belastet und die sich gleichmäßig über die Querschnittsflächen verteilenden Spannungen sind nach 1) § 18 S. 151 u. f. zu berechnen.

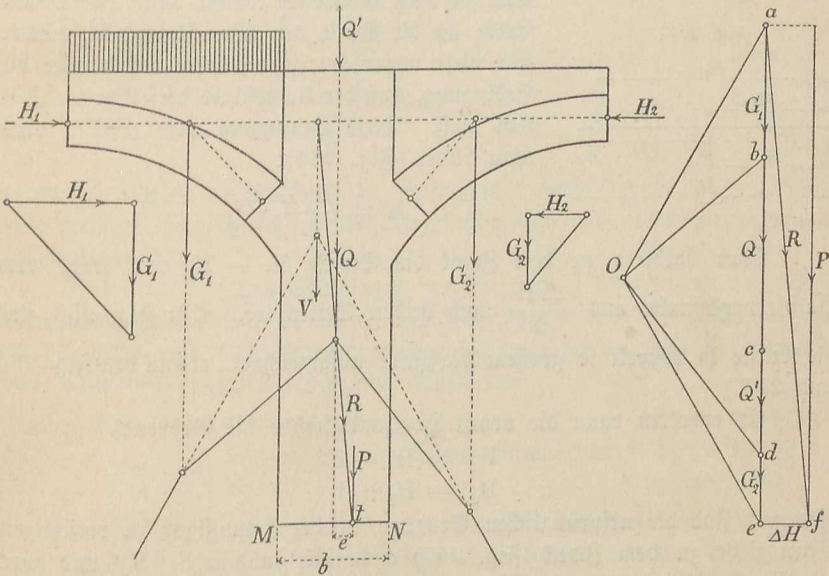
Sind die Gewölbe veränderlichen Belastungen ausgesetzt, so tritt für den Pfeiler der ungünstigste Fall ein, wenn ein Gewölbe voll belastet, das

andere unbelastet ist (Fig. 254). Ein etwaiges Rippen des Pfeilers würde um die der unbelasteten Seite zugewendete Kante N eintreten; es ist deshalb für das belastete Gewölbe die Minimaldrucklinie, für das unbelastete Gewölbe die Maximaldrucklinie anzunehmen. Diese Annahme ist aber nur so lange richtig, als die Mittelkraft R aus den Kämpferdrücken K_1, K_2 und den lotrechten Lasten Q und Q' die Bodenfuge MN auf derjenigen Hälfte schneidet, welche der unbelasteten Seite zugewendet ist. Ist dies nicht der Fall, so ist die Annahme der Minimal- bzw. Maximaldrucklinie in den Gewölben unzulässig, denn die Kante N muß immer Rippkante sein. Es treten dann in Wirklichkeit Drucklinien ein, die von der mittleren Drucklinie weniger abweichen als die Minimal- bzw. Maximaldrucklinie.

Wie dieselben schärfer bestimmt werden können, dazu möge folgende Betrachtung dienen:

Fügt man die sämtlichen lotrechten Lasten G_1, Q, Q', G_2 zu dem Kräftezuge a, b, c, d, e aneinander (Fig. 255), zieht von dem beliebig gewählten Pole O

Fig. 255.



aus die Polstrahlen Oa, Ob, \dots und zeichnet dazu in der Hauptfigur den entsprechenden Seilzug, so wird bekanntlich durch den Schnittpunkt der verlängerten ersten und letzten Seilzugseite die Lage der Mittelkraft $V (= G_1 + Q + Q' + G_2)$ bestimmt.

Auf den Pfeiler wirken die Kräfte V, H_1, H_2 , von denen die letzteren, nämlich H_1 und H_2 , sich zum Teil gegenseitig aufheben, folglich unter der Annahme, daß diese Kräfte in den Mittelpunkten der Scheitelfugen angreifen, nur deren Unterschied $H_1 - H_2$ als wirkender wagerechter Seitenschub auf-

tritt. (Die Horizontalschübe H_1 und H_2 ergeben sich in bekannter Weise durch Konstruktion der betreffenden Kräftepläne und Seilzüge.)

Die Mittelkraft R aus den Kräften H_1 H_2 V muß nun die Bodenfuge des Pfeilers in einem solchen Punkte treffen, daß die zulässige Pressung an der Pfeilerkante N nicht überschritten wird. Die Größe dieser Pressung hängt nur von der lotrechten Kraft P ($= V$) ab und wird berechnet aus der Gleichung

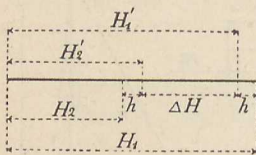
$$k = \frac{P}{100 b} \left(1 + \frac{6 e}{b} \right)$$

worin die Größen b und e die in § 18 S. 154 angegebene Bedeutung haben.

Wird für k ein passender (dem Baugrund entsprechender) Wert eingesetzt und die letzte Gleichung für e aufgelöst, so ergibt sich dadurch der Angriffspunkt t und die Richtung der Mittelkraft R . Durch Ziehung der Parallelen a f zu R erhält man dann aus dem Kräfteplan die Größe ΔH .

In Wirklichkeit greifen nun die Horizontalschübe nicht in der Mitte der Scheitelfugen an, sondern sind um ein Stück e_1 bzw. e_2 von der Fugenmitte entfernt, wodurch die Größe der Horizontalschübe sich ändert, oder, wie man sich auch ausdrücken könnte, neue Horizontalschübe an die Stelle der alten H_1 und H_2 treten. Für diese neuen Horizontalschübe besteht nur die Bedingung, daß der Unterschied derselben $= \Delta H$ sein muß. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man bildet (Fig. 256):

Fig. 256.



$$h = \frac{H_1 - H_2 - \Delta H}{2}$$

Man halbiere zu dem Zweck die Strecke $H_1 - H_2$ und trage vom Halbierungspunkte aus $\frac{\Delta H}{2}$ nach beiden Seiten ab. (In Fig. 256 sind die Kräfte in doppelt so großem Maßstabe aufgezeichnet, als in den Fig. 255 und 257.)

Es erhalten dann die neuen Horizontalschübe die Größen:

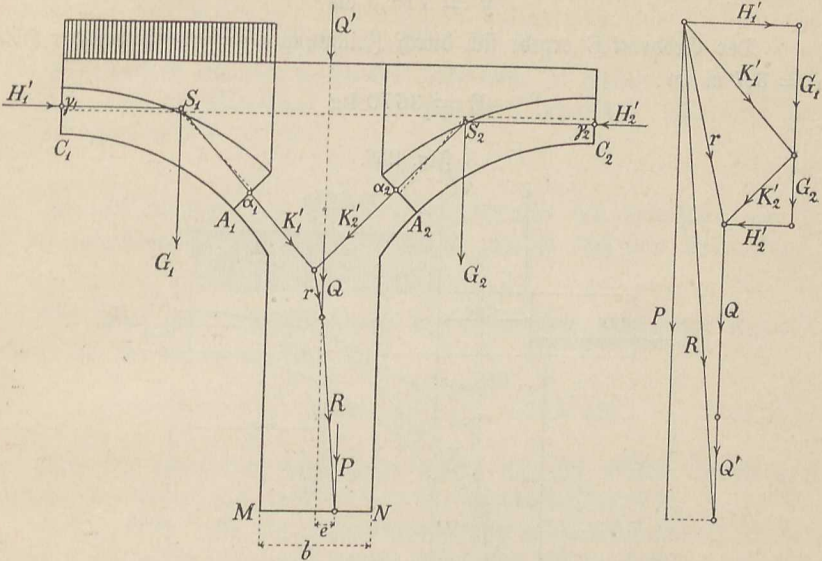
$$\begin{aligned} H_1' &= H_1 - h \\ H_2' &= H_2 + h \end{aligned}$$

Hiernach sind die ursprünglichen Seilzüge in der Hauptfigur zu berichtigen. Man ziehe zu dem Zweck (Fig. 257) $\alpha_1 S_1 \parallel K_1'$ und $\alpha_2 S_2 \parallel K_2'$ und durch die Punkte S_1 und S_2 die Wagerechten $S_1 \gamma_1$ und $S_2 \gamma_2$. Die Lage von $\alpha_1 S_1$ bzw. $\alpha_2 S_2$ muß dabei eine solche sein, daß in den Scheitel- und Kämpferfugen die Kantenpressungen innerhalb der erlaubten Grenzen bleiben.

Da Horizontalschub und Kämpferdruck für das belastete Gewölbe größer sind als für das unbelastete, so ist beim Einzeichnen der Geraden $\alpha_1 S_1$ und $\alpha_2 S_2$, damit in den 4 Fugen $A_1 C_1 A_2 C_2$ möglichst gleiche Kantenpressungen entstehen, die Entfernung des Punktes α_1 von der Mitte der Fuge A_1 etwas kleiner anzunehmen, als die Entfernung des Punktes α_2 von der Mitte der Fuge A_2 .

Streng genommen müßte noch eine kleine Berichtigung angebracht werden, denn die Horizontalschübe H_1' und H_2' liegen nicht mehr auf der Geraden,

Fig. 257.



welche die Mitten der Scheitelfugen miteinander verbindet; doch unterbleibt diese meistens, da die schließlichen Ergebnisse doch nur unbedeutend dadurch beeinflusst werden.

Beispiel 1. Das Widerlager des unter 2) § 22 (Fig. 230 S. 201) untersuchten Gewölbes habe die in Fig. 258 angegebenen Abmessungen. Es soll die in D auftretende Rantenpressung bestimmt werden und zwar einmal ohne, dann mit Berücksichtigung des Erddruckes.

Gewicht eines cbm Gewölbemauerwerk:	$\gamma_1 = 1600$ kg
" " " Widerlager- und Fundamentmauerwerk:	$\gamma_2 = 2000$ "
" " " Erde:	$\gamma' = 1800$ "

Die Belastung Q' besteht in dem Gewichte des auf dem Widerlager ruhenden Mauerwerkes der oberen Etagen (Fensteröffnungen sind dabei abzuziehen), ferner aus der durch die Balken übertragenen Fußbodenbelastung und aus der Dachlast und sei ermittelt zu:

$$Q' = 12800 \text{ kg}$$

Der Angriffspunkt von Q' liege in der Mittellinie der 0,75 m breiten Mauer.

Das Eigengewicht Q der Widerlagsmauer einschließlich des Fundamentes ist:

$$Q = (0,8 \cdot 0,55 + 0,95 \cdot 3,15 + 1,15 \cdot 0,4) \cdot 2000 = 7785 \text{ kg}$$

Nach Seite 201 ist das Gewicht der belasteten Gewölbekälfte:

$$G = 4733 \text{ kg}$$

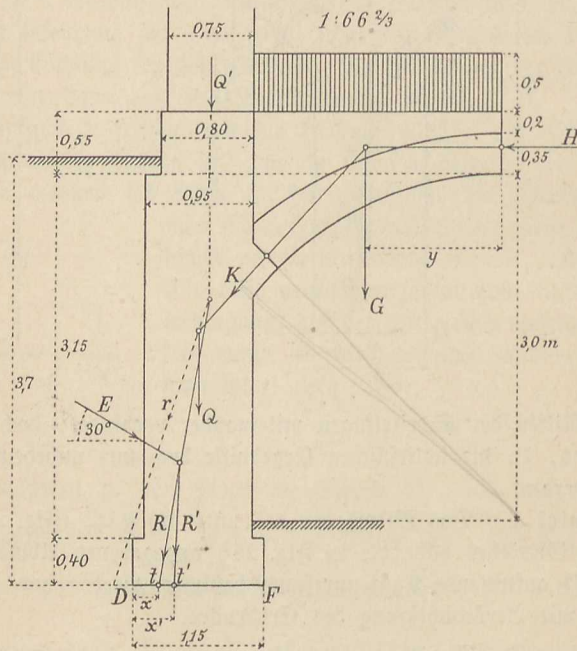
und die wagerechte Entfernung desselben von der Mittelachse des Gewölbes:

$$y = 119,5 \text{ cm}$$

Der Erddruck E ergibt sich durch Zeichnung ($\varphi = 30^\circ$) bei der Höhe $h = 3,7 \text{ m}$ zu:

$$E = 3670 \text{ kg}$$

Fig. 258.



Nimmt man, der Minimaldrucklinie entsprechend, den Angriffspunkt des Horizontalschubes H im oberen Kernpunkte der Scheitelfuge, den Angriffspunkt des Kämpferdruckes K im unteren Kernpunkte der Kämpferfuge an, so erhält man durch Messung aus dem Kräfteplane:

$$H = 4400 \text{ kg}$$

$$K = 6530 \text{ „}$$

Die Mittelkraft r von K und Q trifft die Bodenfuge DF nicht mehr, sondern geht außerhalb des Punktes D vorbei, es würde also das Widerlager ohne die Belastung Q' nicht standfester sein. Die Mittelkraft R aus r und Q' (oder aus KQ') schneidet die Bodenfuge DF in einem Punkte t , dessen Entfernung von der Kante D gemessen wird zu:

$$x = 24 \text{ cm}$$

Da die auf die Fuge DF wirkende lotrechte Kraft die Größe hat:

$$P = G + Q + Q' = 4733 + 7785 + 12800 = 25318 \text{ kg}$$

so entsteht in D (ohne Berücksichtigung des Erddruckes) die Rantenpressung:

$$k = \frac{2P}{300 \cdot x} = \frac{2 \cdot 25318}{300 \cdot 24} = 7 \text{ kg}$$

Setzt man R mit dem Erddruck E zusammen, so erhält man die Mittelkraft R', welche die Bodenfuge DF im Punkte t' schneidet. Es ergibt sich die Entfernung t'D = x' zu:

$$x' = 38 \text{ cm}$$

Die auf die Fuge DF wirkende Kraft P' setzt sich zusammen aus P und der lotrechten Seitenkraft des Erddruckes und ist nach dem Kräfteplane:

$$P' = 27360 \text{ kg}$$

Die in D (mit Berücksichtigung des Erddruckes) entstehende Rantenpressung hat danach die Größe:

$$k' = \frac{2P'}{300 \cdot x'} = \frac{2 \cdot 27360}{300 \cdot 38} = 4,8 \text{ kg}$$

Nach den gefundenen Ergebnissen würde bei den obigen Belastungsannahmen das Widerlager besser etwas stärker auszuführen sein.

Beispiel 2. Es soll unter Beibehaltung desselben Gewölbes wie in Beispiel 1 der Pfeiler Fig. 259 statisch untersucht und die Pressung an der Rippkante N bestimmt werden.

Gewicht eines ehm Gewölbemauerwerk: $\gamma_1 = 1600 \text{ kg}$

" " " Pfeilmauerwerk: $\gamma_2 = 2000 \text{ "}$

Die auf dem Pfeiler ruhende Belastung Q' betrage:

$$Q' = 7360 \text{ kg}$$

Das Eigengewicht des Pfeilers ist nach den in Fig. 259 eingeschriebenen Abmessungen:

$$Q = (0,6 \cdot 3,7 + 0,8 \cdot 0,4) \cdot 2000 = 5080 \text{ kg}$$

Nach Seite 201 beträgt:

das Gewicht der belasteten Gewölbhälfte: $G_1 = 4733 \text{ kg}$

" " " unbelasteten " $G_2 = 2985 \text{ "}$

Die Entfernungen dieser Gewichte von der Mittelachse des Gewölbes sind:

$$y_1 = 119,5 \text{ cm}$$

$$y_2 = 128,5 \text{ "}$$

Zeichnet man für die belastete Gewölbhälfte die Minimal-, für die unbelastete Gewölbhälfte die Maximaldrucklinie ein und konstruiert danach den Kräfteplan, so findet man:

$$H_1 = 4320 \text{ kg}$$

$$K_1 = 6400 \text{ kg}$$

$$H_2 = 3600 \text{ "}$$

$$K_2 = 4640 \text{ "}$$

Um bei dem Entwurf eines Brückengewölbes einigen Anhalt über die anzunehmenden Stärken zu haben, sind verschiedene einfache Erfahrungsformeln aufgestellt, die unter gewöhnlichen Umständen mehr oder weniger brauchbare Ergebnisse liefern.

Es können danach die vorläufigen Stärken berechnet werden, die auf Grund einer später stets vorzunehmenden statischen Untersuchung dann erforderlichenfalls etwas abzuändern sind.

Baudirektor von Hänel nimmt bei Ausführung in Haustein und einer Ueberschüttung bis zu 1 m für Flachbogenbrücken mit $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$ Stich die Scheitelstärke d_0 eines Brückengewölbes von l m Spannweite an zu:

$$d_0 = m \sqrt{l} + 0,1$$

wobei zu setzen ist:

$$m = 0,2 \text{ für Straßenbrücken}$$

$$m = 0,25 \text{ „ Eisenbahnbrücken}$$

Danach ist folgende Tabelle berechnet:

Spannweite l in Meter	Scheitelstärke d_0 in Meter	
	Straßenbrücken	Eisenbahnbrücken
2 m	0,38 m	0,45 m
4 "	0,50 "	0,60 "
6 "	0,59 "	0,71 "
8 "	0,67 "	0,81 "
10 "	0,73 "	0,89 "
15 "	0,87 "	1,07 "
20 "	0,99 "	1,22 "
25 "	1,10 "	1,35 "
30 "	1,20 "	1,47 "
35 "	1,28 "	1,58 "
40 "	1,36 "	1,68 "
45 "	1,44 "	1,78 "
50 "	1,51 "	1,87 "
55 "	1,58 "	1,95 "
60 "	1,65 "	2,04 "

Die Hänel'sche Formel liefert bei kleinen Spannweiten reichlich große Werte, während bei größeren Spannweiten die nach der Formel berechneten Scheitelstärken mit denen vieler ausgeführter neuerer Bauten gut übereinstimmen.

Die Widerlagerstärke (Fig. 260) kann vorläufig berechnet werden nach der Formel¹⁾:

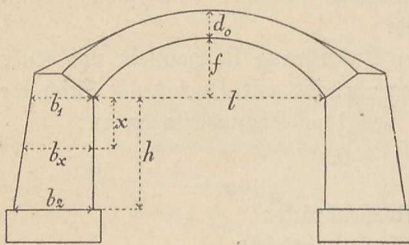
$$b_x = \sqrt{l} \left\{ 0,6 + n \left(\frac{l}{f} - 2 \right) + 0,04 x \right\}$$

¹⁾ Vergl. „Annales des Ponts et Chaussées“ 1855. I. S. 256.

worin zu setzen ist:

- $n = 0,1$ für Stichbögen
 $n = 0,05$ für Korbbögen
 $n = \text{Null}$ für Halbkreisbögen

Fig. 260.



Für $x = \text{Null}$ wird:

$$b_1 = \sqrt{l} \left\{ 0,6 + n \left(\frac{l}{f} - 2 \right) \right\}$$

Für $x = h$ wird:

$$b_2 = \sqrt{l} \left\{ 0,6 + n \left(\frac{l}{f} - 2 \right) + 0,04 h \right\}$$

3. B. erhält man für einen Stichbogen von $l = 10$ m Spannweite, $f = 2$ m Pfeilhöhe und $h = 3$ m Höhe des Widerlagers die Stärken:

$$b_1 = \sqrt{10} \left\{ 0,6 + 0,1 \left(\frac{10}{2} - 2 \right) \right\} = 2,85 \text{ m}$$

$$b_2 = \sqrt{10} \left\{ 0,6 + 0,1 \left(\frac{10}{2} - 2 \right) + 0,04 \cdot 3 \right\} = 3,23 \text{ m}$$

A. v. Raven¹⁾ gibt für Eisenbahnbrücken und Straßenbrücken unter Voraussetzung von Quadermauerwerk und einer Ueberschüttung bis zu 1 m Höhe für die Gewölbestärke im Scheitel die Formel:

$$d_0 = 0,25 + l \left(0,025 + 0,0034 \frac{l}{f} \right)$$

worin: l die Spannweite (Richtweite zwischen den Widerlagern) in m
 f die Pfeilhöhe der inneren Bogenlinie in m bedeutet.

Nach dieser Formel ist die folgende Tabelle berechnet:

Spannweite l in Meter	Scheitelstärke d_0 in Meter			
	$l:f=2$ (Halbkreis)	$\frac{l}{f}=4$	$\frac{l}{f}=6$	$\frac{l}{f}=8$
2 m	0,31 m	0,33 m	0,34 m	0,35 m
4 "	0,38 "	0,40 "	0,43 "	0,46 "
6 "	0,44 "	0,48 "	0,52 "	0,56 "
8 "	0,50 "	0,56 "	0,61 "	0,67 "
10 "	0,57 "	0,64 "	0,70 "	0,77 "
15 "	0,73 "	0,83 "	0,93 "	1,03 "
20 "	0,89 "	1,02 "	1,16 "	1,29 "
25 "	1,05 "	1,22 "	1,39 "	1,56 "
30 "	1,20 "	1,41 "	1,61 "	1,82 "

¹⁾ A. v. Raven, Kurze Anleitung zum Projektieren von Eisenbahnen. Aachen 1878.

Für größere Spannweiten als 30 m ist die v. Raven'sche Formel nicht mehr recht geeignet; es würden sich danach zu bedeutende und mit praktischen Ausführungen nicht mehr übereinstimmende Scheitelstärken herausstellen.

Bei Ueberschüttungen von der Höhe s (> 1 m) über dem äußeren Gewölbeseitel und für eine Spannweite des (halbkreisförmig vorausgesetzten) Gewölbes bis zu 10 m, ist nach v. Raven die oben angegebene Scheitelstärke d_0 zu multiplizieren mit einem Zahlwert η , und zwar ist:

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{s-1}{4,5}} \text{ für Eisenbahnbrücken}$$

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{s-1}{7}} \text{ „ Straßenbrücken}$$

Wird das Gewölbe in Ziegelmauerwerk mit Cementmörtel ausgeführt, so gibt v. Raven die Scheitelstärke d_0' an zu:

$$d_0' = d_0 \left(\frac{3}{2} - 0,5 d_0 \right) \text{ für Klinker}$$

$$d_0' = d_0 \left(\frac{5}{3} - 0,5 d_0 \right) \text{ für gute Ziegelsteine}$$

die bei Ueberschüttungen von mehr als 1 m noch mit dem oben angegebenen Zahlenwerte η zu multiplizieren sind.

Die angeführten Formeln von v. Hänel und v. Raven sind wegen ihrer Einfachheit bequem und liefern für mittlere Verhältnisse im allgemeinen auch brauchbare Werte, die jedoch immer nur als vorläufige gelten können, und unter gewissen Umständen nicht unbeträchtlich abzuändern sind. Ueberhaupt ist es nicht möglich, eine einfache Formel aufzustellen von solcher Allgemeinheit, daß sie für alle vorkommenden Fälle gleich passend bleibt. Es sind zwar Formeln aufgestellt worden, in denen auf die verschiedenen möglichen Verhältnisse Rücksicht genommen ist¹⁾, doch können solche naturgemäß nicht so einfach gestaltet sein, wie es für eine schnelle praktische Anwendung oft wünschenswert ist.

§ 27.

Belastung der Lehrgerüste durch die Gewölbe.

Das Aufmauern der Gewölbe beginnt gleichzeitig an den Kämpfern und schreitet allmählich bis zu dem Scheitel vor, wo dann die Schlußsteinschicht sorgfältig eingepaßt wird.

Solange ein Gewölbe noch nicht geschlossen ist, muß es unterstützt werden durch das Lehrgerüst. Dieses wird berechnet nach dem größten Druck,

¹⁾ Vergl. G. Tolkmitt, Das Entwerfen und die Berechnung der Brückengewölbe. Zeitschr. f. Bauwesen 1885, S. 265 und H. Müller-Breslau, Elasticitätstheorie der nach der Stützlinie geformten Tonnengewölbe. Zeitschr. f. Bauwesen 1886, S. 274.

den es an jeder Stelle erfahren kann, und welcher stattfindet, wenn die drückende Steinschicht gerade die letzte ist. Durch Versetzen einer weiteren Schicht wird der Druck der vorhergehenden auf das Lehrgerüst verringert.

Wir betrachten (Fig. 261) eine letzte (oberste) Steinschicht, deren Fugenrichtung den Winkel α mit der Wagerechten einschließen möge, und zerlegen das Gewicht G derselben in die Seitenkräfte $G \sin \alpha$ in der Richtung der Fuge, und $G \cos \alpha$ rechtwinklig dazu. Unter der Einwirkung der Kraft $G \sin \alpha$, welcher nur die Reibung $fG \cos \alpha$ entgegenwirkt, würde bei genügend großem Winkel α ohne weitere Unterstützung ein Herabgleiten der Steinschicht stattfinden. Damit die Schicht sich im Gleichgewicht befindet, ist eine Kraft R , entgegengesetzt $G \sin \alpha$, nötig von der Größe:

$$R = G (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Diese Kraft R ist demnach der Druck, welcher von der jeweils obersten Steinschicht auf das unterstützende Lehrgerüst ausgeübt wird.

Durch Einsetzung von:

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

erhält man:

$$R = G \left(\sin \alpha - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha \right) = G \left(\frac{\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)$$

oder:

$$R = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Bedeutet: d die mittlere Breite der Steinschicht in m
 γ das Gewicht von 1 cbm Gewölbemauerwerk

so ist für 1 m Tiefe: $G = \gamma d$, folglich:

$$R = \gamma d \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Die Druckhöhe in der Fugenrichtung hat danach die Größe:

$$p = d \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Dieser Ausdruck läßt sich leicht geometrisch darstellen. Zieht man nämlich (Fig. 262) CA_1 unter dem Reibungswinkel φ gegen die Wagerechte, ferner durch a_1 die $a_1 b \parallel A_1 C$ bis zum Schnitt b mit der durch a gelegten Lotrechten, so ist in dem Dreieck $aa_1 b$ nach dem Sinussatz:

$$\frac{ab}{aa_1} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Fig. 261.

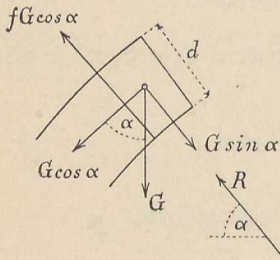
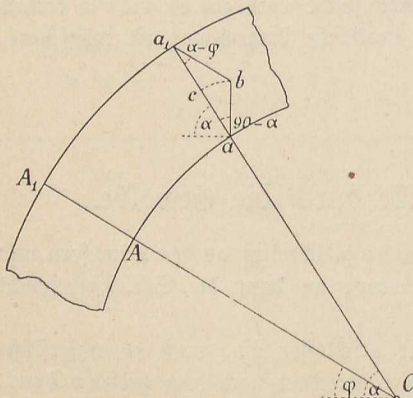


Fig. 262.



oder da $aa_1 = d$ ist:

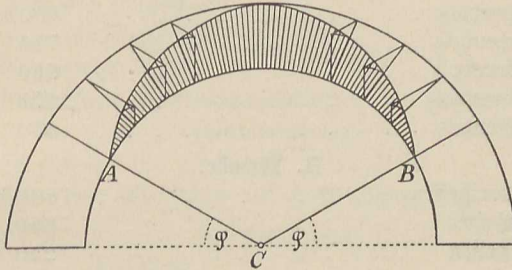
$$ab = d \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

Beschreibt man aus a mit ab einen Kreisbogen bis zum Schnitt c mit der Fuge aa_1 , so ist:

$$ac = p$$

Durch Wiederholung des Verfahrens für beliebige andere Fugen und Verbindung der äußeren Endpunkte der radialen Druckhöhen p erhält man die ganze Belastungsfläche (Fig. 263).

Fig. 263.



Für $\alpha = \varphi$ wird $p = \text{Null}$ (also auch $R = \text{Null}$), d. h. von den Punkten A und B an abwärts braucht das Gewölbe durch ein Lehrgerüst nicht weiter unterstützt zu werden.

Der Reibungswinkel φ von Stein auf Stein ist 20° bis 30° anzunehmen. Ein üblicher Wert für den Reibungskoeffizient f ist:

$$f = \text{tg } \varphi = 0,5$$

Dem entspricht:

$$\varphi = 26^\circ 40'$$

Anhang.

Tabellen über Eigengewicht, Belastung und Beanspruchung von Bauteilen.

1) Eigengewicht der Baustoffe in kg für 1 cbm.

A. Holz (lufttrocken).

Eichenholz	800 kg
Buchenholz	750 "
Kiefernholz	650 "
Tannenholz	600 "
Fichtenholz	650 "

B. Metalle.

Schweißeisen	7800 kg
Flußeisen	7850 "
Gusseisen	7250 "
Kupfer	8900 "
Zink	7100 "
Zinn	7300 "
Blei	11400 "
Messing	8500 "

C. Mauerwerk.

aus gewöhnlichen Ziegeln	1600 kg
aus porigen oder Lochziegeln	1200 "
aus Klinkern	1800 "
aus Schwemmsteinen	850 "
Bruchsteinmauerwerk	2000 "
Sandsteinquader	2400 "
Kalksteinquader	2600 "
Granit	2800 "
Basalt	3200 "

D. Verschiedene Stoffe.

Sand und Kies	1600 kg
Dammerde und Lehm	1600 "
Kalkmörtel	1700 "
Cementmörtel	1800 "
Asphalt (rein)	1100 "
Gußasphalt mit Kiefelschotter	1600 "
Stampf-Asphalt	1800 "
Gips	1150 "
Fensterglas	2650 "
Mauerchutt	1400 "

2) Eigengewicht der Dächer.

A. Eigengewicht eiserner Binder für 1 qm der Grundrißfläche.

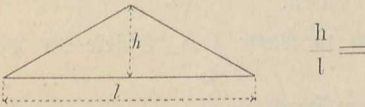
Einfache Borddächer und Pultdächer bis 10 m Spannweite . . .	10—15 kg
Kleinere Satteldächer und Walmdächer	15—20 "
Größere französische und englische Dächer	20—30 "

B. Eigengewicht der Eindeckung einschließlich Lattung oder Schalung und einschließlich der Sparren¹⁾.

a) Für 1 qm der schrägen Dachfläche.

Holzdächer	}	Einfaches Ziegeldach	102 kg
		Doppeldach und Kronziegeldach	127 "
		Schieferdach	76 "
		Asphaltdach mit Lehmunterlage	75 "
		" " Fliesenunterlage	102 "
		Teerpappe	30 "
Zink- oder Eisenblech auf Holzschalung	41 "		
Metaldächer	}	Schiefer auf Winkleisen	50 kg
		Ebenes Eisenblech " "	26 "
		Eisenwellblech " "	22 "
		Zinkwellblech " "	24 "
		Glas " Sprosseneisen	30 "

b) für 1 qm der Grundrißfläche.

											
		1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	
Holzdächer	}	Einfaches Ziegeldach	144	123	114	—	—	—	—	—	—
		Doppeldach und Kronziegeldach	180	153	142	—	—	—	—	—	—
		Schieferdach	107	91	85	82	80	—	—	—	—
		Asphaltdach mit Lehmunterlage	106	90	84	81	79	78	77	77	77
		" " Fliesenunterlage	144	123	114	110	108	106	105	104	104
		Teerpappe	42	36	34	32	32	31	31	31	31
Zink-od. Eisenblech auf Holzschalung	58	49	46	44	43	43	42	42	42		
Metaldächer	}	Schiefer auf Winkleisen	71	60	56	54	53	52	—	—	—
		Ebenes Eisenblech " "	37	31	29	28	27	27	27	27	27
		Eisenwellblech " "	31	26	25	24	23	23	23	23	22
		Zinkwellblech " "	34	29	27	26	25	25	25	25	24
		Glas auf Sprosseneisen	42	36	34	32	32	—	—	—	—

¹⁾ Nach Heizerling, Die angreifenden und widerstehenden Kräfte.

Asphaltfilz auf Schalung	$\left(\frac{h}{l} = \text{ca. } \frac{1}{12}\right)$	40 kg
Kupferblech " "	$\left(\frac{h}{l} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right)$	55—85 "
Bleiblech " "	$\left(\frac{h}{l} = \text{ca. } \frac{1}{12}\right)$	65—100 "
Holzement " "	mit Kiesdecke $\left(\frac{h}{l} = \frac{1}{20} - \frac{1}{40}\right)$		180 "

3) Belastung der Zwischendecken in kg für 1 qm.

A. Verkehrsast der Zwischendecken.

Für gewöhnliche Wohnräume	250 kg
" Tanz- und Versammlungssäle	400 "
" Heuböden	450 "
" Fruchtböden (Kornböden)	500 "
" Salzspeicher	600 "
" Kaufmannsspeicher ¹⁾	760—1200 "
" Decken unter Durchfahrten oder befahrbaren Höfen	800 "
Belastung durch Menschengedränge	400 "

B. Eigengewichte der Zwischendecken

nach den Vorschriften der Bauabteilung des preussischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vom 16. Mai 1890²⁾.

a) Holzdecken.

Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte 1 m, Stärke der Balken 24/26 cm.

Balkenlage nur mit Fußboden (3,5 cm stark)	70 kg
Balkenlage mit Stülpdecke (3 cm stark) darüber, sowie Lehmschlag (10 cm stark)	210 "
Balkenlage mit gestrecktem Windelboden (Lehmschicht 10 cm stark)	230 "
Balkenlage mit halbem Windelboden, Lehmfüllung bis Unterkante Fußboden (11 cm stark), sowie Fußboden (3,5 cm stark)	220 "
Balkenlage wie vorher, aber außerdem mit Deckenschalung (2 cm stark) gerohrt und gepußt	250 "
Balkenlage mit halbem Windelboden, Lehmfüllung (11 cm stark) und mit Gips- oder Lehmestrich (5 bis 7 cm stark)	310 "
Balkenlage wie vorher, aber außerdem mit Deckenschalung (2 cm stark), gerohrt und gepußt	340 "

¹⁾ In Hamburg wurde für die großen Lagerhäuser 1500 kg gerechnet.

²⁾ Die für Karlsruhe geltenden Zahlenwerte findet man in der „Bauordnung für die Residenzstadt Karlsruhe“.

Balkenlage mit ganzem Bindelboden, auch unterhalb mit Lehm-
 besatz bis Unterkante Balken, sowie Fußboden (3,5 cm stark) 360 kg

b) Gewölbte Decken.

Kappenstich = $\frac{1}{8}$. Füllung mit Sand oder Koksasche einschließlich
 Hintermauerung bis Scheitelhöhe. Lagerhölzer des Fußbodens 10/10 cm,
 0,8 m von Mitte zu Mitte, Dielen 3,5 cm stark. Die Gewichte verstehen
 sich ausschließlich des Gewichtes der eisernen Träger.

Preußische Kappe bis 2 m Spannweite, $\frac{1}{2}$ St. stark aus Voll- steinen	370 kg
Desgl. aus porigen oder Lochsteinen	310 "
Desgl. aus Schwemmsteinen	260 "
Preußische Kappe, 2 bis 3 m Spannweite, $\frac{1}{2}$ St. stark aus Voll- steinen	440 "
Desgl. aus porigen oder Lochsteinen	380 "
Desgl. aus Schwemmsteinen	330 "
Kappe aus Cement-Kiesel-Beton bis 1,5 m Spannweite.	370 "

Bei Füllung des Raumes zwischen den Lagerhölzern erhöht sich die
 Belastung der gewölbten Decken um 140 kg/qm.

4) Belastung eiserner Balkenbrücken.

A. Bleibende Belastung.

Bedeutet b die Brückenbreite in m, l die Stützweite in m, so ist nach
 Scharowsky das Eigengewicht kleiner Fußwegbrücken in kg für das lfd. m
 Brücke einschließlich der Geländer

a) bei leichten Fußwegbrücken mit Bohlenbelag:

$$p = 120 b + 1,5 l^2 + 60 \text{ kg}$$

b) bei schweren Fußwegbrücken mit Beschotterung:

$$p = 350 b + 1,75 l^2 + 60 \text{ kg}$$

Für Straßenbrücken von 7,5 m Breite ist nach Laifke und Schübler
 für das lfd. m Brücke

a) bei Anwendung einer 0,2 m dicken Beschotterung:

$$p = 42 l + 3600 \text{ kg}$$

b) bei Anwendung von doppelter eichener Bedielung:

$$p = 28 l + 1300 \text{ kg}$$

Bei Eisenbahnbrücken ist nach Winkler für das lfd. m Geleis:

$$p = 28 l + 750 \text{ bis } 30 l + 800 \text{ kg}$$

B. Veränderliche Belastungen.

Für kleine Fußwegbrücken rechnet man als Verkehrslast ein Menschen-
 gedränge von 400 kg auf 1 qm.

Straßenbrücken sind belastet anzunehmen durch einen zweiachsigen Wagen mit je 10 t Achsdruck und 4,5 m Radstand (Fig. 264), nötigenfalls durch eine Dampfwalze mit 10 t für das Vorderrad, 13 t für die Hinterräder zusammen (Fig. 265). Der übrige Teil der Brückenbahn wird belastet

Fig. 264.

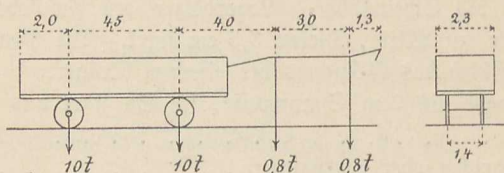


Fig. 265.

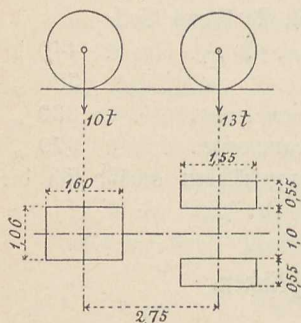
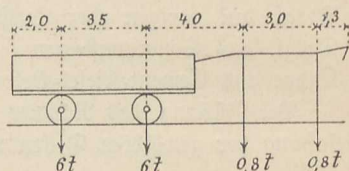


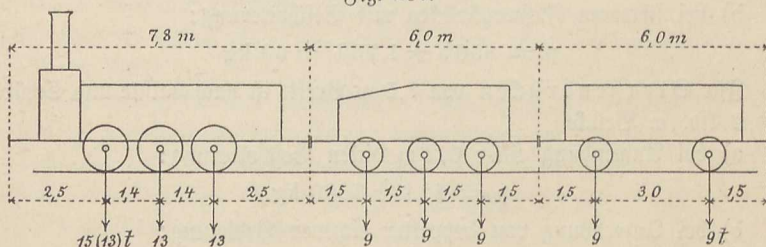
Fig. 266.



gedacht durch leichtere zweiachsige Wagen mit je 6 t Achsdruck und 3,5 m Radstand (Fig. 266), oder durch Menschengedränge von 400 kg auf 1 qm.

Bei Eisenbahnbrücken besteht die Verkehrsbelastung aus einem von zwei oder drei Lokomotiven geführten Güterzuge. Es empfiehlt sich dabei, die Achsbelastungen und Radstände als runde Zahlenwerte anzunehmen¹⁾ wie

Fig. 267.



z. B. in Fig. 267 nach Müller-Breslau. Andere Belastungsannahmen zeigen die Fig. 268 (für preussische Staatsbahnen) und 269 (für die Reichseisenbahnen)²⁾.

¹⁾ Bergl. Platt, Die Brücken der Düsseldorfer Bahnhofsanlagen. Zeitschr. f. Bauwesen 1894, S. 265 und 266.

²⁾ Eine vollständige Zusammenstellung der in den verschiedenen Staaten vorgeschriebenen Belastungsannahmen gibt D. Hauger in der Allgemeinen Bauzeitung 1896, S. 110.

Nach dem Erlass des preussischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vom September 1895¹⁾ ist bei der Berechnung der eisernen Eisenbahnbrücken

Fig. 268.

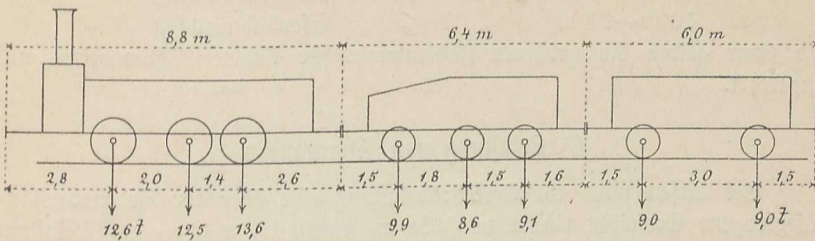
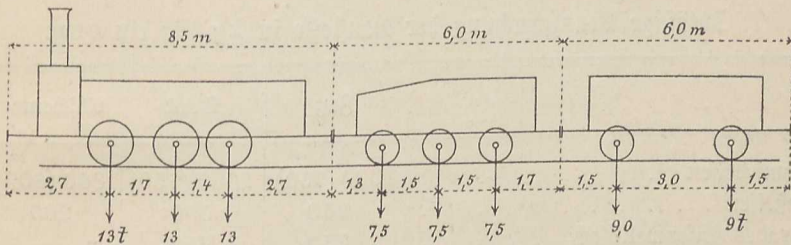


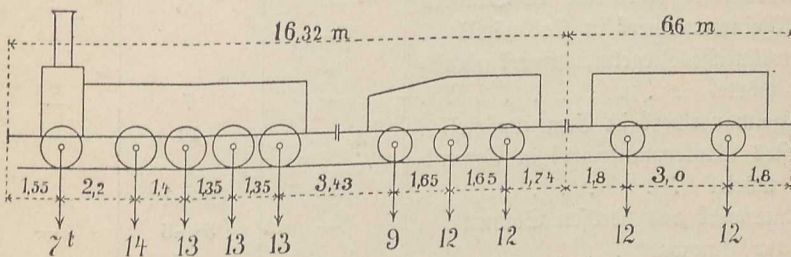
Fig. 269.



ein Zug aus zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten Anzahl einseitig angehängter Güterwagen zu Grunde zu legen.

Für Lokomotiven, Tender und Güterwagen sind dabei die in Fig. 270 angegebenen Radstände und Achsbelastungen maßgebend.

Fig. 270.



Bei der Berechnung kleinster Brücken (Spannweite < 3,3 m), sowie der Quer- und Schwellenträger sind entweder eine einzelne Achse mit 16 t Belastung, oder zwei Achsen mit je 14 t Belastung und 1,4 m Radstand zu Grunde zu legen, im Falle dadurch höhere Beanspruchungen hervorgerufen werden, als durch die in Fig. 270 skizzierte Lokomotive.

1) Centralbl. d. Bauverw. 1895 S. 485 u. f.

5) Belastung gewölbter Steinbrücken.

Die Verkehrsbelastung beträgt:

400—600 kg für 1 qm bei Straßenbrücken

1000—1500 " " 1 " " Eisenbahnbrücken

und zwar gelten die größeren Zahlenwerte für kleinere Spannweiten und umgekehrt.

6) Belastung von Ufermauern.

Bei diesen wird als Verkehrsbelastung eine über der Bodenoberfläche aufgetragene Erdschicht von 1 m Höhe angenommen, welche einer Belastung von etwa 1600 kg/qm entsprechen würde.

7) Zulässige Beanspruchung der Baustoffe in kg für ein qcm.

	Zug	Druck	Abseherung
Schmiedeseisen	1000 (750)	1000 (750)	800 (600)
Gusseisen	250	500	200
Gerades Eisenwellblech	750	750	—
Gewölbtes Eisenwellblech	500	500	—
Eisendraht	1200	—	—
Eichen- und Buchenholz	100	80	—
Kiefernholz	100	60	—
Granit	—	45	—
Sandstein je nach der Härte : . . .	—	15—30	—
Rüdersdorfer Kalksteine in Quadern	—	25	—
Kalksteinmauerwerk in Kalkmörtel .	—	5	—
Gewöhnliches Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel	—	7	—
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel .	—	11	—
Bestes Klinkermauerwerk in Cementmörtel	—	12—14	—
Mauerwerk aus porösen Steinen . .	—	3—6	—
Guter Baugrund	—	2,5	—

Die eingeklammerten Werte für Schmiedeseisen gelten für solche Bauteile, welche bedeutenden Erschütterungen oder starken Belastungswechseln ausgesetzt sind.

