

Przemysław Orłowski

**Zastosowania notacji
operatorowej i uproszczonych
metod częstotliwościowych
do niestacjonarnych układów
dyskretnych w zagadnieniach
analizy systemów i sterowania**

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE

PRZEMYSŁAW ORŁOWSKI

**ZASTOSOWANIA NOTACJI OPERATOROWEJ I UPROSZCZONYCH
METOD CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH DO NIESTACJONARNYCH
UKŁADÓW DYSKRETNÝCH W ZAGADNIENIACH ANALIZY
SYSTEMÓW I STEROWANIA**

SZCZECIN 2011

Recenzenci

KRZYSZTOF LATAWIEC

ZBIGNIEW EMIRSAJŁOW

Opracowanie redakcyjne

ANNA MARIAŃSKA

WYDANO ZA ZGODĄ

REKTORA ZACHODNIOPOMORSKIEGO UNIWERSYTETU TECHNOLOGICZNEGO W SZCZECINIE

ISBN 978-83-7663-099-1

Wydawnictwo Uczelniane Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie

70-311 Szczecin, al. Piastów 50, tel. 91 449 47 60, e-mail: wydawnictwo@zut.edu.pl

Druk: PPH „Zapól” Dmochowski, Sobczyk, Sp.j., 71-062 Szczecin, al. Piastów 42, tel. 91 434 10 21

e-mail: zarzad@zapol.com.pl

SPIS TREŚCI

WYKAZ OZNACZEŃ I AKRONIMÓW	7
Oznaczenia	7
Akronimy	11
WPROWADZENIE	13
1. NIESTACJONARNY MODEL UKŁADU DYSKRETNEGO	23
1.1. Operatory wektorowe	26
1.2. Operator przejścia układu	28
1.3. Podstawowe własności operatora przejścia	30
1.3.1. Układ przyczynowy	30
1.3.2. Układ antyprzyczynowy	31
1.3.3. Układ nieprzyczynowy	32
1.3.4. Układ niestacjonarny statyczny	32
1.4. Operator przesunięcia czasowego	33
1.5. Operatory diagonalne	34
1.6. Dyskretne operatory ewolucyjne	35
1.7. Klasyfikacja układów niestacjonarnych	37
1.8. Porównanie notacji operatorowej i opisu w przestrzeni stanu	39
1.9. Stabilność układów niestacjonarnych	41
1.9.1. Stabilność krótkoczasowa	43
1.9.2. Stabilność układów niestacjonarnych ze sprzężeniem zwrotnym	44
Podsumowanie	45
2. ANALIZA UKŁADÓW NIESTACJONARNYCH	47
2.1. Estymacja adaptacyjna systemów niestacjonarnych	49
2.1.1. Metoda najmniejszych kwadratów	49
2.1.2. Estymacja minimalno-średniokwadratowa	53
Wnioski	55
2.2. Metody analizy sygnałów częstotliwościowe i czasowo-częstotliwościowe	56
2.2.1. Dyskretna transformacja Fouriera	57
2.2.2. Krótkoczasowa transformacja Fouriera	59
2.2.3. Transformacja Gabora	60
2.2.4. Transformacja falkowa	60
2.2.5. Transformacja S	61

2.2.6.	Metoda Prony'ego	62
	Wnioski	63
2.3.	Transformacja czasowo-częstotliwościowa układu	63
2.3.1.	Dyskretna dwuwymiarowa funkcja przejścia	64
2.3.2.	Dyskretna dwuwymiarowa funkcja rozrzutu	66
2.3.3.	Macierz transformacji układu dyskretnego	67
2.3.4.	Uśredniona funkcja przejścia	71
2.4.	Transformacja SVD-DFT	72
2.4.1.	Rozkład według wartości osobliwych	72
2.4.2.	Wzmocnienie energetyczne układu	75
2.4.3.	Transformacja częstotliwościowa operatora przejścia układu niestacjonarnego	77
2.4.4.	Związek gęstości widmowej mocy z transformatą wektorów szczególnych operatora przejścia układu	78
2.4.5.	Krótkoczasowe, przybliżone charakterystyki częstotliwościowe	81
2.5.	Przykłady numeryczne	83
2.5.1.	Układ o zmiennej strukturze	83
2.5.2.	Filtr cyfrowy o zmiennych w czasie współczynnikach	88
2.5.3.	Uproszczona analiza układu oscylacyjnego o parametrach zależnych od stanu	92
2.5.4.	Analiza układu oscylacyjnego o zmiennych w czasie parametrach w ruchomym horyzoncie czasowym	96
	Podsumowanie	102
3.	STOPIEŃ NIESTACJONARNOŚCI UKŁADU	105
3.1.	Funkcja rozrzutu	107
3.2.	Rozproszenie widm wektorów własnych układu	109
3.2.1.	Ważone tłumienie wstęgi głównej (TWG)	110
3.2.2.	Ważona względna odległość odpowiadających sobie widm (WOW)	111
3.2.3.	Wskaźnik wzajemnego odstepu (WVO)	112
3.2.4.	Przykład numeryczny	113
3.3.	Wskaźnik efektów sieciowych – przykład zastosowań	114
3.3.1.	Wskaźnik degradacji układu	117
3.3.2.	Przykład numeryczny	118
	Podsumowanie	122
4.	ANALIZA UKŁADÓW NIEPEWNYCH	123
4.1.	Metody wprowadzania zaburzeń do układu	125
4.2.	Model układu niestacjonarnego z zaburzeniem addytywnym	127
4.3.	Metody ograniczania zaburzeń macierzowych	130
4.3.1.	Zaburzenie z ograniczoną normą	131
4.3.2.	Zaburzenie ograniczone strukturalnie	131
4.3.3.	Zaburzenie ograniczone wartościowo	132
4.3.4.	Zaburzenie ograniczone parametrycznie	133
4.4.	Szacowanie ograniczeń w dziedzinie częstotliwości	134

4.5.	Analiza niepewnego układu o zmiennej strukturze – przykład	137
	Podsumowanie	139
5.	PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ W UKŁADACH NIELINIOWYCH	141
5.1.	Analiza zbieżności iteracyjnego algorytmu NMPC	143
5.1.1.	Aproksymacja układem niestacjonarnym	143
5.1.2.	Rozkład addytywny	149
5.1.3.	Przykłady obliczeniowe	153
5.1.4.	Ilościowe porównanie efektywności metod dla układu wahadła	157
	Wnioski	163
5.2.	Szacowanie normy odchylenia wyjścia nieliniowego, niepewnego układu sterowania	163
5.2.1.	Model niepewnego układu nieliniowego	164
5.2.2.	Szacowanie norm zaburzeń	167
5.2.3.	Układ sterowania	168
5.2.4.	Wskaźnik kosztu	169
5.2.5.	Szacowanie odchylen wyjścia i stanu układu	170
5.2.6.	Przykład obliczeniowy	173
	Wnioski	176
	ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI	179
	LITERATURA	183
	Summary	201
	Zusammenfassung	203

WYKAZ OZNACZEŃ I AKRONIMÓW

Oznaczenia

$\ \cdot\ $	–	norma w przestrzeni l_2 wektora, macierzy lub operatora
\mathbf{A}	–	macierz stanu stacjonarnego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu
$\mathbf{A}(k)$	–	macierz stanu niestacjonarnego, liniowego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu w chwili k
$\mathbf{A}^F(k)$	–	macierz stanu zastępczego układu dyskretnego w pętli sprzężenia zwrotnego
$\hat{\mathbf{A}}$	–	operator blokowy diagonalny macierzy stanu
\mathbf{B}	–	macierz wejścia stacjonarnego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu
$\mathbf{B}(k)$	–	macierz wejścia niestacjonarnego, liniowego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu w chwili k
$\hat{\mathbf{B}}$	–	operator blokowy diagonalny macierzy wejścia
$\mathbf{B}^F(k)$	–	macierz wejścia zastępczego układu dyskretnego w pętli sprzężenia zwrotnego
$B_{\bar{t}}(t_k, f_l)$	–	dwuwymiarowa częstotliwościowa funkcja modulująca operatora przejścia układu dyskretnego (symbol Kohna-Nirenberga)
\mathbf{C}	–	macierz wyjścia stacjonarnego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu
$\mathbf{C}(k)$	–	macierz wyjścia niestacjonarnego, liniowego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu w chwili k
$\hat{\mathbf{C}}$	–	operator blokowy diagonalny macierzy wyjścia
$\mathbf{C}^F(k)$	–	macierz wyjścia zastępczego układu dyskretnego w pętli sprzężenia zwrotnego
\mathbf{D}	–	macierz przejścia stacjonarnego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu
$\mathbf{D}(k)$	–	macierz przejścia niestacjonarnego, liniowego modelu dyskretnego w przestrzeni stanu w chwili k
$\hat{\mathbf{D}}$	–	operator blokowy diagonalny macierzy przejścia
\mathcal{D}	–	przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych w postaci diagonalnej blokowej
$\delta(k)$	–	delta Kroneckera
δ_A	–	oszacowanie normy zaburzenia addytywnego macierzy stanu
δ_{Ar}	–	oszacowanie normy zaburzenia różnicowego macierzy stanu
δ_B	–	oszacowanie normy zaburzenia macierzy wejścia
δ_{Br}	–	oszacowanie normy zaburzenia różnicowego macierzy wejścia

δ_C	–	oszacowanie normy zaburzenia macierzy wyjścia
δ_{Cr}	–	oszacowanie normy zaburzenia różnicowego macierzy wyjścia
δ_D	–	oszacowanie normy zaburzenia macierzy przejścia
$\Delta_A(k)$	–	zaburzenie addytywne macierzy stanu dyskretnego, liniowego niestacjonarnego modelu w przestrzeni stanu w chwili k
$\Delta_{Ar}(k)$	–	addytywne, różnicowe zaburzenie macierzy stanu dyskretnego układu nieliniowego w formie zależnej od stanu w chwili k
$\hat{\Delta}_A$	–	zaburzenie addytywne blokowego, diagonalnego operatora macierzy stanu
$\Delta_B(k)$	–	zaburzenie addytywne macierzy wejścia dyskretnego, liniowego niestacjonarnego modelu w przestrzeni stanu w chwili k
$\Delta_{Br}(k)$	–	addytywne, różnicowe zaburzenie macierzy wejścia dyskretnego układu nieliniowego w formie zależnej od stanu w chwili k
$\hat{\Delta}_B$	–	zaburzenie addytywne blokowego, diagonalnego operatora macierzy wejścia
$\Delta_C(k)$	–	zaburzenie addytywne macierzy wyjścia dyskretnego, liniowego niestacjonarnego modelu w przestrzeni stanu w chwili k
Δ_{Cr}	–	addytywne, różnicowe zaburzenie macierzy wyjścia dyskretnego układu nieliniowego w formie zależnej od stanu w chwili k
$\hat{\Delta}_C$	–	zaburzenie addytywne blokowego, diagonalnego operatora macierzy wyjścia
$\Delta_D(k)$	–	zaburzenie addytywne macierzy przejścia dyskretnego, liniowego niestacjonarnego modelu w przestrzeni stanu w chwili k
$\hat{\Delta}_D$	–	zaburzenie addytywne blokowego, diagonalnego operatora macierzy przejścia
$\hat{\Delta}_T^{(1)}$	–	operator zaburzenia addytywnego w postaci rozwinięcia w szereg Taylora ograniczonego do wielomianu pierwszego stopnia
ε	–	parametr skalarny
f	–	częstotliwość
f_l	–	dyskretna wartość częstotliwości dla indeksu częstotliwości o wartości l
$\mathbf{F}(k)$	–	macierz sprzężenia zwrotnego od stanu w chwili k
$G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)$	–	charakterystyka częstotliwościowa, zespolona układu opisanego operatorem przejścia $\hat{\mathbf{T}}$
$ G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l) $	–	charakterystyka amplitudowa układu dyskretnego opisanego operatorem przejścia $\hat{\mathbf{T}}$
$G(z)$	–	dyskretna funkcja przejścia układu stacjonarnego liniowego
$h(k_1, k_0)$	–	odpowiedź układu na sygnał delty Kroneckera $\delta(k - k_0)$ w momencie k_1
\mathbf{I}	–	macierz jednostkowa
$\hat{\mathbf{I}}$	–	operator jednostkowy
$\varphi(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l)$	–	charakterystyka fazowa układu dyskretnego
j	–	jednostka urojona
k	–	czas dyskretny (skalar)
k_0	–	początek horyzontu czasowego
l_2	–	przestrzeń Hilberta operatorów wektorowych
l_2^M	–	przestrzeń operatorów wejścia ze skończoną normą
l_2^P	–	przestrzeń operatorów wyjścia ze skończoną normą

$\hat{\mathbf{L}}$	–	operator macierzowy, składowy operatora przejścia oparty na macierzowym operatorze ewolucyjnym
$\hat{\mathbf{L}}^F$	–	operator macierzowy, składowy operatora przejścia oparty na macierzowym operatorze ewolucyjnym dla układu zastępczego w sprzężeniu zwrotnym
$L_{\hat{\mathbf{T}}}(t_k, f_l)$	–	symbol Weyla operatora przejścia układu dyskretnego
$L_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(t_k, f_l)$	–	uogólniony symbol Weyla operatora przejścia układu dyskretnego
\mathcal{L}	–	przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych w postaci dolnej trójkątnej
$\lambda(\mathbf{S})$	–	wartość własna macierzy \mathbf{S}
\mathbf{m}	–	sekwencja wymiarów operatorów wejścia
\mathcal{M}	–	przestrzeń operatorów wejścia
\mathcal{M}_k	–	przestrzeń wektora wejścia w momencie k
\mathbf{n}	–	sekwencja wymiarów operatorów stanu
N	–	długość horyzontu czasowego analizy
$N(\mu, \sigma^2)$	–	rozkład normalny zmiennej losowej o wartości oczekiwanej równej μ i odchyleniu standardowym σ
$\hat{\mathbf{N}}$	–	operator odpowiedzi swobodnej układu
\mathcal{N}	–	przestrzeń operatorów stanu
\mathcal{N}_k	–	przestrzeń wektora stanu w momencie k
\mathbb{N}	–	przestrzeń liczb naturalnych
\mathbf{p}	–	sekwencja wymiarów operatorów wyjścia
P	–	okres zmienności parametrów układu
\mathbf{P}	–	macierz wagowa stanu w kwadratowym wskaźniku kosztu do sterowania optymalnego
\mathcal{P}	–	przestrzeń operatorów wyjścia
\mathcal{P}_k	–	przestrzeń wektora wyjścia w momencie k
\mathbf{Q}	–	macierz wagowa wejścia w kwadratowym wskaźniku kosztu do sterowania optymalnego
$r(\hat{\mathbf{T}})$	–	promień spektralny operatora $\hat{\mathbf{T}}$
r_{cond}	–	wskaźnik uwarunkowania zadania wyznaczania macierzy odwrotnej
$R_J(i)$	–	współczynnik zbieżności funkcjonału kwadratowego w i -tej iteracji
$R_c(i)$	–	współczynnik zbieżności normy stanu w i -tej iteracji
\mathbb{R}	–	przestrzeń liczb rzeczywistych
\mathbb{R}^q	–	przestrzeń Hilberta wektorów q -elementowych
$\mathbb{R}^{n \times m}$	–	przestrzeń Hilberta macierzy o n wierszach i m kolumnach
$\mathbb{R}^{p_k \times m_k}$	–	przestrzeń Hilberta macierzy o zmiennych wymiarach $p_k, m_k \in \mathbb{N}$
σ_i	–	i -ta wartość szczególna rozkładu według wartości szczególnych
σ_{min}	–	minimalna wartość rozkładu według wartości szczególnych
σ_{max}	–	maksymalna wartość rozkładu według wartości szczególnych
\mathbf{S}	–	macierz przejścia rozkładu według wartości szczególnych
$\mathbf{S}(k, k_0)$	–	macierzowy operator ewolucji
$S_y(\hat{\mathbf{T}}, l)$	–	wyjściowe widmo gęstości mocy układu dyskretnego
$S_v(\hat{\mathbf{T}}, l)$	–	wejściowe widmo gęstości mocy układu dyskretnego

$S_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(k, l)$	–	dwuwymiarowa, uogólniona funkcja rozrzutu
$S_{B\hat{\mathbf{T}}}(k, l)$	–	szczególna postać dwuwymiarowej funkcji rozrzutu oparta na funkcji modulującej
$S_{Z\hat{\mathbf{T}}}(k, l)$	–	szczególna postać dwuwymiarowej funkcji rozrzutu oparta na funkcji przejścia
$S_{L\hat{\mathbf{T}}}(k, l)$	–	szczególna postać dwuwymiarowej funkcji rozrzutu oparta na symbolu Weyla
t_k	–	wartość czasu ciągłego, odpowiadająca dyskretnej chwili k
τ_k	–	wartości przesunięcia w dziedzinie czasu
T_p	–	okres próbkowania, dyskretyzacji
$\mathbf{T}(i, j)$	–	macierz składowa operatora przejścia
\mathbf{T}_B	–	macierz transformacji dla funkcji modulującej
\mathbf{T}_L	–	macierz transformacji dla symbolu Weyla
\mathbf{T}_Z	–	macierz transformacji dla funkcji przejścia
$\hat{\mathbf{T}}$	–	liniowy operator przejścia układu
$\hat{\mathbf{T}}_z$	–	operator zastępczy układu w sprzężeniu zwrotnym
$u_{n,i}$	–	element z n -tego wiersza i i -tej kolumny macierzy \mathbf{U}
$\mathbf{u}(k)$	–	wektor wejścia układu zastępczego w pętli sprzężenia zwrotnego w chwili k
\mathbf{u}_i	–	i -ty wektor szczególny wyjścia rozkładu według wartości szczególnych
\mathbf{U}	–	macierz wyjścia rozkładu według wartości szczególnych
\mathcal{U}	–	przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych w postaci górnej trójkątnej
W_D^{TWG}	–	wskaźnik degradacji układu stacjonarnego liniowego oparty na wskaźniku TWG
W_D^{WOW}	–	wskaźnik degradacji układu stacjonarnego liniowego oparty na wskaźniku WOW
W_D^{WVO}	–	wskaźnik degradacji układu stacjonarnego liniowego oparty na wskaźniku WVO
ω	–	pulsacja
$\omega_g, \omega_d, \omega_m$	–	pulsacje dla filtrów niestacjonarnych: graniczna, dolna, maksymalna
$v_{n,i}$	–	element z n -tego wiersza i i -tej kolumny macierzy \mathbf{V}
$\mathbf{v}(k)$	–	wektor wejścia układu w chwili k
\mathbf{v}_i	–	i -ty wektor szczególny wejścia rozkładu według wartości szczególnych
$\hat{\mathbf{v}}$	–	operator kolumnowy wejścia układu
$\hat{\mathbf{v}}_{opt}$	–	operator optymalnej sekwencji sterowania wejścia układu
\mathbf{V}	–	macierz wejścia rozkładu według wartości szczególnych
$\mathbf{x}(k)$	–	wektor stanu układu nominalnego w chwili k
$\mathbf{x}_\Delta(k)$	–	wektor stanu układu zaburzonego w chwili k
$\hat{\mathbf{x}}$	–	operator kolumnowy stanu układu nominalnego
$\hat{\mathbf{x}}_{ref}$	–	operator kolumnowy trajektorii odniesienia stanu
$\hat{\mathbf{x}}_\Delta$	–	operator kolumnowy stanu układu zaburzonego
$\mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$	–	przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych z przestrzeni \mathcal{M} w \mathcal{P}
\mathcal{X}	–	przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych
$\mathbf{y}(k)$	–	wektor wyjścia układu nominalnego w chwili k

$\mathbf{y}_\Delta(k)$	–	wektor wyjścia układu zaburzonego (indeks Δ oznacza układ zaburzony) w chwili k
$\hat{\mathbf{y}}$	–	operator kolumnowy wyjścia układu nominalnego
$\hat{\mathbf{y}}_\Delta$	–	operator kolumnowy wyjścia układu zaburzonego
$\hat{\mathbf{y}}_{ref}$	–	operator kolumnowy trajektorii odniesienia wyjścia
\mathbb{Z}	–	przestrzeń liczb całkowitych
$\hat{\mathbf{Z}}$	–	operator przesunięcia czasowego
$Z_{\hat{\tau}}(k,l)$	–	dwuwymiarowa, czasowo-częstotliwościowa funkcja przejścia operatora przejścia układu dyskretnego

Akronimy

DFT	–	dyskretna, jednowymiarowa transformata Fouriera dla macierzy, wyznaczana niezależnie kolumnami (ang. <i>Discrete Fourier Transform</i>)
KTWG	–	wskaźnik niestacjonarności kwadratowego ważonego tłumienia wstęgi głównej
LTV	–	dynamiczny, niestacjonarny układ (ang. <i>Linear Time-Varying</i>)
LTI	–	dynamiczny, stacjonarny układ liniowy (ang. <i>Linear Time-Invariant</i>)
LFI	–	statyczny, niestacjonarny układ liniowy (ang. <i>Linear Frequency-Invariant</i>)
LTFI	–	statyczny, stacjonarny układ liniowy (ang. <i>Linear Time and Frequency-Invariant</i>)
MIMO	–	układ o wielu wejściach i wielu wyjściach (ang. <i>Multi Input, Multi Output</i>)
NMPC	–	nieliniowa regulacja predykcyjna (ang. <i>Nonlinear Model Predictive Control</i>)
SISO	–	układ o jednym wejściu i jednym wyjściu (ang. <i>Single Input, Single Output</i>)
SVD	–	rozkład według wartości osobliwych (ang. <i>Singular Value Decomposition</i>), inne nazwy używane w języku polskim: rozkład według wartości szczególnych, dekompozycja głównych składowych, dekompozycja na wartości singularne, dekompozycja singularna, dekompozycja SVD, rozkład SVD, algorytm SVD
TWG	–	wskaźnik niestacjonarności ważonego tłumienia wstęgi głównej
UWOW	–	wskaźnik niestacjonarności uproszczonej ważonej względnej odległości odpowiadających sobie widm
WOW	–	wskaźnik niestacjonarności ważonej względnej odległości odpowiadających sobie widm
WVO	–	wskaźnik niestacjonarności wzajemnego odstępu
VIVO	–	układ o zmiennej liczbie wejść i wyjść (ang. <i>Variable Input, Variable Output</i>)

WPROWADZENIE

Pojęcie systemu pochodzi od greckiego słowa *σύστημα* (systema), oznaczającego rzecz złożoną. System to spójny zbiór powiązanych ze sobą elementów i zachodzących między nimi relacji. Podobna definicja używana jest w cybernetyce [159]. Nie ogranicza to jej stosowania w innych dziedzinach, gdzie elementami mogą być stawiane tezy, twierdzenia, przepisy czy reguły. Systemem może być zarówno obiekt fizyczny jak i abstrakcyjny. W teorii sterowania system jest definiowany jako dana relacja między chwilowymi, przeszłymi i przyszłymi wartościami wielkości zewnętrznych [122].

Pojęcie to jest podstawą teorii systemów, będącej pierwotnie teorią biologiczną, następnie rozwiniętą i poszerzoną przez cybernetyków i inżynierów, obejmującą obecnie również informatykę oraz nauki społeczne, np. socjologię, ekonomię. Za twórcę teorii systemów uznaje się Ludwiga von Bertalanffyego. Podstawą teorii systemów jest istnienie modeli, zasad i praw mających zastosowanie do systemów ogólnych i ich podklas bez względu na ich konkretną postać, charakter elementów składowych i relacje lub występujące między nimi siły [17].

Inżynieria systemów zajmuje się zastosowaniem zasad teorii systemów w praktyce. Obejmuje analizę systemową, projektowanie systemów oraz zarządzanie nimi. Jednym z głównych celów analizy systemowej jest określenie pożądanego działania lub linii postępowania przez rozpoznanie i rozważenie dostępnych wariantów oraz porównanie ich przewidywanych następstw. Wymaga ona precyzyjnego określenia granic badanego systemu. Do zastosowania efektywnych metod analizy konieczne jest stworzenie uproszczonej reprezentacji systemu w postaci modelu.

Model matematyczny zgodnie z definicją podaną w pracy [81] jest zbiorem symboli, relacji matematycznych i zasad posługiwania się nimi, przy czym symbole te i relacje odnoszą się do konkretnych elementów modelowanego obszaru rzeczywistości. Model matematyczny jest uproszczonym obrazem danego układu lub procesu fizycznego, wyrażającym najistotniejsze z punktu widzenia zastosowań cechy układu rzeczywistego [229]. Jest to celowo uproszczona reprezentacja rzeczywistości, pozbawiona szczegółów i cech nieistotnych z punktu widzenia modelowania. Celem tworzenia modeli jest dążenie do zrozumienia rzeczywistości, która w swej naturze jest bardzo złożona. Model matematyczny to skończony zbiór symboli i relacji matematycznych oraz ścisłych zasad operowania nimi, przy czym zawarte w nim symbole i relacje mają interpretację odnoszącą się do konkretnych elementów modelowanego wycinka rzeczywistości. Zbiór symboli i relacji jest abstrakcyjnym

odwzorowaniem systemu, a czynnikiem przekształcającym go w model matematyczny jest fizyczna interpretacja. Najważniejszym celem modelowania jest tworzenie narzędzi pozwalających przewidzieć, co stanie się z badanym systemem w warunkach innych niż aktualnie istniejące. Ze względu na cel budowy modele można podzielić na *fenomenologiczne*, opisujące działanie systemu, *prognostyczne*, umożliwiające przewidywanie zachowania się systemu w przyszłości, *decyzyjne*, umożliwiające wybór oddziaływań na wejściu, spełniających określone kryteria, *optymalizacyjne*, jeżeli kryteria te są optymalne, oraz *normatywne*, umożliwiające wybór struktury i parametrów systemu wykonującego określone zadania.

Ze względu na nieokreśloność probabilistyczną modele można podzielić na *deterministyczne*, w których zbiór możliwych realizacji (stany systemu lub procesu) jest określony z góry, a identyfikacja pozwala na ocenę wartości zmiennych z dokładnością do pojedynczego elementu zbioru, *statystyczne* (probabilistyczne), w których zbiór realizacji jest określony z góry, a identyfikacja pozwala na ocenę wartości zmiennych z określonym prawdopodobieństwem lub dokładnością do skończonego przedziału ufności, *indeterministyczne*, w których zbiór możliwych realizacji nie jest ustalony, natomiast identyfikacja polega na relatywnej ocenie wartości zmiennej w odniesieniu do innych możliwych jej realizacji. Nieokreśloność wymienionych typów modeli rośnie od deterministycznego do indeterministycznego, a jej miarą jest entropia [27].

Biorąc pod uwagę strukturę, modele można podzielić na *parametryczne* oraz *nieparametryczne*. *Modele parametryczne* mają ściśle określoną strukturę matematyczną, a ich dopasowywanie do danego systemu następuje przez zmianę wartości współczynników lub parametrów modelu. *Modele nieparametryczne* reprezentują własności danego systemu w postaci zbiorów danych, często w formie graficznej, np. odpowiedzi impulsowej, skokowej, częstotliwościowej, portretu fazowego układu.

Ze względu na dziedzinę sygnałów wejściowych i zbiór wartości sygnałów wyjściowych modele można podzielić na *ciągłe*, dane zazwyczaj w postaci układów równań różniczkowych, oraz *dyskretne*, zapisywane za pomocą układów równań różnicowych.

Szczególną klasą modeli, zgodną z dwoma podstawowymi zasadami: jednorodności i addytywności, są modele liniowe. Jeżeli współczynniki modelu parametrycznego układu liniowego są stałe, model reprezentuje klasę układów stacjonarnych liniowych, dla których istnieje obszerna biblioteka metod analizy.

Metody symboliczne, oparte na transformacie Laplace'a bądź dyskretnej transformacie Z z operatorami zespolonymi odpowiednio s i z , zawdzięczają swoją popularność możliwości dokonywania w prosty sposób przekształceń układu, m.in. takich jak łączenie kaskadowe, łączenie równoległe, sprzężenie zwrotne, realizacja odwrotna, za pomocą prostych operacji matematycznych. Dodatkowo umożliwiają łatwe i przejrzyste przejście w dziedzinę częstotliwości, przy czym ich zastosowanie jest jednak ograniczone do układów stacjonarnych liniowych.

Alternatywne metody reprezentacji dla układów innych niż stacjonarne liniowe przez wiele lat zdecydowanie ustępowały możliwościom oferowanym przez metody symboliczne oparte na teorii funkcji zespolonych. Wypełnienie znaczącej luki między możliwościami

metod analizy układów liniowych stacjonarnych i niestacjonarnych stało się możliwe dzięki rozwinięciu teorii operatorów liniowych: [1], [46], [55], [56], [68], [69], [83], [88], [89], [139], [172], [173], [234], [263]. Nie bez znaczenia są również stosunkowo duże możliwości obliczeniowe współczesnych komputerów. Rozwijane w ciągu ostatnich kilkunastu lat prace nad układami dyskretnymi pozwoliły wprowadzić notację operatorową [48], [83], [173], [196], [234], wykorzystującą blokową notację wektorową do opisu sygnałów wejścia, wyjścia i stanu oraz blokową notację macierzową do opisu operatora przejścia układów niestacjonarnych liniowych. W układzie stacjonarnym liniowym operator przejścia jest operatorem Toeplitza. Operator przejścia układu niestacjonarnego można zbudować na podstawie uporządkowanego zbioru odpowiedzi impulsowych przesuniętych w dziedzinie czasu. Tak zdefiniowany operator przejścia dowolnego układu liniowego, również niestacjonarnego, umożliwia podobne przekształcenia jak w przypadku funkcji przejścia określonej dla układu stacjonarnego. Połączenie kaskadowe odpowiada mnożeniu operatorów przejścia, połączenie równoległe – ich dodawaniu itd.

Ze względu na praktyczne możliwości wykorzystania operatorów przejścia w zadaniach analizy i syntezy układów niestacjonarnych ważna jest własność operatora przejścia układu dyskretnego, liniowego, określonego na skończonym horyzoncie czasowym, pozwalająca na zapisanie go w postaci macierzy o skończonych wymiarach. Występujące w układzie operatory sygnałów mogą być wówczas zapisane jako wektory o skończonych wymiarach.

Wykorzystanie do obliczeń narzędzi algebry liniowej, a przede wszystkim istniejących efektywnych procedur numerycznych, umożliwia szybkie wykonywanie prostych działań, takich jak dodawanie czy mnożenie, i bardziej złożonych operacji, obejmujących wyznaczenie operatora odwrotnego lub jego faktoryzację. Duży postęp w elektronice i informatyce oraz wydajne procedury numeryczne w wielu przypadkach pozwalają na pominięcie wpływu czasu obliczeń nawet przy stosunkowo dużych wymiarach macierzy przejścia. Nakłady obliczeniowe są bezpośrednio związane z długością horyzontu czasowego analizy, natomiast nie zależą od rzędu układu, który dla układów niestacjonarnych może się zmieniać w funkcji czasu, podobnie jak liczba wejść i wyjść takiego układu.

Celem pracy jest opracowanie metod pozwalających na rozszerzenie narzędzi analizy operatora przejścia niestacjonarnych liniowych układów dyskretnych określonych na skończonym horyzoncie czasowym, ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień częstotliwościowych, oraz określanie stopnia niestacjonarności układu. Integralną jej częścią jest strona aplikacyjna umożliwiająca praktyczne wykorzystanie rezultatów w problemach analizy i syntezy niepewnych, nieliniowych układów dyskretnych oraz filtrów o zmiennych w czasie współczynnikach.

Układy liniowe można podzielić ze względu na ich własności czasowe i częstotliwościowe na niezmiennicze w dziedzinie czasu i częstotliwości, zmienne tylko w dziedzinie częstotliwości (niezmiennicze w dziedzinie czasu), zmienne tylko w dziedzinie czasu (niezmiennicze w dziedzinie częstotliwości) oraz na zmienne zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości, tworzące najbardziej ogólną klasę układów liniowych wśród czterech wymienionych. Z matematycznego punktu widzenia dychotomiczna klasyfikacja

układów na zmienne lub niezmiennie w odpowiedniej dziedzinie (czasu lub częstotliwości) jest jasno określona, lecz z praktycznego punktu widzenia istotna jest raczej umiejętność określenia stopnia niestacjonarności w skali ciągłej niż dychotomicznie (zmienny, niezmienny). Wynika to z faktu, że zmienność wartości parametrów układu, zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości, nie musi skutkować zmianą własności układu jako całości lub zmiana ta może być mało znacząca [218].

Pierwsze próby poszerzenia zastosowania narzędzi częstotliwościowych do analizy układów niestacjonarnych liczą sobie przeszło pół wieku [16], [316]. Zaproponowane tam podejście opierało się na rozszerzeniu transformaty Laplace'a do odpowiedzi impulsowej układu niestacjonarnego $h(t_1, t_0)$ zależnej nie tylko od czasu t_1 , ale dodatkowo od momentu wystąpienia impulsu Diraca $\delta(t_0)$. W wyniku otrzymuje się funkcję przejścia układu zależną od dwóch zmiennych odpowiadających przesunięciu w dziedzinie częstotliwości i czasu. Podejście to zostało zastosowane obecnie m.in. w pracach [34], [301], [65], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [100], [108], [116], [123], [127], [128], [260], [266], [298] pod nazwą analizy czasowo-częstotliwościowej (ang. *time-frequency analysis*), głównie do analizy zmiennych w czasie kanałów komunikacyjnych. Wskaźnikiem potencjalnych przesunięć czasowo-częstotliwościowych, które mogą się pojawić w układzie, jest tzw. funkcja rozrzutu (ang. *spreading function*) [34], [94]. Analiza układu za pomocą funkcji rozrzutu umożliwia określenie zmienności układu zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości. Do analizy wymagana jest jednak znajomość odpowiedzi układu w szerokim horyzoncie czasowym i z odpowiednią rozdzielczością, co znacznie utrudnia zastosowanie tej metody do układów dyskretnych określonych w skończonym i stosunkowo krótkim horyzoncie czasowym.

Do określania charakteru zmienności układu można wykorzystać analizę pseudomodalną, rozwijaną m.in. w pracach [147], [149], [150], [152], głównie do analizy drgań układów mechanicznych o zmiennych w czasie parametrach [147], [150]. W jej wyniku otrzymuje się zależności wartości pseudomodalnych układu od czasu, będące analogią do modów układu stacjonarnego.

Analiza częstotliwościowa jest ważnym narzędziem badania własności układów liniowych, stacjonarnych. Niestety, dobrze znanych metod dla układów stacjonarnych liniowych [6], [110], [112], [113], [132], [133], [160], [187], [188], [228], [256], [275], [292], [323], nie można w prosty sposób przenieść na układy niestacjonarne. Żadna ze znanych dotychczas metod, np. [16], [34], [36], [301], [65], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [100], [108], [116], [123], [127], [128], [237], [260], [266], [298], [315], [316], [317], nie jest kompatybilna z klasycznymi metodami dla układów liniowych. W wielu przypadkach niestacjonarność czy nieliniowość ma bardzo ograniczony charakter. W takiej sytuacji możliwe są dwa warianty postępowania: pominąć zjawiska niestacjonarne i zastosować metody dla układów stacjonarnych lub posłużyć się specyficzną metodologią, specjalnie opracowaną dla tego typu problemów (jeżeli taka istnieje). W niniejszej pracy wprowadzono rozwiązanie pośrednie – aproksymowaną charakterystykę częstotliwościową, którą z powodzeniem można wykorzystać do układów znajdujących się na granicy istotności zmienności czasowej układu.

Opracowanie metody aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych, która zapewni kompatybilność z wynikami dla układów stacjonarnych liniowych oraz będzie miała zbliżone własności w przypadku niestacjonarnym, umożliwi wykorzystanie szerokiego spektrum istniejących metod do układów stacjonarnych [194], [191], [192], [193], [208], [226], [227]. Aproksymacja taka może być stosowana również po uwzględnieniu ruchomego horyzontu czasowego, co jest szczególnie istotne w układach o zmiennych w czasie parametrach. Podobna w zamyśle koncepcja metody uproszczonej analizy nieliniowych układów stacjonarnych o charakterze dolnoprzepustowym jest z powodzeniem stosowana pod nazwą metody funkcji opisującej.

Jednym z podstawowych narzędzi matematycznych pozwalających na stosowanie uproszczonych metod analizy częstotliwościowej dla układów niestacjonarnych, wykorzystywanym w niniejszej pracy, jest rozkład według wartości osobliwych operatora wejściowo-wyjściowego układu. W literaturze polskiej zamiennie używa się kilku nazw [287]: rozkład według wartości szczególnych [53], rozkład według wartości osobliwych, dekompozycja głównych składowych, dekompozycja na wartości singularne, dekompozycja singularna, dekompozycja SVD, rozkład SVD, algorytm SVD. Akronim SVD w trzech ostatnich nazwach pochodzi od nazwy używanej w literaturze anglojęzycznej (*Singular Value Decomposition*). Rozkład ten, stosowany do operatora przejścia, jest uogólnieniem klasycznej dekompozycji SVD dla macierzy. Jest on możliwy, ponieważ operatory definiowane dla układów dyskretnych w skończonym horyzoncie czasowym są skończenie wymiarowe. Podstawowe informacje z zakresu rachunku macierzowego, wykorzystywane w niniejszej pracy, można znaleźć w [12], [15], [53], [70], [71], [102], [111], [166], [276], [279], [280]. Stosowane tu podejście łączy trzy znane przekształcenia układu dynamicznego oraz ich własności. Model układu niestacjonarnego w przestrzeni stanu zamieniono na odpowiadający mu opis operatorowy, następnie dokonano rozkładu według wartości szczególnych operatora wejściowo-wyjściowego układu oraz dyskretnej transformaty Fouriera wektorów własnych układu otrzymanych w wyniku tego rozkładu. Przybliżona charakterystyka częstotliwościowa jest wyznaczana z wykorzystaniem własności gęstości widmowej mocy i ważonego sumowania przetransformowanych wektorów szczególnych rozkładu SVD.

Istotnym problemem jest ilościowe określenie stopnia niestacjonarności (zmienności czasowej) układu [201], [218], bądź analiza czasowo-częstotliwościowej funkcji rozrzutu [34], [94]. Można oczekiwać, że są pewne graniczne wartości wskaźnika niestacjonarności pozwalające na stosowanie dla układów stacjonarnych metod uproszczonych nawet wówczas, gdy stosowanie uproszczeń jest niezalecane bądź wręcz niedopuszczalne. Zagadnienie szacowania stopnia niestacjonarności jest istotne nie tylko z punktu widzenia teorii i praktyki sterowania, ale również przydatne w teorii sygnałów, m.in. do analizy zmiennych w czasie kanałów komunikacyjnych [16], [127], [233]. Innym obszarem zastosowań stopnia niestacjonarności jest analiza rozproszonych układów sterowania wykorzystujących sieci komputerowe jako medium komunikacyjne [210].

Dla układów niestacjonarnych klasyczny warunek stabilności – położenie wartości własnych wewnątrz okręgu jednostkowego – przestaje być warunkiem wystarczającym [4], [5], [18], [22], [35], [84], [105], [136], [151], [164], [185], [186], [211], [237], [238], [239],

[240], [242], [244], [253], [309]. Przełączenia (zmiany parametrów układu) występujące z odpowiednio dużą częstotliwością mogą doprowadzić do niestabilności układu nawet wówczas, gdy położenie wartości własnych macierzy układu nie ulega zmianie [268].

Na kształt charakterystyki częstotliwościowej układów niepewnych mają w ogólności wpływ bieżące wartości niepewnych parametrów. W praktyce najczęściej przeprowadza się analizę maksymalnego wzmocnienia w najgorszym możliwym przypadku (ang. *worst-case gain analysis*). Wyznaczanie ograniczeń w dziedzinie częstotliwości dla układów niepewnych jest jedną z ważnych metod syntezy sterowania odpornego. Obejmuje ono wszystkie etapy projektowania: modelowanie, analizę układu, syntezę regulatora oraz końcową ewaluację własności układu.

Zastosowanie metod częstotliwościowych do układów niepewnych było w ostatnich latach przedmiotem zainteresowań wielu badaczy. Część prac koncentrowała się na analizie układów niepewnych: Rantzer i Andersson w pracy [8] analizowali błąd w dziedzinie częstotliwości dla uproszczonych, niepewnych modeli stacjonarnych. Model probabilistyczny, będący reprezentacją układu niepewnego w średnim zakresie częstotliwości, rozpatrywano w pracy [274]. Techniki estymacji wpływu niepewności parametrycznych na charakterystykę częstotliwościową układów wyższych rzędów dla układu z nieliniowością statyczną analizowano w pracy [154]. Porównanie metod do wyznaczania odpowiedzi częstotliwościowych układów niepewnych przeprowadzono w pracy [31]. Inne podejście, koncentrujące się głównie na syntezie sterowania odpornego, można znaleźć w pracy [151]. Koncepcje umożliwiające ilościową ocenę niepewności modelu omówiono w pracach [163], [202], [255].

Ważnym problemem występującym w metodach sterowania odpornego jest identyfikacja górnego ograniczenia zbioru funkcji wzmocnienia układu w dziedzinie częstotliwości reprezentujących układ niepewny. W układach niestacjonarnych możliwe jest wykorzystanie przybliżonych charakterystyk Bodego [218], [226]. Rozszerzenie metodologii wprowadzonej dla układów stacjonarnych w pracy [77], adaptacja metod opisanych w pracach [58], [59], a dotyczących układów niepewnych oraz rozkładu SVD i zastosowań do wyznaczania przybliżonej charakterystyki amplitudowej [85], [218], [226] pozwalają na szacowanie odchyłeń w dziedzinie częstotliwości dla dyskretnych, niestacjonarnych układów niepewnych [208], [224].

Rozwój nauki i techniki oraz wzrost mocy obliczeniowej współczesnych komputerów pozwala na implementację coraz bardziej złożonych algorytmów sterowania, w tym dla układów zmiennych w czasie. Do budowy układów automatycznego sterowania odpowiednich w danym zastosowaniu niezbędne są nie tylko dokładna znajomość problemu, ale również odpowiednie narzędzia, umożliwiające przetworzenie i analizę zgromadzonych danych. Narzędzia takie, dedykowane dla układów dyskretnych niestacjonarnych, przedstawiono w niniejszej pracy.

Monografia oprócz wstępu oraz podsumowania i wniosków obejmuje pięć rozdziałów. W rozdziale pierwszym dokonano klasyfikacji układów dyskretnych liniowych ze względu na zmienność w dziedzinie czasu i częstotliwości. Następnie wprowadzono definicje notacji operatorowej dla najszerszej klasy układów liniowych – niestacjonarnych. Notacja ta

umożliwia łatwe dokonywanie podstawowych przekształceń układów dyskretnych niestacjonarnych, również o zmiennych w czasie wymiarach wektora stanu oraz liczbie wejść i wyjść. Następnie porównano własności notacji operatorowej i modelu w przestrzeni stanu o zmiennych w czasie macierzach. Kończącą część rozdziału poświęcono problemom stabilności układów niestacjonarnych.

W drugim rozdziale dokonano przeglądu możliwych do zastosowania narzędzi czasowo-częstotliwościowych, ich adaptacji do układów dyskretnych oraz zaproponowano oryginalną metodę wyznaczania przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych na podstawie rozkładu według wartości osobliwych operatora przejścia układu niestacjonarnego. Charakterystyczną cechą takiego podejścia jest kompatybilność z klasycznymi wynikami otrzymywanymi dla układów stacjonarnych. Rezultatem tej analizy jest zbiór punktów charakterystyk Nyquista lub Bodego, przy czym dla układów niestacjonarnych jest on jedynie ich przybliżeniem. Uproszczone, częstotliwościowe metody analizy mogą być stosowane do układów o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO) oraz o wielu wejściach i wielu wyjściach (MIMO) po zamianie operatora przejścia modelu MIMO na odpowiadający mu zbiór modeli układów SISO.

Problem określania stopnia niestacjonarności układu omówiono w trzecim rozdziale. Przedstawiono w nim adaptację metody opartej na zdefiniowanej w drugim rozdziale dyskretnej funkcji rozrzutu, umożliwiającej określanie zmienności czasowo-częstotliwościowej. Opierając się na własności równości widm amplitudowych macierzy wejścia i wyjścia układu powstałych w wyniku rozkładu według wartości szczególnych, zdefiniowano trzy wskaźniki, będące selektywną miarą zmienności czasowej układu. W drugiej części rozdziału podano przykład wykorzystania zdefiniowanych wskaźników do określania wpływu efektów sieciowych, takich jak opóźnianie bądź gubienie pakietów w rozproszonych układach sterowania budowanych z wykorzystaniem sieci komputerowych i protokołu TCP/IP.

W czwartym rozdziale przedstawiono problemy związane z występowaniem niepewności. Omówiono źródła niepewności oraz wprowadzanie zaburzeń do modelu układu. Następnie uwzględniono niepewność w modelu matematycznym układu niestacjonarnego, wprowadzono zaburzenia do operatora przejścia układu niestacjonarnego oraz zaproponowano metodę estymacji ograniczeń na charakterystyce amplitudowej układów niestacjonarnych, niepewnych.

W piątym rozdziale podjęto próbę wykorzystania wprowadzonej notacji macierzowych operatorów przejścia układów dyskretnych, liniowych, niestacjonarnych do pewnej klasy układów nieliniowych, które mogą być zapisane w postaci niezależnej od stanu i wejścia macierzy układu. W pierwszej części rozdziału przeprowadzono analizę zbieżności iteracyjnego algorytmu sterowania predykcyjnego dla układów nieliniowych z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii oraz podano warunek konieczny jego zbieżności. W drugiej części rozdziału zaproponowano metodę szacowania odchyłeń trajektorii wyjścia i stanu dla nieliniowego układu niepewnego względem jego reprezentacji nominalnej, bez niepewności, oraz podano przykład wykorzystania do numerycznej metody syntezy sterowania optymalnego z minimalizacją normy odchylenia wyjścia.

Większość prezentowanych w niniejszej pracy treści jest wynikiem oryginalnych opracowań i badań prowadzonych przez autora. Były one wcześniej sygnalizowane w materiałach konferencyjnych [194], [193], [196], [197], [198][200], [201], [202], [205], [210], [212], [215], [216], [217], [219], [223], [224], a w skróconym ujęciu prezentowane w artykułach w czasopismach i książkach [191], [192], [198], [199], [204], [208], [211], [213], [219], [226], [227]. Przedstawione w pracy wyniki usystematyzowano przy pomocy notacji operatorowej. Pojęcia wstępne dotyczące opisu operatorowego dyskretnych układów niestacjonarnych (zawarte w rozdziałach 1.1–1.5) zapożyczono z istotnymi zmianami z prac autorów belgijskich: prof. Patricka DeWilde oraz prof. van der Veena, prowadzonych w Leuven, ujętych całościowo m.in. w pozycji [48]. Definicje dyskretnych operatorów ewolucyjnych zawartych w rozdziale 1.6 przedstawiono w pracy doktorskiej autora [195]. Podobną notację stosują również przedstawiciele szkoły rumuńskiej [83]. Klasyfikacja układów niestacjonarnych wraz z porównaniem notacji operatorowej i opisu w przestrzeni stanu (przedstawione w rozdziałach 1.7–1.8) są opracowaniem własnym autora na podstawie dostępnej literatury. Definicja transformacji czasowo-częstotliwościowej dla układów ciągłych wraz ze związanym z nim aparatem pojęciowym (przytoczonym w skrócie w rozdziale 2.3) i dla funkcji rozrzutu (omówionym w rozdziale 3.1) zaczerpnięto z prac autorów austriackich [91], [94], [95], [97], [128]. Oryginalnym opracowaniem autora są macierze transformacji układu dyskretnego, oparte na zdyskretyzowanych funkcjach transformaty czasowo-częstotliwościowej, umożliwiające efektywne wyznaczanie analogicznych przekształceń dla układów dyskretnych, w tym również określonych na skończonym horyzoncie czasowym.

Ważnym, samodzielnym i oryginalnym opracowaniem autora jest metoda wyznaczania uproszczonych charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych szczegółowo opisana w rozdziale 2.4, wraz z przykładami zastosowań, m.in. do analizy filtrów o zmiennych w czasie współczynnikach, zawartymi w rozdziale 2.5. Kolejnym, samodzielnym osiągnięciem jest opracowanie metod określania stopnia niestacjonarności układu przedstawionych w rozdziale 3.2 wraz z przykładem zastosowań zawartym w rozdziale 3.3 do szacowania wpływu efektów sieciowych układów sterowania budowanych z wykorzystaniem sieci komputerowych. Podstawowe pojęcia i własności z zakresu analizy układów niepewnych, przedstawione w rozdziałach 4.1 i 4.3, częściowo zapożyczono z pracy doktorskiej autora [195] oraz dostępnych publikacji [27], [99], [287]. Oryginalnym osiągnięciem autora jest metoda szacowania maksymalnego wzmocnienia niepewnego, niestacjonarnego układu dyskretnego, opisana w rozdziałach 4.2 i 4.4. Ważnym, indywidualnym opracowaniem autora jest cały rozdział piąty obejmujący wykorzystanie wybranych metod do układów niestacjonarnych liniowych w analizie i syntezie sterowania układów nieliniowych, zwłaszcza w zakresie zbieżności iteracyjnego algorytmu NMPC oraz szacowania normy odchylenia wyjścia nieliniowego, niepewnego układu sterowania. W rozdziale tym podano również przykład zastosowania iteracyjnej metody wznaczenia sterowania predykcyjnego nieliniowego wahadła metodą sukcesywnej linearyzacji do modelu zarówno stacjonarnego jak i niestacjonarnego. W przykładzie wykazano przewagę linearyzacji do modelu niestacjonarnego nad klasyczną linearyzacją do modelu stacjonarnego.

Skuteczność opracowanych metod sprawdzono na drodze symulacji numerycznych w środowisku Matlab. Przykładowe wyniki badań symulacyjnych przedstawiono w końcowych częściach poszczególnych rozdziałów pracy. Są one ilustracją rozważanych w pracy zagadnień.

Pracę kończą podsumowanie i wnioski z przeprowadzonych badań. Ponadto zawiera on wykaz najważniejszych oznaczeń, zestawienie cytowanych pozycji literatury, dotyczącej poruszanej problematyki, oraz krótkie streszczenia w językach angielskim i niemieckim.

Rozwiązania przedstawionych zagadnień tworzą zestaw narzędzi umożliwiających uproszczoną analizę układu za pomocą metodologii zbliżonej do klasycznie stosowanej w układach stacjonarnych. Wynikające stąd wnioski pozwalają na efektywne projektowanie układów sterowania opisanych zmiennym w czasie modelem matematycznym. Zdaniem autora, zwiększy to znacznie niezawodność i atrakcyjność algorytmów opracowywanych na podstawie przedstawionych wyników i będzie istotnym wkładem w rozwój teorii sterowania.

1. NIESTACJONARNY MODEL UKŁADU DYSKRETNEGO

Układem liniowym nazywany jest układ spełniający zasadę jednorodności i addytywności. Obecnie najbardziej rozwiniętą w literaturze gałęzią teorii liniowych układów dyskretnych jest teoria układów stacjonarnych [6], [110], [112], [113], [132], [133], [187], [256], [275]. W ostatnich latach, m.in. dzięki szybkiemu rozwojowi technik obliczeniowych, rośnie zainteresowanie szerszą klasą liniowych, niestacjonarnych układów dyskretnych. Układy liniowe można ogólnie podzielić ze względu na zmienność w dziedzinie czasu i częstotliwości na cztery podstawowe klasy.

1. Układy statyczne niezależne od czasu i częstotliwości – LTFI. W praktyce są one reprezentowane przez statyczne wzmocnienie, a w przypadku układów o wielu wejściach i wielu wyjściach – przez macierz wzmocnień, którą można zapisać następująco:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{D}\mathbf{v}(k) \quad (1.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\in \mathbb{R}^{p \times m}, \\ \mathbf{v}(k) &\in \mathbb{R}^m \quad - \text{stałowymiarowy wektor wejść,} \\ \mathbf{y}(k) &\in \mathbb{R}^p \quad - \text{stałowymiarowy wektor wyjść,} \\ p, m &\in \mathbb{N}, \\ k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Układy dynamiczne stacjonarne – LTI. Mogą one być opisane za pomocą następujących liniowych równań w przestrzeni stanu o stałych współczynnikach:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{v}(k) \quad (1.3)$$

Głównymi cechami modelu (1.2)–(1.3) są ściśle określone: struktura, liczba wejść $\mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^m$, wyjść $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$, zmiennych stanu $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ oraz niezależne od czasu określone macierze układu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $p, m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Istotą każdego układu dynamicznego jest określona relacja między przyszłymi wartościami zmiennych stanu układu a jego obecnymi wartościami wejść i stanu. Model liniowy układu

stacjonarnego dyskretnego może być zapisany w rozmaitych formach, a powyższa jest jedną z możliwych notacji. Alternatywnymi postaciami są m.in.: równanie różnicowe n -tego rzędu bądź wymierna funkcja przejścia z operatorem przesunięcia z .

3. Układy statyczne niestacjonarne, zależne od czasu, ale niezmiennie w funkcji częstotliwości – LFI. Model matematyczny można otrzymać przez uzmiennienie macierzy wzmocnień w równaniu (1.1):

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{v}(k) \quad (1.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(k) &\in \mathbb{R}^{p_k \times m_k}, \\ \mathbf{v}(k) &\in \mathbb{R}^{m_k}, \\ \mathbf{y}(k) &\in \mathbb{R}^{p_k}, \\ m_k, p_k &\in \mathbb{N}, \\ k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4. Układy dynamiczne niestacjonarne są zmienne zarówno w dziedzinie czasu jak i częstotliwości – LTV. Można je opisać za pomocą równań w przestrzeni zmiennych stanu o macierzach układu zależnych od czasu:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{v}(k) \quad (1.6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k) &\in \mathbb{R}^{n_{k+1} \times n_k}, \\ \mathbf{B}(k) &\in \mathbb{R}^{n_{k+1} \times m_k}, \\ \mathbf{C}(k) &\in \mathbb{R}^{p_k \times n_k}, \\ \mathbf{D}(k) &\in \mathbb{R}^{p_k \times m_k}, \\ \mathbf{x}(k) &\in \mathbb{R}^{n_k}, \\ \mathbf{v}(k) &\in \mathbb{R}^{m_k}, \\ \mathbf{y}(k) &\in \mathbb{R}^{p_k}, \\ m_k, n_k, p_k &\in \mathbb{N}, \\ k &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Macierze układu $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ mogą się zmieniać w funkcji czasu, przy czym należy zaznaczyć, że w przeciwieństwie do modelu układu stacjonarnego wymiary poszczególnych macierzy oraz wektorów stanu, wejścia i wyjścia układu również mogą być funkcjami czasu. Podobnie jak w przypadku stacjonarnym, jeżeli w układzie występuje niezerowe opóźnienie między wyjściem i wejściem, to $\mathbf{D}(k)$ jest macierzą zerową.

We wprowadzonym modelu niestacjonarnym (1.5)–(1.6) dozwolona jest zmienność w czasie wymiarów wektorów wejść, wyjść i stanu. Dopuszczając zmienność współczynników macierzy układu niestacjonarnego, zawsze możliwe jest wystąpienie takiej kombinacji wartości tych współczynników, dla których np. rząd układu będzie mniejszy od

rzędu macierzy układu. Podobnie może być w przypadku wektorów wejścia, których wartości będą zerowane przez okresowo zerowe wartości współczynników macierzy wejścia. Analogiczną sytuację można rozpatrywać dla wyjść układu, które mogą być dostępne jedynie w określonych przedziałach czasu. Zerowanie wymiaru wektora, np. $n_k = 0$, można zastąpić założeniem $n_k \neq 0$, $\mathbf{v}(k) = 0$, lecz jest to mało efektywne rozwiązanie, gdy zerowanie wymiaru wektora następuje na nieskończonym odcinku czasu. Jest tak np. w przypadku analizy układów w skończonym horyzoncie czasowym, rozpatrywanych w niniejszej pracy, dlatego konieczne jest wprowadzenie ogólniejszego modelu. Dzięki temu model układu o skończonym horyzoncie czasowym może być zapisany za pomocą skończonego wymiarowych macierzy.

Alternatywnie stosowany jest zapis równań (1.5) i (1.6) w następującej formie blokowej wektorowo-macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & \mathbf{B}(k) \\ \mathbf{C}(k) & \mathbf{D}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Najszerszą klasę układów liniowych tworzą układy dynamiczne niestacjonarne. Obejmują one trzy wcześniejsze klasy układów: LTFI, LTI i LFI. Ważną cechą układów niestacjonarnych jest nie tylko zależność współczynników poszczególnych macierzy układu od czasu, ale również możliwa zmienność wymiarów macierzy. W praktyce pozwala to na modelowanie i analizę układów o zmiennej w czasie liczbie wejść, wyjść oraz zmiennych stanu (układy zmiennego rzędu). W praktyce zmiany takie mogą być wprowadzone za pomocą przełączników dołączających lub odłączających wybrane bloki składowe systemu.

W analizie układu niestacjonarnego konieczne jest uwzględnienie nie tylko bieżących macierzy układu, jak w przypadku układów stacjonarnych, ale również charakteru zmian tych macierzy. Opisanie układu niestacjonarnego, który lepiej oddaje istotne własności tego układu, jest opisem operatorowy. Podobną notację można znaleźć w literaturze poświęconej zagadnieniom związanym z układami niestacjonarnymi [48], [83], [173], [196], [234].

Teoria układów stacjonarnych liniowych jest bardzo dobrze rozwinięta [6], [110], [112], [113], [132], [133], [187], [256], [275] i ma wiele aplikacji praktycznych [160], [308], [323], [324]. Ograniczenia narzucane przez strukturę zawartą w równaniach (1.2) i (1.3) są jednak na tyle poważne, że metody liniowe nie prowadzą do wyników użytecznych dla szerokiej klasy problemów, zarówno niestacjonarnych jak i nieliniowych. Jeżeli model liniowy stacjonarny jest nadmiernym uproszczeniem rzeczywistości, konieczne jest posłużenie się dokładniejszym modelem, zdolnym do wierniejszego odwzorowania zachodzących zjawisk. Wprowadzenie zwartej notacji do opisu układów niestacjonarnych jest możliwe dzięki rozwijanej w ostatnich latach teorii operatorów liniowych [1], [46], [55], [56], [68], [69], [83], [88], [89], [172], [173], [234], [263], oraz jej zastosowań do układów dyskretnych niestacjonarnych [48], [83], [196]. Wprowadzona poniżej notacja umożliwia operatorowy opis układów liniowych, dyskretnych, niestacjonarnych, o zmiennej liczbie wejść, wyjść i zmiennych stanu VIVO i jest zbliżona do notacji stosowanej w pracy [48]. Warto podkreślić, że obecnie większość rzeczywistych układów sterowania jest rozpatrywana

jako MIMO lub SISO, mimo iż w rzeczywistości są układami o zmiennej długości wektora stanu oraz liczby wejść i wyjść. Przykładem takiego układu jest skład wagonów. Bez dołączonej lokomotywy układ nie ma wejścia siły, natomiast ma wektor stanu o długości zależnej od wielkości składu i wyjście (położenie). Dołączenie lokomotywy powoduje pojawienie się wejścia układu i zwiększenie jego rzędu, a odłączenie wagonów – zmniejszanie rzędu układu.

1.1. OPERATORY WEKTOROWE

Posługując się modelem układu (1.5)–(1.6), wektory wejścia, wyjścia i stanu przyjmują postać kolumnową o liczbie wierszy odpowiadającej bieżącej liczbie odpowiednio wejść, wyjść i zmiennych stanu. Przykładowo, w otoczeniu pewnego momentu k wektor wejścia może mieć następujące wartości:

$$\mathbf{v}(k-1) = \begin{bmatrix} v_1(k-1) \\ v_2(k-1) \end{bmatrix}, \mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \end{bmatrix}, \mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} v_1(k+1) \\ v_2(k+1) \end{bmatrix}, \mathbf{v}(k+2) = \mathbf{[]} \quad (1.8)$$

gdzie:

$v_i(k)$ – sygnał na i -tym wejściu w chwili k ,

$\mathbf{[]}$ – pusty wektor wejścia, czyli w chwili $k+2$ układ nie ma wejść.

Definicja 1.1. Operatorem kolumnowym zmiennej w czasie sekwencji wektorów kolumnowych $\dots, \mathbf{v}(k-1), \mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k+1), \dots$ nazywamy blokowy wektor kolumnowy o następującej postaci:

$$\hat{\mathbf{v}} = \left[\dots, \mathbf{v}^T(k-1), \mathbf{v}^T(k), \mathbf{v}^T(k+1), \dots \right]^T \quad (1.9)$$

lub równoważnie

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{v}(k-1) \\ \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{v}(k+1) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

W podobny sposób można zapisać operatory wyjścia:

$$\hat{\mathbf{y}} = \left[\dots, \mathbf{y}^T(k-1), \mathbf{y}^T(k), \mathbf{y}^T(k+1), \dots \right]^T$$

i stanu układu

$$\hat{\mathbf{x}} = [\dots, \mathbf{x}^T(k-1), \mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}^T(k+1), \dots]^T.$$

Wymiary wektorów składowych mogą się zmieniać w funkcji czasu. Aby było możliwe ich późniejsze wydzielenie, dla każdego operatora kolumnowego konieczne jest wprowadzenie *sekwencji wymiarów*.

Definicja 1.2. *Sekwencja wymiarów* operatora wejścia $\hat{\mathbf{v}}$ jest określona jako następujący zbiór wymiarów wektora wejścia $\mathbf{v}(k)$ w poszczególnych momentach k :

$$\mathbf{m} = \{m_k : k \in \mathbb{Z}, m_k \in \mathbb{N}, \mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^{m_k}\} = [\dots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, m_{k+2}, \dots] \quad (1.10)$$

Przestrzeń, do której należą sekwencje wejściowe $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}$, jest określona jako następujący iloczyn kartezjański:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \dots \times \mathcal{M}_{k-1} \times \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_{k+1} \times \mathcal{M}_{k+2} \times \dots \\ &= \dots \times \mathbb{R}^{m_{k-1}} \times \mathbb{R}^{m_k} \times \mathbb{R}^{m_{k+1}} \times \mathbb{R}^{m_{k+2}} \times \dots = \mathbb{R}^{\mathbf{m}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdzie $\mathcal{M}_k = \mathbb{R}^{m_k}$.

Przez analogię można zdefiniować sekwencje wymiarów \mathbf{n} , \mathbf{p} dla operatorów stanu $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}$ i wyjścia $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{P}$ w następujący sposób:

$$\mathbf{n} = \{n_k : k \in \mathbb{Z}, n_k \in \mathbb{N}, \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_k}\} = [\dots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, n_{k+2}, \dots] \quad (1.12)$$

$$\mathcal{N} = \dots \times \mathcal{N}_{k-1} \times \mathcal{N}_k \times \mathcal{N}_{k+1} \times \mathcal{N}_{k+2} \times \dots = \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{p} = \{p_k : k \in \mathbb{Z}, p_k \in \mathbb{N}, \mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^{p_k}\} = [\dots, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots] \quad (1.14)$$

$$\mathcal{P} = \dots \times \mathcal{P}_{k-1} \times \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_{k+1} \times \mathcal{P}_{k+2} \times \dots = \mathbb{R}^{\mathbf{p}} \quad (1.15)$$

Dowolny operator wektorowy jest *skończenie wymiarowy*, jeżeli odpowiadająca mu sekwencja wymiarów jest zerowa poza pewnym określonym, skończonym zbiorem sygnatur czasowych k . Operator wektorowy jest skończenie wymiarowy, gdy

$$\forall_{k < k_0 \vee k \geq k_0 + N} (m_k = 0) \wedge (n_k = 0) \wedge (p_k = 0) \quad (1.16)$$

Definicja 1.3. Układ dyskretny jest *określony na skończonym horyzoncie czasowym* wtedy i tylko wtedy, gdy składowe sekwencji wymiarów m_k, n_k, p_k spełniają zależność (1.16) dla dowolnych skończonych wartości $k_0, N \in \mathbb{Z}$, gdzie k_0 – moment początkowy, a N – długość horyzontu czasowego.

Dla operatorów kolumnowych określonych w horyzoncie $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$ przyjęto następującą notację:

$$\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0 + N - 1]} = [\mathbf{v}^T(k_0), \mathbf{v}^T(k_0 + 1), \dots, \mathbf{v}^T(k_0 + N - 1)]^T \quad (1.17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0 + N - 1]} = [\mathbf{x}^T(k_0), \mathbf{x}^T(k_0 + 1), \dots, \mathbf{x}^T(k_0 + N - 1)]^T \quad (1.18)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]} = [\mathbf{y}^T(k_0), \mathbf{y}^T(k_0+1), \dots, \mathbf{y}^T(k_0+N-1)]^T \quad (1.19)$$

W praktycznych zagadnieniach analizy i syntezy sterowania, szczególnie układów zmiennych w czasie, często układ określony w nieskończonym horyzoncie czasowym rozpatrywany jest w skończonym horyzoncie czasowym. Podobnie jest wówczas, gdy rozpatrywany układ jest określony jedynie w pewnym wycinku przedziału. Dla układu rozpatrywanego w skończonym horyzoncie czasowym o długości N kroków i początku w momencie k_0 zastosowano notację $k = k_0, k_0+1, \dots, k_0+N-1$, natomiast dla początku w momencie $k_0 = 0$ – notację $k = 0, 1, \dots, N-1$. Zachodzi wówczas:

$$\forall_{k < 0 \vee k \geq N} (m_k = 0) \wedge (n_k = 0) \wedge (p_k = 0) \quad (1.20)$$

Iloczynem skalarnym w przestrzeni \mathcal{M} operatorów wektorowych $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{M}$ i $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}$ nazywa się sumę iloczynów skalarnych wektorów składowych $\mathbf{u}(k)$ i $\mathbf{v}(k)$ dla odpowiadających sobie sygnatur czasowych:

$$\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \sum_k \langle \mathbf{u}(k), \mathbf{v}(k) \rangle_{\mathbb{R}^{m_k}} = \sum_k \mathbf{u}^T(k) \mathbf{v}(k) = \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{v}} \quad (1.21)$$

przy czym dla wektorów o zerowych wymiarach iloczyn skalarny jest równy zero

$$\forall_{m_k=0} \langle \mathbf{u}(k), \mathbf{v}(k) \rangle = 0 \quad (1.22)$$

Norma operatora wektorowego jest indukowana przez iloczyn skalarny, zatem

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|_2 = \sqrt{\langle \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle} \quad (1.23)$$

Jeżeli norma operatorowego $\hat{\mathbf{v}}$ jest skończona, $\hat{\mathbf{v}}$ należy do przestrzeni operatorów wektorowych \mathcal{M} ze skończoną normą l_2 , oznaczaną dalej $l_2^{\mathcal{M}}$. Z powodu ograniczonej normy operatorów przestrzenie $l_2^{\mathcal{M}}, l_2^{\mathcal{N}}, l_2^{\mathcal{P}}$ spełniają aksjomaty przestrzeni Hilberta.

1.2. OPERATOR PRZEJŚCIA UKŁADU

Zdefiniowano operatory wektorowe wejścia układu $\hat{\mathbf{v}}$ w przestrzeni \mathcal{M} oraz operatory wektorowe wyjścia układu $\hat{\mathbf{y}}$ w przestrzeni \mathcal{P} . Operatory wektorowe można traktować jako sekwencje lub sygnały odpowiednio wejść i wyjść. Wówczas \mathcal{M} jest przestrzenią wejścia, a \mathcal{P} – przestrzenią wyjścia. Dla tak określonych przestrzeni można zdefiniować operator przejścia $\hat{\mathbf{T}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$, który odwzorowuje sygnały wejściowe $\hat{\mathbf{v}}$ w sygnały wyjściowe $\hat{\mathbf{y}}$. Zależność wiążąca sygnały ma następującą postać:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{v}} \quad (1.24)$$

W przypadku skończonego horyzontu czasowego $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$ można zapisać alternatywnie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k_0) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k_0 + N - 1) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0 + N - 1]} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(k_0 + N - 1) \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Niech $\mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ oznacza przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych $l_2^{\mathcal{M}} \rightarrow l_2^{\mathcal{P}}$. Operator $\hat{\mathbf{T}}$ jest ograniczony, jeżeli należy do przestrzeni $\mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$, czyli dla każdego $\hat{\mathbf{v}} \in l_2^{\mathcal{M}}$, $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}} \in l_2^{\mathcal{P}}$. Norma ograniczonego operatora $\hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ jest określona następująco:

$$\|\hat{\mathbf{T}}\| = \|\hat{\mathbf{T}}\|_2 = \sup_{\hat{\mathbf{v}} \in l_2^{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{v}} \neq 0} \frac{\|\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{v}}\|_2} \quad (1.26)$$

Ograniczony operator przejścia $\hat{\mathbf{T}}$ można zapisać w postaci macierzy blokowej [1], której składowymi są macierze $\mathbf{T}(i, j)$, takie że:

$$\forall_{\hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P})} \hat{\mathbf{T}} = \left\{ \mathbf{T}(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{T}(i, j) \in \mathbb{R}^{p_i \times m_j} \right\} \quad (1.27)$$

Dla układów o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO) składowe $\mathbf{T}(i, j)$ są skalarami i można je interpretować jako odpowiedź układu w momencie i na sygnał delty Kroneckera wygenerowany w momencie j . Dla układów o wielu wejściach i wyjściach (MIMO) i VIVO macierz $\mathbf{T}(i, j)$ można interpretować jako odpowiedzi poszczególnych wyjść układu w chwili i na sygnały delty Kroneckera podane na poszczególne wejścia w momencie j .

Dla układu stacjonarnego istotna jest tylko różnica $i - j$, ponieważ przesunięcie w czasie sygnału wejściowego skutkuje jedynie takim samym przesunięciem w czasie sygnału wyjściowego. Można zatem zapisać:

$$\forall_{i, j, k \in \mathbb{Z}} \mathbf{T}(i, j) = \mathbf{T}(i + k, j + k) \quad (1.28)$$

Operator $\hat{\mathbf{T}}$ układu stacjonarnego ma strukturę operatora Toeplitza [48], [173], [234] – wszystkie składowe macierze blokowe $\mathbf{T}(i, j)$ znajdujące się na przekątnych, spełniające warunek $j = i + k$, gdzie k – przekątna, a i – numer wiersza bądź element na przekątnej, są sobie równe dla ustalonej wartości k . Dyskretną funkcję przejścia układu stacjonarnego, która nie zależy od wartości zmiennej i , można zapisać następująco:

$$\forall_{i \in \mathbb{Z}} T(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{T}(i, i + k) z^k \quad (1.29)$$

Z powodu ograniczonej skończoności wymiarowego operatora przejścia $\hat{\mathbf{T}}$, również w sensie normy Frobeniusa:

$$\|\hat{\mathbf{T}}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \mathbf{T}_{ij}^2(k,l)}$$

jest on operatorem Hilberta-Schmidta z przestrzeni l_2^M w l_2^P .

1.3. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI OPERATORA PRZEJŚCIA

Przyczynowość, antyprzyczynowość i nieprzyczynowość są fundamentalnymi własnościami układów dynamicznych. Deterministyczne układy fizyczne ciągle należą do klasy układów przyczynowych. W klasie układów dyskretnych po jednoczesnym wprowadzeniu pewnego dodatkowego opóźnienia możliwa jest jednak fizyczna realizacja układów antyprzyczynowych i nieprzyczynowych [129], [189]. Wykorzystywane w niniejszej pracy podejście, oparte na operatorze przejścia układu, może być zastosowane dla dowolnej wymienionej klasy układów. W następnych podrozdziałach omówiono własności operatora przejścia dla poszczególnych klas układów, w tym również dla układu statycznego.

1.3.1. Układ przyczynowy

Jedną z fundamentalnych własności deterministycznych układów dynamicznych jest przyczynowość. Układ jest układem przyczynowym, jeżeli w dowolnej chwili jego odpowiedzi zależą jedynie od teraźniejszych i przeszłych wartości wejścia [129], [189], czyli reakcja układu na dowolne pobudzenie może nastąpić najwcześniej w momencie pojawienia się tego pobudzenia na wejściu układu. Innymi słowy, skutek nie może wyprzedzać przyczyny. Spełnienie warunku przyczynowości prowadzi do wyzerowania wszystkich składowych macierzy $\mathbf{T}(i, j)$ dla $i < j$:

$$\mathbf{T}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{C}(i)\mathbf{A}(i-1)\cdots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{B}(j) & i > j \\ \mathbf{D}(i) & i = j \\ \mathbf{0} & i < j \end{cases} \quad (1.30)$$

Operator przejścia układu zapisany dla horyzontu czasowego $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$ ma wówczas następującą postać:

$$\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \begin{bmatrix} & \mathbf{D}(k_0) & & & \\ & \mathbf{C}(k_0+1)\mathbf{B}(k_0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \vdots & \mathbf{D}(k_0+1) & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}(k_0+N-1)\mathbf{A}(k_0+N-2)\cdots\mathbf{A}(k_0+1)\mathbf{B}(k_0) & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}(k_0+N-1)\mathbf{A}(k_0+N-2)\cdots\mathbf{A}(k_0+1)\mathbf{B}(k_0) & \cdots & \cdots & \mathbf{D}(k_0+N-1) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Operator wejściowo-wyjściowy $\hat{\mathbf{T}}$ może być równoważnie zdefiniowany jako zbiór odpowiedzi impulsowych układu niestacjonarnego przesuniętych w czasie. Dla układu przyczynowego o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO) oraz horyzoncie czasowym jak wyżej ma następującą postać:

$$\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \begin{bmatrix} h(k_0, k_0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(k_0+1, k_0) & h(k_0+1, k_0+1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ h(k_0+N-1, k_0) & \cdots & \cdots & h(k_0+N-1, k_0+N-1) \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

gdzie $h(k_1, k_0)$ – odpowiedź układu (1.5)–(1.6) na sygnał delty Kroneckera $\delta(k-k_0)$ w momencie k_1 , czyli po czasie k_1-k_0 próbek.

Ograniczony operator przejścia układu przyczynowego $\hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{L}$ należy do przestrzeni operatorów blokowych dolnych, trójkątnych, określonej następująco:

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) = \{ \hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) : \mathbf{T}(i, j) = \mathbf{0}, i < j \} \quad (1.33)$$

1.3.2. Układ antyprzyczynowy

Przeciwieństwem układu przyczynowego jest układ antyprzyczynowy, czyli taki, w którym odpowiedź układu wyłącznie zależy od przyszłych wartości sygnału wejściowego. Wówczas skutek musi poprzedzać przyczynę. Układ taki można opisać następującym układem równań w przestrzeni stanu:

$$\mathbf{x}'(k-1) = \mathbf{A}'(k)\mathbf{x}'(k) + \mathbf{B}'(k)\mathbf{v}(k) \quad (1.34)$$

$$\mathbf{y}'(k) = \mathbf{C}'(k)\mathbf{x}'(k) \quad (1.35)$$

Klasa układów antyprzyczynowych uzupełnia klasę układów przyczynowych. Mimo że układy antyprzyczynowe nie występują w naturalny sposób w przyrodzie, to są wykorzystywane m.in. w zagadnieniach projektowania filtrów cyfrowych [129].

Macierze blokowe, składowe operatora przejścia układu, są określone następująco:

$$\mathbf{T}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{0} & i \geq j \\ \mathbf{C}'(i)\mathbf{A}'(i+1)\cdots\mathbf{A}'(j-1)\mathbf{B}'(j) & i < j \end{cases} \quad (1.36)$$

Ograniczony operator przejścia układu antyprzyczynowego należy do przestrzeni operatorów blokowych górnych, trójkątnych, spełniającej warunek:

$$\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) = \{ \hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}) : \mathbf{T}(i, j) = \mathbf{0}, i > j \} \quad (1.37)$$

1.3.3. Układ nieprzyczynowy

Ogólniejszym przypadkiem jest układ charakteryzujący się mieszanymi własnościami układu przyczynowego i antyprzyczynowego. Jest on nazywany układem o mieszanej przyczynowości lub nieprzyczynowym. Układ nieprzyczynowy, podobnie jak układ antyprzyczynowy, nie występuje w naturalny sposób w przyrodzie, lecz możliwa jest jego realizacja w postaci operatora przejścia. Układ taki można opisać równaniami (1.5)–(1.6) i (1.34)–(1.35), przy czym macierze blokowe, składowe operatora przejścia układu, są określone następująco:

$$\mathbf{T}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{C}(i)\mathbf{A}(i-1)\cdots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{B}(j) & i > j \\ \mathbf{D}(i) & i = j \\ \mathbf{C}'(i)\mathbf{A}'(i+1)\cdots\mathbf{A}'(j-1)\mathbf{B}'(j) & i < j \end{cases} \quad (1.38)$$

Ograniczony operator przejścia układu o mieszanej przyczynowości należy do przestrzeni operatorów ograniczonych $\hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{X}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$.

1.3.4. Układ niestacjonarny statyczny

Mimo że układ niestacjonarny statyczny zawiera się zarówno w klasie układów przyczynowych, omówionej w rozdziale 1.3.1, jak i w klasie układów nieprzyczynowych, omówionej w rozdziale 1.3.3, to z uwagi na szczególną postać operatora przejścia omówiono go osobno. Przestrzeń ograniczonych operatorów diagonalnych $\mathcal{D} = \mathcal{L} \cap \mathcal{U}$ to część wspólna wcześniej określonych przestrzeni \mathcal{U} i \mathcal{D} , do której należą m.in. ograniczone operatory przejścia układów niestacjonarnych statycznych (LFI). Macierze blokowe, składowe operatora przejścia układu $\hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{D}$, są określone następująco:

$$\mathbf{T}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{D}(i) & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases} \quad (1.39)$$

Przestrzenie \mathcal{U} , \mathcal{L} i \mathcal{D} mają następujące, podstawowe własności:

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{U} \subset \mathcal{U}, \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \subset \mathcal{L}, \mathcal{L}^* = \mathcal{U}, \mathcal{U}^* = \mathcal{L}, \mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D} \quad (1.40)$$

gdzie $*$ – przestrzeń sprzężona.

W rozpatrywanym przypadku rzeczywistym i skończonym horyzoncie czasowym sprzężenie odpowiada transpozycji macierzy operatora przejścia układu.

Jeżeli operator $\hat{\mathbf{D}} \in \mathcal{D}$ jest odwracalny, to jego odwrotność należy do tej samej przestrzeni $\hat{\mathbf{D}}^{-1} \in \mathcal{D}$. Podobną własność ma odwracalny operator $\hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{L}$, wówczas $\hat{\mathbf{T}}^{-1} \in \mathcal{L}$.

Promień spektralny operatora $\hat{\mathbf{X}}$ można zdefiniować następująco:

$$r(\hat{\mathbf{X}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{X}}^k\|^{1/k} \quad (1.41)$$

przy czym spełnia on warunek $r(\hat{\mathbf{X}}) \leq \|\hat{\mathbf{X}}\|$.

W przestrzeni Banacha spełnienie warunku $r(\hat{\mathbf{X}}) < 1$ gwarantuje istnienie ograniczonego operatora $(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{X}})^{-1} \in \mathcal{L}$, który można przedstawić w postaci szeregu potęgowego Neumanna:

$$(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{X}})^{-1} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}^2 + \dots$$

gdzie $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{L}$.

1.4. OPERATOR PRZESUNIĘCIA CZASOWEGO

Operator przesunięcia czasowego $\hat{\mathbf{Z}}$ określony dla układów stacjonarnych umożliwia zapisanie modelu układu w postaci zwartej funkcji przejścia. Przez analogię można wprowadzić operator przesunięcia $\hat{\mathbf{Z}}$ dla układów niestacjonarnych.

Jeżeli sekwencja wymiarów jest dana w postaci $\mathbf{m} = [\dots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \dots]$, to taka sama sekwencja przesunięta o jeden krok w lewo ma postać: $\mathbf{m}^{(1)} = [\dots, m_{k-2}, m_{k-1}, m_k, \dots]$. Lewostronny operator przesunięcia czasowego $\hat{\mathbf{Z}} \in \mathcal{U}$ sygnałów $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}$ spełnia następującą zależność:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{Z}}[\dots, \mathbf{v}(k-1), \mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k+1), \dots]^T \\ &= [\dots, \mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k+1), \mathbf{v}(k+2), \dots]^T \end{aligned} \quad (1.42)$$

Operator $\hat{\mathbf{Z}} \in \mathcal{U}$ jest określony następująco:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \{ \mathbf{Z}(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}, \mathbf{Z}(i, j) \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j} \} \quad (1.43)$$

gdzie m_i, m_j – elementy sekwencji wymiarów \mathbf{m} .

Macierze składowe operatora przesunięcia są określone następująco:

$$\mathbf{Z}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j} & j = i + 1 \\ \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j} & j \neq i + 1 \end{cases} \quad (1.44)$$

Tak określony operator przesunięcia $\hat{\mathbf{Z}} \in \mathcal{U}$ spełnia własności:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{Z}}^T &= \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\mathbf{Z}}^T\hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\mathbf{Z}}^{-1} = \hat{\mathbf{Z}}^T, \\ \hat{\mathbf{Z}}^{-1}\mathcal{L} &\subset \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}\hat{\mathbf{Z}}^{-1} \subset \mathcal{L}, \quad \hat{\mathbf{Z}}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}\hat{\mathbf{Z}} \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \cap \hat{\mathbf{Z}}^{-1}\mathcal{L} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{Z}}\mathcal{U} \cap \mathcal{L} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Operator $\hat{\mathbf{Z}}^{-1}$ jest operatorem przesunięcia w prawo.

1.5. OPERATORY DIAGONALNE

Wykorzystując operator $\hat{\mathbf{Z}}$, rekurencyjny model w przestrzeni zmiennych stanu (1.5)–(1.6) można przekształcić w operator przejścia układu $\hat{\mathbf{T}}$. Aby tego dokonać, niezbędne jest zdefiniowanie nowych operatorów blokowych diagonalnych na podstawie macierzy układu (1.5)–(1.6) $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ w następujący sposób:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(k-1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}(k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}(k+1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}(k-1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}(k+1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(k-1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}(k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}(k+1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(k-1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}(k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}(k+1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Układ (1.5)–(1.6) można zatem zapisać w następującej, rekurencyjnej postaci diagonalnej:

$$\hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}} \quad (1.49)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{v}} \quad (1.50)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &\in l_2^M, \\ \hat{\mathbf{y}} &\in l_2^P, \\ \hat{\mathbf{x}} &\in l_2^N, \\ \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{x}} &\in l_2^{N^{(l)}}. \end{aligned}$$

Po przekształceniu równań (1.49)–(1.50) otrzymano:

$$(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}}) \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}} \quad (1.51)$$

Jeżeli czynnik $(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}})$ ma ograniczoną odwrotność, można zapisać:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}} \quad (1.52)$$

oraz

$$\hat{\mathbf{y}} = (\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{C}} (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{v}} \quad (1.53)$$

gdzie $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{C}} (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}$.

Operatory $\hat{\mathbf{Z}}$ i $\hat{\mathbf{Z}}^{-1}$ występujące w powyższych zależnościach są operatorami przesunięcia czasowego spełniającymi podobną rolę, jak operatory z i z^{-1} w transformacie \mathcal{Z} dla układów stacjonarnych. W pracy [48] pokazano, że czynnik $(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}})$ ma ograniczoną odwrotność oraz układ jest asymptotycznie stabilny, jeżeli promień spektralny spełnia warunek

$$r(\hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}}) < 1,$$

przy czym

$$r(\hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{A}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{A}}^{(k)} \dots \hat{\mathbf{A}}^{(1)}\|^{1/k}, \quad \hat{\mathbf{A}}^{(k)} = \hat{\mathbf{Z}}^{-k} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{Z}}^k \quad (1.54)$$

Stabilność asymptotyczna dotyczy analizy układu, przy braku wymuszenia $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Pojęcia związane ze stabilnością układów niestacjonarnych podano w rozdziale 1.9.

1.6. DYSKRETNE OPERATORY EWOLUCYJNE

Inną, możliwą notacją, która prowadzi do operatora przejścia układu niestacjonarnego, jest zapis układu za pomocą macierzowych operatorów ewolucyjnych [54], [83], [196], definiowany przez analogię do operatorów ewolucyjnych dla układów ciągłych. Zapis ten wymaga zdefiniowania macierzowego operatora ewolucji w następującej postaci:

$$\mathbf{S}(k, k_0) = \begin{cases} \mathbf{I} & k = k_0 \\ \mathbf{A}(k-1) \mathbf{A}(k-2) \dots \mathbf{A}(k_0) & k > k_0 \\ \mathbf{A}(k) \mathbf{A}(k+1) \dots \mathbf{A}(k_0-1) & k < k_0 \end{cases} \quad (1.55)$$

Zależność ta definiuje operator ewolucyjny \mathbf{S} , zarówno dla układów przyczynowych $k \geq k_0$ jak i antyprzyczynowych $k < k_0$ oraz nieprzyczynowych. Operator (1.55) wiąże stan układu przy braku wymuszenia $\hat{\mathbf{v}} = 0$ w dwóch, dowolnych momentach w następujący sposób:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{S}(k, k_0) \mathbf{x}(k_0) \quad (1.56)$$

Dla ustalonej wartości czasu k oraz układu o niezmienniczych wymiarach macierzy stanu operator $\mathbf{S}(k, k_0)$ jest macierzą o wymiarach macierzy stanu. Operator ewolucyjny $\mathbf{S}(k, k_0)$ układu przyczynowego może być wykorzystany do określania stabilności układów niestacjonarnych.

Aby operatory były ograniczonymi macierzami, układ musi być określony w skończonym horyzoncie czasowym. Dla układu przyczynowego, dla którego zachodzi $\forall_{k < k_0 \vee k \geq k_0 + N} m_k = 0 \wedge n_k = 0 \wedge p_k = 0$, lub równoważnie rozpatrywanego w horyzoncie $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$, konieczne jest zdefiniowanie następujących, macierzowych operatorów ewolucyjnych:

$$\hat{\mathbf{L}}_{[k_0, k_0 + N - 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(k_0, k_0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(k_0 + 1, k_0) & \mathbf{S}(k_0 + 1, k_0 + 1) & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(k_0 + N - 1, k_0) & \mathbf{S}(k_0 + N - 1, k_0 + 1) & \ddots & \mathbf{S}(k_0 + N - 1, k_0 + N - 1) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

oraz

$$\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0 + N - 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(k_0, k_0) \\ \mathbf{S}(k_0 + 1, k_0) \\ \vdots \\ \mathbf{S}(k_0 + N - 1, k_0) \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Posługując się operatorami (1.57)–(1.58) i zdefiniowanymi $\hat{\mathbf{B}}$ i $\hat{\mathbf{C}}$, równanie stanu (1.5) można zapisać w następującej postaci operatorowej:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{N}}\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}} \quad (1.59)$$

Wówczas równanie wyjścia (1.6) ma następującą postać operatorową:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}}\mathbf{x}_0 + (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}})\hat{\mathbf{v}} \quad (1.60)$$

Podstawiając $\hat{\mathbf{T}} = (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}})$, otrzymano macierzowy operator wejściowo-wyjściowy układu (1.5)–(1.6). Stąd trajektoria wyjścia dana jest równaniem

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}}\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}} \quad (1.61)$$

Odpowiedź swobodną układu dla $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ definiuje człon $\hat{\mathbf{y}}_0 = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}}\mathbf{x}_0$, a odpowiedź układu przy zerowych warunkach początkowych, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, człon $\hat{\mathbf{y}}_v = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{v}}$. W szczególnym przypadku dla układu, dla którego

$$\forall_{k < k_0 \vee k \geq k_0 + N - 1} m_k = 0 \wedge n_k = 0 \wedge p_k = 0,$$

lub rozpatrywanego w horyzoncie $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$, możliwe jest zapisanie operatorów $\hat{\mathbf{L}}_{[k_0, k_0 + N - 1]}$, $\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0 + N - 1]}$ następująco:

$$\hat{\mathbf{L}}_{[k_0, k_0 + N - 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(k_0 + 1) & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(k_0 + N - 2) \dots \mathbf{A}(k_0 + 1) & \dots & \mathbf{A}(k_0 + N - 2) & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0 + N - 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(k_0) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(k_0 + N - 2) \dots \mathbf{A}(k_0) \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

1.7. KLASYFIKACJA UKŁADÓW NIESTACJONARNYCH

Przy opisie i analizie układu niestacjonarnego pojawia się trudność, spowodowana nieznaną wartością zmiennych w czasie parametrów w całej dziedzinie czasu. Nie występowała ona w przypadku układów stacjonarnych – tam naturalnym założeniem było przyjęcie, że współczynniki układu są inwariantne dla całej dziedziny czasu $k \in \mathbb{Z}$. W układach niestacjonarnych istnieje kilka podstawowych klas zmienności, które wymieniono poniżej.

1. Skończony horyzont czasowy. Układ jest określony jedynie w pewnym, ograniczonym, skończonym horyzoncie czasowym:

$$\forall_{k < k_0 \vee k \geq k_0 + N} m_k = 0 \wedge n_k = 0 \wedge p_k = 0$$

Istotą jest tu brak założeń odnośnie do przyszłych i przeszłych zachowań układu – przed horyzontem, na którym został określony, jak i poza nim.

2. Zmienność periodyczna. Zmiany w układzie następują okresowo. W związku z tym, znając okres niestacjonarności układu, można wyznaczyć macierze modelu w przestrzeni stanu dla dowolnych momentów k z warunków:

$$\mathbf{A}(k + iP) = \mathbf{A}(k) \quad (1.64)$$

$$\mathbf{B}(k + iP) = \mathbf{B}(k) \quad (1.65)$$

$$\mathbf{C}(k + iP) = \mathbf{C}(k) \quad (1.66)$$

$$\mathbf{D}(k + iP) = \mathbf{D}(k) \quad (1.67)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} P & - \text{dyskretny okres zmienności parametrów układu mierzony w krokach,} \\ 0 & \leq k < P, \\ i, k & \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Teoria układów niestacjonarnych periodycznych jest najlepiej rozwinięta spośród wszystkich klas układów niestacjonarnych [22], [43], [63], [67], [121], [162], [244], [253], [299].

3. Układ prawie stacjonarny. Jest on niestacjonarny jedynie wewnątrz określonego przedziału czasu $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$, a stacjonarny poza nim. Jest tak wówczas, gdy zmiany w układzie nie mają charakteru periodycznego, lecz tworzą pewną, określoną sekwencję zmian, która dla $k \geq k_0 + N$ oraz $k < k_0$ osiąga ustalony poziom, i układ staje się stacjonarny. Wtedy macierze modelu w przestrzeni stanu poza zakresem niestacjonarności mogą być wyznaczone z następujących warunków:

$$\mathbf{A}(k) = \begin{cases} \mathbf{A}(k_0 - 1) & k < k_0 \\ \mathbf{A}(k) & k_0 \leq k < k_0 + N \\ \mathbf{A}(k_0 + N) & k \geq k_0 + N \end{cases} \quad (1.68)$$

$$\mathbf{B}(k) = \begin{cases} \mathbf{B}(k_0 - 1) & k < k_0 \\ \mathbf{B}(k) & k_0 \leq k < k_0 + N \\ \mathbf{B}(k_0 + N) & k \geq k_0 + N \end{cases} \quad (1.69)$$

$$\mathbf{C}(k) = \begin{cases} \mathbf{C}(k_0 - 1) & k < k_0 \\ \mathbf{C}(k) & k_0 \leq k < k_0 + N \\ \mathbf{C}(k_0 + N) & k \geq k_0 + N \end{cases} \quad (1.70)$$

$$\mathbf{D}(k) = \begin{cases} \mathbf{D}(k_0 - 1) & k < k_0 \\ \mathbf{D}(k) & k_0 \leq k < k_0 + N \\ \mathbf{D}(k_0 + N) & k \geq k_0 + N \end{cases} \quad (1.71)$$

Jest tak m.in. w analizie pracy filtru o zmiennych w czasie współczynnikach. Po wykonaniu określonej sekwencji zmian – przestrojeniu częstotliwości granicznej – współczynniki filtru stabilizują się na określonych wartościach stacjonarnych.

4. Układ prawie okresowy, który jest niestacjonarny, przy czym wewnątrz pewnego, skończonego przedziału czasu, $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$, charakter zmian może być dowolny, natomiast dla czasów $k \geq k_0 + N$ zmiany są okresowe.

5. Układ niestacjonarny o współczynnikach zbieżnych do współczynników układu stacjonarnego dla $k \rightarrow \infty$. Macierze układu zmieniają się w czasie, przy czym wówczas istnieją macierze graniczne $\mathbf{A}_g, \mathbf{B}_g, \mathbf{C}_g, \mathbf{D}_g$ o skończonych wartościach współczynników, takie że istnieją granice, które są odpowiednio równe:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_g, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_g, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_g, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}(k) = \mathbf{D}_g \quad (1.72)$$

W szczególnym przypadku zbieżność ta może mieć charakter monotoniczny.

1.8. PORÓWNANIE NOTACJI OPERATOROWEJ I OPISU W PRZESTRZENI STANU

W poprzednich podrozdziałach zdefiniowano podstawy opisu układu niestacjonarnego za pomocą rachunku operatorowego. Interesujące jest porównanie własności opisanego operatora przejścia w odniesieniu do rekurencyjnych, niestacjonarnych równań w przestrzeni stanu (1.5)–(1.6). W tabeli 1.1 zebrano elementarne działania i relacje obejmujące równoważność realizacji, sumę, iloczyn, odwrotność i sprzężenie zwrotne.

Głównymi zaletami notacji operatorowej jest łatwość wykonywania elementarnych działań na układach. Przykładowo, dla ograniczonych, skończone wymiarowych operatorów suma układów jest sumą ich operatorów przejścia, połączenie kaskadowe odpowiada mnożeniu operatorów, odwrotność układu – odwrotności operatora, wyznaczenie zastępczego operatora dla układu w pętli sprzężenia zwrotnego odbywa się analogicznie do klasycznej, operatorowej funkcji przejścia układu stacjonarnego. Ponadto posługując się opisem operatorowym, nie ma problemu z niejednoznacznością opisu w przestrzeni stanu – dowolne układy są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy opisujące je operatory przejścia są identyczne [271].

Największą wadą opisu operatorowego jest silna, kwadratowa zależność ilości pamięci niezbędnej do przechowania operatora układu od długości horyzontu czasowego. Wyraża się ona zależnością:

$$MEM_{OP} = \left(\sum_k m_k \right) \left(\sum_k p_k \right) \quad (1.73)$$

gdzie m_k i p_k – zmienne odpowiadające liczbie odpowiednio wejść i wyjść układu w chwili k .

W układzie opisanym niestacjonarnym modelem w przestrzeni stanu liczba wymaganej pamięci jest określona następującą zależnością:

$$MEM_{SS} = \sum_k (n_k^2 + n_k m_k + n_k p_k + m_k p_k) \quad (1.74)$$

gdzie n_k – zmienna odpowiadająca rzędowi układu w chwili k .

Powyższe zależności odnoszą się do pojedynczego układu. Jeżeli rozpatrywane jest połączenie układów: suma, iloczyn bądź sprzężenie zwrotne, konieczne jest podstawienie do tych zależności wartości zmiennych n_k , m_k i p_k , odpowiadających układowi zastępczemu. Z reguły prowadzi to do zwiększenia rozmiaru modelu w przestrzeni stanu – rząd układu wypadkowego może być równy sumie rzędów układów składowych, a wymiary operatora przejścia układu wypadkowego – identyczne z wymiarami operatorów przejścia układów składowych.

Posługiwanie się opisem operatorowym dla długich horyzontów czasowych, np. dla $N > 1000$, powoduje nieefektywne wykorzystanie zasobów komputera oraz znaczny wzrost nakładów obliczeniowych. W dużym stopniu rekompensują to wymienione zalety.

W przypadku krótszych horyzontów czasowych i większych rzędów układu wykorzystanie notacji operatorowej może jednak prowadzić do zmniejszenia wielkości pamięci wymaganej do przechowywania modelu układu.

Tabela 1.1. Porównanie własności notacji operatorowej i rekurencyjnego opisu w przestrzeni zmiennych stanu

Wyszczególnienie	Operator przejścia układu	Niestacjonarny model w przestrzeni stanu
Równoważność realizacji $\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{T}}'$	$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}'$ $\mathbf{T}(i, j) = \mathbf{T}'(i, j)$	$\forall_{i,j} \begin{bmatrix} \mathbf{C}(i)\mathbf{A}(i-1)\cdots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{B}(j) = \\ = \mathbf{C}'(i)\mathbf{A}'(i-1)\cdots\mathbf{A}'(j+1)\mathbf{B}'(j) \\ \mathbf{D}(i) = \mathbf{D}'(i) \end{bmatrix}$
Suma realizacji $\hat{\mathbf{T}}_1, \hat{\mathbf{T}}_2$	$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_1 + \hat{\mathbf{T}}_2$ $\hat{\mathbf{T}}_1 = \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ $\hat{\mathbf{T}}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$	$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2(k) \end{bmatrix}$ $\mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(k) \\ \mathbf{B}_2(k) \end{bmatrix}$ $\mathbf{C}(k) = [\mathbf{C}_1(k) \quad \mathbf{C}_2(k)]$ $\mathbf{D}(k) = [\mathbf{D}_1(k) + \mathbf{D}_2(k)]$
Połączenie kaskadowe realizacji $\hat{\mathbf{T}}_1, \hat{\mathbf{T}}_2$	$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_2\hat{\mathbf{T}}_1$ $\hat{\mathbf{T}}_1 = \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_1)$ $\hat{\mathbf{T}}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$	$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2(k) & \mathbf{B}_2(k)\mathbf{C}_1(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1(k) \end{bmatrix}$ $\mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2(k)\mathbf{D}_1(k) \\ \mathbf{B}_1(k) \end{bmatrix}$ $\mathbf{C}(k) = [\mathbf{C}_2(k) \quad \mathbf{D}_2(k)\mathbf{C}_1(k)]$ $\mathbf{D}(k) = [\mathbf{D}_2(k)\mathbf{D}_1(k)]$
Realizacja odwrotna $\hat{\mathbf{T}}^{-1}$	$\hat{\mathbf{T}}^{-1} = \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{M})$ $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{I}}_{\mathcal{M}}$ $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{T}}^{-1} = \hat{\mathbf{I}}_{\mathcal{P}}$	$\mathbf{A}'(k) = \mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{C}(k)$ $\mathbf{B}'(k) = \mathbf{B}(k)\mathbf{D}^{-1}(k)$ $\mathbf{C}'(k) = -\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{C}(k)$ $\mathbf{D}'(k) = \mathbf{D}^{-1}(k)$
Sprzężenie zwrotne	$\hat{\mathbf{T}} = (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{T}}_1\hat{\mathbf{T}}_2)^{-1}\hat{\mathbf{T}}_1$ $\hat{\mathbf{T}}_1 = \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ $\hat{\mathbf{T}}_2 = \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{M})$	$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2(k)\mathbf{C}_1(k) & \mathbf{A}_2(k) \end{bmatrix}^+$ $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(k) \\ \mathbf{B}_2(k)\mathbf{D}_1(k) \end{bmatrix} \mathbf{D}_{i21}(k) [\mathbf{D}_2(k)\mathbf{C}_1(k) \quad \mathbf{C}_2(k)]$ $\mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(k) \\ \mathbf{B}_2(k)\mathbf{D}_1(k) \end{bmatrix} \mathbf{D}_{i21}(k)$ $\mathbf{C}(k) = \mathbf{D}_1(k)\mathbf{D}_{i21}(k) [\mathbf{D}_2(k)\mathbf{C}_1(k) \quad \mathbf{C}_2(k)]$ $\mathbf{D}(k) = \mathbf{D}_1(k)\mathbf{D}_{i21}(k)$ $\mathbf{D}_{i21}(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_2(k)\mathbf{D}_1(k))^{-1}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [48], [110].

1.9. STABILNOŚĆ UKŁADÓW NIESTACJONARNYCH

Jednym z fundamentalnych pojęć z zakresu teorii sterowania jest stabilność układów dynamicznych. Stabilność układu dynamicznego określonego w nieskończonym horyzoncie czasowym definiuje się zazwyczaj w sensie wejściowo-wyjściowym lub asymptotycznym. Jeżeli dla dowolnego sygnału wejściowego o ograniczonej energii energia sygnału wyjściowego układu jest ograniczona, układ jest stabilny w *sensie wejściowo-wyjściowym* [105]. Jeżeli przy braku wymuszenia i dla dowolnych warunków początkowych układ dąży do stanu równowagi oraz istnieje pewna malejąca funkcja wykładnicza, której wartości w dowolnych momentach są nie mniejsze od wartości bezwzględnej wyjścia, to układ jest *stabilny wykładniczo* [83], [112], [113], [119], [132], [136], [187], [211], [237], [270], [305].

Gdy horyzont czasowy analizy jest skończony, niemożliwe jest bezpośrednio wykorzystanie jako kryterium stabilności ograniczonej energii bądź wartości sygnału, gdyż dla dowolnego ograniczonego operatora $\mathbf{T} \in \mathcal{X}$ prowadzi to do spełnienia warunków stabilności zarówno wejściowo-wyjściowej, jak i asymptotycznej. Nie jest to jednoznaczne z faktem, że układ zachowa się w sposób typowy dla układów stabilnych.

W pracach [118], [237] pokazano dla układów ciągłych, że niestabilność o dowolnym, ale skończonym czasie trwania nie wpływa na stabilność całego układu rozpatrywanego w nieskończonym horyzoncie czasowym. Możliwa jest zatem sytuacja, że układ niestacjonarny w pewnych przedziałach czasowych będzie stabilny, a w innych niestabilny. Przez charakter stabilny rozumiane jest takie zachowanie układu, w którym dąży on do stanu równowagi. W pewnych przedziałach czasu macierze układu niestacjonarnego mogą mieć współczynniki o określonej wartości, dla których np. wartości własne macierzy stanu mogą być poza okręgiem jednostkowym.

Jeżeli czas działania układu jest skończony, krótkoczasowa analiza stabilności może być substytutem analizy stabilności w nieskończonym horyzoncie czasowym. Pojęcie stabilności krótkookresowej (ang. *Short Time Stability*) bądź stabilności na skończonym interwale czasowym (ang. *Finite Time Stability*) dla układów ciągłych jest znane od ponad pół wieku [3], [36], [40], [51], [52], [50], [156], [252], [304]. Celowe wydaje się zatem wprowadzenie pojęcia stabilności krótkookresowej układu dyskretnego oraz zaproponowanie narzędzi do jej wyznaczania.

Z punktu widzenia analizy stabilności układów niestacjonarnych ważny jest wpływ szybkości i wielkości zmian parametrów na stabilność układu. Możliwa jest sytuacja, gdy macierz stanu układu niestacjonarnego zmienia się w taki sposób, że jej wartości własne są stałe i cały czas znajdują się w obszarze stabilności określonym dla układu stacjonarnego, czyli w otwartej, lewej półpłaszczyźnie dla układu ciągłego bądź wewnątrz koła jednostkowego dla układu dyskretnego, natomiast układ niestacjonarny jest niestabilny [41], [119], [136], [237], [164], [170], [268]. W takim przypadku koniecznym warunkiem wystąpienia niestabilności definiowanej na nieskończonym horyzoncie czasowym jest nieskończona liczba przełączeń. Nie jest to jednak warunek wystarczający niestabilności układu niestacjonarnego, gdyż duży wpływ ma również częstotliwość przełączeń oraz sposób zmian parametrów bądź macierzy układu.

Analiza zjawisk w układach niestacjonarnych jest istotna z uwagi na możliwość uogólnienia niektórych wyników na modele przedziałami liniowymi PWL (ang. *piece-wise linear*). Są one szeroko wykorzystywane m.in. w zagadnieniach sterowania predykcyjnego dla układów nieliniowych oraz problemach przetwarzania sygnałów, np. analizy i syntezy sekwencyjnych zmiennych w czasie filtrów. Techniki analizy i syntezy układów niestacjonarnych często są stosowane do obiektów nieliniowych z linearyzacją wzdłuż przewidywanej trajektorii, co umożliwia wykorzystanie ich do wyznaczania sterowania zależności wprowadzonych dla układów niestacjonarnych liniowych.

Analizie stabilności układów dyskretnych niestacjonarnych określonych na nieskończonym horyzoncie czasowym w przestrzeniach Banacha poświęcono m.in. prace [151], [242], [309]; stabilności wejściowo-wyjściowej układów ciągłych niestacjonarnych – [4], układom hybrydowym z okresową niestacjonarnością i periodycznym regulatorem – [67], a układom dyskretnym niestacjonarnym – [5], [54], [84], [105]. W pracach [18], [35] rozważano równoważność koncepcji stabilności, natomiast gdy zagadnienia związane z odporną stabilnością są przedmiotem zainteresowań w pracach [41], [90], [165], [319]. Analizie stabilności niestacjonarnych modeli zredukowanych poświęcono pracę [267].

Mimo że formalna definicja stabilności dotyczy nieskończonego horyzontu czasowego, w większości zastosowań ewaluacja stabilności jest oparta na parametrach układu znanych bądź zidentyfikowanych [179] w skończonym horyzoncie czasowym za pomocą dyskretnych danych pomiarowych. Obejmuje to nie tylko dane wyjściowe określonych procesów technologicznych, ale również systemy występujące w naukach ekonomicznych czy medycznych [308], [324]. Istotne wydaje się więc podanie nie tylko definicji, ale zaproponowanie metod numerycznych służących do badania stabilności krótkookresowej dla układów dyskretnych, określonych w skończonym horyzoncie czasowym.

W określaniu stabilności krótkookresowej niezwykle istotne jest to, że znalezienie dokładnej granicy między stabilnością a niestabilnością układu na podstawie danych ze skończonego horyzontu czasowego nie zawsze jest możliwe. Pośrednio odzwierciedla to zasadę nieoznaczoności Heisenberga.

Istniejące metody badania stabilności układów niestacjonarnych często opierają się na założeniu nieskończonego horyzontu czasowego [4], [84], [105], [237]. Szczególnym przypadkiem są metody dla układów o periodycznie zmiennych parametrach [22], [43], [63], [67], [121], [162], [244], [253], [299], dla których podano efektywne metody badania stabilności oparte na teorii Floqueta [36], [147], [149], [150], [270], [305].

W ogólnym przypadku, gdy zmiany parametrów mogą zachodzić w dowolny sposób, a dyskretny układ liniowy niestacjonarny określono w nieskończonym horyzoncie czasowym, o stabilności asymptotycznej (wewnętrznej) układu decydują własności operatora ewolucyjnego $S(k + k_0, k_0)$, zdefiniowanego zależnością (1.55). Warunek stabilności asymptotycznej podany w pracy [83] określono następującą zależnością:

$$\forall_{k \geq 0} \|S(k + k_0, k_0)\| \leq \rho q^{k - k_0}, \quad \rho \geq 1, \quad 0 < q < 1 \quad (1.75)$$

Równoważny warunek, podany w pracach [83], [147], [149], [150] ma następującą postać:

$$\forall_{k_0} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{S}(k + k_0, k_0) \rightarrow 0 \quad (1.76)$$

Oznacza to, że swobodna lub impulsowa odpowiedź z dowolnego wejścia na dowolne wyjście układu asymptotycznie stabilnego dla dowolnych warunków początkowych osiągnie wartość równą zero dla czasu $k \rightarrow \infty$. Warunek ten jest spełniony, gdy wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{S}(k + k_0, k_0)$ rzędu n dla $k > 0$ znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej, czyli

$$\forall_{k_0} \forall_{k > 0} \forall_{i=1, \dots, n} \left| \lambda_i(\mathbf{S}(k + k_0, k_0)) \right| < 1 \quad (1.77)$$

Jeżeli wartości własne znajdują się tymczasowo poza okręgiem jednostkowym, układ może być momentami niestabilny. Analogicznie, jeżeli wartości własne znajdują się tymczasowo na okręgu, układ może znajdować się momentami na granicy stabilności.

Dalsze wnioski i uproszczenia są możliwe po zawężeniu układów niestacjonarnych do określonej klasy. Szczególnym przypadkiem układu niestacjonarnego jest układ o periodycznie zmiennych współczynnikach (1.64)–(1.67). Aby zbadać stabilność układu periodycznego, konieczna jest znajomość macierzy przejścia za jeden pełny okres P zmian parametrów układu, czyli $\mathbf{S}(P + k_0, k_0)$. Macierz przejścia tego samego układu po m pełnych okresach ma wówczas następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(k_0 + mP, k_0) &= \mathbf{S}(k_0 + mP, k_0 + (m-1)P) \dots \mathbf{S}(k_0 + 2P, k_0 + P) \mathbf{S}(k_0 + P, k_0) = \\ &= \mathbf{S}^m(k_0 + P, k_0). \end{aligned}$$

Wartości własne $\lambda_i(\mathbf{S}(P + k_0, k_0))$ macierzy przejścia za jeden okres zmian parametrów układu noszą nazwę mnożników Floqueta. Umożliwiają one określanie stabilności układów periodycznie niestacjonarnych w nieskończonym horyzoncie czasowym [36].

Dla $k = 0$ oraz $\mathbf{R}(0, 0) = \mathbf{I}$ zachodzi

$$\mathbf{S}(P, 0) = \mathbf{R}(P, 0) e^{\mathbf{F}P\tau} = \mathbf{R}(0, 0) e^{\mathbf{F}P\tau} = e^{\mathbf{F}P\tau}.$$

Wartości własne macierzy przejścia $\mathbf{S}(P, 0)$ są bezpośrednio powiązane z wartościami własnymi macierzy \mathbf{F} . Jeżeli dowolna wartość własna macierzy \mathbf{F} znajduje się poza okręgiem jednostkowym, układ dyskretny, niestacjonarny, periodyczny jest niestabilny.

1.9.1. Stabilność krótkoczasowa

Analiza stabilności układu najczęściej jest przeprowadzana w celu wykazania, że dla określonej struktury, wartości parametrów, sposobu i zakresu ich zmian dany układ będzie stabilny. Cel ten można osiągnąć dzięki globalnej znajomości obiektu i układu regulacji bądź wykorzystując lokalną wiedzę o obiekcie. Jeżeli znane są globalne własności układu, do

wykazania absolutnej stabilności układu można zastosować metody oparte na zasadach Lapunowa [39], [164]. Metody określania absolutnej stabilności i niestabilności dla ciągłych układów niestacjonarnych, określonych w nieskończonym horyzoncie czasowym, obszernie przedstawiono w pracy [237].

Jeżeli dostępna jest jedynie lokalna wiedza o układzie, można przeprowadzić jedynie bieżącą analizę podstawowych własności układu [211]. Metody badania krótkookresowej stabilności układu mogą uzupełniać narzędzia do krótkookresowej analizy sygnałów, takie jak np. krótkoczasowa transformata Fouriera STFT (ang. *Short-Time Fourier Transform*) [171] bądź transformata falkowa (ang. *Wavelet Transform*) [301], [293]. Metody numeryczne, umożliwiające krótkookresową ocenę stabilności układu, pozwalają na bieżącą ocenę stanu zmiennych w czasie oraz adaptacyjnych układów sterowania. W pewnym stopniu mogą także kompensować brak możliwości wykazania globalnej stabilności układu.

W wielu przypadkach analiza potencjalnych źródeł zmienności układu nie daje podstaw do uznania ich za przewidywalne w dłuższym horyzoncie czasowym. O pełnej przewidywalności zmian układu, pozwalającej posługiwać się modelem globalnym i opartym na nim dowodzie stabilności, można mówić w przypadku zmienności parametrów układu związanych z samym procesem, w tym również ze starzeniem, zużywaniem lub inną, powolną zmianą określonych własności układu. Założenie periodiczności zmian układu w celu wykazania stabilności globalnej może być uzasadnione jedynie w przypadku niestacjonarności związanej z procesem, jeśli jest ona periodiczna. Przypadek ten obejmuje również niestacjonarność układu związaną z przybliżeniem układu nieliniowego za pomocą układu liniowego niestacjonarnego. Dodatkowym, często występującym w praktyce źródłem niestacjonarności jest zmienność parametrów układu wynikająca z niepełnej wiedzy o obiekcie lub zjawisku bądź wystąpienia awarii. W tym wypadku nie można założyć periodicznego charakteru zmian parametrów układu. Krótkoczasową analizę stabilności można przeprowadzić dla dowolnego z wymienionych źródeł niestacjonarności, zarówno okresowych jak i nieokresowych.

1.9.2. Stabilność układów niestacjonarnych ze sprzężeniem zwrotnym

W praktycznych zastosowaniach teorii sterowania ważnym zagadnieniem jest określanie stabilności układu regulacji automatycznej w pętli sprzężenia zwrotnego. Istniejące metody dla układów stacjonarnych liniowych są oparte na charakterystykach częstotliwościowych, związanych z nimi kryteriami stabilności oraz teorii sprzężenia zwrotnego zapoczątkowanej przez Nyquista [185], [186]. Zgodnie z nią, koniecznym warunkiem wzbudzenia układu jest jednoczesne wystąpienie określonych wartości przesunięcia fazowego i wzmożenia układu w otwartej pętli sterowania.

Występujące w literaturze metody badania stabilności układów ze sprzężeniem zwrotnym niestacjonarnych i nieliniowych [25], [26], [135] są oparte na metodach Lapunowa [115], [237], [268] i rozszerzeniu metody Nyquista, które wykorzystują rezultaty Popowa [238], [239], [240] oraz Jakubowicza-Kalmana [245], [313], [312] do badania stabilności układów, mogące być opisane kaskadowym połączeniem statycznego, w tym również

niestacjonarnego bloku nieliniowego i dynamicznego bloku liniowego, [73], [82], [107], [109], [115], [238], [239], [240], [245], [312], [313].

Największym ograniczeniem metody badania stabilności układów niestacjonarnych jest przyjęta przez analogię do modelu Hammersteina dla układów nieliniowych postać układu Lurie, z połączoną kaskadowo częścią niestacjonarną statyczną (LFI) oraz stacjonarną dynamiczną (LTI).

Alternatywną formą analizy stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym jest konwersja układu do modelu zastępczego, odpowiadającego zamkniętej pętli sterowania ze sprzężeniem zwrotnym, bądź posłużenie się przybliżoną metodą graficzną przez analogię do klasycznego kryterium Nyquista [191], [192], [198], [199], [227], [206].

PODSUMOWANIE

W rozdziale przeprowadzono klasyfikację układów dyskretnych liniowych ze względu na zmienność w dziedzinie czasu i częstotliwości. Następnie wprowadzono notację operatorową dla najszerszej klasy układów niestacjonarnych, dyskretnych, liniowych. Dzięki temu możliwy jest opis układów stacjonarnych, niestacjonarnych, dynamicznych i statycznych. Definicje sekwencji wymiarów wejść, wyjść i stanu układu umożliwiają wykorzystanie ich do opisu układów niestacjonarnych o liczbie wejść, wyjść oraz zmiennych stanu układu zależnych od czasu. Zdefiniowano operatory wektorowe do opisu sygnałów oraz operatory macierzowe umożliwiające pełny opis własności układu. Zdefiniowano operator przejścia układu, który dla układu określonego w skończonym horyzoncie czasowym jest skończenie wymiarową macierzą. Następnie zanalizowano własności operatora przejścia ze szczególnym uwzględnieniem wpływu przyczynowości, nieprzyczynowości i antyprzyczynowości układu na jego postać. Wprowadzono operator przesunięcia czasowego, operatory diagonalne macierzy układu w postaci blokowej oraz podano definicje dyskretnych operatorów ewolucyjnych umożliwiających opis własności układu niestacjonarnego. Następnie pokazano ich związek ze zdefiniowanym operatorem przejścia układu, sklasyfikowano układy niestacjonarne ze względu na sposób zmian parametrów oraz porównano własności rekurencyjnego opisu w przestrzeni zmiennych stanu z wcześniej zdefiniowaną notacją operatorową. W końcowej części rozdziału omówiono zagadnienia związane ze stabilnością układów niestacjonarnych.

2. ANALIZA UKŁADÓW NIESTACJONARNYCH

Pojęcie analizy ogólnie oznacza rozkład na składniki lub czynniki, zarówno w sensie materialnym jak i abstrakcyjnym. Jednym z ważniejszych narzędzi służących do analizy układów dynamicznych i sygnałów jest analiza częstotliwościowa. Jej podstawowym celem jest wydobycie informacji zawartych w układzie lub sygnale [321]. W analizie sygnałów informacje te często są wykorzystywane w celach diagnostycznych, np. do oceny stanu sieci elektroenergetycznej i jakości energii elektrycznej [322], diagnozy stanu pacjenta na podstawie sygnałów biomedycznych, np. EKG, EMG, przewidywanie ruchów tektonicznych. Wyniki analizy układów dynamicznych na ogół są wykorzystywane w zagadnieniach syntezy układów sterowania oraz do opisu własności układu, m.in. zapasu stabilności układu. Literatura na temat jej zastosowań w analizie i syntezie układów liniowych stacjonarnych, zarówno ciągłych jak i dyskretnych, jest obecnie bogata [24], [126], [176], [278].

Wiele praktycznych zagadnień analizy sygnałów i układów dotyczy zagadnień zmiennych w czasie, tj. sygnałów i układów, których cechy charakterystyczne ulegają zmianie w czasie. Szeroko stosowana w przypadkach stacjonarnych transformacja Fouriera okazuje się niewystarczająca w analizie sygnałów. Metody częstotliwościowe oparte na transformacie Laplace'a nie mogą być zastosowane w analizie układów niestacjonarnych.

Istotnym rozszerzeniem metod analizy dla sygnałów o zmiennych w czasie własnościach było wprowadzenie przez Gabora krótkookresowej (krótkoczasowej) transformaty Fouriera STFT (ang. *Short-Time Fourier Transform*), a następnie rozwinięcie metod transformacji falkowej [20].

Pierwsze próby rozszerzenia narzędzi częstotliwościowych do analizy układów niestacjonarnych sięgają połowy ubiegłego wieku [16], [316], [317]. Zaproponowane tam podejście było oparte na rozszerzeniu transformaty Laplace'a do zmiennej w czasie odpowiedzi impulsowej przez wprowadzenie dodatkowego parametru, zależnego od przesunięcia czasowego. Podejście to jest znane pod nazwą analizy czasowo-częstotliwościowej (ang. *time-frequency analysis*) i szeroko wykorzystywane w zagadnieniach przetwarzania sygnałów [16], [34], [36], [301], [54], [64], [65], [66], [76], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [100], [108], [116], [123], [127], [128], [140], [171], [233], [259], [260], [261], [266], [293], [298], [306], [315], [316], [317], w tym również do syntezy filtrów zmiennych w czasie [45], [47], [118], [162], [261], [269], [288]. Wyniki dwuwymiarowej transformaty czasowo-częstotliwościowej umożliwiają lokalizowanie określonych własności układu na płaszczyźnie czasu i częstotliwości.

Innym możliwym podejściem do problemu analizy układów niestacjonarnych jest autorska koncepcja wyznaczania uproszczonego opisu układu niestacjonarnego w dziedzinie częstotliwości. Opis taki można traktować jako nieparametryczną metodę identyfikacji układu dynamicznego [235], [323], będącą wynikiem prowadzonych przez autora badań, sygnalizowanych w artykułach i materiałach konferencyjnych [194], [193], [198], [199], [216], [218], [226]. Idea zastosowania przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych do opisu układu niestacjonarnego pozwala na wykorzystywanie w uproszczonej analizie układu znanych metod dla układów stacjonarnych liniowych. Stosowany jest tu rozkład według wartości osobliwych lub w skrócie rozkład SVD dyskretnego operatora układu definiowanego w skończonym horyzoncie czasowym. Charakterystyczną cechą prezentowanego podejścia jest kompatybilność z klasycznymi wynikami otrzymywanymi dla układów stacjonarnych. Rezultatem tej analizy jest zbiór punktów charakterystyki Nyquista lub Bodego. Dla układów stacjonarnych przy dostatecznie długim horyzoncie czasowym wyniki pokrywają się z uzyskiwanymi klasycznymi metodami. Pewne własności charakterystyk otrzymywanych dla układów niestacjonarnych różnią się od tych dla układów stacjonarnych. Przede wszystkim dla układów niestacjonarnych nie można określić chwilowych wartości parametrów modelu na podstawie znanej charakterystyki częstotliwościowej. Przybliżony charakter wyznaczanych diagramów nie ogranicza jednak potencjalnego spektrum zastosowań, umożliwiając m.in. wykorzystanie ich do badania stopnia niestacjonarności układu [201], [218], uproszczonych metod badania stabilności [191], [192], [211], [227] oraz niepewności układu [208], [224].

Stosowane podejście to połączenie trzech znanych przekształceń układu dynamicznego oraz ich własności. Model układu niestacjonarnego w przestrzeni stanu zamieniany jest na odpowiadający mu opis operatorowy, następnie dokonuje się rozkładu według wartości szczególnych operatora wejściowo-wyjściowego układu oraz dyskretniej transformaty Fouriera wektorów własnych układu otrzymanych w wyniku dokonanego rozkładu. Do wyznaczenia aproksymowanej charakterystyki częstotliwościowej w końcowym etapie uwzględniono własności gęstości widmowej mocy oraz ważone sumowanie przetworzonych wektorów szczególnych.

Przekształcenia częstotliwościowe niezależnie od przyjętej metody transformacji układu niestacjonarnego: dwuwymiarowej czasowo-częstotliwościowej bądź uproszczonej jednowymiarowej, dedykowane są układom o jednym wyjściu i jednym wejściu (SISO). W dalszych rozważaniach na temat zagadnień częstotliwościowych prowadzonych w niniejszej pracy wykorzystano model układu SISO. Nie ogranicza to w istotny sposób zastosowania opisanych i zaproponowanych metod dzięki możliwości przekształcenia dowolnego układu liniowego MIMO o m wejściach i p wyjściach na odpowiadający mu zbiór $m \times p$ modeli SISO.

2.1. ESTYMACJA ADAPTACYJNA SYSTEMÓW NIESTACJONARNYCH

Systemy sterowania mają za zadanie takie kształtowanie wejść sterujących obiektu regulacji, aby osiągnąć wyznaczone cele związane z działaniem systemu, pomimo występowania zakłóceń i błędów modeli. Do celowego oddziaływania konieczna jest informacja o dynamice obiektu, jego aktualnym stanie itp. Pozyskiwanie informacji o stanie systemu obejmuje wiedzę empiryczną – zbieranie danych o mierzonych wielkościach (pomiar i przetwarzanie sygnałów), tworzenie bazy wiedzy *a priori* – modelowanie, oraz pozyskiwanie wiedzy *a posteriori* – estymację (szacowanie) wartości wielkości niemierzonych z wykorzystaniem zgromadzonej wiedzy empirycznej i posiadanej wiedzy *a priori*. Proces ten nazywany jest monitorowaniem. Estymacja wielkości sprowadza się do ustalania na podstawie posiadanego modelu obiektu i pozyskiwanych pomiarów wartości niemierzonych wielkości lub parametrów charakteryzujących jego stan i działanie.

Zastosowanie odpowiedniej metody analizy, w szczególności metody uwzględniającej zmienność parametrów układu w czasie, zapewnia lepszą znajomość obiektu sterowania i pozwala na dobór odpowiedniego regulatora, co umożliwia jednocześnie stabilną pracę układu regulacji, uzyskanie pożądanych charakterystyk tłumienia zakłóceń oraz śledzenia wielkości zadanej, a także zwiększa odporność na zmiany własności dynamicznych obiektu. Dokładna metoda analizy układów niestacjonarnych powinna umożliwić obserwację bieżących własności układu oraz jego adaptację do nowych warunków [87], [101], [175], [177], [178].

Zagadnienia estymacji adaptacyjnej systemów niestacjonarnych są nierozdzielnie związane z zagadnieniami analizy układów o zmiennych w czasie parametrach. Estymacji i identyfikacji układów niestacjonarnych poświęcono m.in. prace [138], [179], [180], [183], [182], [181], [257]. Jedną z podstawowych metod estymacji parametrów jest metoda najmniejszych kwadratów [29], [103], [130], [174], [273], [321].

2.1.1. Metoda najmniejszych kwadratów

Niech w pewnym obiekcie fizycznym występuje L -elementowy wektor \mathbf{x} . Zmienne wektora \mathbf{x} nie mogą być zmierzone bezpośrednio, możliwy jest jedynie pomiar M -elementowego wektora \mathbf{z} , związanego z wektorem \mathbf{x} , przy czym $M \geq L$, co można zapisać następująco:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2.1)$$

gdzie:

\mathbf{H} – macierz układu pomiarowego o wymiarach $M \times L$,

\mathbf{e} – wektor oznaczający zakłócenie w postaci addytywnego szumu pomiarowego.

Estymator wektora \mathbf{x} będzie dalej oznaczany przez $\hat{\mathbf{x}}$, przez $\hat{\mathbf{e}}$ natomiast odpowiadający mu błąd estymacji, spełniający zależność:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}} \quad (2.2)$$

Estymator wektora \mathbf{x} może być wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów w wyniku minimalizacji sumy kwadratów wektora błędu, w najprostszej postaci dany następującą zależnością:

$$J = \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^M e_i^2 \quad (2.3)$$

Z wyrażenia (2.3) można wyeliminować wektor błędu i równoważnie zapisać w postaci:

$$J = (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.4)$$

Zadanie (2.4) można rozwiązać, korzystając z warunku koniecznego minimum funkcji J :

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{H}^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.5)$$

skąd ostatecznie:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} \quad (2.6)$$

Do estymacji L -elementowego wektora \mathbf{x} wykorzystywany jest M -elementowy wektor \mathbf{z} . Zwiększanie liczby pomiarów M prowadzi do wzrostu dokładności. Jednocześnie rosną nakłady obliczeniowe związane z operacjami na macierzach. W zastosowaniach praktycznych zazwyczaj jest wykorzystywana rekursywna, adaptacyjna metoda estymacji parametrów. Nowa estymata jest każdorazowo wyznaczana na podstawie jej poprzedniej prognozy, uaktualnionej o bieżącą wartość korekty

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \text{korekta} \quad (2.7)$$

Korekta jest wyliczana jako iloczyn wzmocnienia i błędu prognozy pomiaru. Metodę najmniejszych kwadratów wykorzystuje się m.in. do wyznaczania sparametryzowanych współczynników modelu, np. ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*) o następującej postaci [130]:

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k) \quad (2.8)$$

Przy zadanych stopniach wielomianów $A(q^{-1})$: n_a i $B(q^{-1})$: n_b , oraz opóźnieniu d zależność (2.8) można zapisać jako:

$$\theta = (a_1, \dots, a_{n_a}, b_0, b_1, \dots, b_{n_b})^T \quad (2.9)$$

z wektorem pomiarowym:

$$\varphi_{k-1} = \left(-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n_a}, \dots, v_{t-d}, \dots, v_{t-n_b-d} \right)^T \quad (2.10)$$

i powszechnym zapisem modelu (2.8) w postaci:

$$y_k = \varphi_{k-1}^T \theta \quad (2.11)$$

Estymaty parametrów modelu można wyznaczać za pomocą algorytmu metody najmniejszych kwadratów według następującego schematu [130]:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{P_{k-1} \varphi_{k-1}}{1 + \varphi_{k-1}^T P_{k-1} \varphi_{k-1}} e_k \quad (2.12)$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \varphi_{k-1} \varphi_{k-1}^T P_{k-1}}{1 + \varphi_{k-1}^T P_{k-1} \varphi_{k-1}} \quad (2.13)$$

$$e_k = y_k - \varphi_{k-1}^T \hat{\theta}_{k-1} \quad (2.14)$$

dla danych warunków początkowych $\hat{\theta}_0, P_0 > 0$, gdzie $P_0 = \rho \mathbf{I}$, $\rho > 0$, \mathbf{I} – macierz jednostkowa.

Stosując algorytm metody najmniejszych kwadratów, estymator $\hat{\mathbf{x}}(k)$ zawsze uwzględnia całą historię procesu obserwacji obiektu. Jeżeli estymowane wartości wektora \mathbf{x} zmieniają się w czasie, to ich estymator jest równy średniej wartości tych parametrów w całym horyzoncie obserwacji. W przypadku występujących w układzie zmienności parametrów jest to niepożądana sytuacja. Jedną z powszechnie stosowanych metod eliminowania tego zjawiska jest wprowadzenie mechanizmu zapominania. Powoduje on, że najbardziej odległe pomiary są zapominane w procesie estymacji. Zdolność zapominania przeszłości można wprowadzić do zadania estymacji metodą najmniejszych kwadratów przez włączenie wag do wskaźnika kosztu. Ma on wówczas następującą postać:

$$J = \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^M w_i e_i^2 \quad (2.15)$$

gdzie $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_M)$ – macierz zawierająca na głównej przekątnej wagi ustalające wpływ błędów estymacji w poszczególnych chwilach.

Proces zapominania często jest charakteryzowany za pomocą funkcji wykładniczej, np.:

$$w_i = \lambda^{M-i}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.16)$$

gdzie $\lambda \in (0, 1]$ – współczynnik zapominania.

Błąd w aktualnej M -tej chwili ma zawsze wagę równą 1, natomiast waga błędu najstarszego pomiaru wynosi λ^{M-1} . Im mniejsza wartość współczynnika zapominania, tym estymator

szybciej zapomina wcześniejsze pomiary. Dla wartości $\lambda=1$, estymator jednakowo uwzględnia wszystkie pomiary (brak zapominania). Postać funkcji charakteryzującej proces zapominania można dostosować do rozwiązywanego zagadnienia. W przypadku funkcji wykładniczej wpływ najstarszych pomiarów maleje do wielkości bliskich zero, jednak nigdy nie zanika całkowicie.

Adaptacyjną metodę najmniejszych kwadratów podano w postaci algorytmu 2.1 [130], [321]. Najpierw wyznaczono estymatę na podstawie minimalnej liczby $M=N$ pomiarów, a następnie uaktualniono iteracyjnie wynik.

Algorytm 2.1. Algorytm adaptacyjnej estymacji metodą najmniejszych kwadratów.

1. Inicjalizacja dla danych warunków początkowych $\hat{\theta}_0, P_0 > 0$,

gdzie:

$$P_0 = \rho \mathbf{I},$$

$$\rho > 0,$$

\mathbf{I} – macierz jednostkowa.

2. Nowy pomiar y_k (nowe ξ_k):

$$e_k = y_k - \varphi_{k-1}^T \hat{\theta}_{k-1} \quad (2.17)$$

3. Predykcja pomiaru – korekta estymaty wielkości szukanej:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \frac{\mathbf{P}_{k-1} \varphi_{k-1}}{\lambda_k + \varphi_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1} \varphi_{k-1}} \xi_k \quad (2.18)$$

4. Modyfikacja macierzy \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda_k} \left(\mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \varphi_{k-1} \varphi_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda_k + \varphi_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1} \varphi_{k-1}} \right) \quad (2.19)$$

5. Następną iteracją: $k = k + 1$, powrót do punktu 2.

Współczynnik zapominania λ_k może być zmienny w czasie w celu przyspieszenia zbieżności algorytmu, szczególnie dla małych wartości k .

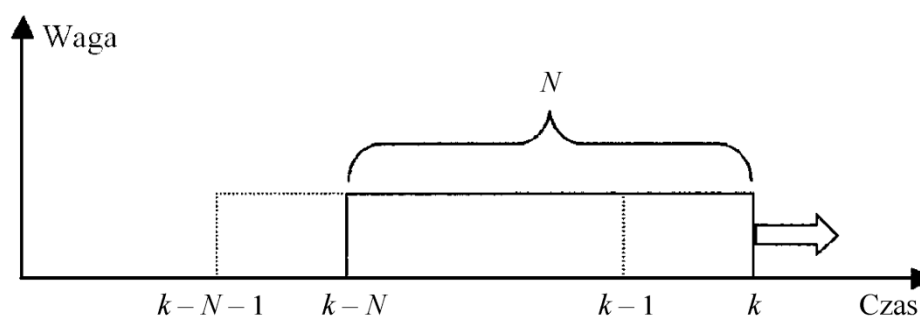
Wprowadzenie zdolności zapominania umożliwia adaptacyjne śledzenie dynamicznych zmian wartości wektora θ . Powoduje to jednak pogorszenie jakości estymacji stanów statycznych wektora θ . Wówczas estymata jest wyznaczana na podstawie mniejszej liczby pomiarów, co prowadzi do większych błędów. Im estymator ma większą zdolność zapominania przeszłości, tym lepiej nadąża za zmianami dynamicznymi w układzie i tym większy jest wpływ szumu na wynik estymaty. Estymator z wolnym zapominaniem dobrze eliminuje szum, jednak nie jest w stanie wiernie oddać dynamiki zmian obiektu.

Innym, często stosowanym mechanizmem w estymacji adaptacyjnej jest zapominanie typu przesuwnego bądź ruchomego okna (ang. *moving window*). Wartości wag w zależności (2.15) dla okna prostokątnego są następujące:

$$w_i = \begin{cases} 1 & i \geq M - N \\ 0 & i < M - N \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.20)$$

gdzie c – długość okna prostokątnego.

Przesuwne okno czasowe lub ruchomy horyzont czasowy to techniki powszechnie stosowane w wielu zagadnieniach teorii sterowania i sygnałów. Przyjęcie wartości wag równych zero poza pewną, skończoną szerokością okna pozwala na skrócenie rzeczywistego horyzontu analizy bądź sterowania nią i przeprowadzanie jej w skończonym horyzoncie czasowym. Z kolei możliwość dokonywania obliczeń w relatywnie krótkim horyzoncie czasowym pozwala na bezpośrednie estymowanie, niekoniecznie za pomocą algorytmu rekursywnego. W takim wypadku estymator może być oparty na zależności (2.6) z uwzględnieniem ruchomego okna czasowego. W takim wypadku w obliczeniach pod uwagę bierze się jedynie c ostatnich momentów. Zasadę przesuwania okna prostokątnego przy estymacji zmiennych w czasie parametrów modelu zilustrowano na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1. Zasada przesuwania okna prostokątnego przy estymacji zmiennych w czasie parametrów modelu

2.1.2. Estymacja minimalno-średniokwadratowa

Proces zapominania może być również uzależniony od wielkości szumu procesu i szumu pomiaru, jak to jest w przypadku filtru Kalmana. Metodę tę stosuje się w przypadku estymacji minimalno-średniokwadratowej (ang. *Minimum Mean Square* – MMS). Wskaźnik kosztu zwykle ma postać:

$$J = E \left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right] \quad (2.21)$$

gdzie E – wartość oczekiwana w sensie statystycznym.

Model matematyczny składa się z dwóch równań opisujących obserwowany proces oraz przeprowadzany na nim pomiar:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}(k) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{e}(k+1) \quad (2.23)$$

Jeżeli szum procesu $\mathbf{d}(k)$ ma zerową wartość średnią i jest nieskorelowany, szum pomiaru $\mathbf{e}(k)$ ma zerową wartość średnią i jest nieskorelowany oraz macierze autokowariancji szumu procesu $\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{d}(k)\mathbf{d}^T(k)]$ i pomiaru $\mathbf{R}(k) = E[\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)]$ są dodatnio określone i symetryczne, to możliwa jest estymacja wielkości \mathbf{x} za pomocą filtru Kalmana, opisanego algorytmem 2.2 [321].

Algorytm 2.2. Algorytm rekursywnej estymacji metodą filtru Kalmana.

1. Inicjalizacja:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(k) &= \text{const} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{Q}(k) = \text{const} = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{H}(k+1) &= \text{const} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{R}(k) = \text{const} = \mathbf{R}, \\ k &= 0, \quad \mathbf{P}(0,0) = \mathbf{P}_0, \quad \hat{\mathbf{x}}(0,0) = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{x}}(N) &= (\mathbf{H}^T(N)\mathbf{W}\mathbf{H}(N))^{-1} \mathbf{H}^T(N)\mathbf{W}\mathbf{z}(N), \\ \mathbf{P}(N) &= (\mathbf{H}^T(N)\mathbf{W}\mathbf{H}(N))^{-1}, \\ k &= N+1. \end{aligned}$$

2. Macierz kowariancji błędu prognozy stanu obiektu:

$$\mathbf{P}(k, k-1) = \mathbf{F}(k-1)\mathbf{P}(k-1, k-1)\mathbf{F}^T(k-1) + \mathbf{Q}(k-1).$$

3. Wzmocnienie Kalmana:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k, k-1)\mathbf{H}^T(k) (\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k, k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k))^{-1}.$$

4. Macierz kowariancji błędu estymaty stanu obiektu:

$$\mathbf{P}(k, k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))\mathbf{P}(k, k-1).$$

5. Prognoza stanu obiektu i pomiaru:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k, k-1) &= \mathbf{F}(k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1, k-1), \\ \hat{\mathbf{z}}(k, k-1) &= \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k, k-1). \end{aligned}$$

6. Błąd prognozy nowego pomiaru $\mathbf{z}(k)$:

$$\Delta \mathbf{z}(k, k-1) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k, k-1).$$

7. Nowa estymata stanu obiektu:

$$\hat{\mathbf{x}}(k, k) = \hat{\mathbf{x}}(k, k-1) + \mathbf{K}(k) \Delta \mathbf{z}(k, k-1).$$

8. Następną iteracją: $k = k + 1$, powrót do punktu 2.

Wnioski

Estymacja w dziedzinie czasu pozwala w prosty sposób uchwycić zmiany sygnałów w dziedzinie czasu, niemniej z punktu widzenia analizy określonych własności dynamicznych układu dużo więcej zalet ma estymacja w dziedzinie częstotliwości. Wyniki estymacji układu w dziedzinie częstotliwości umożliwiają łatwą analizę podstawowych własności dynamicznych układu, wzmacnianie bądź osłabianie w widmie układu określonych częstotliwości i przesuwanie fazy sygnału w fazie.

Zagadnienia estymacji adaptacyjnej układów niestacjonarnych mogą być rozważane zarówno w dziedzinie czasu jak i dziedzinie częstotliwości, w szczególności może obejmować analizę przebiegów przejściowych, analizę korelacyjną, widmową oraz częstotliwościową [273].

Metody analizy i syntezy układów w dziedzinie częstotliwości są oparte na modelach i charakterystykach układów sterowania wyznaczanych dla rozkładu sygnałów wejściowych i wyjściowych za pomocą szeregu trygonometrycznego Fouriera. Dla układów stacjonarnych wykorzystywane są przekształcenia Laplace'a. Do głównych zalet klasycznych metod częstotliwościowych [24], [126], [278] należy bogactwo informacji wynikające z graficznego zobrazowania charakterystyk częstotliwościowych i hodografów pierwiastków oraz względna niezależność odcinków charakterystyk dla różnych przedziałów częstotliwości. Właściwości dziedziny częstotliwościowej pozwalają na bardziej naturalne i pogładowe przedstawienie wzajemnych związków struktur z własnościami dynamicznymi, dokonywanie dekompozycji zadań analizy i syntezy oraz uwzględnienie ograniczeń wynikających z obszarów adekwatności modeli. Zastosowanie komputerów umożliwia przewycięzenie podstawowych niedogodności metod częstotliwościowych i rozszerzenie zakresu ich stosowania na układy złożone, wielowymiarowe i wielopoziomowe. Metody częstotliwościowe są użyteczne w rozwiązywaniu zadań o dużej niepewności początkowej oraz wówczas, gdy zadanie syntezy nie jest w pełni sformalizowane. Jedną z ważniejszych zalet metod częstotliwościowych jest dogodność kształtowania pożądanej charakterystyki amplitudowej zgodnie z wymaganą jakością przebiegów przejściowych i ustalonych z uwzględnieniem ograniczeń wynikających z obszaru adekwatności modeli.

W metodach częstotliwościowych często stosowany jest mechanizm zapominania oparty na oknach czasowych, definiowanych jako funkcja matematyczna przyjmująca wartości zerowe poza pewnym, skończonym przedziałem.

W zagadnieniach przetwarzania sygnałów wykorzystuje się okna czasowe o kształcie optymalizowanym pod kątem minimalizacji szerokości listka głównego i maksymalizacji tłumienia listków bocznych widma sygnału. Do częściej stosowanych należą okna Bartletta, Blackmanna, Hamminga, Hanninga, Kaisera, Czebyszewa.

Okno prostokątne nie zapewnia tak dobrych parametrów tłumienia listków bocznych jak wspomniane okna czasowe, niemniej w połączeniu z unitarną transformacją DFT gwarantuje zachowanie niezmienniczości energii sygnału przed transformacją i po niej. Z punktu widzenia zagadnień sterowania jest to istotna własność, gdyż zapewnia zachowanie pewnych istotnych informacji o układzie, m.in. z punktu widzenia analizy stabilności. Do analizy układów niestacjonarnych opisaną w dalszej części pracy wykorzystywano więc okno prostokątne.

2.2. METODY ANALIZY SYGNAŁÓW CZĘSTOTLIWOŚCIOWE I CZASOWO-CZĘSTOTLIWOŚCIOWE

Sygnały stacjonarne są to sygnały, których charakterystyki statystyczne (wartość średnia, wartość średnia kwadratowa, funkcja korelacji) nie są funkcjami czasu – nie zależą od wyboru chwili początkowej. Szczególnym typem sygnału stacjonarnego jest sygnał ergodyczny, przy czym ergodyczny jest proces, którego dowolna statystyczna charakterystyka, otrzymana ze zbioru realizacji w dowolnej chwili, jest równa podobnej charakterystyce otrzymanej z jednej realizacji procesu, obliczonej jako średnia w dostatecznie długim czasie.

Metody opisu, analizy i przetwarzania sygnałów pomiarowych są przedmiotem zainteresowania teorii sygnałów. Analiza częstotliwościowa jest jedną z podstawowych i najstarszych metod, powszechnie znaną i szeroko stosowaną. Dowolny badany sygnał $x(k)$ można w niej zapisać jako sumę sygnałów elementarnych (bazowych) $g_i(k)$ [321]:

$$x(k) = \sum_i a_i g_i(k) \quad (2.24)$$

gdzie:

$$a_i = \sum_k x(k) \gamma_i(k) \quad (2.25)$$

$\gamma_i^*(k)$ – funkcje analizujące będące zespolonym, sprzężonym sygnałem dualnym do $g_i(k)$.

Wartości współczynników a_i określają, jakie składowe częstotliwościowe występują w widmie, a jakie nie. Funkcje bazowe $g_i(k)$ mogą być zarówno rzeczywiste, jak i zespolone, zazwyczaj są to funkcje Fouriera, Bessela, Czebyszewa, Haara oraz wielomiany Czebyszewa, Hermite'a, Legendre'a i Laguerre'a. Funkcje te muszą być dobrane tak, aby dowolny sygnał mógł być przedstawiony za pomocą kombinacji liniowej sygnałów bazowych.

Iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji zmiennej dyskretnej można zdefiniować następująco:

$$\langle g_i, g_j \rangle = \sum_k g_i(k) g_j^*(k) \quad (2.26)$$

Dla ortogonalnego zbioru funkcji zachodzi $\forall_{i \neq j} \langle g_i, g_j \rangle = 0$. Dla ortogonalnego zbioru funkcji bazowych istnieje tylko jeden zbiór funkcji analizujących $\{\gamma_i(k)\}$, wyznaczamy z warunku:

$$\sum_k g_i(k) \gamma_l^*(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = l \\ 0 & \text{dla } i \neq l \end{cases} \quad (2.27)$$

W szczególnym przypadku, gdy funkcje bazowe są ortonormalne, $\gamma_i(k) = g_i(k)$. Dla nieortogonalnego zbioru funkcji bazowych, rozpinającego przestrzeń sygnałów, istnieje wiele zbiorów funkcji analizujących, spełniających warunek (2.27). Charakter funkcji $\gamma_i(k), g_i(k)$ dobiera się w zależności od rodzaju analizowanego sygnału.

Bardzo ważną cechą transformacji jest jej unitarność. Poniżej omówiono unitarną dyskretną transformatę Fouriera oraz podstawowe metody analizy czasowo-częstotliwościowej sygnałów.

2.2.1. Dyskretna transformacja Fouriera

Transformacja Fouriera przekształca funkcję w dziedzinie czasu w funkcję w dziedzinie częstotliwości. W jej wyniku sygnał można przedstawić jako sumę sinusoid o danych amplitudach, częstotliwościach i fazach. Transformacji można poddać funkcję spełniającą warunki Dirichleta [283], [321]. Transformacja ta jest zdefiniowana dla sygnałów ciągłych [321], niemniej większe znaczenie praktyczne ma dyskretna transformata Fouriera (DFT). Analizie jest wówczas poddawany sygnał dyskretny o skończonej liczbie próbek N , a wynikiem przetworzenia jest dyskretne widmo sygnału o N punktach. Dyskretna transformata Fouriera przekształca skończony ciąg próbek sygnału

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T, \quad x(i) \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

w ciąg harmonicznych

$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T, \quad X(i) \in \mathbb{C} \quad (2.29)$$

zgodnie ze wzorem:

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) w_N^{-kl}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.30)$$

gdzie:

$$w_N = \exp(j2\pi/N) \quad (2.31)$$

j – jednostka urojona,

l – numer harmonicznej,

k – numer próbki sygnału.

Transformata odwrotna jest opisana następującą zależnością:

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) w_N^{kl}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.32)$$

Szczególną cechą dyskretnej transformaty Fouriera jest możliwość zdefiniowania jej w postaci macierzowej w następujący sposób:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_D \mathbf{x} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_D^{-1} \mathbf{X} \quad (2.34)$$

Macierze $\mathbf{F}_D, \mathbf{F}_D^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ spełniają warunek $\mathbf{F}_D \mathbf{F}_D^{-1} = \mathbf{I}$, gdzie \mathbf{I} – macierz jednostkowa, i są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} w_N^{-0 \cdot 0} & w_N^{-1 \cdot 0} & \dots & w_N^{-(N-1) \cdot 0} \\ w_N^{-0 \cdot 1} & w_N^{-1 \cdot 1} & \dots & w_N^{-(N-1) \cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^{-0 \cdot (N-1)} & w_N^{-1 \cdot (N-1)} & \dots & w_N^{-(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{F}_D^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_D^* = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} w_N^{0 \cdot 0} & w_N^{1 \cdot 0} & \dots & w_N^{(N-1) \cdot 0} \\ w_N^{0 \cdot 1} & w_N^{1 \cdot 1} & \dots & w_N^{(N-1) \cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^{0 \cdot (N-1)} & w_N^{1 \cdot (N-1)} & \dots & w_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Kolejną, ważną cechą dyskretnej transformaty Fouriera jest unitarność, którą spełnia po przeskalowaniu jej przez wartość $N^{-0.5}$. Macierz unitarnej transformacji DFT jest równa:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}_D}{\sqrt{N}} \quad (2.37)$$

wówczas

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^* \quad (2.38)$$

$$|\det(\mathbf{F})| = 1 \quad (2.39)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{F} \mathbf{x} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^* \mathbf{X} \quad (2.41)$$

Transformacja unitarna definiuje przekształcenie między dwiema bazami w przestrzeni wektorowej zachowujące ortonormalność. Podstawową cechą transformacji unitarnej jest jej liniowość, tzn. na każdy człon superpozycji wektora działa ona osobno. Transformacja unitarna jest izomorfizmem między dwiema przestrzeniami Hilberta.

Zgodnie z twierdzeniem Plancherela, iloczyn skalarny dwóch wektorów przed transformacją jest równy iloczynowi skalarnemu wektorów po transformacji, co można zapisać jako

$$\mathbf{xy}^* = \mathbf{XY}^* \quad (2.42)$$

W szczególnym przypadku, po podstawieniu $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, energia sygnału w dziedzinie czasu jest równa energii sygnału przetransformowanego zgodnie z twierdzeniem Parsewala:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |X(l)|^2 \quad (2.43)$$

2.2.2. Krótkoczasowa transformacja Fouriera

W diagnostyce często potrzebna jest częstotliwościowa analiza i przetwarzanie sygnałów niestacjonarnych w celu wydobycia z nich informacji o charakterze samoistnym i wymuszonym. Transformacja Fouriera nie była przystosowana do analizy sygnałów niestacjonarnych [283], [321], [322], a jej naturalnym rozszerzeniem było wprowadzenie krótkoczasowej transformacji Fouriera (STFT), zwanej też metodą przesuwanego okna (MWM). Wprowadzono w niej przesuwające się w czasie analizujące okno czasowe o stałej długości. Dyskretna postać transformacji STFT dla nieskończonego przedziału analizowanego sygnału ma następującą postać:

$$STFT_x(n, k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \gamma^*(n-m) w_N^{-km} \quad (2.44)$$

Dla ograniczonego przedziału analizowanego sygnału do N próbek transformację STFT można zapisać następująco:

$$STFT_x(n, k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m) \gamma^*(m) w_N^{-km} \quad (2.45)$$

gdzie:

- $\gamma(m)$ – okno czasowe obserwacji,
- M – rozmiar okna $\gamma(m)$ ($M \leq N$),
- m – numer próbki okna $\gamma(m)$ dla $m=0, 1, \dots, M-1$, $k=0, 1, \dots, N-1$.

2.2.3. Transformacja Gabora

Analizowany sygnał w czasowo-częstotliwościowej reprezentacji Gabora jest przedstawiany w postaci sumy funkcji bazowych powstających z funkcji prototypowej, np. okna gaussowskiego, w wyniku jej przesuwania na osi czasu i częstotliwości. Dyskretną okresową transformację Gabora można zdefiniować za pomocą następujących zależności:

$$x(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_{m,n} g(k - m\Delta_M) w_L^{nk\Delta_N} \quad (2.46)$$

$$c_{m,n} = \sum_{k=0}^{L-1} x(k) \gamma^*(k - m\Delta_M) w_L^{-nk\Delta_N} \quad (2.47)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \gamma^*(k' - m\Delta_M) g(k' - m\Delta_M) w_L^{-n(k-k')\Delta_N} = \delta(k - k') \quad (2.48)$$

Do analizy najczęściej wykorzystuje się okno gaussowskie, zapewniające jednoczesną dużą koncentrację energii w dziedzinie czasu i częstotliwości. Zmianę kształtu elementarnej komórki czasowo-częstotliwościowej i związaną z nią modyfikację strategii podziału przestrzeni czasowo-częstotliwościowej można uzyskać przez zmianę parametru α w oknie gaussowskim:

$$w_G(k) = e^{-\frac{1}{2} \left(\alpha \frac{k}{N/2} \right)^2} \quad (2.49)$$

2.2.4. Transformacja falkowa

Transformacja falkowa należy do grupy nieparametrycznych, liniowych reprezentacji sygnałów w dziedzinie czasu i częstotliwości o zmiennej szerokości okna. Jest definiowana zarówno dla układów ciągłych, jak i dyskretnych. W praktyce analizie poddaje się sygnał zdyskretyzowany, zatem częściej stosowane jest dyskretne przekształcenie falkowe (DWT), które można przedstawić następująco:

$$DWT_x(a, q) = s_0^{-a/2} \sum_k x(k) \gamma(s_0^{-a} k - q\tau_0) \quad (2.50)$$

gdzie:

a – współczynnik skali,

q – przesunięcie na osi czasu,

k – dyskretny czas,

$s_0 = 2, \tau_0 = 1$ – wartości parametrów dla transformacji falkowej diadycznej.

Sygnał poddany analizie falkowej rozkładany jest na dwa typy funkcji tworzących rodzinę ortogonalną: funkcję skalującą $\varphi(k)$ i funkcję falkową $\psi(k)$. Odpowiednie współczynniki rozkładu są wyznaczane na podstawie iloczynów skalarnych. W przypadku

diadycznej dyskretnej transformaty falkowej współczynniki rozkładu funkcji skalującej można obliczyć z zależności:

$$c_a(q) = \left\langle x(k), 2^{-\frac{a}{2}} \varphi(2^{-a}k - q) \right\rangle = \sum_k x(k) 2^{-\frac{a}{2}} \varphi(2^{-a}k - q) \quad (2.51)$$

a współczynniki rozkładu funkcji falkowej – następująco:

$$d_a(q) = \left\langle x(k), 2^{-\frac{a}{2}} \psi(2^{-a}k - q) \right\rangle = \sum_k x(k) 2^{-\frac{a}{2}} \psi(2^{-a}k - q) \quad (2.52)$$

Rekonstrukcję sygnału można przeprowadzić za pomocą odwrotnego, dyskretnego, diadycznego przekształcenia falkowego i następującej zależności:

$$x(k) = \sum_q 2^{-\frac{a}{2}} c_a(q) \varphi(2^{-a}k - q) + \sum_k \sum_q 2^{-\frac{a}{2}} d_a(q) \psi(2^{-a}k - q) \quad (2.53)$$

Współczynniki diadycznej dekompozycji falkowej $c_a(q), d_a(q)$ można określić w wyniku wielopoziomowej filtracji sygnału za pomocą pary filtrów: dolnoprzepustowego, odpowiadającego funkcji skalującej, górnoprzepustowego, reprezentującego funkcję falkową, oraz decymacji próbek drugiego rzędu (odrzućanie co drugiej próbki).

2.2.5. Transformacja S

Transformata S podobnie jak transformata falkowa należy do grupy nieparametrycznych, liniowych reprezentacji sygnałów w dziedzinie czasu i częstotliwości o zmiennej szerokości okna. Stosuje się w niej okno o zmiennej szerokości zależnej od częstotliwości [281], [142]. Dyskretną transformatę S sygnału spróbkowanego $h(kT_p)$ wyznacza się z następujących zależności:

$$S(k, l) = \sum_{m=0}^{N-1} H(m+l) G(m, l) e^{j \frac{2\pi mk}{N}} \quad (2.54)$$

gdzie:

$$H(l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j \frac{2\pi lk}{N}} \quad (2.55)$$

$$G(m, l) = e^{-\frac{2\pi^2 m^2 \alpha^2}{n^2}} \quad (2.56)$$

$$l, m, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Wynikiem jest zespolona macierz, w której wiersze są częstotliwościami, a kolumny wartościami czasu.

2.2.6. Metoda Prony'ego

Metoda Prony'ego umożliwia wyznaczenie nieparametrycznej, nieliniowej reprezentacji sygnału w dziedzinie czasu i częstotliwości. Polega ona na ekstrakcji sinusoid lub eksponent z sygnału w wyniku rozwiązania liniowego układu równań współczynników [155], [322]. W metodzie tej można się doszukać pewnych podobieństw do algorytmu liniowej predykcji najmniejszych kwadratów stosowanej do wyznaczania modeli parametrycznych sygnałów dla modeli AR i ARMA. W wyniku rozkładu Prony'ego sygnał dyskretny $x(k)$ może być prezentowany za pomocą dyskretnego modelu eksponencjalnego danego w postaci następującej sumy:

$$\tilde{x}(k) = \sum_{n=1}^p A_n e^{(\alpha_n + j2\pi f_n)(k-1)T_p + j\Theta_n} \quad (2.57)$$

gdzie:

- A_n – amplituda n -tej składowej, zespolonej funkcji eksponencjalnej,
- α_n – współczynnik tłumienia n -tej składowej, zespolonej funkcji eksponencjalnej,
- f_n – częstotliwość sinusoidy n -tej składowej, zespolonej funkcji eksponencjalnej,
- Θ_n – faza początkowa sinusoidy n -tej składowej, zespolonej funkcji eksponencjalnej,
- p – liczba składowych eksponencjalnych,
- T_p – okres próbkowania.

Nieznane wartości parametrów rozkładu można wyznaczyć przez rozwiązanie problemu minimalizacji wskaźnika kosztu, danego np. w następującej postaci:

$$J = \sum_{k=1}^N |x(k) - \tilde{x}(k)|^2 = \sum_{k=1}^N \left| x(k) - \sum_{n=1}^p A_n e^{(\alpha_n + j2\pi f_n)(k-1)T_p + j\Theta_n} \right|^2 \quad (2.58)$$

W przypadku sygnału rzeczywistego zależność (2.57) można przekształcić do postaci:

$$\tilde{x}(k) = \sum_{n=1}^{p/2} 2A_n e^{\alpha_n(k-1)T_p} \cos(2\pi f_n(k-1)T_p + \Theta_n) \quad (2.59)$$

Dla parzystego p występuje $p/2$ tłumionych kosinusoid. Dla nieparzystego p otrzymuje się $(p-1)/2$ tłumionych kosinusoid oraz pojedyncza eksponenta. Parametry reprezentacji sygnału Prony'ego są wyznaczone przez minimalizację błędu średniokwadratowego.

Wnioski

Omówione metody przeznaczone są do analizy czasowo-częstotliwościowej sygnałów. Własności każdej z nich są nieco inne. Zależą one głównie od kształtu i szerokości okna analizy, które z kolei muszą korespondować z rodzajem analizowanego problemu. Zastosowanie okien czasowych bądź bezpośrednia modyfikacja jądra transformaty pozwalają na kształtowanie jej własności, przykładowo transformacja S oraz metoda Prony'ego są z powodzeniem stosowane w zagadnieniach oceny jakości energii elektrycznej [322], [281], [142]. Modyfikacje te wiążą się jednak zazwyczaj z utratą pewnych szczególnych własności, które są spełnione dla dyskretnej transformacji Fouriera, a nie są spełnione dla jej rozmaitych odmian. Jedną z takich własności jest unitarność. Dla transformacji unitarnej spełnione jest twierdzenie Plancherela i Parsewala zapewniające niezmienniczość energii sygnału przed transformacją i po niej. Z punktu widzenia analizy sygnałów własność ta nie wydaje się szczególnie istotna. W analizie systemów opisywanych zbiorami odpowiedzi impulsowych jest to własność istotna, zapewniająca zachowanie pewnych ważnych informacji o układzie na potrzeby analizy stabilności oraz jednakowe uwzględnianie wszystkich wartości zbioru, możliwe jedynie przy oknie prostokątnym.

2.3. TRANSFORMACJA CZASOWO-CZĘSTOTLIWOŚCIOWA UKŁADU

Zainteresowanie metodami analizy czasowo-częstotliwościowej dla układów niestacjonarnych liniowych liczy sobie ponad pół wieku. Prowadzi ono do rozszerzenia pewnych koncepcji zaczerpniętych z fizyki i matematyki. W fizyce obserwuje się i mierzy pewne wielkości, takie jak np. pęd, położenie, energia, ładunek. W formalizmie mechaniki kwantowej określa się obiekty, będące matematycznym obrazem obserwowanych i mierzonych w konkretnych eksperymentach wielkości. W pracy [74] każdej wielkości mierzonej w mechanice kwantowej odpowiada liniowy samosprężony operator działający w przestrzeni Hilberta związanej z układem kwantowym, na którym dokonuje się pomiaru.

Jedną z pierwszych prób stworzenia metody kompleksowej analizy dynamicznych układów zmiennych w czasie podjął Zadeh [316], [317]. Podejście to było ulepszone i uogólniane m.in. w pracach [16], [34], [301], [91], [94], [95], [97], [98], [127], [128]. U podstaw tego podejścia leży rozszerzenie transformaty Laplace'a do zależnej od czasu i przesunięcia czasowego odpowiedzi impulsowej układu. Ogólną postać tego przekształcenia dla układów ciągłych definiuje następująca transformata czasowo-częstotliwościowa, oparta na uogólnionym symbolu Weyla (ang. *generalised Weyl symbol* – GWS) [127], [128]:

$$L^{(\alpha)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\tau, t - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\tau\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.60)$$

gdzie:

- $\alpha \in \mathbb{R}$ – dowolna liczba rzeczywista, zwykle ograniczona tak, aby spełniony był warunek $|\alpha| \leq 0,5$
- $h(t_1, t_0)$ – odpowiedź układu na przesunięty w czasie o t_0 impuls Diraca $\delta(t - t_0)$ w momencie t_1 , czyli po czasie $t_1 - t_0$.

Definicja ta zawiera trzy następujące postacie przekształcenia czasowo-częstotliwościowego:

- zmienną w czasie funkcję przejścia (ang. *time-varying transfer function*) [316] dla $\alpha = 0,5$,
- zależną od częstotliwości funkcję modulującą (ang. *frequency dependent modulation function*) [16], zwaną też symbolem Kohna-Nirenberga [123] dla $\alpha = -0,5$,
- symbol Weyla, zaczerpnięty z mechaniki kwantowej [306] dla $\alpha = 0$.

Uogólniony symbol Weyla nie spełnia wszystkich własności charakterystycznych dla klasycznej transformaty Laplace'a dla układów stacjonarnych liniowych.

Sygnałami własnymi układu stacjonarnego, określonego na nieskończonym horyzoncie czasowym, są sygnały sinusoidalne. Własność ta nie jest na ogół spełniona dla układów niestacjonarnych. Połączenie kaskadowe dwóch układów niestacjonarnych nie odpowiada iloczynowi ich transformat, podczas gdy dla układów stacjonarnych zachodzi $\hat{\mathbf{K}}_{21} = \hat{\mathbf{K}}_2 \hat{\mathbf{K}}_1 \Leftrightarrow K_{21}(f) = K_2(f)K_1(f)$. Ponadto nie jest spełniony podobny związek między wejściem a wyjściem, co oznacza, że częstotliwościowe widmo wyjściowe układu niestacjonarnego nie jest równe iloczynowi transformaty i widma wejściowego, co dla układów stacjonarnych przybierało zależność $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{v}} \Leftrightarrow Y(f) = K(f)V(f)$.

2.3.1. Dyskretna dwuwymiarowa funkcja przejścia

Zależność (2.60) obowiązuje dla układów z czasem ciągłym. Dla modeli dyskretnych układów ciągłych można zdefiniować analogiczne przekształcenie przy użyciu dyskretniej transformaty Fouriera (DFT):

$$L_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h\left(k + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)n, k - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)n\right) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.61)$$

gdzie:

$$l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$k = 0, 1, \dots, N.$$

Transformata ta, wyznaczona dla układów stacjonarnych, spełnia następujący warunek niezmienniczości transformaty czasowo-częstotliwościowej opisanej uogólnionym symbolem Weyla względem czasu:

$$\forall_{k,m} L_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l) = L_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(m, l) \quad (2.62)$$

Wartość transformaty $L_{\uparrow}^{(-0,5)}(0, l)$ w nieskończonym horyzoncie czasowym i okresie próbkowania dążącym do zera jest równa transformacie Laplace'a układu ciągłego.

Przyjmując, że na wejściu zdyskretyzowanego układu niestacjonarnego podano sygnał delty Kronckera $\delta(k - k_0)$, częstotliwościowa funkcja modulująca [16], zwana również symbolem Kohna-Nirenberga [123], może być zapisana w następującej, uproszczonej formie:

$$B_{\uparrow}(k, l) = L_{\uparrow}^{(-0,5)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(k+n, k) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.63)$$

W zależności (2.63) przyjęto, że $\alpha = -0,5$. Wartość taka gwarantuje, że do wyznaczenia transformaty wystarczy znajomość terażniejszych i przyszłych odpowiedzi układu, natomiast nie jest wymagana znajomość odpowiedzi układu w przeszłości. Podstawiając wartość $\alpha = 0,5$, otrzymuje się analogię dwuwymiarowej, czasowo-częstotliwościowej funkcji przejścia w postaci zdyskretyzowanej:

$$Z_{\uparrow}(k, l) = L_{\uparrow}^{(0,5)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(k, k-n) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.64)$$

W tym przypadku do wyznaczenia transformaty konieczna jest znajomość terażniejszych i przeszłych odpowiedzi układu, natomiast nie jest wymagana znajomość przyszłych odpowiedzi układu. Przyjmując wartość $\alpha = 0$, otrzymuje się zdyskretyzowaną analogię transformaty opartej na symbolu Weyla w następującej postaci:

$$L_{\uparrow}(k, l) = L_{\uparrow}^{(0)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(k+0,5n, k-0,5n) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.65)$$

Do wyznaczenia tego przekształcenia wymagana jest znajomość terażniejszych, przyszłych i przeszłych odpowiedzi układu. Wartości czasu i częstotliwości w powyższych zależnościach dla układów zdyskretyzowanych z okresem T_p można wyznaczyć następująco:

$$t_k = kT_p, f_l = \frac{l}{NT_p} \quad (2.66)$$

Dodatkową trudnością, zarówno w przypadku układów dyskretyzowanych, jak i dyskretnych, jest występowanie w zależności (2.65) odpowiedzi o ułamkowych wartościach indeksów dla nieparzystych n . Z uwagi na fakt, że wartości te nie są bezpośrednio dostępne, konieczne jest albo ich pominięcie, jak w zależności (2.67), albo przybliżone wyznaczenie np. zgodnie z opisem dla wycinka macierzy (2.75).

Proponowana w literaturze alternatywna technika wyznaczania transformaty opartej na dyskretnym symbolu Weyla [92], stosowana w nieskończonym horyzoncie czasowym, opiera się na dwukrotnym rozszerzeniu horyzontu analizy w następujący sposób:

$$L_{\hat{T}}^{(0)}(k, l) = 2 \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h(k+n, k-n) e^{-j4\pi n l / N} \quad (2.67)$$

Wyznaczanie przekształcenia z wykorzystaniem zależności (2.67) nie powoduje konieczności aproksymacji wartości odpowiedzi impulsowych o ułamkowych indeksach, niemniej zabieg taki prowadzi do zignorowania wartości odpowiedzi impulsowych o nieparzystych różnicach indeksów. Przykładowo, dla $k=0$ i horyzontu czasowego o długości N wektor bazowy do wyznaczania transformaty jest dwukrotnie krótszy, dla parzystych N ma długość $(N/2+1)$ i następującą postać: $[h(0,0), h(1,-1), h(2,-2), \dots, h((N-1)/2, -(N-1)/2)]$. Prowadzi to do dwukrotnego pogorszenia rozdzielczości w dziedzinie częstotliwości przy stałej długości horyzontu czasowego w porównaniu z zależnościami (2.63)–(2.64). Głównym powodem zmniejszenia rozdzielczości jest niewykorzystanie w obliczeniach za pomocą zależności (2.67) odpowiedzi impulsowych $h(k_1, k_2)$ o nieparzystych różnicach indeksów $k_1 - k_2$.

2.3.2. Dyskretna dwuwymiarowa funkcja rozrzutu

W zastosowaniach związanych z określaniem wielkości zmian czasowo-częstotliwościowych układu wprowadza się pojęcie dwuwymiarowej funkcji rozrzutu. Definicja funkcji rozrzutu zbliżona jest do dwuwymiarowej funkcji przejścia, przy czym w odróżnieniu od niej następuje zamiana zmiennej i parametru w transformacie. Podstawowe własności wraz ze sposobem wykorzystania ich do określania stopnia zmienności czasowo-częstotliwościowej układu dokładniej omówiono w trzecim rozdziale. Poniżej dokonano adaptacji funkcji rozrzutu do układów dyskretnych, klasycznie definiowanej dla układów ciągłych. Dwuwymiarową funkcję rozrzutu w postaci ogólnej można przedstawić następująco:

$$S_{\hat{T}}^{(\alpha)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h\left(n + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)k, n - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)k\right) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.68)$$

gdzie:

$$l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$k = 0, 1, \dots, N.$$

Analogicznie przyjmując wartości parametru $\alpha = -0,5$, otrzymuje się funkcję rozrzutu opartą na funkcji modulującej w postaci:

$$S_{\hat{B}\hat{T}}(k, l) = S_{\hat{T}}^{(-0,5)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n+k, n) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.69)$$

funkcję rozrzutu opartą na czasowo-częstotliwościowej funkcji przejścia Zadeha dla wartości parametru $\alpha = 0,5$ w postaci:

$$S_{Z\hat{T}}(k, l) = S_{\hat{T}}^{(0,5)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n, n-k) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.70)$$

oraz funkcję rozrzutu opartą na symbolu Weyla dla wartości parametru $\alpha = 0$ w następującej postaci:

$$S_{L\hat{T}}(k, l) = S_{\hat{T}}^{(0)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n+0, 5k, n-0, 5k) e^{-j2\pi n l / N} \quad (2.71)$$

2.3.3. Macierz transformacji układu dyskretnego

Do numerycznego wyznaczania zarówno dwuwymiarowej funkcji przejścia, jak i funkcji rozrzutu można wykorzystać te same narzędzia. Konieczne jest jedynie odpowiednie skonstruowanie macierzy transformacji odpowiedzi impulsowych układu. Konstrukcja ta może być oparta na macierzowym operatorze przejścia układu, zdefiniowanym w pierwszym rozdziale. Konkretna postać macierzy transformacji jest zależna od wartości parametru α , tj. od typu wyznaczanego przekształcenia.

Macierz transformacji dla częstotliwościowej funkcji modulującej może być wyznaczona przez przesunięcie w górę kolumn operatora przejścia. Wartość przesunięcia kolumny o indeksie k jest równa $k-1$ (indeks kolumny minus jeden). Macierz transformacji ma następującą postać:

$$\mathbf{T}_{B[k_0, k_0+N-1]} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathbf{T}_{B[k_0, k_0+N-1]} \\ \downarrow \end{array} \overset{S_{B\hat{T}} \rightarrow}{\left[\begin{array}{cccc} h(k_0, k_0) & h(k_0+1, k_0+1) & \cdots & h(k_0+N-1, k_0+N-1) \\ h(k_0+1, k_0) & h(k_0+2, k_0+1) & \cdots & \boxed{h(k_0+N, k_0+N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(k_0+N-1, k_0) & \boxed{h(k_0+N, k_0+1)} & \cdots & \boxed{h(k_0+2N-2, k_0+N-1)} \end{array} \right]} \quad (2.72)$$

Jednowymiarowa transformata DFT liczona kolumnami zgodnie z kierunkiem oznaczonym strzałką prowadzi do dyskretnej częstotliwościowej funkcji modulującej, natomiast ta sama transformata liczona wierszami prowadzi w wyniku do funkcji rozrzutu opartej na funkcji modulującej. Ramką zaznaczono te wartości odpowiedzi impulsowej układu, które są niedostępne wówczas, gdy układ jest określony i znany jedynie w skończonym horyzoncie czasowym $k = k_0, k_0+1, \dots, k_0+N-1$. Macierz transformacji dla czasowo-częstotliwościowej funkcji przejścia Zadeha ma następującą postać:

$$\mathbf{T}_{Z[k_0, k_0+N-1]} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathbf{T}_{Z[k_0, k_0+N-1]} \\ \downarrow \end{array} \overset{Z_{\hat{T}} \rightarrow}{\left[\begin{array}{cccc} h(k_0, k_0) & \boxed{h(k_0, k_0-1)} & \cdots & \boxed{h(k_0, k_0-N+1)} \\ h(k_0+1, k_0+1) & h(k_0+1, k_0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{h(k_0+N-2, k_0-1)} \\ h(k_0+N-1, k_0+N-1) & h(k_0+N-1, k_0+N-2) & \cdots & h(k_0+N-1, k_0) \end{array} \right]} \quad (2.73)$$

Można ją otrzymać przez przesunięcie wierszy macierzowego operatora przejścia w prawo o wartość $N - w$, gdzie N – wymiar macierzy transformacji, a w – indeks wiersza. Następnie należy zamienić miejscami kolumny znajdujące się po lewej i prawej stronie macierzy transformacji (przerzucenie kolumn w kierunku lewo–prawo). W programie Matlab wykonuje to funkcja *fliplr*. Jednowymiarowa transformata DFT liczona wierszami zgodnie z kierunkiem oznaczonym strzałką prowadzi do dyskretnej czasowo-częstotliwościowej funkcji przejścia Zadeha, natomiast ta sama transformata liczona kolumnami prowadzi do funkcji rozrzutu opartej na funkcji Zadeha. Ramką zaznaczono te wartości odpowiedzi impulsowej układu, które są niedostępne, gdy układ jest określony i znany jedynie w skończonym horyzoncie czasowym $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$.

Macierz transformacji oparta na symbolu Weyla i definicjach (2.65) i (2.71) dla parzystego N i horyzontu czasowego $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ma następującą postać:

$$\mathbf{T}_{L[0, N-1]} = \underset{\downarrow}{S_{L\hat{t}}} \begin{bmatrix} h(0,0) & \overline{h(0,5, -0,5)} & \boxed{h(1,-1)} & \dots & \boxed{h(\frac{N}{2}, -\frac{N}{2})} \\ h(1,1) & \overline{h(1,5, 0,5)} & h(2,0) & \dots & \boxed{h(\frac{N}{2}+1, -\frac{N}{2}+1)} \\ h(2,2) & \overline{h(2,5, 1,5)} & h(3,1) & \dots & \boxed{h(\frac{N}{2}+2, -\frac{N}{2}+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N-1, N-1) & \overline{h(N-0,5, N-1,5)} & \boxed{h(N, N-2)} & \dots & \boxed{h(\frac{3N}{2}-1, \frac{N}{2}-1)} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Numeryczne wyznaczenie macierzy transformacji opartej na symbolu Weyla jest nieco trudniejsze z powodu występujących w transformacie wartości odpowiedzi impulsowych o ułamkowych indeksach. Układ dyskretny nie jest określony w ułamkowych momentach dyskretnej podstawy czasu, konieczne jest więc posłużenie się pewnym przybliżeniem. W tym celu można wykorzystać informacje zawarte w odpowiedziach impulsowych przesuniętych o nieparzystą liczbę kroków $h(k+2w+1, k)$ gdzie $k, w \in \mathbb{Z}$. Przykładowo, wartość $\overline{h(1,5, 0,5)}$ można aproksymować na podstawie danych, które występują w macierzy wartości odpowiedzi impulsowych: $h(1,0)$, $h(2,1)$, zgodnie z następującym schematem:

$$\begin{bmatrix} h(1,0) \\ h(1,1) \quad \overline{h(1,5, 0,5)} \quad h(2,0) \\ h(2,1) \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Podkreślenie górne wartości odpowiedzi impulsowej $\overline{h(1,5, 0,5)}$ oznacza, że nie jest ona fizycznie dostępna i konieczne jest zastąpienie jej przybliżeniem. Możliwe jest przyjęcie średniej z dwóch sąsiednich wartości: $\overline{h(1,5, 0,5)} \cong 0,5(h(1,0) + h(2,0))$, bądź dowolnej z nich: $\overline{h(1,5, 0,5)} \cong h(1,0)$ lub $\overline{h(1,5, 0,5)} \cong h(2,0)$. Przyjęcie wartości średniej to pewnego rodzaju filtracja dolnoprzepustowa, która prowadzi do większych błędów dla

szybkosmiennych odpowiedzi impulsowych. Przyjęcie jednej z wartości sąsiednich może być źródłem dodatkowych zakłóceń o wyższych częstotliwościach. W elementach brzegowych macierzy transformacji celowe może być przyjęcie najbliższej wartości o takiej samej wartości przesunięcia czasowego.

Wyznaczenie macierzy transformacji dla symbolu Weyla na podstawie operatora przejścia układu jest możliwe po wprowadzeniu macierzy pomocniczej transformacji, powstałej wskutek przesunięcia wierszy operatora przejścia o wartość $N - w$ w prawo, następnie przesunięcie kolumn o wartość $N - k/2$ w górę oraz przerzucenie kolumn lewo-prawo (*fliplr*). W rezultacie otrzymuje się następującą macierz:

$$\left[\begin{array}{cccccc} h(0,0) & \overline{h(0,5, -0,5)} & \boxed{h(1,-1)} & \boxed{h(1,5, -1,5)} & \dots & \boxed{h\left(\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}\right)} \\ & \cancel{h(1,0)} & & \cancel{h(2,-1)} & \dots & \cancel{h\left(\frac{N+1}{2}, -\frac{N+1}{2}\right)} \\ h(1,1) & \overline{h(1,5, 0,5)} & h(2,0) & \overline{h(2,5, -0,5)} & \dots & \boxed{h\left(\frac{N+2}{2}, -\frac{N+2}{2}\right)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \cancel{h(N-1, N-2)} & & \cancel{h(N, N-3)} & \dots & \cancel{h\left(\frac{3N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right)} \\ h(N-1, N-1) & \overline{h(N-0,5, N-1,5)} & \boxed{h(N, N-2)} & \boxed{h(N+0,5, N-2,5)} & \dots & \boxed{h\left(\frac{3N-2}{2}, \frac{N-2}{2}\right)} \end{array} \right] \quad (2.76)$$

Macierz (2.76) reprezentuje układ o nieparzystej wartości N . Elementy w wierszach o indeksach ułamkowych wykreślono linią ukośną. Służą one jedynie do wyznaczania odpowiedzi skokowych o ułamkowych indeksach oznaczonych poziomym podkreśleniem górnym. Elementy niedostępne dla układu określonego w skończonym horyzoncie czasowym $k = 0, 1, \dots, N-1$ otoczono prostokątem.

Niedostępne elementy odpowiedzi impulsowej dla układów określonych w skończonym horyzoncie czasowym, oznaczone w zależnościach (2.72)–(2.76) ramką, mogą być bądź ekstrapolowane, np. z założeniem okresowości zmian parametrów układu na podstawie bieżących tendencji, bądź uzupełnione zerami. Przyjęcie ostatniego założenia, mimo że wydaje się najprostsze, prowadzi do istotnych błędów, szczególnie w ostatnich kolumnach macierzy transformacji. Aby ograniczyć ich wpływ, celowe jest skrócenie horyzontu analizy. Przykładowo, układ określony w horyzoncie $k \in \{0, \dots, N-1\}$ może być analizowany w horyzoncie o połowę krótszym (do $N/2-1$). W takiej sytuacji rozdzielczość analizy jest oczywiście niższa.

Macierz transformacji (2.74) opartą na symbolu Weyla oraz definicjach (2.65) i (2.71), z założeniem, że odpowiedzi o ułamkowych wartościach indeksów są przybliżane przez wartości sąsiednie $h(k_2 + 0,5, k_1 + 0,5) \cong h(k_2, k_1)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ dla horyzontu czasowego $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$, można formalnie zapisać następująco:

$$\mathbf{T}_{L[k_0, k_0+N-1]} = \left\{ h(k_0 + i + 0,5m - \text{rem}(0,5m, 1), k_0 + i - 0,5m - \text{rem}(0,5m, 1)) : i, m = 0, 1, \dots, N-1 \right\} \quad (2.77)$$

gdzie $\text{rem}(a, b)$ – reszta z dzielenia a/b .

Macierz transformacji (2.74) opartą na symbolu Weyla oraz definicjach (2.65) i (2.71) dla horyzontu czasowego $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + N - 1$, z założeniem, że odpowiedzi o ułamkowych wartościach indeksów będą przybliżane przez średnią z dwóch sąsiednich wartości, zgodnie z zależnością:

$$h(k_2 + 0,5, k_1 + 0,5) \cong 0,5(h(k_2, k_1) + h(k_2 + 1, k_1)), \quad k_2, k_1 \in \mathbb{Z},$$

można zapisać następująco:

$$\mathbf{T}_{L[k_0, k_0+N-1]} = \left\{ \begin{array}{l} 0,5 \left(\begin{array}{l} h(k_0 + i + 0,5m - \text{rem}(0,5m, 1), k_0 + i - 0,5m - \text{rem}(0,5m, 1)) \\ + h(k_0 + i + 0,5m + \text{rem}(0,5m, 1), k_0 + i - 0,5m - \text{rem}(0,5m, 1)) \end{array} \right) \\ i, m = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \right\} \quad (2.78)$$

Wyznaczenie dwuwymiarowych funkcji przejścia i funkcji rozrzutu wymaga dokonania jednowymiarowej dyskretnej transformaty Fouriera z odpowiedniej macierzy transformacji. Przyjmując, że symbol $\text{DFT}(\mathbf{X})$ oznacza jednowymiarową dyskretną transformatę Fouriera, wyznaczaną niezależnie we wszystkich kolumnach macierzy \mathbf{X} , możliwe jest zapisanie dwuwymiarowych funkcji przejścia i funkcji rozrzutu przy użyciu wprowadzonych przez autora macierzy transformacji. Zabieg ten umożliwia uproszczenie procesu wyznaczania transformacji czasowo-częstotliwościowych (2.63)–(2.65) oraz (2.69)–(2.71) na podstawie operatora przejścia układu niestacjonarnego. Dyskretna częstotliwościowa funkcja modulująca [16] (symbol Kohna-Nirenberga) (2.63) ma wówczas następującą postać:

$$B_{\hat{\Gamma}}(k, l) = L_{\hat{\Gamma}}^{(-0,5)}(k, l) = \left\{ \mathbf{B}_{\Gamma} = \{b_{l,k}\} : \mathbf{B}_{\Gamma} = \text{DFT}(\mathbf{T}_B) \right\} \quad (2.79)$$

gdzie $\{b_{l,k}\}$ – element z l -tego wiersza i k -tej kolumny macierzy \mathbf{B}_{Γ} .

Dwuwymiarową, czasowo-częstotliwościową, dyskretną funkcję przejścia – odpowiednik funkcji Zadeha (2.64) – można zapisać w następująco:

$$Z_{\hat{\Gamma}}(k, l) = L_{\hat{\Gamma}}^{(0,5)}(k, l) = \left\{ \mathbf{Z}_{\Gamma} = \{z_{l,k}\} : \mathbf{Z}_{\Gamma} = \text{DFT}(\mathbf{T}_Z^T) \right\} \quad (2.80)$$

gdzie $\{z_{l,k}\}$ – element z l -tego wiersza i k -tej kolumny macierzy \mathbf{Z}_{Γ} .

Dyskretna transformata oparta na symbolu Weyla (2.65) ma wówczas następującą postać:

$$L_{\hat{\Gamma}}(k, l) = L_{\hat{\Gamma}}^{(0)}(k, l) = \left\{ \mathbf{L}_{\Gamma} = \{m_{l,k}\} : \mathbf{L}_{\Gamma} = \text{DFT}(\mathbf{T}_L^T) \right\} \quad (2.81)$$

gdzie $\{m_{l,k}\}$ – element z l -tego wiersza i k -tej kolumny macierzy \mathbf{L}_{Γ} .

Stosując transpozycję macierzy transformacji \mathbf{T}_B , analogicznie można zapisać dyskretną funkcję rozrzutu opartą na funkcji modulującej (symbolu Kohna-Nirenberga) (2.69):

$$S_{B\hat{\mathbf{T}}}(k, l) = S_{\hat{\mathbf{T}}}^{(-0,5)}(k, l) = \left\{ \mathbf{S}_{B\hat{\mathbf{T}}} = \{\beta_{l,k}\} : \mathbf{S}_{B\hat{\mathbf{T}}} = \text{DFT}(\mathbf{T}_B^T) \right\} \quad (2.82)$$

gdzie $\{\beta_{k,l}\}$ – element z l -tego wiersza i k -tej kolumny macierzy $\mathbf{S}_{B\hat{\mathbf{T}}}$.

Dyskretną funkcję rozrzutu opartą na czasowo-częstotliwościowej funkcji przejścia (2.70) (Zadeha) można zapisać następująco:

$$S_{Z\hat{\mathbf{T}}}(k, l) = S_{\hat{\mathbf{T}}}^{(0,5)}(k, l) = \left\{ \mathbf{S}_{Z\hat{\mathbf{T}}} = \{\zeta_{l,k}\} : \mathbf{S}_{Z\hat{\mathbf{T}}} = \text{DFT}(\mathbf{T}_Z) \right\} \quad (2.83)$$

gdzie $\{\zeta_{l,k}\}$ – element z l -tego wiersza i k -tej kolumny macierzy $\mathbf{S}_{Z\hat{\mathbf{T}}}$.

Dyskretna funkcja rozrzutu oparta na symbolu Weyla (2.71) ma wówczas następującą postać:

$$S_{L\hat{\mathbf{T}}}(k, l) = S_{\hat{\mathbf{T}}}^{(0)}(k, l) = \left\{ \mathbf{S}_{L\hat{\mathbf{T}}} = \{\mu_{l,k}\} : \mathbf{S}_{L\hat{\mathbf{T}}} = \text{DFT}(\mathbf{T}_L) \right\} \quad (2.84)$$

gdzie $\{\mu_{l,k}\}$ – element z l -tego wiersza i k -tej kolumny macierzy $\mathbf{S}_{L\hat{\mathbf{T}}}$.

2.3.4. Uśredniona funkcja przejścia

Analiza własności za pomocą dwuwymiarowej funkcji przejścia wymaga wizualizacji danych na wykresach trójwymiarowych. Wyznaczanie takich wykresów dla długich horyzontów czasowych i ich analiza mogą być utrudnione. Pewną alternatywą może być uśredniona funkcja przejścia, którą można otrzymać przez czasowe uśrednienie zespolonej, dwuwymiarowej funkcji przejścia $L_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(k, l)$ [208].

Definicja 2.1. Niech dany będzie operator przejścia układu $\hat{\mathbf{T}}$ oraz odpowiadająca mu dwuwymiarowa, czasowo-częstotliwościowa funkcja przejścia (2.61) $L_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(k, l)$. Uśredniona funkcja przejścia może być wyznaczona z następującej zależności:

$$M_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} L_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(k, l) \quad (2.85)$$

gdzie $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ i pulsacja dla układu zdyskretyzowanego dane są zależnością $\omega_l = 2\pi l / NT_p$.

Definicja uśrednionej funkcji przejścia opiera się na założeniu, że wszystkie składowe funkcje przejścia mają taki sam wpływ na własności układu jako całości, w związku z tym mogą być uśredniane liniowo z równymi wagami. Uśredniona funkcja przejścia może być rozdzielona na wykres amplitudowy i fazowy. Wykres amplitudowy $|M_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(l)|$ reprezentuje selektywne wzmocnienie pierwszej składowej harmonicznej sygnału wyjściowego, odpowiadające częstotliwości sygnału sinusoidalnego podanego na wejściu układu.

Wyższe składowe harmoniczne sygnału wyjściowego, będące wynikiem zjawisk niestacjonarnych w układzie, są pomijane.

Uśredniona funkcja przejścia wyznaczona dla układu stacjonarnego jest zbieżna z klasyczną funkcją przejścia otrzymywaną w wyniku przekształceń symbolicznych z wystarczająco dużą długością horyzontu czasowego.

2.4. TRANSFORMACJA SVD-DFT

W narzędziach uproszczonej analizy częstotliwościowej wprowadzonych w niniejszej pracy wykorzystano rozkład operatora przejścia układu według wartości szczególnych. Jest on uogólnieniem klasycznego rozkładu według wartości szczególnych macierzy [12], [15], [70], [71], [102], [111], [166], [279], [280], które jest możliwe dlatego, że operatory definiowane dla układów dyskretnych w skończonym horyzoncie czasowym są skończenie wymiarowe. Do wyznaczania przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych wykorzystano własność gęstości widmowej mocy wiążącą wejściowe i wyjściowe widmo gęstości mocy z charakterystyką amplitudową układu.

2.4.1. Rozkład według wartości osobliwych

Rozkład według wartości osobliwych SVD jest ważnym narzędziem algebry liniowej [12], [15], [70], [71], [102], [111], [166], [279], które ma wiele zastosowań praktycznych również w naukach technicznych [85], [276]. Rozkład według wartości osobliwych dla macierzy $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ definiuje się jako faktoryzację w dwie macierze ortonormalne:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_p] \quad (2.86)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_q] \quad (2.87)$$

oraz macierz diagonalną \mathbf{S} o wymiarach $p \times q$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad q > p = n \quad (2.88)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad p > q = n \quad (2.89)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}, p = q = n \quad (2.90)$$

takie że

$$\mathbf{X} = \mathbf{USV}^T \quad (2.91)$$

gdzie:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \\ \vdots \\ u_{p,i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{q,i} \end{bmatrix}.$$

Macierz \mathbf{U} zawiera ortonormalne wektory szczególne skojarzone z nieujemnymi wartościami własnymi macierzy $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ oraz spełnia warunek $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$. Macierz \mathbf{V} zawiera ortogonalne wektory własne skojarzone z nieujemnymi wartościami własnymi macierzy $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ i spełnia warunek $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$, \mathbf{S} jest macierzą diagonalną zawierającą na głównej przekątnej pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, przy czym $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$, $n = \min(p, q)$.

Operator przejścia układu jest skończenie wymiarową macierzą o stałych współczynnikach dla ustalonych, skończonych wartości k_0, N . W praktyce często potrzebna jest analiza układu w ruchomym horyzoncie czasowym – wówczas k_0 jest zmienną czasu, a N przy stałej długości horyzontu czasowego jest stałe.

Zastosowanie podejścia odwrotnego, tj. przyjęcie stałej wartości $k_0 = 0$ oraz zwiększanie N , wraz z upływem czasu skutkowałoby zawsze koniecznością uwzględniania w obliczeniach całej historii układu, począwszy od momentu $k = 0$. Co więcej, uwzględnianie dalszych czasów wiązałoby się z koniecznością ciągłego wydłużania horyzontu czasowego. W zagadnieniach praktycznych obydwa zjawiska są niepożądane. Po pierwsze, występujące w układach niestacjonarnych zmiany mogą być szybkie, najczęściej związane z samym procesem, w tym z występującymi w nim nieliniowościami, oraz wolnozmiennie często związane z powolną utratą przez układ określonych własności, np. starzenie się, zużywanie. W takiej sytuacji „zapominanie” danych historycznych prowadzi do poprawy dokładności wyników dla bieżących chwil. Wydłużanie horyzontu czasowego analizy prowadzi do wzrostu nakładów obliczeniowych w kwadracie z jego długością. Korzystniejsza jest zatem sytuacja, gdy stosowana metoda analizy działa na przesuwającym horyzoncie czasowym o stałej długości.

W przypadku operatorów macierzowych, w tym operatora przejścia układu niestacjonarnego $\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}$, SVD rozkłada operator na odpowiadające mu zbiory wartości

szczególnych $\sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ wektorów własnych wejściowych $\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ oraz wyjściowych $\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$. Macierz operatora układu określonego na skończonym, ruchomym horyzoncie czasowym $\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}$ może być zapisana jako iloczyn trzech macierzy

$$\mathbf{U}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})\mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})\mathbf{V}^T(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) = \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \quad (2.92)$$

lub suma iloczynów odpowiadających sobie wektorów własnych i wartości szczególnych w następujący sposób:

$$\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \sum_{i=1}^N \sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \mathbf{v}_i^T(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad (2.93)$$

Macierze rozkładu są wówczas zależne zarówno od operatora układu, jak i od konkretnego horyzontu czasowego, co dla ortonormalnej macierzy wyjścia rozkładu złożonej z kolumnowych wektorów własnych wyjściowych $\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) &= \left[\mathbf{u}_1(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad \mathbf{u}_2(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \right] \\ &= \begin{bmatrix} u_{1,1}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & u_{1,2}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & \cdots & u_{1,N}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \\ u_{2,1}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & u_{2,2}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & \cdots & u_{2,N}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N,1}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & u_{N,2}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & \cdots & u_{N,N}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Diagonalna macierz z wartościami szczególnymi ma postać:

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) = \begin{bmatrix} \sigma_1(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_N(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Ortonormalną macierz wejścia złożoną z kolumnowych wektorów własnych wejściowych $\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ można zapisać w następującej formie:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) &= \left[\mathbf{v}_1(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad \mathbf{v}_2(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_N(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \right] = \\ &= \begin{bmatrix} v_{1,1}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & v_{1,2}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & \cdots & v_{1,N}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \\ v_{2,1}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & v_{2,2}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & \cdots & v_{2,N}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N,1}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & v_{N,2}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) & \cdots & v_{N,N}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Autor sformułował dwa wnioski:

Wniosek 2.1. Dla rozkładu układu według wartości szczególnych (2.92), na którego wejściu podano sygnał $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ równy i -tej kolumnie macierzy $\mathbf{V}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$, odpowiedź układu $\mathbf{y}_v = \sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ jest równa iloczynowi i -tej wartości szczególnej oraz i -tej kolumny macierzy $\mathbf{U}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$.

Dowód wynika z ortonormalności macierzy $\mathbf{U}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$, $\mathbf{V}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ i własności rozkładu według wartości szczególnych.

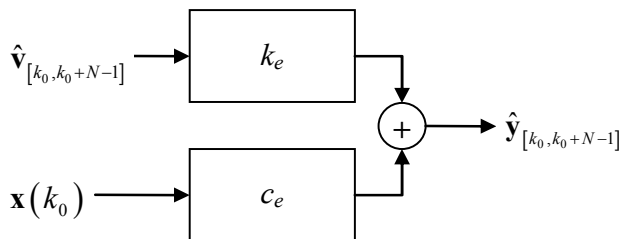
Wniosek 2.2. Dla rozkładu układu według wartości szczególnych:

$\mathbf{U}(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]}\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]})\mathbf{S}(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]}\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]})\mathbf{V}^T(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]}\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]}) = \hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]}\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]}$, z warunkami początkowymi $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]}\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]})$ równymi i -tej kolumnie macierzy $\mathbf{V}_0(\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}})$, odpowiedź swobodna układu jest równa iloczynowi i -tej wartości szczególnej oraz i -tej kolumny macierzy $\mathbf{U}_0(\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}})$: $\mathbf{y}_0 = \sigma_i(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]}\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]})\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]}\hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]})$.

Dowód wynika z ortonormalności macierzy $\mathbf{U}_0(\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}})$, $\mathbf{V}_0(\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{N}})$ i własności rozkładu według wartości szczególnych.

2.4.2. Wzmocnienie energetyczne układu

Uproszczeniem modelu, którego można dokonać, posługując się rozkładem według wartości szczególnych, jest zamiana na odpowiadający mu model w postaci współczynników wzmocnienia i pojemności układu, przedstawiony poglądowo na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2. Model w postaci współczynników wzmocnienia i pojemności układu

Definicja 2.2. Współczynnik wzmocnienia układu definiowany jest jako stosunek normy operatora sygnału wyjścia do normy operatora sygnału wejścia układu przy zerowych warunkach początkowych, co można zapisać w następującej postaci:

$$k_e = \frac{\|\hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]}\|}{\|\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}\|} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]}^T \hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]}}{\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^T \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}}} \quad (2.97)$$

pod warunkiem, że $\mathbf{x}(k_0) = 0$.

Wektor wejściowy $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}$, dla którego współczynnik wzmocnienia jest największy, dany jest pierwszą kolumną macierzy $\mathbf{V}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$. Wektor wejściowy $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}$ odpowiadający najmniejszej wartości współczynnika wzmocnienia układu dany jest ostatnią kolumną macierzy $\mathbf{V}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$.

Definicja 2.3. Współczynnik pojemności układu jest analogicznie definiowany jako stosunek normy operatora sygnału wyjścia do normy wektora stanu początkowego układu przy braku wymuszenia na wejściu układu, co można zapisać następująco:

$$c_e = \frac{\|\hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]}\|}{\|\mathbf{x}(k_0)\|} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]}^T \hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]}}{\mathbf{x}^T(k_0) \mathbf{x}(k_0)}} \quad (2.98)$$

pod warunkiem, że $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]} = 0$.

Warunki początkowe \mathbf{x}_0 , dla których współczynnik pojemności układu jest największy, dane są pierwszą kolumną macierzy \mathbf{V}_0 . Warunki początkowe \mathbf{x}_0 , odpowiadające najmniejszej wartości współczynnika pojemności układu, dane są ostatnią kolumną macierzy \mathbf{V}_0 .

Oszacowania współczynników wzmocnienia k_e oraz pojemności c_e wynikają wprost z algebry liniowej i można je zapisać następująco:

$$\sigma_{\min}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \leq k_e \leq \sigma_{\max}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad (2.99)$$

$$\sigma_{\min}(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]} \hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \leq c_e \leq \sigma_{\max}(\hat{\mathbf{C}}_{[k_0, k_0+N-1]} \hat{\mathbf{N}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad (2.100)$$

Wynikająca stąd norma (1.26) operatora $\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \in \mathcal{X}$ jest równa:

$$\|\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\|_2 = \sup_{\hat{\mathbf{v}}} k_e = \sigma_{\max}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \quad (2.101)$$

2.4.3. Transformacja częstotliwościowa operatora przejścia układu niestacjonarnego

Niech symbol $\mathbf{Y} = \mathbf{F}\mathbf{X}$ oznacza unitarną, dyskretną transformatę Fouriera dla skończonej wymiarowej, kwadratowej macierzy \mathbf{X} , gdzie przekształcenie \mathbf{F} zostało zdefiniowane zależnościami (2.35)–(2.37). Przekształcenie to transformuje każdą kolumnę macierzy \mathbf{X} w odpowiadającą jej kolumnę macierzy \mathbf{Y} zgodnie z następującym schematem:

$$\mathbf{F}\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x_{n,i} e^{-j2\pi l(n-1)/N}, \quad \mathbf{X} = \{x_{n,i} \in \mathbb{R}, n = 1, \dots, N, i = 1, \dots, N\} \quad (2.102)$$

Operator przejścia układu wiąże wejście i wyjście układu przy zerowych warunkach początkowych w następujący sposób:

$$\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]} \quad (2.103)$$

Dokonując obustronnej, unitarnej, dyskretniej transformaty Fouriera i mnożąc dodatkowo przez czynnik $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}$, otrzymuje się:

$$\mathbf{F} \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]} \quad (2.104)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]} & - \text{dyskretna transformata Fouriera operatora wejścia,} \\ \mathbf{F} \hat{\mathbf{y}}_{[k_0, k_0+N-1]} & - \text{dyskretna transformata Fouriera DFT operatora wyjścia} \\ \mathbf{G} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) & = \mathbf{F} \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \mathbf{F}^{-1} - \text{macierzowa charakterystyka częstotliwościowa.} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę zależność (2.93) można zatem zapisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) & = \mathbf{F} \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \mathbf{F}^* \\ & = \sum_{i=1}^N \sigma_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \mathbf{F} \mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \mathbf{v}_i^* \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \mathbf{F}^* \\ & = \sum_{i=1}^N \sigma_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \mathbf{F} \mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \left(\mathbf{F} \mathbf{v}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \right)^* \end{aligned} \quad (2.105)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) & - \text{macierzowa charakterystyka częstotliwościowa,} \\ \mathbf{F} \mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) & - \text{dyskretna transformata Fouriera wyjścia dla operatora przejścia} \\ & \quad \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, \\ \mathbf{F} \mathbf{v}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) & - \text{dyskretna transformata Fouriera wejścia dla operatora przejścia} \\ & \quad \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, \end{aligned}$$

$\left|G\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\right|$ – przybliżona charakterystyka amplitudowa,
 $G\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right)$ – wartość zespolona dla częstotliwości o indeksie l na przybliżonej charakterystyce częstotliwościowej.

Możliwe jest alternatywne zdefiniowanie macierzowej charakterystyki częstotliwościowej przez zapisanie operatora przejścia układu niestacjonarnego zgodnie z zależnością (2.92) w postaci wyrażenia:

$$\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \mathbf{U}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\mathbf{S}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\mathbf{V}^T\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) \quad (2.106)$$

a mnożąc obustronnie przez macierz $\mathbf{V}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)$ i uwzględniając jej ortonormalność, można zapisać:

$$\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\mathbf{V}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) = \mathbf{U}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\mathbf{S}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) \quad (2.107)$$

Dla układów stacjonarnych iloczyn transformat równy jest transformacie iloczynu jej składowych, stąd:

$$\mathbf{F}\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{V}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) = \mathbf{F}\mathbf{U}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\mathbf{S}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) \quad (2.108)$$

Uwzględniając unitarność dyskretnej transformaty Fouriera oraz ortonormalność macierzy $\mathbf{V}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)$, można zapisać:

$$\mathbf{G}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{U}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\mathbf{S}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\left(\mathbf{F}\mathbf{V}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right)\right)^* \quad (2.109)$$

co jest równoważne z zależnością (2.105).

2.4.4. Związek gęstości widmowej mocy z transformatą wektorów szczególnych operatora przejścia układu

Do wyznaczenia zależności umożliwiających wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowej i fazowej dla liniowych, niestacjonarnych układów dyskretnych można wykorzystać własności widmowej gęstości mocy. Związek widmowej gęstości mocy z charakterystyką amplitudową układu wyraża się następująco [243]:

$$S_y\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) = \left|G\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right)\right|^2 S_v\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) \quad (2.110)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \left| G\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) \right| & - \text{charakterystyka amplitudowa układu opisanego operatorem} \\ & \text{przejścia } \hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \text{ w horyzoncie czasowym} \\ & k = k_0, \dots, k_0 + N - 1, \\ S_y\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) & - \text{wyjściowe widmo gęstości mocy układu,} \\ S_v\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) & - \text{wejściowe widmo gęstości mocy układu.} \end{aligned}$$

Jednoznaczne wyznaczenie charakterystyki amplitudowej $\left| G\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) \right|$ jest możliwe wówczas, gdy znane są widma wejściowe i wyjściowe gęstości mocy układu. Należy jednak zaznaczyć, że dla dowolnych sygnałów wejściowych i wyjściowych układu stacjonarnego jest spełniony następujący warunek:

$$\exists_l S_v\left(\hat{\mathbf{T}}, l\right) = 0 \Rightarrow \forall_l S_y\left(\hat{\mathbf{T}}, l\right) = 0 \quad (2.111)$$

Warunek ten nie jest spełniony dla układów niestacjonarnych, w związku z czym do wyznaczania charakterystyki amplitudowej nie można wykorzystać bezpośrednio zależności (2.110) z uwagi na możliwość wystąpienia sprzeczności

$$S_v\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) \neq 0, S_y\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) = 0.$$

Korzystając z rozkładu według wartości szczególnych operatora układu można zaproponować następującą metodę wyznaczania wejściowego widma gęstości mocy układu niestacjonarnego:

Propozycja 2.3. Dyskretne widmo gęstości mocy dla dowolnej ortonormalnej macierzy powstałej wskutek rozkładu według wartości szczególnych, liczone jako suma widmowych gęstości mocy poszczególnych kolumn macierzy (2.96) jest równe:

$$\begin{aligned} S_v\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) &= \sum_{i=1}^N S_i\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) = \sum_{i=1}^N \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \text{DFT}_l \left[\mathbf{v}_i\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N v_{n,i}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) e^{-j2\pi l(n-1)/N} \right|^2 = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.112)$$

Stała jednostkowa wartość widma gęstości mocy bezpośrednio wynika z ortonormalności macierzy rozkładu według wartości szczególnych (2.91) oraz unitarności transformaty DFT.

Dowód:

$$S_v\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{n=1}^N v_{n,i}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) e^{-j2\pi l(n-1)/N} \right) \left(\sum_{n=1}^N v_{n,i}\left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}\right) e^{-j2\pi l(n-1)/N} \right)^*$$

ortonormalnej zapewnia jednostkowe widmo gęstości mocy odpowiadające rozpatrywanej macierzy rozkładu według wartości szczególnych.

Istotny jest wniosek płynący z propozycji 2.3 – wejściowe, dyskretne widmo gęstości mocy dla dowolnej ortonormalnej macierzy, będącej wynikiem rozkładu według wartości szczególnych, liczone jako suma widmowych gęstości mocy poszczególnych kolumn macierzy, zawsze ma wartość 1 dla dowolnych harmonicznych częstotliwości l . Własność tę można następnie wykorzystać do aproksymacji charakterystyki amplitudowej układu niestacjonarnego.

Propozycja 2.4. Wyjściowe widmo gęstości mocy może być obliczone jako suma widmowych gęstości mocy poszczególnych kolumn macierzy, będącej iloczynem macierzy **US**. Można to zapisać następująco:

$$\begin{aligned} S_y \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l \right) &= \sum_{i=1}^N \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \text{DFT}_l \left[\mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \sigma_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \right] \right|^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N u_{n,i} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \sigma_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) e^{-j2\pi l(n-1)/N} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.114)$$

2.4.5. Krótkoczasowe, przybliżone charakterystyki częstotliwościowe

Wyznaczenie przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych sprowadza się do znalezienia zbioru punktów charakterystyki amplitudowej $\left| G \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l \right) \right|$ oraz charakterystyki fazowej $\varphi \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l \right) = \arg \left(G \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l \right) \right)$. Charakterystykę amplitudową można uzyskać, podstawiając zależność (2.112) do równania (2.110). Obustronne pierwiastkowanie daje w rezultacie:

$$\left| G \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l \right) \right| = \sqrt{S_y \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l \right)} \quad (2.115)$$

Przybliżona charakterystyka amplitudowa układu niestacjonarnego, zależna od operatora przejścia i horyzontu czasowego, po podstawieniu zależności (2.114) może być zatem zapisana w następującej formie:

$$\begin{aligned} \left| G \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l \right) \right| &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \text{DFT}_l \left[\mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \right] \right|^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \sigma_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \sum_{n=1}^N u_{n,i} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) e^{-j2\pi l(n-1)/N} \right|^2} \end{aligned} \quad (2.116)$$

co jednoznacznie definiuje charakterystykę amplitudową.

Przyjmując, że horyzont czasowy będzie przesuwany, zależność (2.116) można uzmiennić od czasu dyskretnego przez podstawienie $k_0 = k$ i zapisać w krótkoczasową aproksymowaną charakterystykę amplitudową układu w następującej postaci:

$$|G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N u_{n,i}(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]}) \sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]}) e^{-j2\pi l(n-1)/N} \right|^2} \quad (2.117)$$

Do wyznaczenia charakterystyki amplitudowej można wykorzystać zdefiniowaną, macierzową charakterystykę częstotliwościową (2.105):

$$|G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |g_{l,i}(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]})|^2} \quad (2.118)$$

gdzie $g_{l,i}$ – element z l -tego wiersza oraz i -tej kolumny charakterystyki częstotliwościowej $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]}) = \{g_{l,i} : l, i = 1, \dots, N, g_{l,i} \in \mathbb{C}\}$.

Alternatywnie można zastosować podstawienie $k_0 = k - N + 1$ i w rezultacie otrzymać definicję charakterystyki opartą na danych za ostatnie N taktów dla horyzontu $k = k_0 - N + 1, \dots, k_0 - 1, k_0$:

$$|G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(\underline{k}, l)| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{n=1}^N u_{n,i}(\hat{\mathbf{T}}_{[k-N+1, k]}) \sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k-N+1, k]}) e^{-j2\pi l(n-1)/N} \right|^2} \quad (2.119)$$

Przez analogię do charakterystyki amplitudowej zależność aproksymująca charakterystykę fazową może być zapisana następująco:

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l) &= \arg \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \frac{\text{DFT}_l \left[\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \right]}{\text{DFT}_l \left[\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \right]} \right) = \\ &= \arg \left(\sum_{i=1}^N \left(\sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \frac{\sum_{n=1}^N u_{n,i}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) e^{-j2\pi(l-1)(n-1)/N}}{\sum_{n=1}^N v_{n,i}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) e^{-j2\pi(l-1)(n-1)/N}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.120)$$

bądź alternatywnie, wykorzystując charakterystykę częstotliwościową (2.105):

$$\varphi_g(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l) = \arg \left(\sum_{i=1}^N g_{l,i}(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}) \right) \quad (2.121)$$

Zależności (2.116)–(2.121) można wykorzystać do wyznaczania charakterystyk zarówno dla układów stacjonarnych jak i układów niestacjonarnych. Zależności (2.120) i (2.121) nie są równoważne. Wartości szczególnie σ_i pełnią w zależnościach (2.116)–(2.120)

funkcję wag. Charakterystyki wyznaczone podaną metodą dla układów stacjonarnych są zbieżne z klasycznymi charakterystykami Bodego wyznaczonymi przez podstawienie w dyskretnej funkcji przejścia $z = \exp(j\omega T_p)$ pod warunkiem, że długość skończonego horyzontu czasowego jest dostatecznie duża. Przyjęta długość horyzontu zależy od charakteru konkretnego układu i oczekiwanej dokładności odzwierciedlenia jego własności. Jest to szczególnie istotne w przypadku układów, w których występują słabo tłumione oscylacje. Wzmocnienie układu zdyskretyzowanego może silnie zależeć od okresu dyskretyzacji i rozważanego horyzontu obserwacji. Jeżeli wyniki analizy mają być reprezentatywne również dla nieskończonego horyzontu czasowego, długość skończonego horyzontu oraz okres próbkowania powinny być tak dobrane, aby zapewnić relatywnie małą wrażliwość zmian charakterystyk układu na zmiany tych parametrów.

Charakterystyka amplitudowa (2.116) spełnia warunek jednorodności, niemniej nie jest ona przekształceniem liniowym względem operatora przejścia z uwagi na niespełnienie dla układów niestacjonarnych warunku addytywności.

Charakterystykę amplitudową $\left| G(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l) \right|$ można interpretować jako energię sygnału wyjściowego (wszystkich harmonicznych tego sygnału) w odpowiedzi na zerowe warunki początkowe oraz wymuszenie sinusoidalne o harmonicznej l i jednostkowej energii. Charakterystykę tę można zatem traktować jako maksymalne wzmocnienie układu (w najgorszym możliwym przypadku) w odpowiedzi na dowolny sygnał o jednej składowej l lub wielu składowych.

Charakterystyka fazowa $\varphi(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]}, l)$ odpowiada w przybliżeniu przesunięciu fazowemu składowych w widmach wyjściowych i wejściowych uwzględnianych z odpowiadającymi im wagami określonymi przez odpowiednie wartości szczególne $\sigma_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})$. Aby uniknąć dzielenia przez zero, w zależności (2.120) czynniki $\text{DFT}_l[\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})] / \text{DFT}_l[\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})]$ z relatywnie małymi wartościami bezwzględny w mianowniku, w przybliżeniu równymi zeru $\left| \text{DFT}_l[\mathbf{v}_i(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]})] \right| \approx 0$, są pomijane przy wyznaczaniu sumy w równaniu (2.120). Charakterystyka fazowa reprezentuje w przybliżeniu uśrednione przesunięcie fazowe dla danej składowej częstotliwości.

Nazwa przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych pochodzi od charakteru odwzorowania charakterystyki fazowej. Sama charakterystyka amplitudowa jest w istocie zbiorem maksymalnych możliwych wzmocnień układu w odpowiedzi na dowolne składowe częstotliwościowe. Jeżeli w konkretnym zastosowaniu są wymagane dwie charakterystyki, metoda oparta na nich będzie metodą przybliżoną.

2.5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

2.5.1. Układ o zmiennej strukturze

Poniżej przeprowadzono analizę kilku stanów pracy układu zmiennej struktury o charakterze oscylacyjno-inercyjnym. Do opisu własności tego układu zdefiniowano dwie

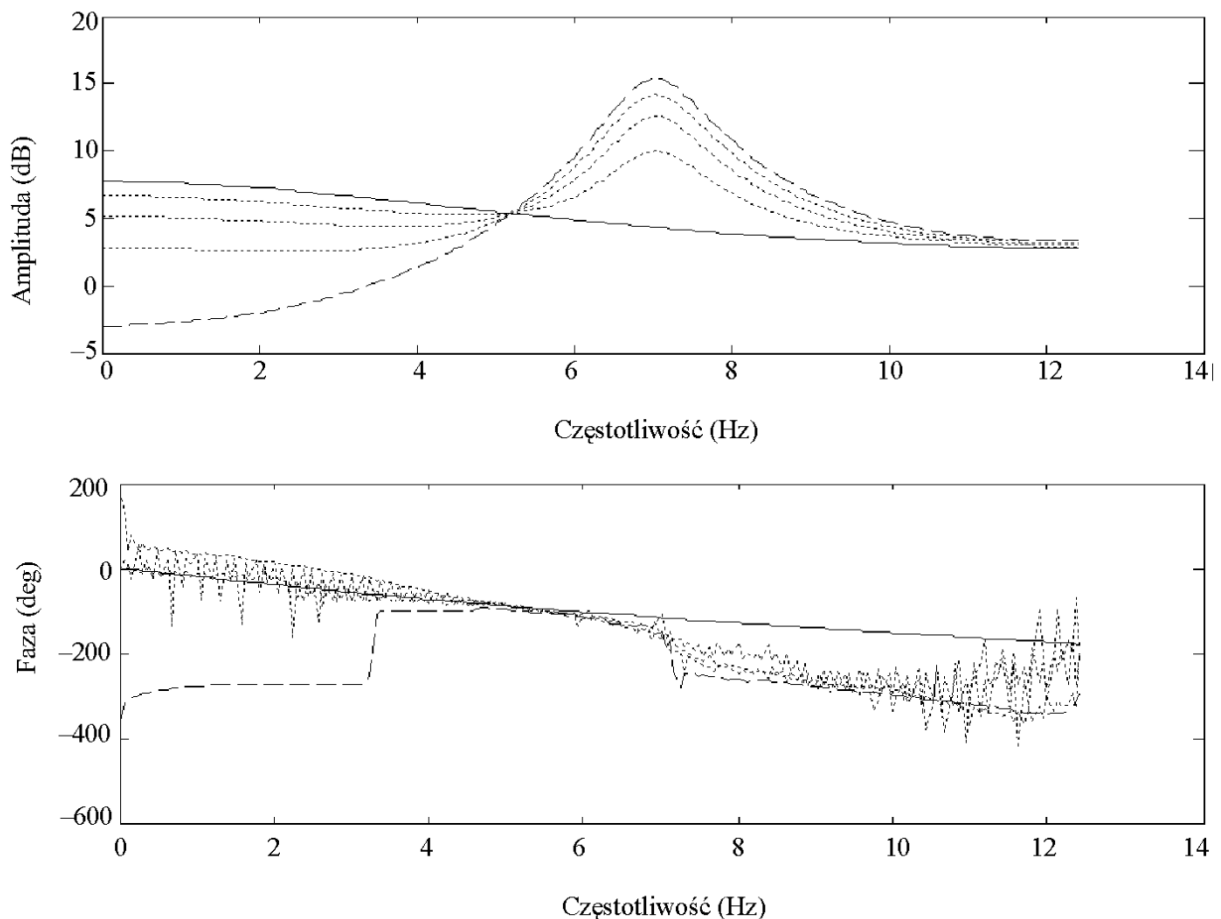
niezależne struktury dane w postaci macierzy stacjonarnego modelu w przestrzeni stanu (1.5)–(1.6). Macierze układu mają następujące wartości:

(I) charakter oscylacyjny układu:

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} -0,21 & 0,66 & -0,31 \\ -0,57 & -0,21 & -0,49 \\ 0,45 & 0,35 & -0,27 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} -0,95 \\ 0 \\ -1,19 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,47 \\ 0,056 \end{bmatrix}^T \quad (2.122)$$

(II) charakter inercyjny układu:

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} 0,07 & 0,25 & 0,14 \\ -0,25 & -0,18 & -0,35 \\ 0,14 & -0,35 & -0,23 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{II} = \begin{bmatrix} -1,17 \\ -0,46 \\ -0,26 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{II} = \begin{bmatrix} -1,21 \\ -1,32 \\ 0,93 \end{bmatrix}^T \quad (2.123)$$



Rysunek 2.3. Aproxymowane charakterystyki Bodego dla przejścia skokowego oscylacyjno-inercyjnego

W przypadku I układ ma charakter oscylacyjny, a jego bieguny wynoszą $[-0,16 + 0,84j; -0,16 - 0,84j; -0,36]$. W przypadku II układ ma charakter inercyjny, a jego bieguny wynoszą odpowiednio $[-0,66; 0,08; 0,24]$. Zmiana struktury może następować zarówno jednorazowo, w trakcie horyzontu analizy, jak i stopniowo, przez cały okres horyzontu czasowego. Szczegółowe wyniki analizy przedstawiono osobno dla trzech wybranych przypadków. Na potrzeby numerycznego wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowej i fazowej, przyjęto okres równy 0,04 s.

2.5.1.1. Przejście skokowe oscylacyjno-inercyjne

Zmiana struktury układu następuje jednorazowo podczas całego horyzontu analizy $N = 400$ kroków i odbywa się skokowo w pewnym, ustalonym z góry momencie N_p . Można to zapisać za pomocą następującego modelu matematycznego:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_I, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_I, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_I & \text{dla } k \leq N_p \\ \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_{II}, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_{II}, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_{II} & \text{dla } k > N_p \end{cases} \quad (2.124)$$

Na rysunku 2.3 przedstawiono charakterystyki amplitudowe i fazowe układu wyznaczone metodą SVD-DFT dla pięciu różnych wartości N_p równych odpowiednio 1 – linia ciągła, 100, 200, 300 – linie kropkowane, 399 – linia przerywana. W zależności od wartości parametru N_p następuje przejście między kolejnymi charakterystykami. Dla charakterystyki amplitudowej w rozpatrywanym horyzoncie czasowym przejście to jest niemal płynne.

Dla wartości parametru $N_p = 1$ otrzymane charakterystyki amplitudowa i fazowa są zbieżne do klasycznych charakterystyk dla układu stacjonarnego. Dla wartości parametru $N_p = 399$ jedynie charakterystyka amplitudowa jest zbieżna ze swoim odpowiednikiem stacjonarnym. Przez zbieżność charakterystyki ze swoim odpowiednikiem stacjonarnym należy rozumieć, że spełniona jest następująca zależność:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0 + N - 1]}, l) = G_{LTI}(\hat{\mathbf{T}}, l)$$

gdzie $G_{LTI}(\hat{\mathbf{T}}, l)$ – charakterystyka częstotliwościowa układu stacjonarnego dla nieskończonego horyzontu czasowego.

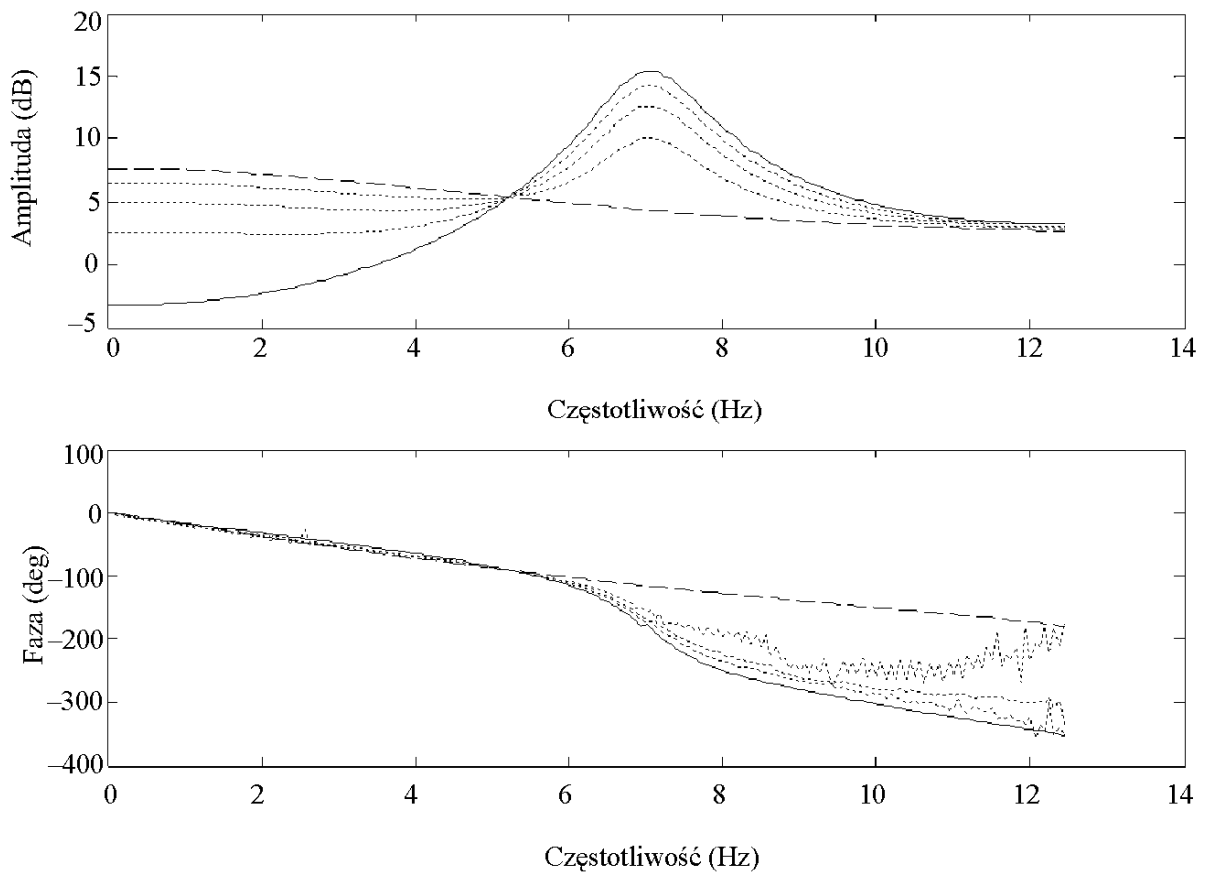
2.5.1.2. Przejście skokowe inercyjno-oscyłacyjne

W przedstawionym przypadku zmiana struktury następuje w odwrotnej kolejności, tzn. układ, który początkowo jest inercyjny, zmieniono na oscylacyjny. Model matematyczny układu można zapisać następująco:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_{II}, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_{II}, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_{II} & \text{dla } k \leq N_p \\ \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_I, \mathbf{B}(k) = \mathbf{B}_I, \mathbf{C}(k) = \mathbf{C}_I & \text{dla } k > N_p \end{cases} \quad (2.125)$$

Na rysunku 2.4 wykreślono aproksymowane charakterystyki Bodego układu (2.125). Horyzont czasowy wynosi, podobnie jak poprzednio, $N = 400$ kroków. Momenty przełączeń

N_p są odpowiednio równe: 1 – linia ciągła, 100, 200, 300 – linie kropkowane, 399 – linia przerywana. Z analizy porównawczej charakterystyk amplitudowych przedstawionych na rysunkach 2.3 oraz 2.4, z uwzględnieniem czasów trwania stanu (I) i (II), wynika brak istotnych różnic. Duże zmiany są widoczne w charakterystyce fazowej, w szczególności jej liniowy początek wskazuje na bardziej „miękki” charakter przełączenia, niewprowadzający zniekształceń fazowych dla sygnałów wolnozmiennych. Wynika on z faktu, że stan przejściowy układu jest najpierw filtrowany przez część inercyjną, a dopiero po określonym czasie N_p trafia na część oscylacyjną.



Rysunek 2.4. Aproxymowane charakterystyki Bodego dla przejścia skokowego inercyjno-oscylicyjnego

2.5.1.3. Przejście stopniowe inercyjno-oscylicyjne

W tym przypadku zmiana struktury macierzy układu zachodzi stopniowo, jest rozłożona w czasie. Możliwych metod przejścia jest oczywiście nieskończenie wiele, natomiast w pracy rozważono trzy następujące: liniowe ($r = 1$), kwadratowe ($r = 2$) i pierwiastkowe ($r = 0,5$).

Model matematyczny układu niestacjonarnego ma następującą postać:

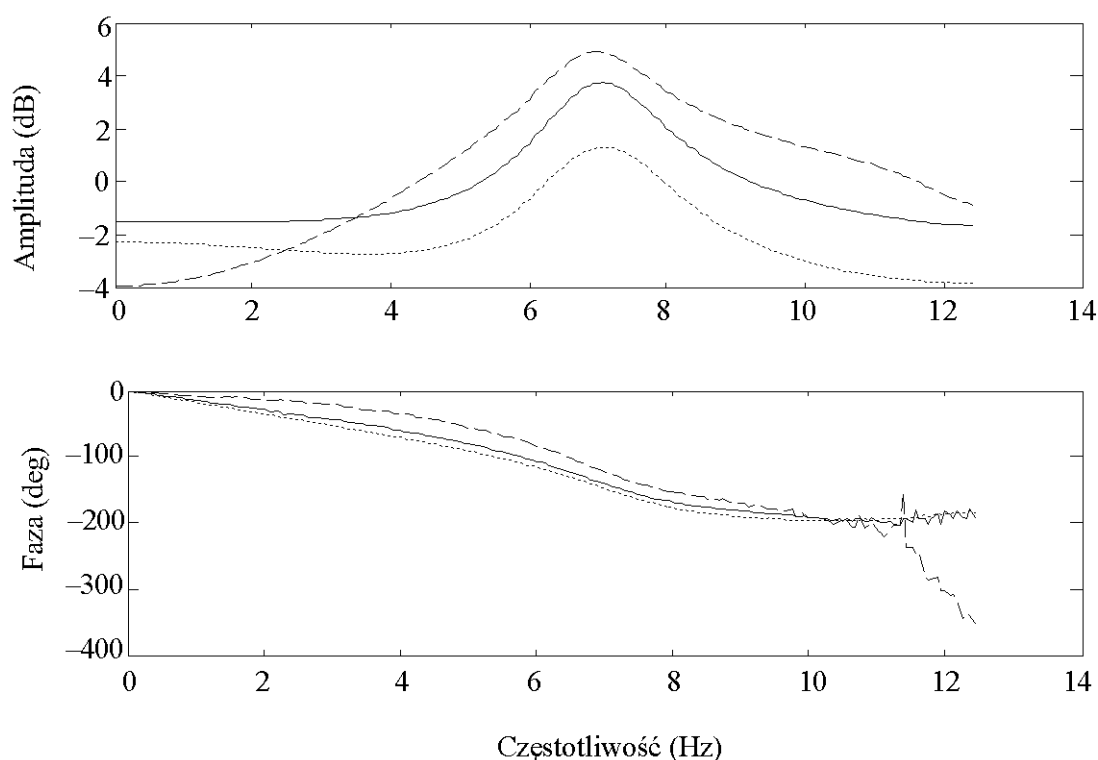
$$\alpha(k) = \left(\frac{N-k}{N-1}\right)^r, \quad \beta(k) = \left(\frac{k-1}{N-1}\right)^r \quad (2.126)$$

$$\mathbf{A}(k) = \alpha(k)\mathbf{A}_I + \beta(k)\mathbf{A}_{II}$$

$$\mathbf{B}(k) = \alpha(k)\mathbf{B}_I + \beta(k)\mathbf{B}_{II} \quad (2.127)$$

$$\mathbf{C}(k) = \alpha(k)\mathbf{C}_I + \beta(k)\mathbf{C}_{II}$$

gdzie $N = 400$, $k = 1, 2, \dots, N$, $r = \{0,5; 1; 2\}$.



Rysunek 2.5. Aproxymowane charakterystyki Bodego dla przejścia stopniowego inercyjno-oscylacyjnego

Wyznaczone charakterystyki przedstawiono na rysunku 2.5. Przejście liniowe wykreślono linią ciągłą, przejście kwadratowe – linią kropkowaną, a przejście pierwiastkowe – linią przerywaną. W tym przypadku porównanie z przypadkiem stacjonarnym jest trudniejsze, lecz można zauważyć, że zmiana sposobu przestrajania układu, powiązana ze zmianą parametru r , w istotny sposób wpływa na charakterystykę amplitudową. Wpływ zmian parametru r na charakterystykę fazową jest znacznie mniejszy niż w przypadku zmiany parametru N_p w dwóch poprzednich przykładach.

2.5.2. Filtr cyfrowy o zmiennych w czasie współczynnikach

Synteza filtrów dyskretnych o zmiennych współczynnikach cieszy się w ostatnich latach rosnącym zainteresowaniem [43], [45], [47], [118], [162], [261], [288], [294], [295], ponieważ jest ważną dziedzinę przetwarzania sygnałów [7], [33], [42], [301], [44], [72], [86], [171], [232], [243], [247], [251], [254], [269], [283], [310]. Wymaganiem często stawianym w filtracji sygnałów jest zawężenie pasma przepustowego filtru dla małych zmian sygnału wejściowego w momencie, gdy dominującym czynnikiem jest szum i dynamiczne poszerzanie pasma filtru w chwili wykrycia raptownych zmian sygnału, jeżeli udział szumu jest mniej istotny. Podejście takie daje rezultaty lepsze niż klasyczny filtr o stałych współczynnikach, gdyż pozwala na uwzględnienie specyfiki sygnału filtrowanego oraz poprawienie liniowości charakterystyki fazowej filtru w momencie gwałtownych zmian sygnału.

Poniższy przykład ma na celu pokazanie możliwości zastosowania przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych do analizy filtru cyfrowego o skończonej odpowiedzi impulsowej FIR (ang. *Finite Impulse Response*) i zmiennych w czasie współczynnikach. Filtr taki najczęściej jest opisany równaniem różnicowym o zależnych od czasu współczynnikach:

$$y(k) = b_0(k)v(k) + b_1(k)v(k-1) + \dots + b_n(k)v(k-n) \quad (2.128)$$

Aby ułatwić proces poszukiwania współczynników filtru, przyjęto, że w otoczeniu momentu wykrycia raptownej zmiany sygnału wejściowego częstotliwość graniczna filtru ω_g będzie się zmieniać w sposób opisany następującą zależnością:

$$\omega_g(k) = \omega_d + (\omega_m - \omega_d) \left(\sin \left(\pi \frac{k - k_{f0}}{R} \right) \right)^c \quad (2.129)$$

gdzie:

- ω_d – dolna częstotliwość graniczna filtru (gdy głównym czynnikiem jest szum),
- ω_m – górna częstotliwość graniczna filtru (poszerzone pasmo, mające na celu skrócenie czasu narastania),
- R – rząd filtru,
- k_{f0} – moment rozpoczęcia zmienności czasowej współczynników filtru,
- k – dyskretny czas,
- c – współczynnik kształtu przestrojenia.

W pozostałych momentach $\omega_g(k) = \omega_d$. Współczynniki $\mathbf{b}(k) = [b_0(k), b_1(k), \dots, b_n(k)]$ filtru (2.128) są wyznaczane za pomocą standardowego algorytmu syntezy filtru FIR z zastosowaniem okna Hamminga do odpowiedzi impulsowej filtru idealnego [157], dostępnej w programie Matlab. Współczynniki są wyznaczane z następującej zależności:

$$b_i(k) = w(i)h_k(i) \quad 1 \leq i \leq R \quad (2.130)$$

gdzie:

$w(i)$ – okno czasowe,

$h_k(i)$ – odpowiedź impulsowa filtru idealnego, otrzymana w wyniku odwrotnej transformaty Fouriera charakterystyki częstotliwościowej filtru idealnego dla pulsacji granicznej $\omega_g(k)$.

Na potrzeby symulacji numerycznej przyjęto następujące wartości parametrów: $R = 50$, $k_0 = 1$, $\omega_d = 0,1$, $\omega_m = 0,6$, horyzont czasowy symulacji $N = 100$. Obliczenia przeprowadzono dla czterech następujących filtrów: 1 – filtr stacjonarny o pulsacji granicznej $\omega_g = \omega_d$, 2 – filtr niestacjonarny o współczynniku kształtu $c = 30$, 3 – filtr niestacjonarny o współczynniku kształtu $c = 10$, 4 – filtr stacjonarny o pulsacji granicznej $\omega_g = \omega_m$.

Odpowiedzi skokowe poszczególnych filtrów przedstawiono na rysunku 2.6. Do sygnału skokowego podanego na wejściu filtru dodano szum o rozkładzie normalnym $N(0, (0,1)^2)$. Odpowiedź przedstawiona na rysunku 2.6 jest opóźniona w czasie o $R/2$ z uwagi na własności filtru FIR.

Mimo że zależność (2.129) umożliwia kształtowanie charakterystyki przestrajania filtru, to w wielu zastosowaniach może ona być wadą z uwagi na konieczność każdorazowego doboru stałej c do konkretnego filtru, tj. do stałych R i ω_d . Po zmianie rzędu bądź częstotliwości granicznej filtru konieczny jest ponowny dobór stałej c . Aby ułatwić projektowanie filtru o zmiennych współczynnikach, do przestrajania częstotliwości granicznej filtru centralnych możliwe jest wykorzystanie współczynników filtru o pulsacji podstawowej ω_d :

$$\omega_g(k) = \omega_d + (\omega_m - \omega_d) \frac{b_k^c}{\max_{0 \leq k \leq n} b_k^c} \quad (2.131)$$

gdzie b_k – dodatnie współczynniki centralne filtru o pulsacji ω_d .

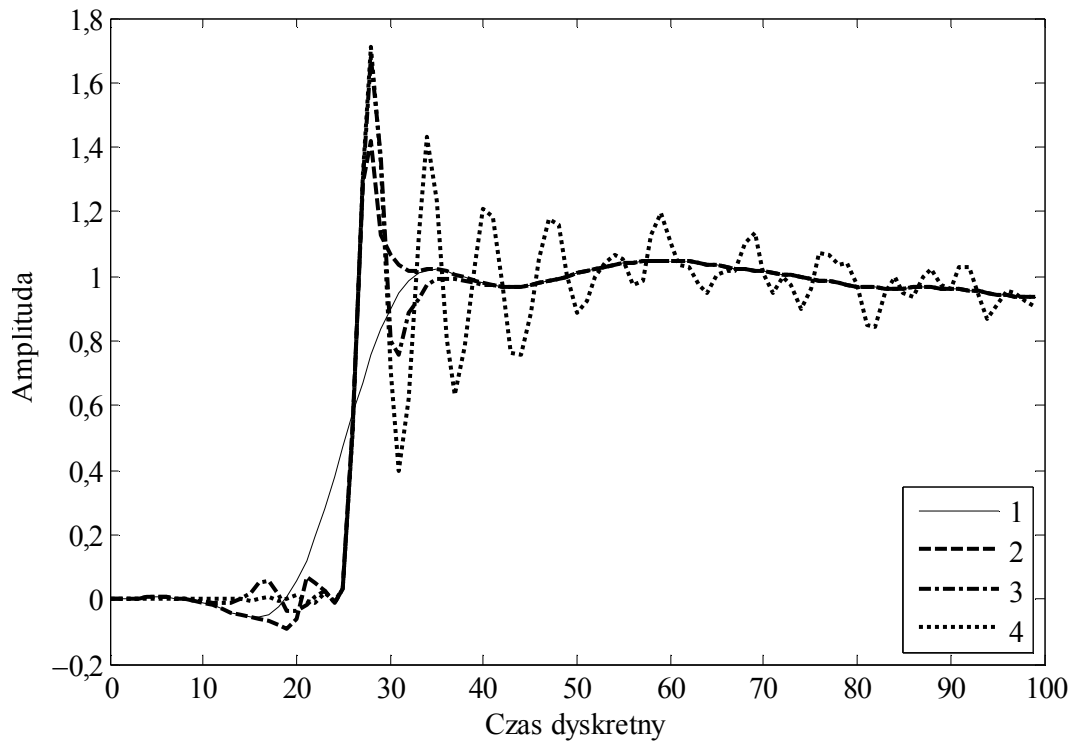
Dodatnie współczynniki centralne otrzymuje się przez wyzerowanie wszystkich zewnętrznych współczynników filtru, począwszy od pierwszego, niedodatniego współczynnika, licząc od współczynnika środkowego, co matematycznie można zapisać następująco:

$$b_k^c = \begin{cases} b_k & \{k : |0,5n - k| \leq d\} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad (2.132)$$

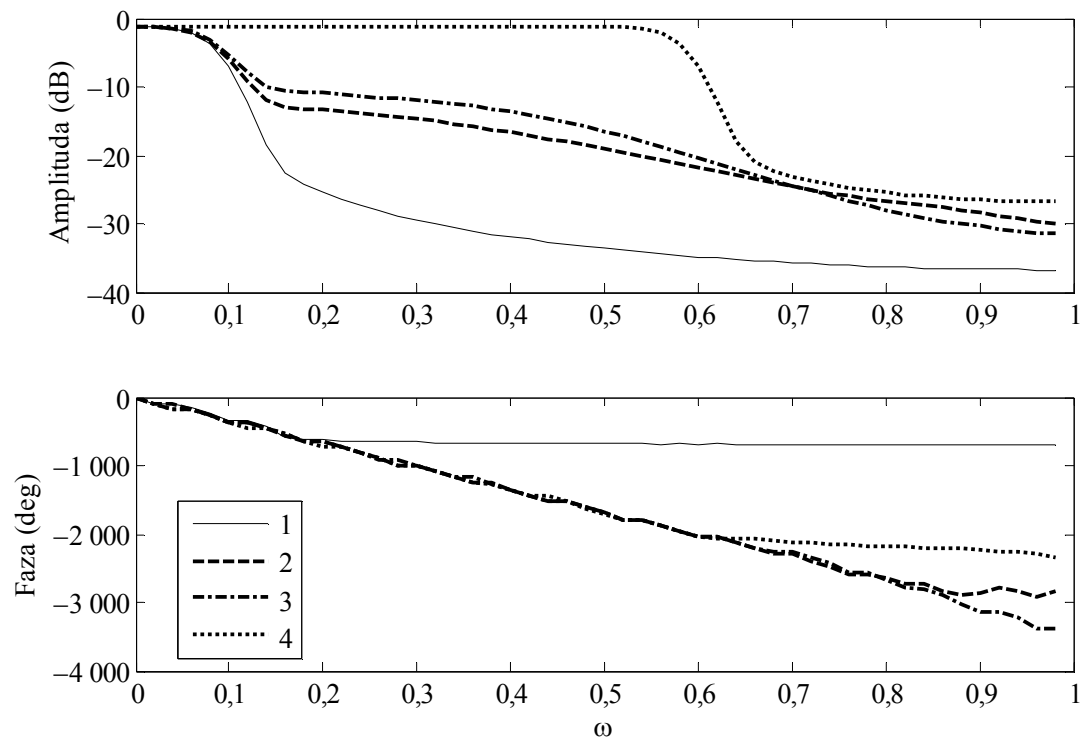
gdzie d – kres górny zbioru wartości Δ , spełniających warunek $b_{0,5n \pm \Delta} > 0$.

Wartość d można zatem wyznaczyć z warunku $\forall_{\Delta \leq d} b_{0,5n \pm \Delta} > 0$.

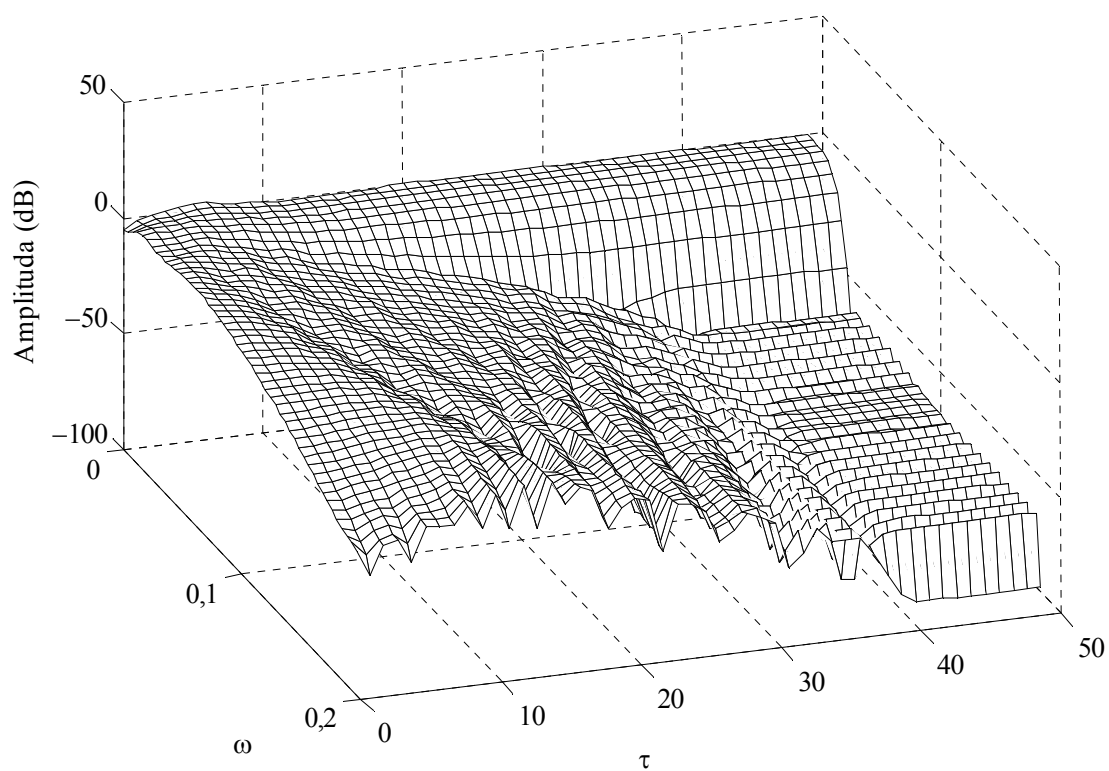
Zależność (2.132) jest spełniona dla filtrów parzystych rzędów wówczas, gdy $0,5n, k, \Delta, d \in \mathbb{N}$ oraz dla filtrów nieparzystych rzędów, spełniających warunek $k \in \mathbb{N}$, $d + 0,5 \in \mathbb{N}$, $\Delta + 0,5 \in \mathbb{N}$. Wykorzystanie zależności (2.131)–(2.132) znacznie ułatwia projektowanie filtru niestacjonarnego. Projekt taki sprowadza się do wprowadzenia rzędu filtru R , pulsacji granicznych ω_d, ω_g oraz dodatkowo, przy pracy sekwencyjnej, warunku wykrycia zbrocza.



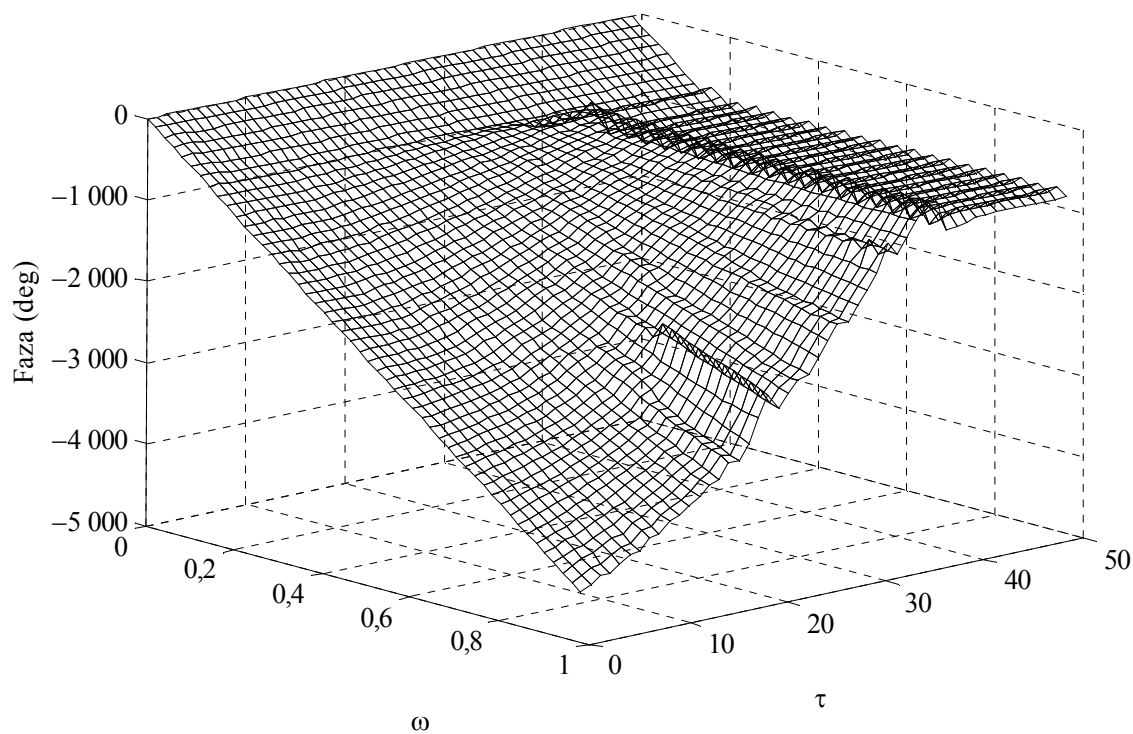
Rysunek 2.6. Odpowiedzi skokowe filtrów stacjonarnych (1, 4) i o zmiennych współczynnikach (2, 3), $R = 50$, $N = 100$



Rysunek 2.7. Aproksymowane charakterystyki Bodego filtrów stacjonarnych (1, 4) oraz filtrów o zmiennych współczynnikach (2, 3)



Rysunek 2.8. Zależność amplitudy od przesunięcia czasowego i częstotliwości dla filtra o zmiennych współczynnikach $c = 30$



Rysunek 2.9. Zależność fazy od przesunięcia czasowego i częstotliwości dla filtra o zmiennych współczynnikach $c = 30$

Aproksymowane charakterystyki amplitudowo-fazowe, zilustrowane na rysunku 2.7, wyznaczono za pomocą operatora przejścia układu \hat{T} , zbudowanego na podstawie zbioru odpowiedzi impulsowych przesuniętych w czasie. Jak pokazano na rysunku 2.7, częstotliwości graniczne (-3dB) filtrów 1–3 są niemal identyczne, lecz filtry niestacjonarne 2–3 mają słabsze tłumienie w zakresie wysokich częstotliwości, co jest wynikiem chwilowego podnoszenia częstotliwości granicznej filtru. Im rzadziej następuje takie przestrajanie częstotliwości, tym bardziej charakterystyki 2–3 są zbieżne z 1. Charakterystyka fazowa filtrów 2–3 jest liniowa w szerszym zakresie niż filtru 1, niemniej kształt charakterystyki fazowej zależy od momentu rozpoczęcia analizy. Przykładowo, dla momentu początkowego przesuniętego o 25 kroków wstecz zakres liniowy dla filtrów 2–3 kończy się, gdy $\omega \approx 0,64$, jednak jest prawie trzykrotnie wyższy niż dla filtru 1.

Powyższy przykład można również przeanalizować za pomocą przekształcenia czasowo-częstotliwościowego. Trójwymiarowe powierzchnie: amplitudową i fazową, dla filtru 2 przedstawiono odpowiednio na rysunkach 2.8 i 2.9. Osie wykresu leżące na płaszczyźnie poziomej oznaczają pulsację ω i przesunięcie czasowe względem momentu rozpoczęcia zmienności współczynników filtru $\tau = k - k_{f_0}$. Wykresy trójwymiarowe umożliwiają bardziej szczegółową analizę pracy filtru. Na rysunku 2.8 można zaobserwować, w jaki sposób zmienia się pasmo przepustowe filtru. Dla małych wartości przesunięcia czasowego τ filtr jest prawie wszechprzepustowy. W miarę wzrostu τ pasmo jest coraz bardziej ograniczane do momentu ustabilizowania się dla wartości $\tau \geq 40$. Podobne obserwacje wynikają z wykresu fazowego przedstawionego na rysunku 2.9. Pewnymi wadami wykresów trójwymiarowych są większe wymagania dotyczące sprzętu potrzebnego do wizualizacji i gorsza tolerancja szumu. Główną zaletą jest natomiast odwzorowanie zmiennych własności układu w czasie.

Przybliżone charakterystyki Bodego wyznaczone metodą SVD-DFT uzupełniają trójwymiarowe wykresy analizy czasowo-częstotliwościowej. Prezentują one własności układu z punktu widzenia całego horyzontu czasowego analizy. Dwuwymiarowa prezentacja danych umożliwia ich łatwą interpretację. Z praktycznego punktu widzenia najczęściej są istotne tylko wybrane punkty i konkretne wartości wzmocnień. Przykładowo, możliwe jest określenie tłumienia filtru o zmiennych w czasie współczynnikach. Dodatkowo własności rozkładu według wartości szczególnych oraz średniokwadratowe uśrednianie po czasie prowadzi do zmniejszenia wpływu szumu na kształt charakterystyk.

2.5.3. Uproszczona analiza układu oscylacyjnego o parametrach zależnych od stanu

W kolejnym przykładzie rozpatrzono nieliniowy układ oscylacyjny, zdyskretyzowany i zlinearyzowany wzdłuż prognozowanej trajektorii. Model układu nieliniowego dany jest następującym równaniem różniczkowym:

$$\ddot{y}(t) + \beta(|\dot{y}(t)|)\omega_0(y(t))\dot{y}(t) + \omega_0^2(y(t))y(t) = \omega_0^2(y(t))v(t) \quad (2.133)$$

Współczynniki β , ω_0 dane są w postaci funkcji wielomianowych:

$$\beta(t) = b_2(x_1(t))^2 + b_1|x_1(t)| + b_0 \quad (2.134)$$

$$\omega_0(t) = w_3(x_2(t))^3 + w_2(x_2(t))^2 + w_1x_2(t) + w_0 \quad (2.135)$$

przy czym przyjęto następujące wartości współczynników wielomianów (2.134)–(2.135):

$$\mathbf{b} = [b_2, b_1, b_0] = [0,001, 0, 0,001], \quad \mathbf{w} = [w_3, w_2, w_1, w_0] = [0,002, 0, 0,02, 4] \quad (2.136)$$

Zdyskretyzowany i zlinearyzowany wzdłuż prognozowanej trajektorii model układu (2.133) można zapisać w postaci następujących macierzy równania stanu (1.5)–(1.6):

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta(k)\omega_0(k) & -\omega_0^2(k) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T_p \quad (2.137)$$

$$\mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_p \quad (2.138)$$

$$\mathbf{C}(k) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0^2(k) \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

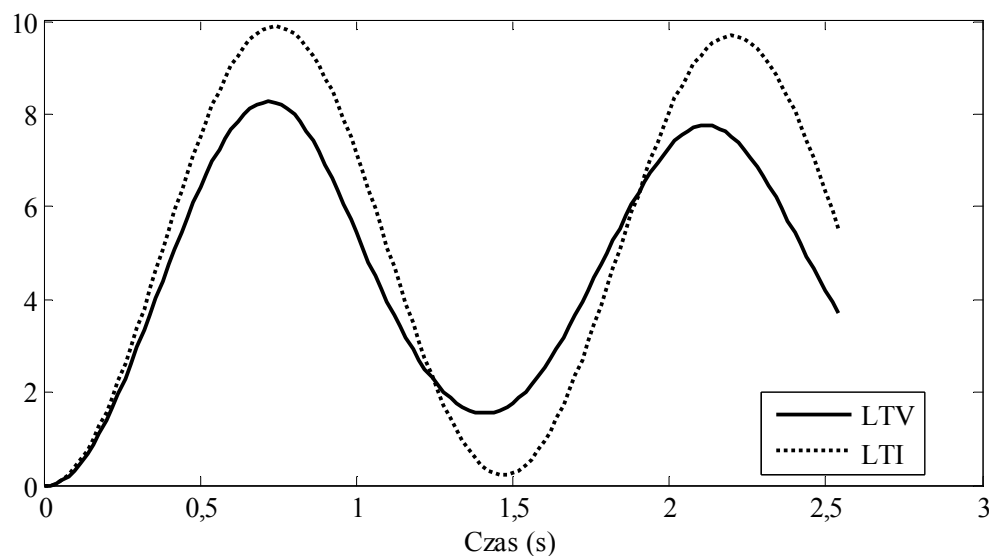
$$\mathbf{D}(k) = 0 \quad (2.140)$$

gdzie:

x_1 – uogólniona prędkość,

x_2 – położenie,

T_p – okres dyskretyzacji.



Rysunek 2.10. Odpowiedź skokowa układu niestacjonarnego – linia ciągła, stacjonarnego – linia kropkowana

Dla dowolnych sygnałów wejścia i stanu układ ten jest nieliniowy. Rozpatrując zachowanie tego układu dla ustalonych warunków początkowych $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$ i danej trajektorii wejścia w postaci skoku sygnału o wartości 5, tj. $v(k) = 5 \cdot 1(k)$, w istocie zachodzi

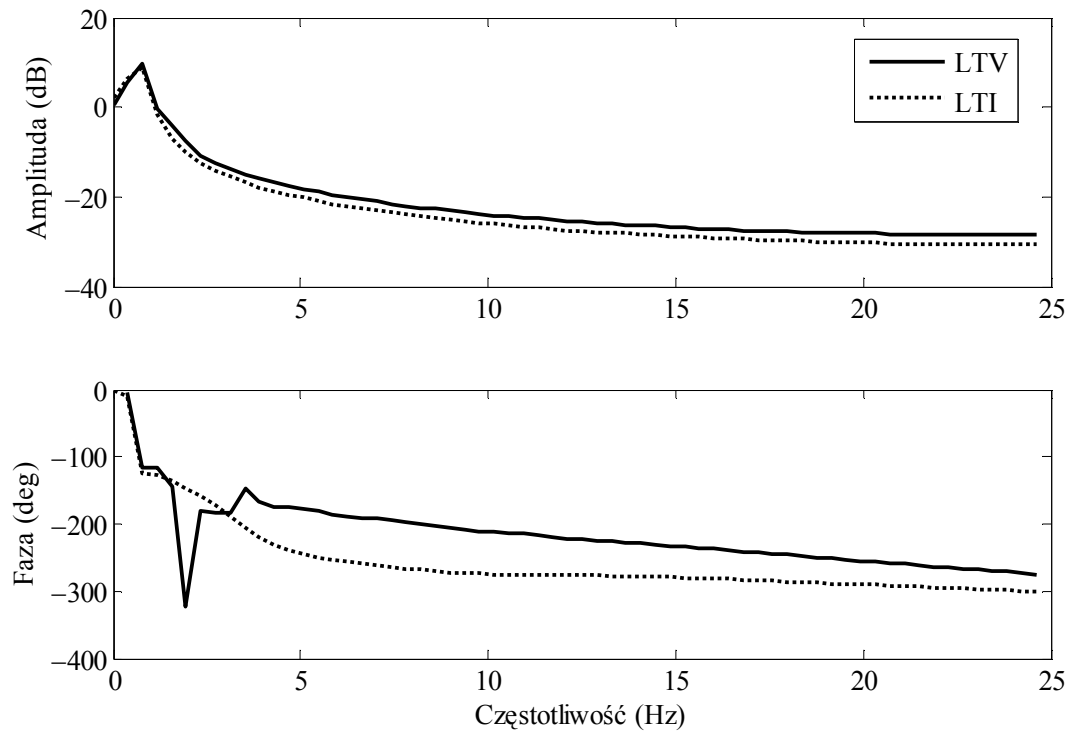
$$\beta(x_1(k)) = \beta(k), \quad \omega_0(x_2(k)) = \omega_0(k).$$

Układ ten można zatem traktować jak niestacjonarny liniowy. Dla porównania z przypadkiem stacjonarnym liniowym wykorzystano następujące podstawienie:

$$\beta = \beta\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x_1(k)|\right) \quad (2.141)$$

$$\omega_0 = \omega_0\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x_2(k)|\right) \quad (2.142)$$

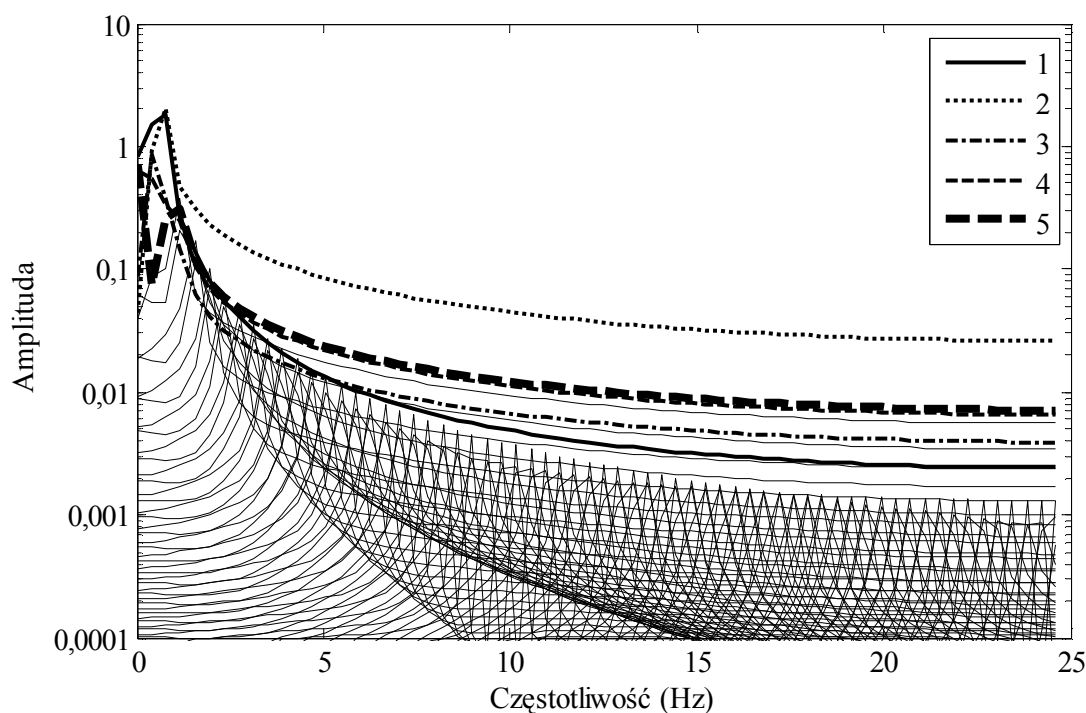
Najpierw wyznaczono charakterystyki czasowe. Na rysunku 2.10 pokazano odpowiedź skokową układu w przypadku niestacjonarnym (LTV), wykreśloną linią ciągłą, oraz przypadek stacjonarny (LTI), wykreślony linią kropkowaną. Na rysunku widać wyraźnie, że między układami zachodzą wyraźne różnice pod względem tłumienia – większe w przypadku niestacjonarnym, oraz częstotliwości drgań własnych układu – nieznacznie większej w przypadku niestacjonarnym.



Rysunek 2.11. Charakterystyki amplitudowo-fazowe Bodego dla układu niestacjonarnego – linia ciągła, dla układu stacjonarnego – linia kropkowana

Kolejnym krokiem analizy jest porównanie przybliżonych charakterystyk Bodego – amplitudowych i fazowych – wykreślonych na rysunku 2.11. Przypadek niestacjonarny, podobnie jak poprzednio, zaznaczono linią ciągłą. Charakterystyki amplitudowe obu układów są zbliżone. Rozbieżności można zaobserwować dla wyższych częstotliwości $f > 2$ Hz.

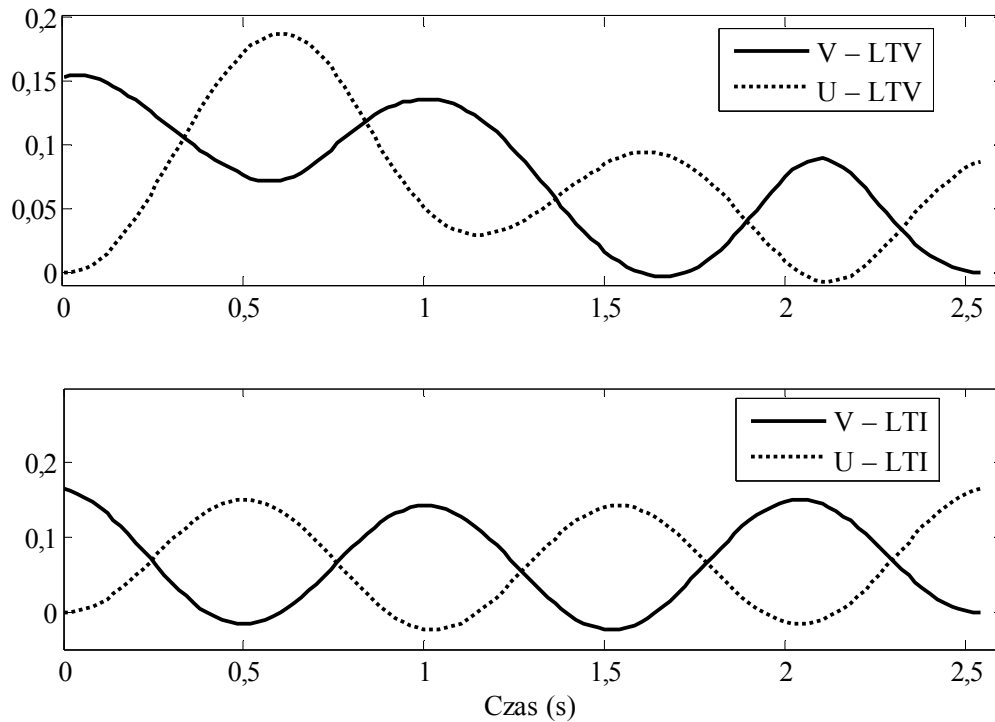
Znacznie większe rozbieżności można zaobserwować w charakterystyce fazowej. Przede wszystkim widoczne są zaburzenia zaczynające się od silnego impulsu ujemnego dla częstotliwości około 1,6 Hz i kończące się słabym impulsem dodatnim dla częstotliwości około 4 Hz. Tego typu zaburzenia charakterystyki fazowej są wynikiem zjawisk niestacjonarnych. Bardziej szczegółową analizę można oprzeć na wykresie składowych charakterystyki amplitudowej przedstawionej na rysunku 2.12. Linie przedstawiają charakterystyki amplitudowe poszczególnych wektorów własnych pomnożonych przez odpowiadające im wartości szczególne US . Wartości szczególne są uporządkowane w kolejności malejącej, zatem na kształt charakterystyki największy wpływ ma kilka pierwszych wartości i wektorów własnych.



Rysunek 2.12. Składowe charakterystyki amplitudowej w dziedzinie częstotliwości dla układu niestacjonarnego

Na rysunku 2.12 wyróżniono pięć pierwszych składowych. Pierwsza składowa – linia ciągła gruba – kształtuje w sposób dominujący część niskoczęstotliwościową, druga składowa – linia kropkowana – część wysokoczęstotliwościową. Pozostałe składowe mają nieco mniejszy wpływ. Składowe powyżej piątej wykreślono cienkimi liniami ciągłymi u dołu wykresu. Mają one kształt stromych szczytów dla poszczególnych wartości częstotliwości, nieznacznie wpływając na kształt części wysokoczęstotliwościowej wykresu,

zdominowanej w istocie przez drugą składową. Piąta składowa odpowiada za zjawiska niestacjonarne. Zilustrowano to na rysunku 2.13, na którym wykreślono piąte kolumny macierzy U i V (piąte wektory szczególne) dla układu niestacjonarnego – górny wykres, a dla układu stacjonarnego – dolny wykres. Dolne wykresy zawierają mniejszą liczbę składowych częstotliwości (kształt sinusoidalny) niż górne, mające znacznie bardziej rozbudowane spektrum (zmodulowana sinusoida, brak symetrii).



Rysunek 2.13. Piąte wektory szczególne dla macierzy U i V w dziedzinie czasu dla układu niestacjonarnego – górny wykres, i dla układu stacjonarnego – dolny wykres

2.5.4. Analiza układu oscylacyjnego o zmiennych w czasie parametrach w ruchomym horyzoncie czasowym

W przykładzie przeprowadzono analizę liniowego niestacjonarnego układu oscylacyjnego. Model dyskretny oscylatora można zapisać w postaci następujących macierzy równania stanu (1.5)–(1.6):

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta\omega_0(k) & -\omega_0^2(k) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T_p \quad (2.143)$$

$$\mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} \kappa(k) \\ 0 \end{bmatrix} T_p \quad (2.144)$$

$$\mathbf{C}(k) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0^2(k) \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

$$\mathbf{D}(k) = 0 \quad (2.146)$$

gdzie:

x_1 – uogólniona prędkość,

x_2 – położenie,

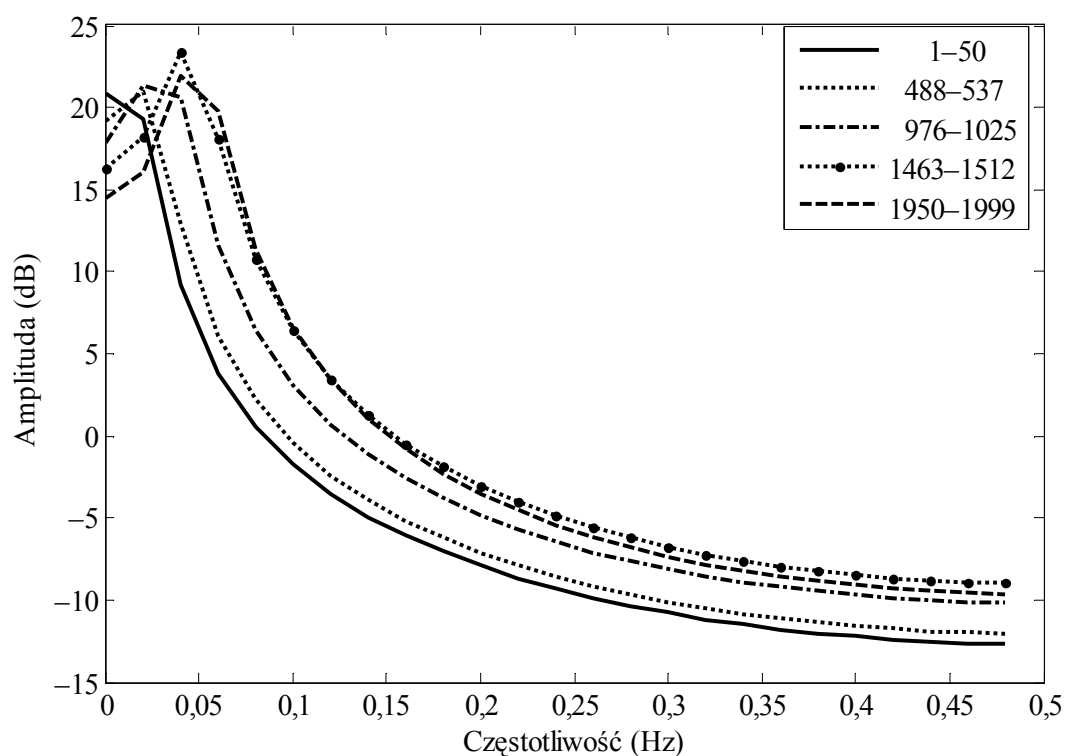
T_p – okres próbkowania.

W niniejszym przykładzie $T_p = 1$, $\beta = 0,5$. Zmienność współczynników modelu w czasie opisują następujące funkcje:

$$\omega_0(k) = 0,1 + 0,1 \left(1 - \cos \left(\frac{k\pi}{N_H} \right) \right) \quad (2.147)$$

$$\kappa(k) = 10 - 5 \frac{k}{N_H} \quad (2.148)$$

gdzie N_H – całkowita długość horyzontu analizy układu.

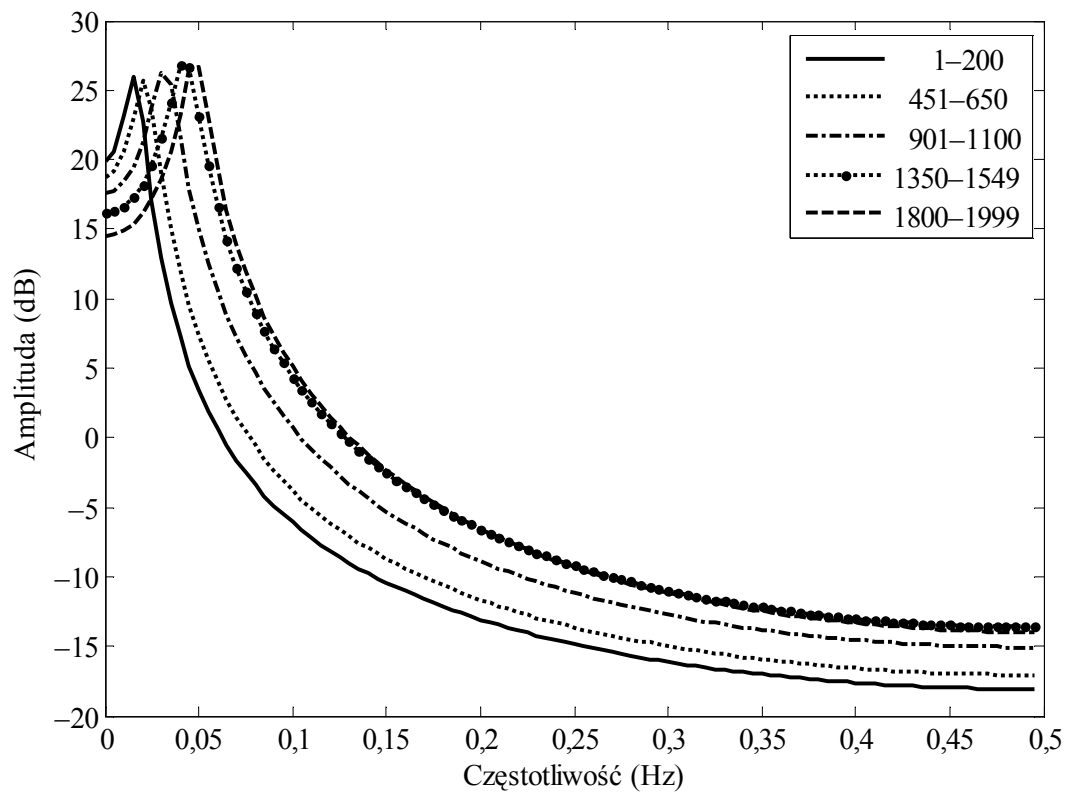


Rysunek 2.14. Charakterystyki amplitudowe dla układu niestacjonarnego w horyzoncie analizy $N = 50$

Analizę układu przeprowadzono dla kilku horyzontów czasowych: $N = 50, 200, 800, 1000$, oraz różnych momentów początkowych analizy k_0 . W ramach analizy częstotliwościowej wyznaczono aproksymowane charakterystyki amplitudowe układu niestacjonarnego dla ruchomego horyzontu czasowego i okna prostokątnego. Rodziny charakterystyk amplitudowych zilustrowano na rysunkach 2.14–2.16. Na rysunku 2.14 przedstawiono

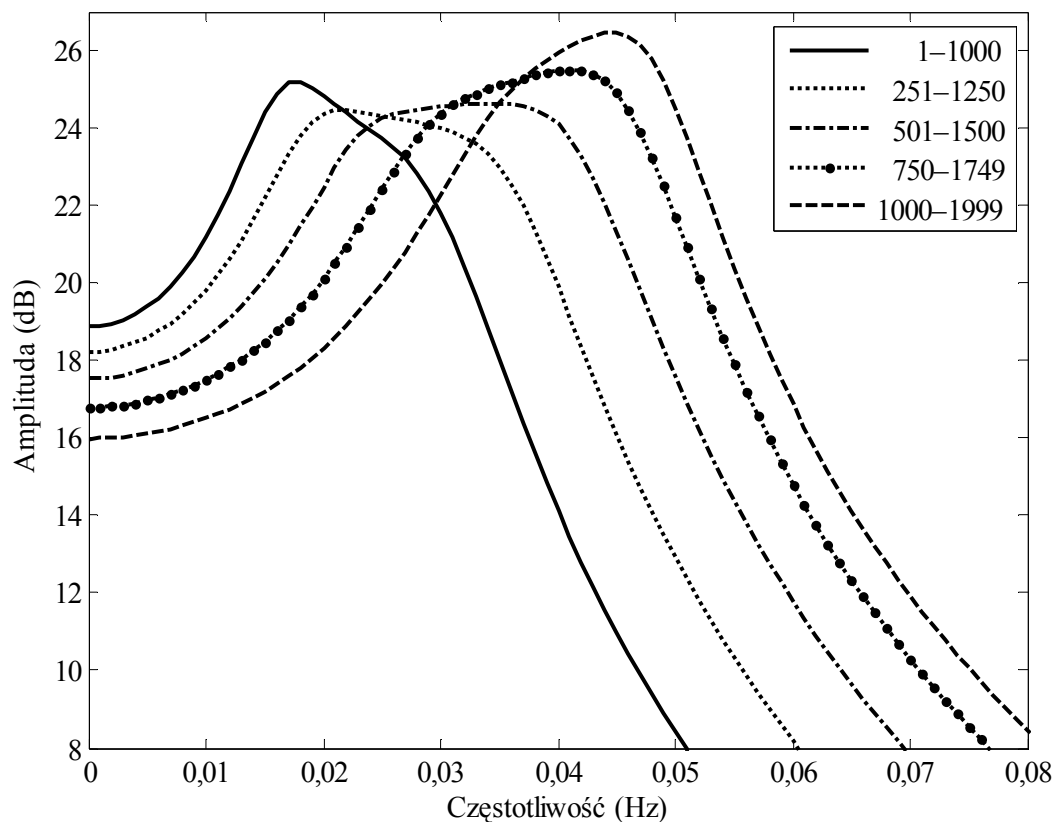
rodzinę charakterystyk amplitudowych układu w horyzoncie analizy $N = 50$ i dla różnych momentów początkowych. Zakres czasów dyskretnych dla każdego diagramu podano w legendzie do wykresu. Z uwagi na krótki horyzont analizy rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości jest niewielka, co utrudnia precyzyjne zlokalizowanie wzmocnień lub częstotliwości własnych układu reprezentatywnych dla dłuższego horyzontu analizy.

Rodzinę charakterystyk amplitudowych układu w horyzoncie czasowym $N = 200$ i dla różnych momentów początkowych analizy przedstawiono na rysunku 2.15. Wydłużony horyzont analizy powoduje, że przebiegi poszczególnych wykresów są bardziej gładkie, a punkty charakterystyczne mogą być zlokalizowane ze zwiększoną dokładnością. Zakres czasów dyskretnych dla każdego diagramu podano w legendzie do wykresu.

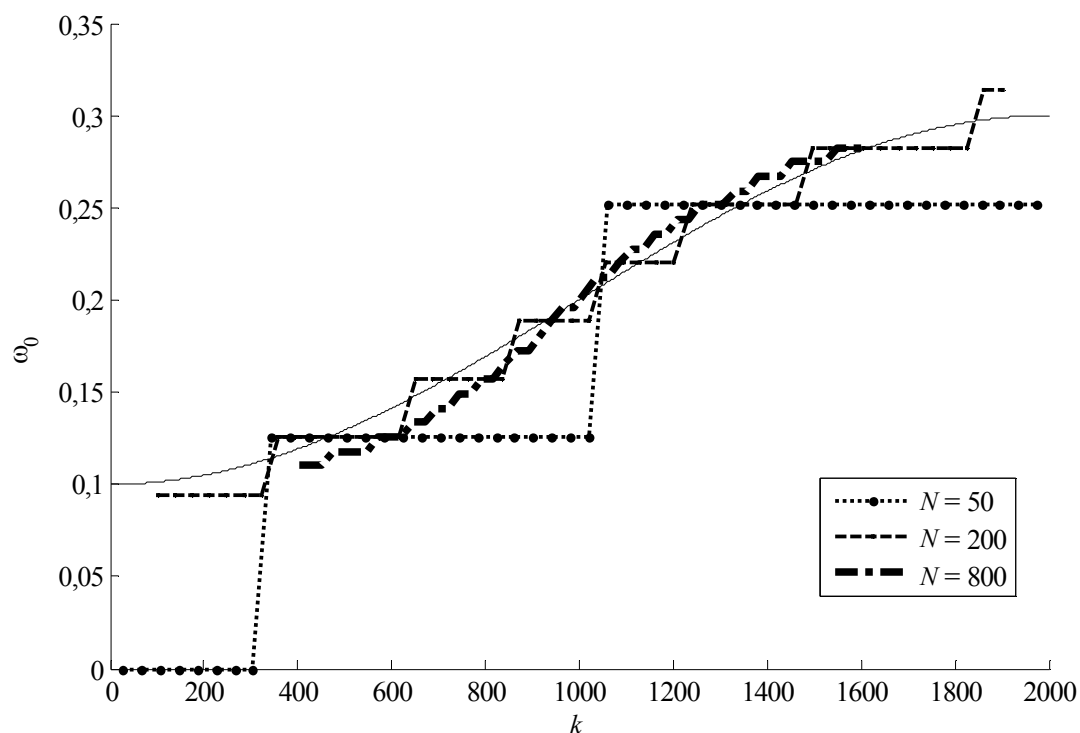


Rysunek 2.15. Charakterystyki amplitudowe dla układu niestacjonarnego w horyzoncie analizy $N = 200$

Na rysunku 2.16 przedstawiono zbliżenie początkowego zakresu częstotliwości dla rodziny charakterystyk amplitudowych układu w horyzoncie analizy $N = 1000$ i dla różnych momentów początkowych. Zakres czasów podano w legendzie do wykresu. Dalsze wydłużenie horyzontu analizy skutkuje nie tylko dalszym wygładzeniem wykresów, ale również wystąpieniem uśrednień poszczególnych charakterystyk. Przykładowo, na rysunku 2.16 (linia kreska-kropka) dla czasu wynoszącego $501 \leq k \leq 1500$ wyraźnie widoczne jest poszerzenie do zakresu $\langle 0,025, 0,042 \rangle$ i jednocześnie spłaszczenie obszaru maksymalnych wzmocnień układu spowodowane uśrednieniem częstotliwości drgań własnych układu.

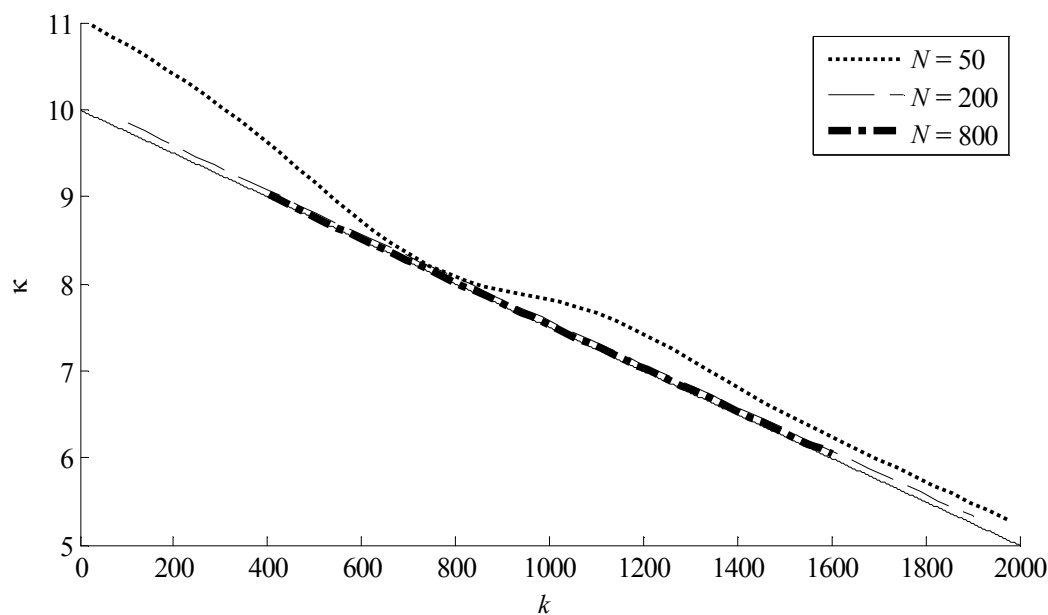


Rysunek 2.16. Charakterystyki amplitudowe dla układu niestacjonarnego w horyzoncie analizy $N = 1000$ (zbliżenie)



Rysunek 2.17. Estymaty pulsacji drgań własnych układu w funkcji czasu dyskretnego w horyzoncie analizy $N = 50, 200, 800$

W dalszej części analizy własności liniowego, niestacjonarnego oscylatora dyskretnego zidentyfikowano parametry charakterystyczne układu na podstawie charakterystyki amplitudowej wyznaczonej dla ustalonego N . Na rysunkach 2.17–2.18 przedstawiono wyniki analizy dla 50. wybranych momentów początkowych i trzech długości horyzontu czasowego: $N = 50$ – linia kropkowana, $N = 200$ – linia przerywana, oraz $N = 800$ – linia kreska–kropka. Jako wartość współrzędnej na osi czasu dyskretnego każdorazowo przyjmowano wartość środkową przedziału analizy.

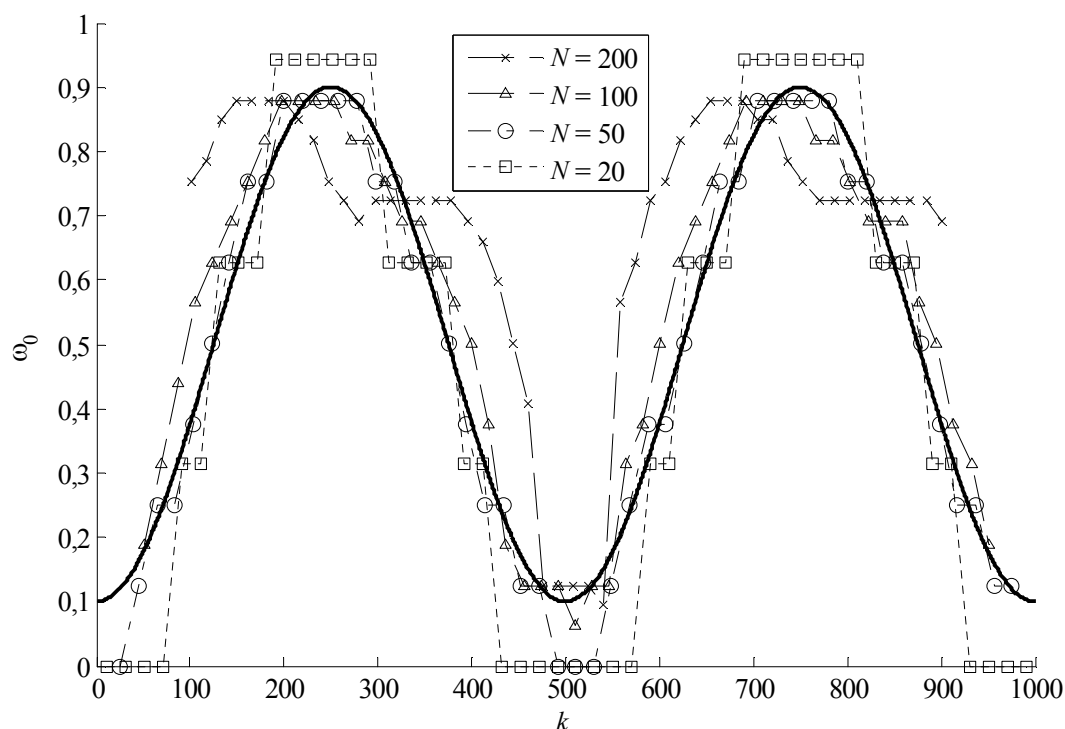


Rysunek 2.18. Estymaty wzmocnienia układu w funkcji czasu dyskretnego w horyzoncie analizy $N = 50, 200, 800$

Na rysunku 2.17 przedstawiono estymaty pulsacji drgań własnych układu. Linia ciągłą zaznaczono pulsację własną występującą w układzie zgodnie z zależnością (2.147). Szacowanie pulsacji drgań własnych w krótkim horyzoncie czasowym $N = 50$ i przy małej rozdzielczości w dziedzinie częstotliwości: $\Delta f = 0,02$ Hz, $\Delta \omega \cong 0,13$ rad/s, prowadzi do znacznej kwantyzacji wyników i związanej z tym niedokładności. Kwantyzacja estymat w horyzoncie $N = 200$ i wynikający z niej błąd są znacznie mniejsze. Błąd kwantyzacji w horyzoncie analizy $N = 800$ jest praktycznie niewidoczny, niemniej wyniki są niedokładne z uwagi na występujące uśrednianie w stosunkowo długim horyzoncie czasowym.

Na rysunku 2.18 przedstawiono estymaty wzmocnienia układu. Linia ciągłą zaznaczono pulsację własną występującą w układzie zgodnie z zależnością (2.148). Szacowanie wzmocnienia układu nie jest obarczone tak dużym błędem związanym z długością horyzontu czasowego, jak w przypadku częstotliwości drgań własnych. W horyzoncie czasowym $N = 50$ błąd maksymalny wynosi około 10%. Zwiększenie horyzontu czasowego analizy do $N = 200$ istotnie zmniejsza błąd do około 1%, a w horyzoncie analizy $N = 800$ jest na poziomie 0,1%. Należy jednak zaznaczyć, że przyjęcie długiego horyzontu analizy wiąże się z uzyskaniem wyniku dopiero po zakończeniu

horyzontu analizy. Punkty na wykresach zaznaczono dla połowy przedziału analizy, zatem w przypadku analizy w czasie rzeczywistym dostępne są dopiero po czasie $N/2$. Zastosowanie krótszego horyzontu analizy może prowadzić, mimo wszystko, do realnie mniejszych błędów estymat.



Rysunek 2.19. Estymaty pulsacji drgań własnych układu w funkcji czasu dyskretnego w horyzontach analizy $N = 20, 50, 100, 200$

Problem doboru długości horyzontu czasowego w estymacji częstotliwości drgań własnych układu przy szybkich zmianach parametrów zilustrowano na rysunku 2.19. Parametry układu są następujące: $\beta = 0,7$, $\kappa = 1$, $T_p = 1$, $N_H = 1000$. Częstotliwość drgań własnych zmienia się zgodnie z zależnością:

$$\omega_0(k) = 0,1 + 0,4 \left(1 - \cos \left(\frac{4k\pi}{N_H} \right) \right) \quad (2.149)$$

Na rysunku 2.19 przedstawiono wykresy estymat dla czterech długości horyzontu czasowego $N = 200, 100, 50, 20$; oznaczenia poszczególnych wykresów podano w legendzie do rysunku. Zastosowanie dłuższych horyzontów czasowych analizy ($N = 200, 100$) prowadzi do wydłużenia czasu obliczeń, wystąpienia większego opóźnienia ($N/2$) między środkiem horyzontu czasowego a końcem obliczeń. Ponadto istotne jest wystąpienie zniekształceń w porównaniu z charakterystyką wzorcową, wykreśloną linią ciągłą, spowodowanych uśrednianiem modelu układu w dłuższym horyzontie czasowym. W rozpatrywanym

przykładzie szybkie nadążanie za wzorcowym przebiegiem zmian parametru zapewniają horyzonty czasowe $N = 50, 20$, przy czym dla horyzontu $N = 20$ błąd związany z kwantyzacją w dziedzinie częstotliwości jest 2,5-krotnie większy niż dla horyzontu $N = 50$.

PODSUMOWANIE

W rozdziale omówiono zagadnienia dotyczące estymacji adaptacyjnej systemów niestacjonarnych oraz częstotliwościowe i czasowo-częstotliwościowe metody analizy sygnałów i układów. Dużo miejsca poświęcono metodom analizy czasowo-częstotliwościowej, cieszącej się w ostatnich latach rosnącym zainteresowaniem, szczególnie w odniesieniu do układów ciągłych [16], [34], [36], [301], [54], [64], [65], [66], [76], [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [100], [108], [116], [123], [127], [128], [140], [171], [233], [259], [260], [261], [266], [293], [298], [306], [315], [316], [317].

W rozdziale dokonano adaptacji metod czasowo-częstotliwościowych do układów dyskretnych oraz zaproponowano efektywną metodę obliczeniową opartą na zdefiniowanej macierzy transformacji dla układów dyskretnych. W dalszej części rozdziału szczegółowo omówiono metodę wyznaczania przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych, dyskretnych. Metoda ta jest wynikiem wcześniejszych badań autora [194], [193], [198], [199], [216], [218], [226]. W odróżnieniu od dwuwymiarowej funkcji przejścia w proponowanej metodzie zdekomponowano wstępnie operator układu $\hat{\mathbf{T}}$ za pomocą rozkładu według wartości szczególnych. Dekompozycja ta jest uogólnieniem klasycznego rozkładu według wartości szczególnych dla macierzy [12], [15], [70], [71], [102], [111], [166], [279], [280], który jest możliwy, ponieważ operatory definiowane dla układów dyskretnych określonych w skończonym horyzoncie czasowym są skończenie wymiarowe. Wówczas horyzont czasowy jest iloczynem okresu dyskretyzacji T_p i całkowitej liczby analizowanych próbek N . Macierze rozkładu, które zawierają wektory szczególne macierzy przejścia układu, są następnie poddane dyskretnej transformacji Fouriera oraz średniokwadratowemu, ważonemu sumowaniu odpowiadających sobie widm, co prowadzi do eliminacji zmiennej zależnej od czasu. Wyniki porównania obu metod przedstawiono w tabeli 2.1.

W układach stacjonarnych liniowych nie następuje modulacja wejścia (stanu, wyjścia), a różnice między sygnałami wejściowymi i wyjściowymi mogą być odzwierciedlone poprzez zmianę amplitudy i fazy poszczególnych składowych sinusoidalnych sygnału. Podobna zależność zachodzi dla poddanego rozkładowi operatora przejścia układu. Dla układu stacjonarnego liniowego widma amplitudowe odpowiadających sobie wektorów własnych macierzy \mathbf{U} i \mathbf{V} są identyczne, co można zapisać następująco:

$$\forall_{l,i,k_0,N} \left| \text{DFT}_l \left[\mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0,k_0+N-1]} \right) \right] \right| = \left| \text{DFT}_l \left[\mathbf{v}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0,k_0+N-1]} \right) \right] \right| \quad (2.150)$$

Zależność (2.150) nie jest spełniona dla układów niestacjonarnych z uwagi na typowe dla nich zjawiska rozszczepienia widm i modulację wewnętrzną. Własności te można wykorzystać m.in. do określenia stopnia niestacjonarności układu [201], [218].

Przedstawione metody umożliwiają proste wyznaczenie przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych dyskretnych. Ponieważ są one dużym uproszczeniem rzeczywistości, powinny być traktowane jako użyteczne, aczkolwiek jedynie przybliżone narzędzia badania układów zmiennych w czasie. W dokładniejszej analizie można zastosować bezpośrednią analizą składowych wektorów własnych bądź przekształcenie czasowo-częstotliwościowe. Proponowana metodologia uzupełnia istniejące narzędzia analizy czasowo-częstotliwościowej, krótkookresowej transformaty Fouriera i transformaty falkowej.

Tabela 2.1. Porównanie metod dekompozycji układu niestacjonarnego: proponowanej aproksymacji *SVD-DFT* oraz dwuwymiarowej funkcji przejścia

Wyszczególnienie	Krótkookresowa przybliżona charakterystyka częstotliwościowa (dla ustalonej chwili)	Transformacja czasowo-częstotliwościowa (dla ustalonej chwili)
Dane wejściowe	Zbiór operatorów przejścia układu przesuniętych w czasie (dla ustalonej chwili jeden operator przejścia układu \hat{T})	Operator przejścia układu \hat{T} (dla ustalonej chwili jego jedna kolumna)
Przetwarzanie wstępne	Rozkład operatora układu \hat{T} według wartości szczególnych	Brak
Transformacja	Kolumnowa jednowymiarowa transformata DFT macierzy rozkładu U oraz V	Kolumnowa, jednowymiarowa transformata DFT macierzy transformacji T powstałej przez przesuwanie oraz przerzucanie kolumn i wierszy operatora przejścia układu \hat{T} (dla ustalonej chwili transformata DFT wektora)
Przetwarzanie końcowe	Wyznaczenie ważonej średniej kwadratowej za pomocą macierzy S	Brak
Wynik	Macierz z wartościami zespolonymi odpowiadającymi poszczególnym częstotliwościom i horyzontom czasowym w widmie (dla ustalonej chwili wektor)	Macierz z wartościami zespolonymi odpowiadającymi poszczególnym przesunięciom w dziedzinie czasu i częstotliwości (dla ustalonej chwili wektor)

Źródło: opracowanie własne.

Istotną cechą proponowanej metody jest kompatybilność wyników uzyskiwanych dla układów stacjonarnych oraz zbieżność z wynikami, gdy niestacjonarności w układzie są marginalne. Wstępne przetworzenie operatora przejścia jest oparte na rozkładzie według wartości osobliwych operatora układu, a transformacja wektorów szczególnych dokonywana za pomocą dyskretnej transformaty Fouriera. Z uwagi na własności rozkładu według wartości

szczególnych możliwa jest selektywna analiza najbardziej znaczących wektorów i wartości szczególnych, z pominięciem tych mniej znaczących, w rezultacie prowadząca do uproszczenia układu. W dalszych rozdziałach pracy omówiono praktyczne zastosowania proponowanej metody uproszczonej analizy układów niestacjonarnych.

3. STOPIEŃ NIESTACJONARNOŚCI UKŁADU

Klasyfikacja układów niestacjonarnych ze względu na zmienność w dziedzinie czasu i częstotliwości, przeprowadzona w pierwszym rozdziale, pozwala na jednoznaczne określenie przynależności modelu do danej klasy (LTI, LFI, LTFI, LTV). W wielu praktycznych zastosowaniach prosta, dychotomiczna informacja o stacjonarności bądź niestacjonarności układu dynamicznego jest niewystarczająca. Rosnące wymagania stawiane układom sterowania powodują konieczność precyzyjnego, opartego na wiedzy o obiekcie doboru metod analizy i syntezy układu sterowania. Obecnie istnieje wiele efektywnych metod analizy i syntezy układów liniowych dynamicznych stacjonarnych. Dostępne są również narzędzia obliczeniowe pozwalające na analizę i syntezę układów niestacjonarnych. Stawiają one jednak znacznie większe wymagania, zarówno pod względem mocy obliczeniowej, jak i kwalifikacji projektantów. Decyzja o wykorzystaniu konkretnych narzędzi w analizie i syntezy układu sterowania zależy od globalnych własności układu. Niezwykle ważna jest zatem umiejętność określania nie tylko przynależności klasowej układu (stacjonarny, niestacjonarny), ale w przypadku układów niestacjonarnych przede wszystkim wpływu zmienności czasowej parametrów układu na zmianę globalnych własności układu, ich wielkość i zakres [14].

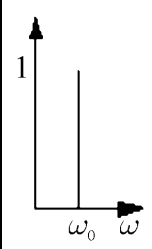
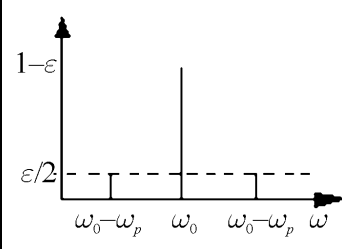
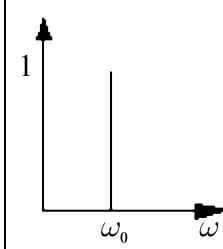
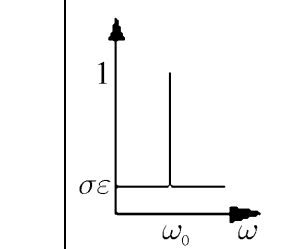
Możliwa jest sytuacja, że zmiany parametrów układu nie muszą prowadzić do globalnych zmian własności układu lub ich zakres może być pomijalny. Wówczas układ można traktować jako stacjonarny i stosować odpowiednie do własności układu metody analizy i syntezy. Niestacjonarność można również traktować jako stopień degradacji układu stacjonarnego. Takie ujęcie problemu w odniesieniu do układów sieciowych jest przedmiotem rozważań w końcowej części niniejszego rozdziału.

Problem ilościowej oceny stopnia zmienności układu w dziedzinie czasu i częstotliwości nie jest nowy. Istniejące metody opierają się na omówionej w drugim rozdziale transformacji układu niestacjonarnego z wykorzystaniem funkcji przejścia zależnej od dwóch parametrów, a w szczególności na produkcie pochodnym, jakim jest funkcja rozrzutu zależna od dwóch parametrów. Może ona być podstawą do zdefiniowania skalarnych wskaźników rozrzutu. Sposób jej zastosowania do szacowania przesunięć czasowo-częstotliwościowych układów ciągłych rozważano w pracach [16], [34], [301], [65], [76], [91], [93], [94], [95], [96], [97], [98], [100], [108], [116], [127], [128], [260], [266], [298], [316], [317]. Dyskretną funkcję rozrzutu można wyznaczyć na podstawie zdefiniowanych

w drugim rozdziale macierzy transformacji. Najważniejsze jej własności omówiono w pierwszej części niniejszego rozdziału.

Jeżeli celem analizy jest wyznaczenie stopnia niestacjonarności bądź stopnia zmienności czasowej układu, możliwe jest wykorzystanie wybranych własności przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych, zdefiniowanych zależnościami (2.116)–(2.120), prowadzących do efektywniejszych wskaźników, zaproponowanych w pracach autora [201], [210], [218] i podanych w dalszej części rozdziału.

Tabela 3.1. Widmo wyjściowe układów stacjonarnych i niestacjonarnych

Wyszczególnienie	Stacjonarny	Niestacjonarny	Quasi-stacjonarny	Quasi-niestacjonarny
$B(k)$	1	$1 - \varepsilon + \varepsilon \cos(\omega_p k T_p)$ $0 \leq \varepsilon \leq 1$	$1 - \varepsilon + \varepsilon \cos(\omega_p k T_p)$ $0 \leq \varepsilon \leq 1$	$B(k) \sim N(1, \varepsilon^2)$
$C(k)$	1	1	$\left(1 - \varepsilon + \varepsilon \cos(\omega_p (k-1) T_p)\right)^{-1}$	1
Widmo wyjściowe				

Źródło: opracowanie własne.

Dla zilustrowania wpływu zmienności czasowej parametrów na własności układu można posłużyć się przykładem układu opóźniającego pierwszego rzędu (z jednostkowym opóźnieniem) o zmiennym periodycznie wzmacnieniu. Model układu dany jest równaniami w przestrzeni stanu (1.5)–(1.6), przy czym macierze układu i wyjścia (dla układu pierwszego rzędu – skalary) są odpowiednio równe $\forall_{0 \leq k < N} A(k) = 0, D(k) = 0$. W zależności od postaci macierzy wejścia $B(k)$ i wyjścia $C(k)$ można wyróżnić cztery przypadki przedstawione w tabeli 3.1. W pierwszym przypadku układ jest stacjonarny o jednostkowych macierzach wejścia i wyjścia. Wyjściowe widmo amplitudowe odpowiedzi układu na wymuszenie sinusoidalne o postaci $v(k) = \sin(\omega_0 k T_p)$, z założeniem nieskończenie długiego horyzontu analizy, przedstawiono w ostatnim wierszu tabeli 3.1. Zawiera ono jedną składową o pulsacji ω_0 i jednostkowym wzmacnieniu, odpowiadającym wzmacnieniu układu zawartym w macierzach $B(k)$ i $C(k)$. W drugim przypadku układ jest niestacjonarny, gdyż macierz wejścia $B(k)$ zależy od czasu. Stopień tej zmienności lub inaczej głębokość modulacji sygnału $v(k)$ sygnałem $B(k)$ zależy od wartości parametru ε . Im większe ε , tym większy stopień zmienności czasowej, w tym wypadku również głębokość modulacji. W zmodulowanym sygnale pojawiają się dwie dodatkowe składowe o pulsacjach $\omega_0 - \omega_p$, $\omega_0 + \omega_p$ i wartościach amplitudy $\varepsilon/2$, gdzie ω_p – pulsacja macierzy wejścia układu, a ω_0 – pulsacja sygnału

wejściowego $v(k)$. Dodatkowo amplituda sygnału wejściowego zostaje ograniczona do wartości $1 - \varepsilon$. Dla wartości $\varepsilon \rightarrow 0$ odpowiedź układu niestacjonarnego, jego widmo wyjściowe oraz macierze układu są zbieżne ze swoimi odpowiednikami dla układu stacjonarnego.

Trzeci przypadek – układ quasi-stacjonarny – należy do klasy układów niestacjonarnych, gdyż jego parametry zmieniają się w czasie, niemniej własności wejściowo-wyjściowe oraz widmo wyjściowe są identyczne jak dla układu stacjonarnego, gdyż zmiany macierzy wejścia $B(k)$ są całkowicie kompensowane przez zmiany macierzy wyjścia $C(k)$.

Zawarty w tabeli 4.1 czwarty przypadek układu quasi-niestacjonarnego charakteryzuje się losowym, normalnym rozkładem zmienności macierzy wejścia o wartości oczekiwanej równej jedności i odchyleniu standardowym ε , co można zapisać w postaci $B(k) \sim N(1, \varepsilon^2)$ [231], [297].

Modulacja sygnału wejścia szumem białym prowadzi do pojawienia się w widmie wyjściowym składowej szumowej. Szum gaussowski zmodulowany dowolnym, niezerowym sygnałem deterministycznym pozostaje sygnałem losowym, przy czym opisujące go parametry (wartość oczekiwana, wariancja) mogą w ogólności ulec zmianie.

3.1. FUNKCJA ROZRZUTU

Funkcja rozrzutu (ang. *spreading function*) została zdefiniowana w ramach podstawowych narzędzi analizy czasowo-częstotliwościowej dla układów ciągłych m.in. w pracach [34], [301], [91], [94], [95], [97], [127], [128]. Sposób wyznaczania funkcji rozrzutu dla układów dyskretnych podano w rozdziale 2.1. Zarówno w przypadku ciągłym jak i dyskretnym jest to funkcja dwóch zmiennych, która może być wykorzystana jako wskaźnik potencjalnych przesunięć (zmian), mogących nastąpić w układzie w dziedzinie czasu i częstotliwości.

Koncepcja dwuwymiarowej funkcji rozrzutu jest oparta na odmiennej metodzie wyznaczania transformacji czasowo-częstotliwościowej układu, omówionej w rozdziale 2.3.1. W dwuwymiarowej funkcji przejścia zmienną transformaty jest różnica $k_2 - k_1$ odpowiedzi impulsowej $h(k_2, k_1)$, a parametrem moment k_1 dla funkcji Zadeha, k_1 dla funkcji modulującej bądź $0,5(k_2 + k_1)$ dla symbolu Weyla. W funkcji rozrzutu dokonywana jest zamiana zmiennych, tzn. różnica $k_2 - k_1$ jest parametrem, natomiast moment odpowiedzi $0,5(k_2 + k_1)$, k_2, k_1 – zmienna transformacji. Nazwa funkcji rozrzutu wynika z jej własności, polegającej na rozproszeniu przestrzennym wartości zależnym od zmienności czasowej i częstotliwościowej układu.

W rozdziale 2.3.2 zdefiniowano funkcje rozrzutu na podstawie uogólnionego symbolu Weyla dla trzech różnych wartości parametru $\alpha = -0,5, 0, 0,5$ odpowiadających: funkcji modulującej (symbol Kohna-Nirenberga) [16], [123], symbolowi Weyla [34], [94], [127], [128], [306] oraz czasowo-częstotliwościowej funkcji przejścia [94], [95], [316]. Definicje te różnią się położeniem okna czasowego transformaty, funkcja rozrzutu dla $\alpha = -0,5$ zapewnia najlepszą dokładność na początku horyzontu czasowego, $\alpha = 0$ w środku, natomiast $\alpha = 0,5$ na końcu. W przypadku dyskretnym do wyznaczenia

przekształcenia opartego na symbolu Weyla konieczna jest aproksymacja odpowiedzi impulsowych układu o ułamkowych indeksach lub dwukrotne wydłużenie horyzontu analizy. Uogólnioną funkcję rozrzutu można zapisać zgodnie z równaniem (2.9) w następującej postaci:

$$S_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h\left(n + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)k, n - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)k\right) e^{-j2\pi n l / N} \quad (3.1)$$

gdzie $l = 0, 1, \dots, N/2 - 1$, $k = 0, 1, \dots, N$.

W obliczeniach numerycznych wygodnie jest posłużyć się zależnościami (2.18)–(2.23)

Niezależnie od przyjętej definicji w przypadku uogólnionej funkcji rozrzutu o wartości parametru α i nieskończonego horyzontu czasowego spełnione są następujące własności:

1. Dla układu stacjonarnego dynamicznego o odpowiedzi impulsowej spełniającej warunek $\forall_{n, \alpha} h_{LTI}(k) = h\left(n + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)k, n - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)k\right)$ funkcja ta jest skoncentrowana wzdłuż osi τ i ma następującą postać:

$$S_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l) = h_{LTI}(k) \delta(l) \quad (3.2)$$

gdzie $\delta(v)$ oznacza deltę Kroneckera.

2. Dla układu niestacjonarnego statycznego o odpowiedzi impulsowej spełniającej warunek $h_{LFI}(k) = h(k, k) = D(k)$ oraz $\forall_{k \neq l} h(k, l) = 0$ funkcja ta jest skoncentrowana wzdłuż osi ν i ma następującą postać:

$$S_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l) = \delta(k) \sum_{n=0}^{N-1} D(n) e^{-j2\pi n l / N} \quad (3.3)$$

Tak więc funkcja rozrzutu zawiera informacje zarówno o zmienności układu w dziedzinie czasu jak i częstotliwości. W pracach [34], [94], [95], [97], [98], [127], [128] podano główną metodę określania stopnia zmienności czasowo-częstotliwościowej układu ciągłego na podstawie ważonego podwójnego całkowania wartości bezwzględnej funkcji rozrzutu $|S_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l)|$. Jest wiele odmian tej metody, różniących się przede wszystkim sposobem doboru funkcji wagowych. Funkcje te mogą być zależne od współrzędnych (k, l) [94] lub od wartości $|S_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l)|$; w pracach [34], [127], [128] podano przykład funkcji progowej.

Adaptacja wskaźnika rozrzutu z prac [34], [94], [127] dla układów dyskretnych może polegać na zamianie całek na sumy, co prowadzi do następujących czasowo-częstotliwościowych wskaźników rozrzutu:

$$m_{\mathbf{T}}^{W\alpha} = \frac{\sum_k \sum_l W(k, l) |S_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l)|}{\sum_k \sum_l |S_{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(k, l)|} \quad (3.4)$$

$$M_{\hat{\mathbf{T}}}^{W\alpha} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{T}}\|} \sqrt{\sum_k \sum_l W^2(k,l) |S_{\hat{\mathbf{T}}}^{(\alpha)}(k,l)|^2} \quad (3.5)$$

gdzie $W(k,l) \geq 0$ – nieujemnie określona funkcja wagowa.

W analizie układu z wykorzystaniem powyższych funkcji istotnym problemem jest skończona długość horyzontu czasowego. W analizie układu stacjonarnego w skończonym horyzoncie czasowym funkcja rozrzutu nie przyjmuje niezerowych wartości jedynie wzdłuż osi k , jak powinno to wynikać z własności (3.2) z uwagi na skończoną szerokość okna czasowego. Prowadzi to do tego, że istotny wpływ na wartość wskaźnika rozrzutu ma typ i szerokość okna czasowego, a wartość wskaźnika nie zmniejsza się do wartości bliskich zeru, nawet dla układów niezależnych od czasu i częstotliwości.

W zjawiskach niestacjonarnych zachodzi silny związek między wartością wskaźnika rozrzutu a dynamiką układu, co bardzo utrudnia stwierdzenie, jakie czynniki są przyczyną danej wartości wskaźnika rozrzutu. Szczególnie istotny jest dobór funkcji wagowej W , w praktyce determinujący większość własności wskaźnika rozrzutu.

3.2. ROZPROSZENIE WIDM WEKTORÓW WŁASNYCH UKŁADU

Jedną z podstawowych własności układów liniowych stacjonarnych jest ściśle określona relacja między składowymi widma wejściowego i wyjściowego układu. Dla sygnału wejściowego o postaci $v(k) = \sin(\omega_0 k T_p)$ wyjście układu ma takie same składowe częstotliwościowe, a zmianie ulega jedynie amplituda i przesunięcie fazowe poszczególnych składowych, co można zapisać w postaci $y(k) = A(\omega_0) \sin(\omega_0 k T_p + \varphi(\omega_0))$. Własności tej na ogół nie spełnia układ niestacjonarny, gdyż może w nim następować modulacja wejść, wyjść i stanu układu, powodująca powstawanie nowych składowych oraz przesuwanie bądź zanikanie istniejących składowych w widmie częstotliwościowym układu.

Porównanie zbioru widm częstotliwościowych wejściowych i wyjściowych dla układu dynamicznego pozwala wnioskować o charakterze tego układu oraz ewentualnie stopniu niestacjonarności. Zbiór sygnałów wejściowych i wyjściowych można utworzyć na podstawie wektorów własnych rozkładu według wartości szczególnych operatora przejścia układu. Z uwagi na skończony horyzont czasowy zbiór ten zawiera skończoną liczbę wektorów własnych. Jak pokazano w drugim rozdziale, operator przejścia $\hat{\mathbf{T}} \in \mathcal{L}$ rozkłada się na następujące macierze: \mathbf{U} , \mathbf{V} , zawierające ortonormalne wektory własne wyjściowe \mathbf{u}_i i wejściowe \mathbf{v}_i , oraz macierz diagonalną \mathbf{S} , zawierającą wartości szczególne. W układzie stacjonarnym widma amplitudowe odpowiadających sobie ortonormalnych wektorów szczególnych są sobie równe:

$$\forall_{l,i,k_0,N} \left| \text{DFT}_l \left[\mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \right] \right| = \left| \text{DFT}_l \left[\mathbf{v}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) \right] \right| \quad (3.6)$$

Zależność tę można równoważnie zapisać następująco:

$$\forall_{i,l,k_0,N} \left| \sum_{n=1}^N u_{n,i} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) e^{-2\pi\sqrt{-1}(l-1)(n-1)/N} \right| = \left| \sum_{n=1}^N v_{n,i} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k_0, k_0+N-1]} \right) e^{-2\pi\sqrt{-1}(l-1)(n-1)/N} \right| \quad (3.7)$$

Powyższych zależności nie spełniają układy niestacjonarne z powodu typowego dla nich efektu rozszczepienia widm amplitudowych wejściowych i wyjściowych. Efekt ten jest wynikiem dwóch następujących, ściśle powiązanych ze sobą zjawisk:

a) poszerzenia widm składowych, pojawienia się nowych składowych w widmie wyjściowym – modulacja częstotliwości;

b) stłumienia istniejących oraz pojawienia się nowych składowych widmowych wektorów własnych – modulacja amplitudy.

Wskaźnik zmienności czasowej układu niestacjonarnego można zdefiniować na podstawie wyżej omówionych własności. Autor zaproponował zatem siedem oryginalnych definicji wskaźnika zmienności czasowej układu opartych na własnościach częstotliwościowych macierzy rozkładu według wartości szczególnych operatora przejścia $\hat{\mathbf{T}}$ układu niestacjonarnego.

3.2.1. Ważone tłumienie wstęgi głównej (TWG)

Definicja tego współczynnika wynika wprost z własności (3.6), a w szczególności z różnicy między widmami amplitudowymi wejściowymi i wyjściowymi operatora przejścia układu. Różnice w poszczególnych wektorach własnych są uwzględniane z wagami określonymi przez odpowiadające im wartości szczególne rozkładu SVD. Numerycznie wskaźnik ten można zdefiniować następująco:

$$\text{TWG}_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \left\| \left| \text{DFT} \left[\mathbf{v}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right] \right| - \left| \text{DFT} \left[\mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right] \right| \right\| \quad (3.8)$$

gdzie:

σ_i – i -ta wartość szczególna, rozkładu według wartości szczególnych operatora macierzowego $\mathbf{USV}^T = \hat{\mathbf{T}}$,

\mathbf{v}_i – i -ty wektor szczególny wejściowy, rozkładu według wartości szczególnych operatora macierzowego $\mathbf{USV}^T = \hat{\mathbf{T}}$,

\mathbf{u}_i – i -ty wektor szczególny wyjściowy, rozkładu według wartości szczególnych operatora macierzowego $\mathbf{USV}^T = \hat{\mathbf{T}}$.

Wskaźnik ten jest wrażliwy przede wszystkim na różnice w widmie amplitudowym – tłumienie wstęgi głównej oraz dodatkowe amplitudy wstęg bocznych. Wzajemne odległości wstęgi głównej i wstęg bocznych odgrywają w tym wypadku mniej istotną rolę. Wartość wskaźnika TWG zwiększa się wraz z efektywnym wzrostem wpływu zjawisk niestacjonarnych.

Alternatywnie można zdefiniować podobny współczynnik na podstawie kwadratowego ważonego tłumienia wstęgi głównej (KTWG):

$$\text{KTWG}_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2} \left\| \left| \text{DFT} \left[\mathbf{v}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right] \right|^2 - \left| \text{DFT} \left[\mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right] \right|^2 \right\|} \quad (3.9)$$

Własności współczynnika KTWG są zbliżone do omówionego TWG.

3.2.2. Ważona względna odległość odpowiadających sobie widm (WOW)

Definicje wskaźników TWG i KTWG są oparte na różnicach widm amplitudowych. Głównym celem wprowadzenia alternatywnej definicji jest stworzenie współczynnika komplementarnego, wrażliwego przede wszystkim na odległość wstęgi głównej i wstęp bocznych, powstałych w wyniku rozproszenia widm w układzie niestacjonarnym. Wdrożenie tej idei w praktyce wymaga wyznaczenia indeksów odpowiadających maksymalnym wartościom amplitudy – modułowi transformaty wektorów szczególnych rozkładu SVD. Zakładając, że w transformacie dowolnego wektora szczególnego istotna jest jedynie składowa o największej amplitudzie, wartość uproszczonego wskaźnika ważonej względnej odległości odpowiadających sobie widm (UWOW) można wyznaczyć z następującej zależności:

$$\text{UWOW}_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k) = \frac{1}{T_p N} \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\sigma_1} |k_v(i, k, N) - k_u(i, k, N)| \quad (3.10)$$

gdzie:

$k_v(i, k, N)$ – indeks do wartości maksymalnej w wektorze transformaty

$$\mathbf{m}_{i, k, N}^V = \left| \text{DFT} \left(\mathbf{v}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right) \right|,$$

$k_u(i, k, N)$ – indeks do wartości maksymalnej w wektorze transformaty

$$\mathbf{m}_{i, k, N}^U = \left| \text{DFT} \left(\mathbf{u}_i \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right) \right|.$$

Poczynione założenie o istotności jedynie składowej o największej amplitudzie w widmie układu nie zawsze jest uzasadnione i często prowadzi do dużych niedokładności. Jedyną zaletą takiego uproszczenia jest prosty i przejrzysty algorytm obliczeniowy, wyrażony zależnością (UWOW). Uwzględnienie wszystkich składowych poprawia własności wskaźnika. We właściwej zależności uwzględnia się nie tylko składowe o największych amplitudach, ale również pozostałe składowe widmowe, posortowane w porządku malejącym zgodnie z odpowiadającymi im wagami. Wskaźnik ważonej, względnej odległości odpowiadających sobie widm (WOW) można zapisać następująco:

$$\text{WOW}_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k) = \frac{1}{T_p N} \sum_{n=1}^N \left[\frac{\sigma_n}{\sigma_1} \sum_{i=1}^{N/2} \left(\left| K_V(i, n) - K_U(i, n) \right| \frac{A_V(i, n) - A_U(i, n)}{A_V(1, n) - A_U(1, n)} \right) \right] \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{k,N}^V &= \left| \text{DFT} \left(\mathbf{V} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right) \right| - \text{widmo amplitudowe kolumnowej, jednowymiarowej} \\ &\quad \text{transformaty DFT macierzy } \mathbf{V} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right), \\ &\quad \text{zawierającej kolumnowe wektory szczególne} \\ &\quad \text{rozkładu SVD operatora przejścia układu,} \\ \mathbf{A}_{k,N}^V &= \left\{ A_{k,N}^V(i, n) : i, n = 1, 2, \dots, N \right\} - \text{posortowana kolumnowo w porządku} \\ &\quad \text{malejącym macierz } \mathbf{M}_{k,N}^V \text{ spełniająca wa-} \\ &\quad \text{runek } A_{k,N}^V(i, n) \geq A_{k,N}^V(i+1, n), \\ \mathbf{K}_{k,N}^V &= \left\{ K_{k,N}^V(i, n) : i, n = 1, 2, \dots, N \right\} - \text{macierz indeksów spełniająca warunek:} \\ A_{k,n}^V &\left(K_{k,N}^V(i, n), n \right) = M_{k,N}^V(i, n) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Podobne relacje obowiązują dla macierzy $\mathbf{U} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right)$, $\mathbf{A}_{k,N}^U$, $\mathbf{M}_{k,N}^U$ oraz $\mathbf{K}_{k,N}^U$, tzn. $\mathbf{M}_{k,N}^U = \left| \text{DFT} \left(\mathbf{U} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right) \right) \right|$ jest widmem amplitudowym kolumnowej, jednowymiarowej transformaty DFT macierzy $\mathbf{U} \left(\hat{\mathbf{T}}_{[k, k+N-1]} \right)$, zawierającej kolumnowe wektory szczególne rozkładu SVD operatora przejścia układu; $\mathbf{A}_{k,N}^U = \left\{ A_{k,N}^U(i, n) : i, n = 1, 2, \dots, N \right\}$ jest posortowaną kolumnowo w porządku malejącym macierzą $\mathbf{M}_{k,N}^U$, spełniającą warunek $A_{k,N}^U(i, n) \geq A_{k,N}^U(i+1, n)$, a $\mathbf{K}_{k,N}^U = \left\{ K_{k,N}^U(i, n) : i, n = 1, 2, \dots, N \right\}$ – macierzą indeksów spełniającą warunek:

$$A_{k,n}^U \left(K_{k,N}^U(i, n), n \right) = M_{k,N}^U(i, n) \quad (3.13)$$

Wartość wskaźnika WOW na ogół zależy od zjawisk związanych z modulacją częstotliwości, tj. od poszerzenia (rozmycia) widma po przejściu przez układ.

3.2.3. Wskaźnik wzajemnego odstępu (WVO)

W niektórych zastosowaniach, takich jak np. szacowanie stopnia degradacji rozproszonego układu sterowania opartego na sieci Ethernet, możliwe jest wyznaczenie stacjonarnego modelu odniesienia. Wówczas wskaźnik niestacjonarności można zdefiniować jako średnią różnicę dwóch charakterystyk amplitudowych w skali liniowej wyznaczonych dla układu badanego i układu odniesienia, zgodnie z następującą zależnością:

$$\text{WVO}_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left| \left| G_{\hat{\mathbf{T}}-NCS}^N(k, l) \right| - \left| G_{\hat{\mathbf{T}}ref}^N(k, l) \right| \right| \quad (3.14)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} |G_{\text{Tref}}^N(k, l)| & \text{ – charakterystyka amplitudowa układu odniesienia,} \\ |G_{\text{T-NCS}}^N(k, l)| & \text{ – charakterystyka amplitudowa układu badanego.} \end{aligned}$$

Wskaźnik ten jest wrażliwy na różnice w charakterystykach amplitudowych. Z uwagi na nieuwzględnianie ewentualnych różnic fazowych może on osiągać wartość zerową również w przypadku, gdy układy badany i odniesienia różnią się istotnie własnościami wejściowo-wyjściowymi, ale mają identyczne charakterystyki amplitudowe.

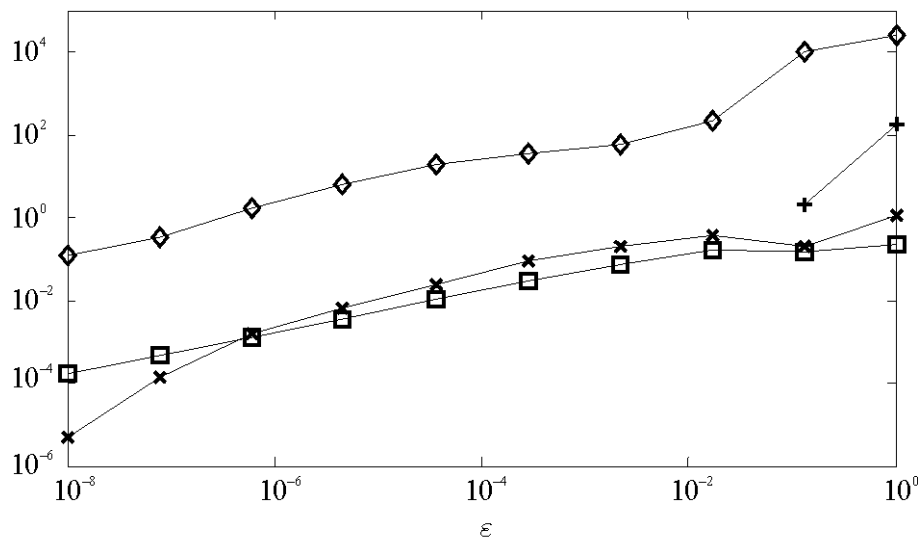
Dla układów stacjonarnych wszystkie współczynniki powinny osiągać wartość zerową. Wyznaczanie wskaźnika niestacjonarności ma sens dla układów stabilnych. Próba wyznaczenia tego wskaźnika dla układu o wartościach wyjścia rozbieżnych w kierunku nieskończoności prowadzi do niestabilności numerycznej algorytmu.

3.2.4. Przykład numeryczny

Dany jest niestacjonarny, liniowy, dyskretny układ pierwszego rzędu o następujących wartościach modelu w przestrzeni stanu:

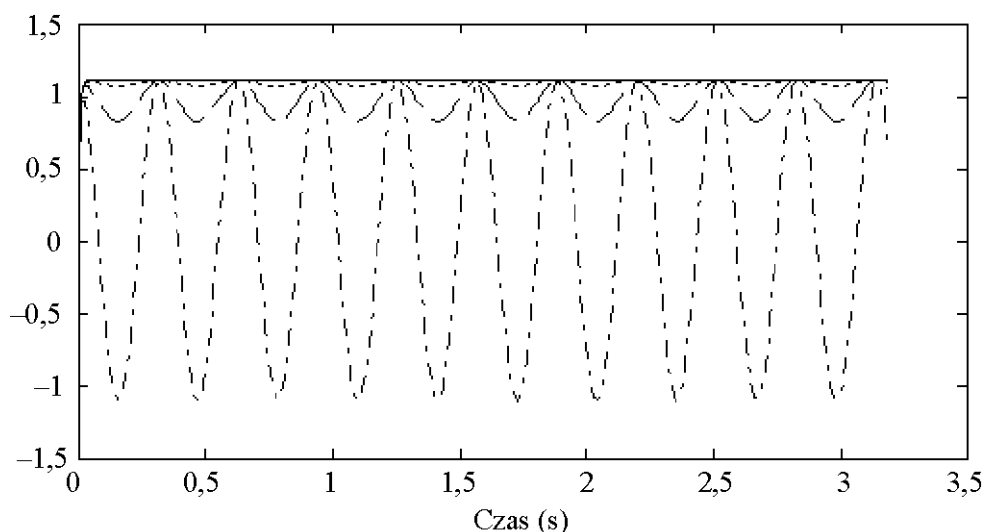
$$A(k) = 0,1, B(k) = 1 - \varepsilon + \varepsilon \cos(0,256k), C(k) = 1, D(k) = 0 \quad (3.15)$$

Długość horyzontu czasowego analizy wynosi $N = 250$ kroków ($T_p N = 3,2$ s). Przyjęto, że wartość parametru ε może się zmieniać w zakresie $\varepsilon \in \langle 10^{-8}, 1 \rangle$. Wartości czterech różnych wskaźników niestacjonarności wyznaczono dla dziesięciu różnych wartości parametru ε z powyższego zakresu. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 3.1 i 3.2.



Rysunek 3.1. Wskaźniki niestacjonarności układu z modulacją wejścia w funkcji parametru ε

Na rysunku 3.1 przedstawiono zależność wartości wskaźników niestacjonarności w funkcji parametru ε . Symbolem \times oznaczono wartości wskaźnika $\text{TWG}_{\ddagger}^N(0)$ określonego na podstawie zależności (3.8), symbolem \square – wartości wskaźnika $\text{KTWG}_{\ddagger}^N(0)$ wyznaczonego z równości (3.9), znaki $+$ reprezentują wartości wskaźnika $\text{UWOW}_{\ddagger}^N(0)$ określonego zależnością (3.10), symbolem \diamond – wartości wskaźnika $\text{WOW}_{\ddagger}^N(0)$ wyznaczonego z zależności (3.11). Dla parametru $\varepsilon < 10^{-1}$ wskaźnik $\text{UWOW}_{\ddagger}^N(0)$ ma wartości równe zero, co jest spowodowane zerowymi różnicami składowej widma o największej amplitudzie.



Rysunek 3.2. Odpowiedzi skokowe układu z modulacją wejścia dla czterech największych wartości parametru ε

Na rysunku 3.2 przedstawiono odpowiedzi skokowe układu o czterech największych wartościach parametru ε rozłożonych logarytmicznie w zakresie $\varepsilon \in \langle 10^{-3}, 1 \rangle$, odpowiadających wartościom wskaźników przedstawionych na rysunku 3.1. Linia kreska-kropka wykreślono odpowiedź skokową układu dla $\varepsilon = 1$, linią przerywaną – dla $\varepsilon = 0,13$, linią kropkowaną – dla $\varepsilon = 0,017$, a linią ciągłą – dla $\varepsilon = 0,002$. Na podstawie analizy odpowiedzi skokowej układ można uznać za stacjonarny dla wartości $\varepsilon \leq 0,002$.

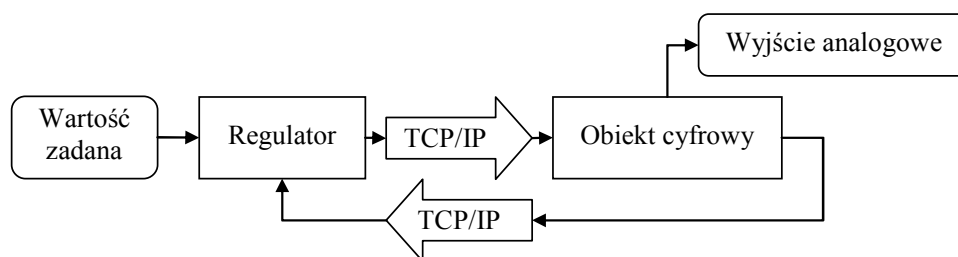
3.3. WSKAŹNIK EFEKTÓW SIECIOWYCH – PRZYKŁAD ZASTOSOWAŃ

Sieciowy układ sterowania (*Networked Control System* – NCS) jest definiowany jako układ sterowania z co najmniej jednym połączeniem (np. regulator–obiekt, czujnik–regulator) opartym na sieci czasu rzeczywistego [30], [117], [131], [144], [145], [146], [158], [161], [210], [222], [230], [236], [249], [248], [289], [290], [291], [302], [311], [320]. Oznacza to, że pewne informacje, takie jak sygnały pomiarowe, sterujące, sygnał wartości zadanej, są przesyłane przez sieć.

Sieci można sklasyfikować ze względu na zasięg na lokalne (*Local Area Network* – LAN) oraz rozległe (*Wide Area Network* – WAN). Sieci LAN charakteryzują się zazwyczaj większą szybkością, mniejszymi opóźnieniami transmisji i mniejszym prawdopodobieństwem utraty przesyłanych pakietów bądź koniecznością ich retransmisji. Jednym z najbardziej rozpowszechnionych sieciowych protokołów komunikacyjnych jest obecnie TCP/IP. Nazwa pochodzi od dwóch najważniejszych protokołów: TCP (*Transmission Control Protocol*) oraz IP (*Internet Protocol*).

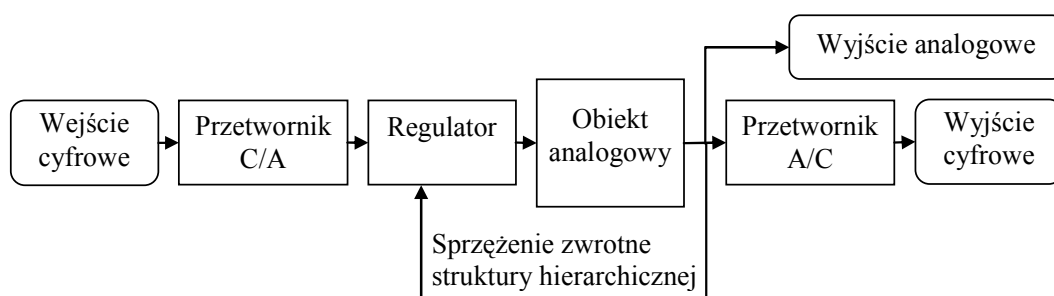
Ogólną postać układu sieciowego przedstawiono na rysunku 3.3. Układ ten składa się z jednego lub dwóch sieciowych kanałów komunikacji, obejmujących sterowanie i monitorowanie. Zdalne monitorowanie z wykorzystaniem sieci jest stosowane nieco częściej, przede wszystkim z przyczyn ekonomicznych, i głównie w układach z dużą liczbą rozproszonych przetworników pomiarowych.

Możliwa jest ponadto konfiguracja układu w strukturze hierarchicznej [62], [79], [78], [285], [286], w której występuje dodatkowy, autonomiczny regulator obiektu, co zilustrowano na rysunku 3.4, natomiast w klasycznej strukturze bezpośredniej w takim przypadku nie występuje wewnętrzna pętla sprzężenia zwrotnego. Struktura bezpośrednia zazwyczaj ma zastosowanie w układach, których ewentualna awaria nie prowadzi do powstania strat materialnych bądź zagrożenia bezpieczeństwa, najczęściej w sieciach LAN dla układów inercyjnych o długich stałych czasowych. Struktura hierarchiczna jest zalecana dla układów wymagających krótkich czasów reakcji przy jednocześnie wysokich wymaganiach co do pewności działania, bezpieczeństwa, oraz dla układów opartych na sieciach WAN, w tym na Internecie.



Rysunek 3.3. Schemat blokowy sieciowego układu sterowania złożony z dwóch kanałów sieciowych: zdalnego sterowania z regulatora do obiektu oraz zdalnego pomiaru z obiektu do regulatora

Sieci komputerowe przejmują obecnie wiele zadań wcześniej zarezerwowanych dla specjalizowanych sieci przemysłowych, takich jak m.in. CAN, Profibus [289], [291]. Do głównych powodów szybkiego rozwoju sieci komputerowych należą: wysoka i stale rosnąca szybkość transmisji danych, szeroki zakres zastosowań, duża liczba aplikacji, komponentów sieciowych, łatwy dostęp do materiałów informacyjnych, prosta obsługa i, co najważniejsze, relatywnie niski koszt.



Rysunek 3.4. Zastępczy schemat blokowy obiektu cyfrowego w strukturze hierarchicznej

W ostatnich latach nastąpił dynamiczny wzrost zarówno prac naukowych [30], [144], [158], jak i praktycznych zastosowań sieci komputerowych w przemyśle i laboratoriach badawczych [291], m.in. w takich dziedzinach, jak sterowanie silnikami, pojazdami, samolotami [249], [248], robotami mobilnymi, zdalnymi manipulatorami, w tym teleoperacja [289], [290] oraz zdalna edukacja [230].

W sieciach komputerowych, w szczególności sieciach TCP/IP, występują zjawiska, których nie było dotychczas w układach sterowania opartych na połączeniach bezpośrednich. Do zjawisk tych należy przede wszystkim wprowadzanie dodatkowych opóźnień transmisji [145], [291], [320]. Oprócz opóźnień związanych z przetwarzaniem A/C, C/A i czasem przetwarzania sygnałów w układzie pojawiają się opóźnienia związane z czasem oczekiwania na dostęp do medium komunikacyjnego, konwersją danych z postaci równoległej na szeregową, zwanej serializacją, oraz czasem propagacji sygnału, niezbędnym do przesyłu pakietu przez medium transmisyjne. Na całkowity czas opóźnienia wpływa również przyjęty rozmiar bufora, mający na celu eliminację efektu niejednakowego interwału czasowego między kolejnymi dostarczanymi porcjami danych, zwany jitterem.

Kolejnym, istotnym problemem jest zjawisko gubienia pakietów. Może ono występować w sieci wówczas, gdy transmisja odbywa się za pomocą bezpołączeniowego, datagramowego protokołu użytkownika (*User Datagram Protocol* – UDP). Jeżeli protokołem transmisyjnym jest protokół kontroli transmisji (*Transmission Control Protocol* – TCP), to w przypadku braku potwierdzenia odebrania pakietu automatycznie następuje jego retransmisja. Skutkuje to jednak tym, że poddany retransmisji pakiet dociera w czasie znacznie dłuższym, niż wynosi standardowe, oczekiwane bądź dopuszczalne całkowite opóźnienie transmisji, obejmujące czas oczekiwania i propagacji. W takiej sytuacji retransmitowany pakiet może dotrzeć po upływie jego terminu ważności, co jest jednoznaczne z utratą pakietu. W szybkich systemach czasu rzeczywistego informacja taka może być bezużyteczna. Utracony pakiet można traktować jako pakiet o nieskończenie dużym opóźnieniu.

Wszystkie opisane zjawiska mogą występować cyklicznie, prowadząc do zmiany własności układu sterowania bądź nawet do jego niestabilności. Wpływ tych zjawisk może być jednak pomijalnie mały. Ważna jest zatem umiejętność określenia, jak silny jest wpływ zjawisk sieciowych. Jedną z możliwości jest wyznaczenie wskaźnika degradacji układu sterowania.

3.3.1. Wskaźnik degradacji układu

Wskaźnik degradacji układu liniowego stacjonarnego, opartego na sieci i stacjonarnych komponentach składowych (obiekt, regulator), definiowany jest jako wartość oczekiwana współczynnika zmienności czasowej [210]. Wartość ta może być estymowana jako wartość średnia w zbiorze realizacji dla ustalonej wartości prawdopodobieństwa utraty lub opóźnienia pakietów p , tj.

$$W_{k,N}^{D-TWG}(p) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{TWG}_{p,i}^N(k) \quad (3.16)$$

gdzie:

M – wielkość zbioru realizacji,

$\text{TWG}_{p,i}^N(k)$ – wartość wskaźnika niestacjonarności TWG w i -tej realizacji oraz dla wartości prawdopodobieństwa utraty pakietu p .

W zależności (3.16) wskaźnik TWG można zastąpić dowolnym, innym, zdefiniowanym wcześniej wskaźnikiem, np. WOW, WWO. Wyznaczana wartość wskaźnika degradacji układu będzie wówczas oparta na wybranym wskaźniku, co zostanie oznaczone odpowiednim indeksem górnym $W_{k,N}^{D-WOW}(p), W_{k,N}^{D-WWO}(p)$.

Alternatywnie prawdopodobieństwo utraty pakietów można zastąpić względną liczbą utraconych pakietów, którą można wyznaczyć z następującej zależności:

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{sgn}(1 + \text{sgn}(p - r(k))) \quad (3.17)$$

gdzie:

$\mathbf{r} = \{r(k) \in [0,1], k = 1, 2, \dots, N\}$ – wektor liczb losowych o rozkładzie prostokątnym mającym wymiar odpowiadający długości horyzontu czasowego,

p – prawdopodobieństwo utraty pakietu.

Przyjmuje się że pakiet jest gubiony, gdy $r(k) \leq p$.

Analiza niestacjonarności układu w funkcji względnej liczby utraconych pakietów prowadzi do bardziej skoncentrowanych wartości wskaźników $\text{TWG}_{\bar{p},i}^N(k)$, $\text{WOW}_{\bar{p},i}^N(k)$ oraz $\text{WWO}_{\bar{p},i}^N(k)$. Wartości wariancji dla ustalonej wielkości zbioru realizacji M są wówczas mniejsze. Pozwala to na wyznaczenie podobnych wartości $W_{k,N}^D(p) \approx W_{k,N}^D(\bar{p})$ z jednoczesnym ograniczeniem liczby realizacji M .

Wskaźnik degradacji układu można interpretować jako oczekiwany stopień nabycia przez układ własności typowych dla układów niestacjonarnych. Jeżeli wskaźnik ten ma zbyt dużą wartość, należy rozważyć wprowadzenie następujących zmian w projektowanym układzie:

a) sprzętowych – szybsza sieć w wypadku nadmiernego obciążenia, ekranowanie bądź lepszy protokół komunikacyjny w wypadku wielu błędów;

b) programowych – poprawa konfiguracji routerów, priorytetów dla najważniejszych procesów, optymalizacji kodowania na potrzeby transmisji;

c) nastaw, struktury regulatora bądź struktury całego układu sterowania – wykorzystanie odpornego algorytmu sterowania bądź zmiana struktury sterowania z bezpośredniej na hierarchiczną.

Typ rozważanego układu i jego struktura nie ograniczają możliwości ewaluacji tego układu za pomocą wskaźnika degradacji bądź niestacjonarności układu, pod warunkiem że w analizowanym horyzoncie czasowym jego elementy składowe mają charakter liniowy stacjonarny.

3.3.2. Przykład numeryczny

Poniżej wyznaczono wartości wskaźnika niestacjonarności oraz uśrednione wartości wskaźnika degradacji sieciowego układu sterowania w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego. Układ sterowania złożony jest z regulatora i obiektu. Przyjęto, że dyskretny regulator opisany jest następującą funkcją przejścia:

$$G_c(z) = \frac{d}{(z - 0,05)} \quad (3.18)$$

gdzie d – wzmacnienie regulatora.

Obiekt sterowania opisany jest następującą dyskretną funkcją przejścia:

$$G_p(z) = \frac{b}{(z - a)(z - c)z} \quad (3.19)$$

gdzie:

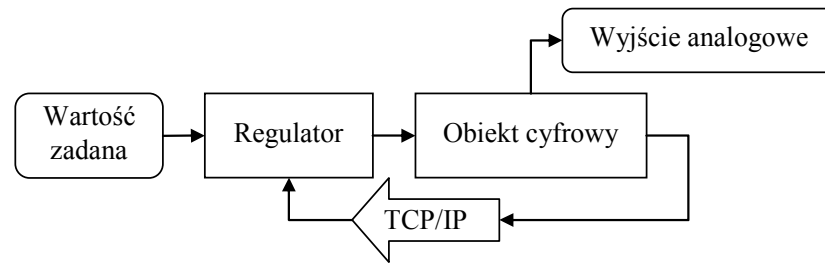
a, c – stałe związane z inercją obiektu,

b – wzmacnienie obiektu.

Funkcja przejścia układu w otwartej pętli sterowania dana jest następującą funkcją przejścia:

$$G(z) = \frac{db}{(z - 0,05)(z - a)(z - c)z} \quad (3.20)$$

Schemat blokowy układu regulacji przedstawiono na rysunku 3.5. Kanałem komunikacji sieciowej przesyłane są sygnały z obiektu do regulatora. Przyjmuje się, że opóźnienie kanału komunikacyjnego jest zmienne w czasie.



Rysunek 3.5. Schemat blokowy sieciowego układu sterowania ze zdalnym pomiarem

Macierze modelu w przestrzeni stanu (1.5)–(1.6) układu zastępczego w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ bT_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{D} = 0 \quad (3.21)$$

gdzie \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} – macierze reprezentujące nominalny układ sterowania bez uwzględnienia zjawisk sieciowych.

Zjawisko opóźniania pakietów jest uwzględniane przez przesuwanie stałej $-d$, wzmocnienia regulatora w zależności (3.18) znajdującej się w pierwszym wierszu macierzy \mathbf{A} , z kolumny czwartej w prawo, do kolumny piątej, szóstej, siódmej i ósmej. Na potrzeby symulacji numerycznej przyjęto następujące wartości parametrów układu: $a = 0,6$, $b = 5$, $c = 0,4$, $d = 0,0095$, $T_p = 0,1$ s oraz $k = 0$ i $N = 256$ to długości horyzontu czasowego.

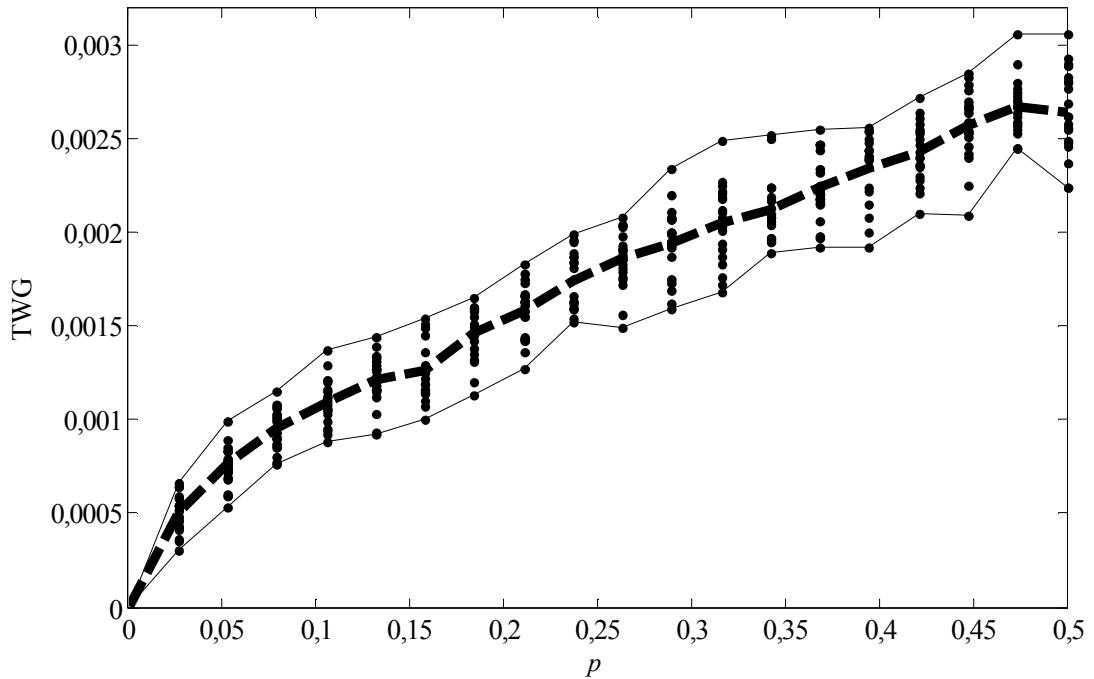
Zjawisko opóźniania pakietów modelowane jest przez zmienność macierzy stanu. Pakiet jest opóźniony o jeden krok czasowy wówczas, gdy zmienna losowa o prostokątnym rozkładzie prawdopodobieństwa osiągnie wartość mniejszą lub równą pewnej, ustalonej wartości progowej opóźnienia pakietu p :

$$\begin{cases} \text{brak opóźnienia pakietu} & r(k) > p \\ \text{opóźnienie pakietu o jeden krok czasowy} & r(k) \leq p \end{cases} \quad (3.22)$$

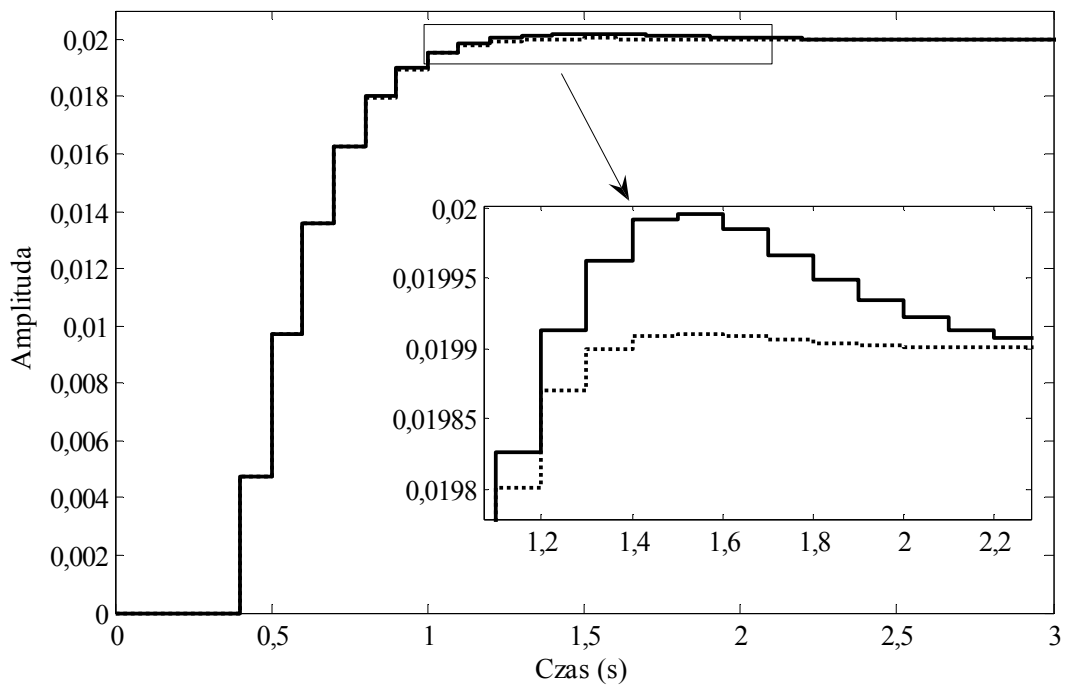
gdzie:

$\mathbf{r} = \{r(k) \in [0,1], k = 1, 2, \dots, N\}$ – wektor liczb losowych o rozkładzie prostokątnym, mającym wymiar odpowiadający długości horyzontu czasowego,

p – prawdopodobieństwo opóźnienia pakietu.

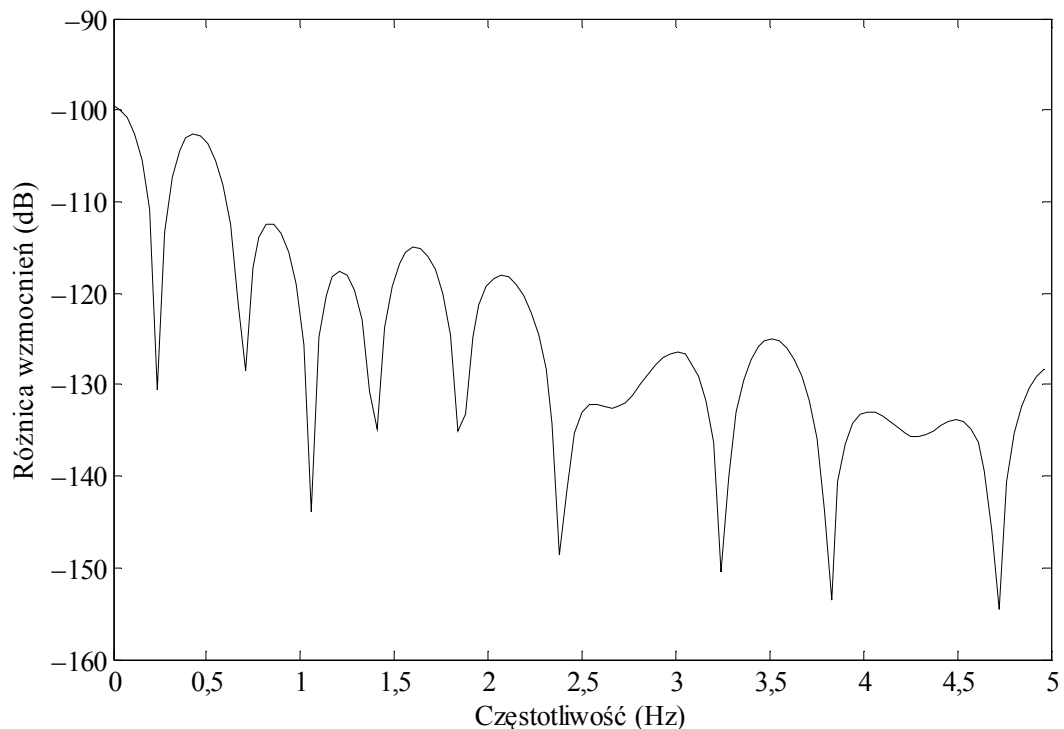


Rysunek 3.6. Wartości wskaźnika niestacjonarności TWG oraz wskaźnika degradacji $W_{k,N}^{D-TWG}(p)$ dla układu inercyjnego z opóźnieniem pakietów o wartościach parametrów $a = 0,6$, $b = 5$, $c = 0,4$, $d = 0,0095$; kropki – wartości TWG, linie ciągłe – dolne i górne ograniczenia, linia gruba przerywana – wartość wskaźnika degradacji $W_{k,N}^{D-TWG}(p)$



Rysunek 3.7. Odpowiedzi skokowe układu inercyjnego o wartościach parametrów $a = 0,6$, $b = 5$, $c = 0,4$, $d = 0,0095$; układ bez opóźnienia pakietów – linia ciągła, układ z opóźnieniem pakietów – linia kropkowana

Wyznaczone wartości wskaźnika TWG w funkcji prawdopodobieństwa opóźnienia pakietu wraz z odpowiadającą mu uśrednioną wartością wskaźnika degradacji układu $W_{0,250}^{D-TWG}(p)$ przedstawiono na rysunku 3.6. Za pomocą kropek łącznie zilustrowano rezultaty 400 symulacji przeprowadzonych dla dwudziestu różnych wartości p z zakresu od 0 do 0,5 oraz każdorazowo dla dwudziestu losowych wektorów \mathbf{r} . Dwie linie ciągłe to dolna i górna granica wyznaczonych wartości wskaźnika TWG. Wartości wskaźnika degradacji układu $W_{0,250}^{D-TWG}(p)$ zaznaczono grubą linią przerywaną. Na rysunku widać wzrost wartości wskaźnika degradacji wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa opóźnienia pakietu. Odpowiedź układu o wartości $TWG^{250}(0) = 0,003$ na skok jednostkowy przedstawiono na rysunku 3.7. Różnice między odpowiedzią układu nominalnego, oznaczonego linią ciągłą, oraz układu z opóźnieniem pakietów są widoczne w zakresie czasów od 1 s do 2 s. Na ogół ani odpowiedź skokowa, ani impulsowa układu nie są dobrymi wskaźnikami zjawisk niestacjonarnych z uwagi na większą wrażliwość początkowego fragmentu odpowiedzi na zaburzenia wysokoczęstotliwościowe, a końcowego – na zaburzenia niskoczęstotliwościowe, szczególnie na wartość wzmocnienia statycznego. Wykres różnicy widm amplitudowych odpowiedzi impulsowych dla układu inercyjnego nominalnego i z opóźnieniem pakietów dla wartości wskaźnika $TWG^{250}(0) = 0,003$ przedstawiono na rysunku 3.8.



Rysunek 3.8. Różnica widm amplitudowych odpowiedzi impulsowych dla układu inercyjnego nominalnego i z opóźnieniem pakietów o wartościach parametrów $a = 0,6$, $b = 5$, $c = 0,4$, $d = 0,0095$, $TWG^{250}(0) = 0,003$

PODSUMOWANIE

W rozdziale przeprowadzono analizę zagadnień związanych z ilościową klasyfikacją stopnia zmienności czasowej oraz czasowo-częstotliwościowej układu. Następnym etapem wstępnej analizy problemu we wprowadzeniu było omówienie dwóch potencjalnych wskaźników zmienności układu. W pierwszej części przedstawiono dwuwymiarową funkcję rozrzutu opartą na definicjach dwuwymiarowej, czasowo-częstotliwościowej, dyskretnej funkcji przejścia, omówionej w rozdziale 2.3. Podano jej najważniejsze własności i scharakteryzowano ważniejsze, stosowane w literaturze definicje wskaźników zmienności czasowo-częstotliwościowej, oparte na funkcji rozrzutu.

W drugiej części rozdziału zaproponowano definicje wskaźników niestacjonarności układu oparte na własności równości widm amplitudowych macierzy wyjścia i wejścia rozkładu według wartości szczególnych operatora przejścia układu stacjonarnego. Podane wskaźniki niestacjonarności układu były wcześniej sygnalizowane w pracach autora [201], [218] i zdefiniowane na podstawie ważonego tłumienia wstęgi głównej charakterystyki przejścia, ważonej względnej odległości odpowiadających sobie widm charakterystyki przejścia oraz wskaźnika wzajemnego odstępu odpowiadających sobie widm.

W trzeciej części rozdziału podano przykład zastosowania wskaźnika niestacjonarności układu do oceny wpływu zjawisk występujących w sieciowych systemach sterowania, wykorzystujących sieci komputerowe jako medium przesyłu informacji. Rozważono sieć opartą na protokole TCP/IP z uwzględnieniem zjawiska opóźnienia i utraty pakietów. Na podstawie przeprowadzonej analizy zdefiniowano wskaźnik degradacji liniowego stacjonarnego układu sterowania opartego na sieci.

4. ANALIZA UKŁADÓW NIEPEWNYCH

Niepewność jest pojęciem używanym nie tylko w naukach technicznych, ale również w takich dziedzinach jak statystyka, ekonomia, finanse, ubezpieczenia, psychologia, filozofia. Odnosi się ono najczęściej do wykonanych pomiarów wielkości fizycznych, przewidywań lub oczekiwań przyszłych wartości parametrów, zachowań i zdarzeń oraz do niewiadomych [27], [287]. W zależności od tego, w jakim kontekście jest ono używane, definicje mogą się różnić nieznacznie. Przykładowo, w metrologii używa się pojęcia *niepewności pomiaru*, określającej liczbę, która jest pewną miarą zmiennej losowej charakteryzującej obserwację lub estymator.

Niepewność decyzji lub *niepewność systemu* oznacza sytuację, w której wybranie danego wariantu lub danego sterowania może wywołać różne konsekwencje, przy czym nie możliwe jest określenie rozkładu prawdopodobieństwa tych zdarzeń. *Parametr niepewny* charakteryzuje ograniczony zbiór dopuszczalnych wartości łącznie z nieokreślonym rozkładem prawdopodobieństwa w tym zbiorze, np. $x_{\Delta} \in \langle 1, 2 \rangle$. Alternatywnie używa się również pojęcia *parametru przedziałowego*, a w przypadku zbioru parametrów uwikłanych w pewną strukturę również pojęć *macierzy przedziałowej* i *wielomianu przedziałowego*.

Na ogół *niepewność* występuje wówczas, gdy spełnione są łącznie dwa warunki: ograniczony zbiór wielkości dopuszczalnych (np. parametrów, konsekwencji) i nieokreślony rozkład prawdopodobieństwa tego zbioru. Jeżeli zbiór jest nieograniczony, a rozkład prawdopodobieństwa nieznan, wielkość jest *nieokreślona*. Alternatywnie można też użyć pojęcia *niepewności nieograniczonej*. Jeżeli natomiast rozkład prawdopodobieństwa jest znany, wielkość można opisać tym rozkładem, a niepewność traktować podobnie jak w metrologii, czyli jako pewną miarę zmiennej losowej.

Dla każdego ograniczonego zbioru wielkości definiuje się *wartość nominalną* lub *macierz nominalną*. *Wartość nominalna* to wielkość, w odniesieniu do której nazwano pewną rzecz lub do której jest ona odnoszona [287]. Tak zdefiniowana wartość nominalna nie zawsze musi mieć odzwierciedlenie w rzeczywistych cechach danej rzeczy. Jedyne wymóg formalny w przypadku parametrów przedziałowych jest taki, aby *wartość nominalna* zawierała się wewnątrz danego przedziału. Jeżeli są dostępne informacje o pewnej zmiennej losowej, można przyjąć że *wartość nominalna* jest równa wartości oczekiwanej. Gdy dany jest jedynie przedział, bez określonego rozkładu prawdopodobieństwa, to pojęcia *wartości nominalnej* używa się zazwyczaj w odniesieniu do wielkości zdefiniowanej jako średnia arytmetyczna $x = 0,5(\sup(x_{\Delta}) + \inf(x_{\Delta}))$, kresu dolnego i górnego przedziału ograniczonego, gdzie \sup i \inf są odpowiednio kresem górnym i dolnym dla pewnego, ograni-

zonego parametru niepewnego x_A . W analogiczny sposób można wyznaczyć punkt nominalny w przestrzeni ograniczonej. Przyjęta definicja nie wymaga znajomości parametrów rozkładu, ponieważ jest często stosowana w automatyce, gdzie bada się wpływ niepewności parametrów układu na jego własności jako całości i ma na celu minimalizację normy ograniczonego *zaburzenia* wiążącego w określony sposób wartość nominalną z niepewnością.

Własności modelu matematycznego układu często jedynie w przybliżeniu pokrywają się z własnościami układu fizycznego. Uproszczenia wprowadzane przy projektowaniu układów sterowania są potencjalnymi źródłami niepewności i zawodności modelu. Najczęściej są one uzasadnione, lecz zawsze powinny być poprzedzone wcześniejszą analizą problemu. Zjawiska, które prowadzą do takiego stanu, można podzielić na pięć następujących grup:

a) niedokładność wyznaczenia parametrów – stałe i parametry układu są często wyznaczone eksperymentalnie lub za pomocą pomiarów przyrządów o skończonej dokładności; niemożność dokładnego wyznaczenia parametrów może być też spowodowana istotą samego zjawiska, np. nieokreślonością położenia i pędu wynikającą z zasady Heisenberga;

b) niemożność wyznaczenia parametrów – w pewnych przypadkach w ogóle nie można wyznaczyć parametrów, szczególnie w systemach ekonomicznych, medycynie [308], [324], a także dla zjawisk, które są niepowtarzalne w swej naturze;

c) zmienność parametrów – modele niestacjonarne i nieliniowe umożliwiają uwzględnienie deterministycznych zmian parametrów, lecz nie pozwalają uwzględnić zmian parametrów, szumów i zakłóceń o charakterze niedeterministycznym;

d) celowe pominięcie pewnych parametrów lub własności układu – dla każdego rzeczywistego systemu uzyskanie większej dokładności wymaga zwiększania wymiarów przestrzeni stanu, często przyjęcia wielu uproszczeń, takich jak np. pominięcie wpływu temperatury otoczenia, ciśnienia w układach fizycznych, powiązań i sympatii międzynarodowych w systemach ekonomicznych czy samopoczucia pacjenta w medycynie;

e) nieliniowość, linearyzacja równań stanu – uproszczenia modelu matematycznego układu polegające na pomijaniu mniej istotnych własności, linearyzacji układu itp. są często warunkiem koniecznym nie tylko zastosowania metod syntezy sterowania układu, ale również efektywności numerycznych metod syntezy układu regulacji.

Metoda, która umożliwia uwzględnienie nieznanymi, lecz w pewnym zakresie możliwych do oszacowania czynników, polega na wprowadzeniu zaburzeń do modelu matematycznego układu. Pojawienie się niepewności może być działaniem celowym, np. zamiana nieliniowości występującej w układzie w niepewność, bądź wynikiem nieuzasadnionych uproszczeń lub założeń: dostatecznej długości próbki, rozdzielczości kwantowania, częstotliwości dyskretyzacji, wzajemnej niezależności podukładów, pomijalnie słabych sprzężeń wzajemnych, nieznaczących szumów pomiarowych, szumów kwantowania, szumów układu, nienasycań się sygnałów.

4.1. METODY WPROWADZANIA ZABURZEŃ DO UKŁADU

W przypadku skalarnego parametru niepewnego x_Δ z określoną wartością nominalną x zaburzenie Δ przyjmuje najczęściej strukturę addytywną (zaburzenie bezwzględne Δ_a) $x_\Delta = x + \Delta_a$ lub multiplikatywną (zaburzenie względne Δ_m) $x_\Delta = x(1 + \Delta_m)$. Zaburzenia Δ_a , Δ_m są ograniczone wartościowo, czyli

$$\max(x_\Delta - x) = -\min(x_\Delta - x) = \max(\Delta_a) = x \max(\Delta_m) \quad (4.1)$$

W układzie dynamicznym opisanym modelem w przestrzeni stanu (1.5)–(1.6) może wystąpić wiele parametrów niepewnych, które mogą być uwikłane w formie macierzowej. Zaburzenie Δ_A macierzy kwadratowej układu \mathbf{A} można wprowadzić do układu w sześciu strukturach pokazanych w tabeli 4.1. Należy do nich struktura addytywna, wykorzystywana do modelowania addytywnych błędów modelu oraz niepewnych zer układu, struktura w sprzężeniu zwrotnym wokół obiektu (subtraktywnej), najczęściej wykorzystywana do modelowania niskoczęstotliwościowych błędów obiektu i zmiennych wartości biegunów układu. Kolejne dwie są strukturami multiplikatywnymi na wyjściu (post-multiplikatywna) lub wejściu (pre-multiplikatywna), wykorzystywane głównie do modelowania uproszczeń dynamiki w zakresie wysokich częstotliwości, zmiennych wartości zer układu i odpowiednio zaburzeń wyjściowych i wejściowych. W dwóch ostatnich strukturach występuje sprzężenie zwrotne: na wyjściu (*post-divisional*) lub wejściu (*pre-divisional*) i najczęściej służą one do modelowania uproszczeń dynamiki w zakresie niskich częstotliwości oraz zmiennych wartości biegunów układu.

Analiza niepewności w układzie dynamicznym sprowadza się do badania wpływu poszczególnych zaburzeń na własności całego układu. Głównym wymaganiem stawianym układom sterowania jest zachowanie stabilności w warunkach niepewności. Układ stacjonarny z czasem dyskretnym (1.2)–(1.3) jest stabilny wówczas, gdy:

$$\forall_i |\lambda_i(\mathbf{A})| < 1 \quad (4.2)$$

gdzie λ_i – wartości własne macierzy \mathbf{A} układu.

Układ zaburzony jest stabilny, gdy warunki te będą spełnione dla zaburzonych macierzy układu, czyli

$$\forall_i |\lambda_i(\mathbf{A}_\Delta)| < 1 \quad (4.3)$$

Koniecznym warunkiem stabilności układu zaburzonego jest stabilność układu nominalnego. Ponadto warunki, które musi spełnić zaburzenie, aby układ niepewny był stabilny, zebrano dla wszystkich sześciu struktur w tabeli 4.1 [99], pozostałe macierze wejścia \mathbf{B} i wyjścia \mathbf{C} nie mają wpływu na stabilność wewnętrzną układu.

Tabela 4.1. Struktury zaburzeń wraz z warunkami zachowania stabilności dla układów stacjonarnych liniowych

Nazwa i model matematyczny struktury	Schemat struktury zaburzenia	Warunek zachowania stabilności dla układu dyskretnego
Addytywna $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A} + \Delta$		$\ \Delta\ < \sigma_{\min}(\mathbf{I} + \mathbf{A})$
W sprzężeniu zwrotnym wokół obiektu $\mathbf{A}_\Delta = (\mathbf{A}^{-1} + \Delta)^{-1}$		$\ \Delta\ < \sigma_{\min}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1})$
Multiplikatywna na wyjściu $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \Delta)$		$\ \Delta\ < \sigma_{\min}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1})$
Multiplikatywna na wejściu $\mathbf{A}_\Delta = (\mathbf{I} + \Delta)\mathbf{A}$		$\ \Delta\ < \sigma_{\min}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1})$
W sprzężeniu zwrotnym na wyjściu $\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \Delta)^{-1}$		$\ \Delta\ < \sigma_{\min}(\mathbf{I} + \mathbf{A})$
W sprzężeniu zwrotnym na wejściu $\mathbf{A}_\Delta = (\mathbf{I} + \Delta)^{-1}\mathbf{A}$		$\ \Delta\ < \sigma_{\min}(\mathbf{I} + \mathbf{A})$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [99].

Podany warunek w połączeniu z wymogiem stabilności układu nominalnego jest wystarczającym warunkiem stabilności, nie jest to jednak warunek konieczny i niespełnienie go nie musi prowadzić do niestabilności.

Dobór odpowiedniej struktury zaburzenia do występującej w układzie niepewności ma w wielu przypadkach decydujący wpływ na możliwość udowodnienia stabilności układu niepewnego. Jeżeli nie jest możliwe spełnienie warunków co do normy zaburzenia, w wielu przypadkach pomocne jest sprowadzenie danej realizacji układu do zrównoważonej przez zastosowanie przekształcenia macierzy układu do postaci:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x} \text{ oraz } \tilde{\Delta} = \mathbf{T}\Delta\mathbf{T}^{-1}$$

Można to wykonać za pomocą standardowej procedury do równoważenia norm wektorów składowych kolumnowych i wierszowych macierzy układu, dostępnej m.in. w pakiecie Matlab Control Systems Toolbox pod nazwą *balreal* lub *ssbal*.

Najczęściej wykorzystywana jest struktura addytywna [58], [59], [60], [77], [202], [276] i zaburzenie ograniczone normą lub parametrycznie. Niemniej w niektórych zastosowaniach, m.in. przy dowodzeniu stabilności, wygodne jest posłużenie się inną strukturą spośród przedstawionych w tabeli 4.1, lepiej dopasowaną do konkretnego problemu.

4.2. MODEL UKŁADU NIESTACJONARNEGO Z ZABURZENIEM ADDYTYWNYM

Zaburzony, liniowy, niestacjonarny układ dyskretny można zapisać za pomocą modelu w przestrzeni stanu z zaburzonymi macierzami układu w następującej postaci:

$$\mathbf{x}_\Delta(k+1) = \mathbf{A}_\Delta(k)\mathbf{x}_\Delta(k) + \mathbf{B}_\Delta(k)\mathbf{v}(k) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y}_\Delta(k) = \mathbf{C}_\Delta(k)\mathbf{x}_\Delta(k) + \mathbf{D}_\Delta(k)\mathbf{v}(k) \quad (4.5)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_\Delta(k) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k},$$

$$\mathbf{B}_\Delta(k) \in \mathbb{R}^{n_k \times m_k},$$

$$\mathbf{C}_\Delta(k) \in \mathbb{R}^{p_k \times n_k},$$

$$\mathbf{D}_\Delta(k) \in \mathbb{R}^{p_k \times m_k},$$

$$\mathbf{x}_\Delta(k) \in \mathbb{R}^{n_k},$$

$$\mathbf{v}(k) \in \mathbb{R}^{m_k},$$

$$\mathbf{y}_\Delta(k) \in \mathbb{R}^{p_k},$$

$$m_k, n_k, p_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Zaburzone macierze układu $\mathbf{A}_\Delta(k)$, $\mathbf{B}_\Delta(k)$, $\mathbf{C}_\Delta(k)$, $\mathbf{D}_\Delta(k)$ mogą się zmieniać w funkcji czasu, przy czym wymiary poszczególnych macierzy oraz wektorów stanu, wejścia i wyjścia układu również mogą być funkcjami czasu. Szczegółowa postać zaburzonych macierzy układu zależy od przyjętej struktury zaburzenia. Może być ona inna dla każdej macierzy. W dalszej części rozdziału wykorzystano strukturę addytywną. Podstawienie jej do wszystkich macierzy układu, tj.

$$\mathbf{A}_\Delta(k) = \mathbf{A}(k) + \Delta_{\mathbf{A}}(k),$$

$$\mathbf{B}_\Delta(k) = \mathbf{B}(k) + \Delta_{\mathbf{B}}(k),$$

$$\mathbf{C}_\Delta(k) = \mathbf{C}(k) + \Delta_{\mathbf{C}}(k),$$

$$\mathbf{D}_\Delta(k) = \mathbf{D}(k) + \Delta_{\mathbf{D}}(k),$$

pozwała na zapisanie niestacjonarnego, liniowego, dyskretnego modelu układu zaburzonego w następującej postaci:

$$\mathbf{x}_\Delta(k+1) = (\mathbf{A}(k) + \Delta_{\mathbf{A}}(k))\mathbf{x}_\Delta(k) + (\mathbf{B}(k) + \Delta_{\mathbf{B}}(k))\mathbf{v}(k) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y}_\Delta(k) = (\mathbf{C}(k) + \Delta_C(k))\mathbf{x}_\Delta(k) + (\mathbf{D}(k) + \Delta_D(k))\mathbf{v}(k) \quad (4.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\Delta(k) &\in \mathbb{R}^{n_k}, \\ \mathbf{v}(k) &\in \mathbb{R}^{m_k}, \\ \mathbf{y}_\Delta(k) &\in \mathbb{R}^{p_k}, \\ \mathbf{A}(k), \Delta_A(k) &\in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}, \\ \mathbf{B}(k), \Delta_B(k) &\in \mathbb{R}^{n_k \times m_k}, \\ \mathbf{C}(k), \Delta_C(k) &\in \mathbb{R}^{p_k \times n_k}, \\ \mathbf{D}(k), \Delta_D(k) &\in \mathbb{R}^{p_k \times m_k}, \\ m_k, n_k, p_k &\in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zaburzenia addytywne występujące w równaniach modelu niepewnego (4.6)–(4.7) mogą być zapisane w postaci diagonalnych operatorów macierzowych zaburzeń, tak jak to zostało dokonane dla macierzy układu $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ oraz $\mathbf{D}(k)$ za pomocą zależności (1.45)–(1.48), czyli przy użyciu formy blokowej diagonalnej. W rezultacie otrzymuje się cztery nowe operatory: $\hat{\Delta}_A$, $\hat{\Delta}_B$, $\hat{\Delta}_C$, $\hat{\Delta}_D$, przy czym każdy z nich jest operatorem zaburzenia w postaci addytywnej, co można zapisać następująco:

$$\hat{\mathbf{A}}_\Delta = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\Delta}_A, \quad \hat{\mathbf{B}}_\Delta = \hat{\mathbf{B}} + \hat{\Delta}_B, \quad \hat{\mathbf{C}}_\Delta = \hat{\mathbf{C}} + \hat{\Delta}_C, \quad \hat{\mathbf{D}}_\Delta = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\Delta}_D \quad (4.8)$$

Zgodnie z notacją operatorową wprowadzoną w pierwszym rozdziale, operator przejścia układu zaburzonego $\hat{\mathbf{T}}_\Delta$ można zapisać jako sumę operatora przejścia układu nominalnego oraz addytywnego zaburzenia operatora przejścia w następującej postaci:

$$\hat{\mathbf{T}}_\Delta = \hat{\mathbf{T}} + \hat{\Delta}_T \quad (4.9)$$

Istotny jest tutaj fakt, że zaburzenie operatora przejścia $\hat{\Delta}_T$ reprezentuje zgodnie z zależnością (1.32) odchylenie odpowiedzi impulsowych w dziedzinie czasu, natomiast zaburzenia diagonalnych operatorów macierzy układu – odchylenia parametrów modelu w przestrzeni stanu. Związek addytywnego operatora przejścia z diagonalnymi operatorami macierzy układu oraz ich zaburzeniami można zapisać w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.1. Addytywne zaburzenie operatora przejścia układu $\hat{\Delta}_T$ spełniające zależność (4.9) przy spełnionym warunku (4.8) oraz założeniu $\|\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A\| < 1$ można zapisać w następującej postaci:

$$\hat{\Delta}_T^{(\infty)} = \hat{\mathbf{C}}_\Delta \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^2 + \dots \right) \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}_\Delta + \hat{\mathbf{C}}_\Delta \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_C \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\Delta}_D \quad (4.10)$$

Górny indeks $^{(\infty)}$ oznacza liczbę składników w rozwinięciu $\left(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^2 + \dots \right)$ w szereg Taylora (w tym przypadku nieskończoność).

Dowód. Trajektorię stanu układu nominalnego przy zerowych warunkach początkowych można zapisać następująco:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}} \quad (4.11)$$

W pracy [202] pokazano, że zaburzona trajektoria stanu może być zapisana następująco:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\Delta} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_{\Delta} + \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}} \quad (4.12)$$

Zakładając, że czynnik $(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}})$ jest odwracalny, a $\hat{\mathbf{I}}$ jest operatorem jednostkowym, równanie (4.12) można przekształcić do następującej postaci:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\Delta} = (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}})^{-1} (\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}}) \quad (4.13)$$

Zaburzoną trajektorię wyjścia układu można wówczas zapisać w następującej formie:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} = \left((\hat{\mathbf{C}} + \hat{\Delta}_{\mathbf{C}}) (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{L}} (\hat{\mathbf{B}} + \hat{\Delta}_{\mathbf{B}}) + \hat{\mathbf{D}} + \hat{\Delta}_{\mathbf{D}} \right) \hat{\mathbf{v}} \quad (4.14)$$

Warunkiem wystarczającym odwracalności czynnika $(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}})$ jest, aby

$$\|\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}\| < 1.$$

Spełnienie tego warunku umożliwia zastąpienie odwrotności operatora jego rozwinięciem w szereg Taylora:

$$(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}})^{-1} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}} + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}})^2 + \dots,$$

co pozwala zapisać równanie (4.14) w postaci:

$$\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} = \left((\hat{\mathbf{C}} + \hat{\Delta}_{\mathbf{C}}) \left(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}} + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}})^2 + \dots \right) \hat{\mathbf{L}} (\hat{\mathbf{B}} + \hat{\Delta}_{\mathbf{B}}) + \hat{\mathbf{D}} + \hat{\Delta}_{\mathbf{D}} \right) \hat{\mathbf{v}} \quad (4.15)$$

Zaburzona trajektoria wyjścia może być również zapisana przy użyciu zaburzonych operatorów składowych układu w następującej formie

$$\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} = (\hat{\mathbf{C}}_{\Delta} \hat{\mathbf{L}}_{\Delta} \hat{\mathbf{B}}_{\Delta} + \hat{\mathbf{D}}_{\Delta}) \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{T}}_{\Delta} \hat{\mathbf{v}} \quad (4.16)$$

Uwzględniając zależność (4.9) zaburzony operator układu może być zapisany w postaci:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_A &= \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{C}} \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^2 + \dots \right) \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_C \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} \\ &+ \hat{\mathbf{C}} \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^2 + \dots \right) \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_C \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^2 + \dots \right) \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} \\ &+ \hat{\Delta}_C \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_C \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^2 + \dots \right) \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_D \end{aligned} \quad (4.17)$$

Po uproszczeniu ma on następującą postać:

$$\hat{\mathbf{T}}_A = \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{C}}_A \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A + (\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^2 + \dots \right) \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}_A + \hat{\mathbf{C}}_A \hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_C \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\Delta}_D \quad (4.18)$$

Zaburzony operator przejścia jest zapisany w postaci sumy operatora przejścia układu nominalnego oraz addytywnego zaburzenia operatora przejścia identycznego jak w równaniu (4.10), co kończy dowód.

Dla wystarczająco małych wartości norm operatorów zaburzenia zachodzi zależność $\|(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^n\| \cong 0$ dla $n \geq 2$, zatem wszystkie czynniki w rozwinięciu w szereg Taylora z potęgami wyższymi od 1 mogą być pominięte. Ograniczając rozwinięcie operatora odwrotnego jedynie do składników pierwszego rzędu, otrzymuje się aproksymację pierwszego rzędu dla addytywnego operatora zaburzenia w następującej postaci:

$$\hat{\Delta}_T^{(1)} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_B + \hat{\Delta}_C \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\Delta}_D \quad (4.19)$$

Dalsze uproszczenia są możliwe po przyjęciu dodatkowych założeń co do sposobu ograniczenia normy operatora zaburzenia układu. Można tu wyróżnić cztery podstawowe metody ograniczania operatorowych zaburzeń macierzowych. Dla każdej z nich wyznaczono odpowiadającą mu normę operatora zaburzenia.

4.3. METODY OGRANICZANIA ZABURZEŃ MACIERZOWYCH

Wprowadzanie ograniczeń do zaburzeń pozwala modelować niepewność występującą w układzie. Zaburzenia macierzowe mogą być ograniczone na wiele sposobów. Poniżej przedstawiono opis czterech metod ograniczania takich zaburzeń. Dla każdej podano oszacowanie iloczynu macierzy zaburzenia $\Delta^T \Delta$. Macierz układu \mathbf{A} jest zawsze macierzą kwadratową, niemniej zaburzone mogą być również pozostałe macierze wejścia \mathbf{B} i wyjścia \mathbf{C} . Zaproponowane w tym rozdziale oszacowania można stosować również do macierzy prostokątnych.

4.3.1. Zaburzenie z ograniczoną normą

Jest to najprostszy typ zaburzenia. Ponieważ brakuje danych o jego strukturze wewnętrznej, więc niepewność modelowana przy jego użyciu nosi nazwę *niepewności niestrukturalnej*. Określona jest jedynie maksymalna wartość normy macierzy zaburzenia $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times l}$, tzn.

$$\|\Delta\| \leq \delta \quad (4.20)$$

gdzie δ – znany skalar (oszacowanie normy).

Iloczyn macierzy zaburzenia można oszacować z zależności

$$\mathbf{x}^T (\Delta^T \Delta) \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T (\delta^2 \mathbf{I}) \mathbf{x} \quad (4.21)$$

gdzie \mathbf{I} – macierz jednostkowa.

Norma zaburzenia operatora przejścia może być oszacowana następująco:

$$\|\hat{\Delta}_r^{(1)}\| \leq \|\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\| (\delta_A \|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\| + \delta_B) + \delta_C \|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\| + \delta_D \quad (4.22)$$

$$\|\hat{\Delta}_r^{(\infty)}\| \leq (\|\hat{\mathbf{C}}\| + \delta_C) \frac{\|\hat{\mathbf{L}}\| \delta_A}{1 - \|\hat{\mathbf{L}}\| \delta_A} (\|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\| + \|\hat{\mathbf{L}}\| \delta_B) + \delta_C (\|\hat{\mathbf{L}}\| \delta_B + \|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\|) + \delta_D \quad (4.23)$$

4.3.2. Zaburzenie ograniczone strukturalnie

Ten typ zaburzenia jest opisany za pomocą struktury tworzonej przez macierz zaburzenia wraz z dodatkowymi macierzami struktury \mathbf{D}_1 i \mathbf{D}_3 . Zależność definiująca ma następującą postać:

$$\Delta = \mathbf{D}_1 \mathbf{X} \mathbf{D}_3 \quad (4.24)$$

gdzie:

$\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{D}_3 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ – znane macierze,
 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – nieznana, nieujemnie określona macierz diagonalna kwadratowa, dla której jest spełniony warunek $\|\mathbf{X}\| \leq 1$.

Iloczyn macierzy zaburzenia ma postać:

$$\mathbf{x}^T (\Delta^T \Delta) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{D}_3^T \mathbf{X}^T \mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{X} \mathbf{D}_3 \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \|\mathbf{D}_1\|^2 \mathbf{D}_3^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{D}_3 \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T (\|\mathbf{D}_1\|^2 \mathbf{D}_3^T \mathbf{D}_3) \mathbf{x} \quad (4.25)$$

Podstawiając:

$$\hat{\Delta}_A = \mathbf{D}_{A1} \mathbf{X}_A \mathbf{D}_{A2}, \quad \hat{\Delta}_B = \mathbf{D}_{B1} \mathbf{X}_B \mathbf{D}_{B2}, \quad \hat{\Delta}_C = \mathbf{D}_{C1} \mathbf{X}_C \mathbf{D}_{C2}, \quad \hat{\Delta}_D = \mathbf{D}_{D1} \mathbf{X}_D \mathbf{D}_{D2}$$

oraz przyjmując warunki:

$$\|\mathbf{X}_A\| \leq 1, \quad \|\mathbf{X}_B\| \leq 1, \quad \|\mathbf{X}_C\| \leq 1, \quad \|\mathbf{X}_D\| \leq 1,$$

możliwe jest oszacowanie normy zaburzenia $\hat{\Delta}_H^{(1)}$ operatora przejścia w następujący sposób:

$$\|\hat{\Delta}_T^{(1)}\| \leq \|\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\mathbf{D}_{A1}\| \|\mathbf{D}_{A2}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\| + \|\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\mathbf{D}_{B1}\| \|\mathbf{D}_{B2}\| + \|\mathbf{D}_{C1}\| \|\mathbf{D}_{C2}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\| + \|\mathbf{D}_{D1}\| \|\mathbf{D}_{D2}\| \quad (4.26)$$

4.3.3. Zaburzenie ograniczone wartościowo

Zaburzenie ograniczone wartościowo występuje wówczas, gdy elementy macierzy

$$\Delta = \{d_{ij}\}_{n \times n},$$

są nieznane, jednak każdy z nich jest ograniczony:

$$|d_{ij}| \leq \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Zbiór ograniczeń elementów macierzy Δ tworzy nową macierz $\mathbf{D} = \{\delta_{ij}\}_{n \times n}$. Dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ można zapisać

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T (\Delta^T \Delta) \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (d_{ij} x_j d_{ik} x_k) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (d_{ij}^2 x_j^2 + d_{ik}^2 x_k^2) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{d}_{ij}^2 x_k^2 = \text{trace}(\mathbf{D}^T \mathbf{D}) \|\mathbf{x}\|^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

gdzie \mathbf{D} – macierz kwadratowa o wymiarze n .

Iloczyn macierzy zaburzenia można zatem oszacować z zależności:

$$\mathbf{x}^T (\Delta^T \Delta) \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T (\text{trace}(\mathbf{D}^T \mathbf{D}) \mathbf{I}) \mathbf{x} \quad (4.28)$$

Oszacowanie normy zaburzenia $\hat{\Delta}_H^{(1)}$ operatora przejścia można scharakteryzować następująco:

$$\begin{aligned} \|\hat{\Delta}_T^{(1)}\| &\leq \|\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\| \sqrt{\text{trace}(\mathbf{D}_A^T \mathbf{D}_A)} \|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\| + \|\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\| \sqrt{\text{trace}(\mathbf{D}_B^T \mathbf{D}_B)} \\ &\quad + \sqrt{\text{trace}(\mathbf{D}_C^T \mathbf{D}_C)} \|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}\| + \sqrt{\text{trace}(\mathbf{D}_D^T \mathbf{D}_D)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.3.4. Zaburzenie ograniczone parametrycznie

W tym przypadku zaburzenie jest definiowane jako liniowa kombinacja znanych macierzy i nieznanymi, ale ograniczonymi wartościami skalarnymi. Definicja jest następująca:

$$\Delta = d_1 \mathbf{D}_1 + \dots + d_k \mathbf{D}_k = \sum_{i=1}^k d_i \mathbf{D}_i \quad (4.30)$$

gdzie:

- d_i – ograniczone skalary takie, że $|d_i| \leq \delta_i$,
- δ_i – kres górny dla zbioru parametrów d_i ,
- \mathbf{D}_i – znane macierze.

Macierz iloczynu zaburzenia można zapisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T (\Delta^T \Delta) \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k d_i d_j \mathbf{D}_i^T \mathbf{D}_j \right) \mathbf{x} \\ &\leq \mathbf{x}^T \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (d_i^2 \mathbf{D}_i^T \mathbf{D}_i + d_j^2 \mathbf{D}_j^T \mathbf{D}_j) \right) \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \left(k \sum_{i=1}^k \delta_i^2 \mathbf{D}_i^T \mathbf{D}_i \right) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Zaburzenie ograniczone parametrycznie można uogólnić na zaburzenie operatora przejścia układu z równania (4.19) określonego dla każdej składowej zaburzenia:

$$\hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{L}} \hat{\Delta}_A \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{L}} \hat{\Delta}_B, \hat{\Delta}_C \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{B}} \text{ oraz } \hat{\Delta}_D.$$

Podstawiając

$$\hat{\Delta}_A = \sum_{i=1}^k a_i \hat{\Delta}_{Ai}, \hat{\Delta}_B = \sum_{i=1}^k b_i \hat{\Delta}_{Bi}, \hat{\Delta}_C = \sum_{i=1}^k c_i \hat{\Delta}_{Ci}, \hat{\Delta}_D = \sum_{i=1}^k d_i \hat{\Delta}_{Di},$$

równanie (5.18) można zapisać w następującej postaci:

$$\hat{\Delta}_T^{(1)} = \sum_{i=1}^k a_i \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{L}} \hat{\Delta}_{Ai} \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{B}} + \sum_{i=1}^k b_i \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{L}} \hat{\Delta}_{Bi} + \sum_{i=1}^k c_i \hat{\Delta}_{Ci} \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{B}} + \sum_{i=1}^k d_i \hat{\Delta}_{Di} \quad (4.32)$$

Normę zaburzenia operatora przejścia można wyznaczyć, normując obustronnie zależność (4.32), a następnie stosując nierówność trójkąta, co prowadzi do oszacowania w postaci:

$$\|\hat{\Delta}_T^{(1)}\| \leq \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \|\hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{L}} \hat{\Delta}_{Ai} \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{B}}\| + \sum_{i=1}^k \bar{b}_i \|\hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{L}} \hat{\Delta}_{Bi}\| + \sum_{i=1}^k \bar{c}_i \|\hat{\Delta}_{Ci} \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{B}}\| + \sum_{i=1}^k \bar{d}_i \|\hat{\Delta}_{Di}\| \quad (4.33)$$

lub

$$\|\hat{\Delta}_T^{(1)}\|^2 \leq \lambda_{\max} \left(k \sum_{i=1}^k \begin{pmatrix} \bar{a}_i^2 (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{A_i}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}})^T \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{A_i}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \bar{b}_i^2 (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{B_i})^T \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{B_i} \\ + \bar{c}_i^2 (\hat{\Delta}_{C_i}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}})^T \hat{\Delta}_{C_i}\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + \bar{d}_i^2 \hat{\Delta}_{C_i}^T \hat{\Delta}_{C_i} \end{pmatrix} \right) \quad (4.34)$$

W szczególnym przypadku dla $k = 2$, zaburzenie operatora przejścia układu $\hat{\Delta}_T^{(\infty)}$ można zapisać następująco:

$$\hat{\Delta}_T^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{C}} \\ +c_1\hat{\Delta}_{C1} \\ +c_2\hat{\Delta}_{C2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{A1} + a_2\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{A2} \\ + (a_1\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{A1} + a_2\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{A2})^2 \\ + \dots \end{pmatrix} \hat{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}} \\ +b_1\hat{\Delta}_{B1} \\ +b_2\hat{\Delta}_{B2} \end{pmatrix} + \quad (4.35)$$

$$+ (\hat{\mathbf{C}} + c_1\hat{\Delta}_{C1} + c_2\hat{\Delta}_{C2}) \hat{\mathbf{L}} (b_1\hat{\Delta}_{B1} + b_2\hat{\Delta}_{B2}) + (c_1\hat{\Delta}_{C1} + c_2\hat{\Delta}_{C2}) \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}} + d_1\hat{\Delta}_{D1} + d_2\hat{\Delta}_{D2}$$

4.4. SZACOWANIE OGRANICZEŃ W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI

Na kształt charakterystyki częstotliwościowej układów niepewnych mają wpływ bieżące wartości niepewnych parametrów. W praktyce najczęściej przeprowadza się analizę maksymalnego wzmocnienia w najgorszym możliwym przypadku (*worst – case gain analysis*).

Wyznaczanie ograniczeń w dziedzinie częstotliwości dla układów niepewnych jest jedną z istotnych metod syntezy sterowania odpornego. Obejmuje ono wszystkie etapy projektowania, modelowanie, analizę układu, syntezę regulatora oraz końcową ewaluację własności układu.

Zastosowanie metod częstotliwościowych do układów niepewnych było w ostatnich latach przedmiotem zainteresowań wielu badaczy. Część prac koncentrowała się na analizie układów niepewnych: w pracy [8] przeprowadzono analizę błędu w dziedzinie częstotliwości dla uproszczonych, niepewnych modeli stacjonarnych. Model probabilistyczny jako reprezentacja układu niepewnego w średnim zakresie częstotliwości rozpatrywano w pracy [274]. Techniki estymacji wpływu niepewności parametrycznych na charakterystykę częstotliwościową układów wyższych rzędów dla układu z nieliniowością statyczną analizowano w pracy [154]. Porównanie metod wyznaczania odpowiedzi częstotliwościowych układów niepewnych przeprowadzono w pracy [31]. Koncepcje umożliwiające ilościową ocenę niepewności modelu omówiono w pracach [163], [202], [255].

Niewątpliwie ważnym problemem występującym w metodach sterowania odpornego jest identyfikacja górnego ograniczenia zbioru funkcji wzmocnienia układu w dziedzinie częstotliwości reprezentujących układ niepewny. W przypadku układów niestacjonarnych użytecznym narzędziem mogą być przybliżone charakterystyki częstotliwościowe (2.116)–

(2.120), w tym charakterystyki krótkookresowe (2.117) oraz oparte na nich metody dla układów niepewnych, zaproponowane w pracach [208], [224].

Zastosowanie klasycznych narzędzi do estymacji maksymalnego wzmocnienia układu stacjonarnego, m.in. zaimplementowanej w pakiecie Matlab – Robust Control Toolbox – funkcji *wegain*, prowadzi albo do powstania błędów, w sytuacji gdy niestacjonarność zostanie pominięta, albo do znacznych przeszacowań wyznaczanych estymat, gdy będzie traktowana jak zaburzenie. Zaproponowane podejście umożliwia wyznaczenie górnego oszacowania wzmocnienia układu niestacjonarnego określonego na skończonym horyzoncie czasowym za pomocą przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych (2.116)–(2.120) oraz krótkoczasowych, przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych (2.117). Każdy ograniczony operator $\hat{\mathbf{T}}$ poddany rozkładowi według wartości szczególnych może być poddany transformacji w dziedzinę częstotliwości za pomocą zależności (2.116)–(2.120), (2.117). Podobnej transformacji może być poddany również zaburzony operator przejścia układu.

Przybliżone charakterystyki częstotliwościowe dla układów niestacjonarnych na ogół nie spełniają wszystkich własności układów stacjonarnych. Przykładowo, dla układów stacjonarnych i $N \rightarrow \infty$ zachodzi:

$$G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta}}^N(k, l) = G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l) + G_{\Delta_{\hat{\mathbf{T}}}}^N(k, l) \quad (4.36)$$

gdzie $G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)$ – przekształcenie zdefiniowane zależnością (2.117).

Dla układów niestacjonarnych spełniona jest jedynie następująca nierówność:

$$\left| G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta}}^N(k, l) \right| \leq \left| G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l) \right| + \left| G_{\Delta_{\hat{\mathbf{T}}}}^N(k, l) \right| \quad (4.37)$$

oraz istnieje granica:

$$\lim_{\|\Delta_{\hat{\mathbf{T}}}\| \rightarrow 0} \left[G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta}}^N(k, l) - G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l) - G_{\Delta_{\hat{\mathbf{T}}}}^N(k, l) \right] = 0 \quad (4.38)$$

Odchylenia charakterystyk częstotliwościowych mogą być szacowane metodą opartą na własnościach geometrycznych na płaszczyźnie liczb zespolonych w następujący sposób:

Propozycja 4.2. Dolne i górne ograniczenia charakterystyk amplitudowej i fazowej mogą być oszacowane za pomocą następujących zależności:

$$\left| G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta-i}}^N(k, l) \right| \leq \left| G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta}}^N(k, l) \right| \leq \left| G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta+i}}^N(k, l) \right| \quad (4.39)$$

$$\arg \left(G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta-i}}^N(k, l) \right) \leq \arg \left(G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta}}^N(k, l) \right) \leq \arg \left(G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta+i}}^N(k, l) \right) \quad (4.40)$$

Zaburzony, kierunkowy operator przejścia spełnia równanie

$$G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta_{\theta}}}^N(k, l) = G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l) + G_{\Delta_{\theta}}^N(k, l) \quad (4.41)$$

gdzie:

$$v_q^N(k, l) = \arg\left(q G_{\hat{T}_A}^N(k, l)\right) \quad (4.42)$$

$$\begin{cases} v_{Ai}^N(k, l) = \arg\left(G_{\hat{C}\hat{L}\hat{A}_i\hat{L}\hat{B}}^N(k, l)\right) \\ v_{Bi}^N(\omega) = \arg\left(G_{\hat{C}\hat{L}\hat{B}_i}^N(k, l)\right) \\ v_{Ci}^N(\omega) = \arg\left(G_{\hat{\Delta}_C\hat{L}\hat{B}}^N(k, l)\right) \\ v_{Di}^N(\omega) = \arg\left(G_{\hat{\Delta}_{D_i}}^N(k, l)\right) \end{cases} \quad (4.43)$$

Zaburzenie kierunkowego operatora przejścia dane jest zależnością:

$$G_{\hat{\Delta}_{T_q}}^N(k, l) = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \bar{a}_i \operatorname{sgn}\left(\cos\left(v_{Ai}^N(k, l) - v_q^N(k, l)\right)\right) G_{\hat{C}\hat{L}\hat{A}_i\hat{L}\hat{B}}^N(k, l) \\ + \bar{b}_i \operatorname{sgn}\left(\cos\left(v_{Bi}^N(k, l) - v_q^N(k, l)\right)\right) G_{\hat{C}\hat{L}\hat{B}_i}^N(k, l) \\ + \bar{c}_i \operatorname{sgn}\left(\cos\left(v_{Ci}^N(k, l) - v_q^N(k, l)\right)\right) G_{\hat{\Delta}_C\hat{L}\hat{B}}^N(k, l) \\ + \bar{d}_i \operatorname{sgn}\left(\cos\left(v_{Di}^N(k, l) - v_q^N(k, l)\right)\right) G_{\hat{\Delta}_{D_i}}^N(k, l) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

oraz $q = \{+1, -1, +i, -i\}$, $G_{\hat{T}_{\Delta q}}^N(k, l) \neq 0$ dla dowolnych l, k . □

Aproksymacja pierwszego rzędu dla zaburzenia kierunkowego $\hat{\Delta}_{T_q}$ operatora przejścia może być wyznaczona w następujący sposób:

$$G_{\hat{\Delta}_{T_q}}^N(k, l) = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \bar{a}_i \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\left(q \frac{G_{\hat{C}\hat{L}\hat{A}_i\hat{L}\hat{B}}^N(k, l)}{G_{(\hat{C}\hat{L}\hat{B})_{\Delta q}}^N(k, l)}\right)\right) G_{\hat{C}\hat{L}\hat{A}_i\hat{L}\hat{B}}^N(k, l) \\ + \bar{b}_i \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\left(q \frac{G_{\hat{C}\hat{L}\hat{B}_i}^N(k, l)}{G_{(\hat{C}\hat{L}\hat{B})_{\Delta q}}^N(k, l)}\right)\right) G_{\hat{C}\hat{L}\hat{B}_i}^N(k, l) \\ + \bar{c}_i \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\left(q \frac{G_{\hat{\Delta}_C\hat{L}\hat{B}}^N(k, l)}{G_{(\hat{C}\hat{L}\hat{B})_{\Delta q}}^N(k, l)}\right)\right) G_{\hat{\Delta}_C\hat{L}\hat{B}}^N(k, l) \\ + \bar{d}_i \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\left(q \frac{G_{\hat{\Delta}_{D_i}}^N(k, l)}{G_{(\hat{C}\hat{L}\hat{B})_{\Delta q}}^N(k, l)}\right)\right) G_{\hat{\Delta}_{D_i}}^N(k, l) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Zależność (4.45) jest równoważna z zależnością (4.44) po spełnieniu warunku $G_{\hat{T}_{\Delta q}}^N(k, l) \neq 0$.

Prawdziwość zależności (4.39)–(4.40) można sprawdzić, korzystając z własności geometrycznych dla dowolnego ustalonego ω , dla którego transformata DFT jest liczbą

zespoloną. Wartość bezwzględna wzmocnienia układu niepewnego jest ograniczona estymatą równoległą do kierunku zaburzonego operatora $G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta q}}^N(k, l)$ daną równaniem (4.44) dla $q = \{-1, +1\}$ (-1 dla kierunku przeciwnego). Charakterystyka fazowa jest natomiast ograniczona estymatą prostopadłą do kierunku operatora $G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta q}}^N(k, l)$ daną równaniem (4.44) dla $q = \{-i, +i\}$. W szczególnym przypadku, gdy $G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta q}}^N(k, l) = 0$, powyższe zależności nie mogą być wykorzystane do szacowania ograniczeń z uwagi na niemożność określenia kierunku zaburzonego operatora przejścia. Przypadek ten nie stanowi jednak istotnego utrudnienia. Można wówczas przyjąć, że odpowiednie ograniczenie jest równe zeru, i wprowadzić nieznaczące zmiany w długości horyzontu czasowego lub okresie dyskretyzacji, co pozwoli wyeliminować wartość zerową.

W praktycznych zastosowaniach oraz ze względu na przybliżony charakter charakterystyk, a w szczególności uśrednienie na diagramie fazowym oraz zależność $|G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta q}}^N(k, l)| \leq |G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)| + |G_{\hat{\Delta}_{\mathbf{T}}}^N(k, l)|$, praktyczne zastosowanie ma jedynie oszacowanie maksymalnego modułu zaburzonego operatora układu dane zależnością:

$$|G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta q}}^N(k, l)| \leq |G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)| + |G_{\hat{\Delta}_{\mathbf{T}}}^N(k, l)| \approx |G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)| + |G_{\hat{\Delta}_{\mathbf{T}+1}}^N(k, l)| \quad (4.46)$$

Dla dostatecznie małych zaburzeń składowych, takich że:

$$\|\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}\| \ll \sigma_{\min}(\hat{\mathbf{A}}), \quad \|\hat{\Delta}_{\mathbf{B}}\| \ll \sigma_{\min}(\hat{\mathbf{B}}), \quad \|\hat{\Delta}_{\mathbf{C}}\| \ll \sigma_{\min}(\hat{\mathbf{C}}), \quad \|\hat{\Delta}_{\mathbf{D}}\| \ll \sigma_{\min}(\hat{\mathbf{D}}),$$

kierunkowy operator zaburzenia $\hat{\Delta}_{\mathbf{T}q}$ jest w przybliżeniu równy swojej aproksymacji pierwszego rzędu, co prowadzi do zależności:

$$G_{\hat{\mathbf{T}}_{\Delta q}}^N(k, l) \cong G_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l) + G_{\hat{\Delta}_{\mathbf{T}q}}^N(k, l) \quad (4.47)$$

a operator $\hat{\mathbf{T}}_{\Delta}$ w równaniu (4.42) może być aproksymowany operatorem $\hat{\mathbf{T}}$. Wartość kąta v_q^N można zatem wyznaczyć w przybliżeniu z następującej zależności:

$$v_q^N(k, l) \cong \arg(qG_{\hat{\mathbf{T}}}^N(k, l)) \quad \text{oraz } q = \{+1, -1, +i, -i\} \quad (4.48)$$

Z uwagi na przybliżony charakter wartości kąta v_q^N oszacowanie z wykorzystaniem zależności (4.48) również ma charakter przybliżony. Aby uzyskać górną wartość oszacowania maksymalnego modułu zaburzonego operatora układu z zaburzeniem pierwszego rzędu, konieczne jest posłużenie się zależnością (4.46).

4.5. ANALIZA NIEPEWNEGO UKŁADU O ZMIENNEJ STRUKTURZE – PRZYKŁAD

Analizie poddano dyskretny układ zmiennej struktury o przejściu stopniowym inercyjno-oscylacyjnym. Podstawowe macierze układu zdefiniowano równaniami (2.122)–(2.123). Macierze modelu nominalnego układu zmiennej struktury dane są w postaci niesta-

cjonarnych macierzy modelu w przestrzeni stanu zdefiniowanych zależnościami (2.126)–(2.127). Rozpatrzono przypadki dla dwóch różnych wartości parametru zmiany struktury r . Przyjęty horyzont analizy wynosi $N = 100$ kroków. Macierze zaburzenia, Δ_A , Δ_B , Δ_C , Δ_D , dane są w postaci następującej kombinacji liniowej ograniczonej parametrycznie:

$$\Delta_A = a_1 \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 8 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\Delta_B = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,8 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0,9 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\Delta_C = c_1 [0 \ 1,6 \ 0] + c_2 [-1 \ 0,8 \ 0,8] \quad (4.51)$$

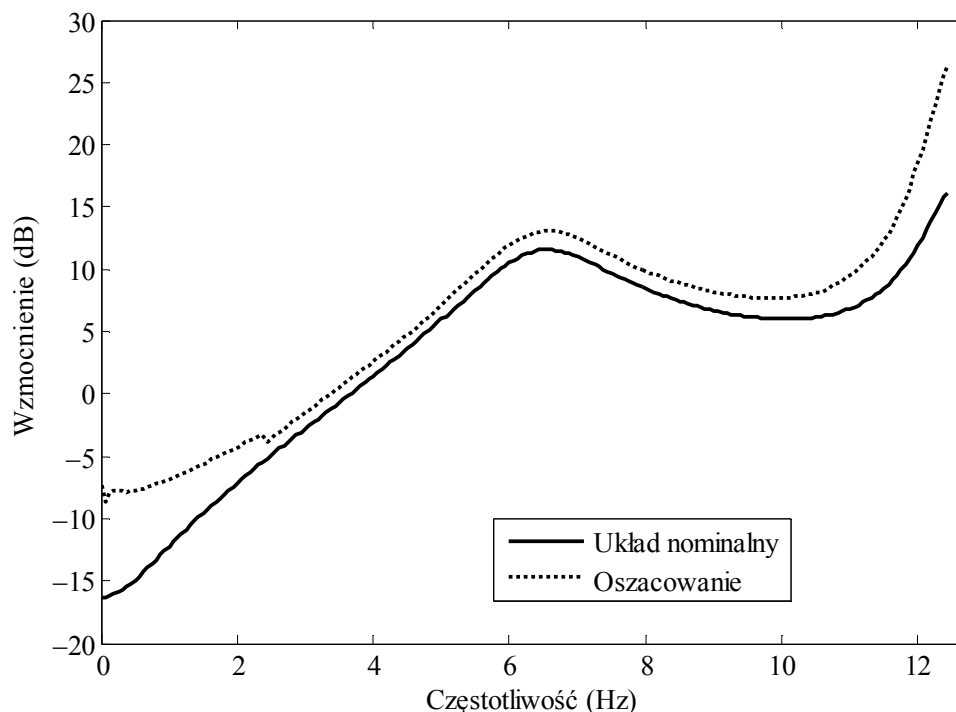
$$\Delta_D = 0 \quad (4.52)$$

gdzie:

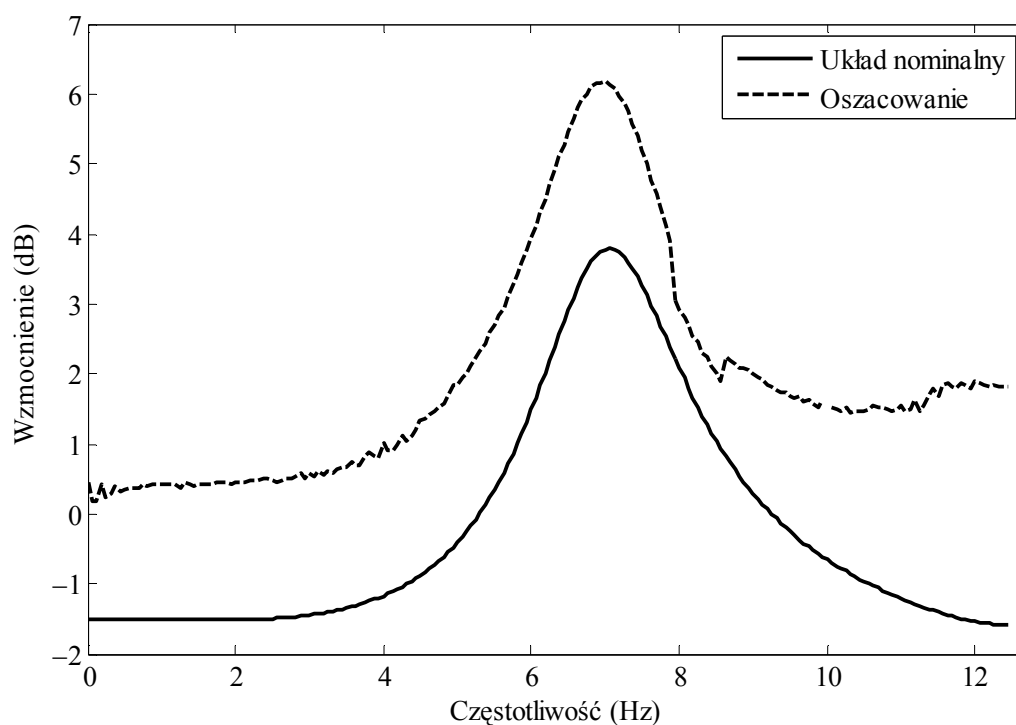
$$a_1, a_2 \in [-0,02, 0,02],$$

$$b_1, b_2 \in [-0,1, 0,1],$$

$$c_1, c_2 \in [-0,1, 0,1].$$



Rysunek 4.1. Charakterystyka amplitudowa dla układu niestacjonarnego – zmiennej struktury dla $r = 0,1$



Rysunek 4.2. Charakterystyka amplitudowa dla układu niestacjonarnego – zmiennej struktury dla $r = 1$

Transformację częstotliwościową przeprowadzono dla układu nominalnego, wykorzystując zależność (2.117) dla $k_0 = 0$, $N = 100$, a dla układu niepewnego dodatkowo zależności (4.32), (4.39)–(4.48). Wyniki analizy dla dwóch różnych parametrów przestrajania $r = 0,1$ i $r = 1$ zilustrowano na rysunkach 4.1 ($r = 0,1$) i 4.2 ($r = 1$). Charakterystyki amplitudowe układu nominalnego wykreślono linią ciągłą, a wykres górnego oszacowania charakterystyki amplitudowej dla układu niepewnego – linią przerywaną. Zaproponowane podejście umożliwia wyznaczanie przybliżonych charakterystyk częstotliwościowych układów niestacjonarnych, niepewnych.

PODSUMOWANIE

Niepewność jest często postrzegana negatywnie, jako rezultat niedoskonałości technik pomiarowych i produkcyjnych. W realiach przemysłowych zwiększanie niepewności wytwarzanych części składowych prowadzi do obniżenia kosztów produkcji. Zachowanie własności produktu prowadzi do zwiększenia zysku, czyli ma rezultat pozytywny. Na niepewności opiera się funkcjonowanie m.in. giełdy papierów wartościowych. Równowaga następuje w wyniku powstania niepewności (ryzyka poniesienia straty) u sprzedających i nadziei na zysk (czyli pozytywnej niepewności) u kupujących.

Niepewność jest nierozłącznie związana z procesami modelowania, pomiarów, identyfikacji, analizy oraz ewentualnej syntezy układu sterowania. Może być wynikiem zarówno niedoskonałości przyrządów pomiarowych lub niemożności wykonania dokładnych pomiarów, jak i zamierzonym działaniem.

Umiejętne wprowadzenie niepewności do modelu matematycznego układu pozwala nie tylko uwzględnić ją na etapie projektowania, ale również tak dobrać sterowanie, aby jej wpływ był możliwie najmniejszy. Podane w pracy metody umożliwiają dobór odpowiedniego zaburzenia do konkretnego problemu. Najczęściej wykorzystywane są zaburzenia z ograniczoną normą i ograniczone strukturalnie. Mimo że oszacowania wyprowadzono dla macierzy, mogą one być wykorzystywane również dla operatorów. W wypadku posługiwania się operatorem macierzowym układu dyskretnego określonym na skończonym horyzoncie czasowym można bezpośrednio przenieść wszystkie wyniki. Nie mniej istotny jest dobór struktury, w której niepewność zostanie uwzględniona w modelu matematycznym układu. Dobór struktury powinien prowadzić nie tylko do przejrzystego modelu, ale również zapewnić czytelne wyniki analizy dla całego układu. Struktury multiplikatywne najlepiej nadają się do modelowania uproszczeń dynamiki w zakresie wysokich częstotliwości, natomiast struktury w sprzężeniu zwrotnym do modelowania uproszczeń w zakresie niskich częstotliwości. Struktura addytywna jest wykorzystywana do wprowadzania błędów addytywnych modelu, zarówno w zakresie wysokich jak i niskich częstotliwości.

W rozdziale omówiono rozszerzenie metod częstotliwościowych do analizy układów niepewnych, niestacjonarnych. Głównymi zaletami proponowanej metody jest możliwość wykorzystania jej do analizy układów niestacjonarnych i układów określonych na skończonym horyzoncie czasowym. Pewne jej ograniczenia wynikają, po pierwsze, z przybliżonego charakteru charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych, co dokładniej omówiono w drugim rozdziale, a po drugie, z warunku zbieżności macierzowego rozwinięcia w szereg Taylora $\|\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A\| \ll 1$ oraz założenia $(\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_A)^n \approx \mathbf{0}$ dla $n = 2, 3, \dots$, które pozwala na pominięcie składników wyższych rzędów. Z praktycznego punktu widzenia oznacza to, że maksymalne, możliwe zaburzenie $\hat{\Delta}_A$ jest powiązane z operatorem $\hat{\mathbf{L}}$ i analiza może być wykonana jedynie dla dostatecznie małych zaburzeń $\hat{\Delta}_A$.

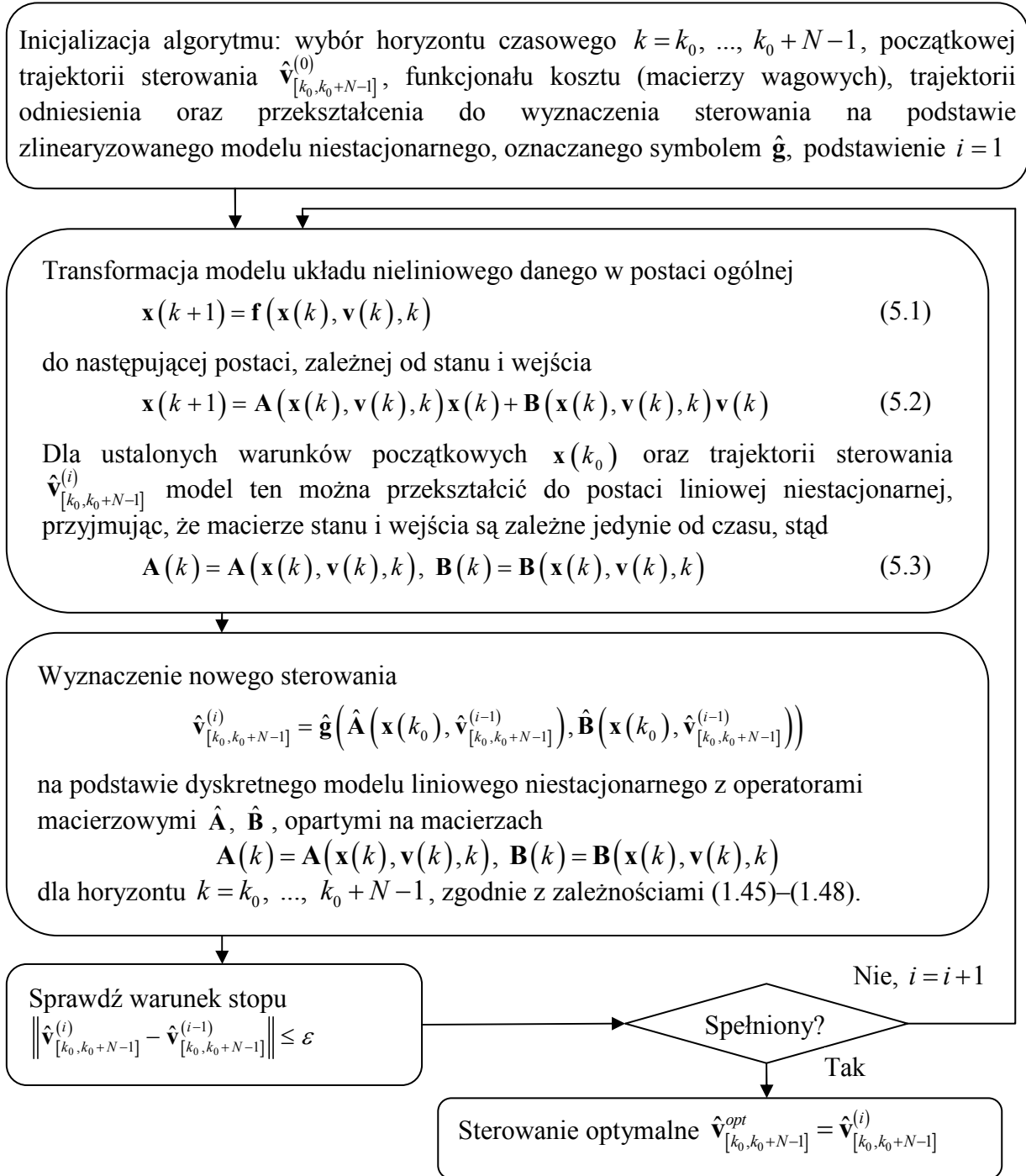
5. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ W UKŁADACH NIELINIOWYCH

Analiza i synteza nieliniowych układów sterowania jest ważnym problemem zarówno naukowym jak i praktycznym. W ostatnich latach często podejmowano próby zastosowania podejścia częstotliwościowego w analizie układów nieliniowych. Oprócz klasycznych już narzędzi uproszczonej analizy układów nieliniowych, obejmujących metodę funkcji opisującej i metodę płaszczyzny fazowej [106], [110], [112], [113], [132], [256], są prace dotyczące również analizy wpływu nieliniowości układu pobudzonego okresowym sygnałem o złożonym wejściowym widmie częstotliwościowym na jego widmo wyjściowe [32], [262] oraz analizy charakterystyk częstotliwościowych układów nieliniowych [21], [277]. Analiza widm częstotliwościowych wejścia i wyjścia układu często jest wykorzystywana do identyfikacji układów nieliniowych [61], [235], [264].

Analiza układów nieliniowych w dziedzinie częstotliwości stwarza wiele problemów [21], [23], [32], [61], [134], [154], [169], [170], [205], [264], [277]. Do pełnego opisu własności układu stacjonarnego liniowego wystarczy znajomość współczynników funkcji przejścia, a dla układu niestacjonarnego liniowego pełna informacja zawarta jest w operatorze wejściowo-wyjściowym tego układu. Pełna informacja o układzie nieliniowym zawarta jest w jego strukturze i współczynnikach modelu. Z uwagi na trudności związane z analizą takiego modelu celowa wydaje się jego konwersja do innej postaci. W ostatnich latach szeroko stosowane są modele przedziałami liniowe PWL, PWA (ang. *piecewise linear*, *piecewise affine*) [19], [75], [262], [303].

Alternatywnym, często stosowanym podejściem jest podwójne przekształcenie układu: z nieliniowego w postaci ogólnej do postaci nieliniowych równań stanu zależnych od stanu i wejścia oraz z układu w formie zależnej od stanu do postaci niestacjonarnej liniowej. Przekształcenie to jest szczególnie często stosowane do iteracyjnego wyznaczania sterowania predykcyjnego dla modeli nieliniowych [10], [19], [49], [57], [75], [125], [141], [190], [200]. Dla takiej postaci układu możliwe jest również wyznaczenie uproszczonych charakterystyk częstotliwościowych. Dokładniejszy opis własności układu nieliniowego możliwy jest jednak dopiero na podstawie zbioru opisujących go charakterystyk wyznaczonych dla zbioru sygnałów wejściowych o różnych amplitudach z określonego zakresu [205]. Dokładność uzyskiwana dla takiego przekształcenia jest znacznie większa niż w prostej linearyzacji do jednego modelu stacjonarnego liniowego.

Algorytm 5.1. Algorytm wyznaczania sterowania z modelem linearyzowanym
wzdłuż prognozowanej trajektorii



Dobór odpowiednich sygnałów wejściowych wymaga pewnej wiedzy o obiekcie nieliniowym, tak aby otrzymany zbiór charakterystyk modeli liniowych niestacjonarnych odzwierciedlał własności układu nieliniowego. W układach o niewielkich nieliniowościach możliwa jest uproszczona analiza i synteza układu sterowania, podobnie jak układów niepewnych liniowych. Przykład wskaźnika umożliwiającego określenie stopnia nielino-

wości układu opartego na analizie charakterystyk amplitudowych podano w pracy [205]. Na podstawie obszaru nieliniowych przejść charakterystyki amplitudowej układu można również sformułować definicję układu o słabej nieliniowości. Dla układów silnie nieliniowych obszar ten jest nieograniczony.

5.1. ANALIZA ZBIEŻNOŚCI ITERACYJNEGO ALGORYTMU NMPC

Metody i algorytmy nieliniowego sterowania predykcyjnego (NMPC) są w ostatnich latach przedmiotem wielu prac naukowych: [10], [49], [57], [80], [104], [125], [141], [167], [190]. Pewną obszerną klasę tworzą metody wykorzystujące algorytm iteracyjny z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii [57], [80], [190]. Polega on na wykorzystaniu do linearyzacji trajektorii wejścia i stanu iteracji wyznaczonej w poprzednim kroku. Otrzymany model jest dyskretny, liniowy, niestacjonarny, ponieważ linearyzacja następuje w każdym kolejnym kroku czasowym. Model ten jest następnie wykorzystywany do wyznaczenia optymalnego sterowania predykcyjnego za pomocą znanych metod dla układów liniowych niestacjonarnych. Jeżeli przyszła trajektoria układu może być wyznaczona za pomocą algorytmu 5.1, to wówczas można przyjąć, że przyszłe zachowanie układu jest znane w całym horyzoncie predykcji [57]. W dowolnej iteracji układ taki może być traktowany jako liniowy, dyskretny niestacjonarny, a algorytm pozwalający iteracyjnie wyznaczyć sterowanie można zapisać w postaci algorytmu 5.1.

W wielu pracach wykorzystujących się algorytm z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii rozważa się przede wszystkim możliwości zastosowania go do rozwiązania konkretnych problemów [49], [57], [80]. Szczególnie istotnym zagadnieniem jest jednak umiejętność oceny, czy lub dla jakich problemów algorytm taki może być pomyślnie zastosowany. Równie ważna jest analiza czynników wpływających na liczbę iteracji wymaganych do wyznaczenia sterowania z ustaloną tolerancją błędu.

5.1.1. Aproksymacja układem niestacjonarnym

Jest oczywiste, że istnieje nieskończenie wiele możliwych transformacji modelu (5.1) do modelu (5.2) oraz wynikającej z niej bezpośrednio postaci (5.3). Istotnym problemem jest umiejętność określenia, czy wybrana metoda transformacji umożliwi pomyślnie wyznaczenie sterowania przy stosunkowo niskich nakładach obliczeniowych (niewielkiej liczbie iteracji).

Definicja 5.1. Algorytm 5.1 jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ograniczona sekwencja sterowania $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$, taka że dla każdej, dowolnie małej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$, istnieje liczba całkowita I , taka że dla każdego $i \geq I$ oraz $N > 0$, $\left| \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} - \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \right| \leq \varepsilon$. Algorytm, który nie jest zbieżny, będzie nazywany rozbieżnym.

Algorytm może być zbieżny zarówno dla minimów lokalnych jak i globalnych. Jeżeli algorytm jest rozbieżny, niemożliwe jest spełnienie warunku zatrzymania algorytmu zwykle danego w postaci warunku:

$$\left\| \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} - \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i-1)} \right\| \leq \varepsilon \quad (5.4)$$

dla dowolnie małych wartości ε .

Wskaźnik kosztu do wyznaczania sterowania predykcyjnego ma następującą postać:

$$J_{[k_0, k_0+N-1]} = \left(\hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]} - \hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]}^{ref} \right)^T \hat{\mathbf{P}} \left(\hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]} - \hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]}^{ref} \right) + \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]} \quad (5.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}} &\in \mathbb{R}^{(nN) \times (nN)} \quad \text{– operator wagowy utworzony z macierzy wagowej } \mathbf{P}(k) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ &\quad \text{dla } k = 1, \dots, N, \\ \hat{\mathbf{Q}} &\in \mathbb{R}^{(mN) \times (mN)} \quad \text{– operator wagowy utworzony z macierzy wagowej } \mathbf{Q}(k) \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ dla} \\ &\quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Powyższe operatory zwykle mają następującą postać blokowych macierzy diagonalnych:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}(N) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Zwykle macierze wagowe są niezmiennie w horyzoncie czasowym. Wyjątkiem jest z reguły macierz $\mathbf{P}(N)$ reprezentująca ograniczenie końcowe. Wskaźnik kosztu można równoważnie przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} J_{[k_0, k_0+N-1]} &= \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{x}(k+k_0) - \mathbf{x}^{ref}(k+k_0) \right)^T \mathbf{P}(k) \left(\mathbf{x}(k+k_0) - \mathbf{x}^{ref}(k+k_0) \right) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}^T(k+k_0) \mathbf{Q}(k) \mathbf{v}(k+k_0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

gdzie $\left(\mathbf{x}(N+k_0) - \mathbf{x}^{ref}(N+k_0) \right)^T \mathbf{P}(N) \left(\mathbf{x}(N+k_0) - \mathbf{x}^{ref}(N+k_0) \right)$ – koszt sterowania przy ograniczeniu końcowym ($k = N$).

Definicja 5.2. Współczynnikiem zbieżności funkcjonału nazywany jest iloraz wartości funkcjonału wyznaczonego w iteracji następnej i poprzedniej. Ma on następującą postać:

$$R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} := \frac{J_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}}{J_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i-1)}} \quad (5.8)$$

Algorytm 5.1 jest zbieżny, jeżeli istnieje granica $J_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$, taka że dla każdej dowolnie małej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba całkowita L , taka że dla każdego $i \geq L$, $N > 0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, $\left| J_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} - J_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \right| \leq \varepsilon$. Algorytm, który nie jest zbieżny, nazywa się rozbieżnym.

Algorytm może być zbieżny zarówno dla minimów lokalnych jak i globalnych J_{opt} . Zbieżność algorytmu jest równoważna ze zbieżnością ciągu współczynników $\{R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(1)}, R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(2)}, \dots\}$. Niespełnienie warunku $\left| R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} - 1 \right| \leq \varepsilon$ dla dowolnie małych wartości ε implikuje rozbieżność algorytmu.

Definicja 5.3. Sygnał wejściowy $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}$ nazywany jest sterowaniem optymalnym $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonal kosztu (5.5) osiąga minimum globalne dla $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$. Optymalna trajektoria stanu $\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$ może być wyznaczona z równań (5.1) lub (5.2) dla ustalonych warunków początkowych oraz $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]} = \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$.

W praktyce definicję tę można stosować również dla minimów lokalnych. Wówczas jako minimum globalne można w przybliżeniu traktować każdą wartość minimum znajdującą się w pobliżu minimum globalnego.

Niech $\hat{\mathbf{g}}$ jest funkcją wektorową, która przekształca daną realizację układu niestacjonarnego liniowego, reprezentowaną przez operatory $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)})$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)})$, zlinearyzowaną dla ustalonych warunków początkowych, sekwencji sterowania $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$ wyznaczonej w i -tej iteracji algorytmu 5.1 oraz nieliniowej funkcji \mathbf{f} w optymalną sekwencję sterowania:

$$\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{g}}\left(\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}), \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)})\right) \quad (5.9)$$

przy czym sekwencję $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)}$ wykorzystano do zlinearyzowania modelu nieliniowego w $i+1$ iteracji algorytmu 5.1.

Definicja 5.4. Punktem stacjonarnym pola wektorowego $\hat{\mathbf{g}}$, zależnego od operatorów $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)})$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)})$, jest operator wektorowy $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$, dla którego spełniona jest zależność:

$$\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} = \hat{\mathbf{g}}\left(\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}), \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt})\right).$$

Wniosek 5.1. Algorytm 5.1 z przekształceniem $\hat{\mathbf{g}}$ jest rozbieżny, jeżeli optymalna sekwencja sterowania $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$ nie jest punktem stacjonarnym dla operatorów $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt})$, $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt})$ zdefiniowanych zależnościami (1.46), (1.57), (1.62), dla ustalonych warunków początkowych, funkcji \mathbf{f} oraz wektorowej funkcji $\hat{\mathbf{g}}$ dla optymalnych sekwencji sterowania, zarówno w sensie globalnych jak i lokalnych minimów funkcjonału kosztu, czyli

$$\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \neq \hat{\mathbf{g}}\left(\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}), \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt})\right).$$

Dowód wynika z definicji 5.2 i warunku zakończenia obliczeń. Jeżeli warunek ten nie będzie spełniony, algorytm nie zostanie zatrzymany nawet wówczas, gdy optymalna sekwencja sterowania została znaleziona np. przez przypadek.

Twierdzenie 5.1. Trajektoria stanu $\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)}$, wyznaczona dla układu nieliniowego w postaci zależnej od stanu i wejścia (5.2), dla danych: trajektorii sterowania $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$, $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)}$ warunków początkowych $\mathbf{x}(k_0)$, stanu $\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$ po spełnieniu warunku $\|\hat{\mathbf{L}}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}\| < 1$, może być zapisana następująco:

$$\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} = \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)} \right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} + \hat{\mathbf{L}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{B}}^{(i+1)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{B}}^{(i)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) \right) \quad (5.10)$$

gdzie:

$$\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)} = \hat{\mathbf{A}} \left(\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)}, \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} \right) - \hat{\mathbf{A}} \left(\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}, \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) \quad \text{– różnicowy operator macierzy stanu układu,}$$

$$\hat{\mathbf{B}}^{(i)} = \hat{\mathbf{B}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right), \quad \hat{\mathbf{L}}^{(i)} = \hat{\mathbf{L}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) \quad \text{– odpowiednio operatory wejścia } i \text{ struktury układu, skonstruowane zgodnie z zależnościami (1.43), (1.52), (1.54), (1.59) po podstawieniu (5.3).}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{ref} \quad \text{– operator trajektorii odniesienia stanu układu.}$$

Dowód. Dowód można przeprowadzić w sposób zbliżony do stosowanego w pracach [200], [202] dla układów niepewnych, z tą różnicą, że czynnik $\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}$ reprezentujący dla układów niepewnych zaburzenie macierzy stanu, w tym przypadku jest odchyleniem macierzy stanu w dwóch kolejnych iteracjach algorytmu z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii. Reprezentuje on wpływ korekty macierzy stanu i wejścia związanej ze zmianą trajektorii wejścia w kolejnej iteracji. Układ w $i + 1$ iteracji może być traktowany przez analogię do układów niepewnych jako układ zaburzony z i -tej iteracji. Trajektorię stanu w $i + 1$ iteracji można zapisać następująco:

$$\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} + \hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)}\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} + \hat{\mathbf{L}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{B}}^{(i+1)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{B}}^{(i)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right)$$

lub równoważnie

$$\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)} \right) \hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} + \hat{\mathbf{L}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{B}}^{(i+1)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{B}}^{(i)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right).$$

Aby wyznaczyć trajektorię $\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)}$, czynnik $\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)} \right)$ musi być odwracalny. Warunkiem wystarczającym odwracalności czynnika $\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)} \right)$ jest, aby $\|\hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)}\| < 1$. Lewostronne pomnożenie obu stron powyższego równania przez odwrotność $\left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_{\mathbf{A}}^{(i)} \right)^{-1}$ prowadzi do równania (5.10), co kończy dowód. \square

Twierdzenie 5.2. Koniecznym warunkiem zbieżności algorytmu 5.1 jest, aby sterowanie optymalne $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$ spełniało następujący warunek:

$$\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} = \hat{\mathbf{g}} \left(\hat{\mathbf{L}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \right), \hat{\mathbf{B}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \right) \right) \quad (5.11)$$

gdzie $\hat{\mathbf{g}}$ – przekształcenie operatorów $\hat{\mathbf{L}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \right)$, $\hat{\mathbf{B}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \right)$ określonych zależnościami (1.43), (1.52), (1.54), (1.59) dla ustalonych warunków początkowych, funkcji \mathbf{f} oraz sekwencji $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$ układu niestacjonarnego liniowego w optymalną sekwencję sterowania.

Dowód. Zakładając, że istnieje sekwencja sterująca $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$, taka że dla $k = k_0, \dots, k_0 + N - 1$

$$\mathbf{x}^{opt}(k+1) = \mathbf{A} \left(\mathbf{x}^{opt}(k), \mathbf{v}^{opt}(k), k \right) \mathbf{x}^{opt}(k) + \mathbf{B} \left(\mathbf{x}^{opt}(k), \mathbf{v}^{opt}(k), k \right) \mathbf{v}^{opt}(k) \quad (5.12)$$

Funkcjonał kosztu osiąga wartość minimalną:

$$\begin{aligned} J_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} &= \\ &= \left(\hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]}^{opt} - \hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]}^{ref} \right)^T \hat{\mathbf{P}} \left(\hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]}^{opt} - \hat{\mathbf{x}}_{[k_0+1, k_0+N]}^{ref} \right) + \left(\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \right)^T \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} = \min \end{aligned} \quad (5.13)$$

Algorytm 5.1 jest zbieżny z optymalną sekwencją sterowania $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje następująca granica:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} = \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} \quad (5.14)$$

lub równoważnie

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} - \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{opt} = 0 \quad (5.15)$$

gdzie $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$ – trajektoria sterowania układu w i -tej iteracji algorytmu 5.1.

Pole wektorowe przyrostów różnicowych sterowania w kolejnych iteracjach algorytmu 6.1 dla ustalonych warunków początkowych $\mathbf{x}(k_0)$, ustalonej funkcji \mathbf{f} oraz transformacji $\hat{\mathbf{g}}$ określono następująco:

$$\mathbf{V}_{gfs0} \left(\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) = \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} \left(\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) - \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \quad (5.16)$$

gdzie $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)}$ – trajektoria sterowania w $i + 1$ iteracji algorytmu 5.1.

Podstawienie (5.16) do (5.15) prowadzi do następującej zależności:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{V}_{\text{gfx}0} \left(\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) = 0 \quad (5.17)$$

lub równoważnie

$$\mathbf{V}_{\text{gfx}0} \left(\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}} \right) = 0 \quad (5.18)$$

Oznacza to, że $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}}$ musi być punktem stacjonarnym pola wektorowego $\mathbf{V}_{\text{gfx}0}$. Biorąc pod uwagę równania (5.9) i (5.16), można zapisać:

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\hat{\mathbf{g}} \left(\hat{\mathbf{L}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right), \hat{\mathbf{B}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) \right) - \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right) = \\ & = \hat{\mathbf{g}} \left(\hat{\mathbf{L}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}} \right), \hat{\mathbf{B}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}} \right) \right) - \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}} = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

co jest równoważne z zależnością (5.11) i kończy dowód. \square

Warunek zawarty w twierdzeniu 5.2 jest spełniony dla większości układów fizycznych. Wynika z niego, że warunkiem koniecznym zbieżności związanym z adekwatnością doboru funkcji $\hat{\mathbf{g}}$ do wyznaczania sterowania jest stacjonarność optymalnej sekwencji sterowania w polu wektorowym przyrostów różnicowych sterowania. Z macierzy stanu $\mathbf{A}(k)$ i wejścia $\mathbf{B}(k)$ zlinearyzowanych na trajektorii optymalnej musi zatem wynikać ta sama trajektoria optymalna. Układ niespełniający tego warunku pokazano w rozdziale 5.1.3.1. Algorytm wyznaczający nieliniowy regulator predykcyjny dla danego przekształcenia z modelu opisanego równaniem (5.1) w model opisany równaniem (5.2) jest zbieżny w sensie definicji 5.2 i twierdzenia 5.2, jeżeli sterowanie optymalne $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}}$ wynika bezpośrednio z operatorów układu niestacjonarnego $\hat{\mathbf{L}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}} \right)$, $\hat{\mathbf{B}} \left(\mathbf{f}, \mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}} \right)$, zlinearyzowanych na trajektorii $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{opt}}$.

Współczynnik zbieżności funkcjonału może być z łatwością wyznaczony numerycznie na podstawie znajomości bieżących i poprzednich trajektorii stanu oraz wejścia i trajektorii odniesienia. Do wyznaczenia współczynnika zbieżności normy stanu wystarczą trajektorie stanu: bieżąca $\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$, poprzednia $\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i-1)}$ i odniesienia $\hat{\mathbf{x}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{\text{ref}}$.

Z numerycznego punktu widzenia wyznaczanie wskaźnika $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$ nie sprawia problemów. Algorytm jest monotonicznie zbieżny, gdy $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \leq 1$. Im współczynnik ten jest bliższy zeru, tym szybsza zbieżność bezwzględna, ale w miarę zbliżania się do rozwiązania $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \rightarrow 1$. Dla układów liniowych $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} = 1$, gdyż rozwiązanie otrzymuje się w pierwszym kroku. Wartość $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} > 1$ oznacza, że algorytm może być rozbieżny. W niektórych przypadkach $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$ może naprzemiennie zmieniać swoją wartość powyżej i poniżej 1. W takim przypadku o zbieżności algorytmu decyduje to, czy w kolejnych iteracjach wartość tego wskaźnika zbliża się do jedności, tj. zachodzi $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \rightarrow 1$.

Aby uzyskać wartość R bliską jedności, konieczne jest spełnienie dwóch warunków. Iloczyn operatorów $\hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_A^{(i)}$ powinien dążyć do macierzy zerowej lub równoważnie $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\Delta}_A^{(i)}\| \rightarrow 0$. Norma operatora $\hat{\mathbf{L}}^{(i)}$ nie może być mniejsza od 1, co wynika z konstrukcji tego operatora. Norma $\hat{\Delta}_A^{(i)}$ może osiągać dowolnie niskie wartości, a jej wartość zależy od stopnia nieliniowości układu oraz przyjętej postaci rozkładu na macierze $\mathbf{A}(k)$ i $\mathbf{B}(k)$ dokonanej w drugim kroku algorytmu 5.1. Dla układu liniowego macierz \mathbf{A} nie zależy od wejścia i stanu układu, zatem norma ta jest równa zero. Dla układu silnie nieliniowego możliwe jest rozważenie podstawienia $\mathbf{A} = 0$, co automatycznie prowadziłoby do $\forall_i \|\hat{\Delta}_A^{(i)}\| = 0$. Prowadzi to jednak do zwiększania się różnicy $\hat{\mathbf{L}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{B}}^{(i+1)} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{B}}^{(i)} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right)$, szczególnie silne dla małych wartości wejścia. Może to prowadzić w oczywisty sposób do rozbieżności algorytmu, podobnie jak przyjęcie $\mathbf{B} = 0$, co najczęściej powoduje znaczny wzrost wartości normy $\|\hat{\Delta}_A^{(i)}\|$.

5.1.2. Rozkład addytywny

Dowolną funkcję $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k)$ można zapisać w postaci sumy N jej składników addytywnych. Dla ustalonej trajektorii wejścia i warunków początkowych można uprościć zapis, przyjmując $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k)$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \quad (5.20)$$

W szczególnym przypadku dla funkcji nierozkładalnej $N = 1$, zatem dowolny układ nieliniowy dany w postaci ogólnej (5.1) można rozłożyć na sumę N składników. Dalsza konwersja do postaci zależnej od stanu i wejścia (5.2) sprowadza się do przyporządkowania składników do macierzy stanu bądź wejścia, co w ogólności można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^R \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \mathbf{f}_i \right) + \sum_{j=1}^Q \left(\sum_{i=1}^N \beta_{i,j} \mathbf{f}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_{i,1} \mathbf{f}_i + \dots + \sum_{i=1}^N \alpha_{i,R} \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^N \beta_{i,1} \mathbf{f}_i + \dots + \sum_{i=1}^N \beta_{i,Q} \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_R x_R + \mathbf{b}_1 v_1 + \dots + \mathbf{b}_Q v_Q \\ &= [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_R] [x_1 \dots x_R]^T + [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_Q] [v_1 \dots v_Q]^T = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.22)$$

przy czym

$$\mathbf{a}_j x_j = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{b}_j v_j = \sum_{i=1}^N \beta_{i,j} \mathbf{f}_i \quad (5.23)$$

oraz

$$\forall_i \sum_{j=1}^R \alpha_{i,j} + \sum_{j=1}^Q \beta_{i,j} = 1 \quad (5.24)$$

Zakładając, że granice:

$$\forall_j \lim_{x_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}_j x_j}{x_j}, \quad \forall_j \lim_{v_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}_j v_j}{v_j} \quad (5.25)$$

istnieją i są skończone, można zapisać składowe wektory kolumnowe macierzy stanu $\mathbf{A}(k)$ w następującej formie:

$$\mathbf{a}_j = \begin{cases} \frac{\mathbf{a}_j x_j}{x_j} & x_j \neq 0 \\ \lim_{x_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}_j x_j}{x_j} & x_j = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

a dla macierzy wejścia $\mathbf{B}(k)$ w postaci:

$$\mathbf{b}_j = \begin{cases} \frac{\mathbf{b}_j v_j}{v_j} & v_j \neq 0 \\ \lim_{v_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}_j v_j}{v_j} & v_j = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k) &= [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_R], \\ \mathbf{B}(k) &= [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_Q], \\ \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j &- \text{wektory kolumnowe o } R \text{ wierszach,} \\ R &- \text{rzęd układu,} \\ Q &- \text{liczba wejść.} \end{aligned}$$

Każdy układ nieliniowy można rozłożyć na sumę składników addytywnych. Dokonując jednak takiego rozkładu, należy wziąć pod uwagę wnioski płynące z twierdzenia 5.1. Normy $\|\hat{\Delta}_A^{(i)}\|$ i $\|\hat{\mathbf{L}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{B}}^{(i+1)} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{B}}^{(i)} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} \right)\|$ powinny być jednocześnie możliwie jak najmniejsze. Wpływ metody rozkładu na zbieżność algorytmu pokazano w rozdziale 5.1.3.2.

Szczególnym przypadkiem jest rozkład funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, k)$ na cztery następujące składniki addytywne:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, k) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, k) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, k) + \mathbf{f}_3(\mathbf{v}, k) + \mathbf{f}_4(k) \quad (5.28)$$

Dla ułatwienia przyjęto, że funkcje wektorowe \mathbf{f} , \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 , \mathbf{f}_3 , \mathbf{f}_4 są ciągłe, a ponadto skończone są następujące granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_1}{x}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_3}{v} \quad (5.29)$$

oraz co najmniej jedna z granic

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_2}{x}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_2}{v} \quad (5.30)$$

Granice wektorowe występujące w zależnościach (5.29) i (5.30) można zapisać w postaci macierzy granicznej. Przykładowo, dla pierwszej z granic zachodzi:

$$\mathbf{f}_1 = [f_{1[1]} \quad \dots \quad f_{1[R]}]^T, \quad \mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_R]^T \quad (5.31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_1}{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f_{1[1]}}{x_1} & \dots & \lim_{x_R \rightarrow 0} \frac{f_{1[1]}}{x_R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f_{1[R]}}{x_1} & \dots & \lim_{x_R \rightarrow 0} \frac{f_{1[R]}}{x_R} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Granica wektorowa (5.32) jest skończona, jeżeli wszystkie granice składowe odpowiadającej jej macierzy granicznej są skończone. W analogiczny sposób można zbadać granice (5.29)–(5.30).

Celem sterowania jest minimalizacja wejścia i odchylenia trajektorii stanu układu od stanu odniesienia. Przeprowadzone badania symulacyjne pozwalają stwierdzić, że przyporządkowanie składników \mathbf{f}_1 i \mathbf{f}_3 , zapewniające szybką zbieżność algorytmu 5.1, jest zgodne z intuicją i powinno mieć postać: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}_1$ i $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{f}_3$. Próba innego ich przyporządkowania powoduje szybki wzrost norm $\|\hat{\Delta}_A^{(i)}\|$, $\|\hat{\mathbf{L}}(\hat{\mathbf{B}}^{(i)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} - \hat{\mathbf{B}}^{(i-1)}\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i-1)})\|$, co w efekcie prowadzi do rozbieżności algorytmu 5.1. Powstaje jednak pytanie, jak przyporządkować składniki \mathbf{f}_2 i \mathbf{f}_4 . Ich przyporządkowanie zależy głównie od funkcji $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}), \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}(k_0), \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}))$.

Jeżeli sterowanie wyraża się zależnością:

$$\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i+1)} = -\left(\left(\hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\mathbf{B}}^{(i)}\right)^T \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\mathbf{B}}^{(i)} + \hat{\mathbf{Q}}\right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{L}}^{(i)}\hat{\mathbf{B}}^{(i)}\right)^T \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\mathbf{x}(k_0) \quad (5.33)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}(k_0)$ – stan początkowy dla bieżącej predykcji,
- $\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}}$ – macierze wagowe,

Dla poprawności działania algorytmu istotny będzie wskaźnik uwarunkowania zadania wyznaczania macierzy odwrotnej:

$$\left(\left(\hat{\mathbf{L}}^{(i)} \hat{\mathbf{B}}^{(i)} \right)^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{L}}^{(i)} \hat{\mathbf{B}}^{(i)} + \hat{\mathbf{Q}} \right)^{-1} \quad (5.34)$$

definiowany jako stosunek maksymalnej do minimalnej wartości szczególnej rozkładu według wartości szczególnych tej macierzy. Nie jest zatem dobra sytuacja, gdy współczynniki macierzy $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$ dążą do zera bądź nieskończoności. Najkorzystniejszy przypadek zachodzi wówczas, gdy normy macierzy $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$ mają zbliżony rząd wielkości.

Jeżeli wejście dąży szybciej do zera niż stan, tj. spełniony jest warunek:

$$\exists_{K \in \mathbb{N}} \forall_{k > K} |\mathbf{x}(k)| - |\mathbf{v}(k)| > 0 \quad (5.35)$$

celowe jest przyporządkowanie \mathbf{f}_2 do $\mathbf{B}\mathbf{v}$, ze względu na silniejszą zależność od \mathbf{v} . W wielu przypadkach dobre rezultaty daje przyporządkowanie \mathbf{f}_4 do $\mathbf{A}\mathbf{x}$, zatem:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_4, \quad \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \quad (5.36)$$

Wartości norm $\|\hat{\Delta}_A^{(i)}\|$ oraz $\left\| \hat{\mathbf{L}}^{(i)} \left(\hat{\mathbf{B}}^{(i)} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)} - \hat{\mathbf{B}}^{(i-1)} \hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i-1)} \right) \right\|$ powinny być w miarę zrównoważone, a przyjęta metoda rozkładu powinna zapewniać odwracalność macierzy (5.34). Gdy w funkcji \mathbf{f} nie występuje żaden ze składników \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_4 , konieczne jest przyporządkowanie części składnika \mathbf{f}_2 do $\mathbf{A}\mathbf{x}$, tak aby uniknąć zerowej macierzy $\mathbf{A}(k)$ i problemów związanych z wyznaczeniem odwrotności w zależności (5.33):

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = a\mathbf{f}_2, \quad \mathbf{B}\mathbf{v} = (1-a)\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \quad (5.37)$$

Wartość a należy dobrać do postaci funkcji \mathbf{f}_2 i \mathbf{f}_3 . Przeprowadzone symulacje numeryczne pozwalają stwierdzić, że algorytm 5.1 dla funkcji \mathbf{f} bez składowych \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_4 był zbieżny w większości przypadków dla wartości parametru a z przedziału $\langle 0,05-0,10 \rangle$.

Mimo że nie podano warunku wystarczającej zbieżności algorytmu 5.1 dla danego rozkładu, to zawarte powyżej wskazówki, oparte na badaniach symulacyjnych, mogą pomóc w rozkładzie układu danego w ogólnej postaci nieliniowej. Potencjalny obszar zastosowań rozpatrywanej metody jest bardzo szeroki. Algorytm iteracyjny z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii oparty na konwersji układu nieliniowego do układu niestacjonarnego liniowego może być z powodzeniem stosowany do tych układów, dla których optymalne sterowanie nieliniowe znajduje się w otoczeniu optymalnego sterowania dla zlinearyzowanego układu niestacjonarnego, a optymalna sekwencja sterowana jest punktem stacjonarnym pola wektorowego przyrostów różnicowych sterowania w kolejnych iteracjach algorytmu 5.1. Numeryczna analiza zbieżności jest możliwa dzięki wcześniej zdefiniowanym współczynnikom zbieżności.

5.1.3. Przykłady obliczeniowe

W podanych przykładach przeanalizowano własności algorytmu iteracyjnego z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii przy wyznaczaniu sterowania optymalnego minimalizującego wskaźnik kosztu (5.5). Sterowanie wyznaczano metodą iteracyjną zgodnie z algorytmem 5.1 za pomocą zależności (5.33).

5.1.3.1. Sprawdzenie warunku koniecznego zbieżności

Dany jest układ dynamiczny opisany następującym, dyskretnym modelem matematycznym:

$$x_{k+1} = x_k^2 + v_k^3 \quad (5.38)$$

Rozkład tego układu do równoważnej postaci zależnej od stanu i wejścia można przeprowadzić następująco:

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k}_{A(x_k)} \cdot x_k + \underbrace{v_k^2}_{B(v_k)} \cdot v_k \quad (5.39)$$

Analizę układu przeprowadzono dla warunku początkowego x_0 . Z uwagi na prosty charakter tego układu wyznaczenie optymalnej sekwencji sterowania nie stwarza większego problemu. Sterowanie jest wprowadzane do równania stanu w trzeciej potędze, układ jest pierwszego rzędu, więc optymalna sekwencja sterująca dla wskaźnika kosztu $J = \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}}$ w horyzoncie predykcji i sterowania $N = 2$ jest następująca:

$$v_{opt}(k) = \begin{cases} -x_0^{\frac{2}{3}} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

Wynikające stąd macierze stanu $\mathbf{A}(k)$ i wejścia $\mathbf{B}(k)$ oraz operatory układu dla horyzontu $N = 2$ są odpowiednio równe:

$$A^{opt}(k) = \begin{cases} x_0 & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}, \quad B^{opt}(k) = \begin{cases} x_0^{\frac{4}{3}} & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\hat{\mathbf{B}}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_0^{\frac{4}{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{N}}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Nowe sterowanie $\hat{\mathbf{v}}_{[0,1]}^{(1)}$, wyznaczone za pomocą powyższych operatorów, ma postać:

$$\hat{\mathbf{v}}_{[0,1]}^{(1)} = -\left(\left(\hat{\mathbf{L}}^{(0)} \hat{\mathbf{B}}^{(0)} \right)^T \hat{\mathbf{L}}^{(0)} \hat{\mathbf{B}}^{(0)} \right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{L}}^{(0)} \hat{\mathbf{B}}^{(0)} \right)^T \hat{\mathbf{N}}^{(0)} \mathbf{x}(0) \quad (5.43)$$

Nowego sterowania nie można wyznaczyć z uwagi na postać operatora $\hat{\mathbf{B}}^{(0)}$, która nie zapewnia odracalności czynnika $(\hat{\mathbf{L}}^{(0)}\hat{\mathbf{B}}^{(0)})^T \hat{\mathbf{L}}^{(0)}\hat{\mathbf{B}}^{(0)}$ występującego w zależności (5.43). Na podstawie sterowania optymalnego nie można zatem wyznaczyć sterowania optymalnego $\hat{\mathbf{v}}_{[0,1]}^{opt} = [-x_0^{\frac{2}{3}} \quad 0]^T$, co potwierdza rozbieżność analizowanego algorytmu dla powyższego układu.

5.1.3.2. Analiza własności rozkładu addytywnego z parametrem

Kolejny rozpatrywany układ jest zmienioną wersją poprzedniego przykładu. Do układu wprowadzono dodatkowy człon sprzężenia zwrotnego od stanu. Model układu ma wówczas następującą postać:

$$x_{k+1} = x_k^2 + 0,5x_k^2 v_k + v_k^3 \quad (5.44)$$

Następnie przyjęto nowe wartości dla długości horyzontu predykcji, sterowania $N = 3$, początkowej sekwencji sterowania $\hat{\mathbf{v}}_{[k_0, k_0+N-1]}^{(0)} = -0,5[1, 1, 1]$ i jednostkowe macierze wagowe $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{I}}_p$, $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{I}}_q$. Tolerancję względną zdefiniowano jako względną zmianę wartości współczynnika $R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}$ w dwóch kolejnych krokach algorytmu:

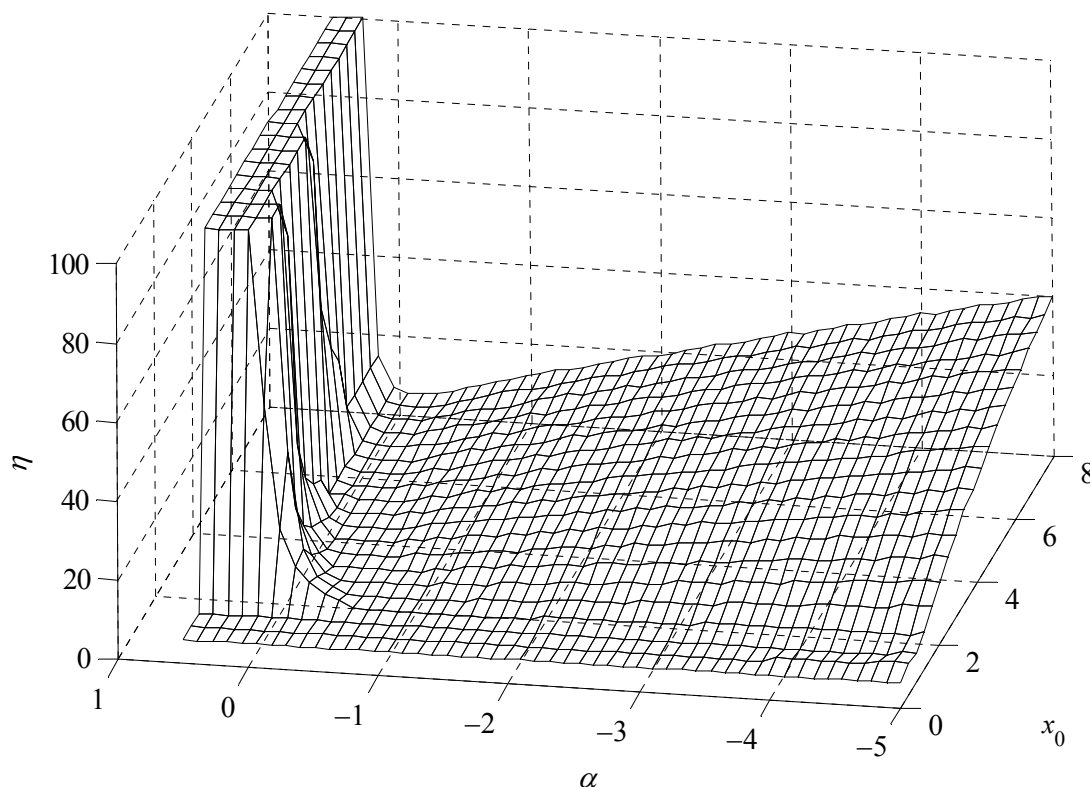
$$\left| \frac{R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i)}}{R_{[k_0, k_0+N-1]}^{(i-1)}} - 1 \right| \leq 0,001 \quad (5.45)$$

Następnie dokonano rozkładu układu (5.44) na dwa następujące człony składowe, zależne od stanu i wejścia:

$$x_{k+1} = \underbrace{(x_k + \alpha x_k v_k)}_{A(x_k, v_k)} x_k + \underbrace{((0,5 - \alpha)x_k^2 + v_k^2)}_{B(x_k, v_k)} v_k \quad (5.46)$$

Rozkład (5.46) jest zależny od parametru α . Równanie to jest równoważne z równaniem (5.44) dla dowolnych wartości α , niemniej w dalszej części przykładu dokonano analizy zbieżności algorytmu 5.1 dla $\alpha \in \langle -5, 0,5 \rangle$. Wyniki analizy przedstawiono na rysunkach 5.1 i 5.2. Na rysunku 5.1 przedstawiono liczbę iteracji η algorytmu 5.1 wymaganych do osiągnięcia optymalnej sekwencji sterowania dla przyjętej tolerancji względnej oraz warunku początkowego zawartego w przedziale $x_0 \in (0, 8]$ i parametru rozkładu $\alpha \in \langle -5, 0,5 \rangle$. Aby poprawić czytelność rysunku 5.1, przyjęto dodatkowo, że liczba iteracji jest ograniczona $\eta \leq 100$. Wartości te odpowiadają rozwiązaniom, które nie spełniają warunku zbieżności w 99 krokach algorytmu 5.1. Są to w większości rozwiązania rozbieżne, a w niewielkiej części takie, które osiągają zbieżność dla większej liczby iteracji. Jak wynika z rysunku 5.1, zbieżność algorytmu 5.1 jest funkcją zarówno warunku początkowego, jak i parametru rozkładu. Zwykle podstawowym wymaganiami stawianymi algorytmom numerycznym jest możliwie szybkie wyznaczenie rozwiązania, tj. zapewnienie szybkiej zbieżności dla

dowolnych danych wejściowych, w tym wypadku warunków początkowych z danego zakresu. Aby zapewnić szybką zbieżność dla dużych wartości stanu początkowego, np. dla $x_0 = 8$, parametr α powinien być dobrany w zakresie $\alpha \in [-0,5, 0]$, a dla mniejszych wartości stanu początkowego, np. $x_0 = 1,4$, algorytm znajdzie rozwiązanie w najkrótszym czasie dla $\alpha \in [-2, -0,6]$. Dla $x_0 < 1$ algorytm zapewnia szybką zbieżność dla dowolnych wartości parametru α z badanego zakresu.



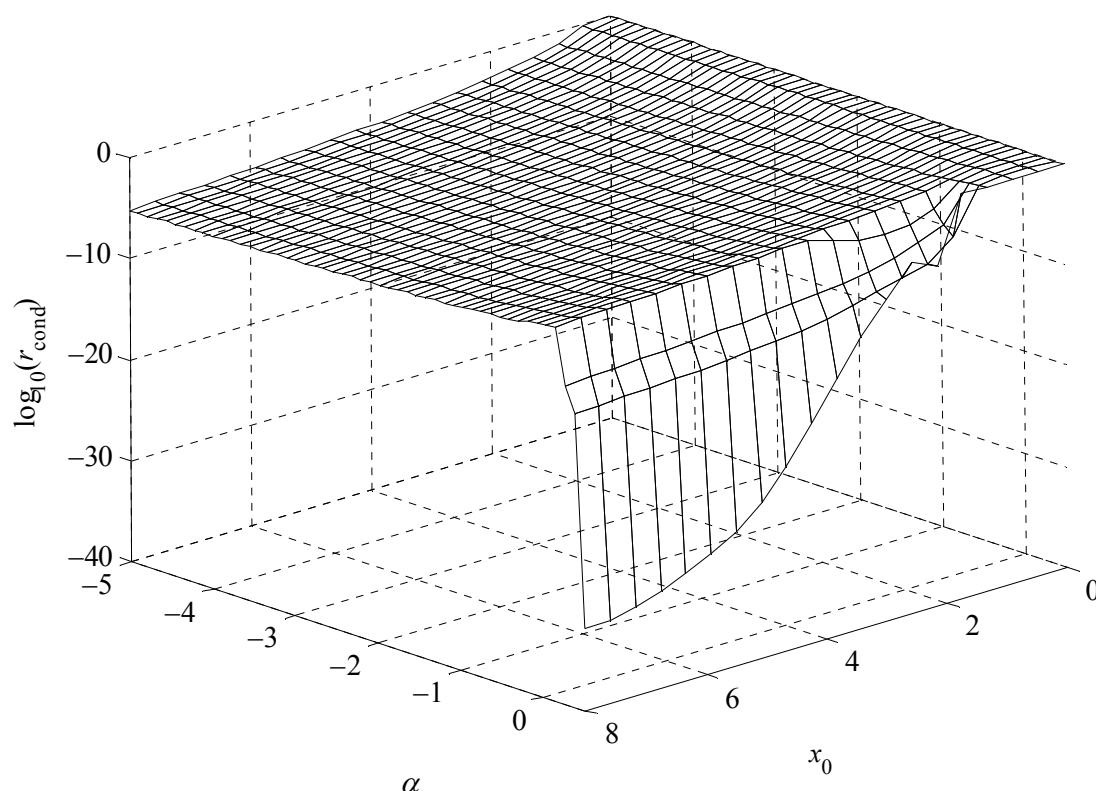
Rysunek 5.1. Liczba iteracji η wymaganych do wyznaczenia sekwencji sterowania dla przyjętej tolerancji błędu stanu początkowego x_0 oraz parametru rozkładu α

Ważne jest, że zbieżność bądź rozbieżność algorytmu 5.1 jest własnością zależną od układu (funkcja \mathbf{f}), warunków początkowych \mathbf{x}_0 , funkcji $\hat{\mathbf{g}}$, metody rozkładu oraz początkowej sekwencji sterowania. Jeżeli układ jest sterowalny, obserwowalny, a wartość trajektorii odniesienia stanu jest osiągalna dla dowolnej wartości stanu początkowego, czynnikiem poprawiającym efektywność bądź nawet decydującym o zbieżności algorytmu 5.1 jest odpowiedni dobór rozkładu funkcji \mathbf{f} .

Wskaźnik uwarunkowania zadania może być wyznaczony za pomocą istniejących procedur numerycznych zawartych w pakiecie LAPACK [137] bądź zawartej w programie Matlab funkcji $rcond$. Na rysunku 5.2 przedstawiono wykres logarytmu dziesiętnego wskaźnika uwarunkowania zadania $\log_{10}(r_{cond})$ w funkcji stanu początkowego $x(0) \in (0, 8]$ oraz parametru rozkładu $\alpha \in [-5, 0, 5]$. Po porównaniu rysunków 5.1 i 5.2 można wnioskować, że małe wartości $\log_{10}(r_{cond}) < -10$ odpowiadają rozbieżności algorytmu 5.1

dla układu (5.44), podczas gdy dla wartości $\log_{10}(r_{cond})$ bliskich zero odpowiadają szybkiej jego zbieżności.

Gdy pojawiają się wątpliwości co do metody rozkładu funkcji \mathbf{f} , pomocą przy wyznaczaniu sterowania dla układu liniowego może być właśnie wskaźnik uwarunkowania zadania wyznaczania odwrotności macierzy (5.34).



Rysunek 5.2. Logarytm odwrotności wskaźnika uwarunkowania zadania dla stanu początkowego x_0 oraz parametru rozkładu α

Alternatywnym podejściem jest sukcesywna linearyzacja układów (5.38), (5.44), np. za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora [49]. Sterowanie jest wówczas wyznaczane na podstawie modelu liniowego stacjonarnego. Największą trudnością jest w tym wypadku wybór punktu do linearyzacji x_p , u_p , tak aby otrzymać stabilne i co najmniej bliskie optymalnemu sterowanie. Linearyzacja układu (5.38) jest niemożliwa w punkcie równowagi $x_p = 0$, $v_p = 0$, gdyż prowadzi to do zerowych macierzy stanu $\mathbf{A} = 0$ i wejścia $\mathbf{B} = 0$. Dla takiego modelu nie możliwe jest wyznaczenie sterowania. Linearyzacja w bieżącym punkcie pracy układu wymaga uprzedniej znajomości właściwego sterowania [125], [141]. Ponadto metoda ta jest bardzo wrażliwa na ewentualne zaburzenia początkowej sekwencji sterowania, zastosowanie sekwencji początkowej $\hat{v} = -0,5[1,1,1]$ prowadzi do niestabilności układu. Sekwencja dająca stabilne rozwiązanie jest w tym wypadku optymalna. Dobry algorytm powinien wyznaczać ją dla szerokiego zakresu sekwencji początkowych. W przypadku układu (5.44) synteza sterowania metodą sukcesywnej linearyzacji jest nieefektywna.

5.1.4. Ilościowe porównanie efektywności metod dla układu wahadła

Celem niniejszego podrozdziału jest ilościowe porównanie efektywności metod sterowania dla aktywnej kompensacji drgań układu wahadło–wózek. W ramach przeprowadzonych symulacji i badań eksperymentalnych na obiekcie rzeczywistym, tj. modelu laboratoryjnym odwróconego wahadła PS600 wyprodukowanym przez Amirę, porównano efektywność aktywnej predykcyjnej kompensacji drgań wahadła na podstawie modelu stacjonarnego linearyzowanego jednorazowo w otoczeniu punktu równowagi modelu niestacjonarnego linearyzowanego sukcesywnie wzdłuż prognozowanej trajektorii.

5.1.4.1. Model układu wahadło–wózek

Model układu wahadło–wózek jest modelem nieliniowym z uwagi na występujące w nim nieliniowe funkcje zależne od kąta ϕ . Model nieliniowy w postaci zależnych od stanu i wejścia macierzy układu dany został równaniem (5.2). Do jednoznacznego zdefiniowania modelu wystarczy zdefiniować macierze $\mathbf{A}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), k)$. W poniższym modelu macierze układu zależne są jedynie od kąta, a macierze modelu ciągłego można zapisać następująco:

$$\mathbf{A}_c(\phi) = \begin{bmatrix} M+m & ml \cos(\phi) & 0 & 0 \\ ml \cos(\phi) & J+ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_w & 0 & -mgl s_\phi(\phi) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{B}_c(\phi) = \begin{bmatrix} M+m & ml \cos(\phi) & 0 & 0 \\ ml \cos(\phi) & J+ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

gdzie $s_\phi(\phi)$ – funkcja przybliżona następującym szeregiem Taylora:

$$s_\phi(\phi) = 1 - \frac{1}{6}\phi^2 + \frac{1}{120}\phi^4 - \frac{1}{5040}\phi^6 + \frac{1}{362880}\phi^8 \quad (5.49)$$

Model układu ciągłego dany jest następującym równaniem stanu:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c(\phi)\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c(\phi)\mathbf{F}(t) \quad (5.50)$$

Wektor zmiennych stanu ma następującą strukturę:

$$\mathbf{x}_c(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \\ x(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{prędkość liniowa wózka} \\ \text{prędkość kątowa wahadła} \\ \text{odchylenie liniowe wózka} \\ \text{kąt odchylenia wahadła} \end{array} \quad (5.51)$$

Zmienna $\phi(k)$ reprezentuje kąt odchylenia wahadła od dolnego położenia w stanie spoczynku.

5.1.4.2. Sterowanie predykcyjne

Na potrzeby implementacji regulatora predykcyjnego model ciągły układu wahadło – wózek opisany zależnościami (5.47)–(5.51) został zdyskretyzowany z okresem $T_p = 0,01 s$, oraz dodatkowo uwzględniono w nim opóźnienie jednego występujące w wyniku wykorzystywania do sterowania komputera PC z zainstalowanym oprogramowaniem Matlab/Simulink wraz z pakietem do sterowania w czasie rzeczywistym (RTW – *Real-Time Workshop*). W wyniku otrzymano model dyskretny piątego rzędu w przestrzeni zmiennych stanu, zależny od kąta. Struktura wektora stanu jest następująca:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ \omega(k) \\ x(k) \\ \phi(k) \\ F(k-1) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{prędkość liniowa wózka} \\ \text{prędkość kątowa wahadła} \\ \text{odchylenie liniowe wózka} \\ \text{kąt odchylenia wahadła} \\ \text{siła przyłożona do wózka w poprzednim kroku} \end{array} \quad (5.52)$$

Do wyznaczania sterowania zdefiniowano macierze wagowe $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{Q}(k)$ występujące we wskaźniku kosztu (5.5)–(5.7):

$$\forall_{k=1,\dots,N} \mathbf{P}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall_{k=0,\dots,N-1} \mathbf{Q}(k) = [0,002] \quad (5.53)$$

Tabela 5.1. Wartości wag dla poszczególnych zmiennych stanu układu wahadło–wózek

Zmienna	Jednostka	Opis	Waga
$v(k)$	m/s	Prędkość liniowa wózka	1
$\omega(k)$	rad/s	Prędkość kątowa wahadła	1
$x(k)$	m	Odchylenie liniowe wózka	1
$\phi(k)$	rad	Kąt odchylenia wahadła	10
$F(k-1)$	N	Siła przyłożona do wózka w poprzednim kroku	0
$F(k)$	N	Siła przyłożona do wózka w bieżącym kroku	0,002

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5.2. Wartości wskaźnika kosztu dla dwóch metod aproksymacji modelu nieliniowego

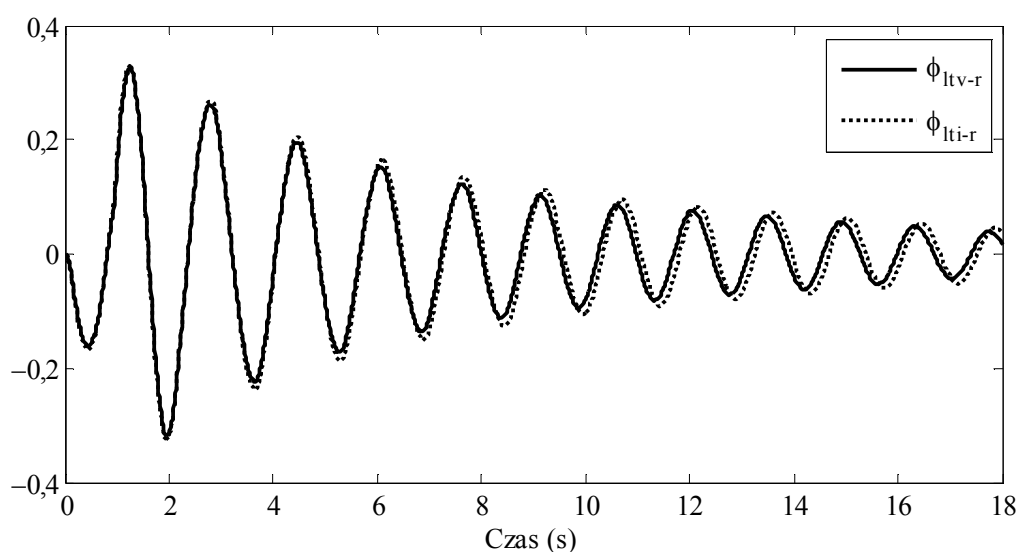
Wyszczególnienie	Symulacja	Obiekt rzeczywisty
Model stacjonarny linearyzowany jednorazowo w otoczeniu punktu równowagi – podejście klasyczne	$J_i \cong 901$	$J_i \cong 1075$
Model niestacjonarny linearyzowany sukcesywnie wzdłuż prognozowanej trajektorii – zgodnie z algorytmem 5.1	$J_v \cong 813$	$J_v \cong 975$
Względna, procentowa poprawa jakości regulacji $(1 - J_v/J_i)100\%$	9,7	9,3

Źródło: opracowanie własne.

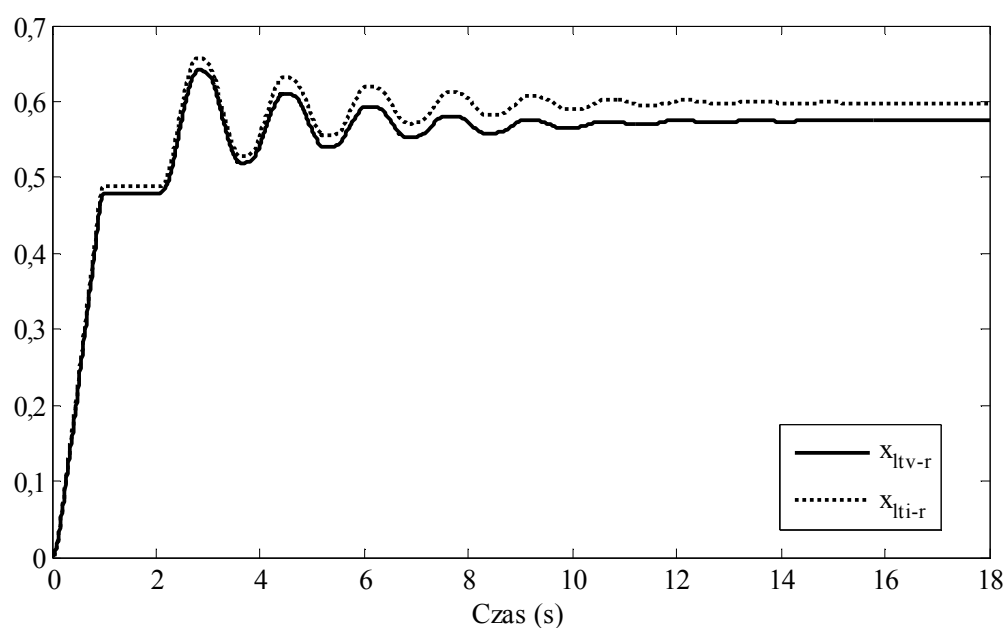
Wartości wag odpowiadające poszczególnym zmiennym stanu zebrano w tabeli 5.1. Sterowanie układu minimalizujące wskaźnik kosztu (5.5)–(5.7) wyznaczano zgodnie z zależnością (5.33). Obliczenia przeprowadzono dla dwóch następujących postaci modelu przyjętych na potrzeby predykcji:

a) modelu stacjonarnego linearyzowanego jednorazowo w otoczeniu punktu równowagi – podejście klasyczne;

b) modelu niestacjonarnego linearyzowanego sukcesywnie wzdłuż prognozowanej trajektorii – zgodnie z algorytmem 5.1.

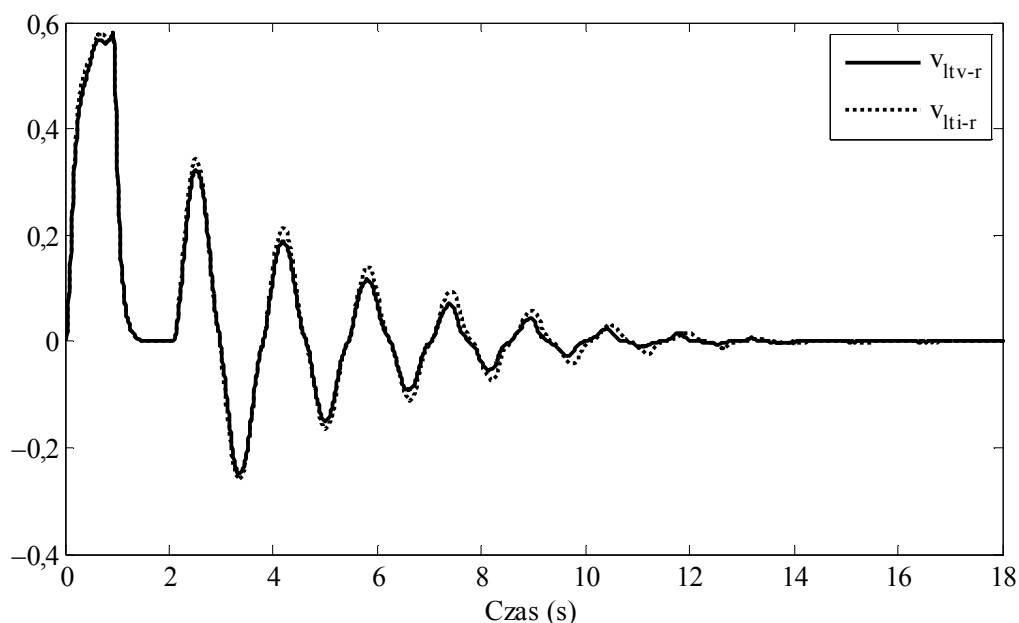


Rysunek 5.3. Wykresy kąta odchylenia wahadła dla obiektu rzeczywistego i regulatora zbudowanego opartego na modelach LTI i LTV

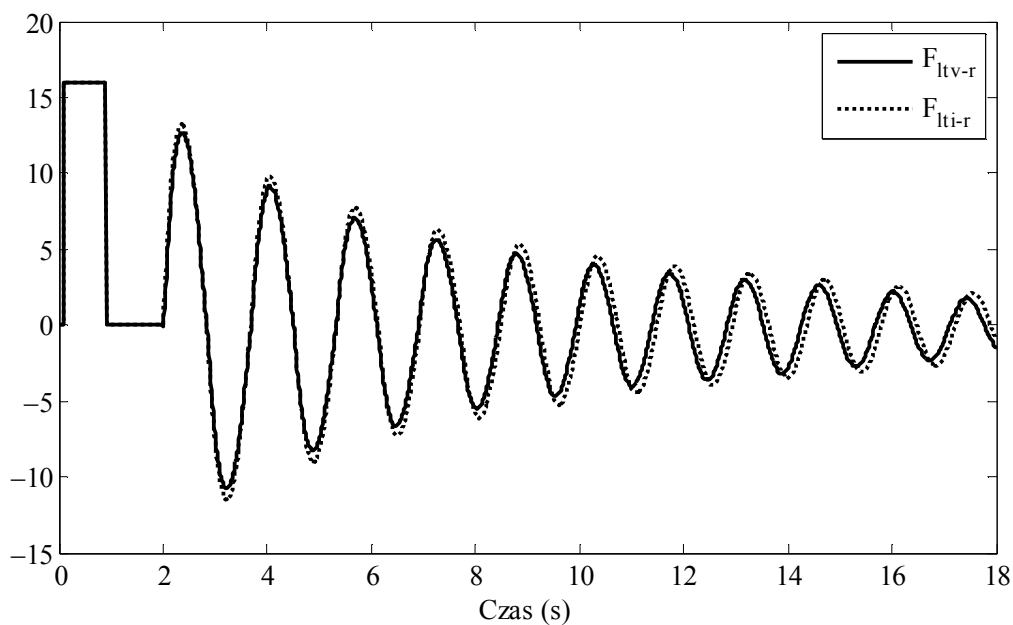


Rysunek 5.4. Wykresy odchylenia liniowego wózka dla obiektu rzeczywistego i regulatora zbudowanego opartego na modelach LTI i LTV

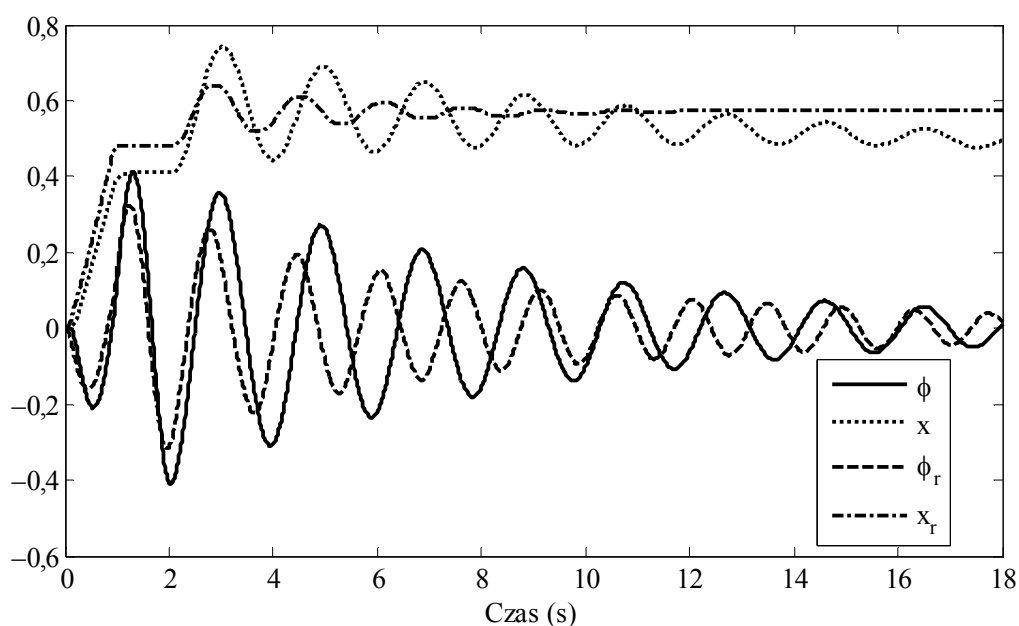
Wyznaczone wartości wskaźnika kosztu zebrano w tabeli 5.2. Do wyprowadzenia układu ze stanu równowagi każdorazowo wykorzystywano sygnał impulsowy o czasie trwania 1 s i amplitudzie 16. Wartości wskaźnika kosztu otrzymane dla obiektu rzeczywistego są o około 20% większe niż dla symulacji. Jest to spowodowane niedokładnościami w stosowaniu modelu.



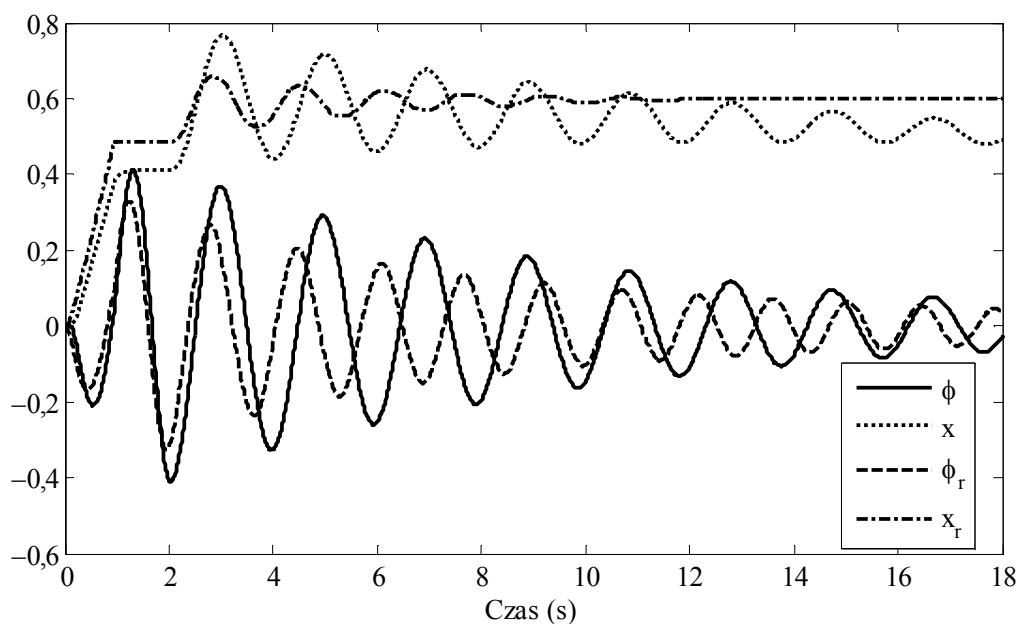
Rysunek 5.5. Wykresy prędkości liniowej wózka dla obiektu rzeczywistego i regulatora zbudowanego opartego na modelach LTI i LTV



Rysunek 5.6. Wykresy sygnału sterującego – siły dla obiektu rzeczywistego i regulatora zbudowanego opartego na modelach LTI i LTV



Rysunek 5.7. Wykresy porównawcze odchylenia kąta wahadła i położenia wózka dla symulacji komputerowej układu oraz obiektu rzeczywistego dla regulatora opartego na modelu niestacjonarnym, linearyzowanym sukcesywnie wzdłuż prognozowanej trajektorii



Rysunek 5.8. Wykresy porównawcze odchylenia kąta wahadła i położenia wózka dla symulacji komputerowej układu oraz obiektu rzeczywistego dla regulatora opartego na modelu stacjonarnym, linearyzowanym jednorazowo w otoczeniu punktu równowagi

Wykorzystanie do aproksymacji układu nieliniowego modelu niestacjonarnego liniowego prowadzi do poprawy jakości regulacji. W rozpatrywanym przypadku blisko 10-procentowe zmniejszenie wskaźnika kosztu udało się uzyskać zarówno w trakcie symulacji komputerowej, jak i dla układu rzeczywistego obciążonego dodatkowymi błędami modelu.

Przebiegi zarejestrowane w obiekcie rzeczywistym przedstawiono na rysunkach 5.3–5.6. Przebiegi każdorazowo wykreślono dla dwóch wariantów regulatora predykcyjnego z predykcją na podstawie modelu niestacjonarnego, linearyzowanego sukcesywnie wzdłuż prognozowanej trajektorii – linia ciągła, oraz z predykcją na podstawie modelu stacjonarnego linearyzowanego w otoczeniu punktu równowagi układu – linia kropkowana. Na rysunku 5.3 wykreślono przebiegi odchylenia kąta wahadła. Amplitudy kolejnych wychyleń są niezna- cznie, acz wyraźnie większe dla regulatora opartego na modelu stacjonarnym.

Na rysunku 5.4 przedstawiono przebiegi odchylenia liniowego wózka. Dla regulatora opartego na modelu stacjonarnym odchylenie wózka od położenia zerowego jest większe przez cały czas pracy regulatora. Na rysunku 5.5 wykreślono przebiegi prędkości liniowej wózka, a na rysunku 5.6 przebiegi sygnału sterującego – siły. Z łatwością można zaobserwować, że wartości bezwzględne kolejnych ekstremów są każdorazowo większe dla układu z regulatorem opartym na modelu stacjonarnym. Podobna zależność zachodzi dla prędkości kątowych wahadła.

Na rysunkach 5.7 i 5.8 wykreślono przebiegi odchylenia liniowego wózka oraz wychyleń kąta wahadła. Przebiegi, oznaczone linią przerywaną (kątem odchylenia wahadła), linią przerywaną z kropkami (odchylenie wózka), indeksem r , zostały zarejestrowane w obiekcie rzeczywistym, natomiast przebiegi wykreślone linią ciągłą (kątem odchylenia wahadła) i linią kropkowaną (odchylenie wózka) uzyskano drogą symulacji komputerowej układu hybrydowego złożonego z ciągłego modelu wahadła rozwiązywanego za pomocą metody zmiennego rzędu opartej na formułach numerycznego różniczkowania (ode15s) oraz dyskretnego regulatora. Przebiegi na rysunku 5.7 dotyczą regulatora opartego na modelu niestacjonarnym, linearyzowanym sukcesywnie wzdłuż prognozowanej trajektorii, a na rysunku 5.8 wykreślono przebiegi dla regulatora wyznaczonego według modelu stacjo- narnego, linearyzowanego jednorazowo w otoczeniu punktu równowagi. Na obydwu rysun- kach różnice między odpowiadającymi sobie przebiegami odchylenia wózka i wahadła są dobrze widoczne, zarówno dla regulatora opartego na modelu stacjonarnym jak i niesta- cjonarnym. Są to niebył duże różnice w zakresie stałych czasowych i amplitud poszcze- gólnych przebiegów.

Niezależnie od widocznych różnic między modelem i obiektem rzeczywistym regulator oparty na modelu niestacjonarnym, linearyzowanym wzdłuż prognozowanej tra- jektorii, pozwala w rozważanym układzie regulacji na poprawę wskaźnika kosztu o prawie 10% – zob. tabelę 5.2.

Wnioski

W pierwszej części rozdziału podjęto próbę sformułowania odpowiedzi na trzy pytania związane z iteracyjną metodą wyznaczania optymalnego sterowania predykcyjnego na skończonym horyzoncie czasowym na podstawie algorytmu iteracyjnego z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii (model niestacjonarny liniowy):

1. Czy wybrana metoda transformacji układu nieliniowego na liniowy jest odpowiednia?

W zakresie koniecznego warunku zbieżności pomocne jest twierdzenie 5.2. Warunek ten jest związany z wymogiem stacjonarności pola wektorowego różnicowych przyrostów sterowania dla optymalnej sekwencji sterowania. W praktyce można przyjąć, że metoda transformacji będzie odpowiednia, jeżeli:

- a) spełnione są założenia twierdzenia 5.2 – algorytm nie jest rozbieżny;
- b) logarytm wskaźnika uwarunkowania zadania wyznaczania macierzy odwrotnej zawartej w funkcji \hat{g} jest możliwie bliski zeru;
- c) nieliniowości wynikające z funkcji f są rozłożone do odpowiednich macierzy stanu i wejścia układu, tak aby zapewnić możliwie małe wartości norm różnicowych operatorów układu.

Mimo że warunek a jest najważniejszy, jego praktyczna weryfikacja może być pewnym problemem. Najmniej ważny jest warunek c, gdyż sposób rozkładu funkcji f może w pewnych układach nie wpływać na zbieżność algorytmu.

2. Czy jest gwarancja zbieżności do rozwiązania optymalnego?

W wyniku prowadzonych badań nie udało się znaleźć warunku wystarczającego zbieżności. Podano jednak warunki (5.8), pozwalające numerycznie określać bieżące zachowanie się algorytmu (zbieżność, rozbieżność).

3. Czy można wpływać na liczbę iteracji koniecznych do wyznaczenia sterowania optymalnego?

W wielu przypadkach jest to możliwe. W przykładzie 5.1.3.2 pokazano, że oprócz struktury układu zawartej w funkcji f ważnym czynnikiem, wpływającym na efektywność obliczeń, są warunki początkowe i metoda rozkładu funkcji f . Pokazano, że możliwy jest dobór parametru rozkładu w zależności od stanu początkowego układu, tak aby uzyskać wynik w możliwie najmniejszej liczbie wymaganych iteracji algorytmu 5.1.

5.2. SZACOWANIE NORMY ODCHYLENIA WYJŚCIA NIELINIOWEGO, NIEPEWNEGO UKŁADU STEROWANIA

Zagadnieniom syntezy sterowania niepewnych, nieliniowych układów sterowania w ostatnich latach poświęcono wiele prac [2], [106], [119], [153], [265], [300]. Szeroko rozwinięte są metody sterowania oparte na równaniach Riccatiego, takie jak H_2 , H_∞ . W metodach optymalnych ważny jest odpowiedni dobór macierzy wagowych, zapewniających stabilność i odpowiednie własności układu [241], [284]. Macierze wagowe można traktować również jako zmienne, a problem projektowania sterowania odpornego sformu-

łować w postaci wielokryterialnego procesu optymalizacji, który wymaga jednoczesnego spełnienia wymagań projektowych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości [307]. Implementacja nieliniowego regulatora optymalnego wymaga zazwyczaj rozwiązania równania Hamiltona-Jacoba-Bellmana [143], natomiast implementacja nieliniowego regulatora H_∞ wymaga rozwiązania równania Hamiltona-Jacoba-Issaka [296], [314].

Większość praktycznych aplikacji odpornych metod sterowania oparto na znanych modelach procesów i określonych ilościowo oraz ograniczonych niepewności parametrów układu, traktowanych jako zaburzenia modelu nominalnego. Analityczne rozwiązanie problemu nieliniowego wymaga zamiany nieliniowości na niepewności bądź wykorzystanie modeli przedziałami liniowymi [19], [75], [262], [303].

Przedstawiona dalej metoda jest przykładem adaptacji zdefiniowanych w poprzednich rozdziałach narzędzi do układów niestacjonarnych, liniowych oraz rozszerzenia ich na metody szacowania normy odchylenia trajektorii wyjścia, bądź stanu układu nieliniowego, niepewnego w dziedzinie czasu – do układu o nominalnych wartościach parametrów.

5.2.1. Model niepewnego układu nieliniowego

W proponowanej metodzie wykorzystano przekształcenie układu niepewnego, nieliniowego, dyskretnego z postaci ogólnej do postaci zależnej od stanu i wejścia, omówionej w rozdziale 5.1, i podobne podejście, oparte na metodzie aproksymacji układu nieliniowego układem niestacjonarnym, przedstawione m.in. w pracach [57], [125], [141], [190], [80], [49], [286]. Model układu nieliniowego dany jest w postaci zbliżonej do (5.1):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)) \quad (5.54)$$

z określonym dodatkowo równaniem wyjścia:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(k)) \quad (5.55)$$

Przy niezerowym opóźnieniu między wejściem a wyjściem układu można go zapisać w następującej postaci zależnej od stanu i wejścia:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{v}(k))\mathbf{v}(k) \quad (5.56)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) \quad (5.57)$$

Opis ten jest analogiczny do dyskretnego, liniowego modelu w przestrzeni stanu. Współczynniki macierzy układu $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$, $\{c_{ij}\}$ mogą być dowolnymi funkcjami stanu: $a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{x})$, $c_{ij} = c_{ij}(\mathbf{x})$ oraz wejścia $b_{ij} = b_{ij}(\mathbf{v})$.

Model dany równaniami (5.56)–(5.57) obejmuje klasę układów nieliniowych, dla których funkcje wejścia i stanu mogą być określone niezależnie. Macierz zależna od wejścia $\mathbf{B}(\mathbf{v})$ może reprezentować nieliniowości wejściowe zawarte w modelu Hammersteina, $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ – nieliniowości zawarte w modelu Wienera, a macierz stanu $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – wewnętrzne nieliniowości

układu. Model ten obejmuje szeroką klasę układów fizycznych, lecz nie pozwala na uwzględnienie w nim uwikłanych funkcji zależnych jednocześnie od wejścia i stanu.

Układ o zaburzonych wartościach parametrów, odpowiadający układowi nieliniowemu (5.54)–(5.55), można zapisać przez zastąpienie nominalnych funkcji macierzowych ich zaburzonymi odpowiednikami oznaczonymi indeksem Δ :

$$\mathbf{x}_\Delta(k+1) = \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta(k))\mathbf{x}_\Delta(k) + \mathbf{B}_\Delta(\mathbf{v}(k))\mathbf{v}(k) \quad (5.58)$$

$$\mathbf{y}_\Delta(k) = \mathbf{C}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta(k))\mathbf{x}_\Delta(k) \quad (5.59)$$

Stan \mathbf{x}_Δ i wyjście \mathbf{y}_Δ układu zaburzonego są obarczone niepewnością. Na ogół są one różne od swoich odpowiedników nominalnych: $\mathbf{y}_\Delta(k) \neq \mathbf{y}(k)$, $\mathbf{x}_\Delta(k) \neq \mathbf{x}(k)$, przynajmniej dla pewnych k . Oczywiście jest, że macierzowe funkcje układu wyznaczone dla wektorów stanu bądź wejścia nominalnego i zaburzonego najczęściej będą różne. Dla macierzy stanu można to zapisać następująco:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(k)) \neq \mathbf{A}(\mathbf{x}_\Delta(k)), \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}(k)) \neq \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta(k)) \quad (5.60)$$

Ponieważ zależności (5.54)–(5.55) oraz (5.56)–(5.57) to układy stacjonarne, ich macierze są zależne jedynie od stanu i wejścia układu, a niezależne od czasu k . Możliwe jest zatem pominięcie w nich indeksu k . Macierzowe funkcje układu zależne od stanu i wejścia można zapisać jako rozwinięcie w szereg Taylora. Dla macierzy stanu \mathbf{A} zachodzi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta(k)) = & \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}(k)) + \frac{\mathbf{A}'_\Delta(\mathbf{x}(k))}{1!}(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)) + \\ & + \frac{\mathbf{A}''_\Delta(\mathbf{x}(k))}{2!}(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k))^2 + \frac{\mathbf{A}'''_\Delta(\mathbf{x}(k))}{3!}(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k))^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.61)$$

Jeżeli odchylenie trajektorii stanu od trajektorii nominalnej jest małe, $\|\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)\| \ll 1$, możliwe jest pominięcie wyrazów o potęgach wyższych niż jedność i wyrażenie zaburzonej macierzy stanu dla stanu zaburzonego za pomocą sumy zaburzonej macierzy układu dla stanu nominalnego (znanego) oraz iloczynu macierzy zaburzenia różnicowego i odchylenia od stanu nominalnego w następujący sposób:

$$\mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta(k)) = \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}(k)) + \Delta_{\Delta r}(\mathbf{x}(k))(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)) \quad (5.62)$$

gdzie:

$$\Delta_{\Delta r}(\mathbf{x}(k)) = \frac{\mathbf{A}'_\Delta(\mathbf{x}(k))}{1!} + \frac{\mathbf{A}''_\Delta(\mathbf{x}(k))}{2!}(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)) + \dots \quad (5.63)$$

$$\mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(k)) + \Delta_\Delta(\mathbf{x}(k)) \quad (5.64)$$

Ostatecznie wszystkie zaburzone macierze układu można zapisać, uwzględniając zależności (5.62) i (5.64), w następującej, trójskładnikowej postaci addytywnej:

$$\mathbf{A}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta(k)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(k)) + \Delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(k)) + \Delta_{\mathbf{A}r}(\mathbf{x}(k))(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)) \quad (5.65)$$

$$\mathbf{B}_\Delta(\mathbf{v}_\Delta(k)) = \mathbf{B}(\mathbf{v}(k)) + \Delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}(k)) + \Delta_{\mathbf{B}r}(\mathbf{v}(k))(\mathbf{v}_\Delta(k) - \mathbf{v}(k)) \quad (5.66)$$

$$\mathbf{C}_\Delta(\mathbf{x}_\Delta(k)) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(k)) + \Delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}(k)) + \Delta_{\mathbf{C}r}(\mathbf{x}(k))(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)) \quad (5.67)$$

Model ten dla dowolnej, zaburzonej macierzy układu w zaburzonym stanie lub wejściu składa się z trzech następujących składowych:

a) macierzy nominalnej w stanie (lub wejściu) nominalnym: $\mathbf{A}(\mathbf{x}(k))$, $\mathbf{B}(\mathbf{v}(k))$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}(k))$;

b) zaburzenia addytywnego w stanie (lub wejściu) nominalnym, niezależnego od odchylenia stanu (lub wejścia) niepewnego i nominalnego: $\Delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(k))$, $\Delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}(k))$, $\Delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}(k))$;

c) zaburzenia różnicowego w stanie (lub wejściu) nominalnym, które reprezentuje zmianę zaburzenia stanu w odniesieniu do odchylenia różnicowej trajektorii stanu (lub wejścia) układów zaburzonego i nominalnego: $\Delta_{\mathbf{A}r}(\mathbf{x}(k))$, $\Delta_{\mathbf{B}r}(\mathbf{v}(k))$, $\Delta_{\mathbf{C}r}(\mathbf{x}(k))$.

Na ogół nie jest wymagana znajomość dokładnych wartości macierzy zaburzeń addytywnych $\Delta_{\mathbf{A}}$, $\Delta_{\mathbf{B}}$, $\Delta_{\mathbf{C}}$ oraz różnicowych $\Delta_{\mathbf{A}r}$, $\Delta_{\mathbf{B}r}$, $\Delta_{\mathbf{C}r}$, ale wystarczy jedynie znajomość ich oszacowań, odpowiednio $\delta_{\mathbf{A}}$, $\delta_{\mathbf{B}}$, $\delta_{\mathbf{C}}$, $\delta_{\mathbf{A}r}$, $\delta_{\mathbf{B}r}$, $\delta_{\mathbf{C}r}$. W takim wypadku muszą być spełnione następujące warunki:

a) dla macierzy \mathbf{A} :

$$\|\Delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(k))\| \leq \delta_{\mathbf{A}} < \infty \quad (5.68)$$

$$\|\Delta_{\mathbf{A}r}(\mathbf{x}(k))\| \leq \delta_{\mathbf{A}r} < \infty \quad (5.69)$$

gdzie:

$$k = k_0, \dots, k_0 + N - 1,$$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}(k)) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k},$$

$$\Delta_{\mathbf{A}r}(\mathbf{x}(k)) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k};$$

b) dla macierzy \mathbf{B} :

$$\|\Delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}(k))\| \leq \delta_{\mathbf{B}} < \infty \quad (5.70)$$

$$\|\Delta_{\mathbf{B}r}(\mathbf{v}(k))\| \leq \delta_{\mathbf{B}r} < \infty \quad (5.71)$$

gdzie:

$$k = k_0, \dots, k_0 + N - 1,$$

$$\Delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}(k)) \in \mathbb{R}^{n_k \times m_k},$$

$$\Delta_{\mathbf{B}r}(\mathbf{v}(k)) \in \mathbb{R}^{n_k \times m_k};$$

c) dla macierzy \mathbf{C} :

$$\|\Delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}(k))\| \leq \delta_{\mathbf{C}} < \infty \quad (5.72)$$

$$\|\Delta_{\mathbf{C}r}(\mathbf{x}(k))\| \leq \delta_{\mathbf{C}r} < \infty \quad (5.73)$$

gdzie:

$$k = k_0, \dots, k_0 + N - 1,$$

$$\Delta_C(\mathbf{x}(k)) \in \mathbb{R}^{p_k \times n_k},$$

$$\Delta_{C_r}(\mathbf{x}(k)) \in \mathbb{R}^{p_k \times n_k}.$$

5.2.2. Szacowanie norm zaburzeń

Przestrzeń wszystkich dopuszczalnych stanów układu można podzielić na zbiory podprzestrzeni bądź klastrów odcinkami liniowych [19], [75], [262], [303]. Medianę stanu każdej podprzestrzeni można wykorzystać jako punkt jej linearyzacji. Dynamikę układu zawartą w macierzach stanu, wejścia i wyjścia można zatem zidentyfikować lokalnie w otoczeniu poszczególnych punktów pracy z założeniem, że punkt pracy nie podlega zmianom w trakcie identyfikacji. Zaburzenia addytywne można wówczas zapisać następująco:

$$\Delta^a(\mathbf{x}) = \left\{ \delta_{ij}^a(x_j) : \delta_{ij}^a = \max \left(\left| a_{ij}^\Delta(x_j) \right| - \left| a_{ij}^n(x_j) \right| \right) \right\} \quad (5.74)$$

$$\Delta^b(\mathbf{u}) = \left\{ \delta_{ij}^b(u_j) : \delta_{ij}^b = \max \left(\left| b_{ij}^\Delta(u_j) \right| - \left| b_{ij}^n(u_j) \right| \right) \right\} \quad (5.75)$$

$$\Delta^c(\mathbf{x}) = \left\{ \delta_{ij}^c(x_j) : \delta_{ij}^c = \max \left(\left| c_{ij}^\Delta(x_j) \right| - \left| c_{ij}^n(x_j) \right| \right) \right\} \quad (5.76)$$

Indeks n oznacza wartość nominalną współczynnika macierzy o współrzędnych i, j . Równania (5.74)–(5.76) zastosowane do macierzy pozwalają oszacować zaburzenia addytywne $\delta_A, \delta_B, \delta_C$, określone równaniami (5.68), (5.70), (5.72):

$$\delta^A(\mathbf{x}) = \|\Delta^a(\mathbf{x})\| \approx \max_{\delta_{ij}^A} (\|\Delta_A(\mathbf{x})\|) \quad (5.77)$$

$$\delta_A = \max_{\mathbf{x}} \delta^A(\mathbf{x}) \quad (5.78)$$

Podobne zależności zachodzą dla oszacowań δ_B, δ_C . Estymaty zaburzeń różnicowych $\delta_{Ar}, \delta_{Br}, \delta_{Cr}$ można wyznaczyć na podstawie różnic między macierzami nominalnymi oraz oszacowań zaburzeń dla różnych punktów pracy. Do estymacji norm zaburzeń różnicowych można wykorzystać następujące relacje:

$$\delta_{Ar} = \max_{i,j,i \neq j} \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_j)\| + |\delta^A(\mathbf{x}_i) - \delta^A(\mathbf{x}_j)|}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (5.79)$$

$$\delta_{Br} = \max_{i,j,i \neq j} \frac{\|\mathbf{B}(\mathbf{v}_i) - \mathbf{B}(\mathbf{v}_j)\| + |\delta^B(\mathbf{v}_i) - \delta^B(\mathbf{v}_j)|}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|} \quad (5.80)$$

$$\delta_{Cr} = \max_{i,j,i \neq j} \frac{\|\mathbf{C}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{C}(\mathbf{x}_j)\| + |\delta^C(\mathbf{x}_i) - \delta^C(\mathbf{x}_j)|}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (5.81)$$

5.2.3. Układ sterowania

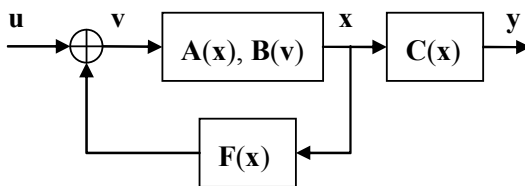
W wielu przypadkach układ sterowania można opisać za pomocą liniowego bądź nieliniowego regulatora stanu lub wyjścia układu. W przypadku liniowym jest on reprezentowany przez wektor wzmocnień, a nieliniowym mogą to być funkcje zależne od stanu lub wyjścia. Za ich pomocą możliwe jest opisanie np. regulatora z logiką rozmytą lub kompensacja nieliniowości przez sprzężenie od stanu.

Ogólny opis obejmujący różne typy regulatorów można sformułować w postaci wektorowego, nieliniowego operatora sprzężenia zwrotnego od stanu $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, pokazanego schematycznie na rysunku 5.9. Funkcja sprzężenia zwrotnego \mathbf{F} może opisywać zarówno liniowe sprzężenie zwrotne ze stałym wektorem wzmocnień, jak i regulator nieliniowy z zależnym od stanu sprzężeniem zwrotnym $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Dostęp do wszystkich zmiennych stanu układu w dowolnej chwili nie zawsze jest możliwy. Jeżeli pewne zmienne stanu są niedostępne, mogą być albo estymowane za pomocą estymatora stanu, albo wyłączone z pętli sprzężenia zwrotnego przez podstawienie w odpowiednich współrzędnych wektora sprzężenia zwrotnego $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ wartości zero. Zamiana sprzężenia zwrotnego od stanu na sprzężenie zwrotne od wyjścia jest możliwa przez włączenie do pętli sprzężenia zwrotnego wyjściowej macierzy $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, tj. zastosowanie podstawienia:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{F}_y(\mathbf{C}(\mathbf{x}(k))).$$

Implementacja praktyczna wymaga jedynie znajomości funkcji $\mathbf{F}_y(\mathbf{y})$. Jest oczywiste, że w przypadku pominięcia części zmiennych stanu bądź zastosowania wyłącznie sprzężenia zwrotnego od wyjścia skuteczność regulatora może być ogólnie gorsza.



Rysunek 5.9. Układ sterowania w pętli sprzężenia zwrotnego

Sygnal podawany na wejściu obiektu w pętli sprzężenia zwrotnego od stanu można zapisać następująco:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) \quad (5.82)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}(k) \in \mathbb{R}^{m_k \times p_k},$$

$$k = k_0, \dots, k_0 + N - 1.$$

Po podstawieniu zależności (5.82) do równania (5.56) otrzymuje się model układu w sprzężeniu zwrotnym w następującej postaci:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{B}(\mathbf{v}(k))\mathbf{F}(\mathbf{x}(k)))\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{v}(k))\mathbf{u}(k) \quad (5.83)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) \quad (5.84)$$

gdzie $\mathbf{v}(k)$ – sterowanie dane równaniem (5.82).

Układ (5.83)–(5.84) jest asymptotycznie sterowalny do stanu zerowego, jeżeli para macierzy (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest stabilizowana, a układ – odwracalny [2]. Układ $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{T}}_1 \hat{\mathbf{v}}$ jest odwracalny, jeżeli istnieje taki układ $\hat{\mathbf{T}}_2$, że po połączeniu kaskadowym układów $\hat{\mathbf{T}}_1, \hat{\mathbf{T}}_2$ spełniona jest zależność $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{T}}_2 \hat{\mathbf{T}}_1 \hat{\mathbf{v}}$.

5.2.4. Wskaźnik kosztu

Sterowanie optymalne w układzie niepewnym można wyznaczyć na podstawie minimalizacji wskaźnika kosztu, definiowanego następująco:

$$\tilde{J} = \max_{\hat{\mathbf{v}}} \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}_r\| \quad (5.85)$$

Reprezentuje on maksymalną normę odchylenia trajektorii układu niepewnego względem trajektorii odniesienia. Stosując nierówność trójkąta dla norm, zależność (5.83) można przekształcić do następującej postaci:

$$\max_{\hat{\mathbf{v}}} \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}_r\| = \max_{\hat{\mathbf{v}}} \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_r\| \leq \max_{\hat{\mathbf{v}}} \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}\| + \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_r\| \quad (5.86)$$

Funkcjonał (5.86) można zatem zapisać w następującej, zmodyfikowanej postaci:

$$J = \max_{\hat{\mathbf{v}}} \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}\| + \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_r\| \geq \tilde{J} \quad (5.87)$$

Normę odchylenia trajektorii nominalnej $\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_r\|$ można wyznaczyć na drodze symulacji układu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego, a maksymalną normę odchylenia trajektorii niepewnej $\max \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}\|$ – jedynie oszacować.

Problem optymalizacji można sformułować następująco: dla danej struktury i parametrów układu, ustalonej trajektorii odniesienia $\hat{\mathbf{y}}_r$, zbioru ograniczonych wejść $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ oraz ustalonej postaci funkcji sprzężenia zwrotnego $\mathbf{F}(\mathbf{x}, a_1, \dots, a_M)$ znaleźć wartości a_1, \dots, a_M , które zminimalizują wskaźnik jakości J . Z uwagi na konserwatywność oszacowań odchylenia trajektorii niepewnych, celowe może być wprowadzenie dodatkowego współczynnika wagowego α w funkcjonał kosztu w następujący sposób:

$$J_{\alpha} = \max_{\hat{\mathbf{v}}} \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}\| + \alpha \|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_r\| \quad (5.88)$$

5.2.5. Szacowanie odchylenia wyjścia i stanu układu

Dowolny układ liniowy, niestacjonarny, określony w skończonym horyzoncie czasowym, można zapisać za pomocą operatora przejścia [48], [68], [83], [196], [218], a układ nieliniowy (5.56)–(5.57) – za pomocą podobnej notacji tylko wówczas, gdy ustalone są warunki początkowe i trajektoria wejścia układu. W takiej sytuacji operator przejścia układu ze sprzężeniem zwrotnym można wyznaczyć dla zastępczych macierzy układu w sprzężeniu zwrotnym $\mathbf{A}^F(k)$, $\mathbf{B}^F(k)$, $\mathbf{C}^F(k)$ za pomocą operatorów (1.42)–(1.45), (1.59)–(1.60), zdefiniowanych w rozdziałach 1.5 i 1.6, stosując podstawienie:

$$\mathbf{A}^F(k) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{B}(\mathbf{v}(k))\mathbf{F}(\mathbf{x}(k)) \quad (5.89)$$

$$\mathbf{B}^F(k) = \mathbf{B}(\mathbf{u}(k)) \quad (5.90)$$

$$\mathbf{C}^F(k) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(k)) \quad (5.91)$$

Twierdzenie 5.3. Stan i wyjście zaburzonego układu nieliniowego, opisanego równaniami (5.56)–(5.57), z funkcją sprzężenia od stanu, daną zależnością (5.82), dla ustalonego wejścia oraz stanu początkowego można wyznaczyć z następujących zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\Delta(k) = & \mathbf{x}(k) + \mathbf{L}^F(\Delta_A(\mathbf{x})\mathbf{x}_\Delta)(k) + \mathbf{L}^F(\Delta_{A_r}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_\Delta - \mathbf{x}))(k) \\ & + \mathbf{L}^F(\Delta_B(\mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{x}_\Delta)\mathbf{x}_\Delta))(k) + \mathbf{L}^F(\Delta_{B_r}(\mathbf{v})(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\Delta)\mathbf{x}_\Delta - \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x}))(k) \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\mathbf{y}_\Delta(k) = \mathbf{C}^F(k)\mathbf{x}_\Delta(k) + \Delta_C(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}_\Delta(k) + \Delta_{C_r}(\mathbf{x}(k))(\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)) \quad (5.93)$$

Dowód. Zależności (5.92)–(5.93) można udowodnić, korzystając z zasady indukcji matematycznej. Dla $k = 2$ równania stanu (5.92) i (5.93) ze sprzężeniem zwrotnym (5.82) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\Delta(2) = & \mathbf{A}^F(1)\left(\left(\mathbf{A}^F(0) + \Delta_A(0) + \Delta_B(0)\mathbf{F}(0)\right)\mathbf{x}(0) + \left(\mathbf{B}^F(0) + \Delta_B(0)\right)\mathbf{u}(0)\right) + \\ & + \left(\Delta_A(1) + \Delta_{A_r}(1)(\mathbf{x}_\Delta(1) - \mathbf{x}(1)) + \Delta_B(1)\mathbf{F}(1) + \Delta_{B_r}(1)(\mathbf{F}_\Delta(1)\mathbf{x}_\Delta(1) - \mathbf{F}(1)\mathbf{x}(1))\mathbf{F}_\Delta(1)\right)\mathbf{x}_\Delta(1) + \\ & + \left(\mathbf{B}^F(1) + \Delta_B(1) + \Delta_{B_r}(1)(\mathbf{F}_\Delta(1)\mathbf{x}_\Delta(1) - \mathbf{F}(1)\mathbf{x}(1))\right)\mathbf{u}(1). \end{aligned}$$

Podstawiając równania (5.92) i (5.82) do zależności (5.83) dla $k + 1$, otrzymuje się

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\Delta(k+1) = & \mathbf{B}_\Delta^F(k)\mathbf{u}(k) + \\ & + \left(\begin{array}{l} \mathbf{A}^F(k) + \Delta_A(k) \\ + \Delta_B(k)\mathbf{F}(k) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \left(\mathbf{L}^F\mathbf{B}^F\mathbf{u} \right)(k) + \mathbf{L}^F(\Delta_A\mathbf{x}_\Delta)(k) + \mathbf{L}^F(\Delta_{A_r}(\mathbf{x}_\Delta - \mathbf{x}))(k) \\ + \mathbf{L}^F(\Delta_B(\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{x}_\Delta))(k) + \mathbf{L}^F(\Delta_{B_r}(\mathbf{F}\mathbf{x}_\Delta - \mathbf{F}\mathbf{x}))(k) + (\mathbf{N}^F\mathbf{x}_0)(k) \end{array} \right), \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\Delta(k+1) = & (\mathbf{N}^F \mathbf{x}_0)(k+1) + (\mathbf{L}^F \mathbf{B}^F \mathbf{u})(k+1) + \mathbf{L}^F (\Delta_A \mathbf{x}_\Delta)(k+1) + \mathbf{L}^F (\Delta_{Ar} (\mathbf{x}_\Delta - \mathbf{x}))(k+1) + \\ & + \mathbf{L}^F (\Delta_B (\mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{x}_\Delta))(k+1) + \mathbf{L}^F (\Delta_{Br} (\mathbf{F} \mathbf{x}_\Delta - \mathbf{F} \mathbf{x}))(k+1). \end{aligned}$$

Dalsze przekształcenia są proste, lecz pracochłonne. Powyżej zaprezentowano jedynie szkic dowodu. Twierdzenie 5.3 wykorzystano do wyznaczania oszacowania maksymalnego odchylenia trajektorii wyjścia $\max \|\hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}}\|$.

Twierdzenie 5.4. Dla dowolnych zaburzeń addytywnych Δ_A , Δ_B , Δ_C i różnicowych Δ_{Ar} , Δ_{Br} , Δ_{Cr} , spełniających warunki (5.68)–(5.73) i następujące nierówności:

$$(\delta_{Aoz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\|) < \|\hat{\mathbf{L}}^F\|^{-1} \quad (5.94)$$

$$(\delta_{Aoz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{ab}) < \|\hat{\mathbf{L}}^F\|^{-1} \quad (5.95)$$

normy odchylenia trajektorii stanu $\|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\|$ i wyjścia $\|\hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}}\|$ można oszacować następująco:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \frac{\|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_{a0z} + \delta_{Aoz} \|\hat{\mathbf{x}}\|)}{1 - \|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_{Aoz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{ab})} \quad (5.96)$$

$$\|\hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}}\| \leq \delta_C \|\hat{\mathbf{x}}\| + \frac{(\|\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{L}}^F\| + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_C + \delta_{Cr})) (\delta_{a0z} + \delta_{Aoz} \|\hat{\mathbf{x}}\|)}{1 - \|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_{Aoz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{ab})} \quad (5.97)$$

gdzie:

$$\delta_{Aoz} = \delta_A + \delta_B \|\hat{\mathbf{F}}\| \quad (5.98)$$

$$\delta_{Arz} = \delta_{Ar} + \delta_{Br} \|\hat{\mathbf{F}}\|^2 \quad (5.99)$$

$$\delta_{a0z} = \delta_B \|\hat{\mathbf{v}}\| \quad (5.100)$$

$$\delta_{ab} = \delta_{Br} \|\hat{\mathbf{v}}\| \|\hat{\mathbf{F}}\| \quad (5.101)$$

Dowód. W przestrzeni liniowej ze zdefiniowaną normą spełniona jest nierówność trójkąta, zatem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_\Delta(k) - \mathbf{x}(k)\| \leq & \|\mathbf{L}^F (\Delta_B (\mathbf{u})(\mathbf{v}_\Delta + \mathbf{F}(\mathbf{x}_\Delta) \mathbf{x}_\Delta))(k)\| + \|\hat{\mathbf{L}}^F (\Delta_{Ar} (\mathbf{x})(\mathbf{x}_\Delta - \mathbf{x}) \mathbf{x}_\Delta)(k)\| + \\ & + \|\hat{\mathbf{L}}^F (\Delta_A (\mathbf{x}) \mathbf{x}_\Delta)(k)\| + \\ & + \|\hat{\mathbf{L}}^F (\Delta_{Br} (\mathbf{u})(\mathbf{F}(\mathbf{x}_\Delta) \mathbf{x}_\Delta - \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x})(\mathbf{v}_\Delta + \mathbf{F}(\mathbf{x}_\Delta) \mathbf{x}_\Delta))(k)\|, \end{aligned}$$

a następnie

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| \leq & \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_A \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_{Ar} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| + \\ & + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_B \left[\|\hat{\mathbf{v}}_\Delta\| + \|\hat{\mathbf{F}}\| \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| \right] + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_{Br} \|\hat{\mathbf{F}}\| \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| \|\hat{\mathbf{v}}_\Delta + \mathbf{F}(\mathbf{x}_\Delta) \mathbf{x}_\Delta\| \end{aligned} \quad (5.102)$$

Zakładając, że zależności (5.98)–(5.101) są spełnione, w uproszczeniu można je zapisać w następującej postaci:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| (\delta_{Axz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\|) + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_{ab} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{aoz}) \quad (5.103)$$

Normę stanu zaburzonego można oszacować po przekształceniu zależności (5.92) i ponownym zastosowaniu nierówności trójkąta:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| & \leq \|\hat{\mathbf{x}}\| + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \left[\delta_{Axz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| + \delta_{ab} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{aoz} \right], \\ \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| \left[1 - (\delta_{Axz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\|) \right] & \leq \|\hat{\mathbf{x}}\| + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \left[\delta_{ab} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{aoz} \right], \\ \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta\| & \leq \frac{\|\hat{\mathbf{x}}\| + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \left[\delta_{ab} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{aoz} \right]}{1 - (\delta_{Axz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\|)} \end{aligned} \quad (5.104)$$

Podstawiając nierówność (5.104) do (5.103), otrzymuje się następującą nierówność:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| - \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_{Axz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| - \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| - \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}\| \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| - \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \\ \leq \|\hat{\mathbf{L}}^F\| \|\hat{\mathbf{x}}\| \delta_{Axz} + \|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_{ab} \|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{aoz}) \end{aligned}$$

Dla małych wartości normy odchylenia trajektorii stanu $\|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\|$ można pominąć czynniki wyższych rzędów i nierówność zapisać w następującej formie:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}\| \left[1 - \|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_{Axz} + \delta_{Arz} \|\hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{ab}) \right] \leq \|\hat{\mathbf{L}}^F\| (\delta_{Axz} \|\hat{\mathbf{x}}\| + \delta_{aoz}) \quad (5.105)$$

co jest równoważne z zależnością (5.96). Odchylenie trajektorii wyjścia można zatem zapisać:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}} & = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}}_\Delta + \hat{\Delta}_{Cr}(\hat{\mathbf{x}}) (\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}}_\Delta + \hat{\Delta}_C(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} \\ & = \left(\hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\Delta}_{Cr}(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}}_\Delta \right) (\hat{\mathbf{x}}_\Delta - \hat{\mathbf{x}}) + \hat{\Delta}_C(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}}_\Delta. \end{aligned}$$

Normę odchylenia trajektorii wyjścia można oszacować z zależności:

$$\|\hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}}\| \leq (\|\mathbf{C}\| + \delta_{Cr} \|\mathbf{x}_\Delta\|) \|\mathbf{x}_\Delta - \mathbf{x}\| + \delta_C \|\mathbf{x}_\Delta\| \quad (5.106)$$

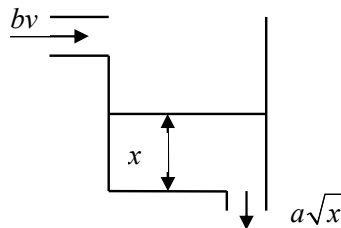
Nierówność (5.97) można udowodnić przez przekształcenie zależności (5.93), (5.91) i podstawienie normy odchylenia stanu z nierówności (5.96), co kończy dowód. \square

5.2.6. Przykład obliczeniowy

W podrozdziale tym rozważono model zbiornika wodnego z wymuszonym dopływem sterowanym zaworem dwustawnym oraz odpływem grawitacyjnym. Układ ten opisano następującym, zdyskretyzowanym modelem nieliniowym:

$$x(k+1) = x(k) - \frac{aT_p}{A} \sqrt{x(k)} + \frac{bT_p}{A} v(k), \quad y(k) = x(k) \quad (5.107)$$

Równanie to opisuje poziom wody w następnej chwili $x(k+1)$ w funkcji bieżącego poziomu wody $x(k)$ oraz różnicy między dopływem $bT_p v(k)$ a odpływem $aT_p \sqrt{x(k)}$ wody ze zbiornika. Parametr A jest polem powierzchni podstawy zbiornika, parametr $b \in [b_-, b_+]$ – stałą niepewną związaną z dopływem do zbiornika, $a \in [a_-, a_+]$ – stałą niepewną związaną z wypływem ze zbiornika, wejście $v(k)$ – zmienną logiczną $\{0,1\}$, która otwiera $\{1\}$ bądź zamyka $\{0\}$ zawór wejściowy, T_p – okresem dyskretyzacji. Schemat poglądowy układu przedstawiono na rysunku 5.10.



Rysunek 5.10. Schemat zbiornika wodnego

Nieliniowy model układu można zapisać w postaci następujących zależności od stanu i wejścia macierzy układu (5.58)–(5.59):

$$\mathbf{A}(x(k)) = \begin{cases} 1 - \frac{aT_p}{A} \frac{\sqrt{x(k)}}{x(k)} & \text{dla } x(k) \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x(k) = 0 \end{cases} \quad (5.108)$$

$$\mathbf{B}(v(k)) = \frac{bT_p}{A} \quad (5.109)$$

$$\mathbf{C}(x(k)) = 1 \quad (5.110)$$

Poziom wody może być stabilizowany za pomocą prostego regulatora dwustawnego z histerezą, którego zadaniem jest otwieranie bądź zamykanie zaworu wejściowego w zależności od poziomu cieczy. Jeżeli poziom ten spadnie poniżej wartości $L_n - \Delta L$, zawór jest otwierany. Jeżeli poziom ten wzrośnie powyżej wartości $L_n + \Delta L$ – zamykany. W pozostałych przypadkach – zawór pozostaje bez zmian. Parametr L_n jest wartością środkową pętli histerezy regulatora, zazwyczaj równą wyjściowej wartości odniesienia

$y_r(k)$, natomiast ΔL – jednostronną szerokością pętli histerezy. Prawo regulacji można zapisać matematycznie następująco:

$$v_i = \mathbf{F}\mathbf{x}_i = \begin{cases} 1, & x_i < L_n - \Delta L \vee (x_i < L_n + \Delta L \wedge v_{i-1} = 1) \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad (5.111)$$

Większa wartość ΔL zmniejsza częstotliwość przełączeń zaworu. Normę wektorowej funkcji sprzężenia zwrotnego \mathbf{F} można oszacować z zależności (5.111) w następujący sposób:

$$\|\mathbf{F}\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{F}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{x \neq 0} \frac{1}{|x|} \approx \frac{1}{\min_k |x(k)|} \quad (5.112)$$

Rozkład układu do postaci (5.65)–(5.67) można przeprowadzić, korzystając z następującego podstawienia:

$$\mathbf{A}(x(k)) = 1 - \frac{a_n T_p}{A\sqrt{x(k)}} \quad (5.113)$$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(x(k)) = -\frac{(a - a_n)T_p}{A\sqrt{x(k)}} \quad (5.114)$$

$$\Delta_{\mathbf{A}r}(x(k)) = \frac{a_n T_p}{2Ax(k)\sqrt{x(k)}} \quad (5.115)$$

$$\mathbf{B}(v(k)) = \frac{b_n T_p}{A} \quad (5.116)$$

$$\Delta_{\mathbf{B}}(v(k)) = \frac{(b - b_n)T_p}{A} \quad (5.117)$$

$$\Delta_{\mathbf{B}r}(v(k)) = 0 \quad (5.118)$$

$$\mathbf{C}(x(k)) = 1 \quad (5.119)$$

$$\Delta_{\mathbf{C}}(x(k)) = 0 \quad (5.120)$$

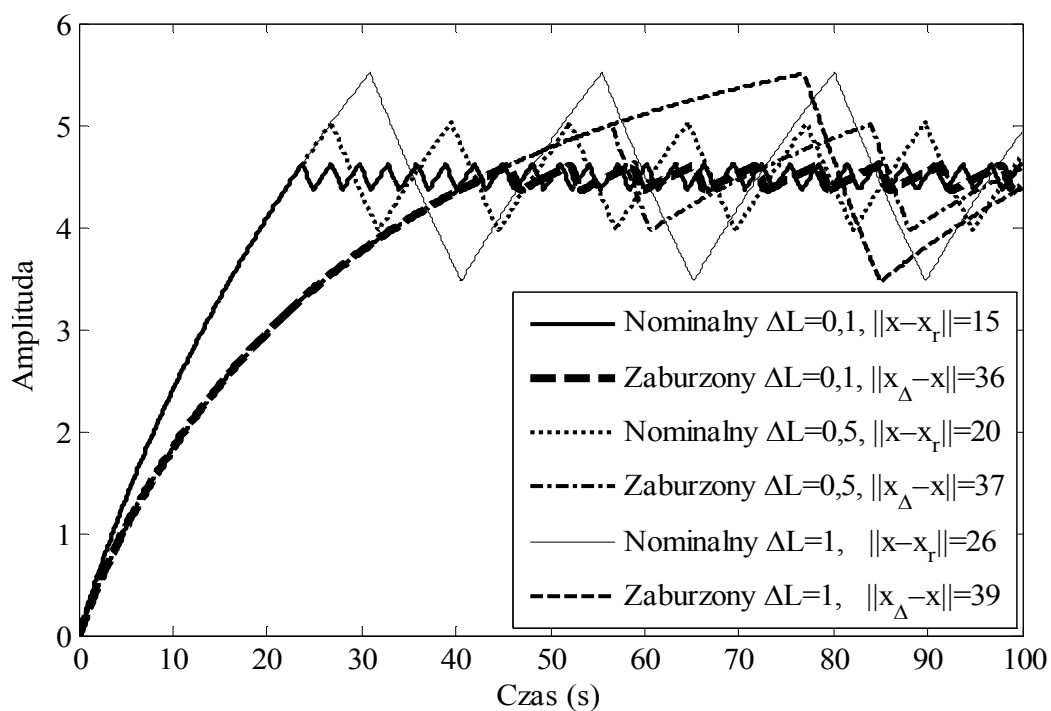
$$\Delta_{\mathbf{C}r}(x(k)) = 0 \quad (5.121)$$

gdzie:

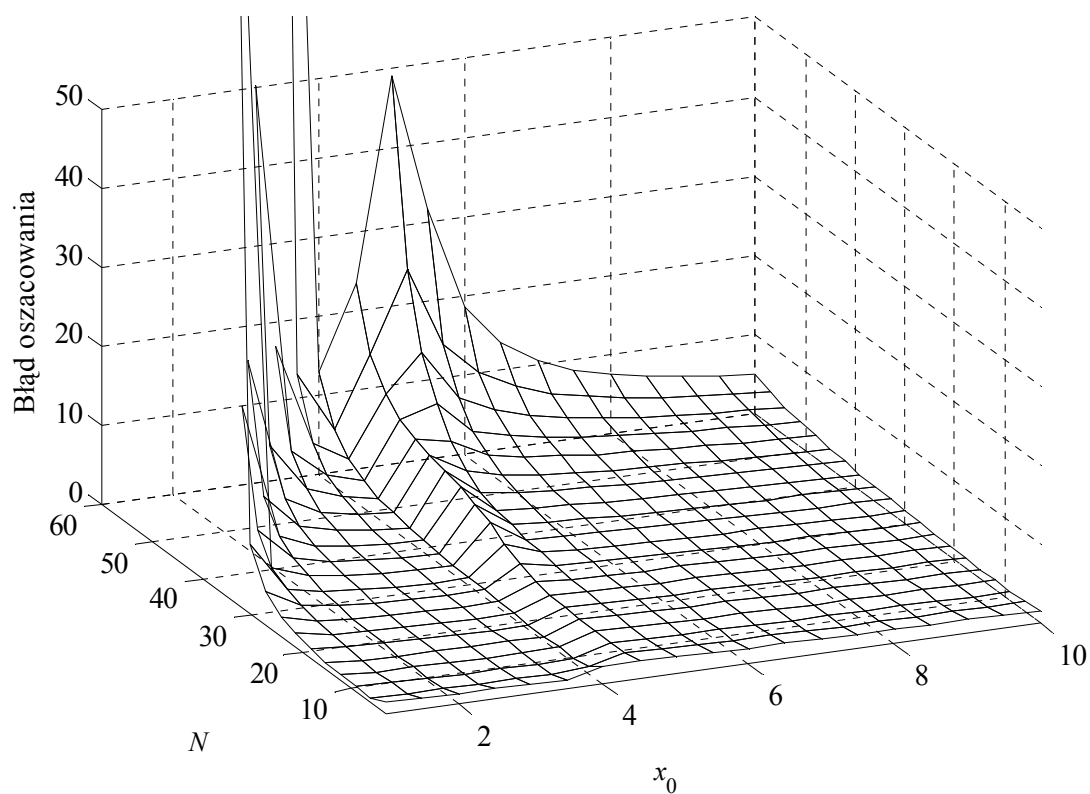
$$a_n = \frac{a_+ + a_-}{2},$$

$$b_n = \frac{b_+ + b_-}{2}.$$

Na potrzeby symulacji numerycznej przyjęto następujące wartości parametrów: $A = 50$, $a_- = 4$, $a_+ = 6$, $b_- = 15$, $b_+ = 20$, $T_p = 0,1$ s, $y_r(k) = x_r(k) = L_n = 4,5$, $\Delta L = 0,5$. Wyznaczone wartości oszacowań i norm zebrano w tabeli 5.1.



Rysunek 5.11. Odpowiedzi czasowe układu i wyznaczone wartości norm dla układu zbiornika wodnego



Rysunek 5.12. Błąd względny oszacowań w zależności od długości horyzontu czasowego oraz warunku początkowego dla układu zbiorników wodnych

Tabela 5.1. Wyznaczone oszacowania oraz normy dla układu zbiornika wodnego

$\delta_A \approx 0,002 \left(\min_k(x(k)) \right)^{-0,5}$	$\delta_{Axz} \approx 0,002 \left(\min_k(x(k)) \right)^{-0,5} + 0,01 \left(\min_k(x(k)) \right)^{-1}$
$\delta_{Ar} \approx 0,005 \left(\min_k(x(k)) \right)^{-1,5}$	$\delta_{Arz} \approx 0,005 \left(\min_k(x(k)) \right)^{-1,5}$
$\ \mathbf{F}\ \approx \left(\min_k(x(k)) \right)^{-1}$	$\ \mathbf{L}^F\ \approx 0,636N$
$\ \mathbf{C}\ = 1$	$\ \hat{\mathbf{x}}\ \approx \sqrt{N} \max_k x(k) $
$\delta_B = 0,01, \delta_{Br} = 0$	$\ \mathbf{u}\ = 0$
$\delta_C = 0, \delta_{Cr} = 0$	$\delta_{a0z} = 0, \delta_{ab} = 0$

Źródło: opracowanie własne.

Odpowiedzi czasowe układu nominalnego i zaburzonego dla $N = 1000$, $x_0 = 0$, $L_n = 4,5$ oraz trzech różnych wartości ΔL przedstawiono na rysunku 5.11. Wyznaczone wartości normy odchylenia trajektorii nominalnej wyjścia $\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_r\|$ oraz normy odchylenia trajektorii zaburzonej $\|\hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}}\|$ podano w legendzie do rysunku 5.11. Funkcjonał (5.88) z wartością wagi $\alpha = 1$ osiąga minimum dla $\Delta L \rightarrow 0$.

Analizę dokładności wyznaczonych oszacowań można poprzeć na następującej wartości względnego błędu oszacowań:

$$\varepsilon = \frac{\|\hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}}\|_{\text{oszacowanie}}}{\|\hat{\mathbf{y}}_\Delta - \hat{\mathbf{y}}\|_{\text{symulacja}}} - 1 \quad (5.122)$$

Na rysunku 5.12 przedstawiono zależność względnego błędu oszacowań w funkcji długości horyzontu czasowego od warunku początkowego x_0 . Wartość minimalna $\varepsilon = 0,45$ występuje dla $x_0 = 3,5$ i $N = 9$. Mediana błędu względnego z całego wykresu jest równa w przybliżeniu $\varepsilon_{\text{med.}} = 2$. Dla dłuższych horyzontów czasowych warunek (5.95) nie jest spełniony i równanie (5.97) nie może być wykorzystane do szacowania normy odchylenia trajektorii układu zaburzonego.

Wnioski

Uwzględnienie zmienności parametrów i struktury liniowego układu dynamicznego w funkcji czasu wymaga posłużenia się modelem niestacjonarnym układu dynamicznego. W takim modelu możliwe jest zastosowanie metod analitycznych. Umożliwia on jednak zdecydowanie wierniejsze odzwierciedlenie złożonej natury zjawisk i układów fizycznych niż powszechnie stosowany model stacjonarny. Modele liniowe, zarówno stacjonarne jak i niestacjonarne, są jedynie pewnym przybliżeniem rzeczywistości. Pozwalają jednak na wykorzystanie w analizie i syntezy sterowania efektywnych narzędzi matematycznych. W pewnej, ograniczonej klasie układów wystarczająca jest identyfikacja bądź linearyzacja

układu nieliniowego w otoczeniu punktu pracy do modelu liniowego stacjonarnego. Jeżeli model stacjonarny liniowy nie jest adekwatną reprezentacją układu rzeczywistego, jedną z możliwości jest posłużenie się modelem niestacjonarnym. W przypadku układów nieliniowych znane i stosowane są metody wykorzystujące algorytm iteracyjny z modelem linearyzowanym wzdłuż prognozowanej trajektorii stanu i wejścia. Do wyznaczenia sterowania stosuje się przybliżone modele układu w postaci niestacjonarnej liniowej, uzyskiwane sukcesywnie w kolejnych iteracjach algorytmu.

W drugiej części rozdziału przedstawiono metodę umożliwiającą szacowanie normy odchylenia trajektorii wyjścia dla pewnej klasy niepewnych, nieliniowych układów dyskretnych opartych na wprowadzonej w pierwszym rozdziale notacji operatorowej. Metoda ta może być alternatywą dla numerycznych metod poszukiwania maksymalnej wartości normy odchylenia trajektorii zaburzonej układu $\max \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}\|$. W drugim przypadku proces ten jest jednak złożony i wymaga dużych mocy obliczeniowych z uwagi na dużą liczbę parametrów występujących w procesie optymalizacji i jednoczesny brak gwarancji znalezienia maksimum globalnego.

Proponowaną metodę można zastosować do poszukiwania optymalnego sterowania odpornego z użyciem procedury iteracyjnej, polegającej na poszukiwaniu sterowania zapewniającego minimalizację odchylenia trajektorii nominalnej od trajektorii odniesienia $\|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_r\|$ oraz maksymalnej normy odchylenia trajektorii zaburzonej $\max \|\hat{\mathbf{y}}_{\Delta} - \hat{\mathbf{y}}\|$.

ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI

W pracy podjęto próbę kompleksowego omówienia zagadnień związanych z analizą dyskretnych, niestacjonarnych układów liniowych, określonych na skończonym horyzoncie czasowym. Zaproponowano metody pozwalające na rozszerzenie narzędzi analizy operatora przejścia liniowego i dyskretnego układu niestacjonarnego określonego na skończonym horyzoncie czasowym. Szczególną uwagę zwrócono na możliwości wykorzystania uproszczonych, częstotliwościowych narzędzi analizy, zarówno do graficznego opisu własności układu, jak i określania stopnia niestacjonarności układu. Łatwe do implementacji algorytmy umożliwiają praktyczne wykorzystanie rezultatów w analizie i syntezie układów dyskretnych, niepewnych, nieliniowych oraz filtrów o zmiennych w czasie współczynnikach.

W pierwszym rozdziale wprowadzono notację operatorową do opisu układów dyskretnych niestacjonarnych. Obejmuje ona definicje operatorów kolumnowych, sekwencji wymiarów, operatora przejścia układu, które służą do reprezentacji układów dyskretnych niestacjonarnych o zmiennej liczbie wejść i wyjść oraz rzędu układu. Przeprowadzono analizę najważniejszych własności operatora przejścia, zwłaszcza wpływu przyczynowości, nieprzyczynowości bądź antyprzyczynowości układu na jego postać. Wprowadzono operator przesunięcia czasowego, operatory diagonalne i dyskretne operatory ewolucyjne umożliwiające alternatywne wyznaczenie operatora przejścia układu oraz operatora odpowiedzi swobodnej układu niestacjonarnego. Ponadto sklasyfikowano układy dyskretne, niestacjonarne i porównano wprowadzoną notację operatorową do układów dyskretnych z rekurencyjnym modelem w przestrzeni stanu.

W drugim rozdziale omówiono metodę transformacji czasowo-częstotliwościowej dla układów niestacjonarnych o jednym wejściu i jednym wyjściu. Dokonano adaptacji takich definicji, jak dwuwymiarowa funkcja przejścia, funkcja modulująca, symbol Weyla oraz opartych na nich definicji funkcji rozrzutu. Zdefiniowano macierze transformacji, umożliwiające efektywne wyznaczanie powyższych funkcji dla układów dyskretnych na podstawie przekształceń macierzowych operatora przejścia układu określonego na skończonym horyzoncie czasowym. Ważnym, oryginalnym osiągnięciem autora jest opracowanie uproszczonej metody analizy częstotliwościowej układu niestacjonarnego opartej na rozkładzie według wartości osobliwych operatora przejścia układu oraz dyskretnej transformacji Fouriera i własności widma gęstości mocy. Metoda ta umożliwia aproksymację charakterystyk częstotliwościowych dla układów niestacjonarnych. Charakterystyki te są zbliżone z klasycznymi diagramami Bodego dla układów stacjonarnych dla długości

horyzontu czasowego analizy dążącej do nieskończoności. W praktyce, po odpowiednio dobranym okresie dyskretyzacji zadowalające rezultaty można otrzymać już dla horyzontu rzędu kilkuset kroków. Przeprowadzone badania symulacyjne, obejmujące układy niestacjonarne, układy o zmiennej strukturze, niestacjonarne filtry cyfrowe, potwierdziły przydatność proponowanej metody. Zdefiniowane narzędzia analizy częstotliwościowej dla układów dyskretnych niestacjonarnych pozwalają na uogólnienie przedstawionych w literaturze graficznych metod badania stabilności na układy stacjonarne liniowe.

W rozdziale trzecim skupiono się na wykorzystaniu zdefiniowanych narzędzi do praktycznych zagadnień analizy układów niestacjonarnych. Obejmują one określanie stopnia niestacjonarności układu bądź jego zmienności czasowo-częstotliwościowej. Zaadaptowano je do układów dyskretnych oraz omówiono własności dwuwymiarowej funkcji rozrzutu. Wprowadzono definicje trzech podstawowych wskaźników niestacjonarności, wykorzystujących własności rozkładu według wartości szczególnych i dyskretnej transformaty Fouriera operatora przejścia układu. Szczegółowo omówiono możliwości zastosowania wskaźnika niestacjonarności układu do ilościowej oceny wpływu efektów opóźnienia i gubienia informacji w rozproszonych systemach sterowania z komunikacją opartą na sieciach komputerowych.

Innym, ważnym obszarem zastosowań wprowadzonych narzędzi częstotliwościowych do układów niestacjonarnych jest analiza układów niepewnych. W czwartym rozdziale przytoczono definicje pojęcia niepewności i zaburzenia, omówiono źródła powstawania niepewności oraz metody wprowadzania ich do modelu matematycznego układu. Dla szczególnej, addytywnej postaci zaburzenia macierzy modelu w przestrzeni stanu dokonano transformacji do opisu w postaci operatora przejścia. Oszacowano zaburzenia operatora przejścia w funkcji operatorów układu nominalnego oraz macierzy modelu w przestrzeni stanu dla czterech postaci ograniczeń macierzowych zaburzenia. Na podstawie uzyskanych wyników sformułowano metodę szacowania górnego ograniczenia charakterystyki amplitudowej układu niepewnego dla zaburzenia addytywnego ograniczonego parametrycznie.

W piątym rozdziale wykorzystano wprowadzoną notację w układach niestacjonarnych do rozwiązania dwóch problemów z zakresu analizy i sterowania układami nieliniowymi. Pierwsze zagadnienie dotyczy określania zbieżności iteracyjnego algorytmu nieliniowego sterowania predykcyjnego dla modelu układu linearyzowanego wzdłuż prognozowanej trajektorii. W ramach tego zagadnienia przeprowadzono obszerną analizę problemu oraz sformułowano konieczny warunek zbieżności. Podano również wskazówki dotyczące rozkładu nieliniowej funkcji układu na zależne od czasu macierze układu, zapewniające możliwe szybkie wyznaczenie sterowania optymalnego. Rozważono również wykorzystanie modelu układu linearyzowanego wzdłuż prognozowanej trajektorii do szacowania maksymalnego odchylenia trajektorii wyjścia lub stanu niepewnego, dyskretnego układu nieliniowego. Do rozwiązania problemu wprowadzono trzyskładnikowy model addytywny zaburzenia. Uzupełnieniem rozważań teoretycznych są przykłady obliczeniowe dla zdyskretyzowanych układów nieliniowych.

Za główne osiągnięcie pracy autor uważa opracowanie metody do uproszczonej analizy liniowych, dyskretnych układów niestacjonarnych określonych na skończonym horyzoncie czasowym, pozwalających na rozszerzenie istniejących narzędzi analizy częstotliwościowej na układy niestacjonarne. Ważnym osiągnięciem jest również opracowanie wielu procedur w środowisku Matlab, umożliwiających praktyczne wykorzystanie wyników badań.

Znaczny postęp w metodach analizy i syntezy układów niestacjonarnych jest związany zarówno z możliwością wykorzystania otrzymanych wyników w analizie i syntezie sterowania układami nieliniowymi, jak i z dążeniem do tworzenia coraz dokładniejszych modeli liniowych układów i systemów, pozwalających uwzględnić w analizie i syntezie zjawiska niestacjonarne, obejmujące naturalną zmienność rzeczywistości w czasie. Niniejsza praca, dotycząca zagadnień uproszczonych metod analizy układów niestacjonarnych, wypełnia lukę między obszerną literaturą analizy liniowych układów stacjonarnych oraz niezbyt obszerną literaturą nieuproszczonej analizy układów niestacjonarnych. Dalsze badania powinny się koncentrować na opracowaniu szczegółowych metod dla określonych klas układów nieliniowych o rozłożonych parametrach.

LITERATURA

- [1] AKHIEZER N.L., GLAZMAN L.M.: *Theory of linear operators in Hilbert Space*, Vol. I, II. London, Pitman Publishing Ltd 1981.
- [2] ALBERTINI F., SONTAG E.D.: Further results on controllability properties of discrete-time nonlinear system. *Dynamics and Control*, 1994, Vol. 4, 235–253.
- [3] AMATO F., ARIOLA M., DORATO P.: Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances. *Automatica*, 2001, Vol. 37 (9), 1459–1463.
- [4] ANDERSON B.D.O.: Internal and external stability of linear time varying system. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1982, Vol. 20, 408–413.
- [5] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B.: Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time system. *SIAM J. Control and Optimization*, 1981, Vol. 19 (1), 20–32.
- [6] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B.: *Linear optimal control*. Prentice Hall. New Jersey, Englewood Cliffs 1971.
- [7] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B.: *Optimal filtering*. New Jersey. Prentice Hall 1979.
- [8] ANDERSSON L., RANTZER A.: Frequency-dependent error bounds for uncertain linear models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, Vol. 44 (11), 2094–2098.
- [9] ATHANS M., FALB P.L.: *Sterowanie optymalne. Wstęp do teorii i jej zastosowania*. Warszawa, WNT 1969.
- [10] BACIC M., CANNON M., KOUVARITAKIS B.: Constrained NMPC via state-space partitioning for input affine non-linear system. *Int. SIAM J. Control and Optimization*, 2003, Vol. 76 (15), 1516–1526.
- [11] BALL J.A., GOHBERG I., KAASHOEK M.A.: Nevanlinna-pick interpolation for time-varying input-output maps: the discrete case, time-variant systems and interpolation. W: *Operator Theory: Advances and Applications*. Red. I. Gohberg. Birkhauser 1992, Vol. 56, 1–51.
- [12] BARNETT S.: *Matrices in Control Theory*. 2nd ed. Florida, Krieger 1984.
- [13] BASAR T., BERNHARD P.: *H[infinity]-optimal control and related minimax design problems: A dynamic game approach*. Second ed. Boston, Birkhauser 1995.
- [14] BASEVILLE M.: Detection and diagnosis of changes in the eigenstructure of nonstationary multivariable system. *Automatica*, 1987, Vol. 23, 479–489.
- [15] BELITSKII G.R., LYUBICH YU.I.: *Matrix norms and their applications*. Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser 1988.
- [16] BELLO P.A.: Characterisation of randomly time-variant linear channel. *IEEE Transactions Comm. Syst.*, 1963, Vol. 11, 360–393.
- [17] BERTALLANFY L.VON: *Ogólna teoria systemów. Podstawy, rozwój, zastosowania*. Warszawa, PWN 1984.

- [18] BHAYA A., MOTA F.D.C.: Equivalence of stability concepts for discrete time-varying systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 1994, Vol. 4 (11/12), 725–740.
- [19] BIAŁAS A.: *Systemy dynamiczne przedziałowe*. Zeszyty Naukowe AGH, Automatyka, z. 41. Kraków 1987.
- [20] BIAŁASIEWICZ J.: *Falki i aproksymacje*. Warszawa, WNT 2004.
- [21] BILLINGS A., TSANG K.M.: Spectral analysis for non-linear systems. Part II: Interpretation of non-linear frequency response functions. *J. Mechanical Systems and Signal Processing*, 1989, Vol. 3 (4), 341–359.
- [22] BITTANTI M., COLANERI P.: Analysis of discrete-time linear periodic system. *Control and Dynamics System*, 1996, Vol. 78, New York, Academic Press.
- [23] BOGOLIUBOV N.N., MITROPOLSKY Y.A.: *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillation*. Delhi, Hindustan Publishing Corp. 1961.
- [24] BORKOWSKI D.: Estymacja częstotliwościowych parametrów systemu elektro-energetycznego z zastosowaniem koherentnego repróbkiowania. Praca doktorska. Kraków, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica 2007.
- [25] BROCKETT R.W., LEE H.B.: Frequency domain instability criteria for time-varying and nonlinear systems. *Proc. IEEE.*, 1967, Vol. 55, 604–619.
- [26] BROCKETT R.W., WILLEMS J.W.: Frequency domain stability criteria, I, II. *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1966, Vol. 11, I – 255–261, II – 407–413.
- [27] BUKOWSKI L.: *Struktury układów sterowania w warunkach niepewności*. Kraków, Politechnika Krakowska 1995.
- [28] BUSŁOWICZ M.: *Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach*. Rozprawy Naukowe nr 48. Białystok, Politechnika Białostocka 1997.
- [29] CANDY J.V.: *Signal processing: The model-based approach*. New York, Mc-Graw Hill 1986.
- [30] CHAN H., OZGUNER U.: Closed-loop control of systems over a communications network with queues. *International Journal of Control*, 1995, Vol. 62, No. 3, 493–510.
- [31] CHEN W.H., BALLANCE D.J.: A comparison of methods for computing frequency response of uncertain plants. *Proc. IFAC World Congress*, 1999, 7–12.
- [32] CHUA L.O.: Frequency domain analysis of nonlinear systems: general theory. *Electronic Circuits and Systems*, 1979, Vol. 3, No. 4, 165–185.
- [33] CHUI C.K., CHEN G.: *Signal processing and systems theory*. Berlin, Springer Verlag 1992.
- [34] COATES M.: *Time-frequency modelling*. University of Cambridge, Ph.D. Thesis 1998.
- [35] COPPEL W.A.: *Dichotomies in stability theory*. Lecture Notes in Mathematics, 629. Berlin, Springer-Verlag 1978.
- [36] D'ANGELO H.: *Linear time-varying systems*. Boston, Allyn and Bacon 1970.
- [37] DAI J., MAO J.: Robust flight controller design for helicopters based on genetic algorithms. W: *Proc. 15th IFAC World Congress*. Barcelona 2002.
- [38] DASGUPTA S.: Kharitonov theorem revisited. *Systems and Control Letters*, 1988, Vol. 11, 381–384.
- [39] DASGUPTA S., CHOCKALINGAM G., ANDERSON B.D.O., FU M.: Lyapunov functions for uncertain systems with applications to the stability of time-varying systems – I: Fundamental theory and applications. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1994, Vol. 41, No. 2.

-
- [40] DAVARI A., RAMANATHAIAH R.K.: Short-time stability analysis of time-varying linear systems. *Proceedings of the 26th Southeastern Symposium on System Theory*, Athens USA 1994, 302–304.
- [41] DE LA SEN M.: Robust stability of a class of linear time-varying systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2002, Vol. 19, 399–418.
- [42] DE NICOLAO G.: On the time-varying Riccati difference equation of optimal filtering. *SIAM Journal on control and optimization*, 1992, Vol. 30 (6), 1251–1269.
- [43] DE SOUZA C.E.: Periodic strong solution for the optimal filtering problem of linear discrete-time periodic systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1991, Vol. 36 (3), 333–338.
- [44] DESAI U.B.: A state-space approach to orthogonal digital filters. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1991, Vol. 38 (2), 160–169.
- [45] DEWILDE P.: *Advanced digital filters. W: Modern Signal Processing*. Red. T. Kailath. Springer Verlag 1985, 169–209.
- [46] DEWILDE P.: *Challenges of a generalized system theory. W: Essays of the Royal Dutch Academy of Sciences*. Red. P. Dewilde, M.A. Kaashoek, M. Verhagen. Amsterdam, North-Holland, The Netherlands 1993, 99–117.
- [47] DEWILDE P., DYM H.: Lossless inverse scattering, digital filters, and estimation theory. *IEEE Trans. Informat. Th.*, July 1984, Vol. 30 (4), 644–662.
- [48] DEWILDE P., VAN DER VEEN A.J.: *Time-varying systems and computations*. Boston, Kluwer Academic Publishers 1998.
- [49] DOMEK S.: *Odporna regulacja predykcyjna obiektów nieliniowych*. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej nr 593. Instytut Automatyki Przemysłowej nr 20. Szczecin, Wydawnictwo Uczelniane PS 2006.
- [50] DORATO P.: *An overview of finite-time stability. W: Current Trends in Nonlinear Systems and Control*. Red. L. Menini, L. Zaccarian, C.T. Abdallah. Birkhäuser Boston 2006, 185–194.
- [51] DORATO P.: Short time stability in linear time-varying systems. *Proceedings of the IRE International Convention Record*, 1961, Part 4, 83–87.
- [52] DORATO P., ABDALLAH C.T., FAMULARO D.: Robust finite-time stability design via linear matrix inequalities. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control* 1997, Vol. 2, 1305–1306.
- [53] DRYJA M., JANKOWSCY J.M.: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych. Cz. 2*. Warszawa, WNT 1982.
- [54] DULLERUD G.E., LALL S.: A new approach for analysis and synthesis of time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, Vol. 44 (8), 1486–1497.
- [55] DUNFORD N., SCHWARTZ J.T.: *Linear operators. Part I. General theory*. New York, Interscience Publishers 1958.
- [56] DUNFORD N., SCHWARTZ J.T.: *Linear operator. Part 2. Spectral theory, self adjoint operators in Hilbert Space*. Wiley-Interscience 1988.
- [57] DUTKA A., ORDYS A.: The optimal non-linear generalised predictive control by the time-varying approximation. *Proc. of 10th MMAR Int. Conf. Międzydroje*. Poland 2004, 299–304.
- [58] EMIRSAJLOW Z.: Control problems on a finite time horizon and uncertain systems. *Proceedings of the 4th European Control Conference*. Brussels 1997.

- [59] EMIRSAJŁOW Z., ORŁOWSKI P.: Analiza niepewnego dyskretnego układu sterowania przy skończonym horyzoncie czasowym. *IX Krajowa Konferencja Automatyki*. Opole 1999, Vol. I, 107–112.
- [60] EMIRSAJŁOW Z., ORŁOWSKI P.: Determination of an initial state for uncertain discrete time-varying systems. *MMAR. Międzydroje*, 2001, Vol. 1, 315–319.
- [61] EVANS C., REES D., JONES L.: Nonlinear disturbance errors in system identification using multisine test signals. *IEEE Trans. Instr. Meas.*, 1994, Vol. 43, 238–244.
- [62] FINDEISEN W., BRDYS M., MALINOWSKI K., TATJEWSKI P., WOZNIAK A.: On-line hierarchical control for steady-state systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1978, Vol. 23 (2), 189–209.
- [63] FLAMM D.S.: A new shift-invariant representation of periodic linear systems. *Systems & Control Lett.*, 1991, Vol. 17, 9–14.
- [64] FLANDRIN P.: Time dependent spectra for nonstationary stochastic processes. W: *Time and Frequency Representation of Signals and Systems*. Red G. Longo, B. Picinbono. Wien, Springer 1989, 69–124.
- [65] FLANDRIN P.: *Time-frequency/time-scale analysis*. San Diego, Academic Press 1999.
- [66] FOLLAND G.B.: Harmonic analysis in phase space, vol. 122 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton (NJ), Princeton University Press 1989.
- [67] FRANCIS B.A., GEORGIU T.T.: Stability theory for linear time-invariant plants with periodic controllers. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1988, September, Vol. 33 (9), 820–832.
- [68] GOHBERG I.: *Extension and Interpolation of Linear Operators and Matrix Function*. Operator Theory Advances and Applications Vol. 47. Birkhauser Verlag 1990, 61–135.
- [69] GOHBERG I., GOLDBERG S., KAASHOEK M.A.: *Classes of linear operators*. Vol. I. Birkhauser 1990.
- [70] GOLUB G., VAN DOOREN P.: Numerical linear algebra. W: *Digital signal processing and parallel algorithms*. Springer Verlag 1991, 559–568.
- [71] GOLUB G.H., VAN LOAN C.F.: *Matrix computations*. Baltimore, Maryland, Johns Hopkins University Press 1983.
- [72] GOODWIN G.C., SIN K.S.: *Adaptive filtering, prediction and control*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall 1984.
- [73] GRABOWSKI P.: *Stabilność układów Lurie*. Kraków, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH 1999.
- [74] GRABOWSKI M., INGARDEN R.S.: *Mechanika kwantowa: ujęcie w przestrzeni Hilberta*. Warszawa, PWN 1989.
- [75] GRANCHAROVA A., JOHANSEN T., TONDEL P.: Computational Aspects of Approximate Explicit Nonlinear Model Predictive Control. *Proc. Worskop on AFD NMPC*. Freudenstadt, Germany 2005.
- [76] GREEN K., SOBOLEWSKI R.: Extending scattering-parameter approach to characterization of linear time-varying microwave devices. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. October 2000, Vol. 48 (10), 1725–1731.
- [77] GREEN M., LIMEBEER D.J.N.: *Linear robust control*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall 1995.
- [78] GREGA W.: *Metody i algorytmy sterowania cyfrowego w układach scentralizowanych i rozproszonych*. Kraków, Wydawnictwo AGH 2004.

- [79] GREGA W.: *Sterowanie cyfrowe w czasie rzeczywistym*. Kraków, Wydawnictwo AGH 1999.
- [80] GRIMBLE M.J., ORDYS A.W.: Non-linear predictive control for manufacturing and robotic applications. *Proc. of 7th IEEE Int. Conf. MMAR*. Miedzyzdroje, Poland, 2001.
- [81] GUTENBAUM J.: *Modelowanie matematyczne systemów*. Warszawa 1992.
- [82] HALANAY A., IONESCU V.: Generalized discrete-time Popov-Yakubovich theory. *Systems & Control Letters*, 1993, Vol. 20 (1), 1–6.
- [83] HALANAY A., IONESCU V.: *Time-varying discrete linear systems input-output operators. riccatieequations, disturbance attenuation*. Operator Theory: Advances and Applications Vol. 68, Basel–Boston–Berlin, Birkhauser 1994.
- [84] HAN H.S., LEE J.G.: Necessary and sufficient conditions for stability of time-varying discrete interval matrices. *Int. J. Control*, 1994, Vol. 59 (4), 1021–1029.
- [85] HASHEMI S., HAMMOND J.K.: The interpretation of singular values in the inversion of minimum and non-minimum phase systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1996, Vol. 10, 225–240.
- [86] HAYKIN S.: *Adaptive filter theory*. Prentice-Hall 1991.
- [87] HEJMO W., KOZIOL R.: *Sterowanie optymalne i adaptacyjne*. Wrocław, Zakład Narodowy im. Ossolińskich 1991.
- [88] HELSON H., NAGY B.SZ., VASILESCU F.H., ARSENE GR. *Linear operators in function spaces*. Boston, Birkhauser 1990.
- [89] HELTON J.W.: Discrete time systems, operator models, and scattering theory. *J. Functional Anal.*, May 1974, Vol. 16 (1), 15–38.
- [90] HINRICHSSEN D., ILCHMANN A., PRITCHARD A.J.: Robustness of stability of time-varying linear systems. *Journal of Differential Equations*, 1989, Vol. 82 (2), 219–250.
- [91] HLAWATSCH F.: *Time-frequency analysis and synthesis of linear signal spaces: Time-frequency filters, signal detection and estimation, and range-Doppler estimation*. Boston (MA), Kluwer 1998.
- [92] HLAWATSCH F., MATZ G.: *Linear time-frequency filters*. W: *Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference*. Red. B. Boashash. Oxford, Elsevier 2003, 466–475.
- [93] HLAWATSCH F., MATZ G.: Nonstationary spectral analysis based on time-frequency operator symbols and underspread approximations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, Vol. 52 (3), 1067–1086.
- [94] HLAWATSCH F., MATZ G.: *Quadratic time-frequency analysis of linear time-varying systems*. W: *Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis*. Red. L. Debnath. Boston, Birkhauser 2001, Vol. 9, 235–287.
- [95] HLAWATSCH F., MATZ G.: Time-frequency transfer function calculus (symbolic calculus) of linear time-varying systems (linear operators) based on a generalized underspread theory. *Journal of Mathematical Physics*, Special Issue on Wavelet and Time-Frequency Analysis, 1998, Vol. 39, 4041–4071.
- [96] HLAWATSCH F., MATZ G.: Wigner distributions (nearly) everywhere: time-frequency analysis of signals, systems, random processes, signal spaces, and frames. *Signal Processing*, 2003, Vol. 83, 1355–1378.

- [97] HLAWATSCH F., MATZ G., KIRCHAUER H., KOZEK W.: Time-frequency formulation, design, and implementation of time-varying optimal filters for signal estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2000, Vol. 48, 1417–1432.
- [98] HLAWATSCH F., MATZ G., KOZEK W.: Generalized evolutionary spectral analysis and the Weyl spectrum of nonstationary random processes, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, Vol. 45, 1520–1534.
- [99] HOARY T.: *H2/Hinf theory. Background and recent extensions*. Manchester, M.Sc. Dissertation, UMIST 1996.
- [100] HONG L., WU-SHENG L., ANTONIOU A.: New algorithms for the derivation of the transfer-function matrices of 2-D state-space discrete systems – I: Fundamental theory and applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1997, Vol. 44 (2), 112–119.
- [101] HORLA D.: *Sterowanie adaptacyjne*. Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 2003.
- [102] HORN R.A., JOHNSON C.R.: *Topics in matrix analysis*. Cambridge, New York, Cambridge Univ. Press 1989.
- [103] HOSTETTER G.H.: *Recursive estimation. Handbook of digital signal processing*. Red. F.D.Elliott. San Diego, Academic Press 1987, 899–940.
- [104] HUANG Y., LU W.M.: Nonlinear optimal control: alternatives to Hamilton-Jacobi equation. *Proc. 35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1996, 3942–3947.
- [105] IGLESIAS P.: Input-output stability of sampled-data linear time-varying systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1995, Vol. 40 (9), 1647–1650.
- [106] IMPRAM S.T., MUNRO N.: Describing functions in non-linear systems with structured and unstructured uncertainties. *International Journal of Control*, 2001, Vol. 74 (6), 600–608.
- [107] IONESCU V., WEISS M.: Continuous and discrete-time Riccati theory: A Popov function approach. W: *Linear Algebra and its Applications*, 1993, Vol. 193, 173–209.
- [108] JIANG Y., PAPANDREOU-SUPPAPOLA A.: Discrete time-scale characterization of wideband time-varying systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2006, Vol. 54 (4), 1364–1375.
- [109] JONSON D.: A Popov criterion for systems with slowly time-varying parameters. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1999, Vol. 44, 844–846.
- [110] KACZOREK T.: *Teoria sterowania i systemów*. Warszawa, PWN 1993.
- [111] KACZOREK T.: *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. Warszawa, WNT 1999.
- [112] Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R.: *Podstawy teorii sterowania*. Warszawa, WNT 2006.
- [113] KAILATH T.: *Linear systems*. New Jersey, Prentice Hall 1980.
- [114] KALMAN R.E.: Contribution to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 1960, Vol. 6, 102–119.
- [115] KALMAN R.E.: Lyapunov functions for the problem of Lurie in automatic control. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA, 1963, Vol. 49, 201–205.
- [116] KAMEN E.W., KHARGONEKAR P.P., POOLLA K.R.: A transfer-function approach to linear time-varying discrete-time systems. *SIAM J. Control and Optimization*, July 1985, Vol. 23 (4), 550–565.
- [117] KAPLAN G.: Ethernet's winning ways. *IEEE Spectrum*, 2001, Vol. 38 (1), 113–115.

-
- [118] KASZYŃSKI R.: *Filtry dolnoprzepustowe i filtry składowej stałej o zmiennych parametrach*. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej nr 569. Instytut Automatyki Przemysłowej nr 19. Szczecin Wydawnictwo Uczelniane PS 2001.
- [119] KHALIL H.K.: *Nonlinear Systems*. Third ed. Englewood Cliffs, Prentice-Hall 2002.
- [120] KHARGONEKAR P.P., POOLLA K.: On polynomial matrix fraction representations for linear time-varying discrete-time systems. *Lin. Alg. Appl.*, 1986, Vol. 80, 1–37.
- [121] KHARGONEKAR P.P., POOLLA K., TANNENBAUM A.: Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1985, Vol. 30 (11), 1088–1096.
- [122] KLIR G.J.: *Ogólna teoria systemów*. Warszawa, WNT 1976.
- [123] KOHN J.J., NIRENBERG L.: An algebra of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1965, Vol. 18, 269–305.
- [124] KOLLA S.R., YEDAVALLI R.K., FARISON J.B.: Robust stability bounds on time-varying perturbations for state-space models of linear discrete-time systems. *Int. J. Contr.*, 1989, Vol. 50 (1), 151–159.
- [125] KOUVARITAKIS B., CANNON M., ROSSITER J.A.: Non-linear model based predictive control. *Int. J. Control*, 1999, Vol. 72 (10), 919–928.
- [126] KOWALSKI Z., IMAJEW D., ARENDT R., POSZECHONOW L.: *Częstotliwościowe metody analizy i syntezy układów sterowania*. Gdańsk, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej 1996.
- [127] KOZEK W.: On the generalized transfer function calculus for underspread LTV channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, Vol. 45, 219–223.
- [128] KOZEK W.: Time-frequency signal processing based on the Wiegner-Weyl framework. *Signal Processing*, 1992, Vol. 29, 77–92.
- [129] KOZIOŁ M.: Synteza cyfrowych filtrów quasi-odwrotnych w klasie układów nieprzyczynowych. Praca doktorska. Zielona Góra, Uniwersytet Zielonogórski 2005.
- [130] KRÓLIKOWSKI A.: *Sterowanie adaptacyjne z ograniczeniami sygnału sterującego*. Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 2004.
- [131] KRTOLICA R., ÖZGÜNER Ü., CHAN H., GÖKTAS H., WINKELMAN J., LIUBAKKA M.: Stability of linear feedback systems with random communication delays. *International Journal of Control*, 1994, Vol. 59 (4), 925–953.
- [132] KUCERA V.: *Analysis and design of discrete linear control systems*. Cambridge, Prentice Hall 1991.
- [133] KUCERA V.: *Discrete linear control, The polynomial equation approach*. Wiley, Chichester 1979.
- [134] KUDREWICZ J.: *Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych*. Warszawa, WNT 1970.
- [135] KWON H., PEARSON A.E.: On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1978, Vol. 23 (3), 479–481.
- [136] LA SALLE J.P.: *The stability and control of discrete processes*. Berlin, Springer Verlag 1981.
- [137] *LAPACK User's Guide*. Third ed. Philadelphia, SIAM 1999.
- [138] LATAWIEC K.J.: *Contributions to advanced control and estimation for linear discrete-time MIMO systems*. Seria: Studia i Monografie z. 102. Opole, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej 1998.

- [139] LATAWIEC K.J.: *The power of inverse systems in linear and nonlinear modeling and control*. Seria: Studia i Monografie z. 167. Opole, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej 2004.
- [140] LAUB A.J.: Efficient multivariable frequency response computations. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1981, Vol. 26, 407–408.
- [141] LEE Y.I., KOUVARITAKIS B., CANNON M.: Constrained receding horizon predictive control for nonlinear systems. *Automatica*, 2002, Vol. 38 (12), 2093–2102.
- [142] LEONOWICZ Z., ŁOBOS T., WOŹNIAK K.: Zastosowanie transformaty S do analizy sygnałów niestacjonarnych w elektrotechnice. *Materiały konferencyjne IC-SPETO*. Ustronie 2005.
- [143] LEWIS F.L.: *Optimal control*. New York, John Wiley & Sons 1986.
- [144] LIAN F.L., MOYNE J., TILBURY D.M.: Modelling and optimal controller design of networked control systems with multiple delays. *International Journal of Control*, 2003 Vol. 76, 591–606.
- [145] LIAN F.L., MOYNE J.R., TILBURY D.M.: Performance evaluation of control networks: Ethernet, Controlnet, and Device-Net. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, Vol. 21 (1), 66–83.
- [146] LIU G.P., MU J.X., REES D., CHAI S.C.: Design and stability analysis of networked control systems with random communication time delay using the modified MPC. *International Journal of Control*, 2006, Vol. 79 (4), 288–297.
- [147] LIU K.: Extension of modal analysis to linear time-varying systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, Vol. 226, 149–167.
- [148] LIU K.: Identification of linear time-varying systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 204, 487–505.
- [149] LIU K.: Modal parameter estimation using the state space method. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 197, 387–402.
- [150] LIU K., KUJATH M.R.: Adaptation of the concept of modal analysis to time-varying structures. *Mech. Syst. and Sig. Proc.*, 1999, Vol. 13, 413–422.
- [151] LOGEMANN H.: Stability and stabilizability of linear infinite-dimensional discrete-time. *SIAM J. Control and Optimization*, 1992, Vol. 9, 255–263.
- [152] MAIA N.M.M., SILVA J.M.M.: *Theoretical and experimental modal analysis*. New York, John Wiley & Sons Inc. 1997.
- [153] MANDIC D.P., CHAMBERS J.A.: On robust stability of time-variant discrete-time nonlinear systems with bounded parameter perturbations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Feb. 2000, Vol. 47, 185–188.
- [154] MANSON G., WORDEN K.: Frequency response functions for uncertain nonlinear systems. *Materials Science Forum*, 2003, Vol. 440–441, 37–44.
- [155] MARPLE S.L., JR.: *Digital spectral analysis with applications*. New Jersey, Prentice Hall 1987.
- [156] MASTELLONE S., DORATO P., ABDALLAH C.T.: *Finite-time stability for nonlinear networked control systems W: Current Trends in Nonlinear Systems and Control*. Red. L. Menini, L. Zaccarian, C.T. Abdallah. Boston, Birkhäuser 2006, 535–553.
- [157] Matlab – Signal processing toolbox 6 user’s guide. Mathworks 2007.
- [158] MATVEEV A.S., SAVKIN A.V.: Optimal design of networked control systems: computer control via asynchronous communication channels. *International Journal of Control*, 2004, Vol. 77, 1426–1437, 2004.
- [159] MAZUR M.: *Cybernetyka i charakter*. Warszawa, PIW 1976.

-
- [160] METZGER M.: *Modelling, simulation and control of continuous processes*. Gliwice, Wydawnictwo Jacka Skalmierskiego 2000.
- [161] METZGER M., PLESOWICZ P.: Experimental evaluation of TCP/IP-based control systems. *Proceedings of the 10-th International Conference on Method and Models in Automation and Robotics*. Międzyzdroje 2004, 1165–1170.
- [162] MEYER R.A., BURRUS C.S.: A unified analysis of multirate and periodically timevarying digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1975, Vol. 22, 162–168.
- [163] MILANESE M., NORTON J., PIET-LAHAVIER H., WALTER E.: *Bounding approaches to system identification*. New York, Plenum 1996.
- [164] MILLER D.E., DAVISON E.J.: An adaptive controller which provides Lyapunov stability. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1989, Vol. 34, 599–609.
- [165] MOLCHANOV A.P., LIU D.: Robust absolute stability of time-varying nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2002. Fund. Theory and App. Vol. 49 (8), 1129–1137.
- [166] MOORE B.C.: Singular value analysis of linear systems. *Proc. IEEE Conf. Dec. Control* 1979, 66–73.
- [167] MRACEK C.P., CLOUTIER J.R.: Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati Equation method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1998, Vol. 8, 401–433.
- [168] MURRAY J.: Time-varying systems and crossed products. *Math. Systems Theory*, 1984, Vol. 17, 217–241.
- [169] NARAYANAN S., SEKAR P.: A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, Vol. 211, 409–424.
- [170] NARENDRA K.S., BALAKRISHNAN J.: Adaptive control using multiple models. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 1989, Vol. 42, 171–187.
- [171] NAWAB H., QUATIERI T.F.: Short-time Fourier transform. W: *Advanced Topics in Signal Processing*. Vol. 6. Red. J.S. Lim, A.V. Oppenheim, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall 1988, 289–337.
- [172] NAYLOR A.W., SELL G.R.: *Linear operator theory in engineering and science*. New York, Springer 1982.
- [173] NIKOLSKI N.K.: *Toeplitz operators and spectral function theory*. Boston, Birkhäuser 1989.
- [174] NIEDERLIŃSKI A.: Convergence of least-squares dynamic system identification with finite-accuracy data. *International Journal of Control*, 1984, Vol. 40 (3), 479–485.
- [175] NIEDERLIŃSKI A.: *Komputerowe systemy automatyki przemysłowej*. Warszawa, WNT 1990.
- [176] NIEDERLIŃSKI A.: *Układy wielowymiarowe automatyki*. Warszawa, WNT 1974.
- [177] NIEDERLIŃSKI A., MOŚCIŃSKI J.: Towards a bench-mark standard for stochastic adaptive control. *International Journal of Control*, 1992, Vol. 55 (4), 1009–1027.
- [178] NIEDERLIŃSKI A., MOŚCIŃSKI J., OGONOWSKI Z.: *Regulacja adaptacyjna*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN 1995.
- [179] NIEDŹWIECKI M.: *Identification of time-varying processes*. Wiley 2000.
- [180] NIEDŹWIECKI M.: Identification of time-varying systems using combined parameter estimation and filtering. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, 1990, Vol. 38, No. 4, 679–686.

- [181] NIEDŹWIECKI M.: Optimal and suboptimal algorithms for identification of time-varying systems with randomly drifting parameters. *Automatica*, 2008, Vol. 44 (7), 1718–1727.
- [182] NIEDŹWIECKI M.: Statistically efficient smoothing algorithm for time-varying frequency estimation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2008, Vol. 56, 3846–3854.
- [183] NIEDŹWIECKI M., KACZMAREK P.: Identification of quasi-periodically varying systems using the combined nonparametric/parametric approach. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2005, Vol. 53 (12), 4588–4598.
- [184] NIEDŹWIECKI M., MELLER M.: Self-optimizing adaptive vibration controller. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2009, Vol. 54, No. 9, 2087–2099.
- [185] NYQUIST H.: Certain topics in telegraph transmission theory. *AIEE Trans.*, April 1928, Vol. 47, 617–644.
- [186] NYQUIST H.: Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, 1932, Vol. 11, 126–146.
- [187] OGATA K.: *Discrete-time control system*. Englewood Cliff, New Jersey, Prentice Hall 1995.
- [188] OGATA K.: *Solving control engineering problems with MATLAB*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall 1994.
- [189] OPPENHEIM A.V., WILLSKY A.S., NAWAB S.H.: *Signals and systems*. Prentice-Hall International, Inc. 1997.
- [190] ORDYS A.W., CLARKE D.W.: A state-space description for GPC controllers. *Int. J. Systems Sci.*, 1993, Vol. 24 (9), 1727–1744.
- [191] ORŁOWSKI P.: An extension of Nyquist feedback stability for linear time-varying, discrete-time systems. W: *Emerging Technologies, Robotics and Control Systems*. Palermo, International Society for Advanced Research, 2007, Vol. 1, 105–110.
- [192] ORŁOWSKI P.: An extension of Nyquist feedback stability for linear time-varying, discrete-time systems. *International Journal of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, 2007, Vol. 2, 51–56.
- [193] ORŁOWSKI P.: An introduction to SVD-DFT frequency analysis for time-varying systems. *Proc. of 9th IEEE Internat. Conf. MMAR*. Międzyzdroje 2003, 455–460.
- [194] ORŁOWSKI P.: Analiza częstotliwościowa układu zmiennego w czasie – algorytm i przykłady. *Materiały XV Krajowej Konferencji Automatyki*. Warszawa 2005.
- [195] ORŁOWSKI P.: Analiza niepewnych, niestacjonarnych układów sterowania z dyskretnym czasem przy skończonym horyzoncie czasowym. Rozprawa doktorska. Szczecin, Politechnika Szczecińska 2002.
- [196] ORŁOWSKI P.: Applications of Discrete evolution operators in time-varying systems. *European Control Conference*. Porto, 2001, 3259–3264.
- [197] ORŁOWSKI P.: Comparative boundary and sensitivity analysis for uncertain dynamical systems. *Proc. of 8th IEEE Internat. Conf. MMAR*. Szczecin 2002.
- [198] ORŁOWSKI P.: Comparison of frequency domain methods for discrete-time, linear time-varying system with invariant eigenvalues. *International Journal of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, 2007, Vol. 4, 27–32.
- [199] ORŁOWSKI P.: Comparison of frequency domain methods for discrete-time, linear time-varying system with invariant eigenvalues. *Recent Advances in Control Systems, Robotics and Automation*. Palermo, International Society for Advanced Research, 2008, 77–82.

-
- [200] ORŁOWSKI P.: Convergence of the optimal non-linear GPC method with iterative state-dependent, linear time-varying approximation. *Proc. International Workshop on Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*. Freudenstadt-Lauterbad, Germany 2005.
- [201] ORŁOWSKI P.: Determining the degree of system variability for time-varying discrete-time systems. *Proc. 16th IFAC World Congress*. Praha 2005.
- [202] ORŁOWSKI P.: Deviations estimates for uncertain time-varying discrete-time systems. *3rd IFAC Symposium on Robust Control Design*. Praha 2000, CD-ROM art. 132.
- [203] ORŁOWSKI P.: Discrete-time, linear periodic time-varying system norm estimation using finite time horizon transfer operators. *Automatika*, 2010, Vol. 51, No. 4, 325–332.
- [204] ORŁOWSKI P.: Estimation of output deviation norm for uncertain, discrete-time nonlinear systems in state dependent form. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2007, Vol. 17 (4), 505–513.
- [205] ORŁOWSKI P.: Extension of SVD-DFT analysis for a class of non-linear systems. *Proc. International Conference Control 2006*. Glasgow, Scotland, Proceedings on CD-ROM.
- [206] ORŁOWSKI P.: Feedback stability of discrete-time, linear time-varying systems. *Proc. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, MED'08 25–27.06.2008, Ajaccio, France, 1002–1007.
- [207] ORŁOWSKI P.: Fractional indexes impulse responses approximation for discrete-time Weyl symbol computation. *Electronics and Electrical Engineering*, 2010, Vol. 104, No. 8, 9–12.
- [208] ORŁOWSKI P.: Frequency domain analysis of uncertain time-varying discrete-time systems. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2007, Vol. 26 (3), 293–310.
- [209] ORŁOWSKI P.: Linear parameter varying, finite impulse response filter design with application to reducing rise-time for rapid signal changes. *Proc. 2nd IFAC International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing*, Istanbul 2009, CD-ROM.
- [210] ORŁOWSKI P.: Measure of network effects for Ethernet based control systems. *Proc. European Control Conference, ECC'07*. Kos 2007, 1–6.
- [211] ORŁOWSKI P.: Methods for stability evaluation for linear time varying, discrete-time systems on finite time horizon. *International Journal of Control*, 2006, Vol. 79 (3), 249–262.
- [212] ORŁOWSKI P.: Minimum Energy and error signal control for nonstationary discrete-time linear systems. *4th International Scientific – Technical Conference Process Control*, Kouty nad Desnou 2000, proceedings on CD-ROM.
- [213] ORŁOWSKI P.: Modelowanie niepewności w opisie matematycznym układu dynamicznego. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 2007, Vol. 2, 12–15.
- [214] ORŁOWSKI P.: Nonlinear into state and input dependent form model decomposition – Applications to discrete-time model predictive control with successive time-varying linearization along predicted trajectories. *Proc. of the 7th Int. Conf. on Inf. in Control, Automation and Robotics*, Funchal 2010, Vol. 3, 87–92.
- [215] ORŁOWSKI P.: Output uncertainty estimates for a class of non-linear discrete-time systems. *Proc. of 10th IEEE Internat. Conf. MMAP 2004*. Międzyzdroje 2004, 315–320.
- [216] ORŁOWSKI P.: Properties of the frequency SVD-DFT method for discrete LTV systems based on first order examples. *4th International Scientific – Technical Conference Process Control 13-16.06.2006*. Kouty nad Desnou 2006, proceedings on CD-ROM.

- [217] ORŁOWSKI P.: Robust control design for a class of non-linear systems. *Proc. Process Control PC'03 Conference in Štrbske Pleso*, 2003.
- [218] ORŁOWSKI P.: Selected problems of frequency analysis for time-varying discrete-time systems using singular value decomposition and discrete Fourier transform. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, Vol. 278, 903–921.
- [219] ORŁOWSKI P.: Selected problems of uncertainty estimates for non-linear discrete-time systems. *Archiwum konferencji PTETiS*, 2000, Vol. 9, 195–199.
- [220] ORŁOWSKI P.: Simplified design of low-pass, linear parameter-varying, finite impulse response filters. *Information Technology and Control*, 2010, Vol. 39, No. 2, 130–137.
- [221] ORŁOWSKI P.: Sterowanie niekonwencjonalnym napędem do dzwonów przy istnieniu niepewności na wejściu układu. *III Scientific Symposium*, Kazimierz Dolny 1999, 124–130.
- [222] ORŁOWSKI P.: System degradation factor for networked control systems. *Information Technology and Control*, 2008, Vol. 37, No. 3, 233–244.
- [223] ORŁOWSKI P.: Threshold setting for time-domain detection methods for uncertain time-varying discrete-time systems. *Proc. 15th IFAC World Congress*, Barcelona 2002.
- [224] ORŁOWSKI P.: Uncertain frequency domain estimates for LTV discrete-time systems. *Proc. 15th Mediterranean Conference on Control and Automation 27–29.06.2007*, MED'07. Ateny 2007, CD-ROM.
- [225] ORŁOWSKI P.: Wprowadzanie i analiza zaburzeń parametrów w niepewnych układach dyskretnych. *Materiały konferencyjne MIS-2*, Kościelisko 2002, 493–500.
- [226] ORŁOWSKI P.: Zastosowania dekompozycji SVD-DFT. Cz. 1: Wprowadzenie do analizy częstotliwościowej dla układów niestacjonarnych. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 2007, Vol. 2, 39–43.
- [227] ORŁOWSKI P.: Zastosowania dekompozycji SVD-DFT. Cz. 2: Analiza stabilności układów niestacjonarnych w sprzężeniu zwrotnym. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 2007, Vol. 2, 44–47.
- [228] OSIOWSKI J., SZABATIN J.: *Podstawy teorii obwodów*. T. 3. Warszawa, WNT 2006.
- [229] OSOWSKI S.: *Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych*. Warszawa, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2007.
- [230] OVERSTREET J.W., TZES A.: An Internet-based real-time control engineering laboratory. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, Vol. 19 (5), 19–34.
- [231] PAPOULIS A.: *Probability, random variables, and stochastic processes*. New York, McGraw Hill 1965.
- [232] PARKS T.W., BURRUS C.S.: *Digital filter design*. New York, John Willey 1987.
- [233] PARSONS J.D.: *The mobile radio propagation channel*. London, Pentech Press 1992.
- [234] PARTINGTON J.R.: *An introduction to Hankel operators*. Cambridge, Cambridge University Press 1988.
- [235] PINTELON R., SCHOUKENS J.: *System identification: a frequency domain approach*. New York, IEEE Press 2001.
- [236] PLESOWICZ P., NOCOŃ W., ORDYS A., METZGER M.: Experimental evaluation of TCP/IP-based control system using statistical network simulator. *Proceedings of the 10-th International Conference on Method and Models in Automation and Robotics*. Międzyzdroje 2004, 1031–1036.

- [237] POLAŃSKI A.: *Wybrane zagadnienia stabilności układów liniowych o zmiennych w czasie parametrach*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 1464. Automatyka nr 128. Katowice, Politechnika Śląska 2000.
- [238] POPOV V.M.: Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automation and Remote Control*, 1961, Vol. 22, 857–875.
- [239] POPOV V.M.: *Hyperstability of control systems*. Berlin, Springer-Verlag 1973.
- [240] POPOV V.M.: The solution of a new stability problem for controlled systems. *Automation and Remote Control*, 1963, Vol. 24, 1–23.
- [241] POSTLETHWAITE I., TSAI M.C., GU D.W.: Weighting function selection in Hinf design. *Proc. of IFAC Conference*. Tallinn, USSR 1990.
- [242] PRZYŁUSKI K.M., ROLEWICZ S.: On stability of linear time-varying infinite dimensional discrete-time systems. *Syst. Contr.*, 1984, Vol. 4, 307–315.
- [243] PURCZYŃSKI J.: *Wybrane zagadnienia teorii sygnałów*. Szczecin, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej 2000.
- [244] PYATNITSKIY E.S., RAPOPORT L.B.: Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems. *IEEE Trans. Circuit. Syst.*, 1996, Vol. 43, 219–229.
- [245] RANTZER A.: On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Syst. Contr.*, 1996, Vol. 28, 7–10.
- [246] RANTZER A., ANDERSSON L.: Frequency-dependent error bounds for uncertain linear models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, Vol. 44, 2094–2098.
- [247] RAO S.K., KAILATH T.: Orthogonal digital filters for VLSI implementation, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1984, Vol. 31 (11), 933–945.
- [248] RAY A.: Performance evaluation of medium access control protocols for distributed digital avionics. *Journal of Dynamic systems, Measurement, and Control*, 1987, Vol. 109, 370–377.
- [249] RAY A., HALEVI Y.: Integrated communication and control systems. Part II: Design considerations. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1988, Vol. 110, 374–381.
- [250] REBARBER R.: Conditions for the equivalence of internal and external stability for distributed parameter systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1993, Vol. 31 (6), 994–998
- [251] REGALIA P.A., MITRA S.K., VAIDYANATHAN P.P.: The digital all-pass filter: A versatile signal processing building block, *Proc. IEEE*, January 1988, Vol. 76 (1), 19–37.
- [252] REW D.Y., TAHK M.J., CHO H.: Short-time stability of proportional navigation guidance loop. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1996, Vol. 32 (3), 1107–1115.
- [253] RICHARDS J.A.: *Analysis of periodically time-varying systems*. New York, Springer-Verlag 1983.
- [254] ROBERTS R.A., MULLIS C.T.: *Digital Signal Processing*. Addison-Wesley 1987.
- [255] ROTSTEIN H., GALPERIN N., GUTMAN P.: Set membership approach for reducing value sets in the frequency domain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, Vol. 43, 1346–1350.
- [256] RUGH W.J.: *Linear system theory*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall 1993.
- [257] RUTKOWSKI L.: Adaptive probabilistic neural networks for pattern classification in time-varying environment. *IEEE Trans. Neural Networks* 2004, Vol. 15.
- [258] SAAD Y.: *Iterative methods for sparse linear systems*. Boston, PWS Publ. Co. 1996.

- [259] SAYEED A.M., AAZHANG B.: Joint multipath-Doppler diversity in mobile wireless communications. *IEEE Trans. Comm.*, 1999, Vol. 47, 123–132.
- [260] SAYEED A.M., JONES D.L.: Optimal detection using bilinear time-frequency and time-scale representations. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 1995, Vol. 43, 2872–2883.
- [261] SAYEED A.M., LANDER P., JONES D.L.: Improved time-frequency filtering of signal-averaged electrocardiograms. *J. of Electrocardiology*, 1995, Vol. 28, 53–58.
- [262] SCHETZEN M.: The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems. New York, Wiley Interscience 1980.
- [263] SCHMIDGEN K.: Unbounded operator algebras and representation theory. Berlin, Birkhauser Verlag 1990.
- [264] SCHOUKENS J., DOBROWIECKI T., PINTELON R.: Parametric and nonparametric identification of linear systems in the presence of nonlinear distortions – A frequency domain approach. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 1998, Vol. 43, 176–190.
- [265] SEPULCHRE R., JANKOVIC M., KOKOTOVIC P.: *Constructive nonlinear control*. London, Springer Verlag 1997.
- [266] SHENOY R.G., PARKS T.W.: The Weyl correspondence and time-frequency analysis. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1994, Vol. 42, 318–331.
- [267] SHOKOOHI S., SILVERMAN L.: Linear time-variant systems: stability of reduced models. *Automatica*, 1987, Vol. 20, 59–67.
- [268] SHORTEN R.N., NARENDRA K.S.: On the stability and existence of common Lyapunov functions for stable linear switching systems. *Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa, FL*, 1998, 3723–3724.
- [269] SILLS J.A., KAMEN E.W.: Time-varying matched filters. *Circuits, Systems, Signal Processing*, 1996, Vol. 15 (5), 609–630.
- [270] SILVERMAN L.M., ANDERSON B.D.O.: Controllability, observability and stability of linear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1968, Vol. 6 (1), 121–130.
- [271] SILVERMAN L.M., MEADOWS H.E.: Equivalent realizations of linear systems. *SIAM J. Applied Math.*, 1969, Vol. 17, 393–408.
- [272] SIWCZYŃSKI M., TOPÓR-KAMINSKI L.: Analiza i realizacja aktywnych obwodów z okresowo zmiennymi parametrami. *Rozprawy Elektrotechniczne*, 1981, t. 27, z. 3, 643–655.
- [273] SODERSTROM T., STOICA P.: *Identyfikacja systemów*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN 1997.
- [274] SOIZE C.: Uncertain dynamical systems in the medium-frequency range. *Journal of Engineering Mechanics – ASCE*, 2003, Vol. 129 (9), 1017–1027.
- [275] SOLIMAN S., Srinath M.: *Continuous and discrete signal and systems*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall 1990.
- [276] SOLOLATOS A.: *Applications of singular values in control theory*. M.Sc. Dissertation. Manchester, Control Systems Centre UMIST 1979.
- [277] SOLOMOU M., EVANS C., REES D., CHIRAS N.: Frequency domain analysis of nonlinear systems driven by multiharmonic signals. *IEEE Instrum. and Measurement Technology Conf. Anchorage, AK, USA*, 21–23 May 2002.

- [278] STANISŁAWSKI R.: Algorytmy estymacji charakterystyk częstotliwościowych systemów o złożonej strukturze. *Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej, Seria Elektryka* z. 52. Opole, Wydawnictwo Politechniki Opolskiej 2003, 49–67.
- [279] STEWART G.W.: *Introduction to matrix computations*. New York, Academic Press 1973.
- [280] STEWART G.W., SUN J.: *Matrix perturbation theory*. London, Academic Press 1990.
- [281] STOCKWELL R.G., MANSINHA L., LOWE R.P.: Localization of the complex spectrum: the S transform, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1996, Vol. 44 (4), 998–1001.
- [282] STROHMER T.: Pseudodifferential operators and Banach algebras for mobile communications. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 2006, Vol. 20 (2), 237–249.
- [283] SZABATIN J.: *Podstawy teorii sygnałów*. Warszawa, WKŁ 2003.
- [284] TANG K.S., MAN K.F., GU D.W.: Structured genetic algorithm for robust H-infinity control systems design. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1996, Vol. 43, 575–582.
- [285] TATJEWSKI P.: *Advanced control of industrial processes: structures and algorithms*. London, Springer 2007.
- [286] TATJEWSKI P.: *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych – struktury i algorytmy*. Warszawa, Oficyna Wydawnicza EXIT 2002.
- [287] *The new encyclopaedia Britannica*. Chicago, Encyclopaedia Britannica 1991.
- [288] THEUNIS H.G.J., DEPRETTERE E.F.: Piecewise stationary perfect reconstruction filter banks. *Archivf. Elektronik u. Ubertragungstechnik*, September 1995, Vol. 49 (5/6), 344–361.
- [289] TIPSUWAN Y., CHOW M.Y.: Gain scheduler middleware: A methodology to enable existing controllers for networked control and teleoperation. Part I: Networked control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2004, Vol. 51, 1218–1227.
- [290] TIPSUWAN Y., CHOW M.Y.: Gain scheduler middleware: A methodology to enable existing controllers for networked control and teleoperation. Part II: Teleoperation, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2004, Vol. 51, 1228–1237.
- [291] TIPSUWAN Y., CHOW M.Y., GUNNARSSON F., GUSTAFSSON F.: Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice*, 2003, Vol. 11, 1099–1111.
- [292] TSAKALIS K.S., IOANNOU P.A.: *Linear time-varying systems: control and adaptation*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall 1993.
- [293] TSATSANIS M.K., GIANNAKIS G.B.: Time-varying system identification and model validation using wavelets. *IEEE Trans. of Signal Processing*, 1993, Vol. 41 (12), 3512–3523.
- [294] VAIDYANATHAN P.P.: A unified approach to orthogonal digital filters and wave digital filters, based on LBR two-pair extraction. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, July 1985, Vol. 32, 673–686.
- [295] VAIDYANATHAN P.P.: The discrete-time bounded-real lemma in digital filtering. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1985, Vol. 32 (9), 918–924.
- [296] VAN DER SCHAFT A.J.: L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback Hinf control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 1992, Vol. 37, 770–784.
- [297] VAN TREES H.L.: *Detection, estimation, and modulation theory. Part III: Radar-sonar signal processing and gaussian signals in noise*. Malabar (FL), Krieger 1992.
- [298] VARGA A.: Computation of transfer function matrices of generalized state-space models. *Int. J. Control*, 1989, Vol. 50, 2543–2561.

- [299] VARGA A., DOOREN P.V.: Computational methods for periodic systems – an overview, *Proc. of IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, Italy, Como 2001, 171–176.
- [300] VIDYASAGAR M.: *Nonlinear systems analysis*. New Jersey, Prentice Hall 1993.
- [301] *Wavelet transforms and time-frequency signal analysis*. Red. L. Debnath. Boston, Birkhauser 2001.
- [302] WEI Z., BRANICKY M.S., PHILLIPS S.M.: Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, Vol. 21 (1), 84–99.
- [303] WEISENBERGER S.: Piecewise-quadratic and piecewise-linear Lyapunov functions for discontinuous systems. *Int. J. Contr.*, 1969, Vol. 10, 171–180.
- [304] WEISS L., INFANTE E.F.: Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, Vol. 12, 54–59.
- [305] WEISS L.: Controllability, realization, and stability of discrete-time systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 1972, Vol. 10, 230–251.
- [306] WEYL H.: *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover, New York 1950.
- [307] WHIDBORNE J.F., POSTLETHWAITE I., GU D.W.: Robust controller design using Hinf loop-shaping and the method of inequalities. *IEEE Trans on Cont. Syst. Technology*, 1994, Vol. 29 (4), 455–461.
- [308] WILSON H.: *Spikes, decisions, and actions: Dynamical foundations of neuroscience*. Oxford, Oxford University Press 1999.
- [309] WIRTH F., HINRICHSSEN D.: On stability radii of infinite dimensional time-varying discrete-time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 1994, Vol. 11, 253–276.
- [310] WOJTKIEWICZ A.: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*. Warszawa, WNT 1984.
- [311] WORNELL G.W.: Spread-signature CDMA: Efficient multiuser communication in the presence of fading. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1995, Vol. 41 (5), 1418–1438.
- [312] YAKUBOVICH V.A.: A frequency theorem for the case in which the state and control spaces are Hilbert spaces, with an applications to some problems in the synthesis of optimal controls. *Siberian J. of Mathematics*, 1974, Vol. 15, 457–476; II: *Siberian J. of Mathematics*, 1975, Vol. 16, 828–845.
- [313] YAKUBOVICH V.A.: The frequency theorem in control theory. *Siberian J. of Mathematics*, 1973, Vol. 14, 384–419.
- [314] YANG C.D., TAI H.C., LEE C.C.: Experimental approach to selecting Hinf weighting functions for DC servos. *Journal of dynamic systems, measurement and control*, 1997, Vol. 119, 101–105.
- [315] ZADEH L.A.: Circuit Analysis of Linear Varying-Parameter Networks, *Journal Appl. Phys.*, 1950, Vol. 21, 1171–1177.
- [316] ZADEH L.A.: Frequency analysis of variable networks. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 1950, Vol. 38, 291–299.
- [317] ZADEH L.A.: Time varying networks. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 1961, Vol. 49, 1488–1503.
- [318] ZAROOR R., FAHMY M.M.: A design technique for variable digital filters. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1989, Vol. 36, November, 1473–1478.
- [319] ZEHEB E.: Robust stability of non-linear time-varying systems. *Proc. 5 IEEE Conf. on Contr. and Syst. MED97*. Cyprus 1997.

-
- [320] ZHANG G., CHEN T.: Analysis and design of networked control systems, Technical report. Advanced control systems. Edmonton, Alberta, Canada, University of Alberta 2003.
- [321] ZIELIŃSKI T.P.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań. Warszawa, WKŁ 2005.
- [322] ZYGARLICKI J.: *Analiza i kompresja danych pomiarowych sygnału z sieci elektroenergetycznej dla potrzeb badania jakości energii*. Rozprawa doktorska. Opole, Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki 2007.
- [323] ŻUCHOWSKI A.: *Modele dynamiki i identyfikacja*. Szczecin, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej 2003.
- [324] ŻUCHOWSKI A.: *Wybrane modele dynamiki zachowań obiektów, osobników i ich zespołów*. Szczecin, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej 2005.

APPLICATION OF OPERATOR NOTATION AND SIMPLIFIED FREQUENCY METHODS TO NON-STATIONARY DISCRETE SYSTEMS IN ISSUES RELATED TO SYSTEM ANALYSIS AND CONTROL

Summary

The paper provides comprehensive discussion of issues related to analysis of discrete non-stationary linear systems specified in the finite time horizon. Methods were developed which provide extension of the tools for analysis of the system transition operator, taking frequency related issues into account, and the degree of non-stationarity was specified. The paper integral part is its application aspect that facilitates practical use of the results in analysis and synthesis of the uncertain, non-linear discrete systems and filters with time-varying coefficients.

In the first part an operator notation dedicated to description of non-stationary discrete systems was introduced. The notation includes the definitions of column operators, sequence of dimensions, and system transition operator, used to represent non-stationary discrete systems with variable number of inputs and outputs and system rank. An analysis of basic properties of the transition operator was made. A time-shift operator was introduced, as well as diagonal operators and discrete evolution operators that make it possible to determine the system transition operator and, additionally, free response operator of the non-stationary system in an alternative way. Discrete non-stationary systems were classified and, moreover, the introduced operator notation for discrete systems was compared with the recurrent model in state space.

Second part constitutes a discussion of basic tools for analysis of non-stationary systems. Concerning the method of time-frequency transformation of single-input-single-output systems an adaptation was made of such definitions as two-dimensional transition function, modulating function, Weyl symbol, and based on them definitions of spread functions. Transformation matrix capable of determination of the abovementioned functions for discrete systems pursuant to matrix transformations of the system transition operator specified in the finite time horizon was defined. A significant and original achievement of the author is development of the method of simplified frequency analysis of the non-stationary system based on the singular value decomposition of the system transition operator, discrete Fourier transform and properties of the power spectral density. Thanks to this method approximation of Bode plots for non-stationary systems is possible. These plots are convergent with classical Bode diagrams for stationary systems for the length of the analysis time horizon aiming at infinity.

In the third part attention is focused on the application of the defined tools in practical issues pertaining to analysis of non-stationary systems. They enable one to determine the degree of non-stationarity of a system or its time-frequency variability. They are adapted to discrete systems and properties of two-dimensional spread functions are discussed. Subsequently, definitions of three basic indicators of non-stationarity were introduced, which use properties of the decomposition pursuant to particular values and a discrete Fourier transform of the system transition operator. The possibilities for using the indicator of system non-stationarity in quantitative assessment of the impact of effects of delay and losing information in distributed control systems with communication based on computer networks were discussed in detail.

Another significant area of application of the introduced frequency tools in non-stationary systems is an analysis of uncertain systems. Definitions of the concepts of uncertainty and disturbance were presented in the paper, and sources of uncertainty and methods of their introduction into the system mathematical model were discussed. For the particular, additive form of matrix disturbance of the model in state space, transformation was made to describe it in form of transition operator. Subsequently, assessments of disturbance of transition operator in the function of operators of the nominal system and assessments of matrix disturbance of the model in state space for four forms of matrix limitations for the disturbance were presented. On the basis of the obtained results, a method of assessment of the upper limitation of amplitude characteristics of uncertain system for parametrically limited additive disturbance was formulated.

In the last part of paper, the introduced notation was applied in non-stationary systems to solve two problems pertaining to control and analysis of non-linear systems. The first one concerns determining convergences of iterative algorithm of non-linear predictive control for the model of linearised system along the forecast trajectory. The second issue is the application of the model of linearised system along the forecast trajectory to assess maximum deviation of output trajectory or uncertain state of the discrete non-linear system.

VERWENDUNG DER OPERATORENNOTATION UND DER VEREINFACHTEN FREQUENZMETHODEN FÜR NICHTSTATIONÄRE DISKRETSYSTEME FÜR DIE PROBLEMATIK DER SYSTEMANALYSE UND STEUERUNG

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde in einer komplexen Weise die Problematik im Zusammenhang mit der Analyse der nichtstationären linearen Systeme in einem endlichen Zeithorizont besprochen. Es wurden Methoden erarbeitet, die eine Erweiterung der Analyseninstrumente des Systemübergangsoperators unter Berücksichtigung der Frequenzproblematik erlauben als auch der Grad der Nichtstationarität bestimmt. Einen integralen Teil der Arbeit stellt eine Applikationsseite dar, die praktische Verwendung der Ergebnisse für die Analyse und Synthese der unsicheren nichtlinearen Diskretsysteme und Filter mit zeitveränderlichen Koeffizienten erlaubt.

Im ersten Teil der Arbeit wurde die Operatorennotation eingeführt, die für die Beschreibung der nichtstationären Diskretsysteme speziell bestimmt ist. Diese Notation umfasst Definitionen der Spaltenoperatoren, der Maßfolgen, des Systemübergangsoperators, die zur Darstellung der nichtstationären Diskretsysteme mit einer variablen Anzahl von Ein- und Ausgängen und der Ordnung des Systems dienen. Es wurden Grundeigenschaften des Übergangsoperators analysiert. Es wurde ein Operator der Zeitverschiebung als auch diagonale und diskrete Zeitentwicklungsoperatoren eingeführt, die in einer alternativen Weise die Bestimmung des Systemübergangsoperators und zusätzlich des Operators der freien Antwort eines nichtstationären Systems erlauben. Es wurden nichtstationäre Diskretsysteme klassifiziert und darüber hinaus die eingeführte Operatorennotation für Diskretsysteme mit einem rekurrenten Modell im Zustandsraum verglichen.

Im zweiten Teil wurden die Grundinstrumente der Analyse von nichtstationären Systemen diskutiert. In der Methode der Zeit-Frequenz-Transformation der Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang wurde die Anpassung solcher Definitionen vorgenommen, wie die zweidimensionale Übergangsfunktion, Modulationsfunktion, Weyl'sches Symbol und die darauf basierenden Definitionen der Streuungsfunktion. Es wurde eine Transformationsmatrix definiert, die die Bestimmung der o. g. Funktionen für diskrete Systeme auf der Basis von Matrixumwandlungen des Übergangsoperators eines im endlichen Zeithorizont bestimmten Systems erlaubt. Eine wichtige, originelle Errungenschaft des Verfassers ist die Entwicklung einer Methode zur vereinfachten Frequenzanalyse eines nichtstationären Systems, welches auf einer Verteilung nach singulären Werten des Systemsübergangsoperators, der diskreten Fourier-Transformierten und der Eigenschaft des

Leistungsdichtespektrums basiert. Diese Methode ermöglicht die Approximation der Charakteristiken von Bode für nichtstationäre Systeme. Diese Charakteristiken sind konvergent mit klassischen Bode-Diagrammen für stationäre Systeme bei einer Länge des Zeithorizonts der Analyse die gegen unendlich geht.

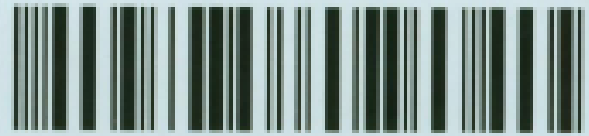
Im dritten Teil konzentrierte man sich auf dem Einsatz von definierten Instrumenten für praktische Probleme der Analyse von nichtstationären Systemen. Sie erlauben die Bestimmung des Grades der Nichtstationarität des Systems oder seiner Zeit-Frequenz-Veränderlichkeit. Sie wurden für Diskretsysteme adaptiert und es wurden die Eigenschaften der zweidimensionalen Streuungsfunktion besprochen. Dann wurden die Definitionen von drei Grundkennzahlen der Nichtstationarität eingeführt, die die Eigenschaften der Verteilung nach den singulären Werten und der diskreten Fourier-Transformierten des Systemsdurchgangsoperators verwenden. In einer detaillierten Weise wurden die Möglichkeiten des Einsatzes der Kennzahl der Nichtstationarität des Systems zur quantitativen Bewertung des Einflusses der Effekte der Verzögerung und des Verlustes von Informationen in verteilten Systemen mit einer auf Computernetzwerken basierenden Kommunikation besprochen.

Einen weiteren, wesentlichen Einsatzbereich der eingeführten Frequenzinstrumente in nichtstationären Systemen stellt die Analyse der unsicheren Systeme dar. In der Arbeit wurden Definitionen der Begriffe der Unsicherheit und der Störungen angegeben, die Entstehungsquellen der Unsicherheit und die Methoden deren Einführung in das mathematische Modell des Systems besprochen. Für eine besondere, additive Form der Modellmatrix-Störung im Zustandsraum wurde eine Transformation zur Beschreibung in Form eines Übergangsoperators durchgeführt. Anschließend wurden die Abschätzungen der Störung des Übergangsoperators in Funktion der Operatoren des Nominalsystems und der Abschätzungen der Modellmatrix-Störung im Zustandsraum für vier Formen der Matrixeinschränkungen der Störung angegeben. Auf Grundlage der erzielten Ergebnisse wurde die Methode zur Abschätzung der oberen Einschränkung der Amplitudencharakteristik eines unsicheren Systems für eine additive parametrisch eingeschränkte Störung formuliert.

Im letzten Teil der Arbeit wurde die eingeführte Notation in nichtstationären Systemen zur Lösung von zwei Problemen aus dem Bereich der Steuerung und Analyse von nichtlinearen Systemen verwendet. Das erste Problem betrifft die Bestimmung der Konvergenz eines iterativen Algorithmus der nichtlinearen prädiktiven Steuerung für ein Modell eines linearisierten Systems entlang der prognostizierten Trajektorie. Das andere Problem betrifft die Verwendung des Modells eines linearisierten Systems entlang der prognostizierten Trajektorie zur Abschätzung der maximalen Ablenkung der Trajektorie des Ausgangs oder des unsicheren Zustandes eines nichtlinearen Diskretsystems.

Biblioteka Główna
Eachodniopomorskiego Uniwersytetu
Technologicznego w Szczecinie

CZ.54468



001-054468-00-0

CZ 05.05

ISBN 978-83-7663-099-1