

PAWEŁ DWORAK

**Wybrane problemy syntezy
układów sterowania obiektami dynamicznymi
o wielu wejściach i wielu wyjściach**

Szczecin 2015

Recenzenci

ANDRZEJ DZIELIŃSKI

KRZYSZTOF J. LATAWIEC

Opracowanie redakcyjne

KRYSTYNA KAŻMIEROWSKA

Projekt okładki

PAWEŁ DWORAK

Wydano za zgodą

REKTORA ZACHODNIOPOMORSKIEGO UNIwersYTETU TECHNOLOGICZNEGO
W SZCZECINIE

ISBN 978-83-766-200-1

Wydawnictwo Uczelniane Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie
70-310 Szczecin, al. Piastów 48, tel. 91 449 47 60, e-mail: wydawnictwo@zut.edu.pl
Druk ZAPOL Sp. j., 71-062 Szczecin, al. Piastów 42, tel. 91 434 10 21, e-mail: zarzad@zapol.com.pl

Spis treści

Wykaz skrótów, oznaczeń i akronimów	5
1. Wstęp.....	9
2. Opisy właściwości wielowymiarowych układów dynamicznych	13
2.1. Wstęp.....	13
2.2. Podstawy rachunku i modelowania układów całkowitego rzędu.....	13
2.3. Podstawy rachunku i modelowania układów niecałkowitego rzędu	16
3. Wybrane problemy odsprzęgania obiektów MIMO.....	21
3.1. Wprowadzenie	21
3.2. Statyczne odsprzęganie układów MIMO	22
3.3. Dynamiczne odsprzęganie układów MIMO	24
3.4. Grupowanie wejść i wyjść w układach MIMO	37
3.5. Odsprzęganie obiektów lewostronnie odwracalnych	39
3.6. Uniwersalny algorytm dynamicznego odsprzęgania	42
3.7. Przykład dynamicznego odsprzęgania obiektu MIMO w rekonfigurowalnym układzie sterowania.....	53
3.8. Dynamiczne odsprzęganie układów niecałkowitego rzędu.....	59
3.8.1. Statyczne odsprzęganie układów MIMO niecałkowitego rzędu	60
3.8.2. Dynamiczne odsprzęganie obiektów TITO	62
3.8.3. Dynamiczne odsprzęganie obiektu MIMO niecałkowitego rzędu z wykorzystaniem sprzężenia od wektora stanu	67
3.9. Podsumowanie.....	72
4. Sterowanie nieliniowymi obiektami MIMO	73
4.1. Koncepcja budowy adaptacyjnego regulatora z przełączeniami do sterowania nieliniowymi obiektami MIMO	73
4.2. Stabilność układu przełączanego.....	77
4.3. Synteza regulatorów adaptacyjnych do sterowania nieliniowymi obiektami MIMO ..	80
4.3.1. Synteza układu regulacji modalnej dla nieliniowego obiektu MIMO.....	80

4.3.1.1. Metody projektowania układów sterowania modalnego dla liniowych obiektów MIMO	81
4.3.2. Synteza układu regulacji z dynamicznym odsprzęgnięciem dla nieliniowego obiektu MIMO	102
4.4. Redukcja liczby regulatorów w zbiorze przełączanego regulatora	108
4.5. Regulacja rozmyta typu Takagi-Sugeno.....	119
4.5.1. Model rozmyty obiektu i regulatora T-S	119
4.5.2. Stabilność układu regulacji z regulatorem T-S	121
4.5.3. Regulator strefowy	123
4.5.4. Przykłady projektowania regulatorów rozmytych typu T-S	126
4.6. Sztuczne sieci neuronowe w sterowaniu nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO	130
4.7. Model Following Control dla obiektów MIMO	134
4.7.1. Budowa i właściwości struktury MFC	134
4.7.2. Synteza układu MFC dla nieliniowego obiektu MIMO	137
4.8. Podsumowanie.....	141
5. Implementacja układów sterowania obiektami MIMO w programowalnych urządzeniach automatyki	143
5.1. Dostosowanie procedur sterowania nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO na potrzeby sterowania w trybie czasu rzeczywistego.....	143
5.1.1. Synteza on-line układów sterowania modalnego nieliniowymi obiektami MIMO	143
5.1.2. Synteza on-line układów sterowania z dynamicznym odsprzęgnięciem	146
5.2. Prototypowanie układów sterowania z wykorzystaniem adaptacyjnych wielowymiarowych regulatorów modalnych.....	148
5.3. Podsumowanie.....	164
6. Wnioski	167
Literatura	169
Summary	183
Zusammenfassung.....	185

Wykaz skrótów, oznaczeń i akronimów

Wykaz skrótów

<i>p.d.</i>	prawy dzielnik
<i>l.w.p.</i>	lewostronnie względnie pierwsze
<i>p.w.p.</i>	prawostronnie względnie pierwsze
<i>n.w.l.d.</i>	największy wspólny lewy dzielnik
<i>n.w.p.d.</i>	największy wspólny prawy dzielnik
<i>n.w.m.</i>	najmniejszy wspólny mianownik
<i>n.w.w.</i>	najmniejsza wspólna wielokrotność
<i>z.s.p.</i>	zewnątrznie skośnie pierwsze

Wykaz oznaczeń

A	macierz
A^T	macierz transponowana
A^{-1}	macierz odwrotna
A_{ad}	macierz dołączona macierzy A
$rank A$	rzęd macierzy A
$\det A, A $	wyznacznik macierzy A
$A(s)$	macierz wielomianowa
$\deg A(s)$	stopień macierzy wielomianowej
$\deg_{ci} A(s)$	stopień i -tej kolumny macierzy $A(s)$
$\deg_{ri} A(s)$	stopień i -tego wiersza macierzy $A(s)$
$\Gamma(A(s))$	macierz współczynników wiodących macierzy $A(s)$
$\Gamma_r(A(s))$	macierz wierszowych współczynników wiodących macierzy $A(s)$
$\Gamma_c(A(s))$	macierz kolumnowych współczynników wiodących macierzy $A(s)$
$nrank A(s)$	normalny rzęd macierzy $A(s)$
$m \times n$	wymiary macierzy o m wierszach i n kolumnach
I_n	macierz jednostkowa stopnia n
$\mathbf{0}$	macierz zerowa

$R^{m \times n}$	zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ i elementach z ciała liczb rzeczywistych R
$R[s]^{m \times n}$	zbiór macierzy wielomianowych o wymiarze $m \times n$
$R(s)^{m \times n}$	zbiór macierzy wymiernych o wymiarze $m \times n$
$R[s]$	zbiór wielomianów o współczynnikach z ciała R

Wykaz akronimów

3DoF	układ o trzech stopniach swobody (ang. <i>Three Degree of Freedom</i>)
ARMAX	uogólniony model procesu (ang. <i>Auto-Regressive Moving Average with eXogenous input</i>)
HIL	metoda badań symulacyjnych na docelowym sprzęcie (ang. <i>Hardware-in-the-loop Simulation</i>)
LMI	liniowe nierówności macierzowe (ang. <i>Linear Matrix Inequalities</i>)
LTI	obiekt liniowy, niezmienny w czasie (ang. <i>Linear Time Invariant</i>)
MIMO	obiekt o wielu wejściach i wielu wyjściach (ang. <i>Multi-Input Multi-Output</i>)
MPC	regulacja predykcyjna (ang. <i>Model Predictive Control</i>)
NLTI	obiekt nieliniowy, niezmienny w czasie (ang. <i>Nonlinear Time Invariant</i>)
NMPC	nieliniowa regulacja predykcyjna (ang. <i>Nonlinear Model Predictive Control</i>)
NRGA	niekwadratowa macierz wzajemnych wzmocnień (ang. <i>Nonquadratic Relative Gain Array</i>)
RGA	macierz wzajemnych wzmocnień (ang. <i>Relative Gain Array</i>)
RP	szybkie prototypowanie (ang. <i>Rapid Prototyping</i>)
SISO	obiekt o jednym wejściu i jednym wyjściu (ang. <i>Single-Input Single-Output</i>)
SQLF	przełączna kwadratowa funkcja Lapunowa (ang. <i>Switched Quadratic Lyapunow Function</i>)
TITO	obiekt o dwóch wejściach i dwóch wyjściach (ang. <i>Two-Inputs Two-Outputs</i>)

Składam serdeczne podziękowania Kolegom i Współpracownikom, a w szczególności prof. dr. hab. inż. Stefanowi Domkowi za inspirację do napisania tej książki i uwagi wniesione po lekturze pierwszej jej wersji, oraz recenzentom – profesorom Andrzejowi Dzielińskiemu i Krzysztofowi Latawcowi za wnikliwe uwagi i sugestie, dr. inż. Krzysztofowi Jaroszewskiemu i mgr. inż. Michałowi Braselowi za współpracę w przygotowaniu wspólnych prac naukowych, których wyniki przedstawiam również w niniejszej monografii, a w szczególności śp. prof. dr. hab. inż. Stanisławowi Bańce za wieloletnią opiekę i inspirację w prowadzonych badaniach naukowych.

Paweł Dworak

1. Wstęp

Tematem niniejszej monografii jest analiza różnych aspektów syntezy układów sterowania dla obiektów dynamicznych o wielu wejściach i wielu wyjściach (ang. *Multi-Input Multi-Output*). Opisano w niej cechy obiektów MIMO oraz zadania, jakie należy rozwiązać, projektując układ automatycznej regulacji dla tego typu obiektów.

Praca jest podsumowaniem badań naukowych autora prowadzonych w latach 2006–2015 w Katedrze Automatyki Przemysłowej i Robotyki Wydziału Elektrycznego ZUT w Szczecinie. Opisane rezultaty, poprzez bogaty przegląd literatury przedmiotu, odniesiono do bieżących osiągnięć w dziedzinie teorii sterowania wielowymiarowymi układami dynamicznymi. Oryginalne wyniki badań, w większości wcześniej opublikowane, uzupełniono o nowe propozycje i dyskusję nad zagadnieniami wciąż wymagającymi analizy i rozwiązania bądź uzupełnienia.

Głównym celem naukowym prac autora było zbadanie możliwości zastosowania różnych struktur układów i opracowanie algorytmów sterowania nieliniowymi obiektami dynamicznymi o wielu wejściach i wyjściach ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień związanych z dynamicznym odsprzęganiem. Osiągnięcie głównego celu naukowego wymagało postawienia i zrealizowania kilku celów pośrednich. Poszukiwano odpowiednich metod syntezy i implementacji układów sterowania obiektami MIMO, prowadząc jednocześnie weryfikację symulacyjną opracowanych algorytmów. Analizowano w szczególności algorytmy adaptacji układu sterowania oraz badano możliwości praktycznego stosowania struktur wieloregulatorowych z przełączanymi wyjściami i/lub zmiennymi wartościami parametrów regulatorów.

Kluczowym zagadnieniem w omawianych sposobach sterowania jest wybór bieżącej konfiguracji w strukturach wieloregulatorowych oraz metod strojenia parametrów zastosowanego regulatora adaptacyjnego, a także możliwość zagwarantowania płynnego, bezuderzeniowego przełączania regulatorów w strukturach przełączalnych oraz przy skokowych zmianach wartości parametrów regulatora adaptacyjnego. Problemy te rozwiązano w specjalnie opracowanych wieloregulatorowych strukturach układów przełączalnych z wielowymiarowymi regulatorami modalnymi lub odsprzęgającymi –

wspomaganych dodatkowymi (dynamicznie i/lub statycznie) odprężniętymi układami sterowania w pętli otwartej (ang. *decoupled open-loop control*). Badane struktury wieloregulatorowe przełączalne i adaptacyjne o strojonych parametrach (bez identyfikacji parametrów modelu obiektu prowadzonej on-line) wymagają wyznaczenia z góry wszystkich wartości parametrów wielowymiarowych regulatorów, co jest możliwe przy znanych nieliniowych opisach (modelach) określających różne warunki pracy obiektu. Daje to także możliwość zastosowania metod sztucznej inteligencji, w tym sztucznych sieci neuronowych (do modelowania regulatorów lub zmieniających swoje wartości parametrów regulatora adaptacyjnego) i/lub logiki rozmytej (do zmian struktury układu lub wyboru sposobu uśredniania sygnałów wyjściowych dla wybranej grupy regulatorów).

Jednym z typowych zadań automatycznej regulacji obiektem MIMO jest dynamiczne odsprężanie. W pracy dokonano szczegółowej analizy problemów syntezy układów odsprężających, w tym w szczególności zagadnień grupowania wejść i wyjść oraz rekonfiguracji układu odsprężającego, możliwości zachowania odsprężnięcia obiektu sterowania po zmianie właściwości obiektu, w tym zaistnieniu awarii urządzeń wykonawczych. Opisano warunki dynamicznego odsprężania dla obiektów o liczbie wejść mniejszej niż liczba wyjść. Badania te pozwoliły na rozszerzenie zakresu stosowalności, znanego z wcześniejszych prac autora, algorytmu dynamicznego odsprężania dla obiektów o liczbie wejść większej bądź równej liczbie wyjść o obiekty o liczbie wejść mniejszej niż liczba wyjść. Ujednoczony algorytm pozwala na dynamiczne odsprężanie obiektów w ogólności niestabilnych i nieminimalnofazowych. Dokonano również analizy możliwości dynamicznego odsprężania dla obiektów niecałkowitego rzędu. Omówiono warunki stosowania różnych algorytmów odsprężania wykorzystywanych dla układów całkowitego rzędu. Przedstawiono jednocześnie dodatkowe ograniczenia, typowe dla układów niecałkowitego rzędu, które utrudniają praktyczną realizację zadań dynamicznego odsprężania.

Eksperymenty symulacyjne, weryfikujące prawidłowość działania projektowanych układów regulacji, prowadzono w środowisku Matlab/Simulink. Dużą część z nich przeprowadzono również na stanowisku laboratoryjnym, pozwalającym na prowadzenie eksperymentów symulacyjnych w reżimie czasu rzeczywistego z wykorzystaniem narzędzi szybkiego prototypowania oraz typowych przemysłowych sterowników programowalnych. Przeprowadzane symulacje miały charakter typu *Hardware-in-the-loop*, w których symulowane obiekty oraz stosowane regulatory pracowały na oddzielnych jednostkach w czasie rzeczywistym. Umożliwiło to przetestowanie zdolności proponowanych algorytmów do pracy systemu sterowania w trybie real-time, zrealizowanego w postaci komputerowego systemu sterowania oraz możliwości syntezy algorytmów sterowania w trybie on-line.

Podobnie do wcześniej prowadzonych przez autora badań w zakresie projektowania układów sterowania obiektami dynamicznymi MIMO, przy korzystaniu z liniowych (linearyzowanych lokalnie) modeli obiektu zastosowano podejście wielomianowe, w którym wszystkie liniowe elementy projektowanych układów sterowania są opisywane macierzami

wymiernych transmitancji w postaci wielomianowych ułamków macierzowych MFD (ang. *Matrix Fraction Description*), którym w dziedzinie czasowej odpowiadają kanoniczne postacie Luenbergera-Brunovsky'ego liniowych równań stanu. Wzajemna równoważność opisów dynamicznych elementów układów sterowania w dziedzinach czasowych (równania stanu) i częstotliwościowych w ujęciu wielomianowym (macierzowe ułamki wielomianowe) daje możliwość swobodnego formułowania zadań sterowania w dziedzinie częstotliwościowej, a następnie ich rozwiązywanie w dziedzinie częstotliwościowej lub czasowej, zależnie od potrzeb i możliwości. Jest to szczególnie widoczne np. w projektowaniu wielowymiarowych układów odsprzęganych dynamicznie lub statycznie. W syntezie prezentowanych w pracy układów sterowania w ujęciu wielomianowym obliczenia w dziedzinach operatorowych $s \in C$ i $z \in C$ układów całkowitego i niecałkowitego rzędu z czasem ciągłym i dyskretnym mają praktycznie takie same przebiegi. Jednakże mimo podobieństw algorytmów obliczeniowych, uzyskiwane wyniki liczbowe mają różne interpretacje. Dotyczy to m.in. odmiennych definicji obszarów stabilności tych układów.

W rozdziale drugim przedstawiono wykorzystywane w pracy sposoby opisu właściwości układów dynamicznych MIMO.

Rozdział trzeci poświęcono analizie zagadnień związanych z dynamicznym odsprzęgnięciem liniowych obiektów dynamicznych MIMO. Opisano w nim problemy związane z parowaniem i grupowaniem wejść i wyjść odsprzęgniętego układu a także możliwość dynamicznego odsprzęgnięcia obiektów o liczbie wyjść większej niż liczba wejść. Przedstawiono też uniwersalny algorytm dynamicznego odsprzęgnięcia obiektów MIMO oraz rozważono warunki zastosowania metod wielomianowych do syntezy układów odsprzęgających obiektów dynamicznych MIMO niecałkowitego rzędu.

W rozdziale czwartym przedstawiono metody syntezy adaptacyjnych układów regulacji przeznaczonych do sterowania nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO. Dokonano analizy możliwości teoretycznych i praktycznych syntezy i implementacji regulatorów MIMO typu gain-scheduling, wykorzystując do tego między innymi metody projektowania układów sterowania modalnego, algorytmy rozmyte typu T-S i sztuczne sieci neuronowe.

Rozdział piąty to analiza problemu implementacji badanych układów sterowania w programowalnych urządzeniach automatyki. Zawarto w nim wyniki pracy poszczególnych regulatorów w reżimie czasu rzeczywistego (badania typu *Hardware-in-the-loop*). Wykorzystano do tego narzędzia szybkiego prototypowania oraz typowe przemysłowe sterowniki programowalne.

Analiza problemów, przeprowadzona we wszystkich rozdziałach pracy, pozwoliła zrealizować cel badań i zweryfikować hipotezy. Syntezę przedstawiono w podsumowaniu przedstawionych analiz.

2. Opisy właściwości wielowymiarowych układów dynamicznych

2.1. Wstęp

W niniejszym rozdziale przedstawiono wykorzystywane w dalszych częściach pracy sposoby opisu właściwości wielowymiarowych układów dynamicznych. Wykorzystywane w pracy sposoby syntezy liniowych i nieliniowych układów sterowania dotyczą przede wszystkim niezmiennych w czasie liniowych układów dynamicznych LTI (ang. *Linear Time Invariant*) całkowitego i niecałkowitego rzędu. Wiele cennych informacji na ten temat zawiera bogata literatura poświęcona układom całkowitego [13; 110; 111; 114; 126] i niecałkowitego rzędu [7; 48; 113; 176; 189; 191; 204].

2.2. Podstawy rachunku i modelowania układów całkowitego rzędu

Najbardziej typowym i najczęściej stosowanym opisem właściwości układu o wielu wejściach i wielu wyjściach w dziedzinach czasowych są równania stanu i wyjść:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie $\mathbf{x}(t) \in R^n$ oznacza stan układu a $\mathbf{u}(t) \in R^m$ i $\mathbf{y}(t) \in R^l$ to odpowiednio wektory sygnałów wejściowych i wyjściowych.

W analizowanych w pracy algorytmach przyjmuje się, że modelem obiektu sterowania wykorzystywanym w syntezie regulatora może być każdy, sterowalny i obserwowalny, układ dynamiczny LTI o m wejściach i l wyjściami. W dziedzinie czasu ciągłego jest on opisywany równaniami stanu i wyjść w postaci:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

a w układach z czasem dyskretnym równaniami:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ i $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ są macierzami liczbowymi o wymiarach odpowiadających wymiarom wektorów: stanu układu $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, sygnałów wejściowych $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ i wyjściowych $\mathbf{y}(\cdot) \in \mathbb{R}^l$. W stanie początkowym wektor stanu układu przyjmuje wartość $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Modele liniowe ze wzorów (2.2) czy (2.3) otrzymuje się zazwyczaj poprzez linearyzację równań (2.1) – która najczęściej polega na rozwinięciu znanego opisu obiektu w szereg Taylora z odrzuceniem członów wyższego rzędu niż pierwszy – w przyjętym punkcie pracy układu. Punkt ten jest określany poprzez nominalne wartości dla wektora stanu \mathbf{x}_o oraz wymuszeń \mathbf{u}_o i można go wyznaczyć z obowiązującego dla stanu ustalonego układu nieliniowych równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o) \\ \mathbf{y}_o &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Otrzymane po linearyzacji macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} opisują właściwości obiektu w okolicy przyjętego punktu pracy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o] + \mathbf{B}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_o] \\ \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_o &= \mathbf{C}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o] + \mathbf{D}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_o] \end{aligned} \quad (2.5)$$

choć zwyczajowo przedstawiane są bez zmiennych przyrostowych w postaci równań (2.2) czy (2.3).

Dokonując przekształcenia Laplace'a opisu układu (2.2) lub przekształcenia „Z” opisu (2.3), przy zerowych warunkach początkowych $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, można łatwo otrzymać opisy w postaci macierzy wymiernych transmitancji względem zmiennej zespolonej $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, dla układów z czasem ciągłym i $z = \rho e^{j\theta} \in \mathbb{C}$, dla układów z czasem dyskretnym w postaci wymiernej

$$\mathbf{y}(\cdot) = \mathbf{T}(\cdot)\mathbf{u}(\cdot), \quad (2.6)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \left[\frac{l_{ij}(s)}{m_{ij}(s)} \right] \quad (\mathbf{T}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \left[\frac{l_{ij}(z)}{m_{ij}(z)} \right]). \quad (2.7)$$

Podobnie jak opis z wykorzystaniem równań (2.2) czy (2.3) macierze transmitancji operatorowych $\mathbf{T}(s)$ czy $\mathbf{T}(z)$ charakteryzują właściwości dynamiczne układu, stanowiąc jedną z jego form opisu wejściowo-wyjściowego.

W ogólnym przypadku opisem wielowymiarowych układów dynamicznych ciągłych lub dyskretnych, zgodnym z przyjętym w pracy ujęciem wielomianowym, mogą być równania w postaci:

$$\begin{aligned} P(\cdot)x_p(\cdot) &= Q(\cdot)u(\cdot) \\ y(\cdot) &= R(\cdot)x_p(\cdot) + V(\cdot)u(\cdot), \end{aligned} \quad (2.8)$$

w których $u(\cdot)$ i $y(\cdot)$ są transformatami sygnałów wejściowych i wyjściowych, a $x_p(\cdot)$ jest wektorem transformat sygnałów wewnętrznych układu $x_p(\cdot) \in R^k$ dla $k \leq n$, zwanym pseudostanem układu (ang. *partial state*). Macierze transmitancji operatorowych tak opisanego układu przyjmują wówczas postać:

$$T(\cdot) = R(\cdot)P^{-1}(\cdot)Q(\cdot) + V(\cdot), \quad (2.9)$$

w których $R(\cdot)$, $P(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $V(\cdot)$ są macierzami wielomianowymi.

Szczególnym przypadkiem tego opisu są

$$P(s) = sI_n - A \text{ lub } P(z) = zI_n - A \quad (2.10)$$

oraz

$$Q(\cdot) = B, \quad R(\cdot) = C \text{ i } V(\cdot) = D \quad (2.11)$$

wiążące macierz transmitancji (2.7) z macierzami A , B , C , D w opisie (2.2) lub (2.3).

Innym szczególnym przypadkiem powyższych (dwustronnych) ułamków macierzowych są opisy jednostronnych macierzowych ułamków (wielomianowych), z których największe znaczenie mają postacie prawostronnie lub lewostronnie względnie pierwsze (odpowiednio *p.w.p.* i *l.w.p.*)

$$T(\cdot) = C(\cdot I_n - A)^{-1}B + D = B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot) \quad (2.12)$$

$$T(\cdot) = C(\cdot I_n - A)^{-1}B + D = A_2^{-1}(\cdot)B_2(\cdot) \quad (2.13)$$

z macierzami wielomianowymi: mianownikowymi $A_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$, $A_2(\cdot) \in R[\cdot]^{p \times p}$ oraz licznikowymi $B_1(\cdot) \in R[\cdot]^{p \times m}$ i $B_2(\cdot) \in R[\cdot]^{p \times m}$ względem zmiennych zespolonych $s = \sigma + j\omega \in C$ dla układów z czasem ciągłym i $z = \rho e^{j\theta} \in C$ dla układów z czasem dyskretnym, nad ciałem liczb rzeczywistych R . Tak zdefiniowane ułamkowe postacie wielomianowe opisują w pełni sterowalne i obserwowalne części analizowanego układu dynamicznego.

Dla układów opisywanych macierzami transmitancji właściwych (którym odpowiadają opisy w przestrzeni stanów z macierzą tranzycyjną $D \neq \mathbf{0}$) spełnione są odpowiednio warunki:

$$\deg_{ci} B_1(\cdot) \leq \deg_{ci} A_1(\cdot); \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.14)$$

i

$$\deg_{rj} B_2(\cdot) \leq \deg_{rj} A_2(\cdot); \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (2.15)$$

przy czym zwykle wymaga się, aby (nieosobliwe) macierze mianownikowe powyższych opisów były odpowiednio: kolumnowo zredukowane i wierszowo zredukowane. Dla układów z macierzą $D=0$ we wzorach (2.14) i (2.15) obowiązuje znak nierówności ostrej.

Istnieje wiele metod wyznaczania *p.w.p.* i *l.w.p.* macierzowych ułamków wielomianowych macierzy transmitancji, a ich szczegółowy opis znajduje się np. w pracach [55; 111; 112; 183; 225; 254]. Zadanie odwrotne, czyli wyznaczenie opisu układu w przestrzeni stanów z danego opisu macierzy transmitancji w postaci sfaktoryzowanej znaleźć można m.in. w pracach [13; 110; 111; 114; 126].

2.3. Podstawy rachunku i modelowania układów niecałkowitego rzędu

Rachunek niecałkowitego rzędu wprowadza dla obu operacji, różniczkowania i całkowania, operator ${}_t D_t^r$, w którym t_o i t określają granice operacji, odpowiednio różniczkowania i całkowania, a $r \in \mathbb{R}$ określa rząd operatora. W ogólności rząd operatora r może być liczbą zespoloną [177]. Operator różniczko-całkowania dany jest jako

$${}_t D_t^r = \begin{cases} \frac{d^r}{dt^r} & r > 0 \\ 1 & r = 0 \\ \int_{t_o}^t (d\tau)^r & r < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Spośród wielu definicji pochodno-całki ułamkowego rzędu najbardziej popularne są definicje Grunwalda-Letnikova, Riemanna-Liouville'a oraz Caputo [113; 173; 189]. Według definicji Grunwalda-Letnikova pochodną tę liczymy, wykorzystując zależność:

$${}_t D_t^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-t_o}{h} \rceil} (-1)^j \binom{r}{j} f(t-jh), \quad (2.17)$$

gdzie symbol $\lceil \cdot \rceil$ oznacza część całkowitą.

Definicja Riemanna-Liouville'a określa pochodno-całkę ułamkowego rzędu jako

$${}_t D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_o}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau \quad (2.18)$$

dla $n-1 < r < n$, z symbolem $\Gamma(\cdot)$ oznaczającym funkcję Gamma.

Według definicji Caputo, pochodno-całkę ułamkowego rzędu obliczamy z zależności:

$${}_t D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \int_{t_o}^t (t-\tau)^{n-r-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

dla $n-1 < r < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Każda z powyższych definicji posiada odpowiednie uwarunkowania, określające teoretyczne i praktyczne możliwości jej wykorzystania. Jedną z nich jest np. postać transformaty Laplace'a. Obliczając transformaty Laplace'a pochodnych niecałkowitego rzędu Riemanna-Liouville'a i Caputo określonych wzorami (2.18) i (2.19) otrzymujemy odpowiednio wyrażenia:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} {}_0 D_t^r f(t) dt = s^r F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0 D_t^{r-k-1} f(t) \Big|_{t=0} \quad (2.20)$$

dla $n-1 < r < n$, oraz

$$\int_0^{\infty} e^{-st} {}_{t_0} D_t^r f(t) dt = s^r F(s) - \sum_{k=1}^n s^{r-k} f^{(k-1)}(t_0^+), \quad (2.21)$$

z których wynika jednoznaczna interpretacja warunków początkowych, jako pochodnych całkowitego rzędu funkcji $f(t)$ jedynie dla definicji Caputo ze wzoru (2.21).

Szczególne znaczenie praktyczne w układach sterowania cyfrowego posiada definicja pochodno-całki Grunwalda-Letnikova z zależności (2.17). Przyjmując rekurencyjną postać poszczególnych współczynników występujących we wzorze (2.17) uogólnionego symbolu Newtona jako:

$$\begin{cases} c_0^r = 1 \\ c_j^r = c_{j-1}^r \left(1 - \frac{r+1}{j} \right), j=1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.22)$$

definicję Grunwalda-Letnikova można zapisać w bardzo wygodnej do implementacji postaci:

$${}_{t_0} D_t^r f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{t-t_0}{k} \right)^{-r} \sum_{j=0}^k c_j^r f\left(t - j \frac{t-t_0}{k}\right). \quad (2.23)$$

W praktyce suma występująca w powyższej definicji musi posiadać skończoną liczbę wartości L (liczbę próbek funkcji $f(t)$), a popełniany błąd ε oszacowania pochodnej można określić z zależności

$$L \geq \left(\frac{M}{\varepsilon |\Gamma(1-r)|} \right)^{1/r}, \quad (2.24)$$

gdzie M oznacza maksymalną wartość funkcji $f(t)$ w poszczególnych punktach.

Transformata Laplace'a pochodnej ułamkowego rzędu według definicji Grunwalda-Letnikova (2.23) może zostać wyznaczona jedynie dla $r \in [0, 1]$ i jest wyrażona wzorem [113]

$$\int_0^{\infty} e^{-st} {}_{t_0} D_t^r f(t) dt = s^r F(s). \quad (2.25)$$

Dynamika modelowanego obiektu regulacji może zostać opisana równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu [189]

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t), \quad (2.26)$$

gdzie $D^\gamma \equiv {}_0 D_t^\gamma$, a_k i α_k $k=0,1,\dots,n$ oraz b_l i β_l $l=0,1,\dots,m$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Bez utraty ogólności przyjmuje się $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ i $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$.

Biorąc pod uwagę transmitancje Laplace'a poszczególnych operatorów (2.20), (2.21) i (2.25), przy zerowych warunkach początkowych, transmitancję ciągłą ułamkowego rzędu przedstawia wyrażenie

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}, \quad (2.27)$$

gdzie $y(s)$ i $u(s)$ są transformatami Laplace'a sygnałów wyjściowego i wejściowego.

Właściwości obiektu niecałkowitego rzędu LTI mogą zostać opisane również z wykorzystaniem równań stanu i wyjść

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^r \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Jak pokazano w pracy [168], konwersja pomiędzy modelami ze wzorów (2.27) i (2.28) może być przeprowadzana w taki sam sposób jak dla układów całkowitego rzędu. Rząd r powinien mieć wówczas tę samą wartość dla wszystkich stanów modelu $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. W ogólności mógłby to być operator ${}_0 D_t^q$ z $q = \{q_1, \dots, q_n\}$.

Dyskretna wersja modelu niecałkowitego rzędu (2.27) wymaga wprowadzenia dyskretnego aproksymatora operatora pochodno-całki. Przyjmuje ona wówczas postać:

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1} (w(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 (w(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1} (w(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 (w(z^{-1}))^{\alpha_0}}, \quad (2.29)$$

gdzie $(w(z^{-1}))$ oznacza dyskretny ekwiwalent operatora Laplace'a s wyrażonego jako funkcja zmiennej z lub operatora przesunięcia z^{-1} .

Definiując dyskretną różnicę ułamkowego rzędu r funkcji dyskretnej $f(k)$ jako [62; 216]:

$${}_{k_0} \Delta_k^r f(k) = \sum_{j=0}^{k-k_0} c_j^r f(k-j) \quad (2.30)$$

z c_j^r zdefiniowanymi przez równanie (2.22) otrzymuje się dyskretny model liniowy ułamkowego rzędu w przestrzeni stanu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k) - \sum_{j=1}^{k+1} c_j^r \mathbf{x}(k+1-j) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (2.31)$$

gdzie $\mathbf{A}_d = \mathbf{A} - \mathbf{I}_n$.

Macierz transmitancji dyskretnych ułamkowego rzędu dla układu MIMO obliczyć można z zależności [62]:

$$\mathbf{G}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} g_{11}(z^{-1}) & \dots & g_{1m}(z^{-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{l1}(z^{-1}) & \dots & g_{lm}(z^{-1}) \end{bmatrix} = \mathbf{C} \left[\mathbf{I}_n \sum_{j=0}^L c_j^r z^{-j+1} - \mathbf{A}_d \right]^{-1} \mathbf{B}, \quad (2.32)$$

gdzie L , tak jak w zależności (2.24), oznacza skończoną liczbę wartości stanu obiektu.

3. Wybrane problemy odsprzęgania obiektów MIMO

3.1. Wprowadzenie

Najważniejszą cechą układów dynamicznych o wielu wejściach i wielu wyjściach jest wzajemne powiązanie ich wejść i wyjść. Właściwość ta może czynić proces syntezy układu sterowania bardzo skomplikowanym, gdyż ostatecznie każdy sygnał wejściowy może wpływać na każdy sygnał wyjściowy. Przykładem mogą być obiekty ruchome, o wielu stopniach swobody ruchu, tj. manipulatory, wszelkiego rodzaju obiekty pływające czy samoloty.

Generalnie istnieją dwa sposoby rozwiązania tego problemu. Pierwszy polega na ustaleniu poziomu zależności pomiędzy poszczególnymi sygnałami, doborze odpowiednich wejść i wyjść i traktowaniu układu jako zestawu obiektów SISO. W przypadku tym akceptuje się wzajemne oddziaływanie tych układów, a ich niwelacja jest zadaniem poszczególnych regulatorów. Określanie poziomów zależności odbywa się najczęściej eksperymentalnie lub na podstawie odpowiednich wskaźników, np. RGA (ang. *Relative Gain Array*) i jego pochodnych.

Drugi sposób polega na odsprzężeniu układu, to jest znalezieniu odpowiedniego sprzężenia zwrotnego i najczęściej prekompensatora, po zastosowaniu których określone wejścia lub grupa wejść odsprzęgniętego układu będzie oddziaływała jedynie na konkretne, z góry ustalone, wyjścia. Po odsprzęgnięciu macierz transmitancji układu przyjmuje postać diagonalną (lub blokowo diagonalną), przez co system sterowania obiektem MIMO zostaje podzielony na mniejsze podsystemy, najczęściej typu SISO. Takie eliminowanie niepożądanych wpływów występujących w stanach przejściowych i ustalonych układu nazywa się odsprzężaniem dynamicznym (ang. *dynamic decoupling*). Jeśli ta eliminacja dotyczy jedynie stanów ustalonych pracy układu, to takie odsprzężanie nosi nazwę odsprzężania statycznego (ang. *static decoupling*).

W tym rozdziale przedstawiono wyniki analizy jednego z algorytmów dynamicznego odsprzężania. W wersji dla obiektów o liczbie wejść równej lub większej od liczby wyjść odsprzęganego obiektu algorytm ten przeanalizowano i opracowano szczegółowo w ramach

pracy doktorskiej autora [63]. W niniejszej monografii analiza i sam algorytm rozszerzony został o problemy odsprzęgania obiektów o liczbie wejść mniejszej niż liczba wyjść. Analizując problemy związane z parowaniem i grupowaniem wejść i wyjść odsprzężonego układu przedstawiono również możliwości wykorzystania badanego algorytmu w układach rekonfigurowalnych. Część z prezentowanych tu wyników została opublikowana w pracach [64; 69]. Opis algorytmu dynamicznego odsprzęgania uzupełniono również o krótką prezentację celu i sposobu odsprzęgania statycznego [16].

Wynikiem dotychczasowych badań są algorytmy pozwalające na projektowanie układów precyzyjnego sterowania obiektów MIMO (kwadratowych, lewostronnie i prawostronnie odwracalnych) oraz na analizę off-line i przygotowanie procedur postępowania w przypadku rekonfiguracji układu sterowania wymaganych np. po awarii urządzeń wykonawczych układu.

Ostatnią część rozdziału poświęcono analizie możliwości dynamicznego odsprzęgania układów MIMO niecałkowitego rzędu. Z wykorzystaniem kilku przykładów przedstawiono podobieństwa i różnice w syntezie ułamkowych układów odsprzęgających w stosunku do układów całkowitego rzędu. Pokazano możliwość wykorzystania metod wielomianowych, w tym analizowanego w pracy algorytmu dynamicznego odsprzęgania, do syntezy układów odsprzęgających obiektów dynamicznych MIMO niecałkowitego rzędu, wskazując jednocześnie wpływ sposobu realizacji pochodnej ułamkowego rzędu na możliwość odsprzęgnięcia układu.

3.2. Statyczne odsprzęganie układów MIMO

Jeśli eliminowanie niepożądanych interakcji zachodzących między sygnałami w układzie sterowania dotyczy jedynie stanów ustalonych, to taki rodzaj odsprzęgania nazywa się odsprzęganiem statycznym (ang. *static decoupling*).

Realizacja zadania statycznego odsprzęgania dla stabilnego wielowymiarowego obiektu dynamicznego (2.2) (lub (2.3)) może zostać zrealizowana poprzez zastosowanie statycznego prekompensatora

$$\mathbf{u}(\cdot) = \mathbf{G}\mathbf{q}(\cdot) \quad (3.1)$$

opisywanego (liczbową) macierzą $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times l}$. Sygnałami wejściowymi do układu odsprzężonego statycznie jest wektor zewnętrznych sygnałów $\mathbf{q}(\cdot) \in \mathbb{R}^l$, a sygnałami wyjściowymi – wyjścia układu odsprzęganego (obiektu) $\mathbf{y}(\cdot) \in \mathbb{R}^l$.

Typowym wymaganiem statycznego odsprzęgania jest taki dobór prekompensatora \mathbf{G} , aby spełnić równanie:

$$\mathbf{K}_p \mathbf{G} = \mathbf{I}_l, \quad (3.2)$$

w którym $\mathbf{K}_p \in R^{l \times m}$ jest macierzą wzmocnień obiektu. Wartości liczbowe tej macierzy można określić z zależności:

$$\mathbf{K}_p = [C(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]_{|s=0} = C(-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.3)$$

dla układów ciągłych i

$$\mathbf{K}_p = [C(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]_{|z=1} = C(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.4)$$

dla układów z czasem dyskretnym.

Gdy opisami odsprężanych układów są macierze transmitancji, dane w postaci macierzowych ułamków wielomianowych, odpowiednio wzory (2.12) i (2.13), macierze wzmocnień obiektu można obliczyć ze wzorów

$$\mathbf{K}_p = [\mathbf{B}_1(0)\mathbf{A}_1^{-1}(0)] \text{ lub } \mathbf{K}_p = [\mathbf{A}_2^{-1}(0)\mathbf{B}_2(0)] \quad (3.5)$$

dla układów ciągłych i

$$\mathbf{K}_p = [\mathbf{B}_1(1)\mathbf{A}_1^{-1}(1)] \text{ lub } \mathbf{K}_p = [\mathbf{A}_2^{-1}(1)\mathbf{B}_2(1)] \quad (3.6)$$

dla układów z czasem dyskretnym.

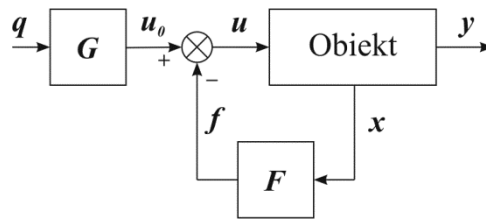
Jeśli odsprężany obiekt ma jednakową liczbę wejść i wyjść ($m=l$), to człon \mathbf{G} wyznacza się wprost przez inwersję jego macierzy wzmocnień \mathbf{K}_p – o ile macierz \mathbf{K}_p będzie nieosobliwa. Dla obiektów o $m>l$ człon ten można wyznaczyć przez pseudoinwersję wyrażenia (3.5) lub (3.6). Należy przy tym zaznaczyć, że choć opisy (2.2) (lub (2.3)) układu odsprężanego są sobie równoważne, to obliczenia macierzy \mathbf{G} przeprowadzone według wzorów (3.5) lub (3.6) mogą dawać różne wyniki dla tego samego obiektu.

Ze względów praktycznych statyczne odsprężanie układów o $m<l$ pomiędzy zewnętrznymi sygnałami wejściowymi $\mathbf{q}(\cdot) \in R^l$ i wyjściowymi $\mathbf{y}(\cdot) \in R^l$ za pomocą statycznego prekompensatora $\mathbf{G} \in R^{m \times l}$ jest niemożliwe.

W przypadku, gdy odsprężany obiekt jest niestabilny, zadanie statycznego odsprężania może zostać zrealizowane poprzez zastosowanie statycznego sprzężenia zwrotnego

$$\mathbf{u}(\cdot) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(\cdot) + \mathbf{G}\mathbf{q}(\cdot) \quad (3.7)$$

od wektora stanu $\mathbf{x}(\cdot) \in R^n$ układu odsprężanego w połączeniu ze statycznym prekompensatorem $\mathbf{G} \in R^{m \times l}$ jak na rysunku 3.1. Statyczny prekompensator \mathbf{G} dobiera się wówczas dla ustabilizowanego obiektu ze sprzężeniem zwrotnym $-\mathbf{F}\mathbf{x}(\cdot)$. Jeśli wektor stanu obiektu jest niedostępny pomiarowo, to można go zrekonstruować przez obserwator Luenbergera (filtr Kalmana).



Rys. 3.1. Struktura układu odsprzęganego statycznie

Uwaga: Zagadnienie statycznego odsprzęgnięcia przedstawiono przy założeniu, że na odsprzęgany obiekt nie działają żadne (niemierzalne) zakłócenia. Wyjątkiem są działające na obiekt zakłócenia $w(\cdot)$ i $v(\cdot)$ typu biały szum gaussowski (odpowiednio dyskretne białe szумы gaussowskie) o znanych macierzach kowariancji, pod warunkiem, że mają one zerowe wartości średnie. Przy stałych (niezanikających) zakłóceniach deterministycznych $r(\cdot)$ i/lub przy niezerowych wartościach średnich zakłóceń stochastycznych $w(\cdot)$ i $v(\cdot)$ działających na obiekt, wyjścia $y(\cdot)$ w układzie odsprzęgniętym statycznie mogą nie osiągać wartości zgodnych z sygnałami $q(\cdot)$.

3.3. Dynamiczne odsprzęgnięcie układów MIMO

Ogólnym wymaganiem dynamicznego odsprzęgnięcia wielowymiarowego układu o m wejściach i l wyjściami jest doprowadzenie do sytuacji, w której pewna, określona grupa wejść będzie miała wpływ wyłącznie na wartości i przebieg zmian w określonej grupie sygnałów wyjściowych układu, z eliminacją wszystkich innych wpływów pomiędzy tak utworzonymi grupami wejść i wyjść. Nazywa się to dynamicznym odsprzęgnięciem blokowym (ang. *dynamic block decoupling*).

Jeśli celem dynamicznego odsprzęgnięcia jest utworzenie oddzielnych par sygnałów, w których jeden sygnał wejściowy będzie oddziaływał wyłącznie na wybrany jeden sygnał wyjściowy układu, będzie to dynamiczne odsprzęgnięcie diagonalne (ang. *diagonal dynamic decoupling*), zwane także autonomizacją. Jest to najbardziej rygorystyczne, ale i najbardziej typowe wymaganie stawiane dynamicznym układom MIMO, w których jedno wejście sterowanego układu ma wpływ tylko na jedno, określone jego wyjście w stanach przejściowych (i ustalonych) układu.

Eliminacja wzajemnych oddziaływań pomiędzy wejściami i wyjściami układów dynamicznych MIMO jest przedmiotem badań od wielu lat. Począwszy od pracy [171] lista opracowań na ten temat jest bardzo długa, a do ciekawszych pozycji z ostatnich 25 lat należą [4; 36; 39; 41; 51; 56; 57; 59; 86; 87; 97; 102; 123-125; 137; 146; 148; 151; 159; 180–182; 186; 188; 199; 202; 213; 238; 239; 246; 251; 255; 256; 259]. Jednak pomimo tak dużego zainteresowania wiele problemów nie zostało jeszcze rozwiązanych. Na przykład większość z proponowanych rozwiązań pozwala na istnienie w odsprzężonym układzie ukrytych modów, które (jeśli będą niestabilne) mogą skutkować jego niestabilnością. Jak pokazano

w pracy [136] problem diagonalizacji układu z zapewnieniem jego stabilności może zostać zawsze rozwiązany przy użyciu regulatora 2DOF. W pracy [127] przedstawiono metodę parametryzacji regulatora odsprężającego zapewniającą stabilność układu z jednoczesnym rozwiązaniem problemu optymalnej lokalizacji biegunów układu. W pracach [147] i [181] prezentowane są metody odsprężania z zapewnieniem stabilności dla obiektów odwracalnych z pokrywającymi się pojedynczymi niestabilnymi biegunami i zerami.

We wcześniejszych pracach autora niniejszej monografii [19–21; 63; 66] analizowano i opracowano algorytm dynamicznego odsprężania dla liniowych, sterowalnych i obserwowalnych obiektów o liczbie wejść równej lub większej od liczby wyjść, w ogólności niestabilnych i nieminimalnofazowych. Algorytm ten zapewnia pełne dynamiczne odsprężanie oraz swobodną lokalizację biegunów układu po odsprężeniu, a w układach sterowania wielofunkcyjnego [12; 20; 66] zerowe błędy regulacji i śledzenia w stanach ustalonych pracy układu.

W niniejszym rozdziale przedstawiono dalszą analizę problemu dynamicznego odsprężania, rozciągając ją na obiekty o liczbie wyjść większej niż liczba jego wejść, problemy grupowania wejść i wyjść odsprężanego obiektu oraz problemy związane z rekonfiguracją regulatora odsprężającego w sytuacji awarii układów wykonawczych układu sterowania. Wyposażone w systemy diagnostyki przemysłowej układy regulacji tolerujące uszkodzenia są jednym z bardziej dynamicznie badanych problemów automatyki [34; 121; 122].

Odsprężanie blokowe układu dokonuje się dla przyjętego podziału sygnałów wyjściowych $\mathbf{y}(\cdot) \in R^l$ i wejściowych $\mathbf{q}(\cdot) \in R^p$ na bloki (grupy sygnałów)

$$\mathbf{y}(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_i(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k(\cdot) \end{bmatrix}, \mathbf{y}_i(\cdot) \in R^{l_i}; \mathbf{q}(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_k(\cdot) \end{bmatrix}, \mathbf{q}_i(\cdot) \in R^{p_i}, \quad (3.8)$$

gdzie l_1, l_2, \dots, l_k oraz p_1, p_2, \dots, p_k są zbiorami całkowitych liczb dodatnich spełniających warunki

$$\sum_{i=1}^k l_i = l; \sum_{i=1}^k p_i = p. \quad (3.9)$$

W przypadku odsprężania diagonalnego (autonomizacji) $p=l$ oraz $l_i = p_i = 1$ dla $i=1, 2, \dots, l$.

Zadania dynamicznego odsprężania mogą być realizowane z wykorzystaniem zarówno elementów statycznych, jak i dynamicznych użytych w sprzężeniu zwrotnym lub jako kaskadowych prekompensatorów. Jednym z ważnych postulatów jest to, aby układ po dynamicznym odsprężeniu miał możliwie niski rząd. Z tego punktu widzenia najlepszym

rozwiązaniem jest stosowanie statycznych sprzężeń zwrotnych od wektora stanu w połączeniu ze statycznym prekompensatorem

$$\mathbf{u}(\cdot) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(\cdot) + \mathbf{G}\mathbf{q}(\cdot), \quad (3.10)$$

z macierzami liczbowymi $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Odsprzęganie za pomocą statycznego sprzężenia z macierzami \mathbf{F} i \mathbf{G} nie gwarantuje jednak spełnienia wielu ważnych cech układu, poza odsprzężeniem diagonalnym lub blokowym. Układ po takim odsprzężeniu może być niestabilny, co np. uniemożliwi jego wykorzystanie do zadań sterowania w pętli otwartej (sterowania ręcznego) albo też może być po odsprzężeniu nieobserwowalny i/lub niesterowalny, co uniemożliwi spełnienie wymagań stawianych wtedy, gdy będzie on częścią automatycznego układu sterowania.

Główną przyczyną wielu kłopotów powstających przy dynamicznym odsprzęganiu są nieminimalnofazowe zera transmisyjne układu odsprzęganego, a ściślej rzecz ujmując ich podzbiór zawierający tzw. skrośne zera transmisyjne (ang. *interconnection transmission zeros*). Po odsprzężeniu stają się one często niestabilnymi biegunami układu, których położenia nie można zmieniać za pomocą sprzężenia ze wzoru (3.10) [251].

Istnienie skrośnych zer transmisyjnych zawsze utrudnia realizację dynamicznego odsprzęgania, powodując pojawienie się niesterowalnych i/lub nieobserwowalnych części w układach otrzymanych po odsprzężeniu, zwłaszcza przy stosowaniu sprzężenia z równania (3.10). W przypadku, gdy skrośne zera transmisyjne będą nieminimalnofazowe, układy otrzymane po odsprzężeniu będą niestabilne (nie będą spełniać warunków wewnętrznej stabilności).

Możliwości dynamicznego odsprzęgania można zwiększyć, zastępując kaskadowy człon statyczny \mathbf{G} dynamicznym członem kaskadowym $\mathbf{G}(\cdot)$ zgodnie z prawem

$$\mathbf{u}(\cdot) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(\cdot) + \mathbf{G}(\cdot)\mathbf{q}(\cdot), \quad (3.11)$$

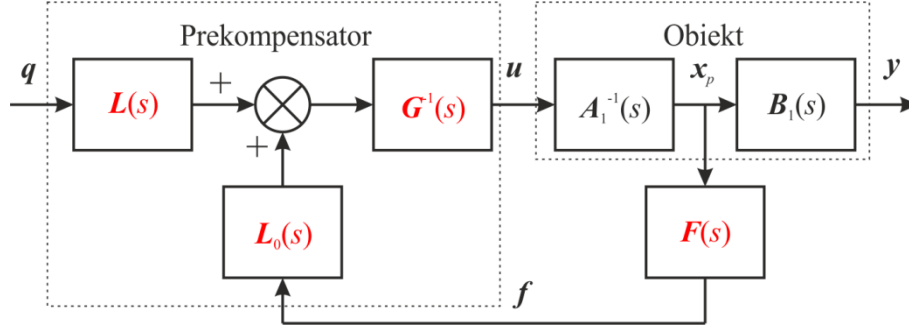
w którym macierz \mathbf{F} realizuje statyczne sprzężenie zwrotne od (dostępnego) wektora stanu układu odsprzęganego. W przypadku, gdy wektor stanu układu odsprzęganego jest niedostępny pomiarowo, można go zastąpić sprzężeniem

$$\mathbf{u}(\cdot) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(\cdot) + \mathbf{G}(\cdot)\mathbf{q}(\cdot), \quad (3.12)$$

w którym $\hat{\mathbf{x}}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ jest estymowanym (rekonstruowanym) wektorem stanu układu odsprzęganego za pomocą obserwatora Luenbergera (pełnego lub zredukowanego) rzędu albo (stacjonarnego) filtru Kalmana. Zastosowanie obserwatora lub filtru powoduje, *de facto*, zmianę charakteru sprzężenia (3.10) ze statycznego od wektora stanu, na dynamiczne od wyjść układu odsprzęganego. Ten typ sprzężenia stanowi najbardziej uniwersalny i skuteczny sposób dynamicznego odsprzęgania układów o jednakowej ($m=l$) i niejednakowej ($m>l$) liczbie wejść i wyjść, zarówno minimalno- jak i nieminimalnofazowych.

Dynamiczne odsprężanie układów MIMO dla zadań sterowania manualnego

Przy odsprężaniu układów opisanych odwracalnymi lub prawostronnie odwracalnymi (dla $m \geq l$) macierzami (właściwych) transmitancji danych w postaci prawostronnego ułamka macierzowego (2.12) $T(\cdot) = B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$ zastosowanie ma układ o strukturze przedstawionej na rysunku 3.2.



Rys. 3.2. Struktura układów dynamicznego odsprężania przy dostępnym wektorze stanu w ujęciu wielomianowym

Zgodnie ze schematem blokowym, przedstawionym na rysunku 3.2, przyjęte prawo dynamicznego odsprężania w dziedzinach operatorowych $s \in C$ (odpowiednio $z \in C$) ma postać:

$$u(\cdot) = G^{-1}(\cdot)L(\cdot)q(\cdot) + G^{-1}(\cdot)L_0(\cdot)f(\cdot) = G^{-1}(\cdot) \begin{bmatrix} L(\cdot) & L_0(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(\cdot) \\ f(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

gdzie $q(\cdot)$ jest wektorem transformat sygnałów zewnętrznych $q(\cdot) \in R^p$, natomiast $f(\cdot)$ – transformatą wektora sygnałów sprzężenia zwrotnego realizowanego od wektora stanu $x(\cdot)$ układu odsprężanego zgodnie z zależnością

$$f(\cdot) = F(\cdot)x_p(\cdot) \triangleq Fx(\cdot), \quad (3.14)$$

w której $x_p(\cdot)$ jest wektorem transformat pseudostanu (ang. *partial state*) układu odsprężanego, a $F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ macierzą wielomianową spełniającą nierówności $\deg_{ci} F(\cdot) < \deg_{ci} A_1(\cdot)$, $i=1,2,\dots,m$. Bez utraty ogólności można przyjąć we wzorze (3.13), że $L_0(\cdot) = I_m$.

Macierz transmitancji kaskadowego członu dynamicznego poszukiwana jest w postaci l.w.p. ułamka macierzowego $G^{-1}(\cdot)L(\cdot)$, z macierzami wielomianowymi spełniającymi warunki $\deg_{rj} L(\cdot) \leq \deg_{rj} G(\cdot)$, $j=1,2,\dots,m$, przy $G(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ wierszowo właściwej (wierszowo zredukowanej).

W przypadkach, gdy wektor stanu układu odsprężanego będzie niedostępny pomiarowo, sprzężenie zwrotne z zależności (3.14) będzie realizowane z wykorzystaniem wektora stanu $\hat{x}(\cdot)$ rekonstruowanego (estymowanego) przez obserwator Luenbergera albo stacjonarny filtr Kalmana

$$\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{F}(\cdot) \mathbf{x}_p(\cdot) \triangleq \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}}(\cdot). \quad (3.15)$$

Opisem układu z rysunku 3.2 z obiektem z równania (2.12) objętym sprzężeniem ze wzoru (3.13) jest macierz transmitancji

$$\mathbf{T}_{yq}(\cdot) = \mathbf{B}_1(\cdot) [\mathbf{G}(\cdot) \mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot)]^{-1} \mathbf{L}(\cdot), \quad (3.16)$$

która dla układu dynamicznie odsprzęgniętego powinna przyjąć diagonalną postać zapisaną w postaci *p.w.p.* macierzowego ułamka wielomianowego

$$\mathbf{T}_{yq}(\cdot) = \mathbf{T}_d(\cdot) = \mathbf{N}(\cdot) \mathbf{D}^{-1}(\cdot), \quad (3.17)$$

w którym

$$\mathbf{N}(\cdot) = \text{diag}[\mathbf{N}_{ii}(\cdot), i=1, 2, \dots, k], \quad \mathbf{N}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times p_i} \quad (3.18)$$

i

$$\mathbf{D}(\cdot) = \text{diag}[\mathbf{D}_{ii}(\cdot), i=1, 2, \dots, k], \quad \mathbf{D}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{p_i \times p_i}. \quad (3.19)$$

Synteza macierzy $\mathbf{N}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times p}$ i $\mathbf{D}(\cdot) \in R[\cdot]^{p \times p}$, które stanowią wielomianowy opis układu po dynamicznym odsprzężeniu, czyli wyznaczenie macierzy wielomianowych $\mathbf{G}(\cdot)$, $\mathbf{L}(\cdot)$ i $\mathbf{F}(\cdot)$ opisujących elementy sprzężenia zwrotnego ze wzoru (3.13), zależy przede wszystkim od tego, czy macierz transmitancji z opisu (2.12) układu odsprzęganego ma (lub nie ma) nieminimalnofazowe zera transmisyjne. W szczególności konkretne algorytmy syntezy układów odsprzężonych dynamicznie zależą od tego, czy wśród nieminimalnofazowych zer transmisyjnych będą skrośne zera transmisyjne.

Przy odsprzęganiu blokowym obiektów o liczbie wejść i wyjść $m \geq l$, opisanych macierzą transmitancji we wzorze (2.12) o pełnym (normalnym) rzędzie, należy dokonać podziału macierzy licznikowej

$$\mathbf{B}_1(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{li}(\cdot) \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{lk}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

na bloki: $\mathbf{B}_{li}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times m}$, $i=1, 2, \dots, k$ odpowiadające podziałowi sygnałów wyjściowych $\mathbf{y}(\cdot)$ na grupy opisane we wzorze (3.8).

Następnie dla każdego bloku $\mathbf{B}_{li}(\cdot)$ należy wyznaczyć *n.w.l.d.* $\mathbf{N}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times l_i}$ taki, aby

$$\mathbf{B}_{li}(\cdot) = \mathbf{N}_{ii}(\cdot) \mathbf{B}_i(\cdot), \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (3.21)$$

w których $\mathbf{B}_i(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times m}$, $i=1, 2, \dots, k$ utworzą macierz $\mathbf{B}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$.

Wtedy

$$\mathbf{B}_1(\cdot) = \mathbf{N}(\cdot) \mathbf{B}(\cdot), \quad (3.22)$$

gdzie $N(\cdot) = \text{diag}[N_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k]$.

Dla tak wyznaczonej macierzy licznikowej $N(\cdot)$ z opisu (3.17) układu otrzymanego po odsprężeniu, jego macierz mianownikowa $D(\cdot)$ zgodnie z opisem (3.16) odpowiada wyrażeniu

$$\mathbf{B}(\cdot)[\mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot)]^{-1} \mathbf{L}(\cdot) = \mathbf{D}^{-1}(\cdot). \quad (3.23)$$

Mnożąc go prawostronnie przez $\mathbf{D}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot)$, otrzymamy równość

$$\mathbf{B}(\cdot)[\mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot)]^{-1} \mathbf{L}(\cdot)\mathbf{D}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot) = \mathbf{B}(\cdot), \quad (3.24)$$

którą po przekształceniu można doprowadzić do równoważnej tożsamościowo postaci

$$\mathbf{B}(\cdot)[\mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot)]^{-1} \left[\mathbf{L}(\cdot)\mathbf{D}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot) - \mathbf{B}(\cdot)[\mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot)]^{-1} \right] \equiv \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Wynika z niej, że

$$\text{rank}[\mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot) - \mathbf{L}(\cdot)\mathbf{D}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot)] \leq m-l \quad (3.26)$$

oraz to, że

$$[\mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot)]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1}(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}(\cdot) & \bar{\mathbf{L}}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.27)$$

gdzie $\bar{\mathbf{B}}(\cdot) \in R[\cdot]^{(m-l) \times m}$ i $\bar{\mathbf{L}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times (m-l)}$ są odpowiednio dobranymi macierzami wielomianowymi [97]. Ich istnienie jest warunkiem koniecznym dynamicznego odsprężania układów o niejednakowej liczbie wejść i wyjść. Określa go twierdzenie 3.1.

Twierdzenie 3.1 [97]

Dynamiczne odsprężenie układu zachowujące blokowo diagonalną (lub diagonalną) strukturę macierzy $\mathbf{D}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$, przyjętą zgodnie z podziałem z wyrażenia (3.8) i macierzą $\mathbf{N}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$, dobraną jak we wzorach (3.21)–(3.22), jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze $\bar{\mathbf{B}}(\cdot) \in R[\cdot]^{(m-l) \times m}$ i $\bar{\mathbf{L}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times (m-l)}$ pełnego rzędu takie, że

$$\mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot) - \mathbf{L}(\cdot)\mathbf{D}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot) = \bar{\mathbf{L}}(\cdot)\bar{\mathbf{B}}(\cdot). \quad (3.28)$$

Wtedy macierz systemowa układu z rysunku 3.2, po uwzględnieniu równania (3.27), przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot) & \mathbf{L}(\cdot) \\ \mathbf{B}(\cdot) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}(\cdot) & \bar{\mathbf{L}}(\cdot) \\ \mathbf{B}(\cdot) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}(\cdot) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Widać z niej natychmiast, że zbiór biegunów układu odsprężonego za pomocą sprzężenia z wyrażenia (3.13) składać się będzie z:

– biegunów niesterowalnych będących zerami $\det[\mathbf{L}(\cdot) \quad \bar{\mathbf{L}}(\cdot)]$,

- biegunów nieobserwowalnych będących zerami $\det[\mathbf{B}^T(\cdot) \quad \bar{\mathbf{B}}^T(\cdot)]$ oraz
- biegunów sterowalnych i obserwowalnych będących zerami $\det\mathbf{D}(\cdot)$.

Liczba i położenie nieobserwowalnych biegunów układu odsprzężonego za pomocą sprzężenia z wyrażenia (3.13) zależy od tego, czy odsprzężany układ ma lub nie ma skośne zera transmisyjne.

Niech $\tilde{\mathbf{G}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ będzie *n.w.l.d.* wszystkich kolumn macierzy $\mathbf{B}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$, czyli niech

$$\mathbf{B}(\cdot) = \tilde{\mathbf{G}}(\cdot) \tilde{\mathbf{B}}(\cdot), \quad (3.30)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{B}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$.

Definicja 3.1 [125]

Skrośnymi zerami transmisyjnymi układu odsprzęganego nazywamy zera wielomianu $\delta(\cdot)$ będącego największym wspólnym dzielnikiem (*n.w.d.*) wszystkich $l \times l$ minorów macierzy $\mathbf{B}(\cdot)$.

Ponieważ miejsca zerowe wielomianu $\delta(\cdot)$ będącego największym wspólnym dzielnikiem (*n.w.d.*) wszystkich $l \times l$ minorów macierzy $\mathbf{B}(\cdot)$ są również zerami wyznacznika macierzy $\tilde{\mathbf{G}}(\cdot)$, to odpowiadają one skośnym zerom transmisyjnym układu odsprzęganego. Położenia odpowiadających im nieobserwowalnych biegunów nie można zmienić z wykorzystaniem sprzężenia z wyrażenia (3.14) [97]. W przypadku, gdy zera macierzy $\tilde{\mathbf{G}}(\cdot)$ będą nieminimalnofazowe, to układ po odsprzęgnięciu nie będzie wewnętrznie stabilny.

Aby temu zapobiec autor pracy [97] zaproponował poszerzenie (ang. *augmenting*) odsprzęganego układu z wyrażenia (2.12) o dodatkowy człon dynamiczny włączony szeregowo (kaskadowo) na wejścia $\mathbf{u}(\cdot)$ oryginalnego układu odsprzęganego (rys. 3.3). Człon ten poszukiwany jest w postaci właściwej macierzy transmitancji

$$\mathbf{T}_{au}(\cdot) = \mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot), \quad (3.31)$$

w której macierze wielomianowe $\mathbf{R}_a(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ i $\mathbf{P}_a(s) \in R[\cdot]^{m \times m}$ powinny być *p.w.p.*, a macierz $\mathbf{P}_a(\cdot)$ kolumnowo zredukowana, o możliwie najmniejszym stopniu $\deg[\det \mathbf{P}_a(\cdot)]$. Algorytm wyznaczenia tych dodatkowych macierzy wielomianowych został opisany w pracy [97].

Przyjęcie dodatkowego członu dynamicznego $\mathbf{T}_{au}(\cdot) = \mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ zmienia macierz transmitancji odsprzęganego układu do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\cdot) \mathbf{T}_{au}(\cdot) &= \mathbf{B}_1(\cdot) \mathbf{A}_1^{-1}(\cdot) \mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot) = \mathbf{N}(\cdot) \tilde{\mathbf{J}}(\cdot) \mathbf{U}_1(\cdot) \hat{\mathbf{B}}(\cdot) \bar{\mathbf{P}}^{-1}(\cdot) \mathbf{R}_a^{-1}(\cdot) \mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot) = \\ &= \mathbf{N}(\cdot) \tilde{\mathbf{J}}(\cdot) \mathbf{U}_1(\cdot) \hat{\mathbf{B}}(\cdot) [\mathbf{P}_a(\cdot) \bar{\mathbf{P}}(\cdot)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

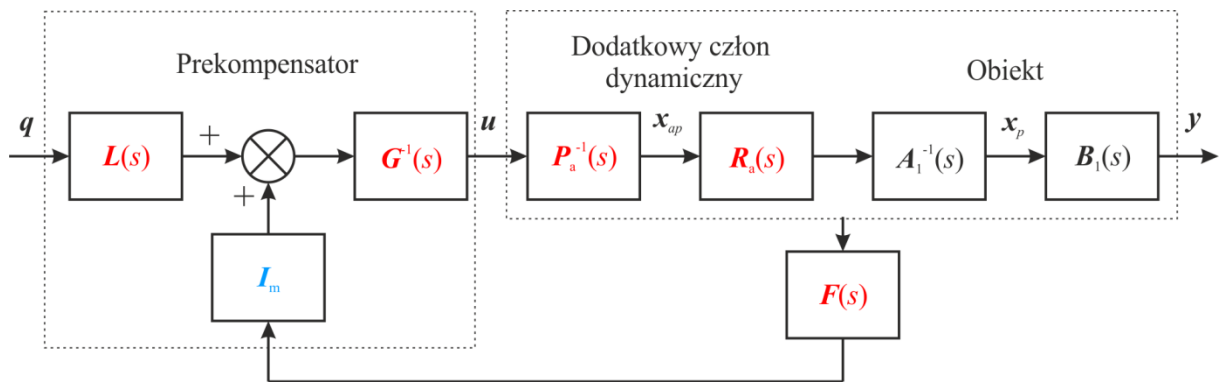
Wtedy dokonując w równaniu (3.32) podstawień

$$\begin{aligned}
 N(\cdot) &:= N(\cdot)\tilde{J}(\cdot) \\
 B(\cdot) &:= U_1(\cdot)\hat{B}(\cdot) \\
 A_1(\cdot) &:= P_a(\cdot)\bar{P}(\cdot)
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

otrzyma się macierz transmitancji

$$T(\cdot) := T(\cdot)T_{au}(\cdot) = N(\cdot)B(\cdot)A_1^{-1}(\cdot). \tag{3.34}$$

Można ją dalej traktować tak jak macierz transmitancji układu oryginalnego i wyznaczyć dla niej wszystkie potrzebne elementy sprzężenia zwrotnego ze wzoru (3.13), tj. macierze wielomianowe $G(\cdot)$, $L(\cdot)$ i $F(\cdot)$.



Rys. 3.3. Struktura układów dynamicznego odsprężania przy dostępnym wektorze stanu w ujęciu wielomianowym

Po ich wyznaczeniu należy dokonać przesunięcia członu $R_a(\cdot)P_a^{-1}(\cdot)$ do struktury dynamicznego członu kaskadowego $G^{-1}(\cdot)L(\cdot)$ z odpowiednią modyfikacją macierzy $F(\cdot)$, która tuż po zaprojektowaniu zawierać będzie w sobie informacje o macierzy sprzężeń zwrotnych F , nie od wektora stanu oryginalnego układu, lecz od wektora stanu układu poszerzonego.

W prezentowanych dalej algorytmach projektowania układów odsprężanych dla celów sterowania manualnego w otwartej pętli (a także w układach sterowania automatycznego) przesuwania dodatkowego członu dynamicznego do struktury prekompensatora dokonuje się bezpośrednio w dziedzinie czasowej, a przekształceń tych dokonuje się w dziedzinach czasowych na kanonicznych realizacjach macierzy transmitancji otrzymanych członów.

Dla uzyskania możliwie niskiego rzędu układu otrzymanego po odsprężeniu ważne jest to, aby rząd wyznaczanego członu kaskadowego $G^{-1}(\cdot)L(\cdot)$ był jak najmniejszy.

Dokonując obustronnego dzielenia równania (3.28) przez macierz $A_1(\cdot)$ otrzyma się zależność

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\cdot) - \mathbf{F}(\cdot)\mathbf{A}_1^{-1}(\cdot) &= [\mathbf{L}(\cdot)\mathbf{D}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot) + \bar{\mathbf{L}}(\cdot)\bar{\mathbf{B}}(\cdot)]\mathbf{A}_1^{-1}(\cdot) = \\ &= [\mathbf{L}(\cdot) \quad \bar{\mathbf{L}}(\cdot)] \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1}(\cdot), \end{aligned} \quad (3.35)$$

z której wynika, że rząd dynamicznego prekompensatora wynosi

$$\begin{aligned} \deg[\det \mathbf{G}(\cdot)] &= \deg \left[\det \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix} \right] + \deg[\det \mathbf{D}(\cdot)] + \\ &+ \deg \left[\det [\mathbf{L}(\cdot) \quad \bar{\mathbf{L}}(\cdot)] \right] - \deg[\det \mathbf{A}_1(\cdot)]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Zatem rząd dynamicznego członu kaskadowego (prekompensatora) $\mathbf{G}^{-1}(\cdot)\mathbf{L}(\cdot)$ będzie tym niższy, im niższe będą stopnie wyznaczników $\det[\mathbf{B}^T(\cdot) \quad \bar{\mathbf{B}}^T(\cdot)]$, $\det[\mathbf{L}(\cdot) \quad \bar{\mathbf{L}}(\cdot)]$ i $\det \mathbf{D}(\cdot)$.

Uzupełnianie wierszy macierzy $\mathbf{B}(\cdot)$

Pierwszą ku temu możliwość stwarza dobór macierzy $\bar{\mathbf{B}}(\cdot) \in R[\cdot]^{(m-l) \times m}$ dla uzupełnienia brakujących wierszy w macierzy $[\mathbf{B}^T(\cdot) \quad \bar{\mathbf{B}}^T(\cdot)]^T \in R[\cdot]^{m \times m}$ tak, aby (stabilny) wyznacznik uzupełnionej macierzy miał możliwie najniższy stopień. Uzupełnienia tego można dokonać np. tak, aby uzupełniona macierz stała się macierzą unimodularną. Wówczas układ po odsprzęgnięciu nie będzie miał nieobserwowalnych biegunów. Rozwiązanie powyższego zadania przedstawiono w pracach [16; 63].

Po ustaleniu macierzy $\bar{\mathbf{B}}(\cdot)$, w dalszych krokach należy zapewnić możliwie najniższe stopnie: $\deg[\det \mathbf{D}(\cdot)]$ oraz $\deg[\det [\mathbf{L}(\cdot) \quad \bar{\mathbf{L}}(\cdot)]]$.

Minimalizacja stopnia $\deg[\det \mathbf{D}(\cdot)]$

Z przekształcenia macierzy systemowej z wyrażenia (3.29) do równania w postaci

$$\mathbf{G}^{-1}(\cdot) [\mathbf{L}(\cdot) \quad \bar{\mathbf{L}}(\cdot)] = [\mathbf{I}_m - \mathbf{G}^{-1}(\cdot)\mathbf{F}(\cdot)\mathbf{A}_1^{-1}(\cdot)] \times \mathbf{A}_1(\cdot) \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-l} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

wynika, że dla uzyskania właściwej macierzy transmitancji dla członu $\mathbf{G}^{-1}(\cdot)\mathbf{L}(\cdot)$, macierz transmitancji występująca w wyrażeniu (3.37), tj.

$$\mathbf{A}_1(\cdot) \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1}(\cdot) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

powinna być macierzą transmitancji właściwych, przy założeniu, że macierz transmitancji $\mathbf{G}^{-1}(\cdot)\mathbf{F}(\cdot)\mathbf{A}_1^{-1}(\cdot)$ będzie ściśle właściwa.

Traktując pierwszą część wyrażenia (3.38) jak prawostronną wielomianową postać ułamkową (niewłaściwej) macierzy transmitancji, można dokonać jej przekształcenia w postać lewostronną, zgodnie z zależnością

$$\mathbf{A}_1(\cdot) \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}(\cdot)\tilde{\mathbf{P}}(\cdot). \quad (3.39)$$

Wynikiem tego przekształcenia jest para macierzy wielomianowych (*l.w.p.*) $\tilde{\mathbf{Q}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ i $\tilde{\mathbf{P}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ z macierzą $\tilde{\mathbf{Q}}(\cdot)$ wierszowo zredukowaną, przy czym dla każdego wiersza macierzy $\tilde{\mathbf{Q}}(\cdot)$ powinny być określone także indeksy $v_j = \deg_{s_j} \tilde{\mathbf{Q}}(\cdot)$, $j=1,2,\dots,m$. Niech $v = \max_j v_j$.

Wykorzystując otrzymane indeksy v_j dokonuje się dodatkowych przekształceń macierzy $\tilde{\mathbf{Q}}(\cdot)$ i $\tilde{\mathbf{P}}(\cdot)$, w wyniku których otrzymujemy:

$$\hat{\mathbf{Q}}(s) = \text{diag} \left[s^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m \right] \tilde{\mathbf{Q}}(s) \quad (3.40)$$

i

$$\hat{\mathbf{P}}(s) = \text{diag} \left[s^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m \right] \tilde{\mathbf{P}}(s) \quad (3.41)$$

dla układów ciągłych lub

$$\hat{\mathbf{Q}}(z) = \text{diag} \left[z^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m \right] \tilde{\mathbf{Q}}(z) \quad (3.42)$$

i

$$\hat{\mathbf{P}}(z) = \text{diag} \left[z^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m \right] \tilde{\mathbf{P}}(z) \quad (3.43)$$

dla układów z czasem dyskretnym.

Rozdzielając otrzymaną macierz $\hat{\mathbf{P}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ na dwa bloki

$$\hat{\mathbf{P}}(\cdot) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}^F(\cdot) & \hat{\mathbf{P}}^L(\cdot) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

uzyskujemy macierze: $\hat{\mathbf{P}}^F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$, związaną z realizacją sprzężenia zwrotnego, oraz $\hat{\mathbf{P}}^L(\cdot) \in R[s]^{m \times (m-l)}$, związaną z realizacją prekompensatora, opisanych zależnością (3.13).

Podział macierzy $\hat{\mathbf{P}}^F(\cdot)$ na kolumnowe bloki

$$\hat{\mathbf{P}}^F(\cdot) = \left[\hat{\mathbf{P}}_i^F(\cdot), i=1,2,\dots,k \right], \hat{\mathbf{P}}_i^F(\cdot) \in R[s]^{m \times l_i} \quad (3.45)$$

dostarcza istotnych informacji umożliwiających dobór macierzy $\mathbf{D}(\cdot)$, stanowiącej macierz mianownikową opisu (3.17) układu otrzymanego po jego odsprężeniu.

Zakładając, że dla każdego bloku $\mathbf{D}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times l_i}$ poszukiwanej macierzy $\mathbf{D}(\cdot) = \text{diag}[\mathbf{D}_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k]$ istnieje postać Smitha $\mathbf{S}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times l_i}$

$$\mathbf{S}_{ii}(\cdot) = \mathbf{U}_{ii}(\cdot) \mathbf{D}_{ii}(\cdot) \mathbf{V}_{ii}(\cdot) \quad (3.46)$$

z unimodularnymi macierzami $\mathbf{U}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times l_i}$ i $\mathbf{V}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times l_i}$ operacji elementarnych wykonanych odpowiednio na wierszach i kolumnach macierzy $\mathbf{D}_{ii}(\cdot)$, przyjmuje się istnienie postaci Smitha macierzy $\mathbf{D}(\cdot)$ o strukturze określonej zależnością

$$\mathbf{S}(\cdot) = \mathbf{U}(\cdot) \mathbf{D}(\cdot) \mathbf{V}(\cdot), \quad (3.47)$$

w której

$$\begin{aligned}
U(\cdot) &= \text{diag}[U_{ii}(\cdot)] \\
S(\cdot) &= \text{diag}[S_{ii}(\cdot)] \quad \text{dla } i=1,2,\dots,k. \\
V(\cdot) &= \text{diag}[V_{ii}(\cdot)]
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Wówczas macierz (właściwych) transmitancji ze wzoru (3.38) przedstawić można w postaci

$$A_1(\cdot) \begin{bmatrix} B(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D^{-1}(\cdot) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \hat{Q}^{-1}(\cdot) \hat{P}(\cdot) \begin{bmatrix} V(\cdot) S^{-1}(\cdot) U(\cdot) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \hat{Q}^{-1}(\cdot) \hat{P}^F(\cdot) V(\cdot) S^{-1}(\cdot) U(\cdot) \tag{3.49}$$

z macierzami $V_{ii}(\cdot)$ dobranymi tak, aby każda blokowa macierz $\hat{P}_i^F(\cdot) V_{ii}(\cdot)$ dla $i=1,2,\dots,k$ była kolumnowo zredukowana (kolumnowo właściwa). Wtedy obowiązuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2 [97]

Zakładając, że macierz transmitancji $G^{-1}(\cdot)L(\cdot)$ będzie właściwa, minimalne stopnie diagonalnych elementów macierzy z wyrażenia (3.47) powinny spełniać warunek:

$$\bar{s}_j^i = \deg s_j^i(\cdot) = \max \left\{ \deg_{cj} \left[\hat{P}_i^F(\cdot) V_{ii}(\cdot) \right] - \nu, 0 \right\} \tag{3.50}$$

dla $j=1,2,\dots,l_i$, $i=1,2,\dots,k$.

Warunek powyższy określa liczbę swobodnie dobieranych (sterowalnych i obserwowalnych) biegunów układu odsprzęgniętego, które będą zerami macierzy $D(\cdot)$.

Podobnie postępuje się przy wyznaczaniu macierzy $[L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)] \in R[\cdot]^{m \times m}$, tak aby miała ona wyznacznik o możliwie najniższym stopniu.

Minimalizacja stopnia $\deg[\det[L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)]]$

Mnożąc prawostronnie równanie (3.37) przez macierz $[L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)]$ otrzyma się zależność

$$G^{-1}(\cdot) = [I_m - G^{-1}(\cdot)F(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)] A_1(\cdot) \begin{bmatrix} B(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{m-l} \end{bmatrix} \times [L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)]^{-1}, \tag{3.51}$$

z której wynika, że macierz transmitancji, opisana wyrażeniem

$$A_1(\cdot) \begin{bmatrix} B(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{m-l} \end{bmatrix} [L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)]^{-1}, \tag{3.52}$$

też powinna być właściwa. Dokonując przekształcenia z prawostronnej postaci ułamkowej w lewostronną wyrażenia

$$A_1(\cdot) \begin{bmatrix} B(\cdot)D(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \Phi_D^{-1}(\cdot)\Phi_N(\cdot) \tag{3.53}$$

otrzyma się (*l.w.p.*) macierze wielomianowe $\Phi_D(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ i $\Phi_N(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ z macierzą $\Phi_D(\cdot)$ wierszowo zredukowaną, przy czym dla każdego j -tego wiersza macierzy $\Phi_D(\cdot)$ należy określić także indeksy $\mu_j = \deg_{r_j} \Phi_D(\cdot)$, $j=1,2,\dots,m$. Niech $\mu = \max_j \mu_j$.

Wykorzystując otrzymane indeksy μ i μ_j można przekształcić macierze $\Phi_D(\cdot)$ i $\Phi_N(\cdot)$, odpowiednio do postaci:

$$\hat{\Phi}_D(s) = \text{diag} \left[s^{\mu - \mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_D(s) \quad (3.54)$$

i

$$\hat{\Phi}_N(s) = \text{diag} \left[s^{\mu - \mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_N(s) \quad (3.55)$$

dla układów ciągłych, lub

$$\hat{\Phi}_D(z) = \text{diag} \left[z^{\mu - \mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_D(z) \quad (3.56)$$

i

$$\hat{\Phi}_N(z) = \text{diag} \left[z^{\mu - \mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_N(z) \quad (3.57)$$

dla układów z czasem dyskretnym.

Po zdefiniowaniu macierzy

$$\hat{L}(\cdot) = \begin{bmatrix} L(\cdot) & \bar{L}(\cdot) \end{bmatrix} \hat{W}^{-1}(\cdot), \quad (3.58)$$

dla której $\hat{W}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ jest odpowiednio dobraną macierzą unimodularną, macierz z wyrażenia (3.52) można zapisać w postaci

$$A_1(\cdot) \begin{bmatrix} B(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{m-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(\cdot) & \bar{L}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} = \hat{\Phi}_D^{-1}(\cdot) \hat{\Phi}_N(\cdot) \hat{W}(\cdot) \hat{L}(\cdot). \quad (3.59)$$

Jeśli $\hat{W}(\cdot)$ będzie dobrana tak, aby iloczyn macierzy $\hat{\Phi}_N(\cdot) \hat{W}(\cdot)$ był kolumnowo zredukowany, to zgodnie z twierdzeniem udowodnionym w pracy [97] macierz $\hat{L}(\cdot)$, która minimalizuje stopień wyznacznika macierzy $\begin{bmatrix} L(\cdot) & \bar{L}(\cdot) \end{bmatrix}$ z zachowaniem wymogu właściwości macierzy transmitancji ze wzoru (3.59), ma postać

$$\hat{L}(\cdot) = \text{diag} \left[\hat{l}_1(\cdot), \hat{l}_2(\cdot), \dots, \hat{l}_m(\cdot) \right], \quad (3.60)$$

gdzie $\hat{l}_i(\cdot)$, $i=1,2,\dots,m$ są dowolnie dobranymi (stabilnymi) wielomianami o stopniach określonych zależnością

$$\deg \hat{l}_i(\cdot) = \max \left\{ \deg_{ci} \left[\hat{\Phi}_N(\cdot) \hat{W}(\cdot) \right] - \mu, 0 \right\}. \quad (3.61)$$

Ostatecznie poszukiwane macierze $L(\cdot)$ i $\bar{L}(\cdot)$ wyznacza się odpowiednio z pierwszych l i ostatnich $m-l$ kolumn iloczynu macierzy $\hat{L}(\cdot) \hat{W}(\cdot)$.

Macierze $D(\cdot)$ oraz $\begin{bmatrix} L(\cdot) & \bar{L}(\cdot) \end{bmatrix}$, dobrane zgodnie z podanym powyżej sposobem postępowania, minimalizują

$$\deg[\det D(\cdot)] + \deg[\det[L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)]] \quad (3.62)$$

i tym samym minimalizują rząd prekompensatora $G^{-1}(\cdot)L(\cdot)$ przy zachowaniu pełnej swobody doboru stabilnych wartości dla wszystkich (sterowalnych i niesterowalnych) biegunów układu odsprzężonego blokowo lub diagonalnie.

Dla otrzymanych macierzy $[B^T(\cdot) \quad \bar{B}^T(\cdot)]^T$, $D(\cdot)$ i $[L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)]$, poszukiwane macierze wielomianowe $G(\cdot)$ i $F(\cdot)$, występujące w prawie sprzężenia zwrotnego (3.13), wyznaczone są z zależności (3.35) przez wykonanie prawostronnego dzielenia przez macierz $A_1(\cdot)$

$$\begin{aligned} & [L(\cdot) \quad \bar{L}(\cdot)] \begin{bmatrix} D(\cdot) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{m-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix} / A_1(\cdot) = \\ & = [L(\cdot)D(\cdot)B(\cdot) + \bar{L}(\cdot)\bar{B}(\cdot)] / A_1(\cdot) = G(\cdot) - F(\cdot)A_1^{-1}(\cdot), \end{aligned} \quad (3.63)$$

gdzie: $G(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ jest wynikiem, a $F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ resztą z tego dzielenia, spełniającą warunki $\deg_{ci} F(\cdot) < \deg_{ci} A_1(\cdot)$, $i=1,2,\dots,m$.

Odpowiednia realizacja (właściwej) macierzy transmitancji dla dynamicznego członu kaskadowego $G^{-1}(\cdot)[L(\cdot) \quad I_m]$ w postaci kanonicznych równań stanu w dziedzinie czasowej (np. w DPKL-B obserwowalnej) oraz wyznaczenie (liczbowej) macierzy sprzężeń zwrotnych $F \in R^{m \times n}$, na podstawie obliczonej macierzy wielomianowej $F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$, kończy projektowanie wszystkich elementów sprzężenia zwrotnego z opisu (3.13). Jeśli opis układu odsprzęganego w postaci wzoru (2.12) otrzymano z analitycznych zależności wynikających z twierdzenia strukturalnego Wolowicha, to macierz sprzężeń zwrotnych F można otrzymać wprost z zależności

$$F(\cdot) = F\hat{T}\hat{S}(\cdot), \quad (3.64)$$

gdzie \hat{T} jest (znaną) macierzą przekształcenia podobieństwa zadanych równań stanu układu odsprzęganego do postaci DPKL-B sterowalnej, a $\hat{S}(\cdot)$ macierzą wielomianową o strukturze określonej w twierdzeniu.

Tak zrealizowany system zapewnia dynamiczne odsprzężenie układu z opisu (2.12) pod warunkiem, że wektor stanu układu odsprzęganego jest dostępny pomiarowo.

Przy braku dostępności pomiarowej wektora stanu $x(\cdot) \in R^n$ układu odsprzęganego (i/lub gdy na odsprzęgany obiekt działają niemierzone zakłócenia typu biały szum gaussowski), bezpośrednie (statyczne) sprzężenie $f(\cdot) = Fx(\cdot)$ może być zastąpione sprzężeniem

$$f(\cdot) = F\hat{x}(\cdot) \triangleq F(\cdot)x_p(\cdot) \quad (3.65)$$

od wektora stanu $\hat{x}(\cdot) \in R^n$ rekonstruowanego w obserwatorze Luenbergera pełnego rzędu (lub estymowanego w stacjonarnym filtrze Kalmana).

Macierz transmitancji układu otrzymanego po odsprzęgnięciu jest opisana diagonalną p.w.p. postacią ułamkową macierzy transmitancji z wyrażenia (3.17), gdzie $N(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$

i $\mathbf{D}(\cdot) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ są *p.w.p.* Stąd macierz wzmocnień \mathbf{K}_d układu otrzymanego po odsprzęgnięciu można obliczyć odpowiednio z zależności:

$$\mathbf{K}_d = [\mathbf{N}(0)\mathbf{D}^{-1}(0)] \in \mathbb{R}^{l \times l} \quad (3.66)$$

dla układów ciągłych

$$\text{i} \quad \mathbf{K}_d = [\mathbf{N}(1)\mathbf{D}^{-1}(1)] \in \mathbb{R}^{l \times l} \quad (3.67)$$

dla układów z czasem dyskretnym. Zwykle tuż po odsprzęgnięciu nie jest to macierz jednostkowa i pozostawienie układu w tej postaci utrudniałoby manualne sterowanie obiektem.

Aby po podaniu na wejścia układu odsprzęgniętego sygnałów o zadanych wartościach $\mathbf{q} = \mathbf{y}_0$ jego wyjścia ustalały się dokładnie na wartościach $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$, należy doprowadzić macierz wzmocnień \mathbf{K}_d do macierzy jednostkowej. Dla uzyskania $\mathbf{K}_d = \mathbf{I}_l$ wystarczy dodatkowo pomnożyć (prawostronnie) macierz licznikową $\mathbf{L}(\cdot)$ dynamicznego członu kaskadowego (prekompensatora) z zależności (3.13) przez macierz $[\mathbf{D}(0)\mathbf{N}^{-1}(0)]$ (odpowiednio $[\mathbf{D}(1)\mathbf{N}^{-1}(1)]$ dla układów dyskretnych).

3.4. Grupowanie wejść i wyjść w układach MIMO

Jednym z pierwszych zadań w projektowaniu układu sterowania obiektem MIMO, w przypadku potraktowania go jako grupy niezależnych obiektów SISO lub w syntezie układu odsprzęgającego, jest przypisanie wejść i wyjść obiektu, tj. ustalenie, które wejścia będą oddziaływały na które wyjścia obiektu. Jeśli przypisanie takie nie jest oczywiste z technologicznego punktu widzenia, to odpowiedni wybór, parowanie i grupowanie I/O, może mieć duży wpływ na ostateczną postać układu sterowania. Nawet jeśli obiekt ma zostać odsprzężony, celowe jest określenie poziomów interakcji pomiędzy wyselekcjonowanymi pętlami regulacji. W przypadku zadań dynamicznego odsprzęgania, z wykorzystaniem sprzężenia od stanu obiektu sposób pogrupowania sygnałów wyjściowych $\mathbf{y}(\cdot)$ wpływa, również na możliwość pojawienia się skrośnych zer transmisyjnych.

Dla kwadratowej macierzy transmitancji $\mathbf{T}(\cdot)$ oceny oddziaływań i -tych składowych wektora $\mathbf{u}(\cdot)$ na j -te składowe wektora $\mathbf{y}(\cdot)$ można dokonać za pomocą macierzy względnych wzmocnień RGA (ang. *Relative Gain Array*) [40]. Dla stanów ustalonych są to macierze liczbowe, które oblicza się ze wzoru

$$\text{RGA}(\mathbf{T}(\cdot)) = \mathbf{K}_p * [\mathbf{K}_p^{-1}]^T, \quad (3.68)$$

gdzie \mathbf{K}_p jest macierzą wzmocnień statycznych obiektu, a znak $*$ oznacza iloczyn Hadamarda (albo Schura), w którym każdy element macierzy transmitancji $\mathbf{T}(\cdot)$ jest mnożony tylko przez odpowiadający mu element macierzy $[\mathbf{T}^{-1}(\cdot)]^T$. Dla $s = j\omega$ ($z = e^{j\omega}$) elementy

macierzy RGA są funkcjami o wartościach zespolonych określonych w przyjętym paśmie częstotliwości ω .

Poszczególne elementy macierzy RGA mogą być zarówno miarą podatności regulacyjnej obiektu, jak i miarą (na ogół niekorzystnych) interaktywnych oddziaływań poszczególnych wejść na wyjścia układu MIMO. Generalną zasadą parowania jest dobór takich wejść i wyjść obiektu, dla których odpowiadający mu współczynnik macierzy RGA jest bliski jedności, ale jednocześnie dodatni i najlepiej o niezbyt dużej wartości [116]. Pomimo prostych zasad podanych np. w pracach [40; 116; 220], w wielu przypadkach analiza RGA pozwala określić jedynie podzbiory możliwych rozwiązań eliminacji wyjść obiektu, parowania i/lub grupowania (przy odsprzęganiu blokowym). Występuje to szczególnie w przypadku, gdy te decyzje wpływają na procedury syntezy układów regulacji i mogą skutkować różnymi cechami regulatorów, np. takich jak ich rzędy. Podjęta decyzja o grupowaniu I/O może również zmienić sposób syntezy regulatora, a przez to wpływać np. na stopień trudności (wykonalności) rekonfiguracji układu sterowania.

Potrzeba analizy właściwości obiektów sterowania MIMO spowodowała powstanie wielu innych oraz pokrewnych do RGA wskaźników. Wymienić tu można: Effective Relative Gain Array (ERGA) [258], Dynamic Relative Gain Array (DRGA) [161], Nonsquare Relative Gain Array (NSRGA) [44], Nonlinear Relative Gain Array (NRGA) [166], Gramian-based measures Hankel Interaction Index Array (HIIA) [253], Participation Matrix (PM) [206]. Są one omawiane również w pracach [81; 93; 116; 220].

Dla *p.w.p.* frakcji ułamkowych macierzy transmitancji obiektu ustalenie pożądanej kolejności wyjść odsprzęganego układu technicznie odpowiada przestawieniu (permutacji) odpowiednich wierszy macierzy licznikowej $\mathbf{B}_1(\cdot)$ równoważne podstawieniu

$$\mathbf{B}_1(\cdot) := \mathbf{P}_l \mathbf{B}_1(\cdot), \quad (3.69)$$

gdzie \mathbf{P}_l jest macierzą permutacyjną utworzoną z macierzy jednostkowej \mathbf{I}_l .

Oddzielny problem w grupowaniu i parowaniu wejść i wyjść pojawia się dla obiektów o liczbie wyjść większej niż liczba wejść $l > m$ (patrz rozdział 3.5), dla których należy dokonać procedury eliminacji wyjść (ang. *squaring down procedure*), która sprowadza się do arbitralnego pominięcia wybranych wyjść obiektu (wierszy macierzy transmitancji). Procedury eliminacji wyjść obiektu są dość powszechną praktyką w syntezie układu regulacji dla obiektów o liczbie wyjść większej niż liczba wejść, mogą jednak rodzić dodatkowe problemy w syntezie układu regulacji.

Zadaniem eliminacji wyjść jest wyznaczenie i wykorzystanie jedynie m spośród l wyjść obiektu. Ponieważ liczba możliwości rośnie szybko wraz ze wzrostem różnicy pomiędzy l i m , najczęściej wykorzystuje się przy tym metody bazujące na analizie współczynników RGA (NSRGA) odsprzęganego obiektu. Rezultaty analizy NSRGA mogą zostać wykorzystane do obliczenia sum kwadratów błędów (ang. *sum squared error*, SSE), które określają możliwe poziomy błędów poszczególnych wyjść obiektów w stanach ustalonych.

Jednakże jak pokazano w pracach [44; 116; 166; 167], analityczna zależność pomiędzy współczynnikami SSE a NSRGA jest możliwa jedynie w przypadku gdy $l-m=1$, kiedy układ kwadratowy otrzymuje się poprzez eliminację wyjścia, dla którego suma wyrazów w wierszu macierzy NSRGA jest najmniejsza. Dlatego też metody te powinny zostać uzupełnione o inne warunki, pozwalające np. na ułatwienie procesu syntezy układu sterowania.

3.5. Odsprężanie obiektów lewostronnie odwracalnych

W ramach prowadzonych przez autora prac analizowano również problem odsprężania obiektów lewostronnie odwracalnych, czyli takich, dla których liczba wejść jest mniejsza niż liczba wyjść $l > m$. Wprawdzie nie ma możliwości dokonania diagonalizacji układu z $l > m$ ale, jak wykazano w opracowaniu [251], istnieje możliwość odsprężenia blokowego. Poniżej przedstawiono wyniki analizy teoretycznej zagadnienia wraz z przykładem potwierdzającym jej rezultaty. W tym celu wykorzystamy lematy i twierdzenia dane wcześniej w pracach [97; 251].

Twierdzenie 3.3 [251]

Lewostronnie odwracalny obiekt, opisany macierzą transmitancji z opisu (2.12) rzędu m , może zostać odsprężony blokowo zgodnie z przyjętym podziałem z zależności (3.8) z wykorzystaniem liniowego sprzężenia zwrotnego od stanu i dynamicznego prekompensatora (3.11) wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{nrank} \mathbf{B}_{i_i}(s) = m$, $i=1,2,\dots,k$.

Jeśli warunki twierdzenia 3.3 są spełnione, to istnieje k macierzy unimodularnych $U_i(s) \in R[s]^{l_i \times l_i}$, $i=1,2,\dots,k$, takich że

$$U_i(s) \mathbf{B}_{i_i}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m_i}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

z $\mathbf{B}_{m_i}(s)$ pełnego rzędu. Dokonując podziału macierzy $U_i^{-1}(s) = [\mathbf{P}_i(s) \quad \mathbf{R}_i(s)]$, można zdefiniować

$$\mathbf{B}_{i_i}(s) = [\mathbf{P}_i(s) \quad \mathbf{R}_i(s)] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m_i}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_i(s) \mathbf{B}_{m_i}(s). \quad (3.71)$$

Następnie po zdefiniowaniu macierzy

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(s) & & \\ & \dots & \\ & & \mathbf{P}_k(s) \end{bmatrix} \in R[s]^{l \times m} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{B}_m(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1}(s) & & \\ & \dots & \\ & & \mathbf{B}_{mk}(s) \end{bmatrix} \in R[s]^{m \times m} \quad (3.73)$$

macierz transmitancji obiektu (2.12) przyjmuje postać

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{B}_1(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{B}_m(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s), \quad (3.74)$$

której wewnętrzna część $\mathbf{T}_m(s) = \mathbf{B}_m(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s)$ może zostać odsprzężona z użyciem dowolnej znanej metody odsprzęgania.

Macierz transmitancji układu odsprzęgniętego z wykorzystaniem sprzężenia ze wzoru (3.11) dla obiektu z zależności (3.74) przyjmuje postać:

$$\mathbf{T}_{yq}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{B}_m(s)[\mathbf{G}(s)\mathbf{A}_1(s) - \mathbf{F}(s)]^{-1}\mathbf{L}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{N}_m(s)\mathbf{D}^{-1}(s) \quad (3.75)$$

z

$$\mathbf{N}_m(s) = \text{block diag}[\mathbf{N}_{ii}(s), i=1, \dots, k] \in R[s]^{m \times m}. \quad (3.76)$$

Ważną cechą tak odsprzęganego układu, wskazaną w pracy [251], jest to, że skrośne zera transmisyjne układu $\mathbf{B}_m(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s)$ pokrywają się ze skrośnymi zerami transmisyjnymi układu $\mathbf{B}_1(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s)$.

Stosując powyższą metodę do przygotowania obiektu do wykorzystania standardowej procedury odsprzęgania, otrzymujemy algorytm odsprzęgania układów MIMO o liczbie wejść mniejszej, równej i większej niż liczba wyjść.

Jednakże problem pojawia się wówczas, gdy warunki twierdzenia 3.3 nie są spełnione. Wówczas obiekt nie może zostać odsprzężony bez wykorzystania procedury eliminacji wyjść (ang. *squaring down procedure*).

Dokonajmy podziału niekwadratowej macierzy transmitancji obiektu w postaci

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_S(s) \\ \mathbf{T}_R(s) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

z $\mathbf{T}_S(s) \in R(s)^{m \times m}$ i $\mathbf{T}_R(s) \in R(s)^{(l-m) \times m}$. Określmy dalej macierz $\mathbf{B}_{ms}(s) \in R[s]^{m \times m}$ jako macierz licznikową ograniczoną do kwadratowej części macierzy transmitancji $\mathbf{B}_1(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s)$. Wówczas w algorytmie odsprzęgania podstawiamy i wykorzystujemy macierz transmitancji $\mathbf{B}_{ms}(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s)$. Oznacza to, że po wyznaczeniu macierzy licznikowej układu odsprzężonego $\mathbf{N}_s(s)$, jak w równaniu (3.22), otrzymujemy

$$\mathbf{B}_{ms}(s) = \mathbf{N}_s(s)\mathbf{B}_s(s) \quad (3.78)$$

oraz $\tilde{\mathbf{G}}_s(s)$, wyznaczoną jako *n.w.l.d.* wszystkich kolumn macierzy $\mathbf{B}_s(s)$,

$$\mathbf{B}_s(s) = \tilde{\mathbf{G}}_s(s)\tilde{\mathbf{B}}_s(s). \quad (3.79)$$

Zera wyznacznika macierzy $\tilde{\mathbf{G}}_s(s)$ mogą zostać nazwane wirtualnymi zerami transmisyjnymi (ang. *virtual interconnection squaring down zeros*, VISD), a ich obecność i wartości określają rząd układu odsprężającego i niezbędną metodę jego syntezy.

Twierdzenie 3.4

Jeśli którekolwiek zero wyznacznika macierzy $\tilde{\mathbf{G}}_s(s)$ leży w niestabilnym rejonie płaszczyzny liczb zespolonych, to (nieobserwowalne) bieguny odsprężonego układu odpowiadające tym zerom są niezmiennie i niestabilne.

Dowód twierdzenia 3.4 wynika bezpośrednio z dowodu dotyczącego skrośnych zer transmisyjnych przedstawionego w pracy [97].

Wpływ wirtualnych zer transmisyjnych VISD może zostać wyeliminowany jedynie przez dynamiczny prekompensator projektowany według metody stosowanej w standardowym algorytmie. Biorąc powyższe pod uwagę, procedura eliminacji wyjść obiektu lewostronnie odwracalnego jest następująca:

Krok 1

Sprawdź warunki twierdzenia 3.3 aby zweryfikować czy odsprężanie blokowe bez pomijania wybranych wyjść obiektu jest możliwe. Jeśli tak, wykonaj obliczenia według wzorów (3.70)–(3.73) i oblicz układ odsprężający macierz transmitancji na podstawie (3.74) z macierzą licznikową podstawioną we wzorze (3.73). Jeśli nie, idź do kroku 2.

Krok 2

Oblicz i dokonaj analizy NSRGA. Wyznacz wiersz(e) przeznaczone do eliminacji oraz przyjmij strategię grupowania i parowania pozostałych wejść i wyjść obiektu.

Krok 3

Wykonaj obliczenia według wzorów (3.78)–(3.79) i sprawdź istnienie wirtualnych zer transmisyjnych. Jeśli nie istnieją, przeprowadź pozostałe obliczenia algorytmu odsprężania dla przyjętej strategii grupowania wejść i wyjść obiektu. Jeśli istnieją, idź do kroku 4.

Krok 4

Jeśli którekolwiek wirtualne zero transmisyjne VISD leży w lewej części płaszczyzny liczb zespolonych, przyjmij inną strategię grupowania i idź do kroku 3 lub oblicz dodatkowy element dynamiczny $\mathbf{R}_a(s)\mathbf{P}_a^{-1}(s)$ oraz rząd regulatora i jeśli jest on akceptowalny, dokończ projektowanie układu odsprężającego zgodnie ze standardowym algorytmem.

Powyższy algorytm nie pozwala oczywiście na pełną automatyzację zadania grupowania wejść i wyjść odsprężanego obiektu. Jest jednak istotny dla analizy obiektu szczególnie

w adaptacyjnych i rekonfigurowanych (tolerujących uszkodzenie układów wykonawczych) układach regulacji i sterowania.

3.6. Uniwersalny algorytm dynamicznego odsprzęgnięcia

Omówiony sposób dynamicznego odsprzęgnięcia zastosować można dla obiektów zarówno o jednakowej, jak i niejednakowej liczbie wejść i wyjść $m \geq l$. Istotną różnicą w postępowaniu z obiektami o jednakowej liczbie wejść i wyjść będzie to, że przy $m=l$ macierz $\mathbf{B}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ otrzymana z przekształcenia wzoru (3.22) – która nie będzie już miała skrośnych zer transmisyjnych – jest kwadratowa i nie będzie można do niej dopisać dodatkowych wierszy, odpowiadających macierzy $\bar{\mathbf{B}}(\cdot) \in R[\cdot]^{(m-l) \times m}$. Przy $m > l$ dawało to możliwość całkowitej eliminacji wpływu skrośnych zer transmisyjnych na bieguny tworzące nieobserwowalne mody układu po odsprzęgnięciu. Przy $m=l$ w (niezmienionej) macierzy $\mathbf{B}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ mogą pozostać ewentualnie tylko te zera transmisyjne układu odsprzęganego, które nie są zerami skrośnymi. Jeśli będą to zera nieminimalnofazowe, układ otrzymany po odsprzęgnięciu będzie miał większą liczbę nieminimalnofazowych zer transmisyjnych wnoszonych przez iloczyn macierzy $\mathbf{N}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot)$.

Mając to wszystko na uwadze, opracowano uniwersalny algorytm dynamicznego odsprzęgnięcia (blokowego lub diagonalnego) układów o jednakowej, jak i niejednakowej liczbie wejść i wyjść $m \geq l$, opisanych właściwymi macierzami transmitancji we wzorze (2.12) o pełnym normalnym rzędzie $\text{nrnk}[\mathbf{T}(\cdot)] = l$, oraz obiektów o liczbie wyjść większej niż liczba wejść $l > m$ z macierzą transmitancji o pełnym normalnym rzędzie $\text{nrnk}[\mathbf{T}(\cdot)] = m$. Opracowany algorytm umożliwia osiągnięcie dynamicznego odsprzęgnięcia z zachowaniem wewnętrznej stabilności i wewnętrznej właściwości układu odsprzężonego. Zatem zapewnia on spełnienie wszystkich wymagań stawianych układom odsprzęgniętym, zwłaszcza dla celów sterowania manualnego w otwartej pętli (ang. *open-loop control*).

Algorytm 4.1

Krok 1

Przy danym opisie (2.2) (lub (2.3)) układu odsprzęganego, wyznaczyć macierz transmitancji ze wzoru (2.12) (lub (2.13)) z wykorzystaniem zależności wynikających z twierdzenia strukturalnego Wolowicha. Zapamiętać oryginalne wartości macierzy przekształcenia podobieństwa $\hat{\mathbf{T}}$ i macierzy $\hat{\mathbf{S}}(\cdot)$ tego układu. Jeśli potrzeba, dokonać przestawienia wierszy macierzy $\mathbf{B}_1(\cdot)$, podstawiając $\mathbf{B}_1(\cdot) := \mathbf{P}_l \mathbf{B}_1(\cdot)$, gdzie \mathbf{P}_l jest macierzą permutacyjną utworzoną z macierzy jednostkowej \mathbf{I}_l .

Dokonać podziału wektora sygnałów $\mathbf{y}(\cdot) \in R^l$ na grupy $\mathbf{y}_i(\cdot) \in R^{l_i}$, $i=1,2,\dots,k$ i zgodnie z tym dokonać podziału macierzy $\mathbf{B}_1(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$ na wierszowe bloki $\mathbf{B}_{1i}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times m}$, $i=1,2,\dots,k$ według opisu (3.20).

Krok 2.1

Jeśli $m \geq l$, przejść do kroku 2.4.

Krok 2.2

Zbadać rząd macierzy $\mathbf{B}_{i_i}(s)$ dla $i=1,2,\dots,k$ przyjętym zgodnie z podziałem ze wzoru (3.8). Jeśli $\text{rank}\mathbf{B}_{i_i}(s)=m_i$, $i=1,2,\dots,k$, to obliczyć k unimodularnych macierzy $\mathbf{U}_i(s) \in R[s]^{l_i \times l_i}$, takich że

$$\mathbf{U}_i(s)\mathbf{B}_{i_i}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m_i}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

z $\mathbf{B}_{m_i}(s)$ pełnego rzędu.

Krok 2.3

Obliczyć $\mathbf{U}_i^{-1}(s) = [\mathbf{P}_i(s) \quad \mathbf{R}_i(s)]$ i zdefiniować

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(s) & & \\ & \dots & \\ & & \mathbf{P}_k(s) \end{bmatrix} \in R[s]^{l \times m}, \quad (3.80)$$

otrzymując macierze $\mathbf{B}_m(s)$ i $\mathbf{P}(s)$ kwadratowej części macierzy transmitancji $\mathbf{T}_m(s) = \mathbf{B}_m(s)\mathbf{A}_1^{-1}(s)$.

Podstawić $\mathbf{B}_1(s) := \mathbf{B}_m(s)$ i kontynuować obliczenia kroku następnego.

Krok 2.4

Dla przyjętego podziału ze wzoru (3.8) określić macierz $\mathbf{N}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ jako

$$\mathbf{N}(\cdot) = \text{diag}[\mathbf{N}_{i_i}(\cdot), i=1,2,\dots,k], \quad (3.81)$$

gdzie $\mathbf{N}_{i_i}(\cdot)$ są *n.w.l.d.* wszystkich kolumn w każdym i -tym bloku $\mathbf{B}_{i_i}(\cdot)$. Obliczyć $\mathbf{B}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$, taką że

$$\mathbf{B}_1(\cdot) = \mathbf{N}(\cdot)\mathbf{B}(\cdot). \quad (3.82)$$

Wyznaczyć *n.w.l.d.* $\tilde{\mathbf{G}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ wszystkich kolumn macierzy $\mathbf{B}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$, taki że $\mathbf{B}(\cdot) = \tilde{\mathbf{G}}(\cdot)\tilde{\mathbf{B}}(\cdot)$. Jeśli $\tilde{\mathbf{G}}(\cdot)$ jest macierzą unimodularną (lub stabilną, Hurwitza albo Schura), przejść do kroku 11.

W przeciwnym przypadku wyznaczyć macierz transmitancji $\mathbf{R}_a(\cdot)\mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ dla dodatkowego członu dynamicznego, wykonując następujące obliczenia.

Krok 3

Dla (nieunimodularnej) macierzy $\tilde{\mathbf{G}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ wyznaczyć $\tilde{\mathbf{R}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ i $\tilde{\mathbf{J}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$, takie że

$$\tilde{\mathbf{G}}(\cdot)\tilde{\mathbf{R}}(\cdot) = \tilde{\mathbf{J}}(\cdot)\mathbf{U}_1(\cdot), \quad (3.83)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{J}}(\cdot) = \text{diag}[\tilde{\mathbf{J}}_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k]$ z blokami $\tilde{\mathbf{J}}_{ii}(\cdot) \in R[s]^{l_i \times l_i}$ i unimodularną macierzą $\mathbf{U}_1(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$. Należy w tym celu dokonać inwersji $\tilde{\mathbf{G}}^{-1}(\cdot) \mathbf{I}_l$ w postaci ciągu przekształceń postaci prawostronnych w lewostronne wyrażen

$$\tilde{\mathbf{G}}^{-1}(\cdot) \mathbf{e}_i \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_i(\cdot) \tilde{\mathbf{J}}_{ii}^{-1}(\cdot) \text{ dla } i=1,2,\dots,k, \quad (3.84)$$

w których \mathbf{e}_i są macierzami liczbowymi o wymiarach $l \times l_i$ powstałymi z odpowiedniego podziału macierzy jednostkowej \mathbf{I}_l na kolumnowe bloki $\mathbf{I}_l = [\mathbf{e}_i, i=1,2,\dots,k]$.

Krok 4

Dla znanej $\tilde{\mathbf{B}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$ i otrzymanej powyżej $\tilde{\mathbf{R}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ wyznaczyć $\hat{\mathbf{B}}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$ i $\hat{\mathbf{R}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ przez przekształcenie lewostronnej faktoryzacji w prawostronną wyrażenia

$$\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(\cdot) \tilde{\mathbf{B}}(\cdot) \rightarrow \hat{\mathbf{B}}(\cdot) \hat{\mathbf{R}}^{-1}(\cdot). \quad (3.85)$$

Krok 5

Dla macierzy $\hat{\mathbf{R}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ wyznaczyć jej macierz dołączoną $\hat{\mathbf{R}}_{ad}(\cdot)$ i dokonać przekształcenia prawostronnej faktoryzacji w lewostronną wyrażenia

$$\mathbf{A}_1(\cdot) \left[\hat{\mathbf{R}}_{ad}(\cdot) \right]^{-1} \rightarrow \check{\mathbf{R}}^{-1}(\cdot) \check{\mathbf{P}}(\cdot). \quad (3.86)$$

Krok 6

Dla otrzymanej $\check{\mathbf{R}}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ wyznaczyć macierz dołączoną $\check{\mathbf{R}}_{ad}(\cdot)$ i dobrać do niej taką macierz unimodularną $\mathbf{U}_4(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$, aby $\check{\mathbf{R}}_{ad}(\cdot) \mathbf{U}_4(\cdot)$ była macierzą kolumnowo zredukowaną.

Wyznaczyć kolumnowe stopnie $\deg_{cj} \left[\check{\mathbf{R}}_{ad}(\cdot) \mathbf{U}_4(\cdot) \right]$, $j=1,2,\dots,m$.

Krok 7

Przyjmując swobodnie dobrane (stabilne) wartości nieobserwowalnych biegunów, wygenerować diagonalną macierz

$$\mathbf{A}(\cdot) = \text{diag} \left[\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_j(\cdot), \dots, \lambda_m(\cdot) \right], \quad (3.87)$$

w której (moniczne) wielomiany $\lambda_j(\cdot)$ mają stopnie $\deg \lambda_j(\cdot) = \deg_{cj} \left[\check{\mathbf{R}}_{ad}(\cdot) \mathbf{U}_4(\cdot) \right]$, $j=1,2,\dots,m$. Przyjąć $\mathbf{R}_a(\cdot) = \check{\mathbf{R}}_{ad}(\cdot) \mathbf{U}_4(\cdot)$ i $\mathbf{P}_a(\cdot) = \mathbf{A}(\cdot)$.

Przyjęcie macierzy $\mathbf{R}_a(\cdot)$ i $\mathbf{P}_a(\cdot)$ kończy procedurę wyznaczania macierzy transmitancji $\mathbf{T}_{au}(\cdot) = \mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ dla dodatkowego członu dynamicznego.

Krok 8

Wyznaczyć (minimalną) realizację macierzy transmitancji $\mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ dodatkowego członu dynamicznego w postaci kanonicznej (sterowalnej) równań stanu, odpowiednio:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_a(t) &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_{oa}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_{oa}(t)\end{aligned}\quad (3.88)$$

dla układów ciągłych, lub

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_a(k+1) &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_{oa}(k) \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(k) + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_{oa}(k)\end{aligned}\quad (3.89)$$

dla układów z czasem dyskretnym, gdzie: $\mathbf{x}_a(\cdot) \in R^{n_a}$, $\mathbf{u}_{oa}(\cdot) \in R^m$ i $\mathbf{u}(t) \in R^m$ są wektorami stanu, wejść i wyjść tego członu.

Krok 9

Dokonać w dziedzinie czasowej kaskadowego (szeregowego) połączenia członu dodatkowego ze wzoru (3.88) lub (3.89) z (oryginalnym) układem odsprzęganym w postaci zastępczego równania stanu i wyjść

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{oa}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_a \end{bmatrix} \mathbf{x}_{oa}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{D}_a \\ \mathbf{B}_a \end{bmatrix} \mathbf{u}_{oa}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}\mathbf{C}_a] \mathbf{x}_{oa}(t) + \mathbf{D}\mathbf{D}_a \mathbf{u}_{oa}(t)\end{aligned}\quad (3.90)$$

dla układów ciągłych, lub

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{oa}(k+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_a \end{bmatrix} \mathbf{x}_{oa}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{D}_a \\ \mathbf{B}_a \end{bmatrix} \mathbf{u}_{oa}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}\mathbf{C}_a] \mathbf{x}_{oa}(k) + [\mathbf{D}\mathbf{D}_a] \mathbf{u}_{oa}(k),\end{aligned}\quad (3.91)$$

gdzie wektor $\mathbf{x}_{oa}(\cdot) \in R^{n+n_a}$ jest złożeniem wektorów stanów obydwu układów, tj.

$$\mathbf{x}_{oa}(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\cdot) \\ \mathbf{x}_a(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Krok 10

Korzystając ponownie z zależności wynikających z twierdzenia strukturalnego Wolowicha, wyznaczyć macierz transmitancji układu poszerzonego w *p.w.p.* postaci ułamkowej $\mathbf{B}_1(\cdot)\mathbf{A}_1^{-1}(\cdot)$, zapamiętując wartości macierzy przekształcenia podobieństwa $\hat{\mathbf{T}}_a$ i macierzy $\hat{\mathbf{S}}_a(\cdot)$ tego układu oraz odświeżyć strukturę z wyrażenia (3.20) podziału nowej macierzy $\mathbf{B}_1(\cdot)$ na wierszowe bloki $\mathbf{B}_{i_1}(\cdot) \in R^{l_i \times m}$, $i=1,2,\dots,k$.

Przejsć do kroku 2.

Krok 11

Jeśli $m=l$, przejść do kroku 13.

Krok 12

Wyznaczyć unimodularną macierz $U_B(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ przez wykonanie elementarnych działań na kolumnach macierzy $B(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$, takich aby

$$B(\cdot)U_B(\cdot) = [I_l \quad 0] \quad (3.93)$$

i dokonać inwersji

$$U_B^{-1}(\cdot) = \begin{bmatrix} U_1(\cdot) \\ U_2(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Przyjąć $\bar{B}(\cdot) = U_2(\cdot) \in R[\cdot]^{(m-l) \times m}$ i uzupełnić nią brakujące wiersze w macierzy $\begin{bmatrix} B(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix}$.

Krok 13

Dokonać przekształcenia postaci prawostronnej w lewostronną, wyrażenia

$$A_1(\cdot) \begin{bmatrix} B(\cdot) \\ \bar{B}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \tilde{Q}^{-1}(\cdot) \tilde{P}(\cdot), \quad (3.95)$$

otrzymując $\tilde{Q}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ i $\tilde{P}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ z macierzą $\tilde{Q}(\cdot)$ wierszowo zredukowaną. Wyznaczyć indeksy

$$v_j = \deg_{r_j} \tilde{Q}(\cdot), \quad j=1,2,\dots,m \quad (3.96)$$

i przyjąć $v = \max_j \{v_j\}$. Na ich podstawie określić macierze

$$\hat{Q}(s) = \text{diag} [s^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m] \tilde{Q}(s) \quad (3.97)$$

i

$$\hat{P}(s) = \text{diag} [s^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m] \tilde{P}(s) \quad (3.98)$$

dla układów ciągłych, lub

$$\hat{Q}(z) = \text{diag} [z^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m] \tilde{Q}(z) \quad (3.99)$$

i

$$\hat{P}(z) = \text{diag} [z^{v-v_j}, j=1,2,\dots,m] \tilde{P}(z) \quad (3.100)$$

dla układów z czasem dyskretnym.

Dokonać podziału otrzymanej macierzy $\hat{P}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ na dwa bloki

$$\hat{P}(\cdot) = \begin{bmatrix} \hat{P}^F(\cdot) & \hat{P}^L(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

gdzie $\hat{P}^F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$ jest macierzą związaną z realizacją sprzężenia zwrotnego, a $\hat{P}^L(\cdot) \in R[s]^{m \times (m-l)}$ – z realizacją prekompensatora $G^{-1}(\cdot) [L(\cdot) \quad I_m]$ – opisanych zależnością (3.13). Dokonać także podziału macierzy $\hat{P}^F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$ na kolumnowe bloki $\hat{P}_i^F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l_i}$

$$\hat{\mathbf{P}}^F(\cdot) = [\hat{\mathbf{P}}_i^F(\cdot), i=1,2,\dots,k]. \quad (3.102)$$

Krok 14

Dobrać unimodularne macierze $\mathbf{V}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times l_i}$, $i=1,2,\dots,k$ tak, aby każda blokowa macierz $\hat{\mathbf{P}}_i^F(\cdot)\mathbf{V}_{ii}(\cdot)$ była kolumnowo zredukowana.

Krok 15

Dla $i=1,2,\dots,k$ wyznaczyć stopnie \bar{s}_j^i dla diagonalnych elementów $s_j^i(\cdot)$, $j=1,2,\dots,l_i$ blokowych macierzy $\mathbf{S}_{ii}(\cdot) \in R[\cdot]^{l_i \times l_i}$ ze wzoru (3.46) przy ($l_i = p_i$) z warunku (3.50)

$$\bar{s}_j^i = \deg s_j^i(\cdot) = \max \left\{ \deg_{cj} \left[\hat{\mathbf{P}}_i^F(\cdot)\mathbf{V}_{ii}(\cdot) \right] - \nu, 0 \right\}. \quad (3.103)$$

Krok 16

Dla znanych stopni kolumnowych \bar{s}_j^i , $i=1,2,\dots,k$, $j=1,2,\dots,l_i$ wygenerować (moniczne) wielomiany $s_j^i(\cdot)$ dla przyjętych (stabilnych) wartości biegunów (sterowalnych i obserwowalnych) układu odsprężniętego, tworzące blokową macierz

$$\mathbf{S}(\cdot) = \text{diag}[\mathbf{S}_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k]. \quad (3.104)$$

Krok 17

Przy znanych macierzach $\hat{\mathbf{Q}}(\cdot)$, $\hat{\mathbf{P}}^F(\cdot)\mathbf{V}(\cdot)$ i $\mathbf{S}(\cdot)$ dobrać unimodularną macierz $\mathbf{U}(\cdot) = \text{diag}[\mathbf{U}_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k]$ tak, aby macierz transmitancji ze wzoru (3.49) była właściwa, tzn. aby wszystkie transmitancje w każdym (kolumnowym) bloku

$$\hat{\mathbf{Q}}^{-1}(\cdot)\hat{\mathbf{P}}_i^F(\cdot)\mathbf{V}_{ii}(\cdot)\mathbf{S}_{ii}^{-1}(\cdot)\mathbf{U}_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k \quad (3.105)$$

były właściwe. Zwykle jest to macierz $\mathbf{U}(\cdot) = \mathbf{I}_m$.

Krok 18

Obliczyć macierz $\mathbf{D}(\cdot) = \text{diag}[\mathbf{D}_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k]$ z zależności

$$\mathbf{D}(\cdot) = \mathbf{U}^{-1}(\cdot)\mathbf{S}(\cdot)\mathbf{V}^{-1}(\cdot) \quad (3.106)$$

Krok 19

Dokonać przekształcenia postaci prawostronnej w lewostronną, wyrażenia

$$\mathbf{A}_1(\cdot) \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\cdot)\mathbf{D}(\cdot) \\ \bar{\mathbf{B}}(\cdot) \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \Phi_D^{-1}(\cdot)\Phi_N(\cdot), \quad (3.107)$$

gdzie $\Phi_D(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ i $\Phi_N(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ z macierzą $\Phi_D(\cdot)$ wierszowo zredukowaną. Wyznaczyć indeksy $\mu_j = \deg_{ij} \Phi_D(\cdot)$, $j=1,2,\dots,m$ i przyjąć $\mu = \max_j \mu_j$.

Krok 20

Dla znanych $\mu_j, j=1,2,\dots,m$ i $\mu = \max_j \{\mu_j\}$ określić macierze

$$\hat{\Phi}_D(s) = \text{diag} \left[s^{\mu-\mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_D(s) \quad (3.108)$$

i

$$\hat{\Phi}_N(s) = \text{diag} \left[s^{\mu-\mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_N(s) \quad (3.109)$$

dla układów ciągłych, lub

$$\hat{\Phi}_D(z) = \text{diag} \left[z^{\mu-\mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_D(z) \quad (3.110)$$

i

$$\hat{\Phi}_N(z) = \text{diag} \left[z^{\mu-\mu_j}, j=1,2,\dots,m \right] \Phi_N(z) \quad (3.111)$$

dla układów z czasem dyskretnym. Dobrać unimodularną macierz $\hat{W}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ taką, aby $\hat{\Phi}_N(s)\hat{W}(\cdot)$ była macierzą kolumnowo zredukowaną.

Krok 21

Wyznaczyć stopnie $\bar{l}_j, j=1,2,\dots,m$ diagonalnych elementów macierzy $\hat{L}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ z warunków określonych zależnością

$$\bar{l}_j = \deg \left[\hat{l}_j(\cdot) \right] = \max \left\{ \deg_{c_j} \left[\hat{\Phi}_N(\cdot)\hat{W}(\cdot) \right] - \mu, 0 \right\}. \quad (3.112)$$

Krok 22

Na podstawie wyznaczonych stopni $\bar{l}_j, j=1,2,\dots,m$ wygenerować (moniczne) wielomiany dla przyjętych (stabilnych) wartości biegunów (niesterowalnych) układu odprężonego, tworzące macierz

$$\hat{L}(\cdot) = \text{diag} \left[\hat{l}_j(\cdot), j=1,2,\dots,m \right]. \quad (3.113)$$

Krok 23

Obliczyć

$$[L(\cdot), \bar{L}(\cdot)] = \hat{L}(\cdot)\hat{W}(\cdot) \quad (3.114)$$

i wyodrębnić z niej macierze $L(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$ i $\bar{L}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times (m-l)}$ odpowiednio z pierwszych l i ostatnich $m-l$ jej kolumn.

Krok 24

Dokonać prawostronnego dzielenia wyrażenia (3.63) przez macierz mianownikową $A_1(\cdot)$ (poszerzonego) układu odprężanego, tj. wykonać dzielenie

$$\left[L(\cdot)D(\cdot)B(\cdot) + \bar{L}(\cdot)\bar{B}(\cdot) \right] / A_1(\cdot) = G(\cdot) - F(\cdot)A_1^{-1}(\cdot), \quad (3.115)$$

otrzymując macierz $\mathbf{G}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ oraz macierz $\mathbf{F}(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$, spełniającą nierówności $\deg_{c_j} \mathbf{F}(\cdot) < \deg_{c_j} \mathbf{A}_1(\cdot)$, $j=1,2,\dots,m$.

Krok 25

Jeśli podczas obliczeń wyznaczano macierz transmitancji $\mathbf{T}_{au}(\cdot) = \mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ dla dodatkowego członu dynamicznego, wykonując obliczenia kroków 3–7, to macierz $\mathbf{F}(\cdot)$ zawierać będzie informacje o sprzężeniu zwrotnym od wektora stanu układu ze wzoru (3.92), poszerzonego o dodatkowy człon dynamiczny z wyrażenia (3.88) (odpowiednio (3.89)) zgodnie z zależnością

$$\mathbf{F}(\cdot) = \hat{\mathbf{F}}_{oa} \hat{\mathbf{S}}_a(\cdot) = \mathbf{F}_{oa} \hat{\mathbf{T}}_a \hat{\mathbf{S}}_a(\cdot). \quad (3.116)$$

Wtedy należy wyznaczyć macierz sprzężeń zwrotnych z zależności (3.116) w postaci

$$\mathbf{F}_{oa} = \hat{\mathbf{F}}_{oa} \hat{\mathbf{T}}_a^{-1} = [\mathbf{F} \quad \mathbf{F}_a], \quad (3.117)$$

gdzie $\mathbf{F} \in R^{m \times n}$ i $\mathbf{F}_a \in R^{m \times n_a}$ są macierzami sprzężeń zwrotnych odpowiednio, od (dostępnego) wektora stanu $\mathbf{x}(\cdot) \in R^n$ układu odsprzęganego i od wektora stanu $\mathbf{x}_a(\cdot) \in R^{n_a}$ dodatkowego członu dynamicznego ze wzoru (3.88) (lub (3.89)).

Jeśli nie wykonywano obliczeń kroków 3–7, obliczyć macierz sprzężeń zwrotnych $\mathbf{F} \in R^{m \times n}$ bezpośrednio z zależności (3.64).

Krok 26

Gdy projektowany układ ma służyć do celów sterowania manualnego, obliczyć macierz wzmocnień statycznych \mathbf{K}_d z zależności, odpowiednio:

$$\mathbf{K}_d = [\mathbf{N}(0) \mathbf{D}^{-1}(0)] \in R^{b \times l} \quad (3.118)$$

dla układów ciągłych

$$\text{i} \quad \mathbf{K}_d = [\mathbf{N}(1) \mathbf{D}^{-1}(1)] \in R^{b \times l} \quad (3.119)$$

dla układów z czasem dyskretnym, a następnie pomnożyć (prawostronnie) macierz licznikową $\mathbf{L}(\cdot)$ dynamicznego członu kaskadowego (prekompensatora) przez macierz \mathbf{K}_d^{-1} .

Jeśli podczas obliczeń nie wykonywano kroków 3–7 wyznaczających macierz transmitancji $\mathbf{T}_{au}(\cdot) = \mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ i wektor stanu układu odsprzęganego jest dostępny pomiarowo, przejść do kroku 27. Jeśli kroki 3–7 były wykonane, przejść do kroku 28.

Krok 27

Wyznaczyć (dowolną znaną metodą) równania stanu dla dynamicznego prekompensatora $\mathbf{G}^{-1}(\cdot) [\mathbf{L}(\cdot) \quad \mathbf{I}_m]$ odpowiednio w postaci:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cq} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{cq} & \mathbf{D}_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.120)$$

dla układów ciągłych, lub

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_c(k) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cq} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{f}(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{cq} & \mathbf{D}_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{f}(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.121)$$

dla układów z czasem dyskretnym, gdzie $\mathbf{x}_c(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_c}$ jest wektorem stanu tego członu oraz $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $\mathbf{B}_{cq} \in \mathbb{R}^{n_c \times l}$, $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, $\mathbf{D}_{cq} \in \mathbb{R}^{m \times l}$ i $\mathbf{D}_{cf} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

W przypadku, gdy wektor stanu układu odsprężanego jest niedostępny pomiarowo (i/lub jest zaszumiony) przejść do kroku 30.

Krok 28

Wyznaczyć (dowolną znaną metodą) równania stanu dla dynamicznego prekompensatora $\mathbf{G}^{-1}(\cdot) \begin{bmatrix} \mathbf{L}(\cdot) & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$, odpowiednio w postaciach:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cq} & \mathbf{B}_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_{oa}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{cq} & \mathbf{D}_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.122)$$

dla układów ciągłych, lub

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_c(k+1) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cq} & \mathbf{B}_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{f}(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_{oa}(k) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{cq} & \mathbf{D}_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{f}(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.123)$$

dla układów z czasem dyskretnym, gdzie

$$\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{F}\mathbf{x}(\cdot) + \mathbf{F}_a \mathbf{x}_a(\cdot), \quad (3.124)$$

w których $\mathbf{x}_c(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $\mathbf{u}_{oa}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{q}(\cdot) \in \mathbb{R}^l$ i $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ są wektorami: stanu, wyjść oraz wejść do tego członu, z macierzami $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $\mathbf{B}_{cq} \in \mathbb{R}^{n_c \times l}$, $\mathbf{B}_{cf} \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$, $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, $\mathbf{D}_{cq} \in \mathbb{R}^{m \times l}$ i $\mathbf{D}_{cf} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Krok 29

Przesunąć dodatkowy człon dynamiczny $\mathbf{R}_a(\cdot) \mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ do struktury prekompensatora (wraz z pętlą sprzężenia zwrotnego $\mathbf{F}_a \mathbf{x}_a(\cdot)$ od wektora stanu tego członu) przez wyznaczenie

zastępczego opisu układu w przestrzeni stanów, będącego złożeniem opisów (3.88) i (3.122) (odpowiednio (3.89) i (3.123)) w postaciach:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_w(t) &= \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{B}_w \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{D}_w \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.125)$$

dla układów z czasem ciągłym

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_w(k+1) &= \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(k) + \mathbf{B}_w \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{f}(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(k) + \mathbf{D}_w \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{f}(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.126)$$

dla układów z czasem dyskretnym,

$$\text{gdzie} \quad \mathbf{x}_w(\cdot) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c(\cdot) \\ \mathbf{x}_a(\cdot) \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{F}\mathbf{x}(\cdot). \quad (3.127)$$

Macierze liczbowe $\mathbf{A}_w \in \mathbb{R}^{(n_c+n_a) \times (n_c+n_a)}$, $\mathbf{B}_w \in \mathbb{R}^{(n_c+n_a) \times (l+m)}$, $\mathbf{C}_w \in \mathbb{R}^{m \times (n_c+n_a)}$ i $\mathbf{D}_w \in \mathbb{R}^{m \times (l+m)}$ w powyższych równaniach są określone zależnościami:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_w &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_{cf} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{B}_a \mathbf{C}_c & \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{D}_{cf} \mathbf{F}_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cq} & \mathbf{B}_{cf} \\ \mathbf{B}_a \mathbf{D}_{cq} & \mathbf{B}_a \mathbf{D}_{cf} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_w &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_a \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_a \mathbf{D}_{cf} \mathbf{F}_a \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_a \mathbf{D}_{cq} & \mathbf{D}_a \mathbf{D}_{cf} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.128)$$

Jeśli trzeba, dokonać lewostronnej faktoryzacji macierzy transmitancji otrzymanego ostatecznie prekompensatora z włączonym do jego struktury członem dynamicznym $\mathbf{R}_a(\cdot)\mathbf{P}_a^{-1}(\cdot)$ w postaci *l.w.p.* wielomianowych reprezentacji ułamkowych macierzy transmitancji, odpowiednio:

$$\mathbf{G}^{-1}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{L}(s) & \mathbf{L}_0(s) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_w \left(s\mathbf{I}_{n_c} - \mathbf{A}_w \right)^{-1} \mathbf{B}_w + \mathbf{D}_w \quad (3.129)$$

dla układów z czasem ciągłym

$$\text{i} \quad \mathbf{G}^{-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{L}(z) & \mathbf{L}_0(z) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_w \left(z\mathbf{I}_{n_c} - \mathbf{A}_w \right)^{-1} \mathbf{B}_w + \mathbf{D}_w \quad (3.130)$$

dla układów z czasem dyskretnym.

Krok 30

W przypadku, gdy wektor stanu układu odsprzęganego jest niedostępny pomiarowo, należy zaprojektować obserwator Luenbergera pełnego rzędu albo, gdy odsprzęgany obiekt podlega działaniu zakłóceń stochastycznych $\mathbf{w}(\cdot)$ i $\mathbf{v}(\cdot)$, stacjonarny filtr Kalmana.

Powyższe obliczenia kończą wyznaczanie wszystkich elementów projektowanego, odsprzężonego dynamicznie układu sterowania w pętli otwartej (ang. *open loop control*).

Warunkowe wykonanie niektórych kroków algorytmu oraz konieczność definiowania odpowiednich zestawów wartości biegunów bezpośrednio przed wykonaniem danego kroku wymaga dokonania podziału obliczeń na pięć etapów, mianowicie na:

1. obejmujący kroki 2–6, po wykonaniu których znana staje się liczba stabilnych (nieobserwowalnych) biegunów układu, jeśli odsprzężany układ (obiekt) ma nieminimalnofazowe skrośne zera transmisyjne. Przy braku nieminimalnofazowych skrośnych zer transmisyjnych po zakończeniu tego etapu znana jest już m.in. macierz licznikowa $N(\cdot)$ macierzy transmitancji ze wzoru (3.17);

2. obejmujący kroki 7–15, po wykonaniu których znana staje się liczba stabilnych (sterowalnych i obserwowalnych) biegunów układu. Są one potrzebne do wyznaczenia diagonalnej macierzy mianownikowej $D(\cdot)$ układu otrzymanego po odsprzęgnięciu. Po zakończeniu tego etapu obliczeń znane są już macierze $N(\cdot)$ i $D(\cdot)$ tworzące (teoretyczną) macierz transmitancji $T_{yq}(\cdot) = N(\cdot)D^{-1}(\cdot)$ układu odsprzęgniętego. Macierz ta nie zawiera niesterowalnych i nieobserwowalnych części rzeczywistego układu otrzymanego po odsprzęgnięciu;

3. obejmujący kroki 16–21, po wykonaniu których znana staje się liczba stabilnych (niesterowalnych) biegunów układu potrzebnych do wyznaczenia macierzy licznikowej $L(\cdot)$ dynamicznego prekompensatora $G^{-1}(\cdot)L(\cdot)$;

4. obejmujący kroki 22–29, w których wyznaczane są pozostałe elementy układu, tj. macierze $G(\cdot)$ i $F(\cdot)$ realizujące dynamiczne odsprzężenie układu zgodnie ze wzorem (3.13) i (3.14) dla obiektu z dostępnym wektorem stanu;

5. obejmujący tylko krok 30, w którym dokonuje się projektowania obserwatora Luenbergera pełnego rzędu na podstawie zadanych biegunów obserwatora albo filtru Kalmana – na podstawie znanych (przyjętych) wartości macierzy kowariancji $W \geq 0$ i $V > 0$ zakłóceń $w(\cdot)$ i $v(\cdot)$ wraz z zadaną macierzą wejściową G_w , szumów wejściowych $w(\cdot)$, które z założenia powinny być białymi szumami gaussowskimi (odpowiednio dyskretnymi białymi szumami gaussowskimi).

3.7. Przykład dynamicznego odsprzęgnięcia obiektu MIMO w rekonfigurowalnym układzie sterowania

W celu zilustrowania prezentowanych dotychczas rozważań teoretycznych w niniejszym podrozdziale przedstawiono przykład problemów z realizacją zadań dynamicznego odsprzęgnięcia w przypadku konieczności rekonfiguracji układu sterowania.

Przykład 3.1

Przyjmijmy obiekt rzędu $n=5$ o trzech wejściach $m=3$ i trzech wyjściach $l=3$ zdefiniowany przez następujące macierze opisu w przestrzeni stanu (2.2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Obiekt jest niestabilny i posiada bieguny o wartościach $s_1=2$, $s_{2,3}=-0,2150 \pm i1,3071$, $s_4=-1$, $s_5=-0,5698$. Wartość zera transmisyjnego obiektu zależy np. od wartości elementu b_{32} macierzy \mathbf{B} . Dla $b_{32} > -1$ część rzeczywista zera transmisyjnego jest ujemna, podczas gdy dla $b_{32} < -1$ pozytywna. Obiekt opisany równaniami (3.131) posiada zero transmisyjne ulokowane $s_1^o = -2$, jest więc minimalnofazowy. Jego macierz transmitancji opisana jest *p.w.p.* frakcją ułamkową ze wzoru (2.12) z macierzami

$$\mathbf{B}_1(s) = \begin{bmatrix} s-2 & s-8 & 4 \\ 1 & s+4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1(s) = \begin{bmatrix} s^2-2s & -8s-1 & 4s \\ s-2 & s^2+s-6 & -s+3 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

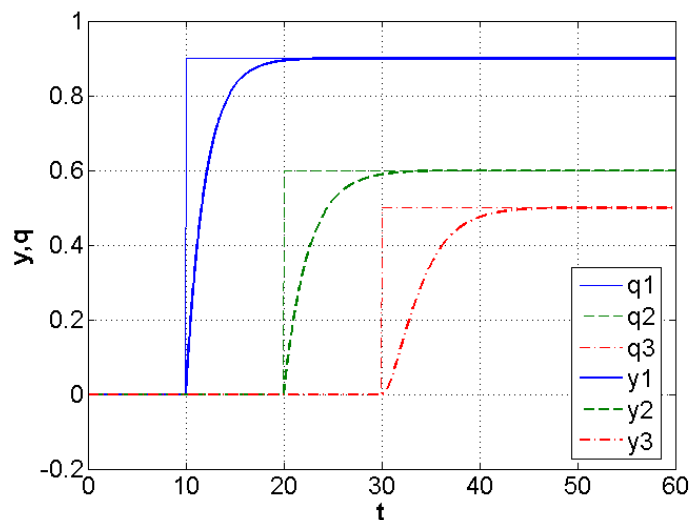
Przed rozpoczęciem procedury syntezy układu odsprzęgającego przyjęto, że układ zostanie odsprzęgnięty diagonalnie. Jako że obliczone zero transmisyjne obiektu jest minimalnofazowe, nie istnieje potrzeba syntezy dodatkowego elementu dynamicznego $\mathbf{R}_a(s)\mathbf{P}_a^{-1}(s)$, a system po odsprzęgnięciu będzie posiadał nieobserwowalny, ale stabilny biegun $s_{uo} = -2$.

Przyjmując następujące wartości biegunów: $s_1 = -0,5$ dla pierwszego, $s_2 = -0,4$ dla drugiego, $s_3 = -0,6$ i $s_4 = -0,4$ dla trzeciego bloku (toru) sterowania, przyjęto macierz $\mathbf{D}(s)$ jako

$$D(s) = \begin{bmatrix} s+0,5 & 0 & 0 \\ 0 & s+0,4 & 0 \\ 0 & 0 & s^2+s+0,24 \end{bmatrix},$$

która przy $N(s)=I_3$ pozwala obliczyć dynamiczny prekompensator $G^{-1}(s)L(s)$ i macierz sprzężenia zwrotnego F .

Jak pokazano na rysunku 3.4, zgodnie z założeniami, w układzie po odsprzężeniu nie istnieją interakcje pomiędzy sygnałami $y_1(t)$, $y_2(t)$, i $y_3(t)$. Zmiana wartości pierwszego wejścia $q_1(t)$ w chwili $t=10$ s wpływa jedynie na pierwsze wyjście $y_1(t)$. Podobnie wejście $q_2(t)$ wpływa jedynie na wyjście $y_2(t)$, a wyjście $y_3(t)$ zależy jedynie od wejścia $q_3(t)$. Tak więc układ został całkowicie odsprzężony przy jednoczesnej realizacji wszystkich pozostałych celów sterowania.



Rys. 3.4. Rezultat symulacji odsprzężonego diagonalnie układu sterowania

Zmiana parametrów modelu obiektu

Jeśli jednak element b_{32} macierzy B w równaniu (3.131) zmieni wartość na $b_{32}=-2$, to zero transmisyjne przyjmuje wartość $s_1^o=1$ i obiekt sterowania staje się nieminimalnofazowy. Jego macierz transmitancji opisana jest wówczas *p.w.p.* frakcją ułamkową (2.12) z macierzami

$$B_1(s) = \begin{bmatrix} s-2 & -2s+16 & 1 \\ -0,5 & s+1 & 0,5 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1(s) = \begin{bmatrix} s^2-2s & 16s+2 & s \\ -0,5s+1 & s^2+s-6 & 0,5s \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}. \quad (3.133)$$

W tym przypadku pełna diagonalizacja obiektu nie jest możliwa bez syntezy dodatkowego elementu dynamicznego $R_a(s)P_a^{-1}(s)$, a przez to bez wzrostu rzędu odsprzężonego układu do 6. Pominięcie tego dodatkowego elementu dynamicznego skutkuje niestabilnością układu.

Co gorsza, układ z elementem $\mathbf{R}_a(s)\mathbf{P}_a^{-1}(s)$ jest bardzo wrażliwy na zmiany wartości skróconego zera transmisyjnego, co utrudnia lub wręcz uniemożliwia jego praktyczną realizację. Jednakże system taki może zostać z powodzeniem wykorzystany w układach sterowania wykorzystujących model obiektu [68; 72–75].

Awaria pierwszego wejścia

W przypadku awarii pierwszego wejścia obiektu macierz \mathbf{B} w modelu (3.131) traci pierwszą kolumnę, a macierze transmitancji obiektu przyjmują następującą postać:

$$\mathbf{B}_1(s) = \begin{bmatrix} s^2+1 & 0 \\ s^2+4s+3,75 & -s-2 \\ s & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1(s) = \begin{bmatrix} s^3+s^2-2,25s-3,25 & -s^2+s+2 \\ 4,25s+4,25 & s^2-s-2 \end{bmatrix}. \quad (3.134)$$

Analiza macierzy RGA tego obiektu nie wskazuje jednoznacznie sposobu grupowania (parowania) jego wejść i wyjść

$$\text{RGA}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.135)$$

tym samym należy poszukać rozwiązania spełniającego warunki twierdzenia 3.3. Jest to możliwe przy grupowaniu $(q_1 \rightarrow y_2; q_2 \rightarrow y_1, y_3)$. Zgodnie z tym podziałem macierz transmitancji obiektu przyjmuje postać z wyrażenia (3.74) z macierzami

$$\mathbf{B}_m(s) = \begin{bmatrix} s^2+4s+3,75 & -s-2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2+1 & s \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczenia są kontynuowane dla kwadratowego modelu obiektu z macierzą $\mathbf{B}_1(s) := \mathbf{B}_m(s)$.

Jako że obliczone wirtualne zero transmisyjne VISD obiektu jest stabilne, to nie ma potrzeby syntezy dodatkowego elementu dynamicznego $\mathbf{R}_a(s)\mathbf{P}_a^{-1}(s)$. Odsprzęgnięty układ będzie posiadał nieobserwowalny, lecz stabilny biegun $s_{wo} = -2$.

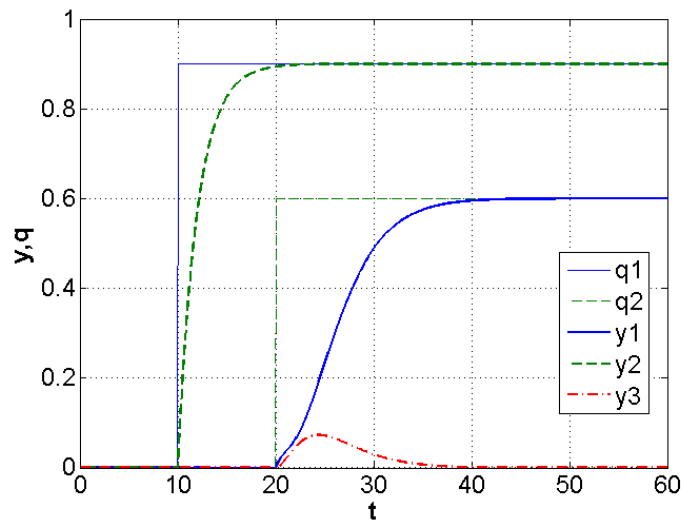
Przyjmując następujące wartości biegunów: $s_1 = -0,5$ dla pierwszego oraz $s_2 = -0,4$, $s_3 = -0,6$, $s_4 = -0,4$ dla drugiego bloku sterowania przyjęto macierz $\mathbf{D}(s)$

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} s+0,5 & 0 \\ 0 & s^3+1,4s^2+0,64s+0,096 \end{bmatrix},$$

i otrzymano pozostałe elementy odsprzężonego systemu, którego rząd przyjmuje w tym przypadku wartość 4.

Jak pokazano na rysunku 3.5, zgodnie z założeniami, w odsprzężonym układzie nie obserwuje się interakcji pomiędzy sygnałami $y_1(t)$ i $y_2(t), y_3(t)$. Zmiana wartości pierwszego wejścia $q_1(t)$ w chwili $t=10$ s oddziałuje jedynie na drugie wyjście $y_2(t)$. Drugie

wejście $q_2(t)$ nie wpływa na wyjścia inne niż $y_1(t)$ i $y_3(t)$. Tak więc układ został całkowicie odprężony przy jednoczesnej realizacji wszystkich pozostałych celów sterowania.



Rys. 3.5. Rezultat symulacji odprężonego blokowo układu sterowania (awaria pierwszego wejścia)

Awaria drugiego wejścia

W przypadku awarii drugiego wejścia, wykreślenia drugiej kolumny macierzy \mathbf{B} według wzoru (3.131), macierze transmitancji obiektu przyjmują postać

$$\mathbf{B}_1(s) = \begin{bmatrix} s^2+2 & -s-4 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1(s) = \begin{bmatrix} s^3+s^2+2s+1 & -2s^2-4s-1 \\ 0 & s^2-s-2 \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Macierz $\mathbf{B}_1(s)$ posiada formę, dla której nie istnieje grupowanie wyjść spełniające warunki twierdzenia 3.3. Dlatego w celu otrzymania kwadratowej macierzy $\mathbf{B}_m(s)$ należy arbitralnie wykreślić jeden z wierszy macierzy $\mathbf{B}_1(s)$ równań ze wzoru (3.136). Analizując macierz $\mathbf{B}_1(s)$ rozsądne wydaje się wykreślenie drugiego wiersza, ale weryfikacja wskaźnika RGA, który dla obiektu określonego wzorem (3.136) przyjmuje postać

$$\text{RGA}(0) = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,57 \\ 0,38 & 0,43 \\ 0,24 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.137)$$

wskazuje wykreślenie trzeciego wiersza. Ale te dwa, sztucznie przyjęte, opisy różnią się zasadniczo, jako że skrośne zero transmisyjne w pierwszym przypadku jest minimalnofazowe, w przypadku drugim – nieminimalnofazowe.

Wykreślenie trzeciego wiersza macierzy $\mathbf{B}_1(s)$ ze wzoru (3.136) daje

$$\mathbf{B}_m(s) = \begin{bmatrix} s^2+2 & -s-4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

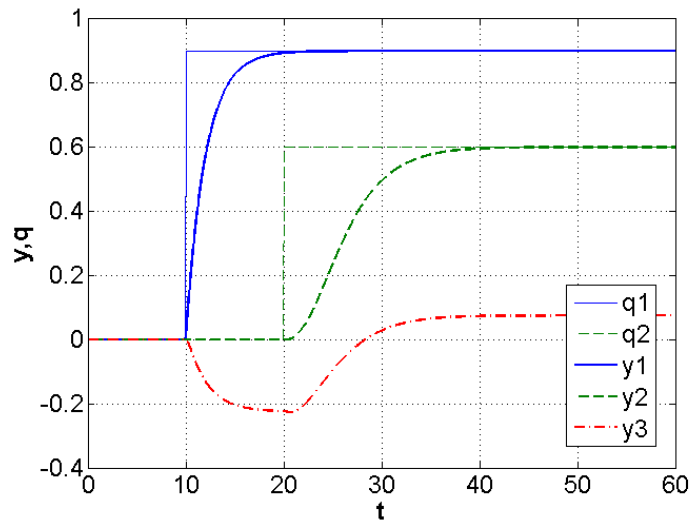
z jednym wirtualnym zerem transmisyjnym $s_1^o = -4$. RGA tak przyjętego obiektu ma postać

$$\text{RGA}(0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad (3.139)$$

której analiza nie wskazuje jednoznacznie na konkretne przypisanie wejść i wyjść obiektu. Przyjmijmy więc $(q_1 \rightarrow y_1; q_2 \rightarrow y_2)$. Ponieważ zero transmisyjne tego obiektu jest stabilne, to nie ma konieczności syntezy dodatkowego elementu dynamicznego. Układ po odsprzęgnięciu będzie posiadał nieobserwowalny, ale stabilny biegun $s_{uo} = -4$.

Przyjmując następujące wartości biegunów: $s_1 = -0,5$ dla pierwszej i $s_2 = -0,4$, $s_3 = -0,6$, $s_4 = -0,4$ dla drugiej pętli sterowania, przyjmujemy macierz mianownikową odsprzężonego układu $D(s)$ jako

$$D(s) = \begin{bmatrix} s+0,5 & 0 \\ 0 & s^3 + 1,4s^2 + 0,64s + 0,096 \end{bmatrix}.$$



Rys. 3.6. Rezultat symulacji odsprzężonego blokowo układu sterowania (awaria drugiego wejścia, pominięte trzecie wyjście)

Jak widać na rysunku 3.6, zgodnie z założeniami, zmiana wartości pierwszego wejścia $q_1(t)$ w $t=10$ s wpływa na przebieg wyjścia $y_1(t)$ i pominiętego w obliczeniach $y_3(t)$. Podobnie zmiana wejścia $q_2(t)$ powoduje jedynie zmiany wyjść $y_2(t)$ i $y_3(t)$.

Jeśli jednak z jakiegokolwiek powodu pominiemy drugie wyjście, to macierz $B_1(s)$ ze wzoru (3.136) przyjmie postać

$$B_m(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2 & -s - 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

z dwoma wirtualnymi zerami transmisyjnymi VISD o wartościach $s_1^o = -1$ i $s_2^o = 2$. Ponieważ drugie z nich s_2^o leży w prawej części płaszczyzny liczb zespolonych, to konieczna jest synteza dodatkowego członu dynamicznego $\mathbf{R}_a(s)\mathbf{P}_a^{-1}(s)$. Może on być przyjęty jako

$$\mathbf{R}_a(s) = \begin{bmatrix} -1,549s - 1,549 & -0,034s - 0,034 \\ 0,934s - 1,154 & 0,015 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_a(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

Dla parowania ($q_1 \rightarrow y_1$; $q_2 \rightarrow y_3$) otrzymujemy macierz licznikową transmitancji odsprzężonego układu w postaci

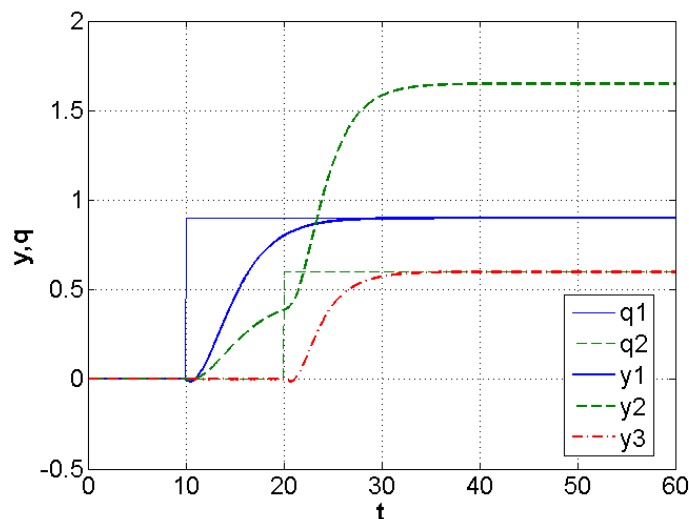
$$\mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} s^2 - s - 2 & 0 \\ 0 & s^2 - s - 2 \end{bmatrix}, \quad (3.142)$$

a dla przyjętych biegunów: $s_1 = -0,5$, $s_2 = -0,4$, $s_3 = -0,6$ dla pierwszego i $s_4 = -0,4$, $s_5 = -1,5$, $s_6 = -1,3$, $s_7 = -1$ dla drugiego bloku sterowania przyjmujemy macierz mianownikową $\mathbf{D}(s)$ w postaci

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 1,5s^2 + 0,74s + 0,12 & 0 \\ 0 & s^4 + 4,2s^3 + 6,27s^2 + 3,85s + 0,78 \end{bmatrix},$$

tak więc układ po odsprzęgnięciu będzie 6. rzędu.

Jak widać na rysunku 3.7, również w tym przypadku zrealizowane zostały wszystkie cele sterowania. Zmiana wartości pierwszego wejścia $q_1(t)$ w $t=10$ s wpływa jedynie na wyjście $y_1(t)$ i pominięte w obliczeniach $y_2(t)$. Podobnie $q_2(t)$ oddziałuje jedynie na wyjścia $y_2(t)$ i $y_3(t)$.



Rys. 3.7. Rezultat symulacji odsprzężonego blokowo układu sterowania (awaria drugiego wejścia, pominięte drugie wyjście)

Awaria trzeciego wejścia

Awaria trzeciego wejścia czyni obiekt niesterowalnym, przez co jego odsprężenie jest niemożliwe.

Jak pokazuje powyższy przykład 3.1, istnieje wiele różnych strategii grupowania wyjść wyjść, które należy rozważyć przy rekonfiguracji układu sterowania, np. po awarii któregoś z wejść. Cele sterowania spełnione zostały w każdym przypadku – poza awarią trzeciego wejścia lecz np. rząd układu po odsprężeniu zmienia się od czwartego (w większości przypadków) do siódmego, gdy wirtualnych zer transmisyjnych VISD nie można pominąć. Jednocześnie pokazano praktyczne rezultaty odsprężania obiektów o liczbie wyjść większej niż liczba jego wejść.

3.8. Dynamiczne odsprężanie układów niecałkowitego rzędu

Jednym z podstawowych problemów, jaki spotykamy przy praktycznym zastosowaniu metod dynamicznego odsprężania, jest dokładność modeli matematycznych opisujących właściwości sterowanych obiektów. Niezgodność modelu z rzeczywistym działaniem obiektu regulacji powoduje brak możliwości pełnego jego odsprężenia i pogorszenie jakości regulacji. W skrajnych warunkach może doprowadzić wprost do niestabilności układu. Liczne badania praktyczne pokazują, że przyjmowane typowe modele matematyczne nie dają możliwości prawidłowego opisu zachowań obiektów regulacji. Są mało precyzyjne, np. przez stosowanie do ich konstrukcji równań różniczkowych całkowitego rzędu, które stanowią podstawowe ograniczenie poprawności modelowania. Tymczasem wykorzystanie równań różniczkowych ułamkowego rzędu pozwala osiągnąć dużo lepsze, dokładniejsze efekty modelowania. Dotyczy to między innymi takich dziedzin jak: właściwości izolatorów, modelowania ruchu ciał o ograniczonej sztywności, materiałów wiskoelastycznych, modelowania procesów elektrodynamicznych i elektrotermicznych, przebiegu procesów elektrochemicznych, ekonomicznych i wielu innych [2; 7; 42; 60; 76; 77; 82; 88; 105; 106; 131; 153; 163–165; 187; 205; 214; 221; 242; 250].

Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu, definicje całek i różniczek dla niecałkowitej krotności, nie jest całkowicie nowym aparatem matematycznym. Dyskusje nad ich wykorzystaniem i interpretacją rozpoczęli w 1695 roku Leibniz i de l'Hôpital. Po nich dziedzinę tę rozwijało wielu innych matematyków. Przez długi czas pozostawała ona jednak przedmiotem rozważań teoretycznych. W XX wieku po różniczki niecałkowitego rzędu sięgnął Bode [35], próbując osiągnąć układ regulacji o „ideal cutoff characteristic”, idealnej funkcji przejścia opisanej przez całkę niecałkowitego rzędu $G(s) = (\omega_{cg}/s)^\alpha$, o częstotliwości granicznej ω_{cg} i stałym zapasie fazy $\varphi_m = \pi - \alpha\pi/2$. Kolejne prace dotyczyły modelowania działania kondensatorów i materiałów wiskoelastycznych [8; 42]. Intensywny rozwój technik obliczeniowych, metod symulacji i sprzętu komputerowego rozbudził bardzo duże zainteresowanie rachunkiem niecałkowitego rzędu i jego zastosowaniem w układach

automatycznej regulacji [7; 26; 28; 48; 76; 82; 91; 113; 118; 131; 138; 152; 156; 165; 168; 169; 173–176; 189; 190; 193; 197; 204; 214; 223; 224; 234]. Fizyczną i geometryczną interpretację całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu przedstawiono w pracy [191]. Propozycję interpretacji warunków początkowych podano w opracowaniach [191; 192].

Duże zainteresowanie przedmiotem spowodowało stworzenie narzędzi pozwalających na syntezę i symulację działania układów niecałkowitego rzędu, a do najbardziej popularnych należą te przygotowane do pracy w środowisku Matlab [1; 48; 178; 240–241].

Pomimo bardzo dużego zainteresowania rachunkiem niecałkowitego rzędu i wykorzystania go w syntezie układu sterowania, prac poświęconych bezpośrednio problemom sterowania obiektami MIMO pojawiło się stosunkowo niewiele [139–140; 143; 168; 234]. Wynikać to może z mniejszego zainteresowania specyfiką działania układów MIMO, jak i trudnościami z przeniesieniem i rozszerzeniem metod wypracowanych dla układów całkowitego rzędu na układy ułamkowe. Problemy dynamicznego odsprzęgania obiektu MIMO niecałkowitego rzędu poruszone zostały dotychczas, według wiedzy autora, jedynie w pracy [140] i dotyczyły prostego przeniesienia sposobów odsprzężenia obiektów całkowitego rzędu dla obiektów TITO na ich odpowiedniki ułamkowe.

Przedstawione w rozdziale drugim sposoby modelowania układów niecałkowitego rzędu są w znacznym stopniu podobne do tradycyjnych modeli układów rzędu całkowitego. Nie oznacza to jednak, że do układów ułamkowych MIMO przenieść można bezpośrednio metody dynamicznego i statycznego odsprzęgania, jakie stosuje się dla układów rzędu całkowitego. Różnice wynikać będą naturalnie z innego charakteru dynamiki obiektu czy choćby z konieczności przybliżonego oszacowania wartości pochodnej niecałkowitego rzędu zgodnie z zależnością (2.24).

Przyjęcie modelu niecałkowitego rzędu do opisu właściwości obiektu zmienia wskaźniki wykorzystywane w syntezie układów MIMO. Jednym z nich jest wskaźnik RGA, opisywany szczegółowo w rozdziale 3.4. W pracy [140] zauważa się (i pokazuje odpowiedni przykład), że jego wartość i sposób zmiany jest inny niż dla analogicznego modelu całkowitego rzędu. Dodatkowo, jak pokażemy dalej, przyjęcie odpowiedniego modelu obiektu oraz dokładności szacowania pochodnej ułamkowego rzędu może również zmienić przyjęte w syntezie „właściwości” obiektu i dalej wpłynąć na jakość regulacji.

3.8.1. Statyczne odsprzęganie układów MIMO niecałkowitego rzędu

Tak jak w układzie całkowitego rzędu, w przypadku gdy odsprzęgany obiekt opisany równaniami stanu i wyjść ze wzoru (2.32) jest stabilny do statycznego odsprzęgania, wystarczy zastosować statyczny człon kaskadowy (prekompensator) $G \in R^{m \times d}$, spełniający równanie

$$K_p G = I_l, \quad (3.143)$$

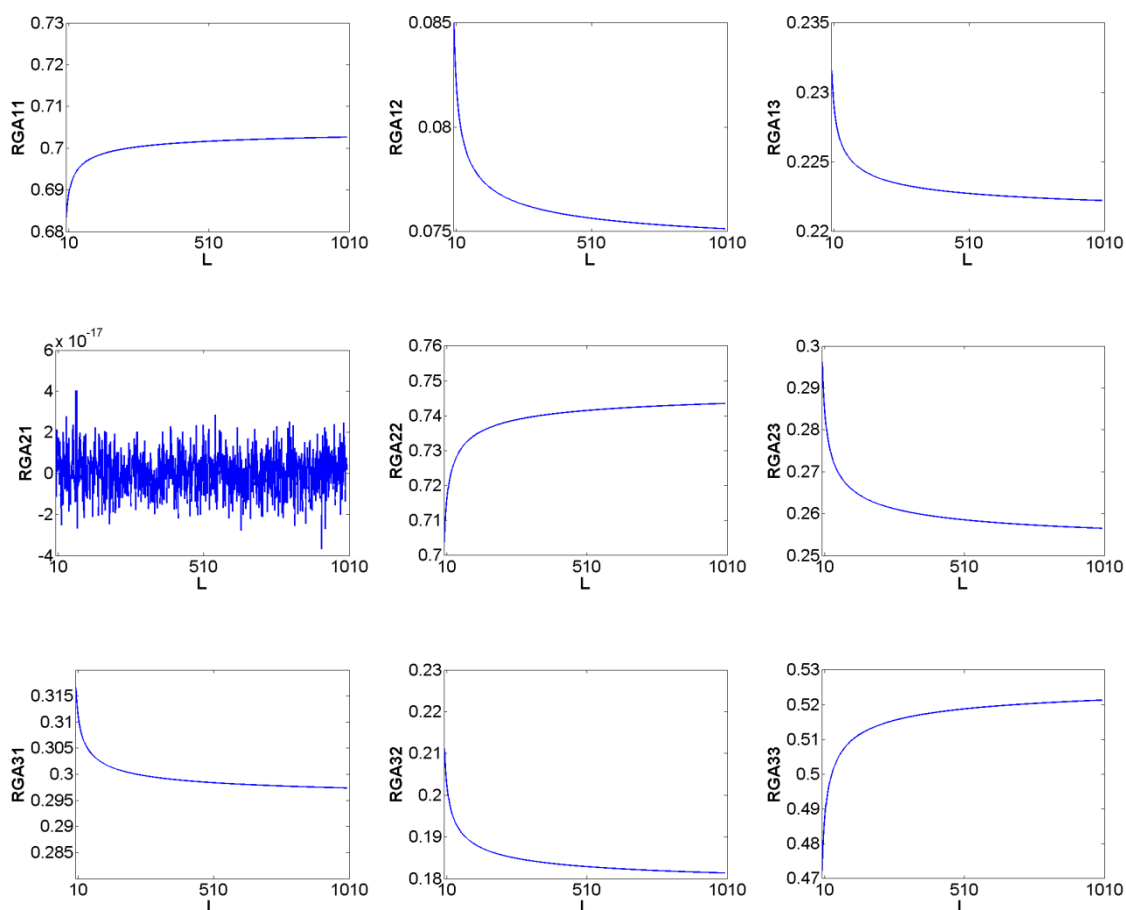
w którym $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{l \times m}$ jest macierzą wzmocnień układu odprężanego. Wartości liczbowe tej macierzy dla modelu (2.32) można określić z zależności

$$\mathbf{K}_p = [\mathbf{C}(\mathbf{I}_n \sum_{j=0}^L c_j^r z^{-j+1} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]_{|z=1} = \mathbf{C}(\mathbf{I}_n \sum_{j=0}^L c_j^r - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (3.144)$$

z której wynika, że liczba elementów w sumie L (dokładność modelowania) wpływa na wartość wzmocnienia modelu obiektu i dalej na wartości prekompensatora \mathbf{G} . Dla modelu obiektu całkowitego rzędu z przykładu 3.1, opisanego macierzami (3.131), macierz RGA dla stanu ustalonego ma postać

$$\text{RGA}(0) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1333 & 0,2667 \\ 0 & 0,5333 & 0,4667 \\ 0,4 & 0,3333 & 0,2667 \end{bmatrix}. \quad (3.145)$$

Zakładając taki sam ułamkowy rząd $r=0,4$ dla zmian wszystkich stanów obiektu, wartość parametrów macierzy RGA będzie zmieniała się wraz z dokładnością modelowania określoną liczbą L , jak na rysunku 3.8.



Rys. 3.8. Wartości parametrów macierzy RGA w zależności od dokładności modelowania pochodnej ułamkowego rzędu

Sposoby modelowania obiektów niecałkowitego rzędu, w tym również zmiany wzmocnień modelowanego obiektu, mogą wpływać na przebieg i dokładność regulacji, szczególnie w układach adaptacyjnych z przełączeniami regulatorów [217].

3.8.2. Dynamiczne odsprzęganie obiektów TITO

Zadanie dynamicznego odsprzęgania obiektu TITO niecałkowitego rzędu analizowano dotychczas w pracy [140]. Realizowano je bezpośrednio, wykorzystując sposoby odsprzężenia obiektów całkowitego rzędu dla obiektów TITO. Jako obiekt regulacji opisano macierzą transmitancji

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.146)$$

gdzie poszczególne transmitancje $g_{ij}(s)$ mają postać

$$g_{ij}(s) = \frac{K_{ij}}{T_{ij}s^{\alpha_{ij}} + 1}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.147)$$

Spośród różnych możliwości odsprzęgnięcia obiektu opisanego modelem (3.146) dwie najprostsze wymagają obliczenia prekompensatorów

$$d_{12}(s) = -\frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} \quad \text{i} \quad d_{21}(s) = -\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)} \quad (3.148)$$

i wykorzystania ich w strukturach odsprzęgania uproszczonego (ang. *simplified decoupling*) i odwrotnego (ang. *inverted decoupling*) przedstawionych na rysunkach 3.9. i 3.10.

W obu powyższych rozwiązaniach układ zostaje odsprzęgnięty z macierzami transmitancji układu zamkniętego w postaci

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) - \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{22}(s)} & 0 \\ 0 & g_{22}(s) - \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

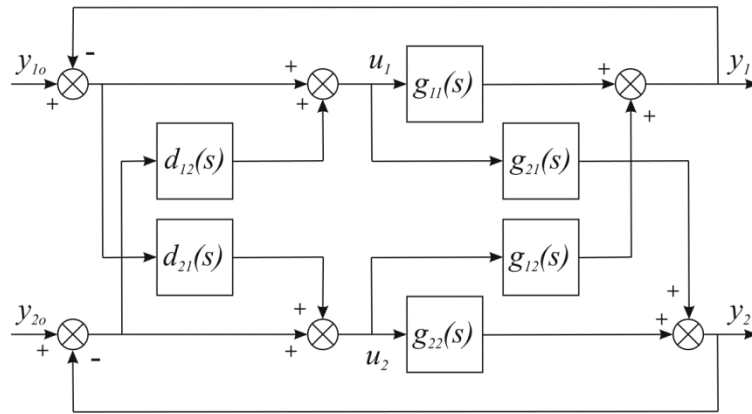
dla odsprzęgania uproszczonego, oraz

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

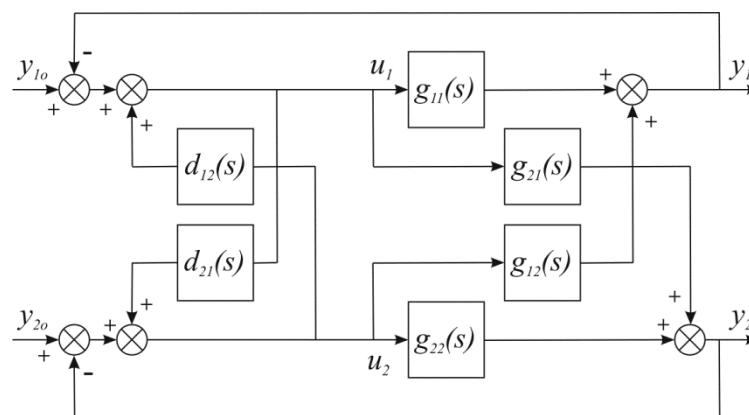
dla układu z odsprzęganiem odwrotnym.

Warunki realizowania tak skonstruowanych członów odsprzęgających wymagają właściwości transmitancji (3.148), zatem muszą być spełnione nierówności [140]

$$\alpha_{11} \leq \alpha_{12} \quad \text{oraz} \quad \alpha_{22} \leq \alpha_{21}. \quad (3.151)$$



Rys. 3.9. Schemat układu regulacji z odsprzęgnięciem uproszczonym



Rys. 3.10. Schemat układu regulacji z odsprzęgnięciem odwrotnym

W przypadku obiektów całkowitego rzędu tak skonstruowany układ regulacji pozwala na pełne dynamiczne odsprzęgnięcie układu. Rezultaty te w przypadku układów niecałkowitego rzędu są trudne (bądź wręcz niemożliwe) do osiągnięcia.

Przykład 3.2. – Dynamiczne odsprzęgnięcie obiektu TITO

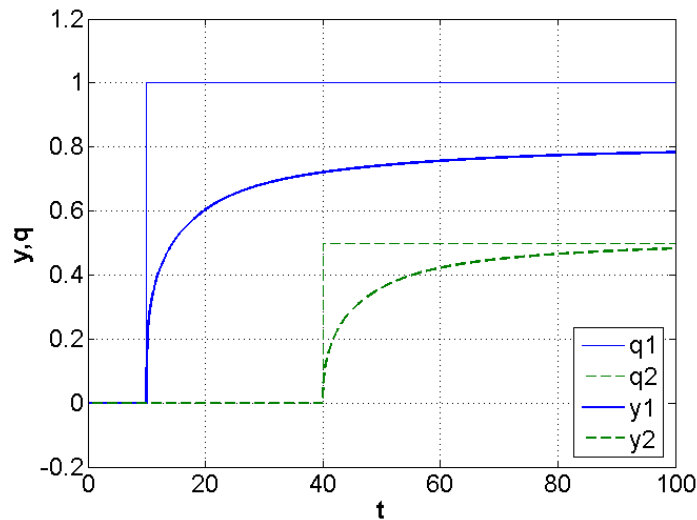
Za autorami pracy [140] przedstawia się przykład odsprzęgnięcia termoelektrycznego obiektu TITO, opisanego modelem niecałkowitego rzędu [141]

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,2}{2s^{0,5} + 1} & \frac{0,6}{3s^{0,7} + 1} \\ \frac{0,5}{s^{0,8} + 1} & \frac{1,5}{3s^{0,6} + 1} \end{bmatrix}. \quad (3.152)$$

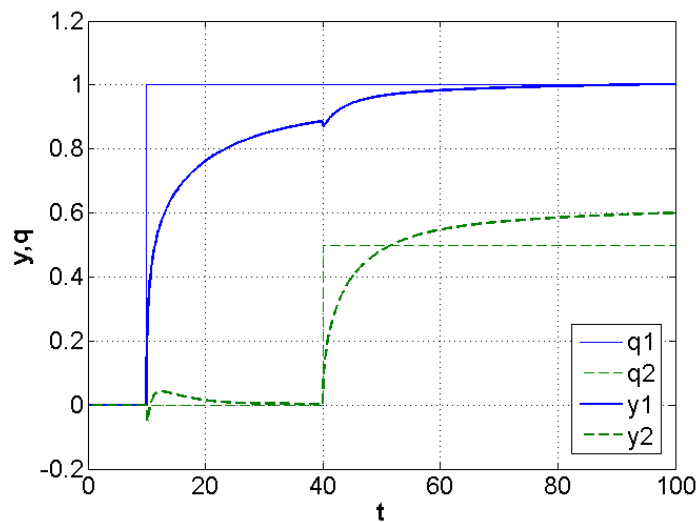
Dla powyższego obiektu elementy członów odsprzęgających ze wzoru (3.148) posiadają postać

$$d_{12}(s) = -\frac{2s^{0,5} + 1}{2(3s^{0,7} + 1)}, \quad d_{21}(s) = -\frac{3s^{0,6} + 1}{3(s^{0,8} + 1)}, \quad (3.153)$$

a wyniki symulacji w strukturach układu regulacji z rysunków 3.9 i 3.10 przedstawiono na rysunkach, odpowiednio 3.11 i 3.12. Symulacje wykonano w pakiecie Matlab/Simulink z wykorzystaniem przybornika Ninteger [240; 241]. Jak widać na obu rysunkach – w odniesieniu do wyników pokazanych w pracy [140] – o pełnym dynamicznym odsprzęgnięciu może decydować nie tylko sposób doboru kompensatora – w obu przypadkach poprawny – ale też sposób realizacji (modelowania) pochodnej ułamkowego rzędu. Ilustruje to dobitnie kolejny przykład.



Rys. 3.11. Rezultat regulacji w układzie z odsprzęgnięciem uproszczonym



Rys. 3.12. Rezultat regulacji w układzie z odsprzęgnięciem odwrotnym

Przykład 3.3. – Dynamiczne odsprężanie niekwadratowego obiektu MIMO

Weźmy pod uwagę obiekt o czterech wejściach i trzech wyjściach, analizowany jako jeden z przykładów w pracy [86]. Obiekt ten jest układem całkowitego rzędu opisanym macierzą transmitancji

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(s+1)}{s-1} & \frac{s+1}{s-1} & \frac{-(s+1)}{s-1} & \frac{-2}{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s-1}{(s-1)^2} \\ -1 & 1 & \frac{2}{s-1} & \frac{-2}{s+1} \end{bmatrix}. \quad (3.154)$$

Badania teoretyczne modelu obiektu wykazują, że obiekt posiada jeden niestabilny biegun $s=1$ oraz zera $s=1$ i w ∞ . Pokrywające się zero i biegun $s=1$, zgodnie z przedstawioną w pracy [86] analizą, nie tworzą pokrycia strukturalnego (ang. *non-structural coincidence*), więc można znaleźć prekompensator $\mathbf{C}(s)$, dla którego możliwe będzie odsprężenie obiektu

$$\mathbf{P}(s)\mathbf{C}(s) = \mathbf{D}(s) \quad (3.155)$$

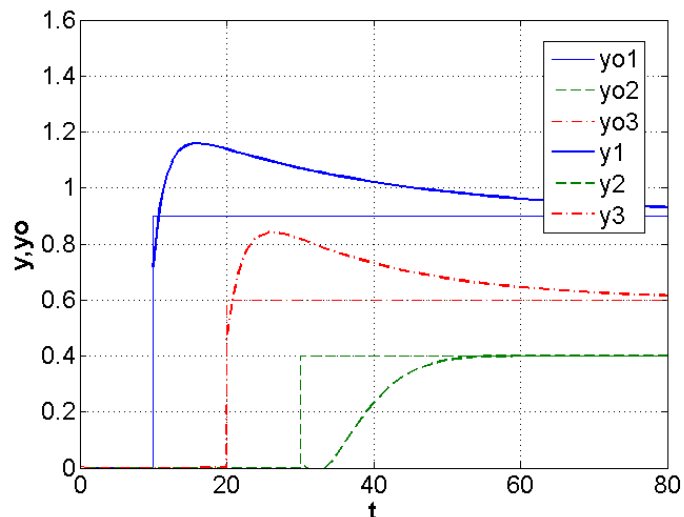
z diagonalną macierzą transmitancji układu odsprężonego $\mathbf{D}(s)$, a układ nie powinien posiadać ukrytych niestabilnych modów. Dla jednego z możliwych prekompensatorów o postaci

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+1} & 1 \\ \frac{-(s-1)}{s+1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

macierz transmitancji układu zamkniętego przyjmuje postać

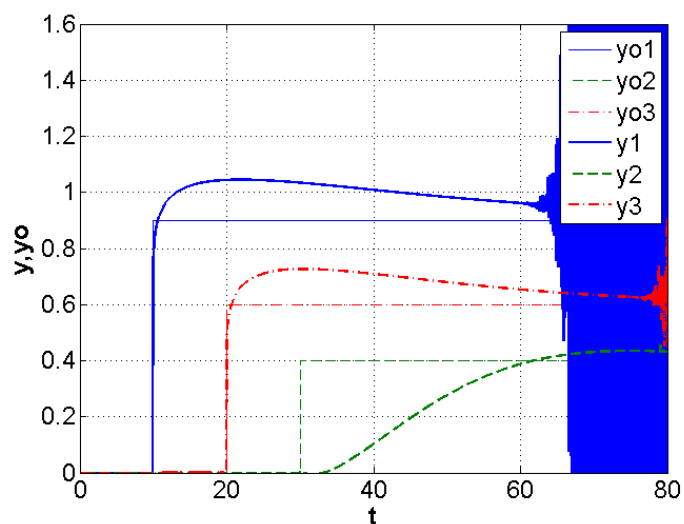
$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s+1}{s-1} \end{bmatrix}. \quad (3.157)$$

Układ po odsprężeniu jest niestabilny i nieminimalnofazowy, ale możliwe jest jego ustabilizowanie i sterowanie. Na przykład, stosując trzy niezależne regulatory PI o wartościach nastaw: $k_{r1}=4$, $T_{i1}=10$ w pętli pierwszej, $k_{r2}=0,1$, $T_{i2}=10$ w pętli drugiej i $k_{r3}=3$, $T_{i3}=10$ w pętli trzeciej, otrzymano przebieg regulacji przedstawiony na rysunku 3.13. Jak widać układ jest odsprężony i stabilny, co potwierdza rozważania teoretyczne i poprawność jego syntezy.



Rys. 3.13. Rezultat regulacji w układzie całkowitego rzędu

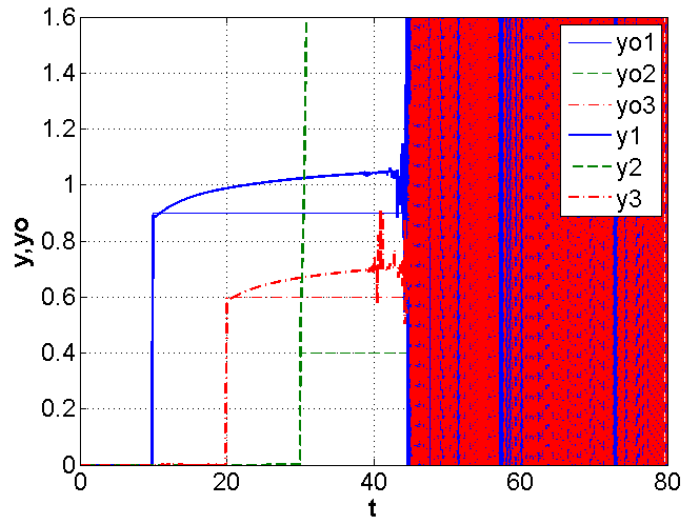
Stosując podejście wielomianowe i zastępując operator s zmienną $\nu=s^r$ dla $r=0,5$, otrzymujemy macierz transmitancji $D(\nu)$ analogiczną do tej dla układu całkowitego rzędu zapisaną wzorem (3.157). Praktyka syntezy układów regulacji dla obiektów niecałkowitego rzędu pokazuje, że jako regulatory można przyjmować układy dynamiczne zarówno całkowitego, jak i niecałkowitego rzędu (rys. 3.14–3.15).



Rys. 3.14. Rezultat regulacji w układzie z regulatorem całkowitego rzędu

Na rysunkach 3.14 i 3.15 przedstawiono wyniki symulacji odsprzęgniętego układu niecałkowitego rzędu, w przypadku pierwszym z regulatorem całkowitego rzędu, w przypadku drugim – niecałkowitego rzędu. Nastawy regulatorów przyjęto jak dla układu całkowitego rzędu. W obu przypadkach widać wyraźnie, że sposoby odsprzęgnięcia przenoszone z układów całkowitego rzędu mogą nie dawać możliwości pełnego stosowania

dla układów rzędu niecałkowitego. Symulacje przebiegają w sposób typowy dla układów z ukrytymi niestabilnymi modami. Do pewnego czasu realizowane są wszystkie założone cele, by w pewnym momencie układ stał się niestabilny.



Rys. 3.15. Rezultat regulacji w układzie z regulatorem niecałkowitego rzędu

3.8.3. Dynamiczne odsprężanie obiektu MIMO niecałkowitego rzędu z wykorzystaniem sprzężenia od wektora stanu

Jak pokazują wyniki przykładu 3.2 oraz teoretyczna analiza sposobów modelowania układów niecałkowitego rzędu, do odsprężania układów ułamkowych MIMO można, z pewnymi ograniczeniami, stosować metody syntezy i układy sterowania stosowane w tradycyjnych układach całkowitego rzędu. Ponieważ właściwości obiektu ułamkowego LTI mogą zostać opisane z wykorzystaniem równań stanu i wyjść (2.28), to możliwa wydaje się konstrukcja układu odsprężającego z wykorzystaniem sprzężenia od stanu obiektu. Transmitancję układu MIMO przedstawić również można w postaci ułamków macierzowych, prawostronnie lub lewostronnie względnie pierwszych (odpowiednio *p.w.p.* i *l.w.p.*) zgodnie ze wzorem (2.12) lub (2.13), tu względem zmiennych $\nu = s^r$ dla układów z czasem ciągłym i $\nu = w(z^{-1})$ dla układów z czasem dyskretnym, gdzie tak jak w modelu transmitancji ze wzoru (2.29) ($w(z^{-1})$) oznacza dyskretny ekwiwalent operatora Laplace'a s , wyrażony jako funkcja zmiennej z lub operatora przesunięcia z^{-1} . Taka forma opisu modelu obiektu ułamkowego MIMO pozwala na wykorzystanie obliczeń algorytmu 4.1 przedstawionego w rozdziale 3.6. Należy przy tym zauważyć, że rząd r wszystkich stanów modelu opisanego wzorem (2.28) powinien mieć tę samą wartość. Sposób konstruowania transmitancji MFD dla obiektu, którego stany posiadają różny stopień – różne wartości $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ operatora ${}_0D_t^q$ w równaniach (2.28) – według wiedzy autora, nie został opracowany. Jest to dość istotne ograniczenie stosowalności metody i stanowi poważny otwarty problem badawczy.

Przykład 3.4 – Dynamiczne odsprzęgnięcie obiektu MIMO niecałkowitego rzędu

Przyjmijmy obiekt rzędu $n=5$ o trzech wejściach $m=3$ i trzech wyjściach $l=3$, zdefiniowany przez macierze opisu w przestrzeni stanu (2.28), jak w przykładzie 3.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

z operatorem różniczkowania niecałkowitego rzędu ${}_0D_t^r$ o stopniach r równych dla wszystkich stanów modelu.

Obiekt jest niestabilny i posiada bieguny o wartościach $\nu_1=2$, $\nu_{2,3}=-0,2150 \pm i1,3071$, $\nu_4=-1$, $\nu_5=-0,5698$. Obiekt posiada zero transmisyjne $\nu_1^o=-2$, jest więc minimalnofazowy. Jego macierz transmitancji opisana jest *p.w.p.* frakcją ułamkową ze wzoru (2.12) z macierzami

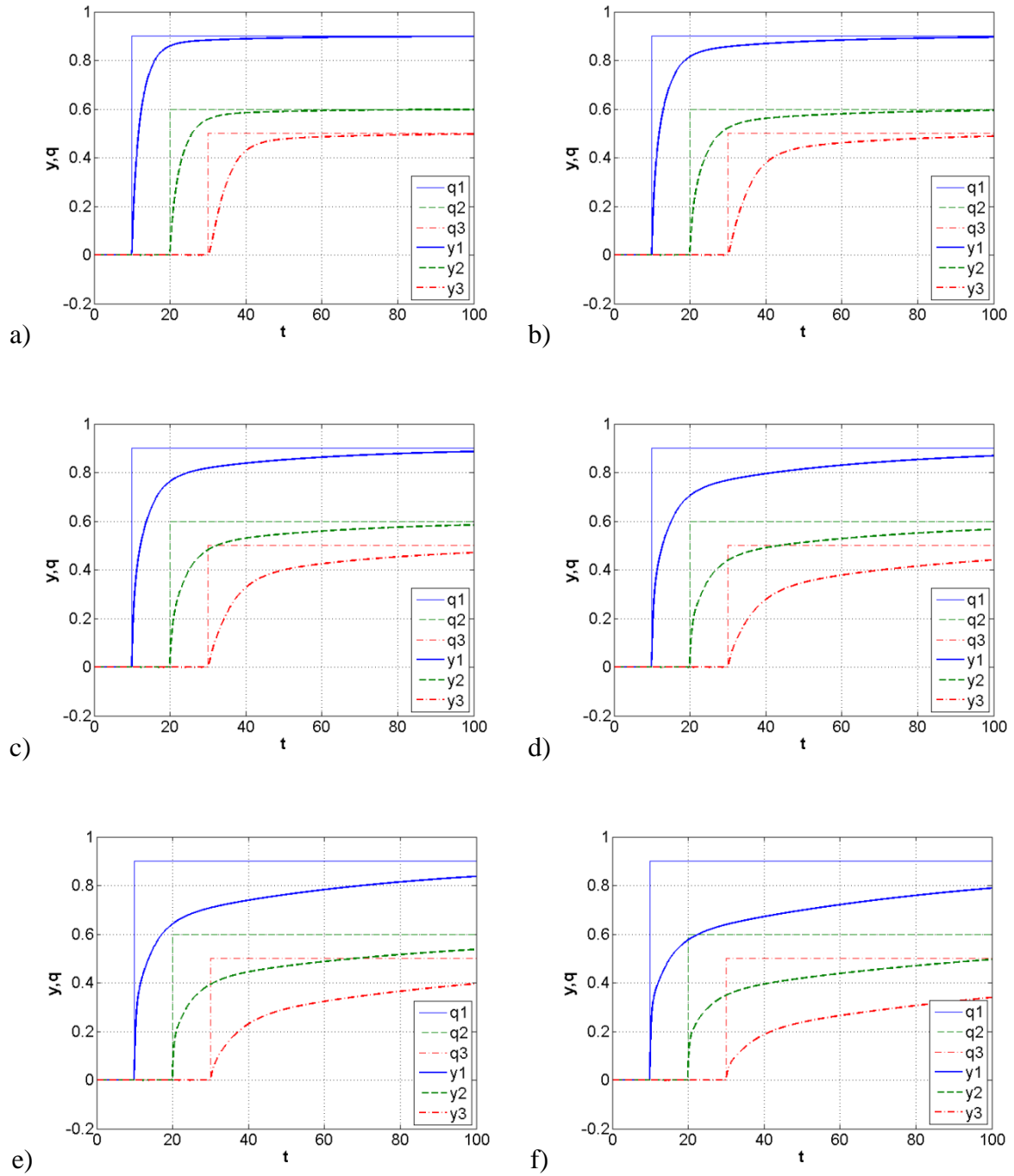
$$B_1(\nu) = \begin{bmatrix} \nu-2 & \nu-8 & 4 \\ 1 & \nu+4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1(\nu) = \begin{bmatrix} \nu^2-2\nu & -8\nu-1 & 4\nu \\ \nu-2 & \nu^2+\nu-6 & -\nu+3 \\ 0 & 0 & \nu+1 \end{bmatrix}. \quad (3.159)$$

Przed rozpoczęciem procedury syntezy układu odsprzęgającego przyjęto, że układ zostanie odsprzęgnięty diagonalnie. Jako że obliczone zero transmisyjne obiektu jest minimalnofazowe, nie istnieje potrzeba syntezy dodatkowego elementu dynamicznego $R_a(\nu)P_a^{-1}(\nu)$, a system po odsprzęgnięciu będzie posiadał nieobserwowalny, ale stabilny, biegun $\nu_{uo}=-2$.

Przyjmując następujące wartości biegunów: $\nu_1=-0,5$ dla pierwszego, $\nu_2=-0,4$ dla drugiego, $\nu_3=-0,6$ i $\nu_4=-0,4$ dla trzeciego bloku (toru) sterowania, przyjęto macierz $D(\nu)$ jako

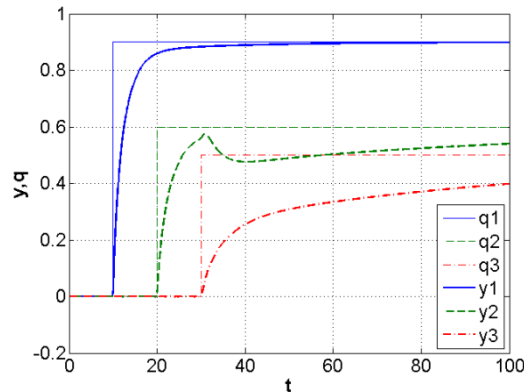
$$D(\nu) = \begin{bmatrix} \nu+0,5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu+0,4 & 0 \\ 0 & 0 & \nu^2+\nu+0,24 \end{bmatrix},$$

która przy $N(\nu)=I_3$ pozwala obliczyć dynamiczny prekompensator $G^{-1}(\nu)L(\nu)$ (tu zerowego rzędu) i macierz sprzężenia zwrotnego F . Na rysunku 3.16 przedstawiono wyniki symulacji układu po odsprzęgnięciu dla różnych stopni r operatora ${}_0D_t^r$. Wyniki tych doświadczeń wskazują na możliwość stosowalności metod wielomianowych w syntezie układu odsprzęgającego ułamkowego rzędu.



Rys. 3.16. Rezultat symulacji odsprężonego układu sterowania dla a) $r=0,9$; b) $r=0,8$; c) $r=0,7$; d) $r=0,6$; e) $r=0,5$; f) $r=0,4$

Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi, metoda powyższa nie pozwala na odsprzęgnięcie obiektu w przypadku różnych stopni ułamkowych operatora ${}_0D_t^r$ dla poszczególnych stanów obiektu. Ilustruje to symulacja z rysunku 3.17, w której, dla tego samego jak poprzednio układu sterowania, przyjęto, że rząd operatora stanu drugiego będzie wynosił $r_2=0,5$ z rzędami $r_{1,3,4,5}=0,9$.



Rys. 3.17. Rezultat symulacji odsprzężonego układu sterowania dla rzędu drugiego stanu $r_2=0,5$

Przykład 3.5 – Skrośne zera transmisyjne w dynamicznym odsprzęgnięciu obiektu MIMO niecałkowitego rzędu

Możliwość wykorzystania ułamków macierzowych do opisu modelu obiektu MIMO niecałkowitego rzędu pozwala na wykorzystanie obliczeń układu odsprzęgającego algorytmu 4.1 – przedstawionego w rozdziale 3.6 – przy równości rzędów r wszystkich stanów modelu (2.28). Dotyczy to wszystkich aspektów konstrukcji układu odsprzężonego, czyli m.in. grupowania wejść i wyjść obiektu, sposobów postępowania ze skrośnymi zerami transmisyjnymi czy odsprzęgania obiektów lewostronnie odwracalnych. Ilustruje to poniższy przykład.

Weźmy pod uwagę obiekt jak w przykładzie 3.1. W przypadku awarii drugiego wejścia, w wersji niecałkowitego rzędu ze zmiennymi $\nu=s^r$, macierze transmitancji obiektu przyjmują postać

$$\mathbf{B}_1(s) = \begin{bmatrix} \nu^2 + 2 & -\nu - 4 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1(s) = \begin{bmatrix} \nu^3 + \nu^2 + 2\nu + 1 & -2\nu^2 - 4\nu - 1 \\ 0 & \nu^2 - \nu - 2 \end{bmatrix}. \quad (3.160)$$

W przypadku pominięcia drugiego wyjścia macierz $\mathbf{B}_1(s)$, opisana wzorem (3.136), przyjmuje postać

$$\mathbf{B}_m(s) = \begin{bmatrix} \nu^2 + 2 & -\nu - 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

z dwoma wirtualnymi zerami VISD o wartościach $\nu_1^o = -1$ and $\nu_2^o = 2$. Ponieważ drugie ν_2^o leży w prawej części płaszczyzny liczb zespolonych, to konieczna jest synteza dodatkowego członu dynamicznego $\mathbf{R}_a(\nu)\mathbf{P}_a^{-1}(\nu)$. Może on być przyjęty jako

$$\mathbf{R}_a(\nu) = \begin{bmatrix} -1,549\nu - 1,549 & -0,034\nu - 0,034 \\ 0,934\nu - 1,154 & 0,015 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_a(\nu) = \begin{bmatrix} \nu + 3 & 0 \\ 0 & \nu + 1 \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

Dla parowania ($q_1 \rightarrow y_1$; $q_2 \rightarrow y_3$) otrzymujemy macierz licznikową transmitancji odsprężonego układu w postaci

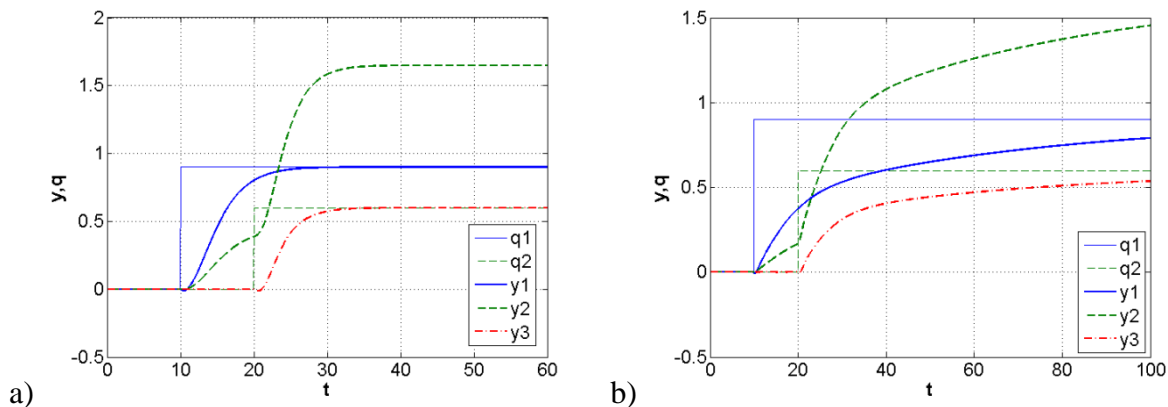
$$\mathbf{N}(\nu) = \begin{bmatrix} \nu^2 - \nu - 2 & 0 \\ 0 & \nu^2 - \nu - 2 \end{bmatrix}, \quad (3.163)$$

a dla przyjętych biegunów: $\nu_1 = -0,5$, $\nu_2 = -0,4$, $\nu_3 = -0,6$ dla pierwszego i $\nu_4 = -0,4$, $\nu_5 = -1,5$, $\nu_6 = -1,3$, $\nu_7 = -1$ dla drugiego bloku sterowania przyjmujemy macierz mianownikową $\mathbf{D}(\nu)$ w postaci

$$\mathbf{D}(\nu) = \begin{bmatrix} \nu^3 + 1,5\nu^2 + 0,74\nu + 0,12 & 0 \\ 0 & \nu^4 + 4,2\nu^3 + 6,27\nu^2 + 3,85\nu + 0,78 \end{bmatrix},$$

tak więc układ po odsprężeniu będzie 6. rzędu.

Jak widać na rysunku 3.18b, zadanie dynamicznego odsprężenia układu niecałkowitego rzędu zostało zrealizowane. Zmiana wartości pierwszego wejścia $q_1(t)$ w $t=10$ s wpływa jedynie na wyjście $y_1(t)$ i pominięte w obliczeniach $y_2(t)$. Podobnie $q_2(t)$ oddziałuje jedynie na wyjścia $y_2(t)$ i $y_3(t)$.



Rys. 3.18. Rezultat symulacji odsprężonego blokowo układu sterowania dla a) $r=1$; b) $r=0,6$

Powyższe symulacje wykonano w pakiecie Matlab/Simulink z wykorzystaniem przybornika Ninteger [240; 241]. Warunkiem otrzymania przedstawionych tu rezultatów jest identyczny sposób aproksymacji operatora $\nu = s^r$. Różny sposób aproksymacji tych operatorów w symulacjach obiektu i członów dynamicznych prekompensatora powoduje

w powyższym przykładzie niestabilność układu. Przeprowadzona analiza potwierdza konieczność prowadzenia bardzo precyzyjnych obliczeń dla układów, w których pojawiają się skróśne zera transmisyjne.

3.9. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono problemy syntezy układów dynamicznego odsprzęgania dla liniowych obiektów dynamicznych MIMO. Omówiono przede wszystkim problemy związane z parowaniem i grupowaniem wejść i wyjść układu i ich wpływ na rzędy i stabilność układu odsprzężonego. Analizowano również możliwość dynamicznego odsprzęgania obiektów o liczbie wyjść większej niż liczba wejść. Opracowana procedura eliminacji wyjść obiektu lewostronnie odwracalnego (jeśli byłaby konieczna) pozwala uniknąć w trakcie syntezy pojawienia się wirtualnych zer transmisyjnych oraz zapewnia, że układ po odsprzężeniu będzie stabilny i o najniższym możliwym rzędzie.

Przedstawiono uniwersalny algorytm dynamicznego odsprzęgania (blokowego lub diagonalnego) układów o jednakowej $m=l$, jak i niejednakowej liczbie wejść i wyjść $m>l$, $l>m$. Algorytm ten umożliwia osiąganie dynamicznego odsprzęgnięcia obiektów, w ogólności niestabilnych i nieminimalnofazowych, z zachowaniem wewnętrznej stabilności i wewnętrznej właściwości układu odsprzężonego. Umożliwia on budowę układów z dynamicznym odsprzężaniem dla celów sterowania manualnego w otwartej pętli, jak również w układach sterowania automatycznego, w tym układów rekonfigurowalnych.

Wszystkie rozważania zilustrowano odpowiednim przykładem syntezy układu z dynamicznym odsprzężaniem dla obiektu o liczbie wyjść większej od liczby wejść.

Pokazano również możliwość wykorzystania metod wielomianowych do syntezy układów odsprzęgających obiektów dynamicznych MIMO niecałkowitego rzędu. Wykazano poprawność stosowania analizowanego w pracy algorytmu dynamicznego odsprzęgania dla układów całkowitego rzędu do syntezy dynamicznych prekompensatorów niecałkowitego rzędu. Opisano ograniczenia stosowalności powyższej metody. Na przykładach 3.2 i 3.3 pokazano jednocześnie wpływ sposobu realizacji pochodnej ułamkowego rzędu na możliwość odsprzęgnięcia układu oraz konieczność weryfikacji poszczególnych metod i teorii dynamicznego odsprzęgania – dotyczących zwłaszcza pokrywających się zer i biegunów modeli obiektu.

4. Sterowanie nieliniowymi obiektami MIMO

4.1. Koncepcja budowy adaptacyjnego regulatora z przełączeniami do sterowania nieliniowymi obiektami MIMO

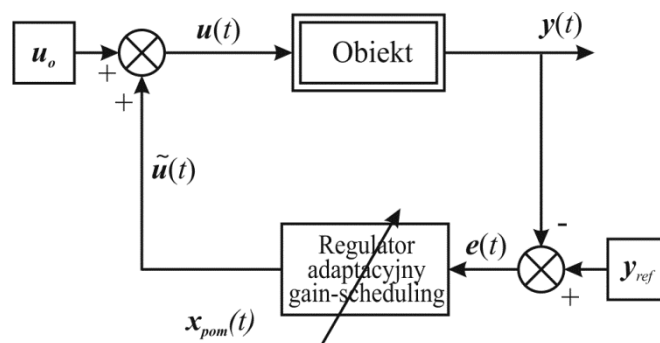
Stały rozwój techniki, w tym mikroprocesorowych urządzeń automatycznej regulacji, oraz wzrost możliwości nowoczesnego sprzętu automatyki pozwala na praktyczną implementację i stanowi podstawy rozwoju algorytmów sterowania procesami nieliniowymi [27; 61; 129]. Jednakże stopień skomplikowania tych algorytmów jest szczególnie (często zbyt) duży i niewygodny w implementacji przy sterowaniu obiektami szybkimi i/lub posiadającymi wiele wejść i wiele wyjść. Dlatego też, pomimo znacznego rozwoju algorytmów syntezy nieliniowych układów sterowania, jaki dokonał się w ostatnich latach, w dalszym ciągu powszechnie wykorzystuje się rozwiązania hybrydowe, wykorzystujące najczęściej liniowe opisy sterowanych procesów.

Jedną z możliwości bezpośredniego rozwiązania problemu sterowania obiektem nieliniowym jest synteza nieliniowego regulatora, który realizowałby wyznaczone cele sterowania w całym obszarze roboczym układu sterowania. Niestety, jest ono trudne do stosowania w praktyce ze względu na brak uniwersalnych metod syntezy układów sterowania z nieliniowymi regulatorami. Oprócz ogólnej metody Lapunowa, z mocno ograniczonymi możliwościami praktycznych zastosowań, w grę mogą wchodzić np. metody polegające na linearyzacji układu nieliniowym sprzężeniem zwrotnym od wyjść (lub stanu) obiektu, wspomagane ewentualnie funkcjonalnymi kompensatorami typu feedforward z charakterystykami będącymi odwrotnością funkcji występujących w opisie obiektu [261]. Dla obiektów MIMO szczególnie ciekawa jest technika globalnej linearyzacji, w której nieliniowe sprzężenie zwrotne linearyzuje układ ze sprzężeniem [101; 117; 222]. Jest to więc jedna z metod dynamicznego odsprężania – zaznaczyć należy, że dość trudna w realizacji, a dla wielu obiektów niemożliwa do zastosowania. Z punktu widzenia układów MIMO i problemu dynamicznego odsprężania, pomijając metodę globalnej linearyzacji, algorytmy dynamicznego odsprężania wykorzystują nominalny model obiektu. Liniowy regulator zaprojektowany z ich użyciem jest tym samym optymalny jedynie w rozpatrywanym punkcie

pracy. Nieliniowości obiektu mogą powodować pogorszenie zakładanej jakości regulacji, a nawet utratę stabilności układu.

Bardzo obiecującą i w ostatnich latach intensywnie rozwijaną metodą jest wykorzystanie regulatorów MPC [54], w tym tych zawierających nieliniowe modele obiektów NMPC [92; 145; 154; 194; 196; 201; 236]. Kiedy nieliniowy opis obiektu nie jest znany dokładnie, stosowane są regulatory MPC wykorzystujące metody sztucznej inteligencji, np. sztuczne sieci neuronowe [3; 46; 132; 243] czy uniwersalne neuroaproxymatory [79; 185; 237]. Niestety, w przypadku nieliniowych obiektów MIMO takie nieliniowe algorytmy sterowania są najczęściej zbyt skomplikowane aby były możliwe do zastosowania w sterowaniu on-line. Zadania te są szczególnie trudne w przypadku wprowadzenia np. ograniczeń na sygnały sterujące, ponieważ wymagają stosowania numerycznych procedur optymalizacji z ograniczeniami.

Biorąc powyższe pod uwagę, wciąż wiele metod stosowanych w praktyce wykorzystuje do syntezy układu sterowania liniowe modele obiektów, obowiązujące w niewielkim odchyleniu od punktu pracy. Nieliniowym obiektem steruje wówczas liniowy sterownik o parametrach systematycznie dostosowywanych do bieżącego punktu pracy [5; 260]. Punkty pracy definiuje się zwyczajowo dla stanów ustalonych obiektu. Aktualny liniowy regulator syntezowany jest na podstawie liniowego modelu obiektu identyfikowanego na bieżąco on-line. Ponieważ bieżąca (on-line) identyfikacja parametrów modelu obiektu, szczególnie w przypadku obiektów MIMO, jest zadaniem bardzo trudnym w praktycznej realizacji, to bardzo popularnymi metodami sterowania nieliniowymi obiektami są układy sterowania zawierające grupy przełączanych w czasie pracy liniowych regulatorów i/lub modeli [10; 15; 22; 24; 29–32; 53; 80; 83; 85; 119; 142; 149; 150; 158; 162; 172; 200; 208; 227; 228; 236]. Parametry takiego regulatora mogą być przyjmowane na podstawie wartości wybranych wielkości pomocniczych. Otrzymujemy wówczas regulator adaptacyjny typu gain-scheduling, dla którego schemat układu regulacji wygląda jak na rysunku 4.1.



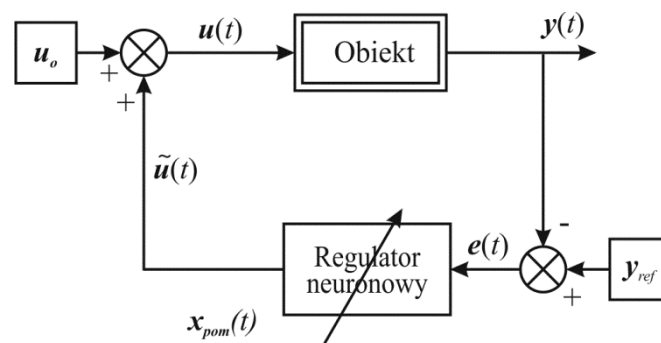
Rys. 4.1. Schemat ideowy układu sterowania z regulatorem adaptacyjnym

Struktury wieloregulatorowe z liniowymi regulatorami przełączanymi w trakcie pracy układu, przy „odległych” punktach pracy, mogą być wspomagane dodatkowymi (dynamicznie lub statycznie) odprężniętymi układami sterowania w pętli otwartej. Przykład takiego układu

przedstawiono w pracach [15; 17]. Proponowana tam przełączalna struktura wieloregulatorowa zawiera (co najmniej) dwa regulatory modalne (lub optymalne LQR/LQG) w typowych obwodach regulacji stałowartościowej MIMO, zaprojektowanych odpowiednio dla bieżących i nowych warunków pracy obiektu regulacji (statku) oraz dodatkowy obwód sterowania w pętli otwartej, umożliwiający płynne przejście obiektu (statku) z bieżącego do nowego punktu pracy – po każdej istotnej zmianie wektora sygnałów odniesienia z $y_o = y_{oa}$ na $y_o = y_{on}$. Dodatkowa pętla, współpracująca (zwykle ze statycznym) z prekompensatorem G i dynamicznym kompensatorem stabilizującym obiekt w pętli otwartej tworzy wraz z obiektem stabilny układ odsprzęgnięty statycznie albo dynamicznie.

Wadą tego rodzaju systemów sterowania są niekorzystne oscylacje (nieciągłości) sygnałów sterujących obiektem wywoływane skokowymi zmianami parametrów regulatora (mimo zachowania ciągłości zmian wektora stanu regulatora) lub przełączaniem wyjść regulatorów (przy różnych wartościach ich wektorów stanu), jeśli będą one zaprojektowane ze zbyt małą rozdzielczością. Przy szybkich zmianach sygnałów sterujących $\tilde{u}(t)$ pogarszają one jakość procesów regulacji i w skrajnym przypadku mogą doprowadzić do utraty stabilności całego systemu sterowania.

Wady tej można uniknąć, stosując, zamiast strojonego regulatora o skokowo zmienianych parametrach lub struktury wieloregulatorowej z przełączanymi wyjściami, adaptacyjny (strojony) regulator „neuronowy” o wartościach parametrów aproksymowanych przez sztuczne sieci neuronowe (rys. 4.2) [25]. Sieci neuronowe dzięki ich uogólniającemu działaniu wyznaczają wartości parametrów regulatorów, także te, dla których sieci neuronowe nie były uczone (trenowane). Jednakże zależności wartości parametrów regulatorów od odpowiednich wartości sygnałów pomocniczych mogą być bardzo skomplikowane i trudne do nauczenia przez sieci neuronowe o rozsądnej strukturze i liczbie warstw. Świadczą o tym skomplikowane kształty dwuwymiarowych powierzchni parametrów regulatorów modalnych przedstawionych m.in. w pracach [18; 23; 24].

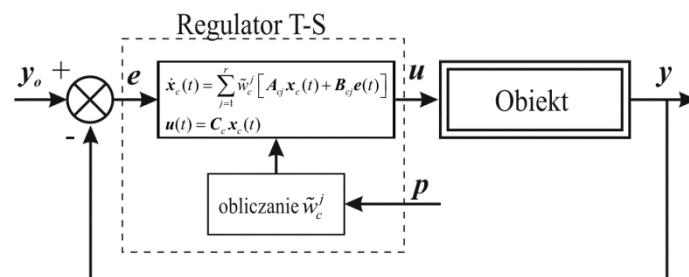


Rys. 4.2. Schemat ideowy układu sterowania pozycją i kursem statku wiertniczego z regulatorem neuronowym o parametrach aproksymowanych przez sztuczne sieci neuronowe

Jednymi z bardziej intensywnie badanych struktur są układy sterowania z regulatorami rozmytymi. Począwszy od pracy [229] ukazało się wiele prac dotyczących modelowania,

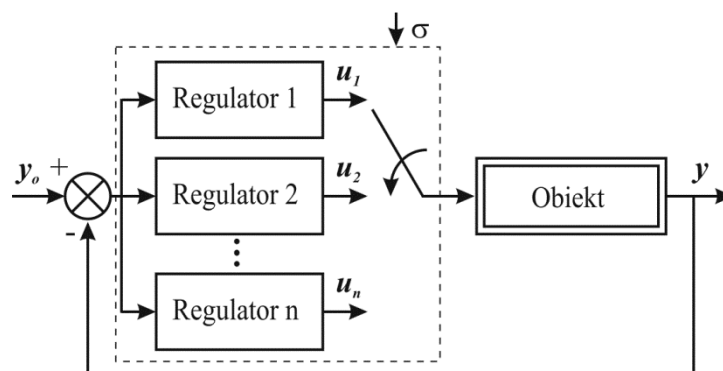
strojenia i stabilności regulatorów rozmytych [33; 45; 58; 67; 90; 103; 104; 160; 226; 229; 231; 233]. Przyjmuje się, że regulatory rozmyte mają zastosowanie w układach, gdy regulatory projektowane metodami konwencjonalnymi nie spełniają stawianych wymagań. Wadą tych regulatorów jest pracochłonny proces określania reguł i strojenia ich parametrów, które wymagają doświadczenia i wiedzy eksperckiej.

W regulatorach rozmytych typu T-S składowe sygnałów sterujących obiektem są formowane jako ważona wartość średnia wyjść $u(t)$ wybranej grupy regulatorów – uśrednianych z wagami proporcjonalnymi do stopnia przynależności danego regulatora i mierzonych wyjść obiektu do odpowiednio rozmytych obszarów wyjść $y(t)$ obiektu (i/lub innych sygnałów pomocniczych) zgodnie z przyjętymi regułami (rys. 4.3).



Rys. 4.3. Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem rozmytym typu T-S

Należy jednak pamiętać, że we wszystkich przełączalnych strukturach układów z wieloma regulatorami (rys. 4.4), w których w danym momencie nie wszystkie regulatory znajdują się w zamkniętym obwodzie sterowania, wszystkie projektowane regulatory muszą być stabilne. Zatem struktury te muszą spełniać tzw. warunki stabilności w sensie mocnym (ang. *strong stability conditions*) [244], gdzie stabilne są nie tylko poszczególne obwody układu sterowania, ale także wszystkie używane w tych strukturach regulatory. W strukturach z pojedynczym, adaptacyjnym (strojonym albo neuronalnym) regulatorem, regulatory projektowane dla poszczególnych punktów pracy statku mogą, ale nie muszą, być stabilne.



Rys. 4.4. Schemat blokowy układu regulacji z przełączanymi regulatorami

W niniejszej pracy w kolejnych rozdziałach przedstawiono sposób syntezy układu sterowania, polegający na linearyzacji nieliniowego opisu obiektu i poszukiwaniu liniowych regulatorów spełniających odpowiednie kryteria jakości sterowania układu dla wszystkich, możliwych do określenia, punktów pracy obiektu – działających przy niewielkich odchyleniach wartości sygnałów od ich wartości nominalnych. W trakcie syntezy otrzymuje się wówczas zestaw liniowych regulatorów, możliwych do wykorzystania w strukturze, jak na rysunku 4.4, bądź w układzie z regulatorem adaptacyjnym typu gain-scheduling (jak na rys. 4.1), w którym parametry regulatora przyjmuje się odpowiednio do aktualnego punktu pracy układu. Są nimi parametry regulatora liniowego obliczonego dla danego punktu pracy układu.

Otrzymany w ten sposób zestaw liniowych regulatorów pozwala również na budowę regulatorów rozmytych typu T-S (rys. 4.3) oraz stanowić może bazę (dane uczące i testujące) do syntezy adaptacyjnego – typu gain-scheduling – regulatora neuronalnego (rys. 4.2). Sposoby syntezy i budowy tych regulatorów opisano w kolejnych rozdziałach niniejszej pracy.

Podejście takie umożliwia automatyzację procesów projektowania adaptacyjnych wielowymiarowych układów sterowania z użyciem techniki komputerowej, w tym przede wszystkim syntezy układów z wielowymiarowymi regulatorami modalnymi i stosowanie metod dynamicznego odsprzęgnięcia układów MIMO w ujęciu wielomianowym.

4.2. Stabilność układu przełączanego

Jednym z podstawowych problemów z wykorzystaniem struktur przełączalnych z wieloma regulatorami jest określenie warunków sterowalności, obserwowalności, a przede wszystkim stabilności układu. Stąd wiele prac, w których analizuje się te problemy [29; 31; 32; 78; 83; 85; 96; 144; 149; 150; 158; 172; 227], w tym również dla układów z regulatorami rozmytymi [33; 43; 45; 47; 58; 65; 90; 103; 104; 135; 150; 160]. Warunki stabilności układów z przełączeniami, w tym tych wykorzystujących regulatory rozmyte typu T-S, mogą być stosunkowo łatwo przetestowane z wykorzystaniem liniowych nierówności macierzowych (ang. *Linear Matrix Inequalities*). Kryteria te wywodzą się z drugiej metody Lapunowa i w swej podstawowej formie z wspólną funkcją Lapunowa dają rezultaty dość zachowawcze dla obiektów z silnymi nieliniowościami, nierealizowalne w praktyce. Kryteria te próbuje się łagodzić, stosując ideę niekwadratowych [49; 89; 99; 135; 198; 230; 248] lub przełączalnych funkcji Lapunowa [37; 47; 107; 245; 247; 248; 257].

Do badania stabilności, opisywanych w kolejnych rozdziałach, układów przełączalnych wykorzystamy teorię stabilności układów nieciągłych, przedstawioną w pracy [215]. Została ona z powodzeniem wykorzystana później np. w opracowaniu [134] i w pracach autora [65; 67].

Rozważmy wektorowe równanie różniczkowe

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad (4.1)$$

w którym $f: R^n \times R \rightarrow R^n$ jest zdefiniowana prawie w każdym punkcie według miary Lebesgue'a i lokalnie ograniczona.

Definicja 4.1 [84]

Funkcja $\mathbf{x}(\cdot)$ nazywana jest rozwiązaniem równania (4.1) w przedziale $[t_0, t_1]$, jeśli $\mathbf{x}(\cdot)$ jest ciągła w przedziale $[t_0, t_1]$ i dla prawie wszystkich $t \in [t_0, t_1]$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in K[f](\mathbf{x}(t), t) \quad (4.2)$$

gdzie

$$K[f](\mathbf{x}(t), t) \triangleq \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{cof}}(B(\mathbf{x}(t), \delta) - N, t), \quad (4.3)$$

w którym: $\bigcap_{\mu N = 0}$ oznacza część wspólną wszystkich zbiorów N zerowej miary Lebesgue'a; $\overline{\text{co}}$ oznacza domknięcie wypukłe, a $B(\mathbf{x}, \delta)$ otwartą kulę o środku w \mathbf{x} i promieniu δ .

Definicja 4.2 [52]

Dla funkcji $V: R^n \rightarrow R$ ciągłej, spełniającej lokalnie warunki Lipschitza, uogólniony gradient ∂V określony jest zależnością

$$\partial V(\mathbf{x}, t) \triangleq \overline{\text{co}}\{\lim \nabla V(\mathbf{x}, t) | (x_i, t_i) \rightarrow (\mathbf{x}, t), (x_i, t_i) \notin \Omega_V\}, \quad (4.4)$$

gdzie Ω_V jest zbiorem rozwiązań o zerowej mierze Lebesgue'a, dla których gradient ∇V nie istnieje.

Definicja 4.3 [52]

Uogólniona pochodna kierunkowa określona jest wzorem

$$f^o(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \lim_{y \rightarrow \mathbf{x}, t \rightarrow 0} \sup \frac{f(\mathbf{y} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{y})}{t}. \quad (4.5)$$

Lemat 4.1 [52]

Niech funkcja f będzie spełniała warunki Lipschitza w pobliżu \mathbf{x} , wtedy

$$f^o(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \max\{\langle \xi, \mathbf{v} \rangle | \xi \in \partial f(\mathbf{x})\}. \quad (4.6)$$

Definicja 4.4 [52]

Funkcja $f(\mathbf{x}, t): R^n \times R \rightarrow R$ nazywana jest regularną, jeśli spełnia następujące warunki:

- 1) dla wszystkich \mathbf{v} istnieje jednostronna pochodna kierunkowa $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v})$,
- 2) dla wszystkich \mathbf{v} , $f'(\mathbf{x}; \mathbf{v}) = f^o(\mathbf{x}; \mathbf{v})$.

Twierdzenie 4.1 [215]

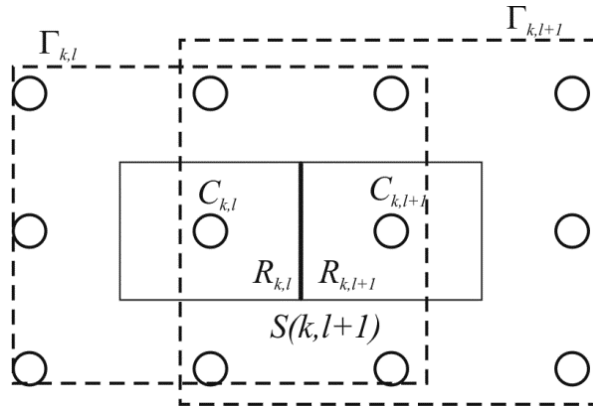
Niech $\mathbf{x}(\cdot)$ będzie rozwiązaniem Filipova równania (4.1) (wg definicji 4.1) a $V:R^n \rightarrow R$ ciągłą, regularną funkcją spełniającą warunki Lipschitza. Wtedy $V(\mathbf{x}(t),t)$ jest ciągłą, pochodną $(d/dt)V(\mathbf{x}(t),t)$ istnieje prawie w każdym punkcie (a.e.; ang. *almost everywhere*) i

$$(d/dt)V(\mathbf{x}(t),t) \in^{a.e.} \dot{V}(\mathbf{x}(t),t), \quad (4.7)$$

gdzie

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t),t) = \bigcap_{\xi \in \partial V(\mathbf{x}(t),t)} \xi^T K[f](\mathbf{x}(t),t). \quad (4.8)$$

Weźmy pod uwagę układ regulacji z przełączanymi regulatorami. Niech każdy z dwóch sąsiadujących kontrolerów $C_{k,l}$ i $C_{k,l+1}$ będzie tworzył stabilny układ sterowania w rejonach $\Gamma_{k,l}$ i $\Gamma_{k,l+1}$, które zawierają odpowiednio rejony $R_{k,l} \in \Gamma_{k,l}$ i $R_{k,l+1} \in \Gamma_{k,l+1}$, dla których kontrolery te są używane. Przełączenie pomiędzy kontrolerami następuje na granicy $S(k,l+1)$ (patrz rys. 4.5).



Rys. 4.5. Obszary stabilności dwóch przełączanych regulatorów

Przyjmijmy, że stabilność obiektu sterowania w obszarze $R_{k,l}$ określona jest macierzą stanu $A(\theta)$, gdzie θ jest wektorem parametrów określającym zmiany obiektu w obszarze $R_{k,l}$. Oznaczmy ponadto A_{cl} jako macierz stanu zamkniętego układu sterowania dla każdego punktu pracy, dla którego liczono regulator $C_{k,l}$. Oznaczmy $A_{cl}(\theta)$ jako macierz stanu zamkniętego układu sterowania z regulatorem $C_{k,l}$ w obszarze $R_{k,l}$.

Twierdzenie 4.2

Układ zamknięty pozostanie stabilny w regionach $R_{k,l}$ i $R_{k,l+1}$ jeśli spełnione zostaną nierówności macierzowe:

$$A_{cl}^T(\theta)P_{k,l} + P_{k,l}A_{cl}(\theta) < 0, \text{ dla } \theta \in R_{k,l}, \quad (4.9)$$

$$A_{cl}^T(\theta)P_{k,l+1} + P_{k,l+1}A_{cl}(\theta) < 0, \text{ dla } \theta \in R_{k,l+1}. \quad (4.10)$$

Dowód

Przyjmijmy ciągłą i niezależną od parametrów funkcję Lapunowa

$$V(\mathbf{x}_{cl}, t) = \mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{cl}, \quad (4.11)$$

gdzie \mathbf{x}_{cl} jest stanem układu zamkniętego z macierzą stanu \mathbf{A}_{cl} i \mathbf{P} macierzą symetryczną dodatnio określoną, spełniającą macierzową nierówność (4.9).

Zgodnie z obliczeniami prezentowanymi w pracy [179] gradient $\nabla V = 2\mathbf{P}\mathbf{x}_{cl}$ jest ciągły, a pochodna na granicy przełączeń $\dot{V}(\mathbf{x}_{cl}, t)$ istnieje prawie dla wszystkich punktów i równa się

$$\dot{V}(\mathbf{x}_{cl}, t) \in^{a.e.} \check{V}(\mathbf{x}_{cl}, t) = \bigcap_{\xi \in \partial V(\mathbf{x}_{cl}, t)} \xi^T K[\mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl}]. \quad (4.12)$$

Wówczas otrzymujemy

$$\check{V}(\mathbf{x}_{cl}, t) = \nabla V^T K[\mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl}] = K[\nabla V^T \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl}] = K[2\mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl}]. \quad (4.13)$$

Ponieważ macierz \mathbf{P} jest dodatnia i części rzeczywiste wartości własnych \mathbf{A}_{cl} są ujemne, czyli $\mathbf{x}_{cl}^T \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl} < 0$, to implikuje to $\check{V}(\mathbf{x}_{cl}, t) < 0$. Wówczas $\mathbf{A}_{cl}(\boldsymbol{\theta})$ z dwoma przełączanymi regulatorami jest stabilna na obszarze $R_{k,l} \cup R_{k,l+1}$.

Konieczność zachodzenia na siebie obszarów stabilności poszczególnych regulatorów $\Gamma_{k,l}$ i $\Gamma_{k,l+1}$ wynika ponadto z możliwości jego praktycznej implementacji. W układzie takim przełączanie pomiędzy regulatorami nie odbywa się bezpośrednio na granicy $S(k, l+1)$ lecz w jej pobliżu, po jej przekroczeniu. Wynika to ze stosowania histerezy, której zadaniem jest redukcja niekontrolowanych przełączeń (ang. *chattering*), czyli wielokrotnego przełączania pomiędzy regulatorami spowodowanego jedynie przez np. szumy pomiarowe.

4.3. Synteza regulatorów adaptacyjnych do sterowania nieliniowymi obiektami MIMO

4.3.1. Synteza układu regulacji modalnej dla nieliniowego obiektu MIMO

Wykorzystanie warunków stabilności, opisanych w rozdziale 4.2, pozwala na syntezę przełączalnego regulatora modalnego, dla którego poszczególne regulatory liniowe syntezowane są z wykorzystaniem metod lokowania biegunów. Linearyzacji nieliniowego modelu obiektu (2.1) dokonuje się dla „wszystkich” punktów pracy obiektu, otrzymując zestaw modeli liniowych (2.2) (lub (2.3)), obowiązujących w okolicach tych punktów pracy. Wówczas dowolną metodą lokowania biegunów, dla zadanych, tych samych położeń biegunów układu zamkniętego, można dokonać syntezy liniowych regulatorów modalnych. Na bazie tak utworzonego zestawu regulatorów modalnych można utworzyć regulator adaptacyjny o strukturze prezentowanej na rysunku 4.1. Regulator ten jest wówczas regulatorem adaptacyjnym typu gain-scheduling ze skokowo przełączalnymi parametrami. Zadaniem układu sterowania jest wówczas określenie bieżącego punktu pracy układu i dobór

odpowiedniego zestawu parametrów regulatora. Punkt pracy określany jest na podstawie odpowiednio dobranego jednego lub wielu sygnałów pomocniczych, możliwych do pomiarzenia podczas pracy układu.

Prostota syntezy takiego układu sterowania pozwala na dowolny podział zakresu sygnałów pomocniczych, a przez to określenie liczby punktów pracy obiektu i liczby syntezyzowanych regulatorów. W najprostszej postaci przyjąć można równomierny podział wszystkich sygnałów pomocniczych, tworząc regularną siatkę regulatorów. Przyjmując odpowiednie odstępy pomiędzy regulatorami w siatce, należy pamiętać o warunkach stabilności, opisanych w poprzednim rozdziale 4.2, jakie muszą zostać spełnione, aby układ z przełączaniami był stabilny.

Idea ta, choć nie nowa i stosunkowo prosta do zastosowania w przypadku układów MIMO, może przysporzyć wielu kłopotów w syntezie układu regulacji. Głównym problemem mogą tu być problemy natury numerycznej na jakie można napotkać w syntezie regulatorów modalnych. Nieliniowość obiektu spowodować mogą bowiem, że uzyskane regulatory liniowe będą cechować się skokowymi zmianami poszczególnych parametrów macierzy. Brak płynnych przełączeń pomiędzy regulatorami może doprowadzić do utraty stabilności układu sterowania.

Aby przedstawić czytelnikowi te problemy, w kolejnych częściach pracy pokazano różne metody projektowania regulatorów modalnych dla liniowych obiektów MIMO oraz przykład wykorzystania tych metod do syntezy adaptacyjnego regulatora modalnego dla wybranego nieliniowego obiektu sterowania.

4.3.1.1. Metody projektowania układów sterowania modalnego dla liniowych obiektów MIMO

Technika lokowania biegunów (ang. *pole placement*) za pomocą sprzężeń zwrotnych od stanu lub od wyjść obiektu jest jedną z podstawowych metod wykorzystywanych w sterowaniu liniowymi układami dynamicznymi. Umożliwia ona swobodne kształtowanie właściwości dynamicznych układów ze sprzężeniem zwrotnym [109; 110; 128]. Układy sterowania uzyskiwane tym sposobem nazywa się układami sterowania modalnego.

Bieguny w układach sterowania modalnego można lokować w dowolnych położeniach, uzyskując różne właściwości dynamiczne (i statyczne) zamkniętego układu sterowania. Właściwości te w układach MIMO zależą jednak nie tylko od wartości poszczególnych biegunów, ale także od kolejności ich przypisania do odpowiednich wejść i wyjść obiektu. Stąd przyjęty sposób syntezy regulatora modalnego rzutuje na uzyskiwane właściwości układów. W niniejszym rozdziale przedstawiono metody opisane szczegółowo w pracy [16]. Są one dość dobrze znane [108–110; 114], a jedna z nich wykorzystywana jest standardowo w pakiecie Matlab. Należy jednak zauważyć, że problem lokowania w układach MIMO z powodu swojej niejednoznaczności stanowi w dalszym ciągu przedmiot wielu badań [6; 120; 195; 209; 210]. Opisane tu metody zostaną później wykorzystane w syntezie

wieloregulatorowych struktur układów sterowania nieliniowymi obiektami MIMO, a uzyskane rezultaty przeanalizowane pod względem możliwości ich praktycznego zastosowania.

W syntezie układów modalnych pierwszym krokiem jest wyznaczenie macierzy $F \in R^{m \times n}$ proporcjonalnego sprzężenia zwrotnego

$$u(t) = -Fx(t) \quad (4.14)$$

od wektora stanu sterowanego obiektu. Można to wykonać bezpośrednio w dziedzinach czasowych na podstawie wygenerowanego wielomianu charakterystycznego i wektorów własnych układu, albo w dziedzinach operatorowych – po przekształceniu opisu obiektu z postaci równań stanu do wielomianowych postaci ułamkowych MFD (2.12) w dziedzinie $s \in C$ (lub $z \in C$) – za pomocą odpowiednich procedur opracowanych w ujęciu wielomianowym.

Działanie układu sterowania modalnego zależy przede wszystkim od wartości biegunów zamkniętego układu sterowania, przyjmowanych podczas syntezy układu. Odpowiadają im wartości własne macierzy $A - BF$ projektowanego układu. Dla układów z czasem ciągłym jest to zbiór wartości zespolonych

$$\{s_j\}, j=1, \dots, n \quad (4.15)$$

leżących w lewej (otwartej) półpłaszczyźnie $s \in C$, $\text{Re } s_j < 0$, natomiast dla układów dyskretnych – zbiór wartości zespolonych

$$\{z_j\}, j=1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

przynależnych do wnętrza koła jednostkowego $|z_j| < 1$ płaszczyzny $z \in C$.

W układach MIMO, projektowanych w dziedzinach operatorowych, wymienione zbiory wartości biegunów należy zwykle rozdzielić na następujące podzbiory biegunów

$$\{s_j\}, j=1, \dots, d_i, \sum d_i = n \quad (4.17)$$

lub

$$\{z_j\}, j=1, \dots, d_i, \sum d_i = n \quad (4.18)$$

przypisanych do poszczególnych wejść obiektu $i=1, 2, \dots, m$. Mogą to być zarówno bieguny o wartościach rzeczywistych, jak i pary biegunów sprzężonych o wartościach zespolonych. W tym ostatnim przypadku, jeśli indeksy sterowalności obiektu $d_i, i=1, 2, \dots, m$ są nieparzyste, to w każdym takim podzbiore musi wystąpić co najmniej jedna wartość rzeczywista. Należy także pamiętać, że zespolone pary biegunów sprzężonych są nierozdzielne i jako takie nie mogą być przydzielane do różnych podzbiorów.

Podczas syntezy układu metodami z ujęcia wielomianowego kolejność korzystania z poszczególnych podzbiorów wartości biegunów nie jest obojętna i ma istotny wpływ na właściwości samych regulatorów i projektowanych układów sterowania modalnego.

W zależności od wybranej metody projektowania (syntezy) układu sterowania modalnego mogą jednak wystąpić dodatkowe ograniczenia, np. takie, że bieguny rzeczywiste nie mogą być wielokrotne albo, że ich krotność nie może przekroczyć pewnej liczby.

Projektowanie liniowych układów sterowania modalnego w dziedzinach czasowych

Przyjmując, że obiektem sterowania modalnego jest liniowy układ dynamiczny MIMO, opisany różniczkowymi równaniami stanu (2.2), pierwszym krokiem w syntezie układu sterowania modalnego jest wyznaczenie macierzy F sprzężenia zwrotnego ze wzoru (4.14), które lokuje (przesuwa) bieguny obiektu do zadawanych *a priori* wartości położeń określonych zbiorem wartości ze wzoru (4.15). Odpowiadają one wartościom własnym: $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$ macierzy A i $s_i, i=1,2,\dots,n$ dla macierzy $A-BF$. Te ostatnie są pierwiastkami równania charakterystycznego macierzy $A-BF$ projektowanego układu

$$\det[sI_n - A + BF] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0. \quad (4.19)$$

Wartościom własnym macierzy A obiektu odpowiadają wektory własne $m_i, i=1,2,\dots,n$ będące rozwiązaniem układu równań

$$[A - \lambda_i I_n] m_i = 0 \text{ dla } i=1,2,\dots,n. \quad (4.20)$$

Zwykle wyznacza się je, przyjmując m_i jako niezerową (dowolną) kolumnę macierzy dołączonej $[A - I_n \lambda_i]_{ad}$. Z nich można utworzyć macierz wektorów własnych

$$M = [m_1, m_2, \dots, m_n], \quad (4.21)$$

która będzie macierzą nieosobliwą, jeśli m_i zostaną wybrane jako liniowo niezależne kolumny z kolejnych macierzy $[A - I_n \lambda_i]_{ad}$ dla $i=1,2,\dots,n$.

Poszukiwaną macierz F w przestrzeni stanów można wyznaczać na dwa sposoby [110]. W pierwszym sposobie synteza jest oparta na wartościach własnych macierzy A i $A-BF$ (ang. *Eigenvalues Method*, ELM), natomiast w drugim – na odpowiadających im wektorom własnym tych macierzy (ang. *Eigenvectors Method*, EVM).

Metoda projektowania ELM

Pierwszy sposób wymaga przekształcenia równań stanu obiektu ze wzoru (2.2) do drugiej postaci kanonicznej DPKL-B sterowalnej, opisanej zależnościami z macierzami $\hat{A} = \hat{T}A\hat{T}^{-1}$ i $\hat{B} = \hat{T}B$, zawierającymi bloki Frobeniusa w pierwszej postaci i blokową macierz $\hat{B} = \hat{T}B$, w których występują niezerowe (nietrywialne) wiersze o numerach $n_i = \sum d_i, i=1,2,\dots,m$. Postać tę otrzymuje się przez przekształcenie podobieństwa z macierzą \hat{T} , utworzoną w odpowiedni sposób z macierzy sterowalności dla pary (A,B) obiektu ze wzoru (2.2) [14; 16; 24; 111].

Biorąc pod uwagę niezerowe wiersze macierzy \hat{A} i \hat{B} , oznaczone jako \hat{A}_{n_i} i \hat{B}_{n_i} , $n_i = \sum d_i, i=1,2,\dots,m$ tworzy się macierze:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{n_1} - e_{n_1+1}^T \\ \hat{A}_{n_2} - e_{n_2+1}^T \\ \dots \\ \hat{A}_{n_{m-1}} - e_{n_{m-1}+1}^T \\ \hat{A}_{n_m} + a^T \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

i

$$\hat{B}_m = \begin{bmatrix} \hat{B}_{n_1} \\ \hat{B}_{n_2} \\ \dots \\ \hat{B}_{n_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

gdzie e_i^T oznacza i -te wiersze macierzy jednostkowej I_n , a $a^T \triangleq [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ wiersz utworzony ze współczynników wielomianu charakterystycznego ze wzoru (4.19).

Poszukiwaną macierz sprzężeń zwrotnych F , lokującą bieguny układu zamkniętego w zadane położenia lewej półpłaszczyzny płaszczyzny liczb zespolonych $s \in C$, można wówczas wyznaczyć z zależności

$$F = \hat{B}_m^{-1} \bar{F} \hat{T}. \quad (4.24)$$

Metoda projektowania EVM

Sposób oparty na wektorach własnych, w przypadku, gdy macierz A obiektu ma jednokrotne wartości własne λ_i , $i=1,2,\dots,n$, sprowadza się do wyznaczenia macierzy wektorów własnych ze wzoru (4.21) i wygenerowania diagonalnej macierzy

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 - s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - s_n \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

o elementach będących różnicami wartości własnych λ_i macierzy A i pierwiastków s_i równania charakterystycznego układu (4.19). Wtedy macierz sprzężeń zwrotnych F można obliczyć z zależności

$$F = M A M^{-1}. \quad (4.26)$$

Korzystanie z tego sposobu komplikuje się przy wielokrotnych rzeczywistych (i zespolonych) wartościach własnych macierzy A obiektu (a także w wypadku konieczności zadawania zespolonych bądź wielokrotnych wartości własnych dla układu). W implementacji tego sposobu postępowania w postaci funkcji *place.m* pakietu Matlab z przybornikiem

Control Toolbox występuje ograniczenie na maksymalną krotność zadawanych wartości biegunów, która nie może przekraczać liczby wejść obiektu m .

Zakładając niedostępność pomiarową wektora stanu obiektu $\mathbf{x}(t)$ zamiast sprzężenia zwrotnego ze wzoru (4.14), można zastosować sprzężenie zwrotne

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.27)$$

od wektora stanu $\hat{\mathbf{x}}(t)$, rekonstruowanego przez obserwator Luenbergera pełnego rzędu na podstawie sygnałów wejściowych $\mathbf{u}(t)$ i wyjściowych $\mathbf{y}(t)$ obiektu (rys. 4.6). Jest on opisany następującymi równaniami stanu [110]

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{LD})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t), \quad (4.28)$$

gdzie $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ jest macierzą wagową obserwatora, zależną od przyjętych dla niego (stabilnych) wartości biegunów. Wartości macierzy wagowej \mathbf{L} wyznacza się w sposób dualny do sposobu wyznaczania macierzy sprzężeń zwrotnych \mathbf{F} . Do obliczeń należy przyjąć macierze obiektu \mathbf{A}^T i \mathbf{C}^T oraz zadane bieguny obserwatora, a po zakończeniu obliczeń otrzymany wynik należy transponować.

Kompensatorem modalnym, zbudowanym na podstawie obserwatora Luenbergera pełnego rzędu, jest dynamiczny układ, którego standardowa realizacja z użyciem oryginalnych macierzy \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} opisu obiektu (2.2) ma postać równań:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{LD})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{f}(t) &= -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Uwzględniając, że $\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$ (rys. 4.6), to otrzymuje się ściśle przyczynowy modalny regulator wyjść, opisany równaniami stanu i wyjść:

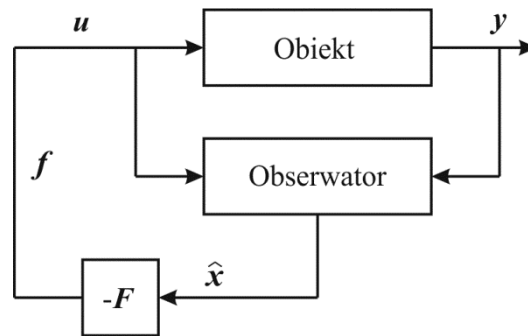
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{y}(t), \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{y}(t), \end{aligned} \quad (4.30)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{LC} - (\mathbf{B} - \mathbf{LD})\mathbf{F}, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{L}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{F}, \quad \mathbf{D}_r = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

i

$$\mathbf{x}_r(t) = \hat{\mathbf{x}}(t).$$



Rys. 4.6. Struktura wielowymiarowego układu z obiektem MIMO objętym sprzężeniem zwrotnym przy niedostępnym wektorze stanu obiektu

Otrzymane wielowymiarowe regulatory modalne mogą być niestabilne lub stabilne. Mają one często właściwości zbliżone do regulatora PD. Ich działanie w rozpatrywanych układach sterowania modalnego polega na sprowadzaniu wyjść obiektu (i pozostałych sygnałów występujących w układzie) do wartości zerowych w stanach ustalonych – przy dowolnych warunkach początkowych $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ dla obiektu i zwykle zerowych dla obserwatora $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$.

Projektowanie liniowych układów sterowania modalnego w dziedzinach operatorowych

Projektowanie układu regulacji modalnej w dziedzinach operatorowych odbywa się za pomocą odpowiednich procedur opracowanych w ujęciu wielomianowym, z opisem obiektu w postaci MFD (2.12) w dziedzinie $s \in \mathbb{C}$ (lub $z \in \mathbb{C}$). Wykorzystać przy tym można dwie metody, z rozwiązywaniem (ang. *Polynomial Matrix Equations Method*, PME) lub bez rozwiązywania macierzowych równań wielomianowych (ang. *Polynomial Method*, PM) [11; 14; 16].

Projektowanie bez rozwiązywania macierzowych równań wielomianowych

Dla macierzy transmitancji obiektu w postaci prawostronnego wielomianowego ułamka macierzowego $\mathbf{T}(\cdot) = \mathbf{B}_1(\cdot) \mathbf{A}_1^{-1}(\cdot)$ należy wyznaczyć kolumnowe stopnie $d_i = \deg_{c_i} \mathbf{A}_1(\cdot)$, $i=1, 2, \dots, m$ macierzy mianownikowej $\mathbf{A}_1(\cdot)$ oraz macierz najwyższych współczynników $\mathbf{F}_c(\mathbf{A}_1(\cdot))$. Następnie, na podstawie znajomości kolumnowych stopni macierzy $\mathbf{A}_1(\cdot)$, równych indeksom sterowalności d_i , $i=1, 2, \dots, m$ obiektu, należy wygenerować diagonalną macierz

$$\mathbf{C}_{1d}(\cdot) = \text{diag}[c_i(\cdot), i=1, 2, \dots, m], \quad (4.32)$$

której elementami są odpowiednio wielomiany $c_i(\cdot)$ o miejscach zerowych, określonych odpowiednio zbiorami (4.17) dla układów ciągłych i (4.18) dla dyskretnych.

Po lewostronnym pomnożeniu otrzymanej macierzy przez macierz liczbową $\mathbf{X} = \mathbf{F}_c(\mathbf{A}_1(\cdot))$ otrzyma się macierz wielomianową

$$\mathbf{C}_1(\cdot) = \mathbf{X} \mathbf{C}_{1d}(\cdot), \quad (4.33)$$

która jest macierzą mianownikową układu z obiektem objętym sprzężeniem zwrotnym $f(\cdot) = -F\mathbf{x}(\cdot)$. Obowiązuje zatem zależność

$$F\bar{B}_1(\cdot) = C_1(\cdot) - A_1(\cdot) = -F(\cdot). \quad (4.34)$$

Jeśli przy wyznaczaniu wielomianowych reprezentacji macierzy transmitancji obiektu (2.12) skorzystano z zależności wynikających z twierdzenia strukturalnego Wolowicha, to macierz sprzężeń zwrotnych F projektowanego układu sterowania modalnego można wyznaczyć bezpośrednio z zależności

$$F\hat{T}\hat{S}(\cdot) = F(\cdot), \quad (4.35)$$

gdzie $\hat{S}(\cdot)$ jest macierzą strukturalną zależną wyłącznie od wskaźników sterowalności obiektu, a \hat{T} jest macierzą przekształcenia przez podobieństwo, sprowadzającą oryginalne równania stanu obiektów do postaci kanonicznej „regulatorowej” (DPKL-B sterowalnej) [11; 14; 16].

Jeśli wektor stanu sterowanego obiektu jest pomiarowo niedostępny, a na obiekt nie działają zakłócenia stochastyczne, można zaprojektować obserwator Luenbergera pełnego rzędu, opisany równaniem (4.28). Wyznaczenie macierzy wagowej obserwatora L przebiega w sposób dualny do sposobu wyznaczania macierzy sprzężeń zwrotnych F . Należy dokonać transformacji opisów obiektu (2.2) (lub (2.3)) do macierzy transmitancji przedstawionych w postaci lewostronnych wielomianowych ułamków macierzowych MFD (2.13) i wyznaczyć dla otrzymanej macierzy mianownikowej $A_2(\cdot)$ jej wierszowe stopnie $\bar{d}_j = \deg_{g_j} A_2(\cdot)$, $j=1,2,\dots,l$ oraz macierz najwyższych współczynników $\Gamma_r(A_2(\cdot))$.

Następnie do zaprojektowania obserwatora pełnego rzędu, na podstawie znajomości wierszowych stopni macierzy $A_2(\cdot)$, równych indeksom obserwowalności \bar{d}_j , $j=1,2,\dots,l$ obiektu, należy wygenerować diagonalną macierz

$$C_{2d}(\cdot) = \text{diag}[c_j(\cdot), j=1,2,\dots,l], \quad (4.36)$$

której elementami są wielomiany $c_j(\cdot)$ o miejscach zerowych zależnych od przyjętych dla obserwatora (stabilnych) wartości biegunów.

Po prawostronnym pomnożeniu otrzymanej macierzy przez macierz liczbową $Y = \Gamma_r(A_2(\cdot))$ otrzymujemy

$$C_2(\cdot) = C_{21d}(\cdot)Y. \quad (4.37)$$

Wtedy obowiązuje równość

$$C_2(\cdot) - A_2(\cdot) = S(\cdot)TL, \quad (4.38)$$

skąd bezpośrednio można wyznaczyć macierz wagową L dla obserwatora Luenbergera pełnego rzędu.

Obliczenia macierzy F i L oraz macierzy A_r ze wzorów (4.35), (4.38), (4.31) kończą procedurę projektowania układów sterowania modalnego z czasem ciągłym lub dyskretnym

w omawianym, wielomianowym sposobie postępowania bez rozwiązywania macierzowych równań wielomianowych. Wynikiem projektowania są ściśle przyczynowe, modalne regulatory wyjść, opisane równaniami stanu w postaci standardowej (4.30). Należy zauważyć, że mimo zbieżności przedstawionej tu metody projektowania z pierwszym sposobem postępowania, omówionym przy syntezie regulatorów modalnych w przestrzeni stanów (w dziedzinach czasowych), końcowe rezultaty projektowania będą na ogół różne, przy takich samych danych przyjętych do obliczeń. Powstające różnice są wynikiem odmiennych sposobów umiejscawiania biegunów w strukturze (w torach) projektowanych układów. W omawianej metodzie wielomianowej PM w przypadku biegunów układu są one przypisywane podzbiorem (4.17) (lub (4.18)) do poszczególnych wyjść, a w przypadku biegunów obserwatora do poszczególnych wyjść obiektu.

Projektowanie z rozwiązywaniem macierzowych równań wielomianowych

Projektowanie układu regulacji modalnej z rozwiązywaniem macierzowych równań wielomianowych (ang. *Polynomial Matrix Equations Method*, PME) jest popularną metodą stosowaną chętnie w układach sterowania adaptacyjnego.

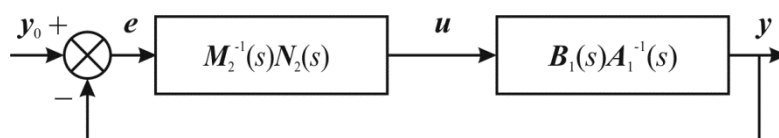
Dla macierzy transmitancji modalnego regulatora w postaci lewostronnego wielomianowego ułamka macierzowego MFD, zdefiniowanej przez macierze $M_2(\cdot)$ i $N_2(\cdot)$, i macierzy transmitancji obiektu w postaci ze wzoru (2.12) w układzie z rysunku 4.7, spełnione być musi macierzowe równanie wielomianowe

$$M_2(\cdot)A_1(\cdot) + N_2(\cdot)B_1(\cdot) = \Delta(\cdot), \quad (4.39)$$

w którym po prawej stronie występuje macierz $\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot)$. Aby zaprojektowany regulator był właściwy, powinna ona mieć wierszowo kolumnowo zredukowaną strukturę z nieosobliwą macierzą najwyższych (diagonalnych) współczynników

$$\Gamma_h(\Delta(\cdot)) = \Gamma_r(Q(\cdot))\Gamma_c(C_1(\cdot)) = \Gamma_r(M_2(\cdot))\Gamma_c(A_1(\cdot)). \quad (4.40)$$

Macierze te, tj. $Q(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ i $C_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$, są dobierane przy zadanych wyznacznikach $\det Q(\cdot)$ i $\det C_1(\cdot)$ wygenerowanych na podstawie zadanych (stabilnych) wartości biegunów odpowiednio dla obserwatora i dla zamkniętego układu sterowania.



Rys. 4.7. Struktura układu sterowania w dziedzinach operatorowych

Ponadto układy sterowania modalnego metodą rozwiązywania diofantycznych równań wielomianowych można projektować bez problemów także w dualnym opisie, w którym obiekt jest reprezentowany macierzą transmitancji w postaci lewostronnego macierzowego ułamka wielomianowego ze wzoru (2.13), a regulator — macierzą transmitancji

$T_R(\cdot) = -N_1(\cdot)M_1^{-1}(\cdot)$, poszukiwaną w postaci prawostronnego macierzowego ułamka wielomianowego. W tym opisie macierz transmitancji modalnego regulatora MIMO musi spełniać dualne (prawostronne) macierzowe równanie wielomianowe

$$A_2(\cdot)M_1(\cdot) + B_2(\cdot)N_1(\cdot) = \tilde{A}(\cdot), \quad (4.41)$$

w którym $\tilde{A}(\cdot) = C_2(\cdot)Z(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ powinna być macierzą wielomianową wierszowo kolumnowo zredukowaną o nieosobliwej macierzy najwyższych (diagonalnych) współczynników

$$\Gamma_h(\tilde{A}(\cdot)) = \Gamma_r(C_2(\cdot))\Gamma_c(Z(\cdot)) = \Gamma_r(A_2(\cdot))\Gamma_c(M_1(\cdot)). \quad (4.42)$$

Pierwiastki równania $\det C_2(\cdot) = 0$ powinny być takie same, jak wartości biegunów obserwatora, czyli także równe zerom wyznacznika poprzednio zdefiniowanej macierzy $Q(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$, natomiast pierwiastki $\det Z(\cdot) = 0$ – wartościom biegunów przyjmowanych dla układu sterowania modalnego, równych zerom wyznacznika macierzy $C_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ generowanej w podstawowej wersji opisu układu. W tej dualnej, trochę nienaturalnej wersji opisu, macierz $Z(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ nie ma określonej roli w strukturze układu poza tym, że jej zera powinny być równe biegunom zamkniętego układu sterowania modalnego [14; 16].

Wyznaczenie właściwej macierzy transmitancji $T_R(\cdot) = -M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$ przez rozwiązanie macierzowego (lewostronnego) równania (4.39) kończy projektowanie modalnego regulatora wyjść obiektu w podstawowej wersji opisu układu. Właściwości dynamiczne i statyczne otrzymanego regulatora, ciągłego lub dyskretnego, zależą od przyjętych wartości biegunów dla układu zamkniętego i od wartości biegunów przyjętych dla obserwatora pełnego albo zredukowanego rzędu.

Minimalne rozwiązania równania (4.39) definiują co najwyżej właściwe macierze transmitancji $T_R(\cdot) = -M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$ dla projektowanych regulatorów. Ich realizacje w dziedzinach czasowych mają postać równań stanu i wyjść:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (4.43)$$

dla układów ciągłych

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r(k+1) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(k) + \mathbf{B}_r \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

dla układów dyskretnych, z macierzami \mathbf{A}_r , \mathbf{B}_r , \mathbf{C}_r w postaciach kanonicznych (obserwowalnych) i macierzami tranzycyjnymi $\mathbf{D}_r \neq \mathbf{0}$.

Projektowanie (synteza) wielowymiarowych regulatorów modalnych w dualnej wersji opisu układu, polegające na rozwiązaniu (dualnego) prawostronnego macierzowego równania wielomianowego (4.41) z odpowiednio dobraną macierzą wielomianową $\tilde{A}(\cdot) = C_2(\cdot)Z(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$, jest bardziej skomplikowane. Głównym problemem jest ustalenie

odpowiedniej, kolumnowej struktury macierzy $\mathbf{Z}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$, określonej przez jej kolumnowe stopnie

$$\deg_{c_j} \mathbf{Z}(\cdot) = k_j > 0, j=1, 2, \dots, l; \sum k_j = n \quad (4.45)$$

oraz macierz najwyższych (kolumnowych) współczynników $\Gamma_c(\mathbf{Z}(\cdot))$ tak, aby macierz $\tilde{\mathbf{A}}(\cdot)$ przy znanych wierszowych stopniach $\deg_{C_2}(\cdot) = \deg_{A_2}(\cdot) = \bar{d}_j, j=1, 2, \dots, l$ była wierszowo kolumnowo zredukowana. Zagadnienia te są szczegółowo omówione m.in. w pracy [14].

Przykład 4.1 – Projektowanie układu sterowania modalnego dla liniowego obiektu MIMO

W celu zilustrowania prezentowanych dotychczas rozważań teoretycznych w niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki syntezy regulatorów modalnych, wykorzystując różne metody lokowania biegunów dla wybranego obiektu MIMO.

Przyjmijmy obiekt opisany równaniami stanu i wyjść (2.2) z macierzami

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,5000 & -0,8600 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0321 & 0,8660 & 0,5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0053 & -0,0031 & -0,0266 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0093 & -0,1316 & -0,0087 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1672 & 0,0211 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,958 & 0 & 0 \\ 0 & 0,530 & 0 \\ 0 & 0 & 9,4697 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Celem syntezy jest regulator modalny, opisany równaniami stanu i wyjść (4.30) skonstruowany na bazie obserwatora Luenbergera oraz macierzy sprzężeń zwrotnych od estymowanego stanu \mathbf{F} . Dla metody z rozwiązywaniem macierzowego równania wielomianowego (PME), opis (4.30), uzyskuje się na podstawie macierzy transmitancji operatorowej $\mathbf{T}_R(\cdot) = -\mathbf{M}_2^{-1}(\cdot)\mathbf{N}_2(\cdot)$, po rozwiązaniu równania (4.39).

Na potrzeby obliczeń przyjęto następujące wartości biegunów układu zamkniętego:

– $-0,40$; $-0,45$; $-0,14$; $-0,16$; $-0,15$; $-0,18$

oraz biegunów obserwatora:

– $-0,80$; $-0,90$; $-0,28$; $-0,32$; $-0,30$; $-0,36$.

Bezpośrednim wynikiem obliczeń dla metod ELM, EVM i PM są macierze: sprzężenia zwrotnego od stanu obiektu \mathbf{F} oraz macierz wejściowa obserwatora \mathbf{L} . Macierze \mathbf{A}_r , \mathbf{B}_r , \mathbf{C}_r i \mathbf{D}_r przyjmowane są zgodnie z zależnościami (4.31).

Metoda ELM

$$F = \begin{bmatrix} 1,5949 & -0,9208 & 0 & -0,0055 & -0,0032 & 0,0012 \\ 0 & 0 & -0,1056 & 0,0171 & -0,2424 & 0,0135 \\ -0,0645 & 0,0374 & 0,0989 & 0,0211 & 0,4719 & 0,1563 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -0,1027 & 0,0470 & 0,0999 \\ 0,0593 & -0,0342 & 2,0449 \\ 0,0653 & 0,1554 & 2,9600 \\ -0,8681 & -0,0039 & 0,4733 \\ -0,5162 & 0,0062 & 0,1876 \\ 0,0025 & -1,0022 & 3,7748 \end{bmatrix}$$

$$A_r = \begin{bmatrix} 0,1027 & -0,0470 & -0,0999 & 0,5000 & -0,8660 & 0 \\ -0,0593 & 0,0342 & -2,0128 & 0,8660 & -0,5000 & 0 \\ -0,0653 & -0,1554 & -2,9600 & 0 & 0 & 1 \\ -0,6598 & 0,8861 & -0,4733 & 0 & 0 & -0,0278 \\ 0,5162 & -0,0062 & -0,1302 & 0 & 0 & -0,0161 \\ 0,6084 & 0,6483 & -4,7110 & -0,0326 & -4,4477 & -1,4800 \end{bmatrix}$$

$$B_r = L, C_r = F.$$

Metoda EVM

$$F = \begin{bmatrix} 0,0137 & -0,0246 & 0,0088 & 0,3390 & -0,0007 & -0,0042 \\ -0,1095 & 0,0650 & 0,0109 & 0,0263 & 0,8691 & -0,0002 \\ 0,0003 & -0,0002 & 0,0062 & 0,0176 & 0,0018 & 0,0577 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0,6035 & -0,0497 & -0,1085 \\ -0,0905 & 1,0526 & -0,0681 \\ -0,0555 & 0,0820 & 1,1670 \\ 0,0232 & 0,1818 & -0,0654 \\ -0,0505 & 0,0751 & 0,0019 \\ -0,0142 & 0,1385 & 0,2478 \end{bmatrix}$$

$$A_r = \begin{bmatrix} -0,6035 & 0,0497 & 0,1085 & 0,5000 & -0,8660 & 0 \\ 0,0905 & -1,0526 & 0,1002 & 0,8660 & 0,5000 & 0 \\ 0,0555 & -0,0820 & -1,1670 & 0 & 0 & 1 \\ -0,0363 & -0,2054 & 0,0570 & -0,3300 & -0,0024 & -0,0226 \\ 0,1100 & -0,1104 & -0,0078 & -0,0050 & -0,6035 & -0,0086 \\ 0,0117 & -0,1371 & -0,3062 & 0,0005 & 0,0045 & -0,5464 \end{bmatrix}$$

$$B_r = L, C_r = F.$$

Metoda PM

$$F = \begin{bmatrix} 0,0939 & 0,1627 & 0,0247 & 0,8817 & -0,0032 & 0,0012 \\ -0,0357 & 0,0206 & 0,0089 & 0,0171 & 0,3101 & 0,0135 \\ 0 & 0 & 0,0029 & 0,0177 & 0,0022 & 0,0348 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1,5973 & 0,0470 & -0,0058 \\ 0,0593 & 0,5658 & 0,0047 \\ 0,0653 & 0,1554 & 0,6600 \\ 0,3579 & 0,0700 & -0,0174 \\ -0,4380 & 0,0163 & -0,0049 \\ 0,1135 & 0,0910 & 0,1034 \end{bmatrix}$$

$$A_r = \begin{bmatrix} -1,5973 & -0,0470 & 0,0058 & 0,5000 & -0,8660 & 0 \\ -0,0593 & -0,5658 & 0,0274 & 0,8660 & 0,5000 & 0 \\ -0,0653 & -0,1554 & -0,6600 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4479 & -0,2259 & -0,0062 & -0,8500 & 0 & -0,0278 \\ 0,4574 & -0,0275 & 0 & 0 & -0,3000 & -0,0161 \\ -0,1135 & -0,0910 & -0,1304 & 0 & 0 & -0,3300 \end{bmatrix}$$

$$B_r = L, C_r = F.$$

Metoda PME

Rozwiązanie macierzowego równania wielomianowego (4.39) dało macierz licznikową i mianownikową opisu transmitancji regulatora w postaci $T_R(\cdot) = -M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$ z macierzami

$$N_2(s) = \begin{bmatrix} 0,4784s+0,0676 & 0,8159s+0,1172 & 0,0033s \\ -0,0217s-0,0032 & 0,0189s+0,0018 & 0,0052s \\ 0,0026s & 0,0055s & 0,0052s \end{bmatrix},$$

$$M_2(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2,5447s + 2,3317 & -0,0017s - 0,0042 & 0,0115s + 0,0311 \\ 0,0163s + 0,0146 & s^2 + 0,7684s + 0,1910 & 0,1279s + 0,1308 \\ 0,0169s + 0,0167 & 0,0012s + 0,0010 & s^2 + 0,99s + 0,3482 \end{bmatrix},$$

a uzyskaną z nich postać czasową określają macierze:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} -2,5447 & 1 & 0,0017 & 0 & -0,0115 & 0 \\ -2,3317 & 0 & 0,0042 & 0 & -0,0311 & 0 \\ -0,0163 & 0 & -0,7684 & 1 & -0,1279 & 0 \\ -0,0146 & 0 & -0,1910 & 0 & -0,1308 & 0 \\ -0,0169 & 0 & -0,0012 & 0 & -0,9900 & 1 \\ -0,0167 & 0 & -0,0010 & 0 & -0,3482 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0,4784 & 0,8159 & 0,0033 \\ 0,0676 & 0,1172 & 0,0004 \\ -0,0217 & 0,0189 & 0,0052 \\ -0,0032 & 0,0018 & 0,0006 \\ 0,0026 & 0,0055 & 0,0052 \\ 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wszystkie cztery regulatory modalne realizują prawidłowo postawione zadanie lokowania biegunów. Dają jednak zupełnie inne przebiegi przejściowe oraz wzmocnienia (statyczne) w poszczególnych torach układu regulacji.

Dla czytelników, którzy nie mieli do tej pory konieczności syntezy układu regulacji modalnej dla obiektów MIMO, przedstawione powyżej wyniki rzucą z pewnością nowe światło na, z pozoru prosty, problem lokowania biegunów. W takim przypadku o jakości uzyskiwanych wyników decydują inne czynniki, takie jak: uzyskiwane przebiegi przejściowe i minimalne wzmocnienia w układzie [209], wzmocnienia statyczne układu ze sprzężeniem zwrotnym, odsprężnienia poszczególnych wejść i wyjść układu czy wreszcie numeryczne uwarunkowania przyjętej metody syntezy regulatorów. Ten ostatni problem jest kluczowy w syntezie adaptacyjnego regulatora modalnego typu gain-scheduling z punktu widzenia zapewnienia stabilności układu sterowania.

Przykład 4.2 – Regulator adaptacyjny do pozycjonowania statku wiertniczego

Do praktycznej ilustracji syntezy adaptacyjnego regulatora modalnego wybrano nieliniowy, wielowymiarowy model 3DOF statku wiertniczego „Wimpey Sealab”, który pierwotnie jako statek ładunkowy o nazwie „Elizabeth Bowater” został przebudowany i oddany do eksploatacji jako jednostka wiertnicza jesienią 1974 roku – rysunek 4.8 [252]. Statek „Wimpey Sealab” wyposażony był w urządzenie wiertnicze i komputerowo wspomagany system dynamicznego pozycjonowania (ang. *dynamic positioning*, DPS). W aspekcie wykonawczym za sterowanie ruchem statku odpowiedzialne były: napęd główny z czterołopatową śrubą napędową oraz cztery elektryczne napędy sterujące, które, wykorzystując możliwość obracania się w osi pionowej, mogą wytwarzać siłę napędową w dowolnym kierunku (pędniki obrotowe typu Schottel), ulokowane parami; dwa na rufie statku i dwa w części dziobowej statku.

W opracowanym modelu uwzględniono oddziaływanie wpływu prądu morskiego, jak również ograniczenia w stosunku do wartości prędkości prądu morskiego i statku względem wody oraz ograniczenia na wartości sygnałów sterujących.



Rys. 4.8. Statek wiertniczy „Wimpey Sealab”

Źródło: www.shipsnostalgia.com (data dostępu 11.05.2015).

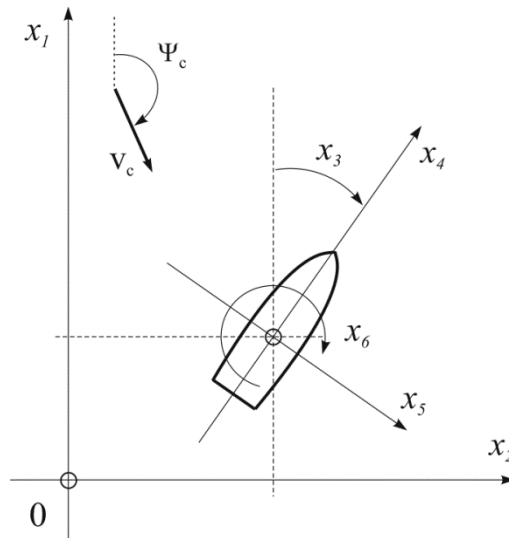
Pełny wielowymiarowy (MIMO), nieliniowy model matematyczny statku wiertniczego „Wimpey Sealab” opisany jest w przestrzeni stanów za pomocą następujących równań stanu i wyjść:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \cos x_3 - x_5 \sin x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \sin x_3 + x_5 \cos x_3 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = 0,088x_5^2 - 0,132x_4V_s + 0,958x_5x_6 + 0,958u_1 \\ \dot{x}_5 = -1,4x_5V_s - 0,978x_5^3/V_s - 0,543x_4x_6 + 0,037x_6|x_6| + 0,544u_2 \\ \dot{x}_6 = (-0,764x_4x_5 + 0,258x_5V_s - 0,162x_6|x_6| + u_3)/a \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

gdzie zmienne stany x_1, \dots, x_6 określają pozycję i kąt kursowy statku nad punktem wiercenia oraz wzdłużne, poprzeczne i kątowe prędkości statku, $V_s = \sqrt{x_4^2 + x_5^2}$ jest prędkością postępową statku mierzoną względem wody, $a = k_{zz}^2 + 0,0431$ jest parametrem opisującym moment bezwładności statku wraz z wodą „towarzyszącą” ruchowi kątowemu statku wokół osi pionowej, k_{zz}^2 jest kwadratem względnego „promienia bezwładności” odniesionego do długości statku $L_{pp} = 94,49$ m. W symulacjach przyjęto: $k_{zz} = 0,25$. Sygnały V_c i Ψ_c są odpowiednio: prędkością i kierunkiem prądu morskiego, określanymi jak na rysunku 4.9.

Wszystkie sygnały w modelu (4.46) są bezwymiarowe, tj. odniesione do wymiarów i wagi statku z przeskalowanym czasem $t = t_r / \sqrt{L_{pp}/g} \approx 0,32 t_r$.



Rys. 4.9. Układy odniesienia i opis zmiennych statku

Zgodnie z przyjętym w pracy podejściem, dokonano linearyzacji modelu dla typowych ustawień statku w dopuszczalnym obszarze położen nad punktem wiercenia w stanach ustalonych, kiedy $V_s = -V_c$. Nominalne wartości wektora stanu \mathbf{x}_0 oraz sił i momentu \mathbf{u}_0 , pozwalających pokonać opory hydrodynamiczne kadłuba statku, przy znanych wartościach prądu morskiego $V_c \neq 0$ i jego kierunku Ψ_c , można wyznaczyć z nieliniowego układu równań algebraicznych (2.4). Wynikiem linearyzacji równań (4.46) dokonanej w całym zakresie kąta kursowego $x_{30} \in [-\pi, \pi]$, przy różnych wartościach prędkości prądu morskiego $V_c \in [0,01 \div 4,5]$ węzła morskiego i kącie $\Psi_c = \pi$ rd są modele liniowe opisane w torze sygnałów sterujących równaniami stanu i wyjść:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0] + \mathbf{B}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0] \\ \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0], \end{aligned} \quad (4.47)$$

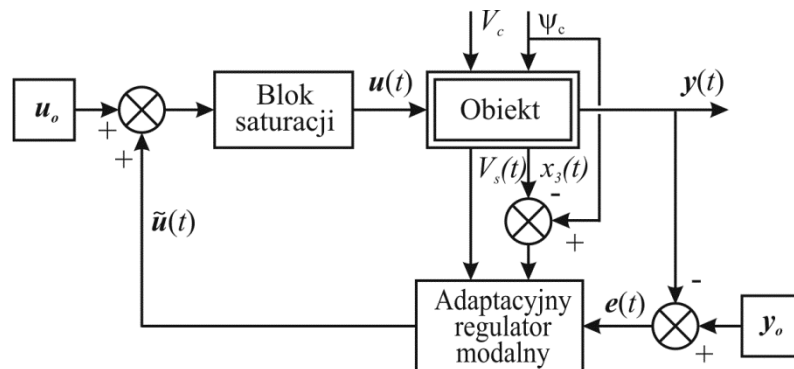
gdzie

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \cdot) \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,958 & 0 & 0 \\ 0 & 0,543 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z elementami a_{ij} zależnymi od różnicy pomiędzy kątem prądu morskiego Ψ_c a przyjmowanymi do linearyzacji wartościami kąta kursowego statku $y_{30}=x_{30}$ oraz od prędkości prądu V_c .

Schemat blokowy układu sterowania kursem i pozycją statku przedstawiono na rysunku 4.10.



Rys. 4.10. Schemat ideowy układu sterowania pozycją i kursem statku wiertniczego z adaptacyjnym regulatorem modalnym

Układ, w którym dokonywano symulacji, składa się z zestawu wielowymiarowych regulatorów modalnych o właściwościach PD z inercją, które zostały zaprojektowane wszystkimi omawianymi w niniejszym rozdziale metodami dla liniowych modeli statku, otrzymanych w możliwie wszystkich punktach pracy, przy różnych prędkościach prądu morskiego V_c i kątach kursowych $y_{30}=x_{30}$ statku, ustawionego nad punktem wiercenia. Punkty pracy zostały określone odpowiednio: nominalną wartością wektora stanu obiektu x_0 i nominalną wartością sygnałów sterujących u_0 . Są one wyznaczone z układu równań algebraicznych (2.4). Wartości te w stanach ustalonych zależą wyłącznie od zadawanych wartości kąta kursowego $y_{30}=x_{30}$ statku oraz od prędkości V_c i kąta prądu morskiego Ψ_c .

W proponowanej, wieloregulatorowej strukturze dokonywano przełączeń po stronie wyjść regulatorów na podstawie zmierzonych pomocniczych zmiennych, którymi są: aktualna prędkość postępową $V_s(t)$ statku, mierzona względem wody (ujemna – jeśli statek płynie rufą do tyłu, tj. przy $x_4(t)<0$) oraz odchyłka kąta kursowego statku obliczana na bieżąco względem kąta prądu morskiego jako $\Psi_c - x_3(t)$. Podczas pracy systemu sygnały $\tilde{u}(t)$ wychodzące z regulatora są dodawane do wartości „nominalnych” u_0 .

Dla ograniczenia wpływu nadmiernych wartości sił i momentów wypracowywanych przez regulator wprowadzono ograniczenia maksymalnych wartości sygnałów sterujących $u(t)=\tilde{u}(t)+u_0$. W rzeczywistym układzie w miejsce bloku ograniczającego sygnały sterujące $u(t)$ wystąpi blok rozdziału pędu na poszczególne pędniki i napęd główny.

Wyniki syntezy regulatorów modalnych

Przyjmując odpowiednio dobrane wartości biegunów dla układu i dla obserwatora Luenbergera pełnego rzędu w postaci zbiorów:

$$\{-0,40, -0,45, -0,14, -0,15, -0,15, -0,16\}$$

i

$$\{-0,80, -0,90, -0,28, -0,30, -0,30, -0,32\}$$

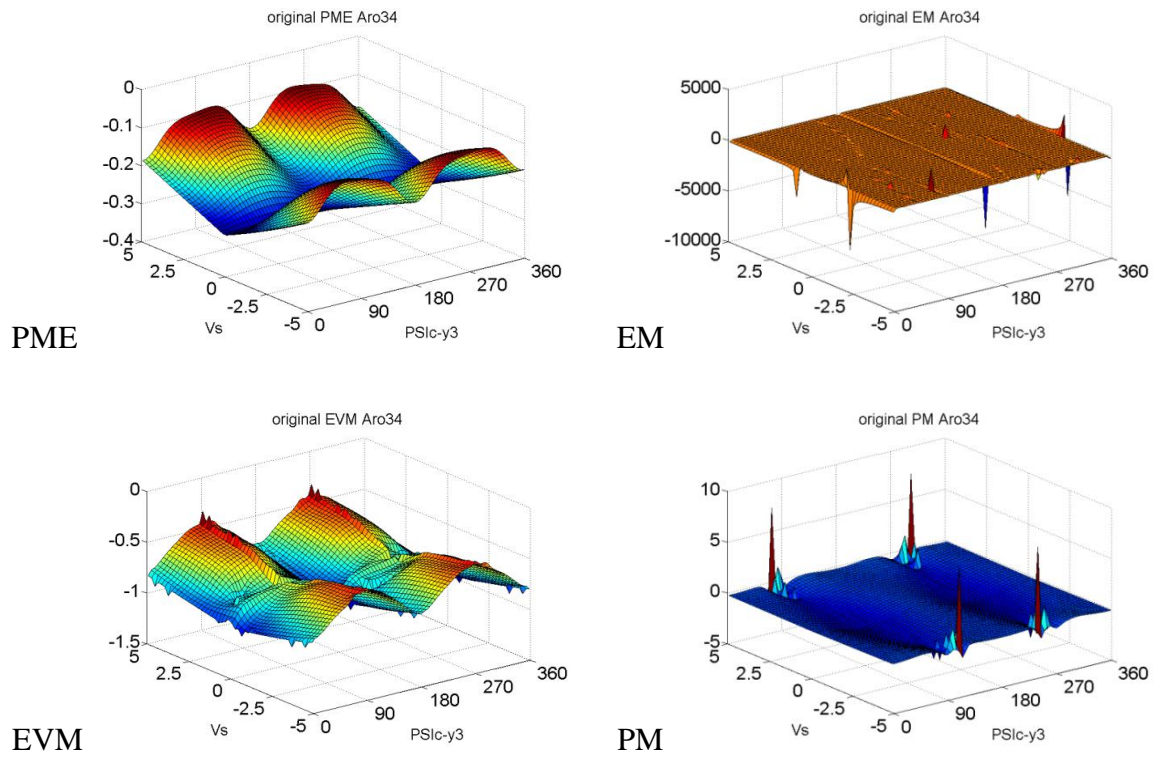
otrzymano zestaw 3650 modalnych regulatorów, opisanych równaniami stanu (4.30), w postaci „standardowej” – w której prawie wszystkie elementy (tj. ponad 70 parametrów) macierzy $A_r = A - BF - LC$, $B_r = L$ i $C_r = -F$ były zmienne – oraz w drugiej postaci kanonicznej DPKL-B obserwowalnej z macierzami:

$$A_{ro} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & a_{26} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & a_{36} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} & 0 & a_{46} \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 & a_{56} \\ 0 & a_{62} & 0 & a_{64} & 1 & a_{66} \end{bmatrix}, \quad B_{ro} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

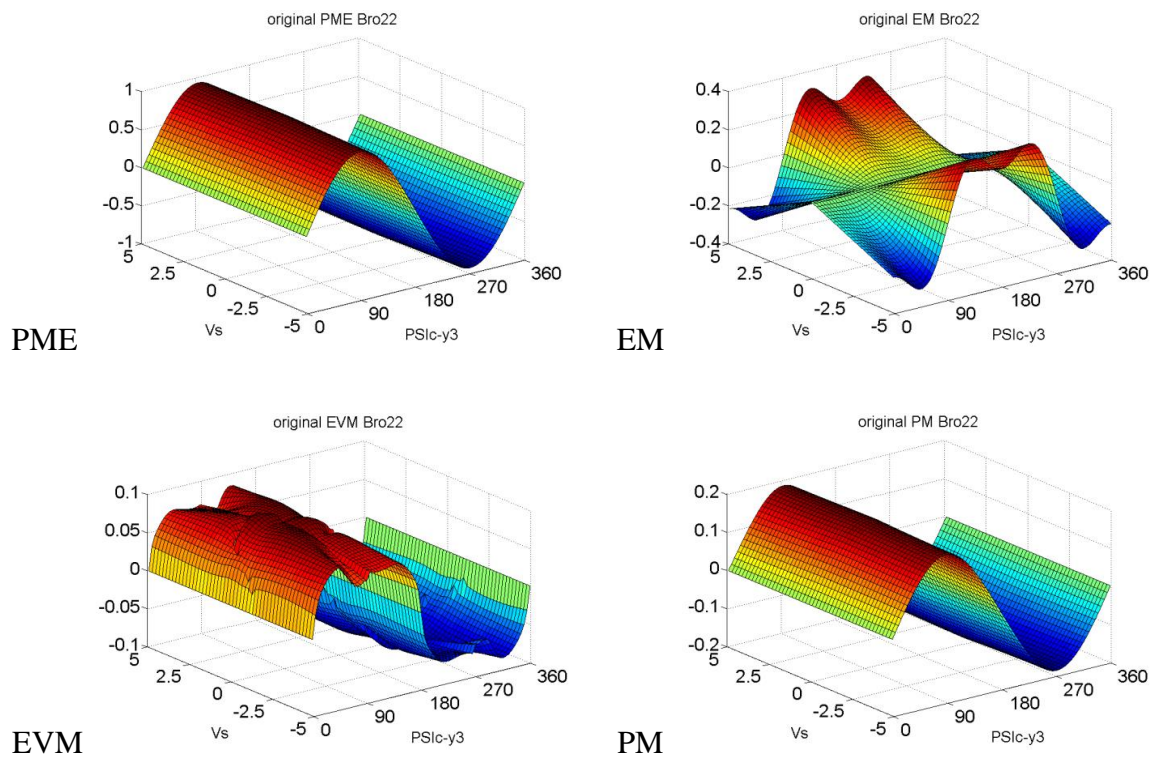
$$C_{ro} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D_{ro} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o 36 zmiennych parametrach: a_{ij} , $i=1,2,\dots,6$, $j=2,4,6$ oraz b_{ij} , $i=1,2,\dots,6$, $j=1,2,3$ zależnych od prędkości statku $V_s = \text{sign}(x_4) \sqrt{x_4^2 + x_5^2}$ i odchyłeń kąta kursowego statku $y_{30} = x_{30}$ od kąta prądu morskiego Ψ_c . Syntezy regulatorów dokonano w zakresie zmian prędkości $V_s \in [-4,9 \div 4,9]$ węzłów z rozdzielczością 0,2 węzła i w całym zakresie kąta pełnego, tj. w przedziale $\Psi_c - x_{30} \in [0 \div 360^\circ]$ z rozdzielczością 5° (tj. około 0,0873 rd), dla założonego względnego „promienia bezwładności” statku $k_{zz} = 1/4$.

Zależność wybranych elementów macierzy A_{ro} i B_{ro} od prędkości statku V_s oraz od odchyłek kątowych $\Psi_c - x_3$ ilustrują trójwymiarowe powierzchnie pokazane szczegółowo na rysunkach 4.11 i 4.12.



Rys. 4.11. Zmienność parametrów a_{34} macierzy A_{ro} dla różnych metod syntezy regulatora modalnego



Rys. 4.12. Zmienność parametrów b_{22} macierzy B_{ro} dla różnych metod syntezy regulatora modalnego

Wyniki badań symulacyjnych

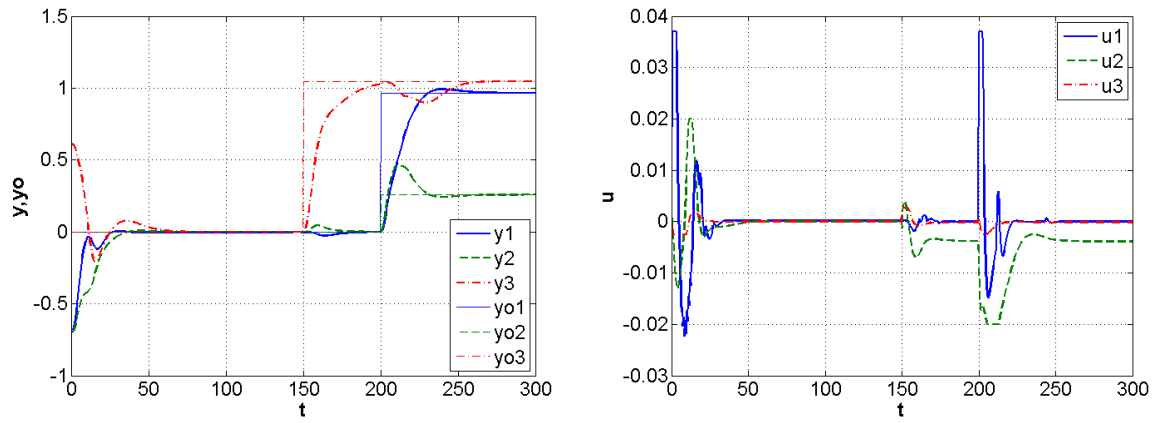
Badania symulacyjne omawianej wieloregulatorowej struktury układu przeprowadzono dla wielu stanów początkowych określonych różnymi położeniami i kursem oraz początkowymi prędkościami statku. Statek w symulacjach był doprowadzany do punktu wiercenia z zadaniem kursem kątowym, a następnie przestawiany na inną pozycję po zmianie kursu. Przykładowe wyniki symulacji ilustrują wykresy pokazane odpowiednio na rysunkach 4.13–4.19. Przedstawiają one przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących kolejno dla układów regulacji z regulatorami modalnymi syntetyzowanymi metodami PME, EVM, ELM i PM. Symulacji z regulatorami uzyskanymi trzema ostatnimi metodami dokonano przy realizacji regulatorów w dziedzinie czasowej w postaci naturalnej A_r, B_r, C_r (oznaczonej jako org) i w postaciach kanonicznych (4.48) (oznaczonych jako kan).

W przypadku metod PME, PVM i PM wyniki symulacji były pozytywne, tzn. statek opisany nieliniowym modelem (4.46) dawał się sprowadzać do punktu wiercenia i przyjmował zadany kąt kursowy, a następnie mógł być przestawiony na dowolną, z góry zadaną, pozycję. W pozostałych przypadkach duże wartości i nieciągłości parametrów macierzy regulatora (4.48) – jak pokazano na rysunku 4.9 – skutkują skokowymi zmianami i generalnie dużymi wartościami sygnałów sterujących $u(t)$, co w przypadku ich ograniczeń prowadzi do wyraźnego pogorszenia jakości regulacji lub nawet utraty stabilności.

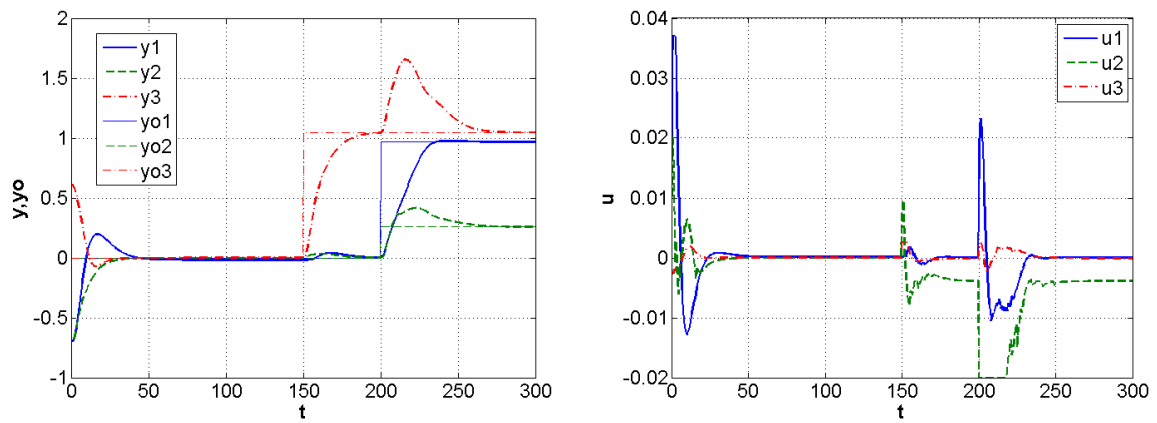
W symulacji statek był doprowadzany do punktu wiercenia z odległości około 100 m położonego z lewej strony poniżej tego punktu, z przyjętym kursem początkowym $x_3(0)=35^\circ$ i składowymi prędkościami $x_4(0)$ i $x_5(0)$, odpowiadającymi płynięciu statku początkowo „pod prąd” z prędkością początkową $V_s(0)=V_c=2$ węzły. Po osiągnięciu punktu wiercenia z zadaniem kątem kursowym $y_{30}=0^\circ$, zmieniono skokowo wartość zadaną kąta kursowego statku na wartość $y_{30}=60^\circ$. Z chwilą, gdy statek osiągnął zadany (nowy) kąt kursowy dokonywano skokowej zmiany wartości zadanych dla obydwu współrzędnych pozycji statku, tak aby statek przesunął się na odległość około 100 m z prawej strony nad punktem wiercenia i zatrzymał w odległości 100 m z prędkością ustaloną $V_s=V_c=2$ węzły względem wody, z doprowadzeniem kąta kursowego statku $y_3(t)=x_3(t)$ do wartości zadanej $y_{30}=60^\circ$.

Podczas symulacji przełączeń parametrów regulatora dokonywano ze stosunkowo dużą histerezą wynoszącą 4° dla zmian kąta kursowego oraz 0,12 węzła dla prędkości statku.

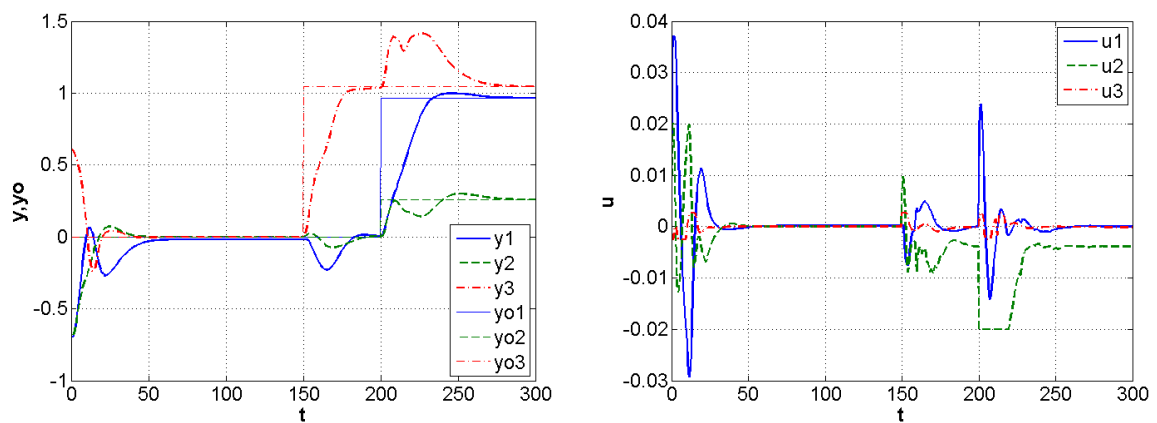
Odchyłki regulacji w stanach ustalonych zostały wyeliminowane przez podanie wartości nominalnych u_0 , obliczonych z układu równań (2.4) dla zadanej, końcowej pozycji statku przy kącie kursowym $y_{30}=60^\circ$. Przebiegom zmian pozycji statku odpowiadają przebiegi sygnałów sterujących $u(t)$ z zadziałaniem ograniczeń dla składowych: $u_2(t)$ (siła boczna $F_y(t)$) i $u_3(t)$ (moment obracający statkiem $M_z(t)$), pokazanych na rysunkach 4.13–4.19.



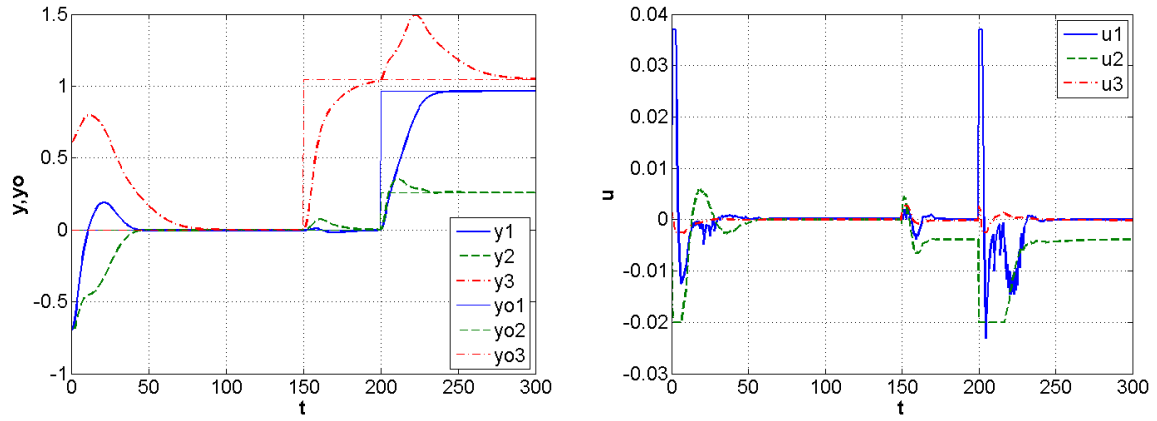
Rys. 4.13. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących $u(t)$ – (PME)



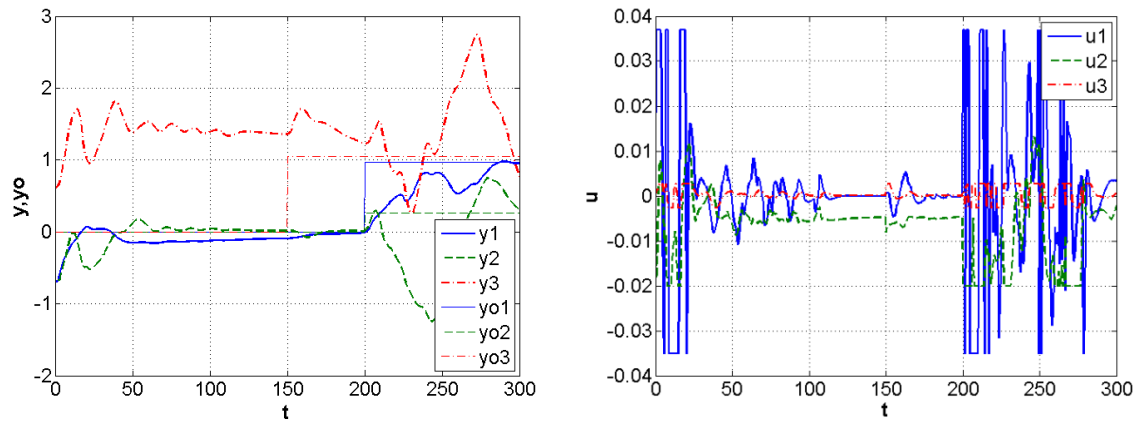
Rys. 4.14. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących $u(t)$ – (EVM org)



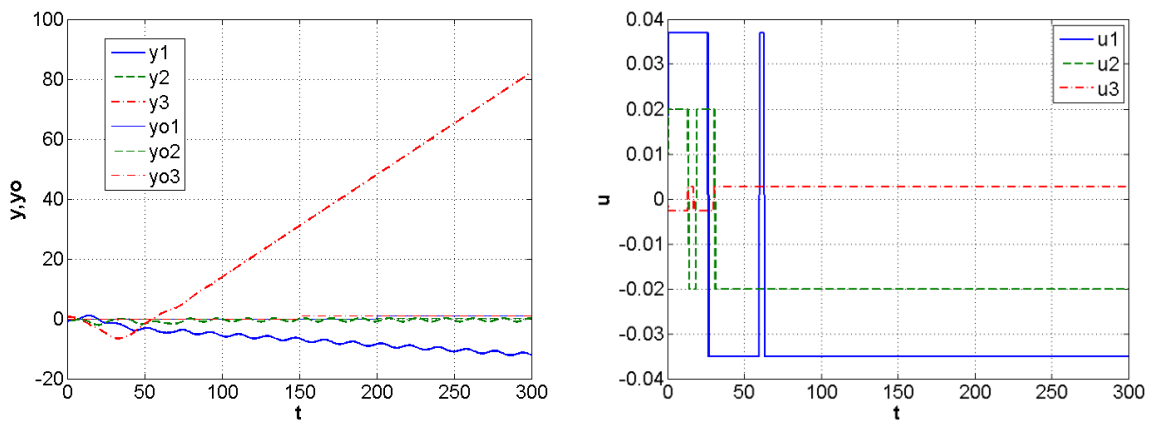
Rys. 4.15. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących $u(t)$ – (EVM kan)



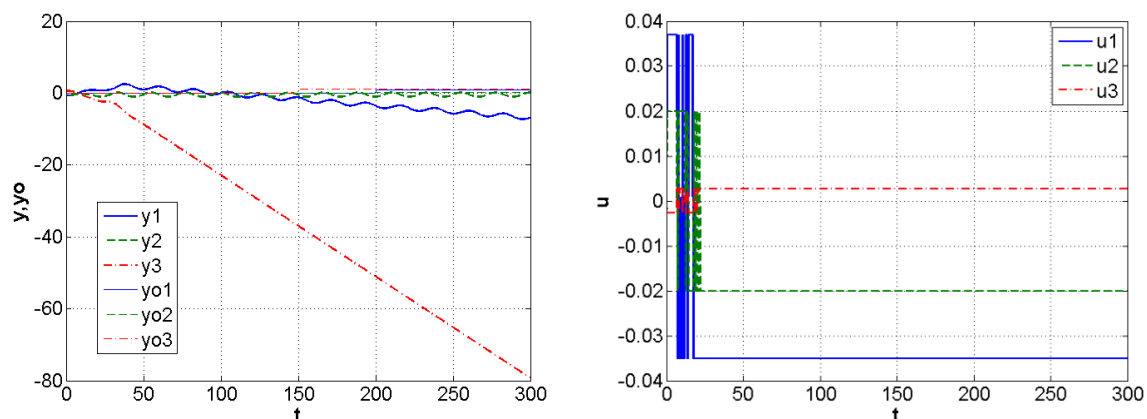
Rys. 4.16. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących $u(t)$ – (PM org)



Rys. 4.17. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących $u(t)$ – (PM kan)



Rys. 4.18. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących $u(t)$ – (ELM org)



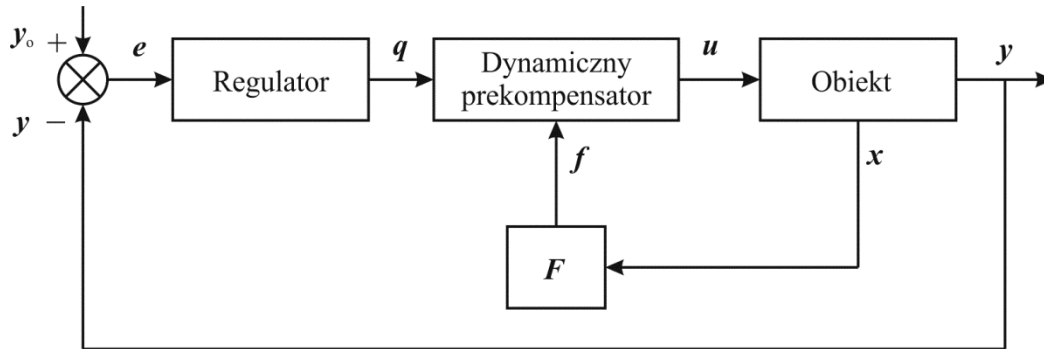
Rys. 4.19. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących $u(t)$ – (ELM kan)

Z przeprowadzonych badań symulacyjnych wynika, że zaproponowana koncepcja realizacji układu sterowania za pomocą wieloregulatorowej struktury liniowych regulatorów modalnych MIMO jest możliwa do zrealizowania. Regulatory modalne zaprojektowane na „stany ustalone” funkcjonują poprawnie, mimo że w rzeczywistości muszą one pracować w stanach przejściowych (w trybie pracy quasi-ustalonej). Niestety, przełączeniom wyjść regulatorów towarzyszą nieładkie przebiegi sygnałów sterujących $u(t)$, trudne do praktycznej realizacji przez dynamiczne układy wykonawcze. Sygnały takie w układach sterowania rzeczywistymi obiektami nie będą mogły być zrealizowane. W ramach dalszych prac podjęto próby konstrukcji układu regulacji na bazie wieloregulatorowej struktury liniowych regulatorów modalnych MIMO, wykorzystujących logikę rozmytą (regulatory typu T-S) oraz sztuczne sieci neuronowe, które powinny zapewnić bardziej płynne działanie układu.

4.3.2. Synteza układu regulacji z dynamicznym odsprzęgnięciem dla nieliniowego obiektu MIMO

Choć istnieje duża liczba prac dotyczących dynamicznego odsprzęgnięcia, to niemal wszystkie one dotyczą jedynie obiektów LTI, a problem odsprzęgnięcia nieliniowych obiektów MIMO jest ciągle otwarty. Pełne odsprzęgnięcie obiektu nieliniowego wymaga globalnej linearyzacji [101; 117; 222]. Alternatywę stanowić może użycie nieliniowych regulatorów predykcyjnych [92; 207; 211]. Niestety, w dalszym ciągu metody te są najczęściej bardzo skomplikowane, bądź nierealizowalne obliczeniowo on-line. Dlatego w wielu praktycznych realizacjach układów sterowania nieliniowymi obiektami MIMO wzajemny wpływ wejść i wyjść obiektu jest jedynie ograniczany i dopuszcza się jego niepełne odsprzęgnięcie. Jednym z takich rozwiązań jest proponowany dalej układ sterowania z przełączanymi parametrami regulatora odsprzęgającego.

Rozpatrzmy układ regulacji z dynamicznym odsprzęgnięciem, zrealizowany z wykorzystaniem sprzężenia zwrotnego od stanu dynamicznego prekompensatora i regulatora, jak w strukturze na rysunku 4.20.



Rys. 4.20. Schemat układu regulacji z dynamicznym odsprzęgnięciem

Przyjmijmy, że obiekt jest opisany równaniami stanu i wyjść (2.2), regulator równaniami:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r e(t) \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r e(t),\end{aligned}\quad (4.49)$$

a równania stanu i wyjść dla dynamicznego prekompensatora przyjmują postać

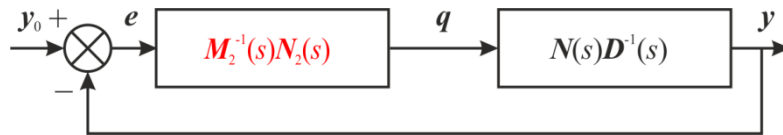
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_w(t) &= \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{u}_w(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{D}_w \mathbf{u}_w(t),\end{aligned}\quad (4.50)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_w(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \end{bmatrix}\quad (4.51)$$

oraz $\mathbf{B}_w = [\mathbf{B}_{wl} \mid \mathbf{B}_{wm}]$, $\mathbf{D}_w = [\mathbf{D}_{wl} \mid \mathbf{D}_{wm}]$ z $\mathbf{B}_{wp} \in R^{n_w \times l}$, $\mathbf{B}_{wm} \in R^{n_w \times m}$, $\mathbf{D}_{wp} \in R^{m \times l}$, $\mathbf{D}_{wm} \in R^{m \times m}$.

Wszystkie powyższe elementy układu można wyznaczyć, wykorzystując prezentowany w rozdziale 3.6 uniwersalny algorytm dynamicznego odsprzęgnięcia, uzupełniony o obliczenia konieczne do wyznaczenia regulatora (4.49). Regulator ten może zostać wyznaczony po odsprzęgnięciu wewnętrznej części układu, pomiędzy sygnałami \mathbf{y} i \mathbf{q} , bądź w trakcie odsprzęgnięcia. Możliwości te ilustrują rysunki 4.21 oraz 4.22. W pierwszym przypadku po odsprzęgnięciu obiektu projektuje się, w ogólności dowolny, regulator. Dla odsprzęgnięcia diagonalnego są to niezależne regulatory SISO dla każdej pętli regulacji. W przypadku odsprzęgnięcia blokowego konieczna jest synteza regulatorów MIMO dla poszczególnych bloków MIMO syntezowanego układu. Regulatory te wyznaczyć można, np. stosując, opisaną powyżej, technikę lokowania biegunów z wykorzystaniem rozwiązywania macierzowego równania wielomianowego (4.39).

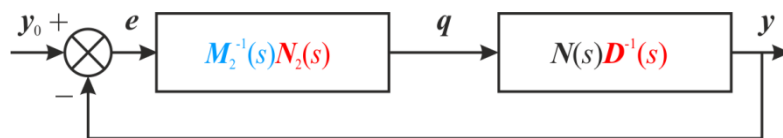


Rys. 4.21. Ilustracja sposobu syntezy układu regulacji z dynamicznym odsprzęgnięciem – niezależna synteza regulatora

Druga możliwość syntezy układu regulacji z rysunku 4.20 polega na modyfikacji algorytmu 4.1, po której macierz mianownikową $D(\cdot)$ transmitancji wewnętrznej części układu $N(\cdot)D^{-1}(\cdot)$, nie wyznacza się jak w krokach 16–18, lecz poprzez rozwiązanie macierzowego równania wielomianowego

$$M_2(\cdot)D(\cdot) + N_2(\cdot)N(\cdot) = \Delta(\cdot) \quad (4.52)$$

względem macierzy $D(\cdot)$ i $N_2(\cdot)$ ze znaną macierzą $N(\cdot)$, przyjętymi macierzami $M_2(\cdot)$ i $\Delta(\cdot)$. Macierz mianownikowa regulatora $M_2(\cdot)$ przyjmowana jest wówczas zgodnie z zasadą modelu wewnętrznego, przez co można zapewnić w układzie regulacji zerowe statyczne odchyłki regulacji i/lub śledzenia. Szczegóły tej syntezy opisano m.in. w pracach [14; 20; 63; 66].



Rys. 4.22. Ilustracja sposobu syntezy układu regulacji z dynamicznym odsprzęgnięciem – synteza regulatora podczas odsprzęgania

Przyjmując wektor stanu regulatora jak na rysunku 4.23

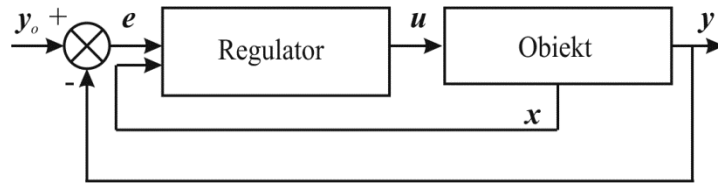
$$\mathbf{x}_{rw}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

otrzymujemy opis regulatora w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{rw}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{wl}\mathbf{C}_r & \mathbf{A}_w \end{bmatrix} \mathbf{x}_{rw}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{wl}\mathbf{D}_r & \mathbf{B}_{wm}\mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{u}_z(t) \\ \mathbf{u}(t) &= [\mathbf{D}_{wl}\mathbf{C}_r \quad \mathbf{C}_w] \mathbf{x}_{rw}(t) + [\mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r \quad \mathbf{D}_{wm}\mathbf{F}] \mathbf{u}_z(t), \end{aligned} \quad (4.54)$$

gdzie

$$\mathbf{u}_z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}.$$



Rys. 4.23. Schemat układu regulacji z dynamicznym odprężaniem przy dostępnym wektorze stanu obiektu

Przyjmując natomiast jako wektor stanu układu zamkniętego

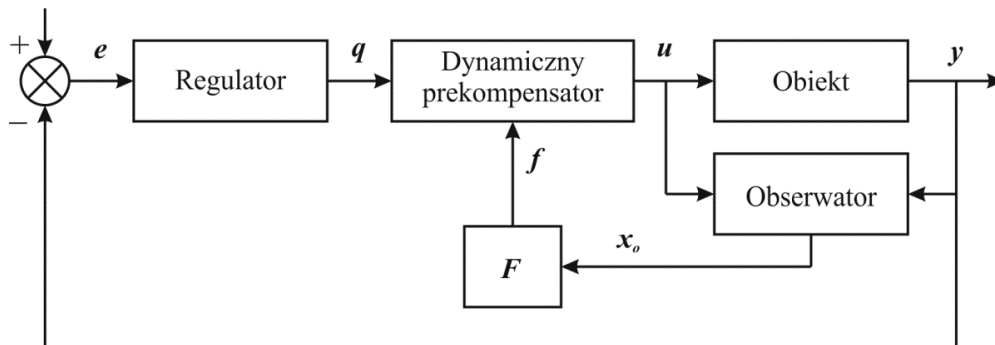
$$\mathbf{x}_z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

oraz $D_r = \mathbf{0}$ i $D = \mathbf{0}$, otrzymujemy

$$\dot{\mathbf{x}}_z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{wl}\mathbf{C}_r & \mathbf{A}_w & \mathbf{B}_{wm}\mathbf{F} \\ -\mathbf{B}_r\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_w & \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_{wm}\mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{D}_{wp}\mathbf{C}_r \end{bmatrix} \mathbf{x}_z(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} y_o(t) \quad (4.56)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{C}] \mathbf{x}_z(t).$$

W przypadku braku możliwości pomiaru wektora stanu obiektu, do układu należy wprowadzić obserwator jak na rysunku 4.24.



Rys. 4.24. Schemat układu regulacji z dynamicznym odprężaniem przy niedostępnym wektorze stanu obiektu

Równania stanu i wyjście obserwatora przyjmują postać

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{om} & \mathbf{B}_{ol} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F} \mathbf{x}_o(t),$$

dla którego sprzężenie (4.51) jest wówczas realizowane od wektora stanu obserwatora.

Przyjmując wektor stanu regulatora z rysunku 4.25 jako

$$\mathbf{x}_{rwo}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \\ \mathbf{x}_o(t) \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

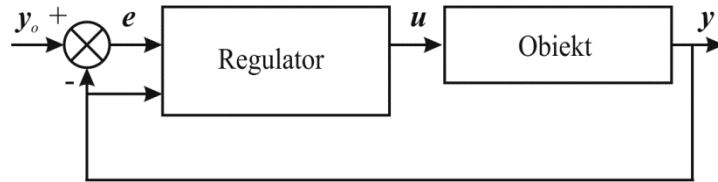
otrzymujemy jego równania stanu i wyjść w postaci

$$\dot{\mathbf{x}}_{rwo}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{wl}\mathbf{C}_r & \mathbf{A}_w & \mathbf{B}_{wm}\mathbf{F} \\ \mathbf{B}_{om}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{C}_r & \mathbf{B}_{om}\mathbf{C}_w & \mathbf{C}_o + \mathbf{B}_{om}\mathbf{D}_{wm}\mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{rwo}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{wo}\mathbf{D}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{om}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r & \mathbf{B}_{ol} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{zo}(t) \quad (4.59)$$

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{D}_{wl}\mathbf{C}_r \quad \mathbf{C}_w \quad \mathbf{D}_{wm}\mathbf{F}] \mathbf{x}_{rwo}(t) + [\mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r \quad \mathbf{0}] \mathbf{u}_{zo}(t)$$

dla

$$\mathbf{u}_{zo}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}.$$



Rys. 4.25. Schemat układu regulacji z dynamicznym odsprzęgnięciem przy niedostępnym wektorze stanu obiektu

Równania stanu i wyjść układu zamkniętego z rysunku 4.25, przy założeniu wektora stanu układu jako

$$\mathbf{x}_{zo}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_w(t) \\ \mathbf{x}_o(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

przyjmują postać

$$\dot{\mathbf{x}}_{zo}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_r\mathbf{C} \\ \mathbf{B}_{wl}\mathbf{C}_r & \mathbf{A}_w & \mathbf{B}_{wm}\mathbf{F} & -\mathbf{B}_{wl}\mathbf{D}_r\mathbf{C} \\ \mathbf{B}_{om}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{C}_r & \mathbf{B}_{om}\mathbf{C}_w & \mathbf{C}_o + \mathbf{B}_{om}\mathbf{D}_{wm}\mathbf{F} & \mathbf{B}_{ol}\mathbf{C} - \mathbf{D}_{om}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r\mathbf{C} \\ \mathbf{B}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{C}_r & \mathbf{B}\mathbf{C}_w & \mathbf{B}\mathbf{D}_{wm}\mathbf{F} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{zo}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_{wl}\mathbf{D}_r \\ \mathbf{B}_{om}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r \\ \mathbf{B}\mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r \end{bmatrix} \mathbf{y}_o(t)$$

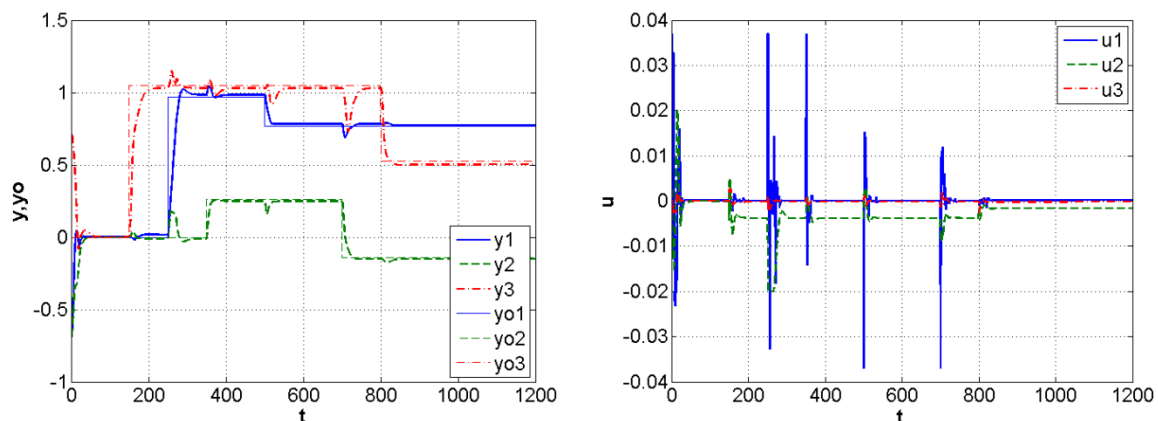
$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{C} - \mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r\mathbf{C}] \mathbf{x}_{zo}(t) + \mathbf{D}_{wl}\mathbf{D}_r \mathbf{y}_o(t). \quad (4.61)$$

Przedstawiona powyżej analiza wskazuje na sposób syntezy regulatora do celów dynamicznego odsprzęgnięcia (4.54) ((4.59) dla układu z obserwatorem), który – tak samo jak w przypadku regulatorów modalnych – można wykorzystać do budowy adaptacyjnego regulatora z przełączalnymi parametrami. Równanie (4.56) (odpowiednio (4.61)) można

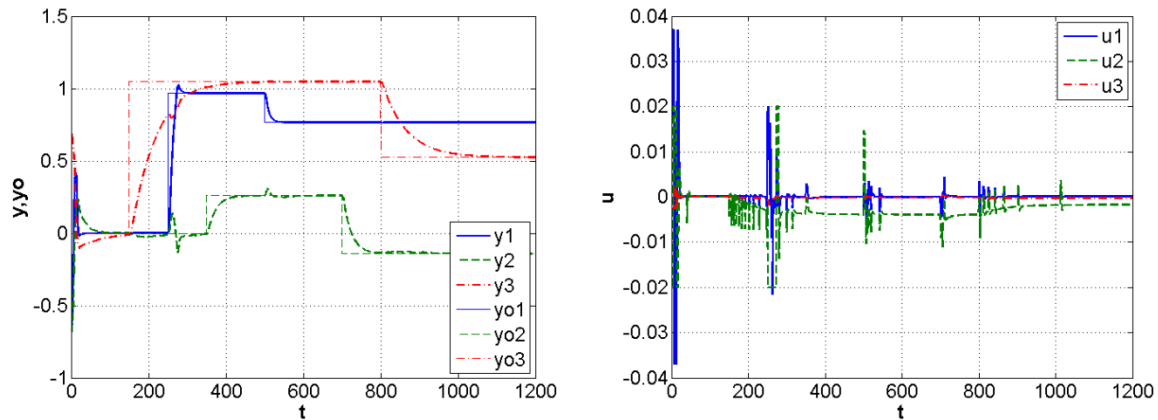
wykorzystać do weryfikacji stabilności układu z przełączanymi regulatorami i/lub układu z regulatorem rozmytym T-S. Tak skonstruowany układ regulacji nieliniowym obiektem MIMO nie wyeliminuje całkowicie interakcji pomiędzy wejściami i wyjściami obiektu powinien je jednak wydatnie zmniejszyć w porównaniu np. do układów regulacji modalnej. Układ taki cechuje się przy tym dużą prostotą syntezy i implementacji w dowolnym programowalnym sterowniku automatyki.

Przykład 4.3 – Regulator z dynamicznym odsprzęgnięciem do pozycjonowania statku wiertniczego

W celu zilustrowania możliwości działania tak zbudowanego regulatora dokonano jego syntezy dla modelu statku wiertniczego z przykładu 4.2. Na rysunkach 4.26 i 4.27 przedstawiono wyniki symulacji zmian położenia i kąta kursowego statku oraz sygnałów sterujących w układzie regulacji z adaptacyjnym regulatorem modalnym oraz prezentowanym powyżej adaptacyjnym regulatorem z dynamicznym odsprzęgnięciem. Układ sterowania syntezywany był z rozwiązywaniem wielomianowego równania macierzowego (4.52) z macierzą mianownikową regulatora $M_2(\cdot)$, przyjmowaną w każdym punkcie pracy jako całkującą, tj. $M_2(\cdot) = I_3 \cdot s$.



Rys. 4.26. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących dla regulatora adaptacyjnego zbudowanego na bazie regulatorów modalnych



Rys. 4.27. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących dla regulatora adaptacyjnego z dynamicznym odsprężaniem

Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi, w układzie z dynamicznym odsprężaniem obserwuje się mniejszy poziom interakcji pomiędzy poszczególnymi wejściami i wyjściami obiektu, lecz podobnie jak w układzie z regulatorem modalnym, przełączenia parametrów regulatora powodują nieładkie przebiegi sygnałów sterujących. Problem ten zostanie złagodzony po zastosowaniu w rozdziale 4.4 regulatora rozmytego.

4.4. Redukcja liczby regulatorów w zbiorze przełączanego regulatora

Jednym z podstawowych problemów w praktycznym zastosowaniu struktur wieloregulatorowych jest liczba (przełączanych) regulatorów, co wpływa bezpośrednio na wielkość niezbędnej pamięci operacyjnej programowalnych urządzeń automatyki (np. sterowników PLC) i mocy obliczeniowej ich jednostek centralnych. Stąd konieczność prowadzenia badań nad określeniem właściwej liczby regulatorów układu sterowania, tzn. liczby zapewniającej zarówno stabilność, jak i zakładaną jakość regulacji w wieloregulatorowych strukturach. Analizowane w poprzednim rozdziale adaptacyjne regulatory modalne cechują się prostotą syntezy i budowy. Ich wadą może jednak być bardzo duża liczba punktów pracy, dla których konieczna jest synteza regulatora. Zależy ona bezpośrednio od ilości parametrów pomocniczych regulatora oraz przyjętej rozdzielczości podziału zakresu ich zmienności. Przy regularnym, siatkowym podziale liczba punktów pracy (regulatorów) nrc wynosi

$$nrc = \prod_{k=1}^{n_p} r_p, \quad (4.62)$$

gdzie n_p oznacza liczbę parametrów pomocniczych, a r_p ilość przedziałów, na które został podzielony k -ty parametr. Liczba ta rośnie bardzo szybko, szczególnie przy wzroście liczby parametrów pomocniczych. Jest to problem dobrze znany również w sterowaniu rozmytym

i nosi nazwę kłątwy wymiarowości. Jego rozwiązanie wiąże się z potrzebą dobrej znajomości modelowanego obiektu, wiedzy eksperckiej na temat specyfiki działania nieliniowego obiektu. Zależnie od dalszego sposobu syntezy układu regulacji można bądź poprzestać na siatkowym podziale i wykorzystać prostotę konstrukcji i syntezy układu regulacji, bądź próbować ograniczać liczbę modeli lokalnych, zmniejszając liczbę modeli w obszarach pracy o mniejszych nieliniowościach obiektu. Można do tego wykorzystać specjalistyczne oprogramowanie [30; 83; 95; 235], choć dysponując jedynie danymi pomiarowymi problem ten wymaga bardzo złożonych obliczeń [83; 212; 228].

W niniejszym rozdziale przedstawiono jedną z alternatywnych metod wyznaczania (redukcji) siatek, czyli liczby regulatorów wykorzystanych do budowy adaptacyjnego regulatora modalnego.

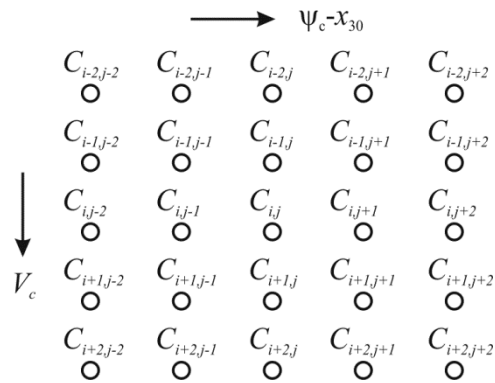
W sytuacji regulatorów implementowanych w małych kontrolerach o ograniczonych mocach jednostek centralnych i pamięci podręcznej bardzo duża liczba regulatorów pracujących jednocześnie może być praktycznie nierealizowalna. Dlatego w ramach prac autora badano możliwości redukcji ilości regulatorów w zbiorze przełączanego regulatora adaptacyjnego. Należy już na wstępie podkreślić, że uzyskiwane wyniki redukcji nie są jednoznaczne i dla rozpatrywanych siatek regulatorów zależą choćby od sposobu (kierunku) „przeszukiwania” siatek regulatorów. Ilustruje to po raz kolejny trudności w doborze i syntezie właściwego układu sterowania dla nieliniowego obiektu MIMO.

Przykład 4.4 – Redukcja liczby regulatorów w zbiorze przełączanego regulatora pozycji statku wiertniczego

Analizę tę prowadzono na przykładzie układu sterowania przeznaczonego do kontroli pozycji i kursu nieliniowego modelu statku wiertniczego „Wimpey Sealab”, przedstawionego w przykładzie 4.2. Pokazuje ona, że taka redukcja jest możliwa i daje dodatkowy stopień swobody w syntezie układu sterowania dla nieliniowego obiektu MIMO, pozwalający na wyważenie wielkości i stopnia skomplikowania regulatora i jakości regulacji.

Schemat blokowy układu pozycjonowania statku z adaptacyjnym regulatorem modalnym, przedstawiony na rysunku 4.10, nie ulega zmianie. W proponowanej strukturze parametry regulatora są zmieniane na podstawie dwóch sygnałów pomocniczych: bieżącej prędkości statku $V_s(t)$ oraz obliczanej na bieżąco różnicy pomiędzy kątem (w ziemskim układzie odniesienia z rysunku 2.4) prądu morskiego i kątem kursowym statku $\Psi_c - x_3(t)$. Podczas pracy systemu sygnał sterujący obliczany przez regulator $\tilde{u}(t)$ dodawany jest do wartości nominalnej u_0 – obliczanej dla każdego punktu pracy z równania (2.4).

Syntezy regulatorów dokonano jak poprzednio metodą PME w zakresie zmian prędkości $V_s \in [-4,9 \div 4,9]$ węzłów z rozdzielczością 0,2 węzła i w całym zakresie kąta pełnego, tj. w przedziale $\Psi_c - x_3 \in [0 \div 360^\circ]$ z rozdzielczością 5° (tj. około 0,0873 rd), co daje 3560 regulatorów, których „siatkę” przedstawiono schematycznie na rysunku 4.28.



Rys. 4.28. Siatka lokalnych regulatorów modalnych po pierwszym kroku syntezy regulatora adaptacyjnego

Porównanie zmian parametrów regulatorów lokalnych

Jedną z możliwości redukcji liczby regulatorów $C_{i,j}$ jest łączenie ich bazujące na analizie cech, takich jak np. 1) zmiana znaku każdego z elementów macierzy wzmocnień dwóch sąsiadujących regulatorów K_r ; 2) różnic wartości każdego z elementów macierzy wzmocnień dwóch sąsiadujących regulatorów K_r ; 3) różnic wartości wartości własnych macierzy stanu A_r dwóch sąsiadujących regulatorów; 4) różnic wartości elementów macierzy stanu A_r dwóch sąsiadujących regulatorów. Kryteria te mają na celu ograniczenie poziomu zmian wartości poszczególnych sygnałów sterujących w momencie zmiany parametrów regulatora, tym samym wpływają na jakość sygnału sterującego. Mogą mieć one jednak pomocniczy charakter – nie określają bowiem innych ważnych cech układu po redukcji, tj. jakości sterowania i stabilności. Te zagadnienia omówiono w dalszej części rozdziału.

Zdefiniujmy normę dla macierzy \mathbf{P} jako

$$\|\mathbf{P}\|_{\max} = \max_{i,j} |p_{i,j}|, \quad (4.63)$$

gdzie $p_{i,j}$ oznacza wartość poszczególnych elementów macierzy \mathbf{P} .

Wtedy różnice dla warunków 2–4 dla dwóch sąsiadujących regulatorów $C_{i,j}$ i $C_{i+1,j+1}$ są określone jako

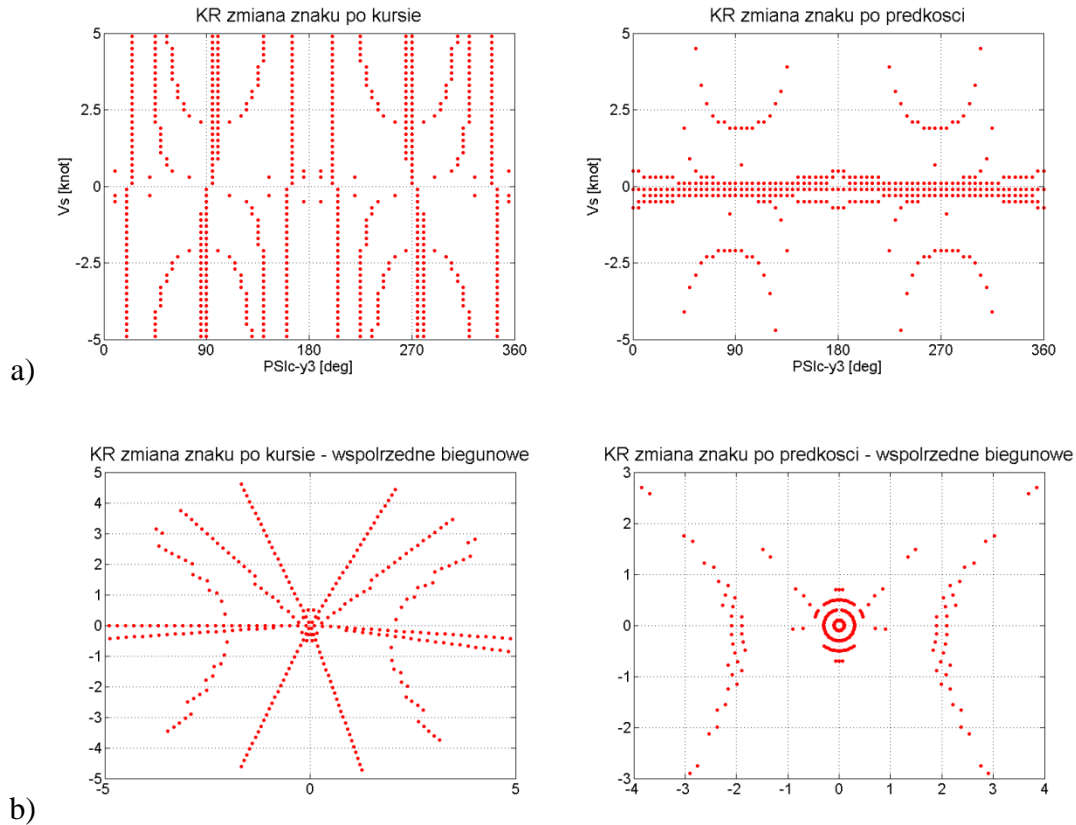
$$\text{Max}K_{rij} = \|K_{ri+1,j+1} - K_{ri,j}\| \quad (4.64)$$

$$\text{Max}A_{rij} = \|A_{ri+1,j+1} - A_{ri,j}\| \quad (4.65)$$

$$\text{MaxEig}_{rij} = \|eig(A_{ri+1,j+1}) - eig(A_{ri,j})\|. \quad (4.66)$$

Ostateczny rezultat redukcji zależy również od sposobu kolejności porównywania sąsiadujących ze sobą regulatorów. Przy redukcji siatki 50×73 regulatorów należy zdecydować o kolejności porównywania poszczególnych regulatorów. W prezentowanym przypadku, z dwoma sygnałami pomocniczymi, istnieją dwie możliwości; porównywanie regulatorów wzdłuż zmian prędkości lub kąta kursowego statku. Zgodnie z rysunkiem 4.28 są

to więc odpowiednio regulatory $C_{i,j}$ i $C_{i+k,j}$ lub $C_{i,j}$ i $C_{i,j+l}$. Obie metody dają całkowicie różne rezultaty porównań, co ostatecznie wpływa na końcowy rezultat redukcji. Granice zmian znaków elementów macierzy wzmocnień każdego z dwóch sąsiadujących regulatorów $C_{i,j}$, $C_{i+1,j}$ lub $C_{i,j}$, $C_{i,j+1}$, przy porównywaniu regulatorów wzdłuż zmian prędkości lub kąta kursowego statku, przedstawiono na rysunku 4.29. Podobnie obliczono wartości wyrażań (4.64)–(4.66), a ich wartości przedstawiono w postaci płaszczyzn 3-D na rysunku 4.30.

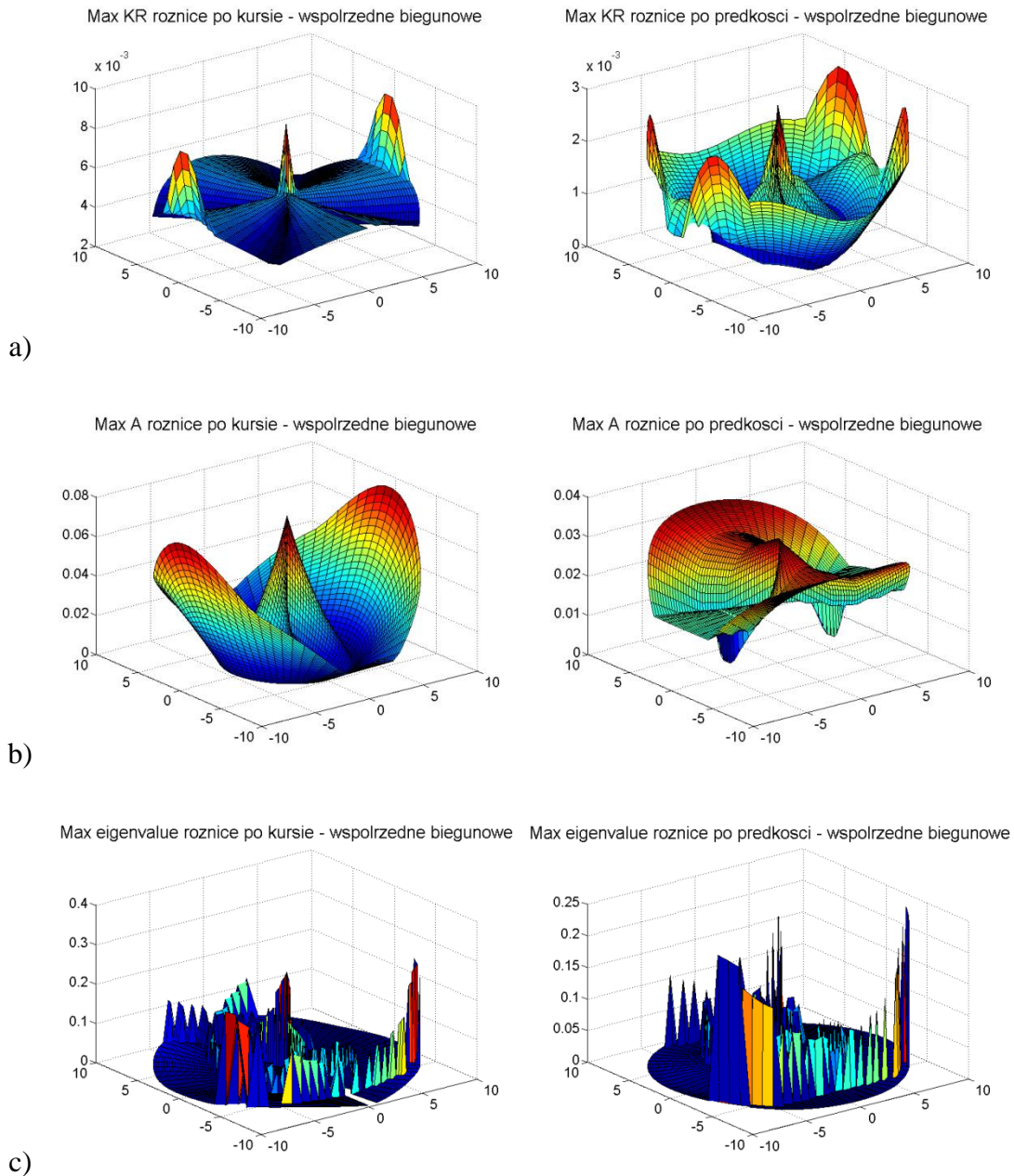


Rys. 4.29. Granice zmian znaków elementów macierzy wzmocnień każdego z dwóch sąsiadujących regulatorów: a) układ współrzędnych kartezjańskich; b) układ współrzędnych biegunowych; rysunki po lewej – porównywanie po kursie; rysunki po prawej – porównywanie po prędkości

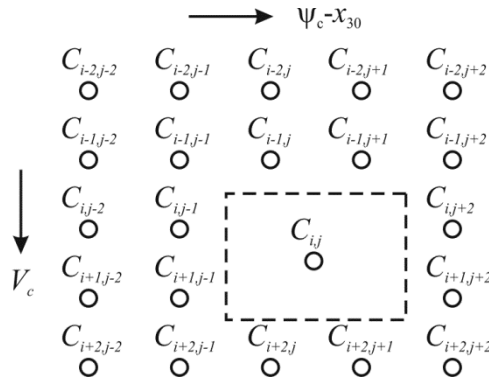
Analiza wartości współczynników (4.64)–(4.66), przedstawionych na rysunku 4.30, może być pomocna w ustaleniu warunków wykorzystywanych w algorytmie redukcji liczby regulatorów. Zgodnie z powyższym proponuje się stosować cztery kryteria:

1. Zmiany znaku elementów macierzy wzmocnień Kr ,
2. $\text{ThresMax}K_r > \text{Max}K_{rij}$,
3. $\text{ThresMax}A_r > \text{Max}A_{rij}$,
4. $\text{ThresMax}Eig > \text{Max}Eig_{rij}$,

które mogą być stosowane niezależnie lub wspólnie i w przypadku, gdy określony warunek jest spełniony, dana grupa regulatorów jest łączona i zastępowana regulatorem, którego parametry liczone są dla punktu pracy przyjętego w środku łączonego obszaru (patrz rys. 4.31).



Rys. 4.30. Powierzchnie 3-D wartości współczynników: a) MaxK, b) MaxA, c) MaxEig; rysunki po lewej – porównywanie po kursie; rysunki po prawej – porównywanie po prędkości



Rys. 4.31. Siatka regulatorów modalnych podczas redukcji

Niestety, opisywane powyżej warunki nie uwzględniają (bezpośrednio i ilościowo) jakości regulacji układu sterowania z regulatorem po redukcji ani, co bardziej istotne, nie ma pewności, że układ po redukcji pozostanie stabilny. Stąd konieczność określenia dodatkowych warunków i zmiany procedury redukcji.

Błędy statyczne w układzie z przelączalnym regulatorem modalnym

Podczas pracy systemu sygnały „przyrostowe” $\tilde{u}(t)$ wychodzące z regulatora są dodawane do wartości „nominalnych” u_0 (patrz rys. 4.10). Wartości te mogą stanowić integralną część regulatora i zostać obliczone dla każdego punktu pracy, dla którego obliczono regulator, bądź zostać obliczone dla całej siatki możliwych punktów pracy obiektu. Innymi słowy, podczas redukcji ilości regulatorów w siatce zredukować można również siatkę wartości nominalnych u_0 , co dodatkowo zmniejsza objętość regulatora lecz, niestety, może powodować pojawienie się błędów w stanach ustalonych pracy układu regulacji.

W ogólności rozważane regulatory modalne mogą być stabilne, bądź niestabilne i z definicji nie posiadają właściwości całkujących. W omawianym przypadku wielowymiarowe regulatory MIMO posiadają cechy bliskie regulatorom PD z inercją. Błąd w stanie ustalonym w układzie regulacji z liniowym regulatorem modalnym, dla ustalonego punktu pracy nieliniowego obiektu z dodatkowym sygnałem u_o na wejściu obiektu, wynosi

$$e_{ss} = [I_l + K_P K_C]^{-1} y_o - [I_l + K_P K_C]^{-1} K_P u_o \quad (4.67)$$

z macierzami wzmocnień obiektu

$$K_P = [B_1(0)A_1^{-1}(0)] = [A_2^{-1}(0)B_2(0)] \quad (4.68)$$

i regulatora

$$K_C = [M_2^{-1}(0)N_2(0)] = [N_1(0)M_1^{-1}(0)]. \quad (4.69)$$

Analiza równania (4.67) wykazuje, że kompensacja błędów w stanie ustalonym pracy układu zamkniętego jest możliwa z sygnałem pomocniczym u_o obliczonym jako

$$u_o = G^\# y_o, \quad (4.70)$$

gdzie $\mathbf{G}^\# \in \mathbb{R}^{m \times l}$ jest uogólnioną inwersją macierzy \mathbf{G} obliczonej z

$$\mathbf{G}^\# = [\mathbf{A}_1(0)\mathbf{B}_1^\#(0)] \text{ lub } \mathbf{G}^\# = [\mathbf{B}_2^\#(0)\mathbf{A}_2(0)] \text{ lub } \mathbf{G}^\# = \mathbf{K}_p^\#, \quad (4.71)$$

a dla obiektów kwadratowych $l = m$ z

$$\mathbf{G}^\# = [\mathbf{A}_1(0)\mathbf{B}_1^{-1}(0)] \text{ lub } \mathbf{G}^\# = [\mathbf{B}_2^{-1}(0)\mathbf{A}_2(0)] \text{ lub } \mathbf{G}^\# = \mathbf{K}_p^{-1}. \quad (4.72)$$

Dla regulatora $C_{i,j}$ pracującego w przypisanym mu obszarze $R_{i,j}$ – z obliczonymi macierzami $\mathbf{K}_{C_{i,j}}$ i $\mathbf{G}_{i,j}^\#$ – błędy w stanie ustalonym dla bieżącego sygnału odniesienia \mathbf{y}_{oc} z tego obszaru wynoszą

$$\mathbf{e}_{ssc} = [\mathbf{I}_l + \mathbf{K}_{Pc} \mathbf{K}_{C_{i,j}}]^{-1} [\mathbf{I}_l - \mathbf{K}_{Pc} \mathbf{G}_{i,j}^\#] \mathbf{y}_{oc}, \quad (4.73)$$

gdzie \mathbf{K}_{Pc} oznacza macierz wzmocnień bieżącego liniowego modelu obiektu.

Dla obiektów posiadających właściwości całkujące obliczenie inwersji macierzy wzmocnień \mathbf{K}_p nie jest możliwe. Stąd obliczenie błędu w stanie ustalonym z równania (4.73) również nie jest wykonalne. W tym przypadku konieczne jest wykorzystanie sposobu opisu macierzy transmitancji obiektu i regulatora w postaci ułamka macierzowego. Przy tym podejściu błędy w stanie ustalonym mogą zostać obliczone z wyrażenia

$$\mathbf{e}_{ss} = [\mathbf{I}_l + \mathbf{B}_1(0)\mathbf{A}^{-1}(0)\mathbf{N}_2(0)]^{-1} \mathbf{y}_o - \mathbf{B}_1(0)\mathbf{A}^{-1}(0)\mathbf{M}_2(0)\mathbf{u}_o, \quad (4.74)$$

gdzie

$$\mathbf{A}(\cdot) = \mathbf{M}_2(\cdot)\mathbf{A}_1(\cdot) + \mathbf{N}_2(\cdot)\mathbf{B}_1(\cdot). \quad (4.75)$$

Wówczas

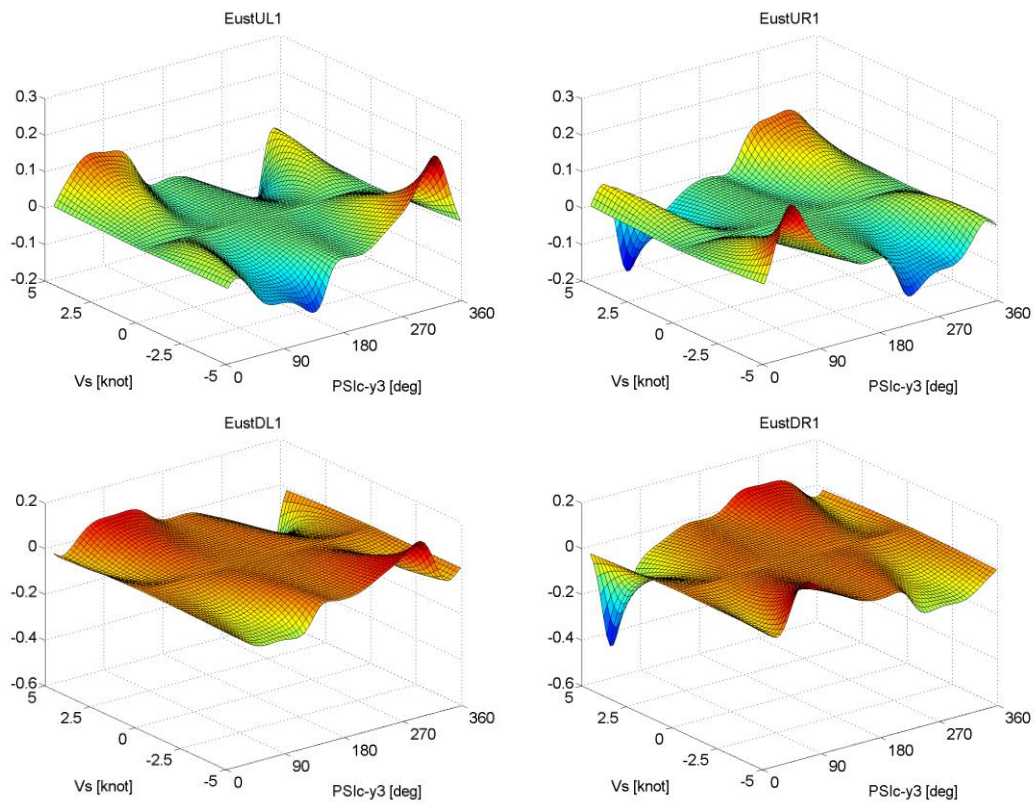
$$\mathbf{e}_{ss} = [\mathbf{I}_l + \mathbf{B}_{1c}(0)\mathbf{A}_c^{-1}(0)\mathbf{N}_{2i,j}(0)]^{-1} \mathbf{y}_o - \mathbf{B}_{1c}(0)\mathbf{A}_c^{-1}(0)\mathbf{M}_{2i,j}(0)\mathbf{G}_{i,j}^\# \mathbf{y}_o \quad (4.76)$$

z

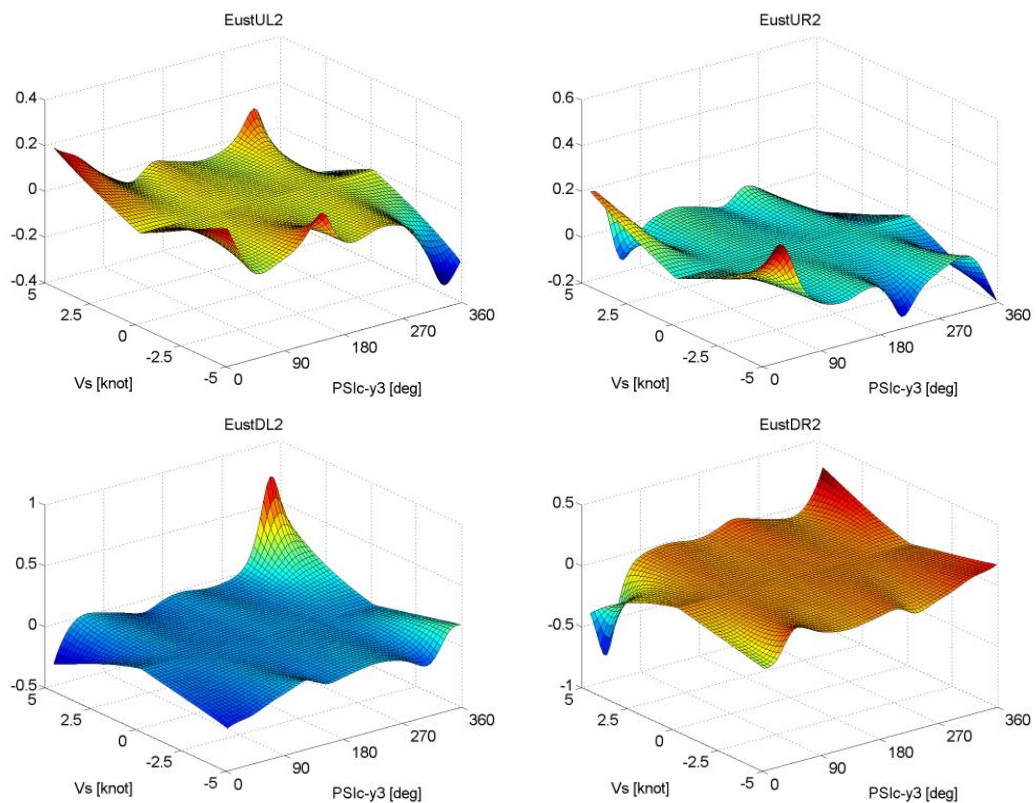
$$\mathbf{A}_c(0) = \mathbf{M}_{2i,j}(0)\mathbf{A}_{1c}(0) + \mathbf{N}_{2i,j}(0)\mathbf{B}_{1c}(0). \quad (4.77)$$

Równanie (4.76) pozwala oszacować poziom błędów w stanie ustalonym pracy układu zamkniętego dla bieżącego punktu pracy bliskiego punktowi, dla którego zsyntezowano wykorzystywany regulator. Kontrola tych błędów w procesie redukcji pozwala na zachowanie dopuszczalnego poziomu błędów w stanie ustalonym pracy.

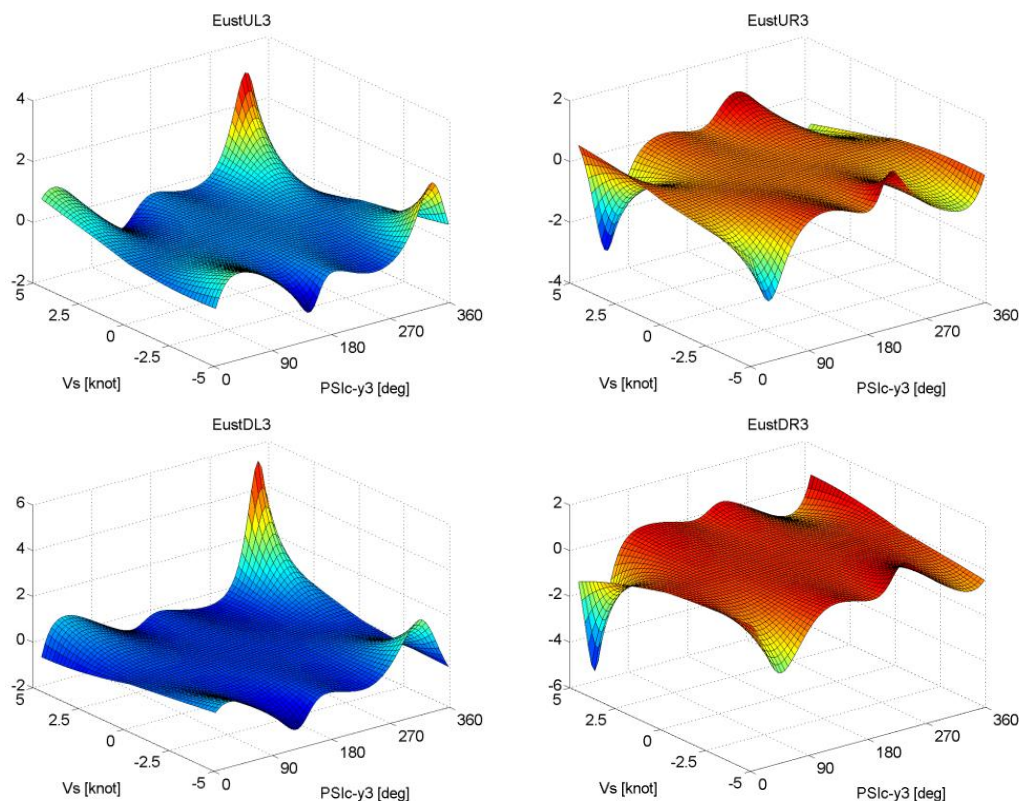
W procesie redukcji błędy takie liczymy dla każdego „narożnika” obszaru bieżącego regulatora. W przypadku siatki 3560 regulatorów dla badanego układu pozycjonowania modelu statku wiertniczego wartości błędów obliczone z równania (4.76) dla każdego regulatora przedstawiono w postaci powierzchni 3-D na rysunkach 4.32–4.34. Analiza tych błędów dla całej siatki regulatorów przed redukcją pozwala oszacować odpowiednie wartości progów warunków łączenia regulatorów.



Rys. 4.32. Powierzchnie 3-D wartości błędów e_{ss} dla pierwszego wyjścia obliczone dla układu przed redukcją



Rys. 4.33. Powierzchnie 3-D wartości błędów e_{ss} dla drugiego wyjścia obliczone dla układu przed redukcją



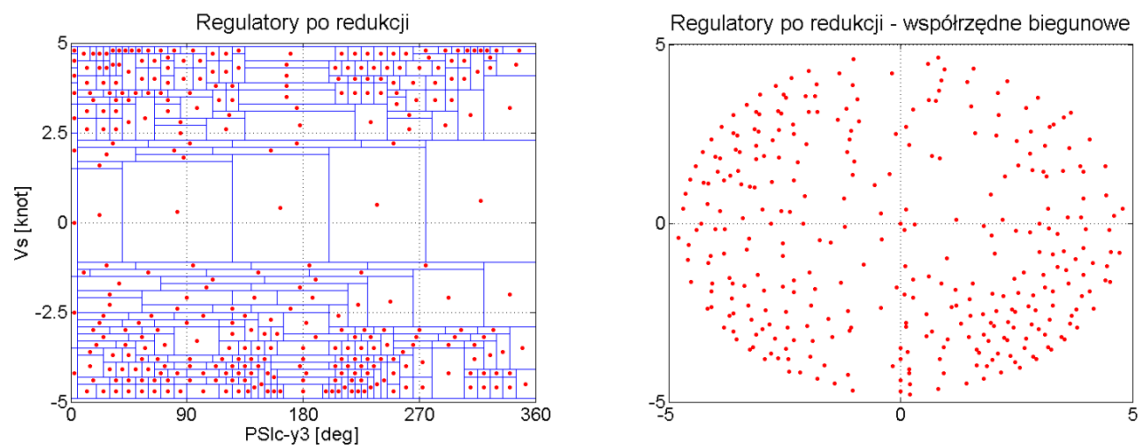
Rys. 4.34. Powierzchnie 3-D wartości błędów e_{ss} dla trzeciego wyjścia obliczone dla układu przed redukcją

Stabilność układu po redukcji

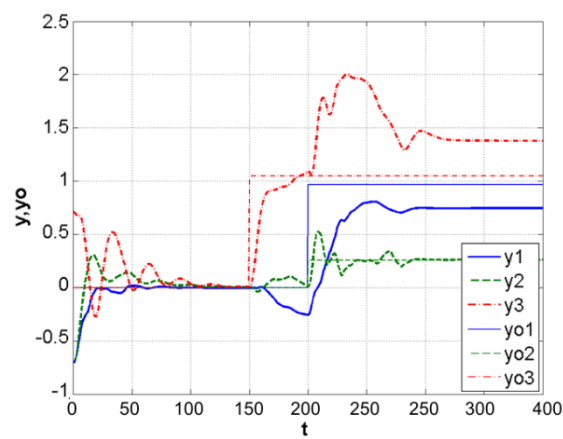
Aby zapewnić stabilność układu zamkniętego po redukcji proponuje się wykorzystać teorię stabilności układów nieciągłych, przedstawioną w rozdziale 4.2. Zgodnie z przedstawionymi tam warunkami stabilności układ po redukcji będzie stabilny, jeśli każdy z dwóch sąsiadujących kontrolerów $C_{k,l}$ i $C_{k,l+1}$ jest stabilny w rejonach $\Gamma_{k,l}$ i $\Gamma_{k,l+1}$, które zawierają odpowiednio rejony $R_{k,l} \in \Gamma_{k,l}$ i $R_{k,l+1} \in \Gamma_{k,l+1}$, dla których kontrolery te są używane. Przełączenie pomiędzy kontrolerami następuje na granicy $S(k,l+1)$ (rys 4.5.). Dlatego w procedurze redukcji każdorazowo należy sprawdzić czy „nowy” regulator jest stabilny z każdym liniowym modelem obiektu leżącym poza granicą przełączenia $S(k,l+1)$. W praktyce (startując z gęstego podziału siatki) proponuje się weryfikować stabilność regulatorów w punktach znajdujących się w narożnikach obszarów $\Gamma_{i,j}$.

Redukcja zestawu regulatorów wymaga więc weryfikowania stabilności i przewidywanej jakości regulacji układu zamkniętego dla wygenerowanej w poprzednim kroku siatki regulatorów. Kontrola warunków stabilności, wartości współczynników (4.64)–(4.66) i/lub błędów w stanach ustalonych dla regulatora $C_{i,j}$ i liniowych modeli obiektu, obliczonych dla punktów pracy należących do sąsiadujących obszarów (poza granicą przełączeń), pozwala zweryfikować możliwość połączenia sąsiadujących ze sobą obszarów i zastąpienia „oryginalnej” grupy regulatorów przez jeden nowy, obliczony dla punktu pracy ze środka nowo powstałego obszaru.

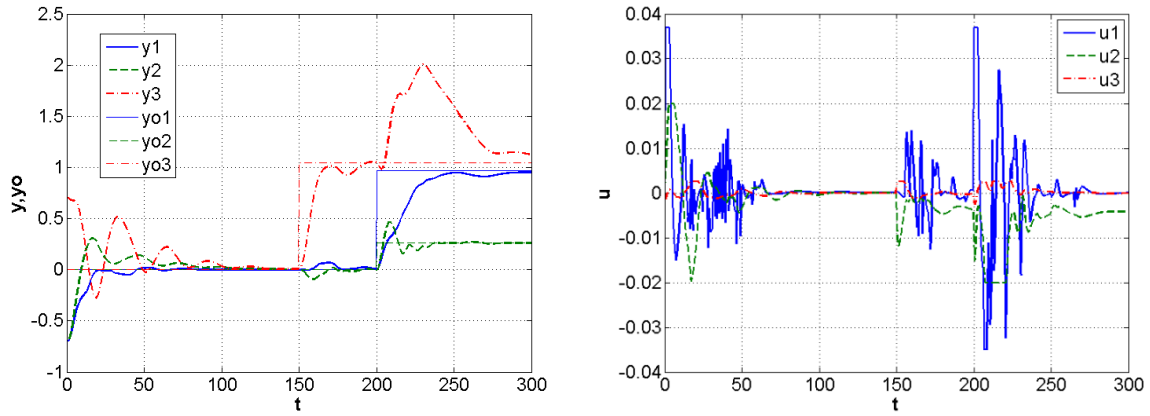
Powyższa analiza przedstawia dość skomplikowany obraz sposobu syntezy układu regulacji dla nieliniowego obiektu dynamicznego MIMO. Ostateczny wynik projektowania – adaptacyjny regulator modalny – nawet przy jednoznacznych warunkach syntezy nie ma jednoznacznej postaci końcowej. Wyniki obliczeń zależą choćby od sposobu (kolejności) porównania sąsiadujących ze sobą regulatorów. Aby przedstawić te różnice poniżej przedstawiono dwa wybrane wyniki redukcji (siatki regulatorów) (rys. 4.35 i 4.38) i symulacje pracy zamkniętego układu regulacji (rys. 4.36, 4.37 i 4.39).



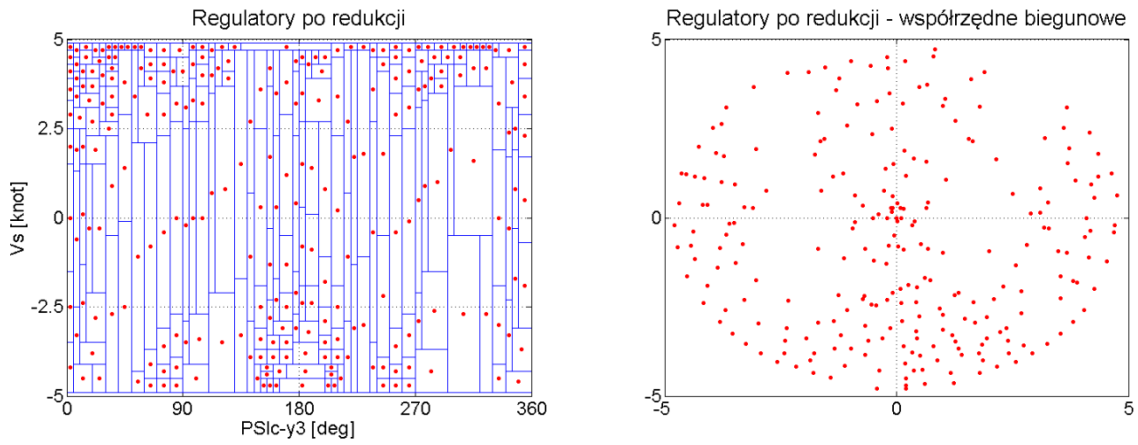
Rys. 4.35. Siatka 334 regulatorów po redukcji; rysunek z prawej – współrzędne biegunowe



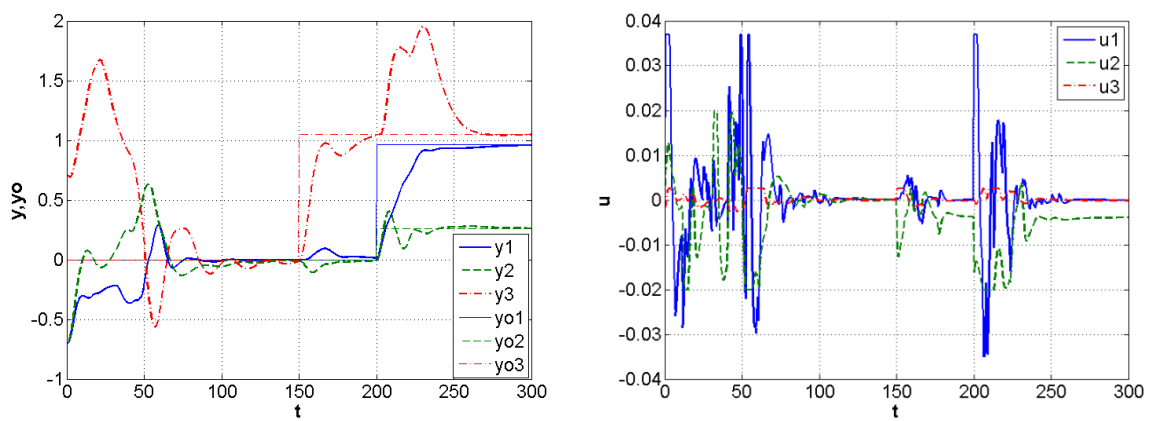
Rys. 4.36. Przebieg pozycjonowania statku i sygnały sterujące dla regulatora adaptacyjnego zbudowanego z siatki 334 regulatorów ze zredukowaną siatką sygnałów nominalnych u_0



Rys. 4.37. Przebieg pozycjonowania statku i sygnały sterujące dla regulatora adaptacyjnego zbudowanego z siatki 334 regulatorów bez redukcji siatki sygnałów nominalnych u_0



Rys. 4.38. Siatka 267 regulatorów po redukcji; rysunek z prawej – współrzędne biegunowe



Rys. 4.39. Przebieg pozycjonowania statku i sygnały sterujące dla regulatora adaptacyjnego zbudowanego z siatki 267 regulatorów

Jak wynika z przedstawionych powyżej wyników symulacji, synteza układu regulacji z wykorzystaniem przełączalnego regulatora modalnego jest możliwa. Zastosowana dwustopniowa procedura syntezy regulatora – generacja gęstej siatki regulatorów lokalnych i redukcja ich ilości – daje dodatkowy stopień swobody projektowania, który może zostać wykorzystany do wyważenia wielkości regulatora i jakości sterowania. Ten sposób syntezy może stanowić alternatywę dla przełączalnych układów regulacji z zazwyczaj mniejszą liczbą, ale o dużo wyższym stopniu regulatorów odpornych. Minusem tak skonstruowanych układów regulacji jest, niestety, również możliwe znaczne pogorszenie jakości sygnałów sterujących. Mniejsza ilość regulatorów wykorzystanych w konstrukcji regulatora adaptacyjnego, a przez to rzadsze zmiany parametrów skutkują często dużymi nieciągłościami sygnałów sterujących – porównaj przebiegi na rysunku 4.13 z przebiegami z rysunków 4.37 i 4.39 – eliminujące je z możliwości praktycznej eksploatacji układu sterowania. Stąd konieczność każdorazowego ostrożnego wyważenia dokładności modelowania obiektu (niezbędnej wielkości siatki punktów pracy), jakości sterowania i możliwości implementacji układu w rzeczywistym sterowniku. Alternatywą dla redukcji ilości regulatorów, a przede wszystkim skutecznym sposobem rozwiązania problemu skokowych przełączeń sygnałów sterujących, są prezentowane w kolejnych rozdziałach regulatory rozmyte i neuronowe.

4.5. Regulacja rozmyta typu Takagi-Sugeno

4.5.1. Model rozmyty obiektu i regulatora T-S

Zgodnie z publikacjami [103; 104; 229; 233] rozmyty model obiektu dynamicznego przedstawić można jako zbiór reguł

$$R_o^i : \text{if } p_1(t) \text{ is } A_1^i \text{ and } p_2(t) \text{ is } A_2^i \text{ and } \dots \text{ and } p_{n_p}(t) \text{ is } A_{n_p}^i \text{ then } \Sigma_o^i \quad (4.78)$$

dla $i=1,2,\dots,ro$, z $p_1(t),\dots,p_{n_p}(t)$ oznaczającymi zmienne poprzedników reguł, a A_j^i , $j=1,\dots,n_p$ zbiory rozmyte określające podział dziedziny dla każdej z nich. Każdy ze zbiorów rozmytych A_j^i jest jednym z elementów zbioru wartości lingwistycznych zmiennej p_j

$$A_j^i \in \Omega_j = \{ \Omega_{j1}, \Omega_{j2}, \dots, \Omega_{jr_j} \}, \quad (4.79)$$

gdzie r_j jest liczbą elementów zbioru Ω_j , dla $j=1,\dots,n_p$.

Przy siatkowym podziale obszaru zmiennych wejściowych (ang. *grid partition*) otrzymuje się system rozmyty o liczbie obszarów (reguł) równej

$$ro = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{n_p} = \prod_{j=1}^{n_p} r_j. \quad (4.80)$$

Liczba reguł rozmytych zależy więc i rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem liczby n_p parametrów p_j oraz liczby zbiorów rozmytych odpowiadających każdemu z parametrów p_j .

Cecha ta nazywana jest „klątwą wymiarowości” i z tego punktu widzenia ważne jest aby zbiory wartości lingwistycznych zmiennych p_j były tak małe, jak to tylko możliwe.

Następnik funkcyjny każdej reguły Σ_o^i jest lokalnym liniowym modelem obiektu danym w postaci równań stanu i wyjść

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_o(t) &= \mathbf{A}_{oi} \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_{oi} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t),\end{aligned}\quad (4.81)$$

gdzie $\mathbf{x}_o(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ i $\mathbf{y}(t) \in R^l$ są wektorami odpowiednio stanu, wejść i wyjść.

Oznaczając unormowane poziomy aktywacji reguł modelu obiektu jako

$$\tilde{w}_o^j(p) = \frac{w_o^j(p)}{\sum_{l=1}^{r_o} w_o^l(p)} \quad (4.82)$$

dostajemy równania tego nieliniowego modelu w postaci

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_o(t) &= \sum_{i=1}^{r_o} \tilde{w}_o^i [\mathbf{A}_{oi} \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_{oi} \mathbf{u}(t)] \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t).\end{aligned}\quad (4.83)$$

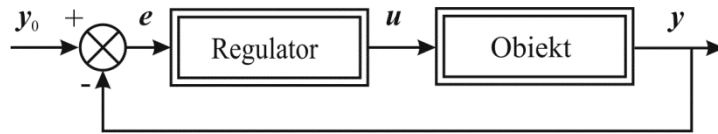
Zakładając w ogólności różną liczbę reguł rozmytych dla obiektu (4.78) i regulatora $ro \neq r$ podobnie przyjęc można zestaw reguł dla ciągłego rozmytego regulatora T-S

$$R_c^j : \text{if } p_1(t) \text{ is } A_1^j \text{ and } p_2(t) \text{ is } A_2^j \text{ and } \dots \text{ and } p_n(t) \text{ is } A_n^j \text{ then } \Sigma_c^j \quad (4.84)$$

dla $j=1,2,\dots,r$, gdzie następnik funkcyjny każdej reguły Σ_c^j jest lokalnym liniowym modelem nieliniowego regulatora, danym w postaci równań stanu i wyjść

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_{cj} \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_{cj} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t),\end{aligned}\quad (4.85)$$

gdzie, zgodnie z rysunkiem 4.40, $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_0(t) - \mathbf{y}(t)$ jest błędem regulacji.



Rys. 4.40. Ogólny schemat układu regulacji

Dla sygnału wyjściowego regulatora przyjętego jako

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\sum_{j=1}^r w_c^j(t) \mathbf{u}^j(t)}{\sum_{j=1}^r w_c^j(t)} = \sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j(t) \mathbf{u}^j(t), \quad (4.86)$$

gdzie $w_c^j(t)$ są poziomami aktywacji poszczególnych reguł (4.84) w chwili t

$$w^j(t) = \prod_{k=1}^n \mu_{A_k^j}(x_k(t)), \quad (4.87)$$

a $\tilde{w}_c^j(t)$ ich wartościami unormowanymi.

Wówczas równania nieliniowego modelu regulatora (4.85) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j \left[\mathbf{A}_{cj} \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_{cj} \mathbf{e}(t) \right] \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t). \end{aligned} \quad (4.88)$$

4.5.2. Stabilność układu regulacji z regulatorem T-S

Struktura pętli zamkniętej układu sterowania z regulatorem T-S może być przedstawiona schematycznie jak na rysunku 4.3. Dynamika zamkniętego układu regulacji z rysunku 3.3 z modelem obiektu, opisanym równaniami (4.81), i modelem regulatora, opisanym równaniem (4.88), określona jest dwoma równaniami

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_o(t) &= \sum_{i=1}^{ro} \tilde{w}_o^i \left[\mathbf{A}_{oi} \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_{oi} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) \right] \\ \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j \left[\mathbf{A}_{cj} \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_{cj} \left(\mathbf{y}_{ref}(t) - \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^{ro} \tilde{w}_o^i(t) = 1$ i $\sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j(t) = 1$, to

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_o(t) &= \sum_{i=1}^{ro} \tilde{w}_o^i \sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j \left[\mathbf{A}_{oi} \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_{oi} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) \right] \\ \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j \sum_{i=1}^{ro} \tilde{w}_o^i \left[\mathbf{A}_{cj} \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_{cj} \mathbf{y}_{ref}(t) - \mathbf{B}_{cj} \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t) \right] \end{aligned} \quad (4.90)$$

i dalej

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_o(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_c(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{ro} \tilde{w}_o^i \sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{oi} & \mathbf{B}_{oi} \mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_{cj} \mathbf{C}_o & \mathbf{A}_{cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{cj} \end{bmatrix} \mathbf{y}_0 \right\}. \quad (4.91)$$

Przyjmując rozszerzony wektor stanu układu jako

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

równania (4.91) można zapisać w postaci

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{i=1}^{ro} \tilde{w}_o^i \sum_{j=1}^r \tilde{w}_c^j \mathbf{A}_{ij} \mathbf{v}(t) + \mathbf{B}_j \mathbf{y}_0, \quad (4.93)$$

gdzie

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{oi} & \mathbf{B}_{oi} \mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_{cj} \mathbf{C}_o & \mathbf{A}_{cj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{cj} \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

Bez zmniejszania ogólności rozważań dla $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ równania dynamiki zamkniętego układu regulacji przyjmują postać

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^r \tilde{w}_o^i \tilde{w}_c^j \mathbf{A}_{ij} \mathbf{v}(t). \quad (4.95)$$

Twierdzenie 4.3

Punkt równowagi systemu dynamicznego ze wzoru (4.95) jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeśli istnieje macierz symetryczna dodatnio określona \mathbf{P} taka, że dla macierzy stanu \mathbf{A}_{ij} każdego z modeli lokalnych spełnione jest równanie

$$\mathbf{A}_{ij}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{ij} < 0, \quad i=1, \dots, r_0 \text{ i } j=1, \dots, r. \quad (4.96)$$

Dowód

Tworzymy funkcję skalarną w postaci

$$V(\mathbf{v}(t)) = \mathbf{v}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{v}(t), \quad (4.97)$$

gdzie \mathbf{P} jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Pochodna tej funkcji określana jest wyrażeniem

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{v}(t)) &= \dot{\mathbf{v}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}^T(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}^T(t) \left[\sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^r \tilde{w}_o^i \tilde{w}_c^j \mathbf{A}_{ij}^T \mathbf{P} + \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^r \tilde{w}_o^i \tilde{w}_c^j \mathbf{P} \mathbf{A}_{ij} \right] \mathbf{v}(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^r \tilde{w}_o^i \tilde{w}_c^j \mathbf{v}^T(t) \left[\mathbf{A}_{ij}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{ij} \right] \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (4.98)$$

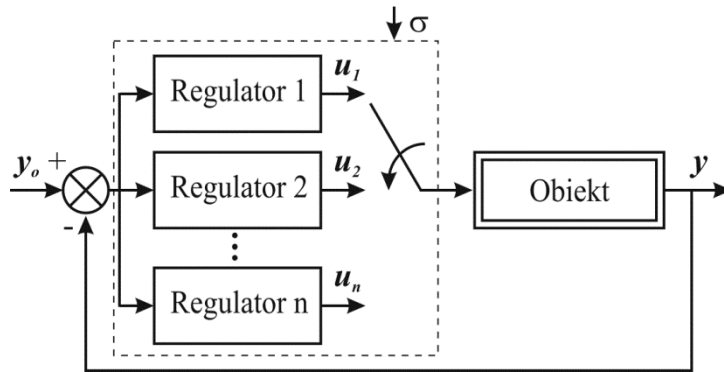
Ponieważ $\tilde{w}_o^i > 0$ dla każdego $i=1, \dots, r_0$ i $\tilde{w}_c^j > 0$ dla każdego $j=1, \dots, r$ to $\sum_{i=1}^{r_0} \sum_{j=1}^r \tilde{w}_o^i \tilde{w}_c^j > 0$, to pochodna ta wzdłuż trajektorii układu ze wzoru (4.95) jest mniejsza od zera $\dot{V}(\mathbf{v}(t)) < 0$ dla $\mathbf{v}(t) \neq 0$, jeśli spełniony jest warunek (4.96). Wówczas funkcja (4.97) jest funkcją Lapunowa dla nieliniowego układu dynamicznego ze wzoru (4.95).

Uwaga 1

Przy dużej liczbie reguł weryfikacja warunków (4.96) twierdzenia 4.3 może być kłopotliwa lub wręcz nierealizowalna obliczeniowo. Stąd konieczność zmniejszenia liczby warunków, np. poprzez założenie takiej samej ilości reguł regulatora i modelu przy regulatorze liczonym dla przyjętego modelu obiektu, eliminacji równań, dla których $\tilde{w}_o^i \tilde{w}_c^j = 0$.

Uwaga 2

W twierdzeniu 4.3 nie uwzględniano również kształtów funkcji przynależności do poszczególnych zbiorów rozmytych. Fakt ten można bezpośrednio wykorzystać w dowodzie na stabilność układu przełączalnego z rysunku 4.41.



Rys. 4.41. Schemat blokowy układu z przełączanymi regulatorami

4.5.3. Regulator strefowy

Przyjmijmy najbardziej popularną klasę funkcji przynależności – trójkątną. Jeśli odpowiednie progi funkcji przynależności do sąsiadujących zbiorów rozmytych mają takie same wartości, funkcje wzajemnie się uzupełniają, czyli dla danego wejścia p_d najwyżej dwie funkcje przynależności $\mu_{A_d^{h_d}}(p_d)$ i $\mu_{A_d^{h_{d+1}}}(p_d)$ są aktywowane jednocześnie. Oznacza to, że relacja

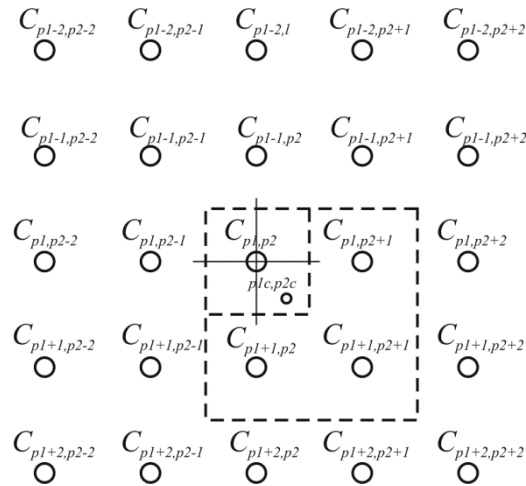
$$\mu_{A_d^{h_d}}(p_d) + \mu_{A_d^{h_{d+1}}}(p_d) = 1 \quad (4.99)$$

jest spełniona dla każdego z wejść p_d . Wtedy zgodnie z regułami T-S wykorzystujemy jedynie regulatory w bezpośrednim sąsiedztwie regulatora odpowiedniego dla punktu pracy układu.

Biorąc powyższe pod uwagę proponuje się strukturę układu regulacji z regulatorem T-S, w którym w danym momencie aktywowane są – nie wszystkie – jedynie te regulatory, które znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie punktu pracy. Pozwala to znacznie ograniczyć liczbę pracujących jednocześnie regulatorów przy zachowaniu płynności pracy i przełączeń struktury rozmytej.

Bez utraty ogólności można przyjąć, że rozmyty model obiektu i regulatora posiada taką samą liczbę reguł. Wtedy, w proponowanym rozwiązaniu, dla przyjętego punktu pracy układu nieliniowego, określonego przez (parametry $p_i(t)$) k -te elementy Ω_{jk} zbiorów wartości lingwistycznych z równania (4.79) dla $j=1,2,\dots,n_p$ i $k=1,\dots,r_j$, aktywny jest jedynie jeden następnik funkcyjny reguł przedstawionych we wzorze (4.78) Σ_o^i (jeden lokalny liniowy model obiektu) oraz wykorzystywana jest grupa lokalnych liniowych modeli Σ_c^j nieliniowego regulatora (4.88) będąca bezpośrednim sąsiedztwem tych zbiorów.

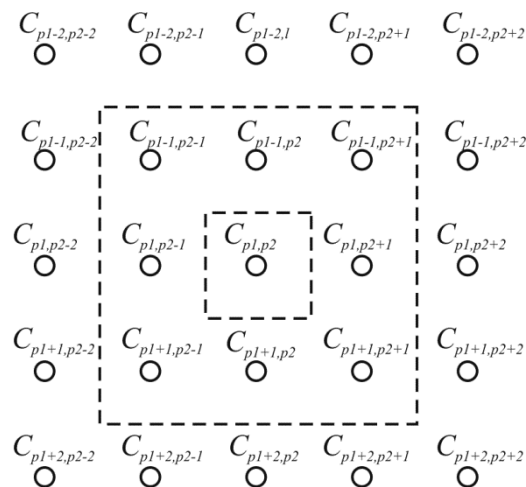
Przy siatkowym podziale obszaru zmiennych wejściowych z funkcjami przynależności (4.99) w danym momencie aktywnych jest 2^{no} reguł. Dla przykładu, w systemie z dwoma poprzednikami reguł $no=2$, przedstawionym na rysunku 4.42, dla bieżącego punktu pracy z $p_1(t)=p_{1c}$ i $p_2(t)=p_{2c}$ aktywne są cztery regulatory.



Rys. 4.42. Sposób wyboru ruchomej grupy regulatorów

Zależnie od bieżących wartości sygnałów pomocniczych p_{kc} dla $k=1, \dots, no$, bezpośrednie sąsiedztwo bieżącego regulatora $\Sigma_c^{j_o}$ stanowią regulatory (reguły), dla których parametry p_k należą do zbiorów rozmytych $\Omega_k^{q_k-1}$ i $\Omega_k^{q_k+1}$ dla $k=1, \dots, no$. Jest to $rop=3^{no}$ regulatorów i praktycznie definiuje no wymiarowy wielościan wokół punktu, dla którego zsyntezowano bieżący regulator $\Sigma_c^{j_o}$.

Analizując lokalną stabilność strefowego regulatora rozmytego dla punktu pracy p_{kc} , $k=1, \dots, no$, należy zweryfikować stabilność każdej 2^{no} grupy 2^{no} regulatorów. Z praktycznego punktu widzenia (akceptując niepełną relaksację warunków stabilności) wydaje się sensowne aby w procesie tym rozważyć pełne otoczenie $rop=3^{nc}$ regulatorów. Dla przykładu, dla układu z dwoma poprzednikami $no=2$, prezentowanego na rysunku 4.43, otrzymamy grupę dziewięciu lokalnych regulatorów $rop=9$. Takie podejście jest najbardziej opłacalne dla układów z małą liczbą sygnałów pomocniczych p_k , $k=1, \dots, no$ o dużej liczbie zbiorów rozmytych $A_k^{q_k}$, $q_k=1, \dots, r_k$.



Rys. 4.43. Sposób wyboru grupy regulatorów na potrzeby badania stabilności układu

Oznaczmy poziomy aktywacji $w_{cc}^j(t)$ reguł (4.78) i (4.84) dla rop sąsiedztwa bieżącego punktu pracy p_{kc} , $k=1, \dots, no$, oraz odpowiadający im podzbiór $A_{i_c j}$ macierzy ze wzoru (4.94). Wtedy równania dynamiki zamkniętego układu regulacji opisanego wzorem (4.95) dla określonego punktu pracy można zapisać w postaci

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{j=1}^{rop} \tilde{w}_{cc}^j \mathbf{A}_{i_c j} \mathbf{v}(t). \quad (4.100)$$

Twierdzenie 4.4

Punkt równowagi systemu dynamicznego ze wzoru (4.95) jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeśli dla każdego liniowego modelu obiektu Σ_o^i układu dynamicznego ze wzoru (4.100) istnieje macierz symetryczna dodatnio określona \mathbf{P}_{ij} taka, że dla każdego podzbioru macierzy stanu $\mathbf{A}_{i_c j}$ spełniona jest nierówność

$$\mathbf{A}_{i_o j}^T \mathbf{P}_{ij} + \mathbf{P}_{ij} \mathbf{A}_{i_o j} < 0 \quad (4.101)$$

dla $i=1, \dots, ro$ i $j=1, \dots, rop$.

Dowód

Dowód twierdzenia 4.4 składa się z dwóch części. Pierwsza dotyczy warunków stabilności lokalnego układu dla wybranego punktu pracy p_{kc} i przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 4.2. Druga dotyczy zapewnienia warunków stabilności przy przełączaniu układu pomiędzy poszczególnymi grupami regulatorów. Tutaj zastosowanie znajduje teoria stabilności układów przełączalnych, opisana w rozdziale 4.2. Ta sama procedura zastosowana w każdym kierunku i obszarze zmian parametrów pozwala na dowiedzenie stabilności układu zamkniętego w całym obszarze zmian parametrów pracy układu.

Procedura weryfikacji stabilności układu regulacji z rozmytym regulatorem strefowym wymaga rozwiązania ro zbiorów $rop=3^{no}$ nierówności macierzowych, co jest możliwe dla większości systemów rozmytych, w szczególności tych z niewielką liczbą parametrów (sygnałów pomocniczych) $p_k(t)$ (małym no), wykorzystywanych do modelowania nieliniowego obiektu i regulatora.

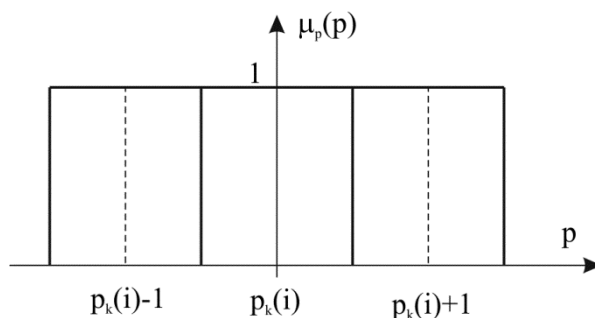
Uwaga 3

Uwzględniając dynamikę sterowanego obiektu, należy tak dobrać liczbę zbiorów rozmytych i czas próbkowania regulatora, aby w kolejnych punktach próbkowania regulatora nie dochodziło do „przeskoków” punktów pracy p_{kc} , tzn. aby w kolejnych okresach próbkowania regulatory Σ_c^j , odpowiadające kolejnym punktom pracy, bezpośrednio ze sobą graniczyły.

Uwaga 4

Zakładając dla regulatora strefowego funkcje przynależności, jak na rysunku 4.44, otrzymamy układ sterowania, w którym w danej chwili aktywny jest (odpalany) tylko jeden

regulator. Tym samym w praktyce układ taki jest tożsamy z przełączalnym regulatorem typu gain-scheduling, opisanym w rozdziale 4.3, w którym parametry regulatora zmieniane są skokowo, zależnie od wartości sygnałów pomocniczych – bieżącego punktu pracy.



Rys. 4.44. Funkcje przynależności dla regulatora przełączanego

Ponieważ w twierdzeniu 4.4 nie uwzględnia się kształtu funkcji przynależności, to twierdzenie to obowiązuje również dla, opisanego w rozdziale 4.3, układu z regulatorem z przełączalnymi parametrami. Dowód twierdzenia jako oczywisty zostanie tu pominięty.

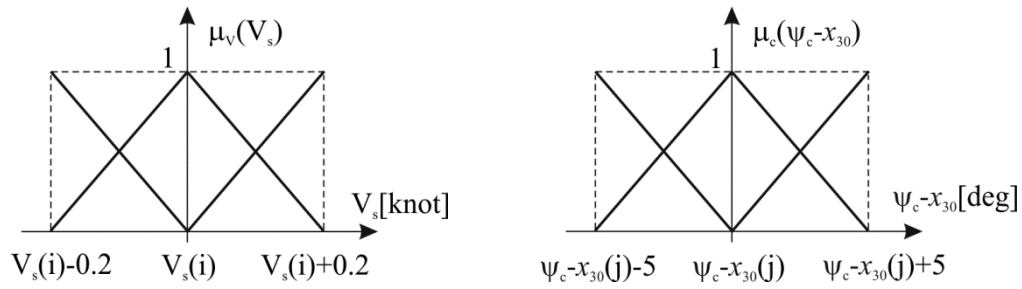
4.5.4. Przykłady projektowania regulatorów rozmytych typu T-S

Przykład 4.5 – Regulator strefowy typu T-S do pozycjonowania statku wiertniczego

Możliwość realizacji i efektywność sterowania z regulatorem strefowym T-S przedstawiono na przykładzie symulacji układu pozycjonowania położeniem i kątem kursowym statku wiertniczego „Wimpey Sealab”, opisanym w rozdziale 4.3.

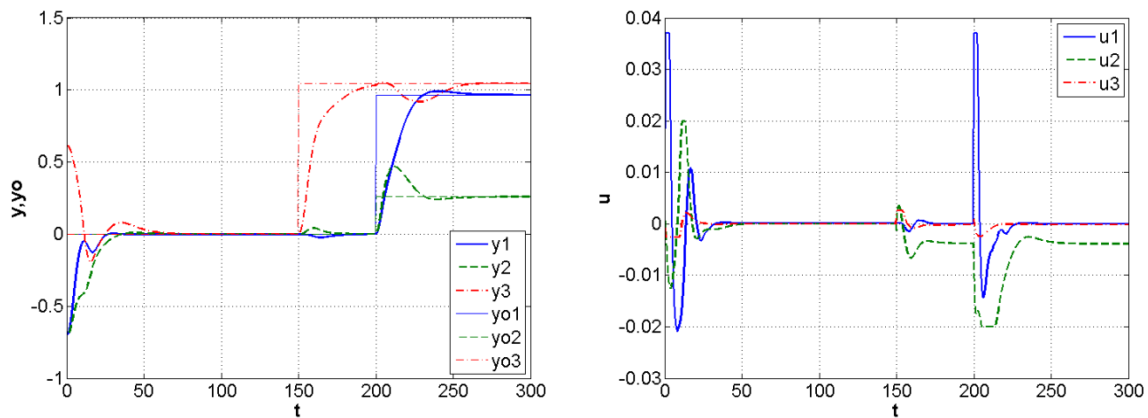
Regulatory modalne wykorzystane w badanej metodzie sterowania są wielowymiarowymi układami dynamicznymi zsyntetyzowanymi z wykorzystaniem technik lokowania biegunów, przedstawionych w rozdziale 4.3. Tak jak w przykładzie z rozdziału 4.3, syntezy regulatorów dokonano w zakresie zmian prędkości $V_s \in [-4,9 \div 4,9]$ węzłów z rozdzielczością 0,2 węzła i w całym zakresie kąta pełnego, tj. w przedziale $\Psi_c - x_{30} \in [0 \div 360^\circ]$ z rozdzielczością 5° (tj. około 0,0873 rd), dla założonego względnego „promienia bezwładności” statku $k_{zz} = 1/4$. Determinuje to jednoznacznie ilość obliczeń niezbędnych do zweryfikowania stabilności tak zaprojektowanego systemu. Procedura standardowa wykorzystująca warunki twierdzenia 4.3 wymaga rozwiązania zbioru 3650 nieliniowości (4.96). Zakładając ruchomą grupę 3×3 regulatorów, zgodnie z warunkami twierdzenia 4.4, sprawdzenie stabilności systemu pozycjonowania wystarczy rozwiązać 3650 zbiorów 9 nieliniowości, co jest realizowalne. W metodzie tej nie wymaga się ponadto aby wszystkie lokalne regulatory były stabilne, przy zachowaniu stabilności całego układu.

Odpowiednio do założonej rozdzielczości prędkości statku i jego kąta kursowego funkcje przynależności do zbiorów rozmytych prędkości i kąta kursowego dla grupy 3×3 regulatorów, przyjęto jak na rysunku 4.45.

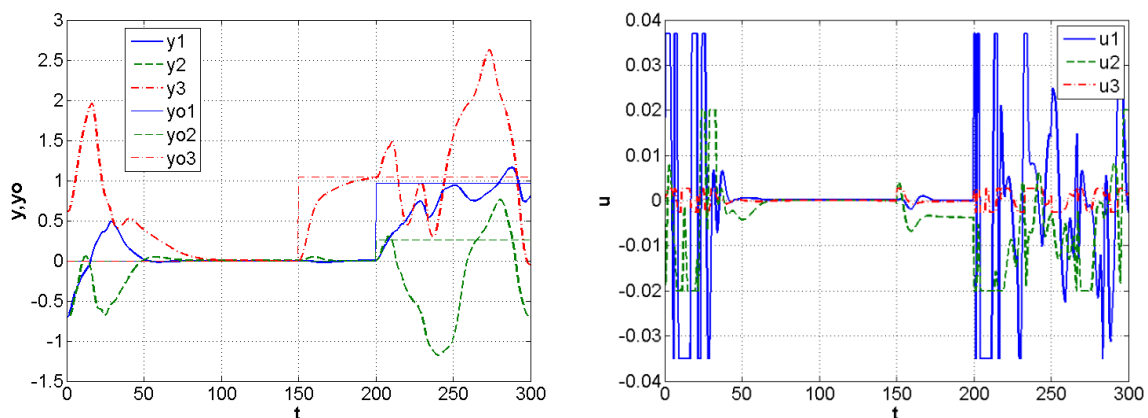


Rys. 4.45. Funkcje przynależności dla prędkości V_s i kąta kursowego $\Psi_c - x_3$ statku

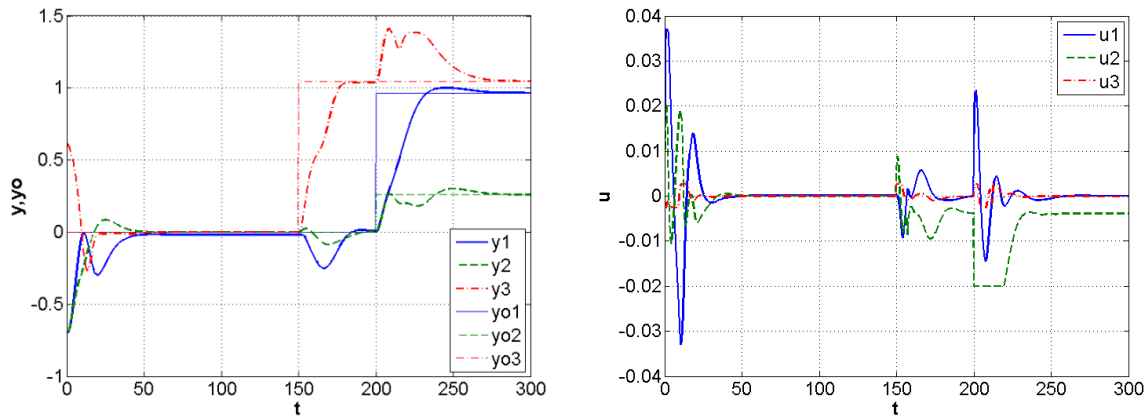
Na rysunkach 4.46–4.49 przedstawiono rezultaty symulacji z wykorzystaniem regulatorów strefowych T-S zbudowanych na bazie siatek lokalnych regulatorów modalnych, obliczonych z wykorzystaniem wszystkich czterech metod lokowania biegunów. Regulatory zaimplementowano i symulacje przeprowadzono w środowisku Matlab/Simulink.



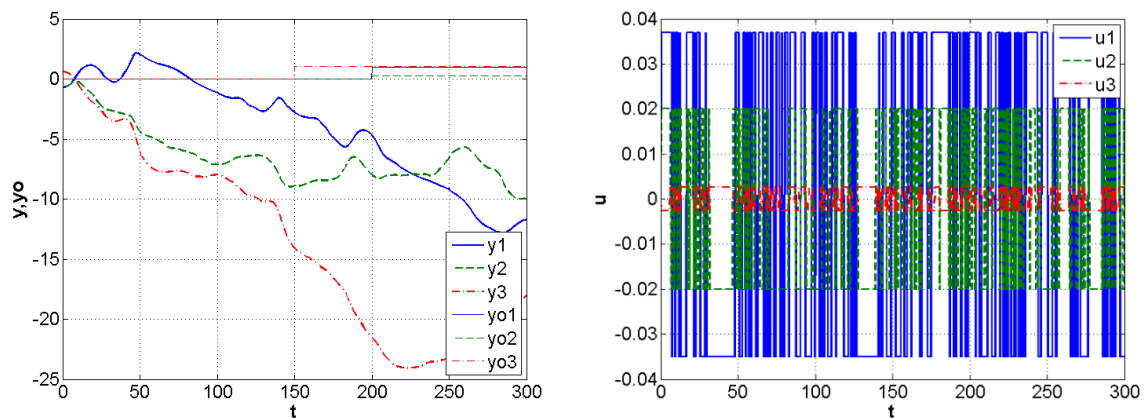
Rys. 4.46. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator strefowy T-S (PME)



Rys. 4.47. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator strefowy T-S (PM kan)



Rys. 4.48. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator strefowy T-S (EVM kan)



Rys. 4.49. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator strefowy T-S (ELM kan)

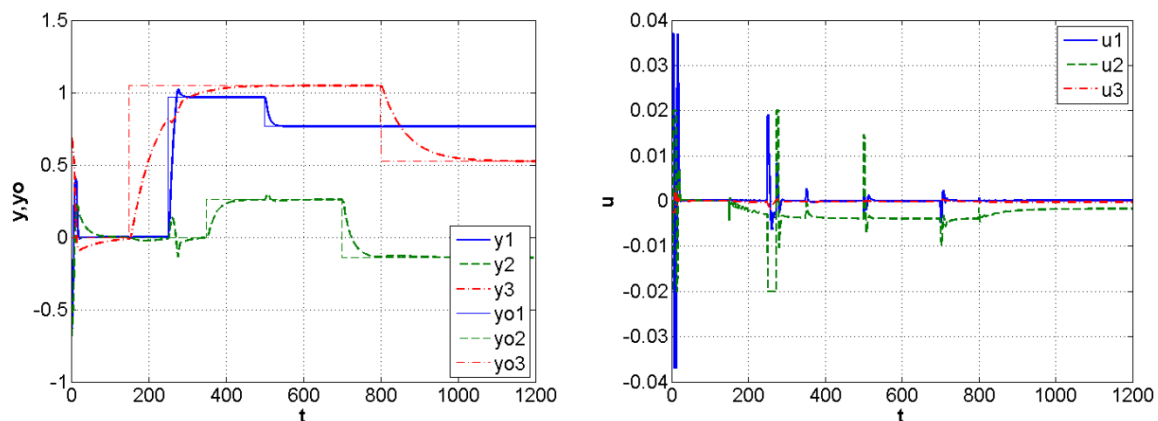
Jak widać na powyższych rysunkach, najlepsze rezultaty regulacji otrzymuje się, stosując metody syntezy lokalnych regulatorów modalnych EVM i PME. Oba regulatory pracowały prawidłowo, doprowadzając statek do założonego punktu wiercenia i przyjętego kąta kursowego. Regulator strefowy zapewnia przy tym dużo niższy poziom oscylacji sygnałów sterujących $u(t)$ (w porównaniu z regulatorami przełączalnymi, rys. 4.13–4.19), poprawiając tym samym zdecydowanie jakość układu sterującego i możliwości jego aplikacji w rzeczywistym układzie regulacji. Podobnie jak w przypadku układów z regulatorami przełączalnymi z przykładu 4.2, regulatory zbudowane z wykorzystaniem metod PM i ELM dają przebiegi o niskiej jakości sterowania lub wręcz niestabilne.

Należy zauważyć, że do syntezy rozmytego regulatora strefowego wykorzystuje się postaci kanoniczne obserwowalne Luenbergera-Brunowskiego regulatorów ze wzoru (4.30), w których to postaciach macierz wyjściowa C_{r_o} każdego regulatora jest taka sama. Pozwala to na stworzenie nieliniowego modelu regulatora rozmytego ze wzoru (4.88) i wyprowadzenie prezentowanych powyżej warunków stabilności. Budowa regulatorów rozmytych na podstawie zestawów regulatorów w postaciach normalnych (4.30), w ogólności z różnymi

macierzami wyjściowymi, jest oczywiście możliwa lecz określenie warunków stabilności – dla układów ciągłych – jest dużo bardziej skomplikowane, a autorowi są nie znane wyniki takich prac.

Przykład 4.6 – Regulator rozmyty z dynamicznym odsprzęgnięciem do pozycjonowania statku wiertniczego

Jak zapowiedziano w przykładzie 4.4, w rozdziale 4.3, strefowy regulator rozmyty T-S można również zbudować na bazie liniowych regulatorów z dynamicznym odsprzęgnięciem z równania (4.54) (lub (4.59)). Sposób działania takiego regulatora w układzie pozycjonowania dla modelu statku wiertniczego z przykładów 4.2–4.5 pokazano na rysunku 4.50. Regulator rozmyty zbudowano przy takim samym podziale siatek lokalnych regulatorów modalnych, obliczonych jak w przykładzie 4.2, tj. w zakresie zmian prędkości statku $V_s \in [-4,9 \div 4,9]$ węzłów z rozdzielczością 0,2 węzła i w całym zakresie kąta pełnego, w przedziale $\Psi_c - x_{30} \in [0 \div 360^\circ]$ z rozdzielczością 5° (tj. około 0,0873 rd), dla założonego względnego promienia bezwładności statku $k_{zz} = 1/4$. Funkcje przynależności regulatora zrealizowano jak na rysunku 4.45 w przykładzie 4.5.



Rys. 4.50. Przebiegi czasowe zmian pozycji i kursu statku oraz sygnałów sterujących dla rozmytego regulatora T-S z dynamicznym odsprzęgnięciem (z dostępnym wektorem stanu)

Porównując przebiegi na rysunkach 4.27 i 4.50 widać wyraźną poprawę jakości sygnału sterującego przy niemal identycznym przebiegu zmian położenia i kąta kursowego statku. Potwierdza to użyteczność opisywanych w niniejszym rozdziale strefowych regulatorów rozmytych.

4.6. Sztuczne sieci neuronowe w sterowaniu nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO

Podstawowym mankamentem prezentowanych w poprzednich rozdziałach adaptacyjnych regulatorów modalnych jest, często dyskwalifikująca je, nieciągłość sygnałów sterujących. Problem ten częściowo złagodzone po zastosowaniu w rozdziale 4.5 strefowego regulatora rozmytego. Cechował się on dużą prostotą syntezy i implementacji w sterowniku programowalnym, identyczną jak dla regulatora modalnego, a przy tym znacznie poprawiał problemy zmian parametrów regulatora przy zmianach punktu pracy układu. Kolejnym krokiem w tym kierunku są wielowymiarowe regulatory adaptacyjne zbudowane z wykorzystaniem sztucznych sieci neuronowych. Wyniki tych prac na, wykorzystywanym w niniejszej pozycji, przykładzie układu pozycjonowania statku wiertniczego (z prezentowanych dotychczas przykładów 4.2–4.6) przedstawiono szczegółowo w pracy [25]. W niniejszym rozdziale przedstawiono najważniejsze uwagi, problemy i założenia odnośnie budowy prezentowanych tam neuronowych regulatorów modalnych.

Neuronowy regulator modalny można budować na dwa sposoby. Pierwszy polega na stworzeniu jednej sieci neuronowej o ilości wejść i wyjść odpowiadającej zastępowanemu regulatorowi klasycznemu. Wtedy jeden regulator neuronalny zastępuje zestaw (liniowych) regulatorów modalnych otrzymanych dla możliwie wszystkich nominalnych punktów pracy nieliniowego obiektu MIMO. W przypadku nieliniowego obiektu MIMO, sieć ta byłaby jednak bardzo skomplikowanym układem dynamicznym, który, w zależności od zmieniającego się punktu pracy, musiałby aproksymować działanie (właściwości statyczne i dynamiczne) wielu lokalnych regulatorów. Jak pokaże prezentowany dalej przykład, zadanie to przy zastosowaniu klasycznych struktur sieci z ograniczoną liczbą neuronów jest praktycznie niewykonalne.

Innym podejściem do budowy regulatora neuronalnego jest zaprojektowanie struktur neuronowych aproksymujących wartości poszczególnych elementów macierzy zestawu regulatorów (modalnych) wyznaczonych w sposób analityczny w wybranych punktach pracy dla zlinearyzowanych opisów obiektów. Wartości elementów macierzy opisującej regulator uzależnione są od wartości sygnałów pomocniczych. Każda sieć posiadałaby więc tyle wejść ile sygnałów pomocniczych i jedno wyjście określające bieżącą wartość aproksymowanego elementu opisu regulatora. Ilość tworzonych sieci neuronowych zależy wówczas od wymiarów i struktury liniowych regulatorów (ilości parametrów np. macierzy z opisu (2.2)). Ten sposób syntezy regulatora neuronalnego, pomimo swoich problemów, jest już praktycznie realizowalny z wykorzystaniem klasycznych struktur sieci neuronowych, stosunkowo łatwo implementowalnych w programowalnych urządzeniach automatyki. Sposób syntezy regulatora polega wówczas na nauczaniu poszczególnych sieci odwzorowywania wartości odpowiednich elementów w wybranych punktach pracy układu. Zakłada się, że właściwości aproksymacyjne sieci pozwolą wtedy otrzymywać odpowiednie

wartości tych elementów również dla punktów spoza zbioru uczącego (pośrednich punktów pracy układu).

Przykład 4.7 – Generacja regulatora neuronalnego dla modelu statku wiertniczego

W kolejnym przykładzie ponownie wykorzystany zostanie nieliniowy model statku wiertniczego, opisany równaniami (4.46). Celem syntezy będzie regulator neuronalny, odwzorowujący parametry adaptacyjnego regulatora modalnego z przykładu 4.2 (rozmytego regulatora strefowego z przykładu 4.5), pracujący w układzie pozycjonowania statku.

Jednym z podstawowych problemów w nauczaniu sieci neuronowej jest prawidłowy wybór danych uczących. Syntezy regulatorów dokonano w zakresie zmian prędkości $V_s \in [-4,9 \div 4,9]$, węzłów z rozdzielczością 0,2 węzła i w całym zakresie kąta pełnego, tj. w przedziale $\Psi_c - x_{30} \in [0 \div 360^\circ]$ z rozdzielczością 5° (tj. około 0,0873 rd), dla założonego względnego „promienia bezwładności” statku $k_{zz}=1/4$. Przygotowano tym samym cztery zestawy 3650 modalnych regulatorów (cztery metody projektowania opisane w rozdziale 4.3) opisanych równaniami stanu w drugiej postaci kanonicznej Luenbergera-Brunowskiego ze wzoru (4.48). Pozwoliło to na ograniczenie liczby koniecznych do zaprojektowania sieci neuronowych do 36 – 18 elementów a_{ij} , $i=1,2,\dots,6$, $j=2,4,6$ macierzy A_{ro} oraz 18 elementów b_{ij} , $i=1,2,\dots,6$, $j=1,2,3$ macierzy B_{ro} . Przez to wartości każdego z parametrów a_{ij} , b_{ij} można przechować w postaci macierzy

$$\mathbf{a}_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{i\dot{u}_{1,1}} & \cdots & a_{i\dot{u}_{1,j}} & \cdots & a_{i\dot{u}_{1,73}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i\dot{u}_{k,1}} & \cdots & a_{i\dot{u}_{k,j}} & \cdots & a_{i\dot{u}_{k,73}} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i\dot{u}_{50,1}} & \cdots & a_{i\dot{u}_{50,j}} & \cdots & a_{i\dot{u}_{50,73}} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

i

$$\mathbf{b}_{i,j} = \begin{bmatrix} b_{i\dot{u}_{1,1}} & \cdots & b_{i\dot{u}_{1,j}} & \cdots & b_{i\dot{u}_{1,73}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{i\dot{u}_{k,1}} & \cdots & b_{i\dot{u}_{k,j}} & \cdots & b_{i\dot{u}_{k,73}} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i\dot{u}_{50,1}} & \cdots & b_{i\dot{u}_{50,j}} & \cdots & b_{i\dot{u}_{50,73}} \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

których rozmiar zależy od liczby przyjętych punktów pracy układu, tu 50×73 .

Wybór konkretnego zestawu, czyli sposobu generacji regulatorów, zależy przede wszystkim od sposobu zmian wartości poszczególnych parametrów macierzy A_{ro} i B_{ro} . Jak widać na rysunkach 4.10 i 4.11, powierzchnie, ilustrujące sposób zmian wybranych parametrów, są diametralnie różne. Decydują tu przede wszystkim numeryczne uwarunkowania konkretnych metod syntezy regulatorów modalnych. Tak jak w prezentowanym przykładzie, w przypadku małej liczby (jedna lub dwie) zmiennych

pomocniczych, wstępną selekcję danych uczących można przeprowadzić na podstawie wzrokowej oceny wykresów powierzchni 4.9 i 4.10. Można do tego również, a w przypadku większej liczby zmiennych pomocniczych wydaje się to konieczne, jak w pracy [25], wykorzystać zależność

$$s_{i,j} = \frac{\sum_k^{49} \sum_l^{73} |p_{i,j_{k,l}} - p_{i,j_{k+1,l}}| + \sum_k^{50} \sum_l^{72} |p_{i,j_{k,l}} - p_{i,j_{k,l+1}}|}{\sum_k^{50} \sum_l^{73} p_{i,j_{k,l}}}, \quad (4.104)$$

gdzie $p_{i,j_{k,l}}$ oznacza wartość elementu $\mathbf{a}_{i,j}$ lub $\mathbf{b}_{i,j}$ zdefiniowanych wzorami (4.102) i (4.103) w punkcie pracy k,l . W prezentowanym przykładzie zarówno wzrokowa ocena gładkości powierzchni (wszystkich zmieniających się elementów macierzy \mathbf{A}_{ro} i \mathbf{B}_{ro} , jak i wartości opisanego kryterium, wskazywały na metodę PME jako dającą potencjalnie powierzchnie o najłatwiejszym kształcie do nauczenia się przez sieci neuronowe.

Z uwagi na możliwość przyjęcia różnych typów, struktur i sposobu uczenia sieci neuronowej synteza poszczególnych sieci neuronowych jest zadaniem żmudnym i dość czasochłonnym. Poszukiwanie właściwej struktury wymaga bądź zastosowania algorytmów optymalizacji liczby wag neuronów, np. OBD (ang. *Optimal Brain Damage*) lub OBS (ang. *Optimal Brain Surgeon*) [50; 94; 133; 203], bądź jak w pracy [25] klasycznej weryfikacji poprawności i jakości aproksymacji dla wielu różnych typów i struktur. Otrzymane w wyniku uczenia zadeklarowane struktury sieci można następnie ocenić pod kątem zgodności z oryginalną powierzchnią zmienności każdego ze współczynników. W publikacji [25] ocena była prowadzona na podstawie wartości trzech wskaźników:

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{50} \sum_{l=1}^{73} (p_{i,j_{k,l}} - y_{k,l}^{net}), \quad (4.105)$$

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{50} \sum_{l=1}^{73} |p_{i,j_{k,l}} - y_{k,l}^{net}|, \quad (4.106)$$

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{50} \sum_{l=1}^{73} (p_{i,j_{k,l}} - y_{k,l}^{net})^2, \quad (4.107)$$

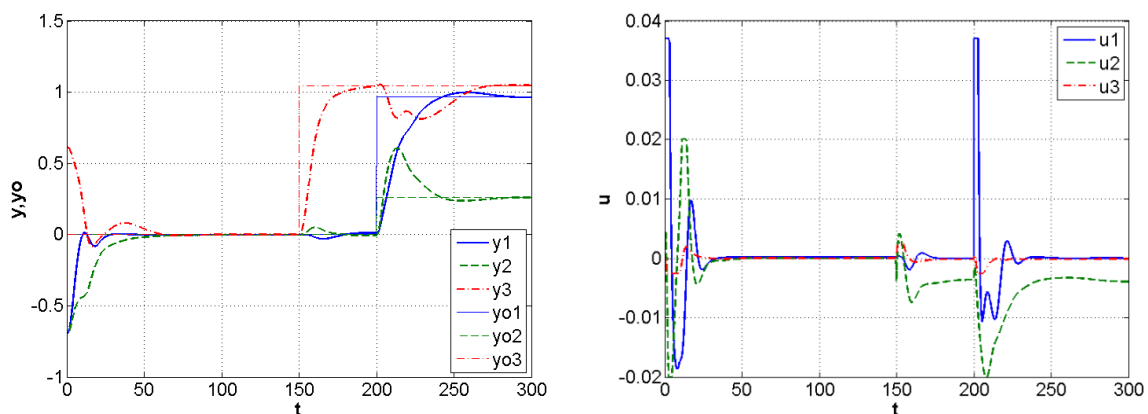
gdzie n i m są numeratorami wierszy i kolumn macierzy zawierającej wartości parametrów $\mathbf{a}_{i,j}$ i $\mathbf{b}_{i,j}$, y – wartości na powierzchni oryginalnej, y_{ij}^{net} – wartości aproksymowane przez sieć.

Jako najlepsze kryterium oceny jakości działania zaprojektowanych struktur neuronowych wybrano kryterium sumy wartości bezwzględnych różnic z równania (4.106). Należy pamiętać, że do oceny poprawności działania sieci należy używać zestawu danych różnego od danych uczących. W tym celu wygenerowano siatkę regulatorów gęstszą i o punktach pracy przesuniętych względem siatki uczącej. Dane walidacyjne wygenerowano dla zmian prędkości w zakresie $V_s \in [-5,05 \div 5,05]$ węzłów z rozdzielczością 0,1 węzła i w całym zakresie kąta pełnego, tj. w przedziale $\Psi_c - x_{30} \in [0 \div 360^\circ]$ z rozdzielczością 1° (tj. około 0,0175 rd). Struktury sieci, których wartości tego wskaźnika były najmniejsze dla danego

elementu macierzy regulatora, zostały wybrane jako najskuteczniej działające i następnie użyte w systemie sterowania.

Stabilność układu zamkniętego dla tak skonstruowanego regulatora można zweryfikować w praktyczny sposób z wykorzystaniem siatki danych uczących i twierdzenia 4.4, tj. tak jak dla rozmytego regulatora strefowego. Jest to podejście dość zachowawcze, ale uzasadnione przede wszystkim swoją prostotą. Wpływ niedokładności modelowania można określić osobno dla każdego następnika modelu rozmytego regulatora ze wzoru (4.88) poprzez analizę wrażliwości układu na zmiany jego parametrów. Rozważany poziom zmian parametrów regulatora określić można podczas walidacji poszczególnych sieci i przyjmując do tego największą wartość błędu modelowania danego parametru w obszarze roboczym regulatora. Analizę taką można przeprowadzić, wykorzystując przybornik *Robust Control Toolbox* programu Matlab.

Na rysunku 4.51 przedstawiono wyniki symulacji układu pozycjonowania statku z wykorzystaniem neuronalnego regulatora modalnego. Porównanie uzyskanych wyników z wynikami uzyskanymi dla regulatora modalnego z przełączeniami (rys. 4.13) i rozmytego regulatora strefowego T-S (rys. 4.43) wykazuje podobne działanie i jakość sygnału sterującego do tej uzyskiwanej przez regulatory rozmyte.



Rys. 4.51. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące w układzie regulacji z neuronalnym regulatorem modalnym

Mając na uwadze złożoność syntezy regulatora neuronalnego, wydaje się, że znakomitą większość problemów sterowania nieliniowymi obiektami MIMO lepiej jest rozwiązywać metodami rozmytymi. Nie przekreśla to jednak oczywiście możliwości wykorzystania sztucznych sieci neuronowych w układach automatycznej regulacji. Ich pozytywne zastosowanie i prawidłową pracę przetestowano choćby w publikacji [70] do sterowania nagrzewnicą, gdzie, oprócz funkcji aproksymatora elementów macierzy regulatorów, zastosowano także jako modele zmieniające się z punktem pracy parametry obiektu (aproksymowały charakterystyki statyczne w torze temperatury oraz przepływu).

4.7. Model Following Control dla obiektów MIMO

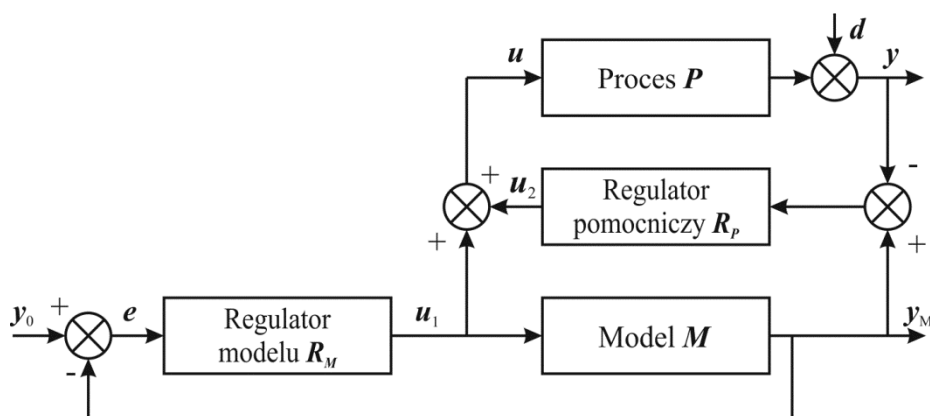
Jednym z podstawowych mankamentów zdecydowanej większości algorytmów automatycznej regulacji jest konieczność budowy modelu obiektu regulacji. Model ten jednak ze swej natury nigdy nie będzie bezbłędnie opisywał rzeczywistości. Dlatego też jednocześnie z rozwojem metod syntezy regulatorów poszukuje się sposobów zwiększenia odporności układu regulacji na niedokładności modeli, na bazie których synteżowano regulatory oraz zakłócenia oddziałujące na obiekt rzeczywisty w trakcie pracy [61; 100; 155; 162; 170; 195; 210; 218; 249; 257].

W przypadku, opisywanych w pracy, układów regulacji modalnej przy dokładnie znanych wartościach u_0 (rys. 4.1) oraz prawidłowo zaprojektowanych (dla danych punktów pracy) regulatorach modalnych, teoretycznie możliwe jest osiągnięcie zerowych wartości statycznych odchyłek regulacji $e_{ust}(t) \rightarrow 0$ przy $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$. W praktyce, na skutek niedokładności modeli nominalnych przyjętych do linearyzacji i/lub obecności działających na obiekt zakłóceń, osiągnięcie zerowych statycznych odchyłek regulacji jest mało prawdopodobne. Wynika stąd konieczność rozbudowy układu regulacji o struktury kompensujące te niedokładności. Rozbudowana struktura układu regulacji pozwala również utrzymać stabilność układu w przypadku drobnych awarii układów wykonawczych (nie wymagających rekonfiguracji układu sterowania i ponownej syntezy regulatorów). W dużej części prac poświęconych sterowaniu obiektami nieliniowymi wykorzystuje się liniowe modele obiektów o zmieniających się parametrach. Idea ta nie jest nowa [9; 130] i wciąż wykorzystywana w budowie adaptacyjnych układów sterowania [115; 184; 232]. W niniejszym rozdziale przedstawiono sposoby możliwego wykorzystania i praktyczną skuteczność struktury MFC (ang. *Model Following Control*) w regulacji nieliniowymi układami MIMO.

4.7.1. Budowa i właściwości struktury MFC

Układ MFC, przedstawiony na rysunku 4.52, po raz pierwszy opisany został w pracy [218], a następnie intensywnie badany w publikacjach [61; 219]. Podstawowy sygnał sterujący u_1 generowany jest przez regulator główny (modelu) $R_M(s)$ dobrany tak, aby w jak najlepszy sposób sterować modelem obiektu $M(s)$. Zadaniem regulatora pomocniczego $R_p(s)$ jest wspieranie regulatora głównego przez generację sygnału korekcyjnego, który zależy od różnicy pomiędzy wyjściem zastosowanego modelu a rzeczywistym procesem. W ten sposób układ może przeciwdziałać efektom niedoskonałości przyjętego modelu procesu (spowodowanego np. przez różnice struktury) i możliwym perturbacjom procesu. Odporność układu na niedokładności modelu, jak również jakość regulacji, jest tym samym znacznie zwiększona. Podobnie znacznemu zmniejszeniu ulegają efekty spowodowane niemierzalnymi zakłóceniami [61; 219].

Struktura MFC w zastosowaniu do nieliniowych obiektów MIMO była już przedmiotem osobnych analiz [61; 70–75]. Wykorzystując ją do sterowania obiektami nieliniowymi, zakłada się, że nieliniowy, niezmienny w czasie obiekt sterowania (ang. *nonlinear time-invariant*, NLTI) może zostać opisany równaniami stanu i wyjść, w których parametry macierzy stanu, wejść i wyjść zależą od bieżących wartości wektora stanu i/lub wektora wejść. Jak wykazano w pracy [157], większość modeli procesów NLTI może zostać zastąpionych modelami liniowymi, zmiennymi w czasie (ang. *linear time-variant*, LTV). W pracy w pełni wykorzystano tę teorię oraz zalety układu MFC w syntezie odpornych i o poprawionej jakości regulacji układach sterowania dla badanych nieliniowych obiektów MIMO.



Rys. 4.52. Struktura układu MFC

Podstawowe właściwości układu MFC można najłatwiej wykazać przy założeniu liniowości wszystkich elementów układu [61]. Niech odpowiednie elementy układu sterowania przedstawione będą za pomocą macierzy transmitancji o odpowiednich wymiarach dla: modelu $M(s)$, procesu $P(s)$, regulatora modelu $R_M(s)$ i regulatora pomocniczego $R_p(s)$. Ponadto zakłada się, że na obiekt wpływają multiplikatywne perturbacje $\Delta(s)$

$$P(s) = (I + \Delta(s))M(s) \quad (4.108)$$

gdzie $M(s) = B_1(s)A_1^{-1}(s)$.

Dla rozważanego układu MFC, przedstawionego na rysunku 4.52, obowiązuje następująca zależność:

$$y(s) = (I + P(s)R_p(s))^{-1} P(s) \left[R_M(s) (M(s)R_M(s))^{-1} + R_p(s) \right] y_M(s) + (I + P(s)R_p(s))^{-1} d(s). \quad (4.109)$$

W układzie MFC z perturbowanym procesem ze wzoru (4.108) funkcje wrażliwości zakłóceń, wrażliwości wejściowej i wyjściowej mogą zostać wyprowadzone z zależności (4.109) i zdefiniowane w dziedzinie częstotliwości $s = j\omega$, for $\omega \in (0, \infty)$ jako

$$S_{d-MFC}(s) = (I + P(s)R_p(s))^{-1} \quad (4.110)$$

$$\mathbf{S}_{y_0-MFC}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{P}(s)\mathbf{R}_p(s))^{-1} \mathbf{P}(s) \left[\mathbf{I} + (\mathbf{R}_p(s) - \mathbf{R}_M(s)) (\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_M(s))^{-1} \mathbf{M}(s) \right] \mathbf{R}_M(s) \quad (4.111)$$

$$\mathbf{S}_{y_m-MFC}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{P}(s)\mathbf{R}_p(s))^{-1} \mathbf{P}(s) \left[\mathbf{R}_M(s) (\mathbf{M}(s)\mathbf{R}_M(s))^{-1} + \mathbf{R}_p(s) \right] \quad (4.112)$$

z

$$\mathbf{S}_{y_m-MFC}(s) = \mathbf{S}_{d-MFC}(s) (\mathbf{I} + \mathbf{A}(s)) (\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_M(s)), \quad (4.113)$$

z których wynika, że jakość sterowania w pętli modelu (referencyjnej) może być kształtowana niezależnie przez regulator $\mathbf{R}_M(s)$, po dostrojeniu regulatora pomocniczego $\mathbf{R}_p(s)$ do skutecznego tłumienia zakłóceń.

Analiza funkcji wrażliwości (4.110)–(4.112) pozwala na wyprowadzenie warunków zapewniających realizację założonej jakości sterowania. Dla przykładu, wpływ zakłóceń na wyjściu obiektu perturbowanego procesu jest ograniczony, tzn. następująca nierówność

$$\|\mathbf{y}(s)\| \leq \gamma \|\mathbf{d}(s)\|, \quad \gamma \ll 1 \quad (4.114)$$

jest spełniona, jeśli spełniona jest nierówność

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}_{d-MFC}(s)) \leq \gamma, \quad (4.115)$$

gdzie $\bar{\sigma}(\mathbf{A})$ jest największą wartością singularną macierzy \mathbf{A} . Z drugiej strony, dobre nadążanie za modelem obiektu, tzn. zależność

$$\|\mathbf{y}_m(s) - \mathbf{y}(s)\| \leq \gamma_1 \|\mathbf{y}_m(s)\|, \quad \gamma_1 \ll 1 \quad (4.116)$$

jest spełniona, jeśli w określonym zakresie częstotliwości spełniona jest zależność

$$\bar{\sigma}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{y_m-MFC}(s)) \leq \gamma_1. \quad (4.117)$$

Zależność (4.117) implikuje jednocześnie największe wzmocnienie w pętli otwartej dla regulatora pomocniczego

$$\underline{\sigma}(\mathbf{P}(s)\mathbf{R}_p(s)) \geq \frac{1-\gamma}{\gamma}. \quad (4.118)$$

Biorąc pod uwagę zależności (4.112), warunek (4.117) może zostać przedstawiony w postaci

$$\bar{\sigma}(\mathbf{S}_{d-MFC}(s) [\mathbf{P}(s)(\mathbf{R}_p(s) - \mathbf{R}_M(s)) - \mathbf{A}(s)]) \leq \gamma_1, \quad (4.119)$$

z której wynika, że – w przeciwieństwie do układu klasycznego – wpływ perturbacji na skuteczność nadążania za modelem obiektu w strukturze MFC może zostać ograniczony przez odpowiedni dobór obu regulatorów. Podobnie jak w strukturze klasycznej, wzmocnienia regulatorów są ograniczone warunkami stabilności.

Struktura MFC pozostanie stabilna, jeśli jest stabilna dla obiektu bez perturbacji, a zależność

$$\overline{\sigma}(\mathbf{A}(s)) < \frac{1}{\overline{\sigma}\left(\left(\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_p(s)\right)^{-1} \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_M(s)\right)} \quad (4.120)$$

jest spełniona dla częstotliwości $\omega \in (0, \infty)$, pod warunkiem właściwości transmitancji wszystkich elementów układu i takiej samej liczby niestabilnych biegunów modelu i perturbowanego obiektu.

Analiza właściwości odpornościowych układu MFC, przedstawiona w publikacji [61], bazująca na właściwościach wartości singularnych macierzy, wykazała, że układ MFC jest bardziej stabilny i odporny w porównaniu z klasycznym układem jednopętlowym, jeśli w zakresie częstotliwości roboczych układu spełnione jest następujące równanie

$$\underline{\sigma}(\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_M(s)) < \overline{\sigma}(\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_p(s)). \quad (4.121)$$

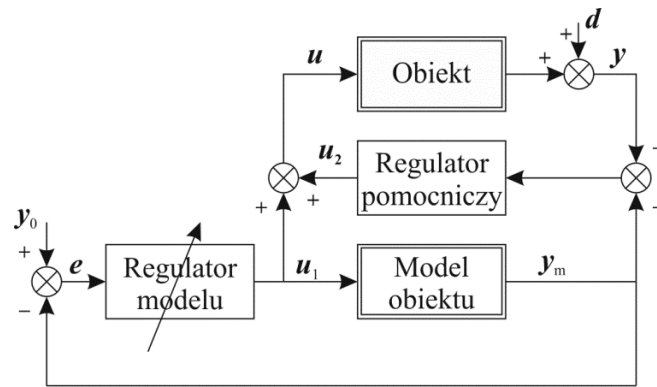
Przyjmując oznaczenia Δ_{CL} i Δ_{MFC} , jako maksymalne dopuszczalne wartości normy dla zakłóceń perturbowanego obiektu odpowiednio dla klasycznej jednopętlowej struktury regulacji i układu MFC, dolne ograniczenie stosunku dopuszczalnych perturbacji określone jest zależnością

$$\frac{\Delta_{MFC}}{\Delta_{CL}} \geq \frac{\underline{\sigma}(\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_p(s))}{\overline{\sigma}(\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{R}_M(s))}. \quad (4.122)$$

Nierówność (4.122) pozwala określić zwiększoną odporność struktury MFC w zakresie częstotliwości roboczych układu.

4.7.2. Synteza układu MFC dla nieliniowego obiektu MIMO

W przypadku nieliniowych obiektów o wielu wejściach i wielu wyjściach praktyczną implementację układu sterowania z wykorzystaniem struktury MFC można wykonać na wiele sposobów. Pierwszym problemem jest wybór sposobu i synteza pętli modelu. Drugim, dobór regulatora pomocniczego. Pętlę modelu stanowić może w ogólności dowolny nieliniowy układ sterowania zawierający nieliniowy model obiektu oraz jego regulator. Ten ostatni również może zostać przyjęty dowolnie, jako nieliniowy bądź liniowy, odporny, predykcyjny. Synteza pętli modelu i jej późniejsza implementacja wymaga rozwiązania typowych problemów syntezy układu sterowania nieliniowym obiektem MIMO. Ze swej natury pominąć w niej można uwzględnianie niedokładności parametrów modelu i wpływ zakłóceń. Regulator pomocniczy stanowić może dowolny liniowy bądź nieliniowy układ dynamiczny; w jego syntezie należy jednak uwzględnić, prezentowane w poprzednim rozdziale, warunki stabilności i odporności układu MFC (po odpowiednich modyfikacjach dla układu nieliniowego). Biorąc pod uwagę wszystkie, sygnalizowane w poprzednich rozdziałach, problemy syntezy układu sterowania dla nieliniowego obiektu MIMO stosunkowo łatwy w realizacji, prezentowany na rysunku 4.53, jest układ MFC z nieliniowym modelem obiektu, adaptacyjnym regulatorem modelu oraz liniowym regulatorem pomocniczym.



Rys. 4.53. Schemat blokowy układu MFC nieliniowego obiektu MIMO

Najprostszą w realizacji formą syntezy pętli modelu w układzie z rysunku 4.53 dla nieliniowego obiektu MIMO są prezentowane w niniejszej monografii adaptacyjne regulatory modalne. Pozwalają one swobodnie kształtować dynamikę sygnałów referencyjnych y_m . Proste warunki twierdzenia 4.3 pozwalają na weryfikację stabilności pętli modelu, a opisy dynamiki układu zamkniętego (4.93) z macierzami z wyrażenia (4.94) A_{ii} dla $i=1, \dots, r_o$ pozwalają na proste oszacowanie maksymalnych wartości singularnych dla poszczególnych transmitancji pętli modelu.

Jako że podstawowym zadaniem stawianym regulatorowi pomocniczemu jest zregulowanie do zera wpływu zakłóceń d , regulator ten musi posiadać właściwości całkujące. Niestety, poza tym faktem i przedstawionymi powyżej warunkami stabilności i odporności układu nie opracowano jeszcze szczegółowych zasad wyznaczania tego regulatora, a stosowane do tej pory dobierane były empirycznie, indywidualnie do obiektu regulacji. Najprostszą jego formą regulatora pomocniczego jest przyjęcie l niezależnych liniowych regulatorów typu PI [70–75]. Inną możliwością jest zastosowanie takiego samego regulatora modalnego jak w pętli modelu w połączeniu z regulatorem PI [68]. W przypadku układu, w którym pętlę modelu syntezowano z zadaniem dynamicznego odsprężania, regulator pomocniczy mógłby mieć bardziej skomplikowaną postać.

Generalnie im prostsza postać przyjętego regulatora pomocniczego, tym łatwiej jest sprawdzić warunki stabilności układu (4.110)–(4.112), zapewnić pożądany właściwy poziom tłumienia zakłóceń (4.115) oraz zweryfikować zasadność wykorzystania struktury MFC (4.122).

Analizowana w ramach pracy możliwość wykorzystania struktury MFC do sterowania nieliniowym obiektem podlegającym wpływowi zakłóceń została zweryfikowana symulacyjnie w układzie regulacji położenia statku wiertniczego „Wimpey Sealab”. W symulacjach uwzględniono wpływ wiatru na położenie jednostki nad zadanym punktem wiercenia.

Przykład 4.8 – Weryfikacja skuteczności układu MFC do tłumienia zakłóceń

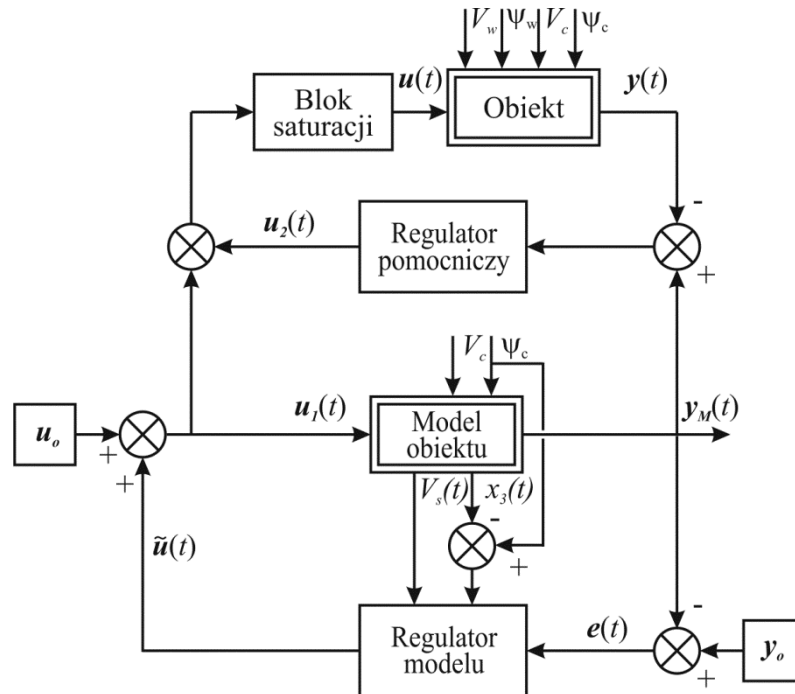
W niniejszym przykładzie przedstawiono skuteczność struktury MFC w tłumieniu zakłóceń w układzie pozycjonowania modelu statku wiertniczego z przykładów 4.2–4.7. W przypadku jednostek pływających niedokładności modelu wynikają przede wszystkim z braku precyzyjnych metod wyznaczania właściwości hydrodynamicznych jednostek oraz niedokładności modelowania czasami silnie nieliniowych torów urządzeń wykonawczych. Typowym zakłóceniem oddziałującym na jednostkę pływającą jest oddziaływanie fal, prądu morskiego i wiatru. Jakkolwiek niektóre z tych oddziaływań mogą zostać pomierzone i ich wpływ na obiekty regulacji przewidziany, to w rzeczywistym układzie regulacji zawsze część zakłóceń pozostaje nieznaną. W przypadku jednostki pływającej przyczyną powstawania statycznych odchyłek regulacji może być działanie dodatkowych sił i momentów obracających statkiem, pochodzących np. od oddziaływania wiatru i fal morskich. Dodatkowo, jeśli wielowymiarowy model statku nie we wszystkich torach ma właściwości całkujące, to zastosowanie regulatorów modalnych (o działaniu PD) może powodować wystąpienie statycznych odchyłek regulacji.

Schemat blokowy badanego układu regulacji pozycji i kursu statku nad zadanym punktem wiercenia przedstawiono na rysunku 4.54. Podobnie jak w klasycznej strukturze MFC, główna część sygnału sterującego jest generowana w pętli głównej, tu zawierającej nominalny model statku (4.46) i jego regulator, przyjęty jako adaptacyjny regulator modalny, którego parametry zmieniają się skokowo, zależnie od prędkości i kursu statku. Parametry regulatora głównego zostały obliczone metodą PME, jak w przykładzie 4.2. Przyjęto taką samą wielkość siatki punktów roboczych – liczbę regulatorów lokalnych. Zadaniem regulatora pomocniczego jest tłumienie zakłóceń powodowanych przez oddziaływanie na statek wiatr. Szczegóły jego modelowania oraz oddziaływania na obiekt regulacji przedstawiono w pracach [22; 38; 68].

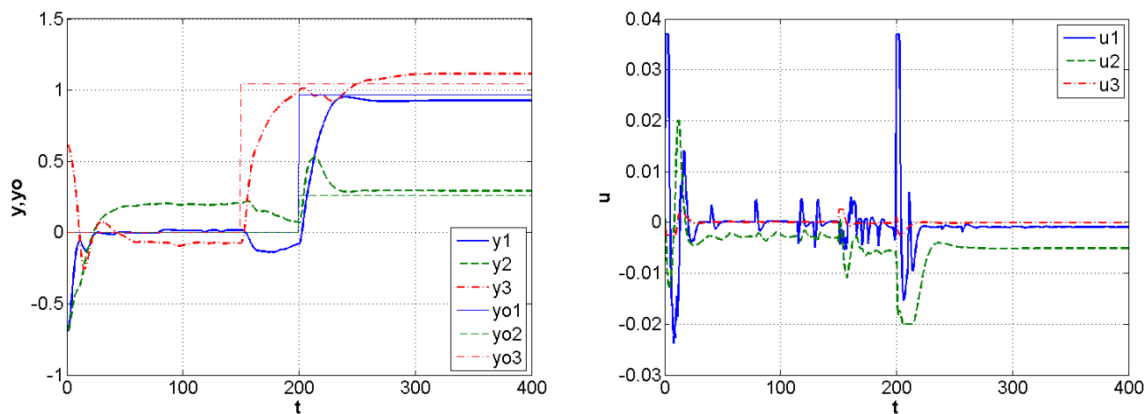
Rysunki 4.55 i 4.56 przedstawiają wyniki symulacji pozycjonowania statku wiertniczego do nowego punktu wiercenia położonego około 100 m na prawo powyżej starego ($y_{10}=0,96$, $y_{20}=0,26$) przy nowym kącie kursowym $y_{30}=60^\circ$. Wszystkie testy prowadzono, symulując prędkość prądu morskiego o wartości $V_c=2$ węzły i kącie $\Psi_c=180^\circ$ oraz prędkości średniej $V_w=25$ węzłów i kącie natarcia wiatru $\Psi_c=90^\circ$.

W klasycznym układzie regulacji z adaptacyjnym regulatorem modalnym wpływ niemierzalnych sił i momentów wywołanych oddziaływaniem wiatru powoduje błędy ustalania pozycji i kąta kursowego w stanie ustalonym (rys. 4.55). W układzie MIMO MFC statek został przesunięty dokładnie nad punkt wiercenia z założonym kątem kursowym bez błędów w stanie ustalonym (rys. 4.56). Wykorzystany tu regulator pomocniczy $R_p(s)$ składał się z takiego samego regulatora modalnego jak w pętli modelu oraz trzech regulatorów PI z parametrami: $k=1$ i $T_i=0,05$. Całkowanie w regulatorze pomocniczym doprowadziło błędy w stanie ustalonym do zera, co potwierdza możliwości układu MFC do tłumienia zakłóceń

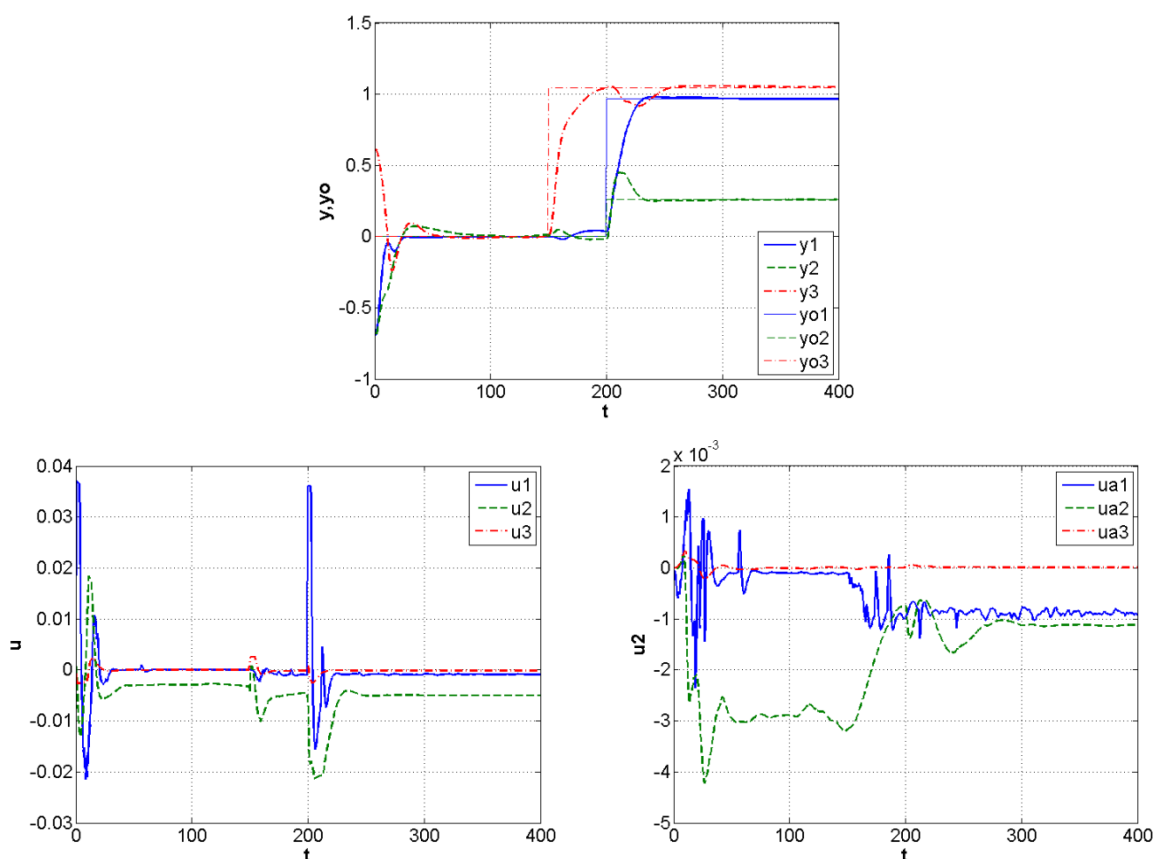
i ogólniej, przy przyjętym sposobie syntezy pętli modelu, do skutecznej regulacji nieliniowymi układami MIMO z niemierzalnymi zakłóceniami.



Rys. 4.54. Schemat blokowy układu MFC do regulacji pozycji statku



Rys. 4.55. Pozycja i kąt kursowy statku, błędy w stanie ustalonym spowodowane przez oddziaływanie wiatru w układzie regulacji z adaptacyjnym regulatorem modalnym



Rys. 4.56. Pozycja i kąt kursowy statku w układzie MFC

4.8. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono metody syntezy układów sterowania nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO. Analizowane układy sterowania wykorzystują regulatory adaptacyjne typu gain-scheduling, w których odpowiednio do zmian punktu pracy sterowanego obiektu dokonuje się zmian wartości parametrów regulatora. Do ich budowy wykorzystywany jest zestaw liniowych regulatorów spełniających odpowiednie kryteria jakości sterowania układu dla wszystkich możliwych do określenia punktów pracy obiektu. Podejście takie umożliwia automatyzację procesów projektowania adaptacyjnych wielowymiarowych układów sterowania z użyciem techniki komputerowej, w tym przede wszystkim syntezę układów z wielowymiarowymi regulatorami modalnymi i stosowanie metod dynamicznego odsprężania układów MIMO w ujęciu wielomianowym. Pokazano różne sposoby syntezy liniowych regulatorów modalnych oraz wpływ przyjętych metod lokowania biegunów na wyniki syntezy i możliwość praktycznej realizacji układu sterowania.

Wadą takiego rozwiązania może być ponadto bardzo duża liczba punktów pracy, dla których konieczna jest synteza regulatora. Zależy ona bezpośrednio od ilości parametrów pomocniczych regulatora oraz przyjętej rozdzielczości podziału zakresu ich zmienności. Analizowano zatem metody redukcji siatek, czyli redukcji liczby regulatorów

wykorzystanych do budowy adaptacyjnego regulatora modalnego, która pozwala ograniczyć wielkość niezbędnej pamięci operacyjnej programowalnych urządzeń automatyki i mocy obliczeniowej ich jednostek centralnych. Zaproponowana dwustopniowa procedura syntezy regulatora – generacja gęstej siatki regulatorów lokalnych i redukcja ich ilości – daje dodatkowy stopień swobody projektowania, który może zostać wykorzystany do wyważenia wielkości regulatora i jakości sterowania.

Niestety, jak pokazała przedstawiona analiza, uzyskiwane wyniki redukcji nie są jednoznaczne i dla rozpatrywanych siatek regulatorów zależą choćby od sposobu (kierunku) „przeszukiwania” siatek regulatorów. Ilustruje to po raz kolejny trudności w doborze i syntezie właściwego układu sterowania dla nieliniowego obiektu MIMO. Innym problemem tego rozwiązania jest możliwe pogorszenie jakości sygnałów sterujących. Mniejsza liczba regulatorów wykorzystanych w konstrukcji regulatora adaptacyjnego, a przez to rzadsze zmiany parametrów, skutkuje często dużymi nieciągłościami sygnałów sterujących, co może uniemożliwić praktyczną eksploatację takiego układu sterowania.

Zestawy regulatorów liniowych mogą stanowić podstawę budowy, opisywanych w kolejnych podrozdziałach, bardziej zaawansowanych struktur z regulatorami rozmytymi typu T-S oraz neuronowymi. Wykorzystując metody sztucznej inteligencji, przedstawiono sposób rozwiązania problemów typowych dla układów z przełączeniami, tj. nieciągłości sygnałów sterujących i chattering. Przedstawiono praktyczne uwarunkowania i sposoby syntezy tych układów. Dokonano analizy teoretycznej właściwości badanych układów sterowania oraz opracowano nowe warunki stabilności tych układów. Zaproponowano i przeanalizowano sposób syntezy i implementacji strefowego regulatora rozmytego T-S, w którym łączy się prostotę syntezy i możliwość zapewnienia wysokiej jakości sterowania.

Pokazano, realny w realizacji, sposób budowy neuronalnego regulatora modalnego. Regulator ten składa się z zestawu sieci neuronowych, których zadaniem jest aproksymacja wartości poszczególnych parametrów macierzy opisów w przestrzeni stanu liniowych regulatorów. W przedstawionej metodzie syntezy regulatora neuronalnego każda sieć posiadała tyle wejść, ile sygnałów pomocniczych i jedno wyjście określające bieżącą wartość aproksymowanego elementu opisu regulatora. Ilość tworzonych sieci neuronowych zależy od wymiarów i struktury liniowych regulatorów modalnych (obliczanych analitycznie dla wybranych punktów pracy). Ten sposób syntezy regulatora neuronalnego jest praktycznie realizowalny z wykorzystaniem klasycznych struktur sieci neuronowych, stosunkowo łatwo implementowalnych w programowalnych urządzeniach automatyki.

Poprzez wykorzystanie struktury MFC pokazano możliwość zwiększenia odporności układu sterowania na perturbacje parametrów sterowanego obiektu oraz tłumienia niemierzalnych zakłóceń oddziałujących na obiekt podczas sterowania.

Wszystkie rozważania zilustrowano odpowiednimi przykładami syntezy układu regulacji pozycji i kąta kursowego statku wiertniczego.

5. Implementacja układów sterowania obiektami MIMO w programowalnych urządzeniach automatyki

5.1. Dostosowanie procedur sterowania nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO na potrzeby sterowania w trybie czasu rzeczywistego

Podstawowym kryterium przydatności metod syntezy regulatorów i układów sterowania jest możliwość ich praktycznej implementacji. Wynika stąd potrzeba weryfikacji i ewentualnego dostosowania procedury syntezy i struktur regulatorów do sterowania nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO do postaci, w której możliwe jest ich wykorzystanie w systemach szybkiego prototypowania i implementacja w przemysłowych sterownikach programowalnych.

Adaptacji parametrów regulatora można dokonywać w sposób bezpośredni na podstawie przyjętych wskaźników jakości sterowania, lub pośredni – poprzez bieżącą identyfikację parametrów liniowego modelu obiektu (w trybie on-line) i strojenie regulatora zgodnie z przyjętymi regułami doboru jego parametrów, np. poprzez rozwiązywanie diofantycznych (macierzowych) równań wielomianowych. Takie podejście wymaga jednak często dostosowania procedur syntezy stosowanych off-line do potrzeb użycia ich w trybie on-line.

5.1.1. Synteza on-line układów sterowania modalnego nieliniowymi obiektami MIMO

Przedstawione w rozdziale 4.3 metody syntezy regulatorów modalnych można wykorzystać do syntezy regulatorów on-line podczas pracy układu. Pełna analiza off-line modelu obiektu sterowania pozwala na określenie struktury regulatora w każdym punkcie pracy układu, a następnie przyjęcie dla tych punktów pracy odpowiedniej ilości i wartości biegunów układu zamkniętego (np. syntezę *a priori* wybranych macierzy algorytmu syntezy regulatora). Procedurę syntezy regulatora można wówczas przeprowadzić każdorazowo po

zmianie punktu pracy układu (po wykonaniu procedury identyfikacyjnej) bądź, wykorzystując model obiektu, w każdym kroku próbkowania regulatora.

Testowane regulatory syntezowano z wykorzystaniem różnych metod lokowania biegunów dla wykorzystywanego w niniejszej monografii modelu statku wiertniczego.

Synteza on-line regulatora modalnego

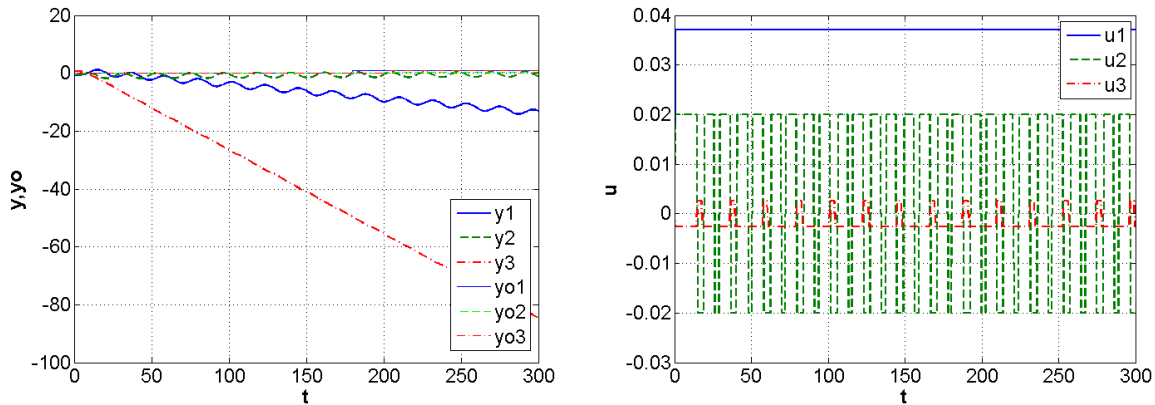
Podczas syntezy układu sterowania modalnego należy, zgodnie z opisem (2.2) obiektu, wprowadzić macierze A, B, C, D oraz wartości stabilnych biegunów układu i biegunów obserwatora o licznosciach równych rzędowi obiektu n , a następnie – w dziedzinie czasowej metodami EV bądź ELM a w dziedzinie $s \in C$, w ujęciu wielomianowym bez rozwiązywania macierzowych równań wielomianowych metodą PM, zgodnie z omówionym w rozdziale 4.3 sposobem postępowania – należy:

1. wyznaczyć macierz sprzężeń zwrotnych F ;
2. dla przyjętych wartości biegunów obserwatora Luenbergera wyznaczyć macierz wagową L ;
3. zgodnie z zależnością (4.31) obliczyć macierze A_r, B_r, C_r, D_r modalnego regulatora ciągłego dla wybranej pary macierzy F i L .

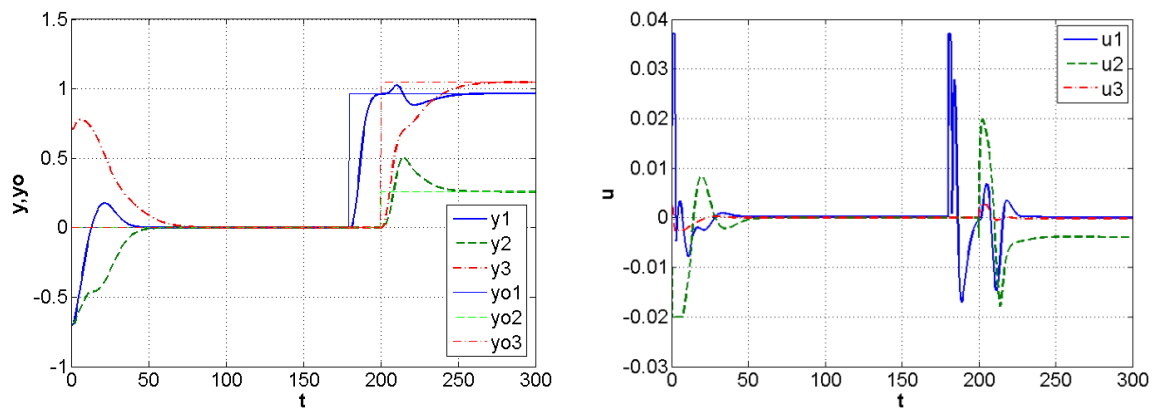
Po przyjęciu wartości stabilnych biegunów układu i biegunów obserwatora, jako niezmiennych, wszystkie powyższe kroki obliczeń przeprowadzać można w trybie on-line, bez ingerencji użytkownika. Jednak jak wykazały próby obliczeń i symulacji układu w środowisku Matlab/Simulink, wykorzystanie sposobów czasowych – metod EV i ELM – do syntezy regulatorów modalnych, prawdopodobnie z powodu braku jednoznacznego przypisania poszczególnych biegunów, prowadzi często do otrzymania niestabilnych układów (przełączalne i adaptacyjne) regulacji. Układ sterowania z syntezą on-line regulatora modalnego z wykorzystaniem standardowej metody EV dla modelu statku wiertniczego, opisanego równaniami (4.46), był niemożliwy do realizacji z powodu błędów numerycznych podczas symulacji. Wykorzystanie opracowanej niestandardowej metody ELM dało przebiegi regulacji przedstawione na rysunku 5.1.

Znacznie lepsze rezultaty regulacji położeniem otrzymano, dokonując syntezy regulatorów modalnych w dziedzinie $s \in C$, w ujęciu wielomianowym.

Wyniki regulacji położenia i kąta kursowego statku wiertniczego z modelem opisanym równaniami (4.46) przy syntezie regulatora modalnego on-line w dziedzinie $s \in C$, w ujęciu wielomianowym bez rozwiązywania macierzowych równań wielomianowych (PM) przedstawiono na rysunku 5.2.



Rys. 5.1. Położenie i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące przy syntezy on-line regulatora z wykorzystaniem metody ELM

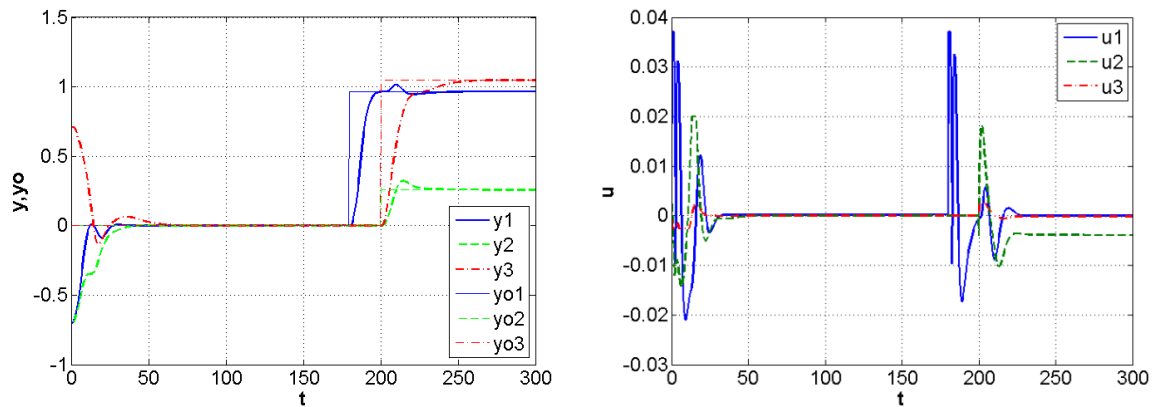


Rys. 5.2. Położenie i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące przy syntezy on-line regulatora z wykorzystaniem metody PM

W projektowaniu regulatora modalnego, budowanego na obserwatorze pełnego rzędu w dziedzinie $s \in \mathbb{C}$, w ujęciu wielomianowym z rozwiązywaniem macierzowych równań wielomianowych, należy:

1. wprowadzić macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ oraz wartości stabilnych biegunów układu i biegunów obserwatora o licznosciach równych rzędowi obiektu n ;
2. wyznaczyć macierze wielomianowe transmitancji obiektu: $\mathbf{A}_1(s), \mathbf{B}_1(s)$;
3. dla zadanych wartości biegunów wygenerować macierze wielomianowe: $\mathbf{Q}(s), \mathbf{C}_1(s)$;
4. rozwiązać równanie wielomianowe $\mathbf{X}(s)\mathbf{A}_1(s) + \mathbf{Y}(s)\mathbf{B}_1(s) = \mathbf{Q}(s)\mathbf{C}_1(s)$, otrzymując macierze $\mathbf{N}_2(s), \mathbf{M}_2(s)$, definiujące macierz transmitancji regulatora modalnego $\mathbf{T}_R(s) = \mathbf{M}_2^{-1}(s)\mathbf{N}_2(s)$;
5. wyznaczyć realizację czasową otrzymanego regulatora modalnego.

Wyniki regulacji położenia i kąta kursowego statku wiertniczego z modelem opisanym równaniami (4.46) przy syntezie regulatora modalnego on-line w dziedzinie $s \in C$, w ujęciu wielomianowym z rozwiązywaniem macierzowych równań wielomianowych przedstawiono na rysunku 5.3.



Rys. 5.3. Położenie i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące przy syntezie on-line regulatora z wykorzystaniem metody PME

Uzyskane wyniki wskazują, po pierwsze, na możliwość takiego układu sterowania, po drugie, jednoznacznie wskazują na metody, które powinny zostać przy tym użyte. Metoda PME, pomimo nieznacznie większej złożoności obliczeniowej, daje jednak rezultaty pozwalające na jej praktyczne wykorzystanie.

5.1.2. Synteza on-line układów sterowania z dynamicznym odsprężeniem

Algorytm odsprężania dynamicznego on-line

Analiza off-line odsprężanego obiektu pozwala na znaczne uproszczenie algorytmu odsprężania dynamicznego przedstawionego szczegółowo w rozdziale 3.6 i przygotowanie algorytmu on-line syntezy układu dynamicznego sterowania. Wymagane przy tym jest określenie *a priori*:

- macierzy mianownikowej $D(\cdot) = \text{diag}[D_{ii}(\cdot), i=1,2,\dots,k]$ odsprężonego układu (3.17),
- macierzy licznikowej $\hat{L}(\cdot) = \text{diag}[\hat{l}_1(\cdot) \quad \hat{l}_2(\cdot) \quad \dots \quad \hat{l}_m(\cdot)]$ dynamicznego prekompensatora.

W wersji najprostszej dla układów $m=l$, ciągłego, do celów sterowania ręcznego przy założeniu dostępności pomiarowej wektora stanu (np. na potrzeby układów sterowania wykorzystujących model MFC) przyjmuje on następującą postać:

1. Przy danym opisie w przestrzeni stanu układu odsprężanego wyznaczyć macierz transmitancji $B_1(s)A_1^{-1}(s)$ z wykorzystaniem zależności wynikających z twierdzenia strukturalnego Wolowicha. Zapamiętać oryginalne wartości macierzy przekształcenia podobieństwa \hat{T} i macierzy $\hat{S}(\cdot)$ tego układu. Jeśli potrzeba, dokonać przestawienia wierszy

macierzy $B_1(\cdot)$, podstawiając $B_1(\cdot) := P_l B_1(\cdot)$, gdzie P_l jest macierzą permutacyjną utworzoną z macierzy jednostkowej I_l .

2. Dla przyjętego podziału ze wzoru (3.20) określić macierz $N(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ jako

$$N(s) = \text{diag}[N_{ii}(s), i=1, \dots, k], \quad (5.1)$$

gdzie: $N_{ii}(\cdot)$ są *n.w.l.d.* wszystkich kolumn w każdym i -tym bloku $B_{li}(\cdot)$.

3. Wykonać dzielenie

$$[L(\cdot)D(\cdot)B(\cdot) + \bar{L}(\cdot)\bar{B}(\cdot)] / A_1(\cdot) = G(\cdot) - F(\cdot)A_1^{-1}(\cdot), \quad (5.2)$$

otrzymując macierz $G(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ oraz macierz $F(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$.

4. Obliczyć macierz sprzężeń zwrotnych $F \in R^{m \times n}$ bezpośrednio z zależności (3.64).

5. Obliczyć macierz wzmocnień statycznych K_d z zależności

$$K_d = [N(0)D^{-1}(0)] \in R^{l \times l}, \quad (5.3)$$

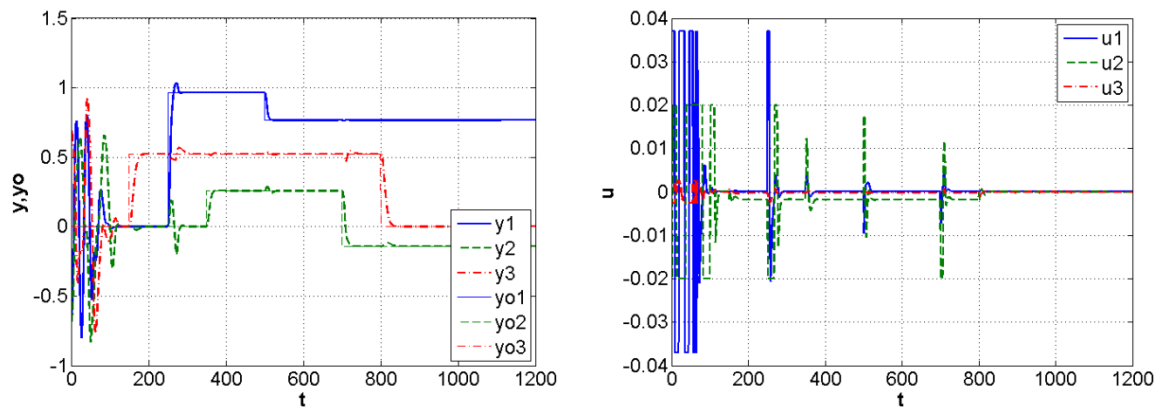
a następnie pomnożyć (prawostronnie) macierz licznikową $L(\cdot)$ dynamicznego członu kaskadowego (prekompensatora) przez macierz K_d^{-1} .

6. Wyznaczyć (dowolną znaną metodą) równania stanu dla dynamicznego prekompensatora $G^{-1}(\cdot)[L(\cdot) I_m]$ odpowiednio w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + \begin{bmatrix} B_{cq} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= C_c x_c(t) + \begin{bmatrix} D_{cq} & D_{cf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ f(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sposób działania układu regulacji z regulatorem syntetyzowanym on-line w każdym kroku symulacji zaprezentowano na rysunku 5.4 w układzie pozycjonowania dla modelu statku wiertniczego z przykładów 4.2–4.8.

Porównując przebiegi na rysunkach 4.27, 4.50 i 5.4, widzimy jeszcze większą redukcję interakcji pomiędzy odsprężonymi torami sterowania oraz wyraźną poprawę jakości sygnału sterującego (już po zaniku przebiegów przejściowych na początku symulacji). Redukcja ta została osiągnięta przy zwiększonej dynamice układu zamkniętego (ruchu statku) – przebiegu zmian położenia i kąta kursowego statku. Niestety, zwiększenie dynamiki układu spowodowało jednocześnie zwiększenie amplitud sygnałów sterujących i ich nasycenia, co odbiło się negatywnie na jakości regulacji w początkowej fazie symulacji. Problem nasycenia sygnałów sterujących dla układów MIMO jest szczególnie trudnym zagadnieniem w analizie i syntezy układu sterowania. Wynika to między innymi z cechy układów MIMO, tzw. kierunkowości (ang. *directionality*), która może powodować zjawiska windup'u i dalej nawet niestabilność układu zamkniętego po nasyceniu choćby jednego z sygnałów sterujących [98].



Rys. 5.4. Położenie i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące przy syntezie on-line regulatora z dynamicznym odsprzęgnięciem

Jedną z najprostszych metod, łatwą do użycia przy zastosowaniu opisywanego algorytmu dynamicznego odsprzęgnięcia, przeciwdziałania pojawianiu się nasycień sygnałów sterujących jest nie skokowa lecz np. eksponentyjna czy liniowo narastająca zmiana sygnałów wartości zadanych. Inne, bardziej zaawansowane metody anty-windup'u znaleźć można w pracy [98]. Pomimo istotnego ograniczenia złożoności obliczeniowej algorytmu, w dalszym ciągu powyższe obliczenia (w środowisku Matlab/Simulink) są dość czasochłonne, co, zależnie od obiektu i przyjętego czasu próbkowania, może praktycznie uniemożliwić syntezę regulatora w każdym kroku symulacji.

5.2. Prototypowanie układów sterowania z wykorzystaniem adaptacyjnych wielowymiarowych regulatorów modalnych

Nowe algorytmy regulacji automatycznej coraz częściej opracowywane są i wdrażane do rozwiązań przemysłowych w procedurach szybkiego prototypowania. Jest to coraz bardziej popularna technika opracowywania nowych algorytmów sterowania, głównie z powodu znacznego skrócenia czasu pomiędzy opracowaniem koncepcji układu regulacji a wdrożeniem do testów finalnych. Projektowanie algorytmu sterowania, zgodnie z ideą szybkiego prototypowania, składa się z czterech etapów. Pierwszy nazywany SiL (ang. *Software-in-the-loop-simulation*) jest typową symulacją komputerową z wykorzystaniem opracowanych modeli obiektów sterowania. W kolejnym VP (ang. *Virtual Prototyping*) zaprojektowany algorytm sterowania uruchamiany jest w docelowym systemie (sterowniku). Model procesu w dalszym ciągu podlega czystej symulacji komputerowej. Etap ten pozwala na weryfikację możliwości implementacji algorytmu sterowania w docelowym sprzęcie oraz przetestowanie jego realizacji w trybie czasu rzeczywistego, z określonym czasem próbkowania. Dalszym etapem procedury są badania typu HiL (ang. *Hardware-in-the-loop-simulation*), w których zarówno model modelu obiektu, jak i zaprojektowany regulator weryfikuje się w docelowym sterowniku, co pozwala na prowadzenie kolejnych prób działania systemu w urządzeniu docelowym, w tym różne wersje potencjalnych uszkodzeń

sterowników i obiektu sterowania, bez niebezpieczeństwa uszkodzenia elementów wykonawczych i/lub czujników w obiekcie. Finalnym etapem jest szybkie prototypowanie RP (ang. *Rapid Prototyping*). Kod algorytmu sterowania jest kompilowany, następnie umieszczony w ramach funkcji systemu operacyjnego sterownika (jako moduł programu – zadanie sterowania), zaś sam sterownik podłączony do obiektu sterowania po jednokrotnym restarcie rozpoczyna sterowanie nim. Komputer projektanta w tym trybie pracy może służyć np. jako system monitorowania/akwizycji danych w początkowym etapie działania systemu. Później jest już odłączany i sterownik funkcjonuje samodzielnie.

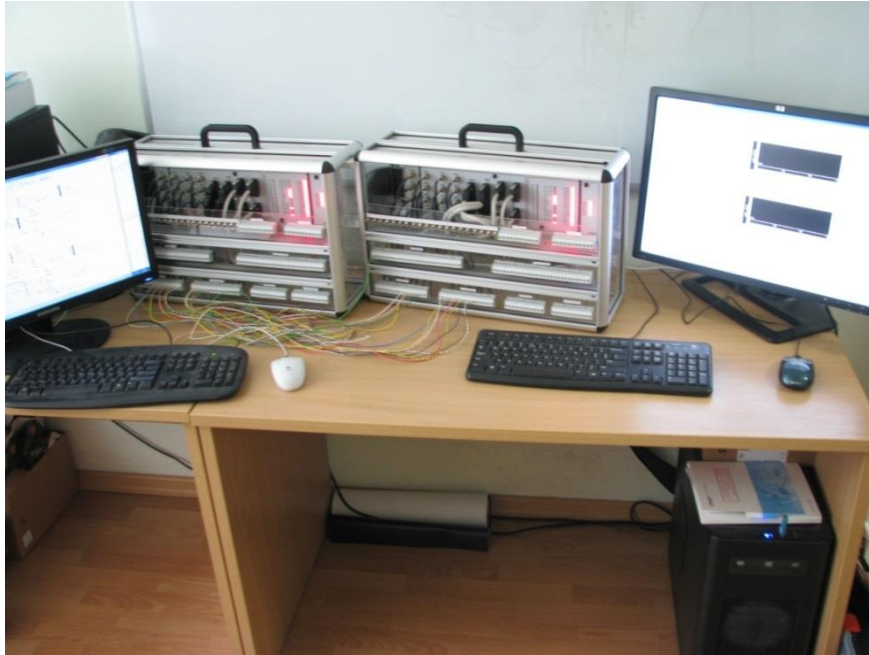
Prototypowanie algorytmów sterowania i przetwarzania sygnałów odbywać się może na dwa sposoby:

1. klasycznie – z użyciem specjalizowanego oprzyrządowania, jak np. kart szybkiego prototypowania (m.in. rodzina dSpace DS 1104);
2. na sprzęcie docelowym – z użyciem np. sterowników i komputerów przemysłowych z systemami sterowania czasu rzeczywistego.

Na rynku pojawiły się obecnie przemysłowe rozwiązania umożliwiające podjęcie badań HIL i RP (w urządzeniach docelowych) tuż po zakończeniu etapu badań symulacyjnych. Pozwalają na to sprzęt i oprogramowanie takich firm jak m.in. National Instruments, Bernecker&Rainer, Beckhoff.

W pracy autora do prowadzenia standardowych badań symulacyjnych wykorzystywano komputery klasy PC z oprogramowaniem Matlab/Simulink z odpowiednimi przybornikami (m.in. *Real Time Workshop*, *Real Time Windows Target*, *Polynomial Toolbox* oraz *Neural Toolbox*). Natomiast badania eksperymentalne wybranych procedur w reżimie czasu rzeczywistego przeprowadzono z wykorzystaniem narzędzi szybkiego prototypowania (karty szybkiego prototypowania dSpace 1104, karty Advantech PCI-1710HGU-DE) i z użyciem przemysłowych narzędzi sterowania (sterownik programowalny X20CP1585 firmy Bernecker&Rainer; sterownik programowalny RXi firmy GE).

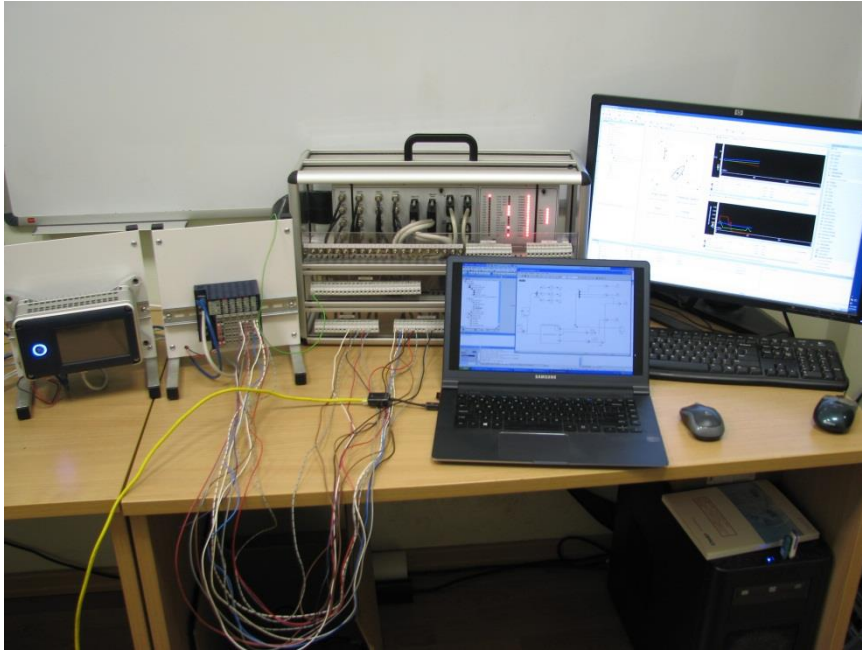
Wszystkie układy regulacji – analizowane regulatory – testowano najpierw poprzez badania symulacyjne w środowisku Matlab/Simulink, następnie wybrane z nich weryfikowano z wykorzystaniem systemu szybkiego prototypowania dSpace (rys. 5.5–5.7), a po udanej weryfikacji dokonywano prób implementacji w sterownikach programowalnych. Przeprowadzane symulacje miały charakter typu *Hardware-in-the-loop*, w których symulowane (nieliniowe) modele obiektów oraz zaprojektowane (lub projektowane na bieżąco) regulatory pracowały na oddzielnych jednostkach maszynowych w czasie rzeczywistym. W próbach HiL zakładano, że zarówno model obiektu, jak i weryfikowany regulator będą symulowane niezależnie na wybranym z powyższych sprzęcie, a sygnały pomiarowe i sterujące będą przekazywane pomiędzy urządzeniami w standardzie napięciowym ± 10 V.



Rys. 5.5. Stanowisko do symulacji HiL z kartami szybkiego prototypowania dSpace 1104



Rys. 5.6. Stanowisko do symulacji HiL sterownik B&R CP1585 i karty Advantech PCI-1710HGU-DE



Rys. 5.7. Stanowisko do symulacji HiL sterownik GE RXi i karta szybkiego prototypowania dSpace 1104

Testowane regulatory syntezowano z wykorzystaniem różnych metod lokowania biegunów i w różnych strukturach układu regulacji (przełączalnych, T-S, neuronowych) dla wykorzystywanego w niniejszej monografii modelu statku wiertniczego.

Problemy w realizacji rozpatrywanych układów regulacji zilustrowano w tabeli 5.1. Przedstawiono w niej rozmiar plików wykonywalnych i prędkość obliczeń wybranych regulatorów w sterownikach programowalnych RXi oraz X20 CP 1585 firm GE i B&R.

W sterownikach zaimplementowano w języku C i poddano analizie, wykorzystywany jako przykład, model statku wiertniczego oraz badane rodzaje regulatorów. Zgodnie z kolejnością w tabeli przedstawiono dane dotyczące:

1. modelu statku wiertniczego „Wimpey Sealab”, opisanego równaniami (4.46);
2. regulatora przełączalnego dla modelu statku wiertniczego, z oryginalnymi postaciami macierzy opisu modeli regulatorów lokalnych A_r, B_r, C_r, D_r – 3650 regulatorów, jak w przykładzie 4.2;
3. regulatora przełączalnego dla modelu statku wiertniczego, z regulatorami w postaciach kanonicznych $A_{ro}, B_{ro}, C_{ro}, D_{ro}$ – 3650 regulatorów, jak w przykładzie 4.2;
4. rozmytego regulatora strefowego dla modelu statku wiertniczego, z regulatorami w postaciach kanonicznych $A_{ro}, B_{ro}, C_{ro}, D_{ro}$, jak w przykładzie 4.5;
5. regulatora neuronalnego dla modelu statku wiertniczego „Wimpey Sealab”, jak w przykładzie 4.7;

6. regulatora przełączalnego dla modelu statku wiertniczego „Wimpey Sealab”, ze zredukowaną liczbą regulatorów lokalnych – 267 liniowych regulatorów, jak w przykładzie 4.4.

Tabela 5.1. Objętość kodu i prędkość obliczeń wybranych regulatorów w sterownikach programowalnych

Rodzaj regulatora/ modelu statku	RXi GE		X20 CP 1585 B&R	
	rozmiar [bajty]	czas skanu [μ s]	rozmiar [bajty]	czas skanu [μ s]
Wimpey	28 231	300÷400	15 300	12
RegOrgWimpey	2 219 769	X	2 216 152	42
RegOrgKanWimpey	1 693 840	X	1 685 980	29
RegOrgKanFuzzyWimpey	1 694 540	X	1 686 732	141
RegOrgKanNNWimpey	340 203	X	188 936	1013
RegOrgKanWimpey Reduced (267)	156 879	300÷400	139 088	61

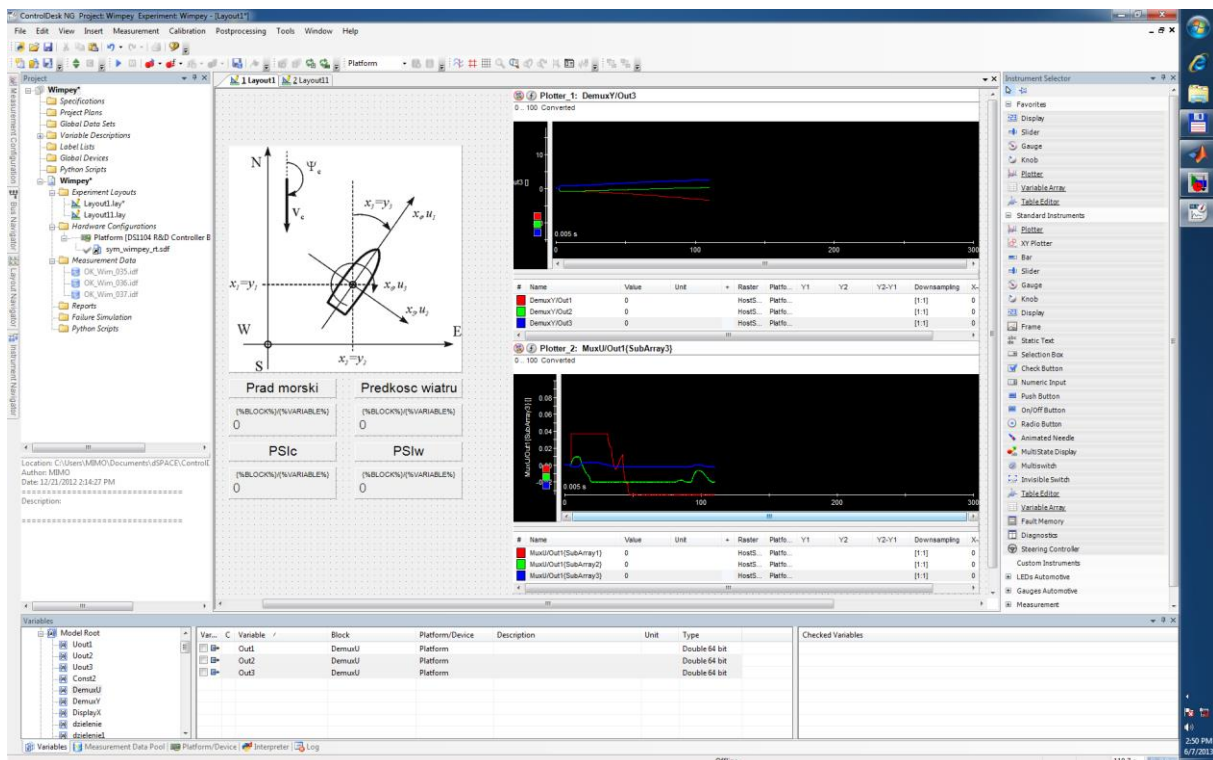
Analiza danych w tabeli potwierdza, po pierwsze, większą moc obliczeniową sterownika X20 CP 1585. Należy jednak pamiętać, że algorytm w sterowniku RXi wykonywany jest zgodnie z typowym sposobem pracy sterownika PLC i do czasów podanych w tabeli wliczyć należy również czasy potrzebne na aktualizację obrazów wejść i wyjść sterownika, obsługi komunikacji czy autodiagnostyki. Czasy rzędu 0,3 ms są w tym przypadku czasami minimalnymi, a 0,1 ms jest rozdzielczością z jaką można je odczytać. Dużo większy problem stanowią przede wszystkim ograniczone możliwości implementacji regulatorów w sterownikach RXi. Każdy blok programu implementowanego w języku C może mieć maksymalną wielkość równą 262 144 bajtów. W przypadku regulatorów przełączalnych, wygenerowanych dla gęstych siatek punktów pracy sterowanego obiektu, ilość danych niezbędnych do przechowywania przekracza te granice. Ograniczenie to uzasadnia próby redukcji liczby regulatorów, opisane w rozdziale 4.3.

Rejestracja wartości sygnałów testowanych w układach regulacji dokonywana była z wykorzystaniem narzędzia ControlDesk firmy dSpace. Narzędzie to umożliwia wizualizację, zmianę parametrów elementów układu regulacji oraz rejestrację ich wartości i eksport do pliku, m.in. w formacie zapisu danych programu Matlab. Stąd możliwość ujednolicenia sposobu prezentacji wyników symulacji prowadzonych w środowisku Matlab/Simulink i symulacji typu HiL prowadzonych z wykorzystaniem sterowników programowalnych. Przykładowy widok okna aplikacji przygotowanej w tym narzędziu przedstawiono na rysunku 5.8.

Wszystkie symulacje HiL starano się przeprowadzić tak, aby jak najwierniej odpowiadały prezentowanym wcześniej symulacjom prowadzonym w środowisku Matlab/Simulink.

Normowanie sygnałów pozwoliło na przekazywanie sygnałów w standardzie ± 10 V bez ograniczania ich wartości (sygnały nie osiągały wartości granicznych). Nieznacznym różnicom podlegały jedynie czasy zmian wartości zadanych, co nie powoduje jednak kłopotów z porównaniem jakości działania testowanych układów sterowania.

Symulacje HiL dla statku wiertniczego prowadzono w sposób identyczny, jak te z przykładów 4.2–4.8, prowadzonych w środowisku Matlab/Simulink. Statek był doprowadzany do punktu wiercenia z odległości około 100 m położonego z lewej strony poniżej tego punktu, z przyjętym kursem początkowym $x_3(0)=35^\circ$ i składowymi prędkościami $x_4(0)$ i $x_5(0)$, odpowiadającymi płynięciu statku początkowo pod prąd z prędkością początkową $V_s(0)=V_c=2$ węzły. Po osiągnięciu punktu wiercenia z zadaniem kątem kursowym $y_{30}=0^\circ$ zmieniono skokowo wartość zadaną kąta kursowego statku na wartość $y_{30}=60^\circ$. Z chwilą, gdy statek osiągnął zadany (nowy) kąt kursowy dokonywano skokowej zmiany wartości zadanych dla obydwu współrzędnych pozycji statku, tak aby statek przesunął się na odległość około 100 m z prawej strony nad punktem wiercenia i zatrzymał w odległości 100 m ($r=1$) z prędkością ustaloną $V_s=V_c=2$ węzły względem wody, z doprowadzeniem kąta kursowego statku $y_3(t)=x_3(t)$ do wartości zadanej $y_{30}=60^\circ$.

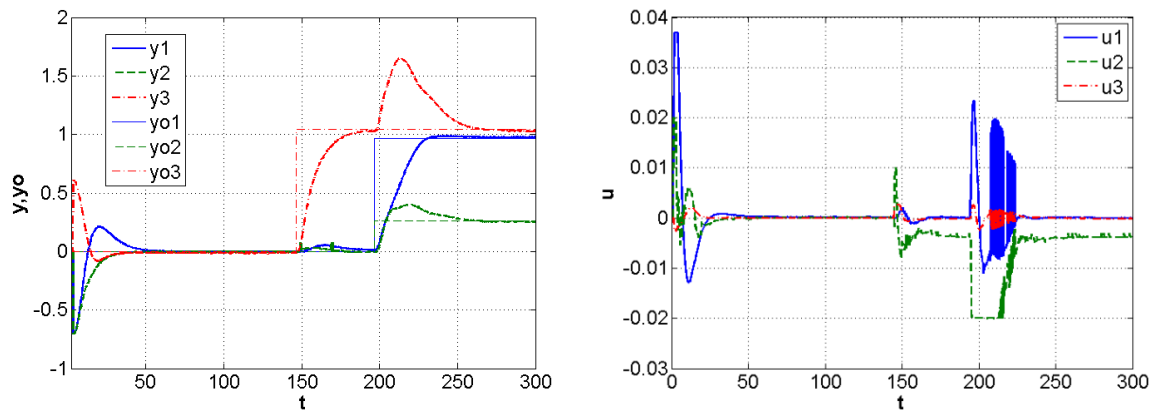


Rys. 5.8. Aplikacja do wizualizacji i rejestracji parametrów testowanego układu regulacji przygotowana w programie ControlDesk

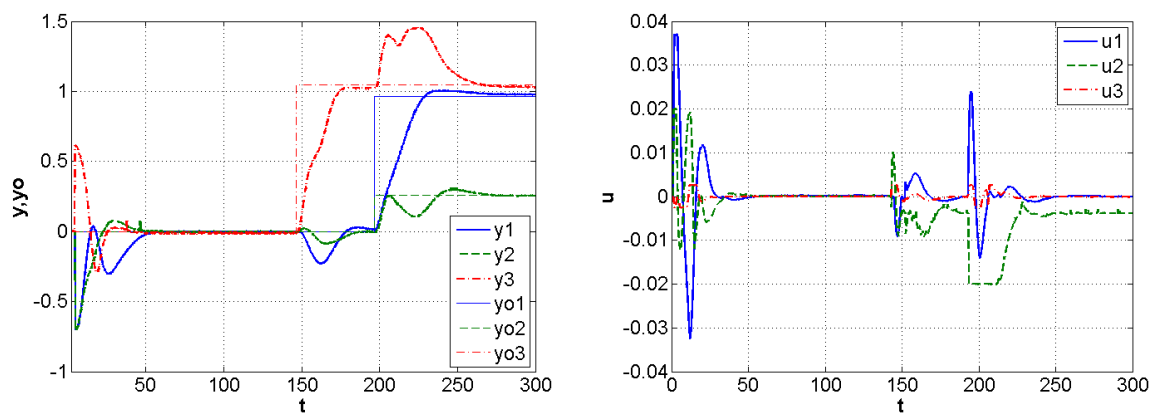
Na rysunkach od 5.9. do 5.17 przedstawiono wyniki symulacji HiL, w których testowano wybrane (dające najlepsze rezultaty symulacji w środowisku Matlab/Simulink) rodzaje regulatorów:

1. regulatora przełączalnego dla modelu statku wiertniczego, z oryginalnymi postaciami macierzy opisu modeli regulatorów lokalnych A_r, B_r, C_r, D_r ;
2. regulatora przełączalnego dla modelu statku wiertniczego, z regulatorami w postaciach kanonicznych $A_{ro}, B_{ro}, C_{ro}, D_{ro}$;
3. rozmytego regulatora strefowego dla modelu statku wiertniczego, z regulatorami w postaciach kanonicznych $A_{ro}, B_{ro}, C_{ro}, D_{ro}$;
4. regulatora neuronalnego dla modelu statku wiertniczego;
5. regulatora przełączalnego dla modelu statku wiertniczego, ze zredukowaną liczbą regulatorów lokalnych;
6. regulatora modalnego on-line dla modelu statku wiertniczego.

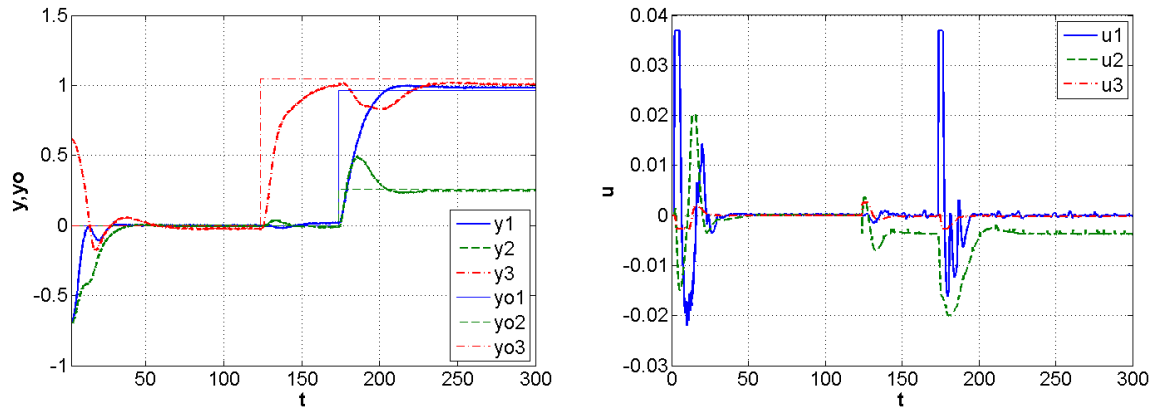
Regulatory przełączalne dla modelu statku wiertniczego



Rys. 5.9. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator przełączany HiL (EVM org)

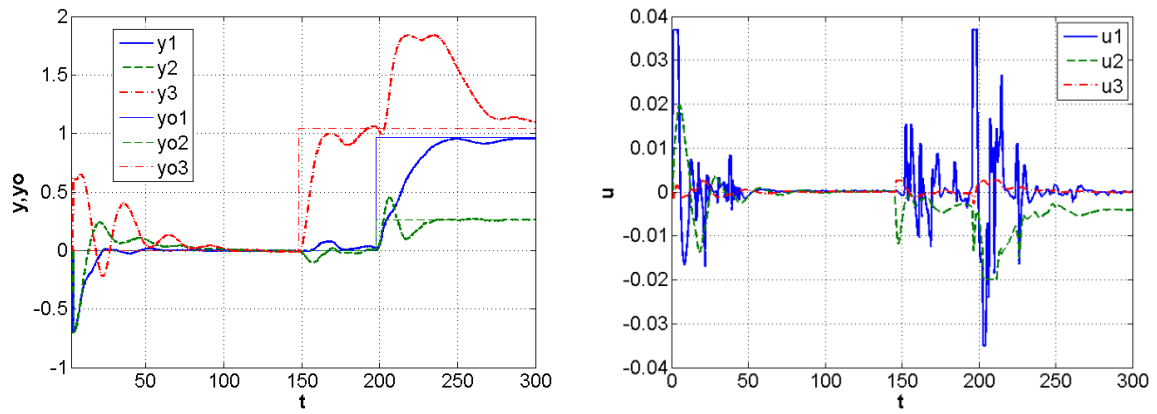


Rys. 5.10. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator przełączany HiL (EVM kan)

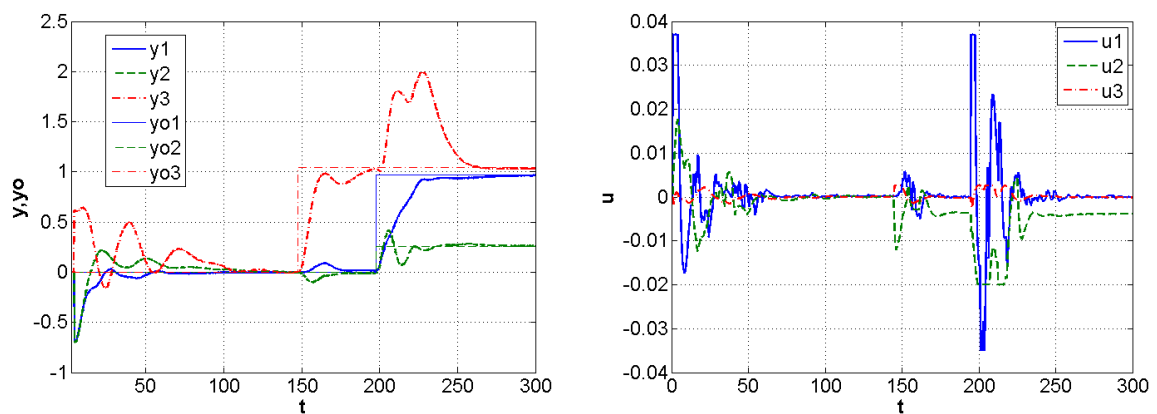


Rys. 5.11. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator przełączany HiL (PME)

Zredukowane regulatory przełączalne dla modelu statku wiertniczego

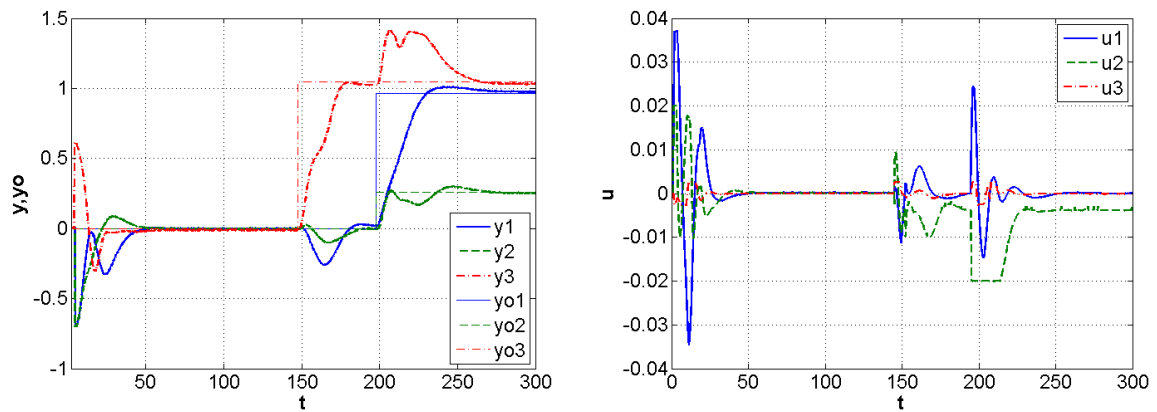


Rys. 5.12. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator zredukowany HiL (334)

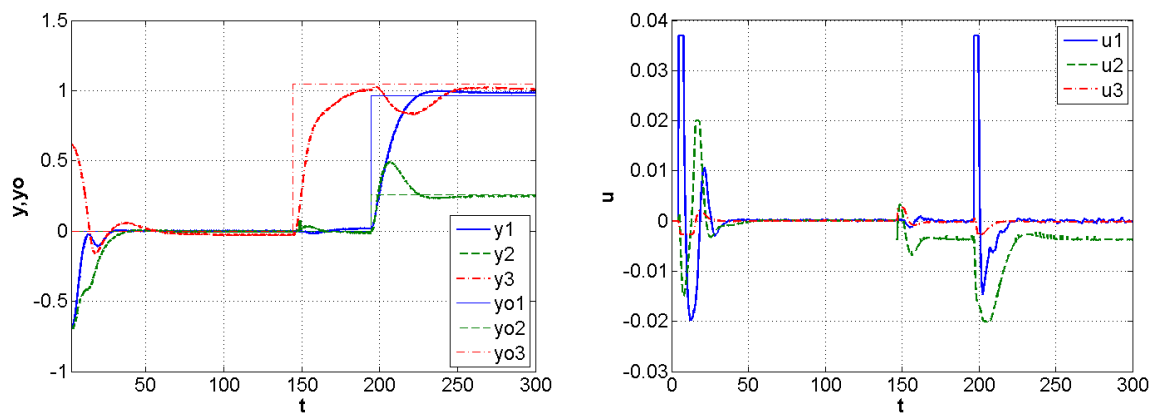


Rys. 5.13. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator zredukowany HiL (267)

Rozmyte regulatory strefowe T-S dla modelu statku wiertniczego

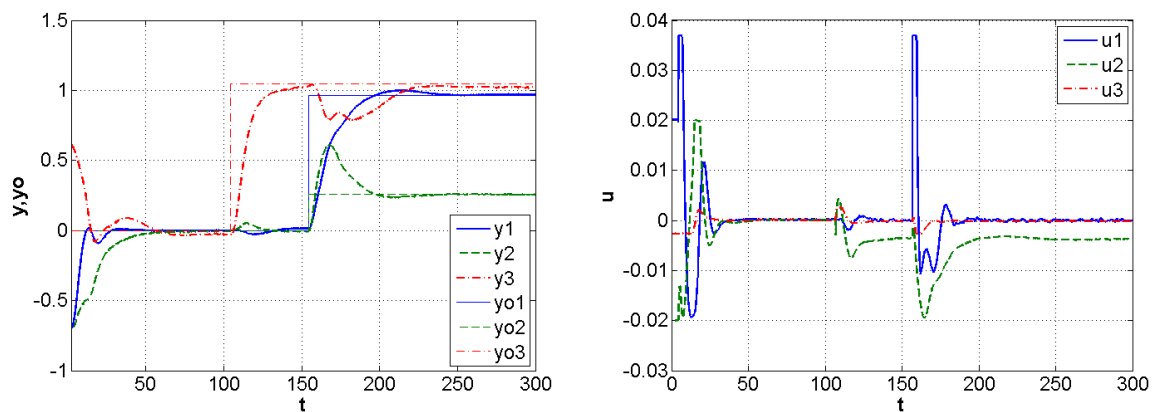


Rys. 5.14. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator strefowy T-S HiL (EVM)



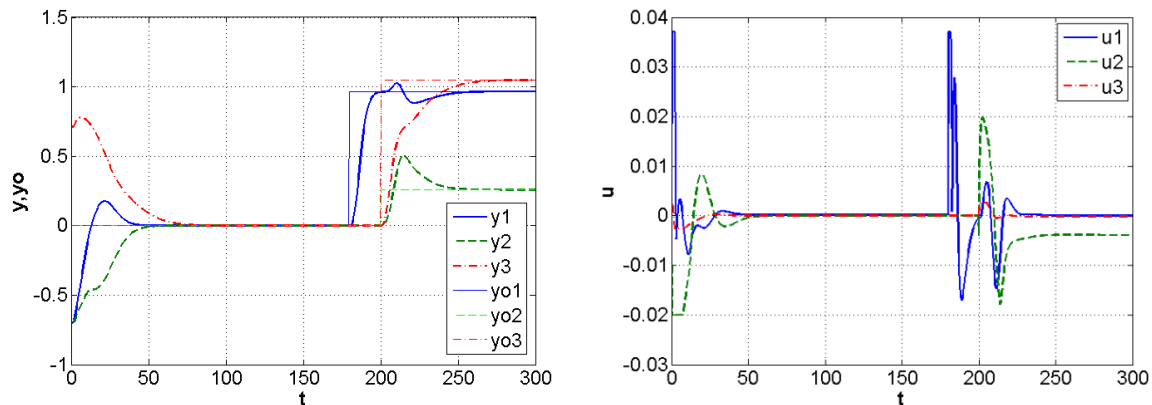
Rys. 5.15. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator strefowy T-S HiL (PME)

Regulator neuronowy dla modelu statku wiertniczego



Rys. 5.16. Pozycja i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące – regulator neuronowy HiL (PME)

Regulator modalny on-line dla modelu statku wiertniczego



Rys. 5.17. Położenie i kąt kursowy statku oraz sygnały sterujące przy syntezie on-line regulatora z wykorzystaniem metody PM – implementacja w C

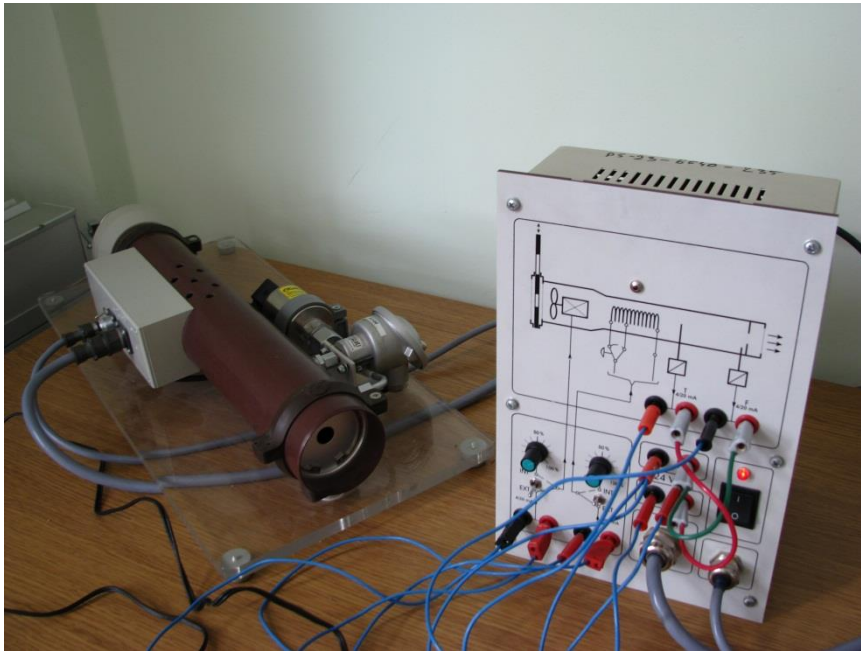
Otrzymane wyniki testów HiL dla wybranych regulatorów, analizowanych w projekcie, przedstawione na rysunkach 5.9–5.17, nie odbiegają, a w wielu przypadkach wprost pokrywają się z wynikami uzyskanymi w symulacjach komputerowych. Potwierdza to możliwość implementacji analizowanych w pracy struktur regulatorów w przemysłowych sterownikach programowalnych.

Przykład 5.2 – Sterowanie obiektem cieplnym MIMO

W ramach badań dokonano również weryfikacji działania analizowanych układów sterowanych wykorzystujących przełączane regulatory adaptacyjne w sterowaniu rzeczywistym nieliniowym obiektem dynamicznym MIMO, jakim jest laboratoryjny model nagrzewnicy przedstawiony na rysunku 5.18. W nagrzewnicy kontroli podlegają prędkość oraz temperatura wpływającego powietrza. Sterowanie powyższymi wartościami odbywa się z wykorzystaniem grzałki oraz wentylatora o zmiennych odpowiednio mocy i obrotach. Oba urządzenia sterowane są sygnałami 4–20 mA. Podobnie mierzone wartości temperatury (w przedziale 20–80°C) oraz przepływu (różnica ciśnień na kryzie pomiarowej 0–50 mm H₂O) konwertowane są na sygnał elektryczny o zakresie 4–20 mA.

Nagrzewnica jest obiektem silnie nieliniowym, którego parametry w torze temperatury, tj. wzmacnienie i stałe czasowe, silnie zależą od aktualnego punktu pracy – aktualnej wartości temperatury i prędkości przepływającego powietrza. Wzmacnienie podlega zmianom od wartości 0,4 przy wysokich wartościach temperatury i dużych przepływach do 1,5 dla niskich temperatur i niskich przepływów. Podobnym wahaniom podlega dynamika toru sterowania temperaturą (stałe czasowe) obiektu – zmiany od 30 do 110 s dla liniowego modelu inercji pierwszego rzędu. W torze sterowania przepływem stała czasowa wynosi około 1,5 s. Obiekt posiada ponadto bardzo nieliniową charakterystykę statyczną w torze pomiaru przepływu.

Z uwagi na zastosowany układ wykonawczy wszystkie prezentowane w eksperymencie wartości sygnałów podawane są jako bezwymiarowe (0–1).



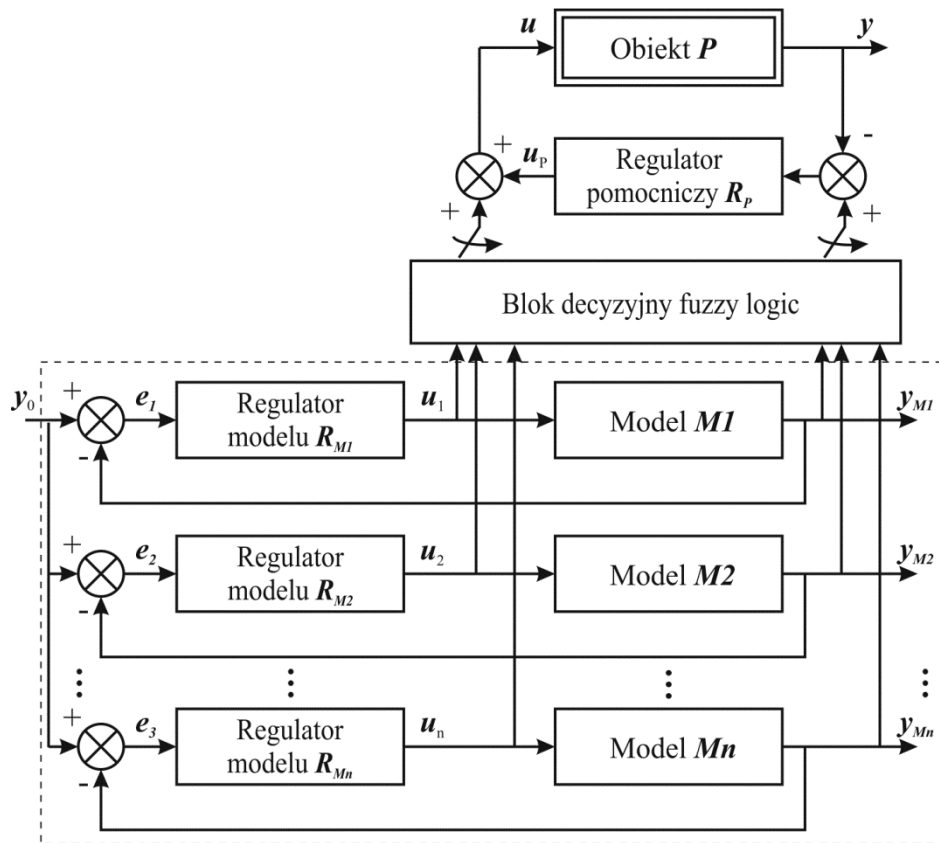
Rys. 5.18. Zdjęcie laboratoryjnego modelu nagrzewnicy

Kontrolę obiektu przeprowadzono z wykorzystaniem środowiska szybkiego prototypowania składającego się z oprogramowania Matlab/Simulink z przybornikami *Real Time Workshop*, *Real Time Windows Target*, *Polynomial Toolbox* oraz *Neural Toolbox* oraz kart DAQ Advantech PCI-1710HGU-DE.

Poniżej przedstawiono wyniki pracy układu regulacji nagrzewnicy z rozmytym regulatorem modalnym typu Takagi-Sugeno oraz modalnym regulatorem neuronalnym. Oba regulatory pełniły funkcję regulatora głównego (w pętli modelu) układu MFC. Taka konstrukcja układu zapewnia stabilność i wysoką jakość sterowania w pełnym zakresie zmian punktów pracy układu. Prezentowane wyniki zostały już opublikowane w pracach [70; 71].

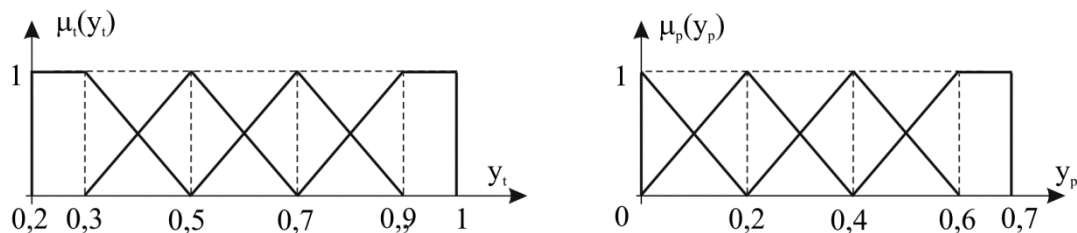
Układ sterowania z regulatorem rozmytym

Strukturę układu z regulatorem rozmytym przedstawiono na rysunku 5.19. W rozwiązaniu tym układ klasyczny, opisany w rozdziale 4.5, rozbudowany jest o wiele pętli modelu – każda obliczona dla określonego punktu pracy – oraz algorytm decyzyjny fuzzy logic wypracowujący referencyjny sygnał sterujący i wyjściowy. Sygnały te obliczane są tu jako ważona suma wyjść wielowymiarowych regulatorów modalnych (pętli modelu) zaprojektowanych dla wybranych punktów pracy obiektu regulacji. W bloku decyzyjnym fuzzy logic obliczane są wagi przypisane do wszystkich składowych sygnałów sterujących (wyjściowych), a następnie, zgodnie z regułami Takagi-Sugeno, generowany jest jeden wypadkowy sygnał sterujący (wyjściowy).



Rys. 5.19. Struktura układu MFC_MIMO_TS z blokiem decyzyjnym fuzzy logic

W syntezy regulatora przyjęto, że punkty pracy określone są przez wartości temperatury i przepływu powietrza, oznaczonych jako y_t oraz y_p . Cały obszar pracy podzielono na 16 części, projektując 16 regulatorów dla punktów pracy określonych wartościami temperatury 0,3, 0,5, 0,7, 0,9 i przepływu powietrza 0, 0,2, 0,4, 0,6. Przyjęte funkcje przynależności dla tych regulatorów określono jak na rysunku 5.20.



Rys. 5.20. Przyjęte funkcje przynależności dla temperatury i przepływu powietrza w bloku decyzyjnym fuzzy logic

Na potrzeby syntezy regulatora w każdym z roboczych punktów pracy założono liniowy model nagrzewnicy, w którym transmitancje w torze sterowania temperaturą $G_{tt}(s)$ i $G_{tp}(s)$ (grzałka–temperatura i wentylator–temperatura) przyjęto jako inercje drugiego rzędu, a transmitancję w torze sterowania przepływem powietrza $G_{pp}(s)$ jako inercję pierwszego rzędu. Liniowy model nagrzewnicy jest więc układem dynamicznym MIMO 5. rzędu

o dwóch wejściach i dwóch wyjściach. Determinuje to tym samym wymiary syntezy dla każdego z modeli regulatorów.

Każdy z lokalnych liniowych regulatorów modalnych, występujących w pętli modelu, zaprojektowany został na bazie obserwatora pełnego rzędu dla biegunów układu zamkniętego przyjętych jako

$$-s_{ukt} = [-0,11 \quad -0,12 \quad -0,13 \quad -0,14 \quad -0,15],$$

oraz dla biegunów obserwatora Luenbergera

$$-s_{obs} = [-0,21 \quad -0,22 \quad -0,23 \quad -0,24 \quad -0,25].$$

Przyjęto, że regulator korekcyjny, bazujący na informacji dotyczącej różnicy pomiędzy wyjściami modelu i procesu ma postać diagonalną z regulatorami typu PI, których nastawy dobrano jako: ($k=1$ i $T_i=0,01$) oraz ($k=0,5$ i $T_i=0,3$) odpowiednio dla toru temperatury i toru przepływu.

W opisywanym układzie regulacji, z uwagi na brak pomiaru stanu obiektu rzeczywistego, istnieją dwie możliwości przeprowadzania układu do pożądanego punktu pracy określonego przez wartości zadane y_{i0} i y_{p0} . W zależności od wyboru sygnałów wejściowych, podawanych na blok decyzyjny FL, możemy uzyskać dwa różne sposoby wyznaczania ważonej sumy sygnałów wyjściowych regulatorów. Jeśli sygnałami podawanymi na blok decyzyjny będą wartości zadane y_{i0} i y_{p0} , wówczas obliczone wartości wagowe będą odpowiadały tylko zadanemu punktowi pracy. W momencie skokowej zmiany wartości zadanej obiekt do nowego punktu pracy będzie doprowadzany przez „regulator docelowy” – wynikający z wag dla żądanego punktu pracy. Natomiast jeśli sygnałami decyzyjnymi bloku FL będą aktualne wartości wyjściowe układu regulacji y_i i y_p , to sygnały wagowe wyznaczone będą na bieżąco dla aktualnego stanu, w którym znajduje się obiekt regulacji.

To drugie rozwiązanie, bazujące na aktualnych sygnałach wyjściowych, może dać lepsze wyniki w porównaniu z pierwszym, szczególnie w przypadku, gdy różnice w dynamice obiektu między dwoma punktami pracy będą znaczące. Jednak wadą tego rozwiązania jest wrażliwość wypracowywanych przez blok decyzyjny sygnałów wagowych na zakłócenia pomiarowe wielkości regulowanych. Występujące silne zakłócenia wielkości wyjściowych będą przenosić się na wypracowywane sygnały wagowe, a w dalszej kolejności na sygnały sterujące i tym samym na sygnały wyjściowe obiektu. W celu redukcji skutków tego efektu można stosować filtry pomiarowe sygnałów wyjściowych, bądź odpowiednie układy eliminujące wpływ szumów pomiarowych na sygnały wagowe w stanie ustalonym. Najprostszym rozwiązaniem tego problemu w stanie ustalonym może być określenie pewnego obszaru wokół zadanego punktu pracy, w którym sygnały wagowe będą ustalane na stałych wartościach odpowiadających temu punktowi pracy.

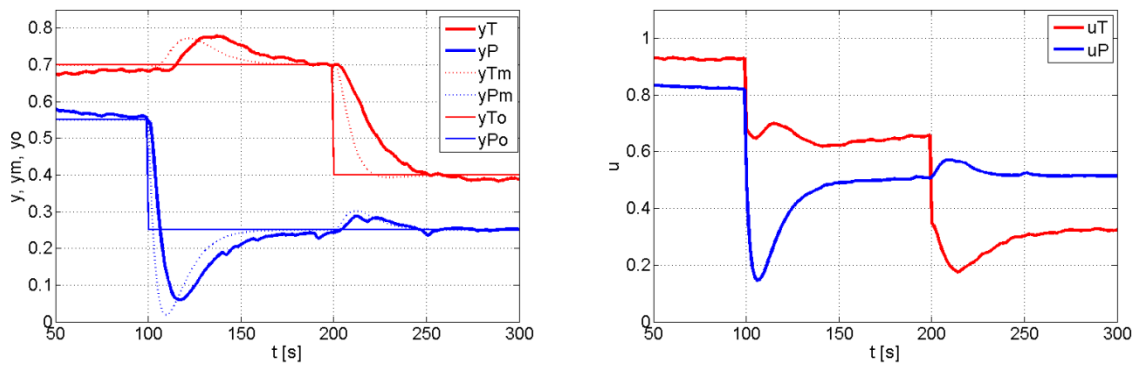
W prezentowanych poniżej wynikach regulacji na rzeczywistym obiekcie zadaniem układu regulacji było przeprowadzenie obiektu z aktualnego do nowego punktu pracy: najpierw

poprzez zmianę wartości zadanej przepływu z 0,55 na 0,25, a następnie poprzez zmianę wartości zadanej temperatury z 0,7 na 0,4.

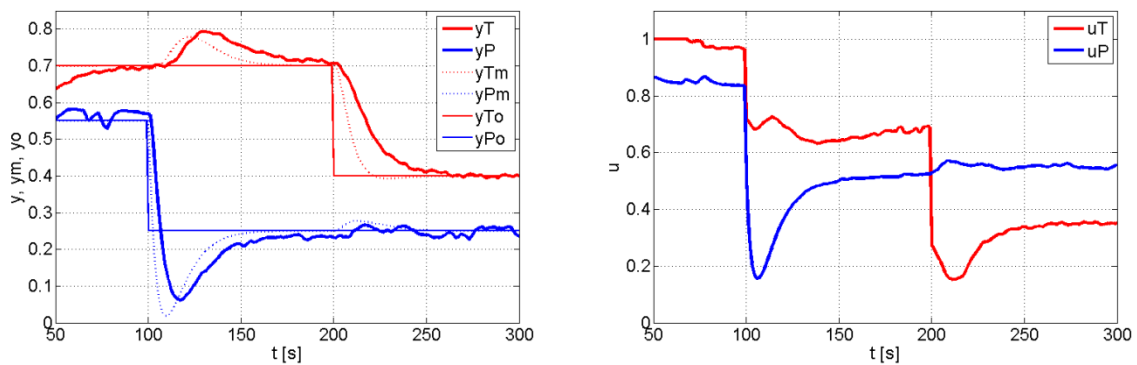
Zgodnie z rozważaniami teoretycznymi, wyróżniono dwa przypadki, w których blok decyzyjny FL oblicza poszczególne wagi sygnałów wyjściowych z odpowiednich regulatorów:

1. na podstawie zadanego punktu pracy (y_{t0}, y_{p0}) ,
2. na podstawie bieżącej wartości temperatury y_t i zadanej wartości przepływu y_{p0} .

W przypadku 2. w celu wyeliminowania efektu drgań sygnałów wagowych przyjęto 2-procentowy obszar w otoczeniu zadanego punktu pracy, w którym wagi poszczególnych sygnałów sterujących ustalane są na stałych wartościach przypisanych do tego punktu pracy. Było to rozwiązanie proste, a zarazem dawało lepsze rezultaty niż testowane również filtry tłumiące drgania przed rozmyciem sygnału mierzonego. Na rysunkach 5.21–5.22 przedstawiono wyniki przeprowadzonych prób regulacji dla obu przypadków.



Rys. 5.21. Wartości temperatury i przepływu powietrza oraz przebieg sygnałów sterujących w nagrzewnicy w układzie MIMO-MFC-TS, wersja 1.

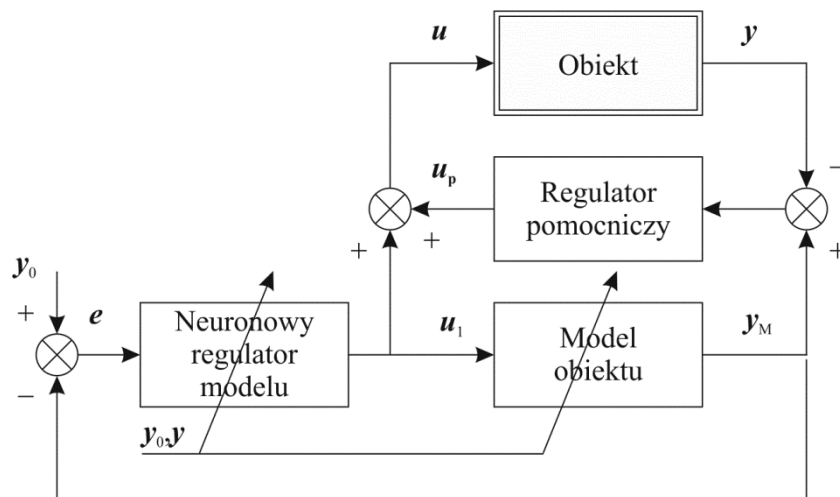


Rys. 5.22. Wartości temperatury i przepływu powietrza oraz przebieg sygnałów sterujących w nagrzewnicy w układzie MIMO-MFC-TS, wersja 2.

Przedstawione wyniki działania prezentowanej struktury nie wykazały znaczących różnic w jakości sterowania w obu rozpatrywanych przypadkach, poza większymi w przypadku 2. drganiami sygnałów wyjściowych i sterujących w porównaniu z przypadkiem 1., co zgodne jest z oczekiwaniami teoretycznymi.

Układ sterowania z nieliniowym regulatorem modalnym

W układzie MFC z adaptacyjnym regulatorem neuronowym (rys. 5.23) główny sygnał sterujący obiektem u_1 wypracowywany jest przez neuronowy regulator modalny, którego parametry zależą od aktualnego punktu pracy układu określonego ogólnie przez sygnały y_0 i y . Sygnały te określają jednocześnie parametry bieżącego modelu. Powoduje to, że pętla modelu, a co za tym idzie wartości sygnałów referencyjnych dla sterowanego obiektu, zmieniają się płynnie wraz ze zmianą zadanego punktu pracy i aktualnego stanu obiektu.



Rys. 5.23. Struktura układu MFC_MIMO z regulatorem neuronalnym

W ogólności regulator neuronalny wykorzystywany w układzie MFC mógłby być syntetyzowany na bazie dowolnego zestawu regulatorów liniowych bądź nawet nieliniowych. W opisywanym przykładzie jest on nauczany na podstawie zestawu liniowych regulatorów modalnych zsyntetyzowanych dla zlinearyzowanych w dziedzinie czasowej modeli w całym zakresie zadawanych wartości temperatury i przepływu nagrzewnicy. Takie podejście pozwala przede wszystkim na automatyzację procesu syntezy regulatora.

W przyjętym liniowym modelu nagrzewnicy transmitancje w torze sterowania temperaturą $G_u(s)$ i $G_p(s)$ (grzałka–temperatura i wentylator–temperatura) przyjęto jako inercje drugiego rzędu, a transmitancję w torze sterowania przepływem powietrza $G_{pp}(s)$ jako inercję 1. rzędu. Syntezy regulatorów modalnych (na bazie obserwatora pełnego rzędu) dokonano w zakresie zmian temperatury $y_t \in [0,2 \div 1]$ z rozdzielczością 0,01 i w zakresie przepływu $y_p \in [0 \div 0,7]$ z rozdzielczością 0,01, dla biegunów układu zamkniętego i obserwatora, przyjętych jak dla opisywanego powyżej regulatora rozmytego.

Na bazie wykonanych off-line obliczeń regulatorów modalnych dla wybranych punktów pracy, określających wartości poszczególnych parametrów macierzy A_r , B_r , C_r regulatorów, w zależności od wartości temperatury i przepływu, przeprowadzono proces strojenia odpowiednich struktur neuronowych. Zestawy sieci przygotowanych dla poszczególnych elementów macierzy A_r , B_r , C_r stanowią aproksymatory zmieniających się macierzy regulatora. W celu zminimalizowania liczby aproksymowanych sieciami elementów macierzy, każdy z regulatorów został zapisany w postaci kanonicznej Luenbergera-Brunowskiego obserwowalnej z macierzami:

$$\mathbf{A}_{ro} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{ro} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{C}_{ro} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{ro} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o 10 zmiennych parametrach, tj: a_{ij} , $i=3,5$, $j=1,\dots,5$ oraz b_{ij} , $i=1,2,\dots,5$, $j=1,2$ zależnych od temperatury i przepływu. Dla przyjętego modelu nagrzewnicy takie podejście redukuje liczbę zmieniających się elementów macierzy o ponad połowę.

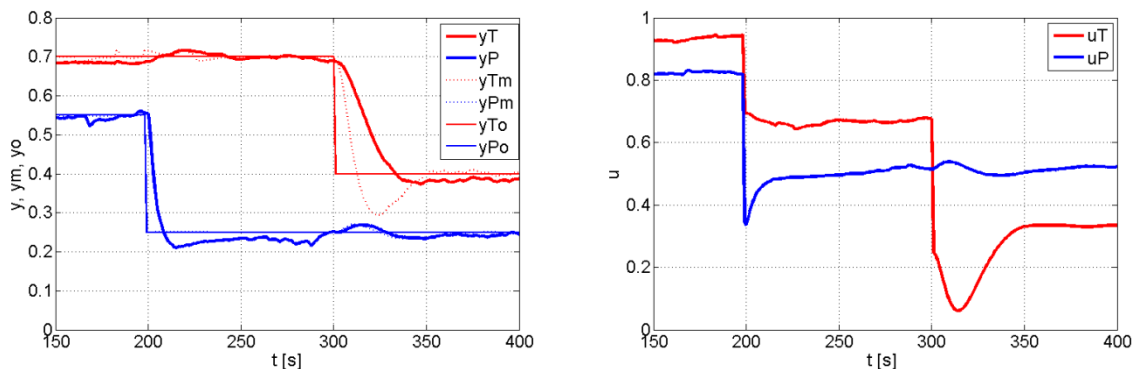
Sieci neuronowe, oprócz funkcji aproksymatora elementów macierzy, zastosowane zostały także jako modele zmieniających się z punktem pracy parametrów obiektu. I tak sieci aproksymowały charakterystyki statyczne w torze temperatury oraz przepływu. Szczegóły doboru i syntezy sieci neuronowych aproksymujących wartości poszczególnych parametrów macierzy (5.5) przedstawiono w pracy [70].

Regulator korekcyjny struktury MFC z rysunku 5.23 ma strukturę diagonalną z regulatorami pomocniczymi (typu PI), dobranymi jako: ($k=1$ i $T_i=0,01$) oraz ($k=0,5$ i $T_i=0,03$) odpowiednio dla toru temperatury i toru przepływu.

W prezentowanych na rysunku 5.24 wynikach regulacji, na rzeczywistym obiekcie, zadaniem układu regulacji było przeprowadzenie obiektu z aktualnego do nowego punktu pracy: najpierw poprzez zmianę wartości zadanej przepływu z 0,55 na 0,25, a następnie poprzez zmianę wartości zadanej temperatury z 0,7 na 0,4.

Podczas regulacji parametry obiektu ustalane były na podstawie zadanego punktu pracy określonego zadanymi wartościami temperatury i przepływu (y_{t0}, y_{p0}), a parametry regulatora na podstawie bieżącej wartości temperatury y_t i zadanej wartości przepływu y_{p0} . Powodowało to, że regulator był zawsze dopasowany do aktualnego stanu nagrzewnicy. Wadą tego rozwiązania jest jednak wrażliwość układu na zakłócenia pomiarowe temperatury. Występujące zakłócenia przenoszą się na wartości parametrów regulatora, a przez to na sygnały sterujące i tym samym na sygnały wyjściowe obiektu. W celu wyeliminowania efektu drgań sygnałów sterujących przyjęto 2-procentowy obszar w otoczeniu zadanego punktu

pracy, w którym wartości poszczególnych parametrów regulatora neuronalnego ustalane są na stałych wartościach przypisanych do tego punktu pracy.



Rys. 5.24. Wartości temperatury i przepływu powietrza oraz przebieg sygnałów sterujących w nagrzewnicy w układzie MIMO-MFC-NN

Przedstawione w artykule wyniki badań przeprowadzonych na rzeczywistym obiekcie cieplnym potwierdzają, że układ regulacji MIMO_MFC_TSK nie tylko może zapewniać wymaganą jakość regulacji nieliniowym obiektem MIMO, ale przede wszystkim skutecznie eliminuje opisane wcześniej problemy występujące w układach opartych o struktury z regulatorami przełączalnymi. Proponowana struktura jest rozwiązaniem pozwalającym uniknąć problemów związanych z koniecznością syntezy stabilnych regulatorów. Ponadto blok decyzyjny fuzzy logic na bieżąco oblicza wartości sygnałów wagowych i generuje wypadkowy sygnał sterujący (przypadek 2.), dzięki czemu nie istnieje problem wyboru odpowiedniej chwili przełączania między regulatorami, a przechodzenie do nowego punktu pracy zachodzi płynnie i bezuderzeniowo.

5.3. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono problemy implementacji analizowanych w pracy algorytmów sterowania w programowalnych urządzeniach automatyki. Weryfikowano możliwość syntezy on-line regulatorów oraz ich pracy w reżimie czasu rzeczywistego.

Przedstawiono sposoby obliczania on-line parametrów regulatorów modalnych oraz regulatorów z dynamicznym odsprężaniem. Dokonano syntezy i weryfikacji wielkości i szybkości działania algorytmów testowanych regulatorów w przemysłowych urządzeniach automatyki, sterownikach firm GE oraz B&R.

Zaprezentowano wyniki symulacji badanych algorytmów w środowisku szybkiego prototypowania, co pozwoliło na wstępną ocenę możliwości ich praktycznego wykorzystania. Testowano algorytmy wykorzystujące do syntezy układu adaptacji zestaw wielu liniowych regulatorów. Były to struktury z liniowymi regulatorami o parametrach zmienianych

w trakcie pracy układu – regulatory modalne i neuronowe – oraz wieloregulatorowe typu Takagi-Sugeno.

Prezentowane wyniki dotyczyły układu sterowania pozycją i kątem kursowym wykorzystywanego w pracy nieliniowego modelu statku wiertniczego oraz sterowaniem prędkością i temperaturą powietrza w laboratoryjnym modelu nagrzewnicy. Wyniki działania obu układów – rozmytego i neuronalnego – potwierdzają skuteczność regulacji, a zarazem praktyczną efektywność: proponowanych metod syntezy, implementacji regulatorów i pracy układu regulacji. Proponowane podejścia pozwalają na bezpieczną zmianę punktu pracy nieliniowego obiektu MIMO, zapewniając przy tym wysoką jakość regulacji w każdym z tych punktów. Pozytywne wyniki działania proponowanych układów przemawiają za tym, że obie proponowane metody syntezy układów sterowania mogą zostać niezwykle przydatnymi narzędziami do sterowania wieloma nieliniowymi i niestacjonarnymi wielowymiarowymi układami regulacji.

6. Wnioski

Rosnące możliwości zastosowań nowoczesnego sprzętu automatyki dają podstawy do rozwoju coraz bardziej zaawansowanych i efektywnych algorytmów sterowania zarówno liniowymi, jak i nieliniowymi procesami dynamicznymi. Jednakże stopień skomplikowania tych algorytmów jest szczególnie duży i niewygodny do implementacji w przypadku sterowania obiektami szybkimi i wielowymiarowymi, tj. posiadającymi wiele wejść i wiele wyjść. Dlatego pomimo znaczącego rozwoju metod syntezy nieliniowych układów sterowania jaki dokonał się w ostatnich latach, np. metody *backstepping* czy zaawansowanych regulatorów predykcyjnych, w dalszym ciągu powszechnie stosuje się metody wykorzystujące liniowe modele sterowanych procesów. Otwartym problemem jest również brak efektywnych metod i algorytmów identyfikacji (estymacji) parametrów liniowych modeli, których wartości są zmienne, głównie na skutek zmian punktów pracy obiektu. Brak jest zwłaszcza metod, w których identyfikacji parametrów można by było dokonywać w trybie on-line, co jest np. konieczne w układach sterowania adaptacyjnego z adaptacją pośrednią.

Proponowane dotychczas metody syntezy i algorytmy sterowania dotyczyły zwykle obiektów o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO). Zastosowanie podejścia wielomianowego poszerza znacznie możliwości ich projektowania na układy z obiektami wielowymiarowymi (MIMO), np. w zadaniach sterowania wymagających dynamicznego (lub tylko statycznego) odsprzęgnięcia układu. W przypadku nieliniowych obiektów MIMO zapewnienie wysokiej jakości regulacji kontrolowanego procesu może być jednak zadaniem bardzo trudnym do rozwiązania.

Większość znanych i stosowanych dotychczas metod syntezy (projektowania) układów sterowania nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO wymaga stosowania ich linearyzacji z wykorzystaniem lokalnych modeli liniowych obiektu dla określonych (różnych) punktów pracy. Regulatory zaprojektowane z użyciem lokalnych modeli zwykle spełniają swoją rolę tylko w najbliższym otoczeniu rozpatrywanego punktu pracy obiektu. Nieliniowości obiektu oraz perturbacje parametrów modeli liniowych wywołane zmianami punktu pracy mogą powodować pogorszenie się zakładanej jakości regulacji, a nawet utratę

stabilności układu. Dlatego klasyczny wielowymiarowy regulator modalny lub optymalny (LQR/LQG), zaprojektowany dla wybranego punktu pracy, zwykle nie spełnia wymagań dla pozostałych punktów pracy i konieczne jest stosowanie albo wieloregulatorowych (przełączalnych) struktur układów sterowania, albo stworzenie adaptacyjnych (bądź odpornych) algorytmów sterowania, w tym algorytmów wykorzystujących metody sztucznej inteligencji. W przypadku sterowania nieliniowymi obiektami MIMO są to ciągle zadania nie w pełni rozwiązane, a ich skuteczne rozwiązanie może mieć bardzo duże znaczenie praktyczne.

W ramach prac autora niniejszej monografii analizowano różne sposoby syntezy układów sterowania liniowymi i nieliniowymi obiektami dynamicznymi MIMO. Zaimplementowano wybrane procedury syntezy adaptacyjnych układów sterowania oraz przygotowano i przeprowadzono symulacje badanych algorytmów w środowisku Matlab/Simulink i badań typu HiL z wykorzystaniem typowych przemysłowych urządzeń automatyki, co pozwoliło na wstępną ocenę dokładności algorytmów oraz ich wariantów.

Testowano algorytmy wykorzystujące do syntezy układu adaptacji zestaw wielu liniowych regulatorów. Były to struktury:

- z liniowymi regulatorami o parametrach zmienianych w trakcie pracy układu;
- wieloregulatorowe, typu Takagi-Sugeno, na podstawie odpowiednio rozmytych sygnałów wyjściowych obiektu (i ewentualnie dodatkowych sygnałów pomocniczych);
- z adaptacyjnymi regulatorami neuronalnymi.

W ramach pracy analizowano również problemy występujące przy precyzyjnym sterowaniu układem dynamicznym z wykorzystaniem technik odprzęgania dynamicznego. Badano w szczególności problemy związane z odpowiednią rekonfiguracją układów regulacji z dynamicznym odprzęganiem po uszkodzeniu urządzeń wykonawczych. Dokonano również analizy możliwości syntezy układu sterowania z dynamicznym odsprzęganiem dla obiektów opisanych modelami niecałkowitego rzędu.

Bardzo wiele prac poświęconych zagadnieniom sterowania nieliniowymi obiektami MIMO, jakie ukazały się w ostatnich latach, w tym m.in. prac autora, w perspektywie szybkiego rozwoju sprzętu automatyki, daje nadzieję na skuteczniejsze sterowanie tymi układami. Dotychczasowe osiągnięcia będą jednocześnie stymulowały prace nad kolejnymi problemami badawczymi: analizą układów MIMO z opóźnieniami, wpływu na odsprzęgany układ ograniczeń wartości sygnałów sterujących, odsprzęgania układów dodatnich i ułamkowego rzędu, a równocześnie z pojawianiem się odpowiednich teorii, ich weryfikacji praktycznej w systemach automatyki.

Literatura

1. CRONE Toolbox: www.ims-bordeaux.fr/CRONE/toolbox/, (data dostępu 15.10.2014).
2. Adolfsson K., Enelund I., Olsson P.: On the fractional order model of viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2005, vol. 9, 15–34.
3. Akesson B.M., Tojvonen H.T.: A neural network model predictive controller. *Journal of Process Control*, 2006, vol. 16, 937–946.
4. Alion A.: Decoupling of square singular systems via proportional state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1991, vol. AC-36, no. 1, 95–102.
5. Åström K., Wittenmark B.: *Adaptive control*, Addison-Wesely 1995, ISBN 978-02-0155-866-1.
6. Ataei M., Enshae A.: Eigenvalue assignment by minimal state-feedback gain in LTI multivariable systems. *International Journal of Control*, 2011, vol. 84, 1956–1964.
7. Axtell M., Bise M.E.: Fractional calculus applications in control systems. *National Aerospace and Electronics Conference*, New York 1990, 563–566.
8. Bagley R.L., Torvik P.J.: On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 1986, vol. 30, 133–155.
9. Balestrino A., De Maria G., Zinober A.S.I.: Nonlinear adaptive model-following control. *Automatica*, 1984, vol. 20, no. 5, 559–568.
10. Ballesteros P., Shu X., Bohn C.: Discrete-time switching MIMO LPV gain-scheduling control for reduction of engine-induced vibrations in vehicles. *19th World Congress The International Federation of Automatic Control*, Cape Town, South Africa 2014, 7572–7578.
11. Bańka S.: *Komputerowa synteza złożonych wielowymiarowych układów automatycznego sterowania w ujęciu wielomianowym*, Szczecin 1991, Wydawnictwo Uczelniane PS, ISSN 0208-7073.
12. Bańka S.: Multipurpose control systems synthesis for non-square multivariable proper plants. *System Science* 1994, vol. 20, no. 1, 85–103.
13. Bańka S.: *Pakiet ASWUD do analizy, syntezy i symulacji wielowymiarowych układów dynamicznych w ujęciu wielomianowym*, Szczecin 1994, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej.
14. Bańka S.: *Sterowanie wielowymiarowymi układami dynamicznymi. Ujęcie wielomianowe*, Szczecin 2007, Wydawnictwo Uczelniane PS, ISBN 978-83-7457-045-9.
15. Bańka S., Brasel M., Dworak P., Latawiec J.K.: A switched structure of linear MIMO controllers for positioning of a drillship on a sea surface. *Methods and Models in Automation and Robotics*, Międzyzdroje 2010.

16. Bańka S., Dworak P.: *Analiza i synteza dynamicznych układów MIMO w ujęciu wielomianowym*, Szczecin 2012, Wydawnictwo Uczelniane ZUT w Szczecinie, ISBN 978-83-7663-101-1.
17. Bańka S., Dworak P., Brasel M.: O sterowaniu nieliniowymi obiektami dynamicznych MIMO w przełączalnej strukturze liniowych regulatorów modalnych. *Pomiary Automatyka Kontrola* 2010, vol. 5, 385–391.
18. Bańka S., Dworak P., Jaroszewski K.: Problemy realizacji neuronowych regulatorów modalnych do sterowania wielowymiarowymi układami dynamicznymi. *XVII Krajowa Konferencja Automatyki*, Kielce-Cedzyna 2011, 619–631.
19. Bańka S., Dworak P.: Dynamic decoupling of the right invertible systems. *MMAR 2004*, Międzyzdroje 2004, 279–284.
20. Bańka S., Dworak P.: Efficient algorithm for designing multipurpose control systems for invertible and right invertible MIMO plants. *Biuletyn Polskiej Akademii Nauk* 2006, vol. 54, no. 4, 429–436.
21. Bańka S., Dworak P.: On decoupling of LTI MIMO systems with guaranteed stability. *Pomiary Automatyka Kontrola* 2007, vol. 6, 46–51.
22. Bańka S., Dworak P., Brasel M.: Linear multi-controller structure for control of a nonlinear MIMO model of a drill ship. *13th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP Symposium on Large Scale Complex System: Theory and Applications*, Shanghai, China 2013.
23. Bańka S., Dworak P., Jaroszewski K.: Problems associated with realization of neural modal controllers designed to control multivariable dynamic systems (in Polish), w: *Advances of Automatics and Robotics*, red. Malinowski, K., Dindorf, R., Kielce, Kielce University of Technology Press 2011, 27–41.
24. Bańka S., Dworak P., Jaroszewski K.: Linear adaptive structure for control of a nonlinear MIMO dynamic plant. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2013, vol. 23, no. 1, 47–63.
25. Bańka S., Dworak P., Jaroszewski K.: Design of a multivariable neural controller for control of a nonlinear MIMO plant. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2014, vol. 24, no. 2, 357–369.
26. Barbosa R.S., Tenreiro Machado J.A., Ferreira I.M.: Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 38, 305–321.
27. Bars R., Colaneri P., de Souza C.E., Allgöwer F., Kleimenov A., Scherer C.: Theory, algorithms and technology in the design of control systems. *16th IFAC World Congress*, Praga 2005, vol. CD.
28. Bayat F.M., Afshar M.: Extending the Root-Locus method to fractional-order systems. *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2008, article ID 528934.
29. Bemporad A., Ferrari-Trecate G., Morari M.: Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, vol. 45, no. 10, 1864–1876.
30. Bemporad A., Morari M.: Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 1999, vol. 35, 407–427.
31. Benmessaouda O., Benzaouia A., Tadeo F.: Stabilization of uncertain state constrained discrete-time switched systems. *18th IFAC World Congress*, Mediolan 2011, 5736–5740.
32. Bin Liu B., Hill D.J.: Stabilization for decomposable dissipative discrete-time switched systems. *18th IFAC World Congress*, Mediolan 2011, 5730–5735.
33. Blanco Y., Perruquetti W., Borne P.: Non quadratic stability of nonlinear system in the Takagi-Sugeno form. *6th European Control Conference*, Porto, Portugal 2001, 3917–3922.
34. Blanke M., Staroswiecki M., Wu N. E.: Concepts and methods in fault-tolerant control. *Tutorial at American Control Conference*, Arlington, VA, USA 2001.

35. Bode H.: Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. *Bell System Technical Journal*, 1940, vol. 19, 421–454.
36. Bonilla Estrada M., Malabre M.: Proportional and derivative state-feedback decoupling of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 2000, vol. AC-45, no. 4, 730–733.
37. Branicky M.S.: Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, 475–482.
38. Brasel M.: Adaptive LQR control system for nonlinear MIMO model of a drill-ship with wind disturbances. *XIV International PhD Workshop*, Wisła 2012, 81–84.
39. Brinsmead T.S., Goodwin G.C.: Cheap decoupling control. *Automatica* 2001, vol. 37, 1465–1471.
40. Bristol E.H.: On a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1966, vol. AC-11, 133–134.
41. Camart J.-F., Malabre M., Martinez Garcia J.C.: Fixed poles of simultaneous disturbance rejection and decoupling: a geometric approach. *Automatica* 2001, vol. 37, 297–302.
42. Carlson G.E., Halijak C.A.: Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1964, vol. 7, 210–213.
43. Chadli M., Guerra T.M.: LMI Solution for robust static output feedback control of discrete Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 2012, vol. 20, no. 6, 1160–1165.
44. Chang J.W., Yu C.C.: The relative gain for non-square multivariable systems. *Chemical Engineering Science* 1990, vol. 45, 1309–1323.
45. Chang X.-H., Yang G.-H.: Relaxed stability condition and state feedback Hinf controller design for T-S Fuzzy System. *International Journal of Control, Automation, and Systems* 2009, vol. 7, no. 1, 139–144.
46. Chen J., Yea Y.: Neural network-based predictive control for multivariable processes. *Chemical Engineering Communications*, 2002, vol. 189, no. 7, 865–894.
47. Chen Y.-J., Ohtake H., Tanaka K., Wang W.-J., Wang H.O.: Relaxed stabilization criterion for T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise-Lyapunov-function-based switching fuzzy controller. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 2012, vol. 20, no. 6, 1166–1173.
48. Chen YQ., Petras I., Xue D.: Fractional order control – a tutorial. *American Control Conference*, St. Louis, MO, USA 2009, 1397–1411.
49. Choi D.J., Park P.G.: Hinf state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 2003, vol. 11, no. 2, 271–278.
50. Christensen N.H., Hultmann J., Klyver K., Hogsbrg J.: Optimal brain surgeon on artificial neural networks in nonlinear structural dynamics. *25th Nordic Seminar on Computational Mechanics*, Lund 2012.
51. Chu D., Malabre M.: Numerically reliable design for proportional and derivative state-feedback decoupling controller. *Automatica* 2002, vol. 38, 2121–2125.
52. Clarke F.H.: *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York 1983, Wiley & Sons, ISBN 978-0-89871-256-8.
53. Czornik A., Swierniak A.: Controllability of discrete time jump linear systems. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems – Series B – Applications & Algorithms*, 2005, vol. 12, no. 2, 165–189.
54. Darby M.L., Nikolaou M.: MPC: Current practice and challenges. *Control Engineering Practice*, 2012, vol. 20, 328–342.

55. Datta K.B., Gangopadhyay S.: Coprime matrix fraction description via orthogonal structure theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1992, vol. 37, no. 10, 1517–1520.
56. Descusse J., Lafay J.F., Malabre M.: Solution to Morgan's problem. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1988, vol. AC-33, no. 8, 732–739.
57. Dias J.M., Correia A.D.: Multivariable decoupling and control by a self-organizing fuzzy system with real-time learning. *5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, Aachen, Germany 2011, 1233–1237.
58. Ding B.: Development of stability research on Takagi-Sugeno fuzzy control systems and approximation of the necessary and sufficient conditions. *Fuzzy Information Engineering*, 2009, vol. 4, 367–383.
59. Dion J.M., Commault C.: Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1993, vol. AC-38, no. 7, 1132–1134.
60. Doehring T.C., Freed A.D., Carew E.O., Vesely I.: Fractional order viscoelasticity of the aortic valve cusp: an alternative to quasilinear viscoelasticity. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2005, vol. 127, no. 4, 700–708.
61. Domek S.: *Odporna regulacja predykcyjna obiektów nieliniowych*, Szczecin 2006, Wydawnictwo Uczelniane PS, ISSN 0208-7073.
62. Domek S.: *Rachunek różniczkowy ułamkowego rzędu w regulacji predykcyjnej*, Szczecin 3013, Wydawnictwo Uczelniane ZUT w Szczecinie, ISBN 978-83-7663-165-3.
63. Dworak P.: *Dynamiczne odsprzęganie wielowymiarowych obiektów o jednakowej i niejednakowej liczbie wejść i wyjść w ujęciu wielomianowym*, Praca doktorska, Politechnika Szczecińska, 2005.
64. Dworak P.: Dynamic decoupling of left-invertible MIMO LTI plants. *Archives of Control Science* 2011, vol. 21, no. 4, 443–459.
65. Dworak P.: A type of fuzzy T-S controller for a nonlinear MIMO dynamic plant. *Elektronika ir Elektrotechnika*, 2014, vol. 20, no. 5, 8–14.
66. Dworak P., Bańka S.: Efficient algorithm for synthesis of multipurpose control systems with dynamic decoupling. *MMAR05*, Międzyzdroje 2005, 345–350.
67. Dworak P., Bańka S.: Adaptive multi-controller TSK Fuzzy Structure for Control of Nonlinear MIMO Dynamic Plant. *MCMC 2012*, Arenzano 2012.
68. Dworak P., Brasel M.: Improving quality of regulation of a nonlinear MIMO dynamic plant. *Elektronika ir Elektrotechnika*, 2013, vol. 19, no. 7, 3–6.
69. Dworak P., Jaroszewski K.: Reconfiguration of a dynamically decoupled system after actuator fault. *XX IMEKO World Congress*, Busan, Republic of Korea 2012.
70. Dworak P., Jaroszewski K., Brasel M.: Neuronowy regulator do sterowania nieliniowym obiektem cieplnym MIMO. *Przegląd Elektrotechniczny* 2012, vol. 88, no. 10a, 79–82.
71. Dworak P., Jaroszewski K., Brasel M.: Rozmyty regulator TSK do sterowania obiektem cieplnym MIMO. *Przegląd Elektrotechniczny* 2012, vol. 88, no. 10a, 83–86.
72. Dworak P., Pietruszewicz K.: On possibility of applying the MFC idea to control the MIMO processes. *Pomiary Automatyka Kontrola* 2006, vol. 12, 25–29.
73. Dworak P., Pietruszewicz K.: Regulator o zmiennej strukturze w sterowaniu wielowymiarowym obiektem cieplnym. *Przegląd Elektrotechniczny* 2010, vol. 6, 116–119.
74. Dworak P., Pietruszewicz K., Domek S.: Improving stability and regulation quality of nonlinear MIMO processes. *MMAR 2009*, Międzyzdroje 2009.
75. Dworak P., Pietruszewicz K., Misztal H.: Regulator odporny dla wielowymiarowego obiektu cieplnego. *Przegląd Elektrotechniczny* 2010, vol. 5, 301–303.

76. Dzieliński A., Sarwas G., Sierociuk D.: Comparison and validation of integer and fractional order ultracapacitor models. *Advances in Difference Equations*, 2011:11, doi:10.1186/1687-1847-2011-11.
77. Dzieliński A., Sierociuk D.: Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space model. *Acta Montanistica Slovaca*, 2008, vol. 13, no. 1, 136–145.
78. Eker J., Malmborg J.: Design and implementation of a hybrid control strategy. *IEEE Control and Systems Magazine*, 1999, vol. 19, 12–21.
79. Fabri S., Kadiramanathan V.: *Functional adaptive control. An intelligent systems approach*, Berlin 2001, Springer Verlag, ISBN 1-85233-438-X.
80. Fang L., Lin H.: Stabilization and performance analysis for a class of switched systems. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis 2004, 1179–1180.
81. Fatehi A., Shariati A.: Automatic pairing of MIMO plants using normalized RGA. *15th Mediterranean Conference on Control & Automation*, Athens, Greece 2007.
82. Feliu V., Rivas R., Sanchez L.: Fractional robust control of main irrigation canals with variable dynamic parameters. *Control Engineering Practice*, 2007, vol. 15, no. 6, 673–686.
83. Ferrari-Trecate G., Muselli M., Liberati D., Moriari M.: Identification of piecewise affine and hybrid systems. *American Control Conference*, Arlington 2001, vol. 5, 3521–3526.
84. Filippov A. F.: Differential equations with discontinuous right-hand side. *Translations of American Mathematical Society*, 1964, vol. 42, no. 199, 231.
85. Geyer T., Torrisi F., Moriari M.: Optimal complexity reduction of polyhedral piecewise affine systems. *Automatica*, 2008, vol. 44, no. 7, 1728–1740.
86. Ghosh A., Das S.K.: Open-loop decoupling of MIMO plants. *IEEE Transactions on Automatic Control* 2009, vol. 54, no. 8, 1977–1981.
87. Gjosæter O.B., Foss B.A.: On the use of diagonal control versus decoupling for ill-conditioned processes. *Automatica* 1997, vol. 33, no. 3, 427–432.
88. Gorenflo R., Mainardi F.: Random walks models for space fractional diffusion processes. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 1998, vol. 1, no. 2, 167–191.
89. Guerra T.M., Vermeiren L.: LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 2004, vol. 40, no. 5, 823–829.
90. Guo J., Li J., Zhou F., Zhou J.: Stability analysis and design of fuzzy control system with bounded uncertain delays. *Journal of Control Theory and Application*, 2005, vol. 3, 271–274.
91. Gutierrez R.E., Rosario J.M., Machado J.T.: Fractional order calculus; basic concepts and engineering applications. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, article ID 375858.
92. Haber R., Bars R., Schmitz U.: *Predictive control in process engineering*, Weinheim 2011, WILEY-VCH, ISBN 978-3-527-31492-8.
93. Halvarsson B., Carlsson B., Wik T.: A new input/output pairing strategy based on Linear Quadratic Gaussian control. *2009 IEEE International Conference on Control and Automation*, Christchurch, New Zealand 2009, 978–982.
94. Hassibi B., Stork D.G., Wolff G.J.: Optimal brain surgeon and general network pruning. *IEEE International Conference on Neural Networks*, San Francisco, CA 1993, vol. 1, 293–299.
95. Herceg M., Kvasnica M., Jones C., Morari M.: Multi-Parametric Toolbox 3.0. *European Control Conference*, Zurich, Switzerland 2013, 502–510.
96. Hespanha J.P., Morse A.S.: Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 2002, vol. 38, 1905–1917.

97. Hikita H.: Block decoupling and arbitrary pole assignment for a linear right-invertible system by dynamic compensation. *International Journal of Control* 1987, vol. 45, no. 5, 1641–1653.
98. Hippe P.: *Windup in control*, London 2006, Springer-Verlag, ISBN 978-1-84628-323-9.
99. Hu T., Teel A.R., Zaccarian L.: Stability and performance for saturated systems via quadratic and nonquadratic Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, vol. 51, no. 11, 1770–1786.
100. Ioannou P., Sun J.: *Robust adaptive control*, Prentice Hall 1996, http://www-bcf.usc.edu/~ioannou/RobustAdaptiveBook95pdf/Robust_Adaptive_Control.pdf (data dostępu 10.06.2015).
101. Isidori A.: *Nonlinear control systems*, New York 1995, Springer Verlag, ISBN 978-1-84628-615-5.
102. Ito N., Inaba H.: Block triangular decoupling for linear systems over principal ideal domains. *SIAM Journal of Control and Optimization* 1997, vol. 35, no. 3, 744–765.
103. Jafarzadeh S., Sami Fadali M., Sonbol A.H.: Stability analysis and control of discrete Type-1 and Type-2 TSK fuzzy systems: Part I. Stability Analysis. *IEEE Transactions on Fuzzy System* 2011, vol. 19, no. 6, 989–1000.
104. Jafarzadeh S., Sami Fadali M., Sonbol A.H.: Stability analysis and control of discrete Type-1 and Type-2 TSK fuzzy systems: Part II. Control Design. *IEEE Transactions on Fuzzy System* 2011, vol. 19, no. 6, 1001–1013.
105. Jesus I.S., Machado J.T.: Application of integer and fractional models in electrochemical systems. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, article ID 248175.
106. Jezierski E., Ostalczyk P.: Fractional-order mathematical model of pneumatic muscle drive for robotic applications, in: *Robot Motion and Control*, red. Kozłowski, K., Berlin, Springer 2009, 113–122.
107. Johansson M., Rantzer A., Arzen K.E.: Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 1999, vol. 7, no. 6, 713–722.
108. Kaczorek T.: Synteza wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych o zadanych własnościach dynamicznych i nie wszystkich zmiennych stanu bezpośrednio mierzalnych. *Podstawy Sterowania* 1973, vol. 2, no. 1, 79–90.
109. Kaczorek T.: Przesuwanie biegunów wielowymiarowego układu liniowego. *Podstawy Sterowania* 1976, vol. 6, no. 2, 219–232.
110. Kaczorek T.: *Teoria sterowania i systemów*, Warszawa 1993, PWN, ISBN 978-83-7464-119-7.
111. Kaczorek T.: *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, Warszawa 1998, WNT, ISBN 8320422094.
112. Kaczorek T.: *Polynomial and rational matrices: applications in dynamical systems theory*, London 2007, Springer, ISBN 978-1-84628-604-9.
113. Kaczorek T.: *Selected problems of fractional systems theory*, Berlin 2011, Springer, ISBN 978-3-642-20502-6.
114. Kailath T.: *Linear systems*, Englewood 1980, Prentice Hall, ISBN 0135369614.
115. Kanamori M., Tomizuka M.: Model reference adaptive control of linear systems with input saturation. *IEEE International Conference on Control Applications* 2004, vol. 2, 1318–1323.
116. Khaki-Sedigh A., Moaveni B.: *Control configuration selection for multivariable plants*, Berlin 2009, Springer, ISBN 978-3-642-03192-2.
117. Khalil H. K.: *Nonlinear systems*, Prentice Hall 2001, ISBN 978-0130673893.
118. Klamka J.: Local controllability of fractional discrete-time semilinear systems. *Acta Mechanica et Automatica*, 2011, vol. 5, no. 2, 55–58.

119. Klamka J., Czornik A., Niezabitowski M.: Stability and controllability of switched systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 2013, vol. 61, no. 3, 547–555.
120. Kochetkov S.A., Utkin V.A.: Minimizing the feedback matrix norm in modal control problems. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, 234–262.
121. Korbicz J., Kowal M.: Neuro-fuzzy networks and their application to fault detection of dynamical systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2007, vol. 20, no. 5, 609–617.
122. Korbicz J., Kościelny J. M., Kowalczyk Z., Cholewa W.: *Fault Diagnosis: Models, Artificial Intelligence, Applications*, Berlin 2004, Springer, ISBN 978-3-642-18615-8.
123. Koumboulis F.N.: Block decoupling of generalized state space system. *Automatica* 1997, vol. 33, no. 10, 1885–1897.
124. Koussiouris T.G.: A frequency domain approach to the block decoupling problem. I. The solvability of the block decoupling problem by state feedback and a constant non-singular input transformation. *International Journal of Control* 1979, vol. 29, no. 6, 991–1010.
125. Koussiouris T.G.: A frequency domain approach to the block decoupling problem. II. Pole assignment while block decoupling a minimal system by state feedback and a constant non-singular input transformation and the observability of the block decoupled system. *International Journal of Control* 1980, vol. 32, no. 3, 443–464.
126. Kraffer F.: Polynomial matrix to state space conversion without polynomial reduction. *Proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, Maleme, Krete, Greece 1996, 483–487.
127. Kucera V.: Optimal decoupling controllers revisited. *Control and Cybernetics*, 2013, vol. 42, no. 1, 139–154.
128. Kucera V.: The pole placement equation – a survey. *Kybernetika* 1994, vol. 30, no. 6, 578–584.
129. Kurtz M.J., Henson M.A.: Input/output linearizing control of constrained nonlinear processes. *Journal of Process Control*, 1997, vol. 7, no. 1, 3–17.
130. Landau I.D., Courtiol B.: Design of multivariable adaptive model following control systems. *Automatica*, 1974, vol. 10, 483–494.
131. Latawiec J.K., Łukaniszyn M., Stanisławski R.: *Advances in modelling and control of non-integer order systems*, Springer 2014, ISBN 978-3-319-09899-9.
132. Lawrynczuk M.: Explicit neural network-based nonlinear predictive control with low computational complexity. *Lecture Notes in Computer Science* 2010, vol. 6086, 649–658.
133. LeCun Y., Denker J.S., Solla S., Howard R.E., Jackel L.D.: Optimal Brain Damage, w: *Advances in Neural Information Processing Systems 2*, red. Toretzky, D., Denver, Morgan Kaufmann, 598–605, 1990.
134. Lee C.H., Shin M.H., Chung M.J.: A design of gain-scheduled control for a linear parameter varying system: an application to flight control. *Control Engineering Practice* 2001, vol. 9, 11–21.
135. Lee D.H., Park J.B., Joo Y.H.: A new fuzzy Lyapunov function for relaxed stability condition of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 2011, vol. 19, no. 4, 785–791.
136. Lee H.-P., Bongiorno Jr J.J.: Wiener-Hopf design of optimal decoupling controllers for plants with non-square transfer matrices. *International Journal of Control* 1993, vol. 58, no. 6, 1227–1246.
137. Lee H.-P., Bongiorno Jr J.J.: Wiener-Hopf design of optimal decoupled multivariable feedback control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1993, vol. AC-38, no. 12, 1838–1843.

138. Leu J.F., Tsay S.Y., Hwang C.: Design of optimal fractional-order PID controllers. *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*, 2002, vol. 33, no. 2, 193–202.
139. Li Y., Chen YQ.: Fractional order universal adaptive stabilization for fractional order MIMO system. *4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications*, Badajoz, Spain 2010.
140. Li Z., Chen Y.: Ideal, simplified and inverted decoupling of fractional order TITO processes. *19th World Congress The International Federation of Automatic Control*, Cape Town, South Africa 2014, 2897–2902.
141. Li Z., Chen YQ.: Identification of linear fractional order systems using the relay feedback approach. *American Control Conference*, Portland, OR, USA 2014, 3704–3709.
142. Lian J., Zhao J.: Output feedback variable structure control for a class of uncertain switched systems. *Asian Journal of Control*, 2009, vol. 11, no. 1, 31–39.
143. Liao Z., Peng C., Wang Y.: A frequency-domain identification algorithm for MIMO fractional order systems with time-delay in state. *Advanced Material Research*, 2012, vol. 383–390, 4397–4404.
144. Liberzon D.: *Switching in systems and control*, Boston, Birkhauser 2003, ISBN 978-0-8176-4297-6.
145. Limon D., Alamo T., Camacho E.F.: Enlarging the domain of attraction of MPC controllers. *Automatica* 2005, vol. 41, 629–635.
146. Lin C.-A.: Necessary and sufficient conditions for existence of decoupling controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1997, vol. AC-42, no. 8, 1157–1161.
147. Lin C.-A., Wu C.-M.: Block-decoupling linear multivariable systems: necessary and sufficient conditions. *Automatica* 1998, vol. 34, no. 2, 237–243.
148. Lin C.-A., Wu C.-M.: Block decoupling control of linear multivariable systems. *Asian Journal of Control* 1999, vol. 1, no. 3, 146–152.
149. Lin H., Antsaklis P.J.: Stability and persistent disturbance attenuation properties for networked control systems: switched system approach. *International Journal of Control*, 2005, vol. 78, no. 18, 1447–1458.
150. Lin H., Antsaklis P.J.: Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, no. 2, 308–322.
151. Linnemann A., Maier R.: Decoupling by precompensation while maintaining stabilizability. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1993, vol. AC-38, no. 4, 629–632.
152. Luo Y., Chen YQ.: *Fractional order motion controls*, John Wiley & Sons 2012, ISBN 978-1119944553.
153. Machado J.T.: Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 54, no. 3, 263–282.
154. Maciejowski J.: *Predictive control with constraints*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall 2002, ISBN 0 201 39823 0 PPR.
155. Mackenroth U.: *Robust control systems: Theory and case studies*, Berlin, Springer-Verlag 2004, ISBN 978-3-662-09775-5.
156. Magin R., Ortigueira M.D., Podlubny I., Trullillo J.: On the fractional signals and systems. *Signal Processing*, 2011, vol. 91, no. 3, 350–371.
157. Mäkilä P.M., Partington J.R.: On linear models for nonlinear systems. *Automatica*, 2003, vol. 39, 1–13.
158. Margaliot M.: Stability analysis of switched systems using variational principles: an introduction. *Automatica*, 2006, vol. 42, 2059–2077.

159. Martinez Garcia J.C., Malabre M.: The row by row decoupling problem with stability: a structural approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1994, vol. AC-39, no. 12, 2457–2460.
160. Matia F., Al-Hadithi B.M., Jiménez A.: Generalization of stability criterion for Takagi-Sugeno continuous fuzzy model. *Fuzzy Sets and System*, 2002, vol. 129, no. 3, 295–309.
161. Mc Avoy T., Arkun T., Chen R., Robinson D., Schnelle P.D.: A new approach to defining a dynamic relative gain. *Control Engineering Practice* 2003, vol. 11, 907–914.
162. Mhaskar P., El-Farra N.H., Christofides P.D.: Robust hybrid predictive control of nonlinear systems. *Automatica*, 2005, vol. 41, 209–217.
163. Migan R.: *Fractional calculus in bioengineering*, Begell House 2006, ISBN 978-1567002157.
164. Mitkowski W.: Approximation of fractional diffusion-wave equation. *Automatica*, 2011, vol. 5, no. 2, 65–68.
165. Mitkowski W., Kacprzyk J., Baranowski J.: *Advances in the theory and applications of non-integer order systems*, Springer 2013, ISBN 978-3-319-00932-2.
166. Moaveni B., Khaki-Sedigh A.: Input-output pairing for nonlinear multivariable system. *Journal of Applied Sciences* 2007, vol. 7, no. 22, 3492–3498.
167. Moaveni B., Sedigh A.K.: Input–output pairing analysis for uncertain multivariable processes. *Journal of Process Control* 2008, vol. 18, 527–532.
168. Monje C.A., Chen YQ., Vinagre Jara B.M., Xue D.Y., Feliu V.: *Fractional order systems and controls: fundamentals and applications*, London, Springer-Verlag 2010, ISBN 978-1-84996-335-0.
169. Monje C A., Vinagre B.M., Feliu V., Chen YQ.: Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineering Practice*, 2008, vol. 16, no. 7, 798–812.
170. Morari M.: *Robust process control*, Englewood Cliffs, Prentice Hall 1989, ISBN 0-13-782153-0.
171. Morgan B.S.: The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1964, vol. AC-9, no. 4, 405–411.
172. Murray-Smith R., Johansen T.: *Multiple model approaches to modeling and control*, Taylor and Francis 1997, ISBN 07484 0595 X.
173. Oldham K.B., Spanier J.: *The fractional calculus; Theory and application of differentiation and integration to arbitrary order*, New York, Academic Press 1974, ISBN 978-0486450018.
174. Oustaloup A.: From fractality to non integer derivation through recursivity, a property common to these two concepts: A fundamental idea for a new process control strategy. *IMACS World Congress*, Paris 1988, vol. 3, 203–208.
175. Oustaloup A.: *Robust control of non-integer order*, Paris, Hermes 1991.
176. Oustaloup A.: *Non-integer derivation*, Paris, Hermes 1995, ISBN 978-2866014568.
177. Oustaloup A., Levron F., Mathieu B., Nanot F.M.: Frequency-band complex noninteger differentiator: characterisation and synthesis. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, 2000, vol. 47, no. 1, 25–39.
178. Oustaloup A., Sabatier J., Moreau X.: From fractal robustness to CRONE approach. *ESAIM* 1998, vol. 5, 177–192.
179. Paden B., Sastry S.S.: A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 1984, vol. 34, no. 1, 73–82.

180. Paraskevopoulos P.N., Koumboulis F.N.: The decoupling of generalized state-space systems via state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1992, vol. AC-37, no. 1, 148–152.
181. Park K.: H_2 design of decoupling controllers based on directional interpolations. *Joint 48th IEEE CDC and 28th Chinese Control Conference* 2009, 5333–5338.
182. Park K., Choi G.-H., Kuc T.-Y.: Wiener-Hopf design of the optimal decoupling control system with state-space formulas. *Automatica* 2002, vol. 38, 319–326.
183. Patel R.V.: Computation of matrix fraction descriptions of linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1981, vol. 26, no. 1, 148–161.
184. Paul A., Safonov M.G.: Model reference adaptive control using multiple controllers & switching. *IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, HI 2003, 1–6.
185. Pedro J.O., Dahunsi O.A.: Neural network based feedback linearization control of a servo-hydraulic vehicle suspension system. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2011, vol. 21, no. 1, 137–147.
186. Pereira da Silva P.S., Leite V.M.P.: Decoupling by dynamic measurement feedback with stability: necessary and sufficient conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1992, vol. AC-37, no. 5, 620–623.
187. Petras I.: *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer 2011, ISBN 978-3-642-18101-6.
188. Plummer A.R., Vaughan N.D.: Decoupling pole-placement control, with application to multi-channel electro-hydraulic servosystem. *Control Engineering Practice* 1997, vol. 5, no. 3, 313–323.
189. Podlubny I.: *Fractional differential equations*, San Diego, Academic Press 1999, ISBN 9780125588409.
190. Podlubny I.: Fractional order systems and $PI^{\alpha}D^{\mu}$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, vol. 44, no. 1, 208–214.
191. Podlubny I.: Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2002, vol. 5, no. 4, 367–386.
192. Podlubny I.: Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Rheologica Acta*, 2006, vol. 45, no. 5, 765–772.
193. Podlubny I., Petras I., Vinagre Jara B.M., O'Leary P., Dorcak L.: Analogue realizations of fractional-order controllers. *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, no. 1, 281–296.
194. Qin S.J., Badgwell T.A.: A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice* 2003, vol. 11, no. 7, 733–764.
195. Rami A., Faiz S.E., Benzaouia A., Tadeo F.: Robust exact pole placement via an LMI-based algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, 394–398.
196. Rawlings J., Mayne D.: *Model predictive control: Theory and design*, Madison, WI, Nod Hill Publishing 2009, ISBN 978-0-9759377-0-9.
197. Raynaud H.F., Zergainoh A.: State-space representation for fractional order controllers. *Automatica*, 2000, vol. 36, no. 7, 1017–1021.
198. Rhee B.J., Won S.: A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and System*, 2006, vol. 157, no. 9, 1211–1228.
199. Richter J.H., Weiland S., Heemels W.P.M.H., Lunze J.: Decoupling-based reconfigurable control of linear systems after actuator faults. *10th European Control Conference, ECC'09*, Budapest 2009, 2512–2517.

200. Rodrigues M., Theilliol D., Adam-Medina M., Sauter D.: A fault detection and isolation scheme for industrial systems based on multiple operating models. *Control Engineering Practice*, 2008, vol. 16, 225–239.
201. Ross R.: Revolutionising model-based predictive control. *IEE Computing & Control Engineering* 2004, vol. 1, 26–29.
202. Ruiz J., Zagalak P., Eldem V.: On the Morgan problem with stability. *Kybernetika* 1996, vol. 32, no. 5, 425–441.
203. Rutkowski L.: *Metody i techniki sztucznej inteligencji*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN 2005, ISBN 978-83-01-15731-9.
204. Sabatier J., Agrawal O.P., Tenreiro Machado J.A.: *Advances in fractional calculus – Theoretical developments and applications in physics and engineering*, Springer 2007, ISBN 978-1-4020-6042-7.
205. Sabatier J., Aoun M., Oustaloup A., Gregoire G., Ragot F., Roy P.: Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation. *Signal Processing*, 2006, vol. 86, no. 10, 2645–2650.
206. Salgado M.E., Conley A.: MIMO interaction measure and controller structure selection. *International Journal of Control* 2004, vol. 77, no. 4, 367–383.
207. Saniye A., Suleyman K.: Decoupling constrained model predictive control of multi-component packed distillation column. *World Applied Science Journal*, 2011, vol. 13, no. 3, 517–530.
208. Savkin A.V., Evans R.J.: *Hybrid dynamical systems. Controller and sensor switching problems*, Boston, Birkhäuser 2002.
209. Schmid R., Ntogramtzidis L., Nguyen T., Pandey A.: A unified method for optimal arbitrary pole placement. *Automatica*, 2014, vol. 50, 2150–2154.
210. Schmid R., Pandey A., Nguyen T.: Robust pole placement with Moore's algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, vol. 59, 500–505.
211. Schmitz U., Haber R., Arousi F., Bars R.: Decoupling predictive control by error dependent tuning of the weighting factors. *Process Control Conference*, Strbskie Pleso 2007, 131–140.
212. Sentoni G., Agamennoni O., Desages A., Romagnoli J.: Approximate models for nonlinear process control. *AIChE Journal*, 1996, vol. 42, 2240–2250.
213. Shen Y., Cai W.-J., Li S.: Normalized decoupling control for high-dimensional MIMO processes for application in room temperature control HVAC systems. *Control Engineering Practice* 2010, vol. 18, 652–664.
214. Sheng H., Chen YQ., Qiu T. S.: *Fractional processes and fractional-order signal processing*, London, Springer-Verlag 2012, ISBN 978-1-4471-2233-3.
215. Shevitz D., Paden B.: Lapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1994, vol. 39, no. 9, 1910–1914.
216. Sierociuk D.: *Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 2007.
217. Sierociuk D., Macias M., Malesza W.: Analog modeling of fractional switched order derivative using different switching schemes. *IEEE journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 2013, vol. 3, no. 3, 394–403.
218. Skoczowski S.: Odporny układ regulacji z wykorzystaniem modelu obiektu. *Pomiary, Automatyka, Kontrola* 1999, vol. 45, nr 9, 2–4.
219. Skoczowski S., Domek S., Pietruszewicz K., Broel-Plater B.: A method for improving the robustness of PID control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 2005, vol. 52, no. 6, 1669–1676.

220. Skogestad S., Postlethwaite I.: *Multivariable feedback control*, New York, John Wiley 1996, ISBN 978-04-70011683.
221. Skovranek T., Podlubny I., Petras I.: Modeling of the national economies in state-space: a fractional approach. *Economic Modelling*, 2012, vol. 29, no. 4, 1322–1327.
222. Slotine J. J. E., Li W.: *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall 1991, ISBN 978-0130408907.
223. Stanisławski R., Latawiec J.K.: Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part I: New necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 2013, vol. 61, no. 2, 353–361.
224. Stanisławski R., Latawiec J.K.: Stability analysis for discrete-time fractional-order LTI state-space systems. Part II: New stability criterion for FD-based systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 2013, vol. 61, no. 2, 363–370.
225. Strijbs R.C.W.: Calculation of right matrix fraction descriptions; an algorithm. *Proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, Maleme, Krete, Greece 1996, 478–482.
226. Sugeno M., Kang G.T.: Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and System*, 1988, vol. 28, no. 1, 15–33.
227. Sun Z., Ge S.S.: *Switched linear systems. Control and design*, Londyn, Springer 2005, ISBN 9781846281310.
228. Szucs A., Kvasnica M., Fikar M.: Optimal piecewise affine approximations of nonlinear functions obtained from measurements. *4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Eindhoven 2012, 160–165.
229. Takagi T., Sugeno M.: Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, vol. SMC-15, no. 1, 116–132.
230. Tanaka K., Hori T., Wang H.O.: A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 2003, vol. 11, no. 4, 582–589.
231. Tanaka K., Sugeno M.: Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and System* 1992, vol. 45, 135–156.
232. Tao G.: *Adaptive control design and analysis*, Hoboken, NJ, Wiley-Interscience 2003, ISBN 0-471-27452-6.
233. Tatjewski P.: *Advanced Control of Industrial Processes*, London, Springer Verlag 2007, ISBN 978-1-84628-635-3.
234. Tavazoei M.S., Tavakoli-Kakhki M.: Minimal realizations for some classes of fractional order transfer functions. *IEEE journal on Emerging and Selected Topics in circuits and Systems*, 2013, vol. 3, no. 3, 313–321.
235. Torrisi F.D., Bemporad A.: HYSDEL – A tool for generating computational hybrid models for analysis and synthesis problems. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 2004, vol. 12, 235–249.
236. Townsend S., Irwin G.W.: Nonlinear model based predictive control using multiple local models, *Nonlinear predictive control – theory and practice*, red. Kouvaritakis, B., Cannon, M., Londyn, IEE 2001, 223–244.
237. Tzirkel-Hancock E., Fallside F.: Stable control of nonlinear systems using neural networks. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1992, vol. 2, no. 1, 63–86.

238. Vaes D., Swevers J., Sas P.: Optimal decoupling for MIMO-controller design with robust performance. *American Control Conference*, Boston, Massachusetts 2004, 4601–4606.
239. Vafiadis D., Karcianas N.: Decoupling and pole assignment of singular systems: a frequency domain approach. *Automatica* 1997, vol. 33, no. 8, 1555–1560.
240. Toolbox ninteger for Matlab: <http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm>, (data dostępu, 16.10.2014).
241. Valerio D., Costa J.: Ninteger: a non-integer control toolbox for Matlab. *1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Bordeaux, France 2004, 208–213.
242. Valerio D., Sa da Costa J.: Non-integer order control of a flexible robot. *IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application* 2004, Bordeaux, France, 520–525.
243. van der Boom T.J.J., Botto M.A., Hoekstra P.: Design of an analytic constrained predictive controller using neural networks. *International Journal of System Science*, 2005, vol. 36, no. 10, 639–650.
244. Vidyasagar M.: *Control system synthesis: A factorization approach*, Massachusetts, The Massachusetts Institute of Technology Press 1985.
245. Wang L., Feng G.: Piecewise Hinf controller design of discrete time fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2004, vol. 34, no. 1, 682–686.
246. Wang Q.-G.: *Decoupling control*, Springer 2003, ISBN 978-3-540-46151-7.
247. Wang W. J., Chen Y.-J., Sun C.H.: Relaxed stabilization criteria for discrete time T-S fuzzy control system based on a switching fuzzy model and piecewise Lyapunov function. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2007, vol. 37, no. 3, 551–559.
248. Wang W.J., Sun C.H.: A relaxed criterion for T-S fuzzy discrete systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2004, vol. 34, no. 5, 2155–2158.
249. Weinmann A.: *Uncertain models and robust control*, New York, Springer Verlag 1991, ISBN 978-3-7091-7390-9.
250. Westerlund S., Ekstam L.: Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 1994, vol. 1, no. 5, 826–839.
251. Williams T.W.C., Antsaklis P.J.: A unifying approach to the decoupling of linear multivariable systems. *International Journal of Control* 1986, vol. 44, no. 1, 181–201.
252. Wise D.A., English J. W.: Tank and wind tunnel test for a drillship with dynamic position control. *Offshore Tehnology Conference*, TX Dallas 1975, 103–118.
253. Wittenmark B., Salgado M. E.: Hankel-norm based interaction measure for input-output pairing. *15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain 2002, 1623.
254. Wolovich W.A.: *Linear multivariable systems*, New York, Springer Verlag 1974, ISBN 978-0-387-90101-5.
255. Wolovich W.A.: Output feedback decoupling. *IEEE Transactions on Automatic Control* 1975, vol. AC-20, 148–149.
256. Wu T.-Z., Wang J.-D., Juang Y.-T.: Decoupled integral variable structure control for MIMO systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2007, vol. 344, 1006–1020.
257. Xie L., Shishkin S., Fu M.: Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. *Systems & Control Letters*, 1997, vol. 31, 165–171.
258. Xiong Q., Cai W.-J., He M.-J.: A practical loop pairing criterion for multivariable processes. *Journal of Process Control* 2005, vol. 15, 741–747.
259. Zagalak P., Lafay J.F., Herrera-Hernandez A.N.: The row-by-row decoupling via state feedback: a polynomial approach. *Automatica* 1993, vol. 29, no. 6, 1491–1499.

260. Zhai G., Xu X.: A unified approach to stability analysis of switched linear descriptor system under arbitrary switching. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2010, vol. 20, no. 2, 249–259.
261. Zwierzewicz Z.: Nonlinear adaptive tracking-control synthesis for general linearly parametrized systems, w: *Automation and Robotics*, InTech 2008, 375–388.

Selected problems of synthesis of control systems for dynamic plants with multiple-inputs and multiple-outputs

Summary

The subject of this monograph is to study various aspects of the synthesis of control systems of the dynamic multi-input multi-output MIMO plants. There are described both features of the MIMO plants and tasks to be solved by designing automatic control systems for such objects.

The book is a summary of research the author carried out recently in the Department of Control Engineering and Robotics, Faculty of Electrical Engineering, West Pomeranian University of Technology, Szczecin. The presented results, through a rich literature review, are referenced to the current developments in the field of control theory of MIMO dynamic systems. Original research results, for the most part been published, are complemented by new suggestions and discussion of problems still requiring analysis and solutions or replenishment.

The main scientific objective was to examine different structures and to develop new control algorithms for nonlinear dynamic plants with multiple inputs and outputs with special emphasis on issues related to the dynamic decoupling. To achieve the main goal some indirect objectives should have to be placed and solved. The developed methods of synthesis of the MIMO control systems have been verified by simulations. Also the possibility and level of complexity of their implementation in typical programmable automation controllers have been checked. In particular an adaptive control systems as well as practical solutions of the multicontroller structures with switchable outputs and/or changed parameters have been analyzed.

The algorithms which use during synthesis of the control system a set of linear controllers have been focused on and tested. These were structures:

- with linear controllers with varying parameters that are systematically tuned up in keeping with changing plant operating conditions,

- multicontroller structures, whose control signal components are formed as weighted means of outputs of a selected controller group according to Takagi–Sugeno rules,
- with adaptive neural controllers.

A part of the research was devoted to the precise control of the MIMO dynamic system with the usage of the dynamic decoupling techniques. The problems with the reconfiguration of the dynamically decoupled control systems after actuators faults are particularly analyzed. Apart of that problems with a dynamic decoupling of MIMO fractional order systems are discussed.

The simulation experiments which verify the usability of the analyzed control systems were carried out in a Matlab/Simulink environment. Great part of them was also carried out in a Hardware-in-the-Loop (HiL) laboratory test stand. A rapid prototyping devices and typical of-the-shelf controllers were used for fast implementation and to run controllers in a real time regime. The simulated plants and controllers are simulated independently on different platforms in real time.

The book consists of four main chapters, supplemented with a summary and references. In Chapter 2 methods of description of the used in this work dynamic MIMO plants are presented.

Chapter 3 is devoted to the analysis of a dynamic decoupling of the linear dynamic MIMO plants. Problems with pairing and grouping of the decoupled system inputs and outputs are discussed. The possibility of a dynamic decoupling of left-invertible plants is analyzed and a procedure of squaring down the plant model is proposed. A universal algorithm for a dynamic decoupling of the dynamic MIMO plants is presented. The algorithm ensures that the system after decoupling will be stable and will meet all designing goals for any MIMO, in general unstable, non-minimumphase plant.

Apart of that problems with a dynamic decoupling of MIMO fractional order systems are discussed. Similarities and differences to integer order decoupling methods are shown. Basing on a few examples taken from literature simulations of decoupled fractional order systems were carried out to show the possibility of the practical implementation of such control systems.

In Chapter 4 new methods of synthesis of adaptive control systems for nonlinear MIMO dynamic plants are presented. Theoretical possibilities as well as practical aspects of synthesis and implementation of the adaptive, gain-scheduling MIMO controllers are analyzed. A new group T-S like and adaptive neuronal controllers are presented.

Chapter 5 shows problems with implementation of the analyzed in the work control systems in programmable automatic devices. There are presented results of work of selected controllers in a real time regime. A rapid prototyping devices as well as typical programmable controllers were used in this verification.

Gewählte Probleme der Synthese von Systemen der Steuerung von dynamischen Objekten mit vielen Eingängen und vielen Ausgängen

Zusammenfassung

Das Thema vorliegender Monographie ist die Analyse von verschiedenen Aspekten der Regelungssysteme für dynamische Objekte mit vielen Eingängen und vielen Ausgängen. Es wurden Merkmale von MIMO-Objekten beschrieben und Aufgaben definiert, die beim Entwerfen eines Systems für automatische Regelung von derartigen Objekten zu lösen sind.

Das Buch ist eine Zusammenfassung von wissenschaftlichen Forschungen des Verfassers, die in der letzten Zeit im Lehrstuhl für Industrieautomatik und Robotik der Elektrischen Fakultät der Technischen Universität in Szczecin geführt wurden. Die beschriebenen Ergebnisse, durch umfangreiche Übersicht der Fachliteratur, beziehen sich auf aktuelle Errungenschaften auf dem Gebiet der Theorie der Steuerung von mehrdimensionalen dynamischen Systemen. Die echten Forschungsergebnisse, die in ihrer Mehrheit bereits vorher veröffentlicht wurden, wurden um neue Vorschläge und Diskussionen an Problemen erweitert, die immer noch analysiert, gelöst oder ergänzt werden müssen.

Das Hauptziel der wissenschaftlichen Arbeit des Verfassers war die Untersuchung der Möglichkeit des Einsatzes von verschiedenen Systemstrukturen und die Entwicklung von Algorithmen für die Steuerung von nichtlinearen dynamischen Objekten mit vielen Eingängen und Ausgängen mit besonderer Berücksichtigung von Problemen im Zusammenhang mit dynamischer Entkopplung. Für das Erreichen des wissenschaftlichen Hauptziels war das Definieren und Realisieren von einigen Zwischenzielen erforderlich. Man suchte nach geeigneten Methoden der Synthese und Implementierung von Steuerungssystemen für MIMO-Objekte, wobei die entwickelten Algorithmen gleichzeitig im Simulationsverfahren verifiziert wurden. Insbesondere wurden Adaptationsalgorithmen eines Steuerungssystems analysiert und Möglichkeiten eines praktischen Einsatzes von Mehrreglerstrukturen mit umschaltbaren Ausgängen und/oder veränderlichen Parameterwerten von Reglern untersucht.

Es wurden Algorithmen getestet, die für die Synthese eines Adaptationssystems einen Satz von vielen linearen Reglern verwenden. Es waren folgende Strukturen:

- mit linearen Reglern mit Parametern, die während der Arbeit des Systems geändert wurden;
- Mehrreglerstrukturen vom Typ "Takagi-Sugeno", auf Basis von entsprechenden Fuzzy-Ausgangssignalen des Objektes (und eventuell von zusätzlichen Hilfssignalen);
- mit adaptiven Neuronal-Reglern.

Im Rahmen der Arbeit wurden auch Probleme analysiert, die bei präziser Steuerung eines dynamischen Systems unter Verwendung von Techniken dynamischer Entkopplung auftreten können. Es wurden insbesondere Probleme mit entsprechender Rekonfiguration von Regelungssystemen mit dynamischer Entkopplung nach einer Beschädigung von Aktoren untersucht. Es wurde auch eine Analyse der Möglichkeit der Synthese eines Steuerungssystems mit dynamischer Entkopplung für Objekte der nichtganzzahligen Ordnung durchgeführt.

Die Simulationsexperimente, die die Richtigkeit des Funktionierens von entwickelten Regelungssystemen verifizierten, wurden mit MATLAB/Simulink durchgeführt. Ein großer Teil von denen wurde auch auf einem Laborprüfstand vorgenommen, welcher die Durchführung von Simulationsexperimenten in Echtzeit unter Verwendung von Werkzeugen für schnelle Prototypierung und von typischen programmierbaren Industriesteuerungen erlaubt. Die durchgeführten Simulationen hatten einen Charakter vom Typ Hardware-in-the-loop, wo die simulierten Objekte und die eingesetzten Regler auf separaten Einheiten in Echtzeit arbeiteten. Dies ermöglichte das Testen der Fähigkeit von vorgeschlagenen Algorithmen zur Arbeit eines Steuerungssystems im Echtzeitbetrieb, welches in Form eines rechnergestützten Steuerungssystems realisiert wurde, als auch der Möglichkeit der Synthese von Steuerungsalgorithmen im Online-Betrieb.

In weiteren Kapiteln der Monographie wurden folgende Probleme behandelt. Im zweiten Kapitel wurden die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Methoden der Beschreibung der Eigenschaften von dynamischen MIMO-Systemen dargestellt.

Das dritte Kapitel wurde der Analyse von Problemen im Zusammenhang mit der dynamischen Entkopplung von linearen dynamischen MIMO-Objekten gewidmet. Es wurden Probleme im Zusammenhang mit dem Bilden von Paaren und dem Gruppieren von Ein- und Ausgängen eines entkoppelten Systems als auch die Möglichkeit der dynamischen Entkopplung von Objekten mit einer Anzahl von Ausgängen größer als die Anzahl von Eingängen beschrieben. Es wurde ein universeller Algorithmus der dynamischen Entkopplung von MIMO-Objekten vorgestellt. Es wurden Voraussetzungen für den Einsatz von Polynommethoden für die Synthese von Entkopplungssystemen dynamischer Objekte der nichtganzzahligen Ordnung erörtert.

Im vierten Kapitel wurden die Methoden der Synthese von adaptiven Regelungssystemen für die Steuerung mit nichtlinearen dynamischen MIMO-Objekten dargestellt. Es wurden

theoretische und praktische Möglichkeiten der Synthese und Implementierung der MIMO-Regler vom Typ "gain-scheduling" analysiert, wofür unter anderem Fuzzy-Algorithmen vom Typ T-S und künstliche neuronale Netzwerke eingesetzt wurden.

Im fünften Kapitel werden Probleme der Implementierung von untersuchten Steuerungssystemen in programmierbaren Automatik-Geräten analysiert. Es wurden Ergebnisse der einzelnen Regler im Echtzeitbetrieb (Untersuchungen vom Typ Hardware-in-the-loop) präsentiert. Dazu wurden Werkzeuge für schnelle Prototypierung und typische programmierbare Industriesteuerungen verwendet.