UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
INSTYTUT MATEMATYKI

Arnold Kowalski

WZROST MEROMORFICZNYCH POWIERZCHNI MINIMALNYCH I KRZYWYCH CAŁKOWITYCH

Praca doktorska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Iwana Marczenki
oraz
dr Ewy Ciechanowicz

Szczecin 2021

OŚWIADCZENIE DOKTORANTA

Oświadczam, że moja praca, pt.: „Wzrost meromorficznych powierzchni minimalnych i krzywych całkowitych”

a) została napisana przeze mnie samodzielnie,

b) nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 14 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. 2019 r. poz. 1231) oraz chronionych prawem dóbr osobistych ,

c) nie zawiera danych i informacji, które uzyskałem w sposób niedozwolony,

d) nie była podstawą nadania tytułu naukowego lub zawodowego ani mnie ani innej osobie.

Ponadto oświadczam, że treść pracy przedstawionej przeze mnie do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym jest identyczna z jej wersją drukowaną.

Szczecin, dn. ....
(podpis doktoranta)

OŚWIADCZENIE

Wyrażam zgodę na udostępnienie mojej pracy doktorskiej, pt.:„Wzrost meromorficznych powierzchni minimalnych i krzywych całkowitych”.

Szczecin, dn. ....
(podpis doktoranta)

OŚWIADCZENIE

Akceptuję ostateczną wersję pracy.

Szczecin, dn. ....
(podpis promotora)

Spis treści

Wstęp

Ważnym momentem w rozwoju współczesnej analizy matematycznej było pojawienie się w latach dwudziestych ubiegłego wieku prac fińskiego matematyka Rolfa Nevanlinny dotyczących dystrybucji wartości funkcji meromorficznych. W 1929 roku wydał on monografię, w której zawarł podstawy nowej teorii, nazywanej od jego nazwiska *teorią Nevanlinny*. Fundamentalną rolę w tej teorii pełnią trzy funkcje. Są to: *funkcja średniego przybliżenia funkcji meromorficznej f do punktu a na okręgu $\{z : |z| = r\}$* oznaczana jako $m(r, a, f)$, *funkcja licząca $a-$punkty funkcji f w kole $\{z : |z| \leq r\}$* oznaczana jako $N(r, a, f)$ oraz $T(r, f) := m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f)$, którą nazywamy *charakterystyką Nevanlinny*.

W teorii Nevanlinny wyróżniamy dwa podstawowe twierdzenia. Pierwsze z nich mówi, że dla dowolnej wartości $a \in \overline{\mathbb{C}}$ zachodzi równość

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + O(1) \quad (r \to \infty).$$

Drugie podstawowe twierdzenie Nevanlinny mówi natomiast, że dla funkcji meromorficznej f i zbioru $\{a_n\}_{n=1}^{q} \in \overline{\mathbb{C}}$, gdzie $a_i \neq a_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, q, \ i \neq j)$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, a_k, f) \leq 2T(r, f) + O(\log (rT(r, f)))$$

dla wszystkich $r \to \infty$, z wyjątkiem co najwyżej zbioru miary skończonej.

Ponieważ definicja $m(r, a, f)$ opiera się na normie funkcji $\log^+ \frac{1}{|f(z)-a|}$ w metryce $L^1_{[0,2\pi]}$ to naturalnym było postawienie pytania jak zmieni się teoria Nevanlinny przy zmianie metryki. Uczynił to V.P. Petrenko w 1969 roku ([47]). W teorii Petrenki stosowana jest metryka jednostajnej zbieżności i zamiast defektu Nevanlinny $\delta(a, f) := \liminf\limits_{r\to\infty} \frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}$ wprowadzone zostało odchylenie Petrenki $\beta(a, f) := \liminf\limits_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r,a,f)}{T(r,f)}$, gdzie $\mathcal{L}(r, a, f) = \max\limits_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a|}$ oraz $\mathcal{L}(r, \infty, f) = \max\limits_{|z|=r} \log^+ |f(z)|$. Petrenko dowiódł, że gdy f jest funkcją meromorficzną skończonego rzędu dolnego to wartość $\beta(a, f)$ jest ograniczona oraz podał jej dokładne oszacowanie z góry.

Wiele problemów w teorii dystrybucji funkcji meromorficznych pozostawało bez rozwiązania przez długie lata. Rozwiązanie wielu z nich i dalszy rozwój teorii Petrenki umożliwiła konstrukcja funkcji T^* dla funkcji meromorficznych, subharmonicznych i $\delta-$subharmonicznych wprowadzona przez A. Baernsteina ([2, 3, 4]). Na podstawie jego prac I. Marczenko i A.I. Shcherba uzyskali w 1990 r. dokładne oszacowanie z góry sumy odchyleń Petrenki dla funkcji meromorficznych skończonego rzędu dolnego. W pracy [13] E. Ciechanowicz i I. Marczenko otrzymali dokładne oszacowanie odchylenia Petrenki dla funkcji meromorficznej skończonego rzędu dolnego przez ilość rozdzielonych punktów maksimum $(p(\infty, f))$.

Do interesujących zastosowań teorii Nevanlinny należy teoria meromorficznych powierzchni minimalnych (m.p.m.) wprowadzona przez grupę amerykańskich matematyków pod kierunkiem E.F. Beckenbacha. W latach $60 - 70$ ubiegłego wieku E.F. Beckenbach i G.A. Hutchison zdefiniowali m.p.m i wprowadzili na nich teorię Nevanlinny ([8]). Dla minimalnej powierzchni S zadanej parametryzacją $\mathbf{x}(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ podstawowym narzędziem do wprowadzenia pojęć znanych z teorii Nevanlinny była tzw. norma powierzchni S, czyli funkcja $\|\mathbf{x}(z)\| = \sqrt{x_1^2(z) + x_2^2(z) + x_3^2(z)}$. Beckenbach zdefiniował analogicznie jak

Nevanlinna funkcję przybliżenia $m(r, \mathbf{a}, S)$, funkcję liczącą $\mathbf{a}-$punkty $N(r, \mathbf{a}, S)$, charakterystykę $T(r, S) = m(r, \infty, S) + N(r, \infty, S)$ oraz wprowadził tzw. *funkcję widzialności* $H(r, \mathbf{a}, S)$, gdzie w każdej z tych funkcji $a \in \mathbb{R}^3$. W teorii m.p.m. uzyskano także analog pierwszego i drugiego twierdzenia Nevanlinny. Pierwsze twierdzenie Nevanlinny dla m.p.m S mówi, że jeśli S jest dowolną m.p.m., a $\mathbf{a}$ dowolnym punktem z $\mathbb{R}^3$ to zachodzi równość

$$m(r, \mathbf{a}, S) + N(r, \mathbf{a}, S) + H(r, \mathbf{a}, S) = T(r, S) + O(1) \ \ (r \to \infty).$$

Drugie twierdzenie Nevanlinny dla m.p.m. S mówi, że jeśli S jest dowolną m.p.m. to dla dowolnych punktów $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^3$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, \mathbf{a}_k, S) \leq 2T(r, S) + O(\log{(rT(r, S))}),$$

dla wszystkich $r \to \infty$, z wyjątkiem co najwyżej zbioru miary skończonej.

W przypadku teorii Beckenbacha wiodącą funkcją jest $H(r, \mathbf{a}, S)$ w przeciwieństwie do teorii Nevanlinny, gdzie taką funkcją jest $N(r, a, f)$. Przyczyną jest to, że zbiór punktów na powierzchni S ma zerową trójwymiarową miarę. Dlatego $N(r, \mathbf{a}, S)$ jako funkcja zmiennej $\mathbf{a}$ jest w $\mathbb{R}^3$ prawie wszędzie równa zeru. Stąd i ze wspomnianego wyżej drugiego twierdzenia Nevanlinny dla m.p.m. widać, że po lewej stronie równości występującej w pierwszym twierdzeniu ważniejszą rolę spełnia funkcja $H(r, \mathbf{a}, S)$.

W roku 1979 I. Marczenko w pracy [32] wprowadził dla meromorficznych powierzchni minimalnych teorię Petrenki. Zdefiniował wówczas odchylenie Petrenki $\beta(\mathbf{a}, S)$ oraz uzyskał dokładne oszacowanie wartości $\beta(\mathbf{a}, S)$ dla m.p.m. S skończonego rzędu dolnego λ.

Teoria dystrybucji p-wymiarowych krzywych całkowitych pojawiła się w latach 1930-1940 za sprawą takich matematyków jak H. Cartan [12], H. Weyl, J. Weyl [61, 62] oraz L. Ahlfors [1]. Główne rezultaty tej teorii pojawiały się przez kolejne 30 lat, ale dalsze odkrycia były możliwe dzięki związkowi między krzywymi całkowitymi, a funkcjami meromorficznymi.

W monografii z 1984 roku [51] V. Petrenko wprowadził pojęcia znane z teorii wzrostu funkcji meromorficznych dla krzywych całkowitych. Zdefiniował pojęcie rozpiętości krzywych całkowitych, co w przypadku funkcji meromorficznych było zdefiniowane wcześniej przez A. Edreia w 1965 roku. W swojej monografii V. Petrenko uzyskał oszacowanie rozpiętości w zależności od defektu $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ i wielkości odchylenia $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$.

Niniejsza praca doktorska składa się z trzech rozdziałów.**Rozdział 1** został podzielony na trzy podrozdziały i zawiera podstawowe definicje i twierdzenia klasycznej teorii Nevanlinny, teorii Petrenki, teorii meromorficznych powierzchni minimalnych oraz teorii krzywych całkowitych. W **rozdziale 2** zostały zamieszczone rezultaty uzyskane w obszarze teorii wzrostu meromorficznych powierzchni minimalnych skończonego rzędu dolnego. W rozdziale tym zostało udowodnionych sześć twierdzeń oraz przedstawione są wnioski z nich płynące. Dowody tych twierdzeń zamieszczone zostały w **podrozdziałach 2.2-2.5**. **Podrozdział 2.1** poświęcony jest w całości wyprowadzeniu lematów pomocniczych używanych w dowodach głównych twierdzeń. Warto w tym miejscu wyróżnić Lemat 2.10 będący odpowiednikiem lematu o pochodnej logarytmicznej dla meromorficznych powierzchni minimalnych w metryce jednostajnej zbieżności.
Twierdzenie 2.1 podaje dokładne oszacowanie z góry odchylenia $\beta(\infty, S)$ w zależności od ilości rozdzielonych punktów maksimum meromorficznej powierzchni minimalnej S. Rezultat ten stanowi uogólnienie twierdzenia o oszacowaniu odchylenia Petrenki $\beta(\infty, f)$ funkcji meromorficznej $f(z)$ uzyskanego przez E. Ciechanowicz i I. Marczenkę w [13]. Twierdzenie 2.4

przedstawia z kolei oszacowanie dla sumy odchyleń $\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3} \beta(\mathbf{a}, S)$, które jest uogólnieniem uzyskanego w 1990 roku twierdzenia o oszacowaniu sumy odchyleń Petrenki funkcji meromorficznej ([34]). Twierdzenia 2.2 i 2.3 zawierają oszacowanie górnej i dolnej gęstości logarytmicznej pewnych zbiorów i stanowią uogólnienie na przypadek meromorficznych powierzchni minimalnych wyników uzyskanych przez I. Marczenkę w pracach [36] i [41]. Twierdzenie 2.6 oraz Twierdzenie 2.7 zawierają dokładne oszacowanie z dołu rozpiętości meromorficznej powierzchni minimalnej S w zależności od wielkości $p(\infty, S)$, defektu $\delta(\infty, S)$ oraz odchylenia $\beta(\infty, S)$. Twierdzenie 2.6 stanowi wzmocnienie twierdzenia Petrenki o oszacowaniu rozpiętości meromorficznej powierzchni minimalnej skończonego rzędu dolnego λ przez defekt $\delta(\infty, S)$. W **podrozdziale 2.6** zawarte zostały przykłady, w których zachodzą równości w oszacowaniach z wybranych twierdzeń.

Rozdział 3 poświęcony jest wynikom uzyskanym w teorii krzywych całkowitych i funkcji algebroidalnych. W rozdziale tym wprowadzone zostało pojęcie rozdzielonych punktów maksimum dla krzywych całkowitych i funkcji algebroidalnych oraz wykazane zostały cztery twierdzenia. W Twierdzeniu 3.1 dane jest dokładne oszacowanie z góry odchylenia $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ dla krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}$ w zależności od ilości rozdzielonych punktów maksimum $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Twierdzenie 3.2 zawiera dokładne oszacowanie rozpiętości krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}$ względem wielkości $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ i defektu $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Stanowi ono uogólnienie wyników V. Petrenki dotyczących rozpiętości krzywych całkowitych z pracy [51]. W Twierdzeniu 3.3 podane jest z kolei dokładne oszacowanie rozpiętości krzywej całkowitej przez wielkość odchylenia $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Wynik ten jest wzmocnieniem rezultatów otrzymanych przez V. Petrenko w pracy [51]. W Twierdzeniu 3.4 otrzymane zostało górne oszacowanie odchylenia $\beta(w, f)$ funkcji algebroidalnej $f(z)$ skończonego rzędu dolnego λ w zależności od ilości rozdzielonych punktów maksimum i defektu Valirona. W ostatnim podrozdziale zawarty został przykład krzywej całkowitej, dla której w wyżej wspomnianych Twierdzeniach 3.1-3.3 zachodzą równości. Podane zostały także przykłady funkcji algebroidalnych, dla których otrzymane oszacowanie w Twierdzeniu 3.4 jest dokładne.

Pragnę w tym miejscu złożyć najserdeczniejsze podziękowania
Panu Profesorowi Iwanowi Marczence i Pani dr Ewie Ciechanowicz
za opiekę naukową, życzliwość i poświęcony mi czas.

1 Podstawowe pojęcia i twierdzenia

Niniejszy rozdział jest poświęcony przedstawieniu podstawowych pojęć używanych w klasycznej teorii Nevanlinny dystrybucji wartości oraz teorii Petrenki wzrostu funkcji meromorficznych. Zaprezentowana zostanie również teoria meromorficznych powierzchni minimalnych wprowadzona przez E. F. Beckenbacha oraz teoria krzywych całkowitych. Przytoczymy typowo stosowane oznaczenia oraz główne twierdzenia każdej z wymienionych teorii.

1.1 Teoria Nevanlinny

W drugiej połowie XIX wieku klasyczne twierdzenia J. W. Sochackiego, F. Casoratiego, K. Weierstrassa i E. Picarda zapoczątkowały zainteresowanie badaniami nad rozkładem wartości funkcji meromorficznych. W latach dziewięćdziesiątych XIX wieku i na początku XX wieku wyniki te były rozwijane w ramach badań dotyczących zer funkcji całkowitych przez francuskich matematyków J. S. Hadamarda, E. Borela, G. Valirona, A. Denjoy. Podstawy nowoczesnej teorii rozkładu wartości funkcji meromorficznych zostały wprowadzone w latach dwudziestych ubiegłego wieku przez fińskiego matematyka R. Nevanlinnę.

Przypomnijmy teraz podstawowe pojęcia teorii Nevanlinny. Dla funkcji $f(z)$ meromorficznej w kole $\{z : |z| \leq R\}$ $(0 < R \leq \infty)$ przez *funkcję przybliżenia* funkcji $f(z)$ do punktu $a \in \overline{\mathbb{C}}$ rozumiemy:

$$m(r,a,f) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} d\theta & , \text{ gdy } \ a \neq \infty \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta & , \text{ gdy } \ a = \infty \end{cases},$$

gdzie $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ dla $x \geq 0$. *Funkcją liczącą Nevanlinny* nazywamy funkcję:

$$N(r,a,f) = \int\limits_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f)\log r,$$

gdzie $n(r,a,f)$ oznacza ilość $a-$punktów, liczonych wraz z krotnościami, funkcji meromorficznej $f(z)$ w kole $\{z : |z| \leq r\}$. Funkcję

$$T(r,f) := m(r,\infty,f) + N(r,\infty,f)$$

nazywamy *charakterystyką* meromorficznej funkcji $f(z)$.
Najważniejszymi rezultatami teorii Nevanliny są poniższe tzw. podstawowe twierdzenia teorii Nevanlinny.

Twierdzenie A (Pierwsze podstawowe twierdzenie Nevanlinny)**.** *Jeśli $f(z)$ jest funkcją meromorficzną to dla $a \in \overline{\mathbb{C}}$ zachodzi równość*

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + O(1) \ \ (r \to \infty). \tag{1.1}$$

Twierdzenie B (Drugie podstawowe twierdzenie Nevanlinny)**.** *Niech $f(z)$ będzie funkcją meromorficzną, a ciąg $\{a_k\}_{k=1}^q \in \overline{\mathbb{C}}$ niech będzie różnowartościowy. Wówczas*

$$\sum_{k=1}^{q} m(r,a_k,f) \leq 2T(r,f) + O(\log(rT(r,f))),$$

dla wszystkich $r \to \infty$ z wyjątkiem zbioru miary skończonej.

Z drugiego podstawowego twierdzenia Nevanlinny wynika, że z wyjątkiem przeliczalnego zbioru wartości a przy $r \to \infty$ to funkcja $N(r,a,f)$ pełni główną rolę w lewej części równości (1.1).
Wielkość
$$\delta(a,f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,a,f)}{T(r,f)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}$$
nazywamy *defektem Nevanlinny* funkcji meromorficznej $f(z)$ w punkcie a, a wielkość
$$\Delta(a,f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{m(r,a,f)}{T(r,f)} = 1 - \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,a,f)}{T(r,f)}$$
nazywamy defektem Valirona funkcji meromorficznej $f(z)$ w punkcie a.
Zbiór $D(f) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : \delta(a,f) > 0\}$ nazywamy zbiorem wartości defektywnych Nevanlinny funkcji $f(z)$, a zbiór $V(f) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : \Delta(a,f) > 0\}$ nazywamy zbiorem wartości defektywnych Valirona funkcji $f(z)$. Z Twierdzenia A wynika, że dla dowolnego $a \in \overline{\mathbb{C}}$ spełniona jest nierówność
$$0 \le \delta(a,f) \le \Delta(a,f) \le 1.$$
Stąd $D(f) \subset V(f)$. Z Twierdzenia B wynika również, że dla dowolnej funkcji meromorficznej $f(z)$ zbiór $D(f)$ jest co najwyżej przeliczalny oraz
$$\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}} \delta(a,f) \le 2.$$
Liczbę
$$\rho = \rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$
nazywamy rzędem funkcji $f(z)$, a liczbę
$$\lambda = \lambda(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$
nazywamy rzędem dolnym funkcji $f(z)$.

Funkcja $m(r,a,f)$ stanowi normę funkcji $\log^+ \frac{1}{|f(z)-a|}$ w metryce $L^1_{[0,2\pi]}$. Naturalnie narzucającym się pytaniem jest jak zmieni się teoria Nevanlinny przy zmianie metryki. Dokonał tego V. P. Petrenko w 1969 roku definiując funkcję
$$\mathcal{L}(r,a,f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a|} & , \text{ gdy } a \ne \infty \\ \max\limits_{|z|=r} \log^+ |f(z)| & , \text{ gdy } a = \infty \end{cases},$$
nazywaną funkcją odchylenia funkcji meromorficznej $f(z)$ od wartości a. Funkcja $\mathcal{L}(r,a,f)$ charakteryzuje przybliżenie funkcji $f(z)$ do wartości a na okręgu $\{z : |z| = r\}$ w metryce jednostajnej zbieżności. W 1969 roku pojawił się tym samym nowy kierunek w teorii funkcji meromorficznych nazywany teorią wzrostu funkcji meromorficznych, a rozwijany początkowo w pracach V.P. Petrenki. W teorii tej rozpatruje się *wielkość odchylenia Petrenki* meromorficznej funkcji $f(z)$ od liczby a
$$\beta(a,f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r,a,f)}{T(r,f)}$$

oraz *zbiór dodatnich odchyleń* funkcji $f(z)$

$$\Omega(f) = \{a \in \overline{\mathbb{C}} : \beta(a,f) > 0\}.$$

Bezpośrednim wnioskiem z definicji wielkości $\beta(a,f)$ jest, że dla dowolnego $a \in \overline{\mathbb{C}}$ spełniona jest nierówność $\delta(a,f) \leq \beta(a,f)$, a tym samym $D(f) \subset \Omega(f)$.
Dla funkcji meromorficznych skończonego rzędu dolnego λ wielkość odchylenia $\beta(a,f)$ ma własności analogiczne do defektu Nevanlinny. V. Petrenko uzyskał dokładne oszacowanie górne wielkości odchylenia w przypadku takich funkcji.

Twierdzenie C. [47] *Niech $f(z)$ będzie funkcją meromorficzną skończonego rzędu dolnego λ. Wówczas dla dowolnego $a \in \overline{\mathbb{C}}$*

$$\beta(a,f) \leq B(\lambda) := \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} & , \ gdy \ \ \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \pi\lambda & , \ gdy \ \ \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Wielkość $B(\lambda)$ nazywana jest stałą Paleya. V. Petrenko udowodnił także oszacowanie z góry sumy odchyleń dla funkcji meromorficznych skończonego rzędu dolnego.

Twierdzenie D. [47] *Jeśli $f(z)$ jest dowolną funkcją meromorficzną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a,f) \leq 816\pi(\lambda+1)^2.$$

Bezpośrednio z Twierdzenia D wynika, że zbiór $\Omega(f)$ dla funkcji meromorficznych skończonego rzędu dolnego może być co najwyżej przeliczalny. Dokładne oszacowanie z góry dla sumy odchyleń funkcji meromorficznych skończonego rzędu dolnego zostało uzyskane w 1990 roku przez I. Marczenkę i A. I. Shcherbę.

Twierdzenie E. [34] *Jeśli $f(z)$ jest dowolną funkcją meromorficzną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a,f) \leq 2B(\lambda).$$

Ze względu na duże znaczenie dla niniejszej rozprawy doktorskiej przywołamy jeszcze definicje dolnej i górnej logarytmicznej gęstości zbioru oraz pojęcie funkcji subharmonicznej i $\delta-$subharmonicznej.
Dla zbioru mierzalnego $E \subset (0,\infty)$ wielkości

$$\begin{aligned} \underline{logdens} E &= \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dt}{t}, \\ \overline{logdens} E &= \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dt}{t} \end{aligned} \tag{1.2}$$

nazywamy, odpowiednio, dolną i górną gęstością logarytmiczną zbioru E. W 1998 roku I. Marczenko udowodnił twierdzenie będące analogiem do twierdzeń Nevanlinny w teorii Petrenki.

Twierdzenie F. [36] *Niech $f(z)$ będzie funkcją meromorficzną skończonego rzędu dolnego λ i rzędu ρ. Niech także $0 < \gamma < \infty$, a, $a_k \in \overline{\mathbb{C}}$, $(1 \leq k \leq q)$ oraz dla $k \neq j$ niech $a_k \neq a_j$. Ponadto oznaczmy*

$$E_1(\gamma) = \{r : \mathcal{L}(r,a,f) < B(\gamma)T(r,f)\},$$

$$E_2(\gamma) = \{r : \sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a, f) < 2B(\gamma)T(r, f)\}.$$

Wówczas

$$\overline{logdens} E_k(\gamma) \geq 1 - \frac{\lambda}{\gamma} \ \ oraz \ \ \underline{logdens} E_k(\gamma) \leq 1 - \frac{\rho}{\gamma} \ \ (k = 1, 2).$$

Funkcje subharmoniczne tworzą ogólniejszą klasę funkcji w porównaniu z funkcjami harmonicznymi. Przykładowo funkcja $\log|f(z)|$ ($f(z)$ jest funkcją holomorficzną na pewnym obszarze D) jest harmoniczna tylko w otoczeniu punktów, w których $f(z) \neq 0$, a subharmoniczną na całym obszarze D. W celu zdefiniowania funkcji subharmonicznych nie musimy zakładać, aby funkcja była wszędzie ciągła, a wystarczy warunek tzw. półciągłości. Funkcję rzeczywistą $f(z)$ określoną w otoczeniu punktu z_0 i taką, że $-\infty \leq f(z) < +\infty$ nazywamy *półciągłą z góry* w z_0 jeśli $\limsup\limits_{z \to z_0} f(z) \leq f(z_0)$.

Funkcję $f\colon D \to [-\infty, +\infty)$ nazywamy *półciągłą z góry na obszarze* D, jeśli jest półciągła z góry w każdym punkcie tego obszaru.

Funkcję $f\colon D \to [-\infty, +\infty)$ nazywamy *subharmoniczną* na obszarze D, jeśli jest półciągła z góry na D oraz dla dowolnego $z_0 \in D$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla wszystkich $0 \leq \rho < \delta$ zachodzi nierówność

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Funkcję f określoną na pewnym obszarze D nazywamy funkcją $\delta-$*subharmoniczną* jeżeli jest różnicą dwóch funkcji subharmonicznych na obszarze D.

1.2 Teoria meromorficznych powierzchni minimalnych

W latach $1960 - 1970$ E. F. Beckenbach wraz ze współpracownikami uogólnili klasyczną teorię Nevanlinny wprowadzając teorię meromorficznych powierzchni minimalnych [8, 9]. Przywołamy w tym podrozdziale podstawowe pojęcia i wyniki teorii Beckenbacha.

Niech dana będzie powierzchnia

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_i = x_i(u, v), i = 1, 2, 3, \ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\},$$

gdzie $x_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3)$ są dwukrotnie różniczkowalnymi w sposób ciągły funkcjami o wartościach rzeczywistych dla $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Współczynniki pierwszej formy podstawowej powierzchni S są określone następująco

$$E = \| \mathbf{x}_u \|^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)^2, \ \ F = (\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v},$$
$$G = \| \mathbf{x}_v \|^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)^2,$$

gdzie $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$.

Mówimy, że powierzchnia S jest zadana we *współrzędnych izotermicznych* u, v ([8]) jeśli współczynniki pierwszej formy podstawowej powierzchni S spełniają warunki

$$E = G \ \text{ oraz } \ F = 0.$$

W celu zdefiniowania pojęcia powierzchni minimalnej należy wyjaśnić wpierw pojęcie głównej krzywizny. Rozważmy krzywą α, która powstaje z przecięcia się powierzchni S i pewnej płaszczyzny przechodzącej przez wektor normalny do S w punkcie p. Dla każdej takiej krzywej możemy policzyć jej krzywiznę, która wyraża zmianę prędkości oddalenia się krzywej α od prostej stycznej do S w punkcie p. Krzywą w $\mathbb{R}^3$ możemy parametryzować funkcją jednej zmiennej $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Z definicji krzywej wynika, że funkcję α możemy zapisać jako $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_3(t), \alpha_3(t))$, gdzie α_i $(i = 1,2,3)$ są funkcjami rzeczywistymi ciągłymi.
Krzywą $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ nazywamy *gładką* klasy C^k $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$, gdy funkcje α_i $(i = 1,2,3)$ są $k-$krotnie różniczkowalne, a ich $k-$te pochodne są ciągłe.
Krzywą α, gładką klasy C^1, nazywamy *regularną*, gdy $\alpha' = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') \neq 0$ dla każdego $t \in [a,b]$. Mówimy, że parametryzacja α, pewnej krzywej regularnej, jest *naturalna* jeżeli $|\alpha'(t)| = \sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_3'(t))^2 + (\alpha_3'(t))^2} = 1$ dla dowolnego $t \in [a,b]$.
Można udowodnić, że dla dowolnej krzywej regularnej istnieje jej parametryzacja naturalna. Wynika stąd w szczególności, że jeśli pewna krzywa nie ma tej własności to można ją odpowiednio przeparametryzować.
Krzywizną w punkcie s krzywej o parametryzacji naturalnej α nazywamy wartość wyrażenia $|\alpha''(s)|$.
Rozważmy teraz krzywą $\sigma(s)$ na powierzchni S. Określmy wektor jednostkowy **w** styczny do σ w punkcie $p \in S$ oraz wektor normalny **n** do S w $p \in S$. Zauważmy, że **w** i **n** rozpinają pewną płaszczyznę $\mathcal{P}$, która przecina powierzchnię S wzdłuż krzywej, którą oznaczymy przez $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$.
Krzywizną normalną o kierunku **w** nazywamy liczbę $k(w)$ postaci

$$k(\mathbf{w}) = (\gamma_1''(s), \gamma_2''(s), \gamma_3''(s)) \cdot \mathbf{n},$$

gdzie „$\cdot$” oznacza iloczyn skalarny wektorów.
Krzywizna normalna pokazuje jak bardzo powierzchnia odchyla się w kierunku **n** gdy oddalamy się w kierunku wektora **w** wychodząc z punktu $p \in S$. Jeśli będziemy obracać płaszczyznę $\mathcal{P}$ wokół **n** otrzymamy zbiór krzywych na powierzchni, z których każda ma swoją krzywiznę. Niech k_1 i k_2 będą maksymalną i minimalną wartością krzywizny normalnej w punkcie $p \in S$.
Główną krzywizną (*średnią* krzywizną) powierzchni S w punkcie p nazywamy liczbę

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Powierzchnia S jest nazywana *minimalną* jeśli w każdym punkcie tej powierzchni jej główna krzywizna jest równa zeru. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby powierzchnia S zadana we współrzędnych izotermicznych była minimalna jest, aby jej wszystkie funkcje współrzędne $x_i(u,v)$, $(i = 1,2,3)$ były funkcjami harmonicznymi ([11, 59]). Ze względu na silny związek funkcji harmonicznych z powierzchniami minimalnymi przypomnimy podstawowe informacje na temat funkcji harmonicznych.
Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy izolowanym punktem osobliwym funkcji $x(z) = x(u,v)$ $(z = u + iv)$ jeśli w sąsiedztwie punktu z_0 funkcja $x(z)$ jest harmoniczna. Jeśli punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest izolowanym punktem osobliwym funkcji $x(z)$ to w sąsiedztwie punktu z_0 funkcja $x(z)$ może być przedstawiona w postaci szeregu

$$x(z) = c \log r + \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (b_0 = 0), \tag{1.3}$$

gdzie $z - z_0 = re^{i\theta}$. Rozwinięcie (1.3) jest odpowiednikiem szeregu Laurenta dla funkcji harmonicznej i umożliwia zdefiniowanie takich pojęć jak bieguny, logarytmiczne bieguny oraz punkty istotnie osobliwe [44].

Punkt z_0 nazywamy *regularnym* funkcji $x(z)$ jeśli w rozwinięciu (1.3) zachodzi $c = 0$ oraz $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} \geq 0$ (zakładamy, że $z_0 \neq \infty$). Jeśli $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} = t \geq 1$ i $x(z_0) = a_0$ to punkt z_0 nazywamy a_0-*punktem rzędu* t funkcji harmonicznej. W przypadku szczególnym, gdy $a_0 = 0$ punkt z_0 nazywamy *zerem rzędu* t funkcji harmonicznej $x(z)$.

Punkt z_0 *nazywamy biegunem rzędu* t=|l| funkcji $x(z)$ jeśli w rozwinięciu (1.3) mamy $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} = l < 0$. Z drugiej strony jeśli w (1.3) zachodzi $c \neq 0$ oraz $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} \geq 0$ to punkt z_0 nazywamy *biegunem logarytmicznym.*

Jeśli w rozwinięciu (1.3) jest nieskończenie wiele współczynników o indeksach ujemnych, dla których $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$ to punkt z_0 nazywamy punktem istotnie osobliwym funkcji $x(z)$. Mówimy, że funkcja harmoniczna $x(z)$ jest *meromorficzną funkcją harmoniczną* na obszarze D jeśli, z wyjątkiem biegunów, nie ma żadnych innych punktów osobliwych funkcji $x(z)$ w obszarze D.

Meromorficzną powierzchnią minimalną (m.p.m.) w obszarze D nazywamy powierzchnię minimalną, dla której można zaprowadzić współrzędne izotermiczne (u, v) w całym obszarze D oraz, której funkcje współrzędne $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$ są meromorficznymi funkcjami harmonicznymi w D. W przypadku, gdy wszystkie funkcje współrzędne powierzchni są funkcjami harmonicznymi na $\mathbb{C}$ to powierzchnię taką nazywamy całkowitą powierzchnią minimalną (c.p.m.).

W pracy [8] zostały zdefiniowane pojęcia bieguna i $\mathbf{a}-$punktu m.p.m. Punkt $z_0 \in D$ nazywamy biegunem m.p.m. S w obszarze D jeśli przynajmniej jedna z funkcji współrzędnych $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$ posiada biegun w punkcie z_0. Jeśli l_1, l_2, l_3 są odpowiednio rzędami biegunów funkcji $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$ w punkcie z_0 to liczbę $l = \max\{l_1, l_2, l_3\}$ nazywamy *rzędem bieguna m.p.m.* w punkcie z_0. Meromorficzna powierzchnia minimalna S nie może mieć biegunów logarytmicznych [8].

Punkt $z_0 \in D$ nazywa się $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)-$punktem m.p.m. S jeśli z_0 jest a_i-punktem funkcji harmonicznej $x_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$. Niech l_i będzie rzędem a_i-punktu funkcji $x_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$. Wówczas liczbę $l = \min\{l_1, l_2, l_3\}$ nazywamy *rzędem* $\mathbf{a}-$*punktu* m.p.m. S. Wszystkie $\mathbf{a}-$punkty i bieguny m.p.m. S są izolowane [8].

Beckenbach uogólnił klasyczną teorię Nevanlinny rozkładu wartości funkcji meromorficznych wprowadzając odpowiedniki podstawowych pojęć tej teorii dla meromorficznych powierzchni minimalnych [8]. Oznaczmy przez $n(r, \mathbf{a}, S)$ i $n(r, \infty, S)$ odpowiednio ilość $\mathbf{a}-$punktów ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$) i biegunów m.p.m. S w kole $\{z : |z| \leq r\}$ liczonych wraz z krotnościami. Funkcję *liczącą* $\mathbf{a}-$*punkty* definiuje się następująco

$$N(r, \mathbf{a}, S) = \begin{cases} \int_0^r \frac{n(\rho,\mathbf{a},S)-n(0,\mathbf{a},S)}{\rho} d\rho + n(0, \mathbf{a}, S)\log r & , \text{ gdy } \mathbf{a} \neq \infty \\ \int_0^r \frac{n(\rho,\infty,S)-n(0,\infty,S)}{\rho} d\rho + n(0, \infty, S)\log r & , \text{ gdy } \mathbf{a} = \infty \end{cases}.$$

W teorii Beckenbacha rozpatruje się również *funkcję przybliżenia* m.p.m. S:

$$m(r, \mathbf{a}, S) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\|\mathbf{x}(re^{i\theta})-\mathbf{a}\|} d\theta & , \text{ gdy } \mathbf{a} \neq \infty \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \|\mathbf{x}(re^{i\theta})\| d\theta & , \text{ gdy } \mathbf{a} = \infty \end{cases},$$

gdzie $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ dla $x \geq 0$ i $\|\mathbf{x}(z)\| = \sqrt{x_1^2(z) + x_2^2(z) + x_3^2(z)}$ $(z = re^{i\theta})$. Wprowadzona została również nowa funkcja nazywana *funkcją widzialności*

$$H(r, \mathbf{a}, S) = \begin{cases} \int_0^r \frac{h(\rho, \mathbf{a}; S)}{\rho} d\rho & \text{, gdy } \mathbf{a} \neq \infty \\ 0 & \text{, gdy } \mathbf{a} = \infty \end{cases},$$

gdzie $h(\rho, \mathbf{a}, S) = \frac{1}{2\pi} \iint_{A_\rho(0)} \triangle \log \|\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{a}\| dudv$, $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ jest operatorem Laplace'a i $A_\rho(0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq \rho\}$.
Funkcję $T(r, S) = m(r, \infty, S) + N(r, \infty, S)$ nazywamy *charakterystyką* m.p.m. S.
Do jednych z najważniejszych osiągnięć teorii Beckenbacha należy uogólnienie podstawowych twierdzeń Nevanlinny.Pierwsze podstawowe twierdzenie Nevanlinny zostało uogólnione na przypadek m.p.m. przez E. F. Beckenbacha i G. A. Hutchisona w pracy [8]. Pierwsze podstawowe twierdzenie dla m.p.m. oznajmia, że dla dowolnej meromorficznej powierzchni minimalnej S i dowolnego punktu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi

$$m(r, \mathbf{a}, S) + N(r, \mathbf{a}, S) + H(r, \mathbf{a}, S) = T(r, S) + O(1) \ \ (r \to \infty). \tag{1.4}$$

Wynika z tego, że suma $m(r, \mathbf{a}, S) + N(r, \mathbf{a}, S) + H(r, \mathbf{a}, S)$, z dokładnością do czynnika ograniczonego, jest niezależna od **a**.
Uogólnienie drugiego podstawowego twierdzenia Nevanlinny E. F. Beckenbach uzyskał wspólnie z T. Cootzem w pracy [9]. Drugie podstawowe twierdzenie dla m.p.m. głosi, że dla dowolnej meromorficznej powierzchni minimalnej S i dowolnego zbioru punktów $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^3$ $(k = 1, \ldots, q)$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, \mathbf{a}_k, S) \leq 2T(r, S) + O(\log(rT(r, S))), \ r \notin E, \ r \to \infty, \tag{1.5}$$

gdzie E jest zbiorem skończonej miary.
Jeśli $f(z)$ jest funkcją meromorficzną, to powierzchnia $S_f = (\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z), 0)$ jest płaszczyzną, a więc także meromorficzną powierzchnią minimalną. Wówczas oczywiście zachodzi

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\| \mathbf{x}(re^{i\theta}) - \mathbf{a} \|} d\theta = m(r, \mathbf{a}, S_f),$$

gdzie $\mathbf{a} = (\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a, 0)$. Ponadto,

$$m(r, \infty, f) = m(r, \infty, S_f), \ \ N(r, a, f) = N(r, \mathbf{a}, S_f), \ \ T(r, f) = T(r, S_f).$$

Tym samym teoria Beckenbacha jest uogólnieniem klasycznej teorii Nevanlinny na przypadek meromorficznych powierzchni minimalnych.
Zbiór punktów leżących na powierzchni S ma w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zerową miarę. Stąd $N(r, \mathbf{a}, S)$ jako funkcja zmiennej **a** jest równa zeru prawie wszędzie w $\mathbb{R}^3$. Ten fakt wraz z drugim podstawowym twierdzeniem dla m.p.m. pokazuje, że dla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ główną rolę w lewej części równości (1.4) stanowi funkcja widzialności $H(r, \mathbf{a}, S)$.
Podobnie jak dla funkcji meromorficznych zdefiniowane są rząd oraz rząd dolny m.p.m. Liczbę

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log T(r, S)}{\log r} \ \text{ i } \ \lambda = \liminf_{r \to \infty} \frac{\log T(r, S)}{\log r}$$

nazywamy, odpowiednio, *rzędem* i *rzędem dolnym* m.p.m. S.
Wielkość

$$\delta(\mathbf{a}, S) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r, \mathbf{a}, S)}{T(r, S)}$$

nazywamy *defektem* m.p.m. S. Z nierówności (1.5) wynika, że dla m.p.m. S:

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{a}, S) \leq 2.$$

Defekt Valirona dla m.p.m. S w punkcie **a** definiujemy następująco:

$$\Delta(\mathbf{a}, S) = \limsup_{r\to\infty} \frac{m(r, \mathbf{a}, S)}{T(r, S)}.$$

W związku z tym, że teoria meromorficznych powierzchni minimalnych wprowadzona przez E.F. Beckenbacha stanowi uogólnienie klasycznej teorii dystrybucji funkcji meromorficznych oczywistym jest, że wiele wyników i koncepcji związanych z funkcjami meromorficznymi znalazło odzwierciedlenie w teorii m.p.m. W 1979 roku I. Marczenko zastosował teorię Petrenki wzrostu funkcji meromorficznych ([47]) w kontekście teorii meromorficznych powierzchni minimalnych. W pracy [32] I. Marczenko wprowadził wielkość

$$\mathcal{L}(r, \mathbf{a}, S) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}\|} & , \text{ gdy } \mathbf{a} \neq \infty \\ \max\limits_{|z|=r} \log^+ \|\mathbf{x}(z)\| & , \text{ gdy } \mathbf{a} = \infty \end{cases},$$

oraz

$$\beta(\mathbf{a}, S) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r, \mathbf{a}, S)}{T(r, S)}.$$

Wielkość $\beta(\mathbf{a}, S)$ nazywamy *wielkością odchylenia* powierzchni S w punkcie **a**. W pracy [32] I. Marczenko uzyskał dokładne oszacowanie wielkości odchylenia m.p.m. S skończonego rzędu dolnego λ.

Twierdzenie G. [32] *Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to dla dowolnego $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$*

$$\beta(\boldsymbol{a}, S) \leq B(\lambda) := \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} & , \textit{ gdy } \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \pi\lambda & , \textit{ gdy } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

1.3 Teoria krzywych całkowitych

Teoria dystrybucji $p-$wymiarowych krzywych całkowitych powstała w latach $1930-1940$ i była rozwijana przez H. Cartana [12], H. Weyla i J. Weyla [61, 62] oraz L. Ahlforsa [1]. Główne rezultaty tej teorii pojawiały się przez kolejnych 30 lat, ale dalsze prace i rozwój były możliwe dzięki związkowi teorii krzywych całkowitych i teorii funkcji meromorficznych. Wspominana w podrozdziale 1.1 teoria wzrostu funkcji meromorficznych została uogólniona na przypadek krzywych całkowitych w latach $1970 - 1980$ przez V. Petrenkę w monografii [51]. W tym podrozdziale przedstawimy podstawowe pojęcia teorii krzywych całkowitych i teorii wzrostu krzywych całkowitych.

Rozważmy $p-$wymiarową przestrzeń zespoloną $\mathbb{C}^p$. Dla wektorów $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_p) \in \mathbb{C}^p$ określamy iloczyn skalarny

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \sum_{k=1}^{p} a_k \overline{b}_k$$

oraz normę wektora $\|\overrightarrow{a}\| : = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}$.

Wektor $\overrightarrow{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z))$ zależny od zmiennej zespolonej z, w którym funkcje $\{g_k(z)\}_{k=1}^{p}$ są funkcjami całkowitymi bez wspólnych zer, nazywamy *$p-$wymiarową krzywą całkowitą*.

Krzywa całkowita $\overrightarrow{G}(z)$ odwzorowuje zatem zbiór $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}^p$. Zakładamy w dalszych rozważaniach, że każde dwie funkcje współrzędne $g_k(z)$ i $g_j(z)$ $(k \neq j)$ krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ są liniowo niezależne.

Użytecznym faktem jest, że dla dowolnego wektora $p-$wymiarowego $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \neq 0$ iloczyn $(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a}) = \sum\limits_{k=1}^{p} g_k(z)\overline{a}_k$ jest funkcją całkowitą.

Oznaczmy przez $n(t, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ ilość zer iloczynu $(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{a})$ w kole $\overline{K(0,t)} = \{z : |z| \leq t\}$ liczonych wraz z krotnościami. Każde miejsce zerowe funkcji $(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})$ nazywamy *$\overrightarrow{a}-$punktem* krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$.

Funkcję liczącą $\overrightarrow{a}-$punkty krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ definiuje się następująco [51]

$$N(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \int_0^r [n(t, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) - n(0, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})] \frac{dt}{t} + n(0, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \log r.$$

Funkcja przybliżenia $m(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$, mierząca przybliżenie krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ do wektora $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$, określona jest następująco

$$m(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(re^{i\theta}), \overrightarrow{a})|} d\theta.$$

Funkcję

$$T(r, \overrightarrow{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| d\theta$$

nazywamy *charakterystyką* krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$. Liczbę

$$\lambda = \liminf_{r \to \infty} \frac{\log T(r, \overrightarrow{G})}{\log r}$$

nazywamy rzędem dolnym krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$, a wielkość

$$\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{T(r, \overrightarrow{G})}$$

nazywamy defektem krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$.

W pracy [12] H. Cartan wykazał następujące nierówności

$$0 \leq \delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq 1 \quad \text{i} \quad \sum_{\overrightarrow{a} \in \mathbb{C}^p} \delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq p.$$

Z określenia funkcji $m(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ i $T(r, \overrightarrow{G})$ otrzymuje się pierwsze podstawowe twierdzenie dla krzywych całkowitych, które głosi, że dla $p-$wymiarowej krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ oraz wektora $\overrightarrow{a} \in \mathbb{C}^p$, takiego że $(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a}) \not\equiv 0$ zachodzi ([51])

$$m(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) + N(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = T(r, \overrightarrow{G}) + O(1) \quad (r \to \infty).$$

Podobnie jak w przypadku teorii wzrostu funkcji meromorficznych ([47]) V. Petrenko rozważył wpływ zmiany metryki $L^1_{[0,2\pi]}$ na metrykę jednostajnej zbieżności w przypadku krzywych całkowitych [51].
Niech $\overrightarrow{G}(z)$ będzie $p-$wymiarową krzywą całkowitą i $\overrightarrow{a}$ będzie $p-$wymiarowym wektorem zespolonym takim, że $(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a}) \not\equiv 0$. V. Petrenko rozważył funkcję

$$\mathcal{L}(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \max_{|z|=r} \log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|}$$

oraz wielkość

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \liminf_{r \to \infty} \frac{\mathcal{L}(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{T(r, \overrightarrow{G})}$$

nazywaną *odchyleniem* krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ od wektora $\overrightarrow{a}$.
W [51] V. Petrenko udowodnił następujące oszacowanie.

Twierdzenie H. *Jeśli $p-$wymiarowa krzywa całkowita $\overrightarrow{G}(z)$ jest skończonego rzędu dolnego λ to dla dowolnego $\overrightarrow{a} \in \mathbb{C}^p$ zachodzi*

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq \begin{cases} \pi\lambda & , \ \textit{gdy} \quad \lambda > \frac{1}{2} \\ \frac{\pi\lambda}{\sin(\pi\lambda)} & , \ \textit{gdy} \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

1.4 Teoria funkcji algebroidalnych

Funkcję $w = f(z)$ nazywamy n-wartościową funkcją algebroidalną jeśli jest rozwiązaniem równania

$$A_n(z)w^n + A_{n-1}(z)w^{n-1} + \ldots + A_0(z) = 0, \tag{1.6}$$

gdzie $\{A_j(z)\}_{j=0}^n$ są funkcjami całkowitymi.
Należy zaznaczyć, że klasa funkcji meromorficznych stanowi podklasę funkcji algebroidalnych. Istotnie, gdy $n = 1$ to $w = \frac{A_0(z)}{A_1(z)}$ jest funkcją meromorficzną.
Niech funkcje $f_q(z)$ $(q = 1, \ldots, n)$, spełniające równanie (1.6), oznaczają q-tą wartość funkcji algebroidalnej $f(z)$.
Oznaczmy

$$N\left(r, \frac{1}{A_n}\right) = \int_0^r \left(n\left(t, \frac{1}{A_n}\right) - n\left(0, \frac{1}{A_n}\right)\right) \frac{dt}{t} + n\left(0, \frac{1}{A_n}\right) \log r,$$

gdzie $n\left(t, \frac{1}{A_n}\right)$ oznacza ilość biegunów funkcji $\frac{1}{A_n}$ w kole $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq t\}$ liczonych wraz z krotnościami. Funkcję przybliżenia dla funkcji algebroidalnej $f(z)$ definiujemy jako

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{q=1}^{n} \log^+ |f_q(re^{i\theta})| \right\} d\theta.$$

Wówczas charakterystykę funkcji algebroidalnej $f(z)$ definiuje się następująco [58]

$$T(r, f) = m(r, f) + N\left(r, \frac{1}{A_n}\right).$$

Liczbę

$$\lambda = \liminf_{r \to \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

nazywamy *rzędem dolnym* funkcji f, a liczbę

$$\rho = \lim_{r \to \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}$$

nazywamy *rzędem* funkcji f.
Dla dowolnej liczby zespolonej a V. Petrenko zdefiniował funkcję przybliżenia funkcji algebroidalnej $f(z)$ do punktu a ([51])

$$m(r, a, f) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \sum\limits_{q=1}^{n} \log^+ \frac{1}{|f_q(re^{i\theta}) - a|} \right\} d\theta & , \text{ gdy } a \neq \infty \\ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum\limits_{q=1}^{n} \log^+ |f_q(re^{i\theta})| d\theta & , \text{ gdy } a = \infty. \end{cases}$$

Defekt Nevanlinny oraz defekt Valirona definiuje się, odpowiednio, jako

$$\delta(a, f) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} \quad \text{i} \quad \Delta(a, f) = \limsup_{r \to \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

W [51] V. Petrenko stworzył teorię wzrostu funkcji algebroidalnych. Dla $a \in \overline{\mathbb{C}}$ została zdefiniowana wielkość

$$\mathcal{L}(r, a, f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \left(\sum\limits_{q=1}^{n} \log^+ \left| \frac{1}{f_q(z) - a} \right| \right) & , \text{ gdy } a \neq \infty \\ \max\limits_{|z|=r} \sum\limits_{q=1}^{n} \log^+ |f_q(z)| & , \text{ gdy } a = \infty \end{cases}$$

oraz wielkość

$$\beta(a, f) = \liminf_{r \to \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)},$$

którą nazywamy odchyleniem funkcji algebroidalnej $f(z)$.
V. Petrenko udowodnił następujące oszacowanie odchylenia funkcji algebroidalnej.

Twierdzenie I. [51] *Niech $f(z)$ będzie n-wartościową funkcją algebroidalną skończonego rzędu dolnego λ oraz $w \in \overline{\mathbb{C}}$. Wówczas*

$$\beta(w,f) \leq B(\lambda, \Delta(w,f)),$$

gdzie

$$B(\lambda,\Delta) := \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)} & , \text{ gdy } \lambda \geq \frac{1}{2} \text{ lub gdy } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \\ & \text{ i } \sin\frac{\pi\lambda}{2} \geq \sqrt{\frac{\Delta}{2}}, \\ \pi\lambda\left(\Delta \operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\right) & , \text{ gdy } 0 \leq \lambda < \frac{1}{2} \text{ i } \sin\frac{\pi\lambda}{2} < \sqrt{\frac{\Delta}{2}}. \end{cases}$$

Dla $w = \infty$ Twierdzenie I zostało udowodnione przez K. Niino [46] w 1973 roku.
W przypadku funkcji meromorficznych Twierdzenie I udowodnił D.F. Shea w 1970 roku [22].

2 Wzrost meromorficznych powierzchni minimalnych

W 2004 roku E. Ciechanowicz i I. Marczenko zastosowali wielkość $p(\infty, f)$ mierzącą ilość rozdzielonych punktów maksimum modułu funkcji meromorficznej $f(z)$ w celu oszacowania odchylenia Petrenki dla funkcji meromorficznych ([13], również w [14] i [15]). Ilość rozdzielonych punktów maksimum modułu funkcji meromorficznych można uogólnić na przypadek meromorficznych powierzchni minimalnych.
Rozważmy m.p.m. S. Niech $\phi(r)$ będzie dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą dla $r > 0$ funkcją taką, że $\phi(r) = o(T(r,S))$ oraz niech $p_\phi(r,\infty,S)$ oznacza ilość przedziałów składowych zbioru

$$\{\theta\colon \log\|\mathbf{x}(re^{i\theta})\| > \phi(r)\}$$

zawierających co najmniej jeden punkt, w którym $\|\mathbf{x}(re^{i\theta})\|$ osiąga maksymalną wartość. Ponadto, niech $p_\phi(\infty,S) = \liminf\limits_{r\to\infty} p_\phi(r,\infty,S)$. Wówczas

$$p(\infty,S) = \sup_{\{\phi\}} p_\phi(\infty,S).$$

Poniższy rezultat jest uogólnieniem na przypadek m.p.m. oszacowania odchylenia Petrenki funkcji meromorficznych uzyskanego przez E. Ciechanowicz i I. Marczenko w [13].

Twierdzenie 2.1. *[28] Dla meromorficznej powierzchni minimalnej S skończonego rzędu dolnego λ zachodzi*

$$\beta(\infty,S) \leq \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{p(\infty,S)} & , \text{ gdy } \frac{\lambda}{p(\infty,S)} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda} & , \text{ gdy } p(\infty,S) = 1 \text{ i } \lambda < \frac{1}{2} \\ \frac{\pi\lambda}{p(\infty,S)} \sin\frac{\pi\lambda}{p(\infty,S)} & , \text{ gdy } p(\infty,S) > 1 \text{ i } \frac{\lambda}{p(\infty,S)} < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Wniosek 2.1. *Dla meromorficznej powierzchni minimalnej S skończonego rzędu dolnego λ zachodzi*

$$p(\infty,S) \leq \max\left(1, \left[\frac{\pi\lambda}{\beta(\infty,S)}\right]\right),$$

gdzie $[x]$ jest częścią całkowitą x.Ponadto, gdy $\beta(\infty,S) > 0$ to

$$1 \leq p(\infty,S) < +\infty.$$

Wniosek 2.2. *Jeśli S jest całkowitą powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$p(\infty, S) \le \max\left([\pi\lambda], 1\right) < +\infty.$$

W podrozdziale 1.1 zdefiniowane było pojęcie górnej i dolnej gęstości logarytmicznej zbioru. Dla meromorficznych powierzchni minimalnych zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2. *[30] Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ i rzędu ρ. Niech ponadto dla $0 < \gamma < \infty$ dane będą zbiory*

$$B(\gamma) := \begin{cases} \frac{\pi\gamma}{\sin\pi\gamma} & , \textit{ gdy } \gamma \le \frac{1}{2} \\ \pi\gamma & , \textit{ gdy } \gamma > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad E(\gamma) := \{r > 0 : \mathcal{L}(r, \infty, S) \le B(\gamma)T(r, S)\},$$

Wówczas

$$\overline{logdens}\ E(\lambda) \ge 1 - \frac{\lambda}{\gamma} \ \ i \ \ \underline{logdens}\ E(\gamma) \ge 1 - \frac{\rho}{\gamma}.$$

Dla funkcji meromorficznych oszacowanie gęstości logarytmicznej zbioru

$$E(\gamma) := \{r > 0 : \log^+ \max|f(z)| \le B(\gamma)T(r, f)\}$$

otrzymał I. Marczenko w 1998 roku [36].

Zdefiniujmy teraz następującą wielkość

$$B(\lambda, \Delta) := \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)} & , \text{ gdy } \lambda \ge \frac{1}{2} \text{ lub } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \\ & \quad \text{i } \sin\frac{\pi\lambda}{2} \ge \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \\ \pi\lambda\left(\Delta\operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\right) & , \text{ gdy } 0 \le \lambda < \frac{1}{2} \text{ i } \sin\frac{\pi\lambda}{2} < \sqrt{\frac{\Delta}{2}} \end{cases}.$$

Twierdzenie 2.3. *Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ i rzędu ρ. Niech dla $0 < \gamma < \infty$ i $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ określony będzie zbiór*

$$E(\gamma) := \{r > 0 : \mathcal{L}(r, \boldsymbol{a}, S) < B\left(\gamma, \Delta(\boldsymbol{a}, S)\right) T(r, S))\},$$

gdy $\Delta(\boldsymbol{a}, S) > 0$ oraz przy dowolnej dodatniej liczbie ϵ

$$E(\gamma) := \{r > 0 : \mathcal{L}(r, \boldsymbol{a}, S) < \epsilon T(r, S))\},$$

gdy $\Delta(\boldsymbol{a}, S) = 0$. Wówczas

$$\overline{logdens}\ E(\gamma) \ge 1 - \frac{\lambda}{\gamma} \ \ i \ \ \underline{logdens}\ E(\gamma) \ge 1 - \frac{\rho}{\gamma}.$$

W przypadku funkcji meromorficznych skończonego rzędu dolnego oszacowanie gęstości logarytmicznej zbioru $E(\gamma) = \{r > 0 \colon \mathcal{L}(r, a, f) < B(\gamma, \Delta(a, f))T(r, f)\}$ otrzymał I. Marczenko w 2000 roku [41].

Z Twierdzenia 2.3 wynika następujący wniosek.

Wniosek 2.3. *Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ. Wówczas dla dowolnego $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$*

$$\beta(\boldsymbol{a}, S) \le B(\lambda, \Delta(\boldsymbol{a}, S)).$$

Wniosek 2.3 stanowi uogólnienie na przypadek m.p.m. twierdzenia Shea dla funkcji meromorficznych ([22]).

Wniosek 2.4. *Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ. Dla dowolnego $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ zachodzi*

$$\beta(\boldsymbol{a}, S) \leq B(\lambda),$$

gdzie $B(\lambda)$ jest zdefiniowaną w Twierdzeniu C stałą Paleya.

Wniosek 2.5. *Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\Omega(S) = \{a \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} : \beta(\boldsymbol{a}, S) > 0\} \subset V(S) = \{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \Delta(\boldsymbol{a}, S) > 0\}.$$

W roku 1990 I. Marczenko i A. Shcherba uzyskali dokładne oszacowanie sumy odchyleń Petrenki dla funkcji meromorficznych [34]. Było to rozwiązanie problemu sformułowanego przez V. Petrenkę w jego monografii [48]. W [34] pokazano, że dla funkcji meromorficznej $f(z)$ skończonego rzędu dolnego λ zachodzi $\sum\limits_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \beta(a, f) \leq 2B(\lambda)$.

Niech S_u będzie powierzchnią z zadaną parametryzacją $\mathbf{x}_u(z)$, tzn.

$$S_u = \left\{ \mathbf{x}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) : i = 1, 2, 3, \ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Niech $\Delta(\mathbf{0}, S_u) = \limsup\limits_{r \to \infty} \frac{m(r, \mathbf{0}, S_u)}{T(r, S_u)}$ $(\mathbf{0} = (0, 0, 0))$, gdzie $m(r, \mathbf{0}, S_u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(re^{i\theta})\|} d\theta$ i $T(r, S_u) = m(r, \infty, S_u) + N(r, \infty, S_u)$.

Twierdzenie 2.4. *Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{a}, S) \leq 2B(\lambda, \Delta(\boldsymbol{0}, S_u)).$$

Z Twierdzenia 2.4 wynika następujący wniosek.

Wniosek 2.6. *Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{a}, S) \leq 2B(\lambda).$$

Twierdzenie 2.5. *Jeśli S jest całkowitą powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{a}, S) \leq B(\lambda, \Delta(0, S_u)).$$

Wniosek 2.7. *Jeśli S jest całkowitą powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{a}, S) \leq B(\lambda) = \begin{cases} \pi\lambda & , \ \lambda \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} & , \ \lambda < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

W przypadku funkcji meromorficznych skończonego rzędu dolnego λ oszacowanie sumy odchyleń Petrenki względem defektu Valirona pochodnej funkcji w punkcie 0 uzyskał I. Marczenko w roku 1999. W pracy [39] pokazał on, że

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{C}} \beta(a,f) \leq 2B(\lambda, \Delta(0,f')).$$

W 1967 roku A. Edrei [19] zdefiniował pojęcie rozpiętości funkcji meromorficznej. Podobne pojęcie dla meromorficznych powierzchni minimalnych zdefiniował V. Petrenko w [50]. Niech $\Lambda(r)$ będzie dodatnią, niemalejącą i ciągłą funkcją, taką że $\Lambda(r) = o(T(r,S))$ $(r \to \infty)$. Oznaczmy

$$\sigma_\Lambda(\infty, S) := \limsup_{r\to\infty} mes\{\theta\colon \log\|\mathbf{x}(re^{i\theta})\| > \Lambda(r)\},$$

gdzie $mesA$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru A. Wówczas wielkość

$$\sigma(\infty, S) := \inf_\Lambda \sigma_\Lambda(\infty, S)$$

nazywamy *rozpiętością* meromorficznej powierzchni minimalnej.
Poniżej zostaną przedstawione dokładne oszacowania z dołu rozpiętości m.p.m. poprzez wielkość $p(\infty, S)$, defekt $\delta(\infty, S)$ oraz odchylenie $\beta(\infty, S)$ dla m.p.m. skończonego rzędu dolnego.

Twierdzenie 2.6. *[30] Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ oraz $\delta(\infty, S) > 0$ to*

$$\sigma(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4p(\infty,S)}{\lambda} \arcsin\sqrt{\frac{\delta(\infty,S)}{2}}\right\}.$$

Jeśli $\delta(\infty, S) > 0$ to $p(\infty, S) \geq 1$. Mamy stąd następujący wniosek.

Wniosek 2.8. *Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4}{\lambda} \arcsin\sqrt{\frac{\delta(\infty,S)}{2}}\right\}.$$

Wniosek 2.8 otrzymał V. Petrenko w roku 1981 w pracy[50]. W przypadku funkcji meromorficznych dokładne oszacowanie rozpiętości poprzez defekt Nevanlinny $\delta(\infty, f)$ otrzymał A. Baernstein w 1973 roku [3]. Było to rozwiązanie problemu Edreia [19].

Twierdzenie 2.7. *[30] Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{2p(\infty,S)}{\lambda} \arcsin\frac{\beta(\infty,S)p(\infty,S)}{\pi\lambda}\right\}.$$

Zauważmy, że gdy $\beta(\infty, S) > 0$ to $p(\infty, S) \geq 1$. Stąd następujący wniosek.

Wniosek 2.9. *Jeśli S jest meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{2}{\lambda} \arcsin\frac{\beta(\infty,S)}{\pi\lambda}\right\}.$$

Dokładne oszacowanie rozpiętości funkcji meromorficznych poprzez odchylenie Petrenki $\beta(\infty, f)$ zostało udowodnione przez I. Marczenkę w 1982 roku [33].

2.1 Rezultaty pomocnicze

W dowodach głównych twierdzeń rozdziału drugiego będziemy stosować szereg rezultatów i lematów pomocniczych. Ze względu na ich duże znaczenie dla naszych wyników w celu zachowania przejrzystości podzielimy ten podrozdział na trzy paragrafy.

2.1.1 Lematy dotyczące funkcji $u_\phi(z)$

Niech $S = \{\mathbf{x}(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \colon z \in \mathbb{C}\}$ będzie meromorficzną powierzchnią minimalną oraz niech $\phi(r)$ będzie dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą funkcją, dla której $\phi(r) = o(T(r, S))$. Rozważmy następującą funkcję

$$u_\phi(z) = \max(\log \|\mathbf{x}(z)\|, \phi(|z|)).$$

Lemat 2.1. *Funkcja $u_\phi(z)$ jest funkcją $\delta-$subharmoniczną w $\mathbb{C}$, tzn.*

$$u_\phi(z) = u_1(z) - u_2(z),$$

gdzie $u_1(z), u_2(z)$ są funkcjami subharmonicznymi w $\mathbb{C}$ oraz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta}) d\theta = N(r, \infty, S).$$

Dowód. Niech punkty $\{a_n\}$ będą biegunami powierzchni S. Wówczas na mocy twierdzenia Weierstrassa można znaleźć funkcję całkowitą $g(z)$, dla której $g(a_n) = 0$. Określmy teraz funkcję $\widetilde{\mathbf{x}}(z) = (\widetilde{x_1}(z), \widetilde{x_2}(z), \widetilde{x_3}(z))$ wzorem

$$\widetilde{\mathbf{x}}(z) = \mathbf{x}(z) \cdot g(z).$$

Wówczas

$$\|\widetilde{\mathbf{x}}(z)\| = \|\mathbf{x}(z)\| |g(z)|.$$

Otrzymujemy stąd $\| \mathbf{x}(z) \| = \frac{\|\widetilde{\mathbf{x}}(z)\|}{|g(z)|}$, więc

$$\log \| \mathbf{x}(z) \| = \log \frac{\| \widetilde{\mathbf{x}}(z) \|}{|g(z)|} = \log \| \widetilde{\mathbf{x}}(z) \| - \log |g(z)|.$$

Z definicji funkcji $u_\phi(z)$ wynika, że

$$u_\phi(z) = \max(\log \| \widetilde{\mathbf{x}}(z) \|, \log |g(z)| + \phi(|z|)) - \log |g(z)|.$$

Funkcja $\phi(r)$ jest logarytmicznie wypukła dla $r > 0$. Stąd $\phi(|z|)$ jest funkcją subharmoniczną w $\mathbb{C}$. Również funkcja:

$$t(z) := \max(\log \| \widetilde{\mathbf{x}}(z) \|, \log |g(z)| + \phi(|z|))$$

jest funkcją subharmoniczną. Stąd $u_\phi(z) = t(z) - \log |g(z)|$ jest funkcją $\delta-$subharmoniczną w $\mathbb{C}$. □

W dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się metodą A. Baernsteina dla funkcji T^* (ang. star function) [4]. Dla liczby zespolonej $z = re^{i\theta}$ rozważmy

$$\begin{aligned} m^*(r,\theta,u_\phi) &= \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E u_\phi(re^{i\varphi})d\varphi, \\ T^*(r,\theta,u_\phi) &= m^*(r,\theta,u_\phi) + N(r,\infty,S), \end{aligned}$$

gdzie $r \in (0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$, E jest zbiorem mierzalnym i $|E|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru E [3]. Dla dowolnego $t \in (0,+\infty)$ rozważmy zbiór

$$G_t = \{re^{i\varphi} \colon u_\phi(re^{i\varphi}) > t\},$$

i niech

$$u_\phi^*(re^{i\varphi}) = \sup\{t \colon re^{i\varphi} \in G_t^*\},$$

gdzie G_t^* jest obrazem zbioru G_t powstałym w wyniku symetryzacji kołowej [26]. Funkcja $u_\phi^*(re^{i\varphi})$ jest nieujemna i nierosnąca na przedziale $[0,\pi]$, parzysta względem ϕ oraz dla ustalonego r równomierzalna z funkcją $u_\phi(re^{i\varphi})$. Spełnia ponadto następujące równości:

$$\begin{aligned} u_\phi^*(r) &= \max\{\log \max_{|z|=r} \|\mathbf{x}(z)\|, \phi(r)\}, \\ u_\phi^*(re^{i\pi}) &= \max\{\log \min_{|z|=r} \|\mathbf{x}(z)\|, \phi(r)\}, \\ m^*(r,\theta,u_\phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\theta u_\phi^*(re^{i\varphi})d\varphi. \end{aligned}$$

Przytoczmy teraz twierdzenie A. Baernsteina, które ma dla naszych wyników duże znaczenie.

Twierdzenie J. [4] *Niech $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, gdzie $u_1(z)$ i $u_2(z)$ są subharmonicznymi funkcjami w pierścieniu $r_1 < |z| < r_2$ oraz niech $m^*(re^{i\theta},u) = \sup\limits_{|E|=2\theta} \int_E u(re^{i\varphi})d\varphi$, gdzie $0 \le \theta \le \pi$, a $|E|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru E. Wtedy funkcja*

$$T^*(re^{i\theta},u) := m^*(re^{i\theta},u) + \int_{-\pi}^{\pi} u_2(re^{i\varphi})d\varphi$$

jest funkcją subharmoniczną w obszarze $\{re^{i\theta} \colon r_1 < r < r_2,\ 0 < \theta < \pi\}$ oraz ciągłą na zbiorze $\{re^{i\theta} \colon r_1 < r < r_2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$.

Funkcja $T^*(r,\theta,u_\phi)$ spełnia założenia Twierdzenia J, więc jest subharmoniczna w zbiorze $D = \{re^{i\theta} \colon 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \pi\}$, ciągła na $D \cup (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ oraz logarytmicznie wypukła dla $r > 0$ i dowolnego ustalonego $\theta \in [0,\pi]$. Ponadto

$$\begin{aligned} T^*(r,0,u_\phi) &= N(r,\infty,S), \\ T^*(r,\pi,u_\phi) &= T(r,S) + o(T(r,S)) \ \ (r \to \infty), \\ \frac{\partial}{\partial\theta} T^*(r,\theta,u_\phi) &= \frac{u_\phi^*(re^{i\theta})}{\pi} \ \text{ dla } \ 0 < \theta < \pi. \end{aligned}$$

Niech $\alpha(r)$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej r. Zdefiniujmy następujący operator

$$L\alpha(r) = \liminf_{h\to 0} \frac{\alpha(re^h) + \alpha(re^{-h}) - 2\alpha(r)}{h^2}. \tag{2.1}$$

Gdy $\alpha(r)$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną to $L\alpha(r) = r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\alpha(r)$ ([45], str. 280). Udowodnimy teraz następujący lemat.

Lemat 2.2. *[28] Niech $S = \{\boldsymbol{x}(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \colon z \in \mathbb{C}\}$ będzie meromorficzną powierzchnią minimalną. Dla prawie wszystkich $\theta \in [0, \pi]$ i dla każdego $r > 0$, takiego że funkcja $\|\boldsymbol{x}(z)\|$ nie posiada zer ani biegunów na okręgu $\{z \colon |z| = r\}$ zachodzi nierówność*

$$LT^*(r, \theta, u_\phi) \geq -\frac{p_\phi^2(r, \infty, S)}{\pi} \frac{\partial u_\phi^*(r, \theta)}{\partial \theta}.$$

Dowód. W dowodzie Lematu 2.2 stosowane są metody użyte w dowodzie Lematu 1 w pracy [35]. Niech r_0 będzie liczbą spełniającą warunki twierdzenia. Jako, że $u_\phi^*(r_0, \theta)$ jest nierosnącą funkcją zmiennej θ to z twierdzenia Lebesgue'a pochodna $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta}$ istnieje dla prawie każdego $\theta \in [0, \pi]$. Wybierzmy $\theta \in (0, \pi)$, takie że istnieje $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta}$.
Jeśli $u_\phi^*(r_0, \theta) = \phi(r_0)$ to $u_\phi^*(r_0, x) = \phi(r_0)$ dla dowolnego $x > \theta$, a zatem $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} = 0$. Skoro $T^*(r, \theta, u_\phi)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą to zachodzi $LT^*(r, \theta, u_\phi) \geq 0$. Dowodzi to prawdziwości tezy w przypadku, gdy $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} = 0$ lub, gdy $u_\phi^*(r_0, \theta) = \phi(r_0)$.
Przypuśćmy teraz, że $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} < 0$ oraz $u_\phi^*(r_0, \theta) > \phi(r_0)$. Istnieje wtedy zbiór $E(r_0, \theta)$ ([4]), taki że

$$m^*(r_0, \theta, u_\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{E(r_0,\theta)} u_\phi(r_0, \varphi) d\varphi,$$

gdzie

$$\{\varphi \colon u_\phi(r_0, \varphi) > u_\phi^*(r_0, \theta)\} \subset E(r_0, \theta) \subset \{\varphi \colon u_\phi(r_0, \varphi) \geq u_\phi^*(r_0, \theta)\}.$$

Rozważmy funkcję $F(\varphi) = \log \|\mathbf{x}(r_0 e^{i\varphi})\|$. Wtedy zbiór $\{\varphi \colon F(\varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)\}$ jest skończony. W przeciwnym wypadku istniałby zbieżny ciąg (φ_k), taki że $F(\varphi_k) = u_\phi^*(r_0, \theta)$. Jako, że r_0 został wybrany w taki sposób aby, że funkcja $\|\mathbf{x}(r_0 e^{i\varphi})\|$ nie posiada zer ani biegunów na okręgu $|z| = r_0$ to funkcja $F(\varphi)$ jest analityczna względem $\varphi \in [0, 2\pi]$. Z twierdzenia o identyczności wynika, że $F(\varphi_k) = u_\phi^*(r_0, \theta)$, a stąd $F(\varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)$ dla dowolnego $\varphi \in [0, 2\pi]$. Oznacza to, że $u_\phi(r_0, \varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)$ dla każdego $\varphi \in [0, 2\pi]$, a stąd $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem zbiór $\{\varphi \colon F(\varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)\}$ jest w istocie skończony. W rezultacie otrzymujemy równość

$$m^*(r_0, \theta, u_\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1(r_0,\theta)} u_\phi(r_0, \varphi) d\varphi,$$

gdzie $E_1(r_0, \theta) = \{\varphi \colon u_\phi(r_0, \varphi) > u_\phi^*(r_0, \theta)\}$.
Rozważmy teraz dla $r > 0$ funkcję

$$\Psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1(r_0,\theta)} u_\phi(r, \varphi) d\varphi.$$

Mamy wtedy $\Psi(r_0) = m^*(r_0, \theta, u_\phi)$ oraz $\Psi(r) \leq m^*(r, \theta, u_\phi)$ dla dowolnego $r > 0$. Stąd

$$Lm^*(r_0, \theta, u_\phi) \geq L\Psi(r_0).$$

Ponieważ zbiór $E_1(r_0, \theta)$ jest otwartym podzbiorem okręgu $|z| = r_0$ to $E_1(r_0, \theta) = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$. Funkcja $F(\varphi)$ jest analityczna dla dowolnego $\varphi \in [0, 2\pi]$, więc $F(\alpha_k) = F(\beta_k) = u_\phi^*(r_0, \theta)$. Z twierdzenia o identyczności wynika, że rodzina przedziałów (α_k, β_k) jest skończona. Niech

$m = m(r_0)$ oznacza liczbę tych przedziałów.
W [8] Beckenbach pokazał, że

$$\triangle \log \|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\| = \frac{2\langle(\mathbf{x}(re^{i\varphi}), \mathbf{X}(re^{i\varphi}))^2\rangle^2\eta}{\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|^2},$$

gdzie $\mathbf{X}(re^{i\varphi})$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni S oraz

$$\eta = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)^2 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)^2$$

oznacza współczynniki E i G pierwszej formy kwadratowej, dla których zachodzi równość. Wynika z tego, że funkcja $\log\|\mathbf{x}(z)\|$ jest subharmoniczna w pewnym sąsiedztwie okręgu $|z| = r_0$, ponieważ S nie posiada zer ani biegunów na tym okręgu. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}
L\Psi(r_0) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}u_\phi(re^{i\varphi})\Big|_{r=r_0} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|\Big|_{r=r_0} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left(r^2\triangle\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\| - \frac{\partial^2\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|}{\partial\varphi^2}\right)\Big|_{r=r_0} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m_0}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} r^2\triangle\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|\Big|_{r=r_0} d\varphi - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m_0}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{\partial^2\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|}{\partial\varphi^2}\Big|_{r=r_0} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m_0}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} r^2\triangle\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|\Big|_{r=r_0} d\varphi - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m_0}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{\partial^2 u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial\varphi^2} d\varphi \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m_0}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} r^2\triangle\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|\Big|_{r=r_0} d\varphi}_{\geq 0} - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m_0}\left[\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}\right]_{\alpha_k}^{\beta_k} \\
&\geq -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}\right]\Bigg|_{\alpha_k}^{\beta_k}.
\end{aligned}$$

Przy czym trzecia równość wynika z faktu, że laplasjan dowolnej funkcji dwóch zmiennych $u = u(r,\varphi)$ możemy przedstawić we współrzędnych biegunowych następująco

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right).$$

Skąd wynika, że

$$r\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} = r^2\triangle u - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Ostatecznie na podstawie powyższych rozważań wnioskujemy, że

$$Lm^*(r_0,\theta,u_\phi) \geq L\Psi(r_0) \geq -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}\right]\Bigg|_{\alpha_k}^{\beta_k}. \tag{2.2}$$

Wykażemy teraz, że

$$Lm^*(r_0,\theta,u_\phi) \geq -\frac{m}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}.$$

Zauważmy, że istnieją otoczenia punktów $\alpha_k,\ \beta_k\ (k=1,2,\ldots,m)$, w których funkcja $F(\varphi)=\log\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|$ jest odpowiednio ściśle rosnąca lub ściśle malejąca. W przeciwnym wypadku w sąsiedztwie jednej z liczb $\alpha_k,\ \beta_k$ istniałby zbieżny ciąg φ_k dążący do tej liczby i taki, że $F'(\varphi_k)=0$. Funkcja $F'(\varphi)$ jest analityczna dla $\varphi\in[0,2\pi]$, więc stosując twierdzenie o identyczności wnioskujemy, że $F'(\varphi)=0$ dla dowolnego $\varphi\in[0,2\pi]$. Wówczas dla każdego $\varphi\in[0,2\pi]$ mamy $F(\varphi)=\log\|\mathbf{x}(r_0e^{i\varphi})\|=u_\phi^*(r_0,\theta)$, a stąd $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial\theta}=0$ co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial\theta}<0$.

Prowadzi to do wniosku, że w pewnych sąsiedztwach punktów $\alpha_k,\ \beta_k\ (k=1,2\ldots,m)$ funkcja $\log\|\mathbf{x}(r_0e^{i\varphi})\|$ jest ściśle monotoniczna.

Skoro $u_\phi^*(r_0,\theta)>0$ to z definicji funkcji $\log^+(x)$ wynika, że istnieją sąsiedztwa punktów $\alpha_k,\ \beta_k$, w których $u_\phi(r_0,\theta)=\log\|\mathbf{x}(r_0e^{i\varphi})\|$. Z twierdzenia o identyczności wynika, że funkcja $u_\phi(r_0,\theta)$ jest ściśle monotoniczna w sąsiedztwie każdego z punktów α_k, β_k $(k=1,2,\ldots,m)$.
Chcemy pokazać, że $\frac{\partial u_\phi(r_0,\alpha_k)}{\partial\varphi}>0$ i $\frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k)}{\partial\varphi}<0$ dla każdego $k=1,2,\ldots,m$. Wybierzmy $h>0$, takie że funkcja $u_\phi(r_0,\varphi)$ jest ściśle rosnąca w h-sąsiedztwie punktu α_k. Wówczas

$$mes\{\varphi\colon u_\phi(r_0,\varphi)\geq u_\phi(r_0,\alpha_k+h)\}\leq 2\theta-h, \tag{2.3}$$

gdzie $mesA$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru A. Funkcja $u_\phi(r,\theta)$ jest równomierzalna z funkcją $u_\phi^*(r_0,\theta)$, zatem

$$\begin{aligned} mes\left\{\varphi\colon u_\phi(r_0,\varphi)\geq u_\phi^*\left(r_0,\theta-\tfrac{h}{2}\right)\right\} &= mes\left\{\varphi\colon u_\phi^*(r_0,\varphi)\geq u_\phi^*\left(r_0,\theta-\tfrac{h}{2}\right)\right\}\\ &= 2\theta-h. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Stąd oraz z nierówności (2.3) mamy

$$u_\phi(r_0,\alpha_k+h)\geq u_\phi^*\left(r_0,\theta-\frac{h}{2}\right).$$

Wobec tego

$$u_\phi(r_0,\alpha_k)=u_\phi^*(r_0,\theta) \tag{2.5}$$

oraz dla $h>0$ zachodzi nierówność

$$\frac{u_\phi(r_0,\alpha_k+h)-u_\phi(r_0,\alpha_k)}{h}\geq\frac{u_\phi^*\left(r_0,\theta-\frac{h}{2}\right)-u_\phi^*(r_0,\theta)}{h}.$$

Przechodząc w obu stronach powyższej nierówności do granicy przy $h\to 0^+$ otrzymujemy

$$\left.\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\alpha_k}\geq-\frac{1}{2}\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial\theta},\quad (k=1,2,\ldots,m).$$

Z naszego założenia mamy $\frac{\partial u_\phi(r_0,\theta)}{\partial\theta}<0$, więc

$$\frac{\partial u_\phi(r_0,\alpha_k)}{\partial\varphi}\geq-\frac{1}{2}\frac{\partial u_\phi(r_0,\theta)}{\partial\theta}>0,\quad (k=1,2,\ldots,m).$$

Podobnie pokażemy, że $\frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k)}{\partial\varphi} < 0$. Wybierzmy $h > 0$, takie że $u_\phi(r_0,\varphi)$ jest ściśle rosnącą funkcją w h-sąsiedztwie punktu β_k. Wówczas

$$mes\{\varphi\colon u_\phi(r_0,\varphi) \geq u_\phi(r_0,\beta_k - h)\} \leq 2\theta - h. \tag{2.6}$$

Funkcja $u_\phi(r_0,\theta)$ jest równomierzalna z funkcją $u^*_\phi(r_0,\theta)$, więc z (2.4) i (2.6) otrzymujemy, że $u_\phi(r_0,\beta_k - h) \geq u^*_\phi\left(r_0,\theta - \frac{h}{2}\right)$.
Stąd

$$u_\phi(r_0,\beta_k) \geq u^*_\phi(r_0,\theta), \tag{2.7}$$

oraz dla $h > 0$

$$\frac{u_\phi(r_0,\beta_k - h) - u_\phi(r_0,\beta_k)}{h} \geq \frac{u^*_\phi\left(r_0,\theta - \frac{h}{2}\right) - u^*_\phi(r_0,\theta)}{h}.$$

Jeśli $h \to 0^+$ to mamy

$$-\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{\beta_k} \geq -\frac{1}{2}\frac{\partial u^*_\phi(r_0,\theta)}{\partial\theta}.$$

Ponieważ założyliśmy, że $\frac{\partial u^*_\phi(r_0,\theta)}{\partial\theta} < 0$ to otrzymujemy, że

$$\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{\beta_k} \leq \frac{1}{2}\frac{\partial u^*_\phi(r_0,\theta)}{\partial\theta} < 0.$$

Pokazaliśmy, że

$$\frac{\partial u_\phi(r_0,\alpha_k)}{\partial\varphi} > 0, \quad \frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k)}{\partial\varphi} < 0, \quad \text{dla } k = 1,2,\ldots,m.$$

Niech $h_0 > 0$ będzie liczbą dodatnią, taką że dla każdego φ, spełniającego warunek $|\varphi| \leq h_0$, zachodzą nierówności

$$\alpha_k + h_0 < \beta_k - h_0, \quad \frac{\partial u_\phi(r_0,\alpha_k + \varphi)}{\partial\varphi} > 0 \text{ i } \frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k + \varphi)}{\partial\varphi} < 0 \text{ dla } k = 1,2,\ldots,m.$$

Oznaczmy przez γ_k najniższą wartość funkcji $u_\phi(r_0,\varphi)$ na przedziale $[\alpha_k + h_0, \beta_k - h_0]$. Niech ponadto $\gamma = \min_{1\leq k\leq m}\gamma_k$. Wówczas z równości (2.5) mamy

$$u_\phi(r_0,\alpha_1 + h_0) \geq \gamma > u_\phi(r_0,h_1) = u^*_\phi(r_0,\theta).$$

Wybierzmy teraz liczbę h_1, taką że $0 < h_1 \leq h_0$ i $u_\phi(r_0,\alpha_1 + h_1) = \gamma$. Z wyboru liczby h_1 wynika, że poniższy układ równań

$$\begin{cases} u_\phi(r_0,\beta_k - x) &= u_\phi(r_0,\alpha_1 + h) \\ u_\phi(r_0,\alpha_k + y) &= u_\phi(r_0,\alpha_1 + h) \end{cases}$$

posiada zawsze jedną parę rozwiązań dla każdego $0 < h < h_1$. Oznaczmy te rozwiązania przez $x_k(h)$ i $y_k(h)$. Z ciągłości funkcji $u_\phi(r_0,\varphi)$ oraz z równości

$$u_\phi(r_0,\beta_k) = u_\phi(r_0,\alpha_k) = u^*_\phi(r_0,\theta) \;\; (k = 1,2,\ldots,m)$$

otrzymujemy, że $x_k(h) \to 0,\ y_k(h) \to 0$, gdy $h \to 0$, ponieważ

$$u_\phi(r_0, \beta_k - x_k(h)) = u_\phi(r_0, \alpha_k) = u_\phi(\alpha_1 + h) \to u_\phi^*(r_0, \theta) \ \ (h \to 0^+).$$

Z drugiej strony zachodzi $u_\phi(r_0, \beta_k) = u_\phi^*(r_0, \theta)$, więc $x_k(h) \to 0$ przy $h \to 0^+$. Pokażemy teraz, że z różniczkowalności funkcji $u_\phi(r_0, \varphi)$ wynika równość

$$u_\phi(r_0, \beta_k) - u'_\phi(r_0, \beta_k) \cdot x_k + o(x_k) = u_\phi(r_0, \alpha_1) + u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h + o(h) \ \ (h \to 0),$$

gdzie przez $u'_\phi(r_0, \varphi)$ rozumiemy $\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial \varphi}$. Z definicji mamy

$$u'_\phi(r_0, \beta_k) = \lim_{x_k \to 0} \frac{u_\phi(r_0, \beta_k - x_k) - u_\phi(r_0, \beta_k)}{-x_k},$$

a zatem

$$u'_\phi(r_0, \beta_k) = \frac{u_\phi(r_0, \beta_k - x_k) - u_\phi(r_0, \beta_k)}{-x_k} + o(1) \ \ (x_k \to 0).$$

Stąd

$$(-x_k) \cdot u'_\phi(r_0, \beta_k) = u_\phi(r_0, \beta_k - x_k) - u_\phi(r_0, \beta_k) + o(x_k),$$

więc

$$u_\phi(r_0, \beta_k) - x_k \cdot u'_\phi(r_0, \beta_k) + o(x_k) = u_\phi(r_0, \beta_k - x_k).$$

Z drugiej strony mamy $u_\phi(r_0, \beta_k - x_k) = u_\phi(r_0, \alpha_1 + h)$ co nam daje

$$u_\phi(r_0, \alpha_1 + h) = u_\phi(r_0, \alpha_1) + u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h + o(h).$$

Z równości udowodnionej powyżej wynika, że

$$x_k = -\frac{u'_\phi(r_0, \alpha_1)}{u'_\phi(r_0, \beta_k)} \cdot h + o(h), \ \ h \to 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

W podobny sposób można pokazać, że zachodzi

$$y_k = \frac{u'_\phi(r_0, \alpha_1)}{u'_\phi(r_0, \alpha_k)} \cdot h + o(h), \ \ h \to 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Jednakże z wyboru $x_k,\ y_k$ mamy

$$\begin{aligned} mes\{\varphi\colon u_\phi(r_0, \varphi) \ge u_\phi(r_0, \alpha_1 + h)\} &= 2\theta - \sum_{k=1}^{m} (x_k + y_k) \\ &= 2\theta - \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{u'_\phi(r_0, \alpha_1)}{u'_\phi(r_0, \alpha_k)} - \frac{u'_\phi(r_0, \alpha_1)}{u'_\phi(r_0, \beta_k)} \right) h + o(h) \\ &= 2\theta - A(h), \end{aligned}$$

gdzie $A(h) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{u'_\phi(r_0,\alpha_1)}{u'_\phi(r_0,\alpha_k)} - \frac{u'_\phi(r_0,\alpha_1)}{u'_\phi(r_0,\beta_k)} \right) h + o(h)$. Ale jednocześnie

$$mes\{\varphi\colon u_\phi^*(r_0, \varphi) \ge u_\phi^*(r_0, \theta - \frac{1}{2} A(h))\} = 2\theta - A(h),$$

więc
$$u^*_\phi\left(r_0, \theta - \frac{1}{2}A(h)\right) = u_\phi(r_0, \alpha_1 + h).$$
Funkcja $u^*_\phi(r_0, \varphi)$ jest różniczkowalna w punkcie θ, a stąd
$$u^*_\phi(r_0, \theta) - \frac{1}{2}(u^*_\phi(r_0, \theta))' A(h) + o(A(h)) = u_\phi(r_0, \alpha_1) + u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h + o(h) \quad (h \to 0).$$
Ponieważ $u_\phi(r_0, \alpha_1) = u^*_\phi(r_0, \theta)$ to otrzymujemy
$$-\frac{1}{2}(u^*_\phi(r_0, \theta))' \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{u'_\phi(r_0, \alpha_k)} - \frac{1}{u'_\phi(r_0, \beta_k)}\right) \cdot u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h = u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h + o(h) \quad (h \to 0).$$
Skoro $u'_\phi(r_0, \alpha_1) > 0$ to mnożąc powyższą równość obustronnie przez $u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h$ mamy
$$1 = -\frac{1}{2}(u^*_\phi(r_0, \theta))' \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{u'_\phi(r_0, \alpha_k)} - \frac{1}{u'_\phi(r_0, \beta_k)}\right).$$
Mnożąc z kolei powyższą równość obustronnie przez $\sum_{i=1}^{m}(u'_\phi(r_0, \alpha_i) - u'_\phi(r_0, \beta_i))$ dostajemy
$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}(u'_\phi(r_0, \alpha_i) - u'_\phi(r_0, \beta_i)) = \\ &= -\tfrac{1}{2}(u^*_\phi(r_0, \theta))' \textstyle\sum_{k,i=1}^{m}(u'_\phi(r_0, \alpha_i) - u'_\phi(r_0, \beta_i)) \left(\frac{1}{u'_\phi(r_0, \alpha_k)} - \frac{1}{u'_\phi(r_0, \beta_k)}\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$
W celu oszacowania wyrażenia po prawej stronie równości (2.8) pokażemy teraz, że dla dodatnich liczb $a_k,\ b_k\ \ (k = 1, 2, \ldots, m)$ zachodzi nierówność
$$\sum_{k,i=1}^{m}(a_i + b_i)\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right) \geq 4m^2. \tag{2.9}$$
Dla $m = 1$ nierówność (2.9) jest spełniona, ponieważ
$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{(a_1 + b_1)^2}{a_1 b_1} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1 b_1} + 2 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1 b_1} \geq 2 \\ \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 \geq 2a_1 b_1 \Leftrightarrow (a_1 - b_1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$
Ostatnia nierówność jest oczywiście spełniona, a wszystkie przejścia były równoważne, zatem wyjściowa nierówność jest również prawdziwa.
Załóżmy teraz, że teza jest prawdziwa dla $m = n$, tzn.
$$\sum_{k,i=1}^{n}(a_i + b_i)\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right) \geq 4n^2.$$
Pokażemy, że jest ona prawdziwa dla $m = n + 1$
$$\begin{aligned} \sum_{k,i=1}^{n+1}(a_i + b_i)\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right) = \sum_{k,i=1}^{n}(a_i + b_i)\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \sum_{k,i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right) + \\ + \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{b_{n+1}}\right) \sum_{k,i=1}^{n}(a_i + b_i) \geq 4n^2 + 4(n+1) + 4n = 4n^2 + 8n + 4 = 4(n+1)^2. \end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność (2.9) jest prawdziwa. Stosując ją do prawej strony równości (2.8) mamy

$$\sum_{i=1}^{m}(u'_\phi(r_0,\alpha_i)-u'_\phi(r_0,\beta_i))\geq -\frac{1}{2}(u^*_\phi(r_0,\theta))'4m^2=-2m^2(u^*_\phi(r_0,\theta))'. \tag{2.10}$$

Zatem z (2.2) i (2.10) mamy

$$Lm^*(r_0,\theta,u_\phi)\geq -\frac{m^2}{\pi}(u^*_\phi(r_0,\theta))'.$$

Z definicji $p_\phi(r_0,\infty,S)$ oznacza ilość przedziałów składowych zbioru $\{\theta\colon \|\mathbf{x}(r_0e^{i\theta})\|>\phi(r_0)\}$ zawierających co najmniej jeden punkt maksimum funkcji $\|\mathbf{x}(r_0e^{i\theta})\|$. Z drugiej strony m jest liczbą przedziałów składowych zbioru $E_1(r_0,\theta)=\{\varphi\colon u_\phi(r_0,\varphi)>u^*(r_0,\theta)\}$ oraz $u^*(r_0,\theta)\geq\phi(r_0)$. Stąd $m\geq p_\phi(r_0,\infty,S)$. Ponadto $LT^*(r_0,\theta,u_\phi)\geq Lm^*(r_0,\theta,u_\phi)$ skąd otrzymujemy ostatecznie

$$LT^*(r,\theta,u_\phi)\geq -\frac{p^2_\phi(r,\infty,S)}{\pi}\frac{\partial u^*_\phi(r,\theta)}{\partial\theta}.$$

□

Lemat 2.3. *[30] Niech $S=\{\boldsymbol{x}(z)=(x_1(z),x_2(z),x_3(z))\colon z\in\mathbb{C}\}$ będzie meromorficzną powierzchnią minimalną. Dla prawie wszystkich $\theta\in[0,\pi]$ i dla każdego $r>0$, takiego że funkcja $\|\boldsymbol{x}(z)\|$ nie posiada zer ani biegunów na okręgu $\{z\colon |z|=r\}$ zachodzi nierówność*

$$LT^*(r,\theta,u_\phi)\geq -\frac{1}{\pi}\frac{\partial u^*_\phi(r,\theta)}{\partial\theta}.$$

W przypadku gdy, funkcja $T^*(r,\theta,u_\phi)$ jest dwukrotnie różniczkowalna Lemat 2.3 wynika bezpośrednio z subharmoniczności tej funkcji, ponieważ

$$\begin{aligned}LT^*(r,\theta,u_\phi)=r\tfrac{d}{dr}r\tfrac{d}{dr}T^*(r,\theta,u_\phi)&=r^2\Delta T^*(r,\theta,u_\phi)-\tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}T^*(r,\theta,u_\phi)\\ &\geq -\tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}T^*(r,\theta,u_\phi)=-\tfrac{1}{\pi}\tfrac{\partial u^*_\phi(r,\theta)}{\partial\theta},\end{aligned}$$

gdzie $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ oznacza operator Laplace'a, a $z=re^{i\theta}=x+iy$. Dowód Lematu 2.3 jest analogiczny do dowodu Lematu 2.2. Wystarczy w końcowej części dowodu wykorzystać fakt, że $m\geq 1$.
Rozważmy teraz ciąg liczb dodatnich $\{R_n\}$, taki że

$$\lambda=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,S)}{\log r}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log T(2R_n,S)}{\log R_n} \tag{2.11}$$

oraz spełniający dla $n\geq n_0$

$$T(2R_n,S)<R_n^{\lambda+1}.$$

Dla $\tau>0$, $0\leq\alpha\leq\min\{\pi,\frac{\pi}{2\tau}\}$ i $\frac{\pi}{2\tau}\leq\psi\leq\frac{\pi}{2\tau}$ niech

$$\begin{aligned}&\widetilde{h}_{\phi,\tau}(r)\colon=\tfrac{1}{\pi}\cos(\tau\psi)u^*_\phi(r)-\tfrac{1}{\pi}\cos(\tau(\alpha+\psi))u^*_\phi(re^{i\alpha})\\ &-\tau\sin(\tau(\alpha+\psi))T^*(r,\alpha,u_\phi)+\tau\sin(\tau\psi)N(r,\infty,S).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Lemat 2.4. *[30] Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ i niech $A = \{r \in (0,\infty) : \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) > 0\}$. Wówczas*

$$\tau \int\limits_{A\cap[1,R_n]} \frac{dt}{t} \leq (1+o(1)) \log T(2R_n, S) \quad (n \to \infty),$$

gdzie R_n jest ciągiem z (2.11).

Dowód. W dowodzie Lematu 2.4 stosujemy metodę z [35]. Niech

$$\sigma(r) = \int\limits_0^{\alpha} T^*(r,\theta,u_\phi) \cos \tau(\theta+\psi) d\theta.$$

Ponieważ $T^*(r,\theta,u_\phi)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą to dla dowolnego $r > 0$ i $h > 0$ mamy

$$T^*(re^h,\theta,u_\phi) + T^*(re^{-h},\theta,u_\phi) - 2T^*(r,\theta,u_\phi) \geq 0,$$

gdzie $T^*(r,\varphi,u_\phi) = T^*(re^{i\varphi},u_\phi)$.
Stosując wówczas lemat Fatou dla każdego $r > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L\sigma(r) &= L\int_0^{\alpha} T^*(r,\theta,u_\phi) \cos \tau(\theta+\psi) d\theta \\ &\geq \int_0^{\alpha} LT^*(r,\theta,u_\phi) \cos \tau(\theta+\psi) d\theta \geq 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Stąd $\sigma(r)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą, a więc $r\sigma'_-(r)$ jest funkcją rosnącą na $(0,\infty)$. Wówczas dla prawie każdego $r > 0$

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r)).$$

Z Lematu 2.3 i nierówności (2.13) dla prawie każdego $r > 0$ mamy

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r)) \geq -\int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(re^{i\theta})}{\partial\theta} \cos\tau(\theta+\psi) d\theta. \tag{2.14}$$

Jeśli dla $r > 0$ funkcja $\|\mathbf{x}(z)\|$ nie ma zer ani biegunów na okręgu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, to funkcja $u_\phi(re^{i\theta})$ spełnia warunek Lipschitza w punkcie θ. Stąd funkcja $u_\phi^*(re^{i\theta})$ również spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[0,\pi]$. Z wyników przedstawionych w pracy [26] wynika, że $u_\phi^*(re^{i\theta})$ jest absolutnie ciągła na przedziale $[0,\pi]$. Całkując dwukrotnie przez części całkę w prawej stronie nierówności (2.14) mamy

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(re^{i\theta})}{\partial\theta} \cos\tau(\theta+\psi) d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\cos(\tau\psi)u_\phi^*(r) - \cos(\tau(\alpha+\psi))u_\phi^*(re^{i\alpha})\right) \\ &+ \tau\left(\sin(\tau(\alpha+\psi))T^*(r,\alpha,u_\phi) - \sin(\tau\psi)N(r,\infty,S)\right) - \tau^2\sigma(r) \\ &= -\widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) - \tau^2\sigma(r). \end{aligned}$$

Jako, że $u^*_\phi(re^{i\theta})$ jest funkcją malejącą w θ to dla prawie każdego $r > 0$ zachodzi

$$\widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) + \tau^2\sigma(r) \geq 0. \tag{2.15}$$

Zatem dla prawie każdego $r > 0$ otrzymujemy

$$r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r)) \geq \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) + \tau^2\sigma(r) \geq 0.$$

Dzieląc obie strony powyższej nierówności przez $r^{\tau+1}$ oraz całkując przez części na przedziale $[r, R_n]$ mamy

$$\begin{aligned} \int_r^{R_n} \frac{\widetilde{h}_{\phi,\tau}(t)}{t^{\tau+1}}dt &\leq \int_r^{R_n} \frac{1}{t^\tau}\frac{d}{dt}(t\sigma'_-(t))dt - \tau^2\int_r^{R_n}\frac{\sigma(t)}{t^{\tau+1}}dt \\ &\leq \left(\frac{t\sigma'_-(t)}{t^\tau} + \tau\frac{\sigma\tau}{t^\tau}\right)\Bigg|_r^{R_n}, \quad 0 < r \leq R_n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Zastosujemy teraz metodę Barry'ego [6, 7]. Rozważmy funkcję

$$\Phi(r) = -\int_r^{R_n}\frac{\widetilde{h}_{\phi,\tau}(t)}{t^{\tau+1}}dt, \quad 0 < r \leq R_n.$$

Z nierówności (2.15) mamy

$$\Phi(r) \geq -\frac{\sigma'_-(R_n)}{R_n^{\tau-1}} - \tau\frac{\sigma(R_n)}{R_n^\tau} + \frac{\sigma'_-(r)}{r^{\tau-1}} + \tau\frac{\sigma(r)}{r^\tau}.$$

Niech

$$\psi(r) = r^\tau\left(\Phi(r) + \frac{\sigma'_-(R_n)}{R_n^{\tau-1}} + \tau\frac{\sigma(R_n)}{R_n^\tau}\right). \tag{2.17}$$

Wówczas

$$\psi(r) \geq r\sigma'_-(r) + \tau\sigma(r), \quad 0 < r \leq R_n.$$

Ponownie z (2.15) dla prawie każdego $r > 0$ otrzymujemy

$$r\psi'(r) = \tau\psi(r) + \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) \geq \tau r\sigma'_-(r) + \tau^2\sigma(r) + \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) \geq \tau r\sigma'_-(r) \geq 0.$$

Funkcja $T^*(r,\alpha,u_\phi)$ jest rosnąca przy $r \geq r_0$ ([5],[16]), więc $\sigma(r)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $[r_0, R_n]$. Wobec tego $r\sigma'_-(r) \geq 0$ dla każdego $r \geq r_0$. Ponadto $\sigma(r) > 0$ dla wszystkich $r \geq r_0$. Stąd dla każdego $r \geq r_0$ mamy

$$\psi(r) \geq r\sigma'_-(r) + \tau\sigma(r) > 0.$$

Niech $r \in A = \{r \in (0,\infty) : \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) > 0\}$. Wtedy $r\psi'(r) = \tau\psi(r) + \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) > \tau\psi(r) > 0$ dla wszystkich $r_0 \leq r \leq R_n$. Dlatego $\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} > \frac{\tau}{r}$, tak więc dla $r \geq r_0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau\int_{A\cap[1,R_n]}\frac{dr}{r} &\leq \int_{A\cap[r_0,R_n]}\frac{\psi'(r)}{\psi(r)}dr + \tau\log r_0 \\ &\leq \int_{r_0}^{R_n}\frac{\psi'(r)}{\psi(r)}dr + \tau\log r_0 \\ &= \log\frac{\psi(R_n)}{\psi(r_0)} + \tau\log r_0 \quad (n\to\infty). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Z drugiej strony $\psi(R_n) = R_n\sigma'_-(R_n) + \tau\sigma(R_n)$. Z definicji $\sigma(r)$ wynika, że

$$\sigma(r) = \int\limits_0^\alpha T^*(r,\theta,u_\phi)\cos\tau(\theta+\psi)d\theta \leq \int\limits_0^\alpha T^*(r,\theta,u_\phi)d\theta$$
$$\leq \int\limits_0^\alpha (T(r,S) + o(T(r,S)))d\theta = \pi T(r,S) + o(T(r,S)) \quad (r \to \infty).$$

Z monotoniczności funkcji $r\sigma'_-(r)$ otrzymujemy, że

$$r\sigma'_-(r) \leq \int\limits_r^{2r} \sigma'_-(t)dt \leq \sigma(2r) \leq \pi T(2r,S) + o(T(r,S)) \quad (r \to \infty).$$

Na mocy powyższej nierówności oraz z (2.17) i (2.18) mamy zatem

$$\begin{aligned}\tau \int\limits_{A\cap[1,R_n]} \frac{dr}{r} &\leq \log\frac{\psi(R_n)}{\psi(r_0)} + O(1) \leq \log\psi(R_n) + O(1)\\ &= \log\left[R_n\sigma'_-(R_n) + \tau\sigma(R_n)\right] + O(1)\\ &\leq \log T(2R_n,S) + o(T(R_n,S)) \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

co kończy dowód Lematu 2.4. □

2.1.2 Lematy dotyczące funkcji $\widehat{u}_\phi(z)$

Niech $S = \{\mathbf{x}(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \colon z \in \mathbb{C}\}$ będzie meromorficzną powierzchnią minimalną i niech $\phi(r)$ będzie dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą funkcją, taką że $\phi(r) = o(T(r,S))$. Rozważmy dla dowolnego $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ funkcję określoną następująco

$$\widehat{u}_\phi(z) = \max\left\{\log\frac{1}{\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}\|}, \phi(|z|)\right\}.$$

Lemat 2.5. *Funkcja $\widehat{u}_\phi(z)$ jest funkcją $\delta-$subharmoniczną w $\mathbb{C}$, tzn.*

$$\widehat{u}_\phi = u_1(z) - u_2(z),$$

gdzie $u_1(z), u_2(z)$ są funkcjami subharmonicznymi w$\mathbb{C}$ oraz

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta})d\theta = N(r,\boldsymbol{a},S) + H(r,\boldsymbol{a},S).$$

Dowód. Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną z zadaną parametryzacją $\mathbf{x}(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$. Wówczas na mocy twierdzenia Weierstrassa istnieje funkcja całkowita $g(z)$, której miejsca zerowe znajdują się w biegunach powierzchni S. Stąd mamy

$$\log\frac{1}{\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}\|} = \log\frac{|g(z)|}{\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}\||g(z)|} = \log|g(z)| - \log\left(\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}\||g(z)|\right).$$

Na mocy definicji funkcji $\widehat{u}_\phi(z)$ mamy

$$\widehat{u}_\phi(z) = \max(\log|g(z)|, \log\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}\||g(z)| + \phi(|z|)) - \log\left(\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}\||g(z)|\right).$$

Funkcja $\phi(r)$ jest wypukła dla $r > 0$, a zatem $\phi(|z|)$ jest funkcją subharmoniczną w $\mathbb{C}$ [54]. Ponadto,

$$u_1(z) := \max(\log|g(z)|, \log\left(\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}\||g(z)|\right) + \phi(|z|))$$

jest funkcją subharmoniczną. Stąd

$$\widehat{u}_\phi(z) = u_1(z) - \log\left(\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}\||g(z)|\right) = u_1(z) - u_2(z)$$

jest funkcją $\delta-$subharmoniczną w $\mathbb{C}$. □

Niech [4]

$$m^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi}\int_E \widehat{u}_\phi(re^{i\varphi})d\varphi,$$
$$T^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi) = m^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi) + N(r,\mathbf{a},S) + H(r,\mathbf{a},S),$$

gdzie $r \in (0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$, E jest zbiorem mierzalnym i $|E|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru E. Rozważmy dla dowolnego $t \in (0,+\infty)$ zbiór

$$G_t = \{re^{i\varphi} \colon \widehat{u}_\phi(re^{i\varphi}) > t\},$$

oraz funkcję

$$\widetilde{u}_\phi(re^{i\varphi}) = \sup\{t \colon re^{i\varphi} \in G_t^*\},$$

gdzie G_t^* powstaje na wskutek symetryzacji kołowej zbioru G_t [26].
Funkcja $\widetilde{u}_\phi(re^{i\varphi})$ jest nieujemna i nierosnąca na przedziale $[0,\pi]$, parzysta względem ϕ oraz dla dowolnego r jest równomierzalna z funkcją $\widehat{u}_\phi(re^{i\varphi})$. Ponadto spełnia następujące nierówności:

$$\widetilde{u}_\phi(r) = \max\{\log\max_{|z|=r}\frac{1}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}\|}, \phi(r)\},$$
$$\widetilde{u}_\phi(re^{i\pi}) = \max\{\log\min_{|z|=r}\frac{1}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}\|}, \phi(r)\},$$
$$m^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \widetilde{u}_\phi(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Z twierdzenia A. Baernsteina ([5]) wynika, że funkcja $T^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi)$ jest subharmoniczna w zbiorze $D = \{re^{i\theta} \colon 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \pi\}$, ciągła na $D \cup (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ oraz logarytmicznie wypukła dla $r > 0$ przy dowolnym ustalonym $\theta \in [0,\pi]$. Ponadto,

$$T^*(r,0,\widehat{u}_\phi) = N(r,\mathbf{a},S) + H(r,\mathbf{a},S),$$
$$T^*(r,\pi,\widehat{u}_\phi) = T(r,S) + o(T(r,S)) \ \ (r \to \infty),$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}T^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi) = \frac{\widetilde{u}_\phi(re^{i\theta})}{\pi} \ \text{ dla } \ 0 < \theta < \pi,$$

gdzie $r > 0$ jest liczbą, taką że na okręgu $\{z : |z| = r\}$ nie ma $\mathbf{a}-$punktów ani biegunów powierzchni S.

W paragrafie 2.1.1 zdefiniowaliśmy operator $L\alpha(r)$ dla funkcji rzeczywistej $\alpha(r)$ zmiennej rzeczywistej r. Operator ten był określony następująco

$$L\alpha(r) = \liminf_{h\to 0} \frac{\alpha(re^h) + \alpha(re^{-h}) - 2\alpha(r)}{h^2}.$$

Przypomnijmy, że $L\alpha(r) = r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\alpha(r)$ w przypadku gdy $\alpha(r)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w r.

Lemat 2.6. *Niech $S = \{\boldsymbol{x}(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \colon z \in \mathbb{C}\}$ będzie meromorficzną powierzchnią minimalną. Dla prawie każdego $\theta \in [0, \pi]$ i dla dowolnego $r > 0$, takiego że funkcja $\|\boldsymbol{x}(z)\|$ nie posiada zer ani biegunów na okręgu $\{z \colon |z| = r\}$, zachodzi*

$$LT^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi) \geq -\frac{1}{\pi}\frac{\partial \widetilde{u}_\phi(r,\theta)}{\partial\theta}.$$

W przypadku, gdy funkcja $T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi)$ jest dwukrotnie różniczkowalna Lemat 2.6 wynika z subharmoniczności tej funkcji, ponieważ

$$\begin{aligned} LT^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi) = r\tfrac{d}{dr}r\tfrac{d}{dr}T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi) &= r^2\Delta T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi) - \tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi) \\ &\geq -\tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi) = -\tfrac{1}{\pi}\tfrac{\partial\widetilde{u}_\phi(r,\theta)}{\partial\theta}, \end{aligned}$$

gdzie $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ oznacza operator Laplace'a, $z = re^{i\theta} = x + iy$. Dowód Lematu 2.6 jest analogiczny do dowodu Lematu 2.2.
Niech $\phi(r)$ będzie dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą funkcją, dla której $\phi(r) = o(T(r, S))$.
Dla $\tau > 0$ wybierzmy liczby α i ψ spełniające warunki

$$0 < \alpha \leq \min\left\{\pi, \frac{\pi}{2\tau}\right\}, \quad -\frac{\pi}{2\tau} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2\tau} - \alpha.$$

Dla $\tau > 0$ oznaczmy

$$\begin{aligned} &\widehat{h}_{\phi,\tau}(r) \colon = \tfrac{1}{\pi}\left(\widetilde{u}_\phi(r)\cos\tau\psi - \widetilde{u}_\phi(re^{i\alpha})\cos\tau(\alpha+\psi)\right) \\ &-\tau\left(T^*(r, \alpha, \widehat{u}_\phi)\sin\tau(\alpha+\psi) - (N(r, \mathbf{a}, S) + H(r, \mathbf{a}, S))\sin\tau\psi\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Lemat 2.7. *Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną i niech będzie dany zbiór*

$$A = \{r \in (0, \infty) : \widehat{h}_{\phi,\tau}(r) > 0\}.$$

Wtedy

$$\tau \int\limits_{A\cap[1,R]} \frac{dt}{t} \leq (1 + o(1)) \log T(2R, S) \quad (R \to \infty).$$

Dowód. Niech ([21, 23])

$$\sigma(r) = \int\limits_0^\alpha T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi)\cos\tau(\theta + \psi)d\theta.$$

Ponieważ $T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą to dla dowolnego $r > 0$ i $h > 0$ zachodzi

$$T^*(re^h, \theta, \widehat{u}_\phi) + T^*(re^{-h}, \theta, \widehat{u}_\phi) - 2T^*(r, \theta, \widehat{u}_\phi) \geq 0.$$

Wówczas stosując lemat Fatou dla każdego $r > 0$ mamy

$$\begin{aligned} L\sigma(r) &= L\int\limits_0^\alpha T^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi)\cos\tau(\theta+\psi)d\theta \\ &\geq \int\limits_0^\alpha LT^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi)\cos\tau(\theta+\psi)d\theta \geq 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Stąd $\sigma(r)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą, a więc funkcja $r\sigma'_-(r)$ jest rosnąca na $(0,\infty)$, gdzie $\sigma'_-(r)$ oznacza pochodną lewostronną funkcji $\sigma(r)$ w punkcie$r$. Wówczas dla prawie każdego $r > 0$

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r)).$$

Z Lematu 2.6 i nierówności (2.20) otrzymujemy, że dla prawie każdego $r > 0$ zachodzi

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r)) \geq -\int\limits_0^\alpha \frac{1}{\pi}\frac{\partial\widetilde{u}_\phi(re^{i\theta})}{\partial\theta}\cos\tau(\theta+\psi)d\theta. \tag{2.21}$$

Jeśli dla $r > 0$ funkcja $\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}\|$ nie posiada ani $\mathbf{a}-$punktów, ani biegunów na okręgu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ to funkcja $\widehat{u}_\phi(re^{i\theta})$ spełnia warunek Lipschitza w punkcie θ. Stąd funkcja $\widetilde{u}_\phi(re^{i\theta})$ spełnia również warunek Lipschitza na przedziale $[0,\pi]$. Z rozważań przedstawionych w [26] wynika zatem, że funkcja $\widetilde{u}_\phi(re^{i\theta})$ jest absolutnie ciągła na $[0,\pi]$. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy, że dla prawie wszystkich $r \geq r_0$

$$\begin{aligned} &-\int\limits_0^\alpha \tfrac{1}{\pi}\tfrac{\partial\widetilde{u}_\phi(re^{i\theta})}{\partial\theta}\cos\tau(\theta+\psi)d\theta = \\ &= \tfrac{1}{\pi}\left(\widetilde{u}_\phi(r)\cos\tau\psi - \widetilde{u}_\phi(re^{i\alpha})\cos\tau(\alpha+\psi)\right) - \\ &-\tau\left(T^*(r,\alpha,\widehat{u}_\phi)\sin\tau(\alpha+\psi) - (N(r,\mathbf{a},S) + H(r,\mathbf{a},S))\sin\tau\psi\right) + \tau^2\sigma(r) \\ &= \widehat{h}_{\phi,\tau}(r) + \tau^2\sigma(r). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ponieważ $\widetilde{u}_\phi(re^{i\theta})$ jest funkcją malejącą w punkcie θ to dla każdego $r > 0$

$$\widehat{h}_{\phi,\tau}(r) + \tau^2\sigma(r) \geq 0. \tag{2.23}$$

Wobec tego dla prawie każdego $r > 0$ z (2.21), (2.22) i (2.23) otrzymujemy

$$r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r)) \geq \widehat{h}_{\phi,\tau}(r) + \tau^2\sigma(r) \geq 0.$$

Dzieląc obie strony powyższej nierówności przez $r^{\tau+1}$ oraz całkując przez części na przedziale $[r,R]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int\limits_r^R \tfrac{\widehat{h}_{\phi,\tau}(t)}{t^{\tau+1}}dt &\leq \int\limits_r^R \tfrac{1}{t^\tau}\tfrac{d}{dt}(t\sigma'_-(t))dt - \tau^2\int\limits_r^R \tfrac{\sigma(t)}{t^{\tau+1}}dt \\ &\leq \left(\tfrac{t\sigma'_-(t)}{t^\tau} + \tau\tfrac{\sigma\tau}{t^\tau}\right)\Bigg|_r^R, \quad 0 < r \leq R. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Zastosujemy teraz metodę Barryego ([6, 7]). Rozważmy funkcję

$$\Phi(r) = -\int\limits_r^R \frac{\widehat{h}_{\phi,\tau}(t)}{t^{\tau+1}}dt, \quad 0 < r \leq R.$$

Z nierówności (2.24) mamy

$$\Phi(r) \geq -\frac{\sigma_-^{'}(R)}{R^{\tau-1}} - \tau\frac{\sigma(R)}{R^\tau} + \frac{\sigma_-^{'}(r)}{r^{\tau-1}} + \tau\frac{\sigma(r)}{r^\tau}.$$

Niech

$$\psi(r) = r^\tau\left(\Phi(r) + \frac{\sigma_-^{'}(R)}{R^{\tau-1}} + \tau\frac{\sigma(R)}{R^\tau}\right). \tag{2.25}$$

Wówczas

$$\psi(r) \geq r\sigma_-^{'}(r) + \tau\sigma(r), \quad 0 < r \leq R.$$

Z (2.23) otrzymujemy, że dla każdego $r > 0$ zachodzi

$$r\psi^{'}(r) = \tau\psi(r) + \widehat{h}_{\phi,\tau}(r) \geq \tau r\sigma_-^{'}(r) + \tau^2\sigma(r) + \widehat{h}_{\phi,\tau}(r) \geq \tau r\sigma_-^{'}(r) \geq 0.$$

Funkcja $T^*(r,\alpha,\widehat{u}_\phi)$ jest rosnąca dla $r \geq r_0$ ([5, 16]), a zatem $\sigma(r)$ jest funkcją rosnącą na $[r_0, R]$. Stąd $r\sigma_-^{'}(r) \geq 0$ dla dowolnego $r \geq r_0$. Ponadto $\sigma(r) > 0$ dla każdego $r \geq r_0$. Wtedy dla każdego $r \geq r_0$ mamy

$$\psi(r) \geq r\sigma_-^{'}(r) + \tau\sigma(r) > 0.$$

Niech $r \in A = \{r \in (0,\infty) : \widehat{h}_{\phi,\tau}(r) > 0\}$. Wtedy $r\psi^{'}(r) = \tau\psi(r) + \widehat{h}_{\phi,\tau}(r) > \tau\psi(r) > 0$ dla $r \in A$ i $r \in [r_0, R]$. Stąd $\frac{\psi^{'}(r)}{\psi(r)} > \frac{\tau}{r}$, więc dla $r \geq r_0$ i $r \in A$ mamy

$$\begin{aligned}
\tau \int\limits_{A\cap[1,R]} \tfrac{dr}{r} &\leq \int\limits_{A\cap[r_0,R]} \tfrac{\psi^{'}(r)}{\psi(r)}dr + \tau\log r_0 \\
&\leq \int\limits_{r_0}^{R} \tfrac{\psi^{'}(r)}{\psi(r)}dr + \tau\log r_0 \\
&= \log\tfrac{\psi(R)}{\psi(r_0)} + \tau\log r_0 \ \ (R\to\infty).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Z drugiej strony $\psi(R) = R\sigma_-^{'}(R) + \tau\sigma(R)$. Z definicji $\sigma(r)$ wynika, że

$$\begin{aligned}
\sigma(r) &= \int\limits_0^\alpha T^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi)\cos\tau(\theta+\psi)d\theta \leq \int\limits_0^\alpha T^*(r,\theta,\widehat{u}_\phi)d\theta \\
&\leq \int\limits_0^\alpha (T(r,S) + o(T(r,S)))d\theta \leq \pi T(r,S) + o(T(r,S)) \ \ (r\to\infty).
\end{aligned}$$

Natomiast z monotoniczności funkcji $r\sigma_-^{'}(r)$ wynika, że

$$r\sigma_-^{'}(r) \leq \int\limits_r^{2r}\sigma_-^{'}(t)dt \leq \sigma(2r) \leq \pi T(2r,S) + o(T(r,S)) \quad (r\to\infty).$$

Wówczas na mocy powyższej nierówności oraz (2.25) i (2.26) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\tau\int\limits_{A\cap[1,R]}\frac{dr}{r} &\leq \log\frac{\psi(R)}{\psi(r_0)} + O(1) \leq \log\psi(R) + O(1) \\
&= \log\left[R\sigma_-^{'}(R) + \tau\sigma(R)\right] + O(1) \\
&\leq \log T(2R,S) + O(1),
\end{aligned}$$

co kończy dowód Lematu 2.7. □

2.1.3 Lemat o pochodnej logarytmicznej dla meromorficznych powierzchni minimalnych w metryce jednostajnej zbieżności

Przytoczymy definicję pojęcia szczytów Pólya dla funkcji monotonicznych [51]. Niech $T(r)$ będzie funkcją rosnącą dla $r \geq r_0$ i mającą skończony rząd dolny λ, gdzie przez rząd dolny funkcji rzeczywistej $T(r)$ rozumiemy liczbę

$$\lambda = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

Ciąg $\{r_k\}$ nazywamy ciągiem *szczytów Pólya* funkcji $T(r)$ jeśli istnieją ciągi $A_k \to \infty$ i $\epsilon_k \to 0$, takie że dla każdego $r \in [A_k^{-1} r_k, A_k r_k]$ zachodzi następująca nierówność

$$T(r) \geq (1-\epsilon_k)\left(\frac{r}{r_k}\right)^{\lambda} T(r_k). \tag{2.27}$$

W naszych dalszych rozważaniach w tym paragrafie w miejsce funkcji $T(r)$ będziemy stosować charakterystykę Nevanlinny wzrostu m.p.m. S skończonego rzędu dolnego λ oraz $\{r_k\}$ będzie ciągiem szczytów Pólya dla tej funkcji. Z określenia szczytów Pólya można oszacować wzrost funkcji $\frac{T(r_k,S)}{r_k^{\lambda}}$. Niech $R_k = \frac{r_k}{24}$, $S_k = \frac{r_k}{24}e^{-\frac{2}{\epsilon}}$, gdzie $0 < \epsilon < 1$ jest dowolną ustaloną liczbą. Wówczas z nierówności (2.27) mamy

$$\frac{T(24S_k, S)}{S_k^{\lambda}} + \frac{T(24R_k, S)}{R_k^{\lambda}} < \epsilon \int\limits_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (k \to \infty). \tag{2.28}$$

Poniższy lemat stanowi uogólnienie znanego lematu o pochodnej logarytmicznej na przypadek meromorficznych powierzchni minimalnych otrzymane przez Rhoadsa i Weitsmana [53].

Lemat 2.8. *[53] Niech S będzie m.p.m. w $\mathbb{C}$. Wówczas dla dowolnego $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ równość*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|\boldsymbol{x}_u(re^{i\theta})\|}{\|\boldsymbol{x}(re^{i\theta}) - \boldsymbol{a}\|} d\theta = O(\log(rT(r,S)))$$

zachodzi dla każdego $r \to \infty$ z wyjątkiem zbioru E o skończonej mierze Lebesgue'a.

W podrozdziale 1.1 zdefiniowaliśmy pojęcie funkcji $\delta-$subharmonicznej. Przypomnijmy, że funkcję $u(z)$ nazywamy $\delta-$subharmoniczną na D jeśli $u(z)$ można przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcji subharmonicznych w D.

Lemat 2.9. *Funkcja $U(z) = \log \frac{\|\boldsymbol{x}_u(z)\|}{\|\boldsymbol{x}(z)\|}$ jest $\delta-$subharmoniczną funkcją na $\mathbb{C}$, innymi słowy $U(z) = U_1(z) - U_2(z)$, gdzie $U_1(z)$, $U_2(z)$ są funkcjami subharmonicznymi na $\mathbb{C}$ oraz*

$$N(r,U) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U_2(re^{i\theta})d\theta = H(r,0,S) + \overline{N}(r,0,S) + \overline{N}(r,\infty,S),$$

gdzie

$$\overline{N}(r,\infty,S) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}(\rho,\infty,S) - \overline{n}(0,\infty,S)}{\rho} d\rho + \overline{n}(0,\infty,S)\log r$$

i $\overline{n}(\rho,\infty,S)$ oznacza ilość biegunów powierzchni S w kole $\{z\colon |z| \leq \rho\}$ liczonych bez krotności.

Dowód. Niech $g(z)$ będzie funkcją całkowitą z miejscami zerowymi w biegunach powierzchni S_u i niech $g_1(z)$ będzie funkcją całkowitą z miejscami zerowymi w zerach powierzchni S z krotnością o jeden mniejszą. Wówczas

$$U(z) = \log \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\||g(z)|}{|g_1(z)|} - \log \frac{\|\mathbf{x}(z)\||g(z)|}{|g_1(z)|} : \ = U_1(z) - U_2(z).$$

Beckenbach i Hutchison [8] pokazali, że

$$\Delta \log (\|\mathbf{x}_u(z)\| = \frac{1}{2}\Delta \log E = -EK \geq 0, \text{ dla każdego } z : \|\mathbf{x}_u(z)\| \neq 0, \infty,$$

gdzie K oznacza krzywiznę Gaussa powierzchni minimalnej i

$$\Delta \log (\|\mathbf{x}(z)\| \geq 0, \text{ dla dowolnego } z : \|\mathbf{x}(z)\| \neq 0, \infty.$$

Łatwo jest pokazać, że funkcje $U_1(z)$, $U_2(z)$ są subharmoniczne na $\mathbb{C}$ i spełniają warunki Lematu 2.9. (patrz również [53, str. 73]). □

Następujący lemat jest odpowiednikiem lematu o pochodnej logarytmicznej dla m.p.m. S w metryce jednostajnej zbieżności.

Lemat 2.10. *Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ. Wówczas dla każdego $\epsilon > 0$ i $k > k_0(\epsilon)$ zachodzi poniższa nierówność*

$$\int_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda-1} \log^+ \max_{|z|=r} \frac{\|\boldsymbol{x}_u(z)\|}{\|\boldsymbol{x}(z)\|} dr < \epsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr,$$

gdzie S_k, R_k są ciągami określonymi w nierówności (2.28).

Uwaga 2.1. Lemat 2.10 został sformułowany i udowodniony w pracy [40], jednakże dowód ten zawiera usterki. Poniżej przedstawiamy kompletny i poprawny dowód.

Dowód. Na mocy wzoru Petrenki [48, str. 51] dla funkcji $\delta-$subharmonicznej $U(z) = \log \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|}$ (Lemat 2.9) mamy

$$\begin{aligned} &\int_{S_k}^{\frac{R_k}{2}} r^{-\lambda-1} L\left(r, \tfrac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right) dr \leq \pi\lambda \operatorname{ctg} \tfrac{\pi\lambda}{2y} \int_{S_k}^{\frac{R_k}{2}} r^{-\lambda-1} m\left(r, \tfrac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right) dr + \\ &+ \pi\lambda \operatorname{tg} \tfrac{\pi\lambda}{4y} \int_{S_k}^{\frac{R_k}{2}} r^{-\lambda-1} T(r,U) dr + Cy\left(\tfrac{T(2S_k,U)}{S_k^\lambda} + \tfrac{T(2R_k,U)}{R_k^\lambda}\right), \end{aligned} \tag{2.29}$$

gdzie $S_k,\ R_k$ są ciągami określonymi w nierówności (2.28), y jest dowolną ustaloną liczbą, taką że $y > \max\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$, $C =$const,

$$L\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|},$$

$$m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|\mathbf{x}_u(re^{i\theta})\|}{\|\mathbf{x}(re^{i\theta})\|} d\theta$$

oraz $T(r,U)$ jest charakterystyką $\delta-$subharmonicznej funkcji $U(z)=\log\frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|}$.

W pracy [53, str. 71] Rhoads i Weitsman pokazali, że

$$m\left(r,\frac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right)\leq\tfrac{1}{2}\log^{+}\mu(r)+\tfrac{1}{2}\log^{+}m(r,S)+O(1)\ \ (r\to\infty),\tag{2.30}$$

gdzie $\mu(r)=\mu(r,S)$ jest funkcją zmiennej r, taką że

$$\int\limits_1^r\left(\int\limits_0^t\tau\mu(\tau)d\tau\right)\frac{dt}{t}\leq T(r,S).\tag{2.31}$$

Dla funkcji $\mu(r)$ udowodnimy na potrzeby tego dowodu poniższy lemat.

Lemat 2.11. *Dla dowolnego* $\gamma>0$, $r_0>2$ *oraz* $R>r_0$ *zachodzi*

$$\begin{aligned}&\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{\log^{+}\mu(r)}{r^{\gamma+1}}dr\leq(\gamma+1)^2\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}}dr+5(\gamma+1)\tfrac{\log T(3R,S)}{R^{\gamma}}+\\&+\tfrac{8(\gamma+1)\log 2}{R^{\gamma}}+(\gamma+1)^2\tfrac{2\log 2}{\gamma r_0^{\gamma}}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Dowód. Niech

$$u(t)=\int\limits_0^t\log^{+}(\tau\mu(\tau))d\tau.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}&\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{\log^{+}\mu(r)}{r^{\gamma+1}}dr\leq\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{\log^{+}(r\mu(r))}{r^{\gamma+1}}dr=\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{1}{r^{\gamma+1}}du(r)=\tfrac{u(r)}{r^{\gamma+1}}\Big|_{r_0}^{R}+\\&+(\gamma+1)\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{u(r)}{r^{\gamma+2}}dr=\tfrac{u(R)}{R^{\gamma+1}}-\tfrac{u(r_0)}{r_0^{\gamma+1}}+(\gamma+1)\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{u(r)}{r^{\gamma+2}}dr\leq\\&\leq\tfrac{u(R)}{R^{\gamma+1}}+(\gamma+1)\int\limits_{r_0}^{R}\tfrac{u(r)}{r^{\gamma+2}}dr.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Z [25, str. 116] dla nieujemnej i mierzalnej na przedziale $[a,b]$ funkcji $f(x)$ zachodzi następująca nierówność

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\log^{+}f(x)dx\leq\log^{+}\left\{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx\right\}+\log 2,$$

Zatem na mocy powyższej nierówności dla każdego $r>2$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{r-1}\int\limits_1^r\frac{u(t)}{t}dt&=\frac{1}{r-1}\int\limits_1^r\frac{dt}{t}\int\limits_0^t\log^{+}(\tau\mu(\tau))d\tau\leq\\&\leq\frac{1}{r-1}\int\limits_1^r\log^{+}\left\{t^{-1}\int\limits_0^t\tau\mu(\tau)d\tau\right\}dt+\log 2\leq\\&\leq\log^{+}\left\{\frac{1}{r-1}\int\limits_1^r t^{-1}\left(\int\limits_0^t\tau\mu(\tau)d\tau\right)dt\right\}+2\log 2.\end{aligned}$$

Wówczas z (2.31) otrzymujemy

$$\frac{1}{r-1}\int_1^r \frac{u(t)}{t}dt \le \log T(r,S) + 2\log 2.$$

Stąd dla dowolnego $r > 2$ mamy

$$\frac{1}{r}\int_1^r \frac{u(t)}{t}dt \le \log T(r,S) + 2\log 2. \tag{2.34}$$

Całkując względem r oraz dzieląc obustronnie przez $r^{\gamma+1}$ obie strony nierówności (2.34) otrzymujemy, że dla $r_0 > 2$ zachodzi

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^R \frac{1}{r^{\gamma+2}}\left(\int_1^r \frac{u(t)}{t}dt\right)dr &\le \int_{r_0}^R \frac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}}dr + 2\log 2\int_{r_0}^R \frac{1}{r^{\gamma+1}}dr\\
&= \int_{r_0}^R \frac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}}dr + 2\log 2\left(\frac{r^{-\gamma}}{-\gamma}\right)\Bigg|_{r_0}^R\\
&= \int_{r_0}^R \frac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}}dr - 2\log 2\frac{R^{-\gamma}}{\gamma} + 2\log 2\frac{r_0^{-\gamma}}{\gamma}\\
&< \int_{r_0}^R \frac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}}dr + \frac{2\log 2}{\gamma r_0^{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Z drugiej strony jednak mamy

$$\int_{r_0}^R \frac{1}{r^{\gamma+2}}\left(\int_1^r \frac{u(t)}{t}dt\right)dr = -\frac{1}{\gamma+1}\int_{r_0}^R \left(\int_1^r \frac{u(t)}{t}dt\right)d\left(\frac{1}{r^{\gamma+1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{(\gamma+1)r^{\gamma+1}}\int_1^r \frac{u(t)}{t}dt\Bigg|_{r_0}^R + \frac{1}{\gamma+1}\int_{r_0}^R \frac{u(r)}{r^{\gamma+2}}dr =$$

$$= -\frac{1}{(\gamma+1)R^{\gamma+1}}\int_1^R \frac{u(t)}{t}dt + \frac{1}{(\gamma+1)r_0^{\lambda+1}}\int_1^{r_0} \frac{u(t)}{t}dt + \frac{1}{\gamma+1}\int_{r_0}^R \frac{u(r)}{r^{\gamma+2}}dr.$$

A stąd

$$\int_{r_0}^R \frac{u(r)}{r^{\gamma+2}}dr = (\gamma+1)\int_{r_0}^R \frac{1}{r^{\gamma+2}}\left(\int_1^r \frac{u(t)}{t}dt\right)dr +$$

$$+\frac{1}{R^{\gamma+1}}\int_1^R \frac{u(t)}{t}dt - \frac{1}{r_0^{\lambda+1}}\int_1^{r_0} \frac{u(t)}{t}dt.$$

Wówczas z (2.35) otrzymujemy

$$\int_{r_0}^R \frac{u(r)}{r^{\gamma+2}}dr \le (\gamma+1)\int_{r_0}^R \frac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}}dr + \frac{1}{R^{\gamma+1}}\int_1^R \frac{u(t)}{t}dt + (\gamma+1)\frac{2\log 2}{\gamma r_0^{\gamma}}. \tag{2.36}$$

Z (2.34) i (2.36) mamy

$$\int_{r_0}^{R} \frac{u(r)}{r^{\gamma+2}} dr \leq (\gamma+1) \int_{r_0}^{R} \frac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}} dr + \frac{2\log T(R,S)}{R^{\gamma}} + (\gamma+1)\frac{2\log 2}{\gamma r_0^{\gamma}}. \tag{2.37}$$

Z monotoniczności funkcji $u(R) \geq 0$ wynika, że

$$u(R) \leq \int_{R}^{3R} \frac{u(t)}{t} dt \leq \int_{1}^{3R} \frac{u(t)}{t} dt.$$

Wobec tego z (2.34) mamy

$$u(R) \leq 3R \log T(3R,S) + 6\log 2. \tag{2.38}$$

Podstawiając (2.37) i (2.38) do (2.33) otrzymujemy nierówność (2.32) co kończy dowód Lematu 2.11

□

Udowodnimy teraz Lemat 2.10 w przypadku gdy $\lambda > 0$.
Niech w Lemacie 2.11 będzie dane $r_0 = S_k$, $R = R_k$ oraz $\gamma = \lambda$, gdzie S_k, R_k są ciągami określonymi w (2.28). Z definicji ciągów R_k i S_k wynika, że

$$\frac{2\log 2}{\gamma r_0^{\gamma}} = \frac{2\log 2}{\lambda S_k^{\lambda}} < \frac{2\log 2T(S_k,S)}{\lambda S_k^{\lambda}} < \epsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr,$$

$$\frac{\log T(3R_k,S)}{R_k^{\lambda}} < \frac{T(3R_k,S)}{R_k^{\lambda}} < \epsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr,$$

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{\log T(r,S)}{r^{\gamma+1}} dr < \epsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Wówczas z Lematu 2.11 mamy

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{\log^+ \mu(r)}{r^{\lambda+1}} dr < \epsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr. \tag{2.39}$$

Z (2.30) i (2.39) otrzymujemy

$$\int_{S_k}^{R_k} \frac{m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right)}{r^{\lambda+1}} dr < \epsilon \int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (k \to \infty). \tag{2.40}$$

Ponieważ zachodzą następujące nierówności

$$\begin{aligned} T(r,U) \quad &\leq m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right) + N(r,\infty,S_u) + H(r,0,S) \\ &\leq m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right) + 2N(r,\infty,S) + H(r,0,S) \\ &\leq m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u\|}{\|\mathbf{x}\|}\right) + 3T(r,S) + O(1) \quad (k \to \infty), \end{aligned} \tag{2.41}$$

to z (2.28), (2.40) i (2.41) dla dowolnego $\epsilon > 0$ i $k \geq k_0(\epsilon)$ mamy

$$\int_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda-1}T(r,U)dr \leq (\epsilon+3)\int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr. \tag{2.42}$$

Rozpatrzymy teraz dwa ostatnie składniki w prawej stronie nierówności (2.29). Skoro $R_k \to \infty$ to istnieje ciąg $\widetilde{R_k} \in [2R_k, 3R_k]$, taki że $\widetilde{R_k} \notin E$, gdzie E jest zbiorem skończonej miary z Lematu 2.8.
Z Lematu 2.9 wynika, że

$$\begin{aligned} T(R,U) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(Re^{i\varphi})d\varphi + N(R,U) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|\mathbf{x}_u(Re^{i\varphi})\|}{\|\mathbf{x}(Re^{i\varphi})\|}(Re^{i\varphi})d\varphi + N(R,U). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Stąd

$$\begin{aligned} N(r,U) &= H(r,0,S) + \overline{N}(R,\infty,S) + \overline{N}(R,0,S) \\ &\leq H(r,0,S) + N(R,\infty,S) + N(R,0,S) \\ &\leq 2T(R,S) \ \ (R \to \infty). \end{aligned}$$

Z (2.43) i Lematu 2.8 mamy

$$\begin{aligned} &T\left(2R_k,U\right) \leq T\left(\widetilde{R_k},U\right) \leq 2T(\widetilde{R_k},S) + T(2R_k,S) \leq \\ &\leq 2T(3R_k,S) + T(2R_k,S) \leq 3T(3R_k,S) \ \ (k \to \infty). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Z podobnych rozważań otrzymujemy

$$T\left(2S_k,U\right) \leq 3T(3S_k,S) \ \ (k \to \infty). \tag{2.45}$$

Z (2.44), (2.45) oraz nierówności (2.28) dostajemy

$$\begin{aligned} &\frac{T(2R_k,U)}{R_k^\lambda} \leq \frac{3T(3R_k,S)}{R_k^\lambda} \leq \frac{3T(4R_k,S)}{R_k^\lambda} < \epsilon\int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr, \\ &\frac{T(2S_k,U)}{S_k^\lambda} \leq \frac{3T(3S_k,S)}{S_k^\lambda} \leq \frac{3T(4S_k,S)}{S_k^\lambda} < \epsilon\int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Stąd na mocy (2.29), (2.40), (2.42) oraz (2.46) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\int_{S_k}^{R_k} \log^+ \max_{|z|=r} \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|} r^{-\lambda-1}dr \leq \\ &\leq \left\{\epsilon\pi\lambda \operatorname{ctg}\frac{\pi\lambda}{4y} + (\epsilon+3)\pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4y} + \epsilon\right\}\int_{S_k}^{R_k} T(r,S)r^{-\lambda-1}dr \ \ (k \to \infty). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Wybierzmy liczbę y, taką że $\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4y} = \sqrt{\epsilon}$. Wówczas z (2.47) oraz z dowolności liczby ϵ wynika teza Lematu 2.20 w przypadku, gdy $\lambda > 0$.
W przypadku, gdy $\lambda = 0$ dowód Lematu 2.10 jest analogiczny (patrz [34]). □

Na koniec tego rozdziału zacytujmy jeszcze dwa lematy, które wykorzystamy w dowodzie jednego z głównych twierdzeń.

Lemat A. [35] Jeśli $f(x)$ jest niemalejącą funkcją na $[a, b]$ oraz $g(x)$ jest nieujemną funkcją mającą pierwszą pochodną ograniczoną na $[a, b]$ to

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx \leq f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g'(x)f(x)dx.$$

Lemat B. [48] Niech S będzie meromorficzną powierzchnią minimalną skończonego rzędu dolnego λ. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją ciągi S_k, R_k dążące do nieskończoności, takie że $\lim_{k\to\infty} \frac{S_k}{R_k} = 0$ oraz spełniające dla każdego $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\frac{T(2R_k, S)}{R_k^\lambda} + \frac{T(2S_k, S)}{S_k^\lambda} < \varepsilon \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, S)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

2.2 Oszacowanie z góry wielkości odchylenia meromorficznych powierzchni minimalnych

Dowód Twierdzenia 2.1. Jeśli $\beta(\infty, S) = 0$, to twierdzenie jest oczywiście prawdziwe. Załóżmy zatem, że $\beta(\infty, S) > 0$. Wówczas dla każdego ϕ mamy $p_\phi(\infty, S) \geq 1$.
Rozważmy wpierw przypadek, gdy $\lambda > 0$ i $p_\phi(\infty, S) < \infty$. Wybierzmy takie liczby α i ψ, aby zachodziły nierówności

$$0 < \alpha \leq \min\left(\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty, S)}{2\lambda} - \alpha\right), \quad -\frac{\pi p_\phi(\infty, S)}{2\lambda} \leq \psi \leq \frac{\pi p_\phi(\infty, S)}{2\lambda} - \alpha.$$

Ponadto rozważmy funkcję ([21] i [23])

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T^*(r, \varphi, u_\phi) \cos \frac{\lambda(\varphi + \psi)}{p_\phi(\infty, S)} d\varphi.$$

Ponieważ $T^*(r, \theta, u_\phi)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą to dla dowolnego $r > 0$ i $h > 0$ mamy

$$T^*(re^h, \theta, u_\phi) + T^*(re^{-h}, \theta, u_\phi) - 2T^*(r, \theta, u_\phi) \geq 0,$$

gdzie $T^*(r, \varphi, u_\phi) = T^*(re^{i\varphi}, u_\phi)$.
Stosując wówczas lemat Fatou dla każdego $r > 0$ otrzymujemy

$$L\sigma(r) = L \int_0^\alpha T^*(r, \varphi, u_\phi) \cos \frac{\lambda(\varphi + \psi)}{p_\phi(\infty, S)} d\varphi \geq \int_0^\alpha LT^*(r, \varphi, u_\phi) \cos \frac{\lambda(\varphi + \psi)}{p_\phi(\infty, S)} d\varphi \geq 0. \quad (2.48)$$

Z nierówności tej wynika, że funkcja $\sigma(r)$ jest logarytmicznie wypukła, a zatem funkcja $\sigma'_-(r)$ (pochodna lewostronna funkcji $\sigma(r)$ w punkcie r) jest rosnąca na przedziale $(0, \infty)$. Stąd dla prawie każdego $r > 0$ zachodzi

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr} r\sigma'_-(r).$$

Z nierówności (2.48) i Lematu 2.2 otrzymujemy zatem, że dla prawie każdego $r > 0$ mamy

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}r\sigma'_-(r) \geq -\int_0^\alpha \frac{p_\phi^2(r,\infty,S)}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}\cos\frac{\lambda(\varphi+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta. \tag{2.49}$$

Zgodnie z definicją funkcja $p_\phi(r,\infty,S)$ przyjmuje tylko wartości całkowite, więc dla $r \geq r_0$ zachodzi nierówność $p_\phi(\infty,S) \leq p_\phi(r,\infty,S)$. Stąd i z (2.49) wynika, że dla prawie każdego $r \geq r_0$,

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}r\sigma'_-(r) \geq -\int_0^\alpha \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}\cos\frac{\lambda(\varphi+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta. \tag{2.50}$$

Zauważmy, że jeśli funkcja $\|\mathbf{x}(z)\|$ nie posiada zer i biegunów na okręgu $|z| = r$ dla $r > 0$ to funkcja $u_\phi(r,\theta)$ spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[0,\pi]$. Stąd wynika, że funkcja $u_\phi^*(r,\theta)$ również spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[0,\pi]$ ([26]). Wobec tego funkcja $u_\phi^*(r,\theta)$ jest absolutnie ciągła na $[0,\pi]$ ([45]). Całkując dwukrotnie przez części prawą stronę nierówności (2.50) otrzymujemy

$$-\int_0^\alpha \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}\cos\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}\cos\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta \\
&= \left[\begin{array}{ll} u = \cos\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} & v' = \frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}d\theta \\ u' = -\frac{\lambda}{p_\phi(\infty,S)}\sin\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} & v = u_\phi^*(r,\theta) \end{array}\right] \\
&= -\frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\left[u_\phi^*(r,\theta)\cos\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}\bigg|_0^\alpha + \int_0^\alpha u_\phi^*(r,\theta)\frac{\lambda}{p_\phi(\infty,S)}\sin\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta\right] \\
&= -\frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}u_\phi^*(r,\alpha)\cos\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}u_\phi^*(r,0)\cos\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\
&- \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\int_0^\alpha \frac{u_\phi^*(r,\theta)}{\pi}\frac{\lambda}{p_\phi(\infty,S)}\sin\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta
\end{aligned}$$

Z własności funkcji $u_\phi^*(r,0)$ wiemy, że $u_\phi^*(r,0) = \max\left(\log\max_{|z|=r}\|\mathbf{x}(z)\|, \phi(r)\right)$, wobec tego kontynuując mamy

$$\begin{aligned}
&= -\frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}u_\phi^*(r,\alpha)\cos\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\max\left(\log\max_{|z|=r}\|\mathbf{x}(z)\|, \phi(r)\right)\cos\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad - \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)}\int_0^\alpha \frac{u_\phi^*(r,\theta)}{\pi}\sin\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi} u_\phi^*(r,\alpha)\cos\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\max\left(\log\max_{|z|=r}\|\mathbf{x}(z)\|,\phi(r)\right)\cos\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad - \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r,\theta)\sin\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}\Bigg|_0^\alpha \\
&\quad + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)}\int_0^\alpha \frac{\lambda}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r,\theta)\cos\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi} u_\phi^*(r,\alpha)\cos\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\max\left(\log\max_{|z|=r}\|\mathbf{x}(z)\|,\phi(r)\right)\cos\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad - \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r,\alpha)\sin\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r,0)\sin\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\frac{\lambda^2\pi}{p_\phi^2(\infty,S)}\int_0^\alpha T^*(r,\theta)\cos\frac{\lambda(\theta+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}d\theta
\end{aligned}
$$

Z własności funkcji $T^*(r,\theta)$ wiemy, że $T^*(r,0) = N(r,\infty,S)$, więc korzystając dodatkowo z definicji funkcji $\sigma(r)$ mamy dalej

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi} u_\phi^*(r,\alpha)\cos\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} \\
&\quad + \frac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\left(\max\left(\log\max_{|z|=r}\|\mathbf{x}(z)\|,\phi(r)\right)\cos\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r,\alpha)\sin\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}\right) \\
&\quad + \lambda p_\phi(\infty,S)N(r,\infty,S)\sin\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} + \lambda^2\sigma(r).
\end{aligned}
$$

Wobec tego z nierówności (2.50) wynika, że

$$
r\frac{d}{dr}r\sigma'_-(r) \geq h_{\phi,\lambda}(r) + \lambda^2\sigma(r), \tag{2.51}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
h_{\phi,\lambda}(r) :=& -\tfrac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi} u_\phi^*(r,\alpha)\cos\tfrac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} + \\
&+ \tfrac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi}\left(\max\left(\log\max_{|z|=r}\|\mathbf{x}(z)\|,\phi(r)\right)\cos\tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} - \right. \\
&\left. - \tfrac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r,\alpha)\sin\tfrac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)}\right) + \\
&+ \lambda p_\phi(\infty,S)N(r,\infty,S)\sin\tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)}.
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

Dzieląc obie strony nierówności (2.51) przez $r^{\lambda+1}$ i całkując na przedziale $[2S_k, R_k]$, gdzie S_k, R_k są ciągami określonymi w Lemacie B mamy

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h_{\phi,\lambda}(r)}{r^{\lambda+1}} dr + \lambda^2 \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma(r)}{r^{\lambda+1}} dr \leq \int_{2S_k}^{R_k} \frac{1}{r^\lambda} \frac{d}{dr} r\sigma'_-(r) dr = I. \tag{2.53}$$

Stosując Lemat B otrzymamy

$$I \leq \left. \frac{\sigma'_-(r)}{r^{\lambda+1}} \right|_{2S_k}^{R_k} + \lambda \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma'_-(r)}{r^\lambda} dr. \tag{2.54}$$

Z faktu, że funkcja $\sigma(r)$ jest logarytmicznie wypukła na przedziale $(0, +\infty)$ wynika, że funkcja $f(t) = \sigma(e^t)$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$, a zatem na wszystkich tych przedziałach jest ona absolutnie ciągła. Wynika stąd, że funkcja $\sigma(r) = f(\log r)$ również jest absolutnie ciągła na każdym przedziale $[a, b] \subset (0, +\infty)$.
Całkując przez części całkę w nierówności (2.54) mamy

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma'_-(r)}{r^\lambda} dr = \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma'(r)}{r^\lambda} dr = \frac{\sigma(R_k)}{R_k^\lambda} - \frac{\sigma(2S_k)}{(2S_k)^\lambda} + \lambda \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma(r)}{r^{\lambda+1}} dr. \tag{2.55}$$

Wobec tego z (2.53) i (2.55) otrzymujemy

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h_{\phi,\lambda}(r)}{r^{\lambda+1}} dr \leq \left. \left(\frac{\sigma'_-(r)}{r^{\lambda-1}} + \lambda \frac{\sigma(r)}{r^\lambda} \right) \right|_{2S_k}^{R_k}.$$

Z definicji $\sigma(r)$ biorąc dowolne $R \geq 0$ dostajemy

$$0 \leq \sigma(R) \leq \pi T(R, S). \tag{2.56}$$

Funkcja $r\sigma'_-(r)$ jest niemalejąca na przedziale $(0, \infty)$, więc

$$\sigma(2R) \geq \sigma(2R) - \sigma(R) = \int_R^{2R} \sigma'(r) dr = \int_R^{2R} \frac{r\sigma'_-(r)}{r} dr \geq R\sigma'_-(R) \int_R^{2R} \frac{dr}{r} = R\sigma'_-(R) \log 2.$$

Z powyższych dwóch obserwacji dla każdego $R > 0$ wynikają następujące nierówności

$$R\sigma'_-(R) \leq \frac{1}{\log 2} \sigma(2R) \leq \frac{\pi}{\log 2} T(2R, S), \tag{2.57}$$

a dla $R \geq 1$ dzięki monotoniczności funkcji $R\sigma'_-(R)$ mamy

$$R\sigma'_-(2R) \geq \sigma'_-(2). \tag{2.58}$$

Korzystając z (2.55), (2.56), (2.57) i (2.58) zauważmy, że mają miejsce następujące nierówności

$$\begin{aligned} \int_{2S_k}^{R_k} \frac{h_{\phi,\lambda}(r)}{r^{\lambda+1}} dr &\leq \frac{\sigma'_-(R_k)}{R_k^\lambda} + \lambda \frac{\sigma(R_k)}{R_k^\lambda} - \frac{\sigma'_-(2S_k)}{(2S_k)^{\lambda-1}} \frac{\sigma(2S_k)}{(2S_k)^\lambda} \\ &\leq \frac{\pi T(2R_k, S)}{\log 2 R_k^\lambda} + \lambda \frac{\pi T(R_k, S)}{R_k^\lambda} - \frac{2S_k \sigma'_-(2S_k)}{(2S_k)^\lambda} - \lambda \frac{\sigma(2S_k)}{(2S_k)^\lambda} \\ &\leq \pi \left(\frac{1}{\log 2} + \lambda \right) \frac{T(2R_k, S)}{R_k^\lambda}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Otrzymujemy zatem na mocy Lematu B, że dla $k \geq k_0(\varepsilon)$ zachodzi nierówność

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h_{\phi,\lambda}(r)}{r^{\lambda+1}} dr < \varepsilon \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Zatem istnieje ciąg $r_k \in [2S_k, R_k]$ dla, którego $h_{\phi,\lambda}(r_k) < \varepsilon T(r_k, S)$. Ponadto z definicji $h_{\phi,\lambda}(r)$ wynika, że istnieje taki ciąg $r_k \to \infty$, że dla $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &-\tfrac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi} u_\phi^*(r,\alpha) \cos \tfrac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} + \tfrac{p_\phi^2(\infty,S)}{\pi} \log \max_{|z|=r_k} \|\mathbf{x}(z)\| \cos \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\ &+\lambda p_\phi(\infty,S) N(r_k,\infty,S) \sin \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} - \lambda p_\phi(\infty,S) T^*(r_k,\alpha,u_\phi) \sin \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} < \varepsilon T(r_k,S). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Wykonajmy teraz w (2.60) podstawienie $\psi = \frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{2\lambda} - \alpha$. Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned} &\log \max_{|z|=r_k} \|\mathrm{x}(z)\| \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)} T^*(_k,\alpha,u_\phi) \\ &+\frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)} N(r_k,\infty,S) \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} < \varepsilon T(r_k,S). \end{aligned}$$

Ponieważ $T^*(r_k,\alpha,u_\phi) \leq T(r_k,S) + \phi(r_k)$ oraz $\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} < \frac{\pi}{2}$ to otrzymujemy następującą nierówność

$$\log \max_{|z|=r_k} \|\mathrm{x}(z)\| \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)} T(r_k,S) < \varepsilon T(r_k,S).$$

Otrzymujemy stąd na mocy definicji funkcji $\beta(\infty,S)$ następujące oszacowanie

$$\beta(\infty,S) \leq \frac{\varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)}}{\sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)}}, \tag{2.61}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ i α $\left(0 < \alpha \leq \min\left(\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{2\lambda}\right)\right)$ były wybrane dowolnie. Dzięki powyższemu oszacowaniu jesteśmy w stanie udowodnić dwa pierwsze przypadki twierdzenia.
Rozważmy przypadek, gdy $\frac{\lambda}{p(\infty,S)} \geq \frac{1}{2}$, wtedy dla każdego $\phi(r)$ zachodzi $\frac{\lambda}{p_\phi(\infty,S)} \geq \frac{1}{2}$. Wobec tego $\frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{2\lambda} \leq \pi$. Niech w (2.61) $\alpha = \frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{2\lambda}$. Wtedy

$$\beta(\infty,S) \leq \varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)}.$$

Ze względu na dowolność liczby $\varepsilon > 0$ mamy

$$\beta(\infty,S) \leq \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)}.$$

Ponieważ jest to spełnione dla dowolnego $\phi(r)$ zatem na mocy definicji $p(\infty,S)$ mamy

$$\beta(\infty,S) \leq \frac{\pi\lambda}{p(\infty,S)}.$$

Jeżeli $p(\infty,S) = 1$ i $\lambda < \frac{1}{2}$ to istnieje takie $\phi_1(r)$, że $p_{\phi_1}(\infty,S) = 1$. Stąd

$$\beta(\infty,S) \leq \frac{\pi\lambda}{\sin \lambda\alpha}.$$

W tym przypadku wiemy, że $0 < \alpha < \frac{\pi}{2\lambda}$, zatem

$$\beta(\infty, S) \leq \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}.$$

Natomiast w przypadku, gdy $\frac{\lambda}{p(\infty,S)} < \frac{1}{2}$ i $p(\infty, S) > 1$ istnieje takie $\phi_2(r)$, że zachodzi równość $p_{\phi_2}(\infty, S) = p(\infty, S)$. Stąd dostajemy $p_{\phi_2}(\infty, S) \geq 2$ dla $r \geq r_0$. Oznacza to, że $u^*_{\phi_2}(r, \pi) = \phi_2(r)$ dla $r \geq r_0$, ponieważ $\min\limits_{|z|=r} \log \|\mathbf{x}(z)\| \leq \phi_2(r)$. Zatem dla każdego $\phi(r)$ mamy

$$u^*_\phi(r, \pi) = \max(\min_{|z|=r} \log \|\mathrm{x}(z)\|, \phi(r)) \leq \max(\phi_2(r), \phi(r)) = o(T(r, S)), \quad (r \to \infty).$$

Dokonajmy teraz podstawienia $\alpha = \pi$ i $\psi = 0$ w nierówności (2.60). Wtedy dla $k \geq k_0$ mamy

$$\log \max_{|z|=r_k} \|\mathbf{x}(z)\| - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} T^*(r_k, \pi, u_\phi) \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} < \varepsilon T(r_k, S).$$

Stąd

$$\beta(\infty, S) \leq \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)},$$

a wobec dowolności $\phi(r)$ mamy

$$\beta(\infty, S) \leq \frac{\pi\lambda}{p(\infty, S)} \sin \frac{\lambda\lambda}{p(\infty, S)}.$$

Otrzymaliśmy zatem dowód w przypadku, gdy $\lambda > 0$. Załóżmy teraz, że $\lambda = 0$. Wtedy z (2.60) dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ mamy

$$\log \max_{|z|=r_k} \|\mathbf{x}(z)\| < \varepsilon T(r_k, S).$$

Zatem w tym przypadku $\beta(\infty, S) < \varepsilon$, a ponieważ ε był dowolną dodatnią liczbą, więc otrzymujemy $\beta(\infty, S) = 0$. Pokazaliśmy tym samym, że oszacowanie wartości $\beta(\infty, S)$ zawarte w tezie twierdzenia jest prawdziwe.

□

2.3 Oszacowanie gęstości logarytmicznej zbiorów

Dowód Twierdzenia 2.2. Gdy $\gamma \leq \lambda$ teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy zatem, że $\gamma > \lambda$. Niech τ będzie liczbą, taką że $\lambda < \tau < \gamma$. W Lemacie 2.4 niech $\alpha = \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\tau}\right)$, $\psi = \frac{\pi}{2\tau} - \alpha$. Wówczas

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) &= \tfrac{1}{\pi} u^*_\phi(r) \sin(\tau\alpha) - \tau T^*(re^{i\alpha}, S) + \tau \cos(\tau\alpha) N(r, \infty, S) \\ &\geq \tfrac{1}{\pi} u^*_\phi(r) \sin(\tau\alpha) - \tau(1 + o(1)) T(r, S) \\ &\geq \tfrac{\sin(\tau\alpha)}{\pi} (\mathcal{L}(r, \infty, S) - B(\gamma) T(r, S)) \quad (r > r_0), \end{aligned} \tag{2.62}$$

gdzie $\widetilde{h}_{\phi,\tau}(r)$ zostało zdefiniowane w (2.12). Z Lematu 2.4 mamy

$$\tau \int\limits_{A \cap [1, R_n]} \frac{dt}{t} \leq (1 + o(1)) \log T(2R_n, S) \quad (n \to \infty),$$

gdzie $A = \{r \in (0,\infty)\colon \widetilde{h}_{\phi,\tau}(r) > 0\}$. Wówczas z (2.11) mamy $\tau \underline{logdens} A \le \lambda$.
Niech

$$A_1 = \{r \in (r_0,\infty) : \mathcal{L}(r,\infty,S) - B(\gamma)T(r,S) > 0\}.$$

Z (2.62)wynika, że $A_1 \subset A$, więc

$$\underline{logdens} A_1 \le \underline{logdens} A \le \frac{\lambda}{\tau}.$$

Wówczas

$$\overline{logdens}\{r \in (0,\infty) : \mathcal{L}(r,\infty,S) \le B(\gamma)T(r,S)\} \ge 1 - \frac{\lambda}{\tau}.$$

Stąd dla każdego τ, takiego że $\lambda < \tau < \gamma$ mamy

$$\overline{logdens} E(\gamma) \ge 1 - \frac{\lambda}{\tau}$$

i przechodząc do granicy przy $\tau \to \gamma$ otrzymujemy

$$\overline{logdens} E(\gamma) \ge 1 - \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Dowód dla oszacowania dolnej gęstości logarytmicznej przeprowadza się w podobny sposób biorąc za R_n dowolne liczby dodatnie. Kończy to dowód Twierdzenia 2.2.

$\square$

Dowód Twierdzenia 2.3. Rozważmy wpierw przypadek, gdy $\Delta(\mathbf{a}, S) > 0$.
Jeśli $\gamma \le \lambda$ to teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy zatem, że $\gamma > \lambda$. Niech τ będzie liczbą, taką że $\lambda < \tau < \gamma$.
Zauważmy, że z Lematu 2.7 wynika, że gęstość logarytmiczna zbioru

$$E_1 := \{r \in (0,\infty) : h_{\phi,\tau}(r) \le 0\}$$

spełnia nierówność

$$\overline{logdens} E_1 \ge 1 - \frac{\lambda}{\tau}. \tag{2.63}$$

W Lemacie 2.7 weźmy $\psi = \frac{1}{2\tau} - \alpha$. Wówczas

$$\widehat{h}_{\phi,\tau}(r) = \frac{1}{\pi}\mathcal{L}(r,\mathbf{a},S)\sin\tau\alpha - \tau T^*(re^{i\alpha},\widehat{u}_\phi) + \tau\cos\tau\alpha(N(r,\mathbf{a},S) + H(r,\mathbf{a},S)).$$

Z definicji defektu Valirona dla m.p.m. S oraz z nierówności $T^*(re^{i\alpha},\widehat{u}_\phi) \le (1+o(1))T(r,S)$ mamy

$$\begin{aligned}\widehat{h}_{\phi,\tau}(r) \ge{}& \frac{1}{\pi}\mathcal{L}(r,\mathbf{a},S)\sin\tau\alpha - \\ &- \tau(1 - (1 - \Delta(\mathbf{a},S) - \epsilon)\cos\tau\alpha)T(r,S) + o(T(r,S)).\end{aligned}$$

Dla $r \in E_1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(r,\mathbf{a},S) \le{}& \frac{\pi\tau}{\sin\tau\alpha}\left((1 - (1 - \Delta(\mathbf{a},S) - \epsilon))\cos\tau\alpha\right)T(r,S) + \\ &+ o(T(r,S)) \ \ (r \to \infty).\end{aligned}$$

Niech $\alpha = \frac{\arccos(1-\Delta(\mathbf{a},S))}{\tau}$ w przypadku, gdy $\arccos(1-\Delta(\mathbf{a},S)) < \pi\tau$ oraz niech $\alpha = \pi$ w przypadku, gdy $\arccos(1-\Delta(\mathbf{a},S)) \geq \pi\tau$.
Na mocy definicji wielkości $B(\gamma,\Delta)$ dla $r \in E_1$ zachodzi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(r,\mathbf{a},S) &\leq B(\tau,\Delta(\mathbf{a},S))T(r,S) + o(T(r,S)) \\ &< B(\gamma,\Delta(\mathbf{a},S))T(r,S) \quad (r \to \infty).\end{aligned}$$

Wobec tego istnieje $r_0 > 0$, takie że $E_1 \cap [r_0,\infty) \subset E(\gamma) \cap [r_0,\infty)$, a więc z (2.63) wynika, że

$$\overline{logdens}E(\gamma) \geq \overline{logdens}E_1 \geq 1 - \frac{\lambda}{\tau}.$$

Stąd dla dowolnego τ, takiego że $\lambda < \tau < \gamma$ mamy

$$\overline{logdens}E(\gamma) \geq 1 - \frac{\lambda}{\tau}.$$

Przechodząc do granicy przy $\tau \to \gamma^-$ otrzymujemy tezę twierdzenia.
W przypadku, gdy $\Delta(\mathbf{a},S) = 0$ dowód Twierdzenia 2.3 jest analogiczny do przedstawionego powyżej. Wystarczy jedynie w miejsce $\Delta(\mathbf{a},S)$ przyjąć dowolną liczbę dodatnią.
Dowód dla dolnej gęstości logarytmicznej przeprowadza się w podobny sposób.

□

2.4 Oszacowanie z góry sumy odchyleń meromorficznych powierzchni minimalnych

Dowód Twierdzenia 2.4. W dowodzie Twierdzenia 2.4 stosujemy metody z pracy [34]. Niech S będzie meromorficzną powierzchnia minimalną skończonego rzędu dolnego λ. Wtedy S może być przedstawiona we współrzędnych izotermicznych u, v w postaci następującej parametryzacji

$$\begin{cases} x_1(z) &= Ref_1(z), \\ x_2(z) &= Ref_2(z), \\ x_3(z) &= Ref_3(z), \end{cases}$$

gdzie $x_i(z)$, $\quad (i = 1,2,3)$ są jednoznacznymi funkcjami harmonicznymi na $\mathbb{C}$, a $f_i(z)$ są funkcjami analitycznymi ($i = 1,2,3$).
Niech $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^q$ będzie zbiorem różnych wektorów w $\mathbb{R}^3$, takich że

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_j = (a_j^1, a_j^2, a_j^3),\ \ a_j^i \in \mathbb{R},\ \ a_j^i \neq \infty, \\ \beta(\mathbf{a}_j,S) > 0,\ \ j = 1,2,\ldots,q;\ \ q \geq 2, \\ c = \min_{i \neq j}\{\|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}j\|\} > 0.\end{aligned}$$

Niech $G_k = \{z \in K(S_k,R_k)\colon \log\|\mathbf{x}_u(z)\| < -2\epsilon T(12r,S)\}$, gdzie S_k, R_k są ciągami ustalonymi w (2.28), a ϵ jest dowolną ustaloną liczbą, taką że $0 < \epsilon < 1$. Oczywistym jest, że funkcje $f_i(z)$ $(i = 1,2,3)$ są holomorficzne na G_k.
Rozważmy teraz zbiór G_{kj} złożony ze spójnych składowych zbioru G_k, takich że w każdej z nich istnieje punkt z_1, dla którego $\|\mathbf{x}(z_1) - \mathbf{a}_j\| < \frac{c}{6}$. Skoro $\beta(\mathbf{a}_j,S) > 0$ to przy $k > k_0(\epsilon)$

zbiory G_{kj} są niepuste.
Pokażemy, że dla $k > k_0(\epsilon, c)$ zbiory G_{kj} są parami rozłączne. W tym celu zastosujemy metodę Weitsmana [60] (patrz także [34]).
Niech $r_n = 2^n$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Rozważmy pierścień kołowy $K(S_k, R_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ oraz pierścienie $K(r_n, r_{n+1})$, gdzie $n = m_0(k), m_0(k) + 1, \ldots, M_0(k)$. Liczby $m_0(k)$, $M_0(k)$ spełniają nierówności

$$r_{m_0(k)} \leq S_k \leq r_{m_0(k)+1}, \quad r_{M_0(k)-1} \leq R_k \leq r_{M_0(k)}.$$

Rozważmy teraz funkcję $f_1(z)$. Pochodna $f_1'(z)$ jest funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$. Z twierdzenia Cartana [27] wynika, że

$$\int_0^{2\pi} n\left(2r_n, \frac{1}{f_1'(z) - te^{i\varphi}}, f_1\right) d\varphi \leq \int_0^{2\pi} N\left(6r_n, \frac{1}{\frac{f_1'(z)}{t} - e^{i\varphi}}, f_1\right) d\varphi \leq$$
$$\leq \log^+ \frac{1}{t} + (2 + o(1))T(12r_n, f_1) < \log^+ \frac{1}{t} + (2 + o(1))T(12r_n, S),$$
$$(n = m_0(k), m_0(k) + 1, \ldots, M_0(k),\ k \to \infty).$$

Oznaczmy przez $l_1(t)$ całkowitą sumę długości krzywych będących poziomicami $|f_1'(z)| = t$ w kole $S(0, 2r_n)$. Niech $\gamma_{11} = \exp\left(-\epsilon T(12r_n, S)\right)$, $\gamma_{12} = \frac{\gamma_{11}}{2}$. Zgodnie z zasadą długości i pola (ang. length-area principle) [26] mamy

$$\int_{\gamma_{12}}^{\gamma_{11}} \frac{l_1^2(t)}{t} dt \leq C_1 r_n^2 \left(\log^+ \frac{1}{\gamma_{12}} + T(12r_n, S)\right).$$

Jednakże

$$\int_{\gamma_{12}}^{\gamma_{11}} \frac{l_1^2(t)}{t} dt = \int_{\log\gamma_{12}}^{\log\gamma_{11}} l_1^2(e^x) dx = \int_{-\log\gamma_{11}}^{-\log\gamma_{12}} l_1^2(e^{-\alpha}) d\alpha.$$

Skoro $\gamma_{11} = 2\gamma_{12} = \exp\left(-\epsilon T(12r_n, S)\right)$ to istnieje liczba

$$\alpha_{1n} \in [\epsilon T(12r_n, S), \epsilon T(12r_n, S) + \log 2],$$

taka że $l_1(e^{-\alpha_{1n}}) \leq C_2 r_n \sqrt{T(12r_n, S)}$.
Z podobnych rozważań dla funkcji $f_2(z)$ i $f_3(z)$ otrzymujemy, że istnieją liczby

$$\alpha_{2n} \in [\epsilon T(12r_n, S), \epsilon T(12r_n, S) + \log 2] \colon\ l_2(e^{-\alpha_{2n}}) \leq C_3 r_n \sqrt{T(12r_n, S)},$$
$$\alpha_{3n} \in [\epsilon T(12r_n, S), \epsilon T(12r_n, S) + \log 2] \colon\ l_3(e^{-\alpha_{3n}}) \leq C_4 r_n \sqrt{T(12r_n, S)},$$

gdzie $l_2(t)$ jest całkowitą sumą długości krzywych będących poziomicami $|f_2'(z)| = t$, a $l_3(t)$ jest całkowitą sumą długości krzywych będących poziomicami $|f_3'(z)| = t$ w kole $S(0, 2r_n)$.
Niech dla $n = m_0(k), m_0(k) + 1, \ldots, M_0(k)$

$$G_{nk}'^{1} = \{z \in K(S_k, R_k) \cap \overline{K(r_n, r_{n+1})} \colon\ \log|f_1'(z)| < -\alpha_{1n}\},$$
$$G_{nk}'^{2} = \{z \in K(S_k, R_k) \cap \overline{K(r_n, r_{n+1})} \colon\ \log|f_2'(z)| < -\alpha_{2n}\},$$
$$G_{nk}'^{3} = \{z \in K(S_k, R_k) \cap \overline{K(r_n, r_{n+1})} \colon\ \log|f_3'(z)| < -\alpha_{3n}\}.$$

Niech ponadto

$$G_{nk}^{'} = \bigcap_{j=1}^{3} G_{nk}^{'j}.$$

Funkcje $f_i^{'}$ są holomorficzne na $G_{nk}^{'}$, a zbiór $G_{nk}^{'}$ jest jednospójny, więc funkcje f_i również są holomorficzne na $G_{nk}^{'}$. Wykażemy teraz, że z definicji zbiorów G_k i $G_{nk}^{'}$ wynika, że dla $k \geq k_0(\epsilon, c)$ zachodzi

$$\bigcup_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} G_{nk}^{'} \supset G_k.$$

Istotnie, niech $z \in G_k$. Wtedy $\|\mathbf{x}_u(z)\| < \exp\left(-2\epsilon T(12r, S)\right)$, a stąd

$$|f_1^{'}(z)| = \left|\frac{dx_1}{du} + i\frac{dy_1}{du}\right| < \left|\frac{dx_1}{du}\right| + \left|\frac{dy_1}{du}\right| = \left|\frac{dx_1}{du}\right| + \left|\frac{dx_1}{dv}\right| = 2\left|\frac{dx_1}{du}\right| <$$
$$< 2\exp\left(-2\epsilon T(12r, S)\right) < \exp\left(-\epsilon T(12r, S)\right).$$

Wobec tego mamy $|f_1^{'}(z)| < \exp\left(-\epsilon T(12r, S)\right)$. Niech $z \in \overline{K(r_n, r_{n+1})}$ i $z \in G_k$. Wtedy $\log\|\mathbf{x}_u(z)\| \leq -2\epsilon T(12r, S) \leq -2\epsilon T(12r_n, S)$ skąd mamy

$$\begin{aligned}
&|f_1^{'}(z)| = \left|\tfrac{dx_1}{du} + i\tfrac{dy_1}{du}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\tfrac{dy_1}{du}\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\tfrac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\tfrac{dx_1}{dv}\right)^2} \leq \sqrt{2}\|\mathbf{x}_u(z)\| < \sqrt{2}\exp\left(-2\epsilon T(12r_n, S)\right) = \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{\exp\left(-\frac{\epsilon}{2}T(12r_n, S)\right)} \exp\left(-\epsilon\tfrac{3}{2}T(12r_n, S)\right) < \exp\left(-\tfrac{3\epsilon}{2}T(12r_n, S)\right).
\end{aligned}$$

Mamy zatem, że jeśli $|f_1^{'}(z)| < \exp\left(-\epsilon T(12r, S)\right)$ to $\log|f_1^{'}(z)| < -\epsilon T(12r_n, S)$, ale

$$\epsilon T(12r_n, S) \leq \alpha_{1n} \leq \epsilon T(12r_n, S) + \log 2,$$

więc

$$\alpha_{1n} \leq \epsilon T(12r_n, S) + \log 2 < \frac{3\epsilon}{2}T(12r_n, S), \quad (n \to \infty).$$

Stąd mamy

$$-\alpha_{1n} \geq -\epsilon\frac{3}{2}T(12r_n, S).$$

Wobec tego $\log|f_1^{'}(z)| < -\alpha_{1n}$, a zatem $z \in G_{nk}^{'1}$.
Podobnie można pokazać, że jeśli $z \in G_k$ to $z \in G_{nk}^{'2}$ i $z \in G_{nk}^{'3}$. Wobec tego dostajemy, że $z \in \bigcap\limits_{j=1}^{3} G_{nk}^{'j} = G_{nk}^{'}$. Jednakże $\bigcup\limits_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} \overline{K(r_n, r_{n+1})} \supset G_k$, a stąd $G_{nk}^{'} \supset G_k \cap \overline{K(r_n, r_{n+1})}$, więc mamy

$$\bigcup_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} G_{nk}^{'} \supset \bigcup_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} \left(G_k \cap \overline{K(r_n, r_{n+1})}\right) = G_k \cap \left(\bigcup_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} \overline{K(r_n, r_{n+1})}\right) = G_k.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$G_k \subset \bigcup_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} G_{nk}^{'}, \quad (k \to \infty).$$

Teraz pokażemy, że zbiory G_{kj} dla $k \geq k_0$ są parami rozłącznymi zbiorami.
Niech $z \in G_{kj}$. Wówczas istnieje spójna składowa $\mathcal{M}$ zbioru G_k, taka że $z \in \mathcal{M}$ okraz istnieje punkt $z_1 \in \mathcal{M}$, dla którego $\|\mathbf{x}(z_1) - \mathbf{a}_j\| < \frac{c}{6}$. Ponieważ $\bigcup\limits_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} G'_{nk} \supset \mathcal{M}$, to istnieje krzywa $\Gamma \subset \bigcup\limits_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} G'_{nk}$ łącząca punkty z i z_1, której długość jest nie większa niż suma długości brzegów zbiorów G'_{nk}. Mamy zatem

$$|f_1(z) - f_1(z_1)| = |\int\limits_{\Gamma} |f_1'(z)| dz| \leq \int\limits_{\Gamma} |f_1'(z)||dz| \leq$$

$$\leq \sum_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} \int\limits_{\Gamma \cap G'_{nk}} |f_1'(z)||dz| = \sum_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} \int\limits_{\Gamma \cap G'_{nk}} \left| \frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial y_1}{\partial u} \right| |dz|.$$

Ze wzorów Cauchy'ego–Riemanna dla funkcji analitycznej $f_1(z)$ na G'_{nk} mamy $\frac{\partial y_1}{\partial u} = -\frac{\partial x_1}{\partial v}$. Współrzędne u i v są izotermalne, więc $E = \|\mathbf{x}_u\|^2 = G = \|\mathbf{x}_v\|^2$. Stąd dla $z \in G'_{nk}$ mamy

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial u} \right| \leq \|\mathbf{x}_u\| < \exp\left(-\epsilon T(12 r_n, S)\right),$$

$$\left| \frac{\partial y_1}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial x_1}{\partial v} \right| \leq \|\mathbf{x}_v\| = \|\mathbf{x}_u\| < \exp\left(-\epsilon T(12 r_n, S)\right),$$

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial y_1}{\partial u} \right| \leq \left| \frac{\partial y_1}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial x_1}{\partial v} \right| < 2 \exp\left(-\epsilon T(12 r_n, S)\right).$$

W ten sposób otrzymujemy

$$|f_1(z) - f_1(z_1)| < \sum_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} 2 \exp\left(-\epsilon T(12 r_n, S)\right) \int\limits_{\Gamma \cap G'_{nk}} |dz| <$$

$$< C_3 \sum_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} \exp\left(-\epsilon T(12 r_n, S)\right) r_n \sqrt{T(12 r_n, S)} =$$

$$= C_4 \sum_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} \exp\left(-\epsilon T(12 r_n, S) \left[1 - \frac{\log r_n}{\epsilon T(12 r_n, S)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2\epsilon} \frac{\log T(12 r_n, S)}{T(12 r_n, S)} \right]\right) \leq C_5 \sum_{n=m_0(k)}^{M_0(k)} e^{-\frac{\epsilon}{2} n} < \frac{c}{16} \; (k \to \infty).$$

Z powyższych rozważań wynika, że

$$|x_1(z) - x_1(z_1)| = |Re[f_1(z) - f_1(z_1)]| \leq |f_1(z) - f_1(z_1)| < \frac{c}{16}.$$

Podobnie jeśli $z \in G_{kj}$ to

$$|x_2(z) - x_2(z_1)| < \frac{c}{16} \; \text{ oraz } \; |x_3(z) - x_3(z_1)| < \frac{c}{16}.$$

Stąd dla każdego $z \in G_{kj}$ i $k > k_0$ zachodzi

$$|x_1(z) - a_j^1| \leq |x_1(z) - x_1(z_1)| + |x_1(z_1) - a_j^1| < \frac{c}{16} + \frac{c}{6} < \frac{c}{4}.$$

Analogicznie mamy

$$|x_2(z) - a_j^2| < \frac{c}{4}, \quad |x_3(z) - a_j^3| < \frac{c}{4}.$$

Wobec tego dla $z \in G_{kj}$ i $k > k_0$ otrzymujemy

$$\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}_j\| < \frac{\sqrt{3}}{4}c < \frac{c}{2}.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że zbiory G_{kj} dla $k \geq k_0$ są parami rozłączne.
Rozważmy teraz dla dowolnego $k \geq k_0$ funkcje [34]

$$w_{kj}(z) = \begin{cases} \max\left\{\log \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}, 2\epsilon T(12r, S)\right\}, & \text{gdy } z \in G_{kj}, \\ 2\epsilon T(12r, S), & \text{gdy } z \notin G_{kj}. \end{cases}$$

Funkcje te są $\delta-$subharmoniczne na pierścieniu $K(S_k, R_k)$ (Lemat 2.7 [34], [53, str. 73]).
Przypomnimy teraz własności funkcji T^* A. Baernsteina [4]. Niech

$$m^*_{kj}(r, \theta, S) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E w_{kj}(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

$$N(r, w_{kj}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_{kj,2}(re^{i\varphi}) d\varphi = N_{kj}(r, S),$$

$$T^*_{kj}(re^{i\theta}, w_{kj}) = m^*_{kj}(r, \theta, S) + N_{kj}(r, S),$$

gdzie funkcje $w_{k,j,1}$ i $w_{kj,2}$ są funkcjami subharmonicznymi na pierścieniu $K(S_k, R_k)$ oraz $w_{kj}(z) = w_{kj,1}(z) - w_{kj,2}(z)$.
Z twierdzenia A. Baernsteina [5] wynika, że funkcja $T^*_{kj}(re^{i\varphi}, w_{kj})$ jest subharmoniczna na pierścieniu $K(S_k, R_k)$. Rozważmy teraz następującą funkcję [34]

$$T^*_0(re^{i\theta}, S) = \sum_{j=1}^q m^*_{kj}(r, \theta, S) + \sum_{j=1}^q N_{kj}(r, S).$$

Funkcja $T^*_0(re^{i\theta}, S)$ jest subharmoniczna na pierścieniu $K(S_k, R_k)$ jako suma skończonej ilości funkcji subharmonicznych oraz spełnia

$$\frac{\partial}{\partial\theta} T^*_0(re^{i\theta}, S) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^q \widetilde{w}_{kj}(re^{i\theta}), \quad 0 < \theta < \pi,$$

gdzie $\widetilde{w}_{kj}(z)$ powstaje na skutek kołowej symetryzacji funkcji $w_{kj}(z)$ [26] i $r = |z| \in K(S_k, R_k)$.
Ponadto

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} T^*_0(re^{i\theta}, S) \leq T\left(r, \frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\right) + 2\epsilon q T(12r, S) \quad (k \to \infty), \tag{2.64}$$

gdzie $T\left(r, \frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\right)$ jest charakterystyką $\delta-$subharmonicznej funkcji $\log \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}$.
Wybierzmy teraz liczby α i ψ, dla których zachodzą poniższe nierówności

$$0 < \alpha \leq \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\lambda}\right), \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2\lambda} - \alpha.$$

Rozważymy funkcję [21, 23]

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T_0^*(re^{i\theta}, S) \cos \lambda(\varphi + \psi) d\varphi.$$

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że funkcja $T_0^*(z, S)$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w sposób ciągły względem zmiennych $u,\ v\ \ (z = u + iv)$. W przeciwnym wypadku można by było przybliżać tą funkcję funkcjami subharmonicznymi i dwukrotnie różniczkowalnymi w sposób ciągły oraz powtórzyć wszystkie kroki z pracy [34] stosując przejście do granicy.
Zastosujmy teraz operator $L = r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}$ do funkcji $\sigma(r)$. Ponieważ funkcja $T_0^*(z, S)$ jest funkcją subharmoniczną to

$$\begin{aligned} L\sigma(r) = r\tfrac{d}{dr}(r\sigma'(r)) = \int_0^\alpha LT_0^*(re^{i\varphi}, S)\cos\lambda(\varphi+\psi)d\varphi \geq \\ \geq -\int_0^\alpha \tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}T_0^*(re^{i\varphi}, S)\cos\lambda(\varphi+\psi)d\varphi = \\ = \tfrac{\partial}{\partial\varphi}T_0^*(re^{i\varphi}, S)\cos\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha - \lambda T_0^*(re^{i\varphi}, S)\sin\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha + \lambda^2\sigma(r). \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony w nierówności powyżej przez $r^{\lambda+1}$ oraz całkując przez części na przedziale $[S_k, R_k]$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{S_k}^{R_k} \Big\{ \tfrac{\partial}{\partial\varphi}T_0^*(r, S)\cos\lambda\psi - \tfrac{\partial}{\partial\varphi}T_0^*(re^{i\alpha}, S)\cos\lambda(\alpha+\psi) - \\ -\lambda T_0^*(re^{i\varphi}, S)\sin\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha \Big\} \tfrac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \tfrac{r\sigma'(r)}{r^\lambda}\Big|_{S_k}^{R_k} + \lambda\tfrac{\sigma(r)}{r^\lambda}\Big|_{S_k}^{R_k}. \end{aligned}$$

Na mocy wzoru Privalova [52] otrzymujemy

$$T\left(r, \frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\right) = T\left(r, \|\mathbf{x}_u\|\right) + O(1),$$

gdzie $T\left(r, \|\mathbf{x}_u\|\right)$ jest charakterystyką Nevanlinny $\delta-$subharmonicznej funkcji $\log \|\mathbf{x}_u\|$.
Jako wniosek z dowodu Lematu 2.10 mamy następującą nierówność

$$T\left(r, \|\mathbf{x}_u\|\right) \leq 2\left(T(r, S) + m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|}\right)\right).$$

Stąd

$$T\left(r, \frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\right) \leq 2\left(T(r, S) + m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|}\right)\right). \tag{2.65}$$

Z definicji $\sigma(r)$, Lematu 2.10 oraz nierówności (2.65) otrzymujemy

$$\sigma(r) \leq C_1 T\left(r, \frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\right) + 2q\epsilon T(12r, S) < C_2 T(12r, S). \tag{2.66}$$

Ponieważ funkcja $\sigma(r)$ jest logarytmicznie wypukła dla $r > 0$ to

$$r\sigma'(r)\log 2 \leq \int\limits_r^{2r} \frac{t\sigma'(t)}{t} dt = \sigma(2r) - \sigma(r) \leq \sigma(2r),$$

więc

$$r\sigma'(r) \leq \frac{1}{\log 2}\sigma(2r) < C_3 T(24r, S). \tag{2.67}$$

Wobec tego z nierówności (2.66), (2.67) oraz z (2.28) dla $k > k_0(\epsilon)$ mamy

$$\left.\frac{r\sigma'(r)}{r^\lambda}\right|_{S_k}^{R_k} + \lambda \left.\frac{\sigma(r)}{r^\lambda}\right|_{S_k}^{R_k} \leq \epsilon \int\limits_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr. \tag{2.68}$$

Z nierówności (2.4) i (2.68) otrzymujemy

$$\int\limits_{S_k}^{R_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial\varphi} T_0^*(r,S)\cos\lambda\psi - \frac{\partial}{\partial\varphi} T_0^*(re^{i\alpha},S)\cos\lambda(\alpha+\psi) - \right.$$

$$\left. -\lambda T_0^*(re^{i\varphi},S)\sin\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha \right\} \frac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \epsilon \int\limits_{S_k}^{R_k} \frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (k \to \infty).$$

W powyższej nierówności weźmy $\psi = \frac{\pi}{2\lambda} - \alpha$. Wówczas mamy

$$\int\limits_{S_k}^{R_k} \{ \sum_{j=1}^{q} \widetilde{w}_{kj}(r,0)\sin\lambda\alpha - \lambda T_0^*(re^{i\alpha},S) +$$
$$+ \lambda N(r,0,S_u)\cos\lambda\alpha\} \tfrac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \epsilon \int\limits_{S_k}^{R_k} \tfrac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (k \to \infty),$$

gdzie

$$N(r,0,S_u) = \int\limits_0^r \frac{\mu(t)-\mu(0)}{t} dt + \mu(0)\log r,$$

gdzie $\mu(t) = \iint\limits_{|z|\leq t} \Delta \log \|\mathbf{x}_u(z)\| dxdy + n(t,0,S_u)$, $n(t,0,S_u)$ wyraża ilość zer powierzchni S_u w kole $\{z : |z| \leq t\}$ liczonych wraz z krotnościami.
Z własności defektu Valirona wynika, że dla dowolnego $\epsilon_1 > 0$ i $r > r_0(\epsilon_1)$ zachodzi

$$N(r,0,S_u) > (1 - \Delta(0,S_u) - \epsilon_1)T(r,S_u).$$

Stąd dla dowolnego ustalonego $\epsilon > 0$ oraz $k > k_0(\epsilon)$ mamy

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}\{\sum_{j=1}^{q}\widetilde{w}_{kj}(r,0)\sin\lambda\alpha-\lambda T_0^*(re^{i\alpha},S)+ \\ +\lambda(1-\Delta(0,S_u)-\epsilon_1)T(r,S_u)\cos\lambda\alpha\}\tfrac{dr}{r^{\lambda+1}}\leq\epsilon\int\limits_{S_k}^{R_k}\tfrac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr. \tag{2.69}$$

Z nierówności (2.64), (2.65) oraz Lematu 2.10 wynika, że

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}\tfrac{T_0^*(re^{i\alpha},S)}{r^{\lambda+1}}dr\leq\int\limits_{S_k}^{R_k}\tfrac{T\left(r,\frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\right)}{r^{\lambda+1}}dr+ \\ +2q\epsilon\int\limits_{S_k}^{R_k}\tfrac{T(12r,S)}{r^{\lambda+1}}dr\leq(2+\epsilon)\int\limits_{S_k}^{R_k}\tfrac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr\quad(k\to\infty). \tag{2.70}$$

Ponadto

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}\frac{T(12r,S)}{r^{\lambda+1}}dr=12\lambda\int\limits_{12S_k}^{12R_k}\frac{T(t,S)}{t^{\lambda+1}}dt\leq 12^{\lambda}\left\{\int\limits_{S_k}^{R_k}+\int\limits_{R_k}^{12R_k}\right\}\frac{T(t,S)}{t^{\lambda+1}}dt.$$

Oczywistym jest, że

$$\int\limits_{R_k}^{12R_k}\frac{T(t,S)}{t^{\lambda+1}}dt\leq\frac{T(R_k,S)}{R_k^{\lambda}}.$$

Z nierówności (2.28) wynika zatem, że

$$\int\limits_{R_k}^{12R_k}\frac{T(t,S)}{t^{\lambda+1}}dt\leq\epsilon\int\limits_{S_k}^{R_k}\frac{T(t,S)}{t^{\lambda+1}}dt\quad(k\to\infty).$$

Otrzymujemy stąd, że

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}\frac{T(12r,S)}{r^{\lambda+1}}dr\leq 12^{\lambda}(1+\epsilon)\int\limits_{S_k}^{R_k}\frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr\quad(k\to\infty). \tag{2.71}$$

Z (2.65), (2.69) i (2.71) mamy

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}\tfrac{\sum\limits_{j=1}^{q}\widetilde{w}_{kj}(r,0)}{r^{\lambda+1}}dr\leq \\ \leq 2\tfrac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha}(1-(1-\Delta(0,S_u))\cos\lambda\alpha)(1+\epsilon)\int\limits_{S_k}^{R_k}\tfrac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr\quad(k\to\infty), \tag{2.72}$$

gdzie $\alpha\leq\min{(\pi,\frac{\pi}{2\lambda})}$.
Łatwo widać, że

$$\max_{|z|=r}\log^+\frac{1}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}_j\|}=\log^+\frac{1}{\|\mathbf{x}(re^{i\theta_j(r)})-\mathbf{a}_j\|}\leq \\ \leq\max_{|z|=r}\log^+\frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}_j\|}+\max_{re^{i\theta}\in G_{kj}}\log^+\frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}+ \\ +2\epsilon T(12r,S),\quad\mathbf{a}_j\in\mathbb{R}^3.$$

Zauważmy, że

$$\widetilde{w}_{kj}(r,0) = \max_{re^{i\theta}\in G_{kj}} \log^+ \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(re^{i\theta})\|}.$$

Z (2.71), (2.72) i Lematu 2.10 dla $k > k_0(\epsilon)$ otrzymujemy

$$\int_{S_k}^{R_k} \left(\sum_{j=1}^{q} \max_{|z|=r} \log^+ \tfrac{1}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}_j\|} \right) r^{-\lambda-1} dr \leq$$
$$\leq 2\tfrac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha}(1-(1-\Delta(0,S_u))\cos\lambda\alpha)(1+\epsilon)\int_{S_k}^{R_k} \tfrac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr,$$

gdzie $\epsilon > 0$ jest dowolną ustaloną liczbą dodatnią. Stąd dla dowolnego $\alpha \in \left(0, \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\lambda}\right)\right)$ mamy

$$\sum_{j=1}^{q} \beta(\mathbf{a}_j, S) \leq \liminf_{r\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{q} \max\limits_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}_j\|}}{T(r,S)} \leq$$
$$\leq 2\frac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha}(1-(1-\Delta(0,S_u))\cos\lambda\alpha)(1+\epsilon).$$

Dla $\alpha = \frac{1}{\lambda}\arccos(1-\Delta(0,S_u))$, gdy $\arccos(1-\Delta(0,S_u)) < \pi\lambda$ oraz dla $\alpha = \pi$, gdy $\arccos(1-\Delta(0,S_u)) \geq \pi\lambda$ wyrażenie po prawej stronie powyższej nierówności przyjmuje najmniejszą wartość.
Z definicji $B(\lambda,\Delta)$ oraz dowolności liczby $\epsilon > 0$ otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{q} \beta(\mathbf{a}_j, S) \leq 2B(\lambda, \Delta(0,S_u)). \tag{2.73}$$

Ostatecznie z (2.73) mamy

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3} \beta(\mathbf{a}, S) \leq 2B(\lambda, \Delta(0,S_u)),$$

co kończy dowód Twierdzenia 2.4.

□

2.5 Oszacowanie z góry rozpiętości meromorficznych powierzchni minimalnych

Dowód Twierdzenia 2.6. Rozważmy przypadek, gdy $\lambda > 0$. Niech $\Lambda = \Lambda(r)$ będzie funkcją dodatnią, niemalejącą i ciągłą oraz spełniającą warunek $\Lambda(r) = o(T(r,S))$ $(r\to\infty)$. Niech ponadto $\phi = \phi(r)$ będzie funkcją dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą dla $r > 0$, taką że $\phi(r) = o(T(r,S))$.
Jako, że $\delta(\infty,S) > 0$ to $\beta(\infty,S) > 0$. Stąd $1 \leq p_\phi(\infty,S) < +\infty$. Pokażemy, że

$$\sigma_\Lambda(\infty,S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4p_\phi(\infty,S)}{\lambda}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(\infty,S)}{2}}\right\}. \tag{2.74}$$

Jeśli $\sigma_\Lambda(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{\lambda}\right\}$ to nierówność (2.74) oczywiście zachodzi.
Niech $\sigma_\Lambda(\infty, S) < \min\left\{2\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{\lambda}\right\}$. Wybierzmy α, takie że

$$\frac{\sigma_\Lambda(\infty, S)}{2} < \alpha < \min\left\{\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty, S)}{2\lambda}\right\}.$$

Stąd dla $r \geq r_0$ zachodzi nierówność $u^*_\phi(r, \alpha) \leq \max\{\Lambda(r), \phi(r)\} = o(T(r, S))$ oraz

$$T^*(r, \alpha, u_\phi) = T(r, S) + o(T(r, S)) \quad (r \to \infty).$$

W dowodzie Twierdzenia 2.1 udowodniliśmy nierówność (2.60), mówiącą że istnieje ciąg $\{r_k\}$, taki że dla $k \geq k_0(\epsilon)$

$$h_{\phi,\lambda}(r_k) < \varepsilon T(r_k, S),$$

gdzie wielkość $h_{\phi,\lambda}(r)$ została zdefiniowana w (2.52). Mamy stąd

$$\begin{aligned} -u^*_\phi(r_k, \alpha) \cos \tfrac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\infty,S)} + \log \max_{|z|=r_k} \|\mathbf{x}(z)\| \cos \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\ + \tfrac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)} N(r_k, \infty, S) \sin \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} - \tfrac{\lambda\pi}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \sin \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\infty,S)} \\ < \varepsilon T(r_k, S) \quad (k \to \infty). \end{aligned} \tag{2.75}$$

W nierówności (2.75) niech $\psi = -\frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{2\lambda}$. Wówczas dla każdego $k \geq k_0(\epsilon)$

$$\begin{aligned} -u^*_\phi(r_k, \alpha) \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} N(r_k, \infty, S) \\ + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} < \epsilon T(r_k, S) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Ponieważ $u^*_\phi(r, \alpha) \leq \max\{\Lambda(r), \phi(r)\}$ to dostajemy

$$\begin{aligned} -\max\{\Lambda(r_k), \phi(r_k)\} \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} N(r_k, \infty, S) \\ + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} < \epsilon T(r_k, S) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Z definicji defektu wynika, że $1 - \delta(\infty, S) = \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,\infty,S)}{T(r,S)}$. Stąd dla $r \geq r_0(\epsilon)$ mamy

$$N(r, \infty, S) < (1 - \delta(\infty, S) + \epsilon) T(r, S).$$

Jednakże $\max\{\Lambda(r), \phi(r)\} = o(T(r, S))$, więc istnieje ciąg $\{r_k\}$ dążący do nieskończoności, taki że

$$\begin{aligned} o(T(r_k, S)) \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} (1 - \delta(\infty, S) + \epsilon) T(r_k, S) \\ + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} < \epsilon T(r_k, S) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony powyższej nierówności przez $T(r_k, S)$ i przechodząc do granicy przy $k \to \infty$ otrzymujemy

$$-1 + \delta(\infty, S) - \epsilon + \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} < \frac{\epsilon p_\phi(\infty, S)}{\pi\lambda}.$$

Przechodząc natomiast w powyższej nierówności do granicy przy $\epsilon \to 0$ dostajemy

$$-1 + \delta(\infty, S) + \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} \leq 0,$$

więc

$$1 - \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} \leq \delta(\infty, S)$$

dla każdego α, takiego że $\frac{\sigma_\Lambda(\infty,S)}{2} < \alpha < \min\left\{\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{2\lambda}\right\}$. Wówczas przechodząc do granicy przy $\alpha \to \frac{\sigma_\Lambda(\infty,S)}{2}$ mamy

$$1 - \cos \frac{\lambda\sigma_\Lambda(\infty, S)}{2p_\phi(\infty, S)} \geq \delta(\infty, S),$$

skąd wynika, że

$$\sin^2 \frac{\lambda\sigma_\Lambda(\infty, S)}{4p_\phi(\infty, S)} \geq \frac{\delta(\infty, S)}{2}.$$

W rezultacie

$$\sigma_\Lambda(\infty, S) \geq \frac{4p_\phi(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, S)}{2}}.$$

Wtedy dla dowolnego Λ i ϕ mamy

$$\sigma_\Lambda(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4p_\phi(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, S)}{2}}\right\}.$$

Stąd

$$\sigma(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4p(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, S)}{2}}\right\}.$$

Zatem Twierdzenie 2.6 zostało udowodnione dla $\lambda > 0$.
Jeśli rząd dolny powierzchni S jet równy zero to na mocy (2.60) nierówność

$$h_{\phi,\lambda}(r_k) < \epsilon T(r_k, S)$$

zachodzi przy dowolnej dodatniej wartości λ. Wówczas powtarzając wszystkie kroki z dowodu pierwszego przypadku otrzymujemy

$$\sigma_\Lambda(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4p_\phi(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, S)}{2}}\right\},$$

dla dowolnej dodatniej liczby λ. W tym przypadku mamy $\sigma_\Lambda(\infty, S) = 2\pi$, a stąd oczywiście $\sigma(\infty, S) = 2\pi$. Kończy to dowód Twierdzenia 2.6.

$\square$

Dowód Twierdzenia 2.7. Niech $\Lambda = \Lambda(r)$ będzie funkcją dodatnią, niemalejącą i ciągłą oraz spełniającą warunek $\Lambda(r) = o(T(r, S))$ $(r \to \infty)$. Niech ponadto $\phi = \phi(r)$ będzie funkcją

dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą dla $r > 0$, taką że $\phi(r) = o(T(r, S))$.
Jako, że $\delta(\infty, S) > 0$ to $\beta(\infty, S) > 0$. Stąd $1 \leq p_\phi(\infty, S) < +\infty$. Pokażemy, że

$$\sigma_\Lambda(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{2p_\phi(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \frac{p_\phi(\infty, S)\beta(\infty, S)}{\pi\lambda}\right\}.$$

Niech $\sigma_\Lambda(\infty, S) < \min\left\{2\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty,S)}{\lambda}\right\}$. Wybierzmy α, takie że

$$\frac{\sigma_\Lambda(\infty, S)}{2} < \alpha < \min\left\{\pi, \frac{\pi p_\phi(\infty, S)}{2\lambda}\right\}.$$

Skoro $\sigma_\Lambda(\infty, S) < 2\alpha$ to dla $r \geq r_0$ mamy $u_\phi^*(r, \alpha) \leq \max\{\Lambda(r), \phi(r)\}$. Niech $\psi = 0$. Z (2.75) mamy

$$\begin{aligned} -u_\phi^*(r_k, \alpha) \cos \tfrac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} + \log \max_{|z|=r_k} \|\mathbf{x}(z)\| - \tfrac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)} \sin \tfrac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \\ < \epsilon T(r_k, S) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Ponieważ $u_\phi^*(r, \alpha) \leq \max\{\Lambda(r), \phi(r)\}$ to mamy

$$\begin{aligned} - \max\{\Lambda(r_k), \phi(r_k)\} \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} + \log \max_{|z|=r_k} \|\mathbf{x}(z)\| \\ - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty, S)} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) < \epsilon T(r_k, S) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Jednakże $T^*(r_k, \alpha, u_\phi) = T(r_k, S)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty)$, więc

$$\beta(\infty, S) < \tfrac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty,S)} \sin \tfrac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} + \tfrac{\max\{\Lambda(r_k),\phi(r_k)\}}{T(r_k,S)} \cos \tfrac{\lambda\alpha}{p_\phi(\infty,S)} + 2\epsilon \;\; (k \to \infty).$$

Jednak $\max\{\Lambda(r_k), \phi(r_k)\} = o(T(r_k, S))$, a zatem przechodząc w powyższej nierówności do granicy przy $k \to \infty,\ \epsilon \to 0$ oraz przy $\alpha \to \frac{\sigma_\Lambda(\infty,S)}{2}$ otrzymujemy

$$\beta(\infty, S) \leq \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\infty, S)} \sin \frac{\lambda\sigma_\Lambda(\infty, S)}{2p_\phi(\infty, S)}.$$

Stąd

$$\sigma_\Lambda(\infty, S) \geq \frac{2p_\phi(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \frac{p_\phi(\infty, S)\beta(\infty, S)}{\pi\lambda}.$$

Wobec tego dla dowolnych Λ i ϕ mamy

$$\sigma_\Lambda(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{2p_\phi(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \frac{p_\phi(\infty, S)\beta(\infty, S)}{\pi\lambda}\right\}.$$

W rezultacie mamy

$$\sigma(\infty, S) \geq \min\left\{2\pi, \frac{2p(\infty, S)}{\lambda} \arcsin \frac{p(\infty, S)\beta(\infty, S)}{\pi\lambda}\right\}. \tag{2.76}$$

Twierdzenie 2.7 zostało zatem udowodnione dla $\lambda > 0$.
Niech rząd dolny powierzchni S będzie równy zeru. Wówczas nierówność (2.76) zachodzi dla dowolnego $\lambda > 0$. Stąd $\sigma(\infty, S) = 2\pi$, co kończy dowód.

□

2.6 Przykłady

Rozważmy powierzchnię $S(f)$ zadaną przez poniższą parametryzację

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(z) & = & \mathrm{Re}[3f(z) - f^3(z)] \\ x_2(z) & = & \mathrm{Re}[i(3f(z) + f^3(z))] \\ x_3(z) & = & \mathrm{Re}[3f^2(z)] \end{array}\right. , \tag{2.77}$$

gdzie $f(z)$ jest funkcją meromorficzną [32]. Wtedy funkcje współrzędne powierzchni $S(f)$ są funkcjami harmonicznymi na $\mathbb{C}$. Aby pokazać, iż $S(f)$ jest meromorficzną powierzchnią minimalną wystarczy udowodnić, że zachodzi ([8])

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dg_i(z)}{dz}\right)^2 \equiv 0,$$

gdzie

$$g_1(z) = 3f(z) - f^3(z),\ g_2(z) = i(3f(z) + f^3(z)),\ g_3(z) = 3f^2(z).$$

Z prostych obliczeń wynika, że

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(z)\|^2 &= 9|f(z)|^2 + |f(z)|^6 + 6(\mathrm{Im}[f(z)]\,\mathrm{Im}[f^3(z)] \\ &\quad - \mathrm{Re}[f(z)]\,\mathrm{Re}[f^3(z)]) + 9(\mathrm{Re}[f^2(z)])^2. \end{aligned}$$

Rozważmy zbiór $E(r) = \{\theta \in [0, 2\pi] \colon |f(re^{i\theta})| > 4\}$. Jeśli $z = re^{i\theta},\ \theta \in E(r)$ to zachodzi

$$\|\mathbf{x}(z)\|^2 \geq |f(z)|^6 - 12|f(z)|^4 \geq \frac{1}{4}|f(z)|^6.$$

Wówczas $\log^+ \|\mathbf{x}(z)\| \geq 3\log^+ |f(z)| + O(1) \quad (r \to \infty)$. Z drugiej strony dla $z = re^{i\theta}$, $\theta \in E(r)$ mamy

$$\|\mathbf{x}(z)\|^2 \leq 9|f(z)|^2 + |f(z)|^6 + 21|f(z)|^4 \leq 31|f(z)|^6.$$

Stąd $\log^+ \|\mathbf{x}(z)\| \leq 3\log^+ |f(z)| + O(1) \quad (r \to \infty)$. W konsekwencji mamy

$$\begin{array}{rcl} m(r, \infty, S(f)) & = & 3m(r, \infty, f) + O(1), \\ \mathcal{L}(r, \infty, S(f)) & = & 3\mathcal{L}(r, \infty, f) + O(1), \quad r \to \infty. \end{array} \tag{2.78}$$

Łatwo jest zauważyć, że $N(r, \infty, S(f)) = 3N(r, \infty, f)$, więc z (2.78) dostajemy

$$T(r, S(f)) = 3T(r, f) + O(1), \tag{2.79}$$

co z kolei implikuje następujące równości

$$\begin{aligned} \delta(\infty, S(f)) &= \delta(\infty, f), \\ \beta(\infty, S(f)) &= \beta(\infty, f), \\ \Delta(\infty, S(f)) &= \Delta(\infty, f). \end{aligned}$$

Dzięki powyższym równościom przy odpowiednim doborze funkcji $f(z)$ można wykazać, że otrzymane oszacowania w udowodnionych we wcześniejszych podrozdziałach twierdzeniach są dokładne.

Przykład 1 Rozważmy teraz funkcję Mittag-Lefflera ([25])

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho}\right)}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Funkcja $E_\rho(z)$ jest funkcją całkowitą rzędu ρ i stanowi uogólnienie funkcji wykładniczej e^z. W przypadku $\rho = 1$ funkcje te są identyczne. Natomiast dla $\rho > 1$ wewnątrz kąta o mierze $\frac{\pi}{\rho}$ symetrycznego względem dodatniej półosi odciętych funkcja $E_\rho(z)$ zachowuje się podobnie jak funkcja analityczna e^{z^ρ}, a poza nim jest ograniczona. Różnica polega na tym, że $E_\rho(z)$ posiada dokładnie jeden punkt maksimum modułu znajdujący się na dodatniej półosi odciętych, a funkcja e^{z^ρ} dla $\rho = n \in \mathbb{N}$ ma ich dokładnie n.
Z asymptotyki funkcji $E_\rho(z)$ dla $\frac{1}{2} < \rho < +\infty$ mamy

$$E_\rho(z) = \begin{cases} \rho e^{z^\rho} + O\left(\frac{1}{|z|}\right) & , \text{ gdy } |arg(z)| \leq \frac{\pi}{2\rho} \\ O\left(\frac{1}{|z|}\right) & , \text{ gdy } \pi \geq |arg(z)| > \frac{\pi}{2\rho} \end{cases}.$$

Jeśli $\rho = \frac{1}{2}$ to $E_\rho(z) = \cosh\sqrt{z}$, a wtedy $E_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2}e^{z^{\frac{1}{2}}} + O(1)$. Natomiast jeśli $0 < \rho < \frac{1}{2}$ to $E_\rho(z) = (1+o(1))\rho e^{z^\rho}$, gdzie $|arg(z)| \leq \pi - \delta$ dla dowolnej liczby dodatniej δ.
Wobec tego mamy

$$T(r, E_\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\rho} r^\rho + o(r^\rho) & , \text{ gdy } \frac{1}{2} \leq \rho < \infty \\ \frac{\sin\pi\rho}{\pi\rho} r^\rho + o(r^\rho) & , \text{ gdy } 0 < \rho < \frac{1}{2} \end{cases}. \tag{2.80}$$

Aby uzyskać równość w pierwszym przypadku Twierdzenia 2.1 oraz w Twierdzeniu 2.6 weźmy dowolne $\lambda > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{\lambda}{n} > \frac{1}{2}$ i w parametryzacji (2.77) rozważmy funkcję

$$f_1(z) = E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n).$$

Wówczas z (2.80) wynika, że

$$T(r, f_1(z)) = T\left(r, E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n)\right) = \frac{1}{\pi\frac{\lambda}{n}}(r^n)^{\frac{\lambda}{n}} + o\left((r^n)^{\frac{\lambda}{n}}\right) = \frac{n}{\pi\lambda} r^\lambda + o(r^\lambda) \ \ (r \to \infty),$$

więc z (2.79) mamy

$$T(r, S(f_1)) = \frac{3n}{\pi\lambda} r^\lambda + o(r^\lambda) \ \ (r \to \infty).$$

Powierzchnia $S(f_1)$ jest całkowitą powierzchnią minimalną, więc $\delta(\infty, S(f_1)) = 1$.
Funkcja $f_1(z)$ jest rzędu dolnego λ, co jest oczywiste, bo

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r, f_1(z))}{\log r} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log \frac{n}{\pi\lambda} r^\lambda}{\log r} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log \frac{n}{\pi\lambda} + \lambda \log r}{\log r} = \lambda + \liminf_{r\to\infty} \frac{\log \frac{n}{\pi\lambda}}{\log r} = \lambda.$$

Ponadto funkcja $f_1(z)$ jest całkowita i ma n punktów maksimum modułu, zatem $p(\infty, f_1) = n$. Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(r, \infty, f_1(z)) &= \mathcal{L}(r, \infty, E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n)) \\ &= \max_{|z|=r} \log^+ \left| E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n) \right| \\ &= \max_{|z|=r} \log^+ |e^{z^\lambda}| + O(1) \\ &= \max_{0 \le \theta \le 2\pi} \log^+ e^{r^\lambda \cos \lambda\theta} + O(1)\end{aligned}$$

Zatem $\mathcal{L}(r, \infty, f_1(z)) \sim r^\lambda \quad (r \to \infty)$. Stąd

$$\beta(\infty, f_1(z)) = \beta\left(\infty, E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n)\right) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n))}{T\left(r, E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n)\right)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{r^\lambda}{\frac{n}{\pi\lambda} r^\lambda} = \frac{\pi\lambda}{n},$$

a stąd dla powierzchni $S(f_1)$ mamy

$$\begin{aligned}\beta(\infty, S(f_1)) &= \frac{\pi\lambda}{n}, \\ p(\infty, S(f_1)) &= n, \\ \sigma(\infty, S(f_1)) &= \frac{n\pi}{\lambda}.\end{aligned}$$

Stąd mamy równość w pierwszym przypadku Twierdzenia 2.1 oraz równość w Twierdzeniu 2.6 i Twierdzeniu 2.7.
W celu otrzymania równości w drugim przypadku Twierdzenia 2.1 oraz Twierdzenia 2.6 i Twierdzenia 2.7 rozważmy dla dowolnego $0 < \lambda \le \frac{1}{2}$ funkcję

$$f_2(z) = E_\lambda(z).$$

Podobnie jak w przypadku poprzedniej funkcji możemy stwierdzić, że jest ona całkowita, ale posiada dokładnie jeden punkt maksimum modułu, czyli $p(\infty, f_2) = 1$. Funkcja $f_2(z)$ jest rzędu dolnego λ i z (2.80) mamy

$$T(r, f_2(z)) = T(r, E_\lambda) = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} r^\lambda + o(r^\lambda) \;\; (r \to \infty),$$

a zatem

$$T(r, S(f_2)) = \frac{3 \sin \pi\lambda}{\pi\lambda} r^\lambda + o(r^\lambda) \quad (r \to \infty).$$

Powierzchnia $S(f_2)$ ma zatem rząd dolny λ i jest całkowitą powierzchnią minimalną, więc $\delta(\infty, S(f_2)) = 1$.
Funkcję odchylenia $\mathcal{L}(r, \infty, f_2(z))$ obliczamy analogicznie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(r, \infty, f_2(z)) &= \mathcal{L}(r, \infty, E_\lambda(z)) \\ &= \max_{|z|=r} \log^+ |E_\lambda(z)| \\ &= \max_{|z|=r} \log^+ |e^{z^\lambda}| + O(1) \\ &= \max_{0 \le \theta \le 2\pi} \log^+ e^{r^\lambda \cos \lambda\theta} + O(1) \\ &= r^\lambda + O(1) \sim r^\lambda \;\; (r \to \infty).\end{aligned}$$

Zatem

$$\beta(\infty, f_2(z)) = \beta\left(\infty, E_\lambda(z)\right) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r,\infty,E_\lambda)}{T\left(r, E_\lambda(z)\right)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{r^\lambda}{\frac{\sin\pi\lambda}{\pi\lambda} r^\lambda} = \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda},$$

skąd otrzymujemy

$$\beta(\infty, S(f_2)) = \beta(\infty, f_2) = \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}.$$

Ponadto z równości $\log\|\mathbf{x}(z)\| = 3\log|f_1(z)| + O(1)$, definicji $p(\infty, S)$ i $\sigma(\infty, S)$ mamy

$$p(\infty, S(f_2)) = p(\infty, f_2) = 1,$$
$$\sigma(\infty, S(f_2)) = 2\pi.$$

Możemy zatem stwierdzić, że oszacowanie w drugim przypadku Twierdzenia 2.1 oraz oszacowanie w Twierdzeniu 2.6 i Twierdzeniu 2.7 są dokładne.

Przykład 2 Rozważymy teraz funkcję opisaną przez A. Goldberga i I. Ostrovskiego w [25]. Niech dla dowolnych $\lambda,\ \rho$ takich, że $0 < \lambda \le \rho < \frac{1}{2}$ funkcja $g(z,u) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ będzie iloczynem kanonicznym rzędu 0 z dodatnimi zerami $\{a_k\}$, takim że $n(r,0) \sim ur^{l(r)}$, gdzie $0 < u \le 1$, a $l(r)$ jest funkcją różniczkowalną na przedziale $[r_0, \infty)$, $\lim_{r\to\infty} rl'(r) = 0$ oraz zachodzą równości

$$\liminf_{r\to\infty} l(r) = 2\lambda, \quad \limsup_{r\to\infty} l(r) = 2\rho$$

W pracy [25] udowodniono, że dla każdego $\eta > 0$ dla funkcji $g(z,u)$ takiej postaci zachodzi równość

$$\log|g(re^{i\varphi})| = \pi u \frac{\cos l(r)(\varphi - \pi)}{\sin\pi l(r)} r^{l(r)} + o(r^{l(r)}), \tag{2.81}$$

gdzie φ jest dowolną liczbą z przedziału $[\eta, 2\pi - \eta]$. Niech

$$g_1(z) = \frac{g(z,1)}{g(-z,1)}.$$

Wówczas z (2.81) dla każdego $\eta > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \log|g_1(re^{i\varphi})| &= \tfrac{\pi}{\sin\pi l(r)}\left(\cos l(r)(\varphi-\pi) - \cos l(r)\varphi\right) + o(r^{l(r)}) \\ &= \tfrac{\pi}{\cos\frac{\pi l(r)}{2}}\left(\sin l(r)\left(\varphi - \tfrac{\pi}{2}\right)\right) r^{l(r)} + o(r^{l(r)}), \end{aligned} \tag{2.82}$$

gdzie φ jest dowolną liczbą taką, że $\eta \le \varphi \le \pi - \eta$. Rozważmy teraz drugą funkcję

$$g_2(z) = g_1(z) + g_1(-z).$$

Zauważmy, że z równości (2.82) wynika, że $g_1(re^{i\varphi}) \to 0$ i $g_1(-re^{i\varphi}) \to \infty$ $(r \to +\infty)$ dla każdego $\varphi \in [\eta, \frac{\pi}{2} - \eta]$. Wynika stąd, że $g_2(re^{i\varphi}) = (1 + o(1))g_1(-re^{i\varphi})$.
Ponadto $g_1(re^{i\varphi}) \to \infty$ i $g_1(-re^{i\varphi}) \to 0$ $\ (r \to +\infty)$ dla każdego $\varphi \in [\frac{\pi}{2} + \eta, \pi - \eta]$. Zatem $g_2(re^{i\varphi}) = (1 + o(1))g_1(re^{i\varphi})$. Stąd dla każdego $\eta > 0$ mamy

$$\log|g_2(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi l(r)}{2}}\left(\sin l(r)\left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right|\right) r^{l(r)} + o(r^{l(r)}), \tag{2.83}$$

dla każdego φ takiego, że $\eta \le \varphi \le 2\pi - \eta$ lub $\frac{\pi}{2} + \eta \le \varphi \le \pi - \eta$. Wyznaczmy teraz funkcję przybliżenia, funkcję liczącą i charakterystykę Nevanlinny dla funkcji $g_2(z)$.

$$\begin{aligned} m(r, g_2) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log^+ |g_2(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &= r^{l(r)} \frac{1}{\cos\frac{\pi l(r)}{2}} \int_0^\pi \sin\left(l(r)\left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right|\right) d\varphi + o(r^{l(r)}) \\ &= r^{l(r)} \frac{2}{l(r)} \frac{1}{\cos\frac{\pi l(r)}{2}} \left(1 - \cos\frac{\pi l(r)}{2}\right) + o(r^{l(r)}). \end{aligned}$$

Z określenia funkcji $g_2(z)$ wynika,że

$$N(r, \infty, g_2) = 2N(r, \infty, g_1) = \frac{2}{l(r)} r^{l(r)} + o(r^{l(r)}),$$

zatem

$$T(r, g_2) = \frac{2}{l(r)} \frac{1}{\cos\frac{\pi l(r)}{2}} r^{l(r)} + o(r^{l(r)}).$$

Wybierzemy teraz taką funkcję $g_2(z)$ aby w trzecim przypadku Twierdzenia 2.1 zaszła równość. Niech λ będzie liczbą dodatnią i niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\frac{\lambda}{n} < \frac{1}{2}$ oraz $\liminf_{r\to\infty} l(r) = 2\frac{\lambda}{n}$. Wówczas w parametryzacji (2.77) rozważmy funkcję $f_3(z) = g_2(z^n)$. Jest to funkcja meromorficzna, dla której $p(\infty, f_3) = n$. Z powyższej równości mamy

$$\begin{aligned} T(r, f_3) &= T(r^n, g_2) \\ &= \frac{2}{l(r^n)} \frac{1}{\cos\frac{\pi l(r^n)}{2}} r^{nl(r^n)} + o(r^{nl(r^n)}), \end{aligned}$$

skąd można zauważyć, że rząd dolny funkcji $f_3(z)$ jest równy λ. Ponadto

$$\log|f_3(re^{i\varphi})| = \log|g_2(r^n e^{in\varphi})| = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi l(r^n)}{2}} \left(\sin l(r^n)\left|n\varphi - \frac{\pi}{2}\right|\right) r^{nl(r^n)} + o(r^{nl(r^n)}).$$

Stąd

$$\mathcal{L}(r, \infty, f_3) = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi l(r^n)}{2}} \left(\sin l(r^n)\frac{\pi}{2}\right) r^{nl(r^n)} + o(r^{nl(r^n)}),$$

oraz

$$\beta(\infty, f_3) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r, \infty, f_3)}{T(r, f_3)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\pi l(r)}{2} \sin\left(l(r^n)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi\lambda}{n} \sin\frac{\pi\lambda}{n}.$$

Stąd na mocy (2.79) również $\beta(\infty, S(f_3)) = \frac{\pi\lambda}{n}\sin\frac{\pi\lambda}{n}$, a ponieważ $p(\infty, f_3) = n$ to mamy także $p(\infty, S(f_3)) = n$. Uzyskaliśmy tym samym równość także dla trzeciego przypadku w Twierdzeniu 2.1.

Przykład 3 Przytoczymy również przykład R. Tafela [56] pewnej całkowitej powierzchni minimalnej. Niech S będzie całkowitą powierzchnią minimalną zadaną parametryzacją

$$\begin{cases} x_1(z) &= \operatorname{Re}\int_0^z (e^{-Aw^n} - e^{-(A+2B)w^n}) dw \\ x_2(z) &= \operatorname{Re} i\int_0^z (e^{-Aw^n} - e^{-(A+2B)w^n}) dw \\ x_3(z) &= \operatorname{Re} 2\int_0^z e^{-(A+B)w^n} dw \end{cases},$$

gdzie $A > 0$, $B \geq 0$ oraz liczba $n > 1$ jest całkowita. R. Tafel pokazał, że ([56])

$$T(r, S) = \frac{1}{\pi}(A + 2B)r^n + O(\log r),$$

oraz

$$m(r, \mathbf{a}, S) = \begin{cases} O(\log r) & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} \neq \mathbf{a}_j \\ \frac{Ar^n}{n\pi} + O(\log r) & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} = \mathbf{a}_j \end{cases},$$

$$\delta(\mathbf{a}, S) = \begin{cases} 0 & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} \neq \mathbf{a}_j \\ \frac{1}{n}\left(\frac{A}{A+2B}\right) & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} = \mathbf{a}_j \end{cases},$$

gdzie $j = 1, \ldots, n$, a wektor $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$ jest określony następująco

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \left(A^{-\frac{1}{n}} - (A + 2B)^{-\frac{1}{n}}\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) I_n, \\ a_{2j} &= \left(-A^{-\frac{1}{n}} - (A + 2B)^{-\frac{1}{n}}\right) \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) I_n, \\ a_{3j} &= \left(2(A + B)^{-\frac{1}{n}}\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) I_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$I_n = \int\limits_0^\infty e^{-t^n} dt.$$

R. Tafel wykazał ponadto, że

$$\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}\|^{-1} = \begin{cases} O(1) & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} \neq \mathbf{a}_j \\ nA^{\frac{1}{n}} r^{n-1} e^{Ar^n \cos n\theta}(1 + D(re^{i\theta})) & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} = \mathbf{a}_j \end{cases},$$

gdzie funkcja $D(re^{\text{ß}\theta})$ jest ograniczona na $B_j := \{z\colon |\theta - \frac{2\pi j}{n}| \leq \frac{\pi}{2n}\}$ oraz zbiega punktowo do zera względem θ przy $r \to \infty$, gdy $re^{i\theta} \in \operatorname{Int}(B_j)$. Stąd

$$\beta(\mathbf{a}, S) = \begin{cases} 0 & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} \neq \mathbf{a}_j \\ \frac{A}{A+2B}\pi & , \text{ gdy } \ \mathbf{a} = \mathbf{a}_j \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

więc

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} \beta(\mathbf{a}, S) = \frac{A}{A + 2B}\pi n.$$

Stąd dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{N}$ i dowolnego $\delta_0 \in (0, 1)$ istnieje całkowita powierzchnia minimalna S_λ skończonego rzędu dolnego λ, taka że

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} \beta(\mathbf{a}, S_\lambda) = (1 - \delta_0)B(\lambda).$$

3 Wzrost krzywych całkowitych

Dla krzywych całkowitych wprowadzimy pojęcie rozdzielonych punktów maksimum podobnie jak to zrobiliśmy dla meromorficznych powierzchni minimalnych w rozdziale drugim.

Niech dla dowolnego $\overrightarrow{a} \in \mathbb{C}^p$ będzie dana funkcja $\phi(r)$, która jest dodatnia, niemalejąca, logarytmicznie wypukła dla $r > 0$ oraz spełniająca warunek $\phi(r) = o(T(r, \overrightarrow{G}))$.
Niech $p_\phi(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ będzie liczbą przedziałów składowych zbioru

$$\left\{\theta\colon \log \frac{\|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(re^{i\theta}), \overrightarrow{a})|} > \phi(r)\right\}$$

zawierających przynajmniej jeden punkt maksimum funkcji $\log \frac{\|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(re^{i\theta}), \overrightarrow{a})|}$. Niech ponadto $p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \liminf_{r\to\infty} p_\phi(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Wówczas liczbę rozdzielonych punktów maksimum krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}$ definiujemy następująco

$$p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \sup_{\{\phi\}} p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}).$$

Dla krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ skończonego rzędu dolnego λ można uzyskać oszacowanie z góry odchylenia $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ w zależności od wielkości $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$.

Twierdzenie 3.1. *[29] Dla p-wymiarowej krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ skończonego rzędu dolnego λ i dla dowolnego wektora zespolonego $\overrightarrow{a}$ zachodzi*

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \le \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} & , \textit{ gdy } \frac{\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} \ge \frac{1}{2} \\ \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda} & , \textit{ gdy } p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = 1 \textit{ i } \lambda < \frac{1}{2} \\ \frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} \sin \frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} & , \textit{ gdy } p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) > 1 \textit{ i } \frac{\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Wniosek 3.1. *Dla krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ spełniającej warunki Twierdzenia 3.1 zachodzi*

$$p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \le \left[\frac{\pi\lambda}{\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}\right],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Gdy $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) > 0$ to $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \ge 1$, a zatem z Twierdzenia 3.1 wynika bezpośrednio Twierdzenie H.

W roku 1984 V. Petrenko zdefiniował pojęcie rozpiętości dla krzywych całkowitych [51]. Niech $\overrightarrow{G}(z)$ będzie p-wymiarową krzywą całkowitą skończonego rzędu dolnego λ i niech $\overrightarrow{a} \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$. Niech $\Lambda(r)$ będzie dodatnią, niemalejącą i ciągłą funkcją spełniającą warunek $\Lambda(r) = o(T(r, \overrightarrow{G}))$ $(r \to \infty)$. Ponadto niech

$$\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) := \limsup_{r\to\infty} mes \left\{\theta \in [0, 2\pi]\colon \log \frac{\|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(re^{i\theta}), \overrightarrow{a})|} > \Lambda(r)\right\},$$

gdzie $mes\ E$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru E. Wówczas wielkość

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) := \inf_{\Lambda} \sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$$

nazywamy *rozpiętością krzywej całkowitej* $\overrightarrow{G}(z)$ względem wektora $\overrightarrow{a}$.

W [51] V. Petrenko otrzymał dokładne oszacowanie z dołu rozpiętości krzywej całkowitej w zależności od $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ oraz oszacowanie z dołu w zależności od $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$.

Twierdzenie K. *Jeśli $G(z)$ jest krzywą całkowitą skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \min\left(2\pi, \frac{4}{\lambda} \arcsin\sqrt{\frac{\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{2}}\right).$$

Twierdzenie L. *Jeśli $G(z)$ jest krzywą całkowitą skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \begin{cases} \frac{\beta^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{(\pi\lambda)^3(1+\sqrt{2})} & , \textit{ gdy } \lambda \geq \frac{1}{2} \\ \frac{\beta^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})\sin^2(\pi\lambda)}{(\pi\lambda)^3(1+\sqrt{2})} & , \textit{ gdy } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \textit{ i } 0 < \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{\operatorname{ctg}(\pi\lambda)} \\ \frac{\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2}\left(\frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\right)^2 & , \textit{ gdy } 0 \leq \lambda < \frac{1}{2} \textit{ i } \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) > \frac{\pi\lambda}{\operatorname{ctg}(\pi\lambda)} \end{cases}.$$

W tym rozdziale podamy i udowodnimy dokładne oszacowanie z dołu rozpiętości krzywych całkowitych w zależności od $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}), \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ oraz $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$.

Twierdzenie 3.2. *[29] Jeśli $G(z)$ jest krzywą całkowitą skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \min\left(2\pi, \frac{4p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda} \arcsin\sqrt{\frac{\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{2}}\right).$$

Gdy $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) > 0$ to $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq 1$, a wtedy z Twierdzenia 3.2 wynika teza Twierdzenia K.

Twierdzenie 3.3. *[29] Jeśli $G(z)$ jest krzywą całkowitą skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \min\left(2\pi, \frac{2p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda} \arcsin\frac{\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\pi\lambda}\right).$$

Uwaga 3.1. Rezultaty zawarte w Twierdzeniach 3.1 - 3.3 otrzymał niezależnie w 2018 roku N. Wu w pracy [63].

Ponieważ dla $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) > 0$ zachodzi $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq 1$ to z Twierdzenia 3.3 wynika poniższy wniosek.

Wniosek 3.2. *Jeśli $G(z)$ jest krzywą całkowitą skończonego rzędu dolnego λ to*

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \min\left(2\pi, \frac{2}{\lambda} \arcsin\frac{\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\pi\lambda}\right).$$

Oszacowanie we Wniosku 3.2 jest dokładne oraz silniejsze niż oszacowanie Petrenki z Twierdzenia L. W ostatnim podrozdziale 3.4 podamy przykład krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$, dla której w pewnych przypadkach zachodzi równość w twierdzeniach 3.1, 3.2 i 3.3.

W podrozdziale 1.4 zdefiniowane zostało pojęcie funkcji algebroidalnej. Badając funkcje algebroidalne, w myśl [51], będziemy się posługiwać pojęciem krzywej całkowitej.
Niech $f(z)$ będzie n-wartościową funkcją algebroidalną określoną równaniem (1.6). Mówimy, że $(n+1)$-wymiarowa krzywa całkowita $\overrightarrow{G}_f(z)$ jest *krzywą powiązaną* z n-wartościową funkcją algebroidalną $f(z)$ jeśli

$$\overrightarrow{G}_f(z) = (A_0(z), A_1(z), \dots, A_n(z)),$$

gdzie funkcje $\{A_j(z)\}_{j=0}^n$ są funkcjami całkowitymi z równania (1.6).

Niech

$$\overrightarrow{a}(w) = \begin{cases} (1, w, w^2, \dots, w^n) & , \text{ gdy } w \in \mathbb{C} \\ (0, 0, \dots, 1) & , \text{ gdy } w = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Niech $\phi(r)$ będzie funkcją dodatnią, niemalejącą, logarytmicznie wypukłą dla $r > 0$ i taką, że $\phi(r) = o(T(r, f)) \quad (r \to \infty)$. Oznaczmy przez $p_\phi(r, w, f)$ liczbę przedziałów składowych zbioru

$$\left\{\theta\colon \log \frac{\|\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}(w)\|}{|(\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta}), \overrightarrow{a}(w))|} > \phi(r)\right\}$$

zawierających przynajmniej jeden punkt maksimum funkcji $\log \frac{\|\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}(w)\|}{|(\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta}), \overrightarrow{a}(w))|}$. Ponadto niech

$$p_\phi(w, f) = \liminf_{r \to \infty} p_\phi(r, w, f).$$

Wówczas wielkość

$$p(w, f) = \sup_{\{\phi\}} p_\phi(w, f)$$

nazywamy *ilością rozdzielonych punktów maksimum* algebroidalnej funkcji $f(z)$.

W poniższym twierdzeniu otrzymujemy górne oszacowanie odchylenia $\beta(w, f)$ dla funkcji algebroidalnej $f(z)$ skończonego rzędu dolnego w zależności od $p(w, f)$ oraz defektu Valirona.

Twierdzenie 3.4. *[31] Niech $f(z)$ będzie n-wartościową funkcją algebroidalną skończonego rzędu dolnego λ oraz rzędu ρ. Dla dowolnego $w \in \overline{\mathbb{C}}$ i $0 < \gamma < \infty$ niech*

$$E(\gamma) := \left\{ r > 0 : \mathcal{L}(r, w, f) < B\left(\frac{\gamma}{p(w, f)}, \Delta(w, f)\right) T(r, f)) \right\},$$

gdy $\Delta(w, f) > 0$, $p(w, f) < \infty$ oraz przy dowolnej ustalonej liczbie ϵ niech

$$E(\gamma) := \{r > 0 : \mathcal{L}(r, w, f) < \epsilon T(r, f))\},$$

gdy $\Delta(w, f) = 0$ lub $p(w, f) = \infty$. Wówczas

$$\overline{\mathit{logdens}}\ E(\gamma) \geq 1 - \frac{\lambda}{\gamma} \ \ i \ \ \underline{\mathit{logdens}}\ E(\gamma) \geq 1 - \frac{\rho}{\gamma}.$$

W przypadku funkcji meromorficznych Twierdzenie 3.4 zostało udowodnione w [17] (patrz również [41]).

Wniosek 3.3. *Dla n-wartościowej funkcji algebroidalnej $f(z)$ skończonego rzędu dolnego λ i dla dowolnego $w \in \overline{\mathbb{C}}$ zachodzi*

$$\beta(w, f) \leq B\left(\frac{\lambda}{p(w, f)}, \Delta(w, f)\right).$$

Wniosek 3.4. *Dla n-wartościowej funkcji algebroidalnej $f(z)$ skończonego rzędu dolnego λ i dla dowolnego $w \in \overline{\mathbb{C}}$ zachodzi*

$$p(w, f) \leq \max\left(\left[\frac{\pi\lambda}{\beta(w, f)}\right], 1\right),$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Wniosek 3.5. *Jeśli $f(z)$ jest n-wartościową funkcją algebroidalną skończonego rzędu dolnego λ oraz $\beta(w, f) > 0$ to dla dowolnego $w \in \overline{\mathbb{C}}$ zachodzi*

$$p(w, f) < \infty.$$

Gdy $\beta(w, f) > 0$ to $p(w, f) \geq 1$ i wówczas z Wniosku 3.3 wynikają Twierdzenie I Petrenki oraz rezultat Niino opisane w podrozdziale 1.4.

3.1 Rezultaty pomocnicze

Podrozdział ten jest poświęcony udowodnieniu lematów, które będziemy stosować w dowodach głównych twierdzeń tego rozdziału.

3.1.1 Lematy dotyczące krzywych całkowitych

Niech $\overrightarrow{G}(z)$ będzie p-wymiarową krzywą całkowitą, $\overrightarrow{a} \in \mathbb{C}^p$ oraz niech $\phi(r)$ będzie dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą funkcją, taką że $\phi(r) = o(T(r, \overrightarrow{G}))$. Rozważmy funkcję zadaną w następujący sposób

$$u_\phi(z) = \max(\log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|}, \phi(|z|)).$$

Lemat 3.1. *Funkcja $u_\phi(z)$ jest funkcją $\delta-$subharmoniczną na $\mathbb{C}$.*

Dowód. Z definicji funkcji $u_\phi(z)$ mamy

$$\begin{aligned} u_\phi(z) &= \max(\log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|}, \phi(|z|)) \\ &= \max(\log(\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|) - \log|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|, \phi(|z|)) \\ &= \max(u_1(z) - u_2(z), \phi(|z|)), \end{aligned}$$

gdzie $u_1(z) = \log(\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|)$ oraz $u_2(z) = \log|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|$. Funkcje $u_1(z)$ i $u_2(z)$ są subharmoniczne [51]. Wówczas mamy

$$u_\phi(z) = \max(u_1(z), \phi(|z|) + u_2(z)) - u_2(z).$$

Skoro $\phi(r)$ jest rosnącą i logarytmicznie wypukłą funkcją dla $r > 0$ to $\phi(|z|)$ jest funkcją subharmoniczną na $\mathbb{C}$. Wobec tego funkcja $u_\phi(z)$ jest różnicą funkcji subharmonicznych

$$U_1(z) = \max(u_1(z), \phi(|z|) + u_2(z)) \text{ oraz } U_2(z) = u_2(z),$$

a zatem jest funkcją $\delta-$subharmoniczną. $\square$

Posługując się metodą A. Baernsteina dla funkcji T^* [4] określmy funkcje

$$\begin{aligned} m^*(r,\theta,u_\phi) &= \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi}\int_E u_\phi(re^{i\varphi})d\varphi, \\ T^*(r,\theta,u_\phi) &= m^*(r,\theta,u_\phi) + N(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}), \end{aligned}$$

gdzie $r \in (0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$, E jest zbiorem mierzalnym oraz $|E| = mes\ E$. Rozważmy teraz dla dowolnego $t \in (0,+\infty)$ zbiór

$$G_t = \{re^{i\varphi} \colon u_\phi(re^{i\varphi}) > t\},$$

i niech

$$u^*_\phi(re^{i\varphi}) = \sup\{t \colon re^{i\varphi} \in G^*_t\},$$

gdzie G^*_t jest obrazem zbioru G_t w symetryzacji kołowej ([26]).

Funkcja $u^*_\phi(re^{i\varphi})$ jest nieujemna i nierosnąca na przedziale $[0,\pi]$, parzysta względem φ oraz dla dowolnego ustalonego r jest równomierzalna z funkcją $u_\phi(re^{i\varphi})$. Spełnia ponadto poniższe równości

$$\begin{aligned} u^*_\phi(r) &= \max(\log \max_{|z|=r} \log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(z),\overrightarrow{a})|}, \phi(r)), \\ u^*_\phi(re^{i\pi}) &= \max(\log \min_{|z|=r} \log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(z),\overrightarrow{a})|}, \phi(r)), \\ m^*(r,\theta,u_\phi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta u^*_\phi(re^{i\varphi})d\varphi. \end{aligned}$$

Z twierdzenia A. Baernsteina ([4]) wynika, że funkcja $T^*(r,\theta,u_\phi)$ jest subharmoniczna na $D = \{re^{i\theta} \colon 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \pi\}$, ciągła na $D \cup (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ oraz logarytmicznie wypukła dla $r > 0$ przy dowolnym ustalonym $\theta \in [0,\pi]$. Ponadto

$$\begin{aligned} T^*(r,0,u_\phi) &= N(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}), \\ T^*(r,\pi,u_\phi) &= T(r,\overrightarrow{G}) + o(T(r,\overrightarrow{G})) \ \ (r\to\infty), \\ \frac{\partial}{\partial\theta}T^*(r,\theta,u_\phi) &= \frac{u^*_\phi(re^{i\theta})}{\pi} \ \text{ dla } \ 0<\theta<\pi. \end{aligned}$$

W poprzednim rozdziale we worze (2.1) dla funkcji rzeczywistej $\alpha(r)$ $(r \in \mathbb{R})$ określiliśmy operator

$$L\alpha(r) = \liminf_{h\to 0} \frac{\alpha(re^h) + \alpha(re^{-h}) - 2\alpha(r)}{h^2}.$$

Pokażemy teraz następujący lemat.

Lemat 3.2. *Niech $\overrightarrow{G}(z)$ będzie p-wymiarową krzywą całkowitą i $\overrightarrow{a} \in \mathbb{C}^p$. Dla prawie każdego $\theta \in [0, \pi]$ i dla dowolnego $r > 0$, takiego że funkcje $\|\overrightarrow{G}(z)\|$ i $(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})$ nie posiadają zer na okręgu $\{z\colon |z| = r\}$ zachodzi*

$$LT^*(r, \theta, u_\phi) \geq -\frac{p_\phi^2(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\pi} \frac{\partial u_\phi^*(r, \theta)}{\partial \theta}.$$

Dowód. W dowodzie stosujemy metody, którymi posłużyliśmy się przy udowadnianiu Lematu 2.2. Niech r_0 będzie liczbą spełniającą założenia lematu. Ponieważ $u_\phi^*(r_0, \theta)$ jest funkcją nierosnącą względem θ, to na mocy twierdzenia Lebesgue'a wynika, że pochodna $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta}$ istnieje dla prawie każdego $\theta \in [0, \pi]$. Wybierzmy $\theta \in (0, \pi)$, takie że istnieje $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta}$.

Jeśli $u_\phi^*(r_0, \theta) = \phi(r_0)$ to $u_\phi^*(r_0, x) = \phi(r_0)$ dla każdego $x > \theta$ oraz $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} = 0$. Jako, że funkcja $T^*(r, \theta, u_\phi)$ jest logarytmicznie wypukła, to $LT^*(r, \theta, u_\phi) \geq 0$. Stąd wynika teza lematu w sytuacji, gdy $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} = 0$ lub $u_\phi^*(r_0, \theta) = \phi(r_0)$.

Załóżmy teraz, że $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} < 0$ i $u_\phi^*(r_0, \theta) > \phi(r_0)$. Istnieje wówczas zbiór $E(r_0, \theta)$ ([4]), taki że

$$m^*(r_0, \theta, u_\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{E(r_0,\theta)} u_\phi(r_0, \varphi) d\varphi,$$

gdzie

$$\{\varphi\colon u_\phi(r_0, \varphi) > u_\phi^*(r_0, \theta)\} \subset E(r_0, \theta) \subset \{\varphi\colon u_\phi(r_0, \varphi) \geq u_\phi^*(r_0, \theta)\}.$$

Rozważmy funkcję

$$F(\varphi) = \log \frac{\|\overrightarrow{G}(r_0 e^{i\varphi})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0 e^{i\varphi}), \overrightarrow{a})|}.$$

Wtedy zbiór $\{\varphi\colon F(\varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)\}$ jest skończony. W przeciwnym wypadku istniałby ciąg zbieżny $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, taki że $F(\varphi_n) = u_\phi^*(r_0, \theta)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Skoro liczba r_0 została tak wybrana, aby funkcje $\|\overrightarrow{G}(z)\|$ i $(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})$ nie posiadały zer na okręgu $|z| = r_0$ to funkcja $F(\varphi)$ jest analityczna względem $\varphi \in [0, 2\pi]$. Z twierdzenia o identyczności wynika, że $F(\varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)$ dla dowolnego $\varphi \in [0, 2\pi]$. Wynika stąd, że $u_\phi(r_0, \varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)$ dla każdego $\varphi \in [0, 2\pi]$, a zatem $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} = 0$ co prowadzi do sprzeczności. Wobec tego zbiór $\{\varphi\colon F(\varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)\}$ jest w istocie skończony. W rezultacie mamy

$$m^*(r_0, \theta, u_\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1(r_0,\theta)} u_\phi(r_0, \varphi) d\varphi,$$

gdzie $E_1(r_0, \theta) = \{\varphi \in [0, 2\pi]\colon u_\phi(r_0, \varphi) > u_\phi^*(r_0, \theta)\}$.

Rozważmy teraz dla $r > 0$ funkcję

$$\Psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1(r_0,\theta)} u_\phi(r, \varphi) d\varphi.$$

Dla funkcji $\Psi(r)$ zachodzi $\Psi(r_0) = m^*(r_0, \theta, u_\phi)$ oraz $\Psi(r) \leq m^*(r, \theta, u_\phi)$ dla dowolnego $r > 0$. Stąd

$$Lm^*(r_0, \theta, u_\phi) \geq L\Psi(r_0).$$

Ponieważ zbiór $E_1(r_0, \theta)$ jest otwarty to $E_1(r_0, \theta) = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$. Funkcja $F(\varphi)$ jest analityczna dla każdego $\varphi \in [0, 2\pi]$, a zatem $F(\alpha_k) = F(\beta_k) = u_\phi^*(r_0, \theta)$ i ponownie stosując twierdzenie o identyczności otrzymujemy, że rodzina przedziałów $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_k$ jest skończona. Oznaczmy przez $m = m(r_0)$ ilość tych przedziałów.

Funkcja

$$\log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|} = \log(\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|) - \log|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|$$

jest różnicą funkcji subharmonicznej $\log(\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|)$ oraz harmonicznej $\log|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|$ (ponieważ funkcje $\|\overrightarrow{G}(z)\|$ i $(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})$ nie posiadają zer na okręgu $|z| = r_0$), a zatem jest funkcją subharmoniczną w sąsiedztwie okręgu $|z| = r_0$. Stąd

$$\begin{aligned}
L\Psi(r_0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} r\frac{d}{dr} r\frac{d}{dr} u_\phi(re^{i\varphi})\bigg|_{r=r_0} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} r\frac{d}{dr} r\frac{d}{dr} \log \frac{\|\overrightarrow{G}(re^{i\varphi})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(re^{i\varphi}), \overrightarrow{a})|}\bigg|_{r=r_0} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left(r_0^2 \Delta \log \frac{\|\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi}), \overrightarrow{a})|} - \frac{\partial^2 \log \frac{\|\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi}), \overrightarrow{a})|}}{\partial \varphi^2} \right) d\varphi \\
&\geq -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial u_\phi(r_0, \varphi)}{\partial \varphi} \right] \bigg|_{\alpha_k}^{\beta_k}.
\end{aligned}$$

Z powyższych rozważań otrzymujemy, że

$$Lm^*(r_0, \theta, u_\phi) \geq L\Psi(r_0) \geq -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial u_\phi(r_0, \varphi)}{\partial \varphi} \right] \bigg|_{\alpha_k}^{\beta_k}. \tag{3.2}$$

Pokażemy teraz, że

$$Lm^*(r_0, \theta, u_\phi) \geq -\frac{m^2}{\pi} \frac{\partial u_\phi^*(r_0, \theta)}{\partial \theta}.$$

Zauważmy, że istnieją sąsiedztwa punktów $\alpha_k,\ \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, w których funkcja $F(\varphi) = \log \frac{\|\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi}), \overrightarrow{a})|}$ jest, odpowiednio, ściśle rosnąca i ściśle malejąca. W przeciwnym razie w sąsiedztwie jednego z punktów $\alpha_k,\ \beta_k$ istniałby zbieżny ciąg $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dążący do tego punktu i taki, że $F'(\varphi_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Funkcja $F'(\varphi)$ jest analityczna dla $\varphi \in [0, 2\pi]$, więc na mocy twierdzenia o identyczności otrzymujemy, że $F'(\varphi) = 0$ dla dowolnego $\varphi \in [0, 2\pi]$. Wówczas dla każdego $\varphi \in [0, 2\pi]$ mamy $F(\varphi) = u_\phi^*(r_0, \theta)$, a stąd $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} = 0$ co stoi w sprzeczności z założeniem, że $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} < 0$.

Prowadzi to nas do wniosku, że w pewnych sąsiedztwach punktów $\alpha_k,\ \beta_k$ $(k = 1, 2 \ldots, m)$ funkcja $\log \frac{\|\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi}), \overrightarrow{a})|}$ jest ściśle monotoniczna.

Ponieważ $u_\phi^*(r_0, \theta) > 0$ to istnieją sąsiedztwa punktów $\alpha_k,\ \beta_k$, w których zachodzi równość $u_\phi(r_0, \varphi) = \log \frac{\|\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi}), \overrightarrow{a})|}$. Z twierdzenia o identyczności wynika, że funkcja $u_\phi(r_0, \theta)$ jest ściśle monotoniczna w otoczeniu każdego z punktów $\alpha_k,\ \beta_k\ (k = 1, 2, \ldots, m)$.

Chcemy wykazać, że $\frac{\partial u_\phi(r_0,\alpha_k)}{\partial\varphi} > 0$ oraz $\frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k)}{\partial\varphi} < 0$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$. Niech $h > 0$ będzie wybrane tak, aby $u_\phi(r_0, \varphi)$ była funkcją ściśle rosnącą w h-sąsiedztwie punktu α_k. Wtedy

$$mes\{\varphi \in [0, 2\pi]\colon u_\phi(r_0, \varphi) \geq u_\phi(r_0, \alpha_k + h)\} \leq 2\theta - h, \tag{3.3}$$

gdzie mes oznacza miarę Lebesgue'a. Funkcja $u_\phi(r, \theta)$ jest równomierzalna z funkcją $u^*_\phi(r_0, \theta)$ skąd mamy

$$\begin{aligned} &mes\left\{\varphi \in [0, 2\pi]\colon u_\phi(r_0, \varphi) \geq u^*_\phi\left(r_0, \theta - \tfrac{h}{2}\right)\right\} = \\ &= mes\left\{\varphi \in [0, 2\pi]\colon u^*_\phi(r_0, \varphi) \geq u^*_\phi\left(r_0, \theta - \tfrac{h}{2}\right)\right\} = 2\theta - h. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Stąd i z (3.3) otrzymujemy, że

$$u_\phi(r_0, \alpha_k + h) \geq u^*_\phi\left(r_0, \theta - \frac{h}{2}\right).$$

Wobec tego

$$u_\phi(r_0, \alpha_k) = u^*_\phi(r_0, \theta) \tag{3.5}$$

i dla $h > 0$ mamy

$$\frac{u_\phi(r_0, \alpha_k + h) - u_\phi(r_0, \alpha_k)}{h} \geq \frac{u^*_\phi\left(r_0, \theta - \frac{h}{2}\right) - u^*_\phi(r_0, \theta)}{h}.$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy przy $h \to 0^+$ otrzymujemy

$$\left.\frac{\partial u_\phi(r_0, \varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\alpha_k} \geq -\frac{1}{2}\frac{\partial u^*_\phi(r_0, \theta)}{\partial\theta}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Z założenia wiemy, że $\frac{\partial u_\phi(r_0,\theta)}{\partial\theta} < 0$, więc

$$\frac{\partial u_\phi(r_0, \alpha_k)}{\partial\varphi} \geq -\frac{1}{2}\frac{\partial u^*_\phi(r_0, \theta)}{\partial\theta} > 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Podobnie pokażemy, że $\frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k)}{\partial\varphi} < 0$. Wybierzmy $h > 0$, takie że funkcja $u_\phi(r_0, \varphi)$ jest ściśle rosnąca w h-sąsiedztwie punktu β_k. Wtedy

$$mes\{\varphi \in [0, 2\pi]\colon u_\phi(r_0, \varphi) \geq u_\phi(r_0, \beta_k - h)\} \leq 2\theta - h. \tag{3.6}$$

Ponieważ funkcja $u_\phi(r_0, \theta)$ jest równomierzalna z funkcją $u^*_\phi(r_0, \theta)$ to z nierówności (3.4) i (3.6) otrzymujemy

$$u_\phi(r_0, \beta_k - h) \geq u^*_\phi\left(r_0, \theta - \frac{h}{2}\right).$$

Stąd

$$u_\phi(r_0, \beta_k) \geq u^*_\phi(r_0, \theta), \tag{3.7}$$

i przy $h > 0$ mamy

$$\frac{u_\phi(r_0, \beta_k - h) - u_\phi(r_0, \beta_k)}{h} \geq \frac{u^*_\phi\left(r_0, \theta - \frac{h}{2}\right) - u^*_\phi(r_0, \theta)}{h}.$$

Biorąc w powyższym $h \to 0^+$ mamy

$$-\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial \varphi}\bigg|_{\beta_k} \ge -\frac{1}{2}\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta}.$$

Ponieważ założyliśmy, że $\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} < 0$ to

$$\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial \varphi}\bigg|_{\beta_k} \le \frac{1}{2}\frac{\partial u_\phi^*(r_0,\theta)}{\partial \theta} < 0.$$

Pokazaliśmy zatem, że

$$\frac{\partial u_\phi(r_0,\alpha_k)}{\partial \varphi} > 0 \ \text{ i } \ \frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k)}{\partial \varphi} < 0, \ \text{ dla } \ k = 1,2,\dots,m.$$

Niech $h_0 > 0$ będzie liczbą dodatnią, taką że dla każdego φ spełniającego warunek $|\varphi| \le h_0$ zachodzą poniższe nierówności

$$\alpha_k + h_0 < \beta_k - h_0, \quad \frac{\partial u_\phi(r_0,\alpha_k+\varphi)}{\partial \varphi} > 0 \ \text{ i } \ \frac{\partial u_\phi(r_0,\beta_k+\varphi)}{\partial \varphi} < 0,$$

dla $k = 1,2,\dots,m$. Oznaczmy rzez γ_k najmniejszą wartość funkcji $u_\phi(r_0,\varphi)$ na przedziale $[\alpha_k + h_0, \beta_k - h_0]$. Niech ponadto $\gamma = \min_{1\le k\le m}\gamma_k$. Wtedy z (3.5) mamy

$$u_\phi(r_0,\alpha_1+h_0) \ge \gamma > u_\phi(r_0,\alpha_1) = u_\phi^*(r_0,\theta).$$

Wybierzmy teraz liczbę h_1, taką że $0 < h_1 \le h_0$ oraz $u_\phi(r_0,\alpha_1+h_1) = \gamma$. Na mocy wyboru h_1 układ równań

$$\begin{cases} u_\phi(r_0,\beta_k - x) & = u_\phi(r_0,\alpha_1+h) \\ u_\phi(r_0,\alpha_k + y) & = u_\phi(r_0,\alpha_1+h) \end{cases}$$

ma zawsze tylko jedną parę rozwiązań dla każdego $0 < h < h_1$. Oznaczmy te rozwiązania przez $x_k(h)$ i $y_k(h)$. Z ciągłości funkcji $u_\phi(r_0,\varphi)$ oraz równości

$$u_\phi(r_0,\beta_k) = u_\phi(r_0,\alpha_k) = u_\phi^*(r_0,\theta) \ \ (k = 1,2,\dots,m)$$

otrzymujemy, że $x_k(h) \to 0, \ y_k(h) \to 0$ przy $h \to 0$, ponieważ

$$u_\phi(r_0,\beta_k - x_k(h)) = u_\phi(r_0,\alpha_k) = u_\phi(\alpha_1+h) \to u_\phi^*(r_0,\theta) \ \ (h \to 0^+).$$

Z drugiej strony $u_\phi(r_0,\beta_k) = u_\phi^*(r_0,\theta)$, a stąd $x_k(h) \to 0$ przy $h \to 0^+$.

Pokażemy teraz, że z różniczkowalności funkcji $u_\phi(r_0,\varphi)$ wynika następująca równość

$$u_\phi(r_0,\beta_k) - u_\phi'(r_0,\beta_k)\cdot x_k + o(x_k) = u_\phi(r_0,\alpha_1) + u_\phi'(r_0,\alpha_1)\cdot h + o(h) \ \ (h \to 0),$$

gdzie przez $u_\phi'(r_0,\beta_k)$ rozumiemy $\frac{\partial u_\phi(r_0,\varphi)}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\beta_k}$. Na mocy definicji mamy

$$u_\phi'(r_0,\beta_k) = \lim_{x_k\to 0}\frac{u_\phi(r_0,\beta_k - x_k) - u_\phi(r_0,\beta_k)}{-x_k},$$

więc
$$u'_\phi(r_0, \beta_k) = \frac{u_\phi(r_0, \beta_k - x_k) - u_\phi(r_0, \beta_k)}{-x_k} + o(1) \ \ (x_k \to 0).$$
Stąd
$$(-x_k) \cdot u'_\phi(r_0, \beta_k) = u_\phi(r_0, \beta_k - x_k) - u_\phi(r_0, \beta_k) + o(x_k),$$
a zatem mamy
$$u_\phi(r_0, \beta_k) - x_k \cdot u'_\phi(r_0, \beta_k) + o(x_k) = u_\phi(r_0, \beta_k - x_k).$$

Z drugiej strony $u_\phi(r_0, \beta_k - x_k) = u_\phi(r_0, \alpha_1 + h)$ skąd mamy
$$u_\phi(r_0, \alpha_1 + h) = u_\phi(r_0, \alpha_1) + u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h + o(h).$$
Z równości udowodnionej powyżej wynika, że
$$x_k = -\frac{u'_\phi(r_0, \alpha_1)}{u'_\phi(r_0, \beta_k)} \cdot h + o(h), \ \ h \to 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$
W podobny sposób można pokazać, że
$$y_k = \frac{u'_\phi(r_0, \alpha_1)}{u'_\phi(r_0, \alpha_k)} \cdot h + o(h), \ \ h \to 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Z określenia $x_k, \ y_k$ mamy
$$mes\{\varphi \in [0, 2\pi] \colon u_\phi(r_0, \varphi) \geq u_\phi(r_0, \alpha_1 + h)\} = 2\theta - \sum_{k=1}^{m} (x_k + y_k) =$$
$$= 2\theta - \sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{u'_\phi(r_0,\alpha_1)}{u'_\phi(r_0,\alpha_k)} - \tfrac{u'_\phi(r_0,\alpha_1)}{u'_\phi(r_0,\beta_k)} \right) h + o(h) = 2\theta - A(h),$$

gdzie $A(h) = \sum_{k=1}^{m} \left(\tfrac{u'_\phi(r_0,\alpha_1)}{u'_\phi(r_0,\alpha_k)} - \tfrac{u'_\phi(r_0,\alpha_1)}{u'_\phi(r_0,\beta_k)} \right) h + o(h)$. Jednakże
$$mes\{\varphi \in [0, 2\pi] \colon u^*_\phi(r_0, \varphi) \geq u^*_\phi(r_0, \theta - \frac{1}{2}A(h))\} = 2\theta - A(h),$$
a zatem
$$u^*_\phi\left(r_0, \theta - \frac{1}{2}A(h)\right) = u_\phi(r_0, \alpha_1 + h).$$

Funkcja $u^*_\phi(r_0, \varphi)$ jest różniczkowalna względem θ, więc
$$u^*_\phi(r_0, \theta) - \tfrac{1}{2}(u^*_\phi(r_0, \theta))' A(h) + o(A(h))$$
$$= u_\phi(r_0, \alpha_1) + u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h + o(h) \quad (h \to 0).$$
Ponieważ $u_\phi(r_0, \alpha_1) = u^*_\phi(r_0, \theta)$ to otrzymujemy
$$-\frac{1}{2}(u^*_\phi(r_0, \theta))' \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{u'_\phi(r_0, \alpha_k)} - \frac{1}{u'_\phi(r_0, \beta_k)} \right) \cdot u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h$$
$$= u'_\phi(r_0, \alpha_1) \cdot h + o(h) \quad (h \to 0).$$

Jako, że $u'_\phi(r_0,\alpha_1) > 0$ to mnożąc powyższą równość obustronnie przez $u'_\phi(r_0,\alpha_1)\cdot h$ dostajemy

$$1 = -\frac{1}{2}(u^*_\phi(r_0,\theta))' \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{u'_\phi(r_0,\alpha_k)} - \frac{1}{u'_\phi(r_0,\beta_k)}\right).$$

Mnożąc z kolei otrzymaną równość obustronnie przez $\sum_{i=1}^{m}(u'_\phi(r_0,\alpha_i) - u'_\phi(r_0,\beta_i))$ mamy

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}(u'_\phi(r_0,\alpha_i) - u'_\phi(r_0,\beta_i)) = \\ &= -\tfrac{1}{2}(u^*_\phi(r_0,\theta))' \sum_{k,i=1}^{m}(u'_\phi(r_0,\alpha_i) - u'_\phi(r_0,\beta_i))\left(\tfrac{1}{u'_\phi(r_0,\alpha_k)} - \tfrac{1}{u'_\phi(r_0,\beta_k)}\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Skorzystamy teraz z nierówności (2.9) wykazanej w dowodzie Lematu 2.2. Dla dowolnych liczb dodatnich a_k, b_k $(k = 1,\ldots,m)$ zachodzi

$$\sum_{k,i=1}^{m}(a_i+b_i)\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}\right) \geq 4m^2.$$

Stosując tą nierówność do prawej strony równości (3.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(u'_\phi(r_0,\alpha_i) - u'_\phi(r_0,\beta_i)) &\geq -\tfrac{1}{2}(u^*_\phi(r_0,\theta))' 4m^2 \\ &= -2m^2(u^*_\phi(r_0,\theta))'.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Z (3.2) oraz (3.9) otrzymujemy zatem

$$Lm^*(r_0,\theta,u_\phi) \geq -\frac{m^2}{\pi}(u^*_\phi(r_0,\theta))' = -\frac{m^2}{\pi}\frac{\partial u^*_\phi(r_0,\theta)}{\partial\theta}.$$

Na mocy definicji $p_\phi(r_0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$ jest liczbą przedziałów składowych zbioru

$$\{\varphi\in[0,2\pi]\colon\ \log\frac{\|\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi})\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi}),\overrightarrow{a})|} > \phi(r_0)\}$$

zawierających przynajmniej jeden punkt maksimum funkcji $\frac{\|\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi})\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(r_0e^{i\varphi}),\overrightarrow{a})|}$. Z drugiej strony m jest liczbą przedziałów składowych zbioru $E_1(r_0,\theta) = \{\varphi\colon u_\phi(r_0,\varphi) > u^*(r_0,\theta)\}$ oraz $u^*(r_0,\theta) > \phi(r_0)$. Stąd $m \geq p_\phi(r_0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$. Ponadto $LT^*(r_0,\theta,u_\phi) \geq Lm^*(r_0,\theta,u_\phi)$, więc ostatecznie mamy

$$LT^*(r,\theta,u_\phi) \geq -\frac{p^2_\phi(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi}\frac{\partial u^*_\phi(r,\theta)}{\partial\theta}.$$

□

Zakończymy ten podrozdział przytaczając jeszcze jeden lemat, który zastosujemy w dowodzie jednego z głównych twierdzeń tego rozdziału.

Lemat C. [51] Niech $\overrightarrow{G}(z)$ będzie krzywą całkowitą skończonego rzędu dolnego λ. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją ciągi S_k, R_k dążące do nieskończoności, takie że $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{S_k}{R_k} = 0$ oraz dla każdego $k \geq k_0(\varepsilon)$ zachodzi

$$\frac{T(2R_k,\overrightarrow{G})}{R_k^\lambda} + \frac{T(2S_k,\overrightarrow{G})}{S_k^\lambda} < \varepsilon\int_{2S_k}^{R_k}\frac{T(r,\overrightarrow{G})}{r^{\lambda+1}}dr.$$

3.1.2 Lematy dotyczące funkcji algebroidalnych

Niech $f(z)$ będzie n-wartościową funkcją algebroidalną i niech $\overrightarrow{G}_f(z)$ będzie powiązaną z nią $n+1$-wymiarową krzywą całkowitą. Niech $\phi(r)$ będzie funkcją dodatnią, niemalejącą, logarytmicznie wypukłą i taką, że $\phi(r) = o(T(r, f))$. Dla $w \in \overline{\mathbb{C}}$ rozważmy funkcję zadaną w następujący sposób

$$u_\phi(z) = \max(\log \frac{\|\overrightarrow{G}_f(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}(w)\|}{|(\overrightarrow{G}_f(z), \overrightarrow{a}(w))|}, \phi(|z|)),$$

gdzie wektor $\overrightarrow{a}(w)$ jest określony w taki sam sposób jak w (3.1).

Lemat 3.3. *Funkcja $u_\phi(z)$ jest funkcją $\delta-$subharmoniczną w $\mathbb{C}$.*

Uwaga 3.2. Ze względu na to, że przy badaniu n-wartościowej funkcji algebroidalnej $f(z)$ posługujemy się powiązaną z nią $(n+1)$-wymiarową krzywą całkowitą $\overrightarrow{G}_f(z)$ to niektóre lematy w tym podrozdziale są bezpośrednimi wnioskami z lematów dla krzywych całkowitych udowodnionych w poprzednim podrozdziale i jako takie nie wymagają dowodu. Powyższy Lemat 3.3 wynika z Lematu 3.1.

W sposób analogiczny jak w przypadku krzywych całkowitych zastosujemy teorię funkcji T^* A. Baernsteina ([4]) dla funkcji algebroidalnych. Niech

$$m^*(r, \theta, u_\phi) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E u_\phi(re^{i\varphi}) d\varphi,$$
$$T^*(r, \theta, u_\phi) = m^*(r, \theta, u_\phi) + N(r, \overrightarrow{a}(w), \overrightarrow{G}_f),$$

gdzie $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, E jest zbiorem mierzalnym i $|E|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru E. Dla dowolnego $t \in (0, +\infty)$ rozważmy zbiór

$$G_t = \{re^{i\varphi} \colon u_\phi(re^{i\varphi}) > t\},$$

i niech

$$u_\phi^*(re^{i\varphi}) = \sup\{t \colon re^{i\varphi} \in G_t^*\},$$

gdzie G_t^* jest obrazem zbioru G_t otrzymanym w wyniku symetryzacji kołowej ([26]).

Funkcja $u_\phi^*(re^{i\varphi})$ jest nieujemna i nierosnąca na przedziale $[0, \pi]$, parzysta względem φ oraz przy dowolnie ustalonym r jest równomierzalna z funkcją $u_\phi(re^{i\varphi})$ [26]. Ponadto spełnia poniższe warunki

$$u_\phi^*(r) = \max(\log \max_{|z|=r} \log \frac{\|\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}(w)\|}{|(\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta}), \overrightarrow{a}(w))|}, \phi(r)),$$
$$u_\phi^*(re^{i\pi}) = \max(\log \min_{|z|=r} \log \frac{\|\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}(w)\|}{|(\overrightarrow{G}_f(re^{i\theta}), \overrightarrow{a}(w))|}, \phi(r)),$$
$$m^*(r, \theta, u_\phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta u_\phi^*(re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Z twierdzenia A. Baernsteina ([4]) wynika, że funkcja $T^*(r, \theta, u_\phi)$ jest subharmoniczna na $D = \{re^{i\theta}\colon 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \pi\}$, ciągła na $D \cup (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ oraz logarytmicznie wypukła dla $r > 0$ i dowolnie ustalonego $\theta \in [0, \pi]$. Ponadto

$$\begin{aligned} T^*(r, 0, u_\phi) &= N(r, \overrightarrow{a}(w), \overrightarrow{G}_f), \\ T^*(r, \pi, u_\phi) &= T(r, f) + o(T(r, f)) \ \ (r \to \infty), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} T^*(r, \theta, u_\phi) &= \frac{u_\phi^*(re^{i\theta})}{\pi} \ \text{ for } 0 < \theta < \pi. \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku krzywych całkowitych tak i dla funkcji algebroidalnych można pokazać, że dla operatora $L\alpha(r)$ określonego w (2.1) zachodzi następujący lemat.

Lemat 3.4. *Niech $f(z)$ będzie n-wartościową funkcją algebroidalną i niech $\overrightarrow{G}_f(z)$ będzie powiązaną z nią $n+1$-wymiarową krzywą całkowitą. Dla prawie każdego $\theta \in [0, \pi]$, $w \in \overline{\mathbb{C}}$ i dla dowolnego $r > 0$, takiego że funkcje $\|\overrightarrow{G}_f(z)\|$ oraz $|(\overrightarrow{G}_f(z), \overrightarrow{a}(w))|$ nie posiadają zer na okręgu $\{z\colon |z| = r\}$ zachodzi*

$$LT^*(r, \theta, u_\phi) \geq -\frac{p_\phi^2(r, w, f)}{\pi} \frac{\partial u_\phi^*(r, \theta)}{\partial \theta},$$

gdzie $u_\phi^*(r, \theta) = u_\phi^*(re^{i\theta})$.

Uwaga 3.3. Lemat 3.4 jest wnioskiem Lematu 3.2 dla krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}_f(z)$ i wektora $\overrightarrow{a}(w)$.

Niech ϕ będzie funkcją nierosnącą, dodatnią, logarytmiczne wypukłą i taką, że $\phi(r) = o(T(r, f))$. Dla $\tau > 0$ i $p_\phi(w, f) < \infty$ wybierzmy liczby α i ψ spełniające następujące warunki

$$0 < \alpha \leq \min\left\{\pi, \frac{\pi p_\phi(w, f)}{2\tau}\right\}, \quad -\frac{\pi p_\phi(w, f)}{2\tau} \leq \psi \leq \frac{\pi p_\phi(w, f)}{2\tau} - \alpha.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\begin{aligned} h_{\phi,\tau}(r)\colon = {} & \tfrac{p_\phi^2(w,f)}{\pi} \left(\cos \tfrac{\tau\psi}{p_\phi(w,f)} u_\phi^*(r) - \cos \tfrac{\tau(\alpha+\psi)}{p_\phi(w,f)} u_\phi^*(re^{i\alpha})\right) \\ & -\tau p_\phi(w, f) \left(\sin \tfrac{\tau(\alpha+\psi)}{p_\phi(w,f)} T^*(r, \alpha, u_\phi) - \sin \tfrac{\tau\psi}{p_\phi(w,f)} N(r, w, f)\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

gdzie $N(r, w, f)\colon = N(r, \overrightarrow{a}(w), \overrightarrow{G}_f)$ [51].

Lemat 3.5. *Niech $A = \{r \in (0, \infty) : h_{\phi,\tau}(r) > 0\}$. Wówczas*

$$\tau \int\limits_{A \cap [1,R]} \frac{dt}{t} \leq (1 + o(1)) \log T(2R, f) \quad (R \to \infty).$$

Dowód. Stosując metodę z pracy [35] (patrz także [21] i [23]) rozważmy funkcję

$$\sigma(r) = \int\limits_0^\alpha T^*(r, \theta, u_\phi) \cos \frac{\tau(\theta + \psi)}{p_\phi(w, f)} d\theta.$$

Ponieważ $T^*(r,\theta,u_\phi)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą to dla $r>0$ i $h>0$ mamy

$$T^*(re^h,\theta,u_\phi)+T^*(re^{-h},\theta,u_\phi)-2T^*(r,\theta,u_\phi)\geq 0.$$

Stąd na mocy lematu Fatou [57, str.346] otrzymujemy

$$\begin{aligned} L\sigma(r) &= L\int_0^\alpha T^*(r,\theta,u_\phi)\cos\tfrac{\tau(\theta+\psi)}{p_\phi(w,f)}d\theta \\ &\geq \int_0^\alpha LT^*(r,\theta,u_\phi)\cos\tfrac{\tau(\theta+\psi)}{p_\phi(w,f)}d\theta\geq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wobec tego $\sigma(r)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą, a zatem $r\sigma'_-(r)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $(0,\infty)$, gdzie σ'_- oznacza pochodną lewostronną funkcji σ. Wówczas dla prawie każdego $r>0$

$$L\sigma(r)=r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r)).$$

Z Lematu 3.4 i nierówności (3.11) otrzymujemy, że dla prawie każdego $r>0$ zachodzi

$$L\sigma(r)=r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r))\geq -\int_0^\alpha \frac{p_\phi^2(r,w,f)}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(re^{i\theta})}{\partial\theta}\cos\frac{\tau(\theta+\psi)}{p_\phi(w,f)}d\theta. \tag{3.12}$$

Z definicji pojęcia rozdzielonych punktów maksimum wynika, że $p_\phi(r,w,f)\geq p(w,f)$ $(r\geq r_0)$. Funkcje $p_\phi(w,f)$ i $p(w,f)$ przyjmują wartości całkowite, więc istnieje takie ϕ, że $p_\phi(w,f)=p(w,f)$.
Jeśli dla $r>0$ funkcje $\|\overrightarrow{G}_f(z)\|$ i $|(\overrightarrow{G}_f(z),\overrightarrow{a}(w))|$ nie posiadają zer ani biegunów na okręgu $\{z:|z|=r\}$ to funkcja $u_\phi(re^{i\theta})$ spełnia warunek Lipschitza dla $\theta\in[0,2\pi]$. Wynika stąd, że również funkcja $u_\phi^*(re^{i\theta})$ spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[0,\pi]$ [26]. Wobec tego funkcja $u_\phi^*(re^{i\theta})$ jest absolutnie ciągła na przedziale $[0,\pi]$. Całkując dwukrotnie przez części całkę po prawej stronie nierówności (3.12) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\int_0^\alpha \frac{p_\phi^2(w,f)}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(re^{i\theta})}{\partial\theta}\cos\frac{\tau(\theta+\psi)}{p_\phi(w,f)}d\theta \\ &= -\frac{p_\phi^2(w,f)}{\pi}\left(\cos\frac{\tau\psi}{p_\phi(w,f)}u_\phi^*(r)-\cos\frac{\tau(\alpha+\psi)}{p_\phi(w,f)}u_\phi^*(re^{i\alpha})\right) \\ &+\tau p_\phi(w,f)\left(\sin\frac{\tau(\alpha+\psi)}{p_\phi(w,f)}T^*(r,\alpha,u_\phi)-\sin\frac{\tau\psi}{p_\phi(w,f)}N(r,w,f)\right)-\tau^2\sigma(r) \\ &= -h_{\phi,\tau}(r)-\tau^2\sigma(r). \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $u_\phi^*(re^{i\theta})$ jest malejąca względem $\theta\in[0,2\pi]$ to dla prawie każdego $r>0$ mamy

$$h_{\phi,\tau}(r)+\tau^2\sigma(r)\geq 0. \tag{3.13}$$

Stąd dla prawie każdego $r>0$ otrzymujemy

$$r\frac{d}{dr}(r\sigma'_-(r))\geq h_{\phi,\tau}(r)+\tau^2\sigma(r)\geq 0.$$

Dzieląc obie strony powyższej nierówności przez $r^{\tau+1}$ oraz całkując przez części na przedziale $[r,R]$ dostajemy ([35])

$$\begin{aligned}\int_r^R \tfrac{h_{\phi,\tau}(t)}{t^{\tau+1}}dt &\leq \int_r^R \tfrac{1}{t^\tau}\tfrac{d}{dt}(t\sigma_-^{'}(t))dt - \tau^2\int_r^R \tfrac{\sigma(t)}{t^{\tau+1}}dt \\ &\leq \left(\tfrac{t\sigma_-^{'}(t)}{t^\tau} + \tau\tfrac{\sigma\tau}{t^\tau}\right)\Bigg|_r^R, \quad 0 < r \leq R.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Zastosujemy teraz metodę Barry'ego [6]. Rozważmy funkcję

$$\Phi(r) = -\int_r^R \frac{h_{\phi,\tau}(t)}{t^{\tau+1}}dt, \quad 0 < r \leq R.$$

Z nierówności (3.14) mamy

$$\Phi(r) \geq -\frac{\sigma_-^{'}(R)}{R^{\tau-1}} - \tau\frac{\sigma(R)}{R^\tau} + \frac{\sigma_-^{'}(r)}{r^{\tau-1}} + \tau\frac{\sigma(r)}{r^\tau}.$$

Niech

$$\psi(r) = r^\tau\left(\Phi(r) + \frac{\sigma_-^{'}(R)}{R^{\tau-1}} + \tau\frac{\sigma(R)}{R^\tau}\right). \tag{3.15}$$

Wówczas zachodzi

$$\psi(r) \geq r\sigma_-^{'}(r) + \tau\sigma(r), \quad 0 < r \leq R.$$

Z (3.13) wynika zatem, że dla prawie każdego $r > 0$

$$r\psi^{'}(r) = \tau\psi(r) + h_{\phi,\tau}(r) \geq \tau r\sigma_-^{'}(r) + \tau^2\sigma(r) + h_{\phi,\tau}(r) \geq \tau r\sigma_-^{'}(r) \geq 0.$$

Funkcja $T^*(r,\alpha,u_\phi)$ jest rosnąca dla $r \geq r_0$ ([5], również w [16]), a zatem $\sigma(r)$ jest funkcją rosnącą na przedziale $[r_0,R]$. Stąd $r\sigma_-^{'}(r) \geq 0$ dla każdego $r \geq r_0$. Ponadto $\sigma(r) > 0$ dla każdego $r \geq r_0$. Wobec tego dla dowolnego $r \geq r_0$ zachodzi

$$\psi(r) \geq r\sigma_-^{'}(r) + \tau\sigma(r) > 0.$$

Dla $r \geq r_0$ otrzymaliśmy $\psi'(r) \geq 0$ i $\psi(r) > 0$, więc $\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} \geq 0$ dla $r \geq r_0$.
Niech $r \in A = \{r \in (0,\infty) : h_{\phi,\tau}(r) > 0\}$. Wówczas

$$r\psi^{'}(r) = \tau\psi(r) + h_{\phi,\tau}(r) > \tau\psi(r) > 0$$

dla dowolnego $r_0 \leq r \leq R$. Stąd dla $r \geq r_0$ i $r \in A$ mamy $\frac{\tau}{r} \leq \frac{\psi^{'}(r)}{\psi(r)}$. Wobec tego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\tau\int_{A\cap[1,R]}\tfrac{dr}{r} &\leq \int_{A\cap[r_0,R]}\tfrac{\psi^{'}(r)}{\psi(r)}dr + \tau\log r_0 \\ &\leq \int_{r_0}^R \tfrac{\psi^{'}(r)}{\psi(r)}dr + \tau\log r_0 \\ &= \log\tfrac{\psi(R)}{\psi(r_0)} + \tau\log r_0 \ \ (n\to\infty).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Z drugiej strony jednak $\psi(R) = R\sigma_-'(R) + \tau\sigma(R)$. Z definicji funkcji $\sigma(r)$ wynika, że

$$\sigma(r) = \int\limits_0^\alpha T^*(r,\theta,u_\phi)\cos\frac{\tau(\theta+\psi)}{p_\phi(w,f)}d\theta \le \int\limits_0^\alpha T^*(r,\theta,u_\phi)d\theta$$
$$\le \int\limits_0^\alpha (T(r,f) + o(T(r,f)))d\theta \le \pi T(r,f) + o(T(r,f)) \quad (r\to\infty).$$

Monotoniczność funkcji $r\sigma_-'(r)$ implikuje

$$r\sigma_-'(r) \le \int\limits_r^{2r} \sigma_-'(t)dt \le \sigma(2r) \le \pi T(2r,f) + o(T(r,f)) \quad (r\to\infty).$$

Z powyższej nierówności oraz z (3.15) i (3.16) dostajemy

$$\begin{aligned}\tau \int\limits_{A\cap[1,R]} \frac{dr}{r} &\le \log\frac{\psi(R)}{\psi(r_0)} + O(1) \le \log\psi(R) + O(1)\\ &= \log\left[R\sigma_-'(R) + \tau\sigma(R)\right] + O(1)\\ &\le \log T(2R,f) + o(T(R,f)) \quad (R\to\infty),\end{aligned}$$

co kończy dowód Lematu 3.5. □

Lemat D. [51] Niech funkcje $f_q(z)$ $(q = 1,\dots,n)$, spełniające równanie (1.6), oznaczają q-tą wartość n-wartościowej funkcji algebroidalnej $f(z)$. Dla $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzą równości

$$\sum_{v=1}^n \log^+\frac{1}{|f_v(z) - w|} = \log\frac{\|\overrightarrow{G}_f(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}(w)\|}{|(\overrightarrow{G}_f(z), \overrightarrow{a}(w))|} + O(1) \quad (z\to\infty),$$

$$\sum_{v=1}^n \log^+|f_v(z)| = \log\|\overrightarrow{G}_f(z)\| - \log|A_n(z)| + O(1) \quad (z\to\infty).$$

3.2 Oszacowanie z góry wielkości odchylenia krzywych całkowitych

Dowód Twierdzenia 3.1. Gdy $\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 0$ to teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy zatem, że $\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) > 0$. Wówczas dla każdego ϕ mamy $p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \ge 1$.
Rozważmy wpierw przypadek, gdy $\lambda > 0$ i $p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) < \infty$. Wybierzmy liczby α i ψ, które spełniają nierówności

$$0 < \alpha \le \min\left(\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda} - \alpha\right), \quad -\frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda} \le \psi \le \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda} - \alpha.$$

Niech ponadto ([23] i [35])

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T^*(r,\varphi,u_\phi)\cos\frac{\lambda(\varphi+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}d\varphi.$$

Ponieważ $T^*(r,\varphi,u_\phi)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą to dla dowolnego $r>0$ i $h>0$ mamy

$$T^*(re^h,\varphi,u_\phi)+T^*(re^{-h},\varphi,u_\phi)-2T^*(r,\varphi,u_\phi)\geq 0,$$

gdzie $T^*(r,\varphi,u_\phi)=T^*(re^{i\varphi},u_\phi)$.
Stosując wówczas lemat Fatou dla każdego $r>0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L\sigma(r) &= L\int_0^\alpha T^*(r,\varphi,u_\phi)\cos\tfrac{\lambda(\varphi+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}d\varphi \\ &\geq \int_0^\alpha LT^*(r,\varphi,u_\phi)\cos\tfrac{\lambda(\varphi+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}d\varphi\geq 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Wynika stąd, że funkcja $\sigma(r)$ jest logarytmicznie wypukła, a zatem funkcja $\sigma'_-(r)$ (pochodna lewostronna funkcji $\sigma(r)$ w punkcie r) jest funkcją rosnącą na przedziale $(0,\infty)$. Stąd dla prawie każdego $r>0$ mamy

$$L\sigma(r)=r\frac{d}{dr}r\sigma'_-(r).$$

Z nierówności (3.17) i Lematu 3.2 wynika, że dla prawie każdego $r>0$ zachodzi

$$L\sigma(r)=r\frac{d}{dr}r\sigma'_-(r)\geq -\int_0^\alpha \frac{p_\phi^2(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}\cos\frac{\lambda(\varphi+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}d\theta. \tag{3.18}$$

Z definicji wielkości $p_\phi(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$ wiemy, że przyjmuje ona tylko całkowite wartości. Zatem dla $r\geq r_0$ mamy $p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})\leq p_\phi(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$. Stąd i z (3.18) wynika, że dla prawie każdego $r\geq r_0$ zachodzi

$$L\sigma(r)=r\frac{d}{dr}r\sigma'_-(r)\geq -\int_0^\alpha \frac{p_\phi^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi}\frac{\partial u_\phi^*(r,\theta)}{\partial\theta}\cos\frac{\lambda(\varphi+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}d\theta. \tag{3.19}$$

Jeśli funkcje $\|\overrightarrow{G}(z)\|$ i $(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})$ nie posiadają zer na okręgu $|z|=r$ dla $r>0$ to funkcja $u_\phi(r,\theta)$ spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[0,2\pi]$. Zatem funkcja $u_\phi^*(r,\theta)$ również spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[-\pi,\pi]$. Wynika stąd, że funkcja $u_\phi^*(r,\theta)$ jest absolutnie ciągła na przedziale $[-\pi,\pi]$ ([26]). Całkując (3.19) dwukrotnie przez części, stosując własności funkcji $T^*(r,\theta)$ i $u_\phi^*(r,\theta)$ oraz z definicji funkcji $\sigma(r)$ otrzymujemy, że dla prawie każdego $r\geq r_0$

$$r\frac{d}{dr}r\sigma'_-(r)\geq h(r)+\lambda^2\sigma(r), \tag{3.20}$$

gdzie

$$\begin{aligned} h(r) :=& -\frac{p_\phi^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi}u_\phi^*(r,\alpha)\cos\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}+ \\ &+\frac{p_\phi^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi}\left(\max\left(\log\max_{|z|=r}\frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})|},\phi(r)\right)\cos\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}-\right. \\ &\left.-\frac{\lambda\pi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}T^*(r,\alpha)\sin\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}\right)+ \\ &+\lambda p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})N(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})\sin\frac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}. \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony (3.20) przez $r^{\lambda+1}$ oraz całkując przez części na przedziale $[2S_k, R_k]$, gdzie S_k, R_k są ciągami określonymi w Lemacie C otrzymujemy

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h(r)}{r^{\lambda+1}} dr + \lambda^2 \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma(r)}{r^{\lambda+1}} dr \le \int_{2S_k}^{R_k} \frac{1}{r^\lambda} \frac{d}{dr} r\sigma'_-(r) dr = I. \tag{3.21}$$

Stosując Lemat A, przytoczony w podrozdziale 2.1, mamy

$$I \le \left. \frac{\sigma'_-(r)}{r^{\lambda+1}} \right|_{2S_k}^{R_k} + \lambda \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma'_-(r)}{r^\lambda} dr. \tag{3.22}$$

Skoro funkcja $\sigma(r)$ jest logarytmicznie wypukła na przedziale $(0, +\infty)$ to funkcja $f(t) = \sigma(e^t)$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[a, b] \subset (0, +\infty)$, a zatem funkcja $\sigma(r)$ jest absolutnie ciągła na tych przedziałach. Całkując przez części całkę w (3.22) mamy

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma'_-(r)}{r^\lambda} dr = \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma'(r)}{r^\lambda} dr = \frac{\sigma(R_k)}{R_k^\lambda} - \frac{\sigma(2S_k)}{(2S_k)^\lambda} + \lambda \int_{2S_k}^{R_k} \frac{\sigma(r)}{r^{\lambda+1}} dr. \tag{3.23}$$

Z (3.21) i (3.23) otrzymujemy

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h(r)}{r^{\lambda+1}} dr \le \left. \left(\frac{\sigma'_-(r)}{r^{\lambda-1}} + \lambda \frac{\sigma(r)}{r^\lambda} \right) \right|_{2S_k}^{R_k}.$$

Na mocy definicji funkcji $\sigma(r)$ biorąc dowolne $R \ge 0$ mamy

$$0 \le \sigma(R) \le \pi T(R, \overrightarrow{G}) + o(T(R, \overrightarrow{G})) \quad (R \to \infty). \tag{3.24}$$

Funkcja $r\sigma'_-(r)$ jest niemalejąca na przedziale $(0, \infty)$, a zatem

$$\begin{aligned} \sigma(2R) \ge \sigma(2R) - \sigma(R) &= \int_R^{2R} \sigma'(r) dr = \int_R^{2R} \frac{r\sigma'_-(r)}{r} dr \\ &\ge R\sigma'_-(R) \int_R^{2R} \frac{dr}{r} = R\sigma'_-(R) \log 2. \end{aligned}$$

Z powyższych obserwacji dla $R > 0$ wynika, że

$$R\sigma'_-(R) \le \frac{1}{\log 2} \sigma(2R) \le \frac{\pi}{\log 2} T(2R, \overrightarrow{G}) + o(T(R, \overrightarrow{G})) \tag{3.25}$$

i dla $R \ge 1$ z monotoniczności funkcji $R\sigma'_-(R)$ otrzymujemy

$$R\sigma'_-(2R) \ge \sigma'_-(2). \tag{3.26}$$

Z (3.23), (3.24), (3.25) i (3.26) mamy

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h(r)}{r^{\lambda+1}} dr &\le \tfrac{\sigma'_-(R_k)}{R_k^\lambda} + \lambda \tfrac{\sigma(R_k)}{R_k^\lambda} - \tfrac{\sigma'_-(2S_k)}{(2S_k)^{\lambda-1}} \tfrac{\sigma(2S_k)}{(2S_k)^\lambda} \\ &\le \pi \left(\tfrac{1}{\log 2} + \lambda \right) \tfrac{T(2R_k, \overrightarrow{G})}{R_k^\lambda}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Z Lematu C dla $k \ge k_0(\varepsilon)$ wynika, że

$$\int_{2S_k}^{R_k} \frac{h(r)}{r^{\lambda+1}} dr < \varepsilon \int_{2S_k}^{R_k} \frac{T(r, \overrightarrow{G})}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Wobec tego istnieje ciąg $r_k \in [2S_k, R_k]$, taki że $h(r_k) < \varepsilon T(r_k, \overrightarrow{G})$ dla $k > k_0(\varepsilon)$. Z definicji wyrażenia $h(r)$ otrzymujemy zatem dla $k \geq k_0(\varepsilon)$ następującą nierówność

$$\begin{aligned} &-\tfrac{p_\phi^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi} u_\phi^*(r_k,\alpha) \cos \tfrac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} + \lambda p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) N(r_k,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \sin \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \\ &+\tfrac{p_\phi^2(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi} \log \max_{|z|=r_k} \tfrac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})|} \cos \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \\ &-\lambda p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) T^*(r_k,\alpha,u_\phi) \sin \tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Weźmy w (3.28) $\psi = \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda} - \alpha$. Wówczas

$$\begin{aligned} \log \max_{|z|=r_k} \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})|} \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} T^*(r_k,\alpha,u_\phi) \\ + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} N(r_k,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G}). \end{aligned}$$

Ponieważ $T^*(r_k,\alpha,u_\phi) \leq T(r_k,\overrightarrow{G}) + \phi(r_k)$ i $\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \frac{\pi}{2}$ to

$$\log \max_{|z|=r_k} \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})|} \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} T(r_k,\overrightarrow{G}) < \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G}). \tag{3.29}$$

Stąd

$$\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \leq \frac{\varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}}{\sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}}, \tag{3.30}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ i $\alpha\colon 0 < \alpha \leq \min\left(\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda}\right)$ są wybrane w sposób dowolny.

Wykażemy teraz tezę twierdzenia w dwóch pierwszych przypadkach. Niech $\frac{\lambda}{p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \geq \frac{1}{2}$. Wtedy dla dowolnego $\phi(r)$ zachodzi $\frac{\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \geq \frac{1}{2}$, a stąd mamy $\frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda} \leq \pi$. Niech w (3.30) będzie $\alpha = \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda}$. Wtedy

$$\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \leq \varepsilon + \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}.$$

Z dowolności liczby ε otrzymujemy zatem

$$\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}.$$

Jako, że jest to prawdą dla każdego $\phi(r)$, więc na mocy definicji wyrażenia $p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$ mamy

$$\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})},$$

co dowodzi tezę Twierdzenia 3.1 w przypadku, gdy $\frac{\lambda}{p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \geq \frac{1}{2}$.

Jeśli $p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 1$ i $\lambda < \frac{1}{2}$ to można znaleźć takie $\phi_1(r)$, że

$$p_{\phi_1}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 1.$$

Wtedy dla każdego $\alpha\colon 0 < \alpha < \pi$ mamy

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha}.$$

Stąd

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}.$$

Niech teraz $\frac{\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} < \frac{1}{2}$ i $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) > 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} u_\phi^*(r,\pi) &= \max\left(\min_{|z|=r}\log\frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)}, \overrightarrow{a})|}, \phi(r)\right) \\ &= \phi(r) \\ &= o(T(r,\overrightarrow{G}))\ \ (r\to\infty). \end{aligned}$$

Podstawiając $\alpha = \pi$ i $\psi = 0$ w nierówności (3.28) otrzymujemy dla $k \geq k_0$, że

$$\log\max_{|z|=r_k}\frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)}, \overrightarrow{a})|} - \frac{\lambda\pi}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}T^*(r_k,\pi,u_\phi)\sin\frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} < \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G}).$$

Stąd

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}\sin\frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}.$$

Jednakże funkcja $\phi(r)$ była wybrana dowolnie oraz jest dodatnią, niemalejącą i logarytmicznie wypukłą dla $r > 0$ funkcją, taką że $\phi(r) = o(T(r,\overrightarrow{G}))$. Wobec tego

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}\sin\frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}.$$

Zatem Twierdzenie 3.1 zostało udowodnione także w tym przypadku.

Rozważmy teraz sytuację, gdy $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \infty$. Wtedy dla dowolnego $q > 2\lambda$ zachodzi $p_\phi(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq q$ dla $r \geq r_0$. Rozważmy przypadek, gdy $\lambda > 0$. Niech

$$\sigma(r) = \int\limits_0^\alpha T^*(r,\varphi,u_\phi)\cos\frac{\lambda}{q}(\varphi+\psi)d\varphi,$$

gdzie α i ψ spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leq \pi, \quad -\frac{\pi q}{2\lambda} \leq \psi \leq \frac{\pi q}{2\lambda} - \alpha.$$

Z Lematu 3.2 i dowodu nierówności (3.28) wynika, że istnieje ciąg $r_k \to \infty$, taki że dla $k \geq k_0$ mamy

$$\begin{aligned} &\log\max_{|z|=r_k}\log\tfrac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)}, \overrightarrow{a})|}\cos\tfrac{\lambda}{q}\psi - \tfrac{\pi\lambda}{q}T(r_k,\overrightarrow{G})\sin\tfrac{\lambda}{q}(\alpha+\psi) \\ &+\tfrac{\pi\lambda}{q}N(r_k,a,G)\sin\tfrac{\lambda}{q}\psi - u_\phi^*(r_k,\alpha)\cos\tfrac{\lambda}{q}(\alpha+\psi) \\ &< \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G}). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ponieważ $p_\phi(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) > 1$ to dla $k \geq k_0$ mamy

$$u_\phi^*(r_k,\pi) = \phi(r) = o(T(r,\overrightarrow{G})).$$

Biorąc $\alpha = \pi$ i $\psi = 0$ w (3.31) otrzymujemy dla $k \geq k_0$, że

$$\log \max_{|z|=r_k} \log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})|} - \frac{\pi\lambda}{q} T(r_k,\overrightarrow{G}) \sin\frac{\pi\lambda}{q} < \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G}). \tag{3.32}$$

Zatem dla dowolnego $q > 2\lambda$ i $\varepsilon > 0$ mamy

$$\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{q}\sin\frac{\pi\lambda}{q} + \varepsilon.$$

A stąd $\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 0$.

Jeśli $\lambda = 0$ i $p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = \infty$ to dowód można przeprowadzić w podobny sposób biorąc za λ dowolną liczbą dodatnią, taką że $\lambda q < \frac{1}{2}$. Wówczas z (3.32) dostajemy

$$\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{q}\sin\frac{\pi\lambda}{q} + \varepsilon.$$

Liczby λ, q, ε były wybrane dowolnie zatem $\beta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 0$. Kończy to dowód Twierdzenia 3.1.

□

3.3 Oszacowanie z góry rozpiętości krzywych całkowitych

Dowód Twierdzenia 3.2. Rozważmy wpierw przypadek, gdy $\lambda > 0$ i $p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) < \infty$. Jeśli $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 0$ to teza twierdzenia jest oczywista. Niech $\phi(r)$ i $\Lambda(r)$ będą funkcjami określonymi w definicjach pojęć $p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$ i $\sigma(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$. Załóżmy, że $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) > 0$. Wtedy dla dowolnego ϕ mamy $p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \geq 1$. Jeśli przy pewnych Λ i ϕ zachodzi

$$\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \geq \min\left(2\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\lambda}\right),$$

to teza twierdzenia jest oczywiście prawdziwa. Zatem dla pewnych Λ i ϕ rozważmy przypadek, gdy $\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) < \min\left(2\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\lambda}\right)$. Wybierzmy α, takie że

$$\frac{\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda}\right).$$

Wtedy dla $r \geq r_0$ mamy

$$u_\phi^*(r,\alpha) \leq \max\{\Lambda(r),\phi(r)\} = o(T(r,\overrightarrow{G}))$$

oraz

$$T^*(r,\alpha,u_\phi) = T(r,\overrightarrow{G}) + o(T(r,\overrightarrow{G})) \quad (r\to\infty).$$

Z (3.28) wynika, że istnieje ciąg $r_k \to \infty$, taki że dla $k \geq k_0(\varepsilon)$ zachodzi

$$\begin{aligned}
&-u^*_\phi(r_k,\alpha)\cos\tfrac{\lambda(\alpha+\psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} + \log\max_{|z|=r_k}\tfrac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})|}\cos\tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}\\
&+\tfrac{\lambda\pi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}N(r_k,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})\sin\tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}\\
&-\tfrac{\lambda\pi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}T^*(r_k,\alpha,u_\phi)\sin\tfrac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G})\ (k\to\infty).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Niech k_0 będzie taką liczbą, że dla $k \geq k_0$ mamy $2S_k \geq r_0$. Niech w (3.33) będzie $\psi = -\frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda}$. Wtedy dla każdego $k \geq k_0(\epsilon)$ mamy

$$-u^*_\phi(r_k,\alpha)\sin\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}N(r_k,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) +$$
$$+\frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}T^*(r_k,\alpha,u_\phi)\cos\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \epsilon T(r_k,\overrightarrow{G}) \quad (k\to\infty).$$

Ponieważ $u^*_\phi(r,\alpha) \leq \max\{\Lambda(r),\phi(r)\}$ to

$$-\max\{\Lambda(r_k),\phi(r_k)\}\sin\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}N(r_k,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) +$$
$$+\frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}T^*(r_k,\alpha,u_\phi)\cos\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \epsilon T(r_k,\overrightarrow{G}) \quad (k\to\infty).$$

Z definicji defektu wynika, że $1-\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = \limsup\limits_{r\to\infty}\frac{N(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{T(r,\overrightarrow{G})}$. Stąd dla $r \geq r_0(\epsilon)$ dostajemy

$$N(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) < (1-\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})+\epsilon)T(r,\overrightarrow{G}).$$

Ponieważ $\max\{\Lambda(r),\phi(r)\} = o(T(r,\overrightarrow{G}))$ to istnieje ciąg $r_k \to \infty$, taki że

$$o(T(r_k,\overrightarrow{G}))\sin\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}(1-\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})+\epsilon)T(r_k,\overrightarrow{G})$$
$$+\frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}T^*(r_k,\alpha,u_\phi)\cos\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \epsilon T(r_k,\overrightarrow{G}) \quad (k\to\infty).$$

Dzieląc powyższą nierówność obustronnie przez $T(r_k,\overrightarrow{G})$ oraz przechodząc do granicy przy $k\to\infty$ otrzymujemy

$$-1+\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})-\epsilon+\cos\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} < \frac{\epsilon p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\pi\lambda}.$$

Przechodząc z kolei w powyższej nierówności do granicy przy $\epsilon\to 0$ mamy

$$-1+\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})+\cos\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \leq 0,$$

a zatem

$$1-\cos\frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \leq \delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})$$

dla dowolnego α, takiego że $\frac{\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2\lambda}\right)$.
Wówczas przy $\alpha \to \frac{\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2}$ otrzymujemy

$$1 - \cos\frac{\lambda\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \geq \delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}).$$

Skąd wynika, że

$$\sin^2\frac{\lambda\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{4p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})} \geq \frac{\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2}.$$

Wobec tego

$$\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \geq \frac{4p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\lambda}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2}}.$$

Stąd dla dowolnych Λ i ϕ mamy

$$\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4p_\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\lambda}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2}}\right\}.$$

Powyższa nierówność ostatecznie implikuje

$$\sigma(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \geq \min\left\{2\pi, \frac{4p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{\lambda}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2}}\right\}.$$

Twierdzenie 3.2 zostało zatem udowodnione w przypadku, gdy $\lambda > 0$ i $p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) < \infty$. Pozostałe przypadki udowadnia się w podobny sposób.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = \infty$. Wtedy dla każdego $q > 2\lambda$ i $r \geq r_0$ mamy $p_\phi(r,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) \geq q$. Niech $\lambda > 0$. Wówczas z dowodu nierówności (3.31) wynika, że istnieje ciąg $r_k \to \infty$, taki że dla $k \geq k_0$ zachodzi

$$\begin{aligned}-u_\phi^*(r_k,\alpha)\cos\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{q} + \log\max_{|z|=r_k}\frac{\|\overrightarrow{G}(z)\|\cdot\|\overrightarrow{a}\|}{(\overrightarrow{G(z)},\overrightarrow{a})}\cos\frac{\lambda\psi}{q}\\ +\frac{\lambda\pi}{q}N(r_k,\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})\sin\frac{\lambda\psi}{q} - \frac{\lambda\pi}{q}T^*(r_k,\alpha,u_\phi)\sin\frac{\lambda(\alpha+\psi)}{q}\\ < \varepsilon T(r_k,\overrightarrow{G}) \quad (k\to\infty).\end{aligned}$$

Biorąc w powyższym $\psi = -\frac{\pi q}{2\lambda}$ oraz postępując analogicznie jak w dowodzie poprzedniego przypadku otrzymujemy, że dla $q > 2\lambda$ i $\epsilon > 0$ zachodzi

$$\sin^2\frac{\lambda\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{4q} \geq \frac{\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G})}{2}.$$

Ze względu na dowolność liczby q mamy zatem $\delta(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 0$.

Jeśli $\lambda = 0$ i $p(\overrightarrow{a},\overrightarrow{G}) = 0$ to wystarczy jedynie w ostatnim przypadku powtórzyć rozumowanie biorąc za λ dowolną liczbę dodatnią, taką że $\lambda < \frac{1}{2}$ i również otrzymamy

wniosek, że $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = 0$.
W ostatnich dwóch przypadkach mamy $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \infty$ oraz $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = 0$. Wówczas prawa strona w nierówności, stanowiącej tezę twierdzenia, jest równa zeru. Twierdzenie 3.2 zostało zatem udowodnione w każdym z możliwych przypadków.

$\square$

Dowód Twierdzenia 3.3. Jeśli $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = 0$ to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy zatem, że $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) > 0$. Wówczas $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq 1$. W przypadku, gdy $\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \min\left(2\pi, \frac{\pi p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda}\right)$ teza twierdzenia jest również oczywista. Załóżmy więc, że $\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) < \min\left(2\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda}\right)$. Wybierzmy α, takie że

$$\frac{\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{2} < \alpha < \min\left(2\pi, \frac{\pi p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{2\lambda}\right).$$

Ponieważ $\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) < 2\alpha$ to dla $r \geq r_0$ mamy

$$u_\phi^*(r, \alpha) \leq \max\{\Lambda(r), \phi(r)\}.$$

Z (3.28) wynika, że istnieje ciąg $r_k \to \infty$, taki że dla $k \geq k_0(\varepsilon)$ zachodzi

$$\begin{aligned} -u_\phi^*(r_k, \alpha) \cos \frac{\lambda(\alpha + \psi)}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} + \log \max_{|z|=r_k} \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)}, \overrightarrow{a})|} \cos \frac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} \\ + \frac{\lambda\pi}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} N(r_k, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \sin \frac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} \\ - \frac{\lambda\pi}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \sin \frac{\lambda\psi}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} < \varepsilon T(r_k, \overrightarrow{G}) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Niech t $\psi = 0$. Wówczas przy $k \to \infty$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} -u_\phi^*(r_k, \alpha) \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} + \log \max_{|z|=r_k} \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)}, \overrightarrow{a})|} - \\ - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} < \epsilon T(r_k, \overrightarrow{G}). \end{aligned}$$

Ponieważ $u_\phi^*(r, \alpha) \leq \max\{\Lambda(r), \phi(r)\}$ to

$$\begin{aligned} -\max\{\Lambda(r), \phi(r)\} \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} + \log \max_{|z|=r_k} \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G(z)}, \overrightarrow{a})|} \\ - \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} T^*(r_k, \alpha, u_\phi) \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} < \epsilon T(r_k, \overrightarrow{G}) \quad (k \to \infty). \end{aligned}$$

Jako, że $T^*(r_k, \alpha, u_\phi) = T(r_k, \overrightarrow{G})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty)$ to otrzymujemy

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) < \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} \sin \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} + \frac{\max\{\Lambda(r_k), \phi(r_k)\}}{T(r_k, \overrightarrow{G})} \cos \frac{\lambda\alpha}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} + 2\epsilon.$$

Jednakże $\max\{\Lambda(r_k), \phi(r_k)\} = o(T(r_k, \overrightarrow{G}))$, więc przechodząc do granicy przy $\epsilon \to 0$ i $\alpha \to \frac{\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{2}$ dostajemy

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \leq \frac{\pi\lambda}{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})} \sin \frac{\lambda\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{2p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}.$$

Stąd

$$\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \frac{2p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda} \arcsin \frac{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\pi\lambda}.$$

Wobec tego dla dowolnych Λ i ϕ mamy

$$\sigma_\Lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \min\left\{2\pi, \frac{2p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda} \arcsin \frac{p_\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\pi\lambda}\right\}.$$

Skąd ostatecznie wynika, że

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) \geq \min\left\{2\pi, \frac{2p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda} \arcsin \frac{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\pi\lambda}\right\}.$$

Twierdzenie 3.3 jest zatem udowodnione w przypadku, gdy $\lambda > 0$ i $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) < \infty$. Dla pozostałych przypadków dowód przebiega analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.2.

$\square$

3.4 Oszacowanie odchylenia funkcji algebroidalnej

Dowód Twierdzenia 3.4. Niech $w \in \overline{\mathbb{C}}$. Udowodnimy wpierw Twierdzenie 3.4 w przypadku, gdy $p(w, f) < \infty$ i $\Delta(w, f) > 0$.
Jeśli $\gamma \leq \lambda$ to teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy zatem, że $\gamma > \lambda$. Weźmy również taką liczbę τ, że $\lambda < \tau < \gamma$.
Zauważmy, że z Lematu 3.5 wynika, że gęstość logarytmiczna zbioru

$$E_1 := \{r \in (0, \infty) : h_{\phi,\tau}(r) \leq 0\}$$

spełnia nierówność

$$\overline{logdens} E_1 \geq 1 - \frac{\lambda}{\tau}. \tag{3.34}$$

Weźmy w Lemacie 3.5 $\psi = \frac{\pi p_\phi(w,f)}{2\tau} - \alpha$. Wówczas

$$h_{\phi,\tau}(r) = \frac{p_\phi(w, f)}{\pi} u^*_\phi(r) \sin \frac{\tau\alpha}{p_\phi(w, f)} - \tau p_\phi(w, f) T^*(re^{i\alpha}, u_\phi) +$$
$$+ \tau p_\phi(w, f) \cos \frac{\tau\alpha}{p_\phi(w, f)} N(r, w, f)$$

Z definicji defektu Valirona, nierówności $T^*(re^{i\alpha}, u_\phi) \leq (1+o(1))T(r,f)$ oraz Lematu D otrzymujemy

$$\begin{aligned} h_{\phi,\tau}(r) \geq & \frac{p_\phi(w,f)}{\pi}\mathcal{L}(r,w,f)\sin\frac{\tau\alpha}{p_\phi(w,f)} \\ & - \tau p_\phi(w,f)(1-(1-\Delta(w,f)-\epsilon)\cos\frac{\tau\alpha}{p_\phi(w,f)})T(r,f) \\ & + o(T(r,f)). \end{aligned}$$

Dla $r \in E_1$ mamy zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r,w,f) \leq & \frac{\frac{\pi\tau}{p_\phi(w,f)}}{\sin\frac{\tau\alpha}{p_\phi(w,f)}}\left((1-(1-\Delta(w,f)-\epsilon))\cos\frac{\tau\alpha}{p_\phi(w,f)}\right)T(r,f) \\ & + o(T(r,f)) \\ \leq & \frac{\frac{\pi\gamma}{p_\phi(w,f)}}{\sin\frac{\tau\alpha}{p_\phi(w,f)}}\left((1-(1-\Delta(w,f)-\epsilon))\cos\frac{\tau\alpha}{p_\phi(w,f)}\right)T(r,f) \\ & + o(T(r,f)) \quad (r\to\infty). \end{aligned}$$

Niech $\alpha = \frac{p_\phi(w,f)}{\tau}\arccos(1-\Delta(w,f))$, gdy $\arccos(1-\Delta(w,f)) < \frac{\pi\tau}{p_\phi(w,f)}$ oraz $\alpha=\pi$, gdy $\arccos(1-\Delta(w,f)) \geq \frac{\pi\tau}{p_\phi(w,f)}$.
Z definicji wyrażenia $B(\gamma,\Delta)$ mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r,w,f) & \leq B(\frac{\tau}{p_\phi(w,f)},\Delta(w,f))T(r,f)+o(T(r,f)) \\ & < B(\frac{\gamma}{p_\phi(w,f)},\Delta(w,f))T(r,f) \qquad (r\to\infty). \end{aligned}$$

Wielkość $p_\phi(w,f)$ przyjmuje wyłącznie wartości całkowite, więc zawsze istnieje takie ϕ, że $p_\phi(w,f)=p(w,f)$.
Wobec tego dla $r\in E_1$ mamy

$$\mathcal{L}(r,w,f) \leq B\left(\frac{\gamma}{p(w,f)},\Delta(w,f)\right)T(r,f) \quad (r\to\infty).$$

Istnieje zatem $r_0>0$, takie że $E_1\cap[r_0,\infty)\subset E(\gamma)\cap[r_0,\infty)$ i z (3.34) wynika, że

$$\overline{logdens}E(\gamma) \geq \overline{logdens}E_1 \geq 1-\frac{\lambda}{\tau}.$$

Stąd dla dowolnego τ, dla którego $\lambda<\tau<\gamma$ mamy

$$\overline{logdens}E(\gamma) \geq 1-\frac{\lambda}{\tau}.$$

Przechodząc do granicy przy $\tau\to\gamma^-$ otrzymujemy tezę twierdzenia.
W przypadku, gdy $p(w,f)=\infty$ lub $\Delta(w,f)=0$ dowód Twierdzenia 3.4 jest podobny do przypadku udowodnionego powyżej i wystarczy jedynie w miejsce $p(w,f)$ i $\Delta(w,f)$ wziąć dowolne dodatnie liczby p i ϵ, odpowiednio.
Dowód dla oszacowania dolnej gęstości logarytmicznej przebiega w podobny sposób.

$\square$

3.5 Przykłady

Przykład 1. Rozważmy przytaczaną w podrozdziale 2.6 funkcję Mittag-Leffera:

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho}\right)}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Z [25, str. 86] wiadomo, że

$$E_\rho(z) = \begin{cases} \rho e^{z^\rho} + O(|z|)^{-1} & , \text{ gdy } |argz| \le \frac{\pi}{2\rho} \\ O(|z|)^{-1} & , \text{ gdy } \pi \ge |argz| \ge \frac{\pi}{2\rho} \end{cases}.$$

Dla $\lambda > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, takich że $\frac{\lambda}{n} > \frac{1}{2}$ rozważmy p-wymiarową krzywą całkowitą

$$\overrightarrow{G}(z) = (z^n, z^{2n}, \dots, z^{(p-1)n}, E_{\frac{\lambda}{n}}(z^n)).$$

Niech $\overrightarrow{a} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^p$. Wówczas przechodząc do granicy przy $|z| = r \to \infty$ mamy

$$\log \frac{\|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(re^{i\theta}), \overrightarrow{a})|} = \begin{cases} r^\lambda \cos \lambda\theta(1 + o(1)) & , \text{ gdy } |\theta - \frac{2k\pi}{n}| \le \frac{n\pi}{2\lambda} \\ O(\log r) & , \text{ gdy } |\theta - \frac{(2k+1)\pi}{n}| < \frac{\pi}{n} - \frac{n\pi}{2\lambda} \end{cases}, \tag{3.35}$$

dla $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Stąd przy $r \to \infty$ otrzymujemy

$$\mathcal{L}(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \max_{|z|=r} \log \frac{\|\overrightarrow{G}(z)\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}(z), \overrightarrow{a})|} = r^\lambda(1 + o(1)),$$

$$T(r, \overrightarrow{G}) = \frac{n}{2\pi} \int_{-\frac{n\pi}{2\lambda}}^{\frac{n\pi}{2\lambda}} \log \|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| d\theta = \frac{nr^\lambda}{\pi\lambda}(1 + o(1)) \quad (r \to \infty).$$

Wobec tego

$$\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{T(r, \overrightarrow{G})} = \frac{\pi\lambda}{n}.$$

Ponadto, ze względu na konstrukcję krzywej G mamy $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = n$, więc $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}$ co daje nam równość w pierwszym przypadku Twierdzenia 3.1.

Z (3.35) dla dowolnej funkcji $\Lambda(r)$, takiej że przy $r \to \infty$ zachodzi $\Lambda(r) = o(r^\lambda)$ mamy

$$\left\{\theta \in [-\pi, \pi] \colon \log \frac{\|\overrightarrow{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\overrightarrow{a}\|}{|(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{a})|} > \Lambda(r)\right\} = \left\{\theta \in [-\pi, \pi] \colon |\theta| < \frac{n\pi}{2\lambda}\right\}.$$

Wynika stąd, że

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \frac{\pi n}{\lambda}.$$

Wobec powyższej równości mamy

$$\sigma(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \frac{\pi p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}{\lambda}, \quad \delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = 1 \quad \text{oraz} \quad \beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G}) = \frac{\pi\lambda}{p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})}.$$

Otrzymaliśmy zatem dla krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}(z)$ równość w Twierdzeniu 3.2 i Twierdzeniu 3.3.

Dla dowolnych $\lambda > 0$ i $p \in \mathbb{N}$, takich że $\frac{\lambda}{p} > \frac{1}{2}$ rozważmy teraz $(n+1)$-wymiarową krzywą całkowitą $\overrightarrow{G}_f$ powiązaną z n-wartościową funkcją algebroidalną $f(z)$ daną jako rozwiązanie poniższego równania ([46])

$$f^n + E_{\frac{\lambda}{p}}(z^p)f^{n-1} + 1 = 0.$$

Dla takiej funkcji mamy

$$\mathcal{L}(r, \infty, f) = r^\lambda(1 + o(1)), \quad (r \to \infty),$$

$$T(r, f) = \frac{pr^\lambda}{\pi\lambda}(1 + o(1)) \quad (r \to \infty).$$

A stąd otrzymujemy

$$\beta(\infty, f) = \frac{\pi\lambda}{p}, \;\; p(\infty, f) = p.$$

Przykład 2. W pracy [17] (także w [55]) został skonstruowany przykład, w którym dla dowolnych $\Delta \in (0, 1]$, $p \in \mathbb{N}$ i $\lambda > 0$, takich że $\frac{\lambda}{p} \geq \frac{1}{2}$, istnieje funkcja meromorficzna $F(z) = F_{\frac{\lambda}{p}}(z^p)$ skończonego rzędu dolnego λ spełniająca poniższe warunki

$$\Delta(\infty, F) = \Delta \;\text{ i }\; \beta(\infty, F) = B(\frac{\lambda}{p}, \Delta).$$

Ponieważ funkcja $F(z)$ jest funkcją meromorficzną to istnieją funkcje całkowite $g_1(z)$ i $g_2(z)$, dla których

$$F(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}.$$

Niech ([51]) $\overrightarrow{G}_F(z) = \{h_0(z), h_1(z), \ldots, h_n(z)\}$, gdzie

$$h_k(z) = (-1)^k C_n^k g_1^{n-k}(z) g_2^k(z).$$

Wówczas mamy ([51])

$$\beta(\infty, \overrightarrow{G}_F) = \beta(\infty, F) = B(\frac{\lambda}{p}, \Delta(\infty, F)) = B(\frac{\lambda}{p}, \Delta(\infty, \overrightarrow{G}_F)).$$

Rozważmy teraz funkcję algebroidalną $f(z)$ będącą rozwiązaniem równania

$$h_n(z)w^n + h_{n-1}(z)w^{n-1} + \ldots + h_1(z)w + h_0(z) = 0.$$

Z Lematu D wynika wtedy, że

$$\beta(\infty, f) = \beta(\infty, \overrightarrow{G}_F) = B(\frac{\lambda}{p}, \Delta(\infty, F)).$$

Ponadto $\Delta(\infty, F) = \Delta(\infty, f)$ i $p(\infty, f) = p$.
Stąd dla dowolnych $\Delta \in (0, 1]$, $\lambda > 0$ i $p \in \mathbb{N}$, takich że $\frac{\lambda}{p} \geq \frac{1}{2}$, istnieje funkcja algebroidalna $f(z)$ skończonego rzędu dolnego λ, dla której mamy

$$\Delta(\infty, f) = \Delta, \;\; p(\infty, f) = p \;\text{ i }\; \beta(\infty, f) = B(\frac{\lambda}{p}, \Delta).$$

Literatura

[1] Ahlfors L., *The theory of meromorphic curves*, Acta Soc. Sci. Fenn., **3**, no. 4, (1941), 1-31.

[2] Baernstein A. II, *Proof of Edrei's spread conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc., **78**, (1972), 277-278.

[3] Baernstein A. II, *Proof of Edrei's spread conjecture*, Proc. London Math. Soc., **26**, (1973), 418-434.

[4] Baernstein A. II, *Integral means, univalent functions and circular symmetrization*, Acta Math., **133**, (1974), 139-169.

[5] Baernstein A. II, *Regularity theorems associated with the spread relation*, J. Anal. Math., **31**, (1977), 76-111.

[6] Barry P., *On a theorem of Besicovitch*, Quart. J. Math. Oxford, **14**, (1963), 293-302.

[7] Barry P., *On a theorem of Kjellberg*, Quart. J. Math. Oxford, **15**, (1964), 179-191.

[8] Beckenbach E. F., Hutchison G. A., *Meromorphic minimal surfaces*, Pac. Journ. of Math., **28**, (1969), 14-47.

[9] Beckenbach E. F., Cootz T., *The second fundamental theorem for meromorphic minimal surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **76**, (1970), 711-716.

[10] Beckenbach E. F., Eng F. H., Tafel R. E., *Global properties of rational and logarithmico-rational minimal surfaces*, Pacific J. Math., **50**, (1974), 355-381.

[11] Blashke W., *Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*, Przekład z j. ros., ONTI, Moscow (1935).

[12] Cartan H., *Sur les zeros des combinaisons lineaires de p fonctions holomorphes donnes*, Mathematica, **7**, (1933), 5-31.

[13] Ciechanowicz E., Marchenko I. I., *Maximum modulus points, deviations and spreads of meromorphic functions*, Value Distribution Theory and Related Topics, Kluwer Academic Publishers, (2004), 117-129.

[14] Ciechanowicz E., Marchenko I.I., *On the maximum modulus points of entire and meromorphic fnctions*, Mat. Stud., **21**, no.1, (2004), 25-34.

[15] Ciechanowicz E., Marchenko I.I., *On the separated maximum modulus points of meromorphic fnctions*, Mat. Fiz., Anal., Geom., **12**, no.2, (2005), 218-229.

[16] Ciechanowicz E., Marchenko I.I., *On deviations and strong asymptotic functions of meromorphic functions of finite lower order*, J. Math. Anal. Appl., **382** (2011), 383-398.

[17] Ciechanowicz E., Marchenko I.I., *A note on the separated maximum modulus points of meromorphic fuctions*, Ann. Polon. Math., **110.3**, (2014), 295-310.

[18] Edrei A., *The deficiencies of meromorphic functions of finite lower order*, Duke Math. J., **31**, (1964), 1-21.

[19] Edrei A., *Sums of deficiencies of meromorphic functions II*, J. Anal. Math., **19**, (1967), 53-74.

[20] Essen M., Shea D., *Applications of Denjoy integral inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions*, Lond. Math. Soc., Lecture Notes, **12**, (1974), 59-68.

[21] Essen M., Shea D.F., *Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions*, Proc. Roy. Irish Acad. Sec. A, **82A**, (1982), 201-216.

[22] Fuchs W. H. J., *Topics in Nevanlinna theory*, Proc. of the NRL conference of classical function theory, (1970), 1-32.

[23] Gariepy R., Lewis J.L., *Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions*, Ark. Mat., **13**, (1975), 91-105.

[24] Goldberg A. A., Ostrovskii I. V., *Some theorems on the growth of meromorphic functions*, Zap. Mat. Otdel. Khark. Mat. Obshch., **4**, no. 27, (1961), 3-37.

[25] Goldberg A. A., Ostrovskii I. V., *Distribution of values of meromophic functions*, Nauka, Moscow (1970) (po rosyjsku); Tłum. ang.: AMS Transl., **236**, Providence (2008).

[26] Hayman W.K., *Multivalent functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1958).

[27] Hayman W.K., *Meromorphic functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1964).

[28] Kowalski A., Marchenko I.I., *On the maximum modulus points and deviations of meromorphic minimal surfaces*, Mat. Stud., **46**, (2016), 137-151.

[29] Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and spreads of entire curves*, Ann. Polon. Math., **123**, (2019), 345-368.

[30] Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and spreads of meromorphic minimal surfaces*, Osaka J. Math., **57**, (2020), 85-101.

[31] Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and maximum points of algebroid functions of finite lower order*, Kodai Math. J., **44(1)**, (2021), 47-68.

[32] Marchenko I.I., *The growth of meromorphic minimal surfaces*, Teor. Funkts., Funkts. Anal., Prilozh., **34**, (1979), 95-98, (po rosyjsku).

[33] Marchenko I.I., *On the growth of meromorphic functions of finite lower order*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **264**, (1982), 1077-1080 (po rosyjsku); Tłum. ang.: Soviet Math. Dokl., **25**, (1982).

[34] Marchenko I.I., Shcherba A.I., *On magnitudes of deviations of meromorphic functions*, Mat. Sb., **181**, (1990), 3-24, (po rosyjsku); Tłum. ang.: Math. USSR-Sb., **69**, no. 1, (1991), 1–24.

[35] Marchenko I.I., *On magnitudes of deviations and spreads of meromorphic functions of fnite lower order*, Mat. Sb., **186**, (1995), 85-102, (po rosyjsku); Tłum. ang.: Sb.Mat., **186**, (1995), 391-408.

[36] Marchenko I.I., *An analogue of the second main theorem for the uniform metric*, Mat. fiz., anal., geom., **5**, (1998), 212-227 (po rosyjsku).

[37] Marchenko I.I., *On the growth of entire and meromorphic functions*, Mat. Sb., **189**,no. 6, (1998), 59-84 (po rosyjsku); Tłum. ang.: Sb. Mat., **189**, no. 6, (1998), 875-899.

[38] Marchenko I.I., *On the asymptotic values of entire functions*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **63**, no. 3, (1999), 133–146 (po rosyjsku); Tłum. ang.: Izv. Math., **63**,no. 3, (1999), 549–560.

[39] Marchenko I.I., *On deviations and defects of meromorphic functions of finite lower order*, Ukr. Mat. Zhurn., **51**, no. 6, (1999), 796-803 (po rosyjsku); Tłum. ang.: Ukr. Mat. J., **51**, no. 6, (1999), 889-898.

[40] Marchenko I.I., Nikolenko I. G., *On deviations of meromorphic minimal surfaces*, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, **444**, (1999), 71-88, (po rosyjsku).

[41] Marchenko I.I., *On the Shea estimate of the magnitude of deviation of a meromorphic function*, Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat., **457**, (2000), 46-51, (po rosyjsku); Tłum. ang.: Russian Math.(Iz. VUZ), **44**, (2000), 44-49.

[42] Marchenko I.I., *On strong asymptotic spots of meromorphic functions of finite lower order*, Mat. Fiz. Anal. Geom., **11**, no. 4, (2004), 484–491.

[43] Marchenko I.I., *On the maximum modulus points of entire and meromorphic functions and the problem of Erdös*, Mat. Stud., **38**, no. 2, (2012) , 212 -215.

[44] Markushevich A.I., *Theory of functions of complex variable*, Prentice-Halls, USA (1965).

[45] Natanson I.P., *Theory of functions of a real variable*, Nauka, Moscow 1974; English transl., Ungar Publishing, New York 1955.

[46] Niino K., *On the growth of algebroid functions of finite lower order*, Kōdai Math. Sem. Rep., **25**, (1973), 385-391.

[47] Petrenko V.P., *The growth of meromorphic functions of finite lower order*, Izv. Akad. Nauk SSSR, **33**, no. 2, (1969), 414-454 (po rosyjsku).

[48] Petrenko V.P., *Growth of meromorphic functions*, Vyshcha Shkola, Kharkov (1978), (po rosyjsku).

[49] Petrenko V.P., *Growth and distribution of values of minimal surfaces*, Vyshcha Shkola, Kharkov (1980), (po rosyjsku).

[50] Petrenko V.P., *Growth and distribution of values of minimal surfaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **256**, (1981), 40-43 (po rosyjsku).

[51] Petrenko V.P., *The entire curves*, Vyshcha Shkola, Kharkov (1984), (po rosyjsku).

[52] Privalov I.I., *Subharmonic functions*, M.:ONTI, Moscow (1937), (po rosyjsku).

[53] Rhoads G., Weitsman A., *The logarithmic derivative for minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Comp. Meth. and Fun. Th., **4**, (2004), no. 1, 59–75.

[54] Ronkin L.I., *Introduction to the Theory of Entire Functions of Several Variables*, Nauka, Moscow (1971) (po rosyjsku).

[55] Ryshkov M. A., *On the exactness of the estimate of the value of deviation for a meromorphic function*, Teor. Funksij Funktsional. Anal. Prilozhen., **37**, (1982), 114-115 (po rosyjsku).

[56] Tafel R.E., *Further results in the theory of meromorphic minimal surfaces*, PhD. Thesis, University of California, Los Angeles (1970).

[57] Titchmarsh E. C., *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, London (1932).

[58] Valiron G., *Sur la dérivée des fonctions algébroïdes*, Bull. Soc. Math. France, **59**, (1931), 17-39.

[59] Vekua I.N., *The Basics of Tensor Analysis and Theory of Covariants*, Nauka, Moscow (1978) (po rosyjsku).

[60] Weitsman A., *A theorem on Nevanlinna deficiencies*, Acta.Math., **128**, (1972), 41-52.

[61] Weyl H., Weyl J., *Meromorphic curves*, Ann. of Math., **39**, no. 3, (1938), 516-538.

[62] Weyl H., *Meromorphic functions and analytic curves*, Annals of Mathematics Studies, **12**, Princeton (1943).

[63] Wu N., *Deviations and spreads of holomorphic curves of finite lower order*, Houston J. Math., 45, no. 2, (2019), 395-411.

Uniwersytet Szczeciński
Instytut Matematyki
mgr Arnold Kowalski

WZROST MEROMORFICZNYCH POWIERZCHNI MINIMALNYCH I KRZYWYCH CAŁKOWITYCH

Promotor: **prof. dr hab. Iwan Marczenko**
Promotor pomocniczy: **dr Ewa Ciechanowicz**

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Praca doktorska składa się z trzech rozdziałów. Pierwszy rozdział został podzielony na trzy podrozdziały i zawiera podstawowe definicje i twierdzenia klasycznej teorii Nevanlinny, teorii Petrenki, teorii meromorficznych powierzchni minimalnych oraz teorii krzywych całkowitych. W rozdziale drugim zostały zamieszczone rezultaty uzyskane w obszarze teorii wzrostu meromorficznych powierzchni minimalnych skończonego rzędu dolnego. Większość z tych wyników została opublikowana w pracach [2] i [4]. W rozdziale tym jest udowodnionych sześć twierdzeń oraz przedstawione są wnioski z nich płynące. Dowody tych twierdzeń zamieszczone zostały w podrozdziałach 2.2-2.5. Podrozdział 2.1 poświęcony jest w całości wyprowadzeniu lematów pomocniczych używanych w dowodach głównych twierdzeń. Warto w tym miejscu wyróżnić Lemat 2.10 będący odpowiednikiem lematu o pochodnej logarytmicznej dla meromorficznych powierzchni minimalnych w metryce jednostajnej zbieżności.
Twierdzenie 2.1 podaje dokładne oszacowanie z góry odchylenia $\beta(\infty, S)$ w zależności od ilości rozdzielonych punktów maksimum meromorficznej powierzchni minimalnej S. Rezultat ten stanowi uogólnienie twierdzenia o oszacowaniu odchylenia Petrenki $\beta(\infty, f)$ funkcji meromorficznej $f(z)$ uzyskanego przez E. Ciechanowicz i I. Marczenkę w [1]. Twierdzenie 2.4 przedstawia z kolei oszacowanie dla sumy odchyleń $\sum\limits_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3} \beta(\mathbf{a}, S)$, które jest uogólnieniem uzyskanego w 1990 roku twierdzenia o oszacowaniu sumy odchyleń Petrenki funkcji meromorficznej ([6]). Twierdzenia 2.2 i 2.3 zawierają oszacowanie górnej i dolnej gęstości logarytmicznej pewnych zbiorów i stanowią uogólnienie na przypadek meromorficznych powierzchni minimalnych wyników uzyskanych przez I. Marczenkę w pracach [7] i [8]. Twierdzenie 2.6 oraz twierdzenie 2.7 zawierają dokładne oszacowanie z dołu rozpiętości meromorficznej powierzchni minimalnej S w zależności od wielkości $p(\infty, S)$, defektu $\delta(\infty, S)$ oraz odchylenia $\beta(\infty, S)$. Twierdzenie 2.6 stanowi wzmocnienie twierdzenia Petrenki o oszacowaniu rozpiętości meromorficznej powierzchni minimalnej skończonego rzędu dolnego λ przez defekt $\delta(\infty, S)$. W podrozdziale 2.6 zawarte zostały przykłady ukazujące, że otrzymane oszacowania są dokładne.
Rozdział trzeci poświęcony jest wynikom uzyskanym w teorii krzywych całkowitych i funkcji algebroidalnych. Rezultaty tutaj przedstawione zostały opublikowane w artykułach [3] i [5]. W rozdziale tym wprowadzone zostało pojęcie rozdzielonych punktów maksimum dla krzywych całkowitych i funkcji algebroidalnych oraz wykazane zostały cztery twierdzenia. W twierdzeniu 3.1 dane jest dokładne oszacowanie z góry odchylenia $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ dla krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}$ w zależności od ilości rozdzielonych punktów maksimum $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Twierdzenie 3.2 zawiera dokładne oszacowanie rozpiętości krzywej całkowitej $\overrightarrow{G}$ względem wielkości

$p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ i defektu $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Stanowi ono uogólnienie wyników V. Petrenki dotyczących rozpiętości krzywych całkowitych z pracy [9]. W twierdzeniu 3.3 podane jest z kolei dokładne oszacowanie rozpiętości krzywej całkowitej przez wielkość odchylenia $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Wynik ten jest wzmocnieniem rezultatów otrzymanych przez V. Petrenko w pracy [9]. W twierdzeniu 3.4 otrzymane zostało górne oszacowanie odchylenia $\beta(w, f)$ funkcji algebroidalnej $f(z)$ skończonego rzędu dolnego λ w zależności od ilości rozdzielonych punktów maksimum i defektu Valirona. W ostatnim podrozdziale zawarty został przykład krzywej całkowitej, dla której w wyżej wspomnianych twierdzeniach 3.1-3.3 zachodzą równości. Podane zostały także przykłady funkcji algebroidalnych, dla których otrzymane oszacowanie w twierdzeniu 3.4 jest dokładne.

Literatura

1. Ciechanowicz E., Marchenko I. I., *Maximum modulus points, deviations and spreads of meromorphic functions*, Value Distribution Theory and Related Topics, Kluwer Academic Publishers, (2004), 117-129.

2. Kowalski A., Marchenko I.I., *On the maximum modulus points and deviations of meromorphic minimal surfaces*, Mat. Stud., **46**, (2016), 137-151.

3. Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and spreads of entire curves*, Ann. Polon. Math., **123**, (2019), 345-368.

4. Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and spreads of meromorphic minimal surfaces*, Osaka J. Math., **57**, (2020), 85-101.

5. Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and maximum points of algebroid functions of finite lower order*, Kodai Math. J., **44(1)**, (2021), 47-68.

6. Marchenko I.I., Shcherba A.I., *On magnitudes of deviations of meromorphic functions*, Mat. Sb., **181**, (1990), 3-24, (po rosyjsku); Tłum. ang.: Math. USSR-Sb., **69**, no. 1, (1991), 1–24.

7. Marchenko I.I., *An analogue of the second main theorem for the uniform metric*, Mat. fiz., anal., geom., **5**, (1998), 212-227 (po rosyjsku).

8. Marchenko I.I., *On the Shea estimate of the magnitude of deviation of a meromorphic function*, Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat., **457**, (2000), 46-51, (po rosyjsku); Tłum. ang.: Russian Math.(Iz. VUZ), **44**, (2000), 44-49.

9. Petrenko V.P., *The entire curves*, Vyshcha Shkola, Kharkov (1984), (po rosyjsku).

Szczecin, dn. ....
(podpis doktoranta)

Słowa kluczowe: analiza zespolona, teoria Nevanlinny, funkcje subharmoniczne, funkcje meromorficzne, meromorficzne powierzchnie minimalne, krzywe całkowite, funkcje algebroidalne.

University of Szczecin
Institute of Mathematics
MA Arnold Kowalski

GROWTH OF MEROMORPHIC MINIMAL SURFACES AND ENTIRE CURVES

Supervisor: **prof. dr hab. Iwan Marczenko**
Auxiliary supervisor: **dr Ewa Ciechanowicz**

Summary of the doctoral dissertation

The doctoral dissertation consists of three chapters. The first chapter is divided into three sections and contains the basic definitions and theorems of the classical Nevanlinna theory, Petrenko's theory, the theory of meromorphic minimal surfaces and the theory of entire curves. The second chapter presents the results obtained in the area of the theory of growth of meromorphic minimal surfaces of a finite lower order. Most of these results have been published in the papers [2] and [4]. This chapter proves six theorems and presents their conclusions. The proofs of these theorems are provided in subsections 2.2-2.5. Section 2.1 is entirely devoted to proving the auxiliary lemmas used in the proofs of the main theorems. It is worth to mention Lemma 2.10, which is an analog of the lemma of logarithmic derivative in the case of meromorphic minimal surfaces for the uniform metric.

Theorem 2.1 gives an sharp upper estimation of the deviation $\beta(\infty, S)$ in terms of the number of separated maximum points of the meromorphic minimal surface S. This result is a generalization of the theorem of the estimation of Petrenko's deviation $\beta(\infty, f)$ of the meromorphic function $f(z)$ obtained by E. Ciechanowicz and I. Marczenko in [1]. Theorem 2.4 presents an estimation of the sum of the deviations $\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3} \beta(\mathbf{a}, S)$, which is a generalization of the theorem of the estimation of the sum of Petrenko's deviations of the meromorphic function obtained in 1990 ([6]). Theorems 2.2 and 2.3 contains estimations of the upper and lower logarithmic densities of some sets and are a generalization, to the case of meromorphic minimal surfaces, of the results obtained by I. Marchenko in papers [7] and [8]. Theorem 2.6 and theorem 2.7 provide an sharp estimation of the spread of the meromorphic minimal surface S in the terms of the number of separated maximum points $p(\infty, S)$, defect $\delta(\infty, S)$ and deviation $\beta(\infty, S)$. Theorem 2.6 is a reinforcement of Petrenko's theorem of the estimation of the spread of the meromorphic minimal surface of a finite lower order λ in terms of defect $\delta(\infty, S)$. In subsection 2.6 there are examples showing that the obtained estimations are sharp.

The third chapter is devoted to the results obtained in the theory of entire curves and algebroid functions. The results presented here were published in articles [3] and [5]. This chapter introduces the concept of separated maximum points for entire curves and algebroid functions and contains proofs of the four theorems. In Theorem 3.1 is given an sharp upper estimation of the deviation $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ for entire curve $\overrightarrow{G}$ in the terms of the number of separated maximum points $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. Theorem 3.2 contains an sharp estimation of the spread of entire curve $\overrightarrow{G}$ in the terms of the quantity $p(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$ and defect $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. It is a generalization of V. Petrenko's results concerning the spread of entire curves from the work [9]. In Theorem 3.3 is given an sharp estimation of the spread of the entire curve by the magnitude of deviation $\beta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{G})$. This result is a reinforcement of the results obtained by V. Petrenko in [9]. In Theorem 3.4 is obtained an upper estimation of the deviation $\beta(w, f)$ of the algebroid function $f(z)$ of the lower order

λ in the terms of the number of separated maximum points and Valiron's defect.
The last subsection contains an example of an entire curve for which hold equalities in the above-mentioned theorems 3.1-3.3. Examples of algebroid functions for which the estimation in Theorem 3.4 is sharp are also given.

Bibliography

1. Ciechanowicz E., Marchenko I. I., *Maximum modulus points, deviations and spreads of meromorphic functions*, Value Distribution Theory and Related Topics, Kluwer Academic Publishers, (2004), 117-129.

2. Kowalski A., Marchenko I.I., *On the maximum modulus points and deviations of meromorphic minimal surfaces*, Mat. Stud., **46**, (2016), 137-151.

3. Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and spreads of entire curves*, Ann. Polon. Math., **123**, (2019), 345-368.

4. Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and spreads of meromorphic minimal surfaces*, Osaka J. Math., **57**, (2020), 85-101.

5. Kowalski A., Marchenko I.I., *On deviations and maximum points of algebroid functions of finite lower order*, Kodai Math. J., **44(1)**, (2021), 47-68.

6. Marchenko I.I., Shcherba A.I., *On magnitudes of deviations of meromorphic functions*, Mat. Sb., **181**, (1990), 3-24, (in Russian); Engl. Transl.: Math. USSR-Sb., **69**, no. 1, (1991), 1–24.

7. Marchenko I.I., *An analogue of the second main theorem for the uniform metric*, Mat. fiz., anal., geom., **5**, (1998), 212-227 (in Russian).

8. Marchenko I.I., *On the Shea estimate of the magnitude of deviation of a meromorphic function*, Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat., **457**, (2000), 46-51, (in Russian); Engl. Transl.: Russian Math.(Iz. VUZ), **44**, (2000), 44-49.

9. Petrenko V.P., *The entire curves*, Vyshcha Shkola, Kharkov (1984), (in Russian).

Szczecin, ...
(signature)

Keywords: complex analysis, Nevanlinna theory, subharmonic functions, meromorphic functions, meromorphic minimal surfaces, entire curves, algebroid functions.