Zu dem

öffentlichen Redeacte

und der

Abiturienten-Entlassung

welche

Freitag den 30. September 1853 Nachmittags um $2\frac{1}{2}$ Uhr

in dem Hörsaale des Gymnasium zu Stettin

Statt finden werden

ladet

die Beschützer, Gönner und Freunde

dieser Lehranstalt

ehrerbietigst und ergebenst ein

Karl Friedrich Wilhelm Hasselbach,

Doctor der Theologie und Philosophie, Director und erster Professor des vereinigten Königl. und Stadt-Gymnasium, Director des mit demselben verbundenen Seminarium für gelehrte Schulen, Ritter des rothen Adler-Ordens 4r Klasse.

Inhalt:

Die Construction der Kegelschnitte

aus gegebenen Bestimmungsstücken

nach Newton princ. phil. nat. I. Sect. IV. und V.

von P. H. Balsam

und

Bericht über das Schuljahr von Michaelis $18^{52}/_{53}$.

1853

Stettin,

gedruckt bei F. T. Bagmihl, H. G. Effenbart's Erbinn,

große Wollweberstraße Nr. 554.

Zu dem

öffentlichen Redeacte

[illegible] Entlassung

[illegible]

in dem Hörsaale des Gymnasiums zu Stettin

[illegible]

ladet

die Beschützer, Gönner und Freunde

dieser Lehranstalt

ehrerbietigst und ergebenst ein

Carl Friedrich Wilhelm Hasselbach,

[illegible]

Inhalt:

Die Construction der Kegelschnitte

als geometrischer Berührungsörter

nach Newton's princ. phil. nat. I. Sect. IV. und V.

von F. H. Balsam

und

Bericht über das Schuljahr von Michaelis 18[illegible]

Stettin,

[illegible]

Die Construction der Kegelschnitte

aus gegebenen Bestimmungsstücken

nach Newton princ. phil. nat. I., Sect. IV. und V.

von

P. H. Balsam.

Der Gegenstand des Nachfolgenden ist die Bearbeitung einer rein geometrischen Episode in den Principien der Naturphilosophie von Newton. Nachdem nämlich dort in den drei ersten Sektionen des ersten Buches die Auffindung der Centripetalkräfte für gegebene Bahnen und Attraktionscentren gelehrt und insbesondere gezeigt ist, welches Gesetz der Centripetalkraft statt finden muss, damit ein Körper einen Kegelschnitt beschreibe, in dessen einem Brennpunkt sich das Attraktionscentrum befindet, handelt die vierte und fünfte Sektion von der Konstruktion dieser Bahnen aus gegebenen Bestimmungsstücken und zwar die vierte von den Fällen, in denen ein Brennpunkt gegeben ist, die fünfte von solchen, in denen nur Punkte oder Tangenten der Bahn gegeben sind. Es folgen dann noch einige Aufgaben, von denen Newton im dritten Buch sagt, dass sie behufs der Auflösung der Aufgabe die parabolische Bahn eines Cometen aus drei Beobachtungen zu bestimmen erfunden seien; da er für diese Aufgabe jedoch später eine einfachere Lösung gefunden hat, habe ich jene Aufgaben auch hier nicht mit aufgenommen. Dagegen haben eben die Auflösungen jener ersterwähnten Aufgaben der fünften Sektion mich veranlasst gerade diesen Theil der Principien zunächst zu meinem Thema zu machen, da sie zeigen, dass Newton auch in der reinen Geometrie, welche bei weitem nicht den Hauptgegenstand seiner Werke ausmacht, im Besitz von Kenntnissen war, welche erst in der neuesten Zeit durch Poncelet und Steiner wieder aufgenommen und entwickelt worden sind. *) Uebrigens würde die Wiederaufnahme der geometrischen Behandlung auch mechanischer Probleme, wie sie sich bei Newton findet, beim Universitätsunterricht wegen der grösseren Anschaulichkeit, die sie vor der analytischen Behandlung voraus hat, gewiss von guter Wirkung sein.

---

*) Anm. Als Beleg für dieses Urtheil sehe man „Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Quatrième Époque §. 14.", wo von der Zweckmässigkeit eines neuen Commentars zu den Principien gesprochen wird.

Erklärung einiger gebrauchten Bezeichnungen und Hülfssätze.

Es soll (a) die halbe grosse Achse, (b) die halbe kleine Achse, (e) die Excentricität, (l) den Parameter oder das Latus rectum principale, d. h. die Grösse $\frac{2\,b^2}{a}$ bei Ellipse und Hyperbel, (2 p) den Parameter der Parabel, d. h. den vierfachen Abstand vom Brennpunkt zum Scheitel, ferner die Buchstaben (C) den Mittelpunkt, (S, H) die beiden Brennpunkte, (P, P_1 etc.) gegebene Punkte, (L, L_1 etc.) gegebene Linien, gewöhnlich Tangenten, V, V_1 die Endpunkte der vom Brennpunkt S auf gegebene Tangenten gefällten und um sich selbst verlängerten Lothe bedeuten.

Hülfssatz I. Die Erzeugung der Kegelschnitte von den beiden Brennpunkten aus und die aus einem Brennpunkt und der Leitlinie (Directrix).

Hülfssatz II. Die Mitten paralleler Sehnen eines Kegelschnittes liegen in gerader Linie.

(Hamiltons Kegelschnitte I. S. 25.)

Hülfssatz III. Bildet man bei zwei sich schneidenden Sehnen (oder Sekanten) eines Kegelschnittes das Verhältniss zwischen dem Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne und dem aus den Abschnitten der anderen, so behält dies für jedes Paar Sehnen (oder Sekanten), die den ersten parallel gezogen werden, denselben Werth.

(Hamilton I. S. 18.)

Hülfssatz IV. Zieht man von einem Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel eine Linie von der Länge der grossen Achse, verbindet ihren Endpunkt mit dem zweiten Brennpunkt, so ist das Loth auf der Mitte dieser Verbindungslinie eine Tangente des Kegelschnitts.

(Hamilton II. 15 et 16.)

Hülfssatz V. Das Produkt der von den beiden Brennpunkten auf eine beliebige Tangente des Kegelschnitts gefällten Lothe ist constant und gleich b^2.

(Hamilton II. 21)

Hülfssatz VI. Das Produkt der von einem Punkt P des Kegelschnitts nach den beiden Brennpunkten gezogenen Linien ist gleich dem Quadrat des Halbmessers, der conjugirt ist zu dem nach P gezogenen.

(Hamilton II. 19.)

Hülfssatz VII. Die Fusspunkte der Perpendikel, die vom Brennpunkt der Parabel auf ihre Tangenten gefällt werden, liegen auf dem im Scheitelpunkte auf der Achse errichteten Loth.

(Folgt leicht aus Hamilton II. S. 12 u. 15.)

Hülfssatz VIII. Das Loth vom Brennpunkt der Parabel auf eine Tangente gefällt ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Brennpunkts vom Scheitel und vom Berührungspunkt der Tangente.

(Hamilton II. 30. Newton Lemma XIV.)

Hülfssatz IX. Der Inhalt der einer Ellipse oder einer Hyperbel umschriebenen Parallelogramme ist constant und gleich 4 a b.

(Hamilton IV. 1. Newton Lemma XII.)

Hülfssatz X. Zieht man von dem Berührungspunkte einer Tangente eine Parallele mit einem Durchmesser bis zu dem diesem conjugirten, so sind auf diesem letzteren der erhaltene Durchschnittspunkt und der auf der Verlängerung liegende Schneidungspunkt mit der Tangente zugeordnete harmonische Punkte zu seinen Endpunkten.

(Hamilton V. 3. Zusatz.)

Hülfssatz XI. Sind 2 Tangenten eines Kegelschnitts fest, während eine dritte sich bewegt, so wird das Stück der letzteren zwischen den beiden festen Tangenten von jedem Brennpunkt aus unter einem constanten Winkel gesehen.

Hülfssatz XII. Verlängert man zwei Gegenseiten eines einfachen Vierecks, bis sie sich schneiden, und verbindet den erhaltenen Durchschnittspunkt mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen, so entstehen auf dieser Verbindungslinie vier harmonische Punkte.

Uebersicht der einzelnen Aufgaben.

Es handelt sich, wie schon gesagt ist, hier um die Construction der Kegelschnitte aus gegebenen Bestimmungsstücken, d. h. den Achsen, dem Achsenverhältniss, den Brennpunkten und Punkten, die dem Kegelschnitt angehören sollen, oder geraden Linien, die er berühren soll. Sonach zerfallen die Aufgaben in folgende Abtheilungen.

I. Einen Kegelschnitt zu construiren aus einem Brennpunkt und drei beliebigen Bestimmungsstücken.

1. Aus S, a, b, P.
2. Aus S. a, b, L.
3. Aus S, $\frac{b}{a}$, P, P_1.
4. Aus S, $\frac{b}{a}$, L, L_1

5. Aus S, $\frac{b}{a}$, P, L.
6. Aus S und drei beliebigen Elementen, seien es Punkte oder Tangenten, oder beide gemischt.
7. Eine Parabel aus dem Brennpunkt und zwei Elementen.

II. Einen Kegelschnitt auf 5 beliebigen Elementen zu construiren. Also:
1. aus 5 Punkten,
2. aus 4 Punkten und einer Tangente,
3. aus 3 Punkten und zwei Tangenten,
4. aus 2 Punkten und drei Tangenten,
5. aus 1 Punkt und vier Tangenten,
6. aus 5 Tangenten.

Ein Kegelschnitt wird als bekannt betrachtet, wenn seine Brennpunkte und die grosse Achse, oder wenn ein Brennpunkt, die zugehörige Leitlinie, und das Verhältniss $\frac{e}{a}$ bekannt ist. Wie aus den gegebenen sämmtlichen Punkten oder Tangenten eines Kegelschnitts sein Mittelpunkt und die Achsen gefunden werden können, soll im Verfolg gelehrt werden.

Erste Abtheilung.

I. 1. Einen Kegelschnitt aus S. a. b. P. zu construiren.

Aufl. Beschreibe um P mit (2 a — SP), um S mit 2 e Kreise, so kann jeder der Durchschnittspunkte der beiden Kreise als der zweite Brennpunkt H genommen werden.

Det. 2 Lösungen.

I. 2. Einen Kegelschnitt aus S. a. b. L. zu construiren.

Aufl. Fälle von S auf L ein Loth, verlängere es um sich selbst zum Punkte V, beschreibe um V mit 2 a, um S mit 2 e Kreise, so kann jeder der Durchschnittspunkte dieser Kreise als der zweite Brennpunkt H genommen werden.

Det. 2 Lösungen.

I. 3. Einen Kegelschnitt aus S, $\frac{b}{a}$, P P, zu construiren.

Aufl. Durch das Verhältniss $\frac{b}{a} = x$, ist auch das $\frac{a}{e}$, gleich $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für eine zu suchende Ellipse, oder gleich $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ für eine Hyperbel, bekannt. Man kann also aus den Linien SP, SP_1 die Längen der von P, P_1 auf die Leitlinie gefällten Perpendikel finden; beschreibt man nun mit diesen um die Punkte P, P_1 Kreise, so kann jede der gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise als die zum Brennpunkt S gehörige Leitlinie betrachtet werden.

Det. Es ist schon bei der Aufl. erwähnt, dass vorherbestimmt werden muss, ob der zu suchende Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Hyperbel sein soll, nur im Fall $\frac{b}{a} > 1$ ist das nicht nöthig. Für die Ellipse nun sind in keinem Falle mehr als 2 gemeinschaftliche Tangenten und somit Lösungen möglich, da die Summe der Linien, mit welchen um P, P_1 die Kreise beschrieben sind, und die einzeln schon grösser als SP, SP_1 sind, gewiss mehr als PP_1 beträgt, die Kreise sich also reell schneiden. Bei der Hyperbel kann es kommen, dass die Kreise sich nicht schneiden und es sind dann 4 Lösungen möglich. Für die beiden äusseren gemeinschaftlichen Tangenten erhält man dann Hyperbeln, bei denen P, P_1 auf demselben Zweige liegen, für die inneren solche, bei denen jeder Punkt auf einem besonderen Zweige liegt.

I. 4. Einen Kegelschnitt aus S, $\frac{b}{a}$, L, L_1 zu construiren.

Aufl. Fälle von S auf beide Tangenten Lothe, verlängere sie um sich selbst zu den Punkten V, V_1, so ist 1, VV_1 die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Spitze der zweite Brennpunkt H ist; 2, SV die Basis eines Dreiecks, dessen beide andere Seiten in dem Verhältniss $2e : 2a$ stehen, und dessen Spitze ebenfalls H ist. Der Durchschnitt der beiden Orte ist also der gesuchte zweite Brennpunkt.

Det. Die Unterscheidung zwischen Ellipse und Hyperbel muss wegen des Verhältnisses $\frac{e}{a}$ wie oben Statt finden, dann sind noch zwei Lösungen oder eine oder keine möglich, je nachdem die gerade Linie den Kreis schneidet, berührt, oder nicht trifft.

I. 5. Einen Kegelschnitt aus S, $\frac{b}{a}$, P, L

1. Fall. Ist der gegebene Punkt in der gegebenen Linie, d. h. also ihr Berührungspunkt, so liegt der zweite Brennpunkt 1, in der geraden Linie VP, 2, in dem durch V, S und das Verhältniss $\frac{a}{e}$ bestimmten Kreise.

2. Fall. (siehe Fig. I.) Liegt der gegebene Punkt nicht auf der gegebenen Tangente, so ist folgendes die Auflösung Newtons:

Zeichne nach dem Achsenverhältniss einen beliebigen Kegelschnitt, der dem gesuchten ähnlich ist, trage an die Verbindungslinie der Brennpunkte desselben s h, in s den Winkel VSP, in h den Winkel SVP des gegebenen Dreiecks VSP nach gleicher Seite zu an, beschreibe um den dritten Eckpunkt q des so erhaltenen Dreiecks einen Kreis mit einer Linie, die sich zur grossen Achse des gezeichneten Kegelschnitts so verhält wie SP : SV. Nenne einen der Schneidungspunkte dieses Kreises mit dem Kegelschnitt p, ziehe ps, und trage $\angle$ psh an PS an, so dass auch $\angle$ vsh $=$ $\angle$ VSH wird, und mache den zweiten Schenkel dieses Winkels SH so lang, dass sp : SP $=$ sh : SH; dann ist H der zweite Brennpunkt, SP $+$ PH die grosse Achse des gesuchten Kegelschnitts.

Bew. 1. Der erzeugte Kegelschnitt hat das verlangte Achsenverhältniss, denn da Δ SHP $\backsim$ Δ shp ist SP $+$ PH : SH $=$ sp $+$ ph : sh, welches letztere Verhältniss gleich dem gegebenen $\frac{a}{e}$ gemacht ist.

2. Derselbe berührt die Gerade L, d. h. es ist zu zeigen, dass VH $=$ SP $+$ PH $=$ 2a ist; zeichne zu dem Ende über sp das Δ svp $\backsim$ Δ shq, ziehe vh, dann ist aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel auch Δ qsp $\backsim$ Δ hsv und also

qp : hv $=$ ps : vs $=$ PS : VS. Es war aber nach Construction

qp : 2a$_1$ $=$ PS : VS (a$_1$ die halbe grosse Achse des neu gezeichneten Kegelschnitts), also ist hv $=$ 2a$_1$ und wegen Aehnlichkeit von vshp und VSHP auch HV $=$ 2a.

Anm. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass diese Auflösung nicht mit Cirkel und Lineal zu leisten ist, da es dabei auf die Durchschnittspunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitt ankommt. Die Zahl der Lösungen ist so gross als die Zahl der Durchschnittspunkte des Kreises mit dem Kegelschnitt. Der der Auflösung zu Grunde liegende Gedanke ist wohl folgender: Dreht man ein veränderliches Dreieck um eine seiner Ecken, so dass es sich selbst während der Drehung ähnlich bleibt, und verbindet man für irgend eine neue Lage die beiden neu erhaltenen Ecken mit den entsprechenden alten, so sind diese Linien die Seiten zweier ebenfalls ähnlicher Dreiecke, deren gemeinschaftliche Spitze die unveränderlich gebliebene Ecke ist.

Hülfsaufgabe. (zur Aufl. von I. 6). Es sind 3 Punkte A, B, C gegeben, man soll einen vierten Punkt X finden, dessen Abstände von jenen drei Punkten zu je zweien gegebene Unterschiede haben, d. h. es soll $XA - XB = p$ $XB - XC = q$, also $XA - XC = p + q$ sein:

Aufl. (s. Fig. II.) In Folge der Bedingung $XA - XB = p$ ist der Ort von S eine Hyperbel, deren Brennpunkte A, B sind, deren grosse Achse gleich p ist, und deren zu B gehörige Leitlinie gefunden wird, wenn man auf der Achse zu den beiden Scheiteln und B den zu letzterem Punkt zugehörigen vierten harmonischen D sucht, und da ein Loth errichtet. In Folge der Bedingung $XB - XC = q$ ist der Ort von X eine Hyperbel, deren zu B gehörige Leitlinie auf ähnliche Art gefunden werden kann. Nun muss also, wenn XH, XK die von X auf die beiden Leitlinien gefällten Lothe sind, $XH : XB = p : AB$ und $XB : XK = BC : q$, also $XH : XK = \frac{p}{q} : \frac{AB}{BC}$ sein, d. h. es befindet sich X in einer der zwei geraden Linien, die von dem Scheidungspunkt J der beiden Leitlinien ausgehen und deren Punkte von der Leitlinie Abstände haben, die in dem gegebenen Verhältniss stehen.

Auf gleiche Weise lassen sich durch die Bedingungen $XA - XB = p$, $XA - XC = p + q$ wiederum zwei von dem Schneidungspunkt J_1 der zu A gehörigen Leitlinien ausgehende Gerade bestimmen, auf deren einer sich X befinden muss. X ist also einer der 4 Punkte, in denen sich die beiden von J, J_1 ausgehenden Linienpaare durchschneiden.

Anm. Die Auflösung ist auch anwendbar, wenn statt der Unterschiede die Summen oder die Summe des einen Paars und der Unterschied eines andern Paars der Abstände gegeben sind, so dass also im Allgemeinen die Aufgabe gelöst ist: die Durchschnittspunkte zweier durch ihre Achsen gegebenen Kegelschnitte zu finden, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

Eine ähnliche Auflösung findet sich im Liber tactionum des Appollonius, das von Vieta restituirt ist.

I. 6. Einen Kegelschnitt aus S und drei beliebigen Elementen, seien es Punkte oder Tangenten, zu construiren.

Aufl. 1. Sind zwei Punkte P, P_1 gegeben, so ist, da $PS + PH = P_1S + P_1H = 2a$ sein muss, $P_1H - PH = PS - P_1S$ und also bekannt.

2. Sind zwei Tangenten gegeben, so construire man die Punkte V, V_1, dann ist $V_1H - VH = 0$, also gegeben.

3. Ist ein Punkt und eine Tangente gegeben, so ist $HV - HP = SP$, also ebenfalls bekannt.

Sind also drei Elemente gegeben, so ist die Aufgabe durch das Gesagte auf die Hülfsaufgabe zurückgeführt.

Det. Im Fall, dass drei Tangenten gegeben sind, findet nur eine Lösung statt; sind zwei Tangenten und ein Punkt gegeben, so giebt es deren zwei, und in den beiden übrigen Fällen im Allgemeinen vier Lösungen.

Anm. Wenn drei Punkte gegeben sind, findet folgende kürzere Auflösung statt: Suche auf PP_1 einen Punkt A, für welchen $PA : P_1A = PS : P_1S$, ebenso auf P_2P_1 einen Punkt A_1, für welchen $P_1A_1 : P_2A_1 = P_1S : P_2S$, dann ist AA_1 Leitlinie des gesuchten Kegelschnitts.

Bew. leicht.

I. 7. Eine Parabel aus S und 2 beliebigen Elementen zu construiren.

Aufl. Ist ein Punkt P gegeben, so beschreibe man um denselben mit PS einen Kreis, dann ist die Leitlinie Tangente dieses Kreises; ist eine Tangente gegeben, so ist V ein Punkt der Leitlinie. Aus 2 Elementen ist diese also leicht zu finden.

Bew. leicht nach Hülfss. I. und VII.

Zweite Abtheilung.

Die Auflösungen der Aufgaben dieser Abtheilung, doch ohne Anleitung zum Beweis, hat Steiner in dem Anhang zu seinem Buch „Geometrische Constructionen ausgeführt mit Hülfe des Lineals und eines festen Hülfskreises“ gegeben, und dort in Betreff des Beweises auf sein anderes Werk „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten vom Jahre 1832“ und dessen spätere, nicht zum Druck gekommene Theile verwiesen; ich habe deshalb diese Beweise, die sich grossentheils auf die von Desargues *) erfundene, mir zuerst aus den Steinerschen Vorlesungen bekannt gewordene Lehre von der „Involution von 6 Punkten oder Strahlen“ stützen, hier zur Vergleichung mit den Newtonschen Auflösungen und Beweisen mit aufgenommen. Erwähnen muss ich jedoch, dass, wenn gleich Chasles in seiner Note X des schon öfter citirten Werkes vom J. 1837 den Zusammenhang der Lehre von der Involution mit der vom anharmonischen Verhältniss und die Eigenschaften des Centralpunkts, der Achsen, und der von Steiner Asymptotenpunkte und Asymptoten genannten

*) Siehe Chasles Histoire de géométrie I. § 34.

zwei ausgezeichneten Punkte und Strahlen als seines Wissens noch nicht bekannt anführt, diese Dinge doch aus der Aufeinanderlegung zweier projectivischer Geraden mit den Durchschnitten der Parallelstrahlen (r, q_1) oder mit entsprechenden gleichen Strecken, sowie zweier projectivischer Strahlbüschel mit entsprechenden gleichen Winkeln mit solcher Leichtigkeit und Eleganz folgen, dass man Steiner das Verdienst der ersten Wiederaufnahme dieser lange unbeachteten Lehre und deren glänzendster Entwickelung aus ihren Fundamental-Eigenschaften nicht versagen kann, auch wenn er die Bekanntmachung durch den Druck bisher unterlassen hat. In einem mir erst ganz kürzlich zu Gesicht gekommenen Werk von Christoph Paulus „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie. Stuttgard 1853" finden sich die Lehre von der Involution und die hier gelösten Aufgaben gleichfalls behandelt, ohne dass ich bis jetzt Näheres über das dort Enthaltene angeben kann.

Newton. Lemma 17.*) Wenn von einem beliebigen Punkt P eines gegebenen Kegelschnitts auf die vier über beide Endpunkte verlängerten Seiten AB, CD, AC, BD eines eingeschriebenen Vierecks eben so viele Gerade PQ, PR, PS, PT unter gegebenen Winkeln gezogen werden, so hat das Rechteck aus zwei auf entgegengesetzte Seiten gezogenen Geraden zu dem aus den beiden anderen gebildeten ein constantes Verhältniss.

1. Fall. (s. Fig. 3.) Seien zwei gegenüberstehende Seiten des Vierecks AC und BD unter sich und zwei von den, von P gezogenen Geraden, PQ und PR gleichfalls diesen Seiten, die beiden andern PS, PT einer von den beiden andern Seiten, hier AB, parallel.

Bew. Ist nun K der zweite Schneidungspunkt der verlängerten PQ mit dem Kegelschnitt, so wird, da AC ⧺ DB ⧺ PK ist, nach Hülfssatz II die Mitte O der Sehne PK zugleich die Mitte der Linie RQ, daher $PR = QK$ und $PR . PQ = KQ . PQ$ sein; da nun $PS . PT = QA . QB$, das Verhältniss $QA . QB : QK . QP$ aber nach Hülfss. III constant ist, ist die Th. bewiesen.

2. Fall. (s. Fig. 4.) Seien die Seiten des Vierecks AC, BD nicht mehr parallel, PS und PT nach wie vor der Seite AB, PQ und PR der Seite AC parallel.

*) Ueber die Geschichte dieses schon von Euclid und Apollonius behandelten Theorems siehe Chasles Hist. I. §. 32.

Constr. Ziehe Bt $\#$ AC, bis es den Kegelschnitt in d, die verlängerte PT in t; DN $\#$ AC, bis es AB in N, endlich Cd, das PQ in r, DN in M schneidet.

Bew. Nach Fall I ist $\frac{PS.Pt}{PQ.Pr}$ constant; der Zähler unterscheidet sich von dem der Thesis durch die Grösse PS . Tt, der Nenner durch PQ . Rr, deshalb ist zu beweisen, dass

$\frac{PS.Pt}{PQ.Pr} = \frac{PS.Tt}{PQ.Rr}$, da dann auch $\frac{PS.(Pt - Tt)}{PQ.(Pr - Rr)}$ d. h. $\frac{PS.PT}{PQ.PR} = \frac{PS.Pt}{PQ.Pr}$ sein muss.

Man hat aber aus Δ TBt ∞ Δ BDN und Δ CRr ∞ CDM

1. Tt : Bt = NB : DN und Cr : Rr = CM : DM

oder 2. AQ : Rr = AN : DM, woraus durch Zusammensetzung PS . Tt : PQ . Rr = AN . BN : DM . DN und da das letzte Verhältniss AN . BN : DM . DN = Pr . PQ : PS . Pt wieder nach dem 1. Fall, ist die Thesis bewiesen.

3. Fall. Sind endlich die Linien PR, PQ, PS, PT unter beliebig gegebenen Winkeln gegen die Seiten gezogen, so bilden sie mit den nach Fall (2) zweien Seiten parallel gezogenen Linien 4 ähnliche Dreiecke, aus deren constantem Seitenverhältniss die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Anm. Die Uebereinstimmung dieses Satzes mit der Behauptung, dass 2 Punkte eines Kegelschnitts durch die übrigen zu projectivischen Strahlbüscheln *) werden, ist leicht zu zeigen, denn sind die Linien PQ, PR, PS, PT senkrecht gegen die Seiten des Vierecks gezogen, so ist das Verhältniss

$$\frac{PQ.PR}{PS.PT} = \frac{\sin.PAB.\sin.PDC}{\sin.PAC.\sin.PDB} = \frac{\sin.PAB}{\sin.PDB} : \frac{\sin.PAC}{\sin.PDC}$$

das bekannte anharmonische Verhältniss.

Dass der analytische Beweis durch die blosse Interpretation der Formel $\frac{A.B}{C.D} = \lambda$, wo A, B, C, D die Gleichungen der Seiten des Vierecks, λ eine Constante bedeuten, geführt wird, ist ebenfalls zur Genüge bekannt.

Newton. Lemma 18. Umkehrung des vorigen Satzes.

Wenn unter Beibehaltung der Bezeichnung des vorigen Satzes das Verhältniss PQ . PR : PS . PT constant ist, so wird der Punkt P sich auf einem Kegelschnitt befinden müssen, der durch die 4 Punkte A, C, D, B geht.

Bew. Legt man durch A, C, D, B und einen der Punkte, für welche jenes Verhältniss Statt hat, einen Kegelschnitt, so muss dieser auch alle übrigen Punkte treffen, für die dasselbe Verhältniss gilt; denn träfe er einen dieser

---

*) Vide Lemma II. bei den Aufl. nach der Steinerschen Methode.

Punkte P nicht, so müsste er die Gerade AP in einem andern Punkt π treffen. und dann wäre nach Construction und dem vorigen Satze $\frac{\pi\varrho\,.\,\pi\varkappa}{\pi\sigma\,.\,\pi\tau} = \frac{PR\,.\,PQ}{PS\,.\,PT}$, oder weil $\frac{\pi\varkappa}{\pi\sigma} = \frac{PQ}{PS}$ ist, $\frac{\pi\varrho}{\pi\tau} = \frac{PR}{PT}$, welches nicht anders möglich ist, als wenn P und π zusammenfallen.

Coroll. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn 3 Gerade PR, PQ, PS von einem gemeinschaftlichen Punkt P auf 3 feste Gerade AB, CD, AC gezogen werden, so dass $PQ\,.\,PR : PS^2$ constant ist, P sich auf einen Kegelschnitt befindet, der die Geraden AB und CD in A und C berührt, denn es sind in diesem Fall die Schneidepunkte B und A, D und C zusammengefallen.

Newton. Lemma 19. Wenn ein Viereck ACDB gegeben ist, auf einer aus einer Ecke A desselben beliebig gezogenen Geraden den Punkt P zu finden, für welchen das Verhältniss $PQ\,.\,PR : PS\,.\,PT$ eine gegebene Grösse hat, wobei PQ, PR, PS, PT ähnliche Linien, als in den vorigen beiden Sätzen bedeuten.

Aufl. Durch die Richtung der von A aus gezogenen Geraden, die den gesuchten Punkt enthalten soll, ist das Verhältniss PQ : PS gegeben; dividirt man damit in das gegebene Verhältniss der Rechtecke, so erhält man das Verhältniss PR : PT, mit Hülfe dessen man leicht zwei bestimmte von C ausgehende Gerade findet, deren Durchschnittspunkte mit der von A gezogenen der Forderung der Aufgabe genügen.

Anm. Das durch Division erhaltene Verhältniss für PR : PT führt, wie gesagt, auf zwei vom Punkte D ausgehende Ortslinien für den gesuchten Punkt und es wird desshalb, wenn nur das Viereck und die Grösse des erwähnten Verhältnisses gegeben ist, die Aufgabe eine doppelte Lösung zulassen. Um hierüber Klarheit zu geben, diene Folgendes: Ist der Punkt P in irgend einem der 11 Räume, (Fig. 5), in welche die Ebene durch das Vierseit getheilt wird, angenommen, und sind diejenigen Geraden bestimmt, welche als Gegenseiten betrachtet werden sollen, so muss natürlich, sobald der Punkt P in Bezug auf irgend eine der vier Seiten auf die entgegengesetzte Seite kommt, der betreffende Abschnitt (PQ, etc.) als negativ betrachtet werden. (Der Winkel, unter dem die betreffende Linie gegen die Seite des Vierecks zu ziehen ist, muss so genommen werden, dass die Richtung der früheren parallel bleibt, d. h. nach der entgegengesetzten Seite der fraglichen Linie (AB, etc.) als vorher). Da nun die Grösse $\frac{PQ\,.\,PR}{PS\,.\,PT}$ unverändert bleiben soll, ergiebt sich sogleich, dass P die gegebenen Geraden AB, etc. nur in solchen Punkten überschreiten kann, für welche zugleich zwei der Abschnitte PQ, PR, PS, PT ihr Zeichen wechseln, damit der Werth des ganzen Bruchs ungeändert bleibt, und da nicht zugleich beide Factoren des Zählers oder des Nenners verschwinden dürfen, kann dies nur so geschehen, dass ein Factor im Zähler und einer im Nenner die Zeichen wechseln, d. h. wenn AB und CD, AC und BD Gegenseiten sind, nur in den Punkten A, B, C, D; wenn AC und AB, BD und CD, in den Punkten B, C, E, F, und wenn AB und BD, AC und CD, in den Punkten A, D, E, F. Sind also für das Viereck ABCD und den Raum (1) Fig. 5 die Richtungen der Linien PQ, PR, PS, PT sämmtlich als die positiven angenommen, und lässt man den Werth des Bruches $\frac{PQ \,.\, PR}{PS \,.\, PT}$ von 0 bis $+ \infty$ gehen, so wird die dadurch erhaltene Kegelschnittschaar die Räume 1, 2, 3, 4, 5, 6 ausfüllen; lässt man dann den Werth des Bruches von 0 bis $- \infty$ gehen, so erfüllt die Kegelschnittschaar die Räume 7, 8, 9, 10, 11; für die Grenzwerthe des Bruches 0 und $\pm \infty$ besteht der Kegelschnitt im ersten Fall aus den beiden Geraden AB, CD, im zweiten Fall aus den Geraden AC, BD.

Coroll. I. Aus der Auflösung dieser Aufgabe ergiebt sich auch leicht ein Mittel in einem der Punkte A, B, C, D an den fraglichen Kegelschnitt die Tangente zu ziehen. Denn nennt man die Punkte, in denen die Linie AP die Linien CD, BD schneidet, L, M, so ist klar, dass durch das durch Division erhaltene Verhältniss PR : PT auch PL : PM durch die der Gestalt nach gegebenen Dreiecke PLR, PMT bestimmt ist. Lässt man nun AP sich um A drehen, so dass sich der Punkt P dem Punkt D nähert, so wird die Sehne DP zuletzt die Tangente in D werden, während die Lage der beweglichen AP mit AD zusammenfällt. Zieht man also hiermit eine Parallele, die DC in G, BD in H schneidet und theilt GH durch den Punkt J, nachdem man vorher das Verhältniss GJ : HJ auf ähnliche Art, wie oben von PL : PM gezeigt worden, bestimmt hat, so ist DJ die gesuchte Tangente.

Anm. Dass es auch hier 2 Punkte J und sonach 2 Tangenten giebt, so wie es zwei Kegelschnitte gab, ist klar.

Coroll. II. Ein Paar conjugirter Durchmesser des Kegelschnitts findet man leicht, wie folgt: Construire in A die Tangente, durch B ziehe damit eine Parallele und suche deren Durchschnittspunkt E mit dem Kegelschnitt, ziehe ferner von A nach der Mitte F der Linie BE, und suche auch auf AF den Durchschnittspunkt G mit dem Kegelschnitt, dann ist AG ein Durchmesser und der in seiner Mitte H parallel mit BE zu ziehende conjugirte HJ ist durch die Proportion $HJ^2 : AH^2 = FE^2 : AF \cdot FG$ auch der Länge nach bestimmt.

Anm. Liegen die Stücke FA, FG von F aus nach entgegengesetzten Richtungen, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, nach denselben, so ist er eine Hyperbel, und liegt G im Unendlichen, so ist er eine Parabel.

N. Lemma 20. (s. Fig. 6.) Wenn ein beliebiges Parallelogramm ASPQ mit zwei entgegengesetzten Ecken A und P in einem Kegelschnitt liegt, die in A zusammenstossenden Seiten AS, AQ diesen noch in den Punkten C, B treffen, und wenn von diesen Punkten B, C nach einem beliebigen fünften Punkt des Kegelschnitts D die Linien BD, CD gezogen werden, welche die gegenüberstehenden Seiten des Parallelogramms beziehlich in den Punkten T, R treffen, so müssen die auf diesen Seiten abgeschnittenen Stücke PT, PR ein festes Verhältniss haben; und umgekehrt werden von P aus auf den anstossenden Seiten eines Parallelogramms Stücke abgeschnitten, die ein festes Verhältniss haben, und von den Endpunkten dieser Stücke nach 2 festen Punkten, die auf den Gegenseiten des Parallelogramms beliebig angenommen sind, gerade Linien gezogen, so durchläuft der Durchschnittspunkt D dieser Linien einen bestimmten Kegelschnitt, der zugleich durch A, P, B, C geht.

Constr. Ziehe von D Parallelen mit AS, AQ, welche AQ in E, SP in K, AS in C, PQ in R treffen, ziehe CP, das EK in F trifft.

Bew. nach Newton. Man betrachte CPBA als eingeschriebenes Viereck, so ist nach Lemma 17 $\frac{DH \cdot DG}{DE \cdot DF}$ constant; es ist aber $DH : PT = DE : PQ$ und $DG : PS = DF : PR$, setzt man desshalb $DH = \frac{PT \cdot DE}{PQ}$, $DG = \frac{PS \cdot DF}{PR}$ in obigen constanten Ausdruck ein, so erhält man sogleich $\frac{PT \cdot DE \cdot PS \cdot DF}{PQ \cdot \quad PR \cdot DE \cdot DF}$ oder $\frac{PS \cdot PT}{PQ \cdot PR}$ als einen constanten Ausdruck, und da PS, PQ gegebene Stücke sind, muss also $PT : PR$ constant sein.

Umgekehrt ist nach Annahme $PT : PR$ constant, so hat man nur den vorigen Beweis rückwärts verfolgend zu zeigen, dass auch $\frac{DH \cdot DG}{DE \cdot DF}$ constant sein muss, und dann liegt nach Lemma 18 D auf einem Kegelschnitt, der durch A, B, P, C geht.

Bew. nach Steiners Meth.*) Der Strahlbüschel in C ist mit der Geraden PQ, der in B mit SP in perspektivische Beziehung zu setzen; da nun

---

*) Vide Lemma II. bei den nach Steiners Methode gegebenen Auflösungen.

D sich auf einem Kegelschnitt bewegen soll, sind die Strahlbüschel B, C durch diesen projektivisch und also auch die Geraden PQ, PT; da der Durchschnittspunkt P dieser Geraden selbst ein Punkt des Kegelschnitts ist, liegen dort entsprechende Punkte vereinigt und sind also die Geraden in perspektivischer Lage, und da endlich die zu den unendlich entfernten Punkten der Geraden gehörigen Strahlen CA, BA einander entsprechen, weil ja A ein Punkt des Kegelschnitts ist, müssen die Geraden PQ, SP in Bezug auf die Punkte T, R projektivisch ähnlich, d. h. PT : PR constant sein.

Coroll. I. Construction der Tangente in B als des zu CB gehörigen Strahls Bt.

Coroll. II. Umgekehrt durch die 4 Punkte A, C, P, B und die Tangente in B ist das Verhältniss BT : BR gegeben und sonach leicht der Durchschnitts-Punkt des Kegelschnitts mit jeder von B oder C ausgehenden Geraden zu finden.

Coroll. III. Zwei Kegelschnitte schneiden sich höchstens in vier Punkten; denn hätten sie ausser A, C, P, B noch einen fünften Punkt gemein, so wäre dadurch das Verhältniss PT : PR und desshalb auf jeder von B oder C ausgehenden Geraden ein Punkt als Durchschnittspunkt mit beiden Kegelschnitten bestimmt, d. h. die Kegelschnitte fielen ganz zusammen.

N. Lemma 21. (s. Fig. 7.) Wenn zwei bewegliche und unbegränzte gerade Linien BM, CM sich um die beiden festen Punkte B, C wie um zwei Pole drehen und ihr Durchschnittspunkt dabei eine dritte, der Lage nach gegebene, Gerade MN durchläuft, wenn dann für jede Lage der beweglichen Geraden von B und C aus zwei andere unendliche Gerade BD, CD gezogen werden, welche mit den beiden ersten gegebene Winkel MBD, MCD bilden, so durchläuft der Durchschnittspunkt dieser letzteren Geraden einen bestimmten Kegelschnitt, der durch die Punkte B, C geht. Umgekehrt, wenn der Durchschnittspunkt D der Geraden BD, CD einen Kegelschnitt durchläuft, der durch die gegebenen Punkte B, C, A geht, und der Winkel DBM immer gleich $\angle$ ABC, $\angle$ DCM immer gleich $\angle$ ACB ist, so durchläuft der Punkt M eine Gerade, die der Lage nach gegeben ist.

Bew. des ersten Theils. Seien N, P zwei beliebige entsprechende Punkte der durch die Bewegung von M und D erzeugten Orte, die als fest betrachtet werden; trage $\angle$ BNM an BP in P an, bis sein zweiter Schenkel die verlängerte BD in T, $\angle$ CNM an CP in P, bis sein Schenkel die verlängerte CD in R trifft, so ist, da nach Construction $\angle$ MCN $=$ $\angle$ DCP und

$\angle$ NBM $=$ $\angle$ DBP sein muss, Δ CNM $\sim$ Δ CRP und Δ BNM $\sim$ Δ BPT, also PR : PC $=$ MN : CN und PT : PB $=$ MN : BN, woraus PR : PT $=$ $\frac{PC}{NC} : \frac{PB}{NB}$ d. h. constant ist, weshalb D nach Lemma 20 einen Kegelschnitt beschreiben muss, wobei erwähnt zu werden verdient, dass der dem unendlich entfernten Punkt der Geraden NM entsprechende Punkt des Ortes der dem Punkt P gegenüberliegende Eckpunkt des Parallelogramms ist, dessen im vorigen Lemma Erwähnung geschah, wie daraus erhellt, dass für den unendlich entfernten Punkt der Geraden die Winkel CMN, BMN und desshalb auch CRP, BTP sämmtlich verschwinden, also CD # PR und BD # PT wird.

Bew. der Umkehrung. Durch zwei Punkte P, p des von D durchlaufenen Kegelschnitts sind mittelst der festen Winkel ACB, ABC zwei bestimmte Lagen N, n des beweglichen Punktes M bestimmt, deren Verbindungslinie die Gerade ist, welche M beschreiben muss, denn da zu dieser Geraden nach dem ersten Theile dieses Lemma ein Kegelschnitt gehört, der durch die fünf Punkte B, C, A, P, p geht, also mit dem von D durchlaufenen ganz zusammenfällt, kann es keine Lage des Punktes M ausser der Linie Nn geben, weil es absurd ist, dass zu einem Punkte D zwei verschiedene Punkte M gehörten.

Anm. Die fast völlige Uebereinstimmung dieses Lemma mit der Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Gebilde liegt auf der Hand, wie denn auch Steiner S. 177 der „Entw. der Abh. geom. Gest.“ dies citirt. Man wird im Verfolg der Lesung der Newtonschen Sätze überhaupt versucht zu glauben, dass ihm das Princip die Eigenschaften der Figuren durch Projektion herzuleiten in seiner grössten Allgemeinheit wohl bekannt gewesen ist, und dass er daraus auch die wichtigsten Folgerungen gezogen hat; dass er aber nach der Sitte der damaligen Zeit es vorzog, entweder nur die gewonnenen Resultate oder doch nur solche Beweise mitzutheilen, aus denen die eigentliche Quelle der Auffindung nicht recht zu erkennen war. Wenn Chasles, der eine ähnliche Empfindung gehabt zu haben scheint, sich darüber tadelnd äussert, so möchte man vielmehr auch dafür Newton danken, dass er der Nachwelt, der er so viele Entdeckungen vorweg nahm, wenigstens diese Gelegenheit ihren Scharfsinn zu üben übrig gelassen.

Aufg. II. 1. (N. Prop. 22. Probl. 14.) Einen Kegelschnitt zu beschreiben, der durch 5 gegebene Punkte geht.

Const. I. aus Lemma 20. (s. Fig. 6.) Sind A, B, C, P, D die gegebenen Punkte, so ziehe AB, AC und durch P damit die Parallelen PQ, PS, ziehe BD, bis es PS in T, CD, bis es PQ in R schneidet, ziehe eine beliebige Parallele mit RT, die PR in r, PT in t schneidet, so schneiden sich C r, Bt in einem neuen Punkt des Kegelschnitts. Um das Ziehen von Parallelen zu ersparen, ziehe man BP, theile es durch einen Punkt p, so dass Bp : BP = PR : PT ist, ziehe durch p eine Parallele mit PT; denn nimmt man nun auf PT einen beliebigen Punkt t an, zieht Bt, welches die letztgezeichnete Parallele in d trifft, so ist p d gleich dem Stück Pr, das auf PQ abzuschneiden ist, damit rt # RT werde.

Const. 2. aus Lemma 21. (s. Fig. 7.) Sind wieder A, B, C, P, D die gegebenen Punkte; ziehe das Dreieck ABC, lasse die Winkel ABC, ACB mit unveränderter Grösse um ihre Scheitel B, C sich drehen, bis die vorher in A zusammentreffenden Schenkel erst in P, dann in D sich schneiden, und nenne die entsprechenden Durchschnittspunkte der andern Schenkel M, N; lasse nun den Durchschnittspunkt der letzteren Schenkel die Gerade MN durchlaufen, so durchläuft der der erstgenannten Schenkel den verlangten Kegelschnitt.

Coroll. I. Aus der zweiten Construction ergiebt sich sogleich ein Mittel die Tangente in einem der Punkte. z. B. in B zu finden, da sie nichts anderes ist, als der zu CB gehörige Winkelschenkel des um B rotirenden Winkels.

Coroll. II. Hieraus den Mittelpunkt und unbestimmt viele Paare conjugirter Durchmesser zu finden, ist früher in Coroll.II des 19. Lemma gelehrt worden.

Aufg. II. 2. (Prop. 23. Probl. 15.) Einen Kegelschnitt zu beschreiben, der durch vier Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

1. Fall. Einer der gegebenen Punkte ist der Berührungspunkt in der Geraden.

1. Lösung aus Coroll. II des Lemma 20 unmittelbar zu ersehen.

2. Lösung. (s. Fig. 8.) Seien C, D, P, B die Punkte, BH die Tangente. Man denke sich den Winkel HBC um B und eine Gerade DC um C rotirend, dann entsprechen den beiden Fällen, in denen die Gerade mit dem einen Schenkel des beweglichen Winkels in den Punkten D, P sich schneidet, zwei Durchschnittspunkte M, N derselben Geraden mit dem zweiten Winkelschenkel. Lässt man nun den letzteren Durchschnittspunkt die ganze Gerade MN durchlaufen, so durchläuft der erste den gesuchten Kegelschnitt, wie in Lemma 21. bewiesen ist.

2. Fall. Die Gerade geht nicht durch einen der 4 gegebenen Punkte.

Aufl. (s. Fig. 9.) Seien B, P, C, D wieder die gegebenen Punkte; ziehe 2 Verbindungslinien PC, BD, die die Tangente in J, H, sich selbst in G schneiden, so ist, wenn zum Beweise noch durch H eine Parallele mit JG gezogen wird, die den Kegelschnitt in X, Y trifft, der Berührungspunkt A in JH folgendermassen zu finden; es ist nach Hülfssatz III

$$HA^2 : AJ^2 = HX . HY : JC . JP$$
$$HX . HY : HD . HB = GP . GC : GB . GD, \text{ also}$$

$$HA : AJ = \sqrt{HD . HB . GP . GC} : \sqrt{JC . JP . GB . GD}.$$

Dass durch dies gegebene Verhältniss 2 Punkte A, einer zwischen und einer ausserhalb HJ, bestimmt sind, es also zwei Kegelschnitte giebt, die der Aufgabe genügen, ist klar.

Anm. Man erkennt leicht, dass diese Auflösung auf dem gewöhnlich Carnot zugeschriebenen Satz beruht, den auch Poncelet lobend erwähnt, dass, wenn die Seiten AB, BC, AC eines Dreiecks ABC von einem Kegelschnitt beziehlich in den Punkten P, P_1, Q, Q_1, R, R_1 geschnitten werden, $AP . AP_1 . BQ . BQ_1 . CR . CR_1 = AR . AR_1 . BP . BP_1 . CQ . CQ_1$ sein muss, ein Satz, dessen Beweis eben mit Hülfe der Parallelen HXY leicht geführt werden kann.

Aufg. II. 3. (Prop. 24. Probl. 16.) Einen Kegelschnitt zu beschreiben, der durch drei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Gerade berührt.

Aufl. (s. Fig. 10.) Seien GK, GA die gegebenen Tangenten, B, C, D die Punkte des gesuchten Kegelschnitts. Verbinde einen dieser letzteren D mit B und C, bis erstere Linie die Tangenten in K, H, letztere in L, J schneidet, suche nun auf DC einen Punkt S, (ausserhalb oder innerhalb LJ zu nehmen), so dass $SL^2 : SJ^2 = LD . LC : JD . JC$; ebenso auf HK einen Punkt R, so dass $HR^2 : KR^2 = HB . HD : KB . KD$, dann ziehe SR, so trifft dies die beiden Berührungspunkte P und A auf den gegebenen Tangenten, und die Aufgabe ist sonach auf Probl. 14 zurückgeführt.

Bew. Man ziehe noch JY ⧣ GP, welche den Kegelschnitt angenommenermassen in X, Y treffe, schneide darauf von J aus JZ ab, so dass $JZ^2 = JX . JY$, so ist zu zeigen, dass erstens S, P, Z, zweitens P, Z, A und deshalb also auch S, P, A in gerader Linie liegen; zeigt man dann dasselbe von R, P, A, so ist die Thesis erwiesen. Da aber $JZ^2 : LP^2 = JC . JD : LC . LD$ nach Hülfss. III, und nach Const. . . . . $JS^2 : LS^2 = JC . JD : LC . LD$, müssen S, P, Z, und da ebenfalls nach Hülfssatz III. $GA^2 : GP^2 = JA^2 : JZ^2$ müssen P, Z, A, also auch S, P, A in einer Geraden liegen. Auf ähnliche Art folgt dies für R, P, A, wodurch die Richtigkeit der Construction erwiesen ist.

Det. Da sowohl auf JL als auf KH zwei Punkte S, S_1, R, R_1 gefunden werden, die den angegebenen Bedingungen genügen, hat die Aufgabe vier verschiedene Lösungen.

Anm. Wendet man den in der Anmerkung zum vorigen Satze erwähnten Carnotschen Satz auf das Dreieck GLJ an, so hat man $GP^2 . LD . LC . JA^2 = LP^2 . JC . JD . GA^2$ oder $\frac{GP}{LP} : \frac{GA}{JA} = \sqrt{JC . JD} : \sqrt{LD . LC}$, in welcher Proportion das letzte Verhältniss constant, das erste aber das anharmonische Verhältniss für die drei Punktenpaare G, L, P und G, J, A ist, so erhellt sogleich, dass die Kegelschnittschaar, die zwei feste Punkte C, D und zwei Tangenten GL, GJ gemein hat, diese letzteren in solchen Punkten berührt, dass sie perspectivische Geraden*) werden, d. h. dass die Verbindungslinien je zweier zu einander gehöriger Berührungspunkte sich sämmtlich in einem Punkt treffen, gleich wie später gezeigt werden wird, dass die zu einander gehörigen Tangenten in C und D perspektivische Strahlbüschel bilden. Übrigens bedarf es wohl kaum der Erwähnung, dass die von Steiner im Anhange seines kleinen Buches gegebene Construction im Wesentlichen mit der von Newton gegebenen übereinstimmt.

N. Lemma 22. Figuren in andere von derselben Art umzuwandeln. (s. Fig. 11.)

Seie HJ die zu transformirende Curve, so ziehe man zwei beliebige parallele Linien AO, BL, die eine beliebige dritte Linie in den Punkten A und B schneiden, nehme in der einen einen festen Punkt O an; soll nun zu einem beliebigen Punkt G der gegebenen Curve der entsprechende in der gesuchten Curve erhalten werden, so ziehe man die Ordinate GD # LB, ziehe OD, welches BL in d trifft, und trage in d unter einem gegebenen Winkel gegen BL die Linie dg an, so dass dg : DG = dO : DO ist, dann ist g der gesuchte neue Punkt. Man nennt DG die alte, dg die neue Ordinate, AD die alte, ad die neue Abscisse (Oa # AB gezogen), O den Pol, OD den abschneidenden Radius, OA den alten, Oa den neuen Ordinaten-Radius.

Bew. Es ist $DG : dg = DO : dO = AO : ad$, also $DG = \frac{dg . AO}{ad}$

und $AD : AO = AB : ad$, also $AD = \frac{AO . AB.}{ad}$;

setzt man also in irgend eine Gleichung zwischen den Coordinaten AD, DG diese Werthe ein, und ordnet nach Potenzen von ad und dg, so steigt die

*) Vide Lemma II. der Aufl. nach Steiners Meth.

Gleichung, die man erhält, in Bezug auf diese neuen Coordinaten wieder auf denselben Grad als die vorige, d. h. die neue Curve ist von demselben Grade, als die alte.

Anm. 1. Chasles giebt in der 19. Note seiner Geschichte der Geometrie den Weg an, wie diese Newtonsche Transformation aus der Centralprojektion herzuleiten, und also die Beziehung zwischen beiden Figuren geometrisch nachzuweisen ist, worauf auch Newton hinweist. Man denke sich vor dem Auge O 2 Ebenen, die sich in einer Linie BZ schneiden, und in der einen derselben die Curve, welche durch Projektion von O aus in die andere Ebene übertragen werden soll, und lege durch das Auge O eine beliebige Ebene, die die vordere der beiden Ebenen in der Linie BL, die hintere in BJ schneidet. Nimmt man nun diese Linien zu Abscissenachsen und zu Ordinaten die Linien parallel der Schneidungslinie BZ in beiden Ebenen, so ist klar, dass zwei entsprechende Ordinaten DG, dg sich verhalten wie OD : Od. Lässt man also die beiden Ebenen mit den darin befindlichen Figuren um die Linien BL, BJ sich drehen, bis sie beide in die durch das Auge gelegte Ebene OBJ hineinfallen, so werden die Ordinaten mit den Abscissenachsen BLBJ Winkel bilden, welche gleich LBZ, JBZ sind. War die Ebene OBJ so gelegt, dass $\angle$ ZBJ $=$ $\angle$ LBJ, so sind die Ordinaten der hinteren Ebene nach der Drehung der Linie BL parallel, wie das Newtons Construction verlangt. Hierdurch ist bewiesen, dass alle Eigenschaften, die durch Projektion nicht verloren gehen, als die Zahl der Durchschnittspunkte mit einer Geraden, das harmonische und anharmonische Verhältniss entsprechenden Elementen der beiden Curven zukommen müssen.

Anm. 2. Über die Anwendung dieses Lemma sagt Newton: Es dient dieses Lemma zur Auflösung schwieriger Probleme, indem es die gegebenen Figuren in einfachere verwandelt. Denn zwei beliebige sich schneidende Geraden werden in zwei parallele verwandelt, wenn man zum ersten Ordinatenradius eine Linie nimmt, die durch den Durchschnittspunkt der Geraden geht, dadurch geht dieser Durchschnittspunkt in der neuen Figur ins Unendliche, und Linien, die nach demselben unendlich entfernten Punkt gerichtet sind, sind parallel. Ist das Problem in der erhaltenen einfacheren Figur gelöst, so trägt man durch die umgekehrten Operationen die gefundenen Stücke in die alte Figur zurück, und erhält so die gesuchte Lösung des Problems. Führt ein Problem auf die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte, so kann man den einen derselben in einen Kreis verwandeln, die Probleme des zweiten Grades führen zurück auf die Durchschnittspunkte einer Geraden und eines Kreises.

Aufg. II. 4. (N. Prop. 25. Probl. 17.) Einen Kegelschnitt zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und drei gegebene Geraden berührt. (s. Fig. 12).

Aufl. Durch den Durchschnittspunkt zweier Tangenten und den der dritten Tangente mit der Verbindungslinie der gegebenen Punkte lege den ersten Ordinatenradius (voriges Lemma) OA, so dass in der transformirten Figur die beiden ersten Tangenten sowohl als die dritte Tangente und die Sehne zwischen den gegebenen Punkten parallel werden. Seien nun hi, kl die parallelen Tangenten, ik die dritte und ab die Sehne, so construire man die Berührungspunkte c, d, e auf hi, ik, kl, so dass $hc : \sqrt{ha . hb} = ic : id = ke : kd = hi + kl : ki + \sqrt{ha . hb} + \sqrt{la . lb}$ ist, dann sind 5 Punkte des Kegelschnitts bekannt.

Bew. Es ist nach Hülfssatz III

$hc : \sqrt{ha . hb} = ic : id = ke : kd = le : \sqrt{la . lb}$

also $hc + kl : ik + \sqrt{ha . hb} + \sqrt{la . lb} = hi : \sqrt{ha . hb} = ic : id =$ etc.

Anm. Je nachdem a und b innerhalb hl oder ausserhalb liegen, sind c, d, e innerhalb hi, ik, kl, oder ausserhalb zu nehmen; liegt einer der Punkte innerhalb, der andere ausserhalb, so ist das Problem zu lösen unmöglich *).

Aufg. II. 5. (N. Prop. 26. Probl. 18.) Einen Kegelschnitt zu beschreiben, der vier gegebene Linien berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Aufl. Man verwandele die Figur nach Lemma 22, so dass die vier gegebenen Linien ein Parallelogramm bilden, indem man den ersten Ordinatenradius durch zwei gegenüberliegende Ecken des gegebenen Vierecks legt. Ist dann hckl das Parallelogramm, p der gegebene Punkt, so findet man, da der Durchschnittspunkt (o) der Diagonalen des Vierecks zugleich Mittelpunkt des Kegelschnitts ist, leicht einen neuen Punkt q desselben, indem man po um sich selbst verlängert, und trägt man den so erhaltenen Punkt q wieder in die erste Figur zurück, so ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Anm. Die Auflösungen dieser beiden Aufgaben, so wichtig auch das dabei angewandte Princip ist, würden doch einigermassen den Vorwurf, den Steiner S. 88 seines kl. Werks den geometrischen Constructionen macht, verdie-

*) Anm. An den Auflösungen der Probl. 16 u. 17 kann recht die Wirksamkeit der allgemeinen Principien, die die neuere Geometrie characterisiren, erkannt werden; denn, während mit Hülfe des Princips der polaren Uebertragung sehr leicht von der hier gegebenen Auflösung des Probl. 16 zu einer ähnlichen direkten des Probl. 17 zu gelangen ist, macht Newton einen grossen Umweg um zu seiner ziemlich weitschweifigen Aufl. des 17. Probl. zu gelangen; freilich ist gerade dieser Umweg durch das dabei gebrauchte Mittel der Projektion interessant.

nen, dass sie nämlich zwar in Worten sehr kurz und leicht begreiflich sind, für die praktische Ausführung jedoch langwierig werden. Ich verweise in Betreff anderer Constructionen auf das Folgende.

N. Lemma 23. (s. Fig. 13.) Wenn zwei gegebene Gerade AC, BD die festen Anfangspunkte A, B und der Länge nach ein gegebenes Verhältniss haben, und wenn dann die Linie CD, die die veränderlichen Endpunkte der Geraden verbindet, durch den Punkt K in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird, so ist der Ort von K eine gerade Linie.

Bew. Sei E der Schneidungspunkt von CA und DB; man nehme BG in derselben oder in entgegengesetzter Richtung mit BD, je nachdem AE gleiche oder entgegengesetzte Richtung mit AC hat, so dass AC : BD = EA : GB, also auch EC : GD = AC : BD d. h. constant ist; schneide ferner von E aus EF = GD ab, so dass also EC : EF constant ist, dann wird die Linie CF sich parallel mit sich selbst bewegen, wenn der Punkt C auf AC fortrückt. Theilt man nun CF durch den Punkt L in dem Verhältniss, das für CK : DK gegeben ist, so ist der Ort von L die gerade Linie EL. Da CL : LF = CK : KD, Lh ⧣ FD ist, und da ferner CL : CF = LK : FD, das erste Verhältniss hierin aber und die Grösse FD constant sind, ist LK eine feste Grösse, und somit klar, dass der Ort von K eine Parallele mit EL ist, deren Durchschnittspunkt H mit der Geraden ED man finden kann, wenn man EG nach dem gegebenen Verhältniss CK : KD theilt.

N. Lemma 24. Wenn zwei feste parallele Tangenten eines Kegelschnitts von einer beweglichen dritten geschnitten werden, so ist der Halbmesser desselben, welcher den festen Tangenten parallel ist, stets die mittlere Proportionale zwischen den auf den parallelen Tangenten erhaltenen Abschnitten.

Bew. (s. Fig. 14.) Seien AF, BG die parallelen Tangenten, FG die bewegliche, J deren Berührungspunkt, CD der den ersteren parallele Halbmesser, dessen Verlängerung GF in H trifft; ziehe von J noch Parallelen mit AB, CD, welche AC in L, CD in K treffen. Zu beweisen ist $CD^2 = AF \,.\, BG$.

Nach Hülfss. X. ist $CD^2 = CK \,.\, CH = JL \,.\, CH$, und da $CH = \frac{BG \,.\, EC}{EB}$ und $JL = \frac{AF \,.\, EL}{EA}$, ist also $CD^2 = BG \,.\, AF \,.\, \frac{EC \,.\, EL}{EB \,.\, EA}$. Es bleibt also nur zu zeigen, dass $EC \,.\, EL = EB \,.\, EA$ ist. Man setzt statt dessen $EC\,(EC - CL) = (EC + AC)(EC - AC) = EC^2 - AC^2$, so bleibt $EC \,.\, CL = AC^2$, was nach Hülfssatz X richtig ist.

Einfacherer Bew. nach Steiner. Sei S ein Brennpunkt, so ist Δ ASF $\sim$ Δ BGS, denn sei SX $\#$ AF, so ist nach Hülfssatz XI $\angle$ FSG $=$ $\angle$ BSX $=$ $\angle$ ASX, also 1. die entgegengesetzten Winkel der beiden letzten SAF und GBS gleich; 2. subtrahirt man von den beiden ersten der obigen Winkel den $\angle$ GSX, so bleibt $\angle$ XSF $=$ $\angle$ BSG oder auch $\angle$ SFA $=$ $\angle$ BSG. Aus Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber, dass AF . BG $=$ SA . SB, also constant ist; berührt nun die bewegliche Tangente im Punkte D, so wird AF $=$ BG $=$ CD, also $CD^2 =$ AF . BG.

Coroll I. Ist eine vierte Tangente gegeben, die die beiden festen in P und Q und GF in O schneidet, so ist also AF : AP $=$ BQ : BG und deshalb BQ : AF $=$ GQ : PF $=$ GO : FO

Coroll. II. Aus der Proportion AF : AP $=$ BQ : BG folgt, dass der Schneidungspunkt der Linien QF und GP auf der Berührungssehne AB der festen Tangenten liegt.

N. Lemma 25. (s. Fig. 15.) Wenn die Seiten eines Parallelogramms MLKJ, das einem Kegelschnitt umgeschrieben ist, von einer fünften Tangente durchschnitten werden, so ist das Rechteck aus den hierdurch auf zwei anstossenden Seiten des Parallelogramms gebildeten Abschnitten, die an entgegengesetzte Ecken desselben stossen, gleich dem aus der einen dieser Seiten in das Stück der zweiten zwischen dem Berührungspunkt und der Ecke, die nicht auf der ersten Seite liegt.

Th. ME . KQ $=$ MJ . BK oder MF . KH $=$ KL . AM.

Bew. Da AM $=$ BK und nach dem Coroll. I des vorigen Satzes ME : EJ $=$ AM : BQ $=$ BK : BQ ist, folgt componendo MJ : KQ $=$ ME : BK q. e. d.

Ebenso ist HK : HL $=$ BK : AF (nach demselben Coroll.) oder dividendo KL : MF $=$ HK : AM. q. e. d.

Coroll. I. Ist also das umschriebene Parallelogramm JMLK gegeben, so sind auch die gleichen Rechtecke KQ . ME und KH . MF gegeben.

Coroll. II. Wird eine sechste Tangente gezogen, die MJ, KI in den Punkten e, q schneidet, so ist ME . KQ $=$ Me . Kq.

Coroll. III. Werden also Eq, eQ gezogen und halbirt, so geht die Verbindungslinie der Mitten durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts, denn es findet Lemma 23 statt, da Me : KQ $=$ ME : Kq ist und deshalb liegen die Mitten von Eq, eQ und KM in gerader Linie, die Mitte der letzteren Linie ist aber zugleich der Mittelpunkt des Kegelschnitts.

Anm. Hierdurch ist, wenn man die 4 Linien JM, JK EQ, eq als fest betrachtet, der Satz bewiesen, dass die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die 4 gerade Linien berühren, in der Geraden liegen, welche die Mitten der Diagonalen des dadurch gebildeten Vierecks verbindet.

N. Prop. 27. Probl. 19. Einen Kegelschnitt zu beschreiben der 5 gegebene Linien berührt.

Aufl. (s. Fig. 16.) Seien EAGD, BGDF zwei der umschriebenen Vierecke, die sich aus den 5 gegebenen Tangenten bilden lassen, so findet man nach Coroll. III des vorigen Lemma den Mittelpunkt des gesuchten Kegelschnitts, wenn man sowohl die Mitten der Diagonalen des ersten, als der des zweiten verbindet. Sei O der Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinien und also der Mittelpunkt des Kegelschnitts, so wird eine Parallele mit einer der gegebenen Tangenten EF, die jenseit des Mittelpunktes in gleicher Entfernung gezogen ist, gleichfalls eine Tangente desselben sein. Schneide diese nun zwei der übrigen Tangenten EF, GC in K und L, so müssen nach Coroll. II des Lemma 24, wenn KC und LF bis zu ihrem Durchschnittspunkt R verlängert werden, die Berührungspunkte in den beiden parallelen Tangenten in der Verbindungslinie BO liegen und sind sonach gefunden.

Auflösungen der Aufgaben aus der zweiten Abtheilung nach der Steinerschen Methode.

Lemma I. (Pappus Buch VII. Satz 129.)

Vier Gerade $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die von einem Punkt ausgehen, schneiden jede beliebige fünfte Gerade in vier solchen Punkten a, b, c, d, dass das Verhältniss $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ einen constanten Werth hat, und zwar ist dieser gleich
$$\frac{\sin.\,(\alpha\gamma)}{\sin.\,(\beta\gamma)} : \frac{\sin.\,(\alpha\delta)}{\sin.\,(\beta\delta)}.$$

Vier Punkte a, b, c, d, die auf einer Geraden liegen, geben mit jedem beliebigen fünften Punkt vier solche Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dass das Verhältniss $\frac{\sin.(\alpha\gamma)}{\sin.(\beta\gamma)} : \frac{\sin.(\alpha\delta)}{\sin.(\beta\delta)}$ einen constanten Werth hat, und zwar ist dieser gleich $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$.

Bew. Siehe Steiner Abh. geom. G. §. 3—6.

Lemma II.

Sind die Punkte zweier beliebigen Geraden einander so zugeordnet, dass

Sind die Geraden, welche durch zwei beliebige Punkte gehen, einander so zu jedem Punkt der einen ein Punkt der anderen gehört, und dass zwischen je vier Paaren zugeordneter Punkte a, b, c, d und a_1, b_1, c_1, d_1 die Relation $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a_1c_1}{b_1c_1} : \frac{a_1d_1}{b_1d_1}$ besteht, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte die Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts, der die beiden festen Geraden berührt, und dessen Berührungspunkte in diesen Geraden diejenigen Punkte sind, welche den im Schneidungspunkt der Geraden vereinigten Punkten entsprechen. Die Geraden heissen in Bezug auf die entsprechenden Punkte projectivische Gerade.

zugeordnet, dass zu jedem Strahl des einen Punktes ein Strahl des andern gehört, und dass zwischen je vier Paaren zugeordneter Strahlen α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1, δ_1, die Relation $\frac{\sin.(\alpha\gamma)}{\sin.(\beta\gamma)} : \frac{\sin.(\alpha\delta)}{\sin.(\beta\delta)} = \frac{\sin.(\alpha_1\gamma_1)}{\sin.(\beta_1\gamma_1)} : \frac{\sin.(\alpha_1\delta_1)}{\sin.(\beta_1\delta_1)}$ besteht, so sind die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen die Punkte eines bestimmten Kegelschnitts, der durch die beiden erstgenannten Punkte geht, und dessen Tangenten in diesen beiden Punkten diejenigen Strahlen sind, welche den in ihrer Verbindungslinie vereinigten entsprechen. Die Punkte heissen in Bezug auf die entsprechenden Strahlen projektivische Strahlbüschel.

Bew. Siehe St. A. g. G. §. 37 u. 38.

Coroll. I.

Schneiden sich insbesondere die Verbindungslinien dreier entsprechender Punktenpaare in einem Punkt, so gehen durch diesen auch alle übrigen Verbindungsstrahlen. Dies findet allemal Statt, wenn im Schneidungspunkt der Geraden zwei entsprechende Punkte vereinigt sind. Die Geraden heissen in diesem Falle projectivische Geraden in perspectivischer Lage, oder kurzweg perspektivische Gerade.

Liegen insbesondere drei Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen in einer Geraden, so befinden sich auf dieser auch alle übrigen Durchschnittspunkte. Dies findet allemal Statt, wenn in der Verbindungslinie der beiden Punkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind. Die Strahlbüschel heissen in diesem Fall projectivische Strahlbüschel in perspektivischer Lage oder kurzweg perspektivische Strahlbüschel.

Coroll. II.

Von besonderer Wichtigkeit sind bei zwei projektivischen Geraden die den unendlich entfernten Punkten r_1, q, zuge-

Von besonderer Wichtigkeit sind bei zwei projektivischen Strahlbüscheln diejenigen entsprechenden Strahlenpaare

ordneten Punkte r, q_1 (von Steiner die Durchschnitte der Parallelstrahlen genannt), da für diese die Relation:
$\frac{ra}{rb} : \frac{qa}{qb} = \frac{r_1a_1}{r_1b_1} : \frac{q_1a_1}{q_1b_1}$, wegen Gleichheit von qa und qb, r_1a_1 und r_1b_1 in $ra \,.\, q_1a_1 = rb \,.\, q_1b_1$ übergeht.

s, s_1 t, t_1, welche sowohl in dem einen als in dem andern Strahlbüschel rechte Winkel bilden, da für diese die Relation:
$\frac{\sin.\,(s\alpha)}{\sin.\,(s\beta)} : \frac{\sin.\,(t\alpha)}{\sin.\,(t\beta)} = \frac{\sin.\,(s_1\alpha_1)}{\sin.\,(s_1\beta_1)} : \frac{\sin.\,(t_1\alpha_1)}{\sin.\,(t_1\beta_1)}$, weil $\angle\,(t\alpha) = 90^0 - \angle\,(s\alpha)$ und $\angle\,(s_1\alpha_1) = 90^0 - \angle\,(t_1\alpha_1)$ ist, übergeht in: $\mathrm{tg}\,.\,(s\alpha)\,.\,\mathrm{tg}\,.\,(t_1\alpha_1) = \mathrm{tg}\,.\,(s\beta)\,.\,\mathrm{tg}\,(s_1\beta_1)$

Aufg. II. 6 und II. 1.

Aus fünf gegebenen Tangenten einen Kegelschnitt zu construiren.

Aufl. Seie abcde ein aus den fünf gegebenen Geraden gebildetes convexes oder nicht convexes Fünfeck. Ziehe ce, bd, die sich in f schneiden, dann trifft af den Berührungspunkt g von cd. Zieht man von a und b durch einen beliebigen Punkt h der Linie ce zwei Strahlen, deren ersterer cd in i, und deren letzterer de in k trifft, so ist ki eine neue Tangente. Zieht man also von a eine Parallele mit cd, die ce in l trifft, dann von b nach l, bis es de in m schneidet, so ist die durch m mit cd gezogene Parallele gleichfalls eine Tangente und es können aus zwei Paaren paralleler Tangenten hiernach leicht der Mittelpunkt und zwei Paare conjugirter Durchmesser gefunden werden.

Aus fünf gegebenen Punkten einen Kegelschnitt zu construiren.

Aufl. Seien a, b, c, d, e die fünf gegebenen Punkte in der genannten Ordnung durch gerade Linien verbunden. Verlängere ea und cb, bis sie sich in x schneiden, ab, bis es cd in f, de in g schneidet, ziehe xf, das de in h, xg, das cd in i schneidet, so sind bh und ai die Tangenten in b und a. Ziehe von x eine beliebige Gerade, die cd in k, de in l trifft, so schneiden sich ak, bl in einem neuen Punkte des gesuchten Kegelschnitts.

Bew. Durch die von a und b ausgehenden Strahlen, welche nach Lemma I und II durch die Gerade ce zu perspektivischen Strahlbüscheln werden, entstehen auf den Linien cd und de

Bew. Durch die auf den Geraden cd und de befindlichen Durchschnittspunkte der von x aus gezogenen Geraden, welche nach Lemma I und II diese zu perspektivischen Geraden machen, projectivische Gerade, und die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte sind also die Tangenten eines Kegelschnitts, der cd, de berührt, und von welchem auch leicht zu zeigen ist, dass er ab, bc, ae berühren muss. Hieraus ergiebt sich denn alles in der Aufl. Behauptete.

werden die Punkte a und b projectivische Strahlbüschel, da ersterer mit cd, letzterer mit de perspektivisch ist. Es liegen also die Duschschnittspunkte entsprechender Strahlen auf einem bestimmten Kegelschnitt, der durch a und b, und, wie leicht zu zeigen, auch durch c, d, e geht. Hieraus ergiebt sich denn auch die Richtigkeit der angegebenen Construction der Tangenten in a und b.

Anm. Dass diese Auflösung rechts gleichbedeutend mit der durch den Pascalschen Satz gegebenen ist, wonach beim eingeschriebenen Sechseck die drei Durchschnittspunkte der verlängerten ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Seite auf einer Geraden liegen, ist ersichtlich. Ebenso kann die Auflösung links auf den jenem entsprechenden polaren Satz basirt werden, wonach für jedes umgeschriebene Sechseck die Diagonalen, welche die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Ecke verbinden sich in einem Punkt schneiden.

Lemma III. Von der Involution. *)

a. Werden zwei projektivische Gerade beliebig auf einander gelegt, so fallen im Allgemeinen zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der einen auf die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ der anderen, und zwar nothwendig, wenn die Geraden ungleichliegend sind, d. h. wenn die Richtung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, der von $\mathfrak{a}_1$ nach $\mathfrak{b}_1$ entgegengesetzt ist, nicht nothwendig im anderen Falle.

Die Construction dieses zusammengefallenen Punktenpaares, (s. Fig. 17) findet sich in Steiner A. g. G. §. 17 auf doppelte Art gegeben und die zweite der dort gegebenen Auflösungen in §. 46 bewiesen. Da sie für das Folgende unentbehrlich ist, habe ich sie hier aufgenommen: Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ die sechs Punkte, durch welche die projektivische Beziehung der aufeinander liegen-

*) Anm. Da hier in den meisten Fällen das über projektivische Gerade Gesagte sich wörtlich auf projektivische Strahlbüschel übertragen lässt, so habe ich das auf letztere Bezügliche nur dann ausdrücklich angeführt, wenn es sich wesentlich unterscheidet. Im Folgenden werde ich mich jedoch der durch solche Uebertragung zu erhaltenden Sätze bedienen, als wären sie da gewesen.

den Geraden bestimmt ist. Zeichne einen beliebigen Kreis und von einem beliebigen Punkte B desselben die Strahlen $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $B\mathfrak{c}$, $B\mathfrak{a}_1$, $B\mathfrak{b}_1$, $B\mathfrak{c}_1$, welche den Kreis zum zweiten Male in den Punkten α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 treffen; ziehe $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$, $\alpha\gamma_1$, $\alpha_1\gamma$, von denen die beiden ersten sich in β_2, die beiden letzten sich in γ_2 treffen; werden nun die Strahlen von B nach den beiden Durchschnittspunkten von $\beta_2\gamma_2$ mit dem Kreis gezogen, so treffen diese auf der Geraden $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\ldots)$ die gesuchten zusammengefallenen Punktenpaare $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1)$.

Anl. zum Bew. Die in α, α_1 gezogenen Strahlen $\alpha\alpha_1$, $\alpha\beta_1$, $\alpha\gamma_1$ und $\alpha_1\alpha$, $\alpha_1\beta$, $\alpha_1\gamma$ bestimmen zwei Strahlbüschel, die durch den Kreis und die in B befindlichen Strahlbüschel a_1, b_1, c_1 und a, b, c mit den Geraden $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, also auch unter sich projektivisch sind, und die perspektivisch liegen; $\beta_2\gamma_2$ ist ihr perspektivischer Durchschnitt, woraus die Richtigkeit der Const. leicht erhellt.

b. Werden insbesondere zwei projektivische Gerade so auf einander gelegt, dass irgend ein Punktenpaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ verwechselt auf das entsprechende $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ fällt, also $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}_1$, so werden auch die zu irgend einem andern Punkt der Geraden $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1)$ zugehörigen Punkte $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{d})$ übereinander fallen müssen, und also die Punkte der Geraden einander paarweis zugeordnet sein.

Diese Punktenpaare bilden nun das von Desargues erfundene Involutionssystem.

Bew. Durch die Bedingung der Projektivität hat man zwischen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ die Relation: $\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} : \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1} : \frac{\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1}$; da nun $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}_1$ liegt, und die Buchstaben $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}_1$ einen und denselben Punkt bedeuten, hat man $\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{c}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1} = 1$, also auch $\mathfrak{d}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1$ oder $\mathfrak{d}\mathfrak{a} : \mathfrak{d}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{a} : \mathfrak{c}_1\mathfrak{b}$; und hiernach müssen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}_1$ entweder übereinander liegen, oder es müsste einer innerhalb, der andere ausserhalb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ liegen, was jedoch unmöglich ist, da die Projektivität verlangt, dass $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ in gleicher Reihenfolge, sei es nach derselben, sei es nach entgegengesetzter Richtung müssen durchlaufen werden können.

Coroll. I. Sind also zwei Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$, in einer Geraden beliebig angenommen, so ist dadurch jedesmal ein Involutionssystem bestimmt; denn benennt man diese Punkte noch mit den Buchstaben $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}$, so lassen sich die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ als zwei projektivischen Geraden angehörig betrachten, und es ist dadurch für jeden neuen Punkt $\mathfrak{e}$ der zugehörige $\mathfrak{e}_1$ durch das anharmonische Verhältniss $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}\mathfrak{e}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}} : \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1}$ bestimmt.

Coroll. II.

Da die unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}$ der Geraden auf einander liegen, so müssen auch die ihnen entsprechenden Durchschnitte der Parallelstrahlen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ übereinanderliegen; sei also M der Punkt, in dem dies Statt findet, so ist nach Lemma II Coroll II $M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1$ constant für jedes Punktenpaar der Involution. Deshalb heisst M der Mittelpunkt des Punktsystems und die feste Grösse $M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1$ seine Potenz.

Da die entsprechenden rechten Winkel s, t, s_1, t_1 zweier projektivischen Strahlbüschel, die ein Strahlsystem bilden, verwechselt auf einander liegen müssen, also s auf t_1, t auf s_1, folgt, wenn A, B die Linien sind, in denen dies geschieht, nach Lemma II Coroll. II, dass tg. $(A\alpha)$. tg. $(A\alpha_1)$ und tg $(B\alpha)$. tg. $(B\alpha_1)$ constante Grössen sind für alle Strahlenpaare der Involution. Die Strahlen A, B heissen deshalb die Achsen des Strahlsystems und die feste Grösse tg $(A\alpha)$. tg. $(A\alpha_1)$ seine Potenz.

Coroll. III. Betrachtet man die verschiedenen Lagen, welche die nach Coroll. I beliebig anzunehmenden zwei Punktenpaare haben können, so findet man bald einen wesentlichen Unterschied darin, dass das eine Mal beide Punkte des einen Paares innerhalb oder ausserhalb des anderen Punktenpaares liegen können, das andere Mal der eine Punkt des einen Paares innerhalb der Punkte des andern Paares, der andere ausserhalb liegt; im ersteren Falle heisst das Punktsystem hyperbolisch, im zweiten elliptisch. Ist eins der gegebenen Punktenpaare insbesondere der Mittelpunkt und der zugehörige unendlich entfernte Punkt, so liegen also im ersten Falle beide Punkte eines Punktenpaares auf derselben Seite des Mittelpunktes, im letzteren auf verschiedenen Seiten. Aus der Bedingung des constanten Rechtecks $M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1 = p^2$ ergiebt sich daher, dass im ersteren Falle auf jeder Seite des Mittelpunktes in der Entfernung p ein Punktenpaar zusammenfallen muss. Die beiden ausgezeichneten Punkte nun, in denen das geschieht, heissen Asymptotenpunkte. Besondere Erwähnung verdient es, dass sämmtliche Punktenpaare in Bezug auf die Asymptotenpunkte zugeordnete harmonische Punkte sind, und umgekehrt dass das System aller harmonischen Punktenpaare, die zwei festen Punkten zugeordnet sind, als ein hyperbolisches Involutionssystem betrachtet werden kann. Das elliptische Punktsystem kann gleichfalls aus einem solchen System harmonischer Punkte erhalten werden, wenn der eine der veränderlichen Punkte immer in gleicher

Entfernung auf die andere Seite des Mittelpunktes der beiden festen Punkte getragen wird.*)

Lemma IV. Construction der Asymptotenpunkte und der Asymptoten.

1. In einem durch zwei Punktenpaare a, a_1, c, c_1 gegebenen Punktsystem den Mittelpunkt und die Asymptotenpunkte zu finden.

Aufl. Beschreibe über den Linien aa_1, cc_1 als Sehnen Kreise, die sich schneiden, so trifft deren gemeinschaftliche Sehne de den Mittelpunkt M des Punktsystems, denn es ist $Md \, . \, Me = Ma \, . \, Ma_1 = Mb \, . \, Mb_1$. Liegt M ausserhalb der gezeichneten Kreise, so ist das Quadrat der von M an dieselben gehenden Tangente die Potenz des Punktsystems und ein mit der Tangente um M beschriebener Kreis trifft die Asymptotenpunkte. Liegt M innerhalb der Kreise, so sind die Asymptotenpunkte imaginair, doch ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der von M ausgehenden Sehnen eine Grösse, die in manchem Betracht als ihre imaginaire Entfernung von M angesehen werden kann.

2. In einem durch zwei Strahlenpaare α, α_1, γ, γ_1 gegebenen Strahlsysteme (B) die Achsen und die Asymptoten zu finden.

1. Aufl. Man schneide die gegebenen Strahlen mit einer beliebigen Geraden, suche in derselben zu den vier erhaltenen Schnittpunkten a, a_1, c, c_1 die reellen oder imaginairen Asymptotenpunkte (g, h), ziehe Bg, Bh und hälfte die dadurch erhaltenen Winkel, so sind diese Halbirungslinien in jedem Fall die Achsen; Bg und Bh die Asymptoten, je nachdem g und h die reellen Asymptotenpunkte waren oder nicht.

2. Aufl. Lege durch B einen beliebigen Kreis und, nachdem die gegebenen Strahlen α, α_1, γ, γ_1 noch mit den Buchstaben β_1, β, δ_1, δ benannt sind, construire in den Punkten A, A_1, wo die Strahlen α, α_1 den Kreis treffen zwei Strahlbüschel, deren ersterer durch den Kreis mit dem Strahlbüschel (α_1, β_1, γ_1, δ_1) und deren letzterer ebenso mit (α, β, γ, δ) projektivisch gleich gemacht wird; da (α, β, γ, δ) und (α_1, β_1, γ_1, δ_1) projektivisch sind, müssen es auch A und A_1 sein, und da in AA_1 entsprechende Strahlen vereinigt sind, erzeugen diese letzteren einen perspektivischen Durchschnitt. Trifft dieser den Kreis, so sind die von B nach den beiden Durchschnittspunkten gezogenen Strahlen

*) Anm. Ueber die zwischen drei Punktenpaaren eines Involutionssystems stattfindenden Relationen siehe „Chasles A. h. Note X.“

die Asymptoten, die Halbirungslinien des Asymptotenwinkels die Achsen. Trifft er den Kreis nicht, so sind keine Asymptoten vorhanden, man findet jedoch die Achsen auch dann, indem man den Kreis zeichnet, der durch A, A_1 geht und dessen Mittelpunkt auf dem perspektivischen Durchschnitt liegt; die von A, A_1 nach den Durchschnittspunkten dieses Kreises mit dem perspektivischen Durchschnitt gezogenen Strahlen sind die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, zu denen mit Hülfe des durch B, A, A_1 gehenden Kreises, leicht die Achsen des Strahlsystems B gefunden werden.

Lemma V. Dreht sich eine Sehne eines Kegelschnitts um einen festen Punkt innerhalb oder ausserhalb desselben, so bilden die Strahlenpaare, die von einem beliebigen festen Punkt des Kegelschnitts nach den Endpunkten der Sehne gezogen werden, ein Involutionssystem.

Bew. Seien B, B_1 zwei projektivisch schiefe Strahlbüschel, die den gegebenen Kegelschnitt erzeugen, und BAB_1C ein eingeschriebenes Viereck, dessen Gegenseiten BA,B_1C und BC,B_1A sich in den Punkten α und α_1 schneiden, so entsteht durch die Strahlbüschel B, B_1 auf der Geraden $\alpha\alpha_1$ nach Lemma III b ein Punktsystem, d. h. werden von irgend einem anderen Punkt A_1 des Kegelschnitts die Strahlen A_1B,A_1B_1 gezogen, die die Gerade $\alpha\alpha_1$ in den Punkten β,β_1 treffen, so schneiden sich die Strahlen $\beta\, B_1$ und $\beta_1\, B$ in einem neuen Punkt C_1 desselben Kegelschnitts. Für dieses neue eingeschriebene Viereck $BA_1B_1C_1$ ist nun die Diagonale BB_1 und deren Durchschnittspunkt r mit der Verbindungslinie (α, α_1, β, β_1) der Durchschnittspunkte der Gegenseiten ungeändert geblieben, also muss die veränderliche Diagonale A_1C_1 nach Hülfss. XII durch den zu B, B_1, r zugeordneten vierten harmonischen Punkt z gehen, und umgekehrt hätte man A_1z gezogen, bis es den Kegelschnitt in einem Punkte C_1 zum zweiten Male getroffen, so hätten die Strahlen B_1C_1 und BC_1 die Punkte β,β_1 treffen müssen, in denen BA_1 und B_1A_1 die Gerade $\alpha\alpha_1$ schneiden, d. h. es bilden sowohl die Strahlenpaare BA, BC, BA_1 BC_1, etc., als auch B_1A, B_1C, B_1A_1, B_1C_1, etc. Involutionssysteme. q. e. d.

Lemma VI. Liegen zwei veränderliche projektivische Gerade übereinander, so dass drei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der einen und die den beiden ersten zugeordneten Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ der zweiten fest bleiben, während der dem dritten Punkt der ersten Geraden zugeordnete Punkt $\mathfrak{c}_1$ unveränderlich ist, und also jeder neuen Lage von $\mathfrak{c}_1$ ein bestimmtes reelles oder imaginaires zusammengefallenes Punktenpaar entspricht, so bilden diese sämmtlichen zusammengefallenen Punktenpaare ein Involutionssystem.

Bew. In der unter Lemma III (a) beschriebenen und Fig. 17 gezeichneten Construktion hat man nur die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ als fest zu denken, während $\mathfrak{c}_1$ sich ändert, so bleiben die Geraden $\alpha_1\beta$, $\alpha\beta_1$ und also auch ihr Durchschnittspunkt β_2 fest, während γ_2 die feste Gerade $\alpha_1\gamma$ durchläuft. Die Linie $\beta_2\gamma_2$ dreht sich also um den festen Punkt β_2, und die von B nach den Durchschnittspunkten von $\beta_2\gamma_2$ mit dem Kreis gezogenen Strahlen also auch ihre Durchschnittspunkte ($\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$) auf der Geraden ($\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{a}_1,\mathfrak{b}_1$) bilden nach dem vorigen Lemma Involutionssysteme. Diese Punkte ($\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$) sind aber die jedesmal zusammengefallenen Punktenpaare.

Lemma VII.

Die Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Punkten schneidet jede beliebige Gerade in einem Punktsystem, dessen zugeordnete Punktenpaare je zwei Durchschnittspunkte der Geraden mit einem Kegelschnitt jener Schaar sind.

Die Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten macht jeden Punkt zu einem Strahlsystem, dessen zugeordnete Strahlen je zwei Tangenten von dem Punkt an einen der Kegelschnitte jener Schaar sind.

Bew. des Satzes links. Seien A, B, C, D die vier festen Punkte; denkt man sich nun in A, B Strahlbüschel, durch welche die Kegelschnitte erzeugt werden sollen, so bleiben zwei entsprechende Strahlenpaare derselben AC und BC, AD und BD fest, während der dem Strahl AB zugeordnete Strahl, nämlich die Tangente in B für jeden neuen Kegelschnitt eine andere Lage annimmt. Auf jeder beliebigen schneidenden Geraden nun werden für jeden bestimmten Kegelschnitt durch die Strahlbüschel A und B zwei projectivische Gerade entstehen, deren zusammengefallene Punktenpaare die Durchschnittspunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt sind, und da für die gesammte Schaar von Kegelschnitten die fünf Durchschnittspunkte mit den Geraden AC, BC, AD, BD, AB fest bleiben, während der diesem letzteren zugeordnete Durchschnittspunkt mit der Tangente in B sich verändert, so findet offenbar in Bezug auf die Durchschnittspunkte der Geraden mit der Kegelschnittsschaar das vorige Lemma Anwendung und ist deshalb die Behauptung dieses Lemma erwiesen.

Der Satz rechts stützt sich in ganz ähnlicher Art auf den aus Lemma VI durch polare Uebertragung zu erhaltenden Satz, dessen Ausführung ich hier unterlassen habe, da, wie man schon bemerkt haben wird, diese Uebertragung sich ohne Schwierigkeit fast wörtlich Zeile für Zeile ausführen lässt.

Coroll. I. Sind ξ, η, ζ die Schneidungspunkte der drei Paare von Gegenseiten des Vierecks ABCD, so entstehen auf den Verbindungslinien derselben noch besondere Punktsysteme für jeden bestimmten Kegelschnitt, z. B. auf $\xi\eta$ durch die Strahlbüschel A und B, weil die den Strahlen AC, CD, die sich in ξ schneiden, zugeordneten Strahlen BC, AD sich in η treffen; da nun den in AB vereinigten Strahlen die Tangenten in A und B entsprechen, so folgt, dass diese sich in einem Punkt der Geraden $\xi\eta$ schneiden müssen, d. h. dass die in A und B an die Kegelschnittsschaar gezogenen Tangenten perspektivische Strahlbüschel bilden, deren perspektivischer Durchschnitt die Gerade $\xi\eta$ ist. Da ferner die Asymptotenpunkte dieser Punktsysteme harmonische Punkte zu jedem Punktenpaar, also auch zu ξ, η, die Asymptotenpunkte aber gleichbedeutend mit den Durchschnittspunkten des jedesmaligen Kegelschnitts mit der Geraden $\xi\eta$ sind, ergiebt sich leicht, dass ξ, η, ζ drei feste zugeordnete harmonische Tripelpunkte für die ganze Schaar der Kegelschnitte sind, d. h. dass die Berührungspunkte der von ζ ausgehenden Tangenten sämmtlich auf der Geraden $\xi\eta$ liegen etc. Besonders zu merken ist noch, dass die vier Berührungspunkte in den Seiten eines umschriebenen Vierseits ein Viereck bilden, dessen drei Paar Gegenseiten sich in denselben drei Punkten schneiden als die drei Hauptdiagonalen des Vierseits.

Coroll. II. Da die drei Paare von Gegenseiten AB und CD, AC und BD, AD und BC ebenfalls als Kegelschnitte der durch A, B, C, D gehenden Schaar betrachtet werden können, so folgt von selbst, 1. dass die auf jeder schneidenden Geraden erhaltenen sechs Durchschnittspunkte mit den drei Paaren von Gegenseiten des Vierecks Involution bilden (Satz des Desargues); 2, dass durch zwei Paare von diesen Punkten das Involutionssystem, das durch die dem Viereck umschriebene Kegelschnittschaar gebildet wird, bestimmt ist, und 3. dass die nach Lemma IV hieraus construirten Asymptotenpunkte diejenigen Punkte sind, in denen die Gerade von einem dem Viereck umschriebenen Kegelschnitt berührt werden kann.

Aufg. II. 2. u. II. 5.

Einen Kegelschnitt zu construiren, der durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Aufl. Seien A, B, C, D die gegebenen vier Punkte. Nenne die Durch-

Einen Kegelschnitt zu construiren, der vier gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Aufl. Seien a, b, c, d die gegebenen vier Tangenten. Nenne die Strahlen, schnittspunkte der Tangente mit zwei Paaren von Gegenseiten AB und CD, AC und BD, der Reihe nach a, a_1, c, c_1; suche dazu nach Lemma IV die Asymptotenpunkte, so kann jeder derselben als Berührungspunkt des gesuchten Kegelschnitts in der gegebenen Tangente betrachtet werden, und die Aufgabe ist sonach auf II. 1. zurückgeführt.

welche von dem gegebenen Punkt nach zwei Paar gegenüberliegenden Ecken des Vierseits, nämlich den Durchschnittspunkten von a und b, c und d, ferner von a und c, b und d gezogen werden, der Reihe nach α, α_1, γ, γ_1; suche dazu nach Lemma IV die Asymptoten, so kann jede derselben als Tangente des gesuchten Kegelschnitts in dem gegebenen Punkte betrachtet werden, und die Aufgabe ist sonach auf II. 6 zurückgeführt.

Der Beweis der Auflösung links stützt sich unmittelbar auf das im 2ten Coroll. des vorigen Lemma unter Nro. 3. Gesagte, der Beweis rechts auf dessen polare Uebertragung.

Det. Da es entweder zwei oder keine, oder im Gränzfalle einen Asymptotenpunkt oder Asymptotenstrahl giebt, lassen beide Aufgaben auch die entsprechende Zahl von Lösungen zu. Der Gränzfall einer Lösung findet jedoch nur dann Statt, wenn die Potenz des in Rede stehenden Punkt- oder Strahlsystems gleich Null ist. Abgesehen von dem Falle, dass die gegebene Gerade durch einen der vier gegebenen Punkte geht, oder für die Aufg. rechts, dass der gegebene Punkt in einer der vier gegebenen Geraden liegt, folgt daher aus dem im II. Coroll. des vorigen Lemma unten (1) Gesagten, dass dann für die Aufgabe links drei der gegebenen Punkte in einer Geraden liegen müssen, also die Kegelschnittschaar aus einer Schaar von Linienpaaren besteht; für die Aufgabe rechts, dass drei der gegebenen Linien sich in einem Punkt schneiden, also die Kegelschnittschaar aus der Schaar begränzter Geraden besteht, die von dem Durchschnittspunkt der drei gegebenen Geraden nach einem beliebigen Punkt der vierten gezogen ist.

Lemma VIII. Hat eine Kegelschnittschaar zwei feste Tangenten und zwei feste Punkte, so muss die Berührungssehne der festen Tangenten durch einen von zwei bestimmten Punkten gehen, welche auf der Verbindungslinie der festen Punkte liegen, und der Schneidungspunkt der Tangenten in den festen Punkten muss sich auf einer von zwei bestimmten Geraden befinden, welche vom

Schneidungspunkt der festen Tangenten ausgehen, und die vorerwähnten zwei bestimmten Punkte treffen.

Bew. (s. Fig. 18.) Seien A, B die festen Punkte, EL und EM die festen Tangenten, L und M ihre Schneidungspunkte mit AB. Man denke sich einen beliebigen Kegelschnitt der dadurch bestimmten Schaar, der EL in C, EM in D berührt, dessen Tangenten in A und B sich in G schneiden, während GA die Linien EM und EL in F und J, GB dieselben Linien in H und K trifft; so müssen nach dem, was in Coroll. I des Lemma VII gesagt ist, die Linien AB und CD in demselben Punkt ζ als die Diagonalen FH und JK des umschriebenen Vierseits zusammen treffen, und dieser Punkt muss ein Asymptotenpunkt des auf der Geraden AB durch die Punktenpaare A und B, L und M bestimmten Punktsystems sein, denn nach Coroll. II Lemma VII bilden die sechs Punkte, in denen eine Linie AB von den drei Paar Gegenseiten des überschlagenen Vierseits HJFK getroffen werden Involution und da von diesen sechs Punkten die beiden durch HF und JK erzeugten zusammengefallen sind, folgt das oben Gesagte.

Auf gleiche Weise müssen nach Coroll. I. Lemma VII die Tangentenpaare in A und B, C und D sich auf derselben Geraden EG schneiden, als die Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks AC und BD, AD und BC, und diese Gerade muss eine Asymptote des durch die Strahlenpaare EA und EB, EL und EM bestimmten Strahlsystems sein, denn nach der polaren Uebertragung des in Coroll. II. Lemma VII unter (1) Gesagten müssen die sechs Strahlen von einem beliebigen Punkt E nach den sechs Durchschnittspunkten von vier Geraden Linien AC, BD, AD, BC gezogen Involution bilden, und da zwei dieser Strahlen, nämlich die nach dem Durchschnitt von AC und BD, AD und BC gezogenen zusammen gefallen sind, folgt die Behauptung.

Man sieht leicht, dass dies letzterwähnte Strahlsystem EA, EB, EL, EM mit dem Punktsystem A, B, L, M perspektivisch ist, dass also die Asymptoten des ersteren durch die Asymptotenpunkte des letzteren gehen. Da nun die Berührungssehne CD nicht nach demselben Punkt gehen kann, als der von E ausgehende Strahl EG, so erhellt, dass, wenn der eine der beiden durch A,B L,M bestimmten Asymptotenpunkte als Ausgangspunkt der Berührungssehne CD angenommen ist, der andere mit E und G in einer geraden Linie liegen muss.

Aufg. II. 3. und II. 4.

Einen Kegelschnitt zu construiren, der durch drei gegebene Punkte geht, und zwei gegebene Gerade berührt.

Aufl. Seien a, b, c die Punkte, A und B die Tangenten. Man bestimme für a, b, A, B nach dem vorigen Lemma die beiden Punkte ξ, ζ, durch deren einen die Berührungssehne von A und B gehen muss, ebenso für a, c, A, B die Punkte ξ_1, ζ_1, so wird jede der vier Linien $\xi\xi_1$, $\xi\zeta_1$, $\zeta\xi_1$, $\zeta\zeta_1$ die Linien A und B in solchen Punkten schneiden, in denen sie von einem durch a, b, c gehenden Kegelschnitt berührt werden können, und die Aufgabe ist somit auf II. 1 zurückgebracht.

Einen Kegelschnitt zu construiren, der drei gegebene Gerade berührt, und durch zwei gegebene Punkte geht.

Aufl. Seien A, B, C die Tangenten, a, b die Punkte, E der Schneidungspunkt von A und B, E_1 von A und C, so bestimme für A, B, a, b nach dem vorigen Lemma die Strahlen $E\xi$, $E\zeta$, auf deren einem sich die Tangenten in a und b schneiden müssen, ebenso für A, C, a, b die Strahlen $E_1\xi_1$, $E_1\zeta_1$, so schneiden sich die vier Strahlen $E\xi$, $E\zeta$, $E_1\xi_1$, $E_1\zeta_1$ in vier solchen Punkten, deren jeder einzeln mit a und b verbunden zwei Tangenten eines auch A, B, C berührenden Kegelschnitts giebt, und die Aufgabe ist somit auf II. 6 zurückgeführt.

Nachdem nun gezeigt ist, wie in jedem Falle beliebig viele Punkte, Tangenten und parallele Tangentenpaare des durch Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitts aufgefunden werden können, wie deshalb aus zwei Paaren paralleler Tangenten der Mittelpunkt zu finden ist, bleibt noch zu zeigen wie die Hauptachsen construirt werden können.

Lemma IX. Die sämmtlichen Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnitts bilden ein Involutionssystem. *)

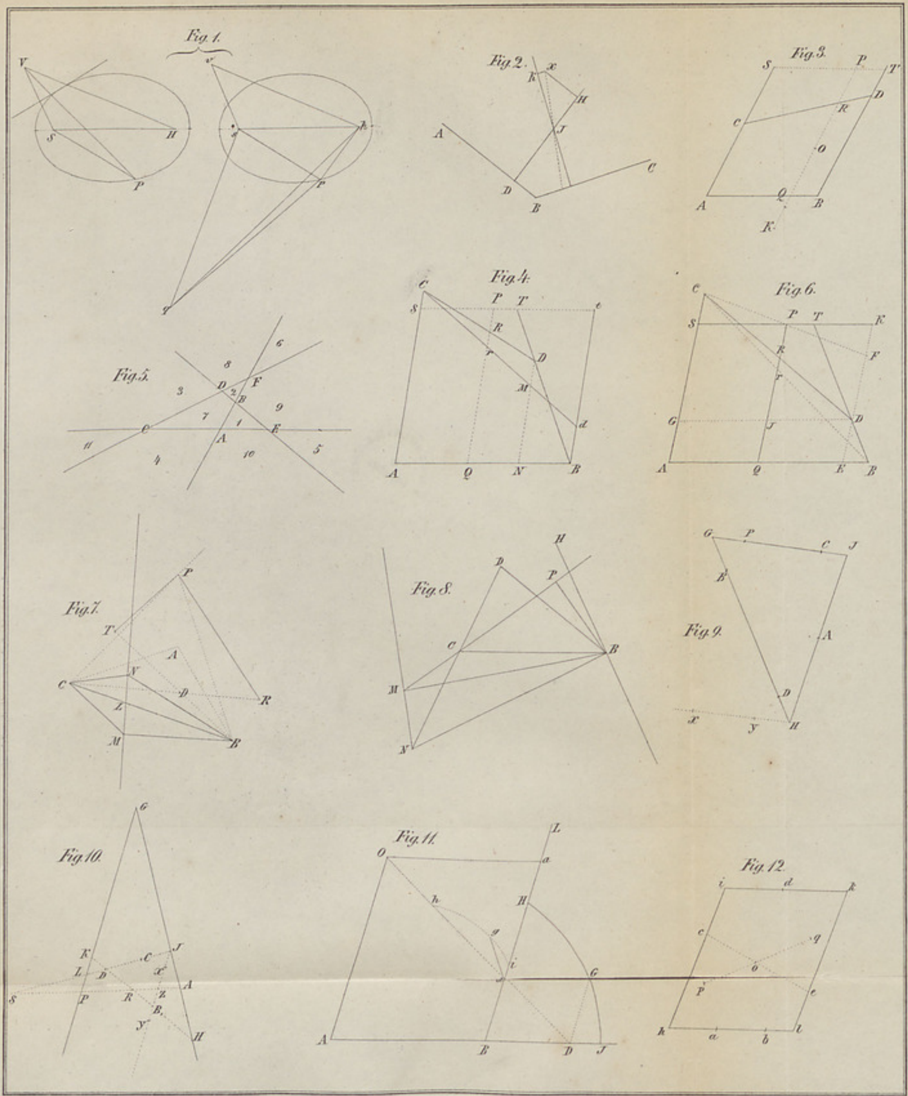
Bew. (s. Fig. 19.) Seien EFGH ein dem Kegelschnitt umschriebenes Parallelogramm, A, B, C, D der Reihe nach die Berührungspunkte in EF, GH, EH, FG, so sind dessen Diagonalen EG, FH, die sich in M treffen ein Paar conjugirte Durchmesser; denn zieht man KJ parallel HF, das den Kegelschnitt in O,P und EG in N schneidet, so ist zu dem Ende nur zu zeigen, dass

*) Der Beweis dieses Satzes pflegt sonst mit Hülfe der Lehre von den Polaren geführt zu werden.

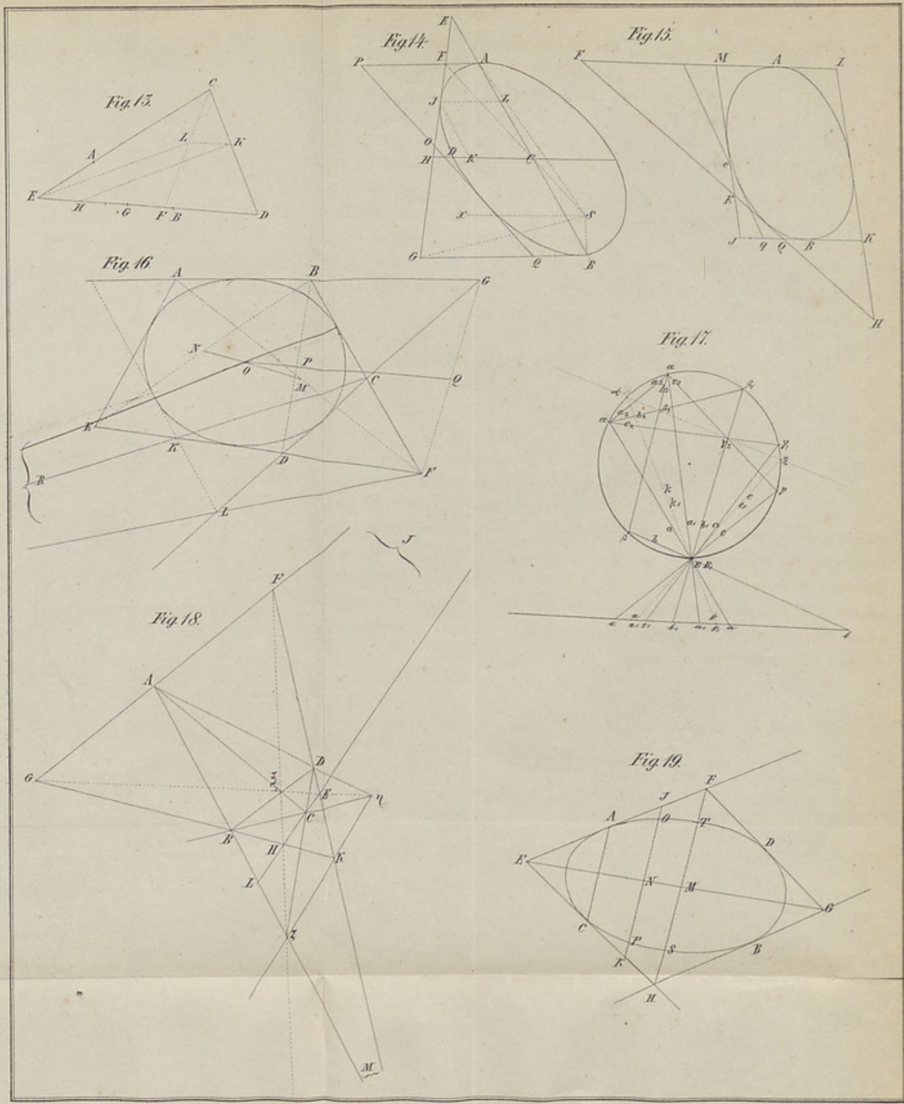
$NP = NO$ ist. Es ist aber 1, $JO . JP : JA^2 = FT . FS : FA^2$
2, $KO . KP : KC^2 = HT . HS : HC^2$,
und da $FT . FS = HT . HS$ ist, durch Division von (1) und (2) $JO . JP : KO . KP = JA^2 . HC^2 : FA^2 . KC^2$. Da aber, wie leicht zu zeigen $EA : EF = EC : EH$, also $AC \# FH \# JK$ ist, muss $JA . HC : FA . KC = 1$ sein, also $JO . JP = KO . KP$ oder $(JN - NO).(JN + NP) = (KN + NO).(KN - NP)$, welches ausgerechnet, da $JN = KN$ ist, ergiebt, dass $NO = NP$. Da nun $BH = AF$, $EA . BH$ und also auch $EA . AF$ constant bleibt, wenn die Gegenseiten EF und HG des Parallelogramms fest bleiben, während EH und FG sich ändern, folgt, dass A der Mittelpunkt eines Punktsystems ist, dessen zwei conjugirte Punkte die Durchschnittspunkte E, F irgend eines Paares conjugirter Durchmesser des Kegelschnitts sind, und dass also diese selbst ein Strahlsystem bilden.

Kennt man also zwei Paare conjugirter Durchmesser des Kegelschnitts, so kann man nach Lemma IV Aufg. 2 leicht die Achsen construiren; man findet z. B. aus vier gegebenen Punkten und der Tangente in einem derselben leicht für jeden der Punkte ξ, η, ζ Fig. (18) die Richtung eines Paares conjugirter Durchmesser; denn sucht man auf $\eta\xi$ die Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitt, zieht von ζ nach der Mitte der dadurch erhaltenen Sehne, so geben diese Linie, welche den Mittelpunkt des Kegelschnitts trifft, und die Linie $\eta\xi$ die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser. Wiederholt man also dieselbe Operation für einen andern der drei Punkte ξ, η, ζ, wobei zu bemerken ist, dass für eine der drei Linien $\xi\eta$, $\eta\zeta$, $\xi\zeta$ die Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitt imaginair sind, so sind zugleich der Mittelpunkt des Kegelschnitts und zwei Paar conjugirte Durchmesser gefunden, woraus, wie oben gesagt, die Achsen construirt werden können.

Figtf: I.



Figtf: II.



Jahresbericht für Michaelis 18$\frac{52}{53}$.

A.

Lehrverfassung.

Oberprima.

Ordinarius Director und Professor D. Hasselbach.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Tacitus Ann. 1, 46 bis 3, 13. 2 Stunden wöchentlich. — Cicero de nat. deor. 1, 12 bis 2, 4. 2 St. w. — Horatius Oden aus B. 1 u. 2, Epoden und Sat. 1 bis 9 mit Auswahl. 2 St. w. — Aufsätze, Exercitien und Extemporalien. 2 St. w. Dir. D. Hasselbach.

Griechisch. Plato Phädrus und Thucydides 4, bis c. 8. 2 St. w. — Homer Il. 24, 141 bis zu Ende und Sophokles Philoct. bis v. 1217 Herm. 2 St. w. Dir. D. Hasselbach. — Grammatik, schriftliche und mündliche Uebungen. 2 St. w. Prof. D. Schmidt.

Deutsch. Aufsätze, mündliche Vorträge, Geschichte der deutschen poetischen Literatur, zweiter Theil. 2 St. w. Prof. Giesebrecht.

Französisch. Corneille Polyeucte im Winter, Dumas Charles VII. und Corneille Cinna im Sommer. Extemp., Exercit., Aufsätze und Uebungen im Sprechen. 2 St. w. Oberlehrer Calo.

Hebräisch. Ps. 55—76, Moses B. 3 und Josua. Grammatik, Syntax. Monatlich eine grammatische Analyse, alle 14 Tage ein Exercit. 2 St. w. Oberl. Dr. Friedländer.

Englisch. Im W.: Shakespeare Henry VIII., Goldsmith the Vicar of Wakefield. Im S.: Milton, Paradise lost, Walter Scott the fortunes of Nigel. Mündliche und schriftliche Uebungen, Aufsätze, Exercit. 1 St. w. Oberl. Calo.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Die Lehre von der Sünde und von der Erlösung, die Belegstellen, sowie Abschnitte aus dem Evangelium des Matthäus im Grundtexte gelesen und erklärt. 2 St. w. Consistorialrath D. Mehring.

Mathematik. Im W.: Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Im S.: Analytische Geometrie. 4 St. w. Prof. Graßmann.

Physik. Im W.: Optik, zweiter Theil. Lehre von der Interferenz und Polarisation des Lichtes. Im S.: Mechanik, Statik und Dynamik fester Körper. — 2 St. w. Prof. Graßmann.

Naturkunde. Im W.: Physiologie des Menschen. Im S.; Botanik. 2 St. w. Medicinal-Rath D. Behm.

Geschichte. Neuere Geschichte. Zweiter Theil. 2 St. w. Prof. Giesebrecht.

Philosophische Propädeutik. Logik nach Trendelenburg's Elementa logices Aristot. 2 St. w. Prof. D. Schmidt.

Metrik. Kurze Uebersicht der Metrik nach Herm. mit praktischen Uebungen in einer der zum Lesen des Horatius bestimmten Stunden. Dir. D. Hasselbach.

Hodegetik. Gegen Ende des Semesters einige Stunden für die Abiturienten. Derselbe.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. In den Chorstunden, an denen Schüler aus allen Klassen Theil nehmen, sind gesungen rythmische Choräle, Motetten, Cantaten zu den Festzeiten, einige Oden des Horaz u. a. 2 St. w. Musikdir. D. Löwe.

Zeichnen. Nach Köpfen und landschaftlichen Studien. Perspective und Schattenconstruction. Ausgeführt wurde eine gewölbte Halle mit Lampenbeleuchtung. 4 St. w. Maler Most.

Unterprima.

Ordinarius Professor D. Schmidt.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Im W.: Cicero de off. 2, Tacitus Ann. 14, 23 bis 15, 6. 4 St. w. Horatius Od. 1 und 2. 2 St. w. Im S.: Cicero de off. 3, Tacitus Ann. 15, 7 bis zu Ende. 4 St. w. Horatius Od. 3 und 4. 2 St. w. — Extemp., Exercit., Aufsätze. 2 St. w. Prof. D. Schmidt.

Griechisch. Im W.: Sophokles Electra, Demosthenes Philipp. 1—3. 4 St. w. — Schriftliche und mündliche Uebungen. 2 St. w. Prof. D. Varges. Im S.: Sophok. Oed. Tyr. und Plato Euthyphr. 4 St. w. Schriftliche und mündliche Uebungen. 2 St. w. Prof. D. Schmidt.

Deutsch. Aufsätze, mündliche Vorträge, Lectüre deutscher Classiker, Geschichte der deutschen poetischen Literatur, erster Theil. 4 St. w. Prof. Giesebrecht.

Französisch. Im W.: Moliere le bourgeois gentilhomme. Ponsard Lucrèce. Im S.: Dumas Charles VII., Napoleon. Aufsätze, Extempor., Sprechübungen. 2 St. w. Oberl. Calo.

Hebräisch. Ps. 23—58, cursorisch die Bücher Samuelis. In der Grammatik die Lehre vom Nomen und die Verbindung des Nomen und Verbum mit Suffixa. 2 St. w. Oberl. D. Friedländer.

Englisch. Im W.: Walter Scott's Ivanhoe. Im S.: Couper the Spy. Mündliche und schriftliche Uebungen, Aufsätze, Exercit. nach Wagner. 2 St. w. Oberl. Calo.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion: Kirchengeschichte und Lectüre des Briefes an die Colosser und Galater. 2 St. w. Oberl. Calo.

Mathematik. Im W.: Arithmetik, Repetition der Lehre von den Gleichungen, dann Permutationen, Combinationen, Variationen, Binomischer Lehrsatz, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im S.: Stereometrie. 4 St. w. Prof. Graßmann.

Physik. Wie in Oberprima.

Naturkunde. Combinirt mit Oberprima.

Geschichte. Neuere Geschichte. Erster Theil. 2 St. w. Prof. Giesebrecht.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. }
Zeichnen. } In Verbindung mit Oberprima.

Secunda.

Cötus I.

Ordinarius Gymnasiallehrer D. Rassow.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Im W.: Livius B. 24. Cicero in C. Verrem B. 4. 4 St. w. Virgil. Aen. 6, 337 bis 8. 2 St. w. — Im S.: Sallustius bellum Iugurth. Cicero in C. Verrem B. 5 mit Auswahl. 4 St. w. Virgil. Aen. 8 u. 9. 2 St. w. — Exercit., Extemp., mündliche Uebungen nach Süpfle, Syntaxis ornata nach Zumpt. 3 St. w. Gymnasiall. D. Rassow.

Griechisch. Im W.: Xenoph. Memor. B. 2 mit Auswahl. 2 St. w. — Schriftliche und mündliche Uebungen. 2 St. w. Prof. D. Schmidt. — Im S.: Herodot 6, 94 bis 7 zu Ende. 2 St. w. — Grammatik (Tempora u. Modi), schriftliche und mündliche Uebungen nach Franke. 2 St. w. Collab. D. Wendt. — Im S. u. W.: Homer Il. von λ bis ν. 2 St. w. Gymnasiall. D. Stahr.

Deutsch. Aufsätze, Lectüre und Vortrag deutscher Gedichte aus Echtermeyers Sammlung. 3 St. w. Prof. Giesebrecht.

Französisch. Gewählte Abschnitte aus Ségur l'histoire de la grande armée. Memorirstücke, Extemp., Exercit. 2 St. w. Gymnasiall. D. Stahr.

Hebräisch. Lectüre der Genesis. In der Grammatik vom Anfang bis zum unregelmäßigen Verbum incl. Analyse aus dem Hebräischen, Exercitien aus dem Deutschen und Uebungen in Verbalformen alle 14 Tage. 2 St. w. Oberl. D. Friedländer.

Englisch. Combinirt mit Unterprima.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Geschichte der Entstehung des Christenthums bis zu dessen Erhebung zur Staats-Religion im römischen Reich. Apostelgeschichte nach dem Urtext. Einleitung in die kanon. Schriften des alten Testaments. 2 St. w. Prof. Hering.

Mathematik. Im W.: Arithmetik. Lehre von den Potenzen, Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten; Gleichungen des zweiten Grades. Im S.: Logarithmen, Trigonometrie. 4 St. w. Collab. Balsam.

Physik. Im W.: Optik; Katoptrik, Dioptrik, Farbenlehre. Im S.: Allgemeine Einleitung. Statik fester, flüssiger, luftförmiger Körper. 2 St. w. Collab. Balsam.

Naturkunde. In Verbindung mit Prima.

Geschichte. Geschichte des Mittelalters. 1. u. 2. Periode. 2 St. w. Prof. Hering.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. } S. Unterprima.
Zeichnen. }

Cötus II.

Ordinarius Oberlehrer Calo.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Im W.: Livius B. 6. Cicero pro Milone. 4 St. w. Virgil. Aen. B. 6—7. 2 St. w. — Im S.: Liv. B. 7. Cicero Phil. 2. 4 St. w. Virgil. Aen. B. 8—9. 2 St. w. Exercit., Extemp., mündliche Uebungen nach Süpfle, Syntaxis ornata nach Zumpt. 3 St. w. Oberl. Calo.

Griechisch. Im W.: Herodot B. 7 und 8 mit Auswahl. Homer II. 21—24. 4 St. w. Im S.: Lysias adv. Eratosth., pro invalido, de affect. tyrann. Homer II. 1—3. 4 St. w. Grammatik und schriftliche und mündliche Uebungen nach Franke. 2 St. w. Gymnasiall. D. Rassow.

Deutsch wie im ersten Cötus. 3 St. w. Prof. Giesebrecht.

Französisch. Lectüre von Ségur l'histoire de la grande armée. Exercit., Aufsätze, Extemp., Sprechübungen. 2 St. w. Oberl. Calo.

Hebräisch. Wie im ersten Cötus. 2 St. w. Oberl. D. Friedländer.

Englisch. Combinirt mit Unterprima.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Einleitung in das N. T., Lectüre des Ev. Matthäi und eines Theils des Römerbriefs. 2 St. w. Oberl. Calo.

Mathematik. Wie im ersten Cötus. 4 St. w. Prof. Graßmann.

Physik. Wie im ersten Cötus.

Naturkunde. In Verbindung mit Prima.

Geschichte. Geschichte des Mittelalters 2. u. 3. Periode. 2 St. w. Prof. Giesebrecht.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. } s. Oberprima.
Zeichnen. }

Obertertia.

Ordinarius Professor Hering.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Cäsar bell. civ. 3, 65 bis zu Ende und bell. Alexandr. Gramm. nach Putsche. §. 112—151. Extemp., Exercit. 7 St. w. Prof. Hering. — Ovid Metam. 2—8 mit Auswahl. Metrische Uebungen. 3 St. w. Collab. D. Wendt.

Griechisch. Schmidt's Chrestom. S. 1—75, und 150—174. 2 St. w. Hom. Odyss. B. 6, 7, 10, 11, 17. 1 bis 2 St. w. Verba auf μι und unregelmäßige Verba nebst Präpositionen. 1 bis 2 St. w. Exercit. nach Franke. 1 St. w. Gymnasiall. Stahr.

Deutsch. Lectüre aus Hiecke's Lesebuch und Echtermeyers Gedichtsammlung. Uebungen im freien Vortrage. Alle 14 Tage ein Aufsatz. 3 St. w. Collab. D. Wendt.

Französisch. Syntax, Extemp., Exercit., Memorirübungen. Lectüre von Charles XII. B. 2 und 3. 2 St. w. Oberl. D. Friedländer.

Englisch. Mündliche und schriftliche Uebungen nach Wagner's Schul-Grammatik und Fölsing's Elementarbuche. Ahn's Lesebuch.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Ev. Matthäi und Lucä (Reden Jesu) nach Luthers Uebersetzung. Das Gebet des Herrn nach Luthers Katechismus. 2 St. w. Prof. Hering.

Mathematik. Im W.: Arithmetik. Buchstabenrechnung, Rechnung mit positiven und negativen Größen, Wurzelausziehen. Im S.: Geometrie bis zur Lehre von der Aehnlichkeit und deren Anwendung auf den Kreis incl. — Geometrische Aufgaben. 4 St. w. Collab. Balsam.

Geschichte und Geographie. Dritte und vierte Periode der alten Geschichte nebst Wiederholung der beiden ersten. 3 St. w. In der Geographie Wiederholung der alten und die neuere von Europa, Amerika und Australien. 2 St. w. Prof. Hering.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. }
Zeichnen. } s. Unterprima.

Untertertia.

Ordinarius im Winter Professor D. Varges, im Sommer Collaborator Pitsch.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Im W.: Cäsar bell. gall. 2 und 3. 4 St. w. Gymnasiall. D. Stahr. Tirocin. poet. von Siebelis. 2 St. w. Prof. D. Varges. Im S.: Cäsar bell. gall. 3 und 4. 4 St. w. Collab. Pitsch. Tirocin. poet. 2 St. w. Gymnasiall. D. Stahr. — Grammatik, Tempus- und Moduslehre nach Putsche, Extemp. und Exercit. nach Süpfle, 4 St. w. Im W.: Gymnasiall. D. Stahr, im S.: Collab. Pitsch.

Griechisch. Lesebuch von Jakobs. 2. Thl. 2 St. w. Repetition des Pensum von Quarta, Verba in μι und die gebräuchlichsten unregelmäßigen. 2 St. w. Schriftliche Uebungen. 2 St. w. Im W.: Collab. Pitsch, im S.: Gymnasiall. D. Stahr.

Deutsch. Aufsätze, Uebungen im Lesen und Deklamiren mit Benutzung von Echtermeyer's Sammlung und Hiecke's Lesebuch. 3 St. w. Im W.: Prof. D. Varges, im S.: Collab. Pitsch.

Französisch. Charles XII. Extemp. und Memorirübungen. In der Grammatik Casuslehre. 2 St. w. Gymnasiall. D. Stahr.

Englisch, combinirt mit Ober-Tertia.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Gleichnisse des Matthäus und Lucas. Das zweite Hauptstück des Catechismus. 2 St. w. Im W.: Prof. D. Varges, im S.: Collab. Pitsch.

Mathematik. Im W.: Arithmetik. Decimalbrüche, Theilbarkeit der Zahlen, Buchstabenrechnung. Im S.: Geometrie bis zum Pythagores incl. 4 St. w. Collab. Balsam.

Geschichte und Geographie. Erste und zweite Periode der alten Geschichte. 3 St. w. Alte Geographie und Wiederholung der neuern von Asien und Afrika. 2 St. w. Im W.: Prof. D. Varges, im S.: Collab. Pitsch.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. }
Zeichnen. } s. Unterprima.

Quarta.

Cötus I.

Ordinarius im Winter Collaborator Pitsch, im Sommer Collaborator D. Ilberg.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Im W.: Corn. Nep. Milt. Them. Arist. Cim. 4 St. w. Casuslehre, das Wichtigste aus der Moduslehre, Gebrauch der Adj., Pron. und Zahlw., nach Putsche. 2 St. w. Schriftliche und mündliche Uebungen. 2 St. w. Collab. Pitsch. Im S.: Nep. Datam. Epam. Pelop. Eumenes. 2 St. w. Grammatik wie im W. 2 St. w. Mündliche Uebungen nach Süpfle. 2 St. w. Extemp. und Exercit. 2 St. w. Collab. D. Ilberg.

Griechisch. Formenlehre bis zum verb. contract. incl. nebst Uebersetzungs-Uebungen aus Jacobs Lesebuche. 4 St. w. Schriftliche Uebungen nach Rost und Wüstemann. 1 St. w. Im W.: Hülfsl. D. Beschmann, im S.: Collab. Pitsch.

Deutsch. Aufsätze alle 14 Tage, Lese- und Declamirübungen nach Hiecke und Echtermeyer. 3 St. w. Im W.: Collab. Pitsch, im S.: Collab. D. Ilberg.

Französisch. Unregelmäßige Verba, Pronomina und Numeralia. Schriftliche und mündliche Uebungen nach Hirzel und Ahn. 2 St. w. Oberl. D. Friedländer.

3. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Lutherischer Catechismus. 2 St. w. Im W.: Collab. Pitsch, im S.: Collab. D. Ilberg.

Mathematik. Im W.: Decimalbrüche, das Auffinden des größten gemeinschaftlichen Maaßes zwischen zwei Zahlen. Directe und indirecte Proportions-Rechnung. Im S.: Von der geraden Linie, von den Winkeln und Figuren bis zur Congruenz der Dreiecke. 3 St. w. Hülfsl. Winkler.

Naturgeschichte. Im W.: Höheres Thierreich. Im S.: Botanik. Derselbe. 2 St. w.

Geschichte und Geographie. Deutsche Geschichte nach Kohlrausch. Außereuropäische Geographie nach Daniel. 2 St. w. Oberl. D. Friedländer.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. Die Elemente des Singens nach der Gesanglehre, die Nummern 2 und 3 der Choräle und Figuralstücke. 1 St. w. Musikdirector D. Löwe.

Schreiben. Nach Vorschriften und Dictaten. 2 St. w. Schreiblehrer Neukirch.

Zeichnen. Im W.: Nach Vorlegeblättern, im S.: Perspective. 2 St. w. Maler Most.

Cötus II.

Ordinarius Collaborator D. Wendt.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Im W.: Corn. Nep. Dion, Iphicr., Chabr., Attic. 3 St. w. Grammatik wie in Cötus I. 1 St. w. Mündliche Uebungen nach Süpfle. 2 St. w. Exercit. und Extemp. 2 St. w. Im S.: Epam., Pelop. Eumenes, Phocion. 3 St. w. Uebrigens wie im W. Collab. D. Wendt.

Griechisch, wie im ersten Cötus. Collab. D. Wendt.

Deutsch, wie im ersten Cötus. Oberl. D. Friedländer.

Französisch, wie im ersten Cötus. 2 St. w. Oberl. D. Friedländer.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion, wie im ersten Cötus. 2 St. w. Gymnasiall. D. Rassow.

Mathematik, wie im ersten Cötus. 3 St. w. Collab. Balsam.

Naturkunde, wie im ersten Cötus.

Geschichte und Geographie, wie im ersten Cötus. 2 St. w. Im W.: Oberl. D. Friedländer, im S.: Hülfsl. D. Volkmann.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen. 1 St. w. Musikdir. D. Löwe.
Schreiben. 2 St. w. Schreibl. Neukirch. } wie im ersten Cötus.

Zeichnen. Im W.: Perspective, im S.: Nach Vorlegeblättern. 2 St. w. Maler Most.

Quinta.

Cötus I.

Ordinarius Hülfslehrer Bartholdy.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Einübung der Formenlehre und das Wichtigste aus der Casuslehre nach Putsche. Daneben Uebersetzen aus dem Hülfsbuche von Döring. Exercit., Extemp. 8 St. w. Hülfsl. Bartholdy.

Deutsch. Vom zusammengesetzten Satze und das Nothwendigste aus der Formenlehre. Ausgewählte Stücke aus Hiecke's Lesebuch gelesen. Aufsätze und Declamation. 4 St. w. Gymnasiall. D. Stahr.

Französisch. Regelmäßige Declination und Conjugation. Uebersetzen und Auswendiglernen aus Ahn. Extemp. und Exercit. 2 St. w. Im W.: Hülfsl. D. Beschmann, im S.: Hülfsl. D. Volkmann.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Erzählungen aus dem N. T. nach Kohlrausch. 2 St. w. Hülfsl. Bartholdy.

Rechnen und Raumlehre. Bruchrechnen mit unbenannten und benannten Zahlen. 3 St. w. Constructionsübungen. 1 St. w. Hülfsl. Winkler.

Naturkunde. Im W.: Niederes Thierreich. Hülfsl. Winkler. Im S.: Botanik. Collab. Balsam. 2 St. w.

Geschichte und Geographie. Biographieen aus der mittleren Geschichte. 2 St. w. Geographie von Europa mit Wiederholung des Pensum von Sexta. Hülfsl. Kern. 3 St. w.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen, wie in Quarta. 2 St. w. Musikdir. D. Löwe.

Schreiben. Wiederholung der Uebungen in deutschen und lateinischen Anfangsbuchstaben. Schreiben nach Vorschriften. 3 St. w. Schreibl. Neukirch.

Zeichnen. Im W.: Nach Vorlegeblättern, im S.: Nach Körpern. 2 St. w. Maler Most.

Cötus II.

Ordinarius Hülfslehrer Kern.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch, wie im ersten Cötus. Hülfsl. Kern.

Deutsch, wie im ersten Cötus. Hülfsl. Kern im W., Collab. D. Jlberg im S.

Französisch, wie im ersten Cötus. Hülfsl. Bartholdy.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion, wie im ersten Cötus. Hülfsl. Kern.

Rechnen und Raumlehre, wie im ersten Cötus. Hülfsl. Winkler.

Naturkunde, wie im ersten Cötus. Im W.: Collab. Pitsch, im S.: Hülfsl. Winkler.

Geschichte und Geographie, wie im ersten Cötus. Im W.: Hülfsl. D. Beschmann, im S.: Collab. D. Ilberg.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen.
Schreiben.
Zeichnen. } wie im ersten Cötus.

Sexta.

Ordinarius Gymnasiallehrer Stahr.

1. Sprachunterricht.

Lateinisch. Regelmäßige Declination und Conjugation nach Putsche, Uebersetzen aus Spieß, schriftliche Uebungen. 8 St. w. Gymnasiall. Stahr.

Deutsch. Vom einfachen Satze, Uebungen im Rechtschreiben, im Vortrage prosaischer und poetischer Stücke und Aufsätze. 4 St. w. Im W.: Hülfsl. Winkler, im S.: Hülfsl. D. Volkmann.

2. Wissenschaftlicher Unterricht.

Religion. Erzählungen aus dem A. T. nach Kohlrausch. 2 St. w. Gymnasiall. Stahr.

Rechnen. Mit benannten Zahlen nach Scheidemann's Rechenbuch. Hülfsl. D. Beschmann.

Raumlehre. Nach Graßmann's Raumlehre S. 1—27. 1 St. w. Gymnasiall. Stahr.

Naturkunde. Im W.: Säugethiere. Im S.: Vögel. 2 St. w. Hülfsl. D. Beschmann.

Geschichte und Geographie. Erzählungen aus der ägyptischen, pers. und griech. Geschichte bis auf Alex. d. Großen in biographischer Form. Allgemeine Geographie, Kenntniß des Globus, sowie die Welttheile außer Europa. 4 St. w. Hülfsl. D. Volkmann.

3. Unterricht in Kunstfertigkeiten.

Singen, wie in Quarta. 2 St. w. Musikdir. D. Löwe.

Schreiben. Einübung der deutschen und lateinischen Anfangsbuchstaben und Schreiben nach Vorschriften. 3 St. w. Schreibl. Neukirch.

Zeichnen. Vorübungen. 2 St. w. Maler Most.

B.

Chronik des Gymnasium.

Das ablaufende Schuljahr begann den 11. October. Mit dem Beginne desselben gehörte der Professor Graßmann, der im Schlußquartale des vorigen noch vier wöchentliche Lehrstunden an der hiesigen Friedrich-Wilhelmsschule zu ertheilen gehabt hatte, allein dem Gymnasium an. Er ist in die vierte Oberlehrstelle unsrer Anstalt eingetreten, nachdem die Professoren Giesebrecht, D. Schmidt und Hering in die erste, zweite und dritte Stelle hinaufgerückt sind.

Der Königliche Geburtstag wurde am 15. October nach angeordneter Weise in unsrer Aula gefeiert. Der Prof. D. Schmidt sprach in seiner Festrede über das, was Preußens Könige zur Begründung und Verbreitung der Kenntniß unsrer Muttersprache gethan haben.

Die früher schon verheißene Mittheilung (s. Progr. von 1851 S. 39) über eine zur Gründung von Stipendien bestimmte Summe, welche künftig aus dem Werthe des an den Herrn Präsidenten Böhlendorff verkauften, bis dahin unsern Gymnasialhäusern eingereihten und zuletzt von meinem Amtsvorgänger bewohnten Marienstiftshauses gewonnen werden würde, hat der genannte Käufer, ein schon lange den wohlwollendsten Gönnern unsrer Anstalt von uns beigezählter und hochgehaltener Mann, die Geneigtheit gehabt unter dem 30. October mir zugehen zu lassen. Nach seinen Aeußerungen gegen mich darf ich kein Bedenken tragen, von dieser Mittheilung hier an geeignetster Stelle öffentlichen Gebrauch zu machen.

Es hatte derselbe nämlich, da er in Erfahrung gebracht, daß das Haus veräußert werden sollte, theils um sich für seine letzten Lebensjahre eine gesicherte, bequeme Wohnung zu verschaffen, theils, weil er „schon längst den Gedanken gehegt, zu Gunsten Studirender eine Stiftung zu gründen", in einem Schreiben vom 15. März 1851 dem Königl. Marienstifts-Curatorium hierselbst, folgende Anerbietungen gemacht: Das Marienstift solle ihm, und wenn sie ihn überlebe, seiner Ehefrau auf Lebenszeit das Stiftshaus mit allem Zubehör zur unbeschränkten Nutzung überlassen. Er sei entschlossen, zum Ausbau desselben ein Kapital von 5000 Thlrn. zu verwenden, und bereit, dem Curatorium zu seiner Zeit einen justificirten Nachweis der an das Haus gewandten Kosten, die mindestens 4000 Thlr. betragen würden, vorzulegen. Wenn das Haus dem Marienstifts-Curatorium zur freien Disposition zurückfalle, solle dasselbe in öffentlicher Licitation verkauft und aus dem Kaufgelde, welches sich durch die vorzunehmenden, dem Stifte ohne Verpflichtung irgend eines Ersatzes verbleibenden Meliorationen gegen die dermalige Taxe erheblich erhöhen werde, ein Capital von 6000 Thlrn. vorweg entnommen werden, und dieses sei das Marienstift unter den nachfolgenden Bedingungen zu verwenden gehalten, während der Rest des Kaufgeldes demselben zur freien, sonst stiftungsmäßigen Verfügung verbleibe. Die nachfolgende Stiftung solle den Namen des Stifters führen:

„§. V. Das gedachte Capital von 6000 Thlrn. belegt das Marienstifts=Curatorium zu möglichst sichern und hohen Zinsen. Es versteht sich von selbst, daß die Sicherheit des Capitals bei dieser Unterbringung die hauptsächlichste und vornehmste Rücksicht verdient. Die jährlich aufkommenden Zinsen werden als Stipendium an studirende Söhne der Mitglieder des Königlichen Consistorii der Provinz Pommern vertheilt, ohne Unterschied der Facultät, welcher dieselben angehören werden, und ohne Unterschied, ob ihre Väter als geistliche oder weltliche Mitglieder, als Präsidenten, Directoren, Räthe oder Assessoren der geistlichen Oberbehörde der Provinz angehören oder angehört haben. Ist auch nur Ein Studirender vorhanden, der nach diesen Kriterien zur Klasse der Nächstberechtigten gehört, so erhält er den ganzen Zinsenbetrag des Capitals als Stipendium; sind deren zwei oder drei, so theilen sie dasselbe unter sich; sind deren mehrere, so bestimmt die conferirende Behörde, (vergl. §. VI.) nach ihrem freien Ermessen, (welches sich nach den Vermögensumständen des Aspiranten, modo seines Vaters ꝛc. richten wird), wer von ihnen zurückstehen muß. Ich wünsche keinenfalls, daß das Stipendium unter mehr als drei Aspiranten vertheilt werde, um die Hülfe nicht zu zersplittern, welche ich zu gewähren beabsichtige.

§. VI. Die Collatur dieses Stipendii soll bei dem Marienstifts=Curatorio bleiben, so daß dieses die Ansprüche der Aspiranten zu prüfen und selbstständig darüber zu entscheiden hat. Dieser Behörde müssen die Zeugnisse über die erfolgte Immatriculation des Aspiranten und die Zeugnisse über Fleiß und Wohlverhalten der Stipendiaten auf der Universität beigebracht werden. Ergiebt sich einer derselben einem niederträchtigen Lebenswandel, oder läßt er es an der Treue gegen König und Vaterland fehlen, welche ich als die heilige und unverbrüchliche Pflicht eines jeden Preußen betrachte, und haben sich die Herren Collatoren vor ihrem Gewissen hierüber Ueberzeugung verschafft, so sind sie berechtigt und verpflichtet, demselben das Stipendium ohne Gestattung einer Beschwerde oder gar des Rechtsweges dagegen nach ihrem Beschlusse zu entziehen.

§. VII. Ist kein Stipendien=Empfänger vorhanden, wie ich sie in §. V. als die Nächstberechtigten bezeichnet habe, so hat die conferirende Behörde das Stipendium an drei studirende Söhne bedürftiger Pommerscher Geistlichen unter gleichen Modalitäten und Berechtigungen, wie ad §. VI. festgesetzt ist, zu vertheilen."

Schließlich drückt er die Hoffnung aus, das Marienstifts=Curatorium und in höherer Instanz das Königl. Ministerium der geistlichen ꝛc. Angelegenheiten werde seine Anerbietungen genehm halten, in Betracht der Stipendienstiftung aber habe er nur zu sagen, „daß er es immer als eine Ehrenpflicht erkannt habe, Vätern die Sorge für eine würdige Erziehung ihrer Söhne zu erleichtern, da Gott ihm das Glück, eigene Kinder zu besitzen, versagt habe."

Das Curatorium hatte denn allerdings auch die Vorschläge annehmbar gefunden, an das genannte Königl. Ministerium darüber berichtet und von diesem den Bescheid erhalten, Se. Majestät der König habe Allerhöchst genehmigt, daß ihm das Grundstück unter den von ihm gemachten Bedingungen überlassen werden könne; nur sollte dem Marienstifte vorbehalten bleiben, ob es dasselbe bei dessen Rückgabe selber behalten oder verkaufen wolle. Danach wurde unter dem 22. April 1851 der Contract mit ihm abgeschlossen, und so hat Herr Präsident Böhlendorff das ihm übergebene und nach eigenem Plane fast von Grund auf ausgebaute Stiftshaus bezogen.

Je seltener heut zu Tage Stiftungen dieser Art, aus der achtbarsten Gesinnung hervorgegangen, zu Stande kommen, desto freudiger bringe ich die vorstehende zu allgemeinerer Kenntniß, nicht ohne den lebhaft sich regenden Wunsch, daß ein so gutes Beispiel gute Nachfolge herbeiführen möge.

Zum 1. November konnte unsre fünfte Klasse, deren Frequenz auf mehr als 70 Schüler angewachsen war, in zwei Parallelcöten getheilt werden. Die Lectionen des neu eingerichteten zweiten Cötus wurden einstweilen von bereits angestellten Lehrern gegen angemessene Remuneration übernommen.

Unter dem 12. desselb. Mon. erklärte sich unser Patronat damit einverstanden, daß künftig, also von 1853 an, die Kasse für Anschaffung von mathematischen und physikalischen Instrumenten und Schriften von dem Prof. Graßmann, und diejenige für Anschaffung von Naturalien zur Erhaltung und Vermehrung unsers naturhistorischen Museum von dem Prof. Hering verwaltet werde. Letzterem ist von Seiten der Direction zugleich die besondere Aufsicht über das Museum, wie ersterem über die Instrumente übertragen worden.

Mittelst eines Schreibens vom 31. Dezember theilte das Patronat der Anstalt uns seinen Beschluß mit, die Hälfte der von den Lehrern derselben seit dem 1. Januar 1847 nachzuzahlenden Pensionsbeiträge zu erlassen, auch etwa gewünschte Terminalzahlungen zu gestatten, falls nur im Laufe d. J. die Abzahlung derselben vollständig erfolge. Beides und zwar letzteres nach einer unter dem 2. Februar uns zugelegten Berechnung haben wir mit schuldigem Danke angenommen und sehen nun einer definitiv erledigenden Ordnung unsrer ganzen Pensionsangelegenheit binnen Kurzem entgegen.

Noch in dem genannten Monate hatte das vorgesetzte Königl. Provinzial-Schulcollegium eine veränderte Einrichtung unserer Ferien zur Berathung gestellt, und das Resultat der deswegen gepflogenen Verhandlungen ist dahin ausgefallen, daß gegen halbwöchentliche Abkürzung der Oster- und Pfingstferien die alljährlich mit dem zweiten Montag des Julius beginnenden Sommerferien uns auf vier Wochen verlängert worden sind.

Mit einem Schreiben vom 9. Januar stellte mir der zur Gründung des Hasselbach-Graßmannschen Stipendium gebildete Ausschuß (s. Progr. d. vor. J. S. 58) die unter dem 6. November vollzogene, unter dem 25. bestätigte Stiftungsurkunde zu. Das gesammelte Capital beläuft sich auf volle 2000 Thlr., von denen 1700 Thlr. bei der hiesigen Kämmerei zu 4 pCt. jährlicher Zinsen vom 1. October 1852 an und innerhalb der nächsten 20 Jahre unkündbar, 300 Thlr. bei der Pomm. Provinzial-Zuckersiederei hierselbst zu 5 pCt. j. Z. vom 1. November des nämlichen Jahres an, belegt sind. Die darüber lautenden Schulddocumente befinden sich in meinen Händen. Nach den Hauptbestimmungen der Urkunde wird das Universitäts-Stipendium an einen bedürftigen und in jeder Beziehung würdigen Schüler unsers Gymnasium, der das

Abiturienten=Examen bei demselben bestanden und bis dahin die Anstalt wenigstens 2 Jahre hindurch besucht hat, in der Regel auf ein, unter Umständen aber auch auf ein zweites und drittes Jahr verliehen, sollen unter den Bewerbern bei vorhandener gleicher Qualification die jetzt lebenden Descendenten der Jubilare (die Mehrzahl schließt auch den verstorbenen Prof. Graßmann ein) den Vorzug haben, bleibt die Verwaltung der Stiftung und die Stipendien=verleihung mir allein ohne irgend eine fremde Einmischung auf Lebenszeit überlassen, die Ver=leihung dergestalt, daß dafür das Stipendium getheilt, und an zwei oder mehrere Zöglinge der Anstalt, jedoch mit mindestens 40 Thlr. jährlich vergeben werden kann, und geht nach dem Ableben des gegenwärtigen Collators Verwaltung und Verleihung, letztere nach entscheidender Stimmenmehrheit, an das Collegium sämmtlicher ordentlicher Lehrer der Anstalt über.

So ist denn zu meiner ungemeinen Freude für immerwährende Zeiten eine Stiftung in das Leben getreten, die manchem hülfsbedürftigen, von hier entlassenen Studirenden eine will=kommene förderliche Unterstützung auf seinem Studienwege wird angedeihen lassen. Dafür spreche ich allen, die sich durch Beitrag oder andere Thätigkeit dabei betheiligt haben, wieder=holentlich meinen innigsten Dank aus.

Unter dem 28. Februar benachrichtigte mich das Königl. Provinzial=Schulcollegium, daß dem Prof. D. Varges von dem Herrn Cultus=Minister ein Urlaub vom 1. April bis zum 1. October bewilligt sei unter der Bedingung, daß er mit Beibehaltung seines vollen Gehaltes die Kosten seiner Stellvertretung trage. Das Vicariat ist hiernach für das Sommersemester angeordnet worden.

Mit Ostern trat der Schulamtscandidat D. Ilberg in die durch oben erwähnte Trennung unsrer Quinta nothwendig gewordene neue Collaboratorstelle ein. Vortheilhafte Zeugnisse hatten ihn in dem Maaße empfohlen, daß unser Patronat die Wahl dafür auf ihn lenkte, und das Königl. Ministerium auf den Bericht der hiesigen Königl. Provinzialbehörde seine Anstellung genehm hielt mit der Vergünstigung, daß ihm die Zeit, während welcher er hier beschäftigt sei, auf sein erst mit Anfang d. J. begonnenes Probejahr angerechnet werden solle.

Zu gleicher Zeit schied der D. Beschmann aus seiner Hülfslehrerstelle an dem Gymna=sium, welchem er in mannigfacher Unterrichtsthätigkeit 4 Jahre lang, und zwar über die statu=tarische Frist hinaus, zu nützen treu bestrebt gewesen. Ihn ersetzte sofort der D. R. E. Volk=mann, der bereits einen Theil seines Probejahrs an der Lateinischen Schule des Hallischen Waisenhauses abgehalten hatte.

Das erledigte erste Lobedansche Stipendium ist von Ostern an auf 3 Jahre dem mit dem Maturitätszeugnisse von uns entlassenen H. A. J. Kugler bei seinem Abgange zur Academie, und das Kochsche dem in Berlin studirenden E. F. Lüschow von Johannis an auf 1 Jahr verliehen worden.

Die schon im Julius nach mehrjähriger Pause hier aufs neue zum Ausbruch gekommene, jetzt allmählig im Erlöschen begriffene Asiatische Cholera ist bisher, ohne Opfer zu fordern, an unserer Anstalt vorübergegangen, gleichwohl Ursache geworden, daß mehrere auswärtige Eltern ihre Kinder einstweilen unsern Klassen entzogen haben. Wir können eine solche Unterbrechung nur bedauern und nehmen davon Anlaß, daran zu erinnern, daß unsrer Anstalt nach längst bestehender Einrichtung ein Freiarzt, zur Zeit in der Person des Medicinalraths **D. Rhades**, angehört, der jedem unsrer Zöglinge, wer sie in Anspruch nimmt, unentgeltlich ärztliche Hülfe leistet.

Wenige Tage nach Beendigung unsrer Sommerferien unterwarf der Königl. Prov.-Schulrath Herr Wendt unsre Anstalt einer abermaligen Revision, die ihn vom 11. August an eine Woche hindurch beschäftigte.

Unser sehr verehrliche, ungenannte Jugendfreund hat mit einem Schreiben vom 6. September seine nicht ermüdende Mildthätigkeit durch eine Gabe von 60 Thlrn. zur Unterstützung ärmerer und würdiger Schüler wiederum bewährt und mich dadurch wiederum zu größtem Danke verpflichtet.

Die Gymnasialbibliothek erhielt einen Zuwachs durch folgende sehr dankenswerthe Geschenke des Königl. Cultus-Ministerium: Lepsius Denkmäler aus Aegypten und Aethiopien. Lief. 5—41 mit den dazu gehörigen Tafeln ꝛc., Lassen's Indische Alterthumskunde B. 2 Abth. 2, v. Spruner's histor. geopraph. Atlas Lief. 15, Ternite's Wandgemälde aus Herculanum und Pompeji H. 10, Braun's Cäcilia Jahrg. 1, H. 3—6, Haupt's Zeitschrift für Deutsches Alterthum B. 9 H. 2, Gerhard's Archäologische Zeitung Jahrg. 10, Pisanski's Preußische Litterar-Geschichte Th. 2, Rheinisches Museum für Philologie B. 8, Germaniens Völkerstimmen von Firmenich Lief. 16, 17; wozu noch gekommen durch das Königl. Marienstifts-Curatorium hierselbst **Monumenta Germanicae historica** von Pertz, **T. XII.**

Als Prämien wurden auf unserm letzten Redeacte ertheilt den Abiturienten

Aug. Joh. Carl Hering Geschichte des Röm. Rechts von Walther. 2 Bde. 8.

Franz Aug. Friedr. Wegener **Novum Testamentum Graecae et Lat. rec. Car. Lachmann.** 2 Bde. 8.

Theod. Aug. Phil. Georg Alex. Heinze **Q. Horatius Flaccus rec. Jo. Casp. Orellius ed. maj.** 2 Bde. 8.

den zurückbleibenden Primanern

Carl Heinr. Franz Wellmann Vorträge über Röm. Geschichte von Niebuhr. 3 Bde. 8.

Herm. Adolph Jul. Kugler **Oeuvres de Boileau.** 1 Bd. 8.

C.

Verordnungen der Behörden.

1. Verfügungen des Königl. Provinzialschul-Collegiums hierselbst vom 18. Dez., 29. Jan. und 9. Mai, wonach 3 Exemplare unsrer Programme mehr, als bisher, also im Ganzen 313 Exemplare einzureichen.

2. Ministerial-Verordnung vom 24. Febr., wonach hinfort jeder Versuch zu Täuschungen bei den schriftlichen Prüfungsarbeiten, oder bei der mündlichen Prüfung in der Art zu bestrafen, daß die Schüler oder fremden Maturitäts-Aspiranten, welche bei der Benutzung von unerlaubten Hülfsmitteln betroffen oder anderen zu einem Betruge behülflich gewesen sind, sofort von der Prüfung ausgeschlossen und bis auf den nächsten Prüfungstermin zurückgewiesen werden.
3. Verfügung des Königl. Provinzialschul-Collegiums vom 1. April auf höhere Anordnung, daß künftig den Aspiranten des Postdienstes Zeugnisse der Reife nur nach den für alle Examinanden geltenden Bestimmungen unter **Lit. A.** und **B.** §. 28 des Prüfungs-Reglements zu ertheilen und auszustellen seien.
4. Auf Befehl Sr. Majestät des Königs sollen außerordentliche Ereignisse und Vorfälle, welche sich auch im Geschäftskreise des Directors unsrer Lehranstalt zugetragen haben, sofern sie nach seinem Ermessen ein allgemeines Interesse erregen, unverzüglich und auf kürzestem Wege dem betheiligten Ressort-Minister angezeigt werden, damit dieser sie nach Umständen zur Allerhöchsten Kenntniß bringen könne; Abschrift des Berichtes ist gleichzeitig dem Königl. Provinzial-Schulcollegium einzureichen nach dessen Verfügung vom 11. April.
5. Das Königl. Provinzial-Schulcollegium genehmigt unter dem 12. April die Einführung der Aufgaben zum Uebersetzen in das Griechische von Fr. Francke in unsre Tertia und Secunda.
6. Dieselbe Behörde fordert in höherem Auftrage unter dem 31. Mai ausführlichen Bericht über die Pensa der verschiedenen Klassen für die Geschichte und den Religionsunterricht.

D.

Statistische Uebersicht.

Die Zahl unsrer Schüler betrug durchschnittlich 451. Ueber andre statistische Verhältnisse giebt die angehängte Tabelle Auskunft.

Zu Michaelis v. J. wurden folgende Abiturienten reif zur Universität entlassen:

1. Aug. Joh. Karl Hering, aus Marienwerder gebürtig, $2\frac{1}{2}$ Jahr in Prima, studirt in Göttingen Rechtswissenschaft,
2. Ernst Wilh. Manske, aus Malzmühl bei Czarnikow gebürtig, 1 Jahr in der Prima des Züllichauer Pädagogium, $1\frac{1}{2}$ Jahr in der des hiesigen Gymnasium, studirt in Breslau Rechtswissenschaft,
3. Franz Aug. Ludw. Wegener, aus Luckow bei Ueckermünde gebürtig, $2\frac{1}{2}$ Jahr in Prima, studirt in Bonn Theologie,

4. Karl Feodor Fahrenholz, aus Stargard in Hinterpommern gebürtig, 2½ Jahr in Prima, studirt in Berlin Arzneiwissenschaft,
5. Em. Joh. Kurowsky, aus Pasewalk gebürtig, 2½ Jahr in Prima, studirt in Berlin Arzneiwissenschaft,
6. Theod. Aug. Phil. Ge. Alex. Heinze, aus Sonnenberg bei Löcknitz gebürtig, 2½ Jahr in Prima, studirt in Greifswald Theologie und Philologie,
7. Herm. Karl Casp. Schultz, aus Stolzenburg bei Stettin gebürtig, 2½ Jahr in Prima, studirt in Halle Theologie,
8. Otto Karl Herm. Voß, aus Wollin auf der Insel Wollin gebürtig, 2½ Jahr in Prima, studirt in Halle Theologie,
9. Jul. Alex. Euchel, aus Stettin gebürtig, 2 Jahre in Prima, studirt in Bonn Rechtswissenschaft.

Ebenso wurden Ostern d. J. zur Universität entlassen:

1. Friedr. Joh. Franz Schultz, aus Cammin in Hinterpommern gebürtig, 3 Jahre in Prima, studirt in Leipzig Theologie,
2. Karl Friedr. Em. Hugo Borchert, aus Cammin in Hinterpommern gebürtig, 2½ Jahre in Prima, studirt in Bonn Rechtswissenschaft,
3. Friedr. Wilh. Jul. Dumstrey, aus Cammin in Hinterpommern gebürtig, 2½ Jahre in Prima, studirt in Breslau Theologie,
4. Alex. Dietr. Ernst Genz, aus Gollnow gebürtig, 2 Jahre in Prima, studirt in Berlin Rechts- und Cameralwissenschaft,
5. Gust. Hubert Hartmann, aus Stettin gebürtig, 2 Jahre in Prima, studirt in Bonn Rechts- und Cameralwissenschaft,
6. Herm. Joh. Adolph Kugler, aus Stettin gebürtig, 2 Jahre in Prima, studirt in Berlin Arzneiwissenschaft,
7. Em. Friedr. Lüschow, aus Pasewalk gebürtig, 2 Jahre in Prima, studirt in Berlin Theologie und Philologie.

Auf unserm diesmaligen Redeacte werden zwei Abiturienten und zwei zurückbleibende Oberprimaner über selbstgewählte und von ihnen bearbeitete Themen sprechen, nämlich:

1. Rud. Friedr. Ludw. Schmidt Lateinisch über die Gründe, warum dte Römer im Allgemeinen auf Griechische Philosophie keinen besonderen Werth legten,
2. Heinr. Ludw. Eugen Ramm Deutsch über die Metapher, ein Bild des Menschen,
3. Karl Friedr. Wilh. Metzel Französisch über die Verhältnisse Napoleons I. zur Römischen Curie,

4. Karl Heinr. Franz Wellmann Deutsch über Alexander den Großen und Napoleon I. in Charakter und geschichtlicher Bedeutung.

Der Redeübung folgt wie gewöhnlich die Abiturienten-Entlassung und Prämienvertheilung.

Zur Prüfung und Aufnahme von Schülern, die mit dem Beginne des bevorstehenden Wintersemesters das Gymnasium besuchen sollen, werde ich während der Ferienwoche vom 2. October an täglich in den Mittagsstunden nach 11 Uhr bereit sein.

Den Königl. Ober-Präsidenten von Pommern Herrn Baron Senfft von Pilsach, die Hochlöblichen Landes-Collegien und Militair-Behörden, die verehrten Curatoren und Patronen des Gymnasium, die Väter und Angehörigen unserer Zöglinge, so wie auch alle Gönner und Freunde unserer Anstalt lade ich hiermit ehrerbietigst und ergebenst ein, bei unsrer Schulfeierlichkeit uns ihre aufmunternde Gegenwart zu Theil werden zu lassen.

D. Hasselbach.

Tabellarische Übersicht der statistischen Verhältnisse des Gymnasium zu Stettin von Michaelis 18$\frac{52}{53}$.

Allgemeiner Lehrplan.

Lehrer.	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV a	IV b	V a	V b	VI
Director u. Prof. D. Hasselbach	12	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
Consistorialrath Mehring	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
Professor Giesebrecht	4	6	3	5	·	·	·	·	·	·	·
„ D. Schmidt	4	14	·	·	·	·	·	·	·	·	·
„ Hering	·	·	4	·	14	·	·	·	·	·	·
„ Graßmann	6	6	·	6	·	·	·	·	·	·	·
„ D. Varges[1])	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
Oberlehrer D. Friedländer	2	2	2	2	·	·	4	5	·	·	·
Musik-Director D. Löwe	·	·	·	·	·	·	1	1	2	2	2
Oberlehrer Calo	2	4	·	13	·	·	·	·	·	·	·
Gymnasiallehrer Stahr	·	·	·	·	6	·	·	·	·	·	11
„ D. Stahr	·	·	4	·	·	10	·	·	4	·	·
„ D. Rassow	·	·	9	6	·	·	·	2	·	·	·
Collaborator Balsam	·	·	6	·	4	4	·	5	2	·	·
„ Pitsch	·	·	·	·	·	18	5	·	·	·	·
„ D. Wendt	·	·	4	·	6	·	·	13	·	·	·
„ D. Ilberg	·	·	·	·	·	·	13	·	·	7	·
Hülfslehrer D. Beschmann[2])	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	6
„ Winkler	·	·	·	·	·	·	5	·	4	6	·
„ Bartholdy	·	·	·	·	·	·	·	·	10	2	·
„ Kern	·	·	·	·	·	·	·	·	3	10	·
„ D. Volkmann	·	·	·	·	·	·	·	2	2	·	8
Schreiblehrer Neukirch	·	·	·	·	·	·	2	2	3	3	3
Maler Most	·	·	·	·	·	·	2	2	2	2	2
	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32

Lehrfächer. Sprachen, Wissenschaften, Kunstfertigkeiten:	I	II	III	IV	V	VI
Lateinisch	8	9	10	8	8	8
Griechisch	6	6	6	5	·	·
Deutsch	2	3	3	3	4	4
Hebräisch	2	2	·	·	·	·
Französisch	2	2	2	2	2	·
Religion	2	2	2	2	2	2
Propädeutik	2	·	·	·	·	·
Mathematik	4	4	4	3	·	·
Raumlehre	·	·	·	·	·	1
Rechnen	·	·	·	·	4	4
Physik	2	2	·	·	·	·
Naturkunde	·	·	·	2	2	2
Geschichte u. Geographie	2	2	5	2	3	4
Gesang	·	·	·	1	2	2
Schreiben	·	·	·	2	3	3
Zeichnen	·	·	·	2	2	2
	32	32	32	32	32	32

[1]) War im Sommer beurlaubt.

[2]) War als Stellvertreter beschäftigt.

Den englischen Unterricht ertheilte Herr Gymnasiallehrer Calo in 6 St. wöchentl. in drei Klassen.

Außer der gewöhnlichen Schulzeit lehrten

Herr Musik-Dir. D. Löwe vierstimmiges Singen in 2 Chorstunden wöchentl. für Mitglieder sämmtlicher Klassen.

„ D. Behm Naturwissenschaft für Mitglieder der Prima und Secunda in 2 St. wöchentl.

„ Most Zeichnen in 4 Stunden wöchentl. für Mitglieder der drei oberen Klassen.

„ Briet gymnastische Übungen zweimal in der Woche.

Zahl der Schüler

in	waren	aufgenommen	dahin versetzt	abgegangen	daraus vers.	gegenwärtig
I a	22	·	18	10	·	30
I b	35	2	28	6	28	38
II a	36	2	13	7	9	35
II b	38	3	13	8	10	36
III a	40	6	37	10	28	45
III b	55	5	59	12	50	57
IV a	47	8	14	9	21	39
IV b	48	3	23	11	27	36
V a	42	4	26	13	14	45
V b	31	4	9	2	5	35
VI	65	52	·	9	46	62
	459	89		97		451

Abiturienten

	Reif	Unreif	Summa	Universität		Facultät
Michaelis 1852.	9	·		Berlin	7	Jura und Cameralia. 6
				Bonn	2	Theologie. 5
						Medicin. 3
Ostern 1853.	7	·		Breslau	3	Theologie u. Philologie. 2
				Greifswald	1	
				Halle	2	
			16	Leipzig	1	

Bemerkungen.