

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET
TECHNOLOGICZNY

WYDZIAŁ INFORMATYKI

mgr inż. Bartłomiej Żyliński

**Numeryczna analiza przestrzennych zagadnień
kontaktowych za pomocą niestandardowych
elementów skończonych**

rozprawa doktorska

Promotor:
dr hab. inż. Ryszard Buczkowski, prof. AM

Szczecin, kwiecień 2011 r.

SPIS TREŚCI

1 CHARAKTERYSTYKA PRACY _____	10
1.1 Charakterystyka tematu i tezy pracy _____	10
1.2 Cel pracy i metodyka badań _____	10
1.3 Opis wykonanych prac badawczych _____	11
2 STANDARDOWE I NIESTANDARDOWE PRZESTRZENNE ELEMENTY SKOŃCZONE - CHARAKTERYSTYKA _____	12
2.1 Wstęp _____	12
2.2 Ekwiwalentne siły węzłowe _____	17
2.3 Wybór elementu skończonego w przypadku zagadnienia kontaktowego _____	19
2.4 Niestandardowe elementy skończone 14-, 21-, 28-węzłowe _____	21
2.5 Wektory zewnętrzne do powierzchni kontaktu _____	30
3 TESTY NUMERYCZNE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH _____	33
3.1 Testy elementów 14-, 21-, 28-węzłowych. _____	33
3.1.1 Belka prosta rozciągana i zginana _____	36
3.1.2 Belka rozciągana i zginana _____	40
3.1.3 Belka zakrzywiona _____	43
3.1.4 Belka skręcona _____	46
3.1.5 Płyta gruba _____	49
3.1.6 Powłoka gruba _____	51
3.1.7 Cylinder grubościenny _____	53
3.1.8 Patch test _____	55
3.1.9 Ocena rezultatów testów _____	60
3.2 Testowe przestrzenne zagadnienia kontaktowe _____	62
3.2.1 Stempel i półprzestrzeń sprężysta _____	64
3.2.2 Dwa cylindry złożone współosiowo _____	68
3.2.3 Kontakt dwóch belek jednostronnie utwierdzonych _____	72
3.2.4 Stempel na półprzestrzeni sprężystej z uwzględnieniem tarcia _____	77
3.2.5 Ocena rezultatów testów zagadnień kontaktowych _____	82
4 ANALIZA NUMERYCZNA POŁĄCZEŃ SPOCZYNKOWYCH _____	84
4.1 Wstęp _____	84
4.2.1 Charakterystyka połączenia _____	85
4.2.2 Analiza numeryczna połączenia skurczowego _____	90
4.3 Połączenie stożkowe _____	102
4.3.1 Charakterystyka połączenia _____	102
4.3.2 Połączenie stożkowe - analiza numeryczna _____	105
4.4 Połączenie wielowypustowe _____	109
4.5 Połączenie wielogarbowe _____	117

4.6 Połączenie kołnierzowe _____	124
5 OPROGRAMOWANIE _____	141
5.1 Wstęp _____	141
5.2 Program do obliczeń numerycznych _____	142
5.3 Postprocesor graficzny _____	144
5.3.1 Obsługiwane typy elementów skończonych _____	145
5.3.2 Prezentacja modelu _____	145
5.3.3 Tworzenie modelu, generacja siatki _____	148
5.3.4 Wizualizacja wyników _____	149
5.3.5 Wizualizacja naprężeń _____	153
6 INNE ZASTOSOWANIA NIESTANDARDOWYCH PRZESTRZENNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH _____	156
6.1 Pole elektryczne _____	156
6.2 Stacjonarny przepływ ciepła _____	161
7 PODSUMOWANIE _____	164
7.1 Wniosek ogólny _____	164
7.2 Wnioski szczegółowe _____	164
BIBLIOGRAFIA _____	167

SPIS TABEL

Tab. 2.1 Przemieszczenie swobodnego końca belki odniesione do wartości teoretycznej (obliczenia wykonano programem własnym) _____	14
Tab. 2.2 Przemieszczenie swobodnego końca belki odniesione do wartości teoretycznej (obliczenia wykonano systemem ABAQUS) _____	15
Tab. 2.3 Przemieszczenie swobodnego końca belki. Wartości w [mm] _____	16
Tab. 2.4 Przemieszczenie swobodnego końca belki odniesione do wartości teoretycznej (System ABAQUS. Zredukowane całkowanie) _____	16
Tab. 2.5 Przemieszczenie swobodnego końca belki z użyciem siatek zmodyfikowanych _____	17
Tab. 2.6 Wyniki dla elementu 14-węzłowego _____	25
Tab. 2.7 Wyniki dla elementu 21-węzłowego _____	25
Tab. 2.8 Wyniki dla elementu 28-węzłowego _____	26
Tab. 2.9 Wyniki elementy 14-węzłowe w kontakcie _____	27
Tab. 2.10 Wyniki elementy 21-węzłowe w kontakcie _____	28
Tab. 2.11 Wyniki elementy 28-węzłowe w kontakcie _____	29
Tab. 3.1 Porównanie wyników dla testu rozciągania 1a _____	38
Tab. 3.2 Porównanie wyników dla testu zginania 1b _____	39
Tab. 3.3 Wydłużenie swobodnego końca belki _____	41
Tab. 3.4 Ugięcie swobodnego końca belki _____	42
Tab. 3.5 Wydłużenie swobodnego końca belki (kierunek X), [cm] _____	44
Tab. 3.6 Przemieszczenie swobodnego końca belki (kierunek Z) _____	45
Tab. 3.7 Ugięcie swobodnego końca belki _____	47
Tab. 3.8 Ugięcie środkowego węzła dolnej powierzchni płyty [cm] _____	50
Tab. 3.9 Przemieszczenie środka dolnego brzegu otworu _____	52
Tab. 3.10 Przemieszczenie wewnętrznej powierzchni cylindra _____	55
Tab. 3.11 Naprężenia w środku elementów skończonych _____	58
Tab. 3.12 Symboliczne oznaczenie wielkości błędu _____	60
Tab. 3.13 Ocena rezultatów testów; A, B - test zaliczony _____	61
Tab. 3.14 Przemieszczenia swobodnego końca górnej belki [m] _____	74
Tab. 3.15 Przemieszczenia swobodnego końca górnej belki dla rosnących współczynników tarcia, w [m] _____	74
Tab. 3.16 Przemieszczenia swobodnego końca w [m] dla pojedynczej belki oraz dla belek pozostających w kontakcie - współczynnik tarcia $\mu = 100$ _____	75
Tab. 3.17 Porównanie wartości poślizgu dla elementów 21-, 28-węzłowych _____	79
Tab. 4.1 Wydłużenie i rozszerzenie wałka [mm] _____	94
Tab. 4.2 Wymiary połączeń wielowypustowych _____	111
Tab. 4.3 Porównanie naprężeń obliczonych i pomierzonych _____	134

SPIS RYSUNKÓW

Rys. 2.1 Standardowe sześciennie elementy 8- i 20-węzłowe	12
Rys. 2.2 Belka jednostronnie utwierdzona	13
Rys. 2.3 Siatki użyte dla zamodelowania belki	14
Rys. 2.4 Belka jednostronnie utwierdzona, siatka 24 x 8 x 1 (program autorski), elementy 8-węzłowe	15
Rys. 2.5 Zmodyfikowane siatki elementów 8-węzłowych	17
Rys. 2.5 Element skończony 8-węzłowy obciążony stałym ciśnieniem P_m	18
Rys. 2.6 Rozkład ekwiwalentnych (indywidualnych) pól powierzchni w węzłach	20
Rys. 2.7 Element 14-węzłowy	21
Rys. 2.8 Element 21-węzłowy	22
Rys. 2.9 (a) Element 28-węzłowy Rys. 2.9(b) ściana dolna $\zeta = -1$	24
Rys. 2.10 Pojedynczy element 14-węzłowy	24
Rys. 2.11 Pojedynczy element 21-węzłowy	25
Rys. 2.12 Pojedynczy element 28-węzłowy	26
Rys. 2.13 Elementy 14-węzłowe w kontakcie	27
Rys. 2.14 Elementy 21-węzłowe w kontakcie	28
Rys. 2.15 Elementy 28-węzłowe w kontakcie	29
Rys. 2.16 Elementy 14-, 21-, 28-węzłowe	30
Rys. 2.17 Wektor zewnętrzny w punkcie powierzchni ścianki elementu	30
Rys. 2.18 Uśrednianie wektorów normalnych	31
Rys. 2.19 Pole powierzchni związane z węzłem kontaktowym	32
Rys. 3.1 Przykładowe kształty nieregularnych elementów bryłowych	34
Rys. 3.2 Belka prosta jednostronnie utwierdzona	36
Rys. 3.3 Siatka 6 elementów równej długości	37
Rys. 3.4 Siatka 24 elementów równej długości	37
Rys. 3.5 Test rozciągania 1a. Model nieodkształcony (kolor biały), odkształcony (kolor czerwony), element typu CD3D28	39
Rys. 3.6 Test zginania 1b. Model nieodkształcony (kolor biały), odkształcony (kolor czerwony), element typu CD3D28	40
Rys. 3.7 Siatka elementów o kształtach regularnych	40
Rys. 3.8 Siatka elementów zniekształconych	41
Rys. 3.9 Siatka regularna, elementy 28-węzłowe	42
Rys. 3.10 Siatka nieregularna, elementy 28-węzłowe	43
Rys. 3.11 Belka zakrzywiona- wymiary	43
Rys. 3.12. Siatka elementów skończonych (pokazano elementy 28-węzłowe)	44
Rys. 3.13 Model odkształcony przypadek obciążenia 1	45
Rys. 3.14 Model odkształcony przypadek obciążenia 2	45
Rys. 3.15 Siatka 12 x 2 elementów	46
Rys. 3.16 Siatka 24 x 2 elementów	47
Rys. 3.17 Model nieodkształcony i odkształcony siatka 12 x 2 elementów CD3D28	48
Rys. 3.18 Model nieodkształcony i odkształcony siatka 24 x 2 elementów CD3D21	48
Rys. 3.19 Siatka 6x6 elementów	49
Rys. 3.20 Siatka 10x10 elementów	49

Rys. 3.21 Widok odkształconej płyty (elementy 28 węzłowe) _____	51
Rys. 3.22 Wycinek sfery z otworem _____	51
Rys. 3.23 Siatka 81 elementów skończonych (pokazano elementy 28-węzłowe) _____	52
Rys. 3.24 Model odkształcony (elementy 28-węzłowe) _____	53
Rys. 3.25 Cylinder grubościenny (model) _____	
Rys. 3.26 Siatka 5 elementów skończonych _____	54
Rys. 3.27 Elementy 14-węzłowe _____	56
Rys. 3.28 Elementy 21-węzłowe (środek, dół) w połączeniu z elementami 20-węzłowymi _____	57
Rys. 3.29 Elementy 28-węzłowe(dół i góra) w połączeniu z elementami 20-węzłowymi _____	57
Rys. 3.30 Naprężenia S11; elementy 21-węzłowe. Model odkształcony (współczynnik skali 100) - bez pokazanych dwóch elementów bocznych _____	60
Rys. 3.31 Stempel i podstawa sprężysta _____	64
Rys. 3.32 Siatka elementów skończonych _____	65
Rys. 3.33 Przemieszczenia stempla i podstawy sprężystej, elementy 21-węzłowe _____	66
Rys. 3.34 Rozkład ciśnienia kontaktowego; elementy 21-węzłowe _____	66
Rys. 3.35 Wykres rozkładu ciśnienia kontaktowego _____	67
Rys. 3.36 Poślizgi wzdłuż powierzchni kontaktowej _____	67
Rys. 3.37 Dwa cylindry złożone współosiowo _____	68
Rys. 3.38 Siatka elementów skończonych uwzględniająca symetrię zadania _____	69
Rys. 3.39 Elementy skończone w strefie kontaktu _____	69
Rys. 3.40 Cylindry nieodkształcone - siatka niebieska, odkształcone-siatka czerwona _____	70
Rys. 3.41 Cylindry - przemieszczenia _____	70
Rys. 3.42 Rozkład naprężeń w cylindrach _____	71
Rys. 3.43 Ciśnienie kontaktowe na powierzchni wewnętrznego cylindra, elementy 28-węzłowe _____	71
Rys. 3.44 Ciśnienie kontaktowe na powierzchni wewnętrznego cylindra, elementy 21-węzłowe _____	72
Rys. 3.45 Dwie belki proste jednostronnie całkowicie utwierdzone _____	72
Rys. 3.46 Siatka elementów skończonych _____	73
Rys. 3.47 Odkształcone belki; elementy 28-węzłowe _____	74
Rys. 3.48 Rozkład ciśnienia kontaktowego na powierzchni kontaktu; elementy 3D3D21 _____	75
Rys. 3.49 Odkształcone 2 belki w kontakcie, elementy 28-węzłowe, $\mu = 100$ _____	76
Rys. 3.50 Odkształcona pojedyncza belka, elementy 20-węzłowe; przemieszczenia [m] _____	76
Rys. 3.51 Stempel na półprzestrzeni sprężystej _____	77
Rys. 3.52 Siatka elementy 28-węzłowe Ilość elementów w kontakcie 18 (16 + 16) _____	78
Rys. 3.53 Siatka elementy 21-węzłowe. Ilość elementów w kontakcie 32 (16 + 16) _____	78
Rys. 3.54 Węzły powierzchni kontaktowej a) elementy 21-węzłowe, b) elementy 28-węzłowe _____	79
Rys. 3.55 Tarcie izotropowe, współczynnik tarcia $\mu = 0.04$, elementy 21-węzłowe _____	80
Rys. 3.56 Tarcie anizotropowe, współczynniki tarcia: $\mu_1 = 0.04$, $\mu_2 = 0.4$ _____	80
Rys. 3.57 Współczynnik tarcia $\mu = 0.4$, elementy 21-węzłowe _____	81
Rys. 3.58 Współczynnik tarcia $\mu = 0.6$, elementy 21-węzłowe _____	81
Rys. 3.59 Współczynnik tarcia $\mu = 0.7$, elementy 21-węzłowe _____	81

Rys. 3.60 Współczynnik tarcia $\mu = 0.75$, elementy 21-węzłowe	82
Rys. 4.1 Rozkład nacisku powierzchniowego oraz obciążenie wzdłużne i moment skręcający	86
Rys. 4.2 Odkształcenia stanowiące wcisk	87
Rys. 4.3 Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w złączu sprężystym wciskowym	89
Rys. 4.4 Analizowane połączenie walcowe skurczowe	90
Rys. 4.5 Model uwzględniający symetrię połączenia (A)	91
Rys. 4.6 Elementy w kontakcie w modelu uwzględniającym symetrię połączenia	92
Rys. 4.7 Model połączenia (B)	92
Rys. 4.8 Odkształcony model wałka i tulejki	93
Rys. 4.9 Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa]	94
Rys. 4.10 Wałek - naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa]	95
Rys. 4.11 Tulejka – naprężenia zredukowane Hubera-Misesa	95
Rys. 4.12 Rozkład ciśnienia kontaktowego, elementy 14-węzłowe	96
Rys. 4.13 Rozkład ciśnienia kontaktowego, elementy 21-węzłowe	96
Rys. 4.14 Rozkład ciśnienia kontaktowego, elementy 28-węzłowe	97
Rys. 4.15 Rozkład kontaktowych naprężeń stycznych	97
Rys. 4.16 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż wałka	98
Rys. 4.17 Skręcenie wałka. Obciążenie momentem 300 Nm	98
Rys. 4.18 Wartości przemieszczeń dla obciążenie momentem 300 Nm	99
Rys. 4.19 Poślizg w zależności od przyłożonego momentu	100
Rys. 4.20 Połączenie wariant I	101
Rys. 4.21 Połączenie wariant I. Rozkład naprężenia zredukowanych Hubera-Misesa [MPa]	101
Rys. 4.22 Połączenie wariant II	102
Rys. 4.23 Połączenie wariant II. Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa]	102
Rys. 4.24 Połączenie stożkowe bezpośrednie	103
Rys. 4.25 Układ sił działających w połączeniu stożkowym bezpośrednim	104
Rys. 4.26 Analizowane połączenie stożkowe	105
Rys. 4.27 Siatka elementów skończonych	106
Rys. 4.28 Elementy biorące udział w kontakcie	106
Rys. 4.29 Model odkształcony (kolor czerwony) i wyjściowy (kolor czarny)	107
Rys. 4.30 Wciskanie czopa w tulejkę. Przemieszczenia [mm]	107
Rys. 4.31 Elementy 21-węzłowe. Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa]	108
Rys. 4.32 Elementy 21-węzłowe. Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa], $\mu = 0.2$	108
Rys. 4.33 Elementy 21-węzłowe. Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa], $\mu = 0.4$	109
Rys. 4.34 Zarzysy wielowypustów	109
Rys. 4.35 Schemat przenoszenia obciążeń (moment obrotowy)	110
Rys. 4.36 Analizowane połączenie wielowypustowe	112
Rys. 4.37 Model MES połączenia wielowypustowego	113
Rys. 4.38 Siatka elementów piasty z kołnierzem	113
Rys. 4.39 Siatka elementów wałka	114

Rys. 4.40 Przesunięcia węzłów [mm]	115
Rys. 4.41 Odształcenie wałka, przesunięcia [mm]	115
Rys. 4.42 Rozkład naprężeń Hubera-Misesa [MPa]	116
Rys. 4.43 Rozkład zredukowanych naprężeń Hubera-Misesa w wałku [MPa]	116
Rys. 4.44 Rozkład zredukowanych naprężeń Hubera-Misesa w piąście i kołnierzu	117
Rys. 4.45 Kontur P3G (wg DIN 32711)	118
Rys. 4.46 Połączenie wielogarnkowe	119
Rys. 4.47 Model MES połączenia wielogarnkowego	120
Rys. 4.48 Elementy skończone w strefie kontaktu	121
Rys. 4.49 Model MES połączenia wielogarnkowego, elementy 14-węzłowe	121
Rys. 4.50 Całkowite przesunięcia [mm]	122
Rys. 4.51 Wałek. Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa]	123
Rys. 4.52 Kołnierz (z piastą).Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa]	123
Rys. 4.53 Odchodzenie piasty od wałka	124
Rys. 4.54 Połączenie kołnierzowe	125
Rys. 4.55. Model MES połączenia kołnierzowego	126
Rys. 4.56 Siatka elementów skończonych śruby i uszczelki	126
Rys. 4.57 Elementy w strefie kontaktu (kołnierz -uszczelka)	127
Rys. 4.58 Rozkład ciśnienia kontaktowego na uszczelce [MPa] , zacisk wstępny $F = 15\text{kN}$	129
Rys. 4.59 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż promienia uszczelki na jej krawędziach	129
Rys. 4.60 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż promienia uszczelki elementy elementów C3D28 oraz C3D21	130
Rys. 4.61 Wartości ciśnień kontaktowych w zależności od obciążenia roboczego	130
Rys. 4.62 Rozkład ciśnienia kontaktowego dla obciążenia roboczego 16 MPa	131
Rys. 4.63 Siła w śrubie w zależności od obciążenia roboczego	131
Rys. 4.64 Siła w śrubie oraz przeciek, wartości uzyskane doświadczalnie	132
Rys. 4.65 Odształcony model dla ciśnienia 16 MPa powodującego przeciek	132
Rys. 4.66 Zginana śruba	133
Rys. 4.67 Wartość naprężeń Misesa oraz miejsce pomiaru	133
Rys. 4.68 Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera- Misesa dla kołnierza [MPa]	134
Rys. 4.69 Wartość ciśnienia kontaktowego na uszczelce 3.5 mm $F = 15\text{ kN}$	135
Rys. 4.70 Wartość ciśnienia kontaktowego na uszczelce 5 mm $F = 10\text{ kN}$	136
Rys. 4.71 Wartości ciśnień kontaktowych w zależności od obciążenia roboczego przy zacisku wstępnym $F = 10\text{ kN}$ (grubość uszczelki 5 mm)	136
Rys. 4.72 Ciśnienie kontaktowe na uszczelce w zależności od siły zacisku wstępnego	137
Rys. 4.73 Siła w śrubie w zależności od ciśnienia roboczego	137
Rys. 4.74 Wykres obciążenie - odształcenie (diagram Roetschera)	138
Rys. 4.75 Charakterystyka obciążenie - odształcenie dla śruby	139
Rys. 4.76 Wykres odształcenie - przesunięcie dla modelu przestrzennego	140
Rys. 5.1 Okna dialogowe programu wykonującego obliczenia (płaskie zagadnienie rozkładu pola elektrycznego)	143
Rys. 5.2 Program postprocesora graficznego	145
Rys. 5.3 Typy elementów	145
Rys. 5.4 Model wyświetlany w postaci węzłów	146

Rys. 5.4 Model siatkowe (ang. wireframe) _____	146
Rys. 5.6 Model z ukrytymi liniami i powierzchniami _____	146
Rys. 5.7. Tworzenie warstwy _____	147
Rys. 5.8. Zarządzanie wyświetlaniem warstw _____	147
Rys. 5.9 Model z włączonymi warstwami wałka i tulejki _____	148
Rys. 5.10 Generacja siatki elementów na płaszczyźnie _____	149
Rys. 5.11 Generacja siatki elementów w zadanej objętości _____	149
Rys. 5.12 Wybór rezultatów obliczeń _____	150
Rys. 5.13 Widok modelu. Całkowitych przemieszczeń w węzłach przeskalowane o współczynnik 30 _____	151
Rys. 5.14 Wartości całkowitego przemieszczenia węzłów _____	151
Rys. 5.15 Przedstawienie wyników rozkładu potencjału pola elektrycznego _____	152
Rys. 5.16 Wartości całkowitego przemieszczenia węzłów _____	152
Rys. 5.17 Wartości całkowitego przemieszczenia węzłów, użycie 4 kolorów _____	153
Rys. 5.18 Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa. Metoda I _____	154
Rys. 5.19 Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa. Metoda II _____	155
Rys. 5.20 Pogram FEMAP (po lewej) oraz program własny (po prawej) _____	155
Rys. 6.1 Siatka elementów skończonych _____	158
Rys. 6.2 Umieszczenie szczeliny _____	158
Rys. 6.3 Przestrzenny model z użyciem elementów 28-węzłowych przy dwóch krawędziach płytki _____	159
Rys. 6.4 Rozkład potencjału. Model płaski bez szczeliny _____	159
Rys. 6.5 Rozkład potencjału. Model przestrzenny (bez szczeliny) z wykorzystaniem elementów 28-węzłowych na brzegu _____	160
Rys. 6.6 Rozkład temperatury w ścianie walcowej _____	162
Rys. 6.7 Rozkład temperatur wzdłuż promienia ścianki walcowej _____	163

ROZDZIAŁ 1

CHARAKTERYSTYKA PRACY

1.1 Charakterystyka tematu i tezy pracy

Punktem wyjścia do realizacji zadań zawartych w rozprawie są następujące tezy:

- (i) elementy bryłowe rodziny serendipowskiej nie nadają się do analizy przestrzennych zagadnień kontaktowych,
- (ii) w zastosowaniu do zagadnień mechaniki, geomechaniki, akustyki oraz obliczeń pola elektro-magnetycznego jest możliwe definiowanie różnego rodzaju elementów niestandardowych pozwalających na rozszerzenie zakresu stosowalności metody elementu skończonego,
- (iii) jakościową i ilościową poprawność modelu matematycznego do opisu zjawisk fizycznych dotyczących przestrzennych zagadnień kontaktowych z więzami jednostronnymi gwarantują niestandardowe elementy skończone o specjalnych funkcjach kształtu.

W pracy podano funkcje kształtu specjalnych niestandardowych 14-, 21- i 28-węzłowych izoparametrycznych bryłowych (przestrzennych) elementów skończonych.

Przez zastosowanie specjalnych bryłowych elementów skończonych przedstawiono sposób łączenia elementów o różnej liczbie węzłów w ich sąsiedztwie (3D-transition elements). Ma to zasadnicze znaczenie dla zagęszczania siatki elementów skończonych w strefie kontaktu bez potrzeby nadmiernego zwiększania ilości równań opisujących rozwiązywany problem.

Niestandardowe elementy skończone zostały zaimplementowane do komercyjnego systemu ABAQUS jako elementy użytkownika (user-elements) i użyte do przybliżonego rozwiązania szeregu podstawowych problemów mechaniki, termomechaniki i elektrotechniki.

1.2 Cel pracy i metodyka badań

Celem pracy było zastosowanie specjalnych izoparametrycznych przestrzennych elementów skończonych głównie do numerycznej analizy zagadnień mechaniki kontaktu (analiza szerokiej klasy spoczynkowych połączeń elementów maszyn), ale również do obliczeń rozkładu pola elektrycznego i modelowania pól temperatury.

Celem aplikacyjnym było utworzenie, przy wykorzystaniu metody elementów skończonych, oryginalnego oprogramowania komputerowego (Fortran 90) do obliczeń omawianych zagadnień, łącznie z wizualizacją wyników numerycznych (elementy grafiki komputerowej - pre- i postprocessing w języku C++, OpenGL).

Do udowodnienia tez wykorzystano izoparametryczną koncepcję metody elementów skończonych w ujęciu przemieszczeniowym.

1.3 Opis wykonanych prac badawczych

Zaimplementowano 14-, 21- i 28-węzłowe elementy bryłowe i przeprowadzono obliczenia wytrzymałościowe następujących spoczynkowych połączeń elementów maszyn:

- połączenia skurczowe i stożkowe (analityczne wzory Lamégo pełniły rolę modelu porównawczego),
- połączenia stożkowe,
- połączenia wielowypustowe,
- połączenia wielogarbowe (P3G, wg normy DIN 32711),
- połączenia kołnierzowe (model Rötchera posłużył jako model porównawczy).

W zastosowaniu do obliczeń pola elektro-magnetycznego i przepływów ciepła elementy niestandardowe z powodzeniem pozwoliły na rozszerzenie zakresu stosowalności prezentowanej metody. W pracy podano również wybrane przykłady obliczeń innych zagadnień, nie związanych tutaj z mechaniką kontaktu, takich jak: (i) stacjonarny przepływ ciepła (rozkład pola temperatur w wydrążonym walcu), (ii) skalarny rozkład potencjału pola elektrycznego na brzegu uszkodzonej płaskiej płytki z naciętą szczeliną i płytki nieuszkodzonej (bez szczeliny).

ROZDZIAŁ 2

STANDARDOWE I NIESTANDARDOWE PRZESTRZENNE ELEMENTY SKOŃCZONE - CHARAKTERYSTYKA

2.1 Wstęp

Przestrzenne (albo bryłowe) elementy skończone ze względu na sposoby uzyskiwania funkcji kształtu można podzielić na dwie rodziny:

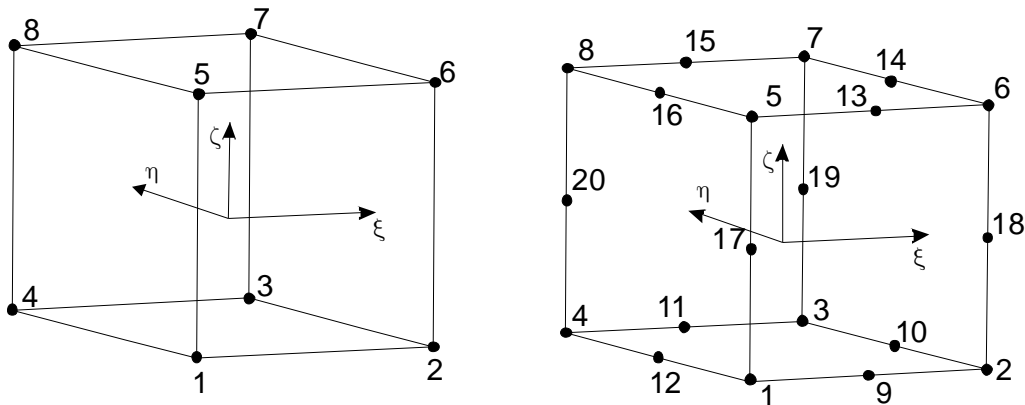
- (i) opartą na interpolacji wielomianami Lagrange'a (w przypadku elementów przestrzennych jest to iloczyn trzech wielomianów Lagrange'a),
- (ii) rodzina serendipowska.

W powszechnym użyciu, jako podstawowe elementy bibliotek komercyjnych systemów opartych na metodzie elementu skończonego (MES), są następujące dwa elementy skończone:

- element 8-węzłowy o liniowych funkcjach kształtu z rodziny Lagrange'a (Rys. 1.1),
- element 20-węzłowy o kwadratowych funkcjach kształtu z rodziny serendipowskiej (Rys. 2.1).

Elementy z wyższymi wielomianami interpolacyjnymi funkcji kształtu (trzeci, czwarty lub wyższy stopień wielomianów interpolacyjnych) z reguły nie znajdują zastosowania w bibliotekach wiodących systemów MES, takich jak: ABAQUS, NASTRAN, ANSYS, ADINA, COSMOS, MARC i innych.

Jednakże, niektóre systemy, np. ABAQUS, używają 27-węzłowych elementów z rodziny Lagrange'a. Element ten nie jest jednak w powszechnym użyciu, inaczej niż klasyczny (standardowy) element 20-węzłowy typu Serendipa. Pewne trudności może sprawiać próba połączenia w jednym modelu elementu 27-węzłowego z elementami 20-węzłowymi. W tym celu, ale również w celu zagęszczania siatek skończenie elementowych w wybranych obszarach singularnych, w systemie ABAQUS używa się specjalnych elementów przejściowych (*ang.* transition elements).



Rys. 2.1 Standardowe sześciennie elementy 8- i 20-węzłowe

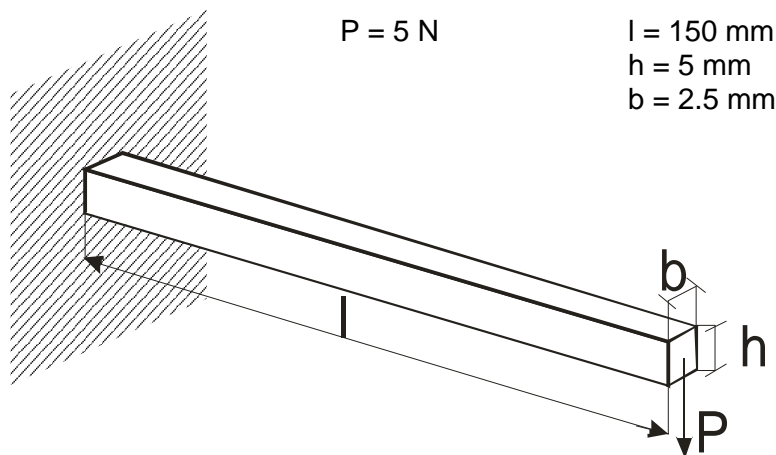
Standardowe elementy skończone należące do wyżej wymienionych rodzin nie zawsze stanowią właściwe narzędzie do modelowania rzeczywistych zjawisk fizycznych, zwłaszcza z dziedziny mechaniki ciała stałego, a otrzymywane wyniki mogą znacznie odbiegać od rzeczywistych wartości (np. pomierzonych doświadczalnie) oraz wyników otrzymanych z rozwiązań teoretycznych.

Klasycznym przykładem jest tutaj prosty test belki zginanej [53] zamodelowanej elementami 8-węzłowymi z funkcjami kształtu pierwszego i elementami 20-węzłowymi z funkcjami drugiego rzędu.

Przyjęto, że belka jest jednostronnie utwierdzona (Rys. 2.2) i ma następujące wymiary: długość $l = 150 \text{ mm}$, szerokość $b = 2,5 \text{ mm}$, wysokość $h = 5 \text{ mm}$. Jako stałe materiałowe przyjęto: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0$. (dane liczbowe zaczerpnięto z przykładu testowego od lat zamieszczanego we wszystkich wydaniach podręcznika użytkownika Getting Started with ABAQUS, p. [53], rozdział 4.1 *Element formulation and integration*). Belkę obciążono w swobodnym końcu siłą $P = 5 \text{ N}$ jak pokazano na Rys. 2.2.

Zgodnie z elementarną teorią belek cienkich, przemieszczenie swobodnego końca wynosi:

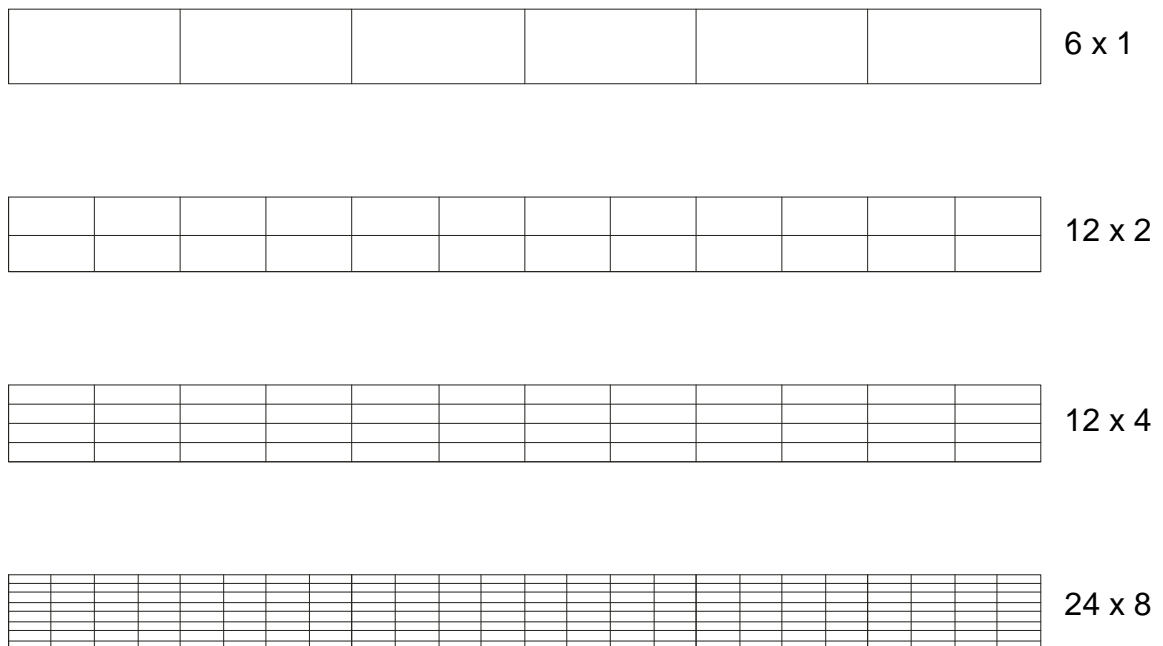
$$u = \frac{Pl^3}{3EI}$$



Rys. 2.2 Belka jednostronnie utwierdzona

Zgodnie z tym wzorem, przy uwzględnieniu powyższych danych liczbowych, teoretyczna wartość przemieszczenia jest równa $u = 3.09 \text{ mm}$.

Przemieszczenie swobodnego końca belki zamodelowanej przy użyciu przestrzennych elementów skończonych powinno być zbliżone do tej wartości teoretycznej. W tym celu sporządzono szereg różnych siatek MES pokazanych na Rys. 2.3. Podkreślimy, że we wszystkich przypadkach na szerokości belki rozpięto jeden element skończony.



Rys. 2.3 Siatki użyte dla zamodelowania belki

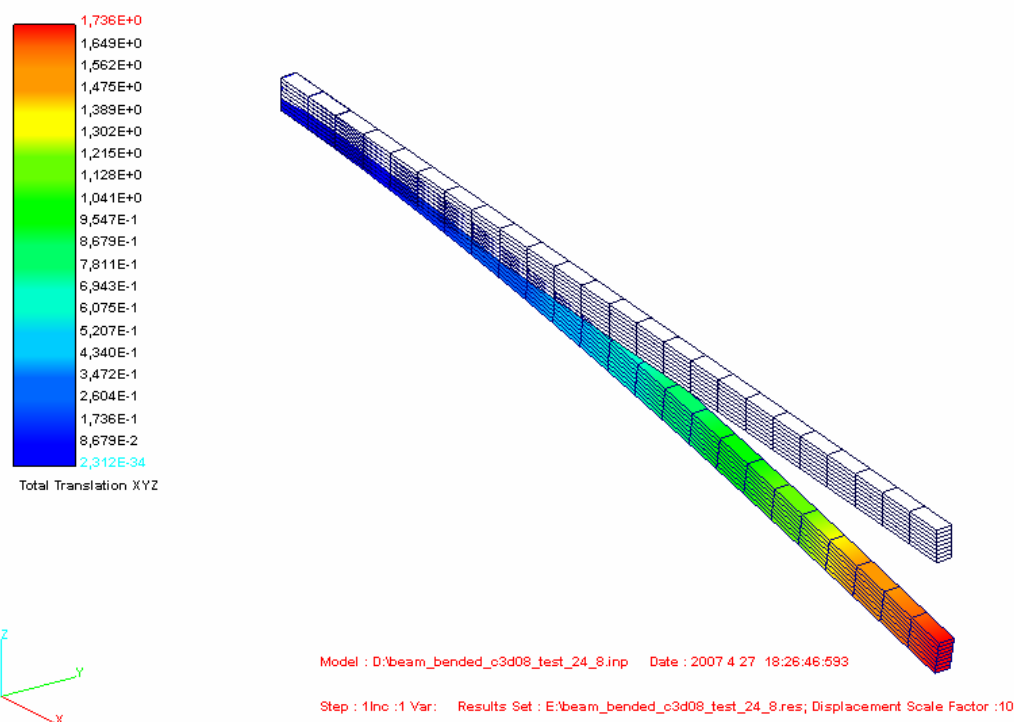
Uzyskane wyniki (program własny) otrzymane z użyciem elementów 8-węzłowych (z pełnym całkowaniem, tzn. $2 \times 2 \times 2$) pokazano w Tab. 2.1.

Pokazane bezwymiarowe wyniki są stosunkiem wartości przemieszczenia swobodnego końca belki otrzymanych MES do wartości teoretycznej 3.09 mm.

Tab. 2.1 Znormalizowane przemieszczenie swobodnego końca belki odniesione do wartości teoretycznej $u = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}$. Wartość 1.000 oznacza wynik 3.09 mm (obliczenia MES programem autorskim)

ELEMENT	SIATKA			
	6 x 1	12 x 2	12 x 4	24 x 8
8-węzłowy	0.074	0.242	0.242	0.561

Widok odkształconej belki (siatka $24 \times 8 \times 1$, zgodnie z Rys. 2.2) na podstawie obliczeń programem autorskim pokazano na Rys. 2.4.



Rys. 2.4 Belka jednostronnie utwierdzona, siatka 24x8x1 (program autorski), elementy 8-węzłowe

Wyniki uzyskane przy wykorzystaniu systemu ABAQUS z użyciem elementów 8-węzłowych oraz 20-węzłowych (z zastosowaniem pełnego całkowania macierzy sztywności elementu), w zależności od użytej siatki MES, przedstawiono w Tab. 2.2.

Tab. 2.2 Znormalizowane przemieszczenie swobodnego końca belki odniesione do wartości teoretycznej. Wartość 1.0 oznacza wynik 3.09 mm (obliczenia wykonano systemem ABAQUS)

ELEMENT	SIATKA			
	6 x 1	12 x 2	12 x 4	24 x 8
8-węzłowy	0.077	0.248	0.243	0.563
20-węzłowy	0.944	1.000	1.000	1.000

Porównanie wyników uzyskanych najbardziej znanymi komercyjnymi systemami MES, takimi jak: ABAQUS, MSC MARC, ANSYS, MSC NASTRAN oraz programem własnym (we wszystkich przypadkach zastosowano elementy 8-węzłowe) przedstawiono w Tab. 2.3.

Tab. 2.3 Przemieszczenie swobodnego końca belki, elementy 8-węzłowe; wartości w [mm]

PROGRAM	SIATKA			
	6 x 1	12 x 2	12 x 4	24 x 8
Obliczenia własne	0.2303	0.7501	0.7502	1.735
ABAQUS	0.2366	0.766	0.754	1.740
MSC MARC	0.2302	0.750	0.750	1.735
ANSYS	0.2300	0.750	0.750	1.736
MSC NASTRAN	Uwaga: w systemie celowo nie zaimplementowano bryłowego elementu 8-węzłowego (w instrukcji obsługi użytkownika nie zamieszczono żadnego komentarza na ten temat)			

Wyniki pokazują, że elementy 8-węzłowe nawet dla gęstej siatki (24x8x1) nie zapewniają dobrych wyników, a otrzymane wartości przemieszczenia swobodnego końca belki stanowią 56 % wartości teoretycznej. Natomiast, elementy 20-węzłowe już dla rzadkiej siatki (6x1x1) zapewniają bardzo dobrą zgodność wyników numerycznych z wynikami teoretycznymi.

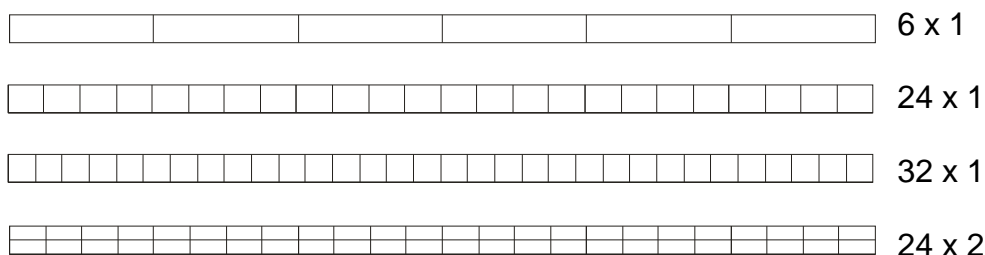
W celu polepszenia uzyskiwanych wyników numerycznych, istnieją pewne metody modyfikacji macierzy sztywności standardowych elementów, w tym elementów 8-węzłowych z liniowymi funkcjami kształtu. Jedną z najprostszych, a zarazem najlepszych technik jest użycie zredukowanego lub selektywnego całkowania.

W przypadku zastosowania zredukowanego całkowania i użycia nie za rzadkiej siatki wyniki z użyciem elementów 8-węzłowych są zdecydowanie bliższe wartościom teoretycznym – Tab. 2.4 zaczerpnięta z pracy [53].

Tab. 2.4 Przemieszczenie swobodnego końca belki odniesione do wartości teoretycznej (System ABAQUS. Zredukowane całkowanie [53])

ELEMENT	SIATKA			
	6 x 1	12 x 2	12 x 4	24 x 8
8-węzłowy	70.1	1.323	1.063	1.015
20-węzłowy	1.00	1.000	1.000	1.000

W analizowanym przykładzie, nawet w przypadku zagęszczonej siatki, stosunek długości do wysokości elementu pozostawał stosunkowo duży. Jest jasne, że klasyczny element 8-węzłowy otrzymamy przez pełne całkowanie (2x2x2) jest przesztyniony i nie jest w stanie prawidłowo oddać charakteru zginanej belki. Możemy jednak dokonać zręcznego zagęszczenia siatki MES w taki sposób, aby elementy skończone miały bardziej regularny kształt (stosunek długości do wysokości możliwie zbliżony do jedności, Rys 2.5).



Rys. 2.5 Zmodyfikowane siatki elementów 8-węzłowych

Przy takim podziale siatki MES, uzyskane wyniki (Tab. 2.5) zbliżyły się do wyników teoretycznych, nawet przy mniejszej liczbie użytych elementów 8-węzłowych.

Tab. 2.5 Przemieszczenie swobodnego końca belki z użyciem siatek zmodyfikowanych

SYSTEM ABAQUS (ELEMENT C3D8)	SIATKA			
	6 x 1	24 x 1	32 x 1	48 x 2
Przemieszczenie [mm]	-0.2366	-2.353	-3.185	-2.795
Bezwymiarowe przemieszczenie	0.077	0.761	1.030	0.904

Powyższy prosty przykład pokazuje, że chcąc uzyskać wiarygodne wyniki metodą elementów skończonych należy zdawać sobie sprawę, jak w wielkim stopniu wyniki mogą zależeć od właściwego doboru typu elementu, użytej siatki, sposobu całkowania numerycznego czy regularnego kształtu elementu skończonego.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że elementy 20-węzłowe o kwadratowych funkcjach kształtu wydają się być najlepszym wyborem. Niestety elementy 20-węzłowe, jak pokazano później, nie nadają się do rozwiązywania przestrzennych zagadnień kontaktowych. Aby uzyskać pełniejszą wiedzę o zachowaniu elementów skończonych, właściwym wydaje się przeprowadzanie dalszych prostych testów numerycznych podobnych do powyższego. Jak najbardziej sensownym wydaje się więc stosowanie specjalnych elementów skończonych w przypadku zagadnień, w których standardowe elementy skończone zawodzą.

2.2 Ekwiwalentne siły węzłowe

O tym, czy dany element skończony nadaje się do zastosowania w przestrzennych zagadnieniach kontaktowych przeprowadza się test na pojedynczy element skończony. Realizację tego testu omówimy na przykładzie najprostszego elementu bryłowego, mianowicie 8-węzłowego elementu skończonego o liniowych funkcjach kształtu.

Element ten obciążamy na powierzchni górnej ścianki stałym ciśnieniem p_m , jak pokazano na Rys. 2.5.

W celu wyznaczenia nieznanymi ekwiwalentnymi sił węzłowych, porównujemy pracę wirtualną (przygotowaną) pochodzącą od tych sił z pracą pochodzącą od jednorodnego ciśnienia działającego na powierzchni kontaktu A , zatem

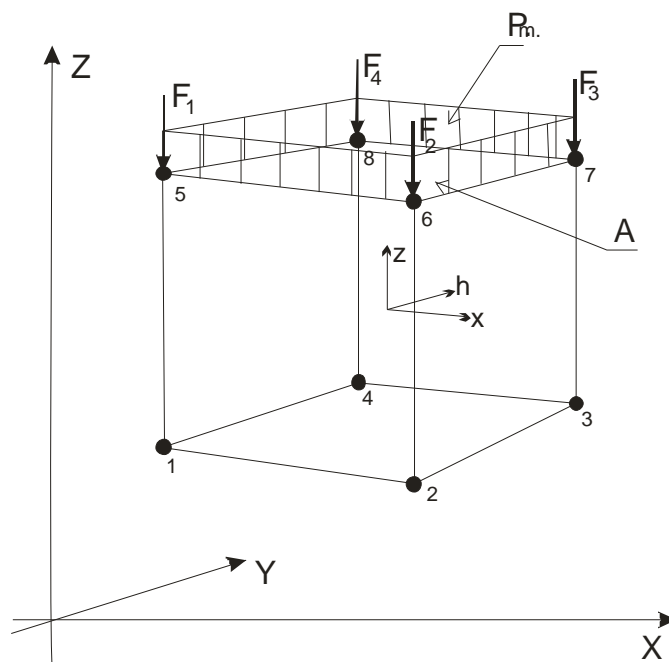
$$F_i \delta_i = \iint_A p_m dA \cdot \delta_c \quad (2.1)$$

gdzie: p_m oznacza jednorodne ciśnienie. Przez δ_c definiujemy przemieszczenie wirtualne punktu leżącego w geometrycznym środku powierzchni kontaktu, które będziemy interpolować zgodnie z konwencją przyjętą w MES, tak więc

$$\delta_c = \sum_i N_i \delta_i \quad (2.2)$$

Zgodnie z (2.1), przy uwzględnieniu (2.2), mamy

$$F_i \delta_i = \iint_A p_m \sum_i N_i \delta_i dA \quad (2.3)$$



Rys. 2.5 Element skończony 8-węzłowy obciążony stałym ciśnieniem p_m

Ponieważ przemieszczenia wirtualne są arbitralne, z porównania obu stron równania (2.3) wynikają wzory na ekwiwalentne siły węzłowe

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \cdot p_m \cdot dx dy \quad (2.4)$$

lub w zapisie indeksowym

$$F_i = \iint_A N_i \cdot p_m \cdot dx dy, \quad (2.5)$$

gdzie N_i są funkcjami kształtu elementy skończonego, tutaj elementu 8-węzłowego.

Z założenia, że ciśnienie jest stałe, z równania (2.5) otrzymujemy ostatecznie

$$F_i = P_m \cdot \iint_A N_i \cdot dxdy = P_m \cdot A_i, \quad (2.6)$$

gdzie ekwiwalentne (indywidualne) pola powierzchni A_i przyporządkowane odpowiednim węzłom wynoszą:

$$A_i = \iint_A N_i \cdot dxdy \quad (2.7)$$

W przypadku zastosowania elementów izoparametrycznych przejście z układu globalnego (x, y, z) do układu lokalnego (ξ, η, ζ) prowadzi do następujących wyrażeń na ekwiwalentne siły węzłowe

$$F_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \cdot P_m \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right\} \cdot d\xi d\eta \quad (2.8)$$

i ekwiwalentne (indywidualne) węzłowe pola powierzchni

$$A_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \cdot \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right\} \cdot d\xi d\eta \quad (2.9)$$

Składniki w kolumnach wyrażeń (2.8) i (2.9) oznaczają długość lub moduł iloczynu wektorowego rozpiętego na wektorach stycznych w danym punkcie zakrzywionej powierzchni kontaktowej. Inaczej wyrażenia te przedstawiają dwa wiersze jacobianu przekształcenia ze współrzędnych globalnych (x, y, z) na współrzędne naturalne (ξ, η, ζ) .

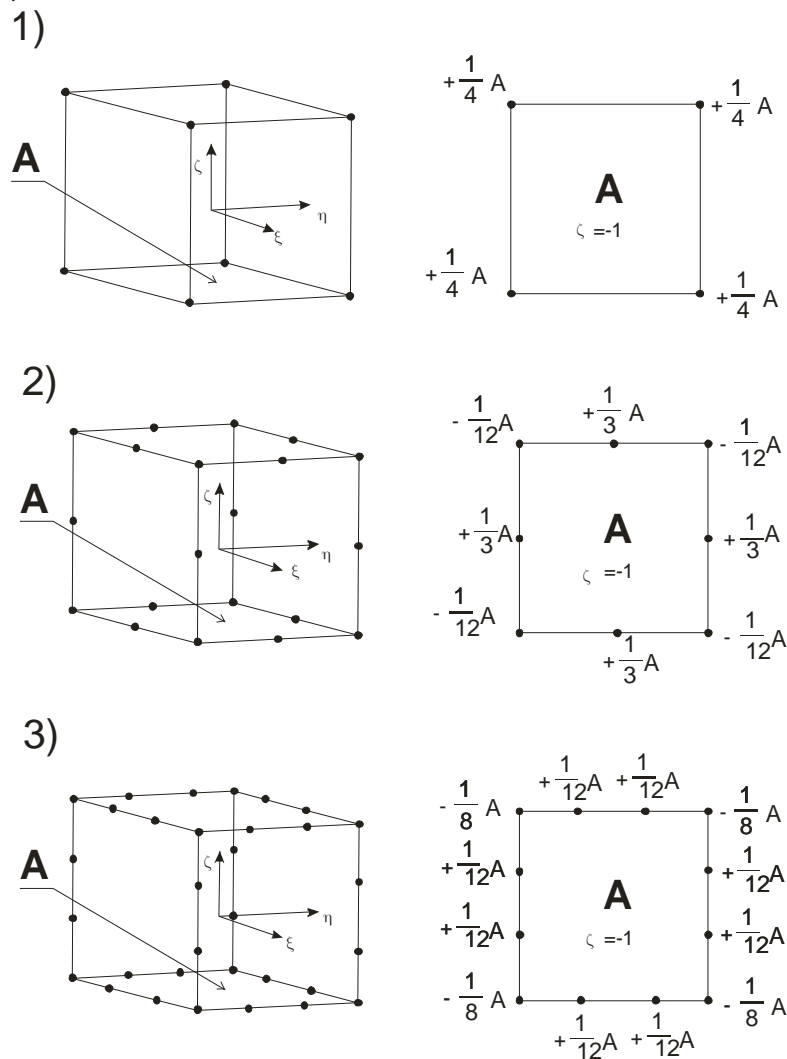
Ostatnie dwie całki mogą być obliczone numerycznie (np. przy użyciu kwadratur Gaussa) w układzie lokalnym, przy czym funkcje kształtu N_i odpowiednio modyfikujemy przez podstawienie właściwej współrzędnej naturalnej w wyrażeniach na funkcje kształtu; w przypadku ścianki dolnej przestrzennego elementu skończonego, $\zeta = -1$ lub $\zeta = +1$ w przypadku ścianki górnej.

2.3 Wybór elementu skończonego w przypadku zagadnienia kontaktowego

Przyjmując stałe ciśnienie kontaktowe p_m , ekwiwalentne siły węzłowe F_i muszą być siłami ściskającymi (na użytek pracy przyjęto konwencję, że znak dodatni oznacza ściskanie). Takie założenie pociąga za sobą również dodatnie wartości indywidualnych powierzchni kontaktowych (inaczej powierzchni ułamkowych) przyporządkowanych węzłom kontaktowym, A_i .

Elementy skończone używane do modelowania zagadnień kontaktowych muszą, więc spełniać warunek kontaktu fizycznego, to jest, brak zerowych lub ujemnych wartości ekwiwalentnych sił w węzłach leżących na powierzchni kontaktu.

W przypadku przestrzennych elementów 8-węzłowych (biliniowe funkcje kształtu, rodzina Lagrange'a) oraz 20-węzłowych (kwadratowe funkcje kształtu) i 32-węzłowych (kubiczne funkcje kształtu), dwie ostatnie z rodziny serendipowskiej, rozkłady indywidualnych pól powierzchni A_i przyporządkowane węzłom pokazano na Rys. 2.6.



Rys. 2.6 Rozkład ekwiwalentnych (indywidualnych) pól powierzchni w węzłach
1) element 8-węzłowy, 2) element 20-węzłowy, 3) element 32-węzłowy

Z przedstawionych elementów tylko element 8-węzłowy spełnia podane wcześniej warunki kontaktu fizycznego. Podkreślimy jednakże, że element 27-węzłowy z rodziny Lagrange'a (nie pokazany tutaj) również spełnia powyższe warunki. Stosowanie jednakże

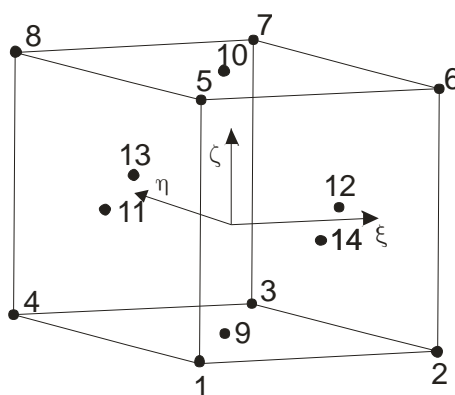
tego elementu w połączeniu z innymi elementami, np. ze standardowymi 20-węzłowymi elementami z rodziny Serendipa, może sprawiać pewne kłopoty w przygotowywaniu siatek skończenie elementowych. Korzystnym rozwiązaniem byłoby użycie takich elementów, które w strefie kontaktu spełniałyby: (i) warunek kontaktu fizycznego, (ii) warunek swobodnego przygotowywania siatek, zwłaszcza w pobliżu punktów singularnych i strefie kontaktu.

Nie zapominajmy o koniecznym warunku geometrycznej zgodności graniczących ze sobą elementów skończonych, w których funkcje kształtu muszą spełniać kryterium ciągłości (lub kryterium wzajemnej zgodności).

2.4 Niestandardowe elementy skończone 14-, 21-, 28-węzłowe

W pracy zostaną zaprezentowane oryginalne niestandardowe elementy skończone służące do modelowania przestrzennych zagadnień kontaktowych. Elementy muszą spełniać podstawowe kryteria jakościowe stawiane elementom skończonym, nade wszystko jednak, elementy będą spełniać warunek kontaktu fizycznego. Podstawy teoretyczne (wyprowadzenie funkcji kształtu) tych elementów przedstawiono w pracach [4], [5], [38]. W pracach tych jednakże nie przeprowadzono testów numerycznych sprawdzających warunki zupełności i warunki zgodności tych elementów skończonych. W tym sensie niniejsza praca zawiera element nowości.

We układzie współrzędnych lokalnych, elementy te pokazano na Rys. od 2.7 do 2.9.



Rys. 2.7 Element 14-węzłowy

W przypadku elementu 14-węzłowego, węzły 9, 10, 11, 12, 13, 14 znajdują się w środku ścian elementu. Bez wchodzenia w szczegóły, za pracą [38], podajemy funkcje kształtu elementu 14-węzłowego:

$$N_{14} = 0.5(\xi + 1)(\eta + 1)(\eta - 1)(\zeta + 1)(\zeta - 1)$$

$$N_{13} = -0.5(\xi - 1)(\eta + 1)(\eta - 1)(\zeta + 1)(\zeta - 1)$$

$$N_{12} = 0.5(\xi + 1)(\xi - 1)(\eta + 1)(\zeta + 1)(\zeta - 1)$$

$$N_{11} = -0.5(\xi + 1)(\xi - 1)(\eta - 1)(\zeta + 1)(\zeta - 1)$$

$$N_{10} = 0.5(\xi + 1)(\xi - 1)(\eta + 1)(\eta - 1)(\zeta + 1)$$

$$N_9 = -0.5(\xi + 1)(\xi - 1)(\eta + 1)(\eta - 1)(\zeta - 1)$$

$$N_8 = -0.125(\xi\eta + \xi\zeta - 2\xi - \eta\zeta + 2\eta + 2\zeta - 2)(\xi - 1)(\eta + 1)(\zeta + 1)$$

$$N_7 = -0.125(\xi\eta + \xi\zeta - 2\xi + \eta\zeta - 2\eta - 2\zeta + 2)(\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta + 1)$$

$$N_6 = -0.125(\xi\eta - \xi\zeta + 2\xi + \eta\zeta - 2\eta + 2\zeta - 2)(\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta + 1)$$

$$N_5 = -0.125(\xi\eta - \xi\zeta + 2\xi - \eta\zeta + 2\eta - 2\zeta + 2)(\xi - 1)(\eta - 1)(\zeta + 1)$$

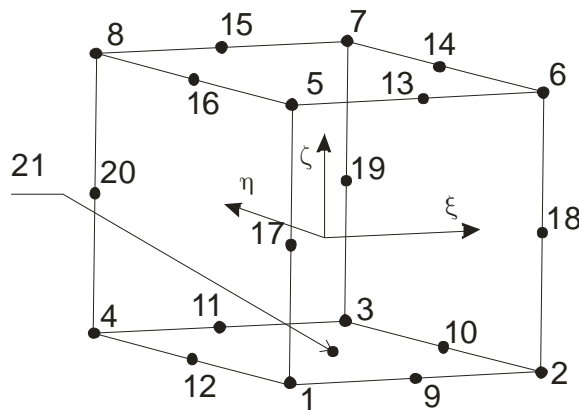
$$N_4 = 0.125(\xi\eta - \xi\zeta - 2\xi + \eta\zeta + 2\eta + 2\zeta - 2)(\xi - 1)(\eta + 1)(\zeta - 1)$$

$$N_3 = 0.125(\xi\eta - \xi\zeta - 2\xi - \eta\zeta - 2\eta + 2\zeta + 2)(\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta - 1)$$

$$N_2 = 0.125(\xi\eta + \xi\zeta + 2\xi - \eta\zeta - 2\eta - 2\zeta - 2)(\xi + 1)(\eta - 1)(\zeta - 1)$$

$$N_1 = 0.125(\xi\eta + \xi\zeta + 2\xi + \eta\zeta + 2\eta + 2\zeta + 2)(\xi - 1)(\eta - 1)(\zeta - 1)$$

W przypadku elementu 21-węzłowego (Rys. 2.8), węzeł 21 znajduje się w środku dolnej ściany ($\xi = 0, \eta = 0, \zeta = -1$). Funkcje kształtu elementu 21-węzłowego wyprowadzono w pracy [5].



Rys. 2.8 Element 21-węzłowy

Funkcje kształtu elementu 21-węzłowego wynoszą [5] (tam również podano wszelkie szczegóły teoretyczne):

$$N_{21} = 0.5(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(\zeta^2 - \zeta)$$

$$N_{20} = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta^2)$$

$$N_{19} = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta^2)$$

$$N_{18} = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta^2)$$

$$N_{17} = 0.25(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{16} = 0.25(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$N_{15} = 0.25(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{14} = 0.25(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$N_{13} = 0.25(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{12} = 0.25(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) - 0.25(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta)$$

$$N_{11} = 0.25(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) - 0.25(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta)$$

$$N_{10} = 0.25(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) - 0.25(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta)$$

$$N_9 = 0.25(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) - 0.25(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta)$$

$$N_8 = 0.125(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) - 0.125(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta) - \\ - 0.125(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta) - 0.125(1-\xi)(1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_7 = 0.125(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) - 0.125(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta) - \\ - 0.125(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta) - 0.125(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_6 = 0.125(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) - 0.125(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta) - \\ - 0.125(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta) - 0.125(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_5 = 0.125(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) - 0.125(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta) - \\ - 0.125(1+\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta) - 0.125(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)$$

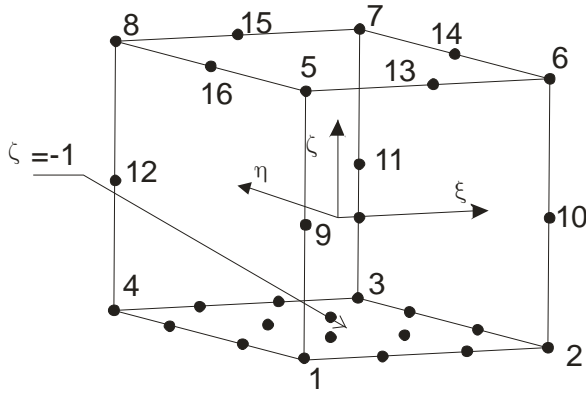
$$N_4 = 0.125(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) - 0.125(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) + 0.125(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta) - \\ - 0.125(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) - 0.125(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_3 = 0.125(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) - 0.125(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta) + 0.125(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta) - \\ - 0.125(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) - 0.125(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

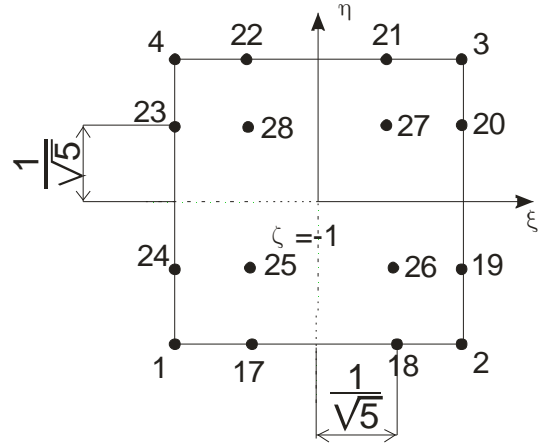
$$N_2 = 0.125(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) - 0.125(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) + 0.125(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta) - \\ - 0.125(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) - 0.125(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_1 = 0.125(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) - 0.125(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) + 0.125(1-\xi^2)(1-\eta^2)(\zeta^2 - \zeta) - \\ - 0.125(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) - 0.125(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

Element 28-węzłowy przedstawiono na Rys. 2.9(a). Węzły o numerach 17 do 28 znajdują się na dolnej ścianie ($\zeta = -1$), w odległości $1/\sqrt{5}$ od osi ξ i η , jak zaznaczono na Rys. 2.9(b). Funkcje kształtu elementu 28-węzłowego i sposób ich wyprowadzenia podano w pracy [4].



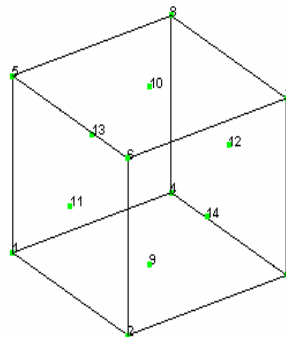
Rys. 2.9 (a) Element 28-węzłowy



Rys. 2.9(b) ściana dolna ($\zeta = -1$)

Na początek, w celu sprawdzenia poprawności działania elementów niestandardowych przeprowadzono dwa proste testy numeryczne. Pierwszy, polega na obciążeniu górnej powierzchni elementów obciążeniem odpowiadającym jednorodnemu ciśnieniu jednostkowemu, a następnie sprawdzeniu wartości liczbowych reakcji ułożonych w węzłach dolnej powierzchni. Zadane ciśnienie sprowadzone zostało do ekwiwalentnych sił węzłowych należących do górnej powierzchni. Jest jasne, że suma reakcji (RF3) w zablokowanych węzłach dolnej powierzchni powinna być równa sumie sił skupionych w obciążonych węzłach górnej powierzchni (CF3) z przeciwnym znakiem. Ponadto, znak reakcji powinien być dodatni we wszystkich zablokowanych węzłach, aby element spełniał fizyczny warunek kontaktowy.

Wyniki tego testu (wraz z odpowiednimi rysunkami), zamieszczono w Tab. od 2.6 do 2.8.



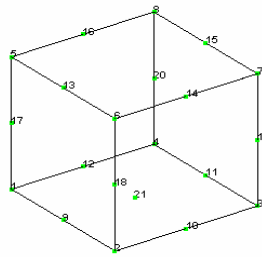
Model : E:\C3D14_test.inp Date : 2006 10 21 22:10:35:421

Rys. 2.10 Pojedynczy element 14-węzłowy



Tab. 2.6 Wyniki numeryczne z użyciem elementu 14-węzłowego

DOLNA POWIERZCHNIA		GÓRNA POWIERZCHNIA	
Nr węzła	Reakcja (RF3)	Nr węzła	Siła skupiona (CF3)
1	0.6275	5	-0.3333
2	0.6275	6	-0.3333
3	0.6275	7	-0.3333
4	0.6275	8	-0.3333
9	1.4900	10	-2. 6666
Suma	4	Suma	- 4

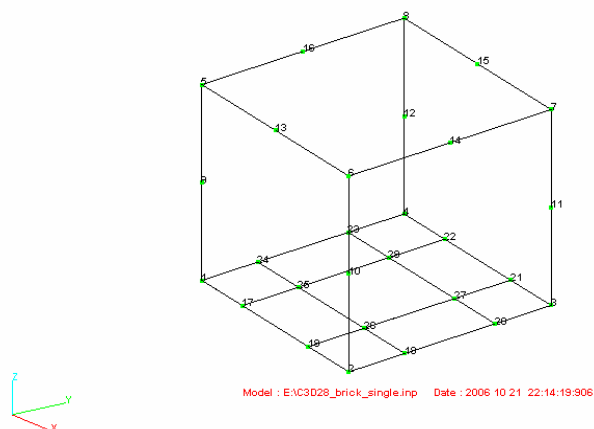


Model : E:\C3D21_test.inp Date : 2006 10 21 22:14:19:906

Rys. 2.11 Pojedynczy element 21-węzłowy

Tab. 2.7 Wyniki numeryczne z użyciem elementu 21-węzłowego

DOLNA POWIERZCHNIA		GÓRNA POWIERZCHNIA	
Nr węzła	Reakcja (RF)	Nr węzła	Siła skupiona (CF)
1	0.1111	5	0.3333
2	0.1111	6	0.3333
3	0.1111	7	0.3333
4	0.1111	8	0.3333
9	0.4444	13	-1. 3333
10	0.4444	14	-1. 3333
11	0.4444	15	-1. 3333
12	0.4444	16	-1. 3333
21	1.7778		
Suma	4	Suma	-4



Rys. 2.12 Pojedynczy element 28 węzłowy

Tab. 2.8 Wyniki numeryczne z użyciem elementu 28-węzłowego

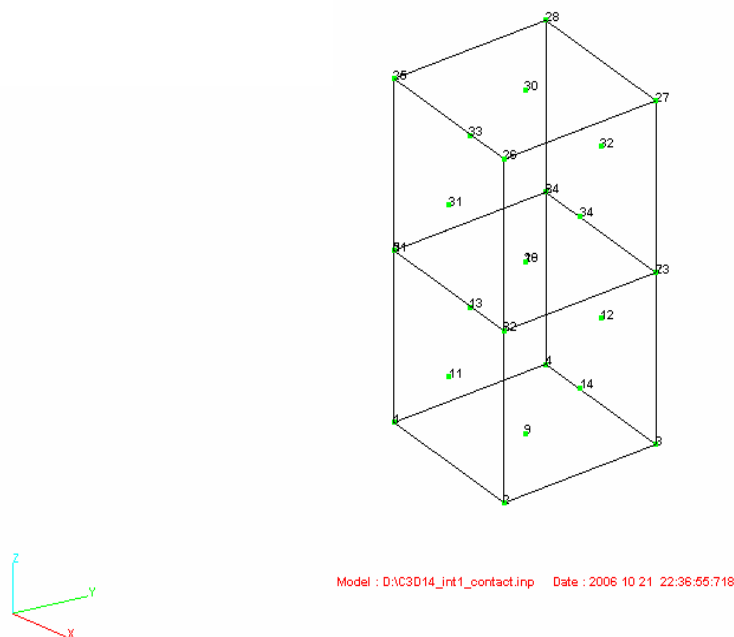
DOLNA POWIERZCHNIA		GÓRNA POWIERZCHNIA	
Nr węzła	Reakcja (RF)	Nr węzła	Siła skupiona (CF)
1	0.027788	5	0.3333
2	0.027788	6	0.3333
3	0.027788	7	0.3333
4	0.027788	8	0.3333
17	0.138889	13	-1.3333
18	0.138889	14	-1.3333
19	0.138889	15	-1.3333
20	0.138889	16	-1.3333
21	0.138889		
22	0.138889		
23	0.138889		
24	0.138889		
25	0.694444		
26	0.694444		
27	0.694444		
28	0.694444		
Suma	4	Suma	-4

Drugi test jest podobny do omówionego wcześniej. Przy czym zastosowano dwa elementy skończone, jak pokazano na Rys. 2.13 do 2.15. Ścianka górna została obciążona jednorodnym ciśnieniem jednostkowym przez zadanie odpowiednich sił w węzłach oznaczone jako CF3.

W celu ustanowienia kontaktu pomiędzy górnym klockiem a dolnym użyto elementów interfejsowych (inaczej międzywarstwowych) o zerowej grubości (*ang.* zero thickness interface element).

Jako wyniki odczytujemy wartości liczbowe reakcji (oznaczone RF3) w zamocowanych węzłach powierzchni dolnej elementu. Jest oczywiste, że suma reakcji RF3 powinna odpowiadać sumie sił skupionych (zadanych) CF3, wziętych z przeciwnym znakiem. Transmitowane siły kontaktowe powinny być dodatnie we wszystkich węzłach kontaktowych. Ich suma również powinna odpowiadać sumie sił CF3, z odpowiednim znakiem.

Uzyskane wyniki numeryczne testu numer 2 zamieszczono w Tab. 2.9 do 2.11.

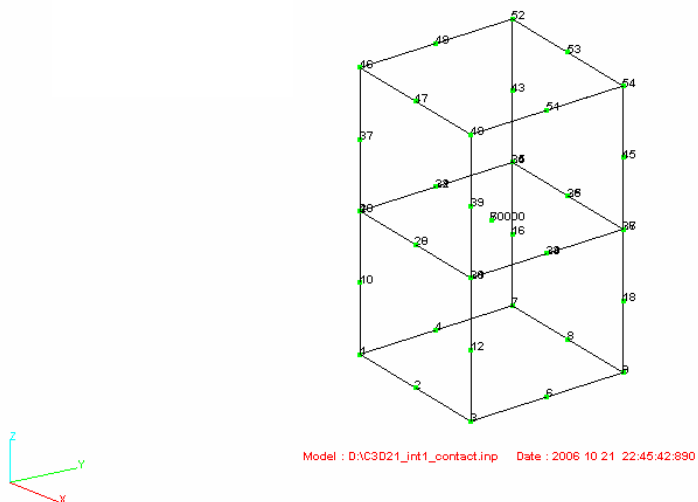


Rys. 2.13 Elementy 14-węzłowe w kontakcie

Tab. 2.9 Wyniki elementy 14-węzłowe w kontakcie

DOLNY ELEMENT		POWIERZCHNIA KONTAKTU		GÓRNY ELEMENT	
Nr węzła	Reakcja (RF3)	Nr węzłów kontaktowych	Siła kontaktowa	Nr węzła	Siła skupiona (CF)
1	0.5433	5 – 21	0.5935	25	-0.3333
2	0.5433	6 – 22	0.5935	26	-0.3333
3	0.5433	7 – 23	0.5935	27	-0.3333
4	0.5433	8 – 24	0.5935	28	-0.3333
9	1.82608	10 – 29	1.626	30	-2. 6666
Suma	4		4		-4

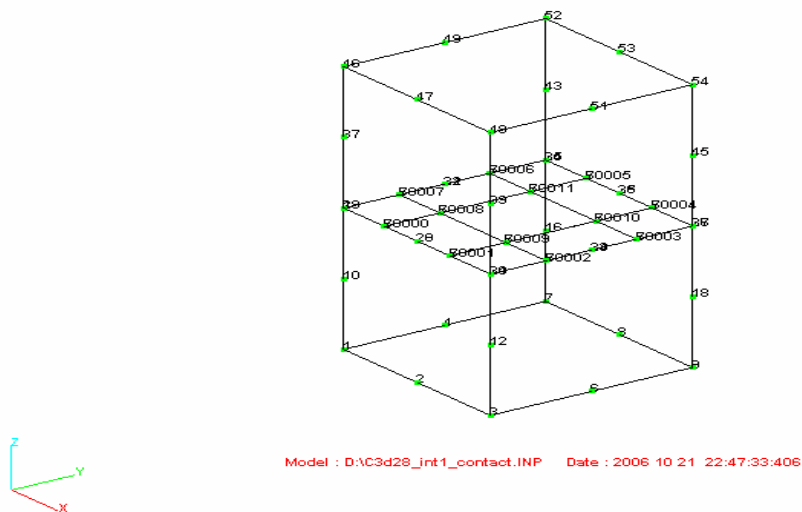
Wymiary elementów 21- i 28-węzłowych dobrano w taki sposób, aby pole powierzchni kontaktowej i objętość pojedynczego elementu były jednostkowe (wyznacznik jakobianu jest wtedy równy 0.125).



Rys. 2.14 Elementy 21-węzłowe w kontakcie

Tab. 2.10 Wyniki elementy 21-węzłowe w kontakcie

DOLNY ELEMENT		POWIERZCHNIA KONTAKTU		GÓRNY ELEMENT	
Nr węzła	Reakcja (RF3)	Nr węzłów kontaktowych	Siła kontaktowa	Nr węzła	Siła skupiona (CF)
1	-0.3333	19-28	0.1111	46	0.3333
3	-0.3333	20-29	0.4444	48	0.3333
7	-0.3333	21-30	0.1111	52	0.3333
9	-0.3333	22-31	0.4444	54	0.3333
2	1.3333	24-33	0.1111	47	-1.3333
6	1.3333	25-34	0.4444	51	-1.3333
8	1.3333	26-35	0.1111	53	-1.3333
4	1.3333	27-36	0.4444	49	-1.3333
		60000-70000	1.7778		
Suma	4		4		-4



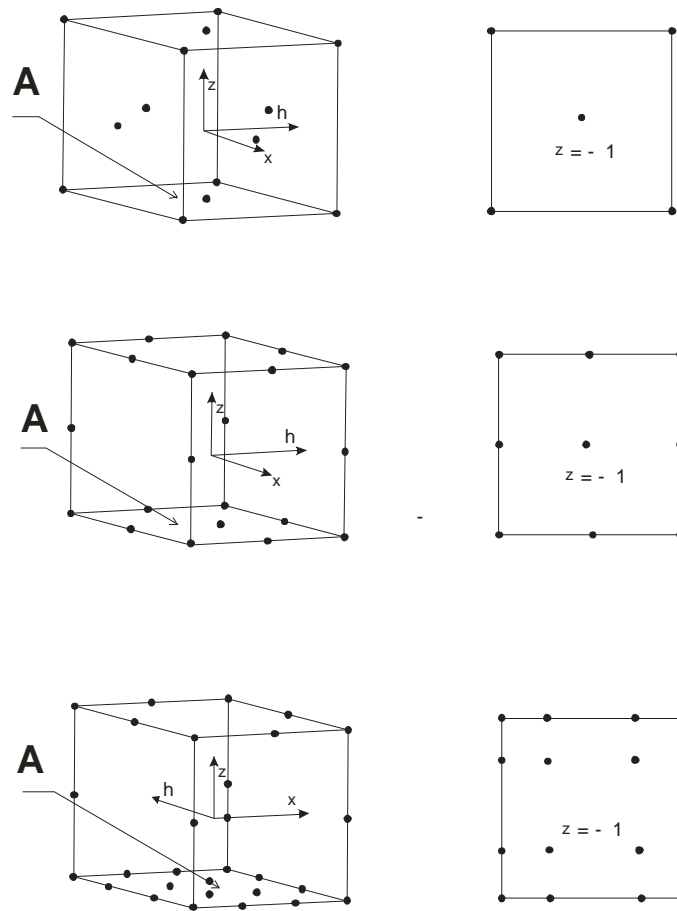
Rys. 2.15 Elementy 28-węzłowe w kontakcie

Tab. 2.11 Wyniki elementy 28 węzłowe w kontakcie

DOLNY ELEMENT		POWIERZCHNIA KONTAKTU		GÓRNY ELEMENT	
Nr węzła	Reakcja (RF3)	Nr węzłów kontaktowych	Siła kontaktowa	Nr węzła	Siła skupiona (CF)
1	-0.3333	19-28	2.7778E-02	46	0.3333
3	-0.3333	21-30	2.7778E-02	48	0.3333
9	-0.3333	25-34	2.7778E-02	52	0.3333
7	-0.3333	27-36	2.7778E-02	54	0.3333
2	1.3333	60005-70005	0.13889	47	-1.3333
6	1.3333	60004-70004	0.13889	51	-1.3333
8	1.3333	60003-70003	0.13889	53	-1.3333
4	1.3333	60002-70002	0.13889	49	-1.3333
		60001-70001	0.13889		
		60000-70000	0.13889		
		60007-70007	0.13889		
		60006-70006	0.13889		
		60011-70011	0.69444		
		60010-70010	0.69444		
		60009-70009	0.69444		
		60008-70008	0.69444		
Suma	4		4		- 4

Przeprowadzone obliczenia potwierdzają, że elementy kontaktowe 14-, 21-, 28- spełniają wymagania stawiane elementom w kontakcie. Reakcje (pojedynczego elementu) oraz siły kontaktowe w węzłach (dla kontaktu dwóch elementów skończonych) mają znak dodatni.

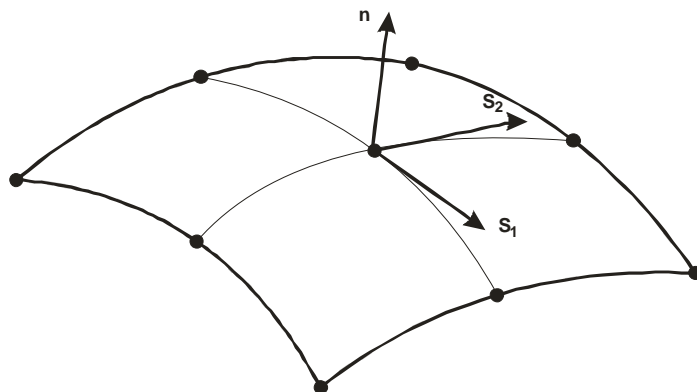
We wszystkich węzłach w elementach 14-, 21- i 28-węzłowych na dolnej powierzchni (Rys. 2.16) znak reakcji jest zawsze dodatni.



Rys. 2.16 Elementy 14-, 21-, 28-węzłowe

2.5 Jednostkowe wektory normalne (wektory zewnętrzne) do powierzchni kontaktu

Przykładowy wektor zewnętrzny \mathbf{n} pokazano Rys. 2.17.



Rys. 2.17 Wektor zewnętrzny w punkcie powierzchni ścianki elementu

Wektor zewnętrzny \mathbf{n} obliczamy jako znormalizowany iloczyn wektorowy wektorów stycznych obliczonych w wybranym punkcie (Rys. 2.18). Mamy zatem

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|} \quad (2.10)$$

gdzie: \mathbf{n} oznacza jednostkowy wektor normalny w dowolnym punkcie powierzchni, natomiast \mathbf{s}_1 i \mathbf{s}_2 są wektorami stycznymi do powierzchni.

Zgodnie z koncepcją elementu skończonego, współrzędne punktu w układzie globalnym można przedstawić jako

$$\varphi_e = x_e = \sum_{i=1}^m N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (2.11)$$

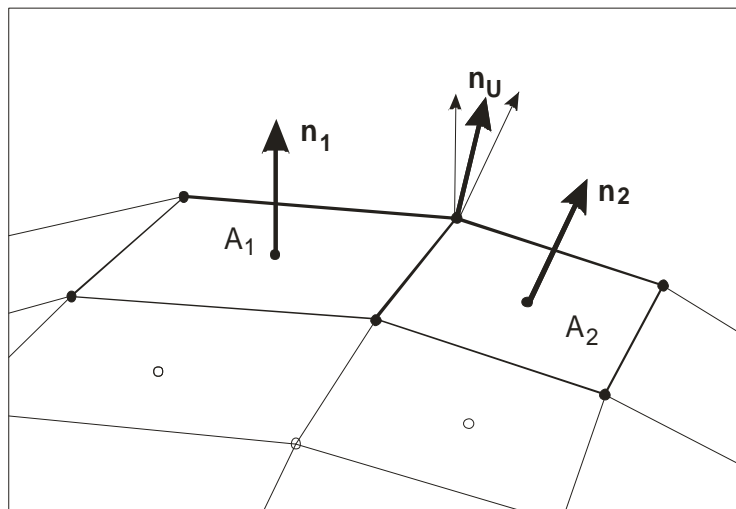
Na podstawie (2.10) i (2.11), wektory styczne \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 i wektor zewnętrzny \mathbf{n} obliczamy następująco:

$$\mathbf{s}_1 = \varphi_{e,\xi} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{s}_2 = \varphi_{e,\eta} \quad (2.13)$$

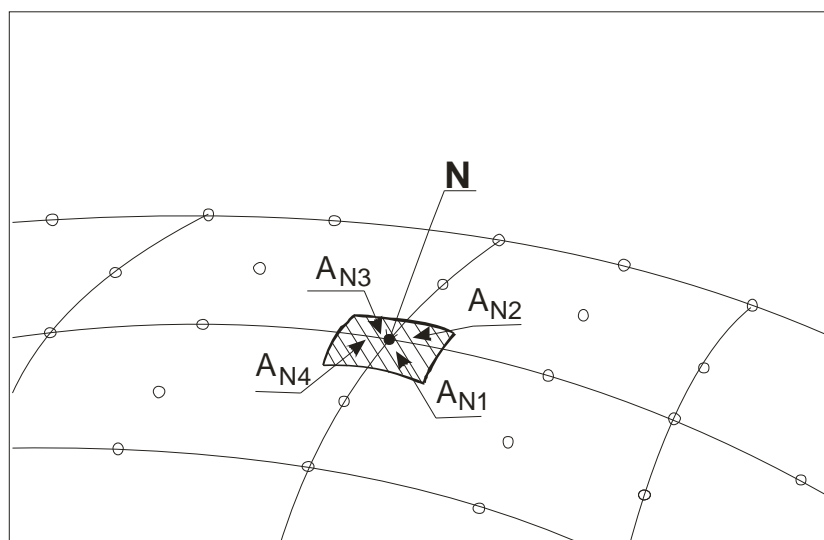
$$\mathbf{n} = \frac{\varphi_{e,\xi} \times \varphi_{e,\eta}}{|\varphi_{e,\xi} \times \varphi_{e,\eta}|} \quad (2.14)$$

W przypadku elementów skończonych uczestniczących w kontakcie konieczne jest wyznaczenie wektorów zewnętrznych w węzłach kontaktowych. Wektory normalne wyznaczone we wspólnych węzłach sąsiednich elementów muszą być określone jednoznacznie. Wymagane jest zatem wyznaczenie wektora uśrednionego \mathbf{n}_u , jak pokazano na Rys. 2.18.



Rys. 2.18 Uśrednianie wektorów normalnych

Pole powierzchni związane z węzłem kontaktowym N (Rys. 2.19) jest sumą wszystkich indywidualnych ekwiwalentnych pól powierzchni obliczonych wg wzoru (2.9).



Rys. 2.19 Pole powierzchni związane z węzłem kontaktowym

Wnioski:

(i) niestandardowe elementy skończone 14-, 21-, 28-węzłowe spełniają warunki kontaktu fizycznego,

(ii) standardowe 8-węzłowe elementy przemieszczeniowe są przeszywnione i nie nadają się do modelowania niektórych typów zagadnień mechanicznych. Podkreślić należy jednak, że elementy te spełniają warunki kontaktu fizycznego,

(iii) elementy 20-węzłowe z rodziny Seredipity dają znacznie lepsze rezultaty numeryczne, nie nadają się natomiast do modelowania zagadnień kontaktowych (nie spełniają warunku kontaktu fizycznego),

(iv) w przypadku użycia elementów 8-węzłowych (belka zginana, Rys. 2.2) otrzymujemy niemal identyczne wyniki rozwiązań numerycznych (p. Tab. 2.3).

Zauważmy, że we wszystkich przypadkach uzyskane wyniki znacznie odbiegają od wartości teoretycznej wynoszącej 3.09 mm. Spostrzeżenie to jest oczywiste, gdyż użyte elementy skończone we wszystkich porównywanych systemach MES wykorzystują te same funkcje kształtu.

Z uwagi na niepoprawne wyniki numeryczne w systemie NASTRAN celowo zrezygnowano ze standardowego elementu 8-węzłowego. Dostępny jest tylko element 20-węzłowy.

ROZDZIAŁ 3

TESTY NUMERYCZNE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

3.1 Testy elementów 14-, 21- i 28-węzłowych

Poprawność wyników uzyskiwanych w obliczeniach metodą elementów skończonych jest zagadnieniem pierwszorzędym. Jak pokazano w rozdziale drugim, nawet w przypadku prostego zagadnienia zginania (belka jednostronnie utwierdzona) uzyskane wyniki numeryczne są obarczone tak dużym błędem, że mogą okazać się praktycznie bezwartościowe.

O poprawności rozwiązania, przy takiej samej siatce, decyduje sformułowanie elementu skończonego, czyli dobór funkcji kształtu, a następnie zastosowanie odpowiedniej procedury całkującej do otrzymania macierzy sztywności. Również zmiana siatki na regularną powoduje istotną poprawę rezultatów. Nie należy więc z góry przekreślać możliwości zastosowania danego typu elementu (poprawnie sformułowanego), a raczej wszechstronnie przebadać jego zachowanie.

Temu celowi służą testy elementów. Proponowany zestaw takich testów możemy znaleźć w pracach [28], [29]. Ich wyniki powinny być brane bardzo poważnie pod uwagę zarówno przez wykonujących analizy, a nade wszystko przez zajmujących się projektowaniem i rozwojem nowych typów elementów skończonych.

Każdy nowy element skończony powinien być wszechstronnie przetestowany w celu zweryfikowania jego poprawność i dostarczeniu informacji o uzyskiwanych wynikach potencjalnym użytkownikom.

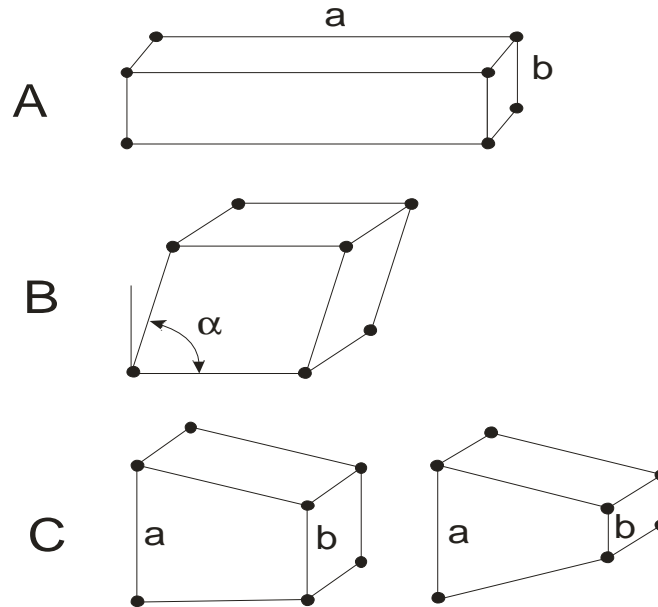
Testy muszą pokazywać zachowanie elementów w przypadku różnorodnych warunków brzegowych i sposobu obciążenia różnych typów elementów. Istniejące rozwiązania analityczne są bardzo pożądane w celu weryfikacji wyników numerycznych.

Najczęściej testy są prowadzone w ramach statycznej analizy liniowej, w której stosunkowo łatwo można sprawdzić dokładność, z zadaną precyzją, dyskretyzowanego modelu.

Czynnikami wpływającymi na dokładność wyników są następujące czynniki:

1. geometria elementu,
2. geometria problemu,
3. stałe materiałowe.

Ad.1) Kształt elementu może znacznie odbiegać od kształtu podstawowego (regularnego), dla którego element został teoretycznie opracowany i oprogramowany. W przypadku elementów przestrzennych sześciściennych przyjęto, że takim podstawowym kształtem jest sześcian. Przykładowe odstępstwa od tego kształtu pokazano na Rys.3.1.



Rys. 3.1 Przykładowe kształty nieregularnych elementów bryłowych

- A) wydłużenie - stosunek długości do szerokości a/b ,
- B) przekrzywienie o zadany kąt α ,
- C) zwężenie - stosunek wymiarów a/b .

Ad.2) Własności geometryczne (krzywizny, stosunki wymiarowe) całego modelu mogą również wpływać w znaczący sposób na wyniki numeryczne i powinny uwzględniać w testowaniu elementów skończonych. Przeprowadzane testy powinny więc uwzględniać zarówno modele o pojedynczej, jak i podwójnej krzywiznie. Uwzględnienie tylko pojedynczej krzywizny w wielu przypadkach jest niewystarczające.

Ad.3) Własności materiałowe: liczba Poissona może mieć wpływ na dokładność elementu w przypadku gdy jej wartość jest bliska 0.5 (materiały zbliżone do nieściśliwych).

Różnorodne warunki brzegowe i sposobu obciążenia powinny być uwzględnione w testach elementów, aby zbadać wszystkie możliwe typy deformacji jakim może ulegać element skończony. Szczególna uwaga powinna być poświęcona elementom znacznie odbiegającym od podstawowego (regularnego) kształtu oraz w przypadku dużej różnicy w długości do szerokości i wysokości elementu skończonego. Opisane powyżej czynniki zostały uwzględnione przy doborze i wykonywaniu testów przestrzennych elementów 14-, 21-, 28- węzłowych.

Przeprowadzono następujące testy numeryczne:

- Test 1: belka prosta rozciągana (test 1a) i zginana (test 1b) - rozdział (3.1.1),
- Test 2: belka prosta zginana (elementy o kształtach regularnych, i zniekształconych) - rozdział (3.1.2),
- Test 3: belka zakrzywiona - rozdział (3.1.3),
- Test 4: belka skręcona - rozdział (3.1.4),
- Test 5: płyta gruba - rozdział (3.1.5),
- Test 6: sfera gruba - rozdział (3.1.6),
- Test 7: cylinder grubościenny - rozdział (3.1.7),
- Test 8: patch test - rozdział (3.1.8).

Cztery pierwsze testy odniesione do belek jednostronnie utwierdzonych są często wykonywanymi testami ze względu na swoją prostotę i fakt, że przez przyłożenie obciążenia do swobodnego końca można otrzymać główne typy deformacji testowanych elementów skończonych. Ponadto, można uwzględnić ich nieregularny kształt i krzywiznę badanych elementów w przypadku belki zakrzywionej. Poza tym, istnieją tu znane rozwiązania analityczne, które dają bardzo dobrą ocenę otrzymywanych wyników. Możemy również porównywać wyniki liczbowe uzyskiwane przy użyciu innych typów elementów, takich jak: (i) elementy prętowe (w przypadku rozciągania), (ii) elementy belkowe (w przypadku zginania), (iii) elementy używane w obliczeniach płaskiego stanu odkształceń.

Test 5. Użycie elementów przestrzennych (niezmodyfikowanych) do obliczeń płyt cienkich z reguły daje bardzo mierne rezultaty. Postanowiono więc wykonać podobny test w przypadku płyty grubej i porównać otrzymane wyniki z obliczeniami analitycznymi.

Test 6. W przypadku płyt cienkich i cienkich powłok częstym błędem jest użycie nieodpowiednich elementów przestrzennych. W przypadku testu odwzorującego dwie krzywizny przeprowadzono test modelu skończenie elementowego w kształcie sfery o znacznej grubości. Nie istnieje tu rozwiązanie analityczne. Otrzymane wyniki z użyciem elementów 14-, 21-, 28-węzłowych porównywano z wynikami otrzymanymi z użyciem standardowych elementów 8- i 20-węzłowych.

W celach porównawczych używano następujących elementów z biblioteki programu ABAQUS (wersja 5.8 i wersja 6.4):

- element 8-węzłowy oznaczony w dokumentacji programu ABAQUS jako C3D8, (uwaga: funkcje kształtu tego elementu są różne od standardowych funkcji kształtu typowych przestrzennych elementów 8-węzłowych),
- 20-węzłowy element oznaczony w nomenklaturze systemu ABAQUS C3D20 jako element referencyjny.

Test 7. Test ten odnosi się do modelu cylindra grubościennego obciążonego ciśnieniem wewnętrznym o współczynniku Poissona zbliżonego do wartości 0.5. Jest tutaj ważne, że istnieje rozwiązanie analityczne tego przypadku (zagadnieniu Lamé'go).

Test 8. Testy elementów skończonych nie byłyby kompletne bez 'patch testu'. Ten test wymaga od elementów, aby przy zadaniu prostych warunkach brzegowych zapewnić dokładnie znane wyniki analityczne. Spełnienie przez element tzw. 'patch testu' oznacza, że będzie on w stanie zapewnić poprawne wyniki w obliczeniach komercyjnych.

Na podstawie najnowszej literatury uważa się, że ‘patch testy’ powinny być obowiązkowo wykonywane w przypadku dużych systemów obliczeniowych. Przyjęto następujące symboliczne oznaczenie testowanych elementów:

- (i) C3D14 - element 14-węzłowy,
- (ii) C3D21 - element 21-węzłowy,
- (iii) C3D28 - element 28-węzłowy.

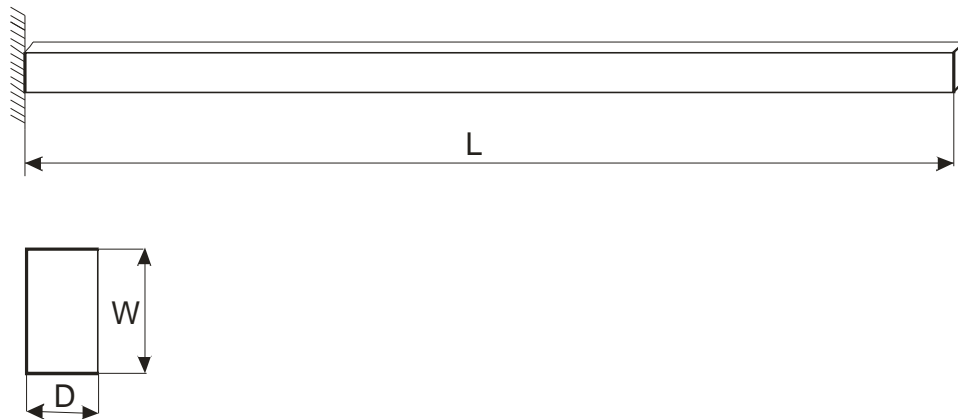
3.1.1 Belka prosta rozciągana i zginana

Model

Prosta belka jednostronnie utwierdzona jest pokazana na Rys. 3.2. Belka ma następujące wymiary:

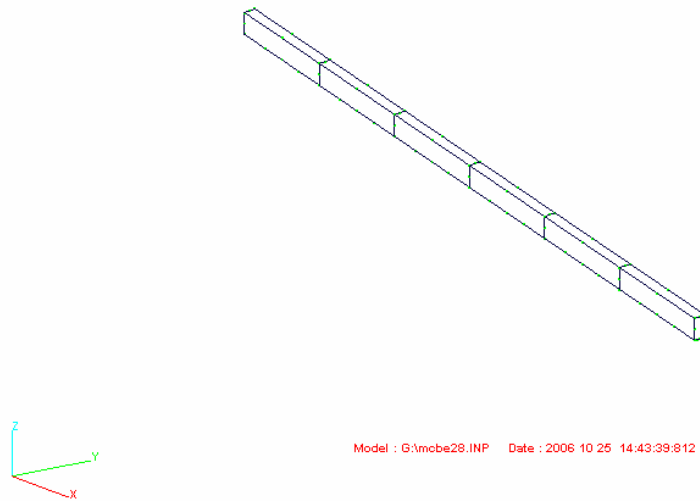
- (i) długość, $L = 6.0$,
- (i) wysokość, $W = 0.2$,
- (ii) szerokość, $D = 0.1$.

Wymiary, stałe materiałowe i sposób obciążenia przyjęto za pracą [28]. Tutaj, wartości $E = 1.0 \cdot 10^7$ i $\nu = 0.3$.

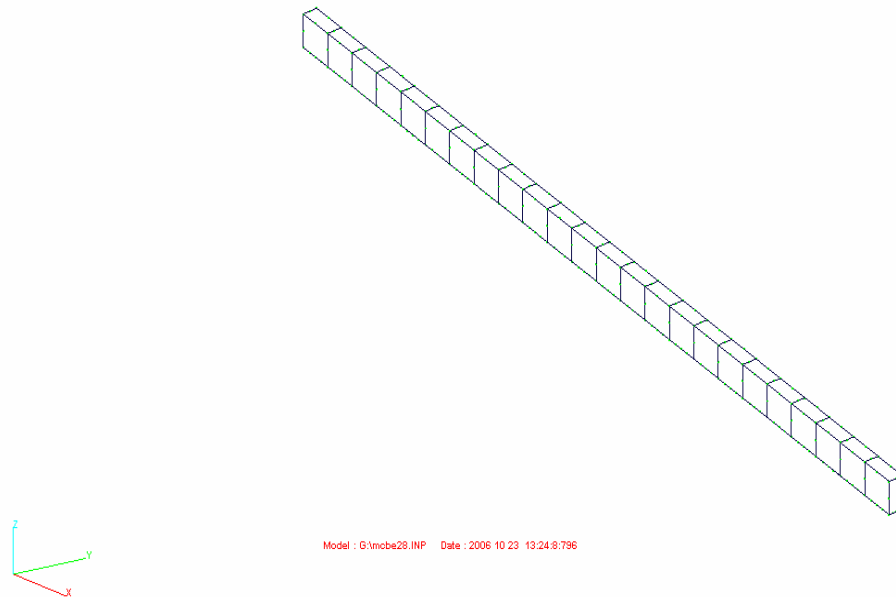


Rys. 3.2 Belka prosta jednostronnie utwierdzona

Do analizy użyto trzech różnych siatek o 6, 12, 24 elementach równej długości. Siatkę 6 elementów pokazano na Rys. 3.3, zaś siatkę 24 elementów na Rys. 3.4.



Rys. 3.3 Siatka 6 elementów równej długości



Rys. 3.4 Siatka 24 elementów równej długości

Analiza

Analizę przeprowadzono dla dwóch różnych przypadków obciążenia:

- (i) rozciąganie: test 1a. Jako obciążenie rozciągające przyjęto obciążenie jednostkowe działające na czołową powierzchnię swobodnego końca. Obciążenie powierzchniowe zostało sprowadzone do węzłów leżących na tej powierzchni. W tym przypadku belka pracuje jak pręt rozciągany. Istnieje proste rozwiązanie analityczne opisujące wydłużenie belki, które wynosi:

$$u = \frac{Pl}{EA} \quad (3.1)$$

gdzie:

- u - wydłużenie końca belki,
- l - długość belki,
- P - obciążenie rozciągające,
- E - Moduł Younga,
- A - pole przekroju poprzecznego belki.

- (ii) Zginanie: test 1b. W tym przypadku jako obciążenie przyjęto siłę skupioną przyłożoną do środkowego węzła na górnej krawędzi swobodnego końca belki o wartości $P = 300$. Jak wiadomo rozwiązanie analityczne jest równe:

$$u = \frac{Pl^3}{EI} \quad (3.2)$$

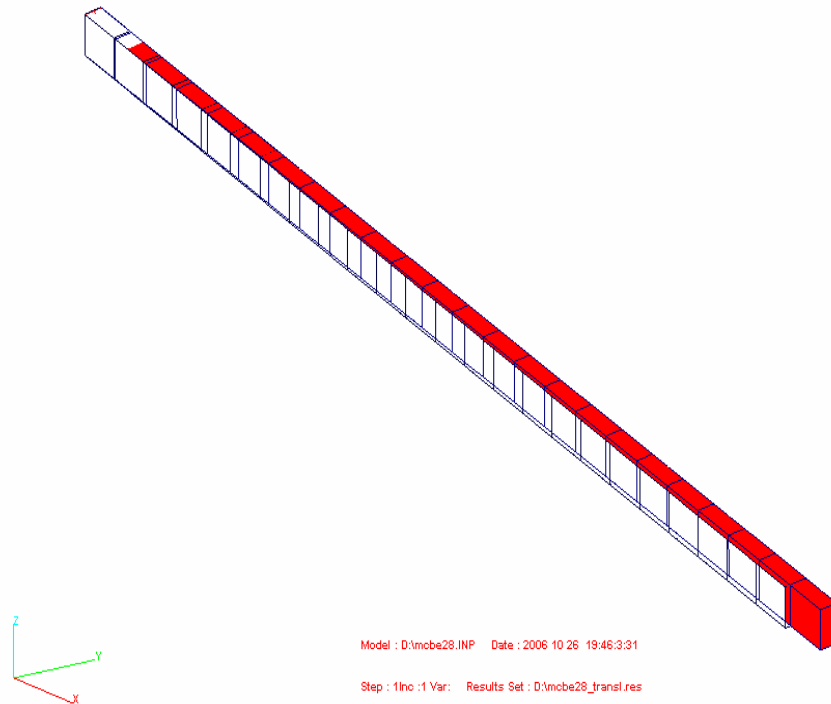
- gdzie: u - przemieszczenie końca belki w kierunku pionowym,
 l - długość belki,
 P - siła pionowa działająca na końcu belki,
 E - moduł Younga,
 I - moment bezwładności przekroju poprzecznego belki.

Rezultaty

- (i) Rozciąganie: test 1a. Wartością porównywaną było przemieszczenie swobodnego końca w kierunku poziomym X. Otrzymane wyniki z użyciem elementów C3D14, C3D21, C3D28 oraz porównanie ich z wynikami z użyciem innych typów elementów wraz z wynikiem teoretycznym zebrano w Tab. 3.1. Widok odkształconego modelu z użyciem 24 elementów typu C3D28 pokazuje Rys. 3.5.

Tab. 3.1 Porównanie wyników dla testu rozciągania 1a

LICZBA ELEMENTÓW	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20	ABAQUS ELEMENT PRĘTOWY TYP T3D2
6	3.0000E-05	2.9776E-05	2.9827E-05	2.9923E-05	2.9841E-05	2.9826E-05	3.0000E-05
12		2.9900E-05	2.9910E-05	3.0009E-05	2.9916E-04	2.9910E-05	3.0000E-05
24		3.0005E-05	2.9949E-05	2.9993E-05	2.9951E-05	2.9949E-05	3.0000E-05

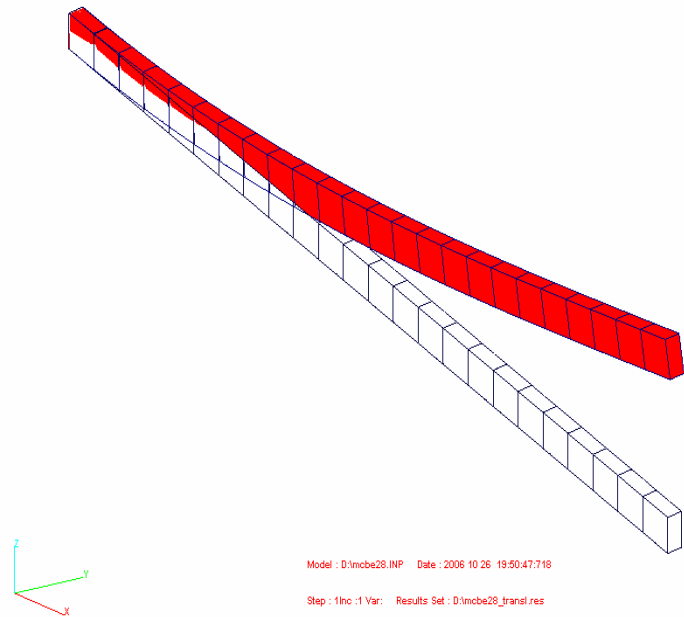


Rys. 3.5 Test rozciągania 1a. Model nieodkształcony (kolor biały), odkształcony (kolor czerwony), element typu CD3D28

- (ii) Zginanie: test 1b. Wartością porównywaną było przemieszczenie swobodnego końca w kierunku pionowym Z. Porównanie z innymi typami elementów i wartościami teoretycznymi zebrano w Tab. 3.2. Widok odkształconego modelu o 24 elementach C3D28 pokazuje Rys 3.6.

Tab. 3.2 Porównanie wyników dla testu zginania 1b

LICZBA ELEMENTÓW	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20	ABAQUS ELEMENT BELKOWY TYP ELEMENTU B21
6	0.108	1.3789E-02	0.1052	1.6578E-02	1.0765E-02	0.1049	1.062
12		3.6919E-02	0.1068	5.8207E-02	3.8360E-02	0.1066	1.069
24		8.2537E-02	0.1074	9.7594E-02	0.1070	0.1074	1.073



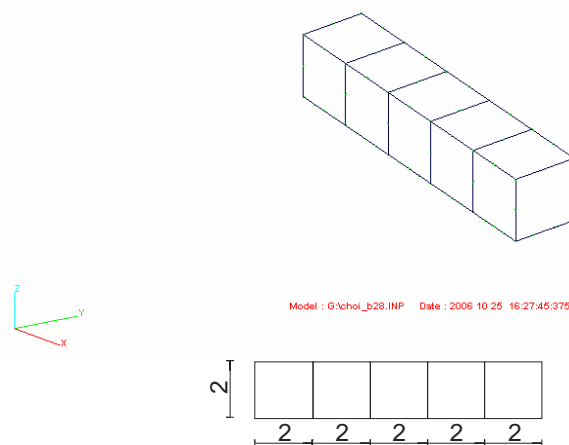
Rys. 3.6 Test zginania 1b. Model nieodkształcony (kolor biały), odkształcony (kolor czerwony), element typu CD3D28

3.1.2 Belka - elementy o kształtach regularnych i zniekształconych rozciągana i zginana

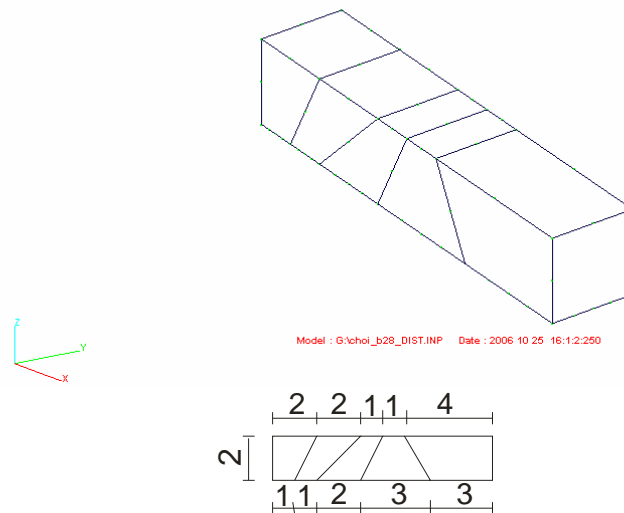
Model (Rys. 3.7)

Jako modelu użyto belki jednostronnie utwierdzonej o wymiarach: $10 \times 2 \times 2$ i stałych materiałowych: $E = 1500$, $\nu = 0.3$.

Wykonano dwa modele zawierające 5 elementów skończonych. W pierwszym przypadku użyto elementów o regularnych kształtach jak pokazano na Rys 3.7, w drugim elementów o nieregularnych kształtach i różnej objętości (Rys. 3.8). Siatki elementów odpowiadają siatkom przykładów testowych zamieszczonych w pracy [7].



Rys. 3.7 Siatka elementów o kształtach regularnych



Rys. 3.8 Siatka elementów zniekształconych

Analiza

Podobnie jak w teście 1 analizę przeprowadzono w dwóch różnych przypadkach obciążenia:

- (i) Rozciąganie: test 2a. Warunki brzegowe i obciążenie jest zgodne z modelem poprzednim. Obciążenie rozciągające przyłożono do swobodnego końca belki (jednostkowa siła skupiona) i sprowadzono do węzłów. Teoretyczne wartości przemieszczenia końca belki możemy obliczyć jak w teście 1a (wzór 3.1).
- (ii) Zginanie: test 2b. Warunki brzegowe i obciążenie jak poprzednio. Siłę skupioną o wartości -0.6 przyłożono do środkowego węzła na górnej krawędzi swobodnego końca belki. Wartość ugięcia swobodnego końca belki obliczono według wzoru (3.2).

Rezultaty

Wyniki dla testu 2b: rozciąganie. Wartością porównywaną było przemieszczenie swobodnego końca belki w kierunku poziomym X. Wyniki modeli o regularnych i nieregularnych kształtach elementów oraz wartości teoretyczne zebrano w Tab. 3.3.

Tab. 3.3 Wydłużenie swobodnego końca belki

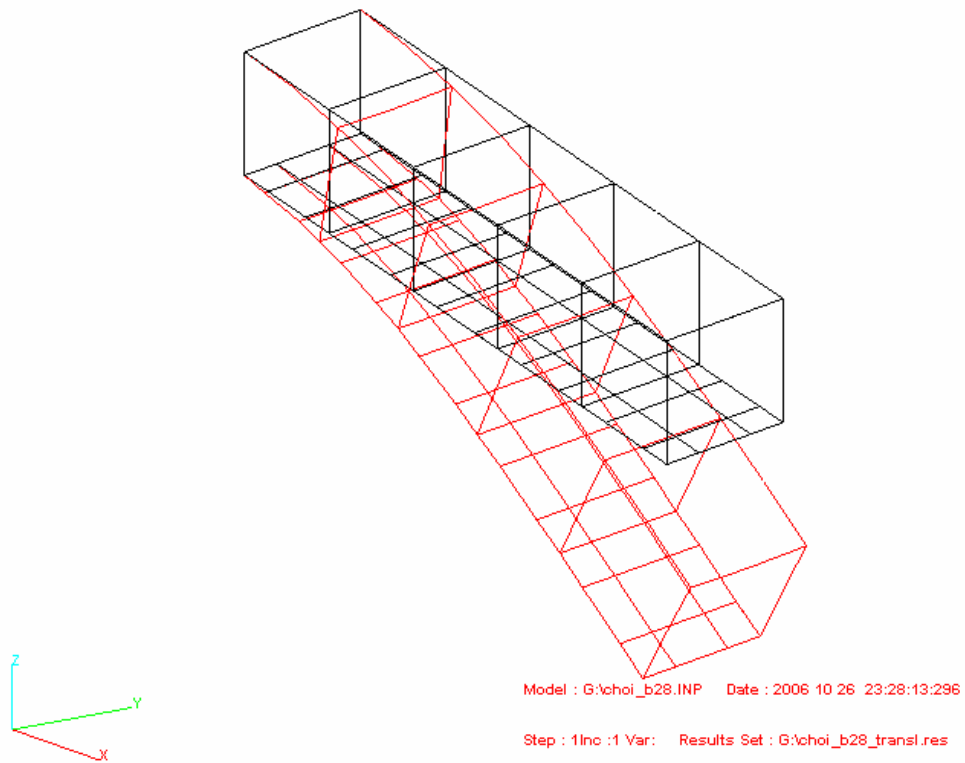
RODZAJ SIATKI (5 ELEMENTÓW)	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20
Siatka regularna	0.0016666	1.7159E-03	1.6560E-03	1.6643E-03	1.6553E-03	1.6559E-03
Siatka nieregularna		1.6961E-03	1.6582E-03	1.6605E-03	1.6628E-03	1.6586E-03

Wyniki dla testu 2b: zginanie. Wartością porównywaną było przemieszczenie swobodnego końca belki w kierunku pionowym Z. Wyniki modeli o regularnych i nieregularnych kształtach elementów zebrano w Tab. 3.4.

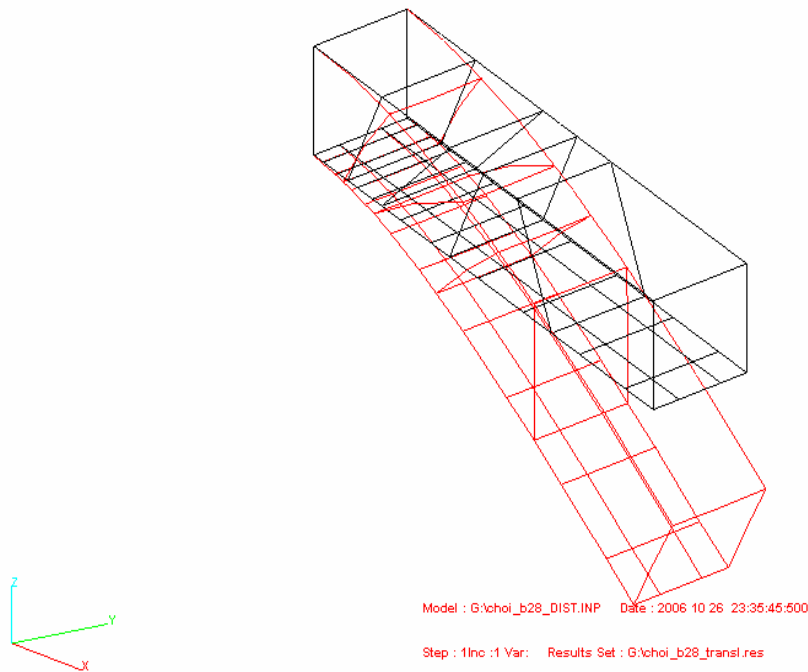
Tab. 3.4 Ugięcie swobodnego końca belki

RODZAJ SIATKI (5 ELEMENTÓW)	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20
Siatka regularna	0.1	-9.2718E-02	-0.1010	-9.3557E-02	-0.1206	-0.1005
Siatka nieregularna		-7.3810E-02	-0.1008	-9.6603E-02	-8.9979E-02	-0.1004

Widok odkształconych modeli w przypadku zginania pokazują Rys. 3.9 (siatka regularna elementy 28-węzłowe) i Rys. 3.10 (siatka nieregularna elementy 28-węzłowe).



Rys. 3.9 Siatka regularna, elementy 28 –węzłowe

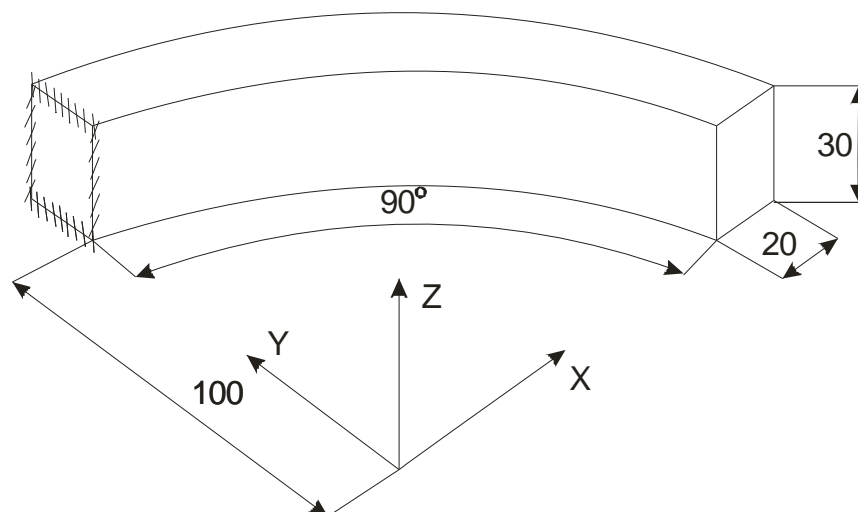


Rys. 3.10 Siatka nieregularna, elementy 28 –węzłowe

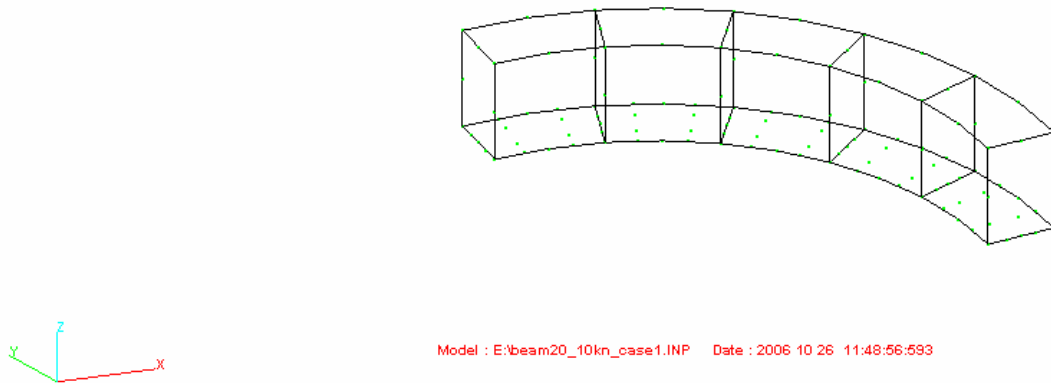
3.1.3 Belka zakrzywiona

Model

Wymiary zakrzywionej belki jednostronnie utwierdzonej pokazano na Rys. 3.11 (wymiary w [cm]). Założono następujące stałe materiałowe: $E = 2000 \text{ N/cm}^2$, $\nu = 0.15$ (wymiary, stałe materiałowe i siatkę są zgodne z pracą [21].) Użyto siatki o 5 regularnych elementach jak pokazano na Rys. 3.12.



Rys. 3.11 Belka zakrzywiona



Rys. 3.12. Siatka elementów skończonych (elementy 28-węzłowe)

Analiza

Obliczenia przeprowadzono w dwóch przypadkach zginania:

- (i) zginanie w kierunku 1 (oś X) – test 3a. Belka jest zakrzywiona jest w płaszczyźnie działania siły skupionej o wartości $P = -10\text{kN}$. Siła została przyłożona w środkowym węźle górnej krawędzi swobodnego końca belki i działa w kierunku osi X (ujemnym). Wartość teoretyczna maksymalnego przemieszczenia w tym kierunku, zgodnie z pracą [21], wynosi -0.2623cm .
- (ii) zginanie w kierunku 2 (oś Z) – test 3b. Siła skupiona o wartości -10kN jest przyłożona w węźle swobodnego końca belki i działa w ujemnym kierunku osi Z.

Rezultaty

(i) wartością porównywaną było przemieszczenie swobodnego końca w kierunku osi X. Porównanie z innymi typami elementów i wartościami teoretycznymi zebrano w Tab. 3.5. Widok odkształconego modelu (5 elementów C3d28) pokazuje Rys. 3.13.

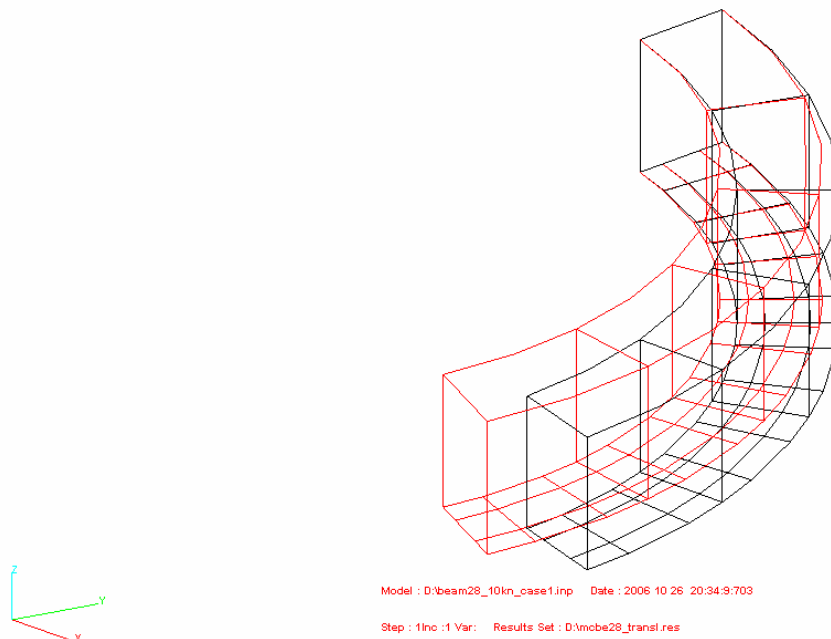
Tab. 3.5 Wydłużenie swobodnego końca belki (kierunek X), [cm]

RODZAJ SIATKI ELEMENTÓW	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20
Siatka 5 elem. regularna	-0.2623	-0.1673	-0.2556	-0.2339	-0.1428	-0.2554

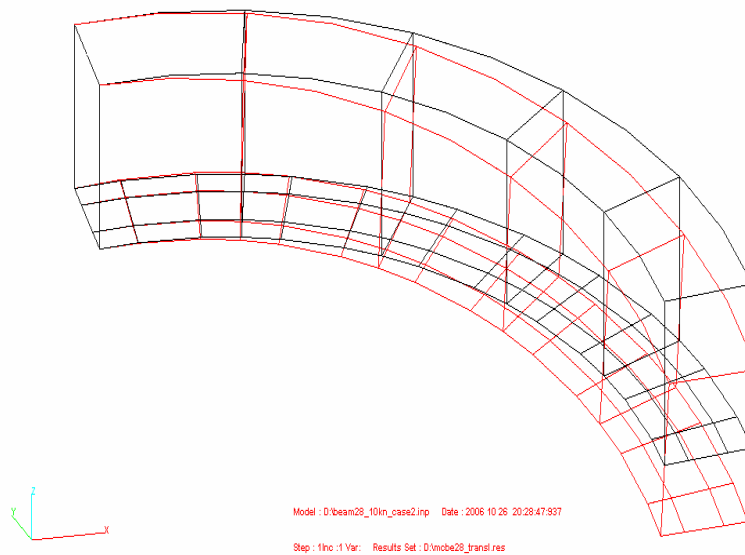
(ii) wartością porównywaną było przemieszczenie swobodnego końca w kierunku osi Z. Porównanie z innymi typami elementów i wartościami teoretycznymi zebrano w Tab. 3.6 poniżej. Widok odkształconego modelu o 5 elementach C3D28 pokazuje Rys.3.14.

Tab. 3.6 Przemieszczenie swobodnego końca belki (kierunek Z)

RODZAJ SIATKI ELEMENTÓW	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20
Siatka 5 elem. regularna		-0.1951	-0.2267	-0.2088	-0.2129	-0.2187



Rys. 3.13 Model odkształcony przypadek obciążenia 1



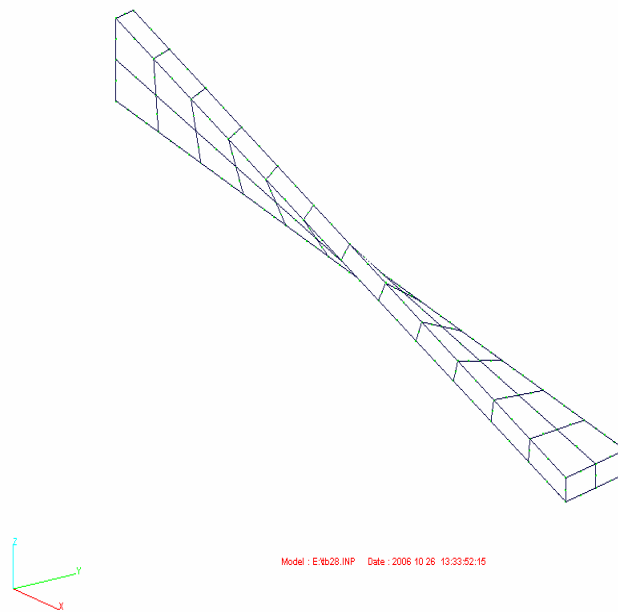
Rys. 3.14 Model odkształcony przypadek obciążenia 2

3.1.4 Belka skręcona

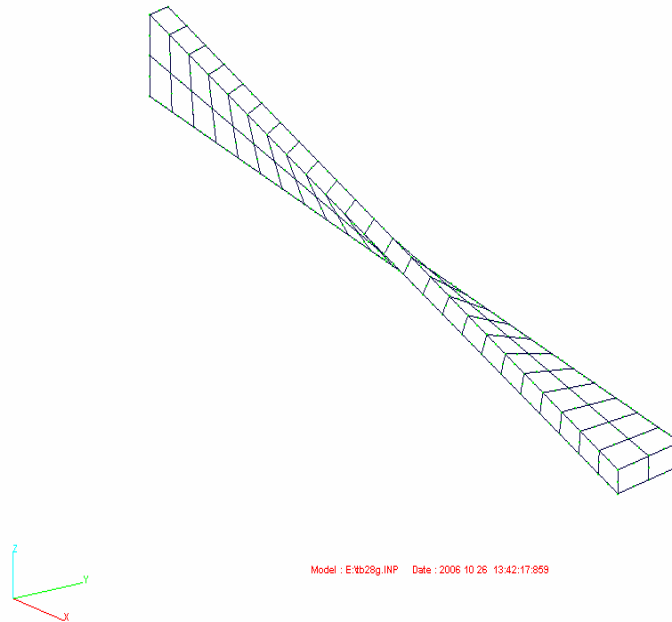
Model

Model belki skręconej (pokazanej na Rys. 3.15) zaczerpnięto z pracy [28]. Wymiary belki są następujące: długość $L = 12$, wysokość $W = 1.1$, szerokość $D = 0.32$. Stałe materiałowe wynoszą odpowiednio: $E = 2.9 \cdot 10^6$, $\nu = 0.22$.

Skręcenie swobodnego końca belki w porównaniu do utwierdzonego wynosi 90° . Wykonano dwa modele o siatkach 2×2 i 24×2 pokazanych na Rys. 3.15 i 3.16. Elementy C3D21 i C3D28 (dolny rząd) zostały użyte w połączeniu z elementami 20 węzłowymi (górny rząd).



Rys. 3.15 Siatka 12x2 elementów



Rys. 3.16 Siatka 24x2 elementów

Warunki brzegowe i obciążenie są następujące: całkowite odebranie wszystkich stopni swobody węzłom na lewym końcu belki, siła skupiona przyłożona do środkowego węzła na górnej krawędzi swobodnego końca belki o wartości $P = -1$ działająca w kierunku osi Z .

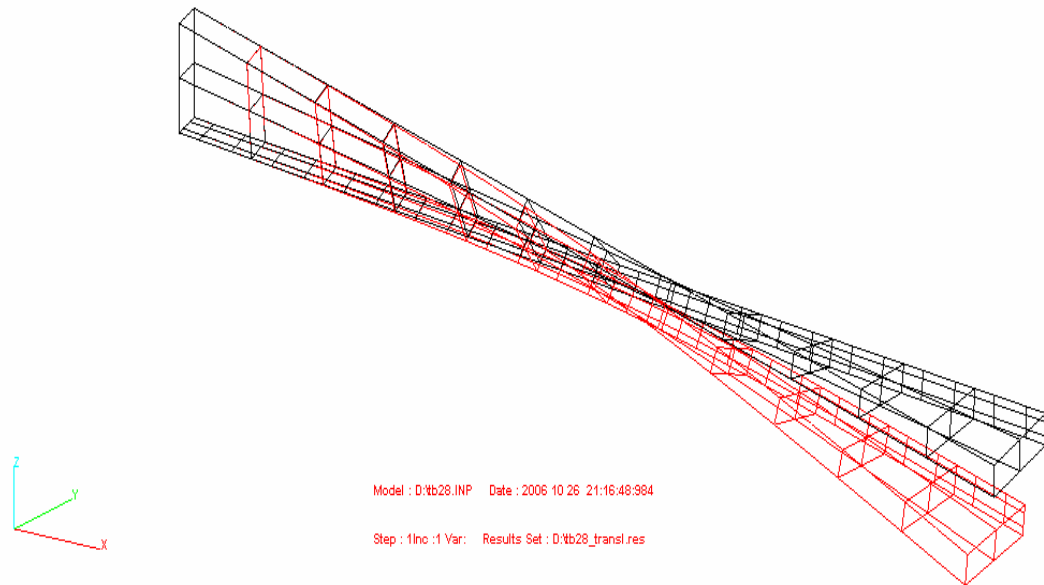
Rezultaty

Porównano przemieszczenia swobodnego końca belki w kierunku poziomym (oś Z) modeli zawierających różne typy elementów. Rezultaty oznaczone C3D21 i C3D28 otrzymano dla modeli zawierających te elementy w połączeniu z elementami C3D20. Wyniki zebrano w Tab. 3.7. Wartość teoretyczną przyjęto za pracę [28].

Tab. 3.7 Ugięcie swobodnego końca belki

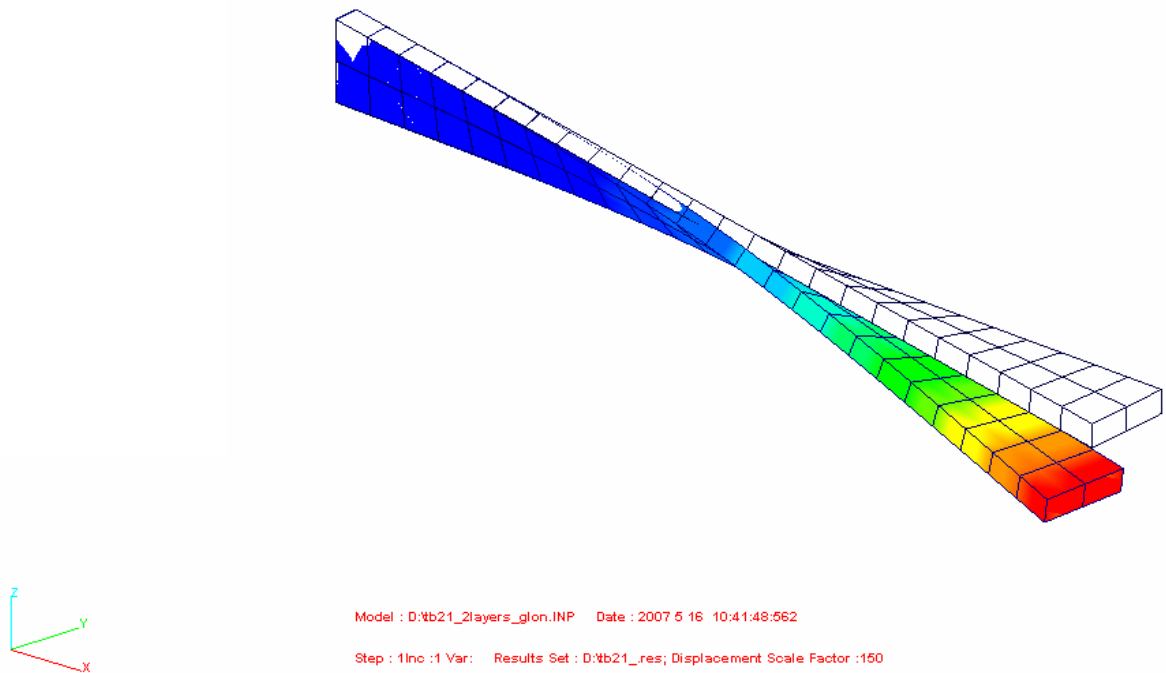
LICZBA ELEMENTÓW	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20
Siatka 12 x 2	0.005424	-1.3006 E-03	-4.8635 E-03	-3.2358 E-03	-1.1791 E-03	-4.8633 E-03
Siatka 24 x 2		-2.9475 E-03	-4.8938 E-03	-4.4968 E-03	-2.6071 E-03	-4.8937 E-03

Widok odkształconych modeli (elementy 28-węzłowe) pokazują Rys. 3.17 (siatka 12 x 2) oraz Rys. 3.18 (siatka 24x2).



Rys. 3.17 Model nieodkształcony i odkształcony siatka 12x2 elementów (elementy 28-węzłowe)

GLON



Rys. 3.18 Model nieodkształcony i odkształcony siatka 24x2 elementów (21-węzłowych)

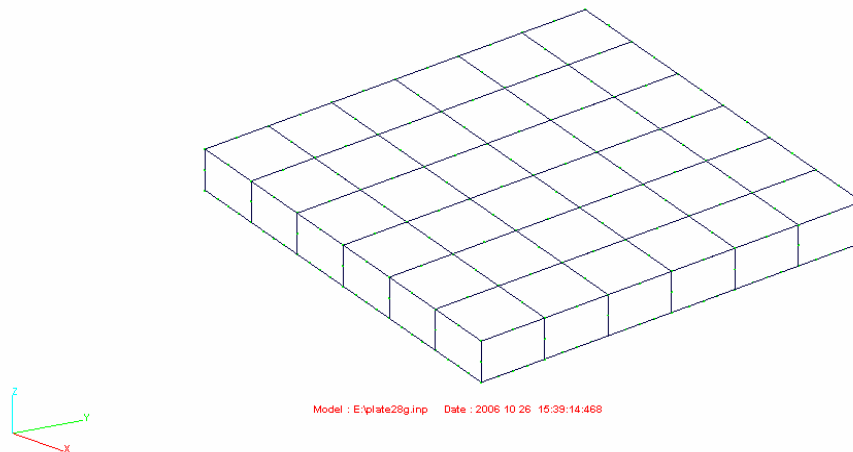
3.1.5 Płyta gruba

Model

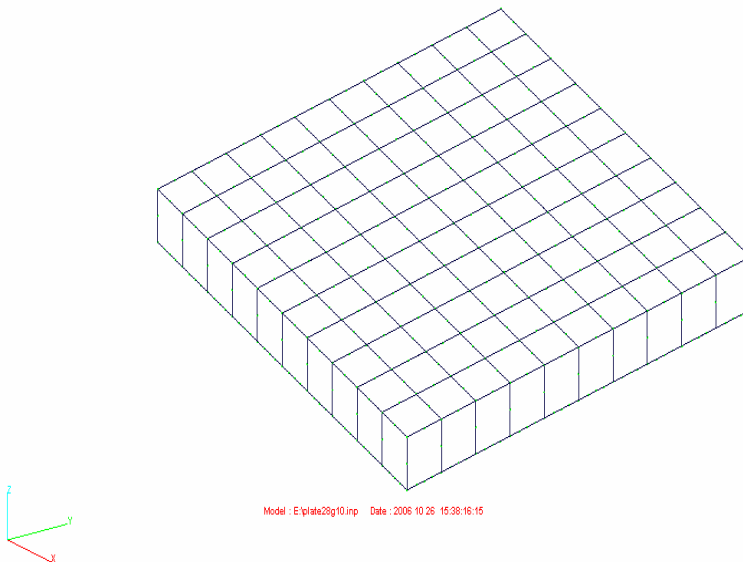
Prostokątna płyta o wymiarach $400\text{cm} \times 400\text{cm}$ i grubości 40cm została swobodnie podparta na wszystkich krawędziach [21]. Przyjęto następujące stałe materiałowe: $E = 2000\text{kN/cm}^2$, $\nu = 0.15$.

Wykonano modele zawierające dwie siatki elementów:

- (i) 6x6 elementów (Rys. 3.19),
- (ii) 10x10 elementów (Rys. 3.20).



Rys. 3.19 Siatka 6x6 elementów



Rys. 3.20 Siatka 10x10 elementów

Przyjęto dalej następujące warunki brzegowe i obciążenie całkowite: odebrano wszystkie stopnie swobody węzłom na brzegu płyty, siłę skupioną o wartości $P = -16\text{kN}$ przyłożono do środkowego węzła na górnej powierzchni płyty.

Rezultaty

Wartością porównywaną było przemieszczenie środkowego węzła dolnej powierzchni płyty w kierunku pionowym. Wyniki w przypadku modeli o siatkach 6x6 i 10x10 elementów oraz wartość teoretyczną podano w Tab.3.8.

Rozwiązanie teoretyczne odnośnie maksymalnego ugięcia płyty wynosi [21]:

$$w_{\max} = \beta_1 \frac{PL^2}{D} \quad (3.3)$$

gdzie:

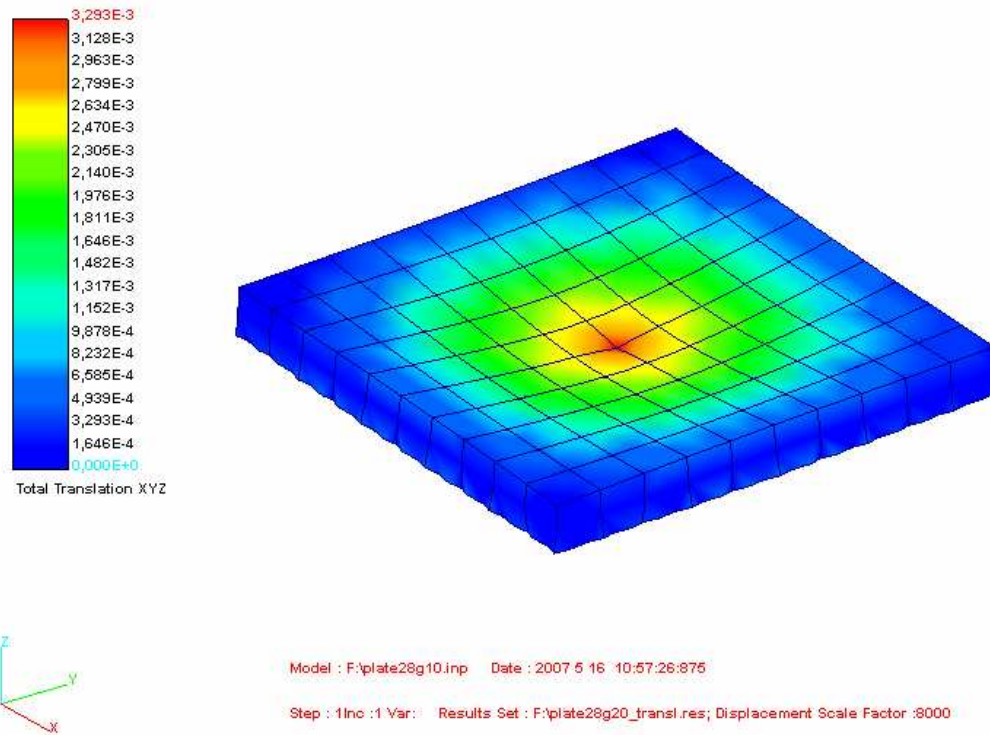
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.4)$$

h - oznacza grubość płyty, L - jest szerokością płyty prostokątnej, β_1 jest współczynnikiem zależnym od stosunku h/L (na podst. [21] przyjęto $\beta_1 = 0.01353$).

Tab. 3.8 Ugięcie środkowego węzła dolnej powierzchni płyty [cm]

SIATKA ELEMENTÓW	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D14	C3D21	C3D28	ABAQUS C3D08	ABAQUS C3D20	ABAQUS ELEMENT PŁYTOWY S8R
6 x 6	0.003322	-1.319 5E-03	-3.2761 E-03	-2.8129 E-03	-1.1447 E-03	- 3.2599 E-03	-3.2827 E-03
10 x 10		-1.660 1E-03	-3.5152 E-03	-3.2894 E-03	-1.8672 E-03	-3.4835 E-03	-3.3350 E-03

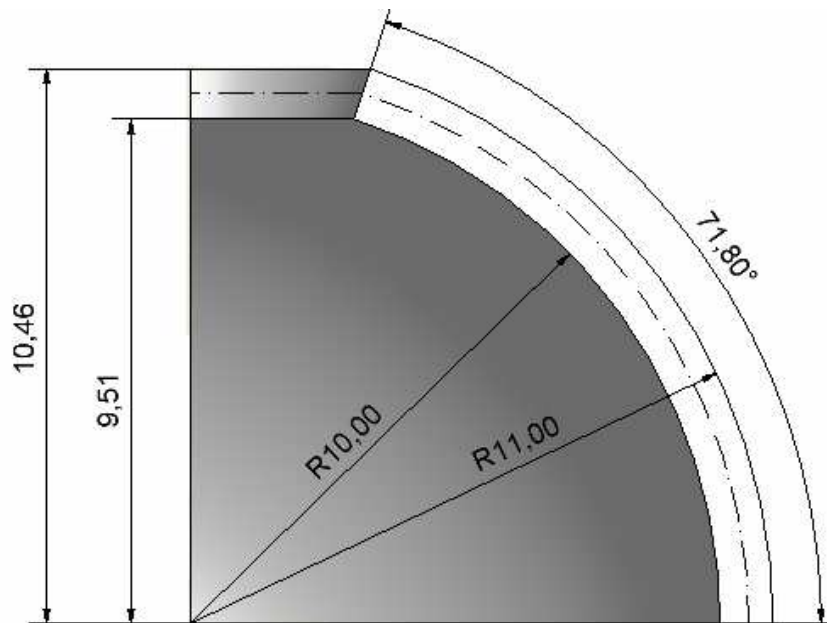
Widok odkształconego modelu pokazuje Rys. 3.21.

GLON

Rys. 3.21 Widok odkształconej płyty, elementy 28-węzłowe

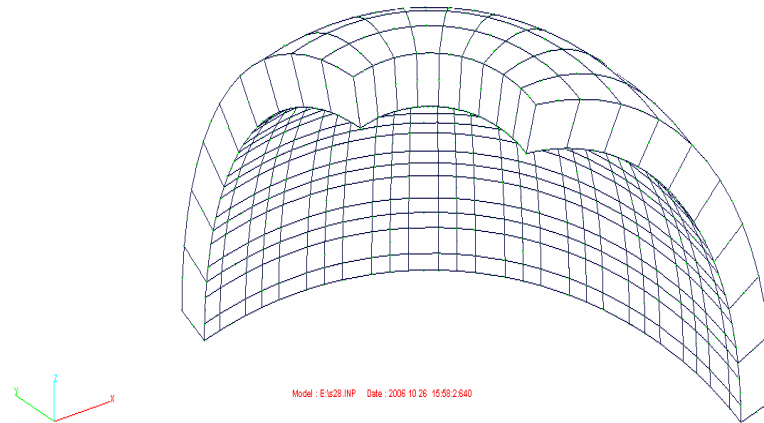
3.1.6 Powłoka gruba*Model*

Wymiary 1/8 wycinka sfery pokazano na Rys. 3.22. W górnej części znajduje się otwór w celu ułatwienia rozpięcia siatki elementów. Stałe materiałowe: $E = 2 \cdot 10^5$, $\nu = 0.3$.



Rys. 3.22 Wycinek sfery z otworem

Wykonano model o siatce zawierającej 9x9 elementów równomiernie rozpiętych wzdłuż promieni sfery, jak pokazano na Rys. 3.23.



Rys. 3.23 Siatka 81 elementów skończonych (pokazano elementy 28-węzłowe)

Warunki brzegowe i obciążenie są następujące: całkowite utwierdzenie węzłów na dolnej krawędzi oraz symetryczne warunki brzegowe na bocznych krawędziach. Siły skupione o wartości $P = -100$ przyłożono do 10 węzłów w otworze sfery, w połowie jej grubości; siły te działają w kierunku pionowym (Z).

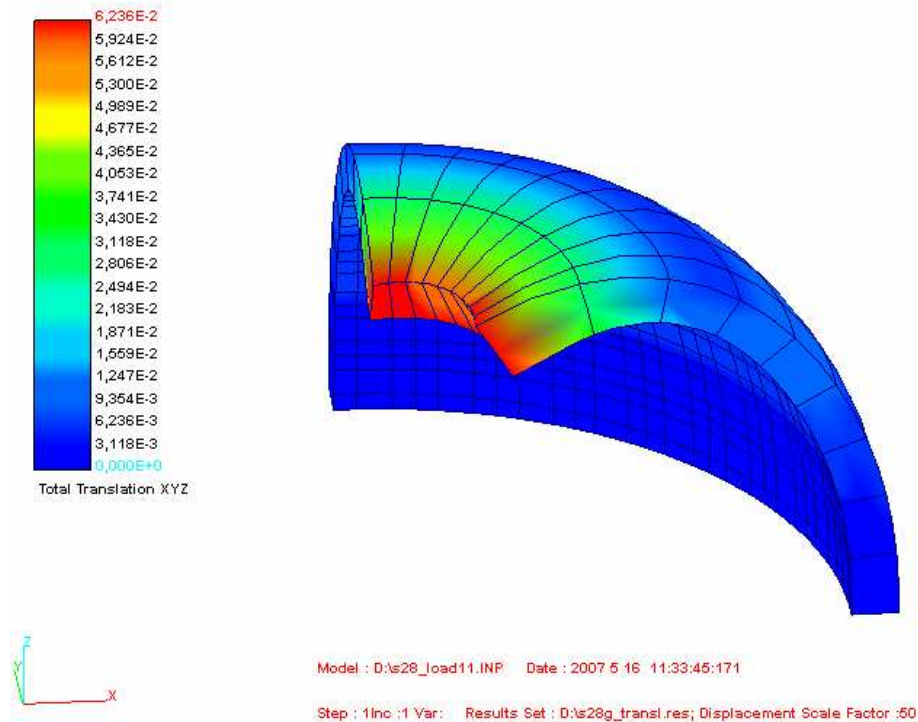
Rezultaty

Wartością porównywaną było przemieszczenie w kierunku pionowym węzłów umiejscowionych w środku dolnej krawędzi otworu. Wyniki użytych typów elementów zebrano w Tab. 3.9. Dla przykładu, otrzymane wartości w przypadku elementów 14-, 21- i 28-węzłowych można porównać z wartościami otrzymanymi przy użyciu elementu powłokowego lub elementu 20-węzłowego. Widok odkształconego modelu pokazuje Rys. 3.24.

Tab. 3.9 Przemieszczenie środka dolnego brzegu otworu

SIATKA ELEMENTÓW	C3D14	3D21	C3D28	ABAQUS C3D8	ABAQUS C3D20	ABAKUS ELEMENT POWŁOKOWY TYP ELEMENTU S8R
9 x 9	-5.9177 E-02	-6.2835 E-02	-5.9458 E-02	-5.6913 E-02	-6.2928 E-02	-5.9363 E-02

GLON



Rys. 3.24 Model odkształcony (elementy 28-węzłowe)

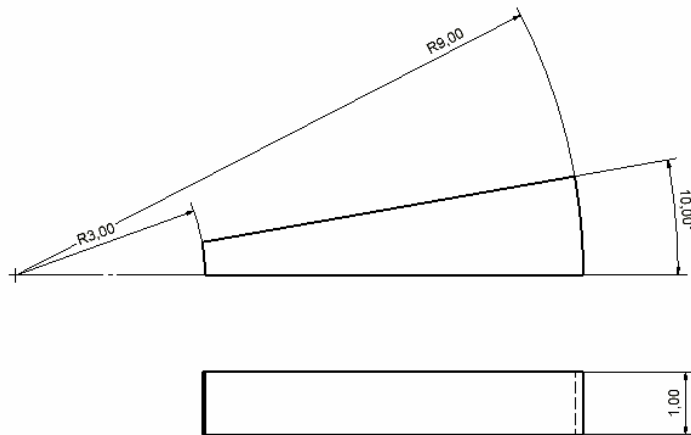
3.1.7 Cylinder grubościenny

Model

Nieskończenie długi grubościenny cylinder obciążono jednorodnym ciśnieniem działającym od wewnętrznej ścianki (Rys. 3.25). Wymiary cylindra wynoszą (przykład zaczerpnięto z pracy [29]).

Wymiary cylindra wynoszą:

- promień wewnętrzny - 3.0 m,
- promień zewnętrzny - 9.0 m,
- szerokość - 1.0 m.

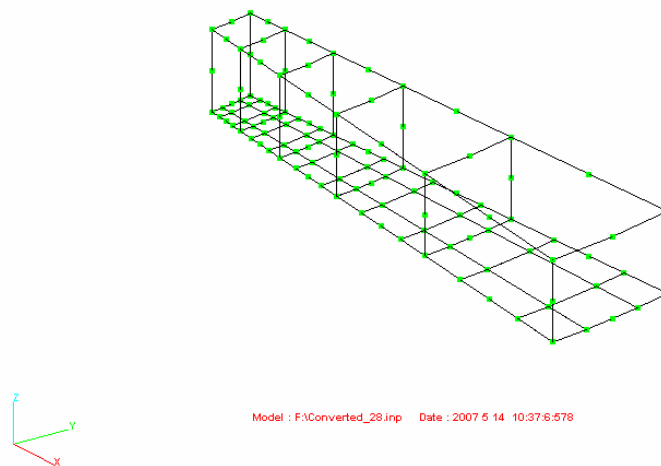


Rys. 3.25 Cylinder grubościenny (model)

W celu zbadania zachowania elementów 14-, 21-, 28-węzłowych w przypadku materiałów bliskich nieściśliwym przyjęto za pracą [29] następujące wartości stałych materiałowych:

- $\nu = 0.49, 0.499, 0.4999$ (0.5 oznacza materiał nieściśliwy),
- $E = 1000 \text{ Pa}$. Siatkę elementów przedstawia Rys. 3.26

GLON



Rys. 3.26 Siatka 5 elementów skończonych
Stosunek długości elementu najdłuższego do najkrótszego 4:1

Przyjęto następujące warunki brzegowe i obciążenie zewnętrzne: narzucono warunki brzegowe symulujące płaski stan odkształcenia oraz symetryczne warunki brzegowe na dwóch pozostałych płaskich ścianach (kąty 0° i 10°). Warunki brzegowe powodują, że dopuszczalne są tylko przemieszczenia w kierunku promieniowym a niemożliwe jest rozszerzanie cylindra w pozostałych kierunkach. Jednakowe ciśnienie jednostkowe przyłożono do wewnętrznej ściany cylindra.

Analiza

Analizę numeryczną przeprowadzono przy uwzględnieniu współczynników Poissona o wartościach podanych wyżej. Zgodnie z rozwiązaniem Lamé'go (zagadnienie Lamégo dokładnie omówiono w rozdziale 4), przemieszczenie promieniowe dane są wzorem:

$$u = \frac{(1+\nu) p R_1^2}{E(R_2^2 - R_1^2)} [R_2^2 / r + (1 - 2\nu)r] \quad (3.5)$$

gdzie: p - oznacza wartość przyłożonego ciśnienia, R_1 - promień wewnętrzny cylindra, R_2 - promień zewnętrzny cylindra.

Porównywanymi wartościami są przemieszczenia wewnętrznej ściany cylindra w kierunku promieniowym, wtedy $r = R_1$.

Rezultaty

Otrzymane wyniki z użyciem elementów C3D14, C3D21, C3D28 oraz wyniki teoretyczne odpowiadające płaskiemu stanowi odkształcenia (elementy CPS8) zebrano w Tab. 3.10.

Tab. 3.10 Przemieszczenie wewnętrznej powierzchni cylindra

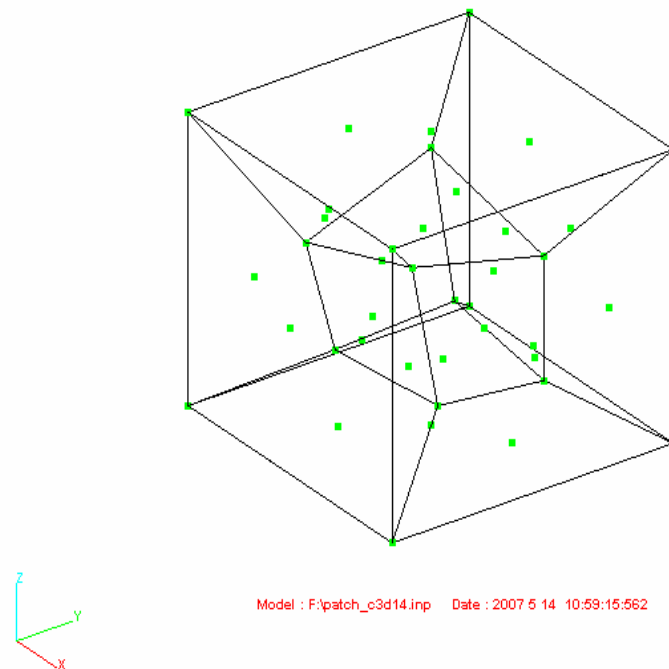
LICZBA POISSONA	WARTOŚĆ TEORETYCZNA WG WZORU 3.5	C3D14	C3D21	C3D28	CPE8 PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA
0.49	5.0399E-03	4.8973E-03	5.0329E-03	5.0359E-03	5.0386E-03
0.499	5.0602E-03	4.7173E-03	4.9917E-03	4.9987E-03	5.0471E-03
0.4999	5.0623E-03	4.6542E-03	4.4513E-03	4.5713E-03	4.9344E-03

3.1.8 Patch test

Model

Przeprowadzony patch test bazował na pomysłach zamieszczonych w pracy [29]. Przez narzucenie odpowiednich warunków brzegowych na zewnętrznych ściankach elementów skończonych o nieregularnych kształtach (Rys. 3.27 do 3.29) uzyskuje się jednorodny stan naprężenia w elementach. Dotyczy to wszystkich 7 elementów skończonych tworzących sześćian. Siatka elementów skończonych 14-węzłowych (7-elementów) została pokazana na Rys. 3.27.

GLON



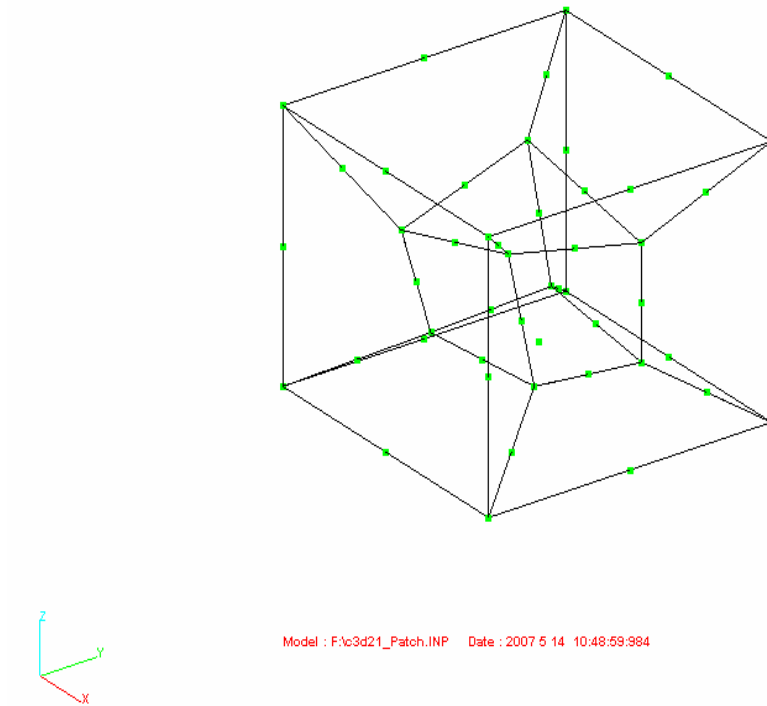
Rys. 3.27 Elementy 14-węzłowe

Elementy 21-węzłowe, podobnie jak elementy 28-węzłowe, połączono ze standardowymi elementami 20-węzłowymi. Rys. 3.28 przedstawia dwa elementy 21-węzłowe (element środkowy połączony z dolnym elementem), pozostałych pięć elementów to elementy 20-węzłowe.

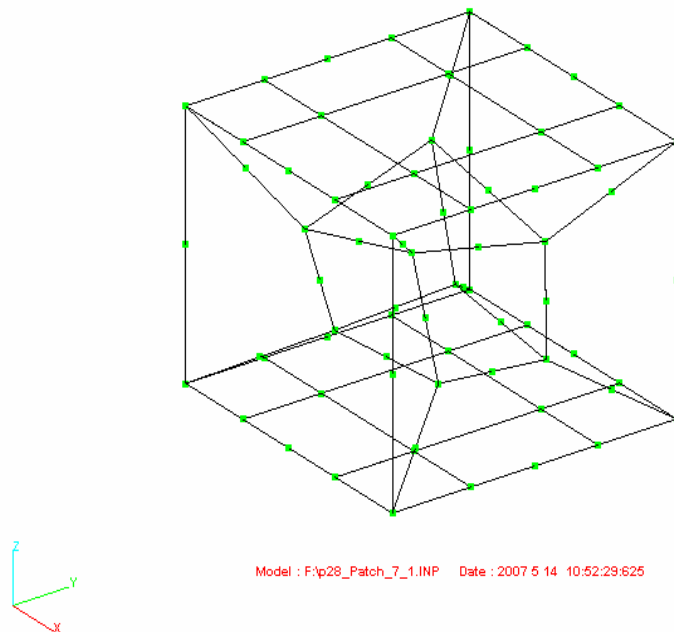
Na Rys.3.29 pokazano dwa elementy 28-węzłowe (na górze i na dole) w połączeniu z pięcioma elementami 20-węzłowymi. Jest jasne, że możliwe są również inne warianty wzajemnych połączeń elementów 21- i 20-węzłowych oraz 28- i 20-węzłowych.

Przyjęte stałe materiałowe są zgodne z [29] i wynoszą: $E = 2 \cdot 10^6$, $\nu = 0.25$.

Nieregularność kształtów poszczególnych elementów skończonych jest istotną cechą patch testów. Regularny jest natomiast kształt całego modelu - jednostkowy sześcian.

GLON

Rys. 3.28 Elementy 21-węzłowe (środek, dół)
w połączeniu z elementami 20-węzłowymi

GLON

Rys. 3.29 Elementy 28-węzłowe (dół i góra)
w połączeniu z elementami 20-węzłowymi

Narzucone warunki brzegowe muszą zapewniać jednorodny stan naprężenia. Niech wartości przemieszczeń zadanych w węzłach na brzegu kostki będą funkcjami:

$$w = 10^{-3}(x + y + 2z)/2 \quad (3.6)$$

$$u = 10^{-3}(2x + y + z)/2 \quad (3.7)$$

$$v = 10^{-3}(x + 2y + z)/2 \quad (3.8)$$

gdzie: x, y, z oznaczają współrzędne punktu (węzła), u, v, w są wartościami przemieszczeń kierunkowych.

Analiza

Wyniki rozwiązania numerycznego powinny być zgodne z wynikami otrzymanymi na drodze analitycznej. W rozwiązaniu analitycznym przy warunków brzegowych danych wzorami od 3.6 do 3.8, otrzymujemy w kostce sześcienniej następujące odkształcenia i naprężenia:

- odkształcenia: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 10^{-3}$
- naprężenia: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 2000; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 400$

Rezultaty

Otrzymane naprężenia w przypadku elementów C3D14 (siatka Rys. 3.27), C3D21 (siatka na Rys. 3.28), C3D28 (siatka na Rys. 3.29) zebrano w Tab. 3.11. Wyniki opowiadają naprężeniom podanym w rozwiązaniu analitycznym: $S11 = \sigma_x$, $S22 = \sigma_y$, $S33 = \sigma_z$, $S12 = \tau_{xy}$, $S13 = \tau_{zx}$, $S23 = \tau_{yz}$. W przypadku połączenia dwóch typów elementów (21 - 20, 28 - 20 węzłowych) w jednym modelu, podano naprężenia oddzielnie dla każdego elementu skończonego.

Tab. 3.11 Naprężenia w środku elementów skończonych

Naprężenia	Wartość teoretyczna	C3D14	C3D21 –C3D20		C3D28-C3D20	
			C3D21	C3D20	C3D28	C3D20
S11	2000	2000.0	2000.0	2000.0	2000.0	2000.0
S22	2000	2000.0	2000.0	2000.0	2000.0	2000.0
S33	2000	2000.0	2000.0	2000.0	2000.0	2000.0
S12	400	400.0	400.0	400.0	400.0	400.0
S13	400	400.0	400.0	400.0	400.001	400.0
S23	400	400.0	400.0	400.0	400.001	400.0

Podane w Tab. 3.11 wartości dotyczą naprężeń, które zostały obliczone w środku elementu skończonego (według nomenklatury wziętej z programów komercyjnych MES używa się nazwy ‘centroid’).

ELEMENT OUTPUT

THE FOLLOWING TABLE IS PRINTED FOR ELEMENTS AT THE CENTROID OF THE ELEMENT

ELEMENT	FOOT	S11	S22	S33	S12	S13	S23	MISES
1	C3D20	2000	2000	2000	400	400.001	400	1200
2	C3D20	2000	2000	2000	400	400.001	400	1200
3	C3D20	2000	2000	2000	400	400.001	400	1200
4	C3D20	2000	2000	2000	400	400.001	400	1200
5	C3D20	2000	2000	2000	400	400.001	400	1200
60000	C3D28	2000	2000	2000	400.001	400.001	400	1200
70000	C3D28	2000	2000	2000	400.001	400.001	400.001	1200

MAXIMUM MISES 1200 AT ELEMENT 60000

MINIMUM MISES 1200 AT ELEMENT 5

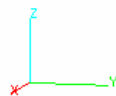
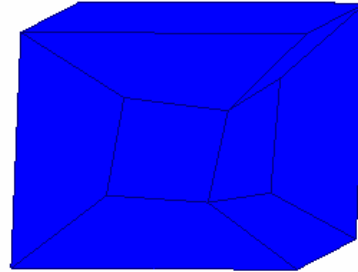
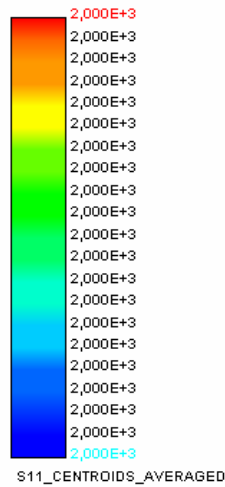
W punktach całkowania wartości naprężeń są takie same jak obliczone w środku elementu (co przedstawia poniższy wydruk dla elementu 21-węzłowego):

THE THE FOLLOWING TABLE IS PRINTED FOR ELEMENTS AT THE INTEGRATION POINTS

ELEMENT	FOOT-	S11	S22	S33	S12	S13	S23	MISES
50001	C3D21 01	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 02	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 03	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 04	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 05	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 06	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 07	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 08	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 09	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 10	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 11	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 12	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 13	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 14	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 15	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 16	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 17	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 18	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 19	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 20	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 21	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 22	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 23	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 24	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 25	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 26	2000	2000	2000	400	400	400	1200
50001	C3D21 27	2000	2000	2000	400	400	400	1200

Naprężenia S11 i odkształcenia sześcianu pokazano na Rys. 3.30. Są one oczywiście jednakowe wewnątrz wszystkich elementów (jednorodny stan naprężenia, stąd jednolity kolor elementów).

GLON



Model : D:\c3d21_Patch_glon.INP Date : 2007 5 14 22:39:20:78

Step : 1 Inc : 1 Var : Results Set : D:\c3d21_patch_glon_S11.res; Displacement Scale Factor : 100

Rys. 3.30 Naprężenia S11; elementy 21-węzłowe.
Model odkształcony - bez pokazanych dwóch elementów bocznych (współczynnik skali 100)

3.1.9 Ocena rezultatów testów

Otrzymane wyniki rozwiązań numerycznych mogą znacznie odbiegać od rozwiązań analitycznych lub od pewnych wartości przyjętych jako stan odniesienia. Rozbieżność pomiędzy tymi wartościami przyjmiemy jako błąd zastosowanego typu elementu. W celu oceny tej rozbieżności użyjemy jak w [29] symbolicznych oznaczeń podanych w Tab. 3.12.

Tab. 3.12 Symboliczne oznaczenie wielkości błędu

Symbol	Wartość
A	2% > błąd
B	10% > błąd > 2%
C	20% > błąd > 10%
D	50% > błąd > 20%
E	błąd > 50%

Dla przeprowadzonych testów ocenę uzyskanych rezultatów przedstawia Tab. 3.13.

Tab. 3.13 Ocena rezultatów testów. A, B – test zaliczony

TEST / NR TESTU	KSZTAŁT ELEMENTÓW /ILOŚĆ ELEMENTÓW	ELEMENT				
		C3D14	C3D21	C3D28	Abaqus C3D8	Abaqus C3D20
1a Belka prosta rozciągana	duży stos. a/b 6x1x1	A	A	A	A	A
1b Belka prosta zginana	duży stos. a/b 6x1x1	E	B	E	E	B
1b Belka prosta zginana	regularny 24x1x1	D	A	B	A	A
2a Belka prosta rozciągana	nieregularny 5x1x1	A	A	A	A	A
2b Belka prosta zginana	nieregularny 5x1x1	D	A	B	C	A
3a Belka zginana zakrzywiona	regularny 5x1x1	D	B	B	D	A
4 Belka skręcona	duży stos a/b 12x2x1	E	B	D	E	B
4 Belka skręcona	regularny 24x2x1	D	B	C	E	B
5 Płyta gruba	regularny 6 x 6x1	E	A	C	E	A
5 Płyta gruba	regularny 10x10x1	E	B	A	D	B
6 Powłoka gruba	regularny 9x 9x1	A	B	A	B	B
7 Cylinder grubościenny	nieregularny 5, $\nu = 0.49$	B	A	A	Element CPE 8 A	
8 Patch test	nieregularny 7	A	A	A	A	A

Z przeprowadzonych testów jedynie test rozciągania pręta (1a i 2a) można uznać za test przesądający [29]. Elementy, które nie spełniają tego testu możemy wykluczyć jako nieprzydatne. W naszym przypadku testowane elementy 14-, 21- i 28-węzłowe spełniały postawione wymagania.

Uważa się również, że elementy które nie spełniają patch testu nie są ‘godne zaufania’ [29]. W teście 8 (‘patch test’) wyniki były zgodne z teoretycznymi.

Niektóre z przeprowadzonych testów pozwalają zorientować się w zachowaniu elementów i nie mogą jednoznacznie przesądzać o jego przydatności do obliczeń komercyjnych.

Największe trudności występowały w przypadku testów zginania belek, zwłaszcza w przypadku gdy stosunek długości do szerokości (a/b) elementu był duży. Najgorsze wyniki uzyskano w przypadku elementów o liniowych funkcjach kształtu (element 14-węzłowy i element 8-węzłowy). W przypadku zginania, element 28-węzłowy daje dobre wyniki, w przypadku, gdy stosunek długości do szerokości (a/b) jest zbliżony do jedności. Najlepsze rezultaty uzyskuje się przy użyciu elementów 21-węzłowych, nawet w przypadku znacznych różnic długości do szerokości elementu skończonego.

3.2 Testowe przestrzenne zagadnienia kontaktowe

Zagadnienia kontaktowe kontaktu mechanicznego zachodzące pomiędzy dwoma lub więcej ciałami były w polu zainteresowań matematyków i inżynierów od wielu lat. W 1882 Hertz podał analityczne rozwiązania w przypadku ciał o powierzchniach drugiego stopnia. Ze względu na trudności rozwiązania, w pierwszych próbach analitycznych nie uwzględniono tarcia.

W zagadnieniach kontaktowych możemy rozważyć więc dwa skrajne przypadki:

- (i) przypadek, gdy punkty należące do powierzchni ciał będących w kontakcie pozostają ze sobą związane (adhezja) - nie występuje zjawisko poślizgu na powierzchni kontaktu, lub inaczej przemieszczenia punktów kontaktowych są takie same.
- (ii) przypadek kontaktu bez uwzględnienia tarcia. Zakłada się doskonały poślizg, tzn. na powierzchni kontaktu nie występują wówczas naprężenia styczne.

Każdy przypadek bez uwzględnienia tarcia jest nierzeczywisty. Może on jednak dostarczać wielu cennych informacji, a w wielu przypadkach takie rozwiązania jak np. rozkład ciśnienia kontaktowego i pola powierzchni kontaktowej nie będą istotnie odbiegać od rozwiązań z uwzględnieniem tarcia.

Przypadki bez tarcia bardzo dobrze nadają się jako testy weryfikacyjne poprawności rozwiązań numerycznych.

Numeryczna analiza zagadnień kontaktowych w porównaniu do zagadnień bez uwzględnienia kontaktu jest zadaniem znacznie trudniejszym. W ogólnym przypadku nie jest znana z góry powierzchnia kontaktu oraz możliwe są jej duże zmiany, w porównaniu z początkową powierzchnią kontaktu. Z tych przyczyn, warunki kontaktowe powinny być sprawdzane w iteracyjnym procesie rozwiązywania zagadnienia (*ang.* trial-error procedure). W węzłach na potencjalnej powierzchni kontaktu siły kontaktowe w kierunku normalnym muszą być siłami ściskającymi. Węzły w których siły kontaktowe są siłami rozciągającymi wskazują, że powierzchnia kontaktowa jest zbyt 'duża' dla zadanego obciążenia i węzły te nie powinny brać dalszego udziału w kontakcie; w następnej iteracji powinny być wykluczone z procesu iteracyjnego. Podczas kolejnych iteracji sprawdzane są również położenia węzłów względem powierzchni kontaktowych. W przypadku przenikania węzłów (zjawisko penetracji) powierzchnia kontaktowa jest 'zbyt mała' i sąsiednie węzły powinny zostać włączone do powierzchni kontaktowej w kolejnym kroku obliczeniowym.

W procesie iteracyjnym na każdym etapie obliczeń należy śledzić i kategoryzować dwa stany, w zależności od tego, czy:

- powierzchnia kontaktu w kolejnych iteracjach zmniejsza się - mówimy wtedy o kontakcie cofającym (*ang.* receding contact),
- powierzchnia kontaktu w kolejnych iteracjach zwiększa się - kontakt rozwijający (*ang.* advancing contact).

Z numerycznego punktu widzenia najprostszym przypadkiem jest kontakt ustalony, gdy w węzłach kontaktowych nie występują siły rozciągające i nie występuje zjawisko penetracji. Przypadek kontaktu ustalonego można rozwiązać w jednej iteracji (*ang.* conforming contact).

W programach MES (np. starsze wersje ABAQUS-a, ver. 5.8 i niższe) do przeprowadzania analiz z uwzględnieniem kontaktu z reguły stosuje się dwa sposoby:

- podejście polegające na zdefiniowaniu par kontaktowych (poprzez określenie ścian elementów bądź grupy węzłów) odpowiadających powierzchniom, które mogą wziąć udział w potencjalnym ‘kontakcie’. Do sprawdzenia i uwzględnienia warunków kontaktowych używane są algorytmy typu ‘master-slave’. Powierzchnie zdefiniowane w parach kontaktowych są traktowane w sposób następujący: pierwsza, jako powierzchnia ‘slave’, druga jako powierzchnia ‘master’.
- drugim sposobem jest użycie specjalnych elementów międzywarstwowych (*ang.* zero thickness interface elements). Specjalne elementy kontaktowe o zerowej grubości są umieszczone pomiędzy dwoma ciałami i zdefiniowane przez węzły przynależne do obu powierzchni. Najprostszym elementem jest dwuwęzłowy element działający tylko w kierunku normalnej zewnętrznej (*ang.* gap element). Bardziej zaawansowane elementy międzywarstwowe łączą ze sobą wszystkie węzły ścian elementów znajdujących się na powierzchniach kontaktowych ciał biorących udział w kontakcie.

W celach weryfikacji elementów i algorytmów użytych do numerycznych rozwiązań zagadnień kontaktowych konieczne jest przeprowadzenie testów zagadnień dla których znane są rozwiązania analityczne. Najczęściej przeprowadzanymi testami numerycznymi są testy rozwiązań dla kontaktu Hertza i podobnych, bądź zagadnienie kontaktu stempla z półprzestrzenią sprężystą.

Wszystkie testy elementów 14-, 21- i 28-węzłowych przeprowadzono z użyciem odpowiednich elementów typu interface. W pracy zamieszczono wyniki obliczeń testowych następujących zagadnień:

Test 1: stempel i podstawa sprężysta,

Test 2: dwa cylindry złożone współosiowo, obciążone zewnątrz i wewnątrz ciśnieniem o stałej wartości (zadanie Lamégo). Test ten wykorzystywany był również do weryfikacji procedur związanych z generacją wektorów zewnętrznych powierzchni zakrzywionych i obliczeniami pól powierzchni kontaktowych, a co za tym idzie, rozkładu ciśnień kontaktowych,

Test 3: kontakt dwóch belek jednostronnie utwierdzonych. Test uwzględnia tarcie na powierzchni kontaktu pomiędzy belkami (zwiększenie współczynnika tarcia między belkami powoduje, że belki powinny być coraz bardziej powiązane, a przy odpowiednio dużym współczynniku tarcia powinno wystąpić całkowite ich związanie jako jednego ciała; wtedy wartość ugięcia swobodnego końca belek powinna odpowiadać teoretycznej wartości ugięcia pojedynczej utwierdzonej belki o polu przekroju poprzecznego równym polu dwóch belek w kontakcie,

Test 4: stempel na półprzestrzeni sprężystej. Test wybrano w celu weryfikacji poprawności rozwiązań, zarówno w przypadku tarcia izotropowego jak i anizotropowego.

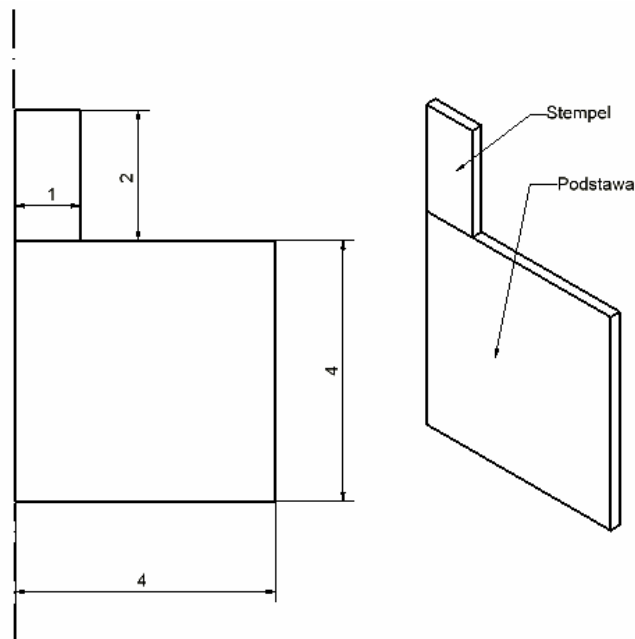
Jest jasne, że w przypadku tarcia izotropowego wartości poślizgu w węzłach kontaktowych powinny wykazywać symetrię, inaczej niż w przypadku tarcia anizotropowego.

3.2.1 Stempel i podłoże sprężyste

Opis zagadnienia

Dwuwymiarowy problem kontaktu płaskiego stempla z podłożem sprężystym może stanowić odniesienie do analizy podobnego zagadnienia przestrzennego.

Poprzez zastosowanie odpowiednich warunków brzegowych możemy symulować w modelu przestrzennym warunki płaskiego stanu odkształceń. Umożliwia to porównanie otrzymanych wyników z rozwiązaniem przestrzennego z wynikami otrzymanymi z rozwiązania analitycznego (istnieje rozwiązanie bez tarcia) lub rozwiązaniem numerycznym odniesionego do modelu płaskiego.

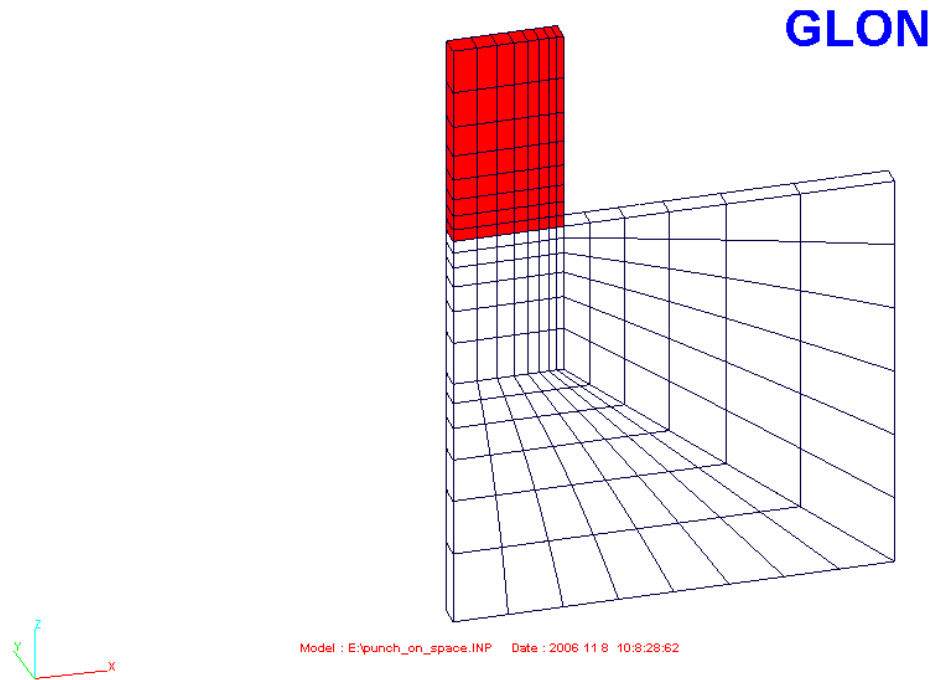


Rys. 3.31 Stempel i podstawa sprężysta

Model

Ze względu na symetrię, analizę odniesiono do połowy stempla o wymiarach (wymiar w [m]) podanych na Rys. 3.31. W modelu przestrzennym szerokość stempla i podstawy przyjęto jako 0.2m. Założono, że stałe materiałowe wynoszą: $E=1.0\text{Pa}$, $\nu=0.3$ (dane liczbowe zaczerpnięto z przykładów testowych zaproponowanych przez organizację NAFEMS).

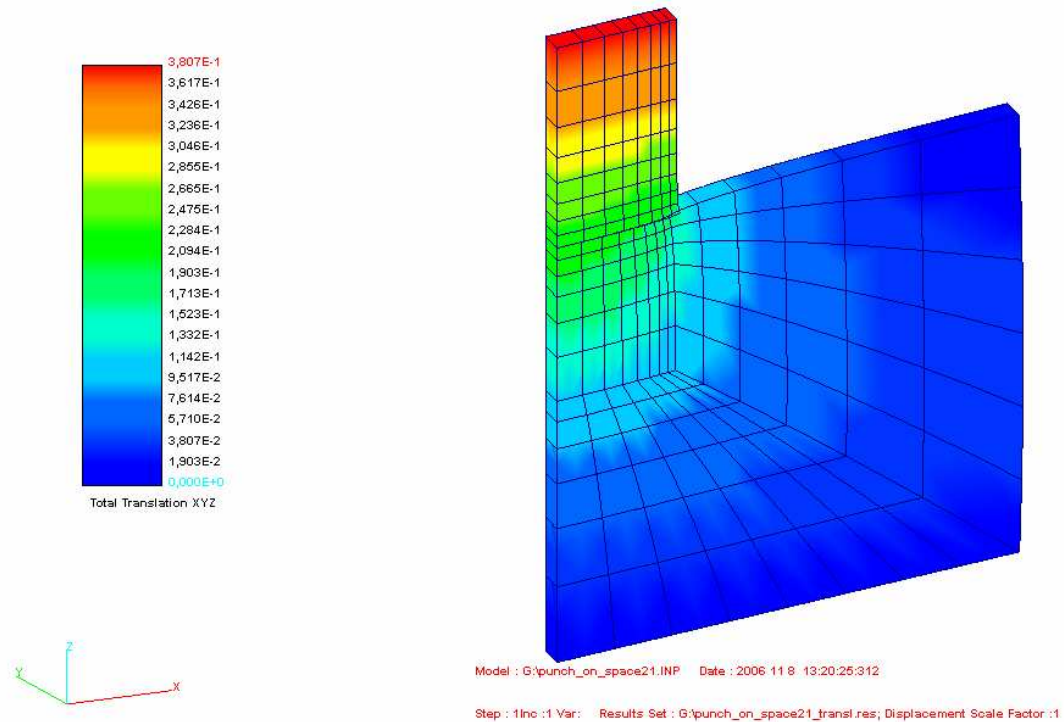
W analizie numerycznej użyto modelu o siatce pokazanej na Rys. 3.32. Model zawierał 332 elementy skończone. W strefie kontaktu użyto 16 (8 stempel, 8 podstawa) elementów 14-, 21-, 28-węzłowych. Elementy w strefie kontaktu mają stopniowaną długość zmniejszającą się w kierunku prawej krawędzi stempla (zagęszczenie siatki przy krawędzi). Założono, że stosunek długości elementu najdłuższego do najkrótszego na długości 1.0m wynosi 4:1. Na górną powierzchnię stempla działa jednorodne ciśnienie równe 1N/m^2 . Węzły na dole podstawy sprężystej są całkowicie zablokowane. Z uwagi na symetrię zastosowano odpowiednie warunki brzegowe. W celu narzucenia warunków płaskiego stanu odkształceń w węzłach na przednich i tylnych powierzchniach stempla i podstawy zablokowano możliwość przemieszczeń w kierunku poprzecznym.



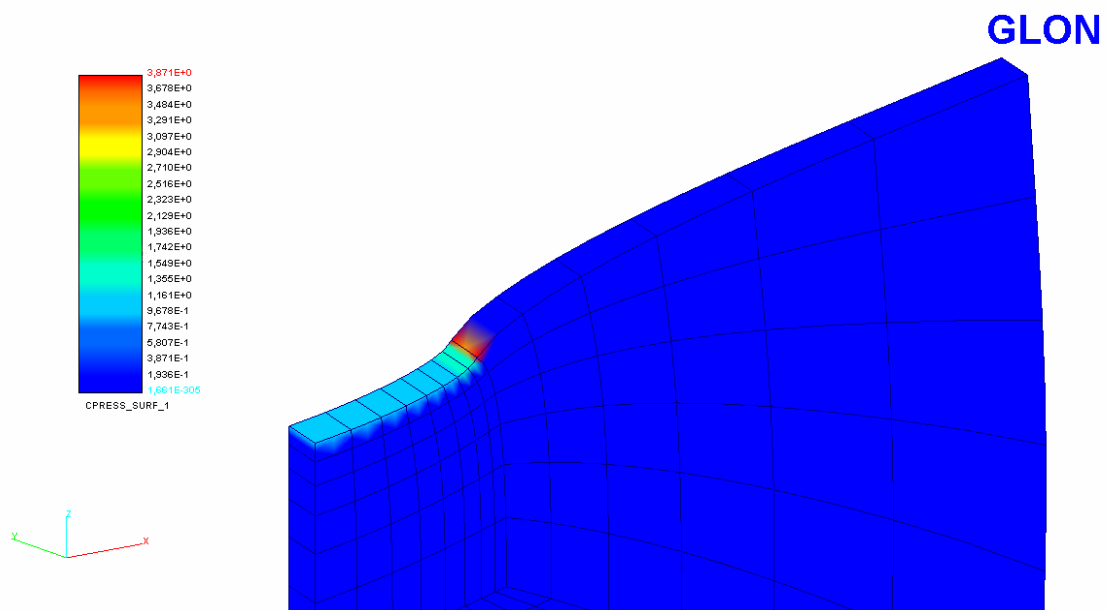
Rys. 3.32 Siatka elementów skończonych
(elementy czerwone - stempel, białe - podstawa)

Rezultaty

Przemieszczenia stempla i podstawy pokazują Rys. 3.33 i 3.34. W tym przykładzie najbardziej interesującym jest rozkład ciśnienia kontaktowego. W rozwiązaniu teoretycznym ciśnienie kontaktowe jest najmniejsze w środkowej części powierzchni kontaktowej, wahania zaś ciśnienia kontaktowego są niewielkie. Największe zmiany występują przy krawędzi stempla i szybko osiągają wartość nieskończoną. W modelu MES obserwujemy jego gwałtowny wzrost, jak pokazuje Rys 3.34. Wykresy rozkładów ciśnienia kontaktowego z użyciem elementów 14-, 21- i 28-węzłowych pokazano na Rys. 3.35. W przypadku bez tarcia, wartości poślizgów pokazano natomiast na Rys 3.36.



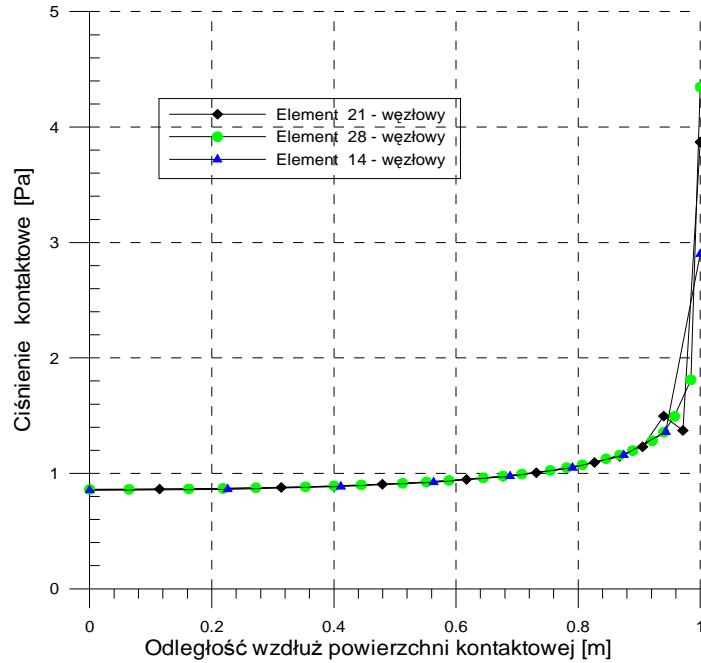
Rys. 3.33 Przemieszczenia stempla i podstawy sprężystej, elementy 21-węzłowe



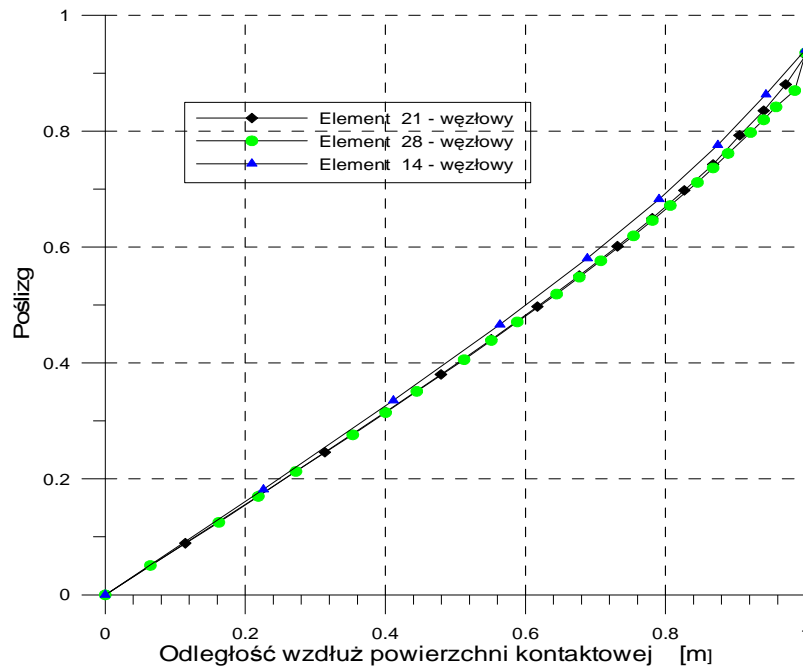
Rys. 3.34 Rozkład ciśnienia kontaktowego; elementy 21-węzłowe

Wartości naprężeń w środku powierzchni kontaktowej z użyciem wszystkich typów elementów są niemal identyczne i wynoszą ok. 0.9 Pa i są zgodne z wynikami podanymi w pracy [23]. Maksymalne wartości ciśnienia kontaktowego przy krawędzi stempla zależą oczywiście od użytego typu elementu, a właściwie od stopnia zagęszczenia siatki. Tym można wytłumaczyć, że element 28-węzłowy dawał największe wartości, a element 14-węzłowy najmniejsze.

Zauważmy ponadto, że w przypadku elementu 21-węzłowego wystąpiła oscylacja rozkładu ciśnienia kontaktowego, co nie miało miejsca przy użyciu elementów 14- i 28-węzłowych. Podsumowując, można powiedzieć że w tym teście, z uwagi na łagodny przebieg ciśnienia kontaktowego (najbardziej zbliżony do rozkładu teoretycznego), element 28-węzłowy miał pewną przewagę nad dwoma pozostałymi.



Rys. 3.35 Wykres rozkładu ciśnienia kontaktowego

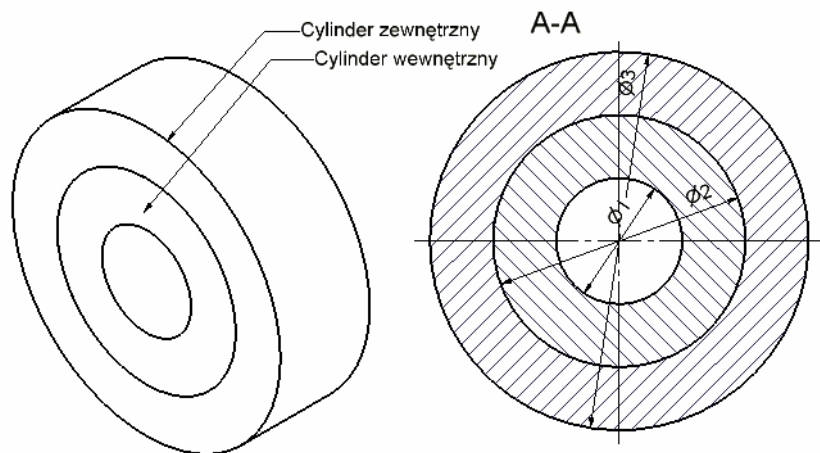


Rys. 3.36 Poślizgi wzdłuż powierzchni kontaktowej

3.2.2 Dwa cylindry złożone współosiowo

Opis zagadnienia

Model składający się z dwóch współosiowo złożonych cylindrów obciążonych ciśnieniem (klasyczne zagadnienie Lamé'go) pokazano na Rys. 3.37. Zadanie to jest zagadnieniem płaskiego stanu odkształcenia. Warunki płaskiego stanu odkształceń można symulować w przypadku modelu przestrzennego przez założenie odpowiednich warunków brzegowych na końcach ścian cylindrów (w kierunku ich osi). Test służy do oceny poprawności procedur związanych z zagadnieniem kontaktowym na powierzchniach zakrzywionych (procedury wyznaczenia wektorów normalnych, obliczania pola powierzchni kontaktowej i ciśnienia kontaktowego).



Rys. 3.37 Dwa cylindry złożone współosiowo

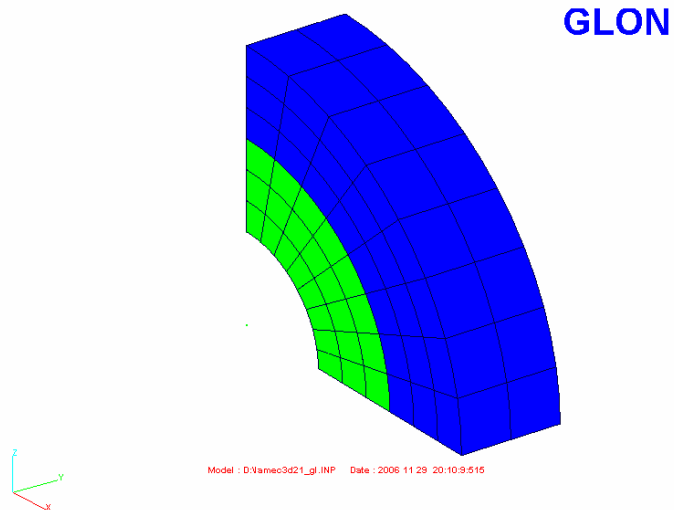
Model

Wymiary zaznaczono na Rys 3.37. Promienie mniejszego cylindra wynoszą: 1.0m i 2.0m. Większy cylinder ma promienie równe: 2.0m i 3.0m. Długość cylindrów w kierunku osiowym wynosi 1.0m. Stałe materiałowe przyjęto jak w pracy [23], tzn.:

- (i) dla mniejszego cylindra: $E = 10 \text{ Pa}$, $\nu = 0.3$,
- (ii) dla większego cylindra: $E = 20 \text{ Pa}$, $\nu = 0.2$.

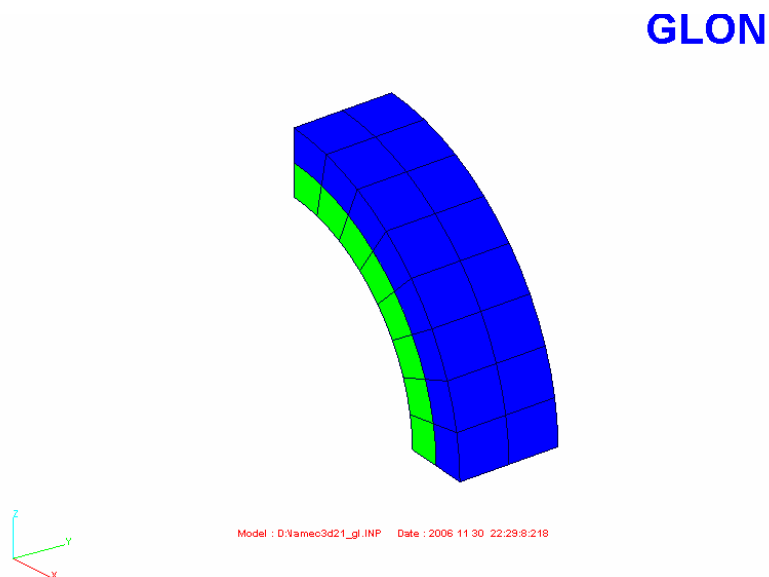
Ze względu na symetrię zagadnienia analizę można wykonać dla ćwiartki modelu (Rys. 3.38).

Przyjęto, że wewnątrz cylindrów działa jednorodne ciśnienie o wartości 5.0Pa, zaś na zewnątrz cylindra 3.0Pa, które przyłożono do górnych ścian zewnętrznej warstwy elementów. Względnie warunki symetrii modelu wymuszało zastosowanie w odpowiednich warunków brzegowych na ścianach zawierających płaszczyzny symetrii - płaszczyzna X-Y oraz Y-Z (na ścianach prostopadłych do osi Y wymuszono zerowe przemieszczenia).



Rys. 3.38 Siatka elementów skończonych uwzględniająca symetrię zadania

W kontakcie pozostawało ze sobą 16 elementów wewnętrznego cylindra i 16 elementów cylindra zewnętrznego (Rys. 3.39). Ogółem w modelu użyto 96 elementów skończonych.

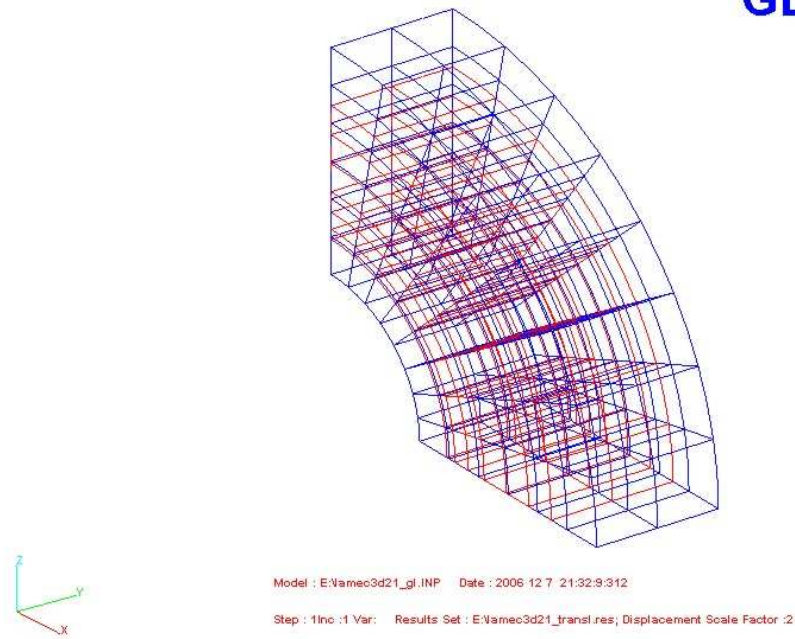


Rys. 3.39 Elementy skończone w strefie kontaktu
(zielony- cylinder wewnętrzny, niebieski-cylinder zewnętrzny)

Rezultaty

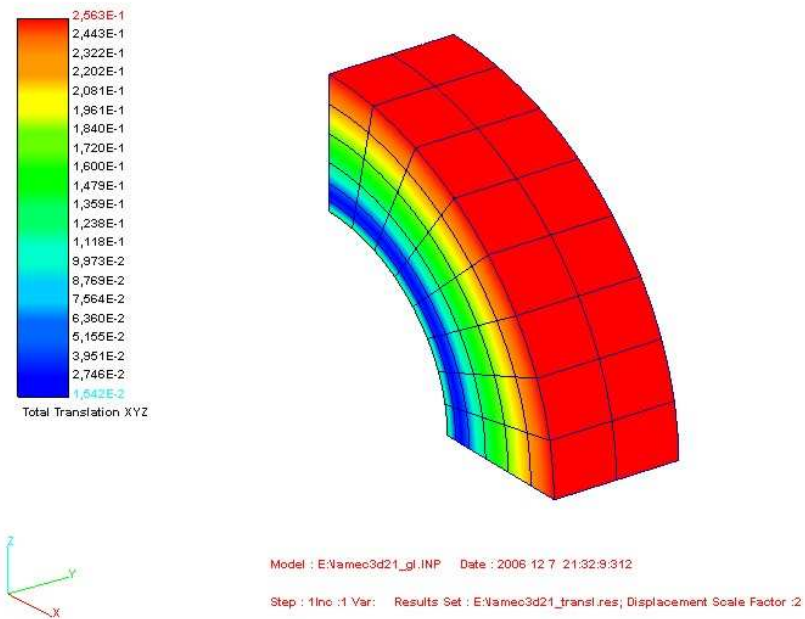
Model składa się z elementów 21-węzłowych połączonych z elementami 20-węzłowymi. Pod wpływem działających obciążeń węzły obu cylindrów przemieszczają się w przeciwnych kierunkach. Kolor niebieski oznacza cylindry nieodkształcone, zaś kolor czerwony cylindry odkształcone. Zdeformowany model MES przedstawiono na Rys. 3.40.

GLON



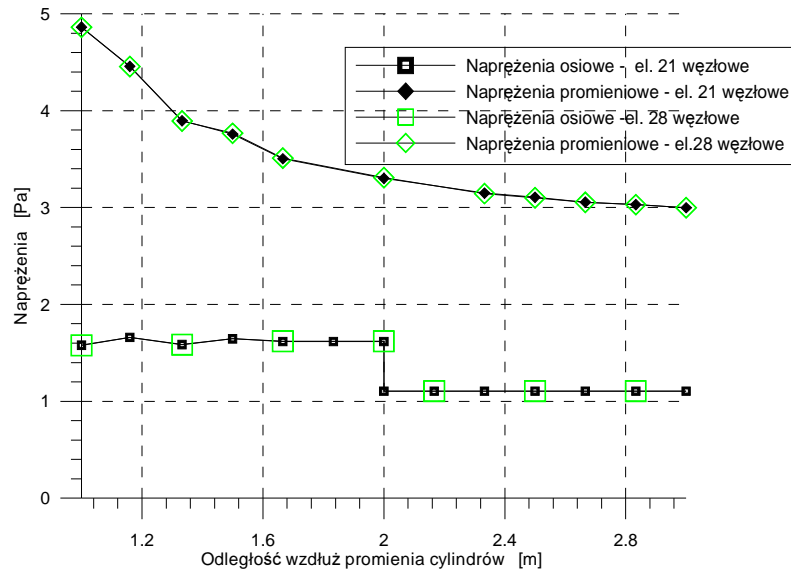
Rys. 3.40 Cylindry nieodkształcone –siatka niebieska, odkształcone-siatka czerwona

GLON



Rys. 3.41 Cylindry – przemieszczenia

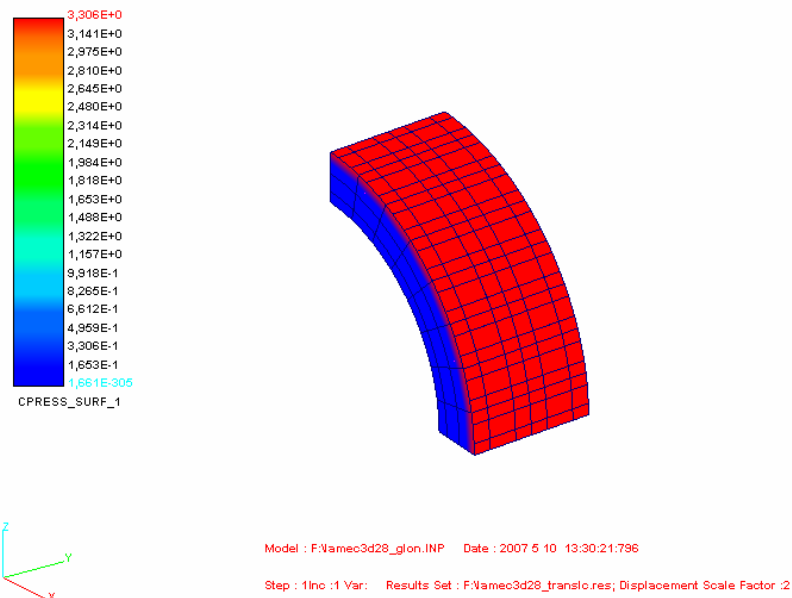
Naprężenia promieniowe osiowe i promieniowe elementów 21- i 28-żłowych przedstawia Rys. 3.42. Wartości naprężeń są zgodne z rozwiązaniem Lamé'go i z wynikami podanymi w pracy [23].



Rys. 3.42 Rozkład naprężeń w cylindrach

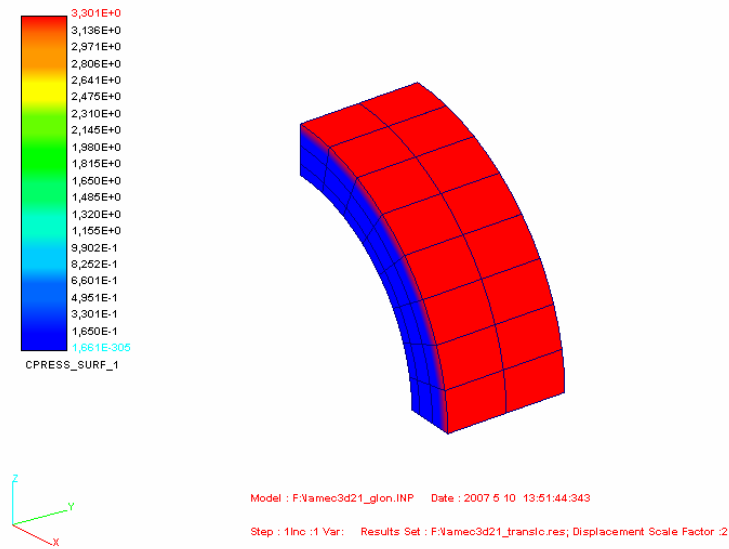
Napężenia osiowe są praktycznie stałe wzdłuż promienia. Z powodu różnic współczynnika Poissona obydwu cylindrów, w miejscu styku cylindrów występuje nagły skok naprężeń osiowych. Ciśnienie kontaktowe na powierzchni stykowej powinno mieć stałą wartość równą naprężeniom promieniowym. Elementy 21- i 28-węzłowych spełniają ten warunek, a otrzymana wartość jest praktycznie jednakowa i wynosi 3.3MPa. W przypadku elementów 14-węzłowych wartość ta jest nieco wyższa i wynosi 3.5 MPa. Rozkład ciśnienia na powierzchni wewnętrznego cylindra w przypadku elementów 28-węzłowych przedstawia Rys.3.43, zaś elementów 21-węzłowych, Rys. 3.44.

GLON



Rys. 3.43 Ciśnienie kontaktowe na powierzchni wewnętrznego cylindra, elementy 28-węzłowe

GLON

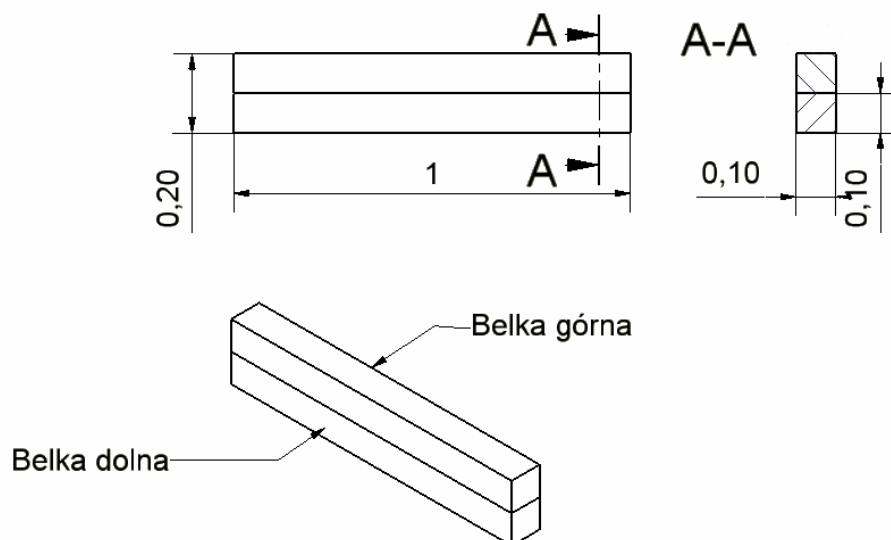


Rys. 3.44 Ciśnienie kontaktowe na powierzchni wewnętrznego cylindra, elementy 21-węzłowe

3.2.3 Kontakt dwóch belek jednostronnie utwierdzonych

Opis zagadnienia

Założono na początku, że dwie belki proste o wymiarach podanych na Rys. 3.45 pozostają ze sobą w kontakcie [48].



Rys. 3.45 Dwie belki proste jednostronnie całkowicie utwierdzone

Pod wpływem zadanego obciążenia (jednorodnego ciśnienia na górnej powierzchni górnej belki) ciała uginają się, cały czas pozostając w kontakcie. Jest jasne, że maksymalna wartość ugięcia będzie zależeć od współczynnika tarcia między belkami.

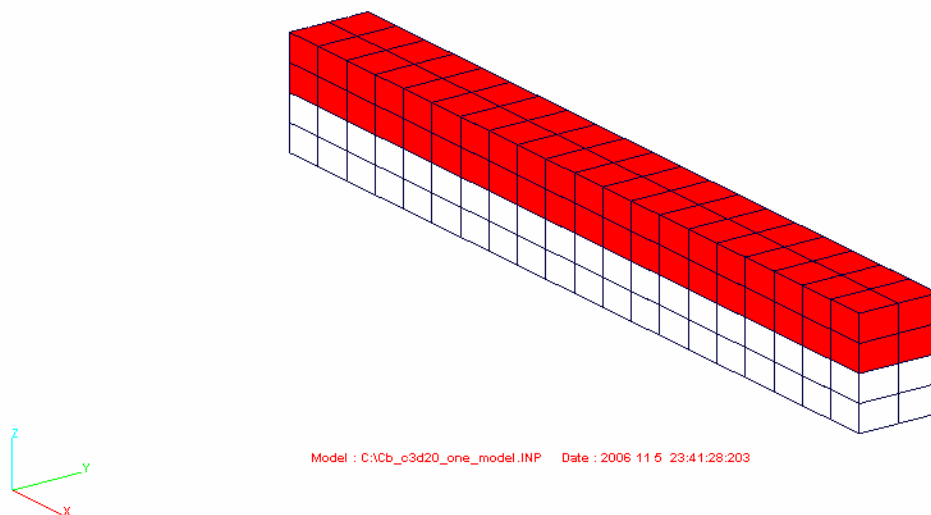
Analizę numeryczną przeprowadzono w trzech etapach:

- (i) bez uwzględnienia tarcia, etap I,
- (ii) z uwzględnieniem tarcia, etap II,
- (iii) w przypadku nieskończonego współczynnika tarcia (obie belki pozostają całkowicie związane), etap III.

W przypadku (iii) obie belki powinny zachowywać się jak belka pojedyncza; wówczas maksymalne ugięcie końców swobodnych powinno być równe ugięciu pojedynczej belki o polu przekroju poprzecznym równym polu przekroju dwóch belek złączonych.

Model

Siatka elementów skończonych została pokazana na Rys. 3.46, kolor biały oznacza belkę dolną, kolor czerwony belkę górną.



Rys. 3.46 Siatka elementów skończonych

Całkowita ilość elementów wynosi 160. Liczba elementów w kontakcie jest równa 80. Przyjęto następujące stałe materiałowe obu belek: $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.0$.

Warunki brzegowe, obciążenie, stałe materiałowe, wymiary i siatka elementów skończonych przyjęto za pracę [48]. Lewe końce belek całkowicie utwierdzone. Jednorodne ciśnienie o wartości $2.0\text{E}+6 \text{ Mpa}$ zadano na górnej powierzchni górnej belki.

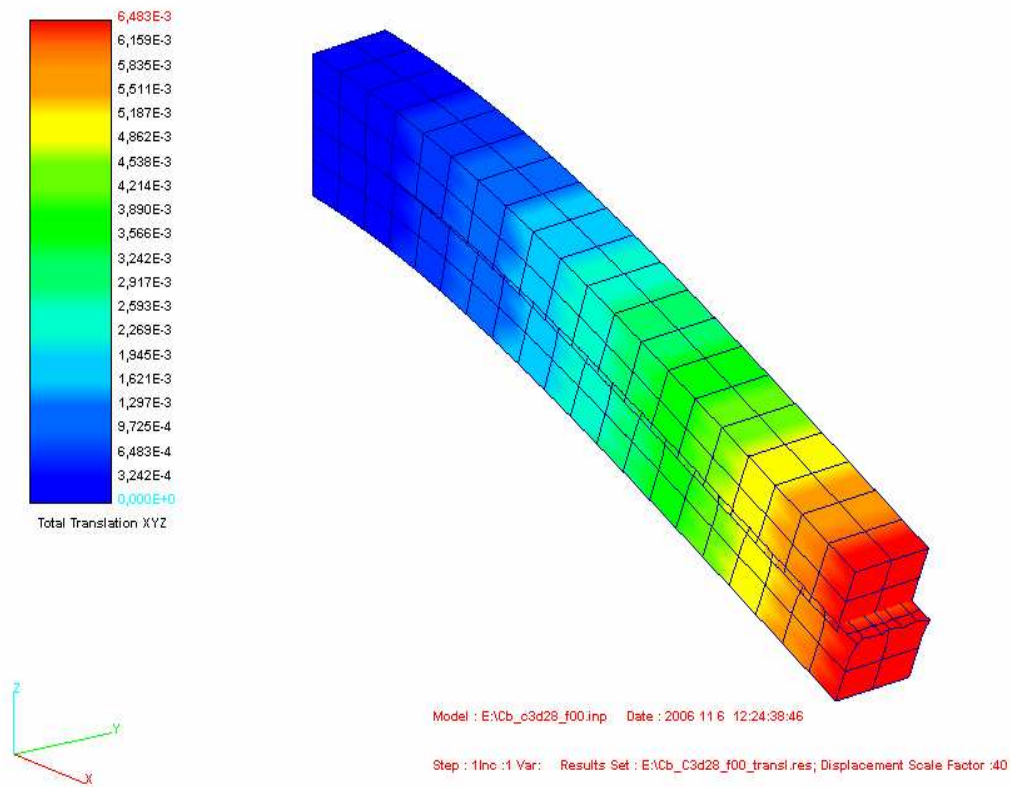
Rezultaty

Etap I - bez uwzględnienia tarcia Maksymalne wartości przemieszczeń swobodnego końca górnej belki zebrano w Tab. 3. Wyniki liczbowe z użyciem elementów 14-, 21- i 28-węzłowych oraz wynik rozwiązania odpowiadającego płaskiemu stanowi naprężeń (wg nomenklatury systemu ABAQUS użyto elementów CPS8) zamieszczono w Tab. 3.14.

Tab. 3.14 Przemieszczenia swobodnego końca górnej belki [m]

WSPÓŁCZYNNIK TARCIA	C3D14	C3D21	C3D28	[48]	CPS 8
0.0	-7.3015E-03	-7.7982E-03	-6.4450E-03	-6.714E-03	-7.5462E-03

Widok odkształconych belek w przypadku bez tarcia, z użyciem na powierzchni kontaktowej elementów 28-węzłowych (C3D28), pokazano na Rys. 3.47



Rys. 3.47 Obraz dwóch odkształconych belek. Elementy 28-węzłowe

Wyniki obliczeniowe z uwzględnieniem rosnących współczynników tarcia zamieszczono w Tab. 3.15.

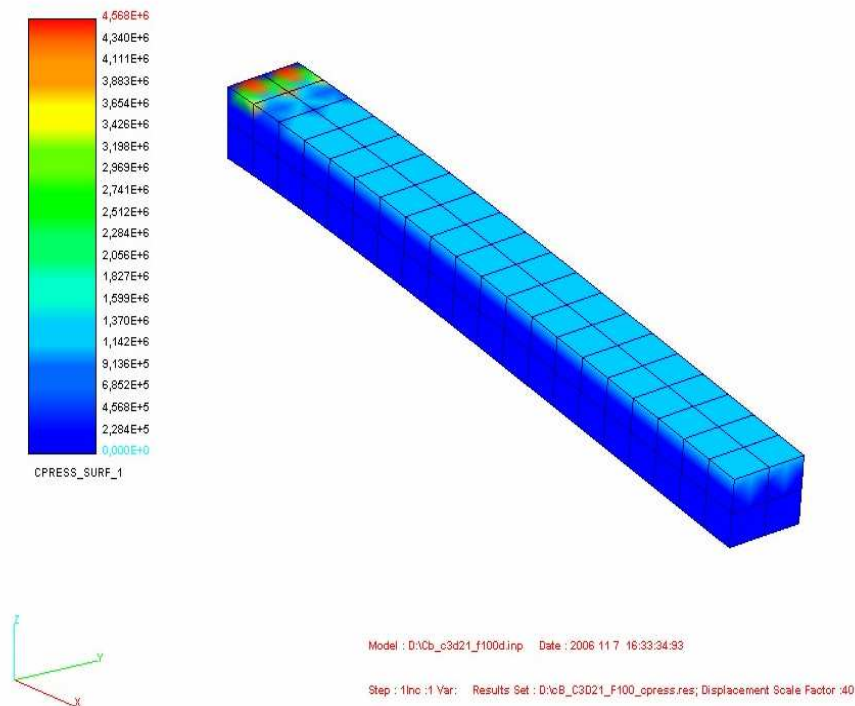
Tab. 3.15 Przemieszczenia swobodnego końca górnej belki dla rosnących współczynników tarcia w [m]

WSPÓŁCZYNNIK TARCIA	C3D14	C3D21	C3D28	CPS 8
0.2	-7.1089E-03	-7.5329E-03	-6.2724E-03	-7.3458E-03
0.75	-6.5790E-03	-6.8456E-03	-5.7995E-03	-6.7920E-03
1	-6.3381E-03	-6.5493E-03	-5.5852E-03	-6.5392E-03
10	-1.9577E-03	-1.9771E-03	-1.9555E-03	-1.9756E-03

Potwierdzono, że w przypadku bardzo dużego współczynnika tarcia, tutaj równego $\mu = 100.0$, wszystkie węzły leżące na powierzchni kontaktu pozostają ze sobą związane (*ang.* stick).

Rozkład ciśnienia kontaktowego z użyciem elementów 21-węzłowych przy założeniu współczynnika tarcia $\mu = 100.0$ pokazano na Rys. 3.48. Maksymalne przemieszczenia swobodnego końca górnej belki o siatkach zawierających elementy 14-, 21-, 28-węzłowe i elementy CPS8 zebrano w Tab. 3.16. Wartość przybliżona ugięcia podawana w pracy [48] wynosi $-1.875E-03$ [m], natomiast wartość teoretyczna obliczona wg wzoru (2.2) wynosi $-1.885E-03$ [m].

GLON

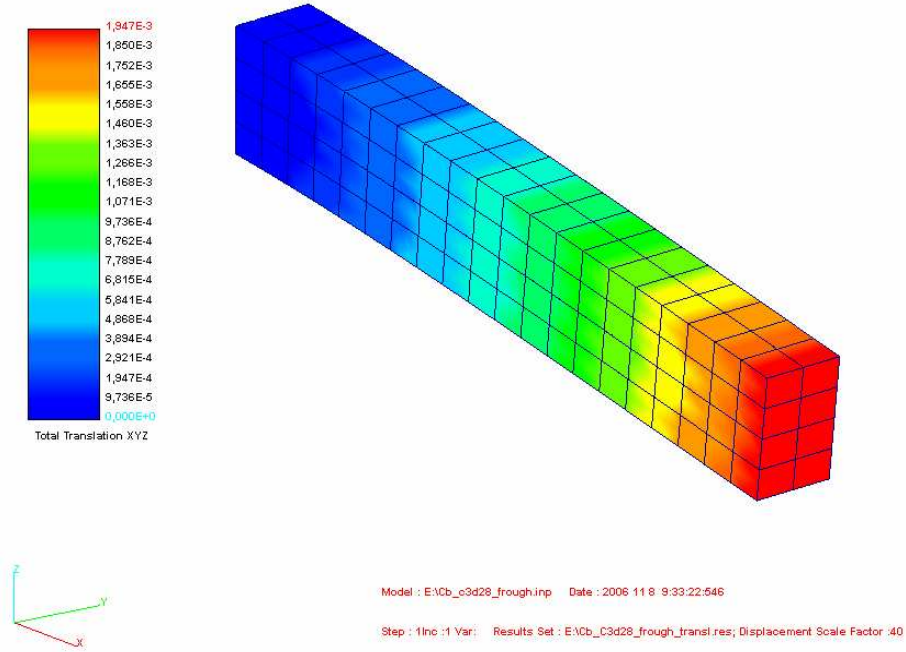


Rys. 3.48 Rozkład ciśnienia kontaktowego; elementy 21-węzłowe

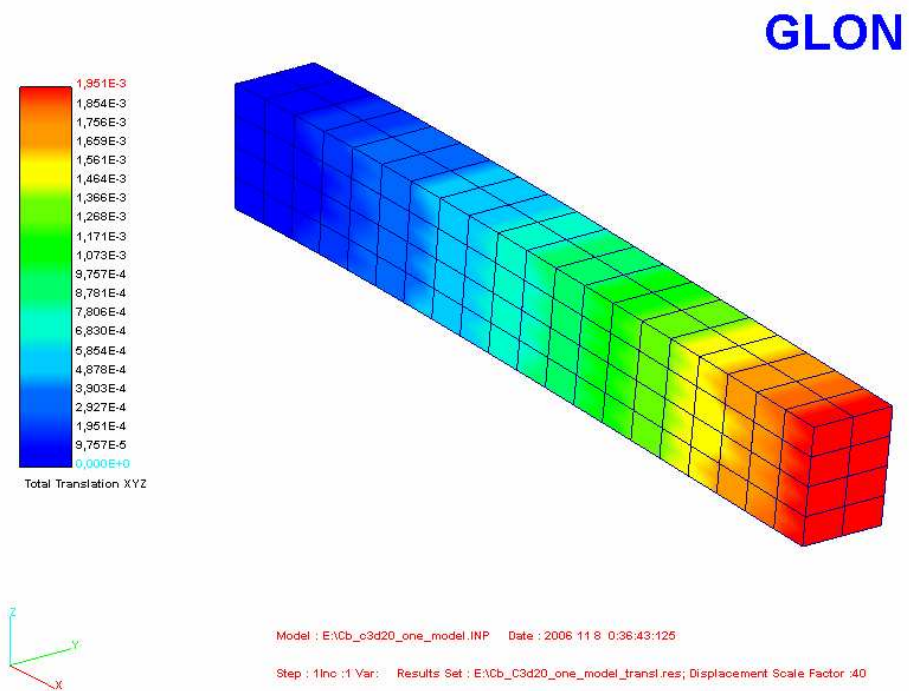
Tab. 3.16 Przemieszczenia swobodnego końca w [m] dla pojedynczej belki oraz dla belek pozostających w kontakcie- współczynnik tarcia =100

MODEL	C3D14	C3D21	C3D28	WARTOŚĆ TEORETYCZNA	C3D20	CPS 8
Dwie belki w kontakcie wsp.tarcia=100	-1.9179 E-03	-1.9373 E-03	-1.9311 E-03	-1.88E-03	N/D	-1.9354 E-03
Pojedyncza belka	N/D	N/D	N/D		-1.9353 E-03	-1.9434 E-03

Odształcenia belek pozostających w kontakcie oraz pojedynczej belki pokazano na Rys. 3.49 (elementy 28-węzłowe) i Rys. 3.50 (elementy 20-węzłowe). Jak pokazują wyniki, w obu przypadkach, ugięcia są praktycznie takie same.



Rys. 3.49 Obraz odkształconych belek w kontakcie; elementy 28-węzłowe. Współczynnik tarcia równy $\mu = 100$. Przemieszczenia w [m]

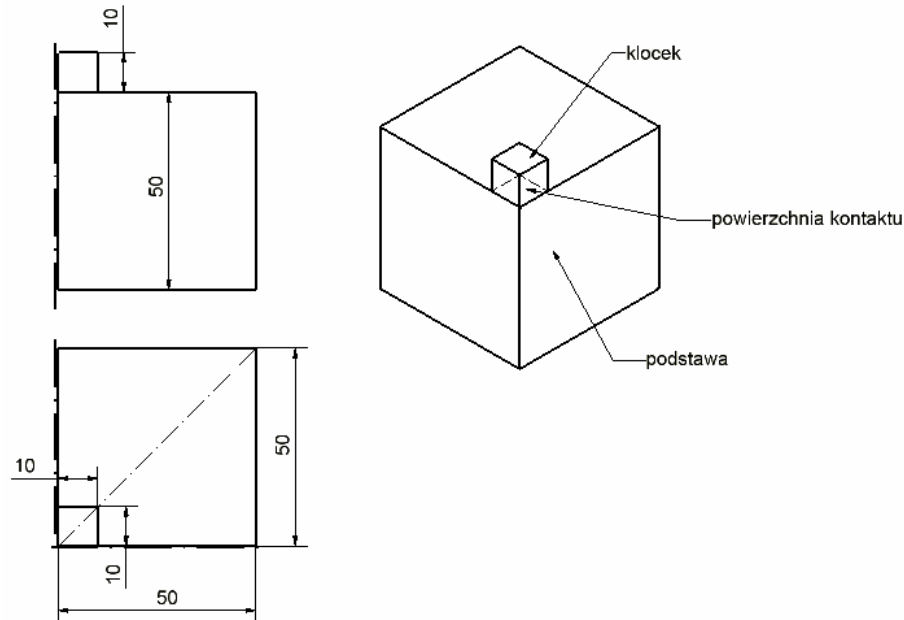


Rys. 3.50 Obraz odkształconej pojedynczej belki. Elementy 20-węzłowe. Przemieszczenia w [m]

3.2.4 Stempel na półprzestrzeni sprężystej z uwzględnieniem tarcia

Opis zagadnienia

Zagadnienie sprężystego stempla naciskającego na półprzestrzeń sprężystą (Rys. 3.51) omówiono w kilku wcześniejszych pracach, np. [17], [18]. Celem obliczeń jest uzyskanie wartości i rozkładu poślizgów w węzłach stykowych. Obliczenia wykonano w dwóch przypadkach, z uwzględnieniem (i) tarcia izotropowego i (ii) anizotropowego.



Rys. 3.51 Stempel na półprzestrzeni sprężystej

Model

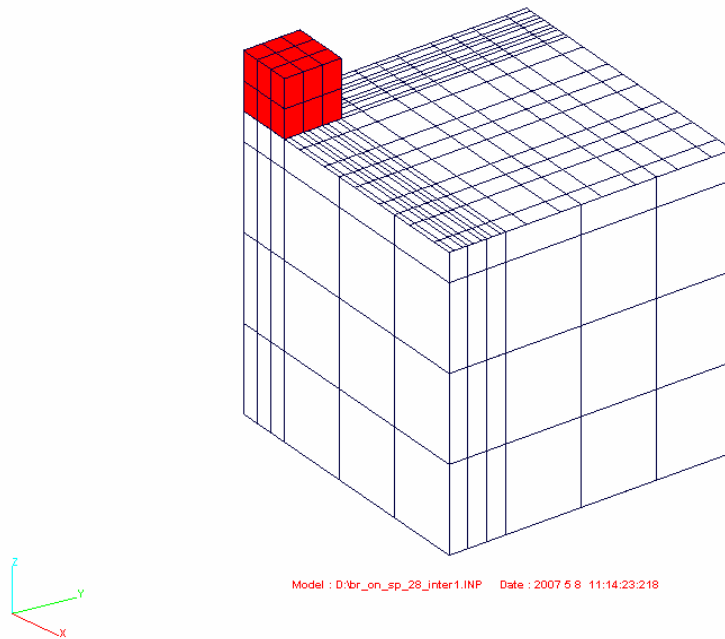
Wymiary modelu (ćwiartki pokazanej na Rys.3.51) wynoszą:

- stempel: długość 10 mm, szerokość 10 mm, wysokość 10 mm,
- półprzestrzeń sprężysta: długość 50 mm, szerokość 10 mm, wysokość 50 mm.

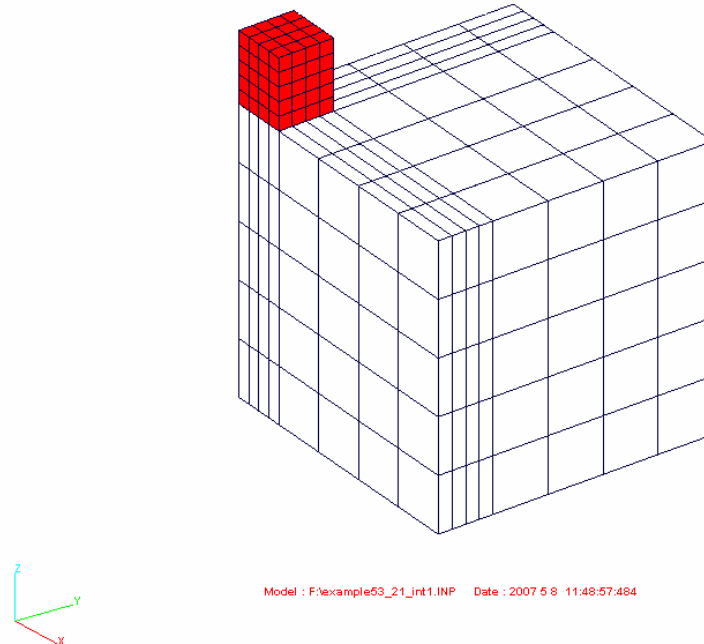
Stale materiałowe stempla i podstawy są takie same i wynoszą:

- moduł Younga - 200000 MPa,
- współczynnik Poissona - 0.3.

Użyto dwóch różnych siatek elementów skończonych. W przypadku elementów 28-węzłowych (liczba węzłów na powierzchni kontaktu wynosiła 100). Obie siatki przedstawiono na Rys. 3.52 i Rys.3.53.

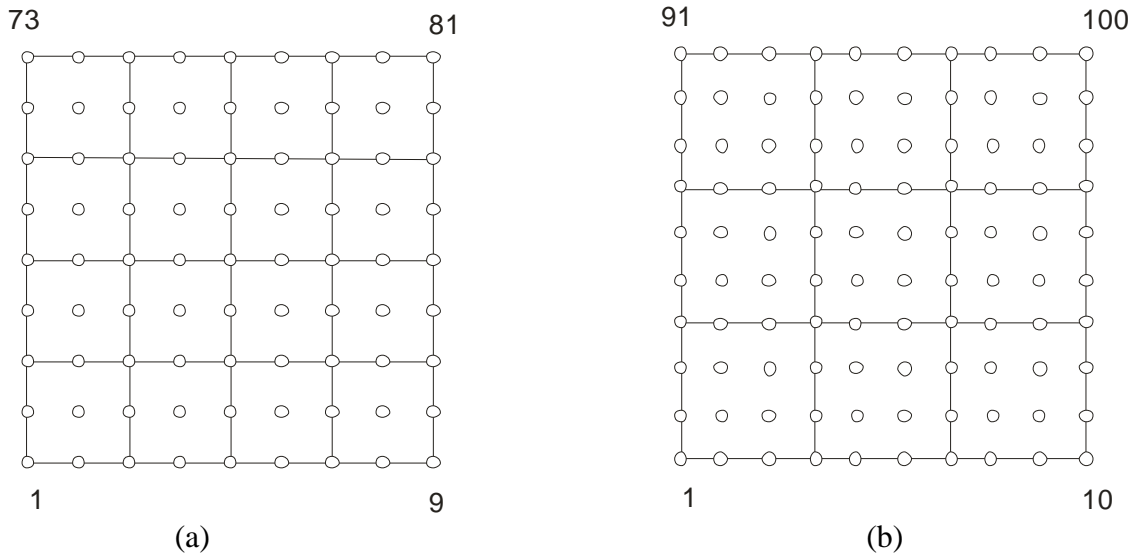
GLON

Rys. 3.52 Siatka elementy 28-węzłowe, ilość elementów w kontakcie 18 (16 + 16),
 ilość węzłów kontaktowych 100 (10 x 10)

GLON

Rys. 3.53 Siatka elementy 21- węzłowe. Ilość elementów w kontakcie 32 (16x16)
 Ilość węzłów kontaktowych 81 (9 x 9)

Węzły leżące w strefie kontaktu przedstawiono na Rys. 3.54.



Rys. 3.54 Węzły powierzchni kontaktowej a) elementy 21-węzłowe,
b) elementy 28-węzłowe

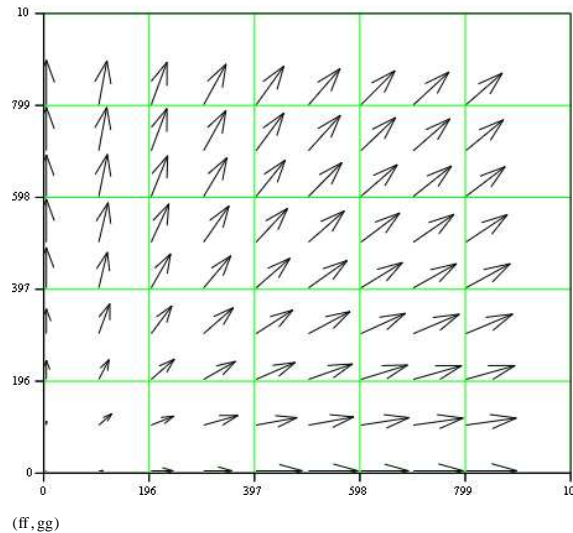
Warunki brzegowe i obciążenie były następujące: węzły na dole podstawy utwierdzono, pozostałe warunki brzegowe wynikają z uwzględnienia warunków symetrii na bocznych ścianach stempla i podstawy. Obciążenie siłą skupioną $P = -1000$ przyłożono w narożnym węźle stempla leżącym na przecięciu płaszczyzn symetrii, 10 mm ponad węzłem nr 1 (p. rys. 3.54).

Rezultaty

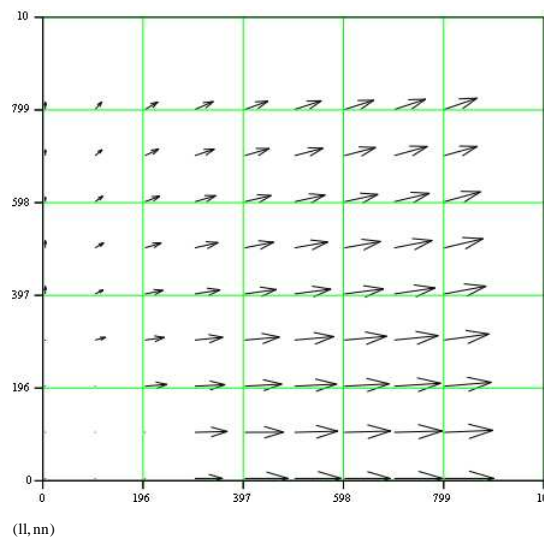
W przypadku (i) obliczone wartości poślizgów rozkładają się symetrycznie względem przekątnej. Na przekątnej kierunkowe wartości poślizgów są takie same. W przypadku (ii) wartości poślizgów, wzdłuż kierunku w którym współczynnik tarcia jest mniejszy, powinny być większe. W przypadku tarcia izotropowego rozkład poślizgów na powierzchni kontaktu przedstawia Rys. 3.55 (użyto elementów 21-węzłowych). W przypadku współczynnika tarcia $\mu = 0.04$ poślizg występował we wszystkich węzłach, z racji symetrii z wyjątkiem węzła nr 1. Porównanie wartości poślizgów w węźle nr 81 (w przypadku elementów 21) i węźle nr 100 (w przypadku elementów 28-węzłowych) podano w Tab. 3.17.

Tab. 3.17 Porównanie wartości poślizgu dla elementów 21- i 28 węzłowych

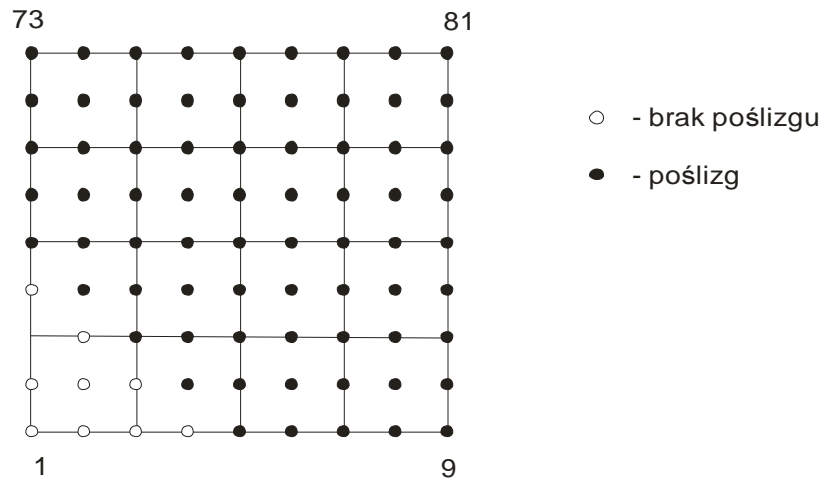
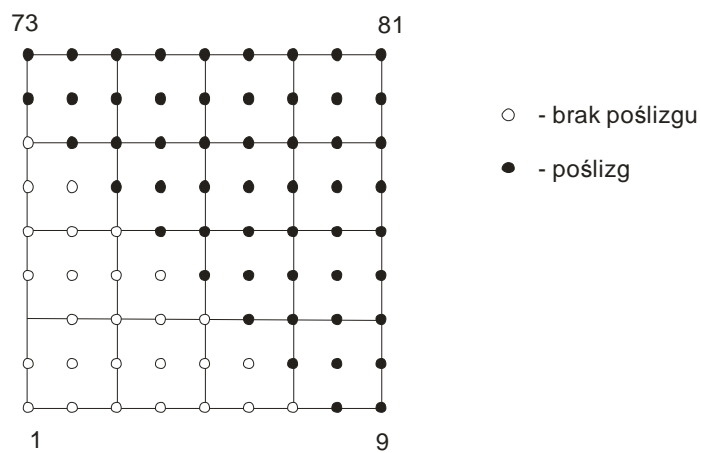
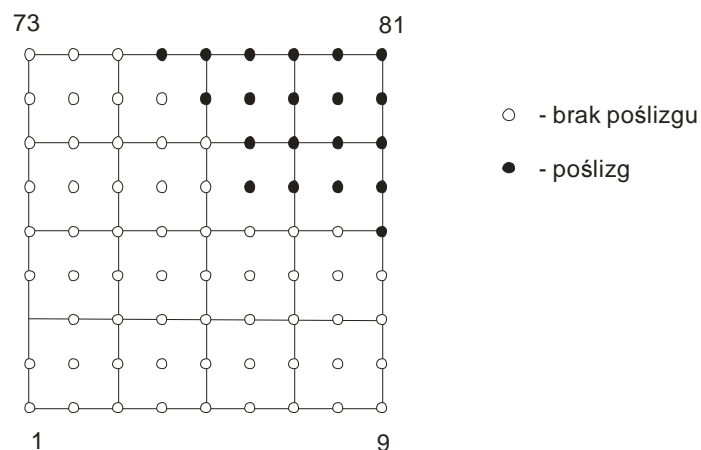
Rodzaj tarcia	C3D21 węzeł nr 81		C3D28 węzeł nr 100	
	kierunek 1	kierunek 2	kierunek 1	kierunek 2
izotropowe 0.04	-4,03E-04	-4,03E-04	-3,9896E-04	-3,9896E-04

Rys. 3.55 Tarcie izotropowe, współczynnik tarcia $\mu = 0.04$, elementy 21-węzłowe

W przypadku tarcia anizotropowego dominuje poślizg wzdłuż kierunku w którym współczynnik tarcia ma mniejszą wartość. Przy przyjętych wartościach współczynników tarcia, w jednym kierunku $\mu_1 = 0.04$ i $\mu_2 = 0.4$ w drugim, rozkład poślizgów przedstawia Rys. 3.56.

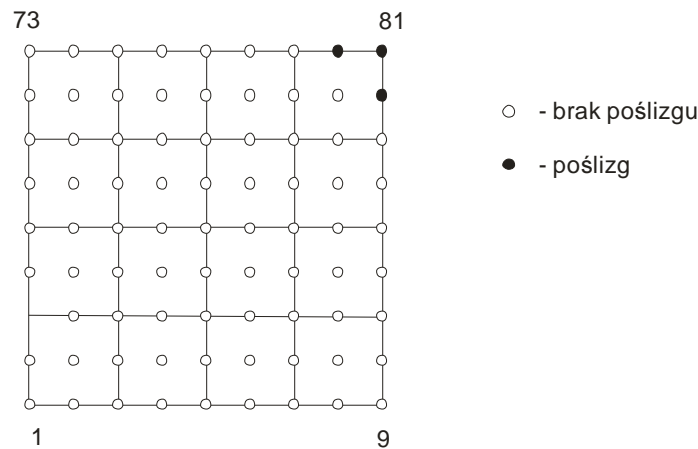
Rys. 3.56 Tarcie anizotropowe, współczynnik tarcia $\mu_1 = 0.04$, $\mu_2 = 0.4$

Przy wzroście współczynnika tarcia wartości poślizgów maleją. Przy przyjęciu pewnych wartości współczynników tarcia w niektórych węzłach stykowych poślizg nie występuje, podczas gdy w pozostałych wciąż ma miejsce, jak pokazano na Rys. 3.57 do 3.59 (do obliczeń użyto elementów 21-węzłowych).

Rys. 3.57 Współczynnik tarcia $\mu = 0.4$, elementy 21-węzłoweRys. 3.58 Współczynnik tarcia $\mu = 0.6$, elementy 21-węzłoweRys. 3.59 Współczynnik tarcia $\mu = 0.7$, elementy 21-węzłowe

Przy odpowiednio dużych wartościach współczynnika tarcia obserwuje się brak poślizgu, np. przy przyjęciu współczynnika tarcia równego 0.75 zaobserwowano jedynie trzy węzły w których występuje poślizg (Rys. 3.60). Podobne zjawisko ma miejsce w przypadku gdy współczynnik tarcia jest stały a zmianie ulega obciążenie, porównaj prace [17], [18].

Należy podkreślić, że w obu cytowanych pracach do analizy numerycznej zastosowano elementy 8-węzłowe. W pracach [17,18] nie podano wartości liczbowych, stąd brak możliwości porównawczej analizy ilościowej.



Rys. 3.60 Współczynnik tarcia $\mu = 0.75$, elementy 21-węzłowe

3.2.5 Ocena rezultatów testów zagadnień kontaktowych

Test 1: stempel i podstawa sprężysta. Wszystkie typy testowanych elementów dały wyniki zgodne z rozwiązaniem teoretycznym. Rozkłady ciśnienia kontaktowego i poślizgi wzdłuż powierzchni kontaktowej były praktycznie takie same jak w pracy [23]. Największa wartości ciśnienia kontaktowego była oczywiście różna w przypadku poszczególnych typów elementów co wynika z różnej liczby węzłów kontaktowych w rejonie gdzie występuje jego gwałtowny skok. W przypadku elementu 21-węzłowego w trzech ostatnich węzłach wystąpiła oscylacja naprężeń kontaktowych. Wydaje się, że najlepszym okazał się element 28-węzłowy, jakkolwiek należy uznać, że wszystkie elementy przeszły test pomyślnie.

Test 2: dwa cylindry złożone współosiowo. W tym przypadku elementy 21-węzłowe i 28-węzłowe wykazują pewną przewagę nad elementami o liniowych funkcjach kształtu, tutaj elementami 14-węzłowymi. W tym ostatnim przypadku elementy o płaskich ścianach powierzchnia zakrzywiona jest aproksymowana płaskimi segmentami. Elementy 21-węzłowe i 28-węzłowe dają wyniki zgodne z rozwiązaniami zadania Lamé'go. Ciśnienie kontaktowe na powierzchni kontaktu pomiędzy cylindrami było jednorodne i wynosiło 3.3 Pa, podczas gdy w przypadku elementów 14 węzłowych było nieco wyższe, 3.5 Pa. Podkreślimy, że prezentowane wyniki jakościowe (nie ilościowe!) są zgodne z wynikami zamieszczonymi w pracy [23], gdzie zastosowano elementy o liniowych funkcjach kształtu, zarówno w przypadku zagadnień 2-D i 3-D.

Test 3: kontakt dwóch belek jednostronnie utwierdzonych. Również w tym przypadku testowane elementy dały pozytywne wyniki. W finalnym III etapie analizy uzyskane obliczone wartości ugięć były bardzo bliskie rozwiązaniom teoretycznym i podanym w [48]. Różnica pomiędzy nimi była $< 5\%$ w przypadku wszystkich typów elementów, co ze względu na charakter testu - zginana belka - jest wynikiem bardzo dobrym.

Test 4: stempel na półprzestrzeni sprężystej. Wartości poślizgów w przypadku użycia elementów 21- i 28-węzłowych były praktycznie identyczne. Zgodne były również

kierunki poślizgów przy założeniu, zarówno tarcia izotropowego jak i anizotropowego. Powyższe testy potwierdziły, że elementy 14-, 21- i 28-węzłowe dobrze nadają się do rozwiązywania zagadnień kontaktowych z tarcie.

ROZDZIAŁ 4

ANALIZA NUMERYCZNA POŁĄCZEŃ SPOCZYNKOWYCH

4.1 Wstęp

Elementy skończone 14-, 21-, 28-węzłowe użyto do modelowania następujących spoczynkowych połączeń rozłącznych:

- (i) połączenia cierne:
 1. połączenie wciskowe walcowe bezpośrednie,
 2. połączenie wciskowe stożkowe bezpośrednie,
- (ii) połączenia kształtowe:
 3. połączenie wielowypustowe,
 4. połączenie wielogarbowe,
- (iii) połączenie kołnierzowe.

Wszystkie te połączenia należą do grupy połączeń rozłącznych. Oznacza to, że zachowują zdolności przenoszenia obciążeń po powtórny montaż. Należy jednak zaznaczyć, że w przypadku połączeń wciskowych rozłączność jest warunkowa [50], zależy bowiem od technologii montażu i postaci konstrukcyjnej połączenia. Połączenia 1-4 w literaturze niemieckiej [20] nazywane są również połączeniami wał-piasta (Welle-Nabe-Verbindungen).

Połączenia w których brak jest ruchu względnego elementów składowych (lub ruch ten jest wyraźnie ograniczony) nazywamy połączeniami spoczynkowymi. W przypadku, gdy istnieje względny ruch elementów składowych połączenia nazywamy połączeniami ruchowymi.

Połączenia rozłączne mogą być wykorzystywane jako połączenia nośne. Nośność połączenia jest to zdolność do przenoszenia obciążeń.

Zdolność przenoszenia obciążeń przez połączenia rozłączne realizowane są przez:

- wykorzystanie zjawiska tarcia (połączenia cierne),
- właściwe ukształtowanie elementów (połączenia kształtowe),
- połączenie obydwu możliwości (połączenia cierno-kształtowe).

W połączeniach ciernych o zdolności przenoszenia obciążenia decydują powierzchniowe siły tarcia rozwiniętego, uwarunkowane od poziomu sił docisków powierzchniowych na powierzchniach przylegania elementów połączenia.

W połączeniach kształtowych zdolność przenoszenia obciążeń wyznaczają powierzchniowe i wewnętrzne siły spójności materiału elementów połączenia.

W połączeniach cierno-kształtowych siły tarcia i siły spójności mogą być wykorzystywane jednocześnie i wtedy o zdolności przenoszenia obciążeń decyduje bądź mniejsza z tych sił, bądź ich sumaryczna wartość.

W połączeniach rozłącznych w różnych celach, np. w celu podwyższenia zdolności do przenoszenia obciążeń mogą stosowane być dodatkowe elementy - łączniki. Wówczas możemy mówić o połączeniach z dodatkowymi elementami pośrednimi.

Gdy w połączeniu w przekazywaniu obciążeń biorą udział tylko główne elementy połączenia mówimy o połączeniach bezpośrednich.

Spośród wymienionych połączeń 1 do 5 najszerszej analizie poddano połączenie walcowe, wciskowe bezpośrednie. W analizowanym połączeniu zacisk realizowany był w wyniku rozprężania wałka pod wpływem temperatury. Zjawisko rozszerzalności termicznej wymagało oprogramowaniu elementów 14-, 21- i 28-węzłowych z uwzględnieniem obciążeń termicznych. W połączeniu stożkowym zacisk początkowy uzyskiwano poprzez przyłożenie obciążenia mechanicznego, np. ciśnienia przyłożonego do jednego z elementów połączenia.

Obliczenia połączeń kształtowych: wielowypustowego i wielogarbowego przeprowadzono przy założeniu podobnych warunków brzegowych i obciążenia. Wymiary geometryczne obydwu połączeń były zbliżone do siebie. Istniała więc możliwość porównania zachowania obu typów połączeń.

Równie szeroko jak połączenie wciskowe walcowe przeanalizowano połączenie kołnierzowe. Dla połączenia tego dysponowano wynikami eksperymentu. Otrzymane wyniki numeryczne można więc porównać z wynikami rzeczywistymi.

4.2 Połączenie wciskowe walcowe

4.2.1 Charakterystyka połączenia

Przenoszenie obciążenia realizowane jest dzięki występującym na powierzchni kontaktu siłom tarcia, uzyskiwanym wskutek zacisku jednego elementu na drugim w wyniku sprężystych odkształceń wywołanych różnicą wymiarów. Ze względu na sposób przenoszenia obciążenia połączenie należy więc do połączeń ciernych [22], [50].

Nośność połączenia, to znaczy zdolność do przenoszenia obciążeń, tego połączenia jest więc charakteryzowana między innymi przez wcisk, czyli ujemną różnicę średnic łączonych elementów.

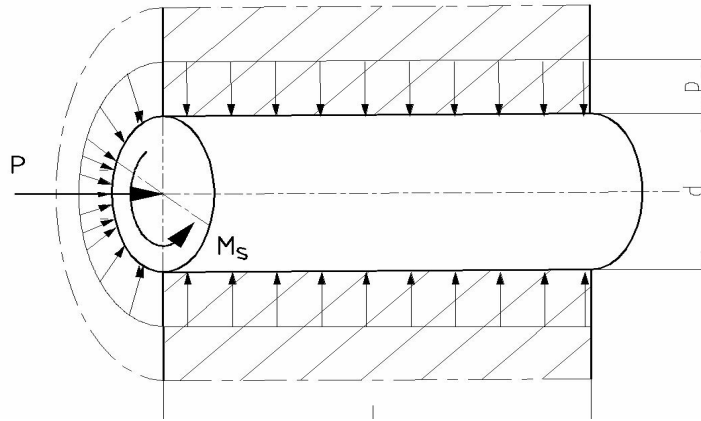
W zależności od sposobu montażu połączenia tego typu dzielimy na:

- (i) wtlaczane,
- (ii) skurczowe, rozprężne, skurczowo-rozprężne.

Podział ten jest dość istotny. Jak zaznaczono wcześniej, połączenie to jest zaliczane do połączeń rozłącznych warunkowo. W przypadku wtlaczania istnieje możliwość wielokrotnego rozłączenia w sposób odwrotny do tego w jaki były łączone. Po ponownym ich połączeniu uzyskuje się wcisk w przybliżeniu równy poprzedniemu wciskowi, stąd połączenia te mogą być zaliczone do połączeń rozłącznych.

W przypadku połączeń skurczowych, rozprężnych, skurczowo-rozprężnych demontaż w sposób odwrotny do sposobu łączenia jest bardzo trudny. Demontaż poprzez wyciśnięcie powoduje zniszczenie uzyskanego przylegania elementów na powierzchni połączenia. Tak więc połączenia skurczowe i rozprężne mogą być uważane za połączenia nierozłączne.

W połączeniach wciskowych w wyniku wcisku (uzyskanego podanymi powyżej sposobami) na powierzchni kontaktu panuje nacisk przedstawiony na Rys. 4.1.



Rys. 4.1 Rozkład nacisku powierzchniowego oraz obciążenie wzdłużne i moment skręcający

W rzeczywistości nacisk na powierzchnię kontaktową nie jest równomierny (patrz rozwiązania MES). Aby nacisk ten był bardziej równomierny wykorzystuje się między innymi odpowiednie ukształtowanie elementów połączenia. Również uwzględnienie odkształceń plastycznych powoduje bardziej równomierny rozkład nacisków. Tylko w bardzo prostych obliczeniach inżynierskich możliwe jest więc założenie, że nacisk ten jest równomierny.

W przypadku obciążenia siłą osiową P bądź momentem skręcającym M_s , na powierzchni kontaktu występują siły tarcia T przeciwstawiające się poślizgowi (por. Rys.4.1).

Zgodnie z wcześniejszymi założeniami, siły tarcia są związane z naciskiem poniższym wzorem:

$$T = \mu N = \mu p F = \mu p \pi d l \quad (4.1)$$

gdzie: p - jest naciskiem powierzchniowym, μ - współczynnikiem tarcia, d - średnicą połączenia, l - długością połączenia.

Aby uniemożliwić wystąpienie prześlizgów między elementami połączenia, czyli zapewnić odpowiednią nośność połączenia, nacisk powinien być odpowiednio duży, tak aby wartości sił tarcia przewyższały wartości sił stycznych od obciążeń zewnętrznych.

Nośność połączenia (a więc niemożność wystąpienia poślizgów) będzie więc zapewniona, gdy spełnione będą poniższe warunki:

- dla przypadku działania siły osiowej:

$$T > kP \quad (4.2)$$

- dla przypadku działania momentu skręcającego:

$$T \geq kP_1 \quad (4.3)$$

- dla przypadku jednoczesnego działania siły osiowej i momentu skręcającego:

$$T \geq kR = k\sqrt{P^2 + P_1^2} \quad (4.4)$$

gdzie: k (zazwyczaj o wartościach 1.5–2) jest współczynnikiem nadwyżki nośności uwzględniającym ewentualne przeciążenia oraz zmiany współczynnika tarcia.

Z warunków tych możemy określić niezbędne wartości nacisków p zapewniających nośność połączenia:

- dla przypadku działania siły osiowej:

$$p \geq \frac{kP}{\mu\pi dl} \quad (4.5)$$

- dla przypadku działania momentu skręcającego:

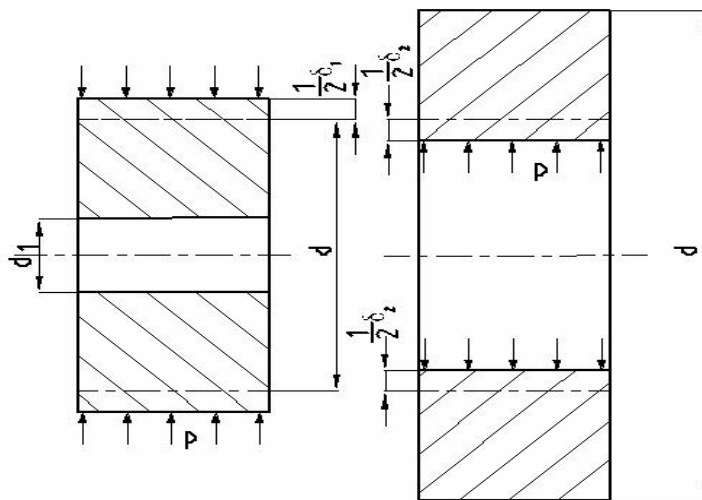
$$p \geq \frac{2kM_s}{\mu\pi d^2 l} \quad (4.6)$$

- dla przypadku jednoczesnego działania siły osiowej i momentu skręcającego:

$$p \geq \frac{k \sqrt{\left(\frac{2M_s}{d}\right)^2 + P^2}}{\mu\pi dl} \quad (4.7)$$

gdzie: k - jest współczynnikiem nadwyżki nośności (jak powyżej).

Teoretyczną podstawę do wyznaczenia odkształceń i naprężeń w połączeniach wciskowych walcowych w zakresie sprężystym stanowi znane zagadnienie Lamé'go [22]. W tym celu zadanie to należy jednak odpowiednio zmodyfikować. Zamiast jednego cylindra grubościennego przyjmuje się dwie tuleje grubościenne będące w kontakcie jak na Rys. 4.2.



Rys. 4.2 Odkształcenia stanowiące wcisk

W wyniku analizy tego połączenia w oparciu o rozwiązania zadania Lamé'go możemy uzyskać związek między wciskiem a naciskami powierzchniowymi.

Zgodnie z Rys. 4.2 początkowo średnica zewnętrzna tulejki wewnętrznej jest większa od średnicy wewnętrznej tulejki zewnętrznej. Podczas łączenia tuleja wewnętrzna odkształca się na średnicy zewnętrznej, a tuleja zewnętrzna na średnicy wewnętrznej. W wyniku tego ustanawia się powierzchnia walcowa połączenia o średnicy d .

Wcisk skuteczny stanowi sumę bezwzględnych wartości wspomnianych odkształceń:

$$\delta = |\delta_1| + |\delta_2| \quad (4.8)$$

Wcisk ten powoduje na powierzchni złącza nacisk p . Dzieląc obie strony równania przez średnicę d otrzymamy bezwymiarowy wcisk skuteczny złącza:

$$\psi = |\psi_1| + |\psi_2| \quad (4.9)$$

będący sumą całkowitą odkształceń względnych obu tulei.

Wywołane wciskiem odkształcenia wywołują w połączeniu stany naprężeń. Naprężenia te określić można na podstawie zależności otrzymanych w zadaniu Lamé'go. (W płaskim stanie naprężenia i odkształcenia naprężenia promieniowe i obwodowe wyrażają się tymi samymi wzorami).

Naprężenia promieniowe i obwodowe są równe, odpowiednio [22]:

- w przypadku tulejki wewnętrznej:

$$\sigma_{r1} = -p \frac{1 - \alpha_1^2 \left(\frac{d}{2r}\right)^2}{1 - \alpha_1^2} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{t1} = -p \frac{1 + \alpha_1^2 \left(\frac{d}{2r}\right)^2}{1 - \alpha_1^2} \quad (4.11)$$

- w przypadku tulejki zewnętrznej:

$$\sigma_{r2} = -p \frac{\alpha_2^2 \left[\left(\frac{d_2}{2r}\right)^2 - 1 \right]}{1 - \alpha_2^2} \quad (4.12)$$

$$\sigma_{t2} = -p \frac{\alpha_2^2 \left[\left(\frac{d_2}{2r}\right)^2 + 1 \right]}{1 - \alpha_2^2} \quad (4.13)$$

W przypadku tulejki wewnętrznej należy przyjąć, że nacisk p występuje tylko na jej zewnętrznej średnicy d_2 oraz

$$\alpha_1 = \frac{d}{d_1} \quad (4.14)$$

W przypadku tulejki zewnętrznej natomiast nacisk p występuje na jej wewnętrznej średnicy oraz

$$\alpha_2 = \frac{d}{d_2} \quad (4.15)$$

Naprężenia osiowe w przypadku płaskiego stanu naprężeń nie występują, zaś w przypadku płaskiego stanu odkształcenia są stałe w całym przekroju obu tulejek i wynoszą:

$$\sigma_{z1} = -p \frac{2\nu_1}{1-\alpha_1^2} \quad ; \quad \sigma_{z2} = p \frac{2\nu_2\alpha_2^2}{1-\alpha_2^2} \quad (4.16)$$

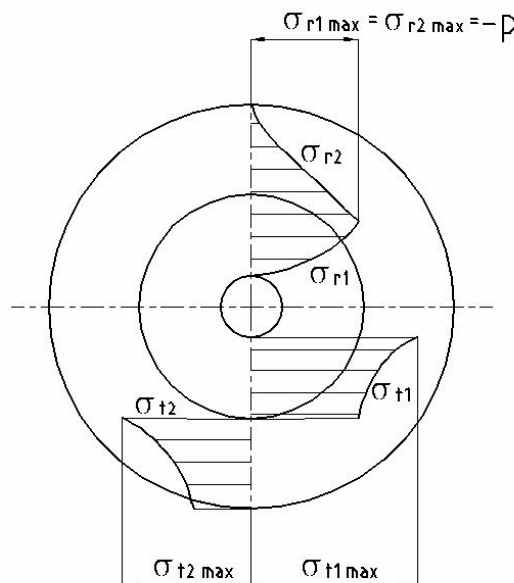
W przypadku, gdy zamiast wydrążonej tulejki wewnętrznej mamy pełny wałek naprężenia promieniowe i obwodowe są jednakowe w całym przekroju i wynoszą:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{t1} = -p \quad (4.17)$$

Na wspólnym brzegu obu tulejek naprężenia promieniowe jak i obwodowe uzyskamy (podstawiając odpowiednią wartość promienia $r = d/2$):

- dla tulejki wewnętrznej $\sigma_{r1\max} = -p$
- dla tulejki zewnętrznej $\sigma_{r2\max} = -p$

Podstawiając inne wartości promieni dla tulejki wewnętrznej jak i zewnętrznej uzyskamy wykresy naprężeń obwodowych i promieniowych jak na Rys. 4.3.



Rys. 4.3 Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w złączu sprężystym wciskowym [22]

Wyrażenia określające odkształcenia promieniowe tulei na styku połączenia można przedstawić jako:

$$\frac{\delta_1}{d} = -p \frac{C_1}{E_1} \quad (4.18)$$

$$\frac{\delta_2}{d} = p \frac{C_2}{E_2} \quad (4.19)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia:

$$C_1 = \frac{1 + \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} - \nu_1 \quad (4.20)$$

$$C_2 = \frac{1 + \alpha_2^2}{1 - \alpha_2^2} + \nu_2 \quad (4.21)$$

dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$C_1 = (1 - \nu_1^2) \left(\frac{1 + \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} - \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \right) \quad (4.22)$$

$$C_2 = (1 - \nu_2^2) \left(\frac{1 + \alpha_2^2}{1 - \alpha_2^2} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \right) \quad (4.23)$$

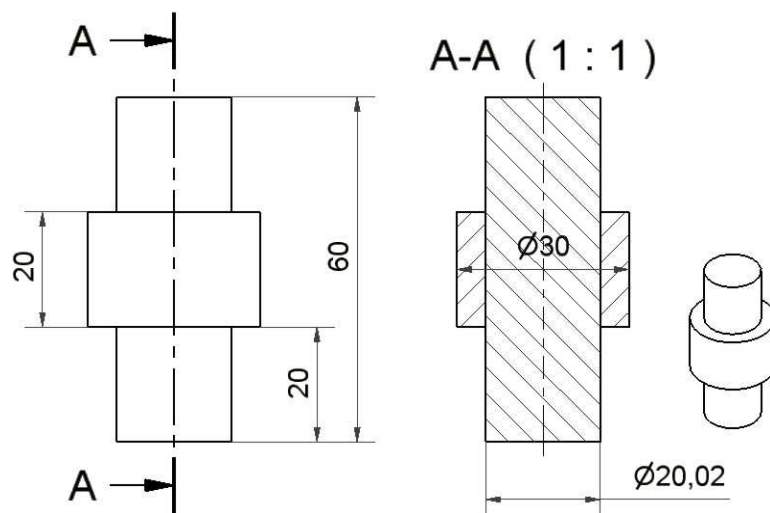
Pomiędzy wciskiem skutecznym a naciskiem powierzchniowym po podstawieniu (4.19) i (4.18) do (4.8) zachodzi związek [22]:

$$\psi = \frac{\delta}{d} = p \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right) \quad (4.24)$$

4.2.2 Analiza numeryczna połączenia skurczowego

Analizowane połączenie jest połączeniem bezpośrednim walcowym (Rys 4.4). Składa się z dwóch elementów głównych:

- wałka (długość 60 mm, średnica 20.02 mm),
- tulejki (długość 20 mm, średnica wewnętrzna 20 mm, średnica zewnętrzna 30 mm).



Rys. 4.4 Analizowane połączenie walcowe skurczowe

W analizowanym połączeniu technologia montażu wałka z tulejką zakłada oziębienie, a następnie podgrzanie elementu wewnętrznego – wałka; jest to więc połączenie skurczowe. Z tego względu połączenie to jest połączeniem nierozłącznym spoczynkowym. Obydwie części wałek i tulejka wykonane zostały z tego samego materiału (stal).

Do obliczeń przyjęto następujące stałe materiałowe:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0.3, \text{ współczynnik rozszerzalność cieplnej } \alpha = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Połączenia tego typu mogą przenosić zarówno obciążenia od sił wzdłużnych działających w kierunku osi wałka, jak również od momentu skręcającego przyłożonego do tulejki.

Obliczenia przeprowadzono więc dla dwóch przypadków obciążeń:

- A obciążenia tulejki w kierunku osiowym poprzez obciążenie jej górnej powierzchni ciśnieniem jednorodnym,
- B obciążenia tulejki momentem skręcającym.

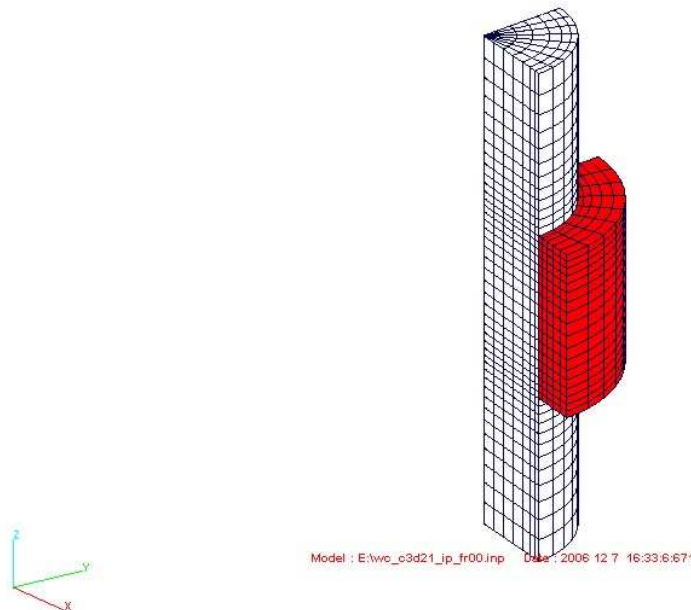
W ramach każdego z przypadków obciążeń przyjmowano zarówno różne wartości obciążeń jak i współczynnika tarcia w celu określenia nośności połączenia.

Modele MES

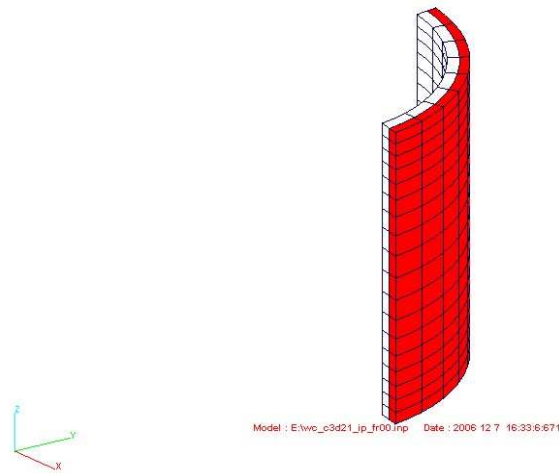
Wykonano dwa różne modele połączenia:

- (i) model A uwzględniający symetrię połączenia (Rys. 4.5). Siatkę elementów wykonano tylko dla $\frac{1}{4}$ struktury. Model ten wykorzystywany był do obliczeń związanych z pierwszym krokiem analizy, to jest skurczem początkowym oraz w przypadku obciążenia tulejki, ciśnieniem na górnej powierzchni. Model A zawierał 3072 elementów skończonych. W przypadku użycia elementów C3D14, C3D21, C3D28 w strefie kontaktu znajdowały się 144 pary węzłów kontaktowych i 144 (wałek) i 144 (tulejka) przestrzennych elementów skończonych (Rys.4.6).

GLON

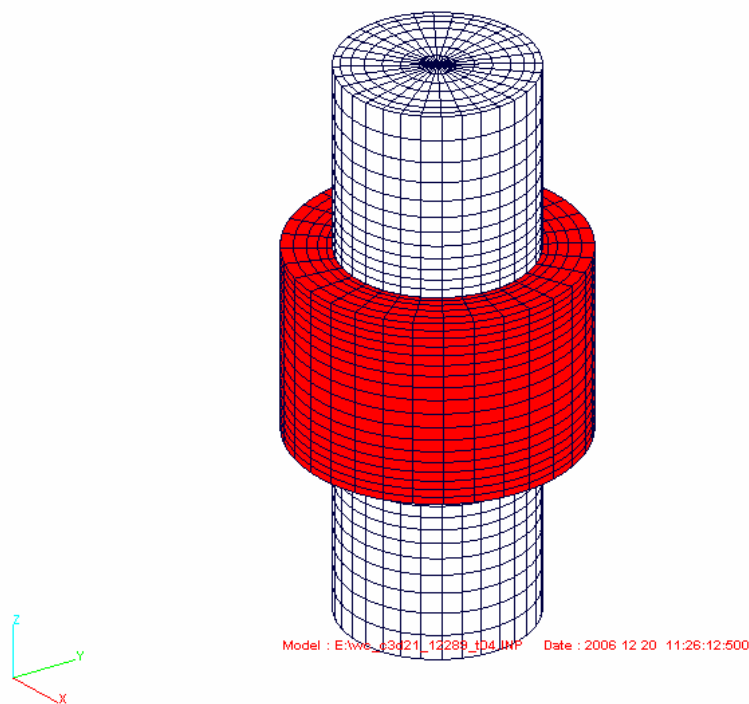


Rys. 4.5 $\frac{1}{4}$ modelu – model A

GLON

Rys. 4.6 Elementy w kontakcie w modelu uwzględniającym symetrię połączenia

- (ii) model B (Rys. 4.7) jest przygotowany w przypadku obciążenia tulejki momentem skręcającym (jakkolwiek możliwe było również wykorzystanie tego modelu do obliczeń przypadku A, ale ze względu na wielokrotnie dłuższe czasy obliczeń nie było to rozwiązanie korzystne). Model zawierał 12288 elementów skończonych, co przełożyło się na 1152 węzły kontaktowe.

GLON

Rys. 4.7 Model połączenia (B)

Analiza

W obu przypadkach obciążeń (A i B), obliczenia zostały przeprowadzone w dwóch krokach:

- (i) krok pierwszy: zacisk spowodowany wzrostem temperatury wałka o 100 stopni,
- (ii) krok drugi: zadane obciążenia zewnętrzne: przypadek A - ciśnieniem na górnej powierzchni tulejki, przypadek B momentem skręcającym obciążającym tulejkę.

Współczynnik tarcia (tarcie izotropowe) o wartościach w zakresie od 0.0 do 0.4.

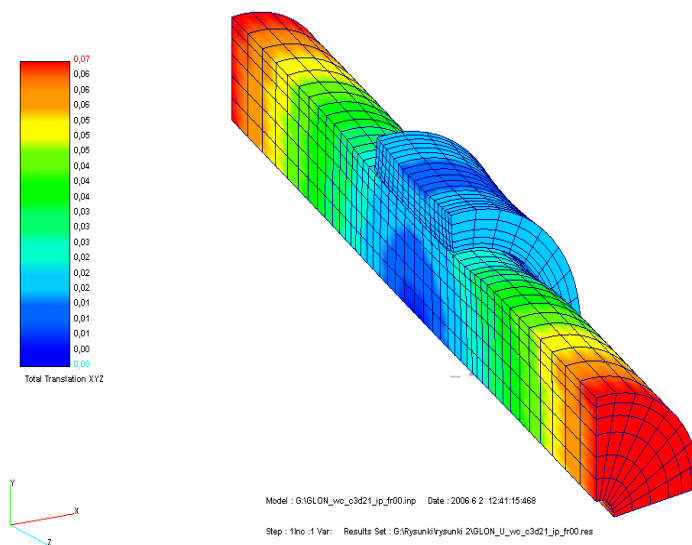
Warunki brzegowe zadawane były oddzielnie w przypadku poszczególnych kroków analizy:

- (i) krok pierwszy:
 - model A, uwzględniał symetrię, co implikowało narzucenie odpowiednich warunków brzegowych. Zadano również całkowite utwierdzenie środkowego węzła w osi symetrii,
 - model B, całkowite utwierdzenie środkowego węzła w osi symetrii połączenia.
- (ii) krok drugi:
 - model A, symetryczne warunki brzegowe, dodatkowo utwierdzenie węzłów na końcu wałka. Obciążenie tulejki w kierunku osiowym jednorodnym ciśnieniem górnej powierzchni tulejki.
 - model B, utwierdzenie węzłów na końcu wałka. Obciążenie momentem skręcającym zadany przez przyłożenie par sił skupionych w dolnych węzłach bocznej powierzchni tulejki, w kierunku stycznym do bocznej powierzchni tulejki.

Rezultaty

- (i) krok pierwszy:

pod wpływem wzrostu temperatury wałek wydłuża się w kierunku osiowym oraz rozszerza w kierunku promieniowym. W miejscu kontaktu pomiędzy wałkiem a tulejką możliwość swobodnego rozszerzenia jest oczywiście ograniczona. Odkształcony model oraz wartości całkowitych przemieszczeń wałka i tulejki (przypadek bez tarcia) pokazano na Rys. 4.8.



Rys. 4.8 Odkształcony model wałka i tulejki (współczynnik tarcia $\mu = 0.0$). Przemieszczenia w [mm]

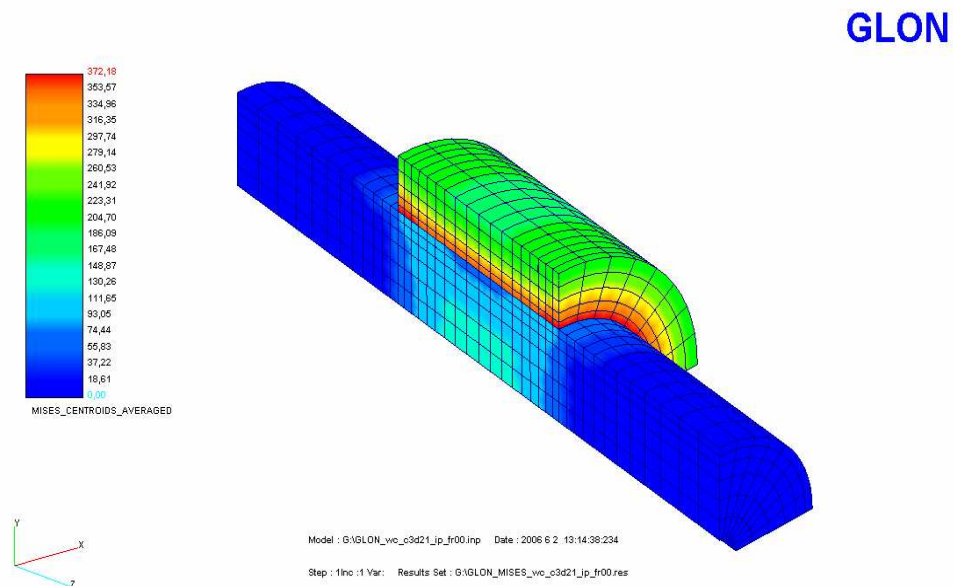
Ze względu na symetrię zagadnienia, wartości całkowitych przemieszczeń wałka na przeciwległych końcach są oczywiście największe oraz takie same.

Porównanie wartości wydłużenia (w kierunku osiowym) oraz zmiany średnicy wałka dla elementów 14-, 21- i 28-węzłowych w skrajnych węzłach na końcu wałka zawiera Tab. 4.1.

Tab. 4.1 Wydłużenie i rozszerzenie wałka [mm]

Odształcenie	Wartość teoretyczna (wałek bez tulejki)	C3D14	C3D21	C3D28
Wydłużenie	0.12	0.01269	0.01268	0.01258
Rozszerzenie	0.04	0.04116	0.040096	0.04018

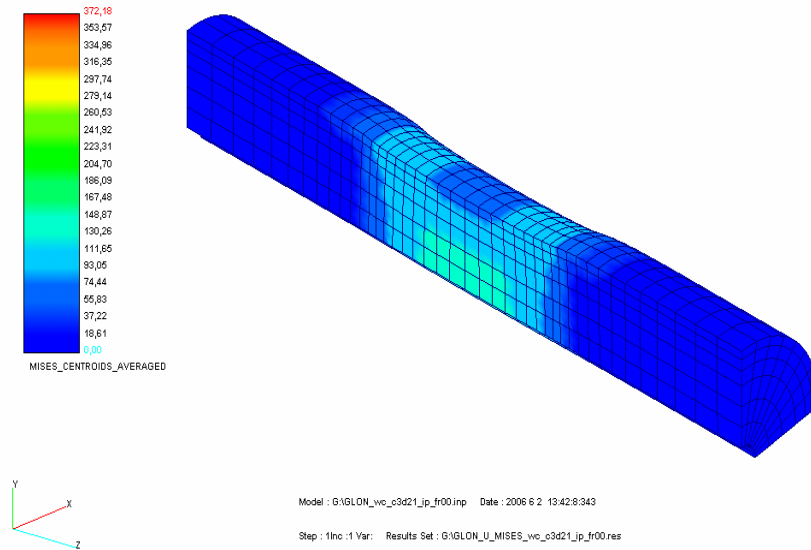
Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa połączenia nieodkształconego pokazano na Rys.4.9.



Rys. 4.9 Naprężenia zredukowane Hubera - Misesa w [MPa]

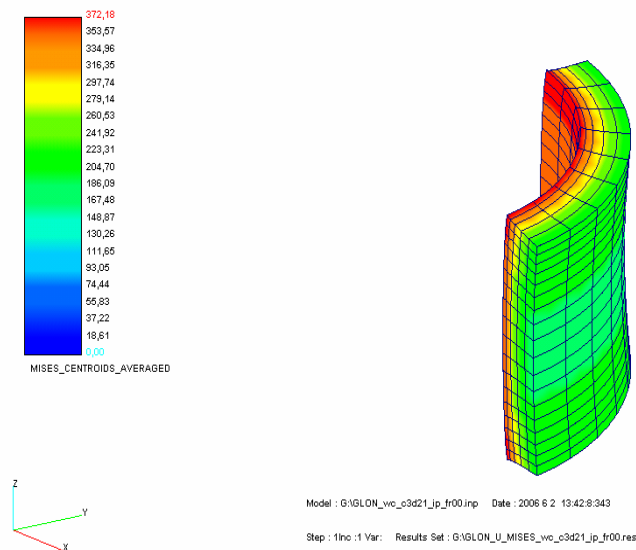
Naprężenia występujące w wałku i tuleji (modele odkształcone) pokazano odpowiednio na Rys. 4.10 i 4.11.

GLON



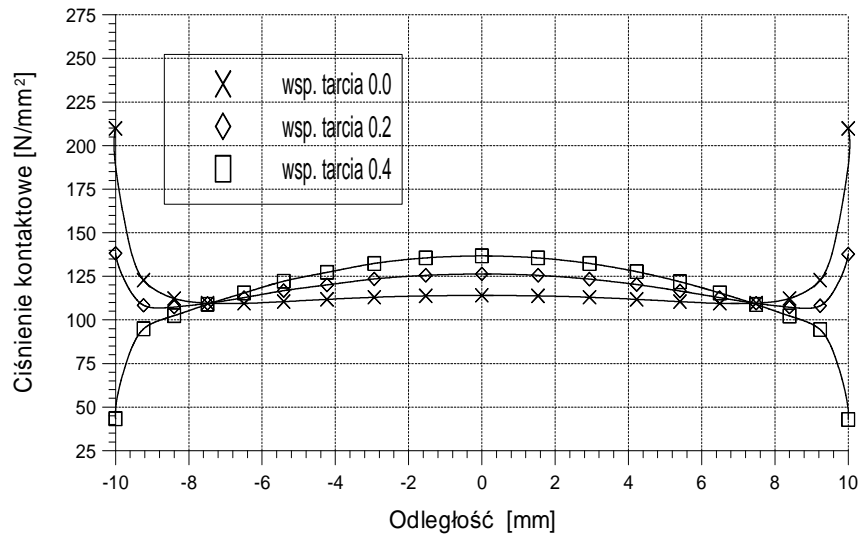
Rys. 4.10 Walek - naprężenia zredukowane Hubera - Misesa w [MPa]

GLON

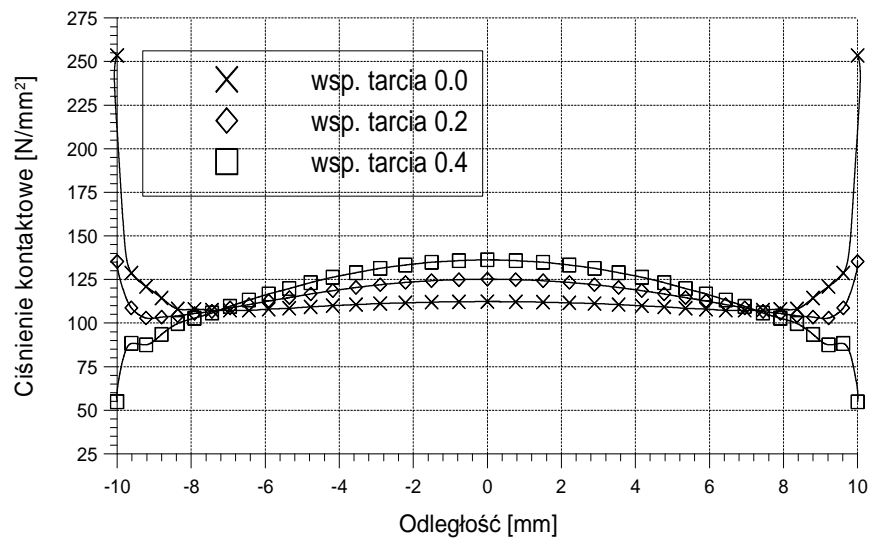


Rys. 4.11 Tulejka - naprężenia zredukowane Hubera - Misesa

Największe ekwiwalentne naprężenia Hubera–Misesa zaobserwowano w tuleji przy jej krawędziach (Rys.8). W przypadku bez uwzględnienia tarcia, przy obu przeciwległych krawędziach tuleji występowały największe wartości ciśnienia kontaktowego. Dokładny rozkłady ciśnienia kontaktowego w zależności od przyjętego współczynnika tarcia dla elementów 14-, 21 i 28-węzłowych przedstawiają Rys 4.12 do 4.14.

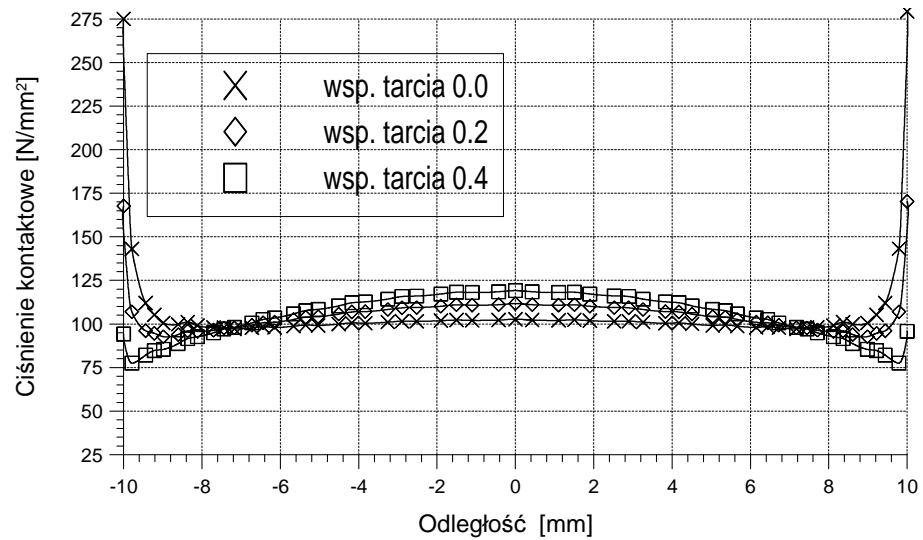


Rys. 4.12 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż pow. kontaktu, elementy 14-węzłowe

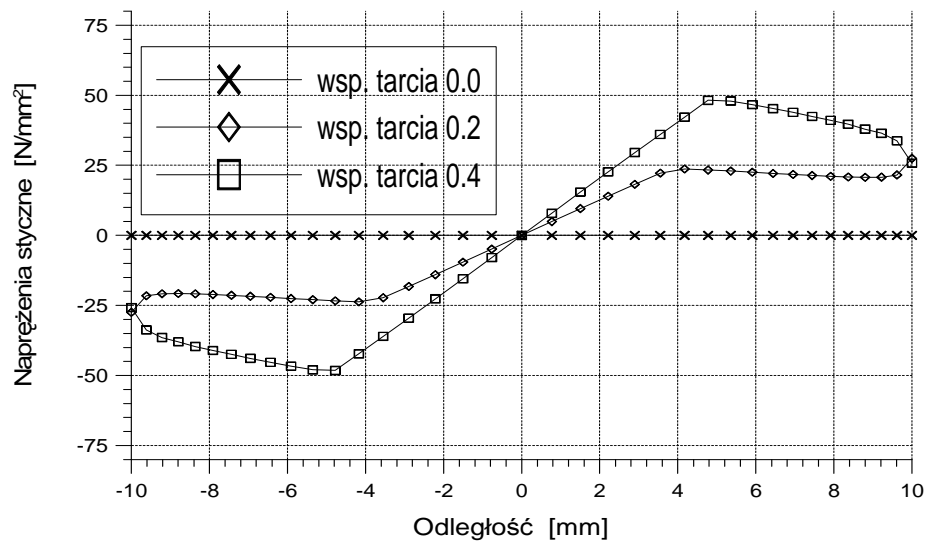


Rys. 4.13 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż pow. kontaktu, elementy 21-węzłowe

Rozkład naprężeń stycznych wzdłuż powierzchni kontaktu pokazano na Rys.4.15.



Rys. 4.14 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż pow. kontaktu, elementy 28-węzłowe



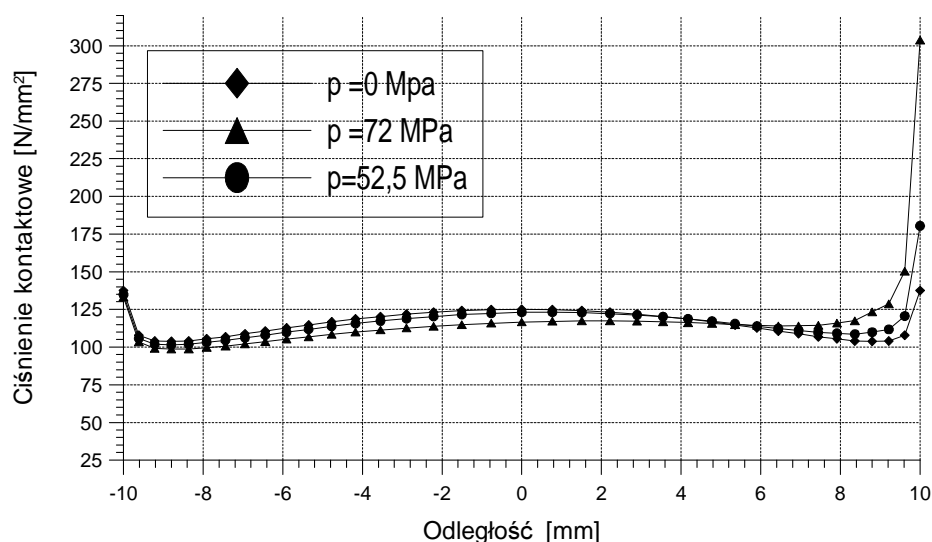
Rys. 4.15 Rozkład naprężeń stycznych wzdłuż powierzchni kontaktu

(ii) krok drugi:

Przypadek obciążenia A, współczynnik tarcia $\mu = 0.2$. Obciążenie ciśnieniem działającym osiowo na górną powierzchnię tuleji o wartości:

- $p = 52.5 \text{ MPa}$,
- $p = 72.0 \text{ MPa}$.

Wykres przedstawiający rozkład ciśnienia kontaktowego przedstawiono na Rys. 4.16. W celu porównania zamieszczono również rozkład ciśnienia dla zacisku wstępnego, wtedy ciśnienie działające w kierunku osiowym $p = 0.0$.



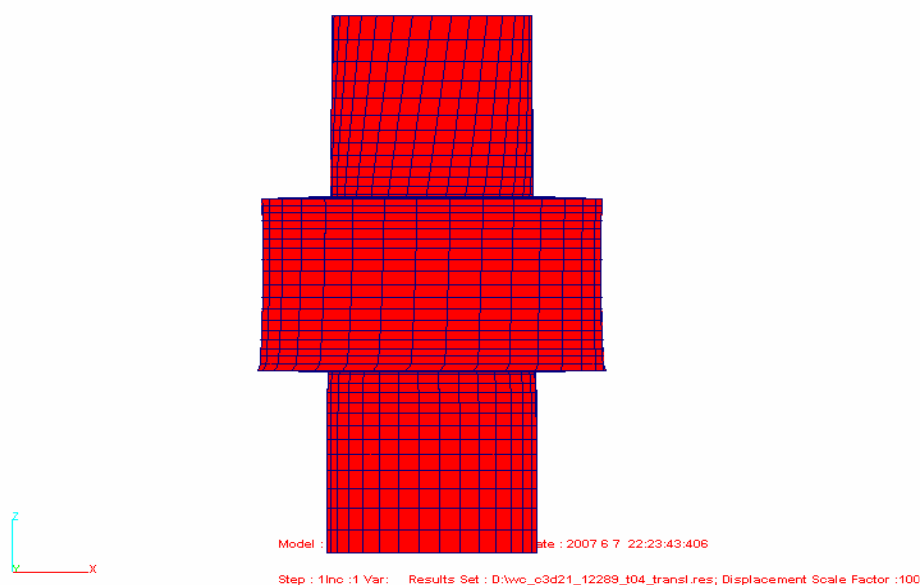
Rys. 4.16 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż wałka

Wartości ciśnienia kontaktowego po stronie przeciwległej do tej na której przyłożono obciążenie rosną wraz ze wzrostem obciążenia.

Przypadek obciążenia B - obciążenie momentem skręcającym:

Współczynnik tarcia $\mu = 0.4$, połączenie obciążono momentem skręcającym, którego wartość zmieniała się w zakresie od 300 do 1000 Nm. Odkształcony model w przypadku obciążenia momentem 300 Nm pokazano na Rys 4.17. Wyraźnie widać na odcinku pomiędzy utwierdzonym końcem a tulejką skrócenie wałka.

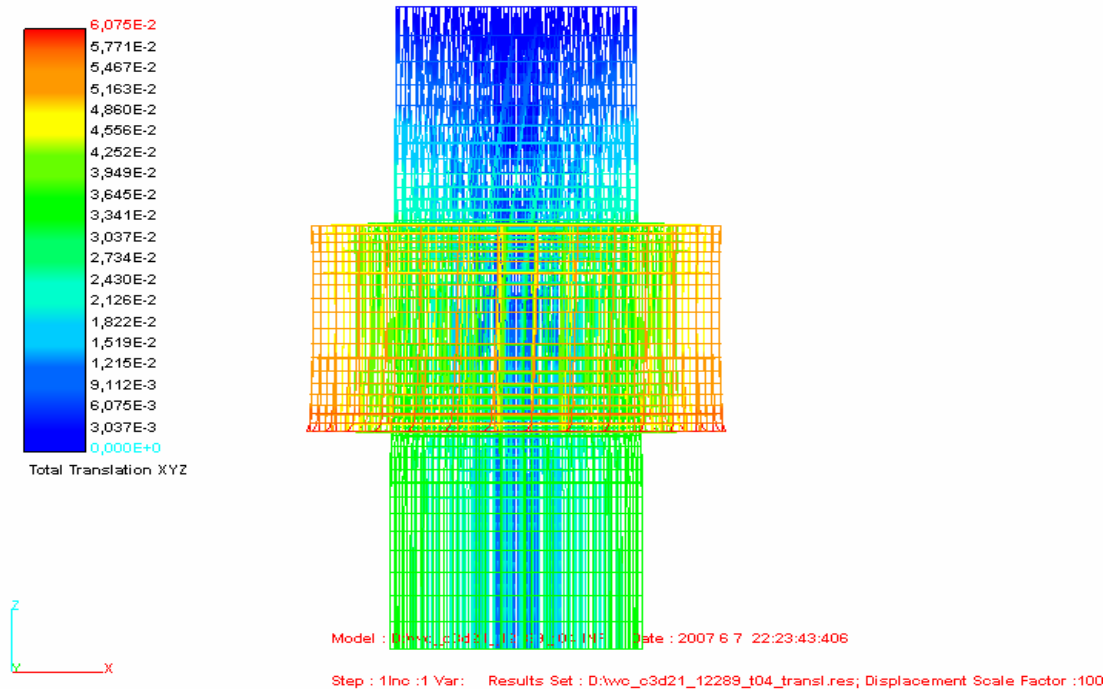
GLON



Rys. 4.17 Skrócenie wałka. Obciążenie momentem 300 Nm

Wartości przemieszczeń tego przypadku pokazano na Rys 4.18. Widać, że w pobliżu osi wałka wartości te są zbliżone do zera (kolor niebieski), środek wałka nie ulega skręceniu.

GLON

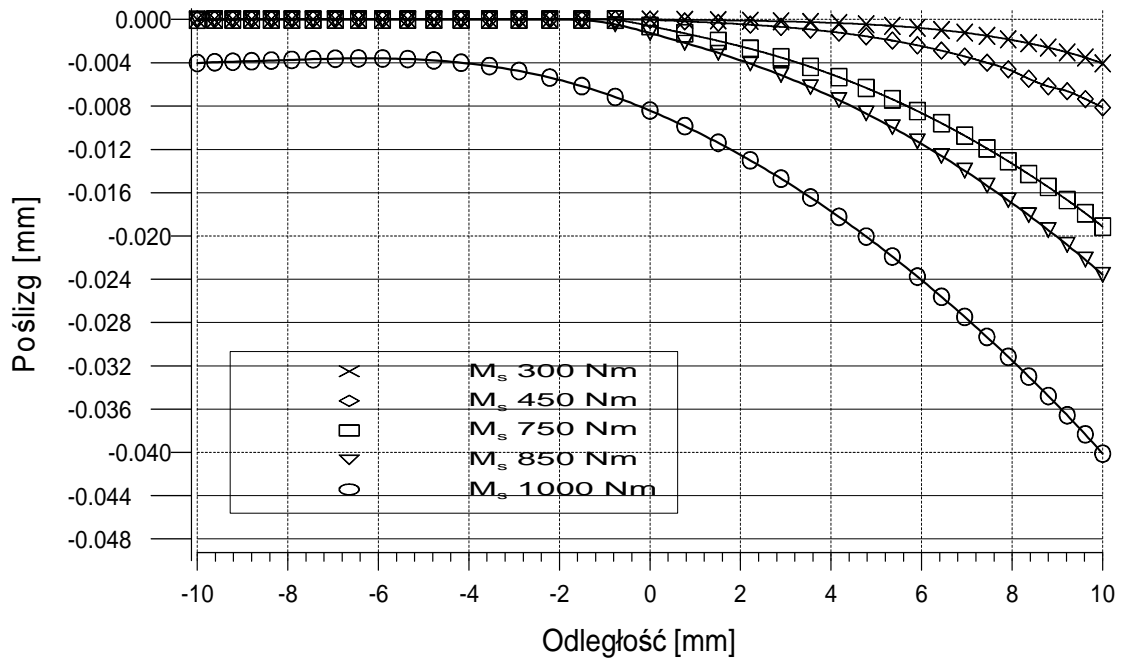


Rys. 4.18 Wartości przemieszczeń dla obciążenie momentem 300 Nm

Największe wartości przemieszczeń występują natomiast na dolnej krawędzi tulejki, do której przyłożono pary sił skupionych, dających w rezultacie zadany moment skręcający.

Nośność połączenia obciążonego momentem skręcającym możemy zbadać sprawdzając w których węzłach kontaktowych wystąpił poślizg. Wraz ze wzrostem wartości przyłożonego momentu skręcającego coraz większa liczba węzłów kontaktowych będzie zmieniała swój status wykazując, że nastąpił w nich poślizg. W analizowanym połączeniu zaobserwowano, że poślizgi rozpoczynają się od strony przeciwnej niż ta do której przyłożono obciążenie.

W przypadku obciążenia momentem równym 850 Nm poślizgi występowały już po obu stronach tulejki, chociaż węzły w środku nie wykazywały poślizgu. W przypadku wartości momentu skręcającego równego 1000 Nm zaobserwowano, że poślizg wystąpił we wszystkich węzłach kontaktowych. Najmniejszy moment, przy którym wystąpi poślizg we wszystkich węzłach należy traktować jako obciążenie, przy którym połączenie utraci swą nośność. Wykres przedstawiający zależność poślizgów od przyłożonego momentu przedstawia Rys.4.19.

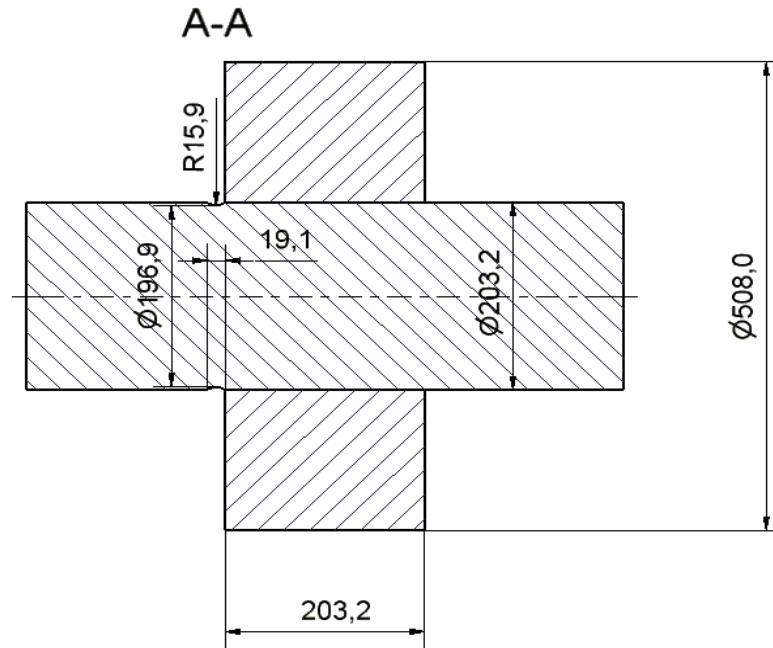


Rys. 4.19 Poślizg w zależności od przyłożonego momentu

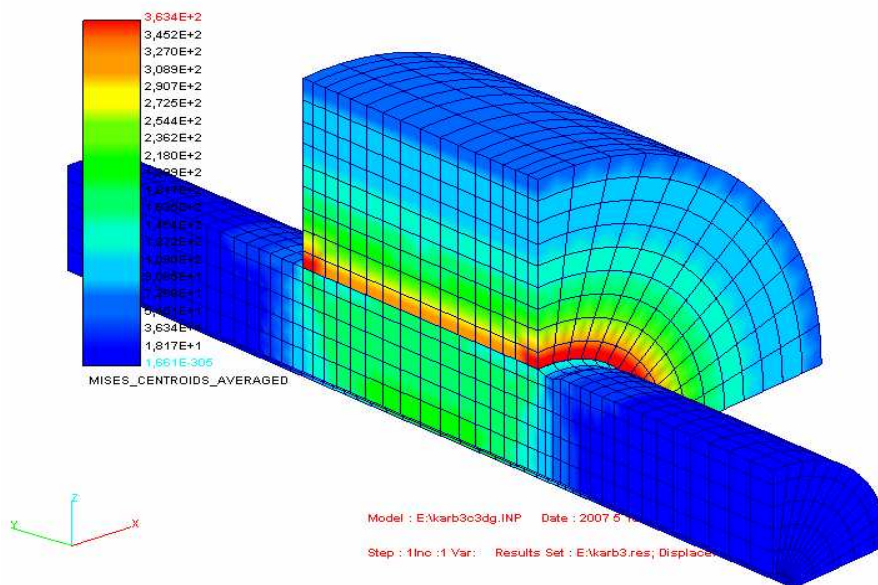
Analizę połączenia wciskowego modeli osiowo symetrycznych możemy znaleźć w pracach [13], [41] (w literaturze brak jest wyników osiągniętych na modelach przestrzennych). Rozkład ciśnienia kontaktowego uzyskany z użyciem przestrzennych elementów 14-, 21- i 28-węzłowych w przypadku zacisku wstępnego są zgodne z wynikami połączeń osiowo-symetrycznych zamieszczonymi w szeroko cytowanej w literaturze pracy [13].

W przypadkach połączeń wciskowych, w których zmodyfikowano kształt połączenia (połączenia wciskowe z karbem, [41]), rozkład nacisków kontaktowych może okazać się bardzo niekorzystny, p. zbiorcze wyniki wiodących ośrodków uniwersyteckich w Niemczech zebrane w pracy [20]. W przypadkach, gdy połączenie przenosi cyklicznie zmienne obciążenia np. siłą osiową zabiegi takie stosuje się w celu zwiększenia wytrzymałości zmęczeniowej połączenia [20].

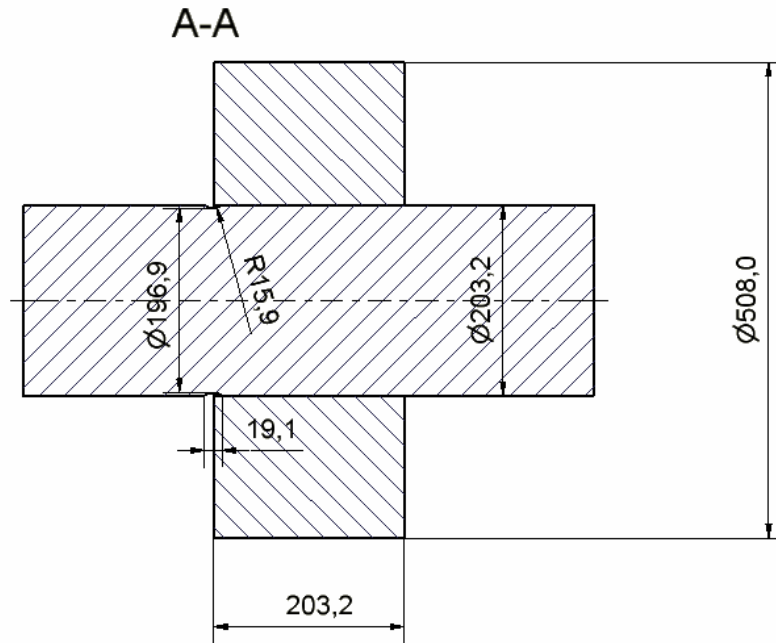
Obliczenia połączenia wciskowego z karbem przeprowadzono w dwóch przypadkach: wariant I, który został pokazany na Rys. 4.20 i wariant II, przedstawiony na Rys. 4.22. Rozkłady naprężeń zredukowanych Hubera-Misesa odnośnie obu wariantów ilustrują Rys. 4.21 i 4.23.



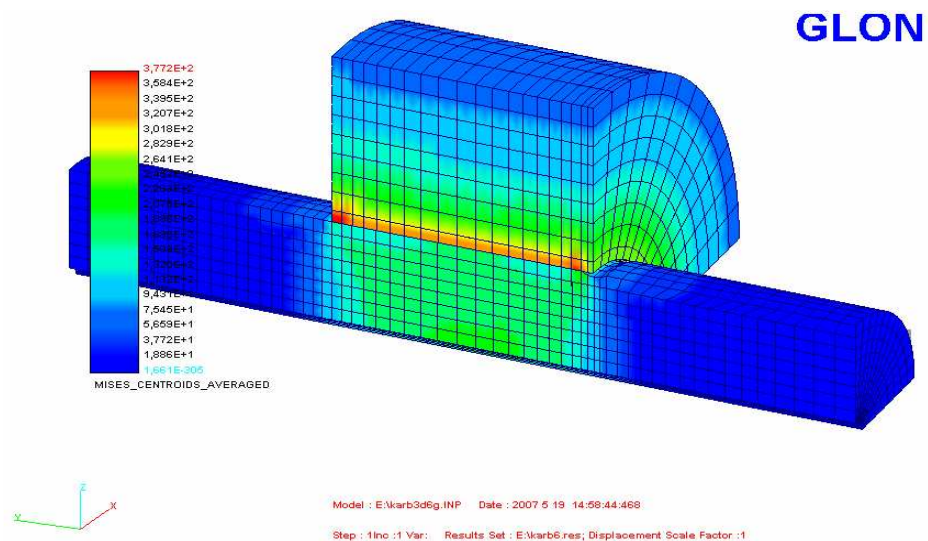
Rys. 4.20 Połączenie wariant I

GLON

Rys. 4.21 Połączenie wariant I. Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa [MPa]



Rys. 4.22 Połączenie wariant II

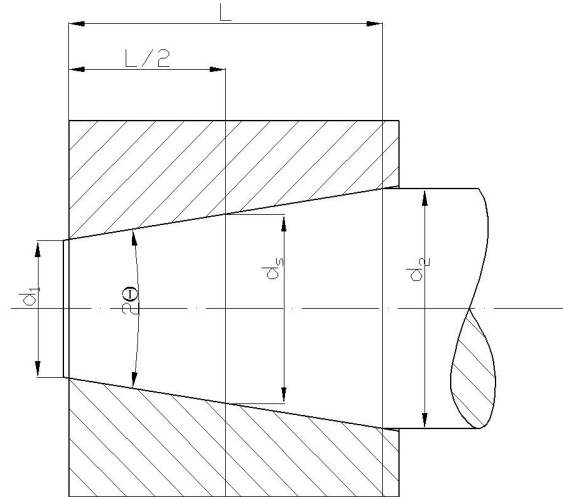


Rys. 4.23 Połączenie wariant II. Naprężenia zredukowane Hubera - Misesa [MPa]

4.3 Połączenie stożkowe

4.3.1 Charakterystyka połączenia

W połączeniach stożkowych bezpośrednich (Rys.4.24) obydwie części, czyli czop i tulejka posiadają kształt stożków o jednakowej zbieżności θ (w przypadku idealnym).



Rys. 4.24 Połączenie stożkowe bezpośrednie

Zbieżność możemy określić jako:

$$z = \frac{d_2 - d_1}{l} = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad (4.25)$$

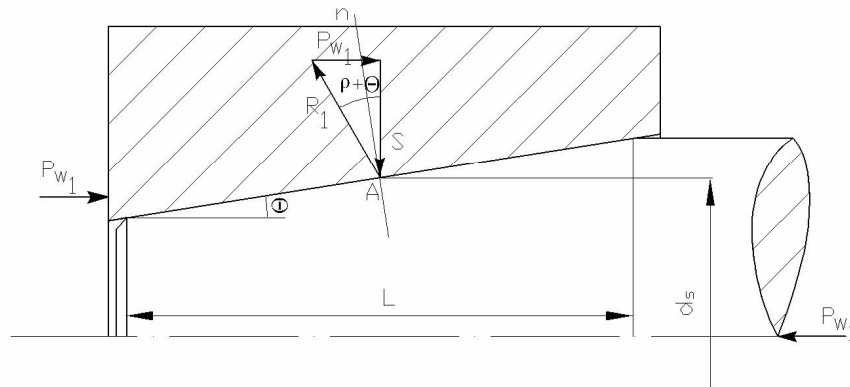
Przy dokładnym wykonaniu połączeń stożkowych zapewnione jest dobre wyśrodkowanie osadzonego na czopie elementu. Złącza te w porównaniu z połączeniami wciskowymi, podczas montażu i demontażu nie wymagają tak dużych przesunięć łączonych elementów [22]. Siła konieczna do rozłączenia połączenia jest również mniejsza niż w przypadku połączeń walcowych i jest zależna od kąta stożka.

Przy małych zbieżnościach, połączenia charakteryzują się samohamownością. Samohamowność umożliwia osadzenie w gniazdach stożkowych elementów o stożkowej końcówce (np.: wrzecion, wiertel) bez żadnych dodatkowych elementów mocujących. Nacisk na stożkową powierzchnię połączenia zależy od siły wciskającej czop w otwór piasty; może być nawet w ten sposób regulowany.

Zaczynamy od obliczeń zadanych zaciskiem wstępnym. Układy sił działających w połączeniu stożkowym przedstawiono jak na Rys. 4.25. W celu uproszczenia, nacisk na powierzchni stożkowej połączenia przedstawiono jako siłę skupioną S działającą w punkcie A na średnicy średniej złącza.

Między siłą wciskającą P_{w1} a siłą rozpierającą tuleję S zachodzi zależność:

$$S = \frac{P_{w1}}{\operatorname{tg}(\theta + \rho)} \quad (4.26)$$



Rys. 4.25 Układ sił działających w połączeniu stożkowym bezpośrednim

Wciśnięcie wytworzyło w połączeniu zacisk wstępny określony siłą S . W przypadku połączenia niesamohamownego zmniejszając siłę wciskającą P_{w1} tuleja będzie wykazywała tendencje do zsunęcia się z czopa.

W przypadku połączenia samohamownego po usunięciu siły wciskającej P_{w1} tuleja nie zsunie się z czopa. Do rozłączenia połączenia wymagane jest przyłożenie siły P_{w2} przeciwnie skierowanej do siły P_{w1} o wartości:

$$P_{w2} = S \cdot \operatorname{tg}(\theta - \rho) \quad (4.27)$$

Współczynnik zacisku wstępnego złącza wyraża się wzorem:

$$\zeta = \frac{P_{w2}}{P_{w1}} \quad (4.28)$$

Współczynniki zacisku wstępnego bliskie zeru mają złącza będące na granicy samohamowności. Złącza o współczynniku bliskim jedności obok momentu skręcającego mogą również przenosić obciążenia wzdłużne w obu kierunkach, podobnie jak połączenia wciskowe walcowe.

Podstawową wielkością decydującą o nośności połączenia stożkowego bezpośredniego jest nacisk powierzchniowy określany jako:

$$p = \frac{S}{\pi d_s L} \quad (4.29)$$

gdzie: d_s - średnia średnica złącza, równa $d_s = (d_1 + d_2)/2$, S - siła promieniowa,

L - oznacza długość połączenia, współczynnik tarcia $\mu = \operatorname{tg}(\rho)$.

Uwzględniając w powyższym wzorze związek (4.26) otrzymamy zależność pomiędzy siłą niezbędną do wywołania nacisku a samym naciskiem:

$$p = \frac{P_{w1}}{\pi d_s L \cdot \operatorname{tg}(\theta + \rho)} \quad (4.30)$$

Podobnie jak w połączeń wciskowych wymagana do przeniesienia momentu skręcającego wartość nacisku powierzchniowego określamy z warunku:

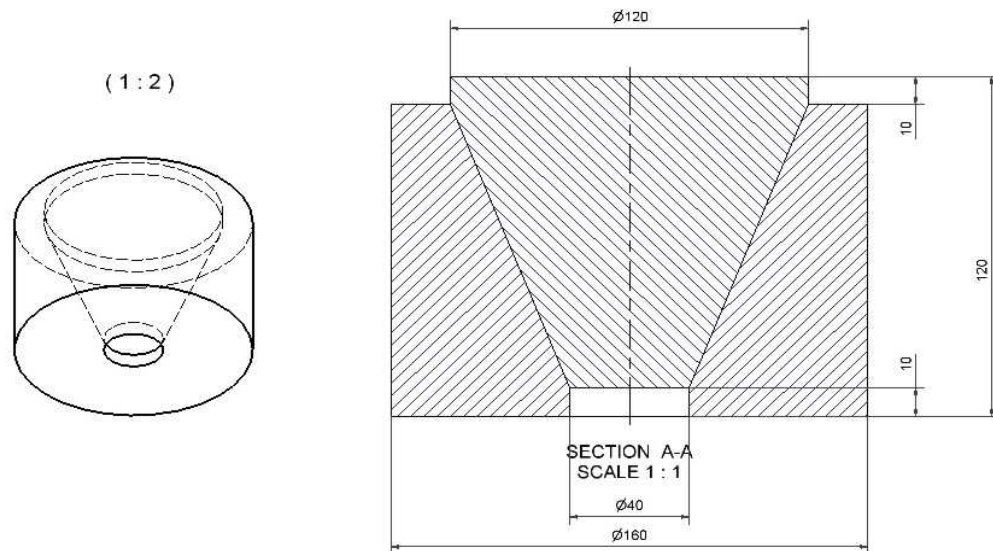
$$p \geq \frac{2kM_s}{\mu\pi d_s^2 L} \quad (4.31)$$

gdzie: k jest współczynnikiem nadwyżki nośności, zwykle $k = 1.3 - 1.5$.

4.3.2 Połączenie stożkowe - analiza numeryczna

Połączenie

Model połączenia stożkowego w przypadku którego przeprowadzone będą obliczenia numeryczne pokazano na Rys. 4.26. Przyjęto, że jest to połączenie bezpośrednie i składa się z dwóch elementów głównych: czopa i tulejki.



Rys. 4.26 Analizowane połączenie stożkowe

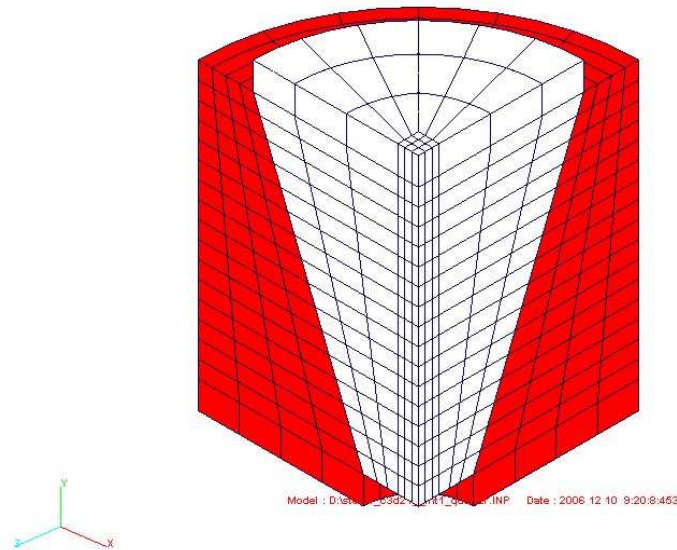
Obydwie części mają taki sam kąt zbieżności i zostały wykonane z tego samego materiału (stal), dla którego przyjęto następujące stałe materiałowe: $E = 2 \cdot 10^5$, $\nu = 0.3$. Obliczenia przeprowadzono tylko w przypadku zacisku wstępnego.

Model i analiza MES

Model, ze względu na symetrię, uwzględniał tylko 1/4 całej struktury połączenia (Rys. 4.27). Całkowita ilość elementów skończonych wynosi 534. W strefie kontaktu użyto 192 elementów skończonych (96 czop i 96 tulejka, Rys. 4.28). Warunki brzegowe wynikają z uwzględnienia warunków symetrii modelu i całkowitego utwierdzenie węzłów znajdujących się na dolnej powierzchni tulejki. Jak założono powyżej, analiza została przeprowadzona została w jednym kroku (tylko zacisk wstępny). Obciążenie, które

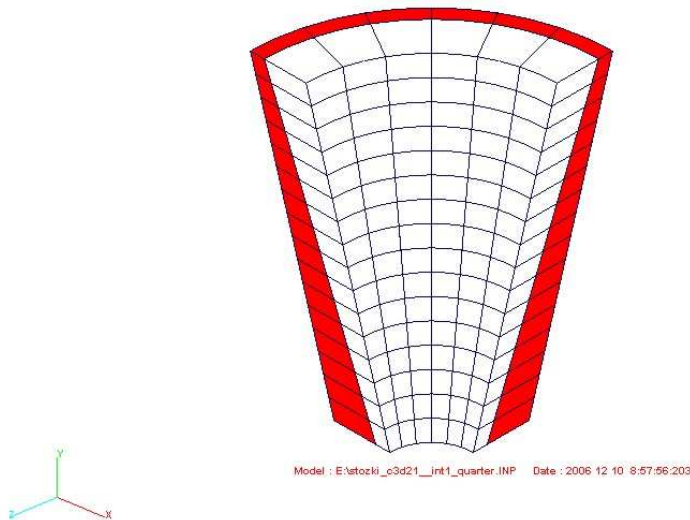
powodowało wciskanie czopa w stożkowy otwór tulejki zadane było w postaci jednorodnego ciśnienia przyłożonego do górnej powierzchni czopa o wartości 20 MPa.

GLON



Rys. 4.27 Siatka elementów skończonych

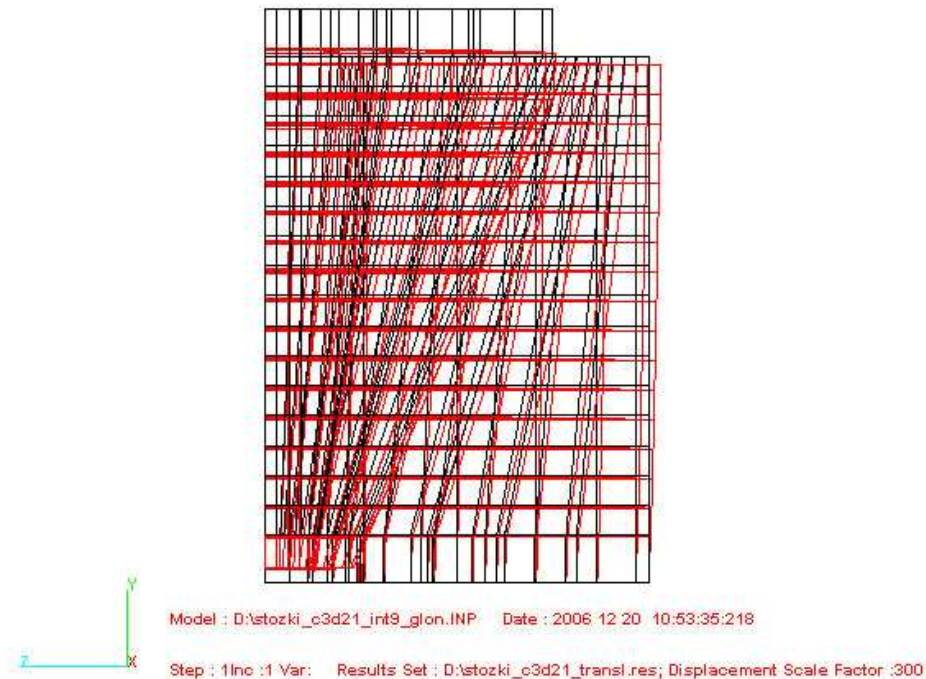
GLON



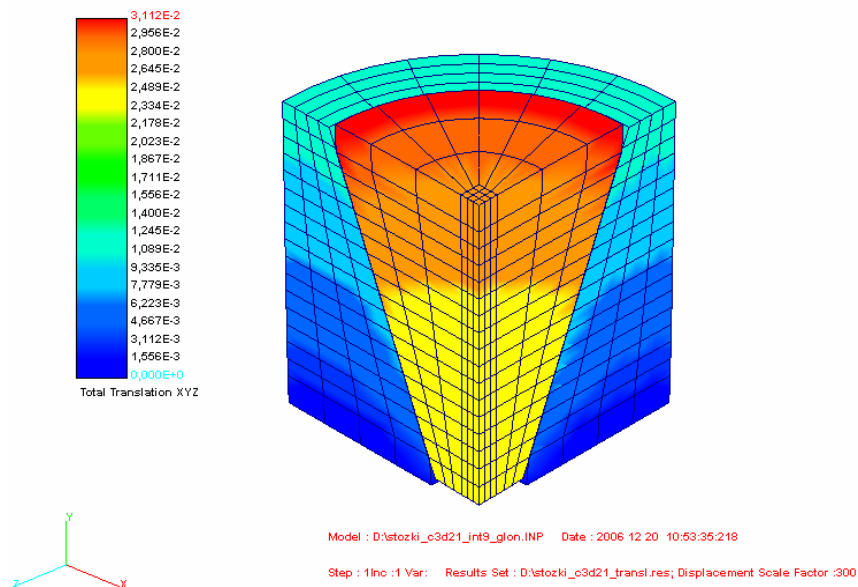
Rys. 4.28 Elementy biorące udział w kontakcie

Rezultaty

W wyniku działającego obciążenia czop jest wciskany w tulejkę. Widok siatkowego modelu odkształconego (kolor czerwony) w odniesieniu do modelu wyjściowego pokazano na Rys.4.29. Widać wyraźnie, że tulejka odkształca się na zewnątrz, a czop przesuwa się w dół.



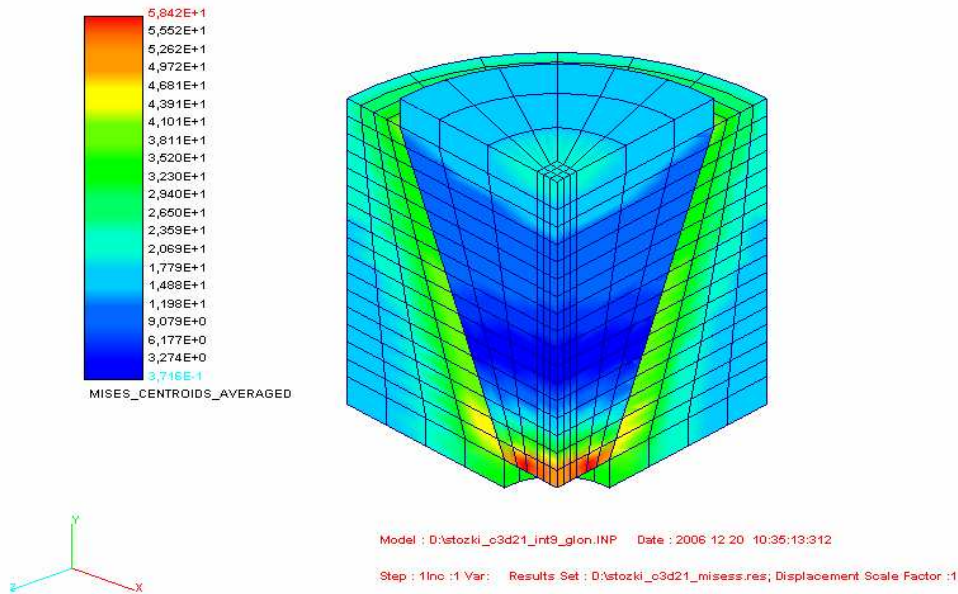
Rys. 4.29 Model odkształcony (kolor czerwony) i wyjściowy (kolor czarny)



Rys. 4.30 Wciskanie czopa w tulejkę. Przemieszczenia [mm]

Największe wartości przemieszczeń obserwowano w górnej części czopa (Rys 4.30). W górnej części tulejki wartości przemieszczeń węzłów są największe. Największe naprężenia zredukowane Hubera-Misesa występują w dolnej części czopa (Rys. 4.31); w tej części połączenia na powierzchni kontaktu są też największe naciski.

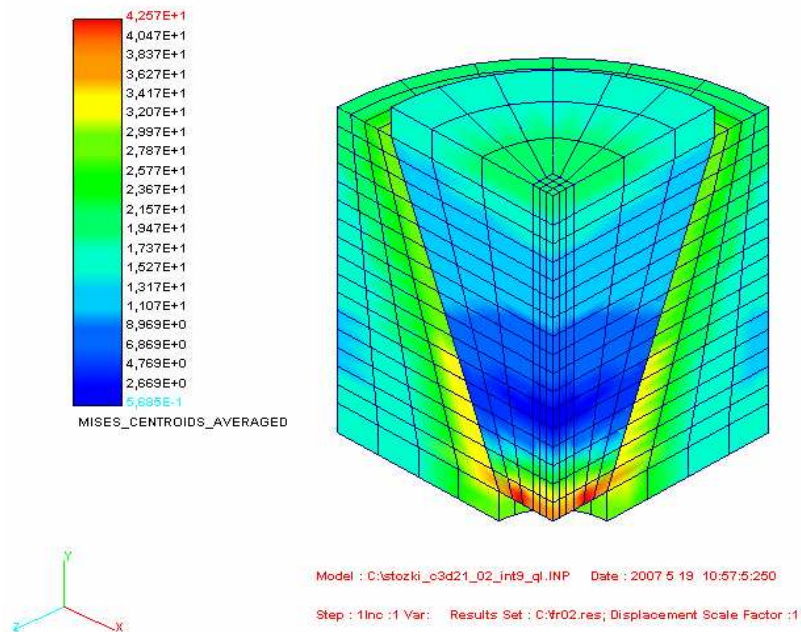
GLON



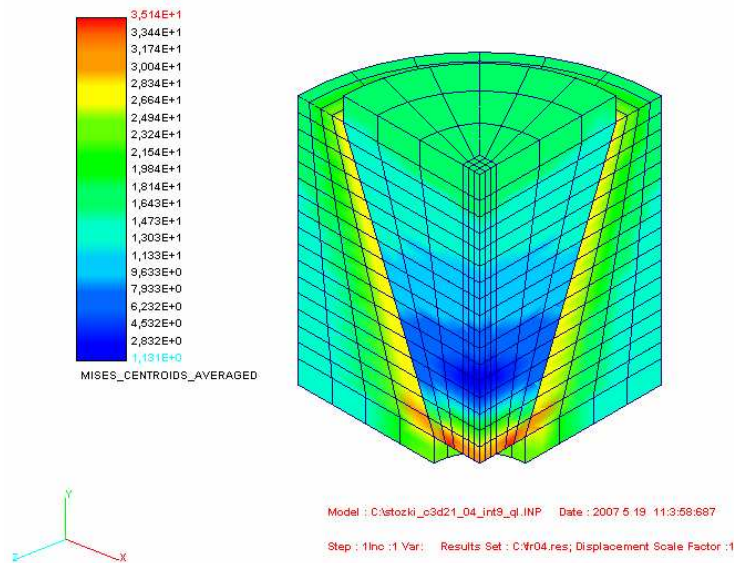
Rys. 4.31 Elementy 21-węzłowe. Naprężenia zredukowane Hubera - Misesa [MPa]

W zależności od przyjętego współczynnika tarcia zmieniają się wartości i rozkłady naprężeń zredukowanych Hubera-Misesa. W przypadku bez uwzględnienia tarcia maksymalna wartość naprężeń zredukowanych wynosi 58 MPa (zweryfikuj Rys. 4.31), w przypadku współczynnika tarcia 0.2 wartość ta wynosiła 42 MPa (Rys. 4.32), natomiast w przypadku współczynnika tarcia 0.4 wartość zmalała do 35 MPa (Rys 4.33).

GLON

Rys. 4.32 Elementy 21-węzłowe. Naprężenia zredukowane Hubera-Misesa [MPa]
Współczynnik tarcia 0.2

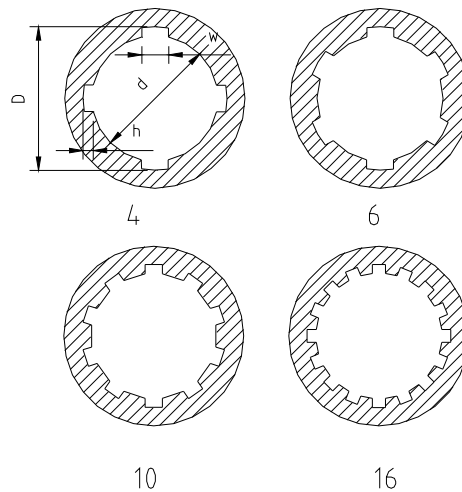
GLON



Rys. 4.33 Elementy 21-węzłowe. Naprężenia zredukowane Hubera - Misesa [MPa]
Współczynnik tarcia 0.4

4.4 Połączenie wielowypustowe

Połączenia wielowypustowe o prostokątnych zarysach wpustów pokazano na Rys.4.34.



Rys. 4.34 Zarysy wielowypustów

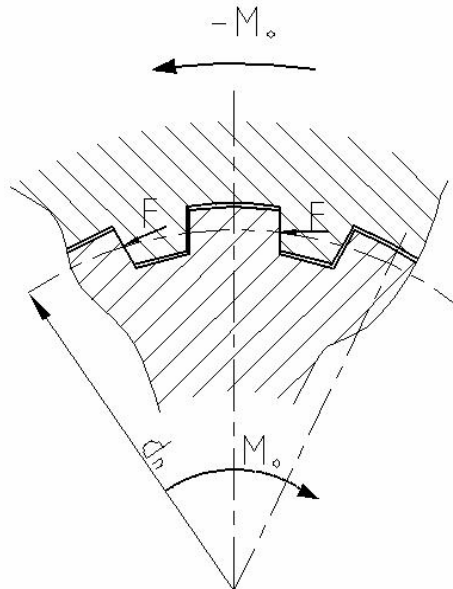
Połączenia o takich kształtach są często spotykanymi połączeniami kształtowymi stosowanymi w zastosowaniach praktycznych, np. [35], [50]. Połączenia tego typu mogą występować jako:

- (i) połączenia spoczynkowe,
- (ii) połączenia ruchowe (wykorzystując wielowypusty jako elementy prowadnicowe, np. skrzynia biegów).

Odpowiednio do tego wyróżnia się trzy klasy takich połączeń:

- klasa A - spoczynkowe,
- klasa B - przesuwne wzdłuż osi przy braku obciążenia momentem skręcającym,
- klasa C - przesuwne wzdłuż osi przy obciążeniu momentem skręcającym.

W przypadku połączeń spoczynkowych przeznaczonych do przenoszenia momentów obrotowych schemat obciążeń pokazuje Rys. 4.35.



Rys. 4.35 Schemat przenoszenia obciążeń (moment obrotowy)

Obciążenie działające na wypust określa się następująco:

$$F = \frac{2M_0}{Nd_n} \quad (4.32)$$

gdzie: M_0 oznacza moment obrotowy, d_n jest średnicą nominalną połączenia, N - liczbą obciążonych powierzchni wypustów.

Powierzchnie nośne w przypadku połączenia o prostokątnych zarysach wypustów są prostokątami. Zgodnie ze schematem obciążeń przedstawionym na Rys.4.35, powierzchnie nośne narażone są na naciski powierzchniowe. W celu minimalizacji tych nacisków powierzchnie te mogą być kształtowane w różnorodny sposób. Zarysy wypustów są wówczas mniej lub bardziej wklęsłe w porównaniu do zarysu prostokątnego. W przypadku trójkątnego zarysu wielowypustów, połączenia nazywamy połączeniami wielokarbowymi.

W uproszczonych obliczeniach inżynierskich w celu wyznaczenia nacisków powierzchniowych dokonuje się idealizacji rozkładu obciążeń występujących na powierzchni nośnej. Przyjmuje się równomierne obciążenie wszystkich powierzchni nośnych sprowadzone do wypadkowych w środkach ciężkości ich pól powierzchni.

Przy tych założeniach, nominalne naciski powierzchniowe (w przypadku obciążenia momentem obrotowym) można określić następująco:

$$\sigma_n = \frac{2M_0}{Nd_n\eta S} \quad (4.33)$$

gdzie: S oznacza pole powierzchni nośnej wpustu, η - współczynnik uwzględniający nierównomierność obwodowego rozkładu obciążeń wywoływaną np. błędami podziału; w obliczeniach przyjmuje się $\eta = 0.75 - 1$.

Naciski powierzchniowe są głównym czynnikiem decydującym o obciążalności kształtowej połączenia. Połączenia wielowypustowe dzięki zwielokrotnieniu powierzchni nośnych uzyskiwać mogą dużą obciążalność, co jest ich naturalną zaletą. Odpowiednio do liczby wpustów i średnicy D , p. Rys. 4.34, przyjmuje się zwykle pozostałe wymiary wpustów. W pracy posłużono się Tabelą 4.2 zaczerpniętą z pracy [10] zawierającą wymiary wpustów spoczynkowych połączeń klasy A.

Tab. 4.2 Wymiary połączeń wielowypustowych

Liczba wpustów	W	H	d
4	0.241D	0.075D	0.850D
6	0.250D	0.050D	0.900D
10	0.156D	0.045D	0.910D
16	0.098D	0.045D	0.910D

UWAGA: W przypadku połączeń klasy B i C wymiary wpustów są inne.

Przyjęte zgodnie z Tab. 4.2 oznaczenia są zgodne z Rys. 4.34 i oznaczają odpowiednio:

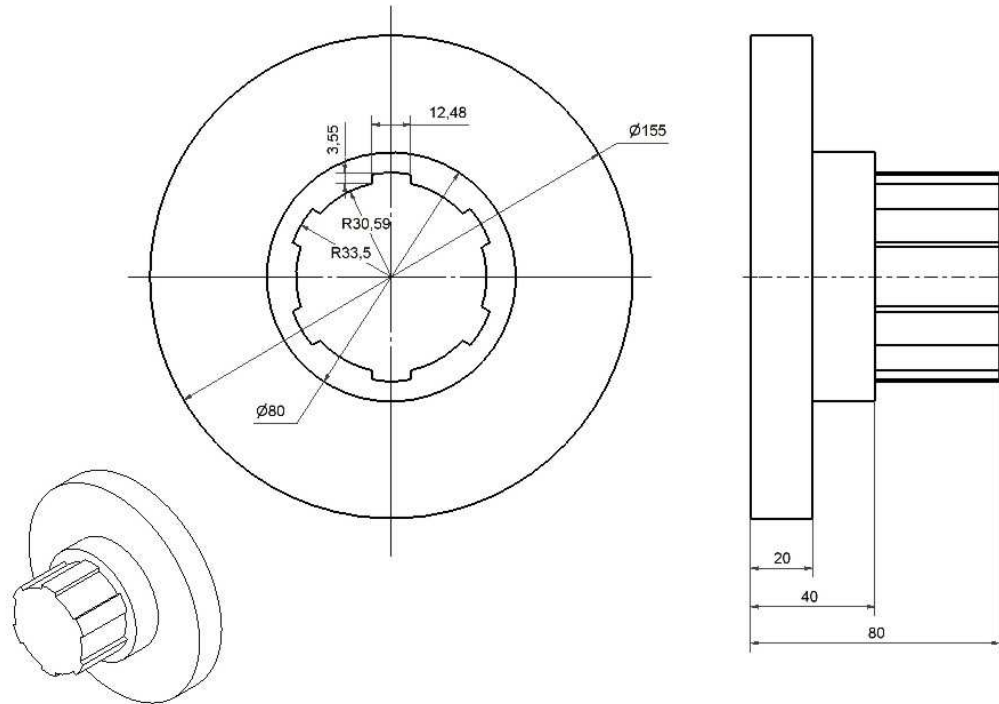
- D – średnicę zewnętrzną wpustu,
- d – średnicę wewnętrzną wpustu,
- h – wysokość wpustu,
- w – szerokość wpustu.

Połączenie

Analizie poddano połączenie wielowypustowe spoczynkowe (wał z piastą i kołnierzem) przedstawione na Rys. 4.36. W przypadku liczby wpustów równej 6, średnicy zewnętrznej $D = 67$ mm, odpowiednio do Tab. 4.2, przyjęto następujące wymiary:

- średnicę wewnętrzną $d = 61.18$ mm,
- wysokość wpustu $h = 3.55$ mm,
- szerokość wpustu $w = 12.48$ mm.

Pozostałe wymiary pokazano na Rys. 4.36.



Rys. 4.36 Analizowane połączenie wielowypustowe

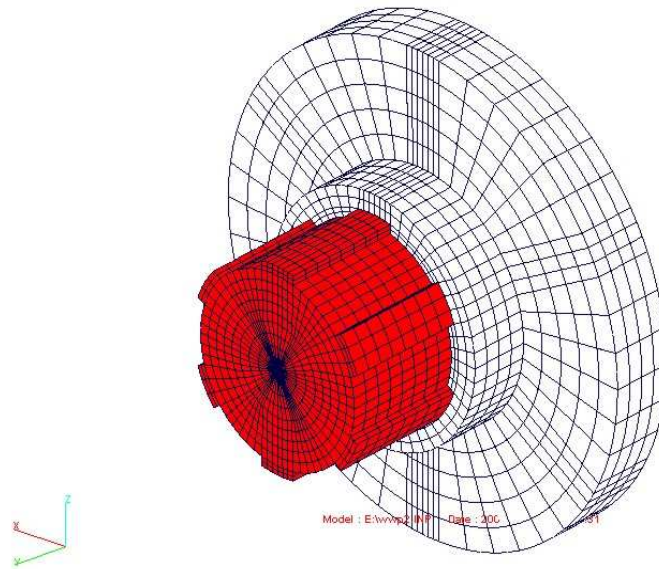
Założono, że obydwie części zostały wykonane z materiału (stal) o następujących stałych materiałowych: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$. Połączenie obciążono momentem o wartości $M_0 = 1000$ Nm.

Model MES i analiza numeryczna

Model połączenia wielowypustowego wału z piastą (wraz z kołnierzem) pokazano na Rys.4.37. Model zawierał w 12000 przestrzennych elementów skończonych, w którym poszczególne części zawierały:

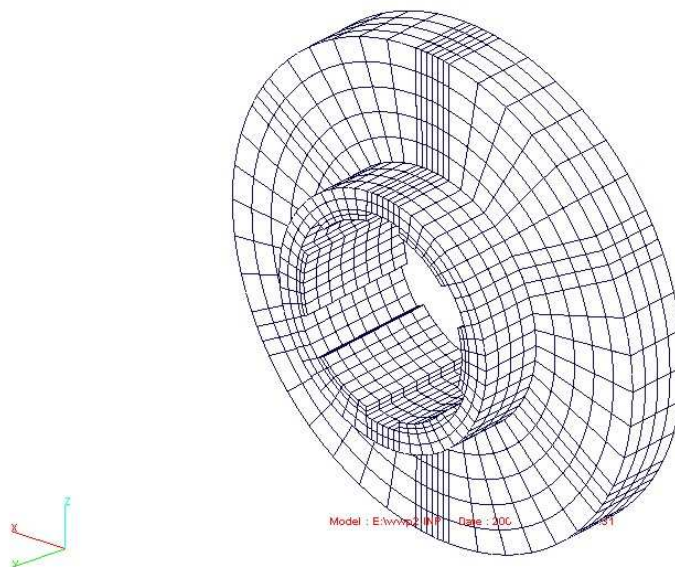
- (i) piasta z kołnierzem, 3500 elementów, Rys. 4.38),
- (ii) wał, 8500 elementów, Rys. 4.39).

W modelu przyjęto, że boczne powierzchnie wielowypustów wału i piasty przylegają ściśle do siebie. Na tych powierzchniach założono więc występowanie kontaktu i użyto 21-węzłowych elementów skończonych oznaczonych jako C3D21. Całkowita liczba tych elementów w strefie kontaktu wynosiła 384 (192 piasta i 192 wał). W jednym wpuście występowało 16 elementów po jednej stronie i 16 elementów po drugiej stronie. Przyjęto, że wzdłuż średnicy połączenia występuje luz, co oznacza, że górne powierzchnie wielowypustów wału i dolne powierzchnie piasty nie uczestniczą w kontakcie.

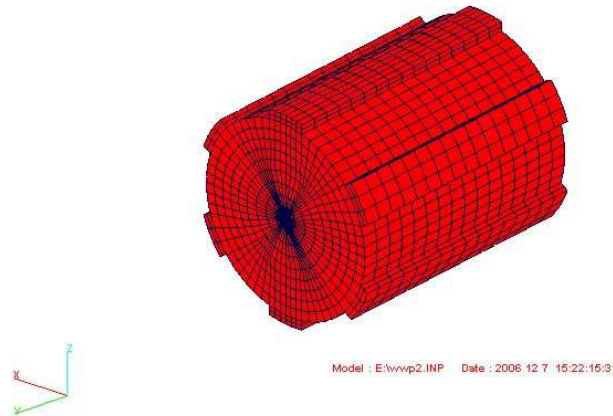
GLON

Rys. 4.37 Model MES połączenia wielowypustowego

Warunki brzegowe są następujące: całkowite utwierdzenie na końcu wału przeciwnym do piasty z kołnierzem. Obciążenie w postaci momentu skręcającego zostało zadane jako para sił skupionych (rozłożonych następnie na składowe kierunkowe), które przyłożono w węzłach na zewnętrznej średnicy kołnierza.

GLON

Rys. 4.38 Siatka elementów piasty z kołnierzem



Rys. 4.39 Siatka elementów wałka

Analizę numeryczną, bez uwzględnienia tarcia, przeprowadzono w jednym kroku.

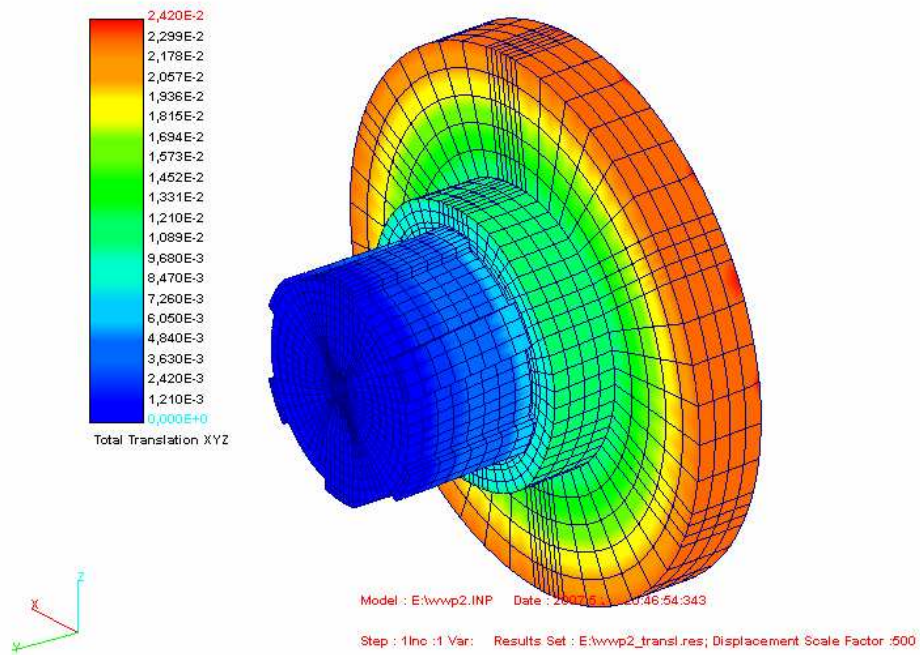
Rezultaty

Przyłożony moment powoduje odkształcenia wału i piasty wraz z kołnierzem. Całkowite przemieszczenia węzłów pokazano na Rys. 4.40. Jest jasne, że w osi symetrii połączenia przemieszczenia muszą być równe zero. Wartość przemieszczeń zwiększa się wraz ze wzrostem odległości węzłów od osi symetrii; największe przemieszczenia występują więc na zewnętrznej średnicy kołnierza.

Odształcenia wałka pokazano na Rys.4.41. Wyraźnie widać jego skręcenie (skala 500). Największe wartości przemieszczeń węzłów występują oczywiście na końcu przeciwnym do utwierdzenia. Szczególnie podatne na odkształcenie (skręcenia) są wypusty. Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera-Misesa w połączeniu pokazuje Rys. 4.42. Widać, że rozkład ten wykazuje wielokrotną symetrię, co świadczy o poprawności obliczeń. Największe wartości naprężeń zredukowanych pojawiają się w wypustach wałka i piasty oraz w wierzchnich warstwach wałka, przy utwierdzonym końcu. Rozkłady naprężeń dokładnie pokazują Rys. 4.43 i 4.44. W wypustach duże wartości naprężeń Hubera - Misesa występują po jednej ze stron (odpowiednio do kierunku działania momentu), podczas gdy na drugiej są wielokrotnie mniejsze.

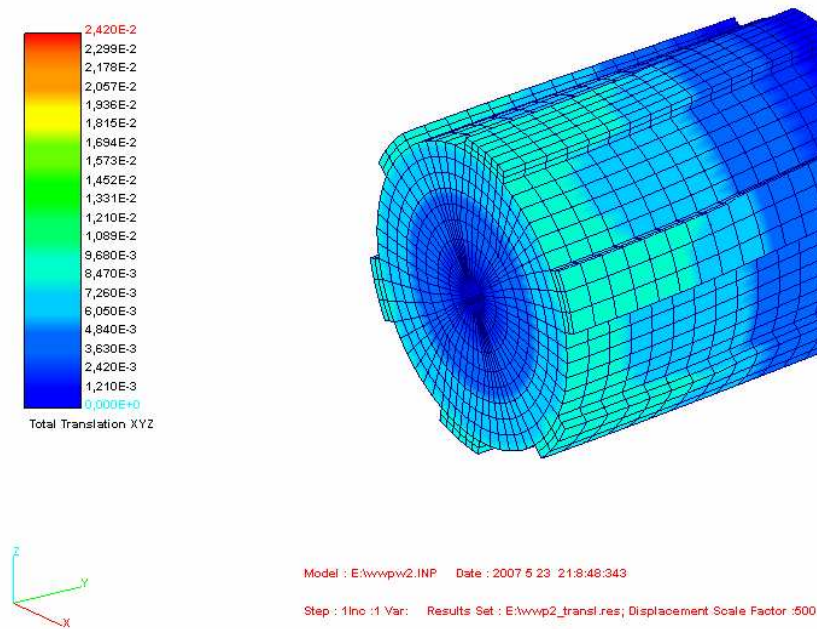
Wartość maksymalnych naprężeń zredukowanych jest tutaj stosunkowo mała i wynosi ok. 35 MPa. Nierównomierne są rozkłady nacisków powierzchniowych na ścianach wielowypustów w zakresie 0 - 166 MPa, co znacznie odbiega od założeń upraszczających.

GLON



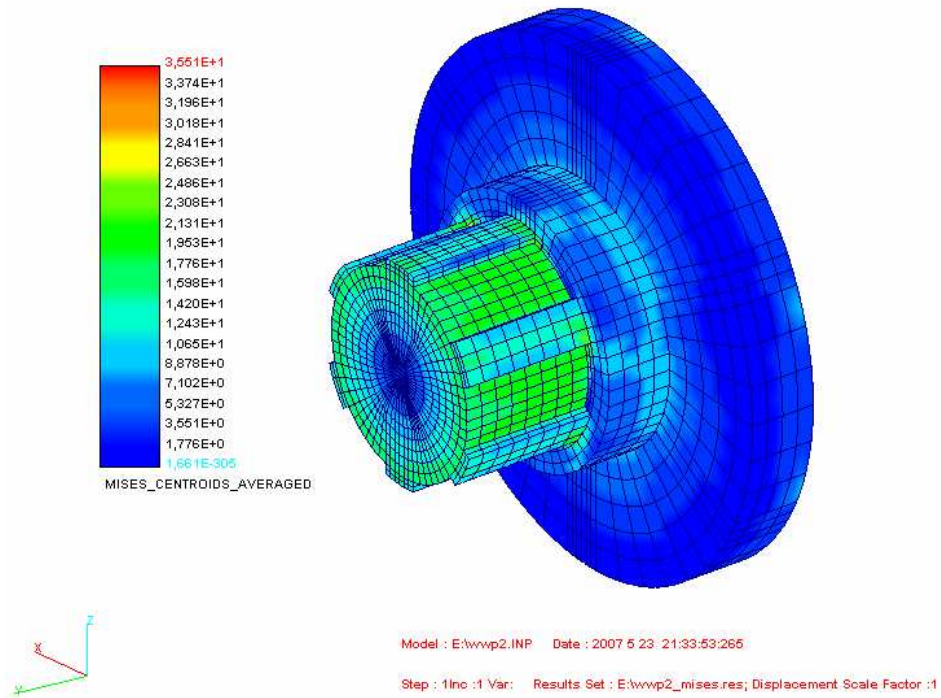
Rys. 4.40 Przemieszczenia węzłów [mm]

GLON



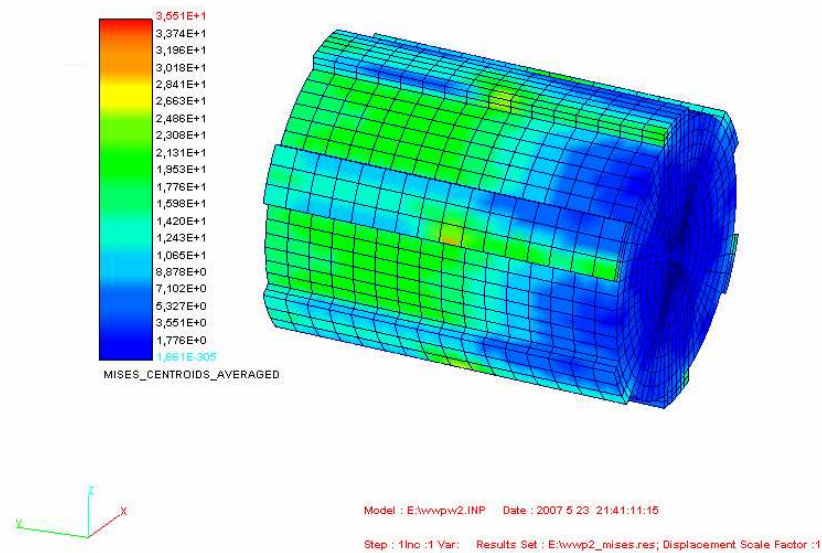
Rys. 4.41 Odształcenie wałka, przemieszczenia [mm]

GLON



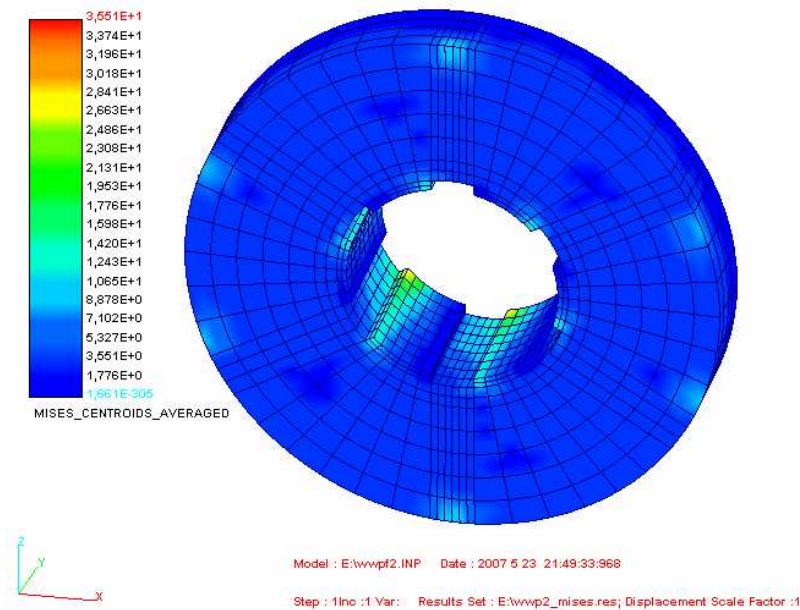
Rys. 4.42 Rozkład naprężeń Hubera - Misesa w [MPa]

GLON



Rys. 4.43 Rozkład zredukowanych naprężeń Hubera - Misesa w wałku w [MPa]

GLON



Rys. 4.44 Rozkład zredukowanych naprężeń Hubera - Misesa w piaście i kołnierzu w [MPa]

4.5 Połączenie wielobarbowe

Połączenia wielobarbowe (niem. *polygon* [20]), są również połączeniami kształtowymi. Zarys konturu takiego połączenia oparty jest na specjalnej rodzinie krzywych, (*niem. polygon*).

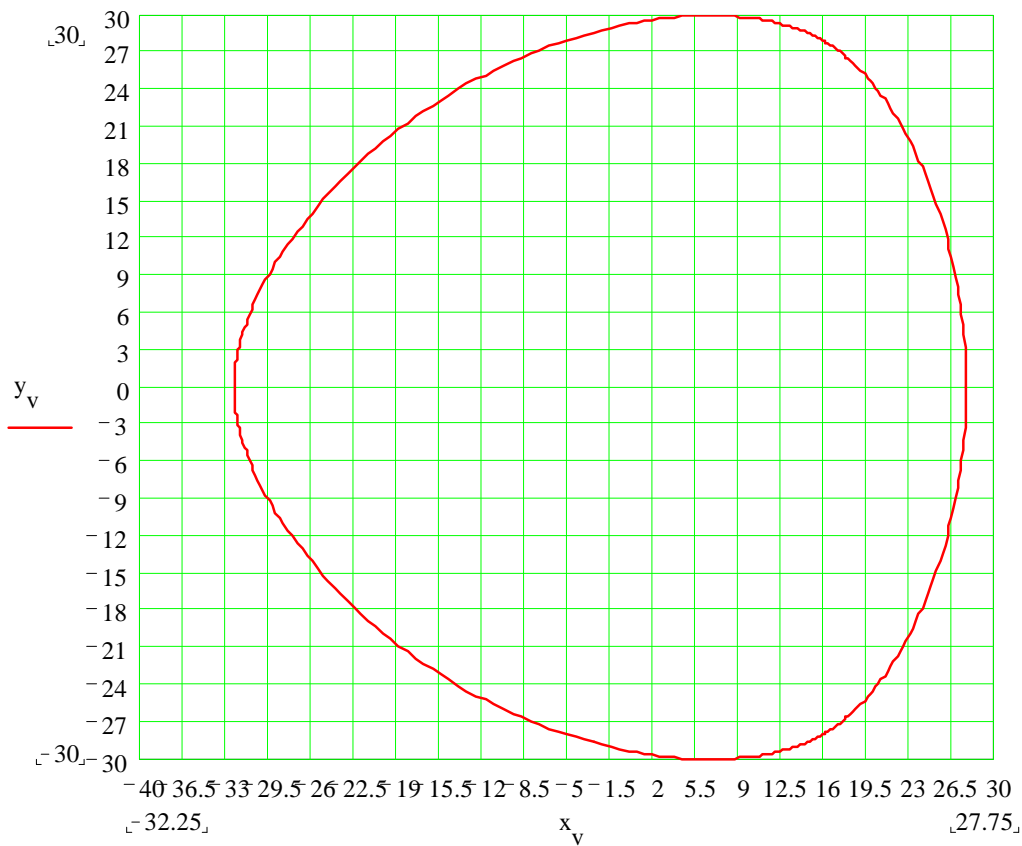
Równanie rodziny tych krzywych w postaci parametrycznej jest następujące:

$$x_v = \left(\frac{D}{2} - e \cdot \cos(n \cdot v) \right) \cos(v) - n \cdot e \cdot \sin(n \cdot v) \cdot \sin(v)$$

$$y_v = \left(\frac{D}{2} - e \cdot \cos(n \cdot v) \right) \sin(v) + n \cdot e \cdot \sin(n \cdot v) \cdot \cos(v)$$

Z równań tych otrzymujemy współrzędne punktów krzywej w zależności od kąta v oraz dalszych parametrów: D , n i e . Krzywe tego typu są znormalizowane. Odpowiednie ich kształty opisane są w normach DIN 32711, p. [51] (dla $n = 3$ P3G) i DIN 32712 (dla $n = 4$ P4G), p. [52].

Przyjmując następujące wartości: $\nu = 0.360$, $D = 60$, $n = 3$ i $e = 2.25$ otrzymamy kontur



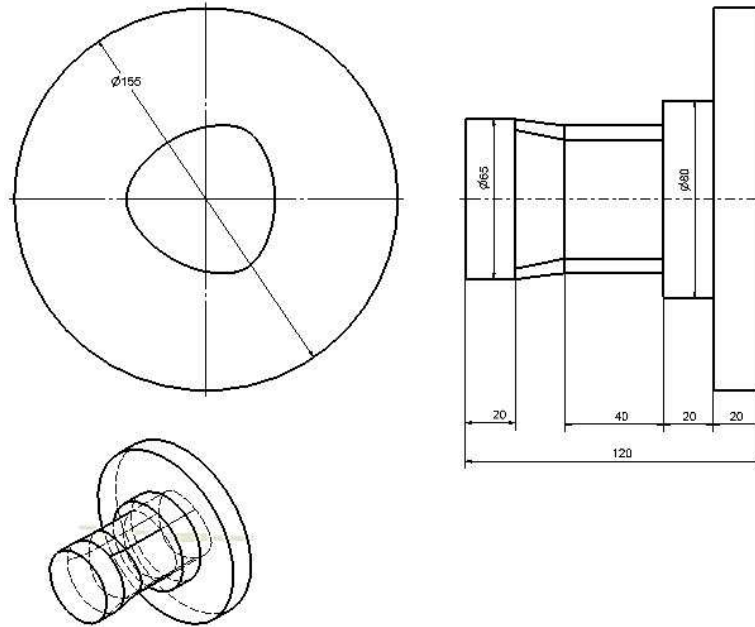
Rys. 4.45 Kontur P3G (wg DIN 32711)

pokazany na Rys. 4.45

Podobnie jak połączenia wielowypustowe połączenia wielogarbne mogą być zarówno połączeniami spoczynkowymi jak również połączeniami ruchowymi. Połączenia te należą oczywiście do grupy połączeń rozłącznych.

Model połączenia

Model połączenia oparto na konturze podanym powyżej. Wymiary połączenia składającego się z wału oraz piasty z kołnierzem przedstawia Rys. 4.46, p. praca [42].



Rys. 4.46 Połączenie wielogarnbowe

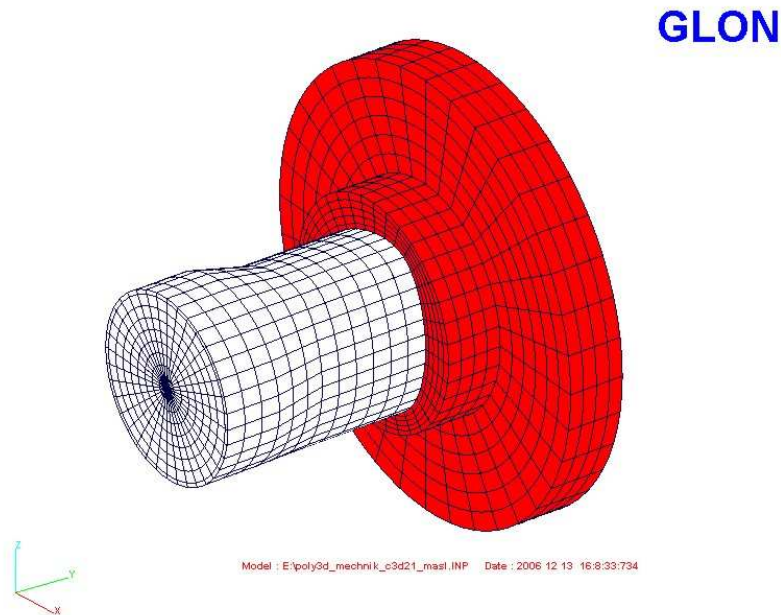
Wymiary geometryczne i własności materiałowe są następujące:

- długość wałka: 120 mm,
- średnica okrągłej części wałka: 65 mm,
- długość piasty: 40 mm (kołnierz tulejki: 20 mm, ramię tulejki: 20 mm),
- średnica tulejki na ramieniu równym 80 mm,
- średnica kołnierza: 155 mm.

Dla obydwu elementów połączenia stałe materiałowe są jednakowe i wynoszą: $E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$. Podobnie jak połączenie wielowypustowe, analizowane połączenie obciążono momentem $M_0 = 1000$ Nm.

Model i analiza MES

Model MES całego połączenia wielowypustowego (wałka wraz piastą i kołnierzem) pokazano na Rys.4.47.



Rys. 4.47 Model MES połączenia wielogarnbowego

Model ten składa się z 9500 elementów skończonych 20-węzłowych w połączeniu z elementami 21- lub 28-węzłowymi. Poszczególne części modelu zawierały:

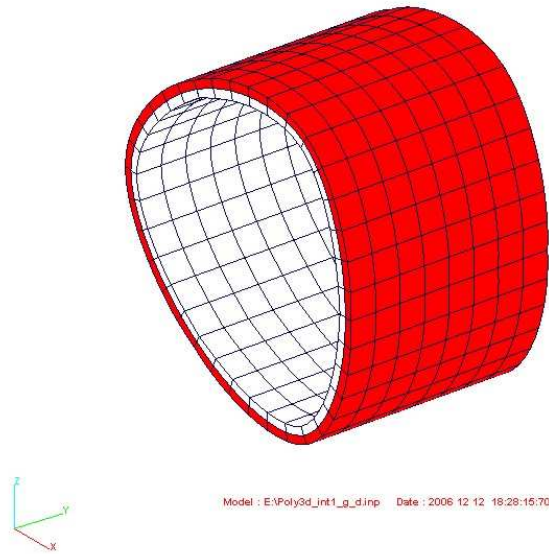
- 2587 elementów (wałek),
- 6913 elementów (piasta).

W strefie kontaktu znajdowało się 576 elementów skończonych (Rys.4.48), 21-węzłowych lub 28-węzłowych (288 wałek i 288 tulejka).

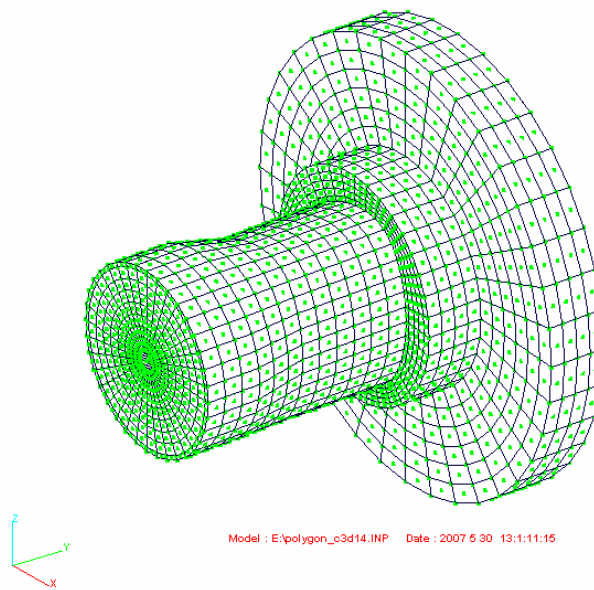
W przypadku użycia w całym modelu elementów 14-węzłowych ich liczba jest taka sama jak powyżej. Elementy skończone wraz z węzłami elementów skończonych pokazano na Rys.4.49.

Warunki brzegowe i obciążenie

Warunki brzegowe i obciążenie są identyczne jak przyjęto w przypadku połączenia wielowypustowego. Założono całkowite utwierdzenie końca wałka, od przeciwległej strony do piasty z kołnierzem. Moment skręcający zadany został w postaci pary sił skupionych (rozłożonych na składowe kierunkowe) przyłożonych w węzłach na zewnętrznej średnicy kołnierza.

GLON

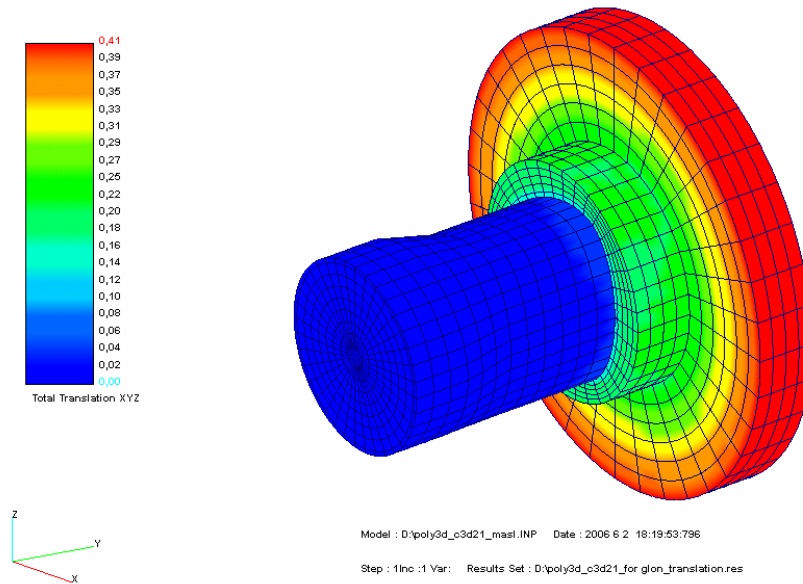
Rys. 4.48 Elementy skończone w strefie kontaktu

GLONRys. 4.49 Model MES połączenia wielorobowego,
elementy 14-węzłowe

Podane powyżej warunków brzegowe i obciążenia zadano w jednym kroku. Obliczenia przeprowadzono bez uwzględnienia tarcia.

Rezultaty

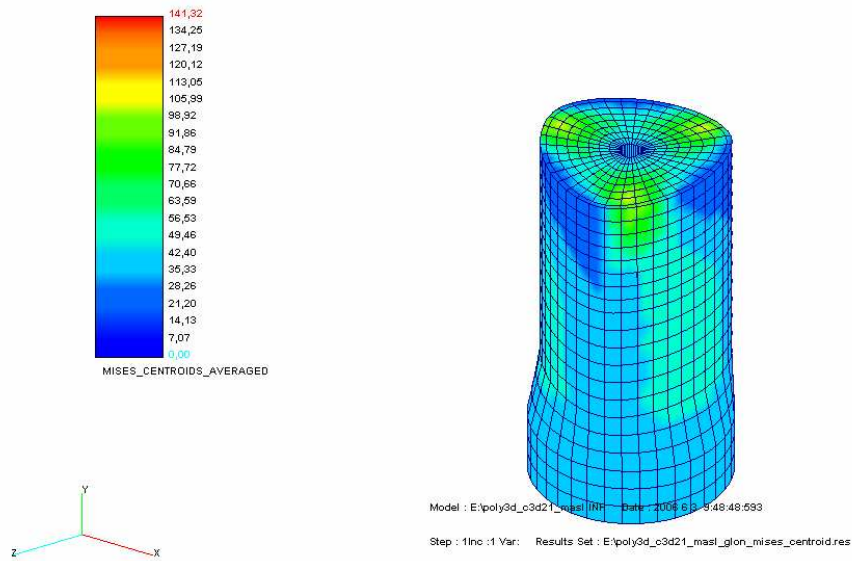
Otrzymane wartości przemieszczeń pokazano na Rys.4.50. Największa wartość całkowitego przemieszczenia węzłów znajdujących się na obwodzie kołnierza wynosi 0.41 mm i jest jednakowa w przypadku wszystkich modeli skończenie elementowych (w strefie kontaktu użyto elementów 14-, 21- i 28-węzłowych).



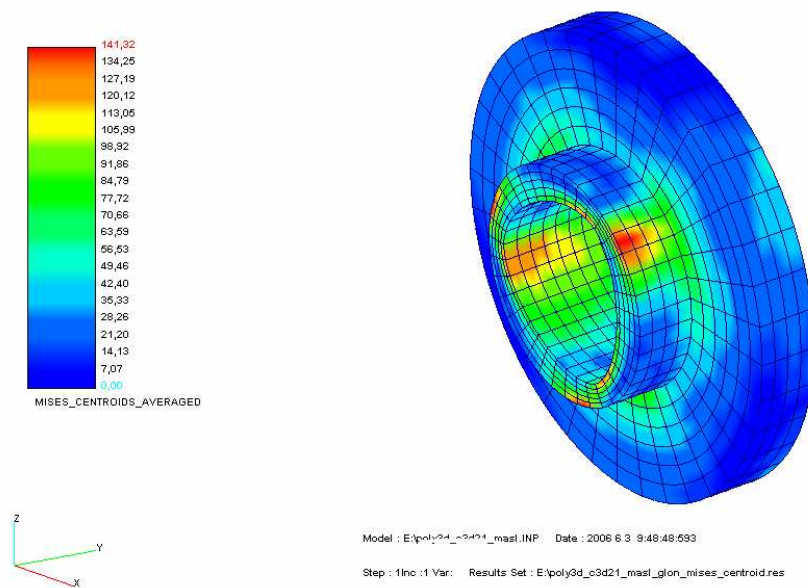
Rys. 4.50 Całkowite przemieszczenia [mm]

Przyjmując, że model jest symetryczny (trzy garby przesunięte o kąt 120 stopni), to zarówno wartości przemieszczeń jak i naprężeń są takie same w zakresie każdego z trzech kątów (zakres od 0 do 120 stopni).

Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera-Misesa wałka pokazuje Rys 4.51. Największe wartości tych naprężeń występują w sąsiedztwie garbów. W przypadku kołnierza z piastą rozkład naprężeń przedstawia Rys.4.52. Zarówno maksymalna wartość naprężeń równa 141 MPa jak i miejsce w którym występują maksymalne naprężenia zredukowane Hubera-Misesa są niemal takie same jak podano w pracy [30].



Rys. 4.51 Wałek. Naprężenia zredukowane Hubera - Misesa w [MPa]



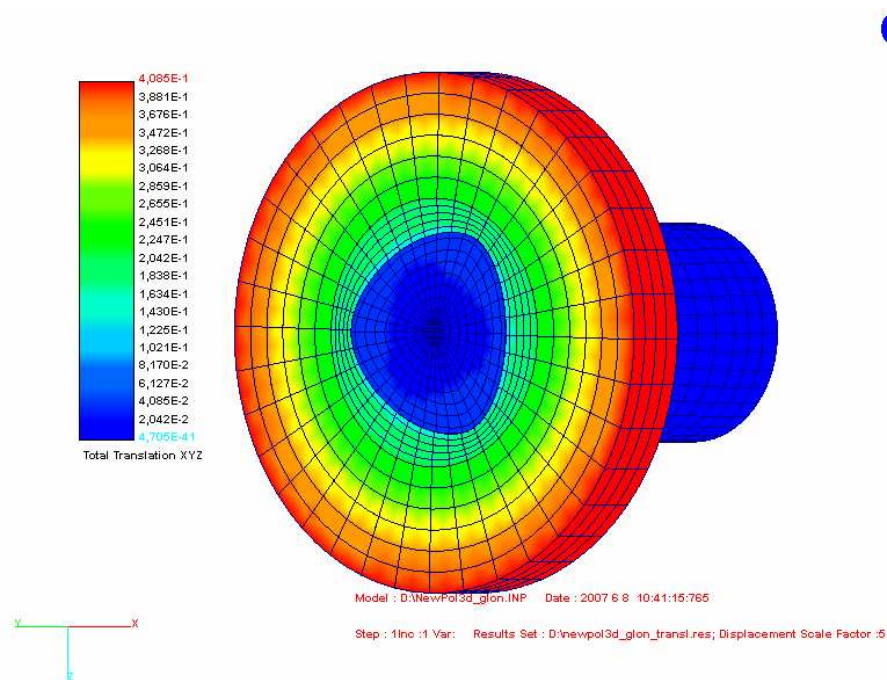
Rys. 4.52 Kołnierz z piastą. Naprężenia zredukowane Hubera - Misesa w [MPa]

Ponieważ analizowane połączenie miało wymiary porównywalne z połączeniem wielowypustowym (p. rozdział 4.3), porównano otrzymane wyniki. W przypadku połączenia wielowypustowego maksymalne naprężenia zredukowane Hubera-Misesa były niższe i wynosiły ok. 35 MPa, inaczej niż w przypadku połączenia wielogarbowego. W tym ostatnim, koncentracja naprężeń występowała w okolicach garbów. Podobnie, naciski kontaktowe są rozłożone na stosunkowo małej powierzchni, przez co ich wartość jest większa niż w przypadku połączenia wielowypustowego.

Pole powierzchni kontaktowej systematycznie zmniejszało się i było znacznie mniejsza od założonego początkowo (*ang.* receding contact). W przypadku połączenia wielogardowego zauważono charakterystyczne odchodzenie piasty od wałka (zjawisko separacji lub odchodzenia) stosowanie do wzrostu działającego obciążenia, tutaj zadawanego w postaci momentu skręcającego, p. Rys. 4.53.

W przypadku połączenia wielowypustowego powierzchnie kontaktowe nie zmieniały się (boczne ściany wielowypustu), a maksymalne całkowite przemieszczenia węzłów na obwodzie kołnierza były zdecydowanie mniejsze.

Podsumowując, przy podobnych wymiarach geometrycznych połączenie wielowypustowe może przenosić większe obciążenia momentem skręcającym.



Rys. 4.53 Odchodzenie piasty od wałka

4.6 Połączenie kołnierzowe

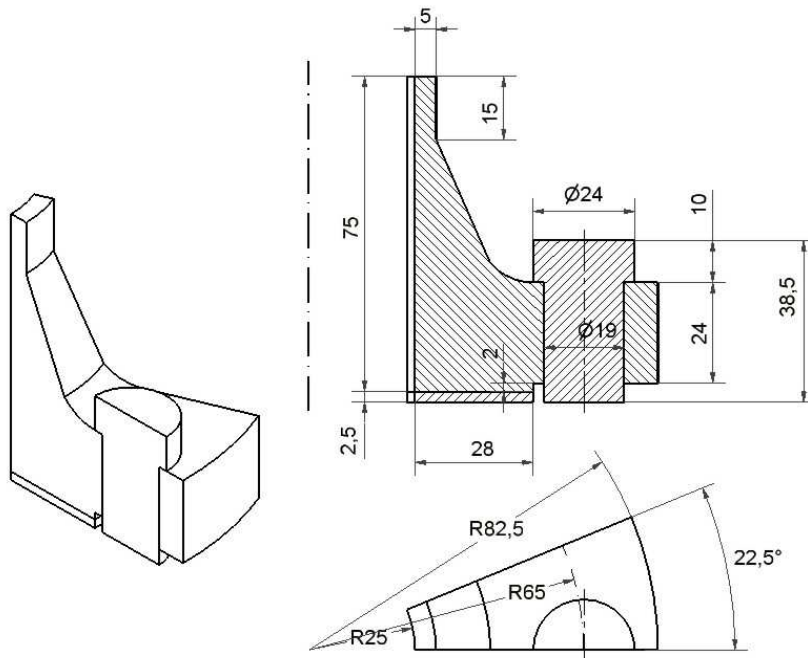
Połączenia kołnierzowe są powszechnie stosowanymi połączeniami, m.in. w rurociągach [50], [45]. Połączenia te należą do grupy połączeń śrubowymi z zaciskiem (napięciem) wstępnym. Oznacza to występowanie naprężeń w śrubie nawet wtedy, gdy złącze nie jest poddane obciążeniu robocznemu. Napięcie wstępne jakim obciążona jest śruba ma istotny wpływ na pracę takiego połączenia, szczególnie w przypadku zbiorników ciśnieniowych jak i połączeń kołnierzowych rurociągów.

Analizie numerycznej poddano połączenie pokazane na Rys.4.50. Wymiary i kształt połączenia są zgodne z normami JIS B (norma japońska) oraz ANSI B 16.5 (amerykańska). Dla połączenia tego zostały przeprowadzone badania [34] eksperymentalne na rzeczywistym stanowisku badawczym oraz opublikowane wyniki tego eksperymentu [34]. Ze względu na wielokrotną symetrię połączenia analizie numerycznej

poddany może być wycinek o kącie 22.5 stopnia będący 1/32 częścią całego połączenia (1/16 kołnierza).

W podstawowym wariancie (Rys. 4.54) połączenie to składa się z:

- dwóch kołnierzy o średnicy wewnętrznej 50 mm i średnicy zewnętrznej 165 mm każdy,
- uszczelki o średnicy wewnętrznej 50 mm i średnicy zewnętrznej 108 mm, grubości 5 mm,
- 8 śrub rozmieszczonych na średnicy podziałowej 130 mm.



Rys. 4.54 Połączenie kołnierzowe

W innych wariantach obliczeniowych pod względem wymiarów zmianie ulegała jedynie grubość uszczelki, 3 mm zamiast 5 mm.

Użyte w eksperymencie kołnierze wykonane zostały ze stali (wg PN S45C, wg oznaczeń norm japońskich JIS).

Śruby o gwincie M16 wykonane zostały ze stali chromowo-molibdenowej. W części śruby, na której nie występuje gwint na długości 20 mm jej średnica została zredukowana do 14 mm w celu naklejenia tensometrów. W wariancie podstawowym, przyjęto uszczelkę aluminiową (Al.-H, wg JIS). Stałe materiałowe wynoszą odpowiednio:

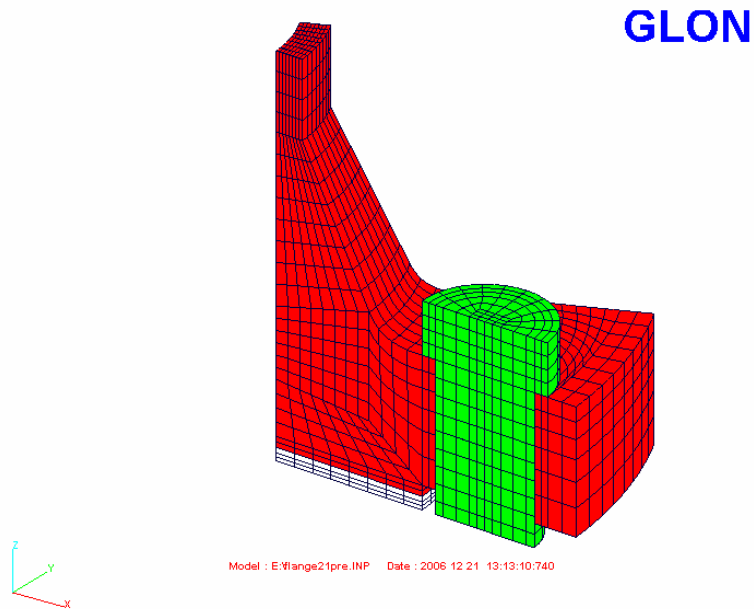
- kołnierz: $E = 206000$ MPa, $\nu = 0.3$,
- śruba: $E = 206000$ MPa, $\nu = 0.3$,
- uszczelka: $E = 68700$ MPa, $\nu = 0.3$.

Po złożeniu kołnierzy (z uszczelką), każda ze śrub została napięta siłą $F = 15$ kN.

Model MES

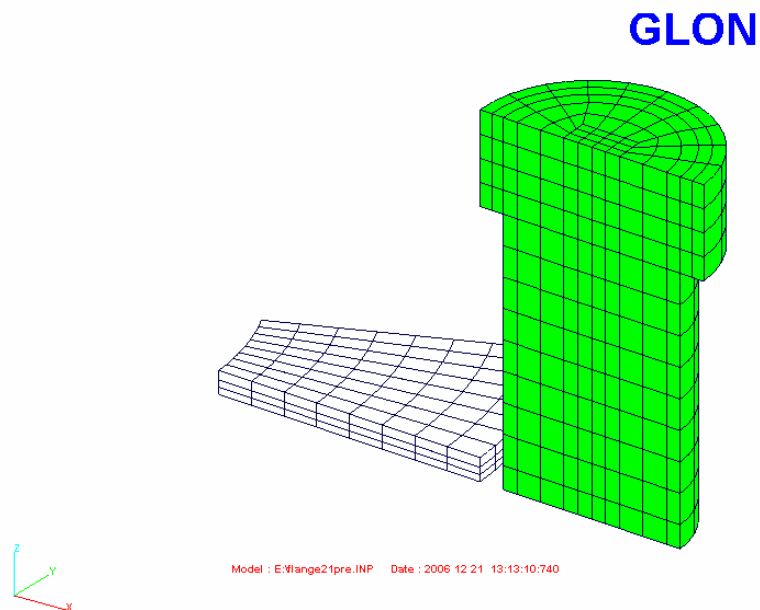
Zgodnie z wcześniejszymi założeniami (występowanie wielokrotnej symetrii) dotyczącymi tego połączenia, wykonano model będący 1/32 częścią połączenia kołnierzewego. Model pokazany na Rys.4.55 składał się z:

- kołnierza (kolor czerwony 3425 elementów),



Rys. 4.55. Model MES połączenia kołnierzewego

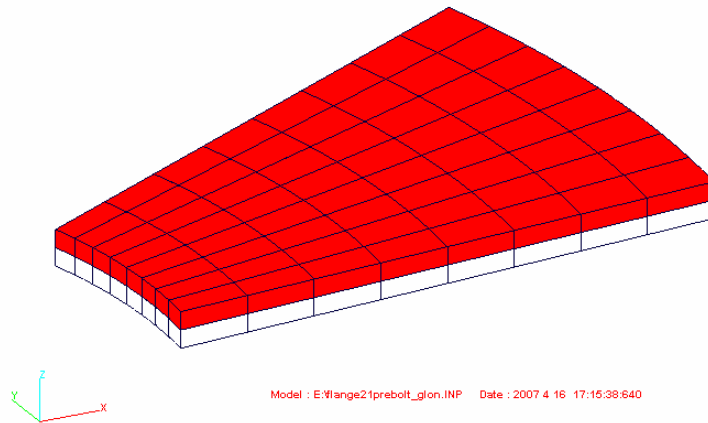
- uszczelki (kolor biały 196 elementów),
- śruby (kolor zielony 626 elementów, pokazanych na Rys. 4.56).



Rys. 4.56 Siatka elementów skończonych śruby i uszczelki

W strefie kontaktu pomiędzy uszczelką a kołnierzem zastosowano 128 elementy typu C3D21 lub 128 elementów typu C3D28. 64 elementy należące modelujące uszczelkę oraz 64 elementy należące do kołnierza pokazano na Rys. 4.57.

GLON



Rys. 4.57 Elementy w strefie kontaktu (kołnierz -uszczelka)

Podobnie w strefie kontaktu pomiędzy łbem śruby a kołnierzem zastosowano 40 elementów C3D21 (20 elementów przypadło na łeb śruby, 20 elementów na kołnierz).

Warunki brzegowe

Na powierzchniach będącymi płaszczyznami symetrii, a przechodzącymi przez środek śruby oraz w połowie rozstawu na średnicy podziałowej (PCD) odebrano możliwość przemieszczeń w kierunku normalnym do tych płaszczyzn. Na dolnej powierzchni uszczelki oraz śruby odebrano możliwość przemieszczeń w kierunku pionowym (oś Z).
Zadno następnie następujące obciążenia:

- (i) zacisk początkowy ustanowiony przez przyłożenie do elementów śruby obciążenia ściskającego $F = 15\text{kN}$ powodującego napięcie wstępne,
- (ii) ciśnienie o wartości odpowiadającej zadanemu obciążeniu robocznemu P przykładane na ściankach elementów tworzących wewnętrzną powierzchnie kołnierza i uszczelki.

Na górnej powierzchni szyjki kołnierza której pole powierzchni wynosi:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (60^2 - 50^2) = 275\pi$$

zostało przyłożone obciążenie rozciągające o wartości równej:

$$P_k = 2.2727P$$

W miarę postępującej separacji kołnierza i uszczelki ciśnienie robocze przykładane było również do ścianek elementów C3D21 (lub C3D28) stanowiących powierzchnie kontaktowe spodu kołnierza i uszczelki, które wcześniej odseparowały się od reszty połączenia.

Analiza numeryczna

Celem wykonania analizy numerycznej połączenia kołnierzowego było określenie:

- maksymalnego obciążenia roboczego, tzn. maksymalnego ciśnienia czynnika dla którego nie wystąpi przeciek połączenia,
- maksymalnych naprężeń występujących w kołnierzu,
- porównanie otrzymanych wyników z danymi otrzymanymi w eksperymencie,
- charakterystyk sztywnościowych.

Obliczenia odpowiednio do zadawanego obciążenia można podzielić na dwa kroki:

- krok pierwszy: zacisk początkowy spowodowany wstępnym napięciem śruby,
- krok drugi: obciążanie ciśnieniem roboczym p zwiększonym od zera o wartość 2 MPa, następnie sprawdzanie postępującego otwarcia, bądź ciśnień kontaktowych), na elementach uszczelki.

W podstawowym wariacie analzy, który porównywano z danymi doświadczalnymi, przyjęto:

- uszczelkę o grubości 5mm,
- zacisk (w pierwszym kroku) w śrubie siłą o wartości $F = 15000$ N.

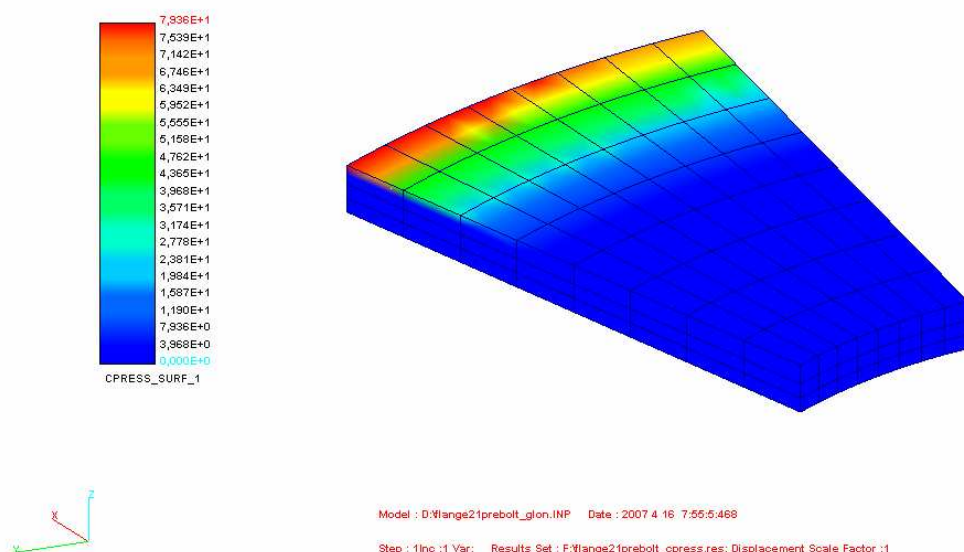
Dla innych wariantów zmieniano również grubość uszczelki (3.5 mm) oraz siłę zacisku wstępnego w śrubie $F = 7.5\text{kN}$, $F = 10\text{kN}$, $F = 20\text{kN}$.

Rezultaty

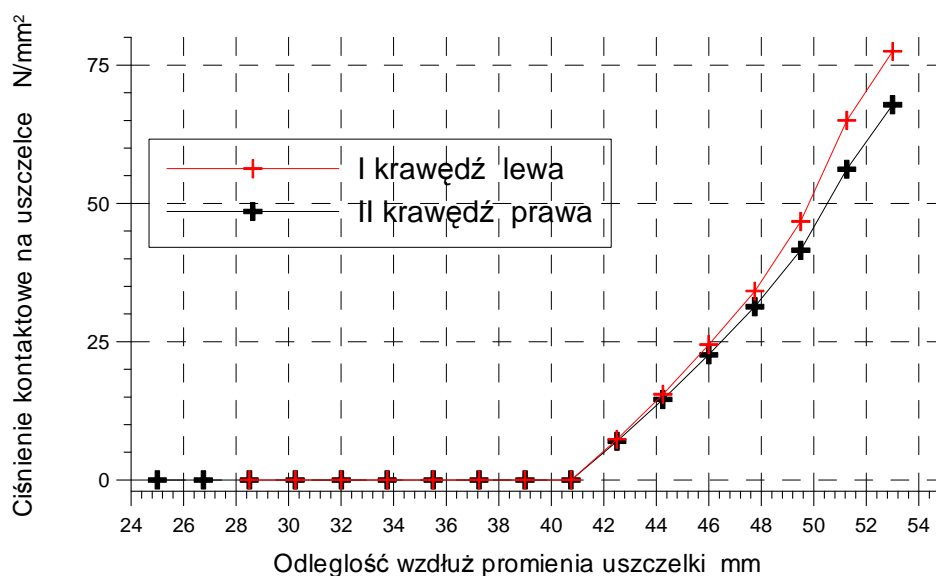
- (i) ciśnienia kontaktowe - zacisk wstępny,

otrzymane wyniki pokazują, że już dla zacisku wstępnego nastąpiła separacja uszczelki i kołnierza. Rys. 4.58 pokazuje rozkład ciśnień kontaktowych na górnej powierzchni uszczelki (elementy C3D21).

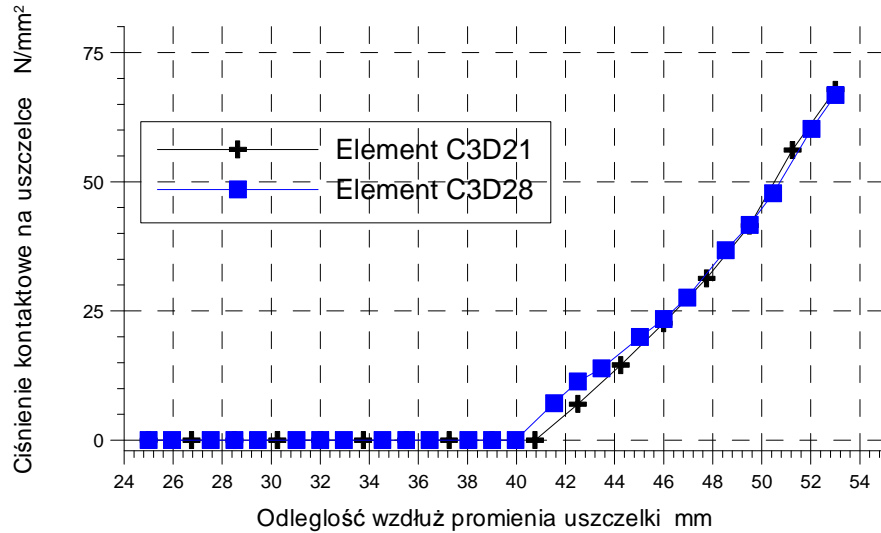
GLON

Rys. 4.58 Rozkład ciśnienia kontaktowego [MPa] na uszczelce, zacisk wstępny $F=15\text{kN}$

Poza strefą w której nastąpiło otwarcie, rozkład ciśnienia kontaktowego nie jest równomierny; zwiększa się ono wraz z odległością wzdłuż promienia uszczelki. Największe wartości występują w węzłach znajdujących się na zewnętrznej średnicy uszczelki. Różnice w wartościach ciśnienia kontaktowego zauważyć można również porównując jego wartości wzdłuż promienia na obu krawędziach uszczelki (Rys. 4.58 i Rys. 4.59 - kolor czerwony i czarny). Można przypuszczać, że w miarę przykładania obciążenia roboczego różnice te również będą postępować. Przyjęto, że przeciek najpierw wystąpi pod uszczelką (po stronie prawej). Wystąpić tam może całkowite otwarcie uszczelki nawet, gdy na po drugiej stronie będzie ona jeszcze w kontakcie z kołnierzem. Porównanie rozkładu ciśnienia kontaktowego wzdłuż promienia uszczelki dla elementów C3D21 oraz elementów C3D28 przedstawia Rys. 4.60. Wykresy odnoszą się do prawej strony uszczelki.



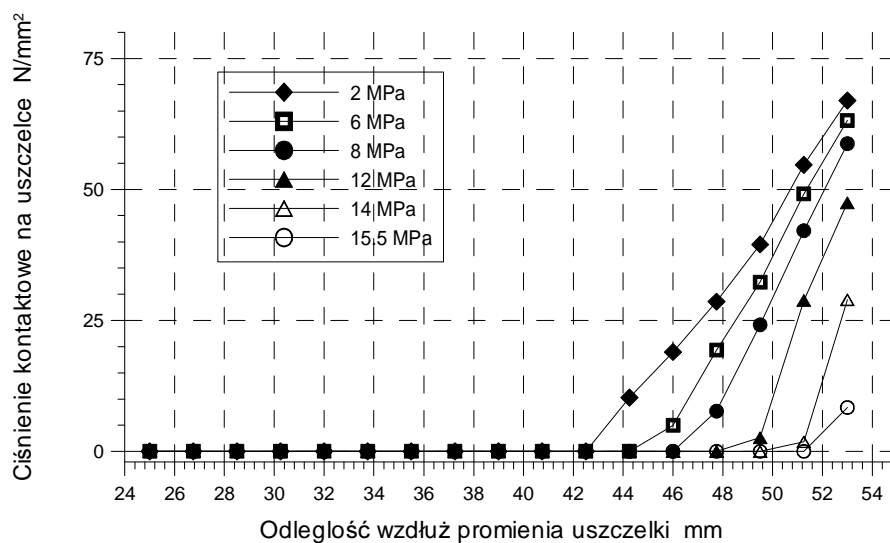
Rys. 4.59 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż promienia uszczelki na jej obu krawędziach



Rys. 4.60 Rozkład ciśnienia kontaktowego wzdłuż promienia uszczelki elementy dla elementów C3D28 oraz C3D21

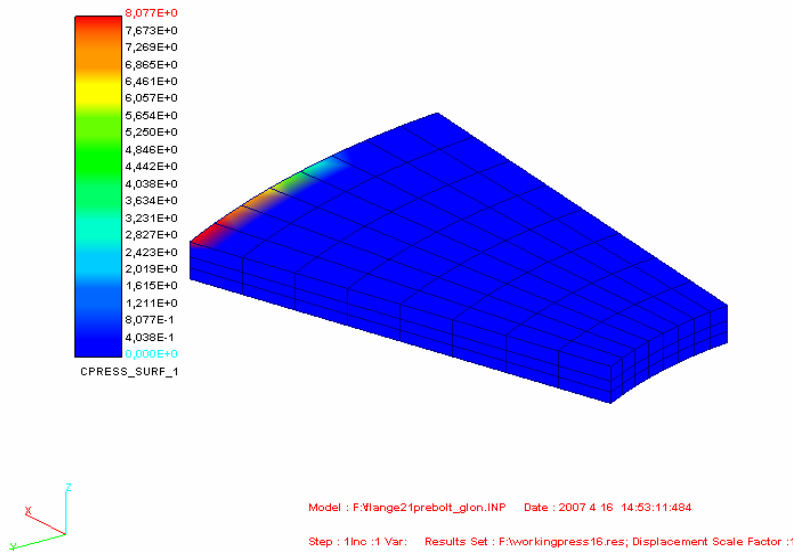
(ii) Ciśnienie kontaktowe - obciążenie robocze

Dla zwiększającego się obciążenia roboczego zauważyć można postępującą separację kołnierza od uszczelki oraz zmniejszanie ciśnienia kontaktowego działającego na uszczelkę. W dalszym ciągu można zaobserwować, że jest ono mniejsze przy jednym z brzegów uszczelki. Przy obciążeniu ciśnieniem roboczym 16 MPa, przy krawędzi gdzie początkowo ciśnienie kontaktowe było mniejsze, nastąpiło otwarcie wzdłuż całej długości promienia uszczelki. Pomimo, że po drugiej stronie uszczelka wciąż pozostawała w kontakcie przyjęto, że dla wartości 16 MPa następuje przeciek. Wykresy obrazujące wartości ciśnień kontaktowych w zależności od przyłożonego obciążenia roboczego pokazano na Rys. 4.61. Rozkład ciśnienia na uszczelce w przypadku ciśnienia roboczego 16 MPa pokazuje Rys. 4.62.



Rys. 4.61 Wartości ciśnień kontaktowych w zależności od obciążenia roboczego

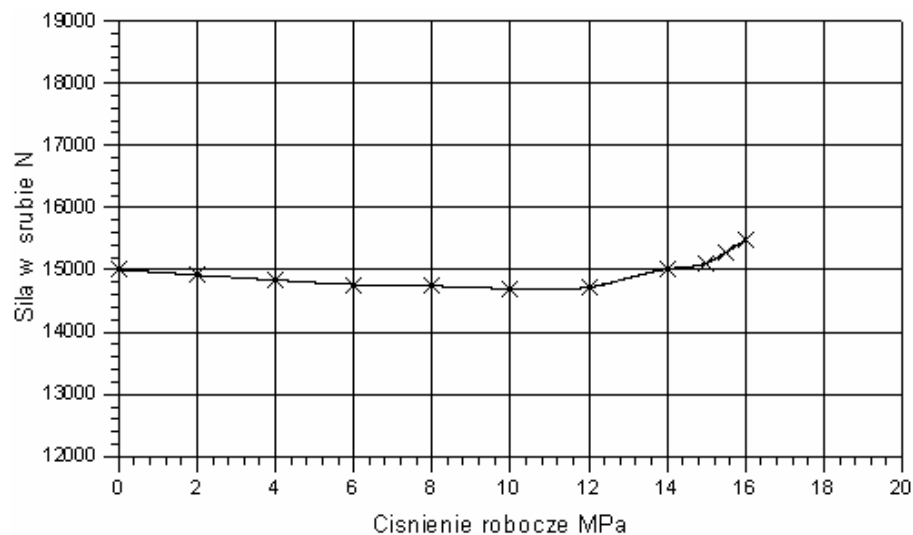
GLON



Rys. 4.62 Rozkład ciśnienia kontaktowego dla obciążenia roboczego 16 MPa

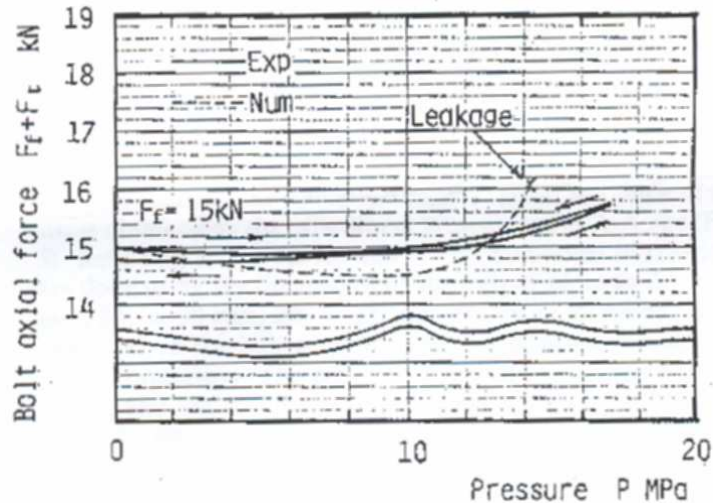
(iii) Obciążenie robocze – porównanie wyników z danymi doświadczalnymi

Na Rys. 4.63 przedstawiono otrzymaną zależność siły w śrubie od przyłożonego obciążenia roboczego.



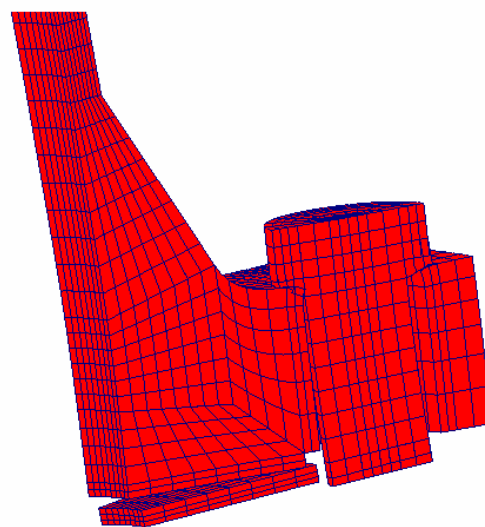
Rys. 4.63 Siła w śrubie w zależności od obciążenia roboczego

Zgodnie z wcześniejszym założeniami przyjęto, że dla wartości 16 MPa nastąpił przeciek. Porównując otrzymane wyniki z danymi otrzymanymi na drodze eksperymentalnej, Rys. 4.64 można stwierdzić ich bardzo dobrą zgodność. W eksperymencie przeciek wystąpił przy wartości ciśnienia roboczego $p = 16.5$ MPa (Rys. 4.61).



Rys. 4.64 Siła w śrubie oraz przeciek, wartości uzyskane doświadczalnie [34]

Widok odkształconego modelu połączenia (przypomnijmy, że w przypadku obciążenia roboczego 16 MPa następuje w połączeniu przeciek) przedstawiają Rys.4.65 i 4.66.



GLON

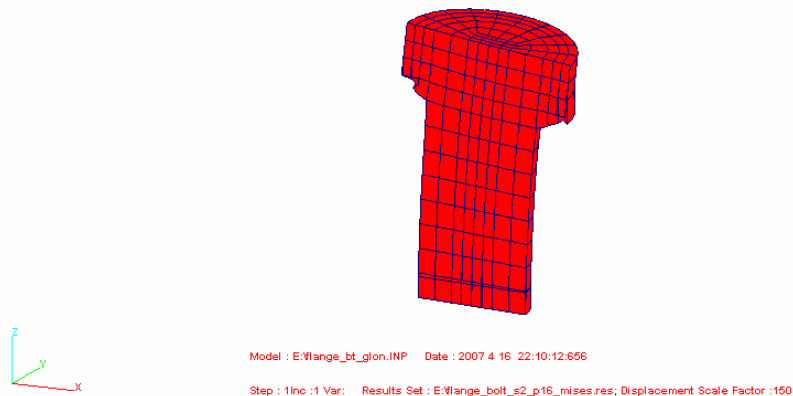
Model : E:\flange_glon.INP Date : 2007 4 16 22:23:52:453

Step : 1 Ino : 1 Var : Results Set : E:\flange_s2_p16_transl.res; Displacement Scale Factor : 100

Rys. 4.65 Odkształcony model dla ciśnienia 16 MPa powodującego przeciek

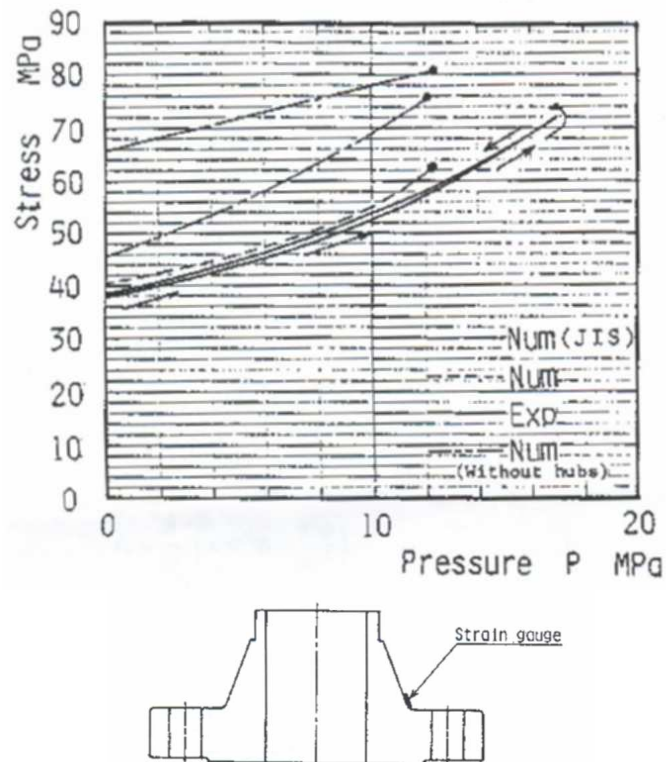
W rzeczywistości, wartości przemieszczeń odpowiadające momentowi otwarcia pomiędzy uszczelką a kołnierzem są małe. Dzięki przeskalowaniu, wartości przemieszczeń (współczynnik skali 100) widać całkowitą separację uszczelki i kołnierza. Na Rys.4.66 pokazano odkształconą śrubę. Wyraźnie widać, że nastąpiło również zginanie wszystkich elementów połączenia.

GLON



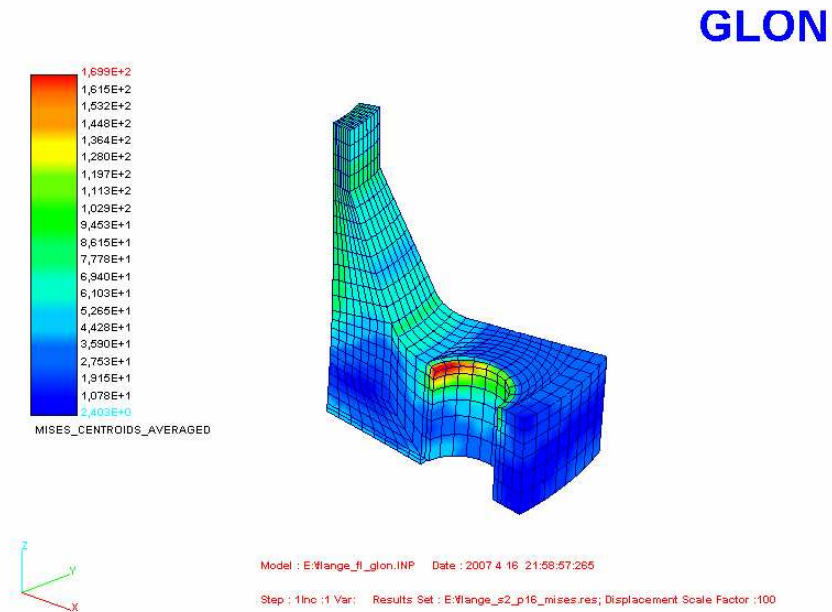
Rys. 4.66 Zginana śruba

W eksperymencie [34] dokonano również pomiarów naprężeń występujących w kołnierzu. Miejsce, w którym dokonano pomiarów tensometrycznych oraz zmierzone wartości naprężeń w zależności od przyłożonego obciążenia roboczego przedstawia Rys.4.67.



Rys. 4.67 Wartość naprężeń Misesa oraz miejsce pomiaru [34]

Rozkład naprężeń zredukowanych Milesa kołnierza (model odkształcony, skala 100) w przypadku obciążenia roboczego 16 MPa (model odkształcony, skala 100) pokazano na Rys. 4.68. Największe obliczone naprężenia występują w miejscu styku łba śruby z kołnierzem, przy krawędzi otworu. W miejscu, w którym dokonywano pomiaru naprężeń (Rys. 4.67) zarówno wartości obliczone jak i zmierzone doświadczalnie są praktycznie takie same (Tab. 4.3).



Rys. 4.68 Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa w kołnierzu w [MPa]

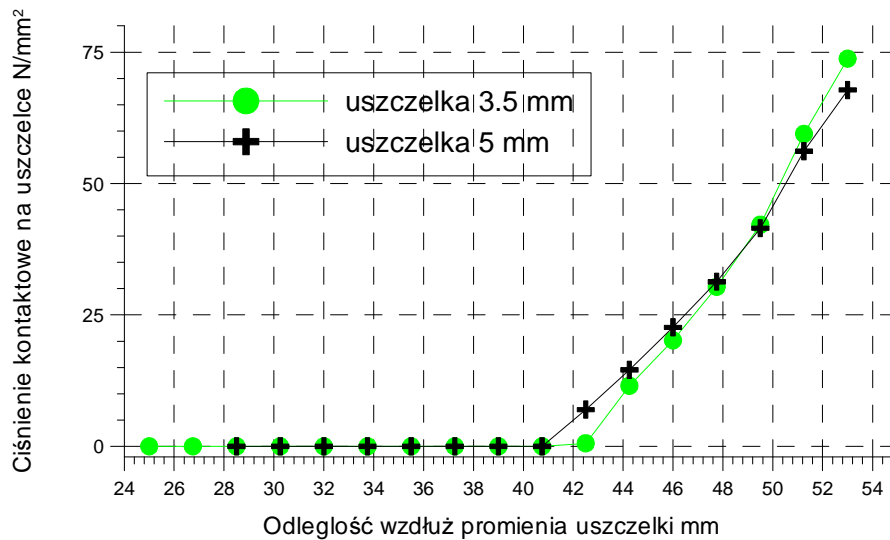
Tab. 4.3 Porównanie naprężeń obliczonych i pomierzonych

Naprężenia zredukowane. Hubera-Misesa	Pomiar	Obliczenia
		70 MPa

- (iv) Wpływ zacisku wstępnego oraz grubości uszczelki na pracę połączenia kołnierzewego

W przypadku uszczelki o grubości 3.5 mm rozkład ciśnienia kontaktowego jest niemal jednakowy jak uszczelki o grubości 5 mm.

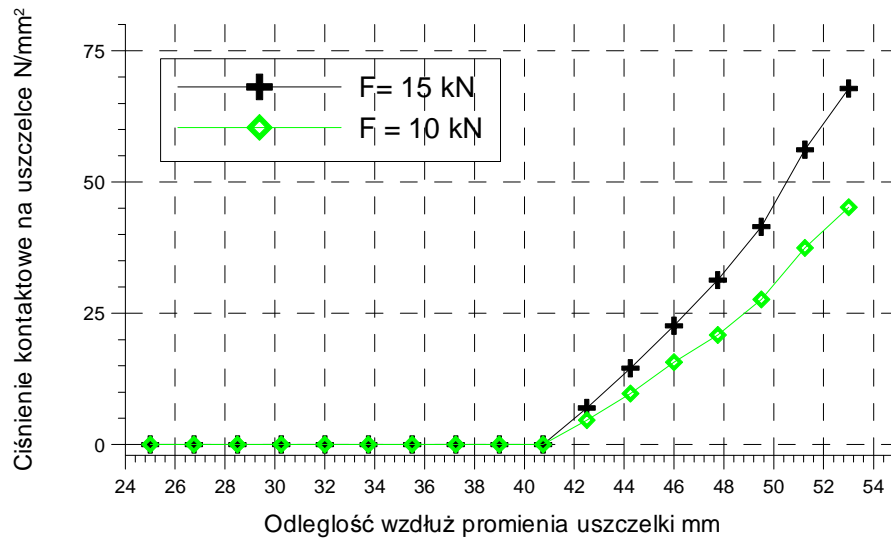
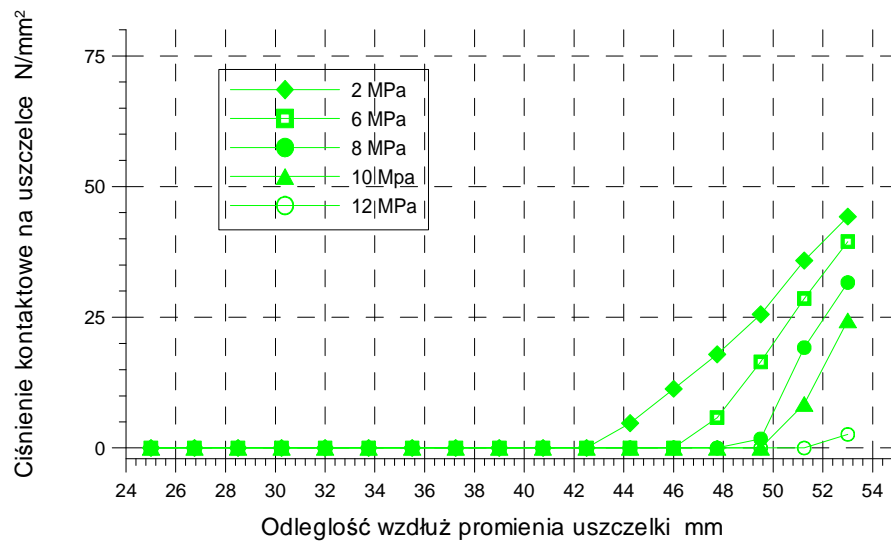
Wartości ciśnienia kontaktowego w przypadku zacisku wstępnego siłą $F = 15 \text{ kN}$ pokazano na Rys.4.69.

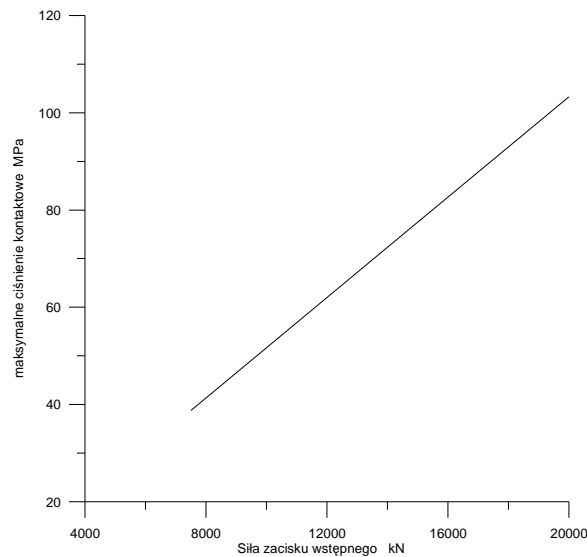


Rys. 4.69 Wartość ciśnienia kontaktowego na uszczelce 3.5 mm $F = 15 \text{ kN}$

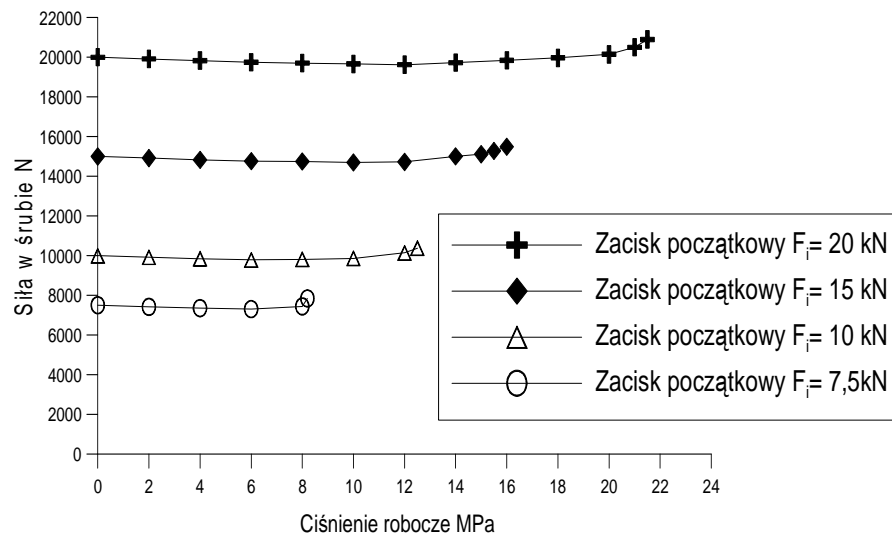
Zmiana grubości uszczelki z 5 mm na cieńszą miała niewielki wpływ na zachowanie się połączenia. Badając separację uszczelki i kołnierza można stwierdzić, że przeciek wystąpi przy obciążeniu ciśnieniem roboczym o wartości 16 MPa, podobnie jak w przypadku grubszej uszczelki. Dla siły zacisku wstępnego w śrubie $F = 10 \text{ kN}$ (oraz dla porównania $F = 15 \text{ kN}$) wartości ciśnienia kontaktowego na uszczelce o grubości 5 mm pokazano na Rys. 4.70. Wartości ciśnienia powierzchniowego przy zacisku siłą $F = 10 \text{ kN}$ są wyraźnie mniejsze. Powoduje to, że przeciek nastąpi przy mniejszej wartości obciążenia powodowanego ciśnieniem roboczym. Z wykresu pokazanego na Rys. 4.71 możemy wnioskować, że przeciek wystąpi gdy ciśnienie robocze nieznacznie przekroczy wartość 12 MPa. Dla obciążenia roboczego 14 MPa ciśnienie powierzchniowe na całej powierzchni uszczelki wynosi zero. Można więc przyjąć, że jako wartość obciążenia roboczego powodującego przeciek wynosi 12,5 – 13 MPa.

O ile zmiana grubości uszczelki nie miała praktycznie wpływu na zmianę dopuszczalnego maksymalnego obciążenia roboczego, to zmiana siły zacisku początkowego w śrubie ma na to decydujący wpływ. Im zacisk początkowy jest większy, tym większe może być dopuszczalne maksymalne obciążenie ciśnieniem roboczym. Wykres maksymalnego ciśnienia kontaktowego występującego na uszczelce w zależności od zacisku w śrubie przedstawiono na Rys. 4.71.

Rys. 4.70 Wartość ciśnienia kontaktowego na uszczelce 5 mm (obciążenie siłą $F = 10$ kN)Rys. 4.71 Wartości ciśnień kontaktowych w zależności od obciążenia roboczego w przypadku zacisku wstępnego siłą $F = 10$ kN (uszczelka o grubości 5 mm)



Rys. 4.72 Ciśnienie kontaktowe na uszczelce w zależności od siły zacisku wstępnego



Rys. 4.73 Siła w śrubie w zależności od ciśnienia roboczego

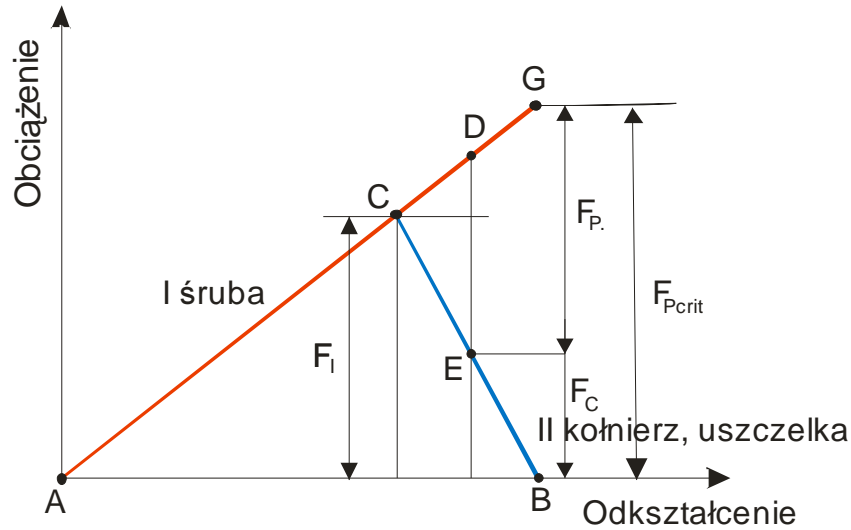
Charakterystyki sztywnościowe

(i) liniowy model jednowymiarowy [45,46]

W przypadku przybliżonych obliczeń połączeń z zaciskiem wstępnym, w tym również połączeń kołnierzowych, często wykorzystuje się uproszczony jednowymiarowy model Roetschera [45], [46]. W modelu tym zakłada się, że śruba oraz kołnierz z uszczelką zachowują się jak jednowymiarowe ciała sprężyste (rozciągane bądź ściskane). Nie uwzględnia się przy tym tarcia występującego pomiędzy współpracującymi częściami.

Skutkiem przyjęcia powyższego założenia (model jednowymiarowy), pole powierzchni kontaktu uszczelki z kołnierzem jest stałe; nie można więc uwzględnić separacji w zależności od przyłożonego obciążenia.

Zależności pomiędzy obciążeniem a odkształceniami śruby i kołnierza przedstawić można jak na wykresie (Rys 4.74).



Rys. 4.74 Wykres obciążenie-odkształcenie (diagram Roetschera)

Linia I (kolor czerwony) jest wykresem zależności obciążenie-odkształcenie śruby
 Linia II (kolor niebieski) podobnym wykresem dla kołnierza z uszczelką

Zaciskowi początkowemu siłą F_i odpowiada punkt C. Przy zwiększaniu obciążenia roboczego następuje rozciąganie śruby oraz ściskanie uszczelki (punkt D – śruba i E – uszczelka). Wzrastającej sile rozciągającej śrubę, F_b odpowiada malejąca siła ściskająca uszczelkę, F_c .

W przypadku, gdy obciążenie robocze osiągnie wartość krytyczną F_{crit} zanika siła ściskająca w kołnierzu i następuje przeciek w połączeniu.

W takim modelu przyjęta zależność pomiędzy obciążeniem a odkształceniem zarówno śruby jak i kołnierza jest linowa. Sztywność śruby możemy określić jako:

$$k_b = \frac{A_b E_b}{l_b}$$

Sztywność układu kołnierza - uszczelka jest równa:

$$k_{fg} = \left(\frac{l}{A_f E_f} + \frac{d}{A_g E_g} \right)^{-1} \quad (4.34)$$

Siła w śrubie wnosi:

$$F_b = F_i + \frac{k_b}{k_b + k_{fg}} F_p \quad (4.35)$$

Siła ściskająca, działająca w układzie kołnierza - uszczelka, jest wtedy równa:

$$F_c = -F_i + \frac{k_{fg}}{k_b + k_{fg}} F_p \quad (4.36)$$

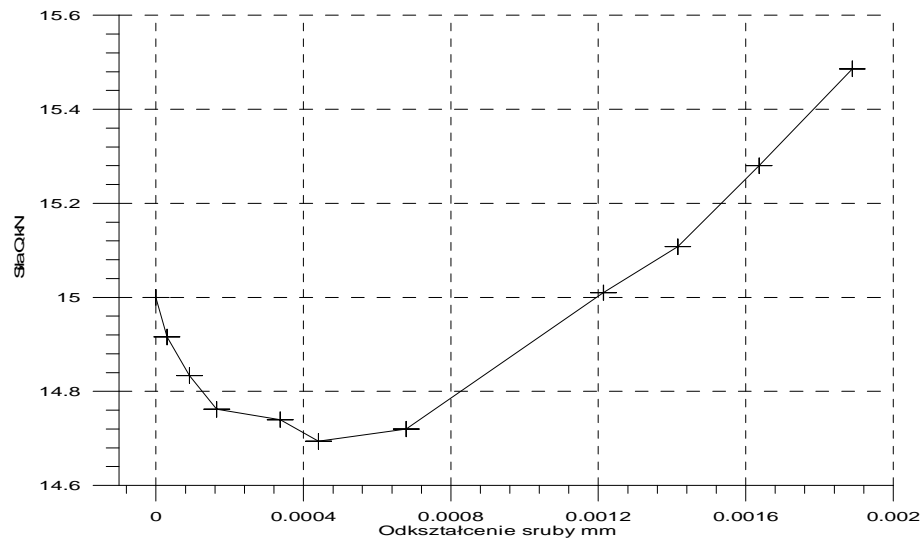
Obciążenie robocze przy którym wystąpi przeciek znajdujemy z zależności:

$$F_i = \frac{k_{fg}}{k_b + k_{fg}} F_{crit} \quad (4.37)$$

(ii) charakterystyki sztywnościowe otrzymane numerycznie

Przestrzenny model MES pozwala na rezygnację z wielu uproszczeń przyjmowanych w jednowymiarowym modelu liniowym.

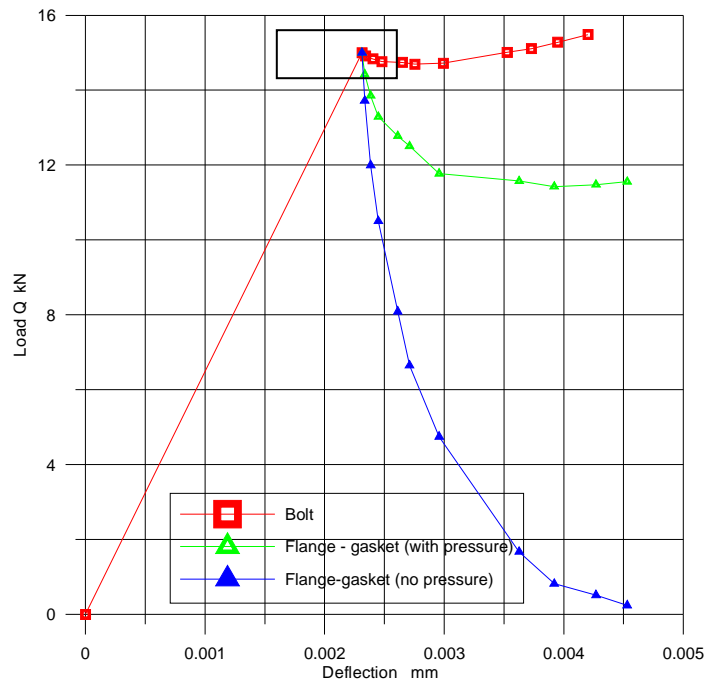
Analizując otrzymane wyniki można zauważyć, że śruba jest nie tylko rozciągana – ściskana, ale również zginana. Założenie o tym, że śruba jest tylko rozciągana - ściskana jest więc kolejnym uproszczeniem. Charakterystyki sztywnościowe śruby (Rys.4.75) i uszczelki z kołnierzem uzyskane w wyniku obliczeń numerycznych uzyskane w modelu przestrzennym należy więc uznać za bardziej zbliżone do rzeczywistych.



Rys. 4.75 Charakterystyka obciążenie- odkształcenie dla śruby

Dla uzyskanych charakterystyk sztywnościowych śruby i uszczelki możemy sporządzić wykres odkształcenie - obciążenie, Rys. 4.76.

Podobnie jak w przypadku modelu jednowymiarowego linia czerwona przedstawia charakterystykę śruby, niebieska uszczelki. Tutaj, zależności odpowiadające zaciskowi wstępnemu od początku obciążenia złącza są nieliniowe. Należy zauważyć, że w modelu obliczeniowym MES uwzględniono ponadto obciążenie od ciśnienia roboczego panującego w szczelinie pomiędzy uszczelką a kołnierzem jako wynik postępującego procesu separacji, co nie jest takie oczywiste w wielu najnowszych pracach. Linia zielona przedstawia charakterystykę sztywnościową wydłużenie - obciążenie z uwzględnieniem ciśnienia roboczego w wyniku postępującego zjawiska separacji.



Rys. 4.76 Wykres odkształcenie-przemieszczenie modelu przestrzennego MES

Przyjmując z wykresu 4.76 otrzymaną siłę w śrubie, przy której wystąpił przeciek

$$F_{\text{crit}} = F_b = F_i = 15500 \text{ N} \quad (4.38)$$

możemy, korzystając z liniowego modelu jednowymiarowego, określić krytyczne ciśnienie robocze przy którym wystąpi przeciek. Przyjmujemy dalej, że otwarciu ulega cała powierzchnia kontaktu pomiędzy uszczelką a śrubą o wartości

$$A = \frac{\pi}{4}(106^2 - 50^2) = 6857.8 \text{ mm}^2 \quad (4.39)$$

Biorąc pod uwagę osiem śrub, które występują w całym połączeniu, otrzymamy wartość ciśnienia przy jakim nastąpi utrata szczelności połączenia:

$$p_{\text{crit}} = 8 \frac{15500}{6857.8} = 18.08 \text{ MPa} \quad (4.40)$$

Jest to wartość większa niż otrzymana w eksperymencie oraz obliczona metodą numeryczną.

ROZDZIAŁ 5

OPROGRAMOWANIE

5.1 Wstęp

Oprogramowanie własne stanowi pewien zamknięty system do obliczeń numerycznych. System składa się z dwóch głównych programów służących do:

- (i) przeprowadzania obliczeń numerycznych (solver) zagadnień mechaniki ograniczonej do zagadnień statyki, pól skalarnych pola elektrycznego i akustycznego oraz obliczeń rozkładu temperatur,
- (ii) tworzenia modelu i wizualizacji wyników obliczeń (post processor).

Oprogramowanie własne stworzone zostało w języku C++ (platforma win32/x86). Obydwa programy posiadają modułową budowę, która umożliwia w szybki sposób ich dalszą rozbudowę. Funkcje związane z obsługą interfejsu użytkownika (okna, dialogi, menu, itp) zostały pogrupowane w ramach głównego modułu (.exe). Poszczególne moduły funkcjonalne programów zostały zawarte w odpowiadających im klasach, których obiekty zostały zaimplementowane w bibliotekach dołączanych dynamicznie (.dll). Struktura taka umożliwia łatwe rozszerzenie programu o nowe funkcje oraz ma za zadanie ułatwić przeniesienie programu na inne platformy sprzętowe (np. Sun/ Solaris). Obydwa programy mogą działać niezależnie lub w powiązaniu ze sobą.

Solver i postprocesor korzystają z pewnych wspólnych modułów, takich jak:

- baza danych modelu MES zawierająca dane o węzłach, elementach, rodzajach materiałów,
- baza danych wyników wykorzystywana przez postprocesor,
- moduły służące do odczytu plików wejściowych zawierających dane modelu MES,
- pliki dyskowe z obliczonymi wynikami,
- moduły służące do zapisu modelu MES.

Z modułami tymi współpracować mogą również pewne pomocnicze programy zewnętrzne, przykładowo:

- generator siatek elementów, konwerter typów elementów,
- kalkulator wyników służący do przetwarzania wyników obliczeń,
- program generujący elementy typu 'interface' na powierzchni kontaktu.

Postprocesor graficzny powstał z wykorzystaniem biblioteki OpenGL. W pełni zrealizowano możliwość graficznego przedstawiania wyników MES adekwatnie do wartości skalarnych i wektorowych.

W przypadku zagadnień mechanicznych oznacza to:

- możliwość wyświetlania odkształconego modelu (przeskalowanego przez zadaną wartość),
- możliwość wyświetlania określonych wartości skalarnych (np. całkowitego przemieszczenia, wartości poszczególnych składowych przemieszczeń, wartości naprężeń zredukowanych) zarówno na modelu nieodkształconym jak i odkształconym.

Wyniki wyświetlane w oknach programu mogą być zapisywane w postaci plików bitmapowych oraz mogą być tworzone animacje.

W programie możliwa jest generacja siatek na zdefiniowanym modelu geometrycznym wybranych typów elementów. W pracy wykonano izoparametryczny generator siatek hexagonalnych elementów przestrzennych. Możliwość generacji siatek w programie można łatwo rozbudować o inne typy elementów.

Niestandardowe elementy skończone 14-, 21 i 28-węzłowe zostały zaimplementowane do systemu ABAQUS. System ten posiada bowiem możliwość oprogramowania pewnych dostępnych dla użytkownika procedur (*ang.* user subroutines, w przypadku elementów użytkownika procedura UEL). Procedura ta kompilowana do formatu (.obj) jest następnie łączona z pozostałymi elementami systemu ABAQUS. W wyniku łączenia dostajemy nowy wykonywalny program, który umożliwia przeprowadzenie obliczeń z wykorzystaniem niestandardowych elementów skończonych.

Przy programowaniu procedury UEL korzystano z języka Fortran (standard 77/90). Procedura ta ma za zadanie obliczenie macierzy sztywności elementu oraz wektora obciążona.

Wewnątrz tej procedury realizowane są obliczenia związane z:

- (i) pochodnymi funkcjami kształtu elementu,
- (ii) macierzami stałych materiałowych,
- (iii) całkowaniem numerycznym.

Stałe materiałowe jak np. moduł Younga, współczynnik rozszerzalności cieplnej i inne są definiowane w pliku wejściowym systemu ABAQUS (.inp), a następnie odczytywane i przekazywane do procedury UEL. Podobnie do procedury przekazywany jest parametr sterujący obliczeniem wektora obciążeń. Otrzymane w wyniku realizacji procedury UEL macierz sztywności i wektor prawej strony finalnie są włączane do globalnej macierzy sztywności oraz globalnego wektora prawej strony.

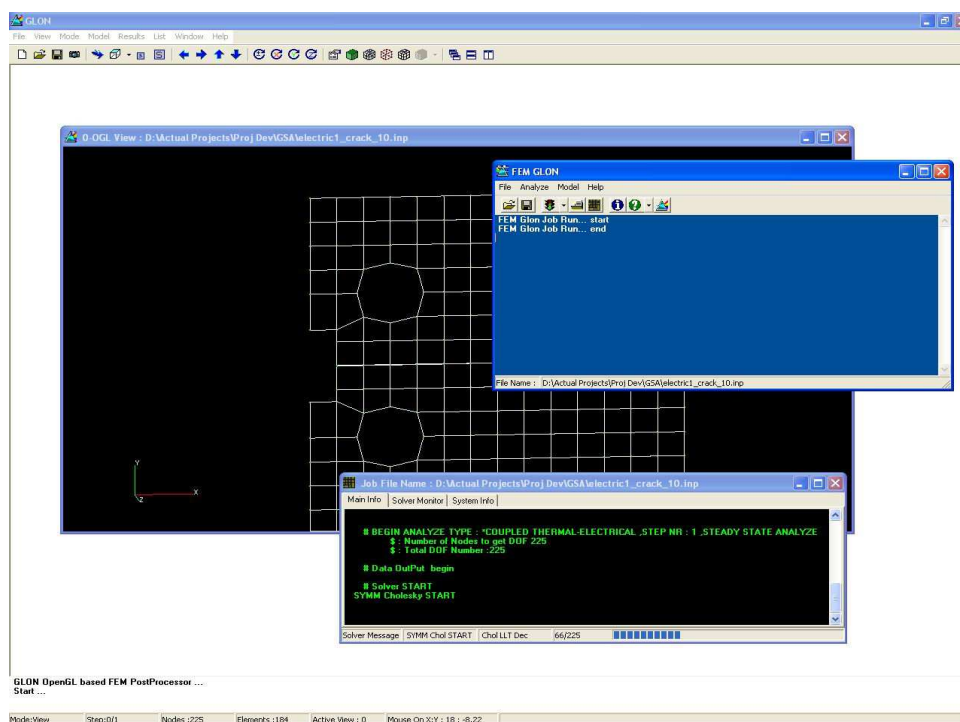
Należy wspomnieć, że w przypadku elementów użytkownika możliwości systemu ABAQUS dostępne są w ograniczonym zakresie, głównie z powodu niemożności graficznej wizualizacji wyników.

5.2 Program do obliczeń numerycznych

Obliczenia numeryczne przeprowadzono zarówno przy użyciu własnego oprogramowania (zagadnienie mechaniki bez możliwości realizacji kontaktu, elektryczne pola skalarne, wszystkie pomocnicze procedury numeryczne, pre- i postprocesor graficzny), jak i z wykorzystaniem systemu ABAQUS, głównie jego solvera. Na potrzeby programu stworzono własną klasę do obliczeń z zakresu algebry liniowej. W ramach tej klasy dokonywane są podstawowe działania na skalarach, wektorach, macierzach (mnożenie, odwracanie, dekompozycja macierzy, rozwiązywanie układu równań, itp.). Wszystkie macierze i wektory definiowane są w sposób dynamiczny, a ich maksymalne wielkości ograniczone są jedynie zasobami sprzętowymi komputera.

Program własny może działać w powiązaniu z pre- i procesorem graficznym wykorzystując bezpośrednio zdefiniowany model MES lub niezależnie od niego. Program działa w trybie wsadowym. W programie zarządzającym (Rys. 5.1), wybieramy plik zawierający zdefiniowany model MES. Składnia pliku wejściowego zbliżona jest do składni plików wejściowych systemu ABAQUS ver.5.8. Możliwe jest więc wczytywanie

(po nieznacznych modyfikacjach) i przeprowadzenie obliczeń dla plików obliczenia modeli wygenerowanych dla tego systemu.



Rys. 5.1 Okna dialogowe programu wykonującego obliczenia (płaskie zagadnienie rozkładu pola elektrycznego)

Sposób działania programu jest następujący. W pierwszej kolejności dokonywana jest analiza poprawności wczytanego modelu i przekazywana użytkownikowi informacja o ewentualnych błędach. Po sprawdzeniu, w przypadku nie wykrycia błędów, wykonywane są odpowiednie procedury stosownie do charakteru zadania (*ang.* static, coupled thermal-electrical). W trakcie dalszej realizacji utworzone zostają globalne macierze sztywności i wektory obciążenia. Następnie globalny układ równań jest rozwiązywany przy pomocy solvera systemu ABAQUS. W trakcie obliczeń dla użytkownika dostępna jest informacja o postępie działań (Rys. 5.1). W przypadku pomyślnego zakończenia obliczeń ich wyniki zapisywane są do plików (plik dla użytkownika oraz plik wejściowy z wynikami dla postprocesora).

Ponieważ obliczenia macierzowe są niezależne od ich typów elementów skończonych w programie szeroko wykorzystano jedną z możliwości języka C++ jaką jest dziedziczenie. W klasie podstawowej zdefiniowano schemat tych obliczeń. Każdy typ elementu dziedziczy poniższy schemat:

```
//===== C3D21

__declspec(dllexport)class TElementC3D21 : public TElement
{

public:
    TElementC3D21(); //Konstruktor
```

```

virtual void MELInputProc(double InELNum);
virtual void MProcDER(int inPoint);
virtual void MProcBEEMAT();
virtual void MProcDEEMAT(double InELNum);
virtual void MELOutputProc(); };

//================================================= C3D28

__declspec(dllexport)class TElementC3D28 : public TElement
{

public:
TElementC3D28(); //Konstruktor
virtual void MELInputProc(double InELNum);
virtual void MProcDER(int inPoint);
virtual void MProcBEEMAT();
virtual void MProcDEEMAT(double InELNum);
virtual void MELOutputProc();};

```

Dodanie nowego typu elementu w programie polega więc w istocie na przedefiniowaniu w nowej klasie jedynie kilku funkcji (np. obliczających funkcje kształtu elementu, podających ilość punktów całkowania i wagi).

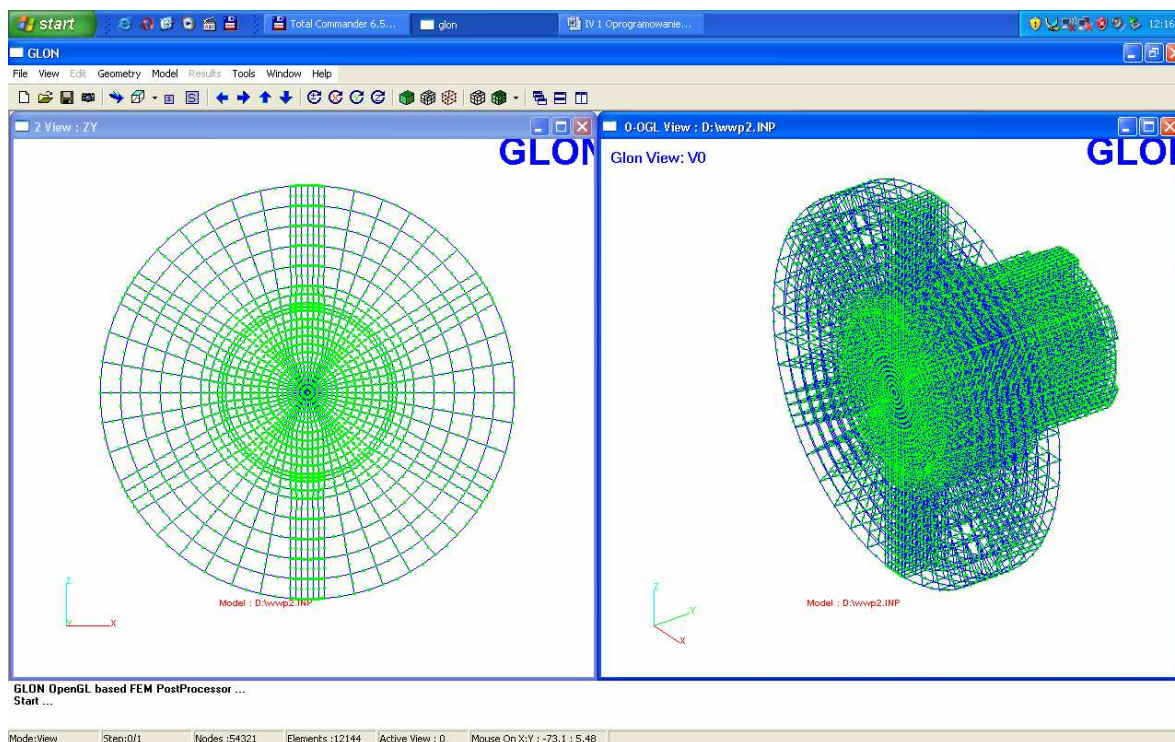
Podejście takie zapewnia możliwość szybkiego dodania nowego typu elementu, np. w celach testowych. Podobnie można wzbogacić program o inne nowe możliwości (np. nowy typ dostępnego do analizy zagadnienia, itp.).

W tym miejscu należy wspomnieć, że oprogramowanie MES powstało głównie w językach FORTRAN i C++.

5.3 Postprocesor Graficzny

Pre- i postprocesor graficzny jest programem opartym na bibliotece OpenGL (Rys. 5.2). Rozwiązania OpenGL są spotykane praktycznie we wszystkich współczesnych komercyjnych systemach MES. Jak wspomniano wcześniej program posiada modułową budowę dzięki której w łatwy sposób można go w łatwy sposób rozbudowywać.

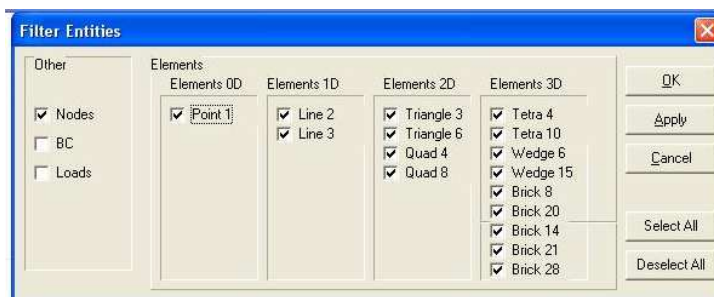
W oddzielnych modułach umieszczono oprogramowanie związane z ustawieniami i sposobem wyświetlania maszyny OpenGL, przedstawianiem modelu MES, wynikami, tworzeniem modelu geometrycznego, itp.



Rys. 5.2 Program postprocesora graficznego

5.3.1 Obsługiwane typy elementów skończonych

W programie zaimplementowano możliwość obsługi wielu typów elementów skończonych (Rys.5.3), w tym: jednowymiarowych, płaskich, przestrzennych.

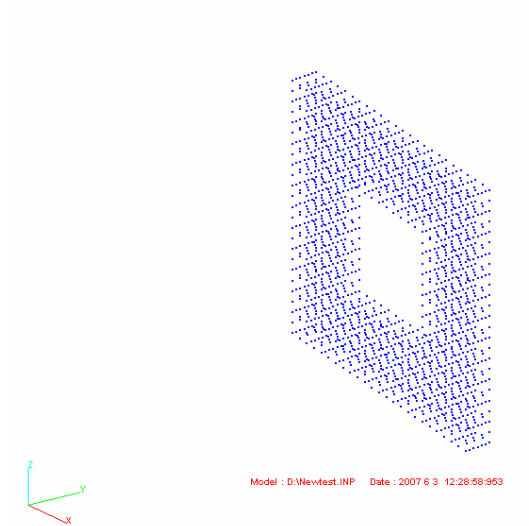


Rys. 5.3 Typy elementów

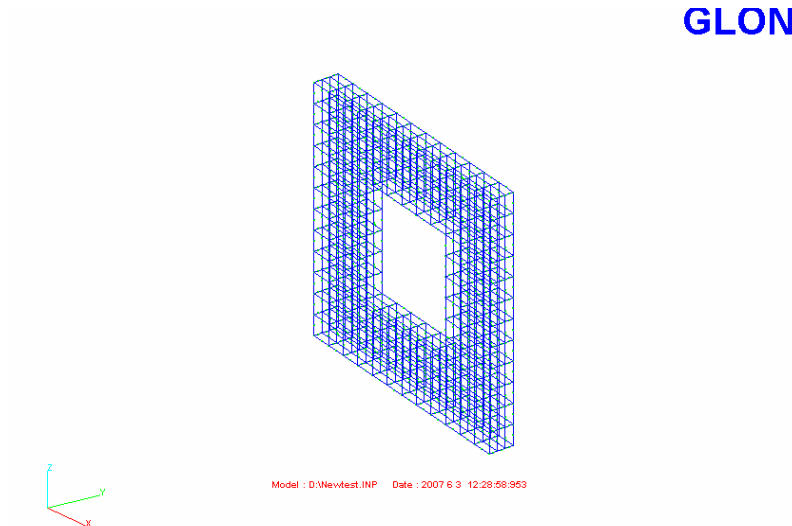
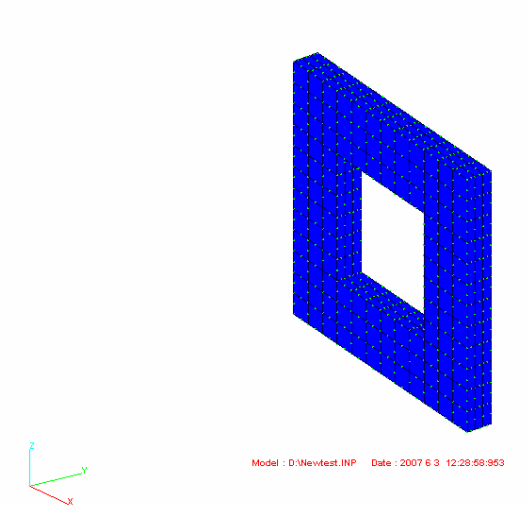
Program zapewnia również obsługę elementów 21-, 28- i 14-węzłowych. Wewnętrzna struktura programu pozwala na szybkie dodanie obsługi nowych typów elementów skończonych.

5.3.2 Prezentacja modelu

Model może być przedstawiany jako model składający się z punktów (węzłów), Rys.5.4, siatek (Rys.5.5) z ukrytymi liniami i powierzchniami (Rys.5.6).

GLON

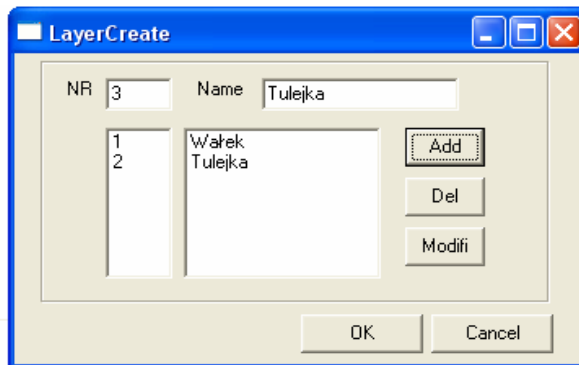
Rys. 5.4 Model wyświetlany w postaci węzłów

GLONRys. 5.4 Model siatkowy (*ang.* wireframe)**GLON**

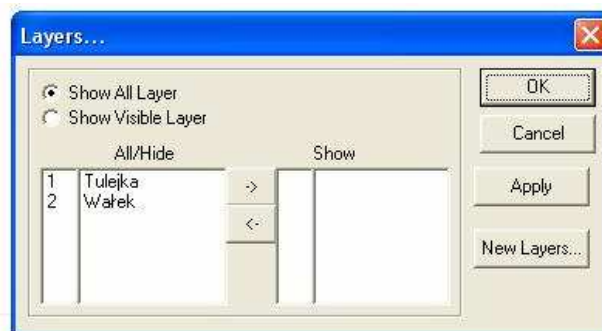
Rys. 5.6 Model z ukrytymi liniami i powierzchniami

Elementy mogą być filtrowane i wyświetlane wg numeru lub typu (Rys.5.3).

W przypadku modeli składających się z wielu części (tak jak w przypadku większości zagadnień kontaktowych) ważna jest możliwość selektywnego wyświetlania grup elementów tworzących poszczególne części modelu (np. wałka lub osadzonej na nim tulejki). Zrealizowane to zostało za pomocą mechanizmu warstw (Rys.5.7, Rys.5.8).

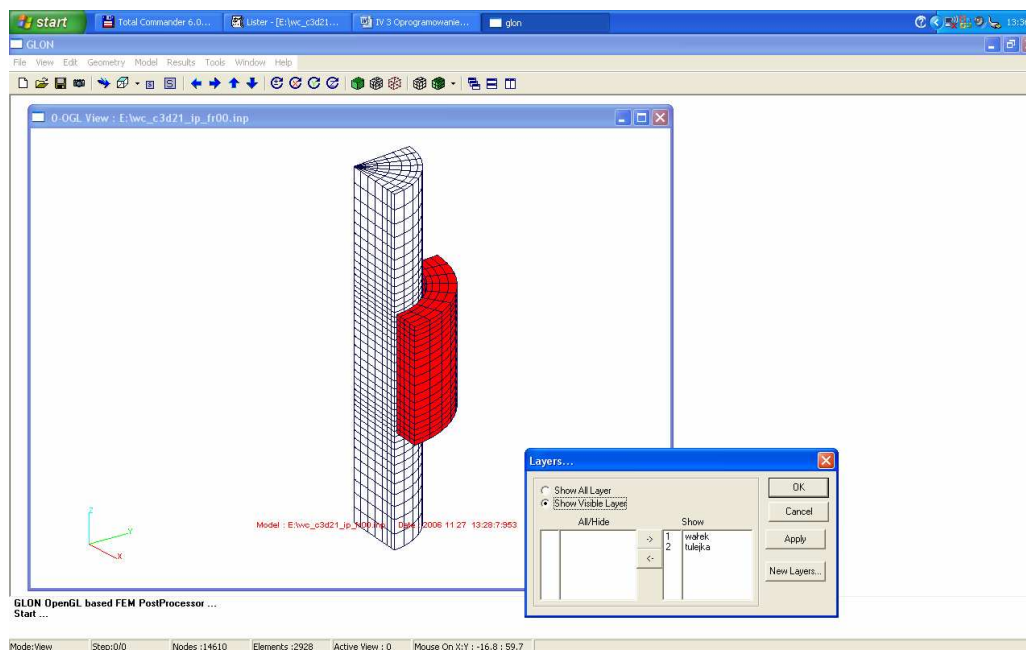


Rys. 5.7. Tworzenie warstwy



Rys. 5.8. Zarządzanie wyświetlaniem warstw

Poszczególne warstwy zawierające przypisane im węzły bądź elementy mogą zostać stworzone przez użytkownika lub wykorzystać zbiór elementów. Zdefiniowane warstwy mogą następnie być włączane lub wyłączane do prezentacji, jak pokazano na Rys.5.9.



Rys. 5.9 Model z włączonymi warstwami wałka i tulejki

5.3.3 Tworzenie modelu, generacja siatki

Funkcjonalnie w programie, możemy wyróżnić dwie części związane z:

- (i) tworzeniem modelu, generacją siatki,
- (ii) wizualizacją wyników obliczeń.

W programie możliwe jest zdefiniowanie modelu MES oraz wygenerowanie pliku zawierającego różne definicje modelu dla programu obliczeniowego. Dla zdefiniowanego modelu można przeprowadzić obliczenia (z poziomu pre/procesora), jak również zapisać do pliku wyjściowego. Pliki wyjściowe zawierające współrzędne węzłów, definicje elementów, materiałów, warunków brzegowych, obciążeń oraz rodzaj analizy w dużej mierze są zgodne z plikami wejściowymi systemów komercyjnych.

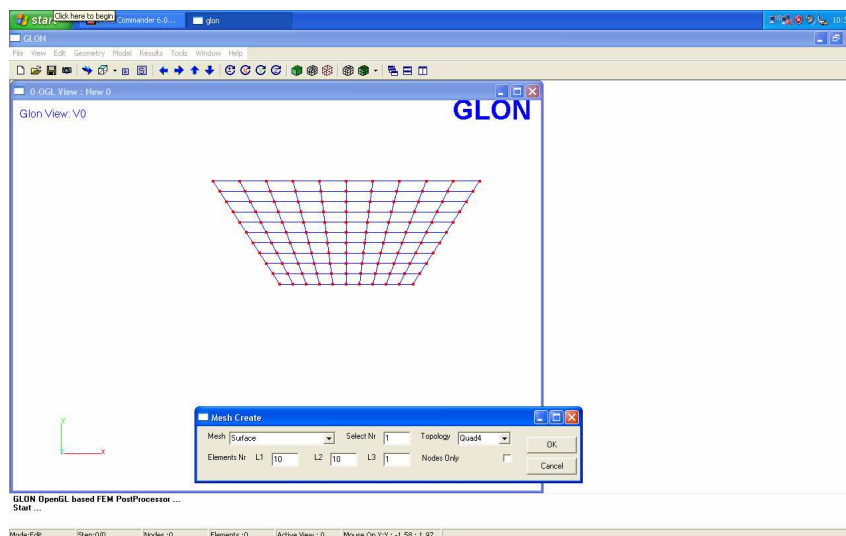
Generacja elementów oparta jest na podejściu izoparametrycznym. Pierwszym krokiem do wygenerowania siatki jest zdefiniowanie obiektów geometrycznych na których ta siatka ma być rozpięta.

Na zdefiniowanych przez użytkownika obiektach geometrycznych, w postaci:

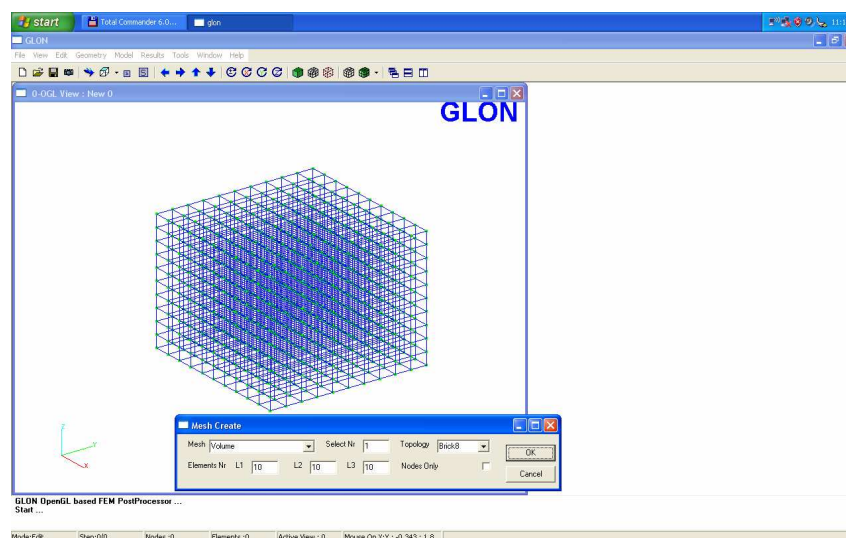
- linii,
- płaszczyzn (Rys. 5.10),
- brył (Rys. 5.11),

następuje generacja siatki węzłów i elementów z zadanymi przez użytkownika parametrami odnośnie jej gęstości. Obecnie program umożliwia generację wybranych typów elementów (hexagonalnych elementów przestrzennych lub płaskich elementów czterowęzłowych).

W celu stworzenia kompletnego modelu w programie należy zdefiniować również warunki brzegowe, obciążenia i stałe materiałowe.



Rys. 5.10 Generacja siatki elementów na płaszczyźnie



Rys. 5.11 Generacja siatki elementów w zadanej objętości

5.3.4 Wizualizacja wyników

Wyniki otrzymywane na drodze MES podzielono ze względu na uzyskiwane wyniki, typu:

- (i) skalarne, gdy z danym węzłem związane są wartości o charakterze skalarnym,
- (ii) wektorowe, gdy z danym węzłem związane są wartości o charakterze wektorowym.

Podział taki przyjęto ze względu na typ najczęściej przeprowadzanych obliczeń MES.

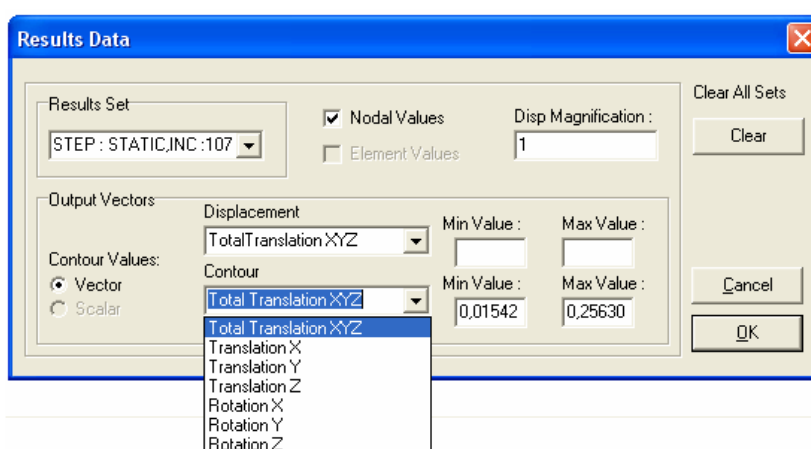
W analizach zagadnieniach mechanicznych (statyka, dynamika) otrzymujemy rozwiązania pola wektorowego przemieszczeń (w metodzie przemieszczeniowej MES). Inne

interesujące nas wartości możemy ekstrapolować na podstawie przemieszczeń otrzymanych w węzłach.

W przypadku innych obliczeń poszukujemy najczęściej rozwiązań pól skalarnych, np. pola temperatur, pola elektrycznego, rozkładu ciśnienia akustycznego, itp. Uzyskane w węzłach wartości są skalarami.

W celu stworzenia możliwie ogólnego formatu do reprezentowania wyników obliczeń (Rys.5.12) przyjęto, że strukturą taką będzie zestaw zawierający:

- numer/nazwę kroku, ewentualnie iteracji,
- definicje wartości wektorowych,
- wartości wektorowe w węzłach,
- definicje wartości skalarnych,
- wartości skalarne w węzłach.

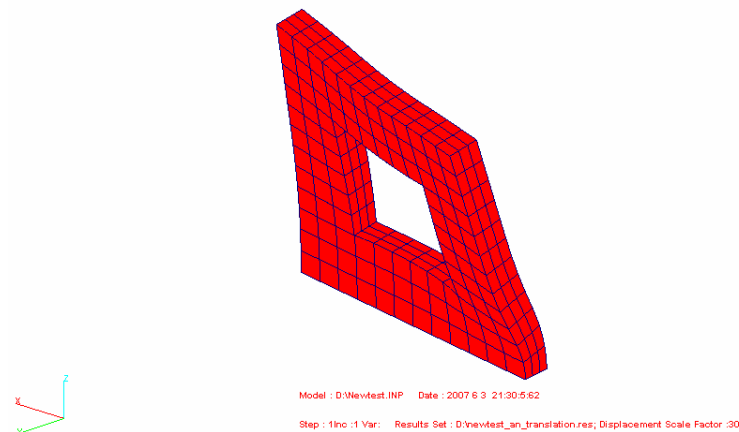


Rys. 5.12 Wybór rezultatów obliczeń

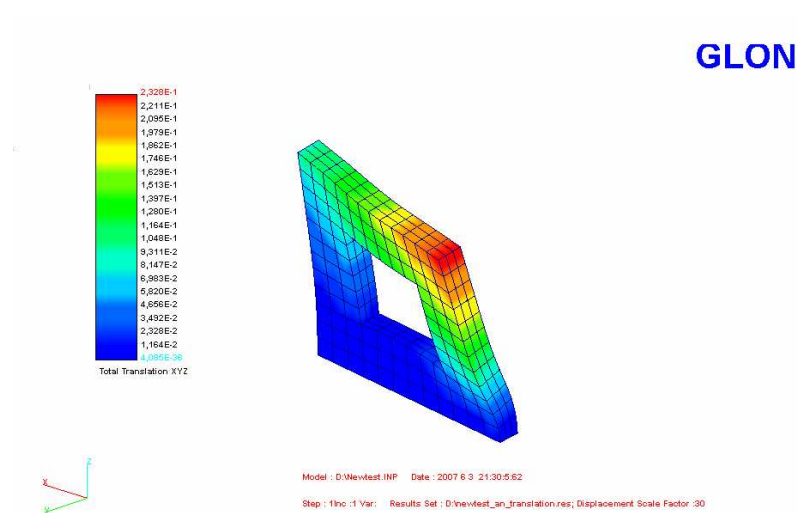
Wartości zdefiniowane jako wektorowe mogą posłużyć do wyświetlania modelu odkształconego. W przypadku, gdy wartości składowych wektora są bardzo małe w stosunku do wymiarów modelu mogą zostać przeskalowane. Wartość przeskalowania może zostać zmieniona w każdej chwili. Uzyskany w ten sposób widok modelu przedstawia Rys.5.13.

Z reguły interesuje nas również całkowite przemieszczenia modelu, które jest bliczane na podstawie składowych wektora przemieszczeń węzłowych. Składowe wektorów, jak również długości wektorów w węzłach mogą być potraktowane jako wartości skalarne, co umożliwia nadanie węzłom odpowiednich do ich wartości kolorów (Rys.5.14).

GLON

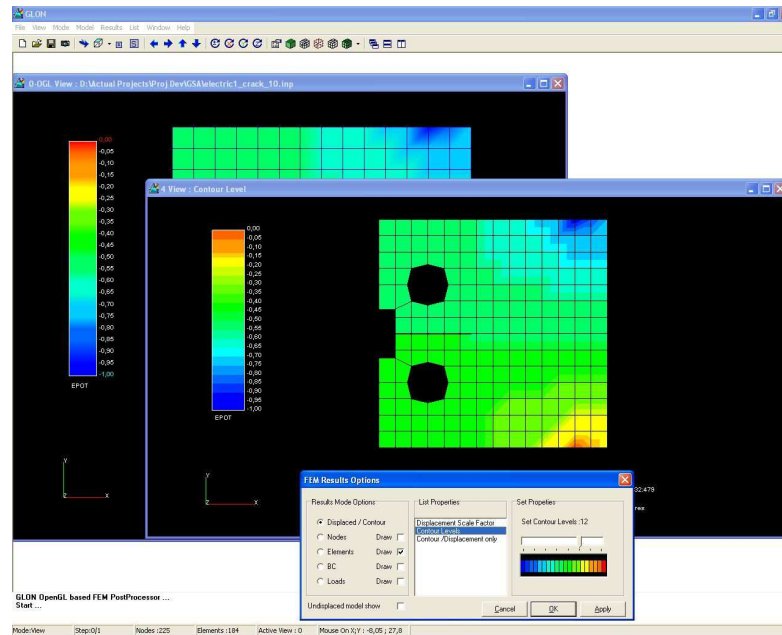


Rys. 5.13 Widok modelu. Rozkład przemieszczeń w węzłach; współczynnik skali 30

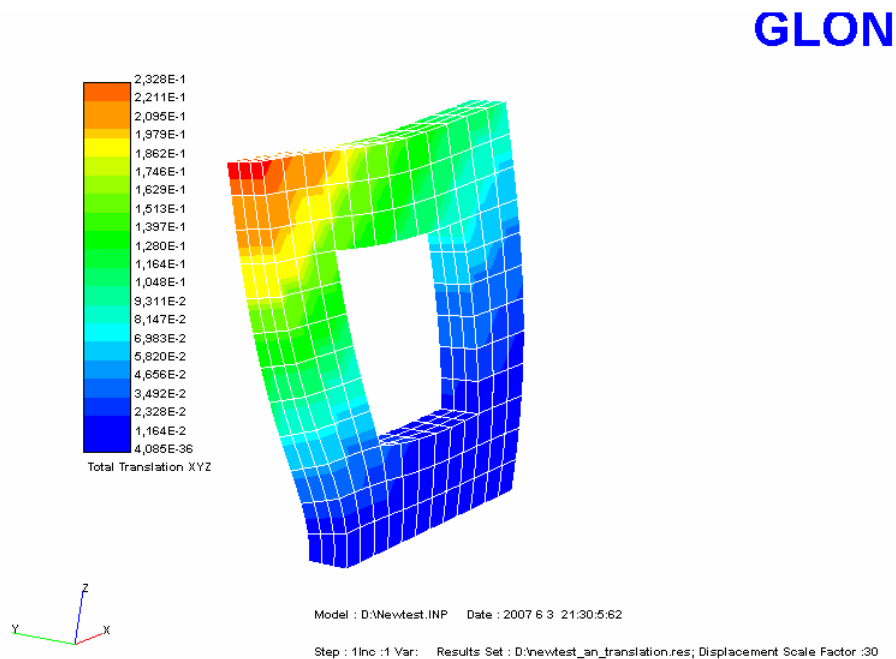


Rys. 5.14 Rozkład przemieszczeń węzłowych (model odkształcony)

W przypadku, gdy wynikami obliczeń są tylko wartości skalarne (Rys.5.15) lub, gdy w strukturze zawierającej zbiór wyników nie ma wartości zadeklarowanych jako wektorowe, wyniki przedstawiane są przy użyciu odpowiednich kolorów. Kolory mogą przechodzić w sposób płynny (Rys. 5.14) lub być wyraźnie rozgraniczone (Rys. 5.16).



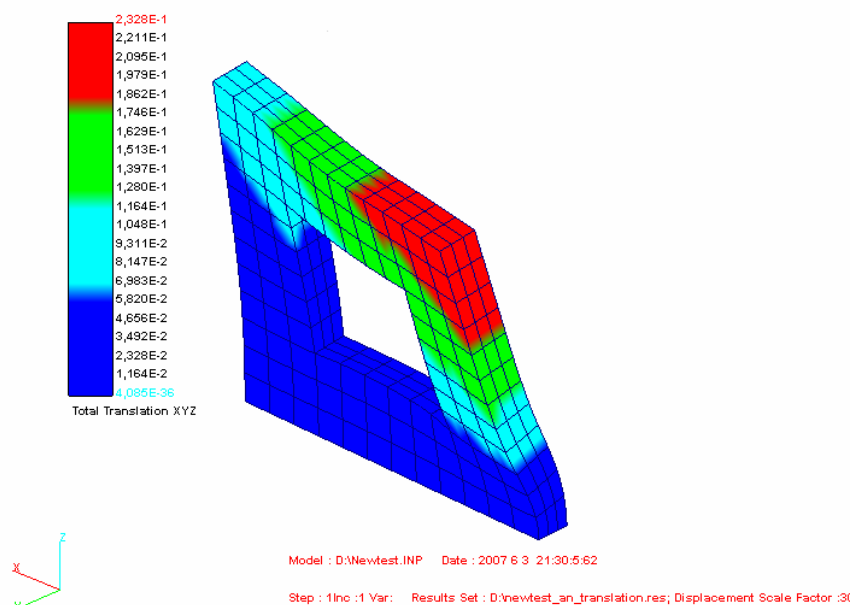
Rys. 5.15 Przedstawienie wyników rozkładu potencjału pola elektrycznego(model płaski)



Rys. 5.16 Rozkład przemieszczeń węzłowych

Ilość kolorów przy użyciu których przedstawiane mogą być wartości wyników jest zmienna i może wynosić od 2 do 24 (domyślnie 12). Rys. 5.17 przedstawia zobrazowanie rozkładu wartości całkowitego przemieszczenia węzłów przy użyciu tylko 4 kolorów.

GLON



Rys. 5.17 Rozkład przemieszczeń węzłowych; użycie 4 kolorów

W przypadku zagadnień mechanicznych istnieje konieczność zobrazowania na jednym modelu wyników zarówno o charakterze wektorowym jak i skalarnym (np. naprężenia zredukowane Hubera-Misesa na odkształconym modelu).

5.3.5 Wizualizacja naprężeń

O ile wizualizacja wyników zarówno skalarnych jak i wektorowych otrzymanych w węzłach elementów skończonych nie przedstawiała większych problemów (danemu węzłowi przypisany był po prostu odpowiedni do wartości kolor), to w przypadku naprężeń pojawiają się pewne problemy. Problemy te spowodowane są nieciągłością naprężeń w przemieszczeniowej metodzie elementów skończonych. Dyskusję na ten temat możemy znaleźć w pracach [2], [3].

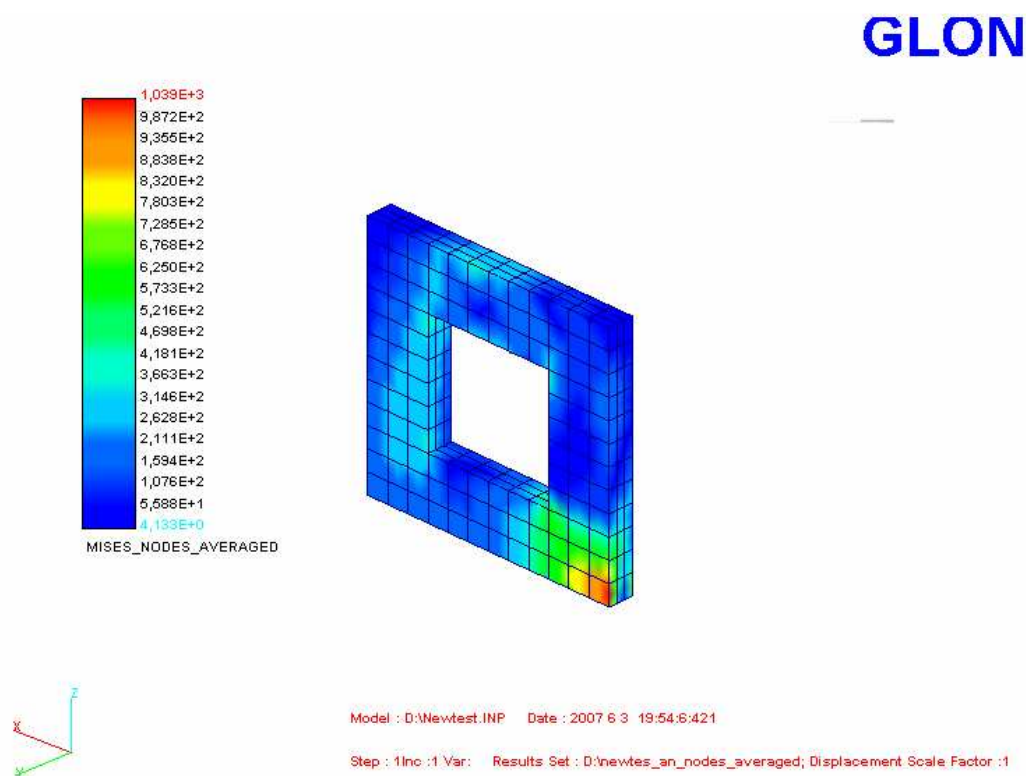
W oprogramowaniu własnym, w przypadku elementów skończonych używanych w zagadnieniach mechanicznych, składowe tensora naprężenia jak i naprężenia zredukowane obliczane są w punktach całkowania (*ang.* tutaj Gauss points), w węzłach (*ang.* nodal) oraz w środku elementów (*ang.* centroid).

Na podstawie składowych tensora naprężeń odpowiednio do przyjętej hipotezy wytrzymałościowej obliczane są naprężenia zredukowane, jak np. naprężenia Hubera – Misesa. Naprężenia zredukowane obliczane we wspólnych węzłach sąsiadujących ze sobą elementów mają różne wartości. Aby możliwe było przedstawienie wartości przy pomocy symbolizującego ją koloru musi ta wartość być jednoznacznie określona. W tym celu możemy przyjąć pewien sposób uśredniania tych wartości we wspólnych węzłach sąsiadujących elementów.

Poniżej opisano przykładowe dwie metody stosowane w oprogramowaniu własnym:

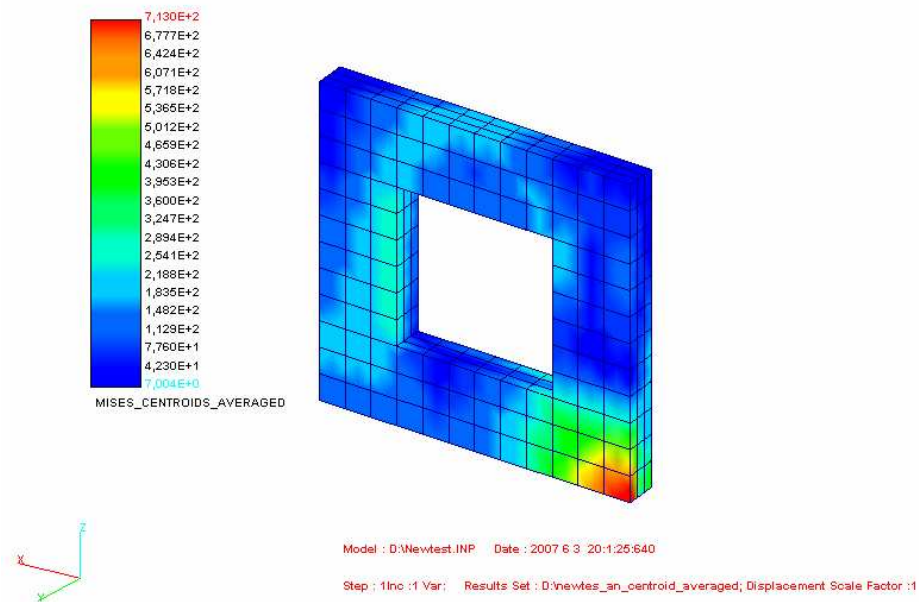
- (i) metoda I (wydaje się prostsza); polega na obliczeniu naprężeń w węzłach (*ang.* nodal stress) dla wszystkich elementów a następnie uśrednieniu tych wartości we wspólnych węzłach sąsiadujących elementów. Zobrazowanie wartości naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa w opisany powyżej sposób przedstawia Rys.5.18,
- (ii) metoda II; obliczenia przeprowadzamy w następujących krokach:
- obliczamy naprężenia w środku wszystkich elementów skończonych (*ang.* centroidal stress),
 - przypisujemy przypisane wartości naprężeń wszystkim węzłom danego elementu skończonego,
 - we wspólnych węzłach sąsiadujących elementów uśredniamy przypisane wartości.

Na Rys. 5.19 przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa uzyskany przy użyciu metody II.



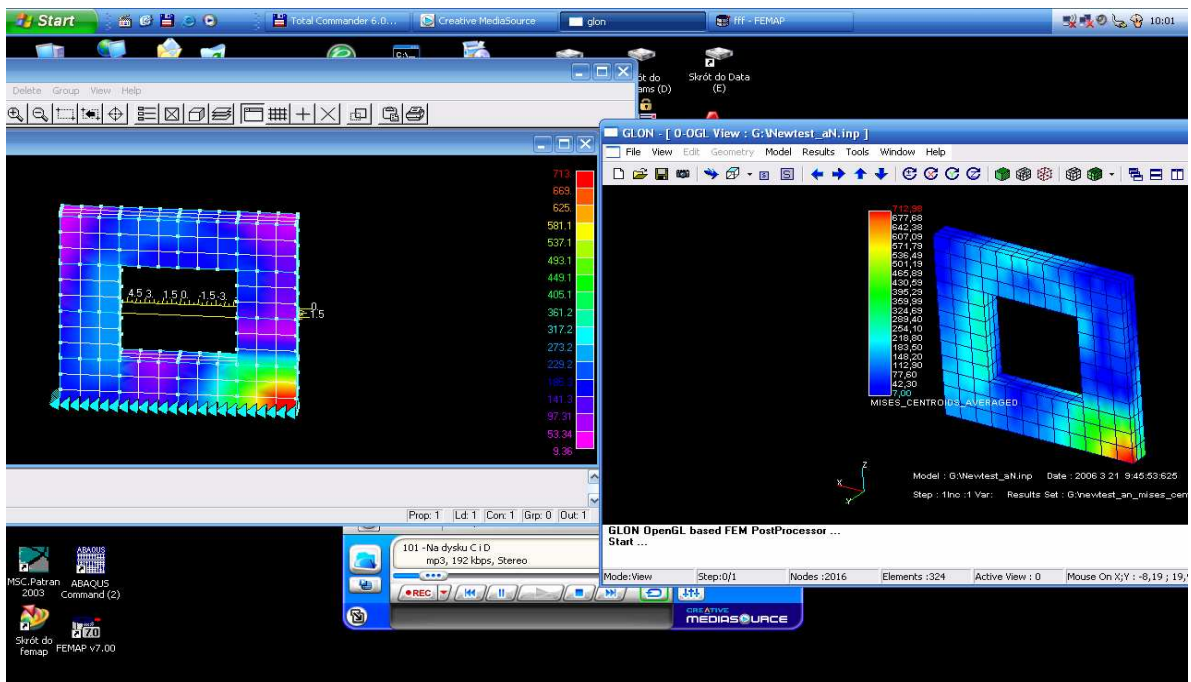
Rys. 5.18 Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa. Metoda I

GLON



Rys. 5.19 Rozkład naprężeń zredukowanych Hubera - Misesa. Metoda II

Druga z opisanych metod wydaje się bardziej praktyczna (mniejszy nakład obliczeń), a uzyskane rozkłady naprężeń porównywalne są z tymi uzyskiwanymi przy użyciu komercyjnego oprogramowania. Na Rys.5.20 przedstawiono porównanie zobrazowania rozkładu naprężeń przy użyciu komercyjnego programu FEMAP i oprogramowania stworzonego w całości przez autora.



Rys. 5.20 Program FEMAP (po lewej) oraz program własny (po prawej)

ROZDZIAŁ 6

INNE ZASTOSOWANIA NIESTANDARDOWYCH PRZESTRZENNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

6.1 Pole elektryczne

Elementy 14-, 21-, 28-węzłowe mogą być również wykorzystywane w innych zagadnieniach rozwiązywanych metodą elementów skończonych. Przykładami mogą być zagadnienia rozkładu takich pól jak pole elektryczne, pole temperatury, pole akustyczne, itp.

W rzeczywistości możemy mieć również do czynienia z przypadkami pól złożonych, takich jak: pole przepływowe prądu w materiale przewodzącym i związanego z nim pola temperatur spowodowanego przepływem prądu elektrycznego wywołanego różnicą potencjałów.

W polu przepływowym prądu w materiale przewodzącym, wektor gęstości natężenia prądu elektrycznego związany jest z wektorem natężenia pola elektrycznego zależnością (prawo Ohma) :

$$\mathbf{i} = \sigma_e \mathbf{E} \quad (6.1)$$

gdzie: σ_e - macierz konduktywności.

Wektor natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} związany jest z potencjałem pola relacją :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6.2)$$

W przypadku pola elektrostatycznego w obszarze bez ładunku, potencjał spełnia równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (6.3)$$

Równanie (6.3) w obszarach o nieregularnych kształtach brzegów można rozwiązać w sposób przybliżony MES [35], [49]. W efekcie, otrzymujemy wartości potencjału pola elektrycznego w węzłach.

W porównaniu do zagadnień mechanicznych, gdzie w węzłach otrzymywaliśmy wektor przemieszczeń, tutaj w wyniku rozwiązania w węzłach otrzymujemy potencjał pola, który jest wielkością skalarną. Znacznemu zmniejszeniu w przypadku zagadnień przestrzennych (trzykrotnie) ulega tutaj liczba stopni swobody elementu. Druga istotną różnicą w porównaniu do zagadnień mechanicznych jest brak powiązania pomiędzy stałymi materiałowymi w poszczególnych kierunkach. W przypadku przestrzennym w macierzy stałych materiałowych współczynniki konduktywności leżą na jej głównej przekątnej (diagonalna postać).

Relację (6.1) możemy w ogólnym przypadku przedstawić w zapisie macierzowym:

$$\begin{Bmatrix} \dot{i}_x \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{ex} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ey} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ez} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

W przypadku materiału izotropowego współczynniki leżące na przekątnej macierzy są oczywiście takie same. W porównaniu do zagadnień mechanicznych, zagadnienie to wydaje znacznie prostsze do analizy numerycznej MES.

Poprawnie sformułowany element skończony (przeszedł test 1a lub 2a) bez problemu może być zastosowany w obliczeniach pola elektrycznego. Tu również użyto elementów 14-, 21- i 28-węzłowych.

W przypadku gdy w materiałach przewodzących występują np. pęknięcia, niepożądane szczeliny, itp do ich wykrywania posłużyć może informacja o rozkładzie potencjału na brzegu obszaru. W badaniach nieniszczących (NDT) wykonywanych tą metodą dokonuje się pomiarów różnicy potencjału pola elektrycznego między wybranymi punktami pomiarowymi. Rozkład potencjału na brzegu elementu bez uszkodzenia oraz elementu uszkodzonego będzie różny w obu przypadkach. W przypadku rozwiązań numerycznych tego typu zagadnień przestrzennych na brzegu obszaru możemy użyć elementów 28-węzłowych. W ten sposób otrzymujemy rozkład wartości potencjału na brzegu obszaru w znacznie większej ilości węzłów.

Poniżej przedstawiono przykład obliczeń takiego zagadnienia z wykorzystaniem elementu 28-węzłowego.

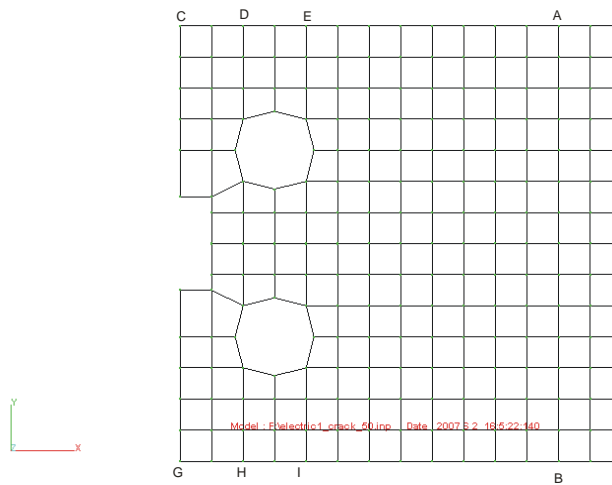
Do płyty [15] o wymiarach 14 x 14 x 0.5 cm, jak pokazano na rys. 6.1, przyłożono w wybranych punktach potencjał o następujących wartościach:

- punkt A -1.0 V ,
- punkt B - 0.0 V .

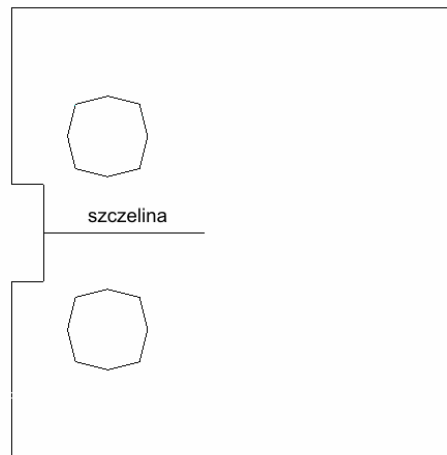
Zadane w wybranych węzłach wartości potencjału są warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju (Dirichleta). Wykonano dwa niezależne modele: bez i ze szczeliną.

W drugim przypadku szczelina o szerokości 0.02 cm i długości 5 cm znajdowała się w środkowej części płytki jak pokazano na Rys. 6.2.

GLON



Rys. 6.1 Siatka elementów skończonych

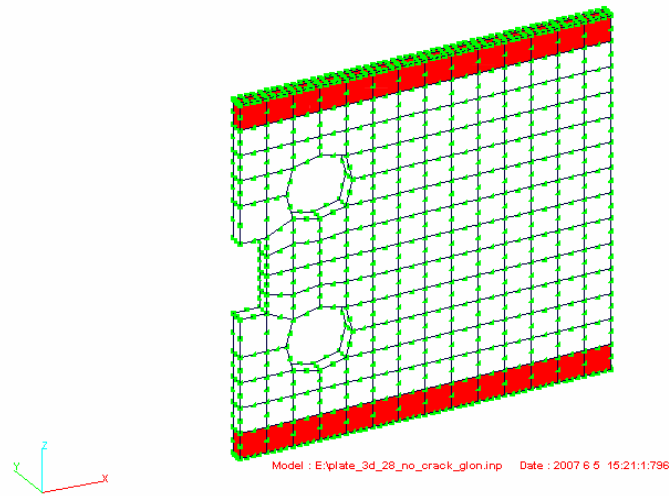


Rys. 6.2 Umiejscowienie szczeliny

Obliczenia przeprowadzono przy użyciu oprogramowania własnego, zarówno dla modelu przestrzennego jak i płaskiego (wyłącznie w celach porównawczych) dla płytki bez i ze szczeliną.

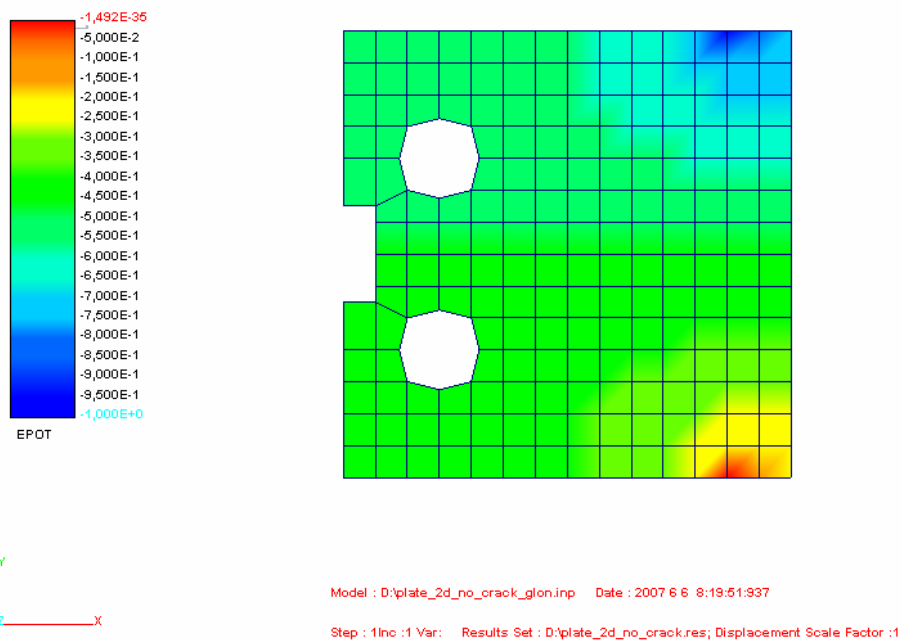
Elementy 28-węzłowe (kolor czerwony), użyte w powiązaniu z elementami 20-węzłowymi (kolor biały) przedstawia Rys. 6.3.

GLON



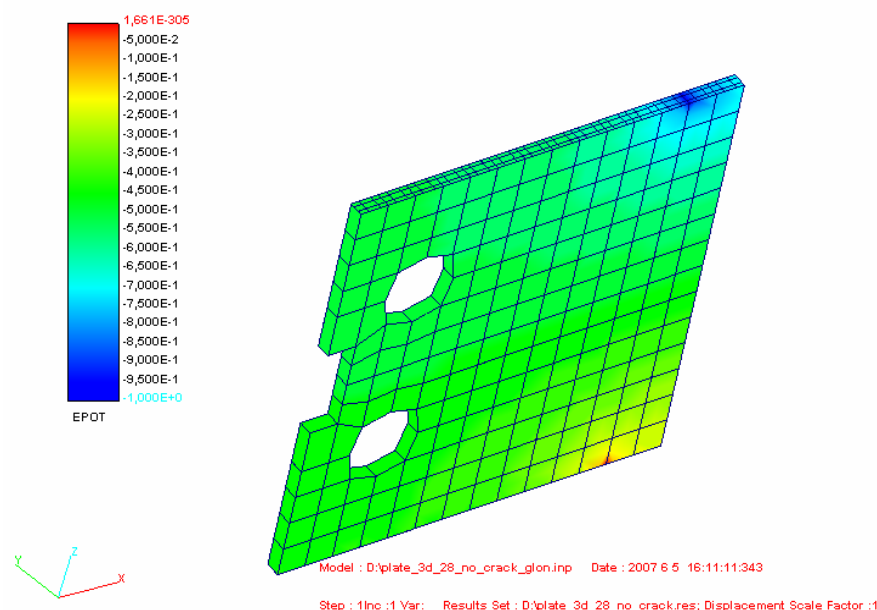
Rys. 6.3 Przestrzenny model z użyciem elementów 28-węzłowych przy dwóch krawędziach płytki

Dla płaskiego modelu bez szczeliny rozkład potencjału pokazano na Rys.6.4. Rys 6.5 przedstawia rozkład potencjału dla modelu przestrzennego z użyciem elementów 28-węzłowych na krawędziach płytki.



Rys. 6.4 Rozkład potencjału. Model płaski bez szczeliny

GLON



Rys. 6.5 Rozkład potencjału. Model przestrzenny (bez szczeliny) z wykorzystaniem elementów 28-węzłowych na brzegu płytki

W wybranych parach węzłów oznaczonych na rys. 6.1 jako (C, G) , (D, H), (E , I) odczytano i porównano uzyskane wartości rezultatów dla modeli bez i ze szczeliną. Wyniki zebrano w Tab. 6.6.

Tab. 6.6 Model bez szczeliny. Wartości potencjału w wybranych węzłach [V]

	Wartość potencjału w wybranych węzłach. Model bez szczeliny					
	C	G	D	H	E	I
elementy płaskie 4-węzłowe	-0.5474	-0.4526	-0.5514	-0.4486	-0.5628	-0.4372
element przestrzenny 20-węzłowy	-0.5431	-0.4569	-0.5468	-0.4532	-0.5569	-0.4431
element przestrzenny 28-węzłowy	-0.5436	-0.4513	-0.54699	-0.4480	-0.556	-0.4388
	WARTOŚĆ POTENCJAŁU W WYBRANYCH WĘZŁACH. MODEL ZE SZCZELINĄ					
	C	G	D	H	E	I
elementy płaskie 4-węzłowe	-0.5752	-0.4248	-0.5773	-0.4227	-0.5841	-0.4159
element przestrzenny 28-węzłowy	-0.5679	-0.4321	-0.5698	-0.4302	-0.5756	-0.4244

Otrzymane wyniki w porównywanych węzłach są do siebie zbliżone. Wartości potencjału w węzłach na brzegu różnią się dla obu modeli. W przypadku modelu ze szczeliną różnice potencjałów pomiędzy parami węzłów (C, G), (D, H), (E, I) są większe.

Zwykle odejmuje się od siebie obydwie wartości różnicy potencjału [15] dla płytki bez szczeliny dp_0 i ze szczeliną dp . W przypadku detekcji uszkodzeń w wybranych punktach pomiarowych różnica pomiędzy wartością dp_0 (znana) oraz dp (mierzona) powinna być równa zero dla elementu nieuszkodzonego.

6.2 Stacjonarny przepływ ciepła

Przy stałym współczynniku przewodzenia ciepła i braku wewnętrznych źródeł ciepła w rozpatrywanym obszarze równanie ustalonego przewodzenia ciepła sprowadza się do równania Laplace'a:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (6.5)$$

W równaniu (6.5) podobnie jak w (6.3) nie występują żadne stałe, które są odniesione do własności fizycznych analizowanego czynnika. Do określenia ustalonego pola temperatury bez wewnętrznych źródeł ciepła i o stałym współczynniku przewodzenia ciepła, przy uwzględnieniu warunkach brzegowych pierwszego rodzaju (Dirichleta) nie jest więc potrzebna znajomość żadnych stałych opisujących własności fizyczne przepływającego czynnika.

W układzie współrzędnych walcowych równanie (6.5) ma postać:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (6.6)$$

gdzie: r - współrzędna w kierunku promieniowym, z - współrzędna w kierunku osiowym, θ - kąt w kierunku południkowym.

W przypadku przewodzenia ciepła przez ściankę walcową bez wewnętrznych źródeł ciepła, od długości znacznie większej od średnicy zewnętrznej, temperatura zmienia się tylko w kierunku promieniowym, tzn.:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (6.7)$$

Równanie (6.6) przy uwzględnieniu (6.7) sprowadzić można do postaci:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (6.8)$$

Z warunkami brzegowymi:

$$T = T_{s1} \quad \text{dla} \quad r = r_1 \quad (6.9)$$

$$T = T_{s2} \quad \text{dla} \quad r = r_2 \quad (6.10)$$

gdzie: $T_{s1} = 100$ - temperatura na wewnętrznej powierzchni o promieniu r_1 ,
 T_{s2} - temperatura na zewnętrznej powierzchni walca o promieniu r_2 .

Po dwukrotnym scałkowaniu równania (6.8) i uwzględnieniu warunków brzegowych (6.9) i (6.10), otrzymujemy:

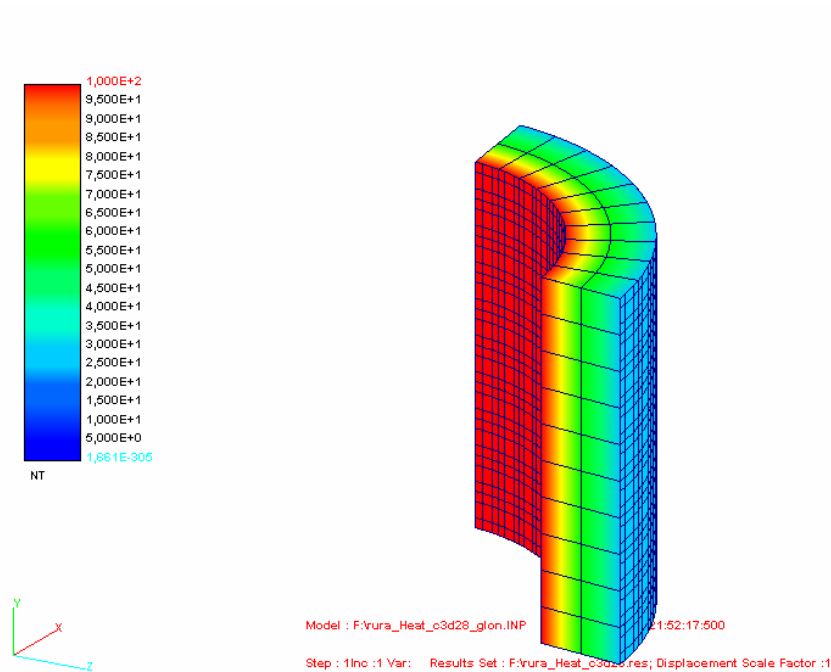
$$T = T_{s1} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} \quad (6.11)$$

Rozkład temperatury w ścianie walcowej określony jest w tym przypadku krzywą logarytmiczną opisaną równaniem (6.11).

W celu porównania wyników uzyskiwanych numerycznie z użyciem elementów 28-węzłowych i otrzymywanych wzorem (6.11) wykonano model zawierający 200 elementów skończonych przedstawionych na Rys 6.6.

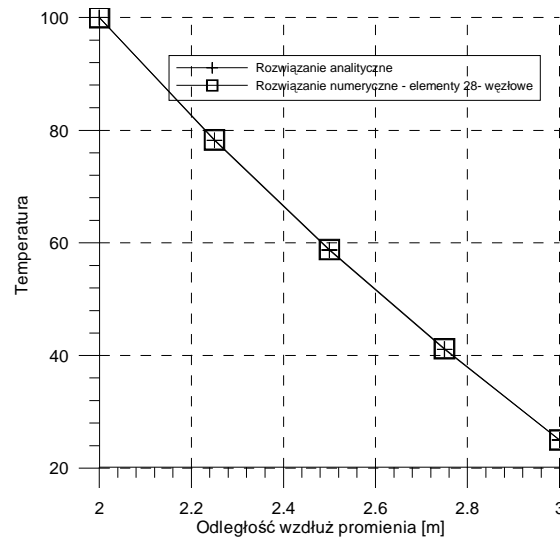
Przyjęto założenia, że na wewnętrznej powierzchni o promieniu $r_1 = 2$ panuje temperatura $T_{s1} = 100$, na powierzchni zewnętrznej o promieniu $r_2 = 3$, temperatura $T_{s2} = 25$.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń uzyskano rozkład temperatury pokazany na Rys. 6.6.



Rys. 6.6 Rozkład temperatury w ścianie walcowej

Rozkładu temperatury w ścianie walcowej wzdłuż promienia otrzymany numerycznie i obliczony wg wzoru (6.11) przedstawia Rys. 6.7.



Rys. 6.7 Rozkład temperatur wzdłuż promienia ścianki walcowej

Wnioski

Zaprezentowane niestandardowe elementy skończone zapewniają poprawne rozwiązania zagadnień brzegowych pól skalarnych. Przykładami takich pól są między innymi pole temperatury, pole elektryczne. Bardzo dobrze nadaje się do tego zwłaszcza element 28-węzłowy użyty na brzegu analizowanego obszaru, gdzie dzięki zagęszczeniu siatki węzłów otrzymujemy dokładniejsze rozkłady temperatur i potencjału pola elektrycznego.

ROZDZIAŁ 7

PODSUMOWANIE

Przeprowadzono obszerne testy numeryczne niestandardowych elementów skończonych, a następnie przy ich wykorzystaniu wykonano obliczenia wytrzymałościowe typowych połączeń spoczynkowych elementów maszyn i porównano z wynikami otrzymanymi za pomocą komercyjnego systemu ABAQUS v.5.8 i v.6.6 z użyciem jednej klasy bryłowych elementów skończonych z biblioteki systemu.

Obliczenia numeryczne zweryfikowano także przez porównanie wyników własnych z dostępnymi wynikami eksperymentalnymi innych autorów, które zaczerpnięto z literatury (prace opublikowane i niepublikowane jako raporty udostępnione przez ośrodki zagraniczne). Stwierdzono dobrą zgodność porównywanych wyników.

7.1 Wniosek ogólny

- (i) elementy bryłowe rodziny Serendipity o 20-węzłach i 32-węzłach nie nadają się do analizy przestrzennych zagadnień kontaktowych; elementy te nie spełniają warunku kontaktu fizycznego,
- (ii) elementy 8-węzłowe o biliniowej funkcji kształtu z rodziny Lagrange'a są przeszywnione i zaniżają, w niektórych przypadkach znacznie, wyniki w przemieszczeniach,
- (iii) w zastosowaniu do zagadnień mechaniki, geomechaniki, akustyki oraz obliczeń pola elektro-magnetycznego jest możliwe definiowanie różnego rodzaju elementów niestandardowych pozwalających na rozszerzenie zakresu stosowalności metody elementu skończonego,
- (iv) jakościową i ilościową poprawność modelu matematycznego do opisu zjawisk fizycznych dotyczących przestrzennych zagadnień kontaktowych z więzami jednostronnymi gwarantują niestandardowe elementy skończone o specjalnych funkcjach kształtu.

7.2 Wnioski szczegółowe

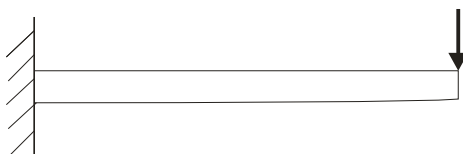
- (i) element 21-węzłowy wydaje się być najlepszym (bardzo dobra dokładność uzyskiwanych rezultatów również w przypadku zginania, mniejsza ilość stopni swobody w porównaniu do innych elementów możliwych do użycia w kontakcie, łatwość użycia elementu w połączeniu z pozostałymi elementami 20-węzłowymi w jednym modelu) elementem zastosowanym do obliczeń przestrzennych zagadnień kontaktowych,

- (ii) element 28-węzłowy bardzo dobrze nadaje się do zagęszczania siatek skończone elementowych, np. na brzegach modelowanych obszarów. Element ten można również używać w połączeniu z elementami 20-węzłowymi jako element przejściowy (transition-element),
- (iii) element 14-węzłowy w stosunku do powyższych wydaje się być elementem najmniej korzystnym. Element ten posiada liniowe funkcje kształtu a jego 'zachowanie numeryczne' jest podobne do standardowego elementu 8-węzłowego z liniowymi funkcjami kształtu. Element ten posiada jednak większą od tego ostatniego liczbę stopni swobody, co można wykorzystać w obliczeniach zagadnień kontaktowych,
- (iv) jak pokazały jednak proste testy numeryczne (p. rozdział 7.3), wszystkie typy przestrzennych elementów skończonych mogą w pewnych warunkach dawać całkowicie błędne wyniki. Użytkownicy systemów MES powinni mieć świadomość słabości poszczególnych typów elementów i wybierać, w odniesieniu do analizowanego zagadnienia, najbardziej odpowiedni typ elementu.

7.3 Wnioski dotyczące poprawnego formułowania elementów skończonych skierowane do użytkowników systemów MES

Poniżej podano drastyczne przykłady istotnych błędów w formułowaniu elementów skończonych (dobór elementu, wybór sposobu całkowania) na najprostszych modelach obliczeniowych: (a) belki jednostronnie utwierdzonej, obciążonej siłą skupioną, (b) płyty swobodnie podparte, obciążonej stałym ciśnieniem.

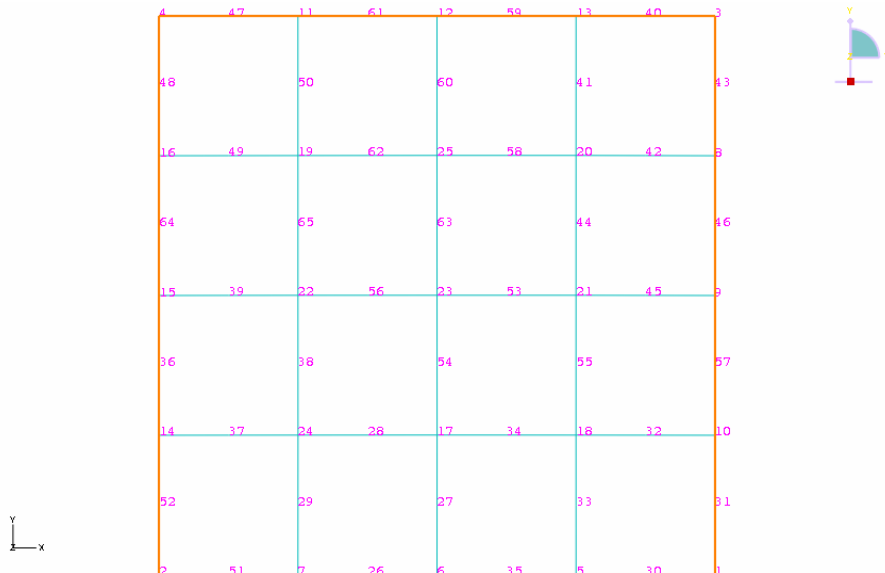
Ad. (a): belka jednostronnie utwierdzona



Liczba liniowych elementów skończonych	belka gruba wg teorii Timoshenki		belka cienka (wg teorii Eulera-Bernoulliego)	
	zredukowane (1- punkt)	pełne (2 - punkty)	zredukowane (1- punkt)	pełne (2 - punkty)
1	0.762	0.167	0.750	0.20 E-5
2	0.940	0.445	0.938	0.80 E-5
4	0.985	0.762	0.984	0.32 E-4
8	0.996	0.927	0.996	0.128 E-3
16	0.999	0.981	0.999	0.512 E-3

Tab. 7.1. Porównanie wyników numerycznych (na przykładzie belki zdefiniowanej wg teorii Eulera-Bernoulliego i teorii Timoszenki) otrzymanych różnymi sposobami całkowania; $E = 1000$, $G = 375$, $L = 4$, $\nu = 0.3$, $b = 1$, $h = 1$. (Podane wyniki ugięcia końca belki są znormalizowane).

Ad. (b): płyta prostokątna swobodnie podparta



	Wyniki analityczne [mm] [55]	8-węzłowy (Serendipity)	8-węzłowy (Serendipity)	9-węzłowy (Lagrange)	9-węzłowy (Lagrange)
grubość płyty [m]		2 x 2 (zredukowane)	3 x 3 (pełne)	2 x 2 (zredukowane)	3 x 3 (pełne)
$t = 1.$	4.06235	4.61	4.49	4.63	4.50
$t = 0.1$	4.06235 E+3	4144.28	3735.05	4189.70	3938.95
$t = 0.01$	4.06235 E+6	3.83 E+ 6	5.13 E+ 5	4.18 E+ 6	3.98 E+ 6
$t = 0.001$	4.06235 E+9	3.79 E+ 9	5.86 E+ 6	4.18 E+ 9	3.98 E+ 9

Tab. 7.1. Przemieszczenia środka płyty prostokątnej w [mm] obciążonej stałym ciśnieniem $q = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ (wyniki płyty grubej otrzymane różnymi sposobami całkowania wg teorii Mindlina zamieszczono w kolumnach od 2 do 5); przyjęto do obliczeń następujące stałe materiałowe: $E = 10.92 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\nu = 0.3$, wymiary geometryczne: $b = 1\text{m}$, $h = 1\text{m}$.

W tym kontekście warto znać również wyniki ugięcia środka płyty otrzymane wg teorii Kirchhoffa (siatka elementów skończonych powyżej), które dla grubości płyty t podanych w tab. 7.1 wynoszą odpowiednio: 4.33, 4.158 E+3, 4.158 E+6, 4.158 E+9 [mm].

Poniżej podano kilka istotnych uwag dotyczących poprawnego formułowania i używania najbardziej niestabilnych numerycznie elementów skończonych (elementy belkowe i płytowe). Najważniejsze uwagi są następujące:

(i) użycie pełnego całkowania (2 punkty Gaussa) w przypadku belki cienkiej prowadzi do całkowicie błędnych wyników numerycznych, niezależnie od liczby użytych elementów skończonych,

(ii) użycie pełnego całkowania (3x3) w przypadku 8-węzłowego elementu płytowego typu Serendipity prowadzi do bardzo dużych rozbieżności wyników numerycznych i

analitycznych w przypadku płyt cienkich o współczynnikach $\frac{L}{t} \ll 10$. Należy podkreślić

stabilne zachowanie się elementów płytowych z rodziny Lagrange'a, niezależnie od sposobu całkowania,

(iii) użytkownicy systemów komercyjnych powinni wiedzieć, że biblioteki tych systemów celowo nie zawierają elementów skończonych niepoprawnie sformułowanych (w tym przypadku element Serendipity z pełnym całkowaniem 3x3). W systemie ABAQUS dostępny jest tylko element Serendipity ze zredukowanym sposobem całkowania (2x2) o nazwie S8R,

(iv) element płyty Mindlina z rodziny Lagrange'a o 9-węzłach (nieдоступny w systemie ABAQUS) doskonale nadaje się do rozwiązywania zagadnień geomechaniki (płyty o dowolnej grubości posadowione na wieloparametrowym podłożu sprężystym [54]).

Wyniki obliczeń własnych ugięcia środka płyty swobodnie podpartej w przypadku różnych siatek MES podano w tab. 7.2.

Rodzaj siatki MES	9-węzłowy płytowy element Lagrange'a wg teorii Mindlina (zredukowane całkowanie 2x2)	4-węzłowy płytowy element wg teorii Kirchhoffa
2x2	4.65 E+9	
4x4	4.18 E+9	
8x8	4.09 E+9	4.13 E+9
16x16	4.07 E+9	4.08 E+9
32x32	4.06 E+6	4.07 E+9
64x64	4.06 E+9	4.06 E+ 9

Tab. 7.2. Ugięcie środka płyty prostokątnej w [mm] o grubości płyty $t = 0.001$ m; wynik analityczny $4.06235E+9$ wg [55] ze str. 59 (dane wejściowe do obliczeń podano w tab. 7.1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Abid. M., Nash D.H., 'Structural strength: gasketed vs non-gasketed flange joint under bolt up and operating condition', *International Journal of Solids and Structures*, **43**: 4616-4629, (2006).
- [2] Barlow J. 'Optimal stress locations in Finite Element Models', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **10**: 243-251, (1976).
- [3] Barlow J. 'More on optimal stress points – reduced integration, element distortion and error estimation', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**: 1487-1504, (1989).
- [4] Buczkowski R., Gabbert U., '28-noded hexahedral isoparametric element for analysis of contact problems', *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **20**: 147-161, 2004.
- [5] Buczkowski R., '21-noded hexahedral isoparametric element for analysis of contact problems', *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **14**: 681-692 (1998).
- [6] Buczkowski R. , Kleiber M., Gabbert U., 'On linear and higher order standard finite elements for 3D-nonlinear contact problem', *Computer and Structures*, **53**: 817-823, 1994.
- [7] Choi Ch.-K., Chung K.-Y., 'Three dimensional non-conforming 8-node solid elements with rotational degrees of freedom ', *Structural Engineering and Mechanics*, **4**: 569-586, (1996).
- [8] Choi Ch.-K. , Chung G. T., ' A gap-element for three-dimensional elasto-plastic contact problems', *Computer and Structures*, **61**: 1155-1167, 1996.
- [9] Choi Ch.-K., Lee N.H., 'A 3-D Adaptive mesh refinement using variable-node solid transition elements', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**: 1585-1606, (1996).
- [10] Collins J.A., *Mechanical Design of Machine Elements and Machines*, Wiley, 2003.
- [11] Day R.A., Potts D.M., 'Zero thickness interface elements–numerical stability and application', *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **18**: 689-708, (1994).
- [12] Fredriksson B., *On elastostatic contact problems with friction a finite element Analysis*, PhD Thesis, Linköping Institute of Technology, 1976.
- [13] Fredriksson B., 'An analysis of an elastic shrink fit problem', Linköping Institute of Technology, September 1977 (niepublikowany raport).
- [14] Gupta A.K., 'A Finite element for transition from a fine to a coarse grid', *International Journal for Numerical Method in Engineering*, **12**: 35-45, (1978).

- [15] Hsu D.S., Tsai C.H., Crack detection using electric conductive finite elements', *Computer and Structures*, **45**: 471-479, 1992.
- [16] Irons B.M., 'Quadrature rules for Brick Based Finite Elements', *International Journal for Numerical Method in Engineering*, **3**, (1971).
- [17] Klarbring A., *Contact problems in linear elasticity, friction laws and mathematical programming applications*, PhD Thesis, Linköping Institute of Technology, 1985.
- [18] Klarbring A., *Formulation of the rigid punch problem in nonlinear elasticity* Linköping Institute of Technology, 1989 (niepublikowany raport).
- [19] Kidger D.J, Smith I.M., 'Eigenvalues of element stiffness matrices part1', *Engineering Computations*, **9**: 307-328, (1992).
- [20] Kollmann F.G., *Welle-Nabe-Verbindungen*, Springer-Verlag, 1984.
- [21] Krishnamoorthy C.S, *Finite Element Analysis Theory and Programming*, 2-nd ed., Tata McGraw-Hill, 1994.
- [22] Krukowski A., Tutaj J., *Połączenia odkształceniowe*, PWN, Warszawa, 1987.
- [23] Leahy J.G., Becker A.A.. 'Benchmarks for three-dimensional contact problems', NAFEMS World Congress, 1997.
- [24] Lei. X, 'Contact friction analysis with a simple interface element', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**: 1955-1965, (2001).
- [25] Lewis R.W., K. Morgan, H.R. Thomas, Seetharamu K.N., *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*, Wiley, 1996.
- [26] Mather J., Baines B.H., 'Distribution of stress in axially symmetrical shrink-fit assemblies', *Wear*, **190**: 339-360, (1972).
- [27] McDill J.M.J., Oddy A.S., 'A nonconforming eight to 26-nodes hexahedron for three-dimensional thermal-elasto-plastic finite element analysis', *Computer and Structures*, **54**: 83-189, 1995.
- [28] MacNeal R. H., *Finite Elements: Their Design and Performance*, Marcell Dekker, 1994.
- [29] MacNeal R. H. 'A Proposed Standard set of problems to test finite element accuracy', *Finite Elements in Analysis and Design*, **1**: 3-20, (1985).
- [30] Mechnik R.-P., 'Beitrag zur Festigkeitsberechnung von Polygon-Welle-Nabe-Verbindungen unter reiner Torsion', *Konstruktion*, **43**, (1991) .
- [31] Mechnik R.-P., Consideration of constraints within the finite element method by means of matrix operators', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**: 909-926, (1991)

- [32] Park J. K., Kwak B.M., 'Three –dimensional frictional contact analysis using the homotopy method', *Journal of Applied Mechanics*, **61**, September 1994.
- [33] Razzaque A., 'The patch test for elements', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **22**: 63-71, (1986).
- [34] Sawa T., Higurashi N., Akagawa H., 'A stress analysis of pipe flange connections', *International Journal of Pressure Vessel Technology*, **113**: November 1991.
- [35] Sikora J., 'Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiroprowadowej', Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
- [36] Smith I.M., *Are there a new elements?*, in: *Finite elements in the 90's*, Springer-Verlag, Barcelona 1991.
- [37] Smith I. M., 'Nonlinear mechanics - 3D analysis' in *Computational Mechanics*, Cheung, Lee & Leung (eds), Balkema Rotterdam, 1991.
- [38] Smith I.M., Griffiths D.V., *Programming the Finite Element Method*, Wiley, 1998.
- [39] Subbaraj K., Dokainish M.A., 'Side-node transition quadrilateral finite elements for mesh-grading', *Computer and Structures*, **30**: 1175-1183, 1998.
- [40] Surana K.S, Teong K.W. , 'A twenty-seven-node three-dimensional solid element for heat conduction based on p-version', *Computer and Structures*, **41**: 897-907, 1991.
- [41] White D.J., Humpherson J., 'Finite-Element Analysis of stress in shafts due to interference-fit hubs', *Journal of Strain Analysis*, **4**, 1969.
- [42] Wriggers P., Van T.Vu , Stein E., 'Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction', *Computer and Structures*, **37**: 319-331, 1990.
- [43] Villanueva-Leal.A., *The Modelling of characteristics of interface surfaces by the finite element method*, PhD Thesis, Victoria University of Manchester, July 1980.
- [44] Zahavi E., 'Analysis of contact problem in leaf springs', *Mechanics Research Communications*, **19**: 21-27, 1992.
- [45] Zahavi E., Barlam D., *Nonlinear Problems in Machine Design*, CRC Press, 2001.
- [46] Zahavi E., *The Finite Element Method in Machine Design*, Prentice-Hall, 1992.
- [47] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L, *The Finite Element Method. Vol.2. Solid and Fluid Mechanics and Non-Linearity*, 5-th ed, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [48] Zhong Z.-H., *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, 1993.
- [49] Sikora J. i inni, *Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego*, WNT, Warszawa, 1993.

-
- [50] Dietrich M. i inni, *Podstawy konstrukcji maszyn*, t.2, WNT, Warszawa, 1995.
- [51] DIN 32711: Antriebselemente Polygonprofile P3G (März 1979).
- [52] DIN 32712: Antriebselemente Polygonprofile P4C (März 1979).
- [53] Getting Started with ABAQUS/Standard Version 6.2, Hibbitt, Karlson & Sorensen Inc.
- [54] Buczkowski R., Torbacki W., 'Finite element modelling of thick plates on two-parameter elastic foundation', *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **25**: 1409-1427, 2001.
- [55] Timoszenko S., Woinowsky-Krieger S., *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa, 1962.